

# Sobre Teoremas de Funções Implícitas, Abertas e Aplicações

EDIVALDO LOPES DOS SANTOS <sup>1</sup>

Orientador:

PROF. DR. CARLOS BIASI

*Tese apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para a obtenção do título de “Doutor em Ciências - área: Matemática”.*

---

<sup>1</sup>Este trabalho teve suporte financeiro da Capes.

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

Dedico este trabalho à toda minha família,  
à Denise e à Marina.

## Resumo

Neste trabalho nós obtivemos uma versão homológica do teorema da função implícita. Como consequência, nós mostramos que sob certas condições, o conjunto dos elementos inversíveis de um monóide topológico  $X$  é um grupo aberto em  $X$  e nós usamos a teoria clássica de grupos topológicos para concluir que este conjunto é um grupo de Lie. Mais ainda, nós provamos versões do teorema da função aberta e versões do teorema de Darboux.

# Abstract

In this work we obtain a homological version of the implicit function theorem. As a consequence, we show that under certain conditions, the set of the invertible elements of a topological monoid  $X$  is an open topological group in  $X$  and we use the classical topological group theory to conclude that this set is a Lie group. Moreover, we prove versions of the open function theorem and versions of the Darboux's theorem.

# Agradecimentos

A todos aqueles que me incentivaram e acompanharam a minha jornada, meus mais sinceros agradecimentos: a Deus, por ter me dado saúde e forças para enfrentar e superar as dificuldades e à minha família, pelo amor que têm por mim.

Ao meu orientador, Professor Doutor Carlos Biasi, a quem agradeço pela confiança em mim depositada, pela orientação segura e extremamente competente e que muito contribuiu com o seu otimismo, a sua experiência e conhecimento para o meu aprendizado. Em especial, agradeço pela amizade, dedicação e paciência.

A todos os professores que contribuíram diretamente para a minha formação, em especial à Professora Doutora Alice Kimie Miwa Libardi, da Unesp de Rio Claro.

A todos os colegas da pós-graduação, pelo apoio, incentivo e amizade, em particular ao Helton, um grande amigo. Ao Sadao Massago pela sua disponibilidade com relação às freqüentes dúvidas no uso do Latex.

A todos os professores e funcionários do ICMC, que com o seu trabalho e competência contribuíram para o sucesso deste trabalho.

À Marina, pela alegria e otimismo constantes e à Eliane, pelo incentivo e amizade!

E como não poderia deixar de ser, à Denise, que muito contribuiu com este trabalho, através de valiosas sugestões e revisões, a quem agradeço especialmente, por todo apoio, otimismo, dedicação e companheirismo por todos esses anos.

À Capes pelo apoio financeiro.

Obrigado a todos!

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>iii</b>
<b>1 Pré-requisitos</b>	<b>1</b>
1.1 Terminologias e Notações . . . . .	1
1.2 Seqüências generalizadas . . . . .	1
1.3 Quase-Grupos topológicos e Espaços com multiplicação . . . . .	3
1.3.1 Topologia dos quase-grupos . . . . .	5
1.3.2 Espaços com multiplicação e espaços de Hopf . . . . .	5
1.4 Compactificação de Stone-Čech . . . . .	6
<b>2 Propriedades de posição geral em variedades generalizadas</b>	<b>8</b>
2.1 Introdução . . . . .	8
2.2 Variedades generalizadas . . . . .	8
2.3 Propriedades de posição geral em variedades generalizadas . . . . .	11
2.4 Detectando a <i>DADP</i> . . . . .	13
<b>3 Uma versão homológica do Teorema da Função Implícita</b>	<b>18</b>
3.1 Introdução . . . . .	18
3.2 Versão homológica do Teorema da Função Implícita . . . . .	19
3.3 Aplicações . . . . .	25

3.3.1	Grupos topológicos localmente compactos e o quinto problema de Hilbert . . . . .	26
3.3.2	Monóides Topológicos . . . . .	27
3.3.3	Espaços topológicos com multiplicação . . . . .	31
<b>4</b>	<b>Teoremas de Funções Abertas e Generalizações do Teorema de Darboux</b>	<b>35</b>
4.1	Introdução . . . . .	35
4.2	O conceito de grau local . . . . .	35
4.3	Teoremas de Funções Abertas . . . . .	37
4.4	Generalizações do Teorema de Darboux . . . . .	42
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>46</b>

# Introdução

Neste trabalho, consideramos o problema de determinar novas versões dos teoremas clássicos das funções implícitas, abertas e do teorema de Dauboux. Essas versões visam enfraquecer as condições de diferenciabilidade ou até mesmo, no caso do teorema da função implícita e do teorema de Darboux, versões homológicas (Teoremas 3.2.1, 4.4.5) são provadas para funções contínuas entre espaços topológicos quaisquer. Um classe especial de espaços topológicos que satisfaz as condições dos nossos teoremas é a classe das variedades generalizadas.

No capítulo 2 deste trabalho, definimos variedades generalizadas e estudamos algumas propriedades desses espaços. Uma  $n$ -variedade generalizada  $X$  é um espaço ENR satisfazendo a seguinte condição homológica:  $H_*(X, X - \{x\}; \mathbb{Z}) \cong H_*(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\}; \mathbb{Z})$ . Se a condição homológica for satisfeita com coeficientes em  $\mathbb{Z}_2$  dizemos que  $X$  é uma  $\mathbb{Z}_2$ -variedade generalizada. Tais variedades têm sido recentemente estudadas; por exemplo, é um fato conhecido que existem variedades generalizadas que não são homotopicamente equivalentes a variedades topológicas (ver [10, 11]). Em [6, 7, 8], foi mostrado que a dualidade de Poincaré é válida para qualquer variedade generalizada.

Em [2], usando a Dualidade de Poincaré, Biasi et al. definiram as classes de Stiefel-Whitney para uma  $\mathbb{Z}_2$ -variedade generalizada  $X$ . Isso significa que essas classes podem ser estudadas do ponto de vista algébrico topológico e não é necessária a hipótese de diferenciabilidade sobre  $X$ . Usando tais classes, eles definem uma classe homológica, a qual é uma obstrução primária à existência de mergulhos topológicos entre variedades

generalizadas. Em [3], foi mostrado que a versão clássica do Teorema Borsuk-Ulam provada por Conner e Floyd em [12], para variedades diferenciáveis, pode ser estendida para  $\mathbb{Z}_2$ -variedades generalizadas. Nas seções 2.1, 2.2 relatamos os principais resultados relacionados com a topologia desses espaços e na seção 2.3, damos condições para que uma variedade generalizada possua a propriedade de posição geral chamada *DADP*.

No capítulo 3, nós provamos um dos principais resultados deste trabalho: uma versão homológica do teorema da Função Implícita. Nós consideramos  $X, Y, Z$  espaços topológicos e  $f : X \times Y \rightarrow Z$  uma função contínua. Sob a condição homológica essencial de que o homomorfismo  $(\varphi_{x_0})_* : H_n(Y, Y - y_0) \rightarrow H_n(Z, Z - z_0)$  é não trivial, para algum  $n \geq 1$ , nós mostramos a existência de uma função dada implicitamente pela equação  $f(x, g(x)) = z_0$ , conforme os Teoremas 3.2.1, 3.2.4.

Ainda no Capítulo 3, na seção 3.3, nós demos interessantes aplicações da versão homológica do teorema da Função Implícita na teoria clássica dos monóides e grupos topológicos. O fato de que todo monóide topológico é homogêneo, permite que a verificação da condição homológica do Teorema 3.2.1 se reduza ao caso de saber se  $H_n(X, X - e) \neq 0$ , onde “ $e$ ” é o elemento identidade de  $X$ . No Teorema 3.3.6 nós mostramos que o conjunto dos elementos inversíveis  $\mathfrak{U}$  de um monóide topológico  $X$  é um grupo topológico aberto em  $X$ . Em [36, 35], os autores trabalham com estruturas de semigrupos com identidade em variedades e mostram que o conjunto das unidades  $H(1)$  é um grupo topológico aberto na variedade. Vemos que o mesmo resultado segue do Teorema 3.3.6, desde que se  $M$  é uma  $n$ -variedade topológica ou até generalizada, então  $H_n(M, M - e) \neq 0$ .

Nos Teoremas 3.3.8, 3.3.11, 3.3.12 e 3.3.14 usamos os resultados da teoria clássica de grupos topológicos, para mostrar que o conjunto  $\mathfrak{U}$  é um grupo de Lie ou um grupo de Lie generalizado. Na seção 3.3.1, damos uma breve descrição do quinto problema de Hilbert e suas conseqüências no desenvolvimento da teoria de grupos

---

topológicos localmente compactos. Nós também consideramos o caso em que  $X$  é um espaço topológico munido de uma multiplicação contínua com identidade, e resultados similares são obtidos.

Durante o desenvolvimento deste trabalho, entramos em contato com o Prof. K. H. Hofmann, com a finalidade de esclarecer algumas dúvidas relacionadas com a teoria de semigrupos e grupos topológicos. O Professor Hofmann nos deu valiosas sugestões e fez vários comentários, inclusive em nosso pré-print [5], os quais contribuíram muito para o aperfeiçoamento do nosso trabalho.

No Capítulo 4, nós damos versões de teoremas de funções abertas e versões do teorema clássico de Darboux. O Teorema 4.3.3 foi provado em [42], no caso em que  $f$  é de classe  $C^1$  e para obtermos o teorema no caso apenas diferenciável usamos o Teorema de Sard para funções diferenciáveis provado em [14, 33], e um teorema de inversão local provado em [4]. Um caso onde  $f$  é apenas contínua satisfazendo algumas propriedades, também é considerado no Teorema 4.3.5.

Finalizamos o nosso trabalho com algumas versões do Teorema de Darboux, dentre as quais destacamos a versão homológica (Teorema 4.4.5) e a versão diferenciável para  $\mathbb{R}^n$  (Corolário 4.4.9). Essas versões são obtidas a partir uma versão generalizada do teorema de Černavskii [16], provada em [4] e [49].

# Capítulo 1

## Pré-requisitos

### 1.1 Terminologias e Notações

Em nosso trabalho, o interior, o fecho e a fronteira de um subconjunto  $A$  de um espaço topológico serão denotados por  $\text{Int}(A)$ ,  $\bar{A}$  e  $\partial A$ , respectivamente. Os grupos de homologia, quando não especificado, terão sempre coeficientes em  $\mathbb{Z}$ , o símbolo  $\check{H}_*$  denotará a homology de Čech no sentido de [48, Cap.6]. Por *dimensão*, nós entenderemos a dimensão topológica usual no sentido de [29].

### 1.2 Seqüências generalizadas

Sabemos que as seqüências são objetos adequados para detectar pontos limites, funções contínuas e conjuntos compactos em espaços métricos. Existe uma generalização da noção de seqüência, chamada seqüência generalizadas (“net”) para espaços topológicos arbitrários, a qual definiremos a seguir (para detalhes ver [22] e [37]).

Recordemos que uma relação  $\leq$  em um conjunto é uma relação de ordem parcial se as seguintes condições são válidas:

- (1)  $\alpha \leq \alpha$ , para todo  $\alpha$ .

(2) Se  $\alpha \leq \beta$  e  $\beta \leq \alpha$ , então  $\alpha = \beta$ .

(3) Se  $\alpha \leq \beta$  e  $\beta \leq \gamma$ , então  $\alpha \leq \gamma$ .

**Definição 1.2.1** Um **conjunto direto**  $J$  é um conjunto com uma ordem parcial  $\leq$  tal que para cada par de elementos  $\alpha, \beta \in J$  existe um elemento  $\gamma \in J$ , satisfazendo  $\alpha \leq \gamma$  e  $\beta \leq \gamma$ .

**Definição 1.2.2** Um subconjunto  $K$  é dito ser **cofinal** em  $J$ , se para cada  $\alpha \in J$ , existe  $\beta \in K$  tal que  $\alpha \leq \beta$ .

**Observação 1.2.3** Se  $J$  é um conjunto direto e  $K$  é um conjunto cofinal em  $J$ , então  $K$  também é um conjunto direto.

**Definição 1.2.4** Seja  $X$  um espaço topológico. Uma seqüência generalizada em  $X$  é uma função  $f$  de um conjunto direto  $J$  em  $X$ . Nós denotaremos  $f(\alpha)$  por  $x_\alpha$  e a seqüência generalizada por  $(x_\alpha)_{\alpha \in J}$ , ou simplesmente por  $(x_\alpha)$ .

**Definição 1.2.5** Uma seqüência generalizada **converge** para um ponto  $x \in X$  e escrevemos  $x_\alpha \rightarrow x$  ou  $\lim x_\alpha = x$  se para cada vizinhança aberta  $U$  de  $x$  existe  $\alpha \in J$  tal que

$$\alpha \leq \beta \Rightarrow x_\beta \in U.$$

A seguir daremos algumas propriedades e teoremas sobre seqüências generalizadas:

**Propriedade 1.2.6** *Suponhamos que  $(x_\alpha)_{\alpha \in J} \rightarrow x \in X$  e  $(y_\alpha)_{\alpha \in J} \rightarrow y \in Y$ . Então  $(x_\alpha, y_\alpha) \rightarrow (x, y) \in X \times Y$ .*

**Propriedade 1.2.7** *Se  $X$  é um espaço de Hausdorff então uma seqüência generalizada em  $x$  converge para no máximo um ponto.*

**Teorema 1.2.8** *Seja  $A$  um subconjunto de  $X$ . Então  $x \in \overline{A}$  se, e somente se, existe um seqüência generalizada de pontos de  $A$  convergindo para  $x$ .*

**Teorema 1.2.9** *Seja  $f : X \rightarrow Y$ . Então  $f$  é contínua se, e somente se, para toda seqüência generalizada  $(x_\alpha)$  em  $X$ , convergindo para um ponto  $x$ , então a seqüência generalizada  $(f(x_\alpha))$  converge para  $f(x)$ .*

**Definição 1.2.10** *Seja  $f : J \rightarrow X$  uma seqüência generalizada em  $X$ , com  $f(\alpha) = x_\alpha$ .*

Se  $K$  é um conjunto direto e  $g : K \rightarrow J$  é uma função tal que

(i)  $i \leq j \Rightarrow g(i) \leq g(j)$ ,

(ii)  $g(K)$  é cofinal em  $J$ .

Então, a função  $f \circ g : K \rightarrow X$  é chamada uma subseqüência generalizada de  $x_\alpha$ .

**Propriedade 1.2.11** *Se uma seqüência generalizada  $(x_\alpha)$  converge para  $x$ , então qualquer subseqüência de  $(x_\alpha)$  também converge para  $x$ .*

**Definição 1.2.12** *Seja  $(x_\alpha)$  uma seqüência generalizada em  $x$ . Nós dizemos que  $x$  é um ponto de acumulação de  $(x_\alpha)$  se para cada vizinhança  $U$  de  $x$ , o conjunto*

$$\{\alpha; x_\alpha \in U\}$$

é cofinal em  $J$ .

