

Teoria de Morse

Ludimar Costa Schreider

Dissertação de Mestrado em Matemática

Mestrado em Matemática

Universidade Federal do Espírito Santo

Vitória, 18 Setembro de 2008

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

Teoria de Morse

Ludimar Costa Schreider

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Espírito Santo como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Aprovada em 18/09/2008 por:

Prof. Dr. Leonardo Meireles Câmara - Orientador, UFES

Prof. Dr. Bruno César Azevedo Scárdua, UFRJ

Prof. Dr. Valmecir Antônio dos Santos Bayer, UFES

Universidade Federal do Espírito Santo

Vitória, 18 setembro de 2008

Schreider, Ludimar Costa, 1980

Teoria de Morse/Ludimar Costa Schreider.-2008.

59f.,il

Orientador: Leonardo Meireles Câmara.

Dissertação(mestrado)-Universidade Federal do Espírito Santo, PPGMAT.

1. Morse, Teoria de. 2. Geometria. 3. Topologia. I. Câmara, Leonardo Meireles. II. Universidade Federal do Espírito Santo. Centro de Ciências Exatas. III. Título.

Agradecimentos

Em primeiro lugar a Deus por tudo.

Ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFES, pela oportunidade de realização deste trabalho.

Agradeço a minha noiva Sheila, por todo amor, carinho, compreensão e apoio recebido durante os anos de graduação e pós-graduação.

A minha família, pelo incentivo.

Ao meu orientador, Leonardo Meireles Câmara.

Aos professores da banca: Leonardo Meireles Câmara, Bruno César Azevedo Scárdua e Valmecir Antonio dos Santos Bayer.

Aos amigos e colegas, pela ajuda atribuída sempre que necessário e pelos momentos de descontração.

À FACITEC pelo apoio financeiro.

Enfim, agradeço a todos que de alguma forma contribuíram direta ou indiretamente para a realização deste trabalho.

Sumário

1	Introdução	p. 7
2	Preliminares	p. 9
2.1	Variedade Diferenciável	p. 9
2.2	Espaço Tangente	p. 10
2.3	Espaço tangente de subvariedades	p. 14
2.4	Espaço Cotangente	p. 15
2.5	Transversalidade	p. 17
2.6	Variedades com bordo	p. 18
3	Funções de Morse	p. 21
3.1	Hessiana e pontos críticos	p. 21
3.2	Lema de Morse	p. 25
4	EDO e Superfícies de Nível Regulares	p. 30
4.1	Equações diferenciais em variedades	p. 30
4.2	Campos de vetores transversais	p. 33
5	Pontos críticos e adjunção de células	p. 39
5.1	Funções de Morse admissíveis	p. 39
5.2	Homotopia	p. 40
5.3	Revisando a Homologia Singular	p. 46
6	CW-Complexos	p. 56

Sumário

6.1	Complexos Celulares	p. 56
6.2	CW-Complexos	p. 57
	Referências	p. 60

1 *Introdução*

Uma maneira natural de investigar o espaço no qual estamos vivendo consiste em analisar o que se encontra em torno de nós. Obtemos informações sobre o nosso espaço através das vizinhanças locais. Esta é a arte da topologia, que deduz daquelas observações locais algumas propriedades globais, como diferenciar viver acima de uma esfera de viver acima de um disco. Uma maneira ingênua para classificar espaços topológicos exigiria gerar todos eles e determinar, em seguida, quando dois são topologicamente equivalentes. Infelizmente, este problema é complexo demais. Para dimensões superiores a 3, isto não é calculável, ainda que pudessemos utilizar um computador ideal [8].

Entretanto, existem outras ferramentas que podem descrever as propriedades topológicas e que podem provar, em alguns casos, que dois espaços não são homeomorfos. Por exemplo, se não houver nenhuma *homotopia* (i.e. deformação contínua) entre dois espaços, estes não podem ser topologicamente equivalentes. A teoria de Morse é a base de muitas dessas ferramentas e não apenas uma técnica útil, incorporando um grande alcance a idéia, que interrelaciona a análise e a topologia e, mais recentemente, a física. Isto é, sem dúvida, responsável pela elasticidade da teoria, que mesmo depois de diversas décadas, apesar da simplicidade essencial de sua idéia, parece reemergir e ter um papel crucial em novos desenvolvimentos matemáticos.

Em topologia diferencial, as técnicas da teoria Morse fornecem uma forma muito direta de analisar a topologia de uma variedade, estudando funções diferenciáveis sobre a mesma. Morse provou que a topologia de uma variedade está relacionada aos pontos críticos de uma função real diferenciável nela definida. O exemplo mais simples deste relacionamento é o fato de que se a variedade for compacta, então qualquer função contínua nela definida deve ter um máximo e um mínimo. A teoria de Morse permite encontrar uma estrutura *CW* (cf. Definição 6.3) e manipular decomposições sobre variedades, obtendo assim importantes informações sobre a sua homologia.

Neste trabalho nós analisamos os conjuntos de nível $f^{-1}(y)$ de uma função $f : M \longrightarrow$

\mathbb{R} tendo somente pontos críticos do tipo mais simples possível. Tal função é chamada de uma “função de Morse” (cf. Definição 3.3). A decomposição de M em conjuntos de nível contém uma quantidade surpreendente de informações da topologia de M . Por exemplo nós mostraremos como um complexo CW , homotopicamente equivalente a M , pode ser obtido de uma função de Morse. Estudaremos também as desigualdades de Morse. Estas relacionam os pontos críticos de f aos grupos de homologia de M . Em particular, elas permitem calcular a característica de Euler de M a partir de uma função de Morse definida sobre M . Em cada ponto, crítico um tipo especial de carta é construído, fazendo com que uma função de Morse possa ser vista como uma forma quadrática não degenerada. O índice desta forma é chamado de índice do ponto crítico. Estas cartas dão uma análise local completa da função. Exploraremos alguns fatos sobre equações diferenciais, os conjuntos $f^{-1}[a, b]$ que não contêm nenhum ponto crítico serão investigados. Sob leves restrições, mostraremos que $f^{-1}[a, b] \approx f^{-1}(a) \times [a, b]$ (equivalência topológica). Passamos então ao cerne da teoria: Se assumirmos que $f^{-1}[a, b]$ contem exatamente um ponto crítico, de índice k , então $f^{-1}[a, b]$ é obtido de $f^{-1}(a)$, a menos de equivalência homotópica, após adjunção de uma k -célula. Isto conduz diretamente às desigualdades de Morse e à construção de complexos CW homotopicamente equivalente a M , que têm uma k -célula para cada ponto crítico de índice k .

2 Preliminares

Iremos aqui recordar alguns resultados clássicos do estudo das variedades diferenciáveis. Muitos dos resultados enunciados não são acompanhados das referidas provas, visto estarem fora do escopo deste texto. Existem na literatura diversos textos que oferecem provas dos resultados enunciados, como por exemplo [1],[4],[11],[7],[3], entre outros.

2.1 Variedade Diferenciável

A noção de variedade diferenciável é uma das mais importantes em geometria diferencial e análise, encaradas sob o aspecto global. Variedades diferenciáveis constituem o domínio natural para o estudo de aplicações diferenciáveis e suas singularidades. A seguir, desenvolveremos os elementos essenciais para tal estudo.

Definição 2.1.1 *Um atlas \mathcal{A} de dimensão n e classe C^r sobre M , onde M é um espaço topológico, é uma coleção de cartas locais $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, f_\alpha); \alpha \in I\}$ que satisfazem as seguintes propriedades:*

- i) $\bigcup_\alpha f_\alpha(U_\alpha) = M$;
- ii) *Para todo α e β com $f_\alpha(U_\alpha) \cap f_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$, os conjuntos $f_\alpha^{-1}(W)$ e $f_\beta^{-1}(W)$ são abertos em \mathbb{R}^n e a aplicação $f_\beta^{-1} \circ f_\alpha : f_\alpha^{-1}(W) \longrightarrow f_\beta^{-1}(W)$ é um difeomorfismo de classe C^r ;*

Um atlas \mathcal{A} de classe C^r sobre M é maximal quando ele contém todas as cartas locais $V_\alpha = f_\alpha(V_\alpha)$, cujas mudanças de coordenadas com elementos $V_\beta = f_\beta(V_\beta) \in \mathcal{A}$

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(V_\alpha \cap V_\beta) \longrightarrow \varphi_\beta(V_\alpha \cap V_\beta)$$

é difeomorfismo de classe C^r , onde $1 \leq r \leq \infty$ ou $r = \omega$ (i.e., é analítico real).

Um atlas máximo de dimensão n e classe C^r sobre M será chamado também *estrutura diferenciável* de dimensão n e de classe C^r sobre M . Diremos que M é uma *variedade diferenciável* de classe C^r , se for um espaço de Hausdorff, com base enumerável, munido de uma estrutura diferenciável de dimensão n e classe C^r . Além disso, toda vez que falarmos em partição da unidade, estaremos assumindo que a variedade é *paracompacta*, ou seja, que toda cobertura aberta da variedade, possui subcobertura localmente finita.

Exemplo 2.1.2 Naturalmente \mathbb{R}^n é uma variedade, tendo como atlas a aplicação identidade.

Exemplo 2.1.3 O espaço $M(n; \mathbb{R})$ de matrizes reais $n \times n$ é uma variedade com atlas dado pela listagem das linhas horizontalmente, i.e., $\psi : M(n; \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^{n^2}$ dada por

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \xrightarrow{\psi} (a_{11}, \dots, a_{1n}, \dots, a_{i1}, \dots, a_{n1}, \dots, a_{nn})$$

Teremos então uma bijeção de $M(n; \mathbb{R})$ com \mathbb{R}^{n^2} , de onde vem a estrutura de variedade.

Exemplo 2.1.4 O conjunto das matrizes simétricas $Sym(n, \mathbb{R}) \subset M(n, \mathbb{R})$ é uma subvariedade do espaço de matrizes $n \times n$ de $M(n, \mathbb{R})$ com dimensão $\frac{n(n+1)}{2}$. Para verificar tal afirmação, basta utilizar a identificação do exemplo anterior e observar que tais matrizes se identificam às matrizes cujos elementos abaixo da diagonal são nulos, e portanto a $\mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

2.2 Espaço Tangente

Um problema em topologia diferencial se decompõe em uma parte local e uma global; nesta seção definiremos conceitos locais fundamentais para a compreensão do *Espaço Tangente*. Iniciaremos essa seção recordando alguns resultados clássicos sobre espaço tangente, demonstrações cf. [3].

Definição 2.2.1 Sendo M uma variedade, então uma aplicação da forma $c : I_\varepsilon \rightarrow M$ é chamada de **curva** em M . Tal curva será dita diferenciável no ponto $p = c(0)$ se a aplicação $c : I_\varepsilon \rightarrow M$ for diferenciável na origem.

Note que, de acordo com o conceito de aplicação diferenciável, uma curva $c : I_\varepsilon =] - \varepsilon, \varepsilon[\longrightarrow M$ será diferenciável em $p = c(0)$ se, e somente se, existir uma carta local (U, φ) em torno de p tal que $c_\varphi(t) := \varphi \circ c(t)$ for diferenciável na origem.

Definição 2.2.2 Sendo $c_1, c_2 : I_\varepsilon =] - \varepsilon, \varepsilon[\longrightarrow M$, $i = 1, 2$, curvas diferenciáveis na variedade M , tais que $c_i(0) = p$. Então diremos que c_1 e c_2 são **tangentes** em p , com relação à carta local admissível (U, φ) em torno de p , se

$$\tilde{c}_1'(0) = \tilde{c}_2'(0)$$

onde $\tilde{c}_i := \varphi \circ c_i : I_\varepsilon \longrightarrow M$, $i = 1, 2$.

Proposição 2.2.3 O conceito de tangência entre curvas não depende da carta local admissível escolhida.

Lema 2.2.4 A noção de tangência entre curvas define uma relação de equivalência.

Definição 2.2.5 A classe de equivalência das curvas tangentes à curva $c : I_\varepsilon \longrightarrow M$ em $p = c(0)$ será denotada por $[c]_p$. O conjunto de tais classes de equivalência será denotado por $T_p M$. O conjunto

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_p M$$

será chamado de **espaço tangente** e a aplicação $\tau : TM \longrightarrow M$, dada por $[c]_q \mapsto q$, será chamada de **projeção canônica** do espaço tangente.

Passaremos agora aos passos técnicos necessários para podermos definir em TM uma estrutura de variedade diferenciável, de tal forma que este seja visto como uma família suave de espaços vetoriais parametrizados por $p \in M$. Inicialmente vamos necessitar do conceito de aplicação tangente.

Lema 2.2.6 Sendo $f : M \longrightarrow N$ uma aplicação diferenciável e $c_1, c_2 : I \longrightarrow M$ curvas diferenciáveis tangentes em $p \in M$. Então $f \circ c_1, f \circ c_2 : I \longrightarrow N$ são tangentes em $f(p)$.

O lema acima mostra que uma função diferenciável entre duas variedades induz uma aplicação entre classes de equivalências de curvas tangentes:

Definição 2.2.7 Sendo $f : M \longrightarrow N$ uma aplicação diferenciável entre variedades então a aplicação

$$\begin{aligned} Tf : TM &\longrightarrow TN \\ [c]_p &\mapsto [f \circ c]_{f(p)} \end{aligned}$$

será chamada de **aplicação tangente de f** .

Proposição 2.2.8 Sendo $f : M \longrightarrow N$ e $g : N \longrightarrow P$ aplicações diferenciáveis entre variedades então:

1. $T(g \circ f) = Tg \circ Tf$;
2. Se $f : M \longrightarrow M$ é a identidade de M , então $Tf : TM \longrightarrow TM$ é a identidade de TM ;
3. Se $f : M \longrightarrow M$ é um difeomorfismo então $Tf : TM \longrightarrow TM$ é uma bijeção.

Se pretendemos fornecer cartas locais para o espaço tangente de uma variedade, então o primeiro passo é naturalmente descrever o espaço tangente de um subconjunto aberto de \mathbb{R}^n . De fato, sendo $U \subset \mathbb{R}^m$ aberto, então definimos a aplicação $i_U : U \times \mathbb{R}^m \longrightarrow TU$ dada por $i_U(u, e) = [c_{u,e}]_u$.

Lema 2.2.9 Sendo $U \subset \mathbb{R}^m$ um conjunto aberto, então a aplicação $i_U : U \times \mathbb{R}^m \longrightarrow TU$ é uma bijeção.

Proposição 2.2.10 Sendo $U \subset \mathbb{R}^m$ e $V \subset \mathbb{R}^n$ abertos e $f : U \longrightarrow V$ diferenciável. Então o diagrama

$$\begin{array}{ccc} TU & \xrightarrow{Tf} & TV \\ \uparrow \mathbf{i}_U & & \uparrow \mathbf{i}_V \\ U \times \mathbb{R}^m & \xrightarrow{\widetilde{Tf} := f \times Df} & V \times \mathbb{R}^n \end{array} \quad (2.1)$$

é comutativo, onde $f \times Df(u, e) = (f(u), Df(u) \cdot e)$. Ou seja, $Tf \circ \mathbf{i}_U = \mathbf{i}_V \circ (f \times Df)$.

Descreveremos detalhadamente o desejado atlas para o espaço tangente.

Teorema 2.2.11 Sendo M uma variedade de classe C^k , com $k > 1$, com atlas $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha) : \alpha \in \Lambda\}$ então (TM, \mathcal{TA}) é uma de classe C^{k-1} onde $\mathcal{TA} = \{(TU_\alpha, \widetilde{T}\varphi_\alpha) : \alpha \in \Lambda\}$ e $\widetilde{T}\varphi_\alpha := \mathbf{i}_{U_\alpha}^{-1} \circ T\varphi_\alpha$.

