

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO – ESCOLA DE MINAS  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL**

# **Modelos Numéricos para Análise de Elementos Estruturais Mistos**

**CERENO DE FREITAS DINIZ GONÇALVES MUNIZ**

ORIENTADOR: Prof. Dr. João Batista Marques de Sousa Jr.

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação do Departamento de Engenharia Civil da Escola de Minas da Universidade Federal de Ouro Preto, como parte integrante dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil, área de concentração: Estruturas Metálicas.

**Ouro Preto,  
setembro de 2005.**

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

**MODELOS NUMÉRICOS PARA ANÁLISE DE ELEMENTOS  
ESTRUTURAIS MISTOS**

**AUTOR: CERENO DE FREITAS DINIZ GONÇALVES MUNIZ**

Esta dissertação foi apresentada em sessão pública e aprovada em 19 de setembro de 2005, pela Banca Examinadora composta pelos seguintes membros:



Prof. Dr. João Batista Marques de Sousa Jr. (Orientador / UFOP)



Prof. Dr. Marcílio Sousa da Rocha Freitas (UFOP)



Prof. Dr. Pedro Colmar Gonçalves da Silva Vellasco (UERJ)

***Dedicado aos meus pais,***

***Iêda e Cezar.***

# AGRADECIMENTOS

A Deus pelas oportunidades dadas a mim.

Aos meus pais, Cezar e Iêda, e as minhas irmãs, Briza e Relva, por, simplesmente, tudo.

Aos tios, tias, amigos e parentes que sempre me apoiaram e acreditam em mim.

A Mila, pela ajuda e apoio nesta conquista.

Aos colegas de mestrado e em especial a Paulo, Scheffer, Flávio e Kátia por estarem sempre ao meu lado, me ajudarem a vencer este desafio e me ensinarem muito mais do que engenharia.

A todos os funcionários da Escola de Minas, em especial ao Professor Dornelas e a Róvia.

A todos os professores do mestrado, em especial a Arlene, Marcílio e Ricardo.

A meu orientador, João, pela paciência, ajuda precisa e valiosa, e pela atenção dedicada a mim.

A Rodrigo, amigo irmão pra qualquer hora.

A UFOP e a empresa Vallourec & Mannesmann do Brasil S.A. pelo apoio e financiamento deste trabalho.

E a Flávia, por iluminar meu caminho, fazer parte da minha vida e ser a verdadeira razão do meu mestrado.

# RESUMO

Os elementos estruturais mistos, formados pela associação de perfis metálicos com o concreto, vêm se tornando uma solução atraente em diversos países, não só pelo aumento da capacidade de carga das peças estruturais, mas também devido a aspectos como economia e rapidez de execução da obra. Esta associação revela novos fenômenos que estão diretamente ligados à ação conjunta dos materiais e que, normalmente, são tratados de forma simplificada pelas normas.

Este trabalho apresenta formulações numéricas para análise de elementos mistos utilizando elementos finitos de barra, que levam em consideração as não linearidades física e geométrica. A implementação realizada permite a consideração de qualquer tipo de seção transversal, que possa ser escrita em forma de poligonais, e de qualquer tipo de material, que possa ter sua relação constitutiva descrita através de funções polinomiais, abrangendo a grande maioria das situações encontradas na construção mista. Os elementos implementados permitem ainda a consideração de imperfeições geométricas iniciais e também análises no campo de grandes deslocamentos e grandes rotações através da utilização de elementos co-rotacionais. Um procedimento numérico de formulação simples, como no caso de elementos de barra, pode ser uma ferramenta de grande valor para pesquisadores e projetistas de estruturas mistas.

O foco principal da dissertação é o comportamento de pilares mistos, mas, devido ao caráter genérico da formulação é possível o tratamento de elementos puramente metálicos ou de concreto armado. Ao longo do trabalho são descritas as principais particularidades inerentes a este tipo de estrutura e são apresentados os principais métodos de análise disponíveis na literatura. Resultados numéricos e experimentais são utilizados em comparações para verificação e validação do modelo proposto. Também são descritas, e comparadas através de exemplos, as prescrições do Eurocode 4 (1994), AISC-LRFD (1999, 2005) e do projeto de revisão da NBR 8800 (2003).

# ABSTRACT

Steel-Concrete composite members, formed by the association of steel profiles with concrete, are an attractive structural solution in many countries, not only by the increase on the load carrying capacity but also due to aspects related with cost saving and speed of construction. This association gives rise to new phenomena related with the combined action of the materials and generally treated by the design codes in a simplified way.

This work presents numerical formulations for the analysis of composite members using beam-column finite elements using physical and geometrical nonlinearity assumptions. The developed implementation allows the consideration of a generic cross section, as long as it can be represented by polygons, and any type of material with piecewise polynomial stress-strain relation. This encompasses most practical situations usually found in composite construction. The implemented elements allows the consideration of initial lack of straightness of the element axis and also large displacements and large rigid-body rotations through the use of co-rotational technique. A simple numerical procedure, as is the case of bar elements, can be a useful tool for researchers and designers of composite structures.

The main objective of this dissertation is the study of composite columns. Nonetheless, the generic aspect of the implemented formulation allows the treatment of bare steel elements and reinforced concrete members as well. The proposed numerical model is compared to other numerical and experimental results. The inherent characteristics of these structural elements are described and the most important methods of analysis available in literature are presented. Finally, the design methods recommended in Eurocode 4 (1994), AISC-LRFD (1999, 2005) and NBR 8800 (Draft-2003) are presented and evaluated through numerical examples.

# SUMÁRIO

LISTA DE TABELAS	X
LISTA DE FIGURAS	XI

---

## **Capítulo 1 - Introdução**

---

1.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS	1
1.2 JUSTIFICATIVA E OBJETIVOS	5
1.3 ORGANIZAÇÃO	7

## **Capítulo 2 - Elementos Mistos**

---

2.1 INTRODUÇÃO	8
2.2 DEFINIÇÕES	8
2.3 SEÇÕES TRANSVERSAIS MISTAS	9
2.4 PILARES MISTOS	10
2.5 INTERAÇÃO AÇO-CONCRETO	13
2.6 CONFINAMENTO	15
2.7 EFEITOS DE LONGA DURAÇÃO	18
2.8 INFLUÊNCIA DA FORMA DE APLICAÇÃO DO CARREGAMENTO	20

## **Capítulo 3 – Análise da Seção Transversal**

---

3.1 – INTRODUÇÃO	24
3.2 – PROCEDIMENTOS DE ANÁLISE E CURVAS DE INTERAÇÃO	25
3.3 – ANÁLISE DA SEÇÃO	30
3.4 – SEÇÃO MULTI-MATERIAL	33
3.4.1 – Materiais	33
3.4.2 – Discretização da Seção	34
3.4.3 – Esforços Resistentes e Rigidezes Generalizadas	36
3.4.4 – Teorema de Green	39
3.4.5 – Integração Analítica	43
3.4.5.1 – Esforços Resistentes	43
3.4.5.2 – Rigidezes Generalizadas	48
3.4.6 – Comentários Finais	51

## **Capítulo 4 – Análise Numérica de Pilares Mistos**

---

4.1 – INTRODUÇÃO	52
4.2 – MÉTODO DE SOLUÇÃO NUMÉRICA	54
4.3 – ELEMENTO FINITOS	56
4.3.1 – Elemento com Imperfeições Iniciais	56
4.3.1.1 – Relação Deformação-Deslocamento	58
4.3.1.2 – Vetor de Forças Internas e Matriz de Rigidez Tangente	60
4.3.1.3 – Funções de Interpolação	63
4.3.1.4 – Derivadas dos Esforços Externos	66
4.3.2 – Elementos Co-rotacionais	68
4.3.2.1 – Relação Entre os Sistemas Global e Local	70
4.3.2.2 – Funções de Interpolação	74
4.3.2.3 – Trabalho Virtual Interno	76
4.3.2.4 – Vetor de Forças Internas e Matriz de Rigidez Tangente	76
4.3.2.5 – Elemento Co-rotacional 2	81

## **Capítulo 5 – Aplicações e Análises**

---

5.1 – INTRODUÇÃO	85
5.2 – EXEMPLOS	86
5.2.1 – Pilar Misto Tubular Circular	86
5.2.2 – Pilar Misto Tubular Duplo – Tubo Quadrado com Tubo Circular	89
5.2.3 – Pilar Misto Tubular Duplo – Tubo Circular com Tubo Circular	92
5.2.4 – Pilar de Concreto Armado	94
5.2.5 – Pórtico Metálico	95
5.2.6 – Pórtico em Concreto Armado	97
5.3 – COMENTÁRIOS FINAIS	98

## **Capítulo 6 – Prescrições de Normas Sobre Pilares Mistos**

---

6.1 – INTRODUÇÃO	99
6.2 – PRESCRIÇÕES DE NORMAS	100
6.2.1 – Eurocode 4 (1994)	100
6.2.1.1 – Método Geral	101
6.2.1.2 – Método Simplificado	102
6.2.1.2.1 – Compressão Simples	102
6.2.1.2.2 – Flexão Composta	106
6.2.1.2.2.1 – Flexão Composta Reta	106
6.2.1.2.2.2 – Flexão Composta Oblíqua	109
6.2.1.2.2.3 – Efeitos de Segunda Ordem	110
6.2.1.2.2.4 – Simplificação da Curva de Interação	111
6.2.1.2.3 – Restrições da Norma	114
6.2.2 – AISC-LRFD (1999)	116
6.2.2.1 – Compressão Simples	116
6.2.2.2 – Flexão Composta	118
6.2.2.3 – Restrições da Norma	120
6.2.3 – AISC (2005)	122
6.2.3.1 – Compressão Simples	123
6.2.3.2 – Flexão Composta	124
6.2.3.3 – Restrições da Norma	126
6.2.4 – Projeto de Revisão NBR 8800 (2003)	128
6.2.4.1 – Compressão Simples	128
6.2.4.2 – Flexão Composta	128
6.2.4.3 – Restrições da Norma	129
6.3 – AVALIAÇÃO DE NORMAS	130
6.3.1 – Análises - Compressão Simples	132
6.3.2 – Análises - Flexão Composta Reta	134
6.3.3 – Conclusões	141

## **Capítulo 7 – Conclusões e Sugestões**

---

7.1 – CONCLUSÕES	143
7.2 – SUGESTÕES	145
BIBLIOGRAFIA	147

---

# LISTA DE TABELAS

## Capítulo 5

---

Tabela 5.1 – Resultados das análises e ensaios - Zeghiche e Chaoui (2005).	87
Tabela 5.2 – Relações entre $f_{ck,cilindrico}$ e $f_{ck,cúbico}$ - Eurocode 2 (2003).	89
Tabela 5.3 – Resultados das análises e ensaios - Han et al. (2004).	90
Tabela 5.4 – Resultados das análises e ensaios - Tao et al. (2004).	93

## Capítulo 6

---

Tabela 6.1 - Valores do parâmetro de esbeltez limite.	106
Tabela 6.2 - Dados das Análises.	131
Tabela 6.3 - Esbeltez relativa e razão de contribuição do aço para análises.	131
Tabela 6.4 - Seção Circular Preenchida – Resistência à Compressão Simples.	132
Tabela 6.5 - Seção I Revestida – Resistência à Compressão Simples.	133
Tabela 6.6 - Seção Circular Preenchida – Flexão Composta Reta ( $e_b=e_t=20mm$ )	134
Tabela 6.7 - Seção Circular Preenchida – Flexão Composta Reta ( $e_b=-e_t=20mm$ ).	135
Tabela 6.8 - Seção Circular Preenchida – Flexão Composta Reta ( $e_b=e_t=100mm$ ).	136
Tabela 6.9 - Seção Circular Preenchida – Flexão Composta Reta ( $e_b=-e_t=100mm$ ).	137
Tabela 6.10 - Seção I Revestida – Flexão Composta Reta ( $e_b=e_t=20mm$ ).	138
Tabela 6.11 - Seção I Revestida – Flexão Composta Reta ( $e_b=-e_t=20mm$ ).	139
Tabela 6.12 - Seção I Revestida – Flexão Composta Reta ( $e_b=e_t=100mm$ ).	140
Tabela 6.13 - Seção I Revestida – Flexão Composta Reta ( $e_b=-e_t=100mm$ ).	141

# LISTA DE FIGURAS

## Capítulo 1

---

Figura 1.1 - Millenium Tower (Viena, Áustria). (Structural Engineering International, v.9, n.3, p. 176, 1999).	3
Figura 1.2 - Ponte Beichuan River Bridge (Zong et al., 2005).	4
Figura 1.3 - Edifício Taipei 101 (enr.construction.com).	4
Figura 1.4 - Edifício Taipei 101 – Pilares Preenchidos (enr.construction.com).	5

## Capítulo 2

---

Figura 2.1 - Seção transversal de laje mista.	9
Figura 2.2 - Seções transversais de vigas mistas.	10
Figura 2.3 - Seções transversais de treliças mistas.	10
Figura 2.4 - Seções transversais para pilares mistos. (Eurocode 4, 1994).	11
Figura 2.5 - Concretagem de pilar misto parcialmente revestido. (Stark, 2001).	11
Figura 2.6 - Mecanismos de transferência de carga. (Johansson, 2002).	14
Figura 2.7 - Soldagem de conectores de cisalhamento. (ESDEP, 1996).	14
Figura 2.8 - Distribuição de tensões no concreto e no aço para uma seção tubular circular preenchida. (Bergmann et al., 1995)	15
Figura 2.9 - Estado biaxial de tensões no aço	16
Figura 2.10 - Regiões de confinamento em pilares preenchidos quadrados e circulares. (Johansson, 2002).	17
Figura 2.11 - Efeito do confinamento lateral na relação tensão deformação. (Han, 2004)	18
Figura 2.12 - Formas de aplicação do carregamento de pilares mistos.	20
Figura 2.13 - Pilares circulares preenchidos ensaiados por Johansson e Gylltoft (2002)	22

## Capítulo 3

---

Figura 3.1 - Análise elasto-plástica da seção (Caldas, 2004).	25
Figura 3.2 - Relações constitutivas para o concreto.	26
Figura 3.3 - Curva de Interação Momento Normal – Seção Mista.	27
Figura 3.4 - Curva de Interação Momento Normal – Seção Metálica.	28
Figura 3.5 - Efeito da influência do concreto na curva de interação de seções mistas (Bergmann et al., 1995).	28
Figura 3.6 - Polígono de aproximação da curva de interação real.	29
Figura 3.7 - Distribuição de tensões nos pontos A e B.	29
Figura 3.8 - Discretização da seção transversal pelo modelo de fibras.	31
Figura 3.9 - Distribuição de deformações e forças no método das fibras.	31
Figura 3.10 - Relações tensão deformação adotadas para o aço por Caldas (2004).	33
Figura 3.11 - Exemplo da divisão do diagrama tensão deformação em faixas.	34
Figura 3.12 - Seção transversal discretizada por polígonos.	35
Figura 3.13 - Elemento infinitesimal de área da seção.	36
Figura 3.14 - Parametrização de um segmento genérico da poligonal.	39
Figura 3.15 - Fluxograma de cálculo dos esforços e rigidezes.	46

## Capítulo 4

---

Figura 4.1 - Método de Newton Raphson – Representação gráfica.	55
Figura 4.2 - Curva Carga x Deslocamento. - Técnicas de incremento de passos.	55
Figura 4.3 - Elemento implementado por Caldas (2004).	56
Figura 4.4 - Elemento implementado por Caldas (2004) - Sistema de coordenadas seccional.	57
Figura 4.5 - Elemento com curvatura inicial.	57
Figura 4.6 - Deformação da seção transversal.	58
Figura 4.7 - Coordenada generalizada do elemento.	64
Figura 4.8 - Elemento co-rotacional - Sistemas de eixos locais (móveis).	69
Figura 4.9 - Graus de liberdade – Elemento plano co-rotacional.	69
Figura 4.10 - Elemento co-rotacional. Variação nos deslocamentos a partir da posição de equilíbrio.	70
Figura 4.11 - Elemento co-rotacional. Abordagem geométrica da variação dos deslocamentos	72
Figura 4.12 - Elemento co-rotacional. Relação entre as rotações no sistema global e local.	73

## Capítulo 5

---

Figura 5.1 - Relação tensão-deformação para o concreto.	86
Figura 5.2 - Relação tensão-deformação para o aço.	86
Figura 5.3 - Seção transversal dos pilares ensaiados por Zeghiche e Chaoui (2005).	87
Figura 5.4 - Deslocamento lateral no meio do pilar – Zeguiche e Chaoui (2005).	88
Figura 5.5 - Seção transversal dos pilares ensaiados por Han et al. (2004).	89
Figura 5.6 - Vista geral do ensaio. (Han et al., 2004).	90
Figura 5.7 - Deslocamento lateral no meio do pilar – Han et al (2004).	91
Figura 5.8 - Seção transversal dos pilares ensaiados por Tao et al. (2004).	92
Figura 5.9a – Deslocamento lateral no meio do pilar – Tao et al. (2004).	93
Figura 5.9b – Deslocamento lateral no meio do pilar – Tao et al. (2004).	94
Figura 5.10 - Geometria e carregamento da coluna de Foure.	95
Figura 5.11 - Deslocamento lateral no topo do pilar – Coluna de Foure.	95
Figura 5.12 - Pórtico de Vogel.	96
Figura 5.13 – Deslocamento lateral no topo do pilar - Pórtico de Vogel.	96
Figura 5.14 - Pórtico em concreto armado. (Ferguson e Breen,1966).	97
Figura 5.15 - Curva carga-deslocamento – Pórtico em concreto armado . (Ferguson e Breen,1966).	98

## Capítulo 6

---

Figura 6.1 - Diagrama de interação Momento X Normal.	107
Figura 6.2 - Curvas de interação para flexo-compressão oblíqua (Eurocode 4, 1994).	109
Figura 6.3 - Aproximação da curva Momento-Normal.	111
Figura 6.4 - Distribuições de tensões nos pontos ABCDE. (Adaptado de Bergmann et al. (1995))	112
Figura 6.5 - Curva de interação simplificada – AISC (2005).	125
Figura 6.6 - Seções transversais dos pilares analisados.	131

M966m          Muniz, Cereno de Freitas Diniz Gonçalves.  
Modelos numéricos para análise de elementos estruturais mistos  
[manuscrito]. / Cereno de Freitas Diniz Gonçalves Muniz. - 2005.  
xiii, 159f. : il; graf., tabs.

Orientador: Prof. Dr. João Batista Marques de Souza Jr.  
Área de concentração: Construção Metálica.  
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Ouro Preto. Escola  
de Minas. Departamento de Engenharia Civil. Programa de Pós Graduação  
em Engenharia Civil.

1. Estruturas metálicas - Teses. 2. Construções mistas - Teses. 3. Análise  
numérica - Teses. 4. Normas técnicas (engenharia) – Teses. 5. Colunas  
I.Universidade Federal de Ouro Preto. Escola de Minas. Departamento de  
Engenharia Civil. Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil.  
II.Título.

CDU: 624.014

Catálogo: [sisbin@sisbin.ufop.br](mailto:sisbin@sisbin.ufop.br)



# Introdução

## CAPÍTULO 1

### 1.1 – CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Na construção civil brasileira, atualmente, os sistemas estruturais são na maior parte dos casos compostos por elementos de concreto armado ou protendido ou por elementos de aço. Outros materiais também são utilizados em uma escala menor como, por exemplo, a madeira, o alumínio e a alvenaria estrutural.

Devido à grande utilização do concreto e do aço, as particularidades inerentes ao uso de cada um destes materiais são, de certa forma, bem conhecidas pelos engenheiros e pesquisadores. Por exemplo, elementos estruturais de aço são formados pela utilização e ou união de chapas, assim, são mais suscetíveis a fenômenos de flambagem. Conseqüentemente, as normas de aço enfatizam a prevenção de falha por instabilidade ou flambagem. Já os elementos estruturais de concreto são mais robustos e menos suscetíveis à flambagem mas, em contrapartida, a resistência do concreto à tração é muito pequena e problemas como a fluência e a retração devem ser considerados.

Os elementos estruturais mistos aço-concreto são formados pela associação de perfis metálicos com o concreto, podendo este ser armado ou não, de forma que todo o conjunto trabalhe como um elemento único. Esta associação revela novos fenômenos que estão diretamente ligados à ação conjunta dos materiais. Assim, para a correta utilização dos elementos mistos é necessária à compreensão do comportamento de cada elemento que compõe isoladamente a seção, bem como o entendimento do comportamento do elemento misto como um todo.

O uso de estruturas mistas em construções de diversos países tem se tornado uma solução atraente não só pelo aumento da capacidade de carga das peças estruturais, mas, também devido a aspectos como economia e rapidez de execução da obra. Por exemplo, os perfis metálicos podem ser montados primeiro, suportando o carregamento permanente e posteriormente pode ser feita a concretagem de pilares e vigas mistas para que a estrutura suporte o carregamento total previsto. Com este processo, não é necessário esperar a cura e endurecimento do concreto para, por exemplo, construir mais um pavimento da edificação.

Os elementos mistos vem sendo estudados há algumas décadas mas, devido à sua crescente utilização, as técnicas construtivas e os modelos de cálculo normalmente utilizados, que são baseados em simplificações e em algumas situações fornecem resultados diferentes entre si, devem ser revisados, atualizados e incorporados às normas para que os engenheiros tenham em mãos métodos de análise e dimensionamento mais precisos e econômicos.

Segundo Johansson (2002) e Griffis (1994) a utilização dos primeiros elementos mistos aconteceu por volta de 1900. Nestes casos o concreto, que tinha resistência baixa, era utilizado somente com a finalidade de enchimento, visando melhorar a proteção do perfil metálico em relação a situações de incêndio e combate à corrosão. Ainda, segundo Johansson (2002), o efeito do confinamento em pilares tubulares preenchidos já era estudado em 1903. Em meados de 1930, alguns métodos para dimensionamento de vigas mistas já estavam estabelecidos e a partir de 1944 foram introduzidos em normas americanas (Griffis, 1994).

A utilização de elementos mistos no Brasil ainda é restrita. Isto acontece basicamente devido a dois fatores: ao tradicionalismo de engenheiros, arquitetos, construtores e fabricantes em relação à cultura do concreto armado e a pouca realização e divulgação de estudos técnico-científicos nos meios acadêmicos e profissionais brasileiros. De Nardin (1999) apresenta algumas obras realizadas no Brasil, a partir da década de 50, que utilizaram elementos mistos em sua estrutura.

Em diversos países como Japão, Estados Unidos, Alemanha, Austrália e Inglaterra os elementos mistos são largamente utilizados em estruturas de pontes e edifícios altos.

Na China são relatados mais de trinta edifícios altos e cerca de duzentas pontes em arco utilizando perfis tubulares preenchidos com concreto (Tao et al., 2005).

Como exemplo de uma edificação construída utilizando-se elementos mistos, pode-se citar a Millennium Tower (Figura 1.1). Localizada em Viena (Áustria) com uma altura total de 202 m, com 50 pavimentos é atualmente o mais alto edifício comercial da Áustria e um dos maiores da Europa. Devido aos sistemas construtivo e estrutural adotados, foram executados, em média, 2.5 pavimentos por semana.



Figura 1.1 – Millenium Tower (Viena, Áustria)  
(Structural Engineering International, v.9, n.3, p. 176, 1999)

Outro exemplo é a ponte Beichuan River Bridge (Figura 1.2), localizada em Xining (China). Com um vão de 90 m esta ponte foi construída sobre outra ponte já existente. A estrutura principal, em arco treliçado, é formada por tubos metálicos preenchidos com concreto. Análises dinâmicas, numérica e experimental, desta ponte podem ser encontradas em Zong et al. (2005).

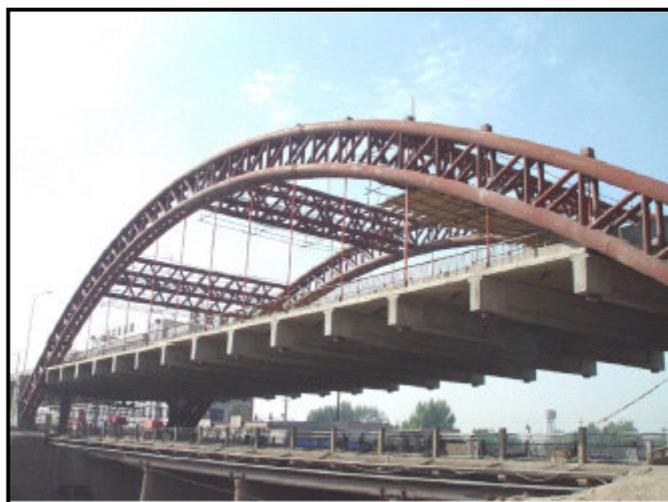


Figura 1.2 - Ponte Beichuan River Bridge (Zong et al., 2005).

Atualmente, o exemplo mais expressivo de estruturas mistas aço-concreto é o edifício Taipei 101 (Figura 1.3). Localizado em Taiwan, que, com 101 pavimentos e 508 m de altura, é o edifício mais alto do mundo.



Figura 1.3 – Edifício Taipei 101 (enr.construction.com).

Sua estrutura é composta por vigas, pilares e lajes mistas. Os pilares mistos principais têm seção tubular retangular preenchida com concreto (69 MPa), chegando a dimensões de 3.0 x 2.4 m e 80 mm de espessura de chapa (Figura 1.4).



Figura 1.4 – Edifício Taipei 101 – Pilares Preenchidos (enr.construction.com).

## 1.2 – JUSTIFICATIVA E OBJETIVOS

Os elementos mistos aço-concreto aliam as melhores características do concreto e do aço, suprimindo as deficiências encontradas em cada material isoladamente. Seu comportamento estrutural apresenta características intermediárias entre o comportamento de elementos metálicos e elementos de concreto armado. Este comportamento intermediário é refletido nas diferentes formas de análise estrutural e dimensionamento, conforme estabelecido em normas de diversos países.

Eurocode 4 (1994), BS 5400 (1979), ACI-318 (1999), AIJ (1987), AISC (2005) são exemplos de normas que tratam do dimensionamento de elementos estruturais mistos. No Brasil, atualmente, os elementos mistos são tratados pela NBR 14323 (1999). Com o projeto de revisão da NBR 8800 (2003), esta passará a tratar dos elementos mistos em lugar da NBR 14323 (1999).

Algumas normas trazem procedimentos de cálculo semelhantes às análises feitas em elementos de aço e outras, procedimentos semelhantes às análises feitas em elementos de concreto armado. Além disto, geralmente utilizam métodos de cálculo simplificados, permitindo somente determinados tipos de seção transversal, dentre

outras limitações que em muitas vezes não permitem o uso de toda a potencialidade e funcionalidade deste tipo de solução estrutural.

Esta dissertação continua o trabalho que vem sendo realizado no Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Escola de Minas da Universidade Federal de Ouro Preto, no qual uma formulação básica para análise numérica de pilares mistos aço-concreto de seção qualquer, utilizando elementos finitos de barra, foi desenvolvida e implementada. O foco principal deste trabalho é o comportamento de pilares mistos, mas, devido ao caráter genérico da formulação utilizada é possível o tratamento de outros elementos mistos.

Nesta nova fase foram implementados modelos alternativos para os elementos de barra e para os materiais constituintes da seção transversal, visando uma melhor adequação do modelo numérico à realidade física. Também foi realizada uma análise comparativa entre normas, resultados experimentais e os modelos numéricos adotados.

A análise de elementos mistos via métodos numéricos encontra um grande campo de aplicação e novos desenvolvimentos devem ser pesquisados, não somente no que concerne a estudos numéricos, mas também a estudos experimentais. Além disto, os métodos numéricos permitem a consideração de diversos fatores que tornam este tipo de análise complexa como, por exemplo, as não linearidades físicas e geométricas, flambagem local e tensões residuais em perfis, retração e fluência no concreto e efeitos térmicos decorrentes de incêndios, que nas normas são tratados de forma simplificada.

A pouca disponibilidade de estudos numéricos aprofundados sobre elementos mistos justifica a ênfase dada no presente projeto. Um procedimento numérico de formulação simples, como no caso de elementos de barra, pode ser uma ferramenta de grande valor para pesquisadores e projetistas de estruturas mistas.

### **1.3 – ORGANIZAÇÃO**

Este trabalho está organizado em 7 capítulos. No capítulo 2 definem-se os elementos mistos e são apresentadas as principais particularidades referentes ao seu comportamento e utilização. Os capítulos 3 e 4 são voltados para a obtenção de expressões numéricas de análise de pilares mistos. O capítulo 3 trata, especificadamente, da análise de seções transversais mistas, partindo de uma revisão dos principais processos disponíveis e apresentando o método adotado e implementado. No capítulo 4, relacionado com a análise numérica de pilares mistos, são deduzidas as expressões da matriz de rigidez tangente e do vetor de forças internas de três novos elementos finitos implementados. Os capítulos 5 e 6 são voltados para execução e avaliação de análises e exemplos. O capítulo 5 traz uma série de exemplos para avaliação das formulações implementadas e descritas nos capítulos 3 e 4. São analisados diferentes tipos de pilares, com diferentes condições de carregamento e geometria. O capítulo 6 apresenta e compara, através de exemplos, as prescrições de diferentes normas e a formulação numérica proposta. O capítulo 7 apresenta as conclusões e sugestões para futuros trabalhos. Por fim apresentam-se as referências bibliográficas utilizadas.



# Elementos Mistos

---

## CAPÍTULO 2

### 2.1 – INTRODUÇÃO

Neste capítulo será feita uma definição para os elementos mistos e serão descritas as principais particularidades inerentes ao seu comportamento e utilização, e, seguindo os objetivos deste trabalho, uma maior ênfase será dada às considerações sobre pilares mistos.

### 2.2 – DEFINIÇÕES

Os elementos mistos aço-concreto são formados pela associação de perfis metálicos com o concreto, podendo, este, ser armado ou não. Desta associação formam-se lajes mistas, vigas mistas, pilares mistos e ligações mistas que combinam as melhores características das estruturas metálicas e das estruturas de concreto armado. Os perfis metálicos podem ser parcialmente envolvidos, totalmente envolvidos, preenchidos ou simplesmente terem uma face em contato com o concreto.

Vantagens são oferecidas tanto em relação às estruturas metálicas quanto em relação a estruturas de concreto armado, tais como:

- Aumento da ductilidade da estrutura em relação aos elementos de concreto armado, pois o perfil metálico ajuda a combater o comportamento frágil do concreto, principalmente em situações de carregamento repetitivos ou alternados;

- Aumento da resistência e rigidez para uma dada seção transversal com conseqüente redução de consumo de material;
- Redução do peso próprio da estrutura e diminuição dos esforços nas fundações e redução de formas e escoramentos;
- Aumento da altura útil dos pavimentos e maior vão livre entre pilares;
- Aumento da resistência ao fogo e da proteção contra corrosão do perfil;
- Redução ou eliminação da flambagem local nos perfis metálicos;
- Redução da fluência do concreto em seções preenchidas;
- Aumento da resistência do concreto em seções preenchidas devido ao confinamento;

Como exemplo, Takeuchi et al. (1998) estudaram a utilização de elementos mistos em usinas nucleares. Para o caso estudado, houve uma redução de até cinco meses no tempo de execução da obra, em relação a uma estrutura de concreto armado, uma redução de 30% no número de operários e uma redução de 20% no consumo de aço.

Como desvantagens pode-se citar a necessidade de cuidados especiais em regiões de introdução de cargas, o que pode levar ao uso de conectores de cisalhamento, e ao número reduzido de estudos numéricos, teóricos e experimentais sobre este tipo de estrutura.

### **2.3 – SEÇÕES TRANSVERSAIS MISTAS**

Existe uma grande variedade de seções transversais mistas. As figuras 2.1 a 2.3 mostram alguns exemplos de seções utilizadas em lajes, vigas, treliças mistas. Os pilares mistos são considerados na próxima seção.

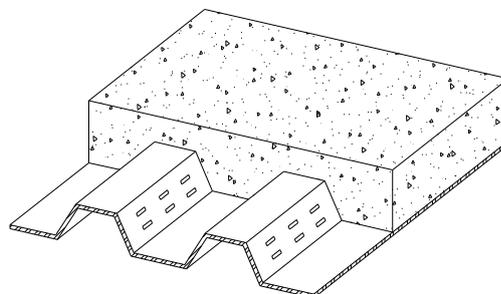


Figura 2.1 – Seção transversal de laje mista.

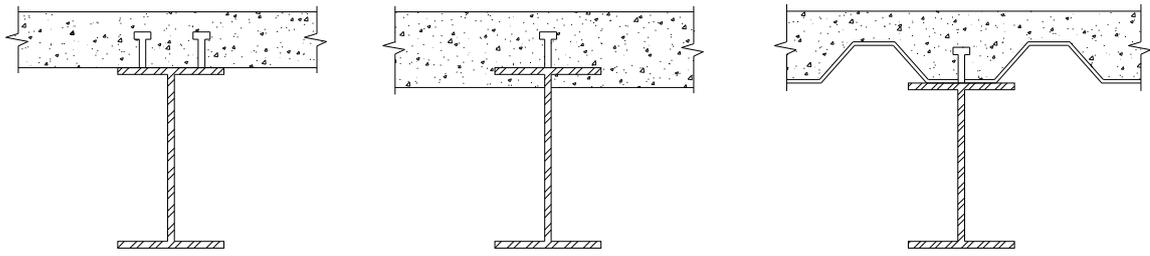


Figura 2.2 – Seções transversais de vigas mistas.

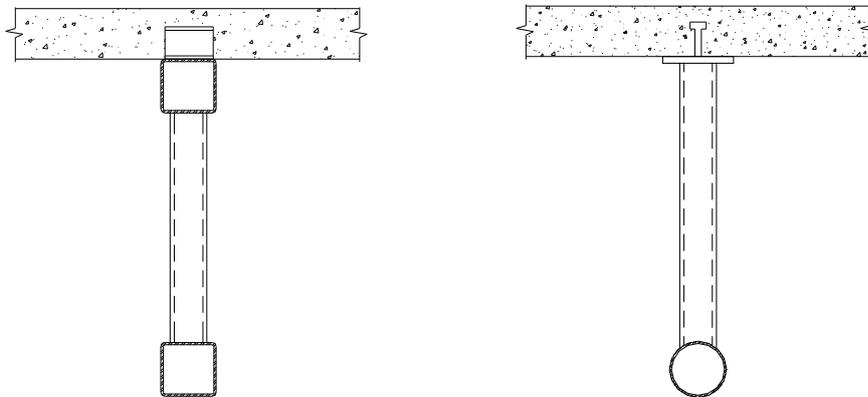


Figura 2.3 – Seções transversais de treliças mistas.

## 2.4 – PILARES MISTOS

Os pilares mistos podem ser totalmente revestidos ou envolvidos (Figura 2.4.a), parcialmente revestidos (Figura 2.4.b) ou preenchidos (Figuras 2.4.c,d,e,f).

As principais desvantagens dos pilares revestidos são: a necessidade de fôrmas para concretagem e a necessidade de armaduras para garantir o monolitismo do conjunto. Como vantagens, principalmente no caso de pilares totalmente revestidos, têm-se: a proteção do perfil metálico contra a corrosão e em caso de incêndio e a redução ou eliminação da flambagem local do perfil.

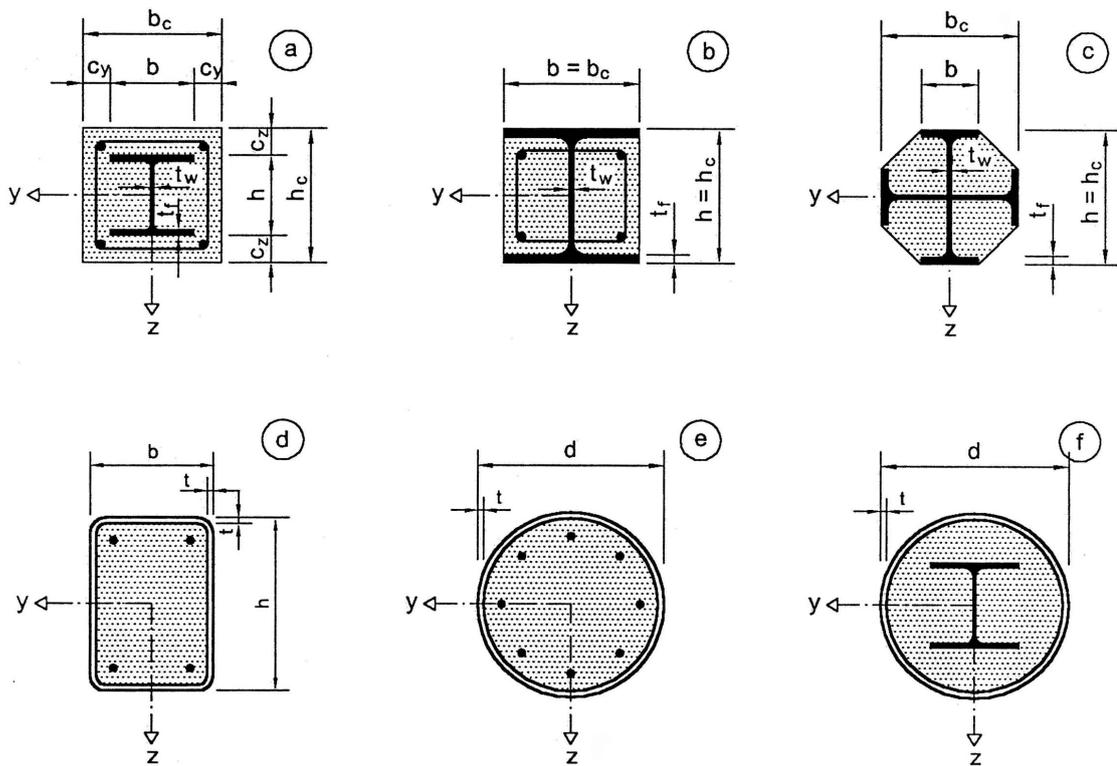


Figura 2.4 – Seções transversais para pilares mistos. (Eurocode 4, 1994)

Os pilares parcialmente revestidos podem dispensar o uso de fôrmas caso a concretagem seja realizada com o pilar na posição horizontal (Figura 2.5).



Figura 2.5 – Concretagem de pilar misto parcialmente revestido. (Stark, 2001)

Os pilares preenchidos não precisam de fôrmas e o uso de armaduras pode ser dispensado. O próprio tubo serve como fôrma e armadura e as ligações com as vigas também são facilitadas devido ao posicionamento do perfil na seção. As colunas preenchidas apresentam, também, vantagens ligadas ao comportamento estrutural, em relação a colunas metálicas, colunas de concreto armado ou colunas mistas envolvidas. A localização do aço e do concreto na seção otimiza a resistência e rigidez da mesma. O aço se encontra na parte mais externa da seção, o mais afastado possível do centróide, maximizando assim o momento de inércia. O núcleo de concreto reduz a flambagem local do tubo metálico, já que a chapa só pode flambar no sentido externo a seção. Segundo Matsui (1993) apud Shanmugam et al. (2001) as seções quadradas preenchidas têm uma resistência a flambagem local cerca de 50% maior do que seções sem preenchimento.

Uma grande desvantagem das seções preenchidas é uma menor resistência ao fogo, já que o aço está localizado na parte externa da seção. Este problema é minimizado com a colocação de armaduras dentro do núcleo de concreto.

As colunas preenchidas circulares são especialmente indicadas para situações onde há grandes esforços normais de compressão e quando se utiliza concreto de alta resistência. Estudos teóricos e experimentais sobre pilares de concreto armado que utilizam concreto de alta resistência revelam alguns problemas deste tipo de material, ver Claeson (1998) e Razvi e Saatcioglu (1999) apud Johansson (2000) e Hadi et al. (2004). Para evitar a ruptura frágil, que está associada ao concreto de alta resistência, e aumentar a ductilidade do pilar são necessárias altas taxas de armadura transversal e longitudinal. As armaduras formam um plano natural de separação entre o núcleo, confinado, e o cobrimento, não confinado. Assim, apenas o concreto envolvido pelas armaduras deve ser considerado como material resistente e existe o risco de descolamento do concreto externo as armaduras (cobrimento).

Dentro deste contexto, torna-se clara a vantagem da utilização de pilares mistos preenchidos no lugar de pilares de concreto armado. As altas taxas de armaduras são substituídas pelo encamisamento pelo tubo, garantindo a ductilidade do pilar, o completo aproveitamento da seção de concreto e a eliminação do descolamento do cobrimento, dentre outras vantagens citadas anteriormente.

Na literatura podem ser encontradas análises numéricas, experimentais e analíticas de pilares mistos em trabalhos como os de Zeghiche e Chaoui (2005), Han et al. (2004), Tao et al. (2004), De Nardin (1999, 2003), Mirza et al. (1996), Johansson e Gylltoft (2002), Hu et al. (2005), Sfakianakis (2002), Hajjar e Gourley (1996) e Shanmugam et al. (2001)

## **2.5 – INTERAÇÃO AÇO-CONCRETO**

O estudo da interação entre o concreto e o aço é um dos fatores fundamentais para o entendimento do comportamento dos elementos mistos. A interação permite a transferência de carga entre os elementos de forma proporcional à rigidez de cada parte componente da seção.

A necessidade de interação está ligada ao tipo de sistema estrutural adotado e a diferentes pontos de localização dentro de um mesmo elemento estrutural. Nas regiões com descontinuidade geométrica, como nas ligações, a interação tem maior importância sendo, quase sempre, fundamental para o comportamento misto.

Existem basicamente cinco mecanismos de transferência de carga:

- Adesão, devido reações químicas e ou forças de sucção ao longo da interface aço concreto resultantes de efeitos de capilaridade do processo de hidratação do cimento (Figura 2.6a);
- Intertravamento entre o concreto e o aço devido a irregularidades na superfície do perfil metálico (Figura 2.6b);
- Forças de atrito entre o concreto e o aço devido a forças normais à superfície do aço (Figura 2.6c);
- União devido ao efeito da curvatura ou variação da seção transversal da peça;
- Utilização de conectores de cisalhamento (Figura 2.7).

Uma discussão mais ampla sobre os mecanismos de transferência de carga pode ser encontrada nos trabalhos de Johansson (2000, 2002).

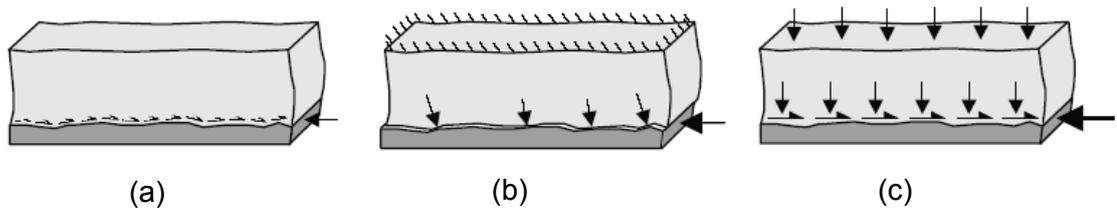


Figura 2.6 – Mecanismos de transferência de carga. (Johansson, 2002)

(a) Adesão (b) Intertravamento (c) Forças de atrito



Figura 2.7 – Soldagem de conectores de cisalhamento. (ESDEP, 1996)

Em termos práticos, as normas estabelecem limites, normalmente baseados em dados experimentais, para os valores das tensões de cisalhamento entre os materiais. Caso estes limites sejam ultrapassados, conectores de cisalhamento devem ser utilizados.

## 2.6 – CONFINAMENTO

Ao aplicar-se um carregamento de compressão axial em um pilar misto preenchido curto, a resistência última do conjunto é maior do que a soma das resistências últimas do perfil de aço e do núcleo de concreto. Isto ocorre devido ao confinamento do concreto pelo perfil metálico.

Knowles e Park (1969) apud De Nardin (1999) estudaram o efeito do confinamento do em seções preenchidas. Para pilares circulares curtos o aumento de resistência encontrado, devido ao confinamento, chegou a 36%. Giakoumelis e Lam (2004) também realizaram ensaios em pilares circulares curtos variando parâmetros como a resistência característica do concreto, espessura do perfil e a aderência entre o aço e o concreto e compararam os resultados com as prescrições das normas ACI 318 (1995), Eurocode 4 (1994), AS3600 (1994) e AS4100 (1998).

Nos primeiros estágios de carregamento, a expansão lateral do concreto, ligada ao coeficiente de Poisson, é menor que a do tubo metálico e portanto ainda não existe o efeito de confinamento. A partir de um certo nível de carregamento, a expansão lateral do concreto aumenta gradativamente até se tornar maior do que a do aço. Deste ponto em diante o núcleo de concreto passa a trabalhar em um regime de carregamento triaxial devido ao aparecimento de tensões radiais na interface aço-concreto, caracterizando o efeito de confinamento (Figura 2.8).

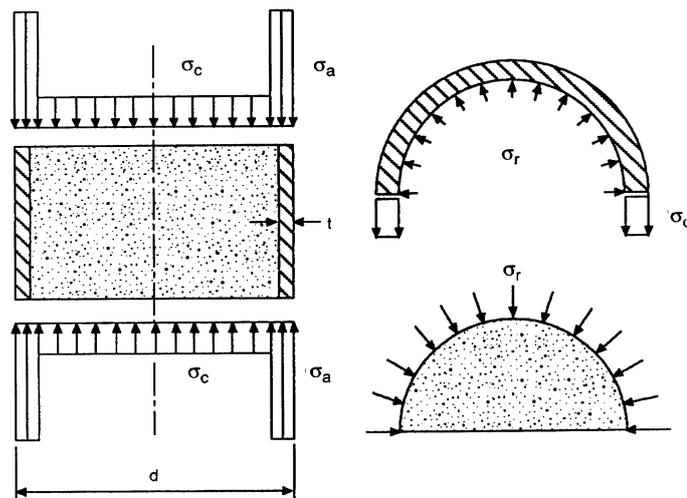


Figura 2.8 – Distribuição de tensões no concreto e no aço para uma seção tubular circular preenchida. (Bergmann et al., 1995)

O confinamento causado pelo perfil metálico é chamado de confinamento passivo e, neste caso, a pressão de confinamento pode variar, dependendo da expansão lateral do concreto e da resistência do tubo de aço.

O estado triaxial de tensões gera um aumento de resistência do concreto mas, em contrapartida, o perfil passa a trabalhar sob um estado biaxial de tensões (Figura 2.9), reduzindo, assim, sua resistência ao escoamento de acordo com os critérios de resistência dos materiais (Tresca e Von Mises dentre outros). Como resultado final destes efeitos, aumenta-se a capacidade resistente da seção mista, chegando-se a conclusão de que o aumento da resistência do concreto tem maior influência na capacidade da seção do que a redução de resistência do aço.

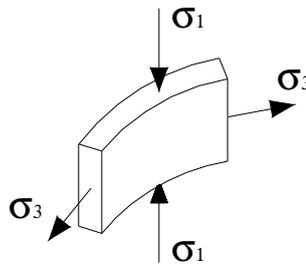


Figura 2.9 – Estado biaxial de tensões no aço.

O grau de confinamento depende de uma série de fatores como: a esbeltez do pilar, a espessura do perfil, a resistência do aço, a resistência do concreto, a excentricidade do carregamento e a forma da seção transversal.

Schneider (1998) realizou testes em colunas mistas curtas preenchidas, axialmente comprimidas, com seções circulares e retangulares. Os resultados dos ensaios mostraram que o confinamento em seções circulares é muito maior do que em seções retangulares. As seções circulares mantêm o mesmo grau de confinamento em todo o concreto e pelo efeito de arco, maiores tensões podem ser suportadas pelo aço. Nas seções retangulares, as paredes têm pouca rigidez em relação às pressões perpendiculares aos seus planos e, portanto, somente os vértices e o centro da seção de concreto estão sob efeito do confinamento (Figura 2.10).

O ganho de resistência de seções retangulares devido ao confinamento é tão inferior ao de seções circulares que é desprezado pelas normas. Han (2004) apresenta dois gráficos que caracterizam o aumento da resistência do concreto para diferentes graus de confinamento em seções circulares e quadradas (Figura 2.11).

