

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito: 20/01/2005

Assinatura: _____

Invariantes de germes de \mathbb{C}^2 em \mathbb{C}^3_1

Vanda Maria Luchesi

Orientadora: *Profa. Dra. Roberta Godoi Wik Atique*

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação da Universidade de São Paulo - ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências - Área: Matemática.

USP - São Carlos
Janeiro/2005

¹Este trabalho teve suporte financeiro da Capes

*À minha Família
em especial...
Ao meu querido
irmão Valdemir.*

Agradecimentos

A Deus, meu protetor, por mais uma conquista realizada.

À Prof. Roberta pelo incentivo, pelas sugestões, compreensão, dedicação e confiança e acima de tudo por me propor o estudo deste artigo. Amei trabalhar com você!

Aos meus pais José Luchesi e Julia Landgraf Luchesi, por me darem a vida, pelo carinho e por me orientarem nos momentos necessários.

À minha filha Layla pela compreensão, carinho e amizade.

A todos os meus familiares que estiveram ao meu lado me apoiando e incentivando. Obrigada pelo carinho e atenção. É muito bom saber que posso contar com vocês!

Aos meus queridos Luci e Dide, que me acolheram como filha, e junto com o Anderson, me incentivaram e apoiaram em vários momentos destes últimos 4 anos. Devo muito a vocês...estarão sempre em um cantinho especial do meu coração.

À minha amiga Marcia pelas suas orações. Obrigada, Marcinha!

À minha turma de mestrado e ao pessoal da minha salinha pelo companheirismo, pelas conversas, pelo apoio e carinho. Aos meus queridos amigos Ana Cláudia, Andrea, Elenice, Eliris, João e Nivaldo. Valeu, pessoal!

Aos meus professores, que proporcionaram o meu interesse pela pesquisa em Matemática, especialmente a Cidinha, Didi, Iris, João Sampaio, Jorge Hounie, Marcelo Saia, Sadao, Valdir e Victor.

Aos funcionários do ICMC por toda a ajuda e atenção dispensada. Obrigada!

À CAPES pelo apoio financeiro.

Enfim, a todos aqueles que colaboraram de alguma forma para a realização deste trabalho.

Muito Obrigada!

Resumo

Sejam $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$ um germe de aplicação holomorfa de coposto 1 e f_t uma perturbação estável de f . Os pontos singulares de f_t são cross-caps, pontos duplos ou pontos triplos. O número de cross-caps e pontos triplos de f_t e o número de Milnor da curva de pontos duplos de f_t são invariantes do germe f . Neste trabalho estudamos fórmulas para obter estes invariantes e no caso dos germes quasi-homogêneos relacionamos estes invariantes com a \mathcal{A}_e -codimensão de f .

Abstract

Let $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$ be a holomorphic map-germ with corank 1 and f_t a stable perturbation of f . The singular points of f_t are either cross-caps, double points or triple points. The number of cross-caps and the number of triple points of f_t and the Milnor number of the double points curve of f_t are invariants of the germs f . In this work we study formulas to get these invariants and in the case of quasi-homogeneous germs we relate these invariants with the \mathcal{A}_e -codimension of f .

Sumário

Introdução	i
1 Teoria de Singularidades	1
1.1 Germes de aplicações holomorfas	1
1.2 Equivalências de germes	3
1.3 Transversalidade	10
1.4 Determinação finita e desdobramentos	12
1.5 Singularidades de Thom-Boardman	14
2 Subvariedades Analíticas	17
2.1 Álgebra comutativa	17
2.2 Subvariedades analíticas complexas	20
2.3 O anel $\mathcal{O}_{X,0}$	22
2.4 Ideais de Fitting	25
3 Pontos Múltiplos	27
3.1 O lugar geométrico do pontos múltiplos	27
3.2 O ideal que define $D^k(f)$	30
4 Invariantes de Germes de \mathbb{C}^2 em \mathbb{C}^3	34
4.1 O invariante C_f	36
4.2 O invariante numérico $\mu(D^2(f)/\mathbb{Z}_2)$	43
4.3 O invariante T_f	44
4.4 Os invariantes $C_f, T_f, \mu(D^2(f)/\mathbb{Z}_2)$ e a \mathcal{A}_e -codimensão de f	47
bibliografia	48

Introdução

Na teoria de singularidades de germes de aplicações holomorfas $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ o primeiro invariante estudado foi o número de Milnor no caso $p = 1$. Este invariante pode ser definido algebricamente por

$$\mu = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{\langle \frac{\partial f}{\partial z_1}, \frac{\partial f}{\partial z_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial z_n} \rangle}$$

Sua finitude é uma condição necessária e suficiente para a determinação finita e, além disso, ele aparece associado à geometria da singularidade em duas formas: como número de pontos críticos de Morse em uma deformação estável e como o rank da homologia média da fibra de Milnor de f .

No caso $p > 1$ não se encontra um invariante assim tão completo. Uma razão para isto está no fato que, enquanto para funções aparece apenas um tipo de singularidade estável, ou seja, a singularidade de Morse, para $p > 1$ a complexidade da classificação dos germes e multigerms estáveis aumenta com n e p .

Quando um germe finitamente determinado não estável $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$ é perturbado de modo a se tornar estável, um certo número de cross-caps, C_f , e pontos triplos, T_f , aparecem na imagem da perturbação estável. Estes números refletem a complexidade do germe inicial e além disso são invariantes analíticos. A finitude destes invariantes é uma condição necessária mas não suficiente para a determinação finita. Após o estudo de algumas séries que aparecem na classificação dos germes $(\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$ feita por D. Mond em [5] foi observado em [4] que em germes finitamente determinados pode aparecer uma curva de auto-intersecção transversal na imagem. Sendo assim nosso terceiro invariante é o número de Milnor da curva de pontos duplos. A finitude destes três invariantes é condição necessária e suficiente para a determinação finita (ver [4]).

Neste trabalho consideramos germes $(\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$ de coposto 1 finitamente determinados. Obtemos fórmulas para o cálculo destes invariantes e mostramos uma relação entre eles e a \mathcal{A}_e -codimensão.

Para tal desenvolvimento, no capítulo 1 apresentamos alguns tópicos de teoria de singularidades tais como: germes de aplicações holomorfas, a álgebra \mathcal{O}_n , o módulo $\mathcal{O}_{n,p}$, equivalência de germes segundo os grupos de Mather \mathcal{A} e \mathcal{K} , determinação finita para germes, transversalidade, desdobramentos e singularidades de Thom-Boardman

No capítulo 2 estudamos subvariedades analíticas complexas. Definimos o anel $\mathcal{O}_{X,0}$, módulo de Cohen-Macaulay, e intersecção completa com singularidade isolada. Além disso, abordamos os ideais de Fitting e exibimos um algoritmo para calcular tais ideais quando f é um germe de aplicação $(\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$.

O objetivo do capítulo 3 é estudar o conjunto dos pontos em \mathbb{C}^p com mais que k pré-imagens e o ideal que o define, abordando pré-requisitos que serão usados no capítulo 4, nosso principal objetivo.

O capítulo 4 constitui a parte principal desta dissertação. Nele, definimos os números C_f , T_f e $\mu(D^2(f)/\mathbb{Z}_2)$, encontramos fórmulas para calculá-los e mostramos que C_f , $\mu(D^2(f)/\mathbb{Z}_2)$ e T_f são invariantes do germe f . Além disso, obtemos relações entre estes invariantes e \mathcal{A}_e -codimensão de f no caso de germes quasi-homogêneos.

Capítulo 1

Teoria de Singularidades

Neste capítulo vamos abordar alguns tópicos de Teoria de Singularidades necessários para o desenvolvimento deste trabalho. As principais referências são [9], [14] e [21].

1.1 Germes de aplicações holomorfas

Seja $S = \{x_1, \dots, x_k\} \subset \mathbb{C}^n$. Consideremos o conjunto das aplicações holomorfas definidas numa vizinhança aberta de S em \mathbb{C}^n com valores em \mathbb{C}^p . Introduzimos neste conjunto a seguinte relação de equivalência: dadas $f : U \rightarrow \mathbb{C}^p$ e $g : V \rightarrow \mathbb{C}^p$ em tal conjunto, dizemos que f e g são equivalentes se existe uma vizinhança aberta $W \subset U \cap V$ de S tal que $f|_W = g|_W$.

Definição 1.1.1. *O multigerme de uma aplicação holomorfa $f : U \rightarrow \mathbb{C}^p$, onde U é uma vizinhança aberta de $S \subset \mathbb{C}^n$, é a classe de equivalência de f segundo a relação de equivalência definida acima. Denotamos o multigerme de f por $f : (\mathbb{C}^n, S) \rightarrow (\mathbb{C}^p, y)$. Se $S = \{x\}$, esta classe de equivalência é chamada de germe, x é chamado de fonte do germe e $y = f(x)$ é chamado de meta do germe.*

Dados $f : (\mathbb{C}^n, x) \rightarrow (\mathbb{C}^p, y)$ e $g : (\mathbb{C}^p, y) \rightarrow (\mathbb{C}^q, z)$ podemos obter o germe $f \circ g : (\mathbb{C}^n, x) \rightarrow (\mathbb{C}^q, z)$ tomando representantes convenientes de f e g , digamos \hat{f} e \hat{g} , de forma que $\hat{g} \circ \hat{f}$ esteja bem definida. O germe $g \circ f$ é o germe de $\hat{g} \circ \hat{f}$.

A derivada de $f : (\mathbb{C}^n, x) \rightarrow (\mathbb{C}^p, y)$ em x é a derivada em x de qualquer representante de f . Notemos que esta definição independe da escolha do representante.

Dizemos que $f : (\mathbb{C}^n, x) \rightarrow (\mathbb{C}^p, y)$ é um germe de difeomorfismo se um de seus representantes, e portanto todos, é um difeomorfismo local em x .

Teorema 1.1.2. (Teorema da Função Inversa) *O germe $f : (\mathbb{C}^n, x) \rightarrow (\mathbb{C}^p, y)$ é um germe de difeomorfismo se, e somente se, sua derivada $d_x f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^p$ é um isomorfismo.*

Definição 1.1.3. O posto de um germe $f : (\mathbb{C}^n, x) \rightarrow (\mathbb{C}^p, y)$ é o posto da matriz de $d_x f$ e é denotado por $\text{posto } f$. O coposto de f , o qual denotamos por $\text{coposto } f$, é definido como sendo $\min\{n, p\} - \text{postof}$.

Consideremos o germe $f : (\mathbb{C}^n, x) \rightarrow (\mathbb{C}^p, y)$. Dizemos que f é germe de imersão se o posto de f é igual a n , e germe de submersão se o posto de f é p . O germe f é singular ou uma singularidade se não é submersão e nem imersão, ou seja, $\text{postof} < \min\{n, p\}$. O germe f é um germe de difeomorfismo se é germe de imersão e germe de submersão.

O conjunto dos germes $(\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, y)$ é denotado por $\mathcal{O}_{n,p}$. Quando $p = 1$, denotamos por \mathcal{O}_n . O conjunto dos germes de difeomorfismos de $\mathcal{O}_{n,n}$ é um grupo com a operação de composição e é denotado por $\text{Diff}(\mathbb{C}^n)$ ou D^n .

Temos que \mathcal{O}_n é um espaço vetorial complexo e possui estrutura de anel local. O ideal maximal de \mathcal{O}_n é $\mathcal{M}_n = \{g \in \mathcal{O}_n \mid g(0) = 0\}$. Portanto, \mathcal{O}_n é uma \mathbb{C} -álgebra.

Notemos que $\mathcal{O}_{n,p}$ é um \mathcal{O}_n -módulo livre. De fato, se $f \in \mathcal{O}_{n,p}$ então $f = (f_1, f_2, \dots, f_p)$, onde $f_i \in \mathcal{O}_n$ para $i = 1, 2, \dots, p$. Logo $\mathcal{O}_{n,p} \simeq \mathcal{O}_n \oplus \dots \oplus \mathcal{O}_n$ (p cópias).

Temos o seguinte monomorfismo de \mathbb{C} -álgebras

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{O}_n &\rightarrow \mathbb{C}[[X_1, X_2, \dots, X_n]] \\ f &\longmapsto \widehat{f} \end{aligned}$$

onde \widehat{f} é a expansão em série de Taylor de f em torno de 0. Segue do Lema de Borel (ver [9]) que a aplicação φ é um isomorfismo.

Denotamos por $J^k(n, p)$ o espaço vetorial complexo constituído das aplicações $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^p$ onde cada uma das componentes f_1, f_2, \dots, f_p é um polinômio de grau menor ou igual a k em x_1, x_2, \dots, x_n com termo constante nulo. Os elementos de $J^k(n, p)$ são chamados de k -jatos.

Sejam $f : U \subset \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^p$ uma aplicação holomorfa, onde U é um aberto de \mathbb{C}^n e $a \in U$. A expansão em série de potências de $f(x + a)$ em torno de 0 é dada por

$$f(a) + d_a f \cdot x + \frac{1}{2!} d_a^2 f \cdot x^2 + \dots$$

Definição 1.1.4. Sejam $f \in \mathcal{O}_{n,p}$ e $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 1$. O k -jato de f em a , denotado por $j^k f(a)$, é definido por

$$d_a f \cdot x + \frac{1}{2!} d_a^2 f \cdot x^2 + \dots + \frac{1}{k!} d_a^k f \cdot x^k$$

isto é, $j^k f(a)$ é a expansão em série de potências de $f(x + a) - f(a)$ em torno de 0 truncada no termo de grau k , onde f é um representante do germe.

Seja $f : U \rightarrow \mathbb{C}^p$ holomorfa, definimos a aplicação

$$\begin{aligned} j^k f : U &\rightarrow J^k(n, p) \\ a &\mapsto j^k f(a) \end{aligned}$$

1.2 Equivalências de germes

Nesta seção as principais referências são [21], [9] e [2].

Definição 1.2.1. *Sejam G um grupo e M um conjunto. Uma ação de G em M é uma aplicação $\varphi : G \times M \rightarrow M$, denotada por $\varphi(g, x) = g.x$ satisfazendo as seguintes relações*

$$i) 1.x = x \quad \forall x \in M, \text{ onde } 1 \text{ é o elemento neutro de } G,$$

$$ii) (gh).x = g.(h.x) \quad \forall g, h \in G, x \in M.$$

Uma ação induz uma relação de equivalência em M da seguinte forma: dados $x, y \in M$, dizemos que x é equivalente a y se existe $g \in G$ tal que $y = g.x$. A classe de equivalência de $x \in M$ segundo esta relação de equivalência é chamada de órbita de x e é denotada por

$$G.x = \{g.x \mid g \in G\}$$

Para todo $x \in M$, definimos o subgrupo estabilizador de x , também chamado de grupo de isotropia, como sendo o conjunto de todos os elementos em G que fixam x , denotado por

$$G_x = \{g \in G \mid g.x = x\}$$

Uma aplicação $f : M \rightarrow M$ é G -invariante se $f(g.x) = f(x)$, $\forall x \in M, \forall g \in G$. Uma aplicação $f : M \rightarrow M$ é G -equivariante se $f(g.x) = g.f(x)$, $\forall x \in M, \forall g \in G$.

Lema 1.2.2. (Lema de Burnside) *Seja G um grupo finito agindo sobre um conjunto finito M . Então o número k de órbitas em M sob a ação de G é dado por*

$$k = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in M} |G_x|,$$

onde $|\cdot|$ denota a cardinalidade do grupo.

Demonstração: Seja $S = \{(g, x) \in G \times M \mid g.x = x\}$. Para cada $x \in M$ fixo, $|G_x|$ é o número de pares $(g, x) \in S$. Assim

$$|S| = \sum_{x \in M} |G_x|.$$

Por [2, Teorema 4.7, pag.108] temos que

$$|G.x| = |G|/|G_x|.$$

Assim

$$\begin{aligned} \sum_{x \in M} |G_x| &= |G| \sum_{x \in M} \frac{1}{|G.x|} \\ &= |G| \sum_{a \in C} \sum_{x \in G.a} \frac{1}{|G.x|} \end{aligned}$$

onde C é um subconjunto de M contendo exatamente um elemento de cada órbita.

Agora $|G.x| = |G.a|$ para todo $x \in G.a$ e $\sum_{x \in G.a} \frac{1}{|G.x|} = 1$. Portanto

$$\sum_{x \in M} |G_x| = |G|.k$$

■

Definição 1.2.3. *Um grupo de Lie G é um grupo que é uma variedade diferenciável e as aplicações*

$$\begin{array}{ccc} G \times G & \longrightarrow & G \\ (x, y) & \longmapsto & xy \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & x^{-1} \end{array}$$

são de classe C^∞ .

Definição 1.2.4. *Uma ação de um grupo de Lie G numa variedade diferenciável M é uma ação $\varphi : G \times M \rightarrow M$ que é de classe C^∞ .*

Em geral as órbitas da ação de um grupo de Lie numa variedade não são subvariedades, a menos que a ação seja algébrica (ver [9][Apêndice]). No entanto, se supusermos que as órbitas são subvariedades, o resultado seguinte descreve o espaço tangente a uma órbita.

