

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE HIDRÁULICA E SANEAMENTO
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM CIÊNCIAS DA ENGENHARIA AMBIENTAL

MARIANO DA FRANCA ALENCAR NETO

**Interpolação por Splines para Modelação de Inomogeneidades no
Método de Elementos Analíticos – Implementação por Programação
Orientada a Objetos**

São Carlos
2008

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

MARIANO DA FRANCA ALENCAR NETO

**Interpolação por Splines para Modelação de Inomogeneidades no
Método de Elementos Analíticos – Implementação por Programação
Orientada a Objetos**

Tese apresentada à Escola de Engenharia de
São Carlos como parte dos requisitos para a
obtenção do Título de Doutor em Ciências da
Engenharia Ambiental

Orientador: Prof. Dr. Edson Cezar Wendland

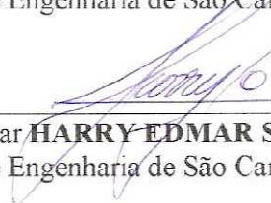
FOLHA DE JULGAMENTO

Candidato: Engenheiro **MARIANO DE FRANCA ALENCAR NETO**

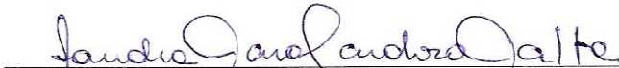
Tese defendida e julgada em 29/08/2008 perante a Comissão Julgadora:


Prof. Associado **EDSON CEZAR WENDLAND (Orientador)**
(Escola de Engenharia de São Carlos/USP)

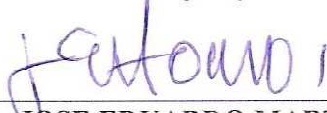
Aprovado


Prof. Titular **HARRY EDMAR SCHULZ**
(Escola de Engenharia de São Carlos/USP)

Aprovado


Profª Drª. **SANDRA MARA CARDOSO MALTA**
(Laboratório Nacional de Computação/LNCC/Rio de Janeiro)

Aprovado

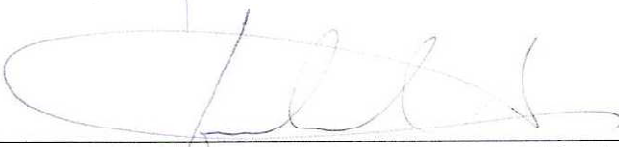

Prof. Associado **JOSE EDUARDO MARTINHO HORNOS**
(Laboratório Nacional de Computação/LNCC/Rio de Janeiro)

APROVADO


Prof. Dr. **MARCO AURELIO HOLANDA DE CASTRO**
(Universidade Federal do Ceará/UFC)

APROVADO


Prof. Titular **MARCELO PEREIRA DE SOUZA**
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em
Ciências da Engenharia Ambiental


Prof. Associado **GERALDO ROBERTO MARTINS DA COSTA**
Presidente da Comissão da Pós-Graduação da EESC

Errata: O Prof. Associado José Eduardo Martinho Hornos pertence ao Instituto de Física de São Carlos –USP e não ao Laboratório Nacional de Computação Científica.

A meus pais, Carmelita e João Xavier,
pelo esforço e dedicação aos seus filhos.

Essa caminhada só foi possível porque no
passado a estrada me foi ofertada, ainda no
Colégio Marista.

Ao Prof. Fausto Arcelino Cabral Guimarães.

AGRADECIMENTOS

A Deus que, ao escrever o destino, permitiu de forma generosa a realização deste trabalho.

A meus pais, João e Carmelita, que estabeleceram os marcos daquilo que sou.

Aos meus irmãos, Delange, Teresa e Xavier Júnior pela convivência e pelos referenciais de amizade.

A Ifigênia, minha esposa, cuja compreensão e incentivo pareceram infinitos durante essa jornada. Mais do que nunca, sua dedicação e carinho foram decisivos para se chegar até aqui e certamente serão essenciais para ir mais adiante.

Ao Prof. Dr.-Ing. Edson Wendland pela orientação, cobrança e opiniões que determinaram a qualidade deste trabalho. Ao Prof. Dr.-Ing. Jackson Roehrig pelo conhecimento em Programação Orientada a Objetos compartilhado durante o período do doutorado sanduíche na Alemanha.

Aos companheiros de jornada Tássio Lofti e Claudio Turene pelo apoio, incentivo e principalmente por compartilhar as mesmas angústias e alegrias, estreitando laços sinceros de amizade.

Ao prof. Dr. Evaldo Gaeta que sempre se mostrou justo e disponível na procura da melhor solução para nossos pleitos.

Aos funcionários da escola de engenharia de São Carlos e do Departamento de Hidráulica e Saneamento, nas pessoas da Rose, Claudete, Nelson e Paulo, que sempre se mostraram atenciosos e cordiais.

Ao sistema de Bibliotecas da USP, em especial a todos da Biblioteca da Escola de Engenharia de São Carlos, sem o qual é difícil conceber a realização deste trabalho.

Aos colegas Anderson e Ivan pelo conhecimento compartilhado nos debates sobre o Método de Elemento Analíticos, fonte de entusiasmo em comum.

Aos colegas Jorge, Luis Henrique, Francisco Marcuzzo, Maldonado, Alessandro, Patrick, Rodrigo e Fernanda pelas horas de convivência e apoio mútuo.

Aos colegas do Cefet-Ce, Mirlerni, Irlenilda, Márcio, Samara, Domingos, Nice e Beatriz pelo interesse e atenção.

Ao colega Virgílio por sua postura conciliatória e por sua dedicação ao Cefet-Ce.

Aos demais companheiros de jornada Eduardo Cabral, José Berto, Adeildo e Najila pelo empenho em valorizar e promover a qualificação de nossa instituição Cefet-Ce.

À Capes pelo apoio e incentivo por meio dos programas DAAD-PROBRAL e PQI 106.

Ao Centro Federal de Educação Tecnológica - Ceará.

A todos meus agradecimentos.

O valor do trabalho do pesquisador traduz a combinação de dois ingredientes: imaginação e coragem para arriscar na busca do incerto.

Celso Furtado

RESUMO

ALENCAR NETO, M. F. (2008). **Interpolação por *Splines* para Modelação de Inomogeneidades no Método de Elementos Analíticos – Implementação por Programação Orientada a Objetos**. 2008. 270 f. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2008.

O Método de Elementos Analíticos simula escoamentos subterrâneos por meio da superposição de soluções conceituais. No contexto do Método, inomogeneidade é uma região bem definida de condutividade hidráulica constante. A diferença de condutividade hidráulica entre a inomogeneidade e o meio em que está inserida causa uma descontinuidade (salto) no potencial de descarga. Tradicionalmente este salto é simulado usando polinômios de primeiro ou segundo grau. O presente trabalho usa polinômios *splines* quadráticos para interpolar os saltos ocorridos no potencial de descarga ao longo das bordas de inomogeneidades. Paralelamente, a formulação tradicional de interpolação dos saltos no potencial de descarga é estendida para qualquer grau. Os principais elementos que compõe o Método são descritos e implementados. O programa computacional resultante (AEM) foi desenvolvido integrado a um Sistema de Informações Geográficas de código-aberto (JUMP). O programa permite a integração com outros Sistemas de Informações Geográficas baseados em JAVA, guardando independência do SIG residente. O projeto do programa AEM/JUMP é baseado na Programação Orientada a Objetos e apresentou grande afinidade com o Método de Elementos Analíticos, havendo identificação entre os conceitos de elemento (usado pelo Método) e de objeto (usado pela Programação). Conceitos de Padrões de Projeto são utilizados objetivando ampliar as facilidades de leitura, entendimento, otimização e modificação do código fonte, já disponibilizadas pela Programação Orientada a Objetos. Problemas conceituais são abordados usando as formulações propostas. A interpolação por *splines* quadráticas mostrou-se eficiente e precisa. Considerando as soluções exatas, o erro médio sobre a área de estudo foi inferior a 0,12 %. O AEM/JUMP foi aplicado à região da Lagoa do Bonfim – RN com o objetivo de determinar as isolinhas de cargas hidráulicas. Os resultados foram comparados com estudo anterior, onde obteve resultados compatíveis, comprovando a aplicação do Método e de sua implementação. Foram incorporadas ao problema da Lagoa do Bonfim características geométricas do contorno do oceano e de aluviões existentes no entorno da Lagoa, demonstrando a utilidade do programa para gerar diferentes cenários de simulação.

Palavras Chave: Método de Elementos Analíticos, Água subterrânea, Aquíferos, *Splines*, Sistemas de Informações Geográficas, Programação Orientada a Objetos, Polinômios.

ABSTRACT

ALENCAR NETO, M. F. **Splines Interpolation to Inhomogeneities in Analytic Element Method – Implemented with Object-oriented Programming.** 2008. 270 f. Doctoral Thesis. Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo. São Carlos, 2008.

The Analytical Elements Method simulates underground draining through the superposition of conceptual solutions. In the Method's context, inhomogeneity is defined as a clearly set region of constant hydraulic conductivity. Inhomogeneity hydraulic conductivity differences and the environment in which they are inserted cause a discontinuity (jump) in the discharge potential. Traditionally, this jump is simulated using first or second degree polynomials. The present work presents a formulation that uses quadratic *spline* polynomials to interpolate jumps occurred in the discharge potential through inhomogeneity borders. At the same time, the traditional formulation of discharge potential jump interpolation is extended to any degree. The main elements that compose the Method are described and implemented. The resulting computational program (AEM) was developed integrated to an open code Geographic Information System (JUMP). The program permits the integration with other Geographic Information Systems based on JAVA, keeping its independence from resident SIG. The architecture project program AEM/JUMP is based on Object-oriented Programming and presented great affinity with the Analytical Element Method, showing identification among element concepts (used by the Method) and the object (used by the Program). Standard Project Concepts are used, seeking to widen source code reading possibilities, understanding, optimization and modifications already available through the Object-oriented Programming. Conceptual problems are approached with proposed formulations. Quadratic *spline* interpolation proved to be efficient and precise. Considering exact solutions, average mistake on study area was lower than 0.12%. AEM/JUMP was applied to the Lagoa do Bonfim (RN) lake region with the aim of establishing hydraulic charge isolines. Results were compared with the previous study, where compatible results had been obtained, thus proving method feasibility and implementation. Geometric features of surrounding areas and alluvion regions present around the lake area were incorporated to the original problem, demonstrating the usefulness of the program to generate different simulation scenarios.

Keywords: Analytic Element Method, Aquiferous areas, Splines, Geographic Information Systems, Object-Oriented Programming, Polynomials.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Pintura rupestre que sugere a escavação de um poço.	41
Figura 2 – Secção longitudinal de um qanāt.	42
Figura 3 – Frontispício e ilustração <i>De L'Origine des Fontaines</i>	45
Figura 4 – Esboço da coluna de solo usada por Darcy.	48
Figura 5 – Linhas de fluxo subterrâneo apresentadas por King.	52
Figura 6 – Rede de fluxo em perfil vertical desenhado por Pennink.	53
Figura 7 – Carga hidráulica.	63
Figura 8 – Esquema de coluna vertical do experimento de Darcy.	65
Figura 9 – Simplificações de Dupuit para aquífero livre.	68
Figura 10 – Modelo de solo de Dupuit-Forchheimer.	70
Figura 11 – Forma da superfície livre sob hipóteses de D.F.	71
Figura 12 – Zona de transição entre escoamento confinado e livre.	75
Figura 13 – Volume de controle para formulação da equação de Dupuit-Forchheimer.	76
Figura 14 – Área de controle para modelo de Dupuit-Forchheimer.	77
Figura 15 – Volume de controle para equação de fluxo, escoamento confinado.	79
Figura 16 – Superposição de soluções – exemplo unidimensional.	82
Figura 17 – Linha de corrente Ψ ortogonal à equipotencial Φ	83
Figura 18 – Exemplos de aplicações de Potenciais em escoamento subterrâneo.	90
Figura 19 – Decomposição de um campo da velocidade do vento tangente a uma orelha.	93
Figura 20 – Esquema gráfico da Decomposição de Helmholtz para campos vetoriais.	93
Figura 21 – Representação da decomposição de Helmholtz-Hodge.	94
Figura 22 – Ponto de extração.	99

Figura 23 – Representação esquemática do dipolo.....	102
Figura 24 – Linha de injeção/extração.....	104
Figura 25 – Mapeamento de linha de injeção de coordenadas globais \bar{z} para locais \bar{Z}	105
Figura 26 – Ângulos da linha de injeção/extração.....	108
Figura 27 – Linha dupla formada por uma série de dipolos orientados transversalmente. ...	109
Figura 28 – Mapeamento de Linha de Dupla de coordenadas globais \bar{z} para locais \bar{Z}	110
Figura 29 – Linha dipolo formada por uma série de dipolos orientados longitudinalmente .	114
Figura 30 – Dipolo no plano complexo.	115
Figura 31 – Sistema de coordenadas local e global para recarga em faixa.....	120
Figura 32 – Comportamento do potencial de descarga para a recarga uniforme em faixa....	121
Figura 33 – Trecho de rio.....	124
Figura 34 – Rio com vários trechos	125
Figura 35 – Rio secundário com deságüe no rio principal.....	126
Figura 36 – Convenção de sinais para regiões.....	126
Figura 37 – Coordenadas locais para lago poligonal.	130
Figura 38 – Componente Q_{ij}^j para o lado j de um lago poligonal.	131
Figura 39 – Inomogeneidade com interpolação por polinômio de primeiro grau.	138
Figura 40 – Definição dos ângulos originados no termo logarítmico para o potencial	144
Figura 41 – Esquema dos ângulos no vértice de uma inomogeneidade.	144
Figura 42 – Ilustração da relação entre o polinômio de primeiro e segundo graus	147
Figura 43 – Inomogeneidade com interpolação por polinômio de segundo grau.....	149
Figura 44 – Trecho de polígono, coordenadas locais e pontos de controle	156
Figura 45 – Inomogeneidade triangular modelada por polinômios de terceiro grau	162
Figura 46 – Esquema de inomogeneidade poligonal.	165
Figura 47 – Esquema de pontos de controle e segmentos para trecho de inomogeneidade. .	166

Figura 48 – Coordenada global para locais - polinômio inicial quadrático.....	168
Figura 49 – Polinômios em uma spline de polinômio inicial quadrático.....	171
Figura 50 – Coordenadas locais de segmentos adjacentes e pontos de singularidade.	179
Figura 51 – Inhomogeneidade triangular com locação dos pontos de controle (ζ_j).....	181
Figura 52 – Trecho de uma inhomogeneidade poligonal.	184
Figura 53 – Polinômios em uma <i>spline</i> de polinômio inicial Linear.	187
Figura 54 – Máquina automática de tecelagem e projeto de tear.	192
Figura 55 – Planilha para cálculo dos números de Bernoulli para máquina analítica.....	193
Figura 56 – Genealogia da linguagem JAVA.	199
Figura 57 – Exemplo de encapsulamento.....	203
Figura 58 – Esquema de compilação/interpretação de códigos desenvolvidos em JAVA.	213
Figura 59 – Comparação de desempenho entre C e JAVA.....	216
Figura 60 – GIS e outros sistemas relacionados e outras técnicas e funcionalidades	219
Figura 61 – JUMP com lista de camadas e detalhe da chamada do aplicativo AEM.	234
Figura 62 – Exemplo de atributos para camada do ponto de referência - JUMP.....	235
Figura 63 – Exemplo de atributos para camada de rios - Jump.....	236
Figura 64 – Diagrama UML2 do simulador AEM/Jump	242
Figura 65 – Modelo de AEM interface entre GIS e AEM.....	245
Figura 66 – Exemplo de aplicação <i>Façade</i> - antes do <i>Façade</i>	246
Figura 67 – Exemplo de aplicação <i>Façade</i> - depois do <i>Façade</i>	247
Figura 68 – Destaque Diagrama UML da Interface	247
Figura 69 – Diagrama conceitual do padrão <i>Factory</i>	248
Figura 70 – Detalhe de projeto do aplicativo AEM.....	249
Figura 71 – Diagrama conceitual do padrão <i>Iterator</i>	250
Figura 72 – Diagrama UML criação da Inomogeneidade e Poço	251

Figura 73 – Diagrama conceitual do <i>Strategy</i>	251
Figura 74 – Área de interesse contendo os 2401 pontos avaliados.....	253
Figura 75 – Variação do erro médio com o grau do polinômio de interpolação.	255
Figura 76 – Variação do erro médio com número de divisões (até 10 divisões).....	256
Figura 77 – Tempo de processamento, <i>spline</i> (SPQ) e polinômios de graus variados.....	257
Figura 78 – Inomogeneidade cilíndrica, comparação aproximada polinômio Linear e exata.	258
Figura 79 – Inomogeneidade cilíndrica, comparação aproximada <i>spline</i> (SPQ) 10 divisões.	259
Figura 80 – Inomogeneidade cilíndrica - condutividade hidráulica 10X menor que o meio.	260
Figura 81 – Polígonos de 6 e 18 lados usados para aproximar inomogeneidade circular.	261
Figura 82 – Variação do erro médio em relação ao número de lados do polígono.	262
Figura 83 – Isolinhas de carga hidráulica de inomogeneidade em faixa em fluxo uniforme.	263
Figura 84 – Linhas de fluxo entre dois meios com condutividade hidráulica distinta.	264
Figura 85 – Inomogeneidade cilíndrica e poços em aquífero confinado.....	265
Figura 86 – Inomogeneidade cilíndrica e poços em escoamento livre.	266
Figura 87 – Inomogeneidade com dupla variação de condutividade hidráulica - confinado.	267
Figura 88 – Inomogeneidade com dupla variação de condutividade hidráulica - livre.	268
Figura 89 – Poço e canal em campo infinito.....	269
Figura 90 – Poço no alinhamento de canal em campo infinito.....	270
Figura 91 – Isolinhas de carga hidráulica no entorno de lago quadrado com recarga.....	271
Figura 92 – Diagrama curvas piezométrica de lago poligonal com poço no centro.....	271
Figura 93 – Modelo tridimensional do Caso I.....	273
Figura 94 – Modelo tridimensional do Caso VII.....	273
Figura 95 – Modelo tridimensional do Caso VIII.....	273
Figura 96 – Localização da Lagoa do Bonfim-RN.....	275
Figura 97 – Vista em perspectiva da Lagoa do Bonfim-RN.....	276

Figura 98 – Vista em perspectiva da Lagoa do Bonfim-RN	276
Figura 99 – Localização da Lagoa do Bonfim-RN.	277
Figura 100 – Formações geológicas presentes na região da Lagoa do Bonfim.	277
Figura 101 – Área modelada no AEM/JUMP, com detalhe no entorno da Lagoa do Bonfim..	281
Figura 102 – Lagoa do Bonfim.	282
Figura 103 – Isolinhas de cargas hidráulicas no entorno da Lagoa do Bonfim.....	282
Figura 104 – Contorno irregular da costa, poços, lagoas e aluviões – Lagoa do Bonfim.	283
Figura 105 – Detalhe dos elementos introduzidos no modelo da Lagoa do Bonfim.....	284
Figura 106 – Isolinhas de cargas hidráulicas com novos elementos – Lagoa do Bonfim.....	285
Figura 107 – Superfície piezométrica da região da Lagoa do Bonfim.....	285
Figura 108 – Isolinhas de carga hidráulica no entorno dos poços.....	286

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Resumo dos Padrões de Projetos	210
Tabela 2 – Representação de Classes em UML2	232
Tabela 3 – Representação de Relacionamentos em UML2.....	233
Tabela 4 – Nome das camadas GIS de entrada do modelo.	233
Tabela 5 – Lista de Atributos dos elementos hidrogeológicos.....	235
Tabela 6 – Principais classes, ações e responsabilidades.....	237
Tabela 7 – Classes e equações implementadas.....	238
Tabela 8 – Inomogeneidade, erro médio e máximo para diferentes ordens dos polinômios.	254
Tabela 9 – Inomogeneidade por splines, erro médio e máximo pelo número de segmentos.	255
Tabela 10 – Erro médio e máximo para casos I e II.....	261
Tabela 11 – Dados para simulação do sistema aquífero da Lagoa do Bonfim.....	278
Tabela 12 – Características da modelagem dos elementos Rios	279
Tabela 13 – Características da modelagem das Inomogeneidades da Lagoa do Bonfim.....	280
Tabela 14 – Coordenadas e vazões dos poços.....	284
Tabela 15 – Características das Lagoas.....	284

LISTA DE SÍMBOLOS

CARACTERES GREGOS MINÚSCULOS

α	Ângulo em radianos.
β	Ângulo em radianos.
γ	Peso específico da água [MT ⁻² L ⁻²].
γ_a	Peso específico da água [MT ⁻² L ⁻²].
δ	Coordenada local [L].
ε	Coordenada local [L].
ζ	Variável global [L].
η	Direção e coordenada local normal [L].
θ	Ângulo em radianos.
θ_1	Ângulo em radianos.
θ_2	Ângulo em radianos.
ϑ	Fator de diferença de condutividade hidráulica para inhomogeneidades.
λ	Distribuição do esforço do dipolo para linhas duplas, salto no potencial de descarga.
μ	Distribuição do esforço do dipolo para linha dipolo, salto na função de corrente.
ν	Viscosidade cinemática do fluido [L ² T ⁻¹].
ξ	Esforço.
o	Função erro.
π	3,1415...
ρ	Polinômio de correção.
σ	Vazão distribuída linearmente [L ² T ⁻¹].

τ	Direção e coordenada local tangente [L].
v	Coordenada complexa local.
ϕ	Carga hidráulica [L].
φ	Ângulo.
χ^j	Função auxiliar para lago poligonal, referente ao lado j .
ϖ	Derivada do polinômio <i>spline</i> no início do segmento.

CARACTERES GREGOS MAIÚSCULOS

Γ	Função de ponderação.
Δ	Operador de diferença.
Θ	Solução de uma EDP linear.
Θ_1	Solução de uma EDP linear.
Θ_2	Solução de uma EDP linear.
$\Theta_{Laplace}$	Solução de uma equação de Laplace.
$\Theta_{Poisson}$	Solução de uma equação de Poisson.
Λ	Função de influencia.
Λ_p	Função de influencia do ponto de injeção/extração (poço).
Λ_d	Função de influencia do ponto do dipolo.
Λ_{lie}	Função de influencia para linha de injeção/extração.
Λ_{rc}	Função de influencia para lago poligonal.
Λ_{lp}	Função de influencia para recarga circular.

Λ_1^*	Função de influencia de apoio para rio de segunda ordem.
Λ_2^*	Função de influencia de apoio para rio de segunda ordem.
Λ_1	Função de influencia para rio de segunda ordem.
Λ_2	Função de influencia para rio de segunda ordem
Π	Produtório.
Σ	Somatório.
Φ	Potencial de descarga.
Φ_1	Potencial de descarga na posição 1.
Φ_2	Potencial de descarga na posição 2.
$\Phi_{Laplace}$	Potencial de descarga solução da equação de Laplace.
$\Phi_{Poisson}$	Potencial de descarga solução da equação de Poisson.
Φ_p	Potencial de descarga para ponto de injeção/extração.
Φ_L	Potencial de descarga para ponto a uma distancia L ..
Φ_G	Potencial de Girinski.
Φ_0	Potencial de descarga no ponto de referencia.
Φ_{lie}	Potencial de descarga de uma linha de injeção/extração.
Φ_{rf}	Potencial de descarga para recarga em faixa.
Φ_{lp}	Potencial de descarga para lago poligonal com recarga constante.
Φ_i	Potencial de descarga de apoio para lago com recarga constante.
Φ_e	Potencial de descarga de apoio para lago com recarga constante.
Ψ	Função de corrente.

Ψ_{lie}	Função de corrente de uma linha de injeção/extração.
Ψ_p	Função de corrente de um ponto de injeção/extração.
Ψ^+	Função de corrente próximo a borda de uma área fechada (lado interno).
Ψ^-	Função de corrente próximo a borda de uma área fechada (lado externo).
Υ	Função de ponderação do potencial.
Ω	Potencial complexo.
Ω_p	Potencial complexo do ponto de injeção/extração (poço).
Ω_d	Potencial complexo do dipolo.
Ω_{lie}	Potencial da linha de injeção/extração.
Ω_{ldu}	Potencial complexo para linha dupla.
Ω_{ldp}	Potencial complexo para linha dipolo.
Ω_{lp}	Potencial complexo para lago poligonal.
Ω_{lpr}	Potencial complexo para lago poligonal por linhas de injeção/extração.
Ω_{ju}	Potencial da linha para fluxo uniforme.
$\Omega_{r,0}$	Potencial complexo para rio no ponto de nascente.
$\Omega_{r,n}$	Potencial complexo para rio no ponto n .
$\Omega_{r,N}$	Potencial complexo para rio na foz.
$\Omega_{r,n=N^*}$	Potencial complexo para ponto de foz de um rio em outro.
Ω_e	Potencial complexo de apoio para lago poligonal.
Ω_{inho}	Potencial complexo para inhomogeneidade.

CARACTERES LATINOS MINÚSCULOS

a	Constante.
b	Constante.
c	Constante.
c_c	Constante escoamento confinado.
c_l	Constante escoamento livre.
c_p	Constante para potencial de descarga de um ponto de injeção/extração.
c_0^j	Constante 0 para lado j de um lago poligonal.
c_1^j	Constante 1 para lado j de um lago poligonal.
c_2^j	Constante 2 para lado j de um lago poligonal.
d	Diâmetro médio do grão de solo [L]
e	2,7182...
f	Função de ponderação dos esforços.
h	Altura saturada [L].
h_p	Carga de pressão [L]
i	Número imaginário $\sqrt{-1}$.
j	Contador inteiro.
k	Contador inteiro.
l	Comprimento [L].
l_n	Função n de ponderação na forma lagrangeana.
l_n^*	Função n de ponderação forma canônica.
ℓ	Distancia que separa os pólos de um dipolo [L].

m	Contador inteiro.
n	Contador inteiro.
p	Polinômio de correção.
p_{ldu}	Polinômio de correção para linhas duplas.
p_{ldp}	Polinômio de correção para linhas dipolos.
p_a	Polinômio de correção usado em inhomogeneidades de 1ª ordem.
p_b	Polinômio de correção usado em inhomogeneidades de 1ª ordem.
q	Velocidade de Darcy ou fluxo específico [LT ⁻¹].
\vec{q}	Forma vetorial da velocidade de Darcy [LT ⁻¹].
q_s	Velocidade de Darcy na direção s [LT ⁻¹].
q_x	Velocidade de Darcy na direção x [LT ⁻¹].
q_y	Velocidade de Darcy na direção y [LT ⁻¹].
q_z	Velocidade de Darcy na direção z [LT ⁻¹].
r	Direção e coordenada radial [L].
s	Direção e coordenada local tangente [L].
w	Coordenada complexa global ao longo de um segmento de reta.
w_n	Coordenada complexa global n -ésima ao longo de um segmento de reta
w_j	Coordenada complexa j -ésima global ao longo de um segmento de reta.
x	Direção e coordenada global horizontal [L].
x_R	Coordenada de referencia [L].
y	Direção e coordenada global horizontal [L].
y_R	Coordenada de referencia [L].

z	Número no plano complexo global
z_d	Número no plano complexo global do centro do dipolo
z_p	Número no plano complexo global do centro do poço
z_c	Número complexo global referente ao ponto médio de uma linha
z_n^*	Número complexo global referente ao vértice n de um rio tributário.
\mathcal{Z}	Direção e coordenada global vertical [L].

CARACTERES LATINOS MAIÚSCULOS

A	Área [L ²]
\mathcal{A}	Fator de integração.
C	Constante.
D	Área Domínio
D^+	Área Domínio interna a uma região fechada
D^-	Área Domínio externa a uma região fechada
\vec{F}	Vetor força [MLT ⁻¹].
F_x	Componente na direção x do vetor força[MLT ⁻¹].
F_y	Componente na direção y do vetor força[MLT ⁻¹].
G	Símbolo genérico de grandeza (usado somente nesse índice).
\mathcal{G}	Campo escalar potencial.
\mathcal{G}_{ps}	Campo escalar pseudopotencial.
H	Espessura do aquífero confinado [L].
I	Comprimento do segmento parametrizado [L].

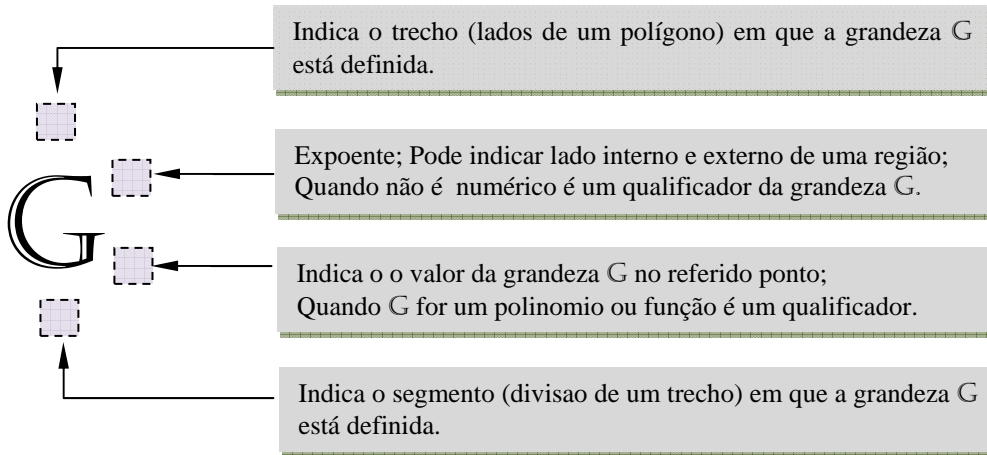
K	Condutividade hidráulica [LT^{-1}].
K_x	Condutividade hidráulica na direção x [LT^{-1}].
K_z	Condutividade hidráulica na direção z [LT^{-1}].
L	Comprimento [L]
M	Número inteiro limite de um contador
N	Número inteiro limite de um contador
\mathcal{N}	Vazão de recarga por unidade de área [LT^{-1}].
$^j P$	Polinômio auxiliar de correção para lago poligonal.
Q	Vazão [L^3T^{-1}].
Q_n	Vazão para o segmento n de uma linha [L^3T^{-1}].
Q_r	Vetor de descarga na direção radial [L^2T^{-1}].
Q_j	Vetor de descarga na direção j [L^2T^{-1}].
Q_e^+	Vetor de descarga no ponto e direção de referencia [L^2T^{-1}].
Q_i^+	Vazão distribuída na direção normal devido a função de apoio i [L^2T^{-1}].
Q_e^+	Vazão distribuída na direção normal devido a função de apoio e [L^2T^{-1}].
R	Distancia ao ponto de referencia [L].
Re	Número de Reynolds para meio poroso.
S_j	Polinômio que compõe a <i>spline</i> no segmento j .
U	Tipo de elemento com esforço desconhecido.
V	Tipo de elemento com esforço conhecido.

W	Coordena complexa local sobre um segmento de reta.
X	Parte real da coordenada complexa local.
Y	Parte imaginária da coordenada complexa local.
Z	Coordena complexa local.
$\overset{m}{Z}$	Coordena complexa local para um trecho m .
$\overset{m}{Z}_n$	Coordena complexa local para segmento de n um trecho m .
\overline{Z}	Coordena complexa local auxiliar.

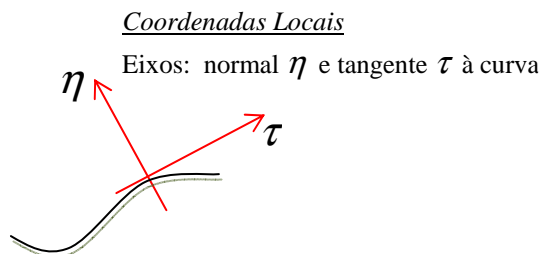
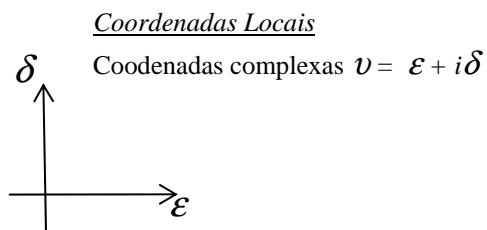
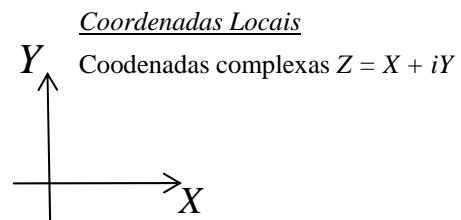
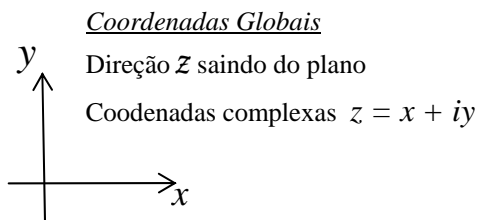
OUTROS SÍMBOLOS

∇	Operador gradiente.
$\frac{\partial}{\partial x}$	Operador derivada parcial em relação a x .
$\Re\{ \}$	Parte real de um número complexo.
$\Im\{ \}$	Parte imaginária de um número complexo.
\wp	Pressão no ponto.
arg	Argumento de um número complexo.
ln	Logaritmo Natural.
∞	Infinito.
$a \rightarrow b$	Símbolo de tendência, a tende a b .
$\lim_{a \rightarrow b}$	Limite quando a tende a b .

USO DE ÍNDICES



SISTEMAS DE EIXOS COORDENADOS PLANOS



SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	37
2	HISTÓRICO	41
2.1	O MÉTODO DE ELEMENTOS ANALÍTICOS (AEM).....	56
2.1.1	Aplicações Computacionais e Implementação do AEM.....	57
2.1.2	Estudos realizados no Brasil	60
3	FUNDAMENTOS TEÓRICOS	61
3.1	CARGA PIEZOMÉTRICA E LEI DE DARCY	62
3.2	HIPÓTESES DE DUPUIT- FORCHHEIMER	67
3.3	VETOR DE DESCARGA E POTENCIAL DE DESCARGA	72
3.4	EQUAÇÃO DA CONTINUIDADE E EQUAÇÕES GOVERNANTES	76
3.4.1	Potencial Complexo - Equipotenciais e Linhas de Corrente.....	83
3.5	POTENCIAIS EM ESCOAMENTOS SUBTERRÂNEOS	87
3.6	DECOMPOSIÇÃO DAS CARACTERÍSTICAS DO ESCOAMENTO	93
4	O MÉTODO DE ELEMENTOS ANALÍTICOS	96
4.1	FORMULAÇÃO MATEMÁTICA DOS ELEMENTOS CONCEITUAIS	98
4.1.1	Ponto de Injeção/Extração.....	99
4.1.1.1	As constantes de integração.....	101
4.1.2	Dipolo.....	102
4.1.3	Linha de Injeção/Extração.....	104
4.1.4	Linha Dupla.....	109
4.1.5	Linha Dipolo	114

4.2	FORMULAÇÃO DOS ELEMENTOS HIDROGEOLÓGICOS.....	116
4.2.1	Fluxo Uniforme	117
4.2.2	Área Circular de Recarga.....	118
4.2.3	Recarga em Faixa	120
4.2.4	Poços.....	122
4.2.5	Rios de Primeira Ordem	123
4.2.6	Rios de Segunda Ordem	124
4.2.7	Lago Poligonal de Infiltração Constante	126
4.2.8	Lago Poligonal de Infiltração por Linhas de Injeção/Extração	136
4.2.9	Inomogeneidade poligonal de primeira ordem	136
4.2.10	Inomogeneidade Poligonal de Segunda Ordem.....	147
4.3	MONTAGEM DO SISTEMA LINEAR.....	150
5	CONTRIBUIÇÃO ÀS INOMOGENEIDADES POLIGONAIS.....	154
5.1	INOMOGENEIDADE DE ORDEM N	154
5.2	INOMOGENEIDADE DE <i>SPLINES</i> QUADRÁTICAS.....	164
5.2.1	Spline quadrática com polinômio inicial quadrático	166
5.2.2	Spline quadrática com polinômio inicial linear	184
6	IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL.....	192
6.1	HISTÓRICO PROGRAMAÇÃO.....	192
6.2	PROGRAMAÇÃO ORIENTADA A OBJETOS	199
6.2.1	Definição e Conceitos de POO	201
6.2.1.1	Encapsulamento, Classes e Objetos	202
6.2.1.2	Herança	203
6.2.1.3	Polimorfismo.....	203

6.2.1.4	Coleta de Lixo	204
6.2.1.5	Relacionamento de Classes	204
6.2.1.6	Algumas das Principais Vantagens da POO.....	205
6.3	PADRÕES DE PROJETOS	206
6.3.1	Aplicação de Padrões de Projetos a <i>Softwares</i>	207
6.4	JAVA	211
6.4.1	JAVA e Computação Numérica.....	214
6.4.2	Segurança e Performance	217
6.5	SISTEMAS DE INFORMAÇÕES GEOGRÁFICAS – GIS.....	217
6.5.1	OpenGIS.....	220
6.5.2	Movimento de <i>Software</i> Livre - SL.....	225
6.5.3	GIS e <i>Softwares</i> Livres - SF.....	227
7	APLICATIVO JUMP/AEM.....	230
7.1	DIRETIVAS	230
7.2	LINGUAGEM, PARADIGMA E AMBIENTE DE DESENVOLVIMENTO.	230
7.2.1	UML2	231
7.3	VISÃO GERAL DO PROGRAMA JUMP/AEM	233
7.3.1	Implementação dos Padrões de Projeto.....	244
7.3.2	O <i>Facade</i>	244
7.3.3	O <i>Factory</i>	248
7.3.4	O <i>Iterator</i>	249
8	RESULTADOS.....	252
8.1	CASOS CONCEITUAIS PARA INOMOGENEIDADES	252
8.2	APLICAÇÃO A UM CASO DE CAMPO.....	274

8.2.1	O modelo conceitual e computacional - Simulação I.....	278
8.2.2	Inclusão de novos elementos – Simulação II.....	283
9	CONCLUSÕES.....	288
9.1	SUGESTÕES PARA TRABALHOS POSTERIORES	292
10	BIBLIOGRAFIA	294

1 INTRODUÇÃO

A demanda crescente por água, em seus múltiplos usos, tem exigido uma avaliação abrangente, racional e integrada dos recursos hídricos regionais disponíveis. A água subterrânea se insere neste contexto, seja como fonte complementar ou principal de abastecimento.

Com os atuais recursos técnicos, as águas subterrâneas vêm, cada vez mais, se tornando uma alternativa competitiva e por vezes mais viável financeiramente do que as águas superficiais. O crescente uso, entretanto, aliado à forma indiscriminada de extração pode trazer danos ambientais significativos, como assinala Rebouças (2002, p. 39) :

(...) a extração desordenada atual da água subterrânea de uma bacia hidrográfica poderá afetar, principalmente, o escoamento básico dos seus rios, a descarga de suas fontes ou nascentes, os níveis de seus açudes, lagoas e pantanais, engendrar o deslocamento da interface marítima nos seus aquíferos costeiros, reduzir a umidade do solo que dá suporte ao desenvolvimento da exuberante biomassa natural ou cultivada.

Adiciona-se, ainda, a dificuldade de identificação da fronteira dos aquíferos, normalmente diversa da fronteira das bacias hidrográficas e que comumente, devido à interferência de aquíferos vizinhos, modifica consideravelmente a rede de fluxo previamente estimada. É necessário, portanto, avançar para além da análise estatística de dados de poço e do mero balanço entre recarga e extração. Assim, complementa Rebouças (2002, p. 45):

(...) é preciso evoluir da análise de um poço ou outro dado pontual, à caracterização de um modelo hidrogeológico conceitual e compreensão dos sistemas de fluxo subterrâneo (...) Neste quadro a aplicação de métodos numéricos do tipo RASA – *Regional Aquifer System Analysis*, mostra que o uso intensivo dos aquíferos poderá engendrar uma maior dinâmica das interações entre sistemas de aquíferos vizinhos, ampliação de zonas de recarga entre sistemas de aquíferos vizinhos, ampliação das zonas de recarga natural ou induzida, alteração das zonas de descarga.

Cada vez mais se faz necessário a construção de diferentes cenários para o escoamento subterrâneo, de forma a balizar o processo de tomada de decisão, sobretudo no âmbito público, visando um melhor gerenciamento e proteção do sistema hídrico como um todo. Desta maneira, modelos e simuladores de fluxo assumem importância crescente no âmbito da caracterização, monitoramento, exploração, e, sobretudo, na compreensão do movimento das águas subterrâneas.

Dentre os métodos de simulação, encontra-se o Método de Elementos Analíticos (*Analytic Element Method* – AEM). Sistematizado por Strack (1989) e com forte fundamentação na Física-Matemática, o método apresenta na análise de aquíferos regionais seu ponto forte.

O trabalho aqui apresentado possui dois objetivos bem definidos e complementares:

1. Contribuir para o desenvolvimento matemático do Método de Elementos Analíticos, por meio do conceito de *splines*, descrito por Boor (1978), aplicado à aproximação dos saltos do potencial complexo ao longo de elementos lineares no AEM. A formulação é desenvolvida para o caso das inomogeneidades.
2. Implementar o método, tomando-se como plataforma um Sistema de Informações Geográficas (*Geographic Information System* – GIS) de código aberto e utilizando-se a técnica de Programação Orientada a Objetos (*Object-Oriented Programming* – OOP), avaliando a adequação AEM – OOP – GIS.

O trabalho pode ser dividido em três partes.

A primeira é dedicada ao AEM contendo: breve histórico da abordagem matemática em águas subterrâneas; fundamentação teórica; descrição do método; e a contribuição inédita com as formulações para saltos em inomogeneidades, por polinômios de ordem elevada e por polinômios *splines*.

A segunda parte apresenta: breve histórico de programação; detalhamento do conceito de Programação Orientada a Objetos; uso de padrões de projetos em softwares; e conceitos da linguagem Java e Sistemas de Informações Geográficas no âmbito da comunidade de *Software Livre*.

A terceira e última parte traz os resultados e a conclusão na forma da análise de casos acadêmicos e uma aplicação de campo no entorno da Lagoa do Bonfim – RN.

2 HISTÓRICO

Os tempos ancestrais e os precursores

O uso de águas subterrâneas antecedeu em muito a compreensão de sua origem, ocorrência e movimento (TODD, 1959, p. 2). É provável que a construção de poços anteceda ao próprio *homo sapiens*, tendo nos períodos de estiagem os antepassados da humanidade escavado os leitos de rios intermitentes em busca de água.

Pinturas rupestres datadas de 8000 anos sugerem a captação de água por poços, Figura 1. Um dos poços mais antigos, encontrado em Israel, data de 4500 a.C. No Egito, hieróglifos do ano 2100 a.C. descrevem a construção de poços por Henu, chefe militar de Mentuhotep III (MACHADO, 2005, p. 2).



Figura 1 – Pintura rupestre que sugere a escavação de um poço.
Fonte: Machado (2005, p. 5).

Dos povos da Antiguidade, os chineses provavelmente, foram os que mais utilizaram a água subterrânea por meio da perfuração de poços. Os poços escavados não só eram usados para obtenção de água potável mas também para a retirada de sal (MACHADO, 2005, p. 4).

Além de poços, sistemas permanentes de captação da água subterrânea foram concebidos e construídos pelos povos da Antiguidade. Denominados de *qanāt*, consistiam em túneis escavados no sopé de montes que captavam a água existente abaixo da linha freática e a transportavam para zonas irrigadas ou para canais superficiais de abastecimento (Figura 2). A incidência mais antiga dessas construções pode ser vista na Armênia, datada de 721 - 705 a.C.. Já no Egito, essa forma de captação de água foi introduzida por volta de 500 a.C.. A eficiência dos *qanāt* é comprovada pelo fato de que ainda são usados em algumas regiões, em especial no Oriente Médio, particularmente no Irã, segundo Fetter Jr. (2004a, p. 790).

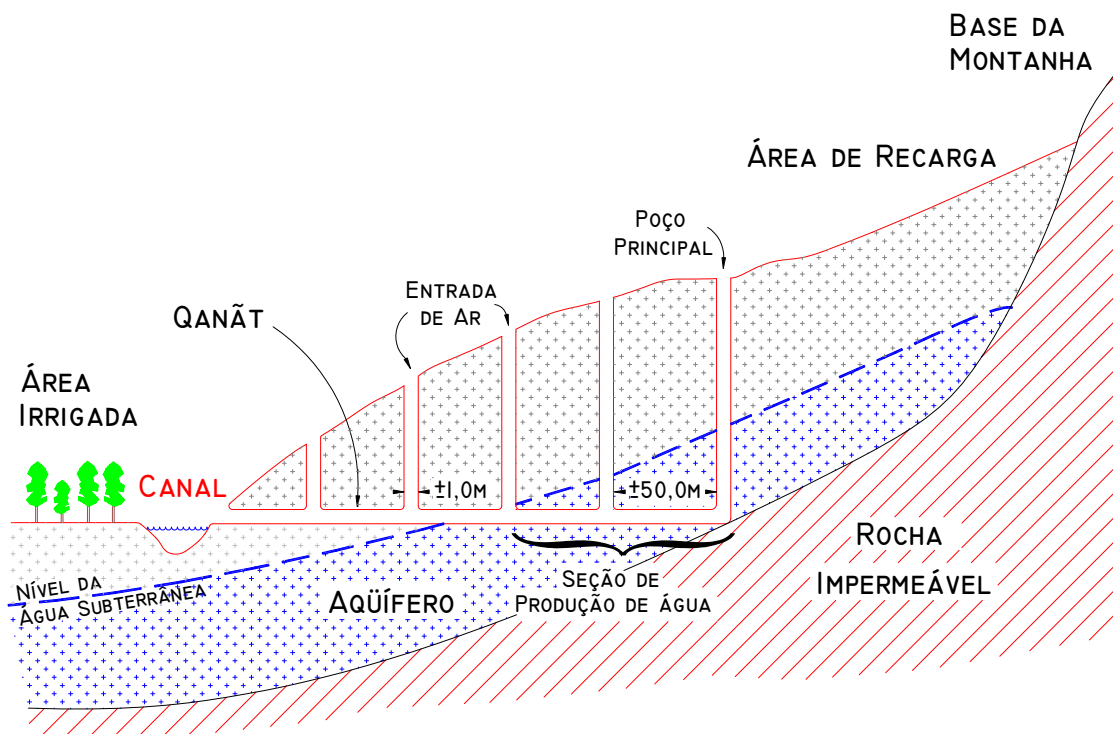


Figura 2 – Seção longitudinal de um qanāt.
Fonte: Biswas (1970, p. 28).

No florescer do racionalismo grego, a origem e formação de todas as coisas constituíam tema central. Para Tales de Mileto (~624 – 548 a.C.), considerado por Aristóteles como o primeiro filósofo, a água era o princípio de todo o universo – a substância primordial da qual todas as coisas eram feitas.

Para Anaxímenes de Mileto (585 – 528 a.C.), é o ar o elemento primordial. Com sua rarefação e condensação poderia explicar a existência de tudo: a nuvem, a água, a terra e os seres vivos. A transformação das coisas tem aqui uma explicação quantitativa, a rarefação (menos ar) e a condensação (mais ar) determinariam toda a organização da realidade.

Heráclito de Éfeso (~540 – 470 a.C.) expressa a noção de que é o fogo o elemento primordial, do qual tudo se origina e para o qual tudo deve regressar. Com o pensamento de Heráclito nasce o devir cíclico, apresentado por Marciel Jr. (2003 p.64):

Concebendo o devir como cíclico, Heráclito pensou: “o ar vive a morte do fogo; a água vive a morte do ar; a terra vive a morte da água”. Todavia, como para esse pensador a rota que desce é a mesma que sobe – pois o princípio e o fim coincidem formando um círculo –, foi preciso igualmente dizer: “a morte da terra é o tornar-se água, a morte da água é o tornar-se ar, e a do ar é tornar-se fogo”.

Seguindo o caminho aberto pelos antigos filósofos gregos, várias teorias surgiram sobre a ocorrência das águas subterrâneas. Aristóteles (384 – 322 a.C.) sugere que o ar, ao entrar em cavernas subterrâneas, se condensa em água, que contribui para as fontes superficiais. Já para Platão, as fontes são formadas por água do mar conduzida por meio de canais subterrâneos abaixo das montanhas, sendo filtrada durante o transporte até chegar à superfície.

Apesar de aparentemente distante da realidade, é no pensamento de Aristóteles que surgem o reconhecimento da natureza cíclica da água, a importância dos conceitos de condensação e evaporação na formação das chuvas e o fato de parte considerável destas penetrar o solo (MANOEL FILHO, 2000, p. 3).

O arquiteto romano Vitruvius (90 - 20 a.C.), em seu tratado sobre arquitetura intitulado *De Architectura Libri Decem*, sugere formas de encontrar água subterrânea segundo os diferentes tipos de solo. Ele também propõe que fontes e rios são resultados do derretimento de neve nas montanhas que percola o solo, reaparecendo na superfície dos vales na base (FETTER Jr., 2004a, p. 791). A importância da evaporação, da precipitação e da infiltração para a origem das águas subterrâneas somente foi claramente explicada por Vitruvius. Segundo este, o acúmulo de água subterrânea decorre da infiltração da água das chuvas (MANOEL FILHO, 2000, p. 3).

Apesar de correta, a teoria de Vitruvius não repercutiu, sendo retomada séculos depois. O pensamento grego iria prevalecer desde Platão e Aristóteles até a Renascença, sem que houvesse acréscimo significativo no conhecimento da origem e comportamento das águas subterrâneas.

Somente ao final do século XVII, com o surgimento de abordagens quantitativas do ciclo hidrológico, um novo salto foi dado na compreensão do fenômeno das águas subterrâneas. O primeiro trabalho de relevância (Figura 3) foi do francês Perrault¹ (1608-1680), que mediu a média de precipitação anual sobre uma pequena parte do alto Sena, confrontando com a descarga do rio. Os resultados de Perrault indicaram que apenas um sexto do que precipitou escoou para a calha principal do Sena.

O trabalho de Perrault foi confirmado por Edmé Mariotte² (1620-1684), que investigou o ciclo chuva–vazão, usando uma área consideravelmente maior, medindo a vazão do Sena em Paris (FETTER Jr., 2004a, p. 792). Mariotte também mostrou que as fontes

¹ PERRAULT, P. **De l'origine des fontaines**. Pierre le Petit Ed. Paris. 1674.

A atividade principal de Perrault era a advocacia, talvez por isso seu trabalho seja comumente citado juntamente com o de Mariotte, dividindo o pioneirismo da era quantitativa da Hidrologia.

² MARIOTTE, E. **Traité des mouvements des eaux et des autres corps fluides**. E. Michallet. Paris. 1866.

Abade, físico e hidráulico francês. Iniciador da física experimental na Europa. Viveu em monastério na cidade de Dijon.

umentam seu fluxo no período de chuva e que diminuem na seca e que os fluxos mais consistentes são alimentados por grandes reservatórios subterrâneos (TOLMAN, 1937).

Ambos os trabalhos levaram à conclusão de que a precipitação é mais do que suficiente para abastecer os rios e fontes dentro da área estudada.

O inglês Edmond Halley³ (1656 – 1742) deu importante contribuição à hidrologia, ao concluir que a água evaporada pelos oceanos é mais do que suficiente para abastecer todos os rios e fontes da terra (FETTER Jr., 2004a, p. 792).

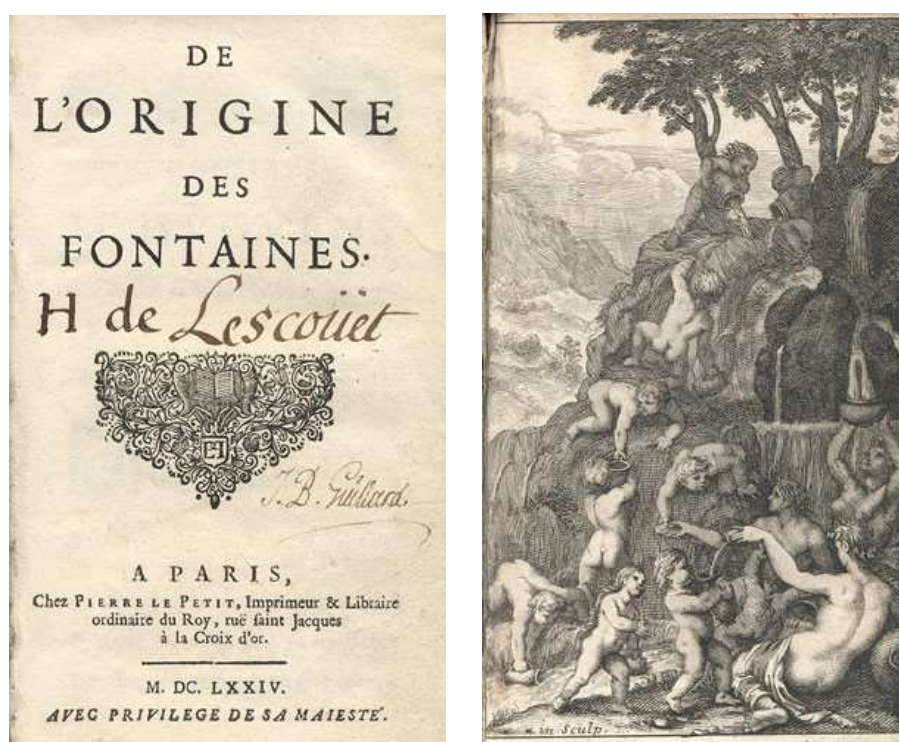


Figura 3 – Frontispício e ilustração *De L'Origine des Fontaines*.
Fonte: Biswas (1970, p. 209).

Os trabalhos de Perrault, Mariotte e Halley, ao abordarem o problema do ponto de vista da investigação quantitativa, possibilitaram uma compreensão mais apurada do ciclo hidrológico e sua influência nas águas superficiais e subterrâneas.

³ HALLEY, E. An estimate of the quantity of vapour raised out of the see by the warmth of the sun. **Philosophical Transac. of the Royal Soc. of London**, Royal Soc. of London n. 16. p. 366-370, 1687.

HALLEY, E. An account of the circulation of watry vapours of the sea, and the cause of springs. **Philosophical Transac. of the Royal Soc. of London**, Royal Soc. of London, p. 469-473, 1691.

Lei de Darcy

Na esteira da revolução newtoniana, a França do final do século XVIII e início do século XIX fora marcada pelo florescimento da Física-Matemática, ou seja, a abordagem dos fenômenos físicos como um processo eminentemente matemático. Faz parte desse contexto, o trabalho de Fourier⁴ (1822) sobre propagação de calor, onde são introduzidos os conceitos de capacitância e condutividade; além de importantes contribuições para solução de equações diferenciais parciais. Outro trabalho notável é *Hydrodynamica*⁵ (1738), do suíço Daniel Bernoulli, que identifica três componentes de energia no movimento de um fluido: energia potencial em razão da gravidade; energia elástica em virtude de pressão do fluido; e a energia cinética inerente ao movimento. Ohm⁶ (1827), por sua vez, determinou experimentalmente a relação entre corrente elétrica e voltagem através de um condutor, a constante de proporcionalidade encontrada estabelece a dificuldade à corrente elétrica, sendo denominada de resistência elétrica e depende do material e da forma do condutor (comprimento e seção).

Poiseuille⁷ (1842, apud NARASIMHAN, 2004, p. 35), interessado no estudo do fluxo sanguíneo, realizou de forma metódica experimentos com fluxo de líquidos em capilares e estabeleceu que o fluxo é diretamente proporcional à pressão sobre o tubo e sua seção transversal, sendo inversamente proporcional ao seu comprimento.

O ambiente científico de então era propício à sistematização de métodos e técnicas de exploração dos fenômenos físicos por meio de experimentos com análise e interpretação matemática. Daquela época, para o estudo do fluxo subterrâneo, é ilustrativo o experimento realizado pelo geólogo holandês e professor de História Natural Pieter Harting

⁴ FOURIER, J. B. J. **Théorie Analytique de Chaleur**. Paris, 1822.

⁵ BERNOULLI, D., **Hydrodynamica**: sive De viribus et motibus fluidorum commentarii. Strasbourg, Dulsecker, 1738, 361 p.

⁶ OHM, G. S., **Die galvanische Kette, in Mathematische Bearbeitet**. Berlin: T. H. Riemann, 1827, 245 p.

⁷ POISEUILLE, Recherches Sur La Mouvement Des Liquids Dans Les Tubes De Très-Petits Diametres, in Memoires Savants E'trangers, **Comptes rendus de l'Academie des Sciences**, vol. 9, p. 433–534, Acad. des Sci., 1842.

sobre escoamento de água através do solo. Harting⁸ (1852, apud De VRIES, 2004, p. 142)

concluiu:

[...] a quantidade de água percolada através de uma camada de solo na unidade de tempo aumenta ou decresce na mesma taxa com o aumento ou decréscimo do comprimento da coluna de água sobre sua camada.

Harting tangencia os princípios básicos da lei de percolação em meio poroso saturado, entretanto equivoca-se ao realizar o experimento de fluxo sob pressão atmosférica negligenciando o termo de carga de elevação (De VRIES, 2004, p. 142).

A relação correta foi desenvolvida posteriormente pelo engenheiro francês Henry Darcy (1856), que estabeleceu a caracterização do fluxo da água através de colunas experimentais de areia (Figura 4). O trabalho experimental de Darcy se tornaria o principal marco para escoamentos subterrâneos em meio poroso.

[...] Cada experimento consiste em estabelecer uma pressão específica na câmara superior de uma coluna pelo ajuste de uma torneira que regula a entrada do fluxo; quando isso é estabelecido por duas observações, significando que o fluxo tornou-se essencialmente uniforme, o fluxo de saída do filtro é durante certo intervalo de tempo anotado, e por meio disto se calculou o fluxo de saída por minuto.[...]

Darcy (1856, p. 7) conclui:

[...] Chamando e a espessura da areia, s sua área da seção, P a pressão atmosférica e h a altura esta camada (teremos $P + h$ para a pressão no alto e embaixo $P + h_0$ é a pressão resistente na superfície inferior), K é o coeficiente dependente da permeabilidade da camada, e q é o volume de saída, teremos $q = Ks/e[h + e \pm h_0]$ a qual se reduz a $q = Ks/e[h + e]$ quando $h_0 = 0$, ou quando a pressão inferior ao filtro é igual à pressão atmosférica.

⁸ HARTING, P. De bodem onder Amsterdam, onderzocht en beschreven. **Verhandelingen der Eerste Klasse van het Koninklijk Nederlandsch Instituut van Wetenschappen**, third series 5, p. 73-232, 1852.

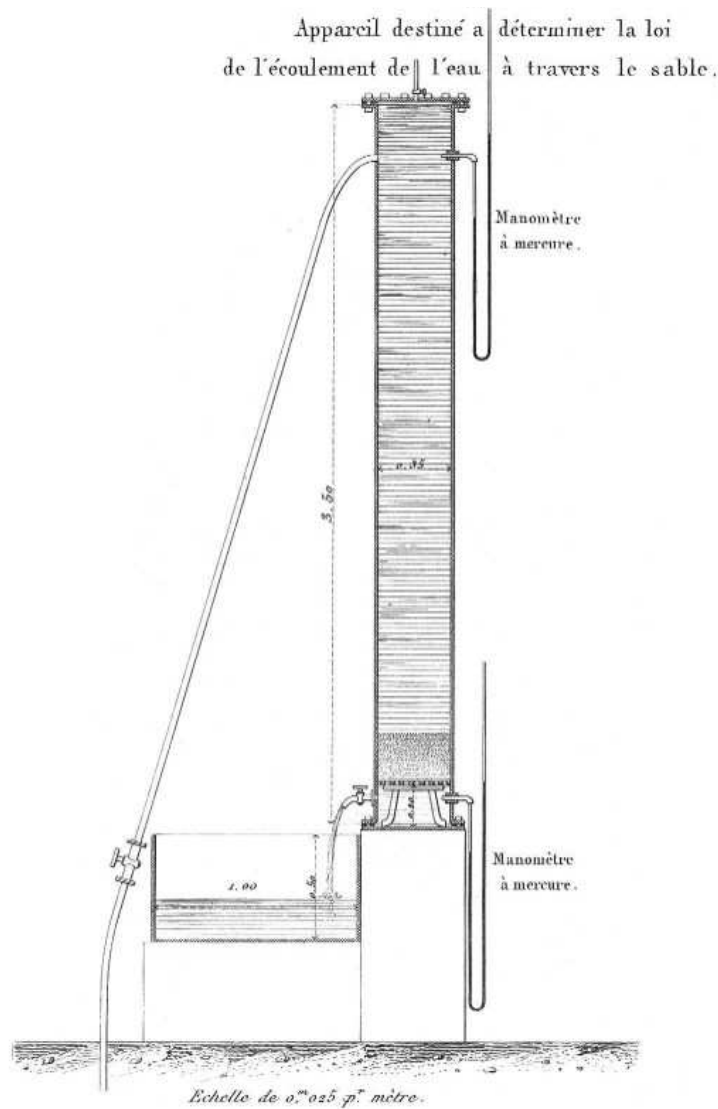


Figura 4 – Esboço da coluna de solo usada por Darcy.
Fonte: Darcy (1856, p. 8).

O trabalho de Darcy foi publicado como apêndice de um relatório para a ampliação do sistema de abastecimento de água da cidade de Dijon.

A equação de Darcy permitiu expressar a descarga de água através de um meio poroso, por unidade de superfície, em função da condutividade hidráulica do material e do gradiente hidráulico composto por uma carga de pressão e uma carga gravitacional. Essa lei constitui a base de muitos métodos de avaliação quantitativa de recursos hídricos subterrâneos (MANOEL FILHO, 2000, p. 4).

É importante frisar as semelhanças entre os trabalhos de Fourier, Ohm e Darcy, sobre fluxos de calor, eletricidade e água, respectivamente. Em termos matemáticos, é interessante notar que a Lei de Darcy difere da de Ohm, entretanto, a de Darcy é formulada similarmente à Lei de Fourier para fluxo de calor, considerando a condutividade do meio, podendo ser formulada em termos de derivadas espaciais de um potencial. Diferentemente da condutividade, na lei de Ohm emprega-se o conceito inverso – a resistência, que é inerente ao corpo estudado, sendo obtida por integração ao longo do corpo como um todo. (NARASIMHAN, 2004, p. 36).

Período Matemático

O amadurecimento da Matemática como ferramenta de análise dos fenômenos físicos desde Darcy possibilitou grandes avanços para a consolidação da teoria para escoamentos subterrâneos.

Dupuit⁹ (1863) considerou uma superfície cilíndrica arbitrária ao redor de um poço gravitacional (sob pressão atmosférica) e usou a lei de Darcy para desenvolver a equação para o escoamento livre. Da mesma forma, deduziu equações para poços artesianos¹⁰ (sob pressão maior do que a atmosférica) e para recargas.

Para as três expressões, Dupuit assumiu as seguintes hipóteses:

- i. em todos os pontos de uma seção vertical teremos o mesmo gradiente; e
- ii. o gradiente da superfície freática em qualquer ponto é igual à inclinação da superfície naquele ponto.

⁹ DUPUIT, J., **Etudes Théoriques et Pratiques Sur Le Mouvement Des Eaux Dans Les Canaux Découverts et à Travers Les Terrains Perméables**. 2nd ed. Paris: Dunot, 1863.

¹⁰ Poços artesianos são assim chamados em referência à cidade de Artois, França. Nesta cidade em 1126 foi perfurado um poço que jorrava acima da superfície. Quando o poço está sob pressão maior do que a atmosférica mas não jorra acima do nível do solo, é dito poço semi-artesiano.

Thiem¹¹ (1870, apud BISWAS, 1970, p. 310), modificou a equação de Dupuit para obter propriedades hidráulicas de um aquífero pelo bombeamento, observando o rebaixamento do lençol freático próximo ao poço.

Posteriormente, grandes avanços na base matemática do escoamento subterrâneo foram realizados pelo austríaco Philip Forchheimer¹² (1886), ao mostrar que muitas das técnicas da Física-Matemática poderiam ser aplicadas na solução de problemas de escoamento de águas. Forchheimer analisou problemas de escoamento subterrâneo usando a teoria de variáveis complexas e problemas de valor inicial e de contorno. Usou também transformação conforme, método de imagens e construção de rede de fluxo.

Uma das maiores contribuições de Forchheimer foi determinar a relação entre superfícies equipotenciais e linhas de corrente – rede de fluxo. O método analítico no qual a rede de fluxo se baseia foi apresentado em seu livro sobre Hidráulica, de 1914. Apesar de o inglês Richardson¹³, em 1908, haver abordado o assunto independentemente de Forchheimer, um artigo publicado em 1886 deixa claro que este último fora pioneiro em perseguir o tema.

Com suporte na Equação de Darcy e das aproximações de Dupuit, Forchheimer chegou a deduzir a Equação de Laplace para escoamento gravitacional de fluxo subterrâneo introduzindo a condição de horizontalidade de uma camada impermeável abaixo do aquífero (BISWAS, 1970, p. 312), estabelecendo, assim, a validade da Equação de Laplace para o escoamento subterrâneo. Forchheimer ainda formulou uma abordagem clara sobre as aproximações de Dupuit, hoje conhecidas como hipóteses de Dupuit-Forchheimer. Provavelmente, foi Muskat, em livro de 1946, quem primeiro uniu sob um mesmo título os nomes de Dupuit e Forchheimer. Sob o tópico *The Dupuit-Forchheimer theory of gravity*

¹¹ THIEM, A. Die Ergiebigkeit artesischer Bohrlocher, Schachtbrunnen, und Filtergallerien. **Journal für Gasbeleuchtung und Wasserversorgung**. 14, p. 450-467, 1870.

¹² FORCHHEIMER, P. Über die Ergiebigkeit von Brunnen Anlagen und Sickerschlitzten. **Zeitschrift des Architekten und Ingenieur Vereins zu Hannover** 32, p. 539-564, 1886.

¹³ RICHARDSON, L. F. A freehand graphic way of determining streamlines and equipotentials, London, Edinburg and Dublin, **Philosophical Magazine and Journal of Science**, 15, p. 237-269, 1908.

system e após descrever as hipóteses de Dupuit, Muskat (1946 apud DeWIEST, 1965, p.509)

comenta:

[...]Essas hipóteses permitiram a Dupuit derivar a fórmula para o fluxo gravitacional em um sistema radial, e nas mãos de Forchheimer possibilitou a derivação de uma equação geral para superfície livre de qualquer escoamento gravitacional.

Chamberlin¹⁴ (1885) publicou o primeiro relatório científico da USGS (*United States Geological Survey*) citando a ocorrência de água subterrânea tanto em meio sedimentar quanto em rocha fraturada. O trabalho de Chamberlin influenciou consideravelmente um artigo produzido por Franklin King¹⁵ (1899) que traz importantes conceitos, incluindo a importância da força gravitacional no escoamento subterrâneo. King mostrou que a superfície freática pode ser construída com base em um mapa de curvas de nível, indicando no plano horizontal a direção do movimento da água subterrânea. Também foi o primeiro a observar que, em áreas úmidas, a superfície freática tende a acompanhar a topografia (Figura 5). King (1899 apud FETTER Jr., 2004b p. 950) comenta:

[...]As linhas de contorno do nível da água subterrânea mostram que esta superfície apresenta características de montes e vales e acompanha aproximadamente as formas do relevo acima. A água é baixa onde a superfície do solo é baixa e alta onde a superfície do solo é alta.

¹⁴ CHAMBERLIN, T.C. **The requisite and qualifying conditions of artesian wells.** U.S. Geological Survey 5th Annual Report. 1885.

¹⁵ KING, F. H.. **Principles and conditions of the movements of ground water.** U.S. Geological Survey 19th Annual Report, Part 2. 1899.



Figura 5 – Linhas de fluxo subterrâneo apresentadas por King.
 Fonte: King (1899 apud FETTER Jr. 2004b p. 950)

Em seu primeiro e mais importante trabalho sobre escoamento subterrâneo, Slichter¹⁶ (1899) demonstrou que a teoria do potencial, especificamente a Equação de Laplace, pode ser usada para resolver problemas de água subterrânea. Slichter também estudou em laboratório o problema da dispersão de soluto usando tanques de areia.

¹⁶ SLICHTER, C. S. **Theoretical investigation of the motion of ground water**. U.S. Geological Survey 19th Annual Report, Part 2, 1899.

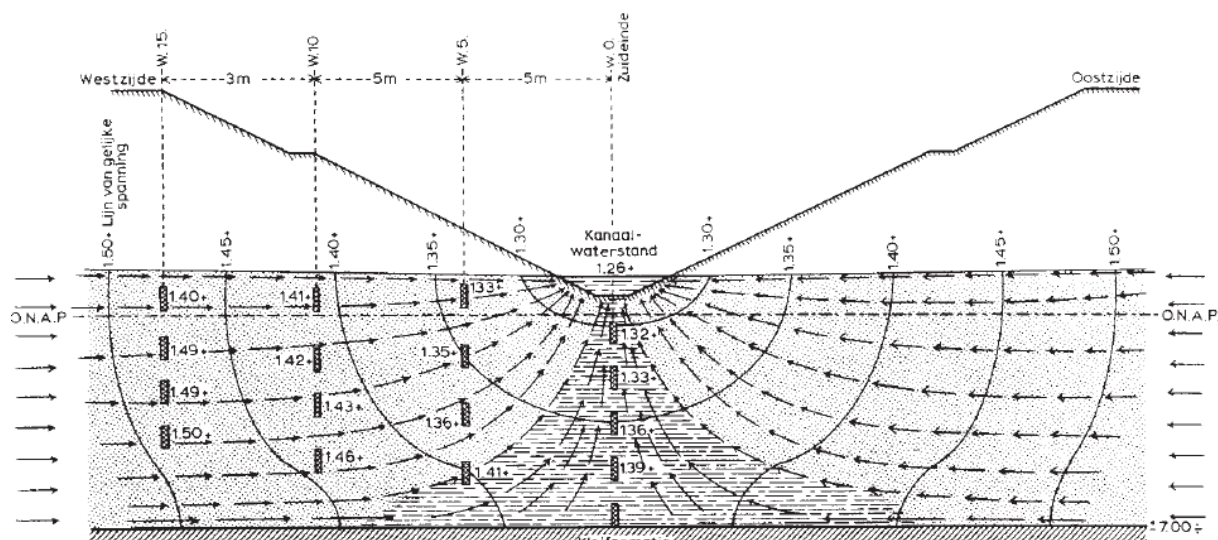


Figura 6 – Rede de fluxo em perfil vertical desenhado por Pennink.

Fonte: Pennink (1905 apud De VRIES, 2004, p. 153).

O holandês Johan Pennink¹⁷ (1905) foi provavelmente o primeiro a desenhar uma rede de fluxo com base na carga hidráulica observada em campo (Figura 6).

Theis¹⁸ publicou dois importantes trabalhos. O primeiro, em 1935, estabelece a equação para o rebaixamento da superfície piezométrica de um poço em um aquífero confinado em razão da retirada de água, tornando-se a base para outras formulações para aquíferos confinados e semiconfinados. Em 1938, publicou outro artigo, no qual descreve a formação de um cone regional de depressão e seu impacto no equilíbrio dinâmico do aquífero.

Theis (1938 apud FETTER Jr., 2004b p. 950) comenta:

[...] Na natureza, o sistema hidráulico em um aquífero está em balanço; a descarga inicial é igual à recarga e a superfície piezométrica é mais ou menos fixa em uma posição. Descarga por poço é uma nova descarga sobreposta no sistema prévio e um novo equilíbrio deve ser estabelecido, níveis de água têm que descer por todo aquífero em uma extensão suficiente para reduzir a descarga natural ou crescer a recarga em uma quantidade igual à quantidade descarregada pelo poço. Até esse novo equilíbrio a água tem que ser retirada daquela armazenada no aquífero, conseqüentemente a quantidade retirada pelo poço é suficiente para causar uma depressão na superfície piezométrica, trocando a recarga ou descarga natural por

¹⁷ PENNINK, J. M. K., Over de beweging van groundwater. *De Ingenieur*, 20, p. 482-492 + 42 diagrams, 1905.

