



Priscila Kelly Carvalho Sabino

**Aplicando a Metodologia de Diebold e Li à Análise da
Estrutura a Termo da Taxa de Juros Brasileira**

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre pelo Programa de Pós-Graduação do Instituto de Gestão de Riscos Financeiros e Atuariais da PUC-Rio.

Orientador: Luciano Vereda Oliveira

Rio de Janeiro, abril de 2007

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.



Priscila Kelly Carvalho Sabino

**Aplicando a Metodologia de Diebold e Li à Análise da
Estrutura a Termo da Taxa de Juros Brasileira**

Dissertação apresentada como requisito parcial para
obtenção do título de Mestre pelo Programa de Pós-
Graduação do Instituto de Gestão de Riscos
Financeiros e Atuariais da PUC-Rio.

Luciano Vereda Oliveira

Orientador
PUC-Rio

Cristiano A.C. Fernandes

Departamento de Engenharia Elétrica - PUC-Rio

Hélio C. Vieira Lopes

Departamento de Matemática - PUC-Rio

José Eugênio Leal

Coordenador(a) Setorial do Centro Técnico Científico - PUC-Rio

Rio de Janeiro, 02 de abril de 2007

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, da autora e do orientador.

Priscila Kelly Carvalho Sabino

Graduou-se Bacharel em Ciências Atuariais pela Universidade Federal de Minas Gerais em 2005.

Ficha Catalográfica

Sabino, Priscila

Aplicando a Metodologia de Diebold e Li à Análise da Estrutura a Termo da Taxa de Juros Brasileira / Priscila Kelly Carvalho Sabino; orientador: Luciano Vereda Oliveira. - Rio de Janeiro: PUC-Rio, IAPUC, 2007.

v.,63f : il. ; 29,7 cm

1. Dissertação (mestrado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Instituto de Gestão de Riscos Financeiros e Atuariais da PUC-Rio.

Incluí referências bibliográficas.

1. IAPUC - Tese. 2. Estrutura a Termo da Taxa de Juros. 3. Diebold e Li. 4. Previsão. I. Oliveira, Luciano Vereda. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Instituto de Gestão de Riscos Financeiros e Atuariais da PUC-Rio. III. Título.

Resumo

Sabino, Priscila. **Aplicando a Metodologia de Diebold e Li à Análise da Estrutura a Termo da Taxa de Juros Brasileira**. Rio de Janeiro, 2007. 63p. Dissertação de Mestrado - Departamento de Instituto de Gestão de Riscos Financeiros e Atuariais da PUC-Rio, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

O principal objetivo desse trabalho é aplicar o arcabouço proposto por Diebold e Li (2006) para modelar o comportamento da curva de juros brasileira e gerar previsões de curto, médio e longo prazos para a sua trajetória futura. O modelo é estimado e as previsões geradas a partir dele são comparadas com as previsões de outros modelos tradicionalmente utilizados como base de comparação. Os resultados alcançados nos levam a concluir que o modelo proposto por Diebold e Li não é adequado para o caso brasileiro, pois é superado por meros modelos univariados para quaisquer horizontes de previsão e para quaisquer prazos de vencimento ao longo da curva de juros. São feitas algumas conjecturas acerca das razões desse fracasso, e essas conjecturas inspiram o desenvolvimento de duas variantes do modelo original. Os resultados obtidos indicam que as modificações propostas são animadoras, pois uma das variantes consegue gerar previsões de longo prazo de qualidade superior às geradas a partir dos modelos competidores.

Palavras-chave

Estrutura a Termo da Taxa de Juros; Análise de Componentes Principais; Análise Fatorial; Previsão.

Abstract

Sabino, Priscila. Applying Diebold and Li's Methodology to Estimate and Forecast the Brazilian Yield Curve. Rio de Janeiro, 2007. 63p. MsC Thesis - Instituto de Gestão de Riscos Financeiros e Atuariais da PUC-Rio, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

The main objective of the study is to model the Brazilian interest yield curve using Diebold and Li (2006) framework, in order to produce short, medium and long-term forecasts. We estimate the model and then compare its term-structure forecasts with forecasts based on standard benchmark models. Our results lead to the conclusion that the model proposed by Diebold and Li is not consistent with Brazilian specific evidence, since it is outperformed by simple univariate models, for all forecast horizons, with any maturity choice. We make some theoretical conjectures to explain why the attempt have failed, which have inspired the development of two new variants of the original model. The new results indicate that the model improvements proposed are promising, because one of the variants succeeds in producing long-term forecasts of greater accuracy than those based on competing models.

Keywords

Term Structure of Interest Rates; Principal Components Analysis; Factorial Analysis; Forecast.

Sumário

1 Introdução	10
2 Noções básicas de Análise de Componentes Principais e Análise de Fatores	15
3 Principais aplicações para a análise da curva de juros	21
4 Descrição dos Dados	27
5 A Metodologia Diebold e Li	34
6 Aplicação da metodologia de Diebold e Li para a curva de juros brasileira	43
7 Conclusão	60
Referências Bibliográficas	62

Lista de tabelas

Tabela 1 - Autovetores associados aos três autovalores de maior magnitude de acordo com Varga e Valli	24
Tabela 2 - Estatísticas das taxas de swap DI-pré	30
Tabela 3 - Matriz de correlação entre as taxas de swap DI-pré	30
Tabela 4 - Resultados dos testes de raiz unitária realizados com a série temporal relativa à taxa de swap DI-pré de 1 mês	31
Tabela 5 - Resultados dos testes de raiz unitária realizados com a série temporal relativa à taxa de swap DI-pré de 2 meses	31
Tabela 6 - Resultados dos testes de raiz unitária realizados com a série temporal relativa à taxa de swap DI-pré de 3 meses	32
Tabela 7 - Resultados dos testes de raiz unitária realizados com a série temporal relativa à taxa de swap DI-pré de 4 meses	32
Tabela 8 - Resultados dos testes de raiz unitária realizados com a série temporal relativa à taxa de swap DI-pré de 6 meses	32
Tabela 9 - Resultados dos testes de raiz unitária realizados com a série temporal relativa à taxa de swap DI-pré de 1 ano	33
Tabela 10 - Resultados dos testes de raiz unitária realizados com a série temporal relativa à taxa de swap DI-pré de 2 anos	33
Tabela 11 - Estatísticas dos fatores comuns para a curva de juros norte-americana	38
Tabela 12 - Valores médios, medianas, desvios-padrão, autocorrelações de ordem 1, 3 e 6 e autocorrelações cruzadas dos fatores $\beta_{1,t}$, $\beta_{2,t}$ e $\beta_{3,t}$	47
Tabela 13 - Erros médios quadráticos registrados pelo modelo de Diebold e Li e pelas alternativas RW, AR(1), VAR(1), Diebold e Li 2 e Diebold e Li 3 quando $h=1$	52
Tabela 14 - Erros médios quadráticos registrados pelo modelo de Diebold e Li e pelas alternativas RW, AR(1), VAR(1), Diebold e Li 2 e Diebold e Li 3 quando $h=6$	52
Tabela 15 - Erros médios quadráticos registrados pelo modelo de Diebold	

e Li e pelas alternativas RW, AR(1), VAR(1), Diebold e Li 2 e Diebold e Li
3 quando $h=12$ 52

Lista de figuras

Figura 1 - Factor loadings encontrados por Varga e Valli	25
Figura 2 - Comportamento recente das taxas de swap DI-pré de 1, 2, 3, 4, 6, 12 e 24 meses	29
Figura 3 - Curvas de juros médias observadas entre o final de 1997 e meados de 2006	30
Figura 4 - Perfis correspondentes a cada <i>factor loading</i> . Os fatores foram gerados com λ_t constante e igual a 0.448321.	36
Figura 5 - Comparação entre os fatores comuns empíricos (linhas pontilhadas) e estimados com base no arcabouço de Nelson e Siegel (linhas cheias).	47
Figura 6 - Comparação entre os fatores comuns estimados com base na análise de componentes principais (linhas pontilhadas) e com base no arcabouço de Nelson e Siegel (linhas cheias)	49
Figura 7 - Perfis dos <i>loadings</i> recuperados por meio de análise de componentes principais	49
Figura 8 - Comparação entre os fatores comuns estimados com base no framework de Nelson e Siegel modificado (linhas cheias) e empíricos (linhas pontilhadas)	56
Figura 9 - Curvas de juros observadas e previstas pela segunda variante do modelo de Diebold e Li (Diebold e Li 3) para junho de 2005 ($h=1$), novembro de 2005 ($h=6$) e maio de 2006 ($h=12$). As previsões foram calculadas em maio de 2005.	58

1

Introdução

A construção de modelos para a curva de juros tem despertado enorme atenção nas áreas de Economia, Finanças e Atuária pelos mais variados motivos. Para os economistas em geral, a curva de juros é uma peça fundamental porque reflete os preços que os consumidores devem pagar para “adiantar” seus planos de consumo, os custos que os investidores devem arcar para implementar os seus projetos de investimentos e as taxas que o Governo deve pagar para que o mercado absorva os títulos da dívida pública que ele emite¹. Para os macroeconomistas, a curva de juros é importante porque reflete as expectativas dos agentes com relação à trajetória futura da taxa de juros de curto prazo, que é o instrumento que as autoridades monetárias manipulam a fim de controlar a taxa de inflação e estabilizar a atividade econômica; em outras palavras, ela traz informação acerca das decisões correntes e futuras de política monetária². Para profissionais ligados à análise de conjuntura e à produção de previsões macroeconômicas, a estrutura a termo da taxa de juros pode ser utilizada para obter indicadores antecedentes de inflação e nível de atividade, insumos importantes na elaboração de cenários para o comportamento futuro da economia³.

As aplicações na área de Finanças também são inúmeras. Com efeito, a curva de juros fornece os fatores de desconto necessários para calcular o preço de mercado dos diversos ativos disponíveis. No caso de ativos de renda fixa, os recebimentos futuros relativos aos *coupons* e ao valor de face devem ser “trazidos” a valor presente para que o título em questão possa ser devidamente

¹ Ver, por exemplo, “*Macroeconomics in the Global Economy*”, de Geoffrey Sachs e Felipe Larrain, Prentice Hall, 1ª edição, 1993.

² Ver, por exemplo, “*Discretion Versus Policy Rules in Practice*”, de John B. Taylor, Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy, 39, 1993; “*Interest and Prices*”, de Michael Woodford, Princeton University Press, 2003; e “*The Econometrics of Financial Markets*”, de John Campbell, Andrew Lo e Archie McKinley, Princeton University Press, 1996.

avaliado; no caso de ativos de renda variável, uma das formas propostas para calcular o seu preço justo exige que o analista seja capaz de calcular o valor presente do fluxo de dividendos e do preço de revenda da ação. Ora, as duas operações exigem que os fatores de desconto que “trazem” recebimentos futuros para valor presente sejam conhecidos, e é justamente essa informação que está contida na curva de juros. Outra aplicação relevante está no apreçamento de derivativos; no caso de opções de compra de ações, por exemplo, a fórmula de Black e Scholes indica que o preço justo depende da esperança acerca da taxa de juros acumulada até o seu vencimento, informação que também pode ser extraída da estrutura a termo⁴.

As aplicações na área de seguros e pensões também são relevantes, com destaque para a sua utilização na gestão de ativos e passivos (*Asset Liability Management*). Tendo em vista que os objetivos fundamentais das instituições securitárias e previdenciárias são extrair o maior retorno possível dos investimentos feitos a partir das contribuições de seus segurados e evitar níveis de risco significativos a fim de garantir que os passivos futuros sejam pagos, é tarefa essencial da administração dessas entidades a elaboração e manutenção de modelos que sejam capazes de retratar o estado atual e gerar previsões acerca da trajetória futura dos retornos dos investimentos e do custo das obrigações a pagar. Ora, a curva de juros é peça fundamental desses modelos porque informa as rentabilidades de títulos de renda fixa tradicionais com os mais diversos prazos de vencimento (informação importante na medida em que esses títulos constituem parte significativa das carteiras dessas entidades), reflete as expectativas acerca das trajetórias futuras dessas rentabilidades (propriedade que permite a sua utilização na avaliação do risco de reinvestimento) e fornece os fatores necessários para o cálculo de valores presentes e futuros, que são dados indispensáveis para a análise dos riscos de solvência e liquidez⁵. Conclui-se,

³ Ver, por exemplo, “*Why Does the Yield Curve Predict Output and Inflation?*”, de Arturo Estrella, *The Economic Journal*, 115, 2005.

⁴ Ver, por exemplo, “*Modern Portfolio Theory and Investment Analysis*”, de Edwin Elton, Martin Gruber, Stephen Brown e William Goetzmann, John Wiley and Sons, 6ª edição, 2006.

⁵ Diz-se que uma empresa está insolvente quando o valor de mercado dos seus ativos não supera o valor de mercado das suas obrigações; o risco de solvência, portanto, se relaciona com a probabilidade da empresa se tornar insolvente. Por outro lado, diz-se que uma empresa está ilíquida quando, em um determinado instante de tempo, ela não possui recebimentos em volume

portanto, que modelos capazes de descrever o comportamento passado e inferir a trajetória futura da curva de juros são partes essenciais de qualquer sistema de gestão de ativos e passivos.

Esse trabalho se insere no esforço de modelar o comportamento da estrutura a termo da taxa de juros, de importância inegável em virtude das várias aplicações discutidas acima. Mais especificamente, o principal objetivo desse trabalho é aplicar a metodologia proposta por Diebold e Li (2006) para modelar o comportamento da curva de juros brasileira e gerar previsões de curto, médio e longo prazos para a sua trajetória futura. Esses autores propõem um *framework* no qual a forma funcional proposta por Nelson e Siegel (1987) é utilizada para ajustar a dinâmica da curva de juros norte-americana de maneira parcimoniosa e, portanto, mais adequada para a realização de exercícios de previsão fora da amostra. A simplicidade do modelo, porém, não impede que ele retrate aspectos essenciais do comportamento da curva de juros norte-americana. Mais especificamente, o modelo é construído de tal forma que os fatores *level*, *slope* e *curvature*, que foram identificados em vários trabalhos como “forças” fundamentais na determinação da dinâmica da estrutura a termo, estão presentes.

Diebold e Li concluem que o modelo por eles proposto é capaz de alcançar resultados satisfatórios. Mais especificamente, os autores afirmam que, apesar dos resultados serem decepcionantes para previsões de curto prazo (pois a diferença de desempenho entre o modelo proposto e um mero *random walk* não é estatisticamente significativa), os resultados para previsões de médio e longo prazo são animadores. Em particular, o desempenho preditivo para previsões de longo prazo supera o desempenho dos demais competidores para todos os prazos considerados ao longo da curva de juros, e as diferenças observadas são estatisticamente significativas. O quadro geral sugere que o desempenho preditivo

suficiente para cobrir as suas obrigações; o risco de liquidez, portanto, está associado à probabilidade de uma empresa não ter caixa para honrar seus pagamentos em um determinado instante de tempo. Repare que uma empresa pode estar plenamente solvente e, mesmo assim, vivenciar períodos onde o risco de liquidez é elevado. Os fatores de desconto fornecidos pela curva de juros são utilizados para avaliar e comparar o valor de mercado de ativos e passivos a fim de verificar a solvência; eles são também necessários para calcular os pagamentos e recebimentos esperados para cada instante de tempo e, com isso, avaliar a possibilidade de problemas de liquidez em momentos específicos.

do modelo de Diebold e Li para dados norte-americanos é aceitável e melhora à medida que o horizonte de previsão aumenta; espera-se, portanto, que esse desempenho favorável se repita para dados brasileiros, possibilidade que esse trabalho se encarrega de averiguar.

Os resultados alcançados, porém, nos levam a concluir que o modelo de Diebold e Li não é adequado para o caso brasileiro, pois é freqüentemente batido por meros modelos univariados para quaisquer horizontes de previsão e para quaisquer prazos de vencimento considerados. As principais razões apontadas para esse fracasso são duas: (i) o modelo não incorpora o fato de que choques inflacionários podem alterar a volatilidade das taxas relativas a cada prazo, e (ii) o modelo não leva em consideração que os fatores que determinam o comportamento da curva de juros brasileira podem estar correlacionados. Essas constatações nos levaram a adaptar o modelo proposto por Diebold e Li a fim de incorporar o segundo ponto levantado; os resultados obtidos indicam que as modificações são importantes, pois uma das variantes do modelo original consegue gerar boas previsões de longo prazo, ou seja, previsões de qualidade superior àquelas que foram geradas a partir dos modelos competidores.

Além dessa introdução, o trabalho contém as seguintes seções:

- A Seção 2 traz uma breve revisão acerca das análises de componentes principais e de fatores.
- A Seção 3 apresenta e discute os principais resultados das aplicações da análise de componentes principais para os EUA e para o Brasil.
- A Seção 4 discute os dados utilizados para representar a curva de juros brasileira e estimar os modelos preditivos que foram testados e que serviram de base de comparação.
- A Seção 5 contém uma descrição do *framework* de Nelson e Siegel e da metodologia proposta por Diebold e Li. Adicionalmente, ela traz uma análise do desempenho preditivo dessa proposta quando aplicada a dados norte-americanos.
- A Seção 6 apresenta os resultados da aplicação da metodologia de Diebold e Li para a curva de juros brasileira, discute prováveis razões para a baixa qualidade dos resultados obtidos, propõe modificações que atacam uma das razões

identificadas e tornam o *framework* mais adequado para o caso brasileiro e, finalmente, discute os resultados das variantes assim construídas em exercícios de previsão fora da amostra.

