PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA
DO RIO DE JANEIRO

Petrusca Arrieiro Cardoso

Uma metodologia para estimação do capital econômico: incorporação de dependência entre riscos via cópulas

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre pelo Programa de Pós-Graduação em Ciências Atuariais do Instituto de Gestão de Riscos Financeiros e Atuariais da PUC-Rio.

Orientadores: Roberto Westenberger
Cristiano Fernandes

Rio de Janeiro
agosto de 2008

Resumo

Cardoso, Petrusca Arrieiro; Fernandes, Cristiano; Westenberger, Roberto. **Uma metodologia para estimação do capital econômico: incorporação de dependência entre riscos via cópulas**. Rio de Janeiro, 2008. 116p. Dissertação de Mestrado – Instituto de Gestão de Riscos Financeiros e Atuariais, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Órgãos reguladores internacionais dos setores bancário e securitário têm incentivado a adoção de modelos internos, em apoio ao gerenciamento de riscos, para a determinação de capital mínimo regulatório. A maioria dos modelos pode ser decomposta em sub-modelos de determinação de capital para cada tipo de risco que a companhia está exposta. O capital requerido total será a agregação desses capitais individuais. Os riscos de uma companhia podem ter uma interdependência, em geral, não linear, impossibilitando a soma direta desses capitais. Um dos grandes desafios da modelagem é identificar, mensurar e incorporar essas dependências. A teoria de cópulas tem se mostrado uma ferramenta eficaz para agregação dos capitais uma vez que incorpora as estruturas de dependência dos riscos modelados na estimação do capital mínimo. Esta dissertação apresenta uma discussão geral sobre metodologias de mensuração de dependência entre riscos. Estes conceitos são utilizados, no final da dissertação, para a estimação do capital econômico de uma companhia de seguros. Como a cópula nos permite separar os efeitos das estruturas de dependência das características peculiares às distribuições marginais, é possível explorar o impacto das dependências dos riscos no capital requerido total. A sensibilidade do capital econômico diante da escolha das cópulas é investigada. As medidas de risco utilizadas para determinar o capital foram o *Value at Risk* e o *Condicional Value at Risk*.

Palavras-chave

risco de subscrição; modelo interno, cópulas; capital econômico; dependência entre riscos; mensuração de riscos; *VaR*; *CVaR*.

Abstract

Cardoso, Petrusca Arrieiro; Fernandes, Cristiano; Westenberger, Roberto. **A methodology for the estimation of economic capital: incorporating dependence between risks via copulas**. Rio de Janeiro, 2008. 116p. Dissertação de Mestrado – Instituto de Gestão de Riscos Financeiros e Atuariais, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Financial regulatory agencies have been encouraging the adoption, in risk management practices, of internal models in order to determinate the regulatory minimum capital. Most of the models can be decomposed in minor capital models, each associated to a particular risk source to which that the company is exposed. The regulatory capital will be the aggregation of these individual capitals. The companies' risks may have non-linear dependencies which prevent the sum of the individual capitals. One of the greatest challenges of this modeling process is to identify, measure and incorporate the dependencies amongst the several risk sources. The relatively recent copula theory has been shown to offer an effective tool for the aggregation of capitals, by duly capturing and incorporating the dependence of the several risks sources when estimating the minimum capital. This dissertation presents a general discussion about a dependence measurement methodology between risks. This is then applied, at the end of dissertation, to the estimation of the economic capital of an insurance company. Since copulas allow us to separate the effects of the structure dependence to the peculiar characteristics of the marginal distribution, it is possible to explore the impact of dependencies of risks on the total economic capital. The sensitivities of the economic capital are investigated. The risks measures used to determinate the capital were the Value at Risk and Conditional Value at Risk.

Keywords

underwriting risk; internal models; copulas; economic capital; dependent risks; risk measures; VaR; CvaR.

Sumário

Lista de figuras

Lista de tabelas

1
INTRODUÇÃO

O gerenciamento de riscos das instituições financeiras destacou-se somente após os recentes colapsos ligados a instituições como Barings Bank, Procter&Gamble,Bankers Trust, Long Term Capital Management, etc. Desde então muitas normas de conduta e de gerenciamento baseado em risco tem sido discutidas na tentativa de proteger às instituições financeiras de uma possível insolvência. No mercado segurador verificam-se estas instruções tanto no IAIS quanto no projeto Solvência II, em implantação na comunidade européia. Em conformidade com estes novos padrões de regulação, a Superintendência de Seguros Privados – SUSEP modificou as regras de determinação de capital mínimo para operação das entidades seguradoras com o objetivo de dar mais proteção financeira à entidade.

A SUSEP define que o capital mínimo de uma seguradora deve ser suficiente para cobrir as variações provenientes de uma situação econômica adversa que contraria as expectativas de mercado no momento da elaboração da sua política de subscrição. Esta definição inclui as oscilações das provisões de sinistros ocorridos até a data base, dos sinistros oriundos de apólices com exposição no ano subseqüente à data base, bem como todos os desenvolvimentos possíveis de sinistros dos riscos assumidos. A SUSEP classificou o risco de subscrição em risco de reserva e risco de precificação. O risco de precificação estaria associado aos novos negócios iniciados a partir da data base de avaliação. O riso de reserva seria referente aos riscos não espirados e cujas reversas já teriam sido constituídas. De acordo com esta classificação pode-se analisar esta classificação de riscos a partir da seguinte linha do tempo.

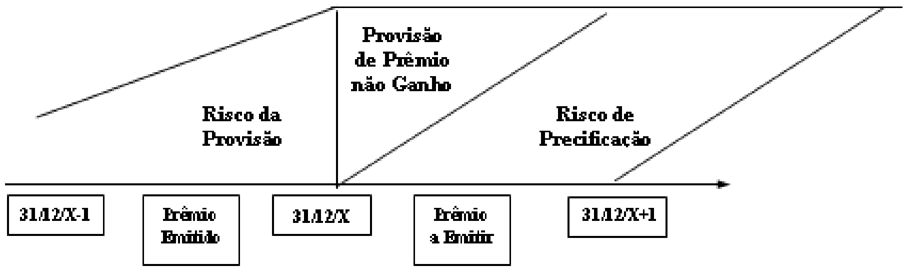

Figura 1: Linha do tempo do risco de subscrição

A.M.Best [2004] realizou um estudo com o objetivo de identificar os casos de insolvências de seguradoras dos USA e identificou o risco de subscrição como uma das suas principais causas. Das causas primárias identificadas para 562 de 871 companhias que ficaram insolventes no período de 1969 a 2002, 61,4% eram relativos ao risco de subscrição. O mesmo estudo[1] realizado entre 1969 e 1990 tinha apontado 55,4% das insolvências oriundas deste risco. Este aumento se deu principalmente pelo aumento de insolvência devido à deficiência de reservas. A tabela 1 mostra estes dados desagregados.

Tabela 1: Causas Primárias de Insolvência – USA

Riscos de subscrição	1969-1990	1969-2002
Deficiência de reservas	27,5%	37,2%
Perdas catastróficas	5,9%	6,9%
Crescimento acelerado	22%	17,3%

Fonte: A.M.Best [2004]

Identifica-se um aumento de 35,27% de insolvências oriundas de deficiência de reserva, constatando a necessidade de uma maior atenção por parte das seguradoras e do órgão regulador.

A legislação que regulava o capital mínimo, instituída em 2002, não incorporava risco na determinação do capital. A única segregação era quanto às regiões de atuação de cada seguradora. O ramo de atuação, bem com as correlações entre os sinistros de diferentes ramos, não era considerado. Na nova metodologia proposta pela SUSEP as seguradoras são classificadas de acordo com

[1] Estudo baseado em 305 de 481 companhias que ficaram insolventes no período.

os ramos e região de atuação e as correlações existentes entre sinistros de diferentes ramos estão incluídas nos cálculos.

A fórmula de cálculo instituída para determinação do capital adicional[2] é composta por fatores relativos ao risco de emissão/precificação do segmento de mercado[3], risco de provisão de sinistro da classe de negócio e fatores relativos às correlações entre os segmentos de mercado dos riscos de emissão/precificação e as correlações entre as classes de negócio dos riscos de provisão de sinistro. Estes fatores foram determinados para seguradoras que possuem ou não modelo interno de determinação de capital. Às sociedades seguradoras que não possuem modelos internos[4] são aplicados fatores relativos ao risco de emissão e provisão de sinistro superiores aquelas que possuem modelos internos, ou seja, uma postura mais conservadora.

O modelo deve fornecer um entendimento mais sólido dos riscos da empresa, possibilitando a tomada de decisões com base no relacionamento risco, retorno, capital. A conseqüente melhoria de gestão trazida por um melhor conhecimento da companhia permite a antecipação de problemas e identificação das atividades mais lucrativas. Logo, a seguradora pode reestruturar sua carteira e adotar políticas de mitigação transferência ou diminuição de risco, diminuindo assim o risco de ter problemas financeiros. Assim, o modelo interno é a maneira mais eficiente de determinar o nível apropriado de capital.

Não existe uma única maneira de se construir um modelo interno de determinação de capital de uma companhia. Entretanto, qualquer que seja a metodologia escolhida existe uma série de decisões que precisam ser tomadas a fim de refletir os objetivos da companhia. Dentre estas decisões podemos citar:

- Período de avaliação
- Medidas de risco

---

[2] O capital mínimo é equivalente à soma do capital base com o capital adicional. O capital base é um montante fixo de capital. O capital adicional é um montante variável determinado a partir das novas regras que levam em consideração o ramo e a região de atuação em que a seguradora opera ou deseja operar.

[3] Segmento de mercado é a combinação entre classe de negócio e região de atuação em que a sociedade seguradora opera, ou deseje operar.

[4] Os modelos internos serão aceitos somente após aprovação da SUSEP. Estes modelos devem ser desenvolvidos a partir de modelos matemáticos de simulação em que seja feita uma análise de sensibilidade em pelo menos um fator macroeconômico relevante para o segmento de mercado em que opere.

- Riscos a incluir
- Metodologia de quantificação
- Agregação de Riscos

Dentre os principais aspectos a se considerar na construção do modelo, destaca-se a importância da incorporação das associações existentes em cada classe de seguros. A maioria dos modelos é composta por sub-modelos de determinação de capital para cada tipo de risco que a companhia está exposta. O capital total requerido de uma companhia será a agregação dos capitais individuais de cada classe. Entretanto, os riscos de cada classe de seguros podem ter uma interdependência, em geral, não linear, impossibilitando a soma direta desses capitais. Um dos grandes problemas de uma metodologia de determinação de capital é identificar, mensurar e incorporar as dependências existentes entre as classes. Os riscos de uma atividade seguradora podem ser altamente dependentes em situações extremas.

A teoria das cópulas tem se mostrado uma ferramenta eficaz para a agregação de capitais uma vez que incorpora as dependências entre os riscos na estimação do capital econômico. Como a cópula permite separar os efeitos das estruturas de dependência das características peculiares às distribuições marginais, é possível explorar o impacto das dependências dos riscos no capital requerido total.

