



UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO – ESCOLA DE MINAS  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL



# Análise Numérica de Vigas Mistas com Interação Parcial

AMILTON RODRIGUES DA SILVA

ORIENTADOR: Prof. Dr. João Batista Marques de Sousa Jr.

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação do Departamento de Engenharia Civil da Escola de Minas da Universidade Federal de Ouro Preto, como parte integrante dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil, área de concentração: Construção Metálica.

Ouro Preto, Abril de 2006

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.



*“É preciso amar as pessoas  
Como se não houvesse amanhã  
Porque se você parar para pensar  
Na verdade não há”*

*Renato Russo*

# AGRADECIMENTOS

À Universidade Federal de Ouro Preto, pelo valioso suporte institucional proporcionado, e a USIMINAS, pelo apoio financeiro.

Ao meu orientador, professor João Batista Marques de Sousa Jr., pelo apoio, atenção e clareza nas orientações durante a realização deste trabalho.

Aos demais professores e funcionários do PROPEC-UFOP, que com empenho e dedicação fazem com que a instituição tenha seu devido reconhecimento em âmbito nacional.

A meu pai, que do “andar de cima” me orienta em todas as situações.

A minha mãe, Maria Ribeiro da Silva, a qual devo não só a conclusão deste curso, como todas as fases da minha vida.

Aos meus irmãos e amigos pela companhia e reciprocidade.

À minha namorada, Melina, pelo amor, carinho e presença em todos os momentos.

E, acima de tudo, a Deus, por estar sempre caminhando a nosso lado e às vezes nos carregando nos percursos estreitos dessa longa jornada.

# RESUMO

O aumento da utilização de estruturas de aço em obras de engenharia na construção civil, a presença do concreto garantida pelo preenchimento das lajes de piso e o ganho nas propriedades mecânicas das vigas mistas em relação às vigas comuns, incidem em um relativo aumento deste tipo de elemento estrutural na prática da construção. Um indicativo deste crescimento é o projeto de revisão da norma brasileira de dimensionamento de estruturas em aço, onde além da revisão do seu texto original, tratará o conceito de novas técnicas construtivas como os elementos estruturais de seção mista.

O objetivo deste trabalho é estabelecer um tratamento mais adequado em relação à análise de vigas mistas com interação parcial, ou seja, considerando o deslizamento relativo na interface de contato entre os materiais. Para isto utiliza-se o Método dos Elementos Finitos.

Para solução deste tipo de problema usando o método dos elementos finitos será desenvolvido um elemento unidimensional de viga que consiga simular o deslizamento na interface de contato entre os materiais da seção mista considerando a não-linearidade física destes materiais e a possibilidade de seções transversais genéricas.

Em uma segunda estratégia de solução do problema utilizando o método dos elementos finitos desenvolve-se um elemento de interface retangular de espessura nula capaz de simular o deslizamento ao longo da interface, sendo o comportamento das seções acima e abaixo da interface de deslizamento simulado por dois elementos unidimensionais de viga. A ação em conjunto destes elementos garante uma solução satisfatória para os problemas de vigas mistas com interação parcial.

Os elementos implementados neste trabalho serão comparados com elementos desenvolvidos por outros autores através dos resultados numéricos de alguns exemplos específicos encontrados na literatura. Também será utilizado, na validação dos elementos implementados e, para o caso de comportamento linear, a solução exata do problema de viga mista com interação parcial dada pela equação diferencial de Newmark.

# ABSTRACT

The increase use of steel structures in engineering design in civil building, the presence of the concrete guaranteed by floor slab completion and bettering in the mechanical properties composite beams in relation to common beams, happen in a relative increase of this structural element type in construction practice. A growth indicative is revision project Brazilian Code for Steel Structures, where besides revision of your original text, it will treat concept of new constructive techniques as composite section structural elements.

The Objective of this works is to establish a more appropriate treatment in relation to composite beams analysis with partial interaction, in other words, considering relative slip in contact interface between materials. For this Finite Elements Method is used.

For solution of this problem type using finite element method will be developed uni-dimensional beam element that gets to simulate contact interface slip between composite section materials considering non-linear behaviour of materials and possibility cross sections any.

In a second solution strategy of problem using finite element method is developed a null thickness rectangular interface element with capability to simulate the slip along the interface, being the section behavior above and below of slip interface simulate by means of two uni-dimensional beam elements. The action together of these elements guarantee a satisfactory solution of composite beams problems with partial interaction.

The elements implemented in this work will be compared with elements developed by other authors through numeric results of some specific examples found in the literature. It will also be used, in the validation of the implemented elements and, for the case of lineal behavior, the exact solution of composite beam with partial interaction given by Newmark's diferencial equation.

# SUMÁRIO

<b>RESUMO.....</b>	<b>V</b>
<b>ABSTRACT.....</b>	<b>VI</b>
<b>LISTA DE FIGURAS.....</b>	<b>X</b>
<b>LISTA DE TABELAS.....</b>	<b>XV</b>
<b>CAPÍTULO 1 INTRODUÇÃO.....</b>	<b>1</b>
1.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS.....	1
1.2 MOTIVAÇÃO E OBJETIVOS.....	2
1.3 APRESENTAÇÃO.....	5
<b>CAPÍTULO 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA SOBRE VIGAS MISTAS</b>	
<b>COM INTERAÇÃO PARCIAL.....</b>	<b>7</b>
2.1 INTRODUÇÃO.....	7
2.2 SOLUÇÕES ANALÍTICAS DE VIGAS MISTAS.....	9
2.2.1 Equação diferencial de Newmark.....	10
2.2.2 Processo simplificado definido pelo projeto de revisão da NBR 8800....	16
2.3 SOLUÇÕES NUMÉRICAS DE VIGAS MISTAS.....	16
2.3.1 Soluções com elementos finitos considerando o deslizamento na interface.....	18
2.3.2 Soluções usando elemento de interface.....	25
<b>CAPÍTULO 3 ANÁLISE DOS ESFORÇOS EM SEÇÕES MISTAS.....</b>	<b>30</b>

3.1 INTRODUÇÃO.....	30
3.2 GEOMETRIA DA SEÇÃO TRANSVERSAL.....	32
3.3 DEFORMADA DA SEÇÃO CONSIDERANDO O DESLIZAMENTO.....	33
3.4 MATERIAIS.....	35
3.5 OBTENÇÃO DOS ESFORÇOS RESISTENTE NA SEÇÃO MISTA.....	36
3.6 INTEGRAÇÃO.....	37
<b>CAPÍTULO 4 FORMULAÇÕES NUMÉRICAS.....</b>	<b>48</b>
4.1 INTRODUÇÃO.....	48
4.2 FORMULAÇÃO USANDO ELEMENTO FINITO COM DESLIZAMENTO.....	49
4.2.1 Relação deformação-deslocamento considerando o deslizamento.....	50
4.2.2 Formulação do problema de equilíbrio.....	52
4.2.3 Modelo de elementos finitos em deslocamentos.....	56
4.3 FORMULAÇÃO USANDO ELEMENTO DE INTERFACE.....	70
4.3.1 Equação dos deslocamentos relativos do elemento de interface.....	71
4.3.2 Formulação do problema de equilíbrio.....	73
4.3.3 Modelo de elementos finitos em deslocamentos.....	74
4.4 SOLUÇÃO DO PROBLEMA NÃO LINEAR.....	85
<b>CAPÍTULO 5 EXEMPLOS.....</b>	<b>89</b>
5.1 INTRODUÇÃO.....	89
5.2 COMPARAÇÃO COM SOLUÇÃO ANALÍTICA DE NEWMARK.....	90
5.3 PROBLEMAS NUMÉRICOS EM ELEMENTOS COM DESLIZAMENTO.....	98
5.4 COMPARAÇÃO COM RESULTADOS DA LITERATURA.....	102
5.4.1 Viga mista com três apoios uniformemente carregada.....	102
5.4.2 Viga mista com três apoios e carregamento concentrado simétrico.....	112
5.5 EXEMPLO DE TRELIÇA MISTA.....	117
<b>CAPÍTULO 6 CONCLUSÕES E SUGESTÕES.....</b>	<b>121</b>

6.1 CONCLUSÕES.....	121
6.2 SUGESTÕES.....	123
<b>ANEXO I EQUAÇÕES E CRITÉRIOS DEFINIDOS PELO PROJETO DE REVISÃO DA NBR 8800.....</b>	<b>125</b>
I.1 INTRODUÇÃO.....	125
I.2 LARGURA EFETIVA.....	126
I.3 RESISTÊNCIA DOS CONECTORES.....	127
I.4 GRAU DE INTERAÇÃO DA VIGA MISTA.....	130
I.5 NÚMERO DE CONECTORES.....	132
I.6 HOMOGENEIZAÇÃO TEÓRICA DA SEÇÃO.....	133
I.7 MOMENTO POSITIVO RESISTENTE DA SEÇÃO MISTA.....	134
I.8 MOMENTO NEGATIVO RESISTENTE DA SEÇÃO MISTA.....	137
<b>ANEXO II ARQUIVO DE ENTRADA DE DADOS.....</b>	<b>138</b>
II.1 INTRODUÇÃO.....	138
II.2 ARQUIVO DE ENTRADA PARA O ELEMENTO SLIPBEAM.....	139
II.3 ARQUIVO DE ENTRADA PARA O ELEMENTO INTERFACE E BEAM2D.....	143
<b>BIBLIOGRAFIA.....</b>	<b>149</b>

# LISTA DE FIGURAS

## CAPÍTULO 1

Figura 1.1 Ilustração de uma estrutura mista (laje mista e viga mista).....	2
---	---

## CAPÍTULO 2

Figura 2.1 seções vinculadas mecanicamente (Oehlers e Bradford, 1995).....	8
Figura 2.2 Tipos de conectores e comportamento na interface (Oehlers e Bradford, 1995).....	9
Figura 2.3 Notações para uma seção mista com conexão flexível (Faella et al, 2002).....	13
Figura 2.4 Elemento com 8 graus de liberdade (Gattesco, 1999).....	19
Figura 2.5 Viga mista com conexão cortante deformável – forças sobre um elemento infinitesimal ( Salari e Spacone, 2001).....	20
Figura 2.6 Deslocamentos e forças nodais de uma viga mista simplesmente apoiada com conexão cortante flexível (Faella et al., 2002).....	21
Figura 2.7 Campo de deslocamento para os elementos de 8 graus de liberdade (a), 10 graus de liberdade (b) e 16 graus de liberdade (c) (Dall’Asta e Zona, 2004).....	23
Figura 2.8 Elemento misto (Dall’Asta e Zona, 2004).....	23
Figura 2.9 Elemento de interface proposto por Goodman et al (1968).....	26

## CAPÍTULO 3

Figura 3.1 Definição da seção mista.....	33
--	----

Figura 3.2 Deformada da seção de viga mista com interação parcial.....	34
Figura 3.3 Diagrama tensão deformação do concreto (CEB, 1990).....	35
Figura 3.4 Relação tensão deformação ilustrativa de um material.....	36
Figura 3.5 Parametrização do segmento.....	38
Figura 3.6 Análise de esforços em seção mista. (a) Divisão da seção mista em faixas de deformações, (b) definição dos polígonos para cálculos da contribuição aos esforços resistentes devido ao concreto.....	41
Figura 3.7 Curva tensão-deformação ilustrativa para o concreto.....	43
Figura 3.8 Curva tensão-deformação ilustrativa para o aço.....	45

#### **CAPÍTULO 4**

Figura 4.1 Deformação de um segmento da viga mista (Dall’Asta e Zona, 2004).	51
Figura 4.2 Convenção de sinal para os esforços $N$ e $M$ .....	55
Figura 4.3 Graus de liberdade do elemento finito utilizado na implementação.....	59
Figura 4.4 Deformação de um segmento da viga mista.....	71
Figura 4.5 Deslocamento horizontal relativo no elemento de interface.....	72
Figura 4.6 Deslocamento vertical relativo no elemento de interface.....	73
Figura 4.7 Graus de liberdade do elemento de interface utilizado na implementação.....	77
Figura 4.8 Curva carga-deslocamento.....	86

#### **CAPÍTULO 5**

Figura 5.1 Viga mista uniformemente carregada.....	90
Figura 5.2 Eixos de referência das seções.....	91
Figura 5.3 Deslocamento transversal da viga mista. Os deslocamentos transversais foram ampliados 20 vezes.....	95
Figura 5.4 Deslizamento na interface da viga mista.....	96
Figura 5.5 Deslocamento transversal da viga mista. Os deslocamentos transversais foram ampliados 20 vezes.....	97
Figura 5.6 Deslizamento na interface da viga mista.....	98
Figura 5.9 Viga mista uniformemente carregada (Dall’Asta e Zona, 2004).....	99

Figura 5.10 Variação da curvatura ao longo do eixo da viga mista.....	100
Figura 5.11 Variação do deslizamento ao longo da interface da viga mista.....	100
Figura 5.12 Variação da curvatura ao longo do eixo da viga mista.....	100
Figura 5.13 Variação do deslizamento ao longo da interface da viga mista.....	101
Figura 5.14 Viga mista com interação parcial (Dall'Asta e Zona, 2004).....	102
Figura 5.15 Leis constitutivas do concreto (a), aço (b), barras de reforço (c) e conexão da interface (d) (Dall'Asta e Zona, 2004).....	103
Figura 5.16 Leis constitutivas do concreto (a), aço (b), barras de reforço (c) e conexão da interface (d) utilizadas neste trabalho.....	104
Figura 5.17 Curva carga-deslocamento para um ponto no meio dos vãos da viga mista.....	105
Figura 5.18 Curva carga-deslocamento de um ponto no meio dos vãos da viga mista.....	105
Figura 5.19 Curva carga-deslocamento de um ponto no meio dos vãos da viga mista.....	106
Figura 5.20 Deformada para malha de 8 elementos SLIPBEAM.....	107
Figura 5.21 Deformada para malha de 12 elementos SLIPBEAM.....	107
Figura 5.22 Deformada para malha de 16 elementos SLIPBEAM.....	107
Figura 5.23 Deslizamento ao longo do vão simétrico para malha de 8 elementos SLIPBEAM.....	108
Figura 5.24 Deslizamento ao longo do vão simétrico para malha de 12 elementos SLIPBEAM.....	108
Figura 5.25 Deslizamento ao longo do vão simétrico para malha de 16 elementos SLIPBEAM.....	109
Figura 5.26 Deformada para malha de 8 elementos INTERFACE.....	109
Figura 5.27 Deformada para malha de 12 elementos INTERFACE.....	110
Figura 5.28 Deformada para malha de 16 elementos INTERFACE.....	110
Figura 5.29 Deslizamento ao longo do vão simétrico para malha de 8 elementos INTERFACE.....	111
Figura 5.30 Deslizamento ao longo do vão simétrico para malha de 12 elementos INTERFACE.....	111

Figura 5.31 Deslizamento ao longo do vão simétrico para malha de 16 elementos INTERFACE.....	111
Figura 5.32 Viga mista com interação parcial (Salari e Spacone, 2001).....	112
Figura 5.33 Leis constitutivas dos materiais (Salari e Spacone, 2001).....	113
Figura 5.34 Leis constitutivas dos materiais utilizadas neste trabalho.....	114
Figura 5.35 Curva carga-deslocamento de um ponto no meio dos vãos da viga mista.....	114
Figura 5.36 Deformada para malha de 8 elementos SLIPBEAM.....	115
Figura 5.37 Deslizamento ao longo do vão simétrico para malha de 8 elementos SLIPBEAM.....	115
Figura 5.38 Deformada para malha de 8 elementos INTERFACE.....	116
Figura 5.39 Deslizamento ao longo do vão simétrico para malha de 8 elementos INTERFACE.....	116
Figura 5.40 Treliça mista com interação parcial.....	117
Figura 5.41 Leis constitutivas dos materiais.....	118
Figura 5.42 Discretização em elementos finitos da treliça mista.....	118
Figura 5.27 Curva carga-deslocamento de um ponto no meio do vão da treliça mista.....	119
Figura 5.44 Deformada da treliça mista (5mm, 14mm e 40mm).....	120
Figura 5.45 Detalhes da deformada da treliça mista. (a) $\Delta = 5mm$ , (b) $\Delta = 14mm$ e (c) $\Delta = 40mm$ .....	120

## ANEXO I

Figura I.1 Largura efetiva b (Johnson, 1994).....	126
Figura I.2 Conector de cisalhamento tipo pino com cabeça. (a) diâmetro do fuste variado, (b) diâmetro constante.....	128
Figura I.3 Relação força deslizamento de um conector tipo pino com cabeça.....	128
Figura I.4 Homogeneização de seção mista. (a) laje de concreto totalmente comprimida, (b) laje de concreto parcialmente tracionada.....	133
Figura I.5 Distribuição de tensões em vigas mistas – interação completa (NBR 8800, 2005).....	134

Figura I.6 Distribuição de tensões em vigas mistas – interação parcial (NBR-8800, 2005).....	135
--	-----

## **ANEXO II**

Figura II.1 Viga mista ilustrativa para arquivo de entrada de dados.....	139
Figura II.2 Discretização em elementos finitos.....	139
Figura II.3 Curva que relaciona a carga <b>P</b> com o deslocamento vertical do meio dos vãos da viga.....	142
Figura II.4 Discretização em elementos finitos.....	143
Figura II.5 Curva que relaciona a carga <b>P</b> com o deslocamento vertical do meio dos vãos da viga.....	147

# LISTA DE TABELAS

## CAPÍTULO 5

Tabela 5.1 Deslocamento vertical no meio do vão (valores em cm).....	96
Tabela 5.2 Deslocamento vertical no meio do vão (valores em cm).....	97
Tabela 5.3 Diferentes elementos avaliados.....	99

# INTRODUÇÃO

## 1.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Os elementos estruturais mistos aço-concreto são formados pela associação de um perfil de aço, laminado, dobrado ou soldado, com um componente em concreto, simples ou armado. A interação entre os materiais é garantida por meios mecânicos, conectores, mossas, ressaltos, por atrito, ou por simples aderência e repartição de cargas (Queiroz et al, 2001).

Dentre os diferentes tipos de elementos mistos aço-concreto, segundo formas e critérios de dimensionamentos, podem-se citar as lajes mistas, os pilares mistos, as vigas mistas, entre outros. A figura 1.1 ilustra uma estrutura bastante comum em obras de engenharia, onde aparecem uma laje mista, formada por uma laje de concreto armado sobre uma placa de aço com reentrâncias que garantem sua funcionalidade conjunta, e uma viga mista, formada por um perfil de aço ligado por conectores do tipo pino com cabeça a uma laje de concreto.



Figura 1.1 Ilustração de uma estrutura mista (laje mista e viga mista).

Com o início da utilização do elemento de aço em obras de engenharia de andares múltiplos e com a presença do concreto garantida devido ao preenchimento das lajes, a união entre esses dois materiais, com a finalidade de melhorar a capacidade resistente da estrutura, estava por vir. As primeiras estruturas mistas de aço-concreto surgiram em 1894 nos Estados Unidos (Griffis, 1994).

Segundo De Nardim (1999) em 1914, na Inglaterra, os elementos estruturais mistos começam a ser estudados. Em meados de 1930 já se havia estabelecido métodos de dimensionamento para vigas mistas que foram, em 1944, introduzidos na norma da *American Association of State Highway, AASHTO*, e em 1952 na norma do *American Institute of Steel Construction, AISC*.

No Brasil este tipo de sistema estrutural formado por elementos mistos foi introduzido na década de 50 e ainda tem sua utilização pouco difundida. De forma a ilustrar a utilização de elementos mistos aço-concreto no Brasil nesta época podem-se citar alguns projetos estruturais do engenheiro Paulo R. Frago (Figueiredo, 1998), como os edifícios: Garagem América (1957), Palácio do Comércio (1959), Avenida Central (1961), Santa Cruz (1963) e Sede do IPERJ (1965).

## 1.2 MOTIVAÇÃO E OBJETIVOS

Os sistemas estruturais mistos aço-concreto, por terem seus elementos de aço pré-fabricados, possuem qualidade, precisão e tempo de execução melhores que os sistemas

estruturais com todos os seus elementos moldados *in loco*. Sendo os elementos de aço dimensionados de forma a suportar, entre outras, as cargas permanentes e de construção, os sistemas estruturais mistos aço-concreto permitem a dispensa de escoras e redução de fôrmas no preenchimento *in loco* dos elementos de concreto.

Queiroz et al (2001) lista como vantagens dos sistemas mistos aço-concreto a redução do peso próprio e do volume da estrutura, a redução do consumo de aço estrutural, a redução das proteções contra incêndio e corrosão e o aumento na rigidez e resistência à flambagem.

O crescente uso do elemento de aço em sistemas estruturais na construção civil no Brasil permite o aumento da utilização de elementos mistos, principalmente as vigas mistas, uma vez que na maioria das construções metálicas é adotada a solução de viga mista para aproveitar a altura da laje de concreto sobreposta ao elemento de aço, formando assim uma viga mista com comportamento estrutural superior ao do elemento de aço.

Quando se deseja vencer grandes vãos, como no caso de pontes e galpões industriais, a solução com elementos mistos, no caso a viga mista, se torna bem interessante. Nie et al (2004) cita nestes casos como vantagens das vigas mistas em relação às vigas simples a alta relação vão versus altura da viga, menor deformação e uma alta frequência fundamental de vibração.

Um indicativo de crescimento da utilização deste tipo de elemento estrutural na construção civil é a preocupação da ABNT em revisar a Norma NBR 8800 (1986), onde além da revisão do seu texto original, tratará o conceito de novas técnicas construtivas como os elementos estruturais de seção mista.

Entre os diferentes elementos tratados na revisão da NBR 8800 (1986) podem-se encontrar as vigas mistas, pilares mistos, lajes mistas e ligações mistas. Já em outros países onde as técnicas construtivas com elementos mistos aço-concreto ocupam um lugar de destaque há algum tempo, normas que trazem prescrições para este tipo de elemento estrutural já existem, como é o caso das normas americana AISC-LRFD (1999) e ACI-318 (1999) e a norma européia Eurocode 4 (1992).

A análise de elementos mistos se torna complexa uma vez que se tem em questão, características associadas ao comportamento do aço e concreto além da interação entre

ambos. Podemos citar, por exemplo, a não linearidade física, retração e fluência do concreto, e questões como a flambagem local e tensões residuais nos perfis.

Os procedimentos de análise e dimensionamento de elementos mistos, em específico vigas mistas, apresentados em normas (Eurocode 4, 1994, NBR-8800, 2005) possuem simplificações, como a da seção homogeneizada, que podem fornecer resultados não compatíveis com os da realidade. Tais resultados são geralmente a favor da segurança porém podem ser contra a economia.

O principal objetivo desta pesquisa é estabelecer um tratamento mais adequado em relação à análise de vigas mistas com interação parcial, ou seja, considerando o deslizamento relativo na interface de contato entre os materiais. Para isto utiliza-se o Método dos Elementos Finitos.

Para solução deste tipo de problema usando o método dos elementos finitos foi desenvolvido um elemento unidimensional de viga que consiga simular o deslizamento na interface de contato entre os materiais da seção mista considerando a não-linearidade física destes materiais e a possibilidade de seções transversais genéricas.

Uma segunda estratégia de solução do problema utilizando o método dos elementos finitos foi desenvolvida. Nesta, o comportamento na interface de deslizamento do elemento misto será simulado por um elemento de interface retangular de espessura nula, já o comportamento das seções acima e abaixo da interface de deslizamento será simulado por dois elementos unidimensionais de viga. A ação em conjunto destes elementos garante a simulação de problemas de vigas mistas com interação parcial.

Os elementos implementados citados nos dois parágrafos anteriores serão comparados com elementos desenvolvidos por outros autores através dos resultados numéricos de alguns exemplos específicos encontrados na literatura. Também será utilizado, na validação dos elementos implementados e, para o caso de comportamento linear, a solução exata do problema de viga mista com interação parcial dada pela equação diferencial de Newmark.

O programa de elementos finitos utilizado para implementação das formulações é o programa FEMOOP (*Finite Element Method – Object Oriented Program*). A escolha deste programa se deu devido ao fato de seus códigos estarem disponíveis para modificações e novas implementações, e também ao fato de que a linguagem C++ orientada a objetos

utilizada em seu código facilita a implementação de novos elementos através de novas classes, sem a necessidade de conhecer a fundo toda a estrutura do programa.

O presente trabalho vem dar continuidade a uma linha de pesquisa desenvolvida na Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP), tendo sido antecedido por dois outros trabalhos de mestrado. O primeiro deles (Caldas, 2004) consistiu no desenvolvimento e implementação de procedimentos numéricos voltados para análise de pilares mistos, com a consideração das não-linearidades físicas e geométricas e a possibilidade de seções arbitrárias, sendo considerada a interação total no contato entre os materiais. Já o segundo trabalho (Muniz, 2005) apresentou formulações numéricas alternativas para análise de elementos mistos com interação total entre os materiais, considerando as não linearidades física e geométrica e um tratamento mais rápido e genérico da seção transversal. Os elementos implementados no segundo trabalho permitem ainda a consideração de imperfeições geométricas iniciais e também análises no campo de grandes deslocamentos e grandes rotações através da utilização de elementos co-rotacionais.

É importante salientar que apesar das análises efetuadas no presente trabalho estarem mais voltadas para as vigas mistas de aço e concreto, os modelos implementados podem ser usados por qualquer combinação de dois elementos componentes de uma viga que deslizem relativamente entre si através de uma conexão.

### **1.3 APRESENTAÇÃO**

Este trabalho encontra-se dividido em seis capítulos e dois anexos. No segundo capítulo tem-se uma revisão bibliográfica sobre métodos de solução de viga mista com interação parcial. São apresentados métodos analíticos como a solução através da equação diferencial de Newmark e métodos numéricos com a utilização de elementos finitos usados por vários autores em pesquisas recentes sobre o assunto. Também é apresentado neste capítulo o elemento básico de interface, que será utilizado no capítulo 4 para a formulação de um elemento que simule o comportamento na interface de deslizamento da viga mista.

No capítulo 3 faz-se um estudo voltado para análise de seções transversais mistas genéricas. Neste capítulo é descrito o método utilizado para a obtenção dos esforços resistentes e rigidezes tangente nas seções mistas, considerando as características dos materiais aço e concreto.

No Capítulo 4 são apresentadas duas formulações para solução numérica de problemas de vigas mistas com interação parcial. A primeira delas usa um elemento finito baseado em deslocamentos que considera o deslizamento na interface de contato entre os materiais da seção mista. A segunda utiliza um elemento unidimensional de viga, de seção genérica definida como no capítulo 3, em conjunto com um elemento de interface retangular de espessura nula, usado para simular o comportamento da interface deslizante da viga mista.

No capítulo 5 são apresentados alguns exemplos que são avaliados por procedimentos numéricos usando os elementos implementados neste trabalho e por outros autores. Os resultados obtidos nestas avaliações numéricas são devidamente comparados. Faz-se uso também neste capítulo da equação diferencial de Newmark para a obtenção da solução exata de um problema específico que será comparada com a resposta obtida através da solução numérica utilizando os elementos implementados neste trabalho.

No capítulo 6 são apresentadas as conclusões referentes a este trabalho e sugestões para trabalhos futuros utilizando as implementações desenvolvidas, bem como novas implementações.

Por último são apresentados de forma resumida em dois anexos, o procedimento simplificado do projeto de revisão da norma NBR 8800 (2005) para solução de problemas de vigas mistas com interação parcial, Anexo I, e um arquivo de entrada de dados para o programa FEMOOP com a utilização dos elementos implementados neste trabalho, Anexo II.

# INTRODUÇÃO

## 1.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Os elementos estruturais mistos aço-concreto são formados pela associação de um perfil de aço, laminado, dobrado ou soldado, com um componente em concreto, simples ou armado. A interação entre os materiais é garantida por meios mecânicos, conectores, mossas, ressaltos, por atrito, ou por simples aderência e repartição de cargas (Queiroz et al, 2001).

Dentre os diferentes tipos de elementos mistos aço-concreto, segundo formas e critérios de dimensionamentos, podem-se citar as lajes mistas, os pilares mistos, as vigas mistas, entre outros. A figura 1.1 ilustra uma estrutura bastante comum em obras de engenharia, onde aparecem uma laje mista, formada por uma laje de concreto armado sobre uma placa de aço com reentrâncias que garantem sua funcionalidade conjunta, e uma viga mista, formada por um perfil de aço ligado por conectores do tipo pino com cabeça a uma laje de concreto.



Figura 1.1 Ilustração de uma estrutura mista (laje mista e viga mista).

Com o início da utilização do elemento de aço em obras de engenharia de andares múltiplos e com a presença do concreto garantida devido ao preenchimento das lajes, a união entre esses dois materiais, com a finalidade de melhorar a capacidade resistente da estrutura, estava por vir. As primeiras estruturas mistas de aço-concreto surgiram em 1894 nos Estados Unidos (Griffis, 1994).

Segundo De Nardim (1999) em 1914, na Inglaterra, os elementos estruturais mistos começam a ser estudados. Em meados de 1930 já se havia estabelecido métodos de dimensionamento para vigas mistas que foram, em 1944, introduzidos na norma da *American Association of State Highway, AASHTO*, e em 1952 na norma do *American Institute of Steel Construction, AISC*.

No Brasil este tipo de sistema estrutural formado por elementos mistos foi introduzido na década de 50 e ainda tem sua utilização pouco difundida. De forma a ilustrar a utilização de elementos mistos aço-concreto no Brasil nesta época podem-se citar alguns projetos estruturais do engenheiro Paulo R. Fragoso (Figueiredo, 1998), como os edifícios: Garagem América (1957), Palácio do Comércio (1959), Avenida Central (1961), Santa Cruz (1963) e Sede do IPERJ (1965).

## 1.2 MOTIVAÇÃO E OBJETIVOS

Os sistemas estruturais mistos aço-concreto, por terem seus elementos de aço pré-fabricados, possuem qualidade, precisão e tempo de execução melhores que os sistemas

estruturais com todos os seus elementos moldados *in loco*. Sendo os elementos de aço dimensionados de forma a suportar, entre outras, as cargas permanentes e de construção, os sistemas estruturais mistos aço-concreto permitem a dispensa de escoras e redução de fôrmas no preenchimento *in loco* dos elementos de concreto.

Queiroz et al (2001) lista como vantagens dos sistemas mistos aço-concreto a redução do peso próprio e do volume da estrutura, a redução do consumo de aço estrutural, a redução das proteções contra incêndio e corrosão e o aumento na rigidez e resistência à flambagem.

O crescente uso do elemento de aço em sistemas estruturais na construção civil no Brasil permite o aumento da utilização de elementos mistos, principalmente as vigas mistas, uma vez que na maioria das construções metálicas é adotada a solução de viga mista para aproveitar a altura da laje de concreto sobreposta ao elemento de aço, formando assim uma viga mista com comportamento estrutural superior ao do elemento de aço.

Quando se deseja vencer grandes vãos, como no caso de pontes e galpões industriais, a solução com elementos mistos, no caso a viga mista, se torna bem interessante. Nie et al (2004) cita nestes casos como vantagens das vigas mistas em relação às vigas simples a alta relação vão versus altura da viga, menor deformação e uma alta frequência fundamental de vibração.

Um indicativo de crescimento da utilização deste tipo de elemento estrutural na construção civil é a preocupação da ABNT em revisar a Norma NBR 8800 (1986), onde além da revisão do seu texto original, tratará o conceito de novas técnicas construtivas como os elementos estruturais de seção mista.

Entre os diferentes elementos tratados na revisão da NBR 8800 (1986) podem-se encontrar as vigas mistas, pilares mistos, lajes mistas e ligações mistas. Já em outros países onde as técnicas construtivas com elementos mistos aço-concreto ocupam um lugar de destaque há algum tempo, normas que trazem prescrições para este tipo de elemento estrutural já existem, como é o caso das normas americana AISC-LRFD (1999) e ACI-318 (1999) e a norma européia Eurocode 4 (1992).

A análise de elementos mistos se torna complexa uma vez que se tem em questão, características associadas ao comportamento do aço e concreto além da interação entre

ambos. Podemos citar, por exemplo, a não linearidade física, retração e fluência do concreto, e questões como a flambagem local e tensões residuais nos perfis.

Os procedimentos de análise e dimensionamento de elementos mistos, em específico vigas mistas, apresentados em normas (Eurocode 4, 1994, NBR-8800, 2005) possuem simplificações, como a da seção homogeneizada, que podem fornecer resultados não compatíveis com os da realidade. Tais resultados são geralmente a favor da segurança porém podem ser contra a economia.

O principal objetivo desta pesquisa é estabelecer um tratamento mais adequado em relação à análise de vigas mistas com interação parcial, ou seja, considerando o deslizamento relativo na interface de contato entre os materiais. Para isto utiliza-se o Método dos Elementos Finitos.

Para solução deste tipo de problema usando o método dos elementos finitos foi desenvolvido um elemento unidimensional de viga que consiga simular o deslizamento na interface de contato entre os materiais da seção mista considerando a não-linearidade física destes materiais e a possibilidade de seções transversais genéricas.

Uma segunda estratégia de solução do problema utilizando o método dos elementos finitos foi desenvolvida. Nesta, o comportamento na interface de deslizamento do elemento misto será simulado por um elemento de interface retangular de espessura nula, já o comportamento das seções acima e abaixo da interface de deslizamento será simulado por dois elementos unidimensionais de viga. A ação em conjunto destes elementos garante a simulação de problemas de vigas mistas com interação parcial.

Os elementos implementados citados nos dois parágrafos anteriores serão comparados com elementos desenvolvidos por outros autores através dos resultados numéricos de alguns exemplos específicos encontrados na literatura. Também será utilizado, na validação dos elementos implementados e, para o caso de comportamento linear, a solução exata do problema de viga mista com interação parcial dada pela equação diferencial de Newmark.

O programa de elementos finitos utilizado para implementação das formulações é o programa FEMOOP (*Finite Element Method – Object Oriented Program*). A escolha deste programa se deu devido ao fato de seus códigos estarem disponíveis para modificações e novas implementações, e também ao fato de que a linguagem C++ orientada a objetos

utilizada em seu código facilita a implementação de novos elementos através de novas classes, sem a necessidade de conhecer a fundo toda a estrutura do programa.

O presente trabalho vem dar continuidade a uma linha de pesquisa desenvolvida na Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP), tendo sido antecedido por dois outros trabalhos de mestrado. O primeiro deles (Caldas, 2004) consistiu no desenvolvimento e implementação de procedimentos numéricos voltados para análise de pilares mistos, com a consideração das não-linearidades físicas e geométricas e a possibilidade de seções arbitrárias, sendo considerada a interação total no contato entre os materiais. Já o segundo trabalho (Muniz, 2005) apresentou formulações numéricas alternativas para análise de elementos mistos com interação total entre os materiais, considerando as não linearidades física e geométrica e um tratamento mais rápido e genérico da seção transversal. Os elementos implementados no segundo trabalho permitem ainda a consideração de imperfeições geométricas iniciais e também análises no campo de grandes deslocamentos e grandes rotações através da utilização de elementos co-rotacionais.

É importante salientar que apesar das análises efetuadas no presente trabalho estarem mais voltadas para as vigas mistas de aço e concreto, os modelos implementados podem ser usados por qualquer combinação de dois elementos componentes de uma viga que deslize relativamente entre si através de uma conexão.

### **1.3 APRESENTAÇÃO**

Este trabalho encontra-se dividido em seis capítulos e dois anexos. No segundo capítulo tem-se uma revisão bibliográfica sobre métodos de solução de viga mista com interação parcial. São apresentados métodos analíticos como a solução através da equação diferencial de Newmark e métodos numéricos com a utilização de elementos finitos usados por vários autores em pesquisas recentes sobre o assunto. Também é apresentado neste capítulo o elemento básico de interface, que será utilizado no capítulo 4 para a formulação de um elemento que simule o comportamento na interface de deslizamento da viga mista.

No capítulo 3 faz-se um estudo voltado para análise de seções transversais mistas genéricas. Neste capítulo é descrito o método utilizado para a obtenção dos esforços resistentes e rigidezes tangente nas seções mistas, considerando as características dos materiais aço e concreto.

No Capítulo 4 são apresentadas duas formulações para solução numérica de problemas de vigas mistas com interação parcial. A primeira delas usa um elemento finito baseado em deslocamentos que considera o deslizamento na interface de contato entre os materiais da seção mista. A segunda utiliza um elemento unidimensional de viga, de seção genérica definida como no capítulo 3, em conjunto com um elemento de interface retangular de espessura nula, usado para simular o comportamento da interface deslizante da viga mista.

No capítulo 5 são apresentados alguns exemplos que são avaliados por procedimentos numéricos usando os elementos implementados neste trabalho e por outros autores. Os resultados obtidos nestas avaliações numéricas são devidamente comparados. Faz-se uso também neste capítulo da equação diferencial de Newmark para a obtenção da solução exata de um problema específico que será comparada com a resposta obtida através da solução numérica utilizando os elementos implementados neste trabalho.

No capítulo 6 são apresentadas as conclusões referentes a este trabalho e sugestões para trabalhos futuros utilizando as implementações desenvolvidas, bem como novas implementações.

Por último são apresentados de forma resumida em dois anexos, o procedimento simplificado do projeto de revisão da norma NBR 8800 (2005) para solução de problemas de vigas mistas com interação parcial, Anexo I, e um arquivo de entrada de dados para o programa FEMOOP com a utilização dos elementos implementados neste trabalho, Anexo II.

# REVISÃO BIBLIOGRÁFICA SOBRE VIGAS MISTAS COM INTERAÇÃO PARCIAL

## 2.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo, faz-se uma revisão bibliográfica sobre soluções analíticas e numéricas de problemas de vigas mistas com interação parcial. Primeiramente, apresenta-se a principal solução analítica obtida para o problema de viga mista com interação parcial, o método exato de Newmark (1951). O método aproximado da norma NBR-8800 (2005), apesar de não ser uma solução analítica no sentido rigoroso, é apresentado no Anexo I. Em seguida, apresenta-se uma revisão bibliográfica dos trabalhos mais recentes utilizando métodos numéricos para soluções de vigas mistas com interação parcial, sendo o deslizamento na interface considerado pelo elemento finito que representa a viga mista. Por último, apresenta-se o elemento básico de interface que será utilizado no capítulo 4 como um método numérico de solução de vigas com deslizamento relativo, deslizamento que será modelado pelo elemento de interface.

As vigas mistas de aço e concreto são elementos estruturais compostos por um perfil metálico, laminado, dobrado ou soldado, ligado por meios mecânicos, conectores, mossas, ressalto, a uma laje de concreto, convencional ou do tipo *steel-deck*.

As formas de seções mistas aço-concreto são as mais variadas possíveis dependendo da imaginação do projetista. A figura 2.1 (Oehlers e Bradford, 1995) mostra algumas

seções de viga mista comuns nos projetos deste tipo de elemento estrutural. Dentre elas, a mais comum nas construções é a viga-T como mostrado em 2.1(a). Devido a mesa superior do elemento de aço da viga-T contribuir muito pouco para a resistência total da seção pode-se obter uma seção mais eficiente diminuindo o tamanho da mesa superior e soldando uma placa na mesa inferior como é mostrado na viga-placa em 2.1(b). Seguindo a mesma linha do pensamento anterior, pode-se eliminar a mesa superior do elemento de aço e soldar os conectores na alma do perfil como é mostrado na viga-híbrida em 2.1(c). Pode-se também ter a espessura da seção de concreto crescente formando uma mísula como é mostrado na viga-mísula em 2.1(d). Se no caso de viga-T o elemento de aço está em uma das extremidades da seção de concreto temos a viga-L como é mostrado em 2.1(e). Vigas mistas em pontes têm na maioria das vezes a seção I do elemento de aço substituída por seção do tipo caixa fechada, como mostrado em 2.1(g), ou aberta como mostrado em 2.1(f), sendo que neste caso os conectores estão concentrados nas almas.

Em pisos de edifícios a utilização do sistema estrutural de viga mista consegue uma redução da ordem de 20% a 40% do peso da viga de aço em relação à viga com interação livre, ou seja, sem a presença de conectores mecânicos de ligação (Queiroz et al, 2001). Por este motivo, em sistemas estruturais com a utilização de elemento de aço, a solução de vigas mistas é adotada na grande maioria das vezes.

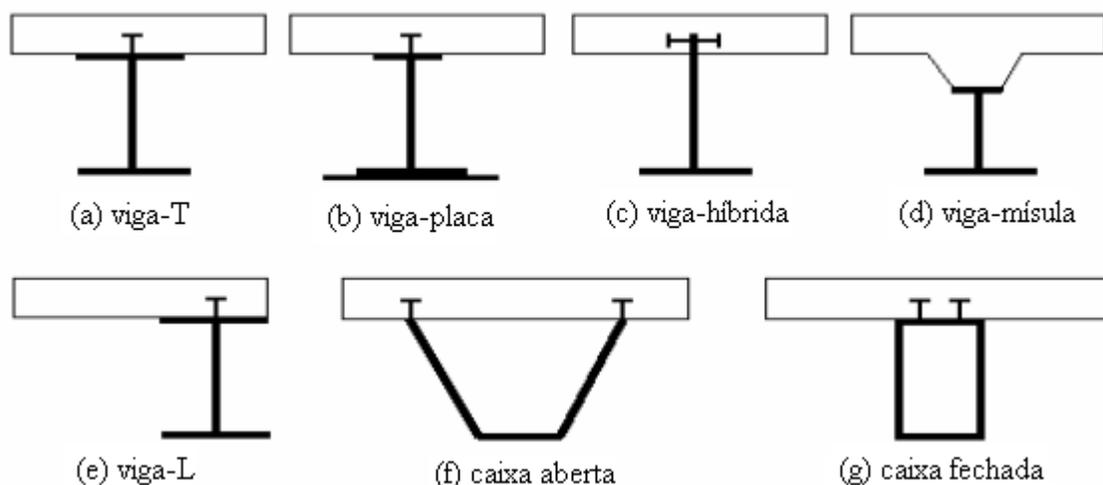


Figura 2.1 seções vinculadas mecanicamente (Oehlers e Bradford, 1995).

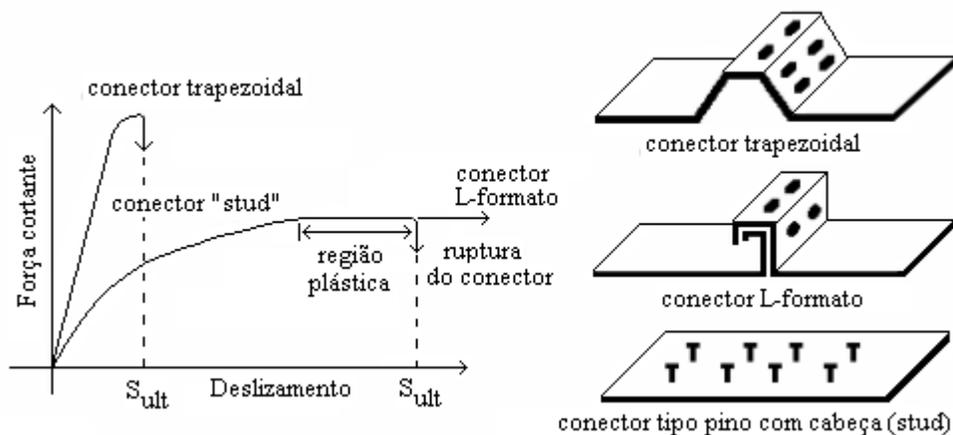


Figura 2.2 Tipos de conectores e comportamento na interface (Oehlers e Bradford, 1995).

Já para a ligação mecânica entre os materiais da viga mista, na maioria das vezes é adotado o conector do tipo pino com cabeça (*stud*), porque, além do fato de sua fácil execução, este tipo de conector fornece à curva força deslizamento na interface da viga mista um comportamento com patamar plástico (ver figura 2.2), que na prática é muito interessante. É justamente este comportamento plástico que permite a redistribuição de esforços e aviso de grandes deslocamentos antes da ruína.

Na utilização de vigas mistas aço-concreto em sistemas estruturais deve-se, na execução, preocupar-se com o fato de escorar ou não o elemento. Se a exigência da ação conjunta dos materiais for necessária para resistirem as cargas de peso próprio e outras de construção, então a viga mista deve ser escorada de forma a esperar que o concreto ganhe resistência suficiente para a ação conjunta dos materiais, no caso contrário, o escoramento é dispensado (Queiroz et al, 2001).

## 2.2 SOLUÇÕES ANALÍTICAS DE VIGAS MISTAS

As peculiaridades inerentes a este sistema estrutural tornam a sua análise bastante distinta das vigas de aço e concreto. Uma vez que a ligação entre os materiais da seção mista possui uma certa rigidez, acontecem deslizamentos relativos na interface aço-concreto que serão maiores ou menores de acordo com tal rigidez, e estes deslizamentos irão aumentar os deslocamentos totais influenciando na distribuição de esforços nas regiões de momentos negativos e positivos.

A deformação, a distribuição de tensões e o modo de falha das vigas mistas dependem, sobretudo do comportamento da conexão horizontal entre os elementos de aço e concreto. Tal comportamento é representado pela relação entre a força cortante na interface e o seu deslizamento relativo como se pode ver na figura 2.2 (Oehlers e Bradford, 1995).

Também são de particular importância na análise de vigas mista os fenômenos de fluência e retração do concreto. Esses fenômenos provocam deformações no elemento de concreto da viga mista, que tem uma de suas faces ligadas por meios mecânicos à viga de aço que tenta impedir tal deformação, provocando assim esforços de flexão no elemento de viga mista.

Diz-se Interação parcial entre os materiais quando os deslizamentos relativos na interface aço-concreto influenciam de modo considerável a distribuição de esforços no elemento de viga mista. Já Interação Total entre os materiais desconsidera o deslizamento na interface aço-concreto e trata o elemento de viga mista como uma viga comum de seção mista.

### **2.2.1 Equação diferencial de Newmark**

Nesta seção é apresentada a equação diferencial de Newmark (1951), que tem como principal vantagem obter a solução exata do problema através da solução de uma equação diferencial envolvendo a curvatura da viga mista. No entanto, o método apresenta algumas restrições, limitando-se a problemas de vigas mistas específicos: a distribuição do momento atuante na viga deve ser conhecida; as propriedades geométricas da seção devem ser constantes em todo o elemento analisado e as relações tensão deformação dos materiais devem ser lineares.

