

Tese de doutorado

Visão Supersimétrica de Modelos Topológicos e Branas  
em  $D = 4$  e  $D = 5$ .

Luciana Angelica da Silva Nunes

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA  
Fortaleza, 05 de Dezembro de 2008

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

Tese de doutorado

Visão Supersimétrica de Modelos Topológicos e Branas em  $D = 4$   
e  $D = 5$ .

Luciana Angelica da Silva Nunes

Tese submetida ao Departamento de Física  
como requisito para obtenção do grau  
de doutor em Física.

Orientador  
Carlos Alberto Santos de Almeida

*Aos Meus Pais*

## Agradecimentos

Primeiramente, não poderia deixar de agradecer à Deus por todos os momentos vividos durante a composição deste trabalho.

A meus pais, Luciano e Rita, irmãos, Leandro Luis e Luciano Júnior, minhas fofinhas Lívia e Marcela, a minha cunhada Fernanda e ao meu primo Gustavo Acioli pelo carinho, paciência, compreensão e inesgotável apoio.

Ao Prof. Carlos Alberto, pela valiosa orientação, amizade e pela confiança depositada durante estes quase sete anos. Por sempre me tratar como filha e permitir que o tratasse como pai! Agradeço por conseguir me passar valores que seguirão comigo a vida toda, por todos os conselhos relacionados ao trabalho e a vida, e por nunca dizer nunca, deixando com que eu pudesse encontrar os meus espaços (e esses têm muitas dimensões!).

Ao Prof. Helayel! Muitos têm pai durante a dura jornada, eu tive a sorte de ter um pai e um avô. Agradeço por ter tido uma paciência inesgotável e pela hospitalidade incrível nas diversas estadas no CBPF. Que muitos ainda sejam os momentos de colaboração, e que esses sejam cada vez mais frutíferos.

À minha amiga Erlania pelos incontáveis momentos divididos e a capacidade de sempre tirar um sorriso meu, mesmo quando eu achava impossível.

À grande Luciana, que é Magal mas não é Lu, por saber ser especial e necessária, além de ter um coração enorme.

Aos distantes mais próximos que uma pessoa pode ter na vida: Mariana Baroni e Aristeu Rosendo. Sem vocês, para me apoiar do outro lado do oceano, muita coisa não teria a mesma cor... e que cor gostosa vocês deixam nos momentos.

Aos queridíssimos Jeanlex e Maia JR que chegaram nos 45 do segundo tempo e deram show de bola.

A Mirian de Barros, pessoa FUNDAMENTAL para os momentos de estabilidade e

também de instabilidade no RJ. Bom saber que posso contar com ela e que estou em suas orações.

À Gláucia, minha xuxinha, que soube, e continua sabendo, conquistar mais e mais o seu espaço a cada dia.

À amiga Denise por me mostrar que coragem de correr atrás de sonhos e vontades é sim uma grande virtude, mesmo que as pessoas discordem.

Ao queridíssimo Mário Pacheco, por me mostrar que ter bom coração é imprescindível na vida... e por sempre querer fazer valer a pena.

Ao amigo Erivelton que sempre teve a palavra certa na hora certa e me mostrou com pouquíssimas delas o que é ser AMIGO!

Aos amigos de sempre, que de longe ou de perto acredito que torceram para que tudo desse certo, em especial a Manu, Taty + Flávio = Thiago + Fernando, Juliana Rêgo + Elder = Ana Julia, Thelma, Baquil, Fernanda + Estela, Farah, Anderson, Siqueira, Alexandre, Eliane + Bené = Túlio + Natércia, Rafinha + Levisinho, Keylane + Alexandre, Roberto Alan, Juliana Oliveira, Joelma + Felipe, Jusciane, Subênia.

Aos novos amigos que ganhei na Faculdade de Educação, Ciências e Letras de Iguatu (UECE) em especial a Alana Cecília, Jeanne D'arc, Ana Kellen, Fernando Roberto e Lázara, os dias em Iguatu seriam muito mais quentes sem a presença deles (será possível aumentar a temperatura daquele lugar???)

Ao Grupo de Teoria Quântica de Campos da UFC, que todos conhecem melhor por pessoal do LASSCO, pelos momentos de trabalho e descontração.

A coordenação do curso de Pós-Graduação em Física.

À FUNCAP (Fundação Cearense de Apoio ao Desenvolvimento Científico e Tecnológico), CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) e ao CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico) pelo apoio financeiro.

## Resumo

A linha principal dessa tese relaciona-se com teorias supersimétricas. Junta-se à essa linha principal uma discussão sobre propagadores de campos de Kalb-Ramond em branas. Na realidade os campos anti-simétricos são outro fio condutor deste trabalho, aparecendo em quase todos os tópicos.

Inicialmente, em branas do tipo  $\delta$  de Dirac, típicas dos modelos de Dvali e de Randall-Sundrum, mostramos que a relação que ocorre entre os propagadores de campos vetoriais em  $D = 4$  e  $D = 5$  dimensões espaço-temporais, continua válida quando tratamos campos tensoriais anti-simétricos. Tal resultado subsidia especulações de que campos tensoriais podem ser localizados na brana.

No que tange a teorias com supersimetria, nossas investigações se dividem em três direções, a saber: 1) modelos topológicos em  $D=5$ , no contexto da chamada pseudo-supersimetria, 2) construção de uma descrição plena do superespaço em  $D = 5$ , inédita na literatura, a qual denominamos de superespaço intrínseco, para diferenciar da proposta de pseudo-supersimetria em  $D = 5$ , 3) descrição do efeito Aharanov-Casher em uma teoria supersimétrica em  $D = 4$  com termo de quebra de Lorentz.

Quanto a modelos topológicos, realizamos a extensão pseudosupersimétrica em  $D = 5$ , de um termo com estrutura análoga ao termo de Chern-Simons, mas envolvendo apenas o campo tensorial de gauge de Kalb-Ramond  $B_{MN} = (B_{mn}, B_{m5})$ . Obtivemos a expansão completa dos supercampos e demonstramos em detalhes o número de graus de liberdade do tensor anti-simétrico de rank-2 em  $D = 5$ . Uma vez que construímos a expansão completa do supercampo de Kalb-Ramond, determinamos o parceiro fermiônico do termo topológico 5-dimensional.

Por outro lado, insatisfeitos com o formalismo existente na literatura para tratar sistemas com supersimetria em  $(4+1)$  dimensões, especialmente tendo em vista aplicações em teorias de branas, construímos o formalismo de superespaço  $N = 1 - D = 5$ . En-

contramos os geradores, e, conseqüentemente, as derivadas covariantes de supersimetria e mostramos que existe uma dependência explícita da quinta coordenada. Este é um resultado que permite propagação na dimensão extra, a qual não é descrita no formalismo de pseudosupersimetria uma vez que são usadas as mesmas derivadas covariantes de supersimetria de quatro dimensões. Escrevemos o Modelo de Wess-Zumino em cinco dimensões usando o formalismo de supersimetria intrínseca, assim como um supercampo vetorial, o que permitiu a construção de uma teoria manifestamente supersimétrica em  $D = 5$  com invariância de gauge.

Por fim, no contexto de uma teoria supersimétrica em  $D = 4$ , utilizamos um ansatz para quebrar a simetria de Lorentz, simplesmente impondo que determinado campo do modelo é constante, ao mesmo tempo em que a supersimetria é preservada. Adicionamos o termo de Fayet-Illiopoulos, que nos fornece um potencial e a partir da presença desse potencial escrevemos uma nova lagrangiana que permite obter o efeito Aharonov-Casher em uma teoria supersimétrica com termo de quebra de Lorentz.

Vale a pena mencionar ainda, quatro apêndices, a saber: convenção e revisão de espinores; formas diferenciais para supercampos; a prova detalhada da existência de três graus de liberdade on-shell em  $D = 5$  para o campo de Kalb-Ramond; e álgebra de deSitter nas representações vetorial e espinorial  $SO(1, 4)$ .



## Abstract

The main line of this thesis is related to supersymmetric theories. To this main line we join a discussion about Kalb-Ramond field propagators in branes. Indeed, the antisymmetric fields are another conductor line of this work, appearing in almost all the topics. Initially, considering Dirac  $\delta$  branes, which are typical in Dvali and Randall-Sundrum models, we show that a relationship which occurs between vectorial field propagators in  $D = 4$  and  $D = 5$  space-time dimensions, remains valid when we treat antisymmetric tensorial fields. Such result supports speculation about localization of tensorial fields in branes.

Related to supersymmetric theories, our investigations are threefold: 1) topological models in  $D = 5$ , in the context of the so called pseudo-supersymmetry; 2) construction of a complete description of a  $N = 1 - D = 5$  superspace, unprecedented in the literature, which we call intrinsical superspace, in order to make difference respect with pseudo-supersymmetry in  $D = 5$ ; 3) description of the Aharonov-Casher effect in a supersymmetric theory in  $D = 4$  with Lorentz breaking term.

In the context of topological models, we carried out a  $D = 5$  pseudo-supersymmetric extension of a term structurally analog to the Chern-Simons term, but involving only the Kalb-Ramond tensorial gauge field  $B_{MN} = (B_{mn}, B_{m5})$ . We obtain a complete expansion for the superfields and prove in details the number of the degrees of freedom of the antisymmetric tensorial rank-2 field in  $D = 5$ . Since we constructed the complete expansion of the Kalb-Ramond superfield, we find the fermionic superpartner of the 5-dimensional topological term.

On the other hand, since we consider unsatisfactory the present formalism in the literature which treat supersymmetric systems in  $(4+1)$  dimensions, particularly if we have in mind applications to brane models, we constructed a formalism for the  $N = 1 - D = 5$  superspace. We find the generators and consequently, the supersymmetric covariant

derivatives and we show that exist an explicit dependence on the fifth coordinate. This result allows propagation in the extra dimension, which is not described in the pseudo-supersymmetry formalism, since there are used the same 4D supersymmetric covariant derivatives. The Wess-Zumino model in five dimensions was written using the formalism of the intrinsical supersymmetry, as well as a vectorial superfield, which allowed the construction of a manifestly supersymmetric gauge invariant theory in  $D = 5$ .

Finally, in the context of a  $D = 4$  supersymmetric theory, we used an ansatz in order to break the Lorentz symmetry, simply by imposing that determined field of the model is constant, although the supersymmetry is preserved. Besides, we add a Fayet-Illiopoulos term, which give us a potential and from the presence of this potential we write a new lagrangian which allows us to obtain the so called Aharonov-Casher effect in a supersymmetric theory with Lorentz breaking.

It is worthwhile to mention four appendices, namely: convention and revision of spinors; differential forms for superfields; a detailed proof of existence of three degrees of freedom on-shell in  $D = 5$  for the Kalb-Ramond field; and the deSitter algebra in the vectorial and spinorial  $SO(1, 4)$  representations.

# Conteúdo

Agradecimentos . . . . .	i
Resumo . . . . .	iii
Abstract . . . . .	v
Índice . . . . .	vi
<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Propagadores de Campos de Gauge Anti-simétricos em uma Brana</b>	<b>20</b>
1.1 Motivações . . . . .	20
1.2 Campo de Vetorial de Gauge Induzido em uma Brana . . . . .	21
1.3 Campos Anti-simétricos de Gauge Induzidos em uma Brana. . . . .	25
1.4 Progagadores para Campos Anti-simétricos. . . . .	27
1.5 Conclusões . . . . .	29
<b>2 Supersimetria</b>	<b>30</b>
2.1 Supersimetria $N = 1 - D = 4$ . . . . .	30
2.1.1 Transformações de Supersimetria . . . . .	31
2.2 Superespaço $N = 1 - D = 4$ . . . . .	33
2.2.1 Derivadas Covariantes . . . . .	35
2.2.2 Integrais de Berezin . . . . .	36
2.2.3 Supercampos Quirais . . . . .	39

2.3	Ações no Superespaço . . . . .	42
2.4	Supercampos Vetoriais . . . . .	44
<b>3</b>	<b>Observações sobre o campo de Kalb-Ramond supersimétrico em <math>D = 5</math></b>	<b>48</b>
3.1	Pseudosupersimetria . . . . .	48
3.1.1	Multiplete Vetorial em 5-dimensões . . . . .	50
3.1.2	Multiplete Tensorial 5-dimensional . . . . .	52
3.2	Termo Topológico de Kalb-Ramond em $5D$ . . . . .	54
3.3	Termo de Kalb-Ramond tipo Chern-Simons Pseudo-supersimétrico em $D = (4 + 1)$ . . . . .	56
3.3.1	Termo fermiônico topológico de Kalb-Ramond Supersimétrico em $D = 5$ . . . . .	58
3.4	Identificação da componente $B_{m5}$ do campo de Kalb-Ramond com um vetor de gauge $A_m$ em uma teoria 5-dimensional . . . . .	58
3.4.1	Termo fermiônico topológico . . . . .	60
<b>4</b>	<b>Superespaço Intrínseco <math>N = 1 - D = 5</math></b>	<b>62</b>
4.1	Introdução . . . . .	62
4.2	Notações e Convenções 5-dimensionais . . . . .	64
4.2.1	Geradores de Supersimetria e Derivadas Covariantes . . . . .	65
4.3	Supercampos . . . . .	69
4.3.1	Supercampo Escalar Complexo de Matéria . . . . .	69
4.3.2	O modelo de Wess-Zumino $N = 1 - D = 5$ . . . . .	73
4.3.3	Supercampo de gauge . . . . .	75
4.4	Ação supersimétrica . . . . .	76
<b>5</b>	<b>Efeitos de fase quântica</b>	<b>78</b>
5.1	O Efeito Aharonov-Bohm . . . . .	78

5.2	O Efeito Aharonov-Casher . . . . .	86
5.2.1	Lagrangeana corrigida . . . . .	89
5.2.2	Diferença de fase no efeito AC . . . . .	91
<b>6</b>	<b>Geração do termo de Aharonov-Casher numa teoria supersimétrica com quebra da simetria de Lorentz</b>	<b>98</b>
6.1	Introdução . . . . .	98
6.2	Modelo Supersimétrico em um Background de Kalb-Ramond . . . . .	102
6.3	A Lagrangeana on-shell . . . . .	106
6.4	O efeito Aharonov-Casher . . . . .	106
<b>A</b>	<b>Mais Convenções</b>	<b>116</b>
A.1	Convenções e relações úteis para espinores . . . . .	116
<b>B</b>	<b>Formas Diferenciais no Superespaço</b>	<b>121</b>
<b>C</b>	<b>Graus de liberdade físicos de uma campo de KR de gauge em <math>5D</math></b>	<b>124</b>
C.1	Dualidade Vetor-tensor em $D = 5$ . . . . .	124
C.2	Análise Detalhada de Um Campo Tensorial Anti-simétrico em $D = 5$ . . . . .	126
<b>D</b>	<b>Álgebra de deSitter na representação vetorial e espinorial <math>S_0(1, 4)</math></b>	<b>131</b>
D.1	Potencial vetor . . . . .	132
	<b>Bibliografia</b>	<b>133</b>

# Lista de Figuras

5-1	Experimento de difração de partículas na presença de campo magnético.	79
5-2	As partículas geradas na fonte, $(q_0, t_0)$ , passam pelas fendas. Elas podem passar pela direita ou pela esquerda até chegar ao anteparo, $(q_N, t_N)$ . . .	80
5-3	Experiência de difração de partículas onde existe um campo magnético que não interage diretamente com a partícula. Passando pela direita o elemento de caminho terá o mesmo sentido que o potencial vetor e passando pela esquerda, sentido contrário. . . . .	82
5-4	Experiência de difração de partículas que mostra o efeito Aharonov-Bohm.	85
5-5	Solenóide neutro, suficientemente grande de massa $M$ , localizado na posição $\mathbf{R}$ em movimento relativo a uma carga $Q$ de massa $m$ localizada na posição $\mathbf{r}$ .	87
5-6	Movimento relativo de duas partículas, uma com carga $Q$ sem momento magnético e a outra neutra mas com momento $\mu$ . . . . .	91
5-7	Possibilidades de caminhos de uma partícula neutra . . . . .	92
5-8	O momento magnético da partícula de massa $m_2$ é perpendicular ao campo elétrico produzido pela partícula de massa $m_1$ e carga $Q$ , supostamente positiva. . . . .	93
5-9	Diagramas de comportamento do vetor deslocamento e do vetor composto pelo campo elétrico e pelo momento de dipolo magnético. . . . .	94

# Introdução

A Física clássica repousa em dois pilares de propriedades distintas: partículas e ondas. Partículas podem ser pensadas como pulsos de energia e matéria localizados em regiões limitadas do espaço: bolas de bilhar ou mesmo, se o interesse envolve escalas astronômicas, planetas. Ondas têm um conteúdo mais difuso, em geral não são localizadas, podem ser difratadas e exibir interferência. De uma certa forma, a quantização de um sistema clássico produz uma mistura desses dois conceitos. Assim, elétrons, inicialmente pensados como partículas, podem apresentar propriedades de ondas. Inversamente, o primeiro resultado da quantização do campo eletromagnético é o aparecimento de pulsos de energia, fótons, que podem apresentar propriedades semelhantes a partículas.

A noção de campo surgiu inicialmente como uma ferramenta matemática conveniente para descrever as forças, que são conceitos centrais na mecânica de Newton. Entretanto, no século XIX, devido principalmente aos trabalhos de Maxwell, o conceito de campo passou a ocupar o papel central na descrição física da realidade. Essa mudança foi ainda maior após o surgimento da primeira unificação da Física: o Eletromagnetismo.

A descoberta do eletromagnetismo impulsionou o surgimento da Teoria da Relatividade, uma vez que as transformações de Galileu, quando aplicadas à equação de onda tridimensional, eram inadequadas. Surgiu então um dilema: ou se preservava a mecânica clássica e abandonava-se o eletromagnetismo, ou se preservava este e abandonava-se quase três séculos de previsões bem confirmadas. O caminho foi achado, surpreendentemente, numa espécie de conciliação entre as duas alternativas. Entra então em cena

Albert Einstein com seu trabalho "Sobre a Eletrodinâmica dos Corpos em Movimento"[1], onde introduz a Relatividade, interpretando corretamente as transformações de Lorentz-Fitzgerald como alterações do espaço e do tempo em função da velocidade relativa entre os referenciais.

O Eletromagnetismo também foi fundamental para a descoberta da Mecânica Quântica, uma vez que descobriu-se a incapacidade conjunta dele com a Termodinâmica Clássica de prever a correta distribuição de energias em função da frequência na radiação do corpo negro.

A Teoria Quântica de Campos (TQC) é a aplicação conjunta da mecânica quântica e da teoria da relatividade aos campos e fornece uma estrutura teórica usada na física de partículas e na física da matéria condensada. Em particular, a teoria quântica do campo eletromagnético, Eletrodinâmica Quântica, é a teoria provada experimentalmente com maior precisão na Física.

As três razões principais motivaram o desenvolvimento da teoria quântica dos campos:

- A necessidade de uma teoria que lidasse com a variação do número de partículas;
- A necessidade de conciliação entre as duas teorias: mecânica quântica e a relatividade;
- A necessidade de lidar com estatísticas de sistemas multipartículas.

A TQC surgiu no final da década de 1920 como aplicação das regras de quantização de Heisenberg ao campo de radiação. Um dos resultados desse processo é o aparecimento de fótons, os quanta do campo de radiação, os quais haviam sido postulados anteriormente por Einstein. Assim, uma vez que partículas surgem no processo de quantização de campos, pode-se imaginar que esses são as entidades básicas da natureza. Esse pensamento direcionou pesquisas para a construção de teorias de campos locais (no sentido que as interações são descritas por produtos de campos no mesmo ponto) para as interações fortes



e fracas. A imposição de localidade é, talvez, a maneira mais simples de compatibilizar a estrutura das interações com a relatividade de Einstein. Mas essa vantagem tem o seu preço: produtos de campo no mesmo ponto não estão, a priori, bem definidos. Em cálculos perturbativos, esta dificuldade manifesta-se no aparecimento de integrais divergentes, que conduzem a resultados sem nenhum sentido.

A solução para o problema dos infinitos nos cálculos perturbativos veio com a descoberta da renormalização. A idéia é relativamente simples. O fato é que as massas e as cargas de partículas descritas por uma certa teoria são, em geral, modificadas pela interação. Assim, um elétron, por exemplo, está sempre rodeado pela nuvem de fótons associada ao campo eletromagnético que ele próprio cria. Ele está sempre em interação, emitindo e absorvendo fótons. Um dos efeitos desses processos é a modificação da auto-energia do elétron. A massa observável de um elétron necessariamente incorpora essa modificação. De modo semelhante, o fóton emitido pelo elétron polariza o vácuo, criando pares de partículas-antipartículas que blindam parcialmente o elétron, modificando efetivamente sua carga. A carga observável deve incorporar o efeito da polarização do vácuo. O que há de diferente no caso da teoria de campos é que, nesta última situação, as correções para a massa e para carga da partícula são infinitas.

Embora tenha sido inicialmente concebida como uma linguagem para o estudo das interações entre partículas, a TQC encontra aplicações em outras áreas da Física. Exemplos são os estudos de fenômenos críticos, o efeito Hall fracionário, teorias de muitos corpos em matéria condensada, etc. Assim, de um modo geral, ela constitui um arcabouço de métodos e idéias úteis na Física teórica. Ela não é uma teoria pronta, acabada. Pelo contrário, a cada passo novos aspectos e desafios têm de ser enfrentados, frutos de uma estrutura complexa e rica.

# Simetrias

A simetria na natureza é um fenômeno único e fascinante. Ela é uma característica que pode ser observada em algumas formas geométricas, equações matemáticas ou outros objetos. O seu conceito está relacionado com o de isometria e às operações geométricas associadas. Em Física refere-se a um conjunto de transformações definidas num grupo que levam uma expressão ser invariante na sua forma: dizemos então que o sistema é invariante sob aquela transformação ou que ele apresenta uma simetria no parâmetro da transformação.

Das quatro interações fundamentais devidamente organizadas em termos de teorias microscópicas, que incorporam tanto as leis do mundo quântico quanto a teoria da relatividade especial, percebe-se que o conceito-chave para a formulação das mesmas é o conceito de simetria. Do ponto de vista matemático, cada interação tem associado a si um grupo de simetria. Dessa forma, o conceito de simetria e a estrutura algébrica a ela correspondente, organiza as leis de conservação associadas a um dado tipo de interação, sistematiza a classificação das partículas e dos estados físicos da teoria em termos de números quânticos e estabelece mecanismos para a compreensão das relações existentes entre as massas e cargas das partículas envolvidas na interação considerada. Entretanto, estas relações de massa envolvem exclusivamente bósons (partículas de spin inteiro) ou férmions (partículas com spin semi-inteiro e que obedecem ao chamado Princípio da Exclusão de Pauli).

Fatos dessa natureza ilustram a importância de considerações de simetria. Mesmo sem conhecer soluções detalhadas das equações de movimento, é possível extrair informações úteis mediante a análise das invariâncias da ação.

Assim como na mecânica clássica, podemos mostrar na Teoria de Campos que as simetrias também estão associadas a grandezas conservadas. Vemos isso através do Teo-

rema de Noether <sup>1</sup>: A todo grupo de transformações contínuas dos campos que mudam a Lagrangiana, no máximo por uma divergência, existe associada uma corrente conservada. Essa é a aplicação mais frutífera do conceito de simetria, ela faz cada simetria contínua em Física corresponder a uma lei de conservação. É por isso que a Teoria dos Grupos se tornou uma das áreas da matemática mais estudadas pelos físicos.

Como vimos, o conceito de simetria é muito importante na natureza, mas a quebra de simetria também o é. Podemos associar, especulativamente, nossa existência à quebra que ocorreu nos instantes que se seguiram ao *Big Bang*.

## Supersimetria

Tudo o que se sabe hoje sobre o mundo dos constituintes fundamentais da matéria está resumido no chamado Modelo Padrão (MP) que foi construído através da constante interação entre experimento e teoria. Várias questões ainda estão em aberto. Tentativas de resposta invocam teorias que vão além do Modelo Padrão, supondo a existência de simetrias e propriedades que ainda não foram detectadas.

Na física quântica, todas as partículas e campos dividem-se em duas categorias extremamente diferentes: férmions e bósons. As simetrias possuem papéis importantes em toda a física. Todas as simetrias simples respeitam a distinção entre bósons e férmions<sup>2</sup>. Assim, diferentemente das simetrias simples (descritas matematicamente pelos grupos e álgebra de Lie), que não conseguem comparar esses dois tipos de entidades, a supersimetria, através de poderosas propriedades matemáticas, os inter-relacionava. Em um mundo regulado pelas leis da Supersimetria, a cada bóson de uma certa massa corresponderia um férmion com a mesma massa.

Os físicos teóricos consideram a supersimetria uma idéia tão interessante que mesmo

---

<sup>1</sup>O teorema de Noether aplica-se tanto à mecânica clássica quanto à mecânica quântica.

<sup>2</sup>Ao inter-relacionar bósons com férmions e vice-versa, a supersimetria inaugura uma nova categoria de relações entre partículas.

na ausência de qualquer indício empírico direto da sua verdade, quase todas as propostas atuais de teorias fundamentais a incorporam. Por suas propriedades matemáticas e conseqüências físicas marcantes, as teorias supersimétricas destacam-se entre os candidatos mais promissores para a nossa próxima visão do mundo físico. Postula-se também que se a supersimetria for uma simetria fundamental da natureza ela foi quebrada em uma escala de energia superior àquela que se alcança com os atuais aceleradores.

Isto impõe que a maneira de se introduzir a Supersimetria nas teorias de interações fundamentais, de forma compatível com a realidade experimental de que dispomos, é através dos chamados mecanismos de quebra. Propõe-se que a Supersimetria tenha operado no Universo em seus instantes iniciais e que, com o resfriamento do mesmo, esta simetria entre bósons e férmions tenha sido quebrada de tal forma que, em seu regime atual, as partículas introduzidas pela Supersimetria no espectro físico tenham suas massas em uma escala acima da escala acessível aos experimentos atuais de altas energias. O fato de não se ter comprovação experimental da supersimetria não implica que seja uma teoria absolutamente inútil. Alguns pontos fazem da supersimetria, no plano teórico, uma ferramenta de grande valor.

A Supersimetria também tocou questões teóricas muito relevantes, como o atenuamento das divergências no regime ultravioleta das teorias quânticas de campos, essenciais para a descrição das interações fundamentais, e culminou com uma teoria de gravitação com mais possibilidades de consistência do que a gravitação quântica tradicional; além desta notável realização, a Supersimetria possibilitou a formulação da primeira classe de teorias quânticas de Yang-Mills livres de qualquer tipo de divergência ultravioleta. Também, na sua busca por uma teoria de unificação dos diferentes campos de força, a Supersimetria resolve alguns problemas fundamentais de consistência que o programa usual de unificação enfrenta. Os dez primeiros anos de desenvolvimentos em Supersimetria (1974-1984) foram marcados pela incorporação desta simetria na física de partículas,

no programa de unificação e no projeto de construção de uma teoria matematicamente consistente para a gravitação.

A segunda fase, iniciada em 1985, já nos apresenta a Supersimetria em uma outra perspectiva, colocando-a na qualidade de um ingrediente físico e matemático necessário para a construção das teorias de Supercordas. A Supersimetria foi, assim, definitivamente incorporada à física de partículas e vem sendo, de forma crescente, aplicada também a outros campos da Física, como a física nuclear, a física da matéria condensada e, até mesmo, a alguns sistemas biofísicos. Seria bastante oportuno ainda mencionar que sistemas quanto-mecânicos muito simples, como aqueles constituídos por partículas, carregadas ou neutras, e sujeitas a certas configurações de campo magnético externo, exibem características de uma supersimetria que se revela como uma simetria dinâmica. Finalmente, com a entrada em operação do LHC (Large Hadron Collider), espera-se dispor de recursos experimentais suficientes para se fazer testes diretos e indiretos para comprovação da SUSY no mundo físico.

## Dimensões Extras

Até o aparecimento da teoria da relatividade, parecia fora de cogitação que o Universo em que vivemos tivesse mais de três dimensões. Em nosso primeiro contato com a geometria, plana ou espacial, temos a tendência natural de atribuir aos teoremas o status de fatos geométricos, como se eles tivessem uma existência real, transcendendo à natureza puramente abstrata e axiomática da Matemática. A identificação da geometria euclidiana como sendo a própria geometria do mundo se constituiu historicamente num dos maiores entraves ao desenvolvimento da geometria moderna.

A teoria da relatividade especial, proposta por Albert Einstein e aprimorada por Minkovski, começa diferindo da física newtoniana em termos de geometria e dimensionalidade do mundo. Na visão relativista, o velho espaço de três dimensões tem de ser

substituído por um novo espaço-tempo, de quatro dimensões. Além disso, a geometria desse espaço-tempo não é euclidiana, e sim minkowskiana. O tempo passava assim a ser concebido como uma quarta dimensão, o que foi absolutamente fundamental e necessário para a construção da teoria da relatividade geral e a subsequente revolução científica promovida por ela. Na relatividade geral, considerada por muitos como a maior realização intelectual humana, a geometria deixava de ser minkowskiana para ser riemanniana. E a força da gravidade entre os corpos deixava de ser vista como uma força física para ser considerada uma propriedade geométrica do espaço-tempo.

Apesar da grande beleza de suas equações, que descreviam parte da física (a gravitação), como sendo pura geometria, a teoria da relatividade não satisfazia plenamente Einstein ainda desejava geometrizar o eletromagnetismo, obtendo, assim, uma teoria unificada das interações da física. Foi então que no início da década de vinte, do século passado, dois físicos teóricos, Theodor Kaluza e Oscar Klein formularam uma hipótese estranha, mas que conduzia a resultados interessantes.

A teoria de Kaluza-Klein, como ficou conhecida posteriormente, demonstrou que se o espaço-tempo postulado por Einstein e Minkowski for acrescido de uma quinta dimensão, então, usando-se as próprias equações da teoria da relatividade, mostra-se que os fenômenos eletromagnéticos podem ser interpretados como tendo origem geométrica. Em outras palavras, o campo eletromagnético, à semelhança do campo gravitacional, também é geometrizável. Para tentar explicar o fato de que até agora não se observou nenhuma dimensão além das quatro do espaço-tempo tem-se postulado que as dimensões extras, isto é, as dimensões escondidas do Universo, são minúsculas e se curvam sobre si mesmas. Na terminologia matemática, diz-se que essas dimensões são compactas.

Recentemente, uma nova versão não-compacta da teoria de Kaluza-Klein foi sugerida pelo físico inglês Paul Wesson [2]; da Universidade de Waterloo, no Canadá. Nos modelos cosmológicos propostos por Wesson o Universo em que vivemos tem cinco dimensões,

sendo que a quinta dimensão, não-compacta, é a responsável pela existência da matéria. Em outras palavras, o que chamamos de matéria seria, em última instância, meramente geometria, a qual se manifesta como substância quando observada por seres que vivem numa hipersuperfície de quatro dimensões. Teorias que postulam a existência de tais hipersuperfícies são conhecidas pelos matemáticos pelo nome de teorias de imersão. O nome é sugestivo, pois a idéia é que o universo que observamos fisicamente estaria imerso num universo maior, de cinco dimensões.