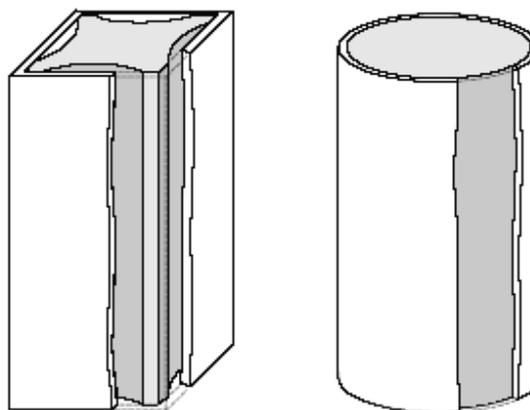


Figura 2.10 – Regiões de confinamento em pilares preenchidos quadrados e circulares.  
(Johansson, 2002)

A aplicação de momentos fletores em pilares mistos preenchidos reduz o efeito de confinamento, Shanmugam e Lakshmi (2001). Isto ocorre porque a deformação média por compressão no concreto, e conseqüente expansão lateral, são reduzidas pela ação do momento fletor que introduz tensões de tração na seção. Para colunas esbeltas, onde os efeitos de segunda ordem têm maior influência, acontece uma amplificação dos deslocamentos laterais (efeito  $P-\delta$ ) e o conseqüente aumento dos momentos fletores, reduzindo ou até eliminando o efeito do confinamento.

A consideração e a influência do confinamento nos pilares mistos ainda requer mais estudos e autores divergem sobre os resultados obtidos. Normas como a CAN/CSA-S16.1 (1994), ACI 318 (1999), AS3600 (1994) e AS4100 (1998) não levam em consideração o efeito do confinamento em suas formulações. Já o Eurocode 4 (1994), AISC (2005) e a BS 5400 (1979) consideram o confinamento em seções circulares preenchidas.

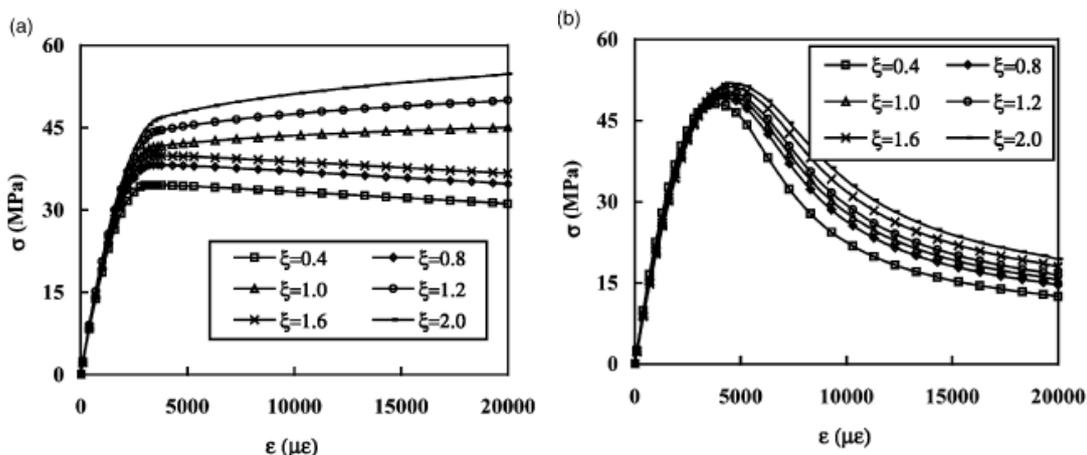


Figura 2.11 – Efeito do confinamento lateral na relação tensão deformação. (Han, 2004)

(a) Seção tubular circular

(b) Seção tubular quadrada

## 2.7 – EFEITOS DE LONGA DURAÇÃO

A fluência e a retração do concreto causam uma redistribuição dos esforços internos e uma redução na resistência do elemento estrutural devido ao acréscimo de deformações. Estes efeitos, a depender do tipo de seção transversal, podem ser mais pronunciados em elementos mistos onde os materiais que compõem a seção têm propriedades diferentes. Pesquisas ligadas ao comportamento estrutural de elementos mistos vêm sendo realizadas, principalmente sobre efeitos de curta duração, porém, poucos trabalhos vêm sendo feitos levando em consideração os efeitos de longa duração em seções mistas.

Ichinose et al. (2001) apud Johansson (2002) realizaram ensaios comparando a retração em pilares circulares preenchidos e em pilares de concreto. Os valores medidos para pilares preenchidos foram de cerca de 9% dos valores encontrados nos pilares de concreto. Terrey et al. (1994) apud Johansson (2002) também concluiu, baseado em resultados experimentais, que a retração em pilares preenchidos é consideravelmente menor do que a retração em pilares de concreto. Uy (2001a) realizou testes em pilares de concreto e em pilares mistos quadrados preenchidos, considerando os efeitos de longa duração, e comparou os resultados com as prescrições do ACI-318 (1995). Ichinose et al. (2001) apud Johansson (2002) e Uy (2001a) também realizaram testes sobre os efeitos da fluência.

Han e Yang (2003) ensaiaram colunas retangulares preenchidas e concluíram que, para colunas curtas, praticamente não há redução na resistência devido ao carregamento de longa duração. No caso de colunas esbeltas, houve uma redução máxima de 20% na resistência da coluna, quando comparadas com a resistência imediata do pilar. Os resultados também foram comparados com as especificações do ACI Committee 209 (1992).

Dentre os principais tipos de pilares mistos, a retração e a fluência têm efeito mais significativo no comportamento de pilares com seções mistas envolvidas. Este tipo de coluna tem comportamento similar ao de uma coluna de concreto armado pois, o concreto está exposto ao ambiente. As colunas preenchidas têm um comportamento bem diferente. Dentro do tubo metálico o concreto cura de uma forma mais efetiva, com aproximadamente 100% de umidade, tendo influência direta na fluência e principalmente na retração. Tem-se então uma situação em que a retração ocorre de uma forma muito lenta e o núcleo de concreto se expande mais do que o tubo de aço para cargas axiais altas. Desta forma, a retração tem pouca influência na capacidade resistente de pilares mistos preenchidos, Gomes (1994). Foi constatado, através de ensaios, que o fenômeno da fluência tende a se estabilizar mais rapidamente em colunas preenchidas circulares do que em colunas de concreto.

Os efeitos da fluência podem ser minimizados aumentando-se a resistência característica à compressão do concreto e aumentando-se a contribuição do aço na resistência da seção mista. É importante notar que a fluência causa uma transferência de carga do concreto para o aço ao longo do tempo. No caso perfis preenchidos com espessuras de parede finas, o aumento de carregamento pode precipitar a ocorrência da flambagem local após um certo tempo de carregamento. A ocorrência deste fenômeno é estudada por alguns pesquisadores mas, sua influência ainda não foi quantificada (Oehlers e Bradford, 1995).

Atenção especial deve ser dada a regiões onde seja necessária a aderência natural entre o concreto e o aço já que a retração diminui a aderência. Além disso, se o carregamento for introduzido na seção através de uma chapa em contato com o aço e o concreto, a retração pode criar uma separação entre o concreto e a chapa, sobrecarregando o perfil metálico e influenciando na resistência da coluna (Ver seção 2.8).

## 2.8 – INFLUÊNCIA DA FORMA DE APLICAÇÃO DO CARREGAMENTO

O comportamento dos pilares mistos pode ser influenciado pela forma com que o carregamento é aplicado. Existem basicamente três diferentes formas de aplicação de cargas:

- Carregamento em ambos os materiais (Figura 2.12a);
- Carregamento apenas no perfil metálico (Figura 2.12b);
- Carregamento apenas no núcleo de concreto (Figura 2.12c).

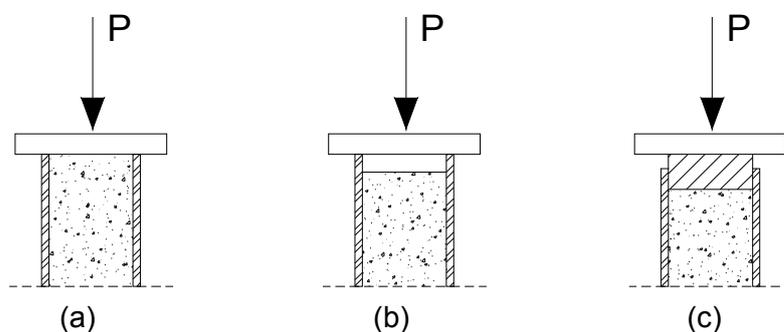


Figura 2.12 – Formas de aplicação do carregamento de pilares mistos.

(a) Em ambos os materiais. (b) Somente no perfil. (c) Somente no concreto.

Estes tipos de carregamento foram abordados por Gardner e Jacobson (1968) e Lohr (1934) apud Oehlers e Bradford (1995) e Johansson e Gylltoft (2002) através de estudos experimentais e numéricos de pilares curtos.

Johansson e Gylltoft (2002) analisaram treze colunas curtas de seção circular submetidas a carregamento axial. Nove colunas foram preenchidas, sendo que três tiveram o carregamento aplicado somente no aço, três somente no concreto e outras três na seção por inteiro. As outras quatro colunas foram ensaiadas sem preenchimento. As colunas tinham um diâmetro externo de 159 mm, espessura de parede de 4.8 mm e comprimento de 650 mm. O concreto utilizado tinha resistência característica cilíndrica de 64.5 MPa e o aço uma tensão de escoamento de 433 MPa. Foram realizadas análises numéricas utilizando o método dos elementos finitos através do programa ABAQUS para fins de comparação e análise de resultados.

Quando o carregamento é aplicado apenas no perfil metálico, a carga última da coluna mista é praticamente igual à carga última do perfil metálico sem preenchimento. Isto acontece, pois neste caso a expansão lateral do perfil de aço é maior que a do núcleo de concreto fazendo com que os dois materiais se separem assim que a aderência química seja vencida. O concreto pode atrasar a ocorrência da flambagem local mas, os ensaios realizados mostraram que a carga última neste caso está muito pouco acima da resistência do pilar metálico isolado.

Ao aplicar-se o carregamento somente no concreto, o perfil metálico inicialmente tem a função de encamisamento do núcleo de concreto. A princípio, esta seria a forma mais eficiente de aplicação de cargas, pois o aço não absorveria cargas axiais ficando responsável apenas pelo confinamento do concreto mas, como existe aderência entre os materiais, uma parcela do esforço axial é transferida do núcleo de concreto para o perfil. Para este caso, a resistência última foi praticamente a mesma de quando se aplica o carregamento em ambos os materiais.

A terceira situação possível, carregamento aplicado simultaneamente em ambos os materiais, é a mais comum encontrada na prática. O concreto estará submetido a um estado triaxial de tensões e o aço a um estado biaxial, como discutido na seção 2.6. Para garantir que haja simultaneidade de transmissão dos esforços, conectores de cisalhamento poderão ser usados.

Com relação aos deslocamentos, Johansson e Gylltoft (2002) observaram os seguintes resultados:

- Os pilares com carregamento aplicado apenas no concreto puderam absorver, em relação aos outros testes, maiores deslocamentos antes da ocorrência de problemas de flambagem e conseqüente término do ensaio. A figura 2.13c mostra a expansão do tubo na sua parte central em conseqüência do esmagamento do concreto;
- Quando o carregamento foi aplicado em ambos os materiais, o perfil metálico e o núcleo de concreto interagiram resultando na flambagem global do pilar (Figura 2.13a);

- Embora, inicialmente, o comportamento dos pilares puramente metálicos e dos pilares preenchidos, carregados somente no perfil, tenha sido similar, a flambagem local do tubo foi diferente. Os pilares puramente metálicos apresentaram um padrão de bulbos de flambagem para dentro e para fora da seção (Figura 2.13d) enquanto que os pilares preenchidos apresentaram apenas bulbos externos (Figura 2.13b), já que o núcleo de concreto impede a formação de bulbos internos.

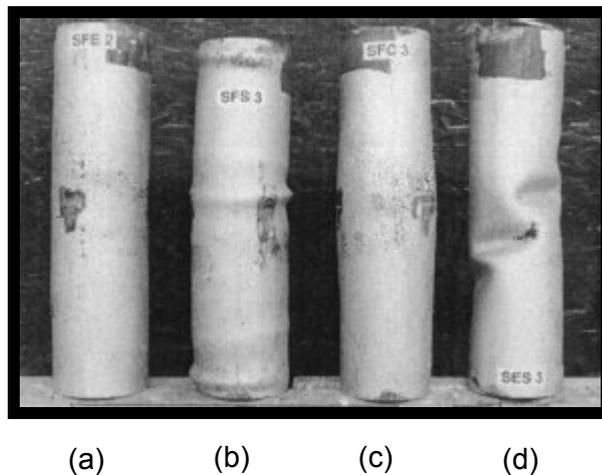


Figura 2.13 – Pilares circulares preenchidos ensaiados por Johansson e Gylltoft (2002).

- (a) Carregamento em ambos os materiais.    (b) Carregamento somente no perfil.  
 (c) Carregamento somente no concreto.    (d) Pilar puramente metálico ensaiado.

Outra situação possível é o pré-carregamento do perfil metálico antes que o pilar trabalhe como um elemento misto. Como alternativa do processo executivo pode-se, por exemplo, executar-se dois ou três pavimentos sustentados apenas pelos perfis metálicos. A estrutura metálica inicialmente resistirá às cargas construtivas e a uma parcela do carregamento permanente. Posteriormente será feito o preenchimento ou revestimento dos pilares, fazendo com que estes passem a trabalhar como pilares mistos e possibilitando que a estrutura suporte o carregamento total previsto.

Esta forma de trabalho tem como vantagem a aceleração do processo executivo, já que não é necessário esperar a cura e o endurecimento do concreto para a execução do pavimento superior. Em contrapartida, a resistência da coluna mista é reduzida se comparada à mesma coluna trabalhando sem um pré-carregamento.

Poucos trabalhos têm sido desenvolvidos considerando o efeito do pré-carregamento dos perfis metálicos em pilares mistos. Zha (1996) apud Han e Yao (2003) ensaiou 23 colunas circulares com e sem pré-carregamento do perfil metálico. Os ensaios mostraram que o comportamento das colunas com e sem pré-carregamento é diferente. Para as colunas ensaiadas, foi observado que o pré-carregamento causou uma redução de até 15% na resistência.

Han e Yao (2003) ensaiaram 19 colunas mistas variando os seguintes fatores: nível de pré-carregamento do perfil de aço, excentricidade da carga e esbeltez da coluna. Em todos os casos, o pré-carregamento aumentou os deslocamentos, reduziu a rigidez e a resistência última das colunas, quando comparadas a colunas sem pré-carregamento. A maior redução, em termos de resistência do elemento misto, foi de aproximadamente 20%. Para pré-carregamentos de até 30% da capacidade do perfil metálico, a redução da resistência do pilar misto ficou abaixo de 5%. Concluíram que o valor do pré-carregamento, a esbeltez da coluna e a excentricidade têm influência significativa na redução de resistência da coluna. Já fatores como a taxa de aço, resistência do concreto e do aço tem influência moderada. Ao final de seu trabalho Han e Yao (2003) apresentam fórmulas para estimativa da redução de resistência para colunas mistas sujeitas a pré-carregamentos.



# Análise da Seção Transversal

## CAPÍTULO 3

### 3.1 – INTRODUÇÃO

Pilares mistos podem ser classificados de acordo com o seu modo de falha. Os pilares curtos têm sua resistência controlada pela resistência da seção, ou seja, esmagamento do concreto e ou escoamento do aço, não sendo influenciados pelos efeitos de segunda ordem, caracterizando o chamado critério de resistência. Os pilares esbeltos, por sua vez, estão sujeitos a imperfeições geométricas que amplificam os esforços atuantes, levando ao aparecimento do fenômeno da flambagem, caracterizando o chamado critério de estabilidade.

Existe ainda a possibilidade de ocorrência da flambagem local dos elementos que compõem o perfil metálico. Para seções totalmente envolvidas, não há flambagem local. Para perfis preenchidos ou parcialmente envolvidos, pode ocorrer a flambagem local, mas, o núcleo de concreto contribui de forma positiva reduzindo a formação dos bulbos de flambagem (Wright, 1993; Uy e Bradford, 1994; Liang e Uy, 2000), fazendo com que os pilares mistos sejam menos susceptíveis a este fenômeno do que os pilares metálicos.

Este capítulo trata da análise de seções transversais mistas, partindo de uma revisão dos principais processos disponíveis e apresentando a método adotado e implementado neste trabalho. O empenamento da seção transversal, a flambagem local dos perfis metálicos e as deformações devido ao cisalhamento não serão considerados e admite-se perfeita aderência entre os materiais. Estas hipóteses são perfeitamente aceitáveis para a análise dos pilares mistos usuais (Figura 2.4), sendo comprovadas através de comparações com diferentes resultados experimentais, mostradas no capítulo cinco e em diversos trabalhos encontrados na literatura.

### 3.2 – PROCEDIMENTOS DE ANÁLISE E CURVAS DE INTERAÇÃO

Os procedimentos de análise de seções mistas podem ser divididos em duas classes distintas que consideram os seguintes comportamentos:

- a) Comportamento elasto-plástico da seção, semelhante às análises feitas para elementos de concreto armado;
- b) Comportamento rígido-plástico da seção, semelhante às análises feitas em elementos de aço.

Normas como o Eurocode 4 (1994), o projeto de revisão da NBR 8800 (2003) e AISC (1999) adotam a análise rígido-plástica. Algumas normas, como o ACI-318 (1999), adotam a análise elasto-plástica e outras, como o AISC (2005), permitem a utilização de ambos os procedimentos de análise.

Para a análise elasto-plástica de seções mistas, usualmente, adota-se a hipótese de Bernoulli-Euler-Navier em que as seções planas permanecem planas e perpendiculares ao eixo da barra após a deformação e o coeficiente de Poisson é desprezado. Também se considera perfeita aderência entre o concreto e o aço, sem qualquer tipo de escorregamento (slip) entre os materiais. A figura 3.1 mostra a distribuição das tensões e deformações para uma seção I totalmente revestida submetida à flexão composta reta, exemplificando este tipo de análise.

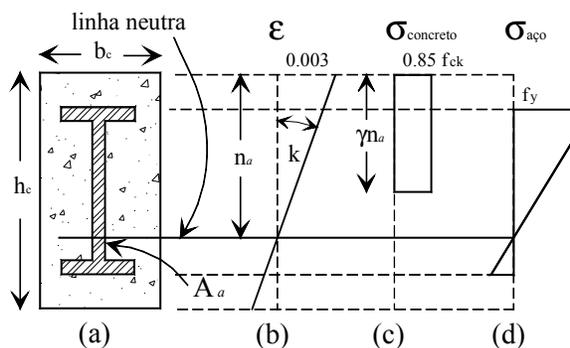


Figura 3.1 – Análise elasto-plástica da seção (Caldas, 2004).

Pela figura pode-se observar uma distribuição linear de deformações ao longo da seção e um comportamento elasto-plástico dos materiais. A falha da seção ocorre pelo esmagamento do concreto, pois, normalmente o concreto atinge seu estado limite último antes que todo o aço do perfil entre em escoamento, diferentemente do que acontece com o concreto armado, em que se pode atingir o esmagamento do concreto ao mesmo tempo em que ocorre a plastificação de todas as armaduras (domínio 3). O valor da deformação última do concreto ( $\epsilon_{cu}$ ) pode assumir diferentes valores. Oehlers e Bradford (1995, 1999) e o ACI 318 (1999) sugerem o valor de 0.003, já a NBR 6118 (2003) adota o valor de 0.0035.

Na Figura 3.1, o diagrama real de tensões no concreto está representado de forma simplificada, adotando-se uma tensão uniforme e igual a  $\alpha f_{cd}$  com uma altura igual a  $\gamma n_a$ . O valor de  $\alpha$  pode variar entre 0.85 e 1.00, dependendo do tipo de seção utilizada. A NBR 6118 (2003) adota o valor de  $\gamma = 0.80$  e Oehlers e Bradford (1995, 1999) sugerem a seguinte expressão para avaliação de  $\gamma$  :

$$\gamma = 0.85 - 0.007(f_{ck} - 28) \leq 0.85. \quad (3.1)$$

Caso seja necessária uma análise mais refinada, devem ser utilizadas relações tensão deformação mais adequadas para o concreto, como, por exemplo, as indicadas na Figura 3.2.

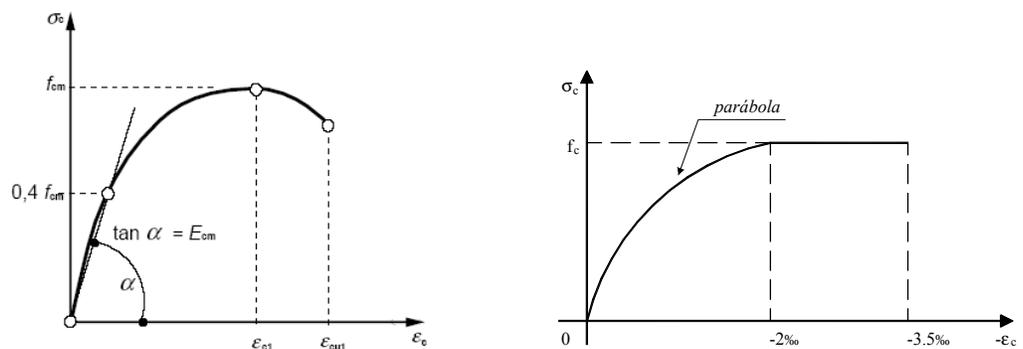


Figura 3.2

Relações constitutivas para o concreto: (a) Eurocode 2 (2003) (b) NBR 6118 (2003).

Mantendo-se o valor da máxima deformação no concreto constante e igual a  $\epsilon_{cu}$  e variando-se a profundidade da linha neutra, pode-se calcular os esforços resultantes para cada posição da mesma, determinando-se a superfície de interação Momento x Normal que representa os pontos de falha da seção (Figura 3.3). O diagrama, curva ou superfície de interação é muito útil na verificação da resistência das seções, mas, devido ao trabalho envolvido na sua determinação, seu uso torna-se viável apenas através do uso de programas computacionais.

As curvas de interação típicas de seções puramente metálicas se caracterizam pela redução do momento resistente com o aumento da carga axial (Figura 3.4). Já para seções mistas, e de concreto armado, pode ocorrer um acréscimo do momento resistente sob carregamento axial, fazendo com que o momento máximo que possa ser absorvido pela seção seja maior do que o momento plástico da seção, calculado na ausência de esforço normal. Isto ocorre sob determinadas condições favoráveis, em que a carga axial de compressão reduz a fissuração do concreto, aumentando assim a eficiência da seção. Quanto menor a contribuição do aço, ou, quanto maior a contribuição do concreto, na resistência da seção, mais pronunciado é este efeito. A figura 3.5 mostra a variação das curvas de interação, para uma seção tubular preenchida, em função do parâmetro de contribuição do aço ( $\delta$ ).

Diversos autores desenvolveram métodos para determinação de curvas de interação Momento Normal. Dentre estes pode-se citar: Basu e Somerville (1969), Wakabayashi (1976) e Rotter (1982) apud Oehlers e Bradford (1995).

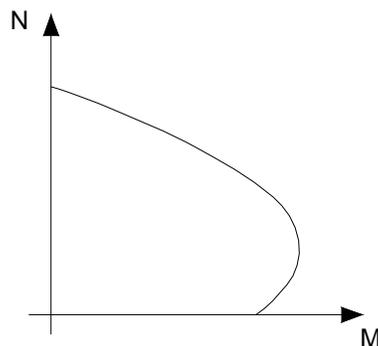


Figura 3.3 – Curva de Interação Momento Normal – Seção Mista.

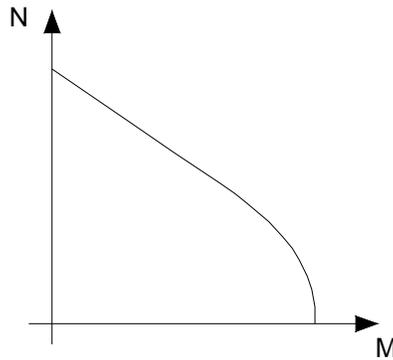


Figura 3.4 – Curva de Interação Momento Normal – Seção Metálica.

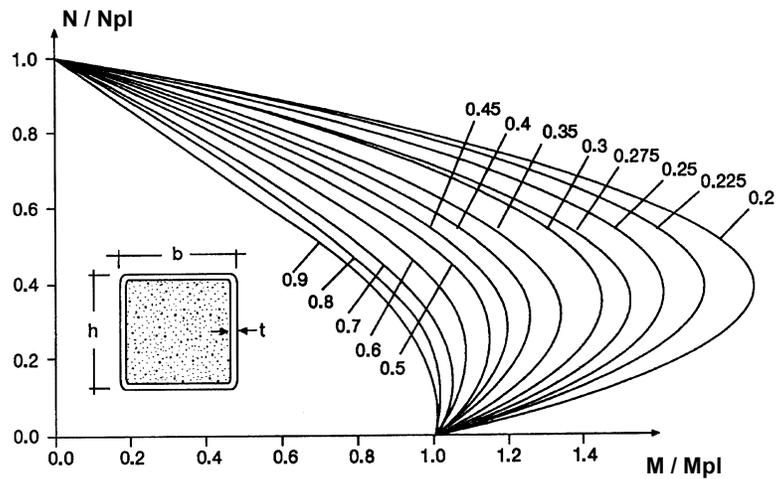


Figura 3.5 – Efeito da influência do concreto na curva de interação de seções mistas.  
(Bergmann et al., 1995)

A análise rígido-plástica avalia, de uma forma mais simplificada e prática, o comportamento da seção transversal. É baseada em regiões de plastificação total dos materiais componentes da seção e não há, a princípio, preocupação com limitações de deformação. Como exemplo, tem-se o método desenvolvido por Roik e Bergmann (1989), no qual é baseado o método de dimensionamento simplificado proposto pelo Eurocode 4 (1994).

O método de Roik e Bergmann é válido somente para seções simétricas e pode ser aplicado em seções compostas por diversos materiais, desde que possa se admitir comportamento rígido plástico dos mesmos. Utilizando-se este método, pode-se traçar a curva de interação variando-se a profundidade da linha neutra ( $h_n$ ), da mesma forma que é feito para a análise elasto-plástica, e calculando-se os esforços resistentes. A diferença deste método é que a consideração de zonas totalmente plastificadas simplifica bastante os cálculos.

Para este tipo de análise, a curva de interação real pode ser aproximada por um polígono formado por poucos pontos (Figura 3.6). A Figura 3.7 mostra a distribuição de tensões para os pontos A e B. A análise rígido-plástica é descrita em trabalhos como os de Bergmann et al. (1995), Chung e Narayanan (1994), Oehlers e Bradford (1995, 1999) e Queiroz et al. (2001). No capítulo 6, onde são apresentadas prescrições de diferentes normas, é descrito o processo de obtenção dos esforços nos pontos (vértices ABCDE) do polígono de aproximação da curva real.

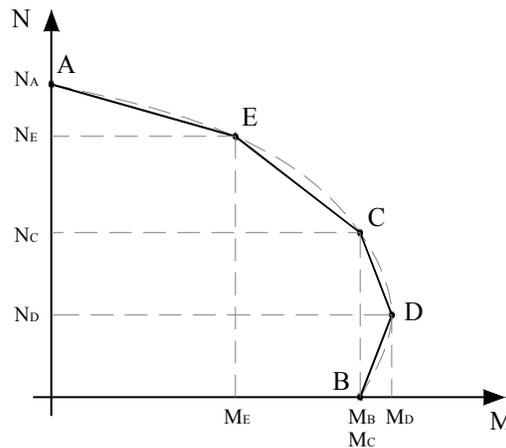


Figura 3.6 – Polígono de aproximação da curva de interação real.

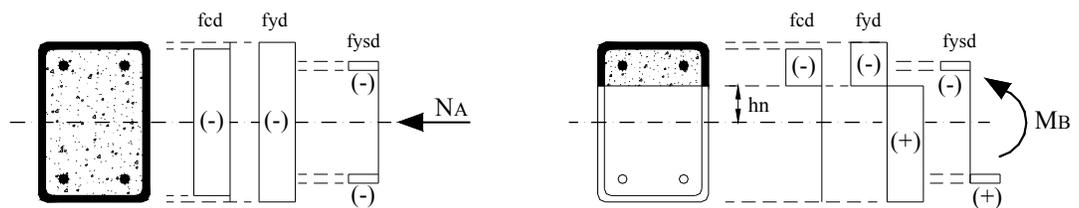


Figura 3.7 – Distribuição de tensões nos pontos A e B.

### 3.3 – ANÁLISE DA SEÇÃO

Para se entender o comportamento dos pilares mistos deve-se, antes, compreender o comportamento da seção transversal mista.

Os métodos de análise da seção mista têm dois principais objetivos:

1. Avaliar a resposta da seção para diferentes carregamentos;
2. Avaliar a contribuição da resistência e rigidez da seção nos pontos de integração do elemento finito.

No primeiro caso geralmente obtêm-se as relações momento-curvatura sob carregamento axial constante permitindo, por exemplo, a determinação das superfícies de interação. No segundo caso normalmente obtêm-se os esforços resistentes e rigidezes efetivas da seção para valores de deformação conhecidos ou prescritos.

Diversas abordagens deste problema se encontram disponíveis na literatura, destacando-se dois métodos para análise de elementos mistos:

- Método ou modelo de fibras;
- Métodos de integração.

No modelo de fibras a seção transversal é subdividida em pequenas regiões, não necessariamente de áreas iguais (Figura 3.8). Cada região representa uma fibra de material distribuída ao longo do comprimento do pilar. Cada fibra pode assumir diferentes relações constitutivas de tensão e deformação representando assim diferentes materiais. Normalmente utilizam-se relações constitutivas uniaxiais. Estados multi-axiais de tensão podem ser considerados adotando-se relações uniaxiais modificadas. Por exemplo, o efeito do confinamento do concreto pode ser incluído aumentando-se a resistência do concreto e alterando-se o comportamento pós-pico da relação uniaxial adotada. O pré-carregamento do pilar e as tensões residuais do perfil também podem ser considerados pela adoção de relações constitutivas adequadas.

A flambagem local é incorporada assumindo-se uma largura efetiva ou reduzindo-se a resistência dos elementos de aço que atinjam a tensão crítica de flambagem (Liang e Uy, 2000).

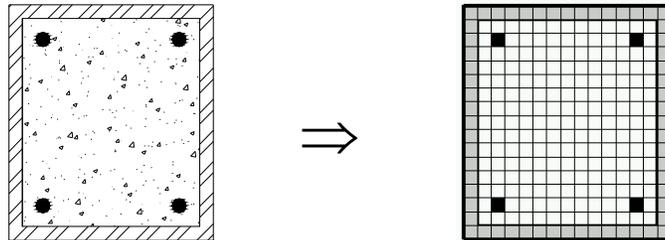


Figura 3.8 – Discretização da seção transversal pelo modelo de fibras.

Considerando que as seções planas permanecem planas e utilizando as relações constitutivas de cada material, a tensão em cada fibra é calculada em função de sua respectiva deformação (Figura 3.9) e realizando-se o somatório das forças nas fibras determinam-se os esforços resistentes da seção.

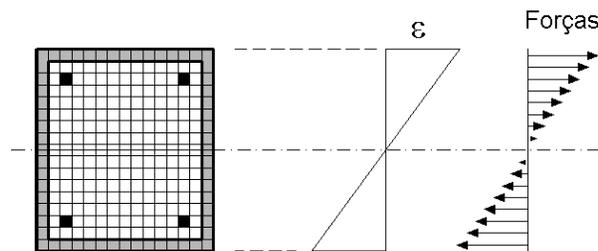


Figura 3.9 – Distribuição de deformações e forças no método das fibras.

Sfakianakis (2002) propõe um método de fibras alternativo em que o mecanismo de falha da seção transversal é determinado através de algoritmos envolvendo computação gráfica, sendo válido para seções quaisquer e eliminando problemas de convergência relacionados com processos iterativos.

Hajjar e Gourley (1996) desenvolveram uma equação polinomial para avaliação da resistência de seções transversais tubulares preenchidas, quadradas ou retangulares, e posteriormente fizeram comparações com análises numéricas, baseadas no modelo de fibras, e com resultados experimentais, obtendo resultados com boa precisão. Hajjar et al. (1998) apresentam uma formulação, também baseada no modelo de fibras, em que se considera o deslizamento relativo entre o concreto e o aço. El-Tawill e Deierlein (1999) e Spacone e El-Tawil (2004) desenvolvem seus trabalhos baseados neste método. Uy (2001b) analisou pilares retangulares preenchidos através de um modelo que considera faixas com a largura constante distribuídas na altura da seção, fazendo comparações com resultados experimentais e com o Eurocode 4 (1994).

Como grande desvantagem deste modelo clássico de fibras, tem-se a necessidade de uma grande quantidade de memória e um alto custo computacional, influenciando diretamente análises não lineares, principalmente de grandes estruturas, embora este seja um dos métodos mais flexíveis e poderosos disponíveis.

No método de integração, adotado neste trabalho e descrito nos próximos tópicos, a seção é usualmente discretizada em poligonais. Cada poligonal representa um tipo diferente de material com sua respectiva relação constitutiva. Os esforços resistentes e rigidezes da seção são calculados com o auxílio do Teorema de Green que relaciona integrais de área com integrais de linha ao longo do perímetro das poligonais. A aplicação deste teorema foi sugerida por Werner (1974), sendo inicialmente voltada para análise de seções de concreto armado e seguida por diversos pesquisadores como Ferreira (1986), Melo (2000) e Caldas (2004).

Em seu trabalho de dissertação, Caldas (2004) considera seções transversais mistas compostas por concreto e por perfis e barras de aço. Para o concreto adotou-se a relação constitutiva parábola retângulo (Figura 3.2.b) e para o aço adotou-se as relações constitutivas indicadas na figura 3.10. Baseado nestas hipóteses foi desenvolvido um programa computacional para análise de seções mistas, chamado **CSTM (Cálculo de Seções Transversais Mistas)**, que calcula e representa de forma gráfica as deformações, tensões, esforços resistentes, relações momento curvatura e as superfícies de interação de seções mistas aço concreto.

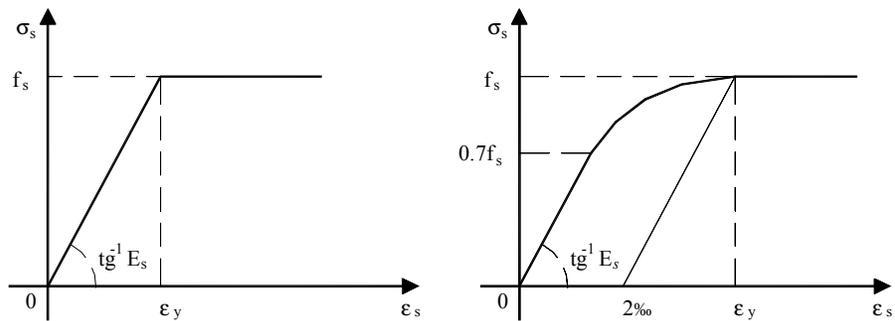


Figura 3.10 – Relações tensão deformação adotadas para o aço por Caldas (2004).

### 3.4 – SEÇÃO MULTI-MATERIAL

Este trabalho amplia o realizado por Caldas (2004), permitindo a consideração e combinação de diferentes e quaisquer materiais, com quaisquer relações tensão deformação, desde que estas relações possam ser escritas na forma de equações polinomiais. Pode-se assim, por exemplo, adotar relações constitutivas mais apropriadas, permitindo a consideração de efeitos como a fluência, o confinamento e a resistência à tração no concreto e o efeito das tensões residuais e do pré-carregamento no perfil metálico.

A seguir são desenvolvidas expressões para a obtenção dos esforços resistentes e rigidezes efetivas de seções mistas, considerando uma análise elasto-plástica e utilizando processos de integração de áreas poligonais baseados no Teorema de Green. Estas expressões serão aplicadas em modelos de elementos finitos de elementos mistos descritos no próximo capítulo.

#### 3.4.1 – MATERIAIS

É permitida a utilização de qualquer material que possa ter sua relação tensão deformação escrita na forma de equações polinomiais, abrangendo assim todos os materiais normalmente utilizados na engenharia civil. A implementação realizada considera polinômios até terceiro grau, sendo facilmente estendida para polinômios de grau maior.

A relação tensão deformação de cada material é dividida em faixas, ver Figura 3.11, representadas por polinômios descritos pela seguinte equação:

$$\sigma(\varepsilon) = a + b\varepsilon + c\varepsilon^2 + d\varepsilon^3 \quad (3.1)$$

Cada faixa é limitada por valores específicos de deformação ( $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \dots \varepsilon_n$ ) que marcam a transição entre diferentes polinômios. Os coeficientes  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$  são constantes e calculados baseados nos valores limites de tensão e de deformação de cada faixa.

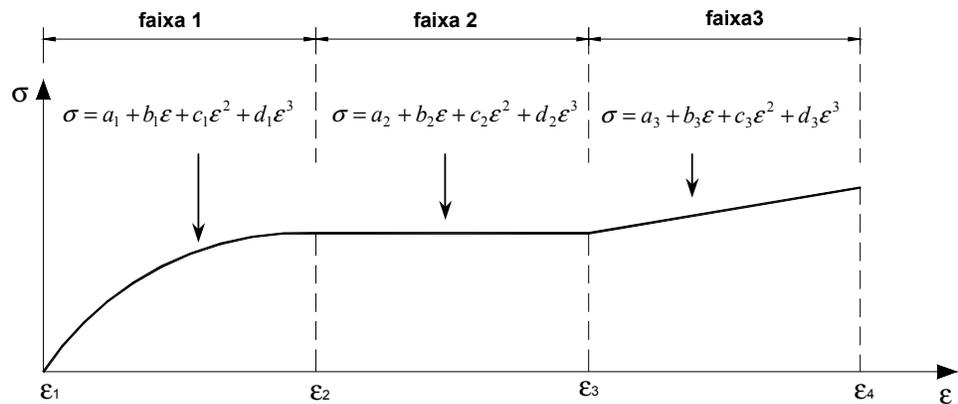


Figura 3.11 – Exemplo da divisão do diagrama tensão deformação em faixas.

### 3.4.2 – DISCRETIZAÇÃO DA SEÇÃO

Cada área de determinado material componente da seção deve ser representada por um polígono (Figura 3.12). As coordenadas dos vértices de cada polígono têm como base o sistema local (seccional) de eixos xyz localizado em qualquer ponto do plano que compõe a seção. Os vértices das poligonais devem ser declarados no sentido anti-horário para integração positiva e no sentido horário para integração negativa. As barras de armaduras são representadas de forma pontual concentrando suas áreas em seus respectivos centros de gravidade.

Para minimizar problemas de convergência, relacionados aos métodos de solução iterativos, sugere-se fixar a origem do sistema local no centróide plástico da seção (Roik e Bergmann, 1990; Chen et al., 2001; Sfakianakis, 2002; Caldas, 2004).

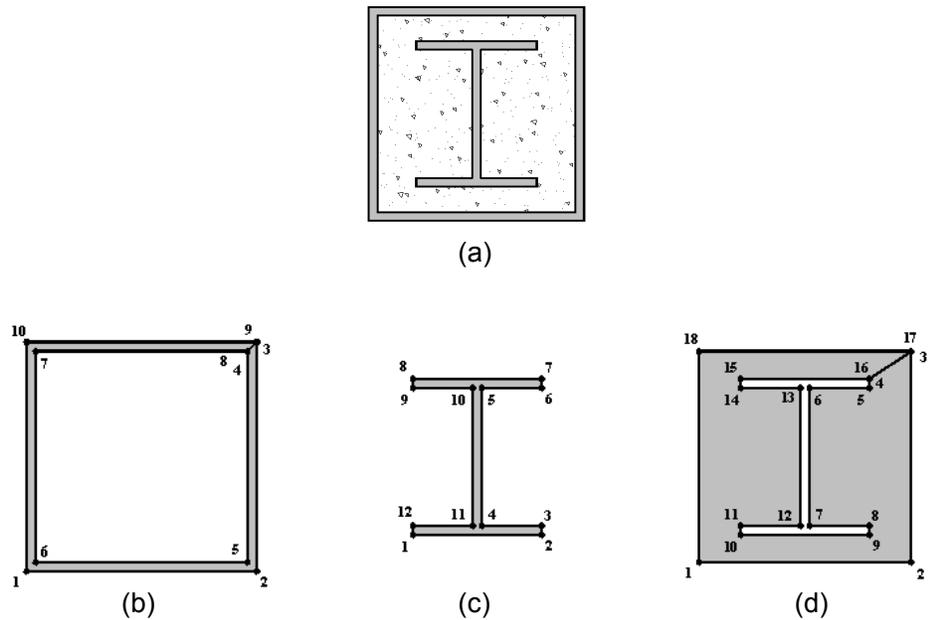


Figura 3.12 – Seção transversal discretizada por polígonos.

(a) Seção transversal (b) Polígono tubo (c) Polígono perfil (d) Polígono concreto

As seguintes hipóteses e definições são adotadas:

- seções planas permanecem planas após a deformação;
- deformações devido ao cisalhamento são desprezadas;
- empenamento da seção transversal e efeitos da torção desprezados;
- perfeita aderência entre os materiais;
- tensões e deformações de tração são positivas;
- tensões e deformações de compressão são negativas;
- $\mathcal{E}_0$  é a deformação na origem do sistema de coordenadas;
- $k_x$  e  $k_y$  são as curvaturas da seção em torno dos eixos  $x$  e  $y$  respectivamente, obedecendo a regra da mão direita.

Desta forma, a deformação em qualquer ponto da seção transversal é dada pela equação (3.2).

$$\varepsilon(x, y) = \varepsilon_0 + k_x y - k_y x \quad (3.2)$$

### 3.4.3 – ESFORÇOS RESISTENTES E RIGIDEZES GENERALIZADAS

Sendo  $dA$  um elemento de área infinitesimal de área da seção e  $\sigma_z$  a tensão normal atuante neste elemento, ver figura 3.13, os esforços resistentes são dados pelas seguintes expressões:

$$N_{Rz} = \iint_A \sigma_z dA \quad (3.3a)$$

$$M_{Rx} = \iint_A \sigma_z y dA \quad (3.3b)$$

$$M_{Ry} = -\iint_A \sigma_z x dA \quad (3.3c)$$

Onde  $N_{Rz}$  é a força normal na direção perpendicular ao plano da seção (eixo z) e  $M_{Rx}$  e  $M_{Ry}$  são os momentos fletores em torno dos eixos x e y, respectivamente.

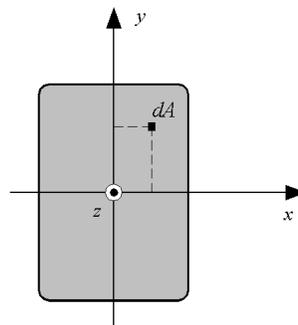


Figura 3.13 – Elemento infinitesimal de área da seção.

As rigidezes generalizadas da seção são dadas por:

$$EA = \iint_A E_T dA \quad (3.4a)$$

$$ES_x = \iint_A E_T y dA \quad (3.4b)$$

$$ES_y = \iint_A E_T x dA \quad (3.4c)$$

$$EI_x = \iint_A E_T y^2 dA \quad (3.4d)$$

$$EI_y = \iint_A E_T x^2 dA \quad (3.4e)$$

$$ES_{xy} = \iint_A E_T xy dA \quad (3.4f)$$

onde  $E_T$  é o módulo de elasticidade tangente dado por:

$$E_T = \frac{\partial \sigma_z}{\partial \varepsilon} \quad (3.5)$$

Considerando que a seção é composta por  $n$  materiais e por  $m$  barras de armaduras, as expressões (3.3) e (3.4) podem ser reescritas da seguinte forma:

$$N_{Rz} = \iint_{A_1} \sigma_1 dA + \iint_{A_2} \sigma_2 dA + \dots + \iint_{A_n} \sigma_n dA + \sum_{i=1}^m A_{si} \sigma_{si} \quad (3.6a)$$

$$M_{Rx} = \iint_{A_1} \sigma_1 y dA + \iint_{A_2} \sigma_2 y dA + \dots + \iint_{A_n} \sigma_n y dA + \sum_{i=1}^m A_{si} \sigma_{si} y_{si} \quad (3.6b)$$

$$M_{Ry} = - \underbrace{\iint_{A_1} \sigma_1 x dA}_{\text{material 1}} - \underbrace{\iint_{A_2} \sigma_2 x dA}_{\text{material 2}} - \dots - \underbrace{\iint_{A_n} \sigma_n x dA}_{\text{n-ésimo material}} - \underbrace{\sum_{i=1}^m A_{si} \sigma_{si} x_{si}}_{\text{armaduras}} \quad (3.6c)$$

$$EA = \iint_{A_1} E_{T_1} dA + \iint_{A_2} E_{T_2} dA + \dots + \iint_{A_n} E_{T_n} dA + \sum_{i=1}^m E_{T_{si}} A_{si} \quad (3.7a)$$

$$ES_x = \iint_{A_1} E_{T_1} y dA + \iint_{A_2} E_{T_2} y dA + \dots + \iint_{A_n} E_{T_n} y dA + \sum_{i=1}^m E_{T_{si}} y A_{si} \quad (3.7b)$$

$$ES_y = \iint_{A_1} E_{T_1} x dA + \iint_{A_2} E_{T_2} x dA + \dots + \iint_{A_n} E_{T_n} x dA + \sum_{i=1}^m E_{T_{si}} x A_{si} \quad (3.7c)$$

$$EI_x = \iint_{A_1} E_{T_1} y^2 dA + \iint_{A_2} E_{T_2} y^2 dA + \dots + \iint_{A_n} E_{T_n} y^2 dA + \sum_{i=1}^m E_{T_{si}} y^2 A_{si} \quad (3.7d)$$

$$EI_y = \iint_{A_1} E_{T_1} x^2 dA + \iint_{A_2} E_{T_2} x^2 dA + \dots + \iint_{A_n} E_{T_n} x^2 dA + \sum_{i=1}^m E_{T_{si}} x^2 A_{si} \quad (3.7e)$$

$$ES_{xy} = \underbrace{\iint_{A_1} E_{T_1} xy dA}_{\text{material 1}} + \underbrace{\iint_{A_2} E_{T_2} xy dA}_{\text{material 2}} + \dots + \underbrace{\iint_{A_n} E_{T_n} xy dA}_{\text{n-ésimo material}} + \underbrace{\sum_{i=1}^m E_{T_{si}} xy A_{si}}_{\text{armaduras}} \quad (3.7f)$$

As expressões (3.6) e (3.7) são calculadas com o auxílio das equações (3.1) e (3.2), repetidas aqui por comodidade, sendo assim funções das tensões definidas pelos valores das variáveis de deformação  $\varepsilon_0$ ,  $k_x$  e  $k_y$ .

$$\sigma(\varepsilon) = a + b\varepsilon + c\varepsilon^2 + d\varepsilon^3 \quad (3.1)$$

$$\varepsilon(x, y) = \varepsilon_0 + k_x y - k_y x \quad (3.2)$$

### 3.4.4 – TEOREMA DE GREEN

Para que as integrais das expressões (3.6) e (3.7) possam ser calculadas de forma analítica utiliza-se o Teorema de Green. Considerando  $P(x,y)$  e  $Q(x,y)$  funções contínuas com derivadas de primeira ordem contínuas e  $C$  uma curva poligonal fechada simples no plano  $xy$ , sendo  $A$  a área delimitada por esta curva, o Teorema de Green estabelece que:

$$\iint_A \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_C (P dx + Q dy) \quad (3.8)$$

O símbolo  $\oint_C$  denota integração de linha no contorno da curva  $C$  no sentido anti-horário. Desta forma, transforma-se a integral de área ( $dx dy$ ) na integral de linha ao longo do perímetro da curva  $C$ . Para a aplicação do teorema deve-se, primeiro, descrever os pontos de um segmento genérico (aresta) da poligonal, em função de seus pontos extremos, através das seguintes equações paramétricas: (Figura 3.14)

$$\begin{aligned} x &= x_1 + \alpha(x_2 - x_1) \\ y &= y_1 + \alpha(y_2 - y_1) \end{aligned} \quad 0 \leq \alpha \leq 1 \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} dx &= d\alpha(x_2 - x_1) \\ dy &= d\alpha(y_2 - y_1) \end{aligned} \quad (3.10)$$

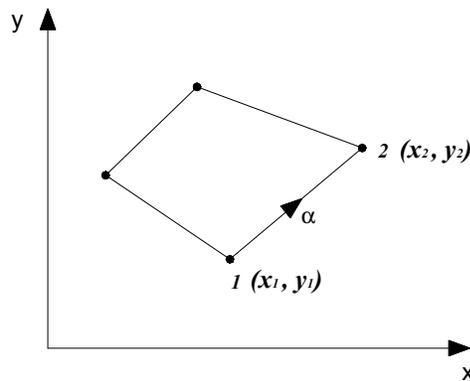


Figura 3.14 – Parametrização de um segmento genérico da poligonal.