**Lema 1.2.13** *A seqüência generalizada  $(x_\alpha)$  tem o ponto  $x$  como ponto de acumulação se, e somente se, alguma subseqüência generalizada de  $(x_\alpha)$  converge para  $x$ .*

**Teorema 1.2.14** *Um espaço topológico  $X$  é compacto se, e somente se, toda seqüência generalizada em  $X$  admite subseqüência generalizada convergente.*

## 1.3 Quase-Grupos topológicos e Espaços com multiplicação

**Definição 1.3.1** *Uma lei de composição em  $G$*

$$Q_1(x, y) = z \quad \text{com } x, y, z \in G, \quad (1.3.1)$$

define um **quase-grupo** em  $G$  se, e somente se, dados dois quaisquer dos elementos  $x, y, z$  em  $G$ , o terceiro fica univocamente. A função  $Q_1$  é chamada “função fundamental” do quase-grupo.

Dados  $y \in G$  e  $z \in G$ , existe um único elemento  $x \in G$  tal que (1.3.1) seja satisfeito.

Podemos escrever

$$x = Q_2(y, z) \quad (1.3.2)$$

e analogamente

$$y = Q_3(x, z) \quad (1.3.3)$$

As funções  $Q_2$  e  $Q_3$  são chamadas soluções à direita e à esquerda, respectivamente.

Fixando em  $Q_1(x, y)$  uma das variáveis, obtemos um função biunívoca de  $G$  em  $G$ .

Denotamos a função

$$y \rightarrow Q_1(x, y) \quad (1.3.4)$$

por  $L_x$ . A função  $L_x$  é chamada “multiplicação à esquerda”. Analogamente  $R_y$  dada por

$$x \rightarrow Q_1(x, y) \quad (1.3.5)$$

é chamada “multiplicação à direita”. Estas funções são biunívocas, de acordo com a própria definição de quase-grupo, e suas inversas são dadas por

$$L_x^{-1}(z) = Q_3(x, z) \quad \text{e} \quad R_y^{-1}(z) = Q_2(y, z) \quad (1.3.6)$$

Fixando por sua vez  $z$  em  $Q_2(y, z)$  obtemos,

$$E_z : G \rightarrow G \quad (1.3.7)$$

dada por  $E_z(y) = Q_2(y, z)$  e fixando  $z \in Q_3(x, z)$  obtemos a função inversa de  $E_z$

$$E_z^{-1} = Q_3(x, z) \quad (1.3.8)$$

As funções  $L_x, L_x^{-1}, R_y, R_y^{-1}, E_z, E_z^{-1}$  são chamadas operações fundamentais de  $G$ .

Particular interesse têm os quase-grupos com elemento identidade “ $e$ ” único, tal que:

$$Q_1(x, e) = Q_1(e, x) = x \quad \forall x \in G \quad (1.3.9)$$

**Definição 1.3.2** Um quase-grupo com elemento identidade é chamado “loop”.

**Observação 1.3.3** Não traduziremos o termo “loop”, porém por motivos de simplicidade deixaremos de escrevê-lo entre aspas.

### 1.3.1 Topologia dos quase-grupos

Seja  $G$  um quase-grupo de função fundamental  $Q_1$  munido com uma topologia  $\tau$ . Dizemos que a estrutura de quase-grupo e a topologia são **compatíveis** se as funções  $Q_i$  são contínuas na topologia  $\tau$  ( $G \times G$  com a topologia produto).

**Definição 1.3.4** Um quase-grupo munido de uma topologia compatível é chamado **quase-grupo topológico**. Em particular, se o quase-grupo tiver identidade temos um loop topológico.

### 1.3.2 Espaços com multiplicação e espaços de Hopf

Vamos considerar agora generalizações de loop topológico.

**Definição 1.3.5** Seja  $X$  um espaço topológico. Uma lei de composição  $Q : X \times X \rightarrow X$  é chamada uma **multiplicação com identidade** se satisfizer as seguintes condições

- (a)  $Q$  é contínua;
- (b) existe um elemento  $e \in X$  tal que  $Q(x, e) = Q(e, x) = x$ .

O elemento “ $e$ ” é chamado elemento identidade.

**Definição 1.3.6** Seja  $X$  um espaço topológico. Uma lei de composição  $Q : X \times X \rightarrow X$  define sobre  $X$  uma **estrutura de Hopf** se:

- (a)  $Q$  é contínua;
- (b) existe um elemento  $e \in X$  tal que  $Q(e, e) = e$  e as aplicações  $x \mapsto Q(x, e)$  e  $x \mapsto Q(e, x)$  são homotópicas a aplicação identidade  $x \mapsto x$  por homotopia relativa a “ $e$ ”.  $X$  é chamado um **espaço de Hopf** ou  **$H$ -espaço**.

**Observação 1.3.7** Temos que todo loop topológico é um espaço com multiplicação e por sua vez todas as multiplicações com identidade definem estruturas de Hopf. Para mais detalhes sobre quase-grupos topológicos e espaços com multiplicação ver [39, 40].

## 1.4 Compactificação de Stone-Čech

Sejam  $X$  um espaço topológico e  $I$  o intervalo fechado  $[0, 1]$ . Seja

$$\Lambda = \{\lambda : X \rightarrow I \mid \lambda \text{ é contínua.}\} \quad (1.4.1)$$

Identificamos o “cubo”  $I^\Lambda = \prod_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda$ , onde  $I_\lambda = I$  para cada  $\lambda \in \Lambda$ . Deste modo, cada ponto de  $I^\Lambda$  é uma família  $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ , com  $0 \leq x_\lambda \leq 1$  para cada  $\lambda \in \Lambda$ . Pelo teorema de Tychonoff,  $I^\Lambda$  é um espaço de Hausdorff compacto. Existe uma aplicação natural

$$\varphi : X \rightarrow I^\Lambda, \quad (1.4.2)$$

dada por  $\varphi(x) = (x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ , para cada  $x \in X$ . A aplicação  $\varphi$  é contínua, pois para cada  $\lambda \in \Lambda$ , a aplicação  $\pi_\lambda \circ \varphi$ , coincide com  $f : X \rightarrow I$ , onde  $\pi_\lambda : I^\Lambda \rightarrow I$  é a projeção sobre o  $\lambda$ -ésimo fator. Consideremos a seguinte definição

**Definição 1.4.1** Um espaço topológico  $X$  é **completamente regular** se dados  $x \in X$  e um aberto  $U$  em  $X$ , com  $x \in U$ , existe sempre uma função contínua  $f : X \rightarrow [0, 1]$  tal que  $f(x) = 1$  e  $f(X - U) = 0$ .

Seja  $\varphi : X \rightarrow I^\Lambda$ , definida em (1.4.2). Para espaços completamente regulares, temos o seguinte

**Teorema 1.4.2** *A aplicação contínua  $\varphi : X \rightarrow \varphi(X)$  é um homeomorfismo se, e somente se,  $X$  é completamente regular.*

Dado um espaço topológico  $X$ , Hausdorff e completamente regular, seja  $\overline{\varphi(X)}$  o fecho da imagem da aplicação  $\varphi : X \rightarrow I^\Lambda$ . Então  $\overline{\varphi(X)}$  é um espaço de Hausdorff compacto e  $\varphi : X \rightarrow \overline{\varphi(X)}$  é uma compactificação de  $X$ , chamada **compactificação de Stone-Čech do espaço  $X$** . Para mais detalhes ver [38].

## Capítulo 2

# Propriedades de posição geral em variedades generalizadas

### 2.1 Introdução

Neste capítulo estudaremos propriedades dos espaços topológicos conhecidos como variedades generalizadas. Nos capítulos subseqüentes grande parte dos resultados podem ser aplicados para tais espaços e isso justifica o nosso interesse em conhecer melhor as propriedades de tais variedades. Especificamente daremos condições para que uma variedade generalizada satisfaça uma propriedade de posição geral chamada *DADP* (“Disjoint arc-disk property”).

### 2.2 Variedades generalizadas

**Definição 2.2.1** Um espaço localmente compacto  $X$  é uma  $n$ -variedade generalizada se  $X$  satisfaz:

- (i)  $X$  é um ENR, ou seja, para algum inteiro  $m$ ,  $X$  mergulha em  $\mathbb{R}^m$  como um retrato de algum subconjunto aberto;

(ii)  $X$  é uma  $\mathbb{Z}$ -variedade homológica, isto é, para todo ponto  $x \in X$ ,

$$H_*(X, X - \{x\}; \mathbb{Z}) \cong H_*(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\}; \mathbb{Z}).$$

Na definição 2.2.1, quando  $X$  for uma ENR  $\mathbb{Z}_2$ -variedade homológica, ou seja,

$$H_*(X, X - \{x\}; \mathbb{Z}_2) \cong H_*(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\}; \mathbb{Z}_2),$$

dizemos que  $X$  é uma  $\mathbb{Z}_2$ -variedade generalizada. Tais variedades têm sido recentemente estudadas; por exemplo, é um fato conhecido que existem variedades generalizadas que não são homotopicamente equivalentes a variedades topológicas (ver [10, 11]). Em [6, 7], foi mostrado que a dualidade de Poincaré é válida para variedades generalizadas localmente orientáveis. Além disso, em [8], mostrou-se que toda variedade generalizada é localmente orientável. Sendo assim, a dualidade de Poincaré é válida para qualquer variedade generalizada (para detalhes ver [9]).

Apresentaremos agora, os resultados mais importantes concernentes à topologia das variedades generalizadas. Esses resultados são obtidos assumindo basicamente duas condições que definiremos a seguir

**Definição 2.2.2 (DDP)** Um espaço métrico  $X$  tem a propriedade de disjunção de discos (“Disjoint Disk Property - DDP), se dado  $\epsilon > 0$  e aplicações contínuas  $f, g : D^2 \rightarrow X$ , existem aplicações contínuas  $f', g' : D^2 \rightarrow X$  tais que  $d(f, f') < \epsilon$ ,  $d(g, g') < \epsilon$  e  $f'(D^2) \cap g'(D^2) = \emptyset$ .

**Definição 2.2.3 (Resolução)** Uma resolução para uma  $n$ -variedade generalizada  $X$  é uma aplicação  $\phi : M \rightarrow X$  com a propriedade de que  $\phi|_{\phi^{-1}(U)} : \phi^{-1}(U) \rightarrow U$  é uma equivalência de homotopia para todo aberto  $U \subset X$ , onde  $M$  é uma  $n$ -variedade topológica. Se  $X$  admite uma resolução, dizemos que  $X$  é resolúvel.

Agora, estamos em condições de enunciar um dos mais importantes teoremas para variedades generalizadas. Em [23], R. Edwards provou o seguinte

**Teorema 2.2.4 (Teorema da aproximação de Edwards)** *Seja  $X$  uma  $n$ -variedade generalizada satisfazendo a DDP. Se  $\phi : M \rightarrow X$  for uma resolução de  $X$ , então  $\phi$  é limite de uma seqüência de homeomorfismos  $h_i : M \rightarrow X$ .*

Como uma consequência imediata temos o seguinte

**Corolário 2.2.5** *Seja  $X$  uma  $n$ -variedade generalizada resolúvel,  $n \geq 5$ .  $X$  é uma variedade topológica se, e somente se,  $X$  possui a DDP.*

Dessa forma, o Corolário 2.2.5 fornece um critério para caracterizar variedades topológicas a partir das variedades generalizadas. Em [45, 46], F. Quinn associa a qualquer  $n$ -variedade generalizada conexa,  $n \geq 4$ , um índice local  $i(X) \in 1 + 8\mathbb{Z}$  e mostra que  $i(X) = 1$  se, e somente se,  $X$  é resolúvel. Combinando com o Teorema de Aproximação de Edwards temos o seguinte *teorema de caracterização para variedades topológicas*:

**Teorema 2.2.6 (Edwards-Quinn)** *Se  $n \geq 5$ , uma  $n$ -variedade generalizada  $X$  com a DDP é uma variedade topológica se, e somente se,  $i(X) = 1$ .*

Em [10, 11], são construídas  $n$ -variedades generalizadas, tendo índice local arbitrário em todas as dimensões  $n > 5$ , ou seja, existem variedades generalizadas que não são variedades topológicas (essas variedades são conhecidas como *variedades generalizadas exóticas*), tornando relevante a questão de caracterizar variedades topológicas no universo das variedades generalizadas. Através do Teorema 2.2.6 e do Corolário 2.2.5, para mostrarmos que uma variedade generalizada  $X$  é uma variedade topológica devemos exigir que  $X$  tenha a DDP e que  $X$  seja resolúvel.

No nosso trabalho, estaremos considerando o problema de detectar propriedades de posição geral em variedades generalizadas similares à DDP, as quais especificaremos na próxima seção.

## 2.3 Propriedades de posição geral em variedades generalizadas

Em [20], R. Daverman mostra que se uma variedade generalizada  $X$  satisfizer condições análogas à  $DDP$  então os produtos cartesianos  $X \times \mathbb{R}$  ou  $X \times \mathbb{R}^2$  satisfazem a  $DDP$ . Consideremos as seguintes definições de *propriedade de posição geral* que são análogas à  $DDP$  em dimensões 3 e 4.

**Definição 2.3.1** ( $DAP$ ) Um espaço  $X$  tem a propriedade de disjunção de caminhos (“disjoint arcs property”-  $DAP$ ), se quaisquer dois caminhos  $f, g : I \rightarrow X$  podem ser  $\epsilon$ -aproximados por caminhos com imagens disjuntas.

**Definição 2.3.2** ( $DADP$ ) Um espaço  $X$  tem a propriedade de disjunção de caminho - disco (“disjoint arc-disc property” -  $DADP$ ), se dadas quaisquer duas aplicações  $f : I \rightarrow X$  e  $g : D^2 \rightarrow X$  existem  $\epsilon$ -aproximações de  $f$  e  $g$ , as quais possuem imagens disjuntas.

Podemos mostrar, usando dualidade, que toda  $n$ -variedade generalizada,  $n \geq 3$ , possui a  $DAP$ . Em [20], foi provado que se um espaço  $X$  tem a  $DAP$  então  $X \times \mathbb{R}$  tem a  $DADP$  e que se um espaço  $X$  tem a  $DADP$  então  $X \times \mathbb{R}$  tem a  $DDP$ . Combinando esses resultados com o Teorema 2.2.6, temos os seguintes corolários:

**Corolário 2.3.3** *Seja  $X$  uma  $n$ -variedade generalizada resolúvel,  $n \geq 3$ . Então  $X \times \mathbb{R}^2$  é uma  $n$ -variedade topológica.*

**Corolário 2.3.4** *Seja  $X$  uma  $n$ -variedade generalizada resolúvel com a  $DADP$ ,  $n \geq 4$ . Então  $X \times \mathbb{R}$  é uma variedade topológica.*

Recentemente, em [26], D. Halverson define uma propriedade de disjunção de homotopia ( $DHP$ ) a qual é mais “refinada” do que a  $DADP$  no sentido de garantir quando  $X \times \mathbb{R}$  possui a  $DDP$ .

**Definição 2.3.5** (*DHP*) Um espaço  $X$  tem a propriedade de disjunção de homotopias (“disjoint homotopies property” - *DHP*) se quaisquer duas homotopias de caminhos  $f, g : D \times I \rightarrow X$  podem ser  $\epsilon$ -aproximadas por homotopias de caminhos  $f', g' : D \times I \rightarrow X$  tal que  $f'_t(D) \cap g'_t(D) = \emptyset$  para todo  $t \in I$ , onde  $D = I = [0, 1]$ .