Exemplo 2.2.12 O Exemplo 2.1.4 nos mostra que conjunto das matrizes simétricas, denotado por $Sym(n, \mathbb{R})$, é uma subvariedade do espaço de matrizes $n \times n$, denotado por $M(n, \mathbb{R})$, com dimensão $\frac{n(n+1)}{2}$. Note ainda que, sua construção se dá através de identificação do referido espaço com um subconjunto de \mathbb{R}^{n^2} . Como esta é uma aplicação linear, então

$$T(Sym(n, \mathbb{R})) = Sym(n, \mathbb{R}) \times Sym(n, \mathbb{R})$$

Observação 2.2.13 Faremos agora algumas observações que são importantes no estudo de fibrados vetoriais e principais.

1. O fato da primeira coordenadas de $\widetilde{T}\varphi_{\beta\alpha}$ depender de v , mostra que $\widetilde{T}\varphi_{\beta\alpha}$ preserva fibras, i.e., $\widetilde{T}\varphi_{\beta\alpha}(\{x\} \times \mathbb{R}^m) = \{\varphi_{\beta\alpha}(x)\} \times \mathbb{R}^m$;
2. A restrição de $\widetilde{T}\varphi_{\beta\alpha}$ às fibras $\{x\} \times \mathbb{R}^m$ é um isomorfismo linear, i.e., $\widetilde{T}\varphi_{\beta\alpha}|_{\{x\} \times \mathbb{R}^m} : \{x\} \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \{\varphi_{\beta\alpha}(x)\} \times \mathbb{R}^m$ é um isomorfismo linear;
3. Se M é de classe C^r , então TM é uma variedade de classe C^{r-1} .

Corolário 2.2.14 Sendo $f : M \longrightarrow N$ uma aplicação de classe C^k , $k \geq 1$, então a aplicação tangente $Tf : TM \longrightarrow TN$ é uma aplicação de classe C^{k-1} .

Um outro conceito importante é o de seção do fibrado tangente.

Definição 2.2.15 Sendo M uma variedade e $\pi : TM \longrightarrow M$ seu fibrado tangente, então diremos que uma função $s : M \longrightarrow TM$ é uma seção de TM se

$$\pi \circ s = id_M.$$

Exemplo 2.2.16 Sendo M uma variedade então vamos verificar que a aplicação que associa a cada ponto $p \in M$ o vetor nulo de T_pM é uma seção diferenciável de TM . Sendo $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ um atlas para M , então basta definir a aplicação em cartas locais como $s_\alpha(x_\alpha) = (x_\alpha, 0)$ para todo $\alpha \in A$, onde $x_\alpha = \varphi_\alpha(p)$. Dessa forma, segue do item 2) da Observação 2.2.13 que

$$\begin{aligned} \widetilde{T}\varphi_{\beta\alpha} \cdot s_\alpha(x_\alpha) &= (\varphi_{\beta\alpha}(x_\alpha) \widetilde{T}\varphi_{\beta\alpha}|_{\{x_\alpha\} \times \mathbb{R}^m} (0)) \\ &= (x_\beta, 0) \\ &= s_\beta(x_\beta). \end{aligned}$$

A seção introduzida no exemplo anterior será chamada de **seção nula** de TM .

2.3 Espaço tangente de subvariedades

Nesta seção iremos relacionar o espaço tangente de uma variedade, chamada de ambiente, com o fibrado tangente de uma sua subvariedade.

Teorema 2.3.1 (da função inversa) *Dados M e N variedades de classe C^r , $f : M \rightarrow N$ de classe C^r , $r > 1$, e $p \in M$ tal que $Tf_p : T_pM \rightarrow T_{f(p)}N$ seja um isomorfismo linear. Então f é um difeomorfismo local em p .*

Teorema 2.3.2 (do posto) *Seja $f : M \rightarrow N$ uma aplicação de classe C^r entre variedades de classe C^r , $r > 1$, tal que $Tf_p : T_pM \rightarrow T_{f(p)}N$ tem posto k , então existem cartas locais (U, φ) de M e (V, ψ) de N , em torno de p e $f(p)$ respectivamente, tais que*

$$f_{VU}(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0)$$

onde $f_{VU} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$.

Estudares agora aquilo que seria a generalização natural do conceito de curva dada por uma equação implícita.

Definição 2.3.3 *Seja M e N variedades diferenciáveis e $f : M \rightarrow N$ uma aplicação, todos de classe C^k , $k > 1$, então diremos que $a \in N$ é um **valor regular** de f se uma das duas condições é satisfeita:*

1. $f^{-1}(a) = \emptyset$;
2. $Tf_p : T_pM \rightarrow T_{f(p)}N$ é sobrejetiva, para todo $p \in f^{-1}(a)$.

Em caso contrário, diremos que a é **valor crítico** de f . Em particular diremos que f é uma **submersão** se todos os pontos de N são valores regulares para f .

Teorema 2.3.4 (valor regular) *Sejam M e N variedades e $f : M \rightarrow N$ uma aplicação, todos de classe C^k , $k > 1$, e $b \in N$ valor regular de f . Então:*

1. $S = f^{-1}(b) \subset M$ é uma subvariedade de codimensão $n = \dim(N)$;
2. $T_pS = \text{Nuc}(Tf_p) = \{v \in T_pM : Tf_p(v) = 0\}$.

Exemplo 2.3.5 (TS^1 revisitado) Considere $S^1 = f^{-1}(1)$ onde $f(x, y) = x^2 + y^2$. Como $Df_{(x,y)} = 2(x, y) \neq 0$ para todo $(x, y) \neq 0$, então $Tf_{(x,y)} : T_{(x,y)}S^1 \rightarrow T_{f(x,y)}\mathbb{R}$ é sobrejetiva e portanto que 1 é valor regular de f . Dessa forma S é uma subvariedade de \mathbb{R}^2 e

$$T_{(x,y)}S^1 = \text{Nuc}(Tf_{(x,y)}) = \{(x, y, u, v) \in T\mathbb{R}^2 : 2(x, y) \bullet (u, v) = 0\}$$

isto é $T_{(x,y)}S^1$ consiste dos vetores da forma $((x, y), (u, v)) \in \mathbb{R}^4 = T\mathbb{R}^2$ tais que (u, v) seja ortogonal a $(x, y) \in S^1$.

Exemplo 2.3.6 Um cálculo imediato mostra que 0 é um valor crítico de $f(x, y) = y^2 - x^3$. De fato, Df deixa de ser sobrejetiva exatamente na origem, onde diremos que a curva $y^2 - x^3 = 0$ possui uma **singularidade**.

Descreveremos agora à generalização do conceito de curva parametrizada para dimensões maiores. Como consequência imediata do teorema do posto temos o:

Corolário 2.3.7 (Forma local das imersões) Sendo $f : M \rightarrow N$ uma aplicação de classe C^k entre variedades de classe C^k , $k > 1$, tal que $Tf_p : T_pM \rightarrow T_{f(p)}N$ é injetiva, então existem cartas locais de (U, φ) de M e (V, ψ) de N , em torno de p e $f(p)$ respectivamente, tais que

$$f_{VU}(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0)$$

onde $f_{VU} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$.

Definição 2.3.8 Diremos que uma aplicação diferenciável entre variedades de classe C^k , $k > 1$, $f : M \rightarrow N$ é uma **imersão** se para todo $p \in M$ tenhamos $Tf_p : T_pM \rightarrow T_{f(p)}N$ injetiva. Em particular, toda imersão injetiva é chamada de **mergulho**.

Exemplo 2.3.9 Considere a parametrização da curva $y^2 - x^3 = 0$ dada por $f(t) = (t^2, t^3)$. Um cálculo imediato mostra que Df é nulo na origem e portanto f não é uma imersão, nem mesmo numa vizinhança da origem.

2.4 Espaço Cotangente

Descreveremos um fibrado vetorial que está intimamente ligado ao espaço de operadores diferenciais sobre as variações de primeira ordem nos movimentos de uma partícula sobre uma variedade (velocidade da partícula), demonstrações cf.[3].

Recordemos que, dados dois espaços vetoriais de dimensão finita V e W , então podemos associar a cada transformação linear $T : V \longrightarrow W$ uma outra transformação linear $T^* : W^* \longrightarrow V^*$, dada por $T^*(\gamma)(v) = \gamma(T(v))$, para todo $\gamma \in W^*$ e $v \in V$. Tal aplicação será chamada de **transposta** de T . Por outro lado, sabemos que cada fibra $T_p M$ do fibrado tangente TM de uma variedade diferenciável M possui uma estrutura de espaço vetorial. Desta forma, sendo $T_p^* M$ seu espaço dual, então a união de tais espaços vetoriais para todo $p \in M$ será denotada por

$$T^* M = \bigcup_{p \in M} T_p^* M$$

e será chamada de **espaço cotangente**. Tal espaço é de fato um fibrado vetorial de posto $m = \dim(M)$, daremos uma idéia de como se constroi tal estrutura. Considere um atlas $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha) : \alpha \in \Lambda\}$ de M e seja $\mathcal{T}\mathcal{A} = \{(TU_\alpha, \widetilde{T\varphi_\alpha}) : \alpha \in \Lambda\}$ o atlas fibrado induzido em TM , então sabemos da álgebra linear que está bem definida e é bijetiva a aplicação:

$$\begin{array}{ccc} W_\alpha \times (\mathbb{R}^m)^* & \xrightarrow{\varphi_\alpha^*} & T^* U_\alpha \subset T^* M \\ \downarrow & & \downarrow \\ (x, e_j^*) & \mapsto & (\varphi_\alpha^{-1}(x), (\widetilde{T\varphi_\alpha})_p^* e_j^*) \end{array}$$

onde $p = \varphi_\alpha^{-1}(x)$, $W_\alpha = \varphi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^m$, $(\widetilde{T\varphi_\alpha})_p^* : T_p M \longrightarrow \{x\} \times \mathbb{R}^m$ é um isomorfismo linear. Mais precisamente teremos:

Teorema 2.4.1 *Seja M uma variedade diferenciável com atlas $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha) : \alpha \in \Lambda\}$, então $\mathcal{T}^*\mathcal{A} = \{(T^*U_\alpha, \varphi_{\alpha^*}) : \varphi_{\alpha^*} = (\varphi_\alpha^*)^{-1}, \alpha \in \Lambda\}$ é um atlas diferenciável para T^*M . Em particular se $\widetilde{T\varphi_{\beta\alpha}}(x, v) = (\varphi_{\beta\alpha}(x), g_{\beta\alpha}(x) \cdot v)$, então $\varphi_{\beta\alpha^*}(x, \gamma) = (\varphi_{\beta\alpha}(x), (g_{\beta\alpha}^t(\varphi_{\beta\alpha}(x)))^{-1} \cdot \gamma)$.*

Teorema 2.4.2 *Seja M uma variedade diferenciável com atlas $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha) : \alpha \in \Lambda\}$, então $\Lambda^k \mathcal{A} = \{(\Lambda^k(U_\alpha), \varphi_{\alpha^*}) : \varphi_{\alpha^*} := (\varphi_\alpha^*)^{-1}, \alpha \in \Lambda\}$ é um atlas diferenciável para $\Lambda^k(M)$. Em particular se $\widetilde{T\varphi_{\beta\alpha}}(x, v) = (\varphi_{\beta\alpha}(x), g_{\beta\alpha}(x) \cdot v)$, então $\varphi_{\beta\alpha^*}(x, \omega) = (\varphi_{\beta\alpha}(x), (g_{\beta\alpha}^t(\varphi_{\beta\alpha}(x)))^{-1} \omega)$.*

Observação 2.4.3 :

1. De maneira similar ao caso do fibrado tangente (Exemplo 2.2.16) podemos introduzir o conceito de seção do fibrado cotangente e, em particular, o conceito de **seção nula**;

2. Se $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma aplicação de classe C^r , então a Proposição 2.2.10 nos permite construir uma seção do fibrado cotangente $Df : M \rightarrow T^*M$ dada em carta locais por

$$\widetilde{T}f(x, v) = f(x) \times Df(x) \cdot v$$

para todo $x \in U \subset M$ e $v \in \mathbb{R}^n$ onde (U, φ) é uma carta local de M . Tal aplicação a será chamada de **diferencial** de f .

2.5 Transversalidade

Sejam $f : M \rightarrow N$ uma aplicação de classe C^r e $S \subset N$ uma subvariedade C^r de N . Uma pergunta que poderíamos nos fazer é: Quais as condições para que a imagem inversa $f^{-1}(S)$ seja uma subvariedade de classe C^r de M ? Uma resposta a esta questão é dada por meio da noção de *transversalidade*, devido a *René Thom*. Na verdade é uma generalização natural do conceito de valor regular. Por meio desta noção, pode-se dar um significado preciso ao fato de duas figuras se intersectarem em “posição geral”.

Definição 2.5.1 *Seja $f : M \rightarrow N$ uma aplicação de classe C^r , com $r \geq 1$, e $S \subset N$ uma subvariedade de N . Assim diremos que f é transversal à S no ponto $x \in f^{-1}(S)$ quando*

$$T_{f(x)}N = T_{f(x)}S + Df(x) \cdot (T_xM),$$

ou seja, quando a soma da imagem de $Df(x)$ ao espaço tangente a S em $f(x)$ geram $T_{f(x)}N$. Quando f for transversal de S em todos os pontos de M , diremos que f é transversal a S . Se não houver interseção entre a imagem de f e a variedade S , então estes serão transversais, por definição.

Exemplo 2.5.2 *Se $S = \{c\}$, então f é transversal a c se, e somente se, c é valor regular de f .*

Exemplo 2.5.3 *Se $f(M) \cap S = \emptyset$. Então f é automaticamente transversal a S .*

Exemplo 2.5.4 *Sendo N e P duas subvariedades de M e $i_N : N \rightarrow M$ a aplicação de inclusão, então i_N é transversal a P se, e somente se, acontece uma das seguintes possibilidades: $p \notin N \cap P$ ou $T_pN + T_pP = T_pM$.*

O exemplo anterior sugere a seguinte:

Definição 2.5.5 Sendo N e P duas subvariedades de M , então diremos que N e P são transversais em $p \in M \cap P$ se:

1. $p \notin N \cap P$;
2. $T_p N + T_p P = T_p M$.

Exemplo 2.5.6 As retas coordenadas em \mathbb{R}^2 são transversais em qualquer ponto de \mathbb{R}^2 .

Observação 2.5.7 A definição do conceito de transversalidade é local, ou seja, depende apenas do ponto no qual se estuda a propriedade. Desta forma, para verificarmos a existência ou não de transversalidade entre duas subvariedades de uma dada variedade, basta verificar se esta propriedade se verifica em uma dada carta local.

2.6 Variedades com bordo

Faremos aqui uma abordagem do conceito de variedade com bordo, visto ser este um assunto central no que segue. Primeiramente recordemos alguns conceitos básicos. Note que nosso objeto de estudo, as variedades diferenciáveis, excluem conjuntos como a bola fechada $\overline{\mathbb{B}^n(0, r)} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq r\}$, cujo bordo é dado pela esfera S^{n-1} . Tanto do ponto de vista topológico, como geométrico e físico (o teorema de Gauss para o eletromagnetismo, por exemplo), o estudo de tais objetos é de importância vital. Passaremos agora à introdução dos elementos técnicos que nos permitam tal definição. Diremos que $\mathbb{H}^n := \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n \geq 0\}$ é o *semiespaço* euclidiano de dimensão n . Note que $\partial\mathbb{H}^n = \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ é uma cópia difeomorfa de \mathbb{R}^{n-1} .

