

unesp



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

*Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas*

DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS DE COMPUTAÇÃO E ESTATÍSTICA

---

**Quatérnios, um ensaio sobre a  
regularidade e hiperperiodicidade  
de funções quaterniônicas, e o  
Teorema de Cauchy**

**Rodrigo Cardoso Barreiro**

Dissertação de Mestrado  
Pós-Graduação em Matemática

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

# Quatérnios, um ensaio sobre a regularidade e hiperperiodicidade de funções quaterniônicas, e o Teorema de Cauchy.

**Rodrigo Cardoso Barreiro**

Dissertação apresentada ao Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de São José do Rio Preto, São Paulo, para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Manoel Ferreira Borges Neto

São José do Rio Preto

2009

# Rodrigo Cardoso Barreiro

Quatérnios, um ensaio sobre a regularidade e hiperperiodicidade de funções quaterniônicas, e o Teorema de Cauchy.

Dissertação apresentada para obtenção do título de Mestre em Matemática do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de São José do Rio Preto.

## BANCA EXAMINADORA

---

Orientador

Prof. Dr. Manoel Ferreira Borges Neto  
UNESP - São José do Rio Preto

---

Primeiro Examinador

Prof. Dr. Antônio Luís Venezuela  
UFMS - Campus de Três Lagoas

---

Segundo Examinador

Profa. Dra. Sandra Regina Monteiro Masalshiene Roveda  
UNESP - Campus de Sorocaba

São José do Rio Preto, 17 de Fevereiro de 2009.

“A simplicidade é o último degrau da sabedoria. ”

*Khalil Gibran*

*Aos meus pais, Geraldo e Vera e  
a minha irmã, Mirela,  
ofereço.*

*A minha amada, Márcia  
dedico.*

# Agradecimentos

A Deus, por tudo.

À meu orientador Prof. Borges, por todo ensinamento.

A todos os professores do departamento, em especial ao Prof. Masayoshi Tsuchida, pelos conhecimentos a mim transmitidos.

Ao parceiro José Antônio Marão, que muito me ajudou e tornou possível a concretização desta dissertação.

Aos meus pais Geraldo e Vera, que sempre me ajudaram dentro do possível e impossível.

À minha irmã Mirela, pelo apoio.

À minha amada Márcia, que sempre esteve ao meu lado nos momentos mais difíceis, pelo carinho, paciência, incentivo que foram fundamentais para a realização deste trabalho.

Aos meus amigos Ariel, Kleber, Luiz Carlos, Jairo, Leonardo, Rafael, Rodolfo, Senegal, a todos, pelos inesquecíveis anos de Bocage.

A todos os meus amigos da moradia na qual convivemos por muitos anos.

Aos meus amigos pós-graduandos da matemática do IBILCE.

Aos meus amigos de república Nilton Delbem, Iguer Luis, Sr. Santos, Rodiack, Rafael e Pedro.

Aos amigos Luiz Fernando, Michele, Augusto e Renato, na qual cursamos várias disciplinas juntos.

A todos os professores e funcionários que, direta ou indiretamente, contribuíram para a concretização desta dissertação.

A Capes, pelo auxílio financeiro.

# Resumo

O objetivo deste trabalho é estabelecer similaridades entre a análise complexa e os quatérnios. Nele é feito um estudo da regularidade de funções quaterniônicas e são estabelecidas as funções exponencial e logarítmica para os quatérnios sendo feito um estudo da hiperperiodicidade dessas funções. Outro resultado apresentado é a generalização quaterniônica da fórmula integral de Cauchy um dos principais teoremas da análise complexa.

**Palavras-chave:** Quatérnios, funções exponencial e logarítmica quaterniônica, hiperperiodicidade, fórmula integral de Cauchy para quatérnios.

# Abstract

The objective of this work is to establish similarities between the complex analysis and the quaternions. In it is made a study of the regularity of quaternionic functions and are established the exponential and logarithmic functions for the quaternions being made a study of the hiperperiodicity of these functions. Another presented result is the quaternionic generalization of the Cauchy's integral formula one of the main theorems of the complex analysis.

**Keywords:** Quaternions, exponential e logarithmic quaternion functions, hiperperiodicity, Cauchy's integral formula for quaternions.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Breve introdução histórica dos quatérnios</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Análise Complexa</b>	<b>5</b>
2.1	Topologia do plano complexo . . . . .	7
2.2	Função de uma variável complexa . . . . .	9
2.3	Limite, continuidade e derivada em $\mathbb{C}$ . . . . .	9
2.4	Funções Analíticas . . . . .	10
2.5	Integração complexa . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Matemática básica dos quatérnios</b>	<b>20</b>
3.1	Notação . . . . .	20
3.2	As propriedades algébricas dos quatérnios . . . . .	24
3.3	Quatérnios unitários . . . . .	26
3.4	As funções exponencial e logarítmica . . . . .	28
3.5	Rotações com quatérnios . . . . .	30
3.5.1	Rotações com quatérnios unitários . . . . .	31
<b>4</b>	<b>Funções quaterniônicas</b>	<b>37</b>
4.1	Função de uma variável quaterniônica . . . . .	37
4.2	Funções quaterniônicas regulares . . . . .	38
4.3	Função exponencial do tipo quaterniônica . . . . .	43
4.3.1	Função exponencial quaterniônica . . . . .	45
4.4	Coordenadas esféricas . . . . .	51
4.5	Função logaritmo . . . . .	54
<b>5</b>	<b>Integração e diferenciação nos quatérnios</b>	<b>56</b>
5.1	Teorema de Gauss para quatérnios . . . . .	65
5.2	Fórmula integral de Cauchy para quatérnios . . . . .	69
<b>6</b>	<b>Considerações Finais</b>	<b>72</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>74</b>

# Capítulo 1

## Breve introdução histórica dos quatérnios

O presente capítulo tem por objetivo abordar fatos históricos relativos aos quatérnios que podem por exemplo serem encontradas nas referências [23] e [1].

Um dos grandes desafios na história da matemática foi descobrir a raiz quadrada de um número negativo. Geronimo Cardano (1501-1576), em 1545, com “Ars Magna”, mostra os primeiros indícios dos números complexos. Ele estudava a solução algébrica das equações cúbicas, apoiado em sugestões de Nicolo Tartaglia (1500-1557), e quárticas deduzidas por Ludovico Ferrari (1522-1565). Já no ano de 1777 Euler introduziu a notação  $i$  e  $-i$  para as duas raízes quadradas de  $-1$ , talvez referindo-se a notação de números imaginários, introduzida por Renè Descartes (1596-1650).

As contribuições para o desenvolvimento de uma teoria com números complexos foram dadas por muitos matemáticos conceituados, entre eles Augustin Cauchy (1789-1857) que construiu uma rigorosa teoria para funções complexas. Outro grande nome que cabe destacar é William Roman Hamilton (1805-1865), que fez notáveis contribuições para física, astronomia e para matemática que aqui será destacado, uma de suas contribuições, dada em 1833, aos 28 anos de idade, foi a fundamentação definitiva dos números complexos como pares ordenados de números reais, interpretando-os como pontos do plano  $xy$ . Posteriormente ele tentou estender a teoria para três dimensões partindo de um número complexo,  $a+bi$ , para ternas ordenadas,  $a+bi+cj$ . Neste momento Hamilton deparou-se com entraves ao tentar definir uma regra para multiplicar ternas que também obedecessem a regra já conhecida para multiplicar os números complexos. Um relato de sua dificuldade é dada numa carta escrita a seu filho Archibald em outubro de 1843:

*Toda manhã, quando descia para o café, teu irmão William Edwin e você mesmo costumavam perguntar-me “Bem, pai, você já pode multiplicar ternas?” A isso eu sempre me via obrigado a responder, com um triste balanço de cabeça, “Não, eu posso somá-las e subtraí-las”.*

Hamilton assumiu naturalmente que  $i^2 = j^2 = -1$ , mas a dificuldade estava em determinar qual deveria ser o valor para os produtos  $ij$  e  $ji$ . Após um incessante trabalho na tentativa de se obter essa regra, Hamilton teve a idéia de usar quatro números,  $a+bi+cj+dk$ , que ele denominou quatérnios. Numa carta a seu filho William Edwin Hamilton, Hamilton relata sua descoberta final:

*Mas no dia 16 de outubro de 1843 - que era uma segunda-feira e reunião do Conselho da Real Sociedade da Irlanda - eu ia andando para participar e presidir, e tua mãe andava comigo, ao longo do Royal Canal, . . . , embora ela falasse comigo ocasionalmente, uma corrente subjacente de pensamento estava acontecendo na minha mente, que finalmente teve um resultado, cuja importância senti imediatamente. Pareceu como se um circuito elétrico tivesse se fechado; e saltou uma faísca, o heraldo de muitos anos vindouros de pensamento trabalho dirigidos, por mim, se poupando, e de qualquer forma por parte de outros, se eu vivesse o suficiente para comunicar minha descoberta. Nesse instante eu peguei uma libreta de anotações que ainda existe e fiz um registro naquela hora. Não pude resistir ao impulso - tão não filósofo quanto possa ser - de gravar com um canivete numa pedra da ponte Brougham, quando a cruzamos, a fórmula fundamental dos símbolos  $i, j, k$ ,*

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

*que contém a solução do Problema.*

Em 1956, uma placa (figura 1.1) exibindo a fórmula foi erguida na ponte de Brougham, hoje chamada de “Quaternion Bridge”, em Dublin, homenageando o feito de Hamilton.

Hamilton a partir dessa regra de multiplicação construiu uma detalhada teoria de um sistema algébrico não comutativo que constituiu o primeiro exemplo de anel<sup>1</sup> não

<sup>1</sup>Dado um conjunto  $S$  e duas operações binárias, dizemos que a estrutura algébrica  $(S, +, \cdot)$  forma um anel se a operação de adição  $(+)$  é comutativa, associativa, existindo um elemento neutro denotado por  $0$  e um elemento inverso denotado por  $-x$ , para todo  $x \in S$ , e se a operação de multiplicação  $(\cdot)$  é associativa, e distributiva em relação a soma.

comutativo com divisão. Convencido da importância do resultado, Hamilton escreve para seu amigo John T. Graves (1806 - 1870) um dia após sua descoberta, no dia 17 de outubro de 1843, comunicando-lhe seus resultados obtidos. Em dezembro do mesmo ano Graves obteve uma álgebra 8-dimensional, os octônios. Em julho de 1844 Hamilton observa que a propriedade associativa valia claramente para os quatérnios mas não para os octônios, notificando Graves desse fato:

“ $A.BC=AB.C$ , se  $A,B,C$  serem quatérnios, mas não octônios”

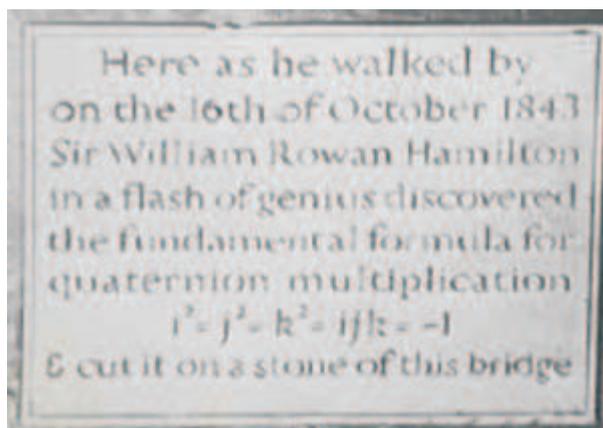


Figura 1.1: Placa erguida em homenagem a descoberta de Hamilton

Em dezembro Graves escreve a Hamilton dando maiores detalhes sobre sua descoberta, mostrando que sua álgebra 8-dimensional formavam uma álgebra de divisão normada, e a usou para expressar que o produto de duas somas de oito quadrados perfeito é igual a outra soma de oito quadrados perfeitos. Posteriormente no ano de 1845, Arthur Cayley (1821-1895) redescobriu de forma independente os octônios e por essa razão os octônios são também chamados de *Números de Cayley*.

Os quatérnios passaram a ser uma ferramenta matemática importante para a física, sendo usada, por exemplo, pelo físico James Clerk Maxwell (1831-1879) que buscou aplicar esta matemática em seu trabalho. Durante a década de 70 do século XIX, Josiah Willard Gibbs (1839-1903) introduz a análise vetorial e Oliver Heaviside (1850-1925) desenvolve o cálculo vetorial promovendo sua aplicação física sendo muito bem aceito pela comunidade científica. Isso fez com que os quatérnios perdessem sua força na matemática e física. Em 1905 a teoria de relatividade especial de Albert Einstein (1879-1955) mostrou-se uma aplicação natural dos biquatérnios<sup>2</sup>, ou quatérnios complexificados, introduzida previa-

<sup>2</sup>Os biquatérnios são números da forma  $w+xi+yj+zk$  onde  $w$ ,  $x$ ,  $y$  e  $z$  são números complexos e os elementos de  $\{i,j,k\}$  são multiplicados como nos quatérnios.

mente por William Kingdon Clifford (1845 - 1879). Posteriormente esse formalismo foi revisado, expandido e usado por Eugene Paul Wigner (1902-1995) , Felix Christian Klein (1849-1925), entre outros. Embora discretamente os quatérnios estavam reaparecendo.

O presente trabalho busca uma extensão para quatérnios de fatos relativos a Análise Complexa. No capítulo 2 apoiando-se nas referências [11],[18], [19], [20] e [28] é introduzida a Análise Complexa e no capítulo 3 de acordo com [8], [10], [12], [22] e [26] é introduzida a matemática básica dos quatérnios, ambos capítulos necessárias para o desenvolvimento e entendimento do trabalho onde é feito um estudo da regularidade de funções de uma variável quaterniônica e da hiperperiodicidade das funções exponencial e logarítmica quaterniônica. Para finalizar são abordados no capítulo 5 aspectos relativos a integrabilidade e diferenciabilidade de funções de uma variável quaterniônica [3] e desenvolvida a fórmula integral de Cauchy para quatérnios generalizando a versão da Análise Complexa.

## Capítulo 2

# Análise Complexa

Neste capítulo será feita uma breve revisão sobre alguns tópicos de análise complexa, apresentando suas principais definições e resultados, com destaque para a fórmula da integral de Cauchy. Os resultados, aqui não demonstradas, podem ser encontrados em [11], por exemplo.

O conjunto dos números complexos é denotado por  $\mathbb{C}$  [28] e definido como segue

$$\mathbb{C} = \{(a, b); a, b \in \mathbb{R}\}, \text{ onde } (a, b) = (a', b') \iff a = a' \text{ e } b = b', \quad (2.1)$$

denominando-se, respectivamente, os números reais  $a$  e  $b$  de parte real ( $Re(z)$ ) e parte imaginária ( $Im(z)$ ) do número complexo  $z$ , e sendo as operações de adição e multiplicação definidas, respectivamente, por:

$$(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b') \quad (2.2)$$

$$(a, b) \cdot (a', b') = (aa' - bb', ab' + ba') \quad (2.3)$$

Verifica-se facilmente que, com estas definições,  $\mathbb{C}$  satisfaz todos os axiomas de um corpo [28], ou seja:  $\mathbb{C}$  satisfaz as propriedades associativa, comutativa e distributiva para a adição e multiplicação, sendo os números complexos  $(0,0)$  e  $(1,0)$ , os respectivos elemento neutro (adição) e unidade (multiplicação), existindo ainda o *inverso aditivo* e *multiplicativo* para cada elemento não nulo em  $\mathbb{C}$ .

Escreve-se “ $a$ ” para o número complexo  $(a,0)$ . A aplicação  $a \rightarrow (a,0)$  define um isomorfismo<sup>1</sup> de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{C}$ , tal que pode-se considerar  $\mathbb{R}$  como um subconjunto de  $\mathbb{C}$ .

---

<sup>1</sup>Um isomorfismo entre dois espaços  $A$  e  $B$  é uma bijeção  $f : A \rightarrow B$  que preserva alguma propriedade dos espaços. Por exemplo, a aplicação  $f : A \rightarrow B$ , onde  $(A, +, *)$  e  $(B, \oplus, \otimes)$  são corpos, é um isomorfismo

Tomando-se  $i = (0, 1)$ , de modo que pela equação (2.3)  $i^2 = (0, 1)(0, 1) = -1$ , então o número complexo  $z=(a,b)$  pode ser representado na forma

$$z = (a, b) = (a, 0) + (0, 1).(b, 0) = a + ib, \quad (2.4)$$

onde  $i$  é a chamada unidade imaginária.

**Definição 2.0.1. (conjugado complexo)** - O conjugado  $\bar{z}$  de um número complexo  $z=(a,b)=a+ib$  é o número  $\bar{z} = (a, -b) = a - ib$ .

**Definição 2.0.2. (módulo)** - O módulo ou valor absoluto  $|z|$  de um número complexo  $z=(a,b)=a+ib$  é o número real  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ .

As operações algébricas definidas no conjunto dos números complexos podem ser enunciadas utilizando-se a representação (2.4), da seguinte forma:

- $(a+ib)+(c+id) = (a+c)+(b+d)i$  (adição);
- $(a+ib).(c+id) = (ac-bd)+(ad+bc)i$  (multiplicação);
- $\frac{(a+ib)}{(c+id)} = \left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}\right) + \left(\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)i$  (divisão).

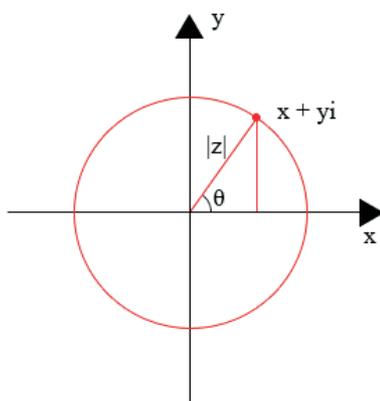


Figura 2.1: Plano complexo.

se:

1.  $f$  é uma bijeção;
2.  $f : (A, +) \rightarrow (B, \oplus)$  é um isomorfismo de grupos;
3.  $f : (A - \{0\}, *) \rightarrow (B - \{0\}, \otimes)$  é um isomorfismo de grupos.

Os espaços  $A$  e  $B$  dizem-se assim isomorfos, e escreve-se  $A \simeq B$ .

Geometricamente pode-se associar ao par  $(x, y)$ , que representa um número complexo  $z$ , as coordenadas cartesianas retangulares de um ponto no plano  $xy$  ou o vetor  $Oz$  de componentes  $x$  e  $y$  e origem  $O$ . Quando o plano  $xy$  é utilizado para representar geometricamente os números complexos  $z$ , ele é chamado de plano complexo ou plano- $z$  (Figura 2.1).

## 2.1 Topologia do plano complexo

Buscando melhor fundamentar a teoria de funções de uma variável complexa serão necessários alguns conceitos topológicos da análise complexa que serão apresentadas nesta seção. Tais conceitos serão apoiados nas referências [20] e [11].

**Definição 2.1.1. (*vizinhança*)** - Uma vizinhança de um ponto  $z_0$  é o conjunto de todos os pontos para os quais

$$|z - z_0| < \epsilon, \quad (2.5)$$

onde  $\epsilon$  é alguma constante positiva.

**Definição 2.1.2. (*ponto interior*)** - Um ponto interior de um conjunto  $\mathcal{S}$  é um ponto de  $\mathcal{S}$  tal que alguma vizinhança desse ponto contém somente pontos de  $\mathcal{S}$ .

**Definição 2.1.3. (*conjunto aberto*)** - Dizemos que um conjunto  $\mathcal{S}$  é aberto se todos seus pontos são interiores.

**Exemplo 2.1.1.** O anel  $S = \{z \mid 1 < |z| < 2\}$  é um conjunto aberto.

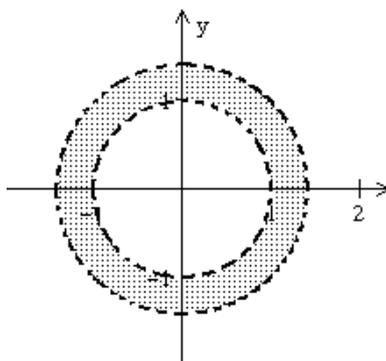


Figura 2.2:  $S = \{z \mid 1 < |z| < 2\}$ .

**Teorema 2.1.1.**

- i) a união de uma família<sup>2</sup> qualquer de conjuntos abertos é também um conjunto aberto;
- ii) a intersecção de um número finito de conjuntos abertos é um conjunto aberto.

**Definição 2.1.4. (*conjunto fechado*)** - Um conjunto  $\mathcal{S}$  é chamado de *fechado* se sua complementar  $\mathcal{S}'$  (onde  $\mathcal{S}' = \{z | z \notin \mathcal{S}\}$ ) é aberto.

**Teorema 2.1.2.**

- i) a união de um número finito de conjuntos fechados é um conjunto fechado;
- ii) a intersecção de uma família qualquer de conjuntos fechados é também um conjunto fechado.

**Definição 2.1.5. (*ponto de acumulação*)** - Um ponto  $z_0$  é chamado *ponto de acumulação* de um conjunto  $\mathcal{S}$ , se toda vizinhança  $V_\epsilon(z_0)$  contém pontos desse conjunto.

**Definição 2.1.6. (*fecho*)** - A união de um conjunto  $\mathcal{S}$  com os seus pontos de acumulação é denominado de **fecho de  $\mathcal{S}$** , sendo denotada por  $\overline{\mathcal{S}}$ .

**Definição 2.1.7. (*conjunto conexo*)** - Um conjunto  $\mathcal{S}$  é chamado de *conexo* se não existe conjuntos  $H_1$  e  $H_2$  ( $H_1 \neq \emptyset$ ) e ( $H_2 \neq \emptyset$ ) abertos em  $\mathcal{S}$ , tais que:

- i)  $H_1 \cap H_2 = \emptyset$  ;
- ii)  $H_1 \cup H_2 = \mathcal{S}$  .

Equivalentemente pode-se dizer que um conjunto aberto é conexo, se quaisquer dois pontos deste conjunto puderem ser ligados por uma poligonal totalmente contida dentro do conjunto.