## Teoria de Cordas

A finalidade última da física é descobrir uma "teoria do tudo", da qual todo o resto possa ser deduzido. Os físicos sabem que está faltando alguma coisa nas teorias existentes uma vez que não temos nenhuma que seja consistente que inclua tanto a gravitação quanto a mecânica quântica, embora o universo contenha ambos os fenômenos.

A teoria de tudo provavelmente não teria conceito algum, pois do contrário teríamos que buscar uma explicação para esses conceitos em alguma teoria ainda mais fundamental, o que nos levaria a uma recessão infinita. Em outras palavras, essa teoria teria que ser puramente matemática, sem explicações ou postulados.

Alguns físicos viram como uma possível solução para o problema da partícula fundamental, a construção de uma teoria onde as partículas primordiais fossem formadas por energia. De acordo com essa teoria todas as partículas que considerávamos elementares são na realidade filamentos unidimensionais vibrantes, a que os físicos deram o nome de cordas <sup>3</sup>. Ao vibrarem as cordas originam as partículas subatômicas juntamente com as suas propriedades. Para cada partícula subatômica do universo existe um padrão de vibração particular das cordas.

---

<sup>3</sup>A analogia da teoria consiste em comparar esta energia vibrante com as cordas. As de um violão, por exemplo, ao serem pressionadas em determinado ponto e feitas vibrar, produzem diferentes sons, dependendo da posição onde são pressionadas pelo dedo. O mesmo ocorre com qualquer tipo de corda. Da mesma forma, as diferentes vibrações energéticas poderiam produzir diferentes partículas.

Quando foram propostas a teoria da Relatividade Geral e a Mecânica Quântica, ficou claro que as duas teorias não eram compatíveis entre si, já que a gravitação descrita pela teoria da Relatividade Geral é determinística e contínua, propriedades não aceitáveis pela Mecânica Quântica. O interesse na teoria das cordas é dirigido pela grande esperança de que ela unifique estas teorias. É também a tentativa de explicar peculiaridades do comportamento dos hádrons uma vez que foi observado em aceleradores de partículas que o momentum angular dele é exatamente proporcional ao quadrado da sua energia <sup>4</sup>. Não se sabe ainda se a teoria das cordas é capaz de descrever o universo como uma precisa coleção de forças e matéria que nós observamos, nem quanta liberdade para escolha destes detalhes a teoria irá nos permitir. Embora não esteja totalmente consolidada, a teoria mostra sinais promissores de sua plausibilidade.

O movimento da corda cria uma superfície bidimensional chamada de folha mundo, em analogia com a linha de mundo de uma partícula relativística. Essa superfície possui uma métrica  $h_{ij}$  induzida pela métrica do espaço-tempo  $\eta_{\mu\nu}$ :

$$h_{ij} = \eta_{\mu\nu} \partial_i X^\mu \partial_j X^\nu, \quad (1)$$

onde  $i, j = 1, 2$ . A primeira versão da teoria apresentada foi a teoria bosônica das cordas. Ela é formulada em termos da ação de Nambu-Goto,

$$\begin{aligned} S &= -T \int dA = -T \int d\tau d\sigma \sqrt{-\det h} \\ &= -T \int d\tau d\sigma \sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2} = -T \int d^2\xi \mathcal{L}(\dot{X}, X'; \sigma, \tau) \end{aligned} \quad (2)$$

onde representaremos por um ponto quando derivarmos com relação a  $\tau$  e por uma linha

---

<sup>4</sup>Já existe uma teoria que explica a física dos hádrons com muita eficiência, a Cromodinâmica Quântica. Contudo espera-se da teoria de cordas ou algumas de suas descendentes uma compreensão mais fundamental dos quarks em si



quando derivarmos com respeito a  $\sigma$ .

$$h_{ab} = \partial_a X_\mu \partial_b X^\mu. \quad (3)$$

Quantizando a ação (2), podemos deduzir que cada corda pode vibrar em muitos diferentes modos, e que cada estado vibracional representa uma partícula diferente, onde sua massa e suas maneiras de interação são determinadas pela forma de vibração da corda <sup>5</sup> Entretanto, a teoria bosônica tem problemas. O mais importante deles reside no fato do espectro de partículas conter apenas bósons. Ainda que os bósons sejam um ingrediente fundamental do universo, eles não são os únicos constituintes. Investigações de como uma teoria poderia incluir férmions em seu espectro levaram à supersimetria. E as teorias que incluem vibrações tanto de bósons quanto de férmions são agora conhecidas como teorias de supercordas.

Um aspecto intrigante da teoria das cordas é que ela prediz o número de dimensões que o universo deve possuir. Nada na teoria de Maxwell do eletromagnetismo ou na teoria da relatividade de Einstein fazem qualquer tipo de predição a este respeito. Ao invés disto, a teoria das cordas permite-nos calcular o número de dimensões espaço-temporais a partir de seus princípios fundamentais. Tecnicamente, isto acontece porque a invariância de Lorentz só pode ser satisfeita em um certo número de dimensões. Isto é a grosso modo como dizer que se nós medíssemos a distância entre dois pontos, então girássemos nosso observador para um novo ângulo, e medíssemos novamente a distância observada somente permaneceria a mesma se o universo tivesse um número particular de dimensões. O único problema é que quando este cálculo é feito, o número de dimensões do universo não é quatro como esperado (três eixos espaciais e um no tempo), mas vinte e seis. Mais precisamente, a teoria bosônica das cordas tem 26 dimensões, enquanto a teoria das

---

<sup>5</sup>Os modelos iniciais incluem cordas abertas, que têm duas pontas distintas, e cordas fechadas, onde as pontas são juntas de forma a fazer uma volta completa. Esses dois tipos de corda diferem ligeiramente no comportamento, apresentando dois espectros.

supercordas e a Teoria-M envolvem em torno de 10 ou 11 dimensões. Os físicos usualmente resolvem este problema usando a compactificação das dimensões extras, i.e., as 6 ou 7 dimensões extras são tão pequenas que não são detectadas em nossos experimentos. Essencialmente estas dimensões extras estão "compactadas" pelo seu enrolamento sobre elas mesmas.

Uma analogia padrão para isto é considerar um espaço multidimensional como uma mangueira de jardim. Se nós estamos vendo a mangueira de uma distância considerável, ela aparenta ter somente uma dimensão, o comprimento. Isso é semelhante às 4 dimensões macroscópicas com as quais estamos acostumados a lidar em nosso dia a dia. Se, no entanto, nos aproximarmos o suficiente da mangueira, descobrimos que ela contém uma segunda dimensão, sua circunferência <sup>6</sup>. Esta "dimensão extra" é somente visível dentro de uma área relativamente próxima da mangueira, justo como as dimensões extras do espaço Calabi-Yau são visíveis a distâncias extremamente pequenas e, portanto não são facilmente detectáveis. Outra possibilidade é que nós estejamos presos em subespaço com (3+1)-dimensões de um universo com mais dimensões, onde o "3+1" faz-nos lembrar que o tempo é um tipo diferente de dimensão espacial. Como isso envolve objetos chamados D-branas, esta teoria é conhecida como **braneworld**.

Em ambos os casos, a gravidade atuando nas dimensões ocultas produz as outras forças não gravitacionais tais como o eletromagnetismo. Em princípio, portanto, é possível deduzir a natureza destas dimensões extras pela necessidade de consistência com o modelo padrão, mas esta não é ainda uma possibilidade prática. Uma outra teoria de imersão surgiu com as pesquisas dos físicos Lisa Randall, da Universidade de Princeton, e Raman Sundrum, da Universidade de Boston. Conhecida simplesmente como o modelo de Randall-Sundrum [3], essa teoria também considera que vivemos sobre uma hipersuperfície de um espaço-tempo maior, de cinco dimensões. O interessante é notar

---

<sup>6</sup>Tal dimensão é conhecida na geometria como compacta e do tipo  $S^1$  (esfera unidimensional)

que tanto Wesson como Randall-Sundrum se utilizam de todo o formalismo matemático desenvolvido por Einstein, em sua teoria da relatividade geral, mudando apenas a dimensionalidade, que passa a ser cinco.

A relatividade geral de Einstein diz que a gravidade é produto da deformação do espaço e do tempo provocada pela matéria e energia no universo. Como a gravidade é uma manifestação do próprio espaço-tempo ela não estaria confinada e "vazaria" para fora da 3-brana - uma explicação de porque a gravidade é tão mais fraca que as outras forças. O ponto chave é que mesmo com a gravidade vazando, não perceberíamos a existência da dimensão extra porque a mesma gravidade poderia curvar o espaço tão intensamente de forma a esconder a outra dimensão de nossa vista que, na prática, mesmo a gravidade se comportaria como se o mundo fosse tridimensional. Contudo, já se disse certa vez na física que primeiro se inventa e depois se descobre. As dimensões escondidas já foram inventadas. Falta só serem descobertas.

Até agora fizemos uma breve viagem sobre o **mundo** e como a **TQC** pode abordá-lo. Passamos agora a descrever os mecanismos e modelos tratados nessa Tese.

É interessante relacionar mecanismos de localização em membranas para vários campos com os mais variados spins. Isso ganha grande importância já que assim podemos obter todas as características de modelos em baixa dimensionalidade, uma vez que poderemos ver o universo como uma membrana imersa em um espaço-tempo maior que quatro dimensões (modelos com dimensão extra).

Podemos pensar em duas maneiras distintas de descrever um modelo com dimensão elevada:

- Dimensões extras muito pequenas e compactas onde efeitos de baixas energias não podem ser observados;
- Dimensões com tamanho infinito que não podem ser observadas porque não temos energia suficiente para caminhar ao longo das mesmas.

Esses dois cenários podem ser comparados quando tratamos de localização de campos. Se pensarmos em localizar campos vetoriais de gauge do Modelo Padrão (MP) em um cenário onde a dimensão extra é compacta teremos o impedimento fenomenológico imposto pelo MP [4]. Já se considerarmos uma dimensão extra infinita podemos localizar os mesmos campos de gauge quando o acoplamos a um dilaton [5].

Em um interessante trabalho de Dvali e colaboradores [6], é apresentado um mecanismo de quasi-localização de campos de gauge em uma brana. Nesse trabalho um termo cinético de um campo de gauge na brana é gerado devido a correções radiativas da matéria carregada. São então calculados os propagadores para o campo vetorial de gauge, mostrando que eles estão localizados na brana.

O primeiro capítulo desta Tese trata do mecanismo de quasi-localização de campos anti-simétricos de Kalb-Ramond em branas. Este campo aparece em teorias efetivas de modelos de supercordas em baixas energias e pode descrever tanto física de áxions<sup>7</sup> quanto torção em uma variedade Riemanniana. O objetivo desse capítulo, que é uma contribuição nossa, é verificar se a relação que ocorre entre os propagadores em 5 e 4-dimensões se preserva quando em vez de trabalharmos com campos de gauge vetoriais usamos campos tensoriais anti-simétricos.

Todos os capítulos a partir do segundo tratarão de teorias supersimétricas. A importância da supersimetria está além da perspectiva da descrição de matéria e interação numa mesma representação. Ela possui aspectos teóricos muito interessantes e imprescindíveis para a validação das novas propostas de Física atual.

A SUSY foi criada em 1971 pelos físicos russos Y. A. Golfand e E. P. Likhtmann [7] em  $1 + 1$  dimensões. Mas só se tornou conhecida quando J. Wess e E. B. Zumino [8] apresentaram um modelo quadridimensional de uma teoria de campos onde o grupo de Poincaré era combinado com as simetrias internas, de um modo não-trivial.

---

<sup>7</sup>O áxion é um bóson neutro de spin nulo.

Se a supersimetria fosse uma simetria exata na natureza, então, deveríamos observar os parceiros supersimétricos das partículas elementares conhecidas, por exemplo, poderíamos observar o s-elétron, o parceiro supersimétrico do elétron. Como não conseguimos fazer esse tipo de observação somos levados a pensar que essa simetria entre bósons e férmions seja quebrada espontaneamente [9].

No segundo capítulo fazemos uma revisão de supersimetria  $N = 1 - D = 4$  tanto no que tangem campos componentes como no superespaço. Essa breve introdução não será completa mas será elucidativa, fazendo a exposição de elementos fundamentais que servirão de base para os outros capítulos inéditos propostos neste trabalho.

Com o advento das D-Branes [10], a teoria de cordas começou a fornecer novos mecanismos para que a supersimetria fosse quebrada. A nova proposta era que a supersimetria passava a ser quebrada explicitamente uma vez que nem todos os campos no volume de mundo possuem superparceiros. A esse cenário foi dado o nome de pseudo-supersimetria.

Uma outra maneira de definir a pseudo-supersimetria é considerar modelos que contêm  $D$ -branes e anti- $D$ -branes ou mesmo intersecção de  $D$ -branes [11]. Nesses modelos diferentes setores da teoria se quebram em duas supersimetrias diferentes, podemos comparar isso com uma quebra completa de uma supersimetria não-local.

De forma simples podemos dizer que o formalismo de pseudo-supersimetria rearranja as componentes dos campos de modo que podemos tratar uma supersimetria  $N = 1 - D = 5$  como se estivéssemos trabalhando com uma SUSY  $N = 2 - D = 4$ . Podemos citar como propriedades marcantes da pseudosupersimetria:

- Utiliza as mesmas derivadas covariantes de supersimetria de  $N = 1 - D = 4$ .
- Se pensarmos em representar um campo é possível que precisemos de mais de um supercampo para representar todas as suas componentes. Por exemplo, um campo vetorial  $A_M = (A_m, A_5)$  em  $D = 5$ , precisa de dois supercampos para que todos os seus componentes sejam descritos,

$$\mathcal{U} = 2(\theta\sigma^m\bar{\theta})A_m + 4i\theta^2\bar{\theta}\bar{\zeta} - 4i\bar{\theta}^2\theta\zeta + 4\theta^2\bar{\theta}^2 K. \quad (4)$$

$$\mathcal{G} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi + iA_5) + \sqrt{2}\theta\eta + \theta^2(J + iS), \quad (5)$$

e esse fato deixa nossas expansões em componentes muito mais complexas.

Nosso interesse sobre esse assunto aparece por dois motivos:

- Usamos Pseudosupersimetria para fazer observações sobre o campo de Kalb-Ramond em teorias supersimétricas;
- Nossa proposta de superespaço intrínseco  $N = 1 - D = 5$  faz inúmeras comparações com esse formalismo de supersimetrizar teorias 5-dimensionais.

Tahim e Almeida [12] exploraram uma alternativa ao ponto central do modelo de Randall-Sundrum, ou seja, a métrica particularmente não-fatorizável. Usando uma teoria parcialmente topológica mostraram que o fator exponencial, crucial no modelo de Randall-Sundrum, aparece somente devido à existência da membrana, independente de se trabalhar com uma métrica em especial onde a membrana foi simulada por um hiperplano de domínio 3-dimensional embutido em espaço-tempo 5-dimensional.

Podemos então afirmar que o modelo estudado por eles possui característica basicamente topológica uma vez que:

- A membrana existe devido à topologia do espaço de parâmetros deste modelo;
- Gravidade é independente de métrica.

Por outro lado, extensões supersimétricas para os modelos propostos atualmente são peças chave para a descrição da Nova física, principalmente se puderem ter alguma ligação com a implementação de uma teoria de Gravidade com mais chances de consistência

do que a gravitação quântica tradicional. No capítulo três fazemos a extensão pseudosuper-simétrica de um termo topológico, tipo Chern-Simons, para o campo de Kalb-Ramond  $B_{MN} = (B_{mn}, B_{m5})$ . Na literatura encontramos apenas as componentes bosônicas dos supercampos, se fez então necessário encontrar a expansão completa dos supercampos a fim de conheçamos suas componentes fermiônicas. Para isso tivemos que saber o número verdadeiro de graus de liberdade de um tensor anti-simétrico de rank-2 em  $D = 5$  (vide apêndice C).

Já o termo superespaço intrínseco foi tido por nós como uma das principais contribuições dessa tese. Ele é composto por coordenadas de espaço-tempo e pelas coordenadas grassmanianas  $\Theta$  sendo escolhidas para ser espinores de Dirac,  $S = S(x^M, \Theta)$ , com  $M = 0, 1, 2, 3, 5$ . Por sua vez, os espinores em quatro e cinco dimensões são do mesmo tipo podemos reescrever um espinor de Dirac em  $D = 5$  como a combinação de dois espinores de Majorana  $\theta$  e  $\tilde{\theta}$  dada por  $\Theta = \theta + i\tilde{\theta}$ . Desse modo, o superespaço intrínseco pode também ser descrito usando como coordenadas  $S = S(x^\mu, x^5, \theta, \bar{\theta}, \tilde{\theta}, \bar{\tilde{\theta}})$ , onde  $\mu = 0, 1, 2, 3$ .

O principal destaque dessa formulação, que será apresentada no capítulo quatro, é que não existe na literatura uma descrição de superespaço para supersimetria  $N = 1 - D = 5$  que leve em consideração a propagação dos campos na dimensão extra explicitamente na derivada covariante de SUSY. Tal propagação pode até ser desprezada com o uso de vínculos, mas preferimos pensar que essa restrição deva aparecer não diretamente do formalismo e sim como uma condição inerente ao modelo em estudo.

O capítulo cinco fará uma pequena discussão sobre efeitos de fase quântica. Primeiramente abordamos o efeito Aharonovo-Bohm que é um estudo das soluções quânticas para um elétron que se move em uma região livre de forças porém, acoplado a um potencial vetor. O que Aharonov e Bohm observaram é que, quanticamente, estes objetos teriam conseqüências físicas mensuráveis e isso foi inicialmente proposto através de um experi-

mento de um elétron que é difratado por uma dupla fenda. A idéia de teste do trabalho [13] consistia em colocar na região entre a fenda e o anteparo um campo magnético constante, que não afetasse diretamente o elétron, para aí observar a figura de difração. Com esse experimento, se conseguiu mostrar que usando uma descrição quântica obteríamos um deslocamento das franjas de interferência em relação ao mesmo problema em que não temos a presença do campo magnético <sup>8</sup>.

Este deslocamento nas franjas se deve ao fato de que, na descrição quântica, o elétron sofre a influência do acoplamento com o potencial vetor, o chamado acoplamento mínimo, e é este acoplamento o responsável em gerar essa diferença entre os experimentos.

O segundo efeito abordado é o Aharonov-Casher. Para esse efeito tomou-se um processo análogo ao do AB, mas agora envolvendo o movimento de uma carga neutra possuidora de momento de dipolo magnético. Trata-se do mesmo experimento de fenda dupla, onde, agora, se substitui o campo elétrico por uma linha infinita de cargas. A maneira usada para obter o termo de fase é através da equação de Dirac, tomando seu limite não-relativístico.

Assim, nenhum novo resultado será apresentado nesse capítulo, mas ele é de fundamental importância para que se crie um contexto para que o capítulo seguinte se desenvolva.

O capítulo sexto vem trazendo mais uma importante contribuição inédita dessa Tese. Ferrara e Remiddi [15] mostraram que num modelo abeliando com supersimetria inteira não pode ter momento de dipolo magnético. Desse modo, não seria possível conceber que os férmions de teorias com essas características pudessem gozar de deslocamentos em sua figura de difração, tendo como motivo o efeito Aharonov-Casher.

Nossa proposta é mostrar que é possível encontrarmos efeito de fase quântica em modelos de gauge abeliano com supersimetria inteira, mas que por sua vez possuem simetria

---

<sup>8</sup>Esta especulação foi posteriormente comprovada em experimentos [14]



de Lorentz quebrada. Conseguimos chegar a esse resultado fazendo uma identificação de supercampos. Essa identificação é feita entre o supercampo  $\mathcal{G}$  que contém o campo de KR e a parte simétrica do supercampo quirial  $\mathcal{S}$ :

$$\mathcal{S} + \bar{\mathcal{S}} \rightarrow \mathcal{G}$$

e é baseada nos graus de liberdade dos supercampos.

Ainda fazem parte da tese quatro apêndices:

- Apêndice A: **Espinores em  $D = 4$  e  $D = 5$**  - Aqui será abordado de maneira mais explícita as definições, convenções e relações úteis para tratar os espinores que estão presentes a todo momento na tese.
- Apêndice B: **Formas Diferenciais no Superespaço** - Expõe uma outra maneira de trabalhar com supercampos, usando formas diferenciais. Normalmente usar esse tipo de artifício facilita os cálculos uma vez que praticamente todos os índices ficam embutidos.
- Apêndice C: **Graus de liberdade físicos de uma campo de KR de gauge em  $5D$  (Material Inédito)**- Mostra a contagem real dos graus de liberdade do campo anti-simétrico de Kalb-Ramond num espaço 5-dimensional.
- Apêndice D: **Álgebra de deSitter na representação vetorial e espinorial  $S_0(1,4)$**  - Construir essa álgebra facilitou sabermos como eram os termos que teríamos que supersimetrizar em nossa proposta de supersimetria intrínseca.

Gostaríamos de alertar para uma questão de estilo; as conclusões mais técnicas são realizadas ao final de cada capítulo, com a finalidade de tornar a leitura mais fluente e focada, deixando o capítulo final de conclusões para uma discussão geral do que foi feito e as perspectivas relacionadas aos temas abordados.

# Capítulo 1

## Propagadores de Campos de Gauge Anti-simétricos em uma Brana

A localização de campos de gauge em uma brana atraiu muita atenção nos últimos anos. Em um interessante trabalho de Dvali e colaboradores, é apresentado um mecanismo de quasi-localização de campos de gauge em uma brana. Nesse trabalho um termo cinético de um campo de gauge na brana é gerado devido a correções radiativas da matéria carregada. São então calculados os propagadores para o campo vetorial de gauge, mostrando que eles estão localizados na brana. O objetivo desse capítulo é verificar se a relação que ocorre entre os propagadores em 5 e 4-dimensões se preserva quando em vez de trabalharmos com campos de gauge vetoriais usamos campos tensoriais anti-simétricos.

### 1.1 Motivações

Os campos tensoriais anti-simétricos têm sido objeto de estudos ao longo dos anos. O seu surgimento pode ser visto como uma conseqüente generalização dos campos vetoriais de gauge. Os campos anti-simétricos de gauge aparecem em teorias de supergravidade em várias dimensões e na teoria de campos efetiva de baixas energias, derivadas das

cordas relativísticas. Uma importante propriedade desses campos é a possibilidade de geração de massa topológica em quatro dimensões para campos de gauge vetoriais [16], descrito numa simetria de gauge abeliana. Tal mecanismo pode ser comparado ao termo de Chern-Simons em três dimensões [17].

O procedimento de localização de campos é muito importante em brane-world. Sua importância reside no fato de fornecer muitas informações físicas sobre o universo da brana (escalas de interação de energia, quiralidades dos campos, simetrias, etc.).

Nos últimos anos, pensar sobre física em um universo com  $D > 4$  dimensões do espaço-tempo tornou-se um assunto importante. Tal importância apareceu não somente porque é uma maneira nova de tratar os inconvenientes do modelo padrão mas certamente, pela simplicidade e capacidade de "condensação" das teorias de campo que contêm dimensões extras. Um exemplo famoso é a teoria de cordas [18]. Em particular, a busca nesta direção surgiu basicamente com os trabalhos de Arkani-Hamed e colaboradores [19, 20], onde o universo de  $D = 4$  é confinado a uma 3-brana embebida em um espaço-tempo de dimensão maior. Neste tipo de cenário, alguns problemas que contaminam o modelo padrão (tais como o problema da hierarquia, massa de neutrinos, etc..) têm uma solução natural. Outras implicações para o modelo padrão, então, têm sido estudadas (teorias supersimétricas, de gauge, quebra de simetria, axions, etc.).

## 1.2 Campo de Vetorial de Gauge Induzido em uma Brana

Em um recente trabalho, Dvali e seus colaboradores sugeriram um mecanismo pelo qual a gravidade Newtoniana  $4D$  emerge de uma 3-brana em um espaço de Minkowski  $5D$  com uma dimensão extra infinita [21]. Eles verificaram que o termo escalar de curvatura 4-dimensional na brana pode ser responsável por correções nas interações Newtonianas

com a brana, devido ao fato da gravidade se propagar no espaço de Minkowski  $5D$ .

Posteriormente também foi apresentado um mecanismo de quasi-localização de campos vetoriais de gauge em uma brana através do aparecimento de campos induzidos [6], de forma a generalizar o mecanismo de localização de campos espinoriais não-massivos em uma brana induzida devido um termo de Ricci.

A fim de se conseguir localizar campos se considera que esses devem estar acoplados minimamente com algum ou alguns graus de liberdade no *bulk*. Um termo cinético 4-dimensional para o campo é então gerado na brana devido a correções radiativas associadas com campos localizados. Para o caso de campos vetoriais é suficiente que esses campos sejam carregados e localizados na brana.

Suponhamos que temos uma teoria composta somente de campos vetoriais abelianos de gauge<sup>1</sup>  $A_C$ , onde  $C = 0, 1, 2, 3, 5$ , e descrevendo a seguinte densidade de lagrangiana no *bulk*

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4g^2}\mathcal{F}_{AB}^2 + \dots \quad (1.1)$$

onde  $g$  é uma constante de acoplamento com dimensão  $[massa]^{-1}$ . Uma 3-brana onde estará localizada a matéria poderá ser colocada no ponto  $y = 0$ , onde  $y$  é a dimensão extra.

A corrente de localização dos campos na brana pode ser escrita como:

$$J_A(x, y) = J_\mu \delta(y) \delta_A^\mu, \quad (1.2)$$

onde  $\mu = 0, 1, 2, 3$ . A conservação dessa corrente associada à invariância de gauge em cinco dimensões, implica em uma conservação da corrente quadridimensional na brana, uma vez que a quinta componente da corrente desaparece. Podemos identificar essa cor-

---

<sup>1</sup>As considerações aqui feitas também podem ser expandidas para o caso não-abeliano.

rente acoplada ao campo de gauge no bulk através da seguinte lagrangiana de interação:

$$L_{int} = \int d^4x dy J_C(x, y) A^C(x, y) = \int d^4x J_\mu(x) A^\mu(x, 0). \quad (1.3)$$

Devido a interação (1.3) um termo cinético induzido para o campo  $A_\mu$  aparece na brana. Esse termo é gerado por um diagrama de 1-loop com duas pernas externas de  $A_\mu$ . Uma vez que a corrente 4-dimensional se conserva, isso implica na transversalidade desse loop e esse termo pode então ser adicionado à ação na brana

$$-\frac{1}{4e^2} F_{\mu\nu}^2 + \text{termos de derivadas maiores} \quad (1.4)$$

onde

$$e^{-2} = \frac{2N_f}{3\pi} \ln \frac{\Lambda}{\mu}, \quad (1.5)$$

$\Lambda$  e  $\mu$  são os *cut-offs* ultra-violeta e infra-vermelho, respectivamente.

A Lagrangeana total para o campo de gauge fica então com a seguinte forma

$$-\frac{1}{4g^2} F_{AB}^2 - \frac{1}{4e^2} F_{\mu\nu}^2 \delta(y) + \text{outras interações}. \quad (1.6)$$

O primeiro passo é então calcular o potencial de Coulomb induzido por uma carga de prova sobre uma brana. Para isso, adicionaremos um termo fonte  $A^B J_B$  à Lagrangeana (1.6). A equação de movimento na teoria com uma fonte é

$$\frac{1}{g^2} \partial_C \partial^C A_B + \delta(y) (\partial_\mu \partial^\mu) A_\nu + \partial_\nu (\partial_y A_y) \delta_{\nu B} = J_B(x, y), \quad (1.7)$$

onde o gauge de Lorentz é garantido no *bulk*

$$\partial^C A_C = 0. \quad (1.8)$$

A eq. (1.7) pode então ser reescrita, usando o gauge de Lorentz, como

$$\begin{aligned} \partial_C \partial^C A_\mu + \frac{g^2}{e^2} \delta(y) [\partial_\beta \partial^\beta A_\mu + \partial_\mu (\partial_y A_y)] &= g^2 J_\mu(x) \delta(y), \\ \partial_C \partial^C A_y &= 0. \end{aligned} \quad (1.9)$$

A fim de encontrar os propagadores para o campo de gauge  $A_\mu(x)$  se faz conveniente usar as transformações de Fourier das eqs.(1.9) com respeito as coordenadas do quadrivolume. O momentum correspondente será denotado por  $p$  e podemos escrevê-lo no espaço euclidiano como

$$p^2 = p_4^2 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2. \quad (1.10)$$

Assim, podemos reescrever as equações de movimento como

$$(p^2 - \partial_\mu^2) \tilde{A}_\mu(p, y) + \frac{g^2}{e^2} \delta(y) (p^2 \tilde{A}_y(p, y) + i p_\mu \partial_y \tilde{A}_y(p, y)) = g^2 \tilde{J}_\mu(p) \delta(y), \quad (1.11)$$

$$(p^2 - \partial_y^2) \tilde{A}(p, y) = 0. \quad (1.12)$$

A eq.(1.11) pode ser facilmente resolvida. Multiplicado ambos os lados por  $\tilde{J}_\mu(p)$  e usando a propriedade da transversalidade 4-dimensional,  $p^\mu \tilde{J}_\mu(p)$ , obtemos

$$\tilde{A}_\mu(p, y) \tilde{J}^\mu(p) = e^2 [\tilde{J}_\mu(p)]^2 \frac{1}{p^2 + (2pe^2/g^2)} \exp(-p | y |) \quad (1.13)$$

onde  $p \equiv \sqrt{2}$ .

Além disso, a eq(1.7) combinada com a condição de transversalidade da corrente implica que  $\partial^\mu A_\mu = 0$ , vemos então da condição do gauge de Lorentz

$$\partial_y A_y(x, y) = 0. \quad (1.14)$$

Combinando com (1.12) podemos escrever a equação para a componente da dimensão extra do campo de gauge no *bulk*:

$$\partial_\mu^2 A_y(x, y) = 0. \quad (1.15)$$

Essa última equação descreve um campo escalar não-massivo que foi desacoplado de um campo de matéria localizado na brana que aparece devido a corrente estar localizada na brana e ser feita escolha do gauge de Lorentz para o campo no *bulk*.

Particularmente para o caso onde temos uma teoria 5-dimensional com uma brana tipo função  $\delta(y)$  encontramos que o propagador para o campo de gauge na brana em  $y = 0$ , onde  $y$  é a dimensão extra, tem a forma

$$D_{\mu\nu}(p) = \frac{\eta_{\mu\nu}}{p^2 + 2pe^2/g^2} [1 + \mathcal{O}(p)]. \quad (1.16)$$

### 1.3 Campos Anti-simétricos de Gauge Induzidos em uma Brana.

Em nossa abordagem, a brana é identificada como uma função tipo  $\delta(y)$  embebida em um espaço 5-dimensional (por simplicidade consideraremos em nossa abordagem apenas os efeitos não-gravitacionais deste modelo).