O objetivo desta dissertação é estudar diferentes formas de mensuração de dependência e agregação de riscos, com enfoque na técnica de cópulas. Os impactos no capital econômico da incorporação de dependências entre os riscos e a escolha das cópulas serão investigados

A dissertação está dividida em sete capítulos. No segundo capítulo apresenta-se uma visão geral dos principais aspectos de um modelo interno de determinação de capital. No terceiro capítulo as medidas de risco mais utilizadas para determinação de capital são expostas. No quarto capitulo é apresentado a teoria das cópulas que é uma maneira de construir a distribuição conjunta das classes de seguros considerando as associações existentes entre elas. Alguns conceitos de dependência e algumas formas de medi-la são mostrados no quinto capítulo. O sexto capítulo destina-se a apresentação de uma metodologia de cálculo do capital econômico e dos resultados obtidos. As conclusões são discutidas no sétimo capítulo. A bibliografia e os apêndices completam o trabalho.

2
MODELO INTERNO

2.1.
O que é um modelo

Jewell [1980] define um modelo é uma representação da realidade usada para simular um processo, entender uma situação ou fenômeno, predizer um resultado ou analisar um problema. A abstração e simplificação da realidade visam facilitar a compreensão de relações e estruturas complexas, isolando aspectos de importância primordial para o fenômeno a ser examinado.

Modelos podem variar de uma representação simplificada a uma muito complexa, dependendo dos interesses, recursos da entidade e do fenômeno a ser modelado. Entretanto, um fenômeno complexo não requer necessariamente um modelo complexo.

Um modelo matemático é estruturado como um conjunto de relações matemáticas verificáveis ou procedimentos lógicos usados para representar um fenômeno observado. Salvo algumas simplificações necessárias, este deve ser capaz de reproduzir o mundo real do fenômeno, supor hipóteses alternativas sobre suas causas e/ou prever seu comportamento futuro.

No contexto de uma instituição financeira, um modelo deve evidenciar seus resultados financeiros, operacionais e econômicos. A maioria das operações de uma instituição está relacionada a diferentes tipos de riscos, tais como riscos macroeconômicos, risco de não pagamento da contraparte e risco de eventos extremos não esperados. O não gerenciamento desses riscos pode comprometer a saúde financeira da entidade.

Um modelo de gerenciamento de risco de uma instituição financeira deve incorporar os principais processos de negócios da organização. Ele deve captar os riscos relevantes envolvidos nesses processos, suas causas, intensidade e severidade. Usualmente, o modelo estruturado contém uma série de sub-modelos interligados, cada qual responsável pela mensuração de uma (ou grupo de) área(s) ou negócio da companhia.

O modelador deve ter conhecimento da área de risco a ser modelada e da natureza da questão a ser investigada. É importante que o gestor da instituição estudada tenha conhecimento das limitações e suposições do modelo e como se deve analisar os resultados. Essa integração entre o modelador e o gestor possibilita a construção de um modelo mais acurado com resultados mais consistentes.

2.2.
Considerações importantes na construção de um modelo

A construção de um modelo requer o uso de simplificações e suposições da realidade. Descrever fielmente todos os aspectos envolvidos e todas as variáveis internas e externas que afetam os sistemas modelados é uma tarefa intangível. Assim, algumas simplificações são feitas de forma a se obter uma melhor compreensão do fenômeno.

Modelos excessivamente simplificados ou modelos construídos a partir de suposições simplificadas ou inadequadas podem falhar na determinação da real magnitude de riscos que a companhia está exposta. A seleção de suposições inadequadas pode ocorrer se não existir uma expertise suficiente da questão abordada, ou mesmo se as suposições são baseadas em dados históricos que não mais refletem a situação econômico-financeira da companhia e do mercado que ela está inserida.

Geralmente, um modelo é construído a partir de informações extraídas do banco de dados da companhia. Um modelo com resultados consistentes requer dados consistentes. Nem sempre é possível obter dados de qualidade suficiente, ou não se tem muita informação de como esses dados foram coletados. Nesses casos o modelador deverá avaliar a razoabilidade de se usar esses dados. Quanto menor a qualidade dos dados maior a necessidade de julgamentos subjetivos. Esse julgamento também é necessário na avaliação de atividades que não podem ser quantificadas.

2.3.
Modelo interno de determinação de capital econômico de uma instituição financeira

O desenvolvimento de práticas de gestão de risco e a maior preocupação com a solvência das instituições financeiras, juntamente com a sofisticação dos requerimentos regulatórios, culminaram no aumento da elaboração de modelos internos para auxiliar o gerenciamento das atividades da instituição. O termo “modelo interno” tem sido usado para identificar modelos construídos para seguradoras com o intuito de gerenciar seus riscos, obter seu valor econômico e requerimentos de capital.

Órgãos reguladores internacionais dos setores bancário e securitário têm incentivado a adoção de modelos internos em apoio ao gerenciamento de riscos, para a determinação do capital requerido, em bases econômicas, para a operação de uma instituição financeira. Capital econômico é a quantidade de capital que instituições financeiras precisam manter para cobrir perdas potenciais provenientes de suas atividades. A diferença do capital econômico para uma avaliação tradicional é que esta mensuração baseia-se no balanço econômico da instituição e não em valores contábeis.

De uma forma geral, os requerimentos de capital eram baseados em modelos muito simplificados como, por exemplo, aplicação de fatores determinados a partir de dados condensados do mercado. Esses métodos não eram capazes de refletir a natureza de risco da companhia.

O capital econômico pode ser determinado a partir de um balanço realista em que todos os valores são convertidos a valor de mercado, ou a partir de um modelo dinâmico em que os passivos são avaliados no tempo e trazidos a valor presente. Essas duas formas de avaliação são denominadas de Melhor Estimativa do Passivo (*Best Estimate Liabilities – BEL*) e Análise Financeira Dinâmica (*Dinamical Financial Analisys – DFA*).

Muito mais que satisfazer requerimentos regulatórios de capital, um modelo interno pode ser usado para avaliação de passivos, gestão da relação ativo/passivo, desenho de produtos e precificação de seguros. Esses modelos, quando bem estruturados, determinam o nível de capital mais apropriado e auxiliam em decisões ótimas baseadas em riscos.

Existem diferentes utilidades de um modelo interno elaborado para uma companhia. Interesses de alguns agentes, conforme citados em IAA (2007), são explicitados a seguir:

- Reguladores: minimizar riscos sistêmicos através do modelo, protegendo os segurados e a companhia de uma insolvência;
- Atuários: proteger os interesses de investidores, avaliar e quantificar requerimentos regulatórios;
- Alta Gestão: apoiar a fixação dos objetivos estratégicos e adequar as práticas de gestão;
- Investidores, analistas de mercado: minimizar risco de perda de investidores e avaliar o retorno dos investimentos.

2.3.1. Estrutura de um modelo interno

A elaboração de um modelo interno de determinação de capital requer a incorporação de uma série de fatores. É preciso analisar a companhia como um todo, identificando riscos provenientes das estratégias da companhia, do mercado que está inserida, concorrência, entre outros. O modelo deve descrever, da melhor maneira possível, a realidade da companhia e deve ser capaz de mensurar o impacto de uma possível mudança de estratégia, de política de subscrição, de oscilações não esperadas, entre outros.

Esses modelos demandam o uso de suposições sobre comportamento futuro de variáveis externas e internas à companhia. Entendem-se como variáveis externas aquelas que não podem ser controladas, tais como variáveis macro-econômicas e mudanças em legislações que afetam os negócios da companhia. Variáveis internas são aqueles que podem ser controladas, como por exemplo: política de subscrição da companhia, mix de produtos e mix de investimentos.

Todas essas suposições, e algumas possíveis simplificações da realidade devem ser feitas com cautela. Modelos sobre um mesmo sistema, mas com premissas diferentes, podem gerar resultados distintos. De acordo com IAA (2007), as suposições podem ser divididas em duas classes: suposições baseadas no planejamento estratégico da Companhia e suposições baseadas na experiência própria da companhia.

2.3.1.1. Suposições baseadas no planejamento estratégico da companhia

As suposições baseadas no planejamento estratégico da companhia referem-se a políticas e ações futuras da companhia em diferentes cenários, seja para diminuir ou mitigar efeitos não favoráveis de riscos associados a novos negócios, em mudanças na estratégia de investimento, ou no uso de derivativos e hedging.

- Estratégia de investimento: estratégias de investimento podem ser dinâmicas e sensíveis a mudanças no desenvolvimento econômico. O modelo deve refletir as ações da companhia diante dessas circunstâncias. Se a companhia espera mudar seu mix de investimentos, essas mudanças precisam ser modeladas.
- Derivativos e *Hedging*: políticas de *hedging* podem ser usadas para mitigar alguns tipos de risco, deixado a companhia menos vulnerável.
- Novos negócios: apesar de usualmente aumentarem a necessidade de capital, um novo negócio lucrativo pode levar a uma menor projeção de requerimento de capital. Qualquer desvio na estratégia de implementação de um novo negócio deve ser monitorado. É preciso ter agilidade para quantificar os efeitos dessa mudança a fim de que a companhia possa responder, sem maiores danos, a esses desvios não esperados.

2.3.1.2. Suposições baseadas na experiência própria da companhia

As suposições baseadas na experiência própria da companhia incluem sua política de subscrição e seu histórico de retorno de investimentos. A descrição da experiência sob um contrato de seguro pode exigir muitas suposições tais como a freqüência e severidade de sinistros. Essas suposições são, freqüentemente, dependentes da política de subscrição de riscos do segurador. Portanto o modelo precisa refletir a experiência particular da companhia.

Estas suposições podem ser baseadas em dados internos, dados do mercado segurador ou dados externos de outras empresas. Dados históricos da companhia refletem seus sinistros, custos e taxas, além da sua exposição ao risco no inicio do período de projeção. Mudanças em procedimentos internos e mudanças em fatores externos podem reduzir a adequação dos dados históricos como base para projetar resultados futuros.

Quando os dados internos não são adequados para parametrizar o modelo, é possível considerar os dados do mercado segurador. No entanto, deve-se avaliar se ocorreram mudanças significativas em companhias que contribuíram para esse banco de dados, e se essas mudanças distorceram a tendência dos dados.

Dados externos podem ser usados para avaliar fatores que não são específicos do mercado segurador, tais como o comportamento de variáveis macroeconômicas, retorno de investimentos, preço de ativos, política de taxação do governo, dentre outras.

Além das suposições mencionadas, o modelador deve decidir pelo uso de modelos determinísticos ou estocásticos e o horizonte de avaliação do modelo. Essas decisões dependem do tempo disponível para realizar o projeto, dos recursos computacionais necessários a um modelo mais complexo, do custo total a ser despendido e da exatidão requerida pela questão a ser respondida.

2.3.1.3.
Modelo determinístico x estocástico

Um modelo deve considerar diversas situações futuras as quais a companhia poderá passar. Cada uma dessas situações é chamada de cenário. Esses cenários podem ser determinados a partir de um processo estocástico que captura a incerteza e a variabilidade dos riscos modelados, ou a partir de situações críticas determinísticas baseadas na experiência da companhia e em julgamentos subjetivos.

Modelos estocásticos são mais informativos e capturam não somente a aleatoriedade de acontecimentos futuros, mas também as incertezas nas suposições e processos. Um modelo estocástico produz uma distribuição probabilística do resultado e não somente um resultado único. A calibração de um modelo estocástico requer uma quantidade suficiente de dados de boa qualidade para estimar os parâmetros e verificar se as suposições e as distribuições são adequadas. Quanto maior o número de variáveis estocásticas envolvidas, mais complexo será o modelo e maior será o tempo de processamento.