**Exemplo 2.1.2.** O conjunto  $\mathbb{C}$  de todos números complexos é conexo.

**Definição 2.1.8. (*domínio*)** - Chama-se *domínio* (ou *região*) a todo conjunto aberto e conexo do plano complexo.

**Definição 2.1.9. (*conjunto limitado*)** - Um conjunto  $\mathcal{S}$  é *limitado* se existe um número  $k$  estritamente positivo, tal que  $|z|$  seja menor ou igual a  $k$  para todo  $z \in \mathcal{S}$ . Em outras palavras,  $\mathcal{S}$  diz-se limitado se está contido em um círculo de centro na origem e raio finito  $k$ .

**Definição 2.1.10. (*conjunto compacto*)** - Um conjunto é denominado *compacto* se é limitado e fechado.

---

<sup>2</sup>Designa-se por família de conjuntos de  $X$  todo o subconjunto  $F$  de  $\mathcal{P}(X)$ .

## 2.2 Função de uma variável complexa

Tomando  $\Omega$  como sendo um subconjunto do conjunto dos números complexos  $\mathbb{C}$ , uma função complexa [11]  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  é uma aplicação que faz corresponder a cada  $z \in \Omega$  um número complexo  $w = f(z)$ . O conjunto  $\Omega$ , no qual  $f$  está definida, recebe o nome de domínio de definição de  $f$  e o conjunto dos  $w = f(z)$  correspondentes a todos os  $z$  em  $\Omega$  é chamado de imagem de  $\Omega$  pela função  $f$ .

Como  $w$  é complexa, pode-se escrevê-la da seguinte forma:

$$w = f(z) = u + iv, \quad (2.6)$$

em que  $u = u(z)$  e  $v = v(z)$  são denominadas de parte real e parte imaginária de  $f$ , respectivamente.

## 2.3 Limite, continuidade e derivada em $\mathbb{C}$

Assim como as funções reais, para funções complexas também é possível definir limite e continuidade [11].

**Definição 2.3.1. (limite em  $\mathbb{C}$ )** - Seja  $z_0 \in \mathbb{C}$  fixado e  $f(z)$  uma função complexa definida pelo menos em  $B_r(z_0) \setminus \{z_0\}$  para algum  $r > 0$ . Dizemos que o limite de  $f(z)$ , quando  $z$  se aproxima de  $z_0$ , é  $L \in \mathbb{C}$  e denotamos

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = L \quad (2.7)$$

se para  $\epsilon > 0$  dado, é possível determinar  $\delta = \delta(\epsilon, z_0) > 0$  tal que, se

$$0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - L| < \epsilon, \quad z \in B_\delta(z_0) \setminus \{z_0\}, \quad f(z) \in B_\epsilon(L). \quad (2.8)$$

**Definição 2.3.2. (continuidade em  $\mathbb{C}$ )** - Dizemos que a função  $f(z)$  é contínua em  $z_0$  se  $f(z)$  é definida também em  $z_0$  e

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0). \quad (2.9)$$

**Teorema 2.3.1.** - Seja  $f(z) = u + iv$  uma função com domínio  $\Omega$  e seja  $L = U + iV$ . Então

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = L, \quad (2.10)$$

se, e somente se,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} u(x, y) = U \quad e \quad \lim_{z \rightarrow z_0} v(x, y) = V. \quad (2.11)$$

**Corolário 2.3.1.** - Uma função  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ , é contínua num ponto  $z_0 = x_0 + iy_0$  se, e somente se, suas partes real e imaginária  $u$  e  $v$  forem contínuas nesse ponto.

**Observação 2.3.1.** A função de uma variável complexa  $f(z)$  pode ser denotado simplesmente por  $f$ .

## 2.4 Funções Analíticas

Faz-se importante agora definir uma derivada de uma função complexa [18] e [11] que trará consequências importantes com as equações de Cauchy-Riemann vistas posteriormente.

**Definição 2.4.1.** (*derivada complexa*) - Uma função  $f$  definida em um domínio (conjunto aberto e conexo)  $\Omega$  diz-se que é **diferenciável** ou que possui uma **derivada complexa** no ponto  $z_0 \in \Omega$ , se existe o seguinte limite:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}. \quad (2.12)$$

Tal limite, caso exista, denota-se por  $f'(z_0)$  e é denominado de derivada (complexa) de  $f$  no ponto  $z_0$ .

Observemos que este limite deve ser sempre o mesmo número complexo  $f'(z_0)$  independentemente do caminho que a variável  $z$  aproxima-se de  $z_0$ .

**Teorema 2.4.1.** - Se uma função complexa  $f$  é derivável num ponto  $z_0$ , então  $f$  é contínua nesse ponto.

**Definição 2.4.2.** (*função analítica*) - Dada uma função  $f$  definida em um domínio complexo  $\Omega$ , diz-se que:

- i)  $f$  é analítica em  $z_0 \in \Omega$  se, e somente se,  $f$  é diferenciável em cada ponto  $z$  de uma vizinhança  $V \subset \Omega$  do ponto  $z_0$ ;

ii)  $f$  é analítica em um domínio  $\Omega$  se, e somente se,  $f$  é analítica em cada ponto  $z_0 \in \Omega$ .

**Teorema 2.4.2. (equações de Cauchy-Riemann)** - Se uma função  $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$  é analítica em um domínio  $\Omega$ , então

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (2.13)$$

tal que  $u, v$  satisfazem o sistema de equações diferenciais parcial de 1ª ordem

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad e \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \quad (2.14)$$

As relações (2.14), podem também gerar a equação de Laplace da seguinte forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \quad e \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.$$

isto é

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

O mesmo vale para  $u$ , ou seja,

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad e \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

isto é

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Reciprocamente, se  $u$  e  $v$  estão em  $\mathcal{C}^1(\Omega)$ , ou seja se elas forem de <sup>3</sup>classe  $\mathcal{C}^1$ , e ambas satisfazem estas equações diferenciais, para todo  $z \in \Omega$ , então  $f = u + iv$  é analítica em  $\Omega$ .

As equações em 2.14 são conhecidas como equações (ou relações) de Cauchy-Riemann.

## 2.5 Integração complexa

Antes de mostrar algumas propriedades de integração em  $\mathbb{C}$  [11] e [28], com destaque para a fórmula integral de Cauchy, faremos uma rápida revisão sobre algumas classes de curvas adequadas para o estudo das integrais curvilíneas no plano complexo.

---

<sup>3</sup> $f$  é continuamente derivável ou de classe  $\mathcal{C}^1$  se  $f$  for derivável e, além disso, a sua derivada for contínua.

**Definição 2.5.1. (curva)** - Uma curva no plano complexo é uma função contínua  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ , isto é, as funções de uma variável real  $\Re_\gamma, \Im_\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  são contínuas. Dizemos que a curva é simples se  $a \leq t < s \leq b$  implicar em  $\gamma(t) \neq \gamma(s)$ , a menos que  $t=a$  e  $s=b$ . Dizemos que a curva é fechada se  $\gamma(a) = \gamma(b)$ .

**Exemplo 2.5.1.** -  $\gamma(t) = \cos(t) + i \sin(t)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$  representa o círculo unitário centrado na origem. Esta curva é simples e fechada.

**Exemplo 2.5.2.** - A cardióide  $\gamma_\theta = \left(\frac{1}{2} \cos(\theta)\right) e^{i\theta}$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ , é exemplo de uma curva fechada que não é simples.

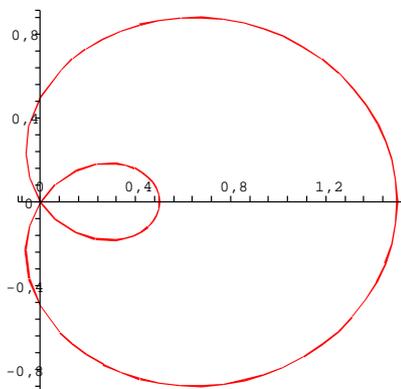


Figura 2.3: Cardióide.

**Exemplo 2.5.3.** -  $\gamma(t) = z_0 + (z_1 - z_0)t$ ,  $0 \leq t \leq 1$  representa o segmento no plano complexo cujas extremidades são  $z_0$  e  $z_1$ . Note que esta curva é simples mas não é fechada.

**Definição 2.5.2. (curva suave)** - Considere uma curva  $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ ,  $x(t)$ ,  $y(t) \in \mathbb{R}$ ,  $a \leq t \leq b$ . Dizemos que  $\gamma$  é suave se as funções de valores reais  $x, y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  possuem derivada contínua. O vetor  $\gamma'(t) = x'(t) + iy'(t)$  é chamado de vetor velocidade ou tangente à curva  $\gamma$  em  $\gamma(t)$ . Se  $\gamma'(t) \neq 0$  para todo  $a \leq t \leq b$ , dizemos que  $\gamma$  é uma curva regular.

**Exemplo 2.5.4.** - Todas as curvas dos exemplos anteriores são exemplos de curvas suaves e regulares. Vejamos mais especificamente o exemplo 2.5.2. Neste caso temos

$$\gamma'(\theta) = -(\sin \theta)e^{i\theta} + i\left(\frac{1}{2} + \cos \theta\right)e^{i\theta} = e^{i\theta} \left( -\sin \theta + i\left(\frac{1}{2} + \cos \theta\right) \right).$$

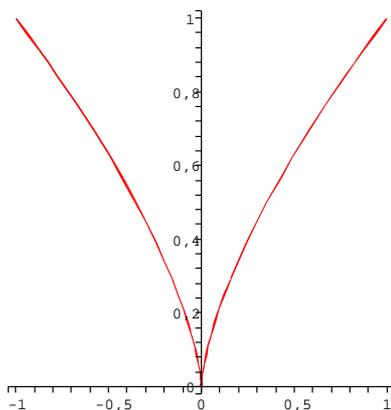


Figura 2.4:  $\gamma(t) = t^3 + it^2$ ,  $-1 \leq t \leq 1$  (exemplo 2.5.5).

Como  $e^{i\theta} \neq 0$ , vemos que  $\gamma'(\theta) = 0$  se e somente se  $-\sin \theta + i(\frac{1}{2} + \cos \theta) = 0$ , ou seja,  $\sin \theta = 0$  e  $\cos \theta = -\frac{1}{2}$ , o que é impossível. Logo,  $\gamma'(\theta) \neq 0$  para todo  $\theta \in [0, 2\pi]$ .

**Exemplo 2.5.5.** Considere a curva, (figura 2.4),  $\gamma(t) = t^3 + it^2$ ,  $-1 \leq t \leq 1$ . Esta curva é suave, mas como  $\gamma'(0) = 0$ , não é regular.

**Definição 2.5.3. (traço)** - O traço de uma curva  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  é a imagem desta curva. Considere duas curvas  $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  e  $\gamma_2 : [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$  tais que  $\gamma_1(b) = \gamma_2(c)$ .

Definimos  $\gamma : [a, b + d - c] \rightarrow \mathbb{C}$  por

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t), & \text{se } a \leq t \leq b; \\ \gamma_2(t + c - b), & \text{se } a \leq t \leq b + d - c. \end{cases} \quad (2.15)$$

Note que a condição  $\gamma_1(b) = \gamma_2(c)$  assegura a continuidade de  $\gamma$ . No entanto, mesmo que  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  sejam suaves, podemos ter que não exista derivada de  $\gamma$  em  $t=b$ . Observe que o traço de  $\gamma$  é a reunião de traços de  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$ .

**Definição 2.5.4. (justaposição)** - A curva  $\gamma$  dada por 2.15 é chamada de justaposição das curvas  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$ .

**Definição 2.5.5. (caminho)** - Sejam  $\gamma_j : [a_j, b_j] \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $j=1,2,\dots,n$ , curvas suaves tais que  $\gamma_1(b_1) = \gamma_2(a_2)$ ,  $\gamma_2(b_2) = \gamma_3(a_3)$ , ...,  $\gamma_{n-1}(b_{n-1}) = \gamma_n(a_n)$ . A justaposição das curvas  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$  é chamada de caminho.

**Observação 2.5.1.** - As definições de caminhos fechado e simples são análogos às definições usadas para curvas.

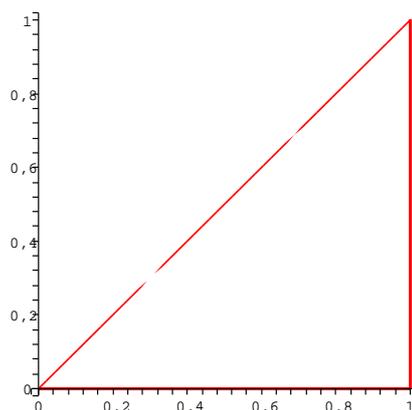


Figura 2.5:  $\gamma_1(t) = t$ ,  $0 \leq t \leq 1$ ,  $\gamma_2(t) = 1 + it$ ,  $0 \leq t \leq 1$ .

**Definição 2.5.6.** (*contorno*) - Um contorno é um caminho fechado e simples.

**Exemplo 2.5.6.** A justaposição das curvas  $\gamma_1(t) = t$ ,  $0 \leq t \leq 1$ ,  $\gamma_2(t) = 1 + it$ ,  $0 \leq t \leq 1$ ,  $\gamma_3(t) = 1 - t + i(1 - t)$ ,  $0 \leq t \leq 1$  (figura 2.5), é o caminho cujo traço representa o triângulo de vértices  $0, 1, 1 + i$ . Este caminho é exemplo de um contorno.

**Teorema 2.5.1.** - Todo contorno  $\gamma$  divide o plano em duas regiões conexas disjuntas  $X_1$  e  $X_2$  com as seguintes propriedades:

1.  $\partial X_1 = \partial X_2 = \text{traço de } \gamma$
2.  $X_1$  é limitada
3.  $X_2$  é ilimitada

A região  $X_1$  é chamada de interior da curva  $\gamma$ .

**Definição 2.5.7.** - Seja  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  uma curva (contínua) com  $u(t) = \Re g(t)$  e  $v(t) = \Im g(t)$ . A integral de  $g$  sobre  $[a, b]$  é definida por

$$\int_a^b g(t) dt = \int_a^b u(t) dt + i \int_a^b v(t) dt \quad (2.16)$$

**Observação 2.5.2.** -  $\Re \int_a^b g(t) dt = \int_a^b \Re g(t) dt$  e  $\Im \int_a^b g(t) dt = \int_a^b \Im g(t) dt$ .

**Proposição 2.5.1.** - Se  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  são contínuas e  $\alpha \in \mathbb{C}$  então:

1.  $\int_a^b (f(t) + g(t)) dt = \int_a^b f(t) dt + \int_a^b g(t) dt;$
2.  $\int_a^b \alpha f(t) dt = \alpha \int_a^b f(t) dt;$
3.  $|\int_a^b f(t) dt| \leq \int_a^b |f(t)| dt .$

**Definição 2.5.8.** - Seja  $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega \subset \mathbb{C}$  uma curva suave e  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  uma função contínua. A integral de linha de  $f$  sobre a curva  $\gamma$  é definida por

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \quad (2.17)$$

Se colocarmos  $u = \Re f$ ,  $v = \Im f$ ,  $x = \Re \gamma$  e  $y = \Im \gamma$  então

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} (u dx - v dy) + i \int_{\gamma} (v dx + u dy) \quad (2.18)$$

**Proposição 2.5.2.** - Sejam  $f_1, f_2 : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  funções complexas contínuas e  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  uma curva suave então:

$$\int_{\gamma} [\alpha_1 f_1(z) + \alpha_2 f_2(z)] dz = \alpha_1 \int_{\gamma} f_1(z) dz + \alpha_2 \int_{\gamma} f_2(z) dz, \quad \text{onde } \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}. \quad (2.19)$$

**Definição 2.5.9.** - Se  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  é um caminho formado pela justaposição das curvas suaves  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$  e se  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  é contínua, definimos

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{i=1}^n \int_{\gamma_i} f(z) dz \quad (2.20)$$

**Observação 2.5.3.** - A propriedade enunciada na proposição 2.5.2 continua válida para caminhos.

**Definição 2.5.10.** - Se  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  é uma curva suave, definimos o comprimento de  $\gamma$  por

$$l(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt \quad (2.21)$$

Se  $\gamma$  é um caminho obtido pela justaposição das curvas suaves  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ , definimos o seu comprimento por

$$l(\gamma) = \sum_{i=1}^n l(\gamma_i) \quad (2.22)$$

**Definição 2.5.11.** - *Seja  $D$  um aberto conexo. Dizemos que  $D$  é simplesmente conexo se o interior de qualquer contorno contido em  $D$ , está contido em  $D$ .*

**Observação 2.5.4.** - *Grosso modo, um conjunto simplesmente conexo não apresenta buracos.*

**Exemplo 2.5.7.** - *Todos os três conjuntos são abertos e conexos. No entanto, somente  $D_1$  é simplesmente conexo. Observe que embora o contorno  $\gamma_1(t) = 2e^{it}$  esteja contido em  $D_2$ , o seu interior,  $\{z \in \mathbb{C}; |z| < 2\}$  não está. O mesmo acontece em  $D_3$  com o contorno  $\gamma_2(t) = \frac{1}{2}e^{it}$ .*

**Exemplo 2.5.8.** - *O plano complexo é simplesmente conexo.*

**Teorema 2.5.2.** - (**teorema de Cauchy-Goursat**) - *Seja  $D$  um conjunto simplesmente conexo. Se  $f$  é analítica em  $D$  então para qualquer contorno  $\gamma$  contido em  $D$  temos*

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0. \quad (2.23)$$

**Definição 2.5.12.** (**independência do caminho**) - *Seja  $f : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  uma função contínua. Dizemos que a integral de  $f$  independe do caminho se para quaisquer dois caminhos  $\gamma_1$  e  $\gamma_2 : [a, b] \rightarrow \Omega$  tais que  $\gamma_1(a) = \gamma_2(a)$  e  $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$  tem-se*

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz. \quad (2.24)$$

**Teorema 2.5.3.** - *Seja  $f : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  uma função contínua. São equivalentes:*

- i)  $\int_{\gamma} f(z)dz = 0$  para qualquer caminho fechado contido em  $\Omega$ ;
- ii) A integral de  $f$  independente do caminho.

**Teorema 2.5.4.** - *Seja  $\Omega$  um conjunto simplesmente conexo. Se  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  é analítica então a integral de  $f$  independe do caminho.*

**Definição 2.5.13. (*primitiva*)** - Seja  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ . Dizemos que  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  é uma primitiva de  $f$  se  $F'(z) = f(z)$  para todo  $z \in \Omega$ .

**Teorema 2.5.5.** - Se  $\Omega$  é um conjunto simplesmente conexo e  $f$  é uma função analítica em  $\Omega$  então, fixado  $z_0 \in \Omega$ , a função

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta, \quad z \in \Omega \quad (2.25)$$

é uma primitiva de  $f$ .

**Corolário 2.5.1.** - Seja  $\Omega$  um conjunto simplesmente conexo e  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  uma função analítica. Então, fixado  $z_0 \in \Omega$  a função  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  dada por

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta, \quad z \in \Omega \quad (2.26)$$

é analítica.

**Proposição 2.5.3.** - Sejam  $\Omega$  um conjunto simplesmente conexo e  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  uma função analítica. Se  $F$  é uma primitiva de  $f$  e  $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$  é um caminho então

$$\int_{\gamma} f(z) dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)). \quad (2.27)$$

Veja agora como pode-se proceder com a integração sobre um contorno  $\gamma$ , no caso em que a função a ser integrada não é necessariamente analítica em todo interior de  $\gamma$ .

Considere um contorno  $\gamma$  e  $n$  contornos,  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$  satisfazendo as seguintes propriedades:

- i) cada  $\gamma_j$  está contido no interior de  $\gamma$ ;
- ii) se  $j_1 \neq j_2$  então  $\gamma_{j_1}$  está contido no exterior de  $\gamma_{j_2}$ .

Seja  $R$  a região obtida do interior de  $\gamma$  eliminando-se cada  $\gamma_j$  bem como o seu interior. Note que a fronteira de  $R$  é a reunião dos contornos  $\gamma, \gamma_1, \dots, \gamma_n$ .

Se  $f$  é uma função analítica definida em um aberto contendo  $\overline{R}$  e se  $\gamma, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$  são percorrido no sentido anti-horário então

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \dots + \int_{\gamma_n} f(z)dz \quad (2.28)$$

**Teorema 2.5.6. (fórmula integral de Cauchy)** - Seja  $\Omega$  um domínio simplesmente conexo e  $f(z)$  uma função analítica em  $\Omega$ . Então

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz, \quad z \in \Omega \quad (2.29)$$

onde  $\gamma$  é um contorno fechado simples em  $\Omega$  e  $z_0$  um ponto qualquer no interior de  $\gamma$ .

**Prova do teorema 2.5.6:** Seja  $\gamma_0$  um círculo em torno de  $z_0$ ,  $|z - z_0| = r_0$ , onde  $r_0$  é suficientemente pequeno para que  $\gamma_0$  esteja contido no interior de  $\gamma$  (figura 2.6). Como a função  $\frac{f(z)}{z - z_0}$  é analítica em  $\Omega \setminus \{z_0\}$ , segue de 2.28 que

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \int_{\gamma_0} \frac{f(z)}{z - z_0} dz. \quad (2.30)$$

Agora

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz &= \int_{\gamma_0} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \int_{\gamma_0} \left[ \frac{f(z_0) + f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right] dz = \\ &= f(z_0) \int_{\gamma_0} \frac{1}{z - z_0} dz + \int_{\gamma_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz. \end{aligned} \quad (2.31)$$

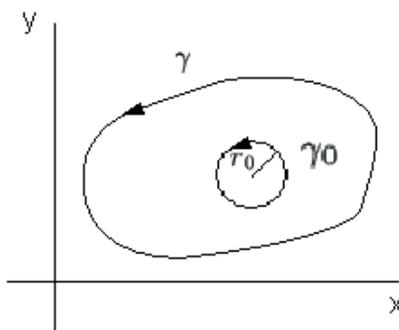


Figura 2.6:

Temos que  $z - z_0 = r_0 e^{i\theta}$  e  $dz = r_0 i e^{i\theta} d\theta$  com  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ .

