

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito: 29/07/2005

Assinatura: _____

Geometria das singularidades de projeções ¹

Fabio Scalco Dias

Orientador: *Prof. Dr. Washington Luiz Marar*

Tese apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Ciências - Área: Matemática.

USP - São Carlos
julho/2005

¹Este trabalho teve suporte financeiro da Fapesp proc: 01/00652-0

*Aos meus pais, Eurico e Sebastiana,
minha homenagem e gratidão, por
tudo que representam em minha
vida.*

Agradecimentos

Ao prof. Washington Luiz Marar, pela orientação e paciência durante todo o desenvolvimento deste trabalho.

Agradeço ao prof. Juan J. Nuño Ballesteros, por sempre se prontificar a me ajudar, mesmo de tão longe. Obrigado por sua dedicação e paciência, pois foram fundamentais para conclusão deste trabalho.

Meu agradecimento especial à profa Solange Mancini pela valiosa colaboração, empenho e rigor na revisão dos capítulos finais desta tese. E pela enorme paciência com suas "idas" e "vindas", que muito contribuíram na realização deste trabalho. Meu muito obrigado.

Aos professores do ICMC, em especial à profa. Maria Aparecida Soares Ruas, quero expressar a minha gratidão pela sua constante disponibilidade para discutir muitos temas fundamentais desta tese.

A profa. Carmem e ao prof. Juan por acolher-me tão gentilmente junto ao seu grupo de pesquisa na Universidade de Valência, bem como aos demais professores e funcionários, pela hospitalidade e amizade, quando estive em Valência.

A todos amigos e familiares pelo incentivo e confiança constantes que, de alguma forma, contribuíram para a realização deste trabalho.

A minha esposa Mirilayne pela paciência, apoio e compreensão.

Aos funcionários do ICMC por toda a ajuda e atenção.

A FAPESP, pelo apoio financeiro, sem o qual não seria possível a realização deste trabalho.

Resumo

Neste trabalho estudamos as singularidades de projeções no plano de curvas genéricas. Introduzimos uma nova relação de equivalência para germes e multigerms de curvas planas, denominada \mathcal{A}_h -equivalência. Esta relação é baseada na equivalência de diagramas divergentes (h_α, α) do tipo $(\mathbb{R}, 0) \xleftarrow{h_\alpha} (\mathbb{R}, 0) \xrightarrow{\alpha} (\mathbb{R}^2, 0)$. Em um contexto mais geral, classificamos os diagramas divergentes $(\mathbb{R}, 0) \xleftarrow{f} (\mathbb{R}, 0) \xrightarrow{\alpha} (\mathbb{R}^2, 0)$, onde f tem ordem finita e α é um germe simples de \mathcal{A}_e -codimensão ≤ 4 . Para o caso multilocal consideramos diagramas da forma

$$\begin{array}{ccccc}
 (\mathbb{R}, 0) & \xleftarrow{f_1} & (\mathbb{R}, 0) & \xrightarrow{\alpha_1} & (\mathbb{R}^2, 0) \\
 & & & \nearrow \alpha_2 & \\
 (\mathbb{R}, 0) & \xleftarrow{f_2} & (\mathbb{R}, 0) & & \\
 & & & \vdots & \\
 & & & \nearrow \alpha_r & \\
 (\mathbb{R}, 0) & \xleftarrow{f_r} & (\mathbb{R}, 0) & &
 \end{array}$$

e obtemos a classificação quando $r = 2, 3, 4$ e o multigerme $(\alpha_1; \dots; \alpha_r)$ tem \mathcal{A}_e -codimensão ≤ 2 . Considerando estas classificações, apresentamos a \mathcal{A}_h -classificação de germes e multigerms de curvas planas de \mathcal{A}_e -codimensão ≤ 2 . Como resultado, obtém-se uma melhor descrição geométrica de curvas no \mathbb{R}^3 por meio de projeções ortogonais.

Estudamos também curvas genéricas e famílias genéricas a 1 e 2 parâmetros de curvas no \mathbb{R}^3 . Mostramos que a projeção ortogonal destas famílias é um desdobramento versal das singularidades A_4, A_6, E_6 e E_8 e, além disso, encontramos as direções da projeção onde ocorrem morsificações dessas singularidades. E mais, através da análise das transições que ocorrem no conjunto bifurcação da projeção, determinamos propriedades geométricas dessas famílias.

Abstract

In this work singularities of projections to the plane of curves are studied.

We introduce a new equivalence relation for germs of plane curves, called \mathcal{A}_h -equivalence. This relation is based on the equivalence of divergent diagrams (h_α, α) of type $(\mathbb{R}, 0) \xleftarrow{h_\alpha} (\mathbb{R}, 0) \xrightarrow{\alpha} (\mathbb{R}^2, 0)$. We do the classification of divergent diagrams $(\mathbb{R}, 0) \xleftarrow{f} (\mathbb{R}, 0) \xrightarrow{\alpha} (\mathbb{R}^2, 0)$, where f has finite order and α is the simple germ of \mathcal{A}_e -codimension ≤ 4 . For the multilocal case we consider diagrams of the form

$$\begin{array}{ccccc}
 (\mathbb{R}, 0) & \xleftarrow{f_1} & (\mathbb{R}, 0) & \xrightarrow{\alpha_1} & (\mathbb{R}^2, 0) \\
 & & & \nearrow \alpha_2 & \\
 (\mathbb{R}, 0) & \xleftarrow{f_2} & (\mathbb{R}, 0) & \vdots & \\
 & & & \nearrow \alpha_r & \\
 (\mathbb{R}, 0) & \xleftarrow{f_r} & (\mathbb{R}, 0) & &
 \end{array}$$

and we get the classification when $r = 2, 3, 4$ and the multigerms $(\alpha_1; \dots; \alpha_r)$ has \mathcal{A}_e -codimension ≤ 2 . Considering these classifications, we present the \mathcal{A}_h -classification of germs and multigerms of plane curves of \mathcal{A}_e -codimension ≤ 2 . As a result, one gets a better geometric description of curves in the \mathbb{R}^3 through of orthogonal projections.

We also study generic curves and generic 1 and 2 parameters families of curves in \mathbb{R}^3 . We show that the orthogonal projection of these families is a versal unfolding of the singularities A_4, A_6, E_6 and E_8 and, moreover, we find the directions of the orthogonal projection where morsification of these singularities occurs. Furthermore, we get information on geometric properties of these families through the analysis of transistions of the bifurcation set of the projection.

Sumário

Introdução	1
1 Preliminares	7
1.1 Germes, jatos e multijatos	7
1.2 Grupos de Mather e espaços tangentes	9
1.3 Desdobramentos versais	11
1.4 Genericidade e transversalidade	15
1.4.1 Exemplos de transversalidade em curvas no \mathbb{R}^3	16
1.5 Classificação de germes de curvas planas	17
1.6 Morsificações de curvas planas	18
2 Curvas Genéricas	21
2.1 Curvas genéricas	21
2.2 Projeção ortogonal de curvas genéricas	24
2.3 Geometria das singularidades de projeções	28
3 Famílias genéricas a 1-parâmetro de curvas no \mathbb{R}^3	37
3.1 Famílias genéricas a 1-parâmetro	37
3.2 Projeção de famílias genéricas a 1-parâmetro	39
3.2.1 Projeção de um flattening degenerado do tipo A	42
3.2.2 Projeção de um flattening degenerado do tipo B	44
3.3 Morsificações da singularidade E_6	47
Apêndice ao capítulo 3	53
3.4 Matriz de intersecção de singularidades de funções de duas variáveis	53
3.5 Matriz de intersecção de E_6	58
4 Famílias genéricas a 2-parâmetros de curvas no \mathbb{R}^3	61
4.1 Famílias genéricas a 2-parâmetros	61
4.2 Projeção de famílias genéricas a 2-parâmetros	63

4.3	Morsificações da singularidade E_8	67
5	Classificação de diagramas de curvas planas	75
5.1	Preliminares	75
5.2	Diagramas de curvas planas	78
5.3	Classificação: Caso local	79
5.4	Classificação: Caso multilocal	89
5.4.1	Diagramas de bigermes de curvas planas	89
5.4.2	Diagramas de trigermes de curvas planas	94
5.4.3	Diagramas de quadrigermes de curvas planas	95
6	\mathcal{A}_h-equivalência de curvas planas	97
6.1	\mathcal{A}_h -equivalência	97
6.2	\mathcal{A}_h -Classificação de curvas planas	100
6.2.1	\mathcal{A}_h -Classificação: Caso local	100
6.2.2	\mathcal{A}_h -Classificação: Caso multilocal	102
6.3	Geometria das singularidades de projeções sob \mathcal{A}_h -equivalência	106
6.4	Singularidades genéricas	110
	Referências Bibliográficas	115

Introdução

O significado de Geometria Genérica pode se resumir em uma frase “ Quase nada ocorre para todas as aplicações, mas quase tudo ocorre para quase todas as aplicações”. Este ramo da matemática surgiu na década de sessenta graças aos trabalhos de René Thom, que, inspirado parcialmente por pesquisas de H. Whitney, proporcionou a ferramenta necessária para o estudo sistemático de fenômenos genéricos. Esta ferramenta conhecida hoje pelo nome de Teoria de Singularidades, não só tem tido aplicações na geometria, mas também tem sido útil em campos como Sistemas Dinâmicos, Óptica, ... De fato, foram nesses campos onde primeiro se aplicaram estas técnicas.

A Geometria Genérica estuda aquelas propriedades que se cumprem para um conjunto aberto e denso de certos espaços de aplicações entre variedades diferenciáveis. Normalmente, a estratégia da Geometria Genérica consiste em estudar certas estruturas associadas a um determinado tipo de aplicação. No caso geral, estas estruturas podem ter formas imprescindíveis, mas quando submetemos as aplicações a certas condições de genericidade, é possível encontrar modelos para as singularidades dessas estruturas. O último passo dessa estratégia consiste em interpretar geometricamente esses modelos. Como se pode observar, a Teoria de Singularidades se aplica aos dois pontos deste processo: em primeiro lugar para determinar se as condições impostas nas aplicações são genéricas e, em segundo, para encontrar os modelos apropriados de singularidades, (ver, por exemplo, [35]). Um dos principais temas abordados pela Geometria Genérica é o estudo da geometria de contato de subvariedades do espaço euclidiano \mathbb{R}^n com subespaços do espaço ambiente. Esses contatos podem ser estudados por meio da análise das singularidades de diferentes famílias de aplicações. Nesse sentido, é relevante o estudo do contato de subvariedades com subespaços lineares e esferas.

Sejam S^{n-1} a hipersfera no \mathbb{R}^n e $M \subset \mathbb{R}^n$ uma subvariedade de dimensão s . Temos em especial três famílias:

- A família de projeções em retas, chamada família de funções alturas, definida como

$$H : M \times S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$(p, u) \mapsto \langle p, u \rangle.$$

- A família de funções distância ao quadrado, definida como

$$d^2 : M \times S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(p, u) \mapsto \|p - u\|^2.$$

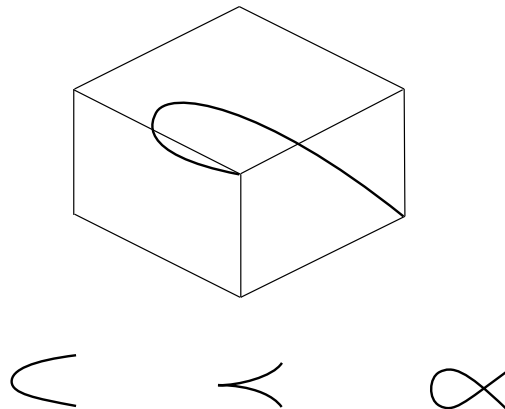
- A família de projeções ortogonais, definida como

$$P : M \times S^{n-1} \rightarrow TS^{n-1}$$

$$(p, u) \mapsto (u, p - \langle p, u \rangle u).$$

Nessa direção, encontramos vários trabalhos, por exemplo [3], [14] e [32]. Em particular, David [10] e Wall [35], consideraram curvas genéricas mergulhadas no \mathbb{R}^3 e projeções dessas no plano, obtendo assim, os tipos de singularidades que podem ocorrer para essas projeções. Outra maneira de se obter informações geométricas relevantes é por meio do uso de técnicas de dualidade, sob o ponto de vista da Teoria de Singularidades, exploradas por Bruce e Wilkinson em [9]. Posteriormente, Bruce e Romero-Fuster [8], mostram um resultado de dualidade entre a família de funções altura e a família de projeções em planos para curvas e superfícies no \mathbb{R}^3 . Na verdade eles mostram que certos subconjuntos do conjunto bifurcação da família de funções altura têm como dual certos subconjuntos do conjunto bifurcação da família de projeções em planos. Usando então os modelos locais para este conjunto bifurcação, eles deduzem várias propriedades geométricas interessantes.

Nesta tese, estudamos a geometria de curvas no \mathbb{R}^3 usando a Teoria de Singularidades. Como exemplo, seja \mathcal{C} uma curva no \mathbb{R}^3 , imagem da aplicação $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, g(t) = (t, t^2, t^3)$. Fixemos uma direção e consideremos um plano ortogonal a esta direção. Projeções de \mathcal{C} sobre planos fornecem diferentes traçados para a curva. Em geral, aparecerão auto-intersecções transversais (pontos duplos) e em particular, cúspides. Certas projeções também fornecem o traçado sem pontos duplos ou pontos singulares.



Damos ênfase a duas questões interessantes:

- Descrever as condições geométricas sobre o mergulho de uma curva γ no \mathbb{R}^3 de forma a obter, na projeção ortogonal, as singularidades dos germes de aplicações $(\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$.

Em resumo, o contato de uma curva no \mathbb{R}^3 com uma reta de direção u é medido por meio das singularidades da projeção ortogonal na direção u . Estas singularidades são dadas pelas singularidades dos germes $(\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$, as quais foram classificadas em [5].

Por exemplo, considerando o caso local, ou seja quando a direção de projeção encontra a curva em um único ponto, a projeção é singular se a direção u é paralela à reta tangente à curva em um ponto de torção não nula. A singularidade é do tipo A_4 (*Rhamphoid*), se a direção u é paralela à reta tangente à curva em um ponto de torção nula. No caso multilocal, a principal diferença, é que devemos considerar a curva inteira no \mathbb{R}^3 , em vez de germes de curvas. Isso acontece porque vários pontos da curva são projetados no mesmo ponto. Dessa forma, devemos considerar vários “pedaços” (germes) da curva ao redor desses pontos e ver como eles se juntam (ramos distintos) na projeção. Isso nos leva a considerar multijatos de germes de aplicações $(\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$. Como exemplo, a projeção ortogonal tem uma singularidade A_3 (Tacnode), quando a direção de projeção está contida no plano bitangente à curva γ e é dada pela secante unindo os dois pontos de tangência. Resultados desse tipo podem ser vistos em [8], porém estamos convencidos de que a descrição geométrica exibida em [8] para a singularidade A_5 não está correta.

Outra questão é a seguinte:

- Encontrar as direções da projeção ortogonal em planos, de forma que a curva plana projetada seja morsificação de uma das singularidades da classificação de germes $(\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$.

Tais direções existem pois, em resumo, se um germe $f : (K^n, 0) \rightarrow (K^p, 0)$ não é estável para a classe de germes denominada de codimensão finita (ou finitamente determinada), podemos deformá-lo de maneira a torná-lo estável. Ou seja, é possível encontrar um desdobramento a 1-parâmetro $F(x, t) = (f_t(x), t)$ tal que para $t \neq 0$, f_t seja estável. Se $K = \mathbb{C}$, a topologia da deformação estável independe da escolha do desdobramento F ; quando $K = \mathbb{R}$, existe um número finito de tipos topológicos distintos nas deformações estáveis.

Em geral não esperamos que a topologia de uma perturbação estável real seja igual à de sua complexificação. No entanto, no caso de curvas planas, foi provado por Gusein-Zade [16] e A’Campo [1] que existe uma deformação estável real de f análoga àquela de \mathbb{C} , mais precisamente a deformação estável real exhibe o mesmo número de pontos duplos que o caso complexo. Chamamos esta deformação de **morsificação** do germe f . Na

figura da página 2, a curva plana a direita representa uma morsificação da singularidade $A_2 = (t^2, t^3)$.

Mais especificamente, introduzimos uma relação de equivalência para germes de curvas planas (\mathcal{A} -finitamente determinados), denominada \mathcal{A}_h -equivalência, com o intuito de refinar a \mathcal{A} -equivalência. Como consequência dessa definição, duas curvas planas regulares são \mathcal{A}_h -equivalentes se, e somente se, suas funções curvatura são \mathcal{A} -equivalentes, o que não ocorre com \mathcal{A} -equivalência. Esta relação de equivalência é originária da equivalência de diagramas divergentes (h_α, α) do tipo

$$(\mathbb{R}, 0) \xleftarrow{h_\alpha} (\mathbb{R}, 0) \xrightarrow{\alpha} (\mathbb{R}^2, 0).$$

A teoria geral de diagramas divergentes sobre variedades diferenciáveis

$$Q \xleftarrow{f} M \xrightarrow{g} N,$$

teve início com os trabalhos de Dufour [11], [12], que revelaram diferenças fundamentais em relação aos casos de diagramas convergentes, devido principalmente à ausência de um “Teorema de Preparação” adequado ao tipo divergente. Várias classificações de diagramas divergentes já foram obtidas, por exemplo em [13], [18] e [19]; porém, não encontramos na literatura a classificação para o caso $(\mathbb{R}, 0) \xleftarrow{f} (\mathbb{R}, 0) \xrightarrow{\alpha} (\mathbb{R}^2, 0)$.

Para os nossos propósitos, obtivemos a classificação de diagramas divergentes (f, α) , onde f tem ordem finita e α é um germe simples de \mathcal{A}_e -codimensão ≤ 4 . Para o caso multilocal consideramos diagramas da forma

$$\begin{array}{ccccc} (\mathbb{R}, 0) & \xleftarrow{f_1} & (\mathbb{R}, 0) & \xrightarrow{\alpha_1} & (\mathbb{R}^2, 0) \\ & & & \nearrow \alpha_2 & \\ (\mathbb{R}, 0) & \xleftarrow{f_2} & (\mathbb{R}, 0) & & \\ & \vdots & & \nearrow \vdots & \\ & & & \nearrow \alpha_r & \\ (\mathbb{R}, 0) & \xleftarrow{f_r} & (\mathbb{R}, 0) & & \end{array} \quad (1)$$

e obtemos a classificação quando $r = 2, 3, 4$ e a \mathcal{A}_e -codimensão do multigerme $(\alpha_1; \dots; \alpha_r)$ é menor ou igual a 2. Considerando agora estas classificações, apresentamos a \mathcal{A}_h -classificação de germes e multigerms de curvas planas de \mathcal{A}_e -codimensão ≤ 2 , resultando em uma melhor descrição geométrica de curvas no \mathbb{R}^3 por meio de projeções ortogonais.

Começamos no capítulo 1 dando as noções preliminares básicas de teoria de singularidades, por exemplo, espaço de jatos e multijatos, genericidade e transversalidade.

No capítulo 2, apresentamos alguns conceitos e resultados sobre a geometria genérica de curvas no \mathbb{R}^3 . Fizemos um estudo sobre a geometria das singularidades de projeções de curvas genéricas no \mathbb{R}^3 em planos. Como consequência deste estudo, obtivemos uma descrição geométrica para a singularidade A_5 .

O capítulo 3 é dedicado ao estudo de propriedades geométricas de famílias genéricas a 1-parâmetro de curvas no \mathbb{R}^3 , analisando as transições do conjunto bifurcação de projeções ortogonais. Mostramos que a projeção ortogonal desta família tem as singularidades A_4 e E_6 e que a família de projeções é um desdobramento versal para estas singularidades. Finalizando, encontramos as direções da projeção ortogonal onde ocorrem morsificações para estas singularidades.

No capítulo 4, estudamos famílias genéricas a 2-parâmetros de curvas no \mathbb{R}^3 . Encontramos condições sobre esta família, para que a projeção ortogonal da mesma, tenha as singularidades A_6 e E_8 e para que a família de projeções seja um desdobramento versal para estas singularidades. Apresentamos também, as direções de projeção onde ocorrem as morsificações da singularidade A_6 e as transições dos três tipos de morsificações existentes para a singularidade E_8 .

O capítulo 5 é dedicado à classificação de diagramas divergentes do tipo

$$(\mathbb{R}, 0) \xleftarrow{f} (\mathbb{R}, 0) \xrightarrow{\alpha} (\mathbb{R}^2, 0),$$

e de diagramas da forma (1), nas condições especificadas anteriormente.

Finalmente, no capítulo 6, definimos \mathcal{A}_h -equivalência e fizemos a \mathcal{A}_h -classificação de germes e multigerms de curvas planas com \mathcal{A}_e -codimensão menor ou igual a 2. Identificamos geometricamente as singularidades da projeção ortogonal em planos de curvas no \mathbb{R}^3 , com relação a classificação obtida. Os resultados dos capítulos 5 e 6 fazem parte do *preprint \mathcal{A}_h -equivalence of plane curves*, trabalho conjunto com Juan J. Nuño Ballesteros.

Preliminares

Neste capítulo apresentamos conceitos e resultados básicos da teoria de singularidades que serão necessários para os capítulos seguintes do presente trabalho. Começaremos apresentando um breve relato sobre germes, jatos e multijatos, passando então a descrever \mathcal{A} -equivalência entre germes. Em seguida, voltamos nossa atenção às deformações versais de um germe e à questão da genericidade. Apresentamos um breve relato sobre a classificação das singularidades de germes $(\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ e finalizamos com um resumo sobre morsificações de curvas planas. As referências gerais para este capítulo são [15], [22], [34].

1.1 Germes, jatos e multijatos

Sejam $S = \{p_1, \dots, p_r\}$ um subconjunto de \mathbb{R}^n , $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ e $g : V \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ aplicações C^∞ definidas em vizinhanças abertas U e V de S . Dizemos que f e g são equivalentes e escrevemos $f \sim g$ se, e somente se, existir uma vizinhança aberta de S , $W \subset U \cap V$ em \mathbb{R}^n , tal que $f|_W = g|_W$. Isto define uma relação de equivalência e a cada uma de suas classes denominaremos multigerme de aplicação de $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ em S . Quando S consiste de um único elemento tais classes são chamadas de germes. Se $f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$ é uma aplicação definida em uma vizinhança de S e supomos $f(S) = 0$, denotaremos por $f : (\mathbb{R}^n, S) \rightarrow \mathbb{R}^p$, o germe induzido por f em S .

Denotaremos por:

1. $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$, o conjunto das aplicações C^∞ de $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ com a topologia de Whitney. Quando $p = 1$, escrevemos simplesmente $C^\infty(\mathbb{R}^n)$.
2. $\mathcal{E}_x(n, p)$, o conjunto dos germes em $x \in \mathbb{R}^n$ de aplicações C^∞ de $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$. Quando $x = 0$, denotamos apenas por $\mathcal{E}(n, p)$. Quando $p = 1$ (germes de funções), $\mathcal{E}(n, 1)$ é um anel e será denotado simplesmente por $\mathcal{E}(n)$.

3. \mathcal{M}_n , o conjunto dos germes de funções f tal que $f(0) = 0$. \mathcal{M}_n é um ideal gerado pelos monômios $x_i, i = 1, \dots, n$.

O germe de uma aplicação $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ (esta notação significa que f leva a origem na origem) é dito singular se a matriz Jacobiana $Df(0)$ não tem rank máximo, caso contrário f é dito regular. Vamos agora introduzir uma outra relação de equivalência entre germes de aplicações.

Definição 1.1 *Sejam $f, g : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ dois germes. Dizemos que f e g têm ordem de contato k ($k \in \mathbb{N}$), e representaremos por $f \sim_k g$, se*

$$\frac{\partial^{|\alpha|} f_i}{\partial x^\alpha}(0) = \frac{\partial^{|\alpha|} g_i}{\partial x^\alpha}(0),$$

para todo multi-índice α , com $|\alpha| \leq k$ e para todo $i = 1, \dots, p$.

Isto é, $f \sim_k g$ se, e somente se, as séries de Taylor até a ordem k em 0 das aplicações que induzem estes germes coincidem. Novamente, isso define uma relação de equivalência. O conjunto destas classes de equivalência é denotado por $J^k(n, p)$. Se $f \in \mathcal{E}(n, p)$, a classe de equivalência induzida por este germe é escrita como $j^k f(0)$ e é chamada k -jato de f em 0. Notemos que $J^k(n, p)$ pode ser trivialmente identificado com o espaço de aplicações polinomiais de \mathbb{R}^n em \mathbb{R}^p de grau menor ou igual a k e com termo constante nulo. O conjunto $J^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ de todos os k -jatos (em todos os pontos) de todas as aplicações $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ é um fibrado sobre $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ com fibra $J^k(n, p)$. Dada então uma aplicação $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, temos definida uma aplicação

$$j^k(f) : \mathbb{R}^n \rightarrow J^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$$

que a cada ponto $x \in \mathbb{R}^n$ associa o k -jato de f em x , $j^k f(x)$. Essa aplicação é chamada aplicação k -jato. Podemos definir também as seguintes aplicações;

$$\begin{aligned} \alpha : J^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p) &\rightarrow \mathbb{R}^n : && \text{aplicação fonte} \\ \beta : J^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p) &\rightarrow \mathbb{R}^p : && \text{aplicação meta.} \end{aligned}$$

Seja A_n^k o espaço vetorial dos polinômios de grau $\leq k$ em n variáveis com coeficientes reais que se anulam na origem. Escolhendo como coordenadas para A_n^k os coeficientes dos polinômios. Então, A_n^k é isomorfa a \mathbb{R}^N para algum N . Seja $B_{n,p}^k = \bigoplus_{i=1}^p A_n^k$.

Teorema 1.1 *Com as notações acima têm-se:*

1) $J^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ tem estrutura de variedade diferenciável com dimensão

$$\dim J^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p) = n + p + \dim B_{n,p}^k$$

- 2) A aplicação $(\alpha, \beta) : J^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p) \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ é uma submersão com todas as fibras difeomorfas a $J^k(n, p)$.
- 3) Se $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ é uma aplicação diferenciável, sua extensão como k -jato, $j^k f : \mathbb{R}^n \rightarrow J^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ é também uma aplicação diferenciável.

Demonstração: Ver [15].

Os jatos são úteis no estudo de propriedades locais de aplicações entre variedades diferenciáveis. Para o estudo de propriedades globais, temos que fazer uso dos multijatos. Consideremos $\mathbb{R}^{n^s} = \underbrace{\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n}_s$ e $\mathbb{R}^{n^{(s)}} = \{(x_1, \dots, x_s) \in \mathbb{R}^{n^s} : x_i = x_j \Rightarrow i = j\}$.

Definição 1.2 Consideremos o produto de aplicação fonte $\alpha^s : (J^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p))^s \rightarrow \mathbb{R}^{n^{(s)}}$. Define-se o espaço de multijatos de ordem k em s variáveis como o conjunto:

$${}_s J^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p) = (\alpha^s)^{-1}(\mathbb{R}^{n^{(s)}}).$$

Como $\mathbb{R}^{n^{(s)}}$ é um aberto de \mathbb{R}^{n^s} , logo ${}_s J^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ é um aberto de $(J^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p))^s$ e, portanto, uma variedade diferenciável. Análoga ao caso de jatos, temos a submersão:

$$\begin{aligned} {}_s J^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p) &\rightarrow \mathbb{R}^{n^{(s)}} \times \mathbb{R}^{p^{(s)}} \\ (\sigma_1, \dots, \sigma_s) &\mapsto (\alpha(\sigma_1), \dots, \alpha(\sigma_s), \beta(\sigma_1), \dots, \beta(\sigma_s)), \end{aligned}$$

e para uma aplicação diferenciável $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ temos sua extensão como multijato:

$$\begin{aligned} {}_s j^k f : \mathbb{R}^{n^{(s)}} &\rightarrow {}_s J^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p) \\ (x_1, \dots, x_s) &\mapsto (j^k f(x_1), \dots, j^k f(x_s)). \end{aligned}$$

1.2 Grupos de Mather e espaços tangentes

Estaremos interessados nas classes de equivalência que são órbitas da ação de certos grupos que atuam sobre $\mathcal{E}(n, p)$. Os principais são os grupos de Mather denotados por \mathcal{R} , \mathcal{L} , \mathcal{A} , \mathcal{K} e \mathcal{C} ; no entanto descreveremos aqui apenas os três primeiros, que serão utilizados neste trabalho. Sejam \mathcal{R} o grupo dos germes de difeomorfismos de $(\mathbb{R}^n, 0)$, \mathcal{L} o grupo dos germes de difeomorfismos de $(\mathbb{R}^p, 0)$ e \mathcal{A} o produto direto $\mathcal{R} \times \mathcal{L}$. Definimos as ações desses grupos sobre $\mathcal{E}(n, p)$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned} h.f &= f \circ h^{-1}, \quad h \in \mathcal{R} \\ k.f &= k \circ f, \quad k \in \mathcal{L} \\ (h, k).f &= k \circ f \circ h^{-1}, \quad (h, k) \in \mathcal{A} \end{aligned}$$

onde $f \in \mathcal{E}(n, p)$. O grupo \mathcal{R} (resp. \mathcal{L}) é chamado também de grupo de mudanças de coordenadas na fonte (resp. na meta).

Dizemos que dois germes $f, g : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ são \mathcal{R} -equivalentes (resp. \mathcal{L} -equivalentes e \mathcal{A} -equivalentes) se existir $h \in \mathcal{R}$ (resp. $k \in \mathcal{L}$ e $(h, k) \in \mathcal{A}$) tal que $f = g \circ h^{-1}$ (resp. $f = k \circ g$ e $f = k \circ g \circ h^{-1}$).

Passamos agora a descrever o espaço tangente à órbita de f sob a ação do grupo \mathcal{A} . Para isso, vamos descrever separadamente o espaço tangente à órbita de f sob a ação dos grupos \mathcal{R} e \mathcal{L} .