Definição 2.6.1 Sendo $U \subset \mathbb{H}^n$ um aberto, então diremos que a função $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ é diferenciável (respect. de classe C^r , $r = 1, \dots, \infty, \omega$) se existir um aberto $U_1 \subset \mathbb{R}^n$ e uma função $f_1 : U_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ tais que:

1. $U = U_1 \cap \mathbb{H}^n$;
2. $f_1 : U_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ é diferenciável (respect. de classe C^r , $r = 1, \dots, \infty, \omega$).

Mais ainda, sendo V aberto de \mathbb{H}^n , então diremos que $f : U \rightarrow V$ é um difeomorfismo (respect. de classe C^r , $r = 1, \dots, \infty, \omega$) se f possuir uma inversa que seja também diferenciável (respect. de classe C^r , $r = 1, \dots, \infty, \omega$).

Passaremos agora a extensão do conceito de atlas para permitir estudar os objetos desejados.

Definição 2.6.2 *Um atlas \mathcal{A} de dimensão n e classe C^r sobre M , onde M é um espaço topológico, é uma coleção de cartas locais $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, f_\alpha); \alpha \in I\}$ que satisfazem as seguintes propriedades:*

- i) $\bigcup_\alpha f_\alpha(U_\alpha) = M$;
- ii) *Para todo α e β com $f_\alpha(U_\alpha) \cap f_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$, os conjuntos $f_\alpha^{-1}(W)$ e $f_\beta^{-1}(W)$ são abertos em \mathbb{H}^n e a aplicação $f_\beta^{-1} \circ f_\alpha : f_\alpha^{-1}(W) \rightarrow f_\beta^{-1}(W)$ é um difeomorfismo de classe C^r ;*
- iii) *Um atlas \mathcal{A} de classe C^r sobre M é maximal quando ele contém todas as cartas locais $V_\alpha = f_\alpha(V_\alpha)$, cujas mudanças de coordenadas com elementos $V_\beta = f_\beta(V_\beta) \in \mathcal{A}$*

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(V_\alpha \cap V_\beta) \rightarrow \varphi_\beta(V_\alpha \cap V_\beta)$$

é difeomorfismo de classe C^r , onde $1 \leq r \leq \infty$ ou $r = \omega$ (i.e., é analítico real).

Como antes, um atlas máximo de dimensão n e classe C^r sobre M será chamado também *estrutura diferenciável* de dimensão n e de classe C^r sobre M . Diremos que M é uma *variedade diferenciável de classe C^r com bordo*, se for um espaço de Hausdorff, com base enumerável, munido de uma estrutura diferenciável de dimensão n e classe C^r . O *bordo* de M será definido por

$$\partial M = \bigcup_\alpha f_\alpha(U_\alpha \cap \partial \mathbb{H}^n)$$

Analogamente, toda vez que falarmos em partição da unidade, estaremos assumindo que a variedade é *paracompacta*, ou seja, que toda cobertura aberta da variedade, possui subcobertura localmente finita.

Observação 2.6.3 *Note que os difeomorfismos de transição $f_\beta^{-1} \circ f_\alpha$ preservam o bordo, i.e.,*

$$f_\beta^{-1} \circ f_\alpha(f_\alpha^{-1}(W) \cap \partial \mathbb{H}^n) = f_\beta^{-1}(W) \cap \partial \mathbb{H}^n.$$

Portanto ∂M é uma subvariedade (sem bordo) de M de dimensão $n - 1$ e classe C^r .

Exemplo 2.6.4 A bola $M = \overline{\mathbb{B}^3(0,1)} = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| \leq 1\}$ é uma variedade com bordo dado por S^2 . Para se construir um atlas para M , basta tomar as restrições das cartas naturais da bola aberta $\mathbb{B}^3(0,1+\varepsilon)$ com $\varepsilon > 0$ com ε suficientemente pequeno.

Exemplo 2.6.5 O cilindro $S^1 \times [0, +\infty)$ é uma variedade com bordo $S^1 \times \{0\} \simeq S^1$. Como no caso anterior, basta utilizar as restrições das cartas locais de $S^1 \times (-\varepsilon, +\infty)$ com $\varepsilon > 0$ e $\varepsilon \sim 0$.

3 Funções de Morse

A questão básica à qual a *teoria de Morse* se dedica é a seguinte: *Qual é a relação entre as propriedades de uma variedade e as propriedades de uma função a valores reais nela definida?* Por propriedades queremos dizer propriedades globais, visto que todas as variedades de mesma dimensão têm as mesmas propriedades locais. Desta maneira, a *Teoria de Morse* pretende relacionar as propriedades de uma variedade M com propriedades analíticas de uma função a valores reais em M .

3.1 Hessiana e pontos críticos

Iniciaremos esta seção com algumas definições básicas.

Definição 3.1.1 *Seja M uma variedade, e seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. Um ponto $x \in M$ é chamado **ponto crítico** de f se $Df = 0$. Mais ainda, se f for de classe C^2 , então a aplicação $Df : M \rightarrow T^*M$ é de classe C^1 . Desta forma, diremos que um ponto crítico de f , digamos $p \in M$, é **não-degenerado** se a diferencial de f for transversal à seção nula de T^*M em p . Caso contrário, diremos que p é um ponto fixo **degenerado**.*

Faremos agora uma rápida digressão a respeito do comportamento da hessiana de funções de classe C^2 em pontos críticos. Como veremos, tal descrição será útil na caracterização dos pontos críticos não-degenerados. Uma *forma quádratica* $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função cujo valor num vetor $v = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ é dado por $\sum_{i,j}^n h_{ij} \alpha_i \alpha_j$, onde (h_{ij}) é uma matriz simétrica $n \times n$. Portanto

$$H(u) = \sum_{i,j}^n h_{ij} \alpha_i \alpha_j$$

Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ e $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, de classe C^2 , assim a forma quadrática hessiana da função f no ponto $x \in U$, será representada por H_x . Sabemos que $H_x(u) = d^2f(x)(u, u)$, portanto:

$$H_x(v) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \alpha_i \alpha_j$$

Observe que o teorema de Schwarz garante que a matriz $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right)$, chamada matriz hessiana de f no ponto x , é simétrica.

Lema 3.1.2 *Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, de classe C^2 , e p um ponto crítico de f . Então a forma quadrática hessiana é invariante por mudança de sistemas de coordenadas.*

Prova. Se $\mathbf{x} : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{y} : W \rightarrow \mathbb{R}^n$ são dois sistemas de coordenadas para \mathbb{R}^n , tais que $V \cap W \neq \emptyset$, cada ponto $p \in (V \cap W)$ possui coordenadas $x_i = (x_i(p))$ no sistema de coordenadas \mathbf{x} e coordenadas $y_i = y_i(p)$ relativa ao sistema de coordenadas \mathbf{y} . A correspondência

$$(x_1(p), \dots, x_n(p)) \leftrightarrow (y_1(p), \dots, y_n(p))$$

estabelece um homeomorfismo $h = \mathbf{y} \circ \mathbf{x}^{-1} : \mathbf{x}(V \cap W) \rightarrow \mathbf{y}(V \cap W)$. Então basta-nos mostrar que

$$\sum_{i,j}^n \frac{\partial^2 f \circ \mathbf{x}^{-1}}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}(p)) v_i v_j = \sum_{i,j}^n \frac{\partial^2 f \circ \mathbf{y}^{-1}}{\partial y_i \partial y_j}(\mathbf{y}(p)) u_i u_j$$

onde $dh(u) = v$. De fato, se $p \in V \cap W$ é um ponto crítico de f , então $f \circ \mathbf{x}^{-1} = (f \circ \mathbf{y}^{-1}) \circ (\mathbf{y} \circ \mathbf{x}^{-1})$. Tomando-se $F := f \circ \mathbf{y}^{-1}$ e aplicando-se a regra da cadeia, teremos

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \frac{\partial f \circ \mathbf{x}^{-1}}{\partial x_i}(\mathbf{x}(p)) dx^i &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial F \circ h}{\partial x_i}(\mathbf{x}(p)) dx^i \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial F(\mathbf{y}(p))}{\partial y_\alpha} \frac{\partial y_\alpha}{\partial x_i} dx^i \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{\alpha} \frac{\partial f \circ \mathbf{y}^{-1}}{\partial y_\alpha}(\mathbf{y}(p)) \frac{\partial y_\alpha}{\partial x_i} dx^i \end{aligned}$$

Observe que aqui usamos o fato de que $F = f \circ \mathbf{y}^{-1}$ e que $h = \mathbf{y} \circ \mathbf{x}^{-1}$, assim $h(x(p)) = \mathbf{y} \circ \mathbf{x}^{-1}(x(p)) = y(p)$. Derivando-se a expressão acima teremos, por raciocínio análogo

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f \circ \mathbf{x}^{-1}}{\partial x_i \partial x_j}(x(p)) u_i u_j &= \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f \circ \mathbf{x}^{-1}}{\partial x_i \partial x_j}(x(p)) dx^i(u) dx^j(u) \\ &= \sum_{i,j=1}^n \sum_{\alpha,\beta=1}^n \frac{\partial^2 f \circ \mathbf{y}^{-1}}{\partial y_\alpha \partial y_\beta}(y(p)) \frac{\partial \mathbf{y}_\alpha(p)}{\partial x_i} \frac{\partial \mathbf{y}_\beta(p)}{\partial x_j} dx^i(u) dx^j(u) \\ &+ \sum_{i,j=1}^n \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial f \circ \mathbf{y}^{-1}}{\partial y_\alpha}(\mathbf{y}(p)) \frac{\partial^2 \mathbf{y}_\alpha}{\partial x_i \partial x_j}(p) dx^i(u) dx^j(u) \\ &= \sum_{\alpha,\beta=1}^n \frac{\partial^2 f \circ \mathbf{y}^{-1}}{\partial y_\alpha \partial y_\beta}(y(p)) dy^\alpha(v) dy^\beta(v). \end{aligned}$$

onde $\frac{\partial f \circ \mathbf{y}^{-1}}{\partial y_\alpha}(\mathbf{y}(p)) = 0$, para todo $\alpha = 1, \dots, n$, visto que p é um ponto crítico de f . Note ainda que

$$dx^i(p) \cdot u = u_i \text{ e } dy^\alpha(p) \cdot v = v_\alpha.$$

■

Assim, se $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável, um ponto crítico de f é não-degenerado, se para algum sistema de coordenadas $\varphi : U \subset M \rightarrow \mathbb{R}^n$, tal que $p \in U$, $\varphi(p)$ é um ponto crítico da função $f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow \mathbb{R}$. Em virtude do Lema 3.1.2, esta definição independe da carta local. Além disso fica bem definida a forma quadrática hessiana de f em p por

$$H(p) \cdot u = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f \circ \varphi^{-1}}{\partial x_i \partial x_j}(\varphi(p)) u_i u_j$$

onde $dx^i(p) \cdot u = u_i$. De fato, esta forma é invariante por difeomorfismos, isto é, sendo $V \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e suponha que $\phi : V \rightarrow U$ é um difeomorfismo de classe C^2 e seja $q = \phi^{-1}(p)$, de modo que q seja um ponto crítico de $f \circ \phi : V \rightarrow \mathbb{R}$. Então o diagrama abaixo comuta.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{H_q(f \circ \phi)} & \mathbb{R} \\ D\phi(q) \downarrow & \nearrow H_p f & \\ \mathbb{R}^n & & \end{array}$$

Desta forma, sendo $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 , então para cada ponto crítico x de f nós definimos a forma quadrática hessiana $H_x f : M_x \rightarrow \mathbb{R}$ pela composição

$$H_x f : M_x \xrightarrow{D\varphi_x} \mathbb{R}^n \xrightarrow{H_{\varphi(x)}(f \circ \varphi^{-1})} \mathbb{R}$$

onde φ é alguma carta em x . A propriedade de invariância da hessiana das funções de \mathbb{R}^n implica que $H_x f$ é bem definida independentemente de φ . Note que x é um ponto crítico não-degenerado se, e somente se, $H_x f$ é uma forma quadrática não-degenerada.

Lema 3.1.3 *Seja M uma variedade, $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 . Então p é um ponto crítico não-degenerado de f se, e somente se, a matriz hessiana de f*

$$H_p(f) = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p) \right]$$

é não singular (i.e., é invertível).

Prova. De acordo com a Observação 2.5.7, a transversalidade é uma propriedade local, portanto basta-nos verificar a afirmação para uma dada carta local, ou em outras palavras, basta verificar a afirmação para uma função $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 . Com a identificação $T^*\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ a diferencial será dada por $g(x) = Df(x) = (f(x), \frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x))$. Sendo $S := \mathbb{R}^n \times \{0\}$ a seção nula de $T^*\mathbb{R}^n$, então g é transversal a S se, e somente se $T_x g + T_x S = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Como $T_x S \simeq \mathbb{R}^n \times \{0\}$, e $Dg(x) = (g(x), H(f)(x))$ onde

$$H_x(f) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_1} \\ & \ddots & \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_1} & & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_n} \end{bmatrix},$$

então $x \in \mathbb{R}^n$ será um ponto crítico não-degenerado se e somente se $Df(x) = 0$ e a matriz $H_x(f)$ for não singular. Mas, sabemos da álgebra linear que esta última condição é equivalente a $\det H_x(f) \neq 0$. ■

Definição 3.1.4 *Seja M uma variedade e $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 . Então diremos que f é uma **função de Morse** se todo ponto crítico de f for não-degenerado.*

Sendo assim, de acordo com o Lema 3.1.3, obtemos uma caracterização de ponto crítico não-degenerado: *um ponto crítico de uma função de classe C^2 a valores reais é não-degenerado se, e somente se, a forma hessiana quadrática associada é não-degenerada.*

Seja Q uma forma quadrática num espaço vetorial \mathbb{E} , então diremos que Q é **negativa** (respect. **positiva**) no subespaço $\mathbb{F} \subset \mathbb{E}$ se $Q(x) < 0$ (respect. $Q(x) > 0$) sempre que $x \in \mathbb{F}$ for diferente de 0. A possível dimensão do maior subespaço de \mathbb{E} em que Q for

negativa será o **índice** de Q , que será denotado por $Ind(Q)$. Se $A = [a_{ij}]$ é uma matriz simétrica $n \times n$ que expressa $Q(x)$ como $\sum a_{ij}x_i x_j$ para alguma escolha de coordenadas sobre \mathbb{E} , então $Ind(Q)$ é igual ao número de autovalores negativos de A , contando as multiplicidades. Seja $p \in M$ um ponto crítico não-degenerado de $f : M \rightarrow \mathbb{R}$. O índice de f em $p \in M$ é o índice da hessiana de f em p , denotado por $Ind(f)$ ou $Ind_p(f)$. Esse número nos dá informações valiosas sobre o comportamento local de f numa vizinhança de p . Suponha que $M = \mathbb{R}^n$ e $p = 0$. A expansão de Taylor de segunda ordem de f em 0 é

$$f(x) = f(0) + \frac{1}{2}H_0f(x) + R(x)$$

onde $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{R(x)}{|x|} = 0$. Sendo assim, f é aproximadamente igual à soma de uma constante à metade de sua hessiana em 0. Seja $\mathbb{E}_- \oplus \mathbb{E}_+$ uma decomposição em soma direta de \mathbb{R}^n , de modo que H_0f seja negativa em \mathbb{E}_- e positiva em \mathbb{E}_+ , então

$$\dim \mathbb{E}_- = k = Ind H_0f \quad \text{e} \quad \dim \mathbb{E}_+ = n - k$$

Desta forma, sendo $x \in \mathbb{R}^n$ e $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ suficientemente pequeno, então $f(tx)/t$ é uma função decrescente em t para $x \in \mathbb{E}_-$ e crescente em t se $x \in \mathbb{E}_+$. Segue que um ponto crítico da função de Morse $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ é mínimo local se, e somente se, $Ind_p = 0$ e máximo local se, e somente se $Ind_p = \dim M$.

