UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

MATRIZES R E ESPECTRO DE MATRIZES DE TRANSFERÊNCIA BASEADAS EM SUPERALGEBRAS

Wellington Galléas

Orientador: Prof. Dr. Márcio José Martins

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de São Carlos como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Física.

São Carlos
Fevereiro - 2006

Agradecimentos

Ao Márcio pela orientação.

Aos amigos do DF.

À FAPESP pelo apoio financeiro.

Resumo

Nesta tese investigamos as soluções da equação de Yang-Baxter associadas com as superalgebras q-deformadas $U_q[sl^{(2)}(r|2m)]$ e $U_q[osp^{(1)}(r|2m)]$. Apresentamos essas soluções em termos das matrizes de Weyl usuais o que nos revela a estrutura dos pesos de Boltzmann dos correspondentes modelos de vértices. Este passo ainda torna possível a formulação do Ansatz de Bethe Algébrico para esses modelos. Discutimos também a conexão destas soluções com representações da álgebra de Braid-Monoid cujas baxterizações nos permite a obtenção de matrizes R multiparamétricas associadas com o $U_q[sl^{(2)}(r|2m)]$, $U_q[osp^{(1)}(r|2m)]$ e generalizações altamente não triviais da matriz R associada ao $U_q[D_{n+1}^{(2)}]$.

Abstract

In this work we investigate solutions of the Yang-Baxter equation associated to the q-deformed superalgebras $U_q[sl^{(2)}(r|2m)]$ and $U_q[osp^{(1)}(r|2m)]$, whose corresponding R-matrices are presented in terms of the standard Weyl basis. This feature not only unveils the structure of the Boltzmann weights of the associated vertex models, but also makes possible the formulation of the Algebraic Bethe Ansatz. We also discuss the connection of these solutions with the Braid-Monoid algebra whose baxterizations permit us to derive multiparametric R-matrices associated to the $U_q[sl^{(2)}(r|2m)]$ and $U_q[osp^{(1)}(r|2m)]$, as well as a highly non trivial generalization of the $U_q[D^{(2)}_{n+1}]$ R-matrix.

Sumário

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

A solução exata de alguns sistemas simples, mas com um comportamento fundamental, tem desempenhado um papel de grande importância no desenvolvimento de novos conceitos em diversas áreas da física. Dentro deste contexto por exemplo, a solução do modelo de Ising em duas dimensões dada por Onsager em 1944 [1] nos revela a possibilidade de um sistema físico exibir expoentes críticos muito mais sofisticados do que aqueles supostos pela Teoria de Landau [2]. Ao longo dos anos vários avanços foram feitos rumo a solução exata de modelos físicos dentre as quais destacamos a solução exata de um gás de férmions interagindo via função δ em uma dimensão apresentada por C.N. Yang [3] e M. Gaudin [4], e a solução do modelo de oito vértices dada por R.J. Baxter em 1972 [5]. Estes resultados, apesar de estarem inseridos em diferentes contextos, possuem em comum uma equação não-linear, chamada de equação de Yang-Baxter, que está diretamente relacionada com a solução exata desses sistemas.

Desta forma a equação de Yang-Baxter se tornou uma peça fundamental na teoria de modelos exatamente solúveis e sua importância em diversas áreas da física e da matemática tem se tornado cada vez mais reconhecida. Devido a sua grande importância, durante os últimos 30 anos físicos e matemáticos tem trabalhado intensivamente na busca de soluções da equação de Yang-Baxter que por sua vez dá origem a modelos integráveis [6]. Na busca de soluções da equação de Yang-Baxter um grande avanço foi feito em meados da década de 80 com o desenvolvimento do análogo quântico ou deformado do envelope universal de álgebra [7, 8], que a seguir procuraremos dar noções básicas deste procedimento na obtenção de soluções da equação de Yang-Baxter. Surgida inicialmente em diferentes contextos [3, 4, 5], esta equação é dada de forma abstrata por

$$R_{12}(x_1, x_2)R_{13}(x_1, x_3)R_{23}(x_2, x_3) = R_{23}(x_2, x_3)R_{13}(x_1, x_3)R_{12}(x_1, x_2), \tag{1.1}$$

cujos elementos R_{ab} são realizações de um operador R, sendo estes operadores lineares atuando no produto tensorial de três espaços lineares $V_{123} = V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$. Assim os índices inferiores a e b representam a atuação não trivial em $V_a \otimes V_b$ de V_{123}. De forma mais explícita $R_{12}(x, y)$ atua trivialmente no terceiro fator deste produto tensorial, ou seja V_3, e coincide com $R(x, y)$ no produto dos dois espaços restantes. As matriz $R_{13}(x, y)$ e $R_{23}(x, y)$ são definidas similarmente e atuam trivialmente no segundo e terceiro espaço respectivamente. Uma representação do operador R é chamada matriz R quântica ou simplesmente matriz R. E por fim x_1, x_2 e x_3 são parâmetros complexos arbitrários.

Dentre as áreas da física e matemática que a equação de Yang-Baxter desempenha um papel de grande importância podemos citar a teoria de grupos quânticos [9], teoria de nós [10] e mecânica estatística [6] que consideraremos nos capítulos que se seguem. A conexão com álgebras de Lie também será utilizada, e de forma não rigorosa tentaremos apontar esta conexão. Esta correspondência é justamente o fato que levou a formulação do envelope universal de álgebra quântico de uma álgebra $\mathcal{G}$, que é usualmente denotado $U_q[\mathcal{G}]$ [9].

De modo a tornar mais evidente a conexão com álgebras de Lie, é conveniente considerarmos que a dependência da matriz $R(x, y)$ sobre os parâmetros x e y são dados na forma $R(x - y)$, de maneira que a equação (1.1) fica sendo dada por

$$R_{12}(x_1 - x_2)R_{13}(x_1 - x_3)R_{23}(x_2 - x_3) = R_{23}(x_2 - x_3)R_{13}(x_1 - x_3)R_{12}(x_1 - x_2), \tag{1.2}$$

onde fica evidente que o fato da matriz R depender apenas da diferença dos parâmetros espectrais reduz o número de variáveis envolvidas. Assim, realizando a mudança de variáveis $u = x_1 - x_3$ e $v = x_2 - x_3$, obtemos a equação de Yang-Baxter com a seguinte dependência dos parâmetros espectrais u e v,

$$R_{12}(u)R_{13}(u+v)R_{23}(v) = R_{23}(v)R_{13}(u+v)R_{12}(u). \tag{1.3}$$

Fazendo agora mais uma hipótese sobre a matriz R, consideraremos então uma classe que possa depender de um parâmetro adicional h, tal que para valores infinitesimais deste parâmetro a seguinte expansão seja possível,

$$R(x,h) = k(x,h)\left[1 + hr(x) + O(h^2) + ...\right], \tag{1.4}$$

para alguma função escalar $k(x,h)$. Com abuso de linguagem esse parâmetro h irá desempenhar o papel de constante de Planck no mesmo sentido que a mecânica clássica é recuperada da mecânica quântica quando a constante de Planck vai a zero.

Desta forma levando em conta a expansão (1.4) na equação (1.3), em segunda ordem de h obtemos a seguinte equação para a matriz $r(x)$,

$$[r_{12}(u), r_{13}(u+v)] + [r_{12}(u), r_{23}(v)] + [r_{13}(u+v), r_{23}(v)] = 0. \tag{1.5}$$

Esta equação é conhecida por equação de Yang-Baxter clássica e por ser escrita somente em termos de comutadores, ela pode ser considerada como uma equação sobre uma álgebra de Lie abstrata [11].

Até o presente momento não existe uma classificação completa das soluções da equação de Yang-Baxter (1.1) como existe uma classificação das álgebras de Lie [12]. No entanto Belavin e Drinfeld [11] estabeleceram uma classificação completa de todas as soluções da equação de Yang-Baxter clássica onde as propriedades da álgebra de Lie desempenham um papel fundamental. De acordo com essa classificação, as soluções de (1.5) somente podem ser dadas em termos de funções elípticas, trigonométricas ou racionais. Ainda mais, Belavin e Drinfeld [11] apresentaram todas essas soluções para as álgebras de Lie semi-simples. Ao contrário da equação (1.5), a equação (1.3) não pode ser escrita somente em termos de comutadores e consequentemente suas soluções terão uma forte dependência da escolha da representação da álgebra de Lie.

Com todo o embasamento oferecido pelas álgebras de Lie, uma forma de se ver o problema da busca de soluções da equação de Yang-Baxter, é procurar por matrizes $R(x,h)$ contendo o parâmetro arbitrário h, tal que ela satisfaça a equação de Yang-Baxter (1.3) e que no limite $h \to 0$ a expansão (1.4) seja alcançada. Esse tipo de procedimento é conhecido como "quantização" da matriz R clássica e procedimentos para esta finalidade foram desenvolvidos independentemente por Bazhanov [13] e Jimbo [8]. De forma prática a equação de Yang-Baxter consiste de um sistema muito grande de equações funcionais não-lineares cuja solução se torna extremamente difícil quando a dimensão dos espaços vetoriais considerados são altas. O método de Bazhanov consiste em considerar vários problemas menores sendo que a verificação de todos eles implicam automaticamente em uma solução da equação de Yang-Baxter. A idéia central do método de Bazhanov é o seguinte. Seja uma matriz $R(x)$ possuindo as seguintes propriedades:

- Automorficidade ou quasi-periodicidade,

$$R(x+\pi) = (U \otimes 1)R(x)(U \otimes 1)^{-1} \tag{1.6}$$

  onde U é uma matriz de ordem finita g, ou seja $U^g = 1$.

- Simetria de *crossing*,

$$R_{12}(x) = (V \otimes 1)R_{21}(-\rho - x)^{t_1}(V \otimes 1)^{-1} \tag{1.7}$$

  onde ρ é uma constante, V é uma matriz denominada matriz de *crossing* e t_1 quer dizer a transposição no primeiro espaço.

- Unitariedade,

$$R_{12}(x)R_{21}(-x) = f(x) \cdot I \tag{1.8}$$

  onde I é a identidade e $f(x)$ é uma função escalar.

- Comportamento assintótico tal que $R(x)$ seja finita quando $x \to \pm\infty$ e que satisfaça

$$R_{12}^{+}R_{13}^{+}R_{23}^{+} = R_{23}^{+}R_{13}^{+}R_{12}^{+} \qquad R^{+} = \lim_{x \to +\infty} R(x) \tag{1.9}$$

- $R(x)$ possua apenas pólos simples.

Bazhanov então mostrou [13] que se uma matriz $R(x)$ satisfaz as propriedades acima, ela consequentemente satisfaz a equação de Yang-Baxter (1.3) e o ponto de partida para a construção dessas matrizes são justamente as soluções da equação de Yang-Baxter clássica $r(x)$ que podem ser construídas diretamente de álgebras de Lie [11]. Desta forma ele foi capaz de apresentar soluções trigonométricas da equação de Yang-Baxter (1.3) associadas com as álgebras de Lie $sl(N)$, $sp(N)$ e $o(N)$.

Jimbo por outro lado utilizou-se de uma quantização da álgebra de Lie, primeiramente introduzida em [14], que posteriormente recebeu o nome de álgebra quântica ou álgebra de Lie q-deformada. Este parâmetro de deformação q está relacionado com o parâmetro h de forma que o limite $h \to 0$ correponda a $q \to 1$, e recuperamos assim uma álgebra de Lie usual. Desta maneira ele foi foi capaz de apresentar soluções trigonométricas da equação de Yang-Baxter associadas com as algebras de Lie q-deformadas A_n, B_n, C_n, D_n, $A_{2n}^{(2)}$, $A_{2n-1}^{(2)}$ e $D_{n+1}^{(2)}$ [15].

Apesar de se tratar de um assunto bem conhecido de longa data, é surpreendente que uma outra possibilidade pouco explorada até os dias de hoje seja justamente a consideração de uma estrutura algébrica diferente de álgebras de Lie sendo esta as superalgebras de Lie. Neste último caso as dificuldades envolvidas vão desde a falta de um melhor entendimento das representações dos supergrupos bem como de uma clara classificação dos possíveis automorfismos. De fato, no contexto de modelos de vértices integráveis, resultados exatos concentraram-se por várias décadas somente sobre a representação vetorial da simetria $U_q[sl(n|m)]$ [16]-[18], e casos específicos da simetria $U_q[osp(n|m)]$ [19]-[23].

Por outro lado o entendimento físico de modelos de vértices inclui necessariamente a diagonalização exata de suas matrizes de transferência [6], o que pode assim nos fornecer informações sobre o comportamento da energia livre e a natureza das excitações elementares. Este passo foi alcançado com sucesso para as álgebras de Lie convencionais tanto pela utilização do Ansatz de Bethe Analítico [24], que nos fornece apenas os autovalores da matriz de transferência, quanto pelo Ansatz de Bethe Algébrico [25, 26] que além dos autovalores nos fornecer também os autovetores da matriz de transferência. Embora o Ansatz de Bethe Algébrico consista de uma poderosa técnica, uma solução unificada por meios deste método dos modelos de vértices invariantes por superalgebras de Lie q-deformadas tem se mantido como um problema em aberto de longa data na teoria de modelos exatamente solúveis, mesmo através do Ansatz de Bethe Analítico. Uma forte razão para este problema ter se mantido em aberto estava no fato que a implementação do Ansatz de Bethe Algébrico requer que tenhamos em mãos expressões explícitas para matrizes R, de forma similar a aquelas apresentadas por Jimbo para as álgebras de Lie não-excepcionais [15].

Motivados por esta dificuldade, o objetivo deste trabalho é justamente estabelecer progressos na direção da solução exata de uma variedade de modelos de vértices em mecânica estatística invariantes por superalgebras. No próximo capítulo apresentaremos expressões explícitas para matrizes R associadas com as superalgebras de Lie q-deformadas $U_q[sl^{(2)}(r|2m)]$ e $U_q[osp^{(1)}(r|2m)]$ [27] onde o símbolo c em $U_q[\mathcal{G}^{(c)}]$ denota o tipo de automorfismo considerado para a superalgebra $\mathcal{G}$.

Estabeleceremos também a conexão entre essas soluções e representações da álgebra de Braid-Monoid que nos permitirá então obter suas generalizações multiparamétricas das matrizes R consideradas, além de generalizações altamente não triviais da matriz R associada ao $U_q[D_{n+1}^{(2)}]$ [28]. No capítulo 2 apresentaremos uma formulação do Ansatz de Bethe Algébrico que torna possível a diagonalização das matrizes de transferência associadas as superalgebras $U_q[sl^{(2)}(r|2m)]$ e $U_q[osp^{(1)}(r|2m)]$ [27]. Na série de apêndices A-D apresentaremos detalhes sobre certas propriedades das matrizes R discutidas no texto bem como aspectos técnicos relacionados a formulação do Método do Espalhamento Inverso Quântico.

Capítulo 2

Superalgebras de Lie e Equação de Yang-Baxter

Neste capítulo introduziremos o conceito de superalgebra de Lie e apresentaremos soluções explícitas da equação de Yang-Baxter associadas com superalgebras de Lie q-deformadas. Também exploraremos o fato de álgebras de Lie não serem a única estrutura algébrica relacionada com a equação de Yang-Baxter e estabeleceremos a conexão entre algumas famílias de soluções advindas de superalgebras de Lie com álgebras de Braid-Monoid. Esta conexão nos permitirá então a obtenção de novas soluções da equação de Yang-Baxter.

2.1 Superalgebras de Lie

O primeiro passo ao se introduzir o conceito de superalgebra de Lie é a introdução do conceito de estruturas algébricas graduadas. Para isso devemos primeiramente considerar o conceito de espaço vetorial graduado onde superalgebras são obtidas pelo enriquecimento de tal espaço com a adição de produtos apropriados. O exemplo mais comum de estrutura algébrica graduada é dado pelo grupo dos números inteiros positivos, onde cada um de seus elementos pode ser par ou ímpar.

Considerando a operação de soma ordinária entre os elementos pares e ímpares do conjunto dos inteiros é fácil ver que,

$$
\begin{aligned}
&\text{Inteiro PAR} + \text{Inteiro PAR} = \text{Inteiro PAR} \\
&\text{Inteiro PAR} + \text{Inteiro ÍMPAR} = \text{Inteiro ÍMPAR} \\
&\text{Inteiro ÍMPAR} + \text{Inteiro PAR} = \text{Inteiro ÍMPAR} \\
&\text{Inteiro ÍMPAR} + \text{Inteiro ÍMPAR} = \text{Inteiro PAR}
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

Esta operação de adição pode ser vista como a operação "produto" do grupo dos inteiros e denotando esse produto pelo símbolo $\cdot$ podemos reescrever as relações acima como,

$$
\begin{aligned}
&\text{PAR} \cdot \text{PAR} = \text{PAR} \\
&\text{PAR} \cdot \text{ÍMPAR} = \text{ÍMPAR} \\
&\text{ÍMPAR} \cdot \text{PAR} = \text{ÍMPAR} \\
&\text{ÍMPAR} \cdot \text{ÍMPAR} = \text{PAR}.
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

Considerando agora o grupo cíclico de ordem 2, Z_2, cujos elementos são A e E tais que,

$$
\begin{aligned}
EE &= E \\
EA &= AE = A \\
AA &= E,
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

podemos considerar então E como o elemento par e A como o elemento ímpar. Por esta razão a estrutura (2.2) é dita possuir graduação Z_2.

Ao extender o conceito de graduação para uma álgebra linear é necessário primeiramente introduzir o conceito de espaço vetorial graduado. Consideramos então um espaço vetorial complexo V cuja dimensão de V seja, $dim(V) = n+m$, onde n e m sejam inteiros positivos. Supomos também que $e_1, e_2, ..., e_{n+m}$ sejam uma base em V. Assim qualquer elemento $a \in V$ pode ser escrito como

$$a = \sum_{j=1}^{n+m} \mu_j e_j, \tag{2.4}$$

onde μ_j são coeficientes arbitrários que podem assumir valores tanto reais quanto complexos.

Este espaço pode ser feito graduado pela atribuição de cada elemento na forma

$$a = \sum_{j=1}^{n} \mu_j e_j, \tag{2.5}$$

como sendo um elemento par, enquanto que os elementos ditos ímpares são os de forma

$$a = \sum_{j=n+1}^{n+m} \mu_j e_j. \tag{2.6}$$

Desta forma os elementos pares envolvem somente os elementos e_j com $j = 1, ..., n$ da base de V, enquanto que os elementos ímpares são aqueles constituídos pelos elementos de base e_j com $j = n+1, ..., n+m$. Assim sendo, qualquer elemento $a \in V$ que seja par ou ímpar é dito homogêneo. Ou seja, estes elementos possuem projeções nulas em um dos subespaços, ou no subespaço par ou no subespaço ímpar.

Ao conjunto de elementos pares de V que formam o subespaço par denotaremos por V_0. Do mesmo modo os elementos ímpares também constituem um subespaço de V, o subespaço ímpar denotado por V_1. Claramente V é a soma direta de V_0 e V_1, $V = V_0 \oplus V_1$, cujas dimensões são

$$\begin{aligned} dim(V_0) &= n \\ dim(V_1) &= m. \end{aligned}$$

Para cada elemento homogêneo de V definimos então uma função paridade $p(x)$ tal que

$$p(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x \in V_0 \\ 1 & \text{para } x \in V_1 \end{cases}.$$

Assim para um elemento da base $e_i \in V_\alpha$ dizemos que e_i é homogêneo de grau de liberdade i e denotamos $p_i = p(e_i)$.

O conceito de estruturas algébricas graduadas irá assumir seu total significado quando definirmos um produto para cada par de elementos. Uma superalgebra é então qualquer álgebra $A = A_0 \oplus A_1$ com graduação Z_2. Por outro lado para uma superalgebra de Lie adiciona-se uma operação colchete $[,]$ satisfazendo os seguintes axiomas com $\alpha, \beta \in \{0, 1\}$

$$\begin{aligned} [a,b] &= -(-1)^{p(a)p(b)}[b,a] && a \in A_\alpha,\ b \in A_\beta \\ [a,[b,c]] &= [[a,b],c] + (-1)^{p(a)p(b)}[b,[a,c]] && a \in A_\alpha,\ b \in A_\beta \end{aligned}$$

e sendo este último o análogo da identidade de Jacobi [12].

As superalgebras de Lie apareceram inicialmente em [29] como as álgebras de Lie associados a certos grupos generalizados atualmente chamados supergrupos de Lie cujas algebras de funções são algebras contendo variáveis comutativas e anti-comutativas. Da mesma forma que ocorre com o espaço vetorial graduado, os elementos pertencentes a A_0 são chamados pares enquanto que aqueles pertencentes a A_1 são chamados ímpares. Assim se $p(a)$ aparece em uma das expressões que se segue, então é assumido que a é um elemento homogêneo.

Existe ainda uma maneira natural de se definir a operação colchete $[,]$ em uma superalgebra que é dada por

$$[a,b] = ab - (-1)^{p(a)p(b)}ba. \tag{2.7}$$

Assim uma superalgebra A é chamada comutativa se $[a,b] = 0$ para todos $a, b \in A$.

A soma direta de superalgebras é definida de maneira convencional [12], mas por outro lado a definição de produto tensorial é diferente. Sendo A e B duas superalgebras, o seu produto tensorial $A \otimes B$ forma uma superalgebra cujo espaço é o produto tensorial dos espaços A e B incluindo a graduação Z_2. Esta operação é definida pela propriedade,

$$(a_1 \otimes b_1)(a_2 \otimes b_2) = (-1)^{p(a_2)p(b_1)} a_1 a_2 \otimes b_1 b_2 \qquad a_i \in A,\ b_i \in B. \tag{2.8}$$

Considerando então a base de V formada pelos elementos $e_1, ..., e_n \in V_0$ e $e_{n+1}, ..., e_{n+m} \in V_1$, temos nesta base uma representação matricial de qualquer operador $a \in V$, podendo este ser escrito em blocos na forma

$$a = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \tag{2.9}$$

onde α é uma matriz $n \times n$, β é uma matriz $n \times m$, γ é uma matriz $m \times n$ e δ é uma matriz $m \times m$.

Desta forma as matrizes dos elementos pares possuem a forma $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}$, enquanto que as de elementos ímpares são da forma $\begin{pmatrix} 0 & \beta \\ \gamma & 0 \end{pmatrix}$. Assim introduzimos o conceito de supertraço sendo este dado por,

$$str(a) = tr(\alpha) - tr(\delta). \tag{2.10}$$

Observe que o supertraço de uma matriz não depende da escolha da base homogênea, assim podemos falar do supertraço de a significando o supertraço deste operador em qualquer base homogênea. Assim, de maneira explícita temos que

$$str(a) = \sum_{i=1}^{n+m} (-1)^{p_i} a_{ii}, \tag{2.11}$$

onde a_{ij} são os elementos matriciais de a.

Da mesma forma que ocorre para as álgebras de Lie, um problema fundamental para as superalgebras de Lie é o da sua classificação. Pelo fato de superalgebras de Lie possuírem uma estrutura muito mais rica que as álgebras de Lie, o problema de sua classificação é muito mais elaborada. De acordo com a classificação obtida por V.G. Kac [30], as famílias clássicas de superalgebras de Lie se dividem em:

- Quatro séries denominadas $A(n,m)$, $B(n,m)$, $C(n)$ e $D(n,m)$ que em muitos aspectos são similares as séries de Cartan A, B, C e D.
- Duas superalgebras de Lie excepcionais, uma $F(4)$ de dimensão 40 e outra $G(3)$ de dimensão 31.
- Uma família de dimensão 17 denominada $D(2,1;\alpha)$ que consiste de uma deformação do $D(2,1)$.
- Duas séries denominadas $P(n)$ e $Q(n)$.

De acordo com essa classificação, a série $A(n,m)$ também é denominada $sl(n{+}1|m{+}1)$ que consiste de uma superalgebra cuja algebra no espaço par é o $sl(n+1)$ e no espaço ímpar é o $sl(m{+}1)$. Da mesma forma B, C e D correspondem as seguintes superalgebras

$$\begin{aligned} osp(2n+1|2m) &= B(n,m) \qquad n \geq 0,\ m > 0 \\ osp(2n|2m) &= D(n,m) \qquad n \geq 2,\ m > 0 \\ osp(2|2n-2) &= C(n) \qquad\quad n \geq 2\ \ , \end{aligned}$$

onde a superalgebra $osp(n|m)$ é chamada superalgebra ortogonal simplética cuja álgebra no espaço par é o $o(n)$ e a álgebra no espaço ímpar é o $sp(n)$.

Apresentaremos agora as definições de algumas superalgebras de Lie que serão utilizados nos capítulos seguintes.

- A Superalgebra $gl(n|m)$:

A superalgebra $gl(n|m)$ é formada pelas álgebras das matrizes x com dimensão $(n+m) \times (n+m)$,

$$gl(n|m) = \{x \text{ é uma matriz } (n+m) \times (n+m)\} . \tag{2.12}$$

Da mesma forma como foi dado em (2.9), x é dividido em blocos nos respectivos espaços pares e ímpares,

$$x = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \tag{2.13}$$

onde as dimensões das matrizes α, β, γ e δ são respectivamente $n \times n$, $n \times m$, $m \times n$ e $m \times m$. Na base escolhida os elementos pares são da forma $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}$, enquanto que os ímpares são $\begin{pmatrix} 0 & \beta \\ \gamma & 0 \end{pmatrix}$ e consequentemente,

$$p \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} = 0 \qquad p \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ \gamma & 0 \end{pmatrix} = 1. \tag{2.14}$$

- A Superalgebra $sl(n|m)$:

A superalgebra $sl(n|m)$ é definida por,

$$sl(n|m) = \{x \in gl(n|m) | str(x) = 0\} , \tag{2.15}$$

que consiste de uma sub-álgebra de $gl(n|m)$ tal que o supertraço se anula

$$str \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = tr(\alpha) - tr(\delta) = 0. \tag{2.16}$$

- A Superalgebra $osp(n|2m)$:

A superalgebra ortogonal simplética por sua vez consiste dos elementos x,

$$osp(n|2m) = \left\{x \in gl(n|2m) | x + Gx^{st}G^{-1} = 0\right\} , \tag{2.17}$$

onde a operação de supertransposição st é dada por

$$x^{st} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}^{st} = \begin{pmatrix} \alpha^t & -\gamma^t \\ \beta^t & \delta^t \end{pmatrix}, \tag{2.18}$$

com t denotando a transposição usual e a matriz G sendo dada na forma bloco diagonal $G = diag(I_n, \mathcal{I}_m)$ com

$$\mathcal{I}_m = \begin{pmatrix} 0 & I_m \\ -I_m & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.19}$$

onde a matriz I_m é a matriz identidade com dimensões $m \times m$.

2.2 Soluções Trigonométricas Associadas a Superalgebras

Como foi mencionado na introdução, a equação de Yang-Baxter é uma equação envolvendo operadores R definidos num dado espaço vetorial. Este espaço vetorial onde R atua pode ser um espaço vetorial com graduação Z_2, e neste caso a equação de Yang-Baxter recebe o nome de equação de Yang-Baxter graduada. Tal denominação enfatiza que o produto tensorial presente na definição da equação (1.1) deve ser entendido na forma graduada como descrito na equação (2.8). Da mesma forma que no caso sem graduação, o conceito de soluções clássicas também existe e satisfazem por sua vez uma equação análoga a (1.5), só que agora o comutador presente em (1.5) é substituído então pela definição (2.7).

Soluções trigonométricas da equação de Yang-Baxter associadas com álgebras de Lie não-excepcionais já são conhecidas por mais de duas décadas. Essas soluções foram apresentadas por Bazhanov [13] e Jimbo [15], que apesar de utilizarem diferentes métodos, um ponto em comum nas duas abordagens é o requerimento da chamada matriz R clássica definida somente em termos de uma álgebra de Lie. Apesar dos dois métodos proverem soluções trigonométricas da equação de Yang-Baxter, as soluções apresentadas por Bazhanov se mostram insatisfatórias por ainda dependerem da representação explícita do Coxeter de automorfismo [11] de uma dada álgebra de Lie, de modo que essas soluções ainda precisam ser computados numa base conveniente. Por outro lado Jimbo foi capaz de apresentar soluções explícitas da equação de Yang-Baxter, o que permitem assim a sua imediata interpretação como pesos de Boltzmann de modelos de vértices integráveis [6].

A apresentação de matrizes R explícitas representam um passo de grande importância na construção de novos modelos exatamente solúveis, que no caso de soluções associadas a superalgebras de Lie a maioria dos esforços tem se concentrado no caso de soluções racionais associadas com as superalgebras $sl(n|m)$ e $osp(n|m)$ [23, 31, 32]. Já no caso de soluções trigonométricas os resultados se concentram na superalgebra $U_q[sl(n|m)]$ [33] e em casos específicos das superalgebras q-deformadas $U_q[osp(1|2)]$ [19] e $U_q[osp(2|2)]$

[20]-[22]. Esta situação insatisfatória estava provavelmente relacionada ao fato de superalgebras de Lie possuírem uma teoria de representação muito mais entrincada quando comparadas ao caso de álgebras de Lie convencionais. Além disto, esta dificuldade fez com que uma solução unificada dos modelos de vértices invariantes com superalgebras de Lie q-deformadas permanecessem como um problema em aberto de longa data, com exceção do caso $U_q[sl(n|m)]$ que está relacionado com o modelo de Perk-Schultz [17, 33]. De forma a alcançar este objetivo é indispensável se ter em mãos expressões explícitas para as matrizes R da mesma forma como as que foram apresentadas por Jimbo [15] para as álgebras de Lie não-excepcionais. Com esta intenção apresentaremos soluções explícitas da equação de Yang-Baxter graduada associadas com as superalgebras q-deformadas $U_q[sl^{(2)}(r|2m)]$ e $U_q[osp^{(1)}(r|2m)]$, fazendo uso dos resultados presentes em [34] e [35].