Definição 1.3 *Sejam $f \in \mathcal{E}(n, p)$, $T\mathbb{R}^n$ e $T\mathbb{R}^p$ os fibrados tangentes de \mathbb{R}^n e \mathbb{R}^p , respectivamente. Seja também π_p o germe da projeção natural e Tf a aplicação tangente induzida por f . Um germe de campo de vetores ao longo de f , ζ , é um germe de aplicação tal que $\pi_p \circ \zeta = f$*

$$\begin{array}{ccc} T\mathbb{R}^n & \xrightarrow{Tf} & T\mathbb{R}^p \\ \pi_n \downarrow & \nearrow \zeta & \downarrow \pi_p \\ \mathbb{R}^n & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^p. \end{array}$$

Denotamos o conjunto de todos os germes de campos vetoriais ao longo de f por θ_f .

Se denotarmos por θ_n o conjunto de germes na origem de campos de vetores do \mathbb{R}^n (ou seja, campos de vetores ao longo da identidade $I_n : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$), um elemento $\xi \in \theta_n$ será aplicado por tf a um campo de vetores de θ_f da seguinte forma:

$$\begin{aligned} tf : \theta_n &\rightarrow \theta_f \\ \xi &\mapsto tf(\xi) = Tf \circ \xi. \end{aligned}$$

Escolhendo (x_1, \dots, x_n) como um sistema local de coordenadas em $(\mathbb{R}^n, 0)$, θ_n é um $\mathcal{E}(n)$ -módulo livre com base $\{\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_n\}$. Por outro lado, se $\eta \in \theta_p$, então temos outra aplicação:

$$\begin{aligned} \omega f : \theta_p &\rightarrow \theta_f \\ \eta &\mapsto \omega f(\eta) = \eta \circ f. \end{aligned}$$

Da mesma forma, escolhendo (y_1, \dots, y_p) como um sistema local de coordenadas em $(\mathbb{R}^p, 0)$, temos que θ_p é um \mathcal{E}_p -módulo livre gerado por $\{\partial/\partial y_1, \dots, \partial/\partial y_p\}$, ωf é simplesmente a aplicação induzida por

$$\begin{aligned} f^* : \mathcal{E}_p &\longrightarrow \mathcal{E}_n \\ g &\longmapsto f^*(g) = g \circ f. \end{aligned}$$

Definição 1.4 *Os espaços tangentes às \mathcal{G} -órbitas em f , onde $\mathcal{G} \in \{\mathcal{R}, \mathcal{L}, \mathcal{A}\}$, são respectivamente*

$$\begin{aligned} T\mathcal{R}f &= tf(\mathcal{M}_n\theta_n) \\ T\mathcal{L}f &= \omega f(\mathcal{M}_n\theta_p) \\ T\mathcal{A}f &= T\mathcal{R}f + T\mathcal{L}f. \end{aligned}$$

Os espaços tangentes acima se referem ao caso em que a fonte e a meta dos germes são fixas ($x = 0$ e $y = 0$). Se permitimos que estas variem, definimos os espaços tangentes estendidos às \mathcal{G} -órbitas em f , onde $\mathcal{G} \in \{\mathcal{R}, \mathcal{L}, \mathcal{A}\}$, como sendo:

$$\begin{aligned} T\mathcal{R}_e f &= tf(\theta_n) \\ T\mathcal{L}_e f &= \omega f(\theta_p) \\ T\mathcal{A}_e f &= T\mathcal{R}_e f + T\mathcal{L}_e f. \end{aligned}$$

No que segue, formalizaremos o conceito de determinação e codimensão finitas de um germe.

Definição 1.5 *Sejam $f \in \mathcal{E}(n, p)$ e \mathcal{G} um grupo atuando sobre $\mathcal{E}(n, p)$. Dizemos que o germe f é k -determinado em relação a \mathcal{G} , se para qualquer $g \in \mathcal{E}(n, p)$, tal que $j^k f = j^k g$, tem-se $g \in \mathcal{G}$ -órbita de f . Dizemos também que o germe f é k - \mathcal{G} -determinado.*

Definição 1.6 *O grau de \mathcal{G} -determinação do germe f , $\det f$, é o menor inteiro k tal que f é k - \mathcal{G} -determinado. O germe f é dito \mathcal{G} -finitamente determinado quando $\det f < \infty$.*

Definição 1.7 *Seja \mathcal{G} um dos grupos usuais \mathcal{R}, \mathcal{L} ou \mathcal{A} . A \mathcal{G} -codimensão e a \mathcal{G}_e -codimensão de um germe f são dadas respectivamente por:*

$$\text{cod}(f, \mathcal{G}) = \dim_{\mathbb{R}} \left(\frac{\mathcal{M}_n \mathcal{E}(n, p)}{T\mathcal{G}f} \right) \quad \text{cod}(f, \mathcal{G}_e) = \dim_{\mathbb{R}} \left(\frac{\mathcal{E}(n, p)}{T\mathcal{G}_e f} \right).$$

O estudo da determinação finita de um germe teve início com os trabalhos de John Mather em 1960; em 1970, Terence Gaffney e Andrew du Plessis obtiveram melhores aproximações para o grau de determinação. Nos anos 80, com os trabalhos de Bruce, du Plessis e Wall, usando-se ações de grupos unipotentes, (ver [4]) a questão do grau da \mathcal{G} -determinação finita ficou completamente resolvida.

1.3 Desdobramentos versais

Seja f um germe finitamente determinado. Podemos considerar as “deformações de f ” (família de germes de aplicações que contém o germe f) e estudar os tipos de singularidades que aparecem em tais deformações. Em particular, podemos perguntar se os tipos de singularidades que aparecem são em número finito e se existe uma família especial que contém todos esses tipos. Na verdade, queremos que qualquer outra deformação de f seja obtida a partir desta família. Tal família chama-se deformação versal. Assim, vamos formalizar esses conceitos.

Definição 1.8 Um **desdobramento a s -parâmetros** de um germe $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ é um germe $F \in \mathcal{E}(n + s, p + s)$:

$$\begin{aligned} F : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s, 0) &\longrightarrow (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^s, 0) \\ (x, u) &\longmapsto (F_u(x), u) \end{aligned}$$

tal que $F_0(x) = f(x)$. O germe da aplicação $F_u(x)$ é denominado uma **deformação** de f .

Em outras palavras, uma deformação de f é uma família de germes de aplicações que contém o germe f . No que segue, vamos considerar $\mathcal{G} = \mathcal{A}$ (os resultados são análogos para qualquer grupo de Mather).

Definição 1.9 Dois desdobramentos a s -parâmetros $F, G : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^s, 0)$ de f são **isomorfos** se existirem germes de difeomorfismos:

$$\begin{aligned} \phi : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s, 0) &\rightarrow (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s, 0) \\ \psi : (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^s, 0) &\rightarrow (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^s, 0) \end{aligned}$$

que são desdobramentos a s -parâmetros das funções identidades sobre $(\mathbb{R}^n, 0)$ e $(\mathbb{R}^p, 0)$, respectivamente, tais que $G = \psi \circ F \circ \phi^{-1}$.

Dado $h : (\mathbb{R}^t, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^s, 0)$, definimos o “**pull-back**” de F por h , denotado por h^*F , como sendo o desdobramento a t -parâmetros

$$(h^*F)(x, v) = (F_{h(v)}(x), v).$$

No caso em que F e G são desdobramentos de f com número de parâmetros diferentes, a definição de isomorfismo é dada pelo “pull-back”. Dois desdobramentos a s -parâmetros F e G de f são ditos **equivalentes** se existir um difeomorfismo h de $(\mathbb{R}^s, 0)$ tal que G é isomorfo a h^*F .

Definição 1.10 Seja F um desdobramento a s -parâmetros de f . Um desdobramento a t -parâmetros G é dito **induzido** por F se existir um germe $h : (\mathbb{R}^t, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^s, 0)$, tal que G é isomorfo a h^*F .

Definição 1.11

1. F é um **desdobramento \mathcal{A} -versal** se todo desdobramento de f é induzido por F . Neste caso dizemos que f_u é uma **deformação versal**.
2. F é **trivial** se é isomorfo ao desdobramento constante $(x, u) \mapsto (f(x), u)$.
3. f é **estável** se todos os desdobramentos de f são triviais.

Segue agora o teorema fundamental da existência de desdobramentos versais, devido a Martinet [22].

Teorema 1.2 [Critério de versalidade] *O desdobramento F é versal se, e somente se,*

$$T\mathcal{A}_e f + \mathbb{R}\{\dot{F}_1, \dots, \dot{F}_s\} = \mathcal{E}(n, p).$$

onde $\dot{F}_j(x) = \frac{\partial F_j}{\partial u_j}(x)$.

Observamos que, se f é k -determinada, podemos trabalhar em $J^k(n, p)$, isto é, F é versal se, e somente se,

$$j^k(T\mathcal{A}_e f + \mathbb{R}\{\dot{F}_1, \dots, \dot{F}_s\}) = J^k(n, p).$$

Definição 1.12

- *O conjunto dos pontos críticos de F é*

$$\Sigma(F) = \{(x, u) : DF_x(x, u) \text{ é singular}\}$$

onde DF_x denota a derivada de F com relação a x .

- *O conjunto discriminante de F é dado por*

$$\Delta(F) = \{(F(x, u), u) : (x, u) \in \Sigma(F)\}.$$

- *O conjunto bifurcação é definido por*

$$\text{Bif}(F) = \{u \in \mathbb{R}^s : \exists x \in \mathbb{R}^n \text{ com } f_u \text{ instável em } x\}.$$

Como exemplo, consideremos o germe $f : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ definido por $f(t) = (t^2, t^{2k+1})$. Estas singularidades são chamadas de singularidades A_{2k} (ver seção 1.5). Um desdobramento \mathcal{A} -versal de f é dado por

$$F_a(t) = (t^2, t^{2k+1} + a_{2k-1}t^{2k-1} + a_{2k-3}t^{2k-3} + \dots + a_1 t),$$

onde $a = (a_1, a_3, \dots, a_{2k-1}) \in \mathbb{R}^k$. O conjunto bifurcação nesse caso é dado por duas componentes: a primeira, é dada pelos pontos a tais que $\frac{\partial F_a}{\partial t}(t) = 0$, desta forma,

$$\left(2t, (2k+1)t^{2k} + (2k-1)a_{2k-1}t^{2k-2} + \dots + a_1 \right) = (0, 0) \Leftrightarrow t = a_1 = 0.$$

Assim, a primeira componente é o hiperplano $a_1 = 0$. A segunda, é dada pelos pontos $a \in \mathbb{R}^k$ tais que

$$\frac{F_a(t) - F_a(u)}{(t - u)} = 0 \quad \text{com } t \neq u, \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial F_a}{\partial t}(t) // \frac{\partial F_a}{\partial u}(u). \quad (1.2)$$

Da igualdade 1.1 resulta

$$\left(\frac{t^2 - u^2}{t - u}, \frac{t^{2k+1} + a_{2k-1}t^{2k-1} + \dots + a_1t - u^{2k+1} - a_{2k-1}u^{2k-1} - \dots - a_1u}{t - u} \right) = (0, 0).$$

Assim, da primeira coordenada segue-se que $u = -t$ e, portanto, da segunda coordenada obtemos

$$a_1 = -t^{2k} - a_{2k-1}t^{2k-2} - \dots - a_3t^2. \quad (1.3)$$

A igualdade 1.2 se traduz em $\det(M) = 0$, onde

$$M = \begin{pmatrix} 2t & (2k+1)t^{2k} + (2k-1)a_{2k-1}t^{2k-2} + \dots + 3a_3t^2 + a_1 \\ 2u & (2k+1)u^{2k} + (2k-1)a_{2k-1}u^{2k-2} + \dots + 3a_3u^2 + a_1 \end{pmatrix}.$$

Como $u = -t$, temos

$$\det(M) = 0 \Leftrightarrow t((2k+1)t^{2k} + (2k-1)a_{2k-1}t^{2k-2} + \dots + 3a_3t^2 + a_1) = 0,$$

desconsiderando $t = 0$ pois, caso contrário, $t = u = 0$. Logo,

$$(2k+1)t^{2k} + (2k-1)a_{2k-1}t^{2k-2} + \dots + 3a_3t^2 + a_1 = 0.$$

Substituindo o valor de a_1 , encontrado em (1.3) na igualdade acima, segue-se que $a_3 = -kt^{2k-2} - (k-1)a_{2k-1}t^{2k-4} - \dots - 2a_5t^2$. Finalmente, substituindo a_3 na equação (1.3) obtemos $a_1 = (k-1)t^{2k} + (k-2)a_{2k-1}t^{2k-2} + \dots + a_5t^4$. Portanto, a segunda componente é a hipersuperfície dada por:

$$(a_1, a_3, \dots, a_{2k-1}) = ((k-1)t^{2k} + (k-2)a_{2k-1}t^{2k-2} + \dots + a_5t^4, \\ -kt^{2k-2} - (k-1)a_{2k-1}t^{2k-4} - \dots - 2a_5t^2, a_5, \dots, a_{2k-1}).$$

Uma aplicação importante dos desdobramentos versais é a seguinte:

Proposição 1.1 *Quaisquer dois desdobramentos versais de um germe f , com o mesmo número de parâmetros, têm conjunto de pontos críticos, discriminante e bifurcações difeomorfos.*

Demonstração: Ver por exemplo [6].

1.4 Genericidade e transversalidade

Fortemente relacionado com o conceito de versalidade está o conceito de genericidade. Dizemos que uma propriedade é genérica em $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ se ela se verifica para um conjunto residual de aplicações. A definição mais precisa deste conceito é em termos de resultados de transversalidade. O resultado central neste contexto é conhecido como teorema de transversalidade de Thom (ver por exemplo [15]).

Definição 1.13 *Sejam $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ uma aplicação C^∞ e $Y \subset \mathbb{R}^p$ uma variedade diferenciável. Dizemos que f é transversal a Y em x , e representamos por $f \pitchfork Y$, se $f(x) \notin Y$, ou $f(x) \in Y$ e*

$$T_{f(x)}Y + T_x f(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^p.$$

Dizemos que f é transversal a Y , se $f \pitchfork Y$ em $x, \forall x \in \mathbb{R}^n$.

Como mostra o seguinte teorema, o conceito de transversalidade pode ser entendido como uma generalização do conceito de valor regular de uma aplicação diferenciável.

Teorema 1.3 [15] *Sejam $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ uma aplicação C^∞ e $Y \subset \mathbb{R}^p$ uma variedade diferenciável com f transversal a Y . Então, $f^{-1}(Y)$ é uma subvariedade diferenciável em \mathbb{R}^n , que tem a mesma codimensão de Y .*

A seguir, enunciaremos os teoremas de transversalidade, que serão a principal ferramenta para provar que certas condições geométricas (as quais podem ser traduzidas em termos de condições de transversalidade em espaços de jatos) são satisfeitas para um subconjunto residual (e portanto denso) de aplicações.

Teorema 1.4 [Transversalidade de Thom] *Sejam M, N variedades diferenciáveis e W uma subvariedade de $J^k(M, N)$. Consideremos*

$$T_W = \{f \in C^\infty(M, N) : j^k f \pitchfork W\}.$$

Então, T_W é um subconjunto residual de $C^\infty(M, N)$ com a topologia C^∞ de Whitney.

Teorema 1.5 [Transversalidade de Multijatos] *Sejam M, N variedades diferenciáveis e W uma subvariedade de ${}_s J^k(M, N)$. Consideremos*

$$T_W = \{f \in C^\infty(M, N) : {}_s j^k f \pitchfork W\}.$$

Então, T_W é um subconjunto residual de $C^\infty(M, N)$ com a topologia C^∞ de Whitney.

A seguir enunciaremos um teorema de James Montaldi, um dos mais eficientes resultados de transversalidade (ou de genericidade), que se aplica tanto para germes quanto para multigerms.

Teorema 1.6 Montaldi [28] *Sejam X, Y, Z, U variedades diferenciáveis e \mathcal{G} um dos grupos de Mather: $\mathcal{R}, \mathcal{L}, \mathcal{C}, \mathcal{A}, \mathcal{K}$. Se $F : Y \times U \rightarrow Z$ é uma aplicação diferenciável, então, dada uma aplicação $g : X \rightarrow Y$, pode-se definir uma composta $F_g : X \times U \rightarrow Z$ por $F_g(x, u) = F(g(x), u)$.*

1. *Suponha-se que $F : Y \times U \rightarrow Z$ seja uma aplicação localmente \mathcal{G} -versal, e seja S uma subvariedade \mathcal{G}^k -invariante de $J^k(X, Z)$. Então, para um conjunto residual de imersões $X \hookrightarrow Y$, a aplicação k -jato $j_1^k F_g : X \times U \rightarrow J^k(X, Z)$ é transversal a S .*
2. *Suponha-se que $F : Y \times U \rightarrow Z$ seja uma aplicação \mathcal{G} -versal, e seja S uma subvariedade \mathcal{G}^k -invariante do espaço de multijatos ${}_r J^k(X, Z)$. Então, para um conjunto residual de mergulhos $X \hookrightarrow Y$, a aplicação multijatos ${}_r j_1^k F_g : X^{(r)} \times U \rightarrow {}_r J^k(X, Z)$ é transversal a S .*

1.4.1 Exemplos de transversalidade em curvas no \mathbb{R}^3

Apresentamos, agora, alguns exemplos de como os teoremas de transversalidade podem ser aplicados. Seja γ uma curva no \mathbb{R}^3 . O conceito de derivada de uma curva faz com que os fibrados de jatos e multijatos de curvas sejam triviais, o que nos permitirá utilizar expressões globais em termos de coordenadas para subconjuntos destes espaços. De fato, como a derivada é um conceito local, podemos definir a derivada do germe de uma curva em um ponto, com isso temos as aplicações

$$\begin{aligned} J^k(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3) &\longrightarrow \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^3)^{k+1} \\ j^k \gamma(t) &\longmapsto (t, \gamma(t), \dots, \gamma^{(k)}(t)), \end{aligned}$$

para o espaço de jatos, onde denotamos as derivadas de γ em um ponto $t \in \mathbb{R}$ por $\gamma'(t), \gamma''(t), \gamma'''(t), \dots, \gamma^{(k)}(t)$, $k \geq 4$; e

$$\begin{aligned} {}_r J^k(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3) &\longrightarrow (\mathbb{R})^{(r)} \times (\mathbb{R}^3)^{r(k+1)} \\ {}_r j^k \gamma(t) &\longmapsto (t_1, \dots, t_r, \gamma(t_1), \dots, \gamma(t_r), \dots, \gamma^{(k)}(t_1), \dots, \gamma^{(k)}(t_r)), \end{aligned}$$

para o espaço de multijatos. Claramente, ambas as aplicações são difeomorfismos, de modo que, no que segue, identificaremos o espaço de jatos e o de multijatos com os correspondentes produtos.

Exemplo 1.1 Seja $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t))$ uma curva regular. Consideremos o conjunto

$$H = \left\{ t \in \mathbb{R} : \|\gamma'(t) \times \gamma''(t)\| = 0 \right\}$$

no espaço $J^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$ e a aplicação 2-jato $j^2\gamma : \mathbb{R} \rightarrow J^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$. É fácil ver que

$$(j^2\gamma)^{-1}(H) = \{\text{Pontos onde a curvatura de } \gamma \text{ se anula}\}.$$

Dizer que $j^2\gamma(t_0)$ é transversal a H é dizer que $\exists t_0 : j^2\gamma(t_0) \in H$ com

$$\underbrace{dj^2\gamma(t_0)(T_{t_0}\mathbb{R})}_{\dim=1} + \underbrace{T_{j^2\gamma(t_0)}H}_{\dim=8} = \underbrace{T_{j^2\gamma(t_0)}J^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)}_{\dim=10}.$$

Portanto, temos transversalidade, somente se não existirem pontos de curvatura nula.

Exemplo 1.2 Seja γ como antes e consideremos agora H como o conjunto dos pontos $t \in \mathbb{R}$ tais que o conjunto $\{\gamma'(t), \gamma''(t), \gamma'''(t)\}$ seja linearmente dependente. Vê-se que H é uma hipersuperfície algébrica de $J^3(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$ dada pela equação

$$\begin{vmatrix} \gamma'_1(t) & \gamma'_2(t) & \gamma'_3(t) \\ \gamma''_1(t) & \gamma''_2(t) & \gamma''_3(t) \\ \gamma'''_1(t) & \gamma'''_2(t) & \gamma'''_3(t) \end{vmatrix} = 0.$$

Ou seja, $(j^3\gamma)^{-1}(H)$ é constituído dos pontos de torção nula de γ . Dessa forma, a condição $j^3\gamma$ transversal a H implica que $(j^3\gamma)^{-1}(H)$ são pontos isolados.

1.5 Classificação de germes de curvas planas

Quando estudamos a geometria de curvas ou superfícies sob o ponto de vista da teoria das singularidades é necessário classificar germes de aplicações sob alguma relação de equivalência até uma certa codimensão. Por exemplo, para estudarmos o contato de superfícies no \mathbb{R}^3 com planos, precisamos de antemão classificar germes de aplicações $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ sob \mathcal{A} -equivalência de \mathcal{A}_e -codimensão ≤ 2 . Já para estudarmos o contato de curvas no \mathbb{R}^3 com retas (resp. planos), precisamos classificar germes de aplicações $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ (resp. $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$) sob \mathcal{A} -equivalência de \mathcal{A}_e -codimensão ≤ 2 .

O processo de classificação envolve basicamente duas etapas:

- a primeira delas é determinar quais são os jatos relevantes em $J^k(n, p)$;
- a segunda é testar se estes jatos são finitamente determinados ou não.

Esse processo é chamado de processo indutivo via jatos e se baseia no conceito de transversal completa introduzido por Bruce, du Plessis e Kirk em [7], no lema de Mather e nos teoremas de determinação finita.

Como dissemos na introdução deste trabalho, estamos interessados em estudar famílias de projeções ortogonais em planos de curvas no \mathbb{R}^3 . Assim, é necessário que tenhamos, de antemão, uma classificação das singularidades que são relevantes. Encontramos em [5] a classificação de germes \mathcal{A} -simples de aplicações $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$. Lembramos que um germe $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ é dito \mathcal{G} -simples se existe uma vizinhança V de $j^k f$ (k grande) em $J^k(n, p)$ tal que V contém um número finito de órbitas de $J^k \mathcal{G}$ em $J^k(n, p)$.

Teorema 1.7 [5] *Seja $f : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ um germe simples, então f é \mathcal{A} -equivalente a um dos germes na tabela abaixo*

<i>Tipo</i>	<i>Germe</i>	<i>\mathcal{A}_e-cod</i>
<i>Não singular</i>	$(t, 0)$	0
A_{2k}	(t^2, t^{2k+1})	k
E_{6k}	(t^3, t^{3k+1})	$3k$
E_{6k+2}	(t^3, t^{3k+2})	$3k + 1$
–	$(t^3, t^{3k+1} + t^{3p+2}), k \leq p < 2k, k, p > 1$	$k + p + 1$
–	$(t^3, t^{3k+1} + t^{3p+2}), p \leq k < 2p, k, p > 1$	$k + p + 1$
W_{12}	$(t^4, t^5); (t^4, t^5 + t^7)$	6; 5
W_{18}	$(t^4, t^7); (t^4, t^7 + t^9); (t^4, t^7 + t^{10})$	9; 7; 8
$W_{1,2k-5}^\#$	$(t^4, t^6 + t^{2k+1}), k \geq 3.$	$k + 3$

1.6 Morsificações de curvas planas

Seja $f : (K^n, 0) \rightarrow (K^p, 0)$, um germe de aplicação não estável, onde $K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . Suponhamos que f tenha \mathcal{A} -codimensão finita. Podemos deformar este germe de modo a torná-lo estável. Ou seja, é possível encontrar um desdobramento a 1-parâmetro $F(x, t) = (f_t(x), t)$ tal que para $t \neq 0$, f_t seja estável. Tomando um representante apropriado do desdobramento F , é possível construir uma deformação $f_t : U_t \rightarrow K^p$ de f , onde U_t é uma vizinhança contrátil de 0, a qual, a menos de homeomorfismo na fonte e na meta, independa de t (exceto pelo sinal, quando $K = \mathbb{R}$), e da escolha do representante de F . Essa deformação é conhecida como **deformação estável** de f .

Se $K = \mathbb{C}$, a topologia da deformação estável é independente mesmo da escolha do desdobramento F ; quando $K = \mathbb{R}$, existe um número finito de tipos topológicos distintos nas deformações estáveis. A descrição geral dessa construção é feita em [21].

O que é interessante sobre deformações estáveis é que a intersecção de B_ϵ (vizinhança de 0 em K^p) com a imagem de f é contrátil, enquanto que a intersecção com a imagem de uma deformação estável não. Da topologia desta última, obtemos alguns dos mais importantes invariantes associados à germes $(\mathbb{C}^n, S) \rightarrow (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$, onde S é um conjunto finito.

Teorema 1.8 [26] *Seja $f : (\mathbb{C}^n, S) \rightarrow (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ com codimensão finita, e suponhamos $(n, n+1)$ com boas dimensões, $n < 15$ ([24]). Então a imagem de uma deformação estável de f tem o tipo de homotopia de um bouquet de n -esferas.*

O número dessas n -esferas é portanto um \mathcal{A} -invariante de f ; chamado de *número de Milnor da imagem* de f e denotado por $\mu_I(f)$. Quando $n = 1$, $\mu_I(f)$ é determinado pelo número de ramos r da curva e o número de nós δ que aparece na deformação estável:

Lema 1.1 [27] $\mu_I(f) = \delta - r + 1$.

O número δ pode ser calculado de várias maneiras. Por exemplo, Milnor mostrou em [25] que se a imagem do germe f é definida pela equação $g \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2, 0}$, então o número de Milnor $\mu = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2, 0} / J_g$ de g é relatado por δ pela fórmula $\mu = 2\delta - r + 1$, onde J_g é o ideal Jacobiano de g . Além disso, se f é real (a restrição de f à \mathbb{R} , aplica \mathbb{R} em \mathbb{R}^2), então δ é igual ao número máximo m de nós reais que aparecem em uma deformação real de f . Podemos agora, determinar a relação entre μ_I e \mathcal{A}_e -codimensão de f .

Teorema 1.9 [27] *Seja $f : (\mathbb{C}, S) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$, 1-1 fora de S . Então $\mu_I \geq \mathcal{A}_e$ -codimensão de f . A igualdade ocorre se, e somente se, f é quasi-homogêneo.*

Portanto, o número máximo de nós que aparecem em uma deformação real de uma singularidade $f : (\mathbb{C}, S) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ (quasi-homogêneo) é dada pela fórmula

$$m = \mathcal{A}_e\text{-cod}(f) + r - 1. \quad (1.4)$$

Em geral não esperamos que a topologia de uma deformação estável real seja igual à de sua complexificação. No entanto, no caso de curvas planas, foi provado por Gusein-Zade [16] e A'Campo [1] que se $f : (\mathbb{C}, S) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ é real, então existe uma deformação estável real de f análoga àquela de \mathbb{C} .

Definição 1.14 *Uma deformação estável real que exhibe o mesmo número de nós que o caso complexo é chamada de **morsificação** do germe f ou **deformação real boa**.*

Desde que deformações reais boas existem, podemos encontrá-las em desdobramentos versais. Como exemplo: consideremos as singularidades A_2 e A_4 também chamadas de cúspide ordinária e cúspide degenerada (*ramphoid cusp*), respectivamente. Assim, seja $f, g : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ definidas por $f(t) = (t^2, t^3)$ e $g(t) = (t^2, t^5)$. Os respectivos desdobramentos versais são:

$$F = (t^2, t^3 + a_1 t) \quad \text{e} \quad G = (t^2, t^5 + a_3 t^3 + a_1 t).$$

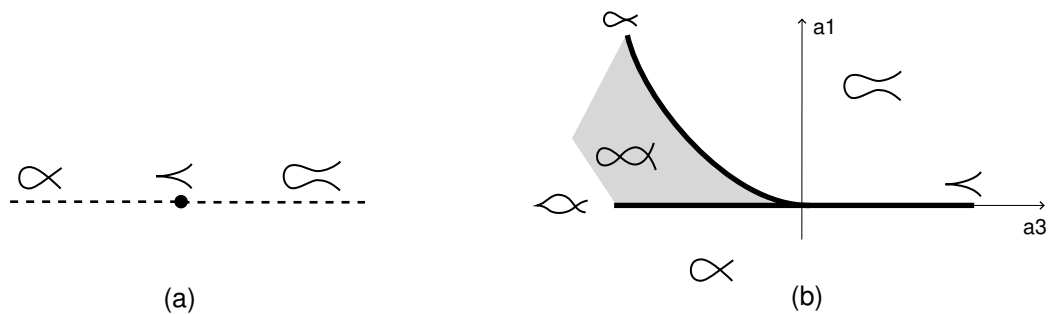


Figura 1.1: Diagrama de bifurcação de A_2 e A_4 , respectivamente.

Portanto, temos

$$B(A_2) = \{a_1 = 0\} \cup \{\emptyset\},$$

$$B(A_4) = \{a_1 = 0\} \cup \{(a_1, a_3) = (t^4, -2t^2)\}.$$

Na figura 1.1 (a), para $a_1 < 0$ o germe F apresenta um ponto duplo; assim, a topologia de F no caso real coincide com a complexa, o que não acontece quando $a_1 > 0$.

Na figura 1.1 (b), observamos que a topologia do germe G real coincide com a de sua complexificação, nos pontos (a_1, a_3) no interior da região hachurada. Portanto, para esses valores dos parâmetros temos uma morsificação para a singularidade g .

Nos capítulos 3 e 4 faremos um estudo geométrico de morsificações das singularidades de germes de curvas planas que ocorrem para a projeção de famílias genéricas a 1 e 2 parâmetros de curvas no \mathbb{R}^3 . Em outras palavras, consideramos um mergulho de tais famílias no \mathbb{R}^3 e descrevemos as direções da projeção ortogonal no plano onde ocorrem morsificações para essas singularidades.

Curvas Genéricas

Neste capítulo apresentamos alguns conceitos e resultados sobre a geometria genérica de curvas no \mathbb{R}^3 . Também identificamos geometricamente as singularidades genéricas da projeção ortogonal em planos de curvas no \mathbb{R}^3 . Como consequência, obtivemos uma descrição geométrica para a singularidade A_5 . Chamaremos de curva no \mathbb{R}^3 , toda aplicação $\gamma \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$. As referências para este capítulo podem ser encontradas em [8], [29] e [30].