Nos modelos determinísticos, nenhum dos parâmetros envolvidos são aleatórios, e o resultado produzido é um valor único. As vantagens estão na facilidade de comparação com outros modelos, no tempo de processamento e custo do projeto. Os modelos determinísticos são recomendados quando os dados disponíveis ou a expertise são limitados. A dificuldade desse método é determinar os cenários mais apropriados que irão compor o modelo e seus respectivos pesos.

A exatidão de um modelo vai depender do número de cenários usados, do uso de um apropriado gerador de cenários ou distribuição de probabilidade e a efetividade do modelo em capturar as características subjacentes à companhia. O gerador de cenários deve cobrir toda classe de experiências possíveis. O modelador deve conhecer a origem e a calibração do gerador para avaliar se é adequado para a questão a ser respondida.

2.3.1.4. Horizonte de avaliação

O horizonte de avaliação do modelo pode ser determinado por requerimentos regulatórios ou por práticas profissionais padrão. Quando um horizonte de tempo curto é requerido, pode-se fazer uso de um modelo de período simples, com a vantagem de se poder usar uma aproximação estocástica analítica. A deficiência desse modelo em contrapartida a um modelo multi período é que esse não reflete o impacto das ações dos gestores nos riscos que continuam em desenvolvimento após o horizonte de avaliação.

Os órgãos reguladores, de uma maneira geral, estão preocupados com a solvência da companhia em um período de um ano. Entretanto, riscos assumidos no período de avaliação podem gerar sinistros no ano subseqüente, ou sinistros que somente sejam avisados no ano subseqüente. Assim é recomendável uma análise num horizonte de tempo ampliando, considerando todo o tempo de desenvolvimento dos sinistros. A incorporação de todos os compromissos assumidos pela seguradora na data base de avaliação, mesmo que esses venham a ocorrer após o período de análise, garante uma avaliação mais precisa da atual situação econômico-financeira da companhia.

2.3.2. Implementação de um modelo interno

A implementação de um modelo interno requer mais que a definição de uma metodologia adequada e de uma avaliação de dados. É preciso ter um planejamento para inserir o modelo na rotina da companhia e não torná-lo um objeto sem utilidade gerencial a ser tão somente apresentado ao regulador.

Os modelos internos vão atrair os interesses e impactar diversas áreas da companhia. Portanto, boas práticas de comunicação são essenciais na sua construção. Uma falha de comunicação pode levar no desenvolvimento de um modelo que não capte exatamente os riscos e o gerenciamento de riscos da companhia. Isso resultaria na perda de credibilidade do modelo e até mesmo poderia afetar a percepção do valor da companhia.

A natureza dinâmica do mercado segurador requer que todos os processos de implementação e modelagem sejam revistos constantemente, desde os dados, suposições, até a política de tecnologia de informação. Esse monitoramento tem o objetivo de estar sempre aprimorando o modelo, captando e corrigindo falhas, e incorporando mudanças estratégicas e do mercado.

Testes de “stress” e análises de sensibilidade podem ser aplicados ao modelo para estimar o impacto de um ou mais movimentos extremos em um fator de risco particular, ou nos parâmetros. Esses testes também auxiliam na avaliação do domínio do modelo, ou seja, em quais situações o modelo não é adequado.

Trata-se, portanto, de um ciclo de controle interno que deve acompanhar e mensurar todos os passos da companhia. Essa dinâmica no processo permite à companhia tomar medidas suficientemente rápidas em situações de stress, evitando um problema financeiro maior.

2.3.3. Tipos de riscos

Os riscos de uma atividade seguradora geralmente são divididos em risco de mercado, risco de crédito, risco legal, risco de subscrição, risco de liquidez e risco operacional.

Risco de mercado está relacionado aos retornos esperados de ativos em decorrência de variações dos fatores que impactam a dinâmica do preço do ativo, como taxas de juros, taxas de câmbio, índices de inflação, preços de imóveis e cotações de ações, etc. Júnior (2007) diz que o risco de mercado pode ser dividido em quatro grandes áreas: risco do mercado acionário, risco do mercado de câmbio, risco do mercado de juros e risco do mercado de commodities. As exposições a riscos de mercado são controladas e administradas através da gestão de descasamentos de moedas, vencimentos e taxas de juros.

Risco de Crédito é o risco de possíveis perdas quando uma das contrapartes deixa de honrar, total ou parcialmente, seus compromissos. Esse risco tem grande destaque na indústria bancária. De acordo com Prado et all (2007), os sistemas de avaliação e gerenciamento de risco de crédito estão cada vez mais sofisticados, e alguns bancos de varejo brasileiros têm desenvolvido e implementado, com sucesso, técnicas de avaliação de créditos individuais. O risco de crédito também engloba o risco político, em que existem restrições ao fluxo livre de capitais entre países, estados e municípios; e o risco país, como no caso das moratórias de países latino-americanos.

Risco Legal é uma medida de incerteza relacionada aos retornos de uma instituição por falta de um completo embasamento legal de suas operações, incluindo documentação insuficiente, ilegalidade, etc. A falta de representatividade e/ou autoridade por parte de um negociador, também pode ser considerado como um risco legal.

Risco de Subscrição é definido pela SUSEP como uma situação econômica adversa que contraria as expectativas da entidade no momento da elaboração de sua política de subscrição no que se refere às incertezas existentes tanto na definição da tábua biométrica e da taxa de juros, quanto na constituição das provisões técnicas, ou seja, a probabilidade de erro na precificação de um produto e/ou no cálculo de reservas técnicas. O risco de subscrição também é definido como Risco de Compromisso Atuarial.

Risco de Liquidez está relacionado com a facilidade/ dificuldade com que se pode converter um ativo em dinheiro vivo, pelo valor de mercado, a qualquer momento antes do seu vencimento. Os investimentos podem ser considerados com liquidez garantida (fundos de investimento, poupança e títulos públicos), sem liquidez antes do vencimento ou carência (fundos de capital garantido, títulos de capitalização e previdência) ou podem depender da disponibilidade de comprador (ações no mercado à vista, debêntures, imóveis).

Risco Operacional são todos os demais riscos enfrentados pelas entidades, com exceção dos referentes a mercado, crédito, legal e de subscrição. Está relacionado a possíveis perdas resultantes de sistemas e controles inadequados, falhas de gerenciamento e erros humanos. Risco operacional pode ser dividido em três grandes áreas: risco organizacional, risco de operações e risco pessoal.

2.4. Análise financeira dinâmica

Existem diferentes modelos usados no gerenciamento de riscos e determinação de capital mínimo para a operação de uma companhia. A metodologia mais usada na construção desses modelos é denominada Análise financeira dinâmica - *DFA*.

A análise financeira dinâmica é uma combinação de softwares, métodos, conceitos, processos e práticas. De acordo com Embrechts (2007), trata-se de um modelo que visa replicar a realidade da companhia, refletindo sua estrutura financeira e operacional com o objetivo de avaliar os riscos e benefícios associados com seu planejamento estratégico.

O diferencial da *DFA* é sua capacidade de integrar as diferentes classes de negócio e os diferentes riscos que a companhia está exposta. Análises financeiras e atuariais clássicas abordam diferentes aspectos da companhia de forma isolada. A análise financeira dinâmica modela a reação da companhia em resposta a um grande número de riscos integrados.

O termo "Análise Financeira Dinâmica" é geralmente usado em seguradoras do ramo não-vida. Em seguradoras do ramo vida, técnicas com essas características são geralmente denominadas de Avaliação do relacionamento Ativo/Passivo (*Asset and Liability Management – ALM*). Em bancos, métodos similares são chamados de Análise de Balanço (*Balance Sheet Management*).

2.4.1. Características da *DFA*

A *DFA* realiza projeções das diversas classes de negócios da companhia, mensurando o sucesso dos negócios e identificando estratégias ótimas de conduta. Essa análise tende a ser muito complexa, impossibilitando uma representação matemática. É necessário o uso de softwares complexos com simulações computacionais de grande escala, bem como o uso de técnicas formais de otimização.

Essa ferramenta reflete a estrutura interna de operação da companhia, incluindo atividades de seguros e contratos de resseguro, políticas de investimento, políticas de hedging, bem como aspectos regulatórios e taxação que podem influenciar seus resultados financeiros.

Os riscos relevantes da companhia e os fatores externos que afetam esses riscos são avaliados de uma forma conjunta, estudando a interação entre eles. Diversas formas de dependência podem ser avaliadas, seja entre os fatores de riscos, entre contratos, como também a dependência temporal desses fatores. O modelo é processado sob diferentes cenários econômicos que contemplam a estratégia da companhia definida pela alta gestão.

2.4.2. Gerador de cenários e calibração do modelo

O gerador de cenários deve conter modelos estocásticos para um grande número de fatores de riscos das diversas classes de negócio da companhia. Conforme descrito em *Encyclopedia of Actuarial Science* (2004), o gerador de cenários deve satisfazer os seguintes requerimentos:

- Deve ser capaz de captar a dependência entre os fatores de risco e a dependências temporais;
- Deve avaliar situações adversas e não somente o comportamento usual dos fatores de risco;
- Deve modelar não somente as perdas ocorridas, mas também o desenvolvimento dessas perdas no tempo.

Essa técnica requer a estimação de vários parâmetros internos e externos à companhia. A modelagem de fatores macroeconômicos tais como taxa de juros e inflação deve ter uma atenção especial. Em geral, os modelos econômicos tradicionais foram desenvolvidos a partir de conveniências matemáticas e comportamentos usuais das variáveis, negligenciando eventos extremos e situações adversas. Como o interesse do gerenciamento de riscos está justamente nos resultados desfavoráveis à companhia, é preciso desenvolver um modelo econômico que contemple oscilações não esperadas e eventos extremos, a fim de conseguir resultados mais refinados e precisos.

O principal desafio na geração de cenários para a *DFA* é produzir os componentes dos modelos de uma forma integrada, modelando suas dependências em todas as estruturas possíveis. Por causa de fatores como a elasticidade do mercado, muitas dessas dependências têm um comportamento não linear. Modelos que captam dependências lineares são menos complexos, entretanto possuem sérias limitações quando os valores extremos são importantes. Algumas formas de captar estruturas de dependência não lineares serão estudadas no capítulo 5.

Um aspecto importante do gerador de cenários consiste na sua calibração, atribuindo valores aos parâmetros do modelo estocástico. Esses valores são estimados a partir de dados da companhia e julgamento dos gestores. No entanto, costuma-se ter poucos dados de qualidade frente à grande quantidade de parâmetros que precisa ser estimada, que gera uma grande incerteza sob os parâmetros determinados. Nesses casos, é importante realizar análises de sensibilidade e testes de stress para avaliar o domínio do modelo.

2.4.3. Análise e apresentação dos resultados

Em geral a *DFA* é usada para determinar qual deve ser a conduta ótima de gestão da instituição diante de vários cenários econômicos possíveis e diferentes estratégias. É possível avaliar a lucratividade e as perdas da companhia em cada área de negócio, os benefícios e os riscos marginais de mudanças de estratégia e de inclusão de novos negócios, bem como a solvência da instituição. Variáveis internas comumente exploradas pela *DFA* são: mix de negócios e investimentos; contratos de resseguro incluindo as possíveis dependências entre esses contratos; alocação de capital em diferentes classes de investimento e para cada classe de negócio; e políticas de subscrição de riscos.