Portanto

$$\int_{\gamma_0} \frac{1}{z - z_0} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{r_0 e^{i\theta}} r_0 e^{i\theta} d\theta = \int_0^{2\pi} i d\theta = i\theta \Big|_0^{2\pi} = 2\pi i. \quad (2.32)$$

Como  $f$  é contínua no ponto  $z_0$ , para todo  $\epsilon$  dado, existe um  $\delta > 0$ , tal que  $|z - z_0| < \delta$  implica em  $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon = \frac{\epsilon_0}{2\pi}$ .

Portanto, tomando  $r_0$  como sendo igual a  $\delta$  temos

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz \right| &\leq \int_{\gamma_0} \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right| |dz| = \int_{\gamma_0} \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|} |dz| < \\ &< \int_{\gamma_0} \frac{\epsilon}{r_0} |dz| = \frac{\epsilon}{r_0} \int_0^{2\pi} |r_0 i e^{i\theta} d\theta| = \frac{\epsilon}{r_0} \int_0^{2\pi} r_0 |i| |e^{i\theta}| d\theta = \frac{\epsilon}{r_0} r_0 \int_0^{2\pi} d\theta = \\ &= \epsilon (\theta \Big|_0^{2\pi}) = 2\pi\epsilon = 2\pi \frac{\epsilon_0}{2\pi} = \epsilon_0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left| \int_{\gamma_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz \right| < \epsilon_0 \end{aligned} \quad (2.33)$$

O valor absoluto da última integral na equação (2.31) pode ser tornado arbitrariamente pequeno, tomando-se  $r_0$  suficientemente pequeno. Mas as duas outras integrais na equação são independentes de  $r_0$  em virtude da fórmula (2.5), e assim a última também deve ser independente de  $r_0$ . Logo seu valor deve ser igual a zero. A equação (2.31), então reduz-se a fórmula abaixo, e o teorema está demonstrado, ou seja,

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0). \quad (2.34)$$

□

# Capítulo 3

## Matemática básica dos quatérnios

Neste capítulo será introduzida a notação usada para quatérnios e será estabelecida a matemática quaterniônica, [8] e [12], introduzindo adição, multiplicação, subtração, multiplicação com um escalar, norma, e outras mais. Serão destacadas também algumas propriedades algébricas relacionadas ao conjunto dos quatérnios, destacando os conjuntos dos quatérnios unitários que são importantes para a definição das funções logarítmica e exponencial dadas neste capítulo e de grande importância na rotação de vetores no espaço 3D.

### 3.1 Notação

**Definição 3.1.1.** - *O conjunto dos quatérnios é denotado por  $\mathbb{H}$ .*

Os quatérnios consistem de uma parte escalar  $s \in \mathbb{R}$  e uma parte vetorial  $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ . Nós usaremos as seguintes formas:

**Definição 3.1.2.** - *Seja  $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$ ,  $ij = k$  e  $ji = -k$ . Então  $q \in \mathbb{H}$  pode ser escrito:*

$$\begin{aligned} q &= s + ix + jy + kz \\ &= s + \vec{v} \\ &= [s, (x, y, z)] \end{aligned}$$

onde  $s, x, y, z \in \mathbb{R}$  e  $\vec{v} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ .

**Observação 3.1.1.** - *As seguintes identificações devem ser feitas:*

$$(1, 0, 0, 0) \leftrightarrow 1;$$

$$(0, 1, 0, 0) \leftrightarrow i;$$

$$(0, 0, 1, 0) \leftrightarrow j;$$

$$(0, 0, 0, 1) \leftrightarrow k,$$

Nós identificaremos o conjunto dos quatérnios  $\{(s, 0, 0, 0) | s \in \mathbb{R}\}$  com  $\mathbb{R}$  e o conjunto  $\{[0, (x, y, z)] | (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\}$  com  $\mathbb{R}^3$ .

**Definição 3.1.3.** - Sejam  $q, q' \in \mathbb{H}$  onde  $q = [s, (x, y, z)]$  e  $q' = [s', (x', y', z')]$ . O operador adição,  $+$ , é definido

$$q + q' = [s, (x, y, z)] + [s', (x', y', z')] = (s + ix + jy + kz) + (s' + ix' + jy' + kz'). \quad (3.1)$$

**Proposição 3.1.1. (Adição quaterniônica)** - Sejam  $q, q' \in \mathbb{H}$ , onde  $q = [s, (x, y, z)]$  e  $q' = [s', (x', y', z')]$ . Então  $q + q' = [s + s', (x, y, z) + (x', y', z')]$ .

**Prova da proposição 3.1.1:**

$$\begin{aligned} q + q' &= [s, (x, y, z)] + [s', (x', y', z')] \\ &= (s + ix + jy + kz) + (s' + ix' + jy' + kz') \\ &= (s + s') + i(x + x') + j(y + y') + k(z + z') \\ &= [s + s', (x, y, z) + (x', y', z')] \end{aligned}$$

□

**Definição 3.1.4.** - Sejam  $q, q' \in \mathbb{H}$ , onde  $q = [s, (x, y, z)]$  e  $q' = [s', (x', y', z')]$ . A multiplicação é definida

$$qq' = [s, (x, y, z)][s', (x', y', z')] = (s + ix + jy + kz)(s' + ix' + jy' + kz'). \quad (3.2)$$

**Proposição 3.1.2. (Multiplicação quaterniônica)** - Sejam  $q, q' \in \mathbb{H}$ , onde  $q = [s, (x, y, z)]$  e  $q' = [s', (x', y', z')]$ . Então  $qq' = [ss' - (x, y, z) \cdot (x', y', z'), (x, y, z) \times (x', y', z') + s(x', y', z') + s'(x, y, z)]$ , onde  $\cdot$  e  $\times$  denotam o produto escalar e o produto vetorial no  $\mathbb{R}^3$ , respectivamente.

**Prova da proposição 3.1.2:**

Da definição 3.1.2 a seguinte identidade pode ser obtida da regra:  $jk=i, kj=-i, ik=-j$  e  $ki=j$ . Essas identidades são usadas em:

$$qq' = [s, (x, y, z)][s', (x', y', z')]$$

$$\begin{aligned}
 &= ss' - (xx', yy', zz') + i(sx' + s'x + yz' - zy') + j(sy + sy' + zx' - xz') + k(sz' + s'z + xy' - yx') \\
 &= [ss' - (x, y, z) \cdot (x', y', z'), (x, y, z) \times (x', y', z') + s(x', y', z') + s'(x, y, z)]. \quad (3.3)
 \end{aligned}$$

□

**Corolário 3.1.1.** (*para proposição 3.1.2*): *Multiplicação quaterniônica geralmente não é comutativa.*

**Prova do corolário 3.1.1:** *Nós damos um contra exemplo:  $ij=k$ , porém  $ji=-k$ .*

□

Escreve-se as seguintes propriedades da multiplicação quaterniônica:

**Proposição 3.1.3.** - *Seja  $p, q, q' \in \mathbb{H}$  e  $r \in \mathbb{R}$ . Então:*

- $(pq)q' = p(qq')$  (*multiplicação quaterniônica é associativa*)
- $p(q + q') = pq + pq'$  (*multiplicação quaterniônica é distributiva através da adição*)  
 $(q + q')p = qp + q'p$

Multiplicar quatérnios por um escalar é mais facilmente introduzida identificando  $r \in \mathbb{R}$  com o quatérnio  $[r, (0.0.0)]$ :

**Definição 3.1.5.** - *Seja  $q \in \mathbb{H}$  e  $r \in \mathbb{R}$ . A multiplicação por um escalar é definida*

$$rq = [r, (0, 0, 0)]q. \quad (3.4)$$

**Proposição 3.1.4.** (***Multiplicação com um escalar***) - *Seja  $q \in \mathbb{H}$ , onde  $q=[s, (x, y, z)]$  e seja  $r \in \mathbb{R}$ . Então  $rq=qr=[r, (0, 0, 0)][s, (x, y, z)]=[rs, r(x, y, z)]$ .*

Note que a proposição 3.1.4 mostra que a multiplicação com um escalar é comutativa.

A notação  $\frac{q}{r}$  é usada significando  $\frac{1}{r}q$ , onde  $q \in \mathbb{H}$  e  $r \in \mathbb{R} - \{0\}$ .

Agora é possível introduzir subtração na maneira usual.

**Definição 3.1.6.** - *Dados  $q, q' \in \mathbb{H}$ , a subtração é definida*

$$q - q' = q + (-1)q' \quad (3.5)$$

Daí segue a seguinte proposição:

**Proposição 3.1.5. (Subtração quaterniônica)** - Seja  $q, q' \in \mathbb{H}$ , onde  $q = [s, (x, y, z)]$  e  $q' = [s', (x', y', z')]$ . Então

$$q - q' = q + (-1)q' = [s - s', (x, y, z) - (x', y', z')]. \quad (3.6)$$

Correspondente para a definição de conjugado de um número complexo, nós definimos o conjugado de um quatérnio:

**Definição 3.1.7.** - Seja  $q \in \mathbb{H}$ . Então  $\bar{q}$  é chamado de conjugado de  $q$  e é definido por  $\bar{q} = \overline{[s, (x, y, z)]} = [s, -(x, y, z)]$ .

A definição dá origem a seguinte propriedade:

**Proposição 3.1.6.** - Seja  $p, q \in \mathbb{H}$ . Então:

- i)  $\bar{\bar{q}} = q$
- ii)  $\overline{(\bar{p}q)} = \bar{q}\bar{p}$
- iii)  $\overline{p + q} = \bar{p} + \bar{q}$
- iv)  $q\bar{q} = \bar{q}q$

**Definição 3.1.8.** - Seja  $p \in \mathbb{H}$  e seja o mapeamento  $\|\cdot\| : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}$  definido por  $\|q\| = \sqrt{q\bar{q}}$ . Este mapeamento é chamado norma e  $\|q\|$  é a norma de  $q$ .

Esse mapeamento é uma norma no senso usual, isto é mostrado no corolário para proposição 3.1.7. Esse mapeamento norma tem um número de interessantes propriedades que são resumidas em:

**Proposição 3.1.7.** Seja  $q, q' \in \mathbb{H}$  e seja  $\|\cdot\| : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}$  dado como na definição 3.1.8. As seguintes equações são válidas:

$$\|q\| = \sqrt{s^2 + (x, y, z) \cdot (x, y, z)} = \sqrt{s^2 + x^2 + y^2 + z^2} \quad (3.7)$$

$$\|\bar{q}\| = \|q\| \quad (3.8)$$

$$\|qq'\| = \|q\|\|q'\| \quad (3.9)$$

**Prova da proposição 3.1.7:**

As equações 3.7 e 3.8 podem ser vistas diretamente. A equação 3.9 segue de:

$$\|qq'\| = \sqrt{qq'(\overline{qq'})} = \sqrt{qq'\bar{q}'\bar{q}} = \sqrt{q\|q'\|^2\bar{q}} = \sqrt{q\bar{q}\|q'\|^2} = \sqrt{\|q\|^2\|q'\|^2} = \|q\|\|q'\| \quad (3.10)$$

□

Da equação 3.7 na proposição 3.1.7 segue que a norma de um quatérnio  $q$  pode ser escrito como é usualmente obtido do produto interno (se  $q \in \mathbb{H}$  é identificado com o vetor correspondente em  $\mathbb{R}^4$ ). Esta propriedade é formalizada por:

**Definição 3.1.9.** - *Sejam  $q, q' \in \mathbb{H}$ ,  $q = [s, (x, y, z)]$  e  $q' = [s', (x', y', z')]$ . O produto interno é definido como*

$$\bullet : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \curvearrowright \mathbb{R} \quad (3.11)$$

onde

$$q \bullet q' = ss' + v.v' = ss' + xx' + yy' + zz'. \quad (3.12)$$

Note que a definição produz  $q \bullet q = s^2 + x^2 + y^2 + z^2$ , que dá origem a:

**Corolário 3.1.2.** (*para proposição 3.1.7*) - *A norma de um quatérnio  $q$  pode ser obtida por  $\|q\| = \sqrt{q \bullet q}$ . Além disso,  $\|\cdot\|$  é uma norma no senso matemático usual.*

**Proposição 3.1.8.** - *Seja  $q, q' \in \mathbb{H}$ . Defina  $q, q'$  como os vetores quadrimensionais correspondentes e seja  $\alpha$  o ângulo entre eles. Então  $q \bullet q' = \|q\|\|q'\| \cos \alpha$ .*

## 3.2 As propriedades algébricas dos quatérnios

Nesta seção será mostrado que o conjunto dos quatérnios  $\mathbb{H} \setminus \{0, (0, 0, 0)\}$  é um grupo não abeliano sob a multiplicação dos quatérnios. No final da seção são apresentadas outras propriedades algébricas dos quatérnios.

**Definição 3.2.1.** - *O conjunto dos quatérnios  $\mathbb{H} \setminus \{0, (0, 0, 0)\}$  é escrito como  $\overset{0}{\mathbb{H}}$ .*

**Definição 3.2.2.** - *Seja  $G$  um conjunto com um operador  $\bullet : G \times G \curvearrowright G$  definido por  $(a, b) \rightarrow a \bullet b = ab$ .  $G$  é um grupo se*

- i)  $a(bc) = (ab)c$  para todo  $a, b, c \in G$  (O operador é associativo);
- ii) *Exatamente em  $I \in G$  existe de maneira que  $Ia = aI = a$  ( $I$  é o elemento neutro);*
- iii) *Para todo  $a \in G$  existe um elemento  $a^{-1} \in G$ , de maneira que  $aa^{-1} = a^{-1}a = I$ . ( $a^{-1}$  é o elemento inverso de  $a$ ).*

Se  $ab=ba$  para todo  $a, b \in G$ ,  $G$  é chamado de um grupo abeliano ou grupo comutativo.

A existência de um elemento neutro e de elementos inverso em  $\overset{0}{H}$  sob a multiplicação quaterniônica são verificados nos dois seguintes lemas.

**Lema 3.2.1.** - O elemento  $I=[1, (0,0,0)] \in \overset{0}{H}$  é o único elemento neutro sob a multiplicação quaterniônica.

**Prova do lema 3.2.1:** Seja  $q \in \mathbb{H}$  dado. A proposição 3.1.2 dá

$$qI = Iq = [1s, 1(x, y, z)] = [s, (x, y, z)] = q.$$

Assim  $I$  é um elemento neutro.  $I$  é também o único elemento neutro que satisfaz as exigências. Para ver isto, assumimos que  $J$  também satisfaça as exigências. Então  $IJ = I$ , porque  $J$  é um elemento neutro. Além disso,  $IJ = J$ , visto que  $I$  é um elemento neutro. Isto nos dá que  $I = IJ = J$ , então  $I = J$  é o único elemento neutro em  $\overset{0}{H}$ .

□

**Lema 3.2.2.** - Seja  $q \in \overset{0}{H}$ . Então existe  $q^{-1} \in \mathbb{H}$  de maneira que  $qq^{-1} = q^{-1}q = I$ . Além disso  $q^{-1}$  é único e dado por:

$$q^{-1} = \frac{\bar{q}}{\|q\|^2}. \tag{3.13}$$

**Prova do lema 3.2.2:**

Seja  $q \in \overset{0}{H}$  dado

Unicidade

Seja ambos  $p_1, p_2 \in \mathbb{H}$  inversos para  $q$ . A igualdade de  $p_1$  e  $p_2$  segue de

$$p_1 = p_1I = p_1(qp_2) = (p_1q)p_2 = Ip_2 = p_2$$

Existência

Seja  $p = \frac{\bar{q}}{\|q\|^2}$ . Então

$$qp = q \frac{\bar{q}}{\|q\|^2} = \frac{q\bar{q}}{\|q\|^2} = \frac{\|q\|^2}{\|q\|^2} = 1 = I$$

$$pq = \frac{\bar{q}}{\|q\|^2} q = \frac{\bar{q}q}{\|q\|^2} = \frac{q\bar{q}}{\|q\|^2} = \frac{\|q\|^2}{\|q\|^2} = 1 = I$$

Portanto todo quatérnio em  $q \in H^0$  tem um inverso.

□

Escreve-se  $\frac{p}{q}$  para  $pq^{-1}$ . Note que isto geralmente é diferente de  $q^{-1}p$  visto que a multiplicação quaterniônica não é comutativa.

Pode-se agora enunciar o seguinte:

**Proposição 3.2.1.** - *O conjunto  $\mathbb{H}$  é um grupo não abeliano sob multiplicação dos quatérnios.*

**Prova da proposição 3.2.1:**

*Note que o conjunto dos quatérnios é fechado sob a multiplicação. Isto segue diretamente da definição de Hamilton. O primeiro requisito da definição de um grupo segue da proposição 3.1.3. O segundo e o terceiro requisito segue dos lemas 3.2.1 e 3.2.2. O grupo não é Abeliano, visto que a multiplicação quaterniônica não é comutativa.*

□

### Outras propriedades algébricas

O conjunto dos quatérnios satisfaz algumas outras propriedades que são dignas de serem mencionadas. Estas são apresentadas sem muitas dificuldades:

- i) O conjunto dos quatérnios é um grupo abeliano  $(\mathbb{H}, +)$  sobre adição quaterniônica;
- ii) O conjunto dos quatérnios é um anel não abeliano  $(\mathbb{H}, +, \cdot)$ , onde  $+$  e  $\cdot$  são a adição e a multiplicação dos quatérnios, respectivamente.

## 3.3 Quatérnios unitários

Esta seção introduz um subconjunto do grupo quaterniônico - o conjunto dos quatérnios unitários.

**Definição 3.3.1.** - *Seja  $q \in \mathbb{H}$ . Se  $\|q\| = 1$ , então  $q$  é chamado de quatérnio unitário. Usaremos  $\mathbb{H}_1$  para denotar o conjunto de quatérnios unitários.*

O conjunto dos quatérnios unitários constituem uma esfera unitária no espaço quadridimensional. Será visto posteriormente que o conjunto dos quatérnios unitários representam um papel importante em relação a rotações gerais.

**Proposição 3.3.1.** - Seja  $q = [s, (x, y, z)] \in \mathbb{H}_1$ . Então existe  $(x', y', z') \in \mathbb{R}^3$  e  $\theta \in ]-\pi, \pi]$  de maneira que  $q = [\cos \theta, (x', y', z') \sin \theta]$

**Prova da proposição 3.3.1:**

Se  $q = [1, (0, 0, 0)]$  nos permite  $\theta = 0$  e  $(x', y', z')$  pode ser escolhido livremente entre os vetores unitários em  $\mathbb{R}^3$ .

Se  $q \neq [1, (0, 0, 0)]$  nos permite  $k = |(x, y, z)|$  e  $(x', y', z') = \frac{1}{k}(x, y, z)$ . Então  $(x, y, z) = k(x', y', z')$  onde  $(x', y', z')$  é um vetor unitário em  $\mathbb{R}^3$ . Visto que  $q$  é um quatérnio unitário, nós obtemos

$$1 = \|q\|^2 = s^2 + (x, y, z) \cdot (x, y, z) = s^2 + k^2(x', y', z') \cdot (x', y', z') = s^2 + k^2$$

A equação  $s^2 + k^2 = 1$  descreve um círculo no plano. Visto que um círculo é também descrito por  $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ , existe  $\theta \in ]-\pi, \pi]$  de maneira que  $s = \cos \theta$  e  $k = \sin \theta$ .

Em geral nós obtemos o desejado:

$$q = [s, (x, y, z)] = [s, (x', y', z')k] = [\cos \theta, (x', y', z') \sin \theta]$$

□

Dois importantes resultados são dados a seguir:

**Proposição 3.3.2.** - Seja  $q, q' \in \mathbb{H}_1$ . As seguintes duas equações são válidas:

i)  $\|qq'\| = 1$ ;

ii)  $q^{-1} = \bar{q}$ .

**Prova da proposição 3.3.2:**

i)  $\|qq'\| = \|q\|\|q'\| = 1$ , visto que  $\|q\| = \|q'\| = 1$ . Pela equação 3.9 na proposição 3.1.7;

ii)  $q^{-1} = \frac{\bar{q}}{\|q\|^2} = \bar{q}$ , visto que  $\|q\| = 1$ .

□

O conjunto dos quatérnios  $\mathbb{H}_1$  é obviamente um subconjunto de  $\overset{0}{H}$ , porém a definição 3.3.2 e a proposição 3.3.3 mostram que  $\mathbb{H}_1$  constitui um subgrupo de  $\overset{0}{H}$ .

**Definição 3.3.2.** - Seja  $G$  um grupo e  $F \neq 0$  um subconjunto de  $G$ .  $F$  é um subgrupo de  $G$  se

i) Para todo  $a, b \in F$ :  $ab \in F$  ( $F$  é fechado);

ii) Para todo  $a \in F$ :  $a^{-1} \in F$ .

**Proposição 3.3.3.** - O conjunto  $\mathbb{H}_1$  dos quatérnios unitários é um subgrupo do grupo  $\overset{0}{H}$ .

**Prova da proposição 3.3.3:**

Seja  $q, q' \in \mathbb{H}_1$ . A proposição 3.3.2 dá que  $\|qq'\| = 1$ , ou seja,  $qq' \in \mathbb{H}_1$ , e assim o primeiro requisito de subgrupo está satisfeito. A equação 3.8 na proposição 3.1.7 e a proposição 3.3.3 dá que

$$\|q^{-1}\| = \|\bar{q}\| = \|q\| = 1$$

e deste modo o segundo requisito de subgrupo  $q^{-1} \in \mathbb{H}_1$ .

### 3.4 As funções exponencial e logarítmica

**Definição 3.4.1.** - Seja  $q \in \mathbb{H}_1$ , onde  $q = [\cos \theta, \sin \theta(x, y, z)]$  como na proposição 3.3.1.

A função logarítmica  $\log$  é definida

$$\log q = [0, \theta(x, y, z)] \quad (3.14)$$

Note que  $\log[1, (0, 0, 0)] = [0, (0, 0, 0)]$  como no caso real. Note também que  $\log q$  não é em geral um quatérnio unitário.

A função exponencial é introduzida por

**Definição 3.4.2.** - Para um quatérnio da forma  $q = [0, \theta(x, y, z)]$ ,  $\theta \in \mathbb{R}$ ,  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ,  $|(x, y, z)| = 1$ , a função exponencial é introduzida por

$$\exp q = [\cos \theta, \sin \theta(x, y, z)] \quad (3.15)$$

Note que as funções exponencial e logarítmica são mutuamente inversas, e que a exponencial está em  $\mathbb{H}_1$ .