2.1 Curvas genéricas

Dados um subespaço afim $\pi \in \mathbb{R}^3$ e um ponto $t \in \mathbb{R}$ tais que $\gamma(t) \in \pi$, dizemos que π tem contato de ordem n com γ em t , e representamos por $o(\pi, \gamma)|_t$, o primeiro natural n , tal que $\gamma^{(n)}(t)$ não esteja contido no plano π .

Assim, se $o(\pi, \gamma)|_t \geq 2$, dizemos que π é tangente a γ em t , e se $o(\pi, \gamma)|_t \geq 3$, dizemos π é osculador de γ em t , ou simplesmente que π oscula em t . Também diremos que o plano π é bitangente, tritangente, ... a γ se é tangente a γ em dois, três, ... pontos respectivamente, que tenham imagens distintas na curva. (Ver figura 2.1 (a) e (b)).

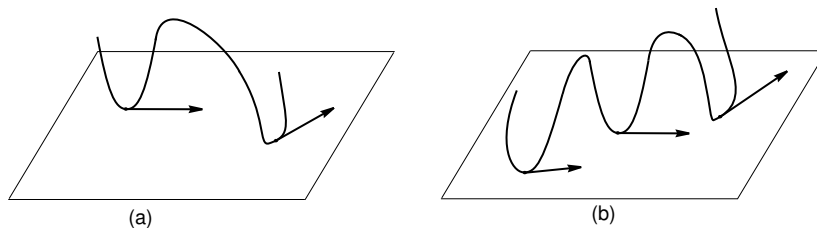


Figura 2.1: (a) Plano bitangente (b) Plano tritangente

Por abuso de linguagem, diremos que um par, um terno, ... de pontos $t \in \mathbb{R}$ é

bitangente, tritangente, ... respectivamente, se existe um plano bitangente, tritangente, ... respectivamente, da curva nos respectivos pontos. De forma análoga, podemos definir o conceito de ordem de contato de uma reta com uma curva. Assim, dizemos que uma reta é tangente a uma curva em um dado ponto, se a ordem de contato é maior ou igual a 2 no respectivo ponto.

Definição 2.1 Dada uma curva γ , denotamos a curvatura e a torção de γ como sendo as seguintes funções C^∞ :

$$K(s) = \|\gamma'(s) \times \gamma''(s)\|^2 \quad e \quad T(s) = \det(\gamma'(s), \gamma''(s), \gamma'''(s)),$$

respectivamente.

Como propriedades imediatas temos:

$$K(s) = 0 \Rightarrow T(s) = 0;$$

$$K(s) = 0 \Leftrightarrow \text{existe uma reta } r \text{ tal que } o(r, \alpha)|_s \geq 3;$$

$$T(s) = 0 \Leftrightarrow \text{existe um plano } \pi \text{ tal que } o(\pi, \alpha)|_s \geq 4.$$

Também é óbvio que a derivada da torção admite a seguinte expressão :

$$T'(s) = \det(\alpha'(s), \alpha''(s), \alpha^{(4)}(s)).$$

Notemos que as definições de curvatura e torção não coincidem com as definições habituais. Entretanto, se denotarmos por k e τ respectivamente, a curvatura e torção habituais, temos:

$$K(s) = K'(s) = \dots = K^{(n)}(s) = 0 \iff \kappa(s) = \kappa'(s) = \dots = \kappa^{(n)}(s) = 0,$$

$$T(s) = T'(s) = \dots = T^{(n)}(s) = 0 \iff \tau(s) = \tau'(s) = \dots = \tau^{(n)}(s) = 0.$$

Portanto, isso não será de grande importância, já que estaremos interessados nos tipos de zeros dessas funções. Além disso, elas têm algumas vantagens claras sobre as habituais: a primeira, é que esta aparece de forma natural em nossos cálculos, e a segunda é que a torção T está sempre definida, inclusive quando K é nula em algum ponto.

Definição 2.2 Dada uma curva γ , definimos a função de bitangência como a função C^∞

$$B : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(t_1, t_2) \mapsto \det(\gamma(t_2) - \gamma(t_1), \gamma'(t_1), \gamma'(t_2)).$$

Dados t_1 e $t_2 \in \mathbb{R}$ com $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$, então $B(t_1, t_2) = 0$ se, e somente se, existe um plano bitangente a γ em t_1 e t_2 .

As derivadas parciais desta função são:

$$\frac{\partial B}{\partial t_1}(t_1, t_2) = \det(\gamma(t_2) - \gamma(t_1), \gamma''(t_1), \gamma'(t_2)),$$

$$\frac{\partial B}{\partial t_2}(t_1, t_2) = \det(\gamma(t_2) - \gamma(t_1), \gamma'(t_1), \gamma''(t_2)).$$

Conclui-se que $B(t_1, t_2) = \frac{\partial B}{\partial t_1}(t_1, t_2) = 0$ se, e somente se, o plano bitangente a γ em t_1 e t_2 oscula em t_1 , ou a reta tangente em t_2 encontra a curva em t_1 . No primeiro caso, chamamos o plano de plano bitangente osculador e, no segundo caso, reta *cross tangent*. (ver figura 2.2 (c) e (d) respectivamente).

Definição 2.3 *Seja $t_0 \in \gamma$. Dizemos que γ possui um flattening em t_0 (resp. flattening degenerado de codimensão n , $n \geq 1$), se o contato de γ com seu plano osculador em t_0 tem ordem maior ou igual a 4 (resp. $n + 4$).*

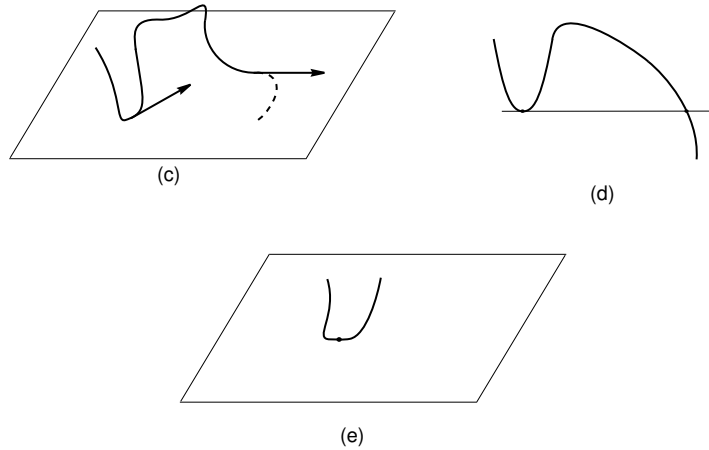


Figura 2.2: (c) Plano bitangente osculador (d) Cross tangent (e) Flattening

Vamos agora introduzir o conceito de curvas genéricas. O conjunto de tais curvas será utilizado em quase todo este trabalho.

Definição 2.4 *Uma curva γ é genérica se*

(a) 0 é valor regular das funções $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $B|_{\mathbb{R}^2 \setminus \Delta} : \mathbb{R}^2 \setminus \Delta \rightarrow \mathbb{R}$. Onde $\mathbb{R}^2 \setminus \Delta = \{(t_1, t_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : t_1 \neq t_2\}$, e

(b) as projeções

$$p_i : (B|_{\mathbb{R}^2 \setminus \Delta})^{(-1)}(0) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(t_1, t_2) \mapsto t_i$$

são funções de Morse, para $i = 1, 2$.

Veremos, agora, algumas conseqüências geométricas imediatas de uma curva γ ser genérica:

- γ deve ser uma imersão, isto é, $\gamma'(t) \neq 0, \forall t \in \mathbb{R}$, pois, se $\gamma'(t) = 0$ para algum $t \in \mathbb{R}$, teríamos $T(t) = T'(t) = 0$. Pelo mesmo motivo, a curvatura de γ deve ser sempre diferente de zero, e os zeros da torção devem ser não degenerados.
- γ deve ser injetora, pois, se $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ para $t_1 \neq t_2$, teríamos $B(t_1, t_2) = \frac{\partial B}{\partial t_1}(t_1, t_2) = \frac{\partial B}{\partial t_2}(t_1, t_2) = 0$.
- Se π é um plano bitangente a γ em t_1 e t_2 , osculando em t_1 , então π não oscula em t_2 . Além disso, $T(t_1) \neq 0$.
- Se r é uma reta tangente a γ em t_1 , interceptando γ em outro ponto, digamos t_2 (*reta cross tangente*), então r não pode ser tangente a γ em t_2 , e o plano gerado por $\{\gamma(t_2) - \gamma(t_1), \gamma'(t_2)\}$ não pode oscular em $t_i, i = 1, 2$.

Podemos, agora, enunciar o seguinte teorema:

Teorema 2.1 [30] *O conjunto das curvas genéricas é um subconjunto aberto e denso em $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$ com a topologia C^∞ de Whitney.*

2.2 Projeção ortogonal de curvas genéricas

Sejam $\gamma \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$ e \mathcal{C} sua imagem. Para cada vetor unitário \vec{v} no \mathbb{R}^3 , denotamos por $\pi_{\vec{v}}$ o plano que passa pela origem, perpendicular a \vec{v} , e seja $P_{\vec{v}} : \mathbb{R} \rightarrow \pi_{\vec{v}}$ a composição de γ com a projeção ortogonal no plano $\pi_{\vec{v}}$:

$$P_{\vec{v}}(t) = \gamma(t) - \langle \gamma(t), \vec{v} \rangle \vec{v},$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota o produto interno usual do \mathbb{R}^3 .

Seja TS^2 o fibrado tangente de S^2 . Identificando $\pi_{\vec{v}}$ com o plano tangente a S^2 em \vec{v} , obtemos a família de projeções ortogonais parametrizadas por S^2 :

$$\begin{aligned} P : S^2 \times \mathbb{R} &\rightarrow TS^2 \\ (\vec{v}, t) &\mapsto (\vec{v}, \gamma(t) - \langle \gamma(t), \vec{v} \rangle \vec{v}). \end{aligned}$$

O conjunto dos pontos críticos dessa família é o conjunto dos pontos (\vec{v}, t) tais que \vec{v} é paralelo à reta tangente a γ em t . Assim, o conjunto dos pontos críticos pode ser identificado com o fibrado tangente de γ .

Para \vec{v} fixo, a aplicação $P_{\vec{v}}$ é a projeção ortogonal na direção \vec{v} , ou seja, em um ponto $t_0 \in \mathbb{R}$ esta aplicação descreve o contato de \mathcal{C} com a reta que passa pelo ponto $\gamma(t_0)$ e é paralela ao vetor \vec{v} .

Podemos escolher um sistema de coordenadas (x, y, z) na imagem, de tal forma que, a reta tangente a \mathcal{C} em 0 seja o eixo x , e o vetor curvatura em 0 pertença ao plano xy . Nessas coordenadas podemos escrever \mathcal{C} da seguinte forma:

$$\gamma(t) = (t, f(t), g(t)) = (t, a_2t^2 + a_3t^3 + \dots, b_3t^3 + b_4t^4 + \dots),$$

onde “ $a_2t^2 + a_3t^3 + \dots$ ” significa “ $a_2t^2 + a_3t^3 +$ termos de ordem superior em t ” e o mesmo para “ $b_3t^3 + b_4t^4 + \dots$ ”.

Consideraremos as direcções de projecção que estejam na vizinhança do vetor tangente a γ , $\vec{v} = (1, 0, 0)$. Essas direcções podem ser parametrizadas por $(1, u, v)$. Logo, as coordenadas de um ponto da curva \mathcal{C} , no plano de projecção $x = 0$ ao longo da direcção $(1, u, v)$, são dadas por

$$(t, f(t), g(t)) + \lambda(1, u, v) = (0, y, z),$$

ou seja, $\lambda = -t$. Como estamos interessados no \mathcal{A} -tipo do germe $P_{\vec{v}}$, a família a 2-parâmetros de projecções ortogonais no plano $x = 0$ pode ser reescrita por

$$\begin{aligned} P : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \\ ((u, v), t) &\mapsto ((u, v), f(t) - ut, g(t) - vt). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Estas projecções não são ortogonais, mas as propriedades da família das projecções ortogonais são preservadas. Os parâmetros u e v fornecem as direcções de projecção e são chamados na literatura de *parâmetros de controle*, e o plano definido por eles, de *plano de controle*. O conjunto dos pontos u e v para os quais $P_{(u,v)}$ tem uma instabilidade é chamado de *Conjunto Bifurcação de P* .

Como comentamos no capítulo 1, para estudarmos as famílias de projecções em planos de uma curva γ no \mathbb{R}^3 , é necessária, de antemão, uma classificação das singularidades de multigerms $(\mathbb{R}, S) \rightarrow \mathbb{R}^2$. Do Teorema 1.6 segue-se que, para uma curva genérica no \mathbb{R}^3 , a família de projecções $P_{(u,v)}(t)$ apresenta somente singularidades de codimensão menor ou igual a 2. Em decorrência disso, temos:

Corolário 2.1 *Para um mergulho de uma curva genérica no \mathbb{R}^3 , temos:*

- *As singularidades locais que podem ocorrer para a família de projecções ortogonais são dadas na tabela 2.1.*

Tipo	Germe	Desdobramento Versal	\mathcal{A}_e -cod
<i>Não singular</i>	$(t, 0)$	$(t, 0)$	0
A_2	(t^2, t^3)	$(t^2, t^3 + at)$	1
A_4	(t^2, t^5)	$(t^2, t^5 + at^3 + bt)$	2

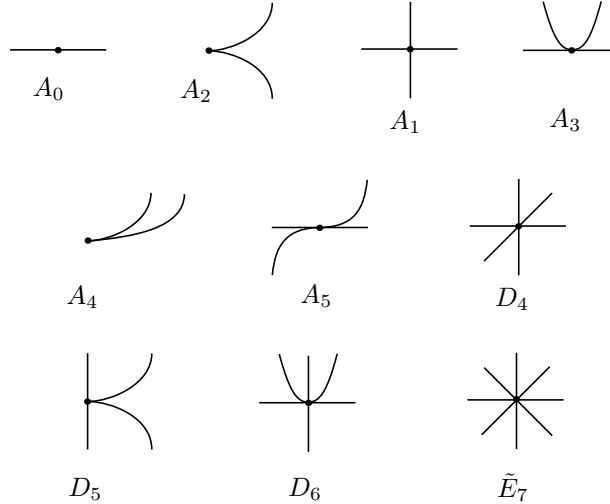
Tabela 2.1: Germes de projecções em planos de \mathcal{A}_e -cod ≤ 2 .

- *As singularidades multilocais que podem ocorrer para a família de projecções ortogonais são dadas na tabela 2.2.*

Tipo	Multigerme	Desdobramento Versal	\mathcal{A}_e -cod
A_1	$(s, 0); (0, t)$	$(s, 0); (0, t)$	0
A_3	$(s, 0); (t, t^2)$	$(s, a); (t, t^2)$	1
A_5	$(s, 0); (t, t^3)$	$(s, a); (t, t^3 + bt)$	2
D_5	$(s, 0); (t^3, t^2)$	$(s, a); (t^3 + bt, t^2)$	2
D_4	$(s, 0); (0, t); (u, u)$	$(s, 0); (0, t); (u, u + a)$	1
D_6	$(s, 0); (0, t); (u, u^2)$	$(s, as + b); (0, t); (u, u^2)$	2
\tilde{E}_7	$(t, 0); (0, s); (u, u); (v, \lambda v)$	$(t, 0); (0, s); (u + a, u); (v + b, \lambda v)$	3

Tabela 2.2: Multigermes de projeções em planos \mathcal{A}_e -cod ≤ 2 .

O escalar λ é um módulo para a forma normal da singularidade \tilde{E}_7 , representando a *cross-ratio* de 4 retas no plano passando pela origem. O estrato constituído da união de todas as formas normais tem codimensão 2, assim não pode ser evitado.

Figura 2.3: Multigermes de projeções em planos de codimensão ≤ 2

Nos capítulos 3 e 4, ao estudarmos famílias genéricas a 1 e 2-parâmetros, veremos que singularidades locais mais degeneradas que A_2 e A_4 podem ocorrer para a família de projeções ortogonais. A seguinte proposição mostra as condições sobre os coeficientes de $\gamma(t) = (t, a_2t^2 + \dots, b_3t^3 + \dots)$, para que a projeção $P_{(0,0)}$ tenha tais singularidades.

Proposição 2.1 *A projeção ortogonal $P_{(0,0)}$ tem as seguintes singularidades:*

$$A_2 \Leftrightarrow a_2b_3 \neq 0;$$

$$A_4 \Leftrightarrow a_2 \neq 0, b_3 = 0 \text{ e } a_2b_5 - 2a_3b_4 \neq 0;$$

$$A_6 \Leftrightarrow a_2 \neq 0, b_3 = 0, a_2b_5 - 2a_3b_4 = 0 \text{ e}$$

$$a_2^2(a_2b_7 - 3b_6a_3) + b_4(3a_3^3 - 2a_2^2a_5 + 4a_2a_3a_4) \neq 0;$$

$$E_6 \Leftrightarrow a_2 = 0, b_3a_4 - b_4a_3 \neq 0;$$

$$E_8 \Leftrightarrow a_2 = 0, b_3a_4 - b_4a_3 = 0 \text{ e } b_3a_5 - b_5a_3 \neq 0.$$

Demonstração: Para a singularidade A_2 , consideramos o 3-jato de $P_{(0,0)}$, dado por $j^3 P_{(0,0)} = (a_2 t^2 + a_3 t^3, b_3 t^3)$, neste caso é fácil ver que temos uma singularidade A_2 se, e somente se, $a_2 b_3 \neq 0$.

Para A_4 , consideremos o 5-jato de $P_{(0,0)}$, $j^5 P_{(0,0)} = (a_2 t^2 + \dots + a_5 t^5, b_4 t^4 + b_5 t^5)$, ou seja, com $a_2 \neq 0$ e $b_3 = 0$, pois, caso contrário temos uma singularidade A_2 . Com mudanças de coordenadas na fonte e na meta, chegamos que $j^5 P_{(0,0)}$ é \mathcal{A} -equivalente a $(t^2, (a_2 b_5 - 2a_3 b_4) t^5)$. A demonstração para A_6 segue de forma semelhante.

Para E_6 , consideramos o 4-jato de $P_{(0,0)}$ com $a_2 = 0$, pois, caso contrário, temos uma singularidade do tipo A_{2k} , assim, $j^4 P_{(0,0)} = (a_3 t^3 + a_4 t^4, b_3 t^3 + b_4 t^4)$. Portanto, temos uma singularidade E_6 se, e somente se, $b_3 a_4 - b_4 a_3 \neq 0$. De forma semelhante, obtemos a singularidade E_8 .

□

Considerando $\gamma(t) = (t, t^2, t^3)$, a forma normal de uma curva genérica no \mathbb{R}^3 . A proposição anterior garante que a projeção ortogonal $P_{(0,0)}$ de γ tem uma singularidade A_2 . Cabe aqui a pergunta, existem direções de projeção tais que $P_{(u,v)}$ é uma morsificação para essa singularidade?

Para responder essa pergunta, observamos que pela fórmula 1.4, uma deformação real da singularidade A_2 tem no máximo um ponto duplo, ou seja, a projeção $P_{(u,v)}(t) = (t^2 - ut, t^3 - vt)$ é uma morsificação da singularidade A_2 quando tiver um ponto duplo. Isto é equivalente ao sistema (nas variáveis t e s)

$$\frac{P_{(u,v)}(t) - P_{(u,v)}(s)}{t - s} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} s + t - u = 0 \\ s^2 + ts + t^2 - v = 0. \end{cases}$$

possuir duas soluções reais e distintas, que por sua vez equivale a $v > \frac{3u^2}{4}$. Um estudo análogo será feito nos capítulos 3 e 4 para as demais singularidades da Proposição 2.1.

O conjunto bifurcação para a família de projeções em planos é constituído de 3 tipos de curvas (singularidades de codimensão 1), que denominaremos por:

- **Curva cuspidal**, quando a curva possui uma singularidade A_2 ;
- **Curva tacnodal**, quando dois ramos da curva se tornam tangentes, singularidade A_3 , e
- **Curva de pontos triplos**, quando dois ramos da curva se fundem com um terceiro, singularidade D_4 .

Conforme [8], em pontos isolados das três curvas, podemos esperar as singularidades de codimensão 2. Mais especificamente, nos pontos de inflexão da curva cuspidal, ocorrem os pontos onde o tipo de cúspide é mais degenerado; a saber, singularidade A_4 . Em

pontos de inflexão da curva tacnodal, esperamos pontos nos quais os dois ramos da curva assumem um contato de ordem 3, singularidade A_5 . E, por último, na curva de pontos triplos, temos três situações:

- Os 3 ramos da curva se fundem com um quarto ramo: singularidade \tilde{E}_7 .
- Dois dos 3 ramos da curva degeneram em uma cúspide: singularidade D_5 .
- Dois dos 3 ramos da curva se tornam tangentes: singularidade D_6 .

Na figura abaixo, apresentamos os diagramas de bifurcação das singularidades de co-dimensão 2 para a projeção ortogonal de uma curva genérica no \mathbb{R}^3 . As linhas contínuas correspondem ao estrato A_2 ; as linhas pontilhadas, aos estratos A_3 ; e as linhas duplas, ao estrato D_4 .

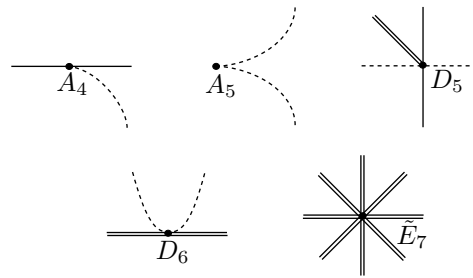


Figura 2.4: Conjunto bifurcação para projeções ortogonais de curvas genéricas no \mathbb{R}^3

2.3 Geometria das singularidades de projeções

Uma questão interessante é identificar geometricamente as singularidades descritas nas tabelas 2.1 e 2.2, ou seja, dada uma curva genérica γ no \mathbb{R}^3 , sob quais condições geométricas e quais as direções de projeção, obtemos que sua projeção ortogonal α apresenta uma das singularidades citadas acima.

Proposição 2.2

(i) Seja $P_{\vec{v}}$ uma projeção ortogonal com $|\vec{v}| = 1$. Seja também, $X, Y \in \mathbb{R}^3$. Então,

$$\det(\vec{v}, X, Y) = \det(P_{\vec{v}}(X), P_{\vec{v}}(Y)).$$

(ii) Se a projeção não é ortogonal, somente linear, então temos que

$$\det(\vec{v}, X, Y) = 0 \Leftrightarrow \det(P_{\vec{v}}(X), P_{\vec{v}}(Y)) = 0.$$

Demonstração: (i) Consideramos $\{\vec{v}, e_1, e_2\}$ uma base ortonormal do \mathbb{R}^3 , de maneira que

$$P_{\vec{v}}(X) = \langle X, e_1 \rangle e_1 + \langle X, e_2 \rangle e_2 = X_1 e_1 + X_2 e_2.$$

Então,

$$\det(P_{\vec{v}}(X), P_{\vec{v}}(Y)) = \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & * & * \\ 0 & X_1 & Y_1 \\ 0 & X_2 & Y_2 \end{vmatrix} = \det(\vec{v}, X, Y).$$

(ii) Suponhamos que $\det(\vec{v}, X, Y) = 0$, então, existem λ, μ e ν não todos nulos tais que $\lambda\vec{v} + \mu X + \nu Y = 0$. Como $\vec{v} \neq 0$, então, μ e ν não são ambos nulos, e além disso, $\mu P_{\vec{v}}(X) + \nu P_{\vec{v}}(Y) = 0$. Portanto, $\det(P_{\vec{v}}(X), P_{\vec{v}}(Y)) = 0$.

Reciprocamente, se $\det(P_{\vec{v}}(X), P_{\vec{v}}(Y)) = 0$, então, existem μ e ν ambos não nulos tais que $\mu P_{\vec{v}}(X) + \nu P_{\vec{v}}(Y) = 0$. Como $P_{\vec{v}}$ é linear, segue-se que $P_{\vec{v}}(\mu X + \nu Y) = 0$, o que implica que $\mu X + \nu Y \in \text{Ker } P_{\vec{v}} = \langle \vec{v} \rangle$ e, assim, existe λ tal que $\mu X + \nu Y = \lambda\vec{v}$. Portanto, $\det(\vec{v}, X, Y) = 0$.

□

Denotamos por α a projeção ortogonal da curva γ na direção \vec{v} , ou seja,

$$P_{\vec{v}}(\gamma) = \alpha.$$

Suponhamos, primeiramente, que α tenha uma singularidade A_2 em t_0 , ou seja, $\alpha'(t_0) = 0$ e o conjunto $\{\alpha''(t_0), \alpha'''(t_0)\}$ é L.I. Portanto,

$$\alpha'(t_0) = 0 \Leftrightarrow P_{\vec{v}}(\gamma'(t_0)) = 0 \Leftrightarrow \gamma'(t_0) \in \text{Ker } P_{\vec{v}} = \langle \vec{v} \rangle.$$

Por outro lado, pela proposição 2.2, $\{\alpha''(t_0), \alpha'''(t_0)\}$ é L.I. se, e somente se, $\{\vec{v}, \gamma''(t_0), \gamma'''(t_0)\}$ é L.I. Isto, juntamente com $\gamma'(t_0) \in \vec{v}$, equivale a dizer que o conjunto $\{\gamma'(t_0), \gamma''(t_0), \gamma'''(t_0)\}$ é linearmente independente, ou seja, a torção de γ em t_0 é diferente de zero.

Portanto, obtemos uma singularidade A_2 se, e somente se, a direção de projeção \vec{v} é paralela à reta tangente à curva γ em um ponto de torção não nula; caso contrário, ou seja, se a torção é nula, genericamente obtemos uma singularidade A_4 . Suponhamos, agora, que α tenha uma singularidade A_3 , ou seja, os dois ramos da curva α se tornam tangentes. Nesse caso, é fácil ver que tal condição se traduz nas equações:

$$\alpha(t_0) = \alpha(s_0) \quad \text{e} \quad \alpha'(t_0) // \alpha'(s_0), \quad \text{para } t_0 \neq s_0.$$

A primeira igualdade equivale a dizer que a direção de projeção \vec{v} é paralela ao vetor $\gamma(t_0) - \gamma(s_0)$, pois,

$$\begin{aligned} \alpha(t_0) - \alpha(s_0) = 0 &\Leftrightarrow \\ P_{\vec{v}}(\gamma(t_0)) - P_{\vec{v}}(\gamma(s_0)) = 0 &\Leftrightarrow \\ P_{\vec{v}}(\gamma(t_0) - \gamma(s_0)) = 0 &\Leftrightarrow \\ \gamma(t_0) - \gamma(s_0) \text{ é paralelo ao vetor } \vec{v}. & \end{aligned}$$

Por outro lado, como o vetor $\alpha'(t_0)$ é paralelo ao vetor $\alpha'(s_0)$, segue-se da proposição anterior que o conjunto $\{\vec{v}, \gamma'(t_0), \gamma'(s_0)\}$ é L.D. e, portanto, o conjunto $\{\gamma(t_0) - \gamma(s_0), \gamma'(t_0), \gamma'(s_0)\}$ é L.D. Assim, a função bitangente é nula nos pontos t_0 e s_0 . Logo, existe um plano bitangente a γ em t_0 e s_0 . Portanto, obtemos uma singularidade A_3 se, e somente se, a direção de projeção está contida no plano bitangente à curva γ e é dada pela secante unindo-se os dois pontos de tangência, direção essa denotada por **T-secante**.

Para a descrição geométrica da singularidade A_5 , observamos que a afirmação: - *obtem-se uma singularidade A_5 quando a direção de projeção está contida no plano bitangente à curva, (direção dada pela secante unindo os dois pontos de tangência), na qual o plano oscula em um dos pontos de contato*, contida no artigo [8], está incorreta. A fim de corrigir tal afirmação, passamos a descrever alguns conceitos necessários para o entendimento do resultado.

Seja $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ a equação implícita de uma curva plana e sejam também α e β curvas planas regulares.

Definição 2.5 Dizemos que α e $g^{-1}(0)$ tem k -ponto de contato em $t = t_0$ quando a função

$$f(t) = g(\alpha(t)) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

satisfaz $f(t_0) = f'(t_0) = \dots = f^{(k-1)}(t_0) = 0$, e $f^{(k)}(t_0) \neq 0$. Também dizemos que a ordem de contato é k .

Observação 2.1 Sendo g a equação implícita da curva plana α , segue-se que $f_\alpha = g(\alpha) \equiv 0$. Logo, α e β tem ordem de contato k em $t = t_0$ quando $f_\beta(t_0) = f'_\beta(t_0) = \dots = f_\beta^{(k-1)}(t_0) = 0$, e $f_\beta^{(k)}(t_0) \neq 0$, onde $f_\beta = g(\beta)$. Quando $k = 3$, dizemos que α e β têm um contato inflexional.

Na seção anterior, vimos que uma singularidade A_5 ocorre quando os dois ramos da curva assumem um contato inflexional. Vamos definir geometricamente o que significa esse contato.

Teorema 2.2 Sejam α e β curvas parametrizadas pelo comprimento de arco. Então, α e β têm contato inflexional em t_0 se, e somente se,

$$\begin{aligned} \alpha(t_0) &= \beta(t_0); \\ \mathbf{t}_\alpha(t_0) &= \delta \mathbf{t}_\beta(t_0); \\ \kappa_\alpha(t_0) &= \delta \kappa_\beta(t_0); \\ \kappa'_\alpha(t_0) &\neq \delta \kappa'_\beta(t_0), \end{aligned}$$

onde $\mathbf{t}_\alpha(t_0)$ (resp. $\kappa_\alpha(t_0)$), é a derivada de α em t_0 (resp. é a curvatura de α em t_0), e $\delta = \pm 1$.