- A Seção 7 conclui o trabalho.

2

Noções básicas de Análise de Componentes Principais e Análise de Fatores

De acordo com Richard Johnson e Dean Wichern, a análise de componentes principais (doravante denominada ACP) “... is concerned with explaining the variance-covariance structure of a set of variables through a few linear combination of these variables. Its general objectives are (1) data reduction and (2) interpretation”. Ainda de acordo com os mesmos autores, a técnica se baseia no fato de que “... although the original p components are required to reproduce the total system variability, often much of this variability can be accounted for by a small number k of principal components. If so, there is almost as much information in the k components as there is in the original p variables. The k principal components can then replace the initial p variables, and the original data set, consisting of n measurements on p variables, is reduced to a data set consisting of n measurements on k principal components”. Trata-se, portanto, de uma representação mais parcimoniosa dos dados, que permite uma interpretação facilitada dos vínculos existentes entre as variáveis.

Para formalizar matematicamente as idéias contidas no parágrafo anterior, considere uma coleção de p variáveis aleatórias x_1, x_2, \dots, x_p com matriz de variância-covariância Σ e construa a partir delas um conjunto de p variáveis aleatórias y_1, y_2, \dots, y_p tal que:

$$\begin{aligned}y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1p}x_p = a_1^r X \\y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2p}x_p = a_2^r X \\&\vdots \\y_p &= a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \dots + a_{pp}x_p = a_p^r X\end{aligned}$$

onde $a_i^r = [a_{i1} \ a_{i2} \ \dots \ a_{ip}]$ e $X^r = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_p]$. Por definição, as p componentes principais das variáveis aleatórias x_1, x_2, \dots, x_p são as combinações lineares y_1, y_2, \dots, y_p que têm variância máxima e covariância cruzada zero.

O procedimento utilizado para obter as p componentes principais de x_1, x_2, \dots, x_p começa com o cálculo das variâncias e covariâncias cruzadas das combinações lineares y_1, y_2, \dots, y_p :

$$\text{Var}(y_i) = \text{Var}(a_i^r X) = a_i^r \Sigma a_i \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, p \quad (1)$$

$$\text{Cov}(y_i, y_j) = \text{Cov}(a_i^r X, a_j^r X) = a_i^r \Sigma a_j \quad ; \quad i, j = 1, 2, \dots, p \quad (2)$$

Para calcular a primeira componente principal de x_1, x_2, \dots, x_p é necessário encontrar o vetor a_1 de norma unitária e dimensão $p \times 1$ que faz com que a expressão $a_1^r \Sigma a_1$ assumo o maior valor possível. A condição de 1ª ordem desse problema exige que o vetor a_1 satisfaça $\Sigma a_1 = \mu_1 a_1$, onde μ_1 é o multiplicador de Lagrange associado à restrição de normalização. Essa condição força a_1 a ser um autovetor da matriz Σ , com μ_1 sendo o seu respectivo autovalor. Para a variância de y_1 ser, de fato, a maior possível, é necessário que μ_1 seja o autovalor de Σ com a maior magnitude.

Para calcular a segunda componente principal do conjunto x_1, x_2, \dots, x_p é necessário encontrar o vetor a_2 de norma unitária, dimensão $p \times 1$ e perpendicular a a_1 ⁶ que faz com que a expressão $a_2^r \Sigma a_2$ assumo o maior valor possível. A condição de 1ª ordem desse problema exige novamente que $\Sigma a_2 = \mu_2 a_2$, ou seja, o par (a_2, μ_2) deve corresponder a um autovetor/autovalor de Σ ; mais

⁶ A restrição de que as duas componentes principais y_1 e y_2 devem ser descorrelatadas exige que $a_1^r \Sigma a_2 = 0$ (ver eq.(2)). Substituindo a condição $\Sigma a_2 = \mu_2 a_2$ nesse resultado chega-se a $a_1^r \mu_2 a_2 = \mu_2 a_1^r a_2 = 0$; isso implica que os vetores a_1 e a_2 devem ser perpendiculares.

especificamente, μ_2 é o autovalor com a segunda maior magnitude, pois y_2 é a componente principal com a segunda maior variância. A determinação de a_3, \dots, a_p segue um raciocínio análogo.

O procedimento acima descrito conduz aos resultados de que (i) as p componentes principais de um dado conjunto de p variáveis aleatórias correspondem às p combinações lineares das variáveis pertencentes ao conjunto original; e (ii) os componentes dos p autovetores da matriz de variância-covariância Σ definem os coeficientes de cada combinação. É possível demonstrar também os seguintes resultados⁷:

- $\sum_{i=1}^p \text{Var}(x_i) = \sum_{i=1}^p \lambda_i$, ou seja, a variância total do sistema formado pelas

variáveis aleatórias originais é igual à soma dos autovalores de Σ . Em consequência disso, a proporção da variância total que é explicada pela l -ésima

componente principal é dada por $\lambda_l / \sum_{i=1}^p \lambda_i$.

- O coeficiente de correlação entre a l -ésima componente principal y_l e a m -ésima variável aleatória x_m é dado por $e_{lm} \lambda_l^{1/2} / (\text{Var}(x_m))^{1/2}$, onde e_{lm} denota a m -ésima componente do l -ésimo autovetor de Σ . Dessa maneira, a magnitude de e_{lm} pode ser interpretada como uma medida da importância da m -ésima variável para a l -ésima componente principal.

A análise de componentes principais é um dos insumos mais importantes da análise de fatores. Novamente citando Richard Johnson e Dean Wichern, “... *the essential purpose of factor analysis is to describe, if possible, the covariance relationships among many variables in terms of a few underlying, but unobservable, random quantities called factors*”. O modelo matemático formal pode ser descrito da seguinte maneira: seja X um vetor aleatório de dimensão

⁷ Para maiores detalhes ver Johnson e Wichern.

$p \times 1$ (ou seja, suas componentes são as variáveis aleatórias x_1, x_2, \dots, x_p) tal que $E[X] = \mu$ e $Var(X) = \Sigma$. O modelo de fatores postula que cada variável aleatória em X depende linearmente de m variáveis aleatórias não-observáveis F_1, F_2, \dots, F_m , chamadas fatores comuns, e p fontes adicionais de variação $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_p$, chamadas erros ou fatores específicos:

$$\begin{aligned} x_1 - \mu_1 &= l_{11}F_1 + l_{12}F_2 + \dots + l_{1m}F_m + \varepsilon_1 \\ x_2 - \mu_2 &= l_{21}F_1 + l_{22}F_2 + \dots + l_{2m}F_m + \varepsilon_2 \\ &\vdots \\ x_p - \mu_p &= l_{p1}F_1 + l_{p2}F_2 + \dots + l_{pm}F_m + \varepsilon_p \end{aligned}$$

Em notação matricial, $X - \mu = LF + \varepsilon$, onde L , F e ε têm dimensões $p \times m$, $m \times 1$ e $p \times 1$, respectivamente. Para que o modelo seja uma representação parcimoniosa do comportamento de x_1, x_2, \dots, x_p é necessário ter $m < p$. O elemento (i, j) da matriz L corresponde ao *factor loading* l_{ij} , que mede a influência que o j -ésimo fator exerce sobre a i -ésima variável, enquanto que a i -ésima componente do vetor de fatores específicos ε (ε_i) mede o quanto o comportamento da variável aleatória x_i não pode ser explicado pelo conjunto de fatores comuns F_1, F_2, \dots, F_m . Assume-se também que:

- $E[F] = 0_{m \times 1}$.⁸ (3)

- $E[\varepsilon] = 0_{p \times 1}$. (4)

- $Var(F) = E[FF^{tr}] = I_{m \times m}$. (5)

- $Var(\varepsilon) = E[\varepsilon\varepsilon^{tr}] = \Psi_{p \times p} = \begin{bmatrix} \psi_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \psi_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \psi_p \end{bmatrix}$. (6)

⁸ Para denotar as dimensões de uma matriz M qualquer utilizamos a notação $M_{I,J}$, que indica que a referida matriz possui I linhas e J colunas.

$$\bullet \ \varepsilon \text{ e } F \text{ são independentes, de maneira que } E[\varepsilon F^T] = 0_{p \times m}. \quad (7)$$

O *set-up* acima descrito implica que (i) $Var(X - \mu) = \Sigma = LL^T + \Psi$ e (ii) $Cov(X - \mu, F) = L$. A prova de (i) parte da definição da matriz de variância-covariância de um vetor aleatório e usa as hipóteses das eqs.(5) a (7), conforme pode ser visto a seguir:

$$\begin{aligned} (X - \mu)(X - \mu)^T &= (LF + \varepsilon)(LF + \varepsilon)^T = (LF + \varepsilon)(F^T L^T + \varepsilon^T) \\ &= LFF^T L^T + LF\varepsilon^T + \varepsilon F^T L^T + \varepsilon\varepsilon^T \Rightarrow E[(X - \mu)(X - \mu)^T] = E[LFF^T L^T] + \\ &E[LF\varepsilon^T] + E[\varepsilon F^T L^T] + E[\varepsilon\varepsilon^T] = LE[FF^T]L^T + LE[F\varepsilon^T] + E[\varepsilon F^T]L^T + \\ &E[\varepsilon\varepsilon^T] = LL^T + \Psi \end{aligned} \quad (8)$$

enquanto que a prova de (ii) parte da definição da covariância entre dois vetores aleatórios quaisquer e usa as mesmas hipóteses:

$$\begin{aligned} (X - \mu)F^T &= (LF + \varepsilon)F^T = LFF^T + \varepsilon F^T \Rightarrow E[(X - \mu)F^T] \\ &= E[LFF^T] + E[\varepsilon F^T] = LE[FF^T] + E[\varepsilon F^T] = L \end{aligned} \quad (9)$$

Defina agora a variável $h_i^2 \square l_{i1}^2 + l_{i2}^2 + \dots + l_{im}^2$ (chamada *communality*). De acordo com eq.(8), $Var(x_i) = h_i^2 + \psi_i$, ou seja, a parcela da variância da i -ésima variável aleatória x_i que é explicada pelos fatores comuns F_1, F_2, \dots, F_m está associada a h_i^2 . Repare que o modelo de fatores dá margem a uma representação mais econômica do conjunto x_1, x_2, \dots, x_p , pois permite que Σ (que possui $p(p+1)/2$ elementos) seja escrita como $\Sigma = LL^T + \Psi$, que depende de apenas $m(p+1)$ elementos (os mp *factor loadings* e os p elementos da matriz de variância-covariância de ε).

Em um problema prático o analista dispõe de uma amostra com n observações das variáveis aleatórias x_1, x_2, \dots, x_p e, a partir delas, deseja encontrar um modelo com $m < p$ fatores comuns que possa representar satisfatoriamente a variabilidade dos dados. A amostra permite que o analista calcule uma estimativa para a matriz de variância-covariância “verdadeira” Σ (denotada por S) e, a partir de S , decida se tal representação é razoável ou não. Nas palavras de Richard Johnson e Dean Wichern, “... *if the off-diagonal elements of S are small or those of the sample correlation are essentially zero, the variables are not related and a factor analysis will not prove useful. In these circumstances, the specific factors play the dominant role.*” Mas se S é tal que “... *it deviates from a diagonal matrix, then a factor model can be entertained and the initial problem is one of estimating the factor loadings in L and the specific variances in Ψ .*”

Há um sem número de métodos para estimar os *factor loadings* l_{ij} e as variâncias dos fatores específicos ε_i . O mais popular é o que emana da análise de componentes principais, que propõe o seguinte estimador para L :

$$\hat{L} = \begin{bmatrix} \sqrt{\hat{\lambda}_1} \hat{a}_1 & \sqrt{\hat{\lambda}_2} \hat{a}_2 & \dots & \sqrt{\hat{\lambda}_m} \hat{a}_m \end{bmatrix}_{p \times m} \quad (10)$$

onde supõe-se que m fatores comuns são suficientes para construir o modelo. Os números $\sqrt{\hat{\lambda}_1}, \sqrt{\hat{\lambda}_2}, \dots, \sqrt{\hat{\lambda}_m}$ são os m primeiros autovalores de S , enquanto que os vetores $\hat{a}_1, \hat{a}_2, \dots, \hat{a}_m$ (de dimensão $p \times 1$) são os seus autovetores. As variâncias dos fatores específicos são os elementos da diagonal principal de $S - \hat{L}\hat{L}^r$.

3 Principais aplicações para a análise da curva de juros

A maior parte das ciências oferece um número significativo de aplicações da análise de fatores; em Finanças, a aplicação mais destacada relaciona-se com o estudo da curva de juros, que é o objeto desse trabalho. Os artigos mais conhecidos desse segmento da literatura são “*Common Factors Affecting Bond Returns*”, de Robert Litterman e Jose Scheinkman (*Journal of Fixed Income*, junho de 1991), e “*Explorations into Factors Explaining Money Market Returns*”, de Peter Knez, Robert Litterman e Jose Scheinkman (*The Journal of Finance*, dezembro de 1994).

No primeiro artigo os autores partem de uma amostra onde as variáveis aleatórias x_1, x_2, \dots, x_p são os *excess returns*⁹ de *zero-coupon bonds* de diversos prazos de vencimento emitidos pelo Tesouro norte-americano¹⁰. Além de mostrar que um modelo com três fatores comuns captura razoavelmente bem a variabilidade dos dados (pois a proporção da variância total atribuída a eles alcança 96%), os autores também mostram que:

- As mudanças provocadas por um choque¹¹ no primeiro fator são tais que os *excess returns* associados aos diversos prazos de vencimento variam igualmente. Nas palavras dos autores, “... *the first factor represents essentially a parallel change in yields*”, daí a denominação escolhida para o mesmo (*level*).

- As mudanças provocadas por um choque no segundo fator (que os autores denominam *steepness*) são tais que os *excess returns* associados a prazos mais

⁹ *Excess return*: diferença entre a rentabilidade de um dado ativo financeiro e a taxa de juros sem risco (usualmente aproximada pela FED Funds).

¹⁰ Mais especificamente, a amostra abrangia observações semanais dos *excess returns* de *treasuries* coletadas entre janeiro de 1984 e junho de 1988.

¹¹ Choque: alteração súbita que faz com que o fator F_i aumente σ_i unidades.

curtos (longos) caem (sobem), ou seja, o choque faz com que a curva de juros se torne mais inclinada.

- As mudanças provocadas por um choque no terceiro fator (denominado *curvature*) são tais que os *excess returns* associados a prazos curtos (abaixo de dois anos) caem, os *excess returns* associados a prazos médios (entre dois e dez anos) sobem e os *excess returns* associados a prazos longos (acima de dez anos) caem; dessa maneira, a concavidade da curva de juros aumenta quando o choque se manifesta.

O segundo artigo estende o resultado para títulos de renda fixa em geral, pois a amostra abrange os retornos semanais de *treasuries*, *commercial papers*, *certificates of deposit*, *eurodollar certificates of deposit* e *bankers' acceptances* (os quatro últimos são títulos emitidos por empresas privadas pertencentes aos setores financeiro e não-financeiro). Os prazos de vencimento se situam entre um e doze meses. A amostra possui observações semanais retiradas do período de janeiro de 1985 a agosto de 1988.

Os autores demonstram que um modelo com quatro fatores é capaz de explicar razoavelmente bem a variabilidade dos dados, pois a proporção da variância total dos retornos de cada título que pode ser atribuída a eles é, na maioria dos casos, maior do que 90% (beirando os 98% para os retornos de *commercial papers* de *rating* inferior e com maturidade de três meses). Os autores também mostram que:

- O primeiro fator gera um deslocamento quase paralelo (e para cima) da curva de juros dos *treasuries* (isso é especialmente verdade para maturidades entre dois e doze meses). O efeito sobre títulos de outros setores também pode ser descrito dessa maneira.

- O segundo fator muda a inclinação da curva de juros dos *treasuries*, já que o aumento nos retornos semanais dos títulos curtos é significativamente menor do que o aumento registrado para títulos longos. O efeito sobre títulos de outros

setores é tal que os retornos semanais dos títulos curtos caem, enquanto que os retornos semanais dos papéis mais longos sobem.

- O terceiro fator “separa” *commercial papers* de títulos emitidos pelo setor financeiro (*certificates of deposit, eurodollar certificates of deposit e bankers’ acceptances*), dado que um choque que altera o seu valor afeta negativamente a rentabilidade dos primeiros e positivamente a rentabilidade dos últimos. O terceiro fator não exerce influência alguma sobre a curva de juros dos *treasuries*.

- O quarto fator está associado a variações no risco de crédito, pois “separa” as rentabilidades dos *treasuries* e dos demais títulos privados. No que diz respeito à curva de juros dos *treasuries*, (i) os retornos semanais dos títulos de um mês caem bastante, (ii) os retornos semanais dos títulos de médio prazo (2, 3 e 4 meses) caem moderadamente e (iii) os retornos semanais dos títulos mais longos têm uma queda ainda mais reduzida. O efeito do quarto fator sobre os retornos semanais de títulos privados é tal que a rentabilidade dos títulos curtos cai (a queda, porém, é menos intensa do que a registrada para *treasuries* de prazo equivalente), enquanto que a rentabilidade dos papéis mais longos sobe.