Através da manipulação das funções  $P$  e  $Q$  e da utilização das equações paramétricas pode-se avaliar integrais desejadas. Por exemplo, para avaliar  $\iint dA$  faz-se:

$$\begin{aligned} P(x, y) &= 0 \\ Q(x, y) &= x \end{aligned} \quad (3.11)$$

tem-se,

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 1 \quad \text{e} \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \quad (3.12)$$

Reescrevendo a equação 3.8 :

$$\iint_A (1-0)dxdy = \oint_C (0dx + xdy) \Rightarrow \iint_A dxdy = \iint_A dA = \oint_C xdy \quad (3.13)$$

Substituindo 3.9 e 3.10 em 3.13 e desenvolvendo os termos:

$$\iint_A dxdy = \iint_A dA = \oint_C xdy = \sum_{aresta=1}^n \left[ \int_0^1 [x_1 + \alpha(x_2 - x_1)](y_2 - y_1) d\alpha \right] = \sum_{aresta=1}^n \left[ \frac{1}{2}(x_1 + x_2)\Delta y \right] \quad (3.14a)$$

$$\iint_A dA = \sum_{aresta=1}^n \left[ \frac{1}{2}(x_1 + x_2)\Delta y \right] \quad (3.14b)$$

Desta forma,  $\iint dA$  pode ser avaliada pela expressão (3.14b) através de um simples somatório da contribuição de cada aresta do polígono que compõe a área  $A$ .

A equação (3.14b) pode também ser determinada com o auxílio da seguinte expressão de avaliação de integrais:

$$I_{ab} = \iint_A x^a y^b dxdy \quad , \text{ com } a \text{ e } b \text{ inteiros.} \quad (3.15)$$

Fazendo  $a$  e  $b$  iguais a zero tem-se:

$$I_{00} = \iint_A x^0 y^0 dx dy = \oint_C x dy = \sum_{aresta=1}^n \left[ \int_0^1 [x_1 + \alpha(x_2 - x_1)](y_2 - y_1) d\alpha \right] = \sum_{aresta=1}^n \left[ \frac{1}{2}(x_1 + x_2)\Delta y \right] \quad (3.16a)$$

$$I_{00} = \iint dA = \sum_{aresta=1}^n \left[ \frac{1}{2}(x_1 + x_2)\Delta y \right] \quad (3.16b)$$

De maneira análoga obtêm-se as demais expressões que serão necessárias:

$$I_{10} = \iint x dA = \sum_{aresta=1}^n \Delta y \left( \frac{x_1^2}{2} + \frac{x_1 \Delta x}{2} + \frac{\Delta x^2}{6} \right) \quad (3.17)$$

$$I_{01} = \iint y dA = \sum_{aresta=1}^n \Delta y \left( x_1 y_1 + \frac{\Delta x y_1 + \Delta y x_1}{2} + \frac{\Delta x \Delta y}{3} \right) \quad (3.18)$$

$$I_{11} = \iint xy dA = \sum_{aresta=1}^n \frac{\Delta y}{2} \left( x_1^2 y_1 + \frac{1}{2}(x_1^2 \Delta y + 2x_1 y_1 \Delta x) + \frac{1}{3}(2x_1 \Delta x \Delta y + \Delta x^2 y_1) + \frac{1}{4} \Delta x^2 \Delta y \right) \quad (3.19)$$

$$I_{20} = \iint x^2 dA = \sum_{aresta=1}^n \frac{\Delta y}{3} \left( x_1^3 + \frac{3x_1^2 \Delta x}{2} + x_1 \Delta x^2 + \frac{\Delta x^3}{4} \right) \quad (3.20)$$

$$I_{02} = \iint y^2 dA = \sum_{aresta=1}^n \Delta y \left( x_1 y_1^2 + x_1 y_1 \Delta y + \frac{x_1 \Delta y^2}{3} + \frac{y_1^2 \Delta x}{2} + \frac{2}{3} y_1 \Delta x \Delta y + \frac{1}{4} \Delta x \Delta y^2 \right) \quad (3.21)$$

$$I_{12} = \iint xy^2 dA = \sum_{aresta=1}^n \frac{\Delta y}{2} \left( x_1^2 y_1^2 + x_1^2 y_1 \Delta y + \frac{1}{3} x_1^2 \Delta y^2 + x_1 \Delta x y_1^2 + \frac{4}{3} x_1 \Delta x y_1 \Delta y + \frac{1}{2} x_1 \Delta x \Delta y^2 + \frac{1}{3} \Delta x^2 y_1^2 + \frac{1}{2} \Delta x^2 y_1 \Delta y + \frac{1}{5} \Delta x^2 \Delta y^2 \right) \quad (3.22)$$

$$I_{21} = \iint x^2 y dA = \sum_{aresta=1}^n \frac{\Delta y}{3} \left( x_1^3 y_1 + \frac{3}{2} x_1^2 y_1 \Delta x + x_1 \Delta x^2 y_1 + \frac{\Delta x^3 y_1}{4} + \frac{x_1^3 \Delta y}{2} + x_1^2 \Delta x \Delta y + \frac{3}{4} x_1 \Delta x^2 \Delta y + \frac{1}{5} \Delta x^3 \Delta y \right) \quad (3.23)$$

$$I_{22} = \iint x^2 y^2 dA = \sum_{\text{aresta}=1}^n \frac{\Delta y}{180} (4y_1 y_2 x_2^3 + 4x_1^3 y_1 y_2 + 6x_1 x_2^2 y_2^2 + 3x_1 x_2^2 y_1^2 + 3x_2 x_1^2 y_2^2 + x_1^3 y_2^2 + 10x_2^3 y_2^2 + x_2^3 y_1^2 + 6x_2 x_1^2 y_1^2 + 10x_1^3 y_1^2 + 6x_2 x_1^2 y_1 y_2 + 6x_1 x_2^2 y_1 y_2) \quad (3.24)$$

$$I_{30} = \iint_A x^3 dA = \sum_{\text{aresta}=1}^n \frac{\Delta y}{4} \left( x_1^4 + 2x_1^3 \Delta x + 2x_1^2 \Delta x^2 + x_1 \Delta x^3 + \frac{1}{5} \Delta x^4 \right) \quad (3.25)$$

$$I_{03} = \iint_A y^3 dA = \sum_{\text{aresta}=1}^n \Delta y \left( x_1 y_1^3 + \frac{3}{2} x_1 y_1^2 \Delta y + x_1 y_1 \Delta y^2 + \frac{x_1 \Delta y^3}{4} + \frac{1}{2} \Delta x y_1^3 + y_1^2 \Delta x \Delta y + \frac{3}{4} y_1 \Delta x \Delta y^2 + \frac{\Delta x \Delta y^3}{5} \right) \quad (3.26)$$

$$I_{13} = \iint x^1 y^3 dA = \sum_{\text{aresta}=1}^n \frac{\Delta y}{120} (4x_1 x_2 y_2^3 + x_1^2 y_2^3 + 10x_2^2 y_2^3 + 6x_1 x_2 y_1 y_2^2 + 3y_1 x_1^2 y_2^2 + 6y_1 x_2^2 y_2^2 + 3y_2 x_2^2 y_1^2 + 6x_1^2 y_1^2 y_2 + 6x_1 x_2 y_2 y_1^2 + 4x_1 x_2 y_1^3 + 10x_1^2 y_1^3 + x_2^2 y_1^3) \quad (3.27)$$

$$I_{31} = \iint x^3 y^1 dA = \sum_{\text{aresta}=1}^n \frac{\Delta y}{120} (2x_2 y_2 x_1^3 + 5x_1^4 y_1 + 2x_1 x_2^3 y_1 + 3x_1^2 x_2^2 y_2 + 3y_1 x_1^2 x_2^2 + 4y_1 x_2 x_1^3 + 5x_2^4 y_2 + x_2^4 y_1 + y_2 x_1^4 + 4x_1 x_2^3 y_2) \quad (3.28)$$

$$I_{04} = \iint y^4 dA = \sum_{\text{aresta}=1}^n \frac{\Delta y}{30} (5x_2 y_2^4 + x_2 y_1^4 + 3x_1 y_2^2 y_1^2 + 2x_2 y_2 y_1^3 + 3x_2 y_1^2 y_2^2 + 4x_2 y_1 y_2^3 + 4x_1 y_2 y_1^3 + 2x_1 y_1 y_2^3 + 5x_1 y_1^4 + x_1 y_2^4) \quad (3.29)$$

$$I_{40} = \iint x^4 dA = \sum_{\text{aresta}=1}^n \frac{\Delta y}{30} (x_1 + x_2) (x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2) (x_2^2 + x_1 x_2 + x_1^2) \quad (3.30)$$

### 3.4.5 – INTEGRAÇÃO ANALÍTICA

O cálculo, de forma analítica, das integrais das equações (3.6) e (3.7) será demonstrado para o primeiro material componente da seção. Para os demais materiais, o procedimento é análogo bastando realizar o somatório da contribuição individual de cada um ao final do processo.

#### 3.4.5.1 – Esforços Resistentes

Considerando o esforço resistente axial, reescreve-se a equação (3.6a) como :

$$N_{Rz} = \underbrace{(N_{Rz})_1}_{\text{material 1}} + \underbrace{(N_{Rz})_2}_{\text{material 2}} + \dots + \underbrace{(N_{Rz})_n}_{\text{n-ésimo material}} + \underbrace{(N_{Rz})_b}_{\text{armaduras}} \quad (3.31)$$

na qual  $(N_{Rz})_1$  é a contribuição do primeiro material sendo dada por:

$$(N_{Rz})_1 = \iint_{A_1} \sigma_1 dA \quad (3.32)$$

Esta expressão deverá ser reescrita considerando cada faixa da relação tensão deformação do material (Figura 3.11). Assim:

$$(N_{Rz})_1 = \iint_{A_1} \sigma_1 dA = \underbrace{\iint_{A_1} \sigma_{11} dA}_{\text{faixa 1}} + \underbrace{\iint_{A_1} \sigma_{12} dA}_{\text{faixa 2}} + \dots + \underbrace{\iint_{A_1} \sigma_{1n} dA}_{\text{n-ésima faixa}} \quad (3.33)$$

A contribuição de cada faixa, representada de forma genérica pela equação (3.34), é calculada com o auxílio das equações (3.1) e (3.2).

$$\iint \sigma dA \Rightarrow \text{contribuição de uma faixa de um material para o esforço axial.} \quad (3.34)$$

Substituindo (3.1) em (3.34) tem-se:

$$\iint \sigma dA = \iint (a + b\varepsilon + c\varepsilon^2 + d\varepsilon^3) dA = \iint a dA + \iint b\varepsilon dA + \iint c\varepsilon^2 dA + \iint d\varepsilon^3 dA \quad (3.35)$$

e substituindo (3.2) em (3.35) chega-se a:

$$\begin{aligned} \iint \sigma dA = \iint a dA + \iint b(\varepsilon_0 + k_x y - k_y x) dA + \iint c(\varepsilon_0 + k_x y - k_y x)^2 dA + \\ + \iint d(\varepsilon_0 + k_x y - k_y x)^3 dA \end{aligned} \quad (3.36)$$

Desenvolvendo os termos e reorganizando,

$$\begin{aligned} \iint \sigma dA = (a + b\varepsilon_0 + c\varepsilon_0^2 + d\varepsilon_0^3) \iint dA + (bk_x + 2c\varepsilon_0 k_x + 3d\varepsilon_0^2 k_x) \iint y dA - \\ - (bk_y + 2c\varepsilon_0 k_y + 3d\varepsilon_0^2 k_y) \iint x dA - (2ck_x k_y + 6d\varepsilon_0 k_x k_y) \iint xy dA + \\ + (ck_x^2 + 3d\varepsilon_0 k_x^2) \iint y^2 dA + (ck_y^2 + 3d\varepsilon_0 k_y^2) \iint x^2 dA - (3dk_x^2 k_y) \iint xy^2 dA + \\ + (3dk_x k_y^2) \iint x^2 y dA + (dk_x^3) \iint y^3 dA - (dk_y^3) \iint x^3 dA \end{aligned} \quad (3.37)$$

Lembrando das expressões (3.16) a (3.30) pode-se escrever:

$$\begin{aligned} \iint \sigma dA = (a + b\varepsilon_0 + c\varepsilon_0^2 + d\varepsilon_0^3) I_{00} + (bk_x + 2c\varepsilon_0 k_x + 3d\varepsilon_0^2 k_x) I_{01} - \\ - (bk_y + 2c\varepsilon_0 k_y + 3d\varepsilon_0^2 k_y) I_{10} - (2ck_x k_y + 6d\varepsilon_0 k_x k_y) I_{11} + \\ + (ck_x^2 + 3d\varepsilon_0 k_x^2) I_{02} + (ck_y^2 + 3d\varepsilon_0 k_y^2) I_{20} - (3dk_x^2 k_y) I_{12} + \\ + (3dk_x k_y^2) I_{21} + (dk_x^3) I_{03} - (dk_y^3) I_{30} \end{aligned} \quad (3.38)$$

A expressão (3.38) avalia de forma analítica a contribuição de uma faixa de um material. Somando-se a contribuição das  $n$  faixas que compõem o diagrama de um material determina-se a contribuição deste material. Somando-se a contribuição de cada material e das barras que compõem a seção determina-se o esforço resistente axial da seção em função das variáveis de deformação  $\varepsilon_0$ ,  $k_x$  e  $k_y$ . (Figura 3.15).

Para o cálculo da resistência das barras tem-se:

$$(N_{Rz})_b = \sum_{i=1}^m A_{si} \sigma_{si} = \underbrace{\sum_{i=1}^{m_1} A_{si_1} \sigma_{si_1}}_{\text{barras na faixa 1}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{m_2} A_{si_2} \sigma_{si_2}}_{\text{barras na faixa 2}} + \dots + \underbrace{\sum_{i=1}^{m_n} A_{si_n} \sigma_{si_n}}_{\text{barras n-ésima faixa}} \quad (3.39)$$

Como as barras são representadas de forma pontual não é necessário aplicar-se o Teorema de Green. A tensão de cada barra, calculada diretamente pelas expressões (3.1) e (3.2), deve ser multiplicada pela área de cada barra fornecendo o valor da sua resistência axial. A detecção e divisão das partes da seção e das barras de armaduras por faixas de deformação para cada material é feita de forma automática, através de algoritmos implementados no programa.

Para o cálculo dos momentos fletores parte-se das expressões (3.40) e (3.41) que representam a contribuição de um material. O procedimento é análogo ao do esforço axial diferenciando-se apenas pela inclusão dos braços de alavanca de cada área infinitesimal, representados pelas variáveis  $x$  e  $y$ . Assim:

$$(M_{Rx})_1 = \iint_{A_i} \sigma_1 y dA = \underbrace{\iint_{A_i} \sigma_{11} y dA}_{\text{faixa 1}} + \underbrace{\iint_{A_i} \sigma_{12} y dA}_{\text{faixa 2}} + \dots + \underbrace{\iint_{A_i} \sigma_{1n} y dA}_{\text{n-ésima faixa}} \quad (3.40)$$

$$(M_{Ry})_1 = - \iint_{A_i} \sigma_1 x dA = - \underbrace{\iint_{A_i} \sigma_{11} x dA}_{\text{faixa 1}} - \underbrace{\iint_{A_i} \sigma_{12} x dA}_{\text{faixa 2}} - \dots - \underbrace{\iint_{A_i} \sigma_{1n} x dA}_{\text{n-ésima faixa}} \quad (3.41)$$

A contribuição de uma faixa é dada por:

$$\begin{aligned} \iint \sigma y dA &= \iint a y dA + \iint b(\varepsilon_0 + k_x y - k_y x) y dA + \iint c(\varepsilon_0 + k_x y - k_y x)^2 y dA + \\ &+ \iint d(\varepsilon_0 + k_x y - k_y x)^3 y dA \end{aligned} \quad (M_{Rx}) \quad (3.42)$$

e

$$\begin{aligned} \iint \sigma x dA &= \iint a x dA + \iint b(\varepsilon_0 + k_x y - k_y x) x dA + \iint c(\varepsilon_0 + k_x y - k_y x)^2 x dA + \\ &+ \iint d(\varepsilon_0 + k_x y - k_y x)^3 x dA \end{aligned} \quad (M_{Ry}) \quad (3.43)$$

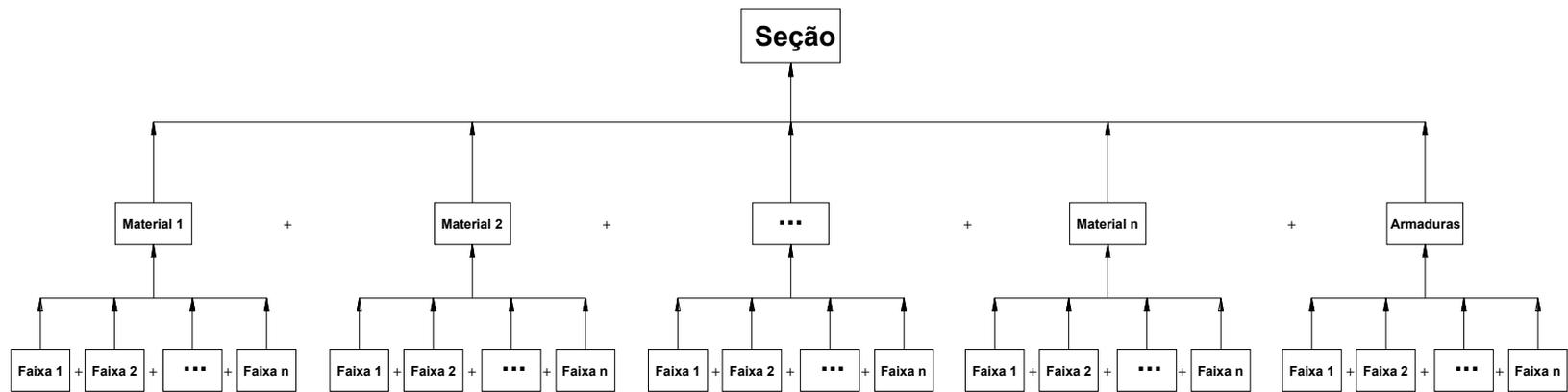


Figura 3.15 – Fluxograma de cálculo dos esforços e rigidezes.

Desenvolvendo-se (3.42) e (3.43) chega-se a:

$$\begin{aligned}
\iint \sigma_y dA = & (a + b\varepsilon_0 + c\varepsilon_0^2 + d\varepsilon_0^3) \iint y dA - (bk_y + 2c\varepsilon_0 k_y + 3d\varepsilon_0^2 k_y) \iint xy dA + \\
& + (bk_x + 2c\varepsilon_0 k_x + 3d\varepsilon_0^2 k_x) \iint y^2 dA + (ck_x^2 + 3d\varepsilon_0 k_x^2) \iint y^3 dA - \\
& - (2ck_x k_y + 6d\varepsilon_0 k_x k_y) \iint xy^2 dA + (ck_y^2 + 3d\varepsilon_0 k_y^2) \iint x^2 y dA + \\
& + (3dk_x k_y^2) \iint x^2 y^2 dA - (3dk_y k_x^2) \iint xy^3 dA - (dk_y^3) \iint x^3 y dA + (dk_x^3) \iint y^4 dA
\end{aligned} \tag{3.44a}$$

e

$$\begin{aligned}
\iint \sigma_x dA = & (a + b\varepsilon_0 + c\varepsilon_0^2 + d\varepsilon_0^3) \iint x dA + (bk_x + 2c\varepsilon_0 k_x + 3d\varepsilon_0^2 k_x) \iint xy dA - \\
& - (bk_y + 2c\varepsilon_0 k_y + 3d\varepsilon_0^2 k_y) \iint x^2 dA + (ck_y^2 + 3d\varepsilon_0 k_y^2) \iint x^3 dA + \\
& + (ck_x^2 + 3d\varepsilon_0 k_x^2) \iint xy^2 dA - (2ck_x k_y + 6d\varepsilon_0 k_x k_y) \iint x^2 y dA - \\
& - (3dk_x^2 k_y) \iint x^2 y^2 dA + (3dk_y^2 k_x) \iint x^3 y dA + (dk_x^3) \iint xy^3 dA - (dk_y^3) \iint x^4 dA
\end{aligned} \tag{3.45a}$$

Novamente lembrando das expressões (3.16) a (3.30) pode-se escrever:

$$\begin{aligned}
\iint \sigma_y dA = & (a + b\varepsilon_0 + c\varepsilon_0^2 + d\varepsilon_0^3) I_{01} - (bk_y + 2c\varepsilon_0 k_y + 3d\varepsilon_0^2 k_y) I_{11} + \\
& + (bk_x + 2c\varepsilon_0 k_x + 3d\varepsilon_0^2 k_x) I_{02} + (ck_x^2 + 3d\varepsilon_0 k_x^2) I_{03} - \\
& - (2ck_x k_y + 6d\varepsilon_0 k_x k_y) I_{12} + (ck_y^2 + 3d\varepsilon_0 k_y^2) I_{21} + \\
& + (3dk_x k_y^2) I_{22} - (3dk_y k_x^2) I_{13} - (dk_y^3) I_{31} + (dk_x^3) I_{04}
\end{aligned} \tag{3.44b}$$

e

$$\begin{aligned}
\iint \sigma_x dA = & (a + b\varepsilon_0 + c\varepsilon_0^2 + d\varepsilon_0^3) I_{10} + (bk_x + 2c\varepsilon_0 k_x + 3d\varepsilon_0^2 k_x) I_{11} - \\
& - (bk_y + 2c\varepsilon_0 k_y + 3d\varepsilon_0^2 k_y) I_{20} + (ck_y^2 + 3d\varepsilon_0 k_y^2) I_{30} + \\
& + (ck_x^2 + 3d\varepsilon_0 k_x^2) I_{12} - (2ck_x k_y + 6d\varepsilon_0 k_x k_y) I_{21} - \\
& - (3dk_x^2 k_y) I_{22} + (3dk_y^2 k_x) I_{31} + (dk_x^3) I_{13} - (dk_y^3) I_{40}
\end{aligned} \tag{3.45b}$$

As equações (3.44b) e (3.45b) determinam as contribuições de uma faixa de um material para os momentos fletores em torno dos eixos x e y, respectivamente.

A contribuição das barras é calculada diretamente pelas equações (3.46) e (3.47) utilizando-se, novamente, as equações (3.1) e (3.2).

$$(M_{Rx})_b = \sum_{i=1}^m A_{si} \sigma_{si} y_{si} = \underbrace{\sum_{i=1}^{m_1} A_{si_1} \sigma_{si_1} y_{si_1}}_{\text{barras na faixa 1}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{m_2} A_{si_2} \sigma_{si_2} y_{si_2}}_{\text{barras na faixa 2}} + \dots + \underbrace{\sum_{i=1}^{m_n} A_{si_n} \sigma_{si_n} y_{si_n}}_{\text{barras n-ésima faixa}} \quad (3.46)$$

$$(M_{Ry})_b = -\sum_{i=1}^m A_{si} \sigma_{si} x_{si} = -\underbrace{\sum_{i=1}^{m_1} A_{si_1} \sigma_{si_1} x_{si_1}}_{\text{barras na faixa 1}} - \underbrace{\sum_{i=1}^{m_2} A_{si_2} \sigma_{si_2} x_{si_2}}_{\text{barras na faixa 2}} - \dots - \underbrace{\sum_{i=1}^{m_n} A_{si_n} \sigma_{si_n} x_{si_n}}_{\text{barras n-ésima faixa}} \quad (3.47)$$

### 3.4.5.2 – Rigidezes Generalizadas

Para o cálculo analítico da rigidez axial da seção ( $EA$ ), reescreve-se a expressão (3.7a) de forma análoga à realizada na determinação dos esforços resistentes. Assim:

$$EA = \underbrace{(EA)_1}_{\text{material 1}} + \underbrace{(EA)_2}_{\text{material 2}} + \dots + \underbrace{(EA)_n}_{\text{n-ésimo material}} + \underbrace{(EA)_b}_{\text{armaduras}} \quad (3.48)$$

em que:

$$(EA)_l = \iint_{A_l} E_{T_l} dA = \underbrace{\iint_{A_l} E_{T_{l1}} dA}_{\text{faixa 1}} + \underbrace{\iint_{A_l} E_{T_{l2}} dA}_{\text{faixa 2}} + \dots + \underbrace{\iint_{A_l} E_{T_{ln}} dA}_{\text{n-ésima faixa}} \quad (3.49)$$

Utilizando a equação (3.5), tem-se que a contribuição de uma faixa de um material é dada por:

$$\iint_{A_l} E_{T_l} dA = \iint \frac{\partial \sigma_z}{\partial \varepsilon} dA \quad (3.50)$$

Substituindo (3.1) em (3.50),

$$\iint E_T dA = \iint \frac{\partial(a + b\varepsilon + c\varepsilon^2 + d\varepsilon^3)}{\partial\varepsilon} dA = \iint (b + 2c\varepsilon + 3d\varepsilon^2) dA \quad (3.51)$$

e substituindo (3.2) em (3.51),

$$\iint E_T dA = \iint (b + 2c(\varepsilon_0 + k_x y - k_y x) + 3d(\varepsilon_0 + k_x y - k_y x)^2) dA \quad (3.52)$$

Desenvolvendo os termos e reorganizando a equação chega-se a:

$$\begin{aligned} \iint E_T dA = & (b + 2c\varepsilon_0 + 3d\varepsilon_0^2) \iint dA + (2ck_x + 6d\varepsilon_0 k_x) \iint y dA - (2ck_y + 6d\varepsilon_0 k_y) \iint x dA - \\ & (6dk_x k_y) \iint xy dA + (3dk_y^2) \iint x^2 dA + (3dk_x^2) \iint y^2 dA \end{aligned} \quad (3.53)$$

ou,

$$\begin{aligned} \iint E_T dA = & (b + 2c\varepsilon_0 + 3d\varepsilon_0^2) I_{00} + (2ck_x + 6d\varepsilon_0 k_x) I_{01} - (2ck_y + 6d\varepsilon_0 k_y) I_{10} - \\ & (6dk_x k_y) I_{11} + (3dk_y^2) I_{20} + (3dk_x^2) I_{02} \end{aligned} \quad (3.54)$$

A equação (3.54) representa a contribuição de uma faixa de um material. Novamente, somando-se a contribuição das  $n$  faixas de um material tem-se a contribuição deste material. Somando-se a contribuição de todos os materiais componentes da seção têm-se a rigidez generalizada da seção. A contribuição das barras é calculada de forma direta pela equação (3.55c).

$$(EA)_{\mathbf{b}} = \sum_{i=1}^m E_{Tsi} A_{si} = \sum_{i=1}^m \left( \frac{\partial \sigma_z}{\partial \varepsilon} \right)_{si} A_{si} = \sum_{i=1}^m \left( \frac{\partial(a + b\varepsilon + c\varepsilon^2 + d\varepsilon^3)}{\partial \varepsilon} \right)_{si} A_{si} = \sum_{i=1}^m (b + 2c\varepsilon + 3d\varepsilon^2)_{si} A_{si} \quad (3.55a)$$

$$(EA)_{\mathbf{b}} = \sum_{i=1}^m (b + 2c(\varepsilon_0 + k_x y - k_y x) + 3d(\varepsilon_0 + k_x y - k_y x)^2)_{si} A_{si} \quad (3.55b)$$

$$(EA)_{\mathbf{b}} = \sum_{i=1}^m \left( (b + 2c\varepsilon_0 + 3d\varepsilon_0^2)_{si} + (2ck_x + 6d\varepsilon_0 k_x)_{si} y - (2ck_y + 6d\varepsilon_0 k_y)_{si} x - (6dk_x k_y)_{si} xy + (3dk_y^2)_{si} x^2 + (3dk_x^2)_{si} y^2 \right) A_{si} \quad (3.55c)$$

As demais rigidezes são calculadas de forma análoga, diferenciando-se pela presença dos termos  $x$ ,  $y$ ,  $x^2$ ,  $y^2$  e  $xy$ , influenciando apenas as expressões de avaliação de integrais  $I_{ab}$ . Assim a contribuição de uma faixa é dada por:

Para  $ES_x$ :

$$\iint E_T y dA = (b + 2c\varepsilon_0 + 3d\varepsilon_0^2)I_{01} + (2ck_x + 6d\varepsilon_0 k_x)I_{02} - (2ck_y + 6d\varepsilon_0 k_y)I_{11} - (6dk_x k_y)I_{12} + (3dk_y^2)I_{21} + (3dk_x^2)I_{03} \quad (3.56)$$

Para  $ES_y$ :

$$\iint E_T x dA = (b + 2c\varepsilon_0 + 3d\varepsilon_0^2)I_{10} + (2ck_x + 6d\varepsilon_0 k_x)I_{11} - (2ck_y + 6d\varepsilon_0 k_y)I_{20} - (6dk_x k_y)I_{21} + (3dk_y^2)I_{30} + (3dk_x^2)I_{12} \quad (3.57)$$

Para  $EI_x$ :

$$\iint E_T y^2 dA = (b + 2c\varepsilon_0 + 3d\varepsilon_0^2)I_{02} + (2ck_x + 6d\varepsilon_0 k_x)I_{03} - (2ck_y + 6d\varepsilon_0 k_y)I_{12} - (6dk_x k_y)I_{13} + (3dk_y^2)I_{22} + (3dk_x^2)I_{04} \quad (3.58)$$

Para  $EI_y$ :

$$\iint E_T x^2 dA = (b + 2c\varepsilon_0 + 3d\varepsilon_0^2)I_{20} + (2ck_x + 6d\varepsilon_0 k_x)I_{21} - (2ck_y + 6d\varepsilon_0 k_y)I_{30} - (6dk_x k_y)I_{31} + (3dk_y^2)I_{40} + (3dk_x^2)I_{22} \quad (3.59)$$

Para  $ES_{xy}$ :

$$\iint E_T xy dA = (b + 2c\varepsilon_0 + 3d\varepsilon_0^2)I_{11} + (2ck_x + 6d\varepsilon_0 k_x)I_{12} - (2ck_y + 6d\varepsilon_0 k_y)I_{21} - (6dk_x k_y)I_{22} + (3dk_y^2)I_{31} + (3dk_x^2)I_{13} \quad (3.60)$$

A contribuição das armaduras nas demais rigidezes generalizadas é dada por:

$$(ES_x)_b = \sum_{i=1}^m \left( (b + 2c\varepsilon_0 + 3d\varepsilon_0^2)_{si} y + (2ck_x + 6d\varepsilon_0 k_x)_{si} y^2 - (2ck_y + 6d\varepsilon_0 k_y)_{si} xy - (6dk_x k_y)_{si} xy^2 + (3dk_y^2)_{si} x^2 y + (3dk_x^2)_{si} y^3 \right) A_{si} \quad (3.61)$$

$$(ES_y)_b = \sum_{i=1}^m \left( (b + 2c\varepsilon_0 + 3d\varepsilon_0^2)_{si} x + (2ck_x + 6d\varepsilon_0 k_x)_{si} xy - (2ck_y + 6d\varepsilon_0 k_y)_{si} x^2 - (6dk_x k_y)_{si} x^2 y + (3dk_y^2)_{si} x^3 + (3dk_x^2)_{si} xy^2 \right) A_{si} \quad (3.62)$$

$$(EI_x)_b = \sum_{i=1}^m \left( (b + 2c\varepsilon_0 + 3d\varepsilon_0^2)_{si} y^2 + (2ck_x + 6d\varepsilon_0 k_x)_{si} y^3 - (2ck_y + 6d\varepsilon_0 k_y)_{si} xy^2 - (6dk_x k_y)_{si} xy^3 + (3dk_y^2)_{si} x^2 y^2 + (3dk_x^2)_{si} y^4 \right) A_{si} \quad (3.63)$$

$$(EI_y)_b = \sum_{i=1}^m \left( (b + 2c\varepsilon_0 + 3d\varepsilon_0^2)_{si} x^2 + (2ck_x + 6d\varepsilon_0 k_x)_{si} x^2 y - (2ck_y + 6d\varepsilon_0 k_y)_{si} x^3 - (6dk_x k_y)_{si} x^3 y + (3dk_y^2)_{si} x^4 + (3dk_x^2)_{si} x^2 y^2 \right) A_{si} \quad (3.64)$$

$$(ES_{xy})_b = \sum_{i=1}^m \left( (b + 2c\varepsilon_0 + 3d\varepsilon_0^2)_{si} xy + (2ck_x + 6d\varepsilon_0 k_x)_{si} xy^2 - (2ck_y + 6d\varepsilon_0 k_y)_{si} x^2 y - (6dk_x k_y)_{si} x^2 y^2 + (3dk_y^2)_{si} x^3 y + (3dk_x^2)_{si} xy^3 \right) A_{si} \quad (3.65)$$

### 3.4.6 – COMENTÁRIOS FINAIS

Com as expressões encontradas neste capítulo e dados os valores de deformação  $\varepsilon_0$ ,  $k_x$  e  $k_y$ , calculam-se os esforços resistentes e rigidezes generalizadas da seção transversal mista.

É importante ressaltar que a análise de pilares mistos esbeltos (Capítulos 4 e 5), utilizando a análise de seção descrita neste capítulo, é de três a quatro vezes mais rápida do que a análise realizada pelos procedimentos propostos por Caldas (2004).



# Análise Numérica de Pilares Mistos

---

## CAPÍTULO 4

### 4.1 – INTRODUÇÃO

Para uma correta análise de pilares mistos deve-se considerar, além da análise da seção transversal e dos efeitos da não linearidade física, descritos nos capítulos anteriores, os efeitos da não linearidade geométrica e a influência das imperfeições e excentricidades iniciais.

As normas, geralmente, consideram estes efeitos de forma simplificada, nem sempre levando a uma análise precisa e a um dimensionamento econômico. Uma forma de se ter uma análise mais apurada, considerando estes efeitos, é através de métodos numéricos sofisticados.

As equações diferenciais que regem os problemas físicos analisados (mecânica do contínuo), só podem ser resolvidas de forma analítica para estruturas simples com condições de contorno e de carregamentos particulares. Nos métodos numéricos como, por exemplo, o Método dos Elementos de Contorno (Banerjee, 1994, Beer e Watson, 1992, Brebbia et al., 1984) e o Método dos Elementos Finitos (Cook et al., 1989, Bathe, 1996, Zienkiewicz, 1977), a estrutura é discretizada no seu contorno e no seu domínio, respectivamente, aproximando o comportamento real da estrutura e resultando em sistemas de equações facilmente resolvidos por programas de computador.

Diferentes modelos de análise numérica de pilares mistos podem ser encontrados na literatura. De Nardin (1999), em seu trabalho de dissertação, modelou pilares mistos preenchidos, utilizando elementos finitos sólidos, através do programa computacional ANSYS.

Já em sua tese de doutorado, De Nardin (2003) utilizou o programa computacional CFT, desenvolvido em linguagem FORTRAN, para análise de pilares mistos preenchidos submetidos a flexo-compressão. Mirza et al. (1996) analisaram colunas revestidas, submetidas a carregamentos axiais e transversais, utilizando elementos finitos de barra. Johansson e Gylltoft (2002) estudaram o comportamento de pilares mistos preenchidos circulares submetidos à compressão simples através de elementos sólidos e de contato, variando a forma de aplicação do carregamento. Já Hu et al. (2005) avaliaram o efeito do confinamento em colunas preenchidas com seções circulares e quadradas submetidas a flexo-compressão utilizando o programa ABAQUS.

Neste trabalho, utiliza-se o Método dos Elementos Finitos, dando prosseguimento ao trabalho iniciado por Caldas (2004), onde os pilares mistos foram analisados utilizando-se elementos de barra com rotações moderadas, tendo sua formulação baseada em deslocamentos, derivadas a partir do princípio dos trabalhos virtuais. A não linearidade física é considerada ao nível seccional através das relações tensão deformação de cada material e a não-linearidade geométrica é considerada através de medidas adequadas de deformação. A formulação através de elementos finitos de barra tem a vantagem de ser computacionalmente mais barata, podendo obter-se respostas com um nível de precisão suficiente, em relação à análise por elementos sólidos. Para as formulações adotadas, não se considera a flambagem global por torção, o que é justificável para os tipos de seções e de pilares mistos usuais.

A implementação adota a filosofia da programação orientada a objetos, através da linguagem computacional C++, onde o impacto no código existente é mínimo na inclusão de novos elementos, ver Martha e Parente Jr. (2002). Como base para a implementação, utilizou-se o programa FEMOOP, **Finite Element Method Object Oriented Program** ([www.lmc.ep.usp.br/people/tbitten/femoop/home.htm](http://www.lmc.ep.usp.br/people/tbitten/femoop/home.htm)). O FEMOOP tem sua origem em trabalhos desenvolvidos na PUC-Rio desde 1990 (Guimarães, 1992) e vem sendo utilizado por diversos pesquisadores como Caldas (2004), Parente Jr. (2000) e Sousa Jr. (2000). As rotinas de montagem e resolução dos sistemas de equações não lineares já estavam prontas, bastando apenas implementar as rotinas de montagem e avaliação da matriz de rigidez tangente e do vetor de forças internas dos novos elementos.

Neste capítulo são deduzidas as expressões da matriz de rigidez tangente e do vetor de forças internas de três novos elementos finitos de barra implementados, sendo necessária à utilização das expressões de cálculo dos esforços resistentes e das rigidezes generalizadas da seção transversal, deduzidas no capítulo anterior.

## 4.2 – MÉTODO DE SOLUÇÃO NUMÉRICA

Em problemas que envolvem não linearidades, como a física, a geométrica ou a de contato, a resposta da estrutura não pode ser obtida de forma direta já que a rigidez da estrutura não é constante ao longo do histórico de carregamento. Métodos de solução incremental-iterativos podem ser utilizados para determinar a resposta do sistema e traçar a trajetória de equilíbrio da estrutura (Path Following Methods). Desta forma, os carregamentos, deslocamentos prescritos e outras ações que geram tensões e deformações devem ser aplicadas em passos incrementais e a resposta da estrutura deve ser calculada, para cada passo, baseada nas equações de equilíbrio de forma que o vetor de forças desequilibradas seja minimizado através de um processo iterativo (Figura 4.1). Neste trabalho, o método de Newton-Raphson é usado para resolver o sistema de equações não lineares.

Os incrementos dos passos podem ser baseados em técnicas como a do controle de carga, do controle de deslocamento e do comprimento de arco (Figura 4.2). Utilizando-se controle de carga, o sistema é resolvido para incrementos sucessivos de cargas externas. Já no controle de deslocamento, os incrementos são dados em função de deslocamentos prescritos de um determinado nó da estrutura, gerando como um dos resultados a carga externa da estrutura. No método do comprimento de arco, utiliza-se tanto a carga quanto o deslocamento na determinação do passo de carga  $\Delta l$  usado para encontrar o próximo ponto da curva carga deslocamento.

O controle de carga só pode ser utilizado até o primeiro ponto limite de carga. Isto ocorre porque neste método o carregamento é incrementado de forma positiva e assim, naturalmente, a solução não converge para um carregamento superior à capacidade da estrutura (Figura 4.2.a). Caso seja necessária a avaliação do comportamento pós-pico da estrutura, pode-se utilizar o controle de deslocamento, limitando-se até o primeiro ponto limite de deslocamento (snap-back), ver Figura 4.2.b.

Já quando se utiliza o método do comprimento de arco, é possível obter toda a curva carga-deslocamento, independente de pontos limites de carga e de deslocamento (Figura 4.2.c).

Neste trabalho adotaram-se as técnicas de controle de carga e de deslocamento, as quais mostraram-se suficientes e adequadas para a análise de pilares mistos através de elementos de barra. Mais detalhes sobre métodos de solução numérica podem ser encontrados em Crisfield (1991) e Zienkiewicz (1977).

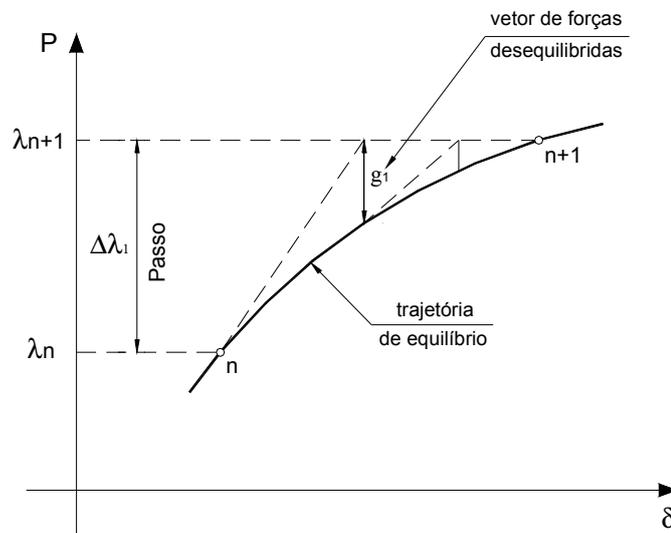


Figura 4.1 – Método de Newton Raphson – Representação gráfica.

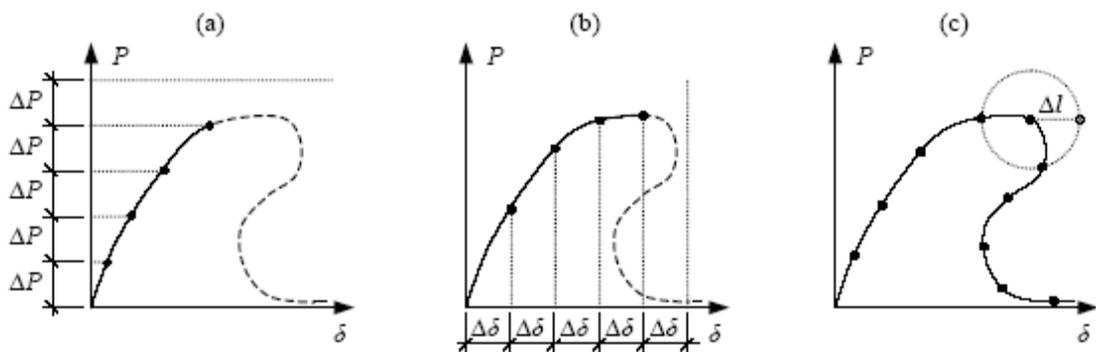


Figura 4.2 – Curva Carga x Deslocamento. - Técnicas de incremento de passos.  
 (a) Controle de carga. (b) Controle de deslocamento. (c) Comprimento de arco.

## 4.3 – ELEMENTOS FINITOS

### 4.3.1 – ELEMENTO COM IMPERFEIÇÕES INICIAIS

O primeiro elemento finito implementado é baseado no elemento utilizado por Caldas (2004), acrescentando-se a consideração de imperfeições iniciais de maneira simples, porém eficiente. Este elemento adota a teoria de Kirchhoff, considerando elementos de barra com rotações moderadas e formulação baseada em deslocamentos. Para os deslocamentos axiais adota-se interpolação quadrática e para os deslocamentos transversais interpolação cúbica. As equações de equilíbrio são derivadas a partir do princípio dos trabalhos virtuais com uma formulação Lagrangeana Total.

A figura 4.3 mostra o sistema de coordenadas globais e os graus de liberdade locais do elemento implementado por Caldas (2004) e a figura 4.4 mostra seu sistema de coordenadas seccional.

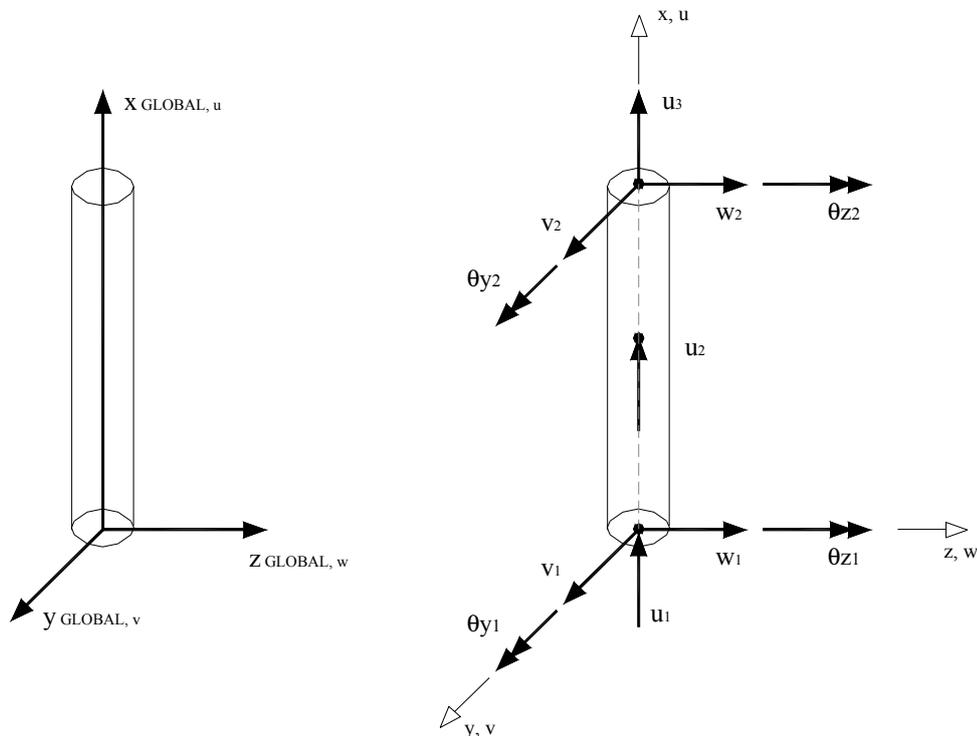


Figura 4.3 – Elemento implementado por Caldas (2004).  
(a) Coordenadas globais. (b) Graus de liberdades locais.

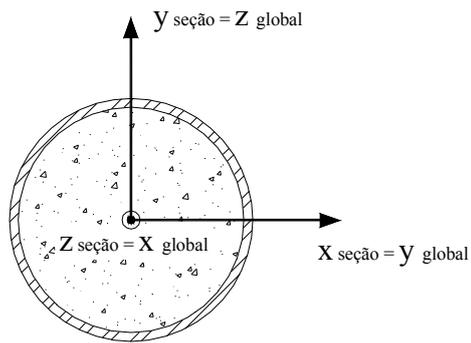


Figura 4.4 – Elemento implementado por Caldas (2004) - Sistema de coordenadas seccional.

No novo elemento implementado, admite-se uma curvatura inicial ao longo de seu comprimento nas duas direções (Figura 4.5), mantendo-se os mesmos sistemas de coordenadas e graus de liberdades locais do elemento descrito por Caldas (2004).