Em [34] Bazhanov e Shadrikov apresentam soluções trigonométricas da equação de Yang-Baxter graduada associadas com as superalgebras de Lie $sl(r|2m)$ e $osp(r|2m)$ com dois possíveis tipos de Coxeter de automorfismo. Estes resultados seguem a mesma abordagem de [13] e portanto recaem ainda na situação insatisfatória de não apresentarem soluções explícitas. Estas soluções entretanto dependem da forma dos Coxeter de automorfismo considerado para as respectivas superalgebras que por sua vez foram explicitados em [35]. Através da análise destes resultados, apresentaremos nesta seção soluções da equação de Yang-Baxter graduada (1.3) onde a matriz R, $R_{ab}(\lambda)$, atua no produto tensorial de dois espaços com graduação Z_2 sendo estes denotados por V_a e V_b. Salientamos aqui que os produtos tensorias presentes na equação de Yang-Baxter graduada levam em conta a graduação dos respectivos espaços, o que significa que seus elementos matriciais dependerão fortemente das paridades dos graus de liberdade [34]. Entretanto, ainda é possível definir uma nova matriz $\check{R}_{ab}(\lambda)$ satisfazendo uma outra equação que é insensível a graduação, sendo esta dada por

$$\check{R}_{12}(\lambda)\check{R}_{23}(\lambda+\mu)\check{R}_{12}(\mu) = \check{R}_{23}(\mu)\check{R}_{12}(\lambda+\mu)\check{R}_{23}(\lambda). \tag{2.20}$$

A matriz $\check{R}$ desempenha um papel fundamental na formulação do Método do Espalhamento Quântico e ela é simplesmente relacionada a matriz R, $R_{ab}(\lambda)$, pela expressão

$$\check{R}_{ab}(\lambda) = P_{ab} R_{ab}(\lambda). \tag{2.21}$$

Na expressão acima P_{ab} é denominado permutador graduado, sendo este explicitamente dado por $P_{ab} = \sum_{\alpha,\beta=1}^{N} (-1)^{p_\alpha p_\beta} \hat{e}_{\alpha\beta}^{(a)} \otimes \hat{e}_{\beta\alpha}^{(b)}$ onde o inteiro N representa a dimensão do espaço V_a. Já os elementos $\hat{e}_{\alpha\beta}^{(a)}$ são chamados matrizes de Weyl e denotam matrizes de dimensão $N \times N$ possuindo somente um elemento não nulo com valor 1 na linha α e coluna β.

Utilizando estas definições apresentaremos a seguir expressões explícitas para matrizes R associadas com as superalgebras de Lie q-deformadas $U_q[sl^{(2)}(r|2m)]$ e $U_q[osp^{(1)}(r|2m)]$.

Como as informações necessárias sobre essas álgebras já foram descritas em [34], nos restringiremos aqui a apresentar expressões para as matrizes R em uma base conveniente. Estas fórmulas irão depender fortemente da graduação escolhida para os graus de liberdade e de modo a obter expressões explícitas é conveniente adotarmos uma específica. Assim, nesta etapa deste trabalho escolhemos a seguinte,

$$p_\alpha^{(l_0)} = \begin{cases} 1 \ \text{ para } \ \alpha = 1, \dots, m \quad \text{e} \quad \alpha = r+m+1, \dots, r+2m \\ 0 \ \text{ para } \ \alpha = m+1, \dots, r+m \end{cases} , \tag{2.22}$$

onde introduzimos o símbolo $l_0 \equiv (r|2m)$ com o objetivo de enfatizar o número de graus de liberdade par (r) e os números de graus de liberdade ímpar $(2m)$ do espaço vetorial que estamos considerando.

Desta maneira, a matriz R quântica na base de Weyl é dada por,

$$\begin{aligned} \check{R}_{ab}^{(l_0)}(\lambda) \ = \ & \sum_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq \alpha'}}^{N_0} a_\alpha^{(l_0)}(\lambda) \hat{e}_{\alpha\alpha}^{(a)} \otimes \hat{e}_{\alpha\alpha}^{(b)} + b^{(l_0)}(\lambda) \sum_{\substack{\alpha,\beta=1 \\ \alpha\neq\beta, \alpha\neq\beta'}}^{N_0} \hat{e}_{\beta\alpha}^{(a)} \otimes \hat{e}_{\alpha\beta}^{(b)} \\ & + \bar{c}^{(l_0)}(\lambda) \sum_{\substack{\alpha,\beta=1 \\ \alpha<\beta, \alpha\neq\beta'}}^{N_0} \hat{e}_{\alpha\alpha}^{(a)} \otimes \hat{e}_{\beta\beta}^{(b)} + c^{(l_0)}(\lambda) \sum_{\substack{\alpha,\beta=1 \\ \alpha>\beta, \alpha\neq\beta'}}^{N_0} \hat{e}_{\alpha\alpha}^{(a)} \otimes \hat{e}_{\beta\beta}^{(b)} \\ & + \sum_{\alpha,\beta=1}^{N_0} d_{\alpha,\beta}^{(l_0)}(\lambda) \hat{e}_{\alpha'\beta}^{(a)} \otimes \hat{e}_{\alpha\beta'}^{(b)}, \end{aligned} \tag{2.23}$$

$U_q[\mathcal{G}]$	N_0	$\zeta^{(l_0)}$
$U_q[sl(2n+1\|2m)^{(2)}]$	$2n+2m+1$	$-q^{2n-2m+1}$
$U_q[sl(2n\|2m)^{(2)}]$	$2n+2m$	$-q^{2n-2m}$
$U_q[osp(2n\|2m)^{(1)}]$	$2n+2m$	$q^{2n-2m-2}$
$U_q[osp(2n+1\|2m)^{(1)}]$	$2n+2m+1$	$q^{2n-2m-1}$

Tabela 2.1: Valores das dimensões N_0 e a dependência de $\zeta^{(l_0)}$ com o parâmetro q para cada superalgebra de Lie considerada.

onde cada índice α possui seu conjugado $\alpha' = N_0 + 1 - \alpha$, e N_0 é a dimensão do espaço vetorial graduado com r elementos pares e $2m$ ímpares. As funções $a_{\alpha}^{(l_0)}(\lambda)$, $b^{(l_0)}(\lambda)$, $c^{(l_0)}(\lambda)$ e $\bar{c}^{(l_0)}(\lambda)$ presentes em (2.23) são por sua vez

$$a_{\alpha}^{(l_0)}(\lambda) = (e^{2\lambda} - \zeta^{(l_0)})(e^{2\lambda(1-p_{\alpha}^{(l_0)})} - q^2 e^{2\lambda p_{\alpha}^{(l_0)}}) \tag{2.24}$$

$$b^{(l_0)}(\lambda) = q(e^{2\lambda} - 1)(e^{2\lambda} - \zeta^{(l_0)}) \tag{2.25}$$

$$c^{(l_0)}(\lambda) = (1 - q^2)(e^{2\lambda} - \zeta^{(l_0)}) \tag{2.26}$$

$$\bar{c}^{(l_0)}(\lambda) = e^{2\lambda} c^{(l_0)}(\lambda), \tag{2.27}$$

enquanto que $d_{\alpha\beta}^{(l_0)}(\lambda)$ possui a seguinte forma

$$d_{\alpha,\beta}^{(l_0)}(\lambda) = \begin{cases} q(e^{2\lambda}-1)(e^{2\lambda}-\zeta^{(l_0)}) + e^{2\lambda}(q^2-1)(\zeta^{(l_0)}-1) & \alpha=\beta=\beta' \\ (e^{2\lambda}-1)\left[(e^{2\lambda}-\zeta^{(l_0)})(-1)^{p_{\alpha}^{(l_0)}} q^{2p_{\alpha}^{(l_0)}} + e^{2\lambda}(q^2-1)\right] & \alpha=\beta\neq\beta' \\ (q^2-1)\left[\zeta^{(l_0)}(e^{2\lambda}-1)\frac{\epsilon_\alpha}{\epsilon_\beta} q^{t_\alpha - t_\beta} - \delta_{\alpha,\beta'}(e^{2\lambda}-\zeta^{(l_0)})\right] & \alpha<\beta \\ (q^2-1)e^{2\lambda}\left[(e^{2\lambda}-1)\frac{\epsilon_\alpha}{\epsilon_\beta} q^{t_\alpha - t_\beta} - \delta_{\alpha,\beta'}(e^{2\lambda}-\zeta^{(l_0)})\right] & \alpha>\beta \end{cases} . \tag{2.28}$$

O elemento $\zeta^{(l_0)}$ presente nas expressões (2.24-2.28) são dados na tabela 2.1 juntamente com os valores das dimensões N_0 para cada superalgebra de Lie considerada. Já as variáveis ϵ_α e t_α são dadas por

$$\epsilon_\alpha = \begin{cases} (-1)^{-\frac{p_\alpha^{(l_0)}}{2}} & 1 \leq \alpha < \dfrac{N_0+1}{2} \\ 1 & \alpha = \dfrac{N_0+1}{2} \\ (-1)^{\frac{p_\alpha^{(l_0)}}{2}} & \dfrac{N_0+1}{2} < \alpha \leq N_0 \end{cases} , \qquad (2.29)$$

$$t_\alpha = \begin{cases} \alpha + \left[\frac{1}{2} - p_\alpha^{(l_0)} + 2 \sum_{\alpha \leq \beta < \frac{N_0+1}{2}} p_\beta^{(l_0)} \right] & 1 \leq \alpha < \frac{N_0+1}{2} \\ \frac{N_0+1}{2} & \alpha = \frac{N_0+1}{2} \\ \alpha - \left[\frac{1}{2} - p_\alpha^{(l_0)} + 2 \sum_{\frac{N_0+1}{2} < \beta \leq \alpha} p_\beta^{(l_0)} \right] & \frac{N_0+1}{2} < \alpha \leq N_0 \end{cases} . \qquad (2.30)$$

Estas matrizes R definidas pelas equações (2.23-2.30) satisfazem ainda importantes relações de simetria. Uma delas é chamada simetria PT caracterizada pela relação

$$P_{12} R_{12}(\lambda) P_{12} = R_{12}^{st_1 st_2}(\lambda), \qquad (2.31)$$

onde o símbolo st_k denota a supertransposição no espaço com índice k. Outra importante simetria é a chamada simetria de *crossing* sendo mais adequadamente escrita como

$$R_{12}(\lambda) = \frac{\rho(\lambda)}{\rho(-\lambda-\eta)} V_1 R_{12}^{st_2}(-\lambda-\eta) V_1^{-1}, \qquad (2.32)$$

onde $\rho(\lambda)$ é uma função de normalização conveniente, η é o parâmetro de *crossing* e V é uma matriz anti-diagonal. Como as expressões para essas quantidades são suficientemente complicadas, reunimos esses resultados no apêndice A.

É importante ressaltar que as matrizes R obtidas para as superalgebras $U_q[sl^{(2)}(2n+1|2m)]$ and $U_q[osp^{(1)}(2n+1|2m)]$ permanecem válidas mesmo para $n=0$. Neste caso entretanto, tais matrizes R podem ser relacionadas por transformações que preservam a equação de Yang-Baxter, a aquelas associadas com as álgebras $U_{\tilde{q}}[B_m]$ e $U_{\tilde{q}}[A_{2m}^{(2)}]$ respectivamente e com $\tilde{q} = -q^{-1}$.

2.3 A Álgebra de Braid-Monoid

Na seção anterior apresentamos fórmulas explícitas para matrizes R invariantes com as superalgebras de Lie q-deformadas $U_q[sl^{(2)}(r|2m)]$ e $U_q[osp^{(1)}(r|2m)]$. Agora nesta seção mostraremos que essas soluções estão relacionadas com representações da álgebra de Braid-Monoid, e que o estabelecimento desta relação nos permite obter generalizações multiparamétricas das soluções já apresentadas.

A álgebra de Braid-Monoid [36] é uma álgebra gerada pela identidade I, os operadores b_i^+ e sua inversa b_i^- chamados de operadores de Braid, além do operador E_i também chamado operador de Temperly-Lieb. O índice i pode por sua vez representar o i-ésimo sítio de uma rede unidimensional de tamanho L. Os operadores de Braid $b_i^{\pm}$ estão sujeitos a obedecer a álgebra do grupo de Braid de Artin [37], sendo esta dada por

$$
\begin{aligned}
&b_i^+ b_i^- = b_i^- b_i^+ = I \\
&b_i^+ b_j^+ = b_j^+ b_i^+ \qquad \text{para } |i-j| \geq 2 \\
&b_i^+ b_{i+1}^+ b_i^+ = b_{i+1}^+ b_i^+ b_{i+1}^+ .
\end{aligned} \tag{2.33}
$$

Já o operador de Temperly-Lieb E_i [38] está sujeito as seguintes relações algébricas conhecidas como álgebra de Temperly-Lieb,

$$
\begin{aligned}
&E_i E_j = E_j E_i \qquad \text{para } |i-j| \geq 2 \\
&E_i^2 = Q E_i \\
&E_i E_{i\pm 1} E_i = E_i ,
\end{aligned} \tag{2.34}
$$

onde Q é um parâmetro complexo arbitrário.

Estas duas álgebras, a álgebra de Braid e a álgebra de Temperly-Lieb, podem ser combinadas dando origem a uma álgebra de dois parâmetros contendo as seguintes relações adicionais envolvendo os operadores de Braid e Temperly-Lieb,

$$b_i^+ E_i = E_i b_i^+ = \omega E_i$$
$$b_i^+ E_j = E_j b_i^+ \qquad \text{para} \ \ |i-j| \geq 2 \tag{2.35}$$
$$b_{i\pm1}^+ b_i^+ E_{i\pm1} = E_i b_{i\pm1}^+ b_i^+ = E_i E_{i+1},$$

onde ω é um outro parâmetro complexo.

Argumentaremos a seguir que famílias de matrizes R multiparamétricas associadas com as superalgebras de Lie q-deformadas $U_q[sl^{(2)}(r|2m)]$ e $U_q[osp^{(1)}(r|2m)]$ podem ser derivadas de representações de um quociente da álgebra de Braid-Monoid denominada álgebra de Birman-Wenzel-Murakami [39]. Para estabelecer esta relação o primeiro passo é investigar apropriados limites das matrizes R apresentadas na seção anterior (2.23) que nos fornece representações da álgebra de Braid [36]. Este estudo nos revelará que as representações da álgebra de Braid associadas com as matrizes R (2.23) podem ser generalizadas para acomodar parâmetros livres adicionais e uma grande variedade de possíveis graduações Z_2.

Como ponto de partida para estabelecer esta conexão ressaltamos a grande similaridade existente entre a álgebra de Braid (2.33) e a equação de Yang-Baxter para a matriz $\check{R}_{ab}(x)$ (2.20). Esta grande similaridade torna possível obter representações do grupo de Braid através de apropriados limites no parâmetro espectral x, tal que a equação (2.20) se torne assintóticamente independente deste parâmetro. Deste modo a equação de Yang-Baxter (2.20) se torna a própria relação (2.33) da álgebra de Braid. No caso considerado esta relação pode ser alcançada considerando os seguintes limites,

$$b^{\pm} = \lim_{\lambda \to \pm\infty} \left[\theta_{\pm}(x = e^{\lambda}) \check{R}_{12}(x = e^{\lambda}) \right], \tag{2.36}$$

onde $\theta_{\pm}(x)$ são apropriadas funções de normalização. Além disto, o operador b_i^+ e sua inversa b_i^- seguem diretamente de $b^{\pm}$ pela construção usual

$$b_i^{\pm} = \bigotimes_{j=1}^{i-1} I_N \ \ b^{\pm} \quad \bigotimes_{j=i+2}^{L} I_N \tag{2.37}$$

sendo I_N a matriz identidade com dimensão $N \times N$.

Considerando o limite descrito em (2.36), podemos ver que ambas as soluções associadas as superalgebras q-deformadas $U_q[sl^{(2)}(r|2m)]$ e $U_q[osp^{(1)}(r|2m)]$ nos fornece a mesma representação do grupo de Braid. Desta forma, as representações do grupo de Braid $b^{\pm}$ mais gerais, compatíveis com as matrizes R apresentadas em (2.23), possuem a seguinte forma

$$\begin{aligned} b^{+} = & \sum_{\alpha \neq \alpha'}^{N} (-1)^{p_\alpha} q^{1-2p_\alpha} e_{\alpha\alpha} \otimes e_{\alpha\alpha} + \sum_{\substack{\alpha,\beta=1 \\ \alpha\neq\beta,\beta'}}^{N} (-1)^{p_\alpha p_\beta} e_{\beta\alpha} \otimes e_{\alpha\beta} \\ & + (q - \frac{1}{q}) \sum_{\substack{\alpha,\beta=1 \\ \alpha<\beta,\, \alpha\neq\beta'}}^{N} e_{\alpha\alpha} \otimes e_{\beta\beta} + \sum_{\alpha,\beta=1}^{N} a^{+}_{\alpha\beta} e_{\alpha'\beta} \otimes e_{\alpha\beta'} \end{aligned} \tag{2.38}$$

e

$$\begin{aligned} b^{-} = & \sum_{\alpha \neq \alpha'}^{N} (-1)^{p_\alpha} q^{-1+2p_\alpha} e_{\alpha\alpha} \otimes e_{\alpha\alpha} + \sum_{\substack{\alpha,\beta=1 \\ \alpha\neq\beta,\beta'}}^{N} (-1)^{p_\alpha p_\beta} e_{\beta\alpha} \otimes e_{\alpha\beta} \\ & + (\frac{1}{q} - q) \sum_{\substack{\alpha,\beta=1 \\ \alpha<\beta,\, \alpha\neq\beta'}}^{N} e_{\beta\beta} \otimes e_{\alpha\alpha} + \sum_{\alpha,\beta=1}^{N} a^{-}_{\alpha\beta} e_{\alpha'\beta} \otimes e_{\alpha\beta'}, \end{aligned} \tag{2.39}$$

onde $\alpha' = N + 1 - \alpha$.

Uma importante realização da proposta acima é que existe uma grande liberdade para se fixar os coeficientes $a^{\pm}_{\alpha\beta}$ para várias escolhas de paridades do espaço vetorial também chamadas paridades de Grassmann. Estas possibilidades de graduações são aquelas compatíveis com as possibilidades de simetria $U(1)$ assumidas implicitamente em nossa construção (2.38, 2.39) dos operadores de Braids. Mais especificamente, as paridades p_α não precisam necessariamente ser as dadas por (2.22), somente sendo necessário que estes satisfaçam a seguinte condição de reflexão,

$$p_\alpha = p_{\alpha'}. \tag{2.40}$$

Sob esta condição mais fraca (2.40) encontramos que os coeficientes $a^{\pm}_{\alpha\beta}$ são dados pelas expressões gerais,

$$a^{+}_{\alpha\beta} = \begin{cases} \left(\frac{1}{q} - q\right)\left[\frac{\epsilon_\alpha}{\epsilon_\beta} q^{t_\beta - t_\alpha} - \delta_{\alpha\,\beta'}\right] & \alpha > \beta \\ 0 & \alpha < \beta \\ 1 & \alpha = \beta = \beta' \\ (-1)^{p_\alpha} q^{-1+2p_\alpha} & \alpha = \beta \neq \beta' \end{cases},$$
$$a^{-}_{\alpha\beta} = \begin{cases} \left(q - \frac{1}{q}\right)\left[\frac{\epsilon_\alpha}{\epsilon_\beta} q^{t_\beta - t_\alpha} - \delta_{\alpha\,\beta'}\right] & \alpha < \beta \\ 0 & \alpha > \beta \\ 1 & \alpha = \beta = \beta' \\ (-1)^{p_\alpha} q^{+1-2p_\alpha} & \alpha = \beta \neq \beta' \end{cases}. \tag{2.41}$$

onde os respectivos parâmetros ϵ_α e t_α devem então satisfazerem as relações

$$\epsilon_\alpha = (-1)^{p_\alpha} \epsilon_{\alpha'} \qquad \text{e} \qquad t_\alpha = t_{\alpha'} - 2\left[p_\alpha + \frac{N}{2} - \alpha - 2\sum_{\beta=\alpha}^{\left[\frac{N+1}{2}\right]} p_\beta\right]. \tag{2.42}$$

A variável α pode assumir valores no intervalo $1 \leq \alpha < \left[\frac{N+1}{2}\right]$ e lembramos que $\left[\frac{N+1}{2}\right]$ denota o maior inteiro menor que $\frac{N+1}{2}$.

Das expressões (2.42) concluímos que cada par de variáveis ϵ_α e t_α nos deixa com número de $\left[\frac{N+1}{2}\right]$ parâmetros livres. Esta liberdade é esperada para representações do grupo de Braid associadas a extensões multiparamétricas [40].

Aqui conjecturamos que o operador de Braid b^+ está em direta correspondência com a matriz R universal multiparamétrica associada com a superalgebra $U_q[osp^{(1)}(r|2m)]$. Antes de prosseguir salientamos que tais representações do grupo de Braid possuindo graus de liberdade pares e ímpares foram anteriormente chamados por representações não usuais do grupo de Braid [41, 42]. Entretanto, expressões para estes operadores em termos das matrizes de Weyl (2.38,2.39) para qualquer valor da dimensão N e com a variedade de parâmetros arbitrários ϵ_α e t_α, além da sua relação com matrizes R multiparamétricas, são resultados novos na literatura [28].

Voltamos nossa atenção agora para o estudo da estrutura de autovalores dos operadores de Braid (2.38,2.39). De forma a estabelecer uma conexão com representações da álgebra de Birman-Wenzel-Murakami é importante que tais representações possuam no máximo três distintos autovalores [43]. Por inspeção direta das expressões (2.38,2.39) concluímos que b^{+} satisfaz a seguinte relação cúbica,

$$\left(b^{+}+\frac{1}{q}I_N\otimes I_N\right)\left(b^{+}-qI_N\otimes I_N\right)\left(b^{+}-\sigma I_N\otimes I_N\right)=0, \tag{2.43}$$

onde o terceiro autovalor σ é dado por

$$\sigma=q^{1-r+2m}. \tag{2.44}$$

O próximo passo para estabelecer a conexão com a álgebra de Birman-Wenzel-Murakami é assegurar que o correspondente operador de Temperly-Lieb E está relacionada com o operador de Braid $b^{\pm}$ através da seguinte identidade,

$$E=I_N\otimes I_N+\frac{b^{+}-b^{-}}{q^{-1}-q} \quad . \tag{2.45}$$

Substituindo então as expressões (2.38,2.39) na equação (2.45) podemos então determinar as expressões explícitas para o operador de Temperly-Lieb que fica sendo dado então por

$$E=\sum_{\alpha,\beta}^{N}\frac{\epsilon_\alpha}{\epsilon_\beta}q^{t_\beta-t_\alpha}e_{\alpha'\beta}\otimes e_{\alpha\beta'} \quad . \tag{2.46}$$

O nosso próximo passo é então verificar se os operadores de Braid b^{+} definidos em (2.38-2.42) e o respectivo operador de Temperly-Lieb E (2.46) satisfazem a álgebra de Braid-Monoid (2.33,2.36). Isto realmente ocorre com os parâmetros complexos Q e ω sendo dados por

$$Q=1+\frac{\sigma-\sigma^{-1}}{q^{-1}-q} \quad \text{e} \quad \omega=\sigma \quad . \tag{2.47}$$

Discutiremos agora como podemos reintroduzir o parâmetro espectral x nessas representações do grupo de Braid de forma a construir correspondentes soluções $\check{R}_{ab}(x)$

da equação de Yang-Baxter. A álgebra de Birman-Wenzel-Murakami é conhecida por prover condições suficientes para implementar o procedimento de Baxterização [43]. Este procedimento idealizado em princípio por Jones [44] visa obter soluções da equação de Yang-Baxter a partir de representações de certas álgebras relacionadas com a equação de Yang-Baxter. Assim para cada representação da álgebra de Braid-Monoid podemos encontrar duas matrizes $\check{R}^{(1)}(x)$ e $\check{R}^{(2)}(x)$ satisfazendo a equação de Yang-Baxter (2.20). Estas soluções são dadas em termos de uma combinação linear dos geradores da álgebra de Braid-Monoid,

$$\check{R}^{(k)}(x) = (\frac{1}{q} - q)x(x-\xi^{(k)})I_N \otimes I_N + (x-1)(x-\xi^{(k)})b^{+} + (q-\frac{1}{q})x(x-1)E, \quad (2.48)$$

onde $\xi^{(k)}$ é dada por

$$\xi^{(k)} = \begin{cases} -\frac{q}{\sigma} & k=1 \\ \frac{1}{q\sigma} & k=2 \end{cases}. \quad (2.49)$$

Considerando as representações do grupo de Braid (2.38,2.39) para N par e N ímpar separadamente, as duas possibilidades de baxterização nos leva a quatro novas matrizes R. Após simplificações trabalhosas, suas expressões em termos de matrizes de Weyl são então dadas por

$$\begin{aligned} &\check{R}^{(k)}(x) = \\ &\sum_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha\neq\alpha'}}^{N} (x-\xi^{(k)})(x^{1-p_\alpha} - q^2 x^{p_\alpha}) e_{\alpha\alpha}\otimes e_{\alpha\alpha} + q(x-1)(x-\xi^{(k)}) \sum_{\substack{\alpha,\beta=1 \\ \alpha\neq\beta,\alpha\neq\beta'}}^{N} (-1)^{p_\alpha p_\beta} e_{\beta\alpha}\otimes e_{\alpha\beta} \\ &+(1-q^2)(x-\xi^{(k)}) \left[x \sum_{\substack{\alpha,\beta=1 \\ \alpha<\beta,\alpha\neq\beta'}}^{N} e_{\alpha\alpha}\otimes e_{\beta\beta} + \sum_{\substack{\alpha,\beta=1 \\ \alpha>\beta,\alpha\neq\beta'}}^{N} e_{\alpha\alpha}\otimes e_{\beta\beta} \right] + \sum_{\alpha,\beta=1}^{N} d_{\alpha,\beta}^{(k)}(x) e_{\alpha'\beta}\otimes e_{\alpha\beta'}, \end{aligned} \quad (2.50)$$

onde as funções $d_{\alpha,\beta}^{(k)}(x)$ são dadas por

matriz $\check{R}$	Superalgebra	$\xi^{(k)}$
$\check{R}^{(1)}(x)$	$U_q[sl^{(2)}(r\|2m)]$	$-q^{r-2m}$
$\check{R}^{(2)}(x)$	$U_q[osp^{(1)}(r\|2m)]$	q^{r-2m-2}

Tabela 2.2: A relação entre $\check{R}^{(k)}(x)$ e as superalgebras associadas, juntamente com os parâmetros $\xi^{(k)}$.

$$d^{(k)}_{\alpha,\beta}(\lambda) = \begin{cases} q(x-1)(x-\xi^{(k)}) + x(q^2-1)(\xi^{(k)}-1) & \alpha=\beta=\beta' \\ (x-1)\left[(x-\xi^{(k)})(-1)^{p_\alpha} q^{2p_\alpha} + x(q^2-1)\right] & \alpha=\beta\neq\beta' \\ (q^2-1)\left[\xi^{(k)}(x-1)\dfrac{\epsilon_\alpha}{\epsilon_\beta} q^{t_\alpha - t_\beta} - \delta_{\alpha,\beta'}(x-\xi^{(k)})\right] & \alpha<\beta \\ (q^2-1)x\left[(x-1)\dfrac{\epsilon_\alpha}{\epsilon_\beta} q^{t_\alpha - t_\beta} - \delta_{\alpha,\beta'}(x-\xi^{(k)})\right] & \alpha>\beta \end{cases} . \quad (2.51)$$

Neste ponto ressaltamos que as expressões (2.50,2.51) são válidas na situação onde as variáveis ϵ_α e t_α somente satisfazem as relações (2.42), e para a variedade de escolha de graduações satisfazendo a condição (2.40). A possível relação existente entre tais matrizes R e a correspondente superalgebra quântica é proposto na tabela 2.2 . Esta correspondência foi obtida pela comparação das equações (2.49,2.51) com os resultados prévios (2.23-2.30). Acreditamos que estas matrizes R juntamente com a tabela 2.2 extendem significativamente os resultados da seção 1.2 para matrizes R baseadas em superalgebras. Na próxima seção veremos que podemos ainda lucrar muito mais da conexão estabelecida com álgebras de Braid-Monoid.

2.4 A Álgebra de Braid-Monoid Diluída

A álgebra de Braid-Monoid diluída [45] consiste de um interessante caso especial de uma generalização da álgebra de Braid-Monoid chamada álgebra de Braid-Monoid de duas cores [46]. Esta última é obtida da álgebra de Braid-Monoid usual pela atribuição de novos graus de liberdade aos seus geradores que chamamos simplesmente de cores. Desta forma, a álgebra de Braid-Monoid de duas cores é gerada por operadores de Braid coloridos $b_i^{\pm(a,b)}$

e operadores de Temperly-Lieb coloridos $E_i^{(a,b)}$ tais que os índices $a, b = 1, 2$ denotam duas possibilidades de cores. Outros elementos desta álgebra são projetores $P_i^{(a)}$ onde os índices denotam que a projeção é realizada sobre a a-ésima cor no i-ésimo sítio de uma rede de tamanho L. Estes operadores por sua vez satisfazem as relações usuais de projetores dadas por

$$P_i^{(a)} P_i^{(b)} = \delta_{ab} P_i^{(a)} \qquad \sum_{a=1}^{2} P_i^{(a)} = I \ . \tag{2.52}$$

Já o caso diluído recebe este nome pelo fato de uma das cores ser trivialmente representada. Escolhendo a segunda cor $a = 2$ como sendo a trivial, os operadores de Braid não triviais que fazem parte da álgebra de Braid-Monoid diluída são $b_i^{\pm(1,1)}$, $b_i^{+(1,2)}$ e $b_i^{+(2,1)}$. Estes por sua vez satisfazem as seguintes relações generalizadas do grupo de Braid

$$\begin{aligned} b_i^{-(a,b)} b_i^{+(b,a)} &= b_i^{+(a,b)} b_i^{-(b,a)} = p_i^{(b,a)} \\ b_i^{+(a,b)} b_{i+1}^{+(c,b)} b_i^{+(c,a)} &= b_{i+1}^{+(c,a)} b_i^{+(c,b)} b_{i+1}^{+(a,b)}, \end{aligned} \tag{2.53}$$

onde $p_i^{(a,b)}$ são operadores de projeção compostos definidos por $p_i^{(a,b)} = P_i^{(a)} P_{i+1}^{(b)}$.