Trabalhos inspirados em Litterman e Scheinkman (1991) foram desenvolvidos para a curva de juros brasileira, chegando a resultados similares. Vamos destacar as seguintes contribuições:

- Varga e Valli (2001): os autores trabalham com as taxas pré-fixadas implícitas em contratos de *swap* DI-pré com prazos de 20, 41, 61, 82, 102, 123, 143, 163, 184, 204, 225 e 245 dias úteis negociados na Bolsa de Mercadorias e Futuros (BM&F)^{12,13}. A amostra contém observações diárias retiradas do período

¹² Os motivos para essa opção serão discutidos oportunamente.

¹³ Um contrato de *swap* consiste em um acordo onde as partes trocam a remuneração incidente sobre as suas posições ativas em um dado período. No caso em questão, o investidor que assume a posição comprada se obriga a remunerar aquele que assumiu a posição vendida com a variação acumulada do CDI de um dia ao longo do período de vigência do contrato. Dessa maneira, se a variação acumulada do CDI de um dia superar o limite acordado entre as partes (que nada mais é do que a cotação do *swap* DI-pré no momento em que o contrato é celebrado), então o comprador paga a diferença para o vendedor. O contrário ocorre caso a variação acumulada do CDI de um dia seja menor do que o limite citado.

de janeiro de 1995 a julho de 1999. Conclui-se que um modelo com três fatores é capaz de explicar razoavelmente bem a variabilidade dos dados (pois a proporção da variância total que pode ser atribuída aos três ultrapassa 94%) e que esses fatores podem ser interpretados como *level*, *steepness* (ou *slope*, conforme utilizado em outros artigos) e *curvature*. A Tabela 1 e a Figura 1 reproduzem os resultados encontrados no artigo. A Tabela 1 mostra os autovetores associados aos três autovalores de maior magnitude, enquanto que a Figura 1 traz uma representação gráfica dos dados da tabela. Repare que a Figura 1 corrobora a interpretação dos autores com relação aos fatores comuns.

Prazos	V1	V2	V3
20	0.1981	-0.5123	0.5789
41	0.2425	-0.4989	0.3027
61	0.2973	-0.3246	-0.3457
82	0.2849	-0.2383	-0.4231
102	0.2783	-0.1823	-0.4763
123	0.3104	0.1810	0.0399
143	0.3102	0.2077	0.0481
163	0.3091	0.2057	0.0993
184	0.2987	0.1767	0.0917
204	0.3054	0.2191	0.0992
225	0.3056	0.2239	0.0840
245	0.3016	0.2138	0.0939

Tabela 1 - Autovetores associados aos três autovalores de maior magnitude de acordo com Varga e Valli

Já o CDI (Certificado de Depósito Interbancário) é um título emitido por instituições financeiras e que é transacionado exclusivamente entre elas no mercado interbancário. As instituições que necessitam de recursos para complementar as suas reservas bancárias emitem esses títulos, que são adquiridos por outras instituições com reservas em excesso. Quando o título possui maturidade de apenas um dia, a sua taxa de emissão é chamada *overnight*, ou simplesmente *over*.

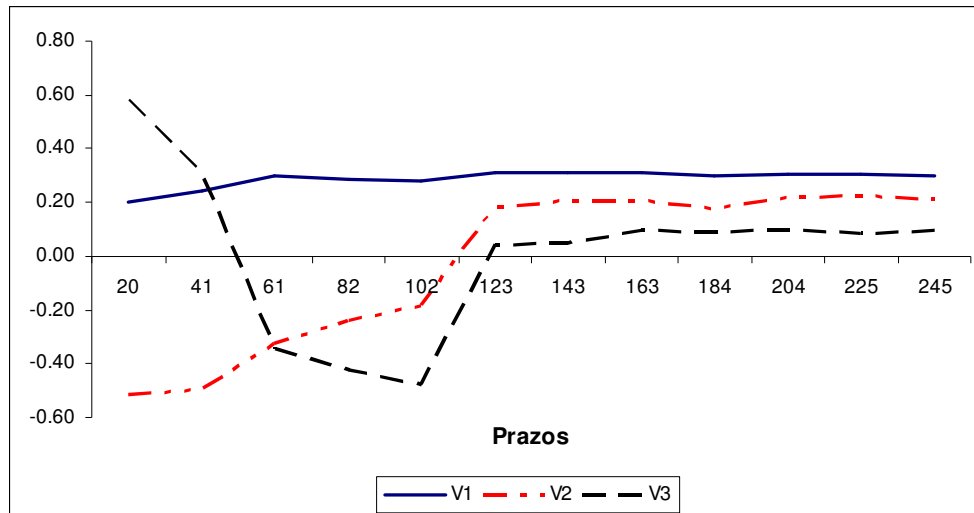


Figura 1 - Factor loadings encontrados por Varga e Valli. A observação da figura acima corrobora a interpretação dos autores de que os fatores comuns estão associados a mudanças no nível, na inclinação e na curvatura da estrutura a termo brasileira.

- Silveira e Bessada (2003): os autores trabalham com as taxas pré-fixadas implícitas em contratos de DI futuro (para cada dia são utilizados os contratos com os três vencimentos mais próximos) e de *swap* (com prazos de 6, 12, 24 e 36 meses) negociados na BM&F. A amostra contém observações diárias retiradas do período de julho de 1999 a maio de 2001. Mais uma vez chega-se à conclusão de que os três fatores mais relevantes podem ser interpretados como *level*, *steepness* e *curvature*.

- Luna (2006): o autor trabalha com duas amostras diferentes, a primeira formada por taxas pré-fixadas implícitas em contratos de DI futuro e a segunda por taxas relativas a contratos de *swap*. A primeira amostra, que abrange dados diários retirados do período de janeiro de 2002 a dezembro de 2004, serve para construir uma curva de juros com nove prazos de vencimento (21, 42, 63, 84, 105, 126, 168, 210 e 252 dias úteis). A segunda amostra, que também abrange dados diários retirados do período de janeiro de 2002 a dezembro de 2004, foi utilizada para construir uma curva de juros com doze prazos de vencimento (30, 60, 120, 240, 360, 480, 600, 720, 900, 1.200, 1.500, 1.800, 2.160 e 2.520 dias corridos). O autor conclui que um modelo com três fatores é capaz de explicar razoavelmente bem a variabilidade dos dados porque (i) na primeira amostra, a proporção da variância total atribuída aos três fatores é maior que 97%, e (ii) na segunda

amostra, essa proporção supera 95%. A interpretação desses fatores como *level*, *steepness* e *curvature* permanece válida.

4 Descrição dos Dados

Nesse capítulo introduzimos os dados que serão utilizados para construir as curvas de juros relativas ao caso brasileiro e analisamos as suas propriedades, comparando os resultados com aqueles verificados para o mercado americano.

Devido a limitações inerentes ao mercado financeiro brasileiro, não é possível adotar os métodos utilizados em Litterman e Scheinkman (1991) ou em Diebold e Li (2006)¹⁴ para construir a curva de juros brasileira. Isso ocorre porque, devido ao fato da maioria dos investidores possuir uma forte preferência por títulos indexados ao dólar norte-americano, a índices de inflação e à taxa Selic (verdade indiscutível até bem pouco tempo), títulos pré-fixados tradicionais com maturidades superiores a 12 meses acabavam tendo pouca liquidez.

Essas limitações nos obrigam a proceder como em Varga e Valli (2001), Silveira e Bessada (2003) e Luna (2006), que recorrem às cotações dos contratos de *swap* DI-pré negociados na BM&F como *proxies* para os rendimentos dos hipotéticos *zero coupon bonds* brasileiros. A base de dados utilizada ao longo dessa dissertação é formada com essas cotações (ou taxas), e abrange um período que se vai de julho de 1999 a junho de 2006¹⁵. Séries com cotações diárias são convertidas para séries com periodicidade mensal através do cálculo da taxa diária média de cada mês; as taxas são expressas sob o critério de capitalização contínua. Consideramos sete prazos diferentes para os contratos de *swap* DI-pré, a saber, 1, 2, 3, 4, 6, 12 e 24 meses; as taxas relativas a esses contratos servem de *proxies*

¹⁴ Os referidos autores utilizam bases de dados oriunda dos arquivos “Fama CRSP *zero coupons*” e “Fama CRSP *Treasury Bill*”, que são as fontes mais utilizadas para coletar os rendimentos de *pure discount bonds* de diversas maturidades emitidos pelo Tesouro norte-americano.

¹⁵ O limite inferior da amostra (julho de 1999) foi escolhido para que ela abrangesse apenas o período relativo ao regime de câmbio flutuante, iniciado em janeiro de 1999. Observações contidas no intervalo janeiro-junho desse mesmo ano foram descartadas por se situarem em um período de transição entre os regimes de câmbio administrado e flutuante.

para as remunerações que seriam pagas por *zero coupon bonds* emitidos pelo Tesouro brasileiro com os mesmos prazos de vencimento.

A Figura 2 mostra o comportamento recente das taxas de *swap* DI-pré de 1, 2, 3, 4, 6, 12 e 24 meses. Nota-se que as taxas costumam se movimentar em conjunto, fenômeno que pode ser atribuído à influência de um fator *level* (que supostamente afeta todas as taxas da mesma maneira). Nota-se também que a diferença entre as taxas curta (1 mês) e longa (24 meses) cresce em alguns momentos (ver os anos de 2001 e 2002) e decresce em outros (tornando-se inclusive negativa; ver as observações referentes ao ano de 2005 em diante). Esses fatos podem ser creditados à influência de um fator *steepness*.

A Figura 3 retrata as curvas de juros médias observadas entre o final de 1997 e meados de 2006. Nela verifica-se a natureza ruidosa das curvas de juros observadas antes de julho de 1999, período marcado pelas crises da Ásia e da Rússia e pela mudança de regime cambial no Brasil. A inclinação fortemente positiva registrada até abril de 2003 é reflexo dessa mudança de regime, das perturbações dela decorrentes e da incerteza eleitoral que marcou o ano de 2002. Observa-se uma reversão de tendência a partir do segundo trimestre de 2003, que foi iniciada quando o governo eleito sinalizou de maneira inequívoca que os pilares da política macroeconômica seriam mantidos.

As Tabelas 2 e 3 apresentam algumas estatísticas da amostra. A Tabela 2 mostra que, em geral, a curva de juros brasileira se comporta como a norte-americana. Verifica-se que a curva de juros média possui inclinação positiva e é côncava (ver, por exemplo, Diebold e Li (2006) ou Ang e Piazzesi (2003)). As médias e medianas relativas às taxas de 1, 2, 3, 4, 6, 12 e 24 meses, no entanto, são muito maiores do que os valores registrados nos EUA para prazos equivalentes. Adicionalmente, ao contrário do que ocorre nos EUA, os desvios-padrão das taxas crescem com a maturidade. Há excesso de curtose para as maturidades mais curtas, porém esse excesso decresce com a maturidade até se tornar inferior a três (valor de referência para a distribuição normal). As distribuições de todas as taxas possuem uma cauda longa à direita, conforme indicado pela medida de assimetria (que assume valores positivos para todos os

casos). Assim como nos dados norte-americanos, a hipótese nula de que as taxas são normalmente distribuídas é rejeitada para todas as maturidades. A autocorrelação de primeira ordem das séries é elevada, o que indica que os movimentos das taxas de *swap* DI-pré tendem a ser persistentes (ver, por exemplo, a autocorrelação de primeira ordem registrada para a taxa de *swap* DI-pré de 1 mês, que é de aproximadamente 0.9360). Finalmente, a Tabela 3 mostra que as taxas relativas a maturidades vizinhas tendem a ser bastante correlacionadas (por exemplo, a correlação entre as taxas de 1 mês e 2 meses é de aproximadamente 0.9906).

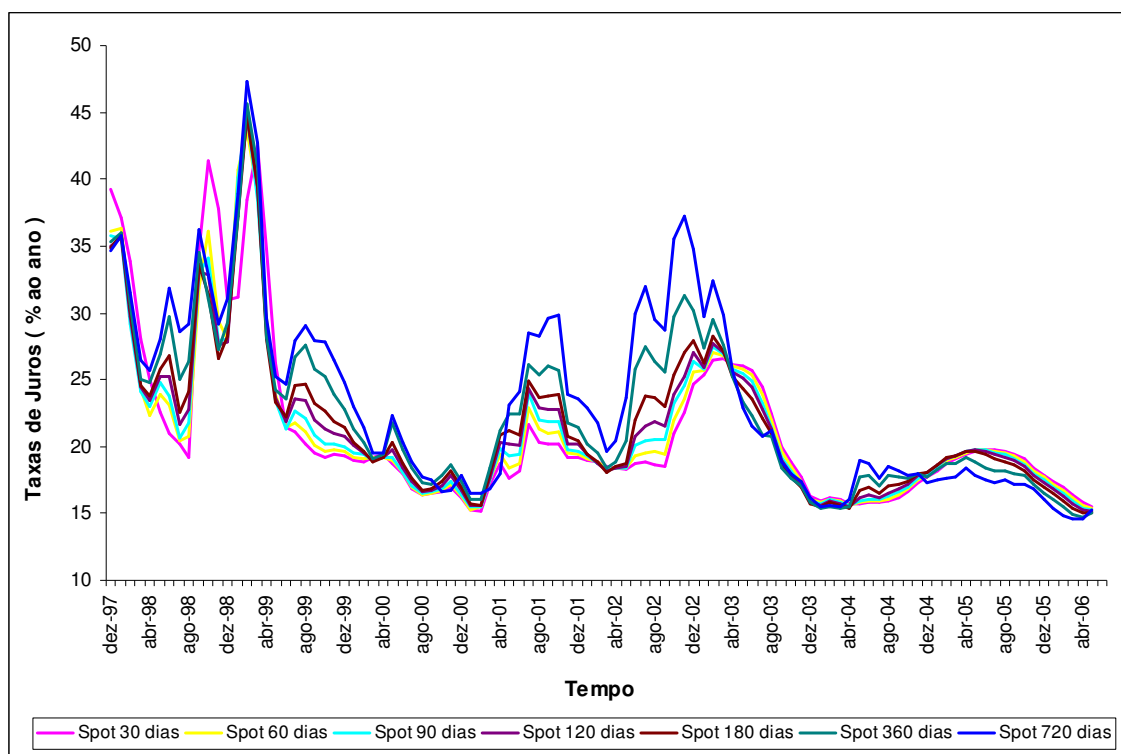


Figura 2 - Comportamento recente das taxas de swap DI-pré de 1, 2, 3, 4, 6, 12 e 24 meses

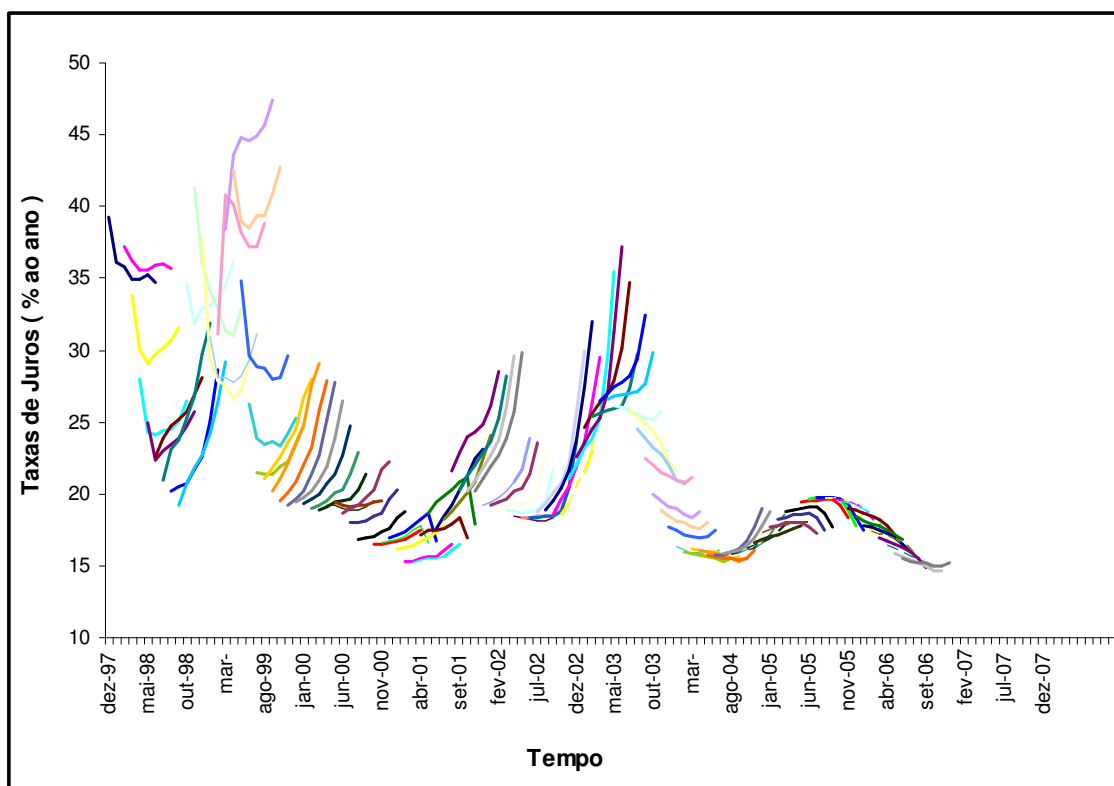


Figura 3 - Curvas de juros médias observadas entre o final de 1997 e meados de 2006