Proposição 1.2.5. *Seja $\varphi : G \times M \rightarrow M$ uma ação de um grupo de Lie G numa variedade M . Suponhamos que as órbitas em M segundo esta ação sejam subvariedades de M . Então, para todo $x \in M$, a aplicação $\varphi_x : G \rightarrow G.x$, dada por $\varphi_x(g) = g.x$, é uma submersão.*

Demonstração: Dado $x \in M$, mostremos primeiramente que a aplicação φ_x tem o mesmo posto em todo elemento de G . Para isto, basta mostrar que o posto de φ_x em qualquer $h \in G$ coincide com o posto de φ_x no elemento neutro 1 de G . Seja $\theta : G \rightarrow G$

o difeomorfismo dado por $\theta(g) = hg$ e $\psi : M \rightarrow M$ o difeomorfismo dado por $\psi(y) = h.y$. Consideremos o diagrama

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\varphi_x} & G.x \\ \theta \downarrow & & \downarrow \psi \\ G & \xrightarrow{\varphi_x} & G.x \end{array}$$

Da definição de ação, este diagrama é comutativo. Aplicando a regra da cadeia obtemos o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} T_1G & \xrightarrow{d_1\varphi_x} & T_xG.x \\ d_1\theta \downarrow & & \downarrow d_x\psi \\ T_hG & \xrightarrow{d_h\varphi_x} & T_xG.x \end{array}$$

Como θ e ψ são difeomorfismos, $d_1\theta$ e $d_x\psi$ são isomorfismos e, portanto,

$$\dim d_1\varphi_x(T_1G) = \dim d_h\varphi_x(T_hG)$$

Logo o posto de φ_x em h é igual ao posto de φ_x em 1. Basta mostrar agora que φ_x é submersão em algum ponto de G , mas isto segue do Teorema de Sard (ver 1.3.7). ■

Definição 1.2.6. *Dois germes $f_1 : (\mathbb{C}^n, x_1) \rightarrow (\mathbb{C}^p, y_1)$ e $f_2 : (\mathbb{C}^n, x_2) \rightarrow (\mathbb{C}^p, y_2)$ são \mathcal{A} -equivalentes, e denotamos por $f_1 \sim_{\mathcal{A}} f_2$, se existem germes de difeomorfismos $\phi : (\mathbb{C}^n, x_1) \rightarrow (\mathbb{C}^n, x_2)$ e $\psi : (\mathbb{C}^p, y_1) \rightarrow (\mathbb{C}^p, y_2)$ para os quais o diagrama*

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{C}^n, x_1) & \xrightarrow{f_1} & (\mathbb{C}^p, y_1) \\ \downarrow \phi & & \downarrow \psi \\ (\mathbb{C}^n, x_2) & \xrightarrow{f_2} & (\mathbb{C}^p, y_2) \end{array}$$

é comutativo, ou seja, $f_2 = \psi \circ f_1 \circ \phi^{-1}$.

Como consequência da Definição 1.2.6, temos que todo germe $(\mathbb{C}^n, x) \rightarrow (\mathbb{C}^p, y)$ é \mathcal{A} -equivalente a algum germe $(\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow \mathbb{C}^p$. Sendo assim, vamos considerar $f \in \mathcal{O}_{n,p}$.

A \mathcal{A} -equivalência em $\mathcal{O}_{n,p}$ provém de uma ação. De fato, consideremos o grupo $\mathcal{A} = \text{Diff}(\mathbb{C}^n) \times \text{Diff}(\mathbb{C}^p)$. Este grupo age em $\mathcal{O}_{n,p}$ da seguinte forma

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} \times \mathcal{O}_{n,p} & \rightarrow & \mathcal{O}_{n,p} \\ ((\phi, \psi), f) & \mapsto & \psi \circ f \circ \phi^{-1} \end{array}$$

Logo, dois germes $f, g \in \mathcal{O}_{n,p}$ são \mathcal{A} -equivalentes se, e somente se, estão na mesma órbita segundo a ação acima.

No que segue vamos definir uma relação de equivalência entre k -jatos de maneira análoga à definida para germes.

Definição 1.2.7. *Dois k -jatos $f, g \in J^k(n, p)$ são equivalentes se existem $\phi \in \text{Diff}(\mathbb{C}^n)$ e $\psi \in \text{Diff}(\mathbb{C}^p)$ tais que $j^k(\psi \circ f \circ \phi^{-1})(0) = j^k g(0)$.*

A relação de equivalência definida acima provém de uma ação de um grupo de Lie na variedade $J^k(n, p)$. De fato, consideremos o conjunto dos k -jatos de elementos de $\text{Diff}(\mathbb{C}^n)$. Este conjunto é um grupo com a seguinte operação

$$j^k h_1(0) * j^k h_2(0) = j^k(h_1 \circ h_2)(0)$$

Denotamos este grupo por D_n^k . Este grupo é um conjunto aberto no espaço vetorial $J^k(n, n)$. Portanto, é uma variedade diferenciável e o seu espaço tangente em qualquer ponto é $J^k(n, n)$. Logo, D_n^k é um grupo de Lie. Segue que $\mathcal{A}^k = D_n^k \times D_p^k$, que é o grupo dos k -jatos de elementos de \mathcal{A} , é um grupo de Lie, pois o produto cartesiano de grupos de Lie é um grupo de Lie. O grupo \mathcal{A}^k age em $J^k(n, p)$ da forma

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{A}^k \times J^k(n, p) &\rightarrow J^k(n, p) \\ (j^k \phi(0), j^k \psi(0), f) &\mapsto j^k(\psi \circ f \circ \phi^{-1})(0) \end{aligned}$$

O espaço tangente à órbita de $f \in J^k(n, p)$ segundo a ação do grupo \mathcal{A}^k é denotado por $T\mathcal{A}^k.f$. Pela Proposição 1.2.5 temos que $T\mathcal{A}^k.f$ é a imagem da derivada da aplicação φ_f em $I = (I_n, I_p)$, onde I_n e I_p são as identidades em \mathbb{C}^n e \mathbb{C}^p respectivamente. Assim é possível mostrar que o espaço tangente à órbita de f em $J^k(n, p)$ segundo a ação do grupo \mathcal{A}^k é

$$T\mathcal{A}^k.f = \left\{ j^k \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} g_i \right) (0) \mid g = (g_1, \dots, g_n) \in J^k(n, n) \right\} + \left\{ j^k(h \circ f)(0) \mid h \in J^k(p, p) \right\}$$

Consideremos a órbita de um germe segundo a ação do grupo \mathcal{A} . Este grupo não é de Lie e as órbitas não são subvariedades. Motivados pelo caso dos jatos definimos:

Definição 1.2.8. *Seja $f \in \mathcal{O}_{n,p}$. O espaço tangente à órbita de f segundo a ação do grupo \mathcal{A} é*

$$T\mathcal{A}.f = \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} g_i \mid g = (g_1, \dots, g_n) \in \mathcal{M}_n \mathcal{O}_{n,n} \right\} + \left\{ h \circ f \mid h \in \mathcal{M}_p \mathcal{O}_{p,p} \right\}$$

O espaço tangente estendido é

$$T\mathcal{A}_e.f = \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} g_i \mid g = (g_1, \dots, g_n) \in \mathcal{O}_{n,n} \right\} + \left\{ h \circ f \mid h \in \mathcal{O}_{p,p} \right\}$$

Definimos a \mathcal{A} -codimensão de f como sendo a dimensão de $\frac{\mathcal{M}_n \mathcal{O}_{n,p}}{T\mathcal{A}.f}$ como espaço vetorial sobre \mathbb{C} , ou seja, $\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{M}_n \mathcal{O}_{n,p}}{T\mathcal{A}.f}$ e a \mathcal{A}_e -codimensão de f como $\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{n,p}}{T\mathcal{A}_e.f}$.

Lema 1.2.9. *Seja $f \in \mathcal{M}_n \mathcal{O}_{n,p}$, $n \leq p$. Se o coposto de f é 1 então f é \mathcal{A} -equivalente a*

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_{n-1}, g_n(x_1, \dots, x_n), \dots, g_p(x_1, \dots, x_n))$$

onde $g_k(0, \dots, 0, x_n) \in \mathcal{M}_1^2$, $k = n, \dots, p$.

Demonstração: Neste caso, pela definição de coposto, temos que $\text{postof} f = n - 1$. Portanto se

$$f(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n), \dots, f_p(x_1, \dots, x_n))$$

ao menos um dos determinantes dos menores $(n - 1) \times (n - 1)$ da matriz de $d_0 f$ deve ser não nulo. Podemos supor, a menos de mudança de coordenadas, que este seja formado pelas $n - 1$ primeiras linhas e as $n - 1$ primeiras colunas da matriz de $d_0 f$.

Seja $h(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_{n-1}(x_1, \dots, x_n), x_n)$. Temos que

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_1}(0) & \cdots & \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_n}(0) \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \neq 0$$

Logo h é germe de difeomorfismo e

$$f \circ h^{-1}(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_{n-1}, g_n(x_1, \dots, x_n), \dots, g_p(x_1, \dots, x_n)).$$

Além disso, $g_i(0, \dots, 0, x_n) = f_i \circ h^{-1}(0, \dots, 0, x_n) \in \mathcal{M}_1^2$, $i = n, \dots, p$, pois caso contrário não teríamos $\text{copostof} f = 1$. ■

Definição 1.2.10. *Definimos \mathcal{A}_1 como o subgrupo de \mathcal{A} cujos elementos têm o 1-jato igual à identidade.*

Definição 1.2.11. *Dois germes $f_1 : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ e $f_2 : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ são \mathcal{K} -equivalentes se existem germes de difeomorfismos $h : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$ e $H : (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^p, (0, 0)) \rightarrow (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^p, (0, 0))$ para os quais o diagrama*

$$\begin{array}{ccccc} (\mathbb{C}^n, 0) & \xrightarrow{i_1} & (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^p, (0, 0)) & \xrightarrow{\pi_1} & (\mathbb{C}^n, 0) \\ h \downarrow & & H \downarrow & & \downarrow h \\ (\mathbb{C}^n, 0) & \xrightarrow{i_2} & (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^p, (0, 0)) & \xrightarrow{\pi_2} & (\mathbb{C}^n, 0) \end{array}$$

é comutativo, onde i_k é o germe em 0 da inclusão $\mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^p$ dada por $x \mapsto (x, 0)$ e π_k é o germe em $(0, 0)$ da projeção $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^p \rightarrow \mathbb{C}^n$ dada por $(x, y) \mapsto x$, $k = 1, 2$, e $H \circ (I_n, f_1) = (I_n, f_2) \circ h$ onde I_n é a aplicação identidade.

O grupo \mathcal{K} é constituído dos pares (h, H) como na Definição 1.2.11. O difeomorfismo H é da forma $H(x, y) = (h(x), \theta(x, y))$, com $\theta(x, 0) = 0$.

Definição 1.2.12. *Seja $f \in \mathcal{O}_{n,p}$. O espaço tangente à órbita de f segundo a ação do grupo \mathcal{K} é*

$$TK.f = \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} g_i \mid g = (g_1, \dots, g_n) \in \mathcal{M}_n \mathcal{O}_{n,n} \right\} + \mathcal{O}_p \{ (0, \dots, 0, f_i, 0, \dots, 0), i = 1, \dots, p \}$$

O espaço tangente estendido é

$$TK_e.f = \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} g_i \mid g = (g_1, \dots, g_n) \in \mathcal{O}_{n,n} \right\} + \mathcal{O}_p \{ (0, \dots, 0, f_i, 0, \dots, 0), i = 1, \dots, p \}$$

Observação 1.2.13. Se dois germes $f_1 : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ e $f_2 : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ são \mathcal{A} -equivalentes, então também são \mathcal{K} -equivalentes. De fato, suponhamos que existam germes de difeomorfismos $\phi : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$ e $\psi : (\mathbb{C}^p, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ tais que

$$f_2 \circ \phi = \psi \circ f_1$$

Consideremos $H : (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^p, (0, 0)) \rightarrow (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^p, (0, 0))$ dado por $H(x, y) = (\phi(x), \psi(y))$. Segue que

$$H \circ (I_n, f_1)(x) = (\phi(x), \psi \circ f_1(x)) = (\phi(x), f_2 \circ \phi(x)) = (I_n, f_2) \circ \phi(x)$$

Portanto f_1 e f_2 são \mathcal{K} -equivalentes. No entanto, dois germes \mathcal{K} -equivalentes não são necessariamente \mathcal{A} -equivalentes.

Descrevemos a seguir os espaços tangentes das Definições 1.2.8 e 1.2.12 usando a linguagem de campos de vetores.

Definição 1.2.14. *Sejam U um subconjunto aberto de \mathbb{C}^n e $f : U \rightarrow \mathbb{C}^p$ uma aplicação holomorfa. A aplicação tangente, denotada por T_f , é definida por*

$$\begin{aligned} T_f : T\mathbb{C}^n &\longrightarrow T\mathbb{C}^p \\ (x, v) &\longmapsto (f(x), d_x f(v)) \end{aligned}$$

onde $T\mathbb{C}^k$ é o conjunto $\{(x, v) \mid v \in T_x \mathbb{C}^k\}$ denominado fibrado tangente a \mathbb{C}^k , $k = n, p$.

Denotamos por π_n a projeção do fibrado tangente a \mathbb{C}^n sobre \mathbb{C}^n

$$\begin{aligned} \pi_n : T\mathbb{C}^n &\longrightarrow \mathbb{C}^n \\ (x, v) &\longmapsto x \end{aligned}$$

Definição 1.2.15. *Sejam U um subconjunto aberto de \mathbb{C}^n e $f : U \rightarrow \mathbb{C}^p$ uma aplicação holomorfa. Um campo de vetores ao longo de f é uma aplicação holomorfa $\omega : U \rightarrow T\mathbb{C}^p$ que satisfaz $\pi_p \circ \omega = f$, ou seja, para cada $x \in U$, $\omega(x) = (f(x), v)$, onde v é um vetor de $T_{f(x)}\mathbb{C}^p$. Em outras palavras, o diagrama abaixo é comutativo*

$$\begin{array}{ccc} T\mathbb{C}^n & \xrightarrow{T_f} & T\mathbb{C}^p \\ \pi_n \downarrow & \nearrow \omega & \downarrow \pi_p \\ \mathbb{C}^n & \xrightarrow{f} & \mathbb{C}^p \end{array}$$

Dado $f \in \mathcal{O}_{n,p}$, denotamos por $\theta(f)$ o conjunto dos germes em 0 dos campos de vetores ao longo de um representante de f .

Se I_n é a identidade em \mathbb{C}^n , denotamos por $\theta(n)$ o conjunto $\theta(I_n)$. Notemos que existe uma identificação natural de $T\mathbb{C}^n$ com $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ e de $\theta(f)$ com $\mathcal{O}_{n,p}$.

Os seguintes diagramas são comutativos

$$\begin{array}{ccccc} T\mathbb{C}^n & \xrightarrow{T_{I_n}} & T\mathbb{C}^n & \xrightarrow{T_f} & T\mathbb{C}^p \\ \downarrow & \nearrow \xi & \downarrow \pi_n & \nearrow \omega & \downarrow \pi_p \\ \mathbb{C}^n & \xrightarrow{I_n} & \mathbb{C}^n & \xrightarrow{f} & \mathbb{C}^p \end{array}$$

Se $\xi(x) = (x, \bar{\xi}(x))$ então

$$T_f \circ \xi(x) = T_f(x, \bar{\xi}(x)) = (f(x), d_x f(\bar{\xi}(x)))$$

onde $\xi \in \theta(n)$ e $T_f \circ \xi \in \theta(f)$.

Definimos então

$$\begin{aligned} tf : \theta(n) &\longrightarrow \theta(f) \\ \xi &\longmapsto T_f \circ \xi \end{aligned}$$

Temos que $\theta(n)$ e $\theta(f)$ são \mathcal{O}_n -módulos, tf é um homomorfismo de \mathcal{O}_n -módulos e os seguintes subconjuntos de $\theta(f)$ são submódulos.

$$\left\{ \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} g_i \mid g = (g_1, \dots, g_n) \in \mathcal{M}_n \mathcal{O}_{n,n} \right\} = tf(\mathcal{M}_n \theta(n))$$

$$\left\{ \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} g_i \mid g = (g_1, \dots, g_n) \in \mathcal{O}_{n,n} \right\} = tf(\theta(n))$$

Um germe $f \in \mathcal{O}_{n,p}$ induz o homomorfismo de álgebras

$$\begin{aligned} f^* : \mathcal{O}_p &\longrightarrow \mathcal{O}_n \\ h &\longmapsto h \circ f \end{aligned}$$

Dado M um \mathcal{O}_n -módulo, podemos definir em M uma estrutura de \mathcal{O}_p -módulo via f^* . Assim, $\theta(f)$, $tf(\mathcal{M}_n\theta(n))$ e $tf(\theta(n))$ possuem estrutura de \mathcal{O}_p -módulo via f^* . Definimos o homomorfismo de \mathcal{O}_p -módulos (via f^*)

$$\begin{aligned} \omega f : \theta(p) &\longrightarrow \theta(f) \\ \eta &\longmapsto \eta \circ f \end{aligned}$$

Assim,

$$\{h \circ f \mid h \in \mathcal{M}_p\mathcal{O}_{p,p}\} = \{\omega f(h) \mid h \in \mathcal{M}_p\theta(p)\} = \omega f(\mathcal{M}_p\theta(p))$$

$$\{h \circ f \mid h \in \mathcal{O}_{p,p}\} = \{\omega f(h) \mid h \in \theta(p)\} = \omega f(\theta(p))$$

Os subconjuntos acima são \mathcal{O}_p -submódulos de $\theta(f)$. Além disso,

$$T\mathcal{A}.f = tf(\mathcal{M}_n\theta(n)) + \omega f(\mathcal{M}_p\theta(p))$$

$$T\mathcal{A}_e.f = tf(\theta(n)) + \omega f(\theta(p))$$

Notemos que $T\mathcal{A}.f$ não é um \mathcal{O}_n -submódulo mas um \mathcal{O}_p -submódulo via f^* .