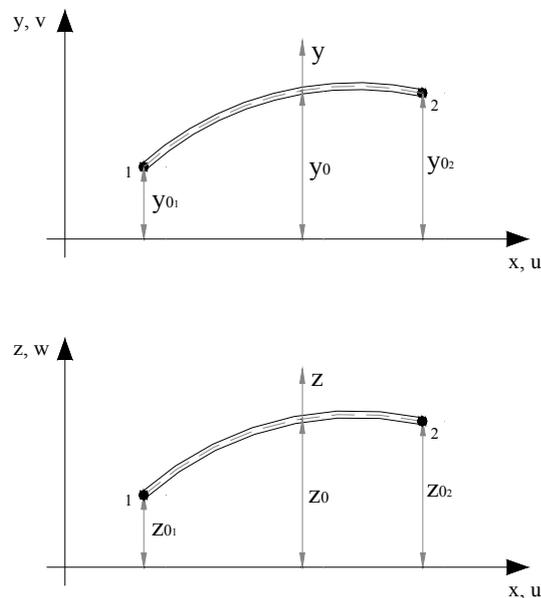


Figura 4.5 – Elemento com curvatura inicial.

### 4.3.1.1 – Relação Deformação-Deslocamento

Sendo  $u$ ,  $v$  e  $w$  os deslocamentos nas direções globais  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente, tem-se, para o elemento inicialmente reto, a componente de deformação axial (Tensor Green-Lagrange) dada por:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (4.1)$$

onde  $\bar{u}$  é o deslocamento axial e  $\bar{v}$  e  $\bar{w}$  os deslocamentos transversais de um ponto  $P$  qualquer da seção. Com a hipótese da manutenção das seções planas e rotações moderadas (Figura 4.6), tem-se que:

$$\bar{u} = u - y \frac{\partial v}{\partial x} - z \frac{\partial w}{\partial x} \quad (4.2a)$$

$$\bar{v} = v \quad (4.2b)$$

$$\bar{w} = w \quad (4.2c)$$

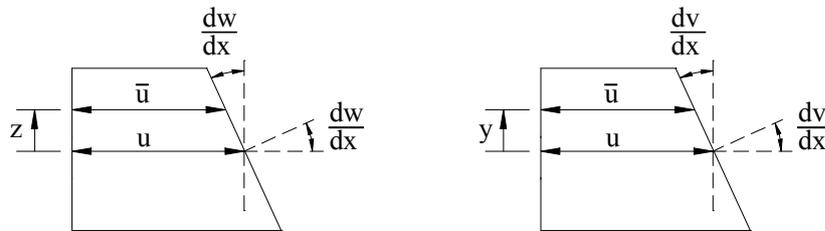


Figura 4.6 – Deformação da seção transversal.

(a) Plano xz. (b) Plano xy.

Substituindo (4.2) em (4.1) tem-se:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (4.3)$$

Para a consideração do efeito da imperfeição inicial, a equação (4.3) deve ser modificada para (Crisfield, 1991)

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial(y_0 + v)}{\partial x} \right)^2 - \left( \frac{\partial y_0}{\partial x} \right)^2 \right] + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial(z_0 + w)}{\partial x} \right)^2 - \left( \frac{\partial z_0}{\partial x} \right)^2 \right] - y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (4.4)$$

Adotando-se as seguintes notações:  $(\ )' = \partial(\ ) / \partial x$ ,  $v^* = (y_0 + v)$  e  $w^* = (z_0 + w)$ , reescreve-se a equação (4.4):

$$\varepsilon_x = u' + \frac{1}{2} [(v^*)'^2 - (y_0')^2] + \frac{1}{2} [(w^*)'^2 - (z_0')^2] - yv'' - zw'' \quad (4.5a)$$

ou ainda,

$$\varepsilon_x = \varepsilon_o - yk_z + zk_y \quad (4.5b)$$

em que,

$$\varepsilon_o = u' + \frac{1}{2} [(v^*)'^2 - (y_0')^2] + \frac{1}{2} [(w^*)'^2 - (z_0')^2] \quad (4.6)$$

$$k_y = -w'' \quad (4.7)$$

$$k_z = v'' \quad (4.8)$$

são, respectivamente, a deformação axial e as curvaturas em torno dos eixos y e z.

#### 4.3.1.2 – Vetor de Forças Internas e Matriz de Rigidez Tangente

O Princípio dos Trabalhos Virtuais estabelece que o trabalho das forças internas é igual ao trabalho das forças externas para um campo de deslocamentos virtuais arbitrário e compatível. Assim:

$$\delta W_{\text{int}} - \delta W_{\text{ext}} = 0 \quad (4.9)$$

sendo

$$\delta W_{\text{int}} = \iiint_V \sigma_x \delta \varepsilon_x dV \quad (4.10)$$

$$\delta W_{\text{ext}} = \delta \mathbf{q}^T \mathbf{f}_e \quad (4.11)$$

em que  $\delta \varepsilon_x$  é a variação na deformação axial produzida pela variação nos deslocamentos virtuais (equação 4.12),  $\mathbf{q}^T$  é o vetor de deslocamento nodais generalizados do elemento (equação 4.13) e  $\mathbf{f}_e$  é o vetor de carregamento externo.

$$\delta \varepsilon_x = \delta u' + v *' \delta v' + w *' \delta w' - y \delta v'' - z \delta w'' \quad (4.12)$$

$$\mathbf{q}^T = [u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad v_1 \quad \theta_{z1} \quad v_2 \quad \theta_{z2} \quad w_1 \quad \theta_{y1} \quad w_2 \quad \theta_{y2}] \quad (4.13)$$

A hipótese de rotações moderadas leva a  $\theta_z \cong v'$  e  $\theta_y \cong -w'$ .

As variações nas derivadas dos deslocamentos, presentes em (4.12), são dadas por:

$$\begin{aligned} \delta u' &= \left( \frac{\partial u'}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \delta \mathbf{q} = \delta \mathbf{q}^T \frac{\partial u'}{\partial \mathbf{q}} \\ \delta v' &= \delta \mathbf{q}^T \frac{\partial v'}{\partial \mathbf{q}} \\ \delta w' &= \delta \mathbf{q}^T \frac{\partial w'}{\partial \mathbf{q}} \\ \delta v'' &= \delta \mathbf{q}^T \frac{\partial v''}{\partial \mathbf{q}} \\ \delta w'' &= \delta \mathbf{q}^T \frac{\partial w''}{\partial \mathbf{q}} \end{aligned} \quad (4.14)$$

Substituindo (4.12) em (4.10) chega-se a:

$$\delta W_{\text{int}} = \iiint_V \sigma_x \delta \varepsilon_x dV = \iiint_V \sigma_x (\delta u' + v^* \delta v' + w^* \delta w' - y \delta v'' - z \delta w'') dA dx \quad (4.15a)$$

$$\delta W_{\text{int}} = \iiint_V \sigma_x (\delta u' + v^* \delta v' + w^* \delta w') dA dx - \iint_V \sigma_x y \delta v'' dA dx - \iint_V \sigma_x z \delta w'' dA dx \quad (4.15b)$$

A partir das expressões (3.3) e adotando-se o sistema de coordenadas indicado na figura 4.3 tem-se:

$$N_x = \iint_{A_m} \sigma_x dA \quad (4.16a)$$

$$M_y = \iint_{A_m} \sigma_x z dA \quad (4.16b)$$

$$M_z = -\iint_{A_m} \sigma_x y dA \quad (4.16c)$$

em que  $N_x$  é a força normal interna na direção  $x$ ,  $M_y$  e  $M_z$  são os momentos fletores internos em torno dos eixos  $y$  e  $z$ , respectivamente.

Substituindo (4.16) em (4.15b) e reorganizando os termos, chega-se a:

$$\delta W_{\text{int}} = \int_0^l \left[ N_x (\delta u' + v^* \delta v' + w^* \delta w') - M_y \delta w'' + M_z \delta v'' \right] dx \quad (4.17)$$

Substituindo (4.14) em (4.17):

$$\delta W_{\text{int}} = \delta \mathbf{q}^T \int_0^l \left[ N_x \left( \frac{\partial u'}{\partial \mathbf{q}} + v^* \frac{\partial v'}{\partial \mathbf{q}} + w^* \frac{\partial w'}{\partial \mathbf{q}} \right) - M_y \frac{\partial w''}{\partial \mathbf{q}} + M_z \frac{\partial v''}{\partial \mathbf{q}} \right] dx \quad (4.18)$$

Levando (4.18) e (4.11) a (4.9) tem-se:

$$\delta W_{\text{int}} - \delta W_{\text{ext}} = \delta \mathbf{q}^T \left\{ \int_0^l \left[ N_x \left( \frac{\partial u'}{\partial \mathbf{q}} + v^{*'} \frac{\partial v'}{\partial \mathbf{q}} + w^{*'} \frac{\partial w'}{\partial \mathbf{q}} \right) - M_y \frac{\partial w''}{\partial \mathbf{q}} + M_z \frac{\partial v''}{\partial \mathbf{q}} \right] dx - \mathbf{f}_e \right\} = 0 \quad (4.19)$$

Como  $\delta \mathbf{q}^T$  pode assumir qualquer valor arbitrário, o termo entre chaves deve ser nulo para que seja garantida a condição de equilíbrio (forças internas iguais as forças externas). Assim:

$$\mathbf{f}_i - \mathbf{f}_e = 0 \quad (4.20)$$

em que  $\mathbf{f}_i$  é o vetor de forças internas do elemento, dado por:

$$\mathbf{f}_i = \int_0^l \left[ N_x \left( \frac{\partial u'}{\partial \mathbf{q}} + v^{*'} \frac{\partial v'}{\partial \mathbf{q}} + w^{*'} \frac{\partial w'}{\partial \mathbf{q}} \right) - M_y \frac{\partial w''}{\partial \mathbf{q}} + M_z \frac{\partial v''}{\partial \mathbf{q}} \right] dx \quad (4.21)$$

A matriz de rigidez tangente do elemento é obtida derivando-se o vetor de forças internas  $\mathbf{f}_i$  em relação aos deslocamentos nodais  $\mathbf{q}$ . Assim:

$$\mathbf{k}_T = \left[ \frac{\partial \mathbf{f}_i}{\partial \mathbf{q}} \right] = \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left( \int_0^l \left[ N_x \left( \frac{\partial u'}{\partial \mathbf{q}} + v^{*'} \frac{\partial v'}{\partial \mathbf{q}} + w^{*'} \frac{\partial w'}{\partial \mathbf{q}} \right) - M_y \frac{\partial w''}{\partial \mathbf{q}} + M_z \frac{\partial v''}{\partial \mathbf{q}} \right] dx \right) \quad (4.22a)$$

$$\mathbf{k}_T = \int_0^l \left[ \begin{array}{c} \left( \frac{\partial u'}{\partial \mathbf{q}} + v^{*'} \frac{\partial v'}{\partial \mathbf{q}} + w^{*'} \frac{\partial w'}{\partial \mathbf{q}} \right) \left\{ \frac{\partial N_x}{\partial \mathbf{q}} \right\}^T + N_x \frac{\partial v^{*'}}{\partial \mathbf{q}} \left( \frac{\partial v'}{\partial \mathbf{q}} \right)^T + N_x \frac{\partial w^{*'}}{\partial \mathbf{q}} \left( \frac{\partial w'}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \\ - \frac{\partial w''}{\partial \mathbf{q}} \left\{ \frac{\partial M_y}{\partial \mathbf{q}} \right\}^T + \frac{\partial v''}{\partial \mathbf{q}} \left\{ \frac{\partial M_z}{\partial \mathbf{q}} \right\}^T \end{array} \right] dx \quad (4.22b)$$

### 4.3.1.3 – Funções de Interpolação

Para que as expressões da matriz de rigidez e do vetor de forças internas, (4.21) e (4.22b), possam ser utilizadas em um modelo de elementos finitos, funções de interpolação devem ser definidas. No elemento implementado faz-se interpolação quadrática para os deslocamentos axiais e interpolação cúbica para deslocamentos transversais. Uma discussão sobre a ordem de interpolação pode ser encontrada em Crisfield (1991) e Reddy (2004).

Reescrevendo o vetor de deslocamentos nodais (4.13), tem-se:

$$\mathbf{q}^T = [\mathbf{q}_u^T \quad \mathbf{q}_v^T \quad \mathbf{q}_w^T] \quad (4.23)$$

$$\mathbf{q}_u^T = [u_1 \quad u_2 \quad u_3]$$

$$\mathbf{q}_v^T = [v_1 \quad \theta_{z1} \quad v_2 \quad \theta_{z2}] \quad (4.24)$$

$$\mathbf{q}_w^T = [w_1 \quad \theta_{y1} \quad w_2 \quad \theta_{y2}]$$

Neste ponto, define-se os vetores  $\mathbf{q}_{v0}$  e  $\mathbf{q}_{w0}$  que representam as imperfeições iniciais nodais do elemento (Figura 4.5):

$$\mathbf{q}_{v0}^T = [y_{01} \quad \theta_{z01} \quad y_{02} \quad \theta_{z02}] \quad (4.25)$$

$$\mathbf{q}_{w0}^T = [z_{01} \quad \theta_{y01} \quad z_{02} \quad \theta_{y02}]$$

Tendo  $\xi = \frac{2}{\ell}x - 1$  como coordenada generalizada (Figura 4.7), adotam-se as seguintes funções de interpolação:

$$\phi_u = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\xi(\xi-1) \\ 1-\xi^2 \\ \frac{1}{2}\xi(\xi+1) \end{bmatrix} \quad \phi_v = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - \frac{3}{4}\xi + \frac{1}{4}\xi^3 \\ \frac{\ell}{2} \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\xi - \frac{1}{4}\xi^2 + \frac{1}{4}\xi^3 \right) \\ \frac{1}{2} + \frac{3}{4}\xi - \frac{1}{4}\xi^3 \\ \frac{\ell}{2} \left( -\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\xi + \frac{1}{4}\xi^2 + \frac{1}{4}\xi^3 \right) \end{bmatrix} \quad \phi_w = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - \frac{3}{4}\xi + \frac{1}{4}\xi^3 \\ -\frac{\ell}{2} \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\xi - \frac{1}{4}\xi^2 + \frac{1}{4}\xi^3 \right) \\ \frac{1}{2} + \frac{3}{4}\xi - \frac{1}{4}\xi^3 \\ -\frac{\ell}{2} \left( -\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\xi + \frac{1}{4}\xi^2 + \frac{1}{4}\xi^3 \right) \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

$$\phi'_u = \begin{bmatrix} \frac{2}{\ell} \left( \xi - \frac{1}{2} \right) \\ \frac{2}{\ell} (-2\xi) \\ \frac{2}{\ell} \left( \xi + \frac{1}{2} \right) \end{bmatrix} \quad \phi'_v = \begin{bmatrix} \frac{2}{\ell} \left( -\frac{3}{4} + \frac{3}{4} \xi^2 \right) \\ -\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \xi + \frac{3}{4} \xi^2 \\ \frac{2}{\ell} \left( \frac{3}{4} - \frac{3}{4} \xi^2 \right) \\ -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \xi + \frac{3}{4} \xi^2 \end{bmatrix} \quad \phi'_w = \begin{bmatrix} \frac{2}{\ell} \left( -\frac{3}{4} + \frac{3}{4} \xi^2 \right) \\ +\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \xi - \frac{3}{4} \xi^2 \\ \frac{2}{\ell} \left( \frac{3}{4} - \frac{3}{4} \xi^2 \right) \\ +\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \xi - \frac{3}{4} \xi^2 \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

$$\phi''_v = \begin{bmatrix} \frac{4}{\ell^2} \left( \frac{3}{2} \xi \right) \\ \frac{2}{\ell} \left( -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \xi \right) \\ \frac{4}{\ell^2} \left( -\frac{3}{2} \xi \right) \\ \frac{2}{\ell} \left( \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \xi \right) \end{bmatrix} \quad \phi''_w = \begin{bmatrix} \frac{4}{\ell^2} \left( \frac{3}{2} \xi \right) \\ -\frac{2}{\ell} \left( -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \xi \right) \\ \frac{4}{\ell^2} \left( -\frac{3}{2} \xi \right) \\ -\frac{2}{\ell} \left( \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \xi \right) \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

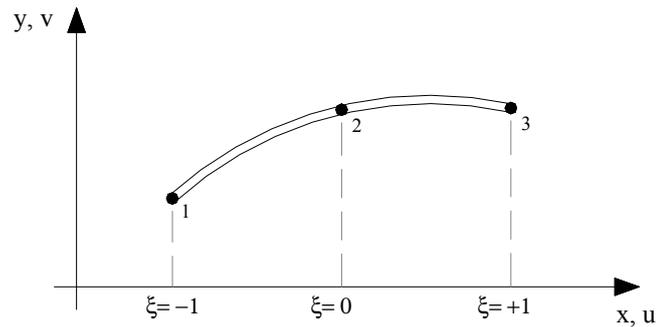


Figura 4.7 – Coordenada generalizada do elemento.

Desta forma, os deslocamentos ao longo do comprimento do elemento são descritos por:

$$u = \phi_u^T \mathbf{q}_u \quad v = \phi_v^T \mathbf{q}_v \quad w = \phi_w^T \mathbf{q}_w \quad (4.29)$$

e as imperfeições iniciais são descritas por:

$$y_0 = \phi_v^T \mathbf{q}_{v0} \quad z_0 = \phi_w^T \mathbf{q}_{w0} \quad (4.29)$$

As derivadas dos deslocamentos em relação a  $x$  são dadas por:

$$u' = \phi'_u{}^T \mathbf{q}_u \quad v' = \phi'_v{}^T \mathbf{q}_v \quad w' = \phi'_w{}^T \mathbf{q}_w \quad (4.30)$$

e suas respectivas derivadas em relação a  $\mathbf{q}$  são dadas por:

$$\frac{\partial u'}{\partial \mathbf{q}} = \begin{Bmatrix} \phi'_u \\ 0_v \\ 0_w \end{Bmatrix} \quad \frac{\partial v'}{\partial \mathbf{q}} = \begin{Bmatrix} 0_u \\ \phi'_v \\ 0_w \end{Bmatrix} \quad \frac{\partial w'}{\partial \mathbf{q}} = \begin{Bmatrix} 0_u \\ 0_v \\ \phi'_w \end{Bmatrix} \quad \frac{\partial v''}{\partial \mathbf{q}} = \begin{Bmatrix} 0_u \\ \phi''_v \\ 0_w \end{Bmatrix} \quad \frac{\partial w''}{\partial \mathbf{q}} = \begin{Bmatrix} 0_u \\ 0_v \\ \phi''_w \end{Bmatrix} \quad (4.31)$$

A consideração das imperfeições iniciais leva a:

$$v^* = (v + y_0) = \phi_v{}^T [\mathbf{q}_v + \mathbf{q}_{v0}] \quad w^* = (w + z_0) = \phi_w{}^T [\mathbf{q}_w + \mathbf{q}_{w0}] \quad (4.32a)$$

$$v^{*'} = (v + y_0)' = \phi'_v{}^T [\mathbf{q}_v + \mathbf{q}_{v0}] \quad w^{*'} = (w + z_0)' = \phi'_w{}^T [\mathbf{q}_w + \mathbf{q}_{w0}] \quad (4.32b)$$

e

$$\frac{\partial v^{*'}}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial v'}{\partial \mathbf{q}} = \begin{Bmatrix} 0_u \\ \phi'_v \\ 0_w \end{Bmatrix} \quad \frac{\partial w^{*'}}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial w'}{\partial \mathbf{q}} = \begin{Bmatrix} 0_u \\ 0_v \\ \phi'_w \end{Bmatrix} \quad (4.33)$$

Substituindo as expressões (4.31) e (4.33) nas expressões (4.21) e (4.22) tem-se:

$$\mathbf{f}_i = \int_0^l \begin{bmatrix} N_x \phi'_u \\ N_x v^{*'} \phi'_v + M_z \phi''_v \\ N_x w^{*'} \phi'_w - M_y \phi''_w \end{bmatrix} d\mathbf{x} \quad (4.34)$$

$$\mathbf{k}_T = \int_0^l \begin{bmatrix} \phi'_u \left\{ \frac{\partial N_x}{\partial \mathbf{q}} \right\}^T \\ \phi'_v \left( v^{*'} \left\{ \frac{\partial N_x}{\partial \mathbf{q}} \right\}^T + N_x \begin{bmatrix} \mathbf{0}_u & \phi'_v & \mathbf{0}_w \end{bmatrix} \right) + \phi''_v \left\{ \frac{\partial M_z}{\partial \mathbf{q}} \right\}^T \\ \phi'_w \left( w^{*'} \left\{ \frac{\partial N_x}{\partial \mathbf{q}} \right\}^T + N_x \begin{bmatrix} \mathbf{0}_u & \mathbf{0}_v & \phi'_w \end{bmatrix} \right) - \phi''_w \left\{ \frac{\partial M_y}{\partial \mathbf{q}} \right\}^T \end{bmatrix} d\mathbf{x} \quad (4.35)$$

Os esforços resistentes  $N_x$ ,  $M_y$  e  $M_z$  são calculados de acordo com os procedimentos descritos no capítulo anterior e as expressões para cálculo das derivadas destes esforços em relação aos deslocamentos nodais  $\mathbf{q}$  são mostradas no próximo item.

#### 4.3.1.4 – Derivadas dos Esforços Externos

Partindo de (4.16) e (4.5) tem-se:

$$\frac{\partial N_x}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \iint_A \sigma_x dA = \iint_A \frac{\partial \sigma_x}{\partial \mathbf{q}} dA = \iint_A \frac{\partial \sigma_x}{\partial \varepsilon_x} \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial \mathbf{q}} dA = \iint_A E_T \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial \mathbf{q}} dA \quad (4.36a)$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \iint_A \sigma_x z dA = \iint_A \frac{\partial \sigma_x}{\partial \mathbf{q}} z dA = \iint_A E_T \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial \mathbf{q}} z dA \quad (4.36b)$$

$$\frac{\partial M_z}{\partial \mathbf{q}} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \iint_A \sigma_x y dA = -\iint_A \frac{\partial \sigma_x}{\partial \mathbf{q}} y dA = -\iint_A E_T \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial \mathbf{q}} y dA \quad (4.36c)$$

$$\frac{\partial \varepsilon_x}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial u'}{\partial \mathbf{q}} + v^* \frac{\partial v'}{\partial \mathbf{q}} + w^* \frac{\partial w'}{\partial \mathbf{q}} - y \frac{\partial v'}{\partial \mathbf{q}} - z \frac{\partial w'}{\partial \mathbf{q}}. \quad (4.37)$$

sendo  $E_T$  o módulo de elasticidade tangente do material. Substituindo (4.37) em (4.36) chega-se a:

$$\frac{\partial N_x}{\partial \mathbf{q}} = \left\{ \begin{array}{l} \phi'_u \iint_A E_T dA \\ v^* \phi'_v \iint_A E_T dA - \phi'_v \iint_A E_T y dA \\ w^* \phi'_w \iint_A E_T dA - \phi'_w \iint_A E_T z dA \end{array} \right\} \quad (4.38a)$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial \mathbf{q}} = \left\{ \begin{array}{l} \phi'_u \iint_A E_T z dA \\ v^* \phi'_v \iint_A E_T z dA - \phi'_v \iint_A E_T z y dA \\ w^* \phi'_w \iint_A E_T z dA - \phi'_w \iint_A E_T z^2 dA \end{array} \right\} \quad (4.38b)$$

$$\frac{\partial M_z}{\partial \mathbf{q}} = \left\{ \begin{array}{c} -\phi'_u \iint_A E_T y dA \\ -v^* \phi'_v \iint_A E_T y dA + \phi'_v \iint_A E_T y^2 dA \\ -w^* \phi'_w \iint_A E_T y dA + \phi'_w \iint_A E_T y z dA \end{array} \right\} \quad (4.38c)$$

As expressões  $\iint_A E_T dA$ ,  $\iint_A E_T y dA$ ,  $\iint_A E_T z dA$ ,  $\iint_A E_T y^2 dA$ ,  $\iint_A E_T z^2 dA$  e  $\iint_A E_T y z dA$

representam as rigidezes generalizadas da seção transversal do elemento e são calculadas pelas técnicas apresentadas no capítulo anterior.

Com as expressões deduzidas até este ponto, definindo-se a seção transversal do elemento e conhecendo-se os valores das variáveis de deformação  $\epsilon_0$ ,  $k_x$  e  $k_y$ , que são funções dos deslocamentos nodais, pode-se, então, avaliar numericamente a matriz de rigidez tangente (4.35) e o vetor de forças internas (4.34) através de métodos de integração numérica, como, por exemplo, a Quadratura de Gauss. Estas expressões são uma generalização das expressões encontradas por Caldas (2004), adicionando-se os efeitos das imperfeições iniciais ao longo do comprimento do elemento.

#### 4.3.2 – ELEMENTOS CO-ROTACIONAIS

Para um tratamento mais preciso das rotações dos nós dos elementos, dois elementos de pórtico plano foram implementados baseados na formulação co-rotacional descrita por Crisfield (1991), adaptada, neste trabalho, para a consideração da não linearidade física. Este tipo de formulação permite que se faça uma análise não linear geométrica considerando grandes deslocamentos, grandes rotações e pequenas deformações. A não linearidade física é incluída pelos procedimentos de análise da seção transversal descritos no capítulo anterior.

As técnicas co-rotacionais foram inicialmente introduzidas por Wempner (1969) e foram utilizadas por diversos pesquisadores como Da Silva (1996), Pacoste e Eriksson (1997), Rodrigues (2000), Teixeira e De Souza (2003) e Felippa e Haugen (2005).

Na formulação co-rotacional implementada, adotam-se dois sistemas de eixos coordenados ortogonais: um global (fixo) e outro local (móvel) que gira simultaneamente com a deformada do elemento (Figura 4.8). O sistema fixo identifica a configuração inicial (indeformada) do elemento e o sistema móvel é ligado a um corpo rígido imaginário que se desloca e gira juntamente com os nós. Assim, a configuração co-rotacional é obtida através de um movimento de corpo rígido a partir da configuração inicial do elemento. As deformações são medidas, então, a partir da configuração co-rotacional (sistema local móvel) e a não linearidade geométrica, induzida pelo movimento de corpo rígido, é incorporada pelas matrizes de transformação geométrica que relacionam os sistemas local e global. Desta forma, considerando a ortogonalidade dos sistemas, obtém-se a separação dos movimentos de corpo rígido e dos movimentos que realmente causam deformações no elemento (“deformações puras”), caracterizando o desacoplamento da não linearidade física e da não linearidade geométrica.

As rotações são calculadas, de forma aproximada, a partir das translações relativas entre os nós, e como as rotações finais totais são calculadas através de transformações de rotações, e não por um processo de soma, esta teoria também pode ser aplicada no campo das grandes rotações.

Como se assume pequenas deformações, teorias “lineares” podem ser adotadas dentro do sistema local e ao longo do comprimento do elemento.

A partir deste ponto, o subscrito  $l$  será usado em referência ao sistema local e na ausência do subscrito, refere-se ao sistema global.

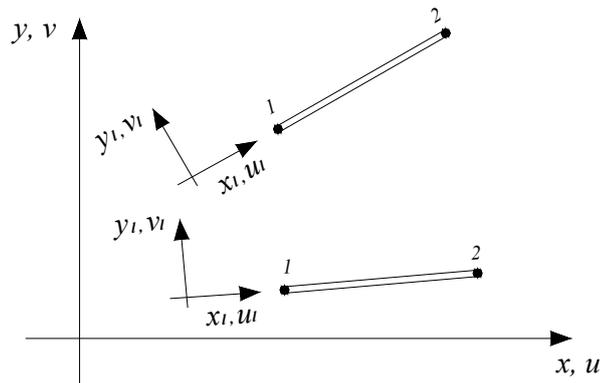
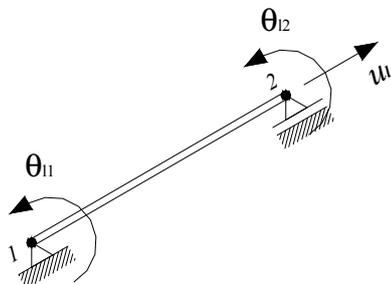


Figura 4.8 – Elemento co-rotacional - Sistemas de eixos locais (móveis).

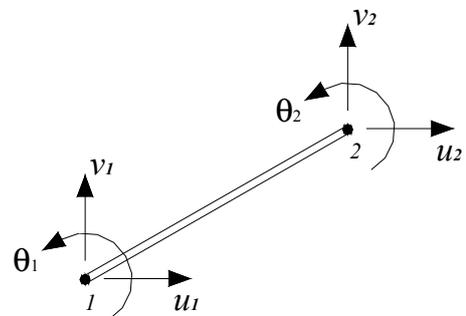
Os graus de liberdade locais e globais, representados pelos vetores  $\mathbf{q}_l$  e  $\mathbf{q}$ , respectivamente, são mostrados na figura 4.9.

$$\mathbf{q}_l^T = [u_l \quad \theta_{l1} \quad \theta_{l2}] \quad (4.39)$$

$$\mathbf{q}^T = [u_1 \quad v_1 \quad \theta_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad \theta_2] \quad (4.40)$$



(a) Graus de liberdades locais.



(b) Graus de liberdades globais.

Figura 4.9 – Graus de liberdade – Elemento plano co-rotacional.

### 4.3.2.1 – Relação Entre os Sistemas Global e Local

O graus de liberdades locais estão relacionados com os graus de liberdade globais através da matriz de transformação  $\mathbf{T}$ , de forma que:

$$\delta \mathbf{q}_l = \mathbf{T} \delta \mathbf{q} \quad (4.41)$$

sendo:

$$\delta \mathbf{q}_l^T = [\delta u_l \quad \delta \theta_{l1} \quad \delta \theta_{l2}] \quad \text{e} \quad \delta \mathbf{q}^T = [\delta u_1 \quad \delta v_1 \quad \delta \theta_1 \quad \delta u_2 \quad \delta v_2 \quad \delta \theta_2]$$

A determinação da relação expressa em (4.41) e da matriz  $\mathbf{T}$  pode ser feita com o auxílio das figuras 4.10 e 4.11. A figura 4.10 mostra uma variação dos deslocamentos nodais do elemento, a partir de uma configuração de equilíbrio. A linha  $cd$ , paralela a linha  $ab$ , e o ângulo  $\delta\alpha$  representam, respectivamente, a translação e a rotação de corpo rígido sofridos pelo elemento e as grandezas  $\delta u_1, \delta v_1$  e  $\delta u_2, \delta v_2$  representam as variações dos deslocamentos nos nós do elemento.

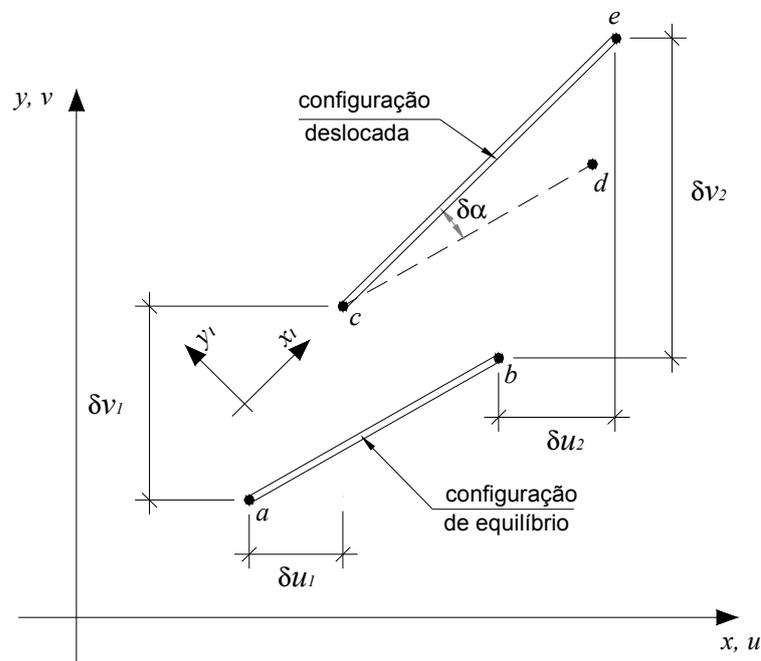


Figura 4.10 – Elemento co-rotacional.

Varição nos deslocamentos a partir da posição de equilíbrio.

Para o cálculo do alongamento co-rotacional  $\delta u_l$  e da rotação de corpo rígido  $\delta\alpha$ , adota-se uma abordagem puramente geométrica do problema na qual as configurações do elemento, nas posições de equilíbrio e deslocada, são unidas através de um processo de translação, ver figura 4.11. Assim:

$$\delta u_l = \overline{ae} - \overline{ab} \cong \overline{bf} = \overline{bi} + \overline{if} \quad (4.42)$$

$$\tan \delta\alpha \cong \delta\alpha = \frac{\overline{ef}}{\overline{af}} = \frac{\overline{eg} - \overline{ih}}{\overline{af}} \cong \frac{\overline{eg} - \overline{ih}}{\overline{ab}} = \frac{\overline{eg} - \overline{ih}}{l_n} \quad (4.43)$$

em que,

$$\begin{aligned} \overline{bi} &= (\delta u_2 - \delta u_1) \cos \beta \\ \overline{if} &= (\delta v_2 - \delta v_1) \sen \beta \\ \overline{eg} &= (\delta v_2 - \delta v_1) \cos \beta \\ \overline{ih} &= (\delta u_2 - \delta u_1) \sen \beta \end{aligned} \quad (4.44)$$

Substituindo (4.44) em (4.42) e (4.43) chega-se a:

$$\delta u_l = (\delta u_2 - \delta u_1) \cos \beta + (\delta v_2 - \delta v_1) \sen \beta \quad (4.45)$$

$$\delta\alpha = \frac{1}{l_n} [(\delta v_2 - \delta v_1) \cos \beta - (\delta u_2 - \delta u_1) \sen \beta] \quad (4.46)$$

que podem ser reescritas na seguinte forma matricial:

$$\delta u_l = [-c \quad -s \quad 0 \quad c \quad s \quad 0] \begin{bmatrix} \delta u_1 \\ \delta v_1 \\ \delta\theta_1 \\ \delta u_2 \\ \delta v_2 \\ \delta\theta_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \delta u_l = \mathbf{r}^T \delta \mathbf{q} \quad (4.47)$$

$$\delta\alpha = \frac{1}{l_n} [s \quad -c \quad 0 \quad -s \quad c \quad 0] \begin{bmatrix} \delta u_1 \\ \delta v_1 \\ \delta\theta_1 \\ \delta u_2 \\ \delta v_2 \\ \delta\theta_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \delta\alpha = \frac{1}{l_n} \mathbf{z}^T \delta \mathbf{q} \quad (4.48)$$

sendo  $\mathbf{q}$  dado por (4.40) e

$$c = \cos \beta$$

$$s = \sin \beta$$

$$\mathbf{r}^T = [-c \quad -s \quad 0 \quad c \quad s \quad 0]$$

$$\mathbf{z}^T = [s \quad -c \quad 0 \quad -s \quad c \quad 0]$$

(4.49)

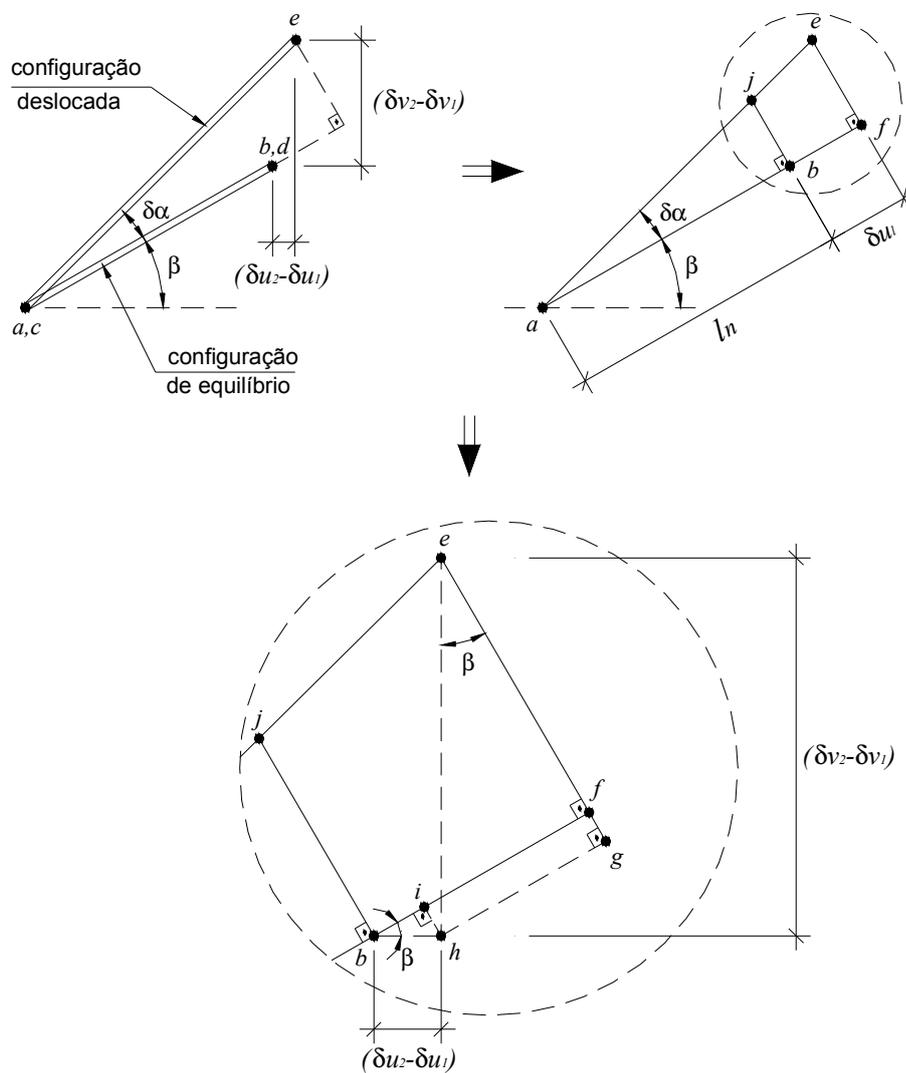


Figura 4.11 – Elemento co-rotacional.

Abordagem geométrica da variação dos deslocamentos.

Sendo  $\theta_1 = [0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0] \mathbf{q} = \mathbf{A}_1^T \mathbf{q}$  e  $\theta_2 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1] \mathbf{q} = \mathbf{A}_2^T \mathbf{q}$  as rotações no sistema global, pode-se calcular as rotações locais,  $\theta_{11}$  e  $\theta_{12}$ , através das expressões (4.50), ver figura 4.12.

$$\begin{aligned} \delta\theta_{11} &= \delta\theta_1 - \delta\alpha \\ \delta\theta_{12} &= \delta\theta_2 - \delta\alpha \end{aligned} \quad (4.50)$$

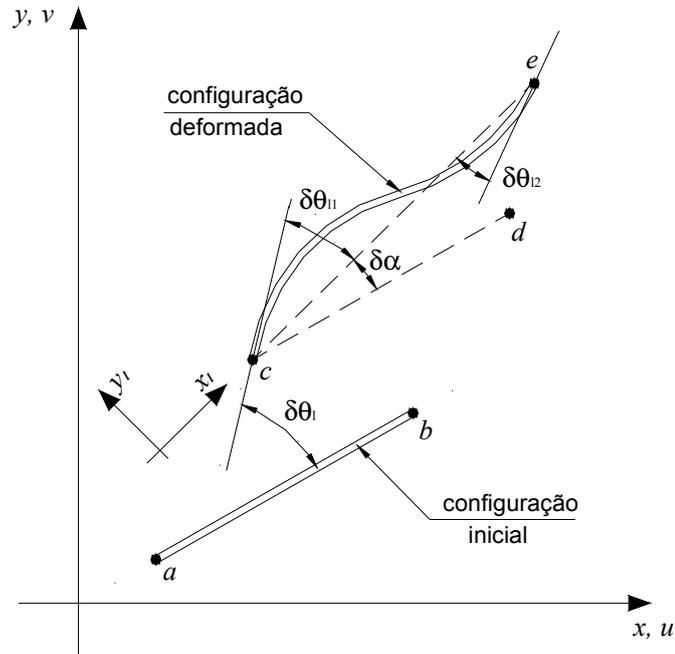


Figura 4.12 – Elemento co-rotacional.  
Relação entre as rotações no sistema global e local.

Substituindo (4.48) em (4.50) e colocando na forma matricial tem-se:

$$\delta\theta_{11} = \left[ \mathbf{A}_1^T - \frac{1}{l_n} \mathbf{z}^T \right] \delta\mathbf{q} \quad \text{e} \quad \delta\theta_{12} = \left[ \mathbf{A}_2^T - \frac{1}{l_n} \mathbf{z}^T \right] \delta\mathbf{q} \quad (4.51)$$

ou,

$$\begin{aligned} \delta\theta_{11} &= \begin{bmatrix} -\frac{s}{l} & \frac{c}{l} & 1 & \frac{s}{l} & -\frac{c}{l} & 0 \end{bmatrix} \delta\mathbf{q} \\ \delta\theta_{12} &= \begin{bmatrix} -\frac{s}{l} & \frac{c}{l} & 0 & \frac{s}{l} & -\frac{c}{l} & 1 \end{bmatrix} \delta\mathbf{q} \end{aligned} \quad (4.52)$$

Agrupando-se (4.47) e (4.52) obtém-se a relação entre os deslocamentos locais e globais, através da expressão completa da matriz de transformação  $\mathbf{T}$ :

$$\delta \mathbf{q}_l = \begin{bmatrix} \delta u_l \\ \delta \theta_{l1} \\ \delta \theta_{l2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c & -s & 0 & c & s & 0 \\ -\frac{s}{l} & \frac{c}{l} & 1 & \frac{s}{l} & -\frac{c}{l} & 0 \\ -\frac{s}{l} & \frac{c}{l} & 0 & \frac{s}{l} & -\frac{c}{l} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta u_1 \\ \delta v_1 \\ \delta \theta_1 \\ \delta u_2 \\ \delta v_2 \\ \delta \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}^T \\ \mathbf{A}_1^T - \frac{1}{l_n} \mathbf{z}^T \\ \mathbf{A}_2^T - \frac{1}{l_n} \mathbf{z}^T \end{bmatrix} \delta \mathbf{q} = \mathbf{T} \delta \mathbf{q} \quad (4.53)$$

Para a determinação da relação entre os vetores de forças nos sistemas local e global, parte-se do equacionamento do trabalho virtual em ambos os sistemas. Considerando que o trabalho virtual realizado pelas forças e deslocamentos do sistema global é igual ao trabalho virtual realizado pelas forças e deslocamentos do sistema local, tem-se, com o auxílio de (4.53), que:

$$\underbrace{\delta \mathbf{q}^T \mathbf{f}}_{\text{trabalho virtual (sistema global)}} = \underbrace{\delta \mathbf{q}_l^T \mathbf{f}_l}_{\text{trabalho virtual (sistema local)}} = \underbrace{\delta \mathbf{q}_l^T \mathbf{T}^T \mathbf{f}_l}_{\delta \mathbf{q}_l^T} \Rightarrow \delta \mathbf{q}^T \mathbf{f} = \delta \mathbf{q}_l^T \mathbf{T}^T \mathbf{f}_l \Rightarrow \mathbf{f} = \mathbf{T}^T \mathbf{f}_l \quad (4.54)$$

Analisando as expressões (4.53) e (4.54), nota-se que a matriz que relaciona as forças entre os sistemas global e local é igual à transposta da matriz que relaciona os deslocamentos entre os dois sistemas, caracterizando o Princípio da Contragradência.

#### 4.3.2.2 – Funções de Interpolação

Para consideração da não-linearidade física na formulação co-rotacional adotada é necessária a definição de funções de interpolação. Tendo  $\xi = \frac{2}{l_0} x - 1$  como coordenada local generalizada, definem-se as seguintes funções de interpolação:

$$\phi_{ul} = \left[ \frac{1}{2}(\xi+1) \right] \quad \text{e} \quad \phi_{vl} = \begin{bmatrix} \frac{l_0}{2} \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\xi - \frac{1}{4}\xi^2 + \frac{1}{4}\xi^3 \right) \\ \frac{l_0}{2} \left( -\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\xi + \frac{1}{4}\xi^2 + \frac{1}{4}\xi^3 \right) \end{bmatrix} \quad (4.55a)$$

Seguindo a notação  $( )' = \partial( ) / \partial x$ , as derivadas das funções, em relação a  $x$ , são dadas por:

$$\phi'_{ul} = \begin{bmatrix} 1 \\ l_0 \end{bmatrix} \quad \phi'_{vl} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\xi + \frac{3}{4}\xi^2 \\ -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\xi + \frac{3}{4}\xi^2 \end{bmatrix} \quad \phi''_{vl} = \begin{bmatrix} \frac{2}{l_0} \left( -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\xi \right) \\ \frac{2}{l_0} \left( \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\xi \right) \end{bmatrix} \quad (4.55b)$$

Com o vetor de deslocamentos nodais locais ( $\mathbf{q}_l$ ) dado por:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_l^T &= [\mathbf{q}_{ul}^T \quad \mathbf{q}_{vl}^T] \\ \mathbf{q}_{ul}^T &= [u_l] \\ \mathbf{q}_{vl}^T &= [\theta_{l1} \quad \theta_{l2}] \end{aligned} \quad (4.56)$$

tem-se que os deslocamentos e rotações locais, ao longo do elemento, são calculados por:

$$u_l(\xi) = \phi_{ul}^T \mathbf{q}_{ul} \quad , \quad v_l(\xi) = \phi_{vl}^T \mathbf{q}_{vl} \quad , \quad \theta_l(\xi) = v'_l = \phi'_{vl}{}^T \mathbf{q}_{vl} \quad (4.57)$$

A deformação axial ( $\varepsilon_{0l}$ ) e a curvatura ( $k_l$ ) ao longo do eixo da barra são dadas por:

$$\varepsilon_{0l} = \frac{\partial u_l}{\partial x} = u'_l = \phi'_{ul}{}^T \mathbf{q}_{ul} \quad (4.58a)$$

$$k_l = \frac{\partial \theta_l}{\partial x} = v''_l = \phi''_{vl}{}^T \mathbf{q}_{vl} \quad (4.58b)$$

Reescrevendo (4.58) na forma matricial, chega-se a:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{0l} \\ k_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi'_{ul}{}^T & 0 \\ 0 & \phi''_{vl}{}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_{ul} \\ \mathbf{q}_{vl} \end{bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{\varepsilon}_l = \mathbf{B}_l \mathbf{q}_l \quad (4.59a)$$

ou

$$[\varepsilon_{0l} \quad k_l] = [\mathbf{q}_{ul}^T \quad \mathbf{q}_{vl}^T] \begin{bmatrix} \phi'_{ul} & 0 \\ 0 & \phi''_{vl} \end{bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{\varepsilon}_l^T = \mathbf{q}_l^T \mathbf{B}_l^T \quad (4.59b)$$

em que  $\mathbf{B}_l$  é a matriz que relaciona os deslocamentos nodais locais com as deformações locais.