Prazos	Média	Mediana	Desvio-Padrão	Assimetria	Curtose	Normalidade	ρ_1	ρ_2	ρ_6
1	18.9449	18.7697	2.7718	1.2143	4.1874	7.888343**	0.9360	0.8320	0.2250
2	19.1232	18.9500	2.8600	1.0598	3.7528	7.006496**	0.9280	0.8240	0.2280
3	19.3085	19.1463	2.9797	0.9088	3.3042	25.27249***	0.9210	0.8180	0.2330
4	19.5408	19.1207	3.1170	0.7522	2.8667	9.012781**	0.9200	0.8120	0.2350
6	19.8163	18.8744	3.3878	0.6779	2.5665	17.49727***	0.9160	0.8000	0.2450
12	20.4797	18.8665	4.2043	0.7768	2.5611	12.44868***	0.9140	0.7900	0.2750
24	21.3892	18.8330	5.6052	0.9468	2.8829	11.74485***	0.9200	0.8030	0.3160

Tabela 2 – Estatísticas das taxas de swap DI-pré

Taxas (meses)	Taxas (meses)						
	1	2	3	4	6	12	24
1	1.0000	0.9906	0.9626	0.9228	0.8502	0.7148	0.6290
2	0.9906	1.0000	0.9903	0.9653	0.9108	0.7952	0.7129
3	0.9626	0.9903	1.0000	0.9913	0.9572	0.8663	0.7914
4	0.9228	0.9653	0.9913	1.0000	0.9861	0.9198	0.8512
6	0.8502	0.9108	0.9572	0.9861	1.0000	0.9703	0.9160
12	0.7148	0.7952	0.8663	0.9198	0.9703	1.0000	0.9781
24	0.6290	0.7129	0.7914	0.8512	0.9160	0.9781	1.0000

Tabela 3 - Matriz de correlação entre as taxas de swap DI-pré

As Tabelas 4 a 10 trazem os resultados dos testes de raiz unitária realizados com as séries temporais relativas às 7 taxas de *swap* DI-pré. O objetivo desse exercício é determinar se essas séries são estacionárias ou não. Os referidos testes (que são aplicações da técnica *Augmented Dickey-Fuller*) foram realizados no pacote estatístico e econométrico Eviews (versão 4:1) usando até seis defasagens e supondo que as variáveis possuem intercepto, tendência e intercepto ou nenhum dos dois. A rejeição da hipótese nula de que há uma raiz unitária ao nível de significância de 10% (5%, 1%) é assinalada pelo marcador * (**, ***). As tabelas indicam que, em geral, as referidas séries são I(1), porém seguiremos Diebold e Li (2006) e trabalharemos com especificações econométricas onde essas variáveis aparecem em níveis¹⁶.

N.ºDefasagens	Nada		Intercepto		Intercepto e Tendência	
	Nível	Diferença	Nível	Diferença	Nível	Diferença
0	-0.8756	-5.6363***	-1.2859	-5.6143***	-1.3023	-5.5933***
1	-0.6308	-4.5666***	-2.1682	-4.5483***	-2.1832	-4.5391***
2	-0.5916	-3.0766***	-2.2953	-3.0629**	-2.3080	-3.0694
3	-0.5954	-2.8608***	-3.2221**	-2.8547*	-3.2339*	-2.8541
4	-0.6681	-2.9257***	-3.4240**	-2.9198**	-3.4284*	-2.9157
5	-0.6497	-3.2003***	-3.3367**	-3.1907**	-3.3392*	-3.1839*
6	-0.5850	-3.5322***	-2.9796**	-3.5196**	-2.9841	-3.5075**

Tabela 4 - Resultados dos testes de raiz unitária realizados com a série temporal relativa à taxa de swap DI-pré de 1 mês

N.ºDefasagens	Nada		Intercepto		Intercepto e Tendência	
	Nível	Diferença	Nível	Diferença	Nível	Diferença
0	-0.9326	-6.4253***	-1.3775	-6.4088***	-1.4127	-6.3777***
1	-0.7282	-4.7870***	-1.9857	-4.7703***	-2.0255	-4.7575***
2	-0.6266	-3.2252***	-2.1738	-3.2121**	-2.2245	-3.2155*
3	-0.6099	-2.8443***	-3.0116**	-2.8381*	-3.0717	-2.8402
4	-0.6622	-2.8476***	-3.3642**	-2.8438*	-3.4209*	-2.8420
5	-0.6653	-3.0236***	-3.3551**	-3.0171**	-3.4099*	-3.0141
6	-0.6123	-3.6185***	-3.1153**	-3.6099***	-3.1758*	-3.5974**

Tabela 5 - Resultados dos testes de raiz unitária realizados com a série temporal relativa à taxa de swap DI-pré de 2 meses

¹⁶ Veremos posteriormente que o modelo de Nelson e Siegel se apóia na hipótese de que a dinâmica da estrutura a termo norte-americana pode ser descrita com apenas três fatores comuns, quais sejam, $\beta_{1,t}$, $\beta_{2,t}$ e $\beta_{3,t}$. Os testes de raiz unitária realizados com essas séries (que também são aplicações da técnica ADF) demonstraram não ser possível rejeitar a hipótese nula de que $\beta_{1,t}$ e $\beta_{2,t}$ possuem uma raiz unitária. Apesar disso, o modelo econométrico que Diebold e Li propõem com base na formulação de Nelson e Siegel incorpora essas variáveis em nível e não em primeiras diferenças.

N.ºDefasagens	Nada		Intercepto		Intercepto e Tendência	
	Nível	Diferença	Nível	Diferença	Nível	Diferença
0	-1.0055	-7.0391***	-1.4731	-7.0322***	-1.5211	-6.9914***
1	-0.8413	-4.8788***	-1.9008	-4.8649***	-1.9562	-4.8457***
2	-0.6731	-3.2309***	-2.1189	-3.2168**	-2.2081	-3.2155*
3	-0.6229	-2.9487***	-2.9841**	-2.9415**	-3.1046	-2.9404
4	-0.6587	-2.8488***	-3.2033**	-2.8460*	-3.3238*	-2.8425
5	-0.6745	-2.9332***	-3.2953**	-2.9287**	-3.4169*	-2.9250
6	-0.6335	-3.7412***	-3.1656**	-3.7364***	-3.2999*	-3.7212**

Tabela 6 - Resultados dos testes de raiz unitária realizados com a série temporal relativa à taxa de swap DI-pré de 3 meses

N.ºDefasagens	Nada		Intercepto		Intercepto e Tendência	
	Nível	Diferença	Nível	Diferença	Nível	Diferença
0	-1.0901	-6.9812***	-1.4999	-6.9886***	-1.5683	-6.9446***
1	-0.9587	-4.7734***	-1.9861	-4.7675***	-2.0554	-4.7412***
2	-0.7556	-3.4178***	-2.1906	-3.4095**	-2.3208	-3.3957*
3	-0.6910	-3.0486***	-2.8005*	-3.0412**	-2.9746	-3.0323
4	-0.6717	-2.8682***	-3.0498**	-2.8659*	-3.2528*	-2.8574
5	-0.6874	-2.8858***	-3.2076**	-2.8801*	-3.4225*	-2.8737
6	-0.6332	-3.8268***	-3.1501**	-3.8201***	-3.4045*	-3.8049**

Tabela 7 - Resultados dos testes de raiz unitária realizados com a série temporal relativa à taxa de swap DI-pré de 4 meses

N.ºDefasagens	Nada		Intercepto		Intercepto e Tendência	
	Nível	Diferença	Nível	Diferença	Nível	Diferença
0	-1.1407	-6.9083***	-1.5751	-6.9222***	-1.6674	-6.8781***
1	-1.0390	-5.1859***	-2.1383	-5.1875***	-2.2297	-5.1546***
2	-0.8500	-3.7491***	-2.1044	-3.7501***	-2.2668	-3.7277**
3	-0.7904	-3.2200***	-2.5776	-3.2149**	-2.7790	-3.1986*
4	-0.7187	-2.9569***	-2.8297*	-2.9534**	-3.0926	-2.9404
5	-0.7043	-2.9835***	-3.0092**	-2.9719**	-3.3090*	-2.9638
6	-0.6172	-3.8666***	-2.9071**	-3.8571***	-3.2808*	-3.8439**

Tabela 8 - Resultados dos testes de raiz unitária realizados com a série temporal relativa à taxa de swap DI-pré de 6 meses

N.ºDefasagens	Nada		Intercepto		Intercepto e Tendência	
	Nível	Diferença	Nível	Diferença	Nível	Diferença
0	-1.1906	-6.8278***	-1.6943	-6.8458***	-1.8180	-6.8055***
1	-1.1674	-5.6802***	-2.3802	-5.6875***	-2.5011	-5.6493***
2	-0.9786	-4.3453***	-2.0760	-4.3589***	-2.2778	-4.3292***
3	-0.9544	-3.2689***	-2.3239	-3.2657**	-2.5436	-3.2413*
4	-0.8189	-3.1880***	-2.7528*	-3.1765**	-3.1139	-3.1540
5	-0.7316	-3.2811***	-2.6802*	-3.2655**	-3.1213	-3.2460*
6	-0.6658	-4.3599***	-2.4623	-4.3485***	-2.9571	-4.3270***

Tabela 9 - Resultados dos testes de raiz unitária realizados com a série temporal relativa à taxa de swap DI-pré de 1 ano

N.ºDefasagens	Nada		Intercepto		Intercepto e Tendência	
	Nível	Diferença	Nível	Diferença	Nível	Diferença
0	-1.0929	-6.9868***	-1.6728	-6.9839***	-1.8224	-6.9403***
1	-1.1339	-6.0219***	-2.2856	-6.0225***	-2.4276	-5.9835***
2	-1.0321	-4.6093***	-2.0076	-4.6203***	-2.4276	-4.5896***
3	-1.0433	-3.3105***	-2.2195	-3.3096**	-2.3870	-3.2868*
4	-0.9515	-3.2012***	-2.7147*	-3.1894**	-2.9954	-3.1677*
5	-0.8374	-3.9343***	-2.6311*	-3.9174***	-2.9926	-3.8930**
6	-0.7345	-4.2873***	-1.9541	-4.2717***	-2.3057	-4.2510***

Tabela 10 - Resultados dos testes de raiz unitária realizados com a série temporal relativa à taxa de swap DI-pré de 2 anos

5 A Metodologia Diebold e Li

O principal *insight* de Diebold e Li (2006) é utilizar a forma funcional proposta por Nelson e Siegel (1987) para ajustar a dinâmica da curva de juros norte-americana da maneira mais parcimoniosa possível e, com isso, extrair benefícios em termos de previsão fora da amostra.

Nelson e Siegel propõem um modelo onde a *forward rate curve* observada em um dado período é aproximada pela seguinte função:

$$f_t(\tau) = \beta_{1,t} + \beta_{2,t}e^{-\lambda_t\tau} + \beta_{3,t}\lambda_t e^{-\lambda_t\tau} \quad (11)$$

onde τ e $f_t(\tau)$ representam o prazo e a respectiva taxa *forward*. A curva de juros correspondente é aproximada pela função:

$$y_t(\tau) = \beta_{1,t} + \beta_{2,t} \left(\frac{1 - e^{-\lambda_t\tau}}{\lambda_t\tau} \right) + \beta_{3,t} \left(\frac{1 - e^{-\lambda_t\tau}}{\lambda_t\tau} - e^{-\lambda_t\tau} \right) \quad (12)$$

A taxa *forward* de prazo τ observada no período t é igual ao retorno que um investidor tem ao realizar a seguinte operação:

- adquirir em t um *zero coupon bond* com vencimento em $\tau+1$ períodos pagando um preço $P_{t,\tau+1}$.

- vender uma quantidade igual a $\frac{P_{t,\tau+1}}{P_{t,\tau}}$ de zeros de τ períodos pelo preço $P_{t,\tau}$ no mesmo momento.

Repare que essa operação equivale a desembolsar um montante igual a $\$ \frac{P_{t,\tau+1}}{P_{t,\tau}}$ em $t = \tau$ e receber $\$1$ em $t = \tau + 1$; a rentabilidade dessa operação é justamente a *forward rate* $f_t(\tau)$. Já $y_t(\tau)$ denota o retorno de um *zero coupon bond* com τ períodos até o vencimento adquirido no período t . Como $P_{t,\tau} = \frac{1}{(1 + y_t(\tau))^\tau}$, $f_t(\tau)$ e $y_t(\tau)$ obedecem a seguinte relação¹⁷:

$$f_t(\tau) = \frac{(1 + y_t(\tau + 1))^{\tau+1}}{(1 + y_t(\tau))^\tau} - 1 \quad (13)$$

A modelagem de Nelson e Siegel faz com que existam três fatores comuns, denotados por $\beta_{1,t}$, $\beta_{2,t}$ e $\beta_{3,t}$. Seus *loadings* são tais que:

- Uma perturbação positiva (negativa) no primeiro fator gera um deslocamento paralelo e para cima (baixo) da curva de juros.

- Uma perturbação positiva (negativa) no segundo fator faz com que os retornos dos títulos mais curtos aumentem (diminuem) mais do que os retornos dos títulos mais longos. Isso decorre do formato da função $F(\tau) = \frac{1 - e^{-\lambda_t \tau}}{\lambda_t \tau}$, que é monotonicamente decrescente para qualquer valor de λ_t . O parâmetro λ_t controla a velocidade de decaimento da função $F(\tau)$; com efeito, à medida que λ_t aumenta, os valores assumidos pela função $F(\tau)$ vão se aproximando mais rapidamente de zero.

- Uma perturbação positiva (negativa) no terceiro fator faz com que os retornos dos títulos de prazos intermediários aumentem (diminuem) mais do que

¹⁷ Se trabalhássemos em um regime de capitalização contínua, o preço $P_{t,\tau}$ de um título de τ períodos emitido em t seria dado por $P_{t,\tau} = e^{-\tau y_t(\tau)}$. Já o relacionamento entre $f_t(\tau)$ e $y_t(\tau)$ seria definido por $f_t(\tau) = -\frac{dP_t(\tau)}{d\tau} \frac{1}{P_t(\tau)}$.

os retornos dos títulos de prazos curtos e longos. Isso decorre do formato da função $G(\tau) = \frac{1 - e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau} - e^{-\lambda\tau}$, que é estritamente côncava e atinge um máximo para um determinado τ^* intermediário. O valor de τ^* varia negativamente com λ .

O comportamento acima descrito permite que associemos os três fatores do modelo de Nelson e Siegel aos fatores *level*, *slope* e *curvature* identificados nos trabalhos discutidos na Seção 3. A Figura 4, que mostra os perfis correspondentes a cada *loading* (denotados por L1, L2 e L3), reforça essa interpretação. Comparando a Figura 1 com a Figura 4 percebe-se que, pelo menos a grosso modo, os formatos dos *loadings* propostos por Nelson e Siegel são aproximadamente iguais aos formatos dos *loadings* estimados por Varga e Valli. É exatamente o sucesso na reprodução dos *loadings* empíricos que Diebold e Li exploram a fim de construir o seu modelo de previsão, conforme veremos a seguir.

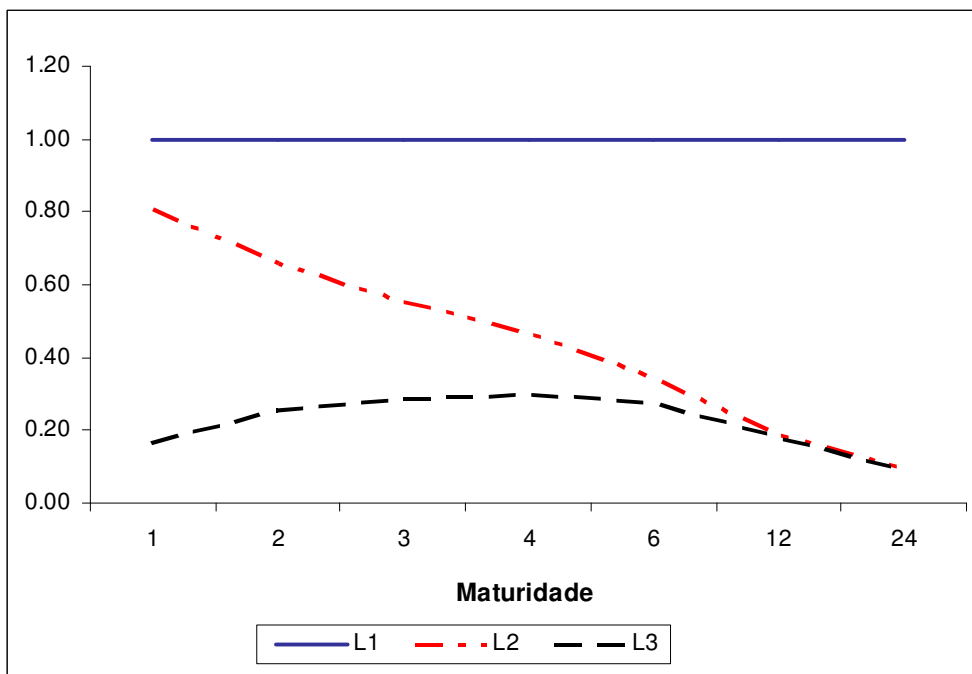


Figura 4 - Perfis correspondentes a cada *factor loading*. Os fatores foram gerados com λ_t constante e igual a 0.448321.