Além disso,

$$TK.f = tf(\mathcal{M}_n\theta(n)) + f^*\mathcal{M}_p\theta(f)$$

$$TK_e.f = tf(\theta(n)) + f^*\mathcal{M}_p\theta(f)$$

Definição 1.2.16. *Seja $f \in \mathcal{O}_{n,p}$. Dizemos que f é estável se para cada $\omega \in \theta(f)$ existem $\xi \in \theta(n)$ e $\eta \in \theta(p)$ tais que*

$$\omega = tf(\xi) + \omega f(\eta)$$

ou seja, f é estável se $T\mathcal{A}_e.f = \theta(f)$.

1.3 Transversalidade

As principais referências são [14] e [9]

Definição 1.3.1. *Dizemos que duas subvariedades N_1 e N_2 de uma variedade diferenciável N se interceptam transversalmente em $x \in N_1 \cap N_2$ quando $T_x N_1 + T_x N_2 = T_x N$. Quando N_1 e N_2 se interceptam transversalmente em todo $x \in N_1 \cap N_2$ dizemos que N_1 e N_2 são transversais.*

Definição 1.3.2. *Sejam $f : N \rightarrow P$ uma aplicação diferenciável entre variedades. Seja $Q \subset P$ uma subvariedade. Dizemos que f é transversal a Q quando*

i) $f(x) \notin Q$, ou

ii) $\forall x \in N$ com $y = f(x) \in Q$ tem-se que

$$d_x f(T_x N) + T_y Q = T_y P. \quad (1.1)$$

Observação 1.3.3.

1. Se f é uma submersão então $d_x f(T_x N) = T_y P$. Concluimos, que uma submersão $f : N \rightarrow P$ é transversal à toda subvariedade $Q \subseteq P$.
2. Se a equação (1.1) é verdadeira para algum x então $\text{codim } Q \leq \dim N$. Assim se $\text{codim } Q > \dim N$, a transversalidade de $f : N \rightarrow P$ a Q é equivalente à imagem de f ser disjunta de Q .

Definição 1.3.4. *Seja $y \in P$. Se f é transversal a $\{y\}$ então y é chamado de valor regular de f . Um ponto $x \in N$ tal que $f(x)$ não é regular é um ponto crítico de f e $f(x)$ é um valor crítico. A condição para que x seja ponto crítico é que $d_x f$ não seja sobrejetiva, isto é, posto $d_x f < p$.*

Teorema 1.3.5. *Sejam $f : N \rightarrow P$ uma aplicação diferenciável e Q uma subvariedade de P com f transversal a Q . Então $f^{-1}(Q)$ é uma subvariedade de N com a mesma codimensão de Q , ou é vazia. Além disso, para qualquer $x \in N$ com $y = f(x) \in Q$, $T_x f^{-1}Q = d_x f^{-1}(T_y Q)$.*

Em $\mathcal{O}_{n,p}$ definimos uma topologia através de um sistema fundamental de vizinhanças. Esta topologia é denominada Topologia de Whitney.

Definição 1.3.6. *Seja $f \in \mathcal{O}_{n,p}$. Dados $\epsilon > 0$, $R \in \mathbb{R}$, $R > 0$ e $k \in \mathbb{N}$ associamos a f uma vizinhança fundamental em $\mathcal{O}_{n,p}$ constituída dos germes $g \in \mathcal{O}_{n,p}$ tais que*

$$\forall x \in \mathbb{C}^n \text{ com } |x| \leq R, \|j^k f(x) - j^k g(x)\| < \epsilon,$$

onde $\| \cdot \|$ é uma norma fixada no espaço dos jatos $J^k(n, p)$.

Teorema 1.3.7. (Teorema de Sard) *Seja $f_i : N_i \rightarrow P$ uma família de aplicações diferenciáveis. A intersecção dos conjuntos dos valores regulares de todas as f_i é denso em P .*

Lema 1.3.8. *Seja $F : N \times S \rightarrow P$, $F(x, s) = f_s(x)$, uma família de aplicações diferenciáveis transversal a subvariedades Q_1, \dots, Q_t de P . Então existe um conjunto denso de parâmetros $s \in S$ para os quais f_s é transversal a Q_1, \dots, Q_t .*

Como conseqüência do Teorema de Sard, temos os seguintes resultados

Teorema 1.3.9. *O conjunto dos germes de aplicações transversais a subvariedades Q_1, \dots, Q_t de \mathbb{C}^p é denso em $\mathcal{O}_{n,p}$.*

Teorema 1.3.10. (Teorema da Transversalidade de Thom) *Sejam Q_1, \dots, Q_t subvariedades diferenciáveis de $J^k(n,p)$. O conjunto dos germes $f \in \mathcal{O}_{n,p}$ tais que $j^k f : U \rightarrow J^k(n,p)$ é transversal a Q_1, \dots, Q_t é denso em $\mathcal{O}_{n,p}$.*

Observação 1.3.11. A transversalidade é invariante por \mathcal{A} -equivalência. De fato, sejam f_1 e f_2 germes \mathcal{A} -equivalentes, $\phi \in \text{Diff}(\mathbb{C}^n)$ e $\psi \in \text{Diff}(\mathbb{C}^p)$ tais que $\psi \circ f_1 \circ \phi^{-1} = f_2$. Suponhamos que Q_1 e Q_2 são subvariedades de P_1 e P_2 , respectivamente, com $\psi(Q_1) = Q_2$, então f_1 é transversal à Q_1 se, e somente se, f_2 é transversal a Q_2 .

1.4 Determinação finita e desdobramentos

Nesta seção a principal referência é [21].

Definição 1.4.1. *Seja $\mathcal{G} = \mathcal{A}, \mathcal{A}_1$ ou \mathcal{K} . Dizemos que um germe $f \in \mathcal{O}_{n,p}$ é k - \mathcal{G} -determinado, para algum $k \in \mathbb{N}$, se para todo $g \in \mathcal{O}_{n,p}$ tal que $j^k g(0) = j^k f(0)$ temos que g é \mathcal{G} -equivalente a f . Dizemos que f é finitamente determinado se f é k - \mathcal{G} -determinado para algum $k \in \mathbb{N}$.*

Se $f \in \mathcal{O}_{n,p}$ é k - \mathcal{G} -determinado então f é \mathcal{G} -equivalente ao seu k -jato $j^k f(0)$. No entanto a recíproca não é verdadeira.

Teorema 1.4.2. *Se $f \in \mathcal{O}_{n,p}$ satisfaz*

$$\mathcal{M}_n^l \theta(f) \subset T\mathcal{K}f$$

$$\mathcal{M}_n^{r+1} \theta(f) \subset T\mathcal{A}_1 f + \mathcal{M}_n^{l+r+1} \theta(f)$$

então f é r - \mathcal{A}_1 -determinado.

Teorema 1.4.3. *Se existe um \mathcal{O}_n -módulo D tal que*

$$\text{i) } \mathcal{M}_n^s \theta(f) \subset t f(\mathcal{M}_n \theta(n)) + f^* \mathcal{M}_p D + \mathcal{M}_n^{s+1} \theta(f)$$

$$\text{ii) } D \subset t f(\theta(n)) + w f(\theta(p)) + \mathcal{M}_n^s \theta(f)$$

então f é s - \mathcal{A} -determinado.

Teorema 1.4.4. *Seja $f \in \mathcal{O}_{n,p}$ um germe r - \mathcal{A} -determinado. Então $\mathcal{M}_n^{r+1} \subset T\mathcal{A}f$*

Teorema 1.4.5. (Critério Geométrico de Determinação Finita) *Seja $f \in \mathcal{M}_n \mathcal{O}_{n,p}$ finitamente \mathcal{K} -determinado. Então f é finitamente \mathcal{A} -determinado se, e somente se, para cada representante de f , denotado também por f , existe uma vizinhança U de 0 em \mathbb{C}^n e V de 0 em \mathbb{C}^p , tal que, se $y \in V - \{0\}$,*

$$f^{-1}(y) \cap \Sigma f \cap U = \{x_1, \dots, x_r\},$$

e o multigerme de f em $\{x_1, \dots, x_r\}$ é estável, onde Σf é o conjunto dos pontos críticos de f .

Definição 1.4.6. *Seja $f_0 \in \mathcal{M}_n \mathcal{O}_{n,p}$. Um desdobramento a s -parâmetros de f_0 é um germe*

$$\begin{aligned} F : (\mathbb{C}^s \times \mathbb{C}^n, 0) &\longrightarrow (\mathbb{C}^s \times \mathbb{C}^p, 0) \\ (u, x) &\longmapsto (u, f(u, x)) \end{aligned}$$

satisfazendo $f(0, x) = f_0(x)$. O germe $f : (\mathbb{C}^s \times \mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ é chamado de deformação de f_0 .

Dois desdobramentos $F, G : (\mathbb{C}^s \times \mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^s \times \mathbb{C}^p, 0)$ de f_0 são isomorfos se existem $\phi \in \text{Diff}(\mathbb{C}^s \times \mathbb{C}^n)$ e $\psi \in \text{Diff}(\mathbb{C}^s \times \mathbb{C}^p)$ desdobramentos a s -parâmetros dos germes das identidades em \mathbb{C}^n e \mathbb{C}^p respectivamente, tais que $G = \psi \circ F \circ \phi^{-1}$.

Sejam F um desdobramento a s -parâmetros de $f_0 \in \mathcal{M}_n \mathcal{O}_{n,p}$ e $h : (\mathbb{C}^t, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^s, 0)$ um germe. O pull-back de F por h , denotado por h^*F , é definido como sendo o desdobramento de f_0 a t -parâmetros dado por

$$\begin{aligned} h^*F : (\mathbb{C}^t \times \mathbb{C}^n, 0) &\longrightarrow (\mathbb{C}^t \times \mathbb{C}^p, 0) \\ (v, x) &\longmapsto (v, f(h(v), x)) \end{aligned}$$

Se G é desdobramento a t -parâmetros de f_0 , dizemos que G é induzido de F se existe um germe $h : (\mathbb{C}^t, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^s, 0)$ tal que G é isomorfo a h^*F . Em particular, se $h : (\mathbb{C}^s, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^s, 0)$ é um germe de difeomorfismo, dizemos que F e G são equivalentes.

Dizemos que F é um desdobramento versal de f_0 se todos os desdobramentos de f_0 são induzidos de F . Quando F é versal com um número mínimo de parâmetros dizemos que F é miniversal.

O desdobramento F é trivial se é isomorfo ao desdobramento constante

$$G : (\mathbb{C}^s \times \mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^s \times \mathbb{C}^p, 0), G(u, x) = (u, f_0(x)).$$

Definição 1.4.7. *Seja $f_0 \in \mathcal{M}_n \mathcal{O}_{n,p}$ um germe de \mathcal{A}_e -codimensão finita. Chamamos de perturbação estável (ou estabilização) de f_0 uma deformação a um parâmetro f de f_0 que*

tem um representante (que ainda será denotado por f) definido em U , uma vizinhança de 0 , tal que para todo $t \neq 0$ e suficientemente pequeno, o germe de f_t é estável, onde $f_t(x) = f(t, x)$.

Em [19] J. Damon e D. Mond mostram que quando $n = 2$ e $p = 3$ sempre existe uma perturbação estável

1.5 Singularidades de Thom-Boardman

Definição 1.5.1. *Seja $f : U \rightarrow \mathbb{C}^p$ uma aplicação holomorfa. O conjunto singular de f , denotado por Σf , é o conjunto de todos os seus pontos singulares. A imagem de Σf por f é chamada de discriminante. Para cada $i = 1, \dots, \min\{n, p\}$, o conjunto de singularidades de primeira ordem $\Sigma^i f$ é definido como*

$$\Sigma^i f = \{x \in U \mid \dim \ker d_x f = i\}$$

Lembremos que o posto de f é menor ou igual a $\min\{n, p\}$ assim os conjuntos singulares particionam o domínio, que neste caso está contido em \mathbb{C}^n , em um número finito de conjuntos nos quais f tem posto constante. Seria conveniente que estes conjuntos fossem variedades mas nem sempre isto é verdade. Em 1.5.5 abordaremos condições para que isto ocorra.

Lema 1.5.2. *Seja*

$$E = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

uma matriz $p \times n$ e A uma matriz $k \times k$ invertível. Então E tem posto k se, e somente se, $D = CA^{-1}B$.

Demonstração: Observemos que para qualquer matriz $X_{(n-k) \times k}$, a matriz E tem o mesmo posto de

$$E' = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ X & I_{p-k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ XA + C & XB + D \end{pmatrix}$$

Assim, podemos escolher X tal que $XA + C = 0$, ou seja, $X = -CA^{-1}$. Então

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & -CA^{-1}B + D \end{pmatrix} = E'$$

Como A tem posto k , segue imediatamente que $\text{posto } E = \text{posto } E' = k$ se, e somente se, $D = CA^{-1}B$. ■

Definição 1.5.3. Em $J^1(n, p)$ definimos o seguinte conjunto

$$\Sigma^i = \{j^1 f(x) \in J^1(n, p) \mid \dim \ker j^1 f(x) = i\}$$

Teorema 1.5.4. O conjunto Σ^i é uma subvariedade diferenciável de $J^1(n, p)$ de codimensão $i(p - n + i)$.

Demonstração: Escolha k tal que $i + k = n$. Seja E_0 a matriz de um jato em Σ^i . A menos de mudança linear de coordenadas, podemos supor que

$$E_0 = \begin{pmatrix} A_0 & B_0 \\ C_0 & D_0 \end{pmatrix}$$

com A_0 uma matriz $k \times k$ invertível e $D_0 = C_0 A_0^{-1} B_0$.

Definimos uma vizinhança aberta U de E_0 , com a propriedade que cada matriz $E \in U$ é da forma

$$E = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

com $A_{k \times k}$ invertível.

Consideremos a seguinte aplicação

$$\begin{aligned} F : U &\rightarrow J^1(n - k, p - k) \\ E &\mapsto D - CA^{-1}B \end{aligned}$$

Notemos que F é uma submersão. De fato, se fixarmos A, B e C , F será uma função afim de D , denotemos esta nova função por \tilde{F} , então $d_D \tilde{F}$ logo dF será sobrejetora.

Portanto $F^{-1}(0)$ é uma subvariedade de codimensão $(n - k)(p - k) = i(p - k) = i(p - (n - i)) = i(p - n + i)$, mas pelo Lema 1.5.2, $F^{-1}(0) = U \cap \Sigma^i$ ■

O resultado a seguir é consequência imediata dos Teoremas 1.3.5, 1.3.10 e 1.5.4.

Teorema 1.5.5. Existe um subconjunto denso de germes $f \in \mathcal{O}_{n,p}$ para os quais $j^1 f$ é transversal a todos os conjuntos Σ^i . Além disso $\Sigma^i f$ é uma variedade de codimensão $i(p - n + i)$.

Observação 1.5.6. Estudemos a condição de $j^1 f$ ser transversal a Σ^i para uma função $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$. Temos que $\Sigma^i \subset J^1(n, 1)$ e $j^1 f : \mathbb{C}^n \rightarrow J^1(n, 1)$, assim $j^1 f$ é transversal a Σ^i se

$$d_x(j^1 f)(\mathbb{C}^n) + T_{j^1 f(x)}\Sigma^i = J^1(n, 1), \forall x \in \mathbb{C}^n \text{ tal que } j^1 f(x) \in \Sigma^i \quad (1.2)$$

Identificamos $J^1(n, 1)$ a \mathbb{C}^n através do isomorfismo que associa a cada aplicação linear de \mathbb{C}^n em \mathbb{C} sua matriz relativa à base canônica. Observamos que em $J^1(n, 1)$ existem apenas os conjuntos Σ^{n-1} e Σ^n de codimensão 0 e n , respectivamente. Portanto, Σ^{n-1} é um conjunto aberto, qualquer $j^1 f$ é transversal a ele e $\Sigma^n f$ é definido pelas n condições

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) = 0, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) = 0,$$

que é, exatamente, o conjunto dos pontos críticos de f .

Notemos que a matriz jacobiana de $j^1 f$ é precisamente a matriz hessiana $H(f)$ de f e a imagem da derivada de $j^1 f$ é um subespaço de \mathbb{C}^n gerado por suas colunas. Além disso,

$$\Sigma^n f = (j^1 f)^{-1}(\Sigma^n) \quad \text{então} \quad j^1 f(\Sigma^n f) \subset \Sigma^n = \{0\}$$

ou seja, Σ^n é a origem em \mathbb{C}^n .

Considerando que (1.2) é válida, obtemos que as colunas de $H(f)$ geram \mathbb{C}^n , isto é, $H(f)$ é não singular.

Definição 1.5.7. *Um ponto crítico de um germe $f \in \mathcal{O}_{n,p}$ tal que a matriz hessiana é não singular é chamado não degenerado.*

Portanto, concluímos que a condição para $j^1 f$ ser transversal a Σ^i é que todo ponto crítico seja não degenerado.