Demonstração: Seja g a equação implícita da curva α . Portanto, temos que $f_\alpha(t) = g(\alpha(t)) \equiv 0$. As derivadas de $f_\alpha(t)$ são dadas por

$$\begin{aligned} f'_\alpha &= dg(\alpha') = \nabla g \cdot \alpha', \\ f''_\alpha &= d^2g(\alpha', \alpha') + \nabla g \cdot \alpha'', \\ f'''_\alpha &= d^3g(\alpha', \alpha', \alpha') + 3d^2g(\alpha', \alpha'') + \nabla g \cdot \alpha''', \\ &\vdots \end{aligned}$$

Podemos interpretar geometricamente os zeros das derivadas de f_α como segue

$$f'_\alpha = 0 \Leftrightarrow \nabla g \cdot \alpha' = \nabla g \cdot \mathbf{t}_\alpha = 0 \Leftrightarrow \boxed{\nabla g = \lambda_\alpha \cdot \mathbf{n}_\alpha}, \quad \lambda_\alpha \neq 0,$$

onde \mathbf{n}_α é a normal da curva α .

$$\begin{aligned} f''_\alpha = 0 &\Leftrightarrow d^2g(\alpha', \alpha') + \nabla g \cdot \alpha'' = d^2g(\mathbf{t}_\alpha, \mathbf{t}_\alpha) + \lambda_\alpha \mathbf{n}_\alpha \cdot \kappa_\alpha \mathbf{n}_\alpha = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow d^2g(\mathbf{t}_\alpha, \mathbf{t}_\alpha) + \lambda_\alpha \kappa_\alpha = 0 \Leftrightarrow \boxed{d^2g(\mathbf{t}_\alpha, \mathbf{t}_\alpha) = -\lambda_\alpha \kappa_\alpha}, \\ f'''_\alpha = 0 &\Leftrightarrow d^3g(\mathbf{t}_\alpha, \mathbf{t}_\alpha, \mathbf{t}_\alpha) + 3d^2g(\mathbf{t}_\alpha, \kappa_\alpha \mathbf{n}_\alpha) + \lambda_\alpha \mathbf{n}_\alpha \cdot (\kappa'_\alpha \mathbf{n}_\alpha + \kappa_\alpha \mathbf{n}'_\alpha) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow d^3g(\mathbf{t}_\alpha, \mathbf{t}_\alpha, \mathbf{t}_\alpha) + 3d^2g(\mathbf{t}_\alpha, \kappa_\alpha \mathbf{n}_\alpha) + \lambda_\alpha \kappa'_\alpha = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \boxed{d^3g(\mathbf{t}_\alpha, \mathbf{t}_\alpha, \mathbf{t}_\alpha) + 3d^2g(\mathbf{t}_\alpha, \kappa_\alpha \mathbf{n}_\alpha) = -\lambda_\alpha \kappa'_\alpha}. \end{aligned}$$

As curvas α e β têm contato de ordem 3 em $t = t_0$ se, e somente se, $f_\alpha^{(i)}(t_0) = f_\beta^{(i)}(t_0) = 0$, $i = 0, 1, 2$ e $f_\alpha^{(3)}(t_0) \neq f_\beta^{(3)}(t_0)$. Agora, comparando as derivadas de f_α e f_β , temos que

$$\begin{aligned} f_\alpha(t_0) = f_\beta(t_0) &\Leftrightarrow \alpha(t_0) = \beta(t_0), \\ f'_\alpha(t_0) = f'_\beta(t_0) &\Leftrightarrow \lambda_\alpha \mathbf{n}_\alpha(t_0) = \lambda_\beta \mathbf{n}_\beta(t_0). \end{aligned}$$

Como estamos considerando as curvas parametrizadas pelo comprimento de arco, segue-se que $\lambda_\alpha = \delta \lambda_\beta$. Obtemos, assim, $\mathbf{n}_\alpha = \delta \mathbf{n}_\beta$ e $\mathbf{t}_\alpha = \delta \mathbf{t}_\beta$. Pela segunda e terceira derivada, temos que

$$\begin{aligned} f''_\alpha(t_0) = f''_\beta(t_0) &\Leftrightarrow -\lambda_\alpha \kappa_\alpha(t_0) = -\lambda_\beta \kappa_\beta(t_0) \Leftrightarrow \kappa_\alpha(t_0) = \delta \kappa_\beta(t_0), \\ f'''_\alpha(t_0) \neq f'''_\beta(t_0) &\Leftrightarrow -\lambda_\alpha \kappa'_\alpha(t_0) \neq -\lambda_\beta \kappa'_\beta(t_0) \Leftrightarrow \kappa'_\alpha(t_0) \neq \delta \kappa'_\beta(t_0). \end{aligned}$$

Concluindo assim a demonstração do teorema. □

Corolário 2.2 *Sejam α e β curvas parametrizadas pelo comprimento de arco. Então, α e β têm contato inflexional em t_0 se, e somente se,*

$$\begin{cases} \alpha(t_0) = \beta(t_0), \\ \alpha'(t_0) = \delta \beta'(t_0), \\ \det(\alpha'(t_0), \alpha''(t_0)) = \delta \det(\beta'(t_0), \beta''(t_0)), \end{cases}$$

onde $\delta = \pm 1$.

O resultado do Teorema 2.2 também pode ser obtido quando as curvas não são necessariamente parametrizadas pelo comprimento de arco. Em particular, temos o seguinte corolário.

Corolário 2.3 *Sejam α e β curvas regulares. Então, α e β têm contato inflexional em t_0 se, e somente se,*

$$\begin{cases} \alpha(t_0) = \beta(t_0), \\ \alpha'(t_0) = \lambda\beta'(t_0), \\ \det(\alpha'(t_0), \alpha''(t_0)) = \lambda^3 \det(\beta'(t_0), \beta''(t_0)), \end{cases}$$

onde λ é um escalar não-nulo.

Podemos, agora, enunciar o principal resultado desta seção, no qual apresentamos a interpretação geométrica sobre a curva genérica γ , de forma obter a singularidade A_5 em uma projeção ortogonal. Considerando como antes, $P_{\vec{v}}(\gamma) = \alpha$, segue-se o seguinte teorema.

Teorema 2.3 *A projeção α tem um contato inflexional em t_0 se, e somente se, a direção de projeção é uma T-secante, com a condição adicional de que o vetor*

$$(|\gamma'(s_0)|^2 \text{sen}(\theta_2)^2 \gamma''(t_0) + |\gamma'(t_0)|^2 \text{sen}(\theta_1)^2 \gamma''(s_0))$$

pertença ao plano bitangente a $\gamma(t)$ em s_0 e t_0 . Onde θ_1 (resp. θ_2) é o ângulo formado pelos vetores $\gamma(t_0) - \gamma(s_0)$ e $\gamma'(t_0)$ (resp. $\gamma(t_0) - \gamma(s_0)$ e $\gamma'(s_0)$).

Demonstração: Pelo Corolário 2.3, a projeção α tem um contato inflexional se, e somente se,

$$\alpha(t_0) = \alpha(s_0), \quad (2.2)$$

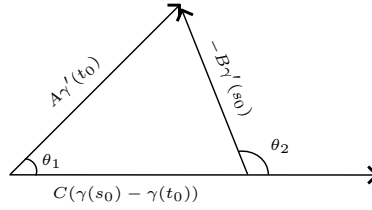
$$\alpha'(t_0) = \lambda\alpha'(s_0), \quad (2.3)$$

$$\det(\alpha'(t_0), \alpha''(t_0)) = \lambda^3 \det(\alpha'(s_0), \alpha''(s_0)). \quad (2.4)$$

As igualdades 2.2 e 2.3 são equivalentes a direção de projeção \vec{v} ser uma T-secante. Assim, o conjunto $\{\gamma(t_0) - \gamma(s_0), \gamma'(t_0), \gamma'(s_0)\}$ é linearmente dependente. Portanto, existem escalares A, B e C não todos nulos, tais que

$$C(\gamma(t_0) - \gamma(s_0)) + A\gamma'(t_0) + B\gamma'(s_0) = 0. \quad (2.5)$$

Como a direção de projeção \vec{v} é paralela ao vetor $\gamma(t_0) - \gamma(s_0)$, segue-se que $A\alpha'(t_0) + B\alpha'(s_0) = 0$. Logo, da igualdade 2.3 temos $(A\lambda + B)(\alpha'(s_0)) = 0$. Portanto, $\lambda = \frac{-B}{A}$. Observamos que A e B são diferentes de zero, pois, caso contrário, a genericidade da curva implicaria $A = B = C = 0$, contradizendo a equação 2.5. Por outro lado, como os vetores $\gamma(t_0) - \gamma(s_0), \gamma'(t_0)$ e $\gamma'(s_0)$ são linearmente dependentes, segue-se a figura abaixo



e, portanto,

$$\frac{\text{sen}(\theta_1)}{|-B\gamma'(s_0)|} = \frac{\text{sen}(\theta_2)}{|A\gamma'(t_0)|},$$

donde retiramos a seguinte igualdade

$$A^2 = \left(B \frac{|\gamma'(s_0)| \text{sen}(\theta_2)}{|\gamma'(t_0)| \text{sen}(\theta_1)} \right)^2.$$

Por outro lado, as igualdades 2.3 e 2.4 equivalem a $\det(\alpha'(s_0), \alpha''(t_0) - \lambda^2 \alpha''(s_0)) = 0$. Portanto, o vetor $\gamma''(t_0) - \lambda^2 \gamma''(s_0)$ pertence ao plano bitangente a $\gamma(t)$ em s_0 e t_0 . Finalmente, substituindo os valores de λ e A no vetor $\gamma''(t_0) - \lambda^2 \gamma''(s_0)$, obtemos que o vetor

$$(|\gamma'(s_0)|^2 \text{sen}(\theta_2)^2 \gamma''(t_0) + |\gamma'(t_0)|^2 \text{sen}(\theta_1)^2 \gamma''(s_0))$$

pertence ao plano bitangente a $\gamma(t)$ em t_0 e s_0 .

□

A descrição geométrica das demais singularidades segue-se de forma semelhante aos cálculos feitos no começo desta seção e também podem ser vistos por exemplo em [8] e [10]. Finalizamos esta seção, com as descrições geométricas das singularidades que ocorrem genericamente para a família de projeções ortogonais.

Teorema 2.4 *A projeção ortogonal em planos de uma curva genérica no \mathbb{R}^3 tem uma singularidade:*

$A_2 \Leftrightarrow$ a direção de projeção é paralela à reta tangente a γ .

$A_3 \Leftrightarrow$ a direção de projeção está contida no plano bitangente à curva e é dada pela secante unindo os dois pontos de tangência.

$D_4 \Leftrightarrow$ a direção de projeção \vec{v} é paralela a uma trissecante à curva γ .

$A_4 \Leftrightarrow$ a direção de projeção é paralela à reta tangente a γ em um ponto de torção nula.

$D_5 \Leftrightarrow$ projetamos ao longo de uma reta cross-tangent a γ .

$A_5 \Leftrightarrow$ projetamos ao longo de uma T -secante, com a condição adicional de que o vetor $(|\gamma'(s_0)|^2 \text{sen}(\theta_2)^2 \gamma''(t_0) + |\gamma'(t_0)|^2 \text{sen}(\theta_1)^2 \gamma''(s_0))$ pertença ao plano bitangente à curva γ em s_0 e t_0 .

$D_6 \Leftrightarrow$ projetamos ao longo de uma reta trissecante, contida no plano bitangente à curva γ .

$\tilde{E}_7 \Leftrightarrow$ projetamos ao longo de quadrissecantes.

Observação 2.2

(1) Considerando a classificação de germes $(\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ dada nas tabelas 2.1 e 2.2, não obtivemos uma singularidade que descreva um plano bitangente osculador de uma curva no \mathbb{R}^3 , ou seja, essa propriedade geométrica não é percebida nos estratos das singularidades de germes $(\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ com relação à \mathcal{A} -equivalência.

(2) Não é difícil ver que os germes $(\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ dados por

$$t \mapsto (t^2, t^5) \quad \text{e} \quad t \mapsto (t^2, t^4 + t^5)$$

são \mathcal{A} -equivalentes, embora as aparências dessas curvas no plano (x, y) sejam um pouco diferentes: a primeira delas cruza a reta tangente cuspidal $y = 0$, enquanto que a segunda não (ver figura 2.5). De fato, a palavra “Rhamphoid” vem do grego “Rhamphos”, significando bico de ave. Dessa forma, a figura 2.5 (b) se parece mais com um bico. Uma outra diferença entre essas aplicações pode ser observada da seguinte forma; embora a curvatura não esteja definida em uma cúspide, podemos considerar o limite da curvatura em um ponto quando este se aproxima de uma. No primeiro caso, a curvatura $\kappa(t)$ tende a 0 ao longo dos dois ramos quando t tende a 0. No segundo caso, a curvatura possui diferentes sinais perto da curvatura, um para cada ramo da cúspide.

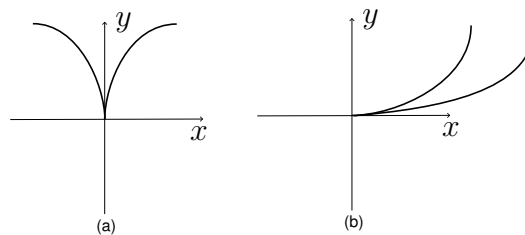


Figura 2.5: (t^5, t^2) e $(t^4 + t^5, t^2)$.

Estas observações nos motivaram a procurar uma nova classe de equivalência entre germes $(\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ de forma a refinar a \mathcal{A} -classe de equivalência e recuperar um pouco mais sobre a geometria da curva γ , por exemplo, diferenciar as aplicações dadas na figura acima, e captar propriedades geométricas, como o plano bitangente osculador. Nessa direção, foi desenvolvido um trabalho conjunto com Juan J. Nuño Ballesteros, que será descrito nos capítulos 5 e 6.

Famílias genéricas a 1-parâmetro de curvas no \mathbb{R}^3

Neste capítulo estudamos famílias genéricas a 1-parâmetro de curvas no \mathbb{R}^3 e mostramos que a projeção ortogonal em planos dessas famílias apresenta as singularidades A_4 e E_6 e que a família de projeções é um desdobramento versal para essas singularidades. Além disso, analisando as transições que ocorrem no conjunto bifurcação da projeção, obtivemos alguns resultados semelhantes aos de [31], onde os autores consideraram a superfície bitangente associada a uma curva no \mathbb{R}^3 e as singularidades de sua projeção na reta. Na última seção consideramos as projeções ortogonais de tais famílias e obtivemos as direções de projeção que apresentam morsificação para a singularidade E_6 . Descrevemos também a transição de uma morsificação para outra (ver apêndice).

3.1 Famílias genéricas a 1-parâmetro

Seja γ uma curva no \mathbb{R}^3 com um flattening degenerado de codimensão 1 em t_0 . De acordo com a definição 2.3, temos as seguintes igualdades:

$$\begin{aligned} T(t_0) &= \det(\gamma'(t_0), \gamma''(t_0), \gamma'''(t_0)) = 0, \\ T'(t_0) &= \det(\gamma'(t_0), \gamma''(t_0), \gamma^{(4)}(t_0)) = 0, \\ T''(t_0) &= \det(\gamma'(t_0), \gamma''(t_0), \gamma^{(5)}(t_0)) + \det(\gamma'(t_0), \gamma'''(t_0), \gamma^{(4)}(t_0)) \neq 0. \end{aligned}$$

Definição 3.1 *Um flattening degenerado de codimensão 1 em t_0 , é do tipo **A** quando $K(t_0) \neq 0$, e do tipo **B** quando $K(t_0) = 0$.*

Em um flattening do tipo A temos $|\gamma'(t_0) \times \gamma''(t_0)| \neq 0$, mas o espaço gerado por $\{\gamma'(t_0), \gamma''(t_0), \gamma'''(t_0), \gamma^{(4)}(t_0)\}$ tem dimensão 2. Assim, $\det(\gamma'(t_0), \gamma'''(t_0), \gamma^{(4)}(t_0)) = 0$.

Dessa forma,

$$T''(t_0) = \det(\gamma'(t_0), \gamma''(t_0), \gamma^{(5)}(t_0)).$$

Geometricamente, neste caso, a curva γ tem contato 2 com a reta tangente e contato 5 com o plano osculador.

Em um flattening do tipo B temos $|\gamma'(t_0) \times \gamma''(t_0)| = 0$. Assim, $\gamma'(t_0)$ e $\gamma''(t_0)$ são colineares, implicando $\det(\gamma'(t_0), \gamma''(t_0), \gamma^{(5)}(t_0)) = 0$. Portanto,

$$T''(t_0) = \det(\gamma'(t_0), \gamma'''(t_0), \gamma^{(4)}(t_0)).$$

Geometricamente, neste caso, a reta tangente tem contato 3 com γ em t_0 e não existe plano osculador. Entretanto, existe um plano (gerado por $\gamma'(t_0)$ e $\gamma'''(t_0)$) que tem contato 4 com γ em t_0 .

Observação 3.1 Considerando $\gamma(t) = (t, a_2t^2 + a_3t^3 + \dots, b_3t^3 + b_4t^4 + \dots)$, temos

$$T(0) = 0 \Leftrightarrow a_2b_3 = 0,$$

$$T'(0) = 0 \Leftrightarrow a_2b_4 = 0.$$

Em um flattening do tipo A, temos $b_3 = b_4 = 0$ e $T''(0) \neq 0 \Leftrightarrow a_2b_5 \neq 0$. Assim, podemos escrever $f(t) = a_2t^2 + \dots$ e $g(t) = b_5t^5 + \dots$ com $a_2b_5 \neq 0$. Em um flattening do tipo B temos $a_2 = 0$ e $T''(0) \neq 0 \Leftrightarrow a_3b_4 - a_4b_3 \neq 0$. Logo, escrevemos $f(t) = a_3t^3 + a_4t^4 + \dots$ e $g(t) = b_3t^3 + b_4t^4 + \dots$ com $a_3b_4 - a_4b_3 \neq 0$.

Consideremos as famílias a 1-parâmetro de curvas no \mathbb{R}^3 ;

$$\begin{aligned} \gamma : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (t, a) &\mapsto \gamma_a(t). \end{aligned}$$

Seguindo as notações do capítulo 2, as funções curvatura e torção associadas a esta família são:

$$\begin{aligned} K : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} & T : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (t, a) &\mapsto K_a(t) & (t, a) &\mapsto T_a(t). \end{aligned}$$

Para uma família genérica γ_a podemos esperar que a maioria das curvas sejam genéricas. Entretanto, não podemos evitar que, para certos valores do parâmetro a , a curva deixe de ser genérica. Por exemplo, a curva pode possuir um ponto de curvatura nula ou um zero de torção degenerado. Para estudar tais propriedades dessa família iremos analisar as transições do conjunto bifurcação da projeção ortogonal no plano de controle.

Teorema 3.1 [31] *O subconjunto de famílias $\gamma : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que a função $T : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tenha 0 como valor regular é residual em $C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$ com a topologia C^∞ de Whitney.*

Teorema 3.2 [31] *Existe um conjunto residual entre as famílias de curvas que satisfaz as condições do Teorema 3.1 e para as quais a projeção*

$$\begin{aligned} T^{-1}(0) &\rightarrow \mathbb{R} \\ (t, a) &\mapsto a, \end{aligned}$$

é localmente estável.

A estabilidade local da função do Teorema 3.2 é equivalente a $T_0(0) = \frac{\partial T_0}{\partial t}(0) = 0$ e $\frac{\partial^2 T_0}{\partial t^2}(0) \neq 0$. Por simplicidade de notação, denotaremos $T_0(0)$, $\frac{\partial T_0}{\partial t}(0)$ e $\frac{\partial^2 T_0}{\partial t^2}(0)$ por $T(0)$, $T'(0)$ e $T''(0)$ respectivamente.

Definição 3.2 *As famílias de curvas caracterizadas pelo Teorema 3.2 serão chamadas de famílias genéricas a 1-parâmetro.*

Para um conjunto residual em $C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$, γ_a é genérica para todos os valores de a , exceto em valores isolados, onde γ_a apresenta flattenings degenerados de codimensão 1. Sem perda de generalidade, podemos supor que em $a = 0$ a curva γ_0 apresenta um flattening degenerado de codimensão 1, ou seja, $T(0) = T'(0) = 0$ e $T''(0) \neq 0$. Pelo Teorema 3.2, a condição de genericidade da família é dada por

$$\frac{\partial T}{\partial a}(0, 0) \neq 0.$$

3.2 Projeção de famílias genéricas a 1-parâmetro

Pelo Teorema 2.1, em uma projeção genérica (projeção de uma curva genérica) obtemos apenas as singularidades de codimensão menor ou igual a 2. Com famílias genéricas a 1-parâmetro, podemos estudar algumas singularidades de codimensão igual a 3, pois agora a família de projeções ortogonais pode ser vista como um desdobramento a 3-parâmetros, onde dois deles são as direções de projeção, e o outro o parâmetro da família de curvas.

Para tal estudo consideramos a família genérica a 1-parâmetro

$$\gamma_a(t) = (t, f(t) + ap(a, t), g(t) + aq(a, t)),$$

onde $\gamma_0(t) = (t, f(t), g(t)) = (t, a_2 t^2 + \dots, b_3 t^3 + \dots)$ apresenta um flattening degenerado de codimensão 1 e $p, q \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Assim, fixado a , consideramos a projeção no plano normal a γ_a , que é onde ocorrem as singularidades. Portanto, a família de projeções ortogonais é dada por

$$\begin{aligned} P : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (t, a, (u, v)) &\mapsto (f(t) + ap(a, t) - ut, g(t) + aq(a, t) - vt). \end{aligned}$$

Antes de continuarmos, lembremos que pela Proposição 2.1, $a_2 \neq 0$ e $a_2b_5 - 2a_3b_4 = 0$ são condições necessárias para a obtenção de uma singularidade A_6 . Portanto, da Observação 3.1, concluímos que mesmo com famílias genéricas a 1-parâmetro não obtemos tal singularidade.

A seguinte proposição mostra que se uma família genérica a 1-parâmetro é do tipo A (resp. B) então $P_{(0,0,0)}(t)$ tem uma singularidade A_4 (resp. E_6).

Proposição 3.1 *Se γ_a é uma família genérica a 1-parâmetro com um flattening degenerado*

- (i) *do tipo A $\Rightarrow P_{(0,0,0)}(t)$ tem uma singularidade A_4 ;*
- (ii) *do tipo B $\Rightarrow P_{(0,0,0)}(t)$ tem uma singularidade E_6 .*

Demonstração: (i) Da Observação 3.1, $P_{(0,0,0)}(t) = (a_2t^2 + \dots, b_5t^5 + \dots)$ com $a_2b_5 \neq 0$. O resultado agora segue da Proposição 2.1.

(ii) Segue de modo análogo ao item (i). □

A proposição a seguir mostra que se uma família genérica a 1-parâmetro é do tipo A (resp. B) então $P_{(a,u,v)}(t)$ é um desdobramento versal em uma singularidade A_4 (resp. E_6).

Proposição 3.2 *Se uma família genérica a 1-parâmetro apresentando um flattening degenerado*

- (i) *do tipo A $\Rightarrow P_{(a,u,v)}(t)$ é um desdobramento versal em uma singularidade A_4 ;*
- (ii) *do tipo B $\Rightarrow P_{(a,u,v)}(t)$ é um desdobramento versal em uma singularidade E_6 .*

Demonstração: Consideremos a família genérica a 1-parâmetro de curvas $\gamma_a(t)$ como antes. Portanto,

$$T(t) = \det(\gamma'_a(t), \gamma''_a(t), \gamma'''_a(t)) = \begin{vmatrix} 1 & f'(t) + a \frac{\partial p}{\partial t}(a, t) & g'(t) + a \frac{\partial q}{\partial t}(a, t) \\ 0 & f''(t) + a \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}(a, t) & g''(t) + a \frac{\partial^2 q}{\partial t^2}(a, t) \\ 0 & f'''(t) + a \frac{\partial^3 p}{\partial t^3}(a, t) & g'''(t) + a \frac{\partial^3 q}{\partial t^3}(a, t) \end{vmatrix}.$$

Calculando o determinante temos

$$T(t) = \left(f''(t) + a \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}(a, t) \right) \left(g'''(t) + a \frac{\partial^3 q}{\partial t^3}(a, t) \right) - \left(f'''(t) + a \frac{\partial^3 p}{\partial t^3}(a, t) \right) \left(g''(t) + a \frac{\partial^2 q}{\partial t^2}(a, t) \right).$$

Portanto, a condição de genericidade é igual a

$$\frac{\partial T}{\partial a}(0,0) = f''(0)\frac{\partial^3 q}{\partial t^3}(0,0) + g'''(0)\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}(a,t) - f'''(0)\frac{\partial^2 q}{\partial t^2}(0,0) - g''(0)\frac{\partial^3 p}{\partial t^3}(a,t) \neq 0.$$

(i) No primeiro caso, como γ_0 apresenta um flattening degenerado do tipo A, podemos escrever $f(t) = a_2t^2 + a_3t^3 + \dots$ e $g(t) = b_5t^5 + \dots$, com $a_2b_5 \neq 0$. Dessa forma, a projecção é dada por

$$P_{(a,u,v)}(t) = (a_2t^2 + a_3t^3 + \dots + ap(a,t) - ut, b_5t^5 + \dots + aq(a,t) - vt).$$

Assim, a condição de genericidade se torna igual a $2a_2\frac{\partial^3 q}{\partial t^3}(0,0) - 6a_3\frac{\partial^2 q}{\partial t^2}(0,0) \neq 0$. Pelo critério de versalidade, $P_{(a,u,v)}$ é versal quando

$$j^5\left(T\mathcal{A}_e(P_{(0,0,0)}) + \mathbb{R}\{\dot{P}_a, \dot{P}_u, \dot{P}_v\}\right) = J^5(1,2),$$

onde $\dot{P}_a = \frac{\partial P_{(0,0,0)}}{\partial a}(t)$. O lado esquerdo da igualdade é dado por

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{c} 2a_2t + 3a_3t^2 + \dots + 6a_6t^5 \\ 5b_5t^4 + 6b_6t^5 \end{array} \right) \xi + \eta(a_2t^2 + \dots + a_5t^5, b_5t^5) + \\ + \mathbb{R}\{(p(0,t), q(0,t)), (t,0), (0,t)\}. \end{aligned}$$

onde $\xi \in C^\infty(\mathbb{R})$ e $\eta(x,y) = (\eta_1(x,y), \eta_2(x,y))$, com $\eta_i \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$.

É fácil ver que os geradores que faltam para completar $J^5(1,2)$ são $(0,t^2)$ e $(0,t^3)$. Podemos obter $(0, a_2t^2 + a_3t^3)$ fazendo $\eta_1(x,y) = x$. Por outro lado, tomando $p(0,t) \equiv 0$ e $q(0,t) = \tilde{a}_1t + \tilde{a}_2t^2 + \dots$, temos o termo $(0, \tilde{a}_2t^2 + \tilde{a}_3t^3)$. Portanto, os termos restantes são obtidos quando $a_2\tilde{a}_3 - \tilde{a}_2a_3 \neq 0$. Mas, isso coincide com a condição de genericidade dada acima, desde que $\frac{\partial^2 q}{\partial t^2}(0,0) = 2\tilde{a}_2$ e $\frac{\partial^3 q}{\partial t^3}(0,0) = 6\tilde{a}_3$. Portanto, $P_{(a,u,v)}$ é versal.

(ii) A projecção, neste caso, é dada por

$$P_{(a,u,v)}(t) = (a_3t^3 + \dots + ap(a,t) - ut, b_3t^3 + \dots + aq(a,t) - vt).$$

com $a_3b_4 - a_4b_3 \neq 0$. Assim, a condição de genericidade é

$$\frac{\partial T}{\partial a}(0,0) = 6b_3\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}(0,0) - 6a_3\frac{\partial^2 q}{\partial t^2}(0,0) \neq 0.$$

Pelo critério de versalidade, concluimos que $P_{(a,u,v)}$ é versal se, e somente se, a condição acima é satisfeita. □

Vamos agora analisar a geometria da família genérica a 1-parâmetro γ_a por meio de sua projecção no plano. Lembramos que $P_{(a,u,v)}(t)$ é um desdobramento a 3-parâmetros da

singularidade $(f(t), g(t))$, dos quais u e v fornecem as direções de projeção e a variável a fornece a geometria da transição da família γ_a . Para este estudo precisamos calcular o conjunto bifurcação da projeção $P_{(a,u,v)}(t)$ de uma família genérica a 1-parâmetro no plano (u, v) e estudar suas transições em relação a variável a . O conjunto bifurcação da família de projeções é constituído de 3 curvas (singularidades de codimensão 1);

- **Curva cuspidal**, se o vetor derivada $\frac{\partial P_{(a,u,v)}}{\partial t}(t) = 0$;
- **Curva tacnodal**, se existem dois pontos distintos t e s , tais que:

$$\frac{P_{(a,u,v)}(t) - P_{(a,u,v)}(s)}{t - s} = 0,$$

$$\frac{\partial P_{(a,u,v)}}{\partial t}(t) // \frac{\partial P_{(a,u,v)}}{\partial s}(s);$$

- **Curva de pontos tripos**, quando existem três pontos t, s e r distintos, tais que:

$$\frac{P_{(a,u,v)}(t) - P_{(a,u,v)}(s)}{t - s} = 0,$$

$$\frac{1}{s - r} \left(\frac{P_{(a,u,v)}(t) - P_{(a,u,v)}(s)}{t - s} - \frac{P_{(a,u,v)}(t) - P_{(a,u,v)}(r)}{t - r} \right) = 0.$$

3.2.1 Projeção de um flattening degenerado do tipo A

A forma normal de uma família genérica a 1-parâmetro apresentando um flattening degenerado do tipo A pode ser escrita da forma

$$\gamma_a(t) = (t, t^2, t^5 + at^3).$$

Portanto, pela Proposição 3.2, a projeção

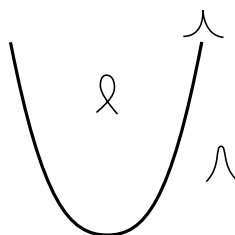
$$P_{(a,u,v)}(t) = (t^2 - ut, t^5 + at^3 - vt),$$

é um desdobramento versal para a singularidade A_4 . O conjunto bifurcação de $P_{(a,u,v)}$ no plano de projeção (u, v) é dado pelas seguintes curvas:

- Curva cuspidal, $(u, v) = (2t, 5t^4 + 3at^2)$;
- Curva tacnodal, $(u, v) = (t, -5t^4 - at^2/2 - a^2/4)$, onde $5u^2 + 2a < 0$.