Esta equação será utilizada em capítulos seguintes para obtenção de soluções exatas de problemas específicos. Estes problemas também serão avaliados usando análise numérica, que no caso é uma solução aproximada da equação diferencial através de funções de interpolação nos elementos finitos. Os resultados de ambos serão comparados para avaliação da formulação utilizada.

O desenvolvimento da equação aqui apresentada é encontrado, de forma mais reduzida, em Faella et al (2002).

### 2.2.1.1 Deslizamento na interface

A interação parcial na interface aço-concreto da seção mista provoca um deslizamento na interface. Este deslizamento é apresentado na equação 2.1, onde  $s$  é o deslizamento ao longo do eixo da viga mista,  $u_2$  e  $u_1$  são respectivamente os deslocamentos dos centros geométricos da seção de aço e da seção de concreto,  $h$  é a distância entre os dois centros geométricos e  $v'$  é a rotação da seção mista.

$$s(x) = u_2 - u_1 + hv' \quad (2.1)$$

Considera-se que a viga mista interage parcialmente apenas na direção horizontal, considerando então para a direção vertical uma interação total, ou seja, para uma mesma seção a laje de concreto e a viga de aço tem os mesmos deslocamentos verticais e rotações. A não-consideração da separação vertical na interface é sustentada pelo fato de que não há evidências experimentais suficientes que comprovem a importância desta consideração na resposta das análises de vigas mistas (Salari e Spacone, 2001).

### 2.2.1.2 Esforços na seção mista

Os momentos na seção mista aço-concreto em relação a um eixo qualquer podem ser obtidos através da integração das tensões normais na área da seção em relação a esses eixos. A figura 2.3 mostra os esforços atuantes em uma seção mista. Na figura o índice 1 refere-se a seção de concreto e o índice 2 a seção de aço.

$$M_\alpha = \iint_{A_\alpha} \sigma_\alpha y_\alpha dA \quad (2.2)$$

Na equação 2.2,  $\alpha = 1,2$  refere-se, respectivamente, as seções de concreto e aço da seção mista, ou à seção inferior e superior a interface de deslizamento.

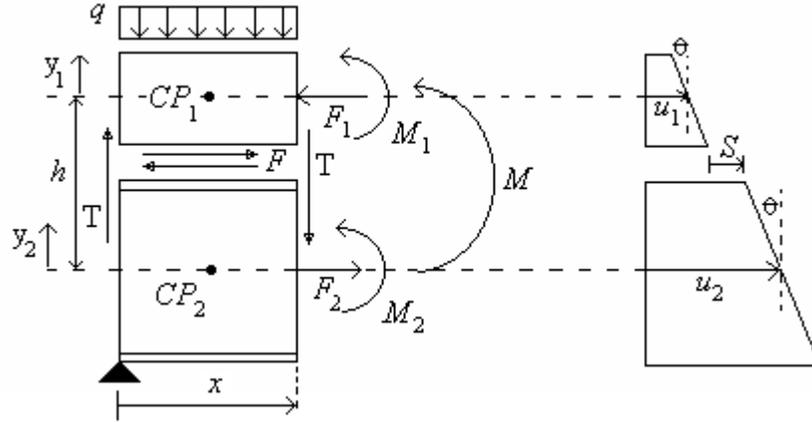


Figura 2.3 Notações para uma seção mista com conexão flexível (Faella et al, 2002).

Sendo a relação tensão deformação dos materiais linear, a tensão ( $\sigma_\alpha$ ) nas seções pode ser escrita como o produto do módulo de elasticidade ( $E_\alpha$ ) do material pela deformação da seção ( $\varepsilon_\alpha$ ).

$$M_\alpha = \iint_{A_\alpha} E_\alpha \varepsilon_\alpha y_\alpha dA \quad (2.3)$$

Como os momentos estão sendo obtidos em relação a um eixo passando pelo centro geométrico das seções, então a equação da deformação axial para as seções, em relação a esses eixos, é dada abaixo, onde  $\chi = -v''$  é a curvatura da seção analisada.

$$\varepsilon_\alpha = \chi y_\alpha \quad (2.4)$$

Substituindo a equação 2.4 em 2.3 e trabalhando o resultado, chega-se na equação final para os momentos nas seções, nesta equação  $I_\alpha$  representa o momento de inércia nas seções de concreto e aço.

$$M_\alpha = E_\alpha \chi \iint_{A_\alpha} y_\alpha^2 dA = \chi E_\alpha I_\alpha \quad (2.5)$$

Observando a figura 2.3 e tomando a condição de equilíbrio das forças na direção horizontal, tem-se:

$$F_2 = -F_1 = F \quad (2.6)$$

O momento total atuante na seção mista, dado pela equação 2.7, é a soma dos momentos atuantes em cada seção, somados ao momento devido ao binário de força que surge na interface aço-concreto da viga mista.

$$M = M_1 + M_2 + Fh = \chi E_1 I_1 + \chi E_2 I_2 + Fh = \chi (EI)_{free} + Fh \quad (2.7)$$

Na equação 2.7,  $(EI)_{free} = E_1 I_1 + E_2 I_2$  é a rigidez à flexão da seção transversal quando a conexão horizontal não existe ( $F = 0$ ).

### 2.2.1.3 Relação força cortante deslizamento na interface

Newmark (1951) considera em sua formulação uma relação linear entre a força cortante longitudinal por unidade de comprimento e o deslizamento na interface. A força cortante longitudinal por unidade de comprimento é a taxa de variação da força cortante na interface ao longo da viga mista.

$$F' = K_s = \frac{dF}{dx} \quad (2.8)$$

Na equação 2.8,  $K$  é uma constante que caracteriza a conexão horizontal na interface da seção mista. O valor de  $K$  depende, dentre outras variáveis, do tipo de conector utilizado na ligação entre os materiais e do número de conectores utilizado ao longo do elemento analisado.

A equação 2.9 é obtida derivando a equação 2.8 em relação a variável que define a posição da seção analisada na viga mista, esta variável está representada na figura 2.3 pela letra  $x$ .

$$F'' = Ks' = K(\varepsilon_2 - \varepsilon_1 - \chi h) \quad (2.9)$$

#### 2.2.1.4 Retração no concreto

A retração no concreto é uma redução de volume causada pela perda de água devido a evaporação. A NBR-6118 (2003) em seu item 3.1.1.5 especifica, para a maioria dos casos correntes de elementos estruturais de concreto, um valor constante para a deformação devido a retração do concreto de  $15 \times 10^{-5}$ . Já a NBR-8800 (2005) cita, em seu anexo Q item Q.1.2.1.3, que tal deformação só tem valor significativo quando a relação entre o vão e altura total da viga mista excede a 20 e a deformação específica de retração livre do concreto exceder a 0,04%, sendo que nestes casos a norma aconselha a consultar normas ou especificações estrangeiras ou bibliografia especializada.

Na formulação de Newmark a deformação por retração do concreto ( $\varepsilon_{sh}$ ) é constante e participa das equações somada à deformação do centro geométrico da seção de concreto, como definido abaixo.

$$F'' = K(\varepsilon_2 - (\varepsilon_1 + \varepsilon_{sh}) - \chi h) \quad (2.10)$$

#### 2.2.1.5 Considerações finais

Substituindo a deformação da equação 2.10 pela relação entre tensão e módulo de elasticidade, e sabendo que tensão é a relação entre força e área, tem-se:

$$F'' = KF \left( \frac{E_1 A_1 + E_2 A_2}{(E_1 A_1)(E_2 A_2)} \right) - K\varepsilon_{sh} - K\chi h \quad (2.11)$$

De modo a simplificar a equação 2.11 define-se,  $(EA)^* = \frac{(E_1 A_1)(E_2 A_2)}{E_1 A_1 + E_2 A_2}$ .

$$F'' = \frac{KF}{(EA)^*} - K\varepsilon_{sh} - K\chi h \quad (2.12)$$

Sendo a distância entre os centros geométricos das seções de aço e concreto, representada na figura 2.3 por  $h$ , e a rigidez à flexão da seção transversal  $(EI)_{free}$ , constantes ao longo do elemento, tem-se, derivando duas vezes a equação 2.7 em relação a variável que define a posição da seção analisada, a equação abaixo:

$$M'' = \chi''(EI)_{free} + F''h \quad (2.13)$$

Substituindo a equação 2.12 na equação 2.13, e sabendo, por meio da teoria de viga submetida a flexão simples, que  $M'' = -q$ , chega-se a expressão abaixo:

$$-q = \chi''(EI)_{free} + \frac{KhF}{(EA)^*} - Kh\varepsilon_{sh} - Kh^2\chi \quad (2.14)$$

Definem-se:

$$(EI)_{full} = (EI)_{free} + (EA)^* h^2 \quad (2.15)$$

$$\alpha^2 = \frac{K(EI)_{full}}{(EA)^*(EI)_{free}} \quad (2.16)$$

A equação 2.15 representa a rigidez a flexão do elemento de viga mista quando a interação na interface aço-concreto da seção mista for total.

Trabalhando a equação 2.14 e usando as definições 2.15 e 2.16 chega-se à equação 2.17, que define a equação diferencial da curvatura para vigas mistas com propriedades geométricas da seção constante, relação tensão deformação linear e relação taxa de força cortante longitudinal por deslizamento na interface aço-concreto constante e igual a  $K$ .

$$\chi'' - \alpha^2 \chi = \frac{-q}{(EI)_{free}} - \alpha^2 \frac{M}{(EA)_{full}} + \frac{Kh\varepsilon_{sh}}{(EI)_{free}} \quad (2.17)$$

Conhecido o momento atuante no elemento de viga analisado e determinado as propriedades geométricas da seção pode-se, através da solução da equação diferencial 2.17 para as condições de contorno do elemento, determinar a solução exata para curvatura ao longo do elemento de viga. Porém, para o uso da equação 2.17 é necessária a consideração de algumas restrições como: propriedades geométricas da seção constantes ao longo do elemento; relação tensão-deformação linear para os materiais; relação carga-deslizamento da interface linear; conhecimento prévio do momento atuante ao longo do elemento.

Faella et al (2002) utiliza a equação 2.17 para obter a solução exata do problema de viga mista simplesmente apoiada com carregamento uniformemente distribuído ao longo do elemento e concentrado nos seus extremos. Em sua formulação numérica o autor atribui valores unitários aos carregamentos nodais do elemento, e através da solução exata do problema é determinando uma matriz de rigidez exata para o elemento, que relaciona seus deslocamentos nodais às correspondentes forças nodais.

### **2.2.2 Processo simplificado definido pelo projeto de revisão da NBR-8800**

O projeto de revisão da NBR 8800 (2005) em seu anexo Q define um procedimento simplificado para a determinação de deslocamentos e momentos resistentes últimos de vigas mistas com interação parcial. Em seu procedimento a Norma se utiliza de simplificações significativas, como o caso da seção homogeneizada e a consideração da distribuição uniforme da força cortante ao longo da interface de deslizamento do elemento de viga. Devido a seu caráter de dimensionamento de elementos de vigas mistas em relação aos seus estados limites últimos e de utilização, tal procedimento é apresentado de forma resumida no anexo I deste trabalho.

## **2.3 SOLUÇÕES NUMÉRICAS DE VIGAS MISTAS**

Como visto na seção anterior as soluções analíticas de problemas de vigas mistas são aplicáveis a casos particulares, como no caso da equação de Newmark (1951) que entre

outras particularidades exige o conhecimento prévio do momento atuante na viga mista, ou deve-se considerar algumas simplificações para obter a solução, como no caso do procedimento simplificado definido pelo projeto de revisão da norma NBR 8800 (2005).

Diante das particularidades e simplificações dos procedimentos analíticos para a solução de problema de viga mista com interação parcial, o uso de métodos numéricos para solução deste tipo de problema se torna atraente. O método dos elementos finitos, que apesar de fornecer uma solução aproximada devido à discretização do contínuo em elementos finitos e a aproximação da solução em cada elemento por funções de interpolação, apresenta uma convergência para a solução exata quando aumenta-se a discretização do contínuo, desde que as funções de interpolação do elemento obedeçam condições mínimas de acordo com o tipo de problema avaliado.

Nesta seção será feita uma revisão bibliográfica em trabalhos mais recentes que adotam soluções numéricas para problemas de vigas mistas com interação parcial. Será feita também uma breve revisão sobre trabalhos relacionados a elementos de interface, já que no capítulo 4 é apresentada uma proposta de solução numérica do problema de viga mista com interação parcial usando um elemento de interface em conjunto com um elemento de viga simples.

Na revisão bibliográfica percebe-se a preferência dos autores na utilização de elementos unidimensionais para simular o problema de viga mista com interação parcial, uma vez que estes são mais simples de serem implementados, produzem respostas mais rápidas e, para o caso de problemas de vigas, com boa precisão, justificando assim a preferência em relação aos elementos bidimensionais ou tridimensionais.

Os diferentes elementos unidimensionais implementados em trabalhos recentes descritos no item abaixo diferem entre si na escolha do tipo da formulação de elementos finitos utilizada, que são baseadas ora em deslocamentos ora forças. A determinação do número de graus de liberdade e conseqüente escolha das funções de interpolação implica também em diferenças entre os elementos implementados encontrados na revisão bibliográfica.

Na literatura, os trabalhos encontrados que utilizam o elemento de interface retangular de espessura nula, geralmente o fazem para simular propagação de trincas, modelo de juntas e contatos entre diferentes materiais. Não foram encontrados trabalhos

desenvolvidos usando este tipo de elemento para simular o comportamento da interface de deslizamento em vigas mistas com interação parcial. Isto pode ser explicado devido ao elemento de interface ser normalmente utilizado em análises bidimensionais, sendo necessário algumas alterações na consideração dos graus de liberdade em seu nós para a sua utilização em conjunto com elementos de barra.

### 2.3.1 Soluções com elementos finitos considerando o deslizamento na interface

Oven et al (1997) apresentam um modelo de elementos finitos inelástico não linear bi-dimensional para análise estrutural de viga mista com conexão deformável na interface.

No desenvolvimento da formulação os autores utilizam o princípio dos trabalhos virtuais, expresso pela equação 2.18, onde o trabalho virtual interno é representado pela soma dos trabalhos realizados pela laje de concreto, pelo perfil de aço e pelos conectores de ligação da interface, e o trabalho virtual externo é representado através do produto das forças externas nodais pelo campo de deslocamento virtual, uma vez que para a formulação usada só são permitidas forças externas nodais no elemento.

$$\delta W = \int_l \int_{A_c} \sigma_{cz} \delta \epsilon_{cz} dA_c dz + \int_l \int_{A_s} \sigma_{sz} \delta \epsilon_{sz} dA_s dz + \int_l F \delta \Delta_s dz - \{Q\} \{\delta q\} = 0 \quad (2.18)$$

Na análise é considerado um elemento de barra com dois nós e seis graus de liberdade por nó. Atribuindo as funções de interpolação ao elemento e aplicando a ele a equação 2.18, chega-se à formulação desejada para o elemento finito.

Gattesco (1999) utiliza, em sua formulação numérica para solução de problemas de vigas mista com interação parcial, um elemento representado por dois membros de viga, concreto e aço, um sobre o outro conectados por duas molas horizontais em suas extremidades, como pode ser visto na figura 2.4.

O elemento possui quatro pontos nodais com três graus de liberdades cada um, os quais representam os deslocamentos vertical e horizontal e a rotação no plano x-y. No entanto, com a desconsideração da separação vertical entre os membros de viga o número de graus de liberdade do elemento se reduz para oito.

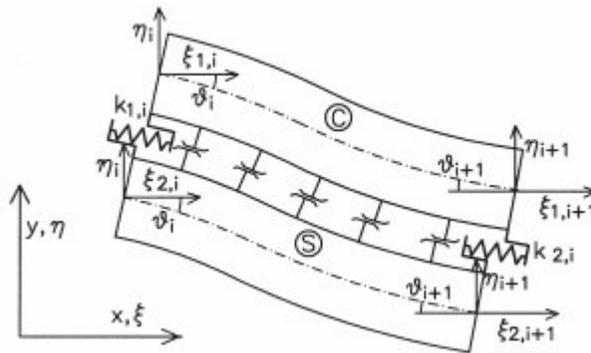


Figura 2.4 Elemento com 8 graus de liberdade (Gattesco, 1999)

Fabbrocino et al (1999) propõem um procedimento numérico para análise do comportamento estrutural de viga mista sobre efeito de momento positivo devido a carregamento de curta duração em ambas situações de estados limites de ruína e de utilização.

Salari e Spacone (2001) apresentam uma formulação para solução numérica de problemas de vigas mistas com interação parcial na interface utilizando o método dos elementos finitos, com diferentes elementos de barra. O primeiro é derivado do método baseado em deslocamentos, e outro derivado do método baseado em forças.

Em sua formulação, os autores definem para vigas mistas o campo de deslocamento  $u(x) = (v(x) \quad u_{0c}(x) \quad u_{0s}(x))^T$ , onde  $v(x)$  é o deslocamento vertical, idêntico para ambos, concreto e aço, devido a consideração de elevação nula na interface, e  $u_{0c}(x)$  e  $u_{0s}(x)$  são, respectivamente, os deslocamentos axiais na laje de concreto e no perfil de aço em seus eixos de referências indicados pelo subscrito 0. Dependente do campo de deslocamentos, é definido o campo de deformações da viga mista  $e(x) = (\chi(x) \quad \varepsilon_{0c}(x) \quad \varepsilon_{0s}(x))^T$ , e o seu correspondente campo de força  $s(x) = (M(x) \quad N_c(x) \quad N_s(x))^T$  onde  $M(x)$ ,  $N_c(x)$  e  $N_s(x)$  são definidos na figura 2.5.

Através do equilíbrio das forças horizontais e verticais, e dos momentos do elemento infinitesimal da figura 2.5, chega-se à equação diferencial abaixo que governa o problema de vigas mistas com deslizamento na interface.

$$\partial^T s(x) - \partial_b^T s_b(x) - p(x) = 0 \quad (2.19)$$

Na equação 2.19,  $\partial$  e  $\partial_b$  são operadores diferenciais definidos abaixo,  $s_b(x)$  é o vetor de força generalizado na interface e  $p(x)$  é o vetor de força devido ao carregamento externo e ao peso próprio .

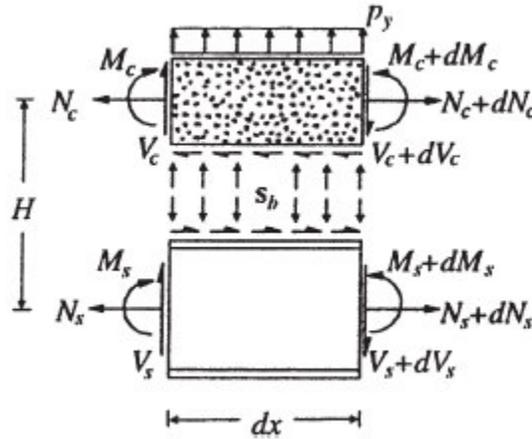


Figura 2.5 Viga mista com interação parcial – forças sobre um elemento infinitesimal (Salari e Spacone, 2001).

$$\partial = \begin{bmatrix} \frac{d^2}{dx^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{d}{dx} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{d}{dx} \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

$$\partial_b = \begin{bmatrix} H \frac{d}{dx} & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

Para pequenos deslocamentos tem-se as equações de compatibilidades  $e(x) = \partial u(x)$  e  $e_b(x) = \partial_b u(x)$ , onde  $e_b(x)$  representa o deslizamento no vínculo de interface ou o seu deslocamento relativo.

As equações diferenciais acima são utilizadas por Salari e Spacone (2001) para a dedução das duas formulações de elemento finito citadas.

Dois exemplos são analisados e usados para comparação entre os métodos apresentados no artigo. Os autores destacam um menor número de graus de liberdade a nível global da estrutura na utilização do método baseado em força, no entanto citam que para evitar problemas comuns neste método deve-se utilizar um procedimento especial de recuperação de forças.

Faella et al. (2002) propõem uma solução exata para o comportamento de vigas mistas com conexão flexível na interface. Em sua formulação, deduziram-se as expressões para a matriz de rigidez para um elemento de viga mista simplesmente apoiada com carregamento uniformemente distribuído ao longo do elemento e cargas concentradas nos seus extremos, como mostra a figura 2.6.

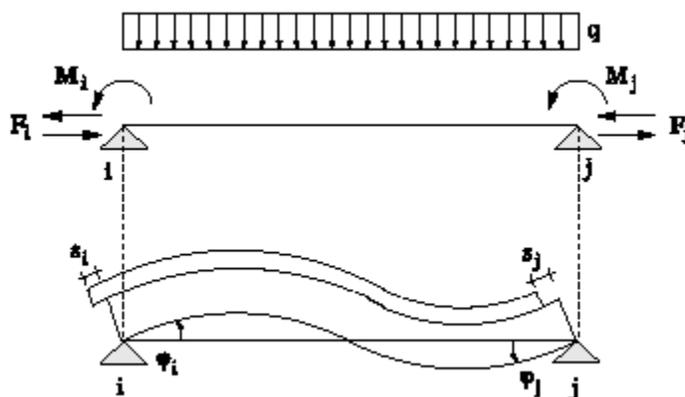


Figura 2.6 Deslocamentos e forças nodais de uma viga mista simplesmente apoiada com interação parcial (Faella et al., 2002).

Usando a equação diferencial de Newmark (1951), definida no item 2.2.1 deste capítulo, e atribuindo valores unitários aos carregamentos nodais do elemento, os autores encontram uma solução exata para o problema da figura 2.6, determinando uma matriz de rigidez para o elemento que relaciona seus deslocamentos nodais  $(\varphi_i, s_i, \varphi_j, s_j)$  às correspondentes forças nodais  $(M_i, F_i, M_j, F_j)$ .

A solução exata do problema da figura 2.6 tem a forma da equação 2.22, onde  $\chi(z)$  representa a curvatura da viga mista na seção de coordenada  $z$ .

$$\chi(z) = \chi_0(z) + \chi_1(z) \quad (2.22)$$

Na equação 2.22,  $\chi_0(z)$  é a solução da equação homogênea e, segundo autor, tem a forma da equação 2.23 onde,  $C_1$  e  $C_2$  são constantes que podem ser determinadas impondo as condições de contorno ao elemento. Já  $\chi_1(z)$  é uma solução particular do problema da figura 2.6 que depende do carregamento  $q$ , da deformação devido a retração do concreto e da equação do momento atuante ao longo do elemento.

$$\chi_0(z) = C_1 \sinh(\alpha z) + C_2 \cosh(\alpha z) \quad (2.23)$$

Tal método tem como principal vantagem apresentar uma solução exata do problema segundo a equação diferencial de Newmark, diferente dos métodos de elementos finitos onde a solução da equação diferencial é aproximada. No entanto, como os elementos vão de apoio a apoio da viga, tem-se que as propriedades geométricas da seção transversal da viga devem ser constantes em todo vão, não podendo também existir graus de liberdade no interior de um vão. O método também é limitado ao tipo de carregamento utilizado na definição da matriz de rigidez do elemento, a menos que se deduzam outras matrizes de rigidez para diferentes tipos de carregamentos.

Dall'Asta e Zona (2004) propõem, para solução de problemas de viga mista com interação parcial na interface, um elemento misto que tem como característica possuir aproximações independentes para os campos de deslocamento, deformação e tensão.

Inicialmente os autores apresentam uma solução usando o método dos elementos finitos com elemento baseado em deslocamentos, apresentando uma formulação muito semelhante àquela apresentada por Salari e Spacone (2001). Em seguida é apresentada a formulação para o elemento misto, e através da solução numérica de um exemplo os autores comparam os elementos propostos.

A figura 2.7 ilustra três diferentes elementos implementados sob a formulação do método baseado no deslocamento. As funções de interpolação utilizadas para o campo de deslocamento nodal são compatíveis com os graus de liberdade apresentados na figura 2.7

para cada elemento implementado. Por exemplo, para o elemento PE112 da figura são utilizados polinômios de grau dois para os deslocamentos axiais da laje de concreto e da viga de aço, e polinômio de grau três para os deslocamentos verticais e rotações da viga mista.

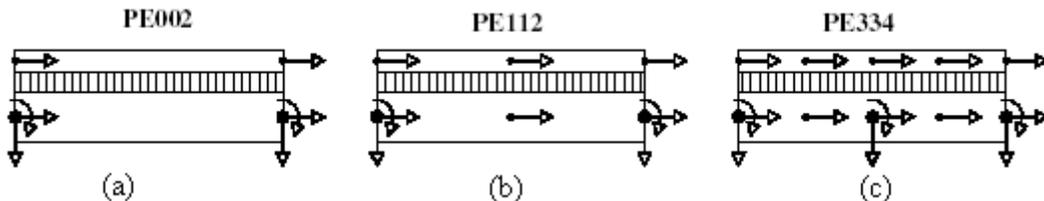


Figura 2.7 Campo de deslocamento para os elementos de 8 graus de liberdade (a), 10 graus de liberdade (b) e 16 graus de liberdade (c) (Dall'Asta e Zona, 2004).

A figura 2.8 ilustra os elementos mistos implementados, que têm como funções de interpolação polinômios de grau dois para os deslocamentos axiais, e grau três para deslocamentos verticais e rotações. Já para o campo de deformação são assumidos polinômios lineares para as deformações axiais e curvatura, e polinômio de grau dois para o deslizamento na interface. Por último, assume-se para o campo de tensão polinômios lineares para as forças axiais e para o momento fletor, e polinômio de grau dois para a força cortante na interface.

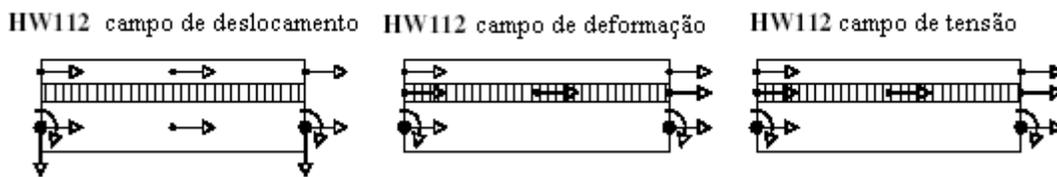


Figura 2.8 Elemento misto (Dall'Asta e Zona, 2004)

Segundo os autores, o método baseado em deslocamentos é bastante utilizado na solução de problemas de vigas mistas com interação parcial devido a sua formulação simples. No entanto, este método pode apresentar, em alguns casos, problemas de convergência para valores altos de rigidez da conexão cortante na interface. Os autores também citam, em relação a este método, uma exigência de um número elevado de elementos para convergência da solução quando a conexão na interface é considerada livre.

Em relação ao elemento misto (HW112) implementado, os autores citam um comportamento suave na representação das forças axiais e momentos desenvolvidos ao longo da viga mista analisada. Já na representação da força cortante, aparecem descontinuidades ao longo da interface. Os autores também relatam, em relação ao elemento misto, problemas de convergência em alguns casos na solução de problemas iterativos.

Liang et al (2004) desenvolveram uma análise baseada no método dos elementos finitos para solução de problemas de viga mista, considerando uma resistência cortante vertical na interface que aparece através da laje de concreto sobre o efeito da ação mista.

Um modelo de elementos finitos tri-dimensional foi proposto para simular o comportamento não linear dos materiais da viga mista contínua analisada. O modelo de elementos finitos é verificado através de resultados experimentais, e então utilizado para estudar os efeitos da laje de concreto e da conexão cortante na interface sobre a resistência cortante vertical.

Os autores afirmam, com base em resultados numéricos e experimentais, que a desconsideração desta resistência induz a resultados conservadores na análise.

Nie et al. (2004) desenvolveram um modelo mecânico baseado na teoria da elasticidade para investigar a rigidez de viga mista nas regiões de momento negativo, considerando, além do deslizamento na interface aço-concreto da viga mista, um deslizamento na interface das barras de reforço da laje de concreto.

Em sua formulação são tomadas algumas considerações como: a força cortante na interface é proporcional ao deslizamento; a rigidez da conexão na interface é uniforme e contínua ao longo do comprimento da viga mista; a laje de concreto e a viga de aço tem deslocamentos verticais e rotações iguais para uma mesma seção; as barras de reforço não fornecem resistência cortante vertical e a capacidade de tração do concreto é desprezada; o comportamento do material do perfil de aço e das barras de reforço é elástico linear.

O modelo teórico desenvolvido é baseado nas considerações citadas no parágrafo anterior e nas condições de equilíbrio do elemento infinitesimal representativo, no qual o elemento de concreto tem apenas a função de transferir a força cortante entre a viga de aço

e a barra de reforço da laje de concreto, não contribuindo assim para o cálculo do momento resistente.

### **2.3.2 Soluções usando elemento de interface**

Os elementos de interface têm por finalidade prever e permitir o deslizamento e separação entre dois corpos em contato, ou separados por uma fina capa de material. Tais elementos, aplicados dentro do método dos elementos finitos, tem sido enormemente utilizados na solução de problemas que simulam propagação de trincas, modelo de juntas e contato.

Carol et al (2001), em uma análise numérica para determinar a curva tensão deformação do concreto, utilizam o elemento de interface para simular abertura de trincas na malha de elementos finitos analisada.

Kaliakin e Li (1995) utilizam o elemento de interface para simular a interação no contato entre uma sapata de fundação e o solo.

O elemento de interface utilizado para simular o deslizamento na interface de uma viga mista implementado no capítulo 4 é baseado no elemento clássico proposto por Goodman et al (1968), com a necessidade de utilizar para os deslocamentos relativos verticais do elemento uma função de interpolação cúbica em vez de linear como no caso do elemento proposto por Goodman. Devido a isso, a seguir é feita uma apresentação da formulação do elemento de interface proposto por Goodman.

#### **2.3.2.1 Elemento de interface proposto por Goodman**

O elemento de interface proposto por Goodman et al (1968), conhecido como GTB, foi o primeiro elemento desenvolvido com a finalidade de representar o comportamento na interface entre materiais, a surgir na literatura, e serve ainda hoje como base para implementação de outros elementos de interface, como os elementos propostos por Herrmann (1978) e Coutinho et al (2003). Este último tem como característica não apresentar inconsistência cinemática quando o elemento é submetido a uma condição específica de impedimentos de seus graus de liberdade.

O elemento GTB possui quatro nós, oito graus de liberdade de deslocamento, comprimento  $l$  e espessura  $h$  conforme mostrado na figura 2.9.

Os deslocamentos na face superior e inferior do elemento, equações 2.24 a 2.27, são definidos através de interpolações independentes.

$$u_{\text{inf}} = N_1 u_1 + N_2 u_2 \quad (2.24)$$

$$v_{\text{inf}} = N_1 v_1 + N_2 v_2 \quad (2.25)$$

$$u_{\text{sup}} = N_1 u_4 + N_2 u_3 \quad (2.26)$$

$$v_{\text{sup}} = N_1 v_4 + N_2 v_3 \quad (2.27)$$

Nas equações 2.24 a 2.27,  $N_1$  e  $N_2$  são funções de interpolações lineares dadas pelas equações 2.28 e 2.29,  $u_i$  e  $v_i$  são os deslocamentos nodais representados na figura 2.9.

$$N_1 = \frac{1}{2} - \frac{x}{l} \quad (2.28)$$

$$N_2 = \frac{1}{2} + \frac{x}{l} \quad (2.29)$$

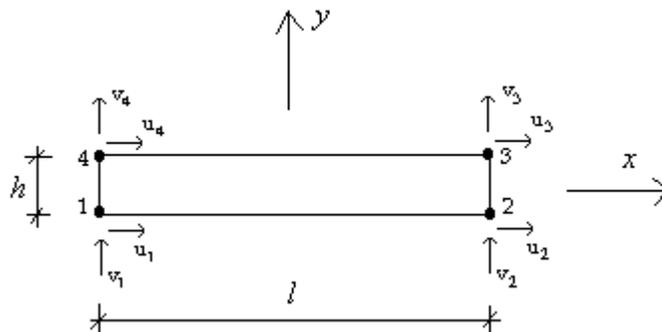


Figura 2.9 Elemento de interface proposto por Goodman et al (1968)

As deformações são consideradas constantes dentro da espessura, e são determinadas através dos deslocamentos relativos superior e inferior do elemento como mostrado abaixo:

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = \begin{Bmatrix} \gamma_{yx} \\ \varepsilon_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{u_{\text{sup}} - u_{\text{inf}}}{h} \\ \frac{v_{\text{sup}} - v_{\text{inf}}}{h} \end{Bmatrix} \quad (2.30)$$

A equação 2.31 define as tensões no elemento de interface, nela  $[D]$  é a matriz constitutiva elástica do material definida na equação 2.32, onde  $d_{11}$  e  $d_{22}$  são, respectivamente, a rigidez tangencial e normal do elemento de interface.

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = \begin{Bmatrix} \tau_{yx} \\ \sigma_y \end{Bmatrix} = [D]\{\boldsymbol{\varepsilon}\} \quad (2.31)$$

$$[D] = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 \\ 0 & d_{22} \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

A seguir é apresentada a equação que relaciona o vetor de deformação do elemento de interface com o vetor dos deslocamentos  $\{d\}$  apresentado na equação 2.34. A matriz  $[B]$  da equação pode ser deduzida a partir das equações 2.24 a 2.27 e da equação 2.33.

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = [B]\{d\} \quad (2.33)$$

$$\{d\}^T = [u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad u_3 \quad v_3 \quad u_4 \quad v_4] \quad (2.34)$$

$$[B] = \frac{1}{h}[B^*] = \frac{1}{h}[-N_1[I] \quad -N_2[I] \quad N_2[I] \quad N_1[I]] \quad (2.35)$$

Na equação 2.35,  $[I]$  é a matriz identidade de ordem dois.

A matriz de rigidez do elemento de interface, equação 2.36, é obtida através da energia de deformação do elemento de interface desenvolvida abaixo:

$$\begin{aligned}
 U &= \frac{1}{2} \int_V \{\boldsymbol{\varepsilon}\}^T \{\boldsymbol{\sigma}\} dV \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-l/2}^{l/2} \int_0^h \int_0^1 \{\boldsymbol{\varepsilon}\}^T [D] \{\boldsymbol{\varepsilon}\} dz dy dx \\
 &= \frac{1}{2} \{d\}^T \int_{-l/2}^{l/2} \int_0^h [B]^T [D] [B] dy dx \{d\} \\
 &= \frac{1}{2} \{d\}^T \int_{-l/2}^{l/2} [B^*]^T [DI] [B^*] dx \{d\}
 \end{aligned} \tag{2.36}$$

Desenvolvendo a equação 2.36 a matriz de rigidez do elemento de interface fica como apresentada abaixo, onde [DI] é dado na equação 2.38.

$$[K_{GTB}] = \frac{l}{6} \begin{bmatrix} 2[DI] & [DI] & -[DI] & -2[DI] \\ [DI] & 2[DI] & -2[DI] & -[DI] \\ -[DI] & -2[DI] & 2[DI] & [DI] \\ -2[DI] & -[DI] & [DI] & 2[DI] \end{bmatrix} \tag{2.37}$$

$$[DI] = \frac{1}{h^2} \int_0^h [D] dy = \frac{1}{h} [D] \tag{2.38}$$

Na equação anterior pode-se ver que a medida que  $h$  tende a um valor muito pequeno [DI] tende a um valor muito grande. No caso de elemento de interface de espessura nula ( $h = 0$ ) deve-se assumir para [DI] os maiores valores possíveis, desde que não causem erros computacionais.

A matriz de rigidez do elemento de interface dada pela equação 2.37, é definida no sistema de referência local de coordenadas  $x$ - $y$  do elemento de interface, caso este sistema forme um ângulo  $\theta$  com o sistema de referência global de coordenadas  $x'$ - $y'$ , a matriz de rigidez no sistema de referência global deve ser determinada através da pré-multiplicação da matriz de rigidez no sistema de referência local pela transposta da matriz de rotação, e da pós-multiplicação pela matriz de rotação, definida na equação 2.40.

$$[K'_{GTB}] = [R^*]^T [K_{GTB}] [R^*] \quad (2.39)$$

$$[R^*] = \begin{bmatrix} [R] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [R] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [R] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [R] \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

Em 2.40  $[R]$  é a matriz de rotação bi-dimensional, dada abaixo:

$$[R] = \begin{bmatrix} \cos \theta & \text{sen } \theta \\ -\text{sen } \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

# ANÁLISE DOS ESFORÇOS EM SEÇÕES MISTAS

## 3.1 INTRODUÇÃO

O aumento na utilização de estruturas metálicas e conseqüentemente aumento no uso de elementos de vigas mistas fazem surgir formas de seções mistas transversais que aumentam a relação vão versus altura da viga, possibilitando grandes vãos livres, sempre interessantes em galpões industriais e pontes. A solução de treliça mista para esses tipos de vãos também aumenta o leque de possibilidade para formas variadas de seções. Tais seções podem não ter, para os cálculos dos esforços resistentes, métodos simplificados por normas, as quais geralmente se atêm às formas mais utilizadas na prática.

A obtenção de esforços resistentes em seções de elementos de vigas de concreto armado é feita, segundo a NBR-6118 (2003), a partir de uma análise elasto-plástica. Já para seções de aço, a NBR-8800 (1986) considera, em geral, uma análise rígido plástica da seção para a obtenção dos esforços resistentes. No caso de seções mistas, o projeto de revisão da NBR-8800 (2005) permite uma análise rígido plástica para os casos em que a relação entre duas vezes a altura da parte comprimida da alma e a sua espessura, for inferior a um limite estipulado. Nos casos contrários, a análise para obtenção dos esforços resistentes é elástica. Ainda para seção mista, normas como a ACI-318 (1999) utilizam análise elasto-plástica na obtenção dos esforços resistentes.

São dois os principais métodos para a obtenção dos esforços resistentes em uma seção qualquer. O primeiro deles é o método de fibras, ou faixas, onde a seção analisada é discretizada em várias faixas ou fibras, determinando, através da deformada da seção, uma deformação para cada faixa. Conhecida a relação tensão-deformação do material, determina-se uma força axial atuante nestas faixas que serão utilizadas na integração dos esforços resistentes. O segundo método utiliza integração analítica para a obtenção dos esforços resistentes na seção. Sendo a seção representada por um polígono fechado, é usado o teorema de Green para transformar a integral de área em uma integral de contorno, e então de forma analítica obter os esforços resistentes a partir da equação da configuração deformada da seção.

O objetivo destes métodos de avaliação é determinar, para uma dada condição de deformação da seção, não apenas os seus esforços resistentes, mas também suas rigidezes generalizadas, ou seja, as derivadas destes esforços em relação às variáveis de deformação, necessárias nas formulações por elementos finitos.

Um modelo baseado em uma série de faixas discretas ao longo da altura da seção analisada foi empregado por Uy (2001) e Lakshmi e Shnmugam (2002) para a obtenção dos esforços resistentes na seção. No modelo, a deformação é obtida em cada faixa em função da deformada da seção, e as relações tensão-deformação dos respectivos materiais são adotadas para a obtenção da força axial na faixa em questão. Estas forças são utilizadas na determinação do equilíbrio da seção e conseqüente determinação dos esforços resistentes.

Em Chen *et al.* (2001), são apresentadas expressões para a integração das tensões no concreto, utilizando para as tensões resultantes no aço um modelo de fibras (Mirza e Skrabek, 1991). Rodriguez e Aristizabal-Ochoa (1999) apresentaram expressões para obtenção dos esforços no concreto, utilizando o método de integração de Gauss, no qual a seção deve ser aproximada por trechos retilíneos. Um modelo de fibras que emprega computação gráfica para a integração das tensões sobre a seção foi desenvolvido por Sfakianakis (2002).

Werner (1974) sugeriu o uso do teorema de Green para obtenção de esforços em seções genéricas de concreto armado. Seu trabalho serviu de base para trabalhos posteriores usando este método, como Ferreira (1986) e Melo (2000).

O problema de viga mista com interação total pode ser considerado como um caso particular de pilar misto. Já para o caso de interação parcial, o deslizamento na interface do elemento torna a sua análise bem característica. No entanto, para a obtenção dos esforços resistentes, ao se considerar a seção da viga mista dividida em uma seção acima da interface de deslizamento e outra abaixo, tem-se a equação da deformação contínua para cada seção, e novamente um procedimento para pilar misto pode ser utilizado na obtenção dos esforços resistentes. Devido a isto, grande parte do exposto neste capítulo se baseia nos trabalhos anteriores de Caldas (2004) e Muniz (2005) onde é feita uma análise numérica de pilares mistos com seções genéricas.

Neste capítulo, deduz-se a forma de obtenção de esforços e rigidezes generalizadas em seções de vigas mistas genéricas a partir de uma aplicação do Teorema de Green. O método escolhido apresenta a vantagem de fornecer a resposta exata para a determinação dos esforços resistentes, porém a seção deve ser representada por um polígono fechado. Na obtenção destes esforços, é necessária a definição da equação de deformação na seção da viga mista analisada, considerando, para o caso de interação parcial da viga mista, um deslizamento na interface aço-concreto da seção mista. Também se faz necessário o conhecimento da relação tensão-deformação dos materiais que constituem a seção mista.

Por se tratar de flexão reta algumas simplificações podem ser assumidas. No caso da seção ser simétrica em relação ao eixo vertical podem-se avaliar as integrais em determinados segmentos apenas uma vez de cada lado da seção, para obter os esforços resistentes e rigidezes.

Na determinação dos esforços resistentes e rigidezes em problemas de vigas mistas com interação parcial a seção transversal será dividida em duas, definidas acima e abaixo da interface de deslizamento.

### **3.2 GEOMETRIA DA SEÇÃO TRANSVERSAL**

A metodologia utilizada para o cálculo dos esforços resistentes permite a cada seção individual dividir-se em um número qualquer de materiais distintos, barras de reforço e aberturas. Cada material é definido por uma poligonal fechada, as barras de reforço são definidas pontualmente, e aberturas são consideradas quando, na definição da poligonal do

material que a contém, é deixado um espaço vazio em seu interior. As poligonais fechadas dos materiais que constituem a seção mista, mais as barras de reforço, devem se encaixar formando a seção desejada. Nos casos particulares teremos o concreto armado, quando a seção for constituída por apenas um polígono fechado representativo do material concreto e barras de reforço, e a viga de aço, quando a seção for constituída por apenas um polígono representativo do material aço.

As coordenadas dos vértices das poligonais devem ser referenciadas em um sistema de coordenadas  $xy$  qualquer. A figura 3.1 ilustra um exemplo fictício de seção mista. Pode-se observar através da figura que a ordem de seqüência dos vértices na definição da poligonal do material é anti-horária. Tal ordem irá influenciar no cálculo dos esforços, uma vez que pelo teorema de Green a integral em um polígono fechado percorrido em sentido anti-horário fornece o valor da positivo; já no sentido horário, este valor será fornecido negativo.

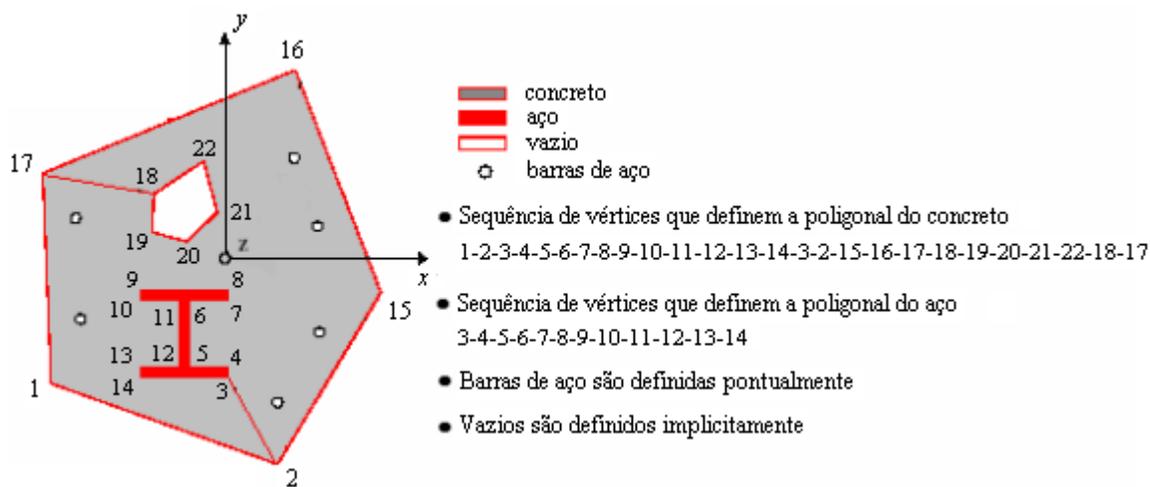


Figura 3.1 Definição da seção mista

### 3.3 DEFORMADA DA SEÇÃO CONSIDERANDO O DESLIZAMENTO

Como mencionado em capítulos anteriores, uma viga mista submetida a esforços de flexão produz uma força cortante longitudinal na interface que liga a laje de concreto ao perfil de aço. Se a força de atrito produzida entre as faces destes materiais, mais a força desenvolvida ao longo da interface devido a uma ligação química entre os materiais, forem

suficientes para suportar tal força cortante, então a deformada na seção será contínua e a viga mista pode ser tratada como uma viga comum de dois materiais. No caso em que essas forças resistivas longitudinais não são suficientes para suportar a força cortante longitudinal atuante, os conectores de ligação da viga mista serão acionados e irão deformar-se produzindo uma descontinuidade na deformada da seção mista, como mostra a figura 3.2.

Considerando a hipótese de que seções planas permanecem planas após as deformações e a aproximação de pequenas rotações tem-se para a deformada da seção de viga mista a expressão abaixo:

$$\varepsilon_{\alpha}(x, y) = \varepsilon_{\alpha}(x) + (y - y_{\alpha})\chi(x) \quad (3.1)$$

Na equação 3.1,  $\chi(x)$  é a curvatura da seção analisada de coordenada  $x$ , e  $\varepsilon_{\alpha}(x)$  é deformação axial nos eixos de referência das seções analisada acima e abaixo da interface de deslizamento da viga mista, como mostrado na figura 3.2.