Suponha que apenas campos tensoriais anti-simétricos de gauge  $B_{AB}$ , onde  $A, B = 0, 1, 2, 3, 5$ , vivam no *bulk*. A forma da Lagrangiana então será

$$-\frac{1}{6g^2}\mathcal{H}_{ABC}^2 + \text{outras interações}, \quad (1.17)$$

$g$  é uma constante de acoplamento com dimensionalidade  $[massa]^{-1}$  e  $\mathcal{H}_{ABC} = \partial_A \mathcal{B}_{BC} + \partial_C \mathcal{B}_{AB} + \partial_B \mathcal{B}_{CA}$  ( $A, B, C = 0, \dots, 3, 5$ ) é o tensor intensidade de campo para o campo antissimétrico de gauge  $\mathcal{B}_{AB}$ . O campo  $\mathcal{B}_{AB}$  tem importante papel em teorias de cordas: é ele que acopla-se corretamente com a *world-sheet* de uma corda, de maneira bastante semelhante ao acoplamento do campo de gauge  $A_A$  com a linha de universo de uma partícula.

A corrente dos campos localizados em uma brana pode ser escrita como:

$$J_{AB}(x^\mu, y) = J_{\mu\nu}(x^\mu)\delta(y)\delta_A^\mu\delta_B^\nu. \quad (1.18)$$

A conservação de corrente 5-dimensional associada com a invariância de gauge 5-dimensional, implica na conservação de corrente 4-dimensional na brana, desde que a quinta componente da corrente desapareça. Essa corrente então é acoplada ao campo de gauge no *bulk*. A Lagrangiana de interação é

$$L_{int} = \int d^4x dy J_{AB}(x^\mu, y)\mathcal{B}^{AB}(x^\mu, y) = \int d^4x J_{\mu\nu}(x^\mu)\mathcal{B}^{\mu\nu}(x, 0).$$

Devido à interação (1.18), um termo cinético induzido para o campo tensorial antissimétrico  $B_{\mu\nu}(x)$  emerge da brana. Esse termo terá a forma

$$-\frac{1}{6e^2}\mathcal{H}_{\mu\nu\lambda}^2 + \text{outras interações}. \quad (1.19)$$

onde  $e^2$  depende dos *cut-offs* infravermelho e ultravioleta da teoria renormalizada. A



lagrangiana total (5D) para os campos anti-simétricos de gauge tem então a seguinte forma:

$$-\frac{1}{6g^2}\mathcal{H}_{ABC}^2 - \frac{1}{6e^2}\mathcal{H}_{\mu\nu\lambda}^2 + \text{outras interações} \quad (1.20)$$

## 1.4 Propagadores para Campos Anti-simétricos.

A fim de calcular os propagadores propostos, adicionaremos a lagrangeana (1.20) um termo fonte  $J^{AB}(x^\mu, y)\mathcal{B}_{AB}(x^\mu, y)$ .

$$-\frac{1}{6g^2}\mathcal{H}_{ABC}^2 - \frac{1}{6e^2}\mathcal{H}_{\mu\nu\lambda}^2 + J^{AB}(x^\mu, y)\mathcal{B}_{AB}(x^\mu, y) + \text{outras interações} \quad (1.21)$$

A equação de movimento para a teoria com a fonte é

$$\frac{1}{g^2}\partial_C\partial^C\mathcal{B}^{AB} + \frac{1}{e^2}\delta(y)\{\partial_\gamma\partial^\gamma\mathcal{B}^{\mu\nu} + \partial^\mu\partial_y\mathcal{B}^{y\nu} - \partial^\nu\partial_y\mathcal{B}^{y\mu}\}\delta_\mu^A\delta_\nu^B = J^{AB}(x^\mu, y), \quad (1.22)$$

onde usamos o gauge de Lorentz para o campo anti-simétrico no *bulk*

$$\partial_A\mathcal{B}^{AB} = 0. \quad (1.23)$$

**Notamos então que quando fazemos o uso do gauge de Lorentz no *bulk* conseguimos ver contribuição da dimensão extra no interior da brana.**

Agora, assumindo que a fonte esteja localizada na direção  $y$ , temos

$$\partial_C\partial^C\mathcal{B}^{\mu\nu} + \frac{g^2}{e^2}\delta(y)\{\partial_\gamma\partial^\gamma\mathcal{B}^{\mu\nu} + \partial^\mu\partial_y\mathcal{B}^{y\nu} - \partial^\nu\partial_y\mathcal{B}^{y\mu}\} = g^2 J^{\mu\nu}(x)\delta(y) \quad (1.24)$$

$$\partial_C \partial^C \mathcal{B}^{y\nu} = 0. \quad (1.25)$$

Nesse momento, se faz conveniente calcular a transformada de Fourier dessas equações. O momentum correspondente será denotado por  $p$  e como estamos trabalhando no espaço euclidiano,  $p$  é denotado por:

$$p^2 = p_4^2 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2. \quad (1.26)$$

As eq. (1.24 e 1.25) podem usadas respectivamente escritas como:

$$(p^2 - \partial_y^2) \tilde{B}_{\mu\nu}(p, y) + \frac{g^2}{e^2} \delta(y) \left\{ (p^2 \tilde{B}_{\mu\nu}(p, y) + ip^\mu \partial_y \tilde{B}_{5\nu}(p, y) - ip^\nu \partial_y \tilde{B}_{5\mu}(p, y)) \right\} = g^2 \tilde{J}_{\mu\nu}(p) \delta(y) \quad (1.27)$$

$$(p^2 - \partial_y^2) \tilde{B}_{5\nu}(p, y) = 0 \quad (1.28)$$

A eq.(1.27) pode ser facilmente resolvida. Multiplicando ambos os membros por  $\tilde{J}^{\mu\nu}(p)$  e usando propriedade da transversalidade (i.e.  $p_\mu \tilde{J}^{\mu\nu}(p) = 0$ ) obtemos

$$\tilde{B}_\mu(p, y) \tilde{J}_{\mu\nu}(p) = e^2 [\tilde{J}^{\mu\nu}(p)]^2 \frac{1}{p^2 + 2pe^2/g^2} \exp(-p | y |) \quad (1.29)$$

$$p \equiv \sqrt{p^2}. \quad (1.30)$$

O propagador para a teoria 5-dimensional que contém o campo  $\mathcal{B}_{AB}$  de gauge na brana em  $y = 0$ , tem a forma

$$\frac{\eta_{\mu\nu} \eta_{\alpha\beta}}{p^2 + 2pe^2/g^2} [1 + \mathcal{O}(p)], \quad (1.31)$$

que é **similar** ao propagador encontrado para a teoria que continha campos vetoriais.

Partindo agora de (1.28) e usando a condição de Lorentz para o campo tensorial anti-simétrico e o fato da fonte estar localizada sobre a brana obtemos:

$$\partial_\mu^2 B^{\mu\nu} = 0. \tag{1.32}$$

Esta última equação descreve um campo vetorial 4-dimensional massivo que é desacoplado da brana, diferentemente do caso estudado por Dvali, onde o campo que emerge da brana é um campo escalar.

## 1.5 Conclusões

- Verificamos que o propagador encontrado para a teoria que contém campos tensoriais anti-simétricos é similar ao propagador calculado por Dvali [6].
- Observamos que um campo vetorial 4-dimensional emerge da brana.

# Capítulo 2

## Supersimetria

A Supersimetria, única extensão consistente das simetrias de Poincaré, tornou-se nos últimos anos uma ferramenta fundamental para o desenvolvimento da física além do Modelo Padrão. Logo após a sua descoberta no início década de 1970, foram formuladas versões supersimétricas para as teorias já existentes, e esses sistemas supersimétricos apresentavam menos divergências quânticas as teorias ordinárias. O objetivo deste capítulo é introduzir essa nova simetria, chamada supersimetria, ou, abreviadamente, SUSY, que foi a primeira das simetrias a relacionar entes completamente diferentes, férmions e bósons.

### 2.1 Supersimetria $N = 1 - D = 4$

A importância da supersimetria está além da perspectiva da descrição de matéria e interação numa mesma representação. Ela possui aspectos teóricos muito interessantes e imprescindíveis para a validação das novas propostas de Física atual. Por exemplo, uma das características de uma teoria supersimétrica é que existe a mesma quantidade de estados bosônicos e fermiônicos, o que nos fornece um mecanismo que consegue retirar divergências para as teorias ordinárias. Além disso, numa teoria supersimétrica, todos os estados possuem energia não-negativa o que nos possibilita ter teorias sem estados

taquiônicos, o que é fundamental na inclusão de férmions em teorias de cordas.

### 2.1.1 Transformações de Supersimetria

Uma teoria tem determinada simetria se a ação que a descreve é invariante pela transformação associada a esta simetria. Primeiramente consideremos a ação de Dirac para um espinor de Weyl (ver apêndice A) de massa  $M$  :

$$S_d = -i \int d^4x \left[ \bar{\psi}_{\dot{\alpha}} \bar{\sigma}^{n\dot{\alpha}\alpha} \partial_n \psi_{\alpha} - \frac{iM}{2} (\psi_{\alpha} \psi^{\alpha} + \bar{\psi}_{\dot{\alpha}} \bar{\psi}^{\dot{\alpha}}) \right]. \quad (2.1)$$

As equações de movimento para os campos são dadas por:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}^{n\dot{\alpha}\alpha} \partial_n \psi_{\alpha} &= iM \bar{\psi}^{\dot{\alpha}}, \\ \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^n \partial_n \bar{\psi}^{\dot{\alpha}} &= iM \psi_{\alpha}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Como segundo passo consideremos uma ação para um campo escalar complexo cuja massa também é  $M$ :

$$S_e = - \int d^4x [\partial_m \phi \partial^m \bar{\phi} + M^2 \phi \bar{\phi}], \quad (2.3)$$

e suas equações de movimento:

$$\begin{aligned} \partial_m \partial^m \phi &= M^2 \phi, \\ \partial_m \partial^m \bar{\phi} &= M^2 \bar{\phi}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Tomando a ação  $S = S_d + S_e$ , podemos observar que a mesma é invariante sob as seguintes transformações nos campos:

$$\begin{aligned}
\delta\phi &= \sqrt{2}\varepsilon^\alpha\psi_\alpha, \\
\delta\bar{\phi} &= \sqrt{2}\bar{\varepsilon}^{\dot{\alpha}}\bar{\psi}_{\dot{\alpha}}, \\
\delta\psi_\alpha &= i\sqrt{2}\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m\bar{\varepsilon}^{\dot{\alpha}}\partial_m\phi - \sqrt{2}M\bar{\phi}\varepsilon_\alpha, \\
\delta\bar{\psi}_{\dot{\alpha}} &= i\sqrt{2}\bar{\sigma}^{m\dot{\alpha}\alpha}\varepsilon_\alpha\partial_m\bar{\phi} - \sqrt{2}M\phi\bar{\varepsilon}_{\dot{\alpha}}.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

As transformações acima levam campos bosônicos a fermiônicos, e vice-versa, por meio de parâmetros fermiônicos,  $\varepsilon$  e  $\bar{\varepsilon}$ , independentes das coordenadas do espaço-tempo. Tais tipos de transformações são chamadas *transformações de supersimetria*.

Vimos então que a supersimetria é uma simetria entre bósons e férmions e isso nos força a ter o mesmo número de graus de liberdade fermiônicos e bosônicos. Em  $S$  podemos verificar a presença de 4 graus de liberdade fermiônicos e 2 graus de liberdade bosônicos off-shell <sup>1</sup>. Com o objetivo de igualar os graus de liberdade de férmions e bósons e posteriormente construir uma teoria supersimétrica manifesta devemos inserir um campo escalar complexo,  $F$ . Esse campo é dito auxiliar <sup>2</sup> e será usado para reescrever a ação convenientemente. A ação auxiliar seria:

$$S_{aux} = \int d^4x [F\bar{F} + M\phi F + M\bar{\phi}\bar{F}]. \tag{2.6}$$

De modo que agora podemos agora escrever uma nova ação  $S = S_d + S_e + S_{aux}$ :

$$S = \int d^4x \left[ -\partial_m\phi\partial^m\bar{\phi} - i\bar{\psi}_{\dot{\alpha}}\bar{\sigma}^{n\dot{\alpha}\alpha}\partial_n\psi_\alpha + F\bar{F} + M\left(\phi F + \bar{\phi}\bar{F} - \frac{1}{2}\psi_\alpha\psi^\alpha - \frac{1}{2}\bar{\psi}_{\dot{\alpha}}\bar{\psi}^{\dot{\alpha}}\right) + M^2\phi\bar{\phi} \right] \tag{2.7}$$

---

<sup>1</sup>Os graus de liberdade on-shell são 2 graus de liberdade tanto para bósons como para férmions.

<sup>2</sup>Campos auxiliares não são físicos e podem ser reescritos algebricamente em termos dos outros campos da teoria.

que é invariante de supersimetria sob:

$$\begin{aligned}
\delta\phi &= \sqrt{2}\varepsilon^\alpha\psi_\alpha \\
\delta\bar{\phi} &= \sqrt{2}\bar{\varepsilon}^{\dot{\alpha}}\bar{\psi}_{\dot{\alpha}} \\
\delta\psi_\alpha &= i\sqrt{2}\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m\bar{\varepsilon}^{\dot{\alpha}}\partial_m\phi - \sqrt{2}\varepsilon^\alpha F \\
\delta\bar{\psi}_{\dot{\alpha}} &= i\sqrt{2}\bar{\sigma}^{m\dot{\alpha}\alpha}\varepsilon_\alpha\partial_m\bar{\phi} - \sqrt{2}\bar{\varepsilon}_{\dot{\alpha}}\bar{F} \\
\delta F &= i\sqrt{2}\bar{\varepsilon}_{\dot{\alpha}}\bar{\sigma}^{m\dot{\alpha}\alpha}\partial_m\psi_\alpha \\
\delta\bar{F} &= i\sqrt{2}\varepsilon^\alpha\bar{\sigma}_{\alpha\dot{\alpha}}^m\partial_m\bar{\psi}^{\dot{\alpha}}
\end{aligned} \tag{2.8}$$

## 2.2 Superespaço $N = 1 - D = 4$

A fim de escrevermos uma teoria manifestamente supersimétrica, isto é, que a invariância por Supersimetria fosse verificável de forma trivial a partir da Lagrangeana, A. Salam [22] deu como contribuição para as teorias supersimétricas o chamado de formalismo de Superespaço.

Consideremos a invariância relativística. Em geral, não esperamos que uma teoria formulada no espaço euclidiano tridimensional seja invariante por transformações de Lorentz. Para obter uma teoria que seja manifestamente invariante por essas transformações devemos introduzir o tempo como coordenada adicional, formando o espaço de Minkowski. De forma análoga, não é possível criar ações manifestamente supersimétricas no espaço de Minkowski. A proposta de Salam era estender o espaço de Minkowski a fim de que as teorias supersimétricas pudessem ser invariantes manifestamente, formando assim o Superespaço.

O Superespaço é parametrizado pelas quatro coordenadas espaço-temporais de Minkowski ( $x^m$ ), além de quatro variáveis anti-comutantes (variáveis de Grassman), que quando for-

muladas em termos de espinores de Weyl são:  $\theta_\alpha$  e  $\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}$ , onde  $\alpha = \dot{\alpha} = 1, 2$ .

As transformações de supersimetria em termos das coordenadas de superespaço podem ser escritas como:

$$\begin{aligned}
x^m &\rightarrow x^m - i(\theta\sigma^m\bar{\varepsilon} - \varepsilon\sigma^m\bar{\theta}), \\
\theta^\mu &\rightarrow \theta^\mu - \varepsilon^\mu, \\
\bar{\theta}_{\dot{\mu}} &\rightarrow \bar{\theta}_{\dot{\mu}} - \bar{\varepsilon}^{\dot{\mu}}.
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Os campos parametrizados por essas coordenadas são chamados Supercampos, e estes podem ser expandidos em série nas variáveis  $\theta_\alpha$  e  $\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}$ . Pelo fato de uma variável grassmanniana ao quadrado ser zero, a expansão é finita e exata.

$$\begin{aligned}
\Phi(x, \theta, \bar{\theta}) &= f(x) + \theta\phi(x) + \bar{\theta}\bar{\xi} + \theta\theta m(x) + \bar{\theta}\bar{\theta}n(x) + \theta\sigma^m\bar{\theta}v_m(x) + \theta\theta\bar{\theta}\bar{\lambda}(x) + \\
&\quad + \bar{\theta}\bar{\theta}\theta\psi(x) + \theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}d(x),
\end{aligned} \tag{2.10}$$

onde  $\theta\theta \equiv \theta^A\theta_A$ ,  $\bar{\theta}\bar{\theta} \equiv \bar{\theta}_{\dot{A}}\bar{\theta}^{\dot{A}}$  são escalares de Lorentz,  $\theta\sigma^m\bar{\theta}$  é um vetor de Lorentz e os campos componentes são:

$f(x), m(x), n(x)$	escalar complexo
$\psi(x), \phi(x)$	espinor de Weyl left-handed
$\bar{\psi}(x), \bar{\phi}(x)$	espinor de Weyl right-handed
$v_m(x)$	4-vetor de Lorentz
$d(x)$	escalar



## 2.2.1 Derivadas Covariantes

Para a construção de ações usando-se supercampos é necessário definir derivação e integração em relação às coordenadas fermiônicas. Considere inicialmente as derivadas usuais em relação a  $\theta_\alpha$  e  $\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}$ :

$$\begin{aligned} \partial_\alpha &= \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}, \\ \partial^\alpha &= \frac{\partial}{\partial\theta_\alpha}, \\ \bar{\partial}_{\dot{\alpha}} &= \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}}, \\ \partial^{\dot{\alpha}} &= \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}} \end{aligned} \tag{2.11}$$

É importante saber que as derivadas com índice em cima se relacionam com as com índice, através do tensor de Levi-Civita, em baixo da seguinte forma:

$$\varepsilon^{\beta\alpha}\partial_\alpha = -\partial^\beta, \partial_\beta = -\varepsilon_{\beta\alpha}\partial^\alpha. \tag{2.12}$$

Entretanto, devemos construir derivadas que sejam covariantes pela transformações de supersimetria de forma que expressões manifestamente supersimétricas possam ser construídas. Essas derivadas são as derivadas covariantes de SUSY

$$\begin{aligned} D_\alpha &= \partial_\alpha + i\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \partial_m \\ \bar{D}_{\dot{\alpha}} &= -\partial_{\dot{\alpha}} - i\theta^\alpha \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m \partial_m \end{aligned} \tag{2.13}$$

onde  $\partial_m = \frac{\partial}{\partial x^m}$ .

As relações de anticomutação dessas derivadas são dadas por:

$$\begin{aligned}
\{D_\alpha, \bar{D}_{\dot{\alpha}}\} &= -2i\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m \partial_m, \\
\{D_\alpha, D_\beta\} &= \{\bar{D}_{\dot{\alpha}}, \bar{D}_{\dot{\beta}}\} = 0.
\end{aligned}
\tag{2.14}$$

### 2.2.2 Integrais de Berezin

Com o objetivo de escrever ações em Superespaço define-se a integração sobre as coordenadas de Grassmann, conhecida como intergração de Berezin. As propriedades essenciais requeridas por essa integração são a sua invariância translacional e sua linearidade. Inicialmente definiremos a integral

$$\int f(a) = I[f]
\tag{2.15}$$

onde  $a$  é um número de Grassmann. Uma vez que variáveis de Grassmann são objetos discretos, a integral não pode representar a área sob uma curva  $f(a)$ , e não tem sentido tomarmos limites superiores e inferiores para a integral. Ao invés disso definimos um funcional, que associa um  $c$ -number  $I[f]$  a todo elemento  $f(a) \in G$  ( $G$  é álgebra de Grassmann com um elemento). Além disso fazemos

•

$$\int da f(a+b) = \int da f(a)
\tag{2.16}$$

que implica invariância translacional da integral, e

•

$$\int da \{\alpha f(a) + \beta g(a)\} = \alpha \int da f(a) + \beta \int da g(a)
\tag{2.17}$$

que implica linearidade.

Se  $a$  descreve um número de Grassmann, qualquer função  $f(a)$  pode ser escrita como:

$$f(a) = f(0) + f^{(1)}.a \quad (2.18)$$

onde  $a^2 = 0$ . Agora definiremos  $I[f]$  para ser igual a  $f^{(1)}$ , isto é

$$\begin{aligned} I[f] &= \int da f(a) \\ &= \int da [f(0) + f^{(1)}.a] \equiv f^{(1)}, \end{aligned} \quad (2.19)$$

a qual implica em

$$\int da 1 \equiv 0, \quad \int da a \equiv 1 \quad (2.20)$$

Podemos também observar que não existe diferença entre integração e diferenciação com respeito à variáveis de Grassmann, isto é

$$\frac{\partial}{\partial a} f(a) = f^{(1)} = \int da f(a) \quad (2.21)$$

Consideremos agora uma álgebra de Grassmann  $G_2$  com dois elementos,  $\theta_1$  e  $\theta_2$ .  $G_2$  possui quatro elementos independentes,  $1_{G_2}, \theta_1, \theta_2, \theta_1\theta_2$ . Podemos agora definir a integral

$$\int d\theta_1 d\theta_2 f(\theta_1, \theta_2) \quad (2.22)$$

A fim de preservar a definição (2.20) definimos:

•

$$\int d\theta_1 \int d\theta_2 1 = 0 \quad (2.23)$$

•

$$\int d\theta_1 \int d\theta_2 \theta_1 = 0 \quad (2.24)$$

•

$$\int d\theta_1 \int d\theta_2 \theta_2 = 0 \quad (2.25)$$

•

$$\int d\theta_1 \int d\theta_2 \theta_1 \theta_2 = -1 \quad (2.26)$$

A integral de uma função arbitrária  $f(\theta_1, \theta_2) \in G_2$  é obtida por linearidade

$$\int d\theta_1 d\theta_2 f(\theta_1, \theta_2) = \int \theta_1 \int \theta_2 \{f^{(0)} + \theta_1 f^{(1)} + \theta_2 f^{(2)} + \theta_1 \theta_2 f^{(3)}\} = -f^{(3)} \quad (2.27)$$

A partir desse resultado vemos que uma integral  $\int d\theta_1 d\theta_2 f(\theta_1, \theta_2)$  corresponde a projeção da componente mais alta da expansão de  $f(\theta_1, \theta_2)$ .

Podemos também definir funções delta pela relação

$$\int da f(a) \delta(a) = f(0), f(a) \in G_1 \quad (2.28)$$

onde  $\delta(a) = a$ .

Agora definiremos elementos de volume do superspaço pelas relações

$$\begin{aligned} d^2\theta &\equiv -\frac{1}{4} d\theta^A d\theta^B \varepsilon_{AB} \\ d^2\bar{\theta} &\equiv -\frac{1}{4} d\bar{\theta}_A d\bar{\theta}_B \varepsilon^{AB} \\ d^4\theta &\equiv d^2\theta d^2\bar{\theta} \end{aligned} \quad (2.29)$$

que nos permite escrever as seguintes identidades

$$\begin{aligned}
\int d^2\theta(\theta\theta) &= 1 \\
\int d^2\bar{\theta}(\bar{\theta}\bar{\theta}) &= 1 \\
\int d^2\theta &= \int d^2\bar{\theta} = 0 \\
\int d^2\theta\theta_A &= \int d^2\bar{\theta}\bar{\theta}_{\dot{A}} = 1
\end{aligned} \tag{2.30}$$

### 2.2.3 Supercampos Quirais

Como visto na expansão em coordenadas de  $\Phi(x, \theta, \bar{\theta})$ , um supercampo <sup>3</sup> contém vários campos componentes que são apenas funções das coordenadas do espaço-tempo. Para a descrição de certas teorias devemos impor vínculos ao supercampo de modo que o número de campos componentes seja reduzido.

Podemos então, definir um supercampo quiral como sendo um supercampo que obedece ao seguinte vínculo:

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}}\Phi = 0. \tag{2.31}$$

Se faz conveniente definir uma nova variável,  $y^m = x^m + i\theta\sigma^m\bar{\theta}$ , pois

$$\begin{aligned}
\bar{D}_{\dot{\alpha}}(x^m + i\theta\sigma^m\bar{\theta}) &= 0 \\
\bar{D}_{\dot{\alpha}}\theta &= 0
\end{aligned} \tag{2.32}$$

Portanto qualquer supercampo, que seja função apenas de  $y$  e  $\theta$  será um supercampo

---

<sup>3</sup>É possível também escrever os supercampos em Formas Diferenciais, ver apêndice B

quiral. As derivadas covariantes de SUSY podem ser reescritas em termo de  $(y, \theta)$  como:

$$\begin{aligned} D_\alpha &= \frac{\partial}{\partial \theta^\alpha} + 2i\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \frac{\partial}{\partial y^m} \\ \bar{D}_{\dot{\alpha}} &= -\frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} \end{aligned} \quad (2.33)$$

Quando escrevemos as derivadas supersimétricas em termos de  $(y, \theta, \bar{\theta})$  fica claro que o supercampo quiraral geral só depende de  $(y, \theta)$ . Esse supercampo pode ser escrito em componentes como:

$$\Phi(y, \theta) = \phi(y) + 2\theta\psi(y) + \theta\theta F(y) \quad (2.34)$$

que também em termos de  $(x, \theta, \bar{\theta})$  fica:

$$\begin{aligned} \Phi(x^m + i\theta\sigma^m\bar{\theta}, \theta) &= \phi(x) + i\theta\sigma^m\bar{\theta}\partial_m\phi(x) + \frac{1}{4}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\partial_m\partial^m\phi(x) + \\ &+ \sqrt{2}\theta\psi(x) - \frac{i}{\sqrt{2}}\theta\theta\partial_m\psi(x)\sigma^m\bar{\theta} + \theta\theta F(x) \end{aligned} \quad (2.35)$$

Podemos também definir o supercampo anti-quiraral<sup>4</sup>. Assim:

$$\bar{\Phi}(y, \theta) = \bar{\phi}(\bar{y}) + 2\bar{\theta}\bar{\psi}(\bar{y}) + \bar{\theta}\bar{\theta}\bar{F}(\bar{y}) \quad (2.36)$$

que em termos de  $(x, \theta, \bar{\theta})$  fica:

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}(x^m - i\theta\sigma^m\bar{\theta}, \theta) &= \bar{\phi}(x) + i\theta\sigma^m\bar{\theta}\partial_m\bar{\phi}(x) + \frac{1}{4}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\partial_m\partial^m\bar{\phi}(x) + \\ &+ \sqrt{2}\bar{\theta}\bar{\psi}(x) - \frac{i}{\sqrt{2}}\bar{\theta}\bar{\theta}\sigma^m\partial_m\bar{\psi}(x) + \bar{\theta}\bar{\theta}\bar{F}(x) \end{aligned} \quad (2.37)$$

---

<sup>4</sup>O supercampo anti-Quiral é função apenas de  $(\bar{y}, \bar{\theta})$ .

Nesse momento podemos fazer a identificação entre o que foi mostrado na seção (2.1) com o formalismo de supercampos. As transformações dos campos podem ser representadas por:

$$\begin{aligned}\delta\Phi(y, \theta) &= (\xi Q + \bar{\xi}\bar{Q})\Phi(y, \theta) \\ \delta\bar{\Phi}(\bar{y}, \bar{\theta}) &= (\xi Q + \bar{\xi}\bar{Q})\bar{\Phi}(\bar{y}, \bar{\theta})\end{aligned}\tag{2.38}$$

onde os operadores  $Q$  e  $\bar{Q}$  são os geradores das transformações e são dados por:

$$\begin{aligned}Q_\alpha &= \partial_\alpha \\ \bar{Q}_{\dot{\alpha}} &= -\bar{\partial}_\alpha + 2i\theta^\alpha\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m\frac{\partial}{\partial y^m}\end{aligned}\tag{2.39}$$

ou em termos de  $(x, \theta, \bar{\theta})$ :

$$\begin{aligned}Q_\alpha &= \partial_\alpha - i\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\frac{\partial}{\partial x^m} \\ \bar{Q}_{\dot{\alpha}} &= \bar{\partial}_\alpha - i\bar{\sigma}^{m\dot{\alpha}\alpha}\theta_\alpha\frac{\partial}{\partial x^m}\end{aligned}\tag{2.40}$$

As derivadas supersimétricas, definidas em (2.13), têm por finalidade possibilitar a criação de expressões manifestamente supersimétricas. Isso é possível devido a estas derivadas comutarem com as transformações de SUSY, isto é:

$$[\delta, D_\alpha] = [\delta, \bar{D}^{\dot{\alpha}}] = 0,\tag{2.41}$$

mostrando-nos que a derivada supersimétrica preserva a supersimetria.

## 2.3 Ações no Superespaço

Como visto das transformações dos componentes de  $\Phi(y, \theta)$  o campo  $F$ , que é o campo de ordem mais alta, tranforma-se por supersimetria como uma derivada total. Quando integrado em  $\int d^4x$  a variação por supersimetria desse campo é um termo de superfície, então  $F$  é um candidato natural para a construção de uma ação manifestamente supersimétrica. Por isso define-se a integral quirial:

$$\int d^2\theta g(y, \theta) = \int d^2\theta (A(y) + \theta B(y) + \theta\theta F(y)) \equiv F(x) \quad (2.42)$$

Seguindo o mesmo raciocínio será definido integrações no superespaço que se mostrarão úteis para a construção de ações:

$$\int d^2\bar{\theta} \bar{g}(\bar{y}, \bar{\theta}) = \int d^2\bar{\theta} (\bar{A}(\bar{y}) + \bar{\theta} \bar{B}(\bar{y}) + \bar{\theta} \bar{\theta} \bar{F}(\bar{y})) \equiv \bar{F}(x) \quad (2.43)$$

$$\int d^4x G(x, \theta, \bar{\theta}) = \int d^4x (A(x) + \theta B(x) + \dots + \theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta} D(x)) \equiv D(x) \quad (2.44)$$

ou em termos de derivadas:



$$\begin{aligned}
\int d^4\theta F &= \frac{1}{16} \left( \frac{\partial}{\partial\theta_\alpha} \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}} F \right) \Big|_{\theta=\bar{\theta}=0} \\
\int d^2\theta f &= \frac{1}{4} \left( \frac{\partial}{\partial\theta_\alpha} \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} f \right) \Big|_{\theta=\bar{\theta}=0} \\
\int d^2\bar{\theta} \bar{f} &= \frac{1}{4} \left( \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}} \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} \bar{f} \right) \Big|_{\theta=\bar{\theta}=0}
\end{aligned} \tag{2.45}$$

A análise dimensional será o guia para a construção de ações no superspaço. Aqui usaremos a propriedade da dimensão de massa dos componentes das teorias, ou seja, campos e coordenadas.