### 4.3.2.3 – Trabalho Virtual Interno

Visando a determinação do vetor de forças internas do elemento, encontra-se a variação do trabalho virtual interno no sistema local, que é dada por:

$$\delta W_{\text{int}_l} = \underbrace{\delta \mathbf{q}_l^T \mathbf{f}_l}_{\text{trabalho interno forças nodais}} = \underbrace{\int_0^l (\delta \varepsilon_{0l} N_x + \delta \kappa_l M_z) dx}_{\text{trabalho interno ao longo do elemento}} = \int_0^l \begin{bmatrix} \delta \varepsilon_{0l} & \delta \kappa_l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_x \\ M_z \end{bmatrix} dx \quad (4.60)$$

na qual  $\mathbf{q}_l$  é definido em (4.56) e  $\mathbf{f}_l$  é o vetor de forças internas nodais locais, dado por:

$$\mathbf{f}_l^T = [N_l \quad M_1 \quad M_2] \quad (4.61)$$

sendo  $N_x$  a força normal interna e  $M_z$  o momento fletor interno ao longo do comprimento do elemento. Levando-se (4.59b) em (4.60) chega-se a:

$$\delta W_{\text{int}_l} = \delta \mathbf{q}_l^T \mathbf{f}_l = \int_0^l \begin{bmatrix} \delta \mathbf{q}_{ul}^T & \delta \mathbf{q}_{vl}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi'_{ul} & 0 \\ 0 & \phi''_{vl} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_x \\ M_z \end{bmatrix} dx = \delta \mathbf{q}_l^T \int_0^l \begin{bmatrix} \phi'_{ul} & 0 \\ 0 & \phi''_{vl} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_x \\ M_z \end{bmatrix} dx \quad (4.62)$$

### 4.3.2.4 – Vetor de Forças Internas e Matriz de Rigidez Tangente

De (4.62) encontra-se o vetor de forças internas nodais do elemento no sistema local:

$$\mathbf{f}_l = \begin{bmatrix} N_l \\ M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} = \int_0^l \begin{bmatrix} \phi'_{ul} & 0 \\ 0 & \phi''_{vl} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_x \\ M_z \end{bmatrix} dx \quad (4.63)$$

O vetor de forças internas no sistema global ( $\mathbf{f}_i$ ) é obtido com o auxílio da matriz de transformação  $\mathbf{T}$ , ver (4.54). Assim:

$$\mathbf{f}_i = \mathbf{T}^T \mathbf{f}_l \quad (4.64)$$

Para obtenção da matriz de rigidez tangente no sistema global, parte-se da variação do vetor de forças internas (4.64):

$$\delta \mathbf{f}_i = \mathbf{T}^T \delta \mathbf{f}_{il} + \delta \mathbf{T}^T \mathbf{f}_{il} \quad (4.65)$$

Como a matriz  $\mathbf{T}$  e o vetor de forças internas  $\mathbf{f}_{il}$  já estão definidos, deve-se, então, determinar a variação do vetor de forças internas locais ( $\delta \mathbf{f}_{il}$ ) e a variação da transposta da matriz de transformação ( $\delta \mathbf{T}^T$ ) para a utilização de (4.65). A variação do vetor de forças internas locais ( $\delta \mathbf{f}_{il}$ ) é determinada a partir de (4.63). Assim:

$$\delta \mathbf{f}_{il} = \int_0^l \begin{bmatrix} \phi'_{ul} & 0 \\ 0 & \phi''_{vl} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta N_x \\ \delta M_z \end{bmatrix} dx \quad (4.66)$$

em que:

$$\delta N_x = \frac{\partial N_x}{\partial \varepsilon_{0l}} \delta \varepsilon_{0l} + \frac{\partial N_x}{\partial k_l} \delta k_l \quad (4.67a)$$

$$\delta M_z = \frac{\partial M_z}{\partial \varepsilon_{0l}} \delta \varepsilon_{0l} + \frac{\partial M_z}{\partial k_l} \delta k_l$$

ou na forma matricial, utilizando (4.59a):

$$\begin{bmatrix} \delta N_x \\ \delta M_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_x}{\partial \varepsilon_{0l}} & \frac{\partial N_x}{\partial k_l} \\ \frac{\partial M_z}{\partial \varepsilon_{0l}} & \frac{\partial M_z}{\partial k_l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \varepsilon_{0l} \\ \delta k_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_x}{\partial \varepsilon_{0l}} & \frac{\partial N_x}{\partial k_l} \\ \frac{\partial M_z}{\partial \varepsilon_{0l}} & \frac{\partial M_z}{\partial k_l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi'_{ul} & 0 \\ 0 & \phi''_{vl} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \mathbf{q}_{ul} \\ \delta \mathbf{q}_{vl} \end{bmatrix} \quad (4.67b)$$

Substituindo (4.67b) em (4.66), chega-se à expressão final da variação do vetor de forças internas no sistema local :

$$\delta \mathbf{f}_{il} = \int_0^l \begin{bmatrix} \phi'_{ul} & 0 \\ 0 & \phi''_{vl} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_x}{\partial \varepsilon_{0l}} & \frac{\partial N_x}{\partial k_l} \\ \frac{\partial M_z}{\partial \varepsilon_{0l}} & \frac{\partial M_z}{\partial k_l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi'_{ul} & 0 \\ 0 & \phi''_{vl} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \mathbf{q}_{ul} \\ \delta \mathbf{q}_{vl} \end{bmatrix} dx = \int_0^l \mathbf{B}_l^T \mathbf{D}_l \mathbf{B}_l \delta \mathbf{q}_l dx \quad (4.68)$$

A matriz  $\mathbf{B}_l$  já foi definida anteriormente e  $\mathbf{D}_l$  é a matriz que relaciona os esforços internos locais com as deformações locais.

Para que  $\delta \mathbf{r}_{il}$  seja expressa em função dos deslocamentos globais, substitui-se (4.41) em (4.68). Assim:

$$\delta \mathbf{r}_{il} = \left( \int_0^l \mathbf{B}_l^T \mathbf{D}_l \mathbf{B}_l dx \right) \delta \mathbf{q}_l = \left( \int_0^l \mathbf{B}_l^T \mathbf{D}_l \mathbf{B}_l dx \right) \mathbf{T} \delta \mathbf{q} \quad (4.69)$$

Para a determinação da matriz  $\mathbf{D}_l$ , deve-se lembrar que:

$$N_x = \iint_A \sigma_x dA \quad \text{e} \quad M_z = - \iint_A \sigma_x y dA, \quad (4.70)$$

Assim, as derivadas dos esforços  $N_x$  e  $M_z$ , em relação às deformações  $\varepsilon_{0l}$  e  $k_l$ , são calculadas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial \varepsilon_{0l}} &= \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{0l}} \iint_A \sigma_x dA = \iint_A \frac{\partial \sigma_x}{\partial \varepsilon_{0l}} dA = \iint_A \frac{\partial \sigma_x}{\partial \varepsilon_x} \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial \varepsilon_{0l}} dA = \iint_A E_T \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial \varepsilon_{0l}} dA \\ \frac{\partial N_x}{\partial k_l} &= \frac{\partial}{\partial k_l} \iint_A \sigma_x dA = \iint_A \frac{\partial \sigma_x}{\partial k_l} dA = \iint_A \frac{\partial \sigma_x}{\partial \varepsilon_x} \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial k_l} dA = \iint_A E_T \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial k_l} dA \\ \frac{\partial M_z}{\partial \varepsilon_{0l}} &= - \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{0l}} \iint_A \sigma_x y dA = - \iint_A \frac{\partial \sigma_x}{\partial \varepsilon_{0l}} y dA = - \iint_A \frac{\partial \sigma_x}{\partial \varepsilon_x} \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial \varepsilon_{0l}} y dA = - \iint_A E_T \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial \varepsilon_{0l}} y dA \\ \frac{\partial M_z}{\partial k_l} &= - \frac{\partial}{\partial k_l} \iint_A \sigma_x y dA = - \iint_A \frac{\partial \sigma_x}{\partial k_l} y dA = - \iint_A \frac{\partial \sigma_x}{\partial \varepsilon_x} \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial k_l} y dA = - \iint_A E_T \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial k_l} y dA \end{aligned} \quad (4.71)$$

sendo  $E_T$  o módulo tangente do material.

Como

$$\varepsilon_x = \varepsilon_{0l} - yk_l \quad (4.72)$$

tem-se:

$$\frac{\partial \varepsilon_x}{\partial \varepsilon_{0l}} = 1 \quad \text{e} \quad \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial k_l} = -y \quad (4.73)$$

Levando (4.73) em (4.71) chega-se às derivadas dos esforços internos em relação às deformações locais:

$$\frac{\partial N_x}{\partial \varepsilon_{0l}} = \iint_A E_T dA$$

$$\frac{\partial N_x}{\partial k_l} = -\iint_A E_T y dA$$

$$\frac{\partial M_z}{\partial \varepsilon_{0l}} = -\iint_A E_T y dA$$

$$\frac{\partial M_z}{\partial k_l} = \iint_A E_T y^2 dA \quad (4.74a)$$

que são as rigidezes generalizadas da seção transversal, calculadas pelas técnicas apresentadas no capítulo anterior. Desta forma, a matriz  $\mathbf{D}_l$  pode ser escrita como:

$$\mathbf{D}_l = \begin{bmatrix} \iint_A E_T dA & -\iint_A E_T y dA \\ -\iint_A E_T y dA & \iint_A E_T y^2 dA \end{bmatrix} \quad (4.74b)$$

O próximo passo para o cálculo da variação do vetor de forças internas, ver (4.65), é o cálculo da variação na transposta da matriz de transformação ( $\delta\mathbf{\Gamma}^T$ ). A partir de (4.53), tem-se:

$$\delta\mathbf{\Gamma}^T = [\delta\mathbf{\Gamma}_1 \quad \delta\mathbf{\Gamma}_2 \quad \delta\mathbf{\Gamma}_3] \quad (4.75)$$

em que,

$$\delta\mathbf{\Gamma}_1 = [\delta\mathbf{r}] \quad , \quad \delta\mathbf{\Gamma}_2 = \left[ \delta\mathbf{A}_1 - \delta\left(\frac{1}{l_n}\mathbf{z}\right) \right] \quad , \quad \delta\mathbf{\Gamma}_3 = \left[ \delta\mathbf{A}_2 - \delta\left(\frac{1}{l_n}\mathbf{z}\right) \right] \quad (4.76)$$

e

$$\delta\mathbf{r} = \mathbf{z}\delta\beta$$

$$\delta\mathbf{A}_1 = \delta\mathbf{A}_2 = 0 \quad (4.77)$$

$$\delta\left(\frac{1}{l_n}\mathbf{z}\right) = \delta\left(\frac{1}{l_n}\right)\mathbf{z} + \delta\mathbf{z}\left(\frac{1}{l_n}\right) = \left(-\frac{1}{l_n^2}\frac{\partial l_n}{\partial u_l}\delta u_l\right)\mathbf{z} + (-\mathbf{r}\delta\beta)\left(\frac{1}{l_n}\right)$$

Sabendo-se que:

$$\delta u_l = \mathbf{r}^T \delta\mathbf{q}$$

$$\delta\beta = \delta\alpha = \frac{1}{l_n}\mathbf{z}^T \delta\mathbf{q} \quad (4.78)$$

$$l_n = l_0 + u_l \Rightarrow \frac{\partial l_n}{\partial u_l} = 1$$

e substituindo-se as expressões (4.78) em (4.77) e o consequente resultado em (4.76), chega-se a:

$$\delta\mathbf{\Gamma}_1 = \left[ \frac{1}{l_n}\mathbf{z}\mathbf{z}^T \right] \delta\mathbf{q} \quad \text{e} \quad \delta\mathbf{\Gamma}_2 = \delta\mathbf{\Gamma}_3 = \left[ \frac{1}{l_n^2}(\mathbf{z}\mathbf{r}^T + \mathbf{r}\mathbf{z}^T) \right] \delta\mathbf{q} \quad (4.79)$$

Por fim, a expressão final da variação do vetor de forças internas globais é obtida substituindo-se as expressões (4.63), (4.69) e (4.75) em (4.65):

$$\delta \mathbf{f}_i = \mathbf{T}^T \left( \int_0^l \mathbf{B}_l^T \mathbf{D}_l \mathbf{B}_l dx \right) \mathbf{T} \delta \mathbf{q} + [\delta \Gamma_1 \quad \delta \Gamma_2 \quad \delta \Gamma_3] \begin{bmatrix} N_l \\ M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} \quad (4.80a)$$

que, com o auxílio das expressões (4.79), chega-se a:

$$\delta \mathbf{f}_i = \mathbf{T}^T \left( \int_0^l \mathbf{B}_l^T \mathbf{D}_l \mathbf{B}_l dx \right) \mathbf{T} \delta \mathbf{q} + \left( \frac{N_l}{l_n} \mathbf{z} \mathbf{z}^T \right) \delta \mathbf{q} + \left( \frac{(M_1 + M_2)}{l_n^2} (\mathbf{z} \mathbf{r}^T + \mathbf{r} \mathbf{z}^T) \right) \delta \mathbf{q} \quad (4.80b)$$

Como  $\mathbf{K}_T = \frac{\delta \mathbf{f}_i}{\delta \mathbf{q}}$ , a partir de (4.80b) determina-se a expressão final para avaliação da matriz rigidez tangente, no sistema global, considerando as não linearidades física e geométrica:

$$\mathbf{K}_T = \mathbf{T}^T \left( \int_0^l \mathbf{B}_l^T \mathbf{D}_l \mathbf{B}_l dx \right) \mathbf{T} + \frac{N_l}{l_n} \mathbf{z} \mathbf{z}^T + \frac{(M_1 + M_2)}{l_n^2} (\mathbf{z} \mathbf{r}^T + \mathbf{r} \mathbf{z}^T) \quad (4.81)$$

A expressão (4.81), desenvolvida e encontrada neste trabalho, é uma generalização da expressão dada por Crisfield (1991), considerando, agora, além dos efeitos da não linearidade geométrica, os efeitos da não linearidade física, que estão presentes no primeiro termo entre parênteses e que deve ser integrado ao longo do comprimento do elemento.

#### 4.3.2.5 – Elemento Co-rotacional 2

Na obtenção das expressões encontradas anteriormente, considerou-se a deformação axial do elemento igual ao deslocamento axial local ( $u_l$ ) dividido pelo comprimento inicial do elemento ( $l_0$ ), ver expressão (4.58a).

Para uma análise mais precisa do estado de deformação ao longo do comprimento do elemento pode-se acrescentar, a partir do Tensor de Green, termos de maior ordem a expressão (4.58a).

Pode-se, por exemplo, adotar a seguinte relação para o cálculo da deformação axial ao longo do eixo do elemento:

$$\varepsilon_{0l} = \frac{\partial u_l}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_l}{\partial x} \right)^2 = u'_l + \frac{1}{2} (v'_l)^2 = \phi'_{ul}{}^T \mathbf{q}_{ul} + \frac{1}{2} (\phi'_{vl}{}^T \mathbf{q}_{vl})^2 = \phi'_{ul}{}^T \mathbf{q}_{ul} + \frac{1}{2} \mathbf{q}_{vl}{}^T \phi'_{vl} \phi'_{vl}{}^T \mathbf{q}_{vl} \quad (4.82a)$$

Como os deslocamentos axiais são interpolados de forma linear e os transversais de forma cúbica, deve-se considerar, de acordo com (4.82a), um estado de deformação axial constante para minimizar os problemas de locking do elemento (Crisfield, 1991 e Reedy, 2004). Para isto, adota-se, para o último termo de (4.82a), relacionado aos deslocamentos transversais, o seu valor médio. Consequentemente escreve-se:

$$\varepsilon_{0l} = \phi'_{ul}{}^T \mathbf{q}_{ul} + \frac{1}{l_0} \int_0^{l_0} \left( \frac{1}{2} \left[ \mathbf{q}_{vl}{}^T \phi'_{vl} \phi'_{vl}{}^T \mathbf{q}_{vl} \right] \right) dx \quad (4.82b)$$

A avaliação da integral apresentada em (4.82b) leva a:

$$\varepsilon_{0l} = \frac{u_l}{l_0} + \frac{1}{60} \mathbf{q}_{vl}{}^T \mathbf{m} \mathbf{q}_{vl}$$

em que: (4.83)

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

Para aplicação do Princípio dos Trabalhos Virtuais e consequente determinação do vetor de forças internas e da matriz de rigidez tangente, determina-se a variação da nova função de deformação axial (4.83) e executa-se um procedimento análogo ao realizado com o elemento co-rotacional anterior. Assim:

$$\delta \varepsilon_{0l} = \frac{\delta u_l}{l_0} + \frac{1}{30} \mathbf{q}_{vl}{}^T \mathbf{m} \delta \mathbf{q}_{vl} \quad (4.84)$$

Escrevendo (4.58b) e (4.84) na forma matricial, tem-se:

$$\begin{bmatrix} \delta \varepsilon_{ol} \\ \delta \kappa_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi'_{ul} & 0 \\ 0 & \phi''_{vl} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \mathbf{q}_{ul} \\ \delta \mathbf{q}_{vl} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{30} \mathbf{q}_{vl}^T \mathbf{m} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \mathbf{q}_{ul} \\ \delta \mathbf{q}_{vl} \end{bmatrix} \Rightarrow \delta \boldsymbol{\varepsilon}_l = [\mathbf{B}_l + \mathbf{B}_{0l}] \delta \mathbf{q}_l \quad (4.85a)$$

ou

$$[\delta \varepsilon_{ol} \quad \delta \kappa_l] = [\delta \mathbf{q}_{ul}^T \quad \delta \mathbf{q}_{vl}^T] \left[ \begin{bmatrix} \phi'_{ul} & 0 \\ 0 & \phi''_{vl} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{30} \mathbf{m}^T \mathbf{q}_{vl} & 0 \end{bmatrix} \right] \Rightarrow \delta \boldsymbol{\varepsilon}_l^T = \delta \mathbf{q}_l^T [\mathbf{B}_l^T + \mathbf{B}_{0l}^T] \quad (4.85b)$$

Comparando-se as expressões (4.85) e (4.59), nota-se o aparecimento da matriz  $\mathbf{B}_{0l}$ , que representa a parcela não linear da função de deformação axial. Substituindo (4.85b) em (4.60) chega-se à expressão do vetor de forças internas no sistema local:

$$\mathbf{f}_i = \begin{bmatrix} N_l \\ M_1 \\ M_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \int_0^l [\mathbf{B}_l^T + \mathbf{B}_{0l}^T] \begin{bmatrix} N_x \\ M_z \end{bmatrix} dx \quad (4.86)$$

O próximo passo é o cálculo da variação do vetor de forças internas ( $\delta \mathbf{f}_i$ ) para substituição na expressão (4.65). Assim:

$$\delta \mathbf{f}_i = \delta \left( \int_0^l [\mathbf{B}_l^T + \mathbf{B}_{0l}^T] \begin{bmatrix} N_x \\ M_z \end{bmatrix} dx \right) = \int_0^l [\mathbf{B}_l^T + \mathbf{B}_{0l}^T] \begin{bmatrix} \delta N_x \\ \delta M_z \end{bmatrix} dx + \int_0^l \delta \mathbf{B}_{0l}^T \begin{bmatrix} N_x \\ M_z \end{bmatrix} dx \quad (4.87)$$

A partir de (4.67b), (4.85a) e (4.53), tem-se:

$$\begin{bmatrix} \delta N_x \\ \delta M_z \end{bmatrix} = \mathbf{D}_l [\mathbf{B}_l + \mathbf{B}_{0l}] \delta \mathbf{q}_l \Rightarrow \begin{bmatrix} \delta N_x \\ \delta M_z \end{bmatrix} = \mathbf{D}_l [\mathbf{B}_l + \mathbf{B}_{0l}] \mathbf{T} \delta \mathbf{q} \quad (4.88)$$

e

$$\delta \mathbf{B}_{0l}^T \begin{bmatrix} N_x \\ M_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{30} \mathbf{m}^T \delta \mathbf{q}_{vl} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_x \\ M_z \end{bmatrix} = N_x \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{30} \mathbf{m}^T \delta \mathbf{q}_{vl} & 0 \end{bmatrix} = N_x \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{30} \mathbf{m}^T \end{bmatrix} \delta \mathbf{q}_l \quad (4.89a)$$

que pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\delta \mathbf{B}_{0l}^T \begin{bmatrix} N_x \\ M_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{N_x}{30} \mathbf{m}^T \end{bmatrix} \mathbf{T} \delta \mathbf{q} = \mathbf{K}_\sigma \mathbf{T} \delta \mathbf{q} \quad (4.89b)$$

Em que  $\mathbf{K}_\sigma$  é a matriz de rigidez geométrica local do elemento.

Para a determinação da forma final da variação do vetor de forças internas locais, leva-se (4.88) e (4.89b) em (4.87). Assim:

$$\delta \mathbf{f}_i = \left[ \int_0^l [\mathbf{B}_l^T + \mathbf{B}_{0l}^T] \mathbf{D}_l [\mathbf{B}_l + \mathbf{B}_{0l}] dx + \int_0^l \mathbf{K}_\sigma dx \right] \mathbf{T} \delta \mathbf{q} \quad (4.90)$$

Por fim, substituindo (4.75), (4.86) e (4.90) em (4.65), encontra-se a variação do vetor de forças internas no sistema global:

$$\delta \mathbf{f}_i = \mathbf{T}^T \left[ \int_0^l [\mathbf{B}_l^T + \mathbf{B}_{0l}^T] \mathbf{D}_l [\mathbf{B}_l + \mathbf{B}_{0l}] dx + \int_0^l \mathbf{K}_\sigma dx \right] \mathbf{T} \delta \mathbf{q} + [\delta \Gamma_1 \quad \delta \Gamma_2 \quad \delta \Gamma_3] \begin{bmatrix} N_l \\ M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} \quad (4.91)$$

Novamente, lembrando que  $\mathbf{K}_T = \frac{\delta \mathbf{f}_i}{\delta \mathbf{q}}$ , chega-se a:

$$\mathbf{K}_T = \mathbf{T}^T \left[ \int_0^l [\mathbf{B}_l^T + \mathbf{B}_{0l}^T] \mathbf{D}_l [\mathbf{B}_l + \mathbf{B}_{0l}] + \mathbf{K}_\sigma \right] dx \mathbf{T} + \frac{N_l}{l_n} \mathbf{z} \mathbf{z}^T + \frac{(M_1 + M_2)}{l_n^2} (\mathbf{z} \mathbf{r}^T + \mathbf{r} \mathbf{z}^T) \quad (4.92)$$

ou

$$\mathbf{K}_T = \mathbf{T}^T \mathbf{K}_l \mathbf{T} + \frac{N_l}{l_n} \mathbf{z} \mathbf{z}^T + \frac{(M_1 + M_2)}{l_n^2} (\mathbf{z} \mathbf{r}^T + \mathbf{r} \mathbf{z}^T) \quad (4.93)$$

na qual  $\mathbf{K}_l$  representa a matriz de rigidez de um elemento no sistema local de coordenadas, incluindo os efeitos da não linearidade física e geométrica locais, sendo a expressão (4.93), deduzida neste trabalho, uma generalização da formulação proposta por Crisfield (1991), acrescentando-se, agora, os efeitos da não linearidade física.



# Aplicações e Análises

---

## CAPÍTULO 5

### 5.1 – INTRODUÇÃO

Neste capítulo são apresentados exemplos para avaliação das formulações implementadas e descritas nos capítulos 3 e 4. Foram analisados pilares com diferentes tipos de seção transversal, condições de carregamento e esbeltez. Para os exemplos, obtidos a partir de resultados experimentais ou de análises de referência (benchmarks), considerou-se, além das seções transversais usuais, seções não usuais como as do tipo double skin (tubo dentro de tubo). Por fim, para comprovar o caráter genérico da formulação foram analisados um pilar de concreto armado, um pórtico puramente metálico e outro em concreto armado.

Para os materiais foram consideradas as relações constitutivas indicadas nas figuras 5.1 e 5.2. Nas seções tubulares preenchidas liberou-se a deformação última do concreto ( $\epsilon_{cu}$ ) devido ao efeito do confinamento do concreto que gera um aumento da ductilidade do pilar e permite deformações últimas maiores que  $-0.0035$ , Han (2004).

Para todas as análises foram utilizados quatro elementos finitos por barra e dois pontos de integração por elemento. Nos exemplos de pilares utilizou-se o elemento finito de barra (espacial), descrito na seção 4.3.1 e doravante chamado de elemento 1, e para os exemplos de pórtico utilizou-se o elemento finito corotacional 2 (plano), descrito na seção 4.3.2.5 e doravante chamado de elemento 2. Como demonstrado no primeiro exemplo, as análises, considerando ambos os elementos, de pilares mistos, submetidos à compressão simples ou à flexão composta reta, forneceram resultados bastante próximos.

Para os pilares submetidos à compressão simples e analisados com o elemento 1 foi considerada uma imperfeição geométrica inicial, na forma de uma senóide, com um valor máximo de  $L / 1000$  no meio do pilar, sendo  $L$  o comprimento do pilar.

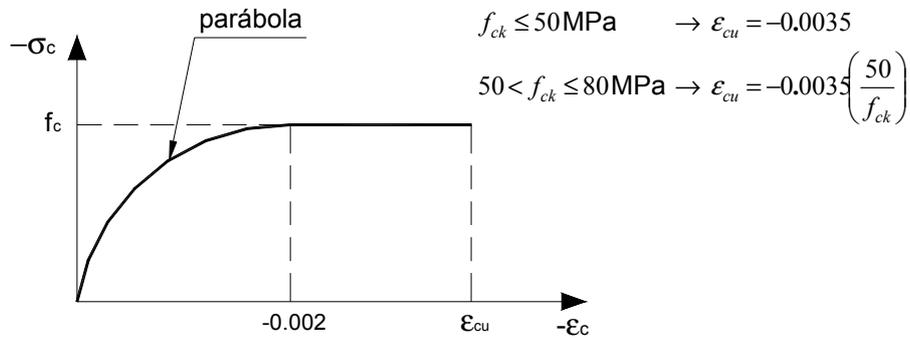


Figura 5.1 – Relação tensão-deformação para o concreto.

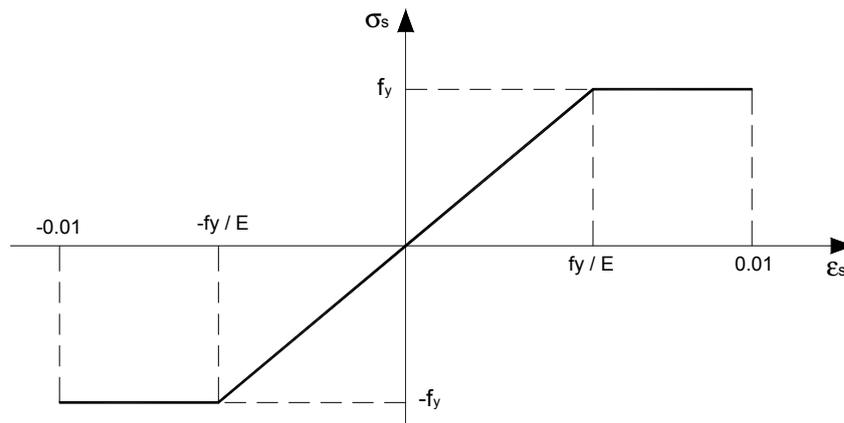


Figura 5.2 – Relação tensão-deformação para o aço.

## 5.2 – EXEMPLOS

### 5.2.1 – Pilar Misto Tubular Circular

Zeghiche e Chaoui (2005) ensaiaram 27 pilares tubulares circulares preenchidos (Figura 5.3) submetidos à compressão simples e a flexão composta reta, com curvatura simples e curvatura dupla, e compararam os resultados com as formulações

do Eurocode 4 (1994). Nos ensaios foram variados os seguintes parâmetros: excentricidade do carregamento (0 a 32 mm), comprimento do pilar (2.0 a 4.0 m) e resistência à compressão do concreto (40, 70 e 100 MPa). Os resultados e parâmetros das análises encontram-se listados na tabela 5.1. A figura 5.4 mostra as curvas carga-deslocamento disponibilizadas por Zeghiche e Chaoui (2005) e as curvas obtidas a partir da análise numérica.

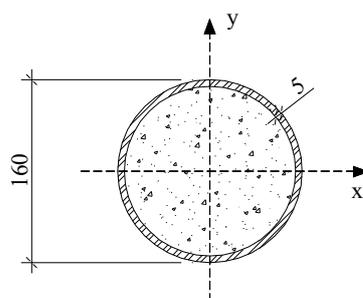


Figura 5.3 – Seção transversal dos pilares ensaiados por Zeghiche e Chaoui (2005).

Tabela 5.1 – Resultados das análises e ensaios - Zeghiche e Chaoui (2005).

Pilar	L (mm)	$f_y$ (MPa)	$f_c$ (MPa)	$e_b, e_t$ (mm)	$N_{cr}$		$N_{cr}$		$N_{cr}$		
					ENSAIO (kN)	ELEM.1 (kN)	ELEM.2 (kN)	EC4 (kN)	ELEM.1 ENSAIO	ELEM.2 ENSAIO	EC4 ENSAIO
1	2000	280	40	-	1261	1258	1256	1271	1,00	1,00	1,01
2	2500	281	41	-	1244	1219	1216	1216	0,98	0,98	0,98
3	3000	270	43	-	1236	1143	1140	1133	0,92	0,92	0,92
4	3500	273	41	-	1193	1034	1031	998	0,87	0,86	0,84
5	4000	281	45	-	1091	972	969	886	0,89	0,89	0,81
6	2000	283	70	-	1650	1722	1721	1711	1,04	1,04	1,04
7	2500	281	71	-	1562	1634	1630	1608	1,05	1,04	1,03
8	3000	276	73	-	1468	1521	1517	1436	1,04	1,03	0,98
9	3500	276	74	-	1326	1381	1377	1229	1,04	1,04	0,93
10	4000	281	71	-	1231	1199	1195	1029	0,97	0,97	0,84
11	2000	281	99	-	2000	2137	2135	2110	1,07	1,07	1,06
12	2500	275	100	-	1818	2012	2008	1885	1,11	1,10	1,04
13	3000	275	101	-	1636	1851	1847	1613	1,13	1,13	0,99
14	3500	270	106	-	1454	1695	1690	1343	1,17	1,16	0,92
15	4000	270	102	-	1333	1454	1450	1093	1,09	1,09	0,82
16	2000	271	101	+8, +8	1697	1840	1846	1706	1,08	1,09	1,01
17	2000	281	102	+16, +16	1394	1567	1572	1369	1,12	1,13	0,98
18	2000	280	101	+24, +24	1212	1330	1334	1147	1,10	1,10	0,95
19	2000	276	100	+32, +32	1091	1139	1142	986	1,04	1,05	0,90
20	4000	275	101	+8, +8	963	1255	1256	780	1,30	1,30	0,81
21	4000	275	100	+16, +16	848	1017	1017	628	1,20	1,20	0,74
22	4000	281	102	+24, +24	727	872	872	547	1,20	1,20	0,75
23	4000	280	101	+32, +32	666	756	756	483	1,14	1,14	0,73
24	2000	276	100	+8, -8	1950	2072	2097	1898	1,06	1,08	0,97
25	2000	270	102	+16, -16	1730	1808	1847	1690	1,05	1,07	0,98
26	2000	269	102	+24, -24	1480	1584	1628	1471	1,07	1,10	0,99
27	2000	268	100	+32, -32	1280	1377	1415	1290	1,08	1,11	1,01
$e_b$ (excentricidade do carregamento na base pilar)							Média:		1,07	1,07	0,93
$e_t$ (excentricidade do carregamento no topo pilar)							Desv.Padrão:		0,09	0,10	0,10

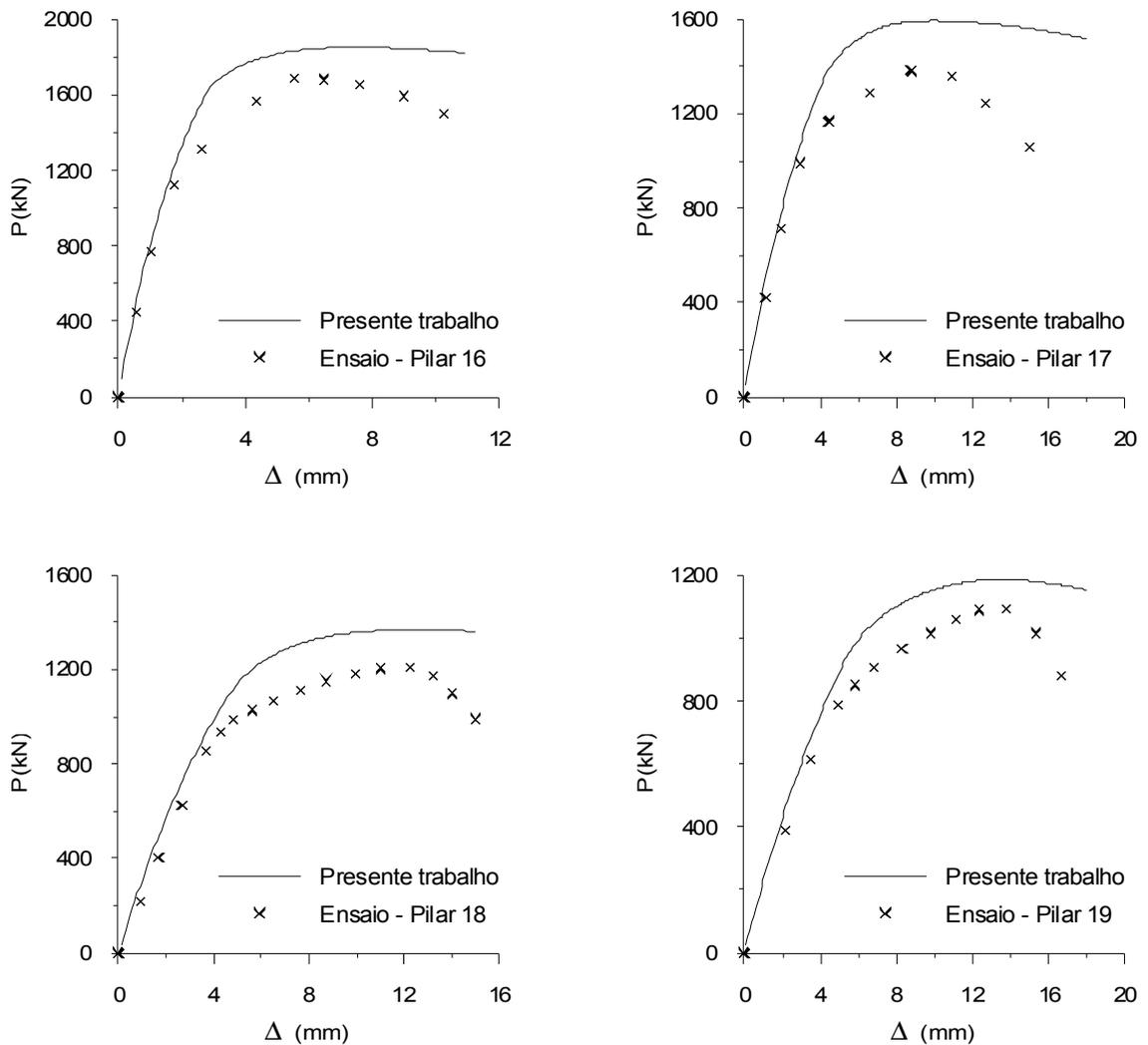


Figura 5.4 – Deslocamento lateral no meio do pilar – Zeguiche e Chaoui (2005).

Não ocorreu flambagem local em nenhum dos casos e para as colunas axialmente comprimidas foi observado o escoamento do tubo metálico e para as colunas submetidas a flexo-compressão foram observados o escoamento do tubo e a fissuração e esmagamento do concreto. Observa-se que, de uma forma geral, o programa apresentou uma boa resposta em relação aos resultados experimentais. A maior discrepância de resultados foi encontrada para os pilares 20 a 23 e pode estar associada à influência das imperfeições iniciais, acentuada pela esbelteza dos pilares. As respostas obtidas utilizando-se os elementos 1 (espacial) e 2 (co-rotacional plano) estão bastante próximas sendo que o elemento 1 teve uma menor dispersão de dados. Com relação às curvas carga-deslocamento, apenas as curvas dos pilares 16 a 19 foram disponibilizadas no trabalho de Zeghiche e Chaoui (2005) e nota-se que a

curva numérica apresenta trecho descendente mais suave do que a curva experimental. Isto é explicado pela relação constitutiva adotada para o concreto em que se assume um trecho final linear constante e com inclinação nula mas, que tem pouca influência na determinação da carga crítica das colunas.

### 5.2.2 – Pilar Misto Tubular Duplo – Tubo Quadrado com Tubo Circular

Han et al. (2004) ensaiaram pilares formados por dois perfis tubulares (quadrado e circular) preenchidos com concreto (Figura 5.5) e submetidos à compressão simples e à flexão composta reta com curvatura simples. Os ensaios tinham o objetivo de determinação da carga crítica do pilar, bem como a investigação dos modos de falha e do comportamento pós-crítico da estrutura. A figura 5.6 mostra uma vista geral do ensaio. Ao final do trabalho, os autores comparam os resultados experimentais com uma formulação analítica simplificada para avaliação da resistência do pilar. O modo típico de falha foi a flambagem global e não foi observada a flambagem local.

Os perfis tubulares foram fabricados a partir de chapas planas com o módulo de elasticidade do aço aproximadamente igual a 200000 MPa. A resistência média à compressão do concreto, medida a partir de corpos de prova cúbicos, foi de 46.8 MPa. A conversão da resistência cúbica para cilíndrica foi feita de acordo com as prescrições do Eurocode 2 (2003), indicadas na tabela 5.2.

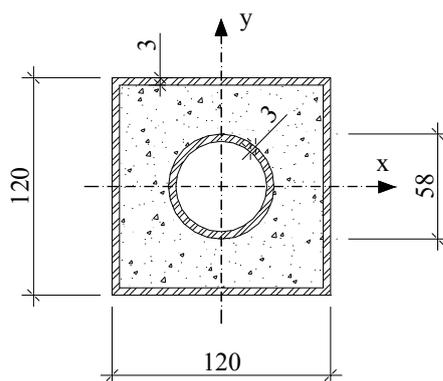


Figura 5.5 – Seção transversal dos pilares ensaiados por Han et al. (2004).

Tabela 5.2 – Relações entre  $f_{ck,cilindrico}$  e  $f_{ck,cúbico}$  – Eurocode 2 (2003).

$f_{ck,cilindrico}$ (MPa)	12	16	20	25	30	35	40	45	50	55	60	70	80	90
$f_{ck,cúbico}$ (MPa)	15	20	25	30	37	45	50	55	60	67	75	85	95	105



Figura 5.6 – Vista geral do ensaio. (Han et al., 2004).

Foram definidos seis diferentes tipos de pilares com duas análises por pilar resultando em 12 ensaios. As resistências ao escoamento dos perfis, os comprimentos dos pilares, as excentricidades de carregamento e os resultados das análises encontram-se listados na tabela 5.3. A figura 5.7 mostra a comparação das curvas carga-deslocamento obtidas nos ensaios com as curvas obtidas nas análises numéricas.

Tabela 5.3 – Resultados das análises e ensaios - Han et al. (2004).

Pilar	L (mm)	$f_y$ (tubo ext.) (MPa)	$f_y$ (tubo int.) (MPa)	e (mm)	ENSAIO (kN)	PROGRAMA (kN)	<u>PROGRAMA</u> <u>ENSAIO</u>
1a	1070	275,9	374,5	4	856	847	0,99
1b	1070	275,9	374,5	4	872	847	0,97
2a	1070	275,9	374,5	14	667	692	1,04
2b	1070	275,9	374,5	14	750	692	0,92
3a	1070	275,9	374,5	45	480	432	0,90
3b	1070	275,9	374,5	45	486	432	0,89
4a	2136	275,9	374,5	0	920	805	0,88
4b	2136	275,9	374,5	0	868	805	0,93
5a	2136	275,9	374,5	15,5	596	564	0,95
5b	2136	275,9	374,5	15,5	570	564	0,99
6a	2136	275,9	374,5	45	380	359	0,94
6b	2136	275,9	374,5	45	379	359	0,95
Média:							0,95
Desv.Padrão:							0,05

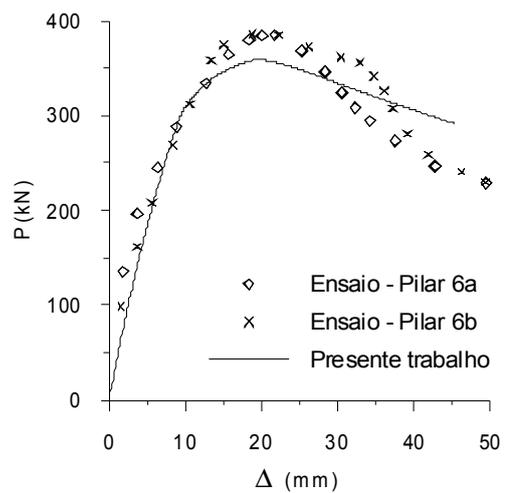
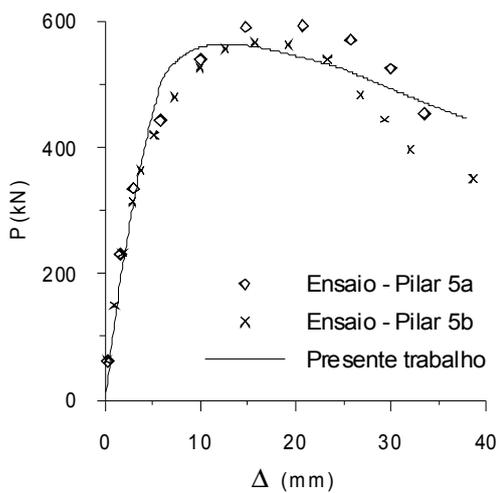
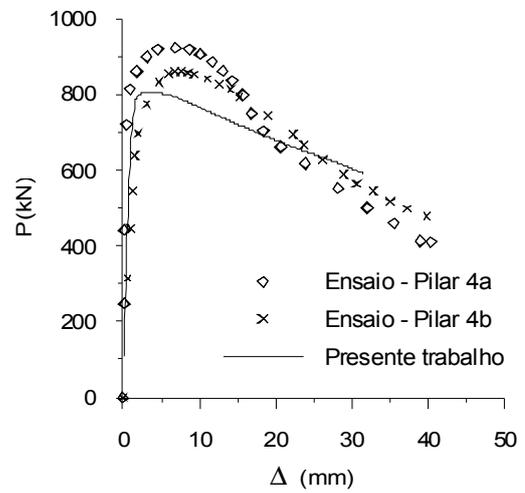
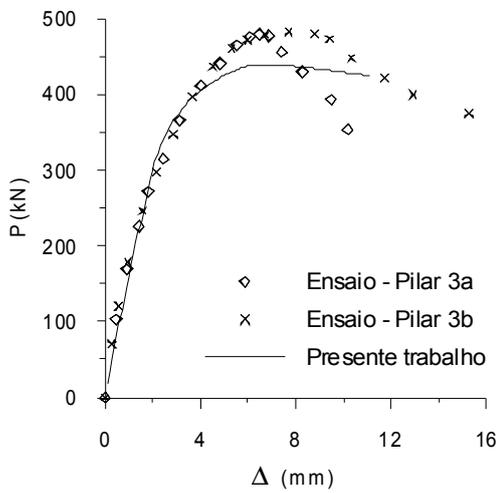
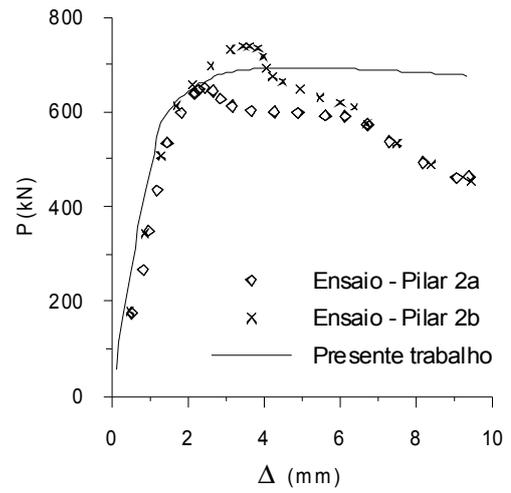
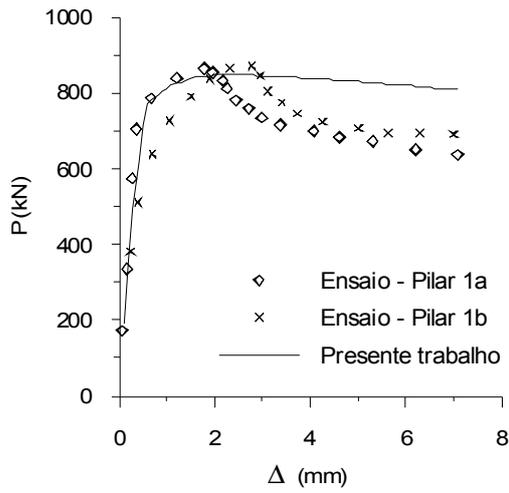


Figura 5.7 – Deslocamento lateral no meio do pilar – Han et al (2004).

### 5.2.3– Pilar Misto Tubular Duplo – Tubo Circular com Tubo Circular

Tao et al. (2004) ensaiaram outro tipo de pilar misto tubular duplo com seção formada por dois perfis tubulares circulares preenchidos com concreto (Figura 5.8) e submetidos à compressão simples e a flexão composta reta com curvatura simples. Os procedimentos de ensaio foram similares aos utilizados por Han et al. (Seção 5.2.2) tendo como principais parâmetros de ensaio a esbeltez do pilar e a excentricidade do carregamento. Ao final do trabalho também é proposta uma formulação analítica simplificada para avaliação da carga última da estrutura.

Não foi observado nenhum tipo de flambagem local nos tubos metálicos após os ensaios e o modo típico de falha foi a flambagem global da peça. Todos os pilares apresentaram comportamento dúctil em função do confinamento do concreto pelos tubos circulares. Os perfis tubulares foram conformados a frio e foram tomadas medidas adequadas para garantir a transmissão simultânea de esforços para o aço e o concreto.

O módulo de elasticidade do aço e a resistência cúbica à compressão do concreto obtidos foram, respectivamente, iguais a 200000 e 47.4 MPa. Como no exemplo anterior, a conversão da resistência cúbica para cilíndrica foi feita de acordo com as prescrições do Eurocode 2 (2003). Foram ensaiados doze pilares divididos em seis grupos de dois. Os resultados das análises e ensaios encontram-se na tabela 5.4 e a figura 5.9 mostra a comparação das curvas carga-deslocamento obtidas nos ensaios com as curvas obtidas nas análises numéricas.

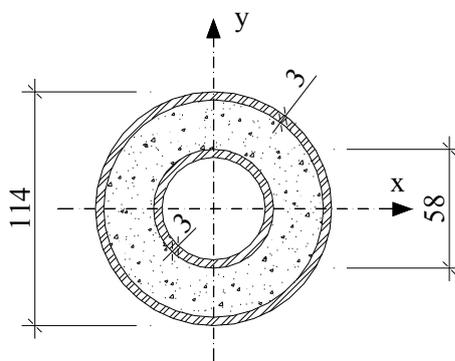


Figura 5.8 – Seção transversal dos pilares ensaiados por Tao et al. (2004).

Tabela 5.4 – Resultados das análises e ensaios – Tao et al. (2004).