As linhas paralelas da deformada da seção, apresentadas na figura 3.2, indicam que a curvatura é a mesma para ambas as seções acima e abaixo da interface de deslizamento, o que é verificado quando a interação na direção vertical da interface for total, ou seja, não é possível a separação na interface nesta direção. Assim sendo, essa condição é então adotada como hipótese na formulação da equação 3.1, que é também apresentada no capítulo 4 de forma mais detalhada.

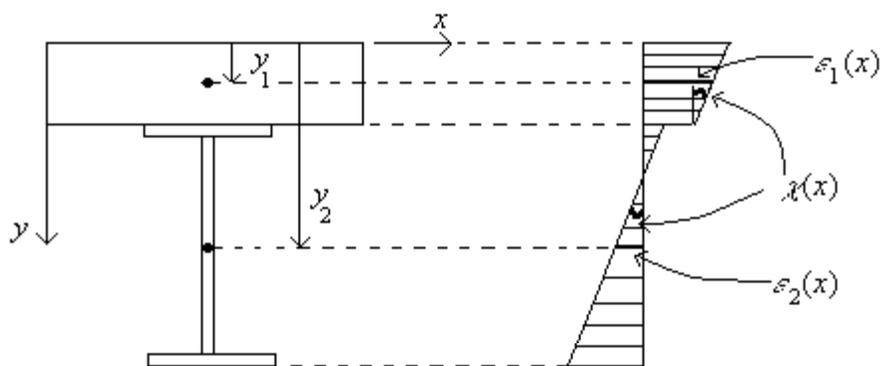


Figura 3.2 Deformada da seção de viga mista com interação parcial.

### 3.4 MATERIAIS

Definem-se os materiais através de suas relações tensão-deformação. Por exemplo, o concreto pode ser definido segundo o Código Modelo CEB (CEB, 1990) por meio de um diagrama tensão-deformação simplificado, representado por uma parábola e uma reta horizontal quando comprimido e pelo eixo nulo quando tracionado, como é mostrado na figura 3.3, onde  $f_c$  é a resistência média a compressão do concreto.

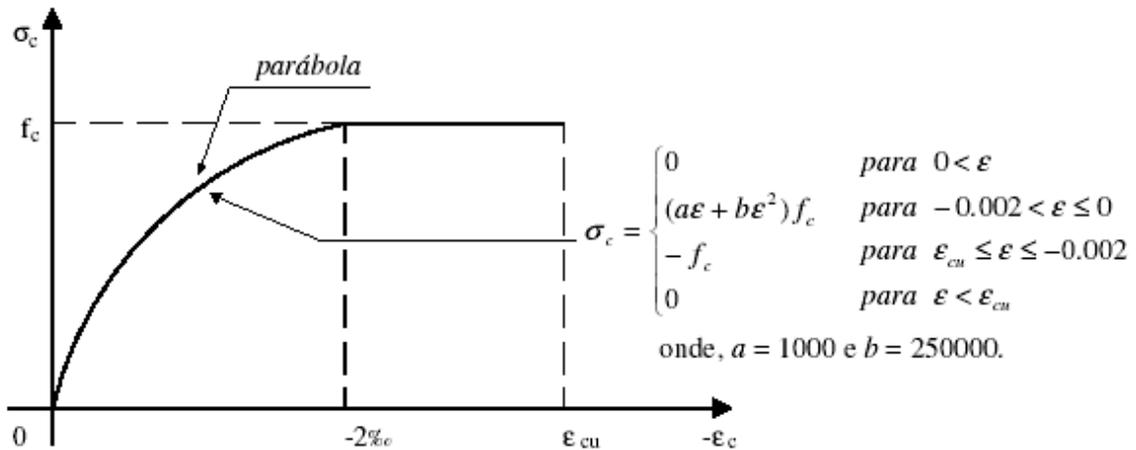


Figura 3.3 Diagrama tensão deformação do concreto (CEB, 1990).

Será utilizado na definição das relações tensão deformação dos materiais um modelo já implementado em trabalhos anteriores (Caldas, 2004, Muniz, 2005), que tem como principal característica a liberdade do usuário de definir as relações tensão deformação dos materiais, desde que sejam descritas por polinômios.

A figura 3.4 representa um modelo teórico de uma curva tensão-deformação. A curva pode ser dividida em um número qualquer de faixas, representadas na figura pelos  $F_i$ . Cada faixa terá definidos os coeficientes que caracterizarão a curva polinomial a ser considerada, bem como suas deformações limites à esquerda e à direita, representadas na figura 3.4 pelos  $L_i$ .

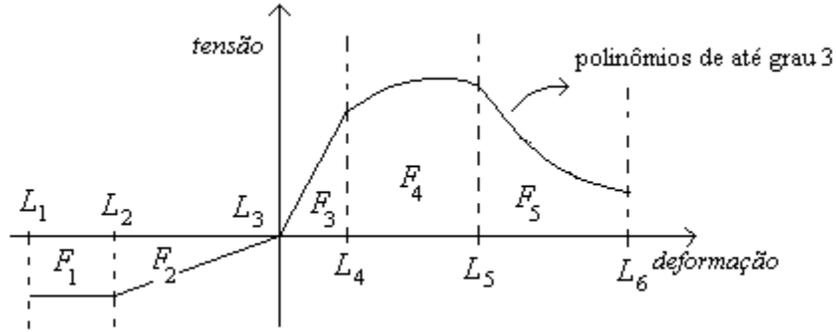


Figura 3.4 Relação tensão deformação ilustrativa de um material

Para os casos de interação parcial a relação força cortante por unidade de comprimento versus deslizamento na interface deve ser fornecida de forma análoga à descrita acima. As mudanças para estes casos seriam as trocas, da tensão no eixo vertical da figura 3.4 pela força cortante por unidade de comprimento, e a deformação no eixo horizontal da mesma figura pelo deslizamento na interface. Apesar de ter sido admitido o mesmo procedimento para a definição das curvas tensão-deformação dos materiais e para força-deslizamento na interface, esta última poderia ter sido definida através de uma função contínua e diferenciável qualquer, uma vez que não há necessidade de integração desta relação. Ela somente é avaliada em pontos de integração discretos.

### 3.5 OBTENÇÃO DOS ESFORÇOS RESISTENTES NA SEÇÃO MISTA

Os esforços seccionais resistentes são obtidos por integração das tensões definidas para valores das variáveis de deformação e da área de armadura individual  $A_{si}$ . Estes esforços, para os casos de vigas mistas com interação parcial, são as forças normais aplicadas nos eixos de referência das seções acima e abaixo da interface de deslizamento, e os momentos em torno destes eixos, como definidos a seguir em 3.2 e 3.3. Também deve-se considerar para as vigas mistas com interação parcial o esforço cortante resistente que surge na interface de deslizamento, definido no final deste item.

$$N_{\alpha} = \iint_{A_{\alpha}} \sigma_{\alpha} dA_{\alpha} \quad (3.2)$$

$$M_{\alpha} = \iint_{A_{\alpha}} \sigma_{\alpha} (y - y_{\alpha}) dA_{\alpha} \quad (3.3)$$

Nas equações acima o índice  $\alpha$  representa as seções acima e abaixo da interface de deslizamento da seção mista. O momento resistente da seção mista é dado pela soma dos momentos da equação 3.3.

As seções mais comuns de viga mista são formadas por uma laje de concreto, reforçada ou não com barras de aço, e um perfil metálico como mostrado na figura 2.1 do capítulo 2 deste trabalho. Porém a formulação usada na obtenção dos esforços resistentes considera a seção mista como união de duas seções poligonais quaisquer, como descrito no item 3.2. Para este caso geral a integral na área deve-se subdividir em várias parcelas, as quais representarão as integrais nos diferentes materiais e nas barras de reforço. De acordo com esta seção mista genérica reescrevem-se as equações dos esforços resistentes.

$$\iint_{A_{\alpha}} \sigma_{\alpha} dA = \underbrace{\iint_{A_c} \sigma_c dA}_{\text{concreto}} + \underbrace{\iint_{A_p} \sigma_p dA}_{\text{aço}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n_s} A_{si} \sigma_{si}}_{\text{armaduras}} \quad (3.4)$$

$$\iint_{A_{\alpha}} \sigma_{\alpha} (y - y_{\alpha}) dA = \underbrace{\iint_{A_c} \sigma_c (y - y_{\alpha}) dA}_{\text{concreto}} + \underbrace{\iint_{A_p} \sigma_p (y - y_{\alpha}) dA}_{\text{aço}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n_s} A_{si} \sigma_{si} (y_{si} - y_{\alpha})}_{\text{armaduras}} \quad (3.5)$$

A obtenção do esforço normal resistente ( $S_b$ ) na interface de deslizamento é feita de forma direta usando a relação força cortante versus deslizamento do vínculo de ligação, definida como no item 3.4. Uma vez determinada o deslizamento na interface o esforço cortante resistente na interface é obtido.

### 3.6 INTEGRAÇÃO

As integrais dos esforços resistentes definidas no item anterior são resolvidas após uma transformação das integrais de superfície em integrais de contorno através de uma

aplicação do Teorema de Green, como feito em trabalhos anteriores por Caldas (2004) e Muniz (2005).

Pela aplicação do Teorema de Green, a expressão de um termo genérico de um polinômio transformado para uma integral de contorno num polígono fechado é dada por:

$$\iint_A \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint (P dx + Q dy) = \sum_{i=1}^{nseg} \underbrace{\left( \oint_{P_{i-1} P_i} (P dx + Q dy) \right)}_{\text{segmentos}} \quad (3.6)$$

O teorema dado pela equação 3.6 permite a obtenção de forma analítica de qualquer integral polinomial em domínio plano fechado, desde que descrito por segmentos retos.

A expressão 3.7 abaixo representa uma forma geral das integrais necessárias para o cálculo dos esforços resistentes, onde  $a$  e  $b$  são valores inteiros.

$$I_{ab} = \iint_A x^a y^b dx dy \quad (3.7)$$

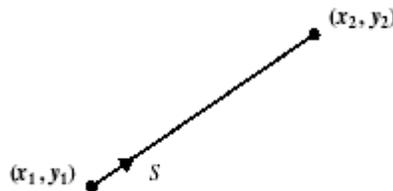


Figura 3.5 Parametrização do segmento

Utilizando as equações 3.8 e 3.9 de parametrização de um segmento qualquer ilustrado na figura 3.5, e utilizando o teorema da equação 3.6, pode-se determinar tomando valores inteiros para  $a$  e  $b$  os diferentes resultados da expressão 3.7 necessários para o cálculo das integrais dos esforços resistentes.

$$x = x_1 + S(x_2 - x_1) \quad (3.8)$$

$$y = y_1 + S(y_2 - y_1) \quad (3.9)$$

Nas equações de parametrização anteriores  $S$  define um eixo sobre o segmento de análise e varia de 0, quando sobre ponto inicial, a 1, quando no ponto final do segmento.

Observando o exposto acima, e tomando  $a = 0$  e  $b = 0$  tem-se, para um segmento de coordenadas limites  $(x_1, y_1)$  e  $(x_2, y_2)$  de uma poligonal, a expressão dada abaixo:

$$I_{00} = \iint_A x^0 y^0 dx dy = \oint x dy = \int_0^1 [x_1 + S(x_2 - x_1)](y_2 - y_1) dS = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)\Delta_y \quad (3.10)$$

Para as mesmas condições acima e tomando  $a = 1$  e  $b = 0$ , tem-se:

$$\begin{aligned} I_{10} &= \iint_A x^1 y^0 dx dy = \oint \frac{x^2}{2} dy = \int_0^1 \frac{[x_1 + S(x_2 - x_1)]^2}{2} (y_2 - y_1) dS \\ &= \Delta_y \left( \frac{x_1^2}{2} + \frac{x_1 \Delta x}{2} + \frac{\Delta x^2}{6} \right) \end{aligned} \quad (3.11)$$

Seguindo o mesmo raciocínio usado nas expressões 3.10 e 3.11 determinam-se todas as integrais necessárias ao cálculo dos esforços resistentes e rigidezes seccionais.

$$\begin{aligned} I_{01} &= \iint_A x^0 y^1 dx dy = \oint xy dy = \int_0^1 [x_1 + S(x_2 - x_1)][y_1 + S(y_2 - y_1)](y_2 - y_1) dS \\ &= \Delta_y \left( x_1 y_1 + \frac{y_1 \Delta x + x_1 \Delta y}{2} + \frac{\Delta x \Delta y}{3} \right) \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} I_{11} &= \iint_A x^1 y^1 dx dy = \oint \frac{x^2}{2} y dy = \int_0^1 \frac{[x_1 + S(x_2 - x_1)]^2}{2} [y_1 + S(y_2 - y_1)](y_2 - y_1) dS \\ &= \frac{\Delta_y}{2} \left( x_1^2 y_1 + \frac{x_1^2 \Delta y + 2x_1 y_1 \Delta x}{2} + \frac{2x_1 \Delta x \Delta y + \Delta x^2 y_1}{3} + \frac{\Delta x^2 \Delta y}{4} \right) \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$I_{20} = \iint_A x^2 y^0 dx dy = \oint \frac{x^3}{3} dx = \int_0^1 \frac{[x_1 + S(x_2 - x_1)]^3}{3} (y_2 - y_1) dS$$

$$= \frac{\Delta_y}{3} \left( x_1^3 + \frac{3x_1^2 \Delta x}{2} + x_1 \Delta x^2 + \frac{\Delta x^3}{4} \right) \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} I_{02} &= \iint_A x^0 y^2 dx dy = \oint xy^2 dy = \int_0^1 [x_1 + S(x_2 - x_1)][y_1 + S(y_2 - y_1)]^2 (y_2 - y_1) dS \\ &= \Delta y \left( x_1 y_1^2 + x_1 y_1 \Delta y + \frac{x_1 \Delta y^2}{3} + \frac{y_1^2 \Delta x}{2} + \frac{2y_1 \Delta x \Delta y}{3} + \frac{\Delta x \Delta y^2}{4} \right) \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} I_{12} &= \iint_A x^1 y^2 dx dy = \oint \frac{x^2}{2} y^2 dy = \int_0^1 \frac{[x_1 + S(x_2 - x_1)]^2}{2} [y_1 + S(y_2 - y_1)]^2 (y_2 - y_1) dS \\ &= \frac{\Delta_y}{2} \left( x_1^2 y_1^2 + x_1^2 y_1 \Delta y + \frac{x_1^2 \Delta y^2}{3} + x_1 \Delta x y_1^2 + \frac{4x_1 y_1 \Delta x \Delta y}{3} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{x_1 \Delta x \Delta y^2}{2} + \frac{\Delta x^2 y_1^2}{2} + \frac{\Delta x^2 y_1 \Delta y}{3} + \frac{\Delta x^2 \Delta y^2}{5} \right) \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} I_{21} &= \iint_A x^2 y^1 dx dy = \oint \frac{x^3}{3} y dy = \int_0^1 \frac{[x_1 + S(x_2 - x_1)]^3}{3} [y_1 + S(y_2 - y_1)] (y_2 - y_1) dS \\ &= \frac{\Delta_y}{3} \left( x_1^3 y_1 + \frac{3x_1^2 y_1 \Delta x}{2} + \frac{y_1 \Delta x^3}{4} + x_1 \Delta x^2 y_1 + \frac{x_1^3 \Delta y}{2} + \right. \\ &\quad \left. + x_1^2 \Delta x \Delta y + \frac{3x_1 \Delta x^2 \Delta y}{4} + \frac{\Delta x^3 \Delta y}{5} \right) \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} I_{03} &= \iint_A x^0 y^3 dx dy = \oint xy^3 dy = \int_0^1 [x_1 + S(x_2 - x_1)][y_1 + S(y_2 - y_1)]^3 (y_2 - y_1) dS \\ &= \frac{\Delta_y}{4} \left( x_1^4 + 2x_1^3 \Delta x + 2x_1^2 \Delta x^2 + x_1 \Delta x^3 + \frac{\Delta x^4}{5} \right) \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$I_{30} = \iint_A x^3 y^0 dx dy = \oint \frac{x^4}{4} dy = \int_0^1 \frac{[x_1 + S(x_2 - x_1)]^4}{4} (y_2 - y_1) dS$$

$$= \Delta_y \left( x_1 y_1^3 + \frac{3x_1 y_1^2 \Delta_y}{2} + \frac{y_1^3 \Delta x}{2} + x_1 \Delta y^2 y_1 + \frac{x_1 \Delta y^3}{4} + y_1^2 \Delta x \Delta y + \frac{3y_1 \Delta x \Delta y^2}{4} + \frac{\Delta x \Delta y^3}{5} \right) \quad (3.19)$$

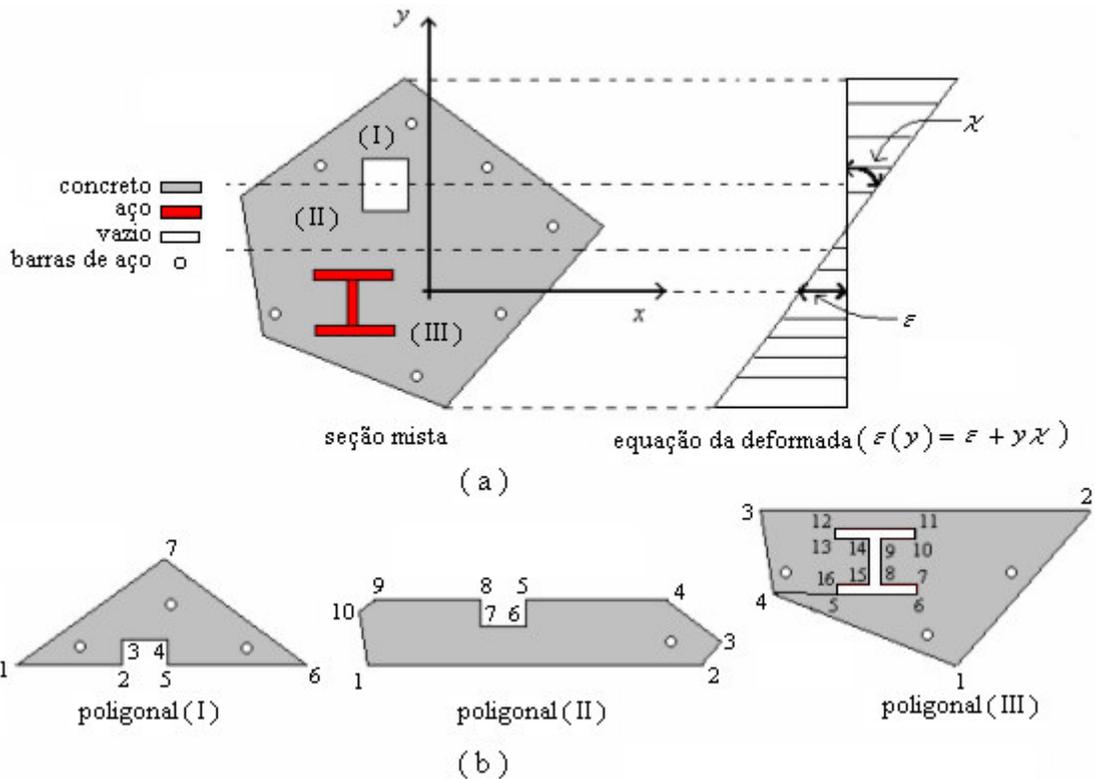


Figura 3.6 Análise de esforços em seção mista. (a) Divisão da seção mista em faixas de deformações, (b) definição dos polígonos para cálculos da contribuição aos esforços resistentes devido ao concreto.

A figura 3.6(a) mostra uma seção mista subdividida em faixas de deformações de acordo com os diagrama de tensão-deformação dos materiais dados conforme o item 3.4. Para o caso de vigas a deformação varia na seção linearmente em relação ao eixo  $y$ , de acordo com a equação 3.5, e não varia em relação ao eixo  $x$  local da seção.

É importante salientar que segmentos das poligonais que formam as áreas componentes que estão situados em mais de uma faixa de deformação do seu respectivo diagrama tensão-deformação, como mostra a figura 3.6(a), devem ser divididos em tantos segmentos quantas foram as faixas em que se situam. Obtêm-se assim poligonais secundárias de acordo com os diagramas dos materiais componentes da seção, figura

3.6(b). Para este fim pode-se utilizar, de forma bastante elegante, o algoritmo de determinação de isofaixas em domínios planos (Martha, 2003).

A figura 3.6(b) ilustra o procedimento da determinação de novos vértices e da divisão das poligonais em quantas forem necessárias para representarem as diferentes faixas de deformações do material na determinação dos esforços e rigidezes. Esta divisão deve ser realizada em todos os materiais definidos por seus respectivos polígonos fechados, de acordo com a equação da deformada da seção e a curva tensão-deformação do material. Na figura 3.6(b) esta divisão foi feita de forma ilustrativa apenas para o material concreto.

Com o procedimento descrito acima de divisão das poligonais dos materiais, e conhecendo o diagrama tensão-deformação de cada material, pode-se determinar através das integrais obtidas os esforços resistentes e as rigidezes generalizadas em uma seção de análise do elemento de viga mista.

Para ilustrar os passos utilizados no procedimento de determinação dos esforços resistentes será considerada a seção mista apresentada na figura 3.6. Nesta seção observa-se que o material concreto está dividido em 3 faixas de deformação, portanto será considerado de forma ilustrativa um polinômio constante para a faixa (I) do diagrama tensão-deformação do concreto, quadrático para a faixa (II) e linear para a faixa (III). Os polinômios são definidos através de seus coeficientes  $c_0$ ,  $c_1$ ,  $c_2$  e  $c_3$  ( $\sigma(\epsilon) = c_0 + c_1\epsilon + c_2\epsilon^2 + c_3\epsilon^3$ ).

Ainda no exemplo da figura 3.6, para o material aço será admitida apenas uma faixa de deformação do diagrama de tensão-deformação, sendo assim toda a sua seção está representada por apenas um polinômio que será considerado linear.

Com as considerações acima pode-se determinar a força normal resistente da seção mista aplicada na origem de seu eixo de referência.

$$N = \iint_A \sigma_z dA = \underbrace{\iint_A \sigma_z dA}_{\text{concreto}} + \underbrace{\iint_{A_p} \sigma_z dA}_{\text{aço}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n_s} A_{si} \sigma_{si}}_{\text{armaduras}} \quad (3.20)$$

A contribuição do concreto ao esforço normal resistente da seção mista é dada por:

$$N_c = \iint_A \sigma_z dA = \iint_{A_I} \sigma_z dA + \iint_{A_{II}} \sigma_z dA + \iint_{A_{III}} \sigma_z dA \quad (3.21)$$

Na equação 3.21,  $A_I$ ,  $A_{II}$  e  $A_{III}$  representam as áreas dos 3 polígonos mostrados na figura 3.6(b). O número de polígonos a considerar para um mesmo material é definido pela deformada da seção e o diagrama de tensão-deformação do material.

Usando a relação tensão-deformação dada pelas curvas polinomiais do diagrama de tensão-deformação do concreto, tem-se:

$$\iint_A \sigma_z dA = \iint_{A_I} a_0 dA + \iint_{A_{II}} (c_2 \varepsilon^2 + c_1 \varepsilon + c_0) dA + \iint_{A_{III}} (b_1 \varepsilon + b_0) dA \quad (3.22)$$

Deve-se lembrar que foi admitido, de forma a ilustrar o cálculo dos esforços resistentes, um polinômio constante para o diagrama tensão-deformação do concreto na faixa I, quadrático na faixa II e linear na faixa III, como é ilustrado na figura 3.7.

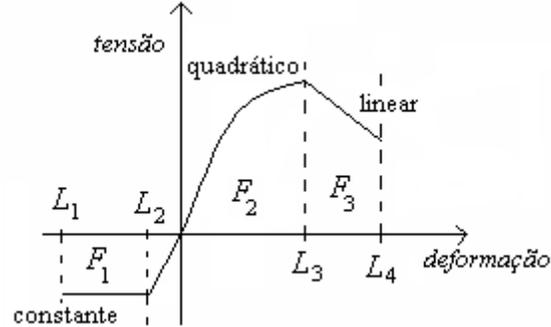


Figura 3.7 Curva tensão-deformação ilustrativa para o concreto.

Escrevendo as variáveis de deformação em função da deformação axial ( $\varepsilon_0$ ) na origem do eixo local  $xy$  da seção mista e da curvatura ( $\chi$ ) da seção, ambas constantes na área da seção mista analisada, tem-se para a equação 3.22 a expressão:

$$\iint_A \sigma_z dA = \iint_{A_I} a_0 dA + \iint_{A_{II}} [c_2 (\varepsilon_0 + y\chi)^2 + c_1 (\varepsilon_0 + y\chi) + c_0] dA + \iint_{A_{III}} [b_1 (\varepsilon_0 + y\chi) + b_0] dA$$

Para a primeira parcela da integral acima, tem-se:

$$\iint_{A_I} a_0 dA = a_0 \iint_{A_I} dx dy = a_0 (I_{00})_{A_I}$$

Para a segunda, tem-se:

$$\begin{aligned} \iint_{A_{II}} [c_2(\varepsilon_0 + y\chi)^2 + c_1(\varepsilon_0 + y\chi) + c_0] dA &= \iint_{A_{II}} [c_2\varepsilon_0^2 + c_2\varepsilon_0 + c_0 + (2c_2\chi + c_1\chi)y + c_2\chi y^2] dA \\ &= (c_2\varepsilon_0^2 + c_2\varepsilon_0 + c_0) \iint_{A_{II}} dx dy + (2c_2\chi + c_1\chi) \iint_{A_{II}} y dx dy + c_2\chi \iint_{A_{II}} y^2 dx dy \\ &= (c_2\varepsilon_0^2 + c_2\varepsilon_0 + c_0)(I_{00})_{A_{II}} + (2c_2\chi + c_1\chi)(I_{01})_{A_{II}} + c_2\chi(I_{02})_{A_{II}} \end{aligned}$$

Para a terceira, tem-se:

$$\begin{aligned} \iint_{A_{III}} [b_1(\varepsilon_0 + y\chi) + b_0] dA &= (b_1\varepsilon_0 + b_0) \iint_{A_{III}} dx dy + b_1\chi \iint_{A_{III}} y dx dy \\ &= (b_1\varepsilon_0 + b_0)(I_{00})_{A_{III}} + b_1\chi(I_{01})_{A_{III}} \end{aligned}$$

Juntando as três parcelas acima chega-se à expressão final para a contribuição do concreto à força normal resistente da seção mista.

$$\begin{aligned} \iint_A \sigma_z dA &= a_0(I_{00})_{A_I} + (c_2\varepsilon_0^2 + c_2\varepsilon_0 + c_0)(I_{00})_{A_{II}} + (2c_2\chi + c_1\chi)(I_{01})_{A_{II}} + c_2\chi(I_{02})_{A_{II}} + \\ &\quad + (b_1\varepsilon_0 + b_0)(I_{00})_{A_{III}} + b_1\chi(I_{01})_{A_{III}} \end{aligned} \quad (3.23)$$

A contribuição do aço ao esforço normal resistente da seção mista é obtida a seguir:

$$N_s = \iint_A \sigma_z dA = \iint_{A_I} \sigma_z dA \quad (3.24)$$

Na equação 3.24,  $A_I$  representa a área do polígono fechado que define o material aço.

Usando a relação tensão-deformação dada pela curva polinomial do diagrama de tensão-deformação do aço, tem-se:

$$\iint_A \sigma_z dA = \iint_{A_I} (a_1 \varepsilon + a_0) dA \quad (3.25)$$

Deve-se lembrar que foi admitido de forma a ilustrar o cálculo dos esforços resistentes um único polinômio linear para o diagrama tensão-deformação do aço, como mostra a figura 3.8.

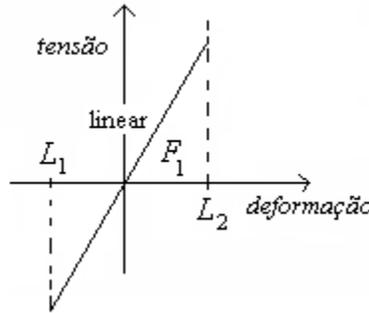


Figura 3.8 Curva tensão-deformação ilustrativa para o aço.

Escrevendo as variáveis de deformação em função da deformação axial ( $\varepsilon_0$ ) na origem do eixo  $xy$  da seção mista e da curvatura ( $\chi$ ) da seção, ambas constantes em toda área da seção mista analisada, tem-se para a equação 3.25 a expressão abaixo:

$$\begin{aligned} \iint_A \sigma_z dA &= \iint_{A_I} [d_1(\varepsilon_0 + y\chi) + d_0] dA = (d_1 \varepsilon_0 + d_0) \iint_{A_I} dx dy + d_1 \chi \iint_{A_I} y dx dy \\ &= (d_1 \varepsilon_0 + d_0)(I_{00})_{A_I} + d_1 \chi (I_{01})_{A_I} \end{aligned}$$

A contribuição das barras de reforço no esforço normal resistente da seção mista é

$$N_{sb} = \sum_{i=1}^n (\sigma_{si} A_{si}) \quad (3.26)$$

As barras de reforço são definidas pontualmente segundo o eixo local de referência de coordenadas da seção. A partir de suas coordenadas são obtidas as deformações nas barras. Com estas, e o diagrama de tensão-deformação do material que constitui cada barra define-se a tensão atuante em cada uma, e por último usando a área da seção transversal das barras determina-se a contribuição de cada uma delas para o esforço normal resistente da seção.

Na determinação do momento resistente em torno do eixo de referência  $x$  da seção analisada, segue-se de forma análoga à determinação da força normal resistente descrita anteriormente.

$$M = \iint_A \sigma_z y dA = \underbrace{\iint_{A_c} \sigma_z y dA}_{\text{concreto}} + \underbrace{\iint_{A_p} \sigma_z y dA}_{\text{aço}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n_s} A_{si} \sigma_{si} y_{si}}_{\text{armaduras}} \quad (3.27)$$

Contribuição do concreto no momento resistente em relação ao eixo  $x$  da seção mista.

$$M_c = \iint_A \sigma_z y dA = a_0 (I_{01})_{A_I} + (c_2 \varepsilon_0^2 + c_2 \varepsilon_0 + c_0) (I_{01})_{A_{II}} + (2c_2 \chi + c_1 \chi) (I_{02})_{A_{II}} + c_2 \chi (I_{03})_{A_{II}} + (b_1 \varepsilon_0 + b_0) (I_{01})_{A_{III}} + b_1 \chi (I_{02})_{A_{III}}$$

A contribuição do aço no momento resistente em relação ao eixo  $x$  da seção mista é:

$$M_s = \iint_A \sigma_z y dA = \iint_{A_I} [d_1 (\varepsilon_0 + y \chi) + d_0] y dA = (d_1 \varepsilon_0 + d_0) \iint_{A_I} y dx dy + d_1 \chi \iint_{A_I} y^2 dx dy = (d_1 \varepsilon_0 + d_0) (I_{01})_{A_I} + d_1 \chi (I_{02})_{A_I}$$

A contribuição das barras de reforço no momento resistente em relação ao eixo  $x$  da seção mista é dada por:

$$M_{sb} = \sum_{i=1}^n (\sigma_{si} A_{si} y_{si}) \quad (3.28)$$

Após a determinação da força normal em cada barra, como feito para o cálculo do esforço normal resistente, determina-se, através do produto da força normal pelo braço de alavanca que forma com o eixo  $x$  do sistema de referência de coordenadas da seção mista, a contribuição para o momento resistente de cada barra.

Os passos para a determinação dos esforços resistentes da seção podem ser resumidos da seguinte forma: (i) determina-se a deformada da seção analisada, (ii) determinam-se as divisões necessárias da poligonal que define cada material constituinte da seção, segundo a equação da deformada e a curva tensão-deformação dos materiais, e (iii) determina-se a contribuição de cada material aos esforços resistentes através da integral de contorno nas sub-poligonais obtidas da divisão da poligonal que define cada material.

Com o procedimento descrito neste capítulo podem-se determinar os esforços resistentes em uma seção genérica formada por um número qualquer de materiais representados por polígonos fechados, podendo conter vazios em seus interiores, também em formas de polígonos, e barras de reforço representadas de formas pontuais dentro da seção analisada. As curvas tensão-deformação dos materiais podem ser definidas em faixas de deformação. Neste trabalho, em cada faixa pode ser definido um polinômio de até terceiro grau. As expressões para a obtenção das derivadas dos esforços resistentes em relação às variáveis de deformação, que foram denominadas rigidezes generalizadas, podem se valer das operações descritas anteriormente e serem obtidas também de forma analítica.

# FORMULAÇÕES NUMÉRICAS

## 4.1 INTRODUÇÃO

Como visto no capítulo 2, a equação diferencial de Newmark (1951) permite obter uma solução analítica para o problema de viga mista com interação parcial. A obtenção de soluções para a equação, no entanto, não é possível para os casos mais gerais. Outra possibilidade de solução é a utilização de procedimentos prescritos por normas, como o projeto de revisão da NBR 8800, que permite dimensionamento de vigas mistas com interação parcial. Porém estes procedimentos possuem simplificações que tornam suas soluções geralmente conservadoras. Nas duas situações, a solução através de métodos numéricos se torna bastante interessante, uma vez que estes são aplicáveis a tipos mais gerais de vigas e, dentro de certas condições, convergem para a solução teórica à medida que se refina a malha de elementos finitos.

O interesse para solução do problema de viga mista com interação parcial através de métodos numéricos foi despertado já há algum tempo, podendo-se encontrar em revistas e jornais científicos internacionais diversas formulações para estes tipos de elementos (Oven et al, 1997, Faella et al, 2001, Salari e Spacone, 2001, Dall’Asta e Zona, 2004, Liang et al, 2004).

A discretização do contínuo em elementos finitos nos métodos numéricos permite, através de formulações variacionais ou utilizando o princípio dos trabalhos

virtuais, a definição de uma formulação fraca para o problema analisado. Com a aproximação de funções de interpolação dos deslocamentos nodais dos elementos pode-se obter, através da formulação fraca, uma solução aproximada para o problema analisado. A convergência do método numérico deve ser garantida de forma que com o aumento da discretização do contínuo a solução da formulação se aproxima cada vez mais da solução real do problema.

O problema de viga mista com interação parcial é considerado na formulação apresentada neste capítulo como não linear físico, devido às não linearidades dos materiais que constituem a seção e da relação carga-deslizamento na interface da seção mista.

Neste capítulo é apresentada primeiramente uma formulação para um elemento finito com deslizamento relativo, baseado no elemento de dez graus de liberdade apresentado por Dall'Asta e Zona (2004), diferindo deste último na consideração de integração analítica na seção transversal. O elemento implementado tem a capacidade de simular problemas de vigas mistas considerando o deslizamento relativo que ocorre no caso de interação parcial.

Em seguida é apresentada uma formulação para o elemento de interface, que tem como função simular o comportamento da interface de deslizamento de vigas mistas com interação parcial. O uso do elemento de interface em solução de problemas de vigas mistas deve ser em conjunto com dois elementos unidimensionais de barra, que representarão o comportamento das seções acima e abaixo da interface de deslizamento.

Por último, apresenta-se uma breve discussão sobre a solução do problema não linear utilizando-se as várias possibilidades do método de Newton Rapshon.

## **4.2 FORMULAÇÃO USANDO ELEMENTO FINITO COM DESLIZAMENTO**

Nesta seção é apresentada uma formulação completa para um elemento linear, de dez graus de liberdade, que permite obter, além dos deslocamentos transversais, axiais e rotações no elemento, o deslizamento na interface da viga mista.

O efeito da conexão deformável que define o deslizamento no elemento é considerado usando um modelo de vínculo distribuído ao longo da interface do elemento. Já a separação vertical no elemento é desconsiderada.

Na formulação do elemento é utilizado o princípio dos trabalhos virtuais havendo a necessidade da separação da seção de análise em duas seções, uma acima e outra abaixo da interface de deslizamento, e da contribuição ao trabalho virtual da deformação no vínculo de interface.

O elemento implementado tem seus deslocamentos axiais e transversais nodais interpolados por funções de forma polinomiais quadráticas e cúbicas, respectivamente. Tais funções de forma garantem a boa funcionalidade do elemento quando aplicado em um método de elementos finitos. Dall'Asta e Zona (2004) afirmam que tais funções devem ser escolhidas criteriosamente, uma vez que se as aproximações dos campos de deslocamento axial e de rotação não forem consistentes, então o erro da solução utilizando o método dos elementos finitos depende fortemente da rigidez da conexão, ocorrendo uma oscilação no deslizamento e aproximação ruim da curvatura para valores elevados da rigidez da conexão.

Na determinação dos esforços resistentes da seção mista do elemento implementado são consideradas curvas tensão-deformação dos materiais formadas por polinômios de até terceiro grau definidos por faixas de deformação. Também é considerada uma seção genérica para o elemento implementado. Pode-se definir um número qualquer de materiais, incluindo poligonais vazadas, e também um número qualquer de barras de reforço, definidas de forma pontual dentro da seção.

#### **4.2.1 Relação deformação-deslocamento considerando o deslizamento**

A relação deformação-deslocamento para seções de vigas mistas com interação parcial é definida considerando a hipótese de que seções planas permanecem planas após as deformações e a aproximação de pequenas deformações, considerações também feitas na formulação apresentada por Dall'Asta e Zona (2004) e usuais em diversos trabalhos na mesma linha.

No desenvolvimento das equações considera-se o deslizamento horizontal na interface da seção de concreto e o perfil de aço conforme mostrado na figura 4.1. Na mesma figura, pode-se observar que as rotações e os deslocamentos verticais são considerados os mesmos para ambos materiais, ou seja, não há separação vertical na interface. Além disso, despreza-se a deformação devido a esforços cortantes na seção transversal. A desconsideração da separação vertical na interface é sustentada pelo fato de que não há evidências experimentais suficientes que comprovem a sua importância na resposta das análises de vigas mistas (Salari e Spacone, 2001).

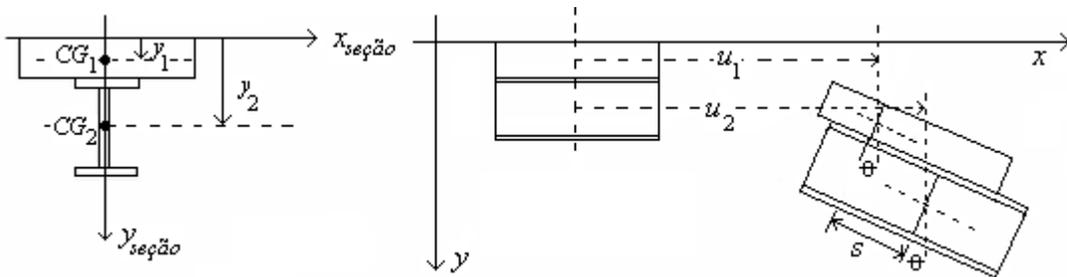


Figura 4.1 Deformação de um segmento da viga mista (Dall'Asta e Zona, 2004)

Com base na figura 4.1, e nas hipóteses e aproximações citadas anteriormente, pode-se determinar o deslizamento  $s(x)$  ao longo da interface da viga mista, equação 4.1. Para pequenas deformações, a tangente do ângulo  $\theta$  que define a inclinação da reta tangente à curva ( $v'(x)$ ), mostrado na figura 4.1, pode ser aproximada pelo próprio ângulo, e o co-seno deste ângulo pode ser aproximado pela unidade.

$$s(x) = u_2^0(x) - u_1^0(x) + (y_2 - y)\theta(x) + (y - y_1)\theta(x) \quad (4.1)$$

Na equação 4.1,  $y_1$  e  $y_2$  são como definidos na figura 4.1,  $u_1^0(x)$  e  $u_2^0(x)$  são, respectivamente, os deslocamentos axiais dos eixos de referência da laje de concreto e do perfil de aço. Definindo  $h$  como sendo a distância entre os eixos de referência da laje de concreto e do perfil de aço, ou seja  $h = y_2 - y_1$ , a equação 4.1 do deslizamento se torna:

$$s(x) = u_2^0(x) - u_1^0(x) + h\theta(x) \quad (4.2)$$

Após a deformação do elemento, segundo hipótese admitida, cada uma das duas seções de análise permanecerá plana e irá, em relação a um eixo de referência qualquer, transladar nas direções horizontal e vertical e sofrer uma rotação de um ângulo  $\theta$ , como mostrado na figura 4.1. Os deslocamentos horizontais e verticais dos pontos situados na seção de análise de coordenada  $x$  são dados pelas equações abaixo, onde o índice  $\alpha = 1,2$  representa, respectivamente, as seções acima e abaixo da interface de deslizamento.

$$u_\alpha(x, y) = u_\alpha^0(x) + (y_\alpha - y)\theta(x) \quad \alpha = 1,2 \quad (4.3)$$

$$v(x, y) = v(x) \quad (4.4)$$

A deformação axial  $\varepsilon_\alpha(x)$  nas seções analisadas ao longo do elemento misto é obtida por meio da derivada em relação à variável  $x$  da equação 4.3.

$$\varepsilon_\alpha(x, y) = \varepsilon_\alpha^0(x) + (y - y_\alpha)\chi(x) \quad \alpha = 1,2 \quad (4.5)$$

Na equação 4.5,  $\chi(x)$  é a curvatura da seção analisada, de coordenada  $x$ , e  $\varepsilon_\alpha^0(x)$  é deformação axial no eixo de referência das seções acima e abaixo da interface de deslizamento. Ou seja,  $\chi(x) = -\theta'(x) = -v''(x)$  e  $\varepsilon_\alpha^0(x) = u_\alpha^{0'}(x)$ .

#### 4.2.2 Formulação do problema de equilíbrio

Pelo Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV) se um sólido deformável em equilíbrio for submetido a um campo de deslocamentos virtuais, o trabalho virtual interno das tensões sobre as deformações virtuais será igual ao trabalho virtual externo sobre os deslocamentos virtuais (Garcia e Villaça, 1999).

$$\delta W_{\text{int}} = \delta W_{\text{ext}} \quad (4.6)$$

O trabalho interno realizado pelas tensões reais, para um sólido submetido a um campo de deslocamentos virtuais compatíveis com as deformações, é dado pela expressão abaixo:

$$\delta W_{\text{int}} = \iiint_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV \quad (4.7)$$

Na equação 4.7,  $\sigma_{ij}$  são as componentes de tensões de Kirchhoff,  $\varepsilon_{ij}$  são as componentes de deformação de Green-Lagrange,  $\delta$  é o operador variacional e  $V$  é o volume do sólido indeformado.

Para o caso de problemas de vigas as tensões a serem consideradas são as tensões axiais ( $\sigma_x$ ) e as tensões de cisalhamentos ( $\tau_{xy}$ ). Desprezando-se as deformações por cisalhamento (viga de Euler-Bernoulli) as tensões  $\sigma_{ij}$  que contribuem na determinação do trabalho virtual interno são reduzidas a apenas a tensão axial  $\sigma_x$ , ou seja:

$$\delta W_{\text{int}} = \iiint_V \sigma_x \delta \varepsilon_x dV \quad (4.8)$$

Na equação 4.8,  $\delta \varepsilon_x$  é a variação na deformação axial produzida pelo campo de deslocamento virtual imposto ao elemento de volume  $V$ .

Para um elemento de viga mista com interação parcial a curva de deformação em uma seção de análise apresenta uma descontinuidade na interface, havendo a necessidade então de divisão da seção de viga mista em duas, acima e abaixo da interface de deslizamento, e da consideração de um trabalho virtual na interface devido à deformação em seu vínculo de ligação. A equação 4.8 do trabalho virtual interno é dividida em três parcelas conforme:

$$\delta W_{\text{int}} = \int_l \left( \iint_{A_1} \sigma_{x1} \delta \varepsilon_{x1} dA + \iint_{A_2} \sigma_{x2} \delta \varepsilon_{x2} dA + S_b \delta s \right) dx \quad (4.9)$$

Na equação 4.9,  $S_b$  é a força cortante na interface,  $s$  é a deformação no vínculo de união da seção mista e os índices 1 e 2 representam, respectivamente, as seções acima e abaixo da interface de deslizamento da viga mista.

Discretizando o volume  $V$  em  $ne$  elementos finitos de volume  $V_m$ , onde  $m$  é o índice que representa um elemento qualquer dos  $ne$ 's elementos finitos, tem-se para a estrutura a expressão abaixo:

$$\delta W_{\text{int}} = \sum_{m=1}^{ne} \left\{ \int_{l_m} \left( \iint_{A_1} \sigma_{x1} \delta \varepsilon_{x1} dA + \iint_{A_2} \sigma_{x2} \delta \varepsilon_{x2} dA + S_b \delta s \right) dx \right\} \quad (4.10)$$

Aplicando o operador variacional nas equações de deformação das seções acima e abaixo da interface de deslizamento e da equação do deslizamento dadas no item anterior desta seção, tem-se:

$$\delta \varepsilon_{x1} = \delta u_1^{0'} - (y - y_1) \delta v'' \quad (4.11)$$

$$\delta \varepsilon_{x2} = \delta u_2^{0'} - (y - y_2) \delta v'' \quad (4.12)$$

$$\delta s = \delta u_2^0 - \delta u_1^0 + h \delta v' \quad (4.13)$$

Substituindo as equações 4.11 a 4.13 na equação 4.10 do trabalho virtual interno para um elemento finito de viga mista com interação parcial, chega-se à expressão abaixo, onde foi omitido o índice  $x$  referente ao eixo do elemento de viga mista.

$$\delta W_{\text{int}} = \sum_{m=1}^{ne} \left\{ \int_{l_m} \left[ \iint_{A_1} \sigma_1 (\delta u_1^{0'} - (y - y_1) \delta v'') dA + \iint_{A_2} \sigma_2 (\delta u_2^{0'} - (y - y_2) \delta v'') dA + S_b (\delta u_2^0 - \delta u_1^0 + h \delta v') \right] dx \right\}$$

$$\delta W_{\text{int}} = \sum_{m=1}^{ne} \left\{ \int_{l_m} \left[ \iint_{A_1} \sigma_1 \delta u_1^{0'} dA + \iint_{A_2} \sigma_2 \delta u_2^{0'} dA - \iint_{A_1} \sigma_1 (y - y_1) \delta v'' dA - \right. \right. \quad (4.14)$$

$$\left. \left. - \iint_{A_2} \sigma_2 (y - y_2) \delta v'' dA + S_b (\delta u_2^0 - \delta u_1^0 + h \delta v') \right] dx \right\}$$

As integrais nas áreas definidas dentro do colchete na expressão 4.14 são as equações 3.2 e 3.3 dos esforços resistentes dadas no item 3.3 do capítulo 3 deste trabalho, apresentadas novamente abaixo:

$$N_\alpha = \iint_{A_\alpha} \sigma_\alpha dA \quad \alpha = 1,2 \quad (4.15)$$

$$M_\alpha = \iint_{A_\alpha} \sigma_\alpha (y - y_\alpha) dA \quad \alpha = 1,2 \quad (4.16)$$

Substituindo as equações 4.15 e 4.16 na equação 4.14 e obedecendo às convenções da figura 4.2, tem-se:

$$\delta W_{\text{int}} = \sum_{m=1}^{ne} \left\{ \int_{l_m} [N_1 \delta u_1^{0'} + N_2 \delta u_2^{0'} - M_1 \delta v'' - M_2 \delta v'' + S_b (\delta u_2^0 - \delta u_1^0 + h \delta v')] dx \right\} \quad (4.17)$$

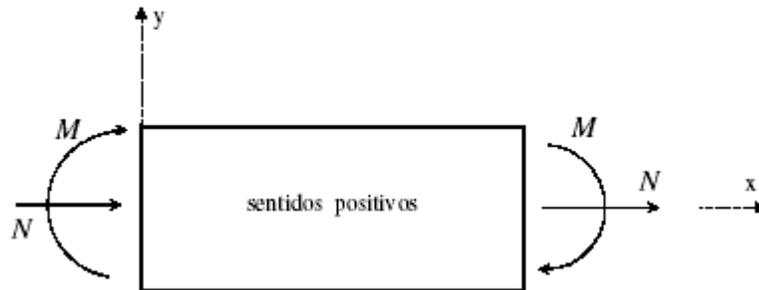


Figura 4.2 Convenção de sinal para os esforços  $N$  e  $M$ .