Da mesma forma os operadores de Temperly-Lieb coloridos não triviais $E_i^{(1,1)}$, $E_i^{(1,2)}$ e $E_i^{(2,1)}$ são sujeitos as seguintes relações de Temperly-Lieb extendidas

$$\begin{aligned} E_i^{(a,b)} E_i^{(c,a)} &= Q^{(a)} E_i^{(c,b)} \\ E_i^{(a,b)} E_{i+1}^{(a,a)} E_i^{(c,a)} &= E_i^{(c,b)} p_{i+1}^{(c,a)} \\ E_i^{(a,b)} E_{i-1}^{(a,a)} E_i^{(c,a)} &= E_i^{(c,b)} p_{i-1}^{(a,c)}. \end{aligned} \tag{2.54}$$

Nestas relações estamos ainda assumindo que quaisquer dois geradores atuando nas posições i e j com $|i - j| \geq 2$ comutam. Além disto, é requerido que estes geradores satisfaçam um conjunto adicional de relações sendo estas dadas por

$$b_i^{+(a,a)} E_i^{(b,a)} = \omega^{(a)} E_i^{(b,a)}$$

$$\begin{aligned}
E_i^{+(a,b)} b_i^{(a,a)} &= \omega^{(a)} E_i^{(a,b)} \\
b_{i+1}^{+(c,b)} b_i^{+(c,b)} E_{i+1}^{(a,b)} &= E_i^{(a,b)} b_{i+1}^{+(c,a)} b_i^{+(c,a)} = E_i^{(c,b)} E_{i+1}^{(a,c)} \\
b_{i-1}^{+(b,c)} b_i^{+(b,c)} E_{i-1}^{(a,b)} &= E_i^{(a,b)} b_{i-1}^{+(a,c)} b_i^{+(a,c)} = E_i^{(c,b)} E_{i-1}^{(a,c)}.
\end{aligned} \tag{2.55}$$

Devido a trivialidade suposta para a segunda cor $a = 2$ no caso diluído, temos ainda que $b_i^{+(a,b)} = b_i^{-(a,b)}$ para $a \neq b$ e que $b_i^{\pm(2,2)} = E_i^{(2,2)} = p_i^{(2,2)}$.

Do mesmo modo que a álgebra de Birman-Wenzel-Murakami surge como um quociente da álgebra de Braid-Monoid, a álgebra de Birman-Wenzel-Murakami diluída surge como um quociente da álgebra de Braid-Monoid diluída (2.52-2.55). Este quociente também requer restrições adicionais entre os operadores de Braid $b_i^{\pm(1,1)}$ a os operadores de Temperly-Lieb $E_i^{(1,1)}$, como o análogo da relação cúbica (2.43) que é dada por

$$\left(b_i^{+(1,1)} + \frac{1}{q} p^{(1,1)}\right) \left(b_i^{+(1,1)} - q p^{(1,1)}\right) \left(b_i^{+(1,1)} - \omega^{(1)} p^{(1,1)}\right) = 0, \tag{2.56}$$

e uma relação polinomial para o operador $E_i^{(1,1)}$

$$E_i^{(1,1)} = p^{(1,1)} + \frac{b_i^{+(1,1)} - b_i^{-(1,1)}}{q^{-1} - q} \quad . \tag{2.57}$$

Um fator de grande importância neste caso quociente da álgebra de Braid-Monoid diluída é que os operadores envolvendo somente a primeira cor $b_i^{\pm(1,1)}$, $E_i^{(1,1)}$ e $p_i^{(1,1)}$ formam uma sub-álgebra do tipo Birman-Wenzel-Murakami. Isto sugere que as representações da álgebra de Braid-Monoid construídas na seção anterior podem ser utilizadas como o ponto de partida para se obter representações da versão diluída desta álgebra. Mais precisamente, estas representações podem ser obtidas dos nossos resultados (2.38,2.39) pela adição de um grau de liberdade extra, correspondendo a segunda cor, ao espaço de estados original. Como consequência, a ação de um operador qualquer $\hat{O}_i$ no i-ésimo sítio de uma rede unidimensional é agora dado por,

$$\hat{O}_i = \bigotimes_{j=1}^{i-1} I_{N+1} \ \hat{O} \ \bigotimes_{j=i+1}^{L} I_{N+1} \quad . \tag{2.58}$$

Por outro lado, o fato da segunda cor ter sido escolhida para ser trivialmente representada nos leva a seguinte expressão geral para os projetores [45],

$$P^{(1)} = \sum_{\alpha=1}^{N} \bar{e}_{\alpha\,\alpha} \qquad P^{(2)} = \bar{e}_{N+1\;N+1}, \tag{2.59}$$

onde $\bar{e}_{\alpha\beta}$ são matrizes de Weyl agora com dimensão $(N+1) \times (N+1)$.

Neste ponto as respectivas representações para os operadores de Braid $b^{\pm(1,1)}$ e operadores de Temperly-Lieb $E^{(1,1)}$ podem ser obtidas das equações (2.38,2.39,2.46), sendo agora matrizes de dimensão $(N+1)^2 \times (N+1)^2$ cujas expressões explícitas são dadas por

$$\begin{aligned} b^{+(1,1)} = & \sum_{\alpha\neq\alpha'}^{N} (-1)^{p_\alpha} q^{1-2p_\alpha} \bar{e}_{\alpha\alpha} \otimes \bar{e}_{\alpha\alpha} + \sum_{\substack{\alpha,\beta=1 \\ \alpha\neq\beta,\beta'}}^{N} (-1)^{p_\alpha p_\beta} \bar{e}_{\beta\alpha} \otimes \bar{e}_{\alpha\beta} \\ & +(q-\frac{1}{q}) \sum_{\substack{\alpha,\beta=1 \\ \alpha<\beta,\ \alpha\neq\beta'}}^{N} \bar{e}_{\alpha\alpha} \otimes \bar{e}_{\beta\beta} + \sum_{\alpha,\beta=1}^{N} a^{+}_{\alpha\beta} \bar{e}_{\alpha'\beta} \otimes \bar{e}_{\alpha\beta'}, \end{aligned} \tag{2.60}$$

$$\begin{aligned} b^{-(1,1)} = & \sum_{\alpha\neq\alpha'}^{N} (-1)^{p_\alpha} q^{-1+2p_\alpha} \bar{e}_{\alpha\alpha} \otimes \bar{e}_{\alpha\alpha} + \sum_{\substack{\alpha,\beta=1 \\ \alpha\neq\beta,\beta'}}^{N} (-1)^{p_\alpha p_\beta} \bar{e}_{\beta\alpha} \otimes \bar{e}_{\alpha\beta} \\ & +(\frac{1}{q}-q) \sum_{\substack{\alpha,\beta=1 \\ \alpha<\beta,\ \alpha\neq\beta'}}^{N} \bar{e}_{\beta\beta} \otimes \bar{e}_{\alpha\alpha} + \sum_{\alpha,\beta=1}^{N} a^{-}_{\alpha\beta} \bar{e}_{\alpha'\beta} \otimes \bar{e}_{\alpha\beta'}, \end{aligned} \tag{2.61}$$

$$E^{(1,1)} = \sum_{\alpha,\beta}^{N} \frac{\epsilon_\alpha}{\epsilon_\beta} q^{t_\beta - t_\alpha} \bar{e}_{\alpha'\beta} \otimes \bar{e}_{\alpha\beta'}. \tag{2.62}$$

É importante salientar que os operadores (2.60-2.62) em conjunto com os projetores $p^{(1,1)}$ formam uma sub-álgebra do tipo Birman-Wenzel-Murakami diluída onde os parâmetros $Q^{(1)} = Q$, $\omega^{(1)} = \omega$ e $Q^{(2)} = \omega^{(2)} = 1$. Já a expressão para os operadores de Braid mistos $b^{+(1,2)}$ e $b^{+(2,1)}$ seguem quase que diretamente das definições de projetores,

$$b^{+(1,2)} = \sum_{\alpha=1}^{N} \bar{e}_{N+1\;\alpha} \otimes \bar{e}_{\alpha\;N+1} \qquad b^{+(2,1)} = \sum_{\alpha=1}^{N} \bar{e}_{\alpha\;N+1} \otimes \bar{e}_{N+1\;\alpha}. \tag{2.63}$$

De modo a se obter os operadores de Temperly-Lieb mistos uma quantidade extra de trabalho é requerida e obtemos então que eles são dados por

$$E^{(2,1)} = \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\epsilon_\alpha}{\epsilon_{N+1}} q^{t_{N+1}-t_\alpha} \bar{e}_{\alpha' \, N+1} \otimes \bar{e}_{\alpha \, N+1}, \tag{2.64}$$

$$E^{(1,2)} = \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\epsilon_{N+1}}{\epsilon_\alpha} q^{t_\alpha-t_{N+1}} \bar{e}_{N+1 \, \alpha} \otimes \bar{e}_{N+1 \, \alpha'}, \tag{2.65}$$

onde ϵ_{N+1} e t_{N+1} são parâmetros adicionais arbitrários associados com a diluição.

Voltamos então ao problema fundamental da construção de soluções da equação de Yang-Baxter a partir das representações da álgebra de Birman-Wenzel-Murakami Diluída. Da mesma forma como ocorre para a álgebra usual de Birman-Wenzel-Murakami, representações da álgebra de Birman-Wenzel-Murakami Diluídas podem ser baxterizadas de forma a fornecer soluções da equação de Yang-Baxter [45]. A correspondente expressão para a matriz $\check{R}(x)$ é dada por

$$\begin{aligned} \check{R}(x) &= (\frac{1}{q} - q)\eta p^{(1,1)} + (x - \frac{1}{x})(\frac{x}{\tau} b^{+(1,1)} - \frac{\tau}{x} b^{-(1,1)}) + (\frac{1}{q} - q)(\frac{\tau}{x} - \frac{x}{\tau})(p^{(1,2)} + p^{(2,1)}) \\ &- \kappa_1 (x - \frac{1}{x})(\frac{\tau}{x} - \frac{x}{\tau})(b^{(1,2)} + b^{(2,1)}) + \kappa_2 (\frac{1}{q} - q)(x - \frac{1}{x})(E^{(1,2)} + E^{(2,1)}) \\ &+ \left[\eta(\frac{1}{q} - q) - (x - \frac{1}{x})(\frac{\tau}{x} - \frac{x}{\tau})\right] p^{(2,2)}, \end{aligned} \tag{2.66}$$

onde $\tau^2 = \sigma$, $\eta = \tau - \tau^{-1}$ e $\kappa_{1,2} = \pm 1$ são sinais arbitrários.

A substituição direta de representações (2.59-2.65) na equação (2.66) nos levam a expressões explícitas para as matrizes R cujas esperadas simetrias $U(1)$ são difíceis de serem reconhecidas a primeira vista. No entanto estas simetrias podem ser feitas mais explícitas por meio de transformações apropriadas que preservam a equação de Yang-Baxter,

$$\check{\mathcal{R}}(x) = (S \otimes S)^{-1} \, \check{R}(x) \, (S \otimes S) \,, \tag{2.67}$$

onde S é uma matriz $(N+1) \times (N+1)$ inversível, devendo ser escolhida apropriadamente.

Para valores pares da dimensão $N = 2n + 2m$, encontramos que a apropriada matriz S_{par} é dada por

$$S_{par} = \sum_{\alpha=1}^{n+m} \bar{e}_{\alpha\,\alpha} + \sum_{\alpha=n+m+1}^{2n+2m} \bar{e}_{\alpha\,\alpha+1} + \bar{e}_{2n+2m+1\ n+m+1}, \tag{2.68}$$

e que a correspondente matriz R transformada $\check{\mathcal{R}}(x)$ está relacionada com aquela da superalgebra $U_q[osp^{(1)}(2n+1|2m)]$. De fato, elas podem ser feitas equivalentes por transformações de gauge dependente do parâmetro espectral e portanto não produzem novas soluções.

A situação para valores ímpares da dimensão $N = 2n+1+2m$ é fortuitamente muito mais interessante. Neste caso escolhendo a matriz S_{impar} composta por $S_{impar} = S_1 S_2$ sendo as matrizes S_1 e S_2 dadas por

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{\alpha=1}^{n+m+1} \bar{e}_{\alpha\,\alpha} + \sum_{\alpha=n+m+2}^{2n+2m+1} \bar{e}_{\alpha\,\alpha+1} + \bar{e}_{2n+2m+2\ n+m+2} \\ S_2 &= \sum_{\alpha=1}^{n+m} \bar{e}_{\alpha\,\alpha} + \sum_{\alpha=n+m+3}^{2n+2m+2} \bar{e}_{\alpha\,\alpha} \\ &+ \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\bar{e}_{n+m+1\ n+m+1} + \bar{e}_{n+m+1\ n+m+2} + \bar{e}_{n+m+2\ n+m+1} - \bar{e}_{n+m+2\ n+m+2}\right), \end{aligned} \tag{2.69}$$

a matriz R obtida então $\check{\mathcal{R}}(x)$ consiste de uma nova solução. A forma explícita para tal matriz R é então dada por

$$\begin{aligned} &\check{\mathcal{R}}(x) = \\ &\sum_{\substack{\alpha\neq\bar{n}+1 \\ \alpha\neq\bar{n}+2}} (x^2-\zeta^2)\left[x^{2(1-\bar{p}_\alpha)} - q^2 x^{2\bar{p}_\alpha}\right] \bar{e}_{\alpha\,\alpha} \otimes \bar{e}_{\alpha\,\alpha} \\ + \ & q(x^2-1)(x^2-\zeta^2) \sum_{\substack{\alpha\neq\beta,\beta'' \\ \alpha,\beta\neq\bar{n}+1,\bar{n}+2}} (-1)^{\bar{p}_\alpha\bar{p}_\beta} \bar{e}_{\beta\,\alpha} \otimes \bar{e}_{\alpha\,\beta} \\ + \ & \frac{1}{2} q(x^2-1)(x^2-\zeta^2) \sum_{\substack{\alpha\neq\beta,\beta'' \\ \beta=\bar{n}+1,\bar{n}+2}} [\ (1+\kappa_1)\left(\bar{e}_{\beta\,\alpha} \otimes \bar{e}_{\alpha\,\beta} + \bar{e}_{\alpha\,\beta} \otimes \bar{e}_{\beta\,\alpha}\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ \quad (1-\kappa_1)\left(\bar{e}_{\beta\,\alpha}\otimes\bar{e}_{\alpha\,\beta''}+\bar{e}_{\alpha\,\beta}\otimes\bar{e}_{\beta''\,\alpha}\right)] + \sum_{\alpha,\beta\neq\bar{n}+1,\bar{n}+2} g_{\alpha\beta}(x)\bar{e}_{\alpha''\,\beta}\otimes\bar{e}_{\alpha\,\beta''} \\
&- \quad (q^2-1)(x^2-\zeta^2)\left[\sum_{\substack{\alpha<\beta,\alpha\neq\beta'' \\ \alpha,\beta\neq\bar{n}+1,\bar{n}+2}} + x^2\sum_{\substack{\alpha>\beta,\alpha\neq\beta'' \\ \alpha,\beta\neq\bar{n}+1,\bar{n}+2}}\right]\bar{e}_{\beta\,\beta}\otimes\bar{e}_{\alpha\,\alpha} \\
&- \quad \frac{1}{2}(q^2-1)(x^2-\zeta^2)[(x+1)\left(\sum_{\substack{\alpha<\bar{n}+1 \\ \beta=\bar{n}+1,\bar{n}+2}} + x\sum_{\substack{\alpha>\bar{n}+2 \\ \beta=\bar{n}+1,\bar{n}+2}}\right)(\bar{e}_{\beta\,\beta}\otimes\bar{e}_{\alpha\,\alpha}+\bar{e}_{\alpha''\,\alpha''}\otimes\bar{e}_{\beta''\,\beta''}) \\
&+ \quad (x-1)\left(-\sum_{\substack{\alpha<\bar{n}+1 \\ \beta=\bar{n}+1,\bar{n}+2}} + x\sum_{\substack{\alpha>\bar{n}+2 \\ \beta=\bar{n}+1,\bar{n}+2}}\right)(\bar{e}_{\beta''\,\beta}\otimes\bar{e}_{\alpha\,\alpha}+\bar{e}_{\alpha''\,\alpha''}\otimes\bar{e}_{\beta''\,\beta''})] \\
&+ \quad \frac{1}{2}\sum_{\substack{\alpha\neq\bar{n}+1,\bar{n}+2 \\ \beta=\bar{n}+1,\bar{n}+2}}[b_\alpha^+(x)\bar{e}_{\alpha''\,\beta}\otimes\bar{e}_{\alpha\,\beta''}+\bar{b}_\alpha^+(x)\bar{e}_{\beta\,\alpha''}\otimes\bar{e}_{\beta''\,\alpha}+b_\alpha^-(x)\bar{e}_{\alpha''\,\beta}\otimes\bar{e}_{\alpha\,\beta} \\
&+ \quad \bar{b}_\alpha^-(x)\bar{e}_{\beta\,\alpha''}\otimes\bar{e}_{\beta\,\alpha}] + \sum_{\alpha=\bar{n}+1,\bar{n}+2}[c^+(x)\bar{e}_{\alpha''\,\alpha}\otimes\bar{e}_{\alpha\,\alpha''}+c^-(x)\bar{e}_{\alpha\,\alpha}\otimes\bar{e}_{\alpha\,\alpha} \\
&+ \quad d^+(x)\bar{e}_{\alpha''\,\alpha''}\otimes\bar{e}_{\alpha\,\alpha}+d^-(x)\bar{e}_{\alpha\,\alpha''}\otimes\bar{e}_{\alpha\,\alpha''}] \\
&+ \quad \frac{1}{2}\kappa_2\zeta(q^2-1)x(x^2-1)\mathcal{F}_-\sum_{\alpha,\beta=\bar{n}+1,\bar{n}+2}(-1)^{\alpha-\beta}\left(\bar{e}_{\beta\,\alpha}\otimes\bar{e}_{\alpha\,\beta''}+\bar{e}_{\alpha\,\beta''}\otimes\bar{e}_{\beta\,\alpha}\right),
\end{aligned}
\tag{2.70}
$$

onde $\alpha''=N+2-\alpha$, $\bar{n}=n+m$ e $\zeta=q^{n-m}$. Já as funções $g_{\alpha\,\beta}(x)$, $b_\alpha^\pm(x)$, $\bar{b}_\alpha^\pm(x)$, $c^\pm(x)$ e $d^\pm(x)$ presentes em (2.70) são

$$
g_{\alpha\,\beta}(x) = \begin{cases} (x^2-1)\left[(x^2-\zeta^2)(-1)^{\bar{p}_\alpha}q^{2\bar{p}_\alpha}+x^2(q^2-1)\right] & \alpha=\beta \\ (q^2-1)\left[\zeta^2(x^2-1)\frac{\bar{\epsilon}_\alpha}{\bar{\epsilon}_\beta}q^{\bar{t}_\alpha-\bar{t}_\beta}-\delta_{\alpha\,\beta''}(x^2-\zeta^2)\right] & \alpha<\beta \\ (q^2-1)x^2\left[(x^2-1)\frac{\bar{\epsilon}_\alpha}{\bar{\epsilon}_\beta}q^{\bar{t}_\alpha-\bar{t}_\beta}-\delta_{\alpha\,\beta''}(x^2-\zeta^2)\right] & \alpha>\beta \end{cases}
\tag{2.71}
$$

$$
b_\alpha^\pm(x) = \begin{cases} \mp\frac{\epsilon_\alpha}{\epsilon_{N+1}}q^{\tilde{t}_\alpha^{(1)}}(q^2-1)(x^2-1)(x\kappa_2\mp\frac{\epsilon_{N+1}}{\epsilon_{\bar{n}+1}}q^{t_{N+1}-t_{\bar{n}+1}}\zeta) & \alpha<\bar{n}+1 \\ (-1)^{p_\alpha}\frac{\epsilon_{\alpha''}}{\epsilon_{\bar{n}+1}}q^{\tilde{t}_\alpha^{(1)}}(q^2-1)(x^2-1)x(x\mp\kappa_2\frac{\epsilon_{\bar{n}+1}}{\epsilon_{N+1}}q^{t_{\bar{n}+1}-t_{N+1}}\zeta) & \alpha>\bar{n}+2 \end{cases}
\tag{2.72}
$$

$$
\bar{b}_\alpha^\pm(x) = \begin{cases} \mp(-1)^{p_\alpha}\frac{\epsilon_{N+1}}{\epsilon_\alpha}q^{\tilde{t}_\alpha^{(2)}}(q^2-1)(x^2-1)(x\kappa_2\mp\frac{\epsilon_{\bar{n}+1}}{\epsilon_{N+1}}q^{t_{\bar{n}+1}-t_{N+1}}\zeta) & \alpha<\bar{n}+1 \\ \frac{\epsilon_{\bar{n}+1}}{\epsilon_{\alpha''}}q^{\tilde{t}_\alpha^{(2)}}(q^2-1)(x^2-1)x(x\mp\kappa_2\frac{\epsilon_{N+1}}{\epsilon_{\bar{n}+1}}q^{t_{N+1}-t_{\bar{n}+1}}\zeta) & \alpha>\bar{n}+2 \end{cases}
\tag{2.73}
$$

$$
c^\pm(x) = \pm\frac{1}{2}(q^2-1)(\zeta+\kappa_2\mathcal{F}_+)x(x\mp1)\left[x\kappa_2\frac{(\zeta\mathcal{F}_++\kappa_2)}{(\zeta+\kappa_2\mathcal{F}_+)}\pm\zeta\right]+\frac{(1+\kappa_1)}{2}q(x^2-1)(x^2-\zeta^2)
\tag{2.74}
$$

$$d^{\pm}(x) \;=\; \pm\frac{1}{2}(q^2-1)(\zeta-\kappa_2\mathcal{F}_+)x(x\pm1)\left[x\kappa_2\frac{(\zeta\mathcal{F}_+-\kappa_2)}{(\zeta-\kappa_2\mathcal{F}_+)}\pm\zeta\right]+\frac{(1-\kappa_1)}{2}q(x^2-1)(x^2-\zeta^2) \tag{2.75}$$

As variáveis auxiliares $\mathcal{F}_{\pm}$, $\bar{\epsilon}_\alpha$, $\bar{t}_\alpha$, $\tilde{t}_\alpha^{(1)}$ e $\tilde{t}_\alpha^{(2)}$ entrando nas definições acima dependem explicitamente dos parâmetros ϵ_α e t_α na seguinte forma

$$\mathcal{F}_{\pm} = -\frac{1}{2}\left[\frac{\epsilon_{\bar{n}+1}}{\epsilon_{N+1}}q^{t_{\bar{n}+1}-t_{N+1}} \pm \frac{\epsilon_{N+1}}{\epsilon_{\bar{n}+1}}q^{t_{N+1}-t_{\bar{n}+1}}\right] \tag{2.76}$$

$$\bar{\epsilon}_\alpha \;=\; \begin{cases} \epsilon_\alpha & 1\leq\alpha\leq\bar{n} \\ \epsilon_{\alpha-1} & \bar{n}+3\leq\alpha\leq N+1 \end{cases} \tag{2.77}$$

$$\bar{t}_\alpha \;=\; \begin{cases} t_\alpha & 1\leq\alpha\leq\bar{n} \\ t_{\alpha-1} & \bar{n}+3\leq\alpha\leq N+1 \end{cases} \tag{2.78}$$

e

$$\tilde{t}_\alpha^{(1)} \;=\; \begin{cases} t_\alpha - t_{N+1} + n - m & 1\leq\alpha\leq\bar{n} \\ t_{\alpha''} - t_{\bar{n}+1} + 2\alpha - 5 - 2\bar{n} - 2\bar{p}_\alpha - 4\displaystyle\sum_{\beta=\bar{n}+3}^{\alpha-1}\bar{p}_\beta & \bar{n}+3\leq\alpha\leq N+1 \end{cases} \tag{2.79}$$

$$\tilde{t}_\alpha^{(2)} \;=\; \begin{cases} t_{N+1} - t_\alpha + 2\alpha - (n-m+1) - 2\bar{p}_\alpha - 4\displaystyle\sum_{\beta=1}^{\alpha-1}\bar{p}_\beta & 1\leq\alpha\leq\bar{n} \\ t_{\bar{n}+1} - t_{\alpha''} & \bar{n}+3\leq\alpha\leq N+1 \end{cases} . \tag{2.80}$$

Finalmente, as paridades renormalizadas $\bar{p}_\alpha$ estão relacionadas com aquelas originais (2.40) pela seguinte expressão,

$$\bar{p}_\alpha = \begin{cases} p_\alpha & 1\leq\alpha\leq\bar{n} \\ 0 & \alpha=\bar{n}+1 \\ 0 & \alpha=\bar{n}+2 \\ p_{\alpha-1} & \bar{n}+3\leq\alpha\leq N+1 \end{cases} . \tag{2.81}$$

A partir das equações (2.70-2.81) podemos claramente ver que as matrizes R possuem de fato dois diferentes ramos de soluções caracterizados pelo parâmetro discreto $\kappa_1=\pm1$.

Isto dá origem a dois modelos de vértices distintos já que a estrutura de alguns pesos de Boltzmann dependem drasticamente do sinal de κ_1. Por outro lado, o parâmetro κ_2 aparentemente não desempenha nenhum papel relevante na matriz R (2.70). De fato, a transformação $\kappa_2 \to -\kappa_2$ seguida por uma transformação similar em ζ deixa a matriz R invariante a menos de sinais triviais nos pesos $b_{\alpha}^{\pm}(x)$ e $\bar{b}_{\alpha}^{\pm}(x)$.

Até onde conhecemos a estrutura da matriz R (2.70-2.81) com tal quantidade de parâmetros livres é nova mesmo na ausência de graus de liberdade ímpares. Apesar da forma básica de $\check{\mathcal{R}}(x)$ para $\kappa_1 = 1$ e $p_{\alpha} = 0$ se assemelhar a matriz R associada ao $U_q[D_{n+1}^{(2)}]$ apresentada por Jimbo [15], ainda existem diferenças essenciais entre essas matrizes. Uma comparação direta revela que a matriz R (2.70) apresenta um relevante termo adicional quando comparada a solução $U_q[D_{n+1}^{(2)}]$ de Jimbo, sendo este o último termo de (2.70). Além disso alguns dos pesos de Boltzmann apresentam uma forte dependência dos parâmetros livres ϵ_{α} e t_{α}. De fato, é apenas para um ajuste fino desses parâmetros extras que todas as diferenças se cancelam e recuperamos a solução $U_q[D_{n+1}^{(2)}]$. Isto parece ser uma indicação que a matriz R do $U_q[D_{n+1}^{(2)}]$ apresentada por Jimbo é um caso particular e ainda não captura toda a estrutura admissível na deformação do grupo quântico $U_q[D_{n+1}^{(2)}]$.

Um outro ramo de soluções muito interessante que não é originado da álgebra de Birman-Wenzel-Murakami Diluída foi encontrada no decorrer da verificação explícita da solução (2.70-2.81). Observamos que existe ainda uma segunda família de soluções que difere de (2.70-2.81) somente com respeito aos termos $c^{\pm}(x)$ e $d^{\pm}(x)$. Em outras palavras, a estrutura geral da matriz R (2.70) contando ainda com os termos $g_{\alpha\beta}(x)$, $b_{\alpha}^{\pm}(x)$ e $\bar{b}_{\alpha}^{\pm}(x)$ são mantidos inalterados com exceção dos pesos $c^{\pm}(x)$ e $d^{\pm}(x)$. Para esta segunda família estas funções são então dadas por

$$c^{\pm}(x) = \pm\frac{1}{2}(q^2-1)(\zeta+\kappa_2\mathcal{F}_+)x(x\mp 1)\left[x\kappa_2\frac{(\zeta\mathcal{F}_+ + \kappa_2)}{(\zeta+\kappa_2\mathcal{F}_+)} \pm \zeta\right] + \frac{(1-\kappa_1)}{2}q(x^2-1)(x^2-\zeta^2) \tag{2.82}$$

$$d^{\pm}(x) = \pm\frac{1}{2}(q^2-1)(\zeta-\kappa_2\mathcal{F}_+)x(x\pm 1)\left[x\kappa_2\frac{(\zeta\mathcal{F}_+-\kappa_2)}{(\zeta-\kappa_2\mathcal{F}_+)}\pm\zeta\right]+\frac{(1+\kappa_1)}{2}q(x^2-1)(x^2-\zeta^2). \tag{2.83}$$

É interessante notar que os pesos (2.82,2.83) estão relacionados com os (2.74,2.75) através da reflexão $\kappa_1 \to -\kappa_1$, mas ressaltamos que essa transformação se aplica somente para estes termos específicos. Assim esperamos que a equação (2.70) com os termos $c^{\pm}(x)$ e $d^{\pm}(x)$ dados pelas equações (2.74,2.75) ou (2.82,2.83) caracterizem diferentes modelos de vértices.