Pilar	L (mm)	$f_y$ (tubo ext.) (MPa)	$f_y$ (tubo int.) (MPa)	e (mm)	ENSAIO (kN)	PROGRAMA (kN)	PROGRAMA / ENSAIO
1a	887	294,5	374,5	4	664	634	0,95
1b	887	294,5	374,5	4	638	634	0,99
2a	887	294,5	374,5	14	536	498	0,93
2b	887	294,5	374,5	14	549	498	0,91
3a	887	294,5	374,5	45	312	287	0,92
3b	887	294,5	374,5	45	312	287	0,92
4a	1770	294,5	374,5	0	620	615	0,99
4b	1770	294,5	374,5	0	595	615	1,03
5a	1770	294,5	374,5	15.5	400	400	1,00
5b	1770	294,5	374,5	15.5	394	400	1,02
6a	1770	294,5	374,5	45	228	239	1,05
6b	1770	294,5	374,5	45	227	239	1,05
Média:							0,98
Desv.Padrão:							0,05

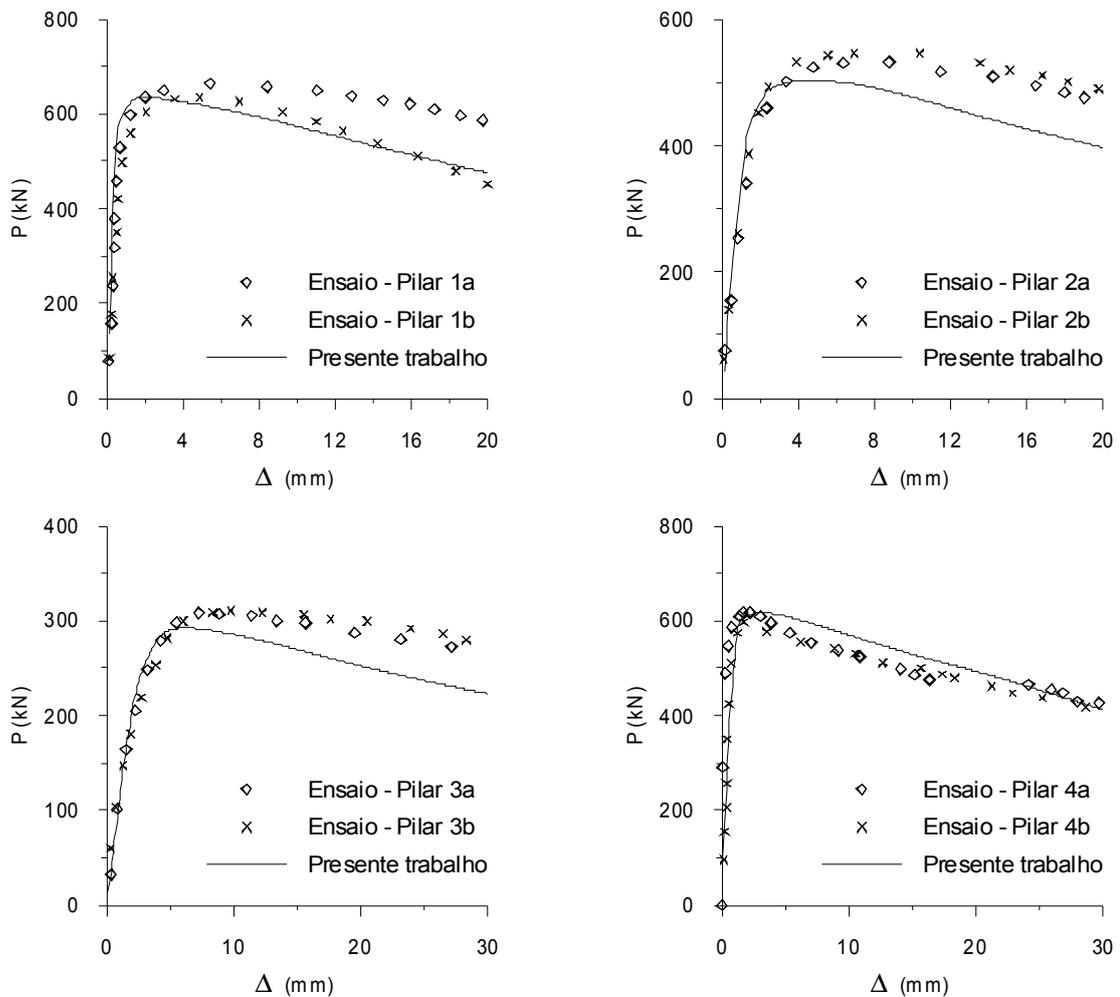


Figura 5.9a – Deslocamento lateral no meio do pilar – Tao et al. (2004).

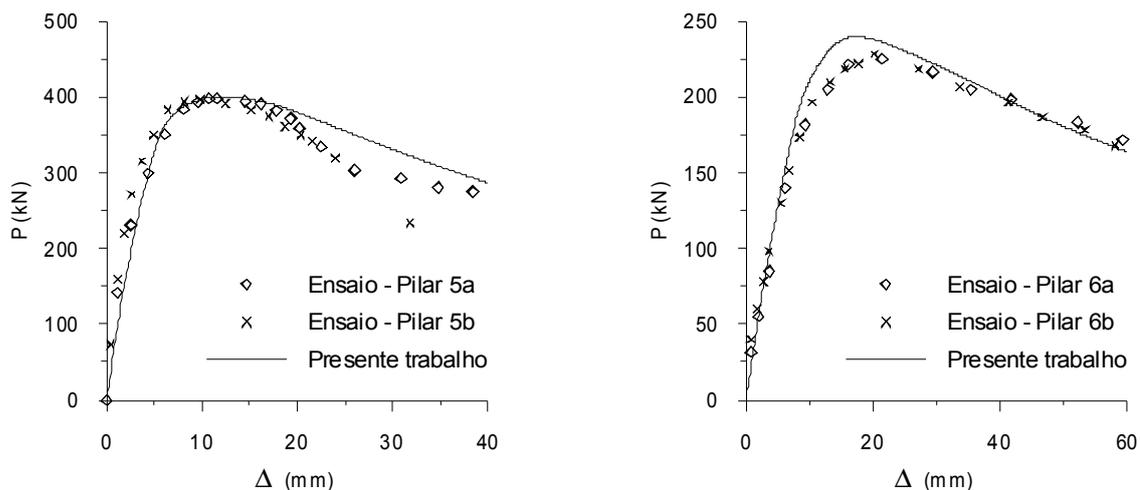


Figura 5.9b – Deslocamento lateral no meio do pilar – Tao et al. (2004).

De acordo com a tabela 5.4 e a figura 5.9 ótimos resultados foram obtidos nas análises numéricas. Neste caso específico a relação constitutiva adotada para o concreto demonstrou-se adequada para a consideração do confinamento do concreto causado pelos perfis tubulares.

#### 5.2.4– Pilar de Concreto Armado

As hipóteses adotadas nas formulações implementadas permitem a consideração de diferentes tipos de pilares, além dos pilares mistos. Como exemplo, faz-se a análise da coluna de Foure, utilizada por pesquisadores, como Bratina et al. (2004), como *benchmark* para avaliação de modelagens numéricas de pilares de concreto armado. A coluna tem seção transversal retangular de 15x20 cm e uma área total de armaduras igual a 4.52 cm<sup>2</sup> e foi submetida a um carregamento excêntrico gradual até a carga de colapso. A resistência à compressão do concreto e a tensão de escoamento do aço são, respectivamente, iguais a 38.3 e 465 MPa. A figura 5.10 mostra a geometria e carregamento do pilar. Os resultados experimentais foram documentados por Espion (1993).

Na análise experimental, a carga crítica obtida foi de 454 kN com um deslocamento lateral máximo, no topo do pilar, de 26.1 mm. Na análise do FEMOOP, a carga crítica obtida foi igual a 422 kN com um deslocamento lateral máximo de 26.2 mm. A figura 5.11 mostra a curva carga deslocamento das análises experimental e numérica, na

qual a diferença entre as curvas carga-deslocamento pode ser reduzida com a consideração da resistência a tração do concreto.

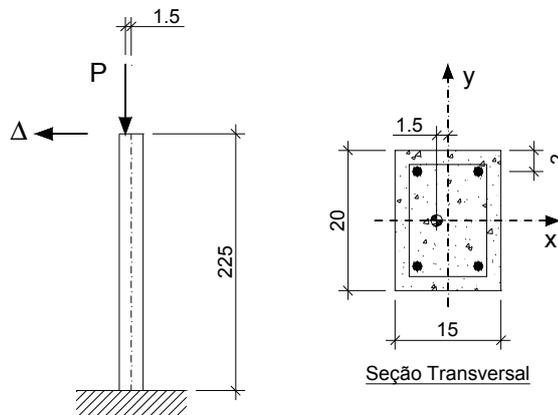


Figura 5.10 – Geometria e carregamento da coluna de Foure.

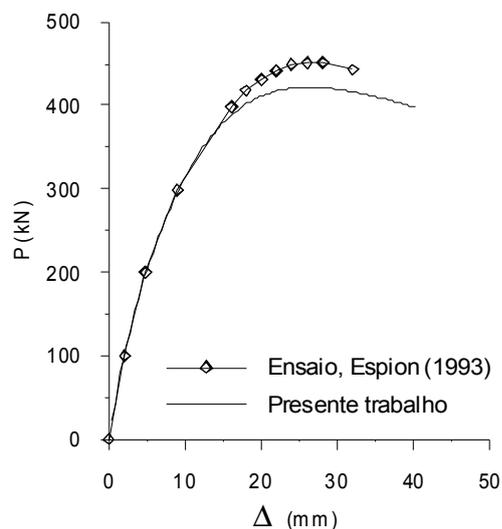


Figura 5.11 – Deslocamento lateral no topo do pilar – Coluna de Foure.

### 5.2.5– Pórtico Metálico

Para avaliar o comportamento genérico da formulação, desta vez em relação a elementos puramente metálicos, analisou-se o pórtico de Vogel (1985), composto por dois pilares e uma viga (Figura 5.12). Para a análise adotou-se a tensão de escoamento e o módulo de elasticidade do aço iguais a 235 e 205000 MPa, respectivamente. As imperfeições geométricas foram consideradas através de uma translação das coordenadas nodais, proporcional ao ângulo de imperfeição inicial  $\psi$  (Figura 5.12).

Vogel, obteve, por análise numérica, um fator de carga máximo igual a 1.02. Para a análise no FEMOOP, utilizando-se apenas dois elementos por barra, chegou-se a um fator de carga de 1.06. Com quatro elementos por barra chegou-se a um fator de 1.02. A figura 5.13 mostra a curva carga deslocamento para o pórtico, considerando 4 elementos por barra e dois pontos de integração por elemento.

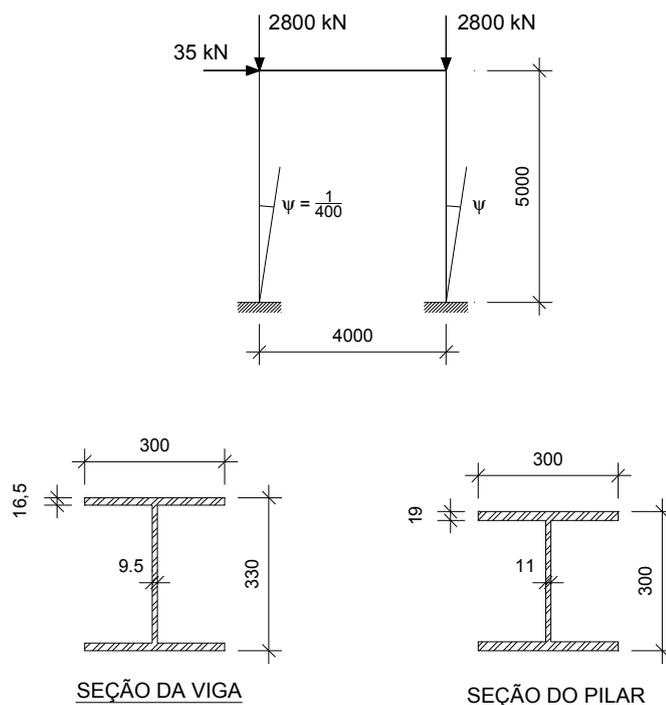


Figura 5.12 – Pórtico de Vogel.

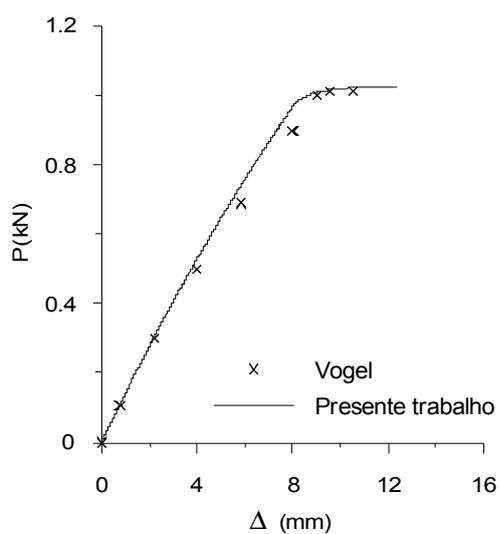


Figura 5.13 – Deslocamento lateral no topo do pilar - Pórtico de Vogel.

### 5.2.6– Pórtico em Concreto Armado

Gunnin et al. (1977) apud Bratina et al. (2004) apresentaram os resultados da análise experimental, realizada por Ferguson e Breen (1966), de um pórtico em concreto armado. O pórtico é composto por dois pilares e duas vigas em concreto armado formando um quadro fechado (Figura 5.14). Os pilares têm seção retangular de 15.4 x 10.3 cm com uma área total de armaduras igual a 3.04 cm<sup>2</sup> e as vigas têm seção retangular de 15.4 x 8.1 cm com uma área total de armaduras de 10.0 cm<sup>2</sup>. A tensão de escoamento obtida para as armaduras dos pilares foi igual a 388.9 MPa e para as armaduras das vigas de 403.4 MPa. Para o concreto foi encontrada uma resistência à compressão de 22.1 MPa.

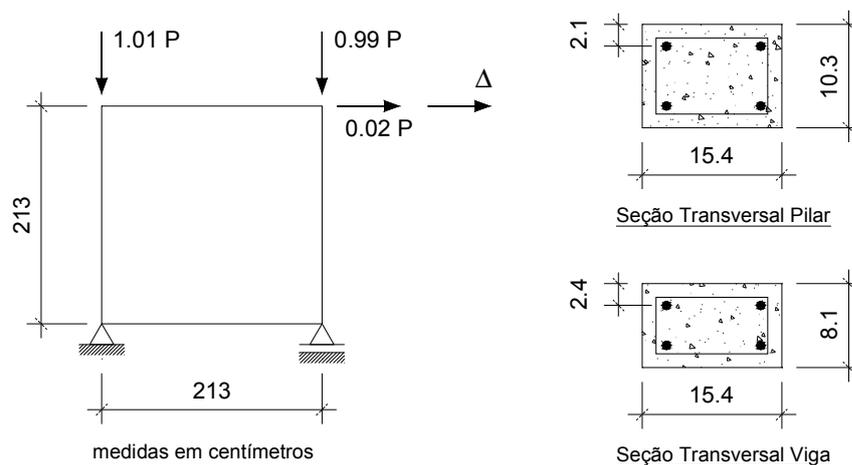


Figura 5.14 – Pórtico em concreto armado. (Ferguson e Breen, 1966)

A carga crítica da estrutura, medida a partir do ensaio experimental, foi de 141 kN com um correspondente deslocamento horizontal  $\Delta$  igual a 6.11 cm. Na análise realizada no FEMOOP chegou-se a uma carga crítica de 127 kN com um deslocamento de 5.19 cm. As curvas carga-deslocamento estão representadas na figura 5.15. Novamente, a diferença entre as curvas carga-deslocamento, experimental e numérica, pode ser reduzida com a consideração da resistência a tração do concreto.

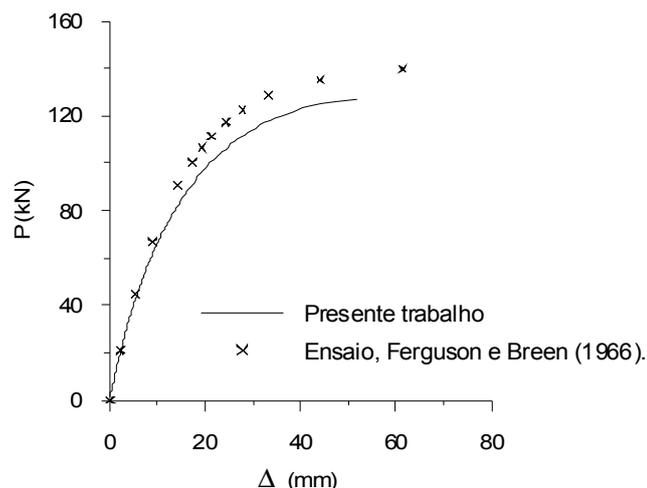


Figura 5.15 – Curva carga-deslocamento – Pórtico em concreto armado (Ferguson e Breen, 1966)

### 5.3 – COMENTÁRIOS FINAIS

De acordo com os resultados apresentados nos exemplos anteriores nota-se que as formulações adotadas e implementadas representam de maneira adequada o comportamento dos elementos mistos, prevendo de forma bastante satisfatória a carga crítica dos elementos analisados. O caráter genérico da formulação permite a extensão das análises para elementos de concreto armado e para elementos puramente metálicos, mantendo-se boas respostas nas análises, desde que não haja nenhum tipo de instabilidade lateral ou instabilidade devido aos efeitos da torção na estrutura.

Como as relações constitutivas dos materiais podem ser escritas na forma de polinômios, as relações constitutivas adotadas (Figuras 5.1 e 5.2) podem ser alteradas de forma a se obter uma resposta mais adequada para os problemas, como, por exemplo, considerando-se o encruamento do aço e a resistência à tração do concreto, além das imperfeições iniciais ao longo dos elementos.



# Prescrições de Normas Sobre Pilares Mistos

---

## CAPÍTULO 6

### 6.1 – INTRODUÇÃO

Os pilares mistos têm comportamento estrutural intermediário em relação ao dos pilares de aço e de concreto armado. Entretanto, a filosofia de projeto de pilares de aço e de concreto armado é bem diferente.

As colunas metálicas são calculadas aplicando-se as cargas em seu centróide e as tensões residuais, pequenas excentricidades e imperfeições iniciais são consideradas através da utilização das curvas de flambagem. Uma ênfase maior é dada a problemas de instabilidade e a consideração de momentos aplicados nas extremidades das colunas é feita através de equações de interação.

As colunas de concreto armado são calculadas considerando-se que as cargas são aplicadas de forma excêntrica. A falha da coluna é normalmente associada à resistência da seção transversal e é baseada nas curvas de interação Momento Fletor x Esforço Normal.

Diversos métodos de dimensionamento de pilares mistos têm sido desenvolvidos em diferentes países. O comportamento intermediário dos pilares mistos faz com que algumas normas adotem procedimentos baseados no comportamento de pilares de concreto e outras em procedimentos de pilares de aço. Este fato é refletido pelas diferenças de resultados encontradas quando se fazem comparações entre diferentes normas.

Este capítulo apresenta e compara, através de exemplos, a formulação de três diferentes normas: Eurocode 4 (1994), AISC-LRFD (1999, 2005) e o projeto de revisão da NBR 8800 (2003). Os exemplos apresentados também são comparados com a formulação numérica proposta e implementada neste trabalho, ver capítulo 4. Estudos comparativos entre outras normas e resultados experimentais podem ser encontrados em trabalhos como os de Zeghiche e Chaoui (2005), Chen et al. (2005), Han et al. (2005), Gho e Liu (2004) e Han (2004).

## **6.2 – PRESCRIÇÕES DE NORMAS**

A seguir são descritas as prescrições do Eurocode 4 (1994), AISC (1999, 2005) e do projeto de revisão da NBR8800 (2003) no que se refere à verificação da compressão simples e da flexo-compressão em pilares mistos. Algumas verificações como, por exemplo, as relativas a regiões de introdução de carga e do uso de conectores de cisalhamento não serão descritas, podendo ser facilmente encontradas nas normas.

### **6.2.1 – EUROCODE 4 (1994)**

O Eurocode 4 foi a primeira norma criada especificadamente para o tratamento de elementos mistos. O dimensionamento de pilares mistos deve ser feito considerando o estado limite último e a estabilidade global deve ser garantida na mais desfavorável combinação de esforços. Dentro deste contexto, o Eurocode 4 admite dois diferentes métodos de dimensionamento:

- Método Geral;
- Método Simplificado.

### 6.2.1.1 – Método Geral

Neste método não existem restrições quanto ao tipo de seção transversal adotada, nem quanto à variação da seção ao longo do comprimento do pilar. Os seguintes pontos devem ser considerados no processo de verificação:

- Resistência do pilar sob qualquer tipo de carregamento;
- Resistência ao cisalhamento longitudinal e transversal entre os elementos que compõem a seção;
- Verificações de regiões onde exista introdução de cargas;
- Consideração da influência da flambagem local dos perfis de aço;
- Cobrimento mínimo de concreto para seções totalmente envolvidas;
- Consideração dos efeitos de segunda ordem;
- Consideração das não linearidades física e geométrica;
- Efeitos da resistência à tração do concreto;
- Consideração de imperfeições iniciais;
- Consideração da retração e fluência do concreto;
- Forças internas determinadas por análise elasto-plástica e com compatibilidade de deformações.

O cálculo da carga última de um pilar misto seguindo estes pontos só pode ser realizado através de simulações numéricas sofisticadas, utilizando, por exemplo, o método dos elementos finitos. Normalmente o esforço envolvido é considerável, inviabilizando a sua utilização para fins práticos. De qualquer forma, os programas computacionais devem ser usados em conjunto com resultados experimentais a fim de aprimorar os métodos de dimensionamento simplificados.

### 6.2.1.2 – Método Simplificado

Este método foi criado para fins práticos de dimensionamento. É baseado nas curvas de flambagem europeias e na curva de interação Momento-Normal da seção mista obtida pelo método de Roik e Bergmann (1989). A mudança da rigidez da coluna devido à plastificação do aço e à fissuração do concreto também é considerada. A flambagem local do perfil metálico é evitada pela limitação da relação largura espessura dos elementos que compõem a seção. Só são admitidos pilares com seção transversal duplamente simétrica e constante ao longo de seu comprimento. Também são consideradas a interação completa entre o concreto e o aço e planicidade da seção transversal.

Como citado anteriormente, o comportamento intermediário dos pilares mistos entre pilares de concreto armado e pilares de aço leva a diferentes abordagens do problema. O Eurocode 4 resolve o problema combinando as duas diferentes abordagens, sendo esta, talvez, a solução mais adequada. Inicialmente o pilar misto recebe a mesma abordagem dada aos pilares metálicos calculando-se a resistência plástica da seção transversal ao esforço axial e então a carga de flambagem do pilar com o auxílio das curvas de flambagem para colunas metálicas. Posteriormente é considerada a influência dos momentos de extremidades, aplicando-se a abordagem dada a pilares de concreto armado, através da utilização das curvas de interação Momento-Normal da seção.

#### 6.2.1.2.1 – Compressão Simples

Primeiro calcula-se a resistência da seção transversal a esforços de compressão simples ou pura. Para seções revestidas e retangulares preenchidas tem-se:

$$N_{pl.Rd} = \frac{f_y A_a}{\gamma_a} + \frac{\alpha_c \cdot f_{ck} A_c}{\gamma_c} + \frac{f_{ys} A_s}{\gamma_s} \quad (6.1)$$

Para seções circulares preenchidas, considerando o efeito do confinamento, tem-se:

$$N_{pl.Rd} = \eta_2 \frac{f_y A_a}{\gamma_a} + \frac{\alpha_c \cdot f_{ck} A_c}{\gamma_c} \left[ 1 + \eta_1 \left( \frac{t}{D} \right) \left( \frac{f_y}{f_{ck}} \right) \right] + \frac{f_{ys} A_s}{\gamma_s} \quad (6.2)$$

em que:

$N_{pl.Rd}$  = resistência plástica de projeto da seção transversal à compressão;

$f_{ck}$ ,  $f_y$ ,  $f_{ys}$  = resistência característica de compressão do concreto, tensão de escoamento do perfil, tensão de escoamento das barras de armadura respectivamente;

$\gamma_c$ ,  $\gamma_a$ ,  $\gamma_s$  = coeficiente de segurança do concreto, do perfil e das armaduras assumindo os respectivos valores: 1.50, 1.10 e 1.15 ;

$t$  = espessura do tubo;

$D$  = diâmetro externo do tubo;

$A_c$  = área da seção transversal do concreto;

$A_a$  = área da seção transversal do perfil de aço;

$A_s$  = área da seção transversal das barras de armadura;

$\alpha_c$  = coeficiente de resistência do concreto, sendo 1.00 para seções preenchidas e 0.85 para seções envolvidas;

$\eta_1$ ,  $\eta_2$  = coeficientes que consideram o aumento de resistência do concreto e diminuição da resistência do aço devido ao confinamento.

Os coeficientes  $\eta_1$  e  $\eta_2$ , utilizados tanto na compressão simples quanto na flexão composta, são calculados por:

$$\eta_1 = \eta_{10} \left( 1 - \frac{10e}{D} \right) \quad (6.3a)$$

$$\eta_{10} = 4.9 - 18.5\bar{\lambda} + 17\bar{\lambda}^2 \geq 0.0 \quad (6.3b)$$

$$\eta_2 = \eta_{20} + (1 - \eta_{20}) \frac{10e}{D} \quad (6.4a)$$

$$\eta_{20} = 0.25(3 + 2\bar{\lambda}) \leq 1.00 \quad (6.4b)$$

sendo,

$$e = \frac{M_{Sd}}{N_{Sd}} \quad (6.5)$$

$$\bar{\lambda} = \sqrt{\frac{N_{pl.R}}{N_{cr}}} \quad (6.6)$$

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 (EI)_e}{(KL)^2} \quad (6.7)$$

$$(EI)_e = E_a I_a + \frac{0.8 E_c I_c}{1.35} + E_s I_s \quad (6.8)$$

em que:

$e$  = excentricidade do carregamento (igual a zero para compressão simples);

$M_{Sd}$  = máximo momento solicitante de projeto, sem efeitos de 2ª ordem;

$N_{Sd}$  = esforço normal solicitante de projeto;

$\bar{\lambda}$  = esbeltez relativa do pilar misto;

$N_{pl.R}$  = resistência plástica da coluna de acordo com as equações 6.1 ou 6.2

com  $\gamma_c = \gamma_a = \gamma_s = 1.0$ ;

$N_{cr}$  = carga crítica de flambagem elástica;

$KL$  = comprimento de flambagem do pilar;

$(EI)_e$  = rigidez efetiva a flexão;

$E_a$  = módulo de elasticidade do perfil = 210000 MPa;

$E_s$  = módulo de elasticidade das barras de armadura = 210000 MPa;

$E_c = 9500 \left( \frac{\rho_c}{24} \right)^2 (f_{ck} + 8)^{1/3}$ , com  $f_{ck}$  e  $E_c$  em MPa e  $\rho_c$  o peso específico do

concreto em kN/m<sup>3</sup>;

$I_a$  = momento de inércia da seção transversal do perfil de aço;

$I_s$  = momento de inércia da seção transversal das barras de armadura;

$I_c$  = momento de inércia da seção transversal de concreto.

No caso de seções circulares preenchidas, se a esbeltez relativa for maior que 0.5 ( $\bar{\lambda} > 0.5$ ) ou a excentricidade for maior que um décimo do diâmetro do tubo ( $e > D/10$ ) deve-se desprezar o efeito do confinamento do concreto adotando-se  $\eta_1 = 0.0$  e  $\eta_2 = 1.0$ .

Finalmente, a resistência do pilar a esforços axiais, considerando a influência da flambagem global, é dada por:

$$N_{Rd} = \chi \cdot N_{pl.Rd} \quad (6.9)$$

sendo,

$$\chi = \frac{1}{\Phi + \sqrt{\Phi^2 - \bar{\lambda}^2}} \leq 1.0 \quad (6.10)$$

$$\Phi = 0.5(1.0 + \alpha(\bar{\lambda} - 0.2) + \bar{\lambda}^2) \quad (6.11)$$

na qual:

- $N_{Rd}$  = resistência de projeto;
- $\chi$  = fator de redução devido a esbeltez do pilar;
- $\alpha$  = coeficiente relacionado a curva de flambagem por flexão;
  - = 0.21 para perfis tubulares preenchidos (curva a);
  - = 0.34 para perfis I revestidos com instabilidade em torno do eixo de maior inércia (curva b);
  - = 0.49 para perfis I revestidos com instabilidade em torno do eixo de menor inércia (curva c).

Os efeitos da retração e fluência do concreto devem ser considerados caso as seguintes condições sejam satisfeitas simultaneamente:

$$\bar{\lambda} > \bar{\lambda}_{lim} \quad (6.12)$$

$$\frac{e}{d} < 2 \quad (6.13)$$

em que:

$\bar{\lambda}_{lim}$  = valor limite da esbeltez, indicado na tabela 6.1;

$d$  = altura da seção mista no plano de flexão considerado.

Tabela 6.1 – Valores do parâmetro de esbeltez limite ( $\bar{\lambda}_{lim}$ ).

	Estruturas indeslocáveis <sup>(1)</sup>	Estruturas deslocáveis <sup>(1)</sup>
Seções Revestidas	0.8	0.5
Seções Preenchidas	$\frac{0.8}{1 - \delta}$	$\frac{0.5}{1 - \delta}$

(1) Ver item 5.2.5.3 do Eurocode 3 (1992)

sendo  $\delta$  a razão de contribuição do perfil de aço, dada por:

$$\delta = \frac{f_y A_a}{\gamma_a N_{pl,Rd}} \quad (6.14)$$

Caso seja necessário considerar os efeitos de longa duração, deve-se substituir  $E_c$  por  $E_c^*$ , na equação 6.8, recalculando-se a resistência da seção. O valor de  $E_c^*$  é dado por:

$$E_c^* = E_c \left[ 1 - 0.5 \left( \frac{N_{Sd,G}}{N_{Sd}} \right) \right] \quad (6.15)$$

na qual:

$N_{Sd,G}$  = parcela da solicitação de projeto considerada permanente.

### 6.2.1.2.2 – Flexão Composta

#### 6.2.1.2.2.1 – Flexão Composta Reta

A verificação quanto à flexo-compressão reta é baseada no diagrama de interação Momento-Normal da seção transversal mista, representado de forma adimensional na Figura 6.1 e determinado de acordo com os procedimentos indicados no capítulo 3.

A partir do diagrama, define-se:

$$\chi_d = \frac{N_{Sd}}{N_{pl.Rd}} \quad (6.16)$$

$$\chi_n = \chi \cdot \frac{1-r}{4} \quad (6.17)$$

$$\mu = \mu_d - \mu_k \frac{\chi_d - \chi_n}{\chi - \chi_n} \quad (6.18)$$

sendo,

- $\chi$  = fator de redução devido à esbeltez do pilar (equação 6.10);
- $\chi_d$  = razão de carregamento axial do pilar;
- $\chi_n$  = razão do carregamento axial limite para consideração do momento devido a imperfeições;
- $\mu$  = fração do momento plastificação correspondente ao momento adicional que pode ser absorvido pela seção;
- $\mu_k$  = fração do momento plastificação correspondente a abscissa  $\chi$ ;
- $\mu_d$  = fração do momento plastificação correspondente a abscissa  $\chi_d$ .
- $r$  = razão entre o menor e o maior momentos de extremidade. Positiva para curvatura simples e negativa para curvatura reversa.

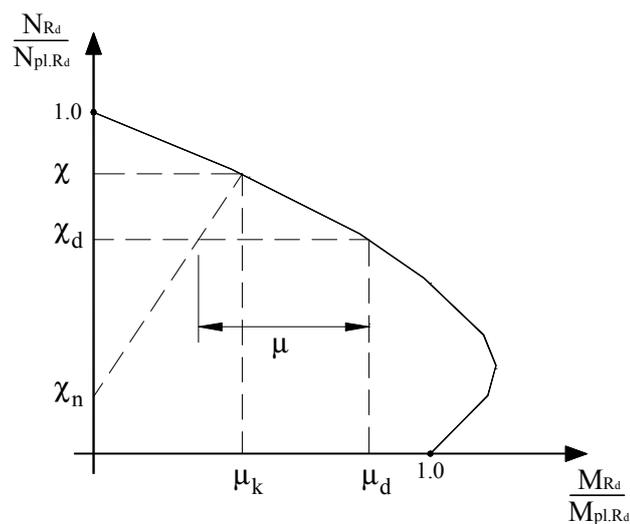


Figura 6.1 – Diagrama de interação Momento X Normal.

O primeiro passo é calcular a resistência do pilar à compressão simples de acordo com o item 6.2.1.2.1. Com o valor encontrado do fator de redução  $\chi$ , pode-se ler, a partir do diagrama (Figura 6.1), o valor do momento devido às imperfeições que estão incorporadas nas curvas de flambagem ( $\mu_k M_{pl.Rd}$ ).

Caso o esforço normal solicitante de projeto seja igual ao esforço normal resistente de projeto ( $N_{Sd} = N_{Rd}$  ou  $\chi_d = \chi$ ) nenhum momento adicional pode ser suportado pelo pilar. Quando  $N_{Sd} < N_{Rd}$  ( $\chi_d < \chi$ ), um momento adicional com valor de  $\mu_k M_{pl.Rd}$  pode ser absorvido pela seção descontando-se o momento devido a imperfeições. Este momento devido a imperfeições tem influência direta na reserva de carga da seção mista e é assumida uma variação linear desta influência entre os valores de  $\chi_n$  e  $\chi$ . Quando  $\chi_d < \chi_n$  despreza-se o efeito das imperfeições.

A resistência do pilar à flexão composta reta é verificada pela seguinte expressão:

$$M_{Sd} \leq 0.9 \mu M_{pl.Rd} \quad (6.19)$$

$$M_{pl.Rd} = \frac{f_y}{\gamma_a} (Z_{pa} - Z_{pan}) + 0.5 \frac{\alpha_c f_{ck}}{\gamma_c} (Z_{pc} - Z_{pcn}) + \frac{f_{ys}}{\gamma_s} (Z_{ps} - Z_{psn}) \quad (6.20)$$

na qual:

- $M_{Sd}$  = máximo momento solicitante de projeto, considerando efeitos de 2ª ordem;
- $M_{pl.Rd}$  = momento de plastificação da seção mista;
- $Z_{pa}$  = módulo resistente plástico da seção do perfil de aço;
- $Z_{ps}$  = módulo resistente plástico da seção da armadura do concreto;
- $Z_{pc}$  = módulo resistente plástico da seção de concreto sem fissuração;
- $Z_{pan}, Z_{pcn}, Z_{psn}$  = módulos resistentes plásticos parciais da seção do perfil, concreto e armaduras, respectivamente.

### 6.2.1.2.2.2 – Flexão Composta Oblíqua

O dimensionamento a flexo-compressão oblíqua é uma extensão do dimensionamento a flexo-compressão reta. Neste caso é necessário que se obtenham as curvas de interação para flexão em torno dos dois eixos do pilar. A influência das imperfeições só precisa ser levada em conta para o eixo mais suscetível à flambagem, ver figura 6.2.

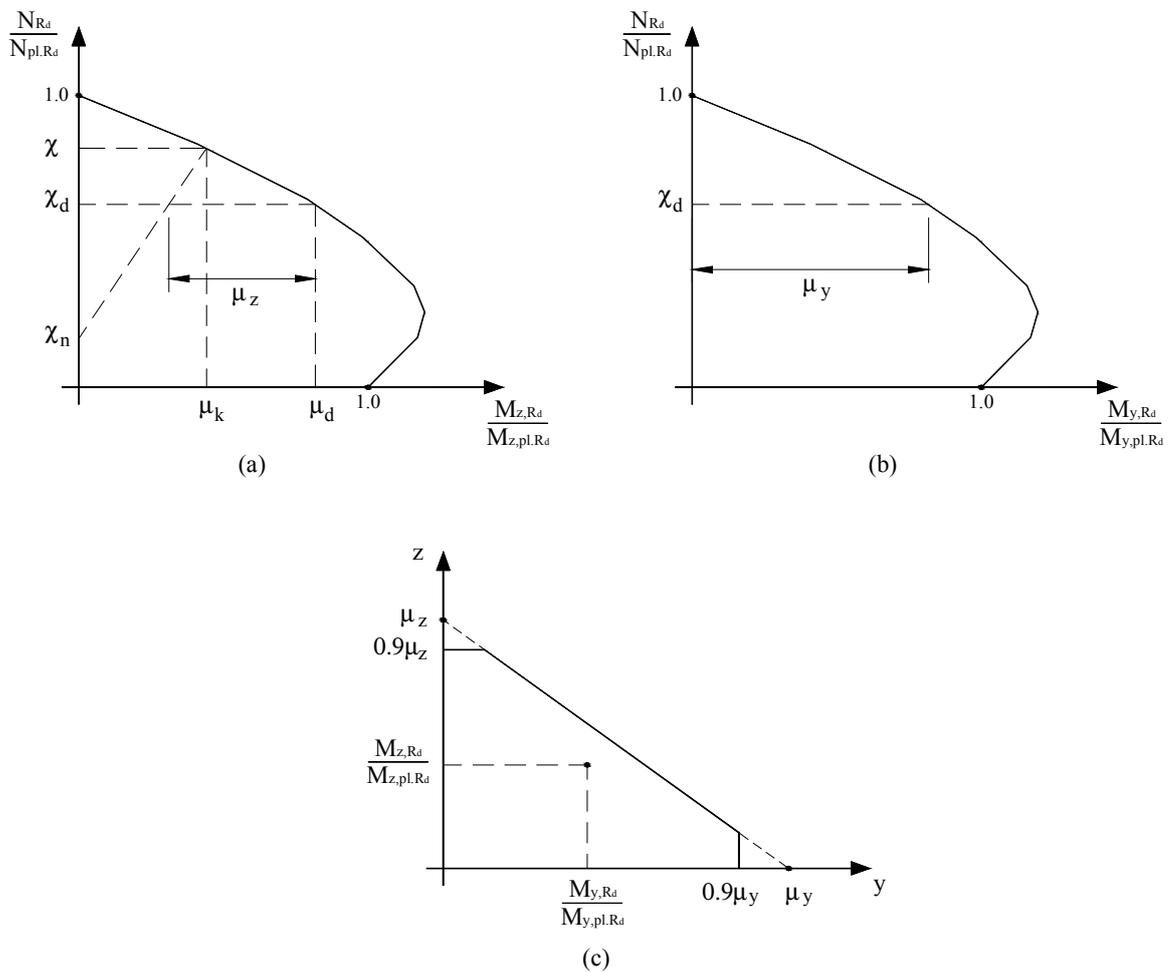


Figura 6.2 – Curvas de interação para flexo-compressão oblíqua (Eurocode 4, 1994).

(a) Eixo mais suscetível à falha. (b) Eixo sem consideração das imperfeições.

(c) Curva de interação para flexão oblíqua.

Após a obtenção dos valores de  $\mu_y$  e  $\mu_z$ , verifica-se a resistência do pilar através da nova curva de interação linear (Figura 6.2.c), utilizando-se as seguintes fórmulas:

$$M_{y,Sd} \leq 0.9\mu_y M_{y.pl.Rd} \quad (6.21)$$

$$M_{z,Sd} \leq 0.9\mu_z M_{z.pl.Rd} \quad (6.22)$$

$$\frac{M_{y,Sd}}{\mu_y M_{y.pl.Rd}} + \frac{M_{z,Sd}}{\mu_z M_{z.pl.Rd}} \leq 1.0 \quad (6.23)$$

#### 6.2.1.2.2.3 – Efeitos de Segunda Ordem

Caso as seguintes condições sejam simultaneamente satisfeitas, os efeitos de segunda ordem devem ser considerados no cálculo dos momentos solicitantes:

$$\frac{N_{Sd}}{N_{cr}} > 0.1 \quad (6.24)$$

$$\bar{\lambda} > 0.2(2-r) \quad (6.25)$$

Os efeitos de segunda ordem ao longo do pilar podem ser calculados, de forma simplificada, através do coeficiente de amplificação  $k$ . Desta forma, o momento solicitante final é dado por:

$$M_{2a} = k.M_{1a} \quad (6.26)$$

onde,

$$k = \frac{\beta}{1 - \frac{N_{Sd}}{N_{cr}}} \geq 1.0 \quad (6.27)$$

Para pilares sem carregamento transversal entre os apoios tem-se:

$$\beta = 0.66 + 0.44r \geq 0.44 \quad (6.28)$$

Para pilares com carregamento transversal entre os apoios tem-se:

$$\beta = 1.0 \quad (6.29)$$

em que:

$M_{1a}$  = momento considerando efeitos de 1ª ordem;

$M_{2a}$  = momento considerando efeitos de 2ª ordem;

$\beta$  = coeficiente de momento equivalente.

#### 6.2.1.2.2.4 – Simplificação da Curva de Interação

A determinação da curva de interação é um processo trabalhoso. É obtida variando-se a profundidade da linha neutra ao longo da seção, calculando-se, para cada posição da mesma, as forças internas e momento resultante, baseados na compatibilidade de deformações ou na plastificação dos materiais. O método simplificado do Eurocode 4 (1994) permite que a curva real seja aproximada pelos polígonos ACDB ou AECDB (Figura 6.3). A figura 6.4 mostra a distribuição de tensões na seção transversal para cada ponto.

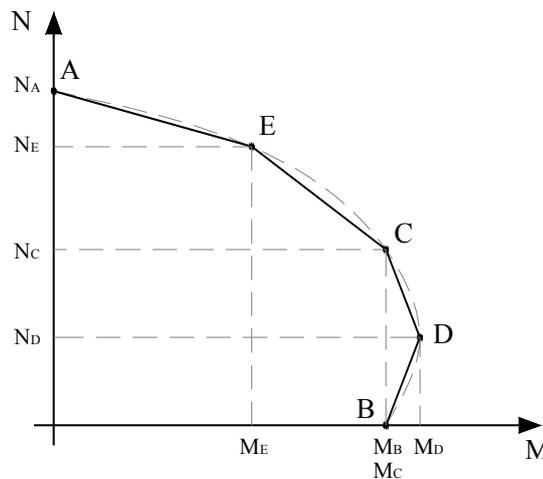


Figura 6.3 – Aproximação da curva Momento-Normal.

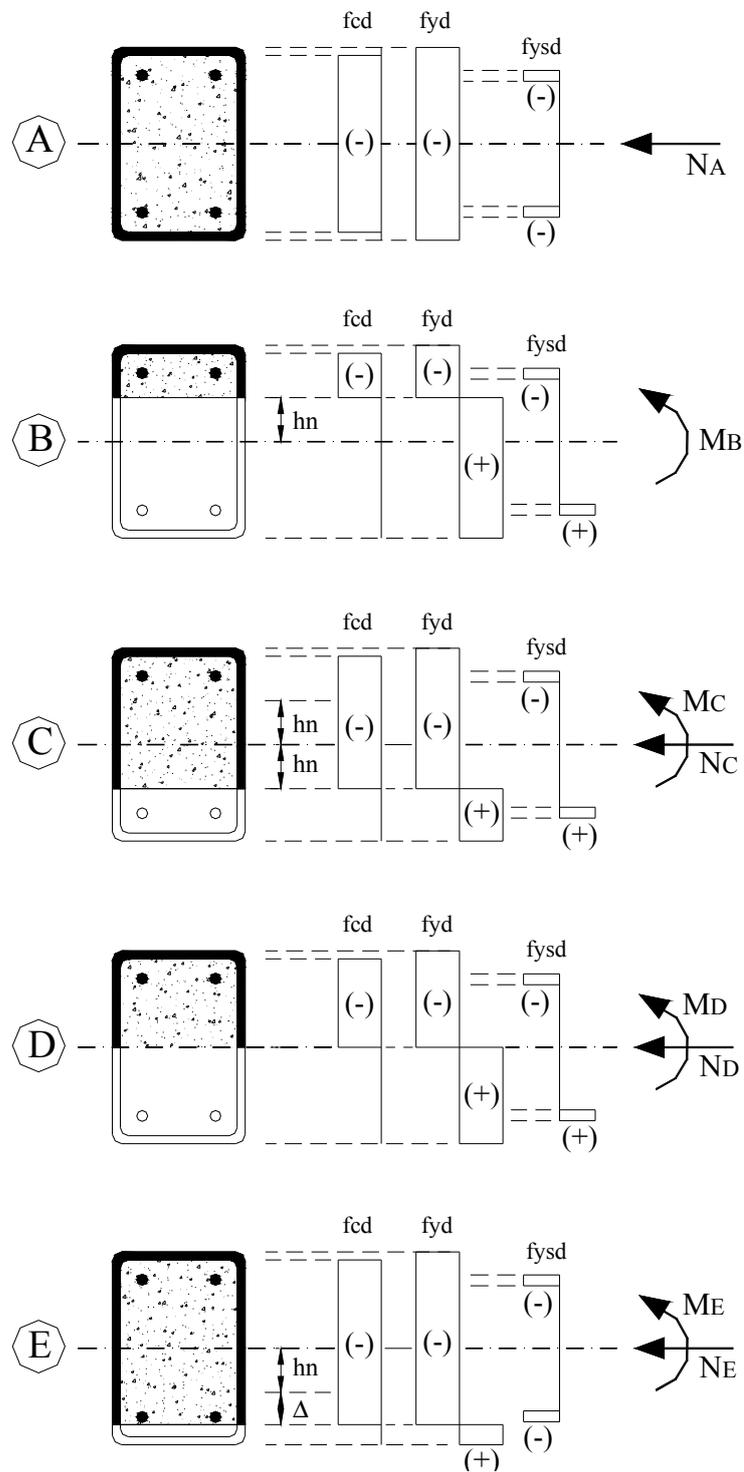


Figura 6.4 – Distribuições de tensões nos pontos ABCDE.  
(Adaptado de Bergmann et al. (1995))

O ponto A corresponde à resistência plástica da seção ao esforço de compressão, sendo:

$$N_A = N_{pl.Rd} \quad (6.30)$$

$$M_A = 0 \quad (6.31)$$

O ponto B corresponde ao momento de plastificação da seção na ausência de esforço normal, sendo:

$$N_B = 0 \quad (6.32)$$

$$M_B = M_{pl.Rd} \quad (6.33)$$

No ponto C os esforços são calculados pelas seguintes equações:

$$N_C = \frac{A_c \alpha_c f_{ck}}{\gamma_c} \quad (6.34)$$

$$M_C = M_{pl.Rd} \quad (6.35)$$

No ponto D, a linha neutra plástica passa pelo centróide da seção e a força de compressão é a metade da força do ponto C. Este ponto só deve ser considerado quando o momento atuante for dependente do esforço normal.

$$N_D = \frac{N_c}{2} \quad (6.36)$$

$$M_D = Z_{pa} \frac{f_y}{\gamma_a} + 0.5 \frac{\alpha_c f_{ck}}{\gamma_c} Z_{pc} + Z_{ps} \frac{f_{ys}}{\gamma_s} \quad (6.37)$$

A consideração do ponto E resulta em um dimensionamento mais seguro, ver Queiroz e Prestes (2002), embora aumente o trabalho de cálculo envolvido. Pode ser dispensada caso  $N_{Sd} < N_C$  ou quando se verifica perfis I revestidos, fletidos em torno do eixo de maior inércia. Ao final de seu trabalho, Queiroz e Prestes (2002) apresentam fórmulas de interação Momento x Normal que levam em consideração o ponto E.

Uma opção, mais simplificadora, é desprezar os pontos D e E e utilizar somente os pontos ACB, lembrando-se que a exclusão do ponto E pode levar a resultados contra a segurança. Desta forma calcula-se facilmente o valor de  $\mu$  através das expressões (6.38) e (6.39), sendo que apenas a expressão (6.38) leva em consideração o efeito das imperfeições iniciais.

$$\chi_d \geq \chi_c \Rightarrow \mu = \frac{(\chi - \chi_d)(1 - \chi_n)}{(1 - \chi_c)(\chi - \chi_n)} \quad (6.38a)$$

$$\chi_d < \chi_c \Rightarrow \mu = 1 - \frac{(1 - \chi)(\chi_d - \chi_n)}{(1 - \chi_c)(\chi - \chi_n)} \quad (6.38b)$$

$$\chi_d > \chi_c \Rightarrow \mu = \frac{(1 - \chi_d)}{(1 - \chi_c)} \quad (6.39a)$$

$$\chi_d \leq \chi_c \Rightarrow \mu = 1 \quad (6.39b)$$

sendo,

$$\chi_c = \frac{A_c \alpha_c f_{ck}}{\gamma_c N_{pl.Rd}} \quad (6.40)$$

#### 6.2.1.2.3 – Restrições da Norma

- Só são permitidas colunas com seção transversal duplamente simétrica e constante ao longo do comprimento do pilar;
- $20 \text{ MPa} \leq f_{ck} \leq 50 \text{ MPa}$ ;
- $235 \text{ MPa} \leq f_y \leq 460 \text{ MPa}$ ;
- $\bar{\lambda} \leq 2.0$ ;

- Para seções I parcialmente envolvidas:

$$\frac{b}{t_f} \leq 44 \sqrt{\frac{235}{f_y}}$$

Sendo  $b$  a largura da mesa,  $t_f$  sua espessura e  $f_y$  em MPa;

- Para tubos retangulares preenchidos:

$$\frac{b}{t} \leq 52 \sqrt{\frac{235}{f_y}}$$

Sendo  $b$  a largura externa da parede,  $t$  sua espessura e  $f_y$  em MPa;

- Para tubos circulares preenchidos:

$$\frac{D}{t} \leq \frac{21150}{f_y}$$

Sendo  $D$  o diâmetro externo do tubo,  $t$  sua espessura e  $f_y$  em MPa;

- As armaduras podem ser dispensadas para perfis tubulares preenchidos. Caso sejam utilizadas, deve-se ter:

$$0.3\% \leq \frac{A_s}{A_c} \leq 4.0\%$$

- Taxas maiores podem ser usadas, no caso de dimensionamento ao incêndio, mas somente 4% deve ser considerado para determinação da resistência do pilar.