A verificação desse fato é simples e é dada seguinte forma:

De acordo com a definição da função logarítmica tem-se que

$$\log q = [0, \theta(x, y, z)] = w \quad ; \quad q = [\cos \theta, \sin \theta(x, y, z)] \in \mathbb{H}_1,$$

ou seja,

$$\|q\| = 1 = \cos^2 \theta + (x^2 + y^2 + z^2) \sin^2 \theta \Rightarrow (x^2 + y^2 + z^2) = |(x, y, z)| = 1$$

Observando que  $w = [0, \theta(x, y, z)]$  tal que  $|(x, y, z)| = 1$  e usando a definição da função exponencial tem-se que

$$\exp w = \exp[0, \theta(x, y, z)] = [\cos \theta, \sin \theta(x, y, z)] = q,$$

ou seja, as funções exponencial e logarítmica são funções inversas uma da outra.

Das definições acima pode-se definir exponenciação para  $q \in \mathbb{H}_1$ ,  $t \in \mathbb{R}$ :

**Definição 3.4.3.** - *Seja  $q \in \mathbb{H}_1$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . A exponenciação  $q^t$  é definida por*

$$q^t \equiv \exp(t \log q) \tag{3.16}$$

*Isto dá origem a seguinte proposição:*

**Proposição 3.4.1.** - *Seja  $q \in \mathbb{H}_1$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Então  $\log(q^t) = t \log q$ .*

**Prova da proposição 3.4.1:**

$$\log(q^t) = \log(\exp(t \log q)) = t \log q$$

□

A seguinte regra para  $\mathbb{R}$  também é válida para quatérnios unitários:

**Proposição 3.4.2.** - *Seja  $q \in \mathbb{H}_1$ ,  $q = [\cos \theta, \sin \theta(x, y, z)]$  e  $a, b \in \mathbb{R}$ . Então*

$$q^a q^b = q^{a+b} \tag{3.17}$$

**Prova da proposição 3.4.2:**

$$\begin{aligned} q^a q^b &= \exp(a \log q) \exp(b \log q) \\ &= \exp(a[0, \theta(x, y, z)]) \exp(b[0, \theta(x, y, z)]) \\ &= [\cos a\theta, (x, y, z) \sin a\theta][\cos b\theta, (x, y, z) \sin b\theta] \\ &= [\cos a\theta \cos b\theta - \sin a\theta \sin b\theta((x, y, z) \cdot (x, y, z)), \\ &\quad (x, y, z) \cos a\theta \sin b\theta + (x, y, z) \cos b\theta \sin a\theta + ((x, y, z) \times (x, y, z)) \sin a\theta \sin b\theta] \\ &= [\cos a\theta \cos b\theta - \sin a\theta \sin b\theta, (x, y, z)(\cos a\theta \sin b\theta + \cos b\theta \sin a\theta)] \\ &= [\cos((a+b)\theta), \sin((a+b)\theta)(x, y, z)] \\ &= \exp([0, (a+b)\theta(x, y, z)]) \\ &= \exp((a+b) \log(q)) \\ &= q^{a+b} \end{aligned}$$

□

Uma outra regra dos números reais é  $(p^a)^b = p^{ab}$ . Esta regra também é válida para quatérnios unitários.

**Proposição 3.4.3.** - *Seja  $p \in \mathbb{H}_1$  e  $a, b \in \mathbb{R}$ . Então  $(p^a)^b = p^{ab}$ .*

**Prova da proposição 3.4.3:**

$$(p^a)^b = (\exp(a \log p))^b = \exp(b \log(\exp(a \log p))) = \exp(ba \log p) = p^{ab}$$

□

Outras regras devem ser verificadas cuidadosamente, quando usadas a  $\exp$  e o  $\log$  dos quatérnios como as versões reais correspondentes. Por exemplo, considere a seguinte derivação incorreta, onde  $p$  e  $q$  são quatérnios unitários.

$$\begin{aligned} pq &= \exp(\log(pq)) = \exp(\log(p) + \log(q)) \\ &= \exp(\log(q) + \log(p)) = \exp(\log(q)) \exp(\log(p)) \\ &= qp. \end{aligned}$$

Isto é inconsistente com o fato da multiplicação quaterniônica não ser comutativa. O erro está na segunda igualdade onde a regra  $(\log(pq) = \log(p) + \log(q))$  é usada - esta regra não é válida para quatérnios.

## 3.5 Rotações com quatérnios

Os quatérnios são de grande importância para o estudo de rotações num espaço tridimensional. Hamilton buscou descrever rotações no espaço, justamente como os números complexos descreviam rotações no plano. Os quatérnios de fato executam rotações sendo este fato mostrado nesta seção.

Antes de começar a tratar de rotações com quatérnios, serão introduzidos dois tipos de transformações geométricas, a saber, translação e rotação,[12].

### Translação

Translação é o mais óbvio tipo de transformação: um ponto no espaço é movido de alguma posição para outro. Seja um ponto  $P \in \mathbb{R}^3$  denotado por uma tripla  $(x, y, z)$ ,  $x, y, z \in \mathbb{R}$  e a translação por um vetor  $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ . Então a nova posição  $P'$  é calculada pela simples adição:

$$P' = (x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z). \quad (3.18)$$

A definição é não ambígua isto é existe somente um vetor translação que leva  $P$  para  $P'$ .

## Rotação

Rotação em 3D não é tão simples como a translação e ela pode ser definida de muitas maneiras. Nós escolhemos a seguinte definição, dada pelo Teorema(Euler, 1752) de Euler(1707-1783) - escrito em notação moderna (comparar com a figura 3.1 ):

**Teorema 3.5.1.** - *Seja  $O, O' \in \mathbb{R}^3$  duas orientações. Então existe um eixo  $l \in \mathbb{R}^3$  e um ângulo de rotação  $\theta \in ]-\pi, \pi]$  de maneira que  $O$  produz  $O'$  quando rotacionado  $\theta$  sobre  $l$ .*

Note que a condição do teorema é de existência e não de unicidade.

Serão diferenciados orientação e rotação. Uma orientação de um objeto em  $\mathbb{R}^3$  é dado por um vetor normal. Uma rotação é definida por um eixo e um ângulo de rotação.

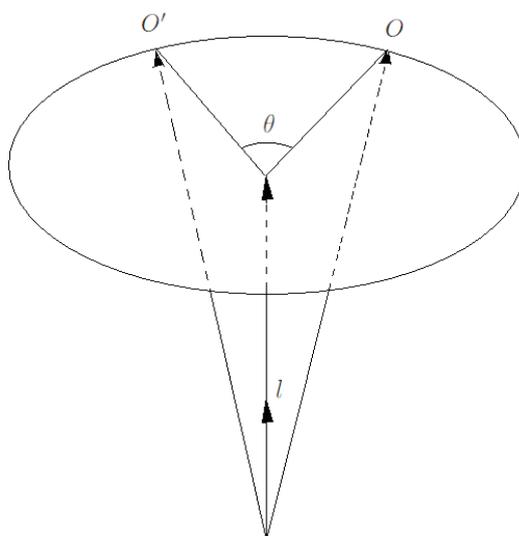


Figura 3.1: Seja  $O, O' \in \mathbb{R}^3$  duas orientações. Então existe em eixo  $l \in \mathbb{R}^3$  e um ângulo de rotação  $\theta \in ]-\pi, \pi]$  tal que  $O$  produz  $O'$  quando rotacionado  $\theta$  sobre  $l$ .

### 3.5.1 Rotações com quatérnios unitários

O assunto principal da seção trata de rotações com quatérnios, [12] e [2], mais especificamente com quatérnios unitários no contexto do teorema de Euler.

**Definição 3.5.1.** - *Um vetor no espaço 3D  $t = (t_x \ t_y \ t_z)^T$  pode ser representado por um quatérnio puramente imaginário*

$$t_q = 0 + it_x + jt_y + t_z. \quad (3.19)$$

**Observação 3.5.1.** - Denotar-se-a  $t_q = t$ , se as componentes correspondentes são as mesmas entre um vetor  $3D$  e um quatérnio puramente imaginário. Seja  $s$  um vetor no espaço  $3D$ , e  $s_q$  sua representação quaterniônica imaginária pura, então nós podemos verificar as seguintes propriedades, que serão usadas no decorrer da seção:

$$s \cdot t = s_q \cdot t_q = \frac{(s_q \bar{t}_q + t_q \bar{s}_q)}{2} \quad (3.20)$$

$$s \times t = \frac{(s_q t_q - t_q s_q)}{2} \quad (3.21)$$

Será validada a afirmação que  $t'_q = qt_q \bar{q}$  é uma operação de rotação onde  $t_q$  é um quatérnio imaginário puro equivalente a um vetor  $t$  no espaço  $3D$ , e  $q$  é um quatérnio unitário. O mapeamento inverso é  $\bar{q} t'_q q$  e o mapeamento é bijetivo. Primeiro será mostrado que  $t'_q$  é puramente imaginário verificando se  $t'_q + \bar{t}'_q = 0$ . Segue assim a seguinte proposição:

**Proposição 3.5.1.** - Seja  $t'_q$  um quatérnio puramente imaginário, então  $t'_q + \bar{t}'_q = 0$ .

**Prova da proposição 3.5.1:**

$$t'_q + \bar{t}'_q = (qt_q \bar{q}) + (\overline{qt_q \bar{q}}) = qt_q \bar{q} + q \bar{t}_q \bar{q} = q(t_q + \bar{t}_q) \bar{q} = 0$$

do fato que  $t_q$  é puramente imaginário.

Outra observação a ressaltar é que a operação de rotação deve preservar o produto escalar. Isto se verifica na seguinte proposição:

**Proposição 3.5.2.** - Sejam  $s'$  e  $t'$  no espaço  $3D$  as respectivas rotações dos vetores  $s$  e  $t$  no espaço  $3D$ . Temos que  $s' \cdot t' = s \cdot t$ , ou seja, a operação de rotação preserva o produto interno.

**Prova da proposição 3.5.2:**

$$\begin{aligned} s' \cdot t' &= \frac{(s'_q \bar{t}'_q + t'_q \bar{s}'_q)}{2} \\ &= \frac{\{qs_q \bar{q}(\overline{qt_q \bar{q}}) + qt_q \bar{q}(\overline{qs_q \bar{q}})\}}{2} \\ &= \frac{\{qs_q(\bar{q}q)\bar{t}_q \bar{q} + qt_q(\bar{q}q)\bar{s}_q \bar{q}\}}{2} \\ &= \frac{\{qs_q \bar{t}_q \bar{q} + qt_q \bar{s}_q \bar{q}\}}{2} \\ &= q \left( \frac{s_q \bar{t}_q + t_q \bar{s}_q}{2} \right) \bar{q} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= q(s_q \cdot t_q)\bar{q} = (s_q \cdot t_q)(q\bar{q}) = (s_q \cdot t_q) \\ &= s \cdot t \end{aligned}$$

Será usado aqui o fato que o produto escalar  $s_q \cdot t_q$  é um número real, e o produto de um número real com um quatérnio é comutativo pela proposição 3.1.4. Um caso especial do resultado acima é que  $t' \cdot t'$  é o mesmo que  $t \cdot t$ , significa que o comprimento de um vetor é invariante depois da rotação, seguindo assim o seguinte corolário para a proposição 3.5.2.

**Corolário 3.5.1.** - *Seja  $t$  um vetor no espaço 3D e  $t'$  sua rotação. O comprimento de  $t$  é invariante depois de sua rotação, ou seja,  $t \cdot t = t' \cdot t'$ .*

**Prova da proposição 3.5.1:** *A prova segue imediata da proposição 3.5.2.*

□

Os membros do conjunto de transformações de coordenadas lineares que permite a invariância da norma euclidiana são rotações ou reflexões [9]. A operação de reflexão substitui as coordenadas do lado direito (right-handed) para o lado esquerdo (left-handed) ou vice-versa, que resulta na mudança de sinal do produto vetorial [17]. O produto vetorial de dois vetores rotacionados é mostrado como sendo o mesmo que a rotação do produto vetorial de dois vetores, isto é,

$$\begin{aligned} s' \times t' &= \frac{(s'_q t'_q - t'_q s'_q)}{2} \\ &= \frac{(q s_q \bar{q} q t_q \bar{q} - q t_q \bar{q} q s_q \bar{q})}{2} \\ &= q \left( \frac{s_q t_q - t_q s_q}{2} \right) \bar{q} \end{aligned}$$

que é a rotação do vetor  $s \times t$ .

Analisando a figura 3.2 temos que  $\overrightarrow{OC} = (t \cdot \omega)\omega$  é a projeção de  $t$  na direção de  $\omega$ . Então  $\overrightarrow{CT} = t - (t \cdot \omega)\omega$  e  $\overrightarrow{CP} = \omega \times t$ . Agora  $\overrightarrow{CT}'$  torna-se  $\cos \alpha \overrightarrow{CT} + \sin \alpha \overrightarrow{CP}$ , e o vetor rotacionado  $t' = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CT}'$ .

Se  $t'$  é tomado de  $t$  rotacionado por um ângulo  $\alpha$  em torno do eixo  $\omega$  que é um vetor unitário, então ele tem a seguinte relação com o resultado da análise sobre a figura 3.2.

$$\begin{aligned} t' &= (t \cdot \omega)\omega + \cos \alpha \overrightarrow{CT} + \sin \alpha \overrightarrow{CP} \\ &= (t \cdot \omega)\omega + \cos \alpha (t - (t \cdot \omega)\omega) + \sin \alpha (\omega \times t) \end{aligned}$$

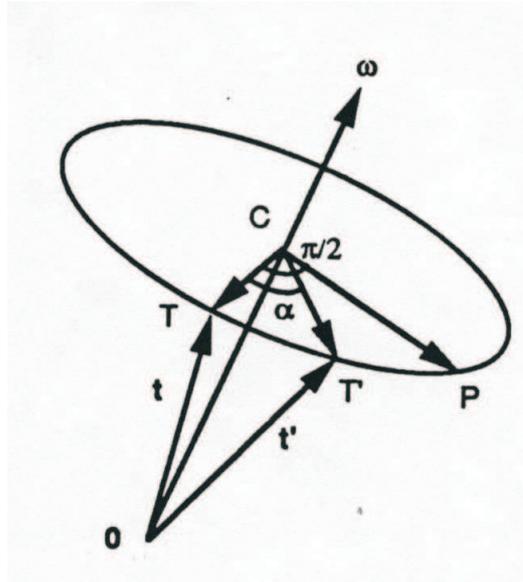


Figura 3.2: Rotação de um vetor  $t$  por um ângulo  $\alpha$  sobre o vetor unitário  $\omega$ .

$$\begin{aligned} &= (t \cdot \omega)\omega(1 - \cos \alpha) + t \cos \alpha + \sin \alpha(\omega \times t) \\ &= \cos \alpha t + \sin \alpha(\omega \times t) + (1 - \cos \alpha)(\omega \cdot t)\omega \end{aligned}$$

Seu quatérnio equivalente é

$$\cos \alpha t_q + \sin \alpha \left( \frac{\omega_q t_q - t_q \omega_q}{2} \right) + (1 - \cos \alpha) \left( \frac{\omega_q \bar{t}_q + t_q \bar{\omega}_q}{2} \right) \omega_q \quad (3.22)$$

Se nós representarmos o quatérnio unitário  $q$  na seguinte forma, de acordo com a proposição 3.3.1:

$$q = \cos \left( \frac{\alpha}{2} \right) + \sin \left( \frac{\alpha}{2} \right) \omega_q \quad (3.23)$$

então  $qt_q\bar{q}$  se reduz a equação 3.22.

Para demonstrarmos essa afirmação, notemos as seguintes propriedades:

De acordo com [16] vale

**Propriedade 3.5.1.** - *Sejam  $x, y \in \mathbb{R}$ . Para as funções cosseno e seno nos reais são válidas as seguintes igualdades:*

i)  $\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x$

ii)  $\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x$

$$\text{iii) } \sin x \cos y = \frac{1}{2}(\sin(x+y) + \sin(x-y))$$

De acordo com [27] vale

**Propriedade 3.5.2.** - *Sejam  $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ . São válidas as seguintes fórmulas referentes ao produto vetorial desses três vetores:*

$$\text{i) } (u \times v) \times w = -(v \cdot w)u + (u \cdot w)v$$

$$\text{ii) } u \times (v \times w) = (u \cdot w)v - (u \cdot v)w$$

De acordo com [6] valem

**Propriedade 3.5.3.** - *Quaisquer que sejam  $u, v, w \in \mathbb{R}^3$  e qualquer que seja  $\lambda \in \mathbb{R}$ , tem-se:*

$$\text{i) } u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w$$

$$\text{ii) } u \cdot (\lambda v) = (\lambda u) \cdot v = \lambda(u \cdot v)$$

$$\text{iii) } u \cdot v = v \cdot u$$

$$\text{iv) } u \cdot u \geq 0 ; u \cdot u = 0 \iff u = 0$$

**Propriedade 3.5.4.** - *Sejam  $u = (x_1, y_1, z_1)$ ,  $v = (x_2, y_2, z_2)$ ,  $w = (x_3, y_3, z_3) \in \mathbb{R}^3$ , então:*

$$u \cdot (v \times w) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Agora, seja  $q \in \mathbb{H}_1$ ,  $q = q_1 + \vec{q}$ . Usando as propriedades 3.5.1, 3.5.2, 3.5.3 e 3.5.4 temos:

$$\begin{aligned}
 (q_1 + \vec{q})(0 + t_q)(\overline{q_1 + \vec{q}}) &= (q_1 + \vec{q})(0 + t_q)(q_1 - \vec{q}) \\
 &= (q_1 + \vec{q})(-t_q \cdot (-q) + q_1 t_q - (t_q \times \vec{q})) \\
 &= (q_1 + \vec{q})((t_q \cdot \vec{q}) + q_1 t_q - (t_q \times \vec{q})) \\
 &= q_1(t_q \cdot \vec{q}) - \vec{q} \cdot (q_1 t_q - (t_q \times \vec{q})) + q_1(q_1 t_q - (t_q \times \vec{q})) + \\
 &\quad + (t_q \cdot \vec{q})\vec{q} + \left( \vec{q} \times (q_1 t_q - (t_q \times \vec{q})) \right) \\
 &= q_1(t_q \cdot \vec{q}) - q_1(\vec{q} \cdot t_q) + \vec{q} \cdot (t_q \times \vec{q}) + q_1 q_1 t_q - q_1(t_q \times \vec{q}) + \\
 &\quad + (t_q \cdot \vec{q})\vec{q} + q_1(\vec{q} \times t_q) - \vec{q} \times (t_q \times \vec{q}) \\
 &= q_1 q_1 t_q - q_1(t_q \times \vec{q}) + (t_q \cdot \vec{q})\vec{q} + q_1(\vec{q} \times t_q) - \vec{q} \times (t_q \times \vec{q}) \\
 &= q_1^2 t_q - q_1(t_q \times \vec{q}) + (t_q \cdot \vec{q})\vec{q} + q_1(\vec{q} \times t_q) - [(\vec{q} \cdot \vec{q})t_q - (q \cdot \vec{t}_q)\vec{q}] \\
 &= q_1^2 t_q - (\vec{q} \cdot \vec{q})t_q + 2(\vec{q} \cdot t_q)\vec{q} + 2q_1(\vec{q} \times t_q)
 \end{aligned}$$

Substituindo  $q_1$  por  $\cos(\frac{\alpha}{2})$  e  $\vec{q}$  por  $\sin(\frac{\alpha}{2})\omega_q$ , implica em

$$\begin{aligned}
 qt_q\bar{q} &= \left[ \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\omega_q \right] (0 + t_q) \left[ \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\omega_q \right] \\
 &= \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)t_q - \left( \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\omega_q \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\omega_q \right)t_q + 2\left( \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\omega_q \cdot t_q \right) \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\omega_q + \\
 &\quad + 2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\left( \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\omega_q \times t_q \right) \\
 &= \left( \frac{1 + \cos \alpha}{2} \right)t_q - \left( \frac{1 - \cos \alpha}{2} \omega_q \cdot \omega_q \right)t_q + (1 - \cos \alpha)(\omega_q \cdot t_q)\omega_q + \sin \alpha(\omega_q \times t_q) \\
 &= \cos \alpha t_q + (1 - \cos \alpha) \left( \frac{\omega_q \bar{t}_q + t_q \bar{\omega}_q}{2} \right) \omega_q + \sin \alpha \left( \frac{\omega_q t_q - t_q \omega_q}{2} \right),
 \end{aligned}$$

o que verifica nossa afirmação inicial, de que a rotação de um vetor  $t \in \mathbb{R}^3$ , representado pelo quatérnio  $t_q$ , é dada por  $qt_q\bar{q}$ .

# Capítulo 4

## Funções quaterniônicas

O presente capítulo tem por objetivo definir a função quaterniônica, e mostrar algumas de suas propriedades. Além disso serão introduzidos conceitos tais como regularidade à esquerda, regularidade à direita e a diferenciação e integração de quatérnios mostrados em [3].

### 4.1 Função de uma variável quaterniônica

**Definição 4.1.1.** - *Seja  $E^4 \subset \mathbb{H}$  um espaço quadridimensional e  $q \in E^4$  uma variável da forma  $q = q_1 + q_2i + q_3j + q_4k$ , com  $q_i \in \mathbb{R}$ , ( $i=1,2,3,4$ ). Assim, uma função quaterniônica  $f : E^4 \rightarrow \mathbb{H}$  é um mapeamento que faz corresponder a cada  $q \in E^4$  um número quaterniônico  $w = f(q)$ , ou seja:*

$$\begin{aligned} f : E^4 &\rightarrow \mathbb{H} \\ (q_1, q_2, q_3, q_4) &\mapsto w = f(q_1, q_2, q_3, q_4) \end{aligned}$$

Sendo  $f$  uma função de variáveis quaterniônicas, pode-se decompô-la em uma parte escalar  $\phi(q)$  e uma parte vetorial  $\psi(q)$ , ou seja,

$$w = f(q) = \phi(q) + \psi(q), \quad (4.1)$$

onde  $\phi(q) = f_1(q)$ ,  $\psi(q) = if_2(q) + jf_3(q) + kf_4(q)$  e as funções  $f_l : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ , ( $l = 1, 2, 3, 4$ ), são funções coordenadas de valores reais.