Sendo  $M = M_1 + M_2$  o momento total resistente da seção transversal da viga mista com interação parcial pode-se reescrever a equação 4.17 da forma abaixo:

$$\delta W_{\text{int}} = \sum_{m=1}^{ne} \left\{ \int_{l_m} [N_1 \delta u_1^{0'} + N_2 \delta u_2^{0'} - M \delta v' + S_b (\delta u_2^0 - \delta u_1^0 + h \delta v')] dx \right\} \quad (4.18)$$

Estas expressões para avaliação do PTV são válidas para qualquer modelo de elementos finitos que considere apenas as deformações axiais e os deslizamentos relativos, e se baseie em interpolação de deslocamentos.

### 4.2.3 Modelo de elementos finitos em deslocamentos

Nesta seção são apresentadas as equações de equilíbrio incrementais, matrizes de rigidez tangente e vetores de força interna para o modelo de elementos finitos implementado. O objetivo é efetuar a análise de elementos de vigas mistas submetidos a esforços de flexão e força cortante (na interface de deslizamento), considerando seções inferior e superior genéricas, bem como a não-linearidade das relações tensão-deformação dos materiais e força-deslizamento da interface.

#### 4.2.3.1 Equação de equilíbrio incremental

Sendo  $\mathbf{q}$  um conjunto de deslocamentos nodais generalizados para um dado elemento e considerando que o modelo implementado de elementos finitos permite carregamentos externos apenas na direção dos graus de liberdade tem-se para o trabalho virtual externo no elemento a expressão:

$$\delta W_{\text{ext}} = \delta \mathbf{q}^T \mathbf{r}_m \quad (4.19)$$

Na equação 4.19,  $\mathbf{r}_m$  é o vetor de forças externas aplicadas no elemento finito na direção de seus graus de liberdade.

Como nas implementações de elementos finitos baseados em deslocamentos estes são definidos no interior do elemento através de funções aproximadoras, expressas por funções de interpolação dos deslocamentos nodais  $\mathbf{q}$ , as variações dos deslocamentos podem ser escritos como se segue:

$$\delta u_1^{0'} = \left( \frac{\partial u'}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \delta \mathbf{q} = \delta \mathbf{q}^T \frac{\partial u_1^{0'}}{\partial \mathbf{q}} \quad (4.20)$$

$$\delta u_2^{0'} = \delta \mathbf{q}^T \frac{\partial u_2^{0'}}{\partial \mathbf{q}} \quad (4.21)$$

$$\delta v' = \delta \mathbf{q}^T \frac{\partial v'}{\partial \mathbf{q}} \quad (4.22)$$

$$\delta v'' = \delta \mathbf{q}^T \frac{\partial v''}{\partial \mathbf{q}} \quad (4.23)$$

$$\delta u_1^0 = \delta \mathbf{q}^T \frac{\partial u_1^0}{\partial \mathbf{q}} \quad (4.24)$$

$$\delta u_2^0 = \delta \mathbf{q}^T \frac{\partial u_2^0}{\partial \mathbf{q}} \quad (4.25)$$

Substituindo as equações 4.20 a 4.25 na expressão do trabalho interno no elemento, tem-se:

$$\delta W_{\text{int}} = \delta \mathbf{q}^T \int_{l_m} \left[ N_1 \frac{\partial u_1^{0'}}{\partial \mathbf{q}} + N_2 \frac{\partial u_2^{0'}}{\partial \mathbf{q}} - M \frac{\partial v''}{\partial \mathbf{q}} + S_b \left( \frac{\partial u_2^0}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial u_1^0}{\partial \mathbf{q}} + h \frac{\partial v'}{\partial \mathbf{q}} \right) \right] dx \quad (4.26)$$

Tomando a igualdade entre o trabalho interno, equação 4.26, e o trabalho externo, equação 4.19, tem-se:

$$\delta \mathbf{q}^T \int_{l_m} \left[ N_1 \frac{\partial u_1^{0'}}{\partial \mathbf{q}} + N_2 \frac{\partial u_2^{0'}}{\partial \mathbf{q}} - M \frac{\partial v''}{\partial \mathbf{q}} + S_b \left( \frac{\partial u_2^0}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial u_1^0}{\partial \mathbf{q}} + h \frac{\partial v'}{\partial \mathbf{q}} \right) \right] dx - \delta \mathbf{q}^T \mathbf{r}_m = 0 \quad (4.27)$$

Como a equação acima deve ser satisfeita para um variacional do deslocamento virtual  $\delta \mathbf{q}$  qualquer, desde que compatível, tem-se:

$$\int_{l_m} \left[ N_1 \frac{\partial u_1^{0'}}{\partial \mathbf{q}} + N_2 \frac{\partial u_2^{0'}}{\partial \mathbf{q}} - M \frac{\partial v''}{\partial \mathbf{q}} + S_b \left( \frac{\partial u_2^0}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial u_1^0}{\partial \mathbf{q}} + h \frac{\partial v'}{\partial \mathbf{q}} \right) \right] dx - \mathbf{r}_m = 0 \quad (4.28)$$

De forma mais simplificada pode-se representar a expressão 4.28 pela expressão  $\mathbf{f}_m - \mathbf{r}_m = 0$ , onde  $\mathbf{f}_m$  é o vetor das forças internas dos elementos individuais. Usando a expressão 4.18 chega-se a expressão abaixo para uma estrutura discretizada por tais elementos.

$$\sum_{m=1}^{ne} \left\{ \int_{l_m} \left[ N_1 \frac{\partial u_1^{0'}}{\partial \mathbf{q}} + N_2 \frac{\partial u_2^{0'}}{\partial \mathbf{q}} - M \frac{\partial v''}{\partial \mathbf{q}} + S_b \left( \frac{\partial u_2^0}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial u_1^0}{\partial \mathbf{q}} + h \frac{\partial v'}{\partial \mathbf{q}} \right) \right] dx \right\} - \mathbf{R} = 0 \quad (4.29)$$

De forma compacta pode-se representar a expressão 4.29 pela expressão abaixo:

$$\mathbf{F} - \lambda \mathbf{P} = 0 \quad (4.30)$$

Na equação 4.30,  $\mathbf{F}$  representa o vetor das forças nodais internas da estrutura e é obtido através das contribuições das forças internas dos elementos individuais,  $\mathbf{P}$  é o vetor de cargas de referência (nodais) que representa a distribuição das cargas externas sobre a estrutura e  $\lambda$  é o fator de carga, escalar.

Na expressão 4.29 o operador somatório corresponde ao “espalhamento” das forças internas dos elementos na matriz de força interna da estrutura na forma tradicional do Método dos Elementos Finitos (MEF).

#### 4.2.3.2 Modelo implementado

As hipóteses cinemáticas ligadas à deformação de um elemento de viga de Euler-Bernoulli exigem, para o modelo de elementos finitos de barra que procura modelar este tipo de estrutura, funções de interpolação que garantam a continuidade dos deslocamentos transversais, axiais e das rotações nas extremidades dos elementos, sendo estas últimas consideradas iguais às derivadas dos deslocamentos transversais. Para garantir tais exigências e a condição de representatividade das equações diferenciais que governam o problema, deve-se ter no mínimo um polinômio de terceiro grau para interpolação dos deslocamentos transversais, e no mínimo linear para os deslocamentos axiais. Em seu livro, Crisfield (1991) faz uma discussão sobre as ordens de interpolação convenientes em análise de elementos finitos de viga, recomendando utilizar polinômios de ordem maior que a linear no deslocamento axial.

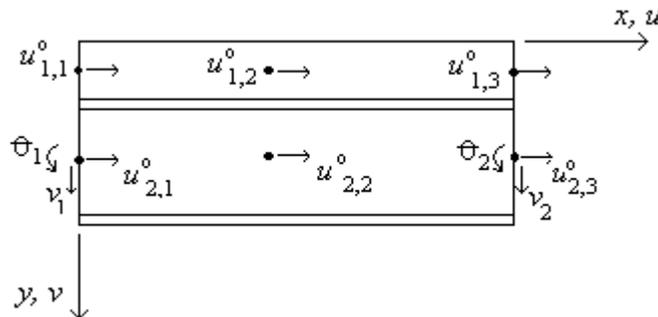


Figura 4.3 Graus de liberdade do elemento finito utilizado na implementação.

A figura 4.3 ilustra os deslocamentos nodais  $\mathbf{q}$  do elemento finito utilizado neste trabalho para formulação de viga mista com interação parcial. Tal elemento foi utilizado também por Dall'Asta e Zona (2004a) em sua formulação. De acordo com o modelo polinomial das funções de interpolação do método dos elementos finitos, e dos graus de liberdade do elemento da figura 4.3, emprega-se um polinômio do terceiro grau para interpolação dos deslocamentos transversais, e do segundo grau para interpolação dos deslocamentos axiais, que garantem as condições mínimas exigidas citadas no parágrafo anterior.

A escolha do uso de funções quadráticas para interpolação dos deslocamentos axiais é devido à equação do deslizamento,  $s(x) = u_2^0(x) - u_1^0(x) + h\theta(x)$ , que tem uma parcela dada pela diferença entre os deslocamentos axiais das seções acima e abaixo da interface de deslizamento ( $u_2^0(x) - u_1^0(x)$ ), e outra referente a rotação da seção ( $h\theta(x)$ ). Como a rotação no elemento será definida por um polinômio quadrático (derivada dos deslocamentos transversais, interpolados por polinômio cúbico), então para que haja compatibilidade entre as parcelas da equação, os deslocamentos axiais do elemento devem ser aproximados por polinômios quadráticos. A utilização de interpolação linear na direção axial pode levar ao “travamento ao deslizamento” (*slip locking*), conforme discutido por Dall’Asta e Zona (2004b).

Para o elemento da figura 4.3 o vetor  $\mathbf{q}$  representativo dos graus de liberdade do elemento finito é dado por

$$\mathbf{q}^T = [\mathbf{q}_{u_1}^T \quad \mathbf{q}_{u_2}^T \quad \mathbf{q}_v^T] \quad (4.31)$$

onde

$$\mathbf{q}_{u_1}^T = [u_{1,1}^0 \quad u_{1,2}^0 \quad u_{1,3}^0] \quad (4.32)$$

$$\mathbf{q}_{u_2}^T = [u_{2,1}^0 \quad u_{2,2}^0 \quad u_{2,3}^0] \quad (4.33)$$

$$\mathbf{q}_v^T = [v_1 \quad \theta_1 \quad v_2 \quad \theta_2]. \quad (4.34)$$

Uma característica principal da formulação clássica do método de elementos finitos é a aproximação das equações exatas dos deslocamentos, deformações e tensões no elemento, por interpolações através de funções de forma interpolando os valores nodais  $\mathbf{q}$ . Para o elemento em questão tais funções têm a forma dada abaixo:

$$\phi_{u_1} = \phi_{u_2} = \phi_u = \left\{ \begin{array}{c} \frac{1}{2}\xi(\xi-1) \\ 1-\xi^2 \\ \frac{1}{2}\xi(\xi+1) \end{array} \right\} \quad (4.35)$$

$$\phi_v = \left\{ \begin{array}{c} \frac{1}{2} - \frac{3}{4}\xi + \frac{1}{4}\xi^3 \\ \frac{l}{2} \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\xi - \frac{1}{4}\xi^2 + \frac{1}{4}\xi^3 \right) \\ \frac{1}{2} + \frac{3}{4}\xi - \frac{1}{4}\xi^3 \\ \frac{l}{2} \left( -\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\xi + \frac{1}{4}\xi^2 + \frac{1}{4}\xi^3 \right) \end{array} \right\} \quad (4.36)$$

As funções de interpolação dadas acima são definidas em relação ao elemento finito genérico com a variável  $\xi$  ao longo de seu eixo axial, dada por  $\xi = \frac{2}{l}x - 1$  e coordenada de suas extremidades, ou seja,  $\xi = -1$  e  $\xi = 1$ .

Com as funções de interpolação na coordenada generalizada definem-se as aproximações para as equações dos deslocamentos transversais e axiais no elemento.

$$u_1^0 = \phi_u^T \mathbf{q}_{u_1} \quad (4.37)$$

$$u_2^0 = \phi_u^T \mathbf{q}_{u_2} \quad (4.38)$$

$$v = \phi_v^T \mathbf{q}_v \quad (4.39)$$

A derivação das equações dos deslocamentos acima em relação à variável  $x$  fornece

$$u_1^{0'} = \phi_u'^T \mathbf{q}_{u_1} \quad (4.40)$$

$$u_2^{0'} = \boldsymbol{\phi}'_u{}^T \mathbf{q}_{u_2} \quad (4.41)$$

$$v' = \boldsymbol{\phi}'_v{}^T \mathbf{q}_v \quad (4.42)$$

e, em relação aos deslocamentos nodais  $\mathbf{q}$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1^{0'}}{\partial \mathbf{q}} &= \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\phi}'_u \\ \mathbf{0}_u \\ \mathbf{0}_v \end{Bmatrix}, & \frac{\partial u_2^{0'}}{\partial \mathbf{q}} &= \begin{Bmatrix} \mathbf{0}_u \\ \boldsymbol{\phi}'_u \\ \mathbf{0}_v \end{Bmatrix}, & \frac{\partial v'}{\partial \mathbf{q}} &= \begin{Bmatrix} \mathbf{0}_u \\ \mathbf{0}_u \\ \boldsymbol{\phi}'_v \end{Bmatrix}, \\ \frac{\partial v''}{\partial \mathbf{q}} &= \begin{Bmatrix} \mathbf{0}_u \\ \mathbf{0}_u \\ \boldsymbol{\phi}'_v \end{Bmatrix}, & \frac{\partial u_1^0}{\partial \mathbf{q}} &= \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\phi}_u \\ \mathbf{0}_u \\ \mathbf{0}_v \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad \frac{\partial u_2^0}{\partial \mathbf{q}} &= \begin{Bmatrix} \mathbf{0}_u \\ \boldsymbol{\phi}_u \\ \mathbf{0}_v \end{Bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Os vetores nulos que aparecem nas expressões 4.43 são definidos abaixo:

$$\mathbf{0}_u^T = [0 \quad 0 \quad 0]$$

$$\mathbf{0}_v^T = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \quad (4.44)$$

As derivadas em relação à variável  $x$  das funções de interpolação, a partir das expressões 4.35 e 4.36, são dadas por:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\phi}'_u{}^T &= \left[ \frac{2}{l} \left( \xi - \frac{1}{2} \right) \quad \frac{2}{l} (-2\xi) \quad \frac{2}{l} \left( \xi + \frac{1}{2} \right) \right] \\ \boldsymbol{\phi}'_v{}^T &= \left[ \frac{2}{l} \left( -\frac{3}{4} + \frac{3}{4} \xi^2 \right) \quad -\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \xi + \frac{3}{4} \xi^2 \quad \frac{2}{l} \left( \frac{3}{4} - \frac{3}{4} \xi^2 \right) \quad -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \xi + \frac{3}{4} \xi \right] \\ \boldsymbol{\phi}'_v{}^T &= \left[ \frac{4}{l^2} \left( \frac{3}{2} \xi \right) \quad \frac{2}{l} \left( -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \xi \right) \quad \frac{4}{l^2} \left( -\frac{3}{2} \xi \right) \quad \frac{2}{l} \left( \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \xi \right) \right] \end{aligned} \quad (4.45)$$

#### 4.2.3.3 Matriz de rigidez tangente

Com a possibilidade das relações tensão-deformação dos materiais serem definidas por polinômios de até terceiro grau, como visto no item 3.3 deste trabalho, o problema da expressão 4.30 poderá ser não linear, sendo assim necessário a obtenção de uma matriz de rigidez tangente para a solução do problema não linear utilizando o método iterativo de Newton Raphson, como descrito no item 4.4.

A matriz de rigidez tangente para o elemento finito proposto é definida a partir da derivada de  $\mathbf{f}_m$ , dada na expressão 4.28, em relação aos deslocamentos nodais  $\mathbf{q}$ :

$$K_T = \frac{\partial \mathbf{f}_m}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left( \int_{l_m} [N_1 \frac{\partial u_1^{0'}}{\partial \mathbf{q}} + N_2 \frac{\partial u_2^{0'}}{\partial \mathbf{q}} - M \frac{\partial v''}{\partial \mathbf{q}} + S_b (\frac{\partial u_2^0}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial u_1^0}{\partial \mathbf{q}} + h \frac{\partial v'}{\partial \mathbf{q}})] dx \right)$$

Utilizando a regra da cadeia e sabendo da relação linear entre as componentes  $u$  e  $v$  dos deslocamentos com os deslocamentos nodais  $\mathbf{q}$ , a expressão da matriz de rigidez tangente é:

$$K_T = \int_{l_m} \left[ \frac{\partial u_1^{0'}}{\partial \mathbf{q}} \left( \frac{\partial N_1}{\partial \mathbf{q}} \right)^T + \frac{\partial u_2^{0'}}{\partial \mathbf{q}} \left( \frac{\partial N_2}{\partial \mathbf{q}} \right)^T - \frac{\partial v''}{\partial \mathbf{q}} \left( \frac{\partial M}{\partial \mathbf{q}} \right)^T + \left( \frac{\partial u_2^0}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial u_1^0}{\partial \mathbf{q}} + h \frac{\partial v'}{\partial \mathbf{q}} \right) \left( \frac{\partial S_b}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \right] dx$$

Substituindo nas expressões acima as derivadas dos deslocamentos no interior do elemento em relação aos deslocamentos nodais, dadas pela expressão 4.43, tem-se:

$$K_T = \int_{l_m} \left[ \begin{Bmatrix} \phi'_u \\ \mathbf{0}_u \\ \mathbf{0}_v \end{Bmatrix} \left( \frac{\partial N_1}{\partial \mathbf{q}} \right)^T + \begin{Bmatrix} \mathbf{0}_u \\ \phi'_u \\ \mathbf{0}_v \end{Bmatrix} \left( \frac{\partial N_2}{\partial \mathbf{q}} \right)^T - \begin{Bmatrix} \mathbf{0}_u \\ \mathbf{0}_u \\ \phi''_v \end{Bmatrix} \left( \frac{\partial M}{\partial \mathbf{q}} \right)^T + \left( \begin{Bmatrix} \mathbf{0}_u \\ \phi'_u \\ \mathbf{0}_v \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \phi_u \\ \mathbf{0}_u \\ \mathbf{0}_v \end{Bmatrix} + h \begin{Bmatrix} \mathbf{0}_u \\ \mathbf{0}_u \\ \phi'_v \end{Bmatrix} \right) \left( \frac{\partial S_b}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \right] dx$$

$$\mathbf{f}_m = \int_{l_m} \left[ N_1 \begin{Bmatrix} \phi'_u \\ \mathbf{0}_u \\ \mathbf{0}_v \end{Bmatrix} + N_2 \begin{Bmatrix} \mathbf{0}_u \\ \phi'_u \\ \mathbf{0}_v \end{Bmatrix} - M \begin{Bmatrix} \mathbf{0}_u \\ \mathbf{0}_u \\ \phi''_v \end{Bmatrix} + S_b \left( \begin{Bmatrix} \mathbf{0}_u \\ \phi'_u \\ \mathbf{0}_v \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \phi_u \\ \mathbf{0}_u \\ \mathbf{0}_v \end{Bmatrix} + h \begin{Bmatrix} \mathbf{0}_u \\ \mathbf{0}_u \\ \phi'_v \end{Bmatrix} \right) \right] dx$$

Particionando as expressões anteriores chega-se às expressões 4.46 e 4.47 a seguir:

$$K_T = \int_{l_m} \left\{ \begin{array}{l} \phi'_u \left( \frac{\partial N_1}{\partial \mathbf{q}} \right)^T - \phi_u \left( \frac{\partial S_b}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \\ \phi'_u \left( \frac{\partial N_2}{\partial \mathbf{q}} \right)^T + \phi_u \left( \frac{\partial S_b}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \\ - \phi'_{v'} \left( \frac{\partial M}{\partial \mathbf{q}} \right)^T + h \phi'_{v'} \left( \frac{\partial S_b}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \end{array} \right\} dx \quad (4.46)$$

$$\mathbf{f}_m = \int_{l_m} \left\{ \begin{array}{l} N_1 \phi'_u - S_b \phi_u \\ N_2 \phi'_u + S_b \phi_u \\ - M \phi'_{v'} + h S_b \phi'_{v'} \end{array} \right\} dx \quad (4.47)$$

#### 4.2.3.4 Derivada dos esforços internos

Na determinação da matriz de rigidez tangente do elemento, expressão 4.46, são necessárias as derivadas dos esforços resistentes  $N_1$ ,  $N_2$ ,  $S_b$  e  $M$  em relação aos deslocamentos nodais generalizados  $\mathbf{q}$ .

$$\frac{\partial N_1}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left( \iint_{A_1} \sigma_1 dA \right) = \iint_{A_1} \frac{\partial \sigma_1}{\partial \mathbf{q}} dA = \iint_{A_1} \frac{\partial \sigma_1}{\partial \varepsilon_1} \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial \mathbf{q}} dA = \iint_{A_1} E_T \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial \mathbf{q}} dA \quad (4.48)$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left( \iint_{A_2} \sigma_2 dA \right) = \iint_{A_2} \frac{\partial \sigma_2}{\partial \mathbf{q}} dA = \iint_{A_2} \frac{\partial \sigma_2}{\partial \varepsilon_2} \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial \mathbf{q}} dA = \iint_{A_2} E_T \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial \mathbf{q}} dA \quad (4.49)$$

$$\frac{\partial S_b}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial S_b}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial \mathbf{q}} = E_{S_b} \frac{\partial s}{\partial \mathbf{q}} \quad (4.50)$$

$$\frac{\partial M}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left( \iint_{A_1} \sigma_1 (y_1 - y) dA + \iint_{A_2} \sigma_2 (y_2 - y) dA \right) =$$

$$= \iint_{A_1} E_T (y_1 - y) \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial \mathbf{q}} dA + \iint_{A_2} E_T (y_2 - y) \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial \mathbf{q}} dA \quad (4.51)$$

Nas expressões 4.48 a 4.51,  $E_T$  é o módulo de elasticidade tangente do material, definido através de sua curva tensão-deformação,  $E_{s_b}$  é análogo a  $E_T$  só que definido em relação a curva força cortante versus deslizamento do vínculo de interface, e as expressões usadas na definição dos esforços resistentes foram definidas no item 3.5 deste trabalho.

Substituindo nas expressões 4.48 a 4.51 as derivadas das equações de deformação e deslizamento

$$\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial u_1^{0'}}{\partial \mathbf{q}} - (y - y_1) \frac{\partial v''}{\partial \mathbf{q}},$$

$$\frac{\partial \varepsilon_2}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial u_2^{0'}}{\partial \mathbf{q}} - (y - y_2) \frac{\partial v''}{\partial \mathbf{q}},$$

$$\frac{\partial s}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial u_2^0}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial u_1^0}{\partial \mathbf{q}} + h \frac{\partial v'}{\partial \mathbf{q}},$$

e usando a derivada dos deslocamentos em relação ao deslocamentos nodais dadas na expressão 4.43, tem-se:

$$\frac{\partial N_1}{\partial \mathbf{q}} = \iint_{A_1} E_T \left( \begin{Bmatrix} \phi'_u \\ \mathbf{0}_u \\ \mathbf{0}_v \end{Bmatrix} - (y - y_1) \begin{Bmatrix} \mathbf{0}_u \\ \mathbf{0}_u \\ \phi''_v \end{Bmatrix} \right) dA$$

$$\frac{\partial N_1}{\partial \mathbf{q}} = \left\{ \begin{array}{c} \phi'_u \iint_{A_1} E_T dA \\ \mathbf{0}_u \\ -\phi''_v \iint_{A_1} E_T (y - y_1) dA \end{array} \right\} \quad (4.52)$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial \mathbf{q}} = \iint_{A_2} E_T \left\langle \begin{Bmatrix} \mathbf{0}_u \\ \phi'_u \\ \mathbf{0}_v \end{Bmatrix} - (y - y_2) \begin{Bmatrix} \mathbf{0}_u \\ \mathbf{0}_u \\ \phi''_v \end{Bmatrix} \right\rangle dA$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial \mathbf{q}} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{0}_u \\ \phi'_u \iint_{A_2} E_T dA \\ -\phi''_v \iint_{A_2} E_T (y - y_2) dA \end{array} \right\} \quad (4.53)$$

$$\frac{\partial S_b}{\partial \mathbf{q}} = E_{S_b} \left( \begin{Bmatrix} \mathbf{0}_u \\ \phi_u \\ \mathbf{0}_v \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \phi_u \\ \mathbf{0}_u \\ \mathbf{0}_v \end{Bmatrix} + h_u \begin{Bmatrix} \mathbf{0}_u \\ \mathbf{0}_u \\ \phi'_v \end{Bmatrix} \right)$$

$$\frac{\partial S_b}{\partial \mathbf{q}} = E_{S_b} \begin{Bmatrix} -\phi_u \\ \phi_u \\ h\phi'_v \end{Bmatrix} \quad (4.54)$$

$$\frac{\partial M}{\partial \mathbf{q}} = \iint_{A_1} E_T (y_1 - y) \left\langle \begin{Bmatrix} \phi'_u \\ \mathbf{0}_u \\ \mathbf{0}_v \end{Bmatrix} - (y - y_1) \begin{Bmatrix} \mathbf{0}_u \\ \mathbf{0}_u \\ \phi''_v \end{Bmatrix} \right\rangle dA + \iint_{A_2} E_T (y_2 - y) \left\langle \begin{Bmatrix} \mathbf{0}_u \\ \phi'_u \\ \mathbf{0}_v \end{Bmatrix} - (y - y_2) \begin{Bmatrix} \mathbf{0}_u \\ \mathbf{0}_u \\ \phi''_v \end{Bmatrix} \right\rangle dA$$

$$\frac{\partial M}{\partial \mathbf{q}} = \left\{ \begin{array}{c} \phi'_u \iint_{A_1} E_T (y_1 - y) dA \\ \phi'_u \iint_{A_2} E_T (y_2 - y) dA \\ \phi''_v \left[ \iint_{A_1} E_T (y_1 - y)^2 dA + \iint_{A_2} E_T (y_2 - y)^2 dA \right] \end{array} \right\} \quad (4.55)$$

As expressões de rigidezes generalizadas,

$$\iint_{A_\alpha} E_T dA, \quad \iint_{A_\alpha} E_T y dA \quad \text{e} \quad \iint_{A_\alpha} E_T y^2 dA \quad (4.56)$$

encontradas nas expressões 4.52 a 4.55 são avaliadas pela técnica de integração apresentada no item 3.6 no capítulo 3 deste trabalho. Nestas expressões o índice  $\alpha$  representa as seções acima e abaixo da interface de deslizamento.

#### 4.2.3.5 Rigidezes generalizadas

A determinação das rigidezes generalizadas dadas pelas expressões 4.56 é feita através da técnica de integração analítica apresentada no capítulo 3.

$$\begin{aligned} \iint_{A_\alpha} E_T dA &= \iint_{A_c} E_T dA + \iint_{A_p} E_T dA + \sum_{i=1}^{n_s} A_{si} E_T \\ &\quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\text{concreto}} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\text{aço}} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\text{armaduras}} \\ \iint_{A_\alpha} E_T y dA &= \iint_{A_c} E_T y dA + \iint_{A_p} E_T y dA + \sum_{i=1}^{n_s} E_T A_{si} y_{si} \\ &\quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\text{concreto}} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\text{aço}} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\text{armaduras}} \\ \iint_{A_\alpha} E_T y^2 dA &= \iint_{A_c} E_T y^2 dA + \iint_{A_p} E_T y^2 dA + \sum_{i=1}^{n_s} E_T A_{si} y_{si}^2 \\ &\quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\text{concreto}} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\text{aço}} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\text{armaduras}} \end{aligned}$$

Nas expressões acima  $E_T$  deve ser obtido através da derivada da curva tensão-deformação para cada poligonal fechada do mesmo material, em cada faixa de deformação. Por exemplo, para o caso da curva tensão-deformação do material ser representada, em uma faixa de deformação analisada, por um polinômio quadrático,  $E_T$  é definido por:

$$E_T = \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial (a_2 \varepsilon^2 + a_1 \varepsilon + a_0)}{\partial \varepsilon} = 2a_2 \varepsilon + a_1 \quad (4.57)$$

A deformação  $\varepsilon$ , na expressão 4.57, varia na poligonal fechada da seção mista analisada apenas com o eixo  $y$ , uma vez que a deformação axial no eixo de referência da seção e a sua curvatura em relação ao eixo  $x$  são constantes na seção analisada.

Com o módulo de elasticidade tangente escrito em função da variável  $y$  do eixo da seção analisada para cada poligonal necessária na divisão da seção mista, obtêm-se as rigidezes generalizadas para cada uma dessas poligonais fechadas usando os valores da expressão  $I_{ab} = \iint_A x^a y^b dx dy$ , definidas no item 3.6. As rigidezes generalizadas da seção mista serão dadas pela soma das parcelas de contribuição de cada poligonal, mais as contribuições das barras de reforço.

#### 4.2.3.6 Implementação computacional

O programa FEMOOP, *Finite Element Method Object Oriented Program*, foi utilizado como base para implementação computacional do elemento desenvolvido nos itens anteriores. Este programa originou-se de trabalhos desenvolvidos pela Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, PUC-Rio, desde 1990 (Guimarães, 1992), e tem desde então seu uso e arquivos de códigos liberados para novas implementações. Tem sido a partir daí utilizado com sucesso em trabalhos desenvolvidos em universidades brasileiras (Parente Jr., 2000, Sousa Jr., 2000, Caldas, 2004, Muniz, 2005).

A programação orientada a objetos, OOP, em linguagem C++, utilizada pelos arquivos de códigos do programa FEMOOP permitiu a implementação do novo elemento através da criação de novas classes, sem a necessidade do conhecimento da estrutura global do programa, e podendo compartilhar com os outros elementos já implementados todas as classes disponíveis nos códigos existentes. Toda a parte de resolução do sistema não linear de equações foi desenvolvida em trabalhos anteriores.

O programa FEMOOP para análise com elemento linear permite dois nós, um em cada extremidade do elemento, e seis graus de liberdade por nó. O elemento utilizado na implementação deste trabalho possui dois graus de liberdade para representar os deslocamentos axiais de ambas as seções acima e abaixo da interface de

deslizamento no meio do elemento, havendo então a necessidade, para a compatibilidade com o processo de análise do programa, da condensação estática (Cook *et al.*, 1989) dos graus de liberdade internos.

A razão da condensação estática é a necessidade, para o programa, de igual número de graus de liberdade em todos os nós do elemento. O processo de condensação dos graus de liberdade do interior do elemento para *análise linear* é descrito a seguir, a partir da condição de equilíbrio:

$$\begin{bmatrix} K_{rr} & K_{rc} \\ K_{cr} & K_{cc} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_r \\ \mathbf{q}_c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{r}_r \\ \mathbf{r}_c \end{Bmatrix} \quad (4.58)$$

Na expressão 4.58,  $K$  é a matriz de rigidez do elemento apresentado na figura 4.3,  $\mathbf{q}$  é o vetor que representa os deslocamentos nodais na direção dos graus de liberdade do mesmo elemento,  $\mathbf{q}_c$  representa os deslocamentos nodais do vetor  $\mathbf{q}$  referentes aos graus de liberdades que devem ser condensados,  $\mathbf{r}$  é o vetor de força interna para o elemento. Desenvolvendo as equações:

$$K_{rr}\mathbf{q}_r + K_{rc}\mathbf{q}_c = \mathbf{r}_r \quad (4.59)$$

$$K_{cr}\mathbf{q}_r + K_{cc}\mathbf{q}_c = \mathbf{r}_c \quad (4.60)$$

A equação 4.60 representa produto da parte inferior da expressão 4.58 e tem sua solução dada pela equação 4.61:

$$\mathbf{q}_c = -K_{cc}^{-1}(K_{cr}\mathbf{q}_r - \mathbf{r}_c). \quad (4.61)$$

Substituindo a equação 4.61 na equação 4.59 que representa o produto da parte superior da expressão 4.58, chega-se a expressão:

$$\underbrace{(K_{rr} - K_{rc}K_{cc}^{-1}K_{cr})}_{K \text{ condensada}} \mathbf{q}_r = \underbrace{(\mathbf{r}_r - K_{rc}K_{cc}^{-1}\mathbf{r}_c)}_{\mathbf{r} \text{ condensado}}. \quad (4.62)$$

Com a matriz de rigidez condensada determinada para todos os elementos da discretização da estrutura determina-se, através do processo de análise do programa, a matriz de rigidez global da estrutura. Impondo as condições de contorno e de carregamento da estrutura são determinados os deslocamentos referentes aos graus de liberdade dos nós da extremidades do elemento. Com estes deslocamentos e a equação 4.61 determina-se os deslocamentos referente aos graus de liberdade do interior de cada elemento.

As expressões anteriores são válidas para o caso de análise linear. Para uma análise não-linear, a condensação estática descrita anteriormente deve ser feita sobre os valores incrementais do deslocamento, sendo necessária a condensação, a cada passo incremental, da matriz tangente e do vetor de forças internas.

### **4.3 FORMULAÇÃO USANDO ELEMENTO DE INTERFACE**

Nesta seção é apresentada uma formulação para um elemento de interface com doze graus de liberdade, formato retangular e espessura nula. Os deslocamentos relativos na direção horizontal do elemento de interface simulam os deslizamentos na interface da seção mista.

Na formulação do elemento, é utilizado o princípio dos trabalhos virtuais, definido através dos deslocamentos relativos horizontal e vertical entre as faces superior e inferior do elemento retangular, uma vez que sua espessura é considerada nula.

O elemento de interface implementado tem seus deslocamentos nodais relativos, horizontal e vertical, interpolados por funções de forma polinomiais lineares e cúbicas, respectivamente. Tais funções de forma garantem a boa funcionalidade do elemento quando aplicado em um método de elementos finitos, em conjunto com dois elementos de viga com funções de interpolação de mesma ordem.

Os deslocamentos relativos (horizontal e vertical) do elemento de interface permitem tanto o deslizamento na interface de contato entre os materiais da viga mista, quanto a sua separação vertical. Para a consideração de interação total em relação as duas direções deve ser considerada uma alta taxa de variação (rigidez) para as curvas

força por unidade de comprimento versus deslocamento, horizontal ou vertical, na interface. Como neste trabalho considera-se que não há separação vertical da interface de contato entre os materiais, então será sempre considerada uma alta taxa de variação para a curva que caracteriza a relação força por unidade de comprimento versus deslocamento vertical.

#### 4.3.1 Equação dos deslocamentos relativos do elemento de interface

Em um elemento de interface retangular de espessura nula os deslocamentos considerados são os movimentos relativos entre as faces superior e inferior do elemento retangular na direção horizontal e vertical em relação ao eixo do elemento.

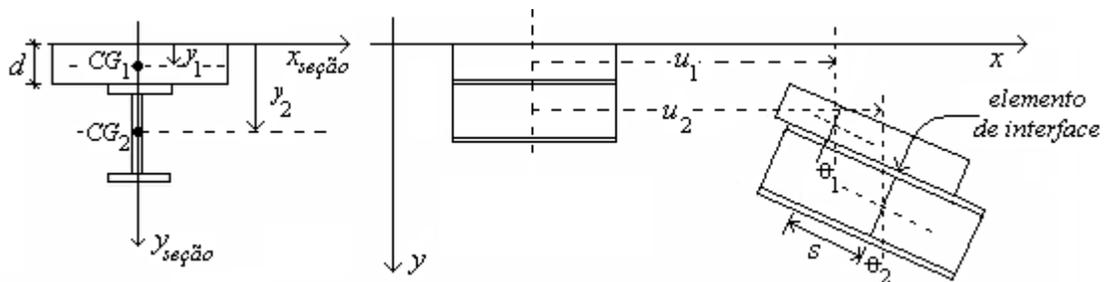


Figura 4.4 Deformação de um segmento da viga mista

Após a deformação do elemento de viga mista, segundo hipótese admitida, uma seção qualquer (superior ou inferior) permanecerá plana e irá, em relação a um eixo de referência qualquer, transladar nas direções horizontal e vertical e sofrer uma rotação de um ângulo  $\theta$ , (figura 4.4). Os deslocamentos horizontal e vertical dos pontos situados na seção de análise de coordenada  $x$  em relação a viga mista são dados pelas equações abaixo, onde o índice  $\alpha = 1,2$  representa, respectivamente, as seções acima e abaixo da interface de deslizamento.

$$u_{\alpha}(x, y) = u_{\alpha}^0(x) + (y_{\alpha} - y)\theta_{\alpha}(x) \quad \alpha = 1,2 \quad (4.63)$$

$$v_{\alpha}(x, y) = v_{\alpha}(x) \quad \alpha = 1,2 \quad (4.64)$$

Os deslocamentos axial e transversal dos pontos situados nas faces inferior e superior das seções, respectivamente, acima e abaixo da interface de deslizamento são dados pelas equações 4.65 e 4.66 tomando  $y = d$ , onde  $d$  é a distância da interface de deslizamento ao eixo  $x$  de referência da viga mista, como mostra a figura 4.4.

$$u_{\alpha}(x, y = d) = u_{\alpha}^0(x) + (y_{\alpha} - d)\theta_{\alpha}(x) \quad \alpha = 1,2 \quad (4.65)$$

$$v_{\alpha}(x, y = d) = v_{\alpha}(x) \quad \alpha = 1,2 \quad (4.66)$$

O deslocamento relativo na direção horizontal ( $w_h$ ) do elemento de interface de espessura nula, situado na interface de deslizamento da seção de viga mista, é definido pela equação 4.67 através da diferença entre os deslocamentos axiais das faces inferior e superior das seções, respectivamente, acima e abaixo da interface de deslizamento, ou seja, o deslizamento conforme mostrado na figura 4.5.

$$w_h(x) = u_2^0(x) - u_1^0(x) + (y_2 - d)\theta_2(x) - (y_1 - d)\theta_1(x) \quad (4.67)$$

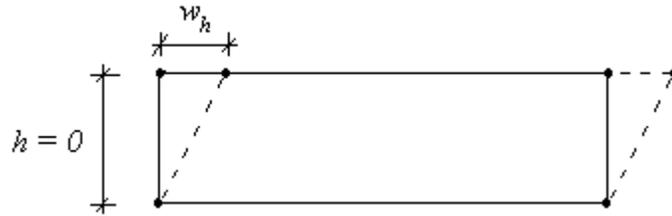


Figura 4.5 Deslocamento horizontal relativo no elemento de interface.

Já o deslocamento relativo na direção vertical ( $w_v$ ) definido pela equação 4.68, é dado pela diferença entre os deslocamentos verticais das faces inferior e superior das seções, respectivamente, acima e abaixo da interface de deslizamento, ou seja, a separação vertical na interface, Figura 4.6.

$$w_v(x) = v_2(x) - v_1(x) \quad (4.68)$$

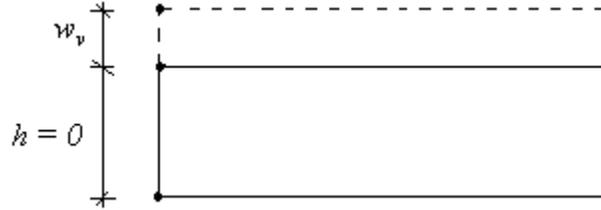


Figura 4.6 Deslocamento vertical relativo no elemento de interface.

Para que não haja penetrabilidade entre os elementos lineares acima e abaixo do elemento de interface deve ser inserida uma restrição de impenetrabilidade na equação 4.68, que pode ser simplesmente um coeficiente de penalidade no ramo esquerdo, ou negativo, da curva força normal versus separação do elemento de interface, a qual será definida pelo usuário.

### 4.3.2 Formulação do problema de equilíbrio

Pelo princípio dos trabalhos virtuais (PTV) se um sólido deformável em equilíbrio for submetido a um campo de deslocamentos virtuais, o trabalho virtual interno das tensões sobre as deformações virtuais será igual ao trabalho virtual externo sobre os deslocamentos virtuais (Garcia e Villaça, 1999).

$$\delta W_{\text{int}} = \delta W_{\text{ext}} \quad (4.69)$$

Para definir a matriz de rigidez do elemento de interface retangular de espessura nula será utilizado o PTV. Para o elemento analisado as deformações a serem consideradas são os deslocamentos relativos entre as faces superior e inferior do elemento, assim:

$$\delta W_{\text{int}} = \int_l [S_b \delta w_h + N_b \delta w_v] dx . \quad (4.70)$$

Na equação 4.70,  $\delta w_h$  e  $\delta w_v$  são, respectivamente, variação nos deslocamentos relativos horizontal e vertical do elemento devido a um campo de deslocamento virtual

imposto ao elemento de comprimento  $l$ ,  $S_b$  é a força cortante por unidade de comprimento que surge devido ao deslocamento relativo horizontal, e  $N_b$  a força normal por unidade de comprimento que surge devido ao deslocamento relativo na direção vertical.

Aplicando o operador variacional às equações 4.67 e 4.68 dos deslocamentos relativos horizontal e vertical do elemento de interface chega-se às expressões 4.71 e 4.72:

$$\delta w_h = \delta u_2^0 - \delta u_1^0 + (y_2 - d)\delta v_2' - (y_1 - d)\delta v_1' \quad (4.71)$$

$$\delta w_v = \delta v_2 - \delta v_1. \quad (4.72)$$

Substituindo as equações 4.71 e 4.72 na equação 4.70 do trabalho virtual interno para um elemento de interface de espessura nula, chega-se à expressão:

$$\delta W_{\text{int}} = \int_l [S_b [\delta u_2^0 - \delta u_1^0 + (y_2 - d)\delta v_2' - (y_1 - d)\delta v_1'] + N_b (\delta v_2 - \delta v_1)] dx. \quad (4.73)$$

Esta expressão para avaliação do PTV é válida para qualquer modelo de elementos finitos que considere apenas os deslocamentos relativos na direção horizontal e vertical do elemento de interface retangular de espessura nula, e se baseie em interpolação de deslocamentos.

### 4.3.3 Modelo de elementos finitos em deslocamentos

Nesta seção são apresentadas as equações de equilíbrio incrementais, matrizes de rigidez tangente e vetores de força interna para o modelo de elementos finitos implementado. O objetivo é a análise do problema de vigas mistas com interação parcial através do uso dos elementos de interface.

#### 4.3.3.1 Equação de equilíbrio incremental

Sendo  $\mathbf{q}$  um conjunto de deslocamentos nodais generalizados para um dado elemento e considerando que o modelo implementado de elementos finitos permite carregamentos externos apenas na direção dos graus de liberdade tem-se para o trabalho virtual externo no elemento de interface a expressão abaixo:

$$\delta W_{ext} = \delta \mathbf{q}^T \mathbf{r}_m . \quad (4.74)$$

Na equação 4.74,  $\mathbf{r}_m$  é o vetor de forças externas aplicadas no elemento finito na direção de seus graus de liberdade.