- A razão de contribuição do perfil de aço deve satisfazer a seguinte limitação:

$$0.2 \leq \delta \leq 0.9$$

Para valores abaixo de 0.2, o pilar deve ser calculado como pilar de concreto armado e para valores acima de 0.9 como pilar de aço.

- Em seções totalmente envolvidas (Figura 2.4a) os cobrimentos do perfil são limitados por:

$$c_{\min} \leq c_x \leq 0.4b_c$$

$$c_{\min} \leq c_y \leq 0.3h_c$$

$$c_{\min} \geq \begin{cases} 40\text{mm} \\ b_f / 6 \end{cases}$$

Cobrimentos maiores podem ser usados, desde que sejam devidamente ancorados, mas não devem ser computados no cálculo da resistência da seção.

- A relação altura/largura dos elementos revestidos (Figuras 2.4a,b,c) deve-se obedecer a seguinte relação:

$$0.2 \leq \frac{h_c}{b_c} \leq 5.0$$

- É obrigatória a utilização de armaduras em seções I revestidas visando garantir a integridade do concreto. Em qualquer caso de utilização de armaduras, características como o espaçamento e o diâmetro das armaduras devem seguir as recomendações do Eurocode 2 (1992).

### **6.2.2 – AISC-LRFD (1999)**

Embora as especificações do AISC já incluíssem procedimentos de cálculo relativos a vigas mistas desde 1961, os pilares mistos só foram considerados a partir da primeira edição do AISC-LRFD de 1986. O processo de cálculo adotado usa as fórmulas de dimensionamento de pilares metálicos, utilizando propriedades físicas e geométricas modificadas da seção que levam em consideração a presença do concreto e das barras da armadura. Para o concreto, a máxima tensão de compressão é limitada a  $0,85f_{ck}$  e as tensões de tração são desprezadas. O efeito do confinamento em seções circulares preenchidas também não é considerado. A flambagem local do perfil metálico é eliminada limitando-se relação largura/espessura dos elementos que compõem a seção.

Segundo Weng e Yen (2002) o conceito de se estender o dimensionamento de pilares metálicos a pilares mistos usando propriedades modificadas foi primeiramente introduzido por Furlong (1976) para posteriormente ser aplicado em normas.

#### **6.2.2.1 – Compressão Simples**

Primeiro devem ser calculadas as propriedades modificadas da seção utilizando as seguintes expressões:

$$f_{my} = f_y + c_1 f_{ys} \frac{A_s}{A_a} + c_2 f_{ck} \frac{A_c}{A_a} \quad (6.41)$$

$$E_m = E_a + c_3 E_c \frac{A_c}{A_a} \quad (6.42)$$

sendo que:

$f_{my}$  = tensão de escoamento modificada do pilar misto;

$f_y$  = tensão de escoamento do perfil;

$f_{ys}$  = tensão de escoamento das barras de armadura;

$f_{ck}$  = resistência característica à compressão do concreto;

$A_a$  = área da seção transversal do perfil de aço;

$A_c$  = área da seção transversal do concreto;

$A_s$  = área da seção transversal das barras de armadura;

$E_m$  = módulo de elasticidade modificado do pilar misto;

$E_a$  = módulo de elasticidade do aço = 200000 MPa;

$E_c$  = módulo de elasticidade do concreto =  $42\rho_c^{1.5}\sqrt{f_{ck}}$ , com  $f_{ck}$  e  $E_c$  em MPa  
e  $\rho_c$  em  $\text{kN/m}^3$ ;

$\rho_c$  = peso específico do concreto;

$c_{1,2,3}$  = coeficientes numéricos relacionados ao tipo de seção,  
para tubos preenchidos  $c_1 = 1.0$  ;  $c_2 = 0.85$  ;  $c_3 = 0.4$  ;  
para perfis envolvidos  $c_1 = 0.7$  ;  $c_2 = 0.60$  ;  $c_3 = 0.2$  ;

A seguir, calcula-se o parâmetro de esbeltez e a tensão crítica de flambagem global do pilar:

$$\lambda_c = \left( \frac{KL}{\pi r_m} \right) \sqrt{\frac{f_{my}}{E_m}} \quad (6.43)$$

$$F_{cr} = (0.658^{\lambda_c^2}) f_{my} \quad , \text{ se } \lambda_c \leq 1.5 \quad (6.44a)$$

$$F_{cr} = \left( \frac{0.877}{\lambda_c^2} \right) f_{my} \quad , \text{ se } \lambda_c > 1.5 \quad (6.44b)$$

em que:

$\lambda_c$  = parâmetro de esbeltez do pilar misto;

$KL$  = comprimento de flambagem do pilar;

$r_m$  = raio de giração do perfil de aço. Para perfil envolvido, não menos do que 0.3 vezes a dimensão da seção mista no plano de flambagem;

$F_{cr}$  = tensão crítica de flambagem global do pilar misto;

Finalmente, a resistência de projeto para pilares mistos axialmente comprimidos é dada por:

$$N_{Rd} = \phi_c A_a F_{cr} \quad (6.45)$$

sendo,

$N_{Rd}$  = resistência de projeto do pilar misto axialmente comprimido;

$\phi_c$  = 0.85 = coeficiente de segurança a compressão.

### 6.2.2.2 – Flexão Composta

A flexo-compressão é verificada através das seguintes equações bi-lineares de interação:

$$\text{Se } \frac{N_{Sd}}{N_{Rd}} < 0.2 \Rightarrow \frac{N_{Sd}}{2N_{Rd}} + \left( \frac{M_{x,Sd}}{\phi_b M_{x,pl}} + \frac{M_{y,Sd}}{\phi_b M_{y,pl}} \right) \leq 1.0 \quad (6.46a)$$

$$\text{Se } \frac{N_{Sd}}{N_{Rd}} \geq 0.2 \Rightarrow \frac{N_{Sd}}{N_{Rd}} + \frac{8}{9} \left( \frac{M_{x,Sd}}{\phi_b M_{x,pl}} + \frac{M_{y,Sd}}{\phi_b M_{y,pl}} \right) \leq 1.0 \quad (6.46b)$$

em que:

$N_{Sd}$  = esforço normal solicitante de projeto;

$M_{Sd}$  = momento solicitante de projeto já incluindo os efeitos de 2ª ordem;

$M_{pl}$  = momento resistente da seção mista considerando distribuição plástica das tensões e ausência de esforço normal (Momento Plástico);

$\phi_b$  = 0.90 = coeficiente de segurança a flexão.

Os efeitos de segunda ordem ao longo do pilar podem ser calculados, de forma simplificada, através do coeficiente de amplificação  $B_1$ . Desta forma, o momento final é dado por:

$$M_{2a} = B_1 \cdot M_{1a} \quad (6.47)$$

na qual:

$$B_1 = \frac{C_m}{1 - \frac{N_{Sd}}{N_{cr}}} \geq 1.0 \quad (6.48)$$

$$N_{cr} = \frac{A_a f_{my}}{\lambda_c^2} \quad (6.49)$$

Para pilares sem carregamento transversal entre os apoios tem-se:

$$C_m = 0.6 - 0.4 \frac{M_1}{M_2} \quad (6.50a)$$

Para pilares com carregamento transversal entre os apoios tem-se:

$$C_m = 0.85 \quad , \quad \text{para barras bi-engastadas.} \quad (6.50b)$$

$$C_m = 1.00 \quad , \quad \text{para barras bi-apoiadas.} \quad (6.50c)$$

em que:

$M_{1a}$  = momento considerando efeitos de 1ª ordem;

$M_{2a}$  = momento considerando efeitos de 2ª ordem;

$B_1$  = fator de amplificação;

$N_{cr}$  = carga crítica de flambagem elástica;

$C_m$  = coeficiente de momento equivalente;

$M_1/M_2$  = razão entre o menor e o maior momentos de extremidade. Positiva para curvatura reversa e negativa para curvatura simples.

O momento plástico de seções mistas duplamente simétricas pode ser calculado, de forma aproximada, através da equação (6.51), dada por Galambos e Chapuis (1980), sendo válida para seções tubulares preenchidas e seções I revestidas. Assim:

$$M_{pl} = Z \cdot f_y + \frac{1}{3} (h_2 - 2c_r) A_s \cdot f_{ys} + \left( \frac{h_2}{2} - \frac{A_w \cdot f_y}{1.7 f_{ck} h_1} \right) A_w f_y \quad (6.51)$$

na qual:

$Z$  = módulo plástico do perfil metálico;

$h_1$  = altura da seção transversal mista, perpendicular ao plano de flexão;

$h_2$  = altura da seção transversal mista, paralela ao plano de flexão;

$c_r$  = cobrimento de concreto, medido a partir do centro da armadura até a face externa da seção, no plano de flexão;

$A_w$  = área da alma do perfil metálico. Para tubos preenchidos seu valor é zero.

Se  $N_{Sd} / N_{Rd} < 0.3$  devem ser usados conectores de cisalhamento, para garantir o comportamento misto, calculados considerando a ação do momento.

### 6.2.2.3 – Restrições da Norma

- São permitidas somente seções tubulares retangulares ou circulares preenchidas e seções I totalmente envolvidas;
- Solicitações previstas: compressão simples, flexão simples composta, flexão oblíqua composta;

- As seções devem ser duplamente simétricas e constantes ao longo do comprimento do pilar;
- As barras longitudinais da armadura, consideradas na resistência do pilar, não podem ser interrompidas nas regiões de bases, emendas e ligações com vigas;
- O espaçamento entre as barras longitudinais e transversais de contenção do concreto não pode ser superior a dois terços da menor dimensão da seção transversal do pilar misto e a área da seção transversal destas barras não pode ser inferior a  $1.8 \text{ cm}^2$  vezes seu espaçamento em metros;
- O cobrimento mínimo de qualquer armadura é de 38 mm;
- A resistência característica à compressão do concreto deve estar entre 21 e 55 MPa para concreto normal. Para concreto com agregados leves o valor inferior deve ser alterado para 28 MPa;
- A tensão de escoamento, tanto do perfil como das armaduras, deve ser no máximo igual a 415 MPa;

- $\lambda = \frac{KL}{r_m} \leq 200$  ;

- Para análise plástica:

$\lambda_c \leq 1.5K$  , sendo  $K$  o parâmetro relacionado ao comprimento de flambagem;

- $\frac{A_a}{A_a + A_s + A_c} \geq 0.04$  ;

- Para tubo retangular preenchido:

$$\frac{b}{t} \leq \sqrt{\frac{3E_a}{fy}} , \quad \text{sendo } b \text{ a largura externa da parede e } t \text{ sua espessura;}$$

- Para tubo circular preenchido:

$$\frac{D}{t} \leq \sqrt{\frac{8E_a}{fy}} , \quad \text{sendo } D \text{ o diâmetro externo do tubo e } t \text{ sua espessura;}$$

- É obrigatória a utilização de armaduras em seções I revestidas visando garantir a integridade do concreto. Em qualquer caso de utilização de armaduras, características como o espaçamento e o diâmetro das armaduras devem seguir as recomendações do ACI 318 (1999).
- Para análise elasto-plástica ou rígido-plástica:

$$N_{sd} \leq 0.85\phi_c N_{pl,R} \quad , \text{ para sistemas indeslocáveis;}$$

$$N_{sd} \leq 0.75\phi_c N_{pl,R} \quad , \text{ para sistemas deslocáveis, sendo } N_{pl,R} \text{ é a resistência plástica nominal da seção em relação ao esforço normal.}$$

### 6.2.3 – AISC (2005)

Antes da finalização deste trabalho foi lançada a nova versão do AISC. Como as prescrições do AISC (1999) já estavam redigidas, são conhecidas, estudadas e utilizadas, decidiu-se mantê-las no presente trabalho e também apresentar as considerações do AISC (2005) com relação a pilares mistos. Desta forma, pretende-se traçar um paralelo entre as duas versões e facilitar o entendimento da nova versão.

A primeira mudança no AISC (2005) é o cálculo de elementos estruturais tanto no método dos estados limites (LRFD) como no método das tensões admissíveis (ASD), dentro da mesma norma. Em relação à análise de seções mistas, permite-se tanto a consideração de um comportamento rígido-plástico dos materiais (análise rígido-plástica), bem como a consideração da compatibilidade de deformações (análise elasto-plástica), descritas no capítulo 3 desta dissertação. Pelas expressões, considerações de cálculo e comentários descritos na norma, nota-se uma aproximação dos procedimentos de cálculos adotados ora pelo Eurocode 4, ora pelo ACI 318, o que, de fato, leva a uma melhor avaliação do comportamento de pilares mistos, já que até a sua edição anterior estes tipos de pilares eram tratados como pilares metálicos modificados. As principais mudanças da norma são descritas nos próximos itens, considerando-se o dimensionamento no método dos estados limites (LRFD).

### 6.2.3.1 – Compressão Simples

A resistência da seção transversal a esforços de compressão pura, considerando a plastificação de cada material, é dada por:

$$P_0 = A_a f_y + A_s f_{ys} + c_2 A_c f_{ck} \quad (6.52)$$

onde:

$$\begin{aligned} c_2 &= 0.85 && \text{(seções revestidas e tubulares retangulares preenchidas)} \\ c_2 &= 0.95 && \text{(seções tubulares circulares preenchidas)} \end{aligned} \quad (6.53)$$

Nota-se, pelos valores do coeficiente  $c_2$ , a consideração explícita do efeito do confinamento do concreto em seções circulares, nesta nova versão da norma.

A resistência nominal do pilar a esforços de compressão, considerando a flambagem global por flexão ( $P_n$ ), é calculada por:

$$P_n = P_0 \left( 0.658^{\left[ \frac{P_0}{P_e} \right]} \right) \quad \text{se } P_e \geq 0.44P_0 \quad (6.54)$$

$$P_n = 0.877P_e \quad \text{se } P_e < 0.44P_0$$

na qual:

$$P_e = \frac{\pi^2 (EI)_e}{(KL)^2} \quad (6.55)$$

$$\begin{aligned} (EI)_e &= E_a I_a + 0.5 E_s I_s + c_1 E_c I_c && \text{(seções revestidas)} \\ (EI)_e &= E_a I_a + E_s I_s + c_3 E_c I_c && \text{(seções preenchidas)} \end{aligned} \quad (6.56)$$

$$c_1 = 0.1 + 2 \left( \frac{A_a}{A_c + A_s} \right) \leq 0.3 \quad \text{e} \quad c_3 = 0.6 + 2 \left( \frac{A_a}{A_c + A_s} \right) \leq 0.9 \quad (6.57)$$

A resistência de projeto do pilar misto a compressão simples é dada por:

$$P_{Rd} = \phi_c P_n \quad \text{sendo} \quad \phi_c = 0.75 \quad (6.58)$$

Os parâmetros não discriminados, como, por exemplo, os módulos de elasticidade do perfil, armaduras e concreto ( $E_a, E_s, E_c$ ) são calculados da mesma forma que no AISC (1999).

### 6.2.3.2 – Flexão Composta

As especificações da norma não fornecem fórmulas para a verificação da flexão composta em pilares mistos. Os comentários da norma, no entanto, sugerem três métodos de verificação:

- Utilização das equações de interação para pilares metálicos, procedimento, este, similar ao feito pela AISC (1999) e normalmente conservador, principalmente quando o concreto tem uma grande parcela na resistência do elemento misto;
- Avaliação da resistência a partir da construção de uma curva de interação aproximada ABCDE (Figura 6.5), baseada numa análise rígido-plástica da seção, sendo este um procedimento similar ao adotado pelo Eurocode 4, mas não descrito de forma clara na norma;
- Avaliação da resistência a partir da construção de uma curva de interação aproximada  $A_d C_d B_d$ , determinada a partir dos pontos A, C e B (Figura 6.5). O ponto A corresponde à resistência axial da seção (equação 6.52). Determinando-se os efeitos da flambagem global e aplicando-se o coeficiente de segurança a compressão ( $\phi_c$ ) chega-se ao ponto  $A_d$ . O ponto B corresponde a resistência nominal ao momento fletor ( $M_n$ ) da seção transversal. Aplicando-se o coeficiente de segurança a flexão ( $\phi_b$ ) chega-se ao ponto  $B_d$ . No ponto C, a seção resiste ao mesmo momento suportado no ponto B porém, com a existência de um esforço axial de compressão. O ponto C deve ser ajustado para baixo, pelo mesmo fator de redução entre os pontos A e  $A_d$ , e

ajustado para a esquerda multiplicando-se seu valor pelo coeficiente  $\phi_b$ . A partir da curva  $A_d C_d B_d$  encontram-se as seguintes equações de interação:

$$\frac{M_{x,Sd}}{\phi_b M_{nx}} + \frac{M_{y,Sd}}{\phi_b M_{ny}} \leq 1.0 \quad \text{se } N_{Sd} < N_{Cd} \quad (6.59)$$

$$\frac{N_{Sd} - N_{Cd}}{N_{Rd} - N_{Cd}} + \frac{M_{x,Sd}}{\phi_b M_{nx}} + \frac{M_{y,Sd}}{\phi_b M_{ny}} \leq 1.0 \quad \text{se } N_{Sd} \geq N_{Cd}$$

Nestas equações,  $N_{Cd}$  é o esforço normal correspondente ao ponto  $C_d$  (Figura 6.5) e os parâmetros  $(N_{Sd}, N_{Rd}, M_{Sd})$  foram definidos anteriormente. Na verificação da flexão composta oblíqua,  $N_{Cd}$  pode assumir diferentes valores quando se considera a flexão em torno de diferentes eixos ( $N_{Cdx}$  e  $N_{Cdy}$ ). Neste caso o menor dos dois valores deve ser utilizado nas equações de interação (6.59).

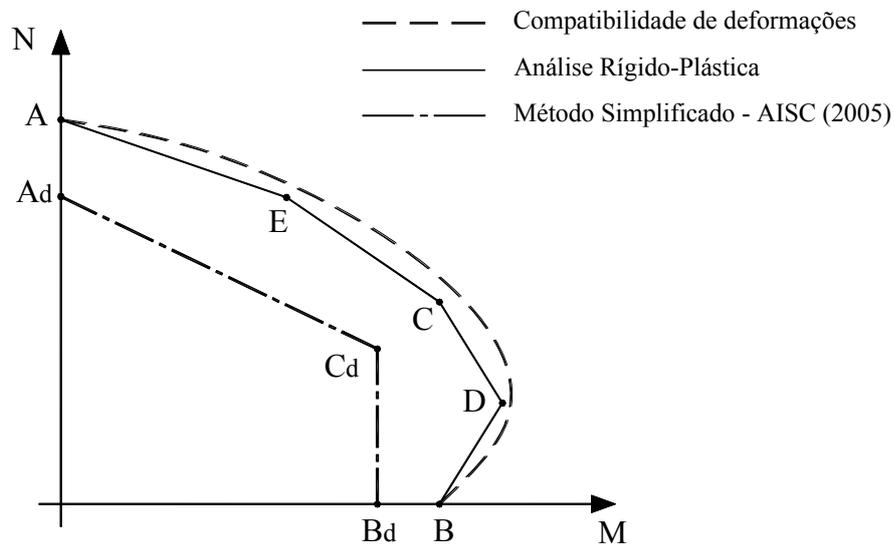


Figura 6.5 – Curva de interação simplificada – AISC (2005).

A norma ainda permite que as curvas de interação possam ser obtidas considerando-se a compatibilidade das deformações, sendo este um procedimento similar ao adotado pelo ACI 318.

A resistência nominal ao momento fletor ( $M_n$ ) da seção transversal mista pode ser calculada por quatro métodos distintos:

- Considerando uma distribuição elástica das tensões na seção mista, limitada ao início do escoamento da parte tracionada do perfil, sem escorregamento entre os materiais e com  $\phi_b = 0.90$  ;
- Considerando somente o momento resistente plástico do perfil metálico e com  $\phi_b = 0.90$  ;
- Considerando uma distribuição rígido-plástica de tensões na seção mista, similar ao método simplificado do Eurocode 4 (1994);
- Considerando a compatibilidade de deformações, em que se assume uma distribuição linear de deformações ao longo da seção com o máximo encurtamento do concreto igual a 0.003.

Os dois últimos métodos só são permitidos caso sejam utilizados conectores de cisalhamento e também deve-se utilizar  $\phi_b = 0.85$  .

### 6.2.3.3 – Restrições da Norma

- São permitidas somente seções tubulares preenchidas e seções totalmente envolvidas;
- $21\text{ MPa} \leq f_{ck} \leq 70\text{ MPa}$  (concretos de densidade normal);
- $21\text{ MPa} \leq f_{ck} \leq 42\text{ MPa}$  (concretos leves);
- $f_y \leq 525\text{ MPa}$  ;
- O cobrimento mínimo de qualquer armadura é de 38 mm;

- $\frac{A_a}{A_a + A_s + A_c} \geq 0.01;$

- Para seções revestidas:

$$\frac{A_s}{A_a + A_s + A_c} \geq 0.004 \quad (\text{mínimo de quatro barras});$$

- Para tubo retangular preenchido:

$$\frac{b}{t} \leq 2.26 \sqrt{\frac{E_a}{f_y}}, \quad \text{sendo } b \text{ a largura externa da parede e } t \text{ sua espessura};$$

- Para tubo circular preenchido:

$$\frac{D}{t} \leq 0.15 \frac{E_a}{f_y}, \quad \text{sendo } D \text{ o diâmetro externo do tubo e } t \text{ sua espessura};$$

- A área mínima da armadura transversal deve ser de  $6\text{mm}^2$  para cada milímetro de espaçamento entre os estribos;
- O espaçamento entre estribos deve ser menor do que 48 vezes o seu diâmetro, menor que 16 vezes o diâmetro da armadura longitudinal e menor do que a metade da menor dimensão da seção transversal mista. Demais restrições como, por exemplo, o cálculo dos comprimentos de ancoragem das barras, devem seguir as recomendações do ACI 318.

Dentre as restrições, três devem ser destacadas: 1) O aumento dos limites máximos de resistência dos materiais em relação à versão anterior da norma; 2) O aumento das relações largura espessura das chapas em relação ao AISC (1999) e Eurocode 4 (1994), sendo estes da ordem de 45% e 30% para tubos circulares e retangulares preenchidos, respectivamente; 3) A não existência de um limite máximo de esbeltez do pilar, embora o AISC recomende que este índice não seja maior que 200.

## 6.2.4 – PROJETO DE REVISÃO NBR 8800 (2003)

O projeto de revisão da NBR 8800 (2003) considera o dimensionamento de pilares mistos, atualmente feito pela NBR 14323 (1999), que também está em processo de revisão. O método de dimensionamento apresentado é baseado nos procedimentos adotados pelo Eurocode 4 (1994) e pelo AISC-LRFD (1999). As principais diferenças são listadas a seguir.

### 6.2.4.1 – Compressão Simples

O cálculo de pilares mistos submetidos à compressão simples é baseado no Eurocode 4 (1994), com as seguintes diferenças:

- Alteração do coeficiente de segurança do concreto:

$$\gamma_c = 1.40.$$

- Alteração no módulo de elasticidade longitudinal do aço e do concreto:

$$E_a = E_s = 205000 \text{ MPa}.$$

$$E_c = 42\rho_c^{1.5}\sqrt{f_{ck}}, \text{ com } f_{ck} \text{ e } E_c \text{ em MPa e } \rho_c \text{ em } \text{kN/m}^3.$$

### 6.2.4.2 – Flexão Composta

Neste caso, a NBR 8800 (2003) utiliza as equações de interação apresentadas pelo AISC (1999), modificando alguns parâmetros, de acordo com o Eurocode 4 (1994), listados a seguir:

- As parcelas  $\phi_b M_{x,pl}$  e  $\phi_b M_{y,pl}$  das equações (6.46a) e (6.46b) são substituídas, respectivamente, por  $M_{x,pl,Rd}$  e  $M_{y,pl,Rd}$ , sendo estes últimos dados pela equação (6.20).

- A parcela  $N_{Rd}$ , das equações 6.46a e 6.46b, é calculada de acordo com o item 6.2.4.1.
- O cálculo do fator de amplificação dos momentos ( $B_1$ ) é feito de acordo com o AISC (1999), sendo que a carga crítica de flambagem ( $N_{cr}$ ) deve ser calculada com as equações 6.7 e 6.8.

### 6.2.4.3 – Restrições da Norma

As restrições impostas pela NBR 8800 (2003) são praticamente as mesmas impostas pelo Eurocode 4 (1994). As principais diferenças são:

- $10 \text{ MPa} \leq f_{ck} \leq 50 \text{ MPa}$  ;
- Para seções I parcialmente envolvidas:

$$\frac{b_f}{t_f} \leq 1.47 \sqrt{\frac{E_a}{f_y}}$$

- Sendo  $b_f$  a largura da mesa,  $t_f$  sua espessura;
- Para tubos retangulares preenchidos:

$$\frac{b}{t} \leq 1.76 \sqrt{\frac{E_a}{f_y}}$$

Sendo  $b$  a largura externa da parede,  $t$  sua espessura;

- Para tubos circulares preenchidos:

$$\frac{D}{t} \leq \frac{E_a}{10 f_y}$$

Sendo  $D$  o diâmetro externo do tubo,  $t$  sua espessura;

- É obrigatória a utilização de armaduras em seções I revestidas visando garantir a integridade do concreto. Em qualquer caso de utilização de armaduras, características como o espaçamento e o diâmetro das armaduras devem seguir as recomendações da NBR 6118 (2001).

### 6.3 – AVALIAÇÃO DE NORMAS

Neste item faz-se uma avaliação, através de exemplos, dos procedimentos de cálculos descritos anteriormente. Para isto foi criado um programa computacional no qual as prescrições das normas foram implementadas utilizando-se a linguagem C++.

Como parâmetro de referência foram utilizadas as análises realizadas no programa FEMOOP, seguindo as formulações apresentadas no capítulo 4. Considerando o trabalho realizado por Caldas (2004) e os exemplos apresentados no capítulo 5, bons resultados foram obtidos nas comparações entre as análises do FEMOOP e diferentes resultados experimentais, justificando a utilização das análises do FEMOOP como parâmetro de referência.

Foram considerados dois tipos de seção transversal (Figura 6.6), quatro diferentes comprimentos de flambagem, três diferentes espessuras do perfil metálico e dois tipos de solicitação (compressão simples e flexão composta reta). Estes dados encontram-se, de forma resumida, na tabela 6.2. Os comprimentos de flambagem e as espessuras dos perfis foram escolhidos de forma a representar pilares curtos, medianamente esbeltos e esbeltos, bem como diferentes contribuições do aço na resistência do pilar. Para isto foram tomados como referências a esbeltez relativa do pilar ( $\bar{\lambda}$ ) e a razão de contribuição do perfil ( $\delta$ ), dados pelo Eurocode 4 (1994) e descritos pelas expressões (6.6) e (6.14). Os intervalos de variação destes parâmetros, para os pilares analisados, encontram-se na tabela 6.3.

Todos os pilares foram calculados como bi-rotulados, fazendo parte de uma estrutura indeslocável e a fluência do concreto foi desprezada. Nas análises realizadas no FEMOOP foi considerada uma imperfeição geométrica inicial para cada pilar, na forma de uma senóide, com um valor máximo de  $L / 1000$  no meio do pilar, sendo  $L$  seu comprimento, e o efeito do confinamento do concreto foi desprezado. Os coeficientes de segurança foram tomados com valores unitários e adotou-se  $f_{ck} = 25$  MPa e  $f_y = 250$  MPa para o concreto e aço, respectivamente.

No cálculo da flexão composta, considerando o AISC (2005), utilizou-se a curva de interação simplificada  $A_d C_d B_d$  (equações 6.59), e o momento resistente nominal ( $M_n$ ) foi calculado considerando uma distribuição rígido plástica de tensões na seção transversal mista. Na montagem da curva de interação, considerando o Eurocode 4 (1994), foi utilizada a curva simplificada ABCDE, para seções circulares preenchidas e a curva ABCD para seções I revestidas. Os resultados estão agrupados de acordo com o tipo de solicitação e são listados a seguir (Tabelas 6.4 a 6.13).

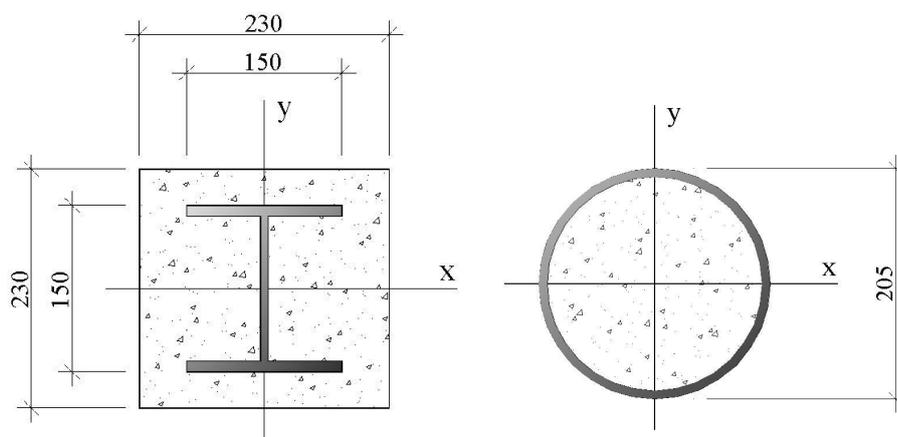


Figura 6.6 – Seções transversais dos pilares analisados.

Tabela 6.2 – Dados das análises.

Seção Transversal	$e^{(a)}$ (mm)	$KL^{(b)}$ (m)	Comp. Simples	Flexão Composta Reta excentricidade (mm) <sup>(c)</sup>
Circular Preenchida	2.65	1.5	$e_b = e_t = 0$	$e_b = e_t = 20$
	5.75			$e_b = e_t = 100$
	12.7			$e_b = -e_t = 20$
I Revestida	5.25	6.0		$e_b = -e_t = 20$
	12.5	8.0		$e_b = -e_t = 100$
	27.5			

(a) espessura do tubo ou chapas (b) comprimento de flambagem

(c)  $e_b, e_t$  (excentricidades do carregamento na base e no topo do pilar)

Tabela 6.3 – Esbeltez relativa e razão de contribuição do aço para análises.

Seção Circular Preenchida					Seção I Revestida				
$e$ (mm)	$\delta^{(a)}$		$KL$ (m)	$\bar{\lambda}^{(b)}$	$e$ (mm)	$\delta^{(a)}$		$KL$ (m)	$\bar{\lambda}^{(b)}$
2.65	0.35		1.5	0.26 - 0.29	5.25	0.35		1.5	0.28 - 0.33
5.75	0.55		4.0	0.70 - 0.79	12.5	0.57		4.0	0.75 - 0.88
12.7	0.75		6.0	1.05 - 1.17	27.5	0.75		6.0	1.12 - 1.32
			8.0	1.40 - 1.56				8.0	1.50 - 1.76

(a) razão de contribuição do aço ( $0.20 < \delta < 0.90$ ) (b) esbeltez relativa do pilar ( $\lambda < 2.0$ ) - Ver expressões (6.6) e (6.14)

### 6.3.1 – Análises - Compressão Simples

Os resultados mostrados na tabela 6.4 sugerem que, de uma forma geral, para seções circulares preenchidas, todas as normas analisadas apresentam bons resultados. Para pilares curtos (L=1.5m), a NBR8800 e o Eurocode 4 fornecem maiores resistências devido à consideração do aumento da resistência do concreto pelo seu confinamento. O AISC (1999) fornece melhores respostas para maiores razões de contribuição do perfil metálico.

Tabela 6.4 – Seção Circular Preenchida – Resistência à Compressão Simples.

Espessura do tubo: 2,65 mm									
L (m)	FEMOOP Normal (kN)	NBR8800 Normal (kN)	$\frac{\text{NBR8800}}{\text{FEMOOP}}$	EC4 Normal (kN)	$\frac{\text{EC4}}{\text{FEMOOP}}$	AISC 1999 Normal (kN)	$\frac{\text{AISC1999}}{\text{FEMOOP}}$	AISC 2005 Normal (kN)	$\frac{\text{AISC2005}}{\text{FEMOOP}}$
1,5	1130	1217	1,08	1230	1,09	1053	0,93	1124	0,99
4,0	920	946	1,03	973	1,06	871	0,95	902	0,98
6,0	640	619	0,97	663	1,04	660	1,03	656	1,03
8,0	410	387	0,94	421	1,03	448	1,09	419	1,02
		Média:	1,00		1,05		1,00		1,01
		Desv.Padrão:	0,06		0,03		0,08		0,02

Espessura do tubo: 5,75 mm									
L (m)	FEMOOP Normal (kN)	NBR8800 Normal (kN)	$\frac{\text{NBR8800}}{\text{FEMOOP}}$	EC4 Normal (kN)	$\frac{\text{EC4}}{\text{FEMOOP}}$	AISC 1999 Normal (kN)	$\frac{\text{AISC1999}}{\text{FEMOOP}}$	AISC 2005 Normal (kN)	$\frac{\text{AISC2005}}{\text{FEMOOP}}$
1,5	1550	1718	1,11	1734	1,12	1481	0,96	1550	1,00
4,0	1320	1344	1,02	1364	1,03	1242	0,94	1286	0,97
6,0	970	943	0,97	983	1,01	960	0,99	979	1,01
8,0	630	606	0,96	640	1,02	670	1,06	669	1,06
		Média:	1,02		1,05		0,99		1,01
		Desv.Padrão:	0,07		0,05		0,05		0,04

Espessura do tubo: 12,7 mm									
L (m)	FEMOOP Normal (kN)	NBR8800 Normal (kN)	$\frac{\text{NBR8800}}{\text{FEMOOP}}$	EC4 Normal (kN)	$\frac{\text{EC4}}{\text{FEMOOP}}$	AISC 1999 Normal (kN)	$\frac{\text{AISC1999}}{\text{FEMOOP}}$	AISC 2005 Normal (kN)	$\frac{\text{AISC2005}}{\text{FEMOOP}}$
1,5	2420	2741	1,13	2760	1,14	2388	0,99	2448	1,01
4,0	2140	2143	1,00	2161	1,01	2010	0,94	2049	0,96
6,0	1610	1565	0,97	1605	1,00	1563	0,97	1583	0,98
8,0	1060	1026	0,97	1062	1,00	1100	1,04	1102	1,04
		Média:	1,02		1,04		0,98		1,00
		Desv.Padrão:	0,08		0,07		0,04		0,04

Considerando seções I revestidas (Tabela 6.5), o Eurocode 4 tem a menor dispersão de resultados e os seus valores médios de resistência são os mais próximos das análises do FEMOOP, com um erro médio máximo de 16% a favor da segurança. Já a NBR8800 e o AISC (2005) têm, respectivamente, 22% e 44% de erro médio máximo a favor da segurança. O AISC (2005) é a norma mais conservadora, principalmente para baixas razões de contribuição do aço e grande esbeltez do pilar. Para a NBR8800, Eurocode 4 e AISC (2005) melhores respostas são obtidas para maiores razões de contribuição do aço. O AISC (1999) está contra a segurança para maiores taxas de contribuição do aço associadas a pilares esbeltos.

Tabela 6.5 – Seção I Revestida – Resistência à Compressão Simples.

Espessura das chapas: 5,25 mm

L (m)	FEMOOP Normal (kN)	NBR8800 Normal (kN)	$\frac{\text{NBR8800}}{\text{FEMOOP}}$	EC4 Normal (kN)	$\frac{\text{EC4}}{\text{FEMOOP}}$	AISC 1999 Normal (kN)	$\frac{\text{AISC1999}}{\text{FEMOOP}}$	AISC 2005 Normal (kN)	$\frac{\text{AISC2005}}{\text{FEMOOP}}$
1,5	1780	1563	0,88	1584	0,89	1287	0,72	1503	0,84
4,0	1420	1077	0,76	1148	0,81	1023	0,72	845	0,60
6,0	970	698	0,72	781	0,81	733	0,76	402	0,41
8,0	610	455	0,75	522	0,86	460	0,75	226	0,37
		Média:	0,78		0,84		0,74		0,56
		Desv.Padrão:	0,07		0,04		0,02		0,22

Espessura das chapas: 12,5 mm

L (m)	FEMOOP Normal (kN)	NBR8800 Normal (kN)	$\frac{\text{NBR8800}}{\text{FEMOOP}}$	EC4 Normal (kN)	$\frac{\text{EC4}}{\text{FEMOOP}}$	AISC 1999 Normal (kN)	$\frac{\text{AISC1999}}{\text{FEMOOP}}$	AISC 2005 Normal (kN)	$\frac{\text{AISC2005}}{\text{FEMOOP}}$
1,5	2420	2182	0,90	2210	0,91	1979	0,82	2179	0,90
4,0	1870	1424	0,76	1517	0,81	1633	0,87	1413	0,76
6,0	1170	882	0,75	978	0,84	1234	1,05	757	0,65
8,0	700	564	0,81	636	0,91	834	1,19	426	0,61
		Média:	0,81		0,87		0,98		0,73
		Desv.Padrão:	0,07		0,05		0,17		0,13

Espessura das chapas: 27,5 mm

L (m)	FEMOOP Normal (kN)	NBR8800 Normal (kN)	$\frac{\text{NBR8800}}{\text{FEMOOP}}$	EC4 Normal (kN)	$\frac{\text{EC4}}{\text{FEMOOP}}$	AISC 1999 Normal (kN)	$\frac{\text{AISC1999}}{\text{FEMOOP}}$	AISC 2005 Normal (kN)	$\frac{\text{AISC2005}}{\text{FEMOOP}}$
1,5	3620	3335	0,92	3370	0,93	3253	0,90	3374	0,93
4,0	2690	2100	0,78	2210	0,82	2739	1,02	2234	0,83
6,0	1530	1268	0,83	1374	0,90	2133	1,39	1228	0,80
8,0	880	802	0,91	879	1,00	1503	1,71	691	0,79
		Média:	0,86		0,91		1,25		0,84
		Desv.Padrão:	0,07		0,07		0,37		0,07

### 6.3.2 – Análises - Flexão Composta Reta

Para seções circulares preenchidas, com excentricidade igual a um décimo do seu diâmetro e com curvatura simples (Tabela 6.6), o Eurocode 4 apresenta ótimos resultados. A NBR8800 e o AISC (1999) apresentam, respectivamente, 13% e 17% como erros médios máximos a favor da segurança. O AISC (2005) apresenta-se com um erro médio máximo de 9% contra a segurança. Novamente obtêm-se melhores respostas para taxas mais altas de contribuição do aço.

Tabela 6.6 - Seção Circular Preenchida – Flexão Composta Reta ( $e_b=e_t=20\text{mm}$ )

Espessura do tubo: 2,65 mm									
L (m)	FEMOOP Normal (kN)	NBR8800 Normal (kN)	$\frac{\text{NBR8800}}{\text{FEMOOP}}$	EC4 Normal (kN)	$\frac{\text{EC4}}{\text{FEMOOP}}$	AISC 1999 Normal (kN)	$\frac{\text{AISC1999}}{\text{FEMOOP}}$	AISC 2005 Normal (kN)	$\frac{\text{AISC2005}}{\text{FEMOOP}}$
1,5	860	710	0,83	948	1,10	613	0,71	891	1,04
4,0	630	551	0,87	642	1,02	497	0,79	690	1,10
6,0	440	382	0,87	421	0,96	379	0,86	490	1,11
8,0	290	261	0,90	263	0,91	275	0,95	325	1,12
		Média:	0,87		1,00		0,83		1,09
		Desv.Padrão:	0,03		0,08		0,10		0,04

Espessura do tubo: 5,75 mm									
L (m)	FEMOOP Normal (kN)	NBR8800 Normal (kN)	$\frac{\text{NBR8800}}{\text{FEMOOP}}$	EC4 Normal (kN)	$\frac{\text{EC4}}{\text{FEMOOP}}$	AISC 1999 Normal (kN)	$\frac{\text{AISC1999}}{\text{FEMOOP}}$	AISC 2005 Normal (kN)	$\frac{\text{AISC2005}}{\text{FEMOOP}}$
1,5	1200	1102	0,92	1296	1,08	999	0,83	1208	1,01
4,0	920	883	0,96	975	1,06	814	0,89	971	1,06
6,0	670	629	0,94	667	1,00	622	0,93	721	1,08
8,0	470	431	0,92	438	0,93	449	0,95	502	1,07
		Média:	0,93		1,02		0,90		1,05
		Desv.Padrão:	0,02		0,07		0,05		0,03

Espessura do tubo: 12,7 mm									
L (m)	FEMOOP Normal (kN)	NBR8800 Normal (kN)	$\frac{\text{NBR8800}}{\text{FEMOOP}}$	EC4 Normal (kN)	$\frac{\text{EC4}}{\text{FEMOOP}}$	AISC 1999 Normal (kN)	$\frac{\text{AISC1999}}{\text{FEMOOP}}$	AISC 2005 Normal (kN)	$\frac{\text{AISC2005}}{\text{FEMOOP}}$
1,5	1890	1835	0,97	2007	1,06	1732	0,92	1867	0,99
4,0	1480	1499	1,01	1602	1,08	1416	0,96	1517	1,02
6,0	1120	1092	0,97	1089	0,97	1079	0,96	1143	1,02
8,0	810	752	0,93	758	0,94	774	0,96	809	1,00
		Média:	0,97		1,01		0,95		1,01
		Desv.Padrão:	0,03		0,07		0,02		0,02

No caso de curvatura reversa (Tabela 6.7), as normas são mais conservadoras. O Eurocode 4, NBR8800, AISC (1999) e AISC (2005) têm, respectivamente, 6%, 27%, 30% e 11% como erros médios máximos a favor da segurança. É importante destacar a pouca variação nas análises pelo Eurocode 4 em relação a diferentes razões de contribuição do aço e esbeltez do pilar.

Tabela 6.7 - Seção Circular Preenchida – Flexão Composta Reta ( $e_b = -e_t = 20\text{mm}$ )

Espessura do tubo: 2,65 mm

L (m)	FEMOOP Normal (kN)	NBR8800 Normal (kN)	$\frac{\text{NBR8800}}{\text{FEMOOP}}$	EC4 Normal (kN)	$\frac{\text{EC4}}{\text{FEMOOP}}$	AISC 1999 Normal (kN)	$\frac{\text{AISC1999}}{\text{FEMOOP}}$	AISC 2005 Normal (kN)	$\frac{\text{AISC2005}}{\text{FEMOOP}}$
1,5	940	726	0,77	953	1,01	624	0,66	903	0,96
4,0	850	631	0,74	808	0,95	555	0,65	754	0,89
6,0	630	434	0,69	556	0,88	440	0,70	533	0,85
8,0	400	289	0,72	359	0,90	310	0,78	348	0,87
Média:			0,73		0,94		0,70		0,89
Desv.Padrão:			0,04		0,06		0,06		0,05

Espessura do tubo: 5,75 mm

L (m)	FEMOOP Normal (kN)	NBR8800 Normal (kN)	$\frac{\text{NBR8800}}{\text{FEMOOP}}$	EC4 Normal (kN)	$\frac{\text{EC4}}{\text{FEMOOP}}$	AISC 1999 Normal (kN)	$\frac{\text{AISC1999}}{\text{FEMOOP}}$	AISC 2005 Normal (kN)	$\frac{\text{AISC2005}}{\text{FEMOOP}}$
1,5	1300	1121	0,86	1300	1,00	1014	0,78	1223	0,94
4,0	1200	986	0,82	1152	0,96	895	0,75	1052	0,88
6,0	940	705	0,75	848	0,90	703	0,75	790	0,84
8,0	630	472	0,75	555	0,88	497	0,79	542	0,86
Média:			0,80		0,94		0,77		0,88
Desv.Padrão:			0,06		0,05		0,02		0,04

Espessura do tubo: 12,7 mm

L (m)	FEMOOP Normal (kN)	NBR8800 Normal (kN)	$\frac{\text{NBR8800}}{\text{FEMOOP}}$	EC4 Normal (kN)	$\frac{\text{EC4}}{\text{FEMOOP}}$	AISC 1999 Normal (kN)	$\frac{\text{AISC1999}}{\text{FEMOOP}}$	AISC 2005 Normal (kN)	$\frac{\text{AISC2005}}{\text{FEMOOP}}$
1,5	2050	1862	0,91	2012	0,98	1755	0,86	1890	0,92
4,0	1920	1648	0,86	1816	0,95	1542	0,80	1644	0,86
6,0	1550	1212	0,78	1380	0,89	1202	0,78	1259	0,81
8,0	1060	819	0,77	932	0,88	849	0,80	878	0,83
Média:			0,83		0,92		0,81		0,85
Desv.Padrão:			0,06		0,05		0,03		0,05

Aumentando-se a excentricidade do carregamento para a metade do diâmetro do tubo e com curvatura simples (Tabela 6.8), o Eurocode 4, a NBR8800 e o AISC (1999) apresentam, respectivamente, 5%, 9% e 18% como erros médios máximos a favor da segurança. O AISC (2005) tem um erro médio máximo de 16% contra a segurança. O comportamento das normas é similar ao carregamento com uma excentricidade menor, porém com uma maior dispersão de resultados. Para curvatura reversa (Tabela 6.9), o Eurocode 4, NBR8800, AISC (1999) e AISC (2005) têm, respectivamente, 13%, 40%, 47% e 23% como erros médios máximos a favor da segurança.