A saída de uma simulação de *DFA* consiste em um grande número de resultados possíveis para diversas variáveis. É necessário o uso de técnicas estatísticas e representações gráficas dessas informações para facilitar análises e conclusões.

O primeiro passo consiste em determinar quais as variáveis serão estudadas, tais como perdas incorridas e retorno dos investimentos. Então é analisado um grande número de resultados simulados para essas variáveis. Em geral, essas informações são condensadas em uma distribuição empírica para cada variável da seguinte forma:

$$\hat{F}_x(x) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} 1(X_k \leq x)$$

em que $F_x(x)$ é a distribuição acumulada da variável x e N o número de resultados simulados para essa variável.

Para uma melhor análise e comparação com outros resultados é calculada a média (μ) e o desvio padrão (σ) empíricos das variáveis, como segue:

$$\hat{\mu}_x(x) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} X_k$$

$$\hat{\sigma}(x) = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{k=1}^{N} (X_k - \hat{\mu})^2}$$

Para um gerenciamento de riscos é mais interessante avaliar o potencial de resultados desfavoráveis que estão concentrados nas caudas das distribuições. As mensurações de risco mais usadas para essa peculiaridade são o Valor em Risco (*Value at Risk – VaR*) e o Valor em Risco na Cauda (*Tail Value at Risk – TVaR*). Essas e outras medidas de riscos são apresentadas no capítulo 3.

3 MENSURAÇÃO DE RISCOS

3.1. Preliminares

Para discutir as medidas de riscos e dependência é preciso estar familiarizado com alguns conceitos estatísticos, tais como distribuições conjuntas e marginais.

Seja X uma variável aleatória. A função de distribuição acumulada da variável aleatória X é a função $F\colon \Re \rightarrow [0,1]$ definida por:

$$F(x) = \Pr(X \leq x) \text{ para todo } x \in \Re \text{ .}$$

A função de distribuição acumulada, ou função de distribuição possui as seguintes propriedades: contínua à direita; não decrescente; $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ e $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$.

A função de distribuição acumulada conjunta é uma extensão desta. Seja $X=(X,Y)$ um vetor aleatório. A função de distribuição conjunta de X é a função $H\colon \Re^2 \rightarrow [0,1]$ definido por: $H(x,y) = \Pr(X \leq x, Y \leq y)$ para todo $(x,y) \in \Re^2$.

As variáveis X, Y são denominadas variáveis marginais do vetor aleatório. Da mesma forma, as funções de distribuição de (X,Y) ditas F e G, são denominadas funções de distribuição marginais de (X,Y). A função de distribuição conjunta é contínua à direita e deve satisfazer as seguintes propriedades:

- $\lim_{x\to\infty} H(x,y) = G(x)$, $\lim_{y\to\infty} H(x,y) = F(x)$ em que F,G são as respectivas distribuições marginais de X,Y;
- $\lim_{(x,y)\to(\infty,\infty)} H(x,y) = 1$ em que $(x, y) \rightarrow (\infty,\infty)$ permanece para ambas variáveis x, y tendendo ao infinito;
- $\lim_{x\to-\infty} H(x,y) = \lim_{y\to-\infty} H(x,y) = 0$;
- para todo (x_1,x_2), (y_1,y_2) com $x_1 < x_2$, $y_1 < y_2$:

$$H(x_2, y_2) - H(x_1, y_2) - H(x_2, y_1) - H(x_1, y_1) \geq 0$$

A função de distribuição acumulada de uma variável pode ser definida a partir de sua função de densidade de probabilidade, da seguinte forma:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

A densidade de probabilidade de uma variável aleatória contínua é uma função $f(x) \geq 0$ se e somente se:

$$\int_{-\infty}^{x} f(t)dt = 1$$

Assim, a probabilidade de uma variável aleatória X pertencer a um intervalo (a,b) é dada por:

$$\Pr(a < X < b) = \int_{a}^{b} f(t)dt$$

3.2. Medidas de Risco

O capital requerido para a operação de uma instituição financeira pode ser determinado a partir do risco mensurado para a companhia, com um determinado nível de tolerância ao risco. Entretanto, na prática, esse procedimento, de forma isolada, não é suficiente para identificar a necessidade real de capital. É necessária uma análise integrada das atividades potenciais através de procedimentos como *DFA* descrito no capítulo 2.

Goovaerts (2005) define que: uma medida de risco é uma função ζ mapeando um fenômeno com risco de perda L para ser um número real não negativo $\zeta[L]$, possivelmente infinito. Essa função quantifica o risco de perda L, e representa um valor que deve ser retido para cobrir o risco de perda L deste fenômeno, de modo que o nível de risco para a instituição seja reduzido a um nível de tolerância pré-estabelecido. Altos valores de $\zeta[L]$ implicam que existe uma chance alta de ocorrer uma perda L.

Pode-se classificar medidas de riscos em dois tipos. Medidas relacionadas com a solvência concentram-se na cauda da distribuição de probabilidade acumulada das perdas e são relevantes para calcular o capital econômico requerido. As medidas relacionadas ao desempenho avaliam a parte central da distribuição e são úteis para determinar a volatilidade dos resultados esperados.

Esse trabalho irá explorar metodologias de mensuração usadas para avaliar a solvência da instituição e determinar o capital econômico. Primeiramente serão apresentadas as propriedades que uma medida de risco coerente deve satisfazer. Em seguida, serão discutidas as seguintes mensurações: Valor em Risco (*Value at Risk – VaR*), Valor em Risco na Cauda (*Tail Value at Risk – TVaR*), Esperança Condicional da Cauda (*Conditional Tail Expectation – CTE*), Valor em Risco Condicional (*Conditional Value at Risk – CVaR*), Princípio do Prêmio Coerente, Probabilidade de Ruína e Custo Econômico da Ruína (*Economic Cost of Ruin – ECOR*). Dessas mensurações somente o *VaR* não é uma medida de risco coerente.

3.3. Medida de risco coerente

Artzner et al. (1999), definiu que uma medida de risco, para ser definida como coerente, deve satisfazer os axiomas de translação invariante, homogeneidade positiva, sub-aditividade e monotonicidade. Adicionalmente, pode-se citar alguns axiomas desejáveis: carregamento não negativo e não elevado, lei da invariância e continuidade com respeito à convergência da distribuição. Alguns desses axiomas coincidem com as propriedades requeridas aos princípios de prêmios de seguros, detalhadas em Kaas (2001).

Antes de introduzir esses axiomas apresenta-se uma definição formal de uma medida de risco.

Sejam:

- (Ω, F, P) um espaço de probabilidade fixo;
- $L^0(\Omega, F, P)$ a série de todas as variáveis aleatórias em (Ω, F);
- $\mathcal{M} \subset L^0(\Omega, F, P)$ uma série de variáveis aleatórias de um portfólio de perdas relativas ao risco estudado no horizonte de tempo Δ; $\mathcal{M}$ é freqüentemente assumido como um cone convexo;
- $\zeta : \mathcal{M} \to \Re$ ou seja, medidas de riscos são funções de valores reais;

Então $\zeta(L)$ é a quantidade de capital que deve ser retido para diminuir a perda L gerada pelo fenômeno estudado. Posições com $\zeta(L) \leq 0$ são aceitáveis sem a injeção de capital e, com $\zeta(L) > 0$, é possível diminuir o capital retido.

3.3.1. Propriedades de uma medida de risco coerente

3.3.1.1. Translação invariante

Para toda variável aleatória L:

$$\zeta(L+l) = \zeta(L)+l.$$

A adição ou subtração de uma quantidade determinística l a uma posição que leva a uma perda L, deve alterar o capital requerido exatamente na mesma quantidade. Translação invariante implica na seguinte propriedade:

$$\zeta(L-\zeta(L)) = 0.$$

Considere uma posição com perda L e $\zeta(L)>0$. Quando adiciona-se a quantidade de capital $\zeta(L)$ a uma posição inicial $-L$, obtém-se uma posição neutra. Então a posição $\zeta(L-\zeta(L))$ é aceitável sem a injeção de capital.

3.3.1.2. Sub-aditividade

A união de riscos não gera um risco extra. Para todo L_1 e $L_2 \in \mathcal{M}$:

$$\zeta(L_1+L_2) \leq \zeta(L_1)+\zeta(L_2).$$

Sub-aditividade reflete a idéia de que o risco pode ser reduzido por diversificação. O uso de mensurações de riscos não sub-aditivas em otimização de portfólios pode levar a portfólios ótimos com grande concentração de riscos. Para um padrão econômico normal, essa otimização deveria ser considerada de alto risco.

Quando a igualdade da propriedade é válida trata-se de aditividade. Fala-se de aditividade para riscos independentes ou riscos comonótonos. Riscos comonótonos são ocorrências em um mesmo evento em que um não pode agir como *hedge* a favor do outro. Então, não haverá uma redução do risco em uma combinação de apólices.

3.3.1.3. Homogeneidade positiva

Para todo $L \in \mathcal{M}$ e $\lambda > 0$, tem-se:

$$\zeta(\lambda L) = \lambda\zeta(L).$$

Assim, medidas de risco são independentes da unidade monetária usada. Observa-se que λ pode representar diversas variáveis, por exemplo taxa de câmbio ou número de apólices.

Quando a medida de risco é considerada sub-aditiva, esse axioma pode ser deduzido a partir da seguinte expressão:

$$\zeta(nL) = \zeta(L + \ldots + L) \leq n\zeta(L), \text{ para todo } n \in \mathcal{N}$$

Caso não haja benefício de diversificação das perdas do portfólio, tem-se que $\zeta(L + \ldots + L) = n\zeta(L)$, que coincide com o axioma de homogeneidade positiva.

3.3.1.4. Monotonicidade

Sob as mesmas condições, posições que levam a perdas maiores requerem mais capital para cobrir o risco. Para L_1 e $L_2 \in \mathcal{M}$:tal que $L_1 \leq L_2$:

$$\zeta(L_1) \leq \zeta(L_2).$$

Para uma medida de risco sub-aditiva e com homogeneidade positiva, esse axioma é equivalente ao requerimento de $\zeta(L) \leq 0$ para todo $L \leq 0$.

Esse resultado é obtido como segue: se $L \leq 0$ então $\zeta(L) \leq \zeta(0) = 0$ mas $\zeta(\lambda 0) = \lambda\zeta(0)$ para todo $\lambda > 0$. Se $L_1 \leq L_2$ e assume-se que $\zeta(L_1 - L_2) \leq 0$ então, $\zeta(L_1) = \zeta(L_1 - L_2 + L_2) \leq \zeta(L_1 - L_2) + \zeta(L_2)$ que implica que $\zeta(L_1) \leq \zeta(L_2)$.

3.3.2. Propriedades adicionais

3.3.2.1. Carregamento não negativo e não excessivo

Para toda variável aleatória L:

$$E(L) \leq \zeta(L) \leq \max(L).$$

O capital mínimo requerido deve exceder a perda esperada, a fim de cobrir oscilações, e não deve ser maior que o valor máximo de perda. Um prêmio que não contempla um carregamento de segurança, possivelmente levará a companhia à ruína.