Assim para enfatizar a extensão de nossos resultados referentes somente a presença de graus de liberdade ímpares, é conveniente apresentar a matriz R (2.70-2.83) para escolhas apropriadas dos parâmetros livres ϵ_α e t_α de forma que a matriz R $U_q[D^{(2)}_{n+1}]$ de Jimbo seja recuperada ao fazermos $p_\alpha = 0$. Isto ocorre escolhendo as variáveis ϵ_α e t_α para $1 \leq \alpha \leq N$ como descritos em (2.30), e as variáveis $\epsilon_{N+1} = -1$ e $t_{N+1} = n+m+1$. Implementando estas simplificações nas equações (2.70-2.81) encontramos que a matriz R pode ser reescrita na forma simplificada

$$\begin{aligned}
&\check{\mathcal{R}}^{(1)}(x) = \\
&\sum_{\substack{\alpha\neq\bar{n}+1\\ \alpha\neq\bar{n}+2}}(x^2-\zeta^2)\left[x^{2(1-\bar{p}_\alpha)}-q^2x^{2\bar{p}_\alpha}\right]\bar{e}_{\alpha\,\alpha}\otimes\bar{e}_{\alpha\,\alpha} \\
+\;& q(x^2-1)(x^2-\zeta^2)\sum_{\substack{\alpha\neq\beta,\beta''\\ \alpha,\beta\neq\bar{n}+1,\bar{n}+2}}(-1)^{\bar{p}_\alpha\bar{p}_\beta}\bar{e}_{\beta\,\alpha}\otimes\bar{e}_{\alpha\,\beta} \\
+\;& \frac{1}{2}q(x^2-1)(x^2-\zeta^2)\sum_{\substack{\alpha\neq\beta,\beta''\\ \beta=\bar{n}+1,\bar{n}+2}}[(1+\kappa_1)\left(\bar{e}_{\beta\,\alpha}\otimes\bar{e}_{\alpha\,\beta}+\bar{e}_{\alpha\,\beta}\otimes\bar{e}_{\beta\,\alpha}\right) \\
+\;& (1-\kappa_1)\left(\bar{e}_{\beta\,\alpha}\otimes\bar{e}_{\alpha\,\beta''}+\bar{e}_{\alpha\,\beta}\otimes\bar{e}_{\beta''\,\alpha}\right)]+\sum_{\alpha,\beta\neq\bar{n}+1,\bar{n}+2}\tilde{g}_{\alpha\beta}(x)\bar{e}_{\alpha''\,\beta}\otimes\bar{e}_{\alpha\,\beta''} \\
-\;& (q^2-1)(x^2-\zeta^2)\left[\sum_{\substack{\alpha<\beta,\alpha\neq\beta''\\ \alpha,\beta\neq\bar{n}+1,\bar{n}+2}}+x^2\sum_{\substack{\alpha>\beta,\alpha\neq\beta''\\ \alpha,\beta\neq\bar{n}+1,\bar{n}+2}}\right]\bar{e}_{\beta\,\beta}\otimes\bar{e}_{\alpha\,\alpha}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&- \frac{1}{2}(q^2-1)(x^2-\zeta^2)[(x+1)\left(\sum_{\substack{\alpha<\bar{n}+1\\ \beta=\bar{n}+1,\bar{n}+2}} + x\sum_{\substack{\alpha>\bar{n}+2\\ \beta=\bar{n}+1,\bar{n}+2}}\right)(\bar{e}_{\beta\,\beta}\otimes\bar{e}_{\alpha\,\alpha}+\bar{e}_{\alpha''\,\alpha''}\otimes\bar{e}_{\beta''\,\beta''}) \\
&+ (x-1)\left(-\sum_{\substack{\alpha<\bar{n}+1\\ \beta=\bar{n}+1,\bar{n}+2}} + x\sum_{\substack{\alpha>\bar{n}+2\\ \beta=\bar{n}+1,\bar{n}+2}}\right)(\bar{e}_{\beta''\,\beta}\otimes\bar{e}_{\alpha\,\alpha}+\bar{e}_{\alpha''\,\alpha''}\otimes\bar{e}_{\beta''\,\beta''})] \\
&+ \frac{1}{2}\sum_{\substack{\alpha\neq\bar{n}+1,\bar{n}+2\\ \beta=\bar{n}+1,\bar{n}+2}}\left[\tilde{b}^+_\alpha(x)\left(\bar{e}_{\alpha''\,\beta}\otimes\bar{e}_{\alpha\,\beta''}+\bar{e}_{\beta\,\alpha''}\otimes\bar{e}_{\beta''\,\alpha}\right)+\tilde{b}^-_\alpha(x)\left(\bar{e}_{\alpha''\,\beta}\otimes\bar{e}_{\alpha\,\beta}+\bar{e}_{\beta\,\alpha''}\otimes\bar{e}_{\beta\,\alpha}\right)\right] \\
&+ \sum_{\alpha=\bar{n}+1,\bar{n}+2}\left[\tilde{c}^+_\nu(x)\bar{e}_{\alpha''\,\alpha}\otimes\bar{e}_{\alpha\,\alpha''}+\tilde{c}^-_\nu(x)\bar{e}_{\alpha\,\alpha}\otimes\bar{e}_{\alpha\,\alpha}+\tilde{d}^+_\nu(x)\bar{e}_{\alpha''\,\alpha''}\otimes\bar{e}_{\alpha\,\alpha}+\tilde{d}^-_\nu(x)\bar{e}_{\alpha\,\alpha''}\otimes\bar{e}_{\alpha\,\alpha''}\right].
\end{aligned}
\tag{2.84}
$$

Os respectivos termos $\tilde{g}_{\alpha\,\beta}(x)$, $\tilde{b}^\pm_\alpha(x)$, $\tilde{c}^\pm_\nu(x)$ e $\tilde{d}^\pm_\nu(x)$ são então dados por

$$
\tilde{g}_{\alpha\,\beta}(x) = \begin{cases} (x^2-1)\left[(x^2-\zeta^2)(-1)^{\bar{p}_\alpha}q^{2\bar{p}_\alpha}+x^2(q^2-1)\right] & \alpha=\beta \\ (q^2-1)\left[\zeta^2(x^2-1)\frac{\breve{\epsilon}_\alpha}{\breve{\epsilon}_\beta}q^{\breve{t}_\alpha-\breve{t}_\beta}-\delta_{\alpha\,\beta''}(x^2-\zeta^2)\right] & \alpha<\beta \\ (q^2-1)x^2\left[(x^2-1)\frac{\breve{\epsilon}_\alpha}{\breve{\epsilon}_\beta}q^{\breve{t}_\alpha-\breve{t}_\beta}-\delta_{\alpha\,\beta''}(x^2-\zeta^2)\right] & \alpha>\beta \end{cases} \tag{2.85}
$$

$$
\tilde{b}^\pm_\alpha(x) = \begin{cases} \pm\breve{\epsilon}_\alpha q^{\tilde{t}_\alpha}(q^2-1)(x^2-1)(x\kappa_2\pm\zeta) & \alpha<\bar{n}+1 \\ \breve{\epsilon}_\alpha q^{\tilde{t}_\alpha}(q^2-1)(x^2-1)x(x\kappa_2\pm\zeta) & \alpha>\bar{n}+2 \end{cases} \tag{2.86}
$$

$$
\tilde{c}^\pm_\nu(x) = \pm\frac{1}{2}(q^2-1)(\zeta+\kappa_2)x(x\mp1)(x\kappa_2\pm\zeta)+\frac{(1+\nu\kappa_1)}{2}q(x^2-1)(x^2-\zeta^2) \tag{2.87}
$$

$$
\tilde{d}^\pm_\nu(x) = \pm\frac{1}{2}(q^2-1)(\zeta-\kappa_2)x(x\pm1)(x\kappa_2\pm\zeta)+\frac{(1-\nu\kappa_1)}{2}q(x^2-1)(x^2-\zeta^2) \tag{2.88}
$$

onde o índice inferior $\nu=\pm1$ nas funções $c^\pm_\nu(x)$ e $d^\pm_\nu(x)$ indicam as duas possíveis famílias de modelos discutidos anteriormente. As expressões explícitas para as variáveis $\breve{\epsilon}_\alpha$, $\breve{t}_\alpha$ e $\tilde{t}_\alpha$ são então

$$
\breve{\epsilon}_\alpha = \begin{cases} (-1)^{-\frac{\bar{p}_\alpha}{2}} & 1\leq\alpha\leq\bar{n} \\ 1 & \alpha=\bar{n}+1 \\ 1 & \alpha=\bar{n}+2 \\ (-1)^{\frac{\bar{p}_\alpha}{2}} & \bar{n}+3\leq\alpha\leq N+1 \end{cases} \tag{2.89}
$$

$$\breve{t}_\alpha = \begin{cases} \alpha + \left[1 - \bar{p}_\alpha + 2\sum_{\beta=\alpha}^{\bar{n}} \bar{p}_\beta\right] & 1 \leq \alpha \leq \bar{n} \\ \bar{n} + \frac{3}{2} & \alpha = \bar{n}+1 \\ \bar{n} + \frac{3}{2} & \alpha = \bar{n}+2 \\ \alpha - \left[1 - \bar{p}_\alpha + 2\sum_{\beta=\bar{n}+3}^{\alpha} \bar{p}_\beta\right] & \bar{n}+3 \leq \alpha \leq N+1 \end{cases} \tag{2.90}$$

$$\tilde{t}_\alpha = \begin{cases} \alpha - \left[\frac{1}{2} - \bar{p}_\alpha + 2\sum_{\beta=1}^{\alpha} \bar{p}_\beta\right] & 1 \leq \alpha \leq \bar{n} \\ \alpha - \left[\bar{n} + \frac{5}{2} - \bar{p}_\alpha + 2\sum_{\beta=\bar{n}+3}^{\alpha} \bar{p}_\beta\right] & \bar{n}+3 \leq \alpha \leq N+1 \end{cases} . \tag{2.91}$$

Agora não é difícil de reconhecer que as expressões (2.84-2.91) para o ramo $\kappa_1 = 1$ e $\nu = 1$ com as paridades $p_\alpha = 0$ de fato reproduzem a matriz R do $U_q[D_{n+1}^{(2)}]$. Isto significa que em geral a matriz R (2.84) pode ser considerada como uma generalização não trivial do modelo de vértices $U_q[D_{n+1}^{(2)}]$. Até onde sabemos tal interessante possibilidade de generalização nunca havia sido prevista anteriormente mesmo no âmbito do poderoso método dos supergrupos quânticos [47, 48]. De forma a tentar esclarecer a origem algébrica da matriz (2.84) no contexto de superalgebras q-deformadas podemos estudar o respectivo limite $q \to 1$. Com esta análise encontramos que o limite clássico das matrizes R (2.84) com $\kappa_1 = \kappa_2 = \nu = 1$ corresponde as matrizes R racionais associadas com a superalgebra $osp(2n+2|2m)$ [31, 23]. Assim é plausível supor que a matriz R (2.84) pode ser obtida como uma deformação do $osp(2n+2|2m)$ com um dado automorfismo. O fato do limite $q \to 1$ corresponder a matriz R associada a superalgebra $osp(2n+2|2m)$ juntamente com o fato de recuperarmos a solução $U_q[D_{n+1}^{(2)}]$ sugere fortemente que a superalgebra associada com a solução (2.70) seja a $U_q[osp^{(2)}(2n+2|2m)]$. A identificação precisa da correspondente superalgebra bem como a estrutura algébrica responsável pelos demais ramos está em andamento [49], que em princípio pode ser revelada através de uma construção proposta inicialmente por Faddeev, Reshetikhin e Takhtajan [50].

Finalizando esta seção gostaríamos de salientar que a matriz $\mathcal{R}(x) = P\check{\mathcal{R}}(x)$ dada por

(2.84) possui ainda a simetria PT e a simetria de *crossing* que também pode ser escrita como

$$\mathcal{R}_{12}^{(1)}(x) = \frac{\rho(x)}{\rho(\zeta/x)} V_1 [\mathcal{R}_{12}^{(1)}]^{st_2}(\zeta/x) V_1^{-1}, \tag{2.92}$$

onde $\rho(x)$ é uma função de normalização conveniente e V é uma matriz anti-diagonal, cujas expressões explícitas são dadas no apêndice A.

Capítulo 3

Espectro das Matrizes de Transferência

Cada uma das soluções da equação de Yang-Baxter apresentada no capítulo anterior pode ser interpretada como os pesos de Boltzmann de um modelo de vértices integrável numa rede bidimensional quadrada de tamanho $L \times L$ [6]. Sua correspondente matriz de transferência $T^{(l_0)}(\lambda)$ pode ser convenientemente escrita como o supertraço, sobre um espaço auxiliar $\mathcal{A} \equiv C^{N_0}$, de um operador denominado matriz de monodromia $\mathcal{T}^{(l_0)}(\lambda)$ [31],

$$T^{(l_0)}(\lambda) = \mathrm{Str}[\mathcal{T}^{(l_0)}(\lambda)] = \sum_{\alpha=1}^{N_0} (-1)^{p_\alpha^{(l_0)}} \mathcal{T}_{\alpha\alpha}^{(l_0)}(\lambda), \tag{3.1}$$

onde $\mathcal{T}_{\alpha\beta}^{(l_0)}(\lambda)$ denota os elementos desta matriz que é dado pelo seguinte produto ordenado de matrizes R

$$\mathcal{T}^{(l_0)}(\lambda) = R_{\mathcal{A}L}^{(l_0)}(\lambda) R_{\mathcal{A}L-1}^{(l_0)}(\lambda) \dots R_{\mathcal{A}1}^{(l_0)}(\lambda). \tag{3.2}$$

No espaço em questão onde as matrizes R são construídas, elas consistem de matrizes com dimensão $N_0 \times N_0$ no espaço auxiliar $\mathcal{A}$, cujos elementos são operadores atuando na

j-ésima posição de um espaço denominado quântico $\bigotimes_{i=1}^{L} \mathrm{C}^{N_0}$. Com o auxílio da equação de Yang-Baxter graduada, podemos mostrar que as matrizes de tranferência definidas acima comutam para diferentes valores do parâmetro espectral, ou seja

$$\left[T^{(l_0)}(\lambda), T^{(l_0)}(\mu)\right] = 0. \tag{3.3}$$

Desta forma podemos interpretar a matriz de transferência como uma função geradora de infinitas quantidades conservadas, que se torna mais evidente quando expandimos a equação (3.3) em séries de Taylor. Definindo as quantidades $Q_m = \left[\frac{d^m T^{(l_0)}(\lambda)}{d\lambda^m}\right]_{\lambda=0}$, temos que

$$[Q_m, Q_n] = 0 \tag{3.4}$$

nos fornecendo então estas quantidades conservadas, de onde segue a integrabilidade do modelo de vértices [6]. Esta noção de integrabilidade ainda se baseia no conceito clássico de Liouville no qual um sistema é dito integrável se este possuir o mesmo número de graus de liberdade e quantidades conservadas. Neste aspecto a diagonalização da matriz de transferência se torna um passo de grande importância pois resulta na diagonalização de um grande número de quantidades conservadas, incluindo hamiltonianas de modelos unidimensionais [56].

Na próxima seção apresentaremos a formulação do Ansatz de Bethe Algébrico para as famílias de soluções da equação de Yang-Baxter invariantes com respeito às superalgebras q-deformadas $U_q[sl^{(2)}(r|2m)]$ e $U_q[osp^{(1)}(r|2m)]$ que apresentamos no capítulo anterior.

3.1 O Ansatz de Bethe Algébrico

O Ansatz de Bethe Algébrico consiste de uma poderosa ferramenta matemática na teoria de modelos exatamente solúveis estando fundamentado na equação de Yang-Baxter. Ele consiste da versão algébrica do Ansatz de Bethe originalmente proposto para solucionar o modelo de Heisenberg isotrópico [52] também conhecido como modelo XXX. O operador de monodromia (3.2) é o objeto básico dentro deste método que em decorrência da equação de Yang-Baxter (2.20) satisfaz a seguinte álgebra quadrática

$$\check{R}_{12}^{(l_0)}(\lambda-\mu)\mathcal{T}^{(l_0)}(\lambda) \overset{s_0}{\otimes} \mathcal{T}^{(l_0)}(\mu) = \mathcal{T}^{(l_0)}(\mu) \overset{s_0}{\otimes} \mathcal{T}^{(l_0)}(\lambda)\check{R}_{12}^{(l_0)}(\lambda-\mu). \tag{3.5}$$

Na expressão (3.5) a matriz R está definida em $\mathcal{A}\otimes\mathcal{A}$ onde seus elementos matriciais são os pesos de Boltzmann definidos de (2.24) a (2.30). O símbolo $\overset{s_0}{\otimes}$ representa o super produto tensorial [31] com respeito ao espaço $\mathcal{A}$, onde lembramos que tal produto entre duas matrizes A e B quaisquer com elementos A_{ab} e B_{cd} respectivamente, é dado por

$$A \overset{s_0}{\otimes} B = \sum_{abcd}^{N_0} (-1)^{p_b^{(l_0)}[p_a^{(l_0)}+p_c^{(l_0)}]} A_{ac}B_{bd}\; \hat{e}_{ac}\otimes\hat{e}_{bd}. \tag{3.6}$$

A relação (3.5) e conhecida como álgebra de Yang-Baxter e ela desempenha um papel de extrema importância no problema de diagonalização da matriz de transferência. Através dessa álgebra, o problema de autovalores da matriz de transferência,

$$T^{(l_0)}(\lambda)\left|\Phi\right\rangle = \Lambda^{(l_0)}(\lambda)\left|\Phi\right\rangle, \tag{3.7}$$

pode ser resolvido através de um formalismo algébrico e exato nos moldes da mecânica matricial de Heisenberg.

Outro ingrediente de extrema importância nesse formalismo é a existência de um estado de referência $|\Phi_0\rangle$, o qual deve satisfazer algumas propriedades. Para que em princípio o Ansatz de Bethe Algébrico seja aplicável, o requerimento que fazemos sobre esse estado de referência é que a atuação da matriz de monodromia nesse estado resulte em uma matriz triangular. Um estado de referência com tais propriedades nos permitem identificar os operadores fora da diagonal da matriz de monodromia como potenciais campos de criação e aniquilação. Para os modelos de vértices que estamos considerando, podemos escolher $|\Phi_0\rangle$ como o vetor de peso máximo

$$|\Phi_0\rangle = \bigotimes_{j=1}^{L} |0\rangle_j \,, \quad |0\rangle_j = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_{N_0} , \tag{3.8}$$

onde $|0\rangle_j$ é o estado de referência local com N_0 componentes associado ao j-ésimo elemento deste produto tensorial. A escolha desse estado de referência local se deve ao fato que a atuação de cada constituinte local da matriz de monodromia, a matriz $R^{(l_0)}_{\mathcal{A}j}(\lambda)$, nesse estado resulta em

$$R^{(l_0)}_{\mathcal{A}j}(\lambda)\,|0\rangle_j = \begin{pmatrix} \omega_1^{(l_0)}(\lambda)\,|0\rangle_j & \dagger & \dagger & \dots & \dagger & \dagger \\ 0 & \omega_2^{(l_0)}(\lambda)\,|0\rangle_j & 0 & \dots & 0 & \dagger \\ \vdots & \vdots & \ddots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \omega_{N_0-1}^{(l_0)}(\lambda)\,|0\rangle_j & \dagger \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \omega_{N_0}^{(l_0)}(\lambda)\,|0\rangle_j \end{pmatrix}_{N_0\times N_0} \tag{3.9}$$

que é uma matriz triangular superior onde o símbolo $\dagger$ é utilizado para representar valores não nulos, e as funções $\omega_\alpha^{(l_0)}(\lambda)$ são dadas por

$$\omega_\alpha^{(l_0)}(\lambda) = \begin{cases} (-1)^{p_1^{(l_0)}} a_1^{(l_0)}(\lambda) & \alpha = 1 \\ (-1)^{p_\alpha^{(l_0)}} b^{(l_0)}(\lambda) & \alpha = 2, \dots, N_0 - 1 \\ (-1)^{p_{N_0}^{(l_0)}} d^{(l_0)}_{N_0,N_0}(\lambda) & \alpha = N_0 \end{cases} . \tag{3.10}$$

Levando em conta que triangularidade é preservado num produto de um número arbitrário de matrizes e que os elementos diagonais da matriz resultante podem ser facilmente calculados, faz com que a escolha de $|\Phi_0\rangle$ com estado de referência seja justificado. Para prosseguirmos com a implementação do Ansatz de Bethe Algébrico, precisamos agora encontrar uma representação apropriada para a matriz de monodromia que seja capaz de distinguir possíveis campos de criação e aniquilação. Considerando as representações utilizadas em trabalhos anteriores [23], onde os pesos de Boltzmann apresentavam propriedades de triangulação similares as exibidas em (3.9), nos fazem acreditar que uma representação promissora seria dada por

$$\mathcal{T}^{(l_0)}(\lambda) = \begin{pmatrix} B(\lambda) & \vec{B}(\lambda) & F(\lambda) \\ \vec{C}(\lambda) & \hat{A}(\lambda) & \vec{B}^{*}(\lambda) \\ C(\lambda) & \vec{C}^{*}(\lambda) & D(\lambda) \end{pmatrix}_{N_0 \times N_0} . \tag{3.11}$$

Nesta representação $\vec{B}(\lambda)$ ($\vec{B}^{*}(\lambda)$) e $\vec{C}^{*}(\lambda)$ ($\vec{C}(\lambda)$) são agora vetores linha (coluna) com $(N_0 - 2)$ componentes, $\hat{A}(\lambda)$ é uma matriz de dimensão $(N_0-2) \times (N_0-2)$ cujos elementos denotamos por $A_{ab}(\lambda)$, e o restante dos elementos desempenham o papel de escalares no espaço selecionado.

Esta representação (3.11) e a escolha de paridades feitas em (2.22) faz com que o problema de autovalores da matriz de transferência seja dado então por

$$\left[(-1)^{p_1^{(l_0)}} B(\lambda) + \sum_{a=1}^{N_0-2} (-1)^{p_a^{(l_0)}} \hat{A}_{aa}(\lambda) + (-1)^{p_{N_0}^{(l_0)}} D(\lambda) \right] |\phi\rangle = \Lambda^{(l_0)}(\lambda) \, |\phi\rangle \, . \tag{3.12}$$

Assim a definição da matriz de monodromia (3.2) juntamente com as propriedades (3.9), sugerem então que os campos $\vec{B}(\lambda)$, $\vec{B}^{*}(\lambda)$ e $F(\lambda)$ podem desempenhar o papel de campos de criação com respeito ao estado de referência $|\Phi_0\rangle$. Além disso, temos que os elementos diagonais da matriz de monodromia satisfazem as relações

$$\begin{array}{ll} B(\lambda) \, |\Phi_0\rangle = [\omega_1(\lambda)]^L \, |\Phi_0\rangle & D(\lambda) \, |\Phi_0\rangle = [\omega_{N_0}(\lambda)]^L \, |\Phi_0\rangle \\ A_{aa}(\lambda) \, |\Phi_0\rangle = [\omega_{a+1}(\lambda)]^L \, |\Phi_0\rangle & \text{para} \;\; a = 1, \dots, N_0 - 2 \end{array} , \tag{3.13}$$

e que os demais operadores restantes apresentam as seguintes propriedades de aniquilação

$$\begin{array}{c} \vec{C}(\lambda) \, |\Phi_0\rangle = 0 \qquad \vec{C}^{*}(\lambda) \, |\Phi_0\rangle = 0 \qquad C(\lambda) \, |\Phi_0\rangle = 0 \\ A_{ab}(\lambda) \, |\Phi_0\rangle = 0 \quad \text{para} \;\; a, b = 1, \dots, N_0 - 2 \quad a \neq b \end{array} , \tag{3.14}$$

Desta forma é claro ver que $|\Phi_0\rangle$ é um autoestado da matriz de transferência cujo respectivo autovalor é dado por

$$\Lambda_0^{(l_0)}(\lambda) = (-1)^{p_1^{(l_0)}} [\omega_1(\lambda)]^L + \sum_{a=1}^{N_0-2} (-1)^{p_{a+1}^{(l_0)}} [\omega_{a+1}(\lambda)]^L + (-1)^{p_{N_0}^{(l_0)}} [\omega_N(\lambda)]^L . \tag{3.15}$$

Dentro do espírito do Ansatz de Bethe Algébrico, o próximo passo é procurar por outros autoestados da matriz de transferência como combinações lineares de produtos de operadores de criação atuando no estado de referência $|\Phi_0\rangle$. Para implementarmos esse passo, precisamos primeiramente encontrar relações de comutação apropriadas entre os elementos diagonais que compõem a matriz de transferência e os campos de criação. Estas relações de comutação a princípio estão codificadas na álgebra de Yang-Baxter (3.5). O procedimento utilizado para obter relações de comutação convenientes para essa tarefa é similar ao procedimento utilizado em [23], e requer além do trabalho necessário para se explicitar os elementos da equação (3.5), que em algum casos realizemos a substituição das relações de comutação entre os operadores $B(\lambda)$ e $F(\mu)$, e entre os operadores $B(\lambda)$ e $\vec{B}^{*}(\lambda)$ nas relações de comutação que obtemos imediatamente de (3.5). Além disso, uma grande quantidade de trabalho adicional é necessário de modo a incluir as paridades provenientes do super produto tensorial. Assim obtemos as relações de comutação entre os campos diagonais e o campo de criação vetorial $\vec{B}(\lambda)$, que estas então dadas por

$$B(\lambda) \overset{s_1}{\otimes} \vec{B}(\mu) = (-1)^{p_{12}^{(l_0)}} \frac{a_1^{(l_0)}(\mu-\lambda)}{b^{(l_0)}(\mu-\lambda)} \vec{B}(\mu) \overset{s_1}{\otimes} B(\lambda) - (-1)^{p_{12}^{(l_0)}} \frac{c^{(l_0)}(\mu-\lambda)}{b^{(l_0)}(\mu-\lambda)} \vec{B}(\lambda) \overset{s_1}{\otimes} B(\mu) \tag{3.16}$$

$$\begin{aligned} D(\lambda) \overset{s_1}{\otimes} \vec{B}(\mu) &= (-1)^{p_{12}^{(l_0)}} \frac{b^{(l_0)}(\lambda-\mu)}{d_{N,N}^{(l_0)}(\lambda-\mu)} \vec{B}(\mu) \overset{s_1}{\otimes} D(\lambda) - \frac{d_{N_0,1}^{(l_0)}(\lambda-\mu)}{d_{N_0,N_0}^{(l_0)}(\lambda-\mu)} F(\lambda) \overset{s_1}{\otimes} \vec{C}^{*}(\mu) \\ &+ \frac{c^{(l_0)}(\lambda-\mu)}{d_{N_0,N_0}^{(l_0)}(\lambda-\mu)} F(\mu) \overset{s_1}{\otimes} \vec{C}^{*}(\lambda) - \frac{\vec{\xi}_1^{(l_0)}(\lambda-\mu)}{d_{N_0,N_0}^{(l_0)}(\lambda-\mu)} \cdot \left[\vec{B}^{*}(\lambda) \otimes \hat{A}(\mu)\right] \end{aligned} \tag{3.17}$$

$$\begin{aligned} \hat{A}(\lambda) \overset{s_1}{\otimes} \vec{B}(\mu) &= \frac{1}{b^{(l_0)}(\lambda-\mu)} \vec{B}(\mu) \overset{s_1}{\otimes} \hat{A}(\lambda) \cdot \check{r}_{12}^{(l_1)}(\lambda-\mu) - \frac{\bar{c}^{(l_0)}(\lambda-\mu)}{b^{(l_0)}(\lambda-\mu)} \vec{B}(\lambda) \overset{s_1}{\otimes} \hat{A}(\mu) \\ &+ \frac{1}{d_{N_0,N_0}^{(l_0)}(\lambda-\mu)} \left[(-1)^{p_{12}^{(l_0)}} \vec{B}^{*}(\lambda) \overset{s_1}{\otimes} B(\mu) + \frac{\bar{c}^{(l_0)}(\lambda-\mu)}{b^{(l_0)}(\lambda-\mu)} F(\lambda) \overset{s_1}{\otimes} \vec{C}(\mu)\right] \otimes \vec{\xi}_1^{(l_0)}(\lambda-\mu) \\ &+ \frac{1}{b^{(l_0)}(\lambda-\mu)} \left[F(\mu) \overset{s_1}{\otimes} \vec{C}(\lambda)\right] \otimes \vec{\xi}_2^{(l_0)}(\lambda-\mu). \end{aligned} \tag{3.18}$$

Nas expressões (3.16-3.18), $p_{ab}^{(l_0)} = p_a^{(l_0)} + p_b^{(l_0)}$ e o símbolo $\overset{s_1}{\otimes}$ representa o super produto tensorial com respeito a novas paridades de Grassmann $p_\alpha^{(l_1)}$ que estão relacionadas com as anteriores através da expressão $p_\alpha^{(l_1)} = p_{\alpha+1}^{(l_0)}, \quad \alpha = 1, \dots, N_0 - 2$. Além disto, os vetores $\vec{\xi}_1^{(l_0)}$ e $\vec{\xi}_2^{(l_0)}$ que estão presentes nas relações de comutação (3.16-3.18) são dados por

$$\vec{\xi}_1^{(l_0)}(\lambda) = \sum_{a=1}^{N_0-2} d_{N_0,a+1}^{(l_0)}(\lambda)\ \hat{e}_a \otimes \hat{e}_{N_0-1-a} \tag{3.19}$$

$$\vec{\xi}_2^{(l_0)}(\lambda) = \sum_{a=1}^{N_0-2} \left[d_{1,a+1}^{(l_0)}(\lambda) - d_{N_0,a+1}^{(l_0)}(\lambda) \frac{d_{1,N_0}^{(l_0)}(\lambda)}{d_{N_0,N_0}^{(l_0)}(\lambda)} \right] \ \hat{e}_a \otimes \hat{e}_{N_0-1-a}, \tag{3.20}$$

onde $\hat{e}_i$ denota um vetor linha de $N_0 - 2$ componentes com apenas um elemento não nulo na i-ésima posição. Nesse ponto é conveniente introduzir o símbolo l_α, generalizando nossa definição anterior l_0, que caracteriza um espaço vetorial graduado com $N_\alpha = N_0 - 2\alpha$ graus de liberdade onde o número de elementos pares e ímpares é determinado pela seguinte regra

$$l_\alpha \equiv \begin{cases} (r|2m - 2\alpha) & m \geq \alpha \\ (r + 2m - 2\alpha|0) & 0 \leq m < \alpha \end{cases}. \tag{3.21}$$

Considerando as relações de comutação (3.16-3.18), o único elemento ainda a ser definido é a matriz R auxiliar $\check{r}_{ab}^{(l_1)}(\lambda)$ sendo dada por

$$\check{r}_{ab}^{(l_\alpha)}(\lambda) = \kappa^{(l_{\alpha-1})}(\lambda) \check{R}_{ab}^{(l_\alpha)}(\lambda) \quad \kappa^{(l_\alpha)}(\lambda) = q^{(l_\alpha)} \frac{b^{(l_\alpha)}(\lambda)}{d_{N_\alpha,N_\alpha}^{(l_\alpha)}(\lambda)}, \tag{3.22}$$

onde $q^{(l_\alpha)} = (-1)^{p_1^{(l_\alpha)}} q^{1-2p_1^{(l_\alpha)}}$ e $\check{R}_{ab}^{(l_\alpha)}(\lambda)$ é a matriz R definida em (2.23), agora num espaço vetorial cuja graduação é caracterizada pelo símbolo l_α. Veremos mais adiante que essas definições são de grande utilidade para uma implementação consistente do Ansatz de Bethe Algébrico para sistemas com graus de liberdade N_0 arbitrários.