Observação 1.5.8. Consideremos $f \in \mathcal{M}_n \mathcal{O}_{n,p}$ tal que $j^1 f$ é transversal a Σ^i no caso especial quando $p \geq 2n$. Neste caso $\text{codim} \Sigma^i f = i(p - n + i) \geq i(n + i) > n, i \neq 0$. Logo $\Sigma^i f = \emptyset$ para $i > 0$, conseqüentemente, f é uma imersão

Dado um germe $f \in \mathcal{O}_{n,p}$ tal que $\Sigma^i f \neq \emptyset$, para algum i , se $\Sigma^i f$ é uma subvariedade podemos considerar os conjuntos de singularidades de segunda ordem $\Sigma^{i,j} f = \Sigma^j(f|_{\Sigma^i f})$ e este processo pode ser continuado indutivamente, ou seja, se estes conjuntos são subvariedades, consideremos os conjuntos de singularidades de terceira ordem $\Sigma^{i,j,k} f = \Sigma^k(f|_{\Sigma^{i,j} f})$. Estes conjuntos, denotados por $\Sigma^{i_1, \dots, i_k} f$ são chamados conjuntos de singularidades de k -ésima ordem de f .

Definição 1.5.9. *Definimos $\Sigma^{i_1, i_2, \dots, i_k}$ como o seguinte subconjunto de $J^k(n, p)$*

$$\Sigma^{i_1, i_2, \dots, i_k} = \{j^k f(x) \in J^k(n, p) | x \in \Sigma^{i_1, i_2, \dots, i_k} f\}.$$

Capítulo 2

Subvariedades Analíticas

Neste capítulo estudamos subvariedades analíticas complexas, o anel $\mathcal{O}_{X,0}$ e intersecção completa com singularidade isolada. Além disso, abordamos os ideais de fitting e exibimos um algoritmo para calcular tais ideais quando f é um germe de aplicação $(\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$.

2.1 Álgebra comutativa

Nesta seção abordamos alguns resultados básicos de Álgebra Comutativa. Tais resultados e suas demonstrações encontram-se em [1],[11], [12] e [18]. Assumimos nesta seção que R é um anel comutativo.

Definição 2.1.1. *Seja I um ideal de R .*

1. *O conjunto de todos os elementos $x \in R$ tais que alguma potência de x está em I é um ideal de R chamado de ideal radical de I e denotado por \sqrt{I} . Dizemos que I é um ideal radical se $\sqrt{I} = I$.*
2. *Um elemento x de R é nilpotente se existe uma potência de x que é igual a zero. O conjunto dos elementos nilpotentes de R é denotado por $\text{nil}(R)$.*
3. *Dizemos que I é primário se $I \neq R$ e se*

$$xy \in I \text{ então } x \in I \text{ ou } y^n \in I \text{ para algum } n > 0$$

O conjunto dos ideais primos de R é chamado espectro de R é denotado por $\text{spec}(R)$. Se I é um ideal próprio de R então o radical de I é a intersecção de todos os ideais primos de R que contém I . Todo ideal primo é primário.

Se $R \neq 0$ então $\text{spec}(R)$ tem elementos maximais e minimais e todo ideal primo de R está contido em pelo menos um ideal primo maximal e contém pelo menos um ideal primo minimal.

Uma decomposição primária de um ideal I de R é uma expressão de I como uma intersecção finita de ideais primários

$$I = \bigcap_{j=1}^n I_j$$

Uma decomposição primária é minimal se os ideais $\sqrt{I_j}$ são dois a dois distintos e

$$I_j \not\supseteq \bigcap_{k \neq j} I_k$$

$1 \leq j \leq n$. Qualquer decomposição primária pode ser reduzida a uma decomposição primária minimal.

Nem todo ideal possui decomposição primária e, quando a decomposição primária existe, nem sempre ela é única. No entanto, o seguinte resultado de [1, Corolario 4.11, pag. 54] mostra que, sob certas condições, quando tal decomposição existe, ela é única.

Teorema 2.1.2. *Seja I um ideal com decomposição primária minimal*

$$I = \bigcap_{i=1}^n I_i$$

As componentes primárias I_i de I tais que $\sqrt{I_i}$ é um primo minimal de I são unicamente determinadas por I . Assim, se I tem uma decomposição primária minimal onde os radicais das componentes primárias são primos minimais, então tal decomposição é a única com estas propriedades.

Definição 2.1.3. *O anel R é Noetheriano se para toda sequência ascendente de ideais de R*

$$I_1 \subseteq I_2 \subseteq \dots \subseteq \dots$$

existe n tal que $I_k = I_{k+1}$ para todo $k \geq n$.

Uma formulação equivalente para a definição acima é que um anel R é Noetheriano se, e somente se, todo ideal de R é finitamente gerado.

Como \mathcal{O}_n é isomorfo a $\mathbb{C}[[X_1, \dots, X_n]]$, segue do Teorema da Base de Hilbert (ver [1]) que \mathcal{O}_n é um anel Noetheriano.

Teorema 2.1.4. *Em um anel Noetheriano todo ideal tem uma decomposição primária.*

Lema 2.1.5. *Seja R um anel Noetheriano e I um ideal radical de R , $I \neq R$, então existem ideais primos p_1, \dots, p_r , tais que $I = \bigcap_{i=1}^r p_i$.*

Demonstração: Como A é Noetheriano então $I = q_1 \cap \dots \cap q_r$ com q_j primário. Além disso $I = \sqrt{I} = \sqrt{q_1 \cap \dots \cap q_r} = \sqrt{q_1} \cap \dots \cap \sqrt{q_r}$. Seja $p_i = \sqrt{q_i}$. Então $I = p_1 \cap \dots \cap p_r$ com p_i primo. ■

Definição 2.1.6. *Seja M um R -módulo. Dizemos que M é Noetheriano se para toda sequência ascendente de submódulos de M*

$$M_1 \subseteq M_2 \subseteq \dots \subseteq \dots$$

existe n tal que $M_k = M_{k+1}$ para todo $k \geq n$.

Um R -módulo M é Noetheriano se, e somente se, todo submódulo de M é finitamente gerado.

Se R é um anel Noetheriano e M é um R -módulo finitamente gerado então M é Noetheriano. Portanto $\mathcal{O}_{n,p}$ é um \mathcal{O}_n -módulo Noetheriano. O resultado seguinte é uma consequência do Lema de Nakayama e sua demonstração pode ser encontrada em [10].

Proposição 2.1.7. *Sejam R um anel local comutativo com identidade, \mathcal{M} seu ideal maximal e M um R -módulo finitamente gerado. Então $M/\mathcal{M}M$ é um espaço vetorial de dimensão finita sobre o corpo R/\mathcal{M} . Sejam $\phi : M \rightarrow M/\mathcal{M}M$ a projeção natural, v_1, \dots, v_n , uma base para o espaço vetorial $M/\mathcal{M}M$ e $e_1, \dots, e_n \in M$ tais que $\phi(e_i) = v_i$. Então e_1, \dots, e_n formam um conjunto de geradores de M sobre R .*

Teorema 2.1.8. (Teorema da Preparação de Malgrange Generalizado) *Sejam $f \in \mathcal{O}_{n,p}$ e M um \mathcal{O}_n -módulo finitamente gerado. Então M é um \mathcal{O}_p -módulo (via f^*) finitamente gerado se, e somente se, $\frac{M}{f^* \mathcal{M}_p M}$ é um espaço vetorial complexo de dimensão finita.*

Demonstração: Ver [10]. ■

Consideremos R um anel comutativo, $R \neq 0$.

Definição 2.1.9. *Uma sequência de $n + 1$ ideais primos da forma*

$$p_0 \supset p_1 \supset \dots \supset p_n$$

é chamada cadeia prima de comprimento n . Se $p \in \text{spec}(R)$, o supremo de todos os comprimentos das cadeias primas com $p_0 = p$ é chamado de altura de p e é denotado por

$ht(p)$. Se I é um ideal próprio de R , definimos a altura de I como sendo o ínfimo das alturas dos ideais primos de R que contém I , ou seja,

$$ht(I) = \inf \{ht(p) \mid p \supseteq I\}$$

Se $ht(p) = 0$ então p é um primo minimal de R .

Definição 2.1.10. A dimensão de R , também chamada de dimensão de Krull de R , é definida como sendo o supremo das alturas de todos os ideais primos de R , ou seja,

$$\dim_{krull} R = \sup \{ht(p) \mid p \in \text{spec}(R)\}$$

Também denotamos a dimensão de Krull de R por $\dim R$.

Se R é um domínio de ideais principais então $\dim R = 1$.

Notemos que se a dimensão de R é finita então é igual ao comprimento da mais longa cadeia prima em R .

Definição 2.1.11. Seja R um anel e M um R -módulo. A sequência a_1, \dots, a_r de elementos de R é M -regular se para cada i , $1 \leq i \leq r$, a_i não é divisor de zero em $M/(a_1M + \dots + a_{i-1}M)$. Quando todos os a_i 's pertencem a um ideal I dizemos que a_1, \dots, a_r é uma sequência M -regular em I . Além disso, se não existe $b \in I$ tal que a_1, \dots, a_r, b é M -regular, então a_1, \dots, a_r é uma sequência M -regular maximal em I . Chamamos de $\text{depth}M$ o tamanho da sequência maximal M -regular em I .

2.2 Subvariedades analíticas complexas

Definição 2.2.1. Uma subvariedade analítica complexa de um aberto $U \subset \mathbb{C}^n$ é um subconjunto X de U que em alguma vizinhança aberta V de cada ponto de U , X é o conjunto dos zeros de um número finito de funções holomorfas definidas em U .

Sejam X_1 e X_2 subvariedades analíticas complexas. Dizemos que X_1 é equivalente a X_2 se existem aplicações analíticas $\varphi : X_1 \rightarrow X_2$ e $\psi : X_2 \rightarrow X_1$ tais que $\psi \circ \varphi : X_1 \rightarrow X_1$ e $\varphi \circ \psi : X_2 \rightarrow X_2$ são as aplicações identidades em X_1 e X_2 respectivamente.

Dado X uma subvariedade analítica complexa em \mathbb{C}^n , existe um ideal do anel local \mathcal{O}_n consistindo dos germes de funções analíticas complexas que se anulam em X . Esse ideal é chamado de ideal da variedade X e é denotado por $I(X)$. Dado um ideal J em \mathcal{O}_n , existem f_1, \dots, f_r em \mathcal{O}_n que geram J , pois \mathcal{O}_n é um anel Noetheriano, sejam U uma vizinhança aberta da origem e $\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_r$ representantes de f_1, \dots, f_r definidos em U , respectivamente. O

subconjunto $\{z \in U \mid \tilde{f}_1(z) = \dots = \tilde{f}_r(z) = 0\}$ define uma subvariedade analítica complexa, denotado por $V(J)$.

O seguinte resultado é consequência imediata das definições acima, com exceção do item (iv), que é o conhecido Teorema dos Zeros de Hilbert.

Proposição 2.2.2. *Sejam X, X_1 e X_2 subvariedades analíticas complexas em \mathbb{C}^n e J, J_1 e J_2 ideais de \mathcal{O}_n .*

- i) Se $X_1 \subseteq X_2$, então $I(X_1) \supseteq I(X_2)$;
- ii) Se $J_1 \subseteq J_2$, então $V(J_1) \supseteq V(J_2)$;
- iii) $X = V(I(X))$;
- iv) $\sqrt{J} = I(V(J))$;
- v) $X_1 = X_2$ se, e somente se, $I(X_1) = I(X_2)$;
- vi) $I(X) = \sqrt{I(X)}$
- vii) $V(J_1 + J_2) = V(J_1) \cap V(J_2)$;
- viii) $V(J_1 \cap J_2) = V(J_1) \cup V(J_2)$.

Uma subvariedade analítica complexa X em \mathbb{C}^n é redutível se pode ser escrita na forma $X = X_1 \cup X_2$, onde X_1 e X_2 são subvariedades analíticas complexas em \mathbb{C}^n contidas propriamente em X . A subvariedade X é irredutível se não é redutível. Temos que X é irredutível se, somente se, $I(X)$ é um ideal primo de \mathcal{O}_n (ver [11, pag.89]). Além disso, toda subvariedade analítica complexa pode ser escrita como uma união finita de subvariedades analíticas complexas irredutíveis. Se a decomposição é tal que nenhum fator pode ser omitido, então ela é única e cada subvariedade irredutível é chamada de componente irredutível.

Sejam X uma subvariedade analítica complexa e $I(X)$ contido propriamente em \mathcal{O}_n . Segue da Proposição 2.2.2 e do Lema 2.1.5 que

$$X = \bigcup_{i=1}^r V(p_i),$$

onde cada p_i é ideal primo, $i = 1, \dots, r$, e portanto $V(p_i)$ é irredutível. Eliminando as componentes $V(p_i)$ tais que $V(p_i) \subseteq V(p_j)$ para $j \neq i$ obtemos a decomposição em fatores irredutíveis de X , e cada $V(p_i)$ é uma componente irredutível de X .

Exemplo 2.2.3. O conjunto $\Sigma^1 = \{j^1 f(x) \in J^1(n, p) \mid \dim \ker j^1 f(x) = 1\}$ é uma subvariedade analítica complexa. De fato, pelo Teorema 1.5.4, $\Sigma^1 = V(I)$, com $I = \langle F \rangle$.

■

Definição 2.2.4. *Seja V uma subvariedade analítica complexa de um aberto $U \in \mathbb{C}^n$. Um ponto $x \in V$ é um ponto regular de V se existe uma vizinhança U_x de x tal que $V \cap U_x$ é uma variedade diferenciável. Um ponto $x \in V$ é singular se não é regular.*

2.3 O anel $\mathcal{O}_{X,0}$

As principais referências para esta seção são [11] e [12].

Seja X uma subvariedade analítica complexa em \mathbb{C}^n . O anel dos germes de funções analíticas em X , denotado por $\mathcal{O}_{X,0}$, é definido por

$$\mathcal{O}_{X,0} = \frac{\mathcal{O}_n}{I(X)}$$

Dado um germe $f \in \mathcal{O}_n$, seja \tilde{f} um representante de f definido numa vizinhança da origem. A restrição de \tilde{f} a X é uma função definida numa vizinhança da origem contida em X . Temos portanto um homomorfismo de \mathcal{O}_n no anel dos germes de funções definidas em X . O núcleo deste homomorfismo é $I(X)$. Assim, $\mathcal{O}_{X,0}$ pode ser identificado como o anel dos germes de funções analíticas definidas em X . Além disso, $\mathcal{O}_{X,0}$ é um anel local Noetheriano.

Sejam X_1 e X_2 subvariedades analíticas complexas. Uma aplicação analítica complexa $\varphi : X_1 \rightarrow X_2$ induz um homomorfismo

$$\begin{aligned} \varphi^* : \mathcal{O}_{X_2,0} &\rightarrow \mathcal{O}_{X_1,0} \\ f &\mapsto \varphi \circ f \end{aligned}$$

Seja X uma subvariedade analítica complexa irreduzível. Definimos a dimensão de X como sendo a dimensão de Krull do anel $\mathcal{O}_{X,0}$. Se X é uma subvariedade analítica complexa qualquer em \mathbb{C}^n , então X se escreve como uma união finita $X = \cup X_i$, onde cada X_i é uma subvariedade analítica complexa irreduzível. Neste caso a dimensão de X é dada por $\dim X = \max_i \{\dim X_i\}$. A subvariedade X é equidimensional se $\dim X = \dim X_i$ para todas as componentes X_i . A codimensão de X é definida como sendo $n - \dim X$.

Definição 2.3.1. *Seja X uma subvariedade analítica complexa. Dizemos que X é Cohen-Macaulay se o anel $\mathcal{O}_{X,0}$ é um anel de Cohen-Macaulay, ou seja,*

$$\text{depth} \mathcal{O}_{X,0} = \dim \mathcal{O}_{X,0}$$

Definição 2.3.2. Uma aplicação analítica complexa $\varphi : X_1 \rightarrow X_2$ entre duas variedades analíticas complexas é uma aplicação analítica complexa finita se $\varphi^{-1}(0) = 0$.

Definição 2.3.3. Sejam V um espaço vetorial de dimensão n e H_1, \dots, H_r subespaços de V . Dizemos que H_1, \dots, H_r estão em posição geral se para toda sequência de inteiros i_1, \dots, i_r com $1 \leq i_1 < \dots < i_s \leq 1_r$.

$$\text{codim}(H_{i_1} \cap \dots \cap H_{i_s}) = \text{codim} H_{i_1} + \dots + \text{codim} H_{i_s}$$

Notemos que no caso $r = 2$, H_1 e H_2 estão em posição geral se, e somente se,

$$\begin{aligned} \dim H_1 + H_2 &= \dim H_1 + \dim H_2 - \dim H_1 \cap H_2 \\ &= n - (\text{codim} H_1 + \text{codim} H_2 + \text{codim}(H_1 \cap H_2)) = n \end{aligned}$$

Definição 2.3.4. Sejam X uma subvariedade analítica complexa de dimensão n em \mathbb{C}^N e $f : X \rightarrow \mathbb{C}^{n+1}$ uma aplicação finita. Uma k -upla de pontos de f consiste de k pontos x_1, \dots, x_k , dois a dois distintos, pertencentes a $\{f^{-1}(y)\}$ para algum $y \in \mathbb{C}^{n+1}$. Nestes pontos X é uma variedade diferenciável e f é localmente uma imersão. Além disso, dizemos que a k -upla de pontos é ordinária se os espaços tangentes em y das imagens $f(U_i)$, onde U_i é uma vizinhança de x_i , $i = 1, \dots, k$, estão em posição geral.

Os seguintes resultados e suas demonstrações podem ser encontrados em [6].

Teorema 2.3.5. (Teorema da Conservação da Multiplicidade) Seja $\pi : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ um germe de aplicação holomorfa com multiplicidade $m_\pi(0) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{\pi^* \mathcal{M}_n}$. Então para todo representante $\pi : U \rightarrow V$ onde U e V são vizinhanças de zero, e para todo $y \in V$ temos

$$\sum_{x \in \pi^{-1}(y) \cap U} m_\pi(x) = m_\pi(0)$$

onde $m_\pi(x) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{n,x}}{\pi^* \mathcal{M}_n}$. Em particular todo valor regular de π em V tem $m_\pi(0)$ pré-imagens.