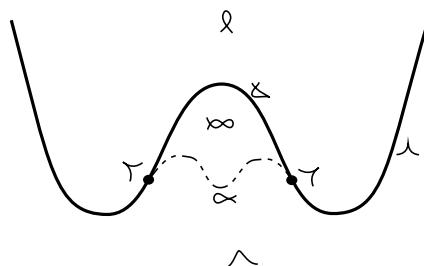
Observamos que a curva de pontos tripos não aparece neste caso.

Quando $a \geq 0$, a curva tacnodal também não ocorre. Logo, o conjunto bifurcação é dado simplesmente pela curva cuspidal.

Figura 3.1: Bifurcação de P , quando $a > 0$.

Quando $a = 0$, a curva cuspidal apresenta na origem uma inflexão degenerada, correspondendo a uma torção nula degenerada ($T = T' = 0$) da curva γ_0 .

Quando $a < 0$, surge a curva tacnodal (linha pontilhada) que contém 2 pontos de inflexão correspondentes aos dois planos bitangentes osculadores da curva γ_a , embora isso não seja detectado pelo estrato A_3 . A curva cuspidal, agora, possui dois pontos de inflexão que correspondem a dois pontos de torção nula da curva γ_a . Observamos que, quando $a < 0$, obtemos uma região no plano (u, v) , de forma que a projecção de γ_a apresenta o número máximo de pontos duplos (Morsificação), para a singularidade A_4 .

Figura 3.2: Bifurcação de P , quando $a < 0$

A fim de especificarmos para quais direcções de projecção obtemos uma morsificação para uma singularidade A_4 , apresentamos o seguinte resultado:

Teorema 3.3 *Seja γ_a uma família genérica a 1-parâmetro que apresenta um flattening degenerado do tipo A. A projecção ortogonal de γ_a na direcção $(1, u, u^4 + au^2)$ fornece uma morsificação da singularidade A_4 , quando $a < 0$ e*

$$-\sqrt{\frac{-4a}{11}} < u < \sqrt{\frac{-4a}{11}}.$$

Demonstração: Consideremos a projecção ortogonal

$$P_{(a,u,v)}(t) = (t^2 - ut, t^5 + at^3 - vt),$$

de uma família genérica a 1-parâmetro do tipo A. Como a singularidade A_4 tem $\mathcal{A}_e\text{-cod} = 2$ segue-se da fórmula 1.4 que $P_{(a,u,v)}(t)$ tem no máximo 2 pontos duplos. Quando isso ocorre temos que $P_{(a,u,v)}$ é uma morsificação para a singularidade A_4 . Assim, passamos a encontrar condições sobre a, u e v para que isto ocorra. Sejam t_i e s_i , $i = 1$ e 2 (distintos entre si), os parâmetros onde ocorrem as auto-intersecções da curva $P_{(a,u,v)}(t)$. Podemos supor, sem perda de generalidade, que um ponto duplo ocorra na origem. Portanto, da primeira coordenada da projeção, temos como ponto duplo na origem, $t_1 = 0$ e $s_1 = u$. E assim, a segunda coordenada da projeção, $t(t^4 + at^2 - v) = 0$, impõe a relação $v = u^4 + au^2$.

As equações para a obtenção de pontos duplos para $P_{(a,u,v)}(t)$ são

$$\begin{aligned} s + t - u &= 0, \\ s^4 + s^3t + s^2t^2 + st^3 + t^4 + a(s^2 + st + t^2) - v &= 0. \end{aligned}$$

Isolando s na primeira equação e substituindo na segunda, juntamente com a condição $v = u^4 + au^2$, obtemos

$$-t(u - t)(t^2 - ut + 3u^2 + a) = 0.$$

A condição para que ocorra dois pontos duplos distintos na projeção $P_{(a,u,v)}(t)$ é equivalente à equação $t^2 - ut + 3u^2 + a$ ter duas raízes reais distintas em relação à variável t , ou seja, $11u^2 + 4a < 0$. Concluindo assim a demonstração. \square

3.2.2 Projeção de um flattening degenerado do tipo B

A forma normal de uma família genérica a 1-parâmetro que apresenta um flattening degenerado do tipo B pode ser escrita na forma

$$\gamma_a(t) = (t, t^3, t^4 + at^2).$$

Novamente, pela Proposição 3.2, a projeção

$$P_{(a,u,v)}(t) = (t^3 - ut, t^4 + at^2 - vt),$$

é um desdobramento versal para a singularidade E_6 . Vamos calcular o conjunto bifurcação de $P_{(a,u,v)}$ no plano de projeção (u, v) . A curva cuspidal é dada por

$$(u, v) = (3t^2, 4t^3 + 2at).$$

A curva tacnodal é dada pelas equações

$$\begin{cases} (t^2 + ts + s^2) - u = 0, \\ (t^3 + ts^2 + t^2s + s^3) + a(s + t) - v = 0, \\ \det \begin{pmatrix} 3t^2 - u & 4t^3 + 2ta - v \\ 3s^2 - u & 4s^3 + 2sa - v \end{pmatrix} = 0. \end{cases}$$

Para facilitar as contas, podemos trocar as coordenadas t e s pelas coordenadas simétricas elementares, ou seja, $\sigma_1 = t + s$ e $\sigma_2 = ts$. Substituindo as novas variáveis nas equações acima, obtemos

$$(\sigma_1^2 - \sigma_2) - u = 0, \quad (3.1)$$

$$(\sigma_1^3 - 2\sigma_1\sigma_2) + a\sigma_1 - v = 0, \quad (3.2)$$

$$4u\sigma_1^2 - 3v\sigma_1 - 12\sigma_2^2 + (-4u + 6a)\sigma_2 + 2au.$$

Isolando u e v nas equações (3.1) e (3.2) respectivamente, e substituindo na terceira equação, temos $(\sigma_1^2 - 4\sigma_2)(\sigma_1^2 + 2\sigma_2 - a)$. Desconsiderando a equação $\sigma_1^2 - 4\sigma_2$, pois ela é zero se, e somente se, $t = s = 0$, o que não nos interessa, segue-se que

$$\sigma_2 = \frac{a - \sigma_1^2}{2}.$$

Substituindo a igualdade anterior em u e v , obtemos a curva no plano de controle onde ocorre a singularidade tacnode para a curva projetada.

$$(u, v) = \left(\frac{3\sigma_1^2 - a}{2}, 2\sigma_1^3 \right).$$

Lembrando que, como $\sigma_1 = t + s$ e $\sigma_2 = ts$, devemos impor ainda a condição $\sigma_1^2 - 4\sigma_2 > 0$ para obtenção de pontos duplos distintos. Portanto, temos a desigualdade $3\sigma_1^2 - 2a > 0$.

A curva de pontos triplos é dada pelas equações:

$$\begin{aligned} (t^2 + ts + s^2) - u &= 0, \\ (t^3 + s^2t + t^2s + s^3) + a(t + s) - v &= 0, \\ (sr + s^2 + ts + tr + t^2 + r^2) + a &= 0, \\ (s + t + r) &= 0. \end{aligned}$$

Passando para as coordenadas simétricas, têm-se

$$\begin{aligned} (\sigma_1^2 - \sigma_2) - u &= 0, \\ (\sigma_1^3 - 2\sigma_1\sigma_2) + a\sigma_1 - v &= 0, \\ (r^2 + r\sigma_1 + \sigma_1^2 - \sigma_2) + a &= 0, \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$(r + \sigma_1) = 0, \quad (3.4)$$

da equação (3.4), $r = -\sigma_1$. Substituindo na equação (3.3), obtemos $\sigma_1^2 - \sigma_2 + a = 0$. Isolando σ_2 , podemos substituí-lo nas demais equações chegando em

$$\begin{aligned} u &= -a, \\ \sigma_1^3 + a\sigma_1 + v &= 0. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Assim, temos um ponto triplo quando $u = -a$ e a equação (3.5) tenha três raízes reais. Isso é equivalente ao discriminante da equação (3.5) ser maior que zero, ou seja, $(4a^3 + 27v^2) < 0$. Portanto, no plano de controle a terceira componente é dada por $(u, v) = (-a, v)$, com v satisfazendo a desigualdade $(4a^3 + 27v^2) < 0$.

Em resumo, as três curvas do conjunto bifurcação no plano de controle (u, v) são dadas por:

$$\begin{aligned} (u, v) &= (3t^2, 4t^3 + 2at) \\ (u, v) &= \left(\frac{3t^2 - a}{2}, 2t^3 \right), \text{ com } 3t^2 - 2a > 0. \\ (u, v) &= (-a, v) \text{ com } (4a^3 + 27v^2) < 0. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Quando $a > 0$, não ocorre a curva de pontos triplos. Nos pontos de inflexão da curva cuspidal, temos os pontos onde a torção da curva γ_a é nula. Quando $a = 0$, os dois pontos de torção nula da curva se fundem na origem, correspondendo agora a um ponto de curvatura nula de γ_0 .

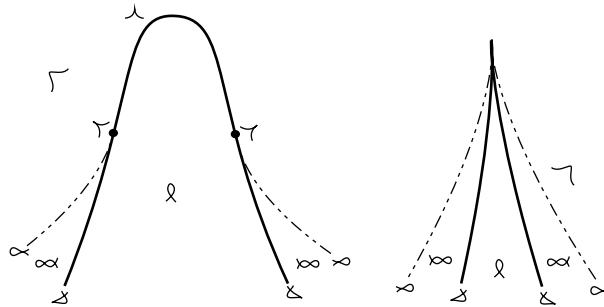
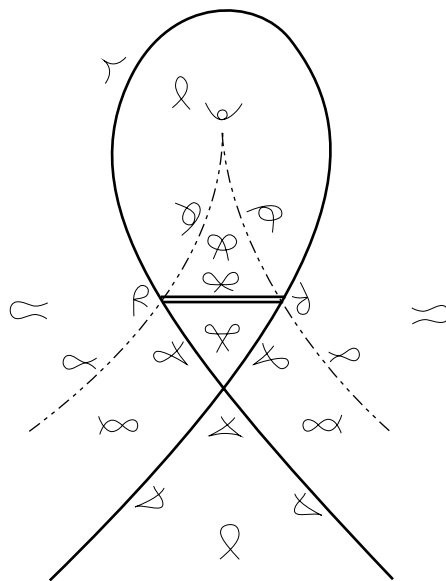


Figura 3.3: Bifurcação de P , quando $a > 0$ e $a = 0$.

Quando $a < 0$, a curva de pontos triplos (linha dupla) aparece (a direção de projeção é tangente a uma reta trissecante à curva γ_a). Os dois pontos de torção nula da curva γ_a desaparecem, mas encontramos duas retas *cross tangent* na intersecção das três curvas. A curva tacnodal possui uma cúspide onde ocorre uma singularidade A_5 . Observamos que, no ponto de auto intersecção da curva cuspidal, existem dois pontos distintos da curva γ_a com tangentes paralelas. Neste caso, obtemos as duas morsificações para a singularidade E_6 .

Figura 3.4: Bifurcação de P , quando $a < 0$.

3.3 Morsificações da singularidade E_6

Na seção anterior, vimos que a projeção ortogonal de uma família genérica a 1-parâmetro do tipo B é um desdobramento versal da singularidade E_6 . Portanto, existem direções de projeção onde ocorrem as duas morsificações para a singularidade E_6 , denotadas aqui por M_1 e M_2 .

Figura 3.5: Morsificações de E_6 , respectivamente M_1 e M_2 .

Voltamos nossa atenção à seguinte questão: Em quais direções da projeção ortogonal de uma família genérica a 1-parâmetro do tipo B, obtém-se morsificações da singularidade E_6 ?

Dedicamos esta seção a responder esta questão. Para tanto, consideramos a forma normal $\gamma_a(t) = (t, t^3, t^4 + at^2)$. Assim, a família de projeções no plano $x = 0$ é dada por

$$P : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(t, a, (u, v)) \mapsto (t^3 - ut, t^4 + at^2 - vt).$$

Observamos que a transição de uma morsificação para outra implica na passagem por um ponto triplo. Pelas equações em 3.6, segue-se o seguinte corolário:

Corolário 3.1 *Dada um família genérica a 1-parâmetro do tipo B, obtém-se um ponto triplo na projeção ortogonal, quando a direção de projeção é dada por*

$$(1, u, v) = (1, -a, v) \text{ com } 4a^3 + 27v^2 < 0.$$

As morsificações M_1 e M_2 podem ser vistas como uma “seqüência de letras” da seguinte forma: sejam t_i e s_i , $i = 1, 2$ e 3 (distintos entre si), os parâmetros onde acontecem os pontos duplos da curva $P_{(a,u,v)}(t)$. Dessa forma, temos:

Definição 3.3 *Para uma morsificação M_1 , temos uma seqüência crescente de parâmetros do tipo $\{t_1, t_2, t_3, s_1, s_2, s_3\}$. E, para uma morsificação M_2 , temos uma seqüência crescente de parâmetros do tipo $\{t_1, t_2, s_2, t_3, s_3, s_1\}$.*



A Definição 3.3 fornece uma maneira de diferenciar os dois tipos de morsificações de E_6 . Para responder a questão inicial, precisamos encontrar os 3 pontos duplos da projeção $P_{(a,u,v)}(t) = (t^3 - ut, t^4 + at^2 - vt)$. Sem perda de generalidade, podemos supor que um ponto duplo ocorra na origem. Assim, $t^3 - ut = t(t - \sqrt{u})(t + \sqrt{u}) = 0$. Tomamos como ponto duplo na origem, $t_1 = 0$ e $s_1 = \sqrt{u}$. Observamos que $u > 0$ é uma condição necessária para a obtenção dos 3 pontos duplos. Da segunda coordenada temos $t(t^3 + at - v) = 0$ e, portanto, $v = \sqrt{u}(u + a)$.

As equações para a obtenção de pontos duplos (nas coordenadas simétricas) são

$$\begin{aligned} (\sigma_1^2 - \sigma_2) - u &= 0, \\ (\sigma_1^3 - 2\sigma_1\sigma_2) - v + a\sigma_1 &= 0. \end{aligned}$$

Isolando $\sigma_2 = -u + \sigma_1^2$ e substituindo na segunda equação, juntamente com a condição $v = \sqrt{u}(u + a)$, obtemos

$$(\sigma_1 - \sqrt{u})(-\sigma_1^2 - \sqrt{u}\sigma_1 + u + a) = 0.$$

A primeira componente da equação refere-se ao ponto duplo na origem, ou seja, quando $\sigma_1 = \sqrt{u}$ segue-se que $\sigma_2 = 0$, e logo $(t, s) = (0, \sqrt{u})$. Dessa forma, $-\sigma_1^2 - \sqrt{u}\sigma_1 + u + a = 0$ e, portanto, $\sigma_1 = -\frac{1}{2}\left(\sqrt{u} \pm \sqrt{5u + 4a}\right)$. Devemos impor a condição $5u + 4a > 0$ para que tenhamos os outros dois pontos duplos.

Lembrando que $\sigma_1 = t + s$ e $\sigma_2 = ts$. Dessa forma, quando $\sigma_1 = -\frac{1}{2}\left(\sqrt{u} + \sqrt{5u + 4a}\right)$, segue-se que $\sigma_2 = \frac{u}{2} + a - \frac{\sqrt{u}\sqrt{5u + 4a}}{2}$ e, portanto, obtemos o segundo ponto duplo

$$\begin{aligned} t_2 &= \frac{1}{4}\sqrt{5u + 4a} - \frac{1}{4}\sqrt{u} - \frac{1}{4}\sqrt{-2u - 12a + 6\sqrt{u}\sqrt{5u + 4a}} \\ s_2 &= \frac{1}{4}\sqrt{5u + 4a} - \frac{1}{4}\sqrt{u} + \frac{1}{4}\sqrt{-2u - 12a + 6\sqrt{u}\sqrt{5u + 4a}}. \end{aligned}$$

Da mesma forma, quando $\sigma_1 = -\frac{1}{2}\left(\sqrt{u} - \sqrt{5u + 4a}\right)$, obtemos o terceiro ponto duplo

$$\begin{aligned} t_3 &= -\frac{1}{4}\sqrt{5u + 4a} - \frac{1}{4}\sqrt{u} - \frac{1}{4}\sqrt{-2u - 12a - 6\sqrt{u}\sqrt{5u + 4a}} \\ s_3 &= -\frac{1}{4}\sqrt{5u + 4a} - \frac{1}{4}\sqrt{u} + \frac{1}{4}\sqrt{-2u - 12a - 6\sqrt{u}\sqrt{5u + 4a}}. \end{aligned}$$

Devemos impor também a condição $u < \frac{-3-6\sqrt{3}}{11}a$ para que as raízes sejam reais. Lembrando que estamos supondo $u > 0$, podemos agora enunciar o seguinte lema

Lema 3.1 *Considerando $-\frac{4}{5}a < u < \frac{-3-6\sqrt{3}}{11}a$, temos:*

- (i) $-a < u \Leftrightarrow t_2 < t_3 < s_3 < t_1 < s_1 < s_2$;
- (ii) $u < -a \Leftrightarrow t_3 < t_2 < t_1 < s_3 < s_2 < s_1$.

Demonstração: Como estamos supondo $u > 0$, segue-se do enunciado, que $a < 0$.

(i) (\Rightarrow) Por hipótese $(a + u) > 0$, logo

$$\begin{aligned} 0 &< 4(5u + 4a)(a + u) \Rightarrow \\ -11u^2 - 6ua + 9a^2 &< 9u^2 + 30ua + 25a^2 \Rightarrow \\ -11u^2 - 6ua + 9a^2 &< (3u + 5a)^2 \Rightarrow \\ \frac{(-2u - 12a + 6\sqrt{u}\sqrt{5u + 4a})(-2u - 12a - 6\sqrt{u}\sqrt{5u + 4a})}{16} &< (3u + 5a)^2 \end{aligned}$$

Como $u < \frac{-3-6\sqrt{3}}{11}a$, segue-se que $(3u + 5a) < 0$. Assim,

$$\begin{aligned} \sqrt{(-2u - 12a + 6\sqrt{u}\sqrt{5u + 4a})(-2u - 12a - 6\sqrt{u}\sqrt{5u + 4a})} &< 4(-3u - 5a) \Rightarrow \\ \frac{\left(\sqrt{-2u - 12a + 6\sqrt{u}\sqrt{5u + 4a}} - \sqrt{-2u - 12a - 6\sqrt{u}\sqrt{5u + 4a}}\right)^2}{2} &+ \\ -2u - 12a &< -12u - 20a \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
20u + 16a &< \left(\sqrt{-2u - 12a + 6\sqrt{u}\sqrt{5u + 4a}} - \sqrt{-2u - 12a - 6\sqrt{u}\sqrt{5u + 4a}} \right)^2 \Rightarrow \\
2\sqrt{5u + 4a} &< \sqrt{-2u - 12a + 6\sqrt{u}\sqrt{5u + 4a}} - \sqrt{-2u - 12a - 6\sqrt{u}\sqrt{5u + 4a}} \Rightarrow \\
&\sqrt{5u + 4a} - \sqrt{-2u - 12a + 6\sqrt{u}\sqrt{5u + 4a}} < \\
&-\sqrt{5u + 4a} - \sqrt{-2u - 12a - 6\sqrt{u}\sqrt{5u + 4a}} \Rightarrow \\
&t_2 < t_3.
\end{aligned}$$

A desigualdade $t_3 < s_3$ é óbvia. Vamos mostrar agora a desigualdade $s_3 < t_1 = 0$. Por hipótese, $-u^2 + a^2 < 0$. Assim,

$$\begin{aligned}
4(-u^2 + a^2) &< 0 \Rightarrow \\
(u + 2a)^2 &< u(5u + 4a).
\end{aligned}$$

Novamente, como $u < \frac{-3-6\sqrt{3}}{11}a$, segue-se que $(u + 2a) < 0$. Assim,

$$\begin{aligned}
(-u - 2a) &< \sqrt{u(5u + 4a)} \Rightarrow \\
0 &< \frac{u}{2} + a + \frac{\sqrt{u}\sqrt{5u + 4a}}{2} \Rightarrow \\
0 &< \left(-\frac{\sqrt{5u + 4a} - \sqrt{u}}{4} \right)^2 - \left(\frac{\sqrt{-2u - 12a - 6\sqrt{u}\sqrt{5u + 4a}}}{4} \right)^2 \Rightarrow \\
&\left(\frac{\sqrt{-2u - 12a - 6\sqrt{u}\sqrt{5u + 4a}}}{4} \right)^2 < \left(-\frac{\sqrt{5u + 4a} - \sqrt{u}}{4} \right)^2 \Rightarrow \\
&\frac{\sqrt{-2u - 12a - 6\sqrt{u}\sqrt{5u + 4a}}}{4} < \frac{\sqrt{5u + 4a} + \sqrt{u}}{4} \Rightarrow \\
&t_3 < 0.
\end{aligned}$$

A desigualdade $t_1 < s_1$ também é óbvia. De forma semelhante também obtemos a desigualdade $s_1 < s_2$.

(\Leftarrow) A desigualdade $t_2 < t_3$ implica que

$$2\sqrt{5u + 4a} < \sqrt{-2u - 12a + 6\sqrt{u}\sqrt{5u + 4a}} - \sqrt{-2u - 12a - 6\sqrt{u}\sqrt{5u + 4a}}$$

Elevando ao quadrado em ambos os lados, segue-se

$$\begin{aligned}
(3u + 5a) &< -\sqrt{-11u^2 - 6ua + 9a^2} \Rightarrow \\
(3u + 5a)^2 &> -11u^2 - 6ua + 9a^2 \Rightarrow \\
4(5u^2 + 9ua + 4a^2) &> 0 \Rightarrow \\
4(u + a)(5u + 4a) &> 0 \Rightarrow u > -a.
\end{aligned}$$

(ii) Segue de forma semelhante ao item (i). □

Finalizamos esta seção com o seguinte resultado:

Teorema 3.4 *Dada uma família genérica a 1-parâmetro do tipo B, a projeção da família γ_a na direção $(1, u, \sqrt{u}(u+a))$, com $a < 0$, fornece uma*

- (i) *morsificação M_1 quando $-\frac{4a}{5} < u < -a$;*
- (ii) *morsificação M_2 , quando $-a < u < \frac{-3-6\sqrt{3}}{11}a$.*

Demonstração:

(i) A direção de projeção $(1, u, \sqrt{u}(u+a))$ garante um ponto duplo na origem dado por $t_1 = 0$ e $s_1 = \sqrt{u}$. Pelo Lema 3.1(ii), quando $-\frac{4a}{5} < u < -a$, temos a seguinte seqüência crescente de parâmetros $\{t_3, t_2, t_1, s_3, s_2, s_1\}$. Mas, pela Definição 3.3, isto é uma seqüência crescente de parâmetros definindo uma morsificação M_1 da singularidade E_6 .

(ii) Da mesma forma, com a desigualdade $-a < u < \frac{-3-6\sqrt{3}}{11}a$ e o Lema 3.1(i), obtemos uma seqüência crescente de parâmetros do tipo $\{t_2, t_3, s_3, t_1, s_1, s_2\}$. Pela Definição 3.3, isto define uma morsificação M_2 de E_6 . □

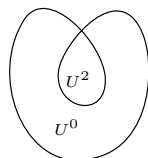
Apêndice ao capítulo 3

O método para calcular a matriz de intersecção de singularidades de funções de duas variáveis que descreveremos neste apêndice é devido a A'Campo [1] e Gusein-Zade [16]. Outras referências para esse apêndice podem ser encontradas em [2] e [17].

3.4 Matriz de intersecção de singularidades de funções de duas variáveis

Seja f o germe real de uma função holomorfa $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ que tem um ponto crítico isolado na origem. Suponhamos que exista uma deformação real \tilde{f} da função f tal que todos os seus pontos críticos (nos quais o ponto crítico 0 se desdobra) sejam reais e não degenerados, e que os valores da função \tilde{f} em todos os pontos de sela sejam iguais a zero. Não é difícil ver que neste caso os valores da função \tilde{f} em pontos de mínimo são negativos, e em pontos de máximos são positivos. Se tal deformação existe, então a matriz de intersecção da singularidade f pode ser determinada pela curva real $\tilde{f}^{-1}(0)$ no plano \mathbb{R}^2 . Antes de apresentarmos tal resultado, fixemos primeiramente algumas notações.

A curva $\tilde{f}^{-1}(0)$, em um pequeno disco D centrado na origem, tem somente auto-intersecções simples. Cada componente conexa do complementar desta curva pode ser vista como um polígono curvilíneo, com alguns vértices possivelmente coincidindo. Dividimos o conjunto dessas componentes do complemento da curva em duas classes, de tal forma que duas componentes com um lado em comum estejam em classes diferentes. Dizemos que uma componente da complemento da curva é de primeira classe (U_i^0) se a função \tilde{f} toma valores negativos e de segunda classe (U_k^2) caso contrário. Ver figura abaixo.



Os valores críticos da função $\tilde{f}(x, y)$ (ou $\tilde{f}(x, y) + t^2$, estabilização de f) estão no eixo real do plano \mathbb{C} . Escolhamos z_0 tal que $\text{Im } z_0 > 0$ e fixemos um *sistema de caminhos* unindo o valor não crítico z_0 , com os valores críticos da função \tilde{f} , de tal forma que os caminhos pertençam inteiramente à região $\text{Im } z_0 > 0$ com exceção dos valores críticos. Observamos que os pontos críticos da função \tilde{f} estão em correspondência injetora com as auto-intersecções da curva real $\tilde{f}^{-1}(0)$ e as componentes relativas de seu complemento, pois em cada componente existe um ponto crítico da função \tilde{f} (máximo ou mínimo).

Fixamos, para cada p_j da auto-intersecção da curva o ciclo evanescente Δ_j^1 ; da mesma forma, para cada componente relativa (que não tem pontos no bordo em comum com o complemento de D) do complemento da curva da primeira classe (U_i^0) fixamos o ciclo Δ_i^0 ; e para a segunda classe (U_k^2), o ciclo evanescente Δ_k^2 . Assim, os ciclos Δ_j^1 (resp. Δ_i^0 e Δ_k^2) correspondem aos pontos de sela (resp. mínimo e máximo). Define-se, desta maneira, uma base distinguida dos ciclos evanescentes no conjunto de nível não singular das singularidades $f(x, y)$ e $f(x, y) + t^2$ (Ver [2]).

Definição 3.4

- $n_{10}(j, i)$ é o número de vértices do polígono U_i^0 coincidindo com p_j ;
- $n_{21}(k, j)$ é o número de vértices do polígono U_k^2 coincidindo com p_j ;
- $n_{20}(k, i)$ o número de lados em comum dos polígonos curvilíneos U_i^0 e U_k^2 .

Definição 3.5 A matriz $S = (\Delta_i \circ \Delta_j)$ é chamada a matriz de intersecção da singularidade f (com respeito à base $\{\Delta_i\}$), onde $(a \circ b)$ significa o número de intersecção dos ciclos (classe de homologia) a e b .

O sistema de caminhos $\{u_i\}$, que define uma base distinguida como fizemos acima, pode ser escolhido de várias maneiras. Passemos, agora, a descrever as *operações elementares de mudança de base*, que preservam a base distinguida.

Definição 3.6 A operação α_m ($1 \leq m < \mu$), onde μ é o número de Milnor de f , transforma um sistema de caminhos $\{u_i\}$ em um novo sistema de caminhos $\{\tilde{u}_i\}$ da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}\tilde{u}_i &= u_i \quad \text{para } i \neq m, m+1; \\ \tilde{u}_m &= u_{m+1}\tau_m; \\ \tilde{u}_{m+1} &= u_m.\end{aligned}$$

onde $u_{m+1}\tau_m$ significa o caminho obtido percorrendo u_{m+1} e em seguida o loop γ_m .

O novo sistema de caminhos $\{\tilde{u}_i\}$ define uma base distinguida $\{\tilde{\Delta}_i\}$, que é obtida da base $\{\Delta_i\}$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\tilde{\Delta}_i &= \Delta_i \quad \text{para } i \neq m, m+1; \\ \tilde{\Delta}_{m+1} &= \Delta_m; \\ \tilde{\Delta}_m &= h_m(\Delta_{m+1}) = \Delta_{m+1} + (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} (\Delta_{m+1} \circ \Delta_m) \circ \Delta_m.\end{aligned}$$

(Transformação de Picard-Lefschetz)

A operação que transforma a base $\{\Delta_i\}$ na base $\{\tilde{\Delta}_i\}$ descrita por essa fórmula é denotada por α_m .

Definição 3.7 *A operação β_{m+1} ($1 \leq m < u$) transforma um sistema de caminhos $\{u_i\}$ em um novo sistema de caminhos $\{\tilde{u}_i\}$ da seguinte maneira:*

$$\begin{aligned}\tilde{u}_i &= u_i \quad \text{para } i \neq m, m+1; \\ \tilde{u}_m &= u_{m+1}; \\ \tilde{u}_{m+1} &= u_m \tau_{m+1}^{-1}.\end{aligned}$$

A base $\{\tilde{\Delta}_i\}$ é obtida da base $\{\Delta_i\}$ por meio da seguinte fórmula:

$$\begin{aligned}\tilde{\Delta}_i &= \Delta_i \quad \text{para } i \neq m, m+1; \\ \tilde{\Delta}_m &= \Delta_{m+1}; \\ \tilde{\Delta}_{m+1} &= h_{m+1}(\Delta_m) = \Delta_m + (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} (\Delta_{m+1} \circ \Delta_m) \circ \Delta_{m+1}.\end{aligned}$$

(Transformação inversa de Picard-Lefschetz)

A operação que transforma a base $\{\Delta_i\}$ na base $\{\tilde{\Delta}_i\}$ descrita por essa fórmula é denotada por β_{m+1} .