O seguinte resultado de Marston Morse é uma “forma esperta” de relação entre f e a hessiana em um ponto crítico não-degenerado p . Isto indica que f possui uma representação em p que é igual a $f(p) + 1/2H_p f$.

3.2 Lema de Morse

O principal objetivo desta seção é mostrar o seguinte resultado conhecido como *Lema de Morse*.

Lema 3.2.1 *Seja $p \in M$ um ponto crítico não-degenerado de índice k da aplicação $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^{r+2} , $1 \leq r \leq \omega$. Então existe um carta (φ, U) de classe C^r em p , tal que*

$$f\varphi^{-1}(x_1, \dots, x_n) = f(p) - \sum_{i=1}^k x_i^2 + \sum_{i=k+1}^n x_i^2$$

Observe que no caso $n = 2$ teremos três possíveis formas quadráticas canônicas:

i) $f(x) = f(p) - x_1^2 - x_2^2;$

$$\text{ii) } f(x) = f(p) + x_1^2 + x_2^2;$$

$$\text{iii) } f(x) = f(p) - x_1^2 + x_2^2.$$

Veja que, nos dois primeiros casos, as curvas de nível de f numa vizinhança de p são difeomorfas a círculos e p é um ponto de máximo ou mínimo local, respectivamente. Já no terceiro caso, p é um ponto de sela de f e a equação $f(x) = f(p)$ determina as quatro separatrizes locais de p (c.f. [2]).

A prova do Lema de Morse é baseada na forma paramétrica de diagonalização de matrizes simétricas.

Lema 3.2.2 *Seja $A = \text{diag}\{a_1, \dots, a_n\}$ uma matriz diagonal $n \times n$ tal que $|a_j| = 1$, $j = 1, \dots, n$. Então existe uma vizinhança N de A no espaço das matrizes simétricas $n \times n$ e uma aplicação C^ω*

$$P : N \longrightarrow GL(n, \mathbb{R})$$

tal que $P(A) = I$ e se $P(B) = Q$, então $Q^t B Q = A$.

Prova. Suponha que B é uma matriz simétrica próxima de A , de tal forma que b_{11} seja diferente de zero e tenha o mesmo sinal que a_{11} , e considere a mudança de coordenadas em \mathbb{R}^n dada por

$$T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$y \longmapsto \begin{cases} x_1 := \frac{1}{\sqrt{|b_{11}|}} \left[y_1 - \frac{b_{12}}{b_{11}} y_2 - \dots - \frac{b_{1n}}{b_{11}} y_n \right] \\ x_k = y_k, \text{ para } k = 2, \dots, n. \end{cases}$$

Podemos verificar que $T^t B T$ é da forma

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & B_1 \end{bmatrix}$$

onde B_1 é uma matriz simétrica $(n-1) \times (n-1)$. Aproximando-se B o bastante de A , então poderemos assumir que B_1 está tão próxima de $A_1 = \text{diag}\{a_2, \dots, a_n\}$ quanto se queira, sendo em particular inversível. Observe que T e B_1 são funções C^ω de B . Por indução em n , podemos assumir que existe uma matriz $Q_1 = P_1(B_1) \in GL(n-1)$

dependendo analiticamente de B_1 , tal que $Q_1^t B_1 Q = A_1$. Defina $P(B) = Q$ por $Q = TS$ onde

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q_1 \end{bmatrix},$$

então $Q^t B Q = A$. ■

Prova do Lema de Morse.

Sem perda de generalidade, podemos supor que M é um conjunto convexo dentro de \mathbb{R}^n , $p = 0 \in \mathbb{R}^n$ e $f(0) = 0 \in \mathbb{R}$. Por uma mudança linear de coordenadas nós podemos supor que a matriz

$$A = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(0) \right]$$

é diagonal, com as primeiras k entradas iguais a -1 e o restante igual a $+1$. Recorde que, por hipótese, $Df(0) = 0$. Desta forma, existe uma aplicação $x \rightarrow B_x$, de classe C^r sobre M , para o espaço de matrizes simétricas tal que se $x \in M$ e $B_x = [b_{ij}(x)]$, então

$$f(x) = \sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x) x_i x_j$$

e $B_0 = A$. De fato, utilizando-se a hipótese de convexidade do domínio de f , teremos do Teorema Fundamental do Cálculo (aplicado duas vezes) que

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^1 Df(tx) \cdot x dx \\ &= \sum_{j=1}^n \left[\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_j}(tx) dt \right] x_j \\ &= \sum_{i,j=1}^n \left[\int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(stx) ds dt \right] x_i x_j \\ &= \sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x) x_i x_j \end{aligned}$$

Considere agora a função $P : N \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$ definida no Lema 3.2.2 e tome $P(B_x) = Q_x \in GL(n)$. Defina a aplicação $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^r , onde $U \subset M$ é uma vizinhança suficientemente pequena próxima de 0, por

$$\varphi(x) = Q_x^{-1} x.$$

Pelo Lema 3.2.3, temos que $D\varphi(0) = I$. Consequentemente, pelo Teorema da Função Inversa, podemos supor que (φ, U) é uma carta de classe C^n . Se $y = \varphi(x)$, então teremos

em notação matricial que

$$\begin{aligned}
 f(x) &= x^t B_x x \\
 &= (Q_x^t B_x Q_x) y \\
 &= y^t A y \\
 &= \sum_{i=1}^n a_{ij} y_i^2
 \end{aligned}$$

■

Lema 3.2.3 Sendo $\varphi : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^r , dada por

$$\varphi(x) = Q_x^{-1} x$$

onde $U \subset M$ é uma vizinhança suficientemente pequena próxima de 0. Então

$$D\varphi(0) = I$$

Prova. Primeiro afirmamos que $Q_0^{-1} = I$. De fato, $Q_0 = Q(0) = P(B_0) = P(A)$, pois $B_0 = A$ e pelo Lema 3.2.2 segue que $P(A) = I$. Assim $Q_0 = I$, de onde vem que $Q_0^{-1} = I$. Assim sendo, para todo $x \in U$ e todo $v \in \mathbb{R}^n$, temos

$$\varphi'(x) \cdot v = \frac{\partial \varphi}{\partial v}(x) = \frac{\partial Q^{-1}}{\partial v}(x) \cdot x + Q^{-1}(x) \cdot v$$

pois $\varphi(x) = Q_x^{-1} x = Q^{-1}(x) \cdot x$. Desta forma, para $x = 0$ segue que

$$\varphi'(0) \cdot v = D\varphi(0) \cdot v = Q^{-1}(0) \cdot v = I \cdot v = v,$$

portanto $D\varphi(0) = I$. ■

Agora, temos uma descrição local completa da Função de Morse $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$. Se $a \in M$ é um ponto regular, então, de acordo com o Teorema da Função Implícita, há um sistema de coordenadas numa vizinhança de a tal que

$$f(x_1, \dots, x_n) = x_1$$

Se $a \in M$ é um ponto crítico, então existe um sistema de coordenada numa vizinhança de a tal que

$$f(x_1, \dots, x_n) = f(a) - \dots - x_1^2 - \dots - x_k^2 + x_{k+1}^2 + \dots + x_n^2$$

Observação 3.2.4 :

1. O índice k é unicamente determinado pelo ponto crítico;
2. O conjunto $f^{-1}(y)$ da função de Morse tem uma estrutura agradável, i.e.:
 - (a) Perto de um ponto regular $f^{-1}(y)$ ela se parece com um hiperplano em \mathbb{R}^n ;
 - (b) Em um ponto crítico $y \in U$ existe uma carta (φ, U) que leva $U \cap f^{-1}(y)$ numa vizinhança de 0 da hipersuperfície quadrática degenerada

$$-x_1^2 - \cdots - x_k^2 + x_{k+1}^2 + \cdots + x_n^2 = 0.$$

Além disso, hipersuperfícies de nível próximas em U , digamos $U \cap f^{-1}(x^j)$ com $x^1 \sim x^2$, são levadas em subconjuntos abertos de formas quadráticas não-degeneradas da forma

$$-\cdots - x_1^2 - \cdots - x_k^2 + x_{k+1}^2 + \cdots + x_n^2 = \text{constante} \neq 0$$

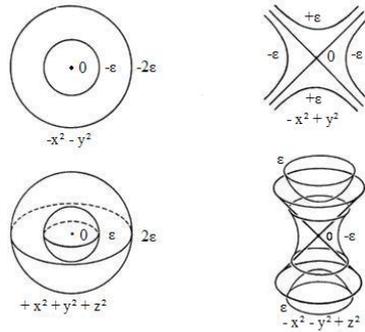


Figura 1: Exemplos de pontos críticos não degenerados em dimensão 2 e 3.

4 *EDO e Superfícies de Nível Regulares*

4.1 Equações diferenciais em variedades

Inicialmente vamos recordar alguns fatos sobre equações diferenciais. Seja $W \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e $F : W \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação de classe C^r , $1 \leq r \leq \omega$, considerada como um campo de vetores sobre W . Então F satisfaz localmente a condição de *Lipschitz*, assim os teoremas básicos sobre existência, unicidade e diferenciabilidade das soluções de equações diferenciais ordinárias aplicam-se ao problema de valor inicial

$$(1) \quad \varphi'(t) = F(\varphi(t)) \quad \text{com } \varphi(0) = x$$

para cada $x \in W$. Portanto, existe um intervalo $J_0 \subset \mathbb{R}$ ao redor de 0, tal que a aplicação $\varphi : (J, 0) \rightarrow (W, x)$ satisfaz a condição (1). Se $\varphi_1 : J_1 \rightarrow W$ é outra solução para o problema de valor inicial (1), então $\varphi = \varphi_1$ em $J \cap J_1$. Assim, φ e φ_1 podem ser ajustadas para fornecer uma solução do problema em $J \cup J_1$. Segue que J e φ são únicos, uma vez que o intervalo J seja máximo. Denotaremos este intervalo maximal por $J(x)$ (note que ele depende de $x \in W$) e a solução correspondente será denotada por

$$\begin{aligned} \varphi^x : J(x) &\longrightarrow W \\ t &\longmapsto \varphi^x(t) = \varphi_t(x) \\ &= \varphi(t, x) \end{aligned}$$

A aplicação φ^x e (às vezes) o conjunto $\varphi^x(J(x))$ serão chamados de **curva solução** ou **trajetória** do campo de vetores F por x . A função a valores no intervalo $x \rightarrow J(x)$ é **semicontinua**, i.e., se $\alpha \in J(x)$, então $\alpha \in J(y)$ para todo y em alguma vizinhança de x . Esta propriedade assegura que

$$\Omega = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times W : t \in J(x)\}$$

é um conjunto aberto em $\mathbb{R} \times W$.

O **fluxo** por F é a aplicação de classe C^r

$$\begin{aligned} \varphi : \quad \Omega &\longrightarrow W \\ (t, x) &\longmapsto \varphi_t(x) \end{aligned}$$

Se para cada $t \in \mathbb{R}$ fixado, tomarmos $W_t := \{x \in W : t \in J(x)\}$, então W_t será aberto em W e teremos bem definida a aplicação de classe C^r

$$\begin{aligned} \varphi_t : W_t &\longrightarrow W \\ x &\longrightarrow \varphi_t(x) \end{aligned}.$$

Claramente $\varphi_{-t}(W_0) = W_{-t}$ e $\varphi_{-t} = \varphi_t^{-1}$, assim φ_t é uma imersão de classe C^r . Em geral, teremos a relação

$$\varphi_s \circ \varphi_t(x) = \varphi_{s+t}(x),$$

que é válida no seguinte sentido: se um dos lados da equação acima está definido, então outro também está e ambos coincidem. Seja $P \subset W$ um conjunto compacto, então, para cada $x \in W$, o conjunto $t \in J(x)$ tal que $\varphi_t(x) \in P$ é fechado em \mathbb{R} (e não somente em $J(x)$). Como consequência disso, temos que se $x \in P$ é tal que $\varphi_t(x) \in P$ para todo $t \in J(x) \cap \mathbb{R}_+$, então $J(x) \supset \mathbb{R}_+$ (analogamente para \mathbb{R}_-). Em particular, se a trajetória de x tem fecho compacto em W , então $J(x) = \mathbb{R}$.

Seja agora X um campo de vetores de classe C^r sobre uma n -variedade M , i.e., uma seção de classe C^r de TM e assumamos inicialmente que $\partial M = \emptyset$. A curva integral (ou curva solução) de X é uma aplicação diferenciável $\eta : J \longrightarrow M$ onde $J \subset \mathbb{R}$ é um intervalo e $\eta'(t) = X(\eta(t))$ para cada $t \in J$. Se (ψ, U) é uma carta sobre M (de classe C^∞), contendo $\eta(J)$ e $W = \psi(U) \subset \mathbb{R}^n$, então a composição de aplicações

$$f : W \xrightarrow{\psi^{-1}} U \xrightarrow{X} TU \xrightarrow{D\psi} \mathbb{R}^n$$

pode ser vista como um campo de vetores de classe C^r sobre W . A aplicação $\varphi = \psi \circ \eta : J \longrightarrow W$ satisfaz a equação diferencial

$$(2) \quad \varphi'(t) = f(\varphi(t))$$

visto que

$$\begin{aligned}
 \varphi'(t) &= D\psi(\eta'(t)) \\
 &= D\psi(X_\eta(t)) \\
 &= (D\psi \circ X \circ \psi^{-1})(\psi \circ \eta(t)) \\
 &= f(\varphi(t)).
 \end{aligned}$$

Assim, ψ transporta a curva integral de X dentro da solução (2), desde que a curva integral se encontre no domínio U de uma carta local (U, φ) .

Como consequência, todos os resultados sobre campo de vetores em conjuntos abertos de \mathbb{R}^n , valem para campos de vetores sobre uma variedade M . Para cada $x \in M$, existe um intervalo maximal $J(x)$ ao redor 0 e uma curva integral de X de classe C^r

$$\eta^x : (J(x), 0) \longrightarrow (M, x) \text{ dada por } \eta^x(t) = \eta(t, x) = \eta_t(x).$$

O conjunto $\Omega = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times M : t \in J(x)\}$ é aberto em $\mathbb{R} \times M$. O *fluxo* de X é a aplicação de classe C^r

$$\begin{aligned}
 \eta : \quad \Omega &\longrightarrow M \\
 (t, x) &\longmapsto \eta_t(x)
 \end{aligned}$$

Os resultados precedentes sobre pontos de fronteira de $J(x)$ e subconjuntos compactos de M são muito importantes. Um caso particularmente interessante é quando M é compacta e sem fronteira. Quando $\Omega = M \times \mathbb{R}$, cada η_t é um difeomorfismo de classe C^r de M . Assim as aplicações $\{\eta_t\}$ formam um grupo a um parametro de difeomorfismo de classe C^r de M . A aplicação

$$\begin{aligned}
 \mathbb{R} &\longrightarrow \text{Diff}^r(M) \\
 t &\longrightarrow \eta_t
 \end{aligned}$$

é um homeomorfismo contínuo e $\eta_t \circ \eta_s = \eta_{t+s}$.

Como veremos, precisaremos considerar campos de vetores sobre ∂M , i.e., sobre a fronteira da variedade M . Suponha agora que $\partial M \neq \emptyset$. Os resultados precedentes podem ser usados se nós primeramente mergulharmos M em N como uma subvariedade fechada de uma n -variedade N sem fronteira (tal como o dobro de M) e, em seguida, estenderemos X a um campo de vetores de classe C^r sobre N (Isto pode ser feito com uma partição da unidade). Se X é tangente à ∂M , i.e., $X(\partial M) \subset (T\partial M)$, então tudo será como antes. Mas se X não é tangente ao ∂M , então os intervalos $J(x)$ não serão todos abertos. Se

$x \in \partial M$, $X(x) \neq 0$ e $X(x)$ “aponta” para dentro de M (respect. para fora de M), então $J(x)$ contém 0 como seu ponto de fronteira final à esquerda (respect. à direita). E também é possível que $X(x)$ seja tangente a ∂M e ainda que $J(x)$ contenha o ponto de fronteira b , neste caso temos $\eta(b, y) \in \partial M$.