Lema 2.3.6. Sejam W uma subvariedade de $J^k(n, p)$ e $f \in \mathcal{M}_n \mathcal{O}_{n,p}$ com $j^k f(0) \in W$. Seja $F : (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^d, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^d, 0)$ um desdobramento de f , $F(x, u) = (f_u(x), u)$, tal que $\varphi : (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^d, 0) \rightarrow (J^k(n, p), j^k f(0))$, $\varphi(x, u) = j^k f_u(x)$ é transversal a W . Consideremos $V = (\varphi)^{-1}(W)$ e $\pi : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^d \rightarrow \mathbb{C}^d$ a projeção no espaço dos parâmetros. Então

$$\frac{\mathcal{O}_{V,0}}{(\pi|_V)^* \mathcal{M}_d \mathcal{O}_{V,0}} \simeq \frac{\mathcal{O}_n}{(j^k f)^* I(W)}.$$

Demonstração: Temos

$$\frac{\mathcal{O}_{V,0}}{(\pi|_V)^* \mathcal{M}_d \mathcal{O}_{V,0}} = \frac{\frac{\mathcal{O}_{n+d}}{I(V)}}{(\pi|_V)^* \mathcal{M}_d \left[\frac{\mathcal{O}_{n+d}}{I(V)} \right]} = \frac{\frac{\mathcal{O}_{n+d}}{(j^k F)^* I(W)}}{(\pi|_V)^* \mathcal{M}_d \left[\frac{\mathcal{O}_{n+d}}{(j^k F)^* I(W)} \right]}$$

agora por, [1, Corolário 2.2.], temos

$$\frac{\frac{\mathcal{O}_{n+d}}{(j^k F)^* I(W)}}{(\pi|_V)^* \mathcal{M}_d \left[\frac{\mathcal{O}_{n+d}}{(j^k F)^* I(W)} \right]} \simeq \frac{\mathcal{O}_{n+d}}{\pi^* \mathcal{M}_d + (j^k F)^* I(W)}$$

e finalmente

$$\frac{\mathcal{O}_{n+d}}{\pi^* \mathcal{M}_d + (j^k F)^* I(W)} \simeq \frac{\mathcal{O}_n}{(j^k f)^* I(W)} \quad \blacksquare$$

Definição 2.3.7. *Sejam X uma subvariedade analítica complexa em \mathbb{C}^N de dimensão n e I um ideal que define X . Dizemos que I define uma intersecção completa (IC) em 0 se I admite $N - n$ geradores f_1, \dots, f_{N-n} em \mathcal{O}_N .*

Sejam X uma subvariedade analítica complexa em \mathbb{C}^N de dimensão n e $I(X)$ um ideal que define X . Suponhamos que X seja uma intersecção completa. Consideremos o caso em que X tem uma singularidade isolada em 0. Isto significa que se f_1, \dots, f_{N-n} é um conjunto de geradores de I , então existe uma vizinhança V da origem em \mathbb{C}^N onde f_1, \dots, f_{N-n} convergem e para todo $y \neq 0$ no conjunto dos zeros comuns de f_1, \dots, f_{N-n} , $df_1(y), \dots, df_{N-n}(y)$ são linearmente independentes. Neste caso dizemos que X com sua \mathbb{C} -álgebra local \mathcal{O}_N/I é uma intersecção completa com singularidade isolada (ICIS).

Exemplo 2.3.8. *Pelo Exemplo 2.2.3 e Teorema 1.5.4 temos que Σ^1 é uma IC.*

Definição 2.3.9. *Seja X uma ICIS em 0 de dimensão n e $I = \langle f_1, \dots, f_k \rangle$ um ideal que define X . Definimos o número de Milnor de X como*

$$\mu(X) = \sum_{i=1}^k (-1)^{k-i} \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{n+k}}{A_i}$$

$$A_i = \left\langle \left\{ \frac{\partial(f_1, \dots, f_i)}{\partial(x_{j_1}, \dots, x_{j_i})} \mid 1 \leq j_1 < \dots < j_i \leq n+k \right\}, f_1, \dots, f_{i-1} \right\rangle$$

onde $\frac{\partial(f_1, \dots, f_i)}{\partial(x_{j_1}, \dots, x_{j_i})}$ denota o determinante do menor de tamanho i da matriz jacobiana de (f_1, \dots, f_k) em relação às coordenadas x_{j_1}, \dots, x_{j_k} .

Exemplo 2.3.10. Sejam $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C}$ dois a dois distintos e

$$f: \begin{array}{ccc} (\mathbb{C}^3, 0) & \rightarrow & (\mathbb{C}^2, 0) \\ (x_1, x_2, x_3) & \rightarrow & (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2) \end{array}$$

As componentes de f definem uma ICIS de dimensão 1.

$$A_1 = \left\langle \frac{\partial f_1}{\partial x_1}, \frac{\partial f_1}{\partial x_2}, \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \right\rangle = \langle x_1, x_2, x_3 \rangle$$

$$A_2 = \left\langle \left\{ \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x_i, x_j)} \mid 1 \leq i < j \leq 3 \right\}, f_1 \right\rangle = \langle x_1 x_2, x_1 x_3, x_2 x_3, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \rangle$$

Notemos $A_2 \supset \mathcal{M}_3^3$, e ainda $1, x_1, x_2, x_3, x_1^2, x_2^2$ formam uma base para $\frac{\mathcal{O}_3}{A_2}$, logo $\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_3}{A_2} = 6$.

$$\mu(X) = (-1) \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_3}{A_1} + \dim_{\mathbb{C}} (-1)^0 \frac{\mathcal{O}_3}{A_2} = 5$$

2.4 Ideais de Fitting

Nesta seção definimos ideais de Fitting de um módulo M e descrevemos um algoritmo apresentado por D. Mond e R. Pellikaan (ver [8]) para calcular tais ideais quando $M = \mathcal{O}_n$.

Definição 2.4.1. *Sejam R um anel comutativo com unidade e M um R -módulo. Consideremos a sequência exata*

$$R^p \xrightarrow{\lambda} R^q \xrightarrow{\alpha} M \longrightarrow 0 \quad (2.1)$$

Definimos o k -ésimo ideal de Fitting de M como sendo o ideal em R gerado pelos menores de ordem $(q - k)$ da matriz λ , onde $q - p \leq k < q$. Se $k \geq q$ definimos $\mathcal{F}_k(M) = R$ e se $k < q - p$, definimos $\mathcal{F}_k(M) = 0$.

A definição de $\mathcal{F}_k(M)$ independe da escolha da sequência exata (ver [13]).

Seja $f \in \mathcal{M}_n \mathcal{O}_{n,n+1}$ um germe finitamente determinado. O anel \mathcal{O}_n admite uma estrutura de \mathcal{O}_{n+1} -módulo via composição com f , denotado por $f_* \mathcal{O}_n$. Assim, $f_* \mathcal{O}_n$ é simplesmente \mathcal{O}_n considerado como um \mathcal{O}_{n+1} -módulo.

Para calcular o k -ésimo ideal de Fitting de $f_* \mathcal{O}_n$ construímos uma sequência exata de \mathcal{O}_{n+1} -módulos

$$\mathcal{O}_{n+1}^p \xrightarrow{\lambda} \mathcal{O}_{n+1}^q \xrightarrow{\alpha} f_* \mathcal{O}_n \longrightarrow 0 \quad (2.2)$$

o homomorfismo α leva os elementos da base de \mathcal{O}_{n+1}^q nos geradores g_1, \dots, g_l de $f_*\mathcal{O}_n$ como \mathcal{O}_{n+1} -módulo e as colunas de λ são as relações entre os g_i 's com coeficientes em \mathcal{O}_{n+1} . Portanto $\mathcal{F}_k(f_*\mathcal{O}_n)$ é o ideal de \mathcal{O}_{n+1} gerado pelos menores de ordem $(q - k)$ de λ .

Segue da Proposição 2.1.7 que se as classes de g_1, \dots, g_l em $\frac{f_*\mathcal{O}_n}{\mathcal{M}_{n+1}f_*\mathcal{O}_n}$ geram $\frac{f_*\mathcal{O}_n}{\mathcal{M}_{n+1}f_*\mathcal{O}_n}$ como espaço vetorial sobre \mathbb{C} então g_1, \dots, g_l geram $f_*\mathcal{O}_n$ como \mathcal{O}_{n+1} -módulo. Assim, para determinar os geradores de $f_*\mathcal{O}_n$, basta determinar uma base de $\frac{f_*\mathcal{O}_n}{\mathcal{M}_{n+1}f_*\mathcal{O}_n}$.

Se g_1, \dots, g_l geram $f_*\mathcal{O}_n$ então $q = l$ e $\alpha(e_i) = g_i$, onde $\{e_1, \dots, e_l\}$ é base de \mathcal{O}_{n+1}^l . Segue de [8, Lema 2.1] que existe uma seqüência exata como (2.2) onde λ é injetiva e, neste caso $p = q$.

A matriz $[\lambda_{i,j}]$ de λ pode ser obtida da seguinte forma: escolha uma projeção $\pi : \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}^n$ tal que $\tilde{f} = \pi \circ f$ é ainda uma aplicação finita. A menos de mudança de coordenadas suponhamos que $f(x) = (\tilde{f}(x), f_{n+1}(x))$. Sejam g_1, g_2, \dots, g_l os geradores de $f_*\mathcal{O}_n$. Então existem únicos $\alpha_j^i \in \mathcal{O}_n$, $1 \leq i, j \leq l$, tais que

$$g_j f_{n+1} = \sum_{i=1}^l (\alpha_j^i \circ \tilde{f}) g_i.$$

Então

$$\lambda_{j,i} = \alpha_j^i \circ \pi \quad \text{para } i \neq j$$

$$\lambda_{i,i} = \alpha_i^i \circ \pi - X_{n+1}$$

onde (X_1, \dots, X_{n+1}) são as coordenadas de \mathbb{C}^{n+1} .

Capítulo 3

Pontos Múltiplos

O objetivo deste capítulo é estudar o conjunto dos pontos em \mathbb{C}^p com mais que k pré-imagens e o ideal que o define, abordando pré-requisitos que serão usados no próximo capítulo. As principais referências são [15] e [4].

3.1 O lugar geométrico do pontos múltiplos

Seja $f \in \mathcal{M}_n \mathcal{O}_{n,p}$. Gostaríamos de definir $D^2(f)$, o lugar geométrico dos pontos duplos de f , como o fecho de $\{(x, x') \in (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n, 0) \mid x \neq x', f(x) = f(x')\}$. Além disso, dado $F : (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^d, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^d, 0)$, $F(x, s) = (f_s(x), s)$, um desdobramento de f a s -parâmetros deveríamos obter

$$\overline{\{(x, x') \mid x \neq x', f_s(x) = f_s(x')\}}$$

de

$$\overline{\{(x, s, x', s') \mid (x, s) \neq (x', s') \text{ e } F(x, s) = F(x', s')\}}$$

fixando s . Mas isto geralmente não ocorre.

Exemplo 3.1.1. Sejam $f : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$, $f(x) = (x^2, x^3)$ e $F(x, s) = (x^2, x^3 + xs, s)$, ($s, x \in \mathbb{C}$) um desdobramento de f a 1-parâmetro. Então

$$\overline{\{(x, x') \in (\mathbb{C}^2, 0) \mid f_0(x) = f_0(x'), x \neq x'\}} = \emptyset$$

$$\overline{\{(x, s, x', s') \in (\mathbb{C}^4, 0) \mid F(x, s) = F(x', s'), (x, s) \neq (x', s')\}} \cap \{(x, 0, x', 0) \in (\mathbb{C}^4, 0)\} = \{(0, 0)\}$$

Nosso objetivo então é definir $D^2(f)$ como em [15].

Lema 3.1.2. *Seja $f \in \mathcal{M}_n \mathcal{O}_{n,p}$, $f = (f_1, \dots, f_p)$. Para cada $i = 1, \dots, p$, $\xi_i(x, x') = f_i(x) - f_i(x') \in I(\Delta_n)$, onde Δ_n é a diagonal em $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$. Então existem $\alpha_{ij}(x, x')$, $1 \leq i \leq p$, $1 \leq j \leq n$, tais que*

$$\sum_{j=1}^n \alpha_{ij}(x, x')(x_j - x'_j) = \xi_i(x, x')$$

Demonstração: Temos que

$$\begin{aligned} \xi_i(x, x') &= \xi_i(x, x') - \xi_i(x, x) \\ &= \int_0^1 \frac{d\xi_i}{dt}(x, tx' + (1-t)x) dt \\ &= \int_0^1 \sum_{j=1}^n \frac{\partial \xi_i}{\partial x'_j}(x, tx' + (1-t)x)(x'_j - x_j) dt \\ &= \sum_{j=1}^n (x_j - x'_j) \left[- \int_0^1 \frac{\partial \xi_i}{\partial x'_j}(x, tx' + (1-t)x) dt \right] \end{aligned}$$

definimos então

$$\alpha_{ij}(x, x') = - \int_0^1 \frac{\partial \xi_i}{\partial x'_j}(x, tx' + (1-t)x) dt.$$

Assim

$$\xi_i(x, x') = \sum_j (x_j - x'_j) \alpha_{ij}(x, x')$$

■

Exemplo 3.1.3. Seja $f \in \mathcal{M}_2 \mathcal{O}_{2,3}$, de coposto 1, $f(x, y) = (x, p(x, y), q(x, y))$ a matriz α é dada por

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{p(x, y) - p(x, y')}{x - x'} & \frac{p(x, y) - p(x, y')}{y - y'} \\ \frac{q(x, y) - q(x, y')}{x - x'} & \frac{q(x, y) - q(x, y')}{y - y'} \end{pmatrix}$$

Lema 3.1.4. *Seja $\alpha = [\alpha_{ij}]$, onde α_{ij} é como no Lema 3.1.2, e $(x, x') \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$, $x \neq x'$ tal que $f(x) = f(x')$. Então todo menor $n \times n$ da matriz α se anula em (x, x') .*

Demonstração: Segue do lema anterior que

$$\sum_{j=1}^n \alpha_{ij}(x, x')(x_j - x'_j) = \xi_i(x, x') = 0, \quad i = 1, \dots, p$$

logo temos um sistema homogêneo com p equações e n incógnitas. Como não queremos a solução trivial devemos ter que todo menor $n \times n$ de α seja nulo em (x, x') ■

Definição 3.1.5. Sejam $f \in \mathcal{M}_n \mathcal{O}_{n,p}$ e $R_n(\alpha)$ o ideal em \mathcal{O}_{2n} gerado pelos menores $n \times n$ da matriz α . Definimos $D^2(f) = V(I_2(f))$, onde

$$I_2(f) = (f \times f)^* I(\Delta_p) + R_n(\alpha)$$

Observação 3.1.6.

1. Segue claramente do Lema 3.1.4 que $\overline{\{(x, x') | x \neq x', f(x) = f(x')\}} \subset V(I_2(f))$.
2. Seja $f \in \mathcal{M}_2 \mathcal{O}_{2,3}$ de coposto 1. Então $f(x, y) = (x, p(x, y), q(x, y))$ e os geradores de $I_2(f)$ são

$$x - x', \frac{p(x, y) - p(x, y')}{y - y'}, \frac{q(x, y) - q(x, y')}{y - y'}$$

De fato, $R_2(\alpha)$ é gerado por

$$\frac{p(x, y) - p(x, y')}{y - y'}, \frac{q(x, y) - q(x, y')}{y - y'}$$

e $(f \times f)^*(I(\Delta_p))$ é gerado por $x - x'$

3. No caso de germes simples de \mathbb{C}^2 em \mathbb{C}^3 (ver [6]) $\overline{\{(x, x') | x \neq x', f(x) = f(x')\}} = V(I_2(f))$. De fato, Se $f(x, y) = (x, y^2, yr(x, y^2))$

$$\overline{\{(x, y, x', y') | (x, y) \neq (x', y'), f(x, y) = f(x', y')\}} = \{(x, y, x, -y) | r(x, y^2) = 0\}$$

Por outro lado

$$I_2(f) = \langle x - x', y + y', \frac{yr(x, y^2) - y'r(x, y'^2)}{y - y'} \rangle$$

assim

$$V(I_2(f)) = \{(x, y, x, -y) | r(x, y^2) = 0\}$$

Se $f(x, y) = (x, y^3, yx + y^{3k-1})(H_k)$ então

$$\overline{\{(x, y, x', y') | (x, y) \neq (x', y'), f(x, y) = f(x', y')\}} = \{(x, y, x, \omega y) | x = y^{3k-2} \frac{1 - \omega^{3k-1}}{1 - \omega}\}$$

onde ω é uma raiz cúbica da unidade, $\omega \neq 1$.

$$I_2(f) = \left\langle x - x', \frac{y^3 + y'^3}{y - y'}, \frac{yx + y^{3k-1} - y'x' - y'^{3k-1}}{y - y'} \right\rangle$$

assim

$$V(I_2(f)) = \left\{ (x, y, x, \omega y \mid x = y^{3k-2} \frac{1 - \omega^{3k-1}}{1 - \omega} \right\}$$

Lema 3.1.7. *Seja $f \in \mathcal{M}_2\mathcal{O}_{2,3}$. Se f é \mathcal{A} -equivalente a g então $D^2(f)$ e $D^2(g)$ são difeomorfos.*

Demonstração: Sejam $\varphi \in \text{Diff}(\mathbb{C}^2)$ e $\psi \in \text{Diff}(\mathbb{C}^3)$ tais que $f = \psi \circ g \circ \varphi$. Definamos o seguinte germe de difeomorfismo

$$\begin{aligned} \varphi \times \varphi : (\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2, 0) &\rightarrow (\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2, 0) \\ (x, x') &\mapsto (\varphi(x), \varphi(x')) \end{aligned}$$

É fácil ver que

$$D^2(\psi^{-1} \circ f) = D^2(f)$$

$$\varphi \times \varphi(D^2(\psi^{-1} \circ f)) = D^2(g)$$

Logo $\varphi \times \varphi(D^2(f)) = D^2(g)$ ■

No que segue vamos definir $D^k(f)$, informalmente o lugar geométrico dos pontos k em \mathbb{C}^n que tem a mesma imagem. Consideremos a seguinte projeção

$$\begin{aligned} \pi_1^2 : D^2(f) &\rightarrow \mathbb{C}^n \\ (x, x') &\rightarrow x \end{aligned}$$

Em [15] D. Mond e W. Marar definem o conjunto dos pontos triplos $D^3(f)$ de f como $D^2(\pi_1^2)$. Informalmente, $\pi_1^2(x, x') = \pi_1^2(x'', x''')$ se, somente se, $x = x''$ e $f(x) = f(x') = f(x''')$ e dessa forma $D^2(\pi_1^2)$ está mergulhado em $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$. A continuidade deste processo define $D^k(f)$ para todo k . Assim temos $D^{k+1}(f) = D^2(\pi_{k-1}^k)$, onde

$$\pi_{k-1}^k : D^k(f) \rightarrow D^{k-1}(f)$$

é induzida pela projeção $(x_1, \dots, x_k) \mapsto (x_1, \dots, x_{k-1})$.