3.3.2.2.
Continuidade com respeito à convergência da distribuição

Seja $\{L_n , n = 1,2,...\}$ uma seqüência de riscos tais que $L_N \to_d L$ com $n \to_+ \infty$, então:

$$\lim_{n\to+\infty} F_{L_n}(l) = F_L(l).$$

Então, a medida de risco deve satisfazer o seguinte:

$$\lim_{n\to+\infty} \zeta[L_n] = \zeta[L].$$

3.3.2.3.
Lei da invariância

$\zeta(L)$ depende de L somente através da função de distribuição F_L. Isso implica que F_L. contém toda a informação necessária para mensurar o risco de L. Pode-se dizer que:

$$L_1 =_d L_2 \quad \Rightarrow \quad \zeta(L_1) = \zeta(L_2).$$

Riscos com a mesma função de distribuição têm a mesma medida de risco. Isso é de crucial importância quando os riscos precisam ser estimados a partir de dados empíricos. Algumas medidas de riscos dependem da perda aleatória atual (L) e não somente da distribuição F_L.

3.3.3.
Medida de risco coerente baseada em cenários

O risco do portfólio pode ser mensurado a partir da perda máxima dos cenários escolhidos. Essa escolha é baseada em possíveis fatores de risco futuros. Cenários extremos podem ser suavizados para mitigar o seu efeito no resultado.

A dificuldade desse método é determinar os cenários apropriados e seus respectivos pesos. Para um modelo mais acurado, faz-se necessário o uso de informações complementares baseadas em estatísticas de distribuição de perdas. Comparações de resultados entre portfólios que são afetados por diferentes fatores de risco não são triviais.

McNeil (2005) e Goovaerts (2005) definem uma medida de risco coerente baseado em cenários como: seja P uma série de medidas de probabilidade no espaço mensurável $(\Omega, \mathcal{F})$e $\mathcal{M}_P := \{L : E^Q(|L|) < \infty \text{ para todo } Q \in \Re\}$. Então a medida de risco induzida pela séria de cenários generalizados P é da seguinte forma:

$$\zeta_{\mathcal{P}} : \mathcal{M}_{\mathcal{P}} \to \Re \quad \text{tal que} \quad \zeta_{\mathcal{P}}(L) := \sup\{E^Q(L) : Q \in \mathcal{P}\},$$

em que E^Q é a esperança calculada sobre a distribuição de probabilidade Q.

Essa medida de risco pode ser interpretada como uma expectativa com respeito ao pior cenário. Para qualquer série de medidas de probabilidade P em $(\Omega, \mathcal{F})$, o risco mensurado satisfaz os axiomas de translação invariante, homogeneidade positiva, sub-aditividade e monotonicidade, sendo então uma medida de risco coerente. Entretanto, uma propriedade desejável importante, a lei da invariância, não é atendida.

3.3.4. Medida de risco coerente baseado na distribuição de perdas

Uma medida de risco baseada na distribuição de perdas é conveniente uma vez que as perdas são objeto central de interesse de um gerenciamento de riscos. Entretanto, nem sempre é possível estimar essa distribuição com exatidão.

Como as estimativas são baseadas em dados passados e, estes podem não refletir perfeitamente a situação econômica, financeira e legal que a empresa está envolvida, é preciso ter cautela na sua utilização para prever o futuro. Uma medida de risco baseada na distribuição de perdas deve ser complementada com cenários hipotéticos.

Uma mensuração baseada na distribuição de perdas bastante usada para avaliar o risco de instituições financeiras, o *VaR*, não contempla todas as propriedades de uma mensuração de risco coerente. Variações do *VaR* que são ditas coerentes são preferidas para analisar portfólios em que benefícios de diversificação são desejáveis.

3.4. Medida de risco convexo

Os axiomas de sub-aditividade e homogeneidade positiva implicam que a superfície do risco a ser minimizado no espaço de portfólios é convexa em $\mathcal{M}$.. Um mínimo absoluto único somente existe se as superfícies forem convexas. Isso implica que o processo de minimização de riscos sempre terá uma solução única, bem diversificada e ótima.

O axioma de homogeneidade tem sido criticado. Acredita-se que para múltiplos de λ muito elevados, deveria-se ter $\zeta(\lambda L) \geq \lambda\, \zeta(L)$ para penalizar a concentração de riscos e possíveis problemas de liquidez.

De acordo com Goovaerts (2005), mensurações em que as condições de homogeneidade positiva e sub-aditividade têm sido relaxadas são denominadas de Medidas de Risco Convexo. Essa medida requer apenas uma fraca propriedade de convexidade:

$$\zeta\left(\lambda L_1 + (1-\lambda) L_2\right) \leq \lambda\, \zeta\left(L_1\right) + (1-\lambda)\, \zeta\left(L_2\right), \quad \lambda \in [0,1].$$

3.5. Valor em risco - *VaR*

O *VaR* é uma ferramenta cada vez mais usada pelo mercado financeiro, principalmente após as normas de requerimento de capital propostas pelo Acordo de Basiléia II. Esta medida resume em um único número, a exposição total ao risco de uma carteira, empresa ou instituição, dado um determinado nível de confiança e um período de tempo pré-definido.

O *VaR* é simplesmente um percentil α da distribuição de perdas. Espera-se que com um nível de confiança α, as perdas ultrapassem um valor $VaR(L,\alpha)$ em no máximo (1-α) das vezes. Goovaerts (2005) define o *VaR* como:

$$VaR[L,\alpha] = \inf\{l \in \Re : \Pr(L > l) \leq 1-\alpha\} = \inf\{l \in \Re : F_L(l) \geq \alpha\}.$$

A Associação Internacional dos Atuários - IAA sugere que a reserva de capital de uma seguradora deva ser suficiente para cobrir as obrigações, para cada tipo de risco, num horizonte de tempo acima de um ano, com alto nível de confiança. É recomendado um nível de confiança de 99% ou 99,5% para companhias de seguro. O Comitê da Basiléia, através das diretrizes propostas pelo Basiléia II, recomenda o nível de 99,9% para os bancos.

Uma restrição significativa dessa medida é que não se obtêm qualquer informação sobre o comportamento das perdas. Assim, sua utilidade está muito mais para comparações de riscos que para medição de riscos.

O Valor em Risco respeita todas as propriedades de uma medida de risco coerente com exceção à sub-aditividade. São elas: translação invariante, homogeneidade positiva e monotonicidade.

A não sub-aditividade do *VaR* pode ser confirmada em várias ocasiões, como, por exemplo, em situações em que os ativos de um portfólio têm uma distribuição de perdas com cauda muito pesada. Outra circunstância é quando as distribuições marginais de perdas dos ativos são suaves e simétricas, mas a dependência entre elas é altamente assimétrica. Um *VaR* sub-aditivo é uma situação idealizada em que todos os portfólios podem ser representados como combinações lineares de uma mesma série de fatores de riscos com distribuição elíptica[5].

3.5.1.
O uso do VaR para requerimentos de capital

Órgãos reguladores do setor securitário requerem que as seguradoras mantenham um capital mínimo a fim de evitar uma possível insolvência. O interesse do regulador está em minimizar as perdas não esperadas que excedam o valor mensurado do risco, $E[(L-\zeta(L))_+]$. Para evitar um requerimento excessivo de capital, $\zeta(L)$ pode ser determinado a partir do seguinte problema de otimização:

$$\min\{E[(L-\zeta(L))_+]+\zeta(L)\varepsilon\}, \qquad \varepsilon \in (0,1),$$

ou seja, tenta-se equilibrar uma baixa perda residual com um baixo custo de capital. ε pode ser interpretado como uma mensuração do custo do capital para a companhia, podendo ser específico para cada uma e para cada tipo de risco, ou um valor único determinado pelo regulador. Se ε assume valor zero, o capital

---

[5] Distribuições elípticas são obtidas de transformações afins multivariadas de distribuições esféricas. Distribuições esféricas são distribuições de vetores aleatórios com componentes não correlacionados e distribuições marginais simétricas e idênticas.

requerido será o valor máximo da perda L. Aumentar o valor de ε significa que o regulador aumenta a importância relativa ao custo de capital, e a solução ótima do problema resulta em um valor mais baixo.

Conforme mostrado em Goovaerts (2005), o menor capital $\zeta(L)$ requerido nesse problema pode ser calculado com um $VaR(L,\ 1\text{-}\varepsilon)$. É enfatizado que, nesse modelo, o *VaR* não é usado para mensurar o risco, o seu uso é para mensurar o requerimento de capital ótimo. A mensuração de risco seria calculada pela $E[(L-\zeta(L))_{+}]$ que coincide com a avaliação atuarial clássica de mensuração de risco pelo cálculo do prêmio de *stop-loss*.

Em bancos que usam modelo interno para avaliar o risco de mercado é possível utilizar o *VaR* para determinar o capital regulatório da seguinte maneira:

$$RC^{t}_{IM}(MR) = \max\left\{VaR^{t,10}_{0,99},\ \frac{k}{60}\sum_{i=1}^{60} VaR^{t-i+1,10}_{0,99}\right\} + C_{SR},$$

em que $VaR^{t,10}_{0,99}$ corresponde a um Valor em Risco para um período de 10 dias com 99% de confiança, com t representando o presente dia. O fator de stress k, com $3 \leq k \leq 4$ é determinado de acordo com a qualidade do modelo interno. C_{SR} é o risco residual do movimento do preço dos ativos depois de levar em consideração todos os fatores gerais do mercado.

Asher (2004) critica o uso do *VaR* como ferramenta única para determinar o capital requerido pelos reguladores. Segundo ele, esse tipo de mensuração não é suficiente para avaliar a real necessidade de capital uma vez que é determinado por avaliações padrão que excluem muitas atividades intangíveis. Esses itens intangíveis, como ações dos gestores, podem afetar o fluxo de caixa futuro e, conseqüentemente alterar as probabilidades de insolvência calculadas. Então, seria necessário o uso de outras práticas regulatórias em apoio ao requerimento de capital, tais como auditoria das práticas de conduta da instituição e do processo de gerenciamento de riscos.

3.6.
Valor em risco na cauda - *TVaR*

O *TVaR*, também conhecido como *Expected Shortfall*, está estritamente relacionado ao conceito de *VaR*. Para uma perda L com $E(L) < \infty$ e função de distribuição de perdas F_L, o *expected shortfall* para um nível de confiança $\alpha \in (0,1)$, pose ser definido por:

$$ES_\alpha = \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 q_u(F_L)du,$$

em que $q_u(F_L) = F_L^{\leftarrow}(u)$ é a função quantil. Em função do *VaR*, pode ser reescrito como:

$$ES_\alpha = \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 VaR_u(L)du.$$

Fixando um nível de confiança α, rateia-se o *VaR* em todos os níveis de $u \geq \alpha$, concentrando-se na cauda da distribuição. Para uma distribuição contínua, o *expected shortfall* pode ser interpretado como a perda esperada do evento em que o *VaR* é excedido. Então $ES_\alpha = VaR_\alpha$.

3.7. Esperança condicional da cauda - *CTE*

Esta mensuração[6] tem sido indicada pelos órgãos reguladores para a determinação de capital econômico por ser uma mensuração de risco coerente e ser capaz de quantificar o valor médio da perda dado que ela excedeu um determinado *VaR*. Esse resultado coincide com o *TVaR* para riscos com distribuição contínua, e pode ser representado como:

$$CTE[L,\alpha] = E[L | L > VaR(L,\alpha)]$$

Definindo *VaR* como um limiar *c* e um determinado nível de confiança, *CTE* representa um "colchão" contra perdas que excedam esse limiar.