O conjunto Ω , definido anteriormente, não é necessariamente aberto em $\mathbb{R} \times M$, mas seu interior é denso. Além disso o fluxo $\eta : \Omega \rightarrow M$ é de classe C^r no sentido que estende a aplicação $\Omega' \rightarrow N$, de classe C^r , onde $\Omega' \subset \mathbb{R} \times M$ é aberto. Se a trajetória de $x \in M$ tem fecho compacto, então $J(x)$ é um intervalo fechado, e se a trajetória se encontrar em $M - \partial M$, então $J(x) = \mathbb{R}$. Se $J(x) = \mathbb{R}$ para todo $x \in M$ o campo de vetores é chamado completamente integrável. Uma condição necessária para X ser completamente integrável é que X seja tangente para ∂M e cada trajetória tenha fecho compacto.

4.2 Campos de vetores transversais

Retornaremos à construção do campo de vetores transversal à superfícies de nível regulares da aplicação $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, de classe C^{r+1} , com $r \geq 1$. Para que possamos prosseguir, devemos definir o conceito de *métrica riemanniana*.

Definição 4.2.1 *Dada uma n -variedade M , uma métrica Riemanniana em M é uma correspondência que associa a cada ponto $p \in M$ um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ no espaço tangente $T_p M$ (isto é, uma forma bilinear simétrica, positiva definida em $T_p M$) e que varia diferenciavelmente no seguinte sentido:*

“Dados campos de vetores X, Y de classe C^r sobre M , então a aplicação

$$p \in M \rightarrow \langle X_p, Y_p \rangle_p \in \mathbb{R} \text{ é de classe } C^r$$

Isto é equivalente a dizer que as funções g_{ij} definidas em uma vizinhança coordenada $\varphi(U)$ de M pela expressão

$$g_{ij}(p) = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p, \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_p \right\rangle_p$$

são funções de classe C^r em $\varphi(U)$. Uma variedade M munida de uma métrica Riemanniana $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é chamada uma *variedade Riemanniana*. Denotamos uma variedade Riemanniana M e sua métrica por $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

Exemplo 4.2.2 (O espaço Euclidiano) *O espaço \mathbb{R}^n munido do produto interno usual é uma variedade Riemanniana.*

Exemplo 4.2.3 (Subvariedades Imersas) *Dada uma imersão $f : M^n \rightarrow N^{n+k}$ entre duas variedades, onde N uma variedade Riemanniana com métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle$ podemos definir uma métrica (\cdot, \cdot) em M do seguinte modo*

$$(u, v)_p = \langle df_p(u), df_p(v) \rangle_{f(p)} \quad u, v \in T_p M$$

Nestas condições, a aplicação f é chamada de imersão isométrica.

Doravante, iremos supor que M possui uma métrica riemanniana. O produto interno em algum M_x é denotado por $\langle X, Y \rangle$ e a norma correspondente por $|x| = \langle X, X \rangle^{1/2}$.

Para toda aplicação linear $\lambda : T_x M \rightarrow \mathbb{R}$ existe um único vetor tangente $X_\lambda \in T_x M$ tal que $\lambda(Y) = \langle X_\lambda, Y \rangle$, para todo $Y \in T_x M$. Iremos chamar X_λ de *vetor dual* de λ . A aplicação $\lambda \mapsto X_\lambda$ é um isomorfismo linear de $T_x M$ sobre $T_x^* M$. A aplicação inversa para $X \in T_x M$ é a aplicação dada por

$$\begin{aligned} \lambda_x : T_x M &\rightarrow \mathbb{R} \\ Y &\rightarrow \langle X, Y \rangle \end{aligned}$$

Se $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^{r+1} , então definimos para cada $x \in M$ o vetor $\text{grad } f(x) \in T_x M$ como sendo o dual de $Df(x)$. Desta maneira, o campo de vetores $\text{grad}(f)$ está bem definido, é de classe C^r e dependerá da métrica riemanniana adotada. Se M é um aberto de \mathbb{R}^n e a métrica é dada pelo produto interno padrão de \mathbb{R}^n , então

$$\text{grad } f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right)$$

É claro que $\text{grad } f(x) = 0$ se, e somente se, x é um ponto crítico de f . Em um ponto regular o $\text{grad } f(x)$ é transversal à superfície de nível $f^{-1}(f(x))$, sendo de fato ortogonais. Observe que f é não-decrescente ao longo das linhas do gradiente, isto é, ao longo de curvas soluções da equação diferencial “gradiente”: $\eta' = \text{grad}(f)(\eta)$. De fato, se $\eta(t)$ é uma solução desta equação diferencial, então

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f(\eta(t)) &= \langle \text{grad } f(\eta(t)), \text{grad } f(\eta(t)) \rangle \\ &= |\text{grad } f(\eta(t))|^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Em particular, f é estritamente crescente ao longo de uma curva solução que não possui pontos críticos.

O seguinte teorema fornece uma peça chave na compreensão da estrutura topológica das variedades de classe C^r , $r \geq 2$.

Teorema 4.2.4 (do intervalo regular) *Seja $f : M \rightarrow [a, b]$ uma função de classe C^{r+1} definida sobre a variedade com bordo M , onde $1 \leq r \leq \omega$. Suponha que f não tem nenhum ponto crítico e que $f(\partial M) = \{a, b\}$. Então existe um difeomorfismo de classe C^r , digamos $F : f^{-1}(a) \times [a, b] \rightarrow M$, tal que o diagrama*

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}(a) \times [a, b] & \xrightarrow{F} & M \\ \downarrow & \swarrow f & \\ [a, b] & & \end{array}$$

é comutativo. Em particular todas as superfícies de nível de f são difeomorfas.

Prova. Considere M munido de uma métrica riemanniana e seja X o campo de vetores de classe C^r sobre M definido por

$$X(x) = \frac{\text{grad } f(x)}{|\text{grad } f(x)|^2}.$$

Note que X tem as mesmas trajetórias de $\text{grad } f$, porém com parametrizações diferentes. Seja $\eta : [t_0, t_1] \rightarrow M$ uma curva solução de X . Um cálculo imediato, a partir da regra da cadeia, mostra que a derivada da aplicação

$$\begin{array}{ccc} [t_0, t_1] & \rightarrow & \mathbb{R} \\ t & \rightarrow & f(\eta(t)) \end{array}$$

é identicamente 1. Isto significa que

$$f(\eta(t_1)) - f(\eta(t_0)) = t_1 - t_0 \tag{4.1}$$

Seja $x \in f^{-1}(s)$. Como M é compacta, então o conjunto $J(x)$ é fechado. Por (4.1), segue que

$$J(x) = [a - s, b - s] \tag{4.2}$$

As hipóteses sobre f implicam que $f^{-1}(a)$ é uma união de componentes da fronteira de M . Defina a aplicação

$$\begin{aligned} F: f^{-1}(a) \times [a, b] &\longrightarrow M \\ (x, t) &\longmapsto \eta(t - a, x). \end{aligned}$$

Como f cresce ao longo das linhas do gradiente, e portanto ao longo das trajetórias de X , segue que F é injetiva. Por outro lado, F é uma imersão visto que as linhas gradientes são transversais às superfícies de nível. Assim f é um mergulho. Finalmente, por (4.2) F é sobrejetiva. ■

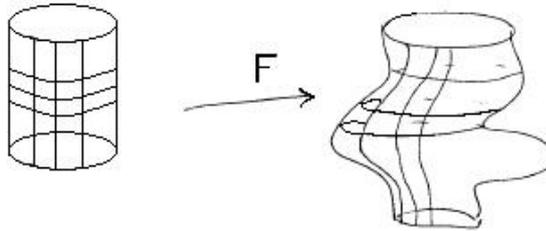


Figura 2. Intervalo regular.

Corolário 4.2.5 *Seja M uma variedade compacta e assumamos que $\partial M = A \cup B$, onde A e B são conjuntos disjuntos e fechados. Suponha que exista uma aplicação $f: M \rightarrow \mathbb{R}$, de classe C^2 , sem pontos críticos e tal que $f(A) = 0$, $f(B) = 1$. Então M é difeomorfa a ambos os conjuntos $A \times I$ e $B \times I$.*

Teorema 4.2.6 *Seja M uma variedade compacta, sem bordo, de dimensão n , admitindo a função de Morse $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ com somente 2 pontos críticos. Então M é homeomorfa à esfera S^n .*

Prova. Sejam P_+ e P_- os pontos críticos e suponhamos que P_+ é o máximo e P_- é o mínimo. Tome $f(P_+) =: z_+$ e $f(P_-) =: z_-$. Pelo Lema de Morse, existem coordenadas $x = (x_1, \dots, x_n)$ numa vizinhança U_+ de P_+ , tais que $f|_{U_+}$ tem a forma

$$f(x) = -x_1^2 - \dots - x_n^2 + z_+$$

Portanto, existe $b < z_+$ tal que o conjunto $D_+ = f^{-1}[b, z_+]$ é uma vizinhança de P_+ difeomorfa ao disco $\mathbb{D}^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$. Analogamente, existe um $a > z_-$ tal que o conjunto $D_- = f^{-1}[a, z_-]$ é uma vizinhança de P_- difeomorfa a \mathbb{D}^n . Suponhamos que

$z_- < a < b < z_+$ e observemos que

$$\partial D_+ \approx \partial D_- \approx S^{n-1}.$$

Note que, de acordo com o Teorema 4.2.4, o conjunto $f^{-1}[a, b]$ é difeomorfo a $S^{n-1} \times I$. Sejam Q_+ e $Q_- \subset S^n$ os pólos norte e sul da esfera, B_+ e B_- vizinhanças difeomorfas a \mathbb{D}^n de Q_+ e Q_- respectivamente, e tome $C := S^n - \text{Int}(B_+ \cup B_-)$. Então teremos $C \approx S^{n-1} \times I$ e $\partial C = \partial B_+ \cup \partial B_-$. Considere um difeomorfismo $h_0 : D_+ \rightarrow B_+$ e tome a extensão de

$$h_0|_{\partial D_+} : \partial D_+ \rightarrow \partial B_+$$

a um difeomorfismo $(\partial D_+) \times I \rightarrow (\partial B_+) \times I$. Como $f^{-1}[a, b]$ é difeomorfo a $S^{n-1} \times I$, então teremos uma extensão de h_0 para o homeomorfismo

$$h_1 : D_+ \cup f^{-1}[a, b] \rightarrow B_+ \cup C$$

Portanto é possível estender

$$h_1|_{\partial D_-} : \partial D_- \rightarrow \partial B_-$$

para o homeomorfismo $D_- \rightarrow B_-$. Essa extensão se dá segundo as direções radiais, como segue. Sendo $g_0 : S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ um homeomorfismo, então estendemos g ao homeomorfismo $g : D^n \rightarrow D^n$ através da aplicação

$$g(x) = \begin{cases} |x| g_0(x/|x|), & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & , \text{ se } x = 0 \end{cases}$$

Assim, a aplicação g envia cada segmento radial $[0, y]$, com $y \in S^{n-1}$, linearmente no segmento $[0, g_0(y)]$. Portanto h_1 é uma extensão para o homeomorfismo $h : M \rightarrow S^n$. ■

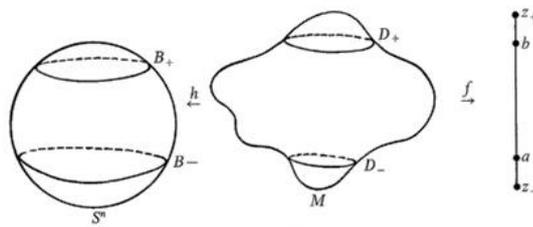


Figura 3: Função de Morse com apenas dois pontos críticos.

Nem sempre é possível encontrar um difeomorfismo entre M e S^n . Em 1956 John Milnor [9] encontrou um exemplo de uma variedade que era homeomorfa, mas não difeomorfa, a S^7 . Este resultado surpreendente estimulou pesquisa sobre as chamadas “esferas exóticas”. De maneira geral, o problema de encontrar e classificar todas as estruturas

diferenciais sobre uma variedade avançou bastante, porém, ainda não foi resolvido.

5 Pontos críticos e adjunção de células

5.1 Funções de Morse admissíveis

Na seqüência, para fazer ∂M comportar-se como uma superfície de nível, nós vamos considerar funções de Morse com características peculiares.

Definição 5.1.1 *Diremos que uma função de Morse $f : M \rightarrow [a, b]$ é admissível se $\partial M = f^{-1}(a) \cup f^{-1}(b)$, com a e b valores regulares de f .*

Segue imediatamente da definição que:

- $f^{-1}(a)$, assim como $f^{-1}(b)$, é formado pela união de componentes de ∂M ;
- Se $f^{-1}(a)$ ou $f^{-1}(b)$ é vazio, então f assume máximo, ou mínimo, somente em pontos críticos de $M \setminus \partial M$.

Com argumentos mais finos de Topologia diferencial, podemos mostrar que uma variedade compacta tem uma função de Morse admissível tomando determinados valores constantes nas componentes de fronteira (cf. [4]).

A Figura 4 (abaixo) mostra alguns exemplos de funções de Morse admissíveis sobre uma 2-variedade, como sendo a aplicação de projeção ortogonal no intervalo $[a, b]$. Observe que se p, q são valores regulares, $p < q$, então a restrição de f à $f^{-1}[p, q]$ é também admissível (em $[p, q]$).



Figura 4. Exemplos de funções de Morse admissíveis.

Na última seção, observamos que se f não possui pontos críticos, então $M \approx f^{-1}(a) \times I$. No teorema seguinte, iremos considerar o caso em que f possui exatamente um ponto crítico. Para melhor podermos enunciá-lo, será necessário introduzir o seguinte conceito: por uma k -célula em M , entenderemos a imagem de um mergulho $D^k \hookrightarrow M$. Segue a definição formal de célula.

Definição 5.1.2 *Uma célula α^k de dimensão k é um conjunto homeomorfo à k -bola aberta $\{x \in \mathbb{R}^k : \|x\| < 1\}$. Quando a dimensão k da célula é óbvia, denotaremos α em vez de α^k .*

Para uma boa compreensão do teorema seguinte devemos definir um importante conceito topológico.

5.2 Homotopia

Sejam X e Y espaços topológicos e $f, g : X \rightarrow Y$ duas aplicações contínuas.

Definição 5.2.1 *Diremos que f e g são homotópicas, e escrevemos $f \simeq g$, se, e somente se, existe uma aplicação contínua $h : [0, 1] \times X \rightarrow Y$ tal que $h(0, x) = f(x)$ e $h(1, x) = g(x)$, para todo $x \in X$. A aplicação h diz-se uma homotopia entre f e g .*

Definição 5.2.2 *Dados $X \subseteq Y$ onde X é um espaço topológico, diremos que X é um retrato de Y se, e somente se, existe uma aplicação contínua $r : Y \rightarrow X$ tal que para todo $x \in X$, $r(x) = x$.*

Definição 5.2.3 *Dados $X \subseteq Y$ onde X é um espaço topológico, diremos que X é um retrato por deformação de Y , se e somente se, existem um retrato $r : Y \rightarrow X$ e uma aplicação contínua $h : [0, 1] \times Y \rightarrow Y$ tais que:*

1. para todo $x \in Y$, $h(0, x) = x$ e $h(1, x) = r(x)$;
2. para todo $x \in X$ e $t \in [0, 1]$ teremos $h(t, x) = x$.