3.2 O ideal que define $D^k(f)$

Nesta seção vamos definir um ideal $I_k(f) \subseteq \mathcal{O}_{n-1+k}$ tal que $V(I_k(f)) = D^k(f)$ e além disso vamos mostrar que existem germes β_1, \dots, β_l , \mathcal{S}_k -invariantes, tais que $I_k(f) = \langle \beta_1, \dots, \beta_l \rangle$,

onde \mathcal{S}_k denota o grupo das permutações de k -elementos e a ação de \mathcal{S}_k em \mathbb{C}^{n-1+k} consiste em permutar as últimas k -coordenadas.

Definição 3.2.1. *Seja $f \in \mathcal{M}_n \mathcal{O}_{n,p}$. Definimos $I_k(f)$ o ideal gerado pelos $(k-1)(p-n+1)$ germes $r_i^j = r_i^j(x, y_1, \dots, y_{i+1})$, $x \in \mathbb{C}^{n-1}, y_1, \dots, y_{i+1} \in \mathbb{C}$, $n \leq j \leq p$, $1 \leq i \leq k-1$,*

$$r_1^j(x, y_1, y_2) = \frac{1}{y_1 - y_2} \{f_j(x, y_1) - f_j(x, y_2)\}$$

$$r_{i+1}^j(x, y_1, \dots, y_{i+2}) = \frac{1}{y_{i+2} - y_{i+1}} \{r_i^j(x, y_1, \dots, y_i, y_{i+2}) - r_i^j(x, y_1, \dots, y_i, y_{i+1})\}$$

Consideremos

$$\mathcal{E}_0^{\mathcal{S}_k}(\mathbb{C}^{n-1+k}, \mathbb{C}^k) = \{g : (\mathbb{C}^{n-1+k}, 0) \rightarrow \mathbb{C}^k \mid g \text{ é } \mathcal{S}_k\text{-equivariante}\}$$

$$\mathcal{E}_0^{\mathcal{S}_k}(\mathbb{C}^{n-1+k}) = \{g : (\mathbb{C}^{n-1+k}, 0) \rightarrow \mathbb{C} \mid g \text{ é } \mathcal{S}_k\text{-invariante}\}$$

Temos por [20, pag.106, 1.4.1.] que $\mathcal{E}_0^{\mathcal{S}_k}(\mathbb{C}^{n-1+k}, \mathbb{C}^k)$ é um módulo finito sobre $\mathcal{E}_0^{\mathcal{S}_k}(\mathbb{C}^{n-1+k})$ gerado pelos germes $g_i(x, y_1, \dots, y_k) = (y_1^i, \dots, y_k^i)$, para $0 \leq i \leq k-1$.

Como o germe $L_j(x, y_1, \dots, y_k) = (f_j(x, y_1), \dots, f_j(x, y_k))$ é \mathcal{S}_k -equivariante, então existem germes $\beta_{ji} \in \mathcal{E}_0^{\mathcal{S}_k}$, $0 \leq i \leq k-1$ tais que, para $j = n, \dots, p$

$$L_j(x, y_1, \dots, y_k) = \sum_{i=0}^{k-1} \beta_{ji} g_i.$$

Assim, para cada $j = n, \dots, p$ temos

$$\begin{pmatrix} f_j(x, y_1) \\ \vdots \\ f_j(x, y_k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & y_1 & \cdots & y_1^{k-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & y_k & \cdots & y_k^{k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_{j0} \\ \vdots \\ \beta_{jk-1} \end{pmatrix}$$

Suponhamos que o determinante da matriz $[y_r^s]$ do sistema acima seja não nulo (para isto devemos ter y_1, \dots, y_k dois a dois distintos), então podemos aplicar a regra de Cramer e obter

$$\beta_{j,i} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & y_1 & \cdots & y_1^{i-1} & f_j(x, y_1) & y_1^{i+1} & \cdots & y_1^{k-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & y_k & \cdots & y_k^{i-1} & f_j(x, y_k) & y_k^{i+1} & \cdots & y_k^{k-1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & y_1 & \cdots & y_1^{k-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & y_k & \cdots & y_k^{k-1} \end{vmatrix}}$$

para $n \leq j \leq p$, $1 \leq i \leq k-1$.

Naturalmente podemos estender de β_{ji} em todo $(\mathbb{C}^{n-1+k}, 0)$

Proposição 3.2.2. *Seja $f \in \mathcal{M}_n \mathcal{O}_{n,p}$ de coposto 1. Então o ideal $I_k(f)$ é gerado pelos germes β_{ji} , $n \leq j \leq p$, $1 \leq i \leq k-1$.*

Demonstração: Temos que

$$\begin{bmatrix} f_j(x, y_1) \\ \vdots \\ f_j(x, y_k) \end{bmatrix} = \beta_{j0} \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} + \cdots + \beta_{jk-1} \begin{bmatrix} y_1^{k-1} \\ \vdots \\ y_k^{k-1} \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

Agora subtraindo a primeira linha das outras e dividindo as i -ésimas, $i = 2, \dots, k$, por $y_i - y_1$ (esquecendo a primeira linha) temos

$$\begin{bmatrix} \frac{f_j(x, y_2) - f_j(x, y_1)}{y_2 - y_1} \\ \vdots \\ \frac{f_j(x, y_k) - f_j(x, y_1)}{y_k - y_1} \end{bmatrix} = \beta_{j1} \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} + \beta_{j2} \begin{bmatrix} y_2 + y_1 \\ \vdots \\ y_k + y_1 \end{bmatrix} + \cdots + \beta_{jk-1} \begin{bmatrix} \frac{y_2^{k-1} - y_1^{k-1}}{y_2 - y_1} \\ \vdots \\ \frac{y_k^{k-1} - y_1^{k-1}}{y_k - y_1} \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

portanto

$$\langle \beta_{j1}, \dots, \beta_{jk-1} \rangle = \left\langle \frac{f_j(x, y_2) - f_j(x, y_1)}{y_2 - y_1}, \beta_{j2}, \dots, \beta_{jk-1} \right\rangle$$

repetindo o processo usado acima para obter de 3.1 a igualdade 3.2. Temos

$$\langle \beta_{j2}, \dots, \beta_{jk-1} \rangle = \left\langle \left[\frac{f_j(x, y_3) - f_j(x, y_1)}{y_3 - y_1} - \frac{f_j(x, y_2) - f_j(x, y_1)}{y_2 - y_1} \right] \frac{1}{y_3 - y_2}, \beta_{j3}, \dots, \beta_{jk-1} \right\rangle$$

A continuidade deste processo mostra o resultado. ■

Seja (x, y_1, \dots, y_k) tal que $y_s \neq y_t$ para $s \neq t$ e $f_j(x, y_s) = f_j(x, y_t) \forall s, t = 1, \dots, k$. Neste caso

$$\beta_{j0}(x, y_1, \dots, y_k) = \frac{\begin{vmatrix} f_j(x, y_1) & y_1 & \cdots & y_1^{k-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_j(x, y_k) & y_k & \cdots & y_k^{k-1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & y_1 & \cdots & y_1^{k-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & y_k & \cdots & y_k^{k-1} \end{vmatrix}}$$

$$= f_j(x, y_1) \frac{\begin{vmatrix} 1 & y_1 & \cdots & y_1^{k-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & y_k & \cdots & y_k^{k-1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & y_1 & \cdots & y_1^{k-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & y_k & \cdots & y_k^{k-1} \end{vmatrix}} = f_j(x, y_1)$$

e $\beta_{j,i}(x, y_1, \dots, y_k) = 0$, $i = 1, \dots, k-1$, $j = n, \dots, p$.

Teorema 3.2.3. *Seja $f \in \mathcal{M}_n \mathcal{O}_{n,p}$ $n \leq p$, uma aplicação finita de coposto 1. Então*

- i) *f é estável se, somente se, $D^k(f)$ é uma variedade diferenciável de dimensão $p-k(p-n)$, ou vazia, para cada $k \geq 2$;*
- ii) *f é finitamente determinado se, e somente se, para cada k com $p-k(p-n) \geq 0$, $D^k(f)$ é uma ICIS de dimensão $p-k(p-n)$ ou vazia, e além disso, para cada k tal que $p-k(p-n) < 0$, $D^k(f)$ consiste apenas do ponto $\{0\}$.*

Demonstração: ver [15]

Em [15, pag.565] D. Mond e W. Marar definem $D^k(f)/\mathcal{S}_k$, onde $I_k(f)$ é como em 3.2.2 e concluem que se $D^k(f)$ é uma intersecção completa com singularidade isolada então $D^k(f)/\mathcal{S}_k$ também é uma intersecção completa com singularidade isolada.

Teorema 3.2.4. *Se $f \in \mathcal{M}_n \mathcal{O}_{n,p}$, $n \leq p$ então o lugar geométrico dos zeros de $\mathcal{F}_k(f_* \mathcal{O}_n)$ é o conjunto dos pontos em \mathbb{C}^p com mais que k pré-imagens (contando multiplicidade).*

Demonstração: ver [8]

Capítulo 4

Invariantes de Germes de \mathbb{C}^2 em \mathbb{C}^3

Na classificação dos germes simples de coposto 1 de $(\mathbb{C}^2, 0)$ em $(\mathbb{C}^3, 0)$, obtida por D. Mond [6], apareceram as seguintes séries

$$S_k \quad (x, y) \mapsto (x, y^2, y^3 + x^{k+1}y) \quad k \geq 0$$

$$B_k \quad (x, y) \mapsto (x, y^2, x^2y + y^{2k+1}) \quad k \geq 1$$

$$H_k \quad (x, y) \mapsto (x, y^3, xy + y^{3k-1}) \quad k \geq 1$$

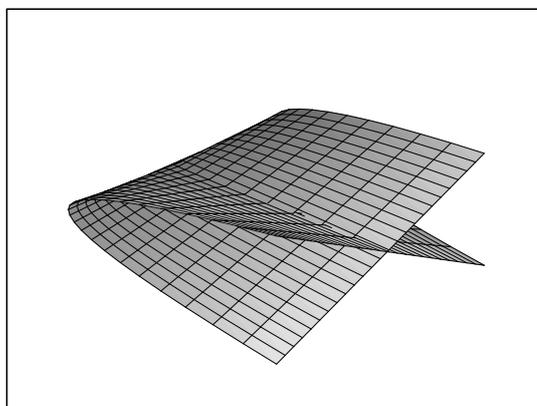


Figura 4.1: Imagem real de S_0 (cross-cap)

Observemos que $B_1 = S_1$. Ainda H_1 é \mathcal{A} -equivalente a S_1 . De fato, tomando os difeomorfismos

$$\begin{aligned} \varphi: (\mathbb{C}^2, 0) &\rightarrow (\mathbb{C}^2, 0) \\ (x, y) &\mapsto \left(\frac{2}{\sqrt{3}}x, y - \frac{x}{\sqrt{3}}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi: (\mathbb{C}^3, 0) &\rightarrow (\mathbb{C}^3, 0) \\ (X, Y, Z) &\mapsto \left(\frac{2}{\sqrt{3}}X, Z + \frac{X^2}{4}, Y + \frac{3}{2}XZ + \frac{X^3}{2}\right) \end{aligned}$$

temos que $\psi \circ H_1 \circ \varphi(x, y) = S_1(x, y)$

E ainda, S_0 é \mathcal{A} -equivalente a $f(x, y) = (x, y^2, xy)$, que é o cross-cap. De fato, considerando os seguintes difeomorfismos

$$\begin{aligned} \varphi: (\mathbb{C}^2, 0) &\rightarrow (\mathbb{C}^2, 0) \\ (x, y) &\mapsto (x - y^2, y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi: (\mathbb{C}^3, 0) &\rightarrow (\mathbb{C}^3, 0) \\ (X, Y, Z) &\mapsto (X + Y, Y, Z) \end{aligned}$$

temos que $\psi \circ S_0 \circ \varphi(x, y) = f(x, y)$.

Para $k \geq 2$ os germes acima são todos inequivalentes e finitamente determinados com grau de determinação igual ao grau da terceira função componente.

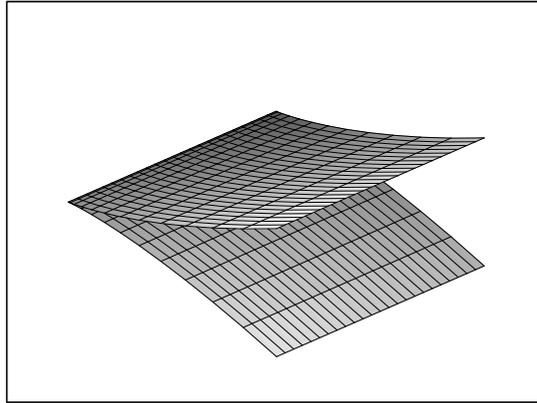
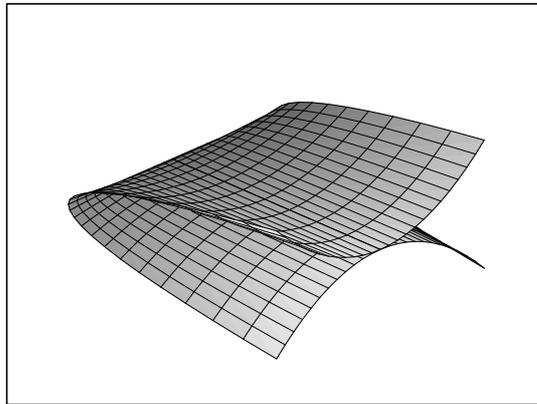
Por outro lado

$$S_\infty (x, y) \mapsto (x, y^2, y^3)$$

$$B_\infty (x, y) \mapsto (x, y^2, x^2y)$$

$$H_\infty (x, y) \mapsto (x, y^3, xy)$$

não são finitamente determinados e têm em suas imagens uma reta cuspidal, uma reta de intersecção não transversal e uma reta complexa de pontos triplos, respectivamente.

Figura 4.2: Imagem real de S_∞ Figura 4.3: Imagem real de B_∞

Sejam $f \in \mathcal{M}_2\mathcal{O}_{2,3}$ e f_t uma perturbação estável de f . Como f_t é estável, $\forall t$, suas singularidades são cross-caps, pontos duplos ou pontos triplos. Neste capítulo obteremos fórmulas para calcular o número de cross-caps e pontos triplos de f_t . Mostraremos que tais números são invariantes do germe f . O terceiro invariante é o número de Milnor da curva de pontos duplos.

4.1 O invariante C_f

Sejam $f \in \mathcal{M}_2\mathcal{O}_{2,3}$ de coposto 1 e R_f o ideal gerado pelos menores 2×2 da matriz $d_x f$. Definimos $C_f = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_2}{R_f}$ nosso objetivo é demonstrar o seguinte resultado.

Teorema 4.1.1. *Suponhamos que $C_f < \infty$. O número de cross-caps presentes numa perturbação estável de f é dado por C_f*

Para a demonstração deste teorema vamos precisar dos seguintes resultados.