Como nas implementações de elementos baseados em deslocamentos, tem-se para as equações dos deslocamentos ao longo do elemento funções aproximadas definidas por funções de formas que interpolam os deslocamentos nodais  $\mathbf{q}$ . Pode-se, então, escrever as variações dos deslocamentos como se segue.

$$\delta u_1^0 = \left( \frac{\partial u_1^0}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \delta \mathbf{q} = \delta \mathbf{q}^T \frac{\partial u_1^0}{\partial \mathbf{q}}$$

$$\delta u_2^0 = \delta \mathbf{q}^T \frac{\partial u_2^0}{\partial \mathbf{q}}$$

$$\delta v_1 = \delta \mathbf{q}^T \frac{\partial v_1}{\partial \mathbf{q}}$$

$$\delta v_2 = \delta \mathbf{q}^T \frac{\partial v_2}{\partial \mathbf{q}}$$

$$\delta v'_1 = \delta \mathbf{q}^T \frac{\partial v'_1}{\partial \mathbf{q}}$$

$$\delta v'_2 = \delta \mathbf{q}^T \frac{\partial v'_2}{\partial \mathbf{q}} \quad (4.75)$$

Substituindo as expressões 4.75 na equação 4.73 do trabalho virtual interno do elemento de interface, tem-se:

$$\delta W_{\text{int}} = \delta \mathbf{q}^T \int_l \left[ S_b \left[ \frac{\partial u_2^0}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial u_1^0}{\partial \mathbf{q}} + (y_2 - d) \frac{\partial v_2'}{\partial \mathbf{q}} - (y_1 - d) \frac{\partial v_1'}{\partial \mathbf{q}} \right] + N_b \left( \frac{\partial v_2}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial v_1}{\partial \mathbf{q}} \right) \right] dx \quad (4.76)$$

A igualdade entre o trabalho virtual interno, equação 4.76, e o trabalho virtual externo, equação 4.74, resulta na expressão:

$$\delta \mathbf{q}^T \int_l \left[ S_b \left[ \frac{\partial u_2^0}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial u_1^0}{\partial \mathbf{q}} + (y_2 - d) \frac{\partial v_2'}{\partial \mathbf{q}} - (y_1 - d) \frac{\partial v_1'}{\partial \mathbf{q}} \right] + N_b \left( \frac{\partial v_2}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial v_1}{\partial \mathbf{q}} \right) \right] dx - \delta \mathbf{q}^T \mathbf{r}_m = 0$$

Como a expressão anterior deve ser satisfeita para um variacional do deslocamento virtual  $\delta \mathbf{q}$  qualquer, desde que compatível, tem-se:

$$\int_l \left[ S_b \left[ \frac{\partial u_2^0}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial u_1^0}{\partial \mathbf{q}} + (y_2 - d) \frac{\partial v_2'}{\partial \mathbf{q}} - (y_1 - d) \frac{\partial v_1'}{\partial \mathbf{q}} \right] + N_b \left( \frac{\partial v_2}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial v_1}{\partial \mathbf{q}} \right) \right] dx - \mathbf{r}_m = 0 \quad (4.77)$$

De forma mais simplificada, pode-se representar a expressão 4.77 pela expressão  $\mathbf{f}_m - \mathbf{r}_m = 0$ , onde  $\mathbf{f}_m$  é o vetor de forças internas do elemento de interface.

#### 4.3.3.2 Modelo implementado

O elemento de interface implementado tem como objetivo representar o comportamento na interface de deslizamento da seção de uma viga mista. Tal elemento será implementado em um programa de elementos finitos para solução de problema de vigas mistas com interação parcial em conjunto com um elemento unidimensional de viga.

Os deslocamentos relativos horizontal e vertical do elemento de interface avaliam os deslocamentos axiais e transversais das faces superior e inferior das seções respectivamente, acima e abaixo da interface de deslizamento, o que implica que as funções de interpolação dos deslocamentos nodais do elemento devem satisfazer as condições para a análise de viga com elemento linear definidas no item 4.2.3.2 deste capítulo. Portanto, é necessário no mínimo um polinômio cúbico para interpolação dos deslocamentos relativos verticais e linear para os deslocamentos relativos horizontais.

A figura 4.7 ilustra os deslocamentos nodais  $\mathbf{q}$  do elemento de interface utilizado neste trabalho.

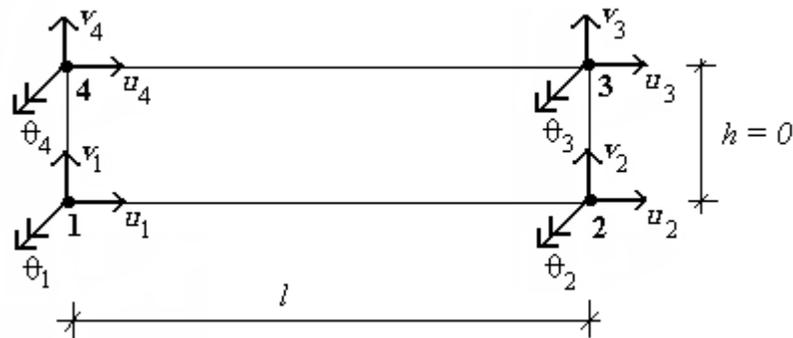


Figura 4.7 Graus de liberdade do elemento de interface utilizado na implementação.

Para o elemento de interface da figura 4.7 teremos o vetor  $\mathbf{q}$  representativo dos graus de liberdade do elemento de interface dado por

$$\mathbf{q}^T = [\mathbf{q}_{u_1}^T \quad \mathbf{q}_{v_1}^T \quad \mathbf{q}_{u_2}^T \quad \mathbf{q}_{v_2}^T]$$

onde

$$\mathbf{q}_{u_1}^T = [u_1 \quad u_2]$$

$$\mathbf{q}_{u_2}^T = [u_4 \quad u_3]$$

$$\mathbf{q}_{v_1}^T = [v_1 \quad \theta_1 \quad v_2 \quad \theta_2]$$

$$\mathbf{q}_{v_2}^T = [v_4 \quad \theta_4 \quad v_3 \quad \theta_3]. \quad (4.78)$$

As equações dos deslocamentos na direção horizontal do elemento de interface possuem funções de interpolação independentes para as faces inferior e superior do elemento, o mesmo acontecendo para os deslocamentos na direção vertical. Tais funções de interpolação que associam essas equações aos deslocamentos nodais da figura 4.7 são dadas a seguir:

$$\phi_{u_1} = \phi_{u_2} = \phi_u = \begin{cases} \frac{1}{2}(1-\xi) \\ \frac{1}{2}(1+\xi) \end{cases} \quad (4.79)$$

$$\phi_{v_1} = \phi_{v_2} = \phi_v = \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{3}{4}\xi + \frac{1}{4}\xi^3 \\ \frac{l}{2} \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\xi - \frac{1}{4}\xi^2 + \frac{1}{4}\xi^3 \right) \\ \frac{1}{2} + \frac{3}{4}\xi - \frac{1}{4}\xi^3 \\ \frac{l}{2} \left( -\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\xi + \frac{1}{4}\xi^2 + \frac{1}{4}\xi^3 \right) \end{cases}$$

As funções de interpolação dadas acima são definidas em relação ao elemento de interface genérico com a variável ao longo de sua face superior ou inferior dada por  $\xi = \frac{2}{l}x - 1$  e coordenada de suas extremidades dadas por  $\xi = -1$  e  $\xi = 1$ .

Com as funções de interpolação na coordenada generalizada definem-se as aproximações para as equações dos deslocamentos horizontal e vertical para as faces superior e inferior do elemento de interface.

$$u_1^0 = \phi_u^T \mathbf{q}_{u_1}$$

$$u_2^0 = \phi_u^T \mathbf{q}_{u_2}$$

$$v_1 = \boldsymbol{\phi}_v^T \mathbf{q}_{v_1}$$

$$v_2 = \boldsymbol{\phi}_v^T \mathbf{q}_{v_2} \quad (4.80)$$

A derivação das equações dos deslocamentos dadas acima em relação a variável  $x$  fornece

$$v'_1 = \boldsymbol{\phi}'_v{}^T \mathbf{q}_{v_1}$$

$$v'_2 = \boldsymbol{\phi}'_v{}^T \mathbf{q}_{v_2} \quad (4.81)$$

e, em relação aos deslocamentos nodais  $\mathbf{q}$ ,

$$\frac{\partial u_1^0}{\partial \mathbf{q}} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\phi}_u \\ \mathbf{0}_v \\ \mathbf{0}_u \\ \mathbf{0}_v \end{Bmatrix}, \quad \frac{\partial u_2^0}{\partial \mathbf{q}} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0}_u \\ \mathbf{0}_v \\ \boldsymbol{\phi}_u \\ \mathbf{0}_v \end{Bmatrix}, \quad \frac{\partial v_1}{\partial \mathbf{q}} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0}_u \\ \boldsymbol{\phi}_v \\ \mathbf{0}_u \\ \mathbf{0}_v \end{Bmatrix},$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial \mathbf{q}} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0}_u \\ \mathbf{0}_v \\ \mathbf{0}_u \\ \boldsymbol{\phi}_v \end{Bmatrix}, \quad \frac{\partial v'_1}{\partial \mathbf{q}} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0}_u \\ \boldsymbol{\phi}'_v \\ \mathbf{0}_u \\ \mathbf{0}_v \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad \frac{\partial v'_2}{\partial \mathbf{q}} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0}_u \\ \mathbf{0}_v \\ \mathbf{0}_u \\ \boldsymbol{\phi}'_v \end{Bmatrix}. \quad (4.82)$$

Os vetores nulos que aparecem nas expressões 4.82 são definidos a seguir:

$$\mathbf{0}_u^T = [0 \quad 0]$$

$$\mathbf{0}_v^T = [0 \quad 0 \quad 0].$$

A derivada em relação a variável  $x$  da função de interpolação para os deslocamentos verticais independentes para as faces superior e inferior do elemento de interface é dada a seguir:

$$\phi_v^T = \left[ \frac{2}{l} \left( -\frac{3}{4} + \frac{3}{4} \xi^2 \right) \quad -\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \xi + \frac{3}{4} \xi^2 \quad \frac{2}{l} \left( \frac{3}{4} - \frac{3}{4} \xi^2 \right) \quad -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \xi + \frac{3}{4} \xi \right].$$

#### 4.3.3.3 Matriz de rigidez tangente

Com a possibilidade da relação força cortante versus deslizamento na interface da seção mista ser definida por polinômios de até terceiro grau, como visto no item 3.3 do capítulo 3 deste trabalho, o problema da expressão 4.77 pode ser não linear, sendo assim necessário a obtenção de uma matriz de rigidez tangente para a solução do problema não linear utilizando o método iterativo de Newton Raphson, conforme descrito no item 4.4.

A matriz de rigidez tangente para o elemento de interface proposto é definida a partir da derivada de  $\mathbf{f}_m$ , dada na expressão 4.77, em relação aos deslocamentos nodais  $\mathbf{q}$  como mostrado abaixo.

$$K_T = \frac{\partial \mathbf{f}_m}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left( \int_l \left[ S_b \left[ \frac{\partial u_2^0}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial u_1^0}{\partial \mathbf{q}} + (y_2 - d) \frac{\partial v_2'}{\partial \mathbf{q}} - (y_1 - d) \frac{\partial v_1'}{\partial \mathbf{q}} \right] + N_b \left( \frac{\partial v_2}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial v_1}{\partial \mathbf{q}} \right) \right] dx \right)$$

Utilizando a regra da cadeia e sabendo da relação linear entre as equações dos deslocamentos horizontal e vertical para faces superior e inferior do elemento de interface com os deslocamentos nodais  $\mathbf{q}$ , a expressão da matriz de rigidez tangente fica como dada abaixo:

$$K_T = \int_l \left( \left[ \frac{\partial u_2^0}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial u_1^0}{\partial \mathbf{q}} + (y_2 - d) \frac{\partial v_2'}{\partial \mathbf{q}} - (y_1 - d) \frac{\partial v_1'}{\partial \mathbf{q}} \right] \frac{\partial S_b}{\partial \mathbf{q}} + \left( \frac{\partial v_2}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial v_1}{\partial \mathbf{q}} \right) \frac{\partial N_b}{\partial \mathbf{q}} \right) dx.$$

Substituindo na matriz de rigidez tangente acima e no vetor de forças interna  $\mathbf{f}_m$  as derivadas dos deslocamentos em relações aos deslocamentos nodais, dadas pela expressão 4.82, tem-se:

$$K_T = \int_l \left[ \begin{array}{c} \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{0}_u \\ \mathbf{0}_v \\ \phi_u \\ \mathbf{0}_v \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{c} \phi_u \\ \mathbf{0}_v \\ \mathbf{0}_u \\ \mathbf{0}_v \end{array} \right\} + (y_2 - d) \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{0}_u \\ \mathbf{0}_v \\ \mathbf{0}_u \\ \phi'_v \end{array} \right\} - (y_1 - d) \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{0}_u \\ \mathbf{0}_v \\ \phi'_v \\ \mathbf{0}_v \end{array} \right\} \end{array} \right] \left( \frac{\partial S_b}{\partial \mathbf{q}} \right)^T + \left( \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{0}_u \\ \mathbf{0}_v \\ \mathbf{0}_u \\ \phi_v \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{0}_u \\ \mathbf{0}_v \\ \mathbf{0}_u \\ \mathbf{0}_v \end{array} \right\} \right) \left( \frac{\partial N_b}{\partial \mathbf{q}} \right)^T dx$$

$$\mathbf{f}_m = \int_l \left( S_b \left[ \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{0}_u \\ \mathbf{0}_v \\ \phi_u \\ \mathbf{0}_v \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{c} \phi_u \\ \mathbf{0}_v \\ \mathbf{0}_u \\ \mathbf{0}_v \end{array} \right\} + (y_2 - d) \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{0}_u \\ \mathbf{0}_v \\ \mathbf{0}_u \\ \phi'_v \end{array} \right\} - (y_1 - d) \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{0}_u \\ \mathbf{0}_v \\ \phi'_v \\ \mathbf{0}_v \end{array} \right\} \right] + N_b \left( \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{0}_u \\ \mathbf{0}_v \\ \mathbf{0}_u \\ \phi_v \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{0}_u \\ \mathbf{0}_v \\ \mathbf{0}_u \\ \mathbf{0}_v \end{array} \right\} \right) \right) dx$$

Particionando as expressões da matriz de rigidez e do vetor de força interna chega-se nas expressões 4.83 e 4.84 a seguir:

$$\mathbf{f}_m = \int_l \left\{ \begin{array}{c} -S_b \phi_u \\ (d - y_1) S_b \phi'_v - N_b \phi_v \\ S_b \phi_u \\ (y_2 - d) S_b \phi'_v + N_b \phi_v \end{array} \right\} dx \quad (4.83)$$

$$K_T = \int_l \left\{ \begin{array}{c} -\phi_u \left( \frac{\partial S_b}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \\ (d - y_1) \phi'_v \left( \frac{\partial S_b}{\partial \mathbf{q}} \right)^T - \phi_v \left( \frac{\partial N_b}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \\ \phi_u \left( \frac{\partial S_b}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \\ (y_2 - d) \phi'_v \left( \frac{\partial S_b}{\partial \mathbf{q}} \right)^T + \phi_v \left( \frac{\partial N_b}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \end{array} \right\} dx. \quad (4.84)$$

A matriz de rigidez e o vetor de forças interna do elemento de interface da figura 4.7 são definidos para um sistema de referência de coordenadas qualquer para as seções mistas acima e abaixo da interface de deslizamento. Se for adotado um sistema

de referência de coordenadas com o eixo  $x$  passando pela interface de deslizamento da seção mista para ambas as seções, ou seja,  $y_1 = y_2 = d$ , então as expressões 4.83 e 4.84 tem a sua forma mais simplificada, como dado abaixo:

$$\mathbf{f}_m = \int_l \begin{Bmatrix} -S_b \phi_u \\ -N_b \phi_v \\ S_b \phi_u \\ N_b \phi_v \end{Bmatrix} dx$$

$$K_T = \int_{l_m} \begin{Bmatrix} -\phi_u \left( \frac{\partial S_b}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \\ -\phi_v \left( \frac{\partial N_b}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \\ \phi_u \left( \frac{\partial S_b}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \\ \phi_v \left( \frac{\partial N_b}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \end{Bmatrix} dx.$$

#### 4.3.3.4 Derivada dos esforços internos

Na determinação da matriz de rigidez tangente do elemento, expressão 4.84, são necessárias as derivadas dos esforços resistentes  $S_b$  e  $N_b$  em relação aos deslocamentos nodais generalizados  $\mathbf{q}$ .

$$\frac{\partial S_b}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial S_b}{\partial w_h} \frac{\partial w_h}{\partial \mathbf{q}} = E_{S_b} \frac{\partial w_h}{\partial \mathbf{q}} \quad (4.85)$$

$$\frac{\partial N_b}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial N_b}{\partial w_v} \frac{\partial w_v}{\partial \mathbf{q}} = E_{N_b} \frac{\partial w_h}{\partial \mathbf{q}} \quad (4.86)$$

Nas expressões acima,  $E_{S_b}$  é o coeficiente angular da reta tangente a curva carga-deslizamento do vínculo de interface dado para um deslocamento relativo

horizontal do elemento de interface, ou seja, o deslizamento na interface.  $E_{N_b}$  é análogo a  $E_{S_b}$  só que definido em relação a curva força normal versus separação vertical na interface.

Para os casos em que se considere nula a possibilidade de separação vertical na interface de deslizamento, deve-se considerar para  $E_{N_b}$  valores numéricos elevados para se obter tal situação. Quanto maior o valor de  $E_{N_b}$  mais próximo da situação desejada é a resposta numérica. O mesmo acontece com os valores numéricos de  $E_{S_b}$  quando se deseja uma interação total na direção horizontal da interface.

Substituindo nas expressões 4.85 e 4.86 as derivadas das equações de deslocamentos relativos horizontal e vertical obtém-se:

$$\frac{\partial w_h}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial u_2^0}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial u_1^0}{\partial \mathbf{q}} + (y_2 - d) \frac{\partial v_2'}{\partial \mathbf{q}} - (y_1 - d) \frac{\partial v_1'}{\partial \mathbf{q}},$$

$$\frac{\partial w_v}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial v_2}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial v_1}{\partial \mathbf{q}},$$

e usando a derivada dos deslocamentos em relação ao deslocamentos nodais dadas na expressão 4.82, tem-se:

$$\frac{\partial S_b}{\partial \mathbf{q}} = E_{S_b} \begin{Bmatrix} -\phi_u \\ (d - y_1)\phi'_v \\ \phi_u \\ (y_2 - d)\phi'_v \end{Bmatrix} \quad (4.87)$$

$$\frac{\partial N_b}{\partial \mathbf{q}} = E_{N_b} \begin{Bmatrix} 0_u \\ -\phi_v \\ 0_u \\ \phi_v \end{Bmatrix}.$$

Na expressão 4.87,  $E_{S_b}$  deve ser obtido através da derivada da curva força cortante versus deslizamento na interface, como definida no item 3.3 do capítulo 3, onde se define uma curva geral formada por polinômios de até terceiro grau definidos em faixas de deformação (deslocamento relativos). Por exemplo se a curva força cortante versus deslizamento na interface for definida por um polinômio quadrático,  $E_{S_b}$  pode ser determinado como mostrado abaixo:

$$E_{S_b} = \frac{\partial S_b}{\partial s} = \frac{\partial(a_2 s^2 + a_1 s + a_0)}{\partial s} = 2a_2 s + a_1 \quad (4.88)$$

Na expressão 4.88,  $s$  é o deslizamento na interface que é representado pelo deslocamento relativo horizontal ( $w_h$ ) no elemento de interface.

Para a determinação de  $E_{N_b}$  segue-se da mesma forma utilizada na determinação de  $E_{S_b}$ .

Deve-se lembrar que no trabalho em questão foi utilizado para definição da curva força cortante versus deslizamento na interface o mesmo critério para as curvas tensão-deformação dos materiais, que são limitadas a polinômios para a utilização do teorema de Green na determinação das rigidezes generalizadas da seção. Como esta limitação não cabe no caso referente ao comportamento na interface, então a curva força-deslizamento na interface pode ser definida por qualquer função diferenciável.

#### 4.3.3.5 Implementação computacional

Como no caso do elemento implementado no item 4.2 foi utilizado como base para implementação computacional do elemento de interface o programa FEMOOP, *Finite Element Method Object Oriented Program*.

O elemento de interface implementado tem a finalidade de representar exclusivamente o comportamento da interface de deslizamento de uma viga mista, sendo seu uso vinculado a dois elementos unidimensionais de viga simples, um para cada seção acima e abaixo da interface de deslizamento. Devido a isto, a estrutura

global do programa utilizado como base na implementação do novo elemento de interface deve permitir na análise a associação de diferentes tipos de elementos, o que acontece com o programa FEMOOP. A linguagem C++ utilizada pelo programa, junto com a programação orientada a objetos, define uma classe geral para todos os elementos a partir da qual os novos elementos terão suas subclasses definidas, facilitando a associação de elementos diferentes sem alteração no código.

Toda a parte de resolução do sistema não linear de equações foi desenvolvida em trabalhos anteriores.

O elemento de viga utilizado em conjunto com o elemento de interface para soluções numérica de problemas de vigas mistas com interação parcial deve ser compatível com o elemento de interface, assim sendo, este elemento deve ter funções de interpolação cúbicas e lineares para os deslocamentos transversais e axiais, respectivamente. Deve-se ter em mente que este elemento pode possuir problemas de travamento de membrana e alguns artifícios podem ser necessários para melhorar seu comportamento.

#### 4.4 SOLUÇÃO DO PROBLEMA NÃO LINEAR

A curva da figura 4.8 representa um problema não linear (em uma dimensão, por simplicidade) e pode ser determinada através de métodos incrementais iterativos, que têm sua formulação geral deduzida a partir da equação de equilíbrio global:

$$\mathbf{G}(\mathbf{u}, \lambda) = \mathbf{F}(\mathbf{u}) - \lambda \mathbf{P} = 0 \quad (4.89)$$

Em 4.89,  $\mathbf{F}$  é a força interna, função dos deslocamentos  $\mathbf{u}$  e  $\lambda \mathbf{P}$  a força externa aplicada. Se a cada passo incremental para a determinação da curva OABC da figura 4.8  $\lambda$  for considerado variável então a expressão 4.89 representa um sistema de uma equação com  $n+1$  variáveis (graus de liberdade do sistema), havendo a necessidade de impor uma condição de restrição de forma a obter solução para o sistema:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{G}(\mathbf{u}, \lambda) \\ R(\mathbf{u}, \lambda) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.90)$$

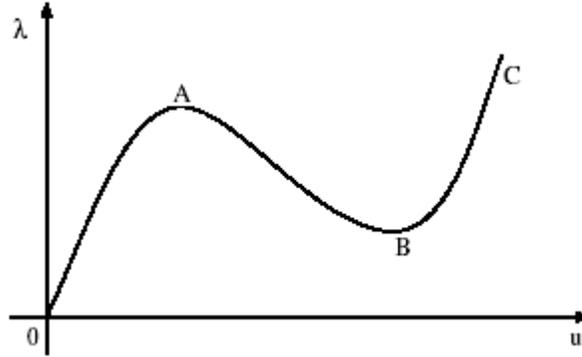


Figura 4.8 Curva carga-deslocamento.

onde  $R(\mathbf{u}, \lambda)$  é a equação de restrição imposta às variáveis.

Linearizando em relação as variáveis  $\mathbf{u}$  e  $\lambda$  as equações do sistema da expressão 4.90 usando a série de Taylor truncada, tem-se:

$$\mathbf{G}(\mathbf{u}_{i-1}, \lambda_{i-1}) = \mathbf{G}(\mathbf{u}_i, \lambda_i) + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{u}} \Delta \mathbf{u} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \lambda} \Delta \lambda \quad (4.91)$$

$$R(\mathbf{u}_{i-1}, \lambda_{i-1}) = R(\mathbf{u}_i, \lambda_i) + \frac{\partial R}{\partial \mathbf{u}} \Delta \mathbf{u} + \frac{\partial R}{\partial \lambda} \Delta \lambda \quad (4.92)$$

onde

$$\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \lambda} = \frac{\partial (\mathbf{F}(\mathbf{u}) - \lambda \mathbf{P})}{\partial \lambda} = -\mathbf{P}$$

definindo-se

$$\mathbf{K}_T = \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{u}}, \quad \mathbf{R}_{T_u} = \frac{\partial R}{\partial \mathbf{u}}, \quad R_{T_\lambda} = \frac{\partial R}{\partial \lambda}$$

chega-se ao sistema de equações abaixo que permite obter a curva OABC da figura 4.8 por completo.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_T & -P \\ \mathbf{R}_{T_u} & R_{T_\lambda} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{u} \\ \Delta \lambda \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{G} \\ \Delta R \end{Bmatrix} \quad (4.93)$$

Da formulação geral, expressão 4.93, para problemas não lineares podem surgir diferentes métodos para a solução do problema, variando-se apenas a definição da função de restrição. Entre estes métodos podem-se citar o Método de Controle de Deslocamento (Batoz e Dhat, 1979), os diversos Métodos de Comprimento de Arco (Riks, 1979, Ramm, 1981, Crisfield, 1981), o Método do Controle Generalizado de Deslocamentos (Yang e Kuo, 1994) e o Método de Incremento Constante do Trabalho Externo (Bathe e Dvorkin, 1983).

Para a solução através do controle de carga basta fixar o fator de carga em cada passo:

$$R = \lambda - \bar{\lambda} = 0 \quad (4.94)$$

Para a solução através do controle de deslocamentos supõe-se um determinado componente do vetor de deslocamentos fixado no passo corrente:

$$R = u_i - \bar{u}_i = 0. \quad (4.95)$$

O método de Newton Raphson com controle de carga não permite ultrapassar os pontos limites de carga, que podem ser considerados efetuando um correto controle de deslocamentos. Este, por sua vez, não permite descrever fenômenos como o *snap-back*

(ponto limite de deslocamentos). Os demais métodos (comprimento de arco, controle generalizado de deslocamentos, etc.) são mais aptos a descrever relações gerais entre carga e deslocamento.

Diversas opções de métodos de solução estão disponíveis no programa FEMOOP. Os problemas de viga mista com não-linearidade física e deslizamento na interface, no entanto, apresentam um padrão de comportamento que, conforme se verá no capítulo de exemplos, permite a utilização do controle de deslocamentos até valores de carga última da estrutura. Por esta razão os exemplos apresentados neste trabalho utilizam o método de solução de Newton-Raphson com controle de deslocamentos como ferramenta de solução do problema não-linear.

## EXEMPLOS

### 5.1 INTRODUÇÃO

Nesta seção são resolvidos alguns exemplos de vigas mistas com interação parcial de forma a validar as implementações feitas neste trabalho.

Primeiramente resolve-se um problema de viga mista simplesmente apoiada, uniformemente carregada, com relação tensão-deformação dos materiais linear e também linear a relação carga-deslizamento da conexão. Com estas considerações, pode-se utilizar o processo de solução analítica da equação diferencial de Newmark para a determinação da solução exata do problema, e posteriormente comparar com a solução numérica utilizando os elementos implementados neste trabalho.

Uma solução exata para um problema igual ao descrito no parágrafo anterior foi usada por Dall’Asta e Zona (2004) para verificar problemas de convergência e oscilação de resultados em diferentes tipos de elementos baseados em deslocamentos. Em seu trabalho os autores cunharam o termo *slip locking* (travamento ao deslizamento) para descrever este tipo de problema de convergência. Usando o mesmo problema utilizado por estes autores são verificados os elementos implementados no capítulo 4 quanto ao problema de *slip locking*.

Em seguida, resolvem-se dois problemas de vigas mistas contínuas com interação parcial, com dois vãos simétricos e três apoios. Os dois exemplos foram tratados por outros autores em trabalhos anteriores, nos quais são fornecidas respostas que serão utilizadas na

comparação da análise numérica realizada usando os elementos implementados neste trabalho.

Por último, resolve-se um problema de treliça mista com interação parcial, para ilustrar um caso onde o uso do elemento de interface seria essencial na determinação da solução do problema, não sendo possível empregar o elemento finito com deslizamento.

Para facilitar a identificação dos elementos implementados no capítulo 4 serão definidos os nomes, SLIPBEAM, para o elemento finito com deslizamento, INTERFACE, para o elemento de interface, e BEAM2D, para o elemento unidimensional de barra usado acima e abaixo do elemento INTERFACE.

## 5.2 COMPARAÇÃO COM SOLUÇÃO ANALÍTICA DE NEWMARK

A solução exata do problema da figura 5.1 pode ser dada pela solução da equação diferencial de Newmark, desde que sejam consideradas leis constitutivas lineares para os materiais da seção mista e também uma relação linear entre a força cortante por unidade de comprimento versus deslizamento na conexão.

$$\chi'' - \alpha^2 \chi = \frac{-q}{(EI)_{free}} - \alpha^2 \frac{M}{(EA)_{full}} - \frac{Kh\varepsilon_{sh}}{(EI)_{free}} \quad (5.1)$$

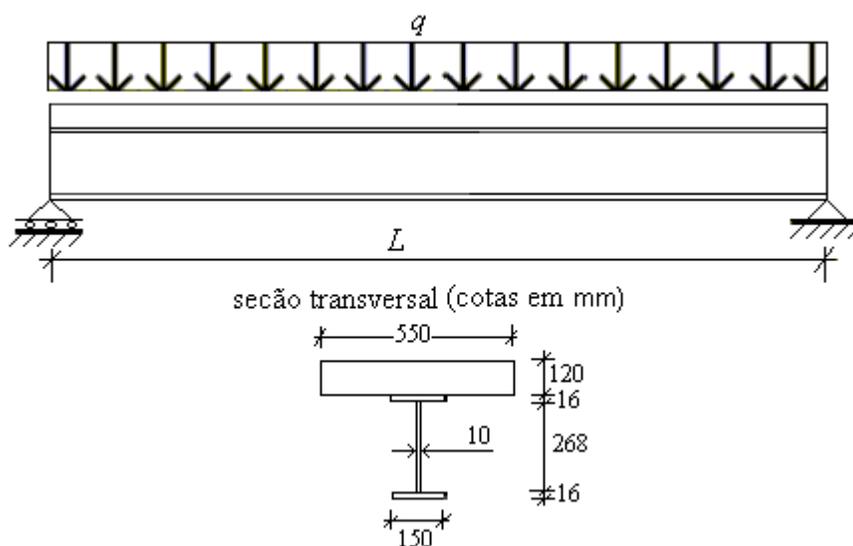


Figura 5.1 Viga mista uniformemente carregada.

Substituindo a expressão da variação do momento ao longo do eixo da viga mista na equação 5.1 chega-se à equação diferencial abaixo:

$$\chi'' - \alpha^2 \chi = -\frac{q}{(EI)_{free}} + \alpha^2 \frac{q}{2(EA)_{full}} (x^2 - Lx).$$

A solução da equação diferencial acima é dada pela soma da solução da equação homogênea mais a solução particular:

$$\chi(x) = \underbrace{C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{-\alpha x}}_{\text{solução homogênea}} + \underbrace{\frac{q}{\alpha^2 (EI)_{free}} - \frac{q}{\alpha^2 (EI)_{full}} + \frac{qL}{2(EI)_{full}} x - \frac{q}{2(EI)_{full}} x^2}_{\text{solução particular}} \quad (5.2)$$

As constantes  $C_1$  e  $C_2$  da equação 5.2 são determinadas impondo as condições de contorno de curvatura nula ( $\chi(0) = 0$  e  $\chi(L) = 0$ ) nas extremidades da viga analisada.

$$C_1 = Q \left( \frac{1 - e^{-\alpha L}}{e^{\alpha L} - e^{-\alpha L}} \right) \quad \text{e} \quad C_2 = Q \left( \frac{1 - e^{\alpha L}}{e^{-\alpha L} - e^{\alpha L}} \right) \quad \text{onde} \quad Q = \frac{q}{\alpha^2 (EI)_{full}} - \frac{q}{\alpha^2 (EI)_{free}}$$

Substituindo  $\chi(x)$  por  $-v''(x)$  e integrando duas vezes a equação diferencial em relação à variável  $x$ , chega-se à equação da deformada na direção dos deslocamentos transversais da viga mista analisada.

$$v'(x) = -\int \chi(x) dx = -C_1 \frac{e^{\alpha x}}{\alpha} + C_2 \frac{e^{-\alpha x}}{\alpha} + C_3 + \left( \frac{q}{\alpha^2 (EI)_{full}} - \frac{q}{\alpha^2 (EI)_{free}} \right) x - \frac{qL}{4(EI)_{full}} x^2 + \frac{q}{6(EI)_{full}} x^3$$

Devido à simetria da viga analisada e do carregamento em relação ao eixo vertical passando pelo meio do vão, tem-se a condição de rotação nula ( $v'(\frac{L}{2}) = 0$ ) neste ponto. Impondo esta condição determina-se a constante  $C_3$ .

$$C_3 = C_1 \frac{e^{\frac{\alpha L}{2}}}{\alpha} - C_2 \frac{e^{-\frac{\alpha L}{2}}}{\alpha} - Q \frac{L}{2} + \frac{qL^3}{24(EI)_{full}} \quad \text{onde } C_1, C_2 \text{ e } Q \text{ são definidos anteriormente.}$$

Integrando  $v'(x)$  em relação a variável  $x$ , tem-se:

$$v(x) = \int v'(x)dx = -C_1 \frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2} - C_2 \frac{e^{-\alpha x}}{\alpha^2} + C_3 x + C_4 + \left( \frac{q}{2\alpha^2 (EI)_{full}} - \frac{q}{2\alpha^2 (EI)_{free}} \right) x^2 - \frac{qL}{12(EI)_{full}} x^3 + \frac{q}{24(EI)_{full}} x^4 \quad (5.3)$$

Impondo a condição de contorno de deslocamento vertical nulo ( $v(0) = 0$ ) em um dos apoios da viga analisada, determina-se a constante  $C_4$  chegando a equação final da deformada dos deslocamentos transversais da viga mista da figura 5.1.

$$C_4 = \frac{1}{\alpha^2} (C_1 + C_2) \quad \text{onde } C_1 \text{ e } C_2 \text{ são definidos anteriormente.}$$

A equação do deslizamento ao longo da interface da viga da figura 5.1 pode ser determinada através da equação

$$M = \chi(EI)_{free} + Fh, \quad (5.4)$$

dada no capítulo 2 no desenvolvimento da equação diferencial de Newmark. Derivando esta equação em relação à variável  $x$ , e como é considerado que a curva força-deslizamento é linear ( $F' = Ks$ ), tem-se:

$$M' = \chi'(EI)_{free} + F'h = \chi'(EI)_{free} + Khs, \text{ logo}$$

$$s(x) = \frac{M' - \chi'(EI)_{free}}{Kh}. \quad (5.5)$$

Substituindo na equação 5.5 a derivada do momento atuante na viga, mais a derivada da curvatura, tem-se a equação para o deslizamento relativo:

$$s(x) = \frac{\alpha(EI)_{free}}{Kh} (C_2 e^{-\alpha x} - C_1 e^{\alpha x}) + \frac{qh(EA)^*}{K(EI)_{full}} \left( \frac{L}{2} - x \right) \quad (5.6)$$

Na equação 5.6,  $C_1$  e  $C_2$  são dados anteriormente.

A solução exata do problema da figura 5.1 para os deslocamentos transversais, equação 5.3, é formada por um polinômio de quarta ordem e duas funções exponenciais. Já a solução aproximada obtida pelo método numérico é dada, em cada elemento da discretização, por polinômios obtidos através das funções de interpolação dos deslocamentos nodais do elemento. Sendo assim, para os elementos implementados neste trabalho a solução numérica para os deslocamentos transversais será formada por polinômios cúbicos.

Do mesmo modo a solução exata do problema da figura 5.1 para o deslizamento, equação 5.6, é formada pela soma de uma função linear e duas funções exponenciais. Já a solução aproximada obtida pelo método numérico é dada, em cada elemento da discretização, por polinômios obtidos através das funções de interpolação dos deslocamentos nodais do elemento. Sendo a equação do deslizamento definida por duas parcelas, uma devido aos deslocamentos axiais e outra devida à derivada dos deslocamentos transversais, o deslizamento será definido em cada elemento SLIPBEAM por polinômios quadráticos.

Portanto, para ambas as equações do deslizamento e deslocamentos transversais a solução numérica será sempre uma aproximação da solução real, sendo tão mais próxima da solução exata quanto maior a densidade da malha.

A solução exata do problema da figura 5.1 para os deslocamentos transversais e deslizamentos na interface, dada pela equação diferencial de Newmark, e as soluções numéricas aproximadas usando os elementos implementados neste trabalho são apresentadas nas figuras 5.3 a 5.6, onde são mostrados a configuração deformada da viga mista e o deslizamento ao longo da interface. Foram utilizados na análise numérica dois

casos de discretização, com intuito de avaliar a convergência do método numérico com o aumento da discretização do contínuo.

Para a solução exata do problema da figura 5.1 usando a equação diferencial de Newmark foram considerados,  $q = 80 \text{ KN/m}$ ,  $L = 6\text{m}$  e os eixos de referência para as seções acima e abaixo da interface de deslizamento da viga mista passando pelo centro geométrico de cada seção, como mostra a figura 5.2.

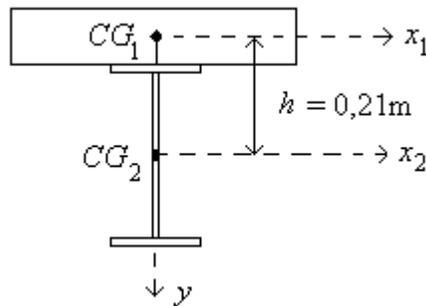


Figura 5.2 Eixos de referência das seções.

Os valores numéricos utilizados na solução para as propriedades físicas dos materiais são dados pelas expressões abaixo:

$$E_c = 5700\text{MPa}$$

$$E_s = 205000\text{MPa}$$

$$K = 120\text{MPa/m} \tag{5.7}$$

Nas expressões 5.7,  $E_c$  é o módulo de deformação do concreto,  $E_s$  é o módulo de deformação do aço e  $K$  é o valor que caracteriza a rigidez da conexão na interface. Estes valores numéricos não necessariamente representam a realidade e são usados apenas para a determinação da solução exata do problema através da equação de Newmark, e posterior comparação com a solução numérica.

Com os valores numéricos dados acima e a posição dos eixos de referência da seção mista definida, determinam-se:

$I_1$  = inércia da seção acima da interface de deslizamento em relação ao eixo 1 ,

$I_2$  = inércia da seção abaixo da interface de deslizamento em relação ao eixo 2 ,

$$(EI)_{free} = E_c I_1 + E_s I_2 ,$$

$$(EA)^* = \frac{(A_c E_c)(A_s E_s)}{A_c E_c + A_s E_s} ,$$

$$(EI)_{full} = (EI)_{free} + h^2 (EA)^* ,$$

$$\alpha^2 = \frac{K(EI)_{full}}{(EA)^*(EI)_{free}} . \quad (5.8)$$

Na análise numérica realizada para a obtenção da resposta do problema da viga mista analisada, apresentada nas figuras 5.3 e 5.4, foi utilizado o elemento com deslizamento (SLIPBEAM), com dez graus de liberdade, funções cúbicas para interpolação dos deslocamentos transversais e quadráticas para os deslocamentos axiais. Sendo utilizado para a determinação dos esforços internos integração numérica com três pontos de Gauss.

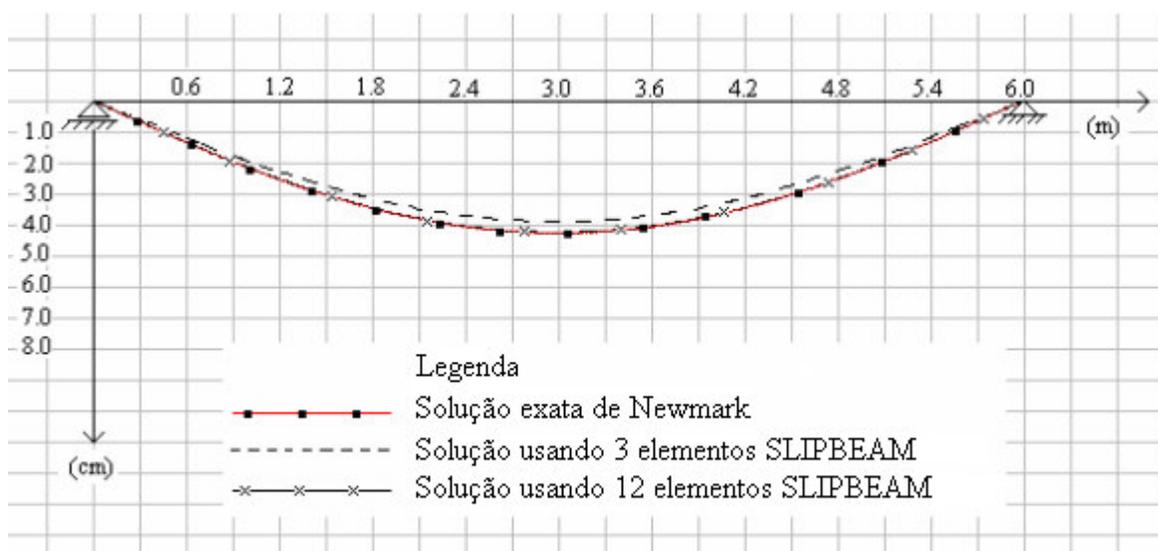


Figura 5.3 Deformada transversal da viga mista.

A tabela 5.1 a seguir mostra os valores numéricos obtidos para o deslocamento vertical do meio do vão da viga mista analisada, segundo a equação diferencial de Newmark e o método numérico utilizando o elemento SLIPBEAM. Também é mostrado o erro relativo das aproximações numéricas para as duas malhas usadas.

Tabela 5.1 Deslocamento vertical no meio do vão (valores em cm).

Solução exata usando equação de Newmark	Método numérico	
	3 elementos	12 elementos
4,283	3,896	4,2603
Erro (%)	9,04	0,53

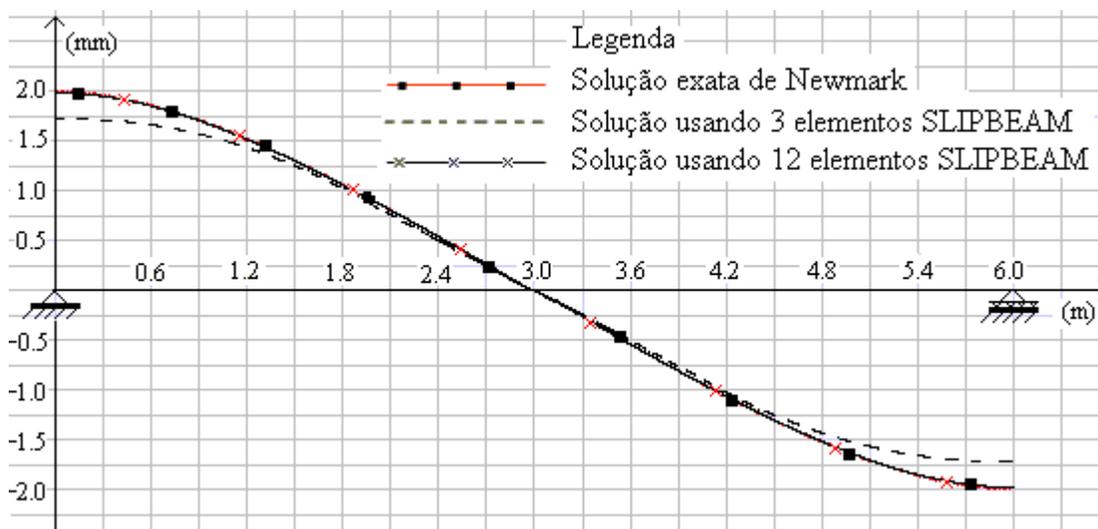


Figura 5.4 Deslizamento na interface da viga mista.

Na análise numérica realizada para a obtenção da resposta da viga mista analisada, representada nas figuras 5.5 e 5.6, foi utilizado o elemento de interface (INTERFACE) em conjunto com um elemento unidimensional de viga (BEAM2D).

O elemento de interface utilizado tem sua formulação descrita no capítulo 4, onde se define este elemento de interface retangular com espessura nula, doze graus de liberdade, funções polinomiais para interpolações independentes dos deslocamentos nodais da face superior e inferior. São usados polinômios cúbicos para os deslocamentos transversais, e

lineares para os deslocamentos axiais. Sendo utilizado para a determinação dos esforços interno integração numérica com a distribuição de quatro pontos de Gauss

Já o elemento unidimensional de viga a ser associado ao elemento de interface foi desenvolvido em trabalhos anteriores. Trata-se de um elemento de barra de dois nós, com três graus de liberdade por nó e funções polinomiais para interpolação dos deslocamentos nodais. São usados, para as funções de interpolação, polinômios cúbicos para os deslocamentos transversais, e lineares para os deslocamentos axiais. Sendo utilizado para a determinação dos esforços interno integração numérica com a distribuição de três pontos de Gauss.

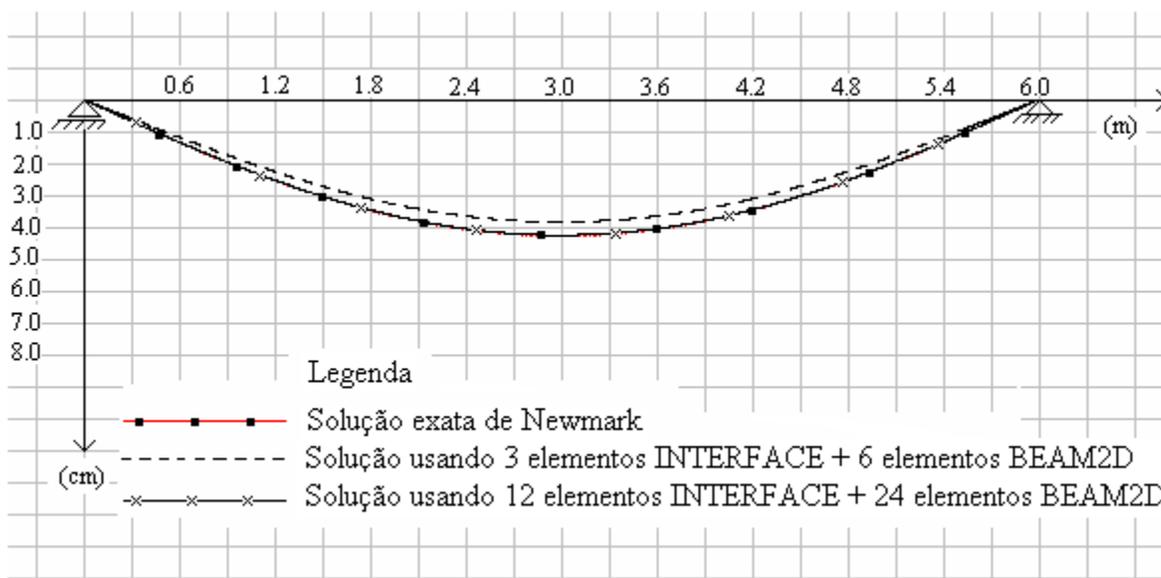


Figura 5.5 Deformada transversal da viga mista.

A tabela 5.2 é análoga à tabela 5.1 com a análise numérica realizada usando o elemento INTERFACE em conjunto com o elemento BEAM2D.

Tabela 5.2 Deslocamento vertical no meio do vão (valores em cm).