As relações de comutação apresentadas acima ainda não são suficientes para a solução do problema de autovalores da matriz de tranferência. Ainda se faz necessário termos em mãos as relações de comutação envolvendo os campos diagonais que constituem a matriz de transferência e o operador de criação escalar $F(\lambda)$, além daquelas envolvendo todos os campos de criação. De forma a evitar uma seção com fórmulas muito extensas apresentamos essas relações de comutação adicionais no apêndice B e prosseguimos com a análise dos principais pontos envolvendo o problema de autovalores em questão. Conforme mencionado anteriormente, buscamos por outros autovetores da matriz de transferência assumindo que eles possam ser construídos através de combinações lineares de produtos envolvendo os vários campos de criação atuando no estado de referência $|\Phi_0\rangle$. Estes por sua vez irão formar estruturas de estados de muitas partículas caracterizadas pelo conjunto de variáveis $\{\lambda_j^{(l_1)}\}$ que parametrizam os campos de criação. Seguindo a metodologia apresentada em [23], um Ansatz factível para esses autoestados é dado pelo seguinte produto escalar

$$\left|\Phi_{m_{l_1}}\right\rangle = \vec{\Phi}_{m_{l_1}}(\lambda_1^{(l_1)}, \dots, \lambda_{m_{l_1}}^{(l_1)}) \cdot \vec{\mathcal{F}} \left|\Phi_0\right\rangle, \tag{3.23}$$

onde o vetor $\vec{\mathcal{F}} \in \bigotimes_{j=1}^{m_{l_1}} \mathrm{C}^{N_0-2}$ possui componentes que serão denotados por $\mathcal{F}^{a_{m_{l_1}} \dots a_1}$ cujos índices a_j variam entre $N_0 - 2$ possíveis valores. Já o vetor $\vec{\Phi}_{m_{l_1}}(\lambda_1^{(l_1)}, \dots, \lambda_{m_{l_1}}^{(l_1)})$ é constituído pelos campos de criação, onde obtemos que ele deve obedecer a seguinte relação de recorrência

$$\begin{aligned}
\vec{\Phi}_{m_{l_1}}(\lambda_1^{(l_1)}, \dots, \lambda_{m_{l_1}}^{(l_1)}) &= \vec{B}(\lambda_1^{(l_1)}) \overset{s_1}{\otimes} \vec{\Phi}_{m_{l_1}-1}(\lambda_2^{(l_1)}, \dots, \lambda_{m_{l_1}}^{(l_1)}) \\
&- \sum_{j=2}^{m_{l_1}} (-1)^{p_{12}^{(l_0)}} \frac{\vec{\xi}_1^{(l_0)}(\lambda_1^{(l_1)} - \lambda_j^{(l_1)})}{d_{N_0,N_0}^{(l_0)}(\lambda_1^{(l_1)} - \lambda_j^{(l_1)})} \prod_{k=2, k\neq j}^{m_{l_1}} \frac{a_1^{(l_0)}(\lambda_k^{(l_1)} - \lambda_j^{(l_1)})}{b^{(l_0)}(\lambda_k^{(l_1)} - \lambda_j^{(l_1)})} \\
&\times F(\lambda_1^{(l_1)}) \overset{s_1}{\otimes} \vec{\Phi}_{m_{l_1}-2}(\lambda_2^{(l_1)}, \dots, \lambda_{j-1}^{(l_1)}, \lambda_{j+1}^{(l_1)}, \dots, \lambda_{m_{l_1}}^{(l_1)}) \\
&\times B(\lambda_j^{(l_1)}) \prod_{k=2}^{j-1} \frac{\check{r}_{k,k+1}^{(l_1)}(\lambda_k^{(l_1)} - \lambda_j^{(l_1)})}{a_1^{(l_0)}(\lambda_k^{(l_1)} - \lambda_j^{(l_1)})}.
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Podemos ver então que os vetores $\vec{\xi}_1^{(l_0)}(\lambda)$ projetam alguns termos da combinação linear (3.24) que descrevem pares de excitações com o mesmo pseudo-momentum $\lambda_j^{(l_1)}$. Desta forma o vetor $\vec{\xi}_1^{(l_0)}(\lambda)$ atua como um princípio de exclusão de Pauli generalizado, proibindo a ocorrência de certos estados no mesmo sítio da rede.

Além disto, para que os autoestados propostos em (3.23-3.24) sejam autoestados da matriz de transferência $T^{(l_0)}(\lambda)$, é requerido que o vetor $\vec{\mathcal{F}}$ seja um autoestado de uma matriz de transferência inhomogênea $\tilde{T}^{(l_1)}(\lambda, \{\lambda_j^{(l_1)}\})$ cujos pesos de Boltzmann $\vec{\mathcal{F}}$ estão diretamente relacionados pela matriz R auxiliar $r_{\mathcal{A}^{(1)}j}^{(l_1)}(\lambda)$ através de

$$r_{\mathcal{A}^{(1)}j}^{(l_1)}(\lambda) = P_{\mathcal{A}^{(1)}j}\check{r}_{\mathcal{A}^{(1)}j}^{(l_1)}(\lambda), \tag{3.25}$$

onde agora lidamos com um espaço $\mathcal{A}^{(1)} \in \mathrm{C}^{N_0-2}$ com dois graus de liberdade a menos que $\mathcal{A}$. Da mesma forma $\tilde{T}^{(l_1)}(\lambda, \{\lambda_j^{(l_1)}\})$ também é dada em termos de um supertraço de uma matriz de monodromia sobre o espaço auxiliar $\mathcal{A}^{(1)}$,

$$\tilde{T}^{(l_1)}(\lambda, \{\lambda_j^{(l_1)}\}) = Str_{\mathcal{A}^{(1)}}\left[r_{\mathcal{A}^{(1)}m_{l_1}}^{(l_1)}(\lambda - \lambda_{m_{l_1}}^{(l_1)})r_{\mathcal{A}^{(1)}m_{l_1}-1}^{(l_1)}(\lambda - \lambda_{m_{l_1}-1}^{(l_1)})\dots r_{\mathcal{A}^{(1)}1}^{(l_1)}(\lambda - \lambda_1^{(l_1)})\right]. \tag{3.26}$$

Após cálculos extremamente extensos considerando a aplicação da matriz de transferência $T^{(l_0)}(\lambda)$ sobre o vetor proposto (3.23-3.24) e levando em conta as relações de comutação (3.16-3.18), obtemos que o vetor proposto é um autovetor da matriz de transferência com autovalor dado pela expressão

$$\begin{aligned}
\Lambda^{(l_0)}(\lambda) &= (-1)^{p_1^{(l_0)}}[\omega_1(\lambda)]^L \prod_{i=1}^{m_{l_1}}(-1)^{p_1^{(l_0)}}\frac{a_1^{(l_0)}(\lambda_i^{(l_1)}-\lambda)}{b^{(l_0)}(\lambda_i^{(l_1)}-\lambda)} \\
&+ (-1)^{p_{N_0}^{(l_0)}}[\omega_{N_0}(\lambda)]^L \prod_{i=1}^{m_{l_1}}(-1)^{p_1^{(l_0)}}\frac{b^{(l_0)}(\lambda-\lambda_i^{(l_1)})}{d_{N_0,N_0}^{(l_0)}(\lambda-\lambda_i^{(l_1)})} \\
&+ [b^{(l_0)}(\lambda)]^L\tilde{\Lambda}^{(l_1)}(\lambda, \{\lambda_j^{(l_1)}\}) \prod_{i=1}^{m_{l_1}}\frac{1}{b^{(l_0)}(\lambda-\lambda_i^{(l_1)})},
\end{aligned} \tag{3.27}$$

com $\tilde{\Lambda}^{(l_1)}(\lambda, \{\lambda_j^{(l_1)}\})$ denota os autovalores da matriz de transferência inhomogênea $\tilde{T}^{(l_1)}(\lambda, \{\lambda_j^{(l_1)}\})$, sendo que os parâmetros $\{\lambda_j^{(l_1)}\}$ estão sujeitos ao seguinte sistema de equações não-lineares conhecidos por equações de Ansatz de Bethe,

$$\left[(-1)^{p_1^{(l_0)}}\frac{a_1^{(l_0)}(\lambda_i^{(l_1)})}{b^{(l_0)}(\lambda_i^{(l_1)})}\right]^L a_1^{(l_0)}(0)$$

$$\prod_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{m_{l_1}}(-1)^{p_1^{(l_0)}}b^{(l_0)}(\lambda_i^{(l_1)}-\lambda_j^{(l_1)})\frac{a_1^{(l_0)}(\lambda_j^{(l_1)}-\lambda_i^{(l_1)})}{b^{(l_0)}(\lambda_j^{(l_1)}-\lambda_i^{(l_1)})}=\tilde{\Lambda}^{(l_1)}(\lambda=\lambda_i^{(l_1)},\{\lambda_j^{(l_1)}\})$$
$$i=1,\ldots,m_{l_1} \tag{3.28}$$

Ressaltamos aqui que este passo completa apenas o primeiro estágio da implementação do Ansatz de Bethe Algébrico já que ainda precisamos determinar os autovalores $\tilde{\Lambda}^{(l_1)}(\lambda,\{\lambda_j^{(l_1)}\})$. Este ponto é bem típico de problemas que envolvem a aplicação do chamado Ansatz de Bethe com várias etapas, usualmente chamado de Ansatz de Bethe *Nested*, que iremos discutir a seguir.

Daqui por diante nos concentraremos na solução do problema auxiliar que consiste na diagonalização de $\tilde{\Lambda}^{(l_1)}(\lambda,\{\lambda_j^{(l_1)}\})$, e veremos que o Ansatz de Bethe Algébrico nos permite a dedução de relações de recorrência para o autovalor da matriz de transferência e de suas respectivas equações de Ansatz de Bethe. Assim a resolução destas relações de recorrência nos deixará então com expressões explícitas para ambos.

Com o objetivo de diagonalizar a matriz de transferência auxiliar empregaremos um segundo Ansatz de Bethe Algébrico, e como tal o objeto fundamental para essa análise será a matriz de monodromia $\mathcal{T}^{(l_1)}(\lambda,\{\lambda_j^{(l_1)}\})$ que pode ser lida diretamente de (3.26) e é dada por

$$\mathcal{T}^{(l_1)}(\lambda,\{\lambda_j^{(l_1)}\})=r_{\mathcal{A}^{(1)}m_{l_1}}^{(l_1)}(\lambda-\lambda_{m_{l_1}}^{(l_1)})r_{\mathcal{A}^{(1)}m_{l_1}-1}^{(l_1)}(\lambda-\lambda_{m_{l_1}-1}^{(l_1)})\ldots r_{\mathcal{A}^{(1)}1}^{(l_1)}(\lambda-\lambda_1^{(l_1)}). \tag{3.29}$$

Um ponto importante para essa análise é que a matriz de monodromia auxiliar $\mathcal{T}^{(l_1)}(\lambda,\{\lambda_j^{(l_1)}\})$ é por sua vez constituída por matrizes R obtidas de (2.23) que são soluções da equação de Yang-Baxter. Em decorrência disto a matriz de monodromia auxiliar satisfaz a chamada álgebra de Yang-Baxter (3.5) dada por

$$\check{r}_{12}^{(l_1)}(\lambda-\mu)\mathcal{T}^{(l_1)}(\lambda,\{\lambda_j^{(1)}\})\overset{s_1}{\otimes}\mathcal{T}^{(l_1)}(\mu,\{\lambda_j^{(l_1)}\})=\mathcal{T}^{(l_1)}(\mu,\{\lambda_j^{(l_1)}\})\overset{s_1}{\otimes}\mathcal{T}^{(l_1)}(\lambda,\{\lambda_j^{(l_1)}\})\check{r}_{12}^{(l_1)}(\lambda-\mu), \tag{3.30}$$

que considera as inhomogeneidades $\{\lambda_j^{(l_1)}\}$ presentes em (3.29). Outro ponto importante é que enquanto $N_1 \geq 3$, os pesos de Boltzmann presentes em $r^{(l_1)}_{\mathcal{A}^{(1)}j}(\lambda)$ ainda preservam a mesma estrutura do operador de vértice original $R^{(l_0)}_{\mathcal{A}j}$ com o qual iniciamos esta análise. Nesse caso podemos simplesmente adaptar os resultados já obtidos para o primeiro Ansatz de Bethe Algébrico, mas agora com $N_0 - 2$ graus de liberdade e considerando a presença das inhomogeneidades $\{\lambda_j^{(l_1)}\}$. Implementando então estas adaptações, consideramos um novo estado de referência $\left|\Phi_0^{(1)}\right\rangle$ no qual a matriz de monodromia (3.29) atua de forma triangular. Esse estado é o seguinte estado ferromagnético

$$\left|\Phi_0^{(1)}\right\rangle = \bigotimes_{j=1}^{m_{l_1}} \left|0^{(1)}\right\rangle_j, \quad \left|0^{(1)}\right\rangle_j = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_{N_1}, \tag{3.31}$$

onde a atuação do operador de vértice $r^{(l_1)}_{\mathcal{A}^{(1)}j}(\lambda)$ sobre esse estado resulta na matriz

$$r^{(1)}_{\mathcal{A}^{(1)}j}(\lambda)\left|0^{(1)}\right\rangle_j = \begin{pmatrix} \omega_1^{(l_1)}(\lambda)\left|0^{(1)}\right\rangle_j & \dagger & \dagger & \dots & \dagger & \dagger \\ 0 & \omega_2^{(l_1)}(\lambda)\left|0^{(1)}\right\rangle_j & 0 & \dots & 0 & \dagger \\ \vdots & \vdots & \ddots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \omega_{N_1-1}^{(l_1)}(\lambda)\left|0^{(1)}\right\rangle_j & \dagger \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \omega_{N_1}^{(l_1)}(\lambda)\left|0^{(1)}\right\rangle_j \end{pmatrix}_{N_1\times N_1} \tag{3.32}$$

cujos valores não nulos $\omega_\alpha^{(l_1)}(\lambda)$ são agora dados por

$$\omega_\alpha^{(l_1)}(\lambda) = \begin{cases} \kappa^{(l_0)}(\lambda)\ (-1)^{p_1^{(l_1)}} a_1^{(l_1)}(\lambda) & \alpha = 1 \\ \kappa^{(l_0)}(\lambda)\ (-1)^{p_\alpha^{(l_1)}} b^{(l_1)}(\lambda) & \alpha = 2, \dots, N_1 - 1 \\ \kappa^{(l_0)}(\lambda)\ (-1)^{p_{N_1}^{(l_1)}} d^{(l_1)}_{N_1,N_1}(\lambda) & \alpha = N_1 \end{cases} . \tag{3.33}$$

Conforme utilizamos anteriormente, representamos a correspondente matriz de monodromia auxiliar na seguinte forma,

$$\mathcal{T}^{(l_1)}(\lambda,\{\lambda_j^{(l_1)}\}) = \begin{pmatrix} B^{(1)}(\lambda,\{\lambda_j^{(l_1)}\}) & \vec{B}^{(1)}(\lambda,\{\lambda_j^{(l_1)}\}) & F^{(1)}(\lambda,\{\lambda_j^{(l_1)}\}) \\ \vec{C}^{(1)}(\lambda,\{\lambda_j^{(l_1)}\}) & \hat{A}^{(1)}(\lambda,\{\lambda_j^{(l_1)}\}) & \vec{B^*}^{(1)}(\lambda,\{\lambda_j^{(l_1)}\}) \\ C^{(1)}(\lambda,\{\lambda_j^{(l_1)}\}) & \vec{C^*}^{(1)}(\lambda,\{\lambda_j^{(l_1)}\}) & D^{(1)}(\lambda,\{\lambda_j^{(l_1)}\}) \end{pmatrix}_{N_1\times N_1} . \quad (3.34)$$

Esta representação juntamente com as propriedades de triangulação (3.32) confere aos elementos diagonais da matriz de monodromia as seguintes propriedades sobre o estado de referência (3.31),

$$\begin{aligned} B^{(1)}(\lambda,\{\lambda_j^{(l_1)}\})\left|\Phi_0^{(1)}\right\rangle &= \prod_{i=1}^{m_{l_1}} \omega_1^{(l_1)}(\lambda-\lambda_i^{(l_1)})\left|\Phi_0^{(1)}\right\rangle, \\ D^{(1)}(\lambda,\{\lambda_j^{(l_1)}\})\left|\Phi_0^{(1)}\right\rangle &= \prod_{i=1}^{m_{l_1}} \omega_{N_1}^{(l_1)}(\lambda-\lambda_i^{(l_1)})\left|\Phi_0^{(1)}\right\rangle, \\ A_{ab}^{(1)}(\lambda,\{\lambda_j^{(l_1)}\})\left|\Phi_0^{(1)}\right\rangle &= \delta_{ab}\prod_{i=1}^{m_{l_1}} \omega_{a+1}^{(l_1)}(\lambda-\lambda_i^{(l_1)})\left|\Phi_0^{(1)}\right\rangle \\ & \quad a,b=1,\dots,N_1-2, \end{aligned} \quad (3.35)$$

e também as seguintes propriedades de aniquilação

$$\begin{aligned} \vec{C}^{(1)}(\lambda,\{\lambda_j^{(l_1)}\})\left|\Phi_0^{(1)}\right\rangle &= 0, \\ \vec{C^*}^{(1)}(\lambda,\{\lambda_j^{(l_1)}\})\left|\Phi_0^{(1)}\right\rangle &= 0, \\ C^{(1)}(\lambda,\{\lambda_j^{(l_1)}\})\left|\Phi_0^{(1)}\right\rangle &= 0. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Assim, para implementar a diagonalização da matriz de transferência $\tilde{T}^{(l_1)}(\lambda,\{\lambda_j^{(l_1)}\})$, introduziremos um segundo Ansatz de Bethe cujos autoestados de muitas partículas serão agora parametrizados por um novo conjunto de variáveis sendo elas $\{\lambda_1^{(l_2)},\dots,\lambda_{m_{l_2}}^{(l_2)}\}$. Claramente a estrutura das relações de comutação para os elementos da matriz de monodromia auxiliar (3.34) e a construção dos autovetores e autovalores é similar a estrutura já apresentada para o problema original. Basicamente então, precisamos apenas considerar que os pesos de Boltzmann aparecendo nas relações de comutação são aqueles associados a matriz $\check{r}_{\mathcal{A}^{(1)}j}^{(l_1)}(\lambda)$ e não os associados a matriz $\check{R}_{\mathcal{A}j}^{(l_0)}(\lambda)$. Além disto substituímos um dado operador $\hat{O}(\lambda)$ por seu correspondente $\hat{O}^{(1)}(\lambda, \{\lambda_j^{(l_1)}\})$ que carrega as inhomogeneidades $\{\lambda_j^{(l_1)}\}$. Para sermos consistentes, também precisamos substituir os parâmetros $\{\lambda_j^{(l_1)}\}$ pelos novos parâmetros $\{\lambda_j^{(l_2)}\}$ e as paridades de Grassmann $p_\alpha^{(l_1)}$ por $p_\alpha^{(l_2)} = p_{\alpha+1}^{(l_1)}$ para $\alpha = 1, \cdots, N_1 - 2$ nos respectivos super produtos tensoriais. Uma consequência de obtermos a mesma estrutura algébrica para todas as etapas l_α do problema de diagonalização, podemos utilizar o mesmo procedimento repetidamente de modo que obtemos uma relação de recorrência para o autovalor da matriz de transferência e para a correspondente equação de Ansatz de Bethe. De modo a tornar nossa notação mais clara, iremos nos referir a matriz associada a $r_{ab}^{(l_\alpha)}(\lambda)$ por $\tilde{T}^{(l_\alpha)}(\lambda)$ com autovalor $\tilde{\Lambda}^{(l_\alpha)}(\lambda)$, e deixaremos o símbolo $T^{(l_\alpha)}(\lambda)$ para a matriz de transferência associada com $R_{ab}^{(l_\alpha)}(\lambda)$ com respectivo autovalor $\Lambda^{(l_\alpha)}(\lambda)$. Note que essa distinção se faz necessária para uma análise consistente, e que essas matrizes R mencionadas acima apenas diferem por um fator multiplicativo conforme a equação (3.22).

Considerando os resultados obtidos até agora não é difícil ver que os autovalores das matrizes de transferência envolvidas nos passos l_α e $l_{\alpha+1}$ irão satisfazer a seguinte relação de recorrência,

$$\begin{aligned}
\Lambda^{(l_\alpha)}(\lambda, \{\lambda_1^{(l_\alpha)}, \dots, \lambda_{m_{l_\alpha}}^{(l_\alpha)}\}) &= (-1)^{p_1^{(l_\alpha)}} \prod_{i=1}^{m_{l_\alpha}} (-1)^{p_1^{(l_\alpha)}} a_1^{(l_\alpha)}(\lambda - \lambda_i^{(l_\alpha)}) \prod_{i=1}^{m_{l_{\alpha+1}}} (-1)^{p_1^{(l_\alpha)}} \frac{a_1^{(l_\alpha)}(\lambda_i^{(l_{\alpha+1})} - \lambda)}{b^{(l_\alpha)}(\lambda_i^{(l_{\alpha+1})} - \lambda)} \\
&+ (-1)^{p_{N_\alpha}^{(l_\alpha)}} \prod_{i=1}^{m_{l_\alpha}} (-1)^{p_{N_\alpha}^{(l_\alpha)}} d_{N_\alpha, N_\alpha}^{(l_\alpha)}(\lambda - \lambda_i^{(l_\alpha)}) \prod_{i=1}^{m_{l_{\alpha+1}}} (-1)^{p_{N_\alpha}^{(l_\alpha)}} \frac{b^{(l_\alpha)}(\lambda - \lambda_i^{(l_{\alpha+1})})}{d_{N_\alpha, N_\alpha}^{(l_\alpha)}(\lambda - \lambda_i^{(l_{\alpha+1})})} \\
&+ \prod_{i=1}^{m_{l_\alpha}} b^{(l_\alpha)}(\lambda - \lambda_i^{(l_\alpha)}) \prod_{i=1}^{m_{l_{\alpha+1}}} \frac{q^{(l_\alpha)}}{d_{N_\alpha, N_\alpha}^{(l_\alpha)}(\lambda - \lambda_i^{(l_{\alpha+1})})} \Lambda^{(l_{\alpha+1})}(\lambda, \{\lambda_1^{(l_{\alpha+1})}, \dots, \lambda_{m_{l_{\alpha+1}}}^{(l_{\alpha+1})}\}),
\end{aligned} \tag{3.37}$$

cujas paridades envolvidas $p_\beta^{(l_{\alpha+1})} = p_{\beta+1}^{(l_\alpha)}$ para $\beta = 1, \dots, N_\alpha - 2$.

Para sermos compatíveis com nosso problema original, é necessário ainda que façamos $\lambda_j^{(l_0)} = 0$ para $j = 1, \dots, m_{l_0}$ e que também definimos $m_{l_0} \equiv L$. Além da relação de recorrência para os autovalores, pelo mesmo motivo também ficamos com uma relação de recorrência para as equações de Ansatz de Bethe envolvendo os conjuntos de variáveis

Superalgebra	l_f	matriz $R^{(l_f)}$
$U_q[sl(2n+1\|2m)^{(2)}]$	$(3\|0)$	modelo de dezenove vértices IK
$U_q[sl(2n\|2m)^{(2)}]$	$(2\|0)$	modelo de seis vértices
$U_q[osp(2n+1\|2m)^{(1)}]$	$(3\|0)$	modelo de dezenove vértices FZ
$U_q[osp(2n\|2m)^{(1)}]$	$(4\|0)$	dois modelos de seis vértices desacoplados

Tabela 3.1: Parâmetros dos modelos de vértices associados com o último passo da análise do Ansatz de Bethe. Os símbolos IK e FZ se referem aos modelos Izergin-Korepin [53] e Fateev-Zamolodchikov [54] respectivamente.

$\{\lambda_j^{(l_\alpha)}\}$ e $\{\lambda_j^{(l_{\alpha+1})}\}$, sendo esta dada por

$$\prod_{i=1}^{m_{l_{\alpha-1}}} (-1)^{p_1^{(l_\alpha)}} \frac{a_1^{(l_\alpha)}(\lambda_j^{(l_\alpha)} - \lambda_i^{(l_{\alpha-1})})}{b^{(l_\alpha)}(\lambda_j^{(l_\alpha)} - \lambda_i^{(l_{\alpha-1})})} = \prod_{i\neq j}^{m_{l_\alpha}} q^{(l_\alpha)}(-1)^{p_{12}^{(l_\alpha)}} \frac{a_1^{(l_{\alpha+1})}(\lambda_j^{(l_\alpha)} - \lambda_i^{(l_\alpha)})}{d_{N_\alpha,N_\alpha}^{(l_\alpha)}(\lambda_j^{(l_\alpha)} - \lambda_i^{(l_\alpha)})} \frac{b^{(l_\alpha)}(\lambda_i^{(l_\alpha)} - \lambda_j^{(l_\alpha)})}{a_1^{(l_\alpha)}(\lambda_i^{(l_\alpha)} - \lambda_j^{(l_\alpha)})}$$
$$\times \prod_{i=1}^{m_{l_{\alpha+1}}} (-1)^{p_1^{(l_{\alpha+1})}} \frac{a_1^{(l_{\alpha+1})}(\lambda_i^{(l_{\alpha+1})} - \lambda_j^{(l_{\alpha+1})})}{b^{(l_{\alpha+1})}(\lambda_i^{(l_{\alpha+1})} - \lambda_j^{(l_{\alpha+1})})}. \tag{3.38}$$

Começando com $\alpha = 0$, as expressões (3.37) e (3.38) podem ser iteradas até chegarmos a um passo final l_f caracterizado por $\alpha = f-1$. O número de passos necessários nesta formulação do Ansatz de Bethe Algébrico e também a matriz R subjacente final $r_{\mathcal{A}^{(f)}j}^{(l_f)}(\lambda)$ irá depender fortemente da família de modelos de vértices que estamos considerando. Assim cada superalgebra que estamos tratando possui seu próprio último nível l_f cujos correspondentes modelos de vértices estão explicitados na tabela 3.1 .

Apresentamos no apêndice C as expressões explícitas para as matrizes $R_{\mathcal{A}^{(f)}j}^{(l_f)}(\lambda)$ e o correspondente autovalor da matriz de transferência inhomogênea $T^{(l_f)}(\lambda, \{\lambda_1^{(l_f)}, \dots, \lambda_{m_{l_f}}^{(l_f)}\})$. Chegamos agora num ponto onde todos os resultados obtidos podem ser combinados de forma a obtermos expressões para os autovalores da matriz de transferência e equações de Ansatz de Bethe para cada família de matrizes de transferência.