Lema 4.1.2. *O cross-cap é um germe estável 2- \mathcal{A} -determinado.*

Demonstração: Primeiramente vamos mostrar que o cross-cap é 3- \mathcal{A}_1 -determinado utilizando o Teorema 1.4.2. Assim devemos mostrar que $\mathcal{M}_2^2\theta(f) \subset T\mathcal{K}.f$ e $\mathcal{M}_2^4\theta(f) \subset T\mathcal{A}_1.f + \mathcal{M}_2^6\theta(f)$, onde $f(x, y) = (x, y^2, xy)$. Obtemos facilmente que $\mathcal{M}_2^2\theta(f) \subset T\mathcal{K}.f$, pois $f^*\mathcal{M}_3\theta(f)$ é o \mathcal{O}_2 -módulo gerado por

$$(x, 0, 0), (0, x, 0), (0, 0, x), (xy, 0, 0), (0, xy, 0), (0, 0, xy), (y^2, 0, 0), (0, y^2, 0), (0, 0, y^2)$$

Além disso

$$T\mathcal{A}_1.f = \mathcal{M}_2^2 \left\{ \left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ y \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} 0 \\ 2y \\ x \end{array} \right) \right\} + \left\{ \left[\begin{array}{c} \eta_1(x, y^2, xy) \\ \eta_2(x, y^2, xy) \\ \eta_3(x, y^2, xy) \end{array} \right], \eta_i \in \mathcal{M}_3^2 \right\}$$

Tomando

$$\eta_i(X, Y, Z) = X^l, \quad \eta_j(X, Y, Z) = 0 \quad \text{para } i \neq j \quad i = 1, 2, 3 \quad l = 4, 5$$

$$\eta_i(X, Y, Z) = X^l Z, \quad \eta_j(X, Y, Z) = 0 \quad \text{para } i \neq j \quad i = 1, 2, 3 \quad l = 2, 3$$

$$\eta_i(X, Y, Z) = X^l Y, \quad \eta_j(X, Y, Z) = 0 \quad \text{para } i \neq j \quad i = 1, 2, 3 \quad l = 2, 3$$

$$\eta_i(X, Y, Z) = YZ, \quad \eta_j(X, Y, Z) = 0 \quad \text{para } i \neq j \quad i = 1, 2, 3$$

$$\eta_i(X, Y, Z) = Y^2, \quad \eta_j(X, Y, Z) = 0 \quad \text{para } i \neq j \quad i = 1, 2, 3$$

$$\eta_i(X, Y, Z) = XYZ, \quad \eta_j(X, Y, Z) = 0 \quad \text{para } i \neq j \quad i = 1, 2, 3$$

se $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$, então temos

$$x^l e_k \in T\mathcal{A}_1.f, l = 4, 5, k = 1, 2, 3$$

$$x^l y e_k \in T\mathcal{A}_1.f, l = 3, 4, k = 1, 2, 3$$

$$x^l y^2 e_k \in T\mathcal{A}_1.f, l = 2, 3, k = 1, 2, 3$$

$$x^l y^3 e_k \in T\mathcal{A}_1.f, l = 1, 2, k = 1, 2, 3$$

$$y^4 e_k \in T\mathcal{A}_1.f, k = 1, 2, 3$$

$$\begin{pmatrix} y^5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = y^5 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ y^6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ y^5 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}y^4 \begin{pmatrix} 0 \\ 2y \\ x \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ xy^4 \end{pmatrix} \quad (\eta_3(X, Y, Z) = XY^2)$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ y^5 \end{pmatrix} = y^4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y^4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Assim podemos concluir que $\mathcal{M}_2^4\theta(f) \subset T\mathcal{A}_1.f + \mathcal{M}_2^6\theta(f)$.

Calculemos agora o $T\mathcal{A}_e.f$. Pelo Teorema 1.4.4 temos que $\mathcal{M}_2^4\theta(f) \subset T\mathcal{A}.f \subset T\mathcal{A}_e.f$.

Ainda

$$T\mathcal{A}_e.f = tf(\theta(2)) + \omega f(\theta(3)) = \theta(2) \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2y \\ x \end{pmatrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} \eta_1(x, y^2, xy) \\ \eta_2(x, y^2, xy) \\ \eta_3(x, y^2, xy) \end{matrix}, \eta_i \in \theta(3) \right\}.$$

Tomando

$$\eta_i(X, Y, Z) = 1, \quad \eta_j(X, Y, Z) = 0 \quad \text{para } i \neq j \quad i = 1, 2, 3$$

$$\eta_i(X, Y, Z) = X^l, \quad \eta_j(X, Y, Z) = 0 \quad \text{para } i \neq j \quad i = 1, 2, 3 \quad l = 1, 2, 3$$

$$\eta_i(X, Y, Z) = XY, \quad \eta_j(X, Y, Z) = 0 \quad \text{para } i \neq j \quad i = 1, 2, 3$$

$$\eta_i(X, Y, Z) = XZ, \quad \eta_j(X, Y, Z) = 0 \quad \text{para } i \neq j \quad i = 1, 2, 3$$

$$\eta_i(X, Y, Z) = Y, \quad \eta_j(X, Y, Z) = 0 \quad \text{para } i \neq j \quad i = 1, 2, 3$$

$$\eta_i(X, Y, Z) = Z, \quad \eta_j(X, Y, Z) = 0 \quad \text{para } i \neq j \quad i = 1, 2, 3$$

obtemos

$$e_k \in T\mathcal{A}_e.f, \quad k = 1, 2, 3$$

$$x^l e_k \in T\mathcal{A}_e.f, \quad l = 1, 2, 3, \quad k = 1, 2, 3$$

$$xy^2 e_k \in T\mathcal{A}_e.f, \quad k = 1, 2, 3$$

$$y^2 e_k \in T\mathcal{A}_e.f, k = 1, 2, 3$$

$$xye_k \in T\mathcal{A}_e.f, k = 1, 2, 3$$

$$\begin{pmatrix} y \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ y^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 2y \\ x \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y^3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = y^3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ y^4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ y^3 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} y^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2y \\ x \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ xy^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ y^3 \end{pmatrix} = y^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

assim $T\mathcal{A}_e.f = \theta(f)$ e conseqüentemente, temos que o cross-cap é estável. Para finalizar esta demonstração utilizaremos o Teorema 1.4.3 com o \mathcal{O}_2 -módulo $D = \theta(f)$ e facilmente podemos concluir que o cross-cap é 2- \mathcal{A} -determinado. ■

No que segue mostraremos que o cross-cap é o único germe estável de coposto 1 cuja dimensão da algebra $\frac{\mathcal{O}_2}{R_f}$ é igual a 1.

Lema 4.1.3. *Sejam $f, g \in \mathcal{M}_2\mathcal{O}_{2,3}$ tais que f é \mathcal{A} -equivalente a g então $C_f = C_g$.*

Demonstração: Basta mostrar que R_f e R_g são isomorfos. Sejam $\psi \in \text{Diff}(\mathbb{C}^3)$ e $\varphi \in \text{Diff}(\mathbb{C}^2)$ tais que $f = \psi^{-1} \circ g \circ \varphi$. Notemos que $[d_x f] = [d_{g \circ \varphi(x)} \psi][d_{\varphi(x)} g][d_x \varphi]$. Como ψ e φ são difeomorfismos temos $d_{g \circ \varphi(x)} \psi$ e $d_x \varphi$ são isomorfismos e portanto R_f e R_g são isomorfos. ■

Lema 4.1.4. a) Seja $f(x, y) = (x, y^2, xy)$ então $C_f = 1$.

b) Se $g \in \mathcal{M}_2\mathcal{O}_{2,3}$ é tal que $C_g = 1$ então g é \mathcal{A} -equivalente a f .

Demonstração: a) Temos que

$$J_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2y \\ y & x \end{pmatrix}$$

Assim $R_f = \langle 2y, x, 2y^2 \rangle = \langle x, y \rangle$ e

$$C_f = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_2}{R_f} = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}\{x, y\}}{\langle x, y \rangle} = 1$$

b) Mostremos primeiramente que se $\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_2}{R_g} = 1$ então $R_g = \mathcal{M}_2$.

Como \mathcal{M}_2 é o ideal maximal do anel local \mathcal{O}_2 , e $R_g \neq \mathcal{O}_2$ pois $\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_2}{R_g} = 1$, segue que $R_g \subseteq \mathcal{M}_2$. Suponhamos que $R_g \neq \mathcal{M}_2$. Então $\mathcal{O}_2/R_g \supset \mathcal{O}_2/\mathcal{M}_2$ e $\mathcal{O}_2/R_g \neq \mathcal{O}_2/\mathcal{M}_2$ portanto $\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_2}{R_g} > 1$, contradizendo a hipótese. Logo $\mathcal{M}_2 = R_g$

Como o coposto de g é 1, segue do Lema 1.2.9 que $g(x, y) = (x, g_2(x, y), g_3(x, y))$, com $g_i(0, y) \in \mathcal{M}_1^2$, $i = 2, 3$, assim

$$J_g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} \\ \frac{\partial g_3}{\partial x} & \frac{\partial g_3}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Sabemos que $\mathcal{M}_2 = R_g = \langle \frac{\partial g_2}{\partial y}, \frac{\partial g_3}{\partial y} \rangle$. Mas

$$g_i = j^2 g_i(0) + \tilde{g}_i, \quad \text{com } \tilde{g}_i \in \mathcal{M}_2^3, \quad i = 2, 3$$

$$\frac{\partial g_i}{\partial y} = \frac{\partial(j^2 g_i(0))}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{g}_i}{\partial y}, \quad \text{com } \frac{\partial \tilde{g}_i}{\partial y} \in \mathcal{M}_2^2$$

Portanto $\mathcal{M}_2 = R_g \subset R_{j^2 g(0)} + \mathcal{M}_2^2$. Aplicando o Lema de Nakayma, nesta última expressão, obtemos que $\mathcal{M}_2 = R_g \subset R_{j^2 g(0)}$. Mas $R_{j^2 g(0)} \subset \mathcal{M}_2$, logo $\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_2}{R_{j^2 g(0)}} = 1$.

Da classificação dos 2-jatos de coposto 1 (ver [6]) temos as seguintes \mathcal{A}^2 -órbitas

$$(x, y^2, xy), (x, y^2, 0), (x, xy, 0), (x, 0, 0)$$

Calculando C_f para os 2-jatos acima vemos que o único cujo $C_f = 1$ é $f(x, y) = (x, y^2, xy)$.

Segue do Lema 4.1.3 que $j^2g(0)$ está na mesma órbita que (x, y^2, xy) , ou seja, existem germes $\varphi \in \text{Diff}(\mathbb{C}^2)$ e $\psi \in \text{Diff}(\mathbb{C}^3)$ tais que $j^2(\psi \circ g \circ \varphi)(0) = (x, y^2, xy)$.

Como f é 2- \mathcal{A} -determinado pelo Lema 4.1.2 temos que g é \mathcal{A} -equivalente a f . ■

Finalmente podemos demonstrar o Teorema 4.1.1.

Demonstração: [4.1.1] Seja $f : U \rightarrow \mathbb{C}^3$ um representante do germe f . Como f tem coposto 1 na origem podemos supor, escolhendo U suficientemente pequeno se necessário, que f tem coposto 1 em todo $x \in U$.

Como o ideal R_f define o conjunto dos pontos onde f não é imersão temos que

$$V(R_f) = df^{-1}(\Sigma^1) \quad \text{onde} \quad df : U \rightarrow J^1(2, 3), \quad df(x) = d_x f.$$

Além disso, pelo Critério Geométrico de Determinação Finita, Teorema 1.4.5, fora da origem as únicas singularidades de f são as estáveis. Desta forma estas singularidades podem ser cross-caps, pontos duplos ou pontos triplos. Os cross-caps e pontos triplos são isolados, logo podem ser evitados. E ainda como $\dim \frac{\mathcal{O}_2}{R_f} < \infty$ estas singularidades não podem ser pontos duplos (temos uma curva de pontos duplos). Portanto escolhendo U , se necessário suficientemente pequeno, temos $df^{-1}(\Sigma^1) = \{0\}$.

Seja $F : (\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^d, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$, $F(x, u) = f_u(x)$, uma deformação de f tal que

$$\begin{aligned} j^1 F : (\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^d, 0) &\rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^3) \\ (x, u) &\mapsto j^1 f_u(x) \end{aligned}$$

é transversal a Σ^1 . O Teorema da Transversalidade de Thom (1.3.10) garante a existência de tal deformação.

Sejam $V = (j^1 F)^{-1}(\Sigma^1) \subset \mathbb{C}^{2+d}$ e $\pi : \mathbb{C}^{2+d} \rightarrow \mathbb{C}^d$ a projeção no espaço de parâmetros. Como Σ^1 é uma variedade diferenciável de codimensão 2 em $J^1(2, 3)$, temos que $\text{codim} V = 2$ e conseqüentemente $\dim V = d$. Agora se tomarmos $\pi_V := \pi|_V : V \rightarrow \mathbb{C}^d$ pelo Teorema da Conservação da Multiplicidade (2.3.5), temos que cada valor regular u de π_V tem $m_{\pi_V}(0)$ pré-imagens em V . Mas para cada pré-imagem (x_i, u) , o germe de π_V em (x_i, u) é submersível, e por [9, pág.49 Teo.2.2. (demonstração)] temos que $j^1 f_u$ é transversal a Σ^1 . portanto cada ponto não imersível x_i do germe f_u é \mathcal{A} -equivalente ao cross-cap (ver [10, pág.179, 4.5]).

Aplicando o Lema 2.3.6 para $(n, p) = (2, 3)$ e $W = \Sigma^1$ temos que

$$\frac{\mathcal{O}_{V,0}}{\pi_V^* \mathcal{M}_d \mathcal{O}_{V,0}} \simeq \frac{\mathcal{O}_2}{j^1 f^* I(\Sigma^1)} \simeq \frac{\mathcal{O}_2}{R_f}$$

Portanto temos a seguinte igualdade

$$m_{\pi_V}(0) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{V,0}}{\pi_V^* \mathcal{M}_d \mathcal{O}_{V,0}} = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_2}{R_f}$$

Seja f_t , uma perturbação estável de f . O ponto não imersível de f "explode" em pontos não imersíveis x_1, \dots, x_r de f_t (Teorema 2.3.5). Observemos que o germe de f_t em x_i é equivalente ao cross-cap. Pelo Lema 4.1.4, temos que para cada x_i a $\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{2,x_i}}{R_{f_t}} = 1$. Portanto

$$\sum_{i=1}^r \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{2,x_i}}{R_{f_t}} = \sum_{i=1}^r m_{\pi_V}(x_i) = m_{\pi_V}(0) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_2}{R_f}$$

■

Calculemos então o número de cross-caps que aparecem na imagem das seguintes perturbações estáveis.

Exemplo 4.1.5. Para a singularidade S_k , $k \geq 0$, temos $R_f = \langle y, x^{k+1} \rangle$ assim

$$C_f = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}\{x, y\}}{\langle y, x^{k+1} \rangle} = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\{1, x, \dots, x^k\} = k + 1$$

Para B_k , $k \geq 1$ temos $R_f = \langle y, x^2 \rangle$ assim

$$C_f = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}\{x, y\}}{\langle y, x^2 \rangle} = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\{1, x\} = 2$$

Para H_k , $k \geq 1$ temos $R_f = \langle y^2, x \rangle$ assim

$$C_f = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}\{x, y\}}{\langle y^2, x \rangle} = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\{1, y\} = 2$$

4.2 O invariante numérico $\mu(D^2(f)/\mathbb{Z}_2)$

Seja $f \in \mathcal{M}_2\mathcal{O}_{2,3}$ um germe de coposto 1, $f(x, y) = (x, p(x, y), q(x, y))$, temos

$$I_2(f) = \left\langle \frac{p(x, y_1) - p(x, y_2)}{y_1 - y_2}, \frac{q(x, y_1) - q(x, y_2)}{y_1 - y_2} \right\rangle$$

onde seus geradores são \mathbb{Z}_2 -invariantes logo $V(I_2(f)) = D^2(f)/\mathbb{Z}_2$.

Como $D^2(f)$ é uma intersecção completa, então $D^2(f)/\mathbb{Z}_2$ também é uma intersecção completa, assim podemos usar a Definição 2.3.9 para calcular $\mu(D^2(f)/\mathbb{Z}_2)$.

Exemplo 4.2.1. Sejam $\sigma_1 = y_1 + y_2$ e $\sigma_2 = y_1y_2$ polinômios simétricos elementares. Tomando σ_1, σ_2 como as coordenadas em \mathbb{C}^2 , obtemos as equações do ideal que define $D^2(f)/\mathbb{Z}_2$.

i) $f(x, y) = (x, y^2, y^3 + x^{k+1}y)(S_k)$, portanto

$$I_2(f) = \langle y_1 + y_2, y_1^2 + y_1y_2 + y_2^2 + x^{k+1} \rangle = \langle \sigma_1, \sigma_1^2 - \sigma_2 + x^{k+1} \rangle = \langle \sigma_1, x^{k+1} - \sigma_2 \rangle$$

assim

$$\mu(D^2(f)/\mathbb{Z}_2) = 0$$

ii) $f(x, y) = (x, y^2, x^2y + y^{2k+1})(B_k)$, logo

$$I_2(f) = \langle \sigma_1, x^2 + \sigma_2^k \rangle$$

$$\mu(D^2(f)/\mathbb{Z}_2) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_2}{\langle x, \sigma_2^{k-1} \rangle} = k - 1$$

iii) $f(x, y) = (x, y^3, y^{3k-1} + xy)(H_k)$, portanto

$$I_2(f) = \langle \sigma_2, x + c\sigma_2^{3k-2} \rangle$$

onde $c = \text{constante}$, assim

$$\mu(D^2(f)/\mathbb{Z}_2) = 0$$

4.3 O invariante T_f

Nesta seção vamos obter fórmulas para calcular o número T_f de pontos triplos presentes na imagem de uma perturbação estável de um germe $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$.