Solução exata usando equação de Newmark	Método numérico	
	3 elementos	12 elementos
4,283	3,842	4,257
Erro (%)	10,30	0,61

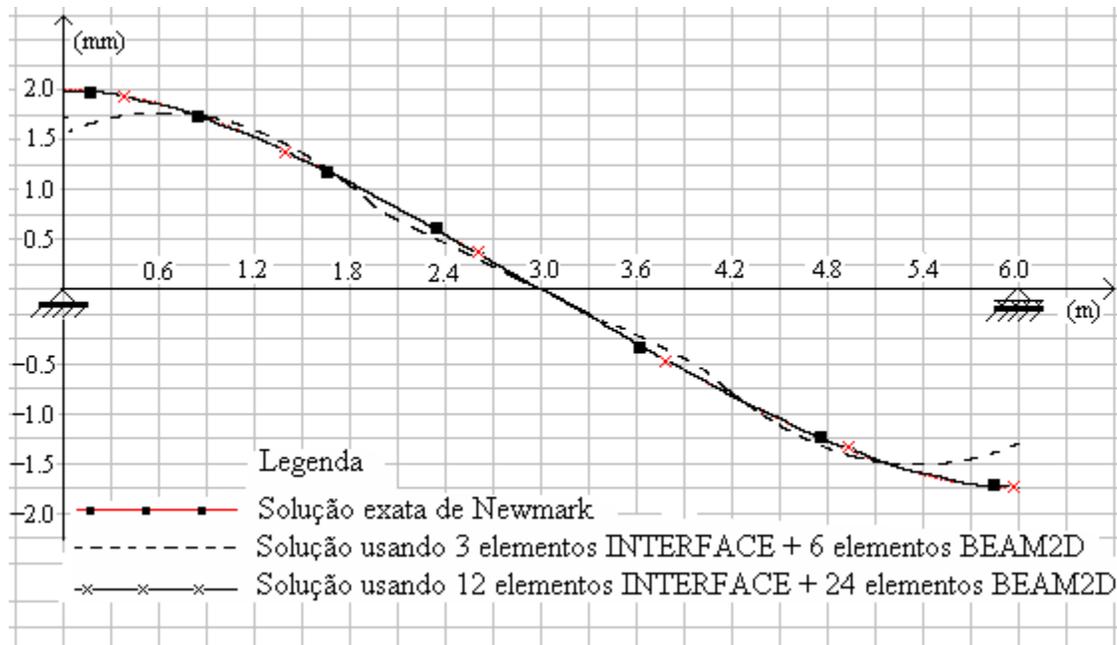


Figura 5.6 Deslizamento na interface da viga mista.

A diferença entre as respostas dadas pelas soluções numéricas para os diferentes elementos, SLIPBEAM e INTERFACE + BEAM2D, tem como principal motivo a diferença entre os polinômios usados para a interpolação dos deslocamentos axiais destes elementos, comentadas anteriormente.

### 5.3 PROBLEMAS NUMÉRICOS EM ELEMENTOS COM DESLIZAMENTO

Dall'Asta e Zona (2004b) afirmam que as funções de interpolação dos deslocamentos nodais devem ser escolhidas criteriosamente, uma vez que se as aproximações dos campos de deslocamento axial e de rotação não forem consistentes, então o erro da solução utilizando o método dos elementos finitos depende fortemente da rigidez da conexão, ocorrendo uma oscilação no deslizamento e aproximação ruim da curvatura para valores elevados da rigidez da conexão. Os autores definem como “travamento ao deslizamento” (*slip locking*) este tipo de problema de convergência.

Para verificar o *slip locking* em elementos com diferentes polinômios de interpolação dos deslocamentos nodais (ver tabela 5.3), Dall'Asta e Zona (2004b) resolvem o exemplo da figura 5.7 para dois valores de rigidez da conexão,  $\alpha L = 1$  e  $\alpha L = 10$ , onde  $L = 30$  m é o vão da viga simplesmente apoiada da figura 5.7, e  $\alpha$  é como definido na

expressão 5.3. Para o exemplo são adotadas variações lineares para as curvas tensão-deformação dos materiais e força-deslizamento na interface. São adotados os módulos de elasticidade,  $E_c = 30500\text{MPa}$  e  $E_s = 200000\text{MPa}$ , respectivamente para o concreto e aço.

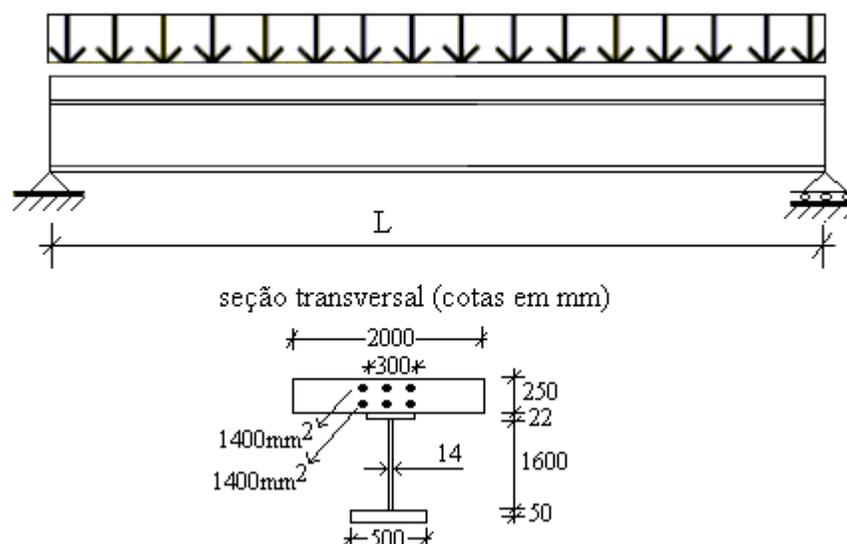


Figura 5.7 Viga mista uniformemente carregada (Dall'Asta e Zona, 2004).

Nas respostas, dadas pelas figuras 5.8 a 5.11, da avaliação do problema da figura 5.7 foram incluídos além dos elementos implementados por Dall'Asta e Zona (2004b) os elementos, SLIPBEAM e INTERFACE associado ao elemento BEAM2D.

Tabela 5.3 Diferentes elementos avaliados.

Elemento	Grau do polinômio de interpolação dos deslocamentos nodais	
	Axiais	Transversais
8DOF	1	3
10DOF	2	3
16DOF	4	5
SLIPBEAM	2	3
INTERFACE	1	3
BEAM2D	1	3

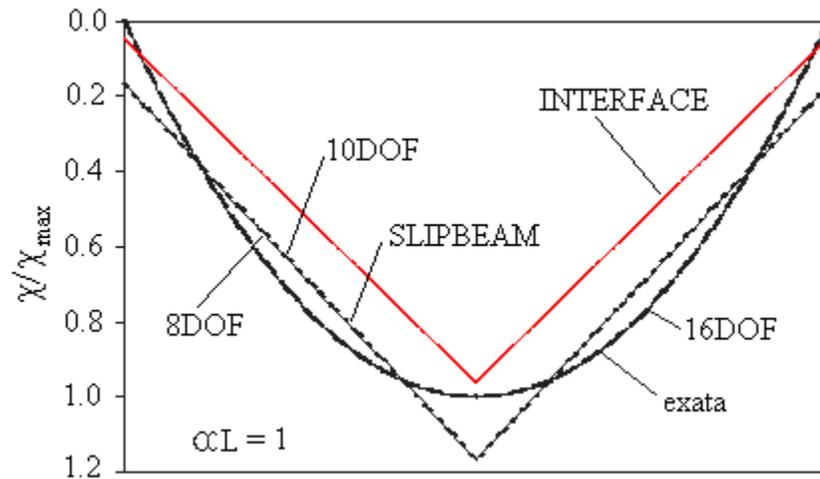


Figura 5.8 Variação da curvatura ao longo do eixo da viga mista.

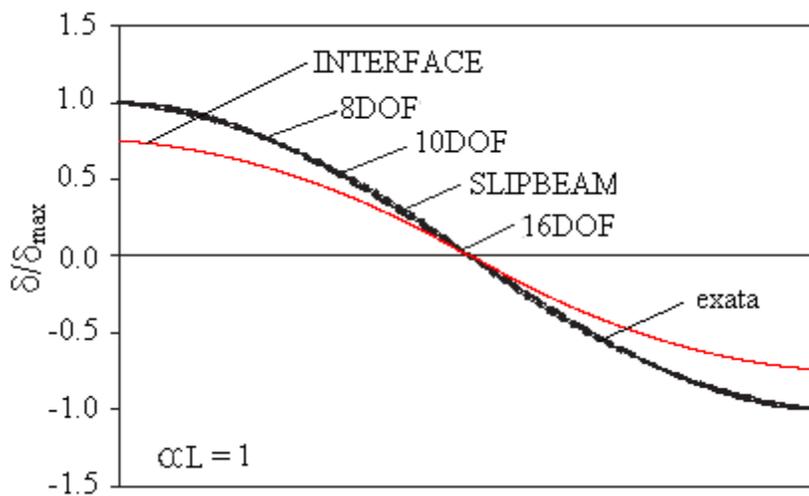


Figura 5.9 Variação do deslizamento ao longo da interface da viga mista.

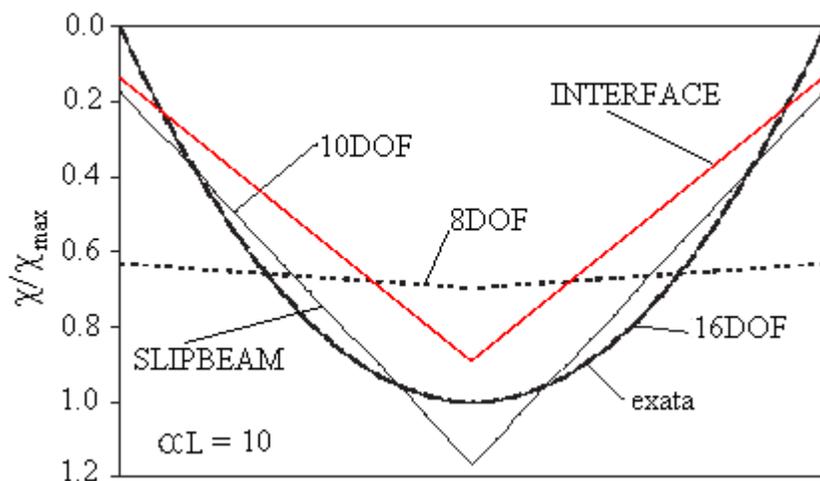


Figura 5.10 Variação da curvatura ao longo do eixo da viga mista.

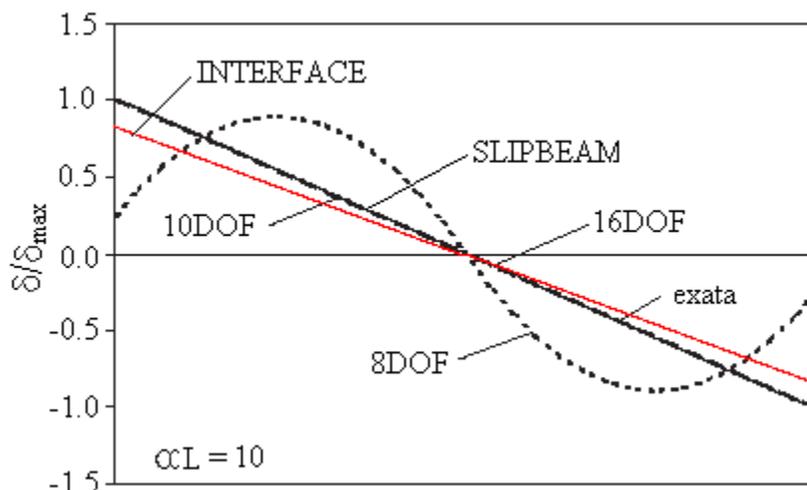


Figura 5.11 Variação do deslizamento ao longo da interface da viga mista.

Para todos os diferentes elementos mostrados nas figuras 5.8 a 5.11 foram utilizados dois elementos para a simulação.

Pelas figuras 5.8 a 5.11 observa-se que para elementos com grau do polinômio de interpolação dos deslocamentos axiais maior ou igual a dois e deslocamentos transversais consistentes com aquele utilizado para os deslocamentos axiais, ou seja, um grau a mais, não é verificado problema de travamento ao deslizamento.

Já o elemento 8DOF para elevada rigidez da conexão,  $\alpha L = 10$ , observa-se na figura 5.10 valores irrealistas para o momento nos apoios da viga, bem como uma distribuição praticamente constante deste ao longo da viga. Já na figura 5.11, observa-se uma forte oscilação da equação do deslizamento em torno da solução exata do problema.

Na solução do problema usando o elemento INTERFACE associado ao elemento BEAM2D não é verificado problema de travamento ao deslizamento nas respostas dadas pelas figuras 5.8 a 5.11, no entanto percebe-se uma convergência mais lenta em relação aos elementos que não apresentam problemas de travamento ao deslizamento. Isto pode ser explicado devido à aproximação mais pobre dos deslocamentos axiais, já que o elemento BEAM2D utiliza polinômios lineares, e os outros utilizam polinômios no mínimo quadráticos. É fato conhecido que elementos de viga do tipo Euler-Bernoulli com distribuição linear dos deslocamentos axiais, como o elemento BEAM2D, podem apresentar problemas de convergência por deficiência na representação dos polinômios (Crisfield, 1991).

É importante salientar que aumentando a discretização da malha de elementos finitos todos os elementos avaliados anteriormente convergem para a solução exata do problema da figura 5.7. Deve-se observar que o elemento SLIPBEAM é perfeitamente equivalente ao elemento 10DOF de Dall'Asta e Zona (2004b), diferindo apenas na forma de integração na seção transversal, que neste último foi um modelo de fibras.

## 5.4 COMPARAÇÃO COM RESULTADOS DA LITERATURA

Como forma de validar as implementações desenvolvidas neste trabalho, são considerados dois exemplos de vigas mistas com interação parcial usando, para obter a solução numérica do problema, o elemento finito com deslizamento (SLIPBEAM) e o elemento de interface (INTERFACE) em conjunto com um elemento unidimensional de viga (BEAM2D). A comparação é feita através dos resultados de análise numérica realizada nos mesmos exemplos por outros autores.

### 5.4.1 Viga mista com três apoios uniformemente carregada

É apresentado neste item a solução numérica do problema de viga mista com interação parcial apresentado na figura 5.14. O mesmo problema foi resolvido por Dall'Asta e Zona (2004a) onde são definidas para as leis constitutivas dos materiais as curvas representadas na figura 5.15.

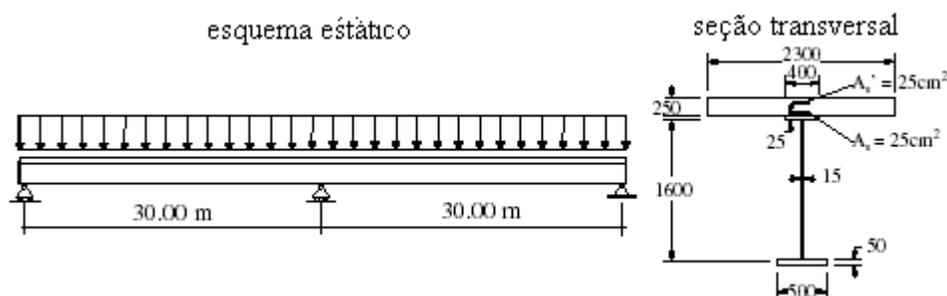


Figura 5.14 Viga mista com interação parcial (Dall'Asta e Zona, 2004a).

Na análise numérica do problema da figura 5.14, Dall'Asta e Zona (2004a) utilizam um elemento baseado em deslocamentos, com dez graus de liberdade. As funções

polinomiais utilizadas na interpolação dos deslocamentos nodais foram definidas em seu trabalho como sendo cúbicas para os deslocamentos transversais, e quadráticas para os deslocamentos axiais, ou seja, idênticas à formulação do elemento SLIPBEAM.

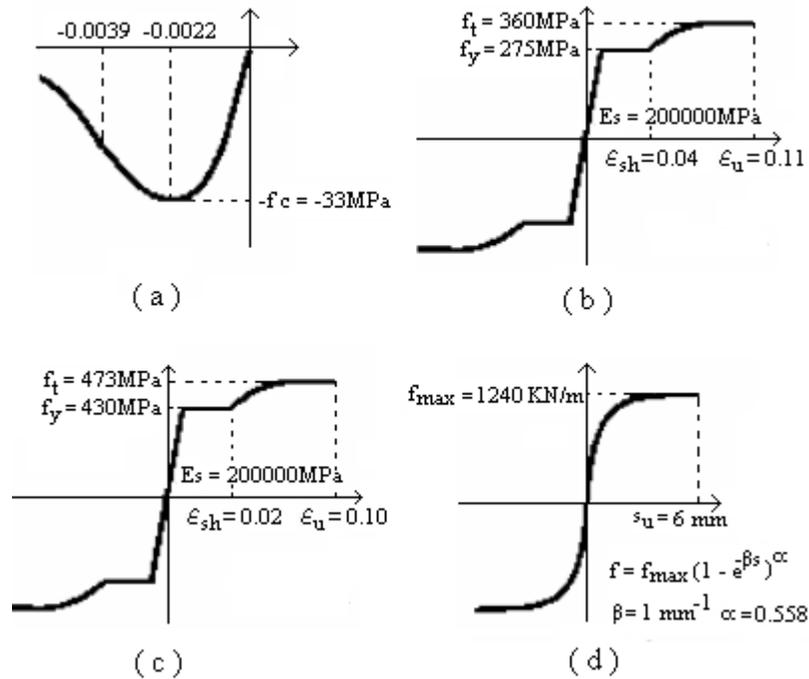


Figura 5.15 Leis constitutivas do concreto (a), aço (b), barras de reforço (c) e conexão da interface (d) (Dall'Asta e Zona, 2004a).

Os resultados numéricos do problema da figura 5.14 obtidos por Dall'Asta e Zona (2004a) e pelos elementos implementados neste trabalho são mostrados nas figuras, 5.17 para uma malha de oito elementos, 5.18 para uma malha de 12 elementos e 5.19 para uma malha de 16 elementos, onde são apresentadas as curvas que relacionam o carregamento aplicado ao deslocamento vertical do meio dos vãos da viga mista da figura 5.14.

Na análise numérica realizada usando os elementos implementados neste trabalho foram utilizadas as curvas tensão-deformação dos materiais apresentadas na figura 5.16. Estas curvas devem obedecer ao formato geral que define a relação tensão-deformação de um material definido no item 3.3 do capítulo 3, exceto para a relação força-deslizamento da interface. Ao comparar as curvas dos materiais utilizadas pelos diferentes autores (figura 5.15 e 5.16) percebe-se que os limites de tensão e deformação são os mesmos, porém as

curvas utilizadas para este trabalho são aproximações polinomiais das curvas utilizadas em Dall'Asta e Zona (2004a), a menos da curva que relaciona força-deslizamento que é mesma utilizada por Dall'Asta e Zona. Vale ressaltar que os autores não disponibilizaram as expressões analíticas das relações tensão-deformação e usaram modelo de fibras.

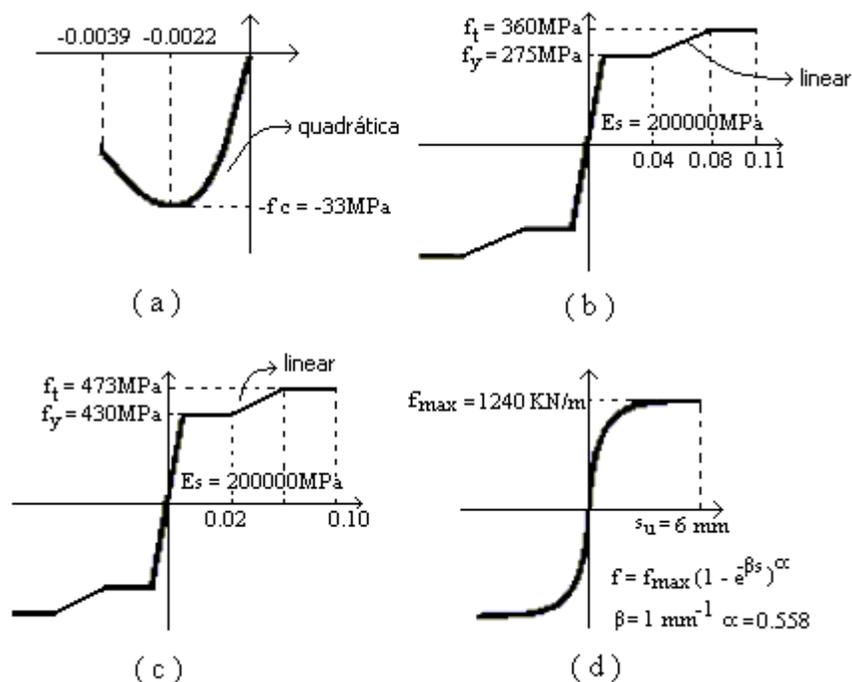


Figura 5.16 Leis constitutivas do concreto (a), aço (b), barras de reforço (c) e conexão da interface (d) utilizadas neste trabalho.

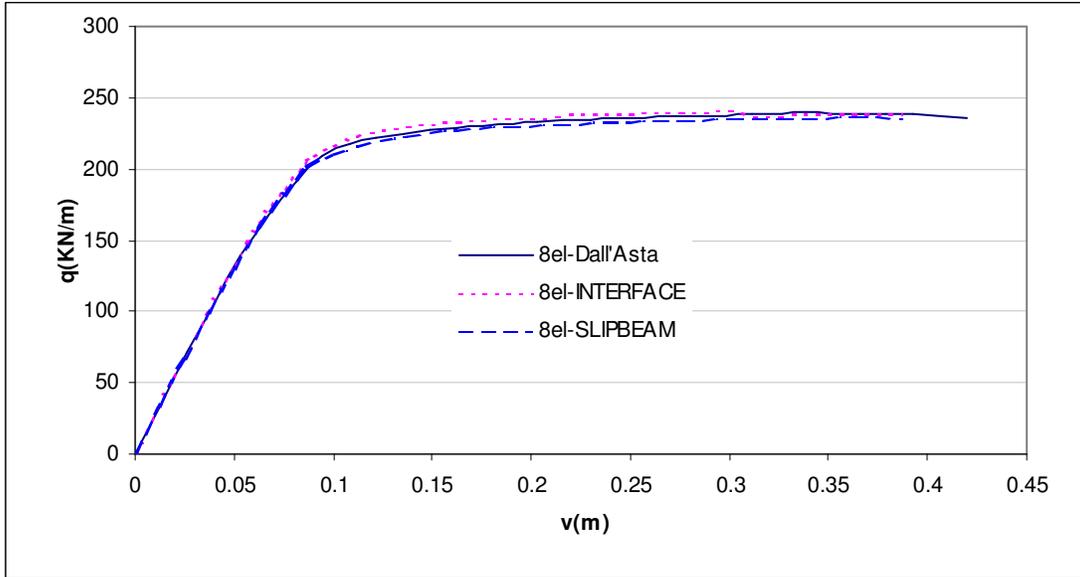


Figura 5.17 Curva carga-deslocamento para um ponto no meio dos vãos da viga mista

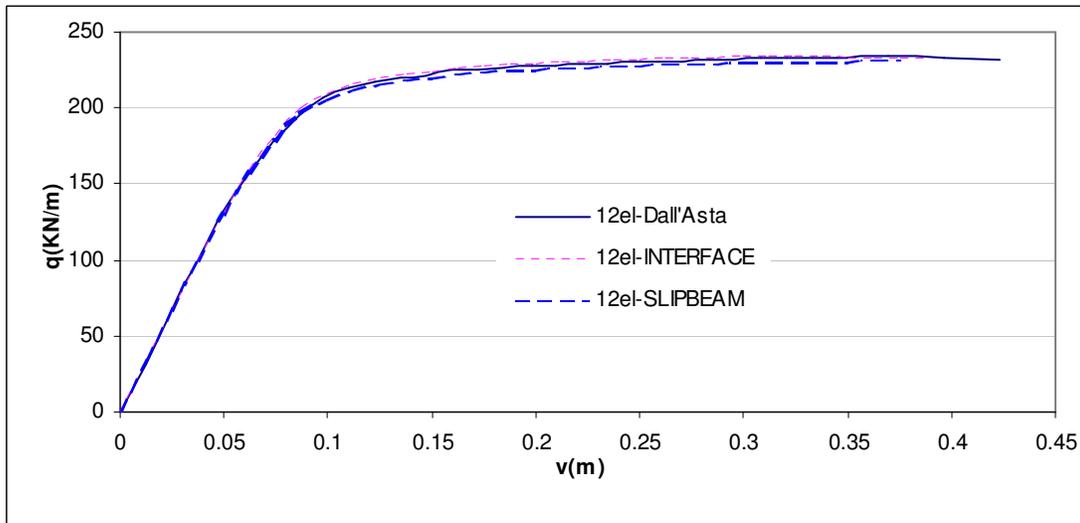


Figura 5.18 Curva carga-deslocamento para um ponto no meio dos vãos da viga mista

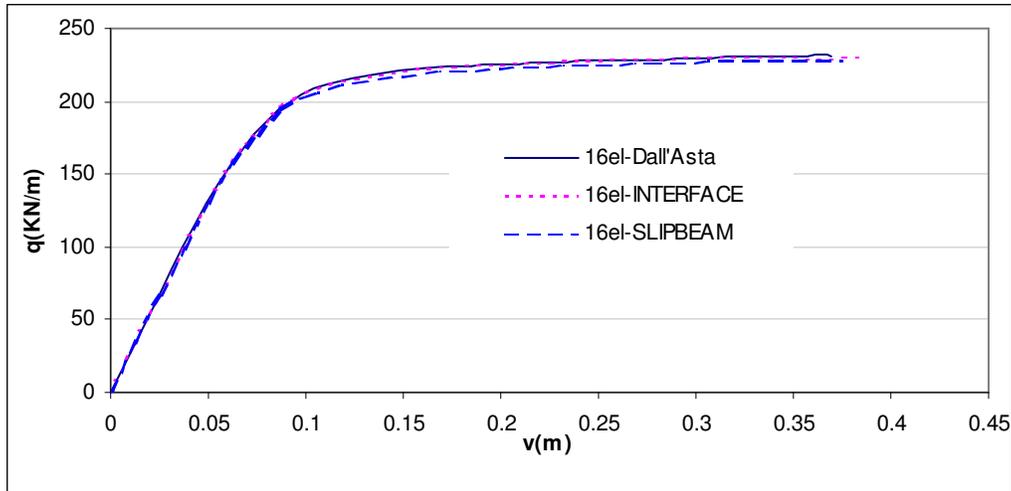


Figura 5.19 Curva carga-deslocamento para um ponto no meio dos vãos da viga mista

O elemento SLIPBEAM utilizado neste trabalho tem sua formulação apresentada no item 4.2.1 do capítulo 4. O elemento possui dez graus de liberdade e usa funções polinomiais para interpolação dos deslocamentos nodais, sendo usado polinômios cúbicos para os deslocamentos transversais, e quadráticos para os deslocamentos axiais.

O elemento INTERFACE utilizado neste trabalho tem sua formulação apresentada no item 4.2.2 do capítulo 4. Este elemento de interface retangular de espessura nula possui doze graus de liberdade e emprega funções polinomiais para interpolação independente dos deslocamentos nodais da face superior e inferior. São usados polinômios cúbicos para os deslocamentos transversais, e lineares para os deslocamentos axiais. Seu uso está condicionado a ação em conjunto com um elemento linear de viga de dois nós, com três graus de liberdade por nó e funções de interpolação polinomiais, sendo cúbicas para os deslocamentos transversais e lineares para os deslocamentos axiais.

Na determinação dos esforços internos foi utilizado integração numérica sendo usado quatro e três pontos de Gauss, respectivamente, para os elementos INTERFACE e SLIPBEAM.

As figuras 5.20 a 5.22 mostram a deformada transversal do vão simétrico da viga da figura 5.14, para os deslocamentos do meio do vão de 5.0 cm, 12.5 cm e 25.0 cm. As equações da deformada foram obtidas usando o elemento SLIPBEAM para malhas de oito, doze e dezesseis elementos.

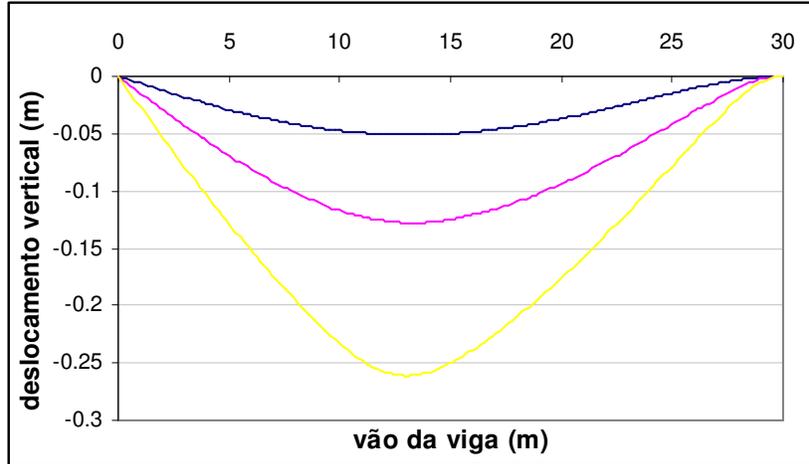


Figura 5.20 Deformada para malha de 8 elementos SLIPBEAM

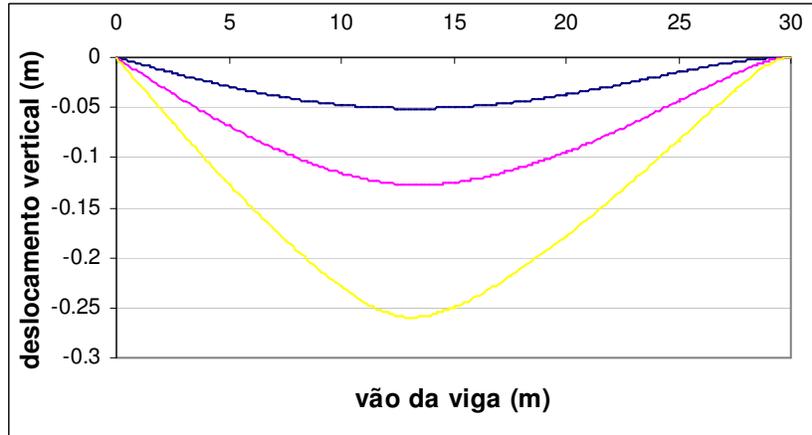


Figura 5.21 Deformada para malha de 12 elementos SLIPBEAM

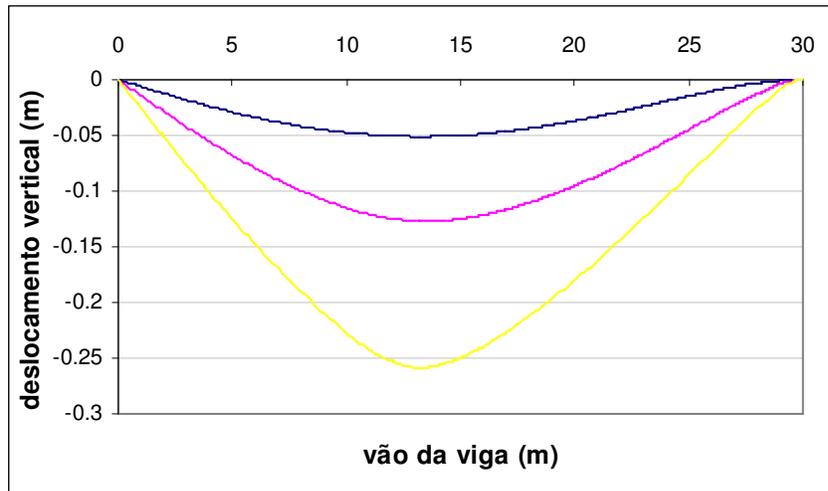


Figura 5.22 Deformada para malha de 16 elementos SLIPBEAM

As figuras 5.23 a 5.25 mostram o deslizamento ao longo do vão simétrico da viga mista da figura 5.14, para os deslocamentos do meio do vão de 5.0 cm, 12.5 cm e 25.0 cm. As equações do deslizamento foram obtidas usando o elemento SLIPBEAM para malhas de oito, doze e dezesseis elementos.

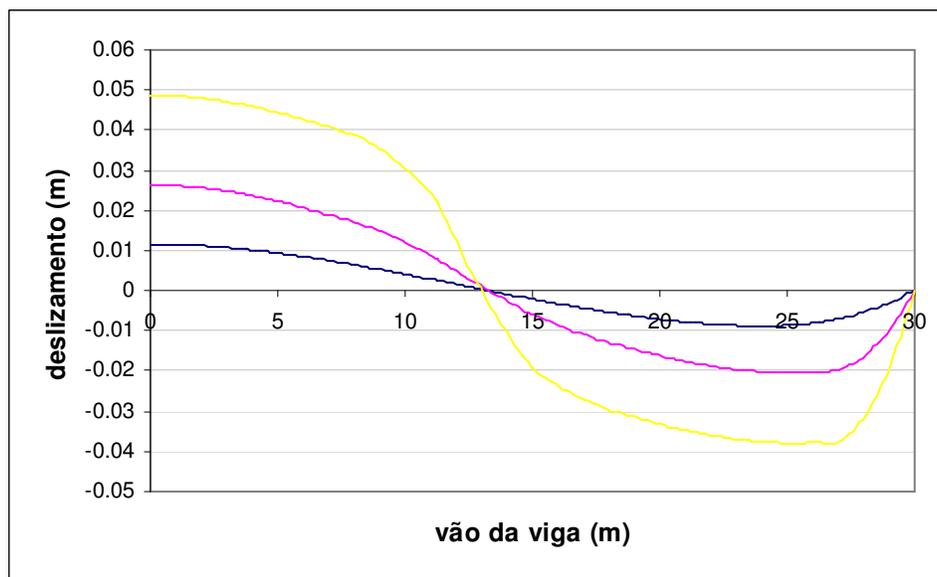


Figura 5.23 Deslizamento ao longo do vão simétrico para malha de 8 elementos SLIPBEAM

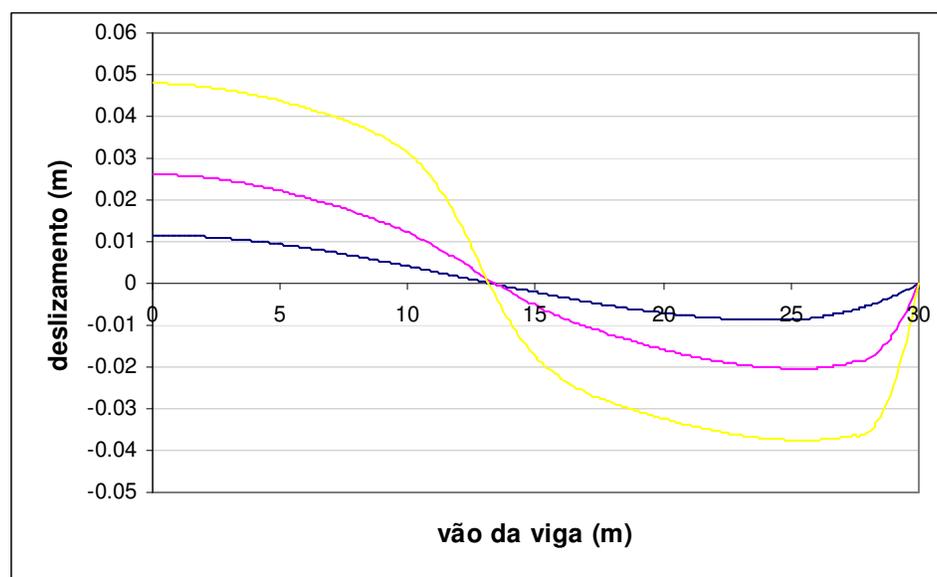


Figura 5.24 Deslizamento ao longo do vão simétrico para malha de 12 elementos SLIPBEAM

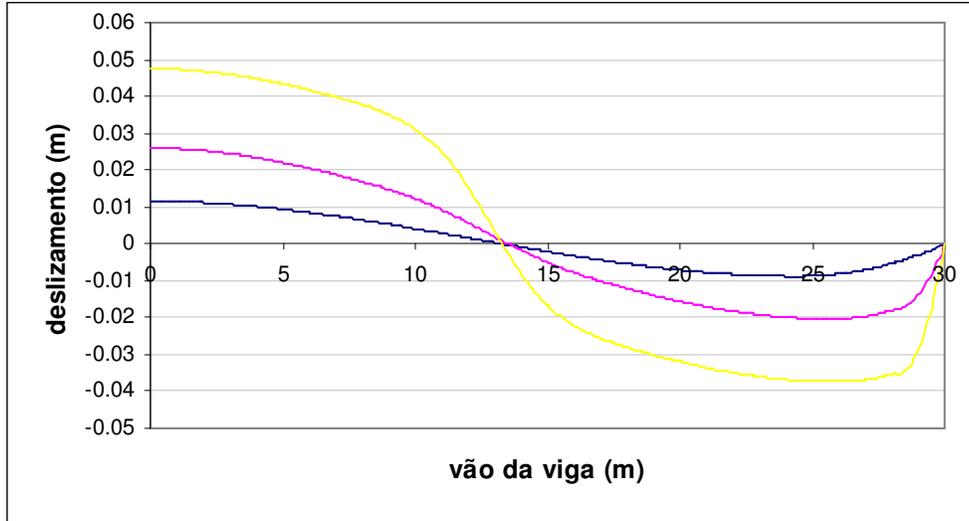


Figura 5.25 Deslizamento ao longo do vão simétrico para malha de 16 elementos SLIPBEAM

As figuras 5.26 a 5.28 mostram a deformada transversal do vão simétrico da viga da figura 5.14, para os deslocamentos do meio do vão de 5.0 cm, 12.5 cm e 25.0 cm. As equações da deformada foram obtidas usando o elemento INTERFACE para malhas de oito, doze e dezesseis elementos.

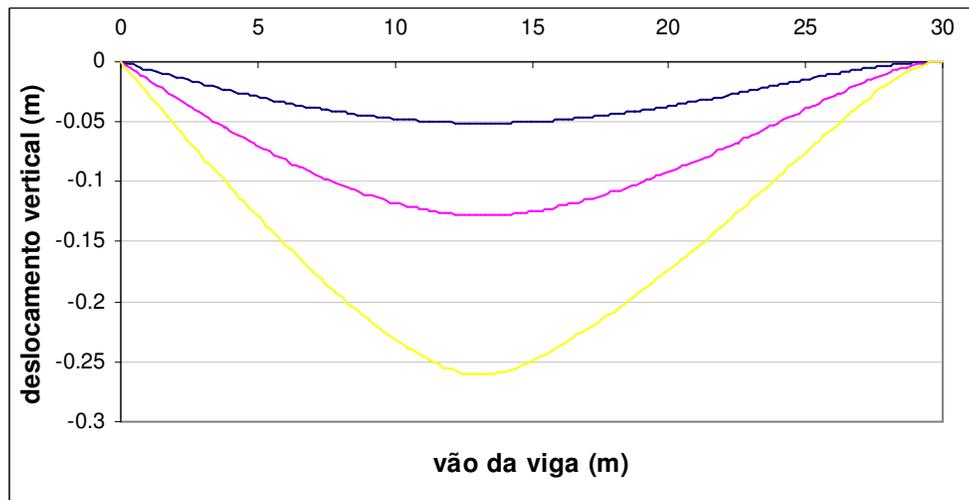


Figura 5.26 Deformada para malha de 8 elementos INTERFACE

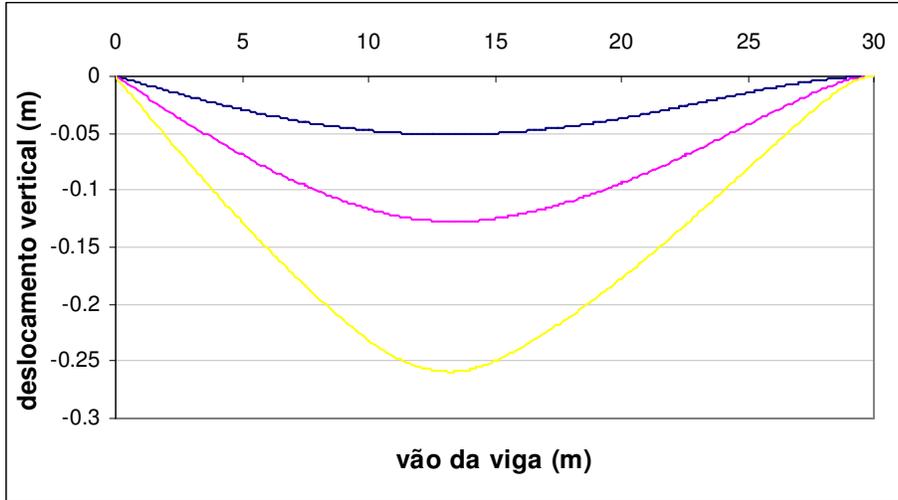


Figura 5.27 Deformada para malha de 12 elementos INTERFACE

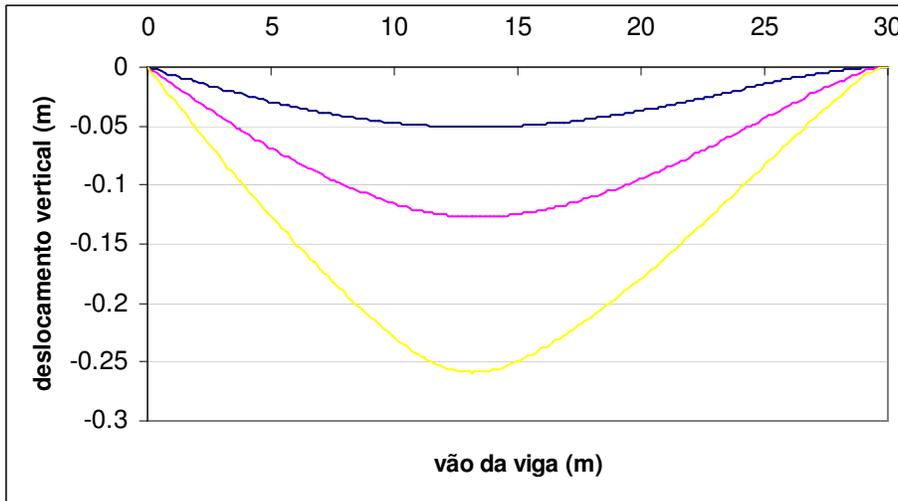


Figura 5.28 Deformada para malha de 16 elementos INTERFACE

As figuras 5.29 a 5.31 mostram o deslizamento ao longo do vão simétrico da viga mista da figura 5.14, para os deslocamentos do meio do vão de 5.0 cm, 12.5 cm e 25.0 cm. As equações do deslizamento foram obtidas usando o elemento INTERFACE para malhas de oito, doze e dezesseis elementos.

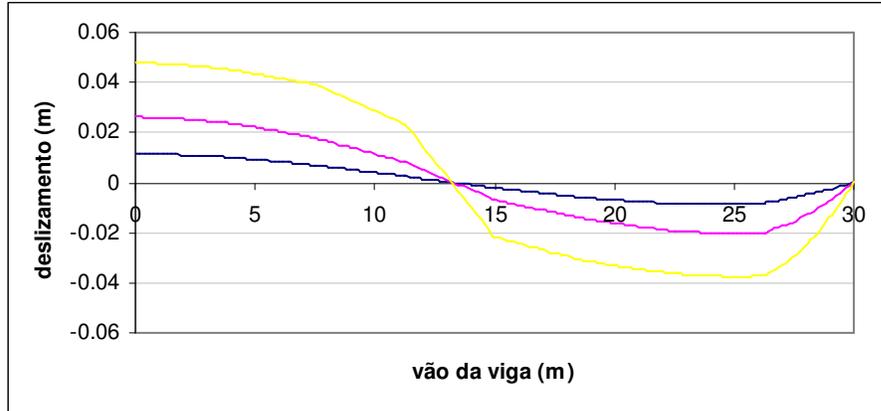


Figura 5.29 Deslizamento ao longo do vão simétrico para malha de 8 elementos INTERFACE

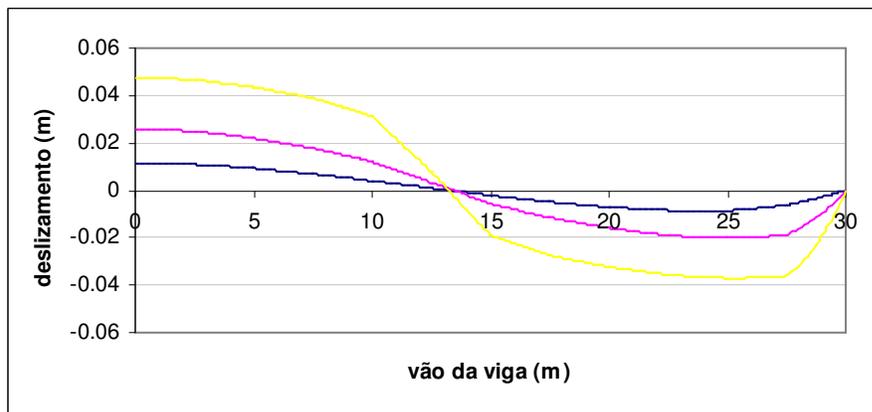


Figura 5.30 Deslizamento ao longo do vão simétrico para malha de 12 elementos INTERFACE

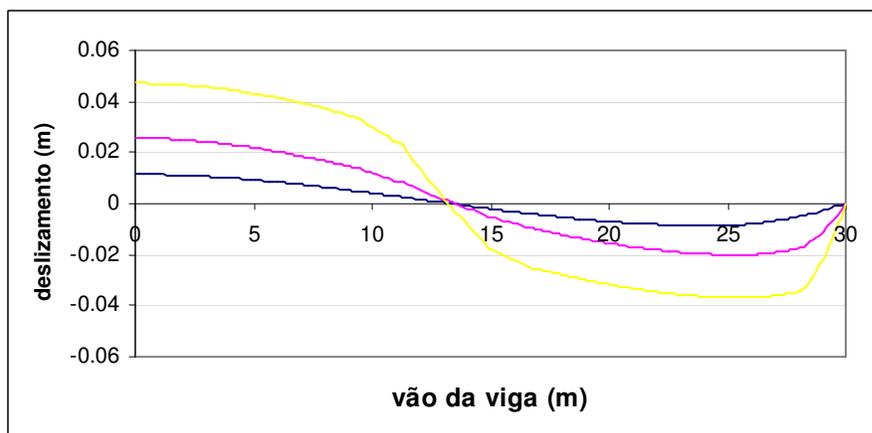


Figura 5.31 Deslizamento ao longo do vão simétrico para malha de 16 elementos INTERFACE

Como pode ser observado através das figuras 5.17 a 5.19, os resultados para os elementos implementados neste trabalho são praticamente idênticos aqueles fornecidos pelo elemento implementado por Dall'Asta e Zona (2004a). A pequena diferença que pode ser observada nas curvas das figuras 5.17 a 5.19 provavelmente pode ser explicada através das diferenças entre as curvas tensão-deformação dos materiais adotadas pelos diferentes autores, principalmente em relação à consideração do ramo descendente na resistência do concreto. Além disso, os modelos utilizados para o cálculo dos esforços resistentes da seção são diferentes: modelo de fibras, usado por Dall'Asta e Zona (2004a), e modelo analítico, usado neste trabalho. O modelo de fibras deve convergir para o mesmo resultado, mas não foi possível avaliar a densidade de fibras empregada pelos autores no trabalho original.