Diebold e Li afirmam que o modelo de Nelson e Siegel é capaz de reproduzir os principais fatos estilizados observados para a estrutura a termo norte-americana, a saber:

- A curva de juros média é crescente e côncava. Na abordagem de Nelson e Siegel, a curva de juros média está associada aos valores médios de $\beta_{1,t}$, $\beta_{2,t}$ e $\beta_{3,t}$ ¹⁸.

- A curva de juros pode assumir diversas formas ao longo do tempo, quais sejam, crescente, decrescente, *humped* e *inverted humped*. Ora, dependendo dos valores específicos assumidos pelos fatores $\beta_{1,t}$, $\beta_{2,t}$ e $\beta_{3,t}$, é possível que a estrutura a termo assuma qualquer um desses formatos.

- A dinâmica das taxas é mais persistente que a dos *spreads*¹⁹. A persistência das taxas pode ocorrer se a dinâmica do fator $\beta_{1,t}$ for persistente, enquanto que a baixa persistência dos *spreads* pode ser observada se a dinâmica do fator $\beta_{2,t}$ for pouco persistente.

- A curva de juros é tal que as taxas de curto prazo são mais voláteis que as taxas de longo prazo. No contexto de Nelson e Siegel as taxas curtas dependem de $\beta_{1,t}$ e $\beta_{2,t}$, enquanto que as taxas longas dependem quase exclusivamente de $\beta_{1,t}$. Por conseguinte, a assertiva inicial será verdadeira se o fator $\beta_{1,t}$ tiver a menor variância incondicional.

- As taxas longas são mais persistentes que as taxas curtas. Como as taxas longas dependem quase exclusivamente de $\beta_{1,t}$ e as taxas curtas dependem de $\beta_{1,t}$ e $\beta_{2,t}$, a assertiva inicial será verdadeira se o fator $\beta_{1,t}$ for o mais persistente.

¹⁸ O método utilizado por Diebold e Li para estimar os fatores $\beta_{1,t}$, $\beta_{2,t}$ e $\beta_{3,t}$ será examinado a seguir.

¹⁹ Diferença entre taxas relativas a prazos diferentes.

Diebold e Li demonstram essa concordância analisando uma amostra de taxas de juros calculadas a partir dos preços de *treasuries* coletados nos arquivos pertencentes à base de dados “Fama CRSP Treasury Bill”. A amostra (de frequência mensal) é composta por observações retiradas do período que vai de janeiro de 1985 a dezembro de 2000 e engloba títulos com vencimento em 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 30, 36, 48, 60, 72, 84, 96, 108 e 120 meses. A Tabela 11 traz os valores médios de $\beta_{1,t}$, $\beta_{2,t}$ e $\beta_{3,t}$ calculados com base nessa amostra, assim como os seus desvios padrão e as autocorrelações de ordem 1, 12 e 30 (denotadas por $\rho(1)$, $\rho(12)$ e $\rho(30)$, respectivamente). Nota-se que o primeiro fator é o mais persistente de todos, pois apresenta autocorrelações que, em conjunto, têm a maior magnitude. O primeiro fator também é o menos volátil, pois o seu desvio padrão é menor do que o calculado para os fatores dois e três. Os autores também demonstram que, para os valores médios de $\beta_{1,t}$, $\beta_{2,t}$ e $\beta_{3,t}$, a curva de juros média é crescente e aproximadamente côncava. Vale comentar também que os fatores $\beta_{1,t}$, $\beta_{2,t}$ e $\beta_{3,t}$ recuperados por Diebold e Li possuem uma alta correlação com as medidas empíricas de nível, inclinação e curvatura comumente utilizadas²⁰. Esse resultado é bastante desejável na medida em que o *framework* de Nelson e Siegel não poderia ser considerado adequado se os fatores dele decorrentes (que dependem das formas funcionais pré-especificadas para os *loadings*) não se assemelhassem aos fatores decorrentes do que os agentes econômicos entendem por medidas de nível, inclinação e curvatura.

Fator	Média	Desvio-Padrão	Mínimo	Máximo	ρ_1	ρ_{12}	ρ_{30}	ADF
Beta 1	7.5790	1.5240	4.4270	12.0880	0.9570	0.5110	0.4540	-2.4100
Beta 2	-2.0980	1.6080	-5.6160	0.9190	0.9690	0.4520	-0.0820	-1.2050
Beta 3	-0.1620	1.6870	-5.2490	4.2340	0.9010	0.3530	-0.0060	-3.5160

Tabela 11 - Estatísticas dos fatores comuns para a curva de juros norte-americana

²⁰ Para o mercado norte-americano, define-se *level* como sendo o *yield* de um *zero coupon bond* com prazo de vencimento de 10 anos, *slope* como sendo a diferença entre os *yields* de dois *zero coupon bonds* com prazos de vencimento de 10 anos e 3 meses, e *curvature* como sendo igual a duas vezes o *yield* de um *zero coupon bond* de 2 anos subtraído da soma dos *yields* de *zeros* de 3 meses e 10 anos. As correlações entre os fatores empíricos assim definidos e os estimados são altas, da ordem de 0.97. Verificou-se também que, dentre os fatores empíricos, o primeiro (terceiro) é o mais (menos) persistente.

As considerações acima enfatizam o sucesso da formulação de Nelson e Siegel em reproduzir os principais fatos estilizados registrados para o comportamento da curva de juros norte-americana e a sua compatibilidade com os resultados encontrados por Litterman e Scheinkman, a saber, que a dinâmica da curva de juros depende fundamentalmente de três fatores comuns (*level, slope e curvature*). Logo, é natural supor que a formulação de Nelson e Siegel pode ser utilizada na construção de um modelo econométrico que descreva o comportamento da estrutura a termo e preveja a sua trajetória futura. Espera-se que essa observação seja válida também para dados brasileiros, pois já demonstramos acima que as características das curvas de juros brasileira e norte-americana são aproximadamente as mesmas (logo, se a formulação de Nelson e Siegel é aceitável para dados norte-americanos, deve ser aceitável também para dados brasileiros).

Diebold e Li também argumentam a favor da utilização do *framework* de Nelson e Siegel dizendo que ele permite construir modelos parcimoniosos e que esses, em geral, se revelam mais eficientes em exercícios de previsão. Segundo os autores, a parcimônia é um atributo desejável porque modelos com muitos parâmetros geram incerteza significativa (pois os parâmetros em excesso devem ser estimados) e incorrem em *overfitting*, ou seja, “explicam” a contento o comportamento dos dados não porque são “corretos” mas sim porque são suficientemente complexos. Os autores finalizam dizendo que a utilização do arcabouço de Nelson e Siegel emana de uma “... *broad interpretation of the shrinkage principle, which has a firm foundation in Bayes-Stein theory, in empirical intuition and in an accumulated track record of good performance*”. Segundo Diebold e Li, “... *here we interpret the shrinkage principle as the insight that the imposition of restrictions, which will of course degrade in-sample fit, may nevertheless be useful for out-of-sample forecasting, even if the restrictions are false*”. Dessa maneira, as restrições inerentes ao arcabouço de Nelson e Siegel (que exigem que os *loadings* em (12) venham de formas funcionais pré-especificadas) podem fazer com que um modelo econométrico que se baseie nelas acabe exibindo uma *performance* preditiva melhor.

Agora que já sabemos os fundamentos da estratégia proposta por Diebold e Li é possível passar para os seus detalhes. Os autores recomendam que:

- O modelo com os três fatores comuns descrito na eq.(12) seja utilizado para “ajustar” a curva de juros.
- O parâmetro λ_t seja considerado constante e calibrado de tal forma que a função $G(\tau)$ atinja seu máximo em $\tau = 30$, prazo que os autores definem como de maturidade média²¹.
- Os fatores $\beta_{1,t}$, $\beta_{2,t}$ e $\beta_{3,t}$ sejam estimados por mínimos quadrados ordinários (opção factível porque λ_t é igual a um número definido *a priori*, o que faz com que os *factor loadings* sejam perfeitamente conhecidos).
- As séries temporais correspondentes aos fatores $\beta_{1,t}$, $\beta_{2,t}$ e $\beta_{3,t}$ sejam modeladas como processos estocásticos univariados autoregressivos de primeira ordem (AR(1)). Sendo assim, as previsões acerca da trajetória futura dos fatores são obtidas através da seguinte especificação:

$$\beta_{i,t+h} = c_i + \gamma_i \beta_{i,t} + \varepsilon_{i,t} \quad (14)$$

onde $\beta_{i,t}$ e $\beta_{i,t+h}$ denotam os valores assumidos pelo i -ésimo fator nos instantes t e $t+h$, respectivamente. Os parâmetros c_i e γ_i são estimados através da regressão de $\beta_{i,t}$ em uma constante e em $\beta_{i,t-h}$. A opção por modelos univariados repousa na constatação feita por Diebold e Li de que os fatores $\beta_{1,t}$, $\beta_{2,t}$ e $\beta_{3,t}$ não possuem correlação cruzada significativa.

- As previsões para cada *yield* sejam obtidas a partir de:

²¹ Com efeito, $\tau = 30$ está no “centro” da seqüência de maturidades {3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 30, 36, 48, 60, 72, 84, 96, 108, 120}.

$$\hat{y}_{t+h}(\tau) = \hat{\beta}_{1,t+h} + \hat{\beta}_{2,t+h} \left(\frac{1 - e^{-\lambda_t \tau}}{\lambda_t \tau} \right) + \hat{\beta}_{3,t+h} \left(\frac{1 - e^{-\lambda_t \tau}}{\lambda_t \tau} - e^{-\lambda_t \tau} \right) \quad (15)$$

onde $\hat{\beta}_{i,t+h} = \hat{c}_i + \hat{\gamma}_i \beta_{i,t}$. Os valores \hat{c}_i e $\hat{\gamma}_i$ denotam as estimativas de c_i e γ_i , enquanto que $\hat{\beta}_{i,t+h}$ denota a previsão h passos à frente do valor que o i -ésimo fator assume no instante $t+h$ condicionada ao fato do último valor observado ser igual a $\beta_{i,t}$ (o parâmetro h , portanto, denota o horizonte de previsão).

É necessário ressaltar que o tratamento dispensado ao parâmetro λ e a modelagem dos fatores $\beta_{1,t}$, $\beta_{2,t}$ e $\beta_{3,t}$ como meros processos AR(1) estão de acordo com o desejo dos autores de “... *intentionally impose substantial a priori structure, motivated by simplicity, parsimony, and theory*”.

Os autores aplicam a estratégia delineada acima a uma amostra com dados mensais de janeiro de 1985 a dezembro de 2000. Uma sub-amostra iniciada em janeiro de 1994 é separada para julgar a qualidade das previsões fora da amostra. O principal critério de avaliação adotado é o erro médio quadrático²² e os horizontes de previsão considerados correspondem a $h=1$, 6 e 12 períodos à frente. Os *yields* para os quais se calculam previsões estão vinculados aos prazos de 3, 12, 36, 60 e 120 meses até o vencimento. Tanto o modelo sugerido pelos autores quanto os modelos que serviram de *benchmark* para julgar se as inovações sugeridas são bem-sucedidas ou não são estimados recursivamente de janeiro de 1985 até o momento no qual as previsões são calculadas²³.

²² O erro é definido como o quadrado da diferença entre o valor previsto para o *yield* em um dado período e o valor efetivamente observado. A média desses erros é que serve de medida para o desempenho preditivo do modelo sugerido por Diebold e Li e dos modelos que eles propõem como base de comparação.

²³ O procedimento é tal que, no primeiro passo, os modelos são estimados com dados de janeiro de 1985 a dezembro de 1994. Em seguida, os modelos são utilizados para gerar previsões para a curva de juros de janeiro de 1995, junho de 1995 e dezembro de 1995, e os erros cometidos são calculados. O próximo passo é uma repetição do primeiro, ou seja, os modelos são estimados de novo com dados de janeiro de 1985 a janeiro de 1995 e, em seguida, eles são utilizados para gerar previsões para a curva de juros de fevereiro de 1995, julho de 1995 e janeiro de 1996. Os erros cometidos são calculados e acumulados àqueles calculados anteriormente. O procedimento se repete até que a amostra utilizada para estimação englobe dados de janeiro de 1985 a dezembro de 1999. A análise de desempenho se baseia nas previsões obtidas a partir das 60 repetições executadas.

Diebold e Li concluem que o modelo proposto é capaz de alcançar resultados satisfatórios. Mais especificamente, os autores afirmam que os resultados são decepcionantes para $h=1$ (“... *our model's 1-month-ahead forecasting results are in certain respects humbling ...*”), já que a diferença de *performance* entre o seu modelo e um mero *random walk* não é estatisticamente significativa. Para $h=6$ e $h=12$, no entanto, os autores sustentam que os resultados são animadores. Com efeito, nas palavras de Diebold e Li, “... *our model's 6-month-ahead forecasting results are noticeably improved, and our model's 12-month-ahead forecasting results are much improved*”. Em particular, o desempenho preditivo do modelo para previsões 12 passos à frente supera o desempenho dos demais competidores para todos os prazos de vencimento considerados, e as diferenças observadas são estatisticamente significativas na maioria dos casos. O quadro geral sugere que o desempenho preditivo do modelo de Diebold e Li é aceitável e melhora à medida que o horizonte de previsão aumenta²⁴.

²⁴ É necessário ressaltar que Vereda, Lopes e Fukuda (2006) chegam a uma conclusão semelhante ao testarem um modelo inspirado em Evans e Marshall (1998) para gerar previsões acerca do comportamento futuro da estrutura a termo brasileira.

6

Aplicação da metodologia de Diebold e Li para a curva de juros brasileira

Nessa seção utilizaremos a estratégia proposta por Diebold e Li para modelar o comportamento da curva de juros brasileira. Conforme já foi visto na seção anterior, o procedimento se orienta pelos seguintes princípios:

- Utilização do modelo descrito na eq. (12) para “ajustar” a curva de juros.
- Calibragem do parâmetro λ_t .
- Recuperação dos fatores $\beta_{1,t}$, $\beta_{2,t}$ e $\beta_{3,t}$ através de mínimos quadrados ordinários.
- Modelagem das séries temporais correspondentes aos fatores $\beta_{1,t}$, $\beta_{2,t}$ e $\beta_{3,t}$ através da especificação eq.(14).
- Cálculo das previsões para cada *yield* através da eq.(15).

A calibragem do parâmetro λ_t depende do que se entende por maturidade média, pois ele é escolhido de tal forma que a função $G(\tau)$ assume valor máximo nesse prazo. No caso norte-americano λ_t é ajustado para fazer com que o máximo ocorra em $\tau = 30$; no caso brasileiro, porém, é mais razoável escolher λ_t para fazer com que esse máximo ocorra em $\tau = 4$, pois esse é o prazo definido como maturidade média²⁵. Essas considerações nos levaram a escolher $\lambda_t = 0.448321$.

²⁵ Vimos anteriormente que, no caso norte-americano, o “ponto” $\tau = 30$ está no “centro” da seqüência de maturidades {3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 30, 36, 48, 60, 72, 84, 96, 108, 120}. Ora, no

Após a escolha de λ_t é imediato calcular os *loadings* associados a cada um dos fatores $\beta_{1,t}$, $\beta_{2,t}$ e $\beta_{3,t}$. O resultado desse exercício está ilustrado na Figura 4. Conforme já comentamos anteriormente, o formato desses *loadings* é compatível com a idéia de que os principais fatores que determinam o comportamento da curva de juros estão relacionados a alterações no seu nível, na sua inclinação e na sua curvatura.