Definição 3.8 [16] *A forma quadrática correspondente à curva $\tilde{f}^{-1}(0)$ é definida pela seguinte tabela de produtos escalares dos ciclos:*

$$\begin{aligned}(\Delta_m^\delta \circ \Delta_{m'}^\delta) &= -2\delta_{mm'}, \\ (\Delta_i^0 \circ \Delta_j^1) &= n_{10}(j, i), \\ (\Delta_j^1 \circ \Delta_k^2) &= n_{21}(k, j), \\ (\Delta_i^0 \circ \Delta_k^2) &= -n_{20}(k, i).\end{aligned}\tag{3.7}$$

Definição 3.9 [16] *A forma anti-simétrica bilinear correspondente à curva $\tilde{f}^{-1}(0)$ é definida pela seguinte tabela de produtos escalares dos ciclos:*

$$\begin{aligned}(\Delta_m^\delta \circ \Delta_{m'}^\delta) &= 0, \\ (\Delta_j^1 \circ \Delta_i^0) &= n_{10}(j, i), \\ (\Delta_k^2 \circ \Delta_j^1) &= n_{21}(k, j), \\ (\Delta_i^0 \circ \Delta_k^2) &= n_{20}(k, i).\end{aligned}$$

O teorema a seguir garante que se f tem uma deformação \tilde{f} que satisfaz as condições descritas anteriormente, então a matriz de intersecção da singularidade f pode ser determinada pela curva real $\tilde{f}^{-1}(0)$ no plano \mathbb{R}^2 .

Teorema 3.5 [16] *A matriz de intersecção de f com respeito à base distinguida $[\Delta_i^0, \Delta_j^1, \Delta_k^2]$ coincide com a forma anti-simétrica bilinear correspondente à curva $\tilde{f}^{-1}(0)$, e a forma de intersecção da singularidade de 3 variáveis $f(x, y) + t^2$ com a forma quadrática que corresponde à mesma curva.*

Definição 3.10 *O Diagrama de Dynkin da singularidade f é um grafo definido como segue:*

- *Seus vértices estão em correspondência injetora com os elementos Δ_i de uma base distinguida da estabilização da singularidade f ;*
- *O i -ésimo e o j -ésimo vértices do grafo são unidos por uma linha de multiplicidade $(\Delta_i \circ \Delta_j)$. As linhas de multiplicidade negativa são descritas por linhas pontilhadas.*

Dessa forma, seus vértices correspondem às auto-intersecções da curva e às componentes relativas do complemento da curva.

Existem duas inconveniências no Teorema 3.5;

- (i) a primeira é a dificuldade de encontrar uma deformação \tilde{f} que satisfaz suas condições;
- (ii) a segunda é que, para a maioria das escolhas das deformações, elas diferem das formas clássicas e requerem uma transformação.

Para resolver o problema (ii), suponhamos que exista uma deformação \tilde{f} que satisfaz as condições do teorema. Assim, existe uma aplicação própria não-degenerada $\varphi : L \rightarrow D$, onde L é uma variedade 1-dimensional e D o disco aberto em \mathbb{R}^2 tal que $\text{Im}\varphi = \{\tilde{f}^{-1}(0)\}$ é injetora, exceto nas auto-intersecções da curva.

Seja $\varphi_t : L \rightarrow D$, com $t \in [0, 1]$, uma homotopia da aplicação φ na classe de todas as aplicações próprias não degeneradas e constantes na pré-imagem do bordo do disco D . Para uma homotopia arbitrária, o tipo da curva $\text{Im}\varphi_t$ altera-se em um número finito de valores de t . Para esses valores do parâmetro t obtemos dois tipos de bifurcações: **Tacnode** e **Pontos triplos**. Outros tipos de bifurcações de codimensão um são evitados, em vista da condição de não-degeneração da aplicação φ_t . Para o primeiro tipo de bifurcação, o número de pontos de auto-intersecção não é preservado, ao contrário do segundo tipo; portanto, a forma bilinear de $\tilde{f}^{-1}(0)$ é alterada para uma bifurcação do primeiro tipo e permanece inalterada para a segunda bifurcação.

Definição 3.11 *Uma homotopia é admissível se para cada valor dos parâmetros $t \in [0, 1]$ não existem pontos $h_1 \neq h_2$ de L , tais que*

$$\begin{aligned} \varphi_t(h_1) &= \varphi_t(h_2), \\ \text{Im}d\varphi_t(h_1) &= \text{Im}d\varphi_t(h_2), \end{aligned}$$

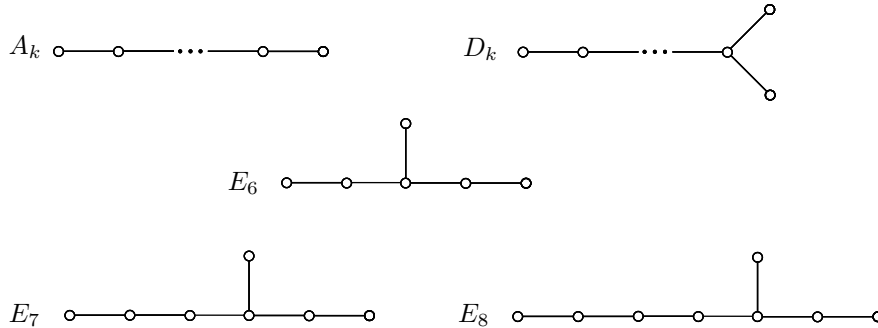
onde $d\varphi_t$ é a diferencial da curva φ_t e a curva φ_1 tenha apenas auto-intersecções simples.

Portanto, uma homotopia admissível é uma homotopia onde as bifurcações são todas do segundo tipo.

Teorema 3.6 [16] *O diagrama de Dynkin da curva $\text{Im } \varphi_1$ é obtido do diagrama de Dynkin da curva $\text{Im } \varphi_0$ com operações elementares de mudanças de bases distinguidas.*

Com isso enunciamos o seguinte teorema.

Teorema 3.7 *Para as singularidades simples $A_k(x^{k+1} + \sum t_i^2)$, $D_k(x^2y + y^{k-1} + \sum t_i^2)$, $E_6(x^3 + y^4 + \sum t_i^2)$, $E_7(x^3 + xy^3 + \sum t_i^2)$ e $E_8(x^3 + y^5 + \sum t_i^2)$, existe uma base distinguida de ciclos evanescentes, na qual o diagrama coincide com os diagramas clássicos das correspondentes álgebras de Lie do mesmo nome.*



Uma referência sobre diagramas de álgebras de Lie pode ser encontrada em [33].

A resolução do problema (i) é feita com detalhes em [2]. Enunciaremos aqui os principais teoremas para essa resolução.

Seja $\cup_{i=1}^r M_i$ a união das componentes irredutíveis da curva $f^{-1}(0)$. Para cada germe da curva irredutível complexa M_i , existe um germe de uma aplicação

$$\phi_i : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$$

tal que $\text{Im } \phi_i = M_i$. Para pequenas deformações $\tilde{\phi}_i$ da aplicação ϕ_i encontramos somente auto-intersecções simples. O número dessas intersecções não depende da deformação e é denotado por $\delta = \delta\{\phi\} = \delta\{f\}$.

O problema de calcular a matriz de intersecção de uma singularidade de uma função de duas variáveis, pode ser reduzido ao caso de uma singularidade real com a ajuda do seguinte teorema.

Teorema 3.8 *Para um conjunto de aplicações $\{\phi_i\}$ existe um conjunto de aplicações reais $\{\psi_i\}$, pertencentes à mesma componente conexa que ϕ_i do conjunto de $\delta = \text{constante}$ no espaço de toda coleção de r aplicações $\mathbb{C}_i \rightarrow \mathbb{C}^2$.*

Corolário 3.2 *Para qualquer singularidade de uma função de duas variáveis, existe uma singularidade real, pertencente à mesma componente conexa do conjunto $\mu = \text{constante}$ no espaço de todos os germes de funções $(\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ e, portanto, com a mesma matriz de intersecção.*

Teorema 3.9 [16] *Para qualquer conjunto de germes de aplicações reais $\{\phi_i\}$ existe uma deformação real $\{\tilde{\phi}_i\}$ para a qual a curva $\cup_{i=1}^r \text{Im } \tilde{\phi}_i$ tem somente pontos duplos e todos eles reais.*

Assim, segue-se que se $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ é uma singularidade real tal que a curva $f^{-1}(0)$ é real, então existe uma deformação real \tilde{f} que satisfaz as condições do Teorema 3.5.

3.5 Matriz de intersecção de E_6

A fim de exemplificar o que foi exposto na seção anterior, vamos encontrar a matriz de intersecção da singularidade E_6 . Tal exemplo nos dará uma boa idéia de como funciona a teoria apresentada.

A forma normal de uma singularidade E_6 é dada pela função

$$f(x, y) = x^4 - y^3.$$

Seguindo os passos da seção anterior, vamos encontrar uma deformação real \tilde{f} da função f , tal que todos os seus pontos críticos sejam reais e não degenerados, e que os valores da função \tilde{f} em todos os pontos de sela sejam iguais a zero. Para isso, consideremos

$$F = (t^3 + at, t^4 + bt^2 + ct)$$

um desdobramento da singularidade E_6 vista como uma aplicação $(\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$. Sabemos que F tem um ponto triplo quando $a = b$ e $4a^3 + 27c^2 < 0$ e que com pequenas perturbações desses valores, obtemos uma morsificação para a singularidade E_6 (ver capítulo 3). Tomando, por exemplo, $a = -1, c = 0$ e $b = -1 + \beta$ para β suficientemente

pequeno, segue-se que $F = (t^3 - t, t^4 + (-1 + \beta)t^2)$ tem um ponto triplo quando $\beta = 0$. Encontramos as duas morsificações de E_6 fazendo $\beta < 0$ e $\beta > 0$, suficientemente pequenos. A equação implícita de F é dada por

$$\tilde{f} = x^4 - y^3 + (1 + 3\beta)yx^2 + (\beta - 1)\beta^2x^2 + 2\beta y^2 - \beta^2y.$$

A função \tilde{f} tem 6 pontos críticos, dados por

$$p_1 = (0, \beta) \quad p_2 = \left(0, \frac{\beta}{3}\right), \quad p_{3,4} = (\pm\beta\sqrt{\beta+1}, -\beta^2),$$

$$p_{5,6} = \left(\pm \frac{\sqrt{3(\beta+1)(3\beta^2+1)}}{6}, \frac{-3\beta^2+2\beta-1}{6}\right).$$

sendo p_1, p_3 e p_4 pontos de sela, todos com valores críticos iguais a zero; e p_2, p_5 e p_6 pontos de mínimo ou máximo, dependendo do valor de β . Assim, \tilde{f} satisfaz as condições do Teorema 3.5. Tomemos $\beta < 0$ de forma que p_5 e p_6 sejam pontos de mínimo e p_2 um ponto de máximo. Para cada ponto crítico, fixamos um ciclo evanescente Δ da seguinte forma:

- Denotamos por Δ_j^1 , $j = 1, 2$ e 3 , os ciclos evanescentes correspondentes aos pontos de sela p_1, p_3 e p_4 , respectivamente;
- Δ_i^0 , $i = 1$ e 2 , os ciclos correspondentes aos pontos de mínimo da função \tilde{f} ;
- Δ_1^2 o ciclo correspondente ao único ponto de máximo da função \tilde{f} .

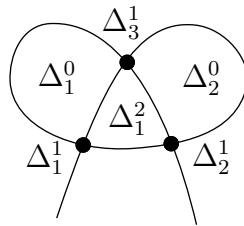


Figura 3.6: Morsificação de E_6

Os valores de $n_{10}(j, i)$, $n_{21}(k, j)$ e $n_{20}(k, i)$ podem ser calculados com a ajuda da figura 3.6, e seus valores são dados na tabela a seguir;

$$\begin{array}{cccc} n_{10}(1, 1) = 1 & n_{10}(1, 2) = 0 & n_{21}(1, 1) = 1 & n_{20}(1, 1) = 1 \\ n_{10}(2, 1) = 0 & n_{10}(2, 2) = 1 & n_{21}(1, 2) = 1 & n_{20}(1, 2) = 1. \\ n_{10}(3, 1) = 1 & n_{10}(3, 2) = 1 & n_{21}(1, 3) = 1 & \end{array}$$

Consideremos a base distinguida $[\Delta_1^1, \Delta_2^1, \Delta_3^1, \Delta_1^2, \Delta_1^0, \Delta_2^0]$. Portanto, pelo Teorema 3.5, a matriz de intersecção da singularidade E_6 é dada pela seguinte matriz

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

O diagrama de Dynkin da singularidade E_6 , correspondente à matriz de intersecção acima tem a seguinte forma:



Figura 3.7: Diagrama e morsificação de E_6 .

Pelo Teorema 3.6, com operações elementares na base, podemos obter a forma clássica do diagrama de Dynkin para a singularidade E_6 . Aplicando-se a mudança

$$\beta_3 \beta_2 \beta_1 \beta_1 \beta_2 \beta_3 \beta_3 \beta_2 \beta_1$$

na base anterior, origina-se a seguinte base

$$[\Delta_1 + \Delta_2 + 2\Delta_4 + \Delta_3, -\Delta_4 - \Delta_2 - \Delta_3, -\Delta_4 - \Delta_1 - \Delta_3, -\Delta_1 - \Delta_2 - \Delta_4, -\Delta_5, -\Delta_6],$$

cuja matriz de intersecção é

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

O diagrama de Dynkin de E_6 correspondente à matriz de intersecção acima coincide com o diagrama clássico da algebra de Lie de E_6 .

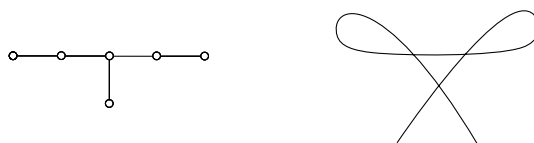


Figura 3.8: Diagrama e morsificação de E_6

Famílias genéricas a 2-parâmetros de curvas no \mathbb{R}^3

Assim como foi feito no caso de famílias genéricas a 1-parâmetro, dividimos os flattenings degenerados de codimensão 2 em dois tipos. Foi desenvolvido um programa de computador ¹ que permite visualizar as muitas possibilidades das transições do conjunto bifurcação da projeção de uma família genérica a 2-parâmetros, sendo assim impraticável o estudo de propriedades geométricas de tais famílias sob esse ponto de vista. Entretanto, encontramos condições sobre a família de curvas para que a projeção ortogonal tenha as singularidades A_6 e E_8 e para que a família de projeções seja um desdobramento versal para essas singularidades. Também apresentamos as direções de projeção onde ocorrem morsificações da singularidade A_6 e as transições dos três tipos de morsificações existentes para a singularidade E_8 .

4.1 Famílias genéricas a 2-parâmetros

Seja γ uma curva no \mathbb{R}^3 com um flattening degenerado de codimensão 2 em t_0 . Dessa forma, temos

$$\begin{aligned} T(t_0) &= \det(\gamma'(t_0), \gamma''(t_0), \gamma'''(t_0)) = 0, \\ T'(t_0) &= \det(\gamma'(t_0), \gamma''(t_0), \gamma^{(4)}(t_0)) = 0 \\ T''(t_0) &= \det(\gamma'(t_0), \gamma''(t_0), \gamma^{(5)}(t_0)) + \det(\gamma'(t_0), \gamma'''(t_0), \gamma^{(4)}(t_0)) = 0 \\ T'''(t_0) &= \det(\gamma''(t_0), \gamma'''(t_0), \gamma^{(4)}(t_0)) + \det(\gamma'(t_0), \gamma''(t_0), \gamma^{(6)}(t_0)) + \\ &\quad + 2\det(\gamma'(t_0), \gamma'''(t_0), \gamma^{(5)}(t_0)) \neq 0. \end{aligned}$$

¹Aproveito para agradecer o professor Angel Montesinos Amilibia por desenvolver o programa, e por algumas idéias sobre este trabalho.

Como estamos supondo γ regular, segue-se que $\det(\gamma''(t_0), \gamma'''(t_0), \gamma^{(4)}(t_0)) = 0$, logo

$$T'''(t_0) = \det(\gamma'(t_0), \gamma''(t_0), \gamma^{(6)}(t_0)) + 2\det(\gamma'(t_0), \gamma'''(t_0), \gamma^{(5)}(t_0)).$$

Definição 4.1 *Um flattening degenerado de codimensão 2 em t_0 é do tipo A quando $K(t_0) \neq 0$ e do tipo B quando $K(t_0) = 0$.*

Em um flattening do tipo A, temos $|\gamma'(t_0) \times \gamma''(t_0)| \neq 0$, assim, $T(t_0) = T'(t_0) = T''(t_0) = 0$ implica que a dimensão do espaço gerado por $\{\gamma'(t_0), \gamma''(t_0), \gamma'''(t_0), \gamma^{(4)}(t_0), \gamma^{(5)}(t_0)\}$ é 2, logo $T'''(t_0) \neq 0 \Leftrightarrow \det(\gamma'(t_0), \gamma''(t_0), \gamma^{(6)}(t_0)) \neq 0$.

Em um flattening do tipo B, temos $|\gamma'(t_0) \times \gamma''(t_0)| = 0$, assim, $\gamma'(t_0)$ e $\gamma''(t_0)$ são colineares. Logo $T(t_0) = T'(t_0) = 0$ e $T''(t_0) = 0 \Leftrightarrow \det(\gamma'(t_0), \gamma'''(t_0), \gamma^{(4)}(t_0)) = 0$ e portanto $T'''(t_0) \neq 0 \Leftrightarrow \det(\gamma'(t_0), \gamma'''(t_0), \gamma^{(5)}(t_0)) \neq 0$.

Observação 4.1 *Considerando a curva $\gamma(t) = (t, a_2t^2 + \dots, b_3t^3 + \dots)$ temos:*

$$\begin{aligned} T(0) = 0 &\Leftrightarrow a_2b_3 = 0, \\ T'(0) = 0 &\Leftrightarrow a_2b_4 = 0, \\ T''(0) = 0 &\Leftrightarrow a_3b_4 - a_4b_3 + a_2b_5 = 0, \\ T'''(0) \neq 0 &\Leftrightarrow 2(a_3b_5 - a_5b_3) + a_2b_6 \neq 0. \end{aligned}$$

Portanto, em um flattening do tipo A, temos $b_3 = b_4 = b_5 = 0$ e $T'''(0) \neq 0 \Leftrightarrow a_2b_6 \neq 0$. Assim, podemos escrever $f(t) = a_2t^2 + \dots$ e $g(t) = b_6t^6 + \dots$ com $a_2b_6 \neq 0$. Em um flattening do tipo B, temos $a_2 = 0, a_3b_4 - a_4b_3 = 0$ e $T'''(0) \neq 0 \Leftrightarrow a_3b_5 - a_5b_3 \neq 0$. Portanto, podemos escrever $f(t) = a_3t^3 + \dots$ e $g(t) = b_5t^5 + \dots$, com $a_3b_5 \neq 0$.

Consideremos agora as famílias a 2-parâmetros de curvas no \mathbb{R}^3 ;

$$\begin{aligned} \gamma : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (t, a, b) &\mapsto \gamma_{(a,b)}(t). \end{aligned}$$

Associado a esta família, temos as seguintes funções curvatura e torção;

$$\begin{aligned} K : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} & T : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (t, a, b) &\mapsto K_{(a,b)}(t) & (t, a, b) &\mapsto T_{(a,b)}(t). \end{aligned}$$

Por simplicidade de notação, quando não houver confusão, denotaremos $T_{(0,0)}(0)$, $\frac{\partial T_{(0,0)}}{\partial t}(0)$, $\frac{\partial^2 T_{(0,0)}}{\partial t^2}(0)$, \dots por $T(0)$, $T'(0)$, $T''(0)$, \dots respectivamente. Usaremos a mesma notação para a função K .

Proposição 4.1 *O subconjunto de famílias $\gamma : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tais que a função $T : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tenha $T(0) = T'(0) = T''(0) = 0$ e $T'''(0) \neq 0$ é residual em $C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ com a topologia C^∞ -Whitney.*

Demonstração: O subconjunto algébrico que define o conjunto de tais curvas tem dimensão 4 no espaço de jatos, portanto, o resultado segue diretamente do teorema de transversalidade de Thom.

□

Definição 4.2 *As famílias de curvas caracterizadas pela Proposição 4.1 serão chamadas de famílias genéricas a 2-parâmetros.*

4.2 Projeção de famílias genéricas a 2-parâmetros

Ao analisarmos a projeção ortogonal em planos de uma família genérica a 2-parâmetros de curvas no \mathbb{R}^3 , podemos considerar a projeção como um desdobramento a 4-parâmetros, dos quais u e v fornecem as direções de projeção e a e b fornecem a geometria da transição da família de curvas $\gamma_{(a,b)}$.

Consideremos a família genérica a 2-parâmetros

$$\gamma_{(a,b)}(t) = (t, f(t) + ap_1(a, b, t) + bp_2(a, b, t), g(t) + aq_1(a, b, t) + aq_2(a, b, t)),$$

onde $\gamma_{(0,0)}(t) = (t, f(t), g(t)) = (t, a_2t^2 + \dots, b_3t^3 + \dots)$ apresenta um flattening degenerado de codimensão 2 e $p_i, q_i \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$, $i = 1, 2$. Portanto, a família de projeções é dada por

$$P : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(t, (a, b), (u, v)) \mapsto (f(t) + ap_1(a, b, t) + bp_2(a, b, t) - ut, \\ g(t) + aq_1(a, b, t) + aq_2(a, b, t) - vt).$$

Passamos agora a encontrar condições sobre a família genérica a 2-parâmetros, de forma que a projeção $P_{(0,0,0)}(t)$ tenha as singularidades A_6 e E_8 .

Proposição 4.2 *Se uma família genérica a 2-parâmetros $\gamma_{(a,b)}$ apresenta um flattening degenerado*

(i) *do tipo A e $T^{(4)}(0)K(0) - 5T'''(0)K'(0) \neq 0 \Rightarrow P_{(0,0,0)}(t)$ tem uma singularidade A_6 ,*

(ii) *do tipo B $\Rightarrow P_{(0,0,0)}(t)$ tem uma singularidade E_8 .*

Demonstração: (i) Da Observação 4.1, $P_{(0,0,0)}(t) = (a_2t^2 + \dots, b_6t^6 + \dots)$ com $a_2b_6 \neq 0$. Com isso, segue-se da Proposição 2.1 que $P_{(0,0,0)}(t)$ tem uma singularidade A_6 se, e somente se, $(a_2b_7 - 3b_6a_3) \neq 0$. Mas isto é justamente a condição $T^{(4)}(0)K(0) - 5T'''(0)K'(0) \neq 0$.

(ii) Segue de modo análogo ao item (i).

□

Na proposição a seguir encontramos condições sobre a família $\gamma_{(a,b)}$ para que a projeção $P_{(a,b,u,v)}(t)$ seja um desdobramento versal em uma singularidade A_6 e E_8 .

Proposição 4.3 *Seja $\gamma_{(a,b)}$ uma família genérica a 2-parâmetros. Então,*

- (i) *se $\gamma_{(a,b)}$ é do tipo A $\Rightarrow P_{(a,b,u,v)}(t)$ é um desdobramento versal em uma singularidade A_6 .*
- (ii) *se $\gamma_{(a,b)}$ é do tipo B e*

$$K''(0) \left(\frac{\partial T_{(0,0)}}{\partial b}(0) \frac{\partial^3 T_{(0,0)}}{\partial t^2 \partial a}(0) - \frac{\partial T_{(0,0)}}{\partial a}(0) \frac{\partial^3 T_{(0,0)}}{\partial t^2 \partial b}(0) \right) +$$

$$T^{(3)}(0) \left(\frac{\partial T_{(0,0)}}{\partial a}(0) \frac{\partial^2 K_{(0,0)}}{\partial t \partial b}(0) - \frac{\partial T_{(0,0)}}{\partial b}(0) \frac{\partial^2 K_{(0,0)}}{\partial t \partial a}(0) \right) \neq 0$$

$\Rightarrow P_{(a,b,u,v)}(t)$ é um desdobramento versal em uma singularidade E_8 .

Demonstração: Consideremos a família genérica a 2-parâmetros de curvas

$$\gamma_{(a,b)}(t) = (t, f(t) + ap_1(t, a, b) + bp_2(t, a, b), g(t) + aq_1(t, a, b) + bq_2(t, a, b)).$$

(i) Podemos escrever $f(t) = a_2 t^2 + \dots$ e $g(t) = b_6 t^6 + \dots$ com $a_2 b_6 \neq 0$. A projeção ortogonal da família é dada por

$$P_{(a,b,u,v)}(t) = (a_2 t^2 + a_3 t^3 + \dots + ap_1(t, a, b) + bp_2(t, a, b) - ut,$$

$$b_6 t^6 + \dots + aq_1(t, a, b) + bq_2(t, a, b) - vt).$$

Pelo critério de versalidade, $P_{(a,b,u,v)}(t)$ é versal quando

$$j^7 \left(T\mathcal{A}_e(P_{(0,0,0,0)}) + \mathbb{R}\{\dot{P}_a, \dot{P}_b, \dot{P}_u, \dot{P}_v\} \right) = J^7(1, 2).$$

Chamando o lado esquerdo da igualdade acima de V , temos que V é dado por

$$\begin{pmatrix} 2a_2 t + 3a_3 t^2 + \dots + 8a_8 t^7 \\ 6b_6 t^5 + 7b_7 t^6 + 8b_8 t^7 \end{pmatrix} \xi + \eta(a_2 t^2 + \dots + a_7 t^7, b_6 t^6 + b_7 t^7) +$$

$$+\mathbb{R}\{(p_1(t, 0, 0), q_1(t, 0, 0)), (p_2(t, 0, 0), q_2(t, 0, 0)), (t, 0), (0, t)\},$$

onde $\xi \in C^\infty(\mathbb{R})$ e $\eta(x, y) = (\eta_1(x, y), \eta_2(x, y))$, com $\eta_i \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Obviamente $V \subset J^7(1, 2)$. Para a outra inclusão, fazendo $\xi = t^3, t^4, t^5$ e t^6 , obtemos os termos $(t^4, 0)$, $(t^5, 0)$, $(t^6, 0)$ e $(t^7, 0)$ respectivamente.

Pela proposição anterior, a condição para se obter uma singularidade A_6 é dada por $a_2b_7 - 3a_3b_6 \neq 0$, que por sua vez, garante que $(0, t^6)$ e $(0, t^7) \in V$. De fato, fazendo $\eta_2(x, y) = x^3$ e $\eta_2(x, y) = y$ obtemos $(0, a_2^3t^6 + 3a_2^2a_3t^7)$ e $(0, b_6t^6 + b_7t^7)$ respectivamente e, portanto, $a_2b_7 - 3a_3b_6 \neq 0$ implica que $(0, t^6)$ e $(0, t^7) \in V$. Com isso, é fácil obter os termos $(t^2, 0)$, $(t^3, 0)$, $(0, t^4)$ e $(0, t^5)$, faltando assim apenas os elementos $(0, t^2)$ e $(0, t^3)$. Podemos obter $(0, a_2t^2 + a_3t^3)$ fazendo $\eta_2(x, y) = x$. Por outro lado, tomando $p_1(t, 0, 0) \equiv 0$ e $q_1(t, 0, 0) = \tilde{a}_1t + \tilde{a}_2t^2 + \dots$, temos o termo $(0, \tilde{a}_2t^2 + \tilde{a}_3t^3)$. Logo, os termos restante são obtidos quando $a_2\tilde{a}_3 - \tilde{a}_2a_3 \neq 0$ que é justamente a condição

$$\frac{\partial T}{\partial a}(0) = 2a_2 \frac{\partial^3 q_1}{\partial t^3}(0) - 6a_3 \frac{\partial^2 q_1}{\partial t^2}(0) \neq 0$$

de genericidade da curva. Temos assim demonstrado o item (i).

(ii) Neste caso, podemos escrever $f(t) = a_3t^3 + \dots$ e $g(t) = b_5t^5 + \dots$ com $a_3b_5 \neq 0$. A condição da hipótese pode ser escrita como

$$4172a_3^3 \left(3a_3(-b_{22}a_{24} + a_{22}b_{24}) + 3a_4(-a_{22}b_{23} + b_{22}a_{23}) + 5b_5(a_{12}b_{22} - a_{22}b_{12}) \right) \neq 0$$

onde

$$\begin{aligned} p_1(t, 0, 0) &= a_{12}t^2 + a_{13}t^3 + \dots & q_1(t, 0, 0) &= a_{22}t^2 + a_{23}t^3 + \dots \\ p_2(t, 0, 0) &= b_{12}t^2 + b_{13}t^3 + \dots & q_2(t, 0, 0) &= b_{22}t^2 + b_{23}t^3 + \dots \end{aligned}$$

Temos que $P_{(a,b,u,v)}(t)$ é versal quando

$$j^5 \left(T\mathcal{A}(P_{(0,0,0,0)}) + \mathbb{R}\{\dot{P}_a, \dot{P}_b, \dot{P}_u, \dot{P}_v\} \right) = J^5(1, 2).$$

Novamente, chamando o lado esquerdo da igualdade acima de V , temos que $V \subset J^5(1, 2)$. Com cálculos semelhantes ao item (i), segue-se que $(t, 0)$, $(t^3, 0)$, $(t^4, 0)$, $(t^5, 0)$, $(0, t)$ e $(0, t^5) \in V$. Restando assim, obtermos os elementos $(t^2, 0)$, $(0, t^2)$, $(0, t^3)$ e $(0, t^4)$. Fazendo $\eta_1(x, y) = x$ temos $(0, a_3t^3 + a_4t^4)$ e tomando $\xi = 1$, obtemos $(3a_3t^2, 5b_5t^4)$.

Dessa forma podemos escrever

$$\begin{aligned} p_1(t, 0, 0) &= a_{12}t^2 & q_1(t, 0, 0) &= a_{22}t^2 + a_{23}t^3 + a_{24}t^4 \\ p_2(t, 0, 0) &= b_{12}t^2 & q_2(t, 0, 0) &= b_{22}t^2 + b_{23}t^3 + b_{24}t^4. \end{aligned}$$

Assim, obtemos os termos restantes quando

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & a_3 & a_4 \\ 3a_3 & 0 & 0 & 5b_5 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ b_{12} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \end{vmatrix} \neq 0,$$

que é justamente a condição da hipótese.