Na comparação das respostas fornecidas pelos elementos implementados neste trabalho, figura 5.17 a 5.19, percebe-se, apesar da pequena diferença, uma melhor convergência do elemento SLIPBEAM em relação ao elemento INTERFACE. Isto pode ser explicado devido à melhor aproximação dos deslocamentos axiais no primeiro caso.

#### 5.4.2 Viga mista com três apoios e carregamento concentrado simétrico

É apresentada neste item a solução numérica do problema de viga mista com interação parcial apresentada na figura 5.32. O mesmo problema foi resolvido por Salari e Spacone (2001) onde são definidas as leis constitutivas dos materiais representadas pelas curvas da figura 5.33.

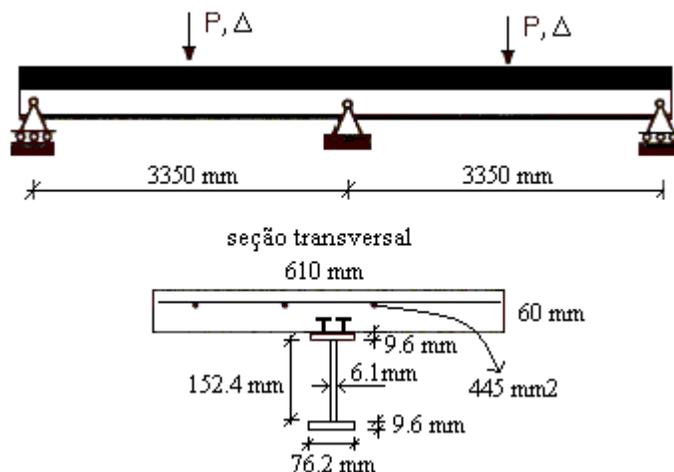


Figura 5.32 Viga mista com interação parcial (Salari e Spacone, 2001).

Na análise numérica do problema da figura 5.32, Salari e Spacone (2001) utilizam um elemento baseado em deslocamentos. Este elemento possui dez graus de liberdade e usa funções polinomiais na interpolação dos deslocamentos nodais, sendo cúbicas para os deslocamentos transversais, e quadráticas para os deslocamentos axiais.

Salari e Spacone (2001) assumem para o comportamento dos materiais as curvas definidas na figura 5.33 e definem a resistência do concreto a compressão como sendo  $f'_c = 47.6MPa$  e a sua deformação correspondente dada por  $\epsilon_{c0} = 0.0025$ . Para o aço assume-se a tensão de escoamento  $f_y = 296.5MPa$  e o módulo de deformação  $E_s = 2.04 \times 10^5 MPa$ , considerando uma taxa de amortecimento para a curva de 0.005. Para a conexão entre a laje de concreto e o perfil de aço os autores definem uma conexão de cisalhamento distribuída uniformemente  $\tau_1 = 440N/mm$  e seu deslizamento correspondente de  $u_1 = 2.25mm$ .

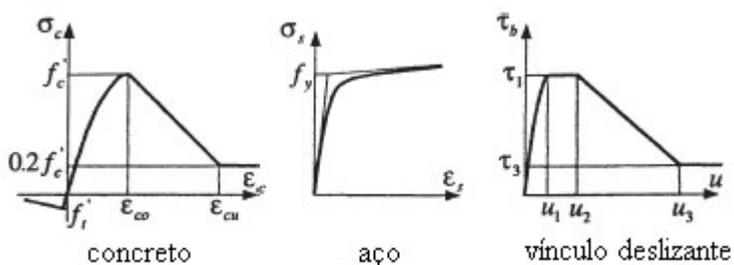


Figura 5.33 Leis constitutivas dos materiais (Salari e Spacone, 2001).

Os resultados numéricos do problema da figura 5.32 obtidos por Salari e Spacone (2001) e pelos elementos implementados neste trabalho são apresentados na figura 5.35, onde encontra-se representadas as curvas que relacionam o carregamento aplicado  $P$  ao deslocamento vertical  $\Delta$ , ilustrados na figura 5.32.

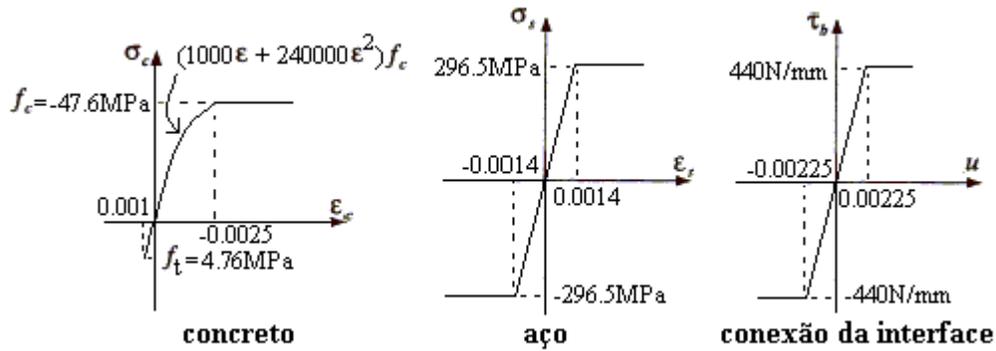


Figura 5.34 Leis constitutivas dos materiais utilizadas neste trabalho.

Na análise numérica realizada usando os elementos implementados neste trabalho foram utilizadas as leis constitutivas dos materiais apresentadas na figura 5.34. Da mesma forma que no exemplo anterior, estas curvas devem obedecer ao formato geral que define a relação tensão-deformação de um material definido no item 3.3 do capítulo 3. Ao comparar as curvas dos materiais utilizadas pelos diferentes autores (figura 5.33 e 5.34) percebe-se que os limites de tensão e deformação são os mesmos, porém as curvas utilizadas para este trabalho são aproximações polinomiais das curvas utilizada em Salari e Spacone (2001), valendo ressaltar que os autores não disponibilizaram as expressões analíticas das relações tensão-deformação e usaram modelo de fibras.

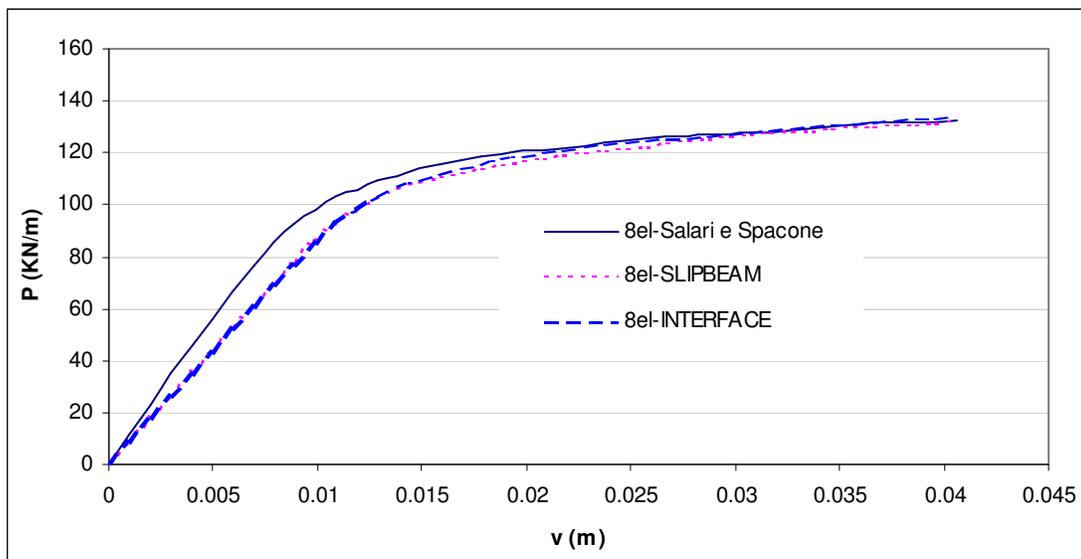


Figura 5.35 Curva carga-deslocamento de um ponto no meio dos vãos da viga mista.

Na determinação dos esforços internos foi utilizado integração numérica sendo usado quatro e três pontos de Gauss, respectivamente, para os elementos INTERFACE e SLIPBEAM.

As figuras 5.36 e 5.37 mostram a deformada transversal e o deslizamento ao longo do vão simétrico da viga da figura 5.32, para os deslocamentos do meio do vão de 5.0 mm, 20.0 mm e 40.0 mm. As equações da deformada e do deslizamento foram obtidas usando o elemento SLIPBEAM para uma malha de oito elementos.

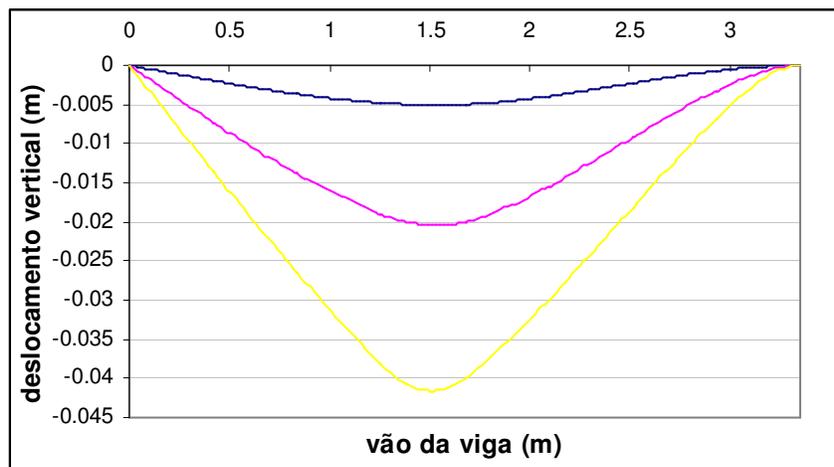


Figura 5.36 Deformada para malha de 8 elementos SLIPBEAM

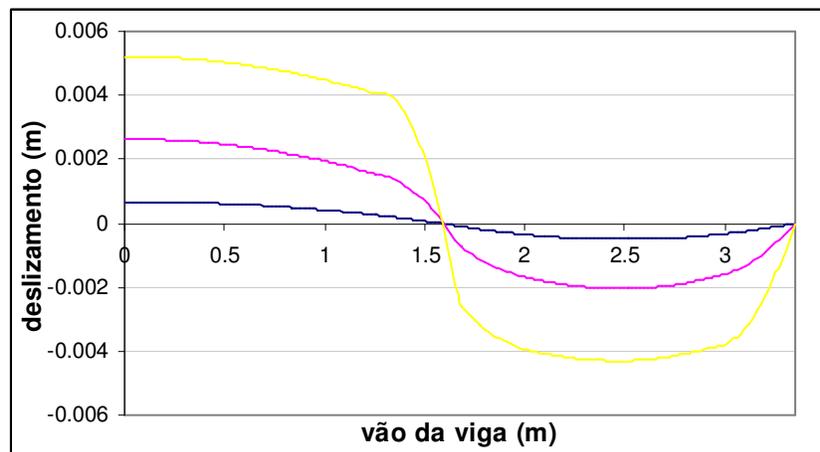


Figura 5.37 Deslizamento ao longo do vão simétrico para malha de 8 elementos SLIPBEAM

As figuras 5.38 e 5.39 mostram a deformada transversal e o deslizamento ao longo do vão simétrico da viga da figura 5.32, para os deslocamentos do meio do vão de 5.0 mm, 20.0 mm e 40.0 mm. As equações da deformada e do deslizamento foram obtidas usando o elemento INTERFACE para uma malha de oito elementos.

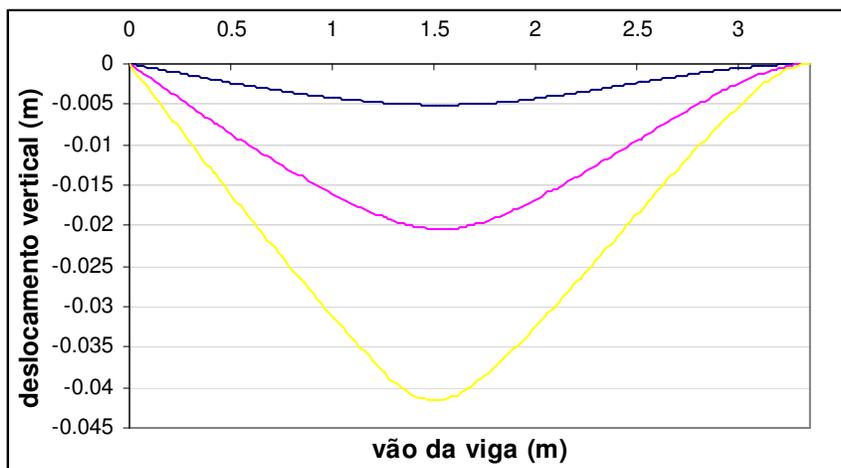


Figura 5.38 Deformada para malha de 8 elementos INTERFACE

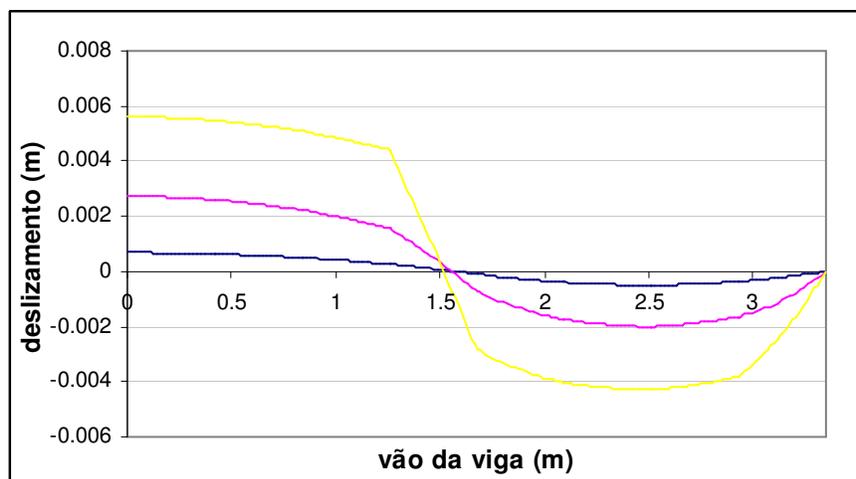


Figura 5.39 Deslizamento ao longo do vão simétrico para malha de 8 elementos INTERFACE

Os elementos SLIPBEAM, INTERFACE são os mesmos utilizados no item anterior desta seção.

Como pode ser observado através da figura 5.35, os resultados para os elementos implementados neste trabalho são próximos àqueles apresentados pelo elemento

implementado por Salari e Spacone (2001). A diferença que pode ser observada nas curvas das figuras 5.35 pode ser explicada através das diferenças entre as curvas tensão-deformação dos materiais adotadas pelos diferentes autores. Observa-se uma menor rigidez do modelo implementado neste trabalho nas fases iniciais de carregamento, sendo que à medida que os deslocamentos se aproximam do valor máximo as curvas convergem. Uma explicação possível é o maior aproveitamento do concreto tracionado no modelo de Salari e Spacone (2001).

## 5.5 EXEMPLO DE TRELIÇA MISTA

A solução de problemas de vigas mistas com interação parcial e seção transversal variável ao longo do eixo longitudinal, como no caso de treliça mista, usando o elemento finito com deslizamento (SLIPBEAM), geraria uma resposta aproximada da solução numérica esperada, uma vez que para cada elemento da discretização da treliça mista seria usada uma seção transversal representativa para simular a variação desta ao longo do elemento finito. Em contrapartida, se for utilizado o elemento de interface (INTERFACE) associado ao elemento unidimensional de viga (BEAM2D), o problema de treliça mista pode ser tratado como um pórtico plano e sua resposta será conforme o esperado.

Diante do exposto no parágrafo anterior resolve-se o problema da figura 5.40 com intuito de ilustrar a aplicação do elemento de interface na solução de problemas de treliça mista.

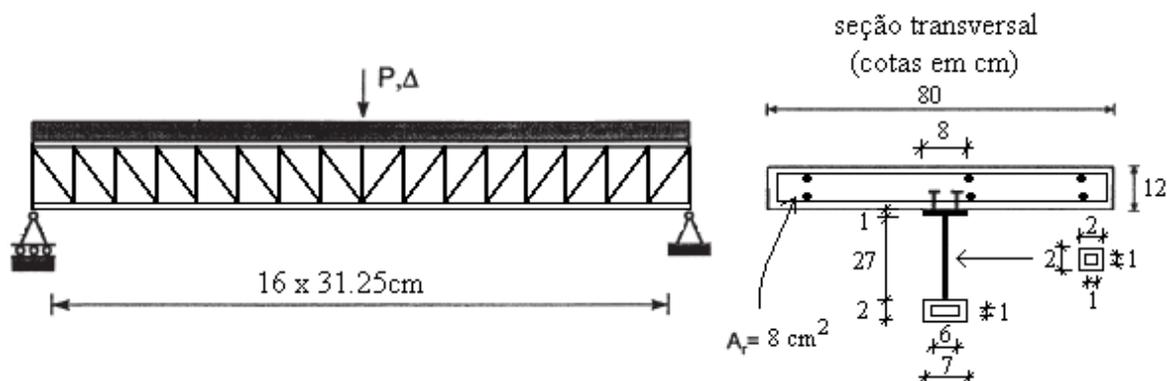


Figura 5.40 Treliça mista com interação parcial.

Na análise numérica realizada foram utilizadas as curvas tensão-deformação dos materiais apresentadas na figura 5.41.

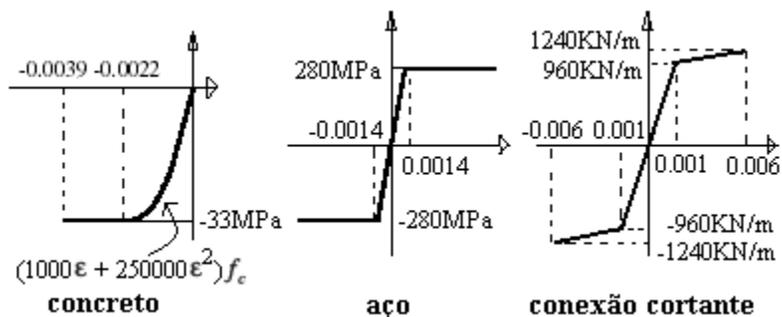


Figura 5.41 Leis constitutivas dos materiais

A figura 5.42 a seguir ilustra a discretização da treliça mista em elementos lineares de viga e elementos de interface retangulares com espessura nula.

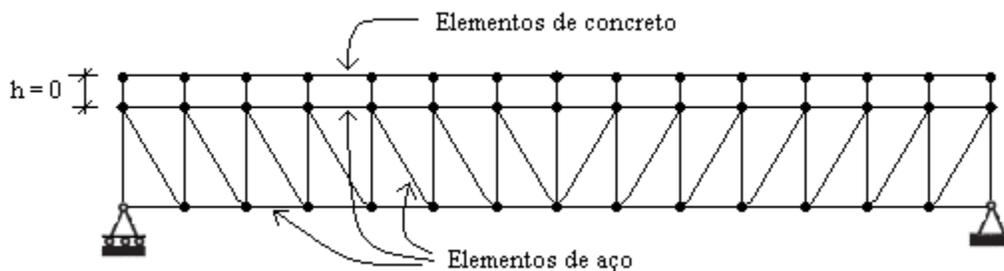


Figura 5.42 Discretização em elementos finitos da treliça mista.

O elemento unidimensional de viga utilizado na análise numérica é o elemento BEAM2D citado no item 5.3.1 deste capítulo, e o elemento de interface utilizado na análise é o elemento INTERFACE também citado no item 5.3.1 com sua formulação detalhada no capítulo 4 deste trabalho.

A Figura 5.43 mostra o resultado da análise numérica para o problema da figura 5.40 através da curva que relaciona o carregamento aplicado a treliça mista com o seu deslocamento vertical do meio do vão.

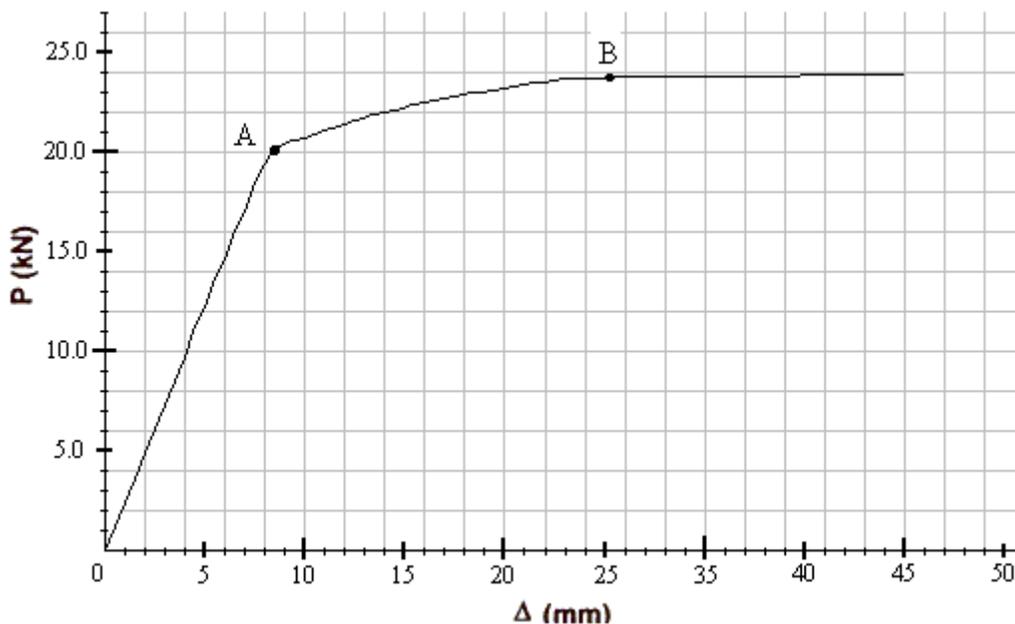


Figura 5.43 Curva carga-deslocamento de um ponto no meio do vão da treliça mista.

A forma quase tri-linear da curva da figura 5.43 deve-se às pequenas seções dos elementos de aço do pórtico representativo da treliça mista da figura 5.40, ou seja, iniciada a plastificação da seção transversal destes elementos rapidamente toda a seção estará plastificada, formando assim rótulas plásticas. O ponto A da curva da figura 5.43 representa a formação da primeira rótula plástica. Com o aumento do carregamento forma-se mais uma rótula plástica, indicada na figura 5.43 pelo ponto B. A partir deste ponto, a curva aproximadamente horizontal indica uma incapacidade da estrutura de resistir ao carregamento externo.

A dificuldade de obtenção de trabalhos com ênfase em soluções numéricas de treliças mistas com interação parcial impossibilitou a comparação da solução usando o elemento de interface implementado neste trabalho com outras soluções obtidas. No entanto, os exemplos dos itens anteriores comprovam a eficácia do elemento de interface em análise numérica de vigas mistas com interação parcial.

A figura 5.44 abaixo ilustra a deformada da treliça mista para três estágios da curva  $P \times \Delta$  da figura 5.43,  $\Delta = 5mm$ ,  $\Delta = 14mm$  e  $\Delta = 40mm$ .

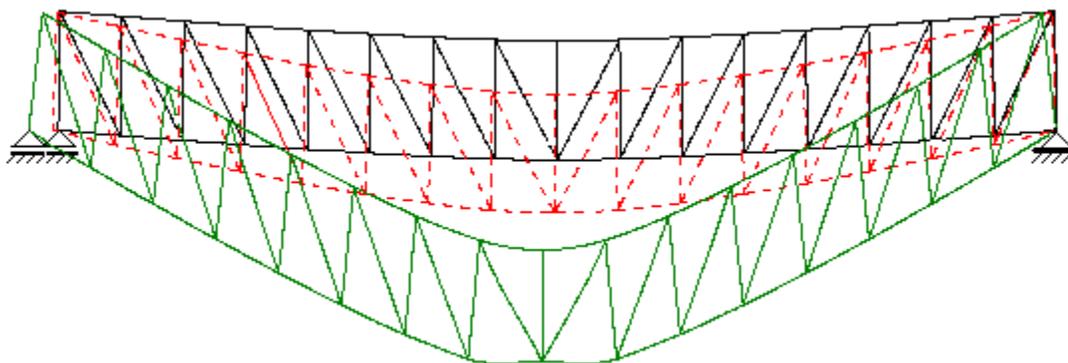


Figura 5.44 Deformada da treliça mista (5mm, 14mm e 40mm).

Através da figura 5.45 que detalha a região mais solicitada da treliça mista percebe-se para o estágio de carregamento  $\Delta = 40mm$  a incapacidade dos banzos inferiores e superiores do centro da treliça mista de suportarem ao acréscimo do carregamento externo, o que é evidenciado através da deformada destes trechos, como se pode ver na figura 5.45.

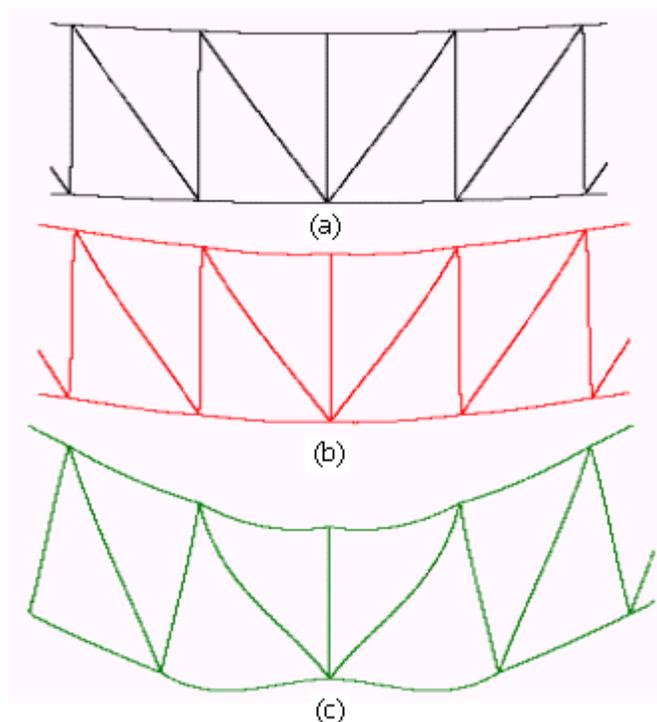


Figura 5.45 Detalhes da deformada da treliça mista. (a)  $\Delta = 5mm$  , (b)  $\Delta = 14mm$  e (c)  $\Delta = 40mm$

# CONCLUSÕES E SUGESTÕES

## 6.1 CONCLUSÕES

O objetivo principal desta dissertação foi o desenvolvimento de modelos numéricos, baseados no Método dos Elementos Finitos, para simulação do comportamento de vigas com interação parcial entre seus componentes, com ênfase nas vigas mistas de aço e concreto.

Para tal, uma formulação baseada em deslocamentos, bem como uma formulação com o emprego de elementos de interface, foram desenvolvidas e implementadas. As seções transversais dos elementos constituintes foram representadas de forma genérica e os esforços resistentes, bem como as rigidezes generalizadas destas seções, puderam ser avaliados de forma exata.

Os procedimentos e formulações desenvolvidos neste trabalho foram capazes de modelar os problemas de viga mista com interação parcial, admitindo comportamento não linear dos materiais que compõem os componentes dos elementos mistos, bem como da relação carga-deslizamento da conexão na interface de deslizamento. Tais não linearidades físicas foram representadas através de funções polinomiais de até terceiro grau definidas em faixas de deformação, possibilitando assim representar com suficiente precisão as curvas tensão-deformação dos materiais.

A revisão bibliográfica evidenciou que a análise numérica do elemento estrutural de viga mista com conexão parcial, através de elementos unidimensionais, ainda é pouco explorada no país. Internacionalmente, encontram-se vários artigos técnicos sobre o assunto, nos quais a maioria dos autores enfatiza a solução numérica como um vantajoso método para solução do problema de vigas mistas com interação parcial.

O procedimento utilizado neste trabalho para a obtenção das propriedades geométricas da seção mista permite a utilização de seções genéricas nas análises numéricas de vigas mistas com interação parcial. Este procedimento dá liberdade ao projetista, dentro da gama de possibilidade que tenha, de escolha da seção mista que melhor se adequar as condições de esforços a que está submetida, ou simplesmente seja esteticamente mais adequada, não tornando assim a análise estrutural do elemento analisado um empecilho na escolha do tipo de seção a ser utilizada.

O elemento com deslizamento e o elemento de interface apresentaram resultados coerentes quando comparado com resultados numéricos de outros autores. No caso da comparação com o exemplo proposto por Salari e Spacone (2001), item 5.4.2 do capítulo 5 deste trabalho, as respostas das análises numéricas, representadas pelas curvas carga-deslocamento da figuras 5.22 e 5.23, apresentam uma pequena diferença que pode ser explicada devido à aproximação das curvas de tensão-deformação dos materiais usadas neste trabalho em comparação com as utilizadas por Salari e Spacone (2001).

A solução exata do problema de viga mista com interação parcial obtida através do método analítico da equação diferencial de Newmark, item 5.2 do capítulo 5 deste trabalho, permitiu a avaliação dos elementos implementados através de uma comparação entre a deformada da viga mista em relação ao deslocamento transversal e a equação do deslizamento ao longo da interface, figuras 5.3 a 5.6, obtidas segundo a equação diferencial de Newmark e segundo as análises numéricas, sendo os resultados considerados satisfatórios. As análises numéricas deste exemplo foram feitas usando duas malhas de elementos finitos distintas com a intenção de avaliar a evolução da convergência do método numérico, o que foi evidenciado ao observar o aumento da precisão da resposta com o aumento do número de elementos finitos.

Ao comparar as repostas das análises numéricas dos exemplos do capítulo 5, do elemento com deslizamento e do elemento de interface em conjunto com o elemento

unidimensional de viga, percebe-se a proximidade das soluções. No entanto, o elemento SLIPBEAM possui uma matriz de rigidez, a nível global de estrutura, com bem menos graus de liberdade que aquela apresentada pelo conjunto entre o elemento de interface e o elemento unidimensional de viga, proporcionando assim uma resposta, bastante semelhante a do elemento de interface, porém mais rápida. No entanto, o número de integrações numéricas realizadas nos pontos de integração é semelhante para as duas situações.

O elemento de interface, apesar de necessitar de maior número de graus de liberdade em relação ao elemento com deslizamento, mostra-se muito eficaz na solução de problemas de treliça mista, item 5.5 do capítulo 5, uma vez que a sua ação em conjunto com um elemento unidimensional de viga permite que o problema de treliça mista seja considerado como um problema de pórtico plano. Também deve ser enfatizado que a consideração do deslocamento relativo na direção vertical do elemento de interface permite a simulação da separação vertical na interface de deslizamento.

## 6.2 SUGESTÕES

O bom dimensionamento de uma viga requer uma baixa relação entre a altura da seção transversal e seu vão, o que faz com que o efeito de flexão na viga seja predominante, e seja desprezível a deformação transversal na seção devido aos esforços cortantes. No entanto, em alguns casos específicos, como vigas de ponte rolante em galpões industriais, esta relação pode ser grande o suficiente para tornar o efeito da deformação transversal considerável. Sua consideração seria então importante na implementação dos elementos para a solução numérica, o que fica aqui como sugestão para trabalhos futuros.

Um modelo alternativo ao modelo de elementos finitos baseados em deslocamentos utilizado na implementação deste trabalho é o modelo baseado no método das forças, que foi utilizado por diversos autores nos últimos anos (Salari e Spacone, 2001, Dall'Asta e Zona, 2004).

Fica também como sugestão a consideração de mais um grau de liberdade no elemento com deslizamento implementado com intenção de simular os efeitos de ligações semi-rígidas, que são frequentes nos casos práticos. Tal ligação semi-rígida também pode ser considerada através de um elemento finito de comprimento nulo que tenha função, em

relação aos esforços axiais e transversais, apenas de transmissão entre os elementos unidimensionais de viga unidos por ele. Já no caso dos esforços de flexão, este elemento deve funcionar como uma mola que absorve uma certa quantidade de energia proporcional à diferença de rotação entre os elementos unidimensionais a ele adjacentes.

Liang et al (2004) afirma, com base em resultados numéricos e experimentais, que a desconsideração de uma resistência vertical na interface de deslizamento induz a resultados conservadores na análise de vigas mistas com interação parcial. Esta afirmação sugere a consideração deste efeito utilizando o elemento de interface implementado neste trabalho, que simula não só o deslizamento ao longo da interface como também a possibilidade de separação vertical entre a laje de concreto e o perfil de aço.

O programa FEMOOP utilizado na implementação computacional dos elementos desenvolvidos neste trabalho tem como entrada de dados um arquivo de texto com as informações necessárias para avaliação numérica desejada, o que sugere o desenvolvimento de uma interface gráfica de pré e pós-processamento, que facilite a construção deste arquivo de entrada pelo analista e possa acelerar o processo de análise.

# **EQUAÇÕES E CRITÉRIOS DEFINIDOS PELO PROJETO DE REVISÃO DA NBR 8800**

## **I.1 INTRODUÇÃO**

Nesta seção será apresentado o método analítico para solução de vigas mistas aço-concreto definido pelo projeto de revisão da norma NBR 8800 (2005). Algumas simplificações significativas, como é o caso da seção homogeneizada, são tomadas pela norma para permitir a utilização do método sem a necessidade de uso de recursos computacionais.

A norma classifica de viga mista aço-concreto de alma cheia aquelas em que o componente de aço é um perfil I, caixão ou tubular retangular. No caso do componente de aço ser uma treliça a viga mista é classificada como sendo treliça mista aço-concreto.

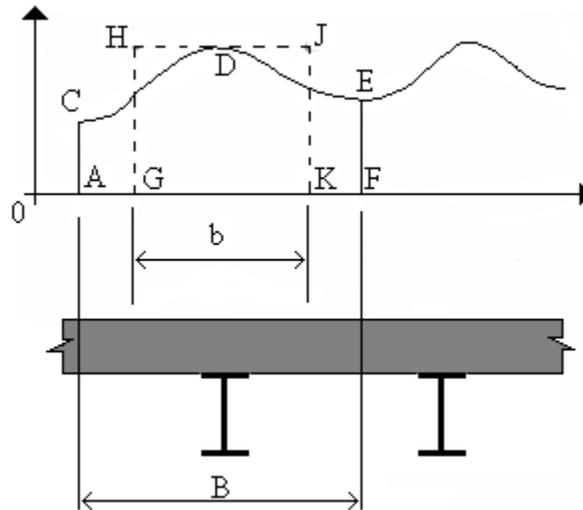


Figura I.1 Largura efetiva  $b$  (Johnson, 1994).

## I.2 LARGURA EFETIVA

Na maioria dos sistemas estruturais utilizados nas obras de engenharia civil o elemento de viga mista aço-concreto é composto por um perfil de aço, geralmente de seção I, ligado por meio mecânico a uma laje de concreto, larga e delgada. A presença de deformações de cisalhamento no plano da laje de concreto faz com que as seções não mais permaneçam planas provocando uma variação das tensões normais ao longo dela. A figura I.1 mostra essa variação de tensão, que é máxima imediatamente sobre a viga mista e decresce ao se afastar da linha de centro da viga mista.

Ao considerar a tensão normal ao longo da largura da mesa de concreto constante e igual a tensão normal imediatamente sobre a viga mista, deve-se considerar uma largura  $b$  da mesa de concreto menor que a largura  $B$  da figura I.1, de forma que a área do retângulo GHJK seja igual a área da região ACDEF, o que implica que a contribuição da mesa de concreto não é total levando ao conceito de largura efetiva da viga mista.

Pesquisas baseadas na teoria da elasticidade mostram que a relação  $b/B$  depende de muitas variáveis, dentre elas pode-se citar a relação de  $B$  com o vão da viga mista, do tipo de carregamento, das condições de contorno, da posição da seção ao longo do vão, entre outras (Johnson, 1994).

A NBR 8800 (2005) em seu anexo Q item Q.2.2 define a largura efetiva da mesa de concreto que irá realmente contribuir com o elemento de viga mista aço-concreto.

No caso de vigas mistas biapoiadas deve-se ir ao item Q.2.2.1 do anexo Q da norma onde define-se a largura efetiva da viga mista como sendo o menor dos três valores lá definidos.

Nas regiões de momentos negativos a largura efetiva também deve ser definida, uma vez que ela irá determinar o número de barras de reforço da laje que contribuem realmente com o elemento de viga mista aço-concreto.

No caso de vigas mistas contínuas e semicontínuas deve-se ir à alínea a) do item Q.2.2.2 do anexo Q do projeto de revisão da norma para definir a largura efetiva da viga mista na região de momento positivo, já para a região de momento negativo é a alínea b) do mesmo item que define a largura efetiva da viga mista aço-concreto.

No caso de vigas mistas em balanço pode-se utilizar o mesmo item referentes às vigas mistas biapoiadas, considerando o vão da viga em balanço como sendo o comprimento do balanço.

### **I.3 RESISTÊNCIA DOS CONECTORES**

Não há elemento misto sem que haja a garantia de que os elementos de aço e concreto trabalhem em conjunto para combater os esforços. Tal garantia pode ser obtida por simples aderência e repartição de cargas, por atrito, ou por meio de ligação mecânica, através de conectores, mossas, ou ressaltos.

No caso de vigas mistas aço-concreto geralmente são utilizados conectores para garantir a ligação entre os materiais. Dentre a gama de opções de conectores os tipo pino com cabeça (stud) são os mais utilizado na prática, devido a sua facilidade de execução, e o comportamento plástico que ele possui. A curva força cortante versus deslizamento na interface para este tipo de conector é mostrado no gráfico da figura 2.2 no item 2.1 do capítulo 2 deste trabalho.

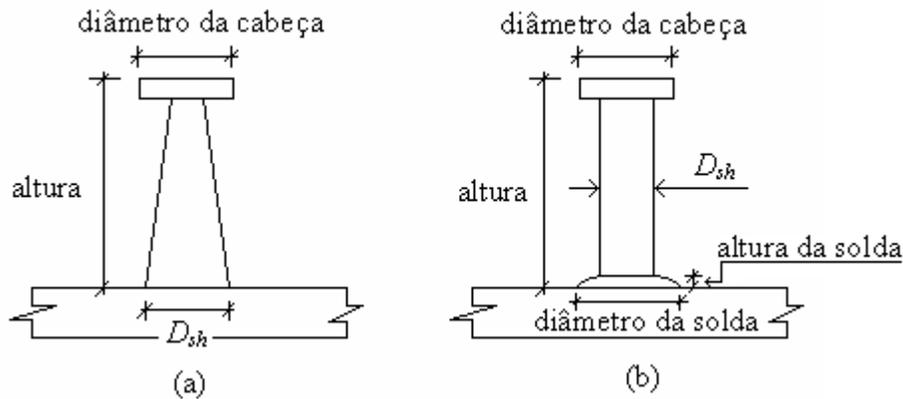


Figura I.2 Conector de cisalhamento tipo pino com cabeça. (a) diâmetro do fuste variado, (b) diâmetro constante.

O diâmetro  $D_{sh}$  mostrado na figura I.2 é a dimensão mais importante do conector tipo pino com cabeça que segundo Oehlers e Bradford (1995) varia aproximadamente entre 13mm e 22mm sendo o diâmetro mais comum de 19mm. As outras dimensões do conector são tomadas a partir deste diâmetro, assim sua altura é aproximadamente  $4D_{sh}$ , o diâmetro de sua cabeça é aproximadamente  $1.5D_{sh}$ , e até o anel de solda, utilizado para soldar o conector ao elemento de aço, tem suas dimensões definidas a partir deste diâmetro, assim o diâmetro e a altura do anel são aproximadamente  $1.3D_{sh}$  e  $0.3D_{sh}$ , respectivamente.

A curva do gráfico da figura I.3 (Oehlers e Coughlan, 1986) detalha as características da relação força cortante deslizamento de um conector tipo pino com cabeça.

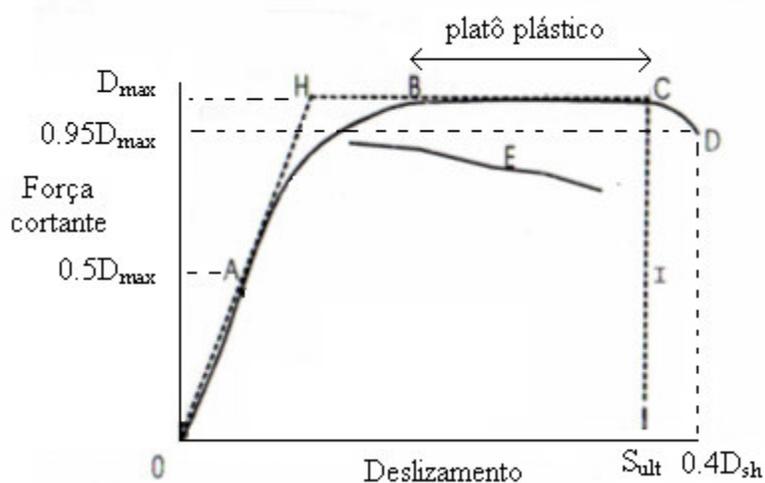


Figura I.3 Relação força deslizamento de um conector tipo pino com cabeça.

No gráfico as linhas tracejadas representam a idealização da real curva do conector, a qual é representada no gráfico pelas linhas cheias.

O ponto “A” do gráfico da figura I.3 especifica o limite linear da curva, neste ponto a força cortante atuante no conector é aproximadamente a metade da força cortante máxima deste. Já o ponto “D” define, após deformação plástica do conector, a sua fratura, que ocorre aproximadamente aos 95% da força cortante máxima do conector e um deslizamento de 40% do diâmetro da parte inferior do fuste do conector ( $D_{sh}$ ).

O gráfico da figura I.3 analisa a resistência máxima de um conector tipo pino com cabeça sem que haja falha prematura do concreto que envolve o conector. Tal falha reduz a capacidade de resistência do conector como é mostrado pela linha E no gráfico, porém não necessariamente influencia o patamar plástico da curva.

Os valores de deslizamentos e rigidez definidos pelas equações I.1 a I.3 foram obtidos por Oehlers e Coughlan (1986) através do tratamento estatístico de 116 diferentes curvas força cortante deslizamento, nas quais não foram evidenciadas falhas prematuras do concreto. Nos experimentos foram utilizados resistência característica do concreto ( $f_c$ ) variando de 22 N/mm<sup>2</sup> a 82 N/mm<sup>2</sup>.

$$S_{0.5D_{\max}} = (80 \times 10^{-3} - 86 \times 10^{-5} f_c) D_{sh} \quad (\text{I.1})$$

$$S_{ult} = (0.48 - 0.0042 f_c) D_{sh} \quad (\text{I.2})$$

$$K_{si} = \frac{D_{\max}}{D_{sh} (0.16 - 0.0017 f_c)} \quad (\text{I.3})$$

Nas três equações acima as unidade são N e mm. A equação I.1 representa o deslizamento na interface para a metade da força cortante máxima resistida pelo conector.

Ollgaard et al (1971) foi o pioneiro a estabelecer uma forma de cálculo de resistência de conectores do tipo pino com cabeça. Através de experimentos e usando análise estatística o autor deduziu uma equação para a força cortante máxima resistida pelo conector, que é mostrada abaixo:

$$D_{\max} = 1.83A_{sh}f_c^{0.3}E_c^{0.44} \quad (\text{I.4})$$

Na equação I.4 as unidades são N e mm,  $A_{sh}$  é área da seção transversal da parte inferior do fuste do conector e  $E_c$  é o módulo de Young do concreto. De forma a tornar a equação dimensionalmente correta os expoentes foram modificados chegando a equação I.5, embora isto conduza a uma perda de precisão.

$$D_{\max} = 0.50A_{sh}\sqrt{f_c E_c} \quad (\text{I.5})$$

O projeto de revisão da norma NBR-8800 (2005) em seu item Q.4 do anexo Q trata dos conectores de cisalhamento do tipo pino com cabeça e perfil U laminado ou formado a frio com espessura de chapa igual ou superior a 3 mm.

Em seu item Q.4.3.1.1 a norma estipula a resistência de um conector de cisalhamento tipo pino com cabeça como sendo o menor dos valores entre, o resultado da equação I.5 e a força cortante de ruptura do aço do conector.

No caso da laje de concreto da viga mista possuir fôrma de aço incorporada, o projeto de revisão da norma NBR-8800 (2005) em seu item Q.4.3.1.2 define um coeficiente de redução que deve ser multiplicado ao valor obtido no item Q.4.3.1.1 para definir a resistência de um conector de cisalhamento do tipo pino com cabeça.

#### **I.4 GRAU DE INTERAÇÃO DA VIGA MISTA**

Em elementos mistos aço-concreto grau de interação refere-se a capacidade da seção mista trabalhar em conjunto para combater os esforços a ela submetidos. Tal interação é relacionada a direção horizontal da ligação da seção de aço e concreto, já que na direção vertical é considerado um grau de interação total entre os materiais, ou seja, não há separação vertical entre eles.