D. Halverson provou o seguinte

**Teorema 2.3.6** ([26], **Theorema 3.4**) *Se  $X$  é uma  $n$ -variedade generalizada com a *DHP* então  $X \times \mathbb{R}$  possui a *DDP*.*

Além disso, ela mostrou que *toda variedade generalizada com a *DADP* possui a *DHP** ([26, Corolário 4.5]), porém a recíproca não é verdadeira. D. Halverson, deu a seguinte condição para que uma variedade  $X$  possua a *DHP*,

**Definição 2.3.7** Um espaço  $X$  tem a *P2MP* (“plentiful 2-manifolds property”) se cada caminho  $\alpha : I \rightarrow X$  pode ser aproximado por um caminho  $\alpha' : I \rightarrow N \subset X$ , onde  $N$  é uma 2-variedade mergulhada em  $X$ .

E provou o seguinte

**Teorema 2.3.8** ([26, Theorem 5.5]) *Se  $X$  é uma  $n$ -variedade generalizada,  $n \geq 4$ , com a *P2MP*, então  $X$  tem a *DHP*.*

No entanto, a recíproca do Teorema 2.3.8 não é verdadeira. Em [27], D. Halverson provou que os espaços “2-ghastly” construídos por Daverman e Walsh em [21], possuem a *DHP*, mas tais espaços não possuem nenhuma 2-célula mergulhada e, portanto, não podem ter a propriedade *P2MP*.

## 2.4 Detectando a *DADP*

Nesta seção, estudaremos a questão de dar condições para que uma  $n$ -variedade generalizada, satisfaça a *DADP*, onde  $n \leq 4$ . Consideremos a seguinte

**Definição 2.4.1 (Variedade de Cantor)** Seja  $X$  um espaço topológico localmente conexo e localmente compacto. Dizemos que  $X$  é uma variedade de Cantor, se dados  $F \subset X$  fechado tal que  $\dim(F) \leq 1$  e um aberto  $U \subset X$  conexo, então  $U - F$  é conexo.

**Observação 2.4.2** Toda variedade generalizada é uma variedade de Cantor.

Seja  $X$  um espaço localmente compacto de Hausdorff. Denotaremos por  $X^* = X \cup \{\infty\}$  a compactificação de Alexandroff. Se  $A$  é um subconjunto fechado de  $X$ , nós podemos considerar  $A^*$  como um subespaço de  $X^*$ .

**Lema 2.4.3** *Suponhamos que  $X$  seja um espaço conexo por caminhos e localmente compacto tal que para algum inteiro  $n$  e para qualquer  $A \subset X$  fechado,*

$$\check{H}^n(X^*, A^*) \cong \check{H}_0(X - A) \quad (2.4.1)$$

*Se  $\dim(A) \leq n - 2$ , então  $X - A$  é conexo (*Čech*) ou conexo por caminhos.*

*Demonstração.* Consideremos a sequência exata de cohomologia do par  $(X^*, A^*)$

$$\longrightarrow H^{n-1}(A^*) \longrightarrow H^n(X^*, A^*) \longrightarrow H^n(X^*) \longrightarrow H^n(A^*) \longrightarrow \quad (2.4.2)$$

Desde que  $\dim(A) \leq n - 2$ , temos que  $H^{n-1}(A^*) \cong H^n(A^*) \cong 0$  e da sequência exata 2.4.2 temos que  $H^n(X^*, A^*) \cong H^n(X^*)$ . Deste modo, segue de (2.4.1) que

$$H_0(X - A) \cong H^n(X^*, A^*) \cong H^n(X^*) \cong H_0(X) \cong \mathbb{Z} \quad (2.4.3)$$

Portanto,  $X - A$  é localmente conexo por caminhos. □

**Observação 2.4.4** Se  $X$  é uma  $n$ -variedade generalizada então  $X$  satisfaz a dualidade (2.4.1).

**Teorema 2.4.5** *Seja  $X$  uma  $n$ -variedade generalizada e  $F \subset X$  um subconjunto fechado tal que  $\dim(F) \leq n - 2$ . Então, dada uma função contínua  $g : I \rightarrow X$  existe  $g' : I \rightarrow X$  uma  $\varepsilon$ -aproximação de  $g$  tal que  $g'(I) \cap F = \emptyset$ .*

*Demonstração.* Seja  $g : I \rightarrow X$  e escolhamos  $\varepsilon > 0$ . Seja  $\mathcal{U}$  uma cobertura de  $g(I)$  tal que os elementos  $U$  de  $\mathcal{U}$  sejam conexos com diâmetro menor que  $\varepsilon$ . Segue do Lema 2.4.3 que  $U - F$  é conexo por caminhos para todo  $U$  em  $\mathcal{U}$ . Seja  $\delta$  o número de Lebesgue para a cobertura  $\mathcal{U}$  de  $g(I)$ . Escolhamos uma partição  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = 1$  do intervalo  $I$  tal que  $\text{diam}(g([t_{i-1}, t_i])) < \delta$  para  $i = 1, \dots, m$ . Seja  $U_i$  um elemento em  $\mathcal{U}$  contendo  $g([t_{i-1}, t_i])$ . Escolhamos  $x_0 \in U_1 - F$ ,  $x_m \in U_m - F$  e  $x_i \in U_i \cap U_{i+1}$  para  $i = 1, \dots, m-1$ . Como cada  $U_i - F$  é conexo por caminhos, podemos definir  $g' : I \rightarrow X$  tal que  $g'(t_i) = x_i$  para  $i = 0, \dots, m$  e  $g'([t_{i-1}, t_i]) \subset U_i - F$  para  $i = 1, \dots, m$ . Deste modo,  $g'$  é uma aproximação para  $g$  satisfazendo  $g'(I) \cap F = \emptyset$ .  $\square$

Agora, daremos condições para que uma  $n$ -variedade generalizada  $X$  possua a *DADP*. Uma primeira condição é a seguinte

**Condição 1.** Toda função contínua  $f : D^2 \rightarrow X$  pode ser  $\varepsilon$ -aproximada por uma função contínua  $f' : D^2 \rightarrow X$  tal que  $\dim(f'(D^2)) \leq n - 2$ .

**Teorema 2.4.6** *Seja  $X$  uma  $n$ -variedade generalizada,  $n \geq 4$ . Se  $X$  satisfaz a **Condição 1**, então  $X$  tem a *DADP*.*

*Demonstração.* Sejam  $f : D^2 \rightarrow X$  e  $g : I \rightarrow X$  funções contínuas sobre  $X$ . Como  $X$  satisfaz a **Condição 1**, existe uma  $\varepsilon$ -aproximação  $f'$  de  $f$  tal que  $\dim(f'(D^2)) \leq n - 2$ . Deste modo, segue do Teorema 2.4.5 que existe uma  $\varepsilon$ -aproximação  $g'$  de  $g$  tal que  $g'(I) \cap f'(D^2) = \emptyset$ . Portanto  $X$  tem a *DADP*.  $\square$

A fim de impormos uma segunda condição para que uma  $n$ -variedade generalizada,  $n \geq 4$ , possua a *DADP*, precisaremos considerar alguns resultados preliminares, os quais descreveremos a seguir.

**Definição 2.4.7** Seja  $X$  um espaço métrico e  $A$  um subconjunto de  $X$ . Nós dizemos que  $A$  é **localmente  $k$ -conexo**, e escrevemos  $A$  é  $k-LC$ , se para cada  $a \in A$  e para cada  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que toda aplicação da  $i$ -esfera  $S^i$  sobre uma vizinhança  $V_\delta(a)$  de  $a$ , pode ser estendida para uma aplicação do  $(i+1)$ -disco  $D^{i+1}$  sobre uma vizinhança  $V_\epsilon(a)$  de  $a$ , para  $i = 1, \dots, k$ . Analogamente, nós dizemos que  $A$  é **localmente  $k$ -coconexo**, e escrevemos  $A$  é  $k-LCC$ , ou equivalentemente, que  $X - A$  é  $k-LC$  em  $A$ , se para cada  $a \in A$  e para cada  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que toda aplicação da  $k$ -esfera  $S^k$  sobre  $V_\delta(a) \cap (X - A)$ , pode ser estendida para uma aplicação do  $k+1$ -disco  $D^{k+1}$  sobre  $V_\epsilon(a) \cap X - A$ .

Em [13], J. Cannon mostra que se  $X$  é uma  $n$ -variedade generalizada satisfazendo a  $DDP$ , então toda função contínua  $f : D^2 \rightarrow X$  pode ser  $\epsilon$ -aproximada por um mergulho  $f' : D^2 \rightarrow X$ , com  $f'(D^2)$   $0-LCC$ . Como toda  $n$ -variedade generalizada,  $n \geq 3$ , tem a  $DAP$ , adaptamos a técnica de J. Cannon para obtermos o mesmo resultado para caminhos  $f : I \rightarrow X$ , como mostra o seguinte

**Teorema 2.4.8** *Seja  $X$  uma  $n$ -variedade generalizada,  $n \geq 3$ . Então todo caminho  $f : I \rightarrow X$  pode ser  $\epsilon$ -aproximado por um caminho  $f' : I \rightarrow X$  tal que  $f'$  é um mergulho e  $f'(I)$  é  $0-LCC$ .*

*Demonstração.* Suponhamos que  $X$  seja equipado com uma métrica completa  $d$ . Sejam  $(I_1, E_1), (I_2, E_2), \dots$  pares de intervalos disjuntos em  $I$  tais que, se  $p$  e  $q$  são pontos distintos em  $I$ , então, para algum  $i$ ,  $p \in I_i$  e  $q \in I_i$ . Dado  $\epsilon_0$ , tomamos  $f_0 = f$ .

Suponhamos indutivamente que  $f_0, \dots, f_{i-1} : I \rightarrow X$  satisfaça a condição

$$f_{i-1}(I_j) \cap f_{i-1}(E_j) = \emptyset, \quad \text{para } j < i. \quad (2.4.4)$$

Escolhemos

$$0 < \epsilon_i < \frac{1}{2} \min\{\epsilon_{i-1}, d(f_{i-1}(I_j), f_{i-1}(E_j)) \mid j < i\} \quad (2.4.5)$$

Como  $X$  possui a *DAP*, podemos aproximar  $f_{i-1}|(I_i)$  e  $f_{i-1}|(E_i)$  para que as imagens de  $I_i$  e  $E_i$  sejam disjuntas. O aproximação se estende para uma aproximação de  $f_{i-1}$  em todo intervalo  $I$ , pois  $X$  é localmente contrátil. Seja  $f_i$  a aproximação final. Nós podemos assumir que  $d(f_{i-1}, f_i) < \epsilon_i$ . A seqüência  $f_0, f_1, \dots$  é uma seqüência de Cauchy, deste modo converge para uma aplicação  $f' : I \rightarrow X$ . Podemos ver que  $f'(I_i) \cap f'(E_i) = \emptyset$  para todo  $i$ . Então  $f'$  é injetora e portanto um mergulho topológico. Mostremos agora que a aproximação  $f'$  pode ser escolhida como sendo 0-LCC. De fato, seja uma seqüência de aplicações  $g_1, g_2, \dots : I \rightarrow X$ , a qual é densa no espaço das funções contínuas de  $I$  sobre  $X$ . Suponhamos adicionalmente que  $f_i(I) \cap g'_i(I) = \emptyset$ , onde  $g'_i$  é uma  $\epsilon_i$ -aproximação para  $g_i$  e que  $\epsilon_i < \frac{1}{2}d(f_{i-1}(I), g'_{i-1}(I))$ . Então a aplicação limite  $f' : I \rightarrow X$  omitirá  $g'_1(I), g'_2(I), \dots$ , ou seja,  $f'(I) \cap g'_i(I) = \emptyset, \forall i$ . Deste modo segue que  $f'$  é 0-LCC.  $\square$

O mergulho topológico construído no Teorema 2.4.8, pode ser escolhido de tal forma que a sua imagem omita um subconjunto fechado  $F$  de dimensão  $\leq n - 1$  em  $X$ , a menos de um conjunto 0-dimensional, como mostra o seguinte teorema

**Teorema 2.4.9** *Seja  $X$  uma  $n$ -variedade generalizada,  $n \geq 3$ , e  $F$  um subconjunto fechado de  $X$  de dimensão  $\geq n - 1$ . Então toda aplicação  $f : I \rightarrow X$  pode ser  $\epsilon$ -aproximada por um 0-LCC mergulho interceptando  $F$  em um conjunto 0-dimensional.*

*Demonstração.* Escolhemos triangulações  $T_0, T_1, T_2, \dots$  para  $I$  de tal forma que  $T_i$  subdivide  $T_{i-1}$  para cada  $i$  e  $\text{mesh}T_i < \frac{1}{i}$ . Seja  $f' = \lim f_i$  construída no Teorema 2.4.8. Usando o fato de que  $X$  é localmente contraível, podemos considerar a menos de homotopia, que cada aplicação  $f_{i-1}$  é tal que  $f_{i-1}(T_{i-1}^{(0)}) \cap F = \emptyset$ , onde  $T_{i-1}^{(0)}$  é o 0-esqueleto da triangulação  $T_{i-1}$ . Escolhemos  $f_i$  satisfazendo a condição adicional

$$d(f_i, f_{i-1}) < \epsilon_i < (1/2)d(f_{i-1}(T_{i-1}^{(0)}), F) \quad (2.4.6)$$

Então,  $f'^{-1}(F)$  é um conjunto 0-dimensional. De fato, dado  $\delta > 0$  seja  $i \in \mathbb{N}$  tal que  $(1/i) < \delta$ , assim existe

$$T_i = \cup \sigma_i \text{ tal que } f'^{-1}(F) \subset \cup \text{Int} \sigma_i. \quad (2.4.7)$$

Como  $f'$  é injetora, temos que  $\dim(\text{Im}(f') \cap F) = 0$ . □

A segunda condição que vamos exigir para que uma  $n$ -variedade generalizada tenha a *DADP* é a seguinte

**Condição 2.** Toda função  $f : D^2 \rightarrow X$  pode ser  $\epsilon$ -aproximada por uma função  $f' : D^2 \rightarrow F_{n-1} \subset X$ , onde  $F_{n-1}$  é um subespaço fechado de  $X$ , com  $\dim(F_{n-1}) \leq n-1$ , e além disso, dado  $G$  um subconjunto 0-dimensional em  $F_{n-1}$ ,  $f'$  pode ser escolhida de tal forma que  $G \cap f'(D^2) = \emptyset$ .

**Teorema 2.4.10** *Seja  $X$  uma  $n$ -variedade generalizada,  $n \geq 4$ . Se  $X$  satisfaz a Condição 2, então  $X$  possui a *DADP*.*

*Demonstração.* Sejam  $f : D^2 \rightarrow X$  e  $g : I \rightarrow X$  funções contínuas sobre  $X$ . Segue da **Condição 2**, que existe uma  $\epsilon$ -aproximação  $f' : D^2 \rightarrow F_{n-1} \subset X$ , onde  $F_{n-1}$  é um subespaço fechado de  $X$ , com  $\dim(F_{n-1}) \leq n-1$ . Pelo Teorema 2.4.9,  $g : I \rightarrow X$  pode ser  $\epsilon$ -aproximada por um mergulho  $g' : I \rightarrow X$ , tal que  $G = g'(I) \cap F_{n-1} \subset F_{n-1}$  é um conjunto 0-dimensional. Além disso,  $f'$  pode ser escolhida de tal forma que  $G \cap f'(D^2) = \emptyset$ . Assim, como  $G = g'(I) \cap F_{n-1}$ , temos

$$\emptyset = (g'(I) \cap F_{n-1}) \cap f'(D^2) = g'(I) \cap f'(D^2). \quad (2.4.8)$$

Portanto  $X$  possui a *DADP*. □

## Capítulo 3

# Uma versão homológica do Teorema da Função Implícita

### 3.1 Introdução

Seja  $f$  uma função contínua de um aberto  $U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  em  $\mathbb{R}^n$ . No teorema clássico da Função Implícita as hipóteses essenciais são a  $C^k$ -diferenciabilidade de  $f$ , para  $1 \leq k \leq \infty$ , e a hipótese de que  $\partial_1 f_{(x_0, y_0)}$  seja um isomorfismo, onde  $(x_0, y_0) \in U$ . Em [31], o autor requer apenas a continuidade da função  $f$ , e a condição de  $f$  ser localmente injetora, quando restrita à primeira coordenada para obter uma generalização do teorema clássico da função implícita.