**Observação 4.1.1.** - *Quanto às funções coordenadas não se faz nenhuma restrição a estas, somente que sejam  $n$ -vezes diferenciáveis em cada uma de suas variáveis independentes.*

## 4.2 Funções quaterniônicas regulares

A seguir serão vistos os conceitos de regularidade à esquerda e de regularidade à direita, que de acordo com a teoria de Fueter, [14], são definidas em termos do operador quaterniônico  $\Gamma$ , dado como:

$$\Gamma = \frac{\partial}{\partial q_1} + i \frac{\partial}{\partial q_2} + j \frac{\partial}{\partial q_3} + k \frac{\partial}{\partial q_4} \quad (4.2)$$

**Observação 4.2.1.** - O operador quaterniônico dado pela equação 4.2 pode ser escrito da seguinte forma:

$$\Gamma = \frac{\partial}{\partial q_1} + \nabla, \quad (4.3)$$

onde  $\nabla$  é o conhecido operador gradiente.

**Definição 4.2.1. (regularidade à esquerda)** - Uma função  $f$  de uma variável quaterniônica, tal que  $f = f_1 + if_2 + jf_3 + kf_4 = \phi + \psi$ , com funções coordenadas  $f_l : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ , ( $l = 1, 2, 3, 4$ ), parcialmente diferenciáveis, é regular à esquerda se:

$$\Gamma f = 0 \quad (4.4)$$

**Observação 4.2.2.** - Seja  $q = a_1 + ia_2 + ja_3 + ka_4 = a_1 + A$  e  $p = b_1 + ib_2 + jb_3 + kb_4 = b_1 + B$  dois números quaterniônicos. Pode-se representar o produto desses quatérnios, de acordo com [13], da seguinte forma:

$$qp = (a_1 + A)(b_1 + B) = ab - A \cdot B + aB + bA + A \times B, \quad (4.5)$$

onde os símbolos  $\cdot$  e  $\times$  representam, respectivamente, os produtos escalar e vetorial tridimensional entre  $A$  e  $B$ .

Assim de acordo com 4.5 pode-se escrever 4.4 da seguinte forma:

$$\Gamma f = \left( \frac{\partial}{\partial q_1} + \nabla \right) (\phi + \psi) = \frac{\partial \phi}{\partial q_1} - \nabla \cdot \psi + \frac{\partial \psi}{\partial q_1} + \nabla \phi + \nabla \times \psi = 0 \quad (4.6)$$

Explicitamente, o operador quaterniônico aplicado à esquerda da função  $f$  de uma variável quaterniônica, apresenta-se como:

$$\begin{aligned} \Gamma f &= \left( \frac{\partial}{\partial q_1} + i \frac{\partial}{\partial q_2} + j \frac{\partial}{\partial q_3} + k \frac{\partial}{\partial q_4} \right) (f_1 + if_2 + jf_3 + kf_4) \\ &= \left( \frac{\partial f_1}{\partial q_1} - \frac{\partial f_2}{\partial q_2} - \frac{\partial f_3}{\partial q_3} - \frac{\partial f_4}{\partial q_4} \right) + i \left( \frac{\partial f_2}{\partial q_1} + \frac{\partial f_1}{\partial q_2} + \frac{\partial f_4}{\partial q_3} - \frac{\partial f_3}{\partial q_4} \right) + \\ &\quad j \left( \frac{\partial f_3}{\partial q_1} - \frac{\partial f_4}{\partial q_2} + \frac{\partial f_1}{\partial q_3} + \frac{\partial f_2}{\partial q_4} \right) + k \left( \frac{\partial f_4}{\partial q_1} + \frac{\partial f_3}{\partial q_2} - \frac{\partial f_2}{\partial q_3} + \frac{\partial f_1}{\partial q_4} \right) \end{aligned} \quad (4.7)$$

**Definição 4.2.2. (regularidade à direita)** - Uma função  $f$  de uma variável quaterniônica, tal que  $f = f_1 + if_2 + jf_3 + kf_4 = \phi + \psi$  com funções coordenadas  $f_l : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ , ( $l = 1, 2, 3, 4$ ), parcialmente diferenciáveis, é regular à direita se:

$$f\Gamma = 0. \quad (4.8)$$

De acordo com (4.5), pode-se escrever (4.8) da seguinte forma:

$$f\Gamma = \left( \phi + \psi \right) \left( \frac{\partial}{\partial q_1} + \nabla \right) = \frac{\partial \phi}{\partial q_1} - \psi \cdot \nabla + \nabla \phi + \frac{\partial \psi}{\partial q_1} + \psi \times \nabla = 0 \quad (4.9)$$

Explicitamente, o operador quaterniônico aplicado à direita da função  $f$  de uma variável quaterniônica, apresenta-se como:

$$\begin{aligned} f\Gamma &= (f_1 + if_2 + jf_3 + kf_4) \left( \frac{\partial}{\partial q_1} + i \frac{\partial}{\partial q_2} + j \frac{\partial}{\partial q_3} + k \frac{\partial}{\partial q_4} \right) \\ &= \left( \frac{\partial f_1}{\partial q_1} - \frac{\partial f_2}{\partial q_2} - \frac{\partial f_3}{\partial q_3} - \frac{\partial f_4}{\partial q_4} \right) + i \left( \frac{\partial f_2}{\partial q_1} + \frac{\partial f_1}{\partial q_2} - \frac{\partial f_4}{\partial q_3} + \frac{\partial f_3}{\partial q_4} \right) + \\ & \quad j \left( \frac{\partial f_3}{\partial q_1} - \frac{\partial f_4}{\partial q_2} + \frac{\partial f_1}{\partial q_3} + \frac{\partial f_2}{\partial q_4} \right) + k \left( \frac{\partial f_4}{\partial q_1} + \frac{\partial f_3}{\partial q_2} - \frac{\partial f_2}{\partial q_3} - \frac{\partial f_1}{\partial q_4} \right) \end{aligned} \quad (4.10)$$

**Definição 4.2.3. (regularidade)** - Uma função  $f$  de uma variável quaterniônica é regular se ela é regular à direita e à esquerda simultaneamente.

**Teorema 4.2.1.** - Seja  $f = f_1 + if_2 + jf_3 + kf_4 = \phi + \psi$  uma função  $f$  de uma variável quaterniônica. A função  $f$  é regular a esquerda se, e somente se:

$$\frac{\partial \phi}{\partial q_1} = \nabla \cdot \psi \quad (4.11)$$

$$\nabla \phi = -\frac{\partial \psi}{\partial q_1} - \nabla \times \psi \quad (4.12)$$

**Prova do teorema 4.2.1:**

Verifica-se primeiramente que, se  $f$  é regular a esquerda então valem 4.11 e 4.12.

Como  $f$  é regular à esquerda tem-se pela equação 4.4, na definição 4.2.1, que

$$\Gamma f = 0$$

De 4.6 tem-se que

$$\Gamma f = \left( \frac{\partial}{\partial q_1} + \nabla \right) (\phi + \psi) = \frac{\partial \phi}{\partial q_1} - \nabla \cdot \psi + \frac{\partial \psi}{\partial q_1} + \nabla \phi + \nabla \times \psi = 0 = 0 + \vec{0}. \quad (4.13)$$

Observa-se que  $\frac{\partial \phi}{\partial q_1}$  e  $\nabla \cdot \psi$  formam a parte escalar de  $\Gamma f$  enquanto que  $\nabla \phi$ ,  $\frac{\partial \psi}{\partial q_1}$  e  $\nabla \times \psi$  formam a parte imaginária (ou parte vetorial) de  $\Gamma f$ . Igualando as partes escalar e imaginária de ambos os lados da equação 4.13 observa-se que,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial q_1} - \nabla \cdot \psi &= 0 \\ \frac{\partial \psi}{\partial q_1} + \nabla \phi + \nabla \times \psi &= 0, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial q_1} &= \nabla \cdot \psi \\ \nabla \phi &= -\frac{\partial \psi}{\partial q_1} - \nabla \times \psi, \end{aligned}$$

que são as equações desejadas.

Verifica-se a seguir que se valem 4.11 e 4.12 então  $f$  é regular a esquerda, ou seja,  $\Gamma f = 0$ .

De 4.11 e 4.12 tem-se que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial q_1} - \nabla \cdot \psi &= 0 \\ \frac{\partial \psi}{\partial q_1} + \nabla \phi + \nabla \times \psi &= 0. \end{aligned}$$

Substituindo essas duas últimas igualdades em 4.6 obtém-se o resultado desejado, ou seja,

$$\Gamma f = \frac{\partial \phi}{\partial q_1} - \nabla \cdot \psi + \frac{\partial \psi}{\partial q_1} + \nabla \phi + \nabla \times \psi = 0 + \vec{0} = 0,$$

concluindo assim a demonstração do teorema 4.2.1.

□

**Teorema 4.2.2.** - Seja  $f = f_1 + if_2 + jf_3 + kf_4 = \phi + \psi$  uma função  $f$  de uma variável quaterniônica. A função  $f$  é regular a direita se, e somente se:

$$\frac{\partial \phi}{\partial q_1} = \nabla \cdot \psi \quad (4.14)$$

$$\nabla \phi = -\frac{\partial \psi}{\partial q_1} + \nabla \times \psi \quad (4.15)$$

**Prova do teorema 4.2.2:**

Verifica-se primeiramente que, se  $f$  é regular a direita então valem 4.14 e 4.15.

Como  $f$  é regular à direita tem-se pela equação 4.8, na definição 4.2.2 que:

$$f\Gamma = 0$$

De 4.9 tem-se que

$$f\Gamma = \left( \phi + \psi \right) \left( \frac{\partial}{\partial q_1} + \nabla \right) = \frac{\partial \phi}{\partial q_1} - \psi \cdot \nabla + \nabla \phi + \frac{\partial \psi}{\partial q_1} + \psi \times \nabla = 0 = 0 + \vec{0}. \quad (4.16)$$

Observar-se que  $\frac{\partial \phi}{\partial q_1}$  e  $\psi \cdot \nabla$  formam a parte escalar de  $f\Gamma$  enquanto que  $\nabla \phi$ ,  $\frac{\partial \psi}{\partial q_1}$  e  $\psi \times \nabla$  formam a parte imaginária de  $f\Gamma$ . Igualando as partes escalar e imaginária em ambos os lados de 4.16 observa-se que,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial q_1} - \psi \cdot \nabla &= 0 \\ \frac{\partial \psi}{\partial q_1} + \nabla \phi + \psi \times \nabla &= 0, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial q_1} &= \psi \cdot \nabla \\ \nabla \phi &= -\frac{\partial \psi}{\partial q_1} - \psi \times \nabla, \end{aligned}$$

De acordo com a referência [3] pode-se observar que são válidas as seguintes igualdades:

$$\nabla \times \psi = -\psi \times \nabla \quad (4.17)$$

$$\nabla \cdot \psi = \psi \cdot \nabla, \quad (4.18)$$

fornecendo assim o resultado esperado.

Verifica-se a seguir que se valem 4.14 e 4.15 então  $f$  é regular a direita, ou seja,  $f\Gamma = 0$ .

De 4.14 e 4.15 temos que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial q_1} - \nabla \cdot \psi &= 0 \\ \nabla \phi + \frac{\partial \psi}{\partial q_1} - \nabla \times \psi &= 0, \end{aligned}$$

que de acordo com as igualdades em 4.17 e 4.18 é válido que

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi}{\partial q_1} - \psi \cdot \nabla &= 0 \\ \nabla \phi + \frac{\partial \psi}{\partial q_1} + \psi \times \nabla &= 0,\end{aligned}$$

Substituindo essas últimas igualdades em 4.9 obtemos o resultado desejado, ou seja,

$$f\Gamma = \frac{\partial \phi}{\partial q_1} - \psi \cdot \nabla + \frac{\partial \psi}{\partial q_1} + \nabla \phi + \psi \times \nabla = 0 + \vec{0} = 0,$$

concluindo assim a demonstração do teorema 4.2.2.

□

**Corolário 4.2.1.** - Seja  $f = f_1 + if_2 + jf_3 + kf_4 = \phi + \psi$  uma função  $f$  de uma variável quaterniônica. Se  $f$  é regular então

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi}{\partial q_1} &= \nabla \cdot \psi \\ \nabla \phi &= -\frac{\partial \psi}{\partial q_1}\end{aligned}$$

**Prova do corolário 4.2.1:**

Se  $f$  é regular então  $f$  é regular a esquerda e regular a direita. Pelos teoremas 4.2.1 e 4.2.2 são válidas as seguintes igualdades:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi}{\partial q_1} &= \nabla \cdot \psi \\ \nabla \phi &= -\frac{\partial \psi}{\partial q_1} - \nabla \times \psi \\ \nabla \phi &= -\frac{\partial \psi}{\partial q_1} + \nabla \times \psi\end{aligned}$$

Daí segue a seguinte igualdade

$$\begin{aligned}-\frac{\partial \psi}{\partial q_1} - \nabla \times \psi &= -\frac{\partial \psi}{\partial q_1} + \nabla \times \psi \implies -\frac{\partial \psi}{\partial q_1} + \frac{\partial \psi}{\partial q_1} = 2(\nabla \times \psi) \\ -\frac{\partial \psi}{\partial q_1} + \frac{\partial \psi}{\partial q_1} &= 2(\nabla \times \psi) \implies \nabla \times \psi = 0\end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi}{\partial q_1} &= \nabla \cdot \psi \\ \nabla \phi &= -\frac{\partial \psi}{\partial q_1}\end{aligned}$$

□

### 4.3 Função exponencial do tipo quaterniônica

Esta seção tem por objetivo apresentar a generalização da função exponencial de um número complexo  $z$  [11] para um número quaterniônico  $q$ , expandindo  $e^q$  em série de Maclaurin.

#### Função exponencial real

Sabemos que a função exponencial real  $e^x$  goza das seguintes propriedades:

- (i)  $(e^x)' = e^x$
- (ii)  $e^{x_1+x_2} = e^{x_1}e^{x_2}$ .

A representação em série de Maclaurin [11] da  $e^x$  mostra que

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \quad (4.19)$$

A função exponencial para o complexo  $z = x + iy$  é representada por  $e^z$  e definida, em termos das funções reais  $e^x$ ,  $\cos y$  e  $\sin y$ , como

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y) \quad (4.20)$$

Sabe-se que  $e^z = e^x e^{iy}$ . Assim é obtida  $e^{iy} = \cos y + i \sin y$ , que é chamada de **fórmula de Euler**.

Daí segue que a representação trigonométrica de um número complexo  $z = x + iy$  pode ser indicada como segue:

$$z = r(\cos\theta + i \sin\theta) = re^{i\theta}. \quad (4.21)$$

Além disso,

$$|e^{i\theta}| = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = 1 \quad (4.22)$$

Analisando o comportamento de  $e^{iy}$  substituindo  $y$  por  $0, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$  e  $2\pi$ , segue que:

$$\begin{aligned} e^{0i} &= 1 \\ e^{\frac{\pi}{2}i} &= i \\ e^{\pi i} &= -1 \\ e^{\frac{3\pi}{2}i} &= -i \\ e^{2\pi i} &= 1 \end{aligned}$$

Assim, é imediato que

$$e^{z+2\pi i} = e^z e^{2\pi i} = e^z,$$

o que mostra que  $e^z$  é imaginária de período  $2\pi i$ . Temos então

$$e^{z+2n\pi i} = e^z, \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (4.23)$$

Devido a periodicidade acima determinada, todos os valores de  $e^z$  apresentam-se na forma

$$-\pi < y \leq \pi$$

infinita, que é chamada de região fundamental de  $e^z$  [19].

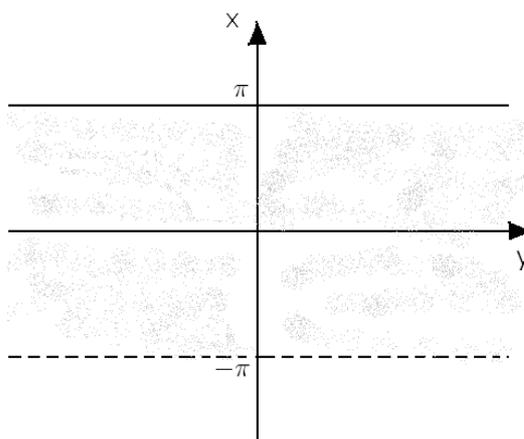


Figura 4.1: Região fundamental.

### 4.3.1 Função exponencial quaterniônica

Agora o objetivo é, tomando um número quaterniônico  $q$ , encontrar uma generalização para a função exponencial complexa, de forma análoga a (4.20), para o caso quaterniônico.

Para isto, deve-se expandir primeiramente  $e^q$  em série de Maclaurin, como na equação (4.19), isto é,

$$e^q = 1 + q + \frac{q^2}{2!} + \frac{q^3}{3!} + \dots + \frac{q^n}{n!} + \dots \quad (4.24)$$

que é chamada função exponencial quaterniônica.

Considere agora a parte vetorial do número  $q$  como  $\vec{q} = iq_2 + jq_3 + kq_4$ , assim é possível escrevê-lo da seguinte forma:  $q = q_1 + \vec{q}$ . Substituindo na equação (4.24) obtém-se

$$e^q = 1 + (q_1 + \vec{q}) + \frac{(q_1 + \vec{q})^2}{2!} + \frac{(q_1 + \vec{q})^3}{3!} + \dots + \frac{(q_1 + \vec{q})^n}{n!} + \dots \quad (4.25)$$

Agora calcula-se os termos  $(q_1 + \vec{q})^n$ ,  $n=0,1,2,\dots$ , de forma análoga a expansão binomial de uma soma de dois números reais  $a$  e  $b$ .

**Definição 4.3.1.** - *Sejam  $a$  e  $b$  dois números reais. A expansão binomial de  $a$  e  $b$  é dada da seguinte forma:*

$$(a + b)^n = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} a^{n-r} b^r \quad (4.26)$$

Calculando então os termos de (4.25), usando (4.26) obtém-se

- $q^0 = 1$
- $q^1 = q_1 + \vec{q}$

$$\begin{aligned} \bullet \quad q^2 &= (q_1 + \vec{q})^2 = \sum_{r=0}^2 \binom{2}{r} q_1^{2-r} (\vec{q})^r = \\ &= \binom{2}{0} q_1^2 (\vec{q})^0 + \binom{2}{1} q_1 (\vec{q}) + \binom{2}{2} q_1^0 (\vec{q})^2 = q_1^2 + 2q_1 \vec{q} + (\vec{q})^2 \end{aligned}$$

Analogamente obtém-se

$$\begin{aligned} \bullet \quad q^3 &= q_1^3 + 3q_1^2 \vec{q} + 3q_1 (\vec{q})^2 + (\vec{q})^3 \\ \bullet \quad q^4 &= q_1^4 + \frac{4!}{3!2!} q_1^3 \vec{q} + \frac{4!}{2!2!} q_1^2 (\vec{q})^2 + \frac{4!}{3!} q_1 (\vec{q})^3 + (\vec{q})^4 \\ \bullet \quad q^5 &= q_1^5 + \frac{5!}{4!} q_1^4 \vec{q} + \frac{5!}{3!2!} q_1^3 (\vec{q})^2 + \frac{5!}{2!3!} q_1^2 (\vec{q})^3 + \frac{5!}{4!} q_1 (\vec{q})^4 + (\vec{q})^5 \\ \bullet \quad q^6 &= q_1^6 + \frac{6!}{5!} q_1^5 \vec{q} + \frac{6!}{4!2!} q_1^4 (\vec{q})^2 + \frac{6!}{3!3!} q_1^3 (\vec{q})^3 + \frac{6!}{2!4!} q_1^2 (\vec{q})^4 + \frac{6!}{5!} q_1 (\vec{q})^5 + (\vec{q})^6 \\ &\quad \vdots \end{aligned}$$

Com isto os termos representados na série 4.25 serão dados por:

$$\begin{aligned} \bullet \quad q^0 &= 1 \\ \bullet \quad q^1 &= q_1 + \vec{q} \\ \bullet \quad \frac{q^2}{2!} &= \frac{q_1^2}{2!} + \frac{2q_1 \vec{q}}{2!} + \frac{(\vec{q})^2}{2!} \\ \bullet \quad \frac{q^3}{3!} &= \frac{q_1^3 + 3q_1^2 \vec{q}}{3!} + \frac{3q_1 (\vec{q})^2}{3!} + \frac{(\vec{q})^3}{3!} \\ \bullet \quad \frac{q^4}{4!} &= \frac{q_1^4}{4!} + \frac{4}{4!} q_1^3 \vec{q} + \frac{6}{4!} q_1^2 (\vec{q})^2 + \frac{4}{4!} q_1 (\vec{q})^3 + \frac{(\vec{q})^4}{4!} \\ \bullet \quad \frac{q^5}{5!} &= \frac{q_1^5}{5!} + \frac{5!}{4!} \frac{q_1^4 \vec{q}}{5!} + \frac{5!}{3!2!} \frac{q_1^3 (\vec{q})^2}{5!} + \frac{5!}{2!3!} \frac{q_1^2 (\vec{q})^3}{5!} + \frac{5!}{4!} \frac{q_1 (\vec{q})^4}{5!} + \frac{(\vec{q})^5}{5!} \\ \bullet \quad \frac{q^6}{6!} &= \frac{q_1^6}{6!} + \frac{6!}{5!} \frac{q_1^5 \vec{q}}{6!} + \frac{6!}{4!2!} \frac{q_1^4 (\vec{q})^2}{6!} + \frac{6!}{3!3!} \frac{q_1^3 (\vec{q})^3}{6!} + \frac{6!}{2!4!} \frac{q_1^2 (\vec{q})^4}{6!} + \frac{6!}{5!} \frac{q_1 (\vec{q})^5}{6!} + \frac{(\vec{q})^6}{6!} \\ &\quad \vdots \end{aligned}$$