	Dimensão de massa
x, y	-1
$\theta$	$-\frac{1}{2}$
$\psi(x)$	$\frac{3}{2}$
$\int d^4\theta$	+2
$\phi(x), \Phi, \bar{\Phi}, \int d^2\theta, \int d^2\bar{\theta}$	+1

A partir de  $\int d^4\theta$  e dos campos  $\Phi$  e  $\bar{\Phi}$  podemos construir um único termo quadrático que não possui parâmetro dimensional:

$$S_{kin} = \int d^4x d^4\theta \Phi \bar{\Phi} \tag{2.46}$$

Quando expressa em termos de campos componentes, a ação acima é dada por:

$$S_{kin} = \int d^4x (-\partial_m \phi \partial^m \bar{\phi} - i\psi \sigma^m \partial_m \bar{\psi} + F \bar{F}) \tag{2.47}$$

que reproduz a parte sem massa de (2.7). Com  $\int d^2\theta$  e  $\int d^2\bar{\theta}$  é possível criar termos de massa e interações<sup>5</sup>:

---

<sup>5</sup>Por questões de renormalizabilidade não podemos escrever potências maiores de  $\Phi$

$$S_{intM} = \int d^4x \left[ d^2\theta \left( \lambda\Phi + \frac{M}{2}\Phi^2 + \frac{g}{3}\Phi^3 \right) + d^2\bar{\theta} \left( \bar{\lambda}\bar{\Phi} + \frac{\bar{M}}{2}\bar{\Phi}^2 + \frac{\bar{g}}{3}\bar{\Phi}^3 \right) \right] \quad (2.48)$$

onde  $\lambda$  tem dimensão 2,  $M$  dimensão 1 e  $g$  é adimensional.

## 2.4 Supercampos Vetoriais

Define-se Supercampo Vetorial aquele que satisfaz a condição:

$$V(x, \theta, \bar{\theta}) = \bar{V}(x, \theta, \bar{\theta}) \quad (2.49)$$

O supercampo vetorial é um supercampo real. Como qualquer supercampo pode ser expandido em potências de  $\theta$  e  $\bar{\theta}$ :

$$\begin{aligned} V(x, \theta, \bar{\theta}) = & C(x) + \theta\chi(x) + \bar{\theta}\bar{\chi}(x) + \theta\theta M(x) + \bar{\theta}\bar{\theta}\bar{M}(x) + \\ & -\theta\sigma^m\bar{\theta}v_m(x) + i\theta\theta\bar{\theta}\bar{\lambda}(x) - i\bar{\theta}\bar{\theta}\theta\lambda(x) + \theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}D(x) \end{aligned} \quad (2.50)$$

onde  $C(x)$ ,  $v_m(x)$  e  $D(x)$  são campos reais uma vez que o supercampo vetorial goza da condição de realidade  $V = V^\dagger$ .

### Gauge de Wess-Zumino

Agora consideremos o supercampo real  $\Phi + \bar{\Phi}$  em termo de  $x$ :

$$\begin{aligned} \Phi + \bar{\Phi} = & \phi + \bar{\phi} + \sqrt{2}\theta\psi + \sqrt{2}\bar{\theta}\bar{\psi} + \theta\theta F + \bar{\theta}\bar{\theta}\bar{F} + i\theta\sigma^m\bar{\theta}\partial_m(\phi - \bar{\phi}) + \\ & -\frac{i}{\sqrt{2}}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\sigma}^m\partial_m\psi + \frac{i}{\sqrt{2}}\bar{\theta}\bar{\theta}\theta\sigma^m\partial_m\bar{\psi} - \frac{1}{4}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\partial_m\partial^m(\phi + \bar{\phi}) \end{aligned} \quad (2.51)$$

É conveniente escolher uma forma especial para a transformação de  $V(x, \theta, \bar{\theta})$  de modo que certos componentes desse supercampo sejam invariantes pelas transformações de gauge supersimétricas:

$$\begin{aligned}\lambda(x) &\rightarrow \lambda(x) + \frac{i}{2}\sigma^m\partial_m\xi(x) \\ D(x) &\rightarrow D(x) + \frac{1}{4}\partial_m\partial^m C(x).\end{aligned}\tag{2.52}$$

A generalização supersimétrica da transformação de gauge para  $V(x, \theta, \bar{\theta})$  é:

$$V \rightarrow V + \Phi + \bar{\Phi}\tag{2.53}$$

Sob essa transformação:

$$\begin{aligned}C &\rightarrow C + A + \bar{A} \\ \xi &\rightarrow \xi - i\sqrt{2}\psi \\ M &\rightarrow M + F \\ v_m &\rightarrow v_m - i\partial_m(\phi - \bar{\phi}) \\ \lambda &\rightarrow \lambda \\ D &\rightarrow D\end{aligned}\tag{2.54}$$

A escolha (2.52) foi feita de forma que os componentes  $\lambda$  e  $D$  ficassem invariantes pela transformação de gauge. Assim, se escolhermos o gauge adequado, isto é, um determinado supercampo  $\Phi$ , é possível colocar os componentes  $C$ ,  $\xi$ ,  $M$  iguais a zero. Essa escolha de gauge é conhecida como gauge de Wess-Zumino(WZ). Com o uso desse gauge ainda temos liberdade de escolha de  $v_m$ , que é a transformação usual de gauge. No gauge de

WZ a expressão para  $V$  torna-se:

$$V = -\theta\sigma^m\bar{\theta}v_m(x) + i\theta\theta\bar{\theta}\bar{\lambda}(x) - i\bar{\theta}\bar{\theta}\theta\lambda(x) + \frac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}D(x) \quad (2.55)$$

Com o objetivo de construir objetos invariantes sob transformação de gauge generalizada, considere o supercampo espinorial  $W_\alpha$ :

$$\begin{aligned} W_\alpha &= -\frac{1}{4}\bar{D}\bar{D}D_\alpha V \\ \bar{W}_{\dot{\alpha}} &= -\frac{1}{4}DD\bar{D}_{\dot{\alpha}}V \end{aligned} \quad (2.56)$$

Uma vez que  $D_\beta D^\alpha D_\alpha = \bar{D}_{\dot{\beta}} D_{\dot{\alpha}} D^{\dot{\alpha}} = 0$  é fácil ver que  $W_\alpha$  é quiral e  $\bar{W}_{\dot{\alpha}}$  é anti-quiral. Sendo assim, as variáveis adequadas para escrever o supercampo  $W_\alpha$  são  $(y, \theta)$ , logo:

$$W_\alpha = -i\lambda_\alpha(y) + D(y)\theta_\alpha - \frac{i}{2}(\sigma^m\sigma^n)_\alpha(\partial_m v_n(y) - \partial_n v_m(y)) + \theta\theta\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m\partial_m\bar{\lambda}^{\dot{\alpha}}(y) \quad (2.57)$$

$$\bar{W}_{\dot{\alpha}} = i\bar{\lambda}_{\dot{\alpha}}(\bar{y}) + \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}D(\bar{y}) + \frac{i}{2}\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\gamma}}(\bar{\sigma}\sigma\theta)^{\dot{\gamma}}(\partial_m v_n(\bar{y}) - \partial_n v_m(\bar{y})) - \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\bar{\theta}\bar{\theta}\bar{\sigma}^{m\dot{\beta}\alpha}\partial_m\lambda_\alpha(\bar{y}) \quad (2.58)$$

Podemos também dizer diretamente das expressões acima que  $W_\alpha$  e  $\bar{W}_{\dot{\alpha}}$  são invariantes de gauge uma vez que os seus campos componentes são invariantes de gauge:  $D$ ,  $\lambda$  e  $(\partial_m v_n - \partial_n v_m)$ .

Partindo desses supercampos, podemos agora construir uma ação sem parâmetros dimensionais:

$$S = \frac{1}{4} \int d^4(d^2\theta W^\alpha W_\alpha + d^2\bar{\theta} \dot{W}_{\dot{\alpha}} \dot{W}^{\dot{\alpha}}) \quad (2.59)$$

Em termos de campos componentes:

$$S = \int d^4x \left( \frac{1}{2} D^2 - \frac{1}{2} v^{mn} v_{mn} - i \lambda \sigma^m \partial_m \bar{\lambda} \right) \quad (2.60)$$

Então usando-se o supercampo vetorial foi possível construir um generalização supersimétrica para a lagrangeana de Maxwell.

# Capítulo 3

## Observações sobre o campo de Kalb-Ramond supersimétrico em $D = 5$

A teoria de cordas tem motivado o estudo de modelos de mundo do tipo Randall-Sundrum que apresentam curvatura e torção simultaneamente. Para isso teorias de gravidade são modificadas pela adição de torção em espaços-tempos curvos. Uma das formas de se introduzir torção é adicionar um componente anti-simétrico na conexão. Podemos então associar a existência de torção no espaço-tempo ao tensor intensidade de campo correspondente ao campo de Kalb-Ramond.

Esse capítulo trata de observações feitas com os termos topológicos originados por esses campos geradores de torção quando vistos sob a perspectiva visão pseudosupersimétrica 5-dimensional.

### 3.1 Pseudosupersimetria

Com o advento das D-Branas [10], a teoria de cordas começou a fornecer novos mecanismos para que a supersimetria fosse quebrada. A nova proposta era que a supersimetria passava a ser quebrada explicitamente uma vez que nem todos os campos no volume de

mundo possuem superparceiros. Nesses modelos, diferentes setores da teoria quebram em duas supersimetrias distintas. Podemos comparar isso com uma quebra completa de uma supersimetria não-local. Tal cenário é denominado Pseudo-Supersimetria. Desse modo, considerando a existência de supersimetria, podemos pensá-la como uma teoria quebrada em uma alta escala de energia não sendo surpresa alguma trabalharmos com modelos não-lineares de supersimetria [23, 24, 25].

O modelo mais simples de supersimetria não-linearizada contém apenas um férmion, o goldstino  $\lambda_g$ . A transformação não-linear de supersimetria do goldstino é

$$\delta_\xi \lambda_g = \frac{1}{\kappa} \xi - \kappa v_\xi^m \partial_m \lambda_g \quad (3.1)$$

onde

$$v_\xi^m = i \lambda_g \sigma^m \bar{\xi} - i \xi \sigma^m \bar{\lambda}_g. \quad (3.2)$$

Essa transformação realiza a álgebra de supersimetria [24],

$$[\delta_\eta, \delta_\xi] \lambda_g = -2i(\eta \sigma^m \bar{\xi} - \xi \sigma^m \bar{\eta}) \partial_m \lambda_g. \quad (3.3)$$

Podemos fazer uso de uma álgebra não-linear de SUSY em qualquer tipo de campo, ou seja, escalares de Lorentz, espinores, vetores ou tensores. Para um campo  $f$  bem definido na hipersuperfície dada por  $\theta = -\kappa \lambda_g(x)$ ,  $f'(x) = f(x')$ , teremos:

$$\delta_\xi f = -\kappa v_\xi^m \partial_m f. \quad (3.4)$$

que é a transformação de um campo de matéria no *background* do goldstino.

### 3.1.1 Multipleteo Vetorial em 5-dimensões

Um supercampo vetorial em  $D = 5$  contém um campo vetorial  $A_M$ , um campo escalar  $\varphi$  e um férmion de Dirac  $\Gamma$  (ou um Majorana simplético). Ao reduzirmos para o formalismo de pseudosupersimetria, podemos descrever nosso multipleteo vetorial  $5D$  por um supercampo vetorial  $\mathcal{U} = \mathcal{U}^\dagger$  e um supercampo quiral  $\mathcal{G}$  com  $\bar{D}_\alpha \mathcal{G} = 0$ . Usando o gauge de Wess-Zumino, podemos escrever esses supercampos como:

$$\mathcal{U} = 2(\theta\sigma^m\bar{\theta})A_m + 4i\theta^2\bar{\theta}\bar{\zeta} - 4i\bar{\theta}^2\theta\zeta + 4\theta^2\bar{\theta}^2K. \quad (3.5)$$

$$\mathcal{G} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi + iA_5) + \sqrt{2}\theta\eta + \theta^2(J + iS), \quad (3.6)$$

onde introduzimos os índices quadridimensionais  $m = 0, \dots, 3$ . A transformação de gauge desses supercampos no superespaço é dada por:

$$\delta\mathcal{U} = \Omega + \bar{\Omega}, \quad (3.7)$$

$$\delta\mathcal{G} = \sqrt{2}\partial_5\Omega. \quad (3.8)$$

onde  $\Omega$  é um supercampo espinorial.

Nossas convenções para derivadas covariantes de supersimetria são

$$D_\alpha \equiv \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} + i\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\partial_\mu \quad (3.9)$$

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}} \equiv -\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} - i\theta^\alpha\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu\partial_\mu. \quad (3.10)$$

A partir desses supercampos podemos construir dois superfieds-strenght indepen-



dentos. São eles:

$$\mathcal{W}_\alpha = -\frac{1}{4}\bar{D}^2 D\mathcal{U} \quad (3.11)$$

$$\mathcal{U}_5 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathcal{G} + \bar{\mathcal{G}}) - \partial_5 \mathcal{U} \quad (3.12)$$

As componentes dos supercampos  $\mathcal{W}_\alpha$  e  $\mathcal{U}_5$  no gauge de Wess-Zumino são identificadas por

$$\mathcal{W}_\alpha | = i\zeta_\alpha \quad (3.13)$$

$$D_\beta \mathcal{W}_\alpha | = -i(\sigma^{mn}\epsilon)_{\beta\alpha} F_{mn} - \epsilon_{\beta\alpha} G \quad (3.14)$$

onde  $F_{mn} = \partial_m A_n - \partial_n A_m$ .

$$\mathcal{U}_5 | = \varphi \quad (3.15)$$

$$-\frac{1}{2}[D_\alpha, D_{\dot{\alpha}}]\mathcal{U}_5 | = \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m F_{m5} \quad (3.16)$$

onde  $F_{m5} = \partial_m A_5 - \partial_5 A_m$ .

$$-\frac{1}{8}D^\alpha \bar{D}^2 D_\alpha \mathcal{U}_5 | = K \quad (3.17)$$

$$D^2 \mathcal{U}_5 | = -2\sqrt{2}(J + iS) \quad (3.18)$$

$$D_\alpha \mathcal{U}_5 | = \sqrt{2}\eta \quad (3.19)$$

$$\frac{1}{4}\bar{D}^2 D_\alpha \mathcal{U}_5 | = i\partial_5 \zeta \quad (3.20)$$

### 3.1.2 Multipleteo Tensorial 5-dimensional

Um multipleteo tensorial anti-simétrico contém um tensor de rank-2  $B_{MN}$ , um campo escalar  $\phi$  e um férmion de Dirac  $\Psi$  quando analisado através de uma supersimetria  $N = 1 - D = 5$ . Usando a linguagem para um pseudo-superespaço 5-dimensional podemos descrever esse supercampo tensorial por um supercampo espinorial quiral  $\mathcal{B}_\alpha$ ,  $\bar{D}_{\dot{\alpha}}\mathcal{B}_\alpha = 0$ , e um multipleteo vetorial  $\mathcal{V}$ ,  $\mathcal{V} = \mathcal{V}^\dagger$  cujas transformações no superespaço são dadas por:

$$\delta\mathcal{B}_\alpha = -\frac{1}{4}\bar{D}^2 D_\alpha \mathcal{R}, \quad (3.21)$$

$$\delta\mathcal{V} = \Omega + \bar{\Omega} - \partial_5 \mathcal{R}, \quad (3.22)$$

onde  $\Omega$  e  $\mathcal{R}$  são um supercampo espinorial e um supercampo vetorial respectivamente. Podemos então definir, usando o gauge de Wess-Zumino, a expansão em campos componentes de  $\mathcal{B}_\alpha$  e  $\mathcal{V}$ :

$$\mathcal{B}_\alpha = -i\lambda_\alpha + i\theta^\beta(\sigma^{mn}\epsilon)_{\beta\alpha}B_{mn} + i\theta_\alpha(F + iM) - \theta^2\xi_\alpha; \quad (3.23)$$

$$\mathcal{V} = 2(\theta\sigma^m\bar{\theta})B_{m5} + 4i\theta^2\bar{\theta}\bar{\psi} - 4i\bar{\theta}^2\theta\psi + 4\bar{\theta}^2\theta^2N. \quad (3.24)$$

A partir dos supercampos (3.23) e (3.24) podemos então definir supercampos que contêm os fields-strenght dos campos de Kalb-Ramond,  $H_{mnk}$  e  $H_{mn5}$ . Esses supercampos têm a seguinte forma:

$$\Lambda = D_\alpha B^\alpha - \bar{D}^{\dot{\alpha}} \bar{B}_{\dot{\alpha}}. \quad (3.25)$$

$$\mathcal{T}_{5\alpha} = \partial_5 B_\alpha + W_\alpha(\mathcal{V}) \quad (3.26)$$

onde  $W_\alpha \mathcal{V}$  é um supercampo espinorial definido similarmente a (3.11). Em componentes teremos:

$$\Lambda | = -2M \quad (3.27)$$

$$D_\alpha \Lambda | = -2\xi - i\sigma^m \partial_m \bar{\lambda} \quad (3.28)$$

$$[D, \bar{D}] \Lambda | = \epsilon^{mnkl} (\sigma_m) H_{nkl} + \sigma^m \partial_m F \quad (3.29)$$

$$[D^2, \bar{D}_{\dot{\alpha}}] \Lambda = i\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m \partial_m \xi^\alpha \quad (3.30)$$

$$\mathcal{T}_{5\alpha} | = -i\partial_5 \lambda_\alpha + i\psi_\alpha \quad (3.31)$$

$$D_\beta \mathcal{T}_{5\alpha} | = -i\sigma^{mn} H_{mn5} - 2N + i\partial_5 (F + iM) \quad (3.32)$$

$$D^2 \mathcal{T}_{5\alpha} | = 4i\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m \partial_m \bar{\psi}^{\dot{\alpha}} - \partial_5 \xi_\alpha \quad (3.33)$$

## 3.2 Termo Topológico de Kalb-Ramond em $5D$

Uma abordagem topológica sobre o modelo de Randall-Sundrum foi proposta [12] e a mesma tinha como ponto principal, ao contrário do cenário de Randall-Sundrum, a não necessidade de uma métrica específica para o background. Esta nova abordagem é baseada em uma teoria da gravidade topológica. Estas teorias independentes do background, são de grande interesse atual, especialmente porque uma descrição unificada de todos os background de cordas pode fornecer um entendimento mais completo dos aspectos geométricos da teoria de cordas.

Recentemente Tahim e Almeida [12] propuseram uma nova abordagem para a localização de teorias topológicas em branas. Termos topológicos são obtidos por generalizações para várias dimensões do acoplamento entre áxions e fótons. A implementação da teoria ordinária foi feita através da seguinte ação em  $D = 5 + 1$ :

$$S = \int d^6 x g \varepsilon^{\mu\nu\alpha\rho\sigma\lambda} \phi(z) H_{\mu\nu\alpha} H_{\rho\sigma\lambda} \quad (3.34)$$

Nesta ação,  $H_{\mu\nu\alpha} = \partial_\mu B_{\nu\alpha} + \partial_\nu B_{\alpha\mu} + \partial_\alpha B_{\mu\nu}$  ( $\mu, \dots, \lambda = 0, \dots, 5$ ) é o tensor intensidade de campo para o campo anti-simétrico de gauge  $B_{\mu\nu}$ . O campo  $B_{\mu\nu}$  tem importante papel em teorias de cordas: é ele que acopla-se corretamente com a *world-sheet* de uma corda, de maneira bastante semelhante ao acoplamento do campo de gauge  $A_\mu$  com a linha de universo de uma partícula. O campo  $\phi$  é escalar e real, e  $V(\phi)$  é um potencial que modela uma transição de fase:

$$V(\phi) = \lambda(1 - \cos \phi) \quad (3.35)$$

Concentraremos o nosso estudo no termo topológico que aparecerá após a redução dimensional de seis para cinco dimensões da ação master. Isso se deve ao fato de esse termo generalizar o acoplamento que aparece na anomalia de quasi-simetria de Peccei-Quinn em  $(3 + 1)$ -dimensões[28]. Ao considerar  $\phi$  dependendo apenas da coordenada  $z$ , podemos escrever a ação para o termo topológico como

$$S = \int d^5x (k\varepsilon^{5\nu\alpha\rho\sigma\lambda} B_{\nu\alpha} H_{\rho\sigma\lambda}) \quad (3.36)$$

Esta última equação mostra que sobre a hipersuperfície surge um termo topológico efetivo, com uma constante de acoplamento  $k$  que possui dimensão canônica de massa. Além do mais, esta constante de acoplamento  $k$  é quantizada [29, 17]. Neste caso, se quaisquer índices forem iguais a 5, este termo anula-se. A teoria, então, na hipersuperfície, é pentadimensional.

Este termo topológico tem grande similaridade com o termo topológico de Chern-Simons[17], que é escrito em  $D = 2 + 1$  para o campo vetorial de gauge  $A_\mu$  como sendo:

$$S_{cs} = g \int d^3x \varepsilon^{\mu\nu\alpha} A_\mu F_{\nu\alpha}. \quad (3.37)$$

Entretanto, o termo em (3.36) é escrito somente com o campo tensorial anti-simétrico  $B_{MN}$ . Tal tipo de termo foi usado quando Sengupta [30] estudou algumas peculiaridades da Radiação cósmica de fundo no contexto do cenário de Randall-Sundrum [3]

No decorrer deste capítulo abordaremos diversas propriedades supersimétricas para a ação topológica (3.36), uma vez que a extensão supersimétrica de modelos com dimensões extras é de fundamental importância para a física de altas energias estudada ultimamente.

### 3.3 Termo de Kalb-Ramond tipo Chern-Simons Pseudo-supersimétrico em $D = (4 + 1)$

O fato de ainda não termos confirmações experimentais das teorias supersimétricas não tiram o brilho e importância de modelos que gozam dessa simetria tão particular entre bósons e férmions. Isto não implica que seja uma teoria absolutamente inútil. Alguns pontos fazem da supersimetria, no plano teórico, uma ferramenta de grande valor. São eles:

(i) o cancelamento entre contribuições bosônicas e fermiônicas eliminam divergências quadráticas. Alguns modelos supersimétricos são os únicos exemplos de teorias de campo quadridimensionais finitas em todas as ordens perturbativas.

(ii) supersimetria parece ser um ingrediente indispensável para as *teorias de cordas*, que são no presente as melhores candidatas para *teorias do tudo*, isto é, teorias das interações forte, eletrofraca e gravitacional.

(iii) gravidade localmente supersimétrica, pode ser a única forma de conciliar a teoria quântica com a gravidade de Einstein. Seu comportamento é menos divergente em pequenas distâncias que o da gravidade quântica ordinária.  $\hat{\quad}$

Para construir uma ação supersimétrica, deve-se satisfazer os critérios de invariância sob transformações de SUSY, realidade e dimensão canônica nula.

Introduziremos o modelo 5-dimensional pseudosupersimétrico topológico de Kalb-Ramond por

$$S_{BH}^{SS} = \frac{1}{8} \int -i\kappa d^5x \left\{ d^2\theta \mathcal{B}_\alpha T^{5\alpha} + d^2\bar{\theta} \bar{\mathcal{B}}^{\dot{\alpha}} \bar{T}_{5\dot{\alpha}} - d^2\theta d^2\bar{\theta} \mathcal{V}\Lambda \right\} \quad (3.38)$$

Em termos dos campos componentes, a ação(3.38) pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
S_{BH}^{SS} &= \int d^5x \left\{ \frac{-i\kappa}{4} [\lambda \sigma^m \partial_m \bar{\psi} + \bar{\lambda} \bar{\sigma}^m \partial_m \psi] + \frac{\kappa}{4} [\lambda \partial_5 \xi - \bar{\lambda} \partial_5 \bar{\xi}] + \right. \\
&\quad \left. \frac{-i\kappa}{2} \epsilon^{mnl5} B_{mn} H_{kl5} + \frac{i\kappa}{4} F \partial_5 F - \frac{i\kappa}{4} M \partial_5 F \right. \\
&\quad \left. - 2i\kappa F N - \frac{\kappa}{8} [\xi \psi - \bar{\xi} \bar{\psi}] - \kappa [\psi \xi + \bar{\psi} \bar{\xi}] \right\} \\
&= \int d^5x \left\{ \frac{-i\kappa}{4} \bar{\Lambda} \sigma^m \partial_m \Psi + \frac{\kappa}{4} \bar{\Lambda} \gamma^5 \partial_5 \Xi + \right. \\
&\quad \left. \frac{-i\kappa}{2} \epsilon^{mnl5} B_{mn} H_{kl5} + \frac{i\kappa}{4} F \partial_5 F - \frac{i\kappa}{4} M \partial_5 F \right. \\
&\quad \left. - 2i\kappa F N - \frac{\kappa}{8} \bar{\Xi} \gamma^5 \Psi - \kappa \bar{\Psi} \Xi \right\}
\end{aligned} \tag{3.39}$$

Esta última igualdade exhibe os férmions sendo organizados como espinores de quatro componentes,

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda \\ \bar{\lambda} \end{pmatrix}, \tag{3.40}$$

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi \\ \bar{\psi} \end{pmatrix}, \tag{3.41}$$

$$\Xi = \begin{pmatrix} \xi \\ \bar{\xi} \end{pmatrix}. \tag{3.42}$$

Usamos também a seguinte identidade:

$$\bar{\Psi} \Gamma = \bar{\psi} \bar{\lambda} + \psi \lambda \tag{3.43}$$

$$\bar{\Psi} \gamma^5 \Gamma = \bar{\psi} \bar{\lambda} - \psi \lambda \tag{3.44}$$

$$\bar{\Psi}\gamma^m\Gamma = \psi\gamma^m\bar{\lambda} - \bar{\psi}\gamma^m\lambda \quad (3.45)$$

### 3.3.1 Termo fermiônico topológico de Kalb-Ramond Supersimétrico em $D = 5$

Consideremos agora apenas o seguinte termo da ação (??)

$$S' = \int d^5x \frac{\kappa}{8} \bar{\Xi} \gamma^5 \Psi \quad (3.46)$$

Usando a relação

$$\gamma_5 \sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \sigma^{\alpha\beta}. \quad (3.47)$$

Ao usarmos esta relação entre o tensor de Levi-Civita e o pseudo-escalar  $\gamma_5$  nos permitimos inferir uma característica topológica para o termo acima como um termo topológico. Isso nos dá a possibilidade de trabalharmos sem necessidade de uso da métrica tanto com o termo bosônico BH como para o termo superparceiro dele.

## 3.4 Identificação da componente $B_{m5}$ do campo de Kalb-Ramond com um vetor de gauge $A_m$ em uma teoria 5-dimensional

Desde o início estamos considerando o campo de KR como sendo um campo que tem as seguintes componentes:

$$B_{MN} = (B_{mn}, B_{m5}). \quad (3.48)$$



É então possível pensar que essas componentes podem ser descritas por um tensor anti-simétrico de rank-2 e um pseudovetor, respectivamente, em  $4D$ .

A nossa proposta então é fazer uma identificação direta entre o supercampo que contém o pseudovetor  $B_{m\bar{5}}$  e um supercampo que contenha o vetor  $A_m$ . É importante mencionar que quando fazemos essa identificação levamos em consideração o número dos graus de liberdade envolvidos no mapeamento. A identificação fica:

$$B_{m\bar{5}} \rightarrow A_m; \quad (3.49)$$

$$\zeta \rightarrow \psi; \quad (3.50)$$

$$K \rightarrow N. \quad (3.51)$$

Podemos dizer que esse procedimento é similar a usar o supercampo vetorial  $\mathcal{U}$  ao invés de usar o multipletto de Kalb-Ramond  $\mathcal{V}$ , previamente definidos.

A ação então seria modificada e teria como nova forma:

$$S_{BH}^{SS} = \frac{1}{8} \int -i\kappa d^5x \left\{ d^2\theta \mathcal{B}_\alpha \mathcal{P}^{5\alpha} + d^2\bar{\theta} \bar{\mathcal{B}}^{\dot{\alpha}} \bar{\mathcal{P}}_{5\dot{\alpha}} - d^2\theta d^2\bar{\theta} \mathcal{U} \Lambda \right\} \quad (3.52)$$

onde

$$\mathcal{P}_{5\alpha} = \partial_5 B_\alpha + W_\alpha(\mathcal{U}). \quad (3.53)$$

Essa ação supersimétrica pode ser escrita também em termos dos campos componentes

$$\begin{aligned}
S_{BH}^{SS} = \int d^5x \left\{ \frac{-i\kappa}{4} [\lambda \sigma^m \partial_m \bar{\zeta} + \bar{\lambda} \bar{\sigma}^m \partial_m \zeta] + \frac{\kappa}{4} [\lambda \partial_5 \xi - \bar{\lambda} \partial_5 \bar{\xi}] + \right. \\
\left. \frac{2i\kappa}{3} \epsilon^{mnl5} A_m H_{nkl} + \frac{i\kappa}{4} F \partial_5 F - \frac{i\kappa}{4} M \partial_5 F \right. \\
\left. - 2i\kappa F K - \frac{\kappa}{8} [\xi \zeta - \bar{\xi} \bar{\zeta}] - \kappa [\zeta \xi + \bar{\zeta} \bar{\xi}] \right\}
\end{aligned} \tag{3.54}$$

Usando as seguintes relações

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \lambda \\ \bar{\lambda} \end{pmatrix}, \Theta = \begin{pmatrix} \zeta \\ \bar{\zeta} \end{pmatrix}, \Xi = \begin{pmatrix} \xi \\ \bar{\xi} \end{pmatrix}, \tag{3.55}$$

podemos reescrever a ação (3.54) usando espinores de Dirac ao invés de espinores de Majorana.

$$\begin{aligned}
S_{BH}^{SS} = \int d^5x \left\{ \frac{-i\kappa}{4} \bar{\Gamma} \sigma^m \partial_m \Theta + \frac{\kappa}{4} \bar{\Gamma} \gamma^5 \partial_5 \Xi + \right. \\
\left. \frac{2i\kappa}{3} \epsilon^{mnl5} A_m H_{nkl} + \frac{i\kappa}{4} F \partial_5 F - \frac{i\kappa}{4} M \partial_5 F \right. \\
\left. - 2i\kappa F N - \frac{\kappa}{8} \bar{\Xi} \gamma^5 \Theta - \kappa \bar{\Xi} \Theta \right\}
\end{aligned} \tag{3.56}$$

### 3.4.1 Termo fermiônico topológico

Consideremos agora apenas o seguinte termo da ação (3.56)

$$S' = \int d^5x \frac{\kappa}{8} \bar{\Xi} \gamma^5 \Theta \tag{3.57}$$

Usando novamente a relação

$$\gamma_5 \sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta 5} \sigma^{\alpha\beta} \tag{3.58}$$

Podemos assim entender que o termo topológico que envolve um campo de KR e um campo vetorial de gauge também tem como parceiro fermiônico um termo topológico.

# Capítulo 4

## Superespaço Intrínseco $N = 1 - D = 5$

A Física das dimensões extras está a cada dia ganhando mais espaço na ciência moderna. Esse interesse se intensifica com a possibilidade de com teorias com  $D > 4$  conseguirem solucionar problemas não resolvidos com o Modelo Padrão das partículas. Junto a isso, as propriedades matemáticas e conseqüências físicas marcantes da supersimetria faz com que as teorias supersimétricas se destaquem entre os candidatos mais promissores para a nossa próxima visão do mundo físico.