Nós consideramos  $X, Y, Z$  espaços topológicos e  $f : X \times Y \rightarrow Z$  uma função contínua. Sob certas condições topológicas e homológicas, as quais serão especificadas na seção 3.2, nós provamos uma versão homológica do Teorema da Função Implícita para espaços topológicos gerais, com aplicações na teoria geral de grupos, semi-grupos e monóides topológicos. Na seção 3.3, nós mostramos que o conjunto dos elementos inversíveis de um monóide topológico  $X$  é um grupo topológico o qual é aberto em  $X$  e usamos os resultados da teoria clássica de grupos topológicos para mostrar que este conjunto é um

grupo de Lie ou um grupo de Lie generalizado. Nós também consideramos o caso em que  $X$  é um espaço topológico munido de uma multiplicação contínua com identidade, e resultados similares são obtidos.

Uma classe especial de espaços topológicos que satisfaz as condições do nosso teorema principal é classe das variedades generalizadas definidas no Capítulo 2.

## 3.2 Versão homológica do Teorema da Função Implícita

Nesta seção, nós provaremos um dos teoremas principais do nosso trabalho. Sejam  $X, Y, Z$  espaços topológicos. Dada uma função contínua  $f : X \times Y \rightarrow Z$ , nós definimos as funções contínuas  $\varphi_x : Y \rightarrow Z$  e  $\psi_y : X \rightarrow Z$  por

$$\begin{aligned}\varphi_x(y) &= f(x, y), \text{ para cada } x \in X; \\ \psi_y(x) &= f(x, y), \text{ para cada } y \in Y.\end{aligned}$$

**Teorema 3.2.1 (Teorema da Função Implícita)** *Sejam  $X, Y, Z$  espaços topológicos de Hausdorff, onde  $X$  é localmente conexo por caminhos e  $Y$  é localmente compacto. Seja  $f : X \times Y \rightarrow Z$  uma função contínua e  $z_0 = f(x_0, y_0) \in Z$ , com  $(x_0, y_0) \in X \times Y$ . Suponhamos que  $(\varphi_{x_0})^{-1}(\{z_0\}) = \{y_0\}$  e que  $(\varphi_{x_0})_* : H_n(Y, Y - y_0) \rightarrow H_n(Z, Z - z_0)$  seja um homomorfismo não trivial, para algum natural  $n > 0$ . Então existe uma vizinhança aberta  $V$  de  $x_0$  e uma função  $g : V \rightarrow Y$  tal que  $f(x, g(x)) = z_0$ , para cada  $x \in V$ . Mais ainda,  $g$  é uma função contínua em  $x_0$ .*

*Demonstração.* Desde que  $Y$  é localmente compacto, podemos tomar  $W \subset Y$  uma vizinhança compacta de  $y_0 \in Y$ . Dividiremos a demonstração do teorema em quatro passos.

*Passo 1.* Nós primeiramente mostraremos que para qualquer subconjunto compacto  $K \subset \text{Int}(W)$  contendo  $y_0$  em seu interior, existe uma vizinhança aberta  $V$  de  $x_0$  tal que

$$(\varphi_{x|_W})^{-1}(\{z_0\}) \in K, \quad \forall x \in V. \quad (3.2.1)$$

De fato, suponhamos que para cada vizinhança aberta  $V$  de  $x_0$  existe  $(x_V, y_V)$  em  $X \times (W - K)$  tal que  $f(x_V, y_V) = z_0$ . Consideremos a seqüência generalizada,  $((x_V, y_V))_{V \in \mathcal{V}}$ , onde  $\mathcal{V}$  é a coleção de todas as vizinhanças abertas de  $x_0$ , ordenadas parcialmente pelas inclusões inversas. Deste modo,  $\lim x_V = x_0$  e como  $(y_V)$  é uma seqüência generalizada contida no subconjunto compacto  $W - \text{Int}(K)$ , seja  $y_1 \in W - \text{Int}(K)$  o ponto limite de alguma subseqüência generalizada convergente de  $(y_V)$  garantida pelo Teorema 1.2.14. Então, pela Propriedade 1.2.6,  $(x_0, y_1)$  é ponto limite de alguma subseqüência generalizada de  $(x_V, y_V)$  e como  $f$  é contínua, segue do Teorema 1.2.8 que  $f(x_0, y_1) = \varphi_{x_0}(y_1) = z_0$ , o que implica que  $y_1 = y_0$ , pois por hipótese  $(\varphi_{x_0})^{-1}(\{z_0\}) = \{y_0\}$ . Mas isto contradiz o fato de que  $y_1 \in W - \text{Int}(K)$ . Deste modo, existe uma vizinhança aberta  $V$  de  $x_0$  satisfazendo (3.2.1).

*Passo 2.* Temos que  $Y - W$  é um subconjunto aberto de  $Y$ , pois em particular  $W$  é fechado em  $Y$  e  $\overline{Y - W} \subset \text{int}(Y - y_0) = Y - y_0$ . Assim, desde que

$$(Y - [Y - W], [Y - y_0] - [Y - W]) = (W, W - y_0), \quad (3.2.2)$$

segue da propriedade de excisão que

$$H_n(Y, Y - y_0) \cong H_n(W, W - y_0), \quad (3.2.3)$$

Desde que por hipótese, o homomorfismo  $(\varphi_{x_0})_* : H_n(Y, Y - y_0) \rightarrow H_n(Z, Z - z_0)$  é não trivial, temos que  $(\varphi_{x_0})_* : H_n(W, W - y_0) \rightarrow H_n(Z, Z - z_0)$  não é o homomorfismo nulo. Mais ainda, nós podemos escolher  $K$  “suficientemente pequeno” tal que a composição

$$H_n(W, W - K) \xrightarrow{i_*} H_n(W, W - y_0) \xrightarrow{(\varphi_{x_0})_*} H_n(Z, Z - z_0) \quad (3.2.4)$$

seja não trivial. De fato, seja  $[a] \in H_n(W, W - y_0)$  tal que  $(\varphi_{x_0})_*([a]) \neq 0$ . Desde que  $a$  é um  $n$ -ciclo relativo em  $W \pmod{W - y_0}$ , nós temos que suporte<sup>1</sup>  $|\partial a|$  de  $\partial a$  é um subconjunto compacto contido em  $(W - y_0)$ . Podemos escolher um subconjunto compacto  $K$  contendo  $y_0$  em seu interior tal que  $K$  não intercepta o conjunto  $|\partial a|$  da seguinte forma: para cada  $x \in |\partial a|$ , como  $Y$  é um espaço de Hausdorff, existem vizinhanças abertas  $V_x$  e  $U_x$  de  $x$  e  $y_0$  respectivamente, tais que  $V_x \cap U_x = \emptyset$ . A coleção  $\mathcal{V} = \{V_x\}_{x \in |\partial a|}$  é uma cobertura aberta do conjunto compacto  $|\partial a|$  e deste modo admite uma subcobertura finita  $U_{x_1}, \dots, U_{x_k}$ . Assim  $U = \bigcap_{i=1}^k U_{x_i}$  é uma vizinhança aberta de  $y_0$  que não intercepta  $|\partial a|$  e como  $Y$  é localmente compacto, existe uma vizinhança aberta  $U_0$  de  $y_0$ , tal que  $U_0 \subset \overline{U_0} \subset U$  com  $\overline{U_0}$  compacto. Portanto,  $K = \overline{U_0}$  é um subconjunto compacto contendo  $y_0$  em seu interior que não intercepta o conjunto  $|\partial a|$ . Então, o conjunto  $|\partial a|$  está contido em  $W - K$  e  $\bar{a} = a$  é um  $n$ -ciclo relativo em  $W \pmod{W - K}$ , com  $i_*([\bar{a}]) = [a]$ . Deste modo, a composição em (3.2.4) é não trivial, pois  $(\varphi_{x_0})_*(i_*([\bar{a}])) = (\varphi_{x_0})_*([a]) \neq 0$ . Denotaremos a composição  $(\varphi_{x_0})_* \circ i_*$  por  $(\varphi_{x_0})_*$ .

*Passo 3.* Seja agora,  $K$  o compacto construído no Passo 2 e  $V$  a vizinhança aberta de  $x_0$  associada a  $K$  dada pelo Passo 1. Para cada  $x \in V$ , desde que  $V$  satisfaz (3.2.1), está bem definida a aplicação de pares  $\varphi_x : (W, W - K) \rightarrow (Z, Z - z_0)$ . Como  $X$  é localmente conexo, podemos assumir  $V$  conexa por caminhos e deste modo, para cada  $x$  em  $V$ , existe um caminho  $\alpha$  em  $V$  unindo  $x_0$  a  $x$ . Definimos a homotopia de pares  $H : (W \times I, (W - K) \times I) \rightarrow (Z, Z - z_0)$  dada por

$$H(t, y) = f(\alpha(t), y) = \varphi_{\alpha(t)}(y), \quad \forall (t, y) \in I \times Y. \quad (3.2.5)$$

Então,  $H$  é uma homotopia entre  $\varphi_{x_0}$  e  $\varphi_x$  e segue do axioma da homotopia que  $(\varphi_x)_* = (\varphi_{x_0})_* \neq 0$ . Deste modo, para cada  $x$  em  $V$  o homomorfismo

$$(\varphi_x)_* : H_n(W, W - K) \rightarrow H_n(Z, Z - z_0), \quad (3.2.6)$$

---

<sup>1</sup>Se  $\sigma$  um  $n$ -simplex singular, definimos seu suporte  $|\sigma|$  como sendo  $\sigma(\Delta_n)$ . Para cada  $n$ -cadeia  $c = \sum v_i \sigma_i$ , definimos  $|c| = \cup_i |\sigma_i|$  (para detalhes ver [25])

é não trivial, o que implica que deve existir  $y = g(x)$  em  $K$  tal que  $\varphi_x(g(x)) = f(x, g(x)) = z_0$ . De fato, se não existisse tal  $y = g(x)$ ,  $(\varphi_x)_*$  seria o homomorfismo trivial, pois  $(\varphi_x)_*$  se fatoraria da seguinte forma

$$H_n(W, W - K) \longrightarrow H_n(W, W) \equiv 0 \longrightarrow H_n(Z, Z - z_0)$$

*Passo 4.* Mostremos agora que  $g : V \rightarrow K \subset Y$  é contínua em  $x_0$ . Seja  $A$  uma vizinhança de  $y_0$  tal que  $A \subset K$ . Suponhamos que  $f$  não seja contínua em  $x_0$ , ou seja, que para cada vizinhança aberta  $U$  de  $x_0$  existe  $x_U$  em  $U$  tal que  $g(x_U)$  pertence ao conjunto compacto  $K - A$ . Seja  $y_1$  em  $K - A$  o ponto limite de alguma subsequência generalizada de  $(g(x_U))$ . Então,  $(x_0, y_1)$  é ponto limite de alguma subsequência de  $(x_U, g(x_U))$ . Como  $f$  é contínua e  $g$  é dada implicitamente pela equação  $f(x_U, g(x_U)) = z_0$  nós temos que  $f(x_0, y_1) = z_0$  e assim,  $y_1 = y_0$  o que contradiz o fato de que  $y_1 \in K - A$ .  $\square$

Se no Teorema 3.2.1, substituírmos a hipótese de que  $X$  é localmente conexo por caminhos pela hipótese de que  $X$  é localmente conexo e localmente compacto, usando a homologia de Čech, é possível mostrar que o Teorema 3.2.1 continua válido. Para isto, consideremos os seguintes resultados

**Lema 3.2.2** *Seja  $C$  um espaço de Hausdorff compacto e conexo e seja  $X$  um espaço topológico arbitrário. Dados  $c_0, c_1 \in C$  e  $A$  um subespaço de  $X$ , definimos as funções contínuas  $\theta_0, \theta_1 : (X, A) \rightarrow (C \times X, C \times A)$ , por  $\theta_0(x) = (c_0, x)$  e  $\theta_1(x) = (c_1, x)$ . Então, os homomorfismos induzidos*

$$(\theta_0)_*, (\theta_1)_* : \check{H}_*(X, A) \rightarrow \check{H}_*(C \times X, C \times A) \quad (3.2.7)$$

*coincidem.*

*Demonstração.* Pela compactificação de Stone-Čech (seção 1.4), podemos supor  $C$  um subespaço de  $I^\Lambda$ . Recordemos que  $I^\Lambda$  é um espaço de Hasdorff, compacto conexo e

localmente conexo por caminhos. Consideremos

$$\Gamma = \{V \subset I^A \mid V \text{ é aberto, conexo por caminhos e } C \subset V\}. \quad (3.2.8)$$

Podemos mostrar que para qualquer aberto  $U$  contendo  $C$ , existe  $V \in \Gamma$  tal que  $V \subset U$ ; portanto

$$\bigcap_{V \in \Gamma} V = C \quad (3.2.9)$$

Sabemos que

$$\check{H}_*(C \times X, C \times A) = \varprojlim \check{H}_*(V \times X, V \times A). \quad (3.2.10)$$

As aplicações  $\theta_0$  e  $\theta_1$  consideradas como aplicações de  $X$  em  $V \times X$  são homotópicas. De fato, como  $V$  é uma vizinhança conexa por caminhos, seja  $\alpha$  um caminho em  $V$  unindo  $c_0$  a  $c_1$ . Deste modo a aplicação  $F : (X \times I, A \times I) \rightarrow (C \times X, C \times A)$  dada por  $F(x, t) = (\alpha(t), x)$  é uma homotopia de pares entre  $\theta_0$  e  $\theta_1$ . Assim, segue do axioma da homotopia para a homologia de Čech que

$$\theta_{0*} \equiv \theta_{1*} : \check{H}_*(X, A) \rightarrow \check{H}_*(V \times X, V \times A). \quad (3.2.11)$$

Como  $\check{H}_*(C \times X, C \times A) = \varprojlim \check{H}_*(V \times X, V \times A)$ , segue da propriedade de continuidade da homologia de Čech que tomando o limite inverso em (3.2.11), temos a igualdade

$$\theta_{0*} \equiv \theta_{1*} : \check{H}_*(X, A) \rightarrow \check{H}_*(C \times X, C \times A). \quad (3.2.12)$$

**Teorema 3.2.3** *Sejam  $C$ ,  $X$  e  $Y$  espaços de Hausdorff, com  $C$  compacto e uma função contínua  $f : C \times X \rightarrow Y$ . Dados  $c_0$  e  $c_1$  em  $C$  consideremos as funções contínuas  $\varphi_0, \varphi_1 : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ , onde  $\varphi_{c_0}(x) = f(c_0, x)$  e  $\varphi_{c_1}(x) = f(c_1, x)$  para cada  $x \in X$  e  $A, B$  são subespaços de  $X$  e  $Y$ , respectivamente. Então,*

$$\varphi_{c_0*} \equiv \varphi_{c_1*} : \check{H}_*(X, A) \rightarrow \check{H}_*(Y, B). \quad (3.2.13)$$

*Demonstração.* Temos que  $\varphi_{c_0} = f \circ \theta_0$  e  $\varphi_{c_1} = f \circ \theta_1$ . Pelo Lema 3.2.2,  $\theta_{0*} \equiv \theta_{1*}$ , conseqüentemente,  $\varphi_{c_0*} \equiv \varphi_{c_1*}$ .  $\square$

Consideremos agora, a versão do Teorema 3.2.1 para a homologia de Čech.