A determinação de capital econômico baseado no *TVaR* ou no *CTE* é feita da seguinte forma: seja *S* a perda agregada dos sinistros de um portfólio, então o capital necessário será:

$$\text{Capital Econômico} = TVaR\ (S,\ \alpha) - E(S)$$

[6]Os órgãos reguladores do Canadá e dos Estados Unidos têm incentivado o uso do *CTE* e do *TVaR* para determinar o capital requerido para cobrir, respectivamente, o risco de fundos segregados e de anuidades variáveis.

3.8. **Valor em risco condicional – *CVaR***

O valor em risco condicional é o valor esperado das perdas que excedem o *VaR*. O *CVaR* é uma alternativa para o *CTE* e pode ser representado pela seguinte expressão:

$$CVaR_{\alpha} - E\left[\left(X - VaR_{\alpha}\right)\middle| X > VaR_{\alpha}\right]$$

Para uma versão discreta o CVaR pode ser representado como:

$$CVaR_{\alpha} = VaR_{\alpha} + \frac{1}{N(1-\alpha)}\sum\nolimits_{j-1}^{N}\left(X - VaR_{\alpha}\right)$$

em que N é o número de observações.

3.9. Princípio do prêmio coerente

O princípio do prêmio coerente é útil para companhias de seguro que desejam calcular prêmios em uma base coerente sem se afastar muito das práticas atuariais padrão. Dada as constantes $p>1$ e $\alpha \in (0,1)$, o princípio do prêmio coerente $\zeta_{[\alpha,p]}$ é definido como segue. Seja $M{:}=L^{p}(\Omega,\Phi,P)$ o espaço de todos as perdas L com $||L||{:}=E\left(|L|^{p}\right)^{1/p} < \infty$ e definido para $L \in \mathcal{M}$, então :

$$\zeta_{[\alpha,p]}(L) = E(L) = E(L) + \alpha\left\|\left(L - E(L)\right)^{+}\right\|_{p}$$

O risco da perda L é calculado pela soma de *E(L),* o valor atuarial da perda, e um carregamento de risco dado por uma fração α de L^{P}, que é a norma[7] da parte positiva da perda centrada em $L - E(L)$. Quanto maiores os valores de α e p, mais conservadora será a mensuração de risco.

3.10. Probabilidade de ruína

A probabilidade de ruína é a probabilidade do valor dos ativos da empresa ser inferior ao valor dos passivos, dado um horizonte de avaliação, resultando em uma insolvência técnica.

---

[7] Uma norma é uma função que associa cada vetor de um espaço vetorial a um número real não negativo. O conceito de norma é estritamente ligado ao comprimento do vetor

Essa probabilidade pode ser determinada a partir da função de densidade de probabilidade do valor presente dos fluxos de caixa futuros dos ativos e passivos da instituição. Feito isso, calcula-se a área abaixo da curva que corresponde ao ponto em que os passivos excedem os ativos. Esses gráficos são gerados a partir de simulações computacionais de ativos e passivos usando um modelo financeiro estocástico. A figura 2 representa esta situação.

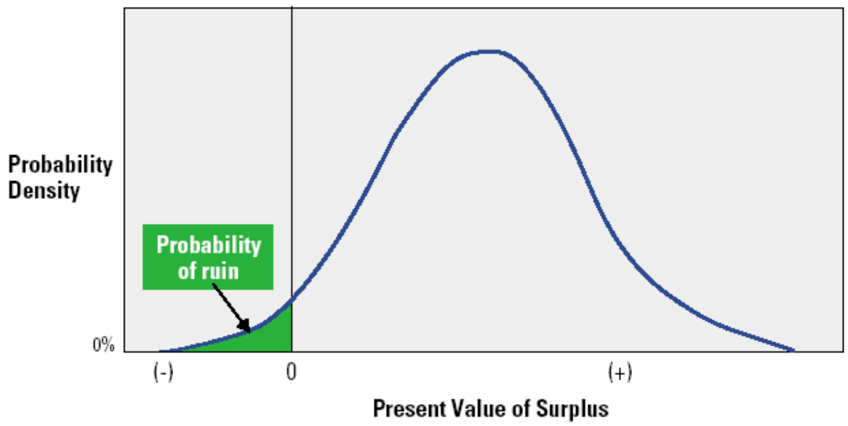

Figura 2: Probabilidade de Ruína

Fonte: Tillinghast – Towers Perrin

O capital econômico baseado na probabilidade de ruína é determinado pelo cálculo da quantidade de capital adicional necessária para reduzir a probabilidade de ruína em um nível pré-determinado. Esse nível de risco tolerável é determinado pelo gestor, considerando uma série de fatores. Geralmente é analisado o nível de solvência requerido pelos investidores, usualmente definidos em termos da posição mínima que os gestores desejam obter das agências de *rating*.

Apesar de terem diferenças computacionais, a maneira com que seguradoras usam a probabilidade de ruína para determinar capital é similar à maneira com que os bancos usam o *VaR* para essa finalidade. Esses métodos têm a vantagem de serem de fácil entendimento e comparação, entretanto, falham em não informar o custo da ruína, isto é, a perda esperada para os investidores quando a ruína acontece.

3.11. Custo econômico da ruína

O Custo Econômico da Ruína refere-se ao custo da insolvência. Em um evento de ruína, os segurados esperaram receber alguma parte dos benefícios que lhes são de direito contratual. O valor devido aos segurados é a diferença entre o benefício prometido e o valor esperado do benefício após a ruína. Por essa razão essa mensuração também é conhecida como Déficit Esperado do Segurado (*Expected Policyholder Déficit – EPD*).

O *ECOR* considera não somente a probabilidade de ruína, mas também a perda esperada no evento de ruína. Ele pode ser obtido da multiplicação da probabilidade de ocorrência de insolvências com o custo médio de insolvência. Na prática, *ECOR* é expresso como o percentual da reservas pertencentes aos segurados.

ECOR tem uma vantagem importante sobre a probabilidade de ruína e o *VaR*. Companhias com a mesma probabilidade de ruína podem ter custos médios de ruína muito diferentes. Companhias com um alto custo econômico de ruína deverão ter menos capital depois da liquidação para distribuir aos investidores. Essa capacidade de pagamento ao investidor captura a essência da necessidade de capital.

ECOR pode ser representado matematicamente como: seja S o total de perdas não pagas no período de análise, a o total de ativos com função de distribuição acumulada $F(.)$, então:

$$EPD = E\left[(S-a)(1-F(a))\middle| S > a\right].$$

É possível observar ambos *VaR* e *ECOR* a partir da distribuição de probabilidade acumulada do valor presente dos fluxos de caixa futuros dos ativos e passivos, conforme figura 3. O *VaR* é a quantidade monetária no eixo x correspondente à probabilidade de ruína no eixo y. Por exemplo, um *VaR* [1.000.000, 99,9%] para 10 dias significa que as perdas totais do portfólio irão exceder 1.000.000 unidades monetárias em menos de 1% das vezes no período de 10 dias. Então, o capital necessário para cobrir perdas com um nível de confiança de 99,9% é análogo ao *VaR*. É equivalente dizer que 1.000.000 unidades monetárias são necessárias para que as perdas somente excedam o capital com uma probabilidade de 1%.

É conveniente ressaltar que estruturas de dependência entre os riscos de uma mesma apólice e/ou entre apólices distintas de seguros, podem afetar, e muito, a probabilidade de ruína calculada para a instituição. Essa dependência pode ocorrer tanto no tempo entre ocorrências de sinistros, quanto entre as severidades.

Albrecher (2003) estuda o impacto no cálculo da probabilidade de ruína de desconsiderar essas estruturas de dependência entre os riscos de uma mesma apólice. Yuen, Guo e Wu (2002) realizaram estudos a respeito de sinistros considerando que pode haver correlação entre duas classes distintas de seguros financeiros, de acordo com possíveis correlações entre seus respectivos processos de sinistros.

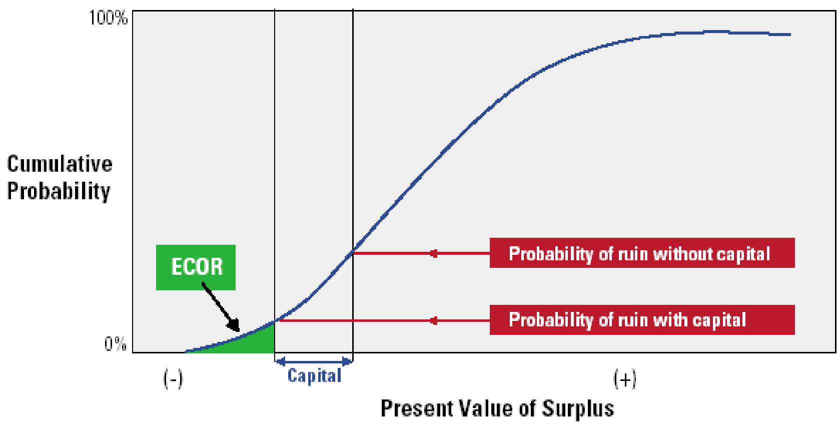

Figura 3: ECOR e Probabilidade de Ruína

Fonte: Tillinghast – Towers Perrin

4
CÓPULAS

'Cópulas são de interesse para estatísticos por duas razões: primeiramente, é uma forma de estudar medidas de dependência em livre escala, e segundo é o ponto inicial para construir famílias de distribuições bivariadas.' Fischer (1997)

4.1.
Introdução a cópulas

Uma análise mais precisa de uma instituição financeira requer o estudo de uma variedade de fatores com características muitas vezes distintas. A integração desses fatores não é realizada de forma direta, é necessário estudar como eles podem ser associados e qual seria a relação de dependência entre eles.

É tentador considerar que a distribuição conjunta dessas variáveis é uma normal multivariada, pela sua facilidade matemática. Entretanto, essa suposição restringe o tipo de associação entre as marginais a ser linear. Em seguros, cujos dados costumam ter caudas pesadas, as estruturas de dependência podem ser lineares, não lineares e somente nas caudas.

O uso inadequado da hipótese de normalidade pode acarretar grandes perdas financeiras, pois pode provocar uma subestimação da probabilidade e severidade de eventos relacionados com essas perdas. É preciso identificar distribuições multivariadas adequadas aos dados com caudas pesadas, e as medidas que devem ser usadas para captar as estruturas de dependência desses dados.

A construção da distribuição conjunta de variáveis por cópulas é razoável uma vez que não há restrições quanto às distribuições marginais das variáveis envolvidas. Além disso, a cópula de uma distribuição capta diversos tipos de dependência entre as variáveis, mesmo quando são objetos de transformações monótonas.

Cópulas expressam a dependência em uma escala de quantil, que é útil para descrever a dependência de resultados extremos. Cada cópula de distribuição conjunta contém a descrição dos acontecimentos marginais dos riscos e suas estruturas de dependência. Pode-se dizer que a cópula é uma maneira de se isolar as estruturas de dependência das variáveis.

4.2. Propriedades básicas

Uma cópula bi-dimensional C é uma função de distribuição não decrescente e contínua à direita que mapeia a unidade quadrada $[0,1]^2$ no intervalo $[0,1]$ com distribuições marginais uniformes.