Nesse capítulo trataremos do formalismo necessário para a construção de uma teoria manifestamente supersimétrica com uma supersimetria e uma dimensão extra,  $N = 1 - D = (4 + 1)$ .

### 4.1 Introdução

Poderíamos nos perguntar: Por que existe interesse em teorias com dimensões extras? Essencialmente muitas teorias recentemente desenvolvidas são instáveis sem a consideração de mais dimensões no espaço-tempo. Sendo assim, não seria possível se fazer os cálculos necessários para seus estudos e não faria mais sentido estudá-las. Talvez não esperássemos uma resposta tão sutil, muitas vezes podendo até soar frustrante.

A pergunta seguinte poderia ser: Como se pode obter evidência direta da existência dessas dimensões extras? Isso poderia ser respondido de duas maneiras. A primeira tem a ver com o fato de que a gravidade parecerá diferente em certas escalas de energia. Ou seja, a existência de dimensões extras poderia fazer com que a gravidade se espalhasse por mais dimensões espaciais, além das três conhecidas, e o modo como ela, a gravidade, varia segundo a distância depende disso. A segunda maneira abrange as partículas fundamentais, que, ao se moverem por essas novas dimensões, apareceriam para nós como novos tipos de partículas cujas massas dependeriam da geometria desse espaço multidimensional.

Mas uma dúvida poderia surgir: Se pensamos em uma teoria com dimensões extras porque essas dimensões são espaciais e não temporais? Fazemos isso exatamente para evitar paradoxo com a Física conhecida e exhaustivamente comprovada, uma vez que se houver mais de uma coordenada temporal, nossas noções de física se desfazem. Isso se mostra mais evidente usando o fato de que a baixas energias as medições que temos são feitas em teorias com apenas uma coordenada desse tipo e é natural que continuemos construindo teorias em altas energias que quando observadas a energias menores nos dêem resultados mensuráveis.

A Supersimetria é a extensão das simetrias do espaço-tempo por geradores fermiônicos, e de maneira natural unifica Bósons e Férmions. De fato, a Supersimetria é a única extensão consistente das simetrias de Poincaré.

Por suas propriedades matemáticas e conseqüências físicas marcantes, as teorias supersimétricas destacam-se entre os candidatos mais promissores para a nossa próxima visão do mundo físico. Dessa forma se faz interessante estudar as novas teorias encontradas do ponto de vista supersimétrico, uma vez que essas abordagens só estarão completas após a introdução de sua versão supersimétrica que por sua vez desempenham um papel central nas teorias de cordas e branas, as grandes candidatas a fundamentar a

teoria do tudo.

## 4.2 Notações e Convenções 5-dimensionais

A álgebra de Clifford,  $C(p, q)$  (associada a uma métrica plana do espaço-tempo) se constrói a partir dos geradores  $\Gamma^\mu$  de modo que seja satisfeita a relação

$$\{\Gamma^\mu, \Gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu} \quad (4.1)$$

com  $\eta^{\mu\nu}$  representando a matriz diagonal de assinatura  $(p, q)$ , com  $p$  elementos positivos (+1) e  $q$  elementos negativos (-1).

$$\{\Gamma^\mu, \Gamma^5\} = 0 \quad (4.2)$$

com

$$\Gamma^\mu = \gamma^\mu \quad (4.3)$$

$$\Gamma^5 = i\gamma^5. \quad (4.4)$$

Especificamente temos

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \gamma_5 \quad (4.6)$$

### 4.2.1 Geradores de Supersimetria e Derivadas Covariantes

Salam e Strathdee [22] criaram uma forma bem mais compacta de tratar a álgebra da supersimetria: o supercampo no superespaço. É como se até aqui se estivesse tratando o cálculo vetorial num formalismo de componentes. As transformações de supersimetria são representadas agora como transformações nos pontos do superespaço. A vantagem desse formalismo é que ele nos permite a verificação de forma trivial da invariância de supersimetria das teorias de modo que possamos facilmente identificar teorias manifestamente supersimétricas.

Podemos denotar nosso superespaço por um espaço composto pela coordenadas de espaço-tempo e pelas coordenadas grassmanianas (coordenadas anticomutantes). Uma vez que estamos trabalhando com uma teoria 5-dimensional e queremos construir um formalismo supersimétrico para ela, podemos dizer que o nosso superespaço é dado por  $S = S(x^{\hat{\mu}}, \Theta)$ , onde  $\Theta$  é uma coordenada de Grassmann espinorial (espinor de Dirac).

Suas transformações de supersimetria são dadas por:

$$y^{\hat{\mu}} = x^{\hat{\mu}} + \frac{1}{2}\bar{\varepsilon}\gamma^{\hat{\mu}}\Theta + \frac{1}{2}\bar{\Theta}\gamma^{\hat{\mu}}\varepsilon \quad (4.7)$$

para as coordenadas de espaço-tempo ( $y = x'$ ) e para as coordenadas anticomutantes temos:

$$\Theta' = \Theta + \varepsilon \quad (4.8)$$

onde  $\varepsilon$  é um espinor de Dirac que funciona como parâmetro da transformação de SUSY.

Os espinores em  $D = 4$  e  $D = 5$  são espinores do mesmo tipo, de modo que conseguimos escrever um espinor de Dirac em 5-dimensões a partir de dois espinores de Majorana quadridimensionais, ou seja

$$\Theta = \theta + i\tilde{\theta}, \quad (4.9)$$

logo, as transformações de SUSY acima podem ser reescritas em termos desses espinores de Majorana como:

$$\theta' = \theta + \epsilon \quad (4.10)$$

$$\tilde{\theta}' = \tilde{\theta} + \tilde{\epsilon} \quad (4.11)$$

Supondo um supercampo  $\Phi = \Phi(x^{\hat{\mu}}, \theta, \bar{\theta}, \tilde{\theta}, \bar{\tilde{\theta}})$ , podemos escrever a sua expansão em campos componentes:

$$\begin{aligned} \Phi = & A + \bar{\theta}\chi + \tilde{\theta}\psi + (\bar{\theta}\theta)B + (\bar{\theta}\gamma_{\mu}\gamma_5\theta)A^{\mu} + (\bar{\theta}\gamma_5\theta)S + (\bar{\theta}\tilde{\theta})E + (\bar{\theta}\gamma_{\mu}\gamma_5\tilde{\theta})V^{\mu} + \\ & + (\bar{\tilde{\theta}}\tilde{\theta})G + (\bar{\theta}\tilde{\theta})T + (\bar{\theta}\gamma_{\mu}\gamma_5\tilde{\theta})W^{\mu} + (\bar{\theta}\gamma_5\tilde{\theta})P + (\bar{\theta}\theta)\bar{\theta}\eta + (\bar{\theta}\theta)\bar{\tilde{\theta}}\xi + (\bar{\tilde{\theta}}\tilde{\theta})\bar{\tilde{\theta}}\varsigma + \\ & + (\bar{\tilde{\theta}}\tilde{\theta})\bar{\theta}\lambda + (\bar{\theta}\theta)^2H + (\bar{\theta}\theta)(\bar{\tilde{\theta}}\tilde{\theta})J + (\bar{\theta}\theta)(\bar{\theta}\tilde{\theta})K + (\bar{\tilde{\theta}}\tilde{\theta})^2L + (\bar{\tilde{\theta}}\tilde{\theta})(\bar{\theta}\tilde{\theta})M \end{aligned} \quad (4.12)$$

Como já mencionado, a supersimetria é uma simetria entre bósons e férmions, então uma teoria supersimétrica deve possuir o mesmo número de graus de liberdade bosônicos e fermiônicos. No supercampo (4.12) podemos verificar isso na tabela abaixo:



Bóson	GL	Férmion	GL
A	1	$\chi$	4
B	1	$\psi$	4
$A_\mu$	4	$\eta$	4
S	1	$\xi$	4
E	1	$\varsigma$	4
$V_\mu$	4	$\lambda$	4
G	1		
T	1		
$W_\mu$	4		
P	1		
H	1		
J	1		
K	1		
L	1		
M	1		
	Soma		Soma
	24		24

Após uma transformação de supersimetria neste supercampo ficaríamos com:

$$\begin{aligned}
\delta\Phi = & \varepsilon^\alpha \left[ \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} - i(C^{-1}\gamma^\mu)_{\alpha\beta}\tilde{\theta}^\beta\partial_\mu - (C^{-1}\gamma^5)_{\alpha\beta}\theta^\beta\partial_5 \right] \Phi + \\
& + \tilde{\varepsilon}^\alpha \left[ \frac{\partial}{\partial\tilde{\theta}^\alpha} + i(C^{-1}\gamma^\mu)_{\alpha\beta}\theta^\beta\partial_\mu - (C^{-1}\gamma^5)_{\alpha\beta}\tilde{\theta}^\beta\partial_5 \right] \Phi.
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Podemos agora saber quais os geradores  $Q_\alpha$  dessa transformação através de

$$\delta\Phi = \varepsilon^\alpha [Q_\alpha] \Phi + \tilde{\varepsilon}^\alpha [\tilde{Q}_\alpha] \Phi. \quad (4.14)$$

Nossos geradores serão:

$$Q_\alpha = \left[ \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} - i(C^{-1}\gamma^\mu)_{\alpha\beta} \tilde{\theta}^\beta \partial_\mu - (C^{-1}\gamma^5)_{\alpha\beta} \theta^\beta \partial_5 \right] \quad (4.15)$$

$$\tilde{Q}_\alpha = \left[ \frac{\partial}{\partial\tilde{\theta}^\alpha} + i(C^{-1}\gamma^\mu)_{\alpha\beta} \theta^\beta \partial_\mu - (C^{-1}\gamma^5)_{\alpha\beta} \tilde{\theta}^\beta \partial_5 \right] \quad (4.16)$$

De posse dos geradores de supersimetria, podemos escrever as derivadas covariantes do formalismo como:

$$D_\alpha = \left[ \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} + i(C^{-1}\gamma^\mu)_{\alpha\beta} \tilde{\theta}^\beta \partial_\mu + (C^{-1}\gamma^5)_{\alpha\beta} \theta^\beta \partial_5 \right] \quad (4.17)$$

$$\tilde{D}_\alpha = \left[ \frac{\partial}{\partial\tilde{\theta}^\alpha} - i(C^{-1}\gamma^\mu)_{\alpha\beta} \theta^\beta \partial_\mu + (C^{-1}\gamma^5)_{\alpha\beta} \tilde{\theta}^\beta \partial_5 \right] \quad (4.18)$$

Encontramos aqui a primeira diferença entre o nosso formalismo e o formalismo de pseudosupersimetria estudado por Klein [11]. No formalismo aqui construído encontramos uma derivada covariante que depende explicitamente da componente da derivada relativa à quinta coordenada, ao contrário dos outros casos vistos na literatura onde se usava como derivada covariante a mesma estrutura usada para uma supersimetria  $N = 1 - D = 4$ .

## Álgebras

Aqui mostraremos qual a álgebra dos geradores e derivadas covariantes. Primeiramente podemos notar que quando calculamos os anticomutadores obtemos resultados que dependem tanto da componente da derivada relativa à dimensão extra ( $\partial_5$ ), quanto relativo

à quatro dimensões usuais( $\partial_\mu$ ), ou seja

$$\{Q_\alpha, Q_\rho\} = \{\tilde{Q}_\alpha, \tilde{Q}_\rho\}, \{Q, \tilde{D}\} = -2(C^{-1}\gamma^5)_{\rho\alpha}\partial_5 \quad (4.19)$$

$$\{D_\alpha, D_\rho\} = \{\tilde{D}_\alpha, \tilde{D}_\rho\}, \{D, \tilde{Q}\} = 2(C^{-1}\gamma^5)_{\rho\alpha}\partial_5 \quad (4.20)$$

$$\{Q_\alpha, \tilde{Q}_\rho\} = \{D_\alpha, \tilde{D}_\rho\} = \{Q_\alpha, D_\rho\} = \{\tilde{Q}_\alpha, \tilde{D}_\rho\} = 0 \quad (4.21)$$

nos mostrando mais uma vez que talvez seja mesmo necessária a inclusão da dependência explícita da quinta coordenada tanto nos geradores como na derivada covariante uma vez que nossos campos componentes continuam sendo campos em um espaço  $5D$ .

## 4.3 Supercampos

### 4.3.1 Supercampo Escalar Complexo de Matéria

O supercampo escalar complexo mais completo possível pode ser escrito quando fazemos uma expansão em termos das coordenadas  $\theta$  e  $\tilde{\theta}$ :

$$\begin{aligned} \Phi = & A + \bar{\theta}\chi + \tilde{\theta}\psi + (\bar{\theta}\theta)B + (\bar{\theta}\gamma_\mu\gamma_5\theta)A^\mu + (\bar{\theta}\gamma_5\theta)S + (\tilde{\theta}\tilde{\theta})E + (\bar{\theta}\gamma_\mu\gamma_5\tilde{\theta})V^\mu + \\ & + (\tilde{\theta}\gamma_5\tilde{\theta})G + (\bar{\theta}\tilde{\theta})T + (\bar{\theta}\gamma_\mu\gamma_5\tilde{\theta})W^\mu + (\bar{\theta}\gamma_5\tilde{\theta})P + (\bar{\theta}\theta)\bar{\theta}\eta + (\bar{\theta}\theta)\bar{\theta}\xi + (\tilde{\theta}\tilde{\theta})\bar{\theta}\zeta + \\ & + (\tilde{\theta}\tilde{\theta})\bar{\theta}\lambda + (\bar{\theta}\theta)^2H + (\bar{\theta}\theta)(\tilde{\theta}\tilde{\theta})J + (\bar{\theta}\theta)(\tilde{\theta}\tilde{\theta})K + (\tilde{\theta}\tilde{\theta})^2L + (\tilde{\theta}\tilde{\theta})(\bar{\theta}\tilde{\theta})M \end{aligned} \quad (4.22)$$

Contudo, verificamos que existem no supercampo campos vetoriais e não é interessante que tais campos estejam presentes. Devemos então encontrar os vínculos necessários para o supercampo de modo a obter um supercampo que contenha apenas campos de matéria (Supercampo escalar complexo quiral).

A fim de facilitar os cálculos necessários para a construção do supercampo procuraremos relações a partir das derivadas covariantes para daí então fixarmos nossos vínculos de quiralidade.

$$e^A D_\alpha e^{-A} = \frac{\partial}{\partial \theta^\alpha} = \partial_\alpha \quad (4.23)$$

$$e^B \tilde{D}_\alpha e^{-B} = \frac{\partial}{\partial \tilde{\theta}^\alpha} = \tilde{\partial}_\alpha \quad (4.24)$$

onde

$$A = -i\bar{\theta}\gamma^\mu\tilde{\theta}\partial_\mu - \bar{\theta}\gamma^5\theta\partial_5 \quad (4.25)$$

$$B = -i\bar{\tilde{\theta}}\gamma^\mu\tilde{\theta}\partial_\mu - \bar{\tilde{\theta}}\gamma^5\tilde{\theta}\partial_5 \quad (4.26)$$

### O primeiro vínculo

$$\tilde{D}_\alpha \Phi = 0 \quad (4.27)$$

Reduzimos o nosso supercampo a:

$$\Phi = e^{-B} M \quad (4.28)$$

onde

$$M = A + \bar{\theta}\chi + (\bar{\theta}\theta)B + (\bar{\theta}\gamma_\mu\gamma_5\theta)A^\mu + (\bar{\theta}\gamma_5\theta)S + (\bar{\theta}\theta)\bar{\theta}\eta + (\bar{\theta}\theta)^2H \quad (4.29)$$

## Segundo Vínculo

Nosso supercampo resultante ainda continua contendo campos de gauge. Iremos então fazer outro vínculo de modo que apenas campos de matéria sobrevivam dessa operação.

A fim de não perdemos as duas coordenadas de Grassmann restantes as reescreveremos em termos de espinores de Weyl.

$$\theta = \theta_R + \theta_L \quad (4.30)$$

$$\bar{\theta} = \bar{\theta}_R + \bar{\theta}_L \quad (4.31)$$

onde

$$\theta_R = C\bar{\theta}_L^t \quad (4.32)$$

e

$$\bar{\theta}_R = -\theta_L^t C^{-1} \quad (4.33)$$

As novas derivadas covariantes então ficam:

$$D_L = \partial_L + iC^{-1}\gamma^\mu\tilde{\theta}_L\partial_\mu - \bar{\theta}_L^t\partial_5 \quad (4.34)$$

$$D_R = \partial_R - iC^{-1}\gamma^\mu\tilde{\theta}_R\partial_\mu - \bar{\theta}_R^t\partial_5. \quad (4.35)$$

Reescrevendo o supercampo ficamos com:

$$\begin{aligned}
\Phi = & e^{\bar{\theta}_L \gamma^\mu \tilde{\theta}_L \partial_\mu + \bar{\theta}_R \gamma^\mu \tilde{\theta}_R \partial_\mu + \bar{\theta}_L \gamma^5 \tilde{\theta}_R \partial_5 + \bar{\theta}_R \gamma^5 \tilde{\theta}_L \partial_5} [A + \bar{\theta}_L \chi_R + \bar{\theta}_R \chi_L + \bar{\theta}_L \theta_R B + \bar{\theta}_R \theta_L B \\
& + \bar{\theta}_L \gamma^\mu \gamma^5 \theta_L A_\mu + \bar{\theta}_R \gamma^\mu \gamma^5 \theta_R A_\mu - \bar{\theta}_L \theta_R S + \bar{\theta}_R \theta_L S + (\bar{\theta}_L \theta_R) \bar{\theta}_L \eta_R + (\bar{\theta}_L \theta_R) \bar{\theta}_R \eta_L + \\
& + (\bar{\theta}_R \theta_L) \bar{\theta}_L \eta_R + (\bar{\theta}_R \theta_L) \bar{\theta}_R \eta_L + (\bar{\theta}_L \theta_R) (\bar{\theta}_L \theta_R) H + (\bar{\theta}_L \theta_R) (\bar{\theta}_R \theta_L) H] \quad (4.36)
\end{aligned}$$

O segundo vínculo é:

$$D_L \Phi = 0 \quad (4.37)$$

Analogamente ao primeiro vínculo vamos procurar uma relação a partir da derivada covariante  $D_L$  a fim de facilitar o cálculo do nosso supercampo novamente vinculado.

$$e^C D_L e^{-C} = \partial_L \quad (4.38)$$

onde  $C = -i \bar{\theta}_L \gamma^\mu \tilde{\theta}_L \partial_\mu - \bar{\theta}_L \theta_R \partial_5$ .

O supercampo escalar de matéria então terá sua forma final:

$$\Phi = e^{-C} N \quad (4.39)$$

onde

$$N = A + \bar{\theta}_L \chi_R + \bar{\theta}_L \theta_R F \quad (4.40)$$

Podemos agora escrever um novo supercampo baseado na soma de dois supercampos tipo (4.40):

$$\Xi = \Phi + \Lambda \quad (4.41)$$

onde  $\Lambda = e^{-C} [A + \bar{\theta}_R \chi_L + \bar{\theta}_R \theta_L F]$ . O supercampo  $\Xi$  pode ser escrito em componentes

como:

$$\Xi = e^{i\bar{\theta}\gamma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu + \bar{\theta}\gamma^5\bar{\theta}\partial_5}[\phi + \bar{\theta}\psi + (\bar{\theta}\theta)F] \quad (4.42)$$

que é o nosso supercampo escalar quiral de matéria.

### 4.3.2 O modelo de Wess-Zumino $N = 1 - D = 5$

Analogamente ao tratamento dado na seção (2.1.1), iremos agora escrever o modelo de Wess-Zumino para uma teoria com uma supersimetria e uma dimensão extra. Nosso tratamento inicial também será com uma teoria que tenha um multiplete escalar. Como já vimos, o nosso supercampo escalar quiral tem como componentes três campos, um campo escalar complexo  $\phi$ , um férmion de majorana  $\psi$  e um campo escalar auxiliar  $F$ .

$$S = \int d^5x(\mathcal{L}_s + \mathcal{L}_f + \mathcal{L}_{aux}), \quad (4.43)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_s &= \partial_M\phi\partial^M\phi^* = \partial_m\phi\partial^m\phi^* + \partial_5\phi\partial^5\phi^* \\ \mathcal{L}_f &= i\bar{\psi}\Gamma^M\partial_M\psi = i\bar{\psi}\Gamma^m\partial_m\psi + i\bar{\psi}\Gamma^5\partial_5\psi \\ \mathcal{L}_{aux} &= F^*F \end{aligned} \quad (4.44)$$

Uma vez que supersimetria relaciona bósons e férmions é natural que uma transformação em um campo escalar envolva um campo fermiônico e vice-versa. De fato

$$\delta\phi = \varepsilon^\alpha\psi_\alpha. \quad (4.45)$$

$$\delta\psi_\alpha = -i(\bar{\varepsilon}\Gamma^A)_\alpha\partial_A\phi + \varepsilon_\alpha F \quad (4.46)$$

Como o campo  $F$  é auxiliar, ele não contribui com graus de liberdade on-shell. Podemos então escolher sua transformação de SUSY como:

$$\delta F = -i\bar{\varepsilon}\Gamma^A\partial_A\psi \quad (4.47)$$

### Ação supersimétrica em supercampos

A ação em supercampos do modelo de Wess-Zumino é dada por  $S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$ , onde:

$$S_1 = \int d^5x \int d^2\bar{\theta} \int d^2\tilde{\theta}\tilde{\Xi}\Xi \quad (4.48)$$

$$S_2 = \int d^5x \int d\bar{\theta} \int d\theta\bar{D}\bar{\Xi}D\Xi \quad (4.49)$$

$$S_3 = \int d^5x \int d\bar{\theta} \int d\theta\bar{D}\bar{\Xi}\tilde{D}\Xi \quad (4.50)$$

$$S_4 = \int d^5x \int d\bar{\theta} \int d\theta\bar{\Xi}\tilde{D}\tilde{D}\Xi \quad (4.51)$$

que nos fornecem em componentes



$$\begin{aligned}
S_1 &\rightarrow \partial_m \phi \partial^m \phi^* \\
S_2 &\rightarrow \partial_5 \phi \partial^5 \phi^*; F^* F \\
S_3 &\rightarrow i \bar{\psi} \gamma^m \partial_m \psi \\
S_2 &\rightarrow \bar{\psi} \gamma^5 \partial_5 \psi
\end{aligned} \tag{4.52}$$

dentre outros termos vindos da supersimetrização da teoria.

### 4.3.3 Supercampo de gauge

Para a construção do supercampo de gauge também utilizaremos a imposição de vínculos ao supercampo escalar mais completo, o qual mostramos em (4.22). O vínculo usado será:

$$\tilde{D}_\alpha \Phi = 0 \tag{4.53}$$

onde usamos a relação

$$e^B \tilde{D}_\alpha e^{-B} = \frac{\partial}{\partial \tilde{\theta}^\alpha} = \tilde{\partial}_\alpha \tag{4.54}$$

com

$$B = -i \bar{\theta} \gamma^\mu \tilde{\theta} \partial_\mu - \bar{\tilde{\theta}} \gamma^5 \tilde{\theta} \partial_5 \tag{4.55}$$

para facilitar nossos cálculos. Reduzimos o nosso supercampo a:

$$\mathcal{V} = e^{i \bar{\theta} \gamma^\mu \tilde{\theta} \partial_\mu + \bar{\tilde{\theta}} \gamma^5 \tilde{\theta} \partial_5} [A + \bar{\theta} \chi + (\bar{\theta} \theta) B + (\bar{\theta} \gamma_\mu \gamma_5 \theta) A^\mu + (\bar{\theta} \gamma_5 \theta) A_5 + (\bar{\theta} \theta) \bar{\theta} \eta + (\bar{\theta} \theta)^2 H] \tag{4.56}$$

## 4.4 Ação supersimétrica

Nosso objetivo aqui é partindo do supercampo vetorial descrever uma teoria manifestamente supersimétrica em  $D = 5$ . Nosso supercampo vetorial tem como componentes Partiremos de um modelo composto por três campos escalares  $(\phi, B, H)$ , um pseudoescalar  $(A_5)$ , dois férmions de Majorana  $(\chi, \eta)$  e um campo vetorial  $(A_\mu)$ . A ação em supercampos é dada por  $S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 + S_6 + S_7$ , onde:

$$S_1 = \int d^5x \int d^2\theta d^2\tilde{\theta} (\bar{D}D\mathcal{V})(\bar{D}D\mathcal{V}) \quad (4.57)$$

$$S_2 = \int d^5x \int d^2\theta d^2\tilde{\theta} (\bar{D}\tilde{D}\mathcal{V})(\bar{D}\tilde{D}\mathcal{V}) \quad (4.58)$$

$$S_3 = \int d^5x \int d\theta d\tilde{\theta} (\bar{D}\mathcal{V})(\tilde{D}\mathcal{V}) \quad (4.59)$$

$$S_4 = \int d^5x \int d\theta d\tilde{\theta} (\bar{D}\mathcal{V})(\tilde{D}\mathcal{V}) \quad (4.60)$$

$$S_5 = \int d^5x \int d^4\theta (\tilde{D}\mathcal{V})(D\mathcal{V}) \quad (4.61)$$

$$S_6 = \int d^5x \int d^4\theta (\bar{D}\tilde{D}\mathcal{V})(\bar{D}^2\mathcal{V}) \quad (4.62)$$

$$S_7 = \int d^5x \int d^4\theta (D^2\mathcal{V})(\bar{D}^2\mathcal{V}) \quad (4.63)$$

que nos fornecem

$$\begin{aligned} S_1 &\rightarrow F_{mn}F^{mn}; \partial_m A_5 \partial^m A_5 \\ S_2 &\rightarrow F_{m5}F^{m5}; \partial_5 A_5 \partial^5 A_5 \\ S_3 &\rightarrow \bar{\chi}\gamma^5 \partial_5 \chi \\ S_4 &\rightarrow \bar{\chi}\gamma^m \partial_m \chi \\ S_5 &\rightarrow \bar{\eta}\gamma^m \partial_m \eta \\ S_1 &\rightarrow \bar{\eta}\gamma^5 \partial_5 \eta \\ S_1 &\rightarrow H^* H \end{aligned} \quad (4.64)$$

$$S = \int d^5x (\mathcal{L}_s + \mathcal{L}_f + \mathcal{L}_{aux}), \quad (4.65)$$

# Capítulo 5

## Efeitos de fase quântica

Tanto o efeito Aharonov-Bohm (AB) quanto o efeito Aharonov-Casher (AC) são manifestações quânticas da matéria. Tais efeitos só ocorrem devido à diferença de fase que causam na função de onda associada às partículas envolvidas. Neste capítulo será feita uma pequena revisão sobre efeitos de fase quântica com ênfase no efeito Aharonov-Casher. Assim, nenhum resultado novo será apresentado. Contudo, ele é de fundamental importância uma vez que nos permite criar um contexto para que o capítulo seguinte, **Geração do termo de Aharonov-Casher numa teoria supersimétrica**, se desenvolva.

### 5.1 O Efeito Aharonov-Bohm

A característica ondulatória das partículas pode ser observada quando fazemos bombardeio delas sobre fendas. O resultado de tal experimento é que no anteparo aparecerá uma figura de interferência indicando valores de máximos e mínimos derivados de interferências construtivas e destrutivas, respectivamente.

Imaginemos agora colocar entre as fendas e o anteparo um campo magnético  $\vec{B}$ <sup>1</sup>, bem localizado e bem definido numa superfície fechada blindada, ou seja, que tem a capacidade

---

<sup>1</sup>Supomos que o campo magnético  $\vec{B}$  está saindo da página.

de não deixar a partícula sentir a sua presença. Mesmo não sentindo o campo magnético, podemos dizer que matematicamente <sup>2</sup> existe um potencial vetor  $\vec{A}$  presente em todo o espaço que circunda o campo  $\vec{B}$ .

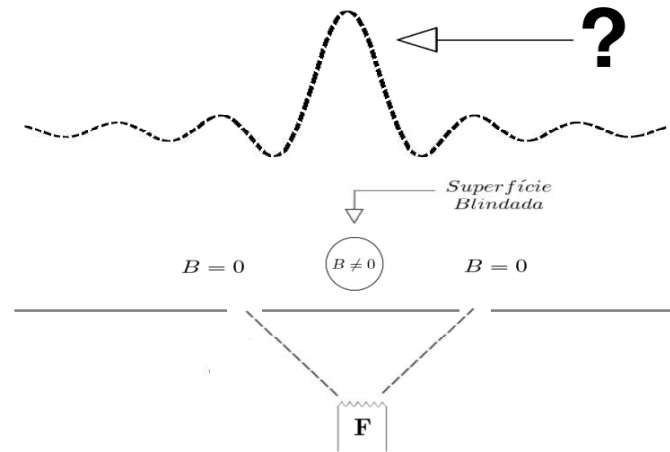


Figura 5-1: Experimento de difração de partículas na presença de campo magnético.

A presença desse potencial vetor, mesmo na ausência de exposição das partículas ao campo magnético fizeram com que Aharonov e Bohm se deparassem com os seguintes questionamentos:

- O campo magnético  $\vec{B}$  vai influenciar na onda associada à partícula?
- Será possível que o potencial vetor tenha significado físico e influencie a partícula?
- O que acontecerá com a figura de interferência?

Resumindo, nosso trabalho é analisar a fase que a onda associada à partícula ganha ao passar por um experimento de dupla fenda.

Uma vez trabalhando com mecânica quântica, utilizaremos como ferramenta matemática o formalismo de integrais de trajetória desenvolvido por Richard Feynman [31]. Para isso, dividiremos a trajetória das partículas em  $N$  intervalos de espaço e tempo de modo que

<sup>2</sup>Podemos ver essa relação matemática pela equação de Maxwell  $\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B}$ .

possamos tratar a fonte como ponto inicial,  $(q_0, t_0)$ , e o anteparo como ponto final da trajetória da partícula,  $(q_N, t_N)$ .

Consideremos então um propagador que tenha função de levar o sistema quântico do estado inicial  $(q_0, t_0)$  ao estado final  $(q_N, t_N)$ :

$$K(q_N, t_N, q_0, t_0) = \int_{q_1}^{q_{N-1}} D_F e^{+\frac{i}{\hbar} S(q(t), q_N, q_0, t)} \quad (5.1)$$

onde

$$S(q(t), q_N, q_0, t) = \int_0^T L(\dot{q}(t), q(t), t) dt. \quad (5.2)$$

Este propagador é conhecido como a integral de trajetória de Feynman.

Para que a partícula saia da fonte e chegue ao anteparo ela pode escolher um de dois caminhos, ou seja, pode passar pela fenda da direita ou pela da esquerda. Nos é então requerido o uso da amplitude de transição de sair da fonte e chegar ao anteparo por ambos os lados.