**Teorema 3.2.4** *Sejam  $X, Y, Z$  espaços topológicos de Hausdorff, onde  $X$  é localmente conexo e  $X, Y$  são localmente compactos. Seja  $f : X \times Y \rightarrow Z$  uma função contínua e  $z_0 = f(x_0, y_0) \in Z$ , com  $(x_0, y_0) \in X \times Y$ . Suponhamos que  $(\varphi_{x_0})^{-1}(\{z_0\}) = \{y_0\}$  e que  $(\varphi_{x_0})_* : \check{H}_n(Y, Y - y_0) \rightarrow \check{H}_n(Z, Z - z_0)$  seja um homomorfismo não trivial, para algum natural  $n > 0$ . Então existe uma vizinhança aberta  $V_0$  de  $x_0$  e uma função  $g : V_0 \rightarrow Y$  tal que  $f(x, g(x)) = z_0$ , para cada  $x \in V_0$ . Mais ainda,  $g$  é contínua em  $x_0$ .*

*Demonstração.* A prova consiste em repetir os mesmos passos da demonstração do Teorema 3.2.1, adaptando-os para a homologia de Čech, com a hipótese de que  $X$  é localmente conexo e localmente compacto. O Passo 1 permanece idêntico, pois só depende das propriedades topológicas do espaço  $Y$ . O Passo 2 continua válido, pois a homologia de Čech satisfaz o axioma da excisão. Para o Passo 3, devemos considerar o subconjunto compacto dado pelo Passo 2, ou seja,  $K \subset \text{int}(W)$  é um subconjunto compacto contendo  $y_0$  em seu interior tal que o homomorfismo

$$\varphi_{x_0*} : H_n(W, W - K) \rightarrow H_n(Z, Z - z_0) \quad (3.2.14)$$

é não trivial. Seja  $V$  a vizinhança aberta de  $x_0$  associada a  $K$  dada pelo Passo 1. Como  $X$  é localmente conexo e localmente compacto, temos que existe uma vizinhança aberta  $V_0$  de  $x_0$  tal que  $V_0 \subset \overline{V_0} \subset V$ , com  $V_0$  conexa e  $\overline{V_0}$  compacto. Além disso, a aplicação de pares  $\varphi_{x_1} : (W, W - K) \rightarrow (Z, Z - z_0)$  está bem definida, para cada  $x_1$  em  $C = \overline{V_0} \subset V$ , pois  $V$  satisfaz (3.2.1). Segue do Teorema 3.2.4, que para cada  $x_1 \in C$ ,

$$\varphi_{x_0*} \equiv \varphi_{x_1*} : \check{H}_*(X, A) \rightarrow \check{H}_*(Y, B). \quad (3.2.15)$$

Por outro lado, de (3.2.14) temos que  $\varphi_{x_1*} \equiv \varphi_{x_0*} \neq 0$ , e usando argumentos análogos aos do Passo 3 da prova do Teorema 3.2.1, concluímos que para cada  $x \in V_0$  existe

$y = g(x)$  em  $K$  tal que  $\varphi_x(g(x)) = f(x, g(x)) = z_0$ .

Finalizamos a prova do teorema observando que o Passo 4 permanece inalterado, desde que depende apenas das propriedades topológicas dos espaços em questão.  $\square$

**Observação 3.2.5** Consideremos no Teorema 3.2.1,  $Y$  e  $Z$  variedades generalizadas  $n$ -dimensionais. Se  $\varphi_{x_0}$  é localmente injetora, então o homomorfismo

$$(\varphi_{x_0})_* : H_n(Y, Y - y_0) \rightarrow H_n(Z, Z - z_0) \quad (3.2.16)$$

é não trivial. De fato, seja  $U$  uma vizinhança aberta de  $y_0$  tal que  $\varphi_{x_0|_U}$  é injetora. Segue do Teorema Da Invariância do Domínio para variedades generalizadas [9, Corolário 16.19] que  $\varphi_{x_0}(U) = U'$  é um subconjunto aberto em  $Z$ . Deste modo,  $\varphi_{x_0|_U} : U \rightarrow U'$  é um homeomorfismo e  $(\varphi_{x_0})_* : H_n(U, U - y_0) \rightarrow H_n(U', U' - z_0)$  é um isomorfismo não trivial, pois como  $U$  é aberto em  $Y$ , temos que  $U$  é uma  $n$ -variedade generalizada e deste modo  $H_n(Y, Y - y_0) \neq 0$ . Por outro lado, por excisão nós temos que

$$H_n(U, U - x_0) \cong H_n(Y, Y - y_0) \text{ e } H_n(U', U' - z_0) \cong H_n(Z, Z - z_0),$$

e assim, nós concluímos que  $(\varphi_{x_0})_* : H_n(Y, Y - y_0) \rightarrow H_n(Z, Z - z_0)$  é não trivial.

### 3.3 Aplicações

Nesta seção, nós consideramos  $X$  um monóide topológico e usamos a versão homológica do Teorema da Função Implícita (Teorema 3.2.4) para provar que, sob determinadas condições em  $X$ , o conjunto dos elementos inversíveis de  $X$  é um grupo topológico aberto em  $X$ . Além disso, usando a teoria clássica de grupos topológicos, analisaremos quando o grupo dos elementos inversíveis é um grupo de Lie ou um grupo de Lie generalizado. A seguir, daremos um breve descrição da teoria clássica de caracterização de grupos topológicos localmente compactos.

### 3.3.1 Grupos topológicos localmente compactos e o quinto problema de Hilbert

Hilbert propôs o seu famoso quinto problema em 1900, conjecturando o seguinte:

**Conjectura - Quinto Problema de Hilbert.** *Todo grupo localmente euclidiano é um grupo de Lie.*

Em 1933, o problema foi resolvido por von Neumann [41] para grupos compactos e em 1934, Pontrjagin [43] resolveu o problema para grupos de abelianos. No final da década de 40 e início da década de 50, uma série de trabalhos importantes, tratam do problema mais geral de caracterizar um grupo topológico localmente compacto qualquer. Iwasawa [30] e Gleason [24] constroem uma teoria de grupo de Lie generalizado, conhecido como L- grupos de Lie (ver Definição 3.3.4) e propõem a seguinte conjectura, a qual é uma generalização natural do problema de Hilbert:

**Conjectura de Iwasawa-Gleason.** *Todo grupo localmente compacto é um grupo de Lie generalizado.*

Montgomery e Zippin em [32], usando o teorema principal do trabalho de Gleason [24], demonstram a conjectura de Iwasawa-Gleason para o caso finito dimensional provando o seguinte teorema

**Teorema 3.3.1 (Montgomery - Zippin)** *Todo grupo localmente compacto finito dimensional é um grupo de Lie generalizado.*

Uma consequência desse resultado também provada por Montgomery e Zippin em [32] é a seguinte

**Teorema 3.3.2 (Montgomery - Zippin)** *Todo grupo localmente compacto, localmente conexo e finito dimensional é um grupo de Lie.*

Em particular, segue do teorema acima que todo grupo localmente Euclidiano é um grupo de Lie e, dessa forma, o quinto problema de Hilbert foi completamente resolvido.

Yamabe em [50], demonstra o Teorema 3.3.2 sem a hipótese de dimensão finita e dá uma resposta afirmativa para a Conjectura de Iwasawa-Gleason

**Teorema 3.3.3** (Yamabe) *Todo grupo localmente compacto é um grupo de Lie generalizado.*

Assim, todos os problemas concernentes a estrutura dos grupos topológicos localmente compactos foram completamente resolvidos.

Observemos que a definição de um grupo de Lie generalizado, dada por Iwasawa [30] é a seguinte

**Definição 3.3.4** (Grupo de Lie Generalizado) Um grupo  $G$  é um grupo de Lie generalizado ( $L$ - grupo), se  $G$  contém um sistema de subgrupos normais  $N_\alpha$  tal que  $G/N_\alpha$  são grupos de Lie e a interseção de todos os  $N_\alpha$  coincide com a identidade.

### 3.3.2 Monóides Topológicos

Seja  $X$  um monóide topológico, ou seja,  $X$  é um semigrupo com elemento identidade. Denotemos por  $\mathfrak{U}$  o conjunto dos elementos inversíveis de  $X$  e por “ $e$ ” o elemento identidade de  $X$ . O próximo lema é uma das principais aplicações neste trabalho dos Teoremas 3.2.1, 3.2.4 (versão homológica do Teorema da Função Implícita).

**Lema 3.3.5** *Seja  $X$  um monóide localmente compacto e localmente conexo. Suponhamos que  $\check{H}_n(X, X - e) \neq 0$ , para algum natural  $n > 0$ . Então  $\mathfrak{U}$  é aberto em  $X$  e a função  $\mathfrak{I} : \mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{U}$  dada por  $\mathfrak{I}(x) = x^{-1}$  é contínua.*

*Demonstração.* Seja  $f : X \times X \rightarrow X$  a função contínua dada por  $f(x, y) = x * y$ , onde  $*$  é a multiplicação contínua em  $X$ . Seja  $x_0 \in \mathfrak{U}$  arbitrário e  $y_0 = x_0^{-1}$  o inverso de  $x_0$  em  $\mathfrak{U}$ . Consideremos o homeomorfismo  $\varphi_{x_0} : X \rightarrow X$  dado por  $\varphi_{x_0}(x) = x_0 * x$ , para cada  $x \in X$  (a multiplicação à esquerda por  $x_0$ ). Então, nós temos que  $(\varphi_{x_0})^{-1}(\{e\}) = \{y_0\}$

e o isomorfismo

$$(\varphi_{x_0})_* : \check{H}_n(X, X - y_0) \rightarrow \check{H}_n(X, X - e) \quad (3.3.1)$$

é não trivial, desde que por hipótese  $\check{H}(X, X - e) \neq 0$ . Segue do Teorema 3.2.4 que existe uma vizinhança aberta  $V_1$  de  $x_0$  e uma função  $g_1 : V_1 \rightarrow X$  tal que  $f(x, g_1(x)) = x * g_1(x) = e$ , para cada  $x \in V_1$ . Analogamente, considerando o homomorfismo  $\psi_{x_0} : X \rightarrow X$ , dado por  $\psi_{x_0}(x) = x * x_0$  para cada  $x \in X$  (a multiplicação à direita  $x_0$ ), nós temos que o isomorfismo

$$(\varphi_{x_0})_* : \check{H}_n(X, X - y_0) \rightarrow \check{H}_n(X, X - e) \quad (3.3.2)$$

é não trivial e segue do Teorema 3.2.1 que existe uma vizinhança aberta  $V_2$  of  $x_0$  e uma função  $g_2 : V_2 \rightarrow X$  tal que  $f(g_2(x), x) = g_2(x) * x = e$ , para cada  $x \in V_2$ .

Consideremos  $V = V_1 \cap V_2$ . Para cada  $x \in V$  nós temos que

$$x * g_1(x) = e = g_2(x) * x.$$

Segue da propriedade associativa de  $X$  com relação a multiplicação “\*” que

$$g_1(x) = g_2(x) = \mathfrak{I}(x) = x^{-1}, \quad (3.3.3)$$

para cada  $x \in V$ , ou seja, cada elemento  $x \in V$  é inversível, deste modo  $V$  é uma vizinhança aberta de  $x_0$  contida em  $\mathfrak{U}$ , e portanto  $\mathfrak{U}$  é aberto em  $X$ .

Mais ainda, como consideramos  $x_0$  um ponto arbitrário na prova acima e concluimos que  $g_1 = g_2 = \mathfrak{I}$  segue do Teorema 3.2.4 que  $\mathfrak{I} : \mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{U}$  é contínua em  $x_0$ , e portanto contínua. □

Uma conseqüência imediata do Lema 3.2.1 é o seguinte

**Teorema 3.3.6** *Seja  $X$  um monóide localmente compacto e localmente conexo. Suponhamos que  $\check{H}_n(X, X - e) \neq 0$ , para algum natural  $n > 0$ . Então  $\mathfrak{U}$  é um grupo topológico aberto em  $X$ .*

*Demonstração.* Temos que  $\mathfrak{U}$  é um grupo algébrico munido de uma multiplicação contínua “\*” herdada de  $X$ . Como pelo Lema 3.3.5 a aplicação  $\mathfrak{J} : \mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{U}$  é contínua, segue por definição que  $\mathfrak{U}$  é um grupo topológico. O Lema 3.3.5 também garante que  $\mathfrak{U}$  é aberto em  $X$ .  $\square$

**Observação 3.3.7** Consideremos  $(X, +)$ , onde  $X = [0, \infty)$ . Então  $(X, +)$  é um monóide topológico, no entanto,  $\mathfrak{U} = \{0\}$  não é aberto em  $X$ . Observemos que  $X$  não satisfaz a hipótese homológica essencial do Lemma 3.3.5, pois  $H_n(X, X - 0) = 0$ , para qualquer número natural  $n$ .

Nos próximos teoremas usaremos o Teorema 3.3.6 e os resultados da subseção 3.3.1 para concluir quando  $X$  ou  $\mathfrak{U}$  é um grupo de Lie ou um grupo de Lie generalizado.

**Teorema 3.3.8** *Seja  $X$  um monóide topológico compacto e conexo. Suponhamos que  $X$  seja localmente conexo de dimensão finita. Se  $\check{H}_n(X, X - e) \neq 0$ , para algum natural  $n > 0$ , então  $X$  é um grupo de Lie.*

*Demonstração.* Segue do Teorema 3.3.6, que  $\mathfrak{U}$  é um grupo topológico aberto em  $X$ . Mostremos que  $\mathfrak{U}$  também é fechado em  $X$ . De fato, seja  $(x_\alpha)$  uma seqüência generalizada em  $\mathfrak{U}$  com  $x_\alpha \rightarrow x$  e deste modo, existe uma seqüência generalizada  $(x_\alpha^{-1})$  em  $X$  tal que  $x_\alpha * x_\alpha^{-1} = e$ , para todo  $\alpha$ . Como  $X$  é compacto, seja  $y$  o ponto limite de alguma subseqüência generalizada convergente de  $(x_\alpha^{-1})$ . Da continuidade da multiplicação “\*”, nós temos que  $x * y = e$ , então  $x \in \mathfrak{U}$  e  $\mathfrak{U}$  é fechado em  $X$ .