Substituindo os resultados acima em 4.25, tem-se

$$\begin{aligned} e^q &= [1] + [q_1 + \vec{q}] + \left[ \frac{q_1^2}{2!} + \frac{2q_1 \vec{q}}{2!} + \frac{(\vec{q})^2}{2!} \right] + \left[ \frac{q_1^3}{3!} + \frac{q_1^2 \vec{q}}{2!} + \frac{q_1 (\vec{q})^2}{2!} + \frac{(\vec{q})^2 \vec{q}}{3!} \right] + \\ &\quad + \left[ \frac{q_1^4}{4!} + \frac{q_1^3 \vec{q}}{3!} + \frac{q_1^2 (\vec{q})^2}{2!2!} + \frac{q_1 (\vec{q})^2 \vec{q}}{3!} + \frac{(\vec{q})^2 (\vec{q})^2}{4!} \right] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left[ \frac{q_1^5}{5!} + \frac{q_1^4 \vec{q}}{4!} + \frac{q_1^3 (\vec{q})^2}{2!3!} + \frac{q_1^2 (\vec{q})^2 (\vec{q})}{3!2!} + \frac{q_1 (\vec{q})^2 (\vec{q})^2}{4!} + \frac{(\vec{q})^2 (\vec{q})^2 \vec{q}}{5!} \right] + \\
 & + \left[ \frac{q_1^6}{6!} + \frac{q_1^5 \vec{q}}{5!} + \frac{q_1^4 (\vec{q})^2}{2!4!} + \frac{q_1^3 (\vec{q})^2 \vec{q}}{3!3!} + \frac{q_1^2 (\vec{q})^2 (\vec{q})^2}{2!4!} + \frac{q_1 (\vec{q})^2 (\vec{q})^2 \vec{q}}{5!} + \frac{(\vec{q})^2 (\vec{q})^2 (\vec{q})^2}{6!} \right] + \dots
 \end{aligned} \tag{4.27}$$

Pela equação 4.5 tem-se que  $(\vec{q})^2 = \vec{q} \vec{q} = -\vec{q} \cdot \vec{q} = -(q_2^2 + q_3^2 + q_4^2) = -|\vec{q}|^2$ . Agrupando os termos de 4.27 e usando o fato anterior, obtém-se:

$$\begin{aligned}
 e^q & = \left[ 1 - \frac{|\vec{q}|^2}{2!} + \frac{|\vec{q}|^4}{4!} - \frac{|\vec{q}|^6}{6!} + \dots \right] + \left[ q_1 - \frac{q_1 |\vec{q}|^2}{2!} + \frac{q_1 |\vec{q}|^4}{4!} - \dots \right] + \\
 & + \left[ \frac{q_1^2}{2!} - \frac{q_1^2 |\vec{q}|^2}{2!2!} + \frac{q_1^2 |\vec{q}|^4}{2!4!} - \dots \right] + \left[ \frac{q_1^3}{3!} - \frac{q_1^3 |\vec{q}|^2}{3!2!} + \dots \right] + \left[ \frac{q_1^4}{4!} - \frac{q_1^4 |\vec{q}|^2}{4!2!} + \dots \right] + \\
 & + \left[ \vec{q} - \frac{\vec{q} |\vec{q}|^2}{3!} + \frac{\vec{q} |\vec{q}|^4}{5!} - \dots \right] + \left[ q_1 \vec{q} - \frac{q_1 \vec{q} |\vec{q}|^2}{3!} + \frac{q_1 \vec{q} |\vec{q}|^4}{5!} - \dots \right] + \left[ \frac{q_1^2 \vec{q}}{2!} - \frac{q_1^2 \vec{q} |\vec{q}|^2}{2!3!} + \dots \right] + \\
 & + \left[ \frac{q_1^3 \vec{q}}{3!} - \frac{q_1^3 \vec{q} |\vec{q}|^2}{3!3!} + \dots \right] + \left[ \frac{q_1^4 \vec{q}}{4!} - \dots \right] + \left[ \frac{q_1^5}{5!} - \dots \right] + \left[ \frac{q_1^5 \vec{q}}{5!} - \dots \right] + \left[ \frac{q_1^6}{6!} - \dots \right] + \dots
 \end{aligned} \tag{4.28}$$

Colocando em evidência os primeiros termos dos primeiros cinco grupos de somas infinitas em 4.28 e executando algo semelhante nos termos seguintes obtém-se

$$\begin{aligned}
 e^q & = \left[ 1 + q_1 + \frac{q_1^2}{2!} + \frac{q_1^3}{3!} + \frac{q_1^4}{4!} + \frac{q_1^5}{5!} + \frac{q_1^6}{6!} + \dots \right] \left[ 1 - \frac{|\vec{q}|^2}{2!} + \frac{|\vec{q}|^4}{4!} - \frac{|\vec{q}|^6}{6!} + \dots \right] + \\
 & + \vec{q} \left\{ \left[ 1 + q_1 + \frac{q_1^2}{2!} + \frac{q_1^3}{3!} + \frac{q_1^4}{4!} + \frac{q_1^5}{5!} + \frac{q_1^6}{6!} + \dots \right] - \frac{|\vec{q}|^2}{3!} \left[ 1 + q_1 + \frac{q_1^2}{2!} + \frac{q_1^3}{3!} + \frac{q_1^4}{4!} + \frac{q_1^5}{5!} + \frac{q_1^6}{6!} \right] + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{|\vec{q}|^4}{5!} \left[ 1 + q_1 + \frac{q_1^2}{2!} + \frac{q_1^3}{3!} + \frac{q_1^4}{4!} + \frac{q_1^5}{5!} + \frac{q_1^6}{6!} \right] + \dots \right\}
 \end{aligned} \tag{4.29}$$

Observe que  $\left[ 1 + q_1 + \frac{q_1^2}{2!} + \frac{q_1^3}{3!} + \frac{q_1^4}{4!} + \frac{q_1^5}{5!} + \frac{q_1^6}{6!} + \dots \right]$  repete na soma em 4.29, logo colocando-o em evidência obtém-se:

$$\begin{aligned}
 e^a &= \left[ 1 + q_1 + \frac{q_1^2}{2!} + \frac{q_1^3}{3!} + \frac{q_1^4}{4!} + \frac{q_1^5}{5!} + \frac{q_1^6}{6!} + \dots \right] \left\{ \left[ 1 - \frac{|\vec{q}|^2}{2!} + \frac{|\vec{q}|^4}{4!} - \frac{|\vec{q}|^6}{6!} + \dots \right] + \right. \\
 &\quad \left. + \vec{q} \left[ 1 - \frac{|\vec{q}|^2}{3!} + \frac{|\vec{q}|^4}{5!} - \frac{|\vec{q}|^6}{7!} + \dots \right] \right\} \quad (4.30)
 \end{aligned}$$

Sabe-se que a função cosseno em série de Maclaurin é dada por

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

Assim de 4.30 tem-se que

$$\left[ 1 - \frac{|\vec{q}|^2}{2!} + \frac{|\vec{q}|^4}{4!} - \frac{|\vec{q}|^6}{6!} + \dots \right] = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{|\vec{q}|^{2n}}{(2n)!} = \cos |\vec{q}|. \quad (4.31)$$

Sabe-se também que a expansão da função seno em série de Maclaurin é dada por

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

Assim de 4.30 tem-se que

$$\begin{aligned}
 \left[ 1 - \frac{|\vec{q}|^2}{3!} + \frac{|\vec{q}|^4}{5!} - \frac{|\vec{q}|^6}{7!} + \dots \right] &= \left[ \frac{|\vec{q}|}{|\vec{q}|} - \frac{|\vec{q}|^3}{3!|\vec{q}|} + \frac{|\vec{q}|^5}{5!|\vec{q}|} - \frac{|\vec{q}|^7}{7!|\vec{q}|} + \dots \right] \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{|\vec{q}|^{2n+1}}{(2n+1)!|\vec{q}|} \\
 &= \frac{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{|\vec{q}|^{2n+1}}{(2n+1)!}}{|\vec{q}|} \\
 &= \frac{\sin |\vec{q}|}{|\vec{q}|}. \quad (4.32)
 \end{aligned}$$

A expansão em série de Maclaurin da função exponencial real,  $e^x$ , é dada da seguinte forma:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Assim em 4.30 obtém-se

$$e^{q_1} = 1 + q_1 + \frac{q_1^2}{2!} + \frac{q_1^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q_1^n}{n!}$$

Pode-se assim escrever  $e^q$ ,  $q \in \mathbb{H}$ , como

$$e^q = e^{q_1} \left\{ \cos |\vec{q}| + \vec{q} \left( \frac{\sin |\vec{q}|}{|\vec{q}|} \right) \right\} \quad (4.33)$$

onde  $|\vec{q}| = \sqrt{q_2^2 + q_3^2 + q_4^2}$ .

**Teorema 4.3.1.** - *Seja  $e^q$  uma função exponencial do tipo quaterniônica. A seguinte igualdade é válida:*

$$|e^q| = e^{q_1}, \quad (4.34)$$

onde  $q = q_1 + iq_2 + jq_3 + kq_4 = q_1 + \vec{q}$ .

**Prova do teorema 4.3.1:** *Pela equação 4.33 temos que*

$$\begin{aligned} e^q &= e^{q_1 + \vec{q}} = e^{q_1} e^{\vec{q}} = e^{q_1} \left\{ \cos |\vec{q}| + \vec{q} \left( \frac{\sin |\vec{q}|}{|\vec{q}|} \right) \right\} \Rightarrow \\ \Rightarrow |e^q| &= |e^{q_1}| \left| \cos |\vec{q}| + \vec{q} \left( \frac{\sin |\vec{q}|}{|\vec{q}|} \right) \right| = |e^{q_1}| \left\{ \cos^2 |\vec{q}| + \sum_{n=2}^4 q_n^2 \left( \frac{\sin |\vec{q}|}{|\vec{q}|} \right)^2 \right\} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= |e^{q_1}| \left\{ \cos^2 |\vec{q}| + (q_2^2 + q_3^2 + q_4^2) \left( \frac{\sin |\vec{q}|}{|\vec{q}|} \right)^2 \right\} = |e^{q_1}| \left\{ \cos^2 |\vec{q}| + |\vec{q}|^2 \left( \frac{\sin |\vec{q}|}{|\vec{q}|} \right)^2 \right\} = \\
&= |e^{q_1}| \{ \cos^2 |\vec{q}| + \sin^2 |\vec{q}| \} = e^{q_1}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$|e^q| = e^{q_1}.$$

**Corolário 4.3.1.** - Se  $e^q$  é uma função exponencial quaterniônica então  $|e^{\vec{q}}| = 1$ .

**Prova do corolário 4.3.1:** A prova do corolário é consequência imediata do teorema 4.3.1.

**Definição 4.3.2.** - Seja  $p$  um quatérnio. Uma função de uma variável quaterniônica é dita periódica quando

$$f(q + p) = f(q), \quad \forall q \in \mathbb{H} \quad (4.35)$$

**Definição 4.3.3.** - Seja  $u_j$  um quatérnio cujas coordenadas são nulas exceto a  $j$ -ésima posição, e seja  $f$  uma função quaterniônica periódica, ou seja,

$$f(q + u_j) = f(q), \quad \forall q \in \mathbb{H} \quad (4.36)$$

O período de  $f$  será dado pelo valor da  $j$ -ésima coordenada de  $u_i$ .

**Teorema 4.3.2.** - Seja  $q = (q_1 + q_2i + q_3j + q_4k)$ , e  $\vec{u}_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$  e os vetores abaixo

$$\vec{u}_1 = (0, 2\pi, 0, 0)$$

$$\vec{u}_2 = (0, 0, 2\pi, 0)$$

$$\vec{u}_3 = (0, 0, 0, 2\pi)$$

Se  $e^q$  é a Função Exponencial do tipo quaterniônica, então esta é periódica.

**Prova para o teorema 4.3.2:**

De fato, calculando  $e^{\vec{u}_i}$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , tem-se que:

$$\begin{aligned} e^{\vec{u}_1} &= e^{(0,2\pi,0,0)} \\ &= \cos \sqrt{0^2 + (2\pi)^2 + 0^2 + 0^2} + \frac{(0, 2\pi, 0, 0)}{\sqrt{0^2 + (2\pi)^2 + 0^2 + 0^2}} \sin \sqrt{0^2 + (2\pi)^2 + 0^2 + 0^2} \\ &= \cos 2\pi = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e^{\vec{u}_2} &= e^{(0,0,2\pi,0)} \\ &= \cos \sqrt{0^2 + 0^2 + (2\pi)^2 + 0^2} + \frac{(0, 0, 2\pi, 0)}{\sqrt{0^2 + 0^2 + (2\pi)^2 + 0^2}} \sin \sqrt{0^2 + 0^2 + (2\pi)^2 + 0^2} \\ &= \cos 2\pi = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e^{\vec{u}_3} &= e^{(0,0,0,2\pi)} \\ &= \cos \sqrt{0^2 + 0^2 + 0^2 + (2\pi)^2} + \frac{(0, 0, 0, 2\pi)}{\sqrt{0^2 + 0^2 + 0^2 + (2\pi)^2}} \sin \sqrt{0^2 + 0^2 + 0^2 + (2\pi)^2} \\ &= \cos 2\pi = 1 \end{aligned}$$

Os resultados acima mostram que  $e^{\vec{u}_i} = 1$ ;  $i = 1, 2, 3$ . Sendo assim fica fácil verificar que  $e^{q+\vec{u}_i} = e^q e^{\vec{u}_i} = e^q \cdot 1 = e^q$ ;  $i = 1, 2, 3$ , o que mostra que a função  $e^q$  é periódica de período imaginário em cada um dos eixos do espaço de dimensão 4 separadamente, ou seja:

$$e^{q+n\vec{u}_i} = e^q$$

com  $n = 1, 2, \dots$ , e  $i = 1, 2, 3$ , o que conclui a demonstração do teorema.

Faz-se importante citar que o resultado acima é uma generalização de um resultado interessante das Variáveis Complexas, onde temos que a função  $e^z$  com  $z = x + yi$ , é analítica em uma região infinita do plano  $-\pi < y < \pi$ . Tal região, recebe o nome de região fundamental [19]. Esta é a região onde encontram-se todos os valores de  $e^z$ , e a esse fato deve-se a periodicidade desta função. Assim, para o caso em questão, ou seja para a função exponencial do tipo quaterniônica, a região fundamental, será uma região no  $\mathbb{R}^3$  dada por

$$\begin{aligned} G &= \{w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{R}^3; -\pi < w_1 \leq \pi \\ &\quad -\pi < w_2 \leq \pi \\ &\quad -\pi < w_3 \leq \pi\} \end{aligned}$$

## 4.4 Coordenadas esféricas

De acordo com [22] é pertinente representar os quatérnios na forma trigonométrica. Para isto considera-se primeiramente uma hipersfera de raio  $r$  e dimensão  $n$ , centrada na

origem, considerando as seguintes notações:

$$\cos \theta_i = c_i$$

$$\sin \theta_i = s_i$$

Considera-se também

$$\begin{aligned} x_1 &= r c_1 c_2 \cdots c_{n-2} c_{n-1}, & 0 < r < \infty \\ x_2 &= r c_1 c_2 \cdots c_{n-2} s_{n-1}, & 0 \leq \theta_{n-1} \leq 2\pi \\ x_3 &= r c_1 c_2 \cdots s_{n-2}, & -\frac{\pi}{2} \leq \theta_{n-2} \leq \frac{\pi}{2} \\ &\vdots & \\ x_j &= r c_1 c_2 \cdots c_{n-j} s_{n-j+1}, & -\frac{\pi}{2} \leq \theta_{n-j+1} \leq \frac{\pi}{2} \\ &\vdots & \\ x_n &= r s_1, & -\frac{\pi}{2} \leq \theta_1 \leq \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

como sendo as coordenadas de um ponto na casca dessa esfera.

Pode-se notar que:

Se  $n=2$ , tem-se a já conhecida representação dada por:

$$\begin{cases} x_1 = r \cos \theta_1, & 0 < r < \infty; \\ x_2 = r \sin \theta_1, & 0 < \theta_1 < 2\pi. \end{cases}$$

com  $x_1^2 + x_2^2 = r^2$  e Jacobiano dado por

$$J = \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(r, \theta_1)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial r} & \frac{\partial x_1}{\partial \theta_1} \\ \frac{\partial x_2}{\partial r} & \frac{\partial x_2}{\partial \theta_1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta_1 & -r \sin \theta_1 \\ \sin \theta_1 & r \cos \theta_1 \end{vmatrix} = r$$

Se  $n=3$ , tem-se:

$$\begin{cases} x_1 = r \cos \theta_1 \cos \theta_2 & 0 < r < \infty; \\ x_2 = r \cos \theta_1 \sin \theta_2, & 0 < \theta_1 < 2\pi; \\ x_3 = r \sin \theta_1, & -\frac{\pi}{2} < \theta_1 < \frac{\pi}{2}; \end{cases}$$

com  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = r^2$  e Jacobiano dado por

$$J = \frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(r, \theta_1, \theta_2)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial r} & \frac{\partial x_1}{\partial \theta_1} & \frac{\partial x_1}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial r} & \frac{\partial x_2}{\partial \theta_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial x_3}{\partial r} & \frac{\partial x_3}{\partial \theta_1} & \frac{\partial x_3}{\partial \theta_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_1 c_2 & -r s_1 c_2 & -r c_1 s_2 \\ c_1 s_2 & -r s_1 s_2 & r c_1 c_2 \\ s_1 & r c_1 & 0 \end{vmatrix} = -r^2 c_1 = -r^2 \cos \theta_1$$

Se  $n=4$ , tem-se:

$$\begin{cases} x_1 = rc_1c_2c_3, & 0 < r < \infty; \\ x_2 = rc_1c_2s_3, & 0 < \theta_3 < 2\pi; \\ x_3 = rc_1s_2, & -\frac{\pi}{2} < \theta_2 < \frac{\pi}{2}; \\ x_4 = rs_1, & -\frac{\pi}{2} < \theta_1 < \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

com  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = r^2$  e Jacobiano dado por

$$J = \frac{\partial(x_1, x_2, x_3, x_4)}{\partial(r, \theta_1, \theta_2, \theta_3)} = \begin{vmatrix} c_1c_2c_3 & -rs_1c_2c_3 & -rc_1s_2c_3 & -rc_1c_2s_3 \\ c_1s_2s_3 & -rs_1c_2s_3 & rc_1s_2c_3 & rc_1c_2c_3 \\ c_1s_2 & -rs_1s_2 & rc_1c_2 & 0 \\ s_1 & rc_1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -r^2 \cos^2 \theta_1 \cos \theta_2$$

Para a sequência do trabalho o caso  $n=4$  será de grande importância para a representação de um número quaterniônico em coordenadas hiperesféricas.

Seja  $q$ ,  $q = q_1 + iq_2 + jq_3 + kq_4$ , um número quaterniônico. De acordo com [22], escreve-se  $q$  na sua forma trigonométrica, em coordenadas hiperesféricas, como segue:

**Definição 4.4.1.** - Um número quaterniônico  $q$ ,  $q = q_1 + iq_2 + jq_3 + kq_4$ , na sua forma trigonométrica é definido como:

$$q = r(\cos \theta_1 \cos \theta_2 \cos \theta_3 + i \cos \theta_1 \cos \theta_2 \sin \theta_3 + j \cos \theta_1 \sin \theta_2 + k \sin \theta_1). \quad (4.37)$$

**Teorema 4.4.1.** - Seja  $q$  um quatérnio na sua forma trigonométrica

$$q = r(\cos \theta_1 \cos \theta_2 \cos \theta_3 + i \cos \theta_1 \cos \theta_2 \sin \theta_3 + j \cos \theta_1 \sin \theta_2 + k \sin \theta_1), \quad (4.38)$$

então

$$|q| = r \quad (4.39)$$

**Prova do teorema 4.4.1:**

Tem-se que

$$|q| = |r(\cos \theta_1 \cos \theta_2 \cos \theta_3 + i \cos \theta_1 \cos \theta_2 \sin \theta_3 + j \cos \theta_1 \sin \theta_2 + k \sin \theta_1)| =$$

$$\begin{aligned}
&= |r| \left[ (\cos \theta_1 \cos \theta_2 \cos \theta_3)^2 + (\cos \theta_1 \cos \theta_2 \sin \theta_3)^2 + (\cos \theta_1 \sin \theta_2)^2 + (\sin \theta_1)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \\
&= |r| \left[ \cos^2 \theta_1 \cos^2 \theta_2 (\cos^2 \theta_3 + \sin^2 \theta_3) + (\cos \theta_1 \sin \theta_2)^2 + (\sin \theta_1)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \\
&= |r| \left[ \cos^2 \theta_1 \cos^2 \theta_2 + \cos^2 \theta_1 \sin^2 \theta_2 + \sin^2 \theta_1 \right]^{\frac{1}{2}} = \\
&= |r| \left[ \cos^2 \theta_1 (\cos^2 \theta_2 + \sin^2 \theta_2) + \sin^2 \theta_1 \right]^{\frac{1}{2}} = \\
&= |r| \left[ \cos^2 \theta_1 + \sin^2 \theta_1 \right]^{\frac{1}{2}} = \\
&= |r| = \rho, \quad r > 0.
\end{aligned}$$

Interpretando  $q$  como um ponto da hipersuperfície da hiperesfera, o teorema diz que a distância de  $q$  ao centro da hiperesfera é igual ao seu raio.

## 4.5 Função logaritmo

A presente seção visa dar uma extensão da função logarítmica para quatérnios, como na extensão para o caso octonionico dado em [4]. Com essa finalidade faz-se necessário o uso das coordenadas hiperesféricas dadas na seção 4.4. Considera-se agora o problema de determinar o logaritmo de  $q = q_1 + iq_2 + jq_3 + kq_4$ , que será representado por  $\ln q$  e é definido como função inversa da função exponencial; assim,  $w = \ln q$  é a função que satisfaz a relação

$$e^w = q \tag{4.40}$$

para cada  $q \neq 0$ . Façamos para isso,  $q = q_1 + iq_2 + jq_3 + kq_4$ , assim, usando as coordenadas esféricas

$$\begin{aligned}
q_1 &= \rho \cos \theta_1 \cos \theta_2 \cos \theta_3, & 0 < \rho < \infty \\
q_2 &= \rho \cos \theta_1 \cos \theta_2 \sin \theta_3, & 0 \leq \theta_3 \leq 2\pi \\
q_3 &= \rho \cos \theta_1 \sin \theta_2 & -\frac{\pi}{2} \leq \theta_2 \leq \frac{\pi}{2} \\
q_4 &= \rho \sin \theta_1, & -\frac{\pi}{2} \leq \theta_1 \leq \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

Pode-se escrever  $w$  como segue

$$\begin{aligned}
q &= q_1 + iq_2 + jq_3 + kq_4 \\
&= \rho \left( \frac{q_1}{\rho} + i \frac{q_2}{\rho} + j \frac{q_3}{\rho} + k \frac{q_4}{\rho} \right) \\
&= \rho (\cos \theta_1 \cos \theta_2 \cos \theta_3 + i \cos \theta_1 \cos \theta_2 \sin \theta_3 + j \cos \theta_1 \sin \theta_2 + k \sin \theta_1)
\end{aligned}$$

com  $\rho > 0$ .