¹⁸ THEIS, C.V. The lowering of the piezometric surface and the rate and discharge of a well using ground water storage. *Transactions of the American Geophysical Union* 16, 519-524, 1935.

THEIS, C.V. The significance and nature of the cone of depression in ground water bodies. *Economic Geology* 38, p. 889-902, 1938.

uma quantidade apropriada. A depressão da superfície piezométrica é chamada de cone de depressão.[...]

Aplicações de integrais de contorno para problemas de águas subterrâneas, usando transformada conforme e integrais de Poisson, são encontradas no trabalho de Hamel¹⁹ (1934 apud STRACK; HAITJEMA, 1981a, p. 135) e Numerov²⁰ (1939 apud STRACK; HAITJEMA, 1981a, p. 135).

Hubbert (1940) introduziu o potencial de força, o qual combina o potencial gravitacional e o de pressão, deduzindo a equação experimental de Darcy fundamentado na Equação de Navier-Stokes. Hubbert demonstrou que a Equação de Darcy para escoamento subterrâneo é similar à Lei de Ohm para fluxo de eletricidade. Também demonstrou que poços em um aquífero homogêneo e isotrópico resultam em um campo potencial uniforme concêntrico (FETTER Jr., 2004b, p. 950).

Girinski (1946), adotando as hipóteses de Dupuit-Forchheimer, sugere a adoção de potencial baseado na representação da descarga em um ponto qualquer do plano horizontal do aquífero por meio da integração ao longo da vertical.

Na mesma linha do trabalho de Hamel (1934), Wooding²¹ (1966) apresentou aplicações de integrais de contorno e transformação conforme (STRACK; HAITJEMA, 1981a, p. 1535).

Kirkhan (1967) expõe um modelo teórico de meio poroso que obedece às simplificações de Dupuit-Forchheimer. O modelo remove os paradoxos envolvidos em virtude da suposição de que o fluxo vertical inexistente, o que não é fisicamente observado. O trabalho de Kirkham possibilitou maior entendimento das simplificações de Dupuit-

¹⁹ HAMEL, G. Ueber Grundwasssen. **Z. angew. Math. Mech.** 14 (3), p. 129-157, Berlin, 1934.

²⁰ NUMEROV, S. N. Seepage in drained earth dams on impervious foundations. **Izv NauchIssled. Inst. Gidrot.**, 25, 1939.

²¹ WOODING, R. A. Groundwater flow over a sloping impermeable layer 2, Exact solutions by conformal mapping. **J. Geophys. Res.**, 71 (12), 2903-2910, 1966.

Forchheimer, seus limites e aplicações, servindo de referência para muitos estudos posteriores.

Jeppson²² (1968) estudou a percolação em barragens, usando o plano complexo. Seu trabalho foi adaptado por Liu e Liggett²³ (1978) para uso de equações de integrais de contorno. Van der Veer²⁴ (1976, 1978) apresentou um método em termos de funções de variáveis complexas na forma clássica de aplicação de equações de integrais de contorno.

Irmay²⁵ (1960) foi provavelmente o primeiro a usar linhas de injeção/extração para resolução de problemas de contorno aplicados a escoamentos subterrâneos. Seguindo Irmay, Liggett (1977) abordou escoamento em termos de variáveis reais (STRACK, 1989, p. 283).

Os problemas bidimensionais abordados até aqui concentravam-se, em sua maioria, no plano vertical, tendo as integrais de contorno aplicadas ao longo de limites fechados.

De Josselin de Jong²⁶ (1960, 1969, 1977, apud STRACK; HAITJEMA., 1981a, p. 1535) propôs o uso de distribuições de dipolos e vórtices para escoamento em meio poroso ao longo da interface móvel de dois fluidos com diferentes densidades.

Elementos isolados em um domínio infinito não haviam ainda sido considerados, entretanto o trabalho de Crouch²⁷ (1976, apud STRACK; HAITJEMA., 1981a, p. 1535) sobre

²² JEPPSON, R. W. Seepage through dams in the complex potential plane. **J. Irrig. Drain. Div. Am. Soc. Civ. Eng.**, 94(IRI), 23, 1968.

²³ LIU, P. L. F., LIGGETT, J. A. An efficient numerical method of two dimensional steady groundwater problems. **Water Resour. Res.**, 14(3), p. 385-390, 1978.

²⁴ VAN DER VEER, P. Calculation method for two-dimensional groundwater flow. **Delft Progr. Rep.**, 2, p. 35-49, 1976.

VAN DER VEER, P. **Calculation methods for two-dimensional groundwater flow**. Ph.D. thesis, Tech. Univ. Delft, The Netherlands, 1978.

²⁵ IRMAY, S. **Calcul du rebattement des nappes aquiferes**. VI^{enes} Journées de l'Hydraulique, 7, Question I, Nancy, France. 1960.

²⁶ DE JOSSELIN DE JONG, G. Singularity distributions for the analysis of multiple fluid flow throu porous media. **J. Geophys. Res.**, 65, p. 3739-3758, 1960.

DE JOSSELIN DE JONG, G. Generating functions in the theory of the flow throu porous media, from **Flow Through Porous Media**, ed. by R. I. De Wiest, chap 9. Acad., New York, p. 377-400, 1969.

DE JOSSELIN DE JONG, G. Review of vortex theory for multiple fluid flow. **Delft Progr. Rep.**, 2, p. 225-236, 1977.

descontinuidades em corpos elásticos semi-infinitos apontava para um caminho promissor no âmbito do estudo de fluxo em sistemas de aquíferos regionais.

Baseado no trabalho de Girinski (1945), Strack (1981) introduziu o conceito de potencial completo (*comprehensive*), objetivando a análise de sistema de aquíferos contendo lentes de argila.

2.1 O Método de Elementos Analíticos (AEM)

O Método de Elementos Analíticos (*Analytic Element Method* - AEM) tem marco inicial em dois artigos publicados em 1981 por Strack e Haitjema, sendo inicialmente denominado pelos autores como distribuições de singularidades (STRACK; HAITJEMA., 1981a, 1991b).

O primeiro artigo refere-se à base do método, considerando soluções elementares em meio homogêneo para evento de recarga sobre uma área elíptica de centro determinado, escoamento uniforme e poços. Linhas de perda ou ganho (*line sink/source*) foram utilizadas para modelar rios e córregos e para aproximar uma passagem circular entre dois aquíferos.

No segundo artigo, o conceito de inhomogeneidade é introduzido e modelado por meio de linhas de dipolos ou linhas duplas (*line doublet*). Assim, o uso do método é estendido para regiões de diferentes condutividades, desde que para cada uma delas a condutividade seja constante.

Strack (1989) sistematiza o método no livro *Groundwater Mechanics*, onde aprofunda e introduz outros conceitos importantes. Strack aborda a modelagem de elementos

²⁷ CROUCH, S. L. Solution of plane elasticity problems by the displacement discontinuity method. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 10, p. 301-343, 1976

de drenagem, elementos de infiltração variável, lagos circulares, lagos poligonais, elementos curvos e faz uma breve discussão sobre os efeitos do escoamento transiente.

Strack, ainda, introduz o conceito de elementos de ordem superior, considerando funções polinomiais para aproximar os esforços dos elementos lineares, que são usados para modelar, inomogeneidades e lagos poligonais. Rios são modelados de forma semelhante, usando polígonos abertos.

Elementos tridimensionais são abordados por Haitjema (1995, p. 180-199), sobretudo no que diz respeito a poços parcialmente penetrantes. Haitjema traz aplicações do método para áreas de proteção de poços e estudo do movimento de contaminantes.

O conceito da sobreespecificação de superblocos é proposto por Jankovic e Barnes (1999), o que reduz consideravelmente o esforço computacional do método. Para tal, é proposto o uso de pontos de controle conforme os pontos de Chebyshev e da expansão de Laurent para o cálculo da influência de elementos distantes do ponto avaliado.

2.1.1 Aplicações Computacionais e Implementação do AEM

Juntamente com o prof. Henk Haitjema, da Universidade de Indiana – EUA, Strack desenvolveu em Fortran 77 o primeiro programa de elementos analíticos – SYLENS (*SteadYstate flow with LENseS*) objetivando a simulação do impacto do canal de *Tennessee – Tombigbee* sobre o sistema de aquíferos circunvizinhos (STRACK, 1989, p. 500; HAITJEMA, 1995, p. 205) .

Durante a década de 1980, o método proposto por Strack e Haitjema teve avanços significativos por meio de várias aplicações práticas desenvolvidas nos Estados Unidos e na

Europa. O desenvolvimento dos computadores, bem como das técnicas computacionais, possibilitou a maturação do método e o surgimento de vários outros programas na sucessão do SYLENS. Destaca-se o QUICKFLOW de Geragty e Miller, que se baseia no programa SLWL contido no livro de Strack *Groundwater mechanics*, de 1989.

No início da década de 1990, a *Strack Consulting Company* desenvolveu o SLAEM (*Single Layer Analytic Element Method*) para abordagem de problemas de fluxo em camada única, sendo utilizado em várias firmas de consultoria. Em 1992, o SLAEM incorporou problemas de maior complexidade, envolvendo aquíferos múltiplos, dando origem ao MLAEM (*Multi Layer-Analytic Element Method*). Na evolução do método, novos elementos foram desenvolvidos e incorporados, tais como linhas de perda e ganho, linhas duplas curvilíneas e não-lineares e áreas de perda ou ganho lineares, ou seja, elementos cujas distribuições de densidade variam conforme polinômios de ordem maior que zero (GOMES, 2002, p. 9).

Elementos tridimensionais, tais como poços parcialmente penetrantes e discos de perda ou ganho foram incorporados no modelo bidimensional de Haitjema GFLOW (*Groundwater FLOW*) em 1985 e GFLOW1 em 1995. Elementos tridimensionais adicionais foram desenvolvidos por Fitts e incorporados ao programa TWODAN (*TWO-Dimensional Analytic groundwater flow model*) em 1994. Além da incorporação de elementos analíticos avançados, o TWODAN apresenta uma interface gráfica que facilita substancialmente a interação com o usuário.

Em 1994, a *United States Environmental Protection Agency* (EPA) desenvolveu um modelo semi-analítico em cooperação com a Universidade de Minnesota e com a Universidade de Indiana – o *WhAEM* (*Wellhead Analytic Element Model*), objetivando a proteção de poços de água potável. O programa permite delinear áreas de zona de captura para campos de poços com indicações de prováveis assimetrias e extensões bidimensionais

(GOMES, 2002, p. 10). Em 2000, o programa ganhou uma versão para o sistema operacional Windows, trazendo as facilidades de interface gráfica que a plataforma oferece.

Encontram-se ainda alguns programas AEM de uso livre, dos quais se destacam o SPLIT, desenvolvido por Igor Jankovic (*Civil Engineering, Buffalo, NY*), que aborda o problema do escoamento subterrâneo em camada única em aquíferos inhomogêneos por meio de polígonos de contorno. Dentre outras inovações, suporta recargas variáveis espacialmente.

Como interface complementar para gerar arquivos de entrada ao SPLIT, há o VISUALBLUEBIRD, desenvolvido por James Craig (*Buffalo, NY*). Ainda na esfera do SPLIT, existe o ArcFlow e ArcaEM, desenvolvidos como uma extensão do programa comercial de sistema de informações geográficas (*Geographic Information System - GIS*) ArcView em suas versões 3.x e 8.x. Tanto o ARCFLOW quanto o ARCGIS criam uma interação dos dados calculados pelo SPLIT com as ferramentas GIS. Foram propostos por Brian Johnson, Justin Blum e Richard Soule (*Minnesota Department of Health, St. Paul, Minneapolis*).

Em virtude do acirramento da discussão sobre o direito autoral e de propriedade, novas formas de desenvolvimento e implementação de *softwares* foram propostas. Dentre elas, destacam-se aquelas que defendem o uso de código-fonte aberto aos interessados em usar, aprimorar, adaptar e incrementar o programa original. Neste contexto, surgiram os programas desenvolvidos em PYTHON TIMSL (*SingleLayer* – única camada) e TIMML (*MultiLayer* – múltiplas camadas) para modelagem de água subterrânea, usando o AEM, iniciativa de Mark Bakker (*University of Geórgia*) e Vic Kelson (*W.H.P.A. Inc., Bloomington*) (BATISTA, 2006, p. 107) .

O foco atual da evolução do AEM está na abordagem de problemas de fluxo transiente e variações contínuas das propriedades dos aquíferos. Paralelamente, os recentes conceitos de programação orientada a objetos (POO), interface gráfica (*Graphical User Interface* – GUI), visualização científica e processamento paralelo oferecem ao AEM maior

eficiência na implementação computacional e visualização dos resultados, estabelecendo novos horizontes a serem explorados e ampliados.

2.1.2 Estudos realizados no Brasil

No Brasil, estudos teóricos (BATISTA; SCHULZ; WENDLAND, 2003; BATISTA; WENDLAND; SCHULZ, 2005) e aplicados (GOMES; CASTRO, 2001; GOMES, 2002; WENDLAND; BATISTA; SCHULZ, 2004; ANDRADE, 2005; GOMES; CASTRO, 2005; BATISTA, 2006) vêm sendo desenvolvidos desde 2001.

Duas grandes aplicações do método devem ser destacadas:

- i. a região do Cariri, no Sul do estado do Ceará, mais precisamente no entorno das cidades de Juazeiro do Norte, Barbalha e Crato, foi modelada por Gomes e Castro (2005);
- ii. a região da lagoa do Bonfim, nas proximidades da cidade de Natal no Rio Grande do Norte, foi estudada por Batista (2006).

A viabilidade de aplicação do AEM em comparação com outros métodos numéricos foi avaliada por Gomes e Castro (2002), em estudo realizado na região de aluviões no município de Ibicuitinga no estado do Ceará.

O estudo de uma barreira hidráulica para contenção de chorume no aterro sanitário da cidade de São Carlos – SP foi desenvolvido por Penner, Batista e Schulz (2005).

Os estudos apontam para uma grande potencialidade do Método, sendo necessário o devido aprofundamento e desenvolvimento para possibilitar sua adequação à realidade brasileira.

3 FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Neste capítulo são abordadas as definições de carga hidráulica, Lei de Darcy e hipóteses de Dupuit-Forchheimer, com breve discussão sobre os limites e aplicações de cada conceito. Na sequência são introduzidos os conceitos de vetor de descarga e potencial de descarga, objetivando a construção do potencial complexo. A regência do escoamento é descrita segundo as Equações de Laplace e Poisson.

O conceito geral de potencial é desenvolvido, mostrando a extensão de seu uso em escoamentos subterrâneos; exemplos de potenciais são relatados, dos quais destaca-se o potencial de Girinski.

As ferramentas da análise complexa são utilizadas para a definição dos elementos matemáticos básicos que compõe o AEM, sendo os elementos reais formulados visando à implementação computacional.

Fluido em movimento

Antes de iniciarmos as definições matemáticas, porém, é necessário ressaltarmos a diferença entre termos que comumente são utilizados para caracterizar um fluido em movimento.

Conforme Schulz (2003, p. 25-26), o termo **escoamento** será usado para caracterizar genericamente o movimento de um fluido, enquanto:

- i. **Descarga** definirá a relação entre uma grandeza física que se desloca e o tempo gasto nesse deslocamento. Em outras palavras, é a grandeza física por unidade de tempo. Matematicamente pode ser escrita como:

$$Descarga = \frac{Grandeza}{Tempo};$$

- ii. **Fluxo** expressará a relação entre uma grandeza física que se desloca, a área transversal pela qual ela passa e o tempo gasto o para essa passagem. Em outras palavras, é a grandeza física por unidade de tempo e área, ou ainda a descarga por unidade de área. Matematicamente exprime-se da forma:

$$Fluxo = \frac{Grandeza}{Área \times Tempo} = \frac{Descarga}{Área};$$

- iii. **Vazão** expressará o volume que escoar por unidade de tempo. Em outras palavras é a *descarga* por unidade de volume,

$$Vazão = \frac{Volume}{Tempo}; \text{ e}$$

- iv. **Velocidade** expressará o espaço percorrido pelo tempo, pode-se dizer ainda, que velocidade é o *fluxo* do volume:

$$Fluxo = \frac{Volume}{Área \times Tempo} = \frac{Espaço}{Tempo}.$$

3.1 Carga Piezométrica e Lei de Darcy

Em geral, no escoamento subterrâneo, as variações de velocidade e viscosidade são pequenas. Ao redor de determinado ponto, as pressões são as mesmas, independentemente da direção, o que leva a considerar a pressão – força por unidade de área – como um escalar e

não um vetor ou tensor. “A pressão da água em um ponto é independente da direção da normal do plano no qual essa pressão age” (BRUGGEMAN, 1999, p. 531).

A pressão pode ser medida por meio de um piezômetro, com uma das extremidades localizadas no ponto estudado. A altura alcançada pela água multiplicada por seu peso específico será o valor da pressão no ponto. Define-se, então, carga de pressão como a altura da coluna d’água atingida no piezômetro, ou seja, pressão pelo peso específico da água, conforme equação (3.1) (BEAR J. , 1972, p. 64).

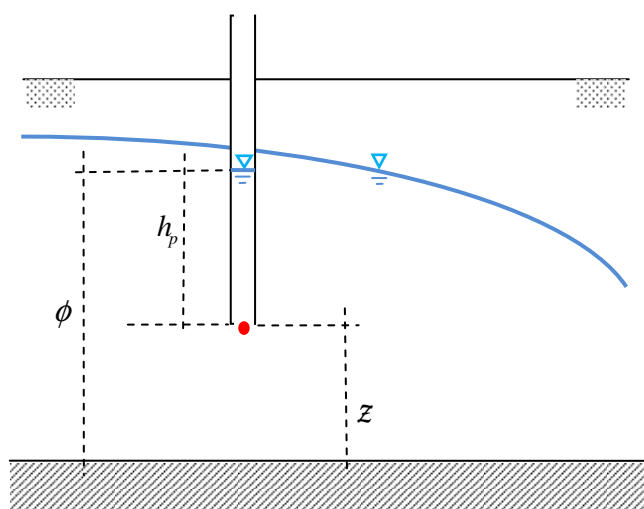


Figura 7 – Carga hidráulica.
Perfil esquemático de um aquífero com superfície livre.
Fonte: Strack (1989, p.7)

$$\phi = h_p \gamma_a \Rightarrow h_p = \frac{\phi}{\gamma_a}, \quad (3.1)$$

sendo:

h_p – carga de pressão [L],

ϕ – pressão no ponto [$MT^{-2}L^{-1}$] e

γ_a – peso específico da água [$MT^{-2}L^{-2}$].

Considerando o potencial gravitacional em um ponto, sua altura em relação a um dado referencial fornecerá a carga de posição. A soma da carga de posição com a carga de

pressão definirá a carga piezométrica²⁸ ou carga hidráulica no ponto, conforme ilustrado na Figura 7 e formulado na equação:

$$\phi = \frac{\rho g}{\gamma_a} z + z \quad (3.2)$$

sendo:

ϕ – a carga hidráulica [L] e

z – altura do ponto acima do nível de referência [L].

É importante lembrar que em regiões com diferenças elevadas de pressão e escoamentos velozes, por exemplo nas proximidades de poços, essa equação não é válida.

Darcy verificou, por meio de experimentos com colunas de areia (Figura 8), que a vazão que atravessa uma coluna de solo é diretamente proporcional à diferença de carga hidráulica, à área da seção transversal, e inversamente proporcional ao comprimento da coluna. Introduzindo uma constante de proporcionalidade, denominada de condutividade hidráulica, chega-se à equação:

$$Q = -KA \frac{\phi_2 - \phi_1}{L} \quad (3.3)$$

²⁸ Do grego: *piez(o)* - apertar, comprimir, pressionar; e de *métrico* - medida.

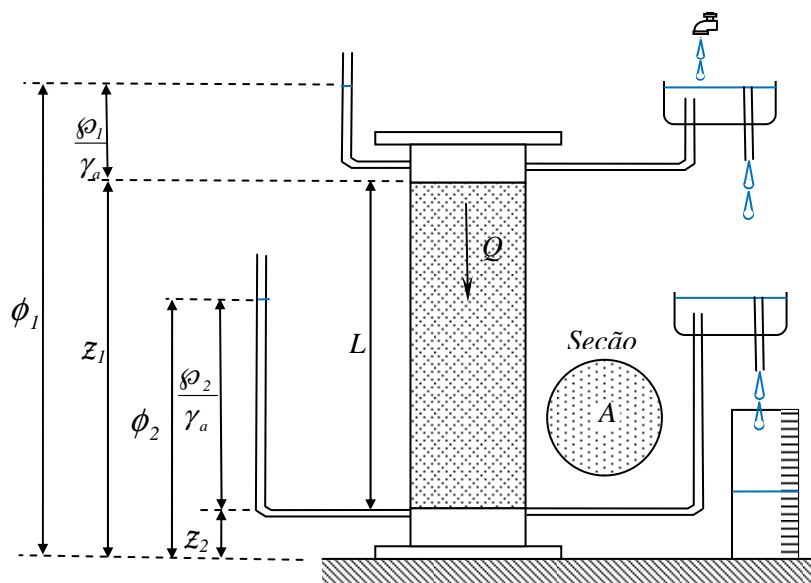


Figura 8 – Esquema de coluna vertical do experimento de Darcy.

Fonte: Bear (1979, p. 61).

Para um escoamento saturado em meio poroso, define-se fluxo específico (vazão por área), também denominada de velocidade de Darcy, como o negativo da multiplicação entre a condutividade hidráulica e o gradiente hidráulico (taxa de variação da carga piezométrica pela distância percorrida).

$$q = \frac{Q}{A} \Rightarrow q = -K \frac{d\phi}{dz}, \quad (3.4)$$

sendo:

q – velocidade de Darcy ou fluxo específico [LT^{-1}] e

K – condutividade hidráulica [LT^{-1}].

Como o fluxo ocorre no sentido oposto à variação da carga hidráulica, o sinal negativo se justifica. Generalizando a Lei de Darcy para um meio tridimensional isotrópico e homogêneo, tem-se:

$$\begin{aligned}
 q_x &= -K \frac{\partial \phi}{\partial x}, \\
 q_y &= -K \frac{\partial \phi}{\partial y}, \\
 q_z &= -K \frac{\partial \phi}{\partial z},
 \end{aligned}
 \tag{3.5}$$

sendo:

q_j – fluxo específico na direção j [LT^{-1}], vazão por unidade de área.

A equação pode ser expressa vetorialmente como $\vec{q} = -K\nabla\phi$, onde $-\nabla\phi$ é definido como gradiente hidráulico (BEAR, 1979, p. 63).

Validade da Lei de Darcy

Quando as partículas do fluido movem-se em camadas ou lâminas segundo uma trajetória paralela diz-se que o escoamento é laminar; quando as partículas movem-se em direções diversas e aleatórias, diz-se que o escoamento é turbulento. O número de Reynolds permite estabelecer um limite entre o escoamento laminar e o escoamento turbulento (GILES, 1976, p. 143).

O número de Reynolds expressa em um adimensional a razão entre as forças inerciais e de viscosidade de um fluido. Adaptado para escoamento em meio poroso, é definido pela equação (BEAR, 1972, p. 125) :

$$Re = \frac{dq}{\nu},
 \tag{3.6}$$

sendo:

Re – número de Reynolds para meio poroso,

d – diâmetro médio do grão de solo [L] e

ν – viscosidade cinemática do fluido [$L^2 T^{-1}$].

Segundo a Lei de Poiseuille para capilares, a velocidade em um escoamento laminar é proporcional à primeira ordem do gradiente hidráulico. Como no meio poroso o escoamento se dá em veios estreitos, é razoável supor que a Lei de Darcy é válida para escoamentos laminares (TODD, 1959, p. 47).

Dados experimentais obtidos em areias e em pequenas esferas apontam para o limite superior do número de Reynolds em um escoamento laminar entre de 1 a 10. O intervalo é justificado pela variação da distribuição e forma dos grãos em um meio natural (BEAR, 1972, p. 126). Observa-se que na maioria dos escoamentos subterrâneos, o número de Reynolds não ultrapassa a unidade (TODD, 1959, p. 48). Em outras palavras, para escoamentos subterrâneos em meios porosos, geralmente, têm-se um escoamento laminar com $Re < 1$ (HAITJEMA, 1995, p. 12) e a conseqüente validade da Lei de Darcy.

3.2 Hipóteses de Dupuit- Forchheimer

Para o escoamento livre (aquíferos freáticos), a não-linearidade da condição de contorno na superfície livre e o desconhecimento *a priori* de sua localização tornam a construção de uma solução analítica muito difícil, senão impossível (BEAR, 1972, p. 361).

Observa-se, entretanto, que em muitos escoamentos, a declividade da superfície freática é pequena. Considerando o regime permanente e bidimensional, a superfície freática poderá ser representada por uma linha de corrente (Figura 9). Para qualquer ponto sobre ela, a velocidade de Darcy pode ser escrita na forma de:

$$q_s = -K \frac{\partial \phi}{\partial s} = -K \frac{\partial z}{\partial s} = -K \sin \theta. \quad (3.7)$$

Como o ângulo θ é considerado pequeno, Dupuit propõe que o seno seja aproximado pela tangente. Essa hipótese leva à superfícies verticais equipotenciais independentes de z , com escoamento essencialmente horizontal.

$$q_s = -K \operatorname{tg} \theta = -K \frac{\partial z}{\partial x}. \quad (3.8)$$

Em outras palavras, assume-se uma distribuição de pressão hidrostática ao longo de cada vertical, ilustrado na Figura 9b. A rigor, em uma mesma vertical, o valor de $q_z = -K \frac{\partial \phi}{\partial z}$ varia de $q_z = 0$ na base horizontal e impermeável do aquífero até $q_z = -K \operatorname{sen}^2 \theta$ na superfície freática. Ao considerar a simplificação de Dupuit o valor para o escoamento vertical será nulo (Figura 9b).

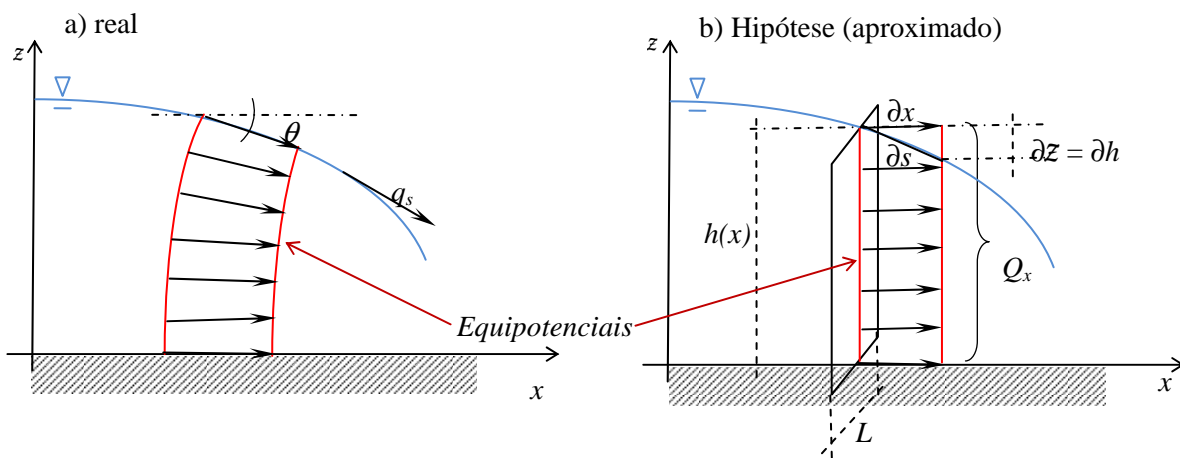


Figura 9 – Simplificações de Dupuit para aquífero livre.
Considerando o ângulo de tangência da superfície livre pequeno, o fluxo pode ser tratado como horizontal, sem escoamento na direção vertical.
Fonte: Bear (1972, p. 362)

As hipóteses de Dupuit permitem reduzir em uma dimensão a análise do escoamento. Assim, o domínio tridimensional pode ser analisado considerando o plano xy com o gradiente hidráulico em cada ponto constante ao longo da vertical.

Segundo essa análise para um meio isotrópico, tem-se:

$$q_x = -K \frac{\partial \phi}{\partial x} \text{ e } q_y = -K \frac{\partial \phi}{\partial y}, \text{ sendo } \phi = \phi(x, y), \quad (3.9)$$

com q_x e q_y constantes ao longo da vertical, independentes de z .

Deve-se atentar para as regiões onde a componente vertical do escoamento não pode ser negligenciada, por exemplo, nas proximidades: da crista da superfície freática na presença de recarga; de poços parcialmente penetrantes; e de superfícies verticais impermeáveis. Nesses casos, adota-se uma distância de aproximadamente duas vezes o valor da altura saturada do aquífero para considerar as equipotenciais como verticais (BEAR, 1972, p. 364).

Bear (1972, p. 363) analisa as simplificações de Dupuit e conclui que o erro cometido é tanto menor quanto $\frac{K_x}{K_z} \left(\frac{dh}{dx} \right)^2 \ll 1$, onde $\frac{dh}{dx}$ é a inclinação da reta tangente à superfície freática no ponto estudado.

Um esquema baseado na subdivisão do solo em fendas e blocos (*slots and slabs*), ilustrado na Figura 10, se adequa às hipóteses de Dupuit. O chamado solo de Dupuit-Forchheimer (D. F.) remove os paradoxos envolvendo a inexistência do fluxo vertical.

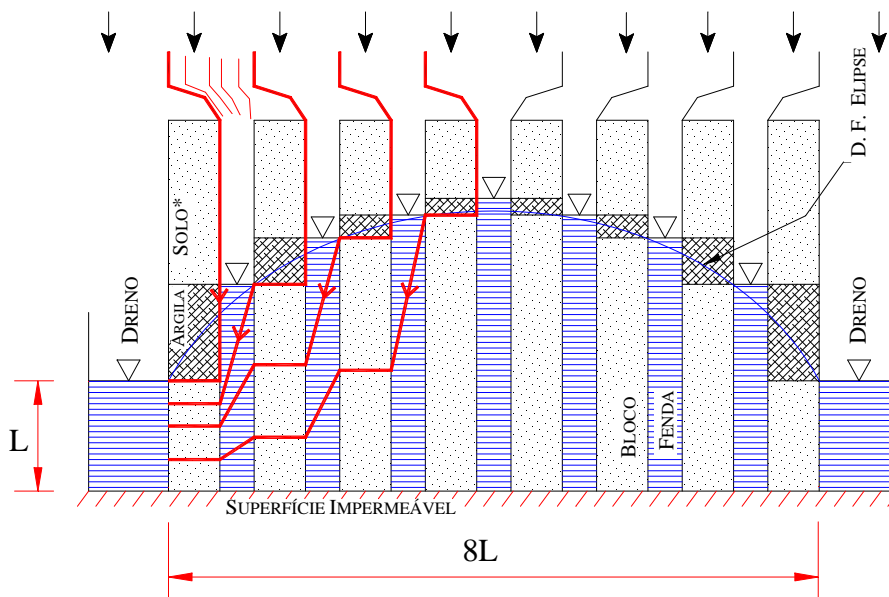


Figura 10 – Modelo de solo de Dupuit-Forchheimer.

* *Loam*, solo composto por aproximadamente 40% de areia, 40% de silte e 20% de argila.

Fonte: Kirkham (1967, p. 615)

Pela análise do solo de D. F., conclui-se que o modelo teórico de Dupuit-Forchheimer apresenta boa aproximação para o escoamento entre os pontos de drenagem, onde o erro cometido é menor, quanto for maior a razão entre o comprimento da região estudada pela profundidade da superfície impermeável. Quanto às equipotenciais e linhas de fluxo, estas podem ser tratadas como uma rede de escoamento, contendo algumas distorções nas proximidades dos drenos (KIRKHAM, 1967, p. 621).

As hipóteses simplificadoras de Dupuit-Forchheimer são eficazes, sobretudo quando as dimensões horizontais são suficientemente maiores do que a espessura do aquífero, tornando os modelos baseados nessas suposições adequados ao estudo de aquíferos regionais (HAITJEMA, 1995, p. 23).

Considerando escoamento unidimensional estacionário, sem recarga, entre dois drenos com cargas hidráulicas constantes, tem-se como resultado das aproximações de D. F.

uma curva parabólica para a carga hidráulica. Para o caso de existência de recarga igualmente distribuída, a forma da curva será elíptica, chamada elipse de Dupuit-Forchheimer (KIRKHAM, 1967, p. 615). As duas situações estão ilustradas na Figura 11.

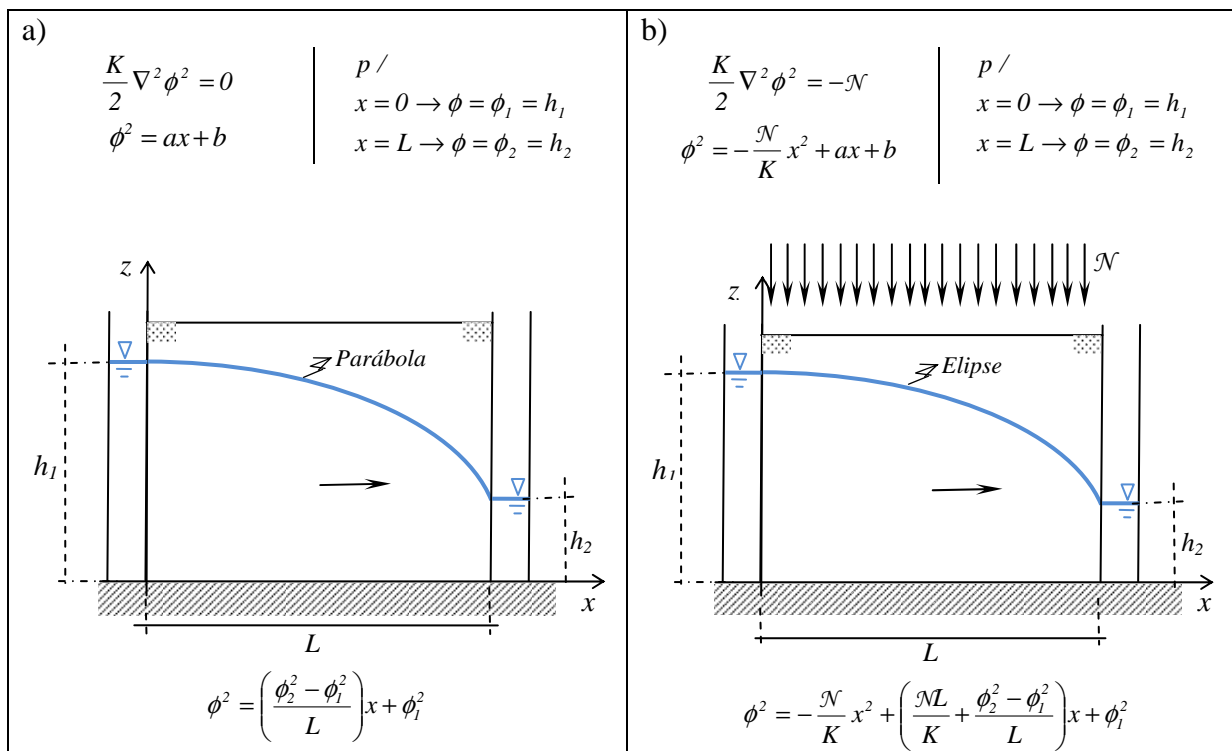


Figura 11 – Forma da superfície livre sob hipóteses de D.F.

Sem recarga (a) e com (b) recarga

Fonte: Adaptado de Kirkham (1967, p.615)

As hipóteses de D.F., uma vez adotadas adequadamente, possibilitam uma significativa redução da complexidade matemática para escoamento livre. Além disso, segundo Glover (1965, p. 510), apresentam ainda as seguintes vantagens:

- i. mudanças moderadas nos dados de entrada pouco modificam os resultados, dando mais estabilidade à simulação; e
- ii. como a formulação leva em conta o balanço hídrico e a aplicação do princípio da continuidade, fornece soluções exatas em termos da quantidade de água envolvida, apesar de serem aproximadas em termos do potencial;

Outra vantagem é apontada por Strack (2003, p. 2):

- iii. nas áreas onde componentes verticais do escoamento são relativamente grandes (*e.g.*, na vizinhança de poços parcialmente penetrantes), produz soluções precisas em termos de descarga, mas são apenas aproximadas em termos de cargas piezométricas. Essa limitação não impede a determinação de linhas de corrente tridimensionais em tais modelos.

3.3 Vetor de Descarga e Potencial de Descarga

A formulação em termos de potencial de descarga simplifica matematicamente o problema. A equação diferencial que governa o escoamento livre é não-linear em termos da carga hidráulica. Em matéria do potencial de descarga, porém, a linearidade está presente – o que é imperativo para a superposição das soluções.

Vetor de descarga é definido como a taxa de vazão por unidade de largura, em uma direção específica. Observe que a vazão é dada em $[L^3/T]$ e o vetor de descarga em $[L^2/T]$.

O vetor de descarga na direção j pode ser descrito pela integral da velocidade de Darcy ao longo da espessura saturada do aquífero:

$$Q_j = \int_0^h q_j dz . \quad (3.10)$$

Adotando as hipóteses de Dupuit-Forchheimer, q_j não varia ao longo da espessura do aquífero, então:

- para escoamento confinado com espessura constante, $h = H$,

$$Q_x = Hq_x$$

e (3.11)

$$Q_y = Hq_y.$$

Introduzindo a definição de q_j dada pela equação de Darcy, tem-se:

$$Q_x = H \left[-K \frac{\partial \phi}{\partial x} \right] = -\frac{\partial [HK\phi]}{\partial x}$$

e (3.12)

$$Q_y = H \left[-K \frac{\partial \phi}{\partial y} \right] = -\frac{\partial [HK\phi]}{\partial y}.$$

- para escoamento livre, a espessura da camada saturada define a região do escoamento. Assim a altura será dada pela carga hidráulica $h = \phi$.

$$Q_x = \phi q_x$$

e (3.13)

$$Q_y = \phi q_y.$$

Introduzindo a definição de q_j dada pela equação de Darcy, obtém-se:

$$Q_x = \phi \left[-K \frac{\partial \phi}{\partial x} \right] = -\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{K\phi^2}{2} \right]$$

e (3.14)

$$Q_y = \phi \left[-K \frac{\partial \phi}{\partial y} \right] = -\frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{K\phi^2}{2} \right].$$

No sentido de unificar as formulações para escoamento confinado e livre, define-se o potencial de descarga na forma das equações (3.15) e (3.16).

$$\Phi = HK\phi + c_c \quad (\text{para escoamento confinado}) \quad (3.15)$$

e

$$\Phi = \frac{K\phi^2}{2} + c_l \quad (\text{para escoamento livre}). \quad (3.16)$$

A descarga pode agora ser definida em termos de seu potencial:

$$Q_x = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}$$

e

$$Q_y = -\frac{\partial \Phi}{\partial y}. \quad (3.17)$$

Ressalta-se que o potencial de descarga Φ é uma quantidade abstrata que não pode ser identificada diretamente. Este ente matemático não pode ser medido no campo, porém a carga hidráulica ϕ pode, e, com base nesta, é possível derivar o potencial de descarga, sendo conhecidas a espessura e a condutividade hidráulica do aquífero (HAITJEMA, 1995, p. 31).

Considerando um aquífero contendo ambas as situações, com parte do escoamento confinado e parte livre (Figura 12), sendo preservada a continuidade da descarga na zona de transição, pode-se igualar as expressões $\Phi(x, y)$ e determinar as constantes envolvidas. Desta forma, é possível utilizar o conceito de potencial de descarga para um aquífero que contenha diferentes zonas de escoamento sem a necessidade de determinação prévia das regiões de transição.

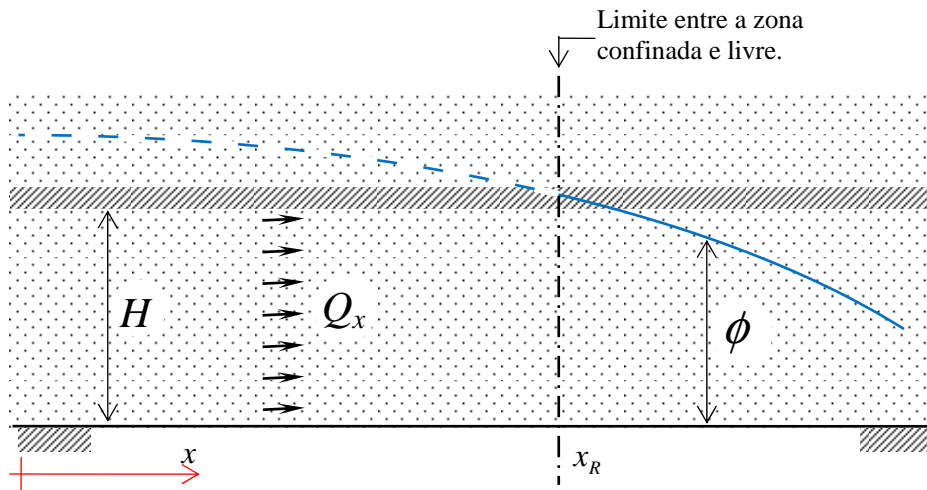


Figura 12 – Zona de transição entre escoamento confinado e livre.

Fonte: Adaptado de Haitjema (1995, p. 36)

Assumindo continuidade do potencial na seção de transição x_R , limite entre as

zonas confinada e livre do escoamento, pode-se igualar as expressões (3.18) e (3.19)

obtendo-se,

$$\Phi_c = HK\phi_{x_R} + c_c \tag{3.18}$$

e

$$\Phi_l = \frac{K\phi_{x_R}^2}{2} + c_l \tag{3.19}$$

Admitindo a $c_l = 0$ (STRACK, 1989, p. 49), obtém-se,

$$c_c = -\frac{KH^2}{2}. \tag{3.20}$$

logo:

$$\Phi = KH\phi - \frac{1}{2}KH^2, \text{ para } \phi \geq H, \tag{3.21}$$

e

$$\Phi = \frac{1}{2}K\phi^2, \text{ para } \phi < H.$$

A carga hidráulica pode ser obtida, a partir do potencial de descarga conhecido, conforme as equações (3.22).

$$\phi = \frac{\Phi + \frac{1}{2}KH^2}{KH}, \text{ para } \Phi \geq \frac{1}{2}KH^2 \quad (3.22)$$

e

$$\phi = \sqrt{\frac{2\Phi}{K}}, \text{ para } \Phi < \frac{1}{2}KH^2.$$

3.4 Equação da Continuidade e Equações Governantes

Escoamento livre

Para um fluido incompressível, em regime permanente, nenhuma quantidade de fluido pode ser perdida ou armazenada dentro de um dado volume de controle.

Adotando-se as simplificações de Dupuit-Forchheimer, seja um volume de controle $h(x, y)\Delta x\Delta y$, no entorno do ponto x_R, y_R (Figura 13).

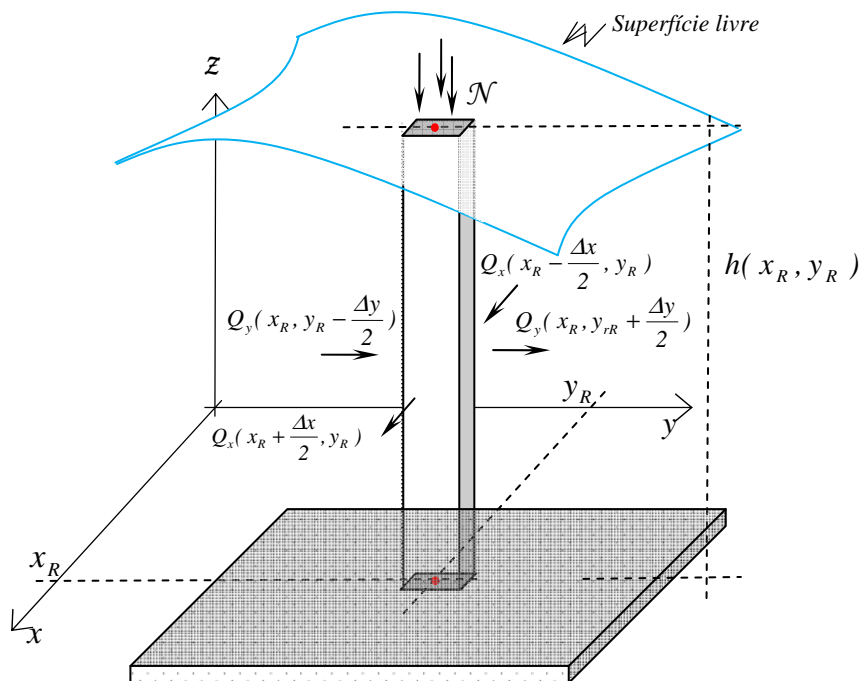


Figura 13 – Volume de controle para formulação da equação de Dupuit-Forchheimer. (escoamento livre)

Fonte: Adaptado de Haitjema (1995, p.80).

A descarga não varia ao longo da direção z e a equação da continuidade pode ser escrita considerando somente o plano xy (Figura 14). O fluxo que entra é igual ao fluxo que sai. Considerando a convenção para o fluxo que entra no volume de controle como positivo e para o que sai negativo:

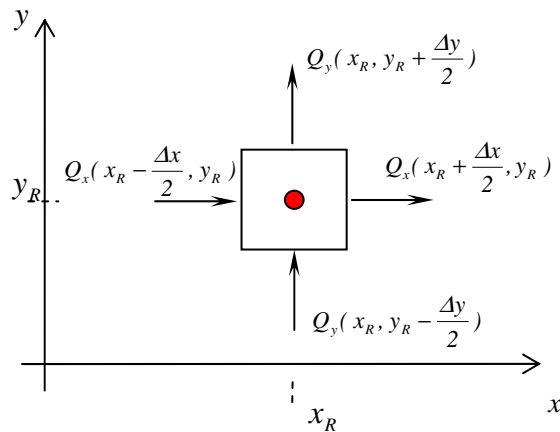


Figura 14 – Área de controle para modelo de Dupuit-Forchheimer

$$\begin{aligned}
 & [-Q_x(x + \frac{\Delta x}{2}, y, z) + Q_x(x - \frac{\Delta x}{2}, y, z)] \Delta y + \\
 & [-Q_y(x, y + \frac{\Delta y}{2}, z) + Q_y(x, y - \frac{\Delta y}{2}, z)] \Delta x = -\mathcal{N} \Delta x \Delta y.
 \end{aligned}
 \tag{3.23}$$

Dividindo a equação (3.23) pela área elementar $\Delta x \Delta y$ e levando-se ao limite quando $\Delta x \rightarrow 0$ e $\Delta y \rightarrow 0$, as alturas que determinam as faces tendem a $h(x_R, y_R)$. Daí:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = \mathcal{N}.
 \tag{3.24}$$

Onde \mathcal{N} representa a recarga no topo do escomaneto. Substituindo a definição do potencial de descarga das equações (3.17), obtém-se:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = -\mathcal{N} \quad (3.25)$$

ou

$$\nabla^2 \Phi = -\mathcal{N} . \quad (3.26)$$

As equações (3.25) e (3.26) são representações da chamada Equação de Poisson, neste caso, aplicada ao potencial de descarga.

Para o caso de não existir recarga ($\mathcal{N} = 0$), a equação transforma-se em:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0 \quad (3.27)$$

ou

$$\nabla^2 \Phi = 0 . \quad (3.28)$$

As equações (3.27) e (3.28) são representações da chamada Equação de Laplace aplicada ao potencial de descarga.

Escoamento confinado

Para o caso confinado, ilustrado na Figura 15, tem-se uma situação similar, considerando a altura do aquífero como constante, prevalecendo, sob certas circunstâncias, as mesmas equações regentes. Para o caso de ausência de recarga, o procedimento para obter a equação de Laplace é idêntico. Para existência de distribuição homogênea de infiltração entre as camadas superior e/ou inferior, o termo independente da equação de Poisson representa o balanço entre as contribuições.

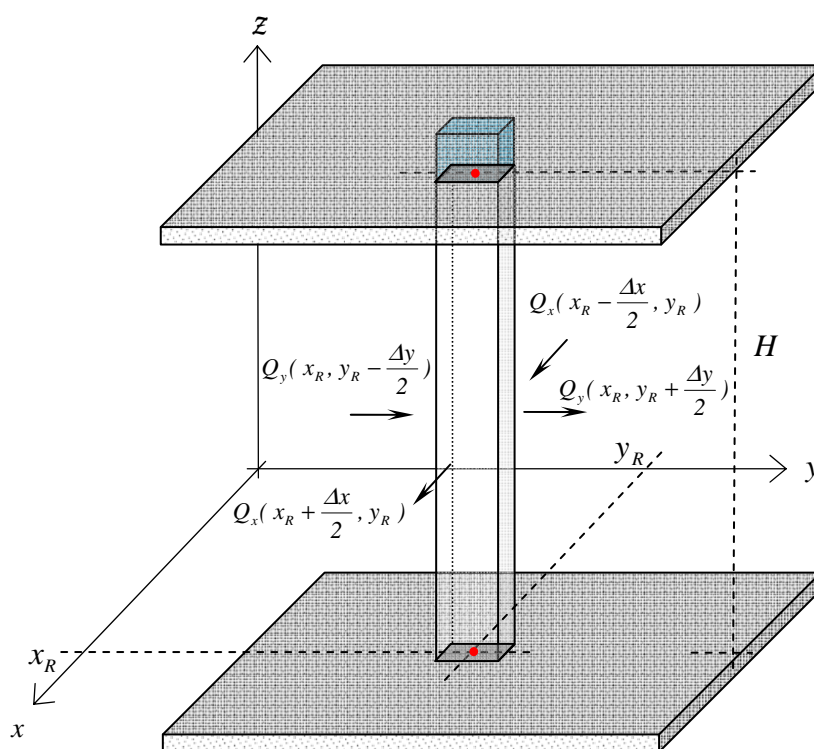


Figura 15 – Volume de controle para equação de fluxo, escoamento confinado.

Fonte: Adaptado de Verruijt(1970, p. 27)

Princípio da superposição

Problemas complexos em escoamentos subterrâneos, ao considerar o princípio da superposição, podem ser separados em partes que podem ser resolvidas individualmente para depois terem suas soluções combinadas, compondo a solução final.

O princípio da superposição estabelece que, se duas funções diferentes, Θ_1 e Θ_2 são soluções da equação linear qualquer, a função $\Theta = c_1\Theta_1 + c_2\Theta_2$ também será, sendo c_1 e c_2 constantes.

No caso da equação de Laplace, sendo Θ_1 e Θ_2 soluções válidas, pode-se escrever:

$$\frac{\partial^2 \Theta_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Theta_1}{\partial y^2} = 0 \quad (3.29)$$

$$\frac{\partial^2 \Theta_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Theta_2}{\partial y^2} = 0. \quad (3.30)$$

A multiplicação das soluções por uma constante não altera o produto.

$$c_1 \left[\frac{\partial^2 \Theta_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Theta_1}{\partial y^2} \right] = 0 \quad (3.31)$$

$$c_2 \left[\frac{\partial^2 \Theta_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Theta_2}{\partial y^2} \right] = 0 \quad (3.32)$$

$$\frac{\partial^2 c_1 \Theta_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c_1 \Theta_1}{\partial y^2} = 0 \quad (3.33)$$

$$\frac{\partial^2 c_2 \Theta_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c_2 \Theta_2}{\partial y^2} = 0 \quad (3.34)$$

Somando ambos os membros das equações:

$$\frac{\partial^2 c_1 \Theta_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c_2 \Theta_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c_1 \Theta_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c_2 \Theta_2}{\partial y^2} = 0 \quad (3.35)$$

ou

$$\frac{\partial^2 [c_1 \Theta_1 + c_2 \Theta_2]}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 [c_1 \Theta_1 + c_2 \Theta_2]}{\partial y^2} = 0. \quad (3.36)$$

como :

$$\Theta = c_1 \Theta_1 + c_2 \Theta_2,$$

obtem-se a formulação final:

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} = 0. \quad (3.37)$$

Em um problema com recarga, a solução geral do problema pode ser escrita considerando as soluções separadas para o caso da recarga (Poisson) e para o escoamento permanente (Laplace) que podem ser combinadas numa solução final. Em termos matemáticos, isso se traduz na solução de uma equação diferencial não homogênea, que se

comporta da forma de uma solução particular, e da solução da equação homogênea correspondente (ZILL, 2003, p. 149; HAITJEMA, 1995, p. 53).

$$\nabla^2 \Theta = \nabla^2 \Theta_{Laplace} + \nabla^2 \Theta_{poisson} = 0 + (-\mathcal{N}) \quad (3.38)$$

e

$$\Theta = \Theta_{Laplace} + \Theta_{Poisson} \cdot \quad (3.39)$$

Um exemplo é apresentado na Figura 16 para o caso unidimensional, entre dois drenos na presença de recarga. Utilizando o potencial de descarga e o princípio da superposição, pode-se dividir a solução do problema em dois casos conceituais:

- a) escoamento permanente entre dois drenos com cargas hidráulicas constantes,
- b) escoamento devido à recarga.

A Figura 16c superpõe as soluções conceituais para obtenção da solução final, conforme a solução obtida na Figura 11.

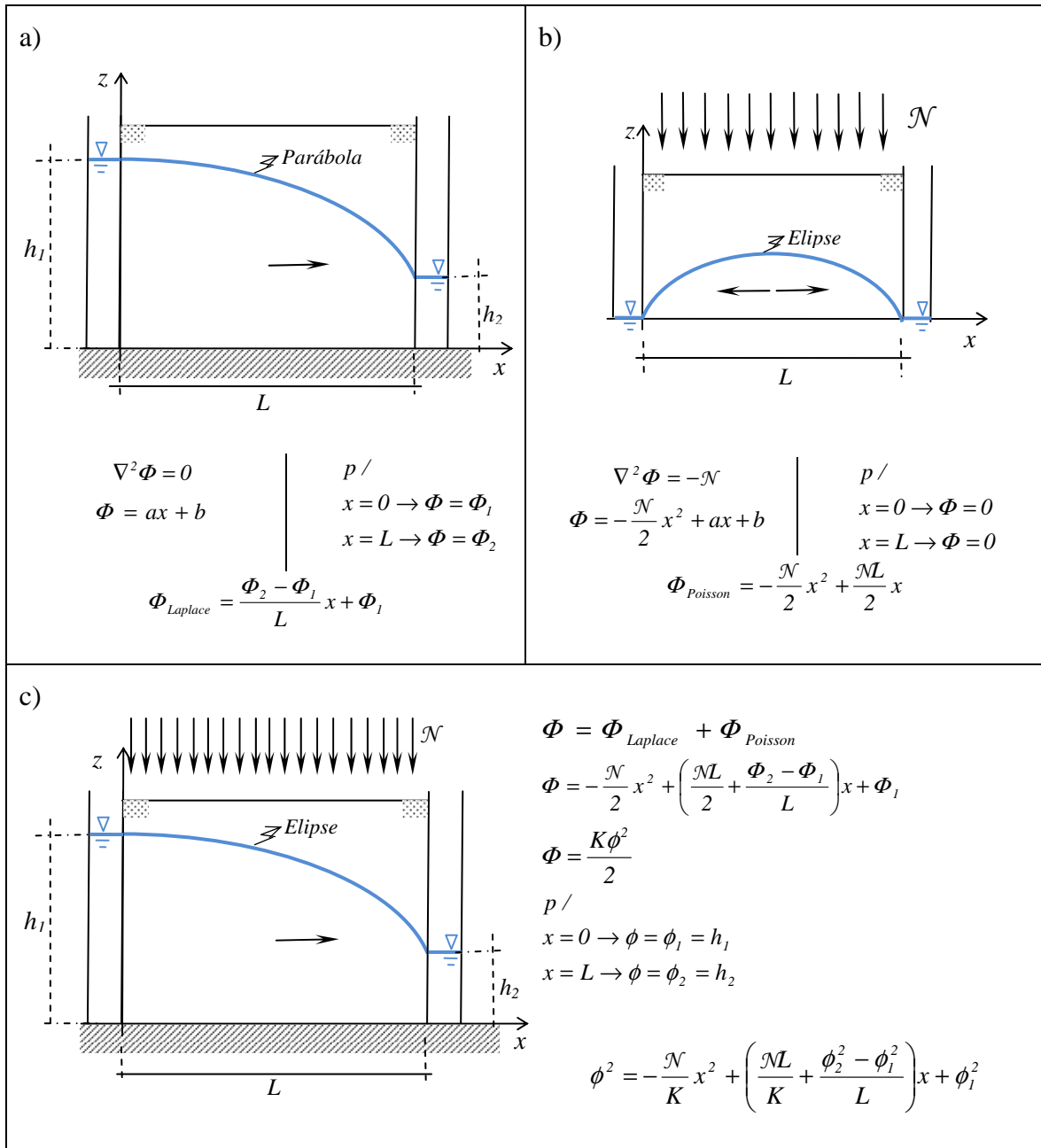


Figura 16 – Superposição de soluções – exemplo unidimensional.
 Fonte: Adaptado de Bear (1972, p. 379)

3.4.1 Potencial Complexo - Equipotenciais e Linhas de Corrente

As linhas equipotenciais são aquelas que ligam pontos de mesmo potencial Φ . Essas linhas podem ser desenhadas, originando um mapa equipotencial. As linhas de corrente são linhas que possuem o vetor de descarga sempre em sua tangente.

O fluxo em meio isotrópico ocorre ortogonalmente às linhas equipotenciais. Tomando-se as direções τ e η como a direção tangente e normal à linha de mesma função de corrente Ψ (Figura 17), pode-se definir a descarga nessas direções conforme as equações (3.17).

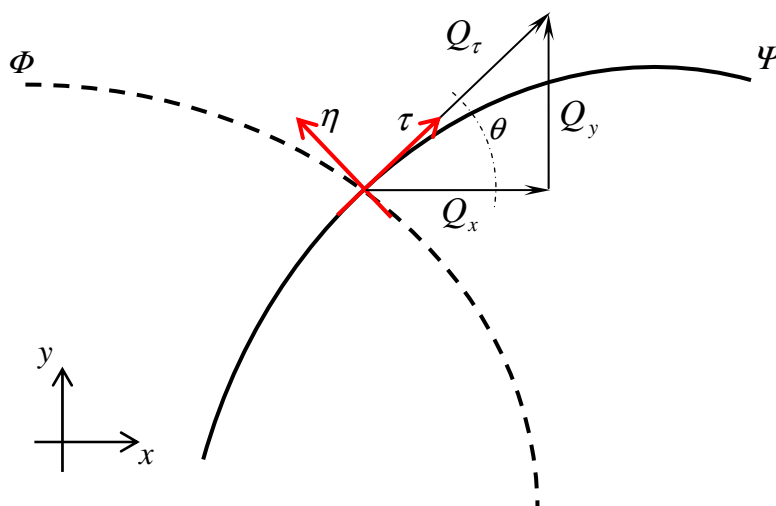


Figura 17 – Linha de corrente Ψ ortogonal à equipotencial Φ
Fonte: Strack (1989, p. 222)

Por semelhança de triângulos, verifica-se que,

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{dy}{dx} = \frac{Q_y}{Q_x}, \quad (3.40)$$

desenvolvendo em termos da derivada em relação a tangente η , tem-se que

$$\frac{dy/d\tau}{dx/d\tau} = \frac{Q_y}{Q_x} \quad (3.41)$$

e

$$Q_y \frac{dx}{d\tau} - Q_x \frac{dy}{d\tau} = 0. \quad (3.42)$$

Introduzindo a definição de descarga da equação (3.17), obtém-se,

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{dx}{d\tau} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{dy}{d\tau} = 0, \quad (3.43)$$

Por definição, a função de corrente será constante ao longo da linha de corrente;

assim, ao definir a função de fluxo Ψ , tem-se:

$$\frac{d\Psi}{d\tau} = 0, \quad (3.44)$$

pela definição da derivada total tem-se,

$$\frac{d\Psi}{d\tau} = \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{dx}{d\tau} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{dy}{d\tau} = 0. \quad (3.45)$$

Comparando as equações (3.43) e (3.45) tem-se:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = -\frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad (3.46)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} = +\frac{\partial \Phi}{\partial x}.$$

As equações (3.46) são as conhecidas Equações de Cauchy-Riemann²⁹(SPIEGEL, 1972, p. 95) . Uma solução que satisfaz a Equação de Laplace é conhecida como função harmônica, possuindo outra função harmônica conjugada, conforme as Equações de Cauchy-Riemann. O potencial de descarga Φ constitui a função solução da Equação de Laplace, enquanto a função conjugada representará a função linhas de fluxo Ψ . Ambas podem ser combinadas em única função complexa chamada de potencial complexo Ω .

²⁹ Também conhecidas como equações de D'Alembert-Euler (POLUBARINOVA-KOCHINA, 1962, p. 31)

Seja o número z no plano complexo, o potencial complexo será dado pela função $\Omega(z)$, tal que:

$$\Omega(z) = \Phi(z) + i\Psi(z), \quad z = x + iy. \quad (3.47)$$

em que:

x – representa a parte real da variável complexa z ,

y – representa a parte imaginária da variável complexa z ,

$\Phi(z)$ – representa a parte real da função complexa $\Omega(z)$ e

$\Psi(z)$ – representa a parte imaginária da função complexa $\Omega(z)$.

Pode-se, ainda, reescrever $\Phi(z)$ e $\Psi(z)$ como funções de x e y obtendo:

$\Phi(x, y)$ e $\Psi(x, y)$. Somente as funções contínuas e diferenciáveis representam tais funções, formando o potencial complexo $\Omega(z)$.

A continuidade é satisfeita se, para qualquer caminho seguido no plano complexo, o limite (3.48) é satisfeito:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \Omega(z) = \Omega(z_0). \quad (3.48)$$

A função Ω é diferenciável em z_0 apenas se o limite (3.49) existir independentemente do caminho ao longo do qual z se aproxima de z_0 (STRACK, 1989, p. 270).

$$\Omega'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\Omega(z) - \Omega(z_0)}{z - z_0}, \quad (3.49)$$

diferenciando $\Omega(z)$ pela direção paralela ao eixo x , obtém-se,

$$\Omega'(z_0)_{y=\text{constante}} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{\Phi(x, y_0) - \Phi(x_0, y_0)}{x - x_0} + i \frac{\Psi(x, y_0) - \Psi(x_0, y_0)}{x - x_0} \right) \quad (3.50)$$

consequentemente,

$$\Omega'(z_0)_{y=\text{constante}} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + i \frac{\partial \Psi}{\partial x} . \quad (3.51)$$

Diferenciando $\Omega(w)$ pela direção paralela ao eixo y , obtém-se,

$$\Omega'(z_0)_{x=\text{constante}} = \lim_{y \rightarrow y_0} \left(\frac{\Phi(x_0, y) - \Phi(x_0, y_0)}{i(y - y_0)} + i \frac{\Psi(x_0, y) - \Psi(x_0, y_0)}{i(y - y_0)} \right) \quad (3.52)$$

consequentemente,

$$\Omega'(z_0)_{x=\text{constante}} = \frac{\partial \Psi}{\partial y} - i \frac{\partial \Phi}{\partial y} . \quad (3.53)$$

Pela definição:

$$\Omega'(z_0)_{x=\text{constante}} = \Omega'(z_0)_{y=\text{constante}} , \quad (3.54)$$

obtém-se:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad (3.55)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} = + \frac{\partial \Phi}{\partial x} .$$

Essas são as equações de Cauchy-Riemann vistas anteriormente, deduzidas por meio da função potencial e da função de corrente ratifica o potencial complexo enquanto função analítica.

Ao adotar a técnica do potencial complexo, especificamente para os elementos rígidos pela equação de Laplace, as funções potencial e de corrente são obtidas com o mesmo esforço teórico usado normalmente para obter a função potencial (HAITJEMA, 1995, p. 167)

Nas regiões de infiltração, geralmente representadas pelas regiões fechadas, o escoamento é regido pela equação de Poisson em seu interior. Neste caso, somente a função potencial de descarga é definida – não sendo possível o uso do potencial complexo já que as funções de corrente não são definidas. No exterior, entretanto, onde há a prevalência da

Equação de Laplace, pode-se usar o potencial complexo contendo a função potencial e de corrente.

Todos os potenciais de descarga contêm parâmetros que serão determinados na incorporação das condições de contorno do problema, normalmente saltos na componente tangencial ou normal do vetor de descarga ao longo do elemento. Essas condições de contorno são reunidas com a precisão possível, dados o número de graus de liberdade e a natureza de cada elemento (STRACK, 2003, p. 2).

3.5 Potenciais em Escoamentos Subterrâneos

Uma grandeza, que não seja orientada, vinculada a cada ponto no plano, define a existência de um campo escalar bidimensional. A variação contínua do escalar, seja no tempo t ou nas direções x ou y , pode ser determinada pelo uso das respectivas derivadas parciais. Tratando-se de um caso permanente, somente as variações do campo quanto à posição são consideradas e abordadas pelo uso do operador gradiente, na forma de:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j . \quad (3.56)$$

Para um campo escalar G , o vetor ∇G aponta na direção de seu maior crescimento³⁰ $\|\nabla G\|$. O vetor gradiente de um campo escalar, também chamado de campo potencial, determinará um campo vetorial \vec{F} , conforme:

$$\vec{F} = \nabla G . \quad (3.57)$$

³⁰ Tratando-se de escoamento subterrâneo, o fluxo se dá do maior potencial para o menor, a convenção de sinais deve considerar o gradiente hidráulico na forma definida pelas equações (3.5).

Em razão da continuidade, é natural presumir a existência de curvas de mesmo potencial, ao longo das quais o vetor gradiente será ortogonal às tangentes em cada ponto. O produto escalar do vetor tangente pelo campo vetorial em um dado ponto será igual a zero:

$$\vec{F} \cdot d\vec{s} = F_x dx + F_y dy = 0, \quad (3.58)$$

A equação (3.58), sob certas condições, é integrável se existir uma função escalar $G_{ps} = G_{ps}(x, y)$ (MORSE; FESHBACH, 1937) tal que:

$$F_x = \mathcal{A} \frac{\partial G_{ps}}{\partial x}$$

e

$$(3.59)$$

$$F_y = \mathcal{A} \frac{\partial G_{ps}}{\partial y}.$$

Em que $\mathcal{A} = \mathcal{A}(x, y)$ é chamado de fator de integração³¹ e G_{ps} é chamado de pseudo-potencial. Para os casos em que $\mathcal{A} = -1$ a função G é chamada de função potencial para o campo vetorial \vec{F} , sendo as curvas nas quais $G_{ps} = constante$ denominadas de curvas equipotenciais.

Para o caso bidimensional, tem-se que $F_z = 0$, $\frac{\partial F_x}{\partial z} = 0$ e $\frac{\partial F_y}{\partial z} = 0$. A identidade $\vec{F} \cdot \text{rot} \vec{F} = 0$ é sempre satisfeita e a condição necessária para a existência de funções pseudopotenciais é que a condutividade hidráulica seja um fator de integração, caso em que o meio será anisotrópico e inhomogêneo, não existindo colinearidade entre o gradiente hidráulico e a velocidade de Darcy. Ressalta-se que, para meios bidimensionais isotrópicos, mesmo que inhomogêneos, as linhas de fluxo serão normais às equipotenciais (BEAR, 1972,

³¹ O método do fator de integração é devido a Leibniz e consiste em multiplicar a equação diferencial por uma determinada função, de modo que a equação resultante seja resolvível. O método foi aprofundado por Euler no mesmo artigo em que identifica a condição para que as equações diferenciais de primeira ordem sejam exatas (BOYCE; DiPRIMA, 2006, p. 16-54).

p. 131). O vetor gradiente de uma função pseudopotencial é colinear e de sinal contrário ao vetor da velocidade de Darcy e igual ao componente do gradiente hidráulico na direção do fluxo (MATANGA, 1988, p. 553).

A abordagem do problema de escoamento subterrâneo utilizando potenciais permite:

- i.* simplificar os cálculos usando a linearização da equação governante em termos da Equação de Laplace ou Poisson, com isso é possível usar importantes ferramentas disponíveis no escopo da Teoria do Potencial, tais como transformações conforme³²;
- ii.* estimar as características hidrogeológicas do escoamento como: perfil de condutividades; intrusões salinas de aquíferos costeiros; existência de lentes de argila; e variação de densidade do fluido.

O uso de potenciais é recorrente na literatura de águas subterrâneas. Alguns exemplos estão listados na Figura 18, dos quais, identificam-se três grupos:

- i.* os pseudopotenciais, que dizem respeito ao vetor velocidade que em virtude do meio anisotrópico possuem o vetor velocidade diverso do vetor gradiente hidráulico;
- ii.* os potenciais em termos da velocidade de Darcy, notadamente aqueles que permitem lidar com a condutividade hidráulica constante (meios homogêneos e isotrópicos), formando dentro do gradiente a função potencial de velocidade; e

³²Transformação conforme é uma operação que estabelece correspondência entre pontos de dois planos (xy e uv , por exemplo) de tal forma que os ângulos existentes entre eventuais curvas de um dado plano são preservados em valor e sentido após a transformação, ou seja, no outro plano. (SPIEGEL, 1972, p. 304–305)

- iii. os potenciais de descarga, constituídos com base na integração da velocidade de Darcy ao longo da altura saturada do aquífero e na presença de condutividade hidráulica constante – por pedaços.

PSEUDOPOTENCIAIS [L]		
<p>Potencial de velocidade em função da carga hidráulica</p> <p>Generalizando a equação de Darcy para duas dimensões, tem-se a definição de um campo de velocidade, onde a velocidade de Darcy é diretamente proporcional ao gradiente de um campo de cargas hidráulicas. Para o caso geral, em que a condutividade hidráulica é função de x, y, a própria carga pode ser denominada como função pseudopotencial para o escoamento (BEAR, 1972, p. 130).</p>	$\vec{q} = -K\nabla\phi$ $K = K(x, y)$ $\Phi_h^* = \phi$ $\vec{q} = -K\nabla\Phi_h^*$	
<p>Potencial de Hubbert</p> <p>Considerando o conceito de carga hidráulica e que a variação de densidade decorre exclusivamente da pressão p, introduz-se um potencial que considera a variação de densidade do fluido, podendo ser usado em regiões de inclusão de água salina e em engenharia do petróleo; Esse pseudopotencial é conhecido como potencial de força de Hubbert (De WIEST, 1969, p. 6).</p>	$\phi = \frac{p}{\gamma} + z; K = K(x, y)$ $\gamma = \gamma(p)$ $\Phi_{Hb}^* = \int_{p_0}^p \frac{dp}{\gamma(p)} + z$ $\vec{q} = -K\nabla\Phi_{Hb}^*$	
POTENCIAIS DA VELOCIDADE DE DARCY [L ² T ⁻¹]		
<p>Potencial de velocidade</p> <p>Para o caso de meio homogêneo e isotrópico, onde a condutividade hidráulica é constante (BEAR, 1972, p. 130).</p>	$\vec{q} = -K\nabla\phi;$ $K = \text{Constante}$ $\Phi_v = K\phi \quad \vec{q} = -\nabla\Phi_v$	
POTENCIAIS DE DESCARGA [L ³ T ⁻¹]		
<p>Potencial de Forchheimer</p> <p>Lineariza a equação governante para escoamento livre. No caso de estado permanente transforma a chamada Equação de Forchheimer na Equação de Poisson (BEAR, 1972, p. 377).</p>	$\vec{Q} = -\nabla\Phi_F; \Phi_F = \frac{K\phi^2}{2}$ $\frac{K}{2}\nabla^2 h^2 + N = 0$ $\nabla^2\Phi_F + N = 0$	
<p>Potencial de Herzberg</p> <p>Supondo algumas hipóteses iniciais, Herzberg propõe um potencial para interface com águas salinas, considerando escoamento livre e confinado (BRUGGEMAN, 1999, p. 824).</p>	$\vec{Q} = -\nabla\Phi_{Hz}$ $\alpha = \frac{\gamma_{fresca} - \gamma_{salina}}{\gamma_{fresca}}$ $\Phi_{Hz} = \frac{1}{2}K\alpha H^2 \text{ (confinado)}$ $\Phi_{Hz} = \frac{1}{2}K\alpha(1 + \alpha)H^2 \text{ (Livre)}$	
<p>Potencial Completo</p> <p>Strack propõe um potencial para o estudo de lentes de argilas inclusas horizontalmente em um aquífero, estabelecendo um sistema de aquífero duplo, inferior e superior (STRACK, 1989, p. 130).</p>	$\Phi_{cp} = \frac{1}{2}K\left(\phi^u - H\right)^2 + KH\phi^l - \frac{1}{2}KH^2$ <p>$p / (\phi \geq H)$</p> $\Phi_{cp} = \frac{1}{2}K\left(\phi^u - H\right)^2 + \frac{1}{2}K\left(\phi^l\right)^2$ <p>$p / (\phi < H)$</p>	

ϕ - Carga hidráulica [L]
 γ - Peso espec. da água [ML⁻²T⁻²]
 p - Pressão [ML⁻¹T⁻¹]

\vec{q} - Velocidade de Darcy [LT⁻¹]
 K - Condutividade hidráulica [LT⁻¹]
 \vec{Q} - Descarga [L²T⁻¹]

ϕ^u - Carga hidr. aquíf. sup. [L]
 ϕ^l - Carga hidr. aquíf. inf. [L]

Figura 18 – Exemplos de aplicações de Potenciais em escoamento subterrâneo.