O grau de interação de uma viga mista aço-concreto varia entre nulo e a unidade. O primeiro caso seria quando a laje de concreto fosse simplesmente apoiada sobre a viga de aço e suas superfícies de contato fossem suficientemente lisas para desprezar a força de atrito desenvolvida na interface, assim o conjunto trabalharia como dois elementos

independentes com deslocamentos verticais e rotações iguais. Já o segundo caso seria quando forças desenvolvidas ao longo da interface do elemento misto, como forças de ligação química entre os materiais e força de atrito, fossem capazes de impedir os deslizamentos na interface, fazendo com que o elemento misto trabalhasse como um só elemento de seção mista. Nestes casos limites a interação é chamada de interação livre para o primeiro, e interação total para o segundo, e quando o grau de interação está entre os limites do intervalo dá-se o nome de interação parcial.

No caso dos elementos mistos aço e concreto, a interação parcial entre os materiais acontece quando a força cortante na interface de ligação supera as forças devido a ligação química entre os materiais e a força de atrito, sendo então tal força cortante resistida por conectores que irão deformar-se provocando deslizamentos relativos na interface.

O projeto de revisão da norma NBR-8800 (2005) define, em seu anexo Q no item Q.2.3.1.1.2, o grau de interação  $\eta$  da viga mista como sendo a relação entre, o somatório  $Q_{Rd}$  das resistências de cálculo individuais  $q_{rd}$  dos conectores de cisalhamento, situados entre a seção de momento positivo máximo e a seção adjacente de momento nulo, e  $V_{hrd}$ , definida como sendo a menor dentre as forças que plastificariam a seção de aço ( $Af_y / 1.10$ ) e a seção de concreto ( $0.85f_{ck}bt_c / 1.40$ ).

$$\eta = \frac{Q_{Rd}}{V_{hrd}} \quad (I.6)$$

O projeto de revisão da norma NBR-8800 (2005) estipula, em seu anexo Q item Q.2.3.1.1.2 alíneas a) e b), valores mínimos de grau de interação para o elemento de viga mista de acordo com propriedades físicas do perfil de aço e da distância entre momentos nulos. Por exemplo, no caso de perfis de aço de mesas iguais e distância entre momentos nulos superior a 25m o grau de interação da viga mista deve ser igual a unidade, ou seja, interação total.

## I.5 NÚMERO DE CONECTORES

O número de conectores deve ser suficiente para garantir à seção mista analisada um grau de interação mínimo exigido pela norma como disposto no item anterior desta seção, e deve ser tal que o espaçamento entre os conectores ao longo da interface do elemento misto não torne sua execução proibitiva ou anti econômica. O projeto de revisão da norma NBR 8800 (2005) define, em seu anexo Q item Q.4.4, critérios para locação e espaçamentos dos conectores.

O número de conectores  $n$  entre a seção de momento máximo positivo e a seção adjacente de momento nulo pode ser definido através da equação I.7.

$$n > \frac{\eta V_{hRd}}{q_{Rd}} \quad (I.7)$$

Na equação I.7 o numerador define o somatório das resistências de cálculo individuais dos conectores de cisalhamento e o denominador é a resistência individual do conector de cisalhamento definido no item I.3 deste anexo. O número de conectores a ser distribuído ao longo do trecho de momento máximo positivo ao momento adjacente nulo da viga mista deve ser um valor inteiro maior que o valor obtido na equação I.7.

O número de conectores  $n$  entre a seção de momento máximo negativo e a seção adjacente de momento nulo é definido pelo projeto de revisão da norma NBR-8800 (2005) através da equação I.8.

$$n > \frac{T_{ds}}{q_{Rd}} \quad (I.8)$$

Na equação I.8 o numerador define a força resistente de tração nas barras de armadura longitudinal da laje de concreto e o denominador é como definido na equação I.7. O número de conectores a ser distribuído ao longo do trecho de momento máximo negativo ao momento adjacente nulo da viga mista deve ser um valor inteiro maior que o valor obtido na equação I.8.

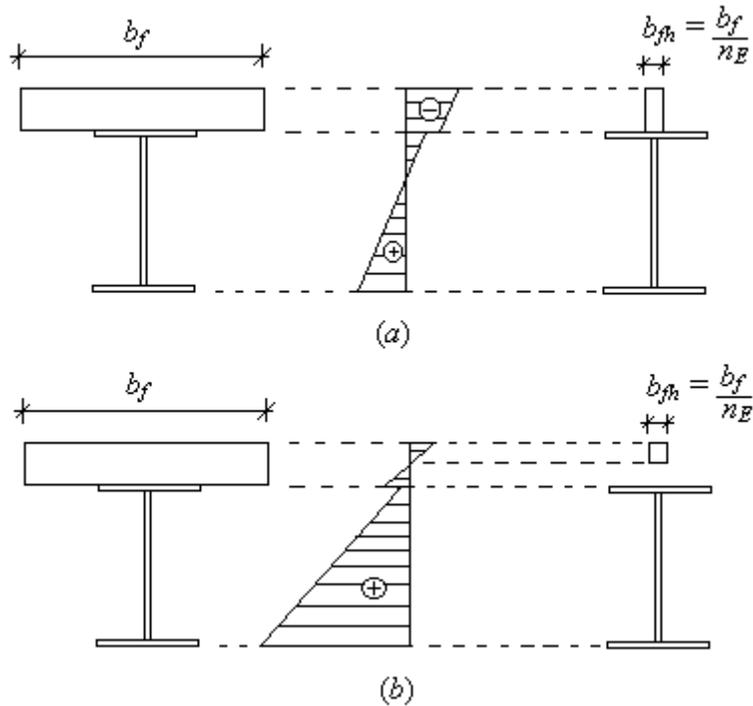


Figura I.4 Homogeneização de seção mista. (a) laje de concreto totalmente comprimida, (b) laje de concreto parcialmente tracionada.

## I.6 HOMOGENEIZAÇÃO TEÓRICA DA SEÇÃO

A avaliação exata do comportamento de um elemento de viga, através de métodos analíticos para casos onde a seção transversal do elemento é definida por mais de um material, é muito complexa. Para evitar tal complexidade o projeto de revisão da norma NBR 8800 (2005) permite, em seu anexo Q item Q.2.3.1.2 alínea a), uma homogeneização teórica da seção mista usando o coeficiente  $n_E$  definido na equação I.9.

$$n_E = \frac{E}{E_c} \quad (\text{I.9})$$

A seção homogeneizada é obtida dividindo a largura efetiva da laje de concreto pelo valor da equação I.9, que representa a relação entre os módulos de elasticidade do aço e do concreto. A altura da laje de concreto mantém-se a mesma após a homogeneização, exceto

nos casos em que a laje de concreto tem parte de sua seção tracionada, nestes casos despreza-se na seção homogeneizada a parte da altura da laje tracionada.

A figura I.4 ilustra a homogeneização de uma seção mista aço-concreto para os casos da laje de concreto totalmente comprimida e parcialmente tracionada.

## I.7 MOMENTO POSITIVO RESISTENTE DA SEÇÃO MISTA

O projeto de revisão da norma NBR 8800 (2005) determina, em seu anexo Q item Q.2.3 e subitens, o momento positivo resistente de uma seção mista. Para vigas de alma cheia a norma permite, na determinação do momento resistente, a plastificação da seção mista aço-concreto desde que a relação entre a altura do perfil de aço e a espessura de sua alma seja inferior a um limite estipulado, caso contrário o momento resistente é determinado quando a fibra mais exigida da seção de concreto ou de aço atingir a plastificação.

As equações I.10 e I.11 representam os momentos resistentes obtidos através da plastificação da seção mista com interação total na interface, onde as variáveis são definidas na figura I.5.

$$M_R = T \left( d_1 + h_f + t_c - \frac{a}{2} \right) \quad (\text{I.10})$$

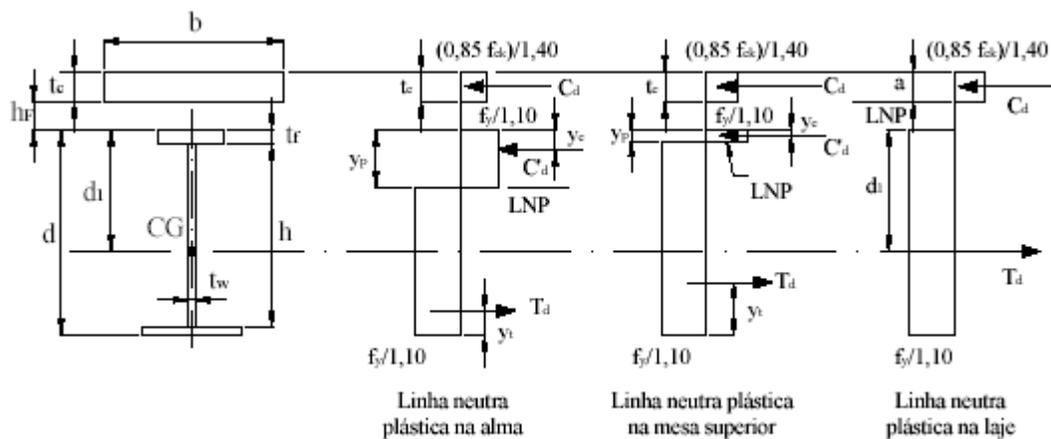


Figura I.5 Distribuição de tensões em vigas mistas – interação completa (NBR 8800,2005).

$$M_R = C'(d - y_t - y_c) + C\left(\frac{t_c}{2} + h_f + d - y_t\right) \quad (\text{I.11})$$

A equação I.10 é usada quando a linha neutra plástica está na laje de concreto, o que acontece quando a plastificação da seção de concreto acontece antes da plastificação do perfil de aço, caso contrário, a linha neutra plástica se encontra no perfil de aço e a equação a ser então utilizada é a equação I.11.

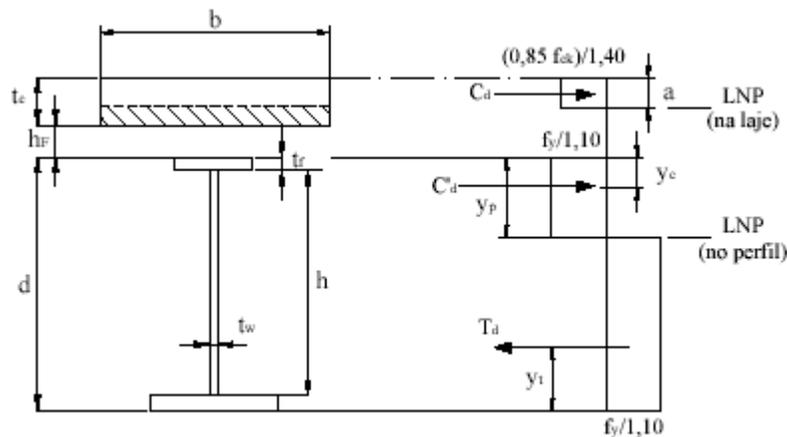


Figura I.6 Distribuição de tensões em vigas mistas – interação parcial (NBR-8800, 2005).

O momento resistente obtido através da plastificação da seção mista com interação parcial na interface é dado pela equação abaixo, onde as variáveis são definidas na figura I.6.

$$M_R = C'(d - y_t - y_c) + C\left(t_c - \frac{a}{2} + h_f + d - y_t\right) \quad (\text{I.12})$$

Como na equação I.12 a seção mista trabalha sob interação parcial então as forças  $C$  e  $C'$ , definidas na figura I.6, são obtidas através do grau de interação do elemento misto que depende, no caso de ligação por conectores mecânicos, do número de conectores usados e da resistência individual de cada um.

No caso de interação parcial a equação da deformação na seção mista tem uma descontinuidade na interface, o que faz com que a linha neutra plástica passe por ambas as

seções de concreto e aço, como pode ser visto na figura I.6. Também pode ser notado nesta figura que a contribuição do concreto na tração é desprezada.

O restante deste item faz referência aos casos onde a relação entre, altura do perfil de aço e a espessura de sua alma não permitem a plastificação da seção, sendo utilizado então para o cálculo do momento resistente da seção os limites de plastificação das fibras mais exigidas. As equações abaixo definem estes limites para o caso de interação total na viga mista.

$$f_{dt} = \frac{M_s}{(W_{tr})_t} \quad (\text{I.13})$$

$$f_{dc} = \frac{M_s}{n_E (W_{tr})_c} \quad (\text{I.14})$$

Na equação I.13,  $f_{dt}$  é a tensão na fibra mais exigida da seção de aço,  $M_s$  é o momento atuante na seção analisada e  $(W_{tr})_t$  é o módulo de resistência elástico inferior da seção mista transformada pela homogeneização.

Na equação I.14,  $f_{dc}$  é a tensão na fibra mais exigida da seção de concreto,  $M_s$  é o momento atuante na seção analisada,  $(W_{tr})_c$  é o módulo de resistência elástico superior da seção mista transformada pela homogeneização e  $n_E$  é o fator de homogeneização da seção mista definido no item I.6 deste anexo.

No caso de interação parcial as tensões nas fibras mais exigidas podem ser obtidas pelas mesmas equações I.13 e I.14 utilizadas na interação total, substituindo apenas o módulo de resistência elástico inferior da seção mista homogeneizada pelo valor reduzido da equação abaixo:

$$W_{cf} = W_a + \sqrt{\eta} [(W_{tr})_t - W_a] \quad (\text{I.15})$$

Na equação I.15,  $W_a$  é o módulo de resistência elástico inferior da seção da viga de aço e  $\eta$  é grau de interação definido no item I.6 deste anexo. Observa-se na equação I.15 que se  $\eta$  igual a unidade, ou seja, interação total, tem-se  $W_{cf}$  igual  $(W_{tr})_t$  como esperado.

## **I.8 MOMENTO NEGATIVO RESISTENTE DA SEÇÃO MISTA**

Como é desconsiderado a contribuição do concreto quando este é tracionado, a norma NBR-8800 (2005) em seu anexo Q item Q.2.4, considera para o cálculo do momento negativo resistente da seção mista apenas a contribuição da seção de aço associada a seção de armadura longitudinal que, necessariamente, deverá existir na largura efetiva da laje de concreto. A solução requer encontrar a posição da linha neutra plástica da seção transversal e a partir daí o momento resistente de cálculo.

# ARQUIVO DE ENTRADA DE DADOS

## II.1 INTRODUÇÃO

Neste anexo será apresentado um arquivo simplificado de entrada de dados do programa FEMOOP para solução de problemas de vigas mistas com interação parcial usando os elementos implementados neste trabalho.

O problema da figura II.1 será expresso em dois arquivos simplificados de entrada de dados do programa FEMOOP. O primeiro utiliza o elemento finito com deslizamento para simular o problema da figura II.1, identificado pelo programa através da *string* SLIPBEAM. O segundo utiliza o elemento de interface retangular de espessura nula para simular o comportamento na interface de deslizamento, identificado pelo programa através da *string* INTERFACE, em conjunto com o elemento unidimensional de viga para representar as seções mistas acima e abaixo da interface de deslizamento, identificado no programa através da *string* BEAM2D.

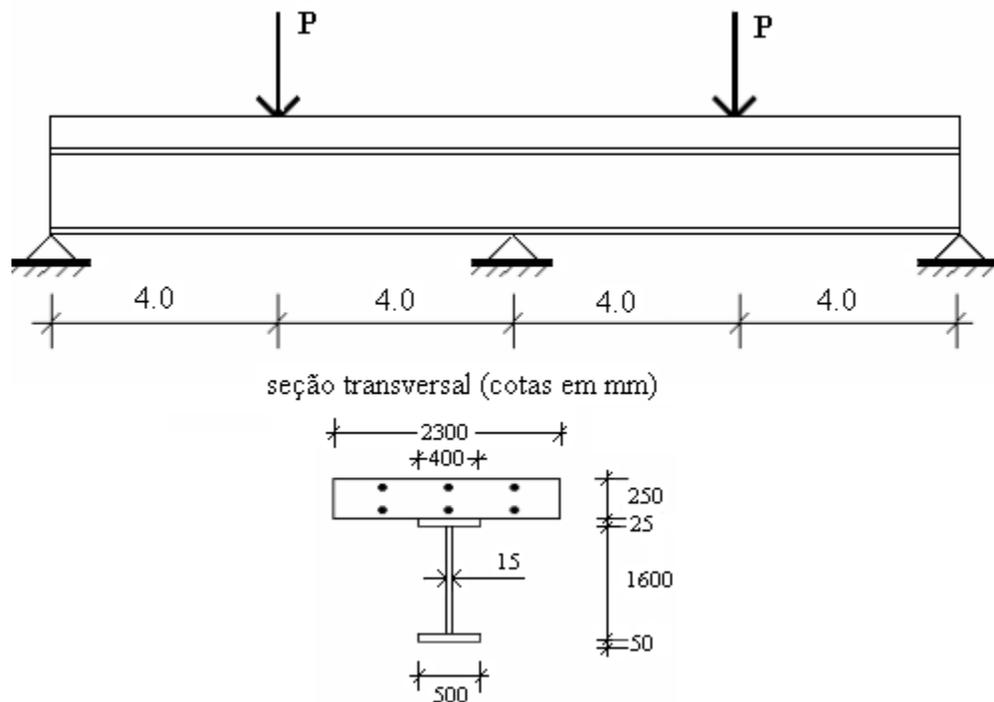


Figura II.1 Viga mista ilustrativa para arquivo de entrada de dados.

## II.2 ARQUIVO DE ENTRADA PARA O ELEMENTO SLIPBEAM

A viga mista da figura II.1 será discretizada em uma malha de oito elementos e nove nós, como mostra a figura II.2.

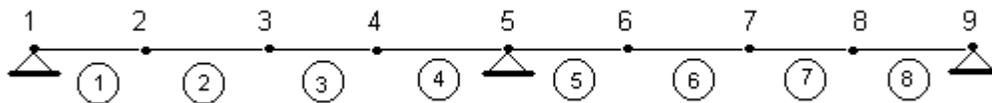


Figura II.2 Discretização em elementos finitos.

Abaixo é apresentada partes do arquivo de entrada de dados do programa FEMOOP para simulação do problema da figura II.1 usando o elemento SLIPBEAM. Em letras maiúsculas estão partes do arquivo de entrada, e em letras minúsculas, *itálicas* e acompanhadas de uma seta estão comentários feito pelo autor referente a entrada a qual a seta identifica.

**%HEADER.ANALYSIS**

'SLIPBEAM' → Define o tipo de elemento utilizado na análise.

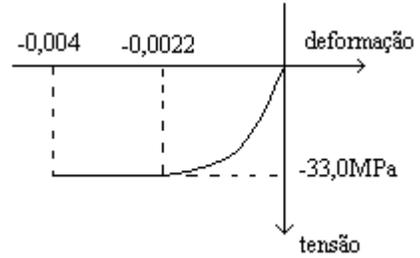
**%STRESS.STRAIN**

2 → Número de relação tensão-deformação dos diferentes materiais.

**%SEGMENT.POLYNOMIAL.STRESS.STRAIN**

3 2  
-0.004  
-0.0022  
0.0000  
1  
-33000.0  
3  
0.0  
30000000.0  
6818182000.0

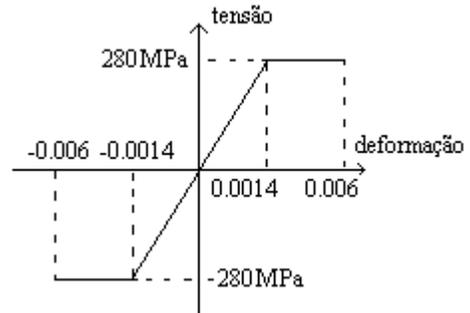
→ curva 1 (tensão deformação do concreto)



**%SEGMENT.POLYNOMIAL.STRESS.STRAIN**

4 3  
-0.06  
-0.0014  
0.0014  
0.06  
1  
-280000.0  
2  
0.0  
200000000.0  
1  
280000.0

→ curva 2 (tensão deformação do aço)



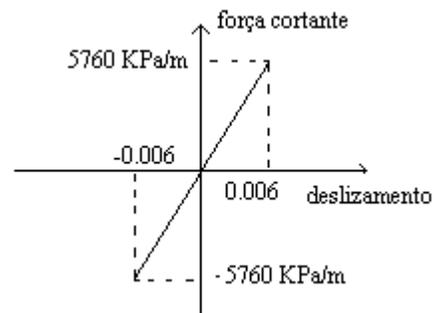
**%FORCE.SLIP**

1 → número de diferentes relação força por unidade de comprimento versus deslocamento

**%SEGMENT.POLYNOMIAL.FORCE.SLIP**

2 1  
-0.006  
0.006  
2  
0.0  
960000.0

→ curva 1 (relação força cortante deslocamento da interface concreto aço)



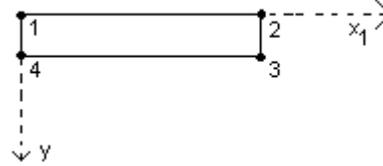
%CROSS.SECTION

2 → número de diferentes seções transversais dos elementos

%MULTIMATERIAL.SECTION

1  
1 4  
0.00 0.00  
2.30 0.00  
2.30 0.25  
0.00 0.25  
2  
2  
1.15 0.01  
0.0025  
1.15 0.24  
0.0025

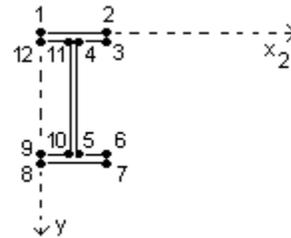
→ seção 1 (laje de concreto). O eixo de referência  $x_1$  pode ser definido em qualquer posição.



%MULTIMATERIAL.SECTION

1  
2 12  
0.9500 0.000  
1.3500 0.000  
1.3500 0.025  
1.1575 0.025  
1.1575 1.625  
1.4000 1.625  
1.4000 1.675  
0.9000 1.675  
0.9000 1.625  
1.1425 1.625  
1.1425 0.025  
0.9500 0.025  
2  
0

→ seção 2 (perfil de aço). O eixo de referência  $x_2$  pode ser definido em qualquer posição.



**%ELEMENT.SLIPBEAM**

8	→ número de elementos do tipo SLIPBEAM								
1	1	1	2	1	3	3	1	1	2
2	1	1	2	1	3	3	1	2	3
3	1	1	2	1	3	3	1	3	4
4	1	1	2	1	3	3	1	4	5
5	1	1	2	1	3	3	1	5	6
6	1	1	2	1	3	3	1	6	7
7	1	1	2	1	3	3	1	7	8
8	1	1	2	1	3	3	1	8	9
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
Col 1	Col 2	Col 3	Col 4	Col 5	Col 6	Col 7	Col 8	Col 9	

- COMENTÁRIOS:**
- COL 1: índice do elemento.
  - COL 2: índice do material para cada elemento.
  - COL 3: índice da seção superior a interface de deslizamento da viga mista para cada elemento.
  - COL 4: índice da seção inferior a interface de deslizamento da viga mista para cada elemento
  - COL 5: índice que define a relação força deslizamento na interface para cada elemento.
  - COL 6: número de pontos de Gauss utilizado na integração numérica (integra deslocamento na direção u).
  - COL 7: número de pontos de Gauss utilizado na integração numérica (integra deslocamento na direção v e v').
  - COL 8: índice que define liberações nas extremidades do elemento.
  - COL 9: conectividade de cada elemento.

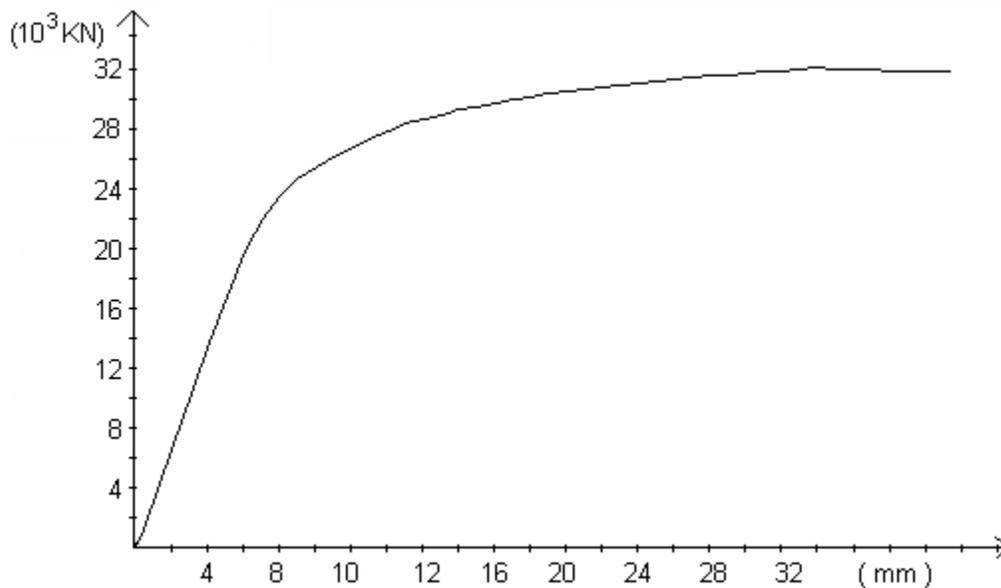


Figura II.3 Curva que relaciona a carga **P** com o deslocamento vertical do meio dos vãos da viga

A figura II.3 anterior é o resultado numérico do problema da figura II.1 determinado através do programa FEMOOP usando o elemento SLIPBEAM. O arquivo de entrada de dados do problema está resumido neste item.

### II.3 ARQUIVO DE ENTRADA PARA O ELEMENTO INTERFACE E BEAM2D

A viga mista da figura II.1 será discretizada em uma malha de oito elementos de interface, 16 elementos unidimensionais de viga e dezoito nós, sendo que os nós pares tem as mesmas coordenadas dos nós ímpares, como mostra a figura II.4.

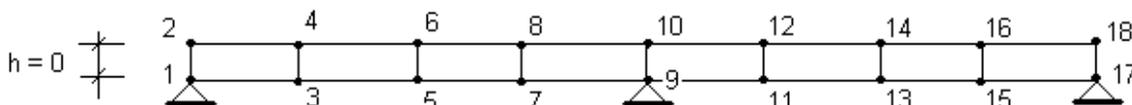


Figura II.4 Discretização em elementos finitos.

Abaixo é apresentada partes do arquivo de entrada de dados do programa FEMOOP para simulação do problema da figura II.1 usando o elemento INTERFACE em conjunto com o elemento unidimensional de viga BEAM2D. Em letras maiúsculas estão partes do arquivo de entrada, e em letras minúsculas, itálicas e acompanhadas de uma seta estão comentários feito pelo autor referente a entrada a qual a seta identifica.

**%HEADER.ANALYSIS**

**'BEAM2D'** → *Define um dos tipos de elemento utilizado na análise.*

**%HEADER.ANALYSIS**

**'INTERFACE'** → *Define um dos tipos de elemento utilizado na análise.*

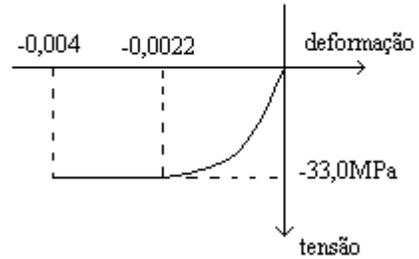
**%STRESS.STRAIN**

**2** → *Número de relação tensão-deformação dos diferentes materiais.*

%SEGMENT.POLYNOMIAL.STRESS.STRAIN

3 2  
-0.004  
-0.0022  
0.0000  
1  
-33000.0  
3  
0.0  
30000000.0  
6818182000.0

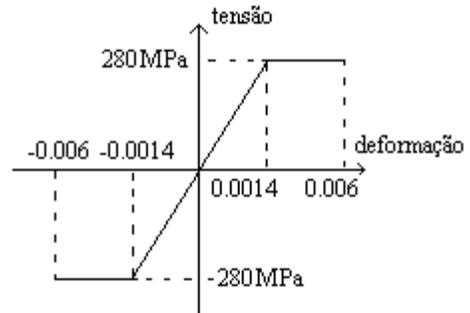
→ curva 1 (tensão deformação do concreto)



%SEGMENT.POLYNOMIAL.STRESS.STRAIN

4 3  
-0.06  
-0.0014  
0.0014  
0.06  
1  
-280000.0  
2  
0.0  
200000000.0  
1  
280000.0

→ curva 2 (tensão deformação do aço)



%FORCE.SLIP

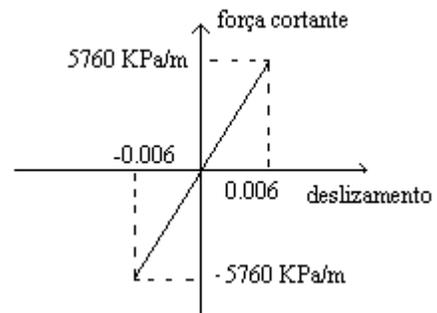
2

→ número de diferentes relação força por unidade de comprimento versus deslocamento

%SEGMENT.POLYNOMIAL.FORCE.SLIP

2 1  
-0.006  
0.006  
2  
0.0  
960000.0

→ curva 1 (relação força cortante - deslocamento da interface aço-concreto)



%SEGMENT.POLYNOMIAL.FORCE.SLIP

2 1  
-0.006  
0.006  
2  
0.0  
100000000000.0

→ curva 2 (relação força normal versus elevação da interface concreto aço) Como é considerado que não há separação vertical da interface, é considerado para esta direção um curva com uma taxa tangente de deformação muito elevada(100000000000.0).

**%CROSS.SECTION**

2

→ número de diferentes seções transversais dos elementos

**%MULTIMATERIAL.SECTION**

1

1 4

0.00 0.00

2.30 0.00

2.30 0.25

0.00 0.25

2

2

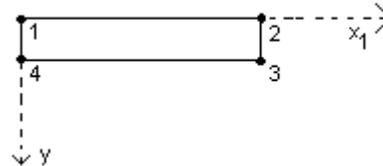
1.15 0.01

0.0025

1.15 0.24

0.0025

→ seção 1 (laje de concreto). O eixo de referência  $x_1$  pode ser definido em qualquer posição.



**%MULTIMATERIAL.SECTION**

1

2 12

0.9500 0.000

1.3500 0.000

1.3500 0.025

1.1575 0.025

1.1575 1.625

1.4000 1.625

1.4000 1.675

0.9000 1.675

0.9000 1.625

1.1425 1.625

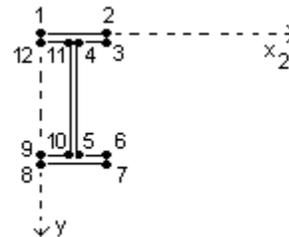
1.1425 0.025

0.9500 0.025

2

0

→ seção 2 (perfil de aço). O eixo de referência  $x_2$  pode ser definido em qualquer posição.

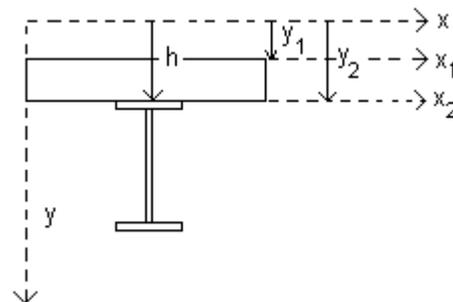


**%INTERFACE.SECTION**

1

1 0.25 0.00 0.25  
(h) (y<sub>1</sub>) (y<sub>2</sub>)

→ Define a posição da interface (h) em relação a um eixo de referência qualquer, e as posições dos eixos  $x_1$  ( $y_1$ ) e  $x_2$  ( $y_2$ ) definido em **CROSS.SECTION** em relação ao mesmo eixo qualquer. Para o exemplo em questão o eixo  $x$  qualquer é adotado ser coincidente com o eixo  $x_1$ , logo  $y_1 = 0$ ,  $y_2 = 0.25$  e  $h = 0.25$ .



%ELEMENT

24

→ número total da malha de elementos finitos

%ELEMENT.BEAM2D

16

→ número de elementos finitos do tipo BEAM2D

1	1	2	3	3	1	1	3
2	1	2	3	3	1	3	5
3	1	2	3	3	1	5	7
4	1	2	3	3	1	7	9
5	1	2	3	3	1	9	11
6	1	2	3	3	1	11	13
7	1	2	3	3	1	13	15
8	1	2	3	3	1	15	17
9	1	1	3	3	1	2	4
10	1	1	3	3	1	4	6
11	1	1	3	3	1	6	8
12	1	1	3	3	1	8	10
13	1	1	3	3	1	10	12
14	1	1	3	3	1	12	14
15	1	1	3	3	1	14	16
16	1	1	3	3	1	16	18

↓

↓

↓

↓

↓

↓

↓

Col 1

Col 2

Col 3

Col 4

Col 5

Col 6

Col 7

COMENTÁRIOS: Col 1: índice do elemento.

Col 2: índice do material para cada elemento.

Col 3: índice que define a seção transversal de cada elemento.

Col 4: número de pontos de Gaus utilizado na integração numérica (integra deslocamento na direção  $u$ ).

Col 5: número de pontos de Gaus utilizado na integração numérica (integra deslocamento na direção  $v$  e  $v'$ ).

Col 6: índice que define liberações nas extremidades do elemento.

Col 7: conectividade de cada elemento.

## %ELEMENT.INTERFACE

8 → número de elementos finitos do tipo INTERFACE

1	1	1	2	1	4	4	1	2	4	3	1
2	1	1	2	1	4	4	1	4	6	5	3
3	1	1	2	1	4	4	1	6	8	7	5
4	1	1	2	1	4	4	1	8	10	9	7
5	1	1	2	1	4	4	1	10	12	11	9
6	1	1	2	1	4	4	1	12	14	13	11
7	1	1	2	1	4	4	1	14	16	15	13
8	1	1	2	1	4	4	1	16	18	17	15
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓		↓		
Col 1	Col 2	Col 3	Col 4	Col 5	Col 6	Col 7	Col 8		Col 9		

COMENTÁRIOS: Col 1: índice do elemento.

Col 2: índice do material para cada elemento.

Col 3: índice que define a relação força deslizamento na interface para cada elemento.

Col 4: índice que define a relação força normal versus elevação na interface para cada elemento.

Col 5: índice que define a seção da interface (INTERFACE.SECTION).

Col 6: número de pontos de Gauss utilizado na integração numérica (integra deslocamento na direção u).

Col 7: número de pontos de Gauss utilizado na integração numérica (integra deslocamento na direção v e v').

Col 8: índice que define liberações nas extremidades do elemento.

Col 9: conectividade de cada elemento.

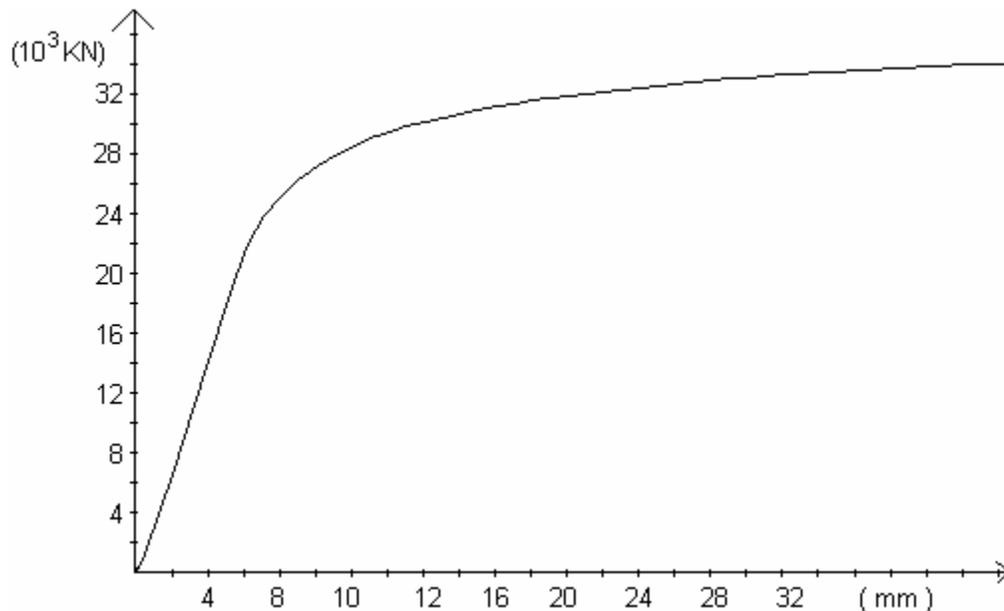


Figura II.5 Curva que relaciona a carga **P** com o deslocamento vertical do meio dos vãos da viga.

A figura II.5 anterior é o resultado numérico do problema da figura II.1 determinado através do programa FEMOOP usando o elemento INTERFACE em conjunto com o elemento BEAM2D. O arquivo de entrada de dados do problema está resumido neste item.

# BIBLIOGRAFIA

ACI-318 (1999). Building Code Requirements for Structural Concrete and Commentary. American Concrete Institute, Detroit.

AISC (1999). Load and Resistance Factor Design Specification for Steel Buildings. American Institute of Steel Construction, December, with errata incorporated as of September 4, 2001, Chicago.

Bathe, K. J. e Dvorkin, E. N. (1983). On the Automatic Solution of Nonlinear Finite Element Equations. *Comput. Struct.*, v. 17, p. 871-879.

Batoz, J. L. e Dhatt, G. (1979). Incremental Displacement Algorithms for Non-Linear Problems. *Int. J. Numer. Methods. Eng.*, v. 14, p. 1262-1266.

Caldas, R. B. Análise Numérica de Pilares Mistos Aço-Concreto, Dissertação de Mestrado, PROPEC, DECIV, Escola de Minas, UFOP, 2004.

Carol, I. López, C. M. e Roa, O. (2001). Micromechanical analysis of quasi-brittle materials using fracture-based interface elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 52, p. 193 - 215.

CEB (1990). CEB - FIP - Model Code 1990 - Final Draft. Bulletin d'Information n.203, Comité Euro-Internacional Du Beton, Paris.

Chen, S. F., Teng, J. G. e Chan, S. L. (2001). Design of Biaxially Loaded Short Composite Columns of Arbitrary Section. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, v. 127(6), June.

Cook, R. D., Malkus, D. S. e Plesha, M. E. (1989). *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*. John Wiley & Sons.

Coutinho, A.L.G.A., Martins, M.A.D., Sydenstricker, R.M. Alves, J.L.D. e Landau, L. (2003). Simple zero thickness Kinematically consistent interface elements. *Computers and Geotechnics*, v. 30(5), p. 347 - 374.

Crisfield, M. A. (1981). A Fast Incremental/Iterative Solution Procedure that Handles Snap-Through. *Comput. Struct.*, v. 13, p. 55 - 62.

Crisfield, M. A. (1991). *Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*. John Wiley & Sons, v. 1.

Dall'Asta, A. e Zona, A. (2004a). Comparison and validation of displacement and mixed elements for the non-linear analysis of continuous composite beams. *Computer & structures*, v. 82, p. 2117 – 2130.

Dall'Asta, A. e Zona, A. (2004b). Slip locking in finite element for composite beam with deformable shear connection. *Finite Elements in Analysis and Design*, v. 40, p. 1907 - 1930.

De Nardim, S. (1999). *Estudo Teórico-Experimental de Pilares Mistos Compostos por Tubos de Aço Preenchidos com Concreto de Alta Resistência*. Dissertação de Mestrado, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

Eurocode 4 (1994). *Design of Composite Steel and Concrete Structures: Part 1.1: General rules and rules for buildings*. DRAFT prEN 1994-1-1:2001, European Committee for Standardization, April, 2001.

Fabbrocino, G. Manfredi, G. e Gosenza, E. (1999). Non-linear analysis of composite beams under positive bending. *Computer & structures*, v. 70, p. 77 - 89.

Faella, C. Martinelli, E. e Nigro, E. (2002). Steel and Concrete composite beam with flexible shear connection: “exact” analytical expression of the stiffness matrix and applications. *Computer & structures*, v. 80, p. 1001 - 1009.

Ferreira, L. T. S. (1986). Desenvolvimento de um Sistema Geral de Dimensionamento de Estruturas de Concreto Armado usando Microcomputadores. Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia Civil, PUC/Rio.

Figueiredo, L. M. B. (1998). Projeto e Construção de Pilares Mistos Aço-Concreto. Dissertação de Mestrado, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

Garcia, L. F. T. e Villaça, S. F. (1999). Introdução à Elasticidade não Linear. 3ª ed., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro.

Gattesco, N. (1999). Analytical modeling of nonlinear behavior of composite beams with deformable connection. *Journal of Constructional Steel Research*, v. 52, p. 195 – 218.

Goodman, R.E., Taylor, R.L e Brekke, T.L. (1968). A model for the mechanics of jointed rock. *J. Soil Mech. Fdns. Div., ASCE*, v. 99, p. 637 - 659.

Griffs, L. G. (1994). The 1994 T. R. High Lecture: Composite Frame Construction. National Steel Construction Conference, AISC, v. 1, p. 1.1 - 1.72, New York.

Guimarães, L. G. S. (1992). Disciplina Orientada a Objetos para Análise e Visualização Bidimensional de Modelos de Elementos Finitos. Dissertação de Mestrado, PUC-Rio, Departamento de Engenharia Civil.

Hermann, L. R. (1978). Finite Element Analysis of contact problems. *Journal Engineering Mechanics*, ASCE, v. 104, p. 263 - 277.

Kaliakin, V. N. e Li, J. (1995). Insight into deficiencies associated with commonly used zero-thickness interface elements. *Computers and Geotechnics*, v. 17, p. 225 - 252.

Lakshmi, B. e Shanmugam, N. E. (2002). Nonlinear Analysis of In-Filled Steel-concrete Composite Columns. *Journal of Structural Engineering*, v. 128, p. 922 – 933.

Liang, Q. Q. Uy, B. Bradford, M. A. e Ronagh, H. R. (2004). Ultimate strength of continuous composite beams in combined bending and shear. *Journal of Constructional Steel Research*, v. 60, p. 1109 - 1128.

Martha, L. F. (2003). Notas de Aula do Curso Fundamentos de Computação Gráfica Aplicada. PUC-Rio, Departamento de Engenharia Civil, ([www.tecgraf.puc-rio.br/~lfm](http://www.tecgraf.puc-rio.br/~lfm)).

Melo, A. M. C. (2000). Projeto Ótimo de Pórticos de Concreto Armado. Tese de doutorado, COPPE/UFRJ, Departamento de Engenharia Civil, Rio de Janeiro.

Mirza, S. A., e Skrabek, B. W. (1991). Reliability of Short Composite Beam-Column Strength Interaction. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, v. 117(8), p. 2320 - 39.

Muniz, C.F.D.G. Modelos Numéricos para Análise de Elementos Estruturais Místos, Dissertação de Mestrado, PROPEC, Departamento de Engenharia Civil, Escola de Minas, UFOP, 2005.

NBR 6118 (2003). Projeto e Execução de Obras de Concreto Armado. Associação Brasileira de Normas Técnicas, Rio de Janeiro.

NBR 8800 (1986). Projeto e Execução de Estruturas de Aço de Edifícios. Associação Brasileira de Normas Técnicas, Rio de Janeiro.

NBR 8800 (2005). Projeto de Revisão. Projeto e Execução de Estruturas de Aço e Estruturas Mistas Aço-Concreto de Edifícios. Associação Brasileira de Normas Técnicas, Rio de Janeiro.

Newmark, N. M. Siess, C. P e Viest I. M. (1951). Test and analysis of composite beam with incomplete interaction. Proc Soc Exp Stress Anal, v. 9, p. 75-92.

Nie, J. Fan, J. e Cai, C. S. (2004). Stiffness and Deflection of Steel-Concrete Composite Beams under Negative Bending. Journal of Structural Engineering, ASCE, v. 130(11), p. 1842 - 1851.

Oehlers, D. J. e Bradford, M. A. (1995), Composite Steel and Concrete Structural Members: Fundamental Behaviour. Pergamon Press, Oxford.

Oven, V. A. Burgess, I. W. PlanK, R. J. e Wali, A. A. (1997). An analytical model for the analysis of composite beam with parcial interaction. Computer & structures, v. 62, p. 493 - 504

Parente Jr., E. (2000). Análise de Sensibilidade e Otimização de Forma de Estruturas Geometricamente Não-Lineares. Tese de Doutorado, PUC-Rio, Departamento de Engenharia Civil, Rio de Janeiro.

Queiroz, G., Pimenta, R. J. e Da Mata, L. A. C. (2001). Elementos das Estruturas Mistas Aço-Concreto. Belo Horizonte.

Ramm, E. (1981). Strategies for Tracing the Nonlinear Response Near Limit Points. W. Wunderlich, E. Stein e K. J. Bathe, editors, Nonlinear Finite Element Analysis in Structural Mechanics, p. 63 - 89, Springer-Verlag.

Riks, E. (1979). An Incremental Approach to the Solution of Snapping and Buckling Problems. *Int. J. Sol. Struct.*, v.15, p. 529 - 551.

Rodriguez, J. A. e Aristizabal-Ochoa, J. D. (1999). Biaxial Interaction Diagrams for Short RC Columns of any Cross Section. *Journal Structural Engineering, ASCE*, v. 125(6), p. 672 - 683.

Salari, M. K. e Spacone, E. (2001). Finite element formulation of one-dimensional elements with bond-slip. *Engineering Structures*, v. 23, p. 815-826.

Sfakianakis, M. G. (2002). Biaxial Bending with Axial Force of Reinforced, Composite and Repaired Concrete Sections of Arbitrary Shape by Fiber Model and Computer Graphics. *Advances in Engineering Software*, v. 33, p. 227 - 242.

Sousa Jr., J. B. M. (2000). Auto-Adaptação e Otimização de Forma em Cascas. Tese de Doutorado, PUC-Rio, Departamento de Engenharia Civil, Rio de Janeiro.

Uy, B. (2001). Strength of short concrete filled high strength steel box columns. *Journal of Constructional Steel Research*, v. 57, p. 113 - 134.

Werner, H. (1974). Schiefe Biegung Polygonal Umrandeter Stahlbetonquerschnitte. *Beton - und Stahlbetonbau*.

Yang, Y. e Kuo, S. (1994). *Theory & Analysis of Nonlinear Framed Structures*. Prentice Hall.



# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)