Exemplo 5.2.4 $\mathbb{S}^1 \times \{0\}$ é um retrato por deformação de $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$. Removendo um disco D do cilindro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$, $\mathbb{S}^1 \times \{0\}$ continua a ser um retrato de $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} - D$, mas não é um retrato por deformação de $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} - D$.

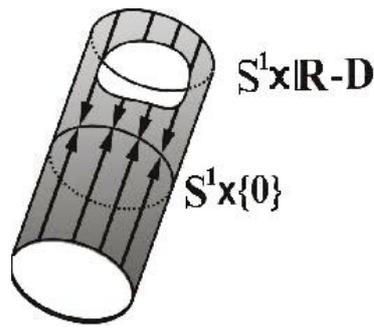


Figura 5. Retrato por deformação.

Em outras palavras, um retrato por deformação é uma homotopia h_t entre id_Y e r , inteiramente formada por aplicações que fixam os pontos de X .

Uma aplicação contínua $f : X \rightarrow Y$ diz-se uma equivalência de homotopia se, e somente se, existe uma outra aplicação contínua $g : Y \rightarrow X$ tal que

$$g \circ f \simeq id_X \quad \text{e} \quad f \circ g \simeq id_Y$$

A aplicação $g : Y \rightarrow X$ diz-se uma inversa homotópica de $f : X \rightarrow Y$. Quando existir uma equivalência homotópica $f : X \rightarrow Y$, diremos que X e Y são homotopicamente equivalentes.

Proposição 5.2.5 *Se X é um retrato por deformação de Y , então X e Y são homotopicamente equivalentes.*

Prova. Seja $r : Y \rightarrow X$ um retrato de Y sobre X , homotópico a id_Y , e designemos por $i : X \rightarrow Y$ a aplicação inclusão de X em Y . Então $r \circ i = id_X$ e $i \circ r \simeq id_Y$. ■

Observação 5.2.6 :

1. Um retrato por deformação é um caso particular de equivalência homotópica;
2. Por abuso de linguagem, diremos também que o subespaço A é um retrato por deformação de X .

Antes de passarmos aos teoremas que caracterizam topologicamente um variedade, faremos o estudo de um exemplo, que consiste no toro e na aplicação altura nele definido. Com isto, daremos uma idéia de como a passagem por pontos singulares de uma função de Morse admissível está associada a adjunção de células.

Exemplo 5.2.7 Seja X um toro em \mathbb{R}^3 obtido pela rotação do círculo $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 1$ através do eixo y . Seja $h(x, y, z) = z$, a função h possui 4 pontos críticos, todos sobre o eixo z . Um máximo, de índice 2, em $(0, 0, 3)$, um mínimo, de índice 0, em $(0, 0, -3)$ e dois de pontos sela, de índice 1, em $(0, 0, 1)$ e $(0, 0, -1)$, respectivamente.

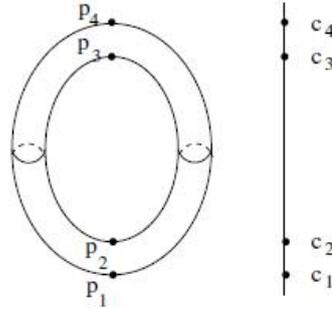


Figura 6. O toro e a adjunção de células.

Agora defina X^a como o conjunto dos pontos $x \in X$, tal que $h(x) < a$. Então as seguintes afirmações são verdadeiras:

- i) Se $a < 0 = h(p_1)$, então X^a é vazio;
- ii) Se $h(p_1) < a < h(p_2)$, então X^a é homeomorfo a uma 2-célula;
- iii) Se $h(p_2) < a < h(p_3)$, então X^a é homeomorfo a um cilindro;



Figura 7.

- iv) Se $h(p_3) < a < h(p_4)$, então X^a é homeomorfo a uma variedade compacta de gênero um, tendo com bordo um círculo;



Figura 8.

- v) Se $h(p_4) < a$, então X^a é um toro.

Em termo de homotopias, temos:

- i) \rightarrow ii) Adjunção de uma 0-célula



Figura 9.

Aqui " \approx " significa mesmo tipo homotópico.

ii) \rightarrow iii) Adjunção de uma 1-célula



Figura 10.

iii) \rightarrow iv) Novamente a operação de adjunção de uma 1-célula

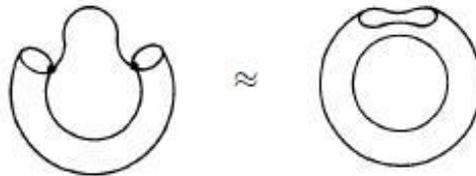


Figura 11.

iv) \rightarrow v) Adjunção de uma 2-célula.

Teorema 5.2.8 Seja M uma variedade compacta e $f : M \rightarrow [a, b]$ uma função de Morse admissível. Suponha que f possui um único ponto crítico z , de índice k . Então existe um retrato por deformação de M sobre $f^{-1}(a) \cup e^k$ tal que $e^k \cap f^{-1}(a) = \partial e^k$ e com $e^k \subset M - f^{-1}(b)$.

Prova. Seja $f(z) = c$, com $a < c < b$, então é suficiente provar o teorema para a restrição de f à $f^{-1}[a', b']$, onde a' e b' são tais que $a < a' < c < b' < b$. De fato, basta aplicar teorema do intervalo regular (Teorema 4.2.4) para $f^{-1}[a, a']$ e $f^{-1}[b, b']$. Além disso, substituindo-se f por $f(x) - c$, podemos supor que $c = 0$. Considere agora uma carta local (φ, U) em torno de z , como no Lema de Morse, e tome a decomposição $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$. Teremos então que, a aplicação φ envia U difeomorficamente sobre um aberto $V \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$. Dessa forma

$$f \circ \varphi^{-1}(x, y) = -|x|^2 + |y|^2$$

para todo $(x, y) \in V$. Note que $\varphi(z) = (0, 0)$ e tome $g(x, y) = -|x|^2 + |y|^2$. Seja $0 < \delta < 1$ tal que V contém $\Gamma = B^k(\delta) \times B^{n-k}(\delta)$, onde $B^i(\delta) \subset \mathbb{R}^i$ é uma bola fechada de raio δ e centrada em 0. Considere em M uma métrica riemanniana que concorda em $\varphi^{-1}(\Gamma)$ com a métrica induzida por φ , oriunda do produto interno canônico em \mathbb{R}^n . Se $\varphi(u) = v \in \Gamma$, então

$$D\varphi(u)(\text{grad } f(u)) = \text{grad } g(v).$$

Seja $\epsilon > 0$ muito menor que δ , de modo que $\epsilon < \frac{\delta^2}{100}$. Tome

$$B^k := B^k(\sqrt{\epsilon}) \times 0 = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} : |x|^2 \leq \epsilon\}$$

e seja $e^k := \varphi^{-1}(B^k)$. Então, a deformação de $f^{-1}[-\epsilon, \epsilon]$ para $f^{-1}(-\epsilon) \cup e^k$ é composta pela colagem de duas deformações, como segue. Primeiramente considere o conjunto

$$\Gamma_1 = D^k(\sqrt{\epsilon}) \times D^{n-k}(\sqrt{\epsilon})$$

(Veja a Figura 12 para o caso $k = 1, n = 2$). Em $\Gamma_1 \cup g^{-1}[-\epsilon, \epsilon]$ uma deformação

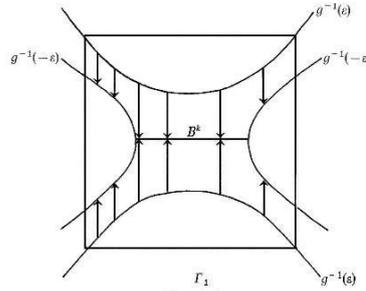


Figura 12.

é obtida movendo-se (x, y) com velocidade constante ao longo do intervalo que une (x, y) ao ponto $(x, sy) \in g^{-1}(-\epsilon) \cup B^k$, $s \in \mathbb{R}$ onde

$$s := s(x, y) := \begin{cases} 0 & , \text{ se } |x|^2 < \epsilon \\ \sqrt{|x|^2 - \epsilon}/|y|^2 & , \text{ se } |x|^2 \geq \epsilon \end{cases}.$$

Note que esses intervalos são os fechos de curvas-soluções do campo de vetores $X(x, y) = (0, -2y)$. Essa deformação é transformada por $\varphi^{-1}(\Gamma_1)$ via conjugação por φ . Fora do conjunto $\Gamma_2 = D^k(\sqrt{2\epsilon}) \times D^{n-k}(\sqrt{2\epsilon})$ a deformação move cada ponto com uma velocidade constante ao longo das linhas do fluxo do campo de vetores $-\text{grad } g$, que alcança $g^{-1}(-\epsilon) \cup B^k$ em uma unidade de tempo (a velocidade de cada ponto é igual ao comprimento de seu caminho ao longo da deformação). Veja na próxima figura que essa deformação é transportada para $U \setminus \varphi^{-1}(\Gamma_2)$ por φ e então é estendida sobre $M \setminus \varphi^{-1}(\Gamma_2)$ seguindo-se as linhas do fluxo de $-\text{grad } f$.

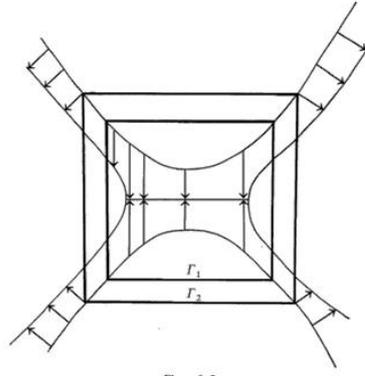


Figura 13.

Cada uma dessas linhas de fluxo alcança $f^{-1}(-\epsilon)$ uma vez que ela não entra em Γ_2 . De fato, ela não entra em Γ_2 , visto que $|x|$ cresce e $|y|$ decresce ao longo das linhas de fluxo. Assim $|\text{grad } f|$ tem limite inferior positivo sobre o compacto

$$f^{-1}[-\epsilon, \epsilon] \setminus \text{Int}\varphi^{-1}(\Gamma_2).$$

Para estender a deformação para os pontos de $\Gamma_2 \setminus \Gamma_1$, é suficiente encontrar um campo de vetores em Γ que concorda com X em Γ_1 e com $-\text{grad}(g)$ em $\Gamma \setminus \Gamma_2$. Tal campo é

$$Y(x, y) = 2(\mu(x, y)x, -y),$$

onde a aplicação $\mu : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow [0, 1]$, de classe C^∞ , anula-se em Γ_1 e se iguala a 1 fora de Γ_2 . Sem dificuldade, observamos que cada linha do fluxo Y que começa no ponto de

$$(\Gamma_2 \setminus \Gamma_1) \cap g^{-1}[-\epsilon, \epsilon]$$

precisa alcançar $g^{-1}(-\epsilon)$, uma vez que $|x|$ é não-decrescente ao longo das linhas do fluxo. A deformação global de $f^{-1}[-\epsilon, \epsilon]$ dentro de $f^{-1}(-\epsilon) \cup e^k$ é obtida movendo cada ponto de Γ com velocidade constante ao longo das linhas do fluxo de Y até alcançar $g^{-1}(\epsilon) \cup B^k$ em uma unidade de tempo e transportando esse movimento para M via φ ; enquanto cada ponto de $M \setminus \varphi^{-1}(M)$ move com velocidade constante ao longo da linha do fluxo de $-\text{grad } f$ até alcançar $f^{-1}(\epsilon)$ em uma unidade de tempo. O curso dos pontos em $f^{-1}(-\epsilon) \cup e^k$ fica fixado. ■

Ao considerarmos uma aplicação $-f : M \rightarrow [-a, -b]$ ao invés de f , obtemos o seguinte resultado dual ao Teorema 5.2.8.

Teorema 5.2.9 *Seja $f : M \rightarrow [a, b]$ uma função de Morse admissível que possui um único ponto crítico z , de índice k . Então existe uma $(n - k)$ -célula $e_*^{n-k} \subset M \setminus f^{-1}(a)$ tal*

que $e_*^{n-k} \cap f^{-1}(b) = \partial e_*^{n-k}$ e existe um retrato por deformação de M sobre $f^{-1}(b) \cup e_*^{n-k}$. Além disso, e_*^{n-k} pode ser escolhida e^k (pelo Teorema 5.2.8) encontrando e_*^{n-k} somente em z , e transversalmente.

Falamos das células e^k e e_*^{n-k} como duais entre si. Na figura seguinte, destacamos os pares duais das células.

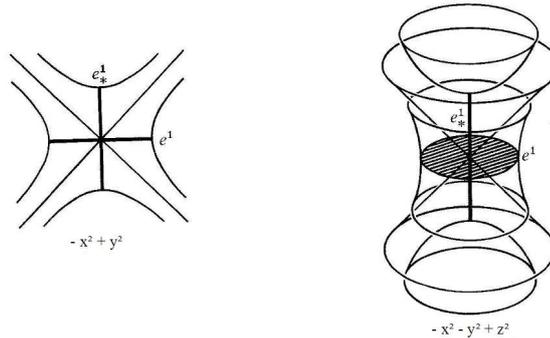


Figura 14.

O k -ésimo *tipo* de uma função de Morse $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ é o número $v_k = v_k(f)$ de pontos críticos do índice k , $0 \leq k \leq n = \dim M$, assim diremos que f tem tipo (v_0, \dots, v_n) .

Teorema 5.2.10 *Considere $f : M \rightarrow [a, b]$ uma função de Morse admissível do tipo (v_0, \dots, v_n) sobre uma variedade compacta. Suponha que f possui um valor crítico $c \in [a, b]$. Então existem k -células disjuntas $e_i^k \subset M \setminus f^{-1}(a)$, com $1 \leq i \leq v_k$ e $k = 0, \dots, n$, tais que $e_i^k \cap f^{-1}(a) = \partial e_i^k$. Além disso, existe um retrato por deformação de M sobre $f^{-1}(a) \cup \left\{ \bigcup_{i,k} e_i^k \right\}$.*

5.3 Revisando a Homologia Singular

Esta seção pretende definir alguns conceitos básicos sobre a Teoria de Homologia Singular, que serão ferramentas fundamentais para provarmos a célebre desigualdade de Morse.

Definição 5.3.1 *No espaço \mathbb{R}^n considere os vértices*

$$v_0 := (0, 0, 0, 0, 0, \dots), \quad v_1 := (1, 0, 0, 0, 0, \dots), \quad v_2 := (0, 1, 0, 0, 0, \dots), \quad \text{etc}$$

O n -simplexo elementar Δ_n é a combinação convexa

$$\Delta_n = [v_0, v_1, \dots, v_n] = \{t_0v_0 + \dots + t_nv_n \mid t_i \geq 0, t_0 + \dots + t_n = 1\}.$$

Para $0 \leq i \leq n$, a i -ésima face $\Delta_n^{(i)}$ de Δ_n é definida como

$$\Delta_n^{(i)} = [v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]$$

obtido omitindo-se a i -ésima coordenada. Temos um homeomorfismo $e_i : \Delta_{n-1} \rightarrow \Delta_n^{(i)}$, definido pela aplicação linear que leva v_0, \dots, v_{n-1} em $v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n$, preservando a ordem dos vértices. Sendo X um espaço topológico, um n -simplexo singular em X é definido como sendo uma aplicação contínua $\sigma : \Delta_n \rightarrow X$. A i -ésima face $\sigma^{(i)}$ de σ é definida como o $(n-1)$ -simplexo singular $\sigma^{(i)} : \Delta_{n-1} \rightarrow X$ dado por $\sigma^{(i)} = \sigma \circ e_i$. Para $n = 0, 1, 2, 3$, temos que $\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ são respectivamente um ponto, um segmento unitário, um triângulo e um tetraedro.