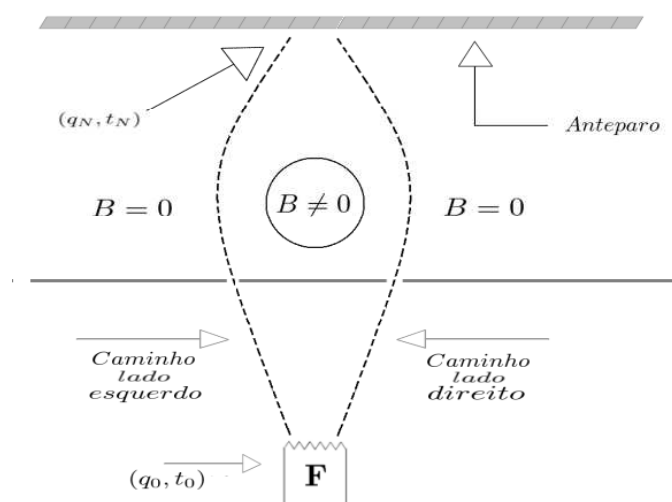


Figura 5-2: As partículas geradas na fonte,  $(q_0, t_0)$ , passam pelas fendas. Elas podem passar pela direita ou pela esquerda até chegar ao anteparo,  $(q_N, t_N)$ .

O passo que tomaremos agora é saber qual Lagrangeana devemos usar a fim de descrever nossos propagadores. Sabemos que a partícula não sente o campo magnético mas se o potencial vetor tivesse algum significado físico essa partícula poderia sofrer alguma influência do campo magnético, uma vez que ele está presente em todo o espaço que o circunda. É conveniente então que a nossa Lagrangeana tenha dependência explícita de  $\vec{A}$ , podemos pensar nela como sendo:

$$L = T - Q\Phi + Q(\vec{v} \cdot \vec{A}) \quad (5.3)$$

onde  $\vec{v}$  pode ser escrito como a variação temporal do incremento de caminho  $d\vec{s}$ . Então, substituindo (5.3) em (5.2) teremos:

$$S(q(t), q_N, q_0, t) = \int_0^\tau (T - Q\Phi)dt + Q \int_0^\tau (\vec{v} \cdot \vec{A})dt, \quad (5.4)$$

Logo, fazendo as devidas mudanças nos limites de integração, temos que

$$S(q(t), q_N, q_0, t) = \int_0^\tau (T - Q\Phi)dt + Q \int_{q_0}^{q_N} \vec{A} \cdot d\vec{s}. \quad (5.5)$$

Podemos agora escrever a transição espaço-temporal da partícula:

$$K(q_N, t_N, q_0, t_0) = \Delta e^{\frac{iQ}{\hbar} \int_{q_0}^{q_N} \vec{A} \cdot d\vec{s}} \quad (5.6)$$

onde

$$\Delta = \int_{q_1}^{q_{N-1}} D_F \frac{i}{\hbar} \int_0^T (T - Q\Phi) dt. \quad (5.7)$$

Caso a partícula passe pelo lado direito:

$$\begin{aligned} K(q_N, t_N, q_0, t_0)_D &= \Delta e^{\frac{iQ}{\hbar} \int_{q_0}^{q_N} \vec{A} \cdot d\vec{s}} \\ &= \Delta e^{\frac{iQ}{\hbar} \int_{q_0}^{q_N} A ds}, \end{aligned} \quad (5.8)$$

uma vez que por esse caminho podemos observar que o produto interno entre os vetores  $\vec{A}$  e  $d\vec{s}$  é positivo,

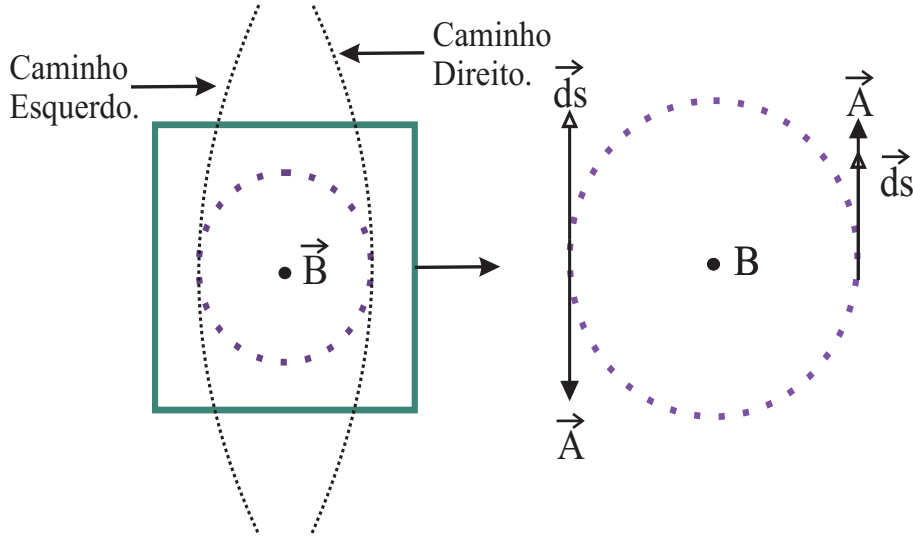


Figura 5-3: Experiência de difração de partículas onde existe um campo magnético que não interage diretamente com a partícula. Passando pela direita o elemento de caminho terá o mesmo sentido que o potencial vetor e passando pela esquerda, sentido contrário.

$$\int_{q_0}^{q_N} \vec{A} \cdot d\vec{s} = \int_{q_0}^{q_N} A ds, \quad (5.9)$$

e isso é fundamental para justificar a fase positiva que a onda relacionada à partícula



ganha ao passar pelo caminho direito. De maneira análoga podemos verificar que para o caminho esquerdo o produto interno entre  $\vec{A}$  e  $d\vec{s}$  é negativo,

$$\int_{q_0}^{q_N} \vec{A} \cdot d\vec{s} = - \int_{q_0}^{q_N} A ds. \quad (5.10)$$

Assim, o propagador quando esse caminho é utilizado tem a seguinte forma:

$$K(q_N, t_N, q_0, t_0)_E = \Delta e^{\frac{iQ}{\hbar} \int_{q_0}^{q_N} A ds}, \quad (5.11)$$

Ao contrário do que acontece com a onda que passa pelo lado direito do campo, a onda que passa pela esquerda ganha uma fase negativa. Isso também ocorre graças a presença do potencial vetor.

Vemos então que a presença do potencial vetor acarretará uma diferença de fase entre as ondas que passam pelo lado direito e pelo lado esquerdo do campo magnético. A onda que passa pelo lado direito do campo ganha uma fase positiva, enquanto que a onda que passa pelo lado esquerdo do campo magnético ganha uma fase de onda negativa. Assim, mesmo quando a partícula não sente diretamente a presença do campo magnético, ela sentirá o seu efeito através do potencial vetor que por sua vez deixa de ser um artifício matemático e passa a ser um parâmetro físico. Este efeito é sem dúvida muito sutil pois ele vai aparecer na fase de uma onda que só existe nos termos da mecânica quântica. Experimentalmente falando, o que ocorre é um deslocamento na figura de interferência devido ao ganho dessa nova fase.

Para sabermos se em um determinado ponto do anteparo ocorrerá um máximo ou um mínimo de probabilidade temos que determinar a diferença de fase entre as ondas que passam pela direita e que passam pela esquerda. Uma onda que passe pela direita pode ser descrita por:

$$\begin{aligned}
\psi(q_N, t_N, q_0, t_0)_D &= \int_{-\infty}^{\infty} K(q_N, t_N, q_0, t_0)_D \psi(q_0, t_0) dq_0 \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \Delta\psi(q_0, t_0) dq_0 e^{(\frac{iQ}{\hbar} \int_{q_0}^{q_N} Ads)}
\end{aligned} \tag{5.12}$$

onde o termo entre parênteses é a fase ganha devido ao potencial vetor. Para uma onda que passe pela esquerda obteremos

$$\psi(q_N, t_N, q_0, t_0)_E = \int_{-\infty}^{\infty} \Delta\psi(q_0, t_0) dq_0 e^{(-\frac{iQ}{\hbar} \int_{q_0}^{q_N} Ads)} \tag{5.13}$$

e a fase adquirida será o negativo da fase da onda que passa pela direita. Podemos agora determinar a diferença de fase  $\delta\{$  que ocorreu devido a presença de um potencial vetor:

$$\delta f \left( \frac{Q}{\hbar} \int_{q_0}^{q_N} Ads \right)_D - \left( \frac{Q}{\hbar} \int_{q_0}^{q_N} Ads \right)_E \tag{5.14}$$

logo,

$$\delta f = \frac{Q}{\hbar} \left[ \int_{q_0}^{q_N} Ads - \int_{q_0}^{q_N} Ads \right], \tag{5.15}$$

invertendo os limites de integração do segundo termo

$$\delta f = \frac{Q}{\hbar} \left[ \int_{q_0}^{q_N} Ads - \int_{q_N}^{q_0} Ads \right], \tag{5.16}$$

que resulta em

$$\delta f = \frac{Q}{\hbar} \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{s}, \tag{5.17}$$

assim, a diferença de fase que procuramos pode ser escrita em termos de uma integral

fechada em todo o circuito. Usando o teorema de Stokes,

$$\int_S \vec{\nabla} \times \vec{A} \cdot \vec{n} da = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{s}, \quad (5.18)$$

$$\int_S \vec{B} \cdot \vec{n} da = \Phi_B \quad (5.19)$$

$$\Phi_B = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{s}, \quad (5.20)$$

onde  $\Phi_B$  é o fluxo magnético que passa pela superfície blindada. A diferença de fase poderá então ser reescrita como função do fluxo magnético:

$$\delta f = \frac{Q}{\hbar} \Phi_B. \quad (5.21)$$

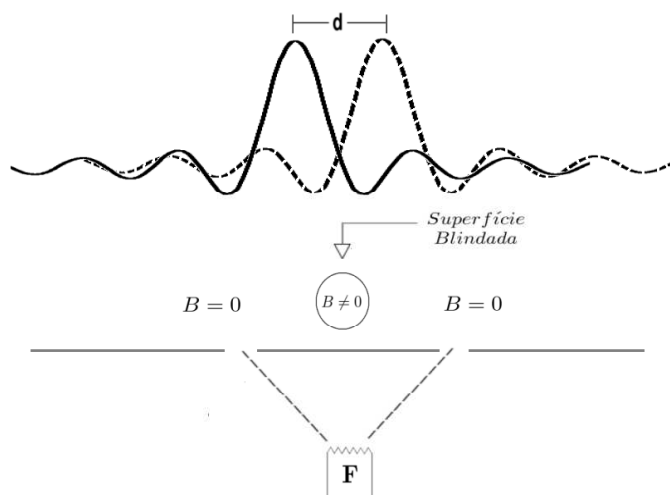


Figura 5-4: Experiência de difração de partículas que mostra o efeito Aharonov-Bohm.

Enfim, o efeito Aharonov-Bohm é o ganho de fase que a onda associado à partícula sofre quando a partícula encontra um potencial vetor em seu caminho. A coisa mais importante deste efeito é a descoberta de que o potencial vetor tem, ao contrário do que se pensava, uma realidade física muito importante.

## 5.2 O Efeito Aharonov-Casher

Aharonov e Bohm [13] encontraram uma identidade física para o potencial vetor  $\vec{A}$  através da análise da figura de difração obtida ao bombardearmos uma fenda dupla com elétrons. Eles mostraram que os elétrons mesmo sem sentir diretamente o efeito de um campo magnético, colocado entre a fonte e o anteparo, têm a sua figura de difração deslocada. Essa mudança pode ser atribuída à presença do potencial vetor.

Em 1984 Aharonov e Casher[32] observaram que a lagrangiana usada por Aharonov e Bohm estava incompleta uma vez que não contemplava o movimento relativo entre o campo magnético e partícula carregada. De posse da Lagrangeana corrigida o experimento de AB foi surpreendentemente invertido. Tal inversão se deu porque ao invés de difratarmos elétrons sem momento magnético o experimento passou a ser o de difração de partículas neutras possuidoras de momento magnético.

Uma partícula que sofre o efeito AC deve obrigatoriamente ter momento magnético uma vez que o que observamos nele é uma interação entre o campo elétrico e o momento magnético, diferentemente do efeito AB onde a fase que a função de onda ganha está diretamente ligada à interação entre a carga e o potencial vetor magnético. Podemos então dizer que o efeito Aharonov-Casher, que sofre a ação de uma linha de carga, é simétrico ao efeito Aharonov-Bohm, onde a carga sofre a ação de um campo magnético.

Para chegar ao efeito Aharonov-Casher vamos considerar um solenóide neutro suficientemente grande, tal que o campo magnético produzido por ele esteja totalmente localizado no seu interior, o solenóide interage com uma carga que produz um campo elétrico. Uma vez interagindo teremos que encontrar a lagrangiana deste sistema, carga-solenóide que represente esta interação, e daí calcularmos a ação sofrida pelo solenóide em seu caminho pois ela que é a responsável direta pelo ganho de fase.

A situação que descrevemos de um solenóide interagindo com uma carga será aproximada como sendo uma partícula neutra com momento magnético interagindo com um

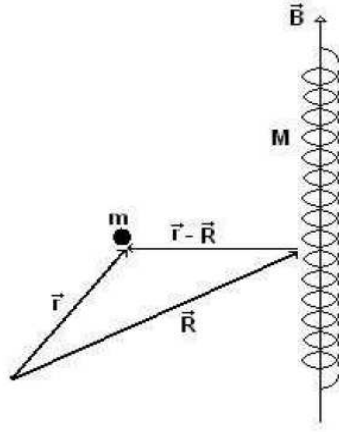


Figura 5-5: Solenóide neutro, suficientemente grande de massa  $M$ , localizado na posição  $\mathbf{R}$  em movimento relativo a uma carga  $Q$  de massa  $m$  localizada na posição  $\mathbf{r}$ .

campo elétrico, onde o solenóide representa esta partícula e o campo elétrico é inerente à linha carregada. Então, daí adiante teremos somente uma partícula sem carga interagindo com um campo elétrico através de seu momento magnético.

Considere uma carga  $Q$  de massa  $m$ , localizada na posição  $\vec{r}$  e um solenóide neutro e suficientemente grande de massa  $M$ , localizado na posição  $\vec{R}$ . O solenóide com velocidade  $\dot{\vec{R}}$  e a carga com velocidade  $\dot{\vec{r}}$  estão em movimento relativo. Nesse movimento, o solenóide produz um potencial vetor  $\vec{A}$  em todo o espaço de modo que a carga, assim como no efeito AB, não sinta o campo magnético mas seja afetada por esse potencial. Assim, devemos também expressar a Lagrangeana do fenômeno em termos da interação entre a carga e o potencial vetor. Num primeiro momento nos convém usar a eq.(5.3) que para esse sistema fica:

$$L = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{M\dot{R}^2}{2} + Q\vec{A}(\vec{r}, \vec{R}) \cdot \dot{\vec{r}} \quad (5.22)$$

onde

$$\vec{A}(\vec{r}, \vec{R}) = \vec{A}(\vec{r} - \vec{R}) \quad (5.23)$$

mostrando que o potencial vetor depende da posição relativa entre a carga e o solenóide.

Mas podemos fazer a seguinte pergunta: (5.22) realmente descreve o sistema? Para responder isso teremos que verificar se a Lagrangeana é invariante de gauge e ainda se a força exercida pela carga no solenóide tem mesmo módulo que a força que o solenóide exerce na carga, reciprocidade que a simetria do sistema impõe.

As equações de movimento para a carga podem ser dadas por:

$$\frac{\partial L}{\partial r_j} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_j} \right) = 0, \quad (5.24)$$

onde

$$\frac{\partial L}{\partial r_j} = Q \frac{\partial A_i(\vec{r}, \vec{R})}{\partial r_j} \dot{r}_i \quad (5.25)$$

e

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_j} \right) = m\ddot{r}_j + Q \frac{\partial A_j(\vec{r}, \vec{R})}{\partial r_i} \dot{r}_i + Q \frac{\partial A_j(\vec{r}, \vec{R})}{\partial R_i} \dot{R}_i. \quad (5.26)$$

Logo, a força que atua na carga pode ser escrita como:

$$m\ddot{r}_j = Q \frac{\partial A_i(\vec{r}, \vec{R})}{\partial r_j} \dot{r}_i - Q \frac{\partial A_j(\vec{r}, \vec{R})}{\partial r_i} \dot{r}_i + Q \frac{\partial A_i(\vec{r}, \vec{R})}{\partial R_i} \dot{R}_i. \quad (5.27)$$

Repetiremos esse processo para o solenóide e encontraremos para a força que atua nele a expressão seguinte:

$$M\ddot{R}_j = Q \frac{\partial A_i(\vec{r}, \vec{R})}{\partial R_j} \dot{r}_i. \quad (5.28)$$

Fica então claro que usando a Lagrangeana (5.3) as forças que atuam no solenóide e na carga são muito diferentes. Além disso, (5.27) e (5.28) não são invariantes de gauge. Assim, se faz necessária uma correção da Lagrangeana para o sistema em estudo.

### 5.2.1 Lagrangeana corrigida

A correção da Lagrangeana é requerida e para isso apresentaremos um novo termo que conterá a velocidade do solenóide. Ficaremos então com a seguinte Lagrangeana:

$$L = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{m\dot{R}^2}{2} + Q\vec{A}(\vec{r}, \vec{R}) \cdot [\dot{\vec{r}} - \dot{\vec{R}}]. \quad (5.29)$$

Usando a nova Lagrangeana podemos novamente calcular as forças que atuam na carga e no solenóide. Para a carga:

$$m\ddot{r}_j = Q \left( \left[ \frac{\partial A_j(\vec{r}, \vec{R})}{\partial R_i} - \frac{\partial A_i(\vec{r}, \vec{R})}{\partial R_j} \right] (\dot{r}_i - \dot{R}_i) \right) \quad (5.30)$$

que pode ser reescrita em termos do campo magnético e da velocidade relativa entre o solenóide e a carga, usando  $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ , como

$$m\ddot{\vec{r}} = Q(\dot{\vec{r}} - \dot{\vec{R}}) \times \vec{B}. \quad (5.31)$$

Já para o solenóide encontraríamos:

$$m\ddot{R}_j = Q \left( \left[ \frac{\partial A_j(\vec{r}, \vec{R})}{\partial R_i} - \frac{\partial A_i(\vec{r}, \vec{R})}{\partial R_j} \right] (\dot{R}_i - \dot{r}_i) \right) \quad (5.32)$$

a qual também pode ser reescrita como

$$m\vec{\ddot{R}} = Q(\vec{\dot{R}} - \vec{\dot{r}}) \times \vec{B}. \quad (5.33)$$

Comparando (5.31) com (5.33) teremos

$$m\vec{\ddot{r}} = Q(\vec{\dot{r}} - \vec{\dot{R}}) \times \vec{B} = -m\vec{\ddot{R}} \quad (5.34)$$

onde fica claro que a força apresenta uma simetria e a invariância de gauge também é preservada <sup>3</sup>. Assim, é melhor fazer uso dessa Lagrangeana uma vez que ela descreve bem o sistema.

Agora consideremos um solenóide como uma partícula neutra com momento magnético  $\vec{\mu}$  girando ao redor de uma carga  $Q$  que gera um campo elétrico  $\vec{E}$ , teremos então uma interação entre o campo elétrico e esse momento magnético. É então coerente expressar a Lagrangeana em termos dessa interação ao invés de deixar em função da interação entre a carga e o potencial vetor.

$$L = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{m\dot{R}^2}{2} + Q\vec{A}(\vec{r} - \vec{R}) \cdot \vec{r} - (\vec{E} \times \vec{\mu}) \cdot \vec{R}. \quad (5.35)$$

Aqui, a partícula carregada de massa  $m$  interage com o potencial vetor através de sua carga e a partícula neutra de massa  $M$  interagem com o campo elétrico através do seu

---

<sup>3</sup>Também é possível mostrar que com essa Lagrangeana o momento desse sistema se conserva.



momento  $\vec{\mu}$ .

### 5.2.2 Diferença de fase no efeito AC

Vimos que o efeito AB nos mostra que uma partícula carregada é difratada por uma região onde se encontra um campo magnético. Se pensarmos em partículas neutras com momento magnético sendo difratadas por uma região onde existe um campo elétrico oriundo de uma carga  $Q$  será que conseguiremos identificar alguma diferença de fase na função de onda dessa nova partícula?

A fase que a função de onda de uma partícula acumula em todo o caminho é a ação sofrida por ela ao longo do mesmo. Para saber qual é a ação sofrida, devemos conhecer a partícula e ver os tipos de interação que ela sofre. Considere duas partículas em movimento relativo. A partícula 1 possui carga  $Q_1$ , massa  $m_1$  e não possui campo magnético. A partícula 2 não possui carga, tem massa  $m_2$  e momento magnético  $\vec{\mu}$ , as velocidades são  $\vec{v}_1$  e  $\vec{v}_2$  respectivamente.

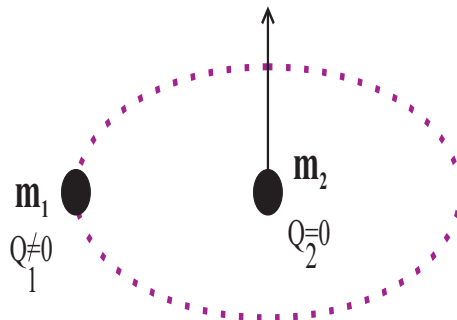


Figura 5-6: Movimento relativo de duas partículas, uma com carga  $Q$  sem momento magnético e a outra neutra mas com momento  $\mu$ .

Nessa seção, como estamos a fim de ver o efeito AC, nos concentraremos na dinâmica da partícula 2, podemos descrevê-la através da seguinte ação:

$$S(s(t), s_f, s_i, t) = \int_0^T L(V(t), s_t, t) dt \quad (5.36)$$

onde  $s(t)$  é o espaço percorrido em função do tempo,  $s_i$  e  $s_f$  são respectivamente o ponto inicial e final da partícula, respectivamente. Como a partícula 2 ao passar pela partícula 1, ou seja pela carga, sente o campo elétrico produzido por ela então ela possui um momento magnético que por sua vez irá interagir com esse campo elétrico. Assim, a Lagrangeana da partícula sem carga será:

$$L = \frac{m_2 v_2^2}{2} - \vec{v}_2 \cdot (\vec{E} \times \vec{\mu}), \quad (5.37)$$

que podemos usar na eq.(5.36),

$$S(s(t), s_f, s_i, t) = \int_0^T \left[ \frac{m_2 v_2^2}{2} - \vec{v}_2 \cdot (\vec{E} \times \vec{\mu}) \right] dt. \quad (5.38)$$

Analogamente ao que foi feito para o efeito AB iremos analisar a diferença de fase causada quando a partícula 2 passa pelo lado direito ou pelo lado esquerdo da partícula carregada.

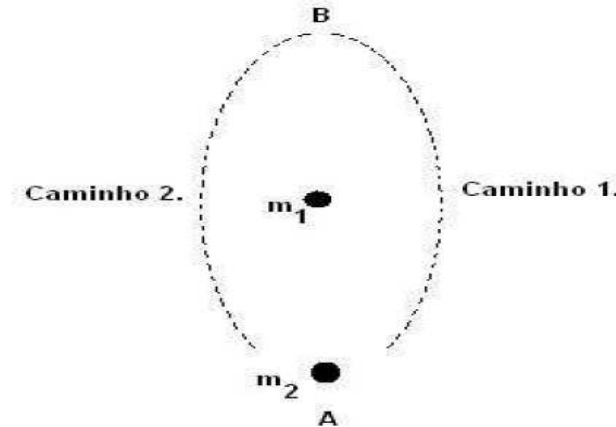


Figura 5-7: Possibilidades de caminhos de uma partícula neutra

Sabendo que a velocidade da partícula pode ser reescrita como

$$\vec{v}_2 = \frac{d\vec{s}_2}{dt} \quad (5.39)$$

podemos reescrever nossa ação de modo que ela dependa do produto interno entre a diferencial de caminho e o vetor resultante do produto vetorial do campo elétrico com o momento magnético,

$$S(s(t), s_f, s_i, t) = \int_0^T \frac{m_2 v_2^2}{2} dt - \int_{s_i}^{s_f} d\vec{s}_2 \cdot (\vec{E} \times \vec{\mu}). \quad (5.40)$$

Supondo que a carga  $Q$  seja positiva teremos que as linhas de campo elétrico estão saindo da mesma. A pergunta agora é: como ficará o produto interno  $[d\vec{s}_2 \cdot (\vec{E} \times \vec{\mu})]$  dependendo de por qual lado a partícula 2 passa pela partícula 1?

Quando a escolha for passar pelo lado direito da carga podemos observar que

$$\begin{aligned} \vec{E} &= E \hat{i} \\ \vec{\mu} &= \mu \hat{k}, \end{aligned} \quad (5.41)$$

que nos fornece

$$\vec{E} \times \vec{\mu} = -E\mu \hat{j}. \quad (5.42)$$

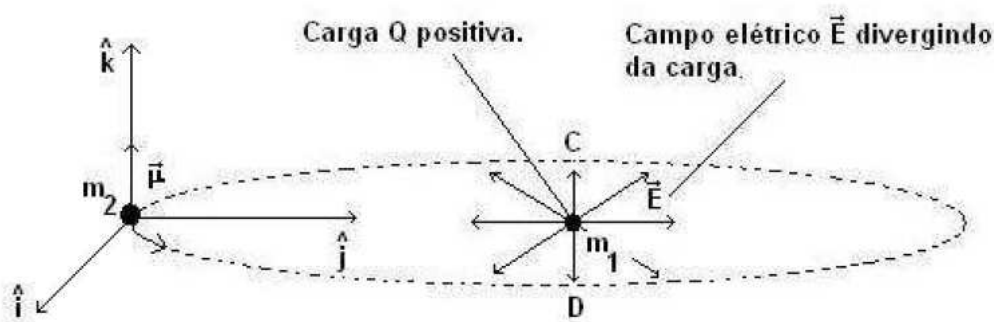


Figura 5-8: O momento magnético da partícula de massa  $m_2$  é perpendicular ao campo elétrico produzido pela partícula de massa  $m_1$  e carga  $Q$ , supostamente positiva.

Já se fizermos a escolha de passagem pela esquerda

$$\begin{aligned}\vec{E} &= -E\hat{i} \\ \vec{\mu} &= \mu\hat{k},\end{aligned}\tag{5.43}$$

podemos verificar que nosso produto vetorial é

$$\vec{E} \times \vec{\mu} = E\mu\hat{j}.\tag{5.44}$$

Agora só nos falta saber o comportamento do vetor  $d\vec{s}_2$  com relação ao caminho escolhido.

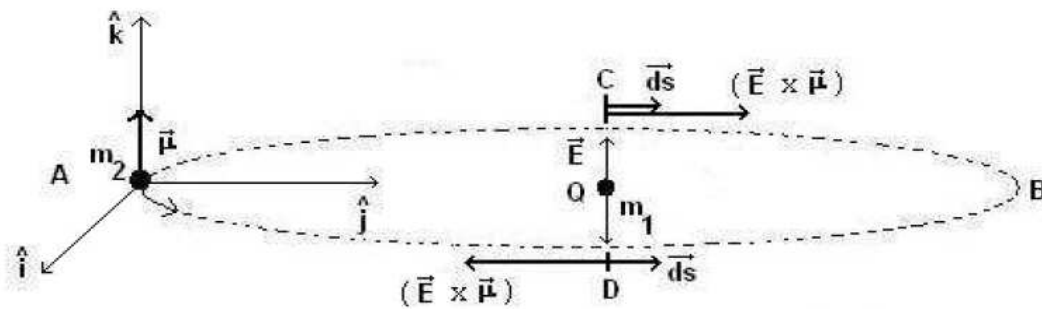


Figura 5-9: Diagramas de comportamento do vetor deslocamento e do vetor composto pelo campo elétrico e pelo momento de dipolo magnético.

Pela figura 5-9 podemos ver que tanto faz a partícula passar pelo lado direito ou esquerdo que o vetor  $d\vec{s}_2$  poderá ser escrito como  $d\vec{s}_2 = ds\hat{j}$ . Resumindo:

- Escolha do lado direito:

$$d\vec{s}_2(\vec{E} \times \vec{\mu}) = -E\mu ds;\tag{5.45}$$

e a ação fica

$$S(s(t), s_f, s_i, t)_D = \int_0^T \frac{m_2 v_2^2}{2} dt + \int_{s_i}^{s_f} E \mu ds_2. \quad (5.46)$$

• Lado esquerdo:

$$d\vec{s}_2(\vec{E} \times \vec{\mu}) = E \mu ds; \quad (5.47)$$

e a ação

$$S(s(t), s_f, s_i, t)_E = \int_0^T \frac{m_2 v_2^2}{2} dt - \int_{s_i}^{s_f} E \mu ds_2. \quad (5.48)$$

Assim, a diferença de fase entre a função de onda da partícula quando ela sai do ponto  $A$  chegando no ponto  $B$  pode ser calculada. A função de onda da partícula pode ser escrita como:

$$\psi(s, T, 0)_{D,E} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{s_1}^{s_{N-1}} D_F e^{\frac{i}{\hbar} S(s(t), s_f, s_i t)} \psi(s_i, 0) d\vec{s}_i. \quad (5.49)$$

Para a direita poderemos escrever a função de onda da partícula como

$$\begin{aligned} \psi(s, T, 0)_D &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{s_1}^{s_{N-1}} D_F e^{\frac{i}{\hbar} \left[ \int_0^T \frac{m_2 v_2^2}{2} dt + \int_{s_i}^{s_f} E \mu ds_2 \right]} \psi(s_i, 0) d\vec{s}_i \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi(s_i, 0) d\vec{s}_i \Delta \left[ e^{\frac{i}{\hbar} \int_{s_i}^{s_f} E \mu ds_2} \right]. \end{aligned} \quad (5.50)$$

que nos fornece a fase para a partícula que passa pela direita<sup>4</sup>:

---

<sup>4</sup>Para enxugar a notação fazemos a seguinte convenção:

$$\Delta = \int_{s_1}^{s_{N-1}} D_F \left[ e^{\frac{i}{\hbar} \int_0^T \frac{m_2 v_2^2}{2}} \right].$$

$$f_D = \frac{1}{\hbar} \int_{s_i}^{s_f} E \mu ds_2. \quad (5.51)$$

Analogamente para a esquerda temos,

$$\begin{aligned} \psi(s, T, 0)_E &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{s_1}^{s_{N-1}} D_F e^{\frac{i}{\hbar} \left[ \int_0^T \frac{m_2 v_2^2}{2} dt - \int_{s_i}^{s_f} E \mu ds_2 \right]} \psi(s_i, 0) d\vec{s}_i \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi(s_i, 0) d\vec{s}_i \Delta \left[ e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{s_i}^{s_f} E \mu ds_2} \right]. \end{aligned} \quad (5.52)$$

e a fase pela esquerda:

$$f_E = -\frac{1}{\hbar} \int_{s_i}^{s_f} E \mu ds_2, \quad (5.53)$$

lembrando que  $s_i = A$  e  $s_f = B$ . A diferença de fase pode então ser vista como:

$$\delta f = \frac{1}{\hbar} \left[ \int_A^B E \mu ds_2 - \int_A^B E \mu ds_2 \right]. \quad (5.54)$$

Invertendo os limites de integração no segundo termo de (5.54) teremos,

$$\begin{aligned} \delta f &= \frac{1}{\hbar} \left[ \int_A^B E \mu ds_2 - \int_B^A E \mu ds_2 \right] \\ &= \frac{1}{\hbar} \oint E \mu ds_2. \end{aligned} \quad (5.55)$$

Podemos então realmente falar que o efeito Aharonov-Casher é o ganho de fase que uma partícula neutra ganha ao encontrar em seu caminho um campo elétrico. Esta interação só tem sentido físico na mecânica quântica, pois classicamente falando uma partícula neutra jamais interagiria com um campo elétrico.