Para ser considerada uma cópula, uma função de distribuição conjunta deve satisfazer as seguintes propriedades:

- $C(u_1,u_2,...,u_d)$ aumenta com cada componente u_i. Esse pré-requisito é comum a qualquer função de distribuição multivariada;
- $C(1,...,1,u_i,1,...,1) = u_i \ \forall i \in \{1,...,d\}; \ u_i \in [1,...,d]$.Esse pré-requisito é comum a distribuições marginais padrão;
- Para uma cópula bi-dimensional, C tem desigualdade retangular se: $C(\upsilon_1,\upsilon_2)-C(u_1,\upsilon_2)-C(\upsilon_1,u_2)+C(u_1,u_2)\geq 0$ é válido para qualquer $u_1 \leq \upsilon_1,\ u_2 \leq \upsilon_2$.

Se uma função C contempla essas três características, então ela é uma cópula.

4.3. Proposições elementares

A transformação de quantil e a transformação de probabilidade são proposições elementares para o entendimento da técnica de cópulas. Seja G uma função de distribuição e $G^{\leftarrow}$ sua inversa generalizada[8], isto é, $G^{\leftarrow}(y) = \inf\{x{:}G(x) \geq y\}$. Assim apresenta-se que:

- Transformação de Quantil: *se* $U \sim Uni(0,1)$ tem uma função de distribuição uniforme, então $\Pr(G^{\leftarrow}(U) \leq x) = G(x)$.

---

[8] Uma breve explicação de funções inversas generalizadas encontra-se no apêndice 1.

– Transformação de Probabilidade: se Y tem função de distribuição G, em que G é uma função de distribuição univariada contínua, então $G(Y) \sim U(0,1)$.

Essas proposições informam que é possível transformar riscos com uma função de distribuição contínua particular em qualquer outra distribuição contínua, sendo a chave para uma simulação estocástica.

4.4. Demais propriedades

4.4.1. Teorema de Sklar

Este teorema mostra que todas as funções de distribuição multivariadas contêm cópulas e que estas podem ser usadas para construir funções de distribuição multivariadas a partir das funções de distribuição univariadas.

Segue que: seja F uma função de distribuição conjunta com marginais contínuas F_1 e F_2. Então existe uma única[9] cópula C:$[0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ tal que para todo $\mathbf{X} \in \Re^2$:

$$F_X(x_1, x_2) = C(F_1(x_1), F_2(x_2)).$$

Da mesma forma, se C é uma cópula e F_1 e F_2 são funções de distribuição, então a função F_X definida pela equação apresentada é uma função de distribuição bivariada com marginais F_1 e F_2.

Uma outra representação de cópulas que expressa a dependência em escala de quantil é a seguinte:

$$C(u_1, u_2) = F\left(F_1^{\leftarrow}(u_1), F_2^{\leftarrow}(u_2)\right),$$

desde que $C(u_1,u_2)$ seja uma função de probabilidade conjunta tal que x_1 é inferior ao quantil de u_1, e x_2 é inferior ao quantil de u_2.

Quando duas variáveis aleatórias x_1 e x_2 são independentes e possuem as respectivas funções de distribuição acumulada F_1 e F_2, a função de distribuição conjunta é dada por $F_x(x)=F_1(x_1)F_2(x_2)$ e a cópula, denominada Cópula de Marginais Independentes, pode ser representada como $C(u_1,u_2) = u_1,u_2,\ u \in [0,1]^2$.

---

[9]A cópula é única somente para marginais com distribuição contínua. Em distribuições discretas, existe mais de uma cópula que pode ser usada para agregar as marginais.

4.4.2. Invariância funcional

A invariância funcional é uma conseqüência direta da interpretação de cópulas como uma função de distribuição conjunta de ranks[10]. Seja x_1 e x_2 variáveis aleatórias contínuas com cópula C e t_1 e t_2 funções monótonas contínuas, segue que:

- Se t_1 e t_2 são não decrescentes, então $(t_1(x_1),t_2(x_2))$ tem cópula C;
- Se t_1 é não decrescente e t_2 é não crescente, então $(t_1(x_1),t_2(x_2))$ tem cópula u_1-$C(u_1,u_2)$;
- Se t_1 é não crescente e t_2 é não decrescente, então $(t_1(x_1),t_2(x_2))$ tem cópula u_2-$C(1$-$u_1,u_2)$;
- Se e t_1 e t_2 são não crescentes, então $(t_1\,(x_1),t_2(x_2))$ tem cópula $\overline{C}$[11].

As cópulas são modificadas de acordo com a monotonicidade de t_1 e t_2, mas não depende da expressão particular de t_1 e t_2.. Isso indica que a avaliação da cópula, de todas as estruturas de dependência entre duas variáveis aleatórias, independe da escala em que elas são medidas.

4.4.3. Limites de Fréchet

Existem dois limites dentre os quais a cópula é verificada, denominados limite inferior de Fréchet, C_L, e limite superior de Frechét, C_U.

Para qualquer cópula $C(u_1,...,u_d)$ observam-se os seguintes limites:

$$\max\left\{\sum_{i=1}^{d} u_i + 1 - d, 0\right\} \le C(u) \le \min\{u_1,...,u_d\}.$$

Para uma cópula bi-dimensional nota-se que:

$$C_U(u_1,u) = \min\{u_1,u_2\},\ \mathbf{u} \in [0,1]^2,$$

que corresponde a unidade de massa sobre a diagonal principal $u_1 = u_2$ de uma unidade quadrada. Se x_1 e x_2 possuem a função de distribuição $F_x(x_1,\ x_2) = C(F_1(x_1)F_2(x_2))$, então X_2 é uma função não-decrescente de X_1 se e somente se $C \equiv C_U$. Então, (x_1 e x_2) são comonotônicas e somente se $C \equiv C_U$.

[10] F_1 e F_2 são freqüentemente chamados de ranks de x_1 e x_2.

[11] $\overline{C}$ representa a cópula de sobrevivência. Maiores detalhes serão apresentados na seção 4.4.4

Da mesma maneira, o limite inferior de Fréchet para uma cópula bi-dimensional é dado por:

$$C_L(u_1, u_2) = \max\{0, u_1 + u_2 - 1\}, \quad \mathbf{u} \in [0,1]^2,$$

que corresponde à unidade de massa sobre a diagonal secundária $u_1 = 1 - u_2$ de uma unidade quadrada. Se x_1 e x_2 possuem a função de distribuição $F_x(x_1, x_2) = C(F_1(x_1)F_2(x_2))$, X_2 é uma função não-crescente de X_1 se e somente se $C \equiv C_L$. Então, (x_1 e x_2) são contramonotônicas se e somente se $C \equiv C_L$.

4.4.4. Cópula de sobrevivência

Em muitas aplicações, as variáveis aleatórias de interesse representam a sobrevida de indivíduos ou contratos em alguma população[12]. A probabilidade de sobrevida além de um tempo x é dada por uma função de sobrevivência $\overline{F}(x) = \Pr[X > x] = 1 - F(x)$ em que F representa a função de distribuição acumulada de x.

Para um par de variáveis aleatórias (X,Y) com função de distribuição conjunta H, a função de sobrevivência conjunta é dada por $\overline{H}(x) = \Pr[X > x, Y > y]$. Existe um relacionamento entre as funções de sobrevivência conjunta e as funções de sobrevivência marginais, de forma análoga ao relacionamento entre as funções de distribuição conjunta e as funções de distribuição marginais.

Então, se C é uma cópula, a cópula de sobrevivência $\overline{C}$ associado com C é definida para $\mathbf{u} \in [0,1]^2$ como:

$$\overline{C}(u_1, u_2) = C(1 - u_1, 1 - u_2) + u_1 + u_2 - 1.$$

Essa cópula de sobrevivência não deve ser confundida com a função de distribuição conjunta C de duas uniformes (0,1), isto é:

$$\Pr[U_1 > u_1, U_2 > u_2] = 1 - u_1 - u_2 + C(u_1, u_2) \neq \overline{C}(u_1, u_2),$$

mas,

$$\Pr[U_1 > u_1, U_2 > u_2] = \overline{C}(1 - u_1, 1 - u_2).$$

---

[12] Entende-se população como o universo de estudo, podendo ser, por exemplo, as apólices de uma seguradora.

Os limites de Fréchet também se aplicam à cópula de sobrevivência, da seguinte maneira:

$$\overline{C}_L(u_1, u) \leq \overline{C}(u_1, u) \leq \overline{C}_U(u_1, u).$$

Em casos de independência, os limites de Fréchet para cópulas coincidem com os limites para cópulas de sobrevivência: $\overline{C}_L = C_L$, $\overline{C}_U = C_U$.

Cópulas de sobrevivência podem ser usadas para expressar $\overline{F}_X(x)$ em termos das marginais $\overline{F}_1$ e $\overline{F}_2$ como segue:

$$\overline{F}_X(x) = 1 - F_1(x_1) - F_2(x_2) + F_X(x) = \overline{C}(\overline{F}_1(x_1), \overline{F}_2(x_2)).$$

4.4.5. Cópula dual e Co-cópula

Além da Cópula de sobrevivência, podem-se citar duas combinações associadas à cópula, são elas a Cópula Dual e a Co-Cópula. Apesar de nenhuma dessas serem cópulas, elas aferem informações importantes.

A co-cópula C^* associadas à cópula C representa a probabilidade de $X_1 > x_1$ ou $X_2 > x_2$,, ou seja:

$$\Pr[X_1 > x_1 \text{ ou } X_2 > x_2] = C^*(\overline{F}_1(x_1), \overline{F}_2(x_2)),$$

$$C^*(u_1, u_2) = 1 - C(1 - u_1, 1 - u_2), \quad \mathbf{u} \in [0,1]^2.$$

Note que a co-cópula da co-cópula é a cópula original $(C^*(u_1, u_2))^* = C(u_1, u_2)$.

A dual cópula $\widetilde{C}$ associadas à cópula C representa a probabilidade de $X_1 \leq x_1$ ou $X_2 \leq x_2$, ou seja:

$$\Pr[X_1 \leq x_1 \text{ ou } X_2 \leq x_2] = \widetilde{C}(F_1(x_1), F_2(x_2))$$

$$\widetilde{C}(u_1, u_2) = u_1 + u_2 1 - C(u_1, u_2), \quad \mathbf{u} \in [0,1]^2$$

4.4.6. Simetria

Se X é uma variável aleatória e a é um número real, pode-se dizer que X é simétrico em a se as funções de distribuição das variáveis aleatórias (X-a) e (a-X) são iguais. Isto é: para qualquer x em R, $\Pr[X - a \leq x] = \Pr[a - X \leq x]$. Quando X é uma variável aleatória contínua com função distribuição F, é equivalente dizer que $F(a+x)=\overline{F}(a-x)$.

Em um caso bivariado existe uma série de caminhos para se dizer que o par de variáveis aleatórias (X,Y) são simétricos em (a,b), e cada caminho leva a um tipo diferente de simetria bivariada.

Sejam X e Y variáveis aleatórias e (a,b) um ponto em $\Re^2$:

_ (X,Y) são marginalmente simétricos em (a,b) se X e Y são simétricos em a e b respectivamente;

_ (X,Y) são radialmente simétricos em (a,b) se $(X-a)$ e $(Y-b)$ têm a mesma função de distribuição de $(a-X)$e $(b-Y)$;

_ (X,Y) são conjuntamente simétricos em (a,b) se os quatro pares de variáveis aleatórias a seguir têm a mesma função de distribuição conjunta: $(X-a,Y-b)$, $(X-a,b-Y)$, $(a-X,Y-b)$, e $(a-X,b-Y)$.