Definição do Potencial de Descarga com base no Potencial de Girinski

O potencial de Girinski é um potencial de descarga que permite envolver variações estratificadas da condutividade hidráulica e a conseqüente avaliação da carga hidráulica em perfis com diferentes camadas de solo.

Considerando a base horizontal do aquífero em $z=0$, as hipóteses de Dupuit-Forchheimer e o regime permanente, da definição da descarga (GIRINSKI, 1946, p. 341-342):

$$Q_x(x, y) = \int_0^{h(x,y)} q_x dz = - \int_0^{h(x,y)} K(z) \frac{\partial \phi}{\partial x} dz$$

e (3.60)

$$Q_y(x, y) = \int_0^{h(x,y)} q_y dz = - \int_0^{h(x,y)} K(z) \frac{\partial \phi}{\partial y} dz .$$

Seja,

$$\Phi_G = \int_0^h K(z)(\phi - z) dz .$$
(3.61)

Aplicando à equação (3.61) a regra de Leibnitz,

$$\frac{\partial \Phi_G}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h K(z)(\phi - z) dz = \int_0^h \frac{\partial h}{\partial x} K(z) dz + \frac{\partial h}{\partial x} K(z)(\phi - z) \Big|_{z=h} ,$$
(3.62)

e considerando as definições (3.60) , pode-se escrever:

$$\frac{\partial \Phi_G}{\partial x} = \int_0^h \frac{\partial \phi}{\partial x} K(z) dz = -Q_x .$$
(3.63)

Da mesma forma, tem-se:

$$\frac{\partial \Phi_G}{\partial y} = \int_0^h \frac{\partial \phi}{\partial y} K(z) dz = -Q_y .$$
(3.64)

Pode-se, então, formular a descarga em termos do gradiente do potencial de Girinski, na forma da equação (3.65), ou seja,

$$\vec{Q} = -\nabla\Phi_G. \quad (3.65)$$

Para o caso de camada única e escoamento livre ($h = \phi$), o potencial de Girinski pode ser escrito na forma de:

$$\Phi_G = \frac{K\phi^2}{2}. \quad (3.66)$$

Esse potencial é o mesmo apresentado como potencial de Forchheimer na Figura 18.

Para o caso confinado ($h = H$), a formulação é escrita conforme:

$$\Phi_G = HK\phi - \frac{K\phi^2}{2}. \quad (3.67)$$

Esses dois potenciais são idênticos aos definidos na seção 3.3, equações (3.22), donde se conclui que as constantes de integração usadas anteriormente são conseqüências da escolha do nível de referência junto à camada impermeável inferior do aquífero. Naturalmente, na eventual ocorrência dos dois tipos de escoamento, a zona de transição apresentará o mesmo potencial $\Phi_G = \frac{KH^2}{2}$. O potencial de Girinski, portanto, fundamenta as expressões (3.22).

3.6 Decomposição das Características do Escoamento

Para explicitar as características do escoamento, o Método de Elementos Analíticos (AEM) utiliza o Teorema de Decomposição de *Helmholtz – Hodge* para desmembrar o campo vetorial e, dessa forma, destacar as componentes tangenciais e normais à geometria dos elementos.

A decomposição de *Helmholtz* (STRACK, 2003, p. 1) estabelece que qualquer campo vetorial, que se anula no infinito, pode ser dividido em um campo solenoidal e um campo irrotacional (Figura 19 e Figura 20).

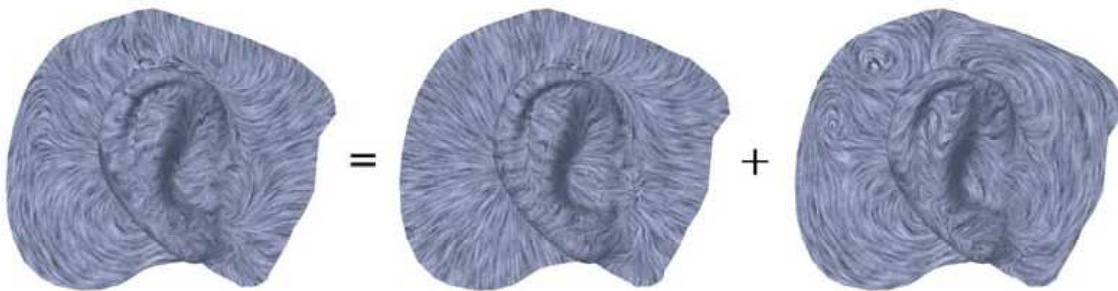


Figura 19 – Decomposição de um campo da velocidade do vento tangente a uma orelha.
Fonte: Tong et al. (2003, p. 445)

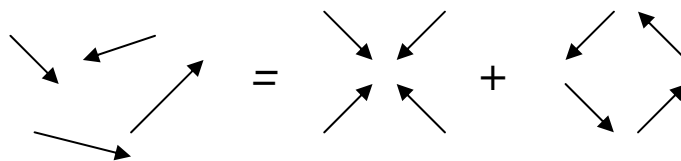


Figura 20 – Esquema gráfico da Decomposição de Helmholtz para campos vetoriais
Fonte: Tong et al. (2003, p. 445)

Essa decomposição é particularmente interessante para a identificação das características e singularidades do fluxo – as componentes que apresentarão saltos a serem

modelados. Para campos bidimensionais, o termo irrotacional contém apenas fontes e sumidouros, enquanto o campo solenoidal contém apenas vórtices.

Hodge, pelo desenvolvimento do conceito de formas diferenciais, acrescenta à decomposição um campo vetorial harmônico. A decomposição de *Helmholtz-Hodge* (TONG et al. 2003, p. 45) decompõe um campo vetorial qualquer em um campo irrotacional, um campo solenoidal e um campo harmônico que não contribui nem para o campo solenoidal nem para o irrotacional, conforme ilustrado na Figura 21.

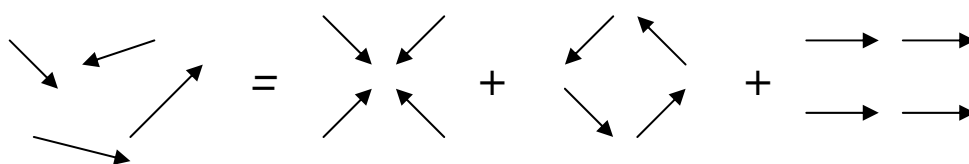


Figura 21 – Representação da decomposição de Helmholtz-Hodge

As partes decompostas do campo vetorial são representadas por expressões analíticas apropriadas, objetivando a modelagem de uma característica particular ou aspecto específico do campo original. O AEM faz uso de métodos de variáveis complexas para problemas bidimensionais. Essa técnica utiliza a aproximação conhecida, sobretudo na literatura germânica, como *Cálculo de Wirtinger* (REMMERT, 1991, p. 67), e possibilita aplicar variáveis complexas para a determinação de um campo vetorial.

O cálculo de Wirtinger estabelece uma ponte para a diferenciação parcial entre o campo vetorial e o plano complexo, utilizando derivadas parciais da função em relação ao complexo e seu conjugado como variáveis independentes.

Pela definição de um potencial complexo $\Omega = \Phi + i\Psi$, o *Cálculo de Wirtinger* permite estudar o escoamento potencial mediante linhas equipotenciais Φ e das linhas de corrente Ψ simultaneamente.

4 O MÉTODO DE ELEMENTOS ANALÍTICOS

O Método de Elementos Analíticos (STRACK, 1989) é um método computacional baseado na superposição de soluções analíticas pré-determinadas. A natureza analítica do método possibilita abordar modelos para grandes áreas, mantendo alto grau de precisão na análise de detalhes. Essa propriedade é particularmente utilizada para modelos regionais que exigem detalhamentos locais.

Cada elemento é escolhido ou desenvolvido para representar uma característica específica do campo vetorial determinado pelo potencial de descarga. Essas características envolvem principalmente condições de descontinuidades na rede de fluxo – linhas equipotenciais e linhas de corrente.

A superposição de funções analíticas, historicamente, é alvo de críticas em decorrência de limitação de sua aplicabilidade, sendo utilizada comumente apenas em aquíferos homogêneos e isotrópicos. O desenvolvimento de novos elementos, entretanto, podem ampliar substancialmente a aplicação destas soluções, por exemplo, o uso de inhomogeneidades permite a aplicação do método em áreas bem definidas com diferentes condutividades hidráulicas.

As equações analíticas estabelecem campos potenciais e possibilitam, no conjunto da solução final, a obtenção de valores da variável analisada em qualquer ponto do domínio. Condições de contorno, freqüentemente internas, são definidas em pontos de controle determinados para cada elemento. Elementos lineares são desenvolvidos em termos de saltos

ou descontinuidades do potencial complexo. Os elementos analíticos que controlam esses saltos são freqüentemente formulados com suporte nas Integrais de Cauchy (STRACK, 2003, p. 17).

Apesar do fato de que cada elemento analítico ser escolhido de forma a representar um salto numa componente normal ou tangencial do campo vetorial, a solução para o problema é formulada preservando a continuidade do fluxo. Os saltos, considerando as condições de contorno, são aproximados usualmente por polinômios.

Talvez a mais importante característica do AEM seja a liberdade que oferece na escolha dos elementos (STRACK, 2003, p. 18). Esses podem ser desenvolvidos usando técnicas de transformação conforme, integrais de Cauchy, análise de Fourier, transformadas de Laplace ou separação de variáveis. O método incentiva a busca por novos meios de desenvolvimento e combinação de funções apropriadas para a resolução dos problemas.

As funções analíticas utilizadas representam entidades como a infiltração de chuva, rios, lagos, poços, fissuras e propriedades de inomogeneidades do aquífero, cada qual satisfazendo determinadas condições de contorno, juntamente com a Equação de Laplace ou Poisson.

O AEM é aplicável tanto para domínios finitos como infinitos. A precisão do AEM é limitada apenas pela precisão e tamanho da memória do computador.

Neste capítulo, a formulação matemática dos elementos analíticos foi dividida em dois grupos complementares. O primeiro, denominado de elementos conceituais, refere-se a entes com formulação matemática específica, contendo as variáveis básicas estudadas e os parâmetros dependentes das condições de contorno a serem determinados – são entes matemáticos. O segundo grupo denominado de elementos hidrogeológicos representam entidades do mundo real, como poços, rios e inomogeneidades – são entes físicos. Os elementos hidrogeológicos podem ser formados por um ou mais elementos conceituais.

4.1 Formulação matemática dos Elementos Conceituais

Os elementos conceituais, normalmente, estão vinculados a uma topologia bem definida, tais como pontos e segmentos de retas. O elemento ponto de injeção/extração possui especial importância, pois é a partir de sua formulação que os demais elementos são desenvolvidos.

O primeiro elemento derivado do ponto de injeção/extração é o dipolo, composto pela aproximação de um ponto de extração e um de injeção de mesma vazão, denominados aqui de pólos. Em um dipolo, a vazão aumenta em proporção inversa à distância entre os pólos e quando esta tende a zero, a vazão tende ao infinito. A multiplicação dessas grandezas, entretanto, deverá ser um número finito, chamado de momento do dipolo.

A integração ao longo de um segmento de reta do ponto de injeção/extração, do dipolo na direção longitudinal e transversal ao seu alinhamento, origina três integrais conhecidas como Integrais de Cauchy.

Para o AEM as linhas Integrais de Cauchy desempenham papel fundamental, pois possibilitam o uso de saltos, conforme as características do escoamento. Segundo Strack (2003, p. 3):

Um ponto fundamental do AEM é o potencial complexo para elementos lineares, obtido da integral singular de Cauchy. O potencial complexo para elementos lineares é caracterizado pelo salto que exhibe.

Assim, como elementos analíticos lineares, têm-se: linha de injeção/extração (*line source/sink*); linha dupla (*line doublet*), referente à integração do dipolo orientado transversalmente ao segmento de reta; e linha dipolo (*line dipole*), referente à integração do dipolo orientado longitudinalmente ao segmento de reta.

4.1.1 Ponto de Injeção/Extração

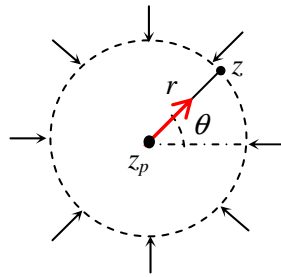


Figura 22 – Ponto de extração.

Seja Q [L^3T^{-1}] a taxa de injeção ou extração (Figura 22) em um ponto no aquífero. Tomando-se o escoamento radial, define-se a taxa Q_r [L^2T^{-1}] como vazão por unidade de comprimento de um círculo de raio r ao redor do ponto de injeção/extração, descarga na direção radial:

$$Q_r = -\frac{Q}{2\pi r}. \quad (4.1)$$

No sentido de satisfazer a Lei de Darcy em termos do potencial de descarga (3.21) e considerando que a vazão por unidade de comprimento pode ser igualada ao valor do vetor de descarga. Então,

$$Q_r = -\frac{d\Phi_p}{dr}. \quad (4.2)$$

Igualando as expressões e integrando, obtém-se (4.4),

$$\frac{d\Phi_p}{dr} = \frac{Q}{2\pi r} \Rightarrow \int d\Phi = \int \frac{Q}{2\pi r} dr. \quad (4.3)$$

Ao resolver a integral, o potencial de descarga pode ser escrito como:

$$\Phi_p = \frac{Q}{2\pi} \ln r + c_p. \quad (4.4)$$

Para um ponto de injeção/extração locado na origem do sistema de coordenadas, as linhas de fluxo radiais a partir do ponto de injeção/extração em coordenadas polares (θ, r) serão dadas por:

$$\Psi_p = \frac{Q}{2\pi} \theta. \quad (4.5)$$

As relações entre coordenadas polares e o plano complexo são $r = |z - z_p|$ e $\theta = \arg(z - z_p)$, onde z_p é a coordenada do ponto de injeção/extração e z de um ponto qualquer, ambos no plano complexo.

Unificando as equações (4.4) e (4.5), em termos do potencial complexo, tem-se:

$$\Omega_p(z) = \frac{Q}{2\pi} \ln(z - z_p) + c_p. \quad (4.6)$$

O potencial de descarga é representado, então, pela parte real $\Phi_p = \Re\{\Omega_p\}$, e as linhas de fluxo pela parte imaginária $\Psi_p = \Im\{\Omega_p\}$ do potencial complexo.

Para a determinação da constante de integração c_p , adota-se um ponto de referência em z_0 , com potencial de descarga Φ_0 e a distância $R = |z_0 - z_p|$ conhecidos.

Resolvendo a equação (4.4), para o ponto de referência tem-se o valor da constante:

$$c_p = \Phi_0 - \frac{Q}{2\pi} \ln R. \quad (4.7)$$

A Equação de Laplace não pode ser especificada exatamente no ponto de injeção/extração, que representa uma singularidade. Este ponto não deve ser considerado parte do domínio do fluxo. Pode-se adotar, entretanto, um ponto no entorno que seja suficientemente próximo para evitar erros significativos. Essa abordagem é fisicamente

coerente, uma vez que os poços têm o diâmetro definido e relativamente pequeno em relação às dimensões analisadas.

4.1.1.1 As constantes de integração

Ao permitir a superposição das soluções individuais para solucionar um dado problema, todas as constantes de integração envolvidas podem ser somadas em única constante global a ser calculada na resolução final. Esse procedimento será detalhado na seção 4.3, montagem do sistema linear.

Como consequência, pode-se desconsiderar a constante de integração na equação de contribuição de cada elemento individual, desde que a constante global seja considerada na resolução do problema. Desta forma, podemos adotar para o poço a equação:

$$\Omega_p(z) = Q\Lambda_p(z), \quad (4.8)$$

sendo,

$$\Lambda_p(z) = \frac{1}{2\pi} \ln(z - z_p). \quad (4.9)$$

4.1.2 Dipolo

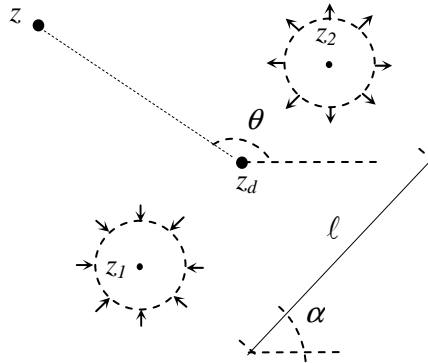


Figura 23 – Representação esquemática do dipolo.

O dipolo é constituído de um ponto de extração e outro de injeção de mesma vazão (Figura 23). O centro do dipolo é o ponto médio da linha z_d que separa os dois pólos. A orientação referente à inclinação dessa reta com o eixo das abscissas é representada por α , e ℓ é a distância que separa os pontos de injeção e de extração. Considerando as equações (4.6) e (4.7), obtém-se:

$$\Omega(z) = \frac{Q}{2\pi} \left[\ln \frac{z - (z_d - \frac{\ell}{2} e^{i\alpha})}{z_0 - (z_d + \frac{\ell}{2} e^{i\alpha})} - \ln \frac{z - (z_d + \frac{\ell}{2} e^{i\alpha})}{z_0 - (z_d - \frac{\ell}{2} e^{i\alpha})} \right]. \quad (4.10)$$

Admitindo o ponto de referencia z_0 suficientemente distante do dipolo para que

$z_0 - (z_d + \frac{\ell}{2} e^{i\alpha}) \cong z_0 - (z_d - \frac{\ell}{2} e^{i\alpha})$, pode-se escrever (4.10) sob a forma:

$$\Omega_d(z) = \frac{Q\ell}{2\pi} \left[\frac{\ln(z - (z_d - \frac{\ell}{2} e^{i\alpha})) - \ln(z - (z_d + \frac{\ell}{2} e^{i\alpha}))}{\ell} \right]. \quad (4.11)$$

Define-se a vazão dos pontos do dipolo como inversamente proporcional à distância entre eles, de forma que a multiplicação da vazão pela distância quando eles estão infinitamente próximos seja um número finito:

$$\lim_{\substack{Q \rightarrow \infty \\ \ell \rightarrow 0}} Q\ell = s. \quad (4.12)$$

Onde a grandeza s é denominada de momento do dipolo.

De acordo com a relação entre complexos no plano pode-se verificar que $\Delta z_d = \ell e^{i\alpha}$. Considerando a condição (4.12), o potencial complexo para o dipolo pode ser representado por:

$$\Omega_d(z) = \lim_{\substack{Q \rightarrow \infty \\ \ell \rightarrow 0}} \frac{Q\ell}{2\pi} \left[\frac{\ln(z - (z_d - \frac{\ell}{2} e^{i\alpha})) - \ln(z - (z_d + \frac{\ell}{2} e^{i\alpha}))}{\ell} \right]. \quad (4.13)$$

Desenvolvendo o limite de (4.13), observa-se que este pode ser posto na forma da derivada do termo logarítmico (4.15), o que leva à equação (4.16), que é a equação final do potencial complexo para o dipolo.

$$\Omega_d(z) = \frac{se^{i\alpha}}{2\pi} \lim_{\substack{Q \rightarrow \infty \\ \ell \rightarrow 0}} \frac{\ln(z - (z_d - \frac{\Delta z_d}{2})) - \ln(z - (z_d + \frac{\Delta z_d}{2}))}{\Delta z_d}. \quad (4.14)$$

Logo,

$$\Omega_d(z) = \frac{se^{i\alpha}}{2\pi} \left[-\frac{d}{dz_0} \ln(z - z_d) \right], \quad (4.15)$$

consequentemente,

$$\Omega_d(z) = \frac{se^{i\alpha}}{2\pi(z - z_d)}. \quad (4.16)$$

É importante observar que tanto o dipolo quanto o ponto de injeção/extração são singulares em seus respectivos pontos de definição. Na prática, ao se aproximar desses pontos, o potencial de descarga tende em módulo ao infinito.

A equação (4.16) pode ser escrita na seguinte forma:

$$\Omega_d(z) = sA_d(z),$$

sendo,

$$A_d(z) = \frac{e^{i\alpha}}{2\pi(z - z_d)}$$

(4.17)

4.1.3 Linha de Injeção/Extração

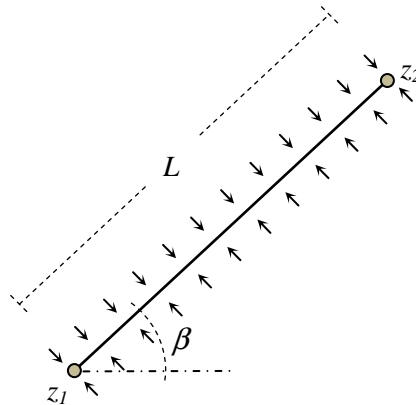


Figura 24 – Linha de injeção/extração.

Elementos lineares que extraem ou acrescentam certa quantidade de água de um aquífero (Figura 24) são modelados linhas de injeção/extração (*line source/sink*).

Uma linha de injeção/extração pode ser representada por um conjunto de pontos de injeção/extração alinhados e distribuídos uniformemente entre os extremos z_1 e z_2 .

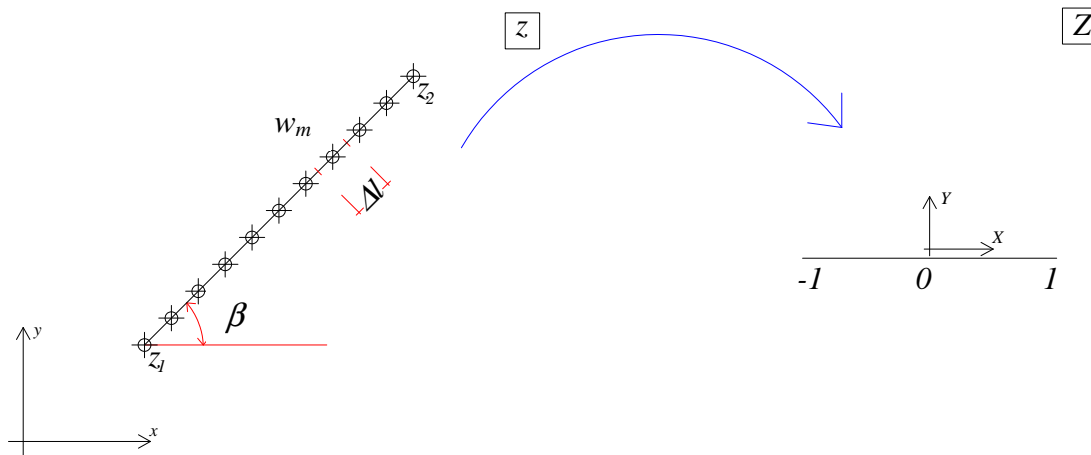


Figura 25 – Mapeamento de linha de injeção de coordenadas globais Z para locais z .
Fonte: Strack (1989, p. 286)

Considerando o número de pontos de injeção/extração infinitamente grande ao longo do segmento de reta finito, sendo também finita a taxa de injeção/extração, o potencial complexo será a soma dos potenciais de cada ponto de perda ao longo da linha:

$$\Omega_{ie}(z) = \sum_{n=1}^N \frac{Q_n}{2\pi} \ln(z - w_n) \quad (4.18)$$

sendo Q_n a taxa de injeção/extração e w_n a coordenada no plano complexo do n -ésimo ponto de injeção/extração.

Observa-se que foi feito uso da equação (4.9), sem levar em conta a constante de integração para a definição do potencial complexo pela equação (4.18). Deve-se, portanto, considerar a explanação da seção 4.1.1.1.

Pode-se, então, escrever o somatório em função de uma taxa de extração ao longo da linha de perda $\sigma [L^2 T^{-1}]$, conseqüentemente cada Q_n será distribuído em um trecho Δl_n , conforme a equação:

$$\sigma = \frac{Q}{\Delta l} \Rightarrow \frac{Q}{n} = \sigma \Delta l, \quad (4.19)$$

portanto, o potencial complexo pode ser escrito como:

$$\Omega_{lie}(z) = \sum_{n=1}^N \frac{Q}{2\pi} \ln(z - w_n) \Delta l. \quad (4.20)$$

Considerando as coordenadas locais (Figura 25):

$$Z = X + iY = \frac{z - \frac{1}{2}(z_2 + z_1)}{\frac{1}{2}(z_2 - z_1)} \quad (4.21)$$

$$W = \frac{w - \frac{1}{2}(z_2 + z_1)}{\frac{1}{2}(z_2 - z_1)}.$$

Sobre a linha $-1 \leq Z \leq 1$, $-1 \leq W \leq 1$ e $-\frac{L}{2} \leq l \leq \frac{L}{2}$.

No limite, quando $N \rightarrow \infty$, $\Delta l \rightarrow 0$, a equação (4.20) transforma-se em:

$$\Omega_{lie}(z) = \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} \frac{\sigma}{2\pi} \ln(z - w) dl. \quad (4.22)$$

Como $dl = e^{-i\beta} dw$, pode-se escrever a equação (4.22) em termos da integral:

$$\Omega_{lie}(z) = \frac{\sigma}{2\pi} e^{-i\beta} \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} \ln(z - w) dw. \quad (4.23)$$

Substituindo as variáveis z e w por suas respectivas coordenadas locais conforme a equação (4.21), obtém-se:

$$z = \frac{Z}{2}(z_2 - z_1) + \frac{1}{2}(z_2 + z_1) \quad (4.24)$$

e

$$w = \frac{W}{2}(z_2 - z_1) + \frac{1}{2}(z_2 + z_1). \quad (4.25)$$

O que possibilita escrever

$$\Omega_{lie}(z) = \frac{\sigma}{2\pi} e^{-i\beta} \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} \ln \left(\frac{Z}{2}(z_2 - z_1) + \frac{1}{2}(z_2 + z_1) - \frac{W}{2}(z_2 - z_1) - \frac{1}{2}(z_2 + z_1) \right) dw. \quad (4.26)$$

Reorganizando os termos:

$$\Omega_{lie}(z) = \frac{\sigma}{2\pi} e^{-i\beta} \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} \ln \left[\frac{1}{2}(z_2 - z_1)(Z - W) \right] dw. \quad (4.27)$$

Pela equação (4.25) e pela relação $z_2 - z_1 = Le^{i\beta}$, tem-se que:

$$dw = \frac{1}{2}(z_2 - z_1)dW \Rightarrow \frac{L}{2}dW = e^{-i\beta} dw. \quad (4.28)$$

Substituindo na equação (4.27), tem-se:

$$\Omega_{lie}(z) = \frac{\sigma}{4\pi} L \int_{-1}^{+1} \ln \left[\frac{1}{2}(z_2 - z_1)(Z - W) \right] dW. \quad (4.29)$$

Desenvolvendo o termo logarítmico obtém-se:

$$\Omega_{lie}(z) = \frac{\sigma}{4\pi} L \left\{ \int_{-1}^{+1} \ln \left[\frac{1}{2}(z_2 - z_1) \right] dW + \int_{-1}^{+1} \ln(Z - W) dW \right\}. \quad (4.30)$$

A equação (4.30) pode ser escrita na forma da equação (4.31), por substituição simples de variáveis, tendo Z como constante durante a integração, o que leva a:

$$\Omega_{lie}(Z) = \frac{\sigma}{4\pi} L \left\{ \int_{-1}^{+1} \ln \left[\frac{1}{2}(z_2 - z_1) \right] dW + \int_{Z+1}^{Z-1} \ln(Z - W) d(Z - W) \right\}, \quad (4.31)$$

resolvendo a integral e aplicando os limites de integração tem-se o potencial complexo para a linha de injeção/extração:

$$\Omega_{lie}(Z) = \frac{\sigma}{4\pi} L \left\{ (Z + 1) \ln(Z + 1) - (Z - 1) \ln(Z - 1) + 2 \ln \left[\frac{(z_2 - z_1)}{2} \right] - 2 \right\}. \quad (4.32)$$

ou,

$$\Omega_{lie}(Z) = \sigma A_{lie}(Z),$$

sendo,

$$A_{lie}(Z) = \frac{\sigma}{4\pi} L \left\{ (Z+1)\ln(Z+1) - (Z-1)\ln(Z-1) + 2 \ln \left[\frac{(z_2 - z_1)}{2} \right] - 2 \right\} \tag{4.33}$$

O potencial de descarga será expresso por:

$$\Phi_{lie} = \Re\{\Omega_{lie}\},$$

onde,

$$\Phi_{lie} = \frac{\sigma L}{4\pi} \left[-X \ln \left| \frac{Z-1}{Z+1} \right| + Y\theta + \ln|Z^2 - 1| + 2 \ln \frac{L}{2} - 2 \right], \tag{4.34}$$

onde, $\theta = \theta_2 - \theta_1$, conforme a Figura 26.

A função das linhas de corrente, por sua vez, será expressa na forma de:

$$\Psi_{lie} = \Im\{\Omega_{lie}\},$$

onde,

$$\Psi_{lie} = \frac{\sigma L}{4\pi} [(X+1)\theta_1 - (X-1)\theta_2 + 2\beta]. \tag{4.35}$$

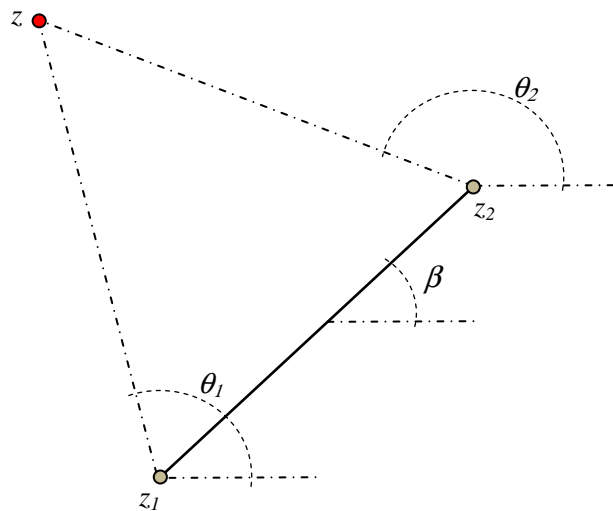


Figura 26 – Ângulos da linha de injeção/extração.

É interessante notar que as singularidades existentes nos extremos da linha podem ser removidas, pois $\lim_{x \rightarrow 0} (x \ln x) = 0$. Assim, as expressões $(Z+1)\ln(Z+1)$ e $(Z-1)\ln(Z-1)$ são definidas nos extremos da linha estudada com valor nulo.

4.1.4 Linha Dupla

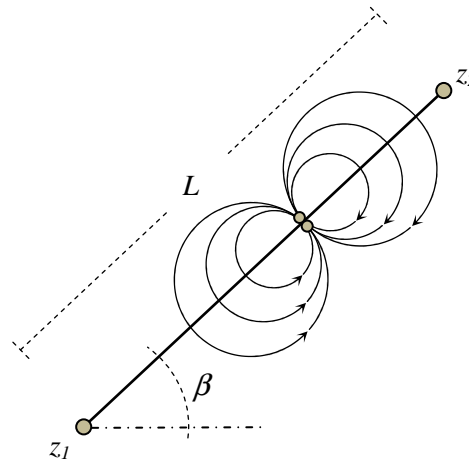


Figura 27 – Linha dupla formada por uma série de dipolos orientados transversalmente.

A linha dupla é obtida pelo somatório de infinitos dipolos transversalmente orientados ao longo de uma reta finita (Figura 27 e Figura 28). A formulação para a linha dupla pode ser obtida por meio do somatório do potencial complexo do dipolo. Fazendo o número de dipolos sobre a linha N crescer infinitamente, tem-se:

$$\Omega_{idu}(z) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \frac{se^{i\alpha}}{2\pi(z - w_n)} \quad (4.36)$$

onde α é o ângulo de orientação do dipolo.

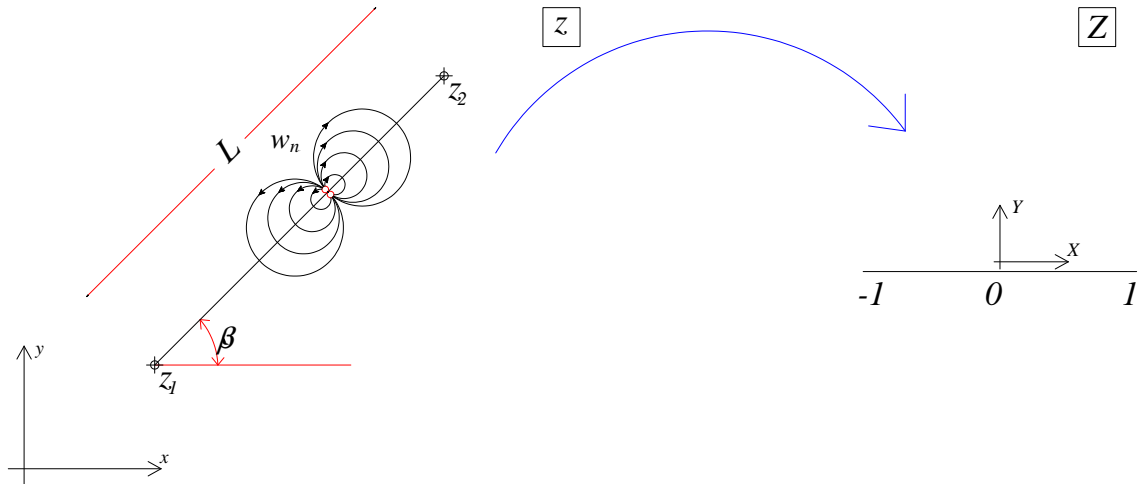


Figura 28 – Mapeamento de Linha de Dupla de coordenadas globais z para locais Z .
 Fonte: Strack (1989, p. 298)

Adotando a função λ como a distribuição do esforço s sobre a linha, tem-se a equação:

$$\lambda_j = \frac{s_j}{\Delta l} \Rightarrow s_j = \lambda_j \Delta l, \tag{4.37}$$

substituindo em (4.36), tem-se

$$\Omega_{idu}(z) = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \Delta l \rightarrow 0}} \sum_{j=1}^N \frac{\lambda_j e^{i\alpha}}{2\pi(z - w_j)} \Delta l. \tag{4.38}$$

O dipolo, entretanto, encontra-se orientado perpendicularmente à linha de integração, o que leva à expressão:

$$\alpha = \beta + \frac{\pi}{2} \Rightarrow e^{i\beta} = e^{i\left(\beta + \frac{\pi}{2}\right)} = ie^{i\beta}. \tag{4.39}$$

Substituindo a equação (4.39) em (4.38) e integrando, obtém-se:

$$\Omega_{idu}(z) = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \Delta l \rightarrow 0}} \sum_{j=1}^N \frac{\lambda_j e^{i\alpha}}{2\pi(z - w_j)} \Delta l = \frac{i}{2\pi} \int_{z_1}^{z_2} \frac{\lambda(w) e^{i\beta}}{z - w} dl. \tag{4.40}$$

Considerando que $dw = e^{i\beta} dl$, chega-se a:

$$\Omega_{ldu}(z) = \frac{i}{2\pi} \int_{z_1}^{z_2} \frac{\lambda(w)}{z-w} dw . \quad (4.41)$$

Considerando as coordenadas locais definidas na expressão (4.21),

$$Z = X + iY = \frac{z - \frac{1}{2}(z_2 + z_1)}{\frac{1}{2}(z_2 - z_1)}$$

e (4.42)

$$W = \frac{w - \frac{1}{2}(z_2 + z_1)}{\frac{1}{2}(z_2 - z_1)},$$

obtém-se:

$$\Omega_{ldu}(Z) = \frac{i}{2\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{\lambda(W)}{Z-W} dW . \quad (4.43)$$

A função $\lambda(Z)$, analítica para todo Z (com possíveis exceções em pontos singulares), é real ao longo do elemento, definida matematicamente como:

$$\Im \lambda = 0 \quad -1 \leq X \leq 1 \quad Y = 0 . \quad (4.44)$$

É relevante salientar que, neste momento, a função λ tem seu domínio ampliado.

Definida inicialmente como uma função real ao longo da reta que une os extremos do elemento, λ passa a ser definida para todo o plano complexo, salvo em possíveis pontos singulares.

É possível reescrever o potencial complexo na forma da equação (4.45).

$$\Omega_{ldu} = \frac{i}{2\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{\lambda(Z)}{Z-W} dW - \frac{i}{2\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{\lambda(Z) - \lambda(W)}{Z-W} dW . \quad (4.45)$$

Como Z é constante durante a integração, a primeira integração pode ser resolvida ao substituir-se $-dW$ por $d(Z-W)$,

$$\Omega_{ldu} = -\frac{\lambda(Z)}{2\pi} i \ln \frac{Z-1}{Z+1} - \frac{i}{2\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{\lambda(Z) - \lambda(W)}{Z-W} dW. \quad (4.46)$$

O integrando restante é analítico em $Z = W$, o que pode ser visto pela expansão de $\lambda(Z)$ por Série de Taylor ao redor de $Z = W$,

$$\frac{1}{2\pi} \frac{\lambda(Z) - \lambda(W)}{Z-W} = \frac{1}{2\pi} \left[\lambda'(W) + \frac{\lambda''(W)}{2!} (Z-W) + \dots \right] = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{\lambda^{(m)}(W)}{m!} (Z-W)^{m-1} \right] \quad (4.47)$$

A integral de uma função analítica é analítica, significando que o segundo termo de (4.46) também é analítico para todos os valores de Z , para os quais $\lambda(Z)$ é analítica.

Representando esta função por $p_{ldu}(Z)$:

$$p_{ldu}(Z) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{\lambda(Z) - \lambda(W)}{Z-W} dW. \quad (4.48)$$

O potencial complexo para a linha dupla será dado pela expressão:

$$\Omega_{ldu}(Z) = \frac{\lambda(Z)}{2\pi i} \ln \frac{Z-1}{Z+1} + ip_{ldu}(Z). \quad (4.49)$$

Determinando o polinômio de correção p

Considerando uma aproximação polinomial de ordem N para λ tal como:

$$\lambda(Z) = \sum_{j=0}^N a_j Z^j \quad \Im a_j = 0. \quad (4.50)$$

Para grandes valores de Z temos que:

$$\Omega_{ldu} \approx \frac{-1}{2\pi Z} \int_{-1}^{+1} \lambda(W) dW \quad Z \rightarrow \infty. \quad (4.51)$$

O potencial complexo terá no infinito o comportamento da função Z^{-1} .

Analisando a equação (4.49) verifica-se que no infinito:

$$\ln \frac{Z-1}{Z+1} = \ln \frac{1 - \frac{1}{Z}}{1 + \frac{1}{Z}} = -2 \left(\frac{1}{Z} + \frac{1}{3Z^3} + \frac{1}{5Z^5} \dots \right) \quad Z \rightarrow \infty, \quad (4.52)$$

entretanto, no infinito o primeiro termo do potencial complexo (4.49) será:

$$\frac{\lambda(Z)}{2\pi i} \ln \frac{Z-1}{Z+1} = \frac{i}{\pi} \sum_{j=0}^N a_j Z^j \left(\frac{1}{Z} + \frac{1}{3Z^3} + \frac{1}{5Z^5} \dots \right) \quad Z \rightarrow \infty. \quad (4.53)$$

No infinito esse termo terá o comportamento de um polinômio de ordem $N-1$.

Como o potencial complexo tem comportamento de Z^{-1} , significa que os termos de ordem maior que -1 devem ser anulados no infinito pela função $ip_{idu}(Z)$.

Para garantir o comportamento do potencial complexo de Z^{-1} no infinito, $p_{idu}(Z)$ deverá ser um polinômio de ordem $N-1$.

Desprezando-se os termos de ordem inferior ou igual a Z^{-1} , os coeficientes de $p_{idu}(Z)$ são determinados por:

$$-\frac{1}{\pi} \sum_{j=0}^N a_j Z^j \left(\frac{1}{Z} + \frac{1}{3Z^3} + \frac{1}{5Z^5} \dots \right) = \sum_{j=0}^{N-1} b_j Z^j = p_{idu}(Z) \quad \Im b_j = 0 \quad (4.54)$$

Exemplo:

Seja o esforço aproximado por um polinômio cúbico $\lambda = a_3 Z^3 + a_2 Z^2 + a_1 Z + a_0$,

a série infinita pode ser truncada no segundo termo $\left(\frac{1}{3Z^3} \right)$, já que todos os demais provocarão

termos de ordem inferior ou igual a Z^{-1} . Então,

$$-\frac{1}{\pi} (a_3 Z^3 + a_2 Z^2 + a_1 Z + a_0) \left(\frac{1}{Z} + \frac{1}{3Z^3} \right) = b_2 Z^2 + b_1 Z + b_0.$$

Novamente desprezando os termos de ordem inferior ou igual a Z^{-1} :

$$b_2 = -\frac{I}{\pi} a_3,$$

$$b_1 = -\frac{I}{\pi} a_2,$$

$$b_0 = -\frac{I}{\pi} \left(\frac{a_3}{3} + a_1 \right).$$

Então o polinômio de correção será:

$$p_{idu}(Z) = -\frac{I}{\pi} \left(a_3 Z^2 + a_2 Z + \frac{a_3}{3} + a_1 \right).$$

4.1.5 Linha Dipolo

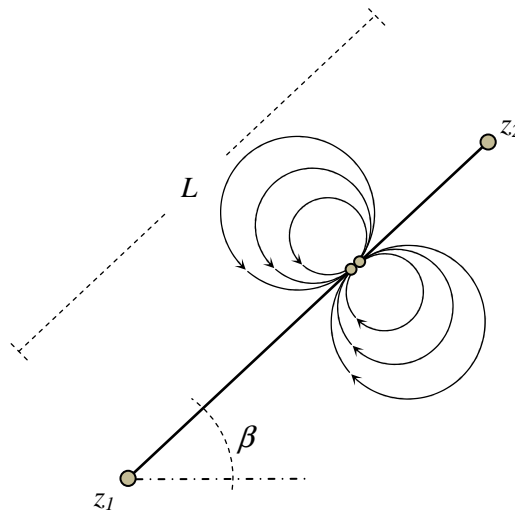


Figura 29 – Linha dipolo formada por uma série de dipolos orientados longitudinalmente

A linha dipolo (Figura 29) é uma distribuição contínua de dipolos dispostos longitudinalmente ao longo da linha.

O potencial complexo para uma linha dipolo é obtido pela integração de um dipolo ao longo da linha, com o dipolo orientado na direção longitudinal da linha (Figura 30).

$$\Omega_{ldp}(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_1^N \frac{se^{i\beta}}{2\pi(z - w_n)}. \quad (4.55)$$

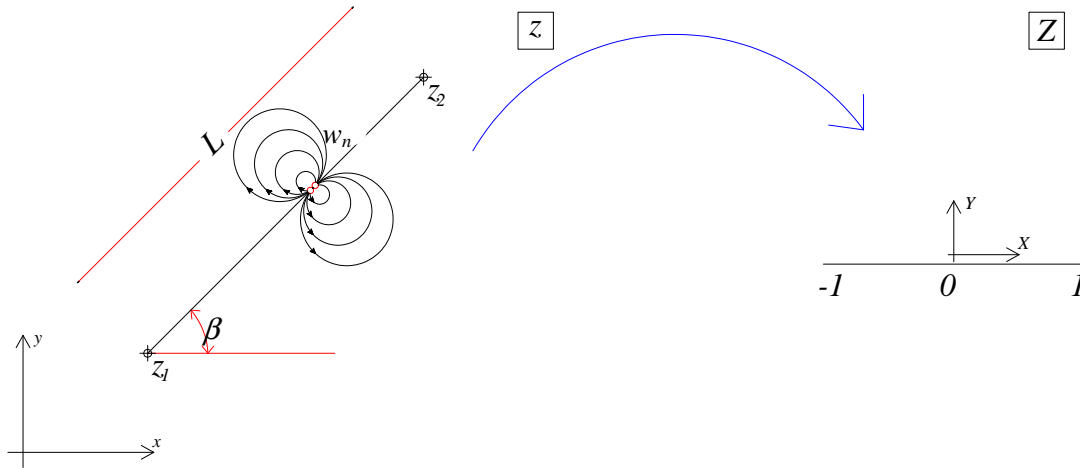


Figura 30 – Dipolo no plano complexo.

Fonte: Strack (1989, p.292)

Observa-se que o ângulo de orientação do dipolo é o mesmo da orientação do segmento de reta.

Adotando a função $-\mu$ como a distribuição do esforço s sobre a linha, tem-se:

$$-\mu_j = \frac{s_j}{\Delta l} \Rightarrow s_j = -\mu_j \Delta l. \quad (4.56)$$

Levando-se em consideração que o ângulo de orientação do dipolo α coincide com o ângulo da linha de integração, obtém-se:

$$\Omega_{ldp}(z) = -\frac{I}{2\pi} \int_{z_1}^{z_2} \frac{\mu(w)}{2\pi(z - w)} dw. \quad (4.57)$$

A partir daqui, tem-se exatamente os mesmos passos realizados na definição do potencial complexo para a linha dupla. Portanto, ao se adotar o potencial complexo para a linha dipolo, o polinômio de correção será dado por:

$$p_{ldp}(Z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{\mu(Z) - \mu(W)}{Z - W} dW. \quad (4.58)$$

A função p_{ldp} está diretamente relacionada com a função μ . Por exemplo, quando uma função polinomial é escolhida para aproximar μ então p_{ldp} será também uma função polinomial de uma ordem inferior à μ .

A equação do potencial complexo para linha dipolo será:

$$\Omega_{ldp}(Z) = \frac{\mu(Z)}{2\pi} \ln \frac{Z-1}{Z+1} + p_{ldp}(Z). \quad (4.59)$$

A obtenção do polinômio de correção de campo distante $p_{ldp}(Z)$ é feita por meio de procedimento idêntico apresentado na seção 4.1.4.

4.2 Formulação dos Elementos Hidrogeológicos

Alguns elementos hidrogeológicos podem ser representados por mais de um elemento matemático, rios e inhomogeneidades são exemplos deste fato.

Os rios podem ser representados por elemento hidrogeológico de primeira ou segunda ordem. Os rios de primeira ordem são aproximados considerando o valor da vazão distribuída (σ) ao longo de cada trecho como constante. Já os rios de segunda ordem são aproximados considerando uma distribuição linear da vazão em cada trecho.

As inhomogeneidades poligonais se comportam de modo semelhante. Entretanto, as de primeira ordem são referentes a uma distribuição linear do esforço (λ) ao longo de cada trecho (lado do polígono), enquanto as de segunda ordem essa distribuição é quadrática.

A determinação da ordem de um dado elemento se dá na observação do grau da função polinomial que aproxima o salto na função de corrente (Ψ) ou no potencial de descarga (Φ) ao longo de cada trecho. Assim, uma distribuição constante para um trecho de rio provoca um salto linear nas funções de corrente e uma distribuição linear provoca um salto quadrático – daí rios de primeira e segunda ordem. Já para as inhomogeneidades os saltos no potencial de descarga, ao longo de cada trecho, são aproximados diretamente pelo esforço, portanto o elemento terá ordem igual ao grau do polinômio usado para aproximar o esforço – daí inhomogeneidades de primeira e segunda ordem.

As funções de influência (Λ) serão definidas em cada seção, conforme as características dos elementos desenvolvidos.

4.2.1 Fluxo Uniforme

Caracteriza um fluxo subterrâneo uniforme, e, caso haja predominância do escoamento em certa direção, pode ser encarado como a base para a superposição dos demais elementos.

O elemento de fluxo uniforme possui formulação própria, não sendo necessária sua formulação em termos dos elementos conceituais apresentados anteriormente.

Segundo Strack (1989, p. 279), o potencial complexo do fluxo uniforme pode ser expresso por:

$$\Omega_{fu} = -Q_0 z e^{i\alpha} + \Phi_0. \quad (4.60)$$

Sendo Q_0 a descarga na direção α , que é orientação do fluxo uniforme. O potencial de descarga Φ_0 é dado em ponto de referência previamente especificado.

O potencial de descarga de referência Φ_0 pode ser tratado como uma constante adicionada à função principal do potencial complexo, $-Q_0 z e^{i\alpha}$. Conforme mencionado na seção 4.1.1.1 essa constante será desconsiderada.

O potencial complexo, então, pode ser escrito como:

$$\Omega_{fu} = -Q_0 z e^{i\alpha}, \quad (4.61)$$

em termos cartesianos:

$$\Omega_{fu} = -Q_0 (x - iy)(\cos \alpha - i \operatorname{sen} \alpha). \quad (4.62)$$

O potencial de descarga será:

$$\Phi_{fu} = \Re(\Omega_{fu}) = -Q_0 (x \cos \alpha + y \operatorname{sen} \alpha), \quad (4.63)$$

e a função de linhas de fluxo:

$$\Psi_{fu} = \Im(\Omega_{fu}) = -Q_0 (y \cos \alpha - x \operatorname{sen} \alpha). \quad (4.64)$$

4.2.2 Área Circular de Recarga

No interior de uma área circular distribui-se uma recarga constante \mathcal{N} [LT^{-1}], fazendo com que o fluxo subterrâneo que fica diretamente abaixo do disco seja governado pela equação de Poisson, enquanto fora do disco, onde não existe recarga, a equação governante é a de Laplace. Em outras palavras, a solução tem que satisfazer a equação de Poisson para a área interna do círculo ($r < R$) e a de Laplace para a área externa ($r > R$).

Para a análise, é introduzida a função A_{rc} dependente das coordenadas do centro da área de injeção, do ponto estudado e do raio do disco, $A_{rc}(x, y, x_0, y_0, R)$, de tal forma que:

$$0 \leq r \leq R \quad \nabla^2 A_{rc} = -I \quad (4.65)$$

e

$$R < r < \infty \quad \nabla^2 A_{rc} = 0.$$

Sendo $r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$. Para o primeiro caso, com o ponto estudado

dentro da área coberta pelo disco de recarga, ou seja $0 \leq r \leq R$, tem-se:

$$A_{rc} = -\frac{I}{4}(r^2 - R^2). \quad (4.66)$$

Para o segundo caso, ou seja $R < r < \infty$, para os pontos fora da área coberta pelo disco de ganho:

$$A_{rc} = -\frac{\pi R^2}{2\pi} \ln\left(\frac{r}{R}\right). \quad (4.67)$$

Logo, o potencial complexo será dado por:

$$\Phi_{rc} = -\frac{\mathcal{N}}{4}(r^2 - R^2) + \Phi_0, \text{ para } 0 \leq r \leq R,$$

$$\text{e} \quad (4.68)$$

$$\Phi_{rc} = -\frac{\mathcal{N}R^2}{4} \ln\left(\frac{r^2}{R^2}\right) + \Phi_0, \text{ para } R < r < \infty.$$

Em que Φ_0 é o potencial de referência, em coordenadas cartesianas, tem-se:

$$\Phi_{rc} = -\frac{\mathcal{N}}{4}[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - R^2] + \Phi_0, \text{ para } 0 \leq r \leq R,$$

$$\text{e} \quad (4.69)$$

$$\Phi_{rc} = -\frac{\mathcal{N}R^2}{4} \ln\left(\frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{R^2}\right) + \Phi_0, \text{ para } R < r < \infty.$$

A expressão geral para o disco de ganho é dada por:

$$\Phi_{rc} = \mathcal{N}A_{rc} + \Phi_0. \quad (4.70)$$

Considerando a seção 4.1.1.1 a expressão geral para o disco de recarga será:

$$\Phi_{rc} = \mathcal{N}A_{rc}. \quad (4.71)$$

4.2.3 Recarga em Faixa

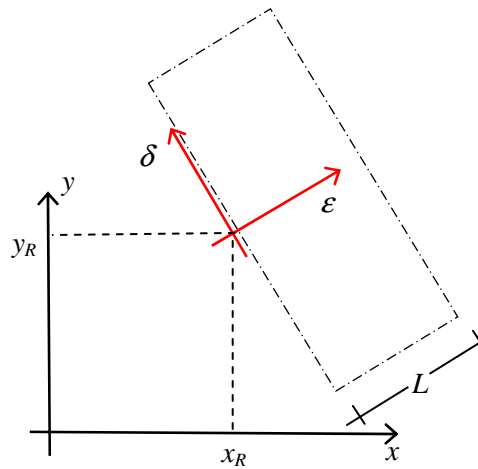


Figura 31 – Sistema de coordenadas local e global para recarga em faixa.

Esse elemento simula uma recarga homogênea ao longo de uma faixa retangular. Como a recarga é homogênea sobre toda a área, pode-se adaptar o potencial de descarga apresentado na Figura 11b (caso unidimensional) para o plano. Desenvolvimento semelhante pode ser encontrado em Batista, Wendland e Schluz (2000, p. 47). Assim,

$$\Phi_{rf} = \frac{-N\varepsilon^2}{2} + a\varepsilon + b \quad (4.72)$$

$$\delta = \nabla$$

A superfície resultante é um cilindro parabólico (THOMAS; FINNEY, 1983, p. 621) cuja geratriz é a parábola dada pela equação (4.72). A Figura 32 ilustra o cilindro parabólico com a geratriz no plano que tem como eixo das abscissas ε e das ordenadas φ .

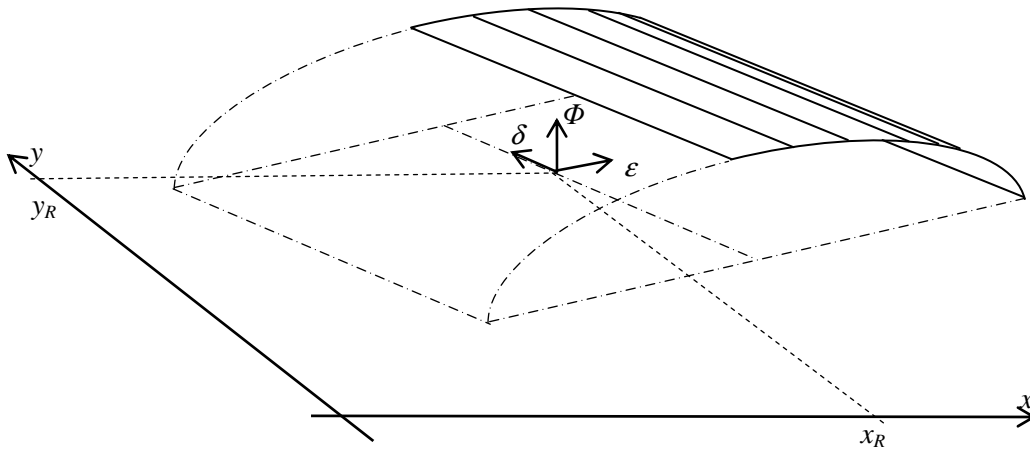


Figura 32 – Comportamento do potencial de descarga para a recarga uniforme em faixa

As condições de contorno são definidas de forma que a parte mais alta do potencial de descarga esteja ao longo da reta $\varepsilon = 0$ e para $\varepsilon = L \Rightarrow \Phi = \Phi_L$.

Pela condição de máximo em $\varepsilon = 0$, temos o vértice da parábola, tem-se que:

$$\frac{-a}{-N} = 0 \Rightarrow a = 0. \quad (4.73)$$

Pela segunda condição de contorno:

$$\Phi_L = \frac{-NL^2}{2} + b \Rightarrow b = \frac{NL^2}{2} + \Phi_L, \quad (4.74)$$

logo a equação do potencial de descarga para a recarga em faixa será:

$$\Phi_{rf} = \frac{-N\varepsilon^2}{2} + \frac{NL^2}{2} + \Phi_L. \quad (4.75)$$

$\delta = \nabla$

Considerando a transformação para as coordenadas locais ($\varepsilon\delta$) (Figura 31 e Figura 32):

$$\Phi_{rf}(x, y) = N \left[-\frac{[(x - x_R) \cos \alpha + (y - y_R) \sin \alpha]^2}{2} + \frac{L^2}{2} \right] + \Phi_L. \quad (4.76)$$

$y = \nabla$

O valor constante Φ_L pode ser tratado como uma constante de integração nos moldes apresentados no item 4.1.1.1. Portanto a expressão do potencial de descarga para a recarga em faixa adotada será:

$$\Phi_{rf}(x, y) = \mathcal{N} \left[-\frac{[(x - x_R) \cos \alpha + (y - y_R) \sin \alpha]^2}{2} + \frac{L^2}{2} \right]. \quad (4.77)$$

$y = \forall$

4.2.4 Poços

Na prática, o elemento poço é representado por um ponto de injeção/extração, tendo como principal característica o seu fluxo radial, sendo usado para representar pontos de injeção ou extração de água, conforme o sinal da vazão Q .

Para efeito de implementação, pode-se caracterizar esse elemento em dois tipos: carga hidráulica especificada ou vazão especificada.

O potencial complexo em z , constituído a partir do elemento conceitual ponto de injeção/extração, equação (4.9), será:

$$\Omega_p(z) = \frac{Q}{2\pi} \ln(z - z_w). \quad (4.78)$$

Em conseqüência, o potencial de descarga será obtido como:

$$\Phi_p = \Re\{\Omega_p\} \quad \Phi_p = \frac{Q}{2\pi} \ln|z - z_w| = \frac{Q}{2\pi} \ln r, \quad (4.79)$$

e a função de corrente:

$$\Psi_p = \Im\{\Omega_p\} \quad \Psi_p = \frac{Q}{2\pi} \theta. \quad (4.80)$$

4.2.5 Rios de Primeira Ordem

Esse elemento é utilizado para representar rios, riachos. É representado por um conjunto de linhas de injeção/extração. Pode ter dois tipos de especificações: carga hidráulica especificada ou vazão distribuída especificada.

A primeira opção, carga especificada, é adotada quando o rio tem completa conexão com o fluxo subterrâneo, ou seja, o nível freático está no nível da água no rio em toda sua extensão. A vazão especificada é adotada quando se conhece a taxa distribuída de infiltração de água (σ) entre o rio e o aquífero. Considerando uma distribuição de vazão constante ao longo do trecho do rio, este pode ser representado diretamente por uma linha de injeção/extração conforme a equação (4.32).

Implementação

Considerando as coordenadas locais (4.21), a formulação para o potencial complexo para cada trecho será expressa por

$$\Omega_r(Z) = \sigma A_r(Z), \quad (4.81)$$

onde,

$$A_r(Z) = \frac{L}{4\pi} \left\{ (Z+1)\ln(Z+1) - (Z-1)\ln(Z-1) + 2 \ln \left[\frac{(z_2 - z_1)}{2} \right] - 2 \right\}, \quad (4.82)$$

e σ representa a intensidade do esforço e A_r a função de influência do elemento.

O ponto médio do trecho de rio, equação (4.83), será o ponto de controle, onde o valor da carga hidráulica ou da distribuição de vazão é conhecido. Seja,

$$z_c = \frac{(z_2 - z_1)}{2}, \quad (4.83)$$

então, o potencial de descarga será dado por:

$$\Phi_r(Z) = \mathfrak{R}\{A_r\}. \quad (4.84)$$

4.2.6 Rios de Segunda Ordem

Neste caso, a função de distribuição entre os extremos de um trecho de rio é linear, o que ocasiona uma função quadrática do salto no potencial simulado; considerando cada trecho com seus extremos e as coordenadas locais, definidas em (4.21), conforme representado na Figura 33.

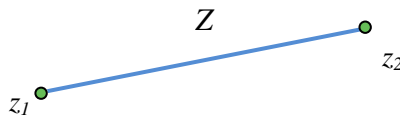


Figura 33 – Trecho de rio

Sejam as equações:

$$A_1^*(Z) = \frac{L}{16\pi} \left[(Z^2 - 1) \ln \frac{Z-1}{Z+1} + 2Z \right],$$

e (4.85)

$$A_2^*(Z) = \frac{L}{8\pi} \left[(Z+1) \ln(Z+1) - (Z-1) \ln(Z-1) + 2 \ln \left[\frac{(z_2 - z_1)}{2} \right] - 2 \right],$$

então, pode-se definir as equações:

$$A_1(Z) = A_2^* + A_1^*$$

e (4.86)

$$A_2(Z) = A_2^* - A_1^*.$$

Para cada trecho tem-se que:

$$\Omega_r(Z) = \sigma_1 A_1 + \sigma_2 A_2 \quad (4.87)$$

Implementação

Considerando um rio, com pontos numerados de 0 até N e trechos de 0 até $N-1$, com $N > 1$, Figura 34, o potencial complexo de todo o rio será dado por (4.88).

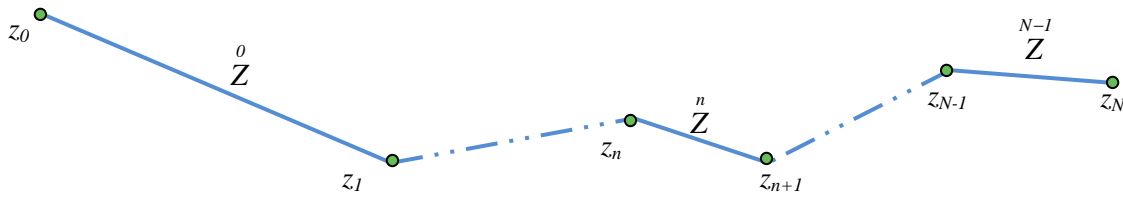


Figura 34 – Rio com vários trechos

$$\Omega_r = \sigma_0 A_1(Z^0) + \sigma_1 \left[A_2(Z^0) + A_1(Z^1) \right] + \dots + \sigma_{N-1} \left[A_2(Z^{N-2}) + A_1(Z^{N-1}) \right] + \sigma_N A_2(Z^{N-1}) \quad (4.88)$$

Os pontos de controle serão os próprios extremos, dos segmentos variando, portanto, z_0, z_1, \dots, z_N .

Verificam-se três formulações distintas, uma referente ao ponto inicial (0), uma referente aos pontos intermediários (n) e outra ao ponto final (N):

$$\Omega_{r,0} = \sigma_0 A_1(Z^0), \quad (4.89)$$

$$\Omega_{r,n} = \sigma_n \left[A_2(Z^{n-1}) + A_1(Z^n) \right] \quad 0 < n < N, \quad (4.90)$$

e

$$\Omega_{r,N} = \sigma_N A_2(Z^{N-1}). \quad (4.91)$$

Considerando um rio tributário que deságüe num ponto intermediário de um rio principal (Figura 35), para o ponto de deságua a formulação será:

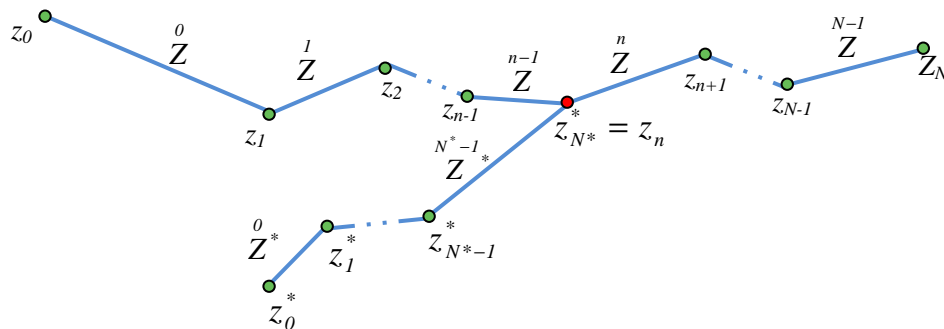


Figura 35 – Rio secundário com deságüe no rio principal.

$$\Omega_{r,n=N^*} = \sigma_{n=N^*} \left[A_2 \left(\begin{matrix} n-1 \\ Z \end{matrix} \right) + A_1 \left(\begin{matrix} n \\ Z \end{matrix} \right) + A_2 \left(\begin{matrix} N^*-1 \\ Z \end{matrix} \right) \right]. \quad (4.92)$$

4.2.7 Lago Poligonal de Infiltração Constante

Para áreas fechadas com infiltração constante \mathcal{N} , o potencial de descarga obedece às equações (4.93). Por convenção, a região interna é indicada como positiva e a externa, negativa. Adota-se, também, o sistema de eixos com η normal e τ tangente a cada ponto da borda (Figura 36).

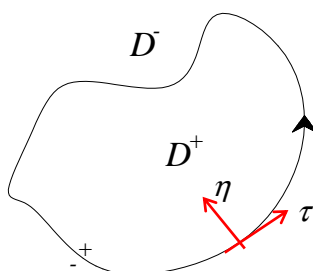


Figura 36 – Convenção de sinais para regiões.

$$\begin{aligned} \nabla^2 \Phi_{lp} &= \mathcal{N} & z \in D^+ \\ \text{e} & & \\ \nabla^2 \Phi_{lp} &= 0 & z \in D^- \end{aligned} \quad (4.93)$$

Essas equações são equivalentes ao sistema (4.65). Arbitrando duas funções potenciais de forma que o potencial total para o lago poligonal Φ_{lp} seja a soma das duas, tem-se:

$$\Phi_{lp} = \Phi_i + \Phi_e. \quad (4.94)$$

Sendo observadas as condições:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \Phi_i &= \mathcal{N} & z \in D^+, \\ \Phi_i &= 0 & z \in D^-, \end{aligned} \quad (4.95)$$

e

$$\nabla^2 \Phi_e = 0.$$

Como consequência de (4.95) a função Φ_i é descontínua enquanto Φ_e é harmônica para todo z , exceto possivelmente ao longo do contorno do lago.

As condições de continuidade de carga hidráulica e do fluxo ao longo do contorno da área de injeção devem ser satisfeitas. Como a função potencial de descarga interna Φ_i viola as condições de continuidade, então a função potencial de descarga externa Φ_e é usada para corrigir essas discontinuidades.

Primeiramente, a carga e o potencial são contínuos ao longo da borda do lago.

Representando o salto na função potencial ao longo do contorno como λ , obtém-se:

$$\Phi_e^+ - \Phi_e^- = -(\Phi_i^+ - \Phi_i^-) = -\Phi_i^+ = \lambda \quad (4.96)$$

Já para garantir a continuidade da função de corrente ao longo da borda é necessário que:

$$Q_{\eta_e}^+ - Q_{\eta_e}^- = -(Q_{\eta_i}^+ - Q_{\eta_i}^-) = -Q_{\eta_i}^+. \quad (4.97)$$

Representando o salto na função de corrente como $-\sigma$, referente à contribuição do fluxo devido à função potencial de descarga externa Φ_e ao longo do contorno, conclui-se que:

$$Q_{\eta}^+ = \sigma. \quad (4.98)$$

Para a função externa, onde prevalece a Equação de Laplace, o potencial de descarga pode ser representado pela parte real de um potencial complexo $\Phi_e = \Re\{\Omega_e\}$.

Em razão dos saltos exibidos tanto no potencial de descarga quanto na função de corrente, o potencial complexo Ω_e tende a ser representado pela combinação de linhas duplas (com esforço igual a λ) e linhas de injeção/extração (com esforço igual a σ) (STRACK, 1989, p. 425-443), de acordo com as equações (4.41) e (4.22), conforme:

$$\Omega_e = -\frac{I}{2\pi i} \oint_c \frac{\lambda(w)}{(z-w)} dw + \frac{I}{2\pi} \oint_c \sigma(w) \ln(z-w) dl. \quad (4.99)$$

Considerando a relação entre linha de injeção/extração e a linha dipolo, conforme citado por Strack (1989, p. 428):

$$\sigma(w) dl = -d\mu, \quad (4.100)$$

obtém-se:

$$\Omega_e = -\frac{I}{2\pi i} \oint_c \frac{\lambda(w)}{(z-w)} dw - \frac{I}{2\pi} \oint_c \frac{\mu(w)}{z-w} dw - \frac{I}{2\pi} \mu(w) \ln(z-w) \Big|_c. \quad (4.101)$$

Como a continuidade na função de corrente é garantida por $Q_{\eta}^+ = \sigma$ e que $Q_{\eta}^+ > 0$ se o ponto estiver em D^+ , a descarga ao longo do contorno deve ser igual a descarga total sobre a área do lago, o que leva a:

$$\oint_c \sigma(w) dw = -\oint_c \frac{d\mu(w)}{dw} dw = \iint_{D^+} \mathcal{N} dx dy = \mathcal{N}A. \quad (4.102)$$

A descarga, \mathcal{NA} , é diferente de zero e o salto na função de corrente irá decrescer ao longo do contorno do lago, no ponto inicial de integração z_1 o valor do salto nulo ($\mu = \Psi^+ - \Psi^- = 0$), então ao completar o contorno de integração o valor do salto μ será igual a $-\mathcal{NA}$.

Tomando por A a área do polígono, a integral (4.101) pode, então, ser escrita como:

$$\Omega_c = -\frac{I}{2\pi i} \oint_c \frac{\lambda(w) - i\mu(w)}{z-w} dw + \frac{\mathcal{NA}}{2\pi} \ln(z - z_1). \quad (4.103)$$

Para uma área poligonal o potencial complexo Ω_c será a soma dos potenciais para linhas duplas com esforço λ , linhas dipolo com esforço μ e um poço em z_1 com descarga \mathcal{NA} .

Considerando L_1 o maior dos lados do polígono e adotando o sistema de coordenadas locais, indicado na Figura 37, define-se:

$$z_2 - z_1 = L_1 e^{i\alpha_1}, \quad (4.104)$$

$$z_c = \frac{I}{N} \sum_{n=1}^N z_n, \quad (4.105)$$

e

$$v = \varepsilon + i\delta = (z - z_c) e^{-i\alpha_1}. \quad (4.106)$$

Considerando como constante a recarga \mathcal{N} a função potencial de descarga pode ser escolhida como sendo:

$$\Phi_i = \frac{I}{2} \mathcal{N} \varepsilon^2 \quad (4.107)$$

Note que:

$$\nabla_i^2 \Phi = \mathcal{N},$$

$$Q_{\varepsilon} = -\mathcal{N}\varepsilon,$$

(4.108)

e

$$Q_{\delta} = 0.$$

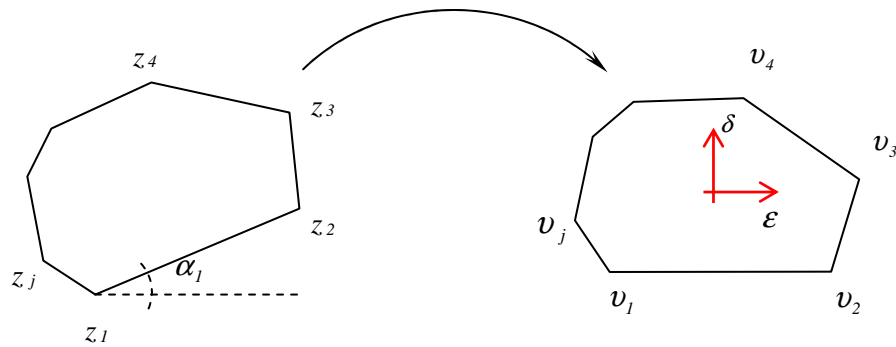


Figura 37 – Coordenadas locais para lago poligonal.