□

Observação 4.2

- *Segue-se da demonstração da Proposição 4.3 (i) que a condição para que $P_{(a,b,u,v)}$ seja um desdobramento versal em uma singularidade A_6 recai sobre os parâmetros a, u e v . Assim, no que segue, tomaremos*

$$\gamma_{(a,0)}(t) = (t, t^2, t^7 + t^6 + at^3)$$

como forma normal de uma família genérica a 2-parâmetros apresentando um flattening degenerado do tipo A.

- *Uma família genérica a 2-parâmetros de curvas continua sendo um conjunto denso de curvas no \mathbb{R}^3 quando adicionamos as condições das Proposições 4.2 e 4.3.*

Pela Proposição 4.3, uma família genérica a 2-parâmetros do tipo A é um desdobramento versal em uma singularidade A_6 . Portanto, para alguns valores dos parâmetros u, v, a e b , a projeção apresenta morsificação para a singularidade A_6 . A proposição a seguir especifica em quais direções isso ocorre.

Teorema 4.1 *Dada uma família genérica a 2-parâmetros de curvas no \mathbb{R}^3 do tipo A, a projeção ortogonal da família $\gamma_{(a,b)}$ na direção $(1, u, u^6 + u^5 + au^2)$ fornece uma morsificação da singularidade A_6 quando*

$$-\frac{6}{11} < u < 0, \\ -u^3 \left(\frac{57}{16}u + \frac{13}{4} \right) < a < u^2 \left(4u^2 + 5u + \frac{9}{4} \right).$$

Demonstração: A forma normal de uma família genérica a 2-parâmetro que apresenta um flattening degenerado do tipo A pode ser escrita da forma

$$\gamma_{(a,b)}(t) = (t, t^2, t^7 + t^6 + at^3).$$

Portanto, a projeção ortogonal da família é dada por

$$P_{(a,u,v)}(t) = (t^2 - ut, t^7 + t^6 + at^3 - vt).$$

Como a \mathcal{A}_e -codimensão da singularidade A_6 é 3. Basta encontrarmos condições sobre a, u e v para que $P_{(a,u,v)}(t)$ tenha 3 pontos duplos. Podemos supor, sem perda de generalidade, que um ponto duplo ocorra na origem. Assim, temos que $t_1 = 0, s_1 = u$ e $v = u^6 + u^5 + au^2$. Para encontrar os demais pontos duplos temos as seguintes equações

$$s + t - u = 0 \\ (t^6 + t^5s + t^4s^2 + t^3s^3 + t^2s^4 + ts^5 + s^6) + (t^5 + t^4s + t^3s^2 + t^2s^3 + ts^4 + s^5) + \\ a(ts + s^2 + t^2) - v = 0$$

isolando s na primeira equação e substituindo na segunda, juntamente com a condição $v = u^6 + u^5 + au^2$, obtemos

$$t(t-u)(t^4 - 2ut^3 + (7u^2 + 3u)t^2 - (6u^3 + 3u^2)t + 5u^4 + 4u^3 + a) = 0.$$

A condição para se obter dois pontos duplos distintos fora da origem na projeção $P_{(a,u,v)}(t)$ é equivalente ao polinômio

$$t^4 - 2ut^3 + (7u^2 + 3u)t^2 - (6u^3 + 3u^2)t + 5u^4 + 4u^3 + a,$$

ter quatro raízes reais distintas em relação a variável t . Mas, fazendo a mudança de variável $t = T + u/2$, o polinômio torna-se

$$T^4 + (3u + \frac{11}{2}u^2)T^2 + \frac{57}{16}u^4 + \frac{13}{4}u^3 + a.$$

Esse novo polinômio tem 4 raízes reais e distintas quando

$$\frac{11}{2}u^2 + 3u < 0, \quad 0 < \frac{57}{16}u^4 + \frac{13}{4}u^3 + a \quad \text{e} \quad 0 < 16u^4 - 4a + 9u^2 + 20u^3.$$

O que é equivalente a

$$-\frac{6}{11} < u < 0, \\ -\frac{57}{16}u^4 - \frac{13}{4}u^3 < a < 4u^4 + 5u^3 + \frac{9}{4}u^2.$$

Finalizando a demonstração. □

4.3 Morsificações da singularidade E_8

Nesta seção estudamos projeções ortogonais de uma família genérica a 2-parâmetros do tipo B e encontramos as direções de projeção para as quais a curva plana projetada seja uma transição entre as morsificações da singularidade E_8 . Assim, com pequenas perturbações destas direções, devemos obter as morsificações da singularidade E_8 .

Consideremos a forma normal de uma família genérica a 2-parâmetros do tipo B;

$$\gamma_{(a,b)}(t) = (t, t^3, t^5 + at^2 + bt^4). \quad (4.1)$$

Assim, a família de projeções ortogonais no plano $x = 0$ é dada por

$$P : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (t, (a, b), (u, v)) \mapsto (t^3 - ut, t^5 + at^2 + bt^4 - vt).$$

Existem três tipos de morsificações da singularidade E_8 , as quais denotaremos por M_1, M_2 e M_3

Observemos na figura acima que a passagem de uma morsificação para outra significa passar por um ponto triplo.

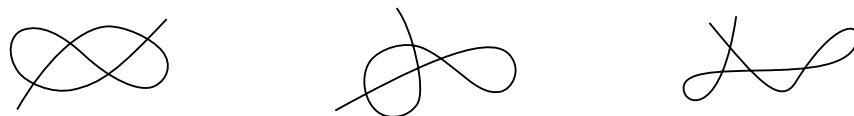


Figura 4.1: Morsificações de E_8 , respectivamente M_1, M_2 e M_3 .

Definição 4.3 Definimos a transição T_1 , (resp. T_2), sendo a passagem da morsificação M_1 para a morsificação M_2 , (resp. a passagem da morsificação M_2 para a morsificação M_3).

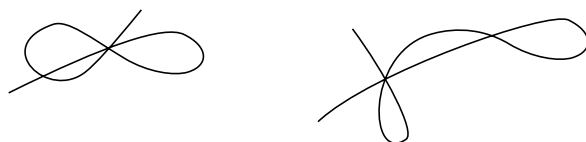


Figura 4.2: Transições T_1 e T_2 .

Observemos também que as duas transições possuem um ponto triplo e um ponto duplo. No que segue iremos diferenciar uma transição da outra. Assim, como foi feito no capítulo 3 para as singularidades E_6 , podemos definir as transições como uma “seqüência de letras” da seguinte forma: sejam t_1, t_2 e t_3 , (distintos entre si), os parâmetros onde ocorre um ponto triplo para a curva, e seja t_4 e t_5 os parâmetros onde ocorre um ponto duplo. Dessa forma, temos a seguinte definição:

Definição 4.4 Em uma transição T_1 , obtemos uma seqüência crescente de parâmetros do tipo $\{t_1, t_4, t_2, t_3, t_5\}$. E em uma transição T_2 , obtemos uma seqüência crescente de parâmetros do tipo $\{t_1, t_4, t_5, t_2, t_3\}$.

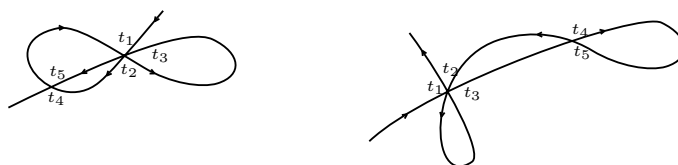


Figura 4.3: Seqüência de palavras nas transições T_1 e T_2 .

Dessa forma, procuramos condições sobre os coeficientes a, b, u e v de forma a obter essas transições na projeção $P_{(a,b,u,v)}$. Para isso, devemos primeiramente obter um ponto

triplo na projeção $P_{(a,b,u,v)}$. Supomos, sem perda de generalidade, que o ponto triplo ocorra na origem, assim

$$P_{(a,b,u,v)}(t_i) = (t_i^3 - ut_i, t_i^5 + at_i^2 + bt_i^4 - vt) = (0, 0), \quad i = 1, 2, \text{ e } 3.$$

Das equações $t_i^3 - ut_i = 0$, uma condição necessária para que tenhamos três raízes reais é que u seja maior que 0. Dessa forma obtemos $t_1 = -\sqrt{u}$, $t_2 = 0$, $t_3 = \sqrt{u}$. Substituindo esses valores na segunda coordenada de P , obtemos

$$\begin{cases} u^2\sqrt{u} + bu^2 + au - v\sqrt{u} = 0 \\ -u^2\sqrt{u} + bu^2 + au + v\sqrt{u} = 0. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema acima obtém-se

$$\begin{cases} v = u^2 \\ a = -ub. \end{cases}$$

Vamos considerar $b \neq 0$, pois caso contrário veremos mais adiante que não conseguimos obter um ponto duplo fora da origem. Com isso, temos o seguinte lema:

Lema 4.1 *Dada uma família genérica a 2-parâmetros do tipo B. Obtemos um ponto triplo na projeção quando a direção for dada por*

$$(1, u, v) = \left(1, -\frac{a}{b}, \frac{a^2}{b^2}\right), \quad (4.2)$$

com $u > 0$.

Até o momento sabemos como encontrar um ponto triplo para a projeção, mas dentre essas direções quais delas nos fornecem as transições T_1 ou T_2 ? E como diferenciar uma transição da outra?

Para responder a primeira questão, observamos que tanto a transição T_1 quanto a transição T_2 possuem uma auto intersecção simples fora da origem. Dessa forma, passamos agora a procurar condições para que a projeção além do ponto triplo, tenha um ponto duplo fora da origem.

Seja t_4 e t_5 o valor onde ocorre tal ponto duplo, ou seja

$$P_{(a,b,u,v)}(t_i) = (t_i^3 - ut_i, t_i^5 + at_i^2 + bt_i^4 - vt) = (x, y), \quad i = 4 \text{ e } 5 \quad (4.3)$$

com $(x, y) \neq (0, 0)$ e $t_4 \neq t_5$. A equação acima juntamente com a condição 4.2 nos leva ao seguinte sistema

$$\begin{cases} t_i^3 - ut_i = x \\ (t_i^3 - ut_i)(t_i^2 + bt_i + u) = y, \quad i = 4, 5. \end{cases}$$

Logo, $t_i^2 + bt_i + u - y/x = 0$, obtemos assim os valores

$$t_4 = \frac{-bx + \sqrt{b^2x^2 - 4ux^2 + 4xy}}{2x} \quad \text{e} \quad t_5 = \frac{-bx - \sqrt{b^2x^2 - 4ux^2 + 4xy}}{2x}.$$

A condição $\Delta = b^2x^2 - 4ux^2 + 4xy > 0$ garante a existência do ponto duplo fora da origem. Por outro lado das equações em (4.3) temos o seguinte sistema

$$\begin{cases} t_4^3 - ut_4 = t_5^3 - ut_5 = x; \\ (t_4^3 - ut_4) - (t_5^3 - ut_5) = 0, \end{cases}$$

donde retiramos $x = b(b^2 - u)$ e $y = (-b^2 + 2u)x$. Observamos aqui que $b = 0$ ou $u = b^2$ implicam que $(x, y) = (0, 0)$, isso significa que o ponto duplo ocorre na origem, por esse motivo devemos considerar $b \neq 0$ e $u \neq b^2$. Com esses valores de x e y , a condição para obtenção de um ponto duplo fora da origem se torna

$$\Delta = -3b^2 + 4u > 0.$$

Podemos assim responder a primeira questão;

Lema 4.2 *Dada uma família genérica a 2-parâmetros do tipo B, obtemos uma transição T_1 ou T_2 na projeção ortogonal quando a direção é dada por*

$$(1, u, v) = \left(1, -\frac{a}{b}, \frac{a^2}{b^2}\right),$$

com $u > \frac{3b^2}{4}$.

Tendo respondido a primeira questão, voltamos nossa atenção à segunda questão: Como diferenciar uma transição da outra?

Para responder essa pergunta, faremos uso da diferença existente entre as seqüências crescentes de parâmetros estabelecidas para cada uma das transições.

Substituindo os valores de x e y nas equações para t_4 e t_5 , temos

$$t_4 = \frac{-b}{2} - \frac{|b||u - b^2|\sqrt{-3b^2 + 4u}}{2b(u - b^2)}$$

$$t_5 = \frac{-b}{2} + \frac{|b||u - b^2|\sqrt{-3b^2 + 4u}}{2b(u - b^2)}.$$

Com os valores de t_4 e t_5 acima, temos os seguintes resultados;

Lema 4.3 *Considerando $u > b^2$ temos que*

$$(i) \quad b < 0 \Leftrightarrow t_4 \in (\sqrt{u}, \infty) \quad e \quad t_5 \in (-\sqrt{u}, 0);$$

$$(ii) \quad b > 0 \Leftrightarrow t_4 \in (-\infty, -\sqrt{u}) \quad e \quad t_5 \in (0, \sqrt{u}).$$

Demonstração:

(i) (\Rightarrow) Por hipótese, temos que $b < 0$ e $u - b^2 > 0$, assim podemos escrever

$$t_4 = \frac{1}{2}(-b + \sqrt{-3b^2 + 4u}) \quad \text{e} \quad t_5 = \frac{1}{2}(-b - \sqrt{-3b^2 + 4u}).$$

Mostraremos primeiramente que $t_4 > \sqrt{u}$.

Temos também assegurada a seguinte desigualdade $4b(b + \sqrt{u}) < 0$. Logo;

$$\begin{aligned} -3b^2 + 4u + 4b(b + \sqrt{u}) &< -3b^2 + 4u \\ b^2 + 4b\sqrt{u} + 4u &< -3b^2 + 4u \\ (b + 2\sqrt{u})^2 &< -3b^2 + 4u \quad (\text{por hipótese, } b + 2\sqrt{u} > 0) \\ b + 2\sqrt{u} &< \sqrt{-3b^2 + 4u} \\ \sqrt{u} &< \frac{-b + \sqrt{-3b^2 + 4u}}{2} = t_4. \end{aligned}$$

Portanto, $t_4 \in (\sqrt{u}, \infty)$.

Para mostrar que $t_5 \in (-\sqrt{u}, 0)$. Observamos que,

$$t_5 = \frac{-b - \sqrt{-3b^2 + 4u}}{2} > \frac{-b - \sqrt{4u}}{2} = \frac{-b - 2\sqrt{u}}{2} > -\sqrt{u}.$$

Por outro lado, $u > b^2 \Rightarrow 4u - 3b^2 > b^2 \Rightarrow \sqrt{4u - 3b^2} > |b|$. Mas, como $b < 0$, segue-se que $\sqrt{4u - 3b^2} > -b$. Assim,

$$t_5 = \frac{-b - \sqrt{-3b^2 + 4u}}{2} < \frac{-b}{2} + \frac{b}{2} = 0.$$

Demonstrando assim, a primeira implicação do teorema.

(\Leftarrow) Para demonstrar a volta, observamos que $t_4 + t_5 = -b$. Mas, por hipótese $t_4 > \sqrt{u}$ e $t_5 > -\sqrt{u}$, o que implica $t_4 + t_5 > 0$. Assim, $b < 0$.

(ii) Segue de forma análoga ao item (i).

□

Lema 4.4 Considerando $\Delta = -3b^2 + 4u > 0$ temos que

(i) $\sqrt{u} < b \Leftrightarrow t_4, t_5 \in (-\sqrt{u}, 0)$;

(ii) $b < -\sqrt{u} \Leftrightarrow t_4, t_5 \in (0, \sqrt{u})$.

Demonstração:

(i) (\Rightarrow) Por hipótese $b > 0$ e $-b^2 + u < 0$. Logo, podemos escrever

$$t_4 = \frac{1}{2}(-b + \sqrt{-3b^2 + 4u}) \quad \text{e} \quad t_5 = \frac{1}{2}(-b - \sqrt{-3b^2 + 4u}).$$

Como $t_5 < t_4$, basta mostrarmos que $t_4 < 0$ e $t_5 > -\sqrt{u}$. Por hipótese, temos que $u - b^2 < 0$. Assim,

$$u < b^2 \Rightarrow 4u - 3b^2 < b^2 \Rightarrow \sqrt{4u - 3b^2} < b \Rightarrow -b + \sqrt{4u - 3b^2} < 0 \Rightarrow t_4 < 0.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} b(b - \sqrt{u}) &> 0 \\ -3b^2 + 4u + 4b(b - \sqrt{u}) &> -3b^2 + 4u \\ b^2 - 4b\sqrt{u} + 4u &> -3b^2 + 4u \\ (b - 2\sqrt{u})^2 &> -3b^2 + 4u \\ |b - 2\sqrt{u}| &> \sqrt{-3b^2 + 4u}. \end{aligned}$$

Mas por hipótese $\frac{\sqrt{3}}{2}b < \sqrt{u}$, que implica $b - 2\sqrt{u} < 0$. Assim

$$\begin{aligned} |b - 2\sqrt{u}| &> \sqrt{-3b^2 + 4u} \\ -(b - 2\sqrt{u}) &> \sqrt{-3b^2 + 4u} \\ \sqrt{u} &> \frac{b + \sqrt{-3b^2 + 4u}}{2} \\ -\sqrt{u} &< \frac{-b - \sqrt{-3b^2 + 4u}}{2} = t_5. \end{aligned}$$

Portanto, concluímos que $t_4, t_5 \in (-\sqrt{u}, 0)$.

(\Leftarrow) Por hipótese, temos que $t_4, t_5 < 0$ e novamente como $t_4 + t_5 = -b$, segue-se que $b > 0$. Também por hipótese $t_4 t_5 > 0$, assim,

$$\begin{aligned} \left(\frac{-b}{2} - \frac{|u - b^2|\sqrt{-3b^2 + 4u}}{2(u - b^2)} \right) \left(\frac{-b}{2} + \frac{|u - b^2|\sqrt{-3b^2 + 4u}}{2(u - b^2)} \right) &> 0 \\ \left(\frac{b^2}{4} \right) - \left(\frac{-3b^2 + 4u}{4} \right) &> 0 \\ b^2 - u &> 0 \\ b^2 &> u. \end{aligned}$$

E, como $b > 0$, segue-se que $b > \sqrt{u}$.

(ii) A demonstração é análoga ao item (i).

□

Com esses lemas, estamos prontos para caracterizar as direções de projeção onde ocorrem as transições T_1 e T_2 .

Teorema 4.2 *Seja γ_a uma família genérica a 2-parâmetros do tipo B. A projeção ortogonal dessa família na direção*

$$(1, u, v) = \left(1, -\frac{a}{b}, \frac{a^2}{b^2}\right),$$

com $u > 0$, apresenta uma

- (i) *transição T_1 quando $\{-\sqrt{u} < b < 0\}$ ou $\{0 < b < \sqrt{u}\}$;*
- (ii) *transição T_2 quando $\left\{-\sqrt{\frac{4u}{3}} < b < -\sqrt{u}\right\}$ ou $\left\{\sqrt{u} < b < \sqrt{\frac{4u}{3}}\right\}$.*

Demonstração: Por hipótese, como a direção de projeção é dada por $(1, -\frac{a}{b}, \frac{a^2}{b^2})$, segue-se do Lema 4.1 que a projeção tem um ponto triplo na origem, e além disso, o ponto triplo ocorre quando $t_1 = -\sqrt{u}$, $t_2 = 0$ e $t_3 = \sqrt{u}$.

(i) Como $\{-\sqrt{u} < b < 0\}$ ou $\{0 < b < \sqrt{u}\}$, temos garantido pelo Lema 4.3 que $t_4 \in (\sqrt{u}, \infty)$ e $t_5 \in (-\sqrt{u}, 0)$ ou $t_4 \in (-\infty, -\sqrt{u})$ e $t_5 \in (0, \sqrt{u})$. Logo, temos uma das seguintes seqüências crescentes de palavras

$$\{t_1, t_5, t_2, t_3, t_4\} \quad \text{ou} \quad \{t_4, t_1, t_2, t_5, t_3\}.$$

Portanto, pela Definição 4.4, obtemos uma transição T_1 .

(ii) De modo análogo ao item anterior, usando o Lema 4.4, obtemos as seguintes seqüências de palavras

$$\{t_1 < t_4 < t_5 < t_2 < t_3\} \quad \text{ou} \quad \{t_1 < t_2 < t_4 < t_5 < t_3\}.$$

E, portanto, novamente pela Definição 4.4, obtemos uma transição T_2 .

□

Classificação de diagramas de curvas planas

Neste capítulo classificamos diagramas divergentes do tipo

$$(\mathbb{R}, 0) \xleftarrow{f} (\mathbb{R}, 0) \xrightarrow{\alpha} (\mathbb{R}^2, 0),$$

onde f tem ordem finita e α é um germe simples de \mathcal{A}_e -codimensão ≤ 4 . Para o caso multilocal, consideramos diagramas da forma

$$\begin{array}{ccccc} (\mathbb{R}, 0) & \xleftarrow{f_1} & (\mathbb{R}, 0) & \xrightarrow{\alpha_1} & (\mathbb{R}^2, 0) \\ & & & \nearrow \alpha_2 & \\ (\mathbb{R}, 0) & \xleftarrow{f_2} & (\mathbb{R}, 0) & \vdots & \\ & \vdots & & \nearrow \alpha_r & \\ (\mathbb{R}, 0) & \xleftarrow{f_r} & (\mathbb{R}, 0) & & \end{array}$$

e apresentamos a classificação quando $r = 2, 3, 4$ e a \mathcal{A}_e -codimensão do multigerme $(\alpha_1; \dots; \alpha_r)$ é menor ou igual a 2. Estas classificações serão utilizadas no capítulo 6, onde estudamos germes e multigermes de curvas planas sob uma nova relação de equivalência, a \mathcal{A}_h -equivalência.

5.1 Preliminares

Nesta seção estabelecemos alguns conceitos e resultados básicos sem restrições nas dimensões dos espaços envolvidos.

Um diagrama divergente

$$(f, g) : (\mathbb{R}^p, 0) \leftarrow (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^q, 0) \tag{5.1}$$

é um par de germes de aplicações $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ e $g : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^q, 0)$.

Definição 5.1 *Dois diagramas divergentes $(f_1, g_1), (f_2, g_2) : (\mathbb{R}^p, 0) \leftarrow (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^q, 0)$ são equivalentes se existem germes de difeomorfismos H de $(\mathbb{R}^n, 0)$, h de $(\mathbb{R}^p, 0)$ e K de $(\mathbb{R}^q, 0)$ que comutam o seguinte diagrama:*

$$\begin{array}{ccccc} (\mathbb{R}^p, 0) & \xleftarrow{f_1} & (\mathbb{R}^n, 0) & \xrightarrow{g_1} & (\mathbb{R}^q, 0) \\ h \downarrow & & H \downarrow & & \downarrow K \\ (\mathbb{R}^p, 0) & \xleftarrow{f_2} & (\mathbb{R}^n, 0) & \xrightarrow{g_2} & (\mathbb{R}^q, 0). \end{array}$$

Podemos identificar um diagrama divergente $(f, g) : (\mathbb{R}^p, 0) \leftarrow (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^q, 0)$ com o germe de aplicação $\gamma : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q, (0, 0))$, $\gamma(x) = (f(x), g(x))$. Com esta identificação, a equivalência de diagramas divergentes corresponde à ação de um subgrupo do grupo \mathcal{A} , consistindo de elementos tais que o germe de difeomorfismo na meta é do tipo produto, isto é, preserva a estrutura produto de $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$.

Então, dado o diagrama divergente $\gamma = (f, g) : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q, (0, 0))$, escrevemos $\theta_\gamma = \theta_f \oplus \theta_g$ e definimos o espaço tangente e o espaço tangente estendido associados à equivalência de diagramas divergentes por

$$T(\gamma) = t\gamma(\mathcal{M}_n\theta_n) + [wf(\mathcal{M}_p\theta_p) \oplus wg(\mathcal{M}_q\theta_q)]$$

e

$$T_e(\gamma) = t\gamma(\theta_n) + [wf(\theta_p) \oplus wg(\theta_q)].$$

Assim, $T_e(\gamma)$ (resp. $T(\gamma)$) é o conjunto de todos os $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2) \in \theta_\gamma$ (resp. $\sigma \in \mathcal{M}_n\theta_\gamma$) tais que existem $\xi \in \theta_n$ (resp. $\xi \in \mathcal{M}_n\theta_n$), $\eta_1 \in \theta_p$ (resp. $\eta_1 \in \mathcal{M}_p\theta_p$) e $\eta_2 \in \theta_q$ (resp. $\eta_2 \in \mathcal{M}_q\theta_q$) satisfazendo

$$\begin{cases} \sigma_1 = df(\xi) + \eta_1 \circ f \\ \sigma_2 = dg(\xi) + \eta_2 \circ g. \end{cases}$$

Definição 5.2 *A codimensão do diagrama γ é definida por*

$$\text{cod}(\gamma) = \dim_{\mathbb{R}} \frac{\theta_\gamma}{T_e(\gamma)}.$$

Seja $T_e(f)$ o conjunto de todos os campos de vetores $\sigma_1 \in \theta_f$ tais que $\sigma = (\sigma_1, 0) \in T_e(\gamma)$ ($0 \in \theta_g$). Temos:

Proposição 5.1 [19] *Se g é \mathcal{A} -finitamente determinado, então $\text{cod}(\gamma)$ é finita se, e somente se, $\dim_{\mathbb{R}} \frac{\theta_f}{T_e(f)}$ é finita, e neste caso*

$$\text{cod}(\gamma) = \dim_{\mathbb{R}} \frac{\theta_f}{T_e(f)} + \text{cod}(\mathcal{A}_e, g).$$

Corolário 5.1 *Se g é \mathcal{A} -infinitesimalmente estável, então*

$$\text{cod}(\gamma) = \dim_{\mathbb{R}} \frac{\theta_f}{T_e(f)}.$$

No caso multilocal, consideraremos diagramas $\Gamma = (f_1, g_1); \dots; (f_r, g_r)$ da forma 5.2 abaixo, constituídos de pares de germes de aplicações $f_i : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ e $g_i : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^q, 0)$ com $i = 1, \dots, r$.

$$\begin{array}{ccccc} (\mathbb{R}^p, 0) & \xleftarrow{f_1} & (\mathbb{R}^n, 0) & \xrightarrow{g_1} & (\mathbb{R}^q, 0) \\ & & & \nearrow^{g_2} & \\ (\mathbb{R}^p, 0) & \xleftarrow{f_2} & (\mathbb{R}^n, 0) & & \\ & \vdots & & \nearrow^{\vdots} & \\ & & & \nearrow^{g_r} & \\ (\mathbb{R}^p, 0) & \xleftarrow{f_r} & (\mathbb{R}^n, 0) & & \end{array} \quad (5.2)$$

O conceito de equivalência para esses diagramas é dado pela seguinte definição:

Definição 5.3 *Dois diagramas $\Gamma = (f_1, g_1); \dots; (f_r, g_r)$ e $\Gamma' = (f'_1, g'_1); \dots; (f'_r, g'_r)$, da forma 5.2, são equivalentes se existem germes de difeomorfismos H_i de $(\mathbb{R}^n, 0)$, h_i de $(\mathbb{R}^p, 0)$ e K de $(\mathbb{R}^q, 0)$ tais que $K \circ g_i = g'_i \circ H_i$, $h_i \circ f_i = f'_i \circ H_i$ para $i = 1, \dots, r$.*

O conjunto dos campos de vetores ao longo de Γ , denotado por θ_Γ , é definido por

$$\theta_\Gamma = \bigoplus_{i=1}^r \theta_{\gamma_i}$$

onde $\gamma_i = (f_i, g_i)$. Definimos o espaço tangente estendido associado à equivalência de diagramas no caso multilocal, denotado por $T_e(\Gamma)$, como o conjunto de todos os $\sigma = ((\sigma_{11}, \sigma_{12}), (\sigma_{21}, \sigma_{22}), \dots, (\sigma_{r1}, \sigma_{r2})) \in \theta_\Gamma$ tais que existam $(\xi_1, \dots, \xi_r) \in \bigoplus_r \theta_n$, $(\eta_1, \dots, \eta_r) \in \bigoplus_r \theta_p$ e $\psi \in \theta_q$ satisfazendo

$$\begin{cases} \sigma_{i1} = df_i(\xi_i) + \eta_i \circ f_i \\ \sigma_{i2} = dg_i(\xi_i) + \psi \circ g_i, \quad \text{para } i = 1, \dots, r. \end{cases}$$

De modo usual, obtemos o espaço tangente no caso multilocal.

Definição 5.4 *A codimensão do diagrama $\Gamma = (f_1, g_1); \dots; (f_r, g_r)$ é definida por*

$$\text{cod}(\Gamma) = \dim_{\mathbb{R}} \frac{\theta_\Gamma}{T_e(\Gamma)}.$$

Denotemos $\theta_f = \bigoplus_{i=1}^r \theta_{f_i}$. Seja $T_e(f)$ o conjunto dos $(\sigma_{11}, \sigma_{21}, \dots, \sigma_{r1}) \in \theta_f$ tais que $((\sigma_{11}, 0), (\sigma_{21}, 0), \dots, (\sigma_{r1}, 0)) \in T_e(\Gamma)$.

A próxima proposição é uma extensão da Proposição 5.1 a diagramas no caso multilocal, e será muito útil nos cálculos das codimensões de tais diagramas.

Proposição 5.2 *Se o multigerme $g = (g_1; \dots; g_r)$ é \mathcal{A} -finitamente determinado, então $\text{cod}(\Gamma)$ é finita se, e somente se, $\dim_{\mathbb{R}} \frac{\theta_f}{T_e(f)}$ é finita, e neste caso*

$$\text{cod}(\Gamma) = \dim_{\mathbb{R}} \frac{\theta_f}{T_e(f)} + \text{cod}(\mathcal{A}_e, g)$$

Demonstração: Basta observar que a seguinte seqüencia é exata:

$$0 \longrightarrow \frac{\theta_f}{T_e(f)} \xrightarrow{i^*} \frac{\theta_{\Gamma}}{T_e(\Gamma)} \xrightarrow{\pi^*} \frac{\theta_g}{T\mathcal{A}_e(g)} \longrightarrow 0$$

onde i^* e π^* são definidas por

$$i^*([\sigma_{11}, \dots, \sigma_{r1}]) = [(\sigma_{11}, 0), \dots, (\sigma_{r1}, 0)]$$

$$\pi^* \left(\left[(\sigma_{11}, \sigma_{12}), (\sigma_{21}, \sigma_{22}), \dots, (\sigma_{r1}, \sigma_{r2}) \right] \right) = [\sigma_{12}, \dots, \sigma_{r2}]$$

□

5.2 Diagramas de curvas planas

Frequentemente, por simplicidade, diremos apenas curva plana para um germe de curva plana $\alpha : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$.