Com a intenção de tornar mais claro nosso procedimento, descreveremos de forma resumida os passos utilizados. Iniciamos primeiramente com a fórmula para o autovalor (3.27), a partir da qual deduzimos a relação de recorrência (3.37). Desenvolvendo essa relação de recorrência chegamos no problema de autovalores da matriz de transferência $T^{(l_f)}(\lambda, \{\lambda_1^{(l_f)}, \dots, \lambda_{m_{l_f}}^{(l_f)}\})$. Assim, levando em conta os resultados apresentados no apêndice C, obtemos de maneira direta as expressões finais para os autovalores da matriz de transferência originalmente abordada. De forma a simplificar a notação é conveniente definir a função $Q_\alpha(\lambda) = \prod_{i=1}^{m_{l_\alpha}} \sinh(\lambda - \lambda_i^{(l_\alpha)})$ e utilizar $q = e^{i\gamma}$. Assim, nossos resultados finais são:

- $U_q[sl(2n+1|2m)^{(2)}]$:

$$
\begin{aligned}
\Lambda^{(l_0)}(\lambda) &= (-1)^{p_1^{(l_0)}} \left[(-1)^{p_1^{(l_0)}} a_1^{(l_0)}(\lambda)\right]^L \left[\frac{Q_1\left(\lambda - i\frac{\gamma}{2}\right)}{Q_1\left(\lambda + i\frac{\gamma}{2}\right)}\right]^{2p_1^{(l_0)}-1} \\
&+ (-1)^{p_{N_0}^{(l_0)}} \left[(-1)^{p_{N_0}^{(l_0)}} d_{N_0,N_0}^{(l_0)}(\lambda)\right]^L \left[\frac{Q_1\left(\lambda + i\,(m-n)\,\gamma + i\frac{\pi}{2}\right)}{Q_1\left(\lambda + i\,(m-n-1)\,\gamma + i\frac{\pi}{2}\right)}\right]^{2p_1^{(l_0)}-1} \\
&+ \left[b^{(l_0)}(\lambda)\right]^L \sum_{\alpha=1}^{N_0-2} G_\alpha(\lambda|\{\lambda_j^{(l_\beta)}\})
\end{aligned}
\tag{3.39}
$$

$$
G_\alpha(\lambda|\{\lambda_j^{(l_\beta)}\}) = \begin{cases}
\frac{Q_\alpha\left(\lambda+i\left(\frac{\alpha+2}{2}\right)\gamma\right)}{Q_\alpha\left(\lambda+i\frac{\alpha}{2}\gamma\right)} \frac{Q_{\alpha+1}\left(\lambda+i\left(\frac{\alpha-1}{2}\right)\gamma\right)}{Q_{\alpha+1}\left(\lambda+i\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\gamma\right)} & \alpha = 1, \dots, m-1 \\
\frac{Q_\alpha\left(\lambda+i\left(\frac{\alpha-2}{2}\right)\gamma\right)}{Q_\alpha\left(\lambda+i\frac{\alpha}{2}\gamma\right)} \frac{Q_{\alpha+1}\left(\lambda+i\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\gamma\right)}{Q_{\alpha+1}\left(\lambda+i\left(\frac{\alpha-1}{2}\right)\gamma\right)} & \alpha = m \\
\frac{Q_\alpha\left(\lambda+i\left(m-1-\frac{\alpha}{2}\right)\gamma\right)}{Q_\alpha\left(\lambda+i\left(m-\frac{\alpha}{2}\right)\gamma\right)} \frac{Q_{\alpha+1}\left(\lambda+i\left(m+\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)\gamma\right)}{Q_{\alpha+1}\left(\lambda+i\left(m-\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)\gamma\right)} & \alpha = m+1, \dots, m+n-1 \neq m+n \\
\frac{Q_\alpha\left(\lambda+i\left(\frac{m-n-2}{2}\right)\gamma\right)}{Q_\alpha\left(\lambda+i\left(\frac{m-n}{2}\right)\gamma\right)} \frac{Q_\alpha\left(\lambda+i\left(\frac{m-n+1}{2}\right)\gamma+i\frac{\pi}{2}\right)}{Q_\alpha\left(\lambda+i\left(\frac{m-n-1}{2}\right)\gamma+i\frac{\pi}{2}\right)} & \alpha = m+n \\
G_{\alpha-(m+n)}(-i\frac{\pi}{2} - i(m-n-\frac{1}{2})\gamma - \lambda| - \{\lambda_j^{(l_\beta)}\}) & \alpha = m+n+1, \dots, 2m+2n-1
\end{cases}
$$

- $U_q[sl(2n|2m)^{(2)}]$:

$$
\Lambda^{(l_0)}(\lambda) = (-1)^{p_1^{(l_0)}} \left[(-1)^{p_1^{(l_0)}} a_1^{(l_0)}(\lambda)\right]^L \left[\frac{Q_1\left(\lambda - i\frac{\gamma}{2}\right)}{Q_1\left(\lambda + i\frac{\gamma}{2}\right)}\right]^{2p_1^{(l_0)}-1}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ \quad (-1)^{p_{N_0}^{(l_0)}} \left[(-1)^{p_{N_0}^{(l_0)}} d_{N_0,N_0}^{(l_0)}(\lambda)\right]^L \left[\frac{Q_1\left(\lambda + i\left(m-n+\frac{1}{2}\right)\gamma + i\frac{\pi}{2}\right)}{Q_1\left(\lambda + i\left(m-n-\frac{1}{2}\right)\gamma + i\frac{\pi}{2}\right)}\right]^{2p_1^{(l_0)}-1} \\
&+ \quad \left[b^{(l_0)}(\lambda)\right]^L \sum_{\alpha=1}^{N_0-2} G_\alpha(\lambda|\{\lambda_j^{(l_\beta)}\})
\end{aligned}
\tag{3.40}
$$

$$
G_\alpha(\lambda|\{\lambda_j^{(l_\beta)}\})
= \begin{cases}
\frac{Q_\alpha\left(\lambda+i\left(\frac{\alpha+2}{2}\right)\gamma\right)}{Q_\alpha\left(\lambda+i\frac{\alpha}{2}\gamma\right)} \frac{Q_{\alpha+1}\left(\lambda+i\left(\frac{\alpha-1}{2}\right)\gamma\right)}{Q_{\alpha+1}\left(\lambda+i\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\gamma\right)} & \alpha = 1,\ldots,m-1 \\
\frac{Q_\alpha\left(\lambda+i\left(\frac{\alpha-2}{2}\right)\gamma\right)}{Q_\alpha\left(\lambda+i\frac{\alpha}{2}\gamma\right)} \frac{Q_{\alpha+1}\left(\lambda+i\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\gamma\right)}{Q_{\alpha+1}\left(\lambda+i\left(\frac{\alpha-1}{2}\right)\gamma\right)} & \alpha = m \neq m+n-1 \\
\frac{Q_\alpha\left(\lambda+i\left(m-1-\frac{\alpha}{2}\right)\gamma\right)}{Q_\alpha\left(\lambda+i\left(m-\frac{\alpha}{2}\right)\gamma\right)} \frac{Q_{\alpha+1}\left(\lambda+i\left(m+\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)\gamma\right)}{Q_{\alpha+1}\left(\lambda+i\left(m-\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)\gamma\right)} & \alpha = m+1,\ldots,m+n-2 \neq m+n-1 \\
\frac{Q_\alpha\left(\lambda+i\left(\frac{\alpha-2}{2}\right)\gamma\right)}{Q_\alpha\left(\lambda+i\frac{\alpha}{2}\gamma\right)} \frac{Q_{\alpha+1}\left(\lambda+i\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\gamma\right)}{Q_{\alpha+1}\left(\lambda+i\left(\frac{\alpha-1}{2}\right)\gamma\right)} \frac{Q_{\alpha+1}\left(\lambda+i\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\gamma+i\frac{\pi}{2}\right)}{Q_{\alpha+1}\left(\lambda+i\left(\frac{\alpha-1}{2}\right)\gamma+i\frac{\pi}{2}\right)} & \alpha = m+n-1 = m \\
\frac{Q_\alpha\left(\lambda+i\left(m-1-\frac{\alpha}{2}\right)\gamma\right)}{Q_\alpha\left(\lambda+i\left(m-\frac{\alpha}{2}\right)\gamma\right)} \frac{Q_{\alpha+1}\left(\lambda+i\left(m+\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)\gamma\right)}{Q_{\alpha+1}\left(\lambda+i\left(m-\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)\gamma\right)} \frac{Q_{\alpha+1}\left(\lambda+i\left(m+\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)\gamma+i\frac{\pi}{2}\right)}{Q_{\alpha+1}\left(\lambda+i\left(m-\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)\gamma+i\frac{\pi}{2}\right)} & \alpha = m+n-1 \neq m \\
G_{\alpha-(m+n-1)}(-i\frac{\pi}{2} - i(m-n)\gamma - \lambda| - \{\lambda_j^{(l_\beta)}\}) & \alpha = m+n,\ldots,2m+2n-2
\end{cases}
$$

- $U_q[osp(2n|2m)^{(1)}]$:

$$
\begin{aligned}
\Lambda^{(l_0)}(\lambda) \quad = \quad & (-1)^{p_1^{(l_0)}} \left[(-1)^{p_1^{(l_0)}} a_1^{(l_0)}(\lambda)\right]^L \left[\frac{Q_1\left(\lambda - i\frac{\gamma}{2}\right)}{Q_1\left(\lambda + i\frac{\gamma}{2}\right)}\right]^{2p_1^{(l_0)}-1} \\
+ \quad & (-1)^{p_{N_0}^{(l_0)}} \left[(-1)^{p_{N_0}^{(l_0)}} d_{N_0,N_0}^{(l_0)}(\lambda)\right]^L \left[\frac{Q_1\left(\lambda + i\left(m-n+\frac{3}{2}\right)\gamma\right)}{Q_1\left(\lambda + i\left(m-n+\frac{1}{2}\right)\gamma\right)}\right]^{2p_1^{(l_0)}-1} \\
+ \quad & \left[b^{(l_0)}(\lambda)\right]^L \sum_{\alpha=1}^{N_0-2} G_\alpha(\lambda|\{\lambda_j^{(l_\beta)}\})
\end{aligned}
\tag{3.41}
$$

$$
G_\alpha(\lambda|\{\lambda_j^{(l_\beta)}\})
$$

$$
= \begin{cases}
\frac{Q_\alpha\left(\lambda+i\left(\frac{\alpha+2}{2}\right)\gamma\right)}{Q_\alpha\left(\lambda+i\frac{\alpha}{2}\gamma\right)} \frac{Q_{\alpha+1}\left(\lambda+i\left(\frac{\alpha-1}{2}\right)\gamma\right)}{Q_{\alpha+1}\left(\lambda+i\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\gamma\right)} & \alpha = 1, \ldots, m-1 \neq m+n-2 \\
\frac{Q_\alpha\left(\lambda+i\left(\frac{\alpha-2}{2}\right)\gamma\right)}{Q_\alpha\left(\lambda+i\frac{\alpha}{2}\gamma\right)} \frac{Q_{\alpha+1}\left(\lambda+i\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\gamma\right)}{Q_{\alpha+1}\left(\lambda+i\left(\frac{\alpha-1}{2}\right)\gamma\right)} & \alpha = m \neq m+n-2 \\
\frac{Q_\alpha\left(\lambda+i\left(m-1-\frac{\alpha}{2}\right)\gamma\right)}{Q_\alpha\left(\lambda+i\left(m-\frac{\alpha}{2}\right)\gamma\right)} \frac{Q_{\alpha+1}\left(\lambda+i\left(m+\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)\gamma\right)}{Q_{\alpha+1}\left(\lambda+i\left(m-\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)\gamma\right)} & \alpha = m+1, \ldots, m+n-3 \neq m+n-2 \\
\frac{Q_\alpha\left(\lambda+i\left(\frac{\alpha-2}{2}\right)\gamma\right)}{Q_\alpha\left(\lambda+i\frac{\alpha}{2}\gamma\right)} \frac{Q_+\left(\lambda+i\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\gamma\right)}{Q_+\left(\lambda+i\left(\frac{\alpha-1}{2}\right)\gamma\right)} \frac{Q_-\left(\lambda+i\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\gamma\right)}{Q_-\left(\lambda+i\left(\frac{\alpha-1}{2}\right)\gamma\right)} & \alpha = m+n-2 = m \\
\frac{Q_\alpha\left(\lambda+i\left(m-1-\frac{\alpha}{2}\right)\gamma\right)}{Q_\alpha\left(\lambda+i\left(m-\frac{\alpha}{2}\right)\gamma\right)} \frac{Q_+\left(\lambda+i\left(m+\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)\gamma\right)}{Q_+\left(\lambda+i\left(m-\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)\gamma\right)} \frac{Q_-\left(\lambda+i\left(m+\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)\gamma\right)}{Q_-\left(\lambda+i\left(m-\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)\gamma\right)} & \alpha = m+n-2 \neq m \\
\frac{Q_+\left(\lambda+i\left(m+1-\frac{\alpha}{2}\right)\gamma\right)}{Q_+\left(\lambda+i\left(m-\frac{\alpha}{2}\right)\gamma\right)} \frac{Q_-\left(\lambda+i\left(m-1-\frac{\alpha}{2}\right)\gamma\right)}{Q_-\left(\lambda+i\left(m-\frac{\alpha}{2}\right)\gamma\right)} & \alpha = m+n-1 \\
G_{\alpha-(m+n-1)}(-i(m-n+1)\gamma - \lambda| - \{\lambda_j^{(l_\beta)}\}) & \alpha = m+n, \ldots, 2m+2n-2
\end{cases}
$$

- $U_q[osp(2n+1|2m)^{(1)}]$:

$$
\begin{aligned}
\Lambda^{(l_0)}(\lambda) &= (-1)^{p_1^{(l_0)}} \left[(-1)^{p_1^{(l_0)}} a_1^{(l_0)}(\lambda)\right]^L \left[\frac{Q_1\left(\lambda - i\frac{\gamma}{2}\right)}{Q_1\left(\lambda + i\frac{\gamma}{2}\right)}\right]^{2p_1^{(l_0)}-1} \\
&+ (-1)^{p_{N_0}^{(l_0)}} \left[(-1)^{p_{N_0}^{(l_0)}} d_{N_0,N_0}^{(l_0)}(\lambda)\right]^L \left[\frac{Q_1\left(\lambda + i\left(m-n+1\right)\gamma\right)}{Q_1\left(\lambda + i\left(m-n\right)\gamma\right)}\right]^{2p_1^{(l_0)}-1} \\
&+ \left[b^{(l_0)}(\lambda)\right]^L \sum_{\alpha=1}^{N_0-2} G_\alpha(\lambda|\{\lambda_j^{(l_\beta)}\})
\end{aligned}
\tag{3.42}
$$

$$
G_\alpha(\lambda|\{\lambda_j^{(l_\beta)}\})
$$

$$
= \begin{cases}
\frac{Q_\alpha\left(\lambda+i\left(\frac{\alpha+2}{2}\right)\gamma\right)}{Q_\alpha\left(\lambda+i\frac{\alpha}{2}\gamma\right)} \frac{Q_{\alpha+1}\left(\lambda+i\left(\frac{\alpha-1}{2}\right)\gamma\right)}{Q_{\alpha+1}\left(\lambda+i\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\gamma\right)} & \alpha = 1, \ldots, m-1 \\
\frac{Q_\alpha\left(\lambda+i\left(\frac{\alpha-2}{2}\right)\gamma\right)}{Q_\alpha\left(\lambda+i\frac{\alpha}{2}\gamma\right)} \frac{Q_{\alpha+1}\left(\lambda+i\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\gamma\right)}{Q_{\alpha+1}\left(\lambda+i\left(\frac{\alpha-1}{2}\right)\gamma\right)} & \alpha = m \\
\frac{Q_\alpha\left(\lambda+i\left(m-1-\frac{\alpha}{2}\right)\gamma\right)}{Q_\alpha\left(\lambda+i\left(m-\frac{\alpha}{2}\right)\gamma\right)} \frac{Q_{\alpha+1}\left(\lambda+i\left(m+\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)\gamma\right)}{Q_{\alpha+1}\left(\lambda+i\left(m-\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)\gamma\right)} & \alpha = m+1, \ldots, m+n-1 \neq m+n \\
\frac{Q_\alpha\left(\lambda+i\left(\frac{m-n-1}{2}\right)\gamma\right)}{Q_\alpha\left(\lambda+i\left(\frac{m-n+1}{2}\right)\gamma\right)} \frac{Q_\alpha\left(\lambda+i\left(\frac{m-n+2}{2}\right)\gamma\right)}{Q_\alpha\left(\lambda+i\left(\frac{m-n}{2}\right)\gamma\right)} & \alpha = m+n \\
G_{\alpha-(m+n)}(-i(m-n+\frac{1}{2})\gamma - \lambda| - \{\lambda_j^{(l_\beta)}\}) & \alpha = m+n+1, \ldots, 2m+2n-1
\end{cases}
$$

Antes de prosseguirmos com a apresentação das equações de Ansatz de Bethe, ressaltamos que nas expressoes (3.39-3.42) realizamos a seguinte translação nas variáveis $\lambda_j^{(l_\alpha)} \to \lambda_j^{(l_\alpha)} - \delta^{(l_\alpha)}$ de forma que nossos resultados finais assumissem uma forma mais simétrica. Na tabela abaixo explicitamos os valores para os deslocamentos realizados $\delta^{(l_\alpha)}$.

Superalgebra de Lie	$\delta^{(l_\alpha)}$
$sl(2n+1\|2m)^{(2)}$, $osp(2n+1\|2m)^{(1)}$ e $sl(2n\|2m)^{(2)}$	$\begin{cases} i\frac{\alpha}{2}\gamma & 1 \leq \alpha \leq m \\ i\left(m - \frac{\alpha}{2}\right)\gamma & m < \alpha \leq m+n \end{cases}$
$osp(2n\|2m)^{(1)}$	$\begin{cases} i\frac{\alpha}{2}\gamma & 1 \leq \alpha \leq m \\ i\left(m - \frac{\alpha}{2}\right)\gamma & m < \alpha \leq m+n-2 \\ i\left(\frac{m-n+1}{2}\right)\gamma & \alpha = \pm \end{cases}$

Tabela 3.2: Deslocamentos realizados nas variáveis $\lambda_j^{(l_\alpha)}$.

O mesmo procedimento descrito anteriormente para os autovalores também pode ser utilizado para se obter expressões para as equações de Ansatz de Bethe em termos das variáveis transladadas. Iniciamos com a equação (3.28) que nos fornece a relação de recorrência (3.38). Assim, podemos iterar essa relação de recorrência até chegarmos ao passo final l_f onde utilizamos os resultados contidos no apêndice C. Desta forma, as equações de Ansatz de Bethe obtidas são dadas por

- $U_q[sl(2n+1|2m)^{(2)}]$:

$$\prod_{i=1}^{m_{l_{\alpha-1}}} \frac{\sinh\left(\lambda_j^{(l_\alpha)} - \lambda_i^{(l_{\alpha-1})} + i\frac{\gamma}{2}\right)}{\sinh\left(\lambda_j^{(l_\alpha)} - \lambda_i^{(l_{\alpha-1})} - i\frac{\gamma}{2}\right)} = \prod_{i\neq j}^{m_{l_\alpha}} \frac{\sinh\left(\lambda_j^{(l_\alpha)} - \lambda_i^{(l_\alpha)} + i\gamma\right)}{\sinh\left(\lambda_j^{(l_\alpha)} - \lambda_i^{(l_\alpha)} - i\gamma\right)} \prod_{i=1}^{m_{l_{\alpha+1}}} \frac{\sinh\left(\lambda_i^{(l_{\alpha+1})} - \lambda_j^{(l_\alpha)} + i\frac{\gamma}{2}\right)}{\sinh\left(\lambda_i^{(l_{\alpha+1})} - \lambda_j^{(l_\alpha)} - i\frac{\gamma}{2}\right)} \qquad \alpha = 1, \ldots, m-1$$

$$\prod_{i=1}^{m_{l_{\alpha-1}}} \frac{\sinh\left(\lambda_j^{(l_\alpha)} - \lambda_i^{(l_{\alpha-1})} + i\frac{\gamma}{2}\right)}{\sinh\left(\lambda_j^{(l_\alpha)} - \lambda_i^{(l_{\alpha-1})} - i\frac{\gamma}{2}\right)} = \prod_{i=1}^{m_{l_{\alpha+1}}} \frac{\sinh\left(\lambda_i^{(l_{\alpha+1})} - \lambda_j^{(l_\alpha)} - i\frac{\gamma}{2}\right)}{\sinh\left(\lambda_i^{(l_{\alpha+1})} - \lambda_j^{(l_\alpha)} + i\frac{\gamma}{2}\right)} \qquad \alpha = m$$

$$\prod_{i=1}^{m_{l_{\alpha-1}}} \frac{\sinh\left(\lambda_j^{(l_\alpha)} - \lambda_i^{(l_{\alpha-1})} - i\frac{\gamma}{2}\right)}{\sinh\left(\lambda_j^{(l_\alpha)} - \lambda_i^{(l_{\alpha-1})} + i\frac{\gamma}{2}\right)} = \prod_{i\neq j}^{m_{l_\alpha}} \frac{\sinh\left(\lambda_j^{(l_\alpha)} - \lambda_i^{(l_\alpha)} - i\gamma\right)}{\sinh\left(\lambda_j^{(l_\alpha)} - \lambda_i^{(l_\alpha)} + i\gamma\right)} \prod_{i=1}^{m_{l_{\alpha+1}}} \frac{\sinh\left(\lambda_i^{(l_{\alpha+1})} - \lambda_j^{(l_\alpha)} - i\frac{\gamma}{2}\right)}{\sinh\left(\lambda_i^{l_{(\alpha+1)}} - \lambda_j^{(l_\alpha)} + i\frac{\gamma}{2}\right)}$$

$$\alpha = m+1,\dots,m+n-1 \neq m+n \neq m$$

$$\prod_{i=1}^{m_{l_{\alpha-1}}} \frac{\sinh\left(\lambda_j^{(l_\alpha)} - \lambda_i^{(l_{\alpha-1})} - i\frac{\gamma}{2}\right)}{\sinh\left(\lambda_j^{(l_\alpha)} - \lambda_i^{(l_{\alpha-1})} + i\frac{\gamma}{2}\right)} = \prod_{i\neq j}^{m_{l_\alpha}} \frac{\sinh\left(\lambda_j^{(l_\alpha)} - \lambda_i^{(l_\alpha)} - i\gamma\right)}{\sinh\left(\lambda_j^{(l_\alpha)} - \lambda_i^{(l_\alpha)} + i\gamma\right)} \frac{\cosh\left(\lambda_j^{(l_\alpha)} - \lambda_i^{(l_\alpha)} + i\frac{\gamma}{2}\right)}{\cosh\left(\lambda_j^{(l_\alpha)} - \lambda_i^{(l_\alpha)} - i\frac{\gamma}{2}\right)} \qquad \alpha = m+n \tag{3.43}$$

- $U_q[sl(2n|2m)^{(2)}]$:

$$\prod_{i=1}^{m_{l_{\alpha-1}}} \frac{\sinh\left(\lambda_j^{(l_\alpha)} - \lambda_i^{(l_{\alpha-1})} + i\frac{\gamma}{2}\right)}{\sinh\left(\lambda_j^{(l_\alpha)} - \lambda_i^{(l_{\alpha-1})} - i\frac{\gamma}{2}\right)} = \prod_{i\neq j}^{m_{l_\alpha}} \frac{\sinh\left(\lambda_j^{(l_\alpha)} - \lambda_i^{(l_\alpha)} + i\gamma\right)}{\sinh\left(\lambda_j^{(l_\alpha)} - \lambda_i^{(l_\alpha)} - i\gamma\right)} \prod_{i=1}^{m_{l_{\alpha+1}}} \frac{\sinh\left(\lambda_i^{(l_{\alpha+1})} - \lambda_j^{(l_\alpha)} + i\frac{\gamma}{2}\right)}{\sinh\left(\lambda_i^{(l_{\alpha+1})} - \lambda_j^{(l_\alpha)} - i\frac{\gamma}{2}\right)} \qquad \alpha = 1,\dots,m-1$$

$$\prod_{i=1}^{m_{l_{\alpha-1}}} \frac{\sinh\left(\lambda_j^{(l_\alpha)} - \lambda_i^{(l_{\alpha-1})} + i\frac{\gamma}{2}\right)}{\sinh\left(\lambda_j^{(l_\alpha)} - \lambda_i^{(l_{\alpha-1})} - i\frac{\gamma}{2}\right)} = \prod_{i=1}^{m_{l_{\alpha+1}}} \frac{\sinh\left[g_\alpha\left(\lambda_i^{(l_{\alpha+1})} - \lambda_j^{(l_\alpha)} - i\frac{\gamma}{2}\right)\right]}{\sinh\left[g_\alpha\left(\lambda_i^{(l_{\alpha+1})} - \lambda_j^{(l_\alpha)} + i\frac{\gamma}{2}\right)\right]} \qquad \alpha = m$$

$$\prod_{i=1}^{m_{l_{\alpha-1}}} \frac{\sinh\left(\lambda_j^{(l_\alpha)} - \lambda_i^{(l_{\alpha-1})} - i\frac{\gamma}{2}\right)}{\sinh\left(\lambda_j^{(l_\alpha)} - \lambda_i^{l_{(\alpha-1)}} + i\frac{\gamma}{2}\right)} = \prod_{i\neq j}^{m_{l_\alpha}} \frac{\sinh\left(\lambda_j^{(l_\alpha)} - \lambda_i^{(l_\alpha)} - i\gamma\right)}{\sinh\left(\lambda_j^{(l_\alpha)} - \lambda_i^{(l_\alpha)} + i\gamma\right)} \times \prod_{i=1}^{m_{l_{\alpha+1}}} \frac{\sinh\left[g_\alpha\left(\lambda_i^{(l_{\alpha+1})} - \lambda_j^{(l_\alpha)} - i\frac{\gamma}{2}\right)\right]}{\sinh\left[g_\alpha\left(\lambda_i^{(l_{\alpha+1})} - \lambda_j^{(l_\alpha)} + i\frac{\gamma}{2}\right)\right]} \qquad \alpha = m+1,\dots,m+n-1 \neq m+n \neq m$$

$$\prod_{i=1}^{m_{l_{\alpha-1}}} \frac{\sinh\left[2\left(\lambda_j^{(l_\alpha)} - \lambda_i^{(l_{\alpha-1})} - i\frac{\gamma}{2}\right)\right]}{\sinh\left[2\left(\lambda_j^{(l_\alpha)} - \lambda_i^{(l_{\alpha-1})} + i\frac{\gamma}{2}\right)\right]} = \prod_{i\neq j}^{m_{l_\alpha}} \frac{\sinh\left[2\left(\lambda_j^{(l_\alpha)} - \lambda_i^{(l_\alpha)} - i\gamma\right)\right]}{\sinh\left[2\left(\lambda_j^{(l_\alpha)} - \lambda_i^{(l_\alpha)} + i\gamma\right)\right]} \qquad \alpha = m+n \tag{3.44}$$

- $U_q[osp(2n|2m)^{(1)}]$:

$$\prod_{i=1}^{m_{l_{\alpha-1}}} \frac{\sinh\left(\lambda_j^{(l_\alpha)} - \lambda_i^{(l_{\alpha-1})} + i\frac{\gamma}{2}\right)}{\sinh\left(\lambda_j^{(l_\alpha)} - \lambda_i^{(l_{\alpha-1})} - i\frac{\gamma}{2}\right)} = \prod_{i\neq j}^{m_{l_\alpha}} \frac{\sinh\left(\lambda_j^{(l_\alpha)} - \lambda_i^{(l_\alpha)} + i\gamma\right)}{\sinh\left(\lambda_j^{(l_\alpha)} - \lambda_i^{(l_\alpha)} - i\gamma\right)} \prod_{i=1}^{m_{l_{\alpha+1}}} \frac{\sinh\left(\lambda_i^{l_{(\alpha+1)}} - \lambda_j^{(l_\alpha)} + i\frac{\gamma}{2}\right)}{\sinh\left(\lambda_i^{(l_{\alpha+1})} - \lambda_j^{(l_\alpha)} - i\frac{\gamma}{2}\right)} \qquad \alpha = 1,\dots,m-1$$

$$\prod_{i=1}^{m_{l_{\alpha-1}}} \frac{\sinh\left(\lambda_j^{(l_\alpha)} - \lambda_i^{(l_{\alpha-1})} + i\frac{\gamma}{2}\right)}{\sinh\left(\lambda_j^{(l_\alpha)} - \lambda_i^{(l_{\alpha-1})} - i\frac{\gamma}{2}\right)} = \prod_{i=1}^{m_{l_{\alpha+1}}} \frac{\sinh\left(\lambda_i^{(l_{\alpha+1})} - \lambda_j^{(l_\alpha)} - i\frac{\gamma}{2}\right)}{\sinh\left(\lambda_i^{(l_{\alpha+1})} - \lambda_j^{(l_\alpha)} + i\frac{\gamma}{2}\right)} \qquad \alpha = m$$

$$\prod_{i=1}^{m_{l_{\alpha-1}}} \frac{\sinh\left(\lambda_j^{(l_\alpha)} - \lambda_i^{(l_{\alpha-1})} - i\frac{\gamma}{2}\right)}{\sinh\left(\lambda_j^{(l_\alpha)} - \lambda_i^{(l_{\alpha-1})} + i\frac{\gamma}{2}\right)} = \prod_{i\neq j}^{m_{l_\alpha}} \frac{\sinh\left(\lambda_j^{(l_\alpha)} - \lambda_i^{(l_\alpha)} - i\gamma\right)}{\sinh\left(\lambda_j^{(l_\alpha)} - \lambda_i^{(l_\alpha)} + i\gamma\right)} \prod_{i=1}^{m_{l_{\alpha+1}}} \frac{\sinh\left(\lambda_i^{(l_{\alpha+1})} - \lambda_j^{(l_\alpha)} - i\frac{\gamma}{2}\right)}{\sinh\left(\lambda_i^{(l_{\alpha+1})} - \lambda_j^{(l_\alpha)} + i\frac{\gamma}{2}\right)}$$
$$\alpha = m+1, \ldots, m+n-3 \neq m+n-2 \neq m$$
$$\prod_{i=1}^{m_{l_{\alpha-1}}} \frac{\sinh\left(\lambda_j^{(l_\alpha)} - \lambda_i^{(l_{\alpha-1})} - i\frac{\gamma}{2}\right)}{\sinh\left(\lambda_j^{(l_\alpha)} - \lambda_i^{(l_{\alpha-1})} + i\frac{\gamma}{2}\right)} = \prod_{i\neq j}^{m_{l_\alpha}} \frac{\sinh\left(\lambda_j^{(l_\alpha)} - \lambda_i^{(l_\alpha)} - i\gamma\right)}{\sinh\left(\lambda_j^{(l_\alpha)} - \lambda_i^{(l_\alpha)} + i\gamma\right)}$$
$$\times \prod_{i=1}^{m_{l_+}} \frac{\sinh\left(\lambda_i^{(l_+)} - \lambda_j^{(l_\alpha)} - i\frac{\gamma}{2}\right)}{\sinh\left(\lambda_i^{(l_+)} - \lambda_j^{(l_\alpha)} + i\frac{\gamma}{2}\right)} \prod_{i=1}^{m_{l_-}} \frac{\sinh\left(\lambda_i^{(l_-)} - \lambda_j^{(l_\alpha)} - i\frac{\gamma}{2}\right)}{\sinh\left(\lambda_i^{(l_-)} - \lambda_j^{(l_\alpha)} + i\frac{\gamma}{2}\right)}$$
$$\alpha = m+n-2$$
$$\prod_{i=1}^{m_{l_{\alpha-1}}} \frac{\sinh\left(\lambda_j^{(l_\pm)} - \lambda_i^{(l_{\alpha-1})} - i\frac{\gamma}{2}\right)}{\sinh\left(\lambda_j^{(l_\pm)} - \lambda_i^{l_{(\alpha-1)}} + i\frac{\gamma}{2}\right)} = \prod_{i\neq j}^{m_{l_\pm}} \frac{\sinh\left(\lambda_j^{(l_\pm)} - \lambda_i^{(l_\pm)} - i\gamma\right)}{\sinh\left(\lambda_j^{(l_\pm)} - \lambda_i^{(l_\pm)} + i\gamma\right)} \qquad \alpha = m+n-1$$
$$(3.45)$$