O conhecimento de λ_t e dos elementos da matriz L permite que estimemos os valores que $\beta_{1,t}$, $\beta_{2,t}$ e $\beta_{3,t}$ assumem ao longo do tempo, bastando para isso aplicar a técnica de mínimos quadrados ordinários. Os resultados obtidos se encontram na Figura 5. Repare que as séries estimadas se assemelham bastante às séries relativas às medidas empíricas de nível, inclinação e curvatura²⁶, o que reforça a idéia de que as curvas de juros brasileira e norte-americana se comportam de maneira análoga²⁷. A Tabela 12 traz os valores médios de $\beta_{1,t}$, $\beta_{2,t}$ e $\beta_{3,t}$, assim como os seus desvios padrão e as autocorrelações de ordem 1, 3, 6 e 12 (denotadas por $\rho(1)$, $\rho(3)$, $\rho(6)$ e $\rho(12)$, respectivamente). Nota-se que o primeiro fator é o mais persistente de todos, pois apresenta as maiores autocorrelações. O segundo fator é o menos volátil, pois o seu desvio padrão é menor do que o calculado para os demais fatores; o fator mais volátil é o terceiro. Os valores médios de $\beta_{1,t}$, $\beta_{2,t}$ e $\beta_{3,t}$ também são compatíveis com uma curva de juros média crescente e aproximadamente côncava. As autocorrelações cruzadas, porém, são significativas, resultado que difere daquele obtido para a estrutura a termo norte-americana. Os resultados dos testes de raiz unitária realizados com as séries $\beta_{1,t}$, $\beta_{2,t}$ e $\beta_{3,t}$ indicam que a hipótese nula de que há uma raiz unitária não

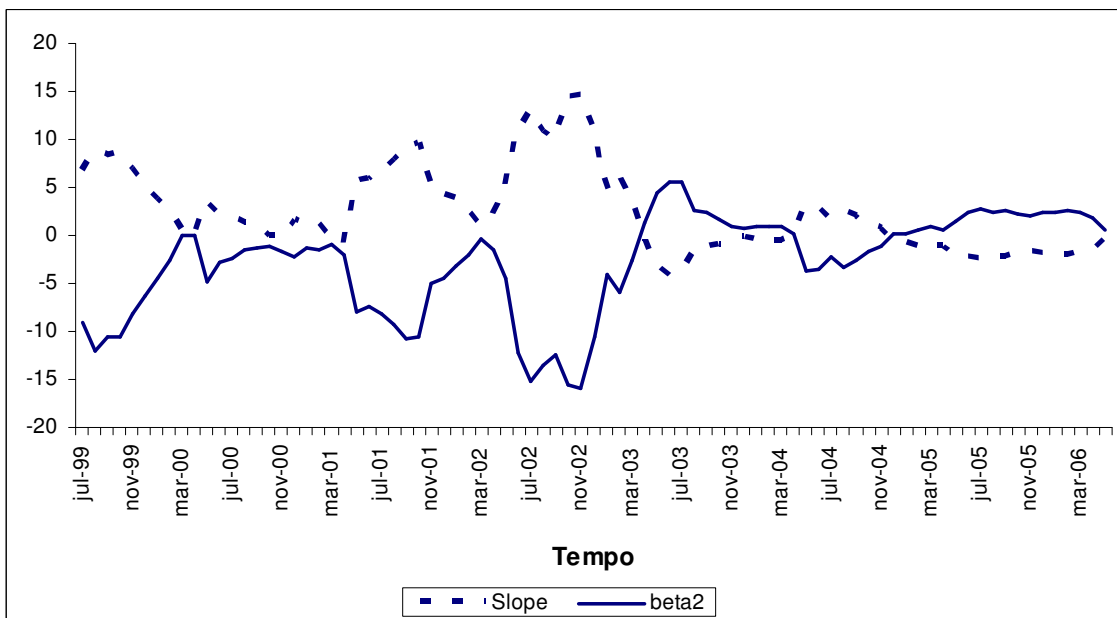
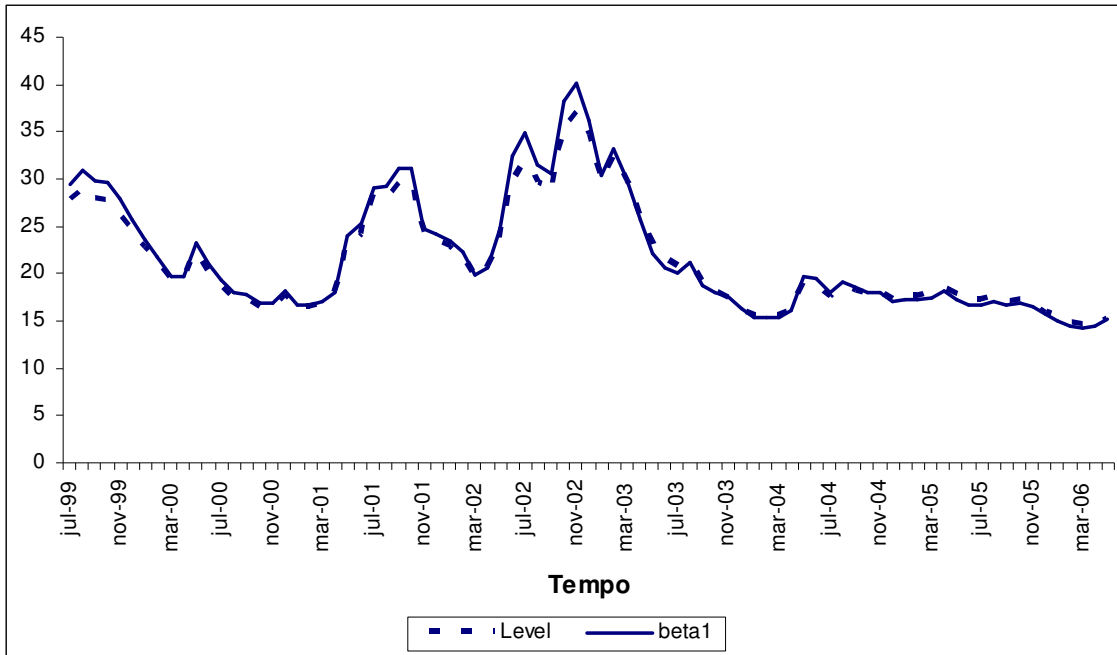
caso brasileiro, o “ponto” $\tau = 4$ também está no “centro” da seqüência de maturidades {1, 2, 3, 4, 6, 12, 24}.

²⁶ Para o mercado brasileiro, define-se *level* como sendo a taxa do contrato de *swap* DI-pré com prazo de vencimento de 2 anos, *slope* como sendo a diferença entre as taxas dos contratos de *swap* DI-pré com prazos de vencimento de 2 anos e 1 mês e, finalmente, *curvature* como sendo igual a duas vezes a taxa do contrato de *swap* de 4 meses subtraído da soma das taxas dos contratos de 1 mês e 2 anos.

pode ser rejeitada para os fatores um e três²⁸. Apesar disso seguiremos Diebold e Li e trabalharemos com especificações econométricas onde os fatores comuns aparecem em níveis.

²⁷ Em números, as correlações cruzadas entre as séries empíricas e recuperadas com base no *framework* de Nelson e Siegel são as seguintes: nível → 0.997, inclinação → -0.908, curvatura → 0.992.

²⁸ Os referidos testes são aplicações da técnica Augmented Dickey-Fuller (ADF) e foram realizados no pacote estatístico e econométrico Eviews (versão 4:1). Foram utilizadas até seis defasagens supondo que as variáveis possuem intercepto, tendência e intercepto ou nenhum dos dois. A rejeição da hipótese nula de que há uma raiz unitária ao nível de significância de 10% (5%, 1%) é assinalada pelo marcador * (**,***).



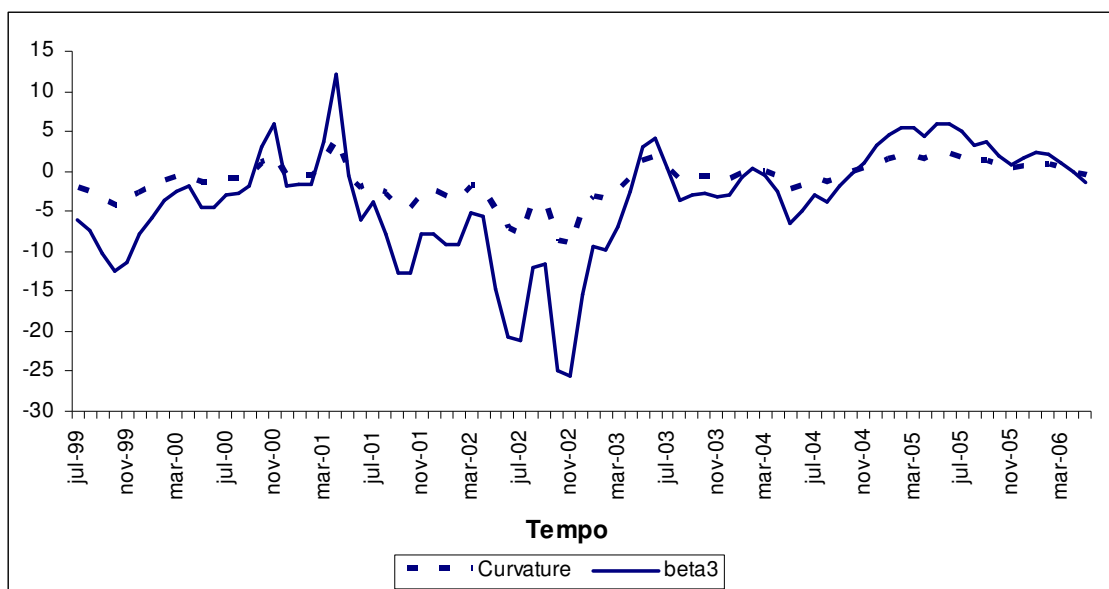


Figura 5 - Comparação entre os fatores comuns empíricos (linhas pontilhadas) e estimados com base no arcabouço de Nelson e Siegel (linhas cheias).

Fator	Média	Mediana	Desvio-Padrão	ρ_1	ρ_3	ρ_6	ρ_{12}	ADF
Beta 1	21.8469	19.4953	6.3192	0.9160	0.6820	0.3070	0.0620	-2.4535
Beta 2	-2.7760	-1.5023	5.1642	0.9010	0.5920	0.1060	0.0310	-3.0623**
Beta 3	-3.6593	-2.7638	7.0682	0.8520	0.5810	0.3150	0.0410	-1.8954

Fatores	Fatores		
	Beta 1	Beta 2	Beta 3
Beta 1	1.0000	-0.8750	-0.8494
Beta 2	-0.8750	1.0000	0.8255
Beta 3	-0.8494	0.8255	1.0000

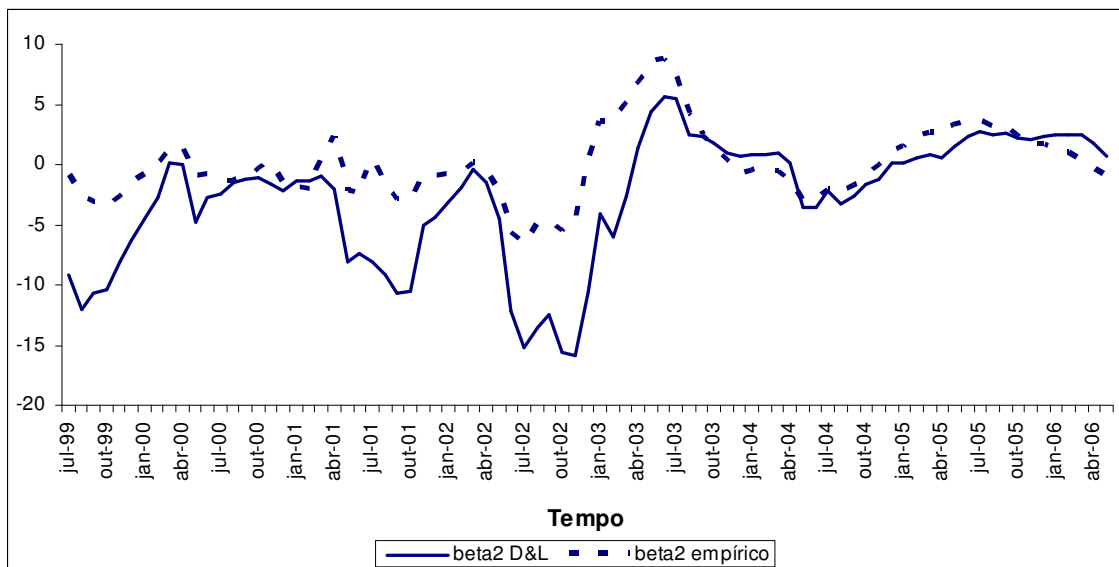
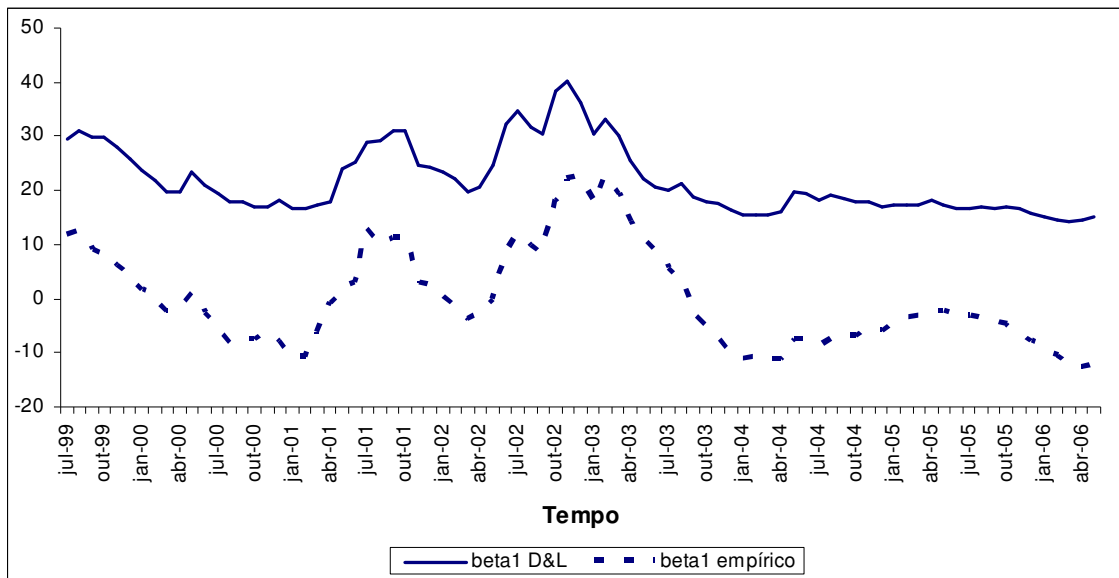
Tabela 12 - Valores médios, medianas, desvios-padrão, autocorrelações de ordem 1, 3 e

6 e autocorrelações cruzadas dos fatores $\beta_{1,t}$, $\beta_{2,t}$ e $\beta_{3,t}$.

É ilustrativo comparar os fatores recuperados a partir do *framework* de Nelson e Siegel (ver Seção 5) com os fatores recuperados por meio de ACP. Os resultados se encontram nas Figuras 6 e 7. Repare que os fatores que emanam das duas técnicas se assemelham, sendo a semelhança notável para o fator $\beta_{1,t}$ ²⁹. A Figura 7 traz os *loadings* estimados por meio de ACP. A comparação com os *loadings* que emanam do modelo de Nelson e Siegel (ver Figura 4) revela que os

²⁹ Em números, as correlações cruzadas entre as séries recuperadas com base no *framework* de Nelson e Siegel e estimadas com base em análise de componentes principais são as seguintes: nível \rightarrow 0.922, inclinação \rightarrow 0.760, curvatura \rightarrow 0.703.

pares correspondentes a L1 e L2 são parecidos. Já o par relativo a L3, apesar de exibir o mesmo formato de “U” invertido, difere no prazo onde a função atinge seu máximo (o máximo da função $G(\tau)$ ocorre em $\tau = 4$, enquanto que aqui o máximo ocorre em $\tau = 6$). Esse fato pode lançar dúvidas acerca da escolha de $\tau = 4$ como sendo a maturidade média.



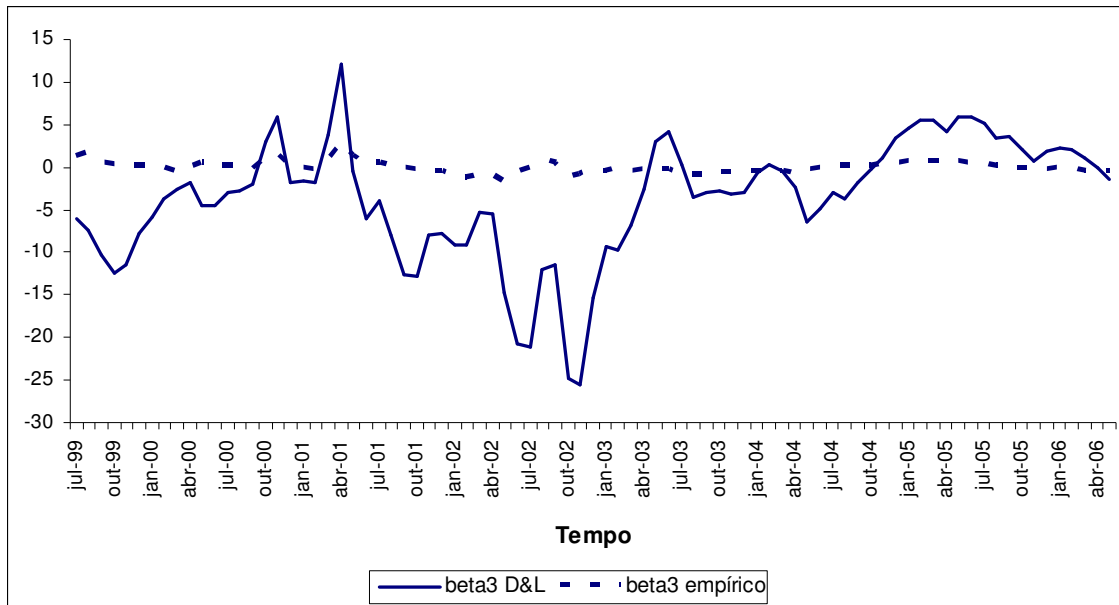


Figura 6 - Comparação entre os fatores comuns estimados com base na análise de componentes principais (linhas pontilhadas) e com base no arcabouço de Nelson e Siegel (linhas cheias)

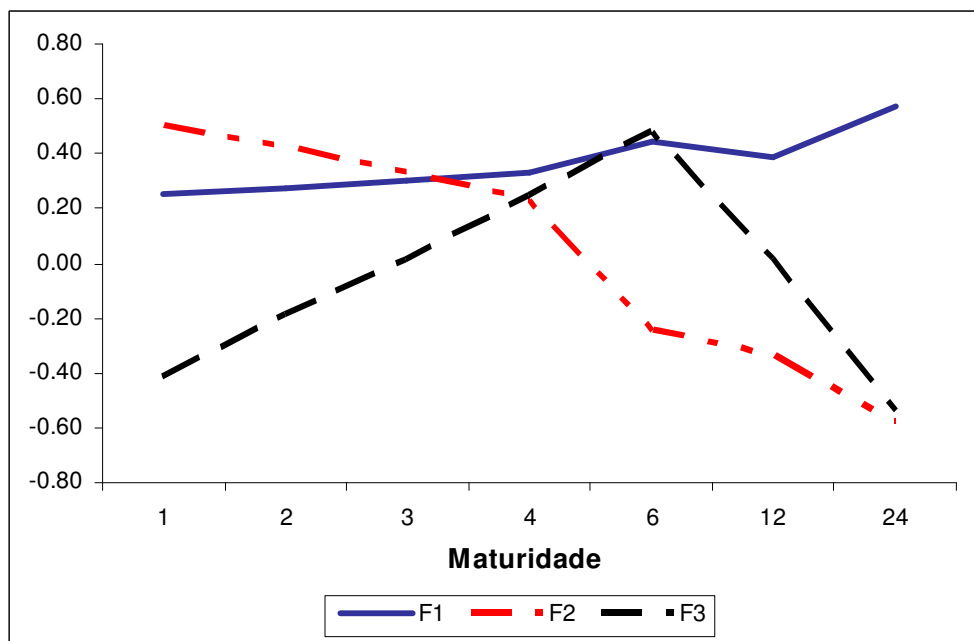


Figura 7 - Perfis dos *loadings* recuperados por meio de análise de componentes principais

Cabe ressaltar a possibilidade do terceiro fator ser desnecessário para caracterizar o comportamento da estrutura a termo brasileira (pelo menos na amostra específica que analisamos), pois a execução da técnica ACP revelou que a proporção da variância total das taxas de *swap* DI-pré que pode ser atribuída aos fatores *level* e *slope* ultrapassa 99%³⁰.