Para o lado j temos o comprimento L_j e a orientação α_j de forma que:

$$z_{j+1} - z_j = L_j e^{i\alpha_j} \quad (j = 1, 2, 3, \dots, N).$$

(4.109)

Aplicando a equação (4.106) nos vértices do polígono tem-se:

$$v_{j+1} - v_j = L_j e^{-i(\alpha_j - \alpha_1)} \quad (j = 1, 2, 3, \dots, N)$$

(4.110)

e

$$v_{N+1} = v_1.$$

A componente Q_{η}^j normal ao lado j (Figura 38) será:

$$Q_{\eta}^j = -Q_{\varepsilon} \cos\left(\alpha_j - \alpha_1 - \frac{\pi}{2}\right) - Q_{\delta} \sin\left(\alpha_j - \alpha_1 - \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow$$

(4.111)

$$Q_{\eta}^j = \mathcal{N}\varepsilon \sin(\alpha_j - \alpha_1).$$

De acordo com as equações (4.96) e (4.98), tem-se:

$$\lambda_i^j = -\Phi_i^j = -\frac{I}{2} \mathcal{N} \varepsilon^2$$

e (4.112)

$$\sigma_i^j = Q_{\eta}^+ = \mathcal{N} \varepsilon \sin(\alpha_j - \alpha_1).$$

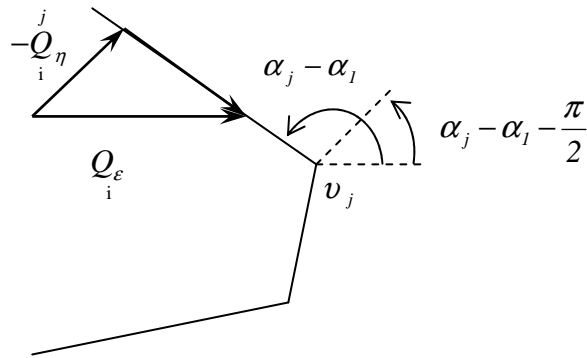


Figura 38 – Componente Q_{η}^j para o lado j de um lago poligonal.

Seja o complexo Z^j definido como:

$$Z^j = \frac{z - \frac{I}{2}(z_{j+1} + z_j)}{\frac{I}{2}(z_{j+1} - z_j)} = \frac{v - \frac{I}{2}(v_{j+1} + v_j)}{\frac{I}{2}(v_{j+1} - v_j)}. \tag{4.113}$$

Como ao longo da borda Z^j é real, ou seja, $\Im\{Z^j\} = 0$, obtém-se:

$$\varepsilon = \frac{I}{2}(\varepsilon_{j+1} - \varepsilon_j)Z^j + \frac{I}{2}(\varepsilon_{j+1} + \varepsilon_j)$$

e (4.114)

$$\delta = \frac{I}{2}(\delta_{j+1} - \delta_j)Z^j + \frac{I}{2}(\delta_{j+1} + \delta_j).$$

Reescrevendo as equações (4.112) ao longo do elemento, $\Im\{Z^j\} = 0$, tem-se:

$$\lambda^j = -\frac{I}{2} \mathcal{N} \left[\frac{I}{2} (\varepsilon_{j+1} - \varepsilon_j)^j Z + \frac{I}{2} (\varepsilon_{j+1} + \varepsilon_j) \right]^2 \quad (4.115)$$

e

$$\sigma^j = \mathcal{N} \left[\frac{I}{2} (\varepsilon_{j+1} - \varepsilon_j)^j Z + \frac{I}{2} (\varepsilon_{j+1} + \varepsilon_j) \right] \sin(\alpha_j - \alpha_1). \quad (4.116)$$

Pela equação (4.100) e pela transformação (4.113), para os lados do lago poligonal, vale a expressão:

$$\sigma^j = -\frac{2}{L_j} \frac{d \mu^j}{d Z^j}, \quad (4.117)$$

escolhendo a μ de forma que seja zero em $v = v_1$, então, $\mu_1 = 0$. Resolvendo a equação (4.117):

$$\mu^j = -\frac{I}{2} L_j \int_{-1}^{Z_j} \frac{I}{2} \mathcal{N} \left[(\varepsilon_{j+1} - \varepsilon_j)^j Z + (\varepsilon_{j+1} + \varepsilon_j) \right] \sin(\alpha_j - \alpha_1) d Z^j + \mu_j. \quad (4.118)$$

Observa-se que μ^j é a função do esforço para a linha dipolo ao longo do lado j do lago poligonal, enquanto μ_j é o valor da função no vértice j do lago poligonal. Resolvendo a equação (4.118):

$$\mu^j = -\frac{\mathcal{N} L_j \sin(\alpha_j - \alpha_1)}{8(\varepsilon_{j+1} - \varepsilon_j)} \left\{ \left[(\varepsilon_{j+1} - \varepsilon_j)^j Z + (\varepsilon_{j+1} + \varepsilon_j) \right]^2 - 4\varepsilon_j^2 \right\} + \mu_j. \quad (4.119)$$

Considerando que $L_j \sin(\alpha_j - \alpha_1) = \delta_{j+1} - \delta_j$ e substituindo na equação (4.119) obtém-se:

$$\mu^j = -\frac{\mathcal{N}(\delta_{j+1} - \delta_j)}{8} \left[(\varepsilon_{j+1} - \varepsilon_j) \left(Z^2 - 1 \right) + 2(\varepsilon_{j+1} + \varepsilon_j) \left(Z + 1 \right) \right] + \mu_j. \quad (4.120)$$

O potencial complexo devido ao lado j do lago poligonal pode ser escrito como:

$$\Omega_e^j = -\frac{1}{2\pi i} (\lambda + i\mu) \ln \frac{Z-1}{Z+1} + p_{ldu}^j(Z). \quad (4.121)$$

A função $p_{ldu}^j(Z)$, assim como a função Ω_e^j , próxima ao infinito tem que ter o comportamento de ordem Z^{-1} . Escrevendo $(\varepsilon_{j+1} - \varepsilon_j) + i(\delta_{j+1} - \delta_j) = v_{j+1} - v_j$, tem-se:

$$\lambda + i\mu = -\frac{1}{8} \mathcal{N}(v_{j+1} - v_j) \left[(\varepsilon_{j+1} - \varepsilon_j) \left(\frac{Z^2 - 1}{Z - 1} \right) + 2(\varepsilon_{j+1} + \varepsilon_j) \left(\frac{Z + 1}{Z - 1} \right) \right] - \frac{1}{2} \mathcal{N}\varepsilon_j^2 + i\mu_j \quad (4.122)$$

O valor de μ_j é obtido a partir do valor de μ_{j+1} , referente ao valor da função μ no ponto v_{j+1} , onde $Z = 1$, portanto,

$$\mu_{j+1} = \mu(1) = -\frac{1}{2} \mathcal{N}(\varepsilon_{j+1} + \varepsilon_j)(\delta_{j+1} - \delta_j) + \mu_j \quad j \geq 1, \quad (4.123)$$

com $\mu_1 = 0$.

A equação (4.103) pode ser escrita como:

$$\Omega_e = \sum_{j=1}^N \Omega_e^j + \frac{\mathcal{N}A}{2\pi} \ln(z - z_1). \quad (4.124)$$

O potencial complexo dado na equação (4.124) é válido para a parte externa do lago poligonal. O potencial de descarga Φ_i , válido para a parte interna, deve ser adicionado à parte real do potencial complexo de (4.124).

Seja a função:

$$\chi = \frac{1}{\mathcal{N}} (\lambda + i\mu). \quad (4.125)$$

Definindo as N constantes:

$$\mu_j^* = \frac{1}{\mathcal{N}} \mu_j. \quad (4.126)$$

Reorganizando a equação (4.123) e aplicando (4.126), obtém-se:

$$\mu_j^* = -\frac{1}{2}(\varepsilon_j + \varepsilon_{j-1})(\delta_j - \delta_{j-1}) + \mu_{j-1}^* \quad j > 1, \quad (4.127)$$

com $\mu_1^* = 0$.

Adotando a função $P(v) = \frac{2\pi i}{\mathcal{N}} p_{idu}^j(\bar{Z})$, para $\bar{Z} = \bar{Z}(v)$ o potencial complexo

externo pode ser escrito em termos de v :

$$\frac{j}{\Omega} = -\frac{\mathcal{N}}{2\pi i} \left[\chi \ln \frac{v - v_{j+1}}{v - v_j} + P(v) \right]. \quad (4.128)$$

Desenvolvendo χ em função de v , depois de reagrupar os termos, verifica-se que χ é

uma função do segundo grau na forma de:

$$\chi = c_2 v^2 + c_1 v + c_0, \quad (4.129)$$

sendo:

$$c_2 = -\frac{1}{2} \frac{\varepsilon_{j+1} - \varepsilon_j}{v_{j+1} - v_j},$$

$$c_1 = \frac{\varepsilon_{j+1} - \varepsilon_j}{v_{j+1} - v_j} v_j - \varepsilon_j \quad (4.130)$$

e

$$c_0 = -\frac{1}{2} \frac{\varepsilon_{j+1} - \varepsilon_j}{v_{j+1} - v_j} v_j v_{j+1} + \frac{1}{2} (\varepsilon_{j+1} + \varepsilon_j) v_j - \frac{1}{2} \varepsilon_j^2 + i \mu_j^*.$$

O potencial complexo externo para o lago (4.124) pode ser expresso por:

$$\frac{j}{\Omega} = -\frac{\mathcal{N}}{2\pi i} \sum_{j=1}^N \chi(v) \ln \frac{v - v_{j+1}}{v - v_j} + \frac{\mathcal{N}}{2\pi i} \sum_{j=1}^N P(v) + \frac{\mathcal{N}A}{2\pi} \ln(z - z_l). \quad (4.131)$$

Polinômio de correção

Como $\chi(v)$ é do segundo grau, o polinômio de correção $P(v)$ deverá ser um

polinômio de primeiro grau, na forma de:

$$P^j(v) = a_1^j v + a_0^j. \quad (4.132)$$

Depois de aplicar a correção de campo distante conforme Strack (1989, p. 436), observa-se que:

$$\sum_{j=1}^N a_1^j = 0 \quad \text{e} \quad \sum_{j=1}^N a_0^j = -\frac{3}{2}iA. \quad (4.133)$$

A correção de campo distante aplicada aqui tem procedimento idêntico ao apresentado em nas seções 4.1.4, 4.2.9 e 0.

Aplicando as definições (4.133) no potencial complexo (4.131), obtém-se:

$$\Omega_e = -\frac{\mathcal{N}}{2\pi i} \sum_{j=1}^N \chi^j(v) \ln \frac{v - v_{j+1}}{v - v_j} - \frac{3\mathcal{N}A}{4\pi} + \frac{\mathcal{N}A}{2\pi} \ln(z - z_1). \quad (4.134)$$

Como a solução da equação $\nabla^2 \Phi_e = N$ leva à função $\Phi_i = \frac{I}{2} \mathcal{N} \varepsilon^2$ e adicionado-se o potencial de descarga Φ_i ao potencial complexo Ω_e , tem-se o potencial complexo final Ω_{lp} para o lago poligonal. Considerando a função de influência A_{lp} , o potencial complexo para um lago poligonal pode, então, ser escrito conforme:

$$\Omega_{lp}(z) = \mathcal{N}A_{lp}(z),$$

onde,

$$A_{lp}(z) = \frac{I}{2\pi i} \sum_{j=1}^N (c_2^j v^2 + c_1^j v + c_0^j + \frac{1}{2} \varepsilon^2) \ln \frac{v - v_{j+1}}{v - v_j} + \frac{A}{2\pi} \ln(z - z_1) - \frac{3A}{4\pi} \quad (4.135)$$

Normalmente, sendo conhecida a taxa de infiltração, o elemento lago poligonal não possui graus de liberdade a serem determinados, sendo o potencial devido a este elemento calculado diretamente em qualquer ponto do domínio, a partir da função de influência dada pela (4.135).

4.2.8 Lago Poligonal de Infiltração por Linhas de Injeção/Extração

Ocorrendo completa conexão hidráulica do lago poligonal com o aquífero, e não havendo interesse em obter os potenciais de descarga no interior da área do lago, pode-se adaptar o elemento rio para um polígono fechado. Como consequência, é possível trabalhar com os graus de liberdade tanto para a carga hidráulica quanto para o fluxo normal à borda do lago. Considerando o mesmo desenvolvimento da formulação para o elemento rio, o potencial complexo para o lago poligonal é obtido pela equação:

$$\Omega_{lpr} = \sigma_1 \left[A_2(\overset{0}{Z}) + A_1(\overset{1}{Z}) \right] + \dots + \sigma_n \left[A_2(\overset{n-1}{Z}) + A_1(\overset{n}{Z}) \right] + \dots + \sigma_N \left[A_2(\overset{N-1}{Z}) + A_1(\overset{N}{Z}) \right] \quad (4.136)$$

como o polígono é fechado $z_0 = z_N$, o que leva a uma única formulação:

$$\Omega_{lpr,n} = \sigma_n \left[A_2(\overset{n-1}{Z}) + A_1(\overset{n}{Z}) \right] \quad n = 1 \dots N - 1; \overset{0}{Z} = \overset{N}{Z} . \quad (4.137)$$

Os pontos de controle serão os vértices do polígono z_0, z_1, \dots, z_N . Como este é fechado, então, $z_0 = z_N$.

4.2.9 Inomogeneidade poligonal de primeira ordem

A inomogeneidade poligonal de primeira ordem é usada para representar regiões de condutividade hidráulica diferentes, porém constantes, do meio poroso.

Existem duas condições ao longo da borda de uma inomogeneidade na condutividade hidráulica:

- (a) continuidade na carga hidráulica e
- (b) continuidade no fluxo;

considerando a convenção apresentada na Figura 36:

$$\phi^+ = \phi^-$$

$$e \tag{4.138}$$

$$Q_\eta^+ = Q_\eta^-,$$

onde os sinais (+) e (-) referem-se aos lados de dentro e de fora da inomogeneidade, respectivamente. Q_η é a componente normal do vetor de descarga. Pode-se escrever:

$$\Phi = Kf(\phi), \tag{4.139}$$

logo,

$$\frac{\Phi^+}{\Phi^-} = \frac{K^+}{K^-}. \tag{4.140}$$

O salto no potencial λ também pode ser expresso em termos de Φ^- como:

$$\lambda = \Phi^+ - \Phi^- = \frac{K^+ - K^-}{K^-} K^- f(\phi) = \frac{K^+ - K^-}{K^-} \Phi^-. \tag{4.141}$$

Como $Q_\eta = -\frac{\partial \Phi}{\partial \eta} = +\frac{\partial \Psi}{\partial \tau}$, onde τ é a tangente à fronteira da inomogeneidade, a

condição $Q_\eta^+ = Q_\eta^-$ é satisfeita, se Ψ for contínua:

$$\Psi^+ - \Psi^- = 0. \tag{4.142}$$

Observa-se que uma linha dupla é adequada para modelar uma inomogeneidade na condutividade hidráulica: o potencial apresenta um salto através da linha dupla, mas as funções de corrente são contínuas.

Considerando uma cadeia poligonal fechada de linhas duplas, com os extremos de cada trecho definidos por $z = z_m$ e $z = z_{m+1}$ e com esforço λ , define-se uma variável local como:

$$Z = Z(z, z_m, z_{m+1}) = \frac{z - \frac{1}{2}(z_{m+1} + z_m)}{\frac{1}{2}(z_{m+1} - z_m)} \quad (4.143)$$

A Figura 39 ilustra a interpolação linear ao longo da borda da inomogeneidade.

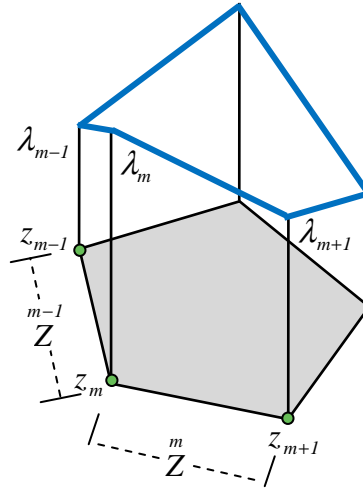


Figura 39 – Inomogeneidade com interpolação por polinômio de primeiro grau.

O potencial complexo para um linha dupla é dado por (4.49), ou seja:

$$\Omega = \frac{\lambda(Z)}{2\pi i} \ln \frac{Z-1}{Z+1} + ip(Z) \quad (4.144)$$

Se λ_m e λ_{m+1} representam os esforços nos nós z_m e z_{m+1} respectivamente, então o

esforço pode ser aproximado por uma função linear na forma de:

$$\lambda(Z) = aZ + b \quad (4.145)$$

Considerando as condições:

$$\lambda(-1) = \lambda_m$$

e

$$\lambda(1) = \lambda_{m+1} \quad (4.146)$$

Então, a função do esforço pode ser escrita como:

$$\lambda(Z)^m = \frac{\lambda_{m+1} - \lambda_m}{2} Z + \frac{\lambda_{m+1} + \lambda_m}{2}. \quad (4.147)$$

Reorganizando os termos de forma a explicitar os esforços, tem-se:

$$\lambda(Z)^m = \frac{Z+1}{2} \lambda_{m+1} - \frac{Z-1}{2} \lambda_m. \quad (4.148)$$

Sejam as funções de ponderação do esforço:

$$f_1(Z)^m = \frac{Z+1}{2} \quad (4.149)$$

e

$$f_2(Z)^m = -\frac{Z-1}{2}$$

então, pode-se escrever:

$$\lambda(Z)^m = f_1(Z)^m \lambda_{m+1} + f_2(Z)^m \lambda_m. \quad (4.150)$$

Definindo as funções de ponderação do potencial de forma atender o polinômio de correção, tem-se:

$$\mathcal{Y}_1(Z)^m = f_1(Z)^m \ln \frac{Z-1}{Z+1} + p_1(Z)^m \quad (4.151)$$

e

$$\mathcal{Y}_2(Z)^m = f_2(Z)^m \ln \frac{Z-1}{Z+1} + p_2(Z)^m \quad (4.152)$$

O objetivo da função ponderadora do potencial é colocar o potencial complexo em termos de uma combinação linear de esforços, onde os coeficientes são funções dependentes somente da geometria do problema – as funções de ponderação do potencial.

Determinação do polinômio de correção de campo distante

Pela seção 4.1.4, sabe-se que para linhas duplas o potencial complexo deverá:

- i. ter ordem Z^{-1} próximo ao infinito;
- ii. os coeficientes do polinômio $p(Z)$ são determinados por esta condição; e
- iii. a ordem do polinômio $p(Z)$ é uma ordem menor que λ , no caso de uma aproximação de primeiro grau, o polinômio corretor terá ordem zero.

Aqui $p(Z)$ é dividido em duas funções $p_1(Z)$ e $p_2(Z)$, as quais se reduzem a constantes, como consequência das condições anteriores, pois, conforme Spiegel (1972, p.9),

$$\ln \frac{Z-1}{Z+1} = \ln \frac{1 - \frac{1}{Z}}{1 + \frac{1}{Z}} = -2 \left(\frac{1}{Z} + \frac{3}{Z^3} + \frac{5}{Z^5} + \frac{7}{Z^7} \dots \right). \quad (4.153)$$

Para a aproximação linear o termo logarítmico pode ser posto como $-2Z^{-1} + o(Z^{-3})$ tendo $Z \rightarrow \infty$, a função $o(Z^{-3})$ refere-se ao erro cometido por essa aproximação sendo indicado que este erro tem ordem Z^{-3} e devido essa magnitude pode ser desconsiderado. A série apresentada na equação (4.153) pode ser truncada já no primeiro termo.

Conclui-se para que no infinito as funções γ_1 e γ_2 tendam a se anular essas podem ser escritas na forma de:

$$\gamma_1(Z) = f_1(Z) \ln \frac{Z-1}{Z+1} + f_1(Z) 2 \left(\frac{1}{Z} \right) \quad (4.154)$$

e

$$\gamma_2(Z) = f_2(Z) \ln \frac{Z-1}{Z+1} + f_2(Z) 2 \left(\frac{1}{Z} \right) \quad (4.155)$$

Desde de que os termos oriundos da multiplicação das funções f pela série truncada que apresentem comportamento de ordem menor ou igual a Z^{-1} sejam desprezados. Portanto, chega-se a difinição de cada polinômio corretor:

$$p_1(Z) = 1 \quad (4.156)$$

e

$$p_2(Z) = -1. \quad (4.157)$$

As funções de ponderação do potencial são escritas como:

$$\gamma_1(Z) = f_1(Z) \ln \frac{Z-1}{Z+1} + 1 \quad (4.158)$$

e

$$\gamma_2(Z) = f_2(Z) \ln \frac{Z-1}{Z+1} - 1. \quad (4.159)$$

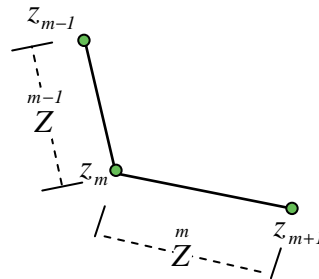
Por conseguinte, a contribuição para o potencial complexo de um trecho (m) do polígono poderá ser escrita como:

$$\Omega = \frac{1}{2\pi i} \left[\lambda_{m+1} \gamma_1(Z) + \lambda_m \gamma_2(Z) \right]. \quad (4.160)$$

Para a inomogeneidade com M lados de um polígono fechado ($z_{M+1} = z_1$), o potencial complexo será:

$$\Omega_{inbo} = \sum_{j=1}^M \Omega_j. \quad (4.161)$$

Implementação



O somatório da equação (4.161) pode ser reorganizado de forma a explicitar os esforços, observando trechos consecutivos de uma inomogeneidades $m-1$ e m :

$$\Omega^{m-1} = \frac{1}{2\pi i} \left[\lambda_m \Upsilon_1(Z^{m-1}) + \lambda_{m-1} \Upsilon_2(Z^{m-1}) \right], \tag{ 4.162 }$$

$$\Omega^m = \frac{1}{2\pi i} \left[\lambda_{m+1} \Upsilon_1(Z^m) + \lambda_m \Upsilon_2(Z^m) \right].$$

O vértice em comum entre os trechos pode ser explicitado de forma que:

$$\Omega_{,m} = \frac{1}{2\pi i} \lambda_m \left[\Upsilon_1(Z^{m-1}) + \Upsilon_2(Z^m) \right]. \tag{ 4.163 }$$

Reescrevendo a função de influencia na forma de:

$$A_{incho}(z) = \frac{1}{2\pi i} \left[\Upsilon_1(Z^{m-1}) + \Upsilon_2(Z^m) \right]. \tag{ 4.164 }$$

O potencial complexo para a inomogeneidade com M vértices:

$$\Omega_{incho} = \sum_{j=1}^M \lambda_m A_{incho}(z). \tag{ 4.165 }$$

Comportamento nos nós

É necessário estudar o comportamento do potencial nos nós que representam os vértices do polígono da inomogeneidade.

Observa-se que no nó $Z = 1$ e $Z = -1$. Neste ponto, devido ao termo logarítmico, as funções \mathcal{Y} apresentam singularidades, entretanto são singularidades que podem ser tratadas. É necessário estudar o comportamento da função de influencia por meio da aproximação de um referido nó $z \rightarrow z_m$:

$$\Omega_m(z_m) = \lim_{z \rightarrow z_m} \frac{1}{2\pi i} \lambda_m \left[\mathcal{Y}_1\left(\frac{m-1}{Z}\right) + \mathcal{Y}_2\left(\frac{m}{Z}\right) \right], \quad (4.166)$$

desenvolvendo,

$$\Omega_m(z_m) = \lim_{z \rightarrow z_m} \frac{1}{2\pi i} \lambda_m \left[\frac{Z+1}{2} \ln \frac{Z-1}{Z+1} + 1 - \frac{Z-1}{2} \ln \frac{Z-1}{Z+1} - 1 \right]. \quad (4.167)$$

ou

$$\Omega_m(z_m) = \frac{\lambda_m}{2\pi i} \left[\lim_{Z \rightarrow 1} \frac{Z+1}{2} \ln \frac{Z-1}{Z+1} - \lim_{Z \rightarrow -1} \frac{Z-1}{2} \ln \frac{Z-1}{Z+1} \right]. \quad (4.168)$$

Considerando que o limite da multiplicação é a multiplicação dos limites:

$$\Omega_m(z_m) = \frac{\lambda_m}{2\pi i} \left[\lim_{Z \rightarrow 1} \ln \frac{Z-1}{Z+1} + \lim_{Z \rightarrow -1} \ln \frac{Z-1}{Z+1} \right], \quad (4.169)$$

Escrevendo os limites em termos das variáveis globais:

$$\Omega_m(z_m) = \frac{\lambda_m}{2\pi i} \lim_{z \rightarrow z_m} \left[\ln \frac{z - z_m}{z - z_{m-1}} + \ln \frac{z - z_{m+1}}{z - z_m} \right]. \quad (4.170)$$

o que leva a:

$$\Omega_m(z_m) = \frac{\lambda_m}{2\pi i} \lim_{z \rightarrow z_m} \left[\ln \frac{z - z_{m+1}}{z - z_{m-1}} \right]. \quad (4.171)$$

O salto neste ponto refere-se à parte real do potencial complexo:

$$\Re\{\Omega_m(z_m)\} = \theta_{m-1,m+1} = \arg \frac{z_m - z_{m+1}}{z_m - z_{m-1}}. \quad (4.172)$$

Os valores dos ângulos $\theta_{m-1,m+1}^+$ e $\theta_{m-1,m+1}^-$ em cada lado do polígono são obtidos como mostrados na Figura 40. Os ângulos devem ser medidos no sentido anti-horário e o interior da inhomogeneidade deve ficar à esquerda de quem percorre sua borda.

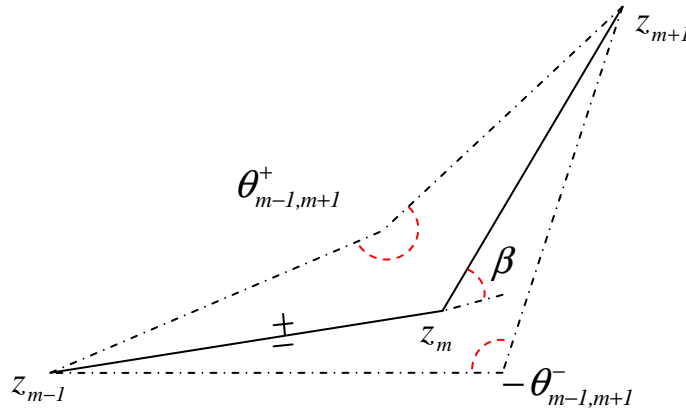


Figura 40 – Definição dos ângulos originados no termo logarítmico para o potencial

O valor de A_{db} em $z = z_j^-$, no vértice z_j se aproximando pelo lado externo (-) da inhomogeneidade (Figura 40 e Figura 41), é igual à contribuição da função coeficiente de λ_j no nó z_j :

$$A_{db}(z_j, z_{j-1}, z_j, z_{j+1}) = \frac{1}{2\pi} \theta_{m-1,m+1}^- \tag{4.173}$$

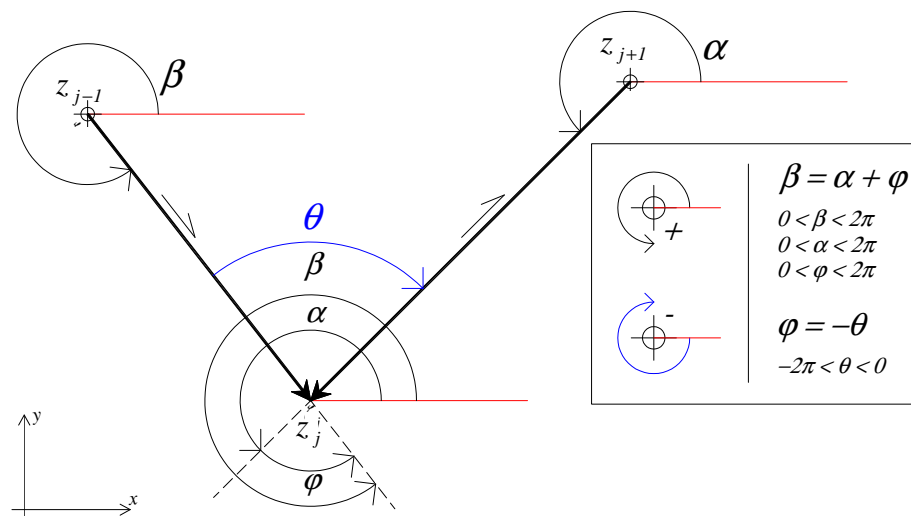


Figura 41 – Esquema dos ângulos no vértice de uma inhomogeneidade. Os ângulos são usados no cálculo do potencial de descarga no vértice da inhomogeneidade.

Além da análise da função de influencia no ponto respectivo (onde $Z = 1$ e $Z = -1$), é importante verificar o comportamento desta função nos outros pontos em que possam surgir singularidades (onde $Z = -1$ ou $Z = 1$).

i. Seja a contribuição para o potencial complexo no ponto z_{m-1} do termo referente ao esforço λ_m :

$$\Omega_{,m}(z_{m-1}) = \frac{\lambda_m}{2\pi i} \left[\lim_{\substack{z \rightarrow z_{m-1} \\ Z \rightarrow -1}} \frac{Z+1}{2} \ln \frac{Z-1}{Z+1} - \lim_{z \rightarrow z_{m-1}} \frac{Z-1}{2} \ln \frac{Z-1}{Z+1} \right]. \quad (4.174)$$

Quando $Z = -1$ o potencial complexo apresentará singularidade devido ao primeiro dos termos entre os cochetes da equação (4.174):

$$\lim_{Z \rightarrow -1} \frac{Z+1}{2} \ln \frac{Z-1}{Z+1}. \quad (4.175)$$

Desenvolvendo o limite tem-se que:

$$\lim_{Z \rightarrow -1} \frac{Z+1}{2} \ln \frac{Z-1}{Z+1} = \frac{1}{2} \left[\lim_{Z \rightarrow -1} (Z+1) \ln(Z-1) - \lim_{Z \rightarrow -1} (Z+1) \ln(Z+1) \right]. \quad (4.176)$$

Como,

$$\lim_{Z \rightarrow -1} (Z+1) \ln(Z-1) = 0, \quad (4.177)$$

e devido a propriedade $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) = 0$

$$\lim_{Z \rightarrow -1} (Z+1) \ln(Z+1) = 0, \quad (4.178)$$

então,

$$\Omega_{,m}(z_{m-1}) = \frac{\lambda_m}{2\pi i} \left[- \lim_{z \rightarrow z_{m-1}} \frac{{}^m Z-1}{2} \ln \frac{{}^m Z-1}{{}^m Z+1} \right]. \quad (4.179)$$

ii. Seja a contribuição para o potencial complexo no ponto z_{m+1} do termo referente ao esforço λ_m :

$$\Omega_{,m}(z_{m+1}) = \frac{\lambda_m}{2\pi i} \left[\lim_{z \rightarrow z_{m+1}} \frac{{}^{m-1} Z+1}{2} \ln \frac{{}^{m-1} Z-1}{{}^{m-1} Z+1} - \lim_{z \rightarrow z_{m+1}} \frac{{}^m Z-1}{2} \ln \frac{{}^m Z-1}{{}^m Z+1} \right]. \quad (4.180)$$

Quando $Z = 1$ o potencial complexo apresentará singularidade devido ao primeiro dos termos entre os colchetes da equação (4.180):

$$\lim_{z \rightarrow z_{m+1}} \frac{{}^m Z-1}{2} \ln \frac{{}^m Z-1}{{}^m Z+1} = \lim_{\substack{{}^m Z \rightarrow 1 \\ {}^{m-1} Z \rightarrow 1}} \frac{{}^m Z-1}{2} \ln \frac{{}^m Z-1}{{}^m Z+1}. \quad (4.181)$$

Desenvolvendo o limite tem-se que:

$$\lim_{\substack{{}^m Z \rightarrow 1 \\ {}^{m-1} Z \rightarrow 1}} \frac{{}^m Z-1}{2} \ln \frac{{}^m Z-1}{{}^m Z+1} = \frac{1}{2} \left[\lim_{\substack{{}^m Z \rightarrow 1 \\ {}^{m-1} Z \rightarrow 1}} ({}^m Z-1) \ln ({}^m Z-1) - \lim_{\substack{{}^m Z \rightarrow 1 \\ {}^{m-1} Z \rightarrow 1}} ({}^m Z-1) \ln ({}^m Z+1) \right]. \quad (4.182)$$

Como,

$$\lim_{\substack{{}^m Z \rightarrow 1 \\ {}^{m-1} Z \rightarrow 1}} ({}^m Z-1) \ln ({}^m Z+1) = 0, \quad (4.183)$$

e devido a propriedade $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) = 0$

$$\lim_{\substack{{}^m Z \rightarrow 1 \\ {}^{m-1} Z \rightarrow 1}} ({}^m Z-1) \ln ({}^m Z-1) = 0, \quad (4.184)$$

então,

$$\Omega_{,m}(z_{m+1}) = \frac{\lambda_m}{2\pi i} \left[\lim_{z \rightarrow z_{m+1}} \frac{{}^{m-1} Z+1}{2} \ln \frac{{}^{m-1} Z-1}{{}^{m-1} Z+1} \right]. \quad (4.185)$$

4.2.10 Inomogeneidade Poligonal de Segunda Ordem

A adoção de um polinômio de segunda ordem para aproximar o salto ao longo da borda de um polígono que represente uma inomogeneidade segue o mesmo desenvolvimento para a aproximação de primeira ordem.

A idéia básica é acrescentar um polinômio elementar de segunda ordem que se anule nos extremos da linha dupla e somá-lo ao polinômio obtido pela aproximação de primeira ordem (Figura 42).

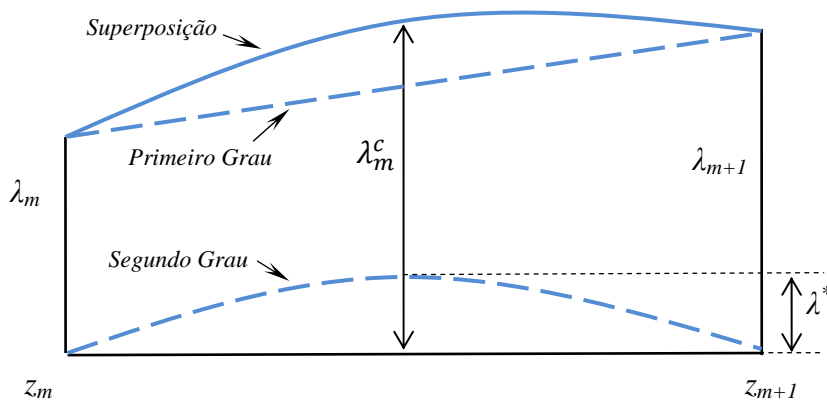


Figura 42 – Ilustração da relação entre o polinômio de primeiro e segundo graus

Considerando que a função salto a ser acrescentada é de segundo grau e que se anula nas extremidades teremos que,

$$f_3(Z) = (Z-1)(Z+1) = (Z^2-1). \quad (4.186)$$

e, defini-se o potencial complexo a acrescentar como:

$$\Omega^* = -\frac{\lambda^*}{2\pi i} \left[\left(Z^2-1 \right) \ln \frac{(Z-1)}{(Z+1)} + p_3(Z) \right]. \quad (4.187)$$

Determinação do polinômio de correção de campo distante

Expandindo no infinito teremos que o termo logaritmo, tem-se que:

$$\ln \frac{\binom{m}{Z-1}}{\binom{m}{Z+1}} \rightarrow \frac{-2}{Z} + O\left(\frac{1}{Z^3}\right). \quad (4.188)$$

Multiplicado pelo termo quadrático e para que o potencial complexo se anule no infinito, tem-se $p_3(\binom{m}{Z}) = +2\binom{m}{Z}$, então:

$$\Omega^* = -\frac{\lambda^*}{2\pi i} \left[\left(\binom{m}{Z^2-1} \right) \ln \frac{\binom{m}{Z-1}}{\binom{m}{Z+1}} + 2\binom{m}{Z} \right], \quad (4.189)$$

definindo a função de ponderação do potencial como:

$$\Upsilon_3(\binom{m}{Z}) = \left[\left(\binom{m}{Z^2-1} \right) \ln \frac{\binom{m}{Z-1}}{\binom{m}{Z+1}} + 2\binom{m}{Z} \right]. \quad (4.190)$$

considerando que $\lambda_m^* = \lambda_m^c - \frac{\lambda_m + \lambda_{m+1}}{2}$, obtém-se:

$$\Omega^* = -\frac{1}{2\pi i} \left[\lambda_m^* \Upsilon_3(\binom{m}{Z}) - \frac{\lambda_m}{2} \Upsilon_3(\binom{m}{Z}) - \frac{\lambda_{m+1}}{2} \Upsilon_3(\binom{m}{Z}) \right], \quad (4.191)$$

O potencial complexo final é encontrado adicionando-se ao potencial de primeiro grau (4.160) o complemento de segundo grau (4.191). Reorganizando os termos chega-se a:

$$\Omega = \frac{1}{2\pi i} \left[\lambda_m \left[\Upsilon_2(\binom{m}{Z}) + \frac{1}{2} \Upsilon_3(\binom{m}{Z}) \right] - \lambda_m^c \Upsilon_3(\binom{m}{Z}) + \lambda_{m+1} \left[\Upsilon_1(\binom{m}{Z}) + \frac{1}{2} \Upsilon_3(\binom{m}{Z}) \right] \right]. \quad (4.192)$$

Implementação

Aplicando as condições nos nós de forma semelhante ao desenvolvido de implementação da seção 4.2.9, duas formulações diferentes são identificadas, a primeira diz respeito aos vértices da inhomogeneidade:

$$\Omega_{invoVc} = \sum_{j=1}^N \lambda_j A_{qv}(z, z_{j-1}, z_j, z_{j+1}),$$

onde, (4.193)

$$A_{qv}(z, z_{j-1}, z_j, z_{j+1}) = \frac{l}{2\bar{m}} \left[\gamma_1(\bar{Z}) + \frac{1}{2}\gamma_3(\bar{Z}) + \gamma_2(\bar{Z}) + \frac{1}{2}\gamma_3(\bar{Z}) \right].$$

O segundo conjunto de equações é obtido para os pontos médios dos trechos (lados do polígono):

$$\Omega_{invoPtMd} = \sum_{j=1}^N \lambda_j^c A_{qm}(z, z_j, z_{j+1}),$$

onde, (4.194)

$$A_{qm}(z, z_j, z_{j+1}) = -\frac{l}{2\bar{m}} \left[\gamma_3(\bar{Z}) \right].$$

O potencial total da inhomogeneidade pode ser reescrito como:

$$\Omega_{invo} = \Omega_{invoVc} + \Omega_{invoPtMd}. \quad (4.195)$$

A Figura 43 ilustra a interpolação quadrática ao longo da borda da inhomogeneidade.

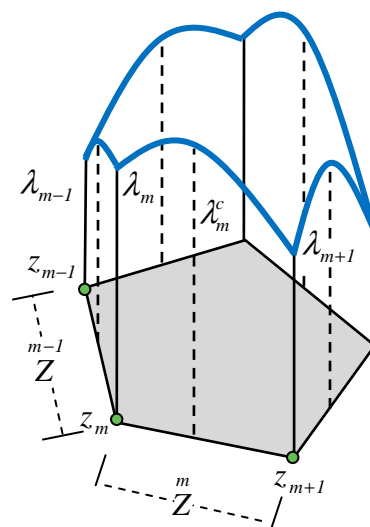


Figura 43 – Inhomogeneidade com interpolação por polinômio de segundo grau.

4.3 Montagem do sistema linear

Todos os elementos desenvolvidos na seção anterior apresentam uma equação linear para o potencial de descarga. À exceção de uma constante, o potencial de descarga resulta da multiplicação de um esforço (ξ) por uma função de influência (A) dependente da geometria do elemento e do ponto analisado:

$$\Phi = \xi A(z),$$

em que:

$$\xi = W \text{ para poços;}$$

$$\xi = \sigma \text{ para trechos de rio;}$$

$$\xi = \lambda \text{ para bordas de inhomogeneidade; e}$$

$$\xi = \mathcal{N} \text{ para lagos.}$$

Nos casos em que o valor de ξ é conhecido, a referente contribuição ao potencial de descarga é facilmente calculada em qualquer ponto do domínio (salvo em pontos singulares). Esses elementos são chamados de Elementos Tipo *V*.

Nos casos em que somente o potencial de descarga no ponto de controle é conhecido, o efeito individual (de cada elemento) naquele ponto é indeterminado, uma vez que resulta da superposição de todos os elementos – incluindo o próprio. Esses elementos são chamados de Elementos Tipo *U*.

Para determinar cada incógnita do modelo é necessário definir um ponto de controle, onde o potencial de descarga é conhecido. Para poços, devido à singularidade matemática em sua localização, adota-se um ponto suficientemente próximo, geralmente na borda do revestimento do poço.

Considerando um problema contendo M_{el} elementos do tipo V e N_{el} elementos do tipo U .

O potencial de descarga para um ponto qualquer z , pode ser calculado como:

$$\begin{aligned} \Phi &= \sum_{m=1}^{M_{el}} \Phi_{V_m}(z) + \sum_{n=1}^{N_{el}} \Phi_{U_n}(z) + C \Rightarrow \\ \Rightarrow \sum_{n=1}^{N_{el}} \Phi_{U_n}(z) + C &= \Phi - \sum_{m=1}^{M_{el}} \Phi_{V_m}(z) . \end{aligned} \quad (4.196)$$

A constante C é a soma de todas as constantes dos elementos V e U . Evidentemente, isso impõe a necessidade de uma equação adicional para que o sistema linear seja determinado, daí a necessidade de imposição arbitrária de um ponto de referência.

Aplicando a equação (4.196) a cada ponto de controle e para o ponto de referência, obtém-se um sistema de $N_{el}+1$ equações lineares. Exemplificado para $N_{el} = 4$:

$$\begin{bmatrix} A_1(z_1) & A_2(z_1) & A_3(z_1) & A_4(z_1) & 1 \\ A_1(z_2) & A_2(z_2) & A_3(z_2) & A_4(z_2) & 1 \\ A_1(z_3) & A_2(z_3) & A_3(z_3) & A_4(z_3) & 1 \\ A_1(z_4) & A_2(z_4) & A_3(z_4) & A_4(z_4) & 1 \\ A_1(z_0) & A_2(z_0) & A_3(z_0) & A_4(z_0) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_1 - \sum_{m=1}^M \Phi_{V_m}(z_1) \\ \Phi_2 - \sum_{m=1}^M \Phi_{V_m}(z_2) \\ \Phi_3 - \sum_{m=1}^M \Phi_{V_m}(z_3) \\ \Phi_4 - \sum_{m=1}^M \Phi_{V_m}(z_4) \\ \Phi_0 - \sum_{m=1}^M \Phi_{V_m}(z_0) \end{bmatrix} .$$

em que z_1, z_2 e z_3 são os pontos de controle e z_0 é o ponto de referência.

Os valores das funções $A_j(z_j)$ são determinados diretamente a partir das equações demonstradas anteriormente.

Caso da Inomogeneidade

Para os elementos linha dupla (bordos da inomogeneidade) é necessário observar que para um ponto de controle de uma borda de inomogeneidade z_j :

$$\lambda_j = \frac{K_{inomo} - K_{meio}}{K_{meio}} \Phi_j. \quad (4.197)$$

Substituindo a equação (4.196):

$$\lambda_j = \frac{K_{inomo} - K_{meio}}{K_{meio}} \left(\sum_{m=1}^{M_{el}} \Phi_{V_m}(z_j) + \sum_{n=1}^{N_{el}} \Phi_{U_n}(z_j) + C \right), \quad (4.198)$$

Desenvolvendo, tem-se que,

$$\lambda_j \frac{K_{meio}}{K_{inomo} - K_{meio}} = \sum_{m=1}^{M_{el}} \Phi_{V_m}(z_j) + \sum_{n=1}^{N_{el}} \Phi_{U_n}(z_j) + C. \quad (4.199)$$

Dentre todos os elementos tipo U , existirá um para o qual $n = j$, ou seja,

$U_j = \lambda_j A_j(z)$, o que leva a:

$$\lambda_j \left(\frac{K_{meio}}{K_{inomo} - K_{meio}} - A_j(z_j) \right) = \sum_{m=1}^{M_{el}} \Phi_{V_m}(z_j) + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq j}}^{N_{el}} \Phi_{U_n}(z_j) + C \quad (4.200)$$

Lembrando que nos pontos de controle de sobre as bordas da inhomogeneidade a função $A_j(z_j)$ é dada pela equação (4.173).

$$\text{Seja o fator } \vartheta = \frac{K_{meio}}{K_{inomo} - K_{meio}}.$$

Considerando para o sistema anterior a existência de uma inhomogeneidade triangular cuja influencia está representada pelos elementos 1,2 e 3, o sistema ficará:

$$\begin{bmatrix} \vartheta - A_1(z_1) & A_2(z_1) & A_3(z_1) & A_4(z_1) & 1 \\ A_1(z_2) & \vartheta - A_2(z_2) & A_3(z_2) & A_4(z_2) & 1 \\ A_1(z_3) & A_2(z_3) & \vartheta - A_3(z_3) & A_4(z_3) & 1 \\ A_1(z_4) & A_2(z_4) & A_3(z_4) & A_4(z_4) & 1 \\ A_1(z_0) & A_2(z_0) & A_3(z_0) & A_4(z_0) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \xi_4 \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} - \sum_{m=1}^M \Phi_{V_m}(z_1) \\ - \sum_{m=1}^M \Phi_{V_m}(z_2) \\ - \sum_{m=1}^M \Phi_{V_m}(z_3) \\ \Phi_4 - \sum_{m=1}^M \Phi_{V_m}(z_4) \\ \Phi_0 - \sum_{m=1}^M \Phi_{V_m}(z_0) \end{bmatrix}.$$

5 CONTRIBUIÇÃO ÀS INOMOGENEIDADES POLIGONAIS

Neste capítulo, é desenvolvida a formulação para elementos de ordem n em polígonos fechados a partir dos elementos de primeira e segunda ordens apresentados por Strack (1989). Também é introduzida a formulação para uso de polinômios *splines* como funções interpoladoras da função salto ao longo dos lados da inhomogeneidade.

Ambos desenvolvimentos constituem na contribuição inédita deste trabalho ao desenvolvimento de Método dos Elementos Analíticos.

5.1 Inomogeneidade de Ordem n

A condição de existência de uma inhomogeneidade é a diferença de condutividade hidráulica em relação ao meio em que ela está inserida. É, ainda, preservada a continuidade da carga hidráulica e do fluxo ao longo do contorno da região inhomogênea, seguindo a convenção adotada na Figura 36, tem-se que:

$$\phi^+ = \phi^-$$

e

$$Q_{\eta}^+ = Q_{\eta}^- .$$

(5.1)

Como a condutividade hidráulica é diferente, o potencial de descarga tem descontinuidade (salto λ) ao longo de todo o contorno conforme:

$$\frac{\Phi^+}{\Phi^-} = \frac{K^+}{K^-}, \quad (5.2)$$

logo,

$$\lambda = \Phi^+ - \Phi^- = \frac{K^+ - K^-}{K^-} \Phi^-. \quad (5.3)$$

O salto λ ocorre ao longo da borda da inhomogeneidade e, caso seja um polígono, cada um de seus trechos pode ser modelado por uma linha dupla (*line doublet*).

A equação geral do potencial complexo em coordenadas locais é dada por (5.4), considerando as coordenadas locais determinadas por (5.5), conforme apresentado na Figura 28 e na seção 4.1.4.

$$\Omega_{ldu}(Z) = \frac{\lambda(Z)}{2\pi i} \ln \frac{Z-1}{Z+1} + ip_{ldu}(Z) \quad (5.4)$$

onde,

$$Z = \frac{z - \frac{1}{2}(z_{j+1} - z_j)}{\frac{1}{2}(z_{j+1} + z_j)}. \quad (5.5)$$

Sendo z_j as coordenadas complexas globais no ponto j e Z as coordenadas complexas locais para o trecho entre z_{j+1} e z_j , que será chamado de trecho j . Por enquanto, para maior clareza na exposição, será evitado o uso de qualquer índice para diferenciar as coordenadas locais Z dos diversos trechos (lados) do polígono da inhomogeneidade.

O termo $\lambda(Z)$ é o polinômio interpolador do salto λ em termos da coordenada local Z e $p_{ldu}(Z)$ é o polinômio de correção para o campo distante, que faz com que o potencial complexo no infinito tenha comportamento de Z^{-1} (STRACK, 1989, p. 293). As coordenadas

locais são adotadas para cada trecho (lado) do polígono; este, por sua vez, é dividido em segmentos iguais por pontos de controle usados pelo polinômio interpolador.

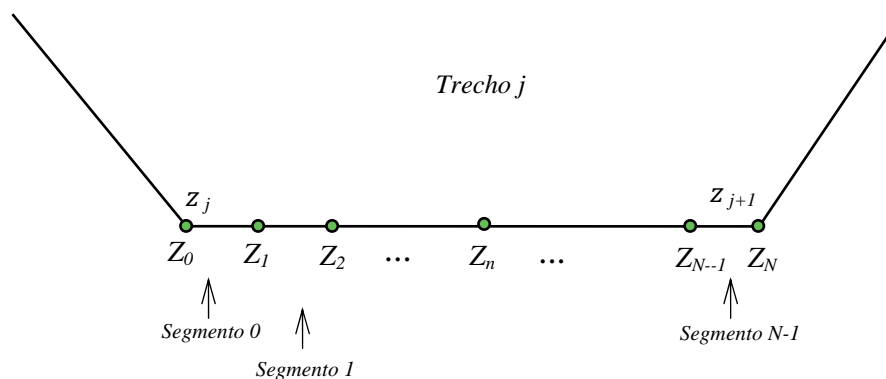


Figura 44 – Trecho de polígono, coordenadas locais e pontos de controle

Considerando uma interpolação com polinômio de grau N , cada polinômio $\lambda(Z)$ pode ser escrito em termos dos valores de λ_n e funções de influência $\Gamma_n(Z)$ definidas ao longo de $N+1$ pontos de controle igualmente espaçados (considerando os extremos do trecho) (Figura 44).

$$\lambda(Z) = \sum_{n=0}^N \Gamma_n(Z) \lambda_n . \tag{5.6}$$

É introduzida a função:

$$\Upsilon_n(Z) = \Gamma_n(Z) \ln \frac{Z-1}{Z+1} + \rho_n(Z) . \tag{5.7}$$

A função $\Upsilon_n(Z)$ representa a influência exercida pelo esforço λ_n sobre um ponto qualquer Z no plano complexo local, conforme expresso pela equação (5.6).

Os polinômios $\rho_n(Z)$ são determinados pela condição de que no infinito o potencial complexo é de ordem Z^{-1} . Para tal, é necessário expandir, segundo a série de Taylor, o termo logarítmico. Sabendo que (SPIEGEL, 1972, p. 9):

$$\ln \frac{Z-1}{Z+1} = \ln \frac{1 - \frac{1}{Z}}{1 + \frac{1}{Z}} = -2 \left(\frac{1}{Z} + \frac{1}{3Z^3} + \frac{1}{5Z^5} + \frac{1}{7Z^7} + \dots \right). \quad (5.8)$$

Obtém-se:

$$\rho_n(Z) = 2\Gamma_n(Z) \left(\frac{1}{Z} + \frac{1}{3Z^3} + \frac{1}{5Z^5} + \frac{1}{7Z^7} + \dots \right). \quad (5.9)$$

Como os termos de ordem inferior a Z^1 de $\rho_n(Z)$ são desprezados, a série pode ser truncada conforme o grau do polinômio Γ_n adotado, desde que $\rho_n(Z)$ seja uma ordem inferior a $\Gamma_n(Z)$. Assim, para Γ_n de primeiro e segundo graus, a série pode ser truncada no primeiro termo. Para grau três e quatro a série terá que ser truncada no segundo termo, e assim sucessivamente.

Usando a definição (5.7), o potencial complexo da equação (5.4) poderá ser representado pela equação:

$$\Omega(Z) = \frac{1}{2i\pi} \sum_{n=0}^{N-1} \Upsilon_n(Z) \lambda_n. \quad (5.10)$$

Sobre cada trecho, o valor de Z é real visto que $Y = 0$. Como os valores dos extremos do trecho normalizados pela coordenada local são conhecidos (-1 e 1) e os segmentos discretizados são iguais l , os valores de cada coordenada local dos pontos de controle também são conhecidos, uma vez que, $l = \frac{2}{N}$, então:

$$Z_n = -1 + nl. \quad (5.11)$$

Define-se o polinômio de Lagrange para $N-1$ segmentos e N pontos de controle (BOOR, 1978, p. 1) conforme:

$$l_k(Z) = \prod_{\substack{n=0 \\ n \neq k}}^{N-1} \frac{Z - Z_n}{Z_k - Z_n}. \quad (5.12)$$

Ou seja:

$$l_0(Z) = \frac{(Z-Z_1)(Z-Z_2)\dots(Z-Z_{N-1})(Z-Z_N)}{(Z_0-Z_1)(Z_0-Z_2)\dots(Z_0-Z_{N-1})(Z_0-Z_N)},$$

$$l_k(Z) = \frac{(Z-Z_0)(Z-Z_1)\dots(Z-Z_{i-1})(Z-Z_{i+1})\dots(Z-Z_{N-1})(Z-Z_N)}{(Z_k-Z_0)(Z_k-Z_1)\dots(Z_k-Z_{k-1})(Z_k-Z_{k+1})\dots(Z_k-Z_{N-1})(Z_k-Z_N)},$$

(5.13)

para $k = 1, 2, \dots, (N - 1)$,

$$l_{N-1}(Z) = \frac{(Z-Z_0)(Z-Z_1)\dots(Z-Z_{N-1})}{(Z_n-x_0)(Z_n-Z_1)\dots(Z_i-Z_{N-1})}.$$

Com suporte na conhecida relação de Girard (IEZZI, 2005, p. 117) , obtém-se o polinômio $l_k(Z)$ sob sua forma canônica $l_k^*(Z)$, cujos coeficientes são definidos em termos das raízes Z_k :

$$l_k^*(Z) = l_k(Z) = b_N Z^N + b_{N-1} Z^{N-1} + \dots + b_1 Z + b_0. \quad (5.14)$$

sendo:

$$b_N = \frac{1}{(Z_k - Z_0)(Z_k - Z_1)\dots(Z_k - Z_{k-1})(Z_k - Z_{k+1})\dots(Z_k - Z_{N-1})(Z_k - Z_N)},$$

$$b_{N-1} = -b_n(Z_0 + Z_1 + \dots + Z_N),$$

$$b_{N-2} = +b_n(Z_0 Z_1 + Z_0 Z_3 + Z_0 Z_4 + \dots + Z_{N-1} Z_N),$$

$$b_{N-3} = -b_n(Z_0 Z_1 Z_2 + Z_0 Z_1 Z_3 + Z_0 Z_2 Z_3 + \dots + Z_{N-2} Z_{N-1} Z_N),$$

(5.15)

$$b_{N-k} = (-1)^k b_N (\text{soma dos produtos de } k \text{ raízes o polinomio}),$$

...

$$b_0 = (-1)^N b_N (Z_0 Z_1 Z_2 \dots Z_N).$$

A equação do potencial complexo da linha dupla pode ser composta com os polinômios de Lagrange e pelo desenvolvimento de Girard, fazendo $\varphi_n = l_n(Z)$ e $\alpha_n = l_n^*(Z)$:

$$\mathcal{Y}_n(Z) = l_n(Z) \ln \frac{Z-1}{Z+1} + 2l_n^*(Z) \left(\frac{1}{Z} + \frac{1}{3Z^3} + \frac{1}{5Z^5} + \frac{1}{7Z^7} + \dots \right). \quad (5.16)$$

Na multiplicação do segundo termo, os valores de ordem abaixo de Z^{-1} são desprezados, truncando a série conforme o grau N do polinômio adotado. O potencial complexo pode ser reescrito na forma:

$$\Omega(Z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^N \Upsilon_n(Z) \lambda_n. \quad (5.17)$$

Considerando todos os trechos (lados) do polígono e Implementação

Considerando um polígono de M lados (conseqüentemente M trechos), cada trecho será interpolado por um polinômio de grau N . Cada trecho terá uma coordenada local Z específica, o que impõe a necessidade de um índice que diferencie as grandezas de um trecho para outro. Por isso, será adotado um índice acima da grandeza referente ao trecho. Portanto, o potencial complexo para o trecho m será dado por:

$$\Omega^m(Z) = \Omega^m = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^N \Upsilon_n^m(Z) \lambda_n^m. \quad (5.18)$$

O potencial complexo total da inomogeneidade pode ser escrito como:

$$\Omega_{inho} = \sum_{m=1}^M \Omega^m = \frac{1}{2\pi i} \sum_{m=1}^M \sum_{n=0}^N \Upsilon_n^m(Z) \lambda_n^m \quad (5.19)$$

A expressão (5.19) fornece $(N+1)M$ equações, sendo N o grau do polinômio interpolador e M o número de trechos (lados) do polígono. Entretanto, o total de pontos de controle é NM , isso ocorre porque os esforços referentes aos pontos nos vértices do polígono (extremos de cada trecho) surgem duas vezes. Isso pode ser resolvido reorganizando os termos de modo a evidenciar os esforços λ . Neste processo, duas formulações são identificadas: uma para os vértices que sofrem influência de dois trechos consecutivos; e outra para os pontos intermediários de cada trecho.

Para os vértices j , entre os trechos $m-1$ e m , tem-se:

$$\Omega_j = \frac{\lambda_0^m}{2\pi i} \left[\Upsilon_N^m(Z) + \Upsilon_0^m(Z) \right],$$

onde,

(5.20)

$$\lambda_n^{m-1} = \lambda_0^m \quad m = 2, \dots, M \quad \lambda_N^M = \lambda_0^1.$$

Para os pontos intermediários n de cada trecho m :

$$\Omega_n^m = \frac{\lambda_n^m}{2\pi i} \left[\Upsilon_n^m(Z) \right] \quad n = 1, \dots, N-1.$$
(5.21)

Análise das Singularidades

Polígonos que delimitam a inhomogeneidade apresentam singularidades nos extremos de cada segmento modelado por uma linha dupla, quando $Z = 1$ ou $Z = -1$, pois o termo logarítmico de (5.16) não é definido nestes pontos.

As funções de influência dos termos intermediários $\Upsilon_n^m(Z)$ para $n = 1, \dots, N-1$ irão se anular, em virtude da presença da multiplicação $(Z+1)(Z-1)$ em todas as funções $l_n^m(Z)$, conforme a equação (5.12).

Como $l_n^m(Z) = l_n^{*m}(Z)$, o termo de correção do potencial no infinito também será nulo. O termo $l_n^m(Z) \ln \frac{Z-1}{Z+1}$ também se anulará, pois $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$ (SPIEGEL, 1972).

O comportamento das funções $\Upsilon_N^m(Z)$ e $\Upsilon_0^m(Z)$, nos extremos da linha dupla, deve ser analisado. Levando-se em consideração que $\Upsilon_n^m(Z) = 0$ para $n = 1, 2, \dots, N-1$ e tendo δ_j como vértice do polígono, o potencial complexo no ponto δ_j pode ser escrito na forma de (5.20).

O potencial complexo apresentará descontinuidade no ponto j , entretanto, a descontinuidade ocorre em sua parte imaginária (função de corrente Ψ). Sua parte real (potencial de descarga Φ) é contínua. A matriz final de resolução do método é composta em termos do potencial de descarga, por isso é necessário defini-lo.

Observa-se que no vértice, $l_N(1) = 1$ e $l_0(-1) = 1$.

Quando $z \rightarrow z_j$,

$$\Omega(z_j) = \lim_{z \rightarrow z_j} \Omega(z) = \frac{\lambda_0^m}{2\pi i} \left[\lim_{Z \rightarrow 1} Y_N(Z) + \lim_{Z \rightarrow -1} Y_0(Z) \right]. \quad (5.22)$$

Usando a definição (5.16), obtém-se

$$\Omega(z_j) = \frac{\lambda_0^m}{2\pi i} \lim_{Z \rightarrow 1} \left\{ \left[\ln \frac{Z-1}{Z+1} + 2 \left(I + \frac{1}{3} + \dots \right) \right] + \lim_{Z \rightarrow -1} \left[\ln \frac{Z-1}{Z+1} - 2 \left(I + \frac{1}{3} + \dots \right) \right] \right\}. \quad (5.23)$$

Em coordenadas globais, o potencial complexo no vértice j pode ser escrito como

$$\Omega(z_j) = \lim_{\delta \rightarrow \delta_j} \frac{\lambda_0^m}{2\pi i} \left[\ln \frac{z - z_j}{z - z_{j-1}} + \ln \frac{z - z_{j+1}}{z - z_j} \right]. \quad (5.24)$$

A parte real de $\Omega(z_j)$ é essencial, pois comporá a matriz dos coeficientes dos esforços que serão determinados. Observa-se que os termos logarítmicos podem ser resumidos a um só logaritmo. Ambos são divididos pelo imaginário i , o que inverte o termo real e imaginário:

$$\Phi = \Re \{ \Omega(z_j) \} = \frac{\lambda_0^m}{2\pi} \arg \left(\frac{z - z_{j+1}}{z_j - z_{j-1}} \right) = \frac{\theta}{2\pi} \lambda_0^m. \quad (5.25)$$

em que $-2\pi < \theta < 0$ é o ângulo interno no vértice, para polígono percorrido no sentido anti-horário.

Exemplo de aplicação da formulação

A formulação apresentada será aplicada a uma inhomogeneidade triangular usando funções interpoladoras cúbicas. Conseqüentemente, cada lado do polígono terá quatro pontos de controle (Figura 45).

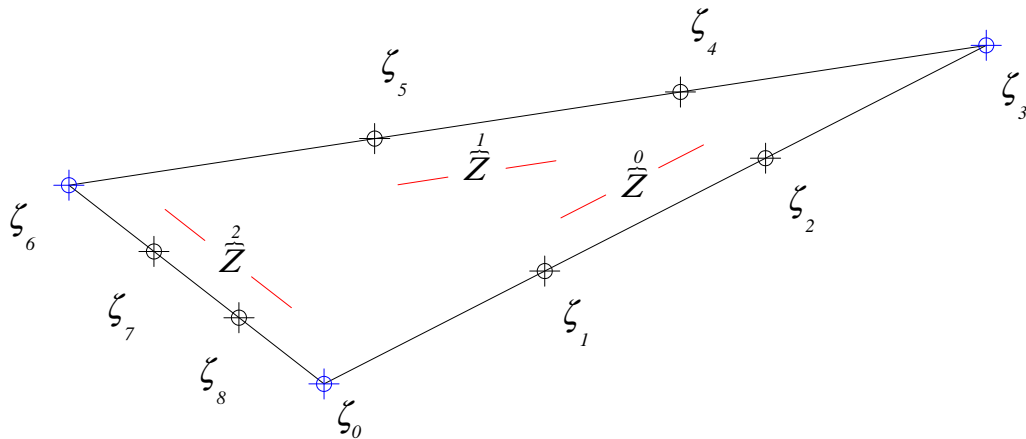


Figura 45 – Inhomogeneidade triangular modelada por polinômios de terceiro grau

A formulação será exemplificada para o caso de um polinômio de ordem 3, portanto a função (5.16) é escrita como:

$$Y_j(Z) = l_j(Z) \ln \frac{Z-1}{Z+1} + 2l_j^*(Z) \left(\frac{1}{Z} + \frac{1}{3Z^3} \right), j = 0,1,2 \dots N.$$

As funções de interpolação dadas por:

$$\begin{aligned} l_0(Z) &= \frac{-9(Z+\frac{1}{3})(Z-\frac{1}{3})(Z-1)}{16}, & l_0^*(Z) &= \frac{-9Z^3+9Z^2-Z+1}{16}, \\ l_1(Z) &= \frac{27(Z+1)(Z-\frac{1}{3})(Z-1)}{16}, & l_1^*(Z) &= \frac{27Z^3-9Z^2-27Z-9}{16}, \\ l_2(Z) &= \frac{-27(Z+1)(Z+\frac{1}{3})(Z-1)}{16}, & l_2^*(Z) &= \frac{-27Z^3-9Z^2+27+9}{16}, \\ l_3(Z) &= \frac{9(Z+1)(Z+\frac{1}{3})(Z-\frac{1}{3})}{16}, & l_3^*(Z) &= \frac{9Z^3+9Z^2-Z-1}{16}, \end{aligned}$$

resultando em:

$$Y_0(Z) = -\frac{9}{16} \left(Z + \frac{1}{3} \right) \left(Z - \frac{1}{3} \right) (Z - 1) \ln \frac{Z - 1}{Z + 1} + \frac{-9Z^2 + 9Z - 1}{8} - \frac{9}{24},$$

$$Y_1(Z) = \frac{27}{16}(Z+1)\left(Z - \frac{1}{3}\right)(Z-1) \ln \frac{Z-1}{Z+1} + \frac{27Z^2 - 9Z - 27}{8} + \frac{27}{24},$$

$$Y_2(Z) = -\frac{27}{16}(Z+1)\left(Z + \frac{1}{3}\right)(Z-1) \ln \frac{Z-1}{Z+1} + \frac{-27Z^2 - 9Z + 27}{8} - \frac{27}{24},$$

$$Y_3(Z) = \frac{9}{16}(Z+1)\left(Z + \frac{1}{3}\right)\left(Z - \frac{1}{3}\right) \ln \frac{Z-1}{Z+1} + \frac{9Z^2 + 9Z - 1}{8} + \frac{9}{24}.$$

O polinômio corretor (segundo grau) possui um grau inferior ao polinômio interpolador escolhido (terceiro grau). Finalmente, o potencial complexo para esse trecho de *line doublet* vale:

$$\Omega(Z) = \frac{1}{2\pi i} (Y_0(Z)\lambda_0 + Y_1(Z)\lambda_1 + Y_2(Z)\lambda_2 + Y_3(Z)\lambda_3).$$

Como o polígono da Figura 45 é um polígono de três lados, a influência de cada um dos lados pode ser expressa por:

$$\overset{0}{\Omega}(\overset{0}{Z}) = \frac{1}{2\pi i} \left(Y_0(\overset{0}{Z})\lambda_0 + Y_1(\overset{0}{Z})\lambda_1 + Y_2(\overset{0}{Z})\lambda_2 + Y_3(\overset{0}{Z})\lambda_3 \right),$$

$$\overset{1}{\Omega}(\overset{1}{Z}) = \frac{1}{2\pi i} \left(Y_0(\overset{1}{Z})\lambda_3 + Y_1(\overset{1}{Z})\lambda_4 + Y_2(\overset{1}{Z})\lambda_5 + Y_3(\overset{1}{Z})\lambda_6 \right),$$

$$\overset{2}{\Omega}(\overset{2}{Z}) = \frac{1}{2\pi i} \left(Y_0(\overset{2}{Z})\lambda_6 + Y_1(\overset{2}{Z})\lambda_7 + Y_2(\overset{2}{Z})\lambda_8 + Y_3(\overset{2}{Z})\lambda_0 \right).$$

O potencial complexo decorrente da inhomogeneidade será dado, em qualquer ponto do domínio estudado, por:

$$\Omega(\zeta) = \overset{0}{\Omega}(\overset{0}{Z}) + \overset{1}{\Omega}(\overset{1}{Z}) + \overset{2}{\Omega}(\overset{2}{Z}).$$

Note-se que o ponto global ζ , terá que ser transformado para três sistemas de coordenadas locais, $\overset{0}{Z}$, $\overset{1}{Z}$ e $\overset{2}{Z}$, conforme a equação:

$$\Omega(z) = \frac{1}{2\pi i} \left\{ \left[Y_0(\overset{0}{Z}) + Y_3(\overset{2}{Z}) \right] \lambda_0 + \left[Y_1(\overset{0}{Z}) \right] \lambda_1 + \left[Y_2(\overset{0}{Z}) \right] \lambda_2 + \right.$$

$$\left. \begin{aligned} & \left[Y_3(\overset{0}{Z}) + Y_0(\overset{1}{Z}) \right] \lambda_3 + \left[Y_1(\overset{1}{Z}) \right] \lambda_4 + \left[Y_2(\overset{1}{Z}) \right] \lambda_5 + \\ & \left[Y_3(\overset{1}{Z}) + Y_0(\overset{2}{Z}) \right] \lambda_6 + \left[Y_1(\overset{2}{Z}) \right] \lambda_7 + \left[Y_2(\overset{2}{Z}) \right] \lambda_8 \end{aligned} \right\}$$

5.2 Inomogeneidade de *Splines* Quadráticas

As *splines* são polinômios de baixa ordem que guardam continuidade em vários níveis nos pontos de conexão. Em termos matemáticos, são polinômios por partes de grau N com continuidade das derivadas de ordem $(N - 1)$ nos pontos de junção entre os segmentos (ROGERS; ADAMS, 1990, p. 253).

Seu uso é freqüente em problemas de interpolação, em que polinômios interpoladores de alto grau não produzem bons resultados, sobretudo em razão da ocorrência do fenômeno de Runge³³ (BOOR, 1978). As *splines* também são usadas em casos em que se queira agilidade na formulação matemática ou em sua implementação computacional.

É interessante notar, que o uso mais freqüente de polinômios *splines* consiste em interpolar ou aproximar pontos onde os valores da função a ser interpolada são conhecidos previamente. Para o caso da interpolação voltada para o Método de Elementos Analíticos, especificamente para os polígonos de linhas duplas em inomogeneidades, os valores da função salto não são conhecidos previamente, sendo condicionados às características geométricas e hidrogeológicas do escoamento. Com isso, é necessário dispor de uma formulação cujos esforços a serem interpolados surjam explicitamente, respeitando evidentemente, as restrições de continuidade e suavidade nos pontos de controle.

³³ Ao aumentar a ordem do polinômio de interpolação o erro cometido também aumenta.

Para *splines* quadráticas, as funções deverão guardar continuidade nos pontos de controle (nós) tanto na função propriamente dita quanto na sua primeira derivada. Portanto, os polinômios quadráticos deverão ser contínuos e possuir a mesma tangente nos pontos de controle, garantindo que a curva final seja suave em todo o seu percurso.

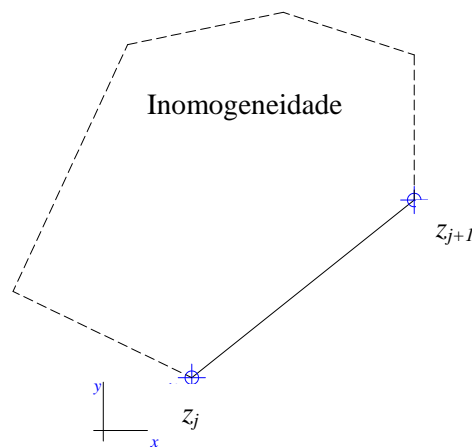


Figura 46 – Esquema de inhomogeneidade poligonal.
Destaque de lado genérico denominado aqui de trecho.

Cada trecho será aproximado por uma *line doublet* que será dividida em segmentos iguais com pontos de controle igualmente espaçados. O segmento inicial será interpolado considerando o grau do polinômio S_0 usado, podendo usar dois pontos para linear ou três pontos para o quadrático. Os demais segmentos são compostos por dois pontos extremos, cada um será interpolado por um polinômio quadrático que apresenta continuidade com o polinômio que o antecede, tanto das funções polinomiais quanto das primeiras derivadas.

Apesar de adotar a mesma nomenclatura de trecho e segmento apresentada na Figura 44, observa-se que a técnica de coordenadas locais é aplicada para os segmentos e não para os trechos.

Como cada trecho (lado do polígono) é dividido em segmentos de mesmo tamanho a continuidade nas derivadas é garantida tanto também para o segmento parametrizado.

O índice n posto no parte inferior é referente ao *segmento* parametrizado e quando estiver locado no cando inferiro direto refere-se ao valor da variável naquele ponto. Cada trecho (lado da poligonal) será dividido em N segmentos, referente ao número de divisões da *spline*. Por enquanto, as referências aos *trechos* da inomogeneidades são omitidas e no momento oportuno serão explicitadas.