- $U_q[osp(2n+1|2m)^{(1)}]$:

$$\prod_{i=1}^{m_{l_{\alpha-1}}} \frac{\sinh\left(\lambda_j^{(l_\alpha)} - \lambda_i^{(l_{\alpha-1})} + i\frac{\gamma}{2}\right)}{\sinh\left(\lambda_j^{(l_\alpha)} - \lambda_i^{(l_{\alpha-1})} - i\frac{\gamma}{2}\right)} = \prod_{i\neq j}^{m_{l_\alpha}} \frac{\sinh\left(\lambda_j^{(l_\alpha)} - \lambda_i^{(l_\alpha)} + i\gamma\right)}{\sinh\left(\lambda_j^{(l_\alpha)} - \lambda_i^{(l_\alpha)} - i\gamma\right]} \prod_{i=1}^{m_{l_{\alpha+1}}} \frac{\sinh\left(\lambda_i^{(l_{\alpha+1})} - \lambda_j^{(l_\alpha)} + i\frac{\gamma}{2}\right)}{\sinh\left(\lambda_i^{l_{\alpha+1}} - \lambda_j^{(l_\alpha)} - i\frac{\gamma}{2}\right)}$$
$$\alpha = 1, \ldots, m-1$$
$$\prod_{i=1}^{m_{l_{\alpha-1}}} \frac{\sinh\left(\lambda_j^{(l_\alpha)} - \lambda_i^{(l_{\alpha-1})} + i\frac{\gamma}{2}\right)}{\sinh\left(\lambda_j^{(l_\alpha)} - \lambda_i^{(l_{\alpha-1})} - i\frac{\gamma}{2}\right)} = \prod_{i=1}^{m_{l_{\alpha+1}}} \frac{\sinh\left(\lambda_i^{(l_{\alpha+1})} - \lambda_j^{(l_\alpha)} - i\frac{\gamma}{2}\right)}{\sinh\left(\lambda_i^{(l_{\alpha+1})} - \lambda_j^{(l_\alpha)} + i\frac{\gamma}{2}\right)} \qquad \alpha = m$$
$$\prod_{i=1}^{m_{l_{\alpha-1}}} \frac{\sinh\left(\lambda_j^{(l_\alpha)} - \lambda_i^{(l_{\alpha-1})} - i\frac{\gamma}{2}\right)}{\sinh\left(\lambda_j^{(l_\alpha)} - \lambda_i^{(l_{\alpha-1})} + i\frac{\gamma}{2}\right)} = \prod_{i\neq j}^{m_{l_\alpha}} \frac{\sinh\left(\lambda_j^{(l_\alpha)} - \lambda_i^{(l_\alpha)} - i\gamma\right)}{\sinh\left(\lambda_j^{(l_\alpha)} - \lambda_i^{(l_\alpha)} + i\gamma\right)} \prod_{i=1}^{m_{l_{\alpha+1}}} \frac{\sinh\left(\lambda_i^{(l_{\alpha+1})} - \lambda_j^{(l_\alpha)} - i\frac{\gamma}{2}\right)}{\sinh\left(\lambda_i^{(l_{\alpha+1})} - \lambda_j^{(l_\alpha)} + i\frac{\gamma}{2}\right)}$$
$$\alpha = m+1, \ldots, m+n-1 \neq m+n \neq m$$
$$\prod_{i=1}^{m_{l_{\alpha-1}}} \frac{\sinh\left(\lambda_j^{(l_\alpha)} - \lambda_i^{(l_{\alpha-1})} - i\frac{\gamma}{2}\right)}{\sinh\left(\lambda_j^{(l_\alpha)} - \lambda_i^{(l_{\alpha-1})} + i\frac{\gamma}{2}\right)} = \prod_{i\neq j}^{m_{l_\alpha}} \frac{\sinh\left(\lambda_j^{(l_\alpha)} - \lambda_i^{(l_\alpha)} - i\frac{\gamma}{2}\right)}{\sinh\left(\lambda_j^{(l_\alpha)} - \lambda_i^{(l_\alpha)} + i\frac{\gamma}{2}\right)} \qquad \alpha = m+n$$
$$(3.46)$$

onde g_α pode assumir dois possíveis valores

$$g_\alpha = \begin{cases} 2 & \alpha = m+n-1 \\ 1 & \text{para o restante} \end{cases}. \qquad (3.47)$$

Apenas por questões de completeza desse trabalho, apresentaremos os resultados relativos aos modelos de vértices $U_q[sl(1|2m)^{(2)}]$ e $U_q[osp(1|2m)^{(1)}]$ no apêndice D. Também ressaltamos que esta formulação do Ansatz de Bethe Algébrico ainda pode ser generalizada para acomodar os modelos obtidos da extensão do $U_q[D_{n+1}^{(2)}]$ com graus de liberdade ímpares (2.70). Entretanto, uma solução unificada para qualquer número de graus de liberdade pares e ímpares ainda é um problema em aberto, e a razão para isto já pode ser vista quando tentamos solucionar o modelo $U_q[D_{n+1}^{(2)}]$ através do Ansatz de Bethe Algébrico [26]. Neste caso pode-se ver que o primeiro Ansatz de Bethe Auxiliar para $n \geq 2$ já é governado por uma matriz R contendo mais elementos não nulos do que a série $U_q[D_{n-1}^{(2)}]$, tornando altamente não trivial a obtenção de relações de comutação gerais similares a (3.16,3.18) para qualquer valor de n.

Para finalizar essa seção observamos que o sistema de equações de Ansatz de Bethe apresentados acima é justamente a condição de analiticidade dos autovalores $\Lambda(\lambda)$ como funções das variáveis $\{\lambda_j^{(l_1)}\}, \ldots, \{\lambda_j^{(l_{f+1})}\}$. Esta observação consiste de uma verificação extra da validade de nossos resultados já que em princípio a matriz de transferência desconhece a existência desses pólos.

CONCLUSÃO

Nesta tese apresentamos expressões explícitas para matrizes R trigonométricas associadas com as representações fundamentais das superalgebras de Lie q-deformadas $U_q[sl^{(2)}(r|2m)]$ e $U_q[osp^{(1)}(r|2m)]$. Este passo permite agora a interpretação dessas soluções da equação de Yang-Baxter como pesos de Boltzmann de modelos de vértices integráveis em mecânica estatística. Também estabelecemos a conexão entre essas soluções e representações da álgebra de Braid-Monoid. Esta conexão se mostrou de grande utilidade nos permitindo obter generalizações multiparamétricas das matrizes R associadas as superalgebras mencionadas acima, além de generalizações altamente não-triviais da matriz R associada ao $U_q[D_{n+1}^{(2)}]$. Também apresentamos a formulação do Ansatz de Bethe Algébrico para as famílias de superalgebras $U_q[sl^{(2)}(r|2m)]$ e $U_q[osp^{(1)}(r|2m)]$, resultando nos autovalores das correspondentes matrizes de transferência e as correspondentes equações de Ansatz de Bethe.

Estes resultados tornam agora possível o estudo da energia livre e excitações elementares dos respectivos modelos. Além disto, a obtenção dos autovetores abre caminho para o cálculo de fatores de forma [55] e funções de correlação [56, 57] de operadores relevantes.

Este trabalho ainda possibilita o estudo destes modelos de vértices com condições abertas de contorno [58]. Ressaltando que com exceção da generalização obtida da matriz R associada ao $U_q[D_{n+1}^{(2)}]$, todas as soluções que foram apresentadas $\check{R}^{(l_0)}(\lambda)$ comutam para diferentes valores do parâmetro λ. Como consequência deste fato, obtemos imediatamente uma solução diagonal trivial das equações de reflexão sendo estas dadas por $k_-(\lambda) = I$ e $k_+(\lambda) = V^{st}V$ [59]. Um problema interessante agora seria a classificação de todas as possíveis soluções da equação de reflexão para tais modelos. Este passo poderia ser dado por exemplo, extendendo-se os recentes avanços feitos em [60, 61]. Outro problema interessante seria ainda a solução destes modelos com condições abertas de contorno não diagonais, onde um primeiro passo já foi dado para o caso de modelos racionais [62].

Referências Bibliográficas

[1] L. Onsager, *Phys. Rev. 65 (1944) 117.*

[2] Shang-Keng Ma, *"Modern Theory of Crytical Phenomena", Reading, Mass.: W.A. Benjamim, Advanced Book Program 1976.*

[3] C.N. Yang, *Phys. Rev. Lett. 19 (1967) 1312.*

[4] M. Gaudin, *Phys. Lett. A 24 (1967) 55.*

[5] R.J. Baxter, *Annals of Physics 70 (1), 1972.*

[6] R.J. Baxter, *"Exactly Solved Models in Statistical Mechanics", Academic Press, New York, 1982.*

[7] V.G. Drienfeld, *Doklady Akad. Nauk. SSSR, 1985.*

[8] M. Jimbo, *Lett. Math. Phys. 10 (1985) 63-69.*

[9] V. Chari e A. Pressley, *"Guide to Quantum Groups", Cambridge, Cambridge University Press, 1994.*

[10] L.H. Kauffman, *"Knots and Physics", World Scientific 1991.*

[11] A.A. Belavin e V.G. Drinfeld, *Funct. Anal. Appl. 16 (1983) 159.*

[12] J.E. Humphreys, *"Introductions to Lie Algebras and Representation Theory", Springer-Verlag, 1972.*

[13] V.V. Bazhanov, *Phys.Lett.B 159 (1985) 321.*

[14] P.P. Kulish e N. Yu. Reshetikhin, *J. Sov. Math. 23, 2435 (1983).*

[15] M. Jimbo, *Comm.Math.Phys. 102 (1986) 247.*

[16] C. Fan e F. Y. Wu, *Phys. Rev. 179 (1969) 560.*

[17] J.H.H. Perk e C.L. Schultz, *Phys.Lett.A 84 (1981) 407.*

[18] T. Deguchi e Y. Akutsu,*J.Phys.A:Math.Gen. 23 (1990) 1861.*

[19] P.P. Kulish e N.Yu. Reshetikhin, *Lett.Math.Phys. 18 (1989) 143*; H. Saleur, *Nucl.Phys.B 336 (1990) 363*

[20] T. Deguchi, A. Fujii e K. Ito, *Phys.Lett.B 238 (1990) 242*; M.D. Gould, J.R. Links, Y.Z. Zhang e I. Tsohantjis, *J.Phys.A:Math.Gen. 30 (1997) 4313* .

[21] A.J. Bracken, G.W. Delius, M.D. Gould, J.R. Links e Y.-Z. Zhang, *J.Phys.A:Math.Gen. 27 (1994) 6551*; Z. Maassarani, *J.Phys.A:Math.Gen. 28 (1995) 1305.*

[22] M.D. Gould, K.E. Hibberd, J.R. Links e Y.Z. Zhang, *Phys.Lett.A 212 (1996) 156*; M.J. Martins e P.B. Ramos, *Phys.Rev.B 56 (1997) 6376.*

[23] M.J. Martins e P.B. Ramos, *Nucl.Phys.B 500 (1997) 579.*

[24] N.Y. Reshetikhin, *Lett.Math.Phys. 14 (1987) 235.*

[25] O. Babelon, H.J. de Vega e C.M. Viallet, *Nucl. Phys. B, 200(1982) 266*; P.P. Kulish e N.Y. Reshetikhin,*J.Phys.A:Math.Gen. 16 (1983) L591*

[26] M.J. Martins, *Phys.Rev.E 59 (1999) 7220.*

[27] W. Galleas e M.J. Martins, *Nucl. Phys. B 699 (2004) 455-486.*

[28] W. Galleas e M.J. Martins, *Nucl. Phys. B 732 (2006) 444-462.*

[29] F.A. Berenzin e G.I. Kac, *Math. Sbornik 82, 1970.*

[30] V.G. Kac, *Advances in Mathematics 26, 8-96 (1977).*

[31] P.P. Kulish, *J.Sov.Math. 35 (1986) 2648.*

[32] F.H.L. Essler e V.E. Korepin, *Phys.Rev.B 46 (1992) 9147*; A. Foerster e M. Karowski, *Nucl.Phys.B 396 (1993) 611*; F.H.L. Essler, V.E.Korepin e K. Schoutens, *Int.J.Mod.Phys.B 8 (1994) 3205*

[33] M. Chaichian e P.P. Kulish, *Phys.Lett.B 234 (1990) 72*; T. Deguchi e Y. Akutsu, *J.Phys.A:Math.Gen. 23 (1990) 1861* .

[34] V.V. Bazhanov e A.G. Shadrikov, *Theor.Math.Phys. 73 (1987) 1302* .

[35] D.A. Leites e V.V. Serganova, *Teor. Mat. Fiz., 58, 26 (1984).*

[36] M. Wadati, T. Deguchi e Y. Akutsu, *Phys.Rep. 180 (1989) 247.*

[37] E. Artin, *Ann.Math. 48 (1947) 101.*

[38] H.V.N. Temperley e E.H. Lieb, *Proc.R.Soc. (London) A 322 (1971) 251.*

[39] J. Birman e H. Wenzl, *Trans. Am. Math. Soc. 313 (1989) 249*; J. Murakami, *Osaka J. Math. 24 (1987) 745.*

[40] N. Reshetikhin, *Lett.Math.Phys. 20 (1990) 331.*

[41] M. Couture, M.L. Ge, H.C. Lee e N.C. Schneing, *J. Phys. A: Math. Gen. 23 (1990) 4751*; M. Couture, M.L. Ge e H.C. Lee, *J. Phys. A: Math. Gen. 23 (1990) 4765*; M. Couture, Y. Cheng, M.L. Ge e K. Xue, *Int. J. Mod. Phys. A 6 (1991) 359.*

[42] M.L. Ge e K. Xue, *J. Math. Phys. 32 (1991) 1301.*

[43] Y. Cheng, M.L. Ge e X. Xue, *Comm. Math. Phys. 136 (1991) 195*; M.L. Ge, Y.S. Wu e K. Xue, *Int. J. Mod. Phys. A 6 (1991) 3735.*

[44] V.F.R. Jones, *Comm. Math. Phys. 125 (1989) 459* ; *Int. J. Mod. Phys. B 4 (1990) 701.*

[45] V. Grimm, *J. Phys. A: Math. Gen. 217 (1994) 5897*; *Lett. Math. Phys. 32 (1994) 183* ; U. Grimm e S.O. Warnar, *Nucl. Phys. B 435 (1995) 482.*

[46] U. Grimm e P.A. Pearce, *J. Phys. A: Math. Gen. 26 (1993) 7435*; U. Grimm e S.O. Warnaar, *J.Phys.A 28 (1995) 7197.*

[47] V.V. Bazhanov e A.G. Shadrikov, *Theor.Math.Phys. 73 (1987) 1302*; R.B. Zhang, A.J. Bracken e M.D. Gould, *Phys.Lett.B 257 (1991) 133.*

[48] G.W. Delius, M.D. Gould, e Y.Z. Zhang, *Int.J.Mod.Phys. A 11 (1996) 3415*; M.D. Gould e Y.Z. Zhang, *Nucl.Phys.B 566 (2000) 529.*

[49] W. Galleas e J.R. Links, em preparação.

[50] L.D. Faddeev, N. Yu Reshetkhin e L.A. Takhtajan, *Algebra i Analiz 1 (1989)*; traduzido em *Leningrad Math. J. 1 (1990) 193.*

[51] L.A. Takhtajan e L.D. Faddeev, *Russ.Math.Sur. 34 (1979) 11*

[52] H.A. Bethe, *Z. Phys. 71 (1931) 205.*

[53] A.G. Izergin e V.E. Korepin, *Commun.Math.Phys. 79 (1981) 303*

[54] A.B. Zamolodchikov e V. Fattev, *Sov.J.Nucl.Phys. 32 (1980) 298*

[55] H. Babujian, M. Karowski e A. Zapletal, *J.Phys.A:Math.Gen.30 (1997) 6425*; H. Babudjian, A. Fring, M. Karowski, et al, *Nucl.Phys.B 538 (1999) 535.*

[56] V.E. Korepin, G. Izergin e N.M. Bogoliubov, *"Quantum Inverse Scattering Method, Correlation Functions and Algebraic Bethe ansatz", Cambridge University Press, 1992, Cambridge.*

[57] N. Kitanine, J.M. Maillet e V. Terras, *Nucl.Phys.B 567 (2000) 554*; N. Kitanine, J.M. Maillet, N.A. Slanov, et al, *Nucl.Phys.B 642 (2002) 433; 641 (2002) 487* .

[58] E.K. Sklyanin, *J.Phys.A:Math.Gen. 21 (1988) 2375.*

[59] L. Mezincescu e R.I. Nepomechie, *J.Phys.A: Math.Gen. 24 (1991) L17*; *Int.J.Mod.Phys. A 7 (1991) 5231.*

[60] D. Arnaudon, J.Avan, N. Crampé, et al, *Nucl.Phys.B 668 (2003) 469.*

[61] A. Lima-Santos e R. Malara, *Nucl.Phys.B 675 (2003) 661*; A. Lima-Santos, *Nucl.Phys.B 612 (2001) 446.*

[62] W. Galleas e M.J. Martins, *Phys. Lett. A 335 (2005).*

Apêndice A: A simetria de *Crossing*

Neste apêndice o nosso propósito é apresentar expressões explícitas para o parâmetro de *crossing* η, a função de normalização $\rho(\lambda)$ e a matriz de *crossing* V. Por questão de conveniência é mais apropriado que o parâmetro η seja dado em termos do parâmetro de anisotropia γ tal que $q = e^{i\gamma}$. Dessa forma encontramos que $\eta = i(m-n+1)\gamma, i\frac{\pi}{2} + i(m-n-\frac{1}{2})\gamma, i\frac{\pi}{2} + i(m-n)\gamma, i(m-n+\frac{1}{2})\gamma$, respectivamente para as superalgebras $U_q[osp^{(1)}(2n|2m)]$, $U_q[sl^{(2)}(2n+1|2m)]$, $U_q[sl^{(2)}(2n|2m)]$ e $U_q[osp^{(1)}(2n+1|2m)]$. A função de normalização $\rho(\lambda)$ é dada por

$$\rho(\lambda) = q(e^{2\lambda} - 1)(e^{2\lambda} - \zeta^{(l_0)}) \tag{3.48}$$

e os valores não nulos da matriz V são dados por

- $U_q\left[osp(2n|2m)^{(1)}\right]$ e $U_q\left[sl(2n|2m)^{(2)}\right]$:

$$V_{\alpha\alpha'} = \begin{cases} (-1)^{\frac{1-p_\alpha^{(l_0)}}{2}} & \alpha = 1 \\ (-1)^{\frac{1-p_\alpha^{(l_0)}}{2}} q^{\left(\alpha-1-p_1^{(l_0)}-p_\alpha^{(l_0)}-2\sum\limits_{\beta=2}^{\alpha-1} p_\beta^{(l_0)}\right)} & 1 < \alpha < \frac{N_0+1}{2} \\ (-1)^{\frac{1-p_\alpha^{(l_0)}}{2}} q^{\left(\alpha-2-p_1^{(l_0)}-p_\alpha^{(l_0)}-2\sum\limits_{\substack{\beta=2 \\ \neq \frac{N_0}{2}+1}}^{\alpha-1} p_\beta^{(l_0)}\right)} & \frac{N_0+1}{2} < \alpha \leq N_0 \end{cases} \tag{3.49}$$

- $U_q\left[osp(2n+1|2m)^{(1)}\right]$ e $U_q\left[sl(2n+1|2m)^{(2)}\right]$:

$$V_{\alpha\alpha'} = \begin{cases} (-1)^{\frac{1-p_\alpha^{(l_0)}}{2}} & \alpha = 1 \\ (-1)^{\frac{1-p_\alpha^{(l_0)}}{2}} q^{\left(\alpha-1-p_1^{(l_0)}-p_\alpha^{(l_0)}-2\sum\limits_{\beta=2}^{\alpha-1} p_\beta^{(l_0)}\right)} & 1 < \alpha < \frac{N_0+1}{2} \\ (-1)^{\frac{1-p_\alpha^{(l_0)}}{2}} q^{\left(\frac{N_0}{2}-1-p_1^{(l_0)}-p_\alpha^{(l_0)}-2\sum\limits_{\beta=2}^{\frac{N_0-1}{2}} p_\beta^{(l_0)}\right)} & \alpha = \frac{N_0+1}{2} \\ (-1)^{\frac{1-p_\alpha^{(l_0)}}{2}} q^{\left(\alpha-2-p_1^{(l_0)}-p_\alpha^{(l_0)}-2\sum\limits_{\beta=2}^{\alpha-1} p_\beta^{(l_0)}\right)} & \frac{N_0+1}{2} < \alpha \leq N_0 \end{cases} \tag{3.50}$$

Já para o caso da generalização obtida do $U_q[D_{n+1}^{(2)}]$ (2.84), com respeito a relação de *crossing* (2.92), temos que a função de normalização $\rho(x)$ é dada por

$$\rho(x) = q(x^2-1)(x^2-\zeta^2) \tag{3.51}$$

enquanto que os valores não nulos de V são os elementos anti-diagonais $V_{\alpha\,\alpha''}$ dadas por

$$V_{\alpha\,\alpha''} = \begin{cases} (-1)^{\frac{\bar{p}_\alpha-1}{2}} & \alpha = 1 \\ (-1)^{\frac{\bar{p}_\alpha-1}{2}} q^{\left[\alpha-1-\bar{p}_1-\bar{p}_\alpha-2\sum_{\beta=2}^{\alpha-1}\bar{p}_\beta\right]} & 1 < \alpha < \bar{n}+1 \\ (-1)^{\frac{\bar{p}_\alpha-1}{2}} q^{\left[\bar{n}-\frac{1}{2}-\bar{p}_1-\bar{p}_\alpha-2\sum_{\beta=2}^{\bar{n}}\bar{p}_\beta\right]} & \alpha = \bar{n}+1 \\ (-1)^{\frac{\bar{p}_\alpha-1}{2}} q^{\left[\bar{n}-\frac{1}{2}-\bar{p}_1-\bar{p}_\alpha-2\sum_{\beta=2}^{\bar{n}}\bar{p}_\beta\right]} & \alpha = \bar{n}+2 \\ (-1)^{\frac{\bar{p}_\alpha-1}{2}} q^{\left[\alpha-3-\bar{p}_1-\bar{p}_\alpha-2\sum_{\beta=2}^{\alpha-1}\bar{p}_\beta\right]} & \bar{n}+2 < \alpha \leq N+1 \end{cases} \tag{3.52}$$

Apêndice B: Relações de Comutação Adicionais

Consideramos nesse apêndice a complementação das relações de comutação necessárias para a solução do problema de autovalores da matriz de transferência apresentada no capítulo 2. O primeiro conjunto de relações de comutação considerados aqui é aquele que envolve os campos diagonais e o campo de criação escalar $F(\mu)$. Essas relações entre os elementos $B(\lambda)$ e $D(\lambda)$ com $F(\mu)$ são extraídos diretamente da álgebra de Yang-Baxter (3.5) enquanto que a relação entre $\hat{A}(\lambda)$ com $F(\mu)$ requer ainda o conhecimento da relação de comutação entre $\vec{B}(\lambda)$ e $\vec{B}^*(\mu)$. Nos limitando apenas a apresentar os resultados finais temos que

$$
\begin{aligned}
B(\mu) \overset{s_1}{\otimes} F(\lambda) &= \frac{a_1^{(l_0)}(\lambda-\mu)}{d_{N_0,N_0}^{(l_0)}(\lambda-\mu)} F(\lambda) \overset{s_1}{\otimes} B(\mu) - \frac{d_{1,N_0}^{(l_0)}(\lambda-\mu)}{d_{N_0,N_0}^{(l_0)}(\lambda-\mu)} F(\mu) \overset{s_1}{\otimes} B(\lambda) \\
&- \frac{(-1)^{p_{12}^{(l_0)}}}{d_{N_0,N_0}^{(l_0)}(\lambda-\mu)} \left[\vec{B}(\mu) \overset{s_1}{\otimes} \vec{B}(\lambda)\right] \cdot [\vec{\xi}_3^{(l_0)}(\lambda-\mu)]^t, \qquad (3.53)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D(\lambda) \overset{s_1}{\otimes} F(\mu) &= \frac{a_1^{(l_0)}(\lambda-\mu)}{d_{N_0,N_0}^{(l_0)}(\lambda-\mu)} F(\mu) \overset{s_1}{\otimes} D(\lambda) - \frac{d_{N_0,1}^{(l_0)}(\lambda-\mu)}{d_{N_0,N_0}^{(l_0)}(\lambda-\mu)} F(\lambda) \overset{s_1}{\otimes} D(\mu) \\
&- \frac{\vec{\xi}_1^{(l_0)}(\lambda-\mu)}{d_{N_0,N_0}^{(l_0)}(\lambda-\mu)} \cdot \left[\vec{B}^*(\lambda) \overset{s_1}{\otimes} \vec{B}^*(\mu)\right], \qquad (3.54)
\end{aligned}
$$

$$
\hat{A}(\lambda) \overset{s_1}{\otimes} F(\mu) = \left[1 - \frac{c^{(l_0)}(\lambda-\mu)\bar{c}^{(l_0)}(\lambda-\mu)}{(b^{(l_0)}(\lambda-\mu))^2}\right] F(\mu) \overset{s_1}{\otimes} \hat{A}(\lambda) + \left[\frac{\bar{c}^{(l_0)}(\lambda-\mu)}{b^{(l_0)}(\lambda-\mu)}\right]^2 F(\lambda) \overset{s_1}{\otimes} \hat{A}(\mu)
$$

$$- \frac{\bar{c}^{(l_0)}(\lambda-\mu)}{b^{(l_0)}(\lambda-\mu)}\left[\vec{B}(\lambda)\overset{s_1}{\otimes}\vec{B}^*(\mu)-(-1)^{p_{12}^{(l_0)}}\vec{B}^*(\lambda)\overset{s_1}{\otimes}\vec{B}(\mu)\right], \tag{3.55}$$

onde $\vec{\xi}_3^{(l_0)}(\lambda)=\sum_{a=1}^{N_0-2} d_{a+1,N_0}^{(l_0)}(\lambda)\ \hat{e}_{N_0-1-a}\otimes\hat{e}_a$.