Finalmente chegamos ao estágio de utilizar o modelo proposto por Diebold e Li (consubstanciado nas eqs. (14) e (15)) para calcular previsões acerca das trajetórias futuras das 7 taxas de *swap* DI-pré que enfocamos ao longo do trabalho. Da mesma maneira que esses autores fazem, aplica-se o modelo a uma amostra com dados mensais de julho de 1999 a maio de 2006. Uma sub-amostra composta por observações do período de janeiro de 2005 a maio de 2006 é separada para comparar as previsões calculadas com os valores efetivamente observados. O critério de avaliação adotado é o erro médio quadrático e os horizontes de previsão correspondem aos casos $h = 1, 6$ e 12 . Tanto o modelo sugerido por Diebold e Li quanto os modelos que servem como base de comparação são estimados recursivamente de julho de 1999 até o momento no qual as previsões são calculadas³¹.

As técnicas que servem como base de comparação são as seguintes³²:

³⁰ Esse resultado não deve ser encarado com demasiada estranheza, pois também surge em outros contextos (ver, por exemplo, “*A Two-Factor Model of the German Term Structure of Interest Rates*”, de Nuno Cassola e Jorge Barros Luís, em *Applied Financial Economics*, 13, 2003, onde o mesmo resultado foi obtido para a curva de juros alemã antes do estabelecimento do euro).

³¹ O procedimento é o mesmo que foi utilizado por Diebold e Li, ou seja, no primeiro passo todos os modelos são estimados com dados de julho de 1999 a dezembro de 2004. Em seguida, os modelos são utilizados para gerar previsões para a curva de juros de janeiro de 2005, junho de 2005 e dezembro de 2005, e os erros cometidos são calculados. O próximo passo é uma repetição do primeiro, ou seja, os modelos são estimados de novo com dados de julho de 1999 a janeiro de 2005. Em seguida, esses modelos são utilizados para gerar previsões para a curva de juros de fevereiro de 2005, julho de 2005 e janeiro de 2006, e os erros cometidos são acumulados àqueles calculados anteriormente. O procedimento se repete até que a amostra utilizada para estimação seja composta por dados de julho de 1999 a maio de 2005. A análise de desempenho se baseia nas previsões obtidas com as 6 repetições executadas.

³² Cumpre destacar que não utilizamos técnicas mais elaboradas para a comparação dos resultados (ao contrário do que foi feito em Diebold e Li, que comparam a *performance* da sua proposta com modelos de correção de erros, regressões de Fama e Bliss, *slope regressions*, etc...). Essa opção se justifica pelo fato de técnicas mais simples serem suficientes para bater a proposta de Diebold e Li no caso brasileiro, conforme veremos a seguir.

1. Passeios aleatórios ou *random walks* (denotados por RW), nos quais $E_t[y_{t+h}(\tau)] = y_t(\tau)$ para todo τ .
2. Modelos autoregressivos univariados de 1ª ordem (AR(1)), nos quais cada taxa de *swap* segue uma especificação dada por $y_t(\tau) = c_1 + c_2 y_{t-1}(\tau) + \varepsilon_t^\tau$, onde c_1 é uma constante e c_2 é um número cuja magnitude não supera a unidade.
3. Modelos VAR de 1ª ordem (VAR(1)) onde o vetor de variáveis endógenas é formado pelas 7 taxas de *swap* consideradas, ou seja:

$$X_t = C_1 + C_2 X_{t-1} + E_t$$

onde C_1 é um vetor de dimensões 7×1 , C_2 é uma matriz estável de dimensões 7×7 e $X_t = [y_t(1) \ y_t(2) \ y_t(3) \ y_t(4) \ y_t(6) \ y_t(12) \ y_t(24)]'$.

Os erros médios quadráticos relativos à proposta de Diebold e Li e aos modelos RW, AR(1) e VAR(1) para cada taxa de *swap* DI-pré considerada são apresentados nas Tabelas 13 a 15. A Tabela 13 mostra os resultados obtidos para $h=1$ (curto prazo), enquanto que as Tabelas 14 e 15 apresentam os resultados para $h=6$ (médio prazo) e $h=12$ (longo prazo), respectivamente. As seguintes conclusões podem ser retiradas da observação dos resultados contidos nessas tabelas:

- No que diz respeito a exercícios de previsão de curto prazo, os modelos AR(1) superam todas as outras opções testadas para os prazos de vencimento de 2, 3, 4, 6 e 12 meses, enquanto que os modelos RW apresentam melhor desempenho para os prazos de 1 mês e 24 meses.

- No caso de previsões de médio prazo, os modelos AR(1) superam todas as outras opções testadas para os prazos de vencimento de 1, 2 e 3 meses, enquanto que os modelos RW apresentam melhor desempenho para contratos de *swap* com vencimento em 24 meses. O modelo VAR(1) obteve o menor erro médio quadrático para prever taxas associadas a contratos de *swap* de prazo intermediário (6 e 12 meses). O modelo de Diebold e Li só logra ocupar a primeira posição para taxas de *swap* relativas a contratos de 4 meses de duração.

• No caso de projeções de longo prazo, o modelo VAR(1) aparece como o de melhor *performance* para contratos de *swap* de 1, 2, 3, 4 e 6 meses. Para os demais prazos de vencimento os modelos RW obtêm o melhor desempenho.

Os resultados acima nos levam a concluir que, no caso brasileiro, o modelo de Diebold e Li não é adequado para gerar previsões de curto, médio e longo prazos. Com efeito, o modelo proposto por Diebold e Li é freqüentemente batido por meros modelos univariados, e isso ocorre para quaisquer prazos de vencimento.

Maturidade	RW	D e L	D e L 2	D e L 3	VAR(1)	AR(1)
1	0.1387	0.4549	0.6221	0.1821	0.2424	0.1467
2	0.1317	0.2987	0.4419	0.3924	0.2627	0.1292
3	0.1236	0.2989	0.4259	0.6237	0.3607	0.1102
4	0.1267	0.3094	0.4149	0.7494	0.3083	0.1060
6	0.1272	0.3759	0.4368	0.8277	0.4152	0.0947
12	0.1763	0.2641	0.2168	0.3012	0.2965	0.1468
24	0.1618	0.2257	0.2369	0.3052	0.1607	0.1988

Tabela 13 - Erros médios quadráticos registrados pelo modelo de Diebold e Li e pelas alternativas RW, AR(1), VAR(1), Diebold e Li 2 e Diebold e Li 3 quando $h=1$

Maturidade	RW	D e L	D e L 2	D e L 3	VAR(1)	AR(1)
1	1.4911	10.3498	10.5557	4.5085	3.5586	1.3310
2	1.4081	5.1257	6.5493	3.2771	2.8420	1.1222
3	1.3936	2.3325	3.9680	2.3233	2.1344	1.0563
4	1.4010	0.9787	2.2774	1.5654	1.3667	1.1034
6	1.4623	0.6767	0.6661	0.6381	0.5957	1.4187
12	1.0568	4.4563	0.8494	0.2080	0.6579	2.1334
24	0.4789	11.1660	3.8405	1.4583	3.1181	3.3603

Tabela 14 - Erros médios quadráticos registrados pelo modelo de Diebold e Li e pelas alternativas RW, AR(1), VAR(1), Diebold e Li 2 e Diebold e Li 3 quando $h=6$

Maturidade	RW	D e L	D e L 2	D e L 3	VAR(1)	AR(1)
1	6.9417	8.2792	1.7430	1.1035	2.2155	5.5050
2	8.3281	9.6926	2.7212	2.0286	3.4781	7.2422
3	9.8180	12.2485	4.2535	3.6057	5.2149	9.3844
4	10.8690	15.3166	6.1364	5.3630	7.4304	11.0826
6	12.2619	22.1621	10.4779	8.7687	11.2336	14.2410
12	11.1505	38.3807	21.0522	14.9732	20.2109	18.4200
24	7.4691	54.3092	31.9036	20.6355	32.6029	22.9058

Tabela 15 - Erros médios quadráticos registrados pelo modelo de Diebold e Li e pelas alternativas RW, AR(1), VAR(1), Diebold e Li 2 e Diebold e Li 3 quando $h=12$

Essa constatação não deixa de ser surpreendente, apesar de sabermos que o modelo de Diebold e Li já não havia se revelado promissor para previsões de curto prazo da curva de juros norte-americana. Um dos motivos que podem ter gerado esse resultado é a inadequação da hipótese de que as estruturas a termo brasileira e americana se comportam de maneira semelhante. Apesar dela ser aproximadamente verdadeira, conforme constatado acima, também é verdade que as duas curvas apresentam diferenças de comportamento relevantes, a saber, o desvio-padrão das taxas de *swap* cresce com o prazo de vencimento e os fatores comuns $\beta_{1,t}$, $\beta_{2,t}$ e $\beta_{3,t}$ (especialmente os dois primeiros) são significativamente correlacionados.

Há uma raiz macroeconômica para essas diferenças. No caso norte-americano, um choque que faça com que a inflação se eleve no curto prazo e, com isso, gere um aperto monetário compensatório por parte das autoridades monetárias (ou seja, provoque uma elevação da taxa de juros de curto prazo) não se transmite às expectativas de inflação futura e, portanto, não afeta as taxas longas³³. Em outras palavras, o choque somente faz com que a estrutura a termo se torne menos inclinada, de maneira que o fator $\beta_{1,t}$ não é afetado e o choque se transmite apenas ao fator $\beta_{2,t}$. Em consequência disso, as taxas curtas tendem a ser mais voláteis que as taxas longas (pois elas absorvem integralmente o impacto do choque) e os fatores $\beta_{1,t}$ e $\beta_{2,t}$ tendem a ser pouco correlacionados (pois o primeiro responde a choques e o segundo não).

No caso brasileiro, porém, um choque que faça com que a inflação se eleve no curto prazo pode gerar tanto uma mudança na inclinação quanto no nível da curva de juros. Isso ocorre porque ele desencadeia uma reação por parte das autoridades monetárias (que elevam a taxa de juros de curto prazo) e se transmite às expectativas de inflação futura (o que acaba afetando as taxas longas). Adicionalmente, o aumento da percepção de risco inflacionário por parte dos investidores, quando associado à insegurança com relação à capacidade e ao

comprometimento das autoridades monetárias em combater os efeitos deletérios do choque, gera um aumento no prêmio de risco que esses investidores exigem para manter títulos pré-fixados em sua carteira, fenômeno que é tanto mais intenso quanto maior for o prazo de vencimento do título. Dessa maneira, as taxas longas sobem não só porque as expectativas de inflação futura aumentam, mas também porque o prêmio de risco aumenta. Em consequência disso tudo, (i) o choque inicial tende a fazer com que tanto $\beta_{1,t}$ quanto $\beta_{2,t}$ sejam afetados, (ii) as taxas longas tendem a ser mais voláteis que as taxas curtas (pois elas são afetadas por elevações nas expectativas de inflação futura e no prêmio de risco inflacionário), e (iii) os fatores $\beta_{1,t}$ e $\beta_{2,t}$ tendem a ser significativamente correlacionados (pois respondem aos mesmos estímulos)³⁴.

Essas considerações nos levam a concluir que a proposta de Diebold e Li precisa ser adaptada para o caso brasileiro. Há duas maneiras de se fazer isso:

- Incorporar à modelagem alterações na volatilidade das taxas de *swap*, que pode depender dos choques inflacionários que atingem a economia. Isso pode ser especialmente relevante para as taxas de longo prazo, conforme foi visto anteriormente.

- Levar em consideração que os fatores que determinam o comportamento da curva de juros brasileira podem estar correlacionados.

Nesse trabalho vamos perseguir apenas a segunda proposta, deixando para trabalhos posteriores a tarefa de explorar a primeira sugestão. O primeiro modelo alternativo (doravante chamado Diebold e Li 2) é um VAR(1) onde o vetor de

³³ Se as expectativas de inflação futura mudassem (com a taxa de juros real permanecendo constante), a equação de Fisher exigiria que as taxas longas também se ajustassem para cima.

³⁴ Justificativas teóricas e empíricas para as idéias expostas aqui podem ser encontradas em “*Long-Term Interest Rates and Inflation: A Fisherian Approach*”, de Peter Ireland, publicado em *Federal Reserve Bank of Richmond Economic Quarterly*, volume 82/1, 1996; e “*Medium run effects of short run inflation surprises: monetary policy credibility and inflation risk premium*”, de Alexandre Lowenkron e Márcio Garcia, Departamento de Economia da PUC-Rio, Texto para Discussão n° 0508, julho de 2005.

variáveis endógenas é formado pelos três fatores comuns $\beta_{1,t}$, $\beta_{2,t}$ e $\beta_{3,t}$. O segundo modelo alternativo (designado por Diebold e Li 3) é também um VAR(1) onde o vetor de variáveis endógenas é formado pelos fatores $\beta_{1,t}$ e $\beta_{2,t}$, ou seja, descarta-se o terceiro fator $\beta_{3,t}$. Essa decisão emana do resultado do terceiro fator poder ser irrelevante para o caso brasileiro, pois os fatores um e dois já são capazes de explicar mais de 99% da variabilidade dos dados da amostra. Obviamente, o *framework* de Nelson e Siegel precisa ser adaptado a essa hipótese; mais especificamente, eqs. (12) e (15) se transformam em:

$$y_t(\tau) = \beta_{1,t} + \beta_{2,t} \left(\frac{1 - e^{-\lambda_t \tau}}{\lambda_t \tau} \right) \quad (12b)$$

$$\hat{y}_{t+h}(\tau) = \hat{\beta}_{1,t+h} + \hat{\beta}_{2,t+h} \left(\frac{1 - e^{-\lambda_t \tau}}{\lambda_t \tau} \right) \quad (15b)$$

onde o parâmetro λ_t continua sendo calibrado da mesma maneira³⁵. O relacionamento entre os fatores que emanam das eqs. (12b) e (15b) e as medidas empíricas de nível e inclinação pode ser visualizado na figura abaixo. Observa-se que os primeiros e os últimos continuam mantendo uma correlação significativa.

³⁵ Essa decisão é discutível na medida em que λ_t é calibrado com base na função G , que foi retirada da formulação. Considerações de comparabilidade, porém, nos fazem manter o valor utilizado no *framework* com três fatores.