Por outro lado, tem-se que

$$e^w = e^{w_1} \left\{ \cos \|\vec{w}'\| + \vec{w} \left( \frac{\sin \|\vec{w}'\|}{\|\vec{w}'\|} \right) \right\}, \quad (4.41)$$

com  $w = w_1 + \vec{w}$

Substituindo agora (4.41) e  $q$  na forma trigonométrica em (4.40), tem-se:

$$e^{w_1} e^{\vec{w}} = \rho (\cos \theta_1 \cos \theta_2 \cos \theta_3 + i \cos \theta_1 \cos \theta_2 \sin \theta_3 + j \cos \theta_1 \sin \theta_2 + k \sin \theta_1) \quad (4.42)$$

Daí segue que

$$e^{w_1} = \rho \quad (4.43)$$

ou ainda

$$w_1 = \ln |\rho| \quad (4.44)$$

e

$$\vec{w} = \ln |(\cos \theta_1 \cos \theta_2 \cos \theta_3 + i \cos \theta_1 \cos \theta_2 \sin \theta_3 + j \cos \theta_1 \sin \theta_2 + k \sin \theta_1)|$$

mas  $w = w_1 + \vec{w}$  daí segue que

$$\begin{aligned} w &= \ln |q| \\ &= \ln |\rho| + \ln |(\cos \theta_1 \cos \theta_2 \cos \theta_3 + i \cos \theta_1 \cos \theta_2 \sin \theta_3 + j \cos \theta_1 \sin \theta_2 + k \sin \theta_1)| \end{aligned}$$

Observa-se claramente que  $q$  na forma trigonométrica é uma função da forma  $q = q(r, \theta_1, \theta_2, \theta_3)$ , assim temos que o logaritmo de um quatérnio também é uma função de  $\theta_i$ , com  $i = 1, 2, 3$ .

Daí segue que, tomando o vetor da forma  $q' = (0, \theta_1 + 2\pi, \theta_2 + 2\pi, \theta_3 + 2\pi)$  observa-se facilmente que:  $\ln(q + q') = \ln q$

# Capítulo 5

## Integração e diferenciação nos quatérnios

A presente seção apresenta os importantes resultados obtidos em [3] sobre conceitos de diferenciação e integrabilidade com quatérnios. Antes de iniciar o estudo considere  $f$  uma função de uma variável quaterniônica e observe que devido a não comutatividade da multiplicação quaterniônica, será necessário definir duas integrais, a saber,  $\int f dq$  e  $\int dqf$ .

O primeiro estudo será feito sobre o caso  $\int f dq$ . Segue que:

$$\begin{aligned}\int f dq &= \int (f_1 + if_2 + jf_3 + kf_4)(dq_1 + idq_2 + jdq_3 + kdq_4) \\ &= \int (f_1 dq_1 - f_2 dq_2 - f_3 dq_3 - f_4 dq_4) + \\ &\quad \int (f_2 dq_1 + f_1 dq_2 - f_4 dq_3 + f_3 dq_4)i + \\ &\quad \int (f_3 dq_1 + f_4 dq_2 + f_1 dq_3 - f_2 dq_4)j + \\ &\quad \int (f_4 dq_1 - f_3 dq_2 + f_2 dq_3 + f_1 dq_4)k.\end{aligned}$$

O outro caso,  $\int dqf$ , é dado por:

$$\begin{aligned}\int dqf &= \int (dq_1 + idq_2 + jdq_3 + kdq_4)(f_1 + if_2 + jf_3 + kf_4) \\ &= \int (dq_1 f_1 - dq_2 f_2 - dq_3 f_3 - dq_4 f_4) + \\ &\quad \int (dq_1 f_2 + dq_2 f_1 + dq_3 f_4 - dq_4 f_3)i + \\ &\quad \int (dq_1 f_3 - dq_2 f_4 + dq_3 f_1 + dq_4 f_2)j +\end{aligned}$$

$$\int (dq_1 f_4 + dq_2 f_3 - dq_3 f_2 + dq_4 f_1)k.$$

Supõe-se agora que as funções coordenadas  $f_l : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$  sejam contínuas, e tomado o caminho de extremos  $a = (a_1, a_2, a_3, a_4)$  e  $b = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ , numa região conexa de espaço quadrimensional, os resultados abaixo mostram que as integrais  $\int f dq$  e  $\int dq f$  independerão do caminho de integração, se estas satisfazem as condições citadas nos teoremas seguintes:

**Teorema 5.0.1.** - *Para todo par de pontos  $a$  e  $b$ , e qualquer caminho ligando-os em um espaço simplesmente conexo quadrimensional, a integral  $\int f dq$  independe do caminho dado se, e somente se, existe uma função  $F = F_1 + iF_2 + jF_3 + kF_4$ , com  $\int f dq = F(b) - F(a)$  e que satisfaz as seguintes relações:*

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial q_1} &= \frac{\partial F_2}{\partial q_2} = \frac{\partial F_3}{\partial q_3} = \frac{\partial F_4}{\partial q_4} \\ \frac{\partial F_2}{\partial q_1} &= -\frac{\partial F_1}{\partial q_2} = \frac{\partial F_4}{\partial q_3} = -\frac{\partial F_3}{\partial q_4} \\ \frac{\partial F_3}{\partial q_1} &= -\frac{\partial F_4}{\partial q_2} = -\frac{\partial F_1}{\partial q_3} = \frac{\partial F_2}{\partial q_4} \\ \frac{\partial F_4}{\partial q_1} &= \frac{\partial F_3}{\partial q_2} = -\frac{\partial F_2}{\partial q_3} = -\frac{\partial F_1}{\partial q_4} \end{aligned} \tag{5.1}$$

**Prova para o teorema 5.0.1:** A integral  $\int_a^b f dq$ , mostrada anteriormente, independerá do caminho se existir uma função  $F$ , tal que,

$$\int_a^b f dq = \int_a^b dF = \int_a^b d(F_1 + iF_2 + jF_3 + kF_4) = F(b) - F(a),$$

de modo que o valor dessa diferença dependerá unicamente dos pontos extremos.

Agora, admitindo que existe uma função  $F$ , cujas diferenciais totais das suas funções coordenadas são dadas por

$$\begin{aligned} dF_1 &= \frac{\partial F_1}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial F_1}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial F_1}{\partial q_3} dq_3 + \frac{\partial F_1}{\partial q_4} dq_4 \\ &= f_1 dq_1 - f_2 dq_2 - f_3 dq_3 - f_4 dq_4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dF_2 &= \frac{\partial F_2}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial F_2}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial F_2}{\partial q_3} dq_3 + \frac{\partial F_2}{\partial q_4} dq_4 \\ &= f_2 dq_1 + f_1 dq_2 - f_4 dq_3 + f_3 dq_4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dF_3 &= \frac{\partial F_3}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial F_3}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial F_3}{\partial q_3} dq_3 + \frac{\partial F_3}{\partial q_4} dq_4 \\ &= f_3 dq_1 + f_4 dq_2 + f_1 dq_3 - f_2 dq_4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dF_4 &= \frac{\partial F_4}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial F_4}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial F_4}{\partial q_3} dq_3 + \frac{\partial F_4}{\partial q_4} dq_4 \\ &= f_4 dq_1 - f_3 dq_2 + f_2 dq_3 + f_1 dq_4 \end{aligned}$$

Daí seguem as seguintes relações:

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{\partial F_1}{\partial q_1} = \frac{\partial F_2}{\partial q_2} = \frac{\partial F_3}{\partial q_3} = \frac{\partial F_4}{\partial q_4} \\ f_2 &= \frac{\partial F_2}{\partial q_1} = -\frac{\partial F_1}{\partial q_2} = \frac{\partial F_4}{\partial q_3} = -\frac{\partial F_3}{\partial q_4} \\ f_3 &= \frac{\partial F_3}{\partial q_1} = -\frac{\partial F_4}{\partial q_2} = -\frac{\partial F_1}{\partial q_3} = \frac{\partial F_2}{\partial q_4} \\ f_4 &= \frac{\partial F_4}{\partial q_1} = \frac{\partial F_3}{\partial q_2} = -\frac{\partial F_2}{\partial q_3} = -\frac{\partial F_1}{\partial q_4} \end{aligned}$$

o que conclui a demonstração.

□

**Teorema 5.0.2.** - Para todo par de pontos  $a$  e  $b$ , e qualquer caminho ligando-os em um espaço simplesmente conexo quadrimensional, a integral  $\int dqf$  independe do caminho dado se, e somente se, existe uma função  $G = G_1 + iG_2 + jG_3 + kG_4$ , com  $\int dqf = G(b) - G(a)$  e que satisfaz as seguintes relações:

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_1}{\partial q_1} &= \frac{\partial G_2}{\partial q_2} = \frac{\partial G_3}{\partial q_3} = \frac{\partial G_4}{\partial q_4} \\ \frac{\partial G_2}{\partial q_1} &= -\frac{\partial G_1}{\partial q_2} = -\frac{\partial G_4}{\partial q_3} = \frac{\partial G_3}{\partial q_4} \\ \frac{\partial G_3}{\partial q_1} &= \frac{\partial G_4}{\partial q_2} = -\frac{\partial G_1}{\partial q_3} = -\frac{\partial G_2}{\partial q_4} \\ \frac{\partial G_4}{\partial q_1} &= -\frac{\partial G_3}{\partial q_2} = \frac{\partial G_2}{\partial q_3} = -\frac{\partial G_1}{\partial q_4} \end{aligned} \tag{5.2}$$

**Prova para o teorema 5.0.2:** A integral  $\int_a^b dqf$ , dada anteriormente, independará do caminho se existir uma função  $G$ , tal que,

$$\int_a^b dqf = \int_a^b dG = \int_a^b d(G_1 + iG_2 + jG_3 + kG_4) = G(b) - G(a),$$

de modo que o valor dessa diferença dependerá unicamente dos pontos extremos.

Agora, admitindo que existe uma função  $G$ , cujas diferenciais totais das suas funções coordenadas são dadas por

$$\begin{aligned} dG_1 &= \frac{\partial G_1}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial G_1}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial G_1}{\partial q_3} dq_3 + \frac{\partial G_1}{\partial q_4} dq_4 \\ &= f_1 dq_1 - f_2 dq_2 - f_3 dq_3 - f_4 dq_4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dG_2 &= \frac{\partial G_2}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial G_2}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial G_2}{\partial q_3} dq_3 + \frac{\partial G_2}{\partial q_4} dq_4 \\ &= f_2 dq_1 + f_1 dq_2 + f_4 dq_3 - f_3 dq_4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dG_3 &= \frac{\partial G_3}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial G_3}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial G_3}{\partial q_3} dq_3 + \frac{\partial G_3}{\partial q_4} dq_4 \\ &= f_3 dq_1 - f_4 dq_2 + f_1 dq_3 + f_2 dq_4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dG_4 &= \frac{\partial G_4}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial G_4}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial G_4}{\partial q_3} dq_3 + \frac{\partial G_4}{\partial q_4} dq_4 \\ &= f_4 dq_1 + f_3 dq_2 - f_2 dq_3 + f_1 dq_4 \end{aligned}$$

Daí seguem as seguintes relações:

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{\partial G_1}{\partial q_1} = \frac{\partial G_2}{\partial q_2} = \frac{\partial G_3}{\partial q_3} = \frac{\partial G_4}{\partial q_4} \\ f_2 &= \frac{\partial G_2}{\partial q_1} = -\frac{\partial G_1}{\partial q_2} = -\frac{\partial G_4}{\partial q_3} = \frac{\partial G_3}{\partial q_4} \\ f_3 &= \frac{\partial G_3}{\partial q_1} = \frac{\partial G_4}{\partial q_2} = -\frac{\partial G_1}{\partial q_3} = -\frac{\partial G_2}{\partial q_4} \end{aligned}$$

$$f_4 = \frac{\partial G_4}{\partial q_1} = -\frac{\partial G_3}{\partial q_2} = \frac{\partial G_2}{\partial q_3} = -\frac{\partial G_1}{\partial q_4}$$

o que conclui a demonstração.

□

Os dois teoremas acima podem ser interpretados como o análogo quadrimensional ao Teorema de Cauchy para um domínio bidimensional. Faz-se importante observar que as relações (5.1) e (5.2) têm em comum as equações de Cauchy-Riemann para funções definidas num espaço bidimensional. Sendo estas definidas como as **Equações de Cauchy-Riemann Generalizadas**.

Os teoremas seguintes apresentam as funções  $h(q)$  e  $g(q)$ , que são definidas em termos da função quaterniônica  $f(q)$ , sendo que suas funções coordenadas obedecem as relações de Cauchy-Riemann Generalizadas (5.1) e (5.2). As funções  $h(q)$  e  $g(q)$  são chamadas de **derivada quaterniônica à esquerda** e **derivada quaterniônica à direita** de  $f(q)$ , respectivamente.

**Teorema 5.0.3.** - Dada uma função  $f(q)$  sobre o anel dos quatérnios,  $\mathbb{H}$ , com apropriadas funções coordenadas diferenciáveis, satisfazendo as relações (5.1) e a função  $h(q)$  definida em termos de  $f(q)$  por,

$$\begin{aligned} h(q) = \frac{1}{4} & \left[ \left( \frac{\partial f_1}{\partial q_1} + \frac{\partial f_2}{\partial q_2} + \frac{\partial f_3}{\partial q_3} + \frac{\partial f_4}{\partial q_4} \right) + \right. \\ & i \left( \frac{\partial f_2}{\partial q_1} - \frac{\partial f_1}{\partial q_2} + \frac{\partial f_4}{\partial q_3} - \frac{\partial f_3}{\partial q_4} \right) + \\ & j \left( \frac{\partial f_3}{\partial q_1} - \frac{\partial f_4}{\partial q_2} - \frac{\partial f_1}{\partial q_3} + \frac{\partial f_2}{\partial q_4} \right) + \\ & \left. k \left( \frac{\partial f_4}{\partial q_1} + \frac{\partial f_3}{\partial q_2} - \frac{\partial f_2}{\partial q_3} - \frac{\partial f_1}{\partial q_4} \right) \right], \end{aligned} \quad (5.3)$$

então  $\int h(q) dq = f(q)$ , e assim  $h(q)$  deve ser tratada formalmente, como a derivada quaterniônica à esquerda de  $f(q)$ , e será denotada por,

$$h(q) = \frac{df_i(q)}{dq} \quad (5.4)$$

**Prova do teorema 5.0.3:** Inicialmente faz-se a seguinte identificação:

$$h(q) = \frac{1}{4}(h_1 + ih_2 + jh_3 + kh_4).$$

Usando a regra da multiplicação da álgebra dos quatérnios, e sabendo que  $dq = dq_1 + idq_2 + jdq_3 + kdq_4$ , tem-se então:

$$\begin{aligned} \int h(q)dq &= \int \frac{1}{4}(h_1 + ih_2 + jh_3 + kh_4)(dq = dq_1 + idq_2 + jdq_3 + kdq_4) + \\ &= \frac{1}{4} \int (h_1dq_1 - h_2dq_2 - h_3dq_3 - h_4dq_4) + \\ &\quad (h_2dq_1 + h_1dq_2 - h_4dq_3 + h_3dq_4)i + \\ &\quad (h_3dq_1 + h_4dq_2 + h_1dq_3 - h_2dq_4)j + \\ &\quad (h_4dq_1 - h_3dq_2 + h_2dq_3 + h_1dq_4)k. \end{aligned}$$

Usando agora as relações 5.0.1 no fator  $h(q)dq$ , tem-se que  $\int h(q)dq$  é dada por,

$$\begin{aligned} \int h(q)dq &= \frac{1}{4} \int 4 \left( \frac{\partial f_1}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial f_1}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial f_1}{\partial q_3} dq_3 + \frac{\partial f_1}{\partial q_4} dq_4 \right) + \\ &\quad 4 \left( \frac{\partial f_2}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial f_2}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial f_2}{\partial q_3} dq_3 + \frac{\partial f_2}{\partial q_4} dq_4 \right) i + \\ &\quad 4 \left( \frac{\partial f_3}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial f_3}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial f_3}{\partial q_3} dq_3 + \frac{\partial f_3}{\partial q_4} dq_4 \right) j + \\ &\quad 4 \left( \frac{\partial f_4}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial f_4}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial f_4}{\partial q_3} dq_3 + \frac{\partial f_4}{\partial q_4} dq_4 \right) k. \end{aligned}$$

Assim, aplicando a regra da cadeia, serão obtidas as diferenciais totais das funções coordenadas, ou seja,

$$\begin{aligned} \int h(q)dq &= \int (df_1 + idf_2 + jdf_3 + kdf_4) \\ &= f_1 + if_2 + jf_3 + kf_4 \\ &= f(q) \end{aligned}$$

□

**Teorema 5.0.4.** - Dada uma função  $f(q)$  sobre o anel dos quatérnios,  $\mathbb{H}$ , com apropriadas funções coordenadas diferenciáveis satisfazendo as relações (5.2) e a função  $g(q)$

definida em termos de  $f(q)$  por,

$$\begin{aligned}
 g(q) = \frac{1}{4} & \left[ \left( \frac{\partial f_1}{\partial q_1} + \frac{\partial f_2}{\partial q_2} + \frac{\partial f_3}{\partial q_3} + \frac{\partial f_4}{\partial q_4} \right) + \right. \\
 & i \left( \frac{\partial f_2}{\partial q_1} - \frac{\partial f_1}{\partial q_2} - \frac{\partial f_4}{\partial q_3} + \frac{\partial f_3}{\partial q_4} \right) + \\
 & j \left( \frac{\partial f_3}{\partial q_1} + \frac{\partial f_4}{\partial q_2} - \frac{\partial f_1}{\partial q_3} - \frac{\partial f_2}{\partial q_4} \right) + \\
 & \left. k \left( \frac{\partial f_4}{\partial q_1} - \frac{\partial f_3}{\partial q_2} + \frac{\partial f_2}{\partial q_3} - \frac{\partial f_1}{\partial q_4} \right) \right], \tag{5.5}
 \end{aligned}$$

então  $\int dqg(q) = f(q)$ , e assim  $g(q)$  deve ser tratada formalmente, como a derivada quaterniônica à direita de  $f(q)$ , e será denotada por,

$$g(q) = \frac{df_r(q)}{dq} \tag{5.6}$$

**Prova do teorema 5.0.4:** Inicialmente faz-se a seguinte identificação:

$$g(q) = \frac{1}{4}(g_1 + ig_2 + jg_3 + kg_4).$$

Utilizando a regra da multiplicação da álgebra dos quatérnios, e sabendo que  $dq = dq_1 + idq_2 + jdq_3 + kdq_4$ , tem-se então:

$$\begin{aligned}
 \int dqg(q) &= \int (dq = dq_1 + idq_2 + jdq_3 + kdq_4) \frac{1}{4}(g_1 + ig_2 + jg_3 + kg_4) + \\
 &= \frac{1}{4} \int (dq_1g_1 - dq_2g_2 - dq_3g_3 - dq_4g_4) + \\
 &\quad (dq_1g_2 + dq_2g_1 + dq_3g_4 - dq_4g_3)i + \\
 &\quad (dq_1g_3 - dq_2g_4 + dq_3g_1 + dq_4g_2)j + \\
 &\quad (dq_1g_4 + dq_2g_3 - dq_3g_2 + dq_4g_1)k.
 \end{aligned}$$

Usando agora as relações 5.0.2 no fator  $dqg(q)$ , tem-se que  $\int dqg(q)$  é dada por,

$$\begin{aligned} \int dqg(q) &= \frac{1}{4} \int 4 \left( \frac{\partial f_1}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial f_1}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial f_1}{\partial q_3} dq_3 + \frac{\partial f_1}{\partial q_4} dq_4 \right) + \\ &\quad 4 \left( \frac{\partial f_2}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial f_2}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial f_2}{\partial q_3} dq_3 + \frac{\partial f_2}{\partial q_4} dq_4 \right) i + \\ &\quad 4 \left( \frac{\partial f_3}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial f_3}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial f_3}{\partial q_3} dq_3 + \frac{\partial f_3}{\partial q_4} dq_4 \right) j + \\ &\quad 4 \left( \frac{\partial f_4}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial f_4}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial f_4}{\partial q_3} dq_3 + \frac{\partial f_4}{\partial q_4} dq_4 \right) k. \end{aligned}$$

Assim, aplicando a regra da cadeia, serão obtidas as diferenciais totais das funções coordenadas, ou seja,

$$\begin{aligned} \int dqg(q) &= \int (df_1 + idf_2 + jdf_3 + kdf_4) \\ &= f_1 + if_2 + jf_3 + kf_4 \\ &= f(q) \end{aligned}$$

□

Observa-se que é possível reproduzir as definições de derivadas quaterniônicas à direita e à esquerda, usando conjugação direta do operador quaterniônico  $\Gamma$  da teoria de Fueter dado por (4.2), de onde resulta as seguintes formas para 5.3 e 5.5:

$$4g(q) = \bar{\Gamma}f \quad \text{ou} \quad \int dqg(q) = \frac{1}{4} \int dq\bar{\Gamma}f = f, \quad (5.7)$$

$$4h(q) = f\bar{\Gamma} \quad \text{ou} \quad \int h(q)dq = \frac{1}{4} \int f\bar{\Gamma}dq = f. \quad (5.8)$$

### Representação matricial para os quatérnios

De acordo com a referência [10] é possível afirmar que o anel dos quatérnios é isomorfo a um subconjunto  $\mathbb{M}$  do espaço das matrizes  $4 \times 4$  cujo os elementos são reais, sob a transformação

$$\begin{aligned} F : \mathbb{H} &\longrightarrow \mathbb{M} \\ q &\longmapsto \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{bmatrix} = F(q), \end{aligned}$$

onde  $q = a + ib + jc + kd \in \mathbb{H}$ .