## Capítulo 6

# Geração do termo de Aharonov-Casher numa teoria supersimétrica com quebra da simetria de Lorentz

Uma questão de grande relevância na Mecânica Quântica é como atribuir um fator de fase não-trivial para a função de onda de uma partícula que se move em uma região livre de forças. Podemos citar como exemplos destes fenômenos os efeitos de fase Aharonov-Bohm e Aharonov-Casher. Nesse capítulo verificaremos a possibilidade de uma teoria supersimétrica  $N = 1 - D = 4$  intacta apresentar algum tipo de efeito quântico notável.

### 6.1 Introdução

Não só o conceito de simetria é importante para a natureza, sua quebra desempenha um papel fundamental uma vez que podemos associar, especulativamente, nossa existência à quebra que ocorreu nos instantes que seguiram o *Big Bang*.

A questão que se levanta nesta tese é a da quebra de simetria de Lorentz. Dentre as possibilidades de violação da simetria de Lorentz, consolidou-se, ao longo da década



passada, uma proposta de quebra desta simetria por um campo de fundo. Esta idéia ganhou uma atenção especial devido ao fato de que, em um processo de transição de fase, é natural que apareça um campo (escalar) de fundo não-nulo resultante quando o sistema físico atinge o estado de mínima energia. Este mecanismo é conhecido como quebra espontânea da simetria, e este processo de transição de fase, no contexto do modelo padrão, vem explicar como as partículas fundamentais adquirem massa [33].

A quebra espontânea de simetria aparece também no contexto da Teoria de Cordas. Esta teoria atribui dimensão a partículas pontuais; portanto, uma partícula movendo-se no espaço-tempo, ao invés de desenvolver uma trajetória linear, descreve uma folha, a chamada superfície de mundo. Os modos normais de vibração desta folha recuperariam as informações de descrição das partículas. Uma outra novidade desta teoria é lançar mão de uma idéia surgida no início das propostas de modelos cosmológicos: as teorias de Kaluza-Klein. Partindo inicialmente de uma teoria em dimensões mais altas, à medida que vamos reduzindo as dimensões, chegamos a uma teoria que explique os fenômenos que ocorrem no espaço-tempo ordinário quadridimensional [34].

A idéia da ocorrência da quebra espontânea de simetria no contexto da teoria das cordas e do modelo padrão Estendido foi lançada por Kostelesky e Samuel [35] em 1989, e, aos poucos, foi ganhando adesão na comunidade, como procedimento mais usual para se introduzir a quebra da simetria de Lorentz. No trabalho citado, os autores avaliam que ao modelo padrão da física de partículas devem ser incorporadas estas idéias.

O efeito Aharonov-Casher original ocorre devido a interação entre o momento de dipolo magnético anômalo (MDMA) e certas configurações do campo elétrico. Assim, é natural que se espere que partículas escalares com MDMA apresentem esse efeito.

Pode-se argumentar que a simetria de Lorentz não seria a simetria natural esperada para os sistemas de baixas energias, pois estes deveriam ser invariantes sobre o grupo de Galileu. Todavia, estes sistemas podem ser vistos como o limite de baixas energias

do modelo relativístico, o que implica que a violação da simetria de Lorentz deve trazer contribuições de baixas energias para esse grupo. Por estas razões, acreditamos que o ambiente de uma teoria com quebra de Lorentz seja realmente bastante rico e tenha grande importância para a descrição em fenômenos de baixas energias.

Para uma partícula de spin-1/2 a interação responsável pelo efeito AC é dada por uma interação de MDMA,

$$L_m = -\frac{1}{2}\mu\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi f_{\mu\nu} \quad (6.1)$$

e a fase topológica  $\theta_{AC}$  se desenvolve quando a partícula viaja ao longo de um caminho fechado encerrado por uma linha de carga  $\Lambda$  por unidade de comprimento,  $\theta_{AC} = \mu\Lambda$ .

Se pensarmos em uma partícula com spin-0 também existe a possibilidade das mesmas apresentarem o efeito AC, bastaria para isso que o seu MDMA fosse não-nulo. Em  $D = 3$  o momento magnético pode ser interpretado como a interação de uma corrente com o campo elétrico dual. Desse modo, para uma partícula escalar o efeito fica bem definido. Isso sugere diversos caminhos para identificação de novos efeitos topológicos.

Em supersimetria, um espinor e um escalar são superparceiros. Se certos efeitos ocorrem com o espinor, é natural que a gente pense que efeitos correspondentes ocorram com seu superparceiro escalar. Portanto, poderíamos esperar que um efeito tipo AC ocorresse com o campo escalar, mas isso não é bem verdade! De fato verificou-se há algum tempo que em  $4D$ , quando a supersimetria é exata, não podemos ter MDMA para o espinor parceiro. Contudo, vimos que quando isso foi mostrado utilizou-se modelos particulares, como por exemplo com o Modelo Maxwell-Chern-Simons(MCS). A pergunta que nos ocorre é:

- Todos os sistemas supersimétricos e simetria exata em  $D = 3 + 1$  apresentam MDMA nulo?

- Seria possível construir algum modelo com supersimetria exata em  $4D$  que apresentasse o efeito Aharonov-Casher?

O campo de Kalb-Ramond aparece em teorias de cordas heteróticas e apresenta um acoplamento com campos de Maxwell-Chern-Simons induzidos ao nível quântico. A constante de acoplamento desse termo é da ordem de  $1/M_P$ , onde  $M_P$  é a massa de Planck e apresenta violação de paridade ou quebra da simetria de Lorentz. Neste trabalho usamos o campo de Kalb-Ramond como campo de fundo <sup>1</sup> em uma teoria supersimétrica no superespaço  $N=1-D=4$ . O modelo é implementado através de um acoplamento Kalb-Ramond-Chern-Simons num cenário supersimétrico. O propósito do modelo é gerar uma versão supersimétrica do termo de Aharonov-Casher. Este objetivo é alcançado quando identificamos o supercampo de Kalb-Ramond com um supercampo escalar que é relevante na quebra da simetria de Lorentz da teoria. Ao analisarmos a ação em componentes mostramos que essa identificação é possível quando usamos uma relação de dualidade entre a parte simétrica do supercampo escalar quiral e o supercampo de Kalb-Ramond. Essa identificação apresenta-se como uma nova e interessante abordagem em teorias supersimétricas com quebra da simetria de Lorentz. De ponto de vista formal, nosso resultado abre uma interessante discussão relativa à existência de termo de Aharonov-Casher numa teoria com supersimetria intacta. Nosso resultado parece indicar ainda a necessidade de uma compatibilização entre a quebra de Lorentz e a quebra de supersimetria.

---

<sup>1</sup>Chamamos um campo qualquer de campo de fundo quando não temos acesso às fontes destes campos.

## 6.2 Modelo Supersimétrico em um Background de Kalb-Ramond

O principal objetivo desta seção é introduzir o modelo supersimétrico que será usado. Esse modelo será uma versão supersimétrica dos modelos de Chern-Simons e Kalb-Ramond. A motivação para considerar essas duas teorias é descrever o efeito AC em uma supersimetria  $N = 1 - D = 4$ . A Lagrangeana do modelo supersimétrico MCS é dada por

$$\mathcal{L}_{MCS} = \alpha_1 W^a (D_a \mathcal{V}) \mathcal{S}|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} + h.c. \quad (6.2)$$

e o para o modelo de KR devemos considerar a seguinte Lagrangeana

$$\mathcal{L}_{KR} = \left( \frac{1}{2} \mathcal{G}^2 - \frac{1}{2} m \mathcal{V} \mathcal{G} \right) |_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} \quad (6.3)$$

que são escritos em termos de um campo quiral  $S$  e um superpotencial de gauge  $\mathcal{V}$ .

Um campo quiral de matéria  $S$  em um superespaço  $N = 1 - D = 3 + 1$  contém um espinor  $\psi$ , um campo escalar  $\phi$  e um campo auxiliar  $F$  [26]

$$\begin{aligned} \mathcal{S} = & S(x) + i\theta\sigma^m\bar{\theta}\partial_m S + \frac{1}{4}\theta^2\bar{\theta}^2\Box S + \sqrt{2}\theta\psi(x) \\ & - \frac{i}{\sqrt{2}}\theta^2\partial_m\psi\sigma^m\bar{\theta} + \theta^2 F(x) \end{aligned} \quad (6.4)$$

$$S = \phi(z) + \sqrt{2}\theta\psi(z) + \theta^2 F(z), \quad (6.5)$$

onde  $z_\mu = x_\mu + i\theta\sigma_\mu\theta$  e  $\theta$  é uma coordenada espinorial anti-comutante.

O supercampo de gauge  $\mathcal{V}$  no gauge de Wess-Zumino é dado por

$$\mathcal{V} = -\theta\sigma_\mu\bar{\theta}A^\mu(x) + i\theta\theta\bar{\theta}\bar{\lambda}(x) - i\bar{\theta}\bar{\theta}\theta\lambda(x) + \frac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}D(x), \quad (6.6)$$

onde  $A^\mu$  é o campo usual de gauge,  $\lambda$  é o gaugino e  $D$  um campo auxiliar. Podemos também definir o *superfield strenght* para esse supercampo de gauge como

$$X_a = -\frac{1}{4}\bar{D}^2 D_a \mathcal{V} \quad (6.7)$$

com derivadas covariantes de SUSY dadas por

$$\begin{aligned} D_a &= \frac{\partial}{\partial\theta^a} + i\sigma_{a\dot{a}}^\mu\bar{\theta}^{\dot{a}}\partial_\mu; \\ \bar{D}_{\dot{a}} &= -\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{a}}} - i\theta^a\sigma_{a\dot{a}}^\mu\partial_\mu. \end{aligned} \quad (6.8)$$

e cuja expansão de Taylor é

$$\begin{aligned} X_a(x, \theta, \bar{\theta}) &= \lambda_a(x) + i\theta^b\sigma_{b\dot{a}}^\mu\bar{\theta}^{\dot{a}}\partial_\mu\lambda_a(x) - \frac{1}{4}\theta^2\bar{\theta}^2\Box\lambda_a(x) + \\ &+ 2\theta_a D(x) - i\theta^2\bar{\theta}^{\dot{a}}\sigma_{a\dot{a}}^\mu\partial_\mu D(x) + \sigma^{\mu\nu b}_a\theta_b F_{\mu\nu} + \\ &- \frac{i}{2}\sigma^{\mu\nu b}_a\sigma_{b\dot{a}}^\alpha\theta^2\bar{\theta}^{\dot{a}}\partial_\alpha F_{\mu\nu}(x) - i\theta_a^\mu\partial_\mu\bar{\lambda}^{\dot{a}}(x)\theta^2. \end{aligned} \quad (6.9)$$

O supercampo  $\mathcal{G}$  é definido em termos do espinor quiral

$$\begin{aligned} \Sigma_a(x, \theta, \bar{\theta}) &= \psi_a(x) + \theta^b\Omega_{ba}(x) + \theta^2\left[\xi_a(x) + i\sigma_{a\dot{a}}^\mu\partial_\mu\bar{\psi}^{\dot{a}}(x)\right] - i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu\bar{\psi}_a(x) \\ &- i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\theta^{\dot{a}}\partial_\mu\Omega_{\dot{a}a}(x) - \frac{1}{4}\theta^2\bar{\theta}^2\Box\psi_a(x) \end{aligned} \quad (6.10)$$

A condição de quiralidade para este campo é  $\bar{D}_{\dot{a}}\Sigma_a = 0$ . O *superfield-strength* relativo a  $\Sigma_a$  pode ser escrito na forma

$$\mathcal{G} = \frac{1}{8}(D^a \Sigma_a - \bar{D}_{\dot{a}} \bar{\Sigma}^{\dot{a}}). \quad (6.11)$$

Já o campo de Kalb-Ramond, é uma componente do supercampo  $\Omega_{\dot{a}b}(x)$ , e este é dado por

$$\Omega_{\dot{a}b} - \epsilon_{ba} \rho(x) + (\sigma^{\mu\nu})_{ba} \mathcal{B}_{\mu\nu}(x). \quad (6.12)$$

com  $\rho(x)$  e  $\mathcal{B}_{\mu\nu}(x)$  sendo campos complexos,

$$\begin{aligned} \rho(x) &= P(x) + iM(x), \\ \mathcal{B}_{\mu\nu}(x) &= \frac{1}{4} [B_{\mu\nu} - i\tilde{B}_{\mu\nu}(x)] \end{aligned} \quad (6.13)$$

com

$$\tilde{B}_{\mu\nu}(x) = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} B^{\alpha\beta}(x) \quad (6.14)$$

A expansão em campos componentes para o *superfield-strength* de Kalb Ramond,  $\mathcal{G}$ , é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{G} &= -\frac{1}{2}M + \frac{i}{4}\theta^a \xi_a + \frac{i}{4}\bar{\theta}^{\dot{a}} \bar{\xi}_{\dot{a}} + \frac{1}{2}\theta \sigma_{a\dot{a}}^{\mu} \bar{\theta}^{\dot{a}} \tilde{G}_{\mu} \\ &+ \frac{1}{8}\theta^a \sigma_{a\dot{a}}^{\mu} \bar{\theta}^{\dot{a}} \partial_{\mu} \bar{\xi}^{\dot{a}} - \frac{1}{8}\theta^2 \sigma_{a\dot{a}}^{\mu} \bar{\theta}^{\dot{a}} \partial_{\mu} \xi^a \\ &- \frac{1}{8}\theta^2 \bar{\theta}^2 \square M; \end{aligned} \quad (6.15)$$

O campo  $B_{\mu\nu}$  aparece apenas como *field-strength*, localizado no supercampo quiral  $\mathcal{G}$ . Podemos notar que  $\tilde{G}_{\mu}$  está relacionado ao campo 2-forma de Kalb-Ramond (KR),  $B_{\mu\nu}$

$$\tilde{G}_{\mu} = \frac{1}{3!} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} G^{\nu\alpha\beta}. \quad (6.16)$$

Na literatura, o supercampo  $\mathcal{S}$  é considerado um supercampo adimensional, mas em

nosso trabalho iremos propor uma nova interpretação para ele, uma vez que passará a ter dimensão. Para isso analisaremos a relação existente entre o campo de KR e a parte simétrica do supercampo quiral  $\mathcal{S}$ . Esta proposta é baseada no graus de liberdade dos supercampos, eles nos possibilitam fazer a identificação que segue

$$\mathcal{S} + \bar{\mathcal{S}} \rightarrow \mathcal{G}. \quad (6.17)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathcal{S} + \bar{\mathcal{S}} = & \rho + \sqrt{2}\theta^a\psi_a + \sqrt{2}\bar{\theta}^{\dot{a}}\bar{\psi}_{\dot{a}} + \theta\sigma_{a\dot{a}}^\mu\bar{\theta}^{\dot{a}}\partial_\mu\Delta \\ & + \frac{i}{\sqrt{2}}\theta^a\sigma_{a\dot{a}}^\mu\bar{\theta}^{\dot{a}}\partial_\mu\bar{\psi}^{\dot{a}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\theta^2\sigma_{a\dot{a}}^\mu\bar{\theta}^{\dot{a}}\partial_\mu\psi^a \\ & + \frac{1}{4}\theta^2\bar{\theta}^2\Box\rho + \theta^2F + \bar{\theta}^2\bar{F}; \end{aligned} \quad (6.18)$$

aqui  $\rho = (S + \bar{S})$  and  $\Delta = i(S - \bar{S})$ .

Essa identificação é válida na Lagrangeana on-shell com campo auxiliar  $F = 0$ . A identificação do supercampo quiral  $\mathcal{S}$  (6.4) e o supercampo de Kalb-Ramond (6.18) pode ser vista em termos de campos componentes por

$$\frac{1}{2}\tilde{G}_\mu = \partial_\mu\Delta, \quad (6.19)$$

$$-\frac{1}{2}M = \rho, \quad (6.20)$$

$$\frac{i}{4}\xi_a = \sqrt{2}\psi_a, \quad (6.21)$$

$$\frac{1}{8}\partial_\mu\xi_a = -\frac{i}{\sqrt{2}}\partial_\mu\psi_a \quad (6.22)$$

### 6.3 A Lagrangeana on-shell

Nesta seção estudamos as partes bosônicas e fermiônicas da Lagrangeana. A fim de encontrar um potencial mínimo, precisamos fazer um ansatz para o campo  $S$ . A Lagrangeana bosônica então terá a seguinte forma:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_3, \quad (6.23)$$

onde

$$\mathcal{L}_1 = \frac{\alpha_1}{4} M H_{\mu\nu} H^{\mu\nu}, \quad (6.24)$$

$$\mathcal{L}_2 = -\frac{\alpha_1}{4} \epsilon^{\mu\alpha\beta\nu} \tilde{G}_\mu H_{\alpha\beta} H_\nu, \quad (6.25)$$

$$\mathcal{L}_3 = \partial_\mu M \partial^\mu M + \frac{1}{6} G_{\mu\nu k} G^{\mu\nu k} + m \tilde{G}_\mu H^\mu. \quad (6.26)$$

### 6.4 O efeito Aharonov-Casher

Nesta seção estudaremos o acoplamento Aharonov-Casher a partir de considerações sobre a parte fermiônica da supersimetria. Aqui consideraremos um ansatz para a violação de Lorentz para a parte simétrica do campo bosônico  $S$ . Esse ansatz é dado por  $\rho \sim M$  ser uma constante. O importante aqui é o fato que a parte fermiônica é dinâmica, mesmo que isso possa provocar uma relação entre a violação de Lorentz e a quebra da SUSY.

A Lagrangeana fermiônica para o estudo desse efeito, na representação de Dirac é dada por

$$\mathcal{L}_F = i\alpha_1 \bar{\Psi} \gamma^\mu \partial_\mu \Psi + \frac{\alpha_2}{2} \bar{\Psi} \Sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \Psi. \quad (6.27)$$

Agora estudaremos o potencial. Nesta teoria temos dois tipos de campo auxiliares,  $F$



e  $D$ , que podem ser responsáveis por quebras na supersimetria. Um deles relaciona-se com o termo superpotencial, o qual não consideraremos aqui, então  $F = 0$ . O outro encontra-se no termo de Fayet Iliopoulos:

$$\mathcal{L}_{Aux} = 4MD^2 - 2\sqrt{2}\bar{\Psi}\Psi D \quad (6.28)$$

a equação de movimento para  $D$  é dada por  $D = \frac{\sqrt{2}}{4M}\bar{\Psi}\Psi$ , que nos fornece o potencial  $V = \frac{1}{2M}|\Psi|^4$  e a partir da presença desse potencial podemos escrever uma nova lagrangeana fundamental para a verificação da presença do efeito AC

$$\mathcal{L}_m = -\frac{m}{4M}\bar{\Psi}\Psi \quad (6.29)$$

A Lagrangeana completa para o estudo é então vista como

$$\mathcal{L} = i\alpha_1\bar{\Psi}\gamma^\mu\partial_\mu\Psi + \frac{\alpha_2}{2}\bar{\Psi}\Sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\Psi + 4MD^2 - 2\sqrt{2}\bar{\Psi}\Psi D - \frac{m}{4M}\bar{\Psi}\Psi \quad (6.30)$$

cuja equação de movimento para  $\Psi$  é semelhante a equação de Dirac para uma partícula neutra, com momento de dipolo magnético  $\vec{\mu}$ , e dada por

$$\left(i\gamma^\mu\partial_\mu + \frac{\mu}{2}\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \mathcal{M}\right)\Psi = 0 \quad (6.31)$$

onde  $\mathcal{M} = 2\sqrt{2}D - \frac{m}{4M}$ . As matrizes  $\gamma$  são matrizes que fecham a álgebra de Clifford. Uma representação destas matrizes é fornecida pelas matrizes- $\gamma$  de Dirac, e a representação que adotaremos é dada por:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}; \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.32)$$

onde  $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$  são as matrizes de Pauli.

Para tomarmos o limite não-relativístico da equação de Dirac<sup>2</sup>, devemos escrever o espinor  $\Psi$  em termos de suas componentes fraca ( $\xi$ ) e forte( $\phi$ ),  $\Psi = \begin{pmatrix} \phi \\ \xi \end{pmatrix}$ ; o que nos dará um conjunto de duas equações diferenciais acopladas para  $\xi$  e  $\phi$ ,

$$(E - \mathcal{M})\phi - \vec{\sigma} \cdot (\vec{p} + i\mu\vec{E})\xi = 0, \quad (6.33)$$

$$-(E + \mathcal{M})\xi - \vec{\sigma} \cdot (\vec{p} - \mu\vec{E})\phi = 0. \quad (6.34)$$

Escrevendo a componente fraca em termos da componente forte do espinor, temos:

$$\xi = \frac{1}{E + \mathcal{M}} \vec{\sigma} \cdot (\vec{p} - \mu\vec{E})\phi. \quad (6.35)$$

Tomando o limite não-relativístico, que consiste na aproximação  $E + \mathcal{M} \sim 2\mathcal{M}$ , temos a expressão desacoplada para a componente  $\phi$ , após substituirmos (6.35) em (6.33):

$$\frac{1}{2\mathcal{M}} [\vec{\sigma} \cdot (\vec{p} - \mu\vec{E})] [\vec{\sigma} \cdot (\vec{p} + \mu\vec{E})] \phi = \mathcal{M}\phi. \quad (6.36)$$

Utilizando a identidade vetorial,

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{A})(\vec{\sigma} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + i\vec{\sigma} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}), \quad (6.37)$$

chegamos à expressão:

---

<sup>2</sup>O tensor  $F_{\mu\nu}$  acomoda dois vetores em suas componentes; as componentes  $F_{0i}$  acomodam o vetor campo elétrico  $\mathbf{E}$ , gerado por uma fonte específica: um fio infinito, enquanto as componentes  $F_{ij}$  o campo magnético  $\mathbf{B}$ .

$$H\phi = E\phi, \quad (6.38)$$

onde o operador  $H$  é o Hamiltoniano do sistema, dado por

$$H = \frac{1}{2\mathcal{M}}(\vec{p} - \vec{E} \times \vec{\mu})^2 - \frac{\mu^2 \vec{E}^2}{2\mathcal{M}}. \quad (6.39)$$

Podemos, através da expressão acima, definir o momento canonicamente generalizado do sistema,

$$\vec{\Pi} = (\vec{p} - \vec{E} \times \vec{\mu}). \quad (6.40)$$

Para extrairmos a fase adquirida, bastaria resolver a integral de caminho

$$\phi_{AC} = \oint \overrightarrow{\mu \times \vec{E}} \cdot d\vec{x}; \quad (6.41)$$

ao substituírmo o campo elétrico gerado pelo fio infinito, teríamos como resultado para a integral

$$\Phi_{AC} = \lambda\mu n_{AC} \quad (6.42)$$

onde  $n_{AC}$  é o *winding-number*, análogo ao caso para o efeito AB, pois o resultado depende da distribuição de cargas no fio, mesmo não havendo uma interação entre as cargas, já que se trata de neutrons.

# Conclusões

Aqui apresentamos as conclusões gerais desta tese. Para melhor compreensão estas estão divididas por tópicos em termos dos assuntos discutidos, na mesma ordem em que foram apresentados.

- **Propagadores de Campos de Gauge Anti-simétricos em uma Brana**

- A partir da suposição que apenas campos tensoriais anti-simétricos de gauge  $B_{AB}$ , onde  $A, B = 0, 1, 2, 3, 5$ , viviam no *bulk*, foi escrita a Lagrangeana do modelo;
- Uma vez que a conservação de corrente 5-dimensional no *bulk* implica na conservação de corrente 4-dimensional na brana, desde que a quinta componente da corrente desapareça, conseguimos acoplar essa corrente ao campo de KR no *bulk*.
- Devido à interação entre a corrente  $J_{AB}$  e o campo de KR, vimos que um termo cinético induzido para o campo  $B_{\mu\nu}(x)$  emerge da brana.
- A fim de calcular os propagadores, adicionamos à ação no *bulk* um termo de fonte. Ao calcularmos as equações de movimento, usando o gauge de Lorentz para o campo de KR, conseguimos ver a contribuição da dimensão extra no interior da brana.
- Escolhemos localizar a fonte sobre a dimensão extra  $y = 0$ , e fazendo as transformações de Fourier das equações de movimento como também algumas

outras propriedades matemáticas, encontramos o propagador para a teoria 5-dimensional que contém campo  $\mathcal{B}_{AB}$  de gauge na brana.

- **Observações sobre o campo de Kalb-Ramond supersimétrico em  $D = 5$**

- Fizemos um estudo sobre os reais graus de liberdade dos campos em  $D = 5$  a fim de completar os multipletos relacionados ao campo de KR;
- Mostramos que o superparceiro fermiônico do termo topológico tipo Chern-Simons com campos de KR,  $KH$ , também é uma estrutura topológica;
- Identificamos a componente  $B_{m5}$  do campo de  $KR$  com um campo de gauge  $A_m$ , e verificamos que o termo topológico envolvido também preserva a característica topológica para o seu parceiro fermiônico.

- **Superespaço Intrínseco  $N = 1 - D = 5$**

- Adotamos um superespaço com coordenada espinorial diferente do que é comum encontrar na literatura. Nossa proposta foi descrever teorias que vivam em um superespaço cujas coordenadas que o compõem são as coordenadas do espaço-tempo em 5-dimensões,  $x^M = (x^m, x^5)$ , e as coordenadas de Grassmann  $\Theta$  como sendo espinores de Dirac.
- Uma vez que os espinores em quatro e cinco dimensões são do mesmo tipo, tivemos a liberdade de reescrever nosso espinor de Dirac como sendo a combinação de dois espinores de Majorana,  $\Theta = \theta + i\tilde{\theta}$ . Ao fazermos essa consideração achamos plausível pensar que uma teoria supersimétrica  $N = 1 - D = 5$  possa ser vista, como no formalismo de pseudosupersimetria, como uma teoria com duas supersimetrias.
- Encontramos os geradores, e, conseqüentemente, as derivadas covariantes de supersimetria e vimos que existe uma dependência explícita da quinta coordena-

nada. Aachamos que isso é um resultado importante pois a partir dela podemos descrever propagação na dimensão extra. Tal propagação não era possível de ser descrita no formalismo de pseudosupersimetria uma vez que são usadas as mesmas derivadas covariantes de SUSY de quatro dimensões.

- Ao observarmos as álgebras das derivadas covariantes, podemos verificar que a aplicação de duas derivadas ao mesmo tempo nos fornece um resultado na quinta dimensão. E uma vez que os campos componentes da teoria continuam dependendo das cinco dimensões do espaço-tempo fica reforçada a idéia da importância da dependência explícita da quinta coordenada.
  - Escrevemos a expansão mais completa do supercampo escalar complexo. Essa estrutura é descrita por 12 campos escalares, 3 vetores e 6 férmions de Dirac. A partir desse supercampo podemos, através de vínculos, construir outros supercampos fundamentais para o formalismo (o supercampo de gauge  $\mathcal{V}$  que foi encontrado depois de ser feito um vínculo no supercampo geral e o supercampo de matéria  $\Xi$  depois de dois vínculos).
  - Escrevemos o Modelo de Wess-Zumino em cinco dimensões contendo uma supersimetria usando o formalismo de supersimetria intrínseca a partir do multiplete escalar  $\Xi$ . Esse supercampo escalar quirial proposto pela supersimetria intrínseca tem como componentes um campo escalar complexo  $\phi$ , um férmion de majorana  $\psi$  e um campo escalar auxiliar  $F$ .
  - A partir da construção de um supercampo vetorial escrevemos uma teoria manifestamente supersimétrica em  $D = 5$  com invariância de gauge. Esse modelo é composto por três campos escalares  $(\phi, B, H)$ , um pseudoescalar  $(A_5)$ , dois férmions de majorana  $(\chi, \eta)$  e um campo vetorial  $(A_\mu)$ .
- **Geração do termo de Aharonov-Casher numa teoria supersimétrica com quebra da simetria de Lorentz**

- Introduzimos a Lagrangeana do modelo como sendo composta pela Lagrangeana de Chern-Simons somada a Lagrangeana de Kalb-Ramond, ambas supersimétricas. Daí então fazemos uma nova proposta de interpretação para o supercampo  $\mathcal{S}$  a fim de analisar relações existentes entre o campo de KR e a parte simétrica desse supercampo quiral. Esta proposta foi baseada no número de graus de liberdade dos supercampos e nos possibilitou fazer a identificação  $\mathcal{S} + \bar{\mathcal{S}} \rightarrow \mathcal{G}$ .
- Consideramos um ansatz para o violação de Lorentz para a parte simétrica do campo bosônico  $S$ . Esse ansatz é dado por  $\rho \sim M$  ser uma constante. Ao fazermos isso conseguimos quebrar a simetria de Lorentz sem que a supersimetria seja quebrada.
- Conseguimos então escrever a Lagrangeana completa para o estudo do modelo quando adicionamos o termo de Fayet-Illiopoulos. Esse termo nos fornece o potencial  $V$  e a partir da presença desse potencial podemos escrever uma nova lagrangeana fundamental para a verificação ou não da presença do efeito Aharonov-Casher.
- Verificamos que a equação de movimento com respeito a  $\bar{\Psi}$  para a Lagrangeana proposta é semelhante a equação de Dirac para uma partícula neutra, com momento de dipolo magnético, o que favorece a ocorrência do efeito AC.
- Obtivemos então, após alguns malabarismo matemáticos, o efeito Aharonov-Casher em uma Teoria supersimétrica com termo de quebra de Lorentz.