Como  $X$  é conexo, segue que  $X = \mathfrak{U}$  e deste modo  $X$  é um grupo localmente compacto, localmente conexo de dimensão finita, então pelo Teorema 3.3.2  $X$  é um grupo de Lie.  $\square$

**Corolário 3.3.9** *Seja  $M$  um monóide topológico, onde  $M$  é  $n$ -dimensional variedade generalizada compacta e conexo. Então  $M$  é um grupo de Lie.*

*Demonstração.* A prova é uma consequência imediata do Teorema 3.3.8, observando que sendo  $M$  uma  $n$ -variedade generalizada,  $H_n(M, M - e) \neq 0$  e  $M$  é localmente conexa.  $\square$

**Observação 3.3.10** Em particular, segue do Corolário 3.3.9 que se  $M$  for  $n$ -dimensional variedade topológica compacta e conexa que admite uma estrutura de monóide topológico, então  $M$  é um grupo de Lie. Este resultado foi provado por Mostert e Shields em [34].

No caso em que  $X$  não é necessariamente compacto, nós temos os seguintes teoremas

**Teorema 3.3.11** *Seja  $X$  um monóide localmente compacto, comutativo satisfazendo o primeiro axioma de enumerabilidade. Suponhamos que  $X$  seja localmente conexo. Se  $\check{H}_n(X, X - e) \neq 0$ , para algum natural  $n > 0$ , então  $\mathfrak{U}$  é um grupo de Lie.*

*Demonstração.* Segue do Teorema 3.3.6 que  $\mathfrak{U}$  é um grupo topológico aberto em  $X$ . Assim,  $\mathfrak{U}$  é um grupo comutativo, localmente conexo satisfazendo o primeiro axioma de enumerabilidade, implicando que  $\mathfrak{U}$  é de dimensão finita, e conseqüentemente do Teorema 3.3.2 é um grupo Lie.  $\square$

**Teorema 3.3.12** *Seja  $X$  um monóide topológico localmente compacto. Suponhamos que  $X$  seja localmente conexo de dimensão finita. Se  $\check{H}_n(X, X - e) \neq 0$ , para algum natural  $n > 0$ , então  $\mathfrak{U}$  é um grupo de Lie.*

*Demonstração.* Segue do Teorema 3.3.6 que  $\mathfrak{U}$  é um grupo topológico aberto em  $X$ . Deste modo,  $\mathfrak{U}$  é um grupo topológico localmente compacto, localmente conexo de dimensão finita. Do Teorema 3.3.2  $\mathfrak{U}$  é um grupo de Lie.  $\square$

**Observação 3.3.13** Mostert e Shields em [36], provaram que se  $M$  é uma  $n$ -dimensional variedade topológica, então  $\mathfrak{U}$  é aberto em  $M$  e é um grupo de Lie. O Teorema 3.3.12 tem como consequência este resultado, um vez que, se  $M$  for  $n$ -dimensional variedade topológica todas as suas hipóteses são atendidas.

Se retirarmos as hipóteses de local conexidade e de dimensão finita do Teorema 3.3.12, nós temos o seguinte

**Teorema 3.3.14** *Seja  $X$  um monóide topológico localmente compacto. Se para algum natural  $n > 0$   $\check{H}_n(X, X - e) \neq 0$ , então  $\mathfrak{U}$  é um grupo de Lie generalizado.*

*Demonstração.* Segue do Teorema 3.3.6 que  $\mathfrak{U}$  é um grupo topológico aberto em  $X$ . Deste modo,  $\mathfrak{U}$  é um grupo topológico localmente compacto. Segue do Teorema 3.3.3 que  $\mathfrak{U}$  é um grupo de Lie generalizado.  $\square$

### 3.3.3 Espaços topológicos com multiplicação

Nesta seção, aplicaremos o Teorema 3.2.1 (versão homológica do Teorema da Função Implícita) para espaços com multiplicação e elemento identidade. Podemos supor que a multiplicação no espaço não tenha propriedade associativa, caso contrário  $X$  será um monóide topológico e esta situação já foi abordada na seção anterior. Definiremos a seguir a noção de elementos “inversíveis” para tais espaços.

**Definição 3.3.15** *Seja  $X$  um espaço com multiplicação e elemento identidade  $e \in X$ . Um elemento  $x \in X$  é **inversível** se existem  $y_1, y_2 \in X$  tais que*

$$x * y_1 = e = y_2 * x.$$

Seja  $\mathfrak{U}$  o conjunto dos elementos inversíveis em  $X$ .

Até o final desta seção, a terna  $(X, *, e)$  representará um espaço  $X$  com multiplicação e elemento identidade  $e \in X$ . Usaremos o Teorema 3.2.1 para obter resultados similares aos obtidos na seção anterior para o espaço  $\mathfrak{U}$ .

**Lema 3.3.16** *Sejam  $(X, *, e)$  um espaço localmente compacto, localmente conexo e  $\varphi_x$  and  $\psi_x$  as multiplicações à esquerda e à direita por  $x$ , respectivamente. Suponhamos que  $\check{H}_n(X, X - e) \neq 0$  para algum natural  $n > 0$ . Se  $\varphi_x$  e  $\psi_x$  são bijeções, para cada  $x \in \mathfrak{U}$ , então  $\mathfrak{U}$  é aberto em  $X$ .*

*Demonstração.* Consideremos  $f : X \times X \rightarrow X$  dada por  $f(x, y) = x * y$ . Seja  $x_0 \in \mathfrak{U}$ , então existem  $y_0, z_0 \in X$  tais que  $x_0 * y_0 = e = z_0 * x_0$ . Como  $\varphi_{x_0}$  e  $\psi_{x_0}$  são homeomorfismos e  $\check{H}_n(X, X - e) \neq 0$ , os isomorfismos

$$(\varphi_{x_0})_* : \check{H}_n(X, X - y_0) \rightarrow \check{H}_n(X, X - e)$$

$$(\psi_{x_0})_* : \check{H}_n(X, X - z_0) \rightarrow \check{H}_n(X, X - e)$$

são não triviais. Segue do Teorema 3.2.4 que existem vizinhanças  $V$  de  $x_0$  e funções  $g_1 : V \rightarrow X, g_2 : V \rightarrow X$  tais que para cada  $x \in V$ ,

$$x * g_1(x) = e = g_2(x) * x.$$

Deste modo,  $V$  é uma vizinhança aberta de  $x_0$  contida em  $\mathfrak{U}$  e nós concluímos que  $\mathfrak{U}$  é aberto em  $X$ . □

**Observação 3.3.17** Os números de Cayley satisfazem as hipóteses Lema 3.3.16, pois eles formam uma álgebra de divisão real. No conjunto dos números reais, é possível definir uma multiplicação não associativa com elemento identidade satisfazendo as condições do Lema 3.3.16. Em [1], os autores obtiveram uma seqüência  $\{A_n\}$  de álgebras com identidade,  $A_n$  de dimensão  $2^n$ , sobre um corpo  $\mathbb{F}$ , tal que em cada  $A_n$  todo elemento não nulo tem um inverso multiplicativo, no entanto cada  $A_n, n > 3$ , contém divisores próprios de zero, o que implica que  $\varphi_x, \psi_x$  não são bijeções, para algum elemento inversível  $x$ .

**Corolário 3.3.18** *Seja  $(X, *, e)$  uma  $n$ -dimensional variedade generalizada. Se  $\varphi_x, \psi_x$  são injetoras, para cada  $x \in X$ , então  $\mathfrak{U}$  é aberto em  $X$ .*

*Demonstração.* Seja  $x_0 \in \mathfrak{U}$  arbitrário. Como  $\varphi_{x_0}$  e  $\psi_{x_0}$  são injetoras, segue do Teorema da Invariância do Domínio para variedades generalizadas [9, Corollary 16.19] que  $\varphi_{x_0}(X) = U$  e  $\psi_{x_0}(X) = U'$  são subconjuntos abertos em  $X$ , deste modo por excisão, nós temos que

$$H_n(U, U - e) \cong H_n(X, X - e) \cong H_n(U', U' - e)$$

e os homomorfismos

$$(\varphi_{x_0})_* : H_n(X, X - y_0) \rightarrow H_n(X, X - e)$$

$$(\psi_{x_0})_* : H_n(X, X - z_0) \rightarrow H_n(X, X - e)$$

são não triviais. Segue do Teorema 3.2.1 que existe uma vizinhança aberta  $V$  de  $x_0$  e funções  $g_1 : V \rightarrow X$ ,  $g_2 : V \rightarrow X$  tais que para cada  $x \in V$ ,

$$x * g_1(x) = e = g_2(x) * x.$$

Assim,  $V$  é uma vizinhança aberta de  $x_0$  contida em  $\mathfrak{U}$  e nós concluimos que  $\mathfrak{U}$  é aberto em  $X$ . □

**Lema 3.3.19** *Seja  $(X, *, e)$  um espaço compacto. Se  $X$  é um loop algébrico, então  $X$  é um loop topológico.*

*Demonstração.* Como  $*$  é uma multiplicação em  $X$ , é suficiente provar que as funções  $g, h : X \times X \rightarrow X$  são contínuas, onde para cada  $(x, z) \in X \times X$ ,  $g(x, z)$  e  $h(x, z)$  são as únicas soluções das equações

$$x * g(x, z) = z \quad h(x, z) * x = z$$

Nós mostraremos que *dada qualquer vizinhança  $V$  de  $y_0 = g(x_0, z_0)$ , existem vizinhanças  $U$  e  $W$  de  $x_0$  e  $z_0$ , respectivamente, tais que*

$$(\varphi_x)^{-1}(W) \subset V, \forall x \in V$$

e deste modo, se  $x \in U$  e  $z \in W$ , então  $g(x, y) \in V$ , ou seja,  $g$  é contínua em  $(x_0, z_0)$ . De fato, suponhamos que para qualquer vizinhança  $V$  de  $x_0$  e para qualquer vizinhança  $W$  de  $z_0$ , existem  $(x_U, z_W) \in U \times W$  tais que  $(\varphi_{x_U})^{-1}(z_W) \notin V$ . Então, existe um seqüência generalizada  $(g(x_U, z_w)) \in X - V$  com

$$x_U * g(x_U, z_W) = z_W.$$

Como  $X - V$  é compacto, seja  $y_1 \in X - V$  o ponto limite de alguma subsequência generalizada convergente de  $(g(x_U, z_V))$ . Mais ainda, nós temos que  $\lim x_U = x_0$  e  $\lim z_W = z_0$ , segue da continuidade da multiplicação “\*” que  $x_0 * y_1 = z_0$ , implicando que  $y_1 = y_0$ . Isso contradiz o fato de que  $y_1 \in X - V$ . Analogamente,  $h$  é contínua.  $\square$

**Observação 3.3.20** As funções  $g$  e  $h$  da demonstração acima, representam na definição de quase-grupo (Definição 1.3.1) as funções  $Q_2$  e  $Q_3$ , respectivamente.

**Teorema 3.3.21** *Seja  $(X, *, e)$  um espaço compacto, conexo e localmente conexo. Suponhamos que para algum natural  $n > 0$ ,  $\check{H}_n(X, X - \{e\}) \neq 0$ . Se  $\varphi_x, \psi_x$  são bijeções para qualquer  $x \in \mathfrak{U}$ , então  $\mathfrak{U} = X$ . Conseqüentemente,  $X$  é um loop topológico.*

*Demonstração.* Pelo Lema 3.3.16  $\mathfrak{U}$  é um subconjunto aberto em  $X$ . Nós mostraremos que  $\mathfrak{U}$  é fechado em  $X$ . Seja  $(x_\alpha)$  uma seqüência generalizada em  $\mathfrak{U}$  com  $x_\alpha \rightarrow x$ . Deste modo, existem subsequências generalizadas  $(y_\alpha), (z_\alpha)$  em  $X$  tais que

$$x_\alpha * y_\alpha = e = z_\alpha * x_\alpha, \quad \forall \alpha. \quad (3.3.4)$$

Como  $X$  é compacto, seja  $y$  o ponto limite de alguma subsequência generalizada de  $(y_\alpha)$  e seja  $z$  o ponto limite de alguma subsequência generalizada de  $(z_\alpha)$ . Da continuidade da multiplicação “\*”, nós temos que  $x * y = e = z * x$ , implicando que  $x \in \mathfrak{U}$  e portanto  $\mathfrak{U}$  é fechado. Como  $X$  é conexo, segue que  $X = \mathfrak{U}$ . Deste modo,  $\varphi_x, \psi_x$  são bijeções para qualquer  $x \in X$ , então nós concluímos que  $X$  é um loop algébrico. Pelo Lema 3.3.19,  $X$  é um loop topológico.  $\square$

## Capítulo 4

# Teoremas de Funções Abertas e Generalizações do Teorema de Darboux

### 4.1 Introdução

Nesta seção, nós provaremos alguns Teoremas de funções abertas e generalizações do Teorema clássico de Darboux. Esses Teoremas são provados apenas assumindo a hipótese de diferenciabilidade da função (não necessariamente  $C^1$ ) ou continuidade da função com algumas condições. Para a demonstração desses resultados, é fundamental o conceito de grau local, o qual apresentaremos a seguir.

### 4.2 O conceito de grau local

Os resultados a seguir, são conhecidos para variedades topológicas e diferenciáveis, no entanto, utilizando a definição de orientabilidade para variedades generalizadas (ver [9]), os mesmos são válidos para tais espaços.

Sejam  $X$  e  $Y$   $n$ -dimensionais variedades generalizadas conexas e orientadas de dimensão  $n \geq 1$  e  $f : X \rightarrow Y$  uma função contínua.

**Definição 4.2.1** Seja  $y \in Y$  tal que  $L_y = f^{-1}(y)$  é um subconjunto compacto de  $X$ . Sejam  $\alpha_{L_y} \in H_n(X, X - L_y)$  e  $\beta_y \in H_n(Y, Y - y)$  as classes de orientação ao longo de  $L_y$  e em  $y$ , respectivamente. Existe um número inteiro  $\deg(f, y)$  tal que  $f_*(\alpha_{L_y}) = \deg(f, y) \cdot \beta_y$ , onde  $f_* : H_n(X, X - L_y) \rightarrow H_n(Y, Y - y)$  é o homomorfismo induzido por  $f$ . O número  $\deg(f, y)$  é chamado **grau de  $f$  em  $y$** .

**Definição 4.2.2** Dizemos que  $f$  é **discreta** em  $x_0$ , se existe uma vizinhança  $V$  de  $x_0$  tal que para todo  $x \in V - x_0$ ,  $f(x) \neq f(x_0)$ , ou equivalentemente,  $f^{-1}(f(x_0)) \cap V - x_0 = \emptyset$ . Um função  $f$  é discreta se ela for discreta em todos os pontos de seu domínio.

**Definição 4.2.3** Dizemos que  $f$  é **light**, se  $\dim(f^{-1}(y)) \leq 0$ , para todo  $y \in Y$ .

**Definição 4.2.4** Suponhamos que  $f$  seja discreta em  $x_0$ . Denotemos  $y_0 = f(x_0)$  e sejam  $\alpha_{x_0} \in H_n(V, V - x_0)$  e  $\beta_{y_0} \in H_n(Y, Y - y_0)$  as classes de orientação em  $x_0$  e  $y_0$ , respectivamente. Existe um número inteiro  $\deg(f, x_0)$  tal que  $f_*(\alpha_{x_0}) = \deg(f, x_0) \cdot \beta_{y_0}$ , onde  $f_* : H_n(V, V - x_0) \rightarrow H_n(Y, Y - y_0)$ . Nós dizemos que  $\deg(f, x_0)$  é o **grau local de  $f$  em  $x_0$** .

Daremos agora, algumas propriedades dos números  $\deg(f, y)$  e  $\deg(f, x_0)$ .