Por outro lado as relações de comutação entre os dois tipos de campos de criação, o campo vetorial $\vec{B}(\lambda)$ e o campo escalar $F(\lambda)$, são dados por

$$\begin{aligned}\vec{B}(\lambda)\overset{s_1}{\otimes}\vec{B}(\mu) &= \vec{B}(\mu)\overset{s_1}{\otimes}\vec{B}(\lambda)\cdot\frac{\check{r}_{12}^{(l_1)}(\lambda-\mu)}{a_1^{(l_0)}(\lambda-\mu)}+\frac{(-1)^{p_{12}^{(l_0)}}}{d_{N_0,N_0}^{(l_0)}(\lambda-\mu)}\vec{\xi}_1^{(l_0)}(\lambda-\mu)F(\lambda)B(\mu)\\ &+ \frac{(-1)^{p_{12}^{(l_0)}}}{a_1^{(l_0)}(\lambda-\mu)}\vec{\xi}_2^{(l_0)}(\lambda-\mu)F(\mu)B(\lambda),\end{aligned} \tag{3.56}$$

$$[F(\lambda),F(\mu)]=0, \tag{3.57}$$

$$F(\mu)\overset{s_1}{\otimes}\vec{B}(\lambda) = (-1)^{p_{12}^{(l_0)}}\frac{a_1^{(l_0)}(\lambda-\mu)}{b^{(l_0)}(\lambda-\mu)}\vec{B}(\lambda)\overset{s_1}{\otimes}F(\mu)-(-1)^{p_{12}^{(l_0)}}\frac{\bar{c}^{(l_0)}(\lambda-\mu)}{b^{(l_0)}(\lambda-\mu)}\vec{B}(\mu)\overset{s_1}{\otimes}F(\lambda), \tag{3.58}$$

$$\vec{B}(\mu)\overset{s_1}{\otimes}F(\lambda) = (-1)^{p_{12}^{(l_0)}}\frac{a_1^{(l_0)}(\lambda-\mu)}{b^{(l_0)}(\lambda-\mu)}F(\lambda)\overset{s_1}{\otimes}\vec{B}(\mu)-(-1)^{p_{12}^{(l_0)}}\frac{c^{(l_0)}(\lambda-\mu)}{b^{(l_0)}(\lambda-\mu)}F(\mu)\overset{s_1}{\otimes}\vec{B}(\lambda). \tag{3.59}$$

Além destas existem ainda outras relações de comutação entre os campos diagonais e de criação que se fazem necessárias para a solução do problema de autovalores. Estas relações são

$$\begin{aligned}B(\lambda)\overset{s_1}{\otimes}\vec{B}^*(\mu) &= (-1)^{p_{12}^{(l_0)}}\frac{b^{(l_0)}(\mu-\lambda)}{d_{N_0,N_0}^{(l_0)}(\mu-\lambda)}\vec{B}^*(\mu)\overset{s_1}{\otimes}B(\lambda)-\vec{B}^*(\lambda)\overset{s_1}{\otimes}\hat{A}(\mu)\cdot\frac{[\vec{\xi}_3^{(l_0)}(\mu-\lambda)]^t}{d_{N_0,N_0}^{(l_0)}(\mu-\lambda)}\\ &+ \frac{\bar{c}^{(l_0)}(\mu-\lambda)}{d_{N_0,N_0}^{(l_0)}(\mu-\lambda)}F(\mu)\overset{s_1}{\otimes}\vec{C}(\lambda)-\frac{d_{1,N_0}^{(l_0)}(\mu-\lambda)}{d_{N_0,N_0}^{(l_0)}(\mu-\lambda)}F(\lambda)\overset{s_1}{\otimes}\vec{C}(\mu)\end{aligned} \tag{3.60}$$

$$\vec{B}(\lambda)\overset{s_1}{\otimes}\vec{B}^*(\mu)=(-1)^{p_{12}^{(l_0)}}\vec{B}^*(\mu)\overset{s_1}{\otimes}\vec{B}(\lambda)+\frac{\bar{c}^{(l_0)}(\mu-\lambda)}{b^{(l_0)}(\mu-\lambda)}F(\mu)\overset{s_1}{\otimes}\hat{A}(\lambda)-\frac{c^{(l_0)}(\mu-\lambda)}{b^{(l_0)}(\mu-\lambda)}F(\lambda)\overset{s_1}{\otimes}\hat{A}(\mu) \tag{3.61}$$

$$(-1)^{p_{12}^{(l_0)}}\vec{C}(\lambda)\overset{s_1}{\otimes}\vec{B}(\mu)=\vec{B}(\mu)\overset{s_1}{\otimes}\vec{C}(\lambda)+\frac{\bar{c}^{(l_0)}(\lambda-\mu)}{b^{(l_0)}(\lambda-\mu)}\left[B(\mu)\overset{s_1}{\otimes}\hat{A}(\lambda)-B(\lambda)\overset{s_1}{\otimes}\hat{A}(\mu)\right] \tag{3.62}$$

$$\begin{aligned}\vec{C}^{*}(\lambda)\overset{s_1}{\otimes}\vec{B}(\mu) &= \vec{B}(\mu)\overset{s_1}{\otimes}\vec{C}^{*}(\lambda)\cdot\frac{\check{\mathcal{R}}_{12}(\lambda-\mu)}{d_{N_0,N_0}^{(l_0)}(\lambda-\mu)}-\frac{d_{N_0,1}^{(l_0)}(\lambda-\mu)}{d_{N_0,N_0}^{(l_0)}(\lambda-\mu)}\vec{B}(\lambda)\overset{s_1}{\otimes}\vec{C}^{*}(\mu)\\ &- (-1)^{p_{12}^{(l_0)}}\frac{\vec{\xi}_4^{(l_0)}(\lambda-\mu)}{d_{N_0,N_0}^{(l_0)}(\lambda-\mu)}\cdot\hat{A}(\lambda)\overset{s_1}{\otimes}\hat{A}(\mu)+(-1)^{p_{12}^{(l_0)}}\frac{\vec{\xi}_4^{(l_0)}(\lambda-\mu)}{d_{N_0,N_0}^{(l_0)}(\lambda-\mu)}B(\mu)D(\lambda)\\ &+ (-1)^{p_{12}^{(l_0)}}\frac{\vec{\xi}_5^{(l_0)}(\lambda-\mu)}{d_{N_0,N_0}^{(l_0)}(\lambda-\mu)}F(\mu)C(\lambda)\end{aligned} \tag{3.63}$$

com os vetores $\vec{\xi}_4^{(l_0)}(\lambda)$ e $\vec{\xi}_5^{(l_0)}(\lambda)$ sendo dados por

$$\vec{\xi}_4^{(l_0)}(\lambda)=\sum_{a=1}^{N_0-2}d_{N_0,N_0-a}^{(l_0)}(\lambda)\hat{e}_{N_0-1-a}\otimes\hat{e}_a \tag{3.64}$$

$$\vec{\xi}_5^{(l_0)}(\lambda)=\sum_{a=1}^{N_0-2}d_{1,N_0-a}^{(l_0)}(\lambda)\hat{e}_{N_0-1-a}\otimes\hat{e}_a \tag{3.65}$$

Por último, a matriz $\check{\mathcal{R}}_{12}(\lambda)$ que está presente nas relação de comutação (3.63) acima apresentadas é dada por

$$\check{\mathcal{R}}_{12}(\lambda)=\sum_{abcd}^{N_0-2}R_{b+1,d+1}^{a+1,c+1}(\lambda)\hat{e}_{ab}^{(1)}\otimes\hat{e}_{cd}^{(2)} \tag{3.66}$$

cujos elementos são obtidos de $\check{R}_{12}^{(l_0)}(\lambda)$.

Apêndice C: Ansatz de Bethe Auxiliar

Conforme apresentado no capítulo 2, o último passo l_f na implementação do Ansatz de Bethe Algébrico requer uma análise mais cautelosa. Assim nesse apêndice apresentaremos os resultados relativos a esse último passo do Ansatz de Bethe Algébrico para as superalgebras consideradas no capítulo 2. Em geral, precisaremos diagonalizar a seguinte matriz de transferência inhomogênea

$$
\begin{aligned}
& T^{(l_f)}(\lambda, \{\lambda_1^{(l_f)}, \dots, \lambda_{m_{l_f}}^{(l_f)}\}) \\
& = Str_{\mathcal{A}^{(f)}}\left[R^{(l_f)}_{\mathcal{A}^{(f)}m_{l_f}}(\lambda - \lambda_{m_{l_f}}^{(l_f)}) R^{(l_f)}_{\mathcal{A}^{(f)}m_{l_f}-1}(\lambda - \lambda_{m_{l_f}-1}^{(l_f)}) \dots R^{(l_f)}_{\mathcal{A}^{(f)}1}(\lambda - \lambda_1^{(l_f)})\right]. \quad (3.67)
\end{aligned}
$$

Daqui por diante começaremos a listar as respectivas matrizes $R^{(l_f)}_{\mathcal{A}^{(f)}j}(\lambda)$, a expressão para o respectivo autovalor $\Lambda^{(l_f)}(\lambda, \{\lambda_1^{(l_f)}, \dots, \lambda_{m_{l_f}}^{(l_f)}\})$ e a equação de Bethe Ansatz para os modelos mencionados na tabela 2.1 . Os modelos de vértices $U_q[sl(2n+1|2m)^{(2)}]$ e $U_q[osp(2n+1|2m)^{(1)}]$ possuem $l_f = (3|0)$ com as matrizes $R^{(l_f)}(\lambda)$ correspondentes sendo dadas por

$R^{(l_f)}(\lambda)$

$$= \begin{pmatrix} a_1^{(l_f)}(\lambda) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b^{(l_f)}(\lambda) & 0 & c^{(l_f)}(\lambda) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_{1,1}^{(l_f)}(\lambda) & 0 & d_{1,2}^{(l_f)}(\lambda) & 0 & d_{1,3}^{(l_f)}(\lambda) & 0 & 0 \\ 0 & \bar{c}^{(l_f)}(\lambda) & 0 & b^{(l_f)}(\lambda) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_{2,1}^{(l_f)}(\lambda) & 0 & d_{2,2}^{(l_f)}(\lambda) & 0 & d_{2,3}^{(l_f)}(\lambda) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b^{(l_f)}(\lambda) & 0 & c^{(l_f)}(\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & d_{3,1}^{(l_f)}(\lambda) & 0 & d_{3,2}^{(l_f)}(\lambda) & 0 & d_{3,3}^{(l_f)}(\lambda) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{c}^{(l_f)}(\lambda) & 0 & b^{(l_f)}(\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_1^{(l_f)}(\lambda) \end{pmatrix} \tag{3.68}$$

cujos pesos de Boltzmann para cada superalgebra sendo dados pelo conjunto de relações (2.23-2.30).

A matriz $R^{(l_f)}(\lambda)$ associada ao modelo de vértice $U_q[sl(2n+1|2m)^{(2)}]$ está relacionada ao modelo Izergin-Korepin [26] e possui a seguinte expressão para os autovalores e equação do Ansatz de Bethe,

$$\begin{aligned} \Lambda^{(l_f)}(\lambda, \{\lambda_1^{(l_f)}, \dots, \lambda_{m_{l_f}}^{(l_f)}\}) &= \prod_{i=1}^{m_{l_f}} a_1^{(l_f)}(\lambda - \lambda_i^{(l_f)}) \frac{Q_{f+1}(\lambda + i\gamma)}{Q_{f+1}(\lambda)} \\ &+ \prod_{i=1}^{m_{l_f}} d_{N_f,N_f}^{(l_f)}(\lambda - \lambda_i^{(l_f)}) \frac{Q_{f+1}\left(\lambda - i\frac{3\gamma}{2} + i\frac{\pi}{2}\right)}{Q_{f+1}\left(\lambda - i\frac{\gamma}{2} + i\frac{\pi}{2}\right)} \\ &+ \prod_{i=1}^{m_{l_f}} b^{(l_f)}(\lambda - \lambda_i^{(l_f)}) \frac{Q_{f+1}(\lambda - i\gamma)}{Q_{f+1}(\lambda)} \frac{Q_{f+1}\left(\lambda + i\frac{\gamma}{2} + i\frac{\pi}{2}\right)}{Q_{f+1}\left(\lambda - i\frac{\gamma}{2} + i\frac{\pi}{2}\right)}, \end{aligned} \tag{3.69}$$

$$\prod_{i=1}^{m_{l_f}} \frac{\sinh\left(\lambda_j^{(l_{f+1})} - \lambda_i^{(l_f)} - i\gamma\right)}{\sinh\left(\lambda_j^{(l_{f+1})} - \lambda_i^{(l_f)}\right)} = \prod_{i\neq j}^{m_{l_{f+1}}} \frac{\sinh\left(\lambda_j^{(l_{f+1})} - \lambda_i^{(l_{f+1})} - i\gamma\right)}{\sinh\left(\lambda_j^{(l_{f+1})} - \lambda_i^{(l_{f+1})} + i\gamma\right)} \frac{\cosh\left(\lambda_j^{(l_{f+1})} - \lambda_i^{(l_{f+1})} + i\frac{\gamma}{2}\right)}{\cosh\left(\lambda_j^{(l_{f+1})} - \lambda_i^{(l_{f+1})} - i\frac{\gamma}{2}\right)}. \tag{3.70}$$

No entanto para o modelo de vértice $U_q[osp(2n+1|2m)^{(1)}]$, a matriz $R^{(l_f)}(\lambda)$ associada é similar a aquela do modelo de Fateev-Zamolodchikov [27] cuja expressão para os autovalores e equação de Bethe Ansatz são dadas por,

$$\begin{aligned}
\Lambda^{(l_f)}(\lambda|\{\lambda_1^{(l_f)},\dots,\lambda_{m_{l_f}}^{(l_f)}\}) &= \prod_{i=1}^{m_{l_f}} a_1^{(l_f)}(\lambda-\lambda_i^{(l_f)})\frac{Q_{f+1}(\lambda+i\gamma)}{Q_{f+1}(\lambda)} \\
&+ \prod_{i=1}^{m_{l_f}} d_{N_f,N_f}^{(l_f)}(\lambda-\lambda_i^{(l_f)})\frac{Q_{f+1}\left(\lambda-i\frac{\gamma}{2}\right)}{Q_{f+1}\left(\lambda+i\frac{\gamma}{2}\right)} \\
&+ \prod_{i=1}^{m_{l_f}} b^{(l_f)}(\lambda-\lambda_i^{(l_f)})\frac{Q_{f+1}(\lambda+i\gamma)}{Q_{f+1}(\lambda)}\frac{Q_{f+1}\left(\lambda-i\frac{\gamma}{2}\right)}{Q_{f+1}\left(\lambda+i\frac{\gamma}{2}\right)}, \quad (3.71)
\end{aligned}$$

$$\prod_{i=1}^{m_{l_f}} \frac{\sinh\left(\lambda_j^{(l_{f+1})}-\lambda_i^{(l_f)}-i\gamma\right)}{\sinh\left(\lambda_j^{(l_{f+1})}-\lambda_i^{(l_f)}\right)} = \prod_{i\neq j}^{m_{l_{f+1}}} \frac{\sinh\left(\lambda_j^{(l_{f+1})}-\lambda_i^{(l_{f+1})}-i\frac{\gamma}{2}\right)}{\sinh\left(\lambda_j^{(l_{f+1})}-\lambda_i^{(l_{f+1})}+i\frac{\gamma}{2}\right)}. \quad (3.72)$$

No caso da superalgebra $U_q[sl(2n|2m)^{(2)}]$, o último nível é $l_f = (2|0)$ e a matriz R correspondente consiste de um modelo de seis vértices sendo esta dada por

$$R^{(l_f)}(\lambda) = \begin{pmatrix} a_1^{(l_f)}(\lambda) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_{1,1}^{(l_f)}(\lambda) & d_{1,2}^{(l_f)}(\lambda) & 0 \\ 0 & d_{2,1}^{(l_f)}(\lambda) & d_{2,2}^{(l_f)}(\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_1^{(l_f)}(\lambda) \end{pmatrix} \quad (3.73)$$

com os pesos de Boltzmann sendo definidos de (2.24-2.28). Assim temos que para o modelo de vértice $U_q[sl(2n|2m)^{(2)}]$, o último nível possui o seguinte autovalor e equação de Ansatz de Bethe,

$$\begin{aligned}
\Lambda^{(l_f)}(\lambda,\{\lambda_1^{(l_f)},\dots,\lambda_{m_{l_f}}^{(l_f)}\}) &= \prod_{i=1}^{m_{l_f}} a_1^{(l_f)}(\lambda-\lambda_i^{(l_f)})\frac{Q_{f+1}(\lambda+i\gamma)}{Q_{f+1}(\lambda)}\frac{Q_{f+1}\left(\lambda+i\gamma+i\frac{\pi}{2}\right)}{Q_{f+1}\left(\lambda+i\frac{\pi}{2}\right)} \\
&+ \prod_{i=1}^{m_{l_f}} d_{N_f,N_f}^{(l_f)}(\lambda-\lambda_i^{(l_f)})\frac{Q_{f+1}(\lambda-i\gamma)}{Q_{f+1}(\lambda)}\frac{Q_{f+1}\left(\lambda-i\gamma+i\frac{\pi}{2}\right)}{Q_{f+1}\left(\lambda+i\frac{\pi}{2}\right)},
\end{aligned} \quad (3.74)$$

$$\prod_{i=1}^{m_{l_f}} \frac{\sinh\left[2\left(\lambda_j^{(l_f+1)} - \lambda_i^{(l_f)} - i\gamma\right)\right]}{\sinh\left[2\left(\lambda_j^{(l_f+1)} - \lambda_i^{(l_f)}\right)\right]} = \prod_{i\neq j}^{m_{l_f+1}} \frac{\sinh\left[2\left(\lambda_j^{(l_f+1)} - \lambda_i^{(l_f+1)} - i\gamma\right)\right]}{\sinh\left[2\left(\lambda_j^{(l_f+1)} - \lambda_i^{(l_f+1)} + i\gamma\right)\right]}. \quad (3.75)$$

Para o modelo de vértice $U_q[osp(2n|2m)^{(1)}]$, o último passo ocorre em $l_f = (4|0)$ e é necessário uma análise mais detalhada. Primeiro implementamos a seguinte transformação de similaridade $R^{(l_f)}_{\mathcal{A}^{(f)}j} \rightarrow M_j^{-1} R^{(l_f)}_{\mathcal{A}^{(f)}j} M_j$ que preserva o espectro da matriz de transferência associada. Com essa matriz M_j sendo

$$M_j = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}_j \quad (3.76)$$

não é difícil mostrar que a matriz transformada $R^{(l_f)}_{\mathcal{A}^{(f)}j}$ pode ser fatorizada em termos do produto tensorial de dois modelos de seis vértices. Mais precisamente, a nova matriz $R^{(l_f)}$ pode ser escrita como

$$R^{(l_f)}(\lambda) = R^{6v}_{\sigma}(\lambda)\ R^{6v}_{\tau}(\lambda), \quad (3.77)$$

onde σ e τ representa duas bases comutativas. Estas bases podem ser facilmente construídas em termos de matrizes de Pauli através das seguintes relações

$$\begin{aligned} \sigma^{\alpha} &= \sigma_P^{\alpha} \otimes I_2, \\ \tau^{\alpha} &= I_2 \otimes \sigma_P^{\alpha}, \end{aligned} \quad (3.78)$$

cujos elementos σ^{α} e τ^{α} constituem a base σ e τ respectivamente. Também denotamos as matrizes de Pauli por σ_P^{α} (com a identidade incluída) e I_2 para a identidade com dimensões 2×2.

Executando o procedimento descrito acima nós obtemos a seguinte expressão para as matrizes R destes dois modelos de seis vértices,

$$R_{\sigma}^{6v}(\lambda) = \begin{pmatrix} a_{\sigma}(\lambda) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_{\sigma}(\lambda) & \bar{c}_{\sigma}(\lambda) & 0 \\ 0 & c_{\sigma}(\lambda) & b_{\sigma}(\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{\sigma}(\lambda) \end{pmatrix} \qquad R_{\tau}^{6v}(\lambda) = \begin{pmatrix} a_{\tau}(\lambda) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_{\tau}(\lambda) & \bar{c}_{\tau}(\lambda) & 0 \\ 0 & c_{\tau}(\lambda) & b_{\tau}(\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{\tau}(\lambda) \end{pmatrix}, \tag{3.79}$$

cujos pesos de Boltzmann são dados por

$$\begin{aligned} a_{\sigma}(\lambda) &= 1 & a_{\tau}(\lambda) &= (e^{2\lambda} - q^2)^2 \\ b_{\sigma}(\lambda) &= q\frac{(e^{2\lambda} - 1)}{(e^{2\lambda} - q^2)} & b_{\tau}(\lambda) &= q(e^{2\lambda} - 1)(e^{2\lambda} - q^2) \\ c_{\sigma}(\lambda) &= \frac{(1 - q^2)}{(e^{2\lambda} - q^2)} & c_{\tau}(\lambda) &= e^{2\lambda}(1 - q^2)(e^{2\lambda} - q^2) \\ \bar{c}_{\sigma}(\lambda) &= e^{2\lambda}\frac{(1 - q^2)}{(e^{2\lambda} - q^2)} & \bar{c}_{\tau}(\lambda) &= (1 - q^2)(e^{2\lambda} - q^2). \end{aligned} \tag{3.80}$$

Consequentemente, os autovalores da matriz de transferência associados ao modelo de vértice $R^{(l_f)}$ pode ser decomposto como um produto dos autovalores de dois modelos de seis vértices independentes definidos nas equações (3.79,3.80). Na presença de inhomogeneidades $\{\lambda_1^{(l_f)}, \ldots, \lambda_{m_{l_f}}^{(l_f)}\}$ encontramos que estes autovalores são dados por

$$\begin{aligned} \Lambda^{(l_f)}(\lambda, \{\lambda_1^{(l_f)}, \ldots, \lambda_{m_{l_f}}^{(l_f)}\}) &= \left[\frac{Q_+(\lambda + i\gamma)}{Q_+(\lambda)} + \prod_{i=1}^{m_{l_f}} b_{\sigma}(\lambda - \lambda_i^{(l_f)}) \frac{Q_+(\lambda - i\gamma)}{Q_+(\lambda)}\right] \\ &\times \left[\prod_{i=1}^{m_{l_f}} a_{\tau}(\lambda - \lambda_i^{(l_f)}) \frac{Q_-(\lambda + i\gamma)}{Q_-(\lambda)} + \prod_{i=1}^{m_{l_f}} b_{\tau}(\lambda - \lambda_i^{(l_f)}) \frac{Q_-(\lambda - i\gamma)}{Q_-(\lambda)}\right], \end{aligned} \tag{3.81}$$

com as seguintes equações de Ansatz de Bethe,

$$\prod_{i=1}^{m_{l_f}} \frac{\sinh\left(\lambda_j^{(l\pm)} - \lambda_i^{(l_f)} - i\gamma\right)}{\sinh\left(\lambda_j^{(l\pm)} - \lambda_i^{(l_f)}\right)} = \prod_{i\neq j}^{m_{l\pm}} \frac{\sinh\left(\lambda_j^{(l\pm)} - \lambda_i^{(l\pm)} - i\gamma\right)}{\sinh\left(\lambda_j^{(l\pm)} - \lambda_i^{(l\pm)} + i\gamma\right)}. \tag{3.82}$$

Apêndice D: Os resultados referentes aos casos $U_q[sl^{(2)}(1|2m)]$ e $U_q[osp^{(1)}(1|2m)]$

Neste apêndice apresentaremos os resultados referentes aos modelos de vértices $U_q[sl^{(2)}(1|2m)]$ e $U_q[osp^{(1)}(1|2m)]$. Em ambos os casos o último passo ocorre em $l_f = (1|2)$ e a correspondente matriz R pode ser relacionada com as matrizes R dos modelos de vértices Fateev-Zamolodchikov [27] e Izergin-Korepin [26] respectivamente. Considerando que o problema e o método de diagonalização desses modelos já foram discutidos no capítulo 3, apresentaremos aqui apenas os principais resultados.

Para o modelo $U_q[sl^{(2)}(1|2m)]$ a expressão para o respectivo autovalor é dado por

$$\begin{aligned}\Lambda^{(l_0)}(\lambda) &= -\left[-a_1^{(l_0)}(\lambda)\right]^L \frac{Q_1\left(\lambda - i\frac{\gamma}{2}\right)}{Q_1\left(\lambda + i\frac{\gamma}{2}\right)} - \left[-d_{N_0,N_0}^{(l_0)}(\lambda)\right]^L \frac{Q_1\left(\lambda + im\gamma + i\frac{\pi}{2}\right)}{Q_1\left(\lambda + i\left(m-1\right)\gamma + i\frac{\pi}{2}\right)} \\ &+ \left[b^{(l_0)}(\lambda)\right]^L \sum_{\alpha=1}^{N_0-2} G_\alpha(\lambda|\{\lambda_j^{(l_\beta)}\})\end{aligned} \tag{3.83}$$

$$\begin{aligned}&G_\alpha(\lambda|\{\lambda_j^{(l_\beta)}\}) \\ &= \begin{cases} \frac{Q_\alpha\left(\lambda+i\left(\frac{\alpha+2}{2}\right)\gamma\right)}{Q_\alpha\left(\lambda+i\frac{\alpha}{2}\gamma\right)} \frac{Q_{\alpha+1}\left(\lambda+i\left(\frac{\alpha-1}{2}\right)\gamma\right)}{Q_{\alpha+1}\left(\lambda+i\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\gamma\right)} & \alpha = 1, \dots, m-1 \\ \frac{Q_\alpha\left(\lambda+i\left(\frac{m-2}{2}\right)\gamma\right)}{Q_\alpha\left(\lambda+i\frac{m}{2}\gamma\right)} \frac{Q_\alpha\left(\lambda+i\left(\frac{m+1}{2}\right)\gamma+i\frac{\pi}{2}\right)}{Q_\alpha\left(\lambda+i\left(\frac{m-1}{2}\right)\gamma+i\frac{\pi}{2}\right)} & \alpha = m \\ G_{\alpha-m}(-i\frac{\pi}{2} - i(m-\frac{1}{2})\gamma - \lambda| - \{\lambda_j^{(l_\beta)}\}) & \alpha = m+1, \dots, 2m-1 \end{cases}\end{aligned}$$

com as respectivas equações de Bethe Ansatz

$$\prod_{i=1}^{m_{l_{\alpha-1}}} \frac{\sinh\left(\lambda_j^{(l_\alpha)} - \lambda_i^{(l_{\alpha-1})} + i\frac{\gamma}{2}\right)}{\sinh\left(\lambda_j^{(l_\alpha)} - \lambda_i^{(l_{\alpha-1})} - i\frac{\gamma}{2}\right)} = \prod_{i\neq j}^{m_{l_\alpha}} \frac{\sinh\left(\lambda_j^{(l_\alpha)} - \lambda_i^{(l_\alpha)} + i\gamma\right)}{\sinh\left(\lambda_j^{(l_\alpha)} - \lambda_i^{(l_\alpha)} - i\gamma\right)} \prod_{i=1}^{m_{l_{\alpha+1}}} \frac{\sinh\left(\lambda_i^{(l_{\alpha+1})} - \lambda_j^{(l_\alpha)} + i\frac{\gamma}{2}\right)}{\sinh\left(\lambda_i^{(l_{\alpha+1})} - \lambda_j^{(l_\alpha)} - i\frac{\gamma}{2}\right)} \quad \alpha = 1, \dots, m-1$$

$$\prod_{i=1}^{m_{l_{\alpha-1}}} \frac{\sinh\left(\lambda_j^{(l_\alpha)} - \lambda_i^{(l_{\alpha-1})} + i\frac{\gamma}{2}\right)}{\sinh\left(\lambda_j^{(l_\alpha)} - \lambda_i^{(l_{\alpha-1})} - i\frac{\gamma}{2}\right)} = \prod_{i\neq j}^{m_{l_\alpha}} \frac{\cosh\left(\lambda_j^{(l_\alpha)} - \lambda_i^{(l_\alpha)} + i\frac{\gamma}{2}\right)}{\cosh\left(\lambda_j^{(l_\alpha)} - \lambda_i^{(l_\alpha)} - i\frac{\gamma}{2}\right)} \quad \alpha = m \tag{3.84}$$

Da mesma forma, para o $U_q[osp^{(1)}(1|2m)]$ nós temos

$$\begin{aligned} \Lambda^{(l_0)}(\lambda) &= -\left[-a_1^{(l_0)}(\lambda)\right]^L \frac{Q_1\left(\lambda - i\frac{\gamma}{2}\right)}{Q_1\left(\lambda + i\frac{\gamma}{2}\right)} - \left[-d_{N_0,N_0}^{(l_0)}(\lambda)\right]^L \frac{Q_1\left(\lambda + i\left(m+1\right)\gamma\right)}{Q_1\left(\lambda + im\gamma\right)} \\ &+ \left[b^{(l_0)}(\lambda)\right]^L \sum_{\alpha=1}^{N_0-2} G_\alpha(\lambda|\{\lambda_j^{(l_\beta)}\}) \end{aligned} \tag{3.85}$$

$$G_\alpha(\lambda|\{\lambda_j^{(l_\beta)}\}) = \begin{cases} \frac{Q_\alpha\left(\lambda + i\left(\frac{\alpha+2}{2}\right)\gamma\right)}{Q_\alpha\left(\lambda + i\frac{\alpha}{2}\gamma\right)} \frac{Q_{\alpha+1}\left(\lambda + i\left(\frac{\alpha-1}{2}\right)\gamma\right)}{Q_{\alpha+1}\left(\lambda + i\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\gamma\right)} & \alpha = 1, \dots, m-1 \\ \frac{Q_\alpha\left(\lambda + i\left(\frac{m-1}{2}\right)\gamma\right)}{Q_\alpha\left(\lambda + i\left(\frac{m+1}{2}\right)\gamma\right)} \frac{Q_\alpha\left(\lambda + i\left(\frac{m+2}{2}\right)\gamma\right)}{Q_\alpha\left(\lambda + i\frac{m}{2}\gamma\right)} & \alpha = m \\ G_{\alpha-m}(-i(m+\frac{1}{2})\gamma - \lambda| - \{\lambda_j^{(l_\beta)}\}) & \alpha = m+1, \dots, 2m-1 \end{cases}$$

com as equações de Ansatz de Bethe sendo dadas por

$$\prod_{i=1}^{m_{l_{\alpha-1}}} \frac{\sinh\left(\lambda_j^{(l_\alpha)} - \lambda_i^{(l_{\alpha-1})} + i\frac{\gamma}{2}\right)}{\sinh\left(\lambda_j^{(l_\alpha)} - \lambda_i^{(l_{\alpha-1})} - i\frac{\gamma}{2}\right)} = \prod_{i\neq j}^{m_{l_\alpha}} \frac{\sinh\left(\lambda_j^{(l_\alpha)} - \lambda_i^{(l_\alpha)} + i\gamma\right)}{\sinh\left(\lambda_j^{(l_\alpha)} - \lambda_i^{(l_\alpha)} - i\gamma\right)} \prod_{i=1}^{m_{l_{\alpha+1}}} \frac{\sinh\left(\lambda_i^{(l_{\alpha+1})} - \lambda_j^{(l_\alpha)} + i\frac{\gamma}{2}\right)}{\sinh\left(\lambda_i^{(l_{\alpha+1})} - \lambda_j^{(l_\alpha)} - i\frac{\gamma}{2}\right)} \quad \alpha = 1, \dots, m-1$$

$$\prod_{i=1}^{m_{l_{\alpha-1}}} \frac{\sinh\left(\lambda_j^{(l_\alpha)} - \lambda_i^{(l_{\alpha-1})} + i\frac{\gamma}{2}\right)}{\sinh\left(\lambda_j^{(l_\alpha)} - \lambda_i^{(l_{\alpha-1})} - i\frac{\gamma}{2}\right)} = \prod_{i\neq j}^{m_{l_\alpha}} \frac{\sinh\left(\lambda_j^{(l_\alpha)} - \lambda_i^{(l_\alpha)} + i\gamma\right)}{\sinh\left(\lambda_j^{(l_\alpha)} - \lambda_i^{(l_\alpha)} - i\gamma\right)} \frac{\sinh\left(\lambda_j^{(l_\alpha)} - \lambda_i^{(l_\alpha)} - i\frac{\gamma}{2}\right)}{\sinh\left(\lambda_j^{(l_\alpha)} - \lambda_i^{(l_\alpha)} + i\frac{\gamma}{2}\right)} \quad \alpha = m \tag{3.86}$$