Seja $f(x, y) = (x, f_n(x, y), \dots, f_p(x, y))$ um germe em $\mathcal{M}_n\mathcal{O}_{n,p}$ de coposto 1 com $x \in \mathbb{C}^{n-1}$, $y \in \mathbb{C}$, $n \leq p$. Pela Definição 3.2.1 temos em \mathcal{O}_{n-1+3} o ideal $I_3(f)$ gerado pelos $2(p - n + 1)$ germes

$$\frac{1}{y_2 - y_3} \left[\frac{f_l(x, y_1) - f_l(x, y_2)}{y_1 - y_2} - \frac{f_l(x, y_1) - f_l(x, y_3)}{y_1 - y_3} \right]$$

$$\frac{f_l(x, y_1) - f_l(x, y_2)}{y_1 - y_2}$$

para $l = n, \dots, p$.

No caso $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$, $f(x, y) = (x, f_2(x, y), f_3(x, y))$, $I_3(f)$ é o ideal gerado pelos seguintes germes

$$\frac{f_2(x, y_1) - f_2(x, y_2)}{y_1 - y_2}, \frac{1}{y_2 - y_3} \left[\frac{f_2(x, y_1) - f_2(x, y_2)}{y_1 - y_2} - \frac{f_2(x, y_1) - f_2(x, y_3)}{y_1 - y_3} \right]$$

$$\frac{f_3(x, y_1) - f_3(x, y_2)}{y_1 - y_2}, \frac{1}{y_2 - y_3} \left[\frac{f_3(x, y_1) - f_3(x, y_2)}{y_1 - y_2} - \frac{f_3(x, y_1) - f_3(x, y_3)}{y_1 - y_3} \right]$$

Proposição 4.3.1. *Uma perturbação estável do germe $f \in \mathcal{M}_2\mathcal{O}_{2,3}$ de coposto 1 tem o seguinte número de pontos triplos*

$$T_f = \frac{1}{6} \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_4}{I_3(f)}$$

Demonstração: Seja F um desdobramento a d -parâmetros de f tal que $I_3(F)$ define $D^3(F)$ como uma variedade suave (segue do Teorema 3.2.3 que basta tomar F estável,

por exemplo o desdobramento versal). Consideremos $\pi : D^3(F) \rightarrow \mathbb{C}^d$ a projeção sobre o espaço de parâmetros do desdobramento F . Observemos que $D^3(F) \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^d$, além disso, pelo Teorema (3.2.3) temos que $I_3(F)$ define $D^3(F)$ como uma intersecção completa. Como $I_3(F)$ é gerado por 4 elementos segue da Definição 2.3.7 que $\dim D^3(F) = d$. Agora pelo Teorema da Conservação Multiplicidade 2.3.5 temos que um valor regular de π tem $m_\pi(0)$ pré imagens, onde

$$m_\pi(0) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{D^3(F),0}}{\pi^* \mathcal{M}_d}$$

Observemos que

$$\frac{\mathcal{O}_{D^3(F),0}}{\pi^* \mathcal{M}_d} \simeq \frac{\mathcal{O}_{1+3+d}}{I_3(F)} \simeq \frac{\mathcal{O}_{4+d}}{I_3(F) + \mathcal{M}_d} \simeq \frac{\mathcal{O}_4}{I_3(f)}$$

Seja $z \in D^3(F)$, $z = (x, y_1, y_2, y_3, u)$. Suponhamos que y_1, y_2, y_3 são dois a dois distintos, assim o germe de $y_i - y_j$ é invertível em $\mathcal{O}_{4+d,z}$. Portanto o ideal

$$I_3(f)_{\bar{z}} = \langle p(x, y_1) - p(x, y_2), p(x, y_1) - p(x, y_3), q(x, y_1) - q(x, y_2), q(x, y_1) - q(x, y_3) \rangle \subset \mathcal{O}_{4,\bar{z}}$$

onde $f(x, y) = (x, p(x, y), q(x, y))$ e $\bar{z} = (x, y_1, y_2, y_3)$.

Assim

$$\frac{\mathcal{O}_{D^3(F),z}}{\pi^* \mathcal{M}^d} \simeq \frac{\mathcal{O}_{4,(x,y_1,y_2,y_3)}}{(f \times f \times f)^* I(\Delta_p)}$$

Se $z = (x, y_1, y_2, y_3, u)$ é ponto regular de π então z é ponto regular de $D^3(F)$, segue de [12, pag.74] que a matriz jacobiana dos geradores de $I_3(F)_z$ tem posto máximo 4. Denotemos $f_u(x, y) = (x, p_u(x, y), q_u(x, y))$. Temos que o determinante da matriz

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial p_u}{\partial x}(x, y_1) - \frac{\partial p_u}{\partial x}(x, y_2) & \frac{\partial p_u}{\partial y_1}(x, y_1) & -\frac{\partial p_u}{\partial y_2}(x, y_2) & 0 \\ \frac{\partial p_u}{\partial x}(x, y_1) - \frac{\partial p_u}{\partial x}(x, y_3) & \frac{\partial p_u}{\partial y_1}(x, y_1) & 0 & -\frac{\partial p_u}{\partial y_3}(x, y_3) \\ \frac{\partial q_u}{\partial x}(x, y_1) - \frac{\partial q_u}{\partial x}(x, y_2) & \frac{\partial q_u}{\partial y_1}(x, y_1) & \frac{\partial q_u}{\partial y_2}(x, y_2) & 0 \\ \frac{\partial q_u}{\partial x}(x, y_1) - \frac{\partial q_u}{\partial x}(x, y_3) & \frac{\partial q_u}{\partial y_1}(x, y_1) & 0 & -\frac{\partial q_u}{\partial y_3}(x, y_3) \end{bmatrix}$$

coincide com o determinante da matriz

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial p_u}{\partial x}(x, y_1) \frac{\partial q_u}{\partial y_1}(x, y_1) - \frac{\partial p_u}{\partial y_1}(x, y_1) \frac{\partial q_u}{\partial x}(x, y_1) & -\frac{\partial q_u}{\partial y_1}(x, y_1) & \frac{\partial p_u}{\partial y_1}(x, y_1) \\ \frac{\partial p_u}{\partial x}(x, y_2) \frac{\partial q_u}{\partial y_2}(x, y_2) - \frac{\partial p_u}{\partial y_2}(x, y_2) \frac{\partial q_u}{\partial x}(x, y_2) & -\frac{\partial q_u}{\partial y_2}(x, y_2) & \frac{\partial p_u}{\partial y_2}(x, y_2) \\ \frac{\partial p_u}{\partial x}(x, y_3) \frac{\partial q_u}{\partial y_3}(x, y_3) - \frac{\partial p_u}{\partial y_3}(x, y_3) \frac{\partial q_u}{\partial x}(x, y_3) & -\frac{\partial q_u}{\partial y_3}(x, y_3) & \frac{\partial p_u}{\partial y_3}(x, y_3) \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

As linhas da matriz 4.1 são os vetores normais dos espaços tangentes H_i a $f_u(U_i)$, em $f_u(x, y_i)$, $i = 1, 2, 3$, onde U_i é uma vizinhança de (x, y_i) , $i = 1, 2, 3$. Logo

$$\text{codim}(H_1 \cap H_2 \cap H_3) = \text{codim } H_1 + \text{codim } H_2 + \text{codim } H_3$$

e portanto o trigerme f_u em $\{(x, y_1), (x, y_2), (x, y_3)\}$ tem um ponto triplo ordinário.

O grupo \mathcal{S}_3 age em $D^3(F)$ permutando y_1, y_2, y_3 e π é \mathcal{S}_3 -invariante. Seja $z_0 \in D^3(F)$ tal que seu grupo de isotropia tem mais que dois elementos. Então

$$\text{Fix}\mathcal{S}_3 = \{z \in D^3(F) \mid \sigma.z = z, \forall \sigma \in \mathcal{S}_{3z_0}\}$$

tem dimensão estritamente menor que d . Segue de [15, Lema 2.1] que z_0 não é ponto regular de π . Portanto $z = (x, y_1, y_2, y_3, u)$ é ponto regular de π se y_1, y_2, y_3 são dois a dois distintos.

Fixando u , seja M o conjunto dos pontos triplos ordinários de f_u . Então \mathcal{S}_3 age em M e o número de órbitas é T_f . Pelo Lema 1.2.2 temos que

$$T_f = \frac{1}{|\mathcal{S}_3|} \sum_{\bar{z} \in M} |\mathcal{S}_{3\bar{z}}| = \frac{1}{|\mathcal{S}_3|} |M| = \frac{1}{6} \frac{\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_4}{I_3(f)}$$

■

Usando a fórmula acima observamos que estes cálculos são extremamente complicados. No entanto, temos o seguinte resultado.

Proposição 4.3.2. *Seja $f \in \mathcal{M}_2\mathcal{O}_{2,3}$ então*

$$T_f = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_3}{\mathcal{F}_2(f_*\mathcal{O}_2)}$$

onde $f_*\mathcal{O}_2$ é o \mathcal{O}_2 considerado como um \mathcal{O}_3 -módulo pela composição com f , e $\mathcal{F}_2(f_*\mathcal{O}_2)$ é seu segundo ideal de Fitting.

Demonstração: ver [8, Teorema 4.3, pag.131]

Exemplo 4.3.3. Seja $f(x, y) = (x, y^3, xy + y^{3k-1})(H_k)$. Vamos usar o algoritmo da seção 2.4 para calcular $\mathcal{F}_2(f_*(\mathcal{O}_2))$. Tomemos $\pi : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^2$ a projeção canônica então $\tilde{f}(x, y) = (x, y^3)$, $f_3(x, y) = xy + y^{3k-1}$ e os geradores são $1, y, y^2$ assim das equações

$$g_j f_3 = \sum_{i=0}^2 (\alpha_j^i \circ \tilde{f}) g_i, \quad j = 0, 1, 2$$

$$\lambda_j^i = \alpha_j^i \circ \pi \text{ para } i \neq j$$

$$\lambda_i^i = \alpha_i^i \circ \pi - X_3$$

Obtemos

$$\lambda = \begin{bmatrix} -X_3 & X_2^k & X_1 X_2 \\ X_1 & -X_3 & X_2^k \\ X_2^{k-1} & X_1 & -X_3 \end{bmatrix}$$

Pela Proposição 4.3.2

$$T_f = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_3}{\mathcal{F}_2(f_*\mathcal{O}_2)} = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_3}{\langle X_1, X_3, X_2^{k-1} \rangle} = k - 1$$

onde $\mathcal{F}_2(f_*(\mathcal{O}_2))$ é o ideal gerado pelos menores 1×1 da matriz λ .

Para S_k e B_k podemos escrever $f(x, y) = (x, y^2, yp(x, y^2))$ assim os geradores são 1 e y segue da Definição de Ideal de Fitting (2.4.1) que

$$\mathcal{F}_2(f_*\mathcal{O}_2) = \mathcal{O}_3$$

e portanto $T_f = 0$

4.4 Os invariantes $C_f, T_f, \mu(D^2(f)/\mathbb{Z}_2)$ e a \mathcal{A}_e -codimensão de f

Nesta seção vamos relacionar os invariantes obtidos nas seções anteriores com a \mathcal{A}_e -codimensão de f .

De acordo com os resultados obtidos temos

Singularidade	C_f	T_f	$\mu(D^2(f)/\mathbb{Z}_2)$	\mathcal{A}_e -codimensão
S_k	$k + 1$	0	0	k
B_k	2	0	$k - 1$	k
H_k	2	$k - 1$	0	k

Verificamos então a relação $\mathcal{A}_e\text{-codim} f = C_f + T_f + \mu(D^2(f)/\mathbb{Z}_2) - 1$. Na verdade este resultado vale mais geralmente.

Definição 4.4.1. *Seja (a_1, \dots, a_n) uma n -upla de inteiros positivos primos entre si. Associada a (a_1, \dots, a_n) temos a seguinte ação*

$$\lambda x := (\lambda^{a_1} x_1, \dots, \lambda^{a_n} x_n), \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} \text{ e } x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n.$$

$f = (f_1, \dots, f_p)$, é quasi-homogênea do tipo (a_1, \dots, a_n) se

$$f(\lambda^{a_1} x_1, \dots, \lambda^{a_n} x_n) = (\lambda^{d_1} f_1(x), \dots, \lambda^{d_p} f_p(x))$$

Teorema 4.4.2. *Seja $f \in \mathcal{M}_2\mathcal{O}_{2,3}$ um germe de \mathcal{A}_e -codimensão finita e quasi-homogêneo (i.e. é \mathcal{A} -equivalente a um germe quasi-homogêneo). Então*

$$\mathcal{A}_e\text{-codim} f = C_f + T_f + \mu(D^2(f)/\mathbb{Z}_2) - 1$$

Demonstração: ver [5]

Referências Bibliográficas

- [1] M. F. Atiyah e I. G. Macdonald, *Introduction to comutative algebra*, Addison-Wesley Publishing Company, 1969.
- [2] P.B. Bhattacharya, S.K. Jain, S.R. Nagpaul, *Basic abstract algebra*, Cambridge University Press, London, 1986
- [3] W. Bruns and J. Herzog, *Cohen-Macaulay rings*, Cambridge University Press, London, 1993.
- [4] D. Mond, Some remarks on the geometry and classification of germs of maps from surfaces to 3-space, *Topology* 26 (3), 1987, 361-383.
- [5] D. Mond, Singularities of mappings from surfaces to 3-space, *Singularity Theory*, D.T., Lê, K. Saito, B. Tessier, eds World Scientific, Singapore (1995), 509-526.
- [6] D. Mond, On the classification of germs of maps from $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, *Proc. London Math. Soc.* (3), 50 (1985), 333-369.
- [7] D. Eisenbud, *Commutative algebra with a view toward algebraic geometry*, Springer, New York, 1995.
- [8] D. Mond and R. Pellikaan, Fitting ideals and multiple points of analytic mappings, *Proceedings of the Ptzcuaro Workshop on Algebraic and Analytic Geometry*, Lecture Notes in Mathematics 1414; Springer, Berlin, 1991.
- [9] C.G. Gibson, *Singular points of smooth mappings*, Research Notes in Maths., 25, Pitman, 1979.
- [10] M. Golubitsky and V. Guillemin, *Stable mappings and their singularities*, GTM 14, Springer-Verlag, 1973.
- [11] R. C. Gunning and H. Rossi, *Analytic functions of several complex variables*, Prentice-Hall, EUA, 1965.

-
- [12] R. C. Gunning , *Lectures On Complex Analytic Varieties: The Local Parametrization Theorem*, University Press, Princeton, 1970.
- [13] E. N. Looijenga, *Isolated singular points on complete intersections*, LMS Lecture Notes 77, Cambridge University Press, London, 1984.
- [14] J. Martinet, *Singularities of smooth functions and mappings*, LMS Lecture Notes 58, Cambridge University Press, 1982.
- [15] W. Marar and D. Mond, Multiple point schemes for corank 1 maps, *J. London Math. Soc.* (2) 39 (1989), 553-567.
- [16] J.N. Mather, Stability of C^∞ mappings, II, Infinitesimal stability implies stability. *Ann. Math.* (2) 89, 254-291 (1969).
- [17] H. Matsumura, *Commutative algebra*, W. A. Benjamin, Inc., New York, 1970.
- [18] H. Matsumura, *Commutative ring theory*, Cambridge University Press, 1986.
- [19] D. Mond and J. Damon, \mathcal{A} -Codimension and the vanishing topology of discriminants, *Invent. Math.* 106 (1991),(2), 217-242.
- [20] V. Poénaru, Singularities C^∞ en présence de symétrie, *Lecture Notes in Mathematics* 510 Springer, Berlin, 1976.
- [21] F. Tari, *Singularidades de aplicações diferenciáveis*, Notas Didaticas do ICMC, 34, 1999.

Índice Remissivo

- Anel
 - dos germes de funções analíticas, 22
 - Noetheriano, 18
- Aplicação
 - finita, 23
 - G-invariante
 - G-equivariante, 3
- Campo de vetores, 9
- Cohen-Macaulay
 - Subvariedades, 22
- depht M , 20
- Dimensão
 - de subvariedade, 22
 - de um anel, 20
- Equivalência
 - \mathcal{A}_1 -equivalência, 7
 - \mathcal{A} -equivalência, 5
- Espaço Tangente, 6
 - do grupo K , 8
- Estável
 - germe, 10
- Fibrado tangente, 8
- Germe
 - desdobramento
 - deformação, 13
 - posto de um, 2
- Germes, 1
 - \mathcal{K} -equivalentes, 7
 - $\text{Diff}(\mathbb{C}^n)$, 2
 - finitamente determinados, 12
 - quasi-homogêneo, 48
 - estáveis, 10
 - k-jato de um, 2
 - multigerms, 1
- Grupo
 - ação, 3
 - de Lie, 4
 - de isotropia, 3
- Grupo de Lie
 - ação de um, 4
- Ideal
 - da subvariedades, 20
 - radical, 17
 - altura de, 19
 - de Fitting, 25
 - primário, 17
- Intersecção Completa, 24
- k-jatos
 - \mathcal{A}^k -equivalência, 6
- Número de Milnor, 24
- Perturbação estável, 13
- Ponto
 - Crítico não degenerado, 16
 - ordinário, 23

- regular de uma subvariedade analítica,
 - 22
- Posição Geral, 23
- R-módulo
 - Noetheriano, 19
- Singularidades
 - de primeira ordem, 14
- Subvariedade
 - ideal da, 20
 - redutível, 21
 - irredutível, 21
 - Subvariedade analítica complexa, 20
- Subvariedades
 - de Cohen-Macaulay, 22
 - transversais, 10
- Teorema da Preparação de Malgrange, 19
- Topologia de Whitney, 11
- Transversalidade, 10
- Valor
 - Regular
 - Crítico, 11
- Variedades
 - equidimensionais, 22