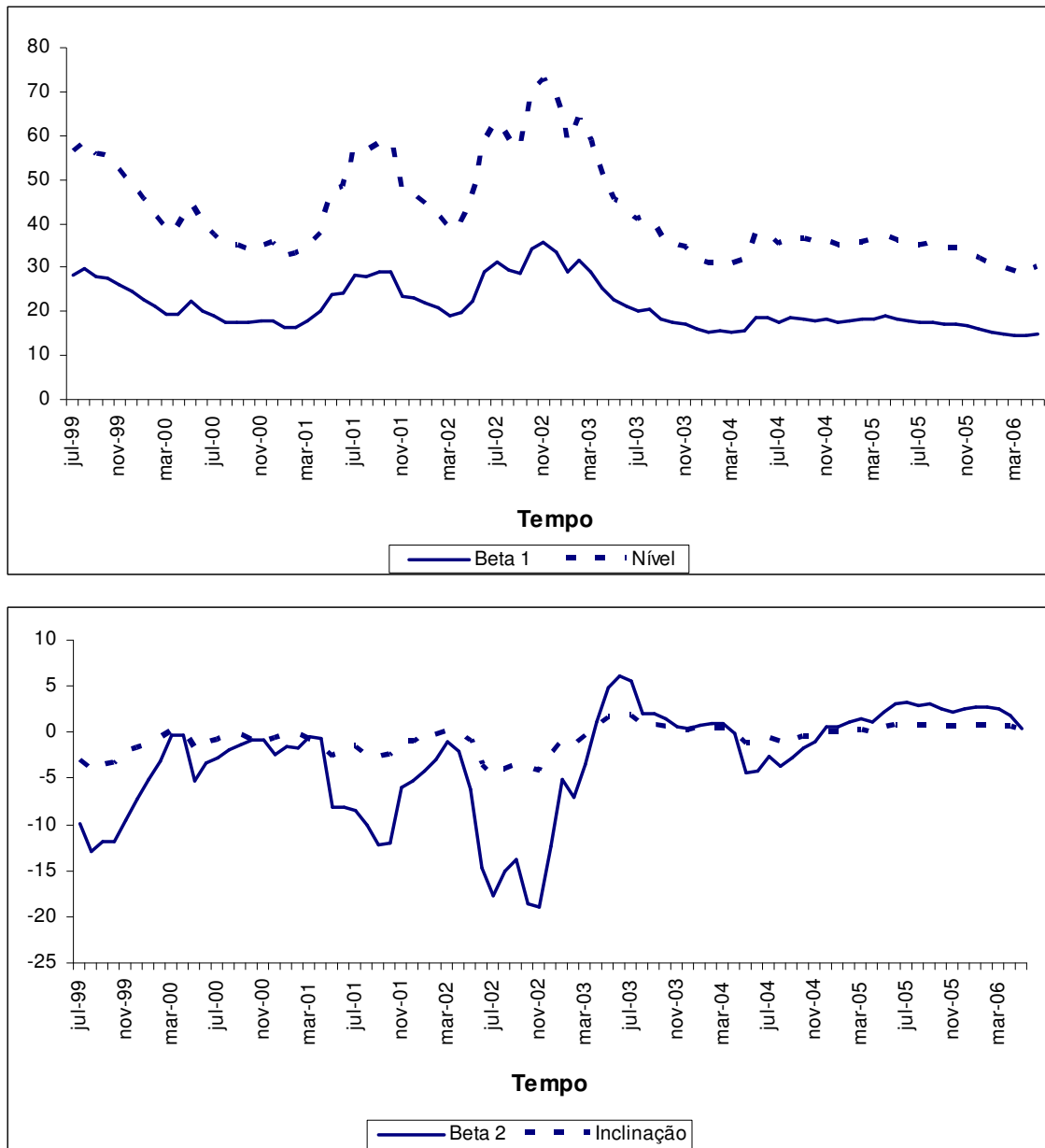
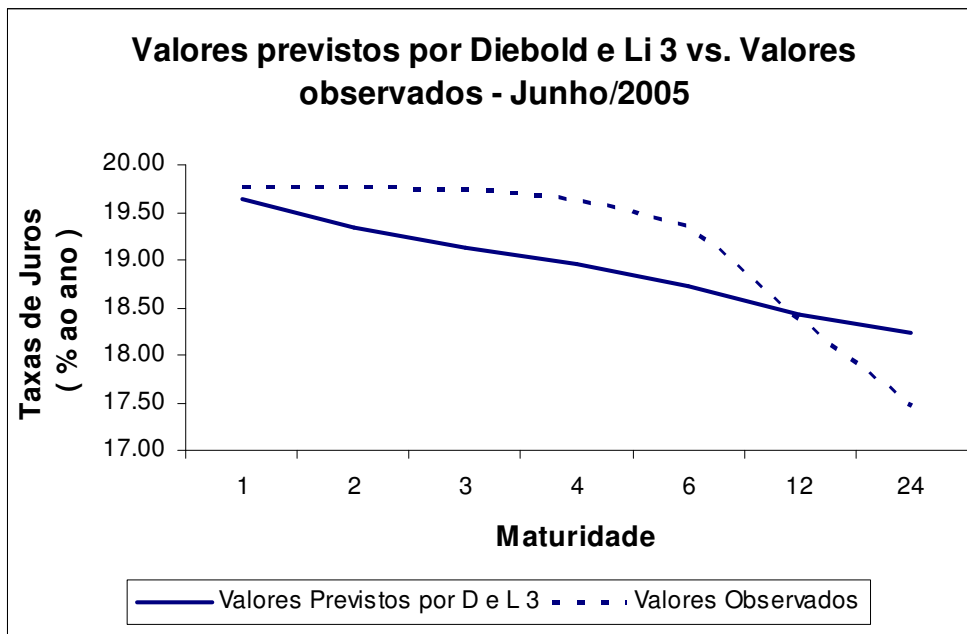


Figura 8 - Comparação entre os fatores comuns estimados com base no framework de Nelson e Siegel modificado (linhas cheias) e empíricos (linhas pontilhadas)

As Tabelas 13 a 15 mostram os resultados obtidos, enquanto a Figura 9 mostra as curvas de juros observada e prevista por Diebold e Li 3 para $h = 1, 6$ e 12 (previsões calculadas em maio de 2005). Observa-se na referida figura que inicialmente tanto a curva de juros prevista quanto a curva de juros observada são negativamente inclinadas, porém a curva de juros prevista para 6 meses adiante se torna praticamente *flat*, enquanto que a curva de juros observada permanece negativamente inclinada. A curva de juros prevista para 12 meses adiante, por sua

vez, é positivamente inclinada, enquanto que a curva de juros observada se torna *flat* e se situa em um nível inferior. Essas discrepâncias podem ser atribuídas a dois fatores: (i) a velocidade de reversão à média do modelo é maior do que a velocidade observada mais recentemente, e (ii) as médias históricas das taxas (ou seja, registradas dentro da amostra que utilizamos) são significativamente maiores que as novas médias para onde as taxas parecem estar convergindo³⁶.



³⁶ Esse movimento pode ser entendido mais facilmente se pensarmos na conjuntura econômica observada em anos mais recentes, caracterizada por inflação mais baixa, expectativas de inflação mais baixa, contas externas em ordem e economia mundial em franco crescimento. Tudo isso não só permitiu que as autoridades monetárias adotassem uma política monetária mais expansionista, mas também gerou uma percepção de risco mais baixa por parte dos agentes; dessa maneira, as taxas de juros em todos os prazos caíram significativamente.

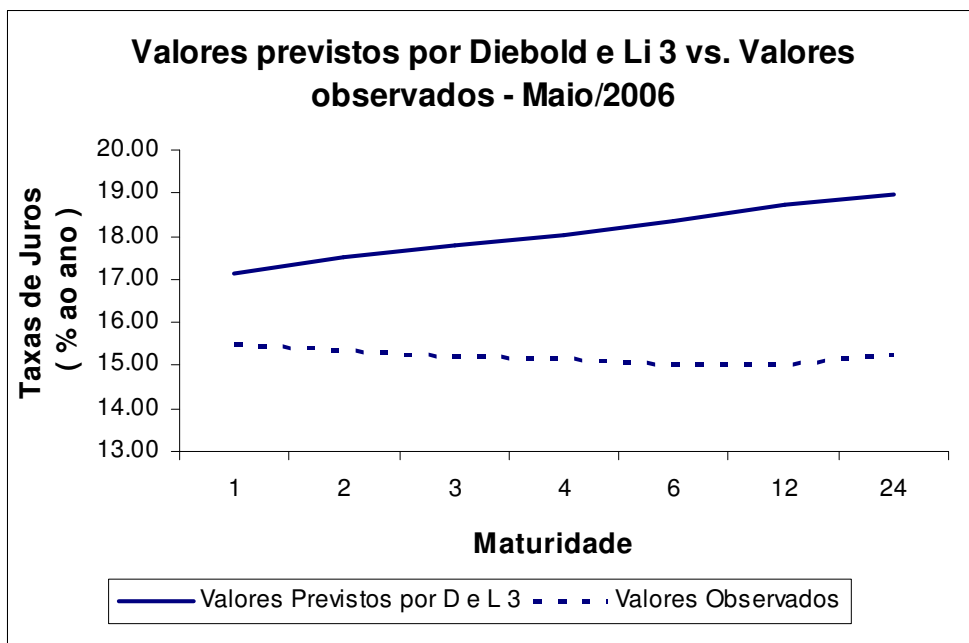
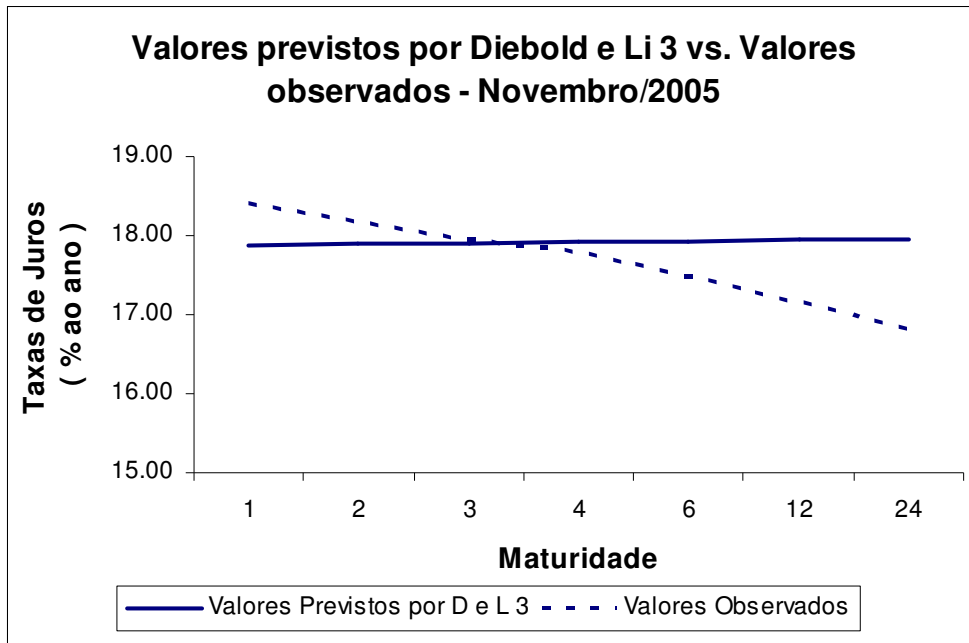


Figura 9 - Curvas de juros observadas e previstas pela segunda variante do modelo de Diebold e Li (Diebold e Li 3) para junho de 2005 ($h=1$), novembro de 2005 ($h=6$) e maio de 2006 ($h=12$). As previsões foram calculadas em maio de 2005.

As seguintes conclusões podem ser retiradas da observação das tabelas:

- No que diz respeito a exercícios de previsão de curto prazo, a *performance* relativa dos modelos não se altera (em outras palavras, tanto a proposta de Diebold e Li quanto as nossas alternativas continuam produzindo resultados de previsão decepcionantes).

- No caso de previsões de médio prazo, o modelo Diebold e Li 3 aparece como o melhor predictor para taxas de contratos de *swap* de 12 meses. Para o restante dos prazos a *performance* relativa dos modelos não se altera.

- No caso de projeções de longo prazo, o modelo Diebold e Li 3 aparece como o de melhor *performance* preditiva para contratos de *swap* de 1, 2, 3, 4 e 6 meses. Para o restante dos prazos de vencimento a *performance* relativa dos modelos não se altera.

Os resultados acima nos levam a concluir que a segunda alternativa proposta (Diebold e Li 3) consegue gerar boas previsões de longo prazo, o que resgata ao menos em parte os resultados obtidos por Diebold e Li para dados norte-americanos. Cabe ressaltar aqui as razões que pensamos estar por trás desse desempenho, quais sejam, a incorporação do fato de que, no caso brasileiro, os fatores comuns $\beta_{1,t}$ e $\beta_{2,t}$ são correlacionados e o descarte de $\beta_{3,t}$, cujo poder explicativo não compensa o aumento da complexidade do modelo (que já sabemos ser negativa caso o objetivo seja gerar boas previsões; ver nossas considerações acerca da parcimônia e do “*shrinkage principle*”).

7 Conclusão

O principal objetivo desse trabalho foi aplicar a metodologia de Diebold e Li para modelar o comportamento da estrutura a termo brasileira e gerar previsões de curto, médio e longo prazos para a sua trajetória futura. Os resultados alcançados nos levaram a concluir que o modelo de Diebold e Li não é adequado para o caso brasileiro, pois foi freqüentemente batido por meros modelos univariados para quaisquer horizontes de previsão e para quaisquer taxas de *swap* consideradas. As principais razões apontadas para esse fracasso foram duas: (i) o modelo não incorpora o fato de que choques inflacionários podem alterar a volatilidade das taxas de *swap*, e (ii) o modelo não leva em consideração que os fatores que determinam o comportamento da curva de juros brasileira podem estar correlacionados.

O segundo ponto é explorado por meio de duas variantes do modelo de Diebold e Li. A primeira variante (Diebold e Li 2) postula que os fatores $\beta_{1,t}$, $\beta_{2,t}$ e $\beta_{3,t}$ podem ser modelados por meio de um VAR(1), enquanto que a segunda variante (Diebold e Li 3) se apóia em um modelo VAR(1) onde o vetor de variáveis endógenas é formado somente pelos fatores $\beta_{1,t}$ e $\beta_{2,t}$. Os resultados nos levaram a concluir que a segunda variante (Diebold e Li 3) consegue gerar boas previsões de longo prazo, sucesso que provavelmente decorre da incorporação da correlação existente entre $\beta_{1,t}$ e $\beta_{2,t}$ e do descarte de $\beta_{3,t}$.

Os caminhos que vislumbramos para a continuidade da pesquisa são os seguintes:

- Realizar um estudo mais aprofundado do comportamento do parâmetro λ_t , com foco nas seguintes perguntas: (i) será que a hipótese de λ_t ser constante é razoável? ; (ii) será que os princípios utilizados para a sua calibragem (como a

definição de prazo intermediário) são corretos? ; e (iii) o quão sensíveis são os resultados de previsão à utilização de valores diferentes para λ ?

- Explorar a possibilidade dos fatores $\beta_{1,t}$ e $\beta_{2,t}$ serem cointegrados, o que justificaria a utilização de um modelo de correção de erros para modelar a sua evolução conjunta.

- Incorporar à modelagem alterações na volatilidade das taxas de *swap*, que podem depender dos choques inflacionários que atingem a economia.

- Explorar o relacionamento existente entre os fatores comuns, as taxas de juros (curtas e longas) e as principais variáveis macroeconômicas (inflação, nível de atividade, etc...), pois o emprego de informações contidas nessas últimas pode superar as perdas oriundas do aumento da complexidade do modelo e, com isso, contribuir para melhorar significativamente o seu desempenho preditivo (para indicações de que essa estratégia pode ser vencedora, ver Vereda, Lopes & Fukuda (2006)).

Referências Bibliográficas

ANG, A.; PIAZZESI, M.. A No-Arbitrage Vector Autoregression of Term Structure Dynamics with Macroeconomic and Latent Variables. **Journal of Monetary Economics** 745-787, 2003.

CAMPBELL, J. Y.; LO, A. W.; MCKINLAY, A. C.. **The econometrics of financial markets**. Princeton, N. J.: Princeton University Press, 1997.

CASSOLA, N.; LUÍS, J.. A Two-Factor Model of the German Term Structure of Interest Rates, **Applied Financial Economics**, 13: 783-806, 2003.

ELTON, E.J.; GRUBER, M. J.. **Modern portfolio theory and investment analysis**, New York : Wiley, 6th ed., 2006.

ESTRELLA, A.. Why Does the Yield Curve Predict Output and Inflation? **The Economic Journal**, 115, 2005.

EVANS. C; MARSHALL. D.. **Monetary Policy and the term structure of nominal interest rates: evidence and theory**. Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy, 53-111, North-Holland, 1998

IRELAND, P.. Long-Term Interest Rates and Inflation: A Fisherian Approach, **Federal Reserve Bank of Richmond Economic Quarterly**, v. 82/1, 1996.

JOHNSON, R.; WICHERN, D.. **Applied multivariate statistical analysis**. 5th. ed. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 2002. p.458-586.

KNEZ, P.; LITTERMAN, R.; SCHEINKMAN, J.. Exploration into factors explaining money market returns. **Journal of Finance**, v. 1, p. 54-61, Dec. 1994.

LITTERMAN, R.; SCHEINKMAN, J.. Common factors affecting bond returns. **Journal of Fixed Income**, v.1, p. 54-61, 1991.

LOWENKRON. A.; GARCIA. M.. **Medium run effects of short run inflation surprises: monetary policy credibility and inflation risk premium**. Departamento de Economia da PUC - Rio, 2005.

SACHS, J.; LARRAIN, F.. **Macroeconomics in the global economy**. New York: Harvester Wheatsheaf, 1993.

SIEGEL, A. F.; NELSON, C. R.. Long-term behavior of yield curves. **Journal of Financial and Quantitative Analysis**, p.105-110, 1988.

SILVEIRA, G; BESSADA, O.. Análise de componentes principais de dados funcionais: uma aplicação às estruturas a termo de taxas de juros. **Banco Central do Brasil**, 2003.

TAYLOR, J.. **Discretion Versus Policy Rules in Practice**, Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy, 39, 1993.

VEREDA, L.; LOPES, H., FUKUDA, R.. **Estimating a VAR model for the term structure of interest rates in Brazil**. Mimeo, 2006.

WOODFORD, M.. **Interest and prices: foundations of a theory of monetary policy**. Princeton, NJ: Princeton University Press, 2003.

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)