Quando X e Y são contínuas pode-se expressar a condição de simetria radial em termos da função de distribuição conjunta e da função de sobrevivência de forma análoga ao caso univariado.

Sejam X e Y variáveis aleatórias contínuas com função de distribuição acumulada H e marginais F e G, respectivamente, e cópula C; seja (a,b) um ponto em $\Re^2$. Então (X,Y) é radialmente simétrico em (a,b) se e somente se:

$$H(a+x,b+y)=\overline{H}(a-x,b-y) \text{ para todo } (x,y) \text{ em } \Re^2$$

e

$$C(u,v)=u+v-1+C(1-u,1-v) \text{ para todo } (x,y) \text{ em } \Re^2.$$

4.4.7. Cópula permutável

O vetor aleatório X é permutável se $(X_1,...,X_d)\overset{d}{=}(X_{\pi(1)},...X_{\pi(d)})$ para qualquer permutação $(\pi(1),...,\pi(d))$ de $(1,...,d)$. Então, uma cópula é dita permutável se satisfaz:

$$C(u_1,...,u_d)=C(u_{\pi(1)},...,u_{\pi(d)}),$$

para todas as permutações possíveis das variáveis de C.

Segue que, se a função de distribuição do vetor (U_1,U_2) é uma cópula bidimensional permutável, então:

$$\Pr[U_2 \le u_2 | U_1 = u_1] = \Pr[U_1 \le u_2 | U_2 = u_1] \quad \forall u \text{ em } I.$$

ou seja, suas linhas de quantil são simétricas em relação à diagonal principal de I^2. Se o vetor (X_1,X_2) tem esta cópula, então a probabilidade de X_2 exceder o quantil u_2 dado que X_1 atingiu u_1 é exatamente a mesma probabilidade de X_1 exceder o quantil u_2 dado que X_2 atingiu o quantil u_1.

4.4.8. Ordenação de cópulas

É possível estabelecer formas de comparação e ordenação de cópulas. A ordenação pode ser indicada pelo significado de $\prec$. Se uma cópula C_1 é menor que uma cópula C_2, pode-se escrever que $C_1 \prec C_2$ se para todo $(u_1,...,u_d) \in I^d$, $C_1(u_1,...,u_d) \le C_2(u_1,...,u_d)$. De forma análoga $C_1 \succ C_2$ se para todo $(u_1,...,u_d) \in I^d$, $C_1(u_1,...,u_d) \ge C_2(u_1,...,u_d)$.

Para qualquer cópula tem-se a seguinte desigualdade com os limites de Fréchet:

$$C_L \prec C \prec C_U.$$

Para algumas cópulas essa ordenação coincide com a ordenação do seu parâmetro. Se existem duas cópulas C_α e C_β tal que $\alpha \le \beta$, pode-se afirmar que as cópulas são ordenadas positivamente se $C_\alpha \prec C_\beta$ ou são ordenadas negativamente e $C_\alpha \succ C_\beta$.

Uma ilustração disto apresentada em Mendes (2004) é a seguinte: seja a seguinte cópula gaussiana $C^{p}_{Gass}(u_1,u_2) = \Phi^{p}_{2}(\Phi^{-1}(u_1), \Phi^{-1}(u_2))$, então é válida a seguinte ordenação:

$$C_L = C_{Ga}^{\rho=-1} \prec C_{Ga}^{\rho<0} \prec C_{Ga}^{\rho=0} = C^{\perp} \prec C_{Ga}^{\rho>0} \prec C_{Ga}^{\rho=+1} = C_U$$

4.5. Distribuições condicionais derivadas de cópulas

A distribuição condicional pode ser derivada a partir da representação de $F_x(x_1, x_2) = C(F_1(x_1)F_2(x_2))$. Sendo C a cópula e u_i um número real em [0,1], a derivada parcial existe quase sempre. Quando isso é verdade segue que:

$$
\begin{aligned}
C_{2|1}(u_2|u_1) &= \Pr[X_2 \le x_2 | X_1 = x_1] = C_{2|1}(F_2(x_2)|F_1(x_1)) \\
&= \frac{\partial}{\partial u_1} C(u_1, u_2) \\
C_{1|2}(u_1|u_2) &= \Pr[X_1 \le x_1 | X_2 = x_2] = C_{1|2}(F_1(x_1)|F_2(x_2)) \\
&= \frac{\partial}{\partial u_2} C(u_1, u_2)
\end{aligned}
$$

e valem os seguintes intervalos:

$$0 \le \frac{\partial}{\partial u_1} C(u_1, u_2) \le 1$$

$$0 \le \frac{\partial}{\partial u_2} C(u_1, u_2) \le 1$$

Uma interpretação desse resultado para fins de gerenciamento de riscos é a seguinte: supõe-se que os riscos x_1 e x_2 têm a cópula C. Então, $1 - C_{2|1}(q|p)$ é a probabilidade que x_2 exceda o quantil q dado que x_1 atingiu o quantil p.

4.6. Densidade de probabilidade associada a cópulas

Sob condições apropriadas, a função de densidade de probabilidade pode ser escrita como o produto das funções de densidade de probabilidades marginais e da sua densidade de cópula. A cópula tem toda a informação sobre a dependência entre os x_i's e pode ser chamada de função de dependência. Estas densidades são úteis quando se deseja calcular cópulas de dados por máxima verossimilhança.

Se as marginais F_1 e F_2 são contínuas com respeito às funções de densidade marginais, f_1 e f_2, então a função de densidade de probabilidade conjunta de $\boldsymbol{x}$ pode ser escrita como:

$$f_X(x) = f_1(x_1) f_2(x_2) c(F_1(x_1) F_2(x_2)),$$

em que $c(F_1(x_1)F_2(x_2))$ representa a densidade da cópula que pode ser obtida da seguinte maneira:

$$c(u_1, u_2) = \frac{\partial}{\partial u_1 u_2} C(u_1, u_2), \qquad \mathbf{u} \in [0,1]^2 .$$

A segunda derivada da cópula, quando existe, pode ser interpretada como uma medida de dependência local.

4.7. Tipos de cópulas

As cópulas podem ser classificadas em três tipos, dependendo da estrutura de dependência por ela captada e do formato da sua densidade ao longo da diagonal principal. As cópulas do tipo “J” possuem coeficiente de dependência somente na cauda superior positiva. As cópulas do tipo “L” possuem coeficiente de dependência somente na cauda inferior positiva e as cópulas do tipo “U” possuem ambos os coeficientes positivos. Dentre as cópulas que serão apresentadas, pode-se citar a cópula de Gumbel com coeficiente de dependência na cauda superior positivo, a cópula de Clayton com coeficiente de dependência na cauda inferior positivo, a cópula t-student com ambos coeficientes positivos, e a cópula Gaussiana que não possui coeficiente de dependência na cauda.

Algumas cópulas não possuem uma forma fechada de apresentação e por isso são chamadas de cópulas implícitas, em contrapartida às cópulas explicitas que possuem uma forma fechada. Além desses dois tipos de cópulas, pode-se citar a classe de cópulas fundamentais que engloba a cópula de marginais independentes e as cópulas de dependência positiva e negativa perfeitas.

Apresenta-se nessa seção exemplos de cópulas subdivididas nestas três categorias: cópula fundamental, cópula implícita e cópula explicita.

4.7.1. Cópula fundamental

A classe de cópulas fundamentais engloba uma série de estruturas de dependência importantes. A primeira delas é a Cópula de Marginais Independentes: variáveis aleatórias com distribuições contínuas são independentes se e somente se sua estrutura de dependência for dada por:

$$\Pi(u_1,\ldots,u_d)=\prod_{i=1}^{d}u_i \, .$$

A Cópula Comonotônica coincide com o limite superior de Fréchet e representa a dependência positiva perfeita:

$$C_U(u_1,\ldots,u_d)=\min(u_1,\ldots,u_d) \, .$$

Essa cópula é a função de distribuição conjunta do vetor aleatório (U,…, U) em que $U \sim Uni(0,1)$. Suponha que as variáveis aleatórias $X_1,\ldots,X_d$ têm funções de densidades contínuas e possuem dependência positiva perfeita. Então, elas são, quase certamente, funções estritamente crescentes uma das outras de modo que $X_i = T_i(X_1)$, quase certamente, para $i = 2,\dots,d$. Pela propriedade de invariância pode-se dizer que X_i, $i \geq 2$ é dado por $F_i = F_i \circ T_i^{\leftarrow}$. Então, a cópula de $(X_1,\dots,X_d)$ é a função de distribuição de:

$$\left(F_1(X_1), F_1 \circ T_2^{\leftarrow} \circ T_2(X_1), \dots, F_1 \circ T_d^{\leftarrow} \circ T_d(X_1)\right).$$

A Cópula Contramonotônica é a cópula bi-dimensional do limite inferior de Fréchet e representa a dependência negativa perfeita, ou seja:

$$C_L(u_1, u_2) = \max(u_1 + u_2 - 1, 0)$$

Essa cópula é a função de distribuição conjunta do vetor aleatório $(U, 1-U)$ em que $U \sim Uni(0,1)$. Suponha que X_1 e X_2 têm funções de densidades contínuas e têm dependência negativa perfeita. Então, X_2 é, quase certamente, uma função estritamente decrescente de X_1.

4.7.2. Cópula implícita

Se $Y \sim N_d(\mu, \sum)$ é um vetor aleatório gaussiano, então sua cópula é chamada de Cópula Gaussiana. A propriedade de invariância garante que a cópula de Y é a mesma cópula de X em que $X \sim N_d(0, P)$ e P é a matriz de correlação de Y. Então, a cópula é dada por:

$$\begin{aligned} C^p_{Gass} &= \Pr[\Phi(X_1) \leq u_1, \dots, \Phi(X_d) \leq u_d] \\ &= \Phi_P\left[\Phi^{-1}(u_1), \Phi^{-1}(u_d)\right] \end{aligned}$$

em que Φ denota a função de densidade normal univariada padrão e Φ_P denota a função de distribuição conjunta de X. Essa cópula é pertinente à distribuição normal multivariada padrão, com coeficiente de correlação ρ. A cópula gaussiana não tem uma forma funcional fechada, mas pode ser expressa como uma integral da densidade de x. Para C^p_{Gass} bi-dimensional com $|\,p\,| < 1$ tem-se:

$$C^p_{Gass}(u_1, u_2) = \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_1)} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_2)} \frac{1}{2\pi(1-\rho^2)^{1/2}} \exp\left\{\frac{-\left(s_1^2 - 2\rho s_1 s_2 + s_2^2\right)}{2(1-\rho^2)}\right\} ds_1 ds_2$$

A cópula de marginais independentes e a cópula comonotônica são casos especiais de C^p_{Gass}. Se a matriz de correlação de Y coincidir com a matriz identidade, obtém-se a cópula independente. Se a matriz de correlação de Y for

Baixar livros de Literatura
Baixar livros de Literatura de Cordel
Baixar livros de Literatura Infantil
Baixar livros de Matemática
Baixar livros de Medicina
Baixar livros de Medicina Veterinária
Baixar livros de Meio Ambiente
Baixar livros de Meteorologia
Baixar Monografias e TCC
Baixar livros Multidisciplinar
Baixar livros de Música
Baixar livros de Psicologia
Baixar livros de Química
Baixar livros de Saúde Coletiva
Baixar livros de Serviço Social
Baixar livros de Sociologia
Baixar livros de Teologia
Baixar livros de Trabalho
Baixar livros de Turismo