**Lema 4.2.5** *Sejam  $X$  e  $Y$  variedades generalizadas conexas e orientadas de dimensão  $n \geq 1$  e  $f : X \rightarrow Y$  uma função contínua e  $y \in Y$  tal que  $f^{-1}(y)$  é um conjunto finito. Então,*

$$\deg(f, y) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \deg(f, x) \tag{4.2.1}$$

**Proposição 4.2.6** *Sejam  $X$  e  $Y$  variedades generalizadas orientadas de dimensão  $n \geq 1$  e  $f : X \rightarrow Y$  uma função contínua e  $K$  um subconjunto compacto e conexo de  $Y$  tal que  $L_K = f^{-1}(K)$  é compacto. Então,  $\deg(f, y)$  de  $y \in K$ .*

Se  $Y$  for uma variedade generalizada conexa, segue da Proposição 4.2.6 o seguinte

**Corolário 4.2.7** *Sejam  $X$  e  $Y$  variedades topológicas conexas e orientadas de dimensão  $n \geq 1$  e  $f : X \rightarrow Y$  uma função contínua própria. Então,  $\deg(f, y)$  não depende de  $y \in Y$  e  $\deg(f, y) = \deg(f)$ , onde  $\deg f$  é o grau  $f$ .*

### 4.3 Teoremas de Funções Abertas

O Teorema 4.3.3 foi provado em [42], no caso em que  $f$  é de classe  $C^1$ . O fato de  $f$  ser de classe  $C^1$  permitiu que os teoremas da Função Inversa e de Sard fossem aplicados. No entanto, em [14, 33], foi provado o teorema de Sard para funções apenas diferenciáveis e em [4] os autores mostram que se o conjunto dos pontos regulares for aberto e denso, então  $f$  é localmente inversível neste conjunto. Usaremos esses fatos para provar Teorema 4.3.3.

Consideremos primeiramente o seguinte lema

**Lema 4.3.1** *Sejam  $X, Y$  espaços topológicos, com  $X$  compacto e  $f : X \rightarrow Y$  uma função contínua. Se  $f$  é discreta em um ponto  $x_0 \in X$  então dada uma vizinhança aberta  $V$  contendo  $x_0$  existe uma vizinhança aberta  $W$  contendo  $y_0 = f(x_0)$  tal que  $f^{-1}(W) \subset V$ .*

*Demonstração.* Suponhamos que dado uma vizinhança aberta  $V$  contendo  $x_0$ , para toda vizinhança aberta  $W$  contendo  $y_0$  existe  $x_w$  tal que  $x_w \notin V$  e  $f(x_w) \in W$ . O conjunto

$$\Gamma = \{W \subset Y \mid y_0 \in W\}$$

é um sistema direto com a inclusão inversa. Deste modo,  $(x_w)_{w \in \Gamma}$  é uma seqüência generalizada em  $X$  compacto. Seja  $x' \in X - V$  o ponto limite de alguma subsequência convergente de  $(x_w)_{w \in \Gamma}$ . Mostremos que  $f(x') = y_0$ . De fato, se  $f(x') \neq y_0$  existem

abertos disjuntos  $W_1$  e  $W_2$ , com  $y_0 \in W_1$  e  $f(x') \in W_2$ . Como  $f$  é contínua em  $x_0$  e  $x'$ , existem vizinhanças abertas  $V_1$  e  $V_2$  contendo  $x_0, x'$ , respectivamente, tais que

$$f(V_1) \subset W_1 \quad \text{e} \quad f(V_2) \subset W_2$$

Como  $x'$  é ponto limite da seqüência generalizada  $(x_w)_{w \in \gamma}$ , e  $V_1$  é uma vizinhança de  $x_0$ , existe  $W \subset W_2$  tal que  $x_w \in V_1$  e  $f(x_w) \in W \subset W_2$ , então  $f(x_w) \in W_1$  e  $f(x_w) \in W_2$ , o que é uma contradição pois  $W_1 \cap W_2 = \emptyset$ . Portanto,  $f(x') = y_0$  o que implica por hipótese que  $x' = x_0$ , mas isso contradiz o fato de  $x' \in X - V$ . □

**Definição 4.3.2** Uma função contínua  $f : X \rightarrow Y$  entre espaços topológicos  $X$  e  $Y$  é dita ser **aberta**, se para qualquer aberto  $U$  em  $X$ , temos que  $f(U)$  é aberto em  $Y$ .

**Teorema 4.3.3** *Sejam  $M^n$  e  $N^n$  variedades diferenciáveis orientadas com  $N$  conexa e  $f : M \rightarrow N$  uma aplicação diferenciável tal que :*

- (1) *O conjunto dos pontos regulares de  $f$  é denso.*
- (2) *Para cada ponto regular  $x \in M$ ,  $f'(x) : T_x(M) \rightarrow T_{f(x)}N$  preserva orientação.*
- (3) *Para todo  $y \in N$ ,  $\dim f^{-1}(y) \leq 0$ , ou seja,  $f$  é light.*

*Então  $f$  é uma aplicação aberta.*

*Demonstração.* Seja  $U$  um aberto de  $M$  e mostraremos que  $f(U)$  é um aberto de  $N$ . Consideremos  $y_0 = f(x_0) \in f(U)$ . Como  $\dim f^{-1}(y_0) \leq 0$  e  $M$  é localmente compacto, existe uma vizinhança aberta  $V$  de  $x_0$ , com

$$\partial(V) \cap f^{-1}(y_0) = \emptyset, \text{ e } \bar{V} \text{ compacto.} \tag{4.3.1}$$

Deste modo,  $(f|_V)^{-1}(y_0) \subset V \subset \bar{V}$  é compacto e como  $M$  é um espaço topológico normal, existe um aberto  $V'$  com  $(f|_V)^{-1}(y_0) \subset V' \subset \bar{V}'$  e  $\bar{V}'$  compacto. Segue do Lema 4.3.1 que existe um aberto  $W$  de  $N$  contendo  $y_0$  com  $\bar{W}$  conexo e compacto satisfazendo  $(f|_V)^{-1}(\bar{W}) \subset V' \subset \bar{V}' \subset V$ , e assim,  $(f|_V)^{-1}(\bar{W})$  é compacto e nós temos do Proposição 4.2.6 que

$$\deg(f|_V, \overline{W}) = \deg(f|_V, y) = \deg(f|_V, y_0), \quad \forall y \in \overline{W} \quad (4.3.2)$$

Por outro lado,  $(f|_V)^{-1}(W)$  é um aberto em  $V$  e a condição (1) implica que existe  $p \in (f|_V)^{-1}(W)$ , onde  $p$  é um ponto regular de  $f$ , e segue de [4] que  $f$  é um homeomorfismo local em  $p$ , ou seja, existe  $A \subset V$  aberto tal que  $f|_A : A \rightarrow f|_V(A)$  é um homeomorfismo. Do Teorema de Sard, temos que existe  $c \in f|_V(A) \subset W$ , com  $c$  valor regular de  $f|_V$  e  $(f|_V)^{-1}(c) \neq \emptyset$ . Como, pela condição (2),  $f'(x)$  preserva orientação nos pontos regulares, temos que  $\deg(f|_V, c) \neq 0$ , e então  $\deg(f|_V, y) \neq 0$  para todo  $y$  em  $W$  implicando que dado  $y \in W$ , existe  $x \in V$  tal que  $f(x) = y$ . Portanto,  $y_0 \in W \subset f(U)$  e concluímos que  $f$  é aberta. □

O próximo teorema nos dá condições para que uma função apenas contínua seja uma função aberta.

**Definição 4.3.4** Seja  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma função contínua. Para  $x_0 \in U$  e  $v \in \mathbb{R}^n$  denotemos por

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t} \quad (4.3.3)$$

quando o limite existe. Se  $f$  é diferenciável, então  $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0)$  é a derivada direcional de  $f$  no ponto  $x_0$  na direção do vetor  $v$ .

**Teorema 4.3.5** *Seja  $U$  um aberto de  $\mathbb{R}^n$  e  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma função contínua.*

*Suponhamos que:*

(1) *Para todo  $x \in U$  existam  $\frac{\partial f}{\partial u_i}(x)$ , tal que  $\left\{ \frac{\partial f}{\partial u_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial u_n}(x) \right\}$  seja uma base de  $\mathbb{R}^n$ ;*

(2) *Para todo  $x \in U$ ,  $x$  é um ponto isolado de  $f$ .*

*Então  $f$  é uma aplicação aberta.*

*Demonstração.* Basta provarmos que para cada  $x_0 \in U$ , existe um aberto  $V$  contendo  $f(x_0)$  tal que  $V \subset f(U)$ . Como  $x$  é um ponto isolado de  $f$ , existe um disco  $W$  contendo

$x_0$  tal que  $f^{-1}(f(x_0)) \cap \partial\bar{W} = x_0$ . Deste modo, temos que  $f(\partial\bar{W})$  não intercepta o ponto  $f(x_0)$  e podemos escolher um disco  $V$  de raio  $r < \frac{1}{2}d(f(\partial\bar{W}), f(x_0))$  contendo  $f(x_0)$  tal que  $\bar{V} \cap f(\partial\bar{W}) = \emptyset$  e mostremos que se  $\tilde{y} \in V$  então  $\tilde{y} \in f(\bar{W})$ .

Definimos  $h : \bar{W} \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$h(x) = \| -\tilde{y} + f(x) \|^2 = \langle -\tilde{y} + f(x), -\tilde{y} + f(x) \rangle \quad (4.3.4)$$

Seja  $\tilde{x} \in \bar{W}$  um ponto de mínimo de  $h$ , então  $h(\tilde{x}) \leq h(x_0) = \| -\tilde{y} + f(x_0) \|^2$ , ou seja,

$$d(f(\tilde{x}), \tilde{y}) \leq d(f(x_0), \tilde{y}) \quad (4.3.5)$$

Temos que  $\tilde{x} \notin \partial\bar{W}$ . De fato, se  $\tilde{x} \in \partial\bar{W}$ , então  $f(\tilde{x}) \in f(\partial\bar{W})$  e de (4.3.5) temos

$$\begin{aligned} d(f(\partial\bar{W}), f(x_0)) &\leq d(f(\tilde{x}), f(x_0)) \\ &\leq d(f(\tilde{x}), \tilde{y}) + d(\tilde{y}, f(x_0)) \\ &\leq 2d(\tilde{y}, f(x_0)) \\ &\leq 2r \end{aligned} \quad (4.3.6)$$

Mas isso contradiz o fato de que  $r < \frac{1}{2}d(f(\partial\bar{W}), f(x_0))$ , e assim  $\tilde{x} \in W$ .

Sejam  $u_1, \dots, u_n$  vetores de  $\mathbb{R}^n$  tais que

$$\left\{ \frac{\partial f}{\partial u_1}(\tilde{x}), \dots, \frac{\partial f}{\partial u_n}(\tilde{x}) \right\} \quad (4.3.7)$$

seja uma base de  $\mathbb{R}^n$ . Como  $\tilde{x}$  é um ponto de mínimo, temos que  $\frac{\partial h}{\partial u_n}(\tilde{x}), \dots, \frac{\partial h}{\partial u_1}(\tilde{x})$  são nulos e aplicando a regra da cadeia segue que

$$0 = \frac{\partial h}{\partial u_i}(\tilde{x}) = 2 \left\langle \frac{\partial f}{\partial u_i}(\tilde{x}), \tilde{y} - f(\tilde{x}) \right\rangle \quad (4.3.8)$$

Por outro lado, existem  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  tais que  $\tilde{y} - f(\tilde{x}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial f}{\partial u_i}(\tilde{x})$  e assim temos

$$\begin{aligned} 0 &= \left\langle \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial f}{\partial u_i}(\tilde{x}), \tilde{y} - f(\tilde{x}) \right\rangle \\ &= \left\langle \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial f}{\partial u_i}(\tilde{x}), \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial f}{\partial u_i}(\tilde{x}) \right\rangle \\ &= \langle \tilde{y} - f(\tilde{x}), \tilde{y} - f(\tilde{x}) \rangle \\ &= \| \tilde{y} - f(\tilde{x}) \|^2 \end{aligned}$$

Portanto,  $\tilde{y} = f(\tilde{x})$  e  $V \subset f(U)$ , o que completa a prova.  $\square$

O seguinte exemplo, mostra a importância da hipótese dos pontos serem isolados no Teorema 4.3.5.

**Exemplo 4.3.6** Seja  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$g(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \\ \frac{xy^2}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \end{cases} \quad (4.3.9)$$

Se  $v = (a, b)$ , com  $\|v\| = 1$  então  $\frac{\partial g}{\partial v}(0, 0) = ab^2$ . Seja  $f(x, y) = (x, g(x, y))$  e podemos verificar que  $\frac{\partial f}{\partial v}(0, 0) = ab^2$ . Deste modo, considerando os vetores  $v_1 = (1, 0)$  e  $v_2 = (1/2, \sqrt{3}/2)$ , temos que

$$\left\{ \frac{\partial f}{\partial v_1}(0, 0), \frac{\partial f}{\partial v_2}(0, 0) \right\} = \{(1, 0), (1/2, 3/8)\} \quad (4.3.10)$$

formam uma base de  $\mathbb{R}^2$ . No entanto,  $f$  não é discreta em  $(0, 0)$ , pois  $f^{-1}\{(0, 0)\} = \{(0, y) | y \in \mathbb{R}\}$ . Vemos que  $f$  não é aberta, pois  $f$  aplica o ponto da forma  $(0, y)$  em  $(0, 0)$ . Esse exemplo ilustra a importância da hipótese de  $f$  ser discreta no Teorema 4.3.5. Observemos que como  $g$  não é diferenciável, então  $h$  não é diferenciável.

## 4.4 Generalizações do Teorema de Darboux

O teorema clássico de Darboux nos diz que

**Teorema 4.4.1** (Teorema de Darboux) *Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável. Se  $f'(a) < 0$  e  $f'(b) > 0$  então existe  $c \in (a, b)$  tal que  $f'(c) = 0$ .*

Em [4] e [49], foi provada a seguinte generalização do teorema de Černavskii [16]

**Teorema 4.4.2** (Černavskii) *Sejam  $M$  e  $N$   $n$ -dimensionais variedades generalizadas e  $f : M \rightarrow N$  uma função aberta e discreta. Então  $\dim(f(B_f)) \leq n - 2$  e  $\dim(B_f) \leq n - 2$ , onde  $B_f = \{x \in M \mid f \text{ não é homeomorfismo local em } x\}$*

Uma consequência do Teorema 4.4.2 é o seguinte

**Corolário 4.4.3** *Sejam  $M, N$   $n$ -dimensionais variedades generalizadas conexas e orientadas e  $f : M \rightarrow N$  uma função aberta e discreta. Então,  $\deg(f, x) \neq 0$  para todo  $x \in M^n$  e  $\deg(f, x)$  não muda de sinal.*

*Demonstração.* Segue do Teorema 4.4.2 que  $\dim B_f \leq n - 2$ , então  $M - B_f$  é conexo; e portanto, como  $f$  é um homeomorfismo local em  $M - B_f$ , temos que  $\deg(f, x) = c$  para cada  $x \in M - B_f$ , onde  $c = 1$  ou  $c = -1$ .