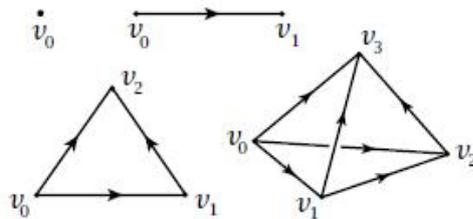


Figure 15. Simplexos.

Por exemplo, as faces de $\Delta_2 = [v_0, v_1, v_2]$ são os segmentos $[v_1, v_2]$, $[v_0, v_2]$ e $[v_0, v_1]$. Se $\sigma : \Delta_2 \rightarrow X$ é um 2-simplexo singular, sua primeira face $\sigma^{(0)}$ é um caminho em X , que parte de $\sigma(v_1)$ e termina em $\sigma(v_2)$.

Seja $C_n(X)$ o grupo abeliano livre gerado pelos n -simplexos singulares, então um elemento de $C_n(X)$ é dado explicitamente por uma soma formal da forma

$$n_1\sigma_1 + \dots + n_r\sigma_r$$

com $n_i \in \mathbb{Z}$, onde $\sigma_i : \Delta_n \rightarrow X$ são n -simplexos singulares distintos. Outra maneira de pensar em $C_n(X)$ é como o conjunto de vetores (n_σ) com entradas $n_\sigma \in \mathbb{Z}$, uma para cada n -simplexo singular $\sigma : \Delta_n \rightarrow X$, de modo que $n_\sigma \neq 0$ somente para um número finito de entradas. A soma é feita componente a componente.

Definição 5.3.2 Definimos o bordo $\partial_n : C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X)$ como sendo o homomorfismo de grupos abelianos dado por

$$\partial_n(\sigma) := \sum_{0 \leq i \leq n} (-1)^i \sigma^{(i)}$$

Assim verifica-se que esta convenção de sinais implica que

$$\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0 \iff \text{im } \partial_n \subset \text{ker } \partial_{n-1}.$$

Definimos o n -ésimo grupo de homologia com coeficientes em \mathbb{Z} , denotado por $H_n(X, \mathbb{Z})$, ou simplesmente por $H_n(X)$, como sendo o quociente

$$H_n(X) := \frac{\text{ker } \partial_{n-1}}{\text{im } \partial_n}$$

Por exemplo, se $\sigma, \rho, \tau : \Delta_1 \rightarrow X$ são três caminhos “fechando um laço”, isto é, com $\sigma(v_1) = \rho(v_0)$, $\rho(v_1) = \tau(v_0)$ e $\tau(v_1) = \sigma(v_0)$, então

$$s := \sigma - \rho + \tau \in \text{ker } \partial_1$$

pois

$$\partial s = \sigma(v_1) - \sigma(v_0) + \rho(v_1) - \rho(v_0) + \tau(v_1) - \tau(v_0) = 0.$$

Se ocorrer de que σ, ρ, τ são os lados de um “triângulo”, isto é, existe um 2-simplexo singular $\psi : \Delta_2 \rightarrow X$ com $\psi^{(0)} = \sigma$, $\psi^{(1)} = \rho$ e $\psi^{(2)} = \tau$, então $s = \partial_2 \psi$ e portanto a imagem de s em $H_1(X)$ será 0. Isto está em conformidade com a idéia de que o H_1 mede buracos do tipo limitado por laços, pois o laço correspondente a s é restrição de uma aplicação contínua $\psi : \Delta_2 \rightarrow X$ e portanto é homotópico a 0. Estar no ker de ∂_1 é uma maneira algébrica de dizer que os caminhos correspondentes formam um laço; estar na imagem de ∂_2 indica que este laço é homotópico a 0.

Se $f : X \rightarrow Y$ é uma aplicação contínua, temos um homomorfismo de grupos

$$\begin{aligned} H_n(f) : H_n(X) &\rightarrow H_n(Y) \\ [\sigma] &\rightarrow [f \circ \sigma] \end{aligned}$$

onde $[\sigma]$ denota a imagem do n -simplexo singular σ em $H_n(X)$, e similarmente para $[f \circ \sigma]$.

Propriedades da Homologia. Para efetivamente calcular os grupos $H_n(X)$, precisamos introduzir uma espécie de “homologia relativa” a um subespaço, como segue.

Sendo X um espaço e $A \subset X$ um subespaço, seja $C_n(X, A)$ o grupo quociente $C_n(X)/C_n(A)$. Se a aplicação do bordo $\partial : C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X)$ toma valores em $C_n(A)$ e os envie em $C_{n-1}(A)$, isso induz uma aplicação do bordo nos grupos quocientes $\partial : C_n(X, A) \rightarrow C_{n-1}(X, A)$, de onde segue a existência da seqüência exata de complexos

$$0 \rightarrow C_\bullet(A) \rightarrow C_\bullet(X) \rightarrow C_\bullet(X/A) \rightarrow 0, \quad (5.1)$$

Definimos o n -ésimo grupo de homologia de X relativo a A como

$$H_n(X/A) := H_n(C_\bullet(X/A))$$

Podemos interpretar esta situação relativa como a que obteríamos “reduzindo A a um único ponto”. Por exemplo, se $\sigma : \Delta_1 \rightarrow X$ é um 1-simplexo singular com $\sigma(v_0), \sigma(v_1) \in A$, então $\partial_1 \sigma = \sigma(v_1) - \sigma(v_0) \in C_0(A)$, que se anula em $C_0(X/A)$. Portanto $[\sigma] \in C_1(X/A)$ satisfaz $[\sigma] \in \text{Ker } \partial_1$, mesmo que o caminho definido por σ não seja um laço em X . Mas σ é um “laço relativo a A ”.

A importância dos grupos de homologia relativa reside no fato de que, a partir da seqüência exata de complexos (5.1), podemos mostrar a existência de uma seqüência exata longa

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow H_2(A) &\rightarrow H_2(X) \rightarrow H_2(X/A) \\ &\rightarrow H_1(A) \rightarrow H_1(X) \rightarrow H_1(X/A) \\ &\rightarrow H_0(A) \rightarrow H_0(X) \rightarrow H_0(X/A) \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (5.2)$$

que fornece informações sobre os grupos $H_n(X)$ a partir dos grupos “menores” $H_n(A)$ e $H_n(X/A)$. Em muitos casos, as informações obtidas a partir da seqüência exata acima são suficientes para se calcular $H_n(X)$. Por exemplo, se A é um ponto de X , então $H_n(A) = 0$ para $n \geq 1$.

Definição 5.3.3 Dada uma seqüência de grupos A_n e de homomorfismos $\alpha_n : A_n \rightarrow A_{n-1}$, representada por

$$\cdots \rightarrow A_{n+1} \xrightarrow{\alpha_{n+1}} A_n \xrightarrow{\alpha_n} A_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow A_0,$$

então a seqüência de homomorfismo é dita se exata se $\text{Ker } \alpha_n = \text{Im } \alpha_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

O fato de uma seqüência ser exata possibilita diversas conclusões sobre os grupos nela envolvidos, por o exemplo:

1. $0 \rightarrow A \xrightarrow{\alpha} B$ é exata se $\text{Ker } \alpha_n = 0$, i.e., α é injetiva;
2. $B \xrightarrow{\alpha} A \rightarrow 0$ é exata se $\text{Im } \alpha = B$, i.e., α é sobrejetiva;
3. $0 \rightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \rightarrow 0$ é exata se α é um isomorfismo (segue de 1.) e 2.).

Definição 5.3.4 *Seja A um subespaço de um espaço topológico X e \mathbb{F} um corpo. Para todo inteiro n , denotaremos por $H_n(X, A; \mathbb{F})$ o n -ésimo grupo de homologia do par $(X; A)$ sobre o corpo \mathbb{F} .*

Quando não restar dúvidas a respeito de qual é o corpo na homologia em questão, denotaremos o n -ésimo grupo de homologia relativa apenas por $H_n(X; A)$. Para $n \leq -1$, $H_n(X; A) = 0$, para $n \geq 0$, os grupos de homologia serão espaços vetoriais sobre \mathbb{F} . Denotaremos por $f : (X; A) \rightarrow (Y; B)$ a toda aplicação contínua $f : X \rightarrow Y$ tal que $f(A) \subset B$. Para tais funções, podemos sempre considerar o seguinte homomorfismo induzido:

$$f_n : H_n(X; A) \rightarrow H_n(Y; B).$$

Enunciaremos algumas propriedades concernentes aos homomorfismos f_n e ∂_n , que são resultados clássicos da homologia singular. Tais resultados podem ser tomados como axiomas para construção de uma teoria de homologia abstrata. Neste caso eles são conhecidos como axiomas de *Eilenberg-Steenrod*.

Teorema 5.3.5 *Seja X, Y espaços topológicos com $C \subset A \subset X$, $D \subset B \subset Y$. Então existe um operadores de bordo*

$$\partial_n : H_n(X; A) \rightarrow H_{n-1}(A; C) \quad e \quad \partial_n : H_n(Y; B) \rightarrow H_{n-1}(B; D)$$

tais que

- $\text{Id}_n = \text{Id}$;
- $(g \circ f)_n = g_n \circ f_n$;
- O diagrama abaixo é comutativo

$$\begin{array}{ccc} H_n(X; A) & \xrightarrow{f_n} & H_n(Y; B) \\ \partial_n \downarrow & & \partial_n \downarrow \\ H_{n-1}(A; C) & \xrightarrow{(f|_A)_{n-1}} & H_{n-1}(B; D) \end{array}$$

- (exatidão) Sejam

$$i : (A; C) \rightarrow (X; C) \quad e \quad j : (X; C) \rightarrow (X; A)$$

aplicações de inclusão, então a seqüência de homologia

$$\cdots \longrightarrow H_{n+1}(X; A) \xrightarrow{\partial_{n+1}} H_n(A; C) \xrightarrow{i_n} H_n(X; C) \xrightarrow{j_n} H_n(X; A) \longrightarrow \cdots$$

é exata.

- (Invariância homotópica) Se f e g são homotópicas (i.e., $f = h(0; \cdot)$, $g = h(1; \cdot)$) para alguma aplicação contínua $h : [0; 1] \times (X; A) \longrightarrow (Y; B)$, tal que $h([0; 1] \times A) \subset B$, então $f_n = g_n$;
- (Lema da excisão) Dado $(X; A)$, seja U um subconjunto aberto de X tal que $\bar{U} \subset \text{Int } A$. Se $(X - U; A - U)$ então a aplicação de inclusão induz um isomorfismo

$$H_n(X - U; A - U) \cong H_n(X; A);$$

- Se P é um ponto do espaço, então $H_n(P) = 0$, para $n \neq 0$ e $H_0(P) \cong \mathbb{Z}$.

Recorde que o $H_k(X, A; \mathbb{F})$ é um espaço vetorial sobre \mathbb{F} , cuja dimensão será denotada por $\lambda^k(X, A; \mathbb{F})$. Quando \mathbb{F} for um corpo racional \mathbb{Q} , estes serão chamados de *números de Betti* de (X, A) . Se esses números são finitos, e somente uma quantidade finita não se anula, então a *característica de Euler* de (X, A) é definida por

$$\chi'(X, A) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \lambda_k(X, A; \mathbb{F}).$$

Quando X é uma variedade compacta e A é uma sub-variedade, então $\chi'(X, A)$ é definida e independe do corpo \mathbb{F} .

Passaremos agora às desejadas desigualdades de Morse.

Teorema 5.3.6 *Seja $f : M \longrightarrow [a, b]$ uma função de Morse admissível do tipo (v_0, \dots, v_n) sobre uma variedade compacta. Seja \mathbb{F} um corpo e defina $\beta_k := \dim H_k(M, f^{-1}(a); \mathbb{F})$. Então*

$$i) \sum_{k=0}^m (-1)^{k+m} v_k \geq \sum_{k=0}^m (-1)^{k+m} \beta_k, \text{ para } 0 \leq m \leq n;$$

$$ii) \sum_{k=0}^n (-1)^k v_k = \sum_{k=0}^n (-1)^k \beta_k = \chi'(M, f^{-1}(a))$$

Antes de provarmos o teorema, vamos chamar a atenção para os seguintes corolários.

Corolário 5.3.7 *Seja M uma variedade compacta, $f : M \rightarrow [a, b]$ uma função de Morse admissível do tipo (v_0, \dots, v_n) , tal que $f^{-1}(a) = \emptyset$, e $\beta_k = \dim H_k(M, \mathbb{F})$, onde \mathbb{F} é um corpo. Então (1) e (2) do Teorema 5.3.6 são válidos. Em particular a soma alternada dos tipos de números é igual a característica de Euler $\chi'(M) = \sum_{k=0}^n (-1)^k v_k$.*

Observe que, de acordo com o lema de Morse, $v_k(f) = v_{n-k}(-f)$, de onde segue o seguinte resultado.

Corolário 5.3.8 *A característica de Euler de uma variedade compacta de dimensão ímpar e sem fronteira é 0.*

Prova. Seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de Morse do tipo (v_0, \dots, v_n) . Seja $a < f(x) < b$ para todo $x \in M$ e suponha que $f : M \rightarrow [a, b]$ seja uma função de Morse admissível (note que, de acordo com a topologia diferencial, uma tal função sempre existe, cf. [4]). Então, pelo Teorema 5.3.7 aplicado a f e $-f$ teremos

$$\begin{aligned} \chi'(M) &= \sum_{k=0}^n (-1)^k v_k = \sum_{k=0}^n (-1)^k v_{n-k}(-f) \\ &= (-1)^n \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} v_{n-k}(-f) \\ &= -\chi'(M) \end{aligned}$$

■

A desigualdade $i)$ no Teorema 5.3.6 pode ser convenientemente arranjada como segue: Tome $\delta_k := v_k - \beta_k$, então

$$\begin{aligned} \delta_0 &\geq 0 \\ \delta_1 &\geq \delta_0 \geq 0 \\ \delta_2 &\geq \delta_1 - \delta_0 \geq 0 \end{aligned}$$

e em geral

$$\delta_{m+1} \geq \delta_m - \delta_{m-1} + \dots + (-1)^m \delta_0.$$

Em particular, $\delta_k \geq 0$, $k = 0, \dots, n$ e isso prova o seguinte resultado:

Corolário 5.3.9 *No Teorema 5.3.6 e 5.3.7 $v_k \geq \beta_k$, $k = 0, \dots, n$.*

Antes de provarmos o Teorema 5.3.6 faremos uma pequena digressão a respeito de separação de pontos críticos. Diremos que uma função de Morse f separa pontos críticos, isto é, $f(z_1) \neq f(z_2)$ se z_1, z_2 são pontos distintos. Quando podemos encontrar uma perturbação de f em vizinhanças disjuntas $U_i \subset M \setminus \partial M$ de pontos z_i . Defina uma função $g : M \rightarrow \mathbb{R}$ do seguinte tipo: Fora da união dos U_i , $g = f$ e em U_i nós temos

$$g(x) = f(x) + \epsilon_i \lambda_i(x)$$

onde a aplicação $\lambda_i : M \rightarrow [0, 1]$, de classe C^∞ , tem suporte em U_i e é igual a 1 em uma vizinhança de z_i enquanto $\epsilon_i \geq 0$. Como o máximo de ϵ_i tende para 0, $g \rightarrow f$ em $C_s^2(M, \mathbb{R})$. Assim para ϵ_i pequeno, g será uma função de Morse tendo os mesmos pontos críticos de f e essa terá o mesmo índice. Note que podemos escolher os ϵ_i s de forma que g separe os pontos críticos z_i .

Prova do Teorema 5.3.6.