5.2.1 Spline quadrática com polinômio inicial quadrático

Termo para segmento inicial (segmento 0)

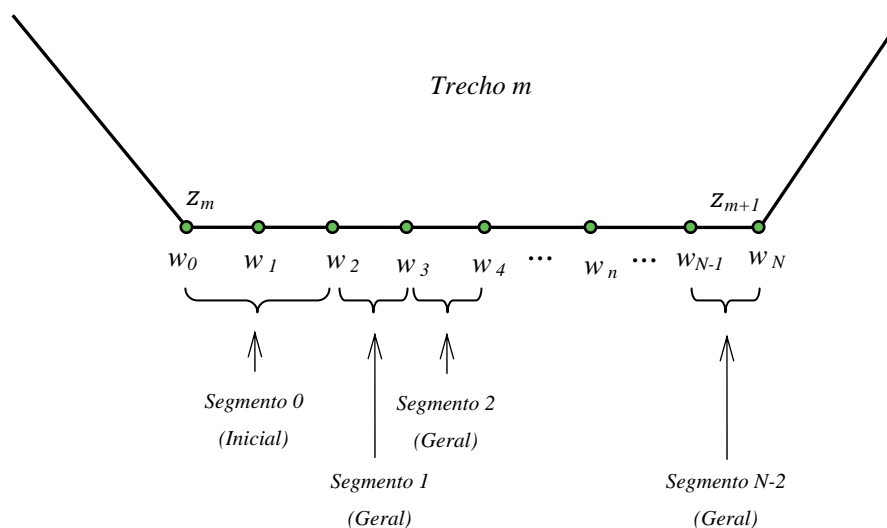


Figura 47 – Esquema de pontos de controle e segmentos para trecho de inomogeneidade. Segmento inicial quadrático.

O polinômio inicial quadrático envolve a interpolação dos três primeiros pontos de controle (dois segmentos iniciais, w_0 , w_1 e w_2). Para tal, é definida uma função quadrática na em termos de coordenadas locais:

$$Z_0 = \frac{z - \frac{1}{2}(w_2 + w_0)}{\frac{1}{2}(w_2 - w_0)}, \quad (5.26)$$

consequentemente, a coordenada local para um trecho n , em virtude da proporcionalidade, pode ser expressa por:

$$Z_0 = \frac{x - \frac{1}{2}(x_2 + x_0)}{\frac{1}{2}(x_2 - x_0)} \quad (5.27)$$

Verifica-se que sobre a *line doublet*, a coordenada local complexa é reduzida a sua parte real, visto que a parte imaginária é nula (STRACK, 1989, p. 292); ou seja, $Y = 0$.

Considerando a interpolação por um polinômio quadrático nos três pontos iniciais (que compõe o segmento 0), em termos das coordenadas locais, de tal forma que sejam satisfeitas as condições:

$$\begin{aligned} S_0(-1) &= \lambda_0, \\ S_0(0) &= \lambda_1, \end{aligned} \quad (5.28)$$

e

$$S_0(1) = \lambda_2.$$

Então, utilizando a forma lagrangiana de interpolação, o polinômio quadrático inicial pode ser escrito na forma de:

$$S_0\left(\frac{Z}{0}\right) = \frac{\frac{Z}{0}\left(\frac{Z}{0}+1\right)}{2} \lambda_2 - \left(\frac{Z}{0}+1\right)\left(\frac{Z}{0}-1\right) \lambda_1 + \frac{\frac{Z}{0}\left(\frac{Z}{0}-1\right)}{2} \lambda_0. \quad (5.29)$$

Isolando as funções de ponderação de cada termo, obtém-se:

$$\begin{aligned}
 f_a(Z_0) &= \frac{Z_0(Z_0+1)}{2} & f'_a(1) &= \frac{3}{2}, \\
 f_b(Z_0) &= -(Z_0+1)(Z_0-1) & f'_b(1) &= -2, \\
 f_c(Z_0) &= \frac{Z_0(Z_0-1)}{2} & f'_c(1) &= \frac{1}{2}.
 \end{aligned}
 \tag{5.30}$$

Portanto, o polinômio interpolador e sua derivada em w_2 (ponto de contato com o polinômio subsequente) poderão ser escritos como:

$$S_0(Z_0) = f_a(Z_0)\lambda_2 + f_b(Z_0)\lambda_1 + f_c(Z_0)\lambda_0$$

e (5.31)

$$S'_0(1) = \frac{3\lambda_2 - 4\lambda_1 + \lambda_0}{2}.$$

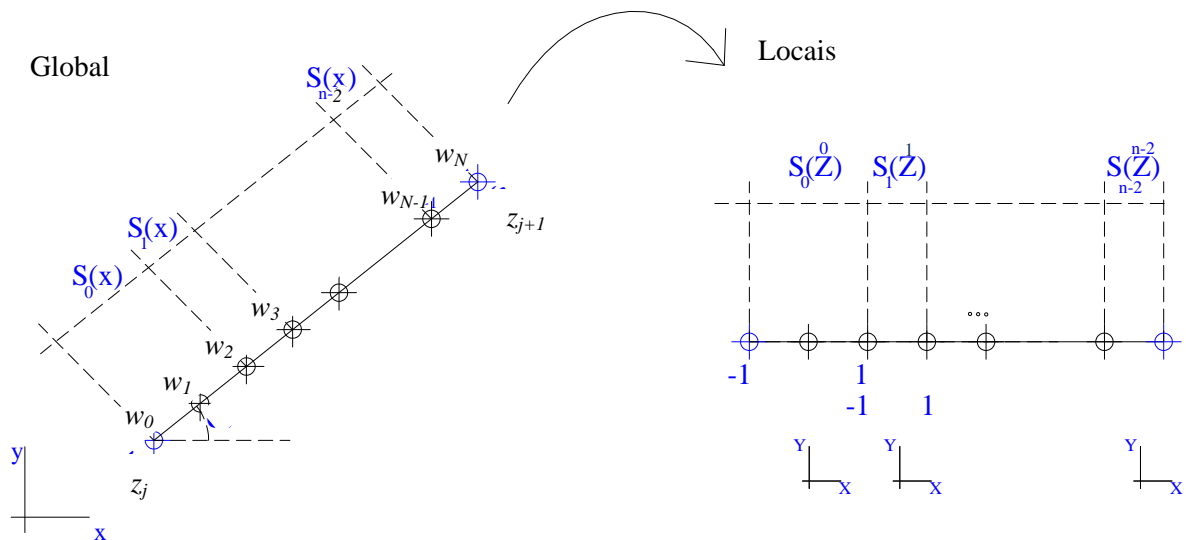


Figura 48 – Coordenada global para locais - polinômio inicial quadrático.

Termo geral para demais segmentos (segmentos 1,2,...,n,..., N-2)

Como cada trecho (lado do polígono) é dividido em segmentos de mesmo tamanho a continuidade nas derivadas é garantida tanto para o segmento real quanto para o segmento parametrizado. Para os demais segmentos subsequentes ao segmento inicial, será utilizada a relação:

$$Z_n = \frac{z - \frac{I}{2}(w_{n+2} + w_{n+1})}{\frac{I}{2}(w_{n+2} - w_{n+1})},$$

onde,

$$z = x + iy, \tag{5.32}$$

$$w_n = x_n + iy_n$$

e

$$Z_n = X_n + iY_n,$$

para $n = 1, 2, \dots, N - 2$.

Verifica-se que sobre a *line doublet*, a coordenada local complexa é reduzida a sua parte real, visto que a parte imaginária é nula (STRACK, 1989, p. 292); ou seja, $Y_n = 0$.

Conseqüentemente, a coordenada local para um trecho n , em virtude da proporcionalidade, pode ser expressa por:

$$Z_n = \frac{x - \frac{I}{2}(x_{n+2} + x_{n+1})}{\frac{I}{2}(x_{n+2} - x_{n+1})}. \tag{5.33}$$

Deve-se considerar a interpolação por um polinômio quadrático por dois pontos (que compõe cada segmento subsequente), em termos das coordenadas locais, de tal forma que sejam satisfeitas as condições:

$$S_n(-1) = \lambda_{n+1},$$

$$S_n(1) = \lambda_{n+2}$$

(5.34)

e

$$S_n(-1) = \varpi_n.$$

Adotando-se uma função interpoladora quadrática, tem-se para termo geral para a função *spline* a função S_n :

$$S_n(Z) = aZ^2 + bZ + c, \quad (5.35)$$

com derivada igual a:

$$S'_n(Z) = 2aZ + b. \quad (5.36)$$

Aplica-se a coordenada local Z com $Z_{n+1} = -1$ e $Z_{n+2} = 1$, na equação (5.35):

$$\lambda_{n+1} = a - b + c,$$

$$\lambda_{n+2} = a + b + c$$

(5.37)

e

$$\varpi_n = -2a + b.$$

Ao resolver o conjunto de equações para a , b e c , obtém-se:

$$S_n(Z) = \left[\frac{\lambda_{n+2} - \lambda_{n+1} - \varpi_n}{4} \right] Z^2 + \left[\frac{\lambda_{n+2} - \lambda_{n+1}}{2} \right] Z + \left[\frac{\lambda_{n+2} + 3\lambda_{n+1} + \varpi_n}{4} \right] \quad (5.38)$$

Reorganizando os termos:

$$S_n(Z) = \left[\frac{(Z+1)(Z+1)}{4} \right] \lambda_{n+2} + \left[\frac{-(Z-1)(Z+3)}{4} \right] \lambda_{n+1} + \left[\frac{-(Z-1)(Z+1)}{2} \right] \varpi_n. \quad (5.39)$$

Pode-se introduzir as definições:

$$f_d \left(\frac{Z}{n} \right) = \left[\frac{(Z+1) \binom{Z+1}{n}}{4} \right] \qquad f'_d(1) = 1,$$

$$f_e \left(\frac{Z}{n} \right) = \left[\frac{-\binom{Z-1}{n} (Z+3)}{4} \right] \qquad f'_e(1) = -1, \quad (5.40)$$

$$f_f \left(\frac{Z}{n} \right) = \left[\frac{-\binom{Z-1}{n} \binom{Z+1}{n}}{2} \right] \qquad f'_f(1) = -1.$$

Generalizando, pode-se escrever:

$$S_n(Z) = f_d \left(\frac{Z}{n} \right) \lambda_{n+2} + f_e \left(\frac{Z}{n} \right) \lambda_{n+1} + f_f \left(\frac{Z}{n} \right) \varpi_n. \quad (5.41)$$

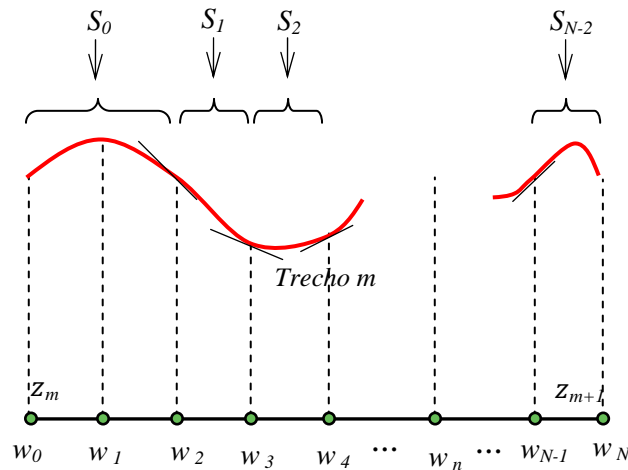


Figura 49 – Polinômios em uma spline de polinômio inicial quadrático. Diagrama esquemático dos polinômios da spline quadrática de polinômio inicial quadrático com os respectivos pontos de controle.

Devido à continuidade e suavidade nos pontos de controle w_2, w_3, \dots, w_{N-1} , em cada um desses pontos a derivada do polinômio anterior deve ser igual a derivada do polinômio posterior. O que leva a:

$$S'_{n-1}(1) = S'_n(-1), \quad (5.42)$$

Onde, $n = 2, \dots, N - 2$.

Assim, considerando a equação (5.41), o polinômio S_l pode ser escrito como:

$$S_1(Z) = f_d(Z)\lambda_3 + f_e(Z)\lambda_2 + f_f(Z)\varpi_1. \quad (5.43)$$

e o polinômio S_2 como:

$$S_2(Z) = f_d(Z)\lambda_4 + f_e(Z)\lambda_3 + f_f(Z)\varpi_2. \quad (5.44)$$

Observa-se, pela equação (5.42), que:

$$S'_1(I) = S'_2(-I). \quad (5.45)$$

O que leva a:

$$\lambda_3 - \lambda_2 - \varpi_1 = \varpi_2, \quad (5.46)$$

então, pode-se reescrever S_2 na forma de:

$$S_2(Z) = f_d(Z)\lambda_4 + [f_e(Z) + f_f(Z)]\lambda_3 - f_f(Z)\lambda_2 - f_f(Z)\varpi_1. \quad (5.47)$$

$$S'_2(I) = \lambda_4 - 2\lambda_3 + \lambda_2 + \varpi_1 = \varpi_3$$

De forma semelhante chega-se a:

$$S_3(Z) = f_d(Z)\lambda_5 + [f_e(Z) + f_f(Z)]\lambda_4 - 2f_f(Z)\lambda_3 + f_f(Z)\lambda_2 + f_f(Z)\varpi_1$$

$$S'_3(I) = \lambda_5 - 2\lambda_4 + 2\lambda_3 - \lambda_2 - \varpi_1 = \varpi_4$$

(5.48)

$$S_4(Z) = f_d(Z)\lambda_6 + [f_e(Z) + f_f(Z)]\lambda_5 - 2f_f(Z)\lambda_4 + 2f_f(Z)\lambda_3 - f_f(Z)\lambda_2 - f_f(Z)\varpi_1 \quad (5.49)$$

$$S'_4(I) = \lambda_6 - 2\lambda_5 + 2\lambda_4 - 2\lambda_3 + \lambda_2 + \varpi_1 = \varpi_5$$

$$S_5(Z) = f_d(Z)\lambda_7 + [f_e(Z) + f_f(Z)]\lambda_6 - 2f_f(Z)\lambda_5 + 2f_f(Z)\lambda_4 - 2f_f(Z)\lambda_3 + f_f(Z)\lambda_2 + f_f(Z)\varpi_1 \quad (5.50)$$

É possível, portanto, induzir o termo geral, que será determinado por pela equação:

$$\begin{aligned}
S_n(Z) = & f_d(Z)_n \lambda_{n+2} + [f_e(Z)_n + f_f(Z)_n] \lambda_{n+1} - 2f_f(Z)_n \lambda_n + 2f_f(Z)_n \lambda_{n-1} - \dots \\
& \dots + (-1)^{n+1} 2f_f(Z)_n \lambda_3 + (-1)^n f_f(Z)_n \lambda_2 + (-1)^n f_f(Z)_n \varpi_1
\end{aligned}
\tag{5.51}$$

Incorporação do segmento inicial

Para o segmento inicial S_0 sabe-se que:

$$S_0(Z) = f_a(Z)_0 \lambda_2 + f_b(Z)_0 \lambda_1 + f_c(Z)_0 \lambda_0$$

e

$$S'_0(1) = \lambda_2 - 2\lambda_1 + \lambda_0.
\tag{5.52}$$

Observa-se que não é permitido igualar a derivada da função S_0 em $Z=1$ ao valor de ϖ_1 . Na Figura 48 observa-se que o intervalo de domínio do polinômio $S_0 [z_0 \quad z_2]$ é duas vezes maior do que o intervalo de domínio do polinômio $S_1 [z_2 \quad z_3]$. Como ambos os intervalos são normalizados para $[-1 \quad 1]$, ocorre uma distorção no valor da derivada no ponto de encontro. Isso pode ser corrigido, adotando-se a proporção entre as derivadas no ponto de junção, obtida pela aplicação da regra da cadeia em ambas as funções no ponto w_2 :

$$\frac{dS_n}{dz} = \frac{dS_n}{dZ} \frac{dZ}{dz}
\tag{5.53}$$

$$\left. \frac{dS_0}{dZ} \frac{dZ}{dz} \right|_{x_2} = \left. \frac{dS_1}{dZ} \frac{dZ}{dz} \right|_{x_2}
\tag{5.54}$$

Como o valor da derivada da função Z em relação a z pode ser obtida com base na equação (5.32), tem-se:

$$\left. \frac{dZ_0}{dz} \right|_{x_2} = \frac{2}{z_2 - z_0}$$

e (5.55)

$$\left. \frac{dZ_1}{dz} \right|_{x_2} = \frac{2}{z_3 - z_2}$$

As diferenças dos pontos extremos em ambos os intervalos pode ser escrita como em termos dos comprimentos dos L_0 e L_1 , conforme:

$$(z_2 - z_0) = L_0 e^{-i\alpha}$$

e (5.56)

$$(z_3 - z_2) = L_1 e^{-i\alpha}$$

Em que, L_0 é o comprimento referente dos dois segmentos iniciais e L_1 o comprimento do terceiro segmento. Como os pontos estão igualmente espaçados $L_0 = 2L_1$.

Portanto,

$$\frac{1}{2} \left. \frac{dS_0}{dZ} \right|_{x_2} = \left. \frac{dS_1}{dZ} \right|_{x_2} = \varpi_1. \quad (5.57)$$

O valor da derivada no ponto de encontro, w_2 , entre as funções de interpolação será:

$$\varpi_1 = \frac{\lambda_2 - 2\lambda_1 + \lambda_0}{2}. \quad (5.58)$$

O termo geral portanto pode ser escrito na forma de:

$$S_n(Z) = f_d(Z)\lambda_{n+2} + [f_e(Z) + f_f(Z)]\lambda_{n+1} - 2\sum_{j=0}^{n-3} (-1)^j f_f(Z)\lambda_{n-j} +$$

$$+ (-1)^n \frac{3}{2} f_f(Z)\lambda_2 + (-1)^{n+1} f_f(Z)\lambda_1 + (-1)^n \frac{1}{2} f_f(Z)\lambda_0$$

Para $n = 3, 4, 5, \dots, N-2$

(5.59)

Resumindo:

$$S_0(Z) = f_a(Z)\lambda_2 + f_b(Z)\lambda_1 + f_c(Z)\lambda_0;$$

$$S_1(Z) = f_d(Z)\lambda_3 + \left[f_e(Z) + \frac{1}{2} f_f(Z) \right] \lambda_2 - f_f(Z)\lambda_1 + \frac{1}{2} f_f(Z)\lambda_0;$$

$$S_2(Z) = f_d(Z)\lambda_4 + [f_e(Z) + f_f(Z)]\lambda_3 - \frac{3}{2} f_f(Z)\lambda_2 + f_f(Z)\lambda_1 - \frac{1}{2} f_f(Z)\lambda_0;$$

$$S_n(Z) = f_d(Z)\lambda_{n+2} + [f_e(Z) + f_f(Z)]\lambda_{n+1} - 2\sum_{j=0}^{n-3} (-1)^j f_f(Z)\lambda_{n-j} +$$

$$+ (-1)^n \frac{3}{2} f_f(Z)\lambda_2 + (-1)^{n+1} f_f(Z)\lambda_1 + (-1)^n \frac{1}{2} f_f(Z)\lambda_0$$

$n = 3, 4, \dots, N-2$.

(5.60)

O potencial complexo para a *line doublet*, desenvolvido na seção 4.1.4 é dado por:

$$\Omega = \frac{\lambda}{2\pi i} \ln \frac{Z-1}{Z+1} + ip_{ldu}(Z) \quad (5.61)$$

em que λ é o polinômio interpolador (que simula o salto no potencial de descarga) em termos da coordenada local e p_{ldu} é o polinômio de correção para o campo distante. O polinômio λ pode ser aproximado em termos dos polinômios *splines*:

$$\lambda = \sum_{n=0}^{N-2} S_n(Z). \quad (5.62)$$

Os polinômios $S_n(Z)$ são definidas conforme as equações (5.60) em termos das funções de ponderação de f_a, f_b e f_c para o polinômio inicial e de f_d, f_e e f_f para os demais, sendo cada uma dessas funções parte geradora da solução. Assim, definem-se as funções de influência $\mathcal{Y}(Z)$, reunindo o termo interpolador e o polinômio corretor em uma única função, conforme as equações:

$$\mathcal{Y}_a\left(\frac{Z}{0}\right) = f_a\left(\frac{Z}{0}\right) \ln \frac{Z-1}{Z+1} + 2f_a\left(\frac{Z}{0}\right) \left(\frac{1}{Z}\right),$$

$$\mathcal{Y}_b\left(\frac{Z}{0}\right) = f_b\left(\frac{Z}{0}\right) \ln \frac{Z-1}{Z+1} + 2f_b\left(\frac{Z}{0}\right) \left(\frac{1}{Z}\right),$$

$$\mathcal{Y}_c\left(\frac{Z}{0}\right) = f_c\left(\frac{Z}{0}\right) \ln \frac{Z-1}{Z+1} + 2f_c\left(\frac{Z}{0}\right) \left(\frac{1}{Z}\right),$$

(5.63)

$$\mathcal{Y}_d\left(\frac{Z}{n}\right) = f_d\left(\frac{Z}{n}\right) \ln \frac{Z-1}{Z+1} + 2f_d\left(\frac{Z}{n}\right) \left(\frac{1}{Z}\right),$$

$$\mathcal{Y}_e\left(\frac{Z}{n}\right) = f_e\left(\frac{Z}{n}\right) \ln \frac{Z-1}{Z+1} + 2f_e\left(\frac{Z}{n}\right) \left(\frac{1}{Z}\right),$$

$$\mathcal{Y}_f\left(\frac{Z}{n}\right) = f_f\left(\frac{Z}{n}\right) \ln \frac{Z-1}{Z+1} + 2f_f\left(\frac{Z}{n}\right) \left(\frac{1}{Z}\right).$$

Observa-se que a série referente à correção no infinito foi truncada, preservando somente o primeiro termo, $\frac{1}{Z}$. Outros termos tornam-se desnecessários, visto que todas as

funções f são quadráticas, portanto, os demais termos obtidos são de ordem inferior a Z^1 .

$$\begin{aligned}
\Upsilon_a(Z) &= f_a(Z) \ln \frac{Z-1}{Z+1} + (Z+1), \\
\Upsilon_b(Z) &= f_b(Z) \ln \frac{Z-1}{Z+1} - 2Z, \\
\Upsilon_c(Z) &= f_c(Z) \ln \frac{Z-1}{Z+1} + (Z-1), \\
\Upsilon_d(Z) &= f_d(Z) \ln \frac{Z-1}{Z+1} + \frac{Z+2}{2}, \\
\Upsilon_e(Z) &= f_e(Z) \ln \frac{Z-1}{Z+1} - \frac{Z+2}{2}, \\
\Upsilon_f(Z) &= f_f(Z) \ln \frac{Z-1}{Z+1} + Z.
\end{aligned} \tag{5.64}$$

O potencial complexo em qualquer ponto do domínio em razão do segmento considerado pode ser escrito como:

$$\begin{aligned}
\Omega(Z) &= \frac{1}{2\pi i} \left[\Upsilon_a(Z) \lambda_2 + \Upsilon_b(Z) \lambda_1 + \Upsilon_c(Z) \lambda_0 \right]; \\
\Omega(Z) &= \frac{1}{2\pi i} \left\{ \Upsilon_d(Z) \lambda_3 + \left[\Upsilon_e(Z) + \frac{1}{2} \Upsilon_f(Z) \right] \lambda_2 - \Upsilon_f(Z) \lambda_1 + \frac{1}{2} \Upsilon_f(Z) \lambda_0 \right\}; \\
\Omega(Z) &= \frac{1}{2\pi i} \left\{ \Upsilon_d(Z) \lambda_4 + \left[\Upsilon_e(Z) + \Upsilon_f(Z) \right] \lambda_3 - \frac{3}{2} \Upsilon_f(Z) \lambda_2 + \Upsilon_f(Z) \lambda_1 - \frac{1}{2} \Upsilon_f(Z) \lambda_0 \right\}; \\
\Omega(Z) &= \frac{1}{2\pi i} \left\{ \Upsilon_d(Z) \lambda_{n+2} + \left[\Upsilon_e(Z) + \Upsilon_f(Z) \right] \lambda_{n+1} - 2 \sum_{j=0}^{n-3} (-1)^j \Upsilon_f(Z) \lambda_{n-j} + \right. \\
&\quad \left. + (-1)^n \frac{3}{2} \Upsilon_f(Z) \lambda_2 + (-1)^{n+1} \Upsilon_f(Z) \lambda_1 + (-1)^n \frac{1}{2} \Upsilon_f(Z) \lambda_0 \right\} \\
&\qquad n = 3, 4, \dots, N-2.
\end{aligned}$$

(5.65)

Implementação e Singularidades

Considerando uma inhomogeneidade com M trechos (lados), tendo cada um deles $N+1$ pontos de controle regularmente espaçados e aplicando a aproximação do salto no potencial de descarga por uma spline quadrática com polinômio inicial quadrático, pode-se escrever o potencial complexo para qualquer ponto no plano como:

$$\Omega_{incho}(z) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=0}^{N-2} \Omega_n^m(Z). \quad (5.66)$$

Desenvolvendo a equação (5.66) e reorganizando os termos de forma a explicitar os esforços λ , quatro formulações são identificadas, considerando que $\lambda_0^I = \lambda_N^M$. Assim, para cada vértice o potencial complexo pode ser expresso por:

$$\Omega_{PtV} = \frac{1}{2\pi i} \left[\Upsilon_d \left(\begin{matrix} m-1 \\ N-2 \end{matrix} \right) + \Upsilon_c \left(\begin{matrix} m \\ 0 \end{matrix} \right) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N-2} (-1)^{n+1} \Upsilon_f \left(\begin{matrix} m \\ n \end{matrix} \right) \right] \lambda_0, \quad (5.67)$$

para os primeiros pontos em cada trecho,

$$\Omega_{mPt1} = \frac{1}{2\pi i} \left[\Upsilon_b \left(\begin{matrix} m \\ 0 \end{matrix} \right) + \sum_{n=1}^{N-2} (-1)^n \Upsilon_f \left(\begin{matrix} m \\ n \end{matrix} \right) \right] \lambda_1, \quad (5.68)$$

para o segundo ponto em cada trecho,

$$\Omega_{Pt2} = \frac{1}{2\pi i} \left[\Upsilon_a \left(\begin{matrix} m \\ 0 \end{matrix} \right) + \Upsilon_e \left(\begin{matrix} m \\ 1 \end{matrix} \right) + \frac{1}{2} \Upsilon_f \left(\begin{matrix} m \\ 1 \end{matrix} \right) + \frac{3}{2} \sum_{n=2}^N (-1)^{n+1} \Upsilon_f \left(\begin{matrix} m \\ n \end{matrix} \right) \right] \lambda_2, \quad (5.69)$$

e para os demais pontos,

$$\Omega_{Pt(n)} = \frac{1}{2\pi i} \left[\Upsilon_d \left(\begin{matrix} m \\ n-2 \end{matrix} \right) + \Upsilon_e \left(\begin{matrix} m \\ n-1 \end{matrix} \right) + \Upsilon_f \left(\begin{matrix} m \\ n-1 \end{matrix} \right) - 2 \sum_{j=n}^{N-2} (-1)^{j+n} \Upsilon_f \left(\begin{matrix} m \\ j \end{matrix} \right) \right] \lambda_n. \quad (5.70)$$

$n = 3, 4, \dots, N-2$

Para o caso de $n = N-1$, essa mesma equação assume a forma de:

$$\Omega_{Pt(N-1)} = \frac{1}{2\pi i} \left[\Upsilon_d \left(\begin{matrix} m \\ N-3 \end{matrix} \right) + \Upsilon_e \left(\begin{matrix} m \\ N-2 \end{matrix} \right) + \Upsilon_f \left(\begin{matrix} m \\ N-2 \end{matrix} \right) \right] \lambda_{N-1}$$

Singularidades

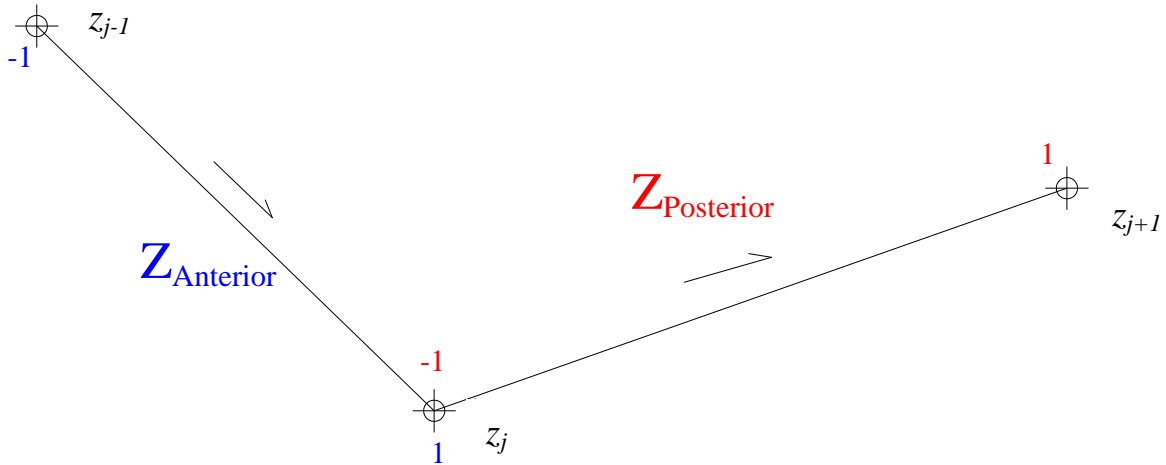


Figura 50 – Coordenadas locais de segmentos adjacentes e pontos de singularidade.

As singularidades acontecem nos pontos em que as coordenadas locais são definidas como $Z = 1$ ou $Z = -1$, nesses pontos caso o termo logarítmico do potencial não é definido. Nestes casos a contribuição ao esforço é exercida pelos segmentos anterior e posterior ao ponto, tem-se, então, que analisar as funções em relação às coordenadas locais respectivas $Z_{anterior} = 1$ e $Z_{posterior} = -1$. Isso vale tanto para os segmentos colineares $\frac{m}{n-1} Z = 1$ e $\frac{m}{n} Z = -1$ para $n = 1, 2, \dots, N-2$, quanto para segmentos que formam os vértices da inhomogeneidade $\frac{m}{N-2} Z = 1$ e $\frac{M}{0} Z = -1$, lembrando que para uma inhomogeneidade contendo M trechos (lados do polígono) as coordenadas finais do último trecho é igual as coordenadas iniciais do primeiro trecho, $Z_{M+1} = Z_1$.

Para $Z_{anterior} = 1$, as funções f_b , f_c , f_e e f_f anulam-se, enquanto as funções f_a e f_d têm valor igual a 1. Para $Z_{posterior} = -1$, tem-se que as funções f_a , f_b , f_d e f_f anulam-se, enquanto as funções f_c e f_e têm valor igual a 1. Interessante notar que em ambos os casos (ou seja em qualquer dos extremos dos segmentos) f_b e f_f são nulas.

Considerando a propriedade,

$$\lim_{Z \rightarrow 1} (Z+1)(Z-1) \ln \frac{Z-1}{Z+1} = \lim_{Z \rightarrow -1} (Z+1)(Z-1) \ln \frac{Z-1}{Z+1} = 0, \quad (5.71)$$

que é o desdobramento de:

$$\lim_{Z \rightarrow 1} (Z-1) \ln(Z-1) = \lim_{Z \rightarrow -1} (Z+1) \ln(Z+1) = 0. \quad (5.72)$$

Observa-se que nos casos em que as funções f se anulam as respectivas funções \mathcal{Y} assumem os valores de seus polinômios de correção – que são valores reais, já que ao logo dos trechos $Y = 0$.

A consequência desta análise é que nas equações (5.67), (5.68), (5.69) e (5.70) sempre aparecerão dois termos em que não será possível remover a singularidade pelas por meio da equação (5.71) ou (5.72), o restante dos termos desdobrados dentro dos cochetes serão números reais, que irão se transformar em números imaginários devido à divisão por i .

O objetivo é determinar a parte real das (5.67), (5.68), (5.69) e (5.70), ou seja os respectivos potenciais de descarga , pois é este que irá compor a matriz de coeficientes para resolução do problema. A parte real do potencial complexo em um nó j estará na forma de:

$$\Re\{\Omega_j\} = \Re\left\{ \lim_{\substack{Z_{anterior} \rightarrow 1 \\ Z_{posterior} \rightarrow -1}} \frac{1}{2\pi i} \left(\ln \frac{Z_{anterior} - 1}{Z_{anterior} + 1} + \ln \frac{Z_{posterior} - 1}{Z_{posterior} + 1} \right) \right\}. \quad (5.73)$$

Desdobrando em termos das coordenadas globais e considerando a aproximação pelo lado externo do polígono tem-se:

$$\Re\{\Omega_j\} = \lim_{z \rightarrow z_j} \frac{1}{2\pi i} \left[\ln \frac{z - z_{j-1}}{z - z_{j+1}} \right] \lambda_j = \frac{1}{2\pi} \arg \left(\frac{z_j - z_{j-1}}{z_j - z_{j+1}} \right) \lambda_j = \frac{\theta}{2\pi} \lambda_j, \quad (5.74)$$

onde $-2\pi < \theta < 0$. Com isso, as singularidades são removidas, possibilitando implementar a formulação sem maiores restrições.

Exemplo

Para exemplificar, a formulação será aplicada em uma inhomogeneidade triangular. Cada trecho (lado) da inhomogeneidade, por sua vez, será dividido em cinco segmentos (Figura 51).

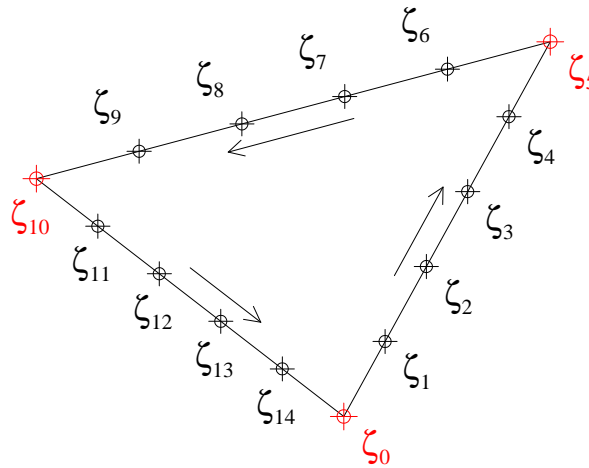


Figura 51 – Inhomogeneidade triangular com locação dos pontos de controle (ζ_j).

Considerando apenas os segmentos intermediários, a formulação para o potencial complexo será:

$$\Omega_1(Z) = Y_d(Z) \lambda_2 + Y_e(Z) \lambda_1 + Y_f(Z) \varpi,$$

$$\Omega_2(Z) = Y_d(Z) \lambda_3 + [Y_e(Z) + Y_f(Z)] \lambda_2 - Y_f(Z) \lambda_1 - Y_f(Z) \varpi,$$

$$\Omega_3(Z) = Y_d(Z) \lambda_4 + [Y_e(Z) + Y_f(Z)] \lambda_3 - 2Y_f(Z) \lambda_2 + Y_f(Z) \lambda_1 + Y_f(Z) \varpi,$$

$$\Omega_{\frac{4}{4}}(Z) = Y_d(Z)\lambda_5 + [Y_e(Z) + Y_f(Z)]\lambda_4 - 2Y_f(Z)\lambda_3 + 2Y_f(Z)\lambda_2 - Y_f(Z)\lambda_1 - Y_f(Z)\varpi.$$

Incorporando o polinômio inicial quadrático, conforme equação (5.31), tem-se:

$$\Omega_0(Z) = Y_a(Z)\lambda_2 + Y_b(Z)\lambda_1 + Y_c(Z)\lambda_0,$$

sendo:

$$\varpi = \frac{\lambda_2 - 2\lambda_1 + \lambda_0}{2},$$

Então:

$$\Omega_1(Z) = Y_d(Z)\lambda_3 + \left[Y_e(Z) + \frac{Y_f(Z)}{2} \right] \lambda_2 - Y_f(Z)\lambda_1 + \frac{Y_f(Z)}{2} \lambda_0,$$

$$\Omega_2(Z) = Y_d(Z)\lambda_4 + [Y_e(Z) + Y_f(Z)]\lambda_3 - \frac{3}{2}Y_f(Z)\lambda_2 + Y_f(Z)\lambda_1 - \frac{Y_f(Z)}{2}\lambda_0,$$

$$\Omega_3(Z) = Y_d(Z)\lambda_5 + [Y_e(Z) + Y_f(Z)]\lambda_4 - 2Y_f(Z)\lambda_3 + \frac{3}{2}Y_f(Z)\lambda_2 - Y_f(Z)\lambda_1 + \frac{Y_f(Z)}{2}\lambda_0.$$

O somatório pode ser reorganizado de forma a evidenciar todos os coeficientes dos esforços λ . Têm-se, então, $N+1$ expressões correspondentes a cada esforço multiplicado por uma função que agrega todas as funções Y respectivas.

Para o extremo inicial do segmento, percorrido no sentido anti-horário, o esforço recebe influência do segmento de *line doublet* do trecho anterior do polígono. Neste caso, uma vez reorganizado o somatório dos esforços de todos os lados do polígono, aparecerá uma função Y_f com coordenadas locais do último trecho do segmento anterior ao estudado. Para o extremo final da *line doublet* estudada, algo similar acontece, entretanto esta fornece a influência da função Y_f no segmento *line doublet* posterior.

Ressalta-se que para polígono fechado – tendo seus vértices, lados e pontos de controle sempre numerados no sentido anti-horário – o primeiro e último vértices coincidem (Figura 51).

O potencial complexo provocado pela inhomogeneidade triangular compolinômio inicia quadrático, em qualquer ponto do domínio, será calculado pela expressão:

$$\Omega = \left[\begin{array}{l} + \left[Y_a \left(\frac{2}{3} \right) + Y_c \left(\frac{0}{0} \right) + \frac{Y_f \left(\frac{0}{1} \right)}{2} - \frac{Y_f \left(\frac{0}{2} \right)}{2} + \frac{Y_f \left(\frac{0}{3} \right)}{2} \right] \lambda_0 \\ + \left[Y_b \left(\frac{0}{0} \right) - Y_f \left(\frac{0}{1} \right) + Y_f \left(\frac{0}{2} \right) - Y_f \left(\frac{0}{3} \right) \right] \lambda_1 \\ + \left[Y_a \left(\frac{0}{0} \right) + Y_e \left(\frac{0}{1} \right) + \frac{Y_f \left(\frac{0}{1} \right)}{2} - \frac{3}{2} Y_f \left(\frac{0}{2} \right) + \frac{3}{2} Y_f \left(\frac{0}{3} \right) \right] \lambda_2 \\ + \left[Y_a \left(\frac{0}{1} \right) + Y_e \left(\frac{0}{2} \right) + Y_f \left(\frac{0}{2} \right) - 2Y_f \left(\frac{0}{3} \right) \right] \lambda_3 \\ + \left[Y_a \left(\frac{0}{2} \right) + Y_e \left(\frac{0}{3} \right) + Y_f \left(\frac{0}{3} \right) \right] \lambda_4 \\ + \left[Y_a \left(\frac{0}{3} \right) + Y_c \left(\frac{1}{0} \right) + \frac{Y_f \left(\frac{1}{1} \right)}{2} - \frac{Y_f \left(\frac{1}{2} \right)}{2} + \frac{Y_f \left(\frac{1}{3} \right)}{2} \right] \lambda_5 \\ + \left[Y_b \left(\frac{1}{0} \right) - Y_f \left(\frac{1}{1} \right) + Y_f \left(\frac{1}{2} \right) - Y_f \left(\frac{1}{3} \right) \right] \lambda_6 \\ + \left[Y_a \left(\frac{1}{0} \right) + Y_e \left(\frac{1}{1} \right) + \frac{Y_f \left(\frac{1}{1} \right)}{2} - \frac{3}{2} Y_f \left(\frac{1}{2} \right) + \frac{3}{2} Y_f \left(\frac{1}{3} \right) \right] \lambda_7 \\ + \left[Y_d \left(\frac{1}{1} \right) + Y_e \left(\frac{1}{2} \right) + Y_f \left(\frac{1}{2} \right) - 2Y_f \left(\frac{1}{3} \right) \right] \lambda_8 \\ + \left[Y_a \left(\frac{1}{2} \right) + Y_e \left(\frac{1}{3} \right) + Y_f \left(\frac{1}{3} \right) \right] \lambda_9 \\ + \left[Y_d \left(\frac{1}{3} \right) + Y_c \left(\frac{2}{0} \right) + \frac{Y_f \left(\frac{2}{1} \right)}{2} - \frac{Y_f \left(\frac{2}{2} \right)}{2} + \frac{Y_f \left(\frac{2}{3} \right)}{2} \right] \lambda_{10} \\ + \left[Y_b \left(\frac{2}{0} \right) - Y_f \left(\frac{2}{1} \right) + Y_f \left(\frac{2}{2} \right) - Y_f \left(\frac{2}{3} \right) \right] \lambda_{11} \\ + \left[Y_a \left(\frac{2}{0} \right) + Y_e \left(\frac{2}{1} \right) + \frac{Y_f \left(\frac{2}{1} \right)}{2} - \frac{3}{2} Y_f \left(\frac{2}{2} \right) + \frac{3}{2} Y_f \left(\frac{2}{3} \right) \right] \lambda_{12} \\ + \left[Y_d \left(\frac{2}{1} \right) + Y_e \left(\frac{2}{2} \right) + Y_f \left(\frac{2}{2} \right) - 2Y_f \left(\frac{2}{3} \right) \right] \lambda_{13} \\ + \left[Y_d \left(\frac{2}{2} \right) + Y_e \left(\frac{2}{3} \right) + Y_f \left(\frac{2}{3} \right) \right] \lambda_{14} \end{array} \right]$$

5.2.2 Spline quadrática com polinômio inicial linear

Termo para segmento inicial (segmento 0)

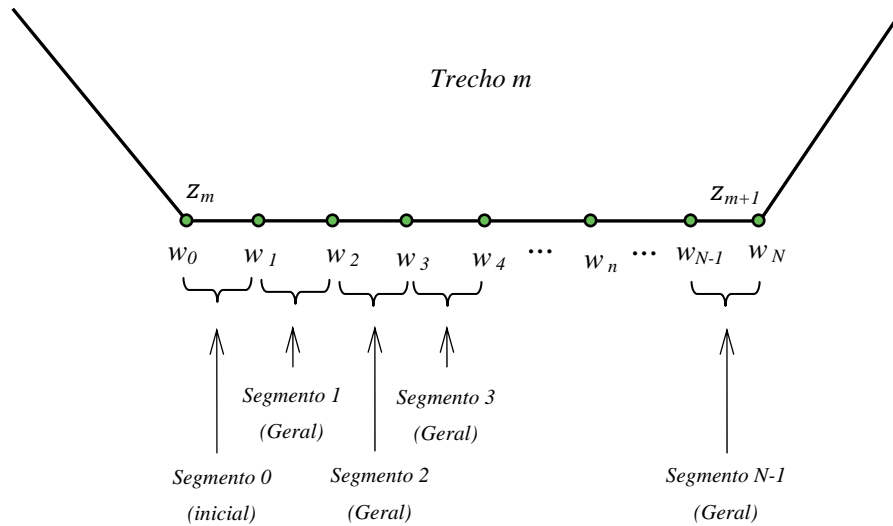


Figura 52 – Trecho de uma inhomogeneidade poligonal. Esquema de pontos de controle e segmentos para trecho de inhomogeneidade com polinômio inicial Linear.

O polinômio inicial linear envolve a interpolação dos dois primeiros pontos de controle (w_0 e w_1). Para tal, é definida uma função quadrática na em termos de coordenadas locais:

$$Z_0 = \frac{z - \frac{1}{2}(w_1 + w_0)}{\frac{1}{2}(w_1 - w_0)}, \tag{5.75}$$

consequentemente,

$$Z_0 = \frac{x - \frac{1}{2}(x_1 + x_0)}{\frac{1}{2}(x_1 - x_0)}. \tag{5.76}$$

Considerando a interpolação por um polinômio linear nos dois pontos iniciais (que compõe o segmento 0), em termos das coordenadas locais, de tal forma que sejam satisfeitas as condições:

$$\begin{aligned} S_0(-1) &= \lambda_0, \text{ e} \\ S_0(1) &= \lambda_1. \end{aligned} \tag{5.77}$$

Então, utilizando a forma lagrangiana de interpolação, o polinômio quadrático inicial pode ser escrito na forma de:

$$S_0\left(\frac{Z}{0}\right) = \frac{(Z+1)}{2} \lambda_1 - \frac{(Z-1)}{2} \lambda_0. \tag{5.78}$$

Isolando as funções de ponderação de cada termo, obtém-se:

$$\begin{aligned} f_g\left(\frac{Z}{0}\right) &= \frac{(Z+1)}{2} & f'_g(1) &= \frac{1}{2}, \\ f_h\left(\frac{Z}{0}\right) &= -\frac{(Z-1)}{2} & f'_h(1) &= -\frac{1}{2}, \end{aligned} \tag{5.79}$$

Portanto, o polinômio interpolador e sua derivada em w_1 (ponto de contato com o polinômio subsequente) poderão ser escritos como:

$$\begin{aligned} S_0\left(\frac{Z}{0}\right) &= f_g\left(\frac{Z}{0}\right)\lambda_1 + f_h\left(\frac{Z}{0}\right)\lambda_0 \\ \text{e} \end{aligned} \tag{5.80}$$

$$S'_0(1) = \frac{\lambda_1 - \lambda_0}{2}.$$

Termo geral para demais segmentos (segmentos 1,2,...,n,..., N-1)

Como cada trecho (lado do polígono) é dividido em segmentos de mesmo tamanho e a continuidade nas derivadas é garantida tanto para o segmento real quanto para o segmento parametrizado. Para todos os segmentos será utilizada a relação:

$$Z_n = \frac{z - \frac{1}{2}(w_{n+1} + w_n)}{\frac{1}{2}(w_{n+1} - w_n)},$$

onde,

$$z = x + iy, \tag{5.81}$$

$$w_j = x_j + iy_j$$

e

$$Z_n = X_n + iY_n,$$

para $n = 0, 1, \dots, N-1$ e $j = 0, 1, \dots, N$.

Verifica-se que sobre a *line doublet*, a coordenada local complexa é reduzida a sua parte real, visto que a parte imaginária é nula (STRACK, 1989, p. 292); ou seja, $Y_n = 0$.

Conseqüentemente, a coordenada local para um trecho n , em virtude da proporcionalidade, pode ser expressa por:

$$Z_n = \frac{x - \frac{1}{2}(x_{n+1} + x_n)}{\frac{1}{2}(x_{n+1} - x_n)}. \tag{5.82}$$

Deve-se considerar a interpolação por um polinômio quadrático por dois pontos (que compõe cada segmento subsequente), em termos das coordenadas locais, de tal forma que sejam satisfeitas as condições:

$$S_n(-1) = \lambda_n,$$

$$S_n(1) = \lambda_{n+1}$$

(5.83)

e

$$S_n(-1) = \varpi_n.$$

Observa-se que a formulação para o termo geral é idêntica a do item anterior, modificando apenas os índices dos esforços de $n+2$ e $n+1$ para $n+1$ e n , respectivamente.

O que leva a:

$$S_n\left(\frac{Z}{n}\right) = \left[\frac{(Z+1)\binom{n}{n}}{4} \right] \lambda_{n+1} + \left[\frac{-(Z-1)\binom{n}{n}}{4} \right] \lambda_n + \left[\frac{-(Z-1)\binom{n}{n}}{2} \right] \varpi_n.$$

(5.84)

Generalizando, pode-se escrever:

$$S_n\left(\frac{Z}{n}\right) = f_d\left(\frac{Z}{n}\right)\lambda_{n+1} + f_e\left(\frac{Z}{n}\right)\lambda_n + f_f\left(\frac{Z}{n}\right)\varpi_n.$$

(5.85)

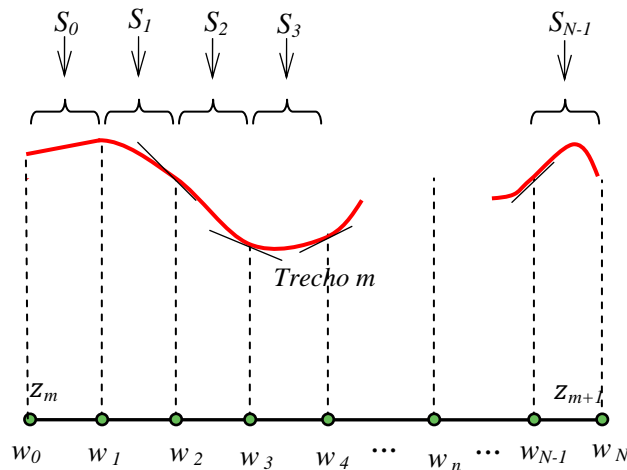


Figura 53 – Polinômios em uma *spline* de polinômio inicial Linear.

Diagrama esquemático de uma spline de polinômios quadráticos com polinômio inicial linear em relação aos pontos de controle.

Devido à continuidade e suavidade nos pontos de controle w_1, w_2, \dots, w_{N-1} , em cada um desses pontos a derivada do polinômio anterior deve ser igual a derivada do polinômio posterior. O que leva a:

$$S'_n(I) = S'_{n+1}(-I), \quad (5.86)$$

Onde, $n = 0, 1, 2, \dots, N - 2$.

De modo semelhante ao apresentado anteriormente, é possível, portanto, induzir o termo geral, que será determinado por pela equação:

$$S_1(Z) = f_d(Z) \lambda_2 + f_e(Z) \lambda_1 + f_f(Z) \varpi_1$$

$$S_n(Z) = f_d(Z) \lambda_{n+1} + [f_e(Z) + f_f(Z)] \lambda_n - 2f_f(Z) \lambda_{n-1} + 2f_f(Z) \lambda_{n-2} - \dots$$

$$\dots + (-1)^{n+1} f_f(Z) \lambda_1 + (-1)^{n+1} f_f(Z) \varpi_1 \quad (5.87)$$

Incorporação do segmento inicial

Para o segmento inicial S_0 sabe-se que:

$$S_0(Z) = f_g(Z) \lambda_1 + f_h(Z) \lambda_0$$

e (5.88)

$$S'_0(I) = \frac{\lambda_1 - \lambda_0}{2}.$$

O valor da derivada no ponto de encontro, w_1 , entre as funções de interpolação será:

$$\varpi_1 = \frac{\lambda_1 - \lambda_0}{2}. \quad (5.89)$$

logo,

$$S_1(Z) = f_d(Z) \lambda_2 + \left[f_e(Z) + \frac{1}{2} f_f(Z) \right] \lambda_1 - \frac{1}{2} f_f(Z) \lambda_0, \quad (5.90)$$

e o termo geral pode ser escrito na forma de:

$$S_n(Z) = f_d(Z)\lambda_{n+1} + [f_e(Z) + f_f(Z)]\lambda_n - 2f_f(Z)\lambda_{n-1} + 2f_f(Z)\lambda_{n-2} - \dots \\ \dots + (-1)^{n+1} \frac{3}{2} f_f(Z)\lambda_1 + (-1)^n \frac{1}{2} f_f(Z)\lambda_0$$

Para $n = 2, 3, \dots, N-1$

(5.91)

O que leva a:

$$\Upsilon_g(Z) = f_g(Z) \ln \frac{Z-1}{Z+1} + 1,$$

$$\Upsilon_h(Z) = f_h(Z) \ln \frac{Z-1}{Z+1} - 1,$$

$$\Upsilon_d(Z) = f_d(Z) \ln \frac{Z-1}{Z+1} + \frac{Z+2}{2}, \quad (5.92)$$

$$\Upsilon_e(Z) = f_e(Z) \ln \frac{Z-1}{Z+1} - \frac{Z+2}{2}.$$

$$\Upsilon_f(Z) = f_f(Z) \ln \frac{Z-1}{Z+1} + Z.$$

O potencial complexo em qualquer ponto do domínio em razão do segmento considerado pode ser escrito como:

$$\Omega_0(Z) = \frac{I}{2\pi i} [\Upsilon_g(Z)\lambda_1 + \Upsilon_h(Z)\lambda_0];$$

$$\Omega_1(Z) = \frac{I}{2\pi i} \left\{ \Upsilon_d(Z)\lambda_2 + \left[\Upsilon_e(Z) + \frac{I}{2} \Upsilon_f(Z) \right] \lambda_1 - \frac{I}{2} \Upsilon_f(Z)\lambda_0 \right\};$$

$$\Omega_2(Z) = \frac{1}{2\pi i} \left\{ \Upsilon_d\left(\frac{Z}{2}\right)\lambda_3 + \left[\Upsilon_e\left(\frac{Z}{2}\right) + \Upsilon_f\left(\frac{Z}{2}\right)\right]\lambda_2 - \frac{3}{2}\Upsilon_f\left(\frac{Z}{2}\right)\lambda_1 + \frac{1}{2}\Upsilon_f\left(\frac{Z}{2}\right)\lambda_0 \right\}$$

$$\Omega_n(Z) = \frac{1}{2\pi i} \left\{ \Upsilon_d\left(\frac{Z}{n}\right)\lambda_{n+2} + \left[\Upsilon_e\left(\frac{Z}{n}\right) + \Upsilon_f\left(\frac{Z}{n}\right)\right]\lambda_{n+1} + 2\sum_{j=1}^{n-2} (-1)^j \Upsilon_f\left(\frac{Z}{n}\right)\lambda_{n-j} + (-1)^{n+1} \frac{3}{2}\Upsilon_f\left(\frac{Z}{n}\right)\lambda_1 + (-1)^n \frac{1}{2}\Upsilon_f\left(\frac{Z}{n}\right)\lambda_0 \right\}$$

$$n = 3, 4, \dots, N-1.$$

(5.93)

Implementação

Considerando uma inhomogeneidade com M trechos (lados), tendo cada um deles $N+1$ pontos de controle regularmente espaçados e aplicando a aproximação do salto no potencial de descarga por uma spline quadrática com polinômio inicial linear, pode-se escrever o potencial complexo para qualquer ponto no plano como:

$$\Omega_{incho}(z) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=0}^{N-1} \Omega_n\left(\frac{z}{n}\right). \quad (5.94)$$

Desenvolvendo a equação (5.66) e reorganizando os termos de forma a explicitar os esforços λ , três formulações são identificadas, considerando que $\lambda_0 = \lambda_N$. Assim, para cada vértice o potencial complexo pode ser expresso por:

$$\Omega_{P_{IV}} = \frac{1}{2\pi i} \left[\Upsilon_d\left(\frac{z}{N-1}\right) + \Upsilon_c\left(\frac{z}{0}\right) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N-1} (-1)^n \Upsilon_f\left(\frac{z}{n}\right) \right] \lambda_0, \quad (5.95)$$

para os primeiros pontos em cada trecho,

$$\Omega_{m P_{II}} = \frac{1}{2\pi i} \left[\Upsilon_g\left(\frac{z}{0}\right) + \Upsilon_e\left(\frac{z}{1}\right) + \frac{1}{2} \Upsilon_f\left(\frac{z}{1}\right) - \frac{3}{2} \sum_{n=2}^{N-1} (-1)^n \Upsilon_f\left(\frac{z}{n}\right) \right] \lambda_1, \quad (5.96)$$

e para os demais pontos,

$$\Omega_{Pt(n)} = \frac{1}{2\pi i} \left[\Upsilon_d \left(\frac{m}{n-1} \right) + \Upsilon_e \left(\frac{m}{n} \right) + \Upsilon_f \left(\frac{m}{n} \right) - 2 \sum_{j=n+1}^{N-1} (-1)^j \Upsilon_f \left(\frac{m}{j} \right) \right] \lambda_n.$$

$$n = 3, 4, \dots, N-2$$

(5.97)

Para o caso de $n = N-1$, essa mesma equação assume a forma de:

$$\Omega_{Pt(N-1)} = \frac{1}{2\pi i} \left[\Upsilon_d \left(\frac{m}{N-2} \right) + \Upsilon_e \left(\frac{m}{N-1} \right) + \Upsilon_f \left(\frac{m}{N-1} \right) \right] \lambda_{N-1}$$

Singularidades

A mesma análise realizada para as splines quadráticas com polinômio inicial quadrático é aplicada e conclui-se igualmente que o potencial de descarga no ponto do vértice pode ser escrito como:

$$\Re\{\Omega_j\} = \lim_{z \rightarrow z_j} \frac{1}{2\pi i} \left[\ln \frac{z - z_{j-1}}{z - z_{j+1}} \right] \lambda_j = \frac{1}{2\pi} \arg \left(\frac{z_j - z_{j-1}}{z_j - z_{j+1}} \right) \lambda_j = \frac{\theta}{2\pi} \lambda_j,$$

(5.98)

onde $-2\pi < \theta < 0$. Com isso, as singularidades são removidas, possibilitando implementar a formulação sem maiores restrições.

6 IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

6.1 Histórico Programação

Um dos precursores do conceito de programação foi o mecânico francês Jacquard³⁴ (1801) em razão do invento do tear automático. A padronagem produzida variava de acordo com um sistema de cartões perfurados sem a necessidade de outras alterações (Figura 54). Cada linha de furos no cartão correspondia a uma linha no desenho do tecido. Sua invenção possibilitou a produção de motivos mais intrincados e de melhor aceitação.

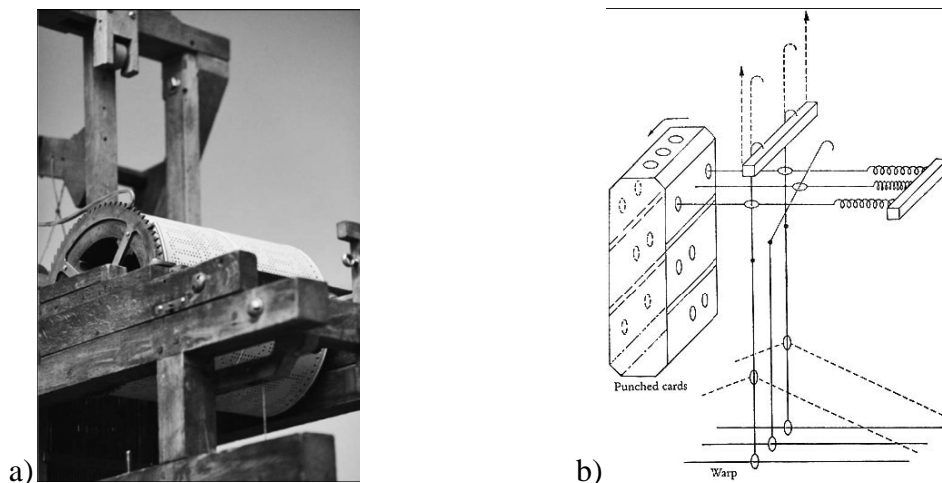


Figura 54 – Máquina automática de tecelagem e projeto de tear.
Máquina de Vaucason (a) e esquema da máquina de Jacquard (b).
Fonte: Delve (2007, p. 96-100)

³⁴ Joseph-Marie Jacquard (1752 Lyon – 1834 Oullins)

Jacquard foi influenciado pelos trabalhos de Basile Bouchon³⁵ (1725), Jacques de Falcon (1728) e Jacques Vaucason (1740) sendo encarado como a fusão mais bem sucedida dos conceitos testados por seus antecessores, tanto que a máquina de Jacquard ainda serve de base para os teares automáticos modernos. Do ponto de vista tecnológico, o grande legado de Jacquard foi o uso de cartões perfurados para controlar uma máquina (DELVE, 2007, p. 98).

Talvez a primeira linguagem de programação idealizada tenha origem em um programa rudimentar escrito pela matemática inglesa Ada Lovelace³⁶, em 1843, para a chamada máquina analítica projetada por Charles Babbage (1827). A máquina de Babbage não chegou a ser construída em sua época, entretanto seu projeto e conceito marcariam os primórdios da computação. Caso a máquina de Babbage tivesse sido construída, o programa de Ada ajudaria a calcular uma seqüência conhecida como números de Bernoulli, (Figura 55). Lovelace provou que não só números, mas qualquer coisa posta em notação simbólica pode ser computada por uma máquina (SHAPIRO; ECKROTH, 1987, p. 9).

Number of Operations.	Nature of Operations.	Variables for Data.						Working Variables.						Variables for Results.				
		$1V_0$	$1V_1$	$1V_2$	$1V_3$	$1V_4$	$1V_5$	$2V_6$	$2V_7$	$2V_8$	$2V_9$	$2V_{10}$	$2V_{11}$	$2V_{12}$	$2V_{13}$	$2V_{14}$	$2V_{15}$	
1	×	m	n	d	m'	n'	d'										$\frac{d' n' - d' n}{m' n' - m' n} = x$	$\frac{d' m - d' m'}{m' n' - m' n} = y$
2	×	m	n		m'	n'		m n'										
3	×			d'					d' n'									
4	×									d' n								
5	×										d' m							
6	×											d' m'						
7	-												(m' n' - m' n)					
8	-													(d' n' - d' n)				
9	-														(d' m - d' m')			
10	+																$\frac{d' n' - d' n}{m' n' - m' n} = x$	
11	+																	$\frac{d' m - d' m'}{m' n' - m' n} = y$

Figura 55 – Planilha para cálculo dos números de Bernoulli para máquina analítica
 Fonte: Toole (1996, p. 4)

³⁵ Filho de um fabricante de órgãos, Bouchon adaptou o conceito de música automática por cilindros a um repetitivo tear.

³⁶ Augusta Ada Byron King (1815 Londres – 1852 Londres), em sua homenagem uma linguagem de programação seria batizada com o nome de ADA.

George Boole, em 1847, propôs a lógica binária e estabelece a sua relação com a Álgebra Matemática, lançando a base para a computação com suporte em dois estados – binário (BOOLE, 1848).

Em 1890, os cartões perfurados iriam reaparecer nas máquinas eletro-mecânicas produzidas pela *Tabulating Machine* do americano Herman Hollerith³⁷, para contabilizar o censo populacional dos Estados Unidos. Mais tarde, a empresa passou a se chamar *International Business Machines Corporation* – IBM. Os cartões eram utilizados para acelerar a entrada de dados nas máquinas eletro-mecânicas usadas na contabilidade numérica do censo. O trabalho que levaria anos foi realizado em alguns meses, diminuindo extraordinariamente o tempo para a produção dos dados finais.

Cifras e a II Grande Guerra

Arthur Scherbius, em 1918, engenheiro alemão, inventou um aparelho eletro-mecânico para cifrar informações industriais e comerciais, chamado Enigma. O interesse posterior da Marinha e o valor estratégico da invenção levaram o governo alemão em 1928 a produzir seu próprio modelo Enigma (KRUH; DEAVOURS, 2002, p. 1).

A Enigma se assemelhava a uma máquina de escrever, sendo composta por um teclado e chaves luminosas. Os processos de cifrar e decifrar uma mensagem eram feitos pela variação de um grupo de cilindros contendo os 26 caracteres acoplados na parte de trás da máquina, cuja ordem e posição determinariam a codificação (KRUH; DEAVOURS, 2002, p. 5).

Na iminência da Segunda Grande Guerra, a inteligência polonesa, comandada por Marian Rejewski, conseguiu obter um modelo da Enigma e passou a trabalhar em um mecanismo que pudesse decifrar seu código. Esses mecanismos consistiam em máquinas

³⁷ Em consequência do uso de cartões perfurados para gerar a folha de pagamento das empresas, se tornaria comum chamar o demonstrativo dos dias trabalhados e do contracheque como *holerite*. O sistema também foi muito utilizado para contabilizar apostas de loterias e as respostas de concursos.

cilíndricas eletro-mecânicas funcionando em paralelo, que testavam inúmeras combinações para a decifração da Enigma.

No auge da Guerra, os poloneses juntaram esforços com a inteligência britânica, para tentar quebrar o código alemão. A máquina Enigma conseguida, manuais e todo conhecimento adquirido foram entregues aos ingleses, que montaram uma central secreta de decodificação em *Betchley Park*, onde trabalharam Alan Turing e Tommy Flowers, entre outros. Como fruto deste esforço de guerra, surgiu o Colossus, projetado por Flowers, de acordo com a lógica de operação desenvolvida por Turing, um computador eletrônico capaz de trabalhar conjuntamente com os mecanismos poloneses. Esse trabalho possibilitou a mudança do rumo da Guerra, sobretudo no Atlântico norte, abreviando o conflito.

Alto nível

Plankalkül, criada pelo Alemão Konrad Zuse³⁸ entre 1942 e 1946, para o computador eletrônico Z3, foi a primeira linguagem de programação de alto nível. Incluía sub-rotinas, instruções condicionais, estruturas de repetição, aritmética de ponto flutuante, matrizes, tipos compostos e tratamento de exceção – dentre outras características (WOLFGANG, 1997, p. 19). Infelizmente, os acontecimentos da Segunda Guerra obscureceram por décadas o trabalho de Zuse. Posteriormente resgatada para a comunidade acadêmica, a história das inovações propostas por Zuse ainda hoje é objeto de estudo.

No Pós-Guerra, o aprofundamento e o desenvolvimento da nova ciência se aceleraram. Novas máquinas mais confiáveis e potentes foram desenvolvidas.

A programação direta e binária foi substituída pelo uso dos montadores *assembly* – cada instrução correspondia a um mnemônico. Depois de escrito em mnemônicos, um programa montador era usado para gerar o código binário. O *assembly* facilitava a

³⁸ Konrad Zuse (1910 Berlim – 1995 Hünfeld de Fulda).

programação, pois os mnemônicos eram menos abstratos do que sistemas numéricos binários (zeros e uns), octodecimais ou hexadecimais. Na década de 1950, entretanto, o tempo requerido para escrever os códigos e o tamanho dos programas fizeram essa técnica de programação altamente inconveniente (METCALF; REID, 1991, p. 18).

A necessidade de tornar menos árdua a atividade de programação fez com que as atenções se voltassem para as linguagens de alto nível, com comandos mais próximos da linguagem falada, possibilitando manipular em único comando blocos com várias instruções de máquina. Assim, grande parte das instruções de baixo nível (linguagem de máquina) necessárias à execução de um dado programa poderia se tornar imperceptível ao programador.

O FORTRAN surgiu em 1957. Incluía comandos condicionais e o famoso comando GOTO (vá para) usado para direcionar o fluxo do programa para qualquer linha do código (BACKUS, 1978, p. 169).

O FORTRAN tornou o computador acessível a muitos cientistas e engenheiros, que com um pouco de esforço empenhado no conhecimento da linguagem, poderiam desenvolver suas pesquisas, pois antes seria necessário ser um especialista em computadores para ter a habilidade de programar (METCALF; REID, 1991, p. 18).

Em 1958, a linguagem LISP foi criada para estudar inteligência artificial, sendo posteriormente muito usada no meio acadêmico. O sistema de listas atadas tornou a LISP uma linguagem voltada à recursividade, muito flexível e com grande poder de manipulação de símbolos – as linguagens até então só tratavam com números. Mais tarde, em 1967, o LISP deu origem a uma linguagem lúdica, porém poderosa, voltada ao público infantil e aos conceitos de aprendizagem – o LOGO (WOLFGANG, 1997, p. 9). Nesse mesmo ano, cientistas europeus, aproximadamente 25 centros distribuídos em dez países, criaram uma linguagem também voltada ao meio científico que suportava diferentes sintaxes (NAUR,

1961, p. 1). Primeiramente, foi chamada de *International Algorithmic Language*, porém a versão mais conhecida foi a de 1960 chamada *Algorithmic Language* - ALGOL 60.

No intuito de desenvolver os princípios de sintaxe e semântica no âmbito das linguagens de computação, van Wijngaarden (1966) demonstrou que a instrução de redirecionamento de fluxo (*go to*) poderia ser eliminada do ALGOL 60 e substituída por um pequeno grupo de conceitos equivalentes (LEAVENWORTH, 1972, p. 55).

O ALGOL 60, como linguagem estruturada, influenciou inúmeros projetos de novas linguagens desde então. O ALGOL se caracterizava pela clareza de sua estrutura, baseada em blocos e por sua sintaxe completa, porém concisa.

Provavelmente, a primeira linguagem com conceitos de orientação a objetos tenha sido a SIMULA, criada na Noruega na década de 1960 (SIMULA 62-65-67) para o estudo do comportamento das partículas de gases. Baseada em ALGOL o SIMULA 67, já apresentava os principais conceitos daquilo que entendemos hoje como Programação Orientada a Objetos, tais como herança, classe e objeto (FRANTA, 1978, p. 1).

A linguagem SMALLTALK surgiu na década de 70 e teve sua versão mais robusta apresentada em 1976 (SMALLTALK 76). Projetada para ser uma linguagem de fácil assimilação, baseada em LOGO e LISP, o SMALLTALK combinava uma interface simples e intuitiva provinda da LOGO com o alto poder de processamento de listas simbólicas do LISP, unidas por uma sintaxe poderosa e simples. O SMALLTALK 76 também apresentava os conceitos de *byte-codes* e máquina virtual (VM – *virtual machine*), que na prática desvinculavam a linguagem de programação de um *hardware* específico, conceitos que influenciariam fortemente linguagens posteriores (WANGENHEIM; ABDALA, 2002, p. 10).

Por volta de 1972, surgiu a linguagem C, desenvolvida nos laboratórios da *Bell Company* por Dennis Ritch. Teve grande aceitação entre os programadores por ser simples e compacta, eficiente em relação ao código *assembly* e suficientemente abstrata e fluente para

descrever algoritmos e interações. Com respaldo nos conceitos oriundos do SIMULA, Bjarne Stroustrup (1983) desenvolveu uma extensão da linguagem C, que inicialmente chamou de C COM CLASSES (C WITH CLASSES), posteriormente batizada de C++ (STROUSTRUP, 1983).

Em 1991, a *Sun Microsystems* reuniu um grupo de pesquisadores para tentar antecipar as mudanças que viriam com a popularização do uso de microcontroladores nas mais variadas máquinas, como eletrodomésticos, sob o ambiente de interação, como a internet, que também se popularizava. Desse trabalho, surgiu a linguagem JAVA, que carrega consigo os fundamentos da linguagem orientada a objetos iniciada pelo SIMULA, a portabilidade desenvolvida pelo SMALLTALK e o poder de processamento e da sintaxe do C++.

A Figura 56 sintetiza a evolução das linguagens de programação, tomando por base aquelas que influenciaram o surgimento da linguagem JAVA.