Seja  $x_0 \in B_f$ , como  $f$  é discreta, consideremos  $V$  uma vizinhança aberta de  $x_0$ , tal que  $f(x) \neq f(x_0)$ , para todo  $x \in V$ . Seja  $y_0 = f(x_0)$ , desde que  $f(V)$  é aberto e  $N - f(B_f)$  é denso em  $N$ , existe  $y_1 \in f|_V(V) - f(B_f)$  tal que

$$\deg(f|_U, y_0) = \deg(f|_U, y_1)$$

para alguma vizinhança  $U$  de  $x_0$ , com  $U \subset V$ . Sejam  $f^{-1}(y_1) = \{x_1, \dots, x_n\} \subset M - B_f$ .

Então,

$$\deg(f, x_0) = \deg(f|_U, y_0) = \deg(f|_U, y_1) = \sum_{x_i \in f^{-1}(y_1)} \deg(f|_U, x_i),$$

e como cada  $x_i \in M - B_f$ ,  $\deg(f, x_i) = c$  para cada  $x \in M - B_f$ , onde  $c = 1$  ou  $c = -1$ . Portanto,  $\deg(f, x)$  não muda de sinal para todo  $x \in M$ .  $\square$

Estenderemos agora a noção de grau para uma função não necessariamente discreta.

**Definição 4.4.4** Sejam  $M$  e  $N$   $n$ -dimensionais variedades generalizadas conexas e orientadas. Definimos

$$\deg(f, x) = \begin{cases} 0, & \text{se } f \text{ não é discreta em } x. \\ \deg(f, x), & \text{se } f \text{ é discreta em } x, \text{ conforme Definição 4.2.2.} \end{cases} \quad (4.4.1)$$

Aplicaremos os resultados anteriores para obtermos algumas generalizações do teorema de Darboux.

**Teorema 4.4.5 (Versão homológica do Teorema de Darboux)** *Sejam  $M$ ,  $N$   $n$ -dimensionais variedades generalizadas conexas e orientadas e  $f : M^n \rightarrow N^n$  uma função contínua. Se existem  $x_0$  e  $x_1$  em  $M$  tais que  $\deg(f, x_0) < 0$  e  $\deg(f, x_1) > 0$ , então existe  $x_2$  em  $M$  tal que  $\deg(f, x_2) = 0$*

*Demonstração.* Se existe  $x$  tal que  $f$  não é discreta, da Definição 4.4.4, segue que  $\deg(f, x_0) = 0$ . Caso contrário,  $f$  é discreta para todo  $x \in M^n$ . Suponhamos que  $\deg(f, x) \neq 0$ , para todo  $x \in M^n$ , então  $f$  é discreta e aberta e segue do Corolário 4.4.3 que  $\deg(f, x)$  não muda de sinal, o que é uma contradição.  $\square$

**Observação 4.4.6** O lema a seguir é trivial se  $f$  é de classe  $C^1$ .

**Teorema 4.4.7** *Sejam  $M$  e  $N$   $n$ -variedades diferenciáveis orientadas e conexas e  $f : M^n \rightarrow N^n$  uma função diferenciável. Se existem  $x_0$  e  $x_1$  em  $M^n$  tais que*

$$\det(f'(x_0)) < 0 \quad \text{e} \quad \det(f'(x_1)) > 0 \quad (4.4.2)$$

*então  $f$  possui um ponto crítico.*

*Demonstração.* Se  $f$  não tem pontos críticos, então  $|\deg(f, x)| = 1 \neq 0$  para todo  $x \in M$ . Assim,  $f$  é aberta e discreta e segue do Corolário 4.4.3 que  $\deg(f, x)$  não muda de sinal, o que é uma contradição. □

Daremos agora uma versão diferenciável do Teorema de Darboux.

**Teorema 4.4.8** *Sejam  $f, g : M \rightarrow \mathbb{R}^n$  diferenciáveis, onde  $M$  é uma  $n$ -variedade diferenciável conexa e orientada. Suponhamos que existam  $\alpha \in \mathbb{R}$  e  $x_0, x_1 \in M^n$  tais que*

$$\det(f'(x_0) - \alpha g'(x_0)) < 0 \quad e \quad \det(f'(x_1) - \alpha g'(x_1)) > 0.$$

*Então, existe  $x_2 \in M$  tal que  $\det(f'(x_2) - \alpha g'(x_2)) = 0$*

*Demonstração.* Basta aplicarmos o Teorema 4.4.7 para a função  $h = f - \alpha g$ . □

Como uma consequência imediata do Teorema acima, temos a seguinte generalização do teorema clássico de Darboux para aplicações diferenciáveis de  $\mathbb{R}^n$  em  $\mathbb{R}^n$ .

**Corolário 4.4.9** (Teorema de Darboux diferenciável) *Sejam  $U \subset \mathbb{R}^n$  aberto e conexo e  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma função diferenciável. Suponhamos que existam  $\alpha \in \mathbb{R}$  e  $x_0, x_1 \in U$  tais que*

$$\det(f'(x_0) - \alpha I) < 0 \quad e \quad \det(f'(x_1) - \alpha I) > 0.$$

*Então, existe  $x_2 \in U$  tal que  $\det(f'(x_2) - \alpha I) = 0$*

Mais geralmente, podemos provar o seguinte resultado

**Teorema 4.4.10** *Seja  $U \subset \mathbb{R}^n$  aberto e conexo e  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma função diferenciável. Suponhamos que existam  $x_0, x_1 \in U$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$  tais que*

$$\begin{aligned} p_0(\lambda) &= \det(f'(x_0) - \lambda I) = q_0(\lambda) \cdot (\alpha - \lambda)^{n_0} \\ p_1(\lambda) &= \det(f'(x_1) - \lambda I) = q_1(\lambda)(\alpha - \lambda)^{n_1}, \end{aligned} \tag{4.4.3}$$

*com  $q_0(\lambda) \neq 0$  e  $q_1(\lambda) \neq 0$ . Se  $n_0$  for ímpar e  $n_1$  for par e se  $q_0(\alpha)q_1(\alpha) > 0$  ( ou  $q_0(\alpha)q_1(\alpha) < 0$ ) então existe  $\delta > 0$  tal que para cada  $\lambda \in (\alpha, \alpha + \delta)$*

(ou  $\lambda \in (\alpha - \delta, \alpha)$ ), existe  $x_2 = x_2(\lambda)$  tal que

$$\det(f'(x_2) - \lambda I) = 0$$

*Demonstração.* Em virtude da paridade de  $n_0$  e  $n_1$ , temos que em todas as situações acima os polinômios  $p_0(\lambda)$  e  $p_1(\lambda)$  possuem sinais diferentes, e segue do Corolário 4.4.9 que existe  $x_2 = x_2(\lambda)$  tal que

$$p_2(\lambda) = \det(f'(x_2) - \lambda I) = 0$$

□

Para finalizar o nosso trabalho, consideremos o seguinte Teorema de Inversão Local, que foi provado em [4] e [47].

**Teorema 4.4.11** *Seja  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma função diferenciável sem pontos críticos. Então  $f$  é um homeomorfismo local.*

*Demonstração.* Como  $f$  é diferenciável e sem pontos críticos, então  $f$  é aberta e discreta. Seja  $x_0 \in U$  e consideremos  $V$  uma vizinhança conexa de  $x_0$  tal que  $V \subset U$ . Seja  $y \in f(V)$  qualquer e mostremos que existe um único  $x \in V$  tal que  $f(x) = y$ . De fato,  $V$  pode ser escolhida de tal forma que  $f(x) \neq f(x_0) = y_0$ , para todo  $x \in V$  e

$$\deg(f|_V, y_0) = \deg(f|_V, y) \tag{4.4.4}$$

Suponhamos que existam  $x, \tilde{x} \in V$  tais que  $x \neq \tilde{x}$  e  $f(x) = f(\tilde{x}) = y$ . Assim, como  $f$  preserva orientação em  $V$  temos que

$$1 = |\deg(f|_V, y_0)| = |\deg(f|_V, y)| \geq |\deg(f, x) + \deg(f, \tilde{x})| = 2, \tag{4.4.5}$$

o que é uma contradição.

□

## Referências Bibliográficas

- [1] Althoen, S.C., and Weidner, J.F., *Real Division and Dickson's Construction*, Am. Math. Monthly, n. 5, 368-371, 1978.
- [2] Biasi, C., Daccach J., and Saeki, O., *A primary obstruction to topological embeddings for maps between generalized manifolds*. Pacific J. Math. **197** n.2 275-289, 2001.
- [3] Biasi, C., de Mattos, D., and dos Santos E.L., *A Borsuk-Ulam Theorem for maps from a sphere to a generalized manifold*. Geom. Dedicata **107** 101-110, 2004.
- [4] Biasi, C., Gutierrez, C., *Finite branched coverings in generalized inverse mapping theorem*, pré-print.
- [5] Biasi, C., Dos Santos, E. L., *A homological version of the implicit function theorem*, pré-print.
- [6] Borel, A., *The Poincaré duality in generalized manifolds*, Mich. Math. J., **4**, 227-239, 1957.
- [7] Borel, A., et al., *Seminar on Transformation Groups*, Ann. of Math. Studies, Vol.**46**, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J., 1960.
- [8] Bredon, G. E., *Wilder manifolds are locally orientable*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A, **63** , 1079-1081, 1969.

- [9] Bredon, G. E., *Sheaf Theory*, second edition, Graduate Texte in Math., Vol. **170**, Springer-Verlag, New York, 1997. Paris, 1969.
- [10] Bryant, J., Ferry, S., Mio, W., e Weinberger, S., *Topology of homology manifolds*, Bull. Amer. Math. Soc., **28** , 324-328, 1993.
- [11] Bryant, J., Ferry, S., Mio, W., e Weinberger, S., *Topology of homology manifolds*, Ann. of Math., **143** , 435-467, 1996.
- [12] Conner, P.E., and Floyd, E.E., *Differentiable Periodic Maps*. Ergebnisse der Math. Springer-Verlag Berlin **33**, 1964.
- [13] Cannon, J. W., *Shrinking cell-like decompositions of manifolds. Codimension three*, Ann. of Math., ( 2) (**110**), 83-112, 1979.
- [14] Constantin, A., *Critical values of differentiable maps*, Exposition. Math., (**14**), n. 1, 93-95, 1996.
- [15] , Carruth, H., Hildebrandt, J., and Koch, R.J., *Introductions to Topological Semigroups I and II*, Marcel Dekker, New York, 1983, respectively, 1986.
- [16] Černavskii, A. V., *Finite-to-one open mappings of manifolds*, Mat. Sbornik, (**65**), 357-369, 1964.
- [17] Černavskii, A. V., *Addendum to the paper "Finite-to-one open mappings of manifolds"*, Mat. Sbornik, (**66**), 471-472, 1965.
- [18] Cleary, J., Morris, S., *Topologies on locally compact groups*, Bull. Austral. Math. Soc., **38**, 105-111, 1988.
- [19] Comfort, W. W., Hofmann, K. H., Remus, D., *Topological groups and semigroups*, Recent Progress in General Topology, Elsevier Science Publishers, Amsterdam, 59-144, 1992.

- 
- [20] Daverman, R. J., *Detecting the disjoint disk property*, Pacific J. Math., **(3)**, 277-298, 1981.
- [21] Daverman, R. J., Walsh, J. J., *A ghastly generalized  $n$ -manifolds*, Illinois J. Math., **(25)**, 555-576, 1981.
- [22] Dugundji, J., *Topology*, Allyn and Bacon, Boston, 1966.
- [23] Edwards, R. D., *The topology of manifolds and cell-like maps*, Proc. Internat. Cong. Math., Helsinki, 1980.
- [24] Gleason, A. *The structure of locally compact groups*, Duke Math. Journal, **(18)**, 85-105, 1951.
- [25] Greenberg, M. J., *Lectures on Algebraic Topology*, W. A. Benjamin, Inc., New York, Amsterdam, 1967.
- [26] Halverson, D. M., *Detecting codimension one manifolds factors with the disjoint homotopies property*, Top. App., **(117)**, 231-258, 2002.
- [27] Halverson, D. M., *2-ghastly spaces with the disjoint homotopies property: The method of fractured maps*, Top. App., **(138)**, 277-286, 2004.
- [28] Hofmann, K. H. and Mostert, P. S. *Elements of Compact Semigroups*, Merrill, Columbus, Ohio, 1966.
- [29] Hurewicz, W., and Wallman, H., *Dimension Theory*, Princeton Math. Series, Vol. 4, Princeton Univ. Press, Princeton, 1948.
- [30] Iwasawa, K. *On some type of topological groups*, Ann. of Math., **(50)**, 507-557, 1949.
- [31] Jittorntrum, K. *An Implicit Function Theorem*, J. Optim. Theory Appl. **25**, n. 4, 575-577, 1978.

- [32] Montgomery, D. e Zippin, L., *Small sub groups of finite dimensional group*, Ann. of Math., (**56**), 213-241, 1952.
- [33] Moreira, C. G., *Hausdorff measures and the Morse-Sard theorem*, Publ. Math., (**45**), n. 1, 149-162, 2001.
- [34] Mostert, P. S., Shields, A. L., *Semigroups with identity on a manifold*, Trans. Amer. Math. Soc., (**91**), 380-389, 1959.
- [35] Mostert, P. S., Shields, A. L., *On the structure of semigroups on compact manifold with boundary*, Ann. of Math., (**65**), 117-143, 1957.
- [36] Mostert, P. S., Shields, A. L., *Semigroups with identity on a manifold*, Trans. Amer. Math. Soc., (**91**), 380-389, 1959.
- [37] Munkres, J. R., *Topology, a first course*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1975.
- [38] Lima, E. L., *Elementos de topologia geral*, Rio de Janeiro, Livros Tecnicos e Cientificos, 1976.
- [39] Loibel, G. F., *Sobre quase-grupos topológicos*, Tese de doutorado, ICMC-USP, 1958.
- [40] Loibel, G. F., *On topological quasi-groups*. (Portuguese) Bol. Soc. Mat. São Paulo, **13**, 1-42, 1961.
- [41] von Neumann, J., *Die Einführung analytischer Parameter in topologischen Gruppen*, Math Ann. (**34**), 170-190, 1933.
- [42] Poli, J. L., *Equivalência dos conceitos de orientação em variedades e grau de aplicações dos pontos de vista topológico e diferenciável*, Dissertação de Mestrado, ICMC-USP, 1983.

- 
- [43] Pontrjagin, L.: *The theory of topological commutative groups*, Ann. of Math., (35), 361-388, 1934.
- [44] Pontrjagin, L.: *Topological Groups*, Princeton University Press, Princeton, 1946.
- [45] Quinn, F., *And the topological characterization of the manifolds*, Invent. Math., 72, 267-284, 1983.
- [46] Quinn, F., *An obstruction to the resolution of homology manifolds*, Michigan Math. Journal, 301, 285-292, 1987.
- [47] Radulescu, S., Radulescu, M., *Local inversion theorems without assuming continuous differentiability*, J. Math. Anal. Appl., 138, n.2, 581-590, 1989.
- [48] Spanier, E. H., *Algebraic Topology*, McGraw-Hill, New York, 1966.
- [49] Väisälä, J., *Discrete open mappings on manifolds*, Annales Acad. Scie. Fenn. Ser. A, I n.0, n. 58392, 10 pgs, 1966.
- [50] Yamabe, H., *A generalization of a theorem of Gleason*, Ann of Math., (58), 351-365, 1953.
- [51] Wilder, R. L. *Topology of Manifolds*, American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. 32. American Mathematical Society, New York, N. Y., 1949.

# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)