De fato isso ocorre. Se associarmos

$$1 \longmapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$i \longmapsto \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$j \longmapsto \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$k \longmapsto \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

podemos observar que

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\
 & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\
 & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

e que

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} a + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} b + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} c + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} d \\
 & = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

## 5.1 Teorema de Gauss para quatérnios

**Teorema 5.1.1.** - *Seja  $f = \phi + \psi$  uma função da variável quaterniônica  $q = q_1 + iq_2 + jq_3 + kq_4$  cujo domínio  $\mathcal{D}$  é simplesmente conexo num espaço quadrimensional com subdomínio  $\sigma$  limitado pela hipersuperfície fechada  $\partial\sigma$ . Seja o elemento de volume de  $\sigma$  dado por  $dV$  e o elemento de superfície de  $\partial\sigma$ , orientado para fora, denotado por  $dQ$ . Então,*

com o produto quaterniônico, temos

$$\int_{\partial\sigma} (dQ)f = \int_{\sigma} \Gamma f dV. \quad (5.9)$$

**Prova para o teorema 5.1.1:**

Seja,

$$dQ = dQ_0 + idQ_1 + jdQ_2 + kdQ_3.$$

Se  $M$  é a matriz dada por

$$M = \begin{bmatrix} \phi & \psi_1 & \psi_2 & \psi_3 \\ -\psi_1 & \phi & -\psi_3 & \psi_2 \\ -\psi_2 & \psi_3 & \phi & -\psi_1 \\ -\psi_3 & -\psi_2 & \psi_1 & \phi \end{bmatrix}$$

e

$$[dq] = (dQ_0, dQ_1, dQ_2, dQ_3)$$

uma matriz linha tendo as mesmas componentes do quatérnio  $dQ$ , então, o produto das matrizes  $[dq]M$  é uma matriz linha com as mesmas componentes do produto quaterniônico  $dQf$ .

Pelo teorema de Gauss<sup>1</sup> para o caso quadridimensional temos

$$\int_{\partial\sigma} [dq]M = \int_{\sigma} \text{div}(M)dV,$$

onde o divergente da matriz  $M$  deve ser tomado.

O divergente da matriz  $M$ ,  $\text{div}(M)$ , é uma matriz linha cuja as quatro componentes são as mesmas do quatérnio

$$\begin{aligned} \Gamma f &= \left( \frac{\partial}{\partial q_1 + \nabla} \right) (\phi + \psi) \\ &= \frac{\partial \phi}{\partial q_1} + \nabla \phi + \frac{\partial \psi}{\partial q_1} - \nabla \cdot \psi + \nabla \times \psi, \end{aligned}$$

que estabelece o resultado.

---

<sup>1</sup>O teorema de Gauss para o caso  $n$  dimensional é dado por:

$$\int_D \left\{ \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial \alpha_n}{\partial x_n} \right\} dx_1 dx_2 \dots dx_n = \int_S \left\{ \alpha_1 dQ_1 + \alpha_2 dQ_2 + \dots + \alpha_n dQ_n \right\}$$

De forma análoga pode-se verificar o resultado para

$$\int_{\partial\sigma} f dQ = \int_{\sigma} f \Gamma dV.$$

**Corolário 5.1.1.** - *Seja  $f(q) = \frac{1}{q}$  uma função da variável quaterniônica  $q = q_1 + iq_2 + jq_3 + kq_4$  cujo domínio  $\mathcal{D}$  é simplesmente conexo num espaço quadrimensional com subdomínio  $\sigma$  limitado pela hipersuperfície fechada  $\partial\sigma$ . Seja o elemento de volume de  $\sigma$  dado por  $dV$  e o elemento de superfície de  $\partial\sigma$ , orientado para fora, denotado por  $dQ$ . Então pelo teorema de Gauss nos quatérnios temos*

$$\int_{\partial\sigma} dQ \frac{1}{q} = 4\pi^2$$

**Prova para o corolário 5.1.1:**

Substituindo a função  $f(q) = \frac{1}{q}$  na fórmula 5.9 tem-se

$$\int_{\partial\sigma} dQ \frac{1}{q} = \int_{\sigma} \Gamma \frac{1}{q} dV.$$

Calculando  $\Gamma \frac{1}{q}$ :

$$\Gamma \frac{1}{q} = \Gamma \frac{\bar{q}}{|q|^2} = \Gamma \left( \frac{q_1 - iq_2 - jq_3 - kq_4}{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2} \right)$$

Fazendo-se as seguintes identificações:

$$f_1 = \frac{q_1}{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2}$$

$$f_2 = \frac{-q_2}{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2}$$

$$f_3 = \frac{-q_3}{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2}$$

$$f_4 = \frac{-q_4}{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2}$$

Calculada as derivadas parciais das funções acima em relação a  $q_1, q_2, q_3$  e  $q_4$ , e substituindo-as na equação 4.7, obtém-se

$$\begin{aligned}
 \Gamma \frac{1}{q} &= \left\{ \left( \frac{-q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2}{(q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2)^2} \right) + \left( \frac{q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 + q_4^2}{(q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2)^2} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \left( \frac{q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 + q_4^2}{(q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2)^2} \right) + \left( \frac{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 - q_4^2}{(q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2)^2} \right) \right\} + \\
 &+ i \left\{ \left( \frac{q_2(2q_1)}{(q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2)^2} \right) - \left( \frac{q_1(2q_2)}{(q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2)^2} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \left( \frac{q_4(2q_3)}{(q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2)^2} \right) - \left( \frac{q_3(2q_4)}{(q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2)^2} \right) \right\} \\
 &+ j \left\{ \left( \frac{q_3(2q_1)}{(q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2)^2} \right) - \left( \frac{q_4(2q_2)}{(q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2)^2} \right) + \right. \\
 &\quad \left. - \left( \frac{q_1(2q_3)}{(q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2)^2} \right) + \left( \frac{q_2(2q_4)}{(q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2)^2} \right) \right\} \\
 &+ k \left\{ \left( \frac{q_4(2q_1)}{(q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2)^2} \right) + \left( \frac{q_1(2q_2)}{(q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2)^2} \right) + \right. \\
 &\quad \left. - \left( \frac{q_2(2q_3)}{(q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2)^2} \right) - \left( \frac{q_3(2q_4)}{(q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2)^2} \right) \right\} \\
 &= \frac{2(q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2)}{(q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2)^2} \\
 &= \frac{2}{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2}
 \end{aligned}$$

Substituindo na primeira integral da prova tem-se

$$\int_{\sigma} \Gamma \frac{1}{q} dV = \int_{\sigma} \Gamma \left( \frac{2}{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2} \right) dV$$

De acordo com seção 4.4 é possível escrever um quatérnio em coordenadas esféricas como

$$\begin{aligned}
 q_1 &= \rho \cos \theta_1 \cos \theta_2 \cos \theta_3, & 0 < \rho < \infty \\
 q_2 &= \rho \cos \theta_1 \cos \theta_2 \sin \theta_3, & 0 \leq \theta_3 \leq 2\pi \\
 q_3 &= \rho \cos \theta_1 \sin \theta_2 & -\frac{\pi}{2} \leq \theta_2 \leq \frac{\pi}{2} \\
 q_4 &= \rho \sin \theta_1, & -\frac{\pi}{2} \leq \theta_1 \leq \frac{\pi}{2}
 \end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned} dV &= dq_1 dq_2 dq_3 dq_4 \\ &= \frac{\partial(x_1, x_2, x_3, x_4)}{\partial(r, \theta_1, \theta_2, \theta_3)} d\rho d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3 \\ &= \rho^2 \cos^2 \theta_1 \cos \theta_2 d\rho d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3 \end{aligned}$$

Pelo teorema 4.4.1 tem-se que  $\rho^2 = q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2$ . Agora substituindo essas igualdades na integral obtém-se

$$\begin{aligned} \int_{\sigma} \Gamma\left(\frac{2}{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2}\right) dV &= \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \frac{2}{\rho^2} \rho^2 \cos^2 \theta_1 \cos \theta_2 d\rho d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3 \\ &= 2 \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \cos^2 \theta_1 \cos \theta_2 d\rho d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3 \\ &= 2 \left( \frac{\theta_1}{2} + \frac{\sin(2\theta_1)}{4} \Big|_0^{2\pi} \right) \left( \sin \theta_2 \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \right) \left( \theta_3 \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \right) \\ &= 4\pi^2 \end{aligned}$$

## 5.2 Fórmula integral de Cauchy para quatérnios

**Teorema 5.2.1. (fórmula integral de Cauchy para quatérnios)** - Seja  $\Omega$  um domínio simplesmente conexo num espaço quadrimensional e  $f(q)$  uma função regular em  $\Omega$ . Então

$$\int_{\varphi} \frac{f(q)}{q - q_0} dq = f(q_0)\pi(i + j + 2k) \quad (5.10)$$

onde  $\varphi$  é uma hipersuperfície fechada simples em  $\Omega$  e  $q_0$  um ponto qualquer em  $\varphi$ .

**Prova para o teorema 5.10:**

Seja  $\varphi_0$  uma hiperesfera em torno do ponto  $q_0$ ,  $|q - q_0| = r_0$ , onde  $r_0$  é suficientemente pequeno para que  $\varphi_0$  esteja contido no interior de  $\varphi$ . Como a função  $\frac{f(q)}{q - q_0}$  é regular em  $\Omega \setminus \{q_0\}$ , segue que

$$\int_{\varphi} \frac{f(q)}{q - q_0} dq = \int_{\varphi_0} \frac{f(q)}{q - q_0} dq$$

Daí segue que

$$\begin{aligned} \int_{\varphi} \frac{f(q)}{q - q_0} dq &= \int_{\varphi_0} \frac{f(q)}{q - q_0} dq \\ &= \int_{\varphi_0} \left[ \frac{f(q_0) + f(q) - f(q_0)}{q - q_0} \right] dq \\ &= f(q_0) \int_{\varphi_0} \frac{dq}{q - q_0} + \int_{\varphi_0} \frac{f(q) - f(q_0)}{q - q_0} dq \end{aligned}$$

De acordo com [21] é possível escrever o quatérnio  $q - q_0$  com segue:

$$q - q_0 = r_0 e^{\theta_1 i + \theta_2 j + \theta_3 k} \quad (5.11)$$

onde  $r_0 > 0$  e  $-\frac{\pi}{2} \leq \theta_1 \leq \frac{\pi}{2}$ ,  $-\frac{\pi}{2} \leq \theta_2 \leq \frac{\pi}{2}$  e  $0 \leq \theta_3 \leq 2\pi$ .

Segue da equação (5.11) que

$$dq = d(r_0 e^{\theta_1 i + \theta_2 j + \theta_3 k}) = r_0 d(e^{\theta_1 i + \theta_2 j + \theta_3 k}),$$

Verifica-se que

$$\begin{aligned} d(e^{\theta_1 i + \theta_2 j + \theta_3 k}) &= \frac{\partial(e^{\theta_1 i + \theta_2 j + \theta_3 k})}{\partial \theta_1} d\theta_1 + \frac{\partial(e^{\theta_1 i + \theta_2 j + \theta_3 k})}{\partial \theta_2} d\theta_2 + \frac{\partial(e^{\theta_1 i + \theta_2 j + \theta_3 k})}{\partial \theta_3} d\theta_3 \\ &= (i d\theta_1 + j d\theta_2 + k d\theta_3) e^{\theta_1 i + \theta_2 j + \theta_3 k} \end{aligned}$$

Usando agora a expressão (5.11) e a diferencial dada acima, segue que

$$\begin{aligned} \int_{\varphi_0} \frac{dq}{q - q_0} &= \int_{\varphi_0} \frac{r_0 e^{\theta_1 i + \theta_2 j + \theta_3 k}}{r_0 e^{\theta_1 i + \theta_2 j + \theta_3 k}} (i d\theta_1 + j d\theta_2 + k d\theta_3) \\ &= \int_{\varphi_0} (i d\theta_1 + j d\theta_2 + k d\theta_3) \\ &= i \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta_1 + j \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta_2 + k \int_0^{2\pi} d\theta_3 \\ &= \pi(i + j + 2k) \end{aligned}$$

Usando agora o fato de  $f$  ser contínua no ponto  $q_0$ , para  $\epsilon > 0$  dado, existe  $\delta > 0$ , tal que  $|q - q_0| < \delta$ , o que implica que  $|f(q) - f(q_0)| < \epsilon = \frac{\epsilon_0}{4\pi}$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \left| \int_{\varphi_0} \frac{f(q) - f(q_0)}{q - q_0} dq \right| &= \left| \int_{\varphi_0} \frac{f(q) - f(q_0)}{r_0 e^{\theta_1 i + \theta_2 j + \theta_3 k}} r_0 e^{\theta_1 i + \theta_2 j + \theta_3 k} (i d\theta_1 + j d\theta_2 + k d\theta_3) \right| \\
 &= \left| \int_{\varphi_0} (f(q) - f(q_0)) (i d\theta_1 + j d\theta_2 + k d\theta_3) \right| \\
 &= \left| \int_0^{2\pi} (f(q) - f(q_0)) i d\theta_1 + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (f(q) - f(q_0)) j d\theta_2 + \right. \\
 &\quad \left. + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (f(q) - f(q_0)) k d\theta_3 \right| \\
 &\leq \left| \int_0^{2\pi} (f(q) - f(q_0)) i d\theta_1 \right| + \left| \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (f(q) - f(q_0)) j d\theta_2 \right| + \\
 &\quad + \left| \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (f(q) - f(q_0)) k d\theta_3 \right| \\
 &< \int_0^{2\pi} |f(q) - f(q_0)| d\theta_1 + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |f(q) - f(q_0)| d\theta_2 + \\
 &\quad + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |f(q) - f(q_0)| d\theta_3 \\
 &< \int_0^{2\pi} \epsilon d\theta_1 + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \epsilon d\theta_2 + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \epsilon d\theta_3 \\
 &= 2\pi\epsilon + \pi\epsilon + \pi\epsilon \\
 &= 4\pi \frac{\epsilon_0}{4\pi} = \epsilon_0
 \end{aligned}$$

Como  $\epsilon \rightarrow 0$ , tem-se que

$$\int_{\varphi_0} \frac{f(q) - f(q_0)}{q - q_0} dq = 0$$

Logo,

$$f(q_0)\pi(i + j + 2k) = \int_{\varphi} \frac{f(q)}{q - q_0} dq$$

o que conclui a demonstração.

□

# Capítulo 6

## Considerações Finais

Neste trabalho, seguindo as investigações do grupo de problemas não lineares e sistemas complexos (UNESP- Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas) que busca estabelecer similaridades entre a Análise Complexa e a Análise Quaterniônica, motivado em explorar idéias apresentadas em [3], [21], [24] e [25], e outros trabalhos, foi possível determinar a função exponencial quaterniônica, tratando-a como uma extensão de  $e^z$  onde  $z = x + iy \in \mathbb{C}$ . Também foi possível obter resultados análogos ao estudo da função exponencial complexa, como a hiperperiodicidade e a determinação de uma região chamada fundamental [19]. Neste estudo foi verificado que a função exponencial quaterniônica apresenta uma hiperperiodicidade de  $2\pi$  em cada uma das unidades imaginárias  $i, j$  e  $k$ , sendo também determinada uma região no espaço  $\mathbb{R}^3$ , onde todos os valores de  $e^q$  existirão.

Outro resultado apresentado foi a versão da fórmula integral de Cauchy para quatérnios que poderá ajudar em futuros trabalhos na análise hipercomplexa. Buscamos estender as hipóteses do teorema no caso complexo para o caso hipercomplexo quadridimensional sendo a demonstração também desenvolvida analogamente ao resultado bidimensional complexo. Assim obtemos um resultado interessante que possivelmente poderá ser aplicado na física como uma forma de simplificar cálculos de integrais, como por exemplo na física de fluidos. A extensão desse teorema é almejada por muitos estudiosos da Análise Hipercomplexa sendo que outros resultados foram obtidos como por exemplo em [13], onde é usado o teorema de Gauss para quatérnios e outras ferramentas para a demonstração do teorema.

Como já mencionado esses resultados poderão ser úteis para futuras aplicações a física teórica, como por exemplo na física quântica, na física de fluidos, além desse fato a fórmula integral de Cauchy para quatérnios pode ser vista como ferramenta para futuros trabalhos como por exemplo no desenvolvimento do teorema de resíduos para quatérnios e

---

no desenvolvimento da fórmula integral de Cauchy para outros Hipercomplexos (Octônios (8-dimensional) e Sedenios (16-dimensional)).

# Referências Bibliográficas

- [1] BAEZ, J. The octonions. *Bull. Amer. Math. Soc.*, v.39, n.2, p.145-205, Dec. 2001.
- [2] BYUNG-Uk, L. *Stereo Matching of Skull Landmarks*. 1991. 71f. Tese (Ph.D. in Electrical Engineering) - Department of Electrical Engineering, Stanford University, Stanford, 1991.
- [3] BORGES, M. F.; MACHADO, J. M. New Remarks on the Differentiability of hyper-complex functions. *International Journal of Applied Mathematics*, v.8, n.1, p.85-101, 2002.
- [4] BORGES, M. F.; MARÃO, J. A.; MACHADO, J. M. Geometrical octonions I: on trigonometric and logarithmic functions of octonionic type, *International Journal of Applied Mathematics*, v. 21, p. 461-471, 2008.
- [5] BORGES, M. F.; MARÃO, J. A.; MACHADO, J. M. Geometrical Octonions II : hyper regularity and hyper periodicity of the exponential function., *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, v. 48, p. 495-500, 2008.
- [6] BOULOS, P., CAMARGO, I. *Introdução à geometria analítica no espaço*, São Paulo: Makron Books do Brasil, 1997, p.57-106.
- [7] BURROW, M. *Representation theory of finite groups*, New York, Academic Press, 1965.
- [8] CALIXTO, A. P. *Operador Quaterniônico de Klein-Gordon-Dirac*. 2002. 66 f. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada) - Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, São José do Rio Preto, 2002.
- [9] CARTAN, E. *The Theory of spinors*. Cambridge: The MIT Press, 1996.
- [10] CARVALHO, M. M. C. *Análise das propriedades de funções qua satisfazem as relações generalizadas de Cauchy-Riemann*. 2003. 78 f. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada) - Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, São José do Rio Preto, 2003.

- 
- [11] CHURCHILL, R.V. *Variáveis complexas e suas aplicações*. Tradução T. Yoshioka. São Paulo: McGraw-Hill, 1975.
- [12] DAM, B. D.; KOCH, M.; LILLHOLM, M. *Quaternions, interpolation and animation*, Technical report, Department of Computer Science, University of Copenhagen, Denmark, 1998.
- [13] DEAVOURS, C.A. The quaternion calculus. *American Mathematical Monthly*, v.80, n.9, p.995-1008, Nov. 1973.
- [14] FUETER, R. Die Funktionentheorie der Differentialgleichungen  $\Delta u = 0$  und  $\Delta\Delta u = 0$  mit vier reellen Variablen. *Comment. Math. Helv.*, v.7, n.1, p. 307-330, 1934.
- [15] GARCIA, A. e LEQUAIN, Y. *Álgebra: um curso de introdução*. Rio de Janeiro: Impa, 1988. (Projeto Euclides).
- [16] GUIDORIZZI, H. L. *Um curso de cálculo*. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1985-2001. 1 v., p. 44-49.
- [17] HERMANN R. *Lectures in Mathematical Physics*, W.A. Benjamin, Inc., NY, 1970, v.1.
- [18] HÖNIG, C. S. *Introdução às funções de uma variável complexa*, 3. ed., São Paulo: USP, 1971, p. 86-96.
- [19] KREYSZIG, E., *Matemática superior Vol. 4*, Rio de Janeiro: LTC Editora, 1969.
- [20] LINS NETO, A. *Funções de uma variável complexa*, 2. ed., Rio de Janeiro: IMPA, 1993, p. 15-19 (Projeto Euclides).
- [21] MARÃO, J.A. *Hipercomplexos: um estudo da analiticidade e da hiperperiodicidade de funções octoniônicas*. 2007. 59 f. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada) - Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, São José do Rio Preto, 2007.
- [22] MARICATO, J. *Funções quaseconformes* 2006. 85f. Dissertação (Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada) - Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, São José do Rio Preto, 2006.
- [23] MILIES, P. C. *História da álgebra, tópicos da matemática elementar*, IMEUSP, São Paulo, p. 38-61, 1987.

- 
- [24] OLIVEIRA, A. C. *Quatérnios, operadores de Fueter e relações quaterniônicas transcendentais*. 2006. 76 f. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada) - Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, São José do Rio Preto, 2006.
- [25] PENDEZA, C. *Álgebras não associativas octoniônicas e relações extensivas do tipo "de moivre"*. 2006. 118 f. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada) - Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, São José do Rio Preto, 2007.
- [26] PINHEIRO, M. L. G. *Quaterniões: cálculo numérico e simbólico*. 2006. 93f. Dissertação (Mestrado em Matemática Computacional) - Escola de Ciências, Universidade do Minho, Braga, 2006.
- [27] SCHWARTZ, M.; GRENN, S.; RUTLEDGE, W.A. *Vector analysis with applications to geometry and physics*, Harper & Row, New York, 1960, p.32-33.
- [28] SHOKRANIAN, S. *Variáveis complexas 1*, Ed. UNB, p.13, 2002.
- [29] SPIEGEL, M. R. *Variáveis complexas*, Ed. McGraw-Hill, São Paulo, 1977.
- [30] VAN DER WAERDEN, B. L. Hamilton's discovery of quaternions. *Mathematics Magazine*, v. 49, n. 5, p. 227-234, Nov. 1976.

Autorizo a reprodução xerográfica para fins de pesquisa.

São José do Rio Preto, \_\_\_\_ / \_\_\_\_ / \_\_\_\_

---

Assinatura

# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)