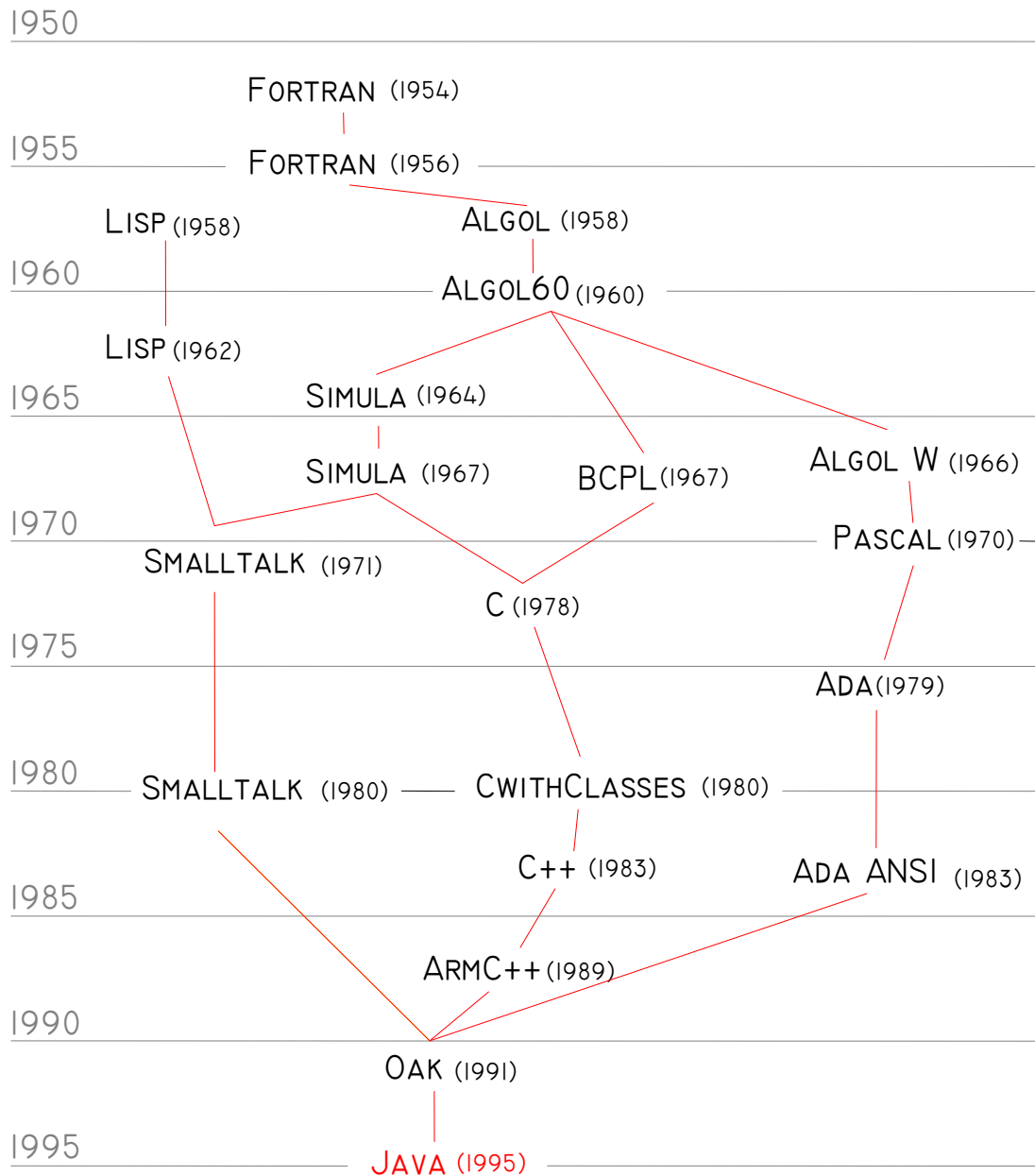


Figura 56 – Genealogia da linguagem JAVA.
Fonte: Adaptado de Lèvénez (2007)

6.2 Programação Orientada a Objetos

O surgimento das linguagens de alto nível possibilita a construção de programas mais complexos e, conseqüentemente, o uso de novas técnicas. Desse processo, surgiram os

paradigmas de programação, influenciando e sendo influenciados pela evolução das linguagens.

O primeiro grande salto foi o surgimento das linguagens ditas estruturadas em contraste com os códigos desestruturados.

Inicialmente, a programação se tratava da construção de programas em fluxo contínuo com o uso indiscriminado de instruções de redirecionamento inseridas no código. Em uma linguagem estruturada, a seqüência seca e muitas vezes incompressível de instruções e laços foi substituída por blocos de funções e procedimentos.

O paradigma da programação estruturada tem, como principal característica, a modularização em rotinas a serem chamadas a partir de um programa principal. Desta forma, foram abolidas instruções que redirecionavam o fluxo ao longo do escopo do programa. A programação ficou mais robusta e passível de aproveitamento, visto que as rotinas podiam ser re-utilizadas.

Com o reuso de funções e procedimentos modularizados, surgiu, então, o conceito de bibliotecas, com grande impacto na área de desenvolvimento e comercialização de *softwares* (RESENDE; SILVA, 2005, p. 12). Do ponto de vista da programação estruturada, as soluções computacionais podem ser entendidas em partes modulares, que executam ações (procedimentos) ou retornam dados (funções), cabendo ao programador identificar a forma adequada de relacioná-las dentro de um código principal.

Com o aumento da capacidade de processamento das máquinas e a popularização da computação, a complexidade dos sistemas aumentou consideravelmente. Era necessário adotar outra forma de organizar o código e de modelar os problemas. A programação estruturada cada vez apresentava dificuldades em conseguir oferecer um padrão de qualidade que garantisse manutenção, flexibilidade e reuso do código.

A Programação Orientada a Objetos – POO apareceu como alternativa para atender à demanda crescente por sistemas complexos e flexíveis. Em vez de fluxo de procedimentos e dados agindo separadamente, tem-se em cada objeto um receptáculo de métodos e atributos. Assim cada objeto passa a ser responsável por um estado (valores de seus atributos) e por um comportamento específico representado por seus métodos. Os objetos são reunidos e interagem para compor o programa e resolver um dado problema.

6.2.1 Definição e Conceitos de POO

A Programação Orientada a Objetos permite encarar problemas complexos, tendo por objetivo a clareza da estrutura do programa, transparência no código e possibilidade de reaproveitamento e atualização. Em termos gerais, adota-se aqui a definição de Programação Orientada a Objetos proposta por Peter Wegner (WEGNER, 1990, p. 8-12) e relativamente aceita entre a comunidade acadêmica. Uma linguagem orientada a objetos tem por características principais :

- ser baseada em objetos (encapsulamento de dados e operações);
- ser baseada em classes – cada objeto deve pertencer a uma classe; e
- permitir herança – organizar classes em hierarquias mediante superclasses e subclasses.

Apesar de não constituírem o núcleo da definição de POO de Wegner, os conceitos de ligação dinâmica, coleta automática de lixo e agregação desempenham importante papel no comportamento e eficiência das linguagens orientadas a objetos, e, como influenciam consideravelmente as técnicas de programação merecem destaque.

6.2.1.1 Encapsulamento, Classes e Objetos

Uma classe reúne consigo um conjunto de atributos e ações, possuindo assim um estado (valores dos atributos) e um comportamento (métodos). A classe, em última análise, encapsulará atributos e métodos em um único ente (SHALLOWAY, 2004, p. 40).

Classe é entendida como a abstração de objetos e um objeto como a “materialização” de uma classe. O objeto é a instância de uma classe criada durante a execução do programa. Na prática, uma classe funciona como molde para a criação dos objetos, que por sua vez, irão de fato interagir para a solução de um dado problema.

A relação entre classe e objeto é semelhante entre tipo e variável, pois geralmente uma classe descreve as características genéricas e o comportamento de vários objetos semelhantes (CANTÙ, 2005, p. 39)³⁹. Pode-se ainda dizer que um objeto é uma instância de uma classe ou uma variável do tipo definido pela classe. Ao ser criado, um objeto passa a ocupar espaço na memória, portanto são entidades em tempo de execução do programa.

Em virtude do encapsulamento, cada objeto tem seus métodos e atributos acessados por intermédio de um conjunto de instruções, conhecidas por interface. Uma interface é a parte visível de uma classe e é por meio dela que os objetos irão interagir, ficando oculto o restante do código. Uma das idéias do encapsulamento é reduzir o número de variáveis globais usadas por um programa, disciplinando o fluxo de variáveis via métodos de interfaces (CANTÙ, 2005, p. 43).

Os objetos passam a interagir por meio do envio de mensagens ou por chamada de métodos ou funções, como pode ser visto no exemplo de uma conta bancária: o objeto *conta* passa a possuir atributos como o *valor da conta* e *proprietário*; e três métodos para depositar, retirar e consultar saldo, Figura 57.

³⁹ Cantù (2005) trata do assunto, tendo por objetivo abordar técnicas de programação para Delphi em ObjectPascal.

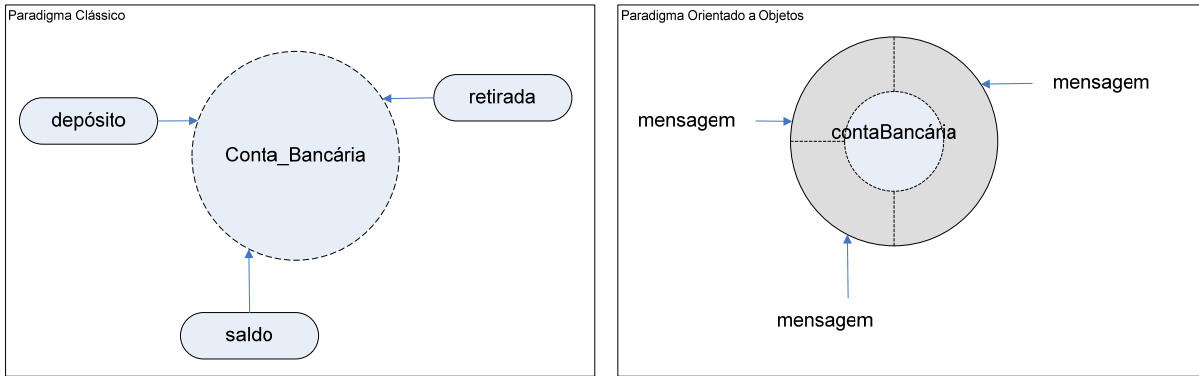


Figura 57 – Exemplo de encapsulamento

Comparação da implementação de uma conta bancária entre orientação objetos e o paradigma clássico. A linha sólida indica que detalhes de implementação não são conhecidos fora do objeto.

Fonte: Schach (2005, p. 19)

6.2.1.2 Herança

Outra característica importante das linguagens orientadas a objetos é o uso de herança, que é a possibilidade de definir uma nova classe diretamente a partir de outra. Essa técnica também é conhecida como subclasseamento ou derivação. Ao se criar uma subclasse de outra, a classe criada herdar os tipos de atributos e métodos da superclasse.

Por intermédio da herança, é possível generalizar ou especializar uma classe, cabendo ao projetista de *software* determinar a granulometria adequada ao problema.

Ao compartilhar atributos e/ou métodos de uma classe com suporte em uma classe mais geral, evita-se a duplicação desnecessária do código.

6.2.1.3 Polimorfismo

As linguagens POO permitem o uso de ligação dinâmica, ou ligação tardia, em que o endereço real do método chamado é determinado em tempo de execução com base no tipo de instância usada para fazer uma chamada. A vantagem dessa técnica é possibilitar o polimorfismo, favorecendo a chamada de um método aplicado a uma variável em tempo de

execução. Possibilita que dois ou mais objetos, cada qual a sua maneira, possam responder a uma mesma mensagem.

O polimorfismo desacopla objetos entre si e permite que eles variem seus inter-relacionamentos em tempo de execução (GAMMA et al., 2000, p. 29), tornando o código mais legível e compacto.

6.2.1.4 Coleta de Lixo

A criação e a destruição dos objetos em tempo de execução constituem passos importantes para a eficiência do programa. Entretanto, o procedimento de descarte dos objetos é um dos pontos críticos da programação, erros cometidos aqui ensejam instruções equivocadas e comportamento anômalo do programa. A necessidade de liberação de memória, porém, não permite a criação contínua de objetos que perdem a utilidade ao longo da execução do programa. A saída foi procurar automatizar este processo, livrando o programador da preocupação de liberar a memória.

Originalmente inventado para facilitar a programação em LISP, o coletor de lixo (*garbage collection*) possibilitou maior eficiência do uso da memória.

6.2.1.5 Relacionamento de Classes

As classes podem ainda se relacionar entre si por uma associação. Desta maneira, uma classe tem associada a si um conjunto de outras classes, que eventualmente pode ser vazio. Da mesma forma, é possível encontrar um tipo de relacionamento entre classes chamado de composição. Neste caso, ao se liberar da memória um objeto composto com outro, ambos são liberados.

Uma forma especial de associação é a agregação. O objeto agregado é constituído por várias partes. Ao contrário da composição, estas partes poderão continuar a existir, mesmo depois de o objeto agregado ser liberado da memória. A agregação estabelece um relacionamento do tipo “*todo parte*” ou “*é uma parte de*”.

6.2.1.6 Algumas das Principais Vantagens da POO

A chave para a POO tornar o programa mais inteligível é o uso de objetos que se assemelhem às entidades e conceitos oriundos do espaço do problema ou do espaço de solução. O programa é projetado de forma a proporcionar um ambiente em que esses objetos possam interagir para a solução do problema, visando:

- inteligibilidade – conforme a representação técnica de entidades do problema;
- manutenção – a classe apresenta uma representação mais estável do que funções ou procedimentos;
- maior grau de re-utilização – em problemas coligados o uso de mesmas classes se dá de forma natural;
- aproveitamento de padrões – em problemas de universos distintos, porém com semelhanças de semântica, é possível o aproveitamento de estruturas completas adotadas em problemas diversos;
- modelagem intuitiva – possibilidade de compartimentalizar e estruturar sistemas complexos; e
- ênfase no reúso, interoperabilidade e padronização.

Com o uso mais intensivo de POO, houve um novo salto na organização dos sistemas.

6.3 Padrões de Projetos

O conceito de padrões de projetos foi primeiramente sugerido pelo arquiteto Christopher Alexander⁴⁰ (1977-79), ao identificar problemas e soluções recorrentes na Arquitetura, Urbanismo e Paisagismo.

Alexander (1977 apud SHALLOWAY, 2004 p. 94) tinha por intenção identificar bons e maus projetos na tentativa de objetivar a qualidade das soluções arquitetônicas. Sugeriu, então, que o problema, a solução e contextos em que ambos estão inseridos constituem o núcleo básico da definição do padrão requerido. E sentencia:

Cada padrão descreve um problema que ocorre repetidamente no nosso ambiente e, portanto, descreve o cerne da solução desse problema, de tal forma que você pode utilizar essa solução um milhão de vezes repetidas, sem nunca fazê-la duas vezes do mesmo modo.

O trabalho de Alexander sugere a descrição de padrões de projetos, atentando para:

- i. identificação - nome do padrão;
- ii. propósito – problema que se propõe resolver;
- iii. comportamento - como realiza o que se propõe;
- iv. restrições e motivos para realizá-lo.

O nome de determinado padrão deve sintetizar de forma inequívoca suas características. Ao se informar o uso desse padrão a um interlocutor habilitado, este deve ser capaz de compreender as nuances que envolvam esta opção, estabelecendo um nível de comunicação elevado no estabelecimento de soluções complexas e inter-relacionadas. O uso

⁴⁰ ALEXANDER, C. **A Pattern Language**. Estados Unidos da América: Oxford University Press, 1977.

de padrões de projetos facilita a incorporação de outros profissionais ao projeto, inclusive viabilizando a comunicação entre desenvolvedores, espacial ou temporalmente distantes.

A descrição do propósito do padrão possibilita a rápida identificação e o isolamento da ocorrência de determinado tipo de problema de forma a perceber se o padrão pode ou não ser aplicado.

O comportamento encerra a solução por meio do arranjo abstrato de soluções, detalhando a interação destes; é a descrição da solução para o problema apresentado.

O relato de motivos e restrições do padrão ajuda a prever seu comportamento e as conseqüências da solução apresentada, além de ser importante síntese do conhecimento da aplicação do padrão para diversos problemas práticos similares.

Em tese, os padrões de projeto podem ser agrupados, de forma a resolver problemas mais complexos, constituindo em si um nível importante da solução do problema.

6.3.1 Aplicação de Padrões de Projetos a *Softwares*

Kent Beck e Ward Cunningham (1987), trabalhando com SMALLTALK em projetos de interfaces gráficas, aplicaram alguns dos conceitos de Alexander e estabeleceram cinco padrões de projeto para guiar os novos programadores na criação de interfaces gráficas e assim ganhar um tempo precioso, uma vez que os prazos estavam se esgotando. Desta maneira, procurava-se evitar que falhas já cometidas pelos programadores mais experientes se repetissem entre os mais novos.

Em 1991, Jim Coplier publicou *Advanced C++ Programming Styles and Idioms* com conceitos de padrões de projetos aplicados à programação orientada a objetos em C++.

Em 1994, Erich Gamma, Richard Helm, Ralph Johnson e John Vlissides publicaram *Design Patterns: Elements of Reusable Object-Oriented Software*, onde aplicam e desenvolvem os conceitos propostos por Alexander aos projetos de *software*.

A experiência de programação dos autores permitiu a catalogação de 23 padrões cuja ocorrência era recorrente, nos mais diversos tipos de projetos. A objetividade e a síntese da abordagem de cada padrão permitem atingir um nível de abstração adequado à compreensão, aplicação e conseqüente popularização dos conceitos. O livro *Design Patterns* tornou-se um marco e a principal referência em padrões de projetos voltada à programação orientada a objetos.

Gamma sugeriu um gabarito para caracterizar um padrão, distribuindo os conceitos em uma estrutura de tópicos, objetivando a uniformização. Na prática, as quatro características de identificação dos padrões propostas por Alexander foram desdobradas, ampliadas em treze itens. Assim, um padrão de projeto é caracterizado por:

- i. *Nome e classificação* – identifica o padrão.
- ii. *Intenção e objetivo* – relativo ao problema em particular que o padrão se propõe tratar.
- iii. *Conhecido como...* – possíveis outros nomes para o padrão.
- iv. *Motivação* – cenário que ilustra o problema, incluindo a interação das estruturas de classes que compõem a solução.
- v. *Aplicabilidade* – exemplifica as situações que o padrão pode tratar, ajuda na identificação e reconhecimento dos casos pertinentes e não pertinentes ao padrão.
- vi. *Estrutura* – representação gráfica das classes de um padrão.
- vii. *Participantes* – classes e/ou objetos que participam do padrão, relatando a responsabilidades de cada um.

- viii. *Colaboração* – como as classes colaboram para a resolução do problema.
- ix. *Conseqüências* – custos e benefícios na utilização do padrão. Aspectos do sistema que o padrão permite variar.
- x. *Implementação* – sugestões e técnicas necessárias à implementação do padrão, comentários sobre técnicas a serem usadas em linguagens específicas.
- xi. *Exemplo de código* – fragmentos de código em linguagem específica.
- xii. *Usos Conhecidos* – exemplos encontrados em sistemas reais.
- xiii. *Padrões relacionados* – outros padrões relacionados com este específico, compatibilidade, semelhanças e diferenças.

Os 23 padrões são divididos conforme essas três categorias principais – padrões de criação, estruturais e comportamentais.

Conforme dito por Gamma et al. (2000), os padrões de criação abstraem o processo de *instancialização*. Procuram isolar o sistema do processo de criação de seus objetos, dando mais flexibilidade ao código (GAMMA et al., 2000, p. 91).

Tudo o que o sistema sabe no geral sobre os objetos é que suas classes são definidas por classes abstratas. Conseqüentemente, os padrões de criação dão muita flexibilidade ao que, como e quando é criado e a quem cria.

Os padrões estruturais se ocuparão com a forma como classes e objetos interagem para formar estruturas maiores. São comumente usados para a construção de bibliotecas de classes e subsistemas (GAMMA et al., 2000, p. 139).

Finalmente, os padrões comportamentais terão por foco a atribuição de responsabilidades e a forma de comunicação entre os objetos (GAMMA et al., 2000, p. 211).

O Tabela 1 contém a lista completa dos 23 padrões propostos por Gamma et al. (2000).

Tabela 1 – Resumo dos Padrões de Projetos

Fonte:

Criação	Estruturais	Comportamentais
Abstract Factory – interface para criação de famílias de objetos relacionados ou dependentes sem especificar suas classes concretas.	Adapter – Converte a interface de uma classe em outra esperada pelo cliente.	Chain of Responsibility – Evita o acoplamento do remetente de uma solicitação ao destinatário, dando a mais de um objeto a chance de tratar a solicitação. Encadeia os objetos receptores passando a solicitação ao longo da cadeia.
Builder – separa a construção de um objeto complexo de sua representação de modo que o mesmo processo de construção possa criar diferentes representações.	Bridge – Separa uma abstração de sua implementação de modo que possam variar independentemente.	Command - encapsula uma solicitação como um objeto permitindo que se parametrize clientes com diferentes solicitações, enfileire ou registre-se solicitações.
Factory Method – interface para criar um objeto, mas deixa as subclasses decidirem qual classe a ser instanciada.	Composite – compõe objetos em estrutura de árvores de forma a representar hierarquias tipo parte-todo.	Interpreter – usa interpretador para interpretar sentenças em uma dada linguagem.
Prototype – Especifica tipos de objetos a serem criados usando uma instancia prototípica e criar novos objetos copiando o protótipo.	Decorator – atribui responsabilidades adicionais a um objeto dinamicamente.	Iterator – fornece maneira de acessar seqüencialmente os elementos de um objeto agregado, sem expor sua representação subjacente.
Singleton – Garante que uma classe tenha somente uma instancia e que forneça um ponto global de acesso a ela.	Façade – fornece interface unificada para conjunto de interfaces em um subsistema tornando mais fácil de usar.	Mediator – Define um objeto que encapsula como um conjunto de objetos interage.
	Flyweight – usa compartilhamento para suportar grande número de granulometria fina de forma eficiente.	Memento– sem violar o encapsulamento captura e externiza um estado interno de um objeto, de modo que posteriormente possa ser restaurado este estado.
	Proxy – fornece objeto representante ou marcador de outro objeto, para controlar o acesso ao mesmo.	Observer – define uma dependência um-para-muitos entre objetos de modo que quando um muda de estado todos os dependentes são informados e atualizados.
		State – permite que o objeto mude seu comportamento quando o seu estado muda.
		Strategy – Define uma família de algoritmos, encapsula cada um deles tornando-os intercambiáveis.
		Template Method – define esqueleto de um algoritmo em uma operação, postergando a definição de alguns passos para uma subclasse.
		Visitor – representa uma operação a ser executada sobre elementos da estrutura de um projeto.

6.4 JAVA

A linguagem JAVA foi desenvolvida pela *Sun Microsystems* a partir de 1991 e introduzida no mercado em 1995. O objetivo inicial era uma linguagem que desse suporte à produção de programas para produtos eletrônicos de consumo (fornos de microondas, agendas eletrônicas etc.).

Em 1990 foi apresentado o primeiro *browser* desenvolvido pela nova linguagem – WEBRUNNER, depois HOTJAVA. O programa rodaria independente da plataforma, podendo ser rodado em máquinas PCs, Mac e máquinas Unix.

Nessa época, o codinome da linguagem era OAK – carvalho. Entretanto, devido a questões autorais, não foi possível “batizar” a nova linguagem com seu codinome. Em 1995, a linguagem foi formalmente apresentada ao público com o nome de JAVA, em homenagem a um tipo de café apreciado pelos desenvolvedores e que é originário da Ilha (HOFF, 1996, p. 7).

JAVA é semelhante ao C++, entretanto, contém apenas os recursos absolutamente necessários. A linguagem JAVA não possui, por exemplo, sobrecarga de operadores, herança múltipla e aritmética de ponteiros.

JAVA é orientada a objetos, sendo seu código organizado em classes. Cada classe define um conjunto de métodos que formam o comportamento do objeto. Uma classe pode herdar em herança simples o comportamento de outra. Na raiz da hierarquia de classes está a classe OBJECT.

Excetuando os tipos simples como números e variáveis booleanas, a maior parte da linguagem é de objetos. Em nome da eficiência, os números e variáveis booleanas não são definidas como classes, entretanto o JAVA fornece objetos empacotados (*Wrappers*) para todos os tipos simples, de forma que esses possam se comportar como objetos. Ressalta-se

também que os tipos simples adotados pelo JAVA são os tipos comuns às diversas plataformas, favorecendo sua portabilidade.

JAVA também permite o uso de classes abstratas, aquelas que não possuem instância, porém podem constituir herança. Isso permite definir métodos para as interfaces dos objetos sem se preocupar com a implementação imediatamente. Uma classe pode implementar múltiplas interfaces, o que proporciona vantagens da herança múltipla sem as desvantagens decorrentes. O uso de classes abstratas e interfaces é muito útil para o projeto e arquitetura do programa.

Quando um programa JAVA é executado, é primeiro compilado para *byte-codes* acondicionados em arquivos (*.class*), similares às instruções de máquina, entretanto são específicos de uma máquina virtual que os possa traduzir para uma máquina real. Assim, é possível que o mesmo código seja executado em plataformas diferentes.

O código compacto e de arquitetura neutra do JAVA permitiu a criação de programas que trafegam e trocam dados através da *Internet*, com alto grau de simplicidade e eficiência.

JAVA é uma linguagem de fácil aprendizado ou migração, pois possui um reduzido número de construções. Voltada à Programação Orientação a Objetos (POO), permite a modularização das aplicações, reúso e manutenção simples do código já implementado.

O suporte multitarefa permite que sejam rodadas diferentes linhas de execução de programação simultânea, se a máquina dispuser de mais de um processador e o sistema operacional permitir.

O sistema de coleta de lixo varre a memória automaticamente, liberando espaços que não estejam mais sendo usados; programadores não precisam se preocupar com o gerenciamento de memória. A linguagem ainda obriga o programador a rever acessos inadequados na memória por meio de um tratador de exceções (*Exception*).

A máquina virtual JAVA (*Java Virtual Machine – JVM*) interpreta os *bytes-codes* para máquinas específicas (Figura 58). Como a JVM pode rodar em máquinas limitadas, geralmente com limite mínimo de 4Mb RAM, o interpretador é responsável pela independência e portabilidade de plataforma.

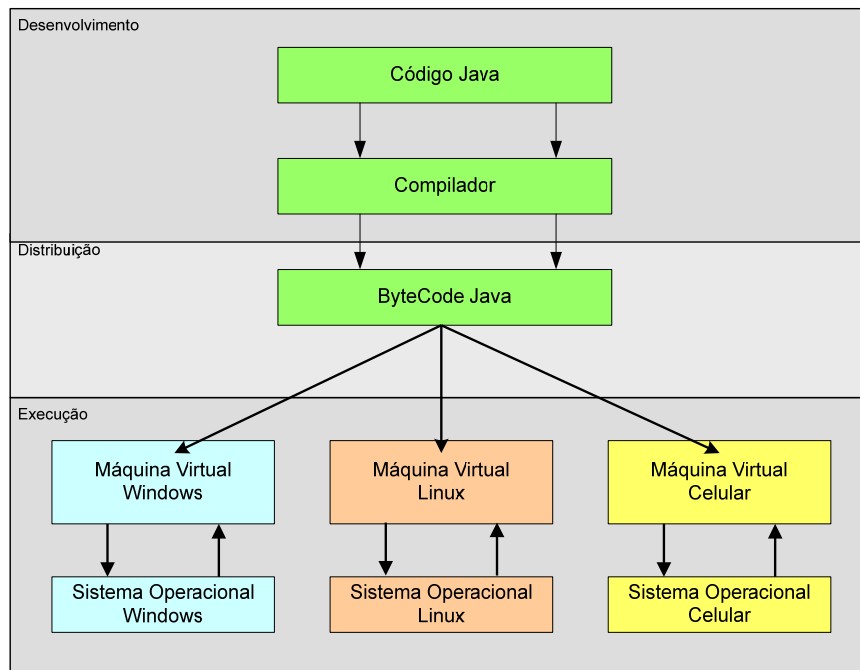


Figura 58 – Esquema de compilação/interpretação de códigos desenvolvidos em JAVA.

Fonte:

As principais vantagens do JAVA são a portabilidade e a implementação simples de orientação a objetos. JAVA nasceu, entretanto, com o tratamento de determinadas funções matemáticas e tratamento de verdadeiros *multiarrays* muito lentos em comparação com as linguagens existentes, como FORTRAN, C e C++. Além disso, linguagens tradicionais têm muitas rotinas numéricas rápidas à disposição, com várias centenas de linhas de códigos de métodos e técnicas numéricas consagradas.

A tecnologia JAVA, contudo, tem avançado e a otimização do processo de compilação/interpretação e tecnologias como processamento JIT (*just in time*) conferem ao

JAVA velocidade e capacidade de competir com as linguagens mais tradicionais em muitas áreas comerciais e mesmo de pesquisa.

JAVA é uma linguagem poderosa em ambientes distribuídos, como a Internet. Sua versatilidade, porém, permite ao programador ir além, oferecendo uma poderosa linguagem de programação de uso geral, com recursos suficientes para a construção de uma variedade de aplicativos que podem ou não depender do uso de recursos de conectividade.

Em resumo, JAVA é simples, orientada a objetos, com tipos de dados estáticos, compilada, independente da arquitetura, multilinha (*multithreaded*), com coleta automática de lixo (*garbage collection*), robusta, segura, extensível e bem estruturada (GOSLING; MCGILTON, 1996).

6.4.1 JAVA e Computação Numérica

A portabilidade e a segurança do código em JAVA garantem grandes possibilidades de serviços via ambiente de redes e garantem um espaço considerável de oportunidades para essa linguagem.

A adoção de JAVA, no entanto, para implementação de rotinas numéricas é acolhido com reservas. Isso decorre do estigma de lentidão que a linguagem possui desde a sua apresentação em 1995. Como expresso anteriormente, a falta de uma abordagem adequada ao tratamento de Álgebra Complexa e tratamento de vetores multidimensionais situava o JAVA ao lado das linguagens tipo *script*, notadamente lentas para aplicações deste tipo (REINHOLTZ, 2000, p. 26).

De fato, em sua primeira versão, a JVM trabalhava somente com a interpretação, o *bytecode*, nos arquivos *.class*, o que resultava em uma performance sofrível, muito mais lento do que o equivalente em C ou Fortran.

Atualmente, as JVM estão disseminadas em várias plataformas e contam com um especial nível de otimização e sofisticação no tratamento dos *bytecodes*. O uso da tecnologia de compilação JIT (*Just In Time*), compilando o JAVA *bytecode* dentro da máquina nativa em tempo de execução com modernas otimizações que dão ao conjunto JVM/JIT um substancial acréscimo de performance (AYCOCK, 2003, p. 108). A tecnologia JIT se beneficia do conhecimento da arquitetura da máquina e do processador.

Para melhor ilustrar o nível de otimização de código atingido pelo binômio JVM/JIT, comumente é apresentado uma série de testes envolvendo operações matemáticas que exigem considerável esforço computacional (POZO; MILLER, 2008).

- 1) Transformações rápidas de Fourier (*Fast Fourier Transforms* – FFT).
- 2) *Successive over-relaxation iterations* (SOR).
- 3) *Monte Carlo quadrature*.
- 4) *Sparse Matrix Multiplication*.
- 5) *Dense Matrix Factorization* (LU) para solução de sistema linear.

Esses cinco testes foram propostos sob a designação de SciMark⁴¹ 2.0. Cada um dos testes fornece uma unidade de desempenho chamada Mflops, que significa mil operações com pontos flutuantes por segundo. Desta maneira, aquele que possuir o maior índice indica maior velocidade de processamento, ou seja, o maior é o melhor.

Como ilustração, foi comparada a performance entre JAVA Sun 1.5.0.08 e C para uma máquina x86 com Windows XP v5.1, obtendo o gráfico da Figura 59.

⁴¹ <http://math.nist.gov/scimark2/>

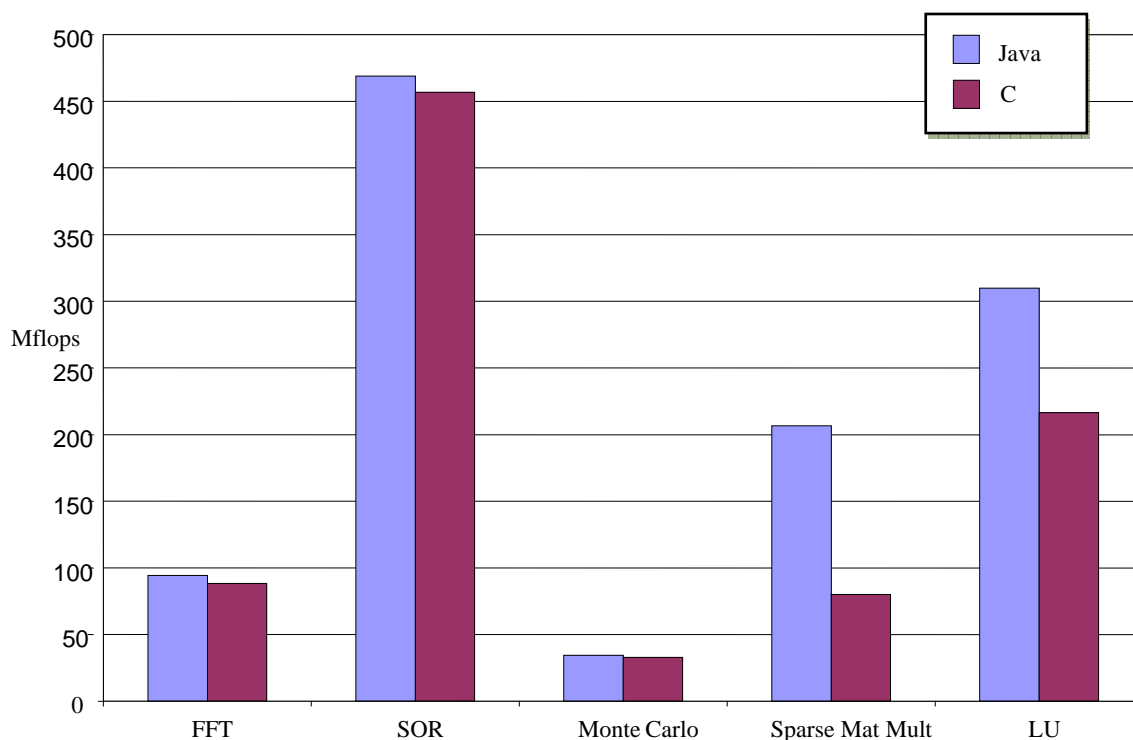


Figura 59 – Comparação de desempenho entre C e JAVA
Java 1.5.0.08 – Sistema operacional Windows XP Professional 2002 vSP,
processador Intel Pentium R 4 CPU2.40GHz, 512 Mb RAM

É importante lembrar que, dependendo da plataforma, resultados diferentes podem ser obtidos. Em alguns casos, o desempenho do C supera consideravelmente o do JAVA. As facilidades oferecidas pelo JAVA e o desempenho situam esta linguagem na condição de uma opção viável. JAVA pode até não ser tão eficiente como FORTRAN ou C, porém a velocidade do JAVA é melhor que sua reputação apregoa, como comprovado nos testes da Figura 59.

O teste mostra uma JVM bastante competitiva, fortalecendo a idéia de que o JAVA pode ser tão ou mais veloz do que linguagens consagradas, sobretudo porque a JVM pode ter acesso a informações cruciais sobre o processador (REINHOLTZ, 2000, p. 28).

Pode-se ainda tentar o uso de bibliotecas coligadas ao código principal, como MPI e LAPACK, entretanto a desvantagem do uso de bibliotecas nativas é a perda de segurança e portabilidade. Evidentemente, uma maneira de contornar esses problemas é o desenvolvimento de bibliotecas numéricas em JAVA. Assim, surgiu em 1997 a JNL (JAVA numerical library), contendo Álgebra Linear, funções especiais e estatísticas. Em 1998, a

MathWorks desenvolveu a JAMA, incluindo facilidades para resolução de sistemas lineares, mínimos quadrados, decomposição de matrizes (LU, Cholesky, QR, SVD, autovalores) e inversas, normas e determinantes.

6.4.2 Segurança e Performance

Em virtude do código simples, os erros são identificados rapidamente e a possibilidade de se propagarem é pequena. A ausência de manipulação de ponteiros de memória também ajuda a diminuir a possibilidade de erros, visto que a manipulação direta da memória fica ao encargo da JVM. Tanto no processo de compilação quanto na interpretação dos *bytecodes*, mecanismos de detecção de erros são incorporados.

O uso de código para tratamento de exceções – *exception handling* – permite manter a consistência da aplicação no caso de erros, de acordo com Indrusiak (1996, p. 5):

Para permitir uma melhor performance de execução, mesmo em tarefas de maior complexidade, a linguagem permite a programação de *threads* - processos de execução de tarefas que ocorrem simultaneamente. A linguagem traz também mecanismos para sincronização, ativação e desativação parametrizada desses processos.

O JAVA não segura áreas de memória que não estão sendo utilizadas, isto porque ele tem uma alocação dinâmica de memória em tempo de execução. Durante o ciclo de execução do programa, o JAVA verifica se as variáveis de memória estão sendo utilizadas. Caso não estejam, o JAVA libera automaticamente esta área que não está sendo utilizada.

6.5 Sistemas de Informações Geográficas – GIS

Fenômenos que necessitem ser representados espacialmente possuem um papel estratégico em vários campos do conhecimento, em especial para o estudo e uso dos recursos

naturais. Desta forma, a otimização de dados e a criação de cenários são etapas importantes para o processo de tomada de decisão envolvendo o meio ambiente.

Nesse contexto, surgem as ferramentas computacionais para administração de dados espaciais, os Sistemas de Informações Geográficas (*Geographic Information System - GIS*). No conceito GIS: a palavra Geográfica implica que a localização espacial dos dados é conhecida ou pode ser calculada; a informação é posta em função dos dados espaciais; a palavra Informação implica que os dados estão organizados por campos conhecidos, freqüentemente em mapas ou imagens, bem como dados estatísticos, gráficos, tabelas e sistema de procura interativo; a palavra Sistema implica que o GIS é feito com base em componentes com diferentes funções interligados sob um conjunto lógico de interações (BONHAM-CARTER, 1994, p. 1) .

Em geral, o GIS é visto como tecnologia para manipular dados geográficos, tendo (GOODCHILD; PARKS, 1993, p. 8):

- habilidade para processar grande número de dados dentro de uma forma sujeita a análise, incluindo operações de formatação, alterações e generalizações;
- suporte direto a análise e modelagem, calibração e prescrição de cenários; e
- pós-processamento os resultados, reformatação, tabulação, mapeamento e relatórios.

O GIS, então, terá a capacidade de capturar, transformar, combinar, comparar, visualizar, analisar e modelar dados espaciais, comunicando-se com o usuário por meio de uma interface amigável, geralmente dividida em camadas sobrepostas de dados (DANGERMOND, 1992, p 11-12)..

Como o GIS manipula diversos tipos de dados, é natural que disponha de ferramentas para lidar com diversas tecnologias, das quais se destacam: Desenho Assistido por Computador (*Computer Aided Design - CAD*); administrador de banco dados (*Data Base*

Management System - DBMS); modelos digitais de terreno (*Digital Terrain Model – DTM*); processamento de imagem; e Geoestatística, conforme ilustrado na Figura 60.

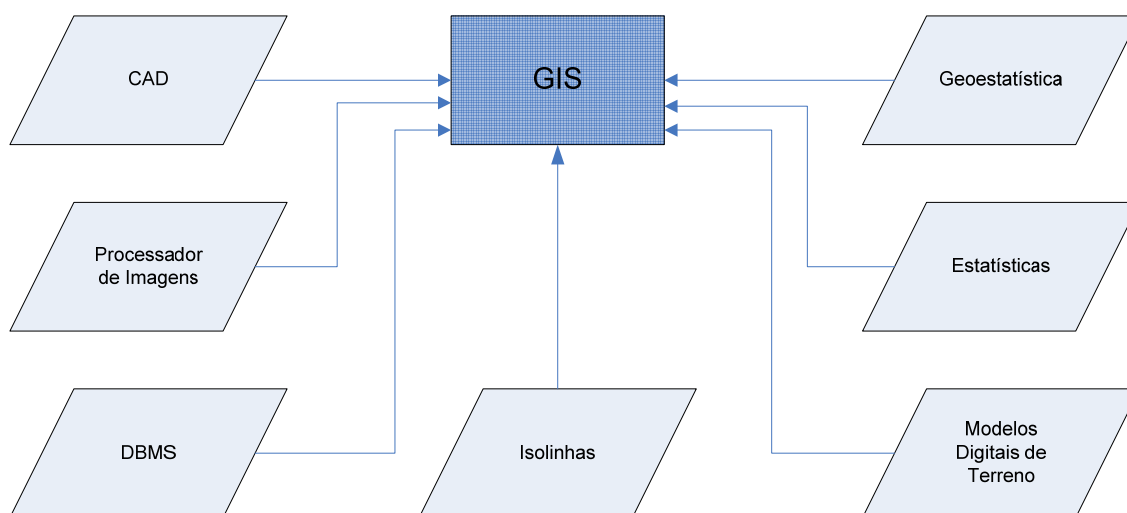


Figura 60 – GIS e outros sistemas relacionados e outras técnicas e funcionalidades
Fonte: Bonham-Carter (1994, p. 8)

O ambiente GIS oferece um conjunto de ferramentas que auxiliam a entrada de dados oriundos dos mais diversos tipos de levantamentos.

Outra característica notável do GIS é a qualidade de seus produtos. Apesar de processar diversas fontes de dados, o GIS normalmente oferece mapas, tabelas e produtos cartográficos padronizados.

Em resumo, os GIS normalmente oferecem ferramentas computacionais para organizar, acessar, mostrar e analisar informações espaciais. O entendimento e preparo dos dados de entrada são facilitados, assim como a apresentação e organização dos dados de saída (MORAIN, 1999, p. 10).

Modelos são tipicamente construídos para responder a questões sobre o comportamento de sistemas complexos não totalmente entendidos (MORAIN, 1999, p. 297). O ambiente GIS pode acolher em seu escopo vários modelos concorrentes ou complementares

para explicação de um dado fenômeno espacial. Com efeito, é possível explorar, sob uma mesma base de dados, diferentes teorias e técnicas, objetivando melhor entendimento dos cenários por eles propostos e a adequação destes à realidade.

São muitas as aplicações dos GIS, tais como: planejamento urbano; controle de epidemias; construção e análise de impactos de obras de infra-estruturas; roteamento de veículos; monitoramento ambiental; controle e arrecadamento de tributos; e monitoramento dos corpos hídricos. No Brasil, a modelagem de recursos hídricos apoiada em GIS ainda é um processo que vem se desenvolvendo (ALMEIDA, 2006, p. 11).

Apesar de todas as facilidades ofertadas, os altos custos de aquisição de *softwares* especializados são uma realidade. A falta de interoperabilidade também é um obstáculo ao desenvolvimento desta tecnologia.

Nesse contexto, dois grandes movimentos, relativamente independentes, assumem especial relevância para a comunidade GIS.

O primeiro deles é o OpenGIS, que se baseia na busca de padrões que permitam uma maior interação de dados e programas, inclusive considerando ambientes de redes de comunicação para o compartilhamento remoto de dados espaciais. O segundo é o movimento pró-*software* livre, que fornece nova perspectiva para uso e, sobretudo, desenvolvimento coletivo de *software*.

6.5.1 OpenGIS

Os Sistemas de Informações Geográficas surgem como *softwares* cooperativos e/ou vinculados a programas de arquitetura proprietária. Neste contexto, a falta de interação e integração constitui importante barreira para o desenvolvimento da tecnologia.

A massa de dados em formatos diversos e muitas vezes incompatíveis pode levar, por um lado, a gastos desnecessários com migração de sistemas, coleta de dados e treinamento, além de uma incômoda dependência de sistemas proprietários que muitas vezes têm dificuldades para acompanhar as demandas específicas impostas.

A comunidade de usuários GIS tem grande necessidade de acesso mais eficiente a geodados públicos e privados, com o devido acesso padronizado, sobretudo para especificações de geoprocessamento. Como dito por Laskowski (1998, p. 4):

O projeto OpenGIS (GIS Aberto) começou em 1993, apoiado por órgãos públicos e empresas comerciais que se reuniram para criar e fazer propostas técnicas de um formato aberto para softwares de Geoprocessamento. O OGC (OpenGIS Consortium) foi fundado em agosto de 1994 para, através de uma estrutura formal, desenvolver de fato especificações técnicas para criar um formato padrão. Para isto está criando especificações de estruturas computacionais e interfaces de softwares nunca antes pensadas, pré requisito necessários para a integração das tecnologias de Geoprocessamento.

As especificações OpenGIS apontam para ferramentas de uso para geoprocessamento que buscam as seguintes características:

- *Software* de baixo custo ou livre;
- orientação a objetos;
- padronização do intercâmbio de dados geográficos; e
- dados geográficos na Internet.

O Modelo Abstrato do OpenGIS é orientado a objetos e propõe uma arquitetura padrão para *softwares* de GIS, objetivando criar uma base comum que garanta interoperabilidade entre sistemas de informação geográfica de fabricantes diferentes; sobretudo, considerando o contexto onde o usuário tende a ter as bases, *softwares* e poder de processamento em sua máquina localmente, porém com alta capacidade de conexão a ambiente de redes e ambientes de computação geo-espacial distribuído – GIS dinâmico.

O Consócio OpenGIS (*Open GIS Consortium*) é formado por diversas entidades, como instituições de ensino, empresas privadas e organizações governamentais, que se

reúnem para estabelecer normas de conduta e padronização de dados. O OGC agrega representantes dos mais diversos segmentos da comunidade da geotecnologia, tais como indústria de produtos computacionais, integradores, companhias telefônicas, grupos de desenvolvimento, desenvolvedores de bancos de dados, órgãos públicos e universidades. Segue Laskowski (1998, p. 4):

O comitê técnico do OGC criou um resumo das especificações, único guia detalhado para escrever softwares de Geoprocessamento interoperáveis. Para produtos novos, essas necessidades devem ser implementadas sobre as Plataformas de Computação Distribuídas (em inglês, DCP) aceitas pela indústria, como OLE/COM, CORBA e os padrões JAVA e http da Internet.

O *Open GIS Consortium* (OGC) foi criado para promover o desenvolvimento de tecnologias e facilitar a interoperabilidade entre sistemas, envolvendo informação espacial e localização. A missão do OGC é criar especificações de interfaces e padrões de intercâmbio de dados abertos (OpenGIS, 2000, p.4).

O OpenGIS possui três preocupações básicas, que visam a auxiliar a interoperabilidade e a extensão das aplicações de GIS (PEREIRA, 2004, p. 17) :

- ambiente de aplicação interoperável – uma interface configurável que utiliza ferramentas específicas e dados necessários para resolver um problema;
- espaço de dados compartilhados – um modelo de dados genérico que suporta uma grande variedade de aplicações analíticas e cartográficas; e
- navegação heterogênea às informações – métodos para acessar e explorar as informações e aplicações analíticas disponíveis na rede.

Na prática, o consórcio OpenGIS se propõe a enfrentar problemas que impedem o crescimento e o desenvolvimento dos GIS, dentre os quais se pode citar: dificuldade de intercâmbio e movimentação de dados, falta de padrões de qualidade e o alto custos e soluções proprietárias. Interessante é notar que parte considerável dos integrantes do núcleo

principal do OpenGIS é de grandes empresas da área de geotecnologias, fato demonstrativo de que a dificuldade de interoperabilidade das soluções proprietárias de até então representava um obstáculo perigoso para o desenvolvimento da área – inclusive do ponto de vista de negócios.

Considerando uma realidade em que inexiste interoperabilidade de dados e *softwares*, é relevante evidenciar o custo envolvido na montagem do sistema, treinamento de pessoal, digitalização e levantamento de dados. Caso haja a necessidade de mudança de plataforma, todo o material e pessoal montando com o GIS anterior deverá ser adaptado ao novo GIS, envolvendo, além de alto custo de migração, um volume enorme de atividades que já foram executadas e que durante o processo de adaptação precisam ser refeitas – retrabalho.

Os produtos do trabalho do OGC são apresentados sob forma de especificações de interfaces e padrões de intercâmbio de dados. Os esquemas servem de base para as especificações dos serviços, garantindo que estes ajam sobre uma base de conceitos previamente estabelecida e normatizada.

Sua versão 3.0 inclui esquemas que contêm os modelos de geometria, feições (*features*) e superfícies. Os esquemas estão publicados nas especificações do OGC (COX⁴², 2003, apud UCHOA, 2004, p. 4) e os principais são os seguintes:

- *BasicTypes*: que engloba uma série de componentes simples e genéricos para representação arbitrária de atributos, nulos ou não.
- *Topology*: o qual especifica as definições do esquema geométrico dos dados, bem como sua descrição.
- *Coordinate Reference Systems*: para sistemas de referência de coordenadas.
- *Temporal Information and Dynamic Feature*: Este esquema estende aos elementos características temporais dos dados geográficos e suas funções dinamicamente definidas.
- *Metadata*: Este esquema é utilizado para definir as propriedades dos pacotes de dados que podem ser utilizados através de outros dados já existentes.

As especificações de serviços de maior relevância do Consórcio OpenGIS, conforme relatado por Davis Jr. (2005, p. 374-380) , são:

- GML (*Geography Markup Language*) dialeto XML (*eXtensible Markup Language*) voltado para armazenamento, transporte e modelagens de informações geográficas, incluindo propriedades espaciais e não espaciais das feições geográficas.
- WMS (*Web Map Service*) disciplina um serviço via WEB que produz, por demanda, mapas georeferenciados em formato de imagens para ser visualizados por um navegador WEB como um cliente. As informações trafegadas pela rede consistem basicamente de arquivos XML e imagens gráficas, que podem ser nos formatos GIF, JPEG, PNG entre outros, a aplicação cliente não necessita implementar muitas operações. Existem muitos clientes WMS implementados atualmente e a maioria das aplicações de GIS, inclusive as *stand-alone*, possuem *plugins* que acessam serviços WMS, como por exemplo o ESRI ArcView.
- WFS (*Web Feature Service*) permite às aplicações cliente visualizar informações geográficas na Internet. A diferença é a forma na qual estes dados geográficos são transportados do servidor para o cliente. No padrão WMS os dados geográficos são transportados como uma imagem gráfica, aqui os dados são transportados na forma de GML – vetorialmente. O cliente WFS já não é tão simples quanto o cliente WMS, pois precisa decodificar GML e transformar estes documentos XML em informações geográficas.
- WCS (*Web Coverage Service*) O serviço é específico para o tratamento de dados modelados como geo-campos, em complementação ao serviço WFS, que trata de dados modelados como geo-objetos, isto é, que representam entidades espaciais discretas e bem definidas. Para o acesso a dados que representam fenômenos com variação contínua no espaço.
- OCS (*OpenGIS Catalog Services*) - introduz um serviço para a publicação e busca em coleções de informações descritivas (metadados) de dados espaciais e objetos relacionados. Os metadados de um catálogo representam as características dos recursos que podem ser pesquisados e apresentados para a avaliação e processamento.
- WTS (*Web Terrain Service*) uma especialização do WMS que incorpora modelos de elevação de terreno, com perspectiva e renderização tridimensional de mapas. O resultado produzido, assim como no WMS, é uma representação pictórica dos dados geográficos.
- WCTS (*Web Coordinate Transformation Service*) Este serviço especifica uma interface para a conversão de dados de um sistema de coordenadas espaciais (CRS - *coordinate reference system*) para outro. O serviço recebe como entrada objetos geográficos digitais, que podem ser objetos vetoriais (*features*) ou matriciais (*coverages*), que estão georeferenciados em um CRS e retorna os mesmos objetos em outro CRS especificado.

Apesar de não ser a única iniciativa de padronização de dados e serviços na área de geotecnologia – vide o projeto Europeu INSPIRE⁴³ – o consórcio OpenGIS se destaca e ocupa espaço em vários nichos da comunidade GIS, seja entre desenvolvedores, pesquisadores e usuários em geral.

⁴³ <http://www.ec-gis.org/inspire/>

6.5.2 Movimento de *Software* Livre - SL

Concomitantemente ao movimento por uma maior padronização na área de geotecnologias, outro fenômeno está em curso – o movimento de *software* livre. Esse movimento, em seus diversos níveis, atingiu de forma significativa a comunidade de usuários das geotecnologias, sobretudo como forma de baratear os custos estratosféricos cobrados pelos sistemas proprietários e também como forma de compartilhar algoritmos, padrões, sistemas, topologias, enfim, conhecimento.

Segundo a Fundação *Softwares Livres* (*Free Software Foundation*), a licença para *Software* Livre (SL) deve ser regida por quatro pontos - também chamados de “as quatro liberdades”:

- 1) a liberdade de executar o programa, para qualquer propósito;
- 2) a liberdade de estudar como o programa funciona e adaptá-lo para as suas necessidades (acesso ao código-fonte é um pré-requisito);
- 3) a liberdade de redistribuir cópias, permitindo a ajuda ao próximo; e
- 4) a liberdade de aperfeiçoar o programa e liberar os seus aperfeiçoamentos, de modo que toda a comunidade se beneficie (acesso ao código-fonte é um pré-requisito para esta liberdade).

Licenças de códigos abertos geralmente se confundem com as SL. Normalmente, deve-se verificar se todas as quatro liberdades são mantidas sobre o *software*, não sendo incomum a existência de *softwares* que, apesar de permitirem a abertura do código-fonte restringem alguma(s) das quatro liberdades da SL.

Outra característica interessante é que a abertura do código-fonte oferece como estratégia de desenvolvimento. Neste caso, deve-se atentar para o fato de que o movimento de

software livre é um movimento social, enquanto o de código aberto pode ser encarado como metodologia de desenvolvimento (UCHOA; FERREIRA, 2004, p. 6-7).

Dentre as licenças SL, a mais importante é a GNU/GPL (sigla recursiva GNU *isNot* UNIX - *General Public License*). Por essa licença, ao integrar a um dado sistema, uma rotina GPL exigirá que este seja considerado GPL.

O efeito contaminante das licenças GPL atinge de forma especial a área de geotecnologia, sobretudo pelo fato de esta trabalhar com grande quantidade diversificada de dados, técnicas, métodos e serviços. Um GIS se configura como um aplicativo com certo grau de complexidade, que se utilizará de bibliotecas, rotinas e mesmo de outros programas para processamento, armazenagem e transporte de dados. Neste caso, se qualquer parte do sistema, por menor que seja, estiver sob a GPL, todo o sistema deverá também estar sob a GPL, salvaguardado os demais componentes do GIS.

No entorno dos *softwares* livres, estabeleceu-se grandes comunidades de usuários, desenvolvedores e pesquisadores – sucesso ilustrado pelas comunidades que adotam o sistema operacional LINUX (variante do UNIX). Diferentemente do que o senso comum aponta, em muitos casos de programas livres, critérios como estabilidade, segurança e suporte são oferecidos e chegam a superar as aplicações proprietárias.

Quanto ao serviço de suporte, geralmente, este é feito por uma comunidade em fóruns e páginas especializadas que se propõem à troca de experiências diversas. Essa escolha vem condicionada por sucessivas frustrações com os serviços de suportes de *softwares* proprietários que, muitas vezes, por diversas razões, não conseguem atender as expectativas do usuário, forçando este a ter que procurar a informação desejada justamente na WEB.

Grandes corporações privadas e instituições públicas adotam soluções baseadas em *softwares* livres, abandonando as soluções estritamente proprietárias. No Brasil, o Governo Federal e alguns Governos Estaduais e Municipais incentivaram a adoção de soluções

baseadas em *softwares* livres como estratégia de redução de custos e legalização, haja visto a grande disseminação de *softwares* piratas.

Do Guia Livre do Governo Federal para adoção de *softwares* livres destacam-se (BRASIL, 2004, p. 36):

- eliminação de mudanças compulsórias que os modelos proprietários impõem periodicamente os seus usuários, em face da descontinuidade de suporte a versões;
- independência tecnológica;
- facilitação de auditoria;
- desenvolvimento de conhecimento local; e
- independência de um único fornecedor.

De todas essas prerrogativas, ressalta-se a possibilidade de auditoria facilitada pelas SL sem constrangimento ou impedimento imposto pelos *softwares* proprietários. A crescente oferta de serviços informatizados nos diversos órgãos públicos ressalta o aspecto da necessidade de maior transparência na oferta, manutenção e melhoria dos serviços ofertados pelo Poder público. Como dito por Uchoa (2004, p. 4): “A isenção do custo de licenciamento é apenas uma característica dos *softwares* livres que tem criado um ambiente ideal para a contínua expansão e melhoria dos serviços públicos.”

6.5.3 GIS e *Softwares* Livres - SF

As prerrogativas do SF se adequam em especial às geotecnologias, sobretudo quando se identifica no Poder público um usuário preferencial, seja na administração de

recursos naturais – uso do solo, manejo de bacias hidrográficas, plano de águas, controle de atividades agrícolas e de mineração; bem como na administração de grandes cidades e mesmo da máquina pública – no controle de epidemias, arrecadação de impostos, planejamento urbano, roteamento, disposição otimizada de escolas, hospitais e postos de saúde. Em quase todas as áreas, é possível identificar a possibilidade de uso de geotecnologias. Ambos os movimentos, *software* livre e o OpenGIS se complementam em várias iniciativas, criando comunidades específicas e novas ferramentas GIS.

Um fato interessante que pode ser observado é que, apesar de o surgimento do OGC ter sido fortemente influenciado por empresas de soluções proprietárias, justamente os *softwares* livres é que aderiram mais rapidamente a essas especificações.

Dentre as diversas opções disponíveis para a área de geotecnologia evidenciam-se, aquelas que tratam do gerenciamento e disposição de dados e as aplicações clientes.

7 APLICATIVO JUMP/AEM

7.1 Diretivas

Objetiva-se um simulador AEM que:

1. Seja de fácil compreensão, modificação e desenvolvimento posterior;
2. Seja portátil entre diferentes plataformas; e
3. Tenha acesso a ferramentas de manipulação de dados espaciais tanto para coleta e entrada como para a saída e apresentação dos dados.

7.2 Linguagem, Paradigma e Ambiente de Desenvolvimento.

O programa foi desenvolvido por meio de programação orientada a objetos. Procurou-se, também, fazer uso de padrões de projetos, adotados largamente em engenharia de *software*, visando maior flexibilidade, entendimento e facilidade de modificação posterior.

Optou-se pela plataforma JUMP/JAVA. A principal vantagem do JUMP (2003) é contar com as ferramentas GIS necessárias à entrada e saída dos dados espaciais.

O programa foi desenvolvido com independência do JUMP, podendo ser adaptado facilmente a outros sistemas que dão suporte às bibliotecas JAVA. Devido à portabilidade da linguagem JAVA é possível utilizar o aplicativo em outros sistemas operacionais (além do

WINDOWS) que possuam a JVM desenvolvida, como por exemplo, LINUX. Como plataforma de auxílio ao desenvolvimento foi utilizada a ferramenta ECLIPSE para suporte à criação e depuração do código-fonte.

Para exemplificar as estruturas do programa será adotado o padrão UML2 nos diagramas que demonstram as classes envolvidas e as relações entre elas.

7.2.1 UML2

Como ensina Pitone e Pitman (2006, p.2):

(...) UML é uma *linguagem*. Significa que ela tem tanto sintaxe como semântica. Quando você modela um conceito em UML, existem regras determinando como os elementos podem ser agrupados e o que isso significa quando eles são agrupados em uma determinada forma.

Adotaremos o diagrama de classe como referência básica de apresentação. Neste caso, as classes são representadas por retângulos divididos em três partes. A parte superior é reservada ao nome, a intermediária para a lista de atributos e a inferior destina-se aos métodos que a classe contém.

Os atributos e métodos apresentam ainda a característica de visibilidade, indicando sua abrangência de acesso, é representada pelos símbolos +, - ou #, que representam público, privado ou protegido, respectivamente.

Uma classe que contém métodos, porém sem implementação – constituindo em métodos abstratos – é representada de forma semelhante as demais, entretanto seu nome vem em itálico. Essas classes podem não ser instanciadas diretamente, servirão de balizadores para aquelas classes que a especializam. As classes que só contém métodos abstratos serão representadas tendo seu nome antecedido do termo <<*interface*>>. A Tabela 2 ilustra as representações UML2 para classes.

É importante, ainda, evidenciar como as classes interagem nas relações de umas com as outras. Conforme Pitone e Pitman (2006) os relacionamentos entre classes podem ser:

- *Dependência*: indica que uma classe usa, ou tem conhecimento de outra. É uma relação transiente, significando que uma classe dependente interage brevemente com a classe alvo, mas tipicamente não retém uma relação com ela por qualquer espaço de tempo real. (...) São normalmente lidas como “... *usa um* ...”.
- *Associações*: são mais fortes que a dependência e tipicamente indicam que uma classe retém uma relação com outra classe em um determinado período de tempo. As linhas de vida de dois objetos ligados por associações não são provavelmente amarradas umas às outras (o que significa que um pode ser destruído sem necessidade de destruir o outro). As associações são normalmente lidas como “... *tem um*...”.
- *Agregação* é uma versão mais forte de associação. Implica em uma relação entre as linhas de vida dos objetos e são normalmente lidas como “... *possui um* ...”;
- *Composição*: representa uma relação muito forte entre classes a ponto de contenção. A composição é utilizada para capturar uma relação todo-parte. O tempo envolvido na relação de composição estão quase sempre ligados; se a instancia maior, possuidora, é destruída, ela quase sempre destrói a peça parte. Normalmente é lida como “... *é parte de* ...” ; e
- *Generalização*: é uma relação que comunica que um objeto é uma versão geral, ou menos específica, da classe fonte ou interface. São usadas pra representação de herança entre classes e normalmente é lida como “... *é um* ...”

As representações dos tipos de classes e seus relacionamentos estão ilustrados na Tabela 2 e Tabela 3, respectivamente.

Tabela 2 – Representação de Classes em UML2

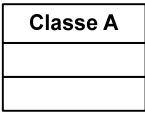
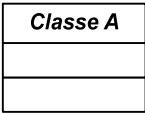
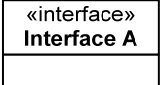



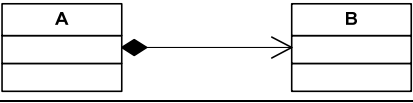
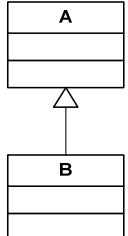
Entes	Representação
Classe	
Classe com métodos abstratos	
Interface	

Tabela 3 – Representação de Relacionamentos em UML2

Relações	Representação
Dependência <i>A usa um B</i>	
Associações: <i>A tem um B.</i>	
Agregação <i>A possui um B</i>	
Composição <i>B é parte de A</i>	
Generalização <i>B é um A</i>	

7.3 Visão geral do programa Jump/Aem

Os elementos hidrogeológicos devem estar dispostos em camadas bem definidas do GIS residente, conforme a Tabela 4 e a Figura 61.

Tabela 4 – Nome das camadas GIS de entrada do modelo.

Estruturas hidrogeológicas	Início do nome da camada
Rios	river
Poços	well
Inomogeneidades	inhomo
Ponto de Referência	referencePoint
Lagos poligonais	areaSink
Recarga em faixa	rechargeStrip
Lagos circulares	pond
Área de interesse	areaOf

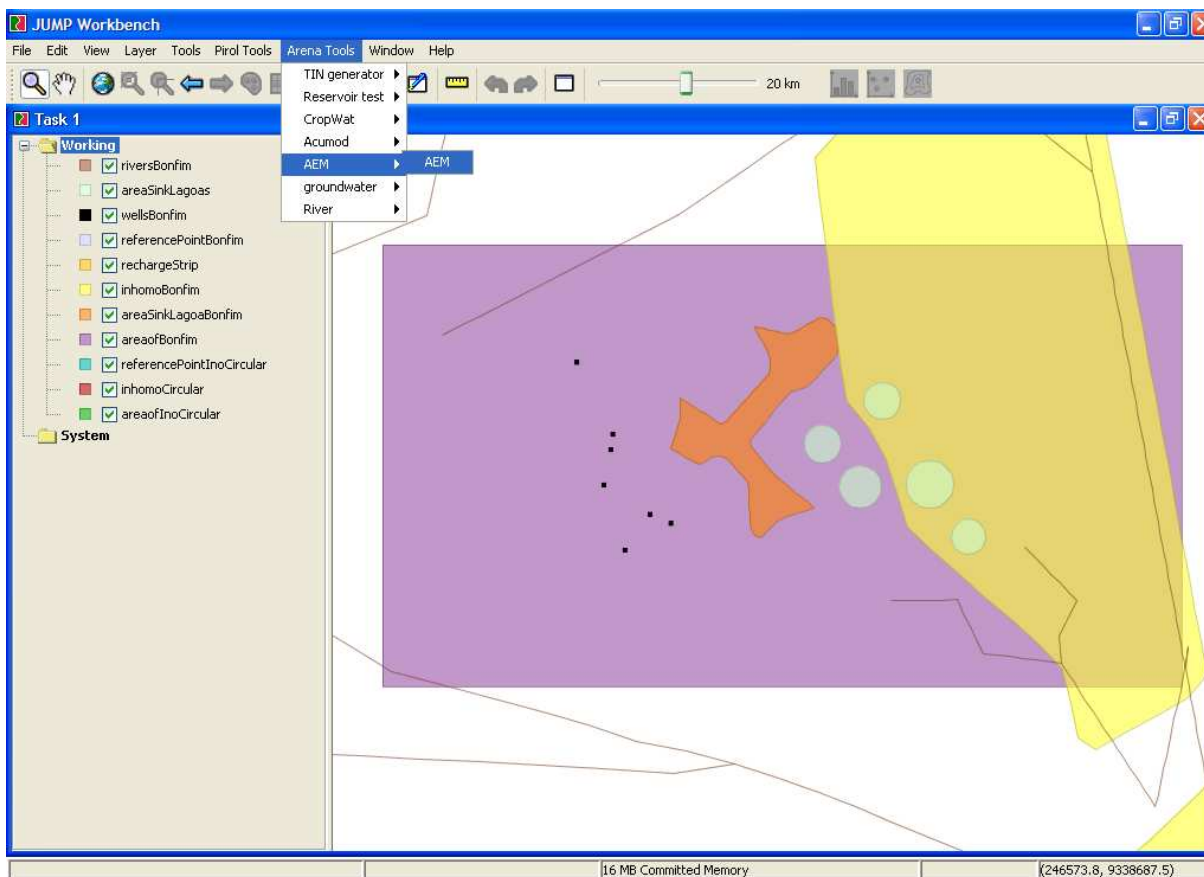


Figura 61 – JUMP com lista de camadas e detalhe da chamada do aplicativo AEM.

Cada camada conterá os elementos de mesmo tipo com os respectivos atributos hidrogeológicos, bem como as opções de modelagem, conforme a Tabela 5, Figura 62 e Figura 63.

Tabela 5 – Lista de Atributos dos elementos hidrogeológicos.

Elementos hidrogeológicos	Atributos
Rio	<p><u>HEAD</u> – Lista tipo <i>String</i> com as cargas nos pontos dos vértices do rio.</p> <p><u>FLUX</u> – Lista tipo <i>String</i> com o fluxo distribuído nos pontos dos vértices do rio.</p> <p><u>BC</u> – Lista tipo <i>String</i> com as condições de contorno de cada vértice do rio: 0 – Carga Especificada. 1 – Fluxo Especificado.</p> <p><u>KIND</u> – Tipo de Rio: 0 – Rio de primeira ordem; e 1 – Rio de segunda ordem.</p>
Poço	<p><u>HEAD</u> – Carga no poço.</p> <p><u>FLOW</u> – Vazão no poço.</p> <p><u>RADIUS</u> – Raio do poço.</p> <p><u>BC</u> – Condição de contorno: 0 – Carga Especificada. 1 – Fluxo Especificado.</p>
Inomogeneidades	<p><u>CONDHIDR</u> – Condutividade Hidráulica.</p> <p><u>REFINE</u> – Grau de refino (divisões dos trechos).</p> <p><u>KIND</u> – Tipo de inomogeneidade: 1 – de salto interpolado linearmente; 2 – de salto interpolado quadraticamente; 3 – de salto interpolado cubicamente; 4 – de salto interpolado por polinômio de ordem igual a <u>REFINE</u>; 5 – de salto interpolado por <i>spline</i> com polinômio inicial linear; e 6 – de salto interpolado por <i>spline</i> com polinômio inicial quadrático.</p>
Ponto de Referência	<p><u>ALFA</u> – ângulo do escoamento constante.</p> <p><u>STREAM</u> – valor do fluxo constante.</p> <p><u>HEADREF</u> – carga.</p> <p><u>HIDCOND</u> – condutividade hidráulica do meio.</p> <p><u>HIDCONDPT</u> – condutividade hidráulica no ponto de referência.</p> <p>H – espessura do aquífero confinado.</p> <p><u>KIND</u> – tipo de escoamento: 0 – confinado; e 1 – livre.</p>
Lagos poligonais	<p>N – Recarga distribuída</p> <p><u>HEAD</u> – Carga nas margens do lago</p> <p><u>REFINE</u> – Grau de refino (divisões dos trechos).</p> <p><u>KIND</u> – Tipo de Lago: 0 – Recarga especificada; e 1 – Carga especificada.</p>
Recarga em faixa	<p><u>HEAD</u> – carga no segundo ponto da linha que define a recarga</p> <p>N – valor da recarga</p>
Área de interesse	-

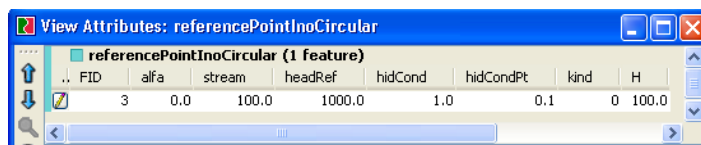


Figura 62 – Exemplo de atributos para camada do ponto de referência - JUMP.

A visualização dos resultados é obtida aplicando os pacotes do projeto OpenJump da Fachhochschule Osnabrück⁴⁴ – (*University of Applied Sciences Osnabrück*). Para geração de isolinhas foi usado o pacote ISOLINIEN TOOL (2005), e para visualização 3D o TERRAINMODEL (2005).

Tabela 6 – Principais classes, ações e responsabilidades.

Classe	Ações e Responsabilidades
AEMMODEL	<ul style="list-style-type: none"> • Solicita a extração de dados do GIS. • Solicita a criação dos objetos hidrogeológicos a partir dos dados extraídos do GIS. • Solicita a criação dos objetos matemáticos classificando-os. • Monta e resolve o sistema linear. • Calcula o valor do potencial de descarga e da carga nos pontos sobre a área de interesse
AEMINTERFACE	<ul style="list-style-type: none"> • Estabelece métodos necessários a retirada dos atributos e geometria do GIS para gerar os objetos hidrogeológicos. • Estabelece métodos para criar nuvem de pontos para a solução final. • Provém métodos que possibilitam acessar funções específicas do GIS.
AEMFACTORYIF	<ul style="list-style-type: none"> • Estabelece métodos para Verificar e corrigir o sentido dos elementos poligonais. • Estabelece os métodos para a criação dos objetos hidrogeológicos.
AEMELEMENT	<ul style="list-style-type: none"> • Objeto hidrogeológico, guarda os pontos de controle, junto com cargas e fluxos correspondentes. • Permite percorrer a lista de pontos de controle para gerar os elementos matemáticos vinculados as funções de influência correspondentes.
AEMELEMENTPART	<ul style="list-style-type: none"> • Elementos matemáticos que comporão a solução final.
AEMOUTPUTPOINT	<ul style="list-style-type: none"> • Guarda a nuvem de pontos com coordenadas x,y e carga hidráulica.

A Tabela 6 cita as principais classes, ações e responsabilidades envolvidas no modelo. A Tabela 7, por sua vez, relaciona as classes referentes aos objetos matemáticos gerados e as respectivas funções de influências desenvolvidas no capítulo de desenvolvimento teórico.

⁴⁴ <http://www.al.fh-osnabrueck.de/>

Tabela 7 – Classes e equações implementadas.

Classe		Equações
INOMOGENEIDADE	AEMINHOMOGENEITYPARTFIRSTORDER	(4.165)
	AEMINHOMOGENEITYPARTORDERTWO	(4.193)
	AEMINHOMOGENEITYPARTORDERTWOMIDDLE	(4.194)
	AEMINHOMOGENEITYGENERICVERTEX	(5.20)
	AEMINHOMOGENEITYGENERICMIDDLE	(5.21)
	AEMINHOMOGENEITYSPLINE2VERTEX	(5.95)
	AEMINHOMOGENEITYSPLINE2FIRST	(5.96)
	AEMINHOMOGENEITYSPLINE2MIDDLE	(5.97)
	AEMINHOMOGENEITYSPLINE3VERTEX	(5.67)
	AEMINHOMOGENEITYSPLINE3FIRST	(5.68)
	AEMINHOMOGENEITYSPLINE3SECOND	(5.69)
	AEMINHOMOGENEITYSPLINE3MIDDLE	(5.70)
	RIO	AEMRIVERPARTCONST
AEMRIVERPARTFIRST		(4.89)
AEMRIVERPARTMIDDLE		(4.90)
AEMRIVERPARTLAST		(4.91)
AEMRIVERPARTMIDDLECONECT		(4.92)
LAGOA	AEMAREASINKMIDDLE	(4.137)
AEM ELEMENT	AEMREFERENCEPOINT	(4.61)
	AEMAREASINK	(4.135)
	AEMWELL	(4.6)
	AEMRECHARGESTRIP	(4.77)

Uma vez determinados os potenciais de descarga em pontos determinados da área de interesse, a carga hidráulica é calculada em função das inomogeneidades e características do escoamento. Uma nuvem de pontos contendo o valor da carga hidráulica é repassada ao GIS para visualização e geração das isolinhas.