# Perspectivas

- **Propagadores de Campos de Gauge Anti-simétricos em uma Brana**
  - Fazer a extensão não-abeliana dos propagadores para campos anti-simétricos em uma brana;
  - Considerar efeitos gravitacionais para a localização de campos no modelo;
  - Fazer um estudo de localização de modos-zeros e modos-massivos de campos de gauge tensoriais anti-simétricos;
  - Verificar a possibilidade de geração de massa topológica pelos campos de KR localizados na brana;
  - Realizar a versão supersimétrica tanto para os propagadores como para a localização de campos anti-simétricos na brana;
- **Observações sobre o campo de Kalb-Ramond supersimétrico em  $D = 5$** 
  - Usar o formalismo de supersimetria intrínseca para verificar a dinâmica dos campos de KR na dimensão extra;
- **Superespaço Intrínseco  $N = 1 - D = 5$** 
  - Construção de outros supercampos no superespaço intrínseco, em especial o supercampo que contenha o campo de Kalb-Ramond uma vez que ele é fundamental na nossa linha de pesquisa;



- Escrever a super QED intrínseca e verificar se o fato de considerarmos a quinta dimensão como uma dimensão dinâmica nos traz algum novo resultado quando compactificarmos a teoria para  $4D$ ;
- **Geração do termo de Aharonov-Casher numa teoria supersimétrica com quebra da simetria de Lorentz**
  - Estudar novos acoplamentos para os campos e verificar a possibilidade de gerar efeitos quânticos sem a necessidade de quebrar a invariância de Lorentz;
  - Encontrar uma relação entre a quebra da simetria de Lorentz e a quebra de supersimetria e ver a importância dela nos modelos de supersimetria

# Apêndice A

## Mais Convenções

### A.1 Convenções e relações úteis para espinores

Ao tratarmos espinores, usaremos índices do alfabeto grego para denotar as componentes do espinor de Weyl. Índices sem pontos se transformam segundo a representação  $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$  do grupo de Lorentz e os índices com pontos usam a representação  $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ . O espinor de Dirac contém dois espinores de Weyl:

$$\Psi_D = \begin{pmatrix} \chi_\alpha \\ \bar{\psi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \quad (\text{A.1})$$

Usando a notação de Weyl podemos escrever os tensores anti-simétricos  $\varepsilon^{\alpha\beta}$  e  $\varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}$  por

$$\begin{aligned} \varepsilon_{21} &= \varepsilon^{12} = \varepsilon_{\dot{2}\dot{1}} = \varepsilon^{\dot{1}\dot{2}} = 1 \\ \varepsilon_{12} &= \varepsilon^{21} = \varepsilon_{\dot{1}\dot{2}} = \varepsilon^{\dot{2}\dot{1}} = -1 \\ \varepsilon_{11} &= \varepsilon^{22} = \varepsilon_{\dot{1}\dot{1}} = \varepsilon^{\dot{2}\dot{2}} = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

e eles são possuidores da propriedade de levantar e abaixar os índices nos espinores:

$$\begin{aligned}
\psi^\alpha &= \varepsilon^{\alpha\beta}\psi_\beta, \psi_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta}\psi^\beta \\
\bar{\psi}^{\dot{\alpha}} &= \varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\bar{\psi}_{\dot{\beta}}, \bar{\psi}_{\dot{\alpha}} = \varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\bar{\psi}^{\dot{\beta}}
\end{aligned} \tag{A.3}$$

onde podemos suprimir os índices repetidos, caindo na convenção de Einstein. Essa convenção é feita da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\psi\chi &= \psi^\alpha\chi_\alpha = -\psi_\alpha\chi^\alpha = \chi^\alpha\psi_\alpha = \chi\psi; \\
\bar{\psi}\bar{\chi} &= \bar{\psi}_{\dot{\alpha}}\bar{\chi}^{\dot{\alpha}} = -\bar{\psi}^{\dot{\alpha}}\bar{\chi}_{\dot{\alpha}} = \bar{\chi}_{\dot{\alpha}}\bar{\psi}^{\dot{\alpha}} = \bar{\chi}\bar{\psi}.
\end{aligned} \tag{A.4}$$

Note que  $(\chi\psi)^\dagger = (\chi^\alpha\psi_\alpha)^\dagger = \bar{\psi}_{\dot{\alpha}}\bar{\chi}^{\dot{\alpha}} = \bar{\psi}\bar{\chi} = \bar{\chi}\bar{\psi}$ .

As matrizes de Pauli  $\sigma$  são definidas por:

$$\begin{aligned}
\sigma^0 &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \\
\sigma^1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\
\sigma^2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \\
\sigma^3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{A.5}$$

onde a estrutura de índices é dada por  $\sigma_m^{\alpha\dot{\alpha}}$ .

A matriz  $\bar{\sigma}^m$  é dada por:

$$\bar{\sigma}^{m\alpha\dot{\alpha}} = \epsilon^{\dot{\alpha}\beta} \epsilon^{\alpha\beta} \sigma_{\beta\dot{\beta}}^m. \quad (\text{A.6})$$

Algumas identidades úteis serão mencionadas agora:

$$\text{Tr} \sigma^m \bar{\sigma}^n = 2\eta^{nm} \quad (\text{A.7})$$

$$\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m \bar{\sigma}_m^{\beta\dot{\beta}} = -2\delta_{\beta}^{\alpha} \delta_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}} \quad (\text{A.8})$$

$$(\sigma^m \bar{\sigma}^n + \sigma^n \bar{\sigma}^m)_{\alpha}^{\beta} = -2\eta^{mn} \delta_{\alpha}^{\beta} \quad (\text{A.9})$$

$$(\bar{\sigma}^m \sigma^n + \bar{\sigma}^n \sigma^m)_{\dot{\beta}}^{\dot{\alpha}} = -2\eta^{mn} \delta_{\dot{\beta}}^{\dot{\alpha}} \quad (\text{A.10})$$

$$\sigma_{\alpha}^{nm\beta} = \frac{1}{4} (\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^n \bar{\sigma}^{m\dot{\alpha}\beta} - \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m \bar{\sigma}^{n\dot{\alpha}\beta}) \quad (\text{A.11})$$

$$\bar{\sigma}_{\dot{\beta}}^{nm\dot{\alpha}} = \frac{1}{4} (\bar{\sigma}^{n\alpha\dot{\alpha}} \sigma_{\alpha\dot{\beta}}^m - \bar{\sigma}^{m\alpha\dot{\alpha}} \sigma_{\alpha\dot{\beta}}^n) \quad (\text{A.12})$$

Um espinor é um objeto que se transforma mediante uma transformação de Lorentz com:

$$\psi'_{\mu} = \Sigma_{\nu}^{\mu} \psi_{\nu}, \quad (\text{A.13})$$

em que  $\Sigma^{\mu\nu} \equiv -\frac{i}{4} [\Gamma^{\mu}, \Gamma^{\nu}]$  são geradores do grupo de Lorentz. A representação de Dirac é aquela na qual  $\Gamma^{\mu}$  são representações irredutíveis da álgebra

$$\Gamma^{\mu}, \Gamma^{\nu} = 2\eta^{\mu\nu}. \quad (\text{A.14})$$

Esta álgebra é satisfeita por matrizes  $k \times k$ , onde  $k$  é a dimensão da álgebra.

A dimensão de uma representação é igual ao número de elementos de sua base. Se a dimensão do espaço-tempo  $D$  for par, a dimensão da representação irredutível é  $k = 2^{D/2}$ . Logo, se aumentarmos a dimensão de duas unidades, as matrizes  $\Gamma^{\mu}$  dobram de tamanho:  $2^{D+2/2} = 2 \times 2^{D/2}$ . Podemos então construir uma representação em  $D + 2$  a partir de

uma representação em D por meio de um produto direto:

- D=2:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.15})$$

- D=4:

$$\Gamma^0 = \begin{pmatrix} -\gamma^0 & 0 \\ 0 & \gamma^0 \end{pmatrix} = \gamma^0 \otimes \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.16})$$

$$\Gamma^1 = \begin{pmatrix} -\gamma^1 & 0 \\ 0 & \gamma^1 \end{pmatrix} = \gamma^1 \otimes \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.17})$$

$$\Gamma^2 = \begin{pmatrix} 0^\mu & I_{2 \times 2} \\ I_{2 \times 2} & 0 \end{pmatrix} = I_{2 \times 2} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.18})$$

$$\Gamma^3 = i \begin{pmatrix} 0 & -I_{2 \times 2} \\ I_{2 \times 2} & 0 \end{pmatrix} = I_{2 \times 2} \otimes \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.19})$$

- D=2k+2:

$$\Gamma^\mu = \gamma^\mu \otimes \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \mu = 0, 1, \dots, (D-3) \quad (\text{A.20})$$

$$\Gamma^{D-2} = I_{2^k \times 2^k} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \Gamma^{(D-1)} = I_{2^k \times 2^k} \otimes \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.21})$$

O espinor de Dirac é definido em qualquer dimensão e, embora represente irredutivelmente a álgebra de Clifford, o mesmo não é, em geral, a representação mínima do grupo de Lorentz  $SO(1, D-1)$ . A notação que usamos no texto muitas vezes é a de Weyl que, em quatro dimensões, é uma representação irredutível de  $SO(1, D-1)$ . Espinores de Weyl possuem metade do número de componentes de um espinor de Dirac e podem ser

construídos apenas em dimensões pares.

Uma outra representação é a de Majorana, em que uma **condição de realidade** é imposta a um espinor de Dirac. Esta imposição reduz à metade o número de componentes de um espinor de Dirac. Para ser possível definir um espinor real, é necessário que seja possível representar a álgebra de Clifford com matrizes puramente imaginárias, a fim de garantir que a ação de Dirac seja real.

A condição de realidade pode ser imposta também ao espinor de Weyl, dando origem a representação de Majorana-Weyl, que tem quatro vezes menos componentes do que a representação de Dirac. Esta construção é possível apenas em dimensão  $2(\text{mod}:8)$ .

# Apêndice B

## Formas Diferenciais no Superespaço

O objetivo desse apêndice é mostrar o desenvolvimento do formalismo de formas diferenciais no Superespaço. A fim de se familiarizar com as formas diferenciais usuais ver ref [36]

De acordo com a sua paridade Grassmaniana, os elementos do superespaço podem comutar ou anticomutar, de acordo com a seguinte regra:

$$z^M z^N = (-1)^{mn} z^N z^M \quad (\text{B.1})$$

Onde  $n$  é uma função de  $N$  que tem valor 0 para um índice vetorial e 1 para um índice espinorial e  $m$  é uma função de  $M$  que goza das mesmas propriedades. Assim, dois objetos com índices espinoriais anticomutam e um objeto com índice vetorial comuta com outro de índice espinorial ou vetorial.

Podemos definir uma 0-forma como uma função do superespaço a qual chamaremos de  $P(z)$ . A definição de uma 1-forma é:

$$dz^M W_M = dx^m W_m + d\theta^\mu W_\mu(z) + d\bar{\theta}^{\dot{\mu}} \bar{W}_{\dot{\mu}}(z) \quad (\text{B.2})$$

onde  $dz^M \sim (dx^m, d\theta^\mu, d\bar{\theta}_{\dot{\mu}})$  é um diferencial do superespaço.

Para a construção de outras superformas diferenciais define-se o produto exterior:

$$dz^M \wedge dz^N = -(-1)^{mn} dz^N \wedge dz^M \quad (\text{B.3})$$

Assim, podemos escrever uma  $p$ -forma geral como:

$$\Omega = dz^{M_1} \wedge \dots \wedge dz^{M_p} W_{M_p \dots M_1} \quad (\text{B.4})$$

Notemos que a função coeficiente de  $W_{M_p \dots M_1}$  pode possuir índices tanto vetoriais quanto espinoriais. Quando a função tiver um número par de índices espinoriais ela será bosônica, e quando for ímpar será fermiônica.

O produto exterior de formas é associativo, linear e a relação de comutação para a  $p$ -forma  $\Sigma$  e a  $q$ -forma  $\Omega$  é:

$$\Sigma\Omega = (-1)^{pq}\Omega\Sigma \quad (\text{B.5})$$

Define-se a derivada exterior  $d$  como o mapeamento da  $p$ -forma:

$$\Omega = dz^{M_1} \dots dz^{M_p} W_{M_p \dots M_1}(z) \quad (\text{B.6})$$

na  $(p+1)$ -forma:

$$d\Omega = dz^{M_1} \dots dz^{M_p} dz^N \partial_N W_{M_p \dots M_1}(z) \quad (\text{B.7})$$

Considerando a  $p$ -forma  $\Omega$  e uma  $q$ -forma  $\Sigma$ , temos que:

$$d(\Omega\Sigma) = \Omega d\Sigma + (-1)^q d\Omega\Sigma \quad (\text{B.8})$$

Tomando-se a derivada exterior de (B.8) encontramos outra propriedade interessante:



$$\begin{aligned}
d(d\Omega) &= dz^{M_1} \dots dz^{M_p} dz^N dz^{N'} \partial_N \partial_{N'} W_{M_p \dots M_1} \\
&= -d(d\Omega)
\end{aligned}
\tag{B.9}$$

Logo

$$dd = 0 \tag{B.10}$$

# Apêndice C

## Graus de liberdade físicos de uma campo de KR de gauge em $5D$

### C.1 Dualidade Vetor-tensor em $D = 5$

Em cinco dimensões um vetor  $A_\rho$  é dual a um tensor de Kalb-Ramond (KR). Um conveniente ponto de partida para descrever esta dualidade é usar a ação

$$S_{VT} = \int \left[ \frac{1}{2} F \wedge * F - dB \wedge F \right] \quad (\text{C.1})$$

onde  $F$  e  $B$  são 2-formas invariantes de gauge com transformações dadas por

$$\delta F = 0 \quad (\text{C.2})$$

e

$$\delta B = d\beta. \quad (\text{C.3})$$

A equação de movimento para o campo  $B$  é dada por:

$$dF = 0 \quad (C.4)$$

que pelo lema de Poincaré tem como solução:

$$F = dA \quad (C.5)$$

onde  $A$  é um 1-forma invariante de gauge com transformação  $\delta A = d\phi$ . Usando (C.5) em (C.1)

$$\begin{aligned} S_{VT} &= \int \left[ \frac{1}{2} F \wedge^* F - dB \wedge F \right] = \int \left[ \frac{1}{2} dA \wedge^* dA - dB \wedge dA \right] = \\ &= \int \left[ \frac{1}{2} dA \wedge^* dA + B \wedge d^2 A \right] = \int \left[ \frac{1}{2} dA \wedge^* dA \right] = S_V. \end{aligned} \quad (C.6)$$

De maneira análoga encontraremos a equação de movimento para o campo  $A$ :

$$F = -^* dB. \quad (C.7)$$

Estabelecemos a dualidade entre o  $A$  e  $B$  usando a igualdade entre as equações (C.5) e (C.7) em (C.1)

$$\begin{aligned} S_{VT} &= \int \left[ \frac{1}{2} F \wedge^* F - dB \wedge F \right] = \int \left[ -\frac{1}{2} dB \wedge^* dB + dB \wedge^* dB \right] = \\ &= \int \left[ \frac{1}{2} dB \wedge^* dB \right] = S_T. \end{aligned} \quad (C.8)$$

Dessa forma, os campos vetoriais e tensoriais de rank-2 têm o mesmo número de graus de liberdade, 3.

## C.2 Análise Detalhada de Um Campo Tensorial Anti-simétrico em $D = 5$

É muito instrutivo e pedagógico analisar em alguns detalhes a teoria de um campo antisimétrico de calibre. Aqui, faremos um estudo sobre seus graus de liberdade. Nesta seção seguiremos de perto o desenvolvimento apresentado por Mohammedi et. al. [?].

Podemos escrever um tensor de rank-2 na forma matricial:

$$B_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} B_{00} & B_{01} & B_{02} & B_{03} & B_{05} \\ B_{10} & B_{11} & B_{12} & B_{13} & B_{15} \\ B_{20} & B_{21} & B_{22} & B_{23} & B_{25} \\ B_{30} & B_{31} & B_{32} & B_{33} & B_{35} \\ B_{50} & B_{51} & B_{52} & B_{53} & B_{55} \end{pmatrix}. \quad (\text{C.9})$$

Uma vez que é sabido que o tensor de KR é anti-simétrico, ou seja  $B_{\mu\nu} = -B_{\nu\mu}$ , podemos reescrever essa matriz como:

$$B_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & B_{01} & B_{02} & B_{03} & B_{05} \\ -B_{01} & 0 & B_{12} & B_{13} & B_{15} \\ -B_{02} & -B_{12} & 0 & B_{23} & B_{25} \\ -B_{03} & -B_{13} & -B_{23} & 0 & B_{35} \\ -B_{05} & -B_{15} & -B_{25} & -B_{35} & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{C.10})$$

Podemos então fazer uma contagem inicial de 10 graus de liberdade.

Nosso ponto de partida será a Lagrangeana que tem a seguinte forma:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\epsilon_{\sigma\rho\alpha\mu\nu}\partial_\alpha B_{\mu\nu}\epsilon_{\sigma\rho\alpha'\mu'\nu'}\partial_{\alpha'} B_{\mu'\nu'} \quad (\text{C.11})$$

Para contar os graus de liberdade podemos simplesmente usar o espaço de fase para identificar os verdadeiros graus de liberdade, contudo preferimos usar uma forma covariante para fazer essa contagem.

Usando a identidade

$$\begin{aligned} \epsilon_{\alpha\mu\nu\rho\sigma}\epsilon_{\alpha\mu\nu'\rho'\sigma'} &= g_{\nu\nu'}(g_{\rho\rho'}g_{\sigma\sigma'} - g_{\rho\sigma'}g_{\sigma\rho'}) + g_{\rho\nu'}(g_{\sigma\rho'}g_{\nu\sigma'} - g_{\sigma\sigma'}g_{\nu\rho'}) + \\ &+ g_{\sigma\nu'}(g_{\nu\rho'}g_{\rho\sigma'} - g_{\nu\sigma'}g_{\rho\rho'}) \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

obtemos a seguinte equação de movimento para o campo vetorial anti-simétrico  $B_{\rho\sigma}$

$$\square B_{\rho\sigma} - \partial_\nu(\partial_\rho B_{\nu\sigma} - \partial_\sigma B_{\nu\rho}) = 0. \quad (\text{C.13})$$

Essas equações (e a ação) são invariantes sob a seguintes transformação de calibre

$$B_{\rho\sigma} \rightarrow B'_{\rho\sigma} = B_{\rho\sigma} + \partial_{[\rho}\zeta_{\sigma]} \quad (\text{C.14})$$

Usando o calibre de Lorentz,  $\partial_\rho B_{\rho\sigma} = 0$ , ficamos com

$$(\square + \partial_5^2)B_{\rho\sigma} = 0 \quad (\text{C.15})$$

que pode ser desmembrada em duas equações de onda plana:

$$(\square + \partial_5^2)B_{ab} = 0 \quad (\text{C.16})$$

$$(\square + \partial_5^2)B_{a5} = 0 \quad (\text{C.17})$$

que têm as seguintes soluções, respectivamente

$$B_{ab} = \mathcal{V}_{ab} \exp(-ik \cdot x), \quad (\text{C.18})$$

$$B_{a5} = \mathcal{V}_{a5} \exp(-ik \cdot x), \quad (\text{C.19})$$

onde  $k^2 = 0$ ,  $\mathcal{V}_{ab}$  e  $\mathcal{V}_{a5}$  contêm a informação da polarização do campo. A condição de calibre conduz a

$$k_a \mathcal{V}_{ab} = 0. \quad (\text{C.20})$$

$$k_a \mathcal{V}_{a5} = 0. \quad (\text{C.21})$$

Daí podemos ver que na eq.(C.20) das cinco equações, somente quatro são independentes, sendo assim, a polarização  $\mathcal{V}_{ab}$  dos campos elimina 4 (dos dez) graus de liberdade e pela eq.(C.21) a polarização  $\mathcal{V}_{a5}$  temos mais um grau de liberdade eliminado. Nesse estágio já estamos com apenas 5 graus de liberdade, mas como já vimos que o tensor de KR é dual a um vetor, esperamos que o mesmo tenha somente três graus de liberdade físicos.

Agora consideraremos como campo vetorial  $\varsigma_\sigma$ , o potencial eletromagnético  $A_\sigma$ . Dessa forma, a eq.(C.14) pode ser reescrita como

$$B_{\rho\sigma} \rightarrow B'_{\rho\sigma} = B_{\rho\sigma} + \partial_{[\rho} A_{\sigma]} \quad (\text{C.22})$$

desde que  $A_\rho$  satisfaça

$$\square A_\sigma - \partial_\rho \partial_\sigma A_\rho = 0. \quad (\text{C.23})$$

Essas últimas equações são simplesmente as equações de Maxwell para o eletromagnetismo no vácuo e são invariantes mediante

$$A_\rho \rightarrow A_\rho + \partial_\rho \psi. \quad (\text{C.24})$$

Para o eletromagnetismo, escolhemos o calibre de Lorentz para  $A_\rho$ , como sendo

$$\partial_\rho A_\rho = 0 \quad (\text{C.25})$$

conduzindo outra vez a equação de onda,  $(\square + \partial_5^2)A_\rho = 0$ , cuja solução é

$$A_\rho = \varepsilon_\rho \exp(-ik \cdot x), \quad (\text{C.26})$$

com  $\varepsilon_\rho$  contendo a informação da polarização de  $A_\rho$  e outra vez  $k^2 = 0$ . O vetor polarização  $\varepsilon_\rho$  é construído para que a escolha de calibre satisfaça

$$k_\rho \varepsilon_\rho = 0. \quad (\text{C.27})$$

Esta última equação elimina uma componente da função de calibre  $A_\rho$ . Contudo, como é sabido do eletromagnetismo, o calibre de Lorentz não fixa as transformações de calibre completamente. Então, seguiremos nosso processo fazendo uma outra transformação de calibre,

$$A_\rho \rightarrow A_\rho + \partial_\rho \chi, \quad (\text{C.28})$$

desde que

$$\square\chi = 0. \quad (\text{C.29})$$

A condição  $\square\chi = 0$  também tem como solução uma função de onda,  $\chi = \exp(-ik \cdot x)$ . Esta liberdade de calibre residual corresponde a uma mudança em  $\varepsilon_\rho$  dada por:

$$\varepsilon_\rho \rightarrow \varepsilon_\rho + \beta k_\rho \quad (\text{C.30})$$

o que nos permite aniquilar outra componente da função de calibre  $A_\rho$ , e assim, como esperado do eletromagnetismo,  $A_\rho$  terá somente três polarizações independentes.

Agora, iremos escolher o calibre para  $B_{\rho\sigma}$  e ver os efeitos disso nas polarizações do tensor  $\mathcal{V}_{\rho\sigma}$ . Para nossas soluções de onda plana, as transformações de calibre residual no campo  $B_{\rho\sigma}$  mudam o tensor  $\mathcal{V}_{\rho\sigma}$  da seguinte maneira

$$\mathcal{V}_{\rho\sigma} \rightarrow \mathcal{V}_{\rho\sigma} + (k_\rho \varepsilon_\sigma - k_\sigma \varepsilon_\rho) \quad (\text{C.31})$$

Assim, desde que  $\varepsilon_\rho$  tenha somente duas componentes independentes, essa transformação de calibre residual pode ser usada para remover mais dois graus de liberdade. Conseqüentemente, a mudança total foi  $10 \rightarrow 5 \rightarrow 3$  e o nosso  $B_{\rho\sigma}$  agora terá o número correto de graus de liberdade, podendo assim ser representado por um campo vetorial com dois vínculos.



# Apêndice D

## Álgebra de deSitter na representação vetorial e espinorial $S0(1, 4)$

Transformações de Lorentz dos campos

- Espinores:

$$\begin{aligned}\Psi'(x^A) &= e^{\frac{1}{8}w^{AB}[\Gamma_A, \Gamma_B]}\Psi'(x^A) \\ &= e^{\frac{1}{2}w^{AB}\Sigma_{AB}}\end{aligned}\tag{D.1}$$

- Vetores:

$$A'^M(x^N) = \left(e^{\frac{1}{2}w^{CD}\Sigma_{CD}}\right)_L^M A'^L(x^N)\tag{D.2}$$

onde

$$(\Sigma_{CD})_B^A = \delta_C^A \eta_{DB} - \eta_{CB} \delta_D^A\tag{D.3}$$

e

$$[\Sigma_{AB}, \Sigma_{CD}] = \eta_{AD}\Sigma_{BC} + \eta_{BC}\Sigma_{AD} - \eta_{AC}\Sigma_{BD} - \eta_{BD}\Sigma_{AC} \quad (\text{D.4})$$

## D.1 Potencial vetor

Transformação de gauge:

$$A_M(x^N) = A_M(x^N) + \partial_M \alpha \quad (\text{D.5})$$

que nos fornece duas equações:

$$A_m(x^N) = A_m(x^N) + \partial_m \alpha A_5(x^N) = A_5(x^N) + \partial_5 \alpha \quad (\text{D.6})$$

Com as quais podemos escrever o field-strength do potencial vetor como

$$F^{MN} = (F^{mn}, F^{m5}) \quad (\text{D.7})$$

onde  $F^{mn} = \partial^m A^n - \partial^n A^m$  e  $F^{m5} = \partial^m A^5 - \partial^5 A^m$

# Bibliografia

- [1] Albert Einstein, "**On the Electrodynamics of moving bodies**", *Annalen Phys.* 17: 891 (1905); *Annalen Phys.* 14: 194 (2005) (Series 4).
- [2] P.S. Wesson, "**Mass, particles and waves in higher dimensions**", *Int.J.Mod.Phys. D12*, 1721(2003).
- [3] L. Randall and R. Sundrum, "**A Large mass hierarchy from a small extra dimension**" *Phys. Rev. Lett.* 83, 3370 (1999); "**An Alternative to compactification**", *Phys. Rev. Lett.* 83, 4690 (1999).
- [4] H. Davoudiasl, J.L. Hewett, T.G. Rizzo, "**Bulk gauge fields in the Randall-Sundrum model**", *Phys. Lett. B473*, 43 (2000).
- [5] A. Kehagias, K. Tamvakis, "**Localized gravitons, gauge bosons and chiral fermions in smooth spaces generated by a bounce**", *Phys. Lett. B504*, 38 (2001).
- [6] G. Dvali, G. Gabadadze, M. Shifman, "**(Quasi)localized gauge field on a brane: Dissipating cosmic radiation to extra dimensions?**", *Phys. Lett. B497*, 271 (2001).
- [7] Y. A. Golfand e E. P. Likhtmann, "**Extension of the Algebra of Poincare Group Generators and Violation of p Invariance**", *JETP Lett.* 13, 323 (1971).

- [8] J. Wess e B. Zumino, "**A Lagrangean Model Invariant under Supergauge Transformations**", *Phys. Lett. 49B*, 52 (1974); J. Wess e B. Zumino, "**Supergauge Transformations in Four Dimensions**", *Nucl. Phys. B70*, 39 (1974).
- [9] E. Witten, "**Constraints on Supersymmetry Breaking**", *Nucl. Phys. B 202*, 253(1982).
- [10] J. Polchinski, "**Dirichelet Branes and Ramond-Ramond Charges**", *Phys. Rev. Lett. 75*, 4724 (1995).
- [11] Matthias Klein, "**Loop effects in pseudosupersymmetry**", *Phys.Rev. D67* (2003).
- [12] M. O. Tahim and C. A. S. Almeida, "**Topological and equivalent models on brane worlds**", *Mod.Phys.Lett.A 22*(2007).
- [13] Y. Aharonov and D. Bohm, "**Significance of electromagnetic potentials in the quantum theory**", *Phys. Rev. 115*, 485 (1959).
- [14] M. E. Peskin and A. Tonomura, "**The Aharonov - Bohm Effect**", *Springer International, Berlin* (1989).
- [15] S. Ferrara , E. Remiddi, "**Absence of the Anomalous Magnetic Moment in a Supersymmetric Abelian Gauge Theory**", *Phys.Lett.B 53*(1974).
- [16] T.J. Allen. M. J. Bowick, A. Lahiri, "**Topological mass generation in (3+1)-dimensions**", *Mod. Phys. Lett. A6*, 559 (1991).
- [17] S. Deser. R. Jackiw, S. Templeton, "**Topologically Massive Gauge Theories**", *Ann. Phys.140*, 372 (1982).
- [18] J. Polchinski, "**String Theory**", *vol. 1 and 2, Cambridge University Press* (1998);

- [19] L. Randall and R. Sundrum, "**An alternative to compactification**", *Phys. Rev. Lett.* *83*, 4690 (1999) ; "**A large mass hierarchy from a small extra dimension**", *Phys. Rev. Lett.* *83*, 3370 (1999) .
- [20] I. Antoniadis, N. Arkani-Hamed and S. Dimopoulos, "**New dimensions at a millimeter to a fermi and superstrings at a TeV**", *Phys. Lett. B**436*, 257 (1998); N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos and G. R. Dvali, "**The hierarchy problem and new dimensions at a millimeter**", *Phys. Lett. B**429,263* (1998).
- [21] G. Dvali, G. Gabadadze, M. Porrati, "**4-D gravity on a brane in 5-D Minkowski space**", *Phys. Lett. B**485*, 271 (2001);
- [22] A. Salam, J. Strathedee, "**Supersymmetry and Superfields**", *Fortschritte der Physik* *26*, 57(1978).
- [23] D. V. Volkov, V. P. Akulov, "**Possible Universal Neutrino Interaction**", *JETP Lett.* *16* 438 (1972); "**Is The Neutrino A Goldstone Particle?**", *Phys. Lett.* *46B*, 109 (1973).
- [24] V. P. Akulov, D. V. Volkov, "**Goldstone Fields With Spin 1/2**", *Theor. Math. Phys.* *18*, 28 (1974).
- [25] A. I. Pashnev, "**Nonlinear Realization For Symmetry Group With Spinor Parameters**", *Theor. Math. Phys.* *20,725* (1974).
- [26] J. Bagger, A. Galperin, "**New Goldstone multiplet for partially broken supersymmetry**", *Phys. Rev. D**55*, 1091 (1997).
- [27] M. Klein, "**Couplings in Pseudo-Supersymmetry**", *Phys.Rev.D**66* (2002).
- [28] D. Peccei and H. R. Quinn, "**CP Conservation in the Presence of Instantons**", *Phys. Rev. Lett.**38*, 1440 (1977); *Phys. Rev.D**16*, 1791 (1971).

- [29] K. Lee, "**Topological Mass Terms on Axion Domain Walls**", *Phys. Rev.D35*, 3286 (1987).
- [30] B. Mukhopadhyaya, Sidharta Sen, Somasri Sen, S. Sengupta, "**Bulk Kalb-Ramond field in the Randall-Sundrum scenario**", *Phys. Rev. D70*, 066009 (2006).
- [31] Nussenveig,H. M. "**Integrais de Trajetória**" *Volume 1. São Paulo: Sociedade Brasileira de Física* (1981).
- [32] Y. Aharonov and A. Casher, "**Topological Quantum Effects For Neutral Particles**", *Phys. Rev. Lett. 53*, 319 (1984).
- [33] Gordon Kane, *Scientific American (Brasil)*, 39, 100 (2005).
- [34] Lisa Randall, "**Extra dimensions and warped geometries**", *Science*, 296, 1422 (2002).
- [35] V. A. Kostelecky and S. Samuel, "**CP Violation In Supergravity Models**", *Phys. Rev. D39*, 683 (1989); V. A. Kostelecky, *Scientific American Brazil* 29, 72 (2004); V. A. Kostelecky and R. Potting, "**CPT and strings**", *Nucl. Phys. B359*, 545 (1991); "**Expectation values, Lorentz invariance, and CPT in the open bosonic string**", *Phys. Lett. B381*, 89 (1996); V. A. Kostelecky and R. Potting, "**CPT, strings, and meson factories**", *Phys. Rev. D51*, 3923 (1995).
- [36] H. Flanders, "**Differential Forms With Applications to the Physical Sciences**", *Dover Publications* (1989).
- [37] N. Mohammedi, "**On nonAbelian duality in sigma models**", *Phys. Lett. B375*, 149 (1996).

# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)