Tabela 6.8 - Seção Circular Preenchida – Flexão Composta Reta ( $e_b=e_t=100\text{mm}$ )

Espessura do tubo: 2,65 mm									
L (m)	FEMOOP Normal (kN)	NBR8800 Normal (kN)	$\frac{\text{NBR8800}}{\text{FEMOOP}}$	EC4 Normal (kN)	$\frac{\text{EC4}}{\text{FEMOOP}}$	AISC 1999 Normal (kN)	$\frac{\text{AISC1999}}{\text{FEMOOP}}$	AISC 2005 Normal (kN)	$\frac{\text{AISC2005}}{\text{FEMOOP}}$
1,5	370	282	0,76	386	1,04	234	0,63	324	0,88
4,0	270	244	0,90	248	0,92	209	0,77	283	1,05
6,0	200	196	0,98	183	0,92	179	0,89	239	1,19
8,0	150	152	1,02	137	0,92	147	0,98	196	1,31
		Média:	0,91		0,95		0,82		1,11
		Desv.Padrão:	0,11		0,06		0,15		0,19

Espessura do tubo: 5,75 mm									
L (m)	FEMOOP Normal (kN)	NBR8800 Normal (kN)	$\frac{\text{NBR8800}}{\text{FEMOOP}}$	EC4 Normal (kN)	$\frac{\text{EC4}}{\text{FEMOOP}}$	AISC 1999 Normal (kN)	$\frac{\text{AISC1999}}{\text{FEMOOP}}$	AISC 2005 Normal (kN)	$\frac{\text{AISC2005}}{\text{FEMOOP}}$
1,5	590	498	0,84	605	1,03	442	0,75	633	1,07
4,0	460	429	0,93	442	0,96	387	0,84	538	1,17
6,0	360	344	0,96	334	0,93	325	0,90	437	1,21
8,0	280	264	0,94	246	0,88	261	0,93	332	1,19
		Média:	0,92		0,95		0,86		1,16
		Desv.Padrão:	0,05		0,06		0,08		0,06

Espessura do tubo: 12,7 mm									
L (m)	FEMOOP Normal (kN)	NBR8800 Normal (kN)	$\frac{\text{NBR8800}}{\text{FEMOOP}}$	EC4 Normal (kN)	$\frac{\text{EC4}}{\text{FEMOOP}}$	AISC 1999 Normal (kN)	$\frac{\text{AISC1999}}{\text{FEMOOP}}$	AISC 2005 Normal (kN)	$\frac{\text{AISC2005}}{\text{FEMOOP}}$
1,5	980	895	0,91	984	1,00	839	0,86	972	0,99
4,0	780	771	0,99	761	0,98	726	0,93	828	1,06
6,0	620	620	1,00	591	0,95	600	0,97	672	1,08
8,0	490	474	0,97	447	0,91	474	0,97	520	1,06
		Média:	0,97		0,96		0,93		1,05
		Desv.Padrão:	0,04		0,04		0,05		0,04

Tabela 6.9 - Seção Circular Preenchida – Flexão Composta Reta ( $e_b = -e_t = 100\text{mm}$ )

Espessura do tubo: 2,65 mm

L (m)	FEMOOP Normal (kN)	NBR8800 Normal (kN)	$\frac{\text{NBR8800}}{\text{FEMOOP}}$	EC4 Normal (kN)	$\frac{\text{EC4}}{\text{FEMOOP}}$	AISC 1999 Normal (kN)	$\frac{\text{AISC1999}}{\text{FEMOOP}}$	AISC 2005 Normal (kN)	$\frac{\text{AISC2005}}{\text{FEMOOP}}$
1,5	450	287	0,64	393	0,87	237	0,53	332	0,74
4,0	430	271	0,63	393	0,91	226	0,53	332	0,77
6,0	410	235	0,57	359	0,88	209	0,51	332	0,81
8,0	330	189	0,57	265	0,80	181	0,55	256	0,78
		Média:	0,60		0,87		0,53		0,77
		Desv.Padrão:	0,04		0,05		0,02		0,03

Espessura do tubo: 5,75 mm

L (m)	FEMOOP Normal (kN)	NBR8800 Normal (kN)	$\frac{\text{NBR8800}}{\text{FEMOOP}}$	EC4 Normal (kN)	$\frac{\text{EC4}}{\text{FEMOOP}}$	AISC 1999 Normal (kN)	$\frac{\text{AISC1999}}{\text{FEMOOP}}$	AISC 2005 Normal (kN)	$\frac{\text{AISC2005}}{\text{FEMOOP}}$
1,5	670	507	0,76	611	0,91	448	0,67	652	0,97
4,0	660	478	0,72	611	0,93	423	0,64	609	0,92
6,0	640	415	0,65	557	0,87	385	0,60	531	0,83
8,0	520	322	0,62	430	0,83	323	0,62	392	0,75
		Média:	0,69		0,88		0,63		0,87
		Desv.Padrão:	0,06		0,04		0,03		0,10

Espessura do tubo: 12,7 mm

L (m)	FEMOOP Normal (kN)	NBR8800 Normal (kN)	$\frac{\text{NBR8800}}{\text{FEMOOP}}$	EC4 Normal (kN)	$\frac{\text{EC4}}{\text{FEMOOP}}$	AISC 1999 Normal (kN)	$\frac{\text{AISC1999}}{\text{FEMOOP}}$	AISC 2005 Normal (kN)	$\frac{\text{AISC2005}}{\text{FEMOOP}}$
1,5	1110	910	0,82	992	0,89	852	0,77	989	0,89
4,0	1090	856	0,79	992	0,91	798	0,73	917	0,84
6,0	1050	746	0,71	918	0,87	717	0,68	810	0,77
8,0	880	571	0,65	731	0,83	577	0,66	621	0,71
		Média:	0,74		0,88		0,71		0,80
		Desv.Padrão:	0,08		0,03		0,05		0,08

Considerando as seções I revestidas, submetidas a um carregamento excêntrico ( $e=20\text{mm}$ ) causando flexão em torno do eixo de maior inércia e com curvatura simples (Tabela 6.10), têm-se os seguintes erros médios mínimos e máximos: 25% e 32% (NBR8800), 8% e 10% (Eurocode 4), 3% e 36% (AISC (1999)) e 25% e 39% (AISC (2005)), a favor da segurança. No caso de curvatura dupla (Tabela 6.11), estes valores passam a ser: 38% e 45% (NBR8800), 17% e 19% (Eurocode 4), 19% e 47% (AISC (1999)) e 37% e 50% (AISC (2005)), a favor da segurança.

Tabela 6.10 - Seção I Revestida – Flexão Composta Reta ( $e_b=e_t=20\text{mm}$ )

Espessura das chapas: 5,25 mm

L (m)	FEMOOP Normal (kN)	NBR8800 Normal (kN)	$\frac{\text{NBR8800}}{\text{FEMOOP}}$	EC4 Normal (kN)	$\frac{\text{EC4}}{\text{FEMOOP}}$	AISC 1999 Normal (kN)	$\frac{\text{AISC1999}}{\text{FEMOOP}}$	AISC 2005 Normal (kN)	$\frac{\text{AISC2005}}{\text{FEMOOP}}$
1,5	1380	960	0,70	1275	0,92	880	0,64	1202	0,87
4,0	1080	705	0,65	958	0,89	677	0,63	699	0,65
6,0	770	495	0,64	669	0,87	484	0,63	362	0,47
8,0	490	348	0,71	458	0,93	326	0,67	213	0,43
Média:			0,68				0,90	0,64	0,61
Desv.Padrão:			0,03				0,03	0,02	0,20

Espessura das chapas: 12,5 mm

L (m)	FEMOOP Normal (kN)	NBR8800 Normal (kN)	$\frac{\text{NBR8800}}{\text{FEMOOP}}$	EC4 Normal (kN)	$\frac{\text{EC4}}{\text{FEMOOP}}$	AISC 1999 Normal (kN)	$\frac{\text{AISC1999}}{\text{FEMOOP}}$	AISC 2005 Normal (kN)	$\frac{\text{AISC2005}}{\text{FEMOOP}}$
1,5	1860	1523	0,82	1752	0,94	1465	0,79	1699	0,91
4,0	1470	1053	0,72	1345	0,91	1171	0,80	1127	0,77
6,0	1080	701	0,65	984	0,91	867	0,80	653	0,60
8,0	720	475	0,66	653	0,91	604	0,84	389	0,54
Média:			0,71				0,92	0,81	0,71
Desv.Padrão:			0,08				0,02	0,02	0,17

Espessura das chapas: 27,5 mm

L (m)	FEMOOP Normal (kN)	NBR8800 Normal (kN)	$\frac{\text{NBR8800}}{\text{FEMOOP}}$	EC4 Normal (kN)	$\frac{\text{EC4}}{\text{FEMOOP}}$	AISC 1999 Normal (kN)	$\frac{\text{AISC1999}}{\text{FEMOOP}}$	AISC 2005 Normal (kN)	$\frac{\text{AISC2005}}{\text{FEMOOP}}$
1,5	2720	2407	0,89	2578	0,95	2410	0,89	2526	0,93
4,0	2120	1601	0,76	1908	0,90	1969	0,93	1703	0,80
6,0	1510	1035	0,69	1357	0,90	1500	0,99	1017	0,67
8,0	1020	691	0,68	942	0,92	1074	1,05	614	0,60
Média:			0,75				0,92	0,97	0,75
Desv.Padrão:			0,10				0,02	0,07	0,14

Tabela 6.11 - Seção I Revestida – Flexão Composta Retra ( $e_b = -e_t = 20\text{mm}$ )

Espessura das chapas: 5,25 mm

L (m)	FEMOOP Normal (kN)	NBR8800 Normal (kN)	$\frac{\text{NBR8800}}{\text{FEMOOP}}$	EC4 Normal (kN)	$\frac{\text{EC4}}{\text{FEMOOP}}$	AISC 1999 Normal (kN)	$\frac{\text{AISC1999}}{\text{FEMOOP}}$	AISC 2005 Normal (kN)	$\frac{\text{AISC2005}}{\text{FEMOOP}}$
1,5	1490	977	0,66	1280	0,86	897	0,60	1225	0,82
4,0	1400	761	0,54	1118	0,80	760	0,54	748	0,53
6,0	1110	550	0,50	848	0,76	541	0,49	376	0,34
8,0	750	380	0,51	602	0,80	356	0,48	218	0,29
		Média:	0,55		0,81		0,53		0,50
		Desv.Padrão:	0,07		0,04		0,06		0,24

Espessura das chapas: 12,5 mm

L (m)	FEMOOP Normal (kN)	NBR8800 Normal (kN)	$\frac{\text{NBR8800}}{\text{FEMOOP}}$	EC4 Normal (kN)	$\frac{\text{EC4}}{\text{FEMOOP}}$	AISC 1999 Normal (kN)	$\frac{\text{AISC1999}}{\text{FEMOOP}}$	AISC 2005 Normal (kN)	$\frac{\text{AISC2005}}{\text{FEMOOP}}$
1,5	2020	1545	0,76	1761	0,87	1485	0,74	1725	0,85
4,0	1910	1123	0,59	1534	0,80	1282	0,67	1207	0,63
6,0	1530	757	0,49	1197	0,78	960	0,63	689	0,45
8,0	990	505	0,51	817	0,82	657	0,66	403	0,41
		Média:	0,59		0,82		0,67		0,59
		Desv.Padrão:	0,12		0,04		0,04		0,20

Espessura das chapas: 27,5 mm

L (m)	FEMOOP Normal (kN)	NBR8800 Normal (kN)	$\frac{\text{NBR8800}}{\text{FEMOOP}}$	EC4 Normal (kN)	$\frac{\text{EC4}}{\text{FEMOOP}}$	AISC 1999 Normal (kN)	$\frac{\text{AISC1999}}{\text{FEMOOP}}$	AISC 2005 Normal (kN)	$\frac{\text{AISC2005}}{\text{FEMOOP}}$
1,5	2970	2445	0,82	2597	0,87	2440	0,82	2571	0,87
4,0	2800	1708	0,61	2234	0,80	2138	0,76	1852	0,66
6,0	2170	1111	0,51	1674	0,77	1664	0,77	1085	0,50
8,0	1320	728	0,55	1131	0,86	1174	0,89	641	0,49
		Média:	0,62		0,83		0,81		0,63
		Desv.Padrão:	0,14		0,05		0,06		0,18

Aumentando-se a excentricidade para 100 mm com curvatura simples (Tabela 6.12) têm-se os seguintes erros médios mínimos e máximos: 16% e 27% (NBR8800), 7% e 14% (Eurocode 4), 1% e 26% (AISC (1999)) e 12% e 25% (AISC (2005)) a favor da segurança. No caso de curvatura dupla (Tabela 6.13), estes valores passam a ser: 37% e 52% (NBR8800), 16% e 21% (Eurocode 4), 24% e 53% (AISC (1999)) e 33% e 48% (AISC (2005))

Tabela 6.12 - Seção I Revestida – Flexão Composta Retas ( $e_b=e_t=100\text{mm}$ )

Espessura das chapas: 5,25 mm

L (m)	FEMOOP Normal (kN)	NBR8800 Normal (kN)	$\frac{\text{NBR8800}}{\text{FEMOOP}}$	EC4 Normal (kN)	$\frac{\text{EC4}}{\text{FEMOOP}}$	AISC 1999 Normal (kN)	$\frac{\text{AISC1999}}{\text{FEMOOP}}$	AISC 2005 Normal (kN)	$\frac{\text{AISC2005}}{\text{FEMOOP}}$
1,5	630	385	0,61	573	0,91	398	0,63	446	0,71
4,0	470	326	0,69	386	0,82	334	0,71	368	0,78
6,0	340	264	0,78	286	0,84	268	0,79	275	0,81
8,0	250	209	0,83	218	0,87	203	0,81	177	0,71
		Média:	0,73		0,86		0,74		0,75
		Desv.Padrão:	0,10		0,04		0,08		0,05

Espessura das chapas: 12,5 mm

L (m)	FEMOOP Normal (kN)	NBR8800 Normal (kN)	$\frac{\text{NBR8800}}{\text{FEMOOP}}$	EC4 Normal (kN)	$\frac{\text{EC4}}{\text{FEMOOP}}$	AISC 1999 Normal (kN)	$\frac{\text{AISC1999}}{\text{FEMOOP}}$	AISC 2005 Normal (kN)	$\frac{\text{AISC2005}}{\text{FEMOOP}}$
1,5	900	701	0,78	865	0,96	732	0,81	905	1,01
4,0	710	560	0,79	644	0,91	620	0,87	684	0,96
6,0	560	428	0,76	503	0,90	500	0,89	458	0,82
8,0	430	322	0,75	368	0,86	384	0,89	305	0,71
		Média:	0,77		0,91		0,87		0,87
		Desv.Padrão:	0,02		0,04		0,04		0,14

Espessura das chapas: 27,5 mm

L (m)	FEMOOP Normal (kN)	NBR8800 Normal (kN)	$\frac{\text{NBR8800}}{\text{FEMOOP}}$	EC4 Normal (kN)	$\frac{\text{EC4}}{\text{FEMOOP}}$	AISC 1999 Normal (kN)	$\frac{\text{AISC1999}}{\text{FEMOOP}}$	AISC 2005 Normal (kN)	$\frac{\text{AISC2005}}{\text{FEMOOP}}$
1,5	1290	1160	0,90	1252	0,97	1201	0,93	1288	1,00
4,0	1030	895	0,87	972	0,94	1035	1,00	979	0,95
6,0	820	661	0,81	753	0,92	851	1,04	677	0,83
8,0	630	487	0,77	560	0,89	669	1,06	460	0,73
		Média:	0,84		0,93		1,01		0,88
		Desv.Padrão:	0,06		0,03		0,06		0,12

Tabela 6.13 - Seção I Revestida – Flexão Composta Reta ( $e_b=-e_t=100\text{mm}$ )

Espessura das chapas: 5,25 mm

L (m)	FEMOOP Normal (kN)	NBR8800 Normal (kN)	$\frac{\text{NBR8800}}{\text{FEMOOP}}$	EC4 Normal (kN)	$\frac{\text{EC4}}{\text{FEMOOP}}$	AISC 1999 Normal (kN)	$\frac{\text{AISC1999}}{\text{FEMOOP}}$	AISC 2005 Normal (kN)	$\frac{\text{AISC2005}}{\text{FEMOOP}}$
1,5	730	390	0,53	578	0,79	405	0,55	462	0,63
4,0	710	351	0,49	578	0,81	375	0,53	462	0,65
6,0	680	298	0,44	544	0,80	327	0,48	308	0,45
8,0	560	243	0,43	422	0,75	181	0,32	192	0,34
		Média:	0,48		0,79		0,47		0,52
		Desv.Padrão:	0,05		0,03		0,10		0,15

Espessura das chapas: 12,5 mm

L (m)	FEMOOP Normal (kN)	NBR8800 Normal (kN)	$\frac{\text{NBR8800}}{\text{FEMOOP}}$	EC4 Normal (kN)	$\frac{\text{EC4}}{\text{FEMOOP}}$	AISC 1999 Normal (kN)	$\frac{\text{AISC1999}}{\text{FEMOOP}}$	AISC 2005 Normal (kN)	$\frac{\text{AISC2005}}{\text{FEMOOP}}$
1,5	1010	712	0,70	875	0,87	744	0,74	940	0,93
4,0	990	607	0,61	875	0,88	689	0,70	763	0,77
6,0	960	481	0,50	788	0,82	607	0,63	520	0,54
8,0	820	368	0,45	621	0,76	461	0,56	339	0,41
		Média:	0,57		0,83		0,66		0,66
		Desv.Padrão:	0,11		0,06		0,08		0,23

Espessura das chapas: 27,5 mm

L (m)	FEMOOP Normal (kN)	NBR8800 Normal (kN)	$\frac{\text{NBR8800}}{\text{FEMOOP}}$	EC4 Normal (kN)	$\frac{\text{EC4}}{\text{FEMOOP}}$	AISC 1999 Normal (kN)	$\frac{\text{AISC1999}}{\text{FEMOOP}}$	AISC 2005 Normal (kN)	$\frac{\text{AISC2005}}{\text{FEMOOP}}$
1,5	1460	1181	0,81	1264	0,87	1220	0,84	1318	0,90
4,0	1440	978	0,68	1264	0,88	1140	0,79	1098	0,76
6,0	1390	749	0,54	1144	0,82	1019	0,73	783	0,56
8,0	1160	557	0,48	904	0,78	808	0,70	521	0,45
		Média:	0,63		0,84		0,76		0,67
		Desv.Padrão:	0,15		0,04		0,06		0,20

### 6.3.3 – Conclusões

As análises, apresentados nas tabelas 6.4 a 6.13, sugerem as seguintes conclusões:

- A resposta das normas melhora com o aumento da razão de contribuição do aço ( $\delta$ ), o que era esperado pois todas baseiam-se nas curvas de flambagem adotadas para pilares puramente metálicos;
- As normas são mais conservadoras quando se tem curvatura dupla na flexão composta reta, o que se justifica pela adoção de métodos aproximados para consideração dos efeitos de segunda ordem ao longo do comprimento do pilar;

- O comportamento de pilares com seções circulares preenchidas é melhor representado do que os com seções I revestidas, o que talvez possa ser justificado pela condição de axissimetria da seção circular;
- Na verificação quanto à compressão simples de pilares com seções circulares preenchidas, todas as normas apresentam resultados similares, com a mesma ordem de grandeza e de dispersão de resultados. Isto não acontece para pilares com seções I revestidas;
- O Eurocode 4, conforme esperado, apresenta os melhores resultados e as menores dispersões das respostas para todas as situações analisadas. Para seções circulares preenchidas, os erros médios estão abaixo de 10%, para quase todos os casos, e seus valores máximo e mínimo são iguais a 13% e 1%, respectivamente. Para seções I revestidas, os valores dos erros médios máximo e mínimo são iguais a 21% e 7%, respectivamente;
- O AISC (1999) forneceu respostas contra a segurança para pilares com seções I revestidas, submetidos a compressão simples, com razões de contribuição do aço ( $\delta$ ) elevadas e esbeltez relativa ( $\bar{\lambda}$ ) alta. Como esperado, as equações de interação do AISC (1999) e da NBR8800, obtidas para análises de pilares metálicos, fornecem valores de resistência conservadores para pilares mistos;
- O AISC (2005) foi mais conservador em relação à verificação da compressão simples de pilares com seções I revestidas chegando a um erro médio máximo de 44%;
- A curva de interação  $A_d C_d B_d$  (Figura 6.5) do AISC (2005) só forneceu bons resultados para pilares com seção circular preenchida, submetidos à flexão composta reta e com pequena excentricidade de carregamento. Para pilares com seção circular, grande excentricidade e curvatura simples, foram obtidos resultados contra a segurança. Nos demais caso de flexão composta reta, exceto para seções circulares com grande excentricidade e curvatura dupla, as curvas de interação do AISC (1999) forneceram resultados melhores que os do AISC (2005). Sugere-se a utilização da curva simplificada ABCDE (Figura 6.5) para uma avaliação mais precisa dos esforços resistentes;
- Os valores dos erros médios calculados pela NBR8800 estão entre os valores do Eurocode 4 e do AISC (1999).



# Conclusões e Sugestões

---

## CAPÍTULO 7

### 7.1 – CONCLUSÕES

Como descrito no capítulo 1, os elementos mistos têm se tornado uma solução estrutural atraente em vários países, apresentando diversas vantagens, descritas ao longo deste trabalho, em relação aos elementos metálicos e de concreto armado. Ainda no capítulo 1 são apresentadas algumas obras expressivas que tomam partido deste tipo de solução estrutural.

No Brasil os elementos mistos ainda têm uma utilização restrita e na maior parte dos casos seu uso é limitado a vigas e lajes. Os pilares mistos são muito pouco utilizados e os seus métodos de análise e dimensionamento são pouco difundidos nos meios técnicos e acadêmicos nacionais. Portanto nota-se a necessidade de maiores estudos e divulgação deste tipo de estrutura no país, sendo este um dos objetivos da dissertação.

No capítulo 2 são apresentadas as principais particularidades inerentes ao comportamento dos elementos mistos. Alguns fenômenos ainda precisam ser avaliados e quantificados de uma forma mais precisa como, por exemplo, os efeitos do carregamento de longa duração e da retração do concreto na seção mista e os efeitos do pré-carregamento do perfil metálico.

Com relação ao tipo de seção transversal, observou-se uma maior eficiência estrutural de pilares formados por seções tubulares circulares preenchidas, por razões como, por exemplo, o confinamento do concreto e a diminuição dos efeitos da retração, dentre outras citadas ao longo da dissertação.

Através de ensaios ficou clara a importância da interação entre o aço e o concreto e da aplicação simultânea do carregamento nos materiais componentes da seção para um comportamento misto adequado.

As formulações desenvolvidas e implementadas neste trabalho apresentam novos desenvolvimentos no tratamento de elementos estruturais mistos e são generalizações das formulações apresentadas por Caldas (2004) e Crisfield (1991). Com relação ao trabalho de Caldas (2004), foi acrescentado o efeito de imperfeições geométricas iniciais, bem como a consideração de seções de diferentes formas e compostas por diferentes materiais. Com relação ao trabalho de Crisfield (1991) foram deduzidas e implementadas novas formulações que ampliam as formulações propostas em seu trabalho e que consideram, além da não linearidade geométrica, a não linearidade física, utilizando elementos finitos corotacionais. Assim é possível o tratamento de elementos estruturais mistos, com seções transversais genéricas e com diferentes materiais, considerando as não linearidades física e geométrica, bem como as imperfeições geométricas iniciais das barras. O empenamento da seção transversal e os efeitos da torção não são considerados mas, considerando-se as características dos pilares e das seções mistas normalmente utilizadas (Figura 2.4), estas hipóteses tornam-se perfeitamente aceitáveis.

A ferramenta computacional implementada, descrita nos capítulos 3 e 4, mostrou-se bastante eficiente na modelagem numérica de pilares mistos. A possibilidade de consideração das imperfeições geométricas iniciais, da utilização de relações constitutivas polinomiais e da representação dos materiais por polígonos permite a flexibilização do modelo computacional, em relação a diferentes tipos de seção transversal e materiais, resultando em uma melhor adequação a realidade física. A análise da seção através da integração analítica das relações tensão deformação dos materiais constitui uma estratégia rápida e eficiente suprimindo algumas deficiências existentes nos modelos de fibras usuais.

Grande parte das análises numéricas de pilares mistos encontradas na literatura adota formulações com elementos finitos sólidos, sendo computacionalmente mais complexas, caras e trabalhosas. A formulação implementada, baseada em elementos de barras, aborda o problema, considerando as não linearidades física e geométrica, de uma forma mais simples porém, rápida e eficiente. O Método dos Elementos

Finitos, combinado com a formulação Lagrangeana Total ou Formulação Corotacional e as técnicas de solução numéricas adotadas, mostrou-se eficiente e sem problemas de convergência. O caráter genérico da formulação permitiu a extensão das análises para elementos de aço e de concreto armado, incluindo-se vigas e pórticos, mantendo-se boas respostas nas análises. Para, principalmente, elementos puramente metálicos, as formulações apresentadas devem utilizadas com critério já que os efeitos do empenamento da seção transversal e da torção não são considerados.

No capítulo 6 foram apresentadas as prescrições de três diferentes normas: Eurocode 4 (1994), AISC-LRFD (1999, 2005) e o projeto de revisão da NBR 8800 (2003) e, posteriormente, foi feita uma avaliação, através de exemplos, das formulações das normas tendo como referência as respostas das análises numéricas realizadas no FEMOOP. Com base nos resultados pode-se afirmar que a resposta das normas melhora com o aumento da contribuição do perfil na resistência do pilar misto e o comportamento de pilares com seções circulares preenchidas é melhor representado do que os com seções I revestidas. O Eurocode 4 (1994) apresentou melhores resultados e menores dispersões de respostas em todos os casos analisados. A curva de interação simplificada  $A_d C_d B_d$ , sugerida nos comentários do AISC (2005), não forneceu, de uma forma geral, bons resultados para os pilares analisados.

## 7.2 – SUGESTÕES

O tema abordado neste trabalho é de grande relevância prática, principalmente quando se considera o campo de aplicação em estruturas no país. Com o intuito de aprimoramento das formulações e desenvolvimento do tema nos meios acadêmicos e profissionais sugerem-se os seguintes pontos a serem considerados em trabalhos futuros:

- Estudo da influência de diferentes relações tensão-deformação no comportamento da estrutura, principalmente para o concreto;
- Inclusão de imperfeições geométricas iniciais nos elementos co-rotacionais implementados;
- Consideração dos efeitos do carregamento de longa duração (fluência);
- Consideração da flambagem local nos perfis metálicos;

- Consideração do empenamento da seção transversal e dos efeitos de torção nas barras;
- Simulação da interação parcial nas estruturas mistas;
- Implementação de elementos co-rotacionais espaciais;
- Implementação de um modelo de fibras para análise da seção;
- Implementação de modelos de plasticidade ou dano que permitam a avaliação do comportamento deste tipo de estrutura sob ações cíclicas;
- Desenvolvimentos de interfaces gráficas interativas, de pré e pós-processamento, para o programa implementado;
- Avaliação numérica do efeito do pré-carregamento no perfil metálico.



# Bibliografia

ACI-318 (1995). *Building Code Requirements for Structural Concrete and Commentary*. American Concrete Institute, Detroit.

ACI-318 (1999). *Building Code Requirements for Structural Concrete and Commentary*. American Concrete Institute, Detroit.

ACI Committee 209 (1992). *Prediction of creep, shrinkage and temperature effects in concrete structures. Designing for effects of creep, shrinkage and temperature in concrete structures*. ACI SP27-3, Detroit, MI, 51-93.

AIJ (1987). *Structural Calculations of Steel Reinforced Concrete Structures*. Architectural Institute of Japan, Tokio.

AISC (1999). *Load and Resistance Factor Design Specification for Steel Buildings*. American Institute of Steel Construction, December, with errata incorporated as of September 4, 2001, Chicago.

AISC (2005). *Specification for Structural Steel Buildings*. American Institute of Steel Construction, March 9, 2005, Chicago.

Alva, G. M. S. (2000). *Sobre O Projeto De Edifícios Em Estrutura Mista Aço-Concreto*. Dissertação de Mestrado, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

AS3600 (1994) *Reinforced concrete structures*. Sydney: Standards Australia.

AS4100 (1998) *Steel structures*. Sydney: Standards Australia.

Banerjee, P. K. (1994). *The Boundary Element Methods in Engineering*, McGraw-Hill, London.

Basu, A. K. & Somerville, W. (1969). *Derivation of formulae for the design of rectangular composite columns*. Proceedings of the Institution of Civil Engineers, London, Supplementary Volume, p. 233 – 280.

Bathe, K. J. (1996). *Finite Element Procedure*. New Jersey. Prentice-Hall.

Beer, G. & Watson, J. O. (1992). *Introduction to Finite and Boundary Element Methods for Engineers*. J. Wiley.

Bergmann, R. & Matsui, C. & Meinsma, C. & Dutta, D. (1995). *Design guide for concrete filled hollow section columns under static and seismic loading*. Construction with hollow steel sections – Design Guide, v. 5. CIDECT.

Bratina, S. & Saje, M. & Planinc, I. (2004). *On materially and geometrically non-linear analysis of reinforced concrete planar frames*. International Journal of Solids and Structures, v. 41, p. 7181 – 7207.

Brebbia, C. A. & Dominguez, J. (1989). *Boundary Elements – An Introductory Course*. McGraw Hill Book Company.

Brebbia, C. A. & Telles, J. C. F. & Wrobel, L. C. (1984). *Boundary Element Techniques*. Springer Verlag, Berlin.

BS 5400 (1979). *Steel, Concrete and Composite Bridges: Part 5: Code of Practice for Design of Composite Bridges*. British Standards Institution, London.

Caldas, R. B. (2004). *Análise Numérica de Pilares Mistos Aço-Concreto*. Dissertação de Mestrado. Departamento de Engenharia Civil, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Escola de Minas, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, Minas Gerais.

Caldas, R. B. e Sousa Jr., J. B. M. (2003). *Superfícies de Interação em Seções Transversais Mistas Aço-Concreto*. Proceedings of XXIV Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering, CILAMCE, Ouro Preto, Brasil.

CAN/CSA-S16.1-94 (1994). *Limit States Design of Steel Structures*. Canadian Standards Association . Toronto, Ontario, Canada.

CEB (1990). *CEB - FIP - Model Code 1990 - Final Draft*. Bulletin d'Information n.203, Comité Euro-Internacional Du Béton, Paris.

Chan, S. L. e Chui, P. P. T. (2000). *Non-Linear Static and Cyclic Analysis of Steel Frames with Semi-Rigid Connections*. Elsevier, Oxford.

Chen, S. F., Teng, J. G. e Chan, S. L. (2001). *Design of Biaxially Loaded Short Composite Columns of Arbitrary Section*. Journal of Structural Engineering, ASCE, v. 127(6), June.

Chen, C. C. & Li, J. M. & Weng, C. C. (2005). *Experimental behaviour and strength of concrete-encased composite beam-column with T-shaped steel section under cyclic loading*. Journal of Constructional Steel Research, v. 61, p. 863 – 881.

Chung, K. F. & Narayanan, R. (1994). *Composite Column Design to Eurocode 4*. The Steel Construction Institute. SCI Publication 142.

Claeson C. (1998). *Structural Behavior of Reinforced High-Strength Concrete Columns*. Publication 98:1, Ph.D. dissertation. Chalmers University of Technology. Division of Concrete Structures. Göteborg, Sweden, August.

Cook, R. D., Malkus, D. S. e Plesha, M. E. (1989). *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*. John Wiley & Sons.

Crisfield, M. A. (1991). *Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*. John Wiley & Sons, v. 1.

Da Silva, R. M. (1996). *Análise Não-Linear de Pórticos Planos de Concreto Armado: Modelagem Numérica e Avaliação dos Métodos Aproximados*. Tese de Doutorado, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

De Nardin, S. (1999). *Estudo Teórico-Experimental de Pilares Mistos Compostos por Tubos de Aço Preenchidos com Concreto de Alta Resistência*. Dissertação de Mestrado, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

De Nardin, S. (2003). *Pilares Mistos Preenchidos: Estudo da Flexo-Compressão e de Ligações Viga-Pilar*. Tese de Doutorado, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

Deitel, H. M. e Deitel, P. J. (2001). *C++ Como Programar*. Bookman.

El-Tawil, S. & Deierlein, G. G. (1999). *Strength and Ductility of Concrete Encased Composite Columns*. Journal of Structural Engineering, v. 125 (9), p. 1009 – 1019.

ESDEP (1996). *European Steel Design Education Programme*. Europäisches Stahlbau - Lehrprogramm CD-Rom.

Espion, B. (1993). *Benchmark examples for creep and shrinkage analysis computer programs, Creep and shrinkage of concrete*. TC 114 RILEM. E&FN Spon.

Eurocode 2 (2003). *Design of Concrete Structures – Part 1-1: General Rules and Rules for Buildings*. FINAL DRAFT prEN 1992-1-1:2003, European Committee for Standardization, December, 2003.

Eurocode 3 (1992). *Design of Steel Structures*. ENV 1993-1-1: Part 1.1: General Rules and Rules for Buildings, CEN.

Eurocode 4 (1994). *Design of Composite Steel and Concrete Structures: Part 1.1: General rules and rules for buildings*. DRAFT prEN 1994-1-1:2001, European Committee for Standardization, April, 2001.

Felippa, C. A. & Haugen, B. (2005). *A unified formulation of small-strain corotational finite elements: I. Theory*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, v. 194 (21-24), p. 2285 - 2335.

Ferguson, P. M. & Breen, J. E. (1966). *Investigation of the long concrete column in a frame subjected to lateral loads*. Symposium on Reinforced Concrete Columns. American Concrete Institute SP-13.

Ferreira, L. T. S. (1986). *Desenvolvimento de um Sistema Geral de Dimensionamento de Estruturas de Concreto Armado usando Microcomputadores*. Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia Civil, PUC/Rio.

Furlong, R. W. (1976). *AISC column logic makes sense for composite columns, too*. Engineering Journal, AISC 1976; 1 : 1 - 7.

Galambos, T. V. & Chapuis, J. (1980). *LRFD Criteria for Composite Columns and Beam-Columns*. Revised Draft, Washington University, Dept. of Civil Engineering, St. Louis, MO, December.

Garcia, L. F. T. e Villaça, S. F. (1999). *Introdução à Elasticidade não Linear*. 3ª ed., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro.

Gardner, N. J. & Jacobson, E. R. (1968). *Structural Behaviour of Concrete Filled Steel Tubes*. Proceedings, American Concrete Institute, v. 65, No. 1, p. 66 – 69.

Gho, W. M. & Liu, D. (2004). *Flexural behaviour of high-strength rectangular concrete-filled steel hollow sections*. Journal of Constructional Steel Research, v. 60, p. 1681 – 1696.

Giakoumelis, G. & Lam, D. (2004). *Axial capacity of circular concrete-filled tube columns*. Journal of Constructional Steel Research. v. 60, p. 1049 – 1068.

Gomes, N. S. (1994). *Pilares mistos tubulares de aço e concreto*. São Paulo. Tese de Doutorado – Escola Politécnica da Universidade de São Paulo.

Griffs, L. G. (1994). *The 1994 T. R. High Lecture: Composite Frame Construction*. National Steel Construction Conference, AISC, v. 1, p. 1.1 - 1.72, New York.

Guimarães, L. G. S. (1992). *Disciplina Orientada a Objetos para Análise e Visualização Bidimensional de Modelos de Elementos Finitos*. Dissertação de Mestrado, PUC-Rio, Departamento de Engenharia Civil.

Gunnin, B. L. & Rad, F. N. & Furlong, R. W. (1977). *A general nonlinear analysis of concrete structures and comparison with frame tests*. Computers and Structures, v. 7, p. 257 – 265.

Hadi, M. N. S. & Li, J. (2004). *External reinforcement of high strength concrete columns*. Composite Structures, v. 65, p. 279 – 287.

Hajjar, J. F. & Gourley, B. C. (1996). *Representation of Concrete-Filled Steel Tube Cross-Section Strength*. Journal of Structural Engineering, v. 122, Issue 11, p. 1327 – 1336.

Hajjar, J. F. & Schiller, P. H. & Molodan, A. (1998). *A distributed plasticity model for concrete-filled steel tube beam-columns with interlayer slip*. Engineering Structures, v. 20, Issue 8, p. 663 – 676.

Han, L. H. (2004). *Flexural behaviour of concrete-filled steel tubes*. Journal of Constructional Steel Research, v. 60, p. 313 – 337.

Han, L. H. & Yao, G. H. (2003). *Behaviour of concrete-filled hollow structural steel (HSS) columns with pre-load on the steel tubes*. Journal of Constructional Steel Research, v. 59, p. 1455 – 1475.

Han, L. H. & Tao, Z. & Huang, H. & Zhao, X. L. (2004). *Concrete-filled double skin (SHS outer and CHS inner) steel tubular beam-columns*. Thin-Walled Structures, v. 42, p. 1329 – 1355.

Han, L. H. & Yang, Y. F. (2003). *Analysis of thin-walled steel RHS columns filled with concrete under long-term sustained loads*. Thin-Walled Structures, v. 41, p. 849 – 870.

Han, L. H. & Yao, G. H. & Zhao, X. L. (2005). *Tests and calculations for hollow structural steel (HSS) stub columns filled with self-consolidating concrete (SCC)*. Journal of Constructional Steel Research, v. 61, p. 1241 – 1269.

Hu, H. T. & Huang, C. S. & Chena, Z. L. (2005). *Finite element analysis of CFT columns subjected to an axial compressive force and bending moment in combination*. Journal of Constructional Steel Research, ARTICLE IN PRESS.

Ichinose, L. H. & Watanabe, E. & Nakai, H. (2001). *An Experimental Study on Creep of Concrete Filled Steel Pipes*. Journal of Constructional Steel Research, v. 57, p. 453 - 466.

Johansson, M. (2000). *Structural Behaviour Of Circular Steel-Concrete Composite Columns. Non-Linear Finite Element Analyses And Experiments*. Thesis For Degree Of Licentiate Of Engineering. Department Of Structural Engineering. Concrete Structures. Chalmers University Of Technology. Göteborg, Sweden.

Johansson, M. (2002). *Composite Action and Confinement Effects in Tubular Steel-Concrete Columns*. Thesis For The Degree Of Doctor Of Philosophy. Department of Structural Engineering. Concrete Structures. Chalmers University Of Technology. Göteborg, Sweden.

- Johansson, M. & Gylltoft, K. (2002). *Mechanical Behavior of Circular Steel-Concrete Composite Stub Columns*. Journal of Structural Engineering, ASCE, v. 128(8), August.
- Knowles, R. & Park, R. (1969). *Strenght of concrete filled steel tubular columns*. *Journal of Structural Division*. v. 95, n.st 12, p. 2565 – 2587. December.
- Liang, Q. Q. & Uy, B. (2000). *Theoretical study on the post-local buckling of steel plates in concrete-filled box columns*. Computers & Structures, v. 75 (5), p. 479 – 490.
- Lohr, W. S. (1934). *Concrete Encased in Steel Shells Proposed*. Engineering News Record, v. 113, p. 760 – 762.
- Martha, L. F. (2003). *Notas de Aula do Curso Fundamentos de Computação Gráfica Aplicada*. PUC-Rio, Departamento de Engenharia Civil, ([www.tecgraf.puc-rio.br/~lfm](http://www.tecgraf.puc-rio.br/~lfm)).
- Martha, L. F. & Parente Jr., E. (2002). *An Object-Oriented Framework for Finite Element Programming*. WCCM V - Fifth World Congress on Computational Mechanics. Vienna, Austria.
- Matsui, C. (1993). *Local buckling of concrete filled steel square tubular columns*. In: Symposium papers, International Association for Bridge and Structural Engineering Conference, Luxembourg. 1993:269 – 76.
- Melo, A. M. C. (2000). *Projeto Ótimo de Pórticos de Concreto Armado*. Tese de doutorado, COPPE/UFRJ, Departamento de Engenharia Civil, Rio de Janeiro.
- Mirza, S. A., Hyttinen, V. e Hyttinen, E. (1996). *Physical Tests and Analyses of Composite Steel-Concrete Beam-Columns*. Journal of Structural Engineering, ASCE, v. 122(11), p. 1317 - 26.
- NBR 6118 (2003). *Projeto e Execução de Obras de Concreto Armado*. Associação Brasileira de Normas Técnicas, Rio de Janeiro.

NBR 8800 (1986). *Projeto e Execução de Estruturas de Aço de Edifícios*. Associação Brasileira de Normas Técnicas, Rio de Janeiro.

NBR 8800 (2003). *Projeto de Revisão. Projeto e Execução de Estruturas de Aço e Estruturas Mistas Aço-Concreto de Edifícios*. Associação Brasileira de Normas Técnicas, Rio de Janeiro.

NBR 14323 (1999). *Dimensionamento de Estruturas de Aço de Edifícios em Situação de Incêndio*. Associação Brasileira de Normas Técnicas, Rio de Janeiro.

Oehlers, D. J. & Bradford, M. A. (1995), *Composite Steel and Concrete Structural Members: Fundamental Behaviour*. Pergamon Press, Oxford.

Oehlers, D. J. & Bradford, M. A. (1999). *Elementary Behaviour of Composite Steel and Concrete Structural Members*. Biddles Ltda.

Pacoste, C. & Eriksson, A. (1997). *Beam Elements in Instability Problems*. Computers Methods in Applied Mechanics and Engineering, v. 144, p. 163 – 197.

Parente Jr., E. (2000). *Análise de Sensibilidade e Otimização de Forma de Estruturas Geometricamente Não-Lineares*. Tese de Doutorado, PUC-Rio, Departamento de Engenharia Civil, Rio de Janeiro.

Queiroz, G. & Pimenta, R. J. & Mata, L. A. C. (2001). *Elementos das Estruturas Mistas Aço-Concreto*. Belo Horizonte.

Queiroz, G. e Prestes, J. A. S. (2001). *Pilares Mistos Parcialmente Revestidos de Concreto*. I Congresso Internacional da Construção Metálica, CICOM, São Paulo, Brasil.

Queiroz, G. & Prestes, J. A. S. (2002). *Proposta de um Diagrama de Interação para a Verificação de Pilares Mistos Sujeitos à Flexão Composta*. II Congresso Internacional da Construção Metálica – II CICOM, São Paulo, SP, Brasil.

Queiroz, G. e Queiroz, F. D. (2003a). *Modelos de Elementos Finitos para Pilares Mistos Aço-Concreto Parcialmente Revestidos Submetidos à Flexo Compressão*. Proceedings of XXIV Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering, CILAMCE, Ouro Preto, Brasil.

Queiroz, G. e Queiroz, F. D. (2003b). *Modelos de Elementos Finitos para Pilares Mistos Aço-Concreto Parcialmente Revestidos Submetidos a Forças Axiais*. Proceedings of XXIV Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering, CILAMCE, Ouro Preto, Brasil.

Queiroz, G., Rodrigues, F. C. e Chaves, L. B. (2001a). *Análise de Repartição de Cargas entre Aço e Concreto no Pilares Mistos*. I Congresso Internacional da Construção Metálica, CICOM, São Paulo, Brasil.

Razvi, S. R. & Saatcioglu M. (1999). *Circular High-Strength Concrete Columns under Concentric Compression*. ACI Structural Journal. Sep.-Oct. 1999, Title no. 96-S90, p. 817 - 825.

Reddy, J. N. (2004). *An Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis*. Oxford University Press.

Rodrigues, P. F. N. (2000). *Ferramentas Numéricas Para A Análise Não-Linear Física E Geométrica De Estruturas Reticuladas Na Exploração De Petróleo Offshore*. Tese de Doutorado, Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE.

Roik, K. e Bergmann, R. (1984). *Composite Columns: Design and Examples for Construction. State of the Art Report on Composite or Mixed Steel-Concrete Construction for Buildings*. 2nd US-Japan Seminar on Composite and Mixed Construction, Seattle, Washington, ASCE, p. 272 - 4.

Roik, K. & Bergmann, R. (1989). *Eurocode 4: composite columns*. Report EC4/6/89, University of Bochum, June.

Roik, K. e Bergmann, R. (1990). *Design Method for Composite Columns with Unsymmetrical Cross-Sections*. Journal of Constructional Steel Research, v.15, p.153 - 168.

Rotter, J. M. (1982). *Lecture 3 of Composite Structures of Steel and Concrete*, Postgraduate Course, School of Civil and Mining Engineering, The University of Sydney.

Schneider, S. P. (1998): *Axially Loaded Concrete-Filled Steel Tubes*. Journal of Structural Engineering, v. 124, n. 10, p. 1125 - 1138.

Sfakianakis, M. G. (2002). *Biaxial Bending with Axial Force of Reinforced, Composite and Repaired Concrete Sections of Arbitrary Shape by Fiber Model and Computer Graphics*. Advances in Engineering Software, v. 33, p. 227 - 242.

Shanmugam, N. E. & Lakshmi, B. (2001). *State of the Art Report on Steel-Concrete Composite Columns*. Journal of Constructional Steel Research, v. 57, p. 1041 - 1080.

Sousa Jr., J. B. M. (2000). *Auto-Adaptação e Otimização de Forma em Cascas*. Tese de Doutorado, PUC-Rio, Departamento de Engenharia Civil, Rio de Janeiro.

Sousa Jr., J. B. M. e Caldas, R. B. (2003a). *Obtenção de Esforços em Seções Transversais Mistas Aço-Concreto*. Proceedings of XXIV Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering, CILAMCE, Ouro Preto, Brasil.

Sousa Jr., J. B. M. e Caldas, R. B. (2003b). *Relações Momento-Curvatura em Seções Transversais Mistas Aço-Concreto*. Proceedings of XXIV Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering, CILAMCE, Ouro Preto, Brasil.

Spacone, E. & El-Tawil, S. (2004). *Nonlinear Analysis of Steel-Concrete Composite Structures: State of the Art*. Journal of Structural Engineering, ASCE, v. 130(2), p. 159 - 168.

- Stark, J. W. B. (2001). *European Developments in Steel and Composite Structures*. I International Conference on steel Construction, November, São Paulo.
- Takeuchi M. & Narikawa M. & Matsuo I. & Hara K. & Usami S. (1998). *Study on concrete filled structure for nuclear power plants*. Nuclear Engineering and Design. v. 179, p. 209 – 223.
- Tao, Z. & Han, L. H. & Zhao, X. L. (2004). *Behaviour of concrete-filled double skin (CHS inner and CHS outer) steel tubular stub columns and beam-columns*. Journal of Constructional Steel Research, v. 60, p. 1129 – 1158.
- Tao Z. & Han L.H. & Wang Z.B. (2005). *Experimental behaviour of stiffened concrete-filled thin-walled hollow steel structural (HSS) stub columns*. Journal of Constructional Steel Research. Article IN PRESS.
- Teixeira, M. R. & De Souza, R. M. (2003). *Análise Não Linear Física e Geométrica de um Edifício de Múltiplos Andares em Concreto Armado Utilizando-se a Plataforma OpenSees*. V Simpósio Epusp sobre Estruturas de Concreto.
- Terrey, P. A. & Bradford, M. A. & Gilbert, R. I. (1994). *Creep and Shrinkage of Concrete in Concrete-Filled Circular Steel Tubes*. Proceedings of the Sixth International Symposium on Tubular Structures, p. 293 - 298.
- Uy, B. (2001a). *Static Long-Term Effects in Short Concrete-Filled Steel Box Columns Under Sustained Loading*. ACI Structural Journal. January/February, 98-S10, p. 96 – 104.
- Uy, B. (2001b). *Strength of short concrete filled high strength steel box columns*. Journal of Constructional Steel Research, v. 57, p. 113 - 134.
- Uy, B. & Bradford, M. A. (1994). *Slenderness limits for thin steel plates when restrained by concrete*. Australian Structural Engineering Conference 1994, Sydney, p. 613 – 618.

Vogel, U. (1985). *Calibrating Frames*. Stahlbau, v. 10, p. 295 – 301.

Wakabayashi, M. (1976). *A proposal for design formulas for composite columns and beam columns*. Second international Colloquium on Stability, Tokyo, p. 65 – 87.

Wempner, G. (1969). *Finite elements, finite rotations and small strains of flexible shells*. Int. J. Solids & Structs. v. 5, p. 117 – 153.

Weng, C. C. & Yen, S. I. (2002). *Comparisons of concrete-encased composite column strength provisions of ACI code and AISC specification*. Engineering Structures, v. 24, p. 59 – 72.

Werner, H. (1974). *Schiefe Biegung Polygonal Umrandeter Stahlbetonquerschnitte*. Beton - und Stahlbetonbau.

Wright, H. D. (1993). *Buckling of plates in contact with a rigid medium*. The Structural Engineer, v. 71, n. 12, p. 209 – 215.

Zeghiche, J. & Chaoui, K. (2005). *An experimental behaviour of concrete-filled steel tubular columns*. Journal of Constructional Steel Research, v. 61, p. 53 – 66.

Zha XX. (1996). *Theoretical and experimental study on the behaviour effect on concrete-filled steel tubular members subjected to compression-bending-torsion with initial stress in the steel tubes*. Ph.D. Dissertation, Harbin University of Architecture and Civil Engineering, Harbin, China (in Chinese).

Zienkiewicz, O. C. (1977). *The Finite Element Method*. 3rd ed., London, McGraw Hill Book Company.

Zong Z.H. & Jaishi B. & Ge J.P. & Ren W.X. (2005). *Dynamic Analysis of a Half Through Concrete Filled Steel Tubular Arch Bridge*. Engineering Structures, v. 27, p. 3 – 15.

# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)