Cada objeto possui um sistema de interação que possibilita percorrer seu contorno e produzir objetos matemáticos que de fato irão fazer parte da montagem do sistema linear para solucionar o problema.

Chamamos objetos matemáticos aqueles que detêm uma função de influência, vinculada a uma geometria e um ponto de controle específico – AEMELEMENTPART (AEP). Esses objetos comporão a mínima parcela de influência para o potencial de descarga em um dado ponto, na prática cada um deles representará uma linha (equação) na matriz de resolução

final do sistema. A Tabela 7 apresenta as classes que originam os objetos matemáticos e as respectivas funções de influência.

Para evitar duplicação desnecessária dos dados de geometria, o movimento de interação é volátil e é usado por demanda. O que significa que os objetos são criados, usados e descartados com auxílio da técnica do *Iterator*.

Aos AEP ainda se vincula uma carga e um esforço (cujo significado físico depende do tipo do objeto hidrogeológico) conhecidos ou calculados. No caso da inomogeneidade a carga é sempre calculada e o esforço nos nós é dado pelos ângulos internos do polígono no nó em questão mais o fator característico devido à condutividade hidráulica.

Os objetos matemáticos são variantes conforme o tipo do elemento:

- para poço o objeto AEP parte é ele próprio;
- para o rio com distribuição constante (primeira ordem) ao longo dos trechos existirá um AEP para cada trecho, tomando como ponto de controle o ponto médio de cada segmento.
- para o rio onde a vazão distribuída ao longo do elemento tem comportamento linear (segunda ordem) e que nos vértices o valor da vazão distribuída é contínuo, então teremos três AEP distintos – o primeiro para a extremidade (nascente do rio), o segundo para os pontos intermediários (com influência de dois trechos de rio) e o terceiro para o ponto de foz. Existe ainda uma quarta formulação dedicada ao encontro de tributários onde sua foz coincide com um ponto intermediário de outro rio, neste caso há três contribuições ao nó.

Uma variante importante da cadeia de trechos de rio é usada para modelar uma *area sink* com carga conhecida e conectada ao aquífero, para tanto só existirá elementos tipo middle – AEMAREASINKMIDDLE. No caso de não haver conexão com aquífero, a *area sink*

age somente como área de recarga, então o objeto parte será o próprio elemento, a semelhança do poço.

Para inhomogeneidade do primeiro tipo (interpolação linear do esforço) temos um único tipo de elemento (lembrando que a poligonal é fechada, todos os pontos de vértice recebem influência do trecho anterior e posterior) – AEMINHOMOGENEITYFIRSTORDER.

Entretanto para elementos quadráticos há necessidade de definição de um objeto intermediário, então são dois tipos de AEP. No caso do tipo genérico a formulação permite também dois tipos de elementos, o elemento de vértice e os elementos intermediários de cada trecho. Para *splines* quadráticas com polinômio inicial linear são três AEP. Para *splines* quadráticas com polinômio inicial quadrático são quatro.

Para compor a matriz solução, o núcleo de cálculo (AEMMODEL) chama cada um dos elementos hidrológicos e solicita que este gere seus elementos parte que são avaliados e separados em elementos parte com carga conhecida – tipo U, ou com esforço conhecido – tipo V.

Os elementos tipo U darão o número de incógnitas do problema juntamente com pontos de controle onde as condições de contorno são aplicadas.

Nos pontos de controle os elementos tipo V são avaliados e o potencial de descarga encontrado é diminuído do potencial de descarga dado pelo ponto – compondo o vetor independente do sistema linear. A matriz principal é montada, então, pelas funções de influência de cada elemento tipo U avaliadas em todos os pontos de controle. De forma semelhante, é criada uma equação auxiliar sobre um ponto de referência com potencial de descarga conhecido a fim de determinar o valor da constante de integração. As equações são preferencialmente implementadas em termos do potencial complexo. Para a álgebra de complexos foi utilizado o pacote Complex versão 1.0.1 de <http://www.netlib.org/>.

O sistema é resolvido em termos do potencial de descarga e os esforços incógnitos determinados. Os valores encontrados são armazenados nos pontos de controle por meio dos AEP. O pacote JAMA 1.0.2 é utilizado para a resolução do sistema linear de equações (seção 6.4.1).

Para o cálculo do potencial em um dado ponto todos os elementos hidrológicos são chamados e novamente solicitados a criação de suas partes, como todos passam a possuir esforços conhecidos procede-se a soma simples da influência de cada *objeto parte*. Ao final a constate geral é adicionada.

Finalmente, o valor de cada potencial de descarga é transformado para carga e repassado ao GIS em uma nuvem de pontos pré-determinada sobre a área de interesse.

O projeto do aplicativo AEM, pode ser visualizado no Diagrama de Classes apresentado na Figura 64.

Diagrama em folha A3.

Encontra-se em arquivo separado.

Figura 64 – Diagrama UML2 do simulador AEM/Jump

7.3.1 Implementação dos Padrões de Projeto

A necessidade de independência do simulador, com possibilidade de usar ferramentas típicas GIS, sugere o uso do padrão *Façade* para compor a interface.

A criação dos objetos hidrogeológicos, por sua vez, pode ser delegada a uma classe específica. O padrão *Factory* foi escolhido para esta finalidade por dar liberdade à implementação dos métodos de criação.

O surgimento de pontos redundantes para a montagem do sistema linear e cálculo do potencial de descarga é tratado com o uso do padrão *Iterator*, favorecendo a interação entre os objetos matemáticos subsequentes de um mesmo elemento. O uso de polimorfismo para a função de influência, dentre as diversas opções de objetos matemáticos gerados pelo *Iterator*, é tratado adaptando conceitos do padrão *Strategy*.

7.3.2 O Façade

Implementações anteriores do AEM em ambientes GIS têm-se caracterizado pelo uso de um simulador executável e um editor AEM vinculado ao GIS, podendo ser ou não baseado em programação orientada objetos. A metodologia mais freqüente aponta para o uso de uma interface projetada para: colher da base de dados do GIS as propriedades hidrogeológicas necessárias à criação de um arquivo de entrada para o simulador AEM executável; e exportar para o GIS os dados de cargas e fluxos calculados, possibilitando que esses possam ser manipulados adequadamente pelas ferramentas de visualização, classificação, interpolação, suporte à decisão e outras que os programas GIS oferecem (STEWART; BERNARD, 2006).

O aplicativo AEM apresentado aqui também utiliza uma interface para fazer a comunicação entre o GIS e o modelador AEM, entretanto, não haverá necessidade do uso de arquivos de troca, pois toda a comunicação se processará diretamente (Figura 65).

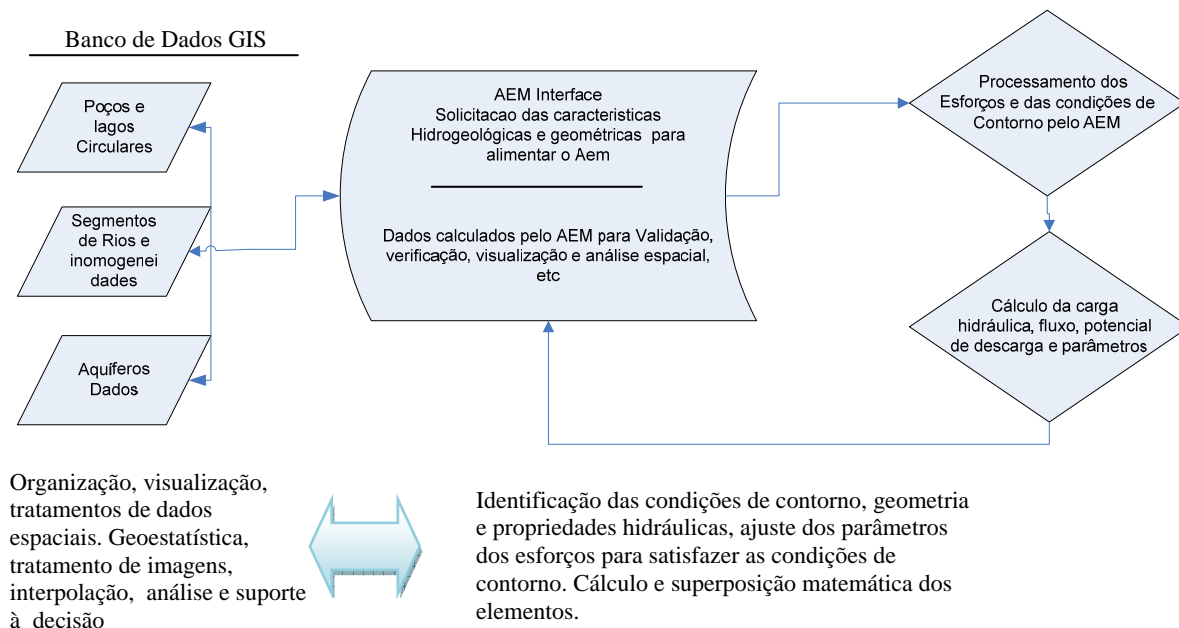


Figura 65 – Modelo de AEM interface entre GIS e AEM.

Fonte: adaptado de Stewart e Bernard (2006, p. 59).

O objetivo para usar uma interface é isolar o simulador AEM da plataforma GIS, facilitando o aproveitamento de todo o sistema por outras plataformas. Contudo, também se deseja a disponibilidade de acesso a ferramentas ocasionalmente oferecidas pelo GIS residente que facilite a implementação futura de variações do método de elementos analíticos.

O padrão de projeto *Façade* atende a necessidade, pois facilita a utilização de um subsistema permitindo uma abstração de mais alto nível sem isolar completamente as demais classes do subsistema, como definido por Gamma et al. (2000, p. 179):

Fornecer uma interface unificada para um conjunto de interfaces de um subsistema. O Façade define uma interface de mais alto nível, tornando assim mais fácil utilizar o subsistema.

Uma característica importante do padrão *Façade* é que este reduz o número de objetos com os quais o objeto cliente deve lidar, centralizando as interações com o subsistema. Conseqüentemente, possibilita a troca do subsistema, assim definido por Shalloway (2004, p. 110):

Troca de sistemas: Posso necessitar trocar os sistemas no futuro . Fazendo do sistema original um membro privativo da classe Façade, posso trocá-lo por um Novo, com um mínimo de esforço. Pode ainda haver uma quantidade significativa de esforço requerido, mas no mínimo terei apenas que mudar o código em um lugar (a classe Façade).

No caso utilizaremos o *Façade* para desacoplar o subsistema de simulação do AEM do programa GIS, facilitando a troca da plataforma com a adequação da classe *Façade* - Figura 66 e Figura 67.

O uso de uma classe abstrata para determinar os métodos da classe *Façade* possibilita uma maior flexibilidade do código visto que permite a criação de subclasses *Façade* concretas para diferentes implementações (GAMMA et al. 2000, p. 182) .

A classe de interface terá a função de delegar a criação dos objetos hidrogeológicos, se comunicar com o núcleo do simulador e acessar a classe que contém os pontos com as cargas calculadas (Figura 68).

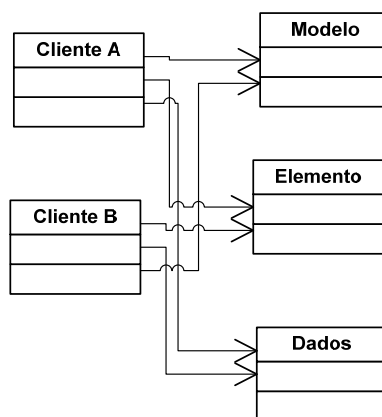


Figura 66 – Exemplo de aplicação *Façade* - antes do *Façade*.
Acesso direto do aplicativo.
Fonte: Shalloway (2004).

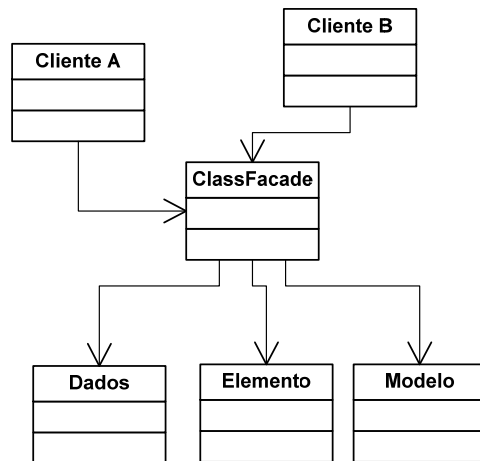


Figura 67 – Exemplo de aplicação Façade - depois do Façade Acesso centralizado.
 Fonte: Shalloway (2004).

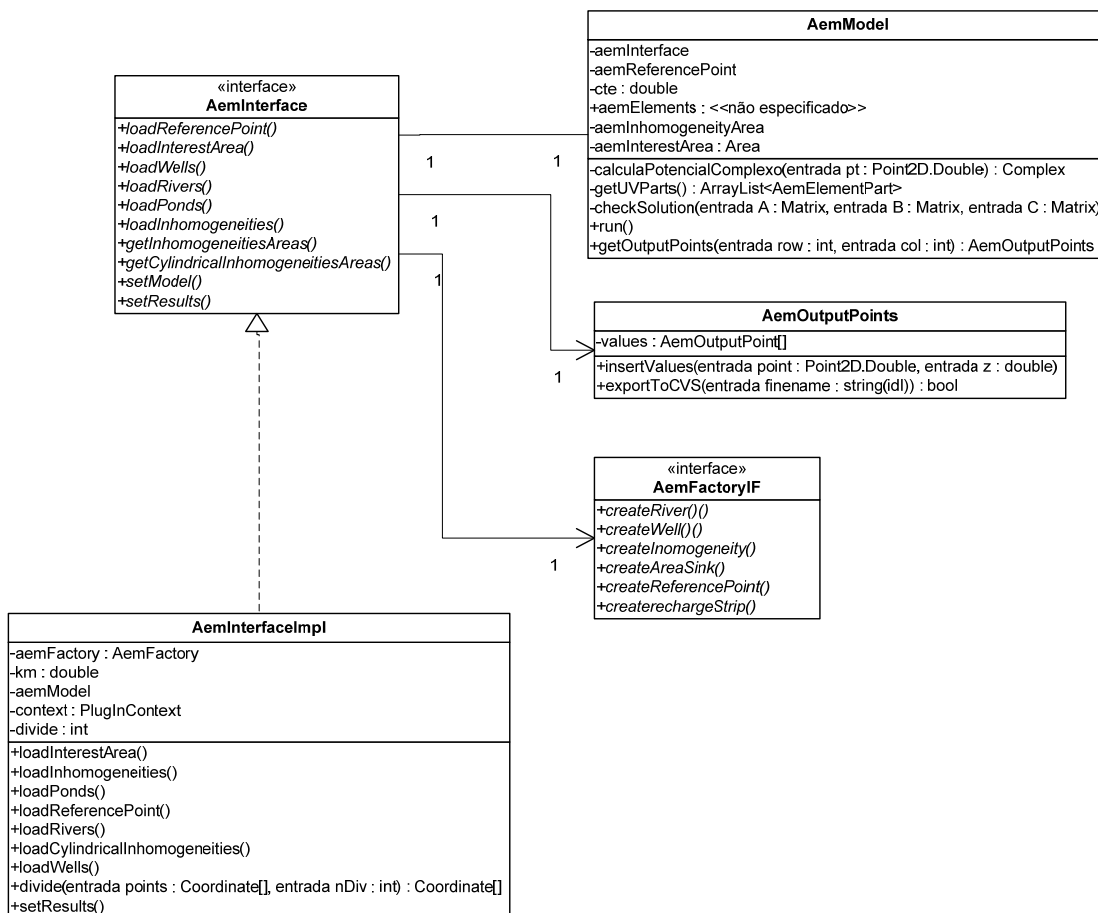


Figura 68 – Destaque Diagrama UML da Interface.

7.3.3 O Factory

O padrão *Factory* (Figura 69) é utilizado para delegar as regras de instanciação de um objeto para classes derivadas. Possibilita a criação de objetos do mesmo tipo (objetos hidrogeológicos), entretanto permite que estes possam variar de implementação. Aceita a inclusão de novos objetos sem necessidade de mudança do escopo principal do programa.

A adoção da classe abstrata que define os métodos de criação dos objetos possibilita, caso necessário, redefinir a maneira como os objetos são criados visando maior adaptação e comodidade a alterações no programa.

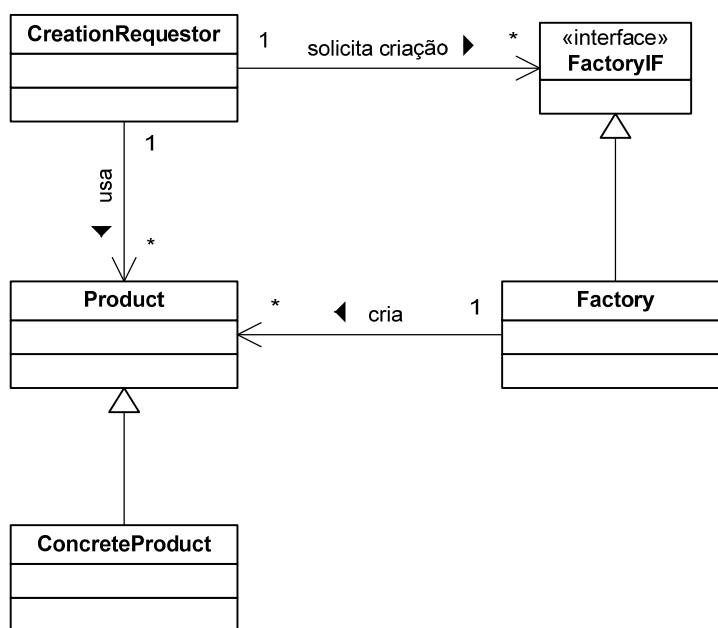


Figura 69 – Diagrama conceitual do padrão *Factory*.

Para o aplicativo AEM, todos os objetos serão do tipo objeto hidrogeológico, variando sua implementação conforme suas especificidades. Apesar de diferentes métodos serem usados para cada tipo elemento hidrogeológico real, o *factory* método permite o uso

futuro de uma implementação que otimize o processo de criação dos objetos hidrogeológicos (Figura 70).

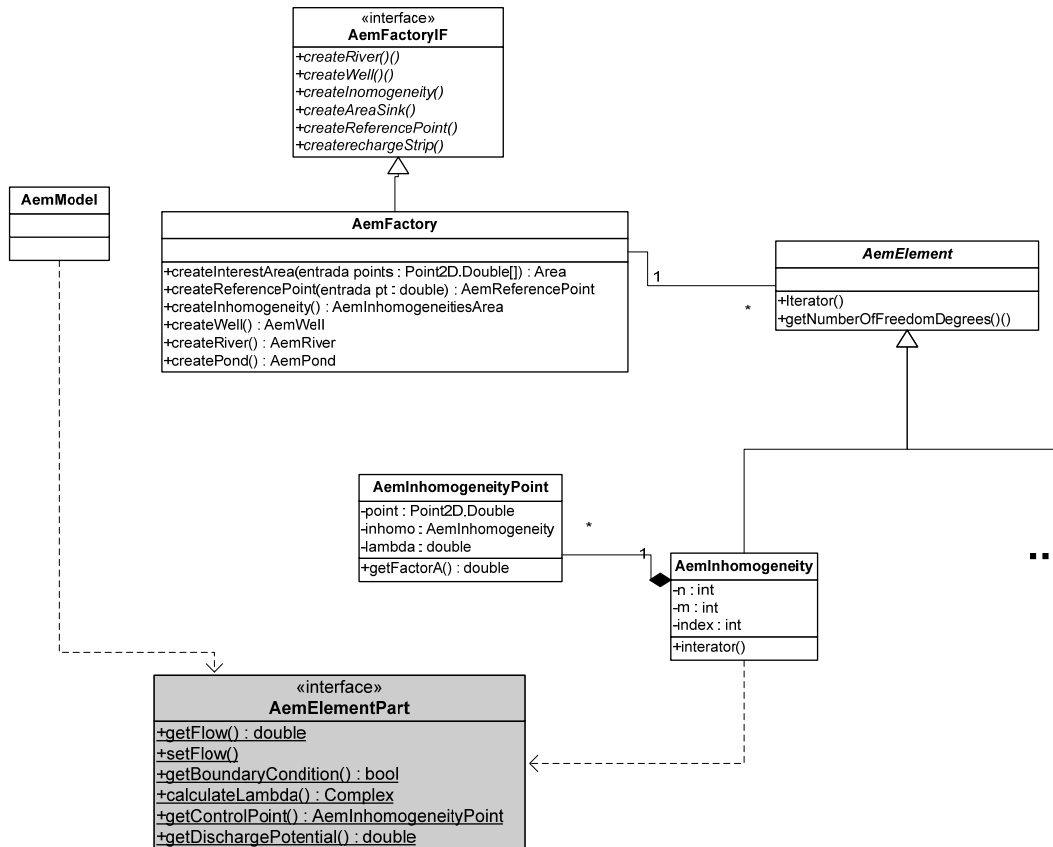


Figura 70 – Detalhe de projeto do aplicativo AEM.

7.3.4 O Iterator

Uma vez criados os objetos hidrogeológicos, estes dão origem aos objetos matemáticos que comporão a solução do problema. Alguns objetos matemáticos se confundem com o próprio objeto hidrogeológico, por exemplo: poços e recargas. Entretanto, os elementos que são compostos por cadeias de segmentos, como rios e inhomogeneidades, podem dar origem a vários objetos matemáticos, um para cada ponto de controle.

Além do ponto de controle, os objetos matemáticos utilizam outros pontos da geometria do objeto hidrogeológico para compor a função de influência. Desta maneira a

criação dos objetos matemáticos leva ao uso de vários pontos redundantes da geometria do objeto hidrogeológico.

O padrão *Iterator* é utilizado para contornar esse problema. Desta forma, permite-se que, ao se percorre a lista de pontos de controle, que cada objeto matemático seja criado, usado e descartado, evitando ocupação desnecessária de memória.

O padrão *Iterator* se caracteriza por: “Fornecer um meio de acessar, sequencialmente, os elementos de um objeto agregado sem expor sua representação subjacente” (GAMMA et al. 2000, p. 244) (Figura 71).

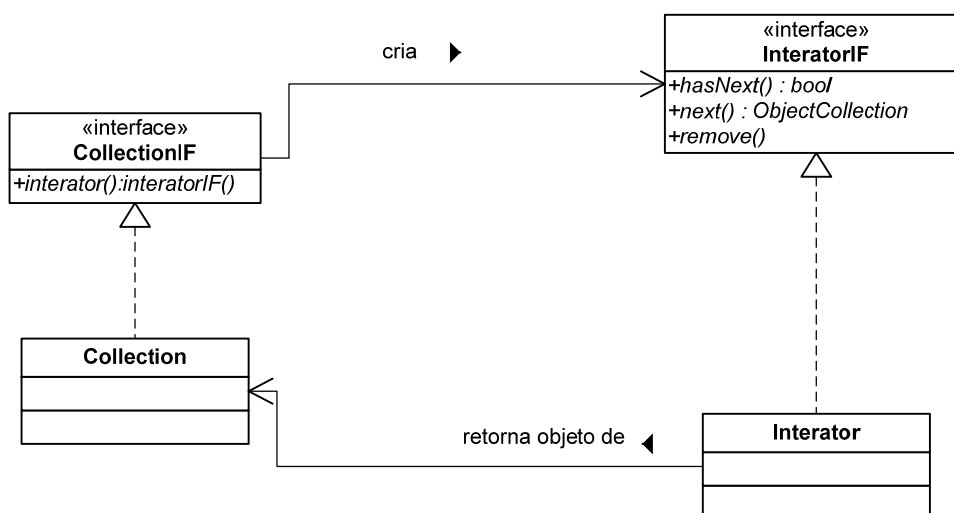


Figura 71 – Diagrama conceitual do padrão *Iterator*.

Fonte: Adaptado de Gamma et al (2004).

O custo operacional de um menor uso da memória é o aumento de operações de processamento.

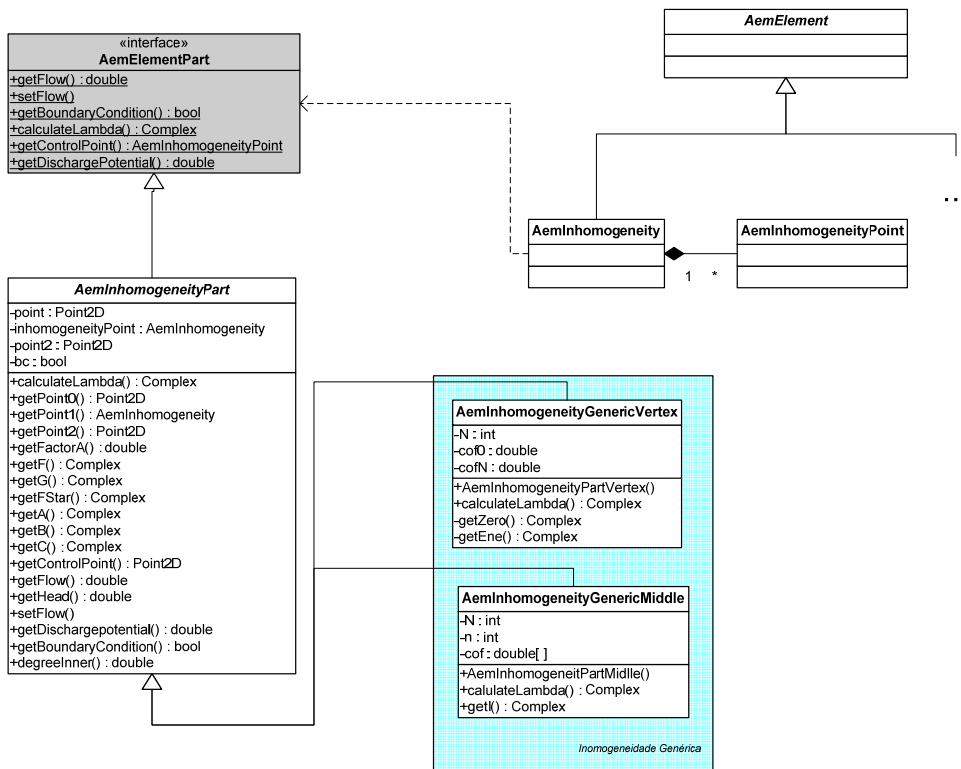


Figura 72 – Diagrama UML criação da Inomogenidade e Poço.

O **Iterator** age de forma acoplada ao padrão **strategy** (Figura 72) que disciplina o uso do polimorfismo por parte das variações dos tipos dos objetos matemáticos. O polimorfismo neste caso se dá no cálculo da função de influência – método *calulateLambda()*. O padrão **strategy**, conforme visto na Figura 73, permite o desacoplamento do algoritmo, possibilitando sua variação independentemente daqueles que o utilizam.

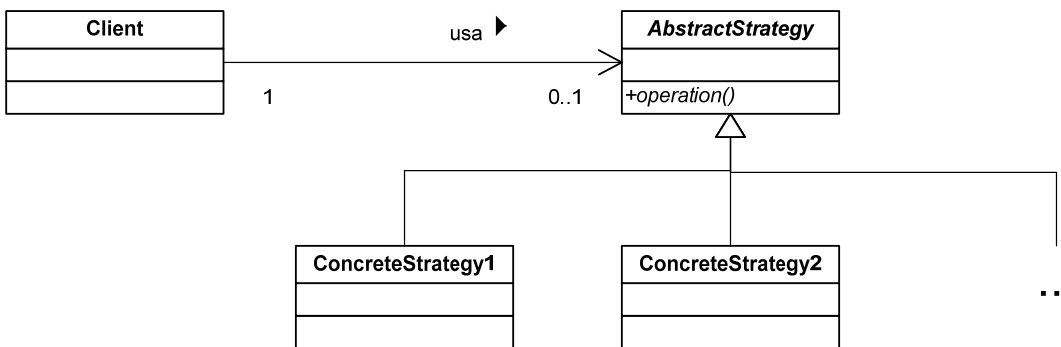


Figura 73 – Diagrama conceitual do Strategy.

8 RESULTADOS

8.1 Casos conceituais para inomogeneidades

As formulações propostas no capítulo 5, para interpolar o salto do potencial de descarga ao longo das bordas de inomogeneidades, foram avaliadas em 7 situações conceituais (casos I, II, III, IV, V, VIa e VIb). As formulações aplicadas aos casos I, II e III são comparadas com as respectivas soluções exatas, enquanto para os casos IV, V e VI são comparadas com soluções aproximadas com grande número de pontos de controle (alto refino).

Os casos VII, VIII apresentam os resultados obtidos para os elementos poço e canal (rio) em comparação com soluções exatas.

Os casos IX e X ilustram a distribuição de cargas hidráulicas para lago poligonal.

Para todos os casos, as soluções foram geradas em uma nuvem de 2401 (49x49) pontos regularmente espaçados sobre a área de interesse, semelhante ao apresentado na Figura 74.

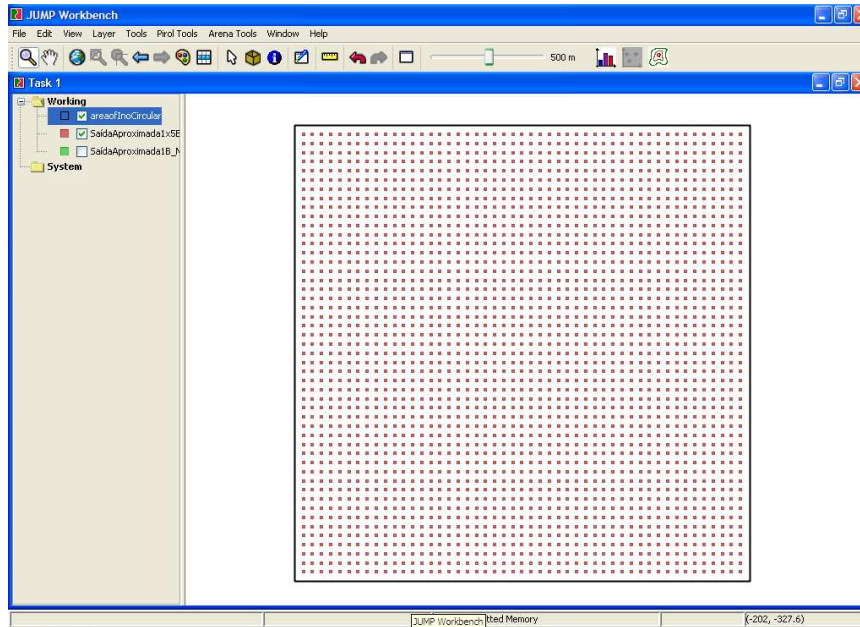


Figura 74 – Área de interesse contendo os 2401 pontos avaliados.

CASO I

Inomogeneidade cilíndrica em campo de escoamento confinado uniforme de descarga Q_{0x} , na direção x , centrada na origem e com raio R . A espessura do aquífero é igual a H . A condutividade hidráulica do meio é dez vezes menor que a condutividade hidráulica da inomogeneidade $K^+ = 0,1K^-$. Na origem $z_0 = 0$, o valor da descarga é $Q_{0x} = K^-H$ e o potencial de referência é $\phi_0 = 10H$.

A inomogeneidade cilíndrica foi modelada por um polígono regular de 18 lados. O salto do potencial de descarga, em cada lado, foi modelado por:

- a) polinômios de graus 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10;
- b) *splines* quadráticas com polinômio inicial linear (SPL) com 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 20, 30, 40 e 50 segmentos;
- c) *splines* quadráticas com polinômio inicial quadrático (SPQ) com 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 20, 30, 40 e 50 segmentos;
- d) por polinômio linear com 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 20, 30, 40 e 50 segmentos.

Os resultados foram comparados com a solução exata, cuja formulação é apresentada em Strack (1989, p. 414-415). O erro, em cada ponto avaliado, é definido como sendo o valor absoluto da diferença entre os valores simulados e exatos dividido pelo valor exato correspondente.

$$e_r = \frac{|\phi_s - \phi_e|}{\phi_e} 100$$

Resultados e discussão

A comparação é realizada pela avaliação das cargas hidráulicas em pontos igualmente espaçados sobre uma área quadrangular de lado igual a $6H$ (Figura 74), centrada na origem. O erro máximo e a média das diferenças em porcentagem estão apresentados na Tabela 8 para a simulação (a) e na Tabela 9 para caso (b), (c) e (d).

Tabela 8 – Inhomogeneidade, erro médio e máximo para diferentes ordens dos polinômios.

Grau do polinômio	Erro médio %	Erro Máximo %
1	0,4042	3,2767
2	0,1290	0,9064
3	0,1212	0,5096
4	0,1183	0,5078
5	0,1179	0,5065
6	0,1175	0,5062
7	0,1174	0,5059
8	0,1172	0,5055
9	0,1170	0,5077
10	0,3157	5,4655

Pela Tabela 8 percebe-se que os erros médio e máximo decrescem com a ordem do polinômio até o grau 9, entretanto para o polinômio de grau 10 os erros médio e máximo crescem substancialmente. O algoritmo de simulação utiliza combinações das coordenadas dos pontos de controle para compor o polinômio de interpolação e o polinômio corretor, conforme a seção 5.1. Os erros acumulados devido ao número de operações envolvendo

combinatórias atinge valor elevado no polinômio de grau 10, inviabilizando os ganhos de precisão obtidos até então.

A Figura 75 ilustra o decréscimo do erro médio entre os polinômios de grau 2 e 9, sendo verificada uma queda acentuada até o grau 6 e a partir daí uma queda suave do erro médio.

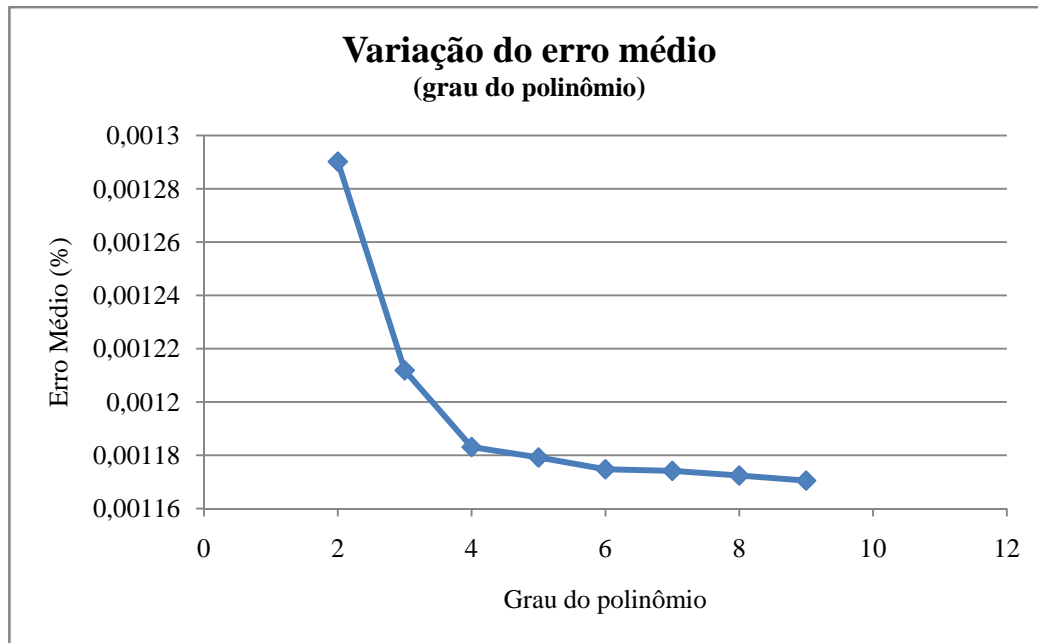


Figura 75 – Variação do erro médio com o grau do polinômio de interpolação.

Tabela 9 – Inomogeneidade por splines, erro médio e máximo pelo número de segmentos

Pontos por Trecho	SPQ		SPL		Linear	
	Erro Médio %	Erro Máximo %	Erro Médio %	Erro Máximo %	Erro Médio %	Erro Máximo %
4	0,1188	0,5100	0,1193	0,5158	0,1348	0,5230
5	0,1187	0,5067	0,1216	0,5073	0,1280	0,5170
6	0,1177	0,5069	0,1179	0,5076	0,1246	0,5136
7	0,1178	0,5065	0,1189	0,5076	0,1226	0,5116
8	0,1173	0,5063	0,1170	0,5070	0,1213	0,5102
9	0,1175	0,5059	0,1181	0,5061	0,1204	0,5093
10	0,1172	0,5059	0,1171	0,5063	0,1198	0,5086
20	0,1172	0,5055	0,1172	0,5056	0,1178	0,5062
30	0,1172	0,5054	0,1172	0,5054	0,1175	0,5057
40	0,1172	0,5053	0,1172	0,5054	0,1173	0,5056
50	0,1172	0,5053	0,1172	0,5053	0,1173	0,5055

A Tabela 9 compara o erro médio e máximo obtidos para as simulações com *splines* com polinômio inicial quadrático (SPQ), *splines* com polinômio inicial linear (SPL) e solução com polinômio de primeiro grau aplicado a vários segmentos por trecho da inomogeneidade poligonal.

A solução por *splines* quadráticas de polinômio inicial quadráticos (SPQ) apresenta boa aproximação, mesmo para pequeno (4 pontos por trecho). Os resultados indicam que a solução por *splines*, com baixo número de divisões (8 por trecho) apresenta erro próximo ao verificado pela aproximação linear com alta resolução (50 pontos por trecho).

A solução linear apresenta boa convergência, entretanto com erros maiores que os apresentados pelas *splines*. A solução por *splines* quadráticas de polinômio inicial linear (SPL) apresenta bons resultados, entretanto sua convergência é oscilante. A solução usando SPQ apresentou os melhores resultados e também estabilidade de convergência, como pode ser visto na Figura 76.

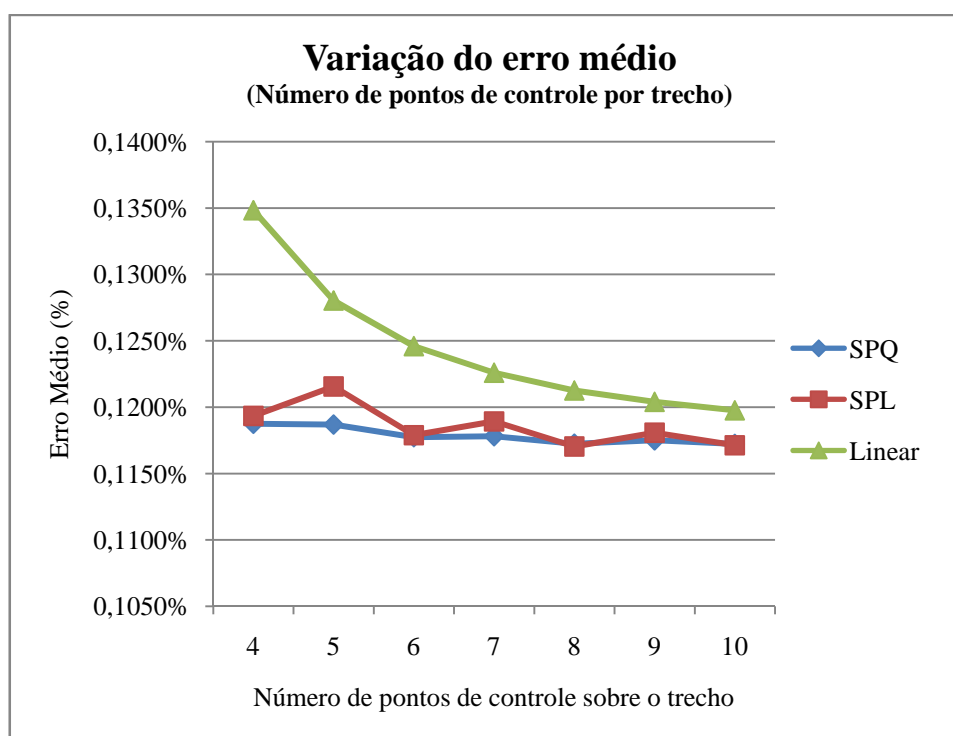


Figura 76 – Variação do erro médio com número de divisões (até 10 divisões).

Tempo de processamento

Por meio da Figura 77, os tempos de processamento entre a *spline* (SPQ) e a interpolação por polinômio de alto grau são comparados. Observa-se que o crescimento do tempo de processamento (calcular a carga hidráulica para os 2041 pontos do domínio) é consideravelmente menos acentuado para a aproximação com *spline* (SPQ), indicando um menor esforço computacional.

A interpolação por *spline* (SPL) não apresentou diferenças significativas em relação à *spline* (SPQ) no tempo de processamento.

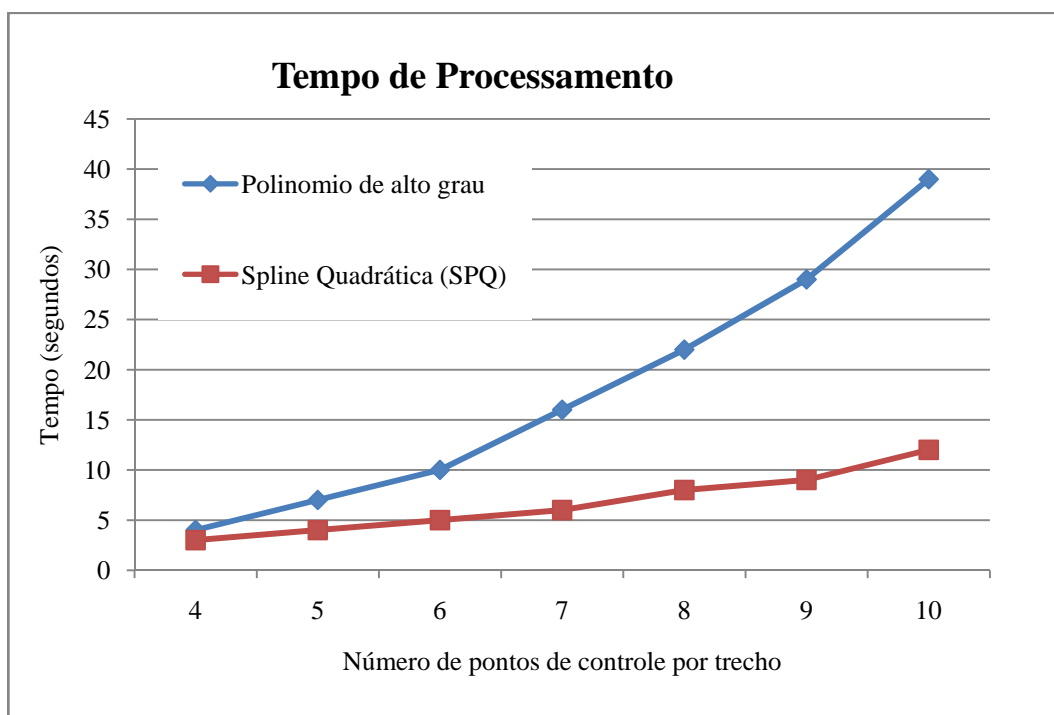


Figura 77 – Tempo de processamento, *spline* (SPQ) e polinômios de graus variados. Máquina equipada com Java 1.5.0.08 – Sistema operacional Windows XP Professional 2002 vSP, processador Intel Pentium R 4 CPU2.40GHz, 512 Mb RAM.

Isolinhas de carga hidráulica

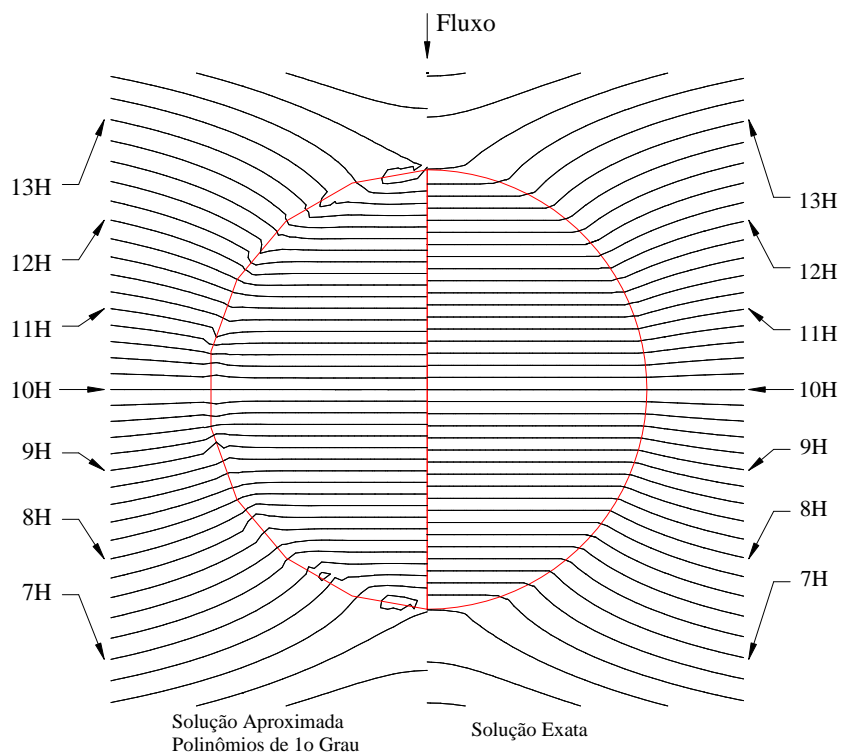


Figura 78 – Inomogeneidade cilíndrica, comparação aproximada polinômio Linear e exata.

A Figura 73 apresenta a solução aproximada por um polinômio de primeiro grau para cada um dos lados de um polígono de 18 lados em comparação com a solução exata para uma inomogeneidade cilíndrica. A distribuição de carga hidráulica é semelhante à solução exata, mas as diferenças são consideradas nas linhas de separação das soluções. A Figura 79 apresenta a solução por *splines* (SPQ) com 10 divisões para cada trecho de um polígono de 18 apresentando solução consideravelmente mais próxima à solução exata.

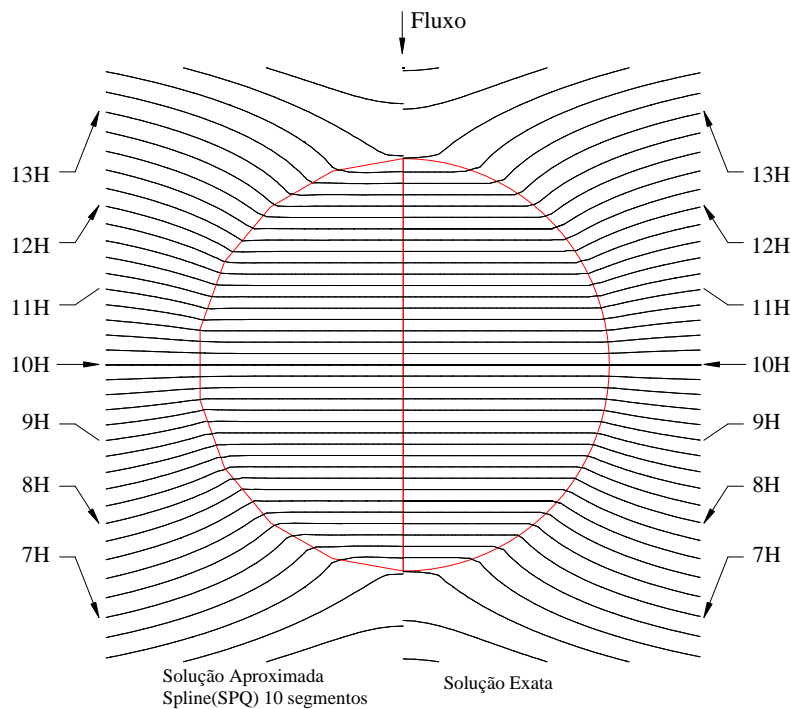


Figura 79 – Inomogeneidade cilíndrica, comparação aproximada spline (SPQ) 10 divisões.

CASO II

O caso II consiste em uma variação do caso anterior, tendo a inhomogeneidade condutividade hidráulica maior que a condutividade hidráulica do meio externo, $K^+ = 10K^-$.

A Figura 75 apresenta a comparação da simulação por *spline* (SPQ) de 10 divisões em comparação com a solução exata. Novamente percebe-se a convergência das soluções.

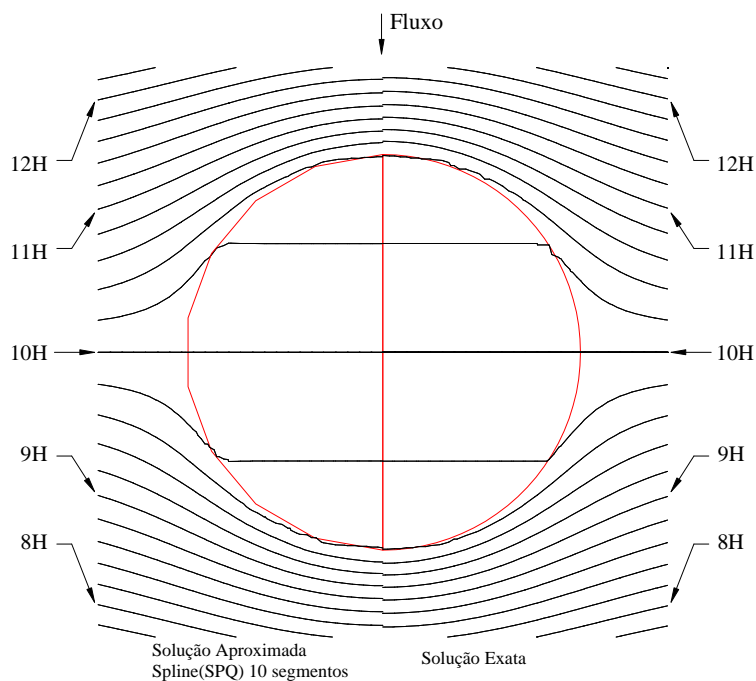


Figura 80 – Inomogenidade cilíndrica - condutividade hidráulica 10X menor que o meio.
Comparação entre a solução exata e a aproximada por spline (SPQ) com 10 divisões.

CASO III

Os casos I e II foram abordados variando o número de lados do polígono simulado. Serão adotados polígonos regulares de 6, 8, 10, 12, 14, 16 e 18 lados para aproximar a solução exata para inhomogeneidade cilíndrica circular. Em todos será usado a aproximação por splines (SPQ) em 10 segmentos. A Figura 81 mostra os polígonos de 6 e 18 lados na área estudada.

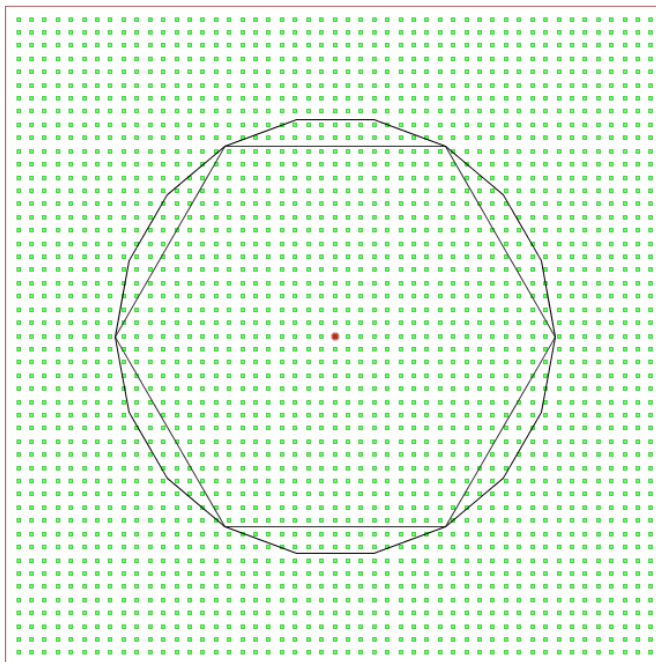


Figura 81 – Polígonos de 6 e 18 lados usados para aproximar inomogeneidade circular.

Tabela 10 – Erro médio e máximo para casos I e II
Número de lados do polígono usando (SPQ)

Número de lados	SPQ - 10 segmentos			
	Caso I		Caso II	
	Erro médio %	Erro Máximo %	Erro médio %	Erro Máximo %
6	1,08	4,03	0,89	3,14
8	0,60	2,29	0,50	2,09
10	0,38	1,53	0,33	1,38
12	0,27	1,08	0,23	0,97
14	0,19	0,80	0,17	0,66
16	0,15	0,64	0,13	0,55
18	0,12	0,49	0,10	0,41

Observa-se pela Tabela 10 que ambos os casos (Caso I $K^+ = 0,1K^-$ e Caso II $K^+ = 10K^-$) apresentam comportamento semelhante, com decréscimo acentuado do erro médio e máximo conforme o aumento do número de lados do polígono. A Figura 82 ilustra a variação do erro médio.

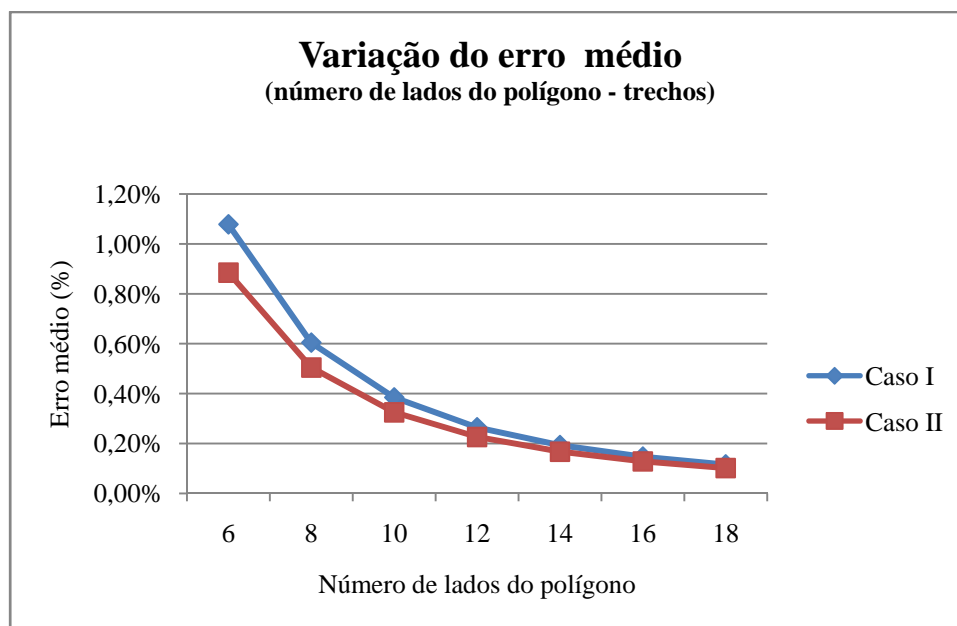


Figura 82 – Variação do erro médio em relação ao número de lados do polígono.

CASO IV

Inomogeneidade retangular fina (faixa) em um escoamento uniforme inclinado ao seu eixo longitudinal. A condutividade hidráulica da faixa (K^+) é maior que a condutividade do meio externo (K^-), sendo $K_{ino}^+ = 5 K_{meio}^-$. O ponto de referência localizado em $z_r = 10^6 H i$ apresenta potencial de descarga constante, $\phi_r/H = 10$. Os lados da inomogeneidade são modelados por *spline* quadráticas com polinômio inicial quadrático (SPQ) com 50 divisões sobre cada lado. A Figura 83 detalha o comportamento das linhas de carga na interface entre os meios. Os resultados apresentados demonstram o funcionamento do AEM em diferentes escalas, mantendo o grau de precisão.

a) Vista global do escoamento.

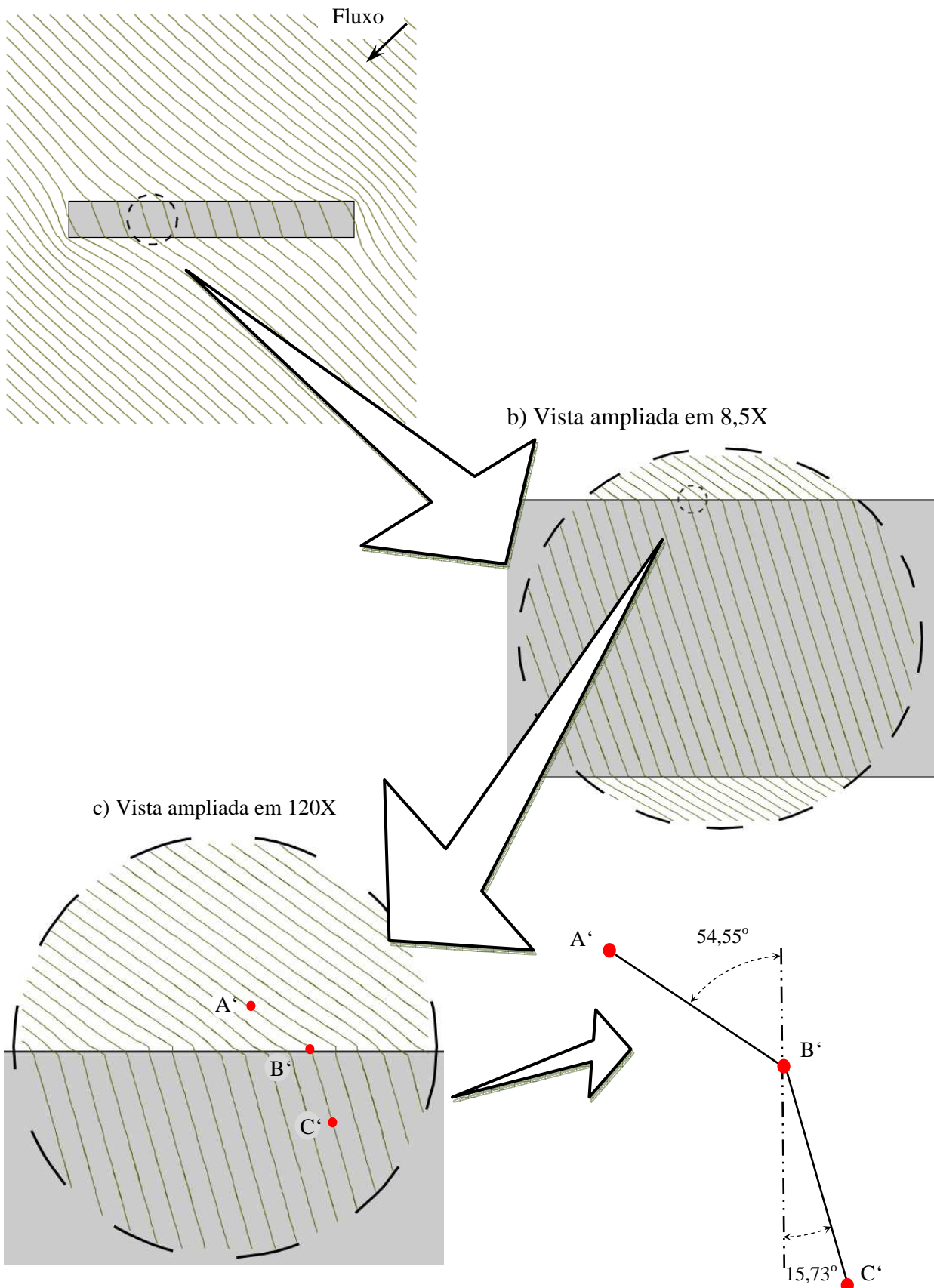


Figura 83 – Isolinhas de carga hidráulica de inhomogeneidade em faixa em fluxo uniforme.
Ângulos estimados a partir da figura medida em aplicativo CAD.

De acordo com Verruijt (1970, p. 81), considerando os ângulos α_1 e α_2 da linha de carga em relação à normal na superfície de contato entre dois meios com condutividades hidráulicas distintas, tem-se:

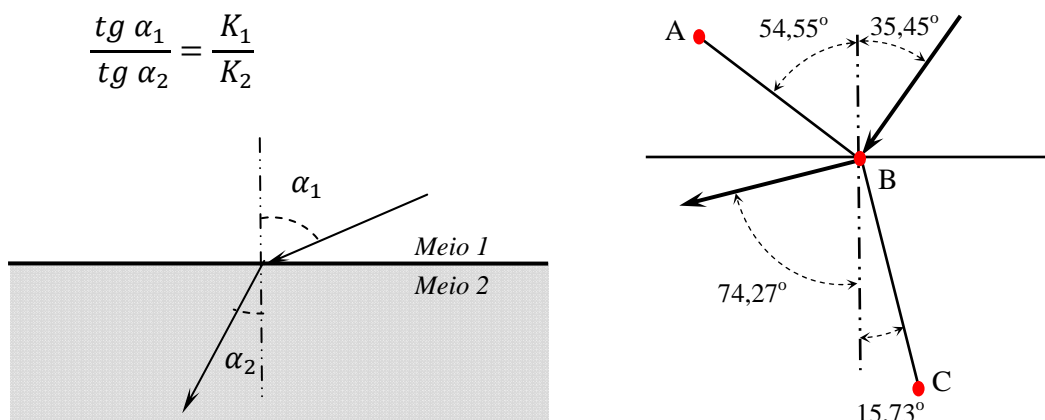


Figura 84 – Linhas de fluxo entre dois meios com condutividade hidráulica distinta.
Fonte: Verruijt (1970, p. 81).

Em termos teóricos, para o exemplo dado:

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{K_{\text{meio}}}{K_{\text{ino}}} = \frac{K_{\text{meio}}}{5K_{\text{meio}}} = \frac{1}{5} = 0,2$$

Segundo a simulação:

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\operatorname{tg} 35,45^\circ}{\operatorname{tg} 74,27^\circ} = \frac{0,7120}{3,5505} = 0,2005$$

O erro obtido foi de 0,25%. Como o JUMP não possui ferramenta de medição de ângulos, foi necessário o transporte da figura resultante para um *software* CAD. Parte do erro deve ser atribuída à forma gráfica usada na medição.

CASO V

Escoamento Confinado

Inomogeneidade cilíndrica centrada na origem e com raio R . A espessura do aquífero confinado é igual a H . A Condutividade hidráulica do meio é dez vezes maior que a

condutividade hidráulica da inhomogeneidade $K^- = 10K^+$. Na origem, o valor da carga hidráulica é $\phi_0 = 10H$. O escoamento é produzido por um par de poços localizados em $z_1 = 1,25R + 0i$ e $z_2 = -1,25R + 0i$, com vazões iguais a $W_1 = 2(K^-H)^2$ e $W_2 = -2(K^-H)^2$, respectivamente.

A inhomogeneidade cilíndrica foi modelada por um polígono de 18 lados, interpolados cada um por splines (SPQ) com 10 divisões. No total a inhomogeneidade foi dividida em 180 segmentos. Como a solução exata não está disponível, o resultado obtido foi comparado com a simulação com interpolação linear em que cada trecho (lado) foi dividido por 100 segmentos. Ou seja, o polígono foi dividido em 1800 segmentos (Figura 85).

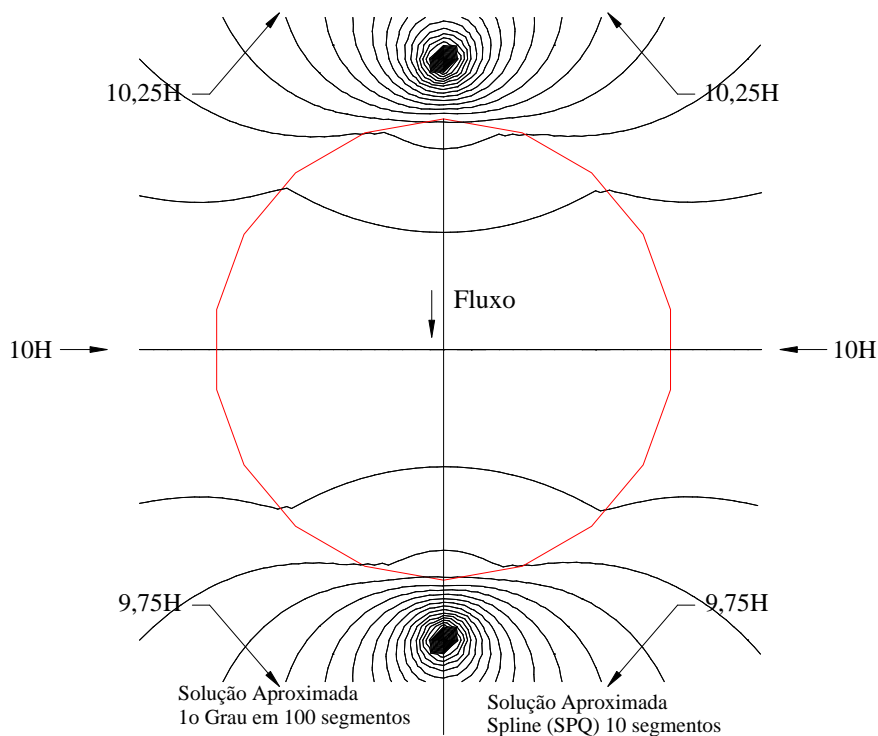


Figura 85 – Inhomogeneidade cilíndrica e poços em aquífero confinado. O escoamento é produzido por dipolo de poços, separados por distancia de $2,5R$. Intervalo das isolinhas é de $0,25H$.

Escoamento Livre

Consiste em uma variação do caso anterior considerando o escoamento livre.

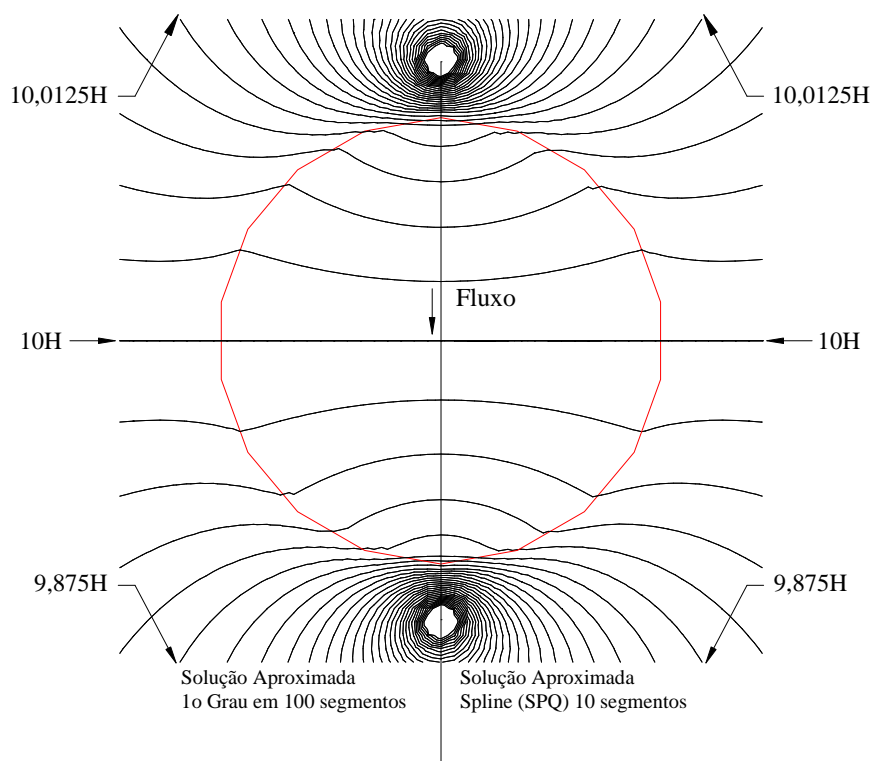


Figura 86 – Inhomogeneidade cilíndrica e poços em escoamento livre. O escoamento é produzido por dipolo de poços, separados por distância de $2,5R$. Intervalo das isolinhas é de $0,0025H$.

Os resultados das simulações do caso V apresentaram erros desprezíveis tanto para o escoamento confinado (Figura 85) quanto para o escoamento livre (Figura 86), mostrando a eficácia do uso da aproximação por das *splines* (SPQ) com número reduzido de pontos de controle para escoamento nas proximidades de poços de injeção e extração.

CASO VI

Escoamento Confinado

Inhomogeneidade quadrada centrada na origem e com lado igual a $4H$. A espessura do aquífero confinado é igual a H . A inhomogeneidade é dividida ao meio, formando dois retângulos. O retângulo a direita apresenta uma condutividade hidráulica dez vezes maior que

a condutividade hidráulica do meio $K^+ = 10K^-$, no retângulo a esquerda, a condutividade hidráulica é dez vezes menor que a do meio $K^+ = 0,1K^-$. Na origem, o valor da carga hidráulica é $\phi_0 = 10H$, sujeita a um escoamento com descarga constante de $Q_{0x} = K^-H$.

As inhomogeneidades retangulares foram modeladas por *splines* (SPQ) com 10 divisões. No total cada inhomogeneidade foi dividida em 40 segmentos. Como a solução exata não está disponível, o resultado obtido foi comparado com a simulação com interpolação linear em que cada trecho (lado) foi dividido por 100 segmentos. Ou seja, cada inhomogeneidade foi dividida em 400 segmentos.

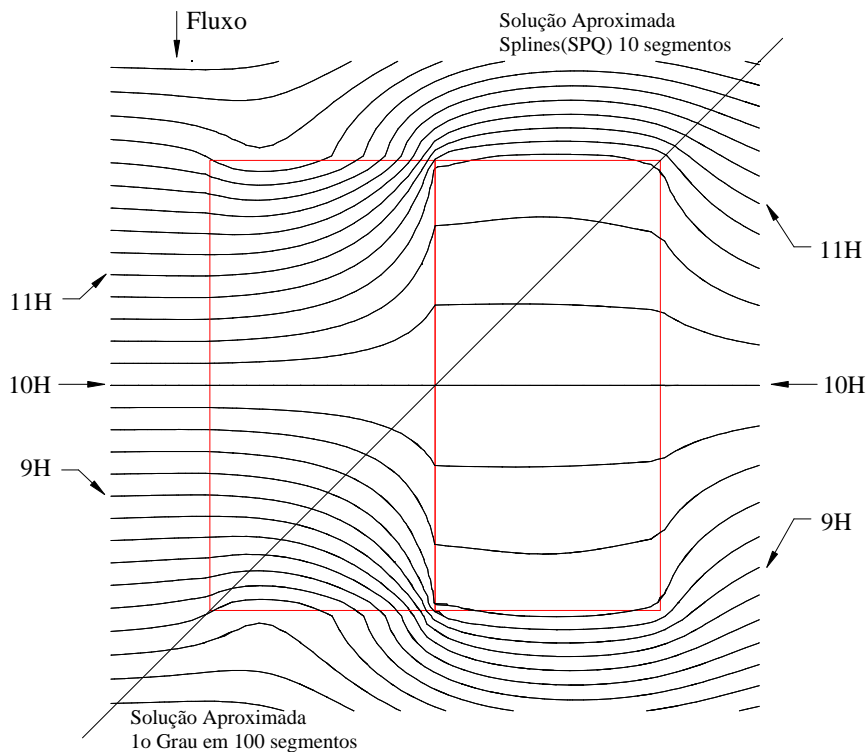


Figura 87 – Inomogeneidade com dupla variação de condutividade hidráulica - confinado. Intervalo das isolinhas de cargas hidráulicas 0,20H.

Escoamento Livre

Variação do caso anterior em escoamento livre.