De acordo com a digressão do parágrafo anterior, sem perda de generalidade, podemos supor que f separa os pontos críticos z_1, \dots, z_p . Tome $f(z_i) = c_i$ e considere os pontos críticos de forma crescente com relação aos valores críticos em que $a < c_i < \dots < c_p < b$. Se k_i é o índice de z_i . Considere valores regulares a_0, \dots, a_p tais que

$$a = a_0; \quad a_{i-1} < c_i < a_i; \quad a_p = b$$

Tome $A = f^{-1}(a_0)$, $X_i = f^{-1}[a_0, a_i]$. Assim X_i é obtido de X_{i-1} adjuntando uma k_i -célula, que denotaremos por

$$X_i = X_{i-1} \cup e^{k_i}.$$

Defina $\alpha(i, j) = \dim H_i(X_j, X_{j-1})$, onde o grupo de homologia sempre tem coeficientes no corpo \mathbb{F} . Pelo Lema da excisão do Teorema 5.3.5

$$H_i(X_j, X_{j-1}) \approx H_i(D^{k_j}, \partial D^{k_j}).$$

Portanto

$$\alpha(i, j) = \begin{cases} 1 & , \text{ se } i = k_j \\ 0 & , \text{ se } i \neq k_j \end{cases}.$$

Defina $\beta(i, j) = \dim H_i(X_j, A)$. Assim X_j é obtido por A adjuntando células de dimensão

$\leq n$, $\beta(i, j) = 0$ para $i > n$. Considere a seqüência exata da tripla (X_j, X_{j-1}, A) :

$$0 \rightarrow H_n(X_{j-1}, A) \rightarrow H_n(X_j, A) \rightarrow H_n(X_j, X_{j-1}) \rightarrow$$

$$H_{n-1}(X_{j-1}, A) \cdots H_0(X_j, X_{j-1}) \rightarrow 0.$$

Isso implica exatamente que a soma alternada das dimensões dos espaços vetoriais na seqüência tende a zero. Agrupando 3 termos de cada vez nesta soma teremos:

$$0 = \sum_{i=0}^n (-1)^i [\beta(i, j-1) - \beta(i, j) + \alpha(i, j)].$$

Tomando-se a soma sobre j teremos

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n (-1)^i \left[\sum_{j=1}^n \alpha(i, j) \right] &= \sum_{i=0}^n (-1)^i [\beta(i, n) - \beta(i, 0)] \\ &= \sum_{i=0}^n (-1)^i \beta_i \end{aligned}$$

porque $\beta(i, n) = \beta_i$ e $\beta(i, 0) = 0$. Observando que $\sum_{i=0}^n \alpha(i, j)$ é o número de $j \in \{1, \dots, n\}$ tal que $k(j) = i$, que é v_i . Portanto

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i v_i = \sum_{i=0}^n (-1)^i \beta_i.$$

Isso prova a parte *ii*) do Teorema 5.3.6. A prova de *i*) é similar, a partir da seqüência exata

$$0 \rightarrow K_{m,j} \rightarrow H_m(X_{j-1}, A) \rightarrow H_m(X_j, A) \rightarrow H_m(X_j, X_{j-1})$$

onde o primeiro termo é o Nucleo de $H_m(X_{j-1}, A) \rightarrow H_{m-1}(X_j, A)$ e o resto da seqüência é como antes. Seja $k_{m,j} = \dim K_{m,j}$. Então $k_{m,j}$ é dado pela soma exata abaixo:

$$k_{m,j} = \sum_{i=0}^m (-1)^{i+m} [\beta(i, j-1) - \beta(i, j) + \alpha(i, j)]$$

Tomando-se a soma sobre os $j = 1, \dots, n$, teremos

$$\sum_{j=1}^n k_{m,j} + \sum_{i=0}^m (-1)^{i+m} \beta_i = \sum_{i=0}^m (-1)^{i+m} \alpha(i, j) = \sum_{i=0}^m (-1)^{i+m} v_i$$

que implica *i*) desde que $k_{m,j} \geq 0$. Assim a prova do Teorema 5.3.6 está completa. ■

Para os que estão afeitos ao conceito de índice de um campo de vetores, o próximo resultado é uma aplicação do Corolário 5.3.7. Trata-se de um célebre *Teorema de Heinz Hopf*.

Corolário 5.3.10 *Seja M uma variedade compacta sem bordo e X um campo de vetores com singularidades isoladas, então*

$$\chi'(M) = \sum_{p \in \text{Sing}(X)} \text{Ind}_p X$$

Prova. A característica de Euler pode ser calculada para qualquer campo de vetor X sobre M que possua uma quantidade finita de zeros. Tome $X = \frac{1}{2} \text{grad } f$, onde $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de Morse e o gradiente é tomado a partir de uma métrica riemanniana sobre M , de tal forma que perto de cada ponto crítico de índice k é introduzido em \mathbb{R}^n por coordenadas de Morse. Seja p um ponto crítico de índice k e (x_1, \dots, x_n) as coordenadas de Morse em $p = (0, \dots, 0)$. Então teremos

$$\begin{aligned} f(x) &= -x_1^2 - \dots - x_k^2 + x_{k+1}^2 + \dots + x_n^2 + f(p); \\ X(x) &= (-x_1, \dots, -x_k, x_{k+1}, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Como X é o produto cartesiano do campo de vetores $Y \subset \mathbb{R}^k$ e $Z \subset \mathbb{R}^{n-k}$, definidos respectivamente por $Y(y) = -y$ e $Z(z) = z$, então

$$\text{Ind}_0 X = (\text{Ind}_0 Y)(\text{Ind}_0 Z) = (-1)^k \cdot 1 = (-1)^k$$

Dessa forma, $\text{Ind}_p X = (-1)^k$ para todo $p \in \text{Sing}(X) = \{p \in M : X(p) = 0\}$. Portanto, a soma dos índices dos zeros de X é $\sum_{k=0}^n (-1)^k v_k$, onde v_k é o número de pontos críticos de índice k . Pelo Corolário 5.3.7 essa é a característica de Euler. ■

6 CW-Complexos

6.1 Complexos Celulares

O teorema fundamental da teoria de Morse relaciona a estrutura dos pontos críticos de uma função de Morse $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ com a existência de uma decomposição da variedade M em células, associando uma célula a cada ponto crítico, com dimensão igual ao índice do respectivo ponto crítico. A abordagem tradicional (cf. [9]) faz uso do conceito de CW -complexo, para traduzir esta relação. O conceito de CW -complexo, introduzido por J. H. C. Whitehead, descreve essencialmente um espaço topológico X munido de uma decomposição em conjuntos fechados

$$\emptyset \subseteq X_0 \subseteq X_1 \subseteq \dots \subseteq X_N \subseteq \dots \subseteq X = \bigcup_{i=0}^{\infty} X_i ,$$

onde cada X_i é obtido de X_{i-1} por adjunção de um número arbitrário de células de dimensão i . O acrônimo “CW” vem do inglês *Closure finite - Weak topology*, onde “closure finite” significa que o bordo de cada célula de dimensão i está coberto por uma união finita de células de dimensão $i - 1$, e “weak topology” quer dizer que X possui a topologia mais fraca que torna fechados os subespaços X_i e contínuas todas as células.

Essencialmente, um complexo celular é uma generalização das estruturas usadas para representar modelos da modelagem geométrica: é uma coleção consistente de células (vértices, arestas, faces...). No detalhe, triangulações de espaços topológicos ou malhas 3D são complexos celulares (cf. Figura 16).

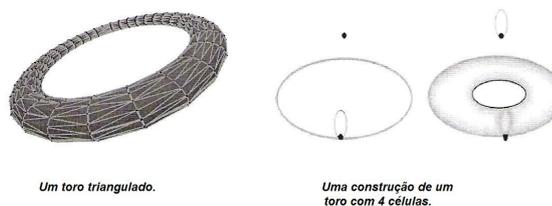


Figura 16. Complexos celulares e malhas 3D.

Sejam X e Y espaços topológicos e A um subespaço de Y . Dada uma função contínua $f : A \rightarrow X$, defina o espaço $Z := X \cup_f Y$ como sendo o espaço quociente $X \cup Y / \sim$, onde o símbolo \cup significa união disjunta e a relação de equivalência \sim é dada por $y \sim f(y)$ para todo $y \in A$. Z é chamado uma *adjunção* de Y em X através da aplicação f (ou através de A , se a aplicação f estiver implícita). Esta construção tem o efeito de “colar” o subespaço A de Y na sua imagem em X através da f .

Definição 6.1.1 *Sejam X um espaço topológico, D^k um k -disco fechado, $S^{k-1} = \partial D^k$ e $\varphi : S^{k-1} \rightarrow X$ é uma aplicação contínua e Y a adjunção $Y := X \cup_{\varphi} D^k$. Então diremos que Y é obtido de X colando uma k -célula, através da aplicação φ . A imagem σ^k de D^k em Y é chamada de k -célula fechada, e a imagem $\text{int}(\sigma^k)$ de $\text{int}(D^k) := D^k \setminus S^{k-1}$ é a correspondente k -célula aberta.*

Observação 6.1.2 *Se $k = 0$, então a definição anterior reduz-se a afirmação de que Y é a união disjunta de X com um espaço unitário. Mais geralmente, diremos que Y é obtido de X colando células se Y é homeomorfo a uma adjunção $X \cup \{\varphi_i\} D^{K_i}$, onde as aplicações $\{\varphi_i\}$ de X são definidas no bordo de esferas de discos fechados $\{D^{K_i}\}$.*

6.2 CW-Complexos

Definição 6.2.1 *Diremos que um espaço topológico X é um CW-complexo, se for um espaço de Hausdorff satisfazendo as seguintes condições:*

1. *Existem subespaços encaixantes*

$$X^{(0)} \subseteq X^{(1)} \subseteq X^{(2)} \subseteq \dots,$$

tais que $X = \bigcup_{n \geq 0} X^{(n)}$;

2. *$X^{(0)}$ é um espaço discreto e $X^{(n)}$ é obtido de $X^{(n-1)}$ através da colagem de uma coleção de n -células, digamos $\{\sigma_i^n : i \in I_n\}$, para todo $n \geq 1$;*
3. *Toda célula fechada está contida numa união finita de células abertas;*
4. *X tem a topologia fraca com relação à coleção de todas as células. Isto é, $A \subset X$ é fechado em X se, e somente se, a interseção de A com toda célula fechada σ é fechada em σ , com relação à topologia induzida.*

O subespaço $X^{(n)}$ é chamado n -esqueleto de X . Os pontos de X^0 são chamados de vértices, ou 0-células. Uma escolha particular de esqueleto e aplicações de colagem para as células é chamada uma estrutura CW no espaço. Um CW -complexo é dito *finito* (respect. *infinito*) se o número de células é finito (respect. infinito). Se $X = X^n$, para algum $n \in \mathbb{N}$, o CW -complexo é dito de dimensão finita; quando isto ocorrer, diremos que a dimensão de X é n .

Definição 6.2.2 *Sejam X um CW -complexo e $A \subset X$, então diremos que A é um sub- CW -complexo de X se, e somente se, for um subconjunto fechado formado pela união de células de X .*

Definição 6.2.3 *Chamamos CW -par a um par $(X; A)$ onde X é um CW -complexo e A é um sub- CW -complexo de X .*

Intuitivamente, X é um CW -complexo se este puder ser construído começando-se de um espaço discreto, primeiramente colando-se 1-células, depois 2-células e assim sucessivamente. Note que a definição acima não permite colar k -células antes de h -células, se $k > h$.

Exemplo 6.2.4 *Dado $X = \mathbb{R}$, podemos considerar em \mathbb{R} uma estrutura natural de CW -complexo como segue: tomando as 0-células e 1-células como sendo, respectivamente, $\sigma_n^0 = \{n\}$ e $\sigma_n^1 = [n; n + 1]$, $n \in \mathbb{Z}$ (ver figura 17).*

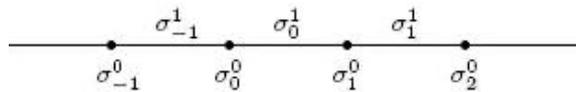


Figura 17. 0-células e 1-células em \mathbb{R} .

Exemplo 6.2.5 *Seja $X = S^n$, então S^n possui uma estrutura de CW -complexo dada por uma 0-célula e uma n -célula, ou seja, $S^n = \sigma^0 \cup \sigma^n$.*

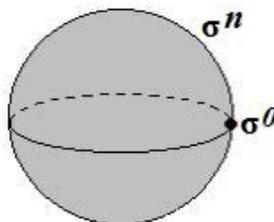


Figura 18. A estrutura de CW -complexo na esfera S^n .

Teorema 6.2.6 *Seja M uma n -variedade compacta e $f : M \longrightarrow [a, b]$ uma função de Morse admissível do tipo (v_0, \dots, v_n) , tal que $\partial M = f^{-1}(b)$. Então M tem o tipo homotópico de um CW-complexo finito, possuindo exatamente v_k células de cada dimensão $k = 0, \dots, n$.*

Prova. A prova é por indução sobre o número de valores críticos. Se c_1 é o menor valor crítico, então c_1 é o mínimo absoluto de f porque $f^{-1}(a)$ é vazio. Escolha $a < c_1 < a_1$, tal que c_1 é o único valor crítico dentro de $[a, a_1]$. Então $f^{-1}[a, a_1]$ tem o tipo homotópico de um conjunto de pontos discretos pelo Teorema 5.3.6, de fato, $f^{-1}[a, a_1]$ é a união disjunta de n -discos. Este é o primeiro passo da indução, as etapas seguintes seguem do Teorema 5.3.6. ■

Usando a mesma idéia, podemos provar o seguinte resultado.

Teorema 6.2.7 *Seja M uma n -variedade compacta, então $(M, \partial M)$ tem o tipo homotópico de um CW-complexo de dimensão $\leq n$.*

O resultado acima não requer a hipótese de compacidade da variedade em geral. No entanto sua prova é mais complicada, exigindo a idéia de triangulação. Não a faremos aqui por fugir ao escopo deste trabalho.

Teorema 6.2.8 *Seja M uma variedade compacta e $A \subset M$ uma subvariedade compacta, $\partial A = \partial M = \emptyset$. Então (M, A) tem o tipo homotópico de um CW-complexo.*

Prova. Seja $N \subset M$ uma vizinhança tubular fechada de A . Assim N é uma subvariedade fechada com fronteira admitindo A um retrato por deformação e (M, A) tem o mesmo tipo de homotopia de (M, N) . Seja $P = \overline{M \setminus N}$; então $\partial P = \partial N = P \cup N$ e $P \cup N = M$. Pelo Teorema 4.2 $(P, \partial P)$ e $(N, \partial N)$ tem o tipo homotópico de um CW-complexo; isso implica Teorema 4.4. ■

Referências

- [1] Abraham, R., Marsden, J.E. & Ratiu, T. *Manifolds, tensor analysis and applications, Third Edition*. Longman Higher Education, 1983-08 .
- [2] Camacho, C. & Lins Neto, A. *Teoria geométrica das folheações*. IMPA, 1979.
- [3] Câmara, L.M. *Uma breve introdução ao cálculo avançado*. Versão preliminar disponível no endereço <http://www.cce.ufes.br/dmat/camara>.
- [4] Guillemin, V. & Pollack, A. *Differential topology*. Prentice Hall, 1974.
- [5] Hatcher, A. *Algebraic topology*. Cambridge University Press, 2002.
- [6] Hirsch, M.W. *Differential topology*. Springer-Verlag, 1994.
- [7] Lima, E.L. *Curso de Análise Vol II*. IMPA, 2005.
- [8] Markov, A. *Insolvability of the problem of homeomorphy*. Proceedings of the International Congress of Mathematics, p. 300-306.
- [9] Milnor, J. *Morse Theory*. Annals of Mathematic Studies Princeton University Press, 1970.
- [10] Munkres, J. R. *Topology*. Prentice Hall, Inc. 1975.
- [11] Spivak, M. *Calculus on Manifolds*. Addison-Wesley Publishing Company, 1995.

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)