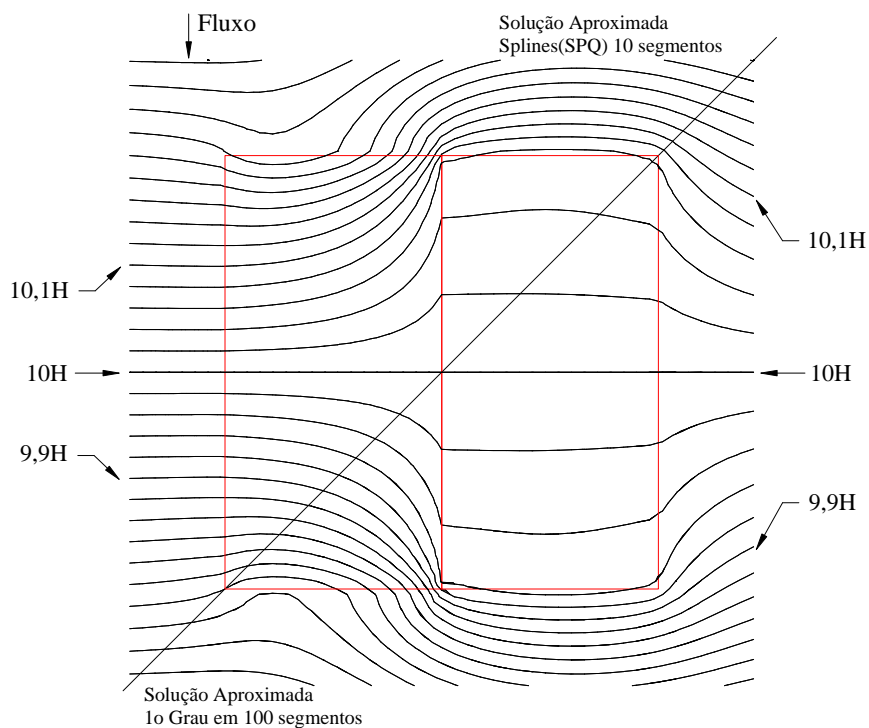


Figura 88 – Inomogeneidade com dupla variação de condutividade hidráulica - livre.
Intervalo das curvas é de $0,020H$.

Os resultados para o escoamento livre (Figura 88) e para o escoamento confinado (Figura 87) apresentaram erro médio de 0,01% e 0,10%, respectivamente, demonstrando a adequação da formulação por *spline* (SPQ) com poucos pontos de controle para escoamentos no entorno de inomogeneidades de diferentes condutividades hidráulicas.

Os casos VII, VIII e IX tratam de exemplificações da implementação dos elementos poço, rio e lago poligonal. As formulações usadas nesses casos são as apresentadas por Strack (1989).

CASO VII

O caso conceitual VII foi proposto por Strack e Haitjema (1981a) e pode ser usado para a comprovação da eficácia da implementação, seção 0 para canais (rios).

O caso consiste em que um poço localizado em $z = z_w$ é alimentado por um canal (rio) finito de comprimento L , localizado de $z = -0,5L$ até $z = 0,5L$. A carga hidráulica ao longo do canal é constante e igual a ϕ_o , a carga hidráulica no ponto de referência z_r é ϕ_r . O canal é modelado por 10 linhas de injeção/extração com taxa de vazão linear (σ) constante. Os parâmetros hidrogeológicos do caso conceitual foram definidos por Strack e Haitjema (1981a): $Q/(kH)^2 = 8$, $L/H = 5$, $z_w/H = 5i$, $\phi_o/H = 15$, $z_r/H = 10^6 i$, $\phi_r/H = 15$.

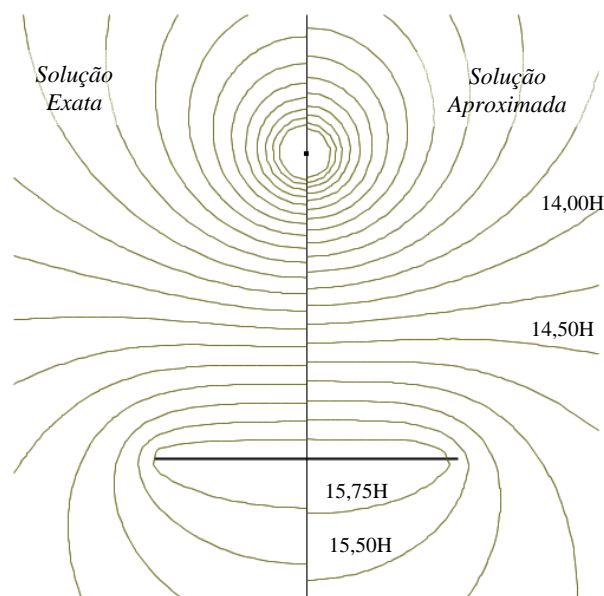


Figura 89 – Poço e canal em campo infinito
 Comparação com Solução exata e aproximada por *line sinks* de primeira ordem em 10 trechos.
 Curvas em intervalos de 0,25H.

A solução exata pode ser encontrada em Strack (1989, p.) ou Strack e Haitjema (1981a, p.).

Ao comparar a solução implementada (Figura 89) com a exata observa-se um erro médio de 1,01% (sobre 2401 pontos no domínio analisado) comprovando a adequação do código implementado.

CASO VIII

Varição do caso anterior, em que o poço locado em $z_w/H = 5$. A Figura 90 apresenta as isolinhas de carga hidráulica obtidas em comparação com a solução exata, dada por Strack e Haitjema (1981a).

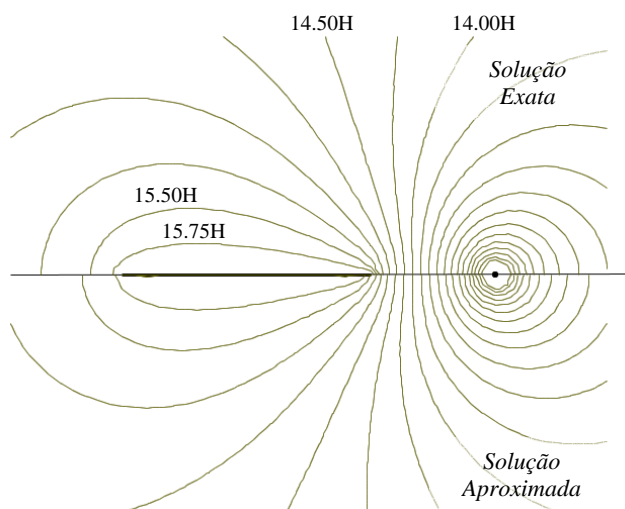


Figura 90 – Poço no alinhamento de canal em campo infinito.
Comparação com solução exata e aproximada por *line sinks* de primeira ordem em 10 trechos.
Curvas em intervalos de 0.25H.

O erro obtido na comparação com a solução exata foi de 0,78% (sobre 2401 pontos no domínio analisado). O resultado reforça o caso anterior, comprovando a adequação da implementação.

CASO IX

Aplicação do programa AEM/JUMP para o caso de um lago poligonal quadrado em aquífero livre, com taxa unitária de infiltração, Figura 91.

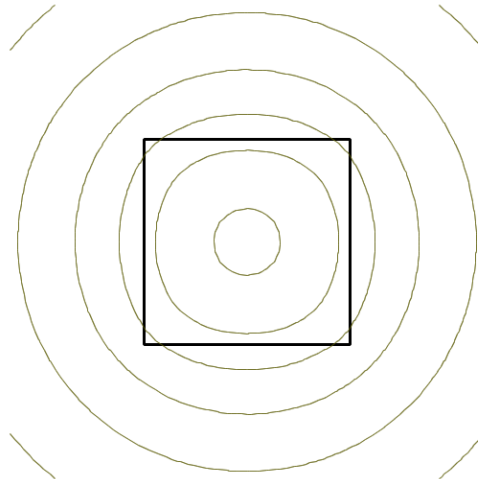


Figura 91 – Isolinhas de carga hidráulica no entorno de lago quadrado com recarga.

Incluindo poço de captura

Um poço é locado no centro do lago, capturando toda a recarga infiltrada, dando origem ao gráfico da Figura 92 .

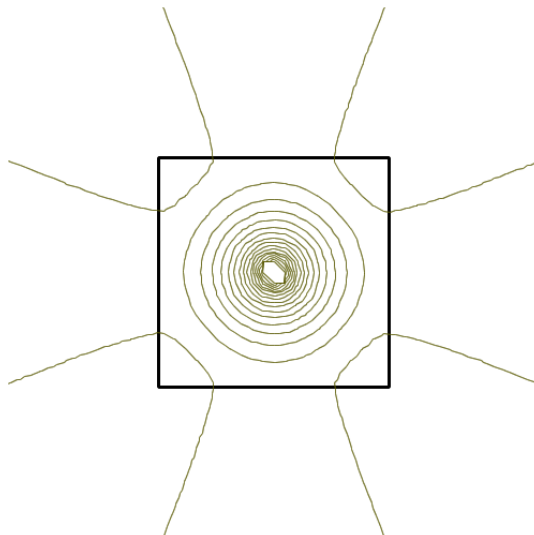


Figura 92 – Diagrama curvas piezométrica de lago poligonal com poço no centro.
Poço captura toda a recarga da área quadrada.

Para ambas as situações, os diagramas obtidos pelo AEM/JUMP, são compatíveis aos apresentados por Strack (1989, p. 434).

Representações tridimensionais foram gerados no JUMP. O Caso I, usando soluções *spline* (SPQ) para 10 segmentos, é mostrado na Figura 93. O Caso VII, contendo poço e um canal finito, é mostrado na Figura 94. O Caso VIII, com poço locado ao longo do eixo do canal finito, é mostrado na Figura 95.

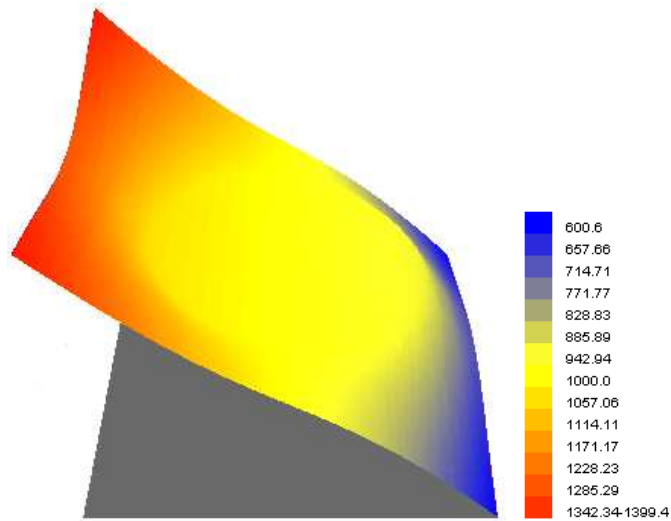


Figura 93 – Modelo tridimensional do Caso I
Vista Lateral

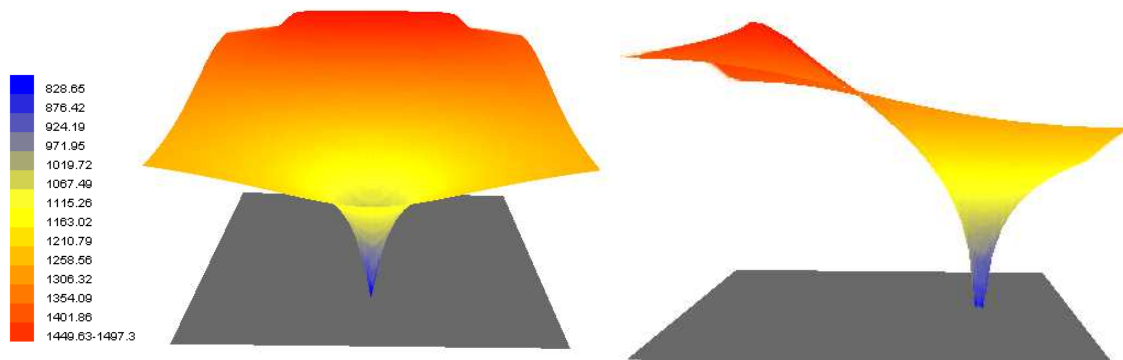


Figura 94 – Modelo tridimensional do Caso VII
Vista Frontal (esquerda) e Lateral (direita)

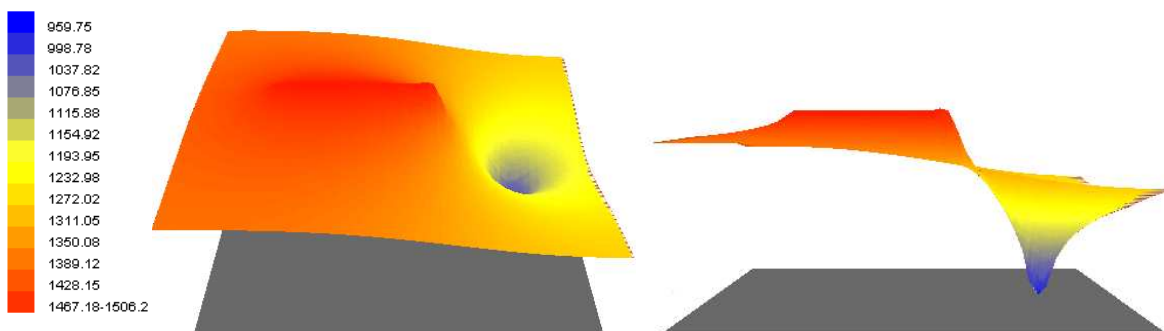


Figura 95 – Modelo tridimensional do Caso VIII
Vista em perspectiva (esquerda) e vista lateral (direita).

8.2 Aplicação a um caso de campo

O programa foi utilizado para análise do escoamento no entorno da Lagoa do Bonfim no Estado do Rio Grande do Norte, previamente estudado por Batista (2006). A localização da região é apresentada na Figura 96 e a hidrografia foi simplificada conforme a Figura 99.

A região modelada encontra-se entre os rios Potengi e Jacu (Figura 99), que constam como os limites geográficos do modelo conceitual adotado. Foram modelados os principais cursos d'água das bacias dos rios Trairi e Pirangi, além da bacia do sistema lacustre estudado.

A Figura 100 esquematiza as formações geológicas predominantes no entorno da Lagoa do Bonfim (Barreiras, Dunas e Aluviões), com destaque para uma faixa sedimentar de aproximadamente 25 a 30 km, a partir do litoral. No interior há predomínio de rocha cristalina, considerada impermeável.

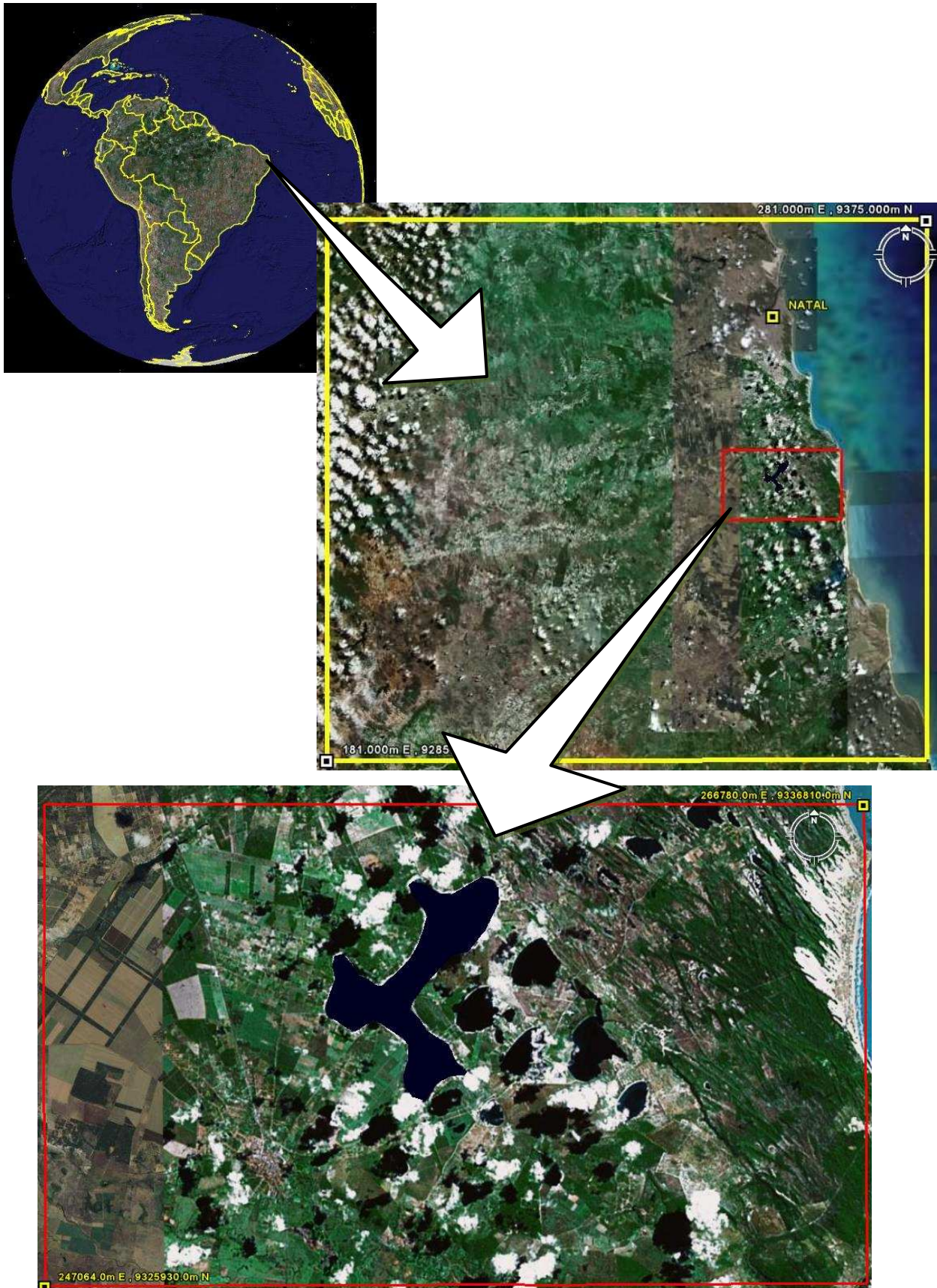


Figura 96 – Localização da Lagoa do Bonfim-RN
Fonte: <http://earth.google.com/int/pt/> (acessado em 07/07/2008)



Figura 97 – Vista em perspectiva da Lagoa do Bonfim-RN
Fonte: <http://earth.google.com/int/pt/> (acessado em 07/07/2008)



Figura 98 – Vista em perspectiva da Lagoa do Bonfim-RN
Fonte: <http://earth.google.com/int/pt/> (acessado em 07/07/2008)

A Figura 97 e a Figura 98 mostram a área de interesse em perspectiva de imagens de satélites, evidenciando o contorno da costa, lagos e a Lagoa do Bonfim.

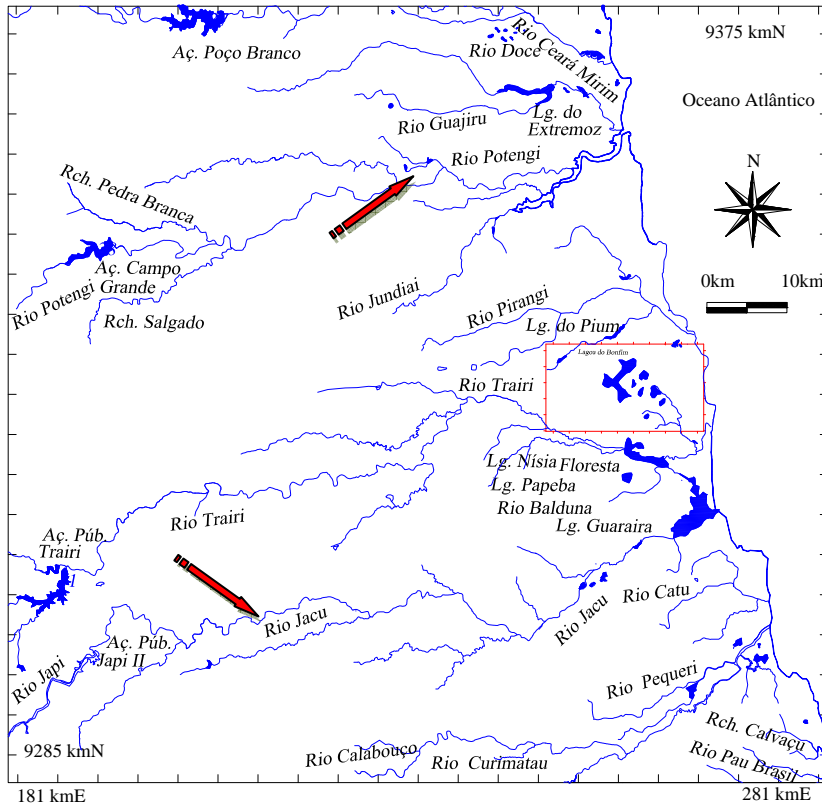


Figura 99 – Localização da Lagoa do Bonfim-RN.
Fonte: Batista (2006)

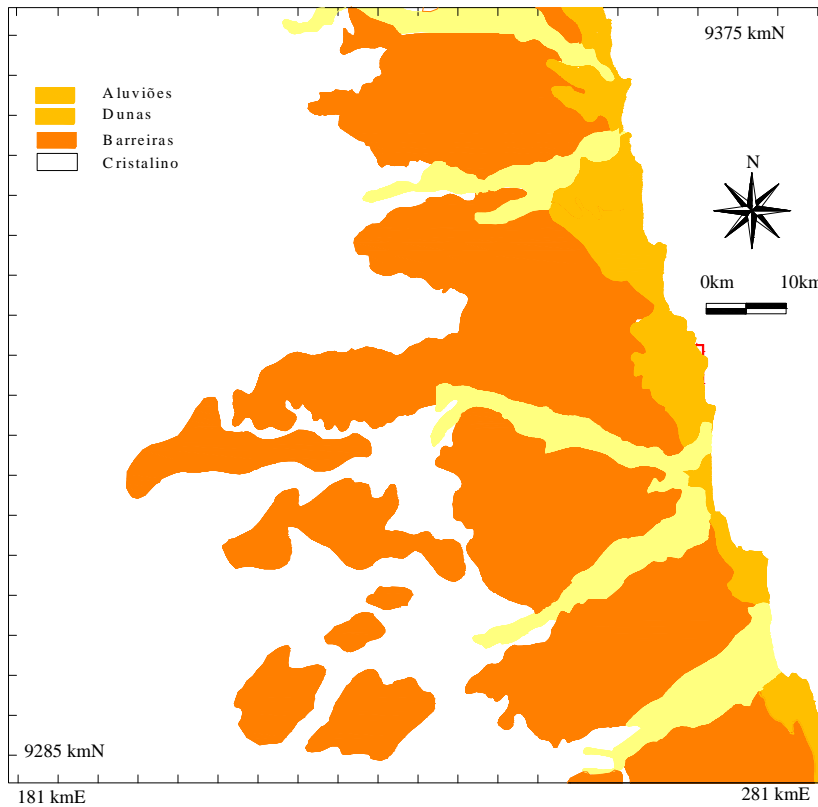


Figura 100 – Formações geológicas presentes na região da Lagoa do Bonfim.
Fonte: Batista (2006).

8.2.1 O modelo conceitual e computacional - Simulação I

Batista (2006) usou o Método de Elementos Analíticos em uma faixa de comprimento infinita de 25,0 Km de largura, com contornos retos representado o oceano (lado direito) e o cristalino (lado esquerdo), conforme apresentado Figura 101. A hidrografia foi simplificada, incluindo apenas os principais rios que influenciam o escoamento. No modelo foram consideradas as duas principais formações geológicas sedimentares, Barreiras e Dunas.

O modelo consiste em representar os rios e lagos como Linhas de Injeção/Extração de carga hidráulica constante. Para ambos, a carga hidráulica é especificada conforme a topografia da região. As inomogeneidades são modeladas por polígonos de linhas duplas. A recarga tipo faixa é usada sobre toda área modelada com valor de 0,024 m/mês. Devido à presença do cristalino, a borda esquerda é considerada impermeável, sendo simulada por uma inomogeneidade estreita com baixa condutividade hidráulica ($K = 10^{-10}$ m/mês). O oceano é modelado como um rio (dreno) com carga hidráulica constante igual a 0,00 m. Para o nível da lagoa do Bonfim foi adotado o valor de 41,65 m, conforme a calibração realizada por Batista (2006). Os principais dados usados na simulação são apresentados na Tabela 11.

Tabela 11 – Dados para simulação do sistema aquífero da Lagoa do Bonfim.

Parâmetros Hidrogeológicos	Valores
Condutividade hidráulica do meio (Formação Barreira)	300,0 m/mês
Condutividade hidráulica das inomogeneidades (Dunas)	123,0 m/mês
Taxa de recarga (N)	0,024 m/mês
Nível da Lagoa do Bonfim	41,65 m
Base do aquífero	-20,0 m

Nível do mar considerado como nível de referência – cota 0,0 metros

Fonte: Batista (2006)

Tabela 12 – Características da modelagem dos elementos Rios



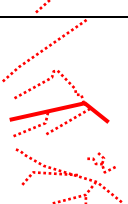

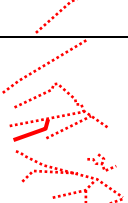
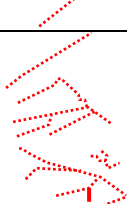


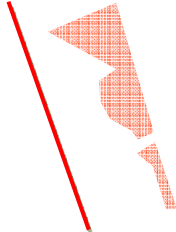
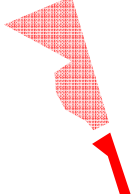

Locação	Características da Modelagem	Locação	Características da Modelagem
	Rio Número de trechos: 20 Modelado pelo Elemento Tipo: 1. Refino: 1 Número de Pontos de Controle: 21 Numero de incógnitas: 21		Rio Número de trechos: 14 Modelado pelo Elemento Tipo: 1. Refino: 1 Número de Pontos de Controle: 15 Numero de incógnitas: 15
	Rio Número de trechos: 37 Modelado pelo Elemento Tipo: 1. Refino: 1 Número de Pontos de Controle: 38 Numero de incógnitas: 38		Rio Número de trechos: 37 Modelado pelo Elemento Tipo: 1. Refino: 1 Número de Pontos de Controle: 38 Numero de incógnitas: 38
	Rio Número de trechos: 34 Modelado pelo Elemento Tipo: 1. Refino: 1 Número de Pontos de Controle: 35 Numero de incógnitas: 35		Rio Número de trechos: 13 Modelado pelo Elemento Tipo: 1. Refino: 1 Número de Pontos de Controle: 14 Numero de incógnitas: 14
	Rio Número de trechos: 12 Modelado pelo Elemento Tipo: 1. Refino: 1 Número de Pontos de Controle: 13 Numero de incógnitas: 13		Rio Número de trechos: 12 Modelado pelo Elemento Tipo: 1. Refino: 1 Número de Pontos de Controle: 13 Numero de incógnitas: 13
	Rio Número de trechos: 15 Modelado pelo Elemento Tipo: 1. Refino: 1 Número de Pontos de Controle: 16 Numero de incógnitas: 16		Rio Número de trechos: 4 Modelado pelo Elemento Tipo: 1. Refino: 1 Número de Pontos de Controle: 5 Numero de incógnitas: 5
	Rio Número de trechos: 39 Modelado pelo Elemento Tipo: 1. Refino: 1 Número de Pontos de Controle: 40 Numero de incógnitas: 40		Rio Número de trechos: 24 Modelado pelo Elemento Tipo: 1. Refino: 1 Número de Pontos de Controle: 25 Numero de incógnitas: 25
	Oceano Número de trechos: 246 Modelado pelo Elemento Tipo: 1. Refino: 1 Número de Pontos de Controle: 247 Numero de incógnitas: 247		

Tabela 13 – Características da modelagem das Inomogeneidades da Lagoa do Bonfim

Localção	Características da Modelagem	Localção	Características da Modelagem
	Inomogeneidade Número de trechos: 101 Modelado pelo Elemento Tipo: 6. Refino: 5 Número de Pontos de Controle: 505 Numero de incógnitas: 505		Cristalino Condutividade hidráulica: 10^{-10} m/mês Número de trechos: 6 Modelado pelo Elemento Tipo: 2. Refino: 5 Número de Pontos de Controle: 60 Numero de incógnitas: 60
	Inomogeneidade Número de trechos: 46 Modelado pelo Elemento Tipo: 6. Refino: 5 Número de Pontos de Controle: 230 Numero de incógnitas: 230		Lagoa do Bonfim Número de trechos: 100 Modelado pelo Elemento Tipo: 1. Refino: 1 Número de Pontos de Controle: 100 Numero de incógnitas: 100

A Tabela 12 detalha as considerações a modelagem dos trechos de rios e oceano, assim como a Tabela 13 detalha os dados para inomogeneidades, lagoa e o cristalino.

Os pontos de deságüe dos rios são pontos redundantes e são modelados por um elemento específico que permite a conexão de dois trechos de rio em um único ponto, por isso devem ser descontados na contabilidade final de pontos de controle.

No total, foram usados: 17 elementos hidrogeológicos e um ponto de referência, responsáveis por 1416 pontos de controle. Descontando os 10 pontos de deságüe dos rios, restam 1406 pontos. A matriz final do sistema de equações será uma matriz cheia de 1406 incógnitas.

A Figura 101 apresenta a área modelada no sistema AEM/JUMP, com destaque da área de interesse da Lagoa do Bonfim.

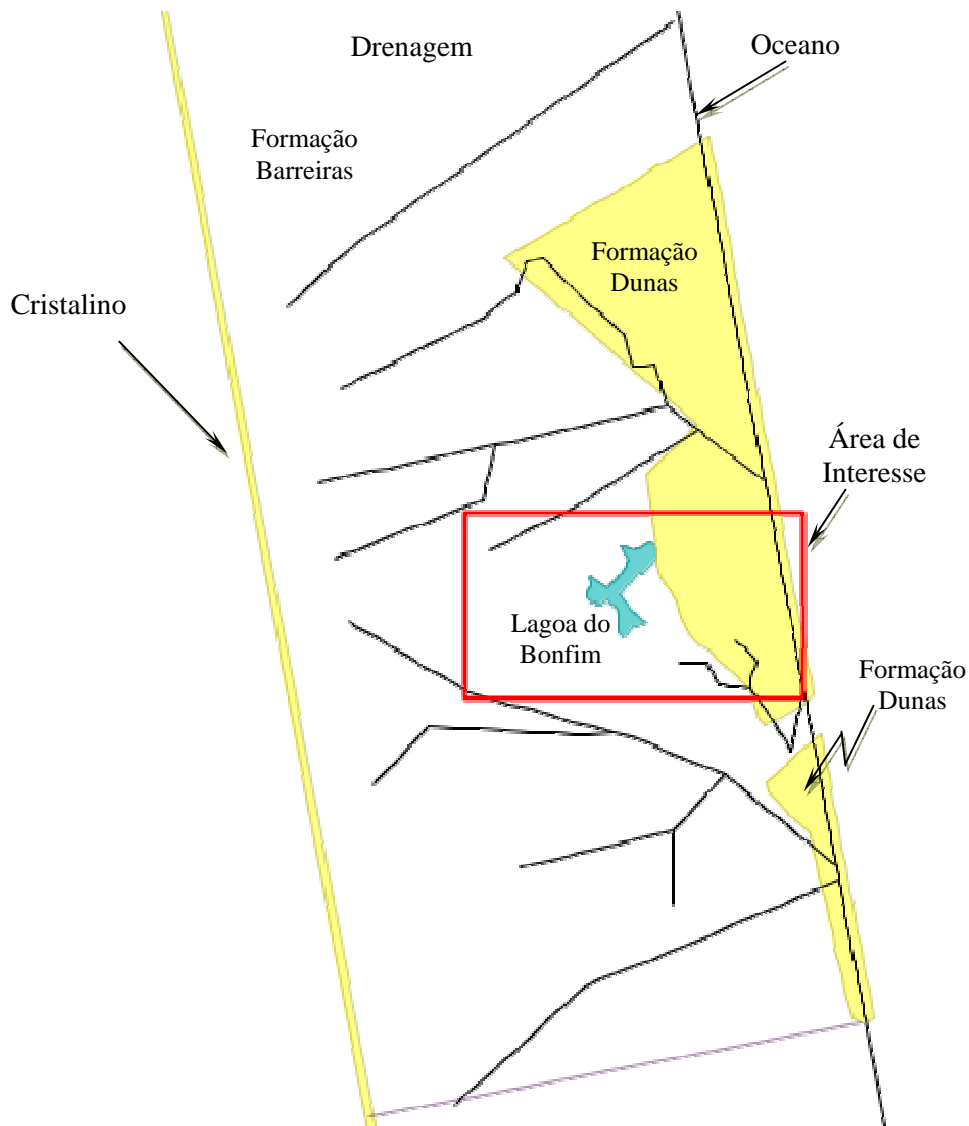


Figura 101 – Área modelada no AEM/JUMP, com detalhe no entorno da Lagoa do Bonfim.

A Figura 102 apresenta a distribuição de carga hidráulica no entorno da Lagoa do Bonfim obtida pela simulação no AEM/JUMP, as isolinhas estão dispostas em intervalos de 2,0m. Observa-se o efeito das drenagens, bem como a concentração de isolinhas (gradiente hidráulico) na área correspondente à inhomogeneidade com menor condutividade hidráulica.

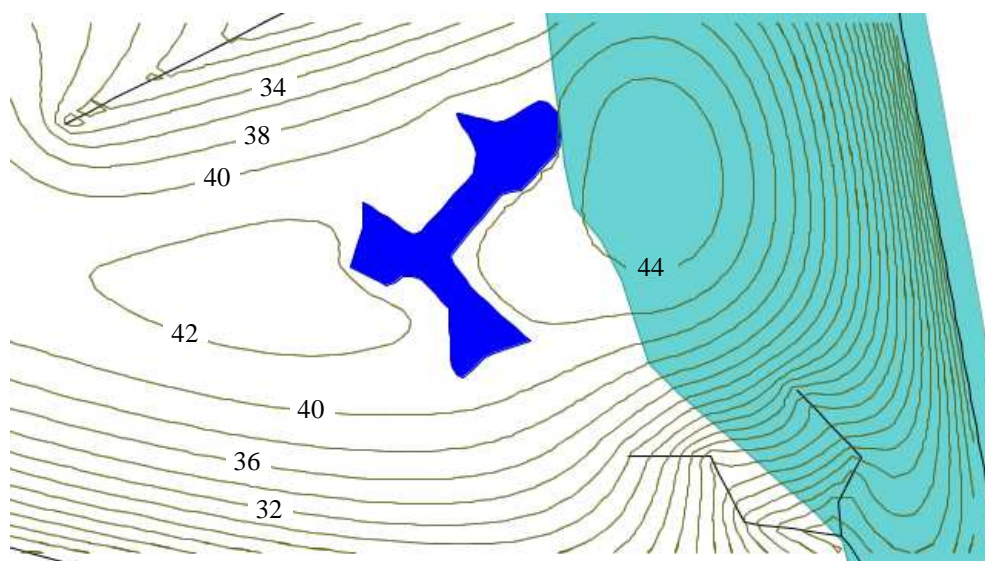


Figura 102 – Lagoa do Bonfim.
Isolinhas de carga hidráulica em intervalos de 2.0 m.

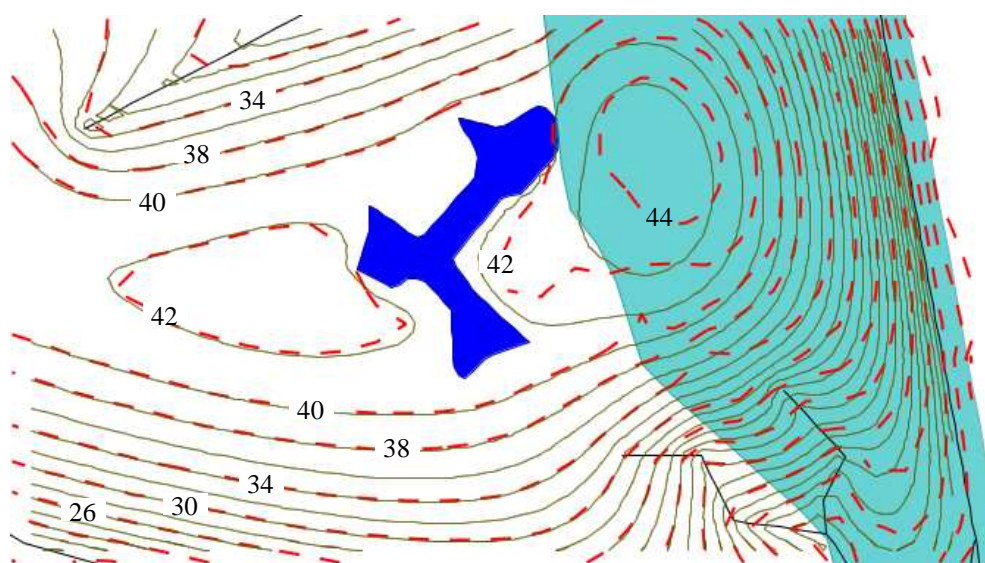


Figura 103 – Isolinhas de cargas hidráulicas no entorno da Lagoa do Bonfim.
AEM/JUMP em linhas contínuas e Batista (2006) em linhas tracejadas.

Os resultados obtidos foram comparados aos obtidos por Batista (2006) (Figura 103). Observa-se uma boa concordância de valores das isolinhas de carga hidráulica. Eventuais discrepâncias entre as soluções resultam no fato de que a solução de Batista (2006) foi obtida a partir de um desenvolvimento baseado no Método das Imagens⁴⁵.

⁴⁵

8.2.2 Inclusão de novos elementos – Simulação II

Para a segunda simulação foi introduzido um conjunto de 7 poços com vazões conhecidas e 5 lagoas circulares com cotas dos espelhos d'água conhecidas. O contorno linear que simula o oceano foi substituído por uma linha irregular com geometria mais próxima da realidade.

Foram considerados, ainda, os aluviões, conforme a Figura 104. Foi adotada a condutividade hidráulica do aluvião do rio Potengi de $1,34 \times 10^{-3} \text{ m/s}$ ($3473,0 \text{ m/mês}$) para ambas as regiões próximas à área de interesse (Figura 100), de acordo com Leal (1998, p. 4). Para melhor identificação, a Figura 105 mostra lagoas e poços numerados.

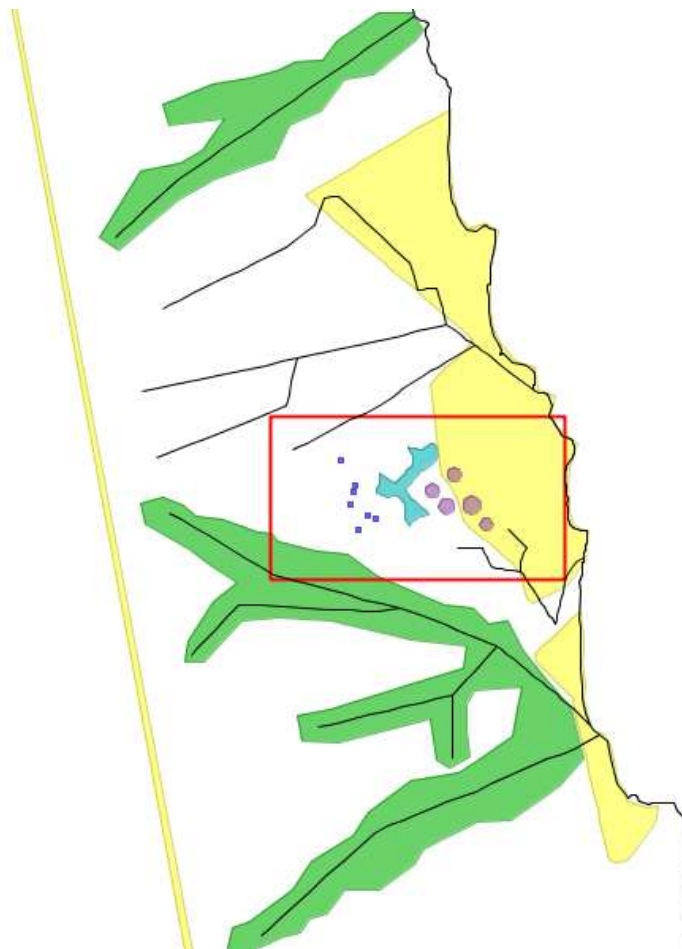


Figura 104 – Contorno irregular da costa, poços, lagoas e aluviões – Lagoa do Bonfim.

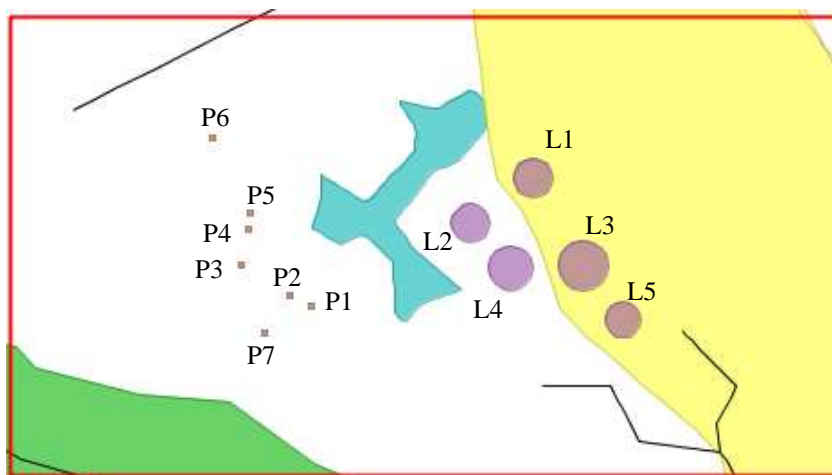


Figura 105 – Detalhe dos elementos introduzidos no modelo da Lagoa do Bonfim.

Tabela 14 – Coordenadas e vazões dos poços

Poço	UTM E (m)	UTM N (m)	Vazões (m ³ /mês)
P1	254184,20	9329942,40	48200,0
P2	253673,70	9330168,10	44700,0
P3	252536,40	9330893,80	39600,0
P4	252707,20	9331760,60	23500,0
P5	252757,14	9332137,40	59700,0
P6	251867,75	9333917,16	25000,0
P7	253057,40	9329284,20	42000,0

Fonte: Batista (2006, p. 179)

A Tabela 14 apresenta as coordenadas e vazões dos poços adicionados ao modelo.

As informações de localização, geometria e nível d'água das lagoas são apresentadas na Tabela 15.

Tabela 15 – Características das Lagoas

Lagoa	Nome	UTM E (m)	UTM N (m)	Raio (m)	Nível estimado do Espelho D'água
L1	Urubu	259392,50	9332982,50	459,0	40,0
L2	Redonda	257915,50	9331914,50	466,0	37,5
L3	Ferreira Grande	260565,50	9330919,50	596,0	38,0
L4	Boa Água	258849,00	9330857,00	527,0	37,5
L5	Carcará	261514,50	9329623,50	432,0	31,0

Fonte: Baseado em Pereira et al. (2003 apud, Batista, 2006, p. 168)

As isolinhas de carga hidráulica sofrem alteração, sobretudo pela introdução do aluvião como pode ser comprovado pela Figura 106 em comparação com a Figura 102

percebe-se o rebaixamento e desvio das isolinhas das curvas de cargas hidráulicas. Essas alterações favorecem o fluxo subterrâneo, na região do aluvião, na direção de escoamento do rio em direção ao mar.

Para uma melhor visualização, foram destacadas duas áreas no entorno dos poços. O programa foi novamente executado refinando a precisão das isolinhas geradas para essas áreas, como pode ser comprovado pela Figura 108. Para gerar uma nuvem de pontos mais refinada (detalhamento), o método permite calcular diretamente as cargas hidráulicas nos referidos pontos, uma vez que os esforços já haviam sido determinados. A Figura 107 apresenta uma visualização tridimensional da superfície piezométrica da solução obtida na área de interesse.

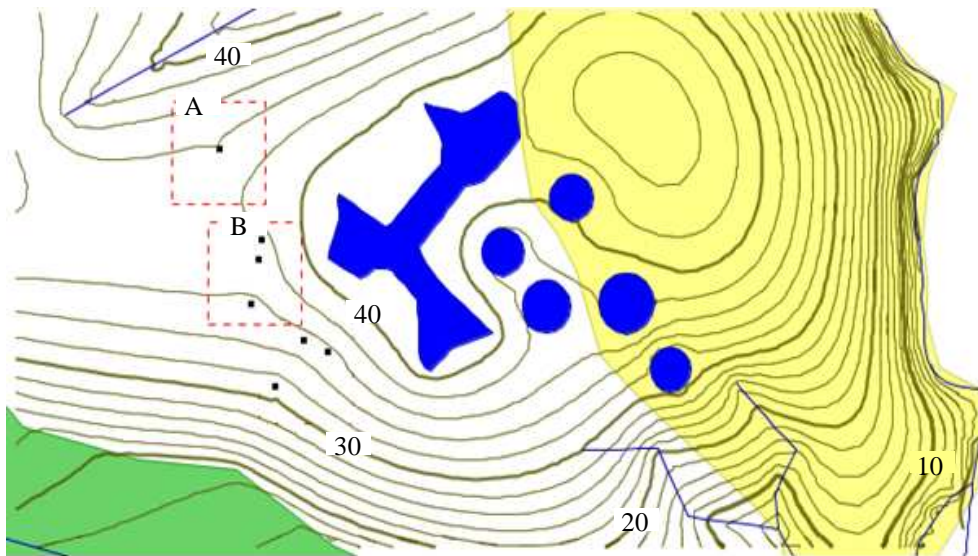


Figura 106 – Isolinhas de cargas hidráulicas com novos elementos – Lagoa do Bonfim
Curvas em intervalos de 2 m

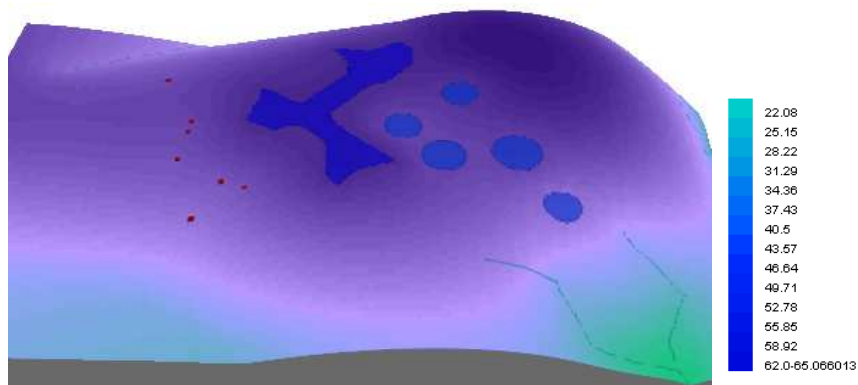


Figura 107 – Superfície piezométrica da região da Lagoa do Bonfim
Vista em perspectiva, com escala vertical 50X a escala horizontal e nível do mar cota 20,00 m

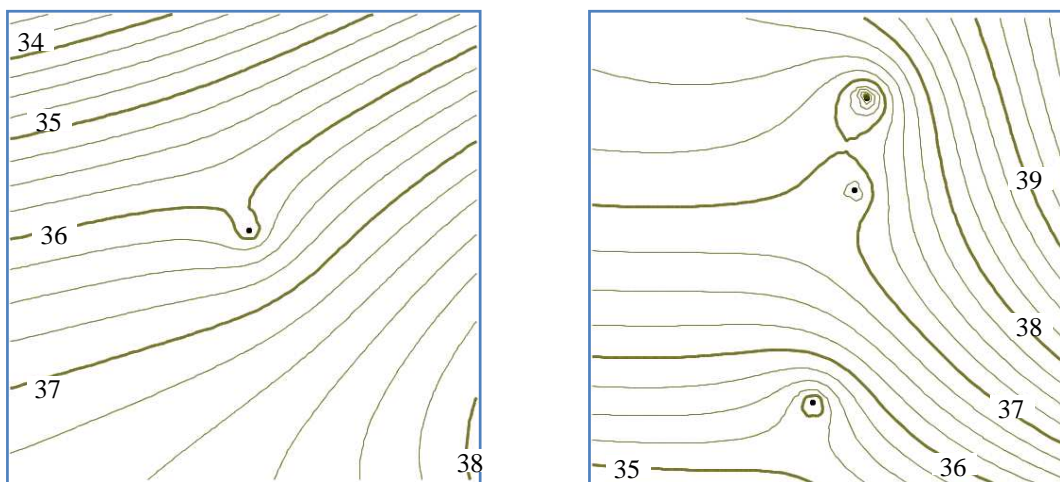


Figura 108 – Isolinhas de carga hidráulica no entorno dos poços Poço 6 (esquerda) e pocos 3,4 e 5 (direita).

9 CONCLUSÕES

O Método de Elementos Analíticos mostrou-se uma alternativa viável à análise de escoamentos subterrâneos.

Para os casos conceituais, os eventuais erros médios obtidos em comparação com soluções exatas foram muito pequenos, abaixo de 0,2 %. Considerando que em aplicações reais a indeterminação dos parâmetros envolvidos sugere uma imprecisão inerente considerável se comparado aos erros apresentados.

As conclusões foram divididas em seções abrangendo as formulações propostas, a implementação do método e a aplicação ao problema de campo.

Quanto à formulação com polinômios de grau elevado

1. Com o aumento do grau do polinômio interpolador o erro obtido decresce continuamente até o grau 9 com erro médio de 0,1170 %. Entretanto, a partir deste refinamento a trajetória é interrompida. O excessivo número de operações para processar os coeficientes dos polinômios interpoladores e de correção influenciam nesses resultados. Porém, a possibilidade de ocorrência do Fenômeno de Runge (BOOR, 1978) deve ser avaliada.

2. Para o aumento do grau do polinômio interpolador observa-se inicialmente uma queda acentuada do erro médio, posteriormente a queda é atenuada e uma tendência a estabilidade pode ser identificada entre os graus 6 e 9, conforme a Figura 75.

Quanto à formulação por splines

3. As *splines* apresentaram em seus dois tipos (linear e quadrática) comportamento similar. Entretanto a *spline* com polinômio inicial quadrático apresentou resultados melhores, no mesmo tempo de processamento.

4. As *splines* com polinômio inicial linear (SPL) apresentaram comportamento de convergência oscilante: apesar de mostrar tendência à diminuição do erro, as modelagens utilizando um número par de pontos de controle possuem uma tendência mais favorável do que o de número ímpar (Figura 76). A oscilação pode ser explicada, em parte, pela imprecisão imposta pela derivada do primeiro polinômio de interpolação (linear) que tende a se propagar mais intensamente com um número de pontos de controle ímpar.

5. Apesar dos polinômios de grau elevado mostrarem, para poucos pontos de controle, um resultado melhor que *splines*, essas últimas apresentaram resultados próximos aos apresentados pelos primeiros. Por outro lado, quando usadas em número elevado de pontos de controle, as *splines* tiram proveito de seu código ágil apresentando menos tempo de processamento e maior precisão do que os polinômios de grau elevado (Figura 76 e Figura 77). O número de operações que deve ser realizado para o cálculo dos coeficientes do polinômio interpolador e do polinômio de correção, é determinante nesse processo.

6. O uso de *splines* (SPQ) é promissor para outros elementos baseados em linhas de injeção/extração, por exemplo, rios e lagos com cargas hidráulicas especificadas.

7. O uso de *splines* para interpolar trechos não colineares sucessivos de um polígono (aberto ou fechado) esbarra na impossibilidade de construção de uma curva suave no vértice, uma vez que ambas as curvas (do trecho anterior e posterior) estão em planos diferentes. Entretanto, o estudo e codificação de *splines* tridimensionais, que interpoem os vértices do polígono, é promissor.

Quanto à Implementação

8. Os elementos hidrogeológicos reais são representados em programas de geoprocessamento com a topologia adotada em sistemas de informações geográficas (*Geographical Information System - GIS*), sendo, portanto representadas por pontos, linhas e polígonos. Essa topologia é uma característica facilitadora para dispor os dados necessários à aplicação do AEM, bastando para tal compatibilizá-los por meio de uma interface.

9. A implementação do Método de Elementos Analíticos (AEM) se adéqua inteiramente aos conceitos de Programação Orientada a Objetos. Os elementos hidrogeológicos reais são modelados como objetos de forma direta e intuitiva, com pouca abstração, para compor a solução final do problema.

10. A montagem do sistema linear principal é facilitada, na medida em que cada elemento matemático criado fornece a equação e o ponto de controle para o cálculo dos coeficientes. Esse conceito permite que a montagem do sistema seja feita percorrendo uma lista simples de elementos matemáticos.

11. O uso de padrões de projetos permite aperfeiçoar a estrutura de classes e objetos, por meio de um código fonte mais compreensível e melhor adaptado à modelagem, oferecendo soluções consagradas para problemas recorrentes.

12. O uso do padrão de projeto ***Façade*** possibilita maior portabilidade do aplicativo, permitindo a adaptação para diferentes plataformas GIS, com a adequação de uma classe de interface voltada à nova plataforma.

13. O uso do padrão ***Iterator*** viabilizou uma opção quanto ao uso de memória e capacidade de processamento para melhor atender o AEM no tocante à construção do sistema linear.

14. O padrão *Strategy* permite disciplinar o uso do polimorfismo para diferentes comportamentos (funções de influência) ao longo de um mesmo trecho e mesmo tipo de interpolação.

15. O padrão *Factory* especializa a criação dos objetos hidrogeológicos permitindo diferentes implementações. Possibilita, portanto, que no futuro sejam realizados testes de implementação visando melhorias no código via otimização da construção dos elementos hidrogeológicos.

16. O uso da plataforma de desenvolvimento Eclipse permite um maior aproveitamento do tempo de desenvolvimento, com grande facilidade de depuração e identificação dos erros de codificação.

17. O programa desenvolvido mostrou-se eficiente quanto à sua aplicação aos diferentes problemas conceituais, possibilitando uma conveniente visualização, armazenagem e comparação entre as soluções desenvolvidas.

18. O pacote de interpolação (OpenJump) e geração das isolinhas merece aprimoramento, principalmente devido à impossibilidade de gerar textos e marcadores conjuntamente às isolinhas. O mesmo se verifica para o pacote utilizado para visualização 3D.

Quanto à Lagoa do Bonfim

19. Além da boa compatibilidade com os resultados previamente obtidos em estudos anteriores (Figura 103), o programa se mostrou eficiente para a produção de diferentes cenários, como pode ser visto na simulação com a inclusão de lagoas, poços e aluviões, Figura 102 e Figura 106.

20. No caso da Lagoa do Bonfim, tomando por base a simulação de Batista (2006), verificou-se que o contorno irregular do litoral possui pouca influência na configuração das isolinhas de cargas hidráulicas na área de interesse.

21. Ainda tomando por base a simulação de Batista (2006), verificou-se que a presença do aluvião influencia consideravelmente o escoamento na área de interesse, rebaixando a superfície piezométrica em regiões próximas ao aluvião, favorecendo o escoamento subterrâneo em direção ao litoral (Figura 106).

9.1 Sugestões para trabalhos posteriores

Como sugestões para desenvolvimentos futuros relacionados ao tema pode-se listar:

1. Desenvolvimento e implementação da *spline* de terceira ordem para modelar inhomogeneidades.
2. Implementação dos pontos de Chebyshev como forma de otimizar o domínio e contornar possível incidência do Fenômeno de Runge.
3. Desenvolvimento de splines para modelar trechos de rios.
4. Identificar e implementar soluções de padrões de projeto para flexibilizar e otimizar a estrutura das classes e objetos.
5. Estudo e adaptação do Método de Elementos Analíticos em aluviões e rochas fraturadas com aplicações ao semi-árido nordestino.
6. Estudo de hibridização do AEM com outros métodos numéricos como o Método de Diferenças Finitas e o Método de Elementos Finitos.
7. Estudo do método para determinação de transporte de poluente e estimativa de pluma de contaminação.

10 BIBLIOGRAFIA

ALMEIDA, C. N.. **Modelagem Integrada de Recursos Hídricos com Apoio de um Sistema de Informações Geográficas**. 2006. 115 f. Tese de Doutorado – Departamento de Hidráulica e Saneamento EESC USP, 2006.

ANDRADE, L. A. P. **Modelagem de aquíferos utilizando o Método de Elementos Analíticos e sistema de informações geográficas para gerenciamento dos poços de abastecimento público no município de Juazeiro do Norte - CE**. Fortaleza: Universidade Federal do Ceará (Dissertação de Mestrado), 2005.

AYCOCK, J. A Brief History of Just-In-Time. **ACM Computing Surveys**, v. 35, 2, p. 97-113, 2003.

BACKUS, J. The History of FORTRAN: I, II e III. **ACM SIGPLAN Notices.**, v.. 13, 8, p. 165-180. Agosto de 1978.

BATISTA, J. A. N.; Schulz, H. E.; Wendland, E. Analytic Element Model for groundwater flow in the aquifers' recharge zone - part 1: unconfined coastal aquifers. In: **XXIV Congresso Íbero-Latino Americano de Métodos Computacionais para Engenharia**, 2003, Ouro Preto: UFOP, 2003.

BATISTA, J. A. N.; WENDLAND, E.; SCHULZ, H E. Acoplamento de Expressão Unidimensional de Recarga a Modelos de Elementos Analíticos. **Tendências em Matemática Aplicada e Computacional**, v. 6, n. 1, p. 43-53, 2005.

BATISTA, J. A. N. **Modelagem de Escoamento em Aquíferos Longos Baseado no Método dos Elementos Analíticos**. 2006, 211 f. Tese Doutorado - Departamento de Engenharia Hidráulica e Ambiental EESC USP, 2006.

BEAR, J. **Hydraulics of Groundwater**. New York : McGraw-Hill, 1979. 569 p.

BEAR, J. **Dynamics of Fluids in Porous Media**. New York : Dover, 1972. 764 p.

BISWAS, A. J. **History of Hydrology**. Amsterdam : North Holland pub., 1970, 336 p.

BONHAM-CARTER, G.. **Geographic Information System for Geoscientists: Modelling with GIS**. New York : Elsevier Science Inc., 1994, p. 398.

BOOLE, G. The Calculus of Logic. **Cambridge and Dublin Mathematical Journal.**, v. III, p. 183-198. 1848.

- BOOR, C. 1978. **A Practical Guide to Splines**. New York: Springer - Verlag, 1978. 392 p.
- BOYCE, W. E. e DiPRIMA, R. C. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. 8ª. Rio de Janeiro: LTC, 2006. 434 p.
- BRASIL Guia de referência de migração para software livre do Governo Federal. Disponível em <www.governoeletronico.gov.br> Acessado em julho de 2006.
- BRUGGEMAN, G. **Analytical Solutions of Geohydrological Problems**. Oxford: Elsevier, 1999. 959 p.
- CANTÙ, M. **Dominando o Delphi 5: a bíblia**. São Paulo, Makron, 2005. 864 p.
- DANGERMOND, J. "What is a Geographic Information System (GIS)?" **Geographic Information Systems (GIS) and Mapping -- Practices and Standards**. Ed. A. I. Johnson, C. B. Petterson and J. L. Fulton. Philadelphia: ASTM, 1992. 11-16.
- DARCY, H. **Les Fontaines Publiques de la Ville de Dijon - Appendice D**. Paris: Dalmont, 1856.
- DAVIS Jr., C. A. O OpenGIS Consortium. São José dos Campos: INPE, 2005. Disponível em < www.inpe.gov.br > Acessado em janeiro de 2007.
- De VRIES, J. From speculation to science: the founding of groundwater hydrology in the Netherlands, **Dutch pioneers of the Earth Sciences**. Amsterdam: JLR Touret & RW Visser (eds), p. 139-164, 2004.
- De Wiest, R. J. M. Fundamental Principles of Ground-Water Flow In: De Wiest, R. J. M. **Flow Through Porous Media**. London: Academic Press, 1969.
- De Wiest, R. J. M. History of the Dupuit-Forchheimer Assumptions on Groundwater Hydraulics. **Transactions of the ASAE.**, v. 8, p. 508-509, 1965
- DELVE, J. Joseph Marie Jacquard: Inventor of the Jacquard Loom. **IEEE Annals of the History of Computing**. [ed.] Thomas Haigh, p. 99-102, outubro-dezembro de 2007.
- FETTER Jr., C.W. Hydrogeology: A short history, part 1, **Ground Water**, v. 42, p. 790-792, setembro-outubro de 2004a.
- FETTER Jr., C. W. Hydrogeology: A short history, part 2. **Ground Water.**, v. 42, 6, p. 946-953, novembro-dezembro de 2004b.
- FRANTA, W. R. Simula Language Sumary. **ACM SIGPLAN Notices**, v. 13, 8, p. 243-244. 1978.
- GAMMA, E., HELM, R., JOHNSON, R e VLISSIDES, J. **Padrões de Projeto: soluções reutilizáveis d software orientado a objetos**. Porto Alegre : Bookman, 2000. 364 p.
- GILES, R. V. **Mecânica dos Fluidos e Hidráulica** - Coleção Schaum. São Paulo : McGraw-Hill, 1976. 412 p.

GIRINSKI, N. K. Le potentiel complexe d'un courant á surface libre dans une couche relativement mince pour $k=f(z)$. **Dokl. Acad. Nauk. SSSR**. v. 51, 5, p. 341-342. 1946.

GLOVER, R. E. Application of the Dupuit-Forchheimer Assumptions in Groundwater Hydraulics. **Transactions of ASAE**. v. 8, p. 510-512. 1965.

GOMES, C. C.; CASTRO, M. A. H. Método dos Elementos Analíticos para Modelagem de Fluxo de Água Subterrânea. In: **XIV Simpósio Brasileiro de Recursos Hídricos**, Aracaju. v. 1. p. 1-21, 2001.

GOMES, C. C. **Método dos Elementos Analíticos para Modelagem Matemática de Fluxo Hídrico Subterrâneo Regional**. 2002. 193 f. Tese Doutorado, Departamento de Hidráulica e Saneamento Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2002.

GOMES, C. C.; CASTRO, M. A. H. Análise Comparativa Entre a Modelagem de Aquíferos Regionais Utilizando o Método de Elementos Analíticos (SPLIT) e o Método de Diferenças Finitas (MODFLOW). In: **Anais do XII Congresso Brasileiro de Águas Subterrâneas**, Florianópolis-SC. v. 1. p. 1-16, 2002.

GOMES, C. C.; CASTRO, M. A. H. . Método de Elementos Analíticos Aplicado No Aquífero da Região do Cariri, Ceará, Brasil. **Revista Brasileira de Recursos Hídricos**, Porto Alegre - RS, v. 10, n. 1, p. 25-34, 2005.

GOODCHILD, M. F. e PARKS, L. T. S. **Environmental Modeling with GIS**. New York : Oxford University Press, 1993, 488 p.

GOSLING, J. e MCGILTON, H. White Paper - The Java Language Environment: Contents. Java Sun. Disponível em < <http://java.sun.com/docs/white/langenv/> >. Acessado em dezembro de 2007.

HAITJEMA, H. M. **Analytical Element Modeling of Groundwater Flow**. London : Academic Press, 1995. 394 p.

HOFF, A. 1996. **Ligado em Java**. São Paulo : Makron Books, 1996. 207 p.

IEZZI, G. **Complexos, Polinômios e Equações** - Fundamentos da Matemática Elementar. v. 6. 67a Edição. São Paulo, Atual, 2005. p. 250.

INDRUSIAK, L. S. 1996 <http://www.inf.ufrgs.br/tools/java>. Acessado em dezembro de 2007.

JUMP **Unified Mapping Platform - Technical**. 2003. Disponível em <<http://www.vividsolutions.com/>>. acessado em 01/01/2008.

KIRKHAM, D. Explanation of paradoxes in Dupuit-Forchheimer seepage theory. , **Water Resources Research**, v. 3 (2), p. 609-622, 1967.

KRUH, L. e DEAVOURS, C. The Commercial Enigma: Beginnings of Machine. **Cryptologia**. v. XXVI, 1, p. 1-16. 2002.

LASKOWSKI, S. B. 1998. Se for GIS pense OpenGIS. **FatorGIS**, p. 1-4, maio de 1998.

- LEAL, O. **Programa de Água Subterrânea para a Região Nordeste: Projeto Aluviões e Coberturas Recentes do Nordeste Oriental**. Recife, CPRM, v. 22. 1998. 35 p.
- LEAVENWORTH, B.M. Programming with(out) the GOTO. **ACM SIGPLAN Notices.**, v. 7 (11), p. 54-58. 1972.
- LÈVÉNEZ, E. Computer Languages History. Disponível em <<http://www.levenez.com/lang/history.html>>. Acessado em dezembro de 2007.
- MACHADO, J. L. F. Água Subterrânea: Uma Visão Histórica. In: XVI SIMPÓSIO BRASILEIRO DE RECURSOS HÍDRICOS, 2005, **Anais**.
- MACIEL Jr., Aulerives. **Pré-socráticos - A Invenção da Razão**. São Paulo : Odysseus, 2003. 158, p.
- MANOEL FILHO, J. Água Subterrânea: Histórico e Importância. In: FEITOSA, F.A.C. e MANOEL FILHO, J. **Hidrogeologia**. Fortaleza :CPRM/REFO-LABHID/UFPE, 2000, 391p.
- MATANGA, G. B. Pseudopotential Functions in Constrution of Flow Nets for Contaminant Transport Modeling. **Water Resources Research**, v. 24, p. 553-560. 1988.
- METCALF, M. e REID, J. Whither FORTRAN ?, **ACM SIGPLAN: Fortran Forum.**, v. 10, 2, p. 18-22, Março de 1991
- MORAIN, S. **GIS Solutions in natural resource management: Balancing e technical-Political Equation**. Santa Fé : OnWord Press, 1999, p. 364.
- MORSE, P.M. e FESHBACH, H. **Methods of Theoretical Physics**. New York : McGraw-Hill, 1937.
- NARASIMHAN, T. N. Hydraulic characterization of aquifers, reservoir rocks, and soils: A history of ideas. **Water Resources Research**, v. 34, p. 33-46, janeiro de 2004.
- NAUR, P. The Progress of ALGOL in Europe. **ALGOL Bulletin**. v. 18, p. 1-6. outubro de 1961.
- PENNER, G.; BATISTA, J. A. N.; SCHULZ, H. E. Simulação de alternativas de controle hidráulico aplicadas à pluma de poluentes do antigo lixão de São Carlos baseada no método dos elementos analíticos. In: Espíndola, E.; Wendland, E. (Org.) **Série Ciências da Engenharia Ambiental Volume 4: Trajetórias e perspectivas de um curso multidisciplinar**. São Carlos: Rima, p. 323-342, 2005.
- PEREIRA, M. A. Uma **Implementação do serviço WMS sobre a Biblioteca TERRALIB**. 2004, 108 f. Rio de Janeiro : Dissertação de Mestrado, PPG em Informática, Pontífice Universidade Católica PUC-RJ, 2004.
- PILONE, D. e PITMAN, N. **UML 2 - Rápido e Prático (Guia de Referência)**. Rio de Janeiro : Alta Books, 2006. 191 p.
- POLUBARINOVA-KOCHINA, P. YA. **Theory of Ground Water Moviment**. Princeton : Princeton University Press, 1962. 613 p.

POZO, R. e MILLER, B. SciMark 2.0. Disponível em <<http://math.nist.gov/scimark2/>> Acessado em janeiro de 2008.

REBOUÇAS, A. C. A Inserção da Água Subterrânea no Sistema Nacional de Gerenciamento. **Revista Brasileira de Recursos Hídricos**. v. 7, 4, p. 39-50, 2002.

REINHOLTZ, K. Java will be faster than C++, **ACM SIGPLAN Notices**, v. 35 (2), p. 25-28, fevereiro de 2000.

REMMERT, R. **Theory of complex functions**. New York : Springer-Verlag, 1991. 453 p.

RESENDE, A. M. P. e SILVA, C. C. **Programação Orientada a Aspectos em Java**. Rio de Janeiro : Brasport, 2005. 176 p.

ROGERS, D. F. e ADAMS, J. A. **Mathematical Elements for Computer Graphics**. 2ª Edição. New York : McGraw-Hill, 1990. 610 p.

SCHACH, S. R. **Object-Oriented & Classical Software Engineering**. 6ª Edição. New York, McGrawHill, 2005. 581 p.

SCHULZ, H. E., **O essencial em Fenômenos de Transportes**. São Carlos. EESC-USP/Projeto Reenge, 2003. 382 p.

SHALLOWAY, Alan James R. Trott. **Explicando Padrões de Projeto** (Uma nova perspectiva em programação orientada a objetos). Porto Alegre RS : Bookman, 2004, 328 p.

SHAPIRO, S. C. e ECKROTH, D. **Encyclopedia of artificial intelligence**. New York : Wiley, 1987. 1219 p.

SPIEGEL, M. R. **Variáveis Complexa**. Rio de Janeiro : McGraw-Hill, 1972, 468 p.

STEWARD, D. R. e BERNARD, E. A. The Synergistic Powers of AEM and GIS Geodatabase Models in Water Resources Studies, **Ground Water**, p. 56-61, janeiro-fevereiro de 2006.

STRACK, O. D. L. e HAITJEMA, H. M Modeling Double Aquifer Flow Using a Comprehensive Potential and Distributed Singularities. 1.Solution for Homogeneous Permeability. **Water Resources Research**. v. 17, 5, p. 1535-1549, outubro de 1981a.

STRACK, O. D. L. e HAITJEMA, H. M. Modeling Double Aquifer Flow Using a Comprehensive Potential and Distributed Singularities. 2.Solution for Inhomogeneous Permeabilities., **Water Resources Research**, , v. 17, p. 1551-1560, outubro 1981b.

STRACK, O. D. L. Theory and Applications of the Analytic Element Method, **Reviews of Geophysics**, v. 41, junho de 2003.

STRACK, O. D. L. **Groundwater Mechanics**. North Oaks : SC Inc, 1989. 732 p.

STRACK, O.D.L. Flow in aquifers with clay Lamine: 1-The Comprehensive Potential. **Water Resource Research**. 17, , v. 4, p. 985-992. agosto de 1981.

- STROUSTRUP, B. Adding Classes to the C Language: An Exercise in Language. **Software: Practice & Experience**, v. 13, 2, p. 139-161, 1983.
- THOMAS, G. B. FINNEY, R. L. **Cálculo Diferencial e Integral**, Volume 3. 5a Edição. Rio de Janeiro : LTC - Livros Técnicos e Científicos, 1983. 1048 p.
- TODD, D. K. **Ground Water Hydrology**. New York : Wiley, 1959, 336 p.
- TOLMAN, C. F. **Ground Water**. London : McGraw-Hill, 1937, 593 p.
- TONG, Y., LOMBOYEDA, S., HIRANI, A. N., DESBRUN, M.. Discrete Multiscale Vector Field Decomposition. **ACM Inc**, p. 445-452. 2003.
- UCHOA, N. H. e FERREIRA, P. R. **Geoprocessamento com Software Livre versão 1.0**. 2004, 31 p.. e-book Disponível em < <http://www.opengeo.com.br/> >, Acessado em janeiro de 2008.
- VERRUIJT, A. **Theory of Groundwater Flow**. London : Macmillian, 1970. 190 p.
- WANGENHEIM, A. V. e ABDALA, D. D. 2002. **Conhecendo o Smalltalk**. Florianópolis, Visual Books, 2002. 284 p.
- WEGNER, P. Concepts and Paradigms of Object-Oriented Programming. **ACM SIGPLAN OOPS**, v. I, 1, p. 7-87, 1990.
- WENDLAND, E.; BATISTA, J. A. N.; SCHULZ, H. E. Coupling one-dimensional recharge solution to analytic element model: an approach for coastal aquifers in Brazil. In: C. T. Miller; M. W. Farthing; W. G. Gray; G. F. Pinder. (Org.). **Computational Methods in Water Resources**. 1 ed. Amsterdam: Elsevier, v. 1, p. 405-414, 2004.
- WOLFGANG, K. G. Konrad Zuse's Plankalkül: The First High-Level, "non von Neumann", **Programming Language**, v. 19(2), p. 17-24. 1997.
- ZILL, D. G. **Equações Diferenciais com Aplicações e Modelagem**. São Paulo : Pioneira Thomson Learning, 2003. 492 p.

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)