Definição 5.5 *Um diagrama de curva plana é um diagrama divergente (f, α) do tipo*

$$(\mathbb{R}, 0) \xleftarrow{f} (\mathbb{R}, 0) \xrightarrow{\alpha} (\mathbb{R}^2, 0).$$

Então, de acordo com a Definição 5.1, dois diagramas de curvas planas (f_1, α_1) e (f_2, α_2) são equivalentes se existem germes de difeomorfismos H, h de $(\mathbb{R}, 0)$ e K de $(\mathbb{R}^2, 0)$ que tornam comutativo o diagrama

$$\begin{array}{ccccc} (\mathbb{R}, 0) & \xleftarrow{f_1} & (\mathbb{R}, 0) & \xrightarrow{\alpha_1} & (\mathbb{R}^2, 0) \\ h \downarrow & & H \downarrow & & \downarrow K \\ (\mathbb{R}, 0) & \xleftarrow{f_2} & (\mathbb{R}, 0) & \xrightarrow{\alpha_2} & (\mathbb{R}^2, 0). \end{array}$$

Definição 5.6 *Dada uma curva plana $\alpha : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$, definimos \mathcal{R}^α como sendo o seguinte subgrupo de \mathcal{R} :*

$$\mathcal{R}^\alpha = \{H \in \mathcal{R} : \exists \text{ um germe de difeomorfismo } K \text{ de } (\mathbb{R}^2, 0) \text{ tal que } K \circ \alpha = \alpha \circ H\}.$$

O lema abaixo será fundamental na classificação de diagramas (f, α) .

Lema 5.1

- (i) Se α_1 e α_2 são \mathcal{A} -equivalentes, então, dado qualquer f , o diagrama de curva plana (f, α_1) é equivalente ao diagrama $(f \circ H^{-1}, \alpha_2)$ para algum $H \in \mathcal{R}$.
- (ii) Dois diagramas de curvas planas (f_1, α) e (f_2, α) são equivalentes se, e somente se, f_1 e f_2 são $\mathcal{R}^\alpha \times \mathcal{L}$ -equivalentes.

Demonstração:

(i) Como α_1 e α_2 são \mathcal{A} -equivalentes, existem germes de difeomorfismos H e K tais que $K \circ \alpha_1 = \alpha_2 \circ H$. Então, é óbvio que (f, α_1) é equivalente ao diagrama $(f \circ H^{-1}, \alpha_2)$.

(ii) Segue imediatamente das duas definições anteriores. □

Tendo em vista o Lema 5.1, a fim de classificar diagramas (f, α) , consideramos inicialmente a forma normal β da curva plana α com relação à \mathcal{A} -equivalência, obtendo um diagrama (\tilde{f}, β) equivalente a (f, α) . Em seguida, determinamos a forma normal de \tilde{f} com relação ao subgrupo $\mathcal{R}^\beta \times \mathcal{L} \subset \mathcal{A}$ que “preserva” a curva β .

Definição 5.7 Um germe de função $f : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ tem ordem finita m , denotado por $\text{ord}(f) = m$, quando

$$f(0) = f'(0) = \dots = f^{(m-1)}(0) = 0 \quad e \quad f^{(m)}(0) \neq 0.$$

Dizemos que f tem ordem infinita, quando $f^{(k)}(0) = 0, \forall k \in \mathbb{N}$.

5.3 Classificação: Caso local

Nesta seção, consideramos diagramas de curvas planas (f, α) onde f tem ordem finita e α é um germe simples de \mathcal{A}_e -codimensão ≤ 4 . Para a classificação desses diagramas, vamos supor inicialmente que α seja regular.

Proposição 5.3 Seja (f, α) um diagrama de curva plana tal que α seja regular e f tenha ordem finita m . Então (f, α) é equivalente ao diagrama

$$t^m \leftarrow t \rightarrow (t, 0).$$

Demonstração: Como α é regular, temos que α é \mathcal{A} -equivalente a β , onde $\beta(t) = (t, 0)$. Logo, pelo Lema 5.1(i), (f, α) é equivalente a $(f \circ H^{-1}, \beta)$ para algum $H \in \mathcal{R}$. Além disso, $f \circ H^{-1}$ tem ordem m e portanto é \mathcal{A} -equivalente a g , onde $g(t) = t^m$.

Mas, neste caso, $\mathcal{R}^\beta = \mathcal{R}$ pois, se $\tilde{H} \in \mathcal{R}$, então o germe de difeomorfismo K , dado por $K(x, y) = (\tilde{H}(x), y)$, é tal que $K \circ \beta = \beta \circ \tilde{H}$, assim, $\tilde{H} \in \mathcal{R}^\beta$. Logo, $(f \circ H^{-1}, \beta)$

é equivalente a (g, β) pelo Lema 5.1(ii) e, por transitividade, segue-se então que (f, α) é equivalente a (g, β) . □

Seja agora $\alpha : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ singular, isto é, $\alpha'(0) = 0$. Se $\alpha''(0) \neq 0$ e α é \mathcal{A} -finitamente determinada, então α é \mathcal{A} -equivalente à singularidade A_{2k} , dada pelo germe $t \mapsto (t^2, t^{2k+1})$, com $k \geq 1$.

Por exemplo, se $k = 1$, temos uma cúspide ordinária A_2 dada por $t \mapsto (t^2, t^3)$. Para $k = 2$, a singularidade A_4 dada por $t \mapsto (t^2, t^5)$ é chamada de cúspide degenerada ou *ramploid cusp*.

Dado um germe de função C^∞ , $h : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow \mathbb{R}$, pelo Teorema de Preparação de Malgrange, podemos escrever $h(t) = h_1(t^2) + th_2(t^2)$, onde $h_1, h_2 : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ são germes de funções C^∞ . Além disso, se $\text{ord}(h) = m$, então podemos reescrever h como

$$h(t) = t^m a_1(t^2) + t^{m+1} a_2(t^2),$$

onde $a_1, a_2 : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ são germes de funções C^∞ , com $a_1(0) \neq 0$.

Proposição 5.4 *Seja (f, α) um diagrama de curva plana tal que α tenha uma cúspide ordinária e f tenha ordem finita m . Então (f, α) é equivalente ao diagrama*

$$t^m \leftarrow t \rightarrow (t^2, t^3).$$

Demonstração: É análoga à demonstração da proposição anterior, pois, por hipótese, α é \mathcal{A} -equivalente a β , onde $\beta(t) = (t^2, t^3)$, e neste caso $\mathcal{R}^\beta = \mathcal{R}$ também. Vamos provar esta última afirmação. De fato, dado $H \in \mathcal{R}$, temos $\beta(H(t)) = (H(t)^2, H(t)^3)$. Podemos escrever

$$H(t)^2 = t^2 a_1(t^2) + t^3 a_2(t^2) \quad \text{e} \quad H(t)^3 = t^3 b_1(t^2) + t^4 b_2(t^2),$$

onde $a_1, a_2, b_1, b_2 : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ são germes de funções C^∞ , com $a_1(0), b_1(0) \neq 0$. Assim, definindo K por $K(x, y) = (xa_1(x) + ya_2(x), yb_1(x) + x^2 b_2(x))$, obtemos $K \circ \beta = \beta \circ H$. □

Antes de classificarmos os diagramas cuja curva plana tenha uma singularidade A_{2k} , $k \geq 2$, vamos inicialmente caracterizar o grupo \mathcal{R}^β onde $\beta(t) = (t^2, t^{2k+1})$, com o objetivo de obter a \mathcal{R}^β -classificação dos germes de funções $f : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ de ordem finita.

Lema 5.2 *Seja $\beta : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$, $\beta(t) = (t^2, t^{2k+1})$, $k \geq 2$. Então*

$$\mathcal{R}^\beta = \{H \in \mathcal{R} : H''(0) = H^{(4)}(0) = \dots = H^{(2k-2)}(0) = 0\}.$$

Demonstração: Se $H \in \mathcal{R}^\beta$, existe um germe de difeomorfismo K de $(\mathbb{R}^2, 0)$ tal que $K \circ \beta = \beta \circ H$. Seja $K = (K_1, K_2)$, então $K_1(t^2, t^{2k+1}) = H(t)^2$. Suponhamos que

$$\begin{aligned} H(t) &= a_1 t + a_2 t^2 + \dots, \text{ com } a_1 \neq 0 \\ K_1(x, y) &= b_{10}x + b_{01}y + b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2 + \dots \end{aligned}$$

Da última igualdade, obtemos

$$K_1(t^2, t^{2k+1}) = b_{10}t^2 + b_{20}t^4 + \dots + b_{k0}t^{2k} + b_{01}t^{2k+1} + \dots$$

Comparando os coeficientes na igualdade $K_1(t^2, t^{2k+1}) = H(t)^2$, vemos que

$$\begin{aligned} 2a_1a_2 = 0 &\Rightarrow \boxed{a_2 = 0} \\ 2a_1a_4 + 2a_2a_3 = 0 &\Rightarrow \boxed{a_4 = 0} \\ 2a_1a_6 + 2a_2a_5 + 2a_3a_4 = 0 &\Rightarrow \boxed{a_6 = 0} \\ &\vdots \\ 2a_1a_{2(k-1)} + \dots + 2a_{k-1}a_k = 0 &\Rightarrow \boxed{a_{2k-2} = 0}. \end{aligned}$$

Portanto, $H''(0) = \dots = H^{(2k-2)}(0) = 0$.

Reciprocamente, seja $H \in \mathcal{R}$. Escrevemos

$$\begin{aligned} H(t)^2 &= t^2a_1(t^2) + t^3a_2(t^2) \\ H(t)^{2k+1} &= t^{2k+1}b_1(t^2) + t^{2k+2}b_2(t^2) \end{aligned}$$

onde $a_1, a_2, b_1, b_2 : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ são germes de funções C^∞ , com $a_1(0), b_1(0) \neq 0$.

Por hipótese, $H''(0) = \dots = H^{(2k-2)}(0) = 0$. Então, $H(t)^2$ não possui os termos de ordem 3, 5, ..., $2k-1$, o que implica $ord(a_2) \geq k-1$ e, portanto, podemos escrever $a_2(t) = t^{k-1}\tilde{a}_2(t)$, onde \tilde{a}_2 é um germe C^∞ . Assim,

$$\begin{aligned} H(t)^2 &= t^2a_1(t^2) + t^3(t^2)^{k-1}\tilde{a}_2(t^2) = t^2a_1(t^2) + t^{2k+1}\tilde{a}_2(t^2) \\ \text{e } H(t)^{2k+1} &= t^{2k+1}b_1(t^2) + t^{2k+2}b_2(t^2). \end{aligned}$$

Logo, tomando o germe de difeomorfismo K , dado por

$$K(x, y) = (xa_1(x) + y\tilde{a}_2(x), yb_1(x) + x^{k+1}b_2(x)),$$

temos $K \circ \beta = \beta \circ H$. Portanto $H \in \mathcal{R}^\beta$.

□

Lema 5.3 *Seja β como no lema anterior e seja $f : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ um germe de função de ordem finita m . Então,*

i) *se m é ímpar, f é \mathcal{R}^β -equivalente a*

$$t^m + d_1 t^{m+1} + d_2 t^{m+3} + \dots + d_{k-1} t^{m+2k-3},$$

com $d_1, \dots, d_{k-1} \in \mathbb{R}$ univocamente determinados.

ii) *se m é par, f é \mathcal{R}^β -equivalente a*

$$\pm t^m + d_1 t^{m+1} + d_2 t^{m+3} + \dots + d_{k-1} t^{m+2k-3},$$

com $d_1, \dots, d_{k-1} \in \mathbb{R}$ univocamente determinados, módulo a equivalência $d \sim \pm d$ para $d = (d_1, \dots, d_{k-1})$.

Demonstração: Suponhamos $f(t) = c_m t^m + c_{m+1} t^{m+1} + \dots$, com $c_m \neq 0$. Para simplificar podemos supor também que $c_m > 0$, sendo o caso $c_m < 0$ análogo. Então, dados $d_1, \dots, d_{k-1} \in \mathbb{R}$ quaisquer, temos que f é \mathcal{R} -equivalente a $t^m + d_1 t^{m+1} + \dots + d_{k-1} t^{m+2k-3}$. Conseqüentemente existe $H \in \mathcal{R}$ tal que

$$f(t) = H(t)^m + d_1 H(t)^{m+1} + \dots + d_{k-1} H(t)^{m+2k-3}. \quad (5.3)$$

Veremos agora que é possível escolher d_1, \dots, d_{k-1} de maneira que $H \in \mathcal{R}^\beta$, ou seja,

$$H''(0) = \dots = H^{(2k-2)}(0) = 0.$$

Suponhamos que $H(t) = a_1 t + a_2 t^2 + \dots$, com $a_1 \neq 0$, então o coeficiente de t^m em $H(t)^m$ é a_1^m , enquanto que para $r \geq 1$, o coeficiente de t^{m+r} é da forma

$$m a_1^{m-1} a_{r+1} + p(a_1, \dots, a_r),$$

sendo $p(a_1, \dots, a_r)$ um certo polinômio nos coeficientes a_1, \dots, a_r . Utilizando este fato e comparando os coeficientes em 5.3, temos

$$\begin{aligned} c_{m+1} &= m a_1^{m-1} a_2 + d_1 a_1^{m+1}, \\ c_{m+3} &= m a_1^{m-1} a_4 + p_0^1(a_1, a_2, a_3) + d_1 p_1^1(a_1, a_2, a_3) + d_2 a_1^{m+3}, \\ &\vdots \\ c_{m+2k-3} &= m a_1^{m-1} a_{2k-2} + p_0^{k-2}(a_1, \dots, a_{2k-3}) + \sum_{i=1}^{k-2} d_i p_i^{k-2}(a_1, \dots, a_{2k-3}) + \\ &\quad d_{k-1} a_1^{m+2k-3}. \end{aligned}$$

Dado que $a_1 \neq 0$, obviamente podemos escolher d_1, \dots, d_{k-1} de maneira que necessariamente $a_2 = a_4 = \dots = a_{2k-2} = 0$. Desta forma, $H \in \mathcal{R}^\beta$ e, portanto, f é \mathcal{R}^β -equivalente a

$$t^m + d_1 t^{m+1} + d_2 t^{m+3} + \dots + d_{k-1} t^{m+2k-3}.$$

Para finalizar a demonstração, suponhamos agora que $g(t) = t^m + d_1 t^{m+1} + \dots + d_{k-1} t^{m+2k-3}$ seja \mathcal{R}^β -equivalente a $g'(t) = t^m + d'_1 t^{m+1} + \dots + d'_{k-1} t^{m+2k-3}$ através de $H \in \mathcal{R}^\beta$, onde $H(t) = a_1 t + a_3 t^3 + \dots + a_{2k-3} t^{2k-3} + t^{2k-1} b(t)$, $b \in C^\infty$. Então,

$$g'(t) = g(H(t)) = a_1^m t^m + d_1 a_1^{m+1} t^{m+1} + m a_1^{m-1} a_3 t^{m+2} + \dots$$

de onde se deduz que $a_1^m = 1$ e $a_3 = 0$. Substituindo no lado direito da igualdade acima, obtemos

$$g'(t) = g(H(t)) = t^m + d_1 a_1 t^{m+1} + d_2 a_1^3 t^{m+3} + m a_1^{m-1} a_5 t^{m+4} + \dots$$

e daí $a_5 = 0$. Prosseguindo desta maneira, concluimos que $a_3 = a_5 = \dots a_{2k-3} = 0$. Logo,

$$g'(t) = g(H(t)) = t^m + d_1 a_1 t^{m+1} + d_2 a_1^3 t^{m+3} + \dots + d_{k-1} a_1^{2k-3} t^{m+2k-3} + t^{m+2k-2} b(t) s(t),$$

com $s(0) \neq 0$, donde resulta $b \equiv 0$. Assim, temos $H(t) = a_1 t$. Como $a_1^m = 1$, se m é ímpar então $H = id$ e portanto $g' = g$. Caso contrário, se m é par então $H = \pm id$ e $g'(t) = g(\pm t)$.

□

Proposição 5.5 *Seja (f, α) um diagrama de curva plana tal que α é do tipo A_{2k} , $k \geq 2$, e f tem ordem finita m . Então, (f, α) é equivalente a um dos seguintes diagramas*

$$t^m \leftarrow t \rightarrow (t^2, t^{2k+1}),$$

ou

$$t^m + t^{m+2r-1} + d_1 t^{m+2r+1} + \dots + d_{k-r-1} t^{m+2k-3} \leftarrow t \rightarrow (t^2, t^{2k+1}),$$

para $1 \leq r \leq k-1$ e certos $d_1, \dots, d_{k-r-1} \in \mathbb{R}$.

Demonstração: Dos Lemas 5.1 e 5.3, temos que (f, α) é equivalente a

$$t^m + d'_1 t^{m+1} + d'_2 t^{m+3} + \dots + d'_{k-1} t^{m+2k-3} \leftarrow t \rightarrow (t^2, t^{2k+1}),$$

para certos $d'_1, \dots, d'_{k-1} \in \mathbb{R}$. Se $d'_1, \dots, d'_{k-1} = 0$, estamos no primeiro caso do enunciado. Se os d'_{i_s} não são todos nulos, seja $r \in \{1, \dots, k-1\}$ tal que $d'_1 = \dots = d'_{r-1} = 0$ e $d'_r \neq 0$. Então podemos tomar mudanças lineares de coordenadas $H(t) = bt$ e $h(u) = \lambda u$ de maneira que o diagrama anterior se torne

$$t^m + t^{m+2r-1} + d_1 t^{m+2r+1} + \dots + d_{k-r-1} t^{m+2k-3} \leftarrow t \rightarrow (t^2, t^{2k+1}).$$

De fato, basta tomar $b = {}^{2r-1}\sqrt{d'_r}$ e $\lambda = b^m$.

□

Corolário 5.2 *Suponhamos que $m > 2k - 3$. Então na lista da classificação de diagramas de curvas planas na Proposição 5.5, para cada escolha de r e coeficientes d_1, \dots, d_{k-r-1} temos uma classe distinta de diagrama.*

Demonstração: Sejam

$$\begin{aligned} f(t) &= t^m + t^{m+2r-1} + d_1 t^{m+2r+1} + \dots + d_{k-r-1} t^{m+2k-3}, \\ g(t) &= t^m + t^{m+2r'-1} + d'_1 t^{m+2r'+1} + \dots + d'_{k-r'-1} t^{m+2k-3}, \end{aligned}$$

com $1 \leq r, r' \leq k - 1$ e $d_1, \dots, d_{k-r-1}, d'_1, \dots, d'_{k-r'-1} \in \mathbb{R}$. Suponhamos que f e g sejam $\mathcal{R}^\beta \times \mathcal{L}$ -equivalentes por meio de (H, h) , onde $\beta(t) = (t^2, t^{2k+1})$. Escrevemos $h(t) = \lambda_1 t + \lambda_2 t^2 + \dots$ com $\lambda_1 \neq 0$. Dado que $m > 2k - 3$, então $2m > m + 2k - 3$ e portanto,

$$h(f(t)) = \lambda_1 (t^m + t^{m+2r-1} + d_1 t^{m+2r+1} + \dots + d_{k-r-1} t^{m+2k-3}) + \dots$$

sendo este germe de função \mathcal{R}^β -equivalente a g . Então pela demonstração do lema anterior se deduz que $r = r'$ e $d_i = d'_i$ para todo $i = 1, \dots, k - r - 1$. □

Observação 5.1 *Se $m \leq 2k - 3$, então em alguns casos é possível utilizar a \mathcal{L} -equivalência para eliminar mais alguns termos da função f . Ainda assim, a fórmula para o caso geral é bastante complicada, dado o grande número de casos que aparecem. Veremos alguns exemplos em casos simples.*

Corolário 5.3 *Suponhamos que $m = 2k - 3$. Então a classificação de diagramas de curvas planas (f, α) tal que α é do tipo A_{2k} , $k \geq 2$, e f tem ordem finita m é dada pela seguinte lista de diagramas:*

$$t^{2k-3} \leftarrow t \rightarrow (t^2, t^{2k+1}),$$

e

$$t^{2k-3} + t^{2k+2r-4} + d_1 t^{2k+2r-2} + \dots + d_{k-r-2} t^{4k-8} \leftarrow t \rightarrow (t^2, t^{2k+1}),$$

com $1 \leq r \leq k - 2$ e $d_1, \dots, d_{k-r-2} \in \mathbb{R}$ univocamente determinados.

Corolário 5.4 *Suponhamos que $m = 2$. Então a classificação de diagramas de curvas planas (f, α) tal que α é do tipo A_{2k} , $k \geq 2$, e f tem ordem finita m é dada pela seguinte lista de diagramas:*

$$t^2 \leftarrow t \rightarrow (t^2, t^{2k+1}),$$

ou

$$t^2 + t^{2r+1} \leftarrow t \rightarrow (t^2, t^{2k+1}),$$

com $1 \leq r \leq k - 1$.

Corolário 5.5 *Seja (f, α) um diagrama de curva plana tal que α tenha uma ramphoid cusp e f tenha ordem finita m . Então (f, α) é equivalente a um dos seguintes diagramas*

$$t^m + t^{m+1} \leftarrow t \rightarrow (t^2, t^5)$$

ou

$$t^m \leftarrow t \rightarrow (t^2, t^5).$$

Observação 5.2 *Segue-se do Corolário 5.2 que os dois diagramas*

$$t^m + t^{m+1} \leftarrow t \rightarrow (t^2, t^5) \quad \text{e} \quad t^m \leftarrow t \rightarrow (t^2, t^5)$$

não são equivalentes. Além disso, suponhamos que $\alpha(t) = (a_2t^2 + a_3t^3 + \dots, b_5t^5 + b_6t^6 + \dots)$, com $a_2, b_5 \neq 0$, e $f(t) = c_mt^m + c_{m+1}t^{m+1} + \dots$ com $c_m \neq 0$. Então (f, α) é equivalente ao diagrama

$$\begin{cases} t^m + t^{m+1} \leftarrow t \rightarrow (t^2, t^5), & \text{se } 2a_2c_{m+1} - ma_3c_m \neq 0, \\ t^m \leftarrow t \rightarrow (t^2, t^5), & \text{se } 2a_2c_{m+1} - ma_3c_m = 0. \end{cases}$$

A seguir, consideramos que α tenha uma singularidade do tipo E_6 ou do tipo E_8 . Embora estas singularidades não sejam abordadas no estudo desenvolvido no capítulo 6 ($\mathcal{A}_e\text{-cod} > 2$), vimos nos capítulos 3 e 4 que elas aparecem em famílias a 1 e 2 parâmetros.

Proposição 5.6 *Seja (f, α) um diagrama de curva plana tal que α tenha uma singularidade do tipo E_6 e f tenha ordem finita m . Então (f, α) é equivalente a um dos seguintes diagramas*

$$\text{se } m > 2, \begin{cases} t^m + t^{m+1} + dt^{m+2} \leftarrow t \rightarrow (t^3, t^4), & d \in \mathbb{R} \quad (*) \\ t^m + t^{m+2} \leftarrow t \rightarrow (t^3, t^4) \\ t^m \leftarrow t \rightarrow (t^3, t^4) \end{cases}$$

$$\text{se } m = 2, \begin{cases} t^2 + t^3 \leftarrow t \rightarrow (t^3, t^4) \\ t^2 \leftarrow t \rightarrow (t^3, t^4) \end{cases}$$

$$\text{se } m = 1, \quad t \leftarrow t \rightarrow (t^3, t^4).$$

Em $(*)$, cada $d \in \mathbb{R}$ corresponde a uma classe distinta de diagrama de curva plana.

Demonstração: Dividiremos a demonstração em dois passos:

Passo 1: Aqui, mostraremos que

$$\mathcal{R}^\beta = \{H \in \mathcal{R} : H''(0) = H^{(3)}(0) = 0\}$$

para $\beta(t) = (t^3, t^4)$. De fato, se $H \in \mathcal{R}^\beta$, então existe um K tal que $K \circ \beta = \beta \circ H$. Se $K = (K_1, K_2)$, isto significa que $K_1(t^3, t^4) = H(t)^3$ e $K_2(t^3, t^4) = H(t)^4$. Supondo $H(t) = a_1t + a_2t^2 + \dots$ e $K(x, y) = (b_{10}x + b_{01}y + \dots, c_{10}x + c_{01}y + \dots)$, obtemos

$$\begin{aligned} H(t)^3 &= a_1^3t^3 + 3a_1^2a_2t^4 + (3a_1^2a_3 + 3a_1a_2^2)t^5 + \dots \\ H(t)^4 &= a_1^4t^4 + 4a_1^3a_2t^5 + \dots \\ K(t^3, t^4) &= (b_{10}t^3 + b_{01}t^4 + b_{20}t^6 + \dots, c_{10}t^3 + c_{01}t^4 + c_{20}t^6 + \dots). \end{aligned}$$

Comparando os coeficientes na igualdade $K \circ \beta = \beta \circ H$, concluímos que $a_2 = a_3 = 0$.

Reciprocamente, seja $H \in \mathcal{R}$ tal que $H''(0) = H^{(3)}(0) = 0$. Então, $H(t)^3$ e $H(t)^4$ não possuem o termo de ordem 5. Podemos escrever $H(t)^3 = t^3p(t)$ e $H(t)^4 = t^4q(t)$, onde $p, q \in C^\infty$ com $p(0) \neq 0$ e $q(0) \neq 0$. Pelo Teorema de Preparação de Malgrange,

$$\begin{aligned} p(t) &= p_1(t^3) + tp_2(t^3) + t^2p_3(t^3), \quad p_1(0) \neq 0, \\ q(t) &= q_1(t^3) + tq_2(t^3) + t^2q_3(t^3), \quad q_1(0) \neq 0, \end{aligned}$$

com $p_3(0) = 0$ e $q_2(0) = 0$, pois $H(t)^3$ e $H(t)^4$ não possuem termo de ordem 5. Logo, $H(t)^3 = t^3p_1(t^3) + t^4p_2(t^3) + t^8\tilde{p}_3(t^3)$ e $H(t)^4 = t^4q_1(t^3) + t^8\tilde{q}_2(t^3) + t^6q_3(t^3)$.

Portanto, definindo K por

$$K(x, y) = (xp_1(x) + yp_2(x) + y^2\tilde{p}_3(x), yq_1(x) + y^2\tilde{q}_2(x) + x^2q_3(x)),$$

temos satisfeita a igualdade $K \circ \beta = \beta \circ H$.

Passo 2: Por hipótese, o germe α é \mathcal{A} -equivalente a β . Logo, pelo Lema 5.1(i), (f, α) é equivalente a $(f \circ H^{-1}, (t^3, t^4))$, para algum $H \in \mathcal{R}$. Dessa forma, resta agora mostrar que a forma normal de $\tilde{f} = f \circ H^{-1}$, com relação ao grupo $\mathcal{R}^\beta \times \mathcal{L}$, coincide com uma das formas apresentadas no enunciado da proposição. Para isto, consideraremos os seguintes casos:

- $m > 2$.

Como $\text{ord}(\tilde{f}) = m$, dados $d_1, d_2 \in \mathbb{R}$ quaisquer, existe um par $(\tilde{H}, h) \in \mathcal{R} \times \mathcal{L}$ tal que

$$h \circ \tilde{f} \circ \tilde{H}^{-1}(t) = t^m + d_1t^{m+1} + d_2t^{m+2}.$$

Veremos que é possível escolher d_1 e d_2 de modo que $\tilde{H} \in \mathcal{R}^\beta$. De fato, sejam $\tilde{f}(t) = c_mt^m + c_{m+1}t^{m+1} + \dots$ com $c_m \neq 0$, $\tilde{H}(t) = a_1t + a_2t^2 + \dots$ com $a_1 \neq 0$ e $h(u) = \lambda_1u + \lambda_2u^2 + \dots$ com $\lambda_1 \neq 0$. Consideremos a igualdade

$$\begin{aligned} h(\tilde{f}(t)) &= \tilde{H}(t)^m + d_1\tilde{H}(t)^{m+1} + d_2\tilde{H}(t)^{m+2} = a_1^mt^m + (ma_1^{m-1}a_2 + d_1a_1^{m+1})t^{m+1} \\ &\quad + \left(\frac{m(m-1)}{2}a_1^{m-2}a_2^2 + ma_1^{m-1}a_3 + d_1(m+1)a_1^ma_2 + d_2a_1^{m+2} \right) t^{m+2} + \dots \end{aligned}$$

Como $\text{ord}(\lambda_2 \tilde{f}^2) \geq 2m > m + 2$, tomando $d_1 = \frac{\lambda_1 c_{m+1}}{a_1^{m+1}}$, $d_2 = \frac{\lambda_1 c_{m+2}}{a_1^{m+2}}$ e comparando os coeficientes na igualdade acima, chegamos que $a_2 = a_3 = 0$, assim, $\tilde{H} \in \mathcal{R}^\beta$. Portanto, \tilde{f} é $\mathcal{R}^\beta \times \mathcal{L}$ -equivalente a $t^m + d_1 t^{m+1} + d_2 t^{m+2}$. Agora, se $d_1 \neq 0$ então, com mudanças lineares de coordenadas, temos que o diagrama (\tilde{f}, α) é equivalente ao diagrama $(t^m + t^{m+1} + dt^{m+2}, (t^3, t^4))$, para um certo $d \in \mathbb{R}$. Se por outro lado $d_1 = 0$, então (f, α) é equivalente a $(t^m, (t^3, t^4))$ ou $(t^m + t^{m+2}, (t^3, t^4))$, dependendo se $d_2 = 0$ ou não.

Finalmente, com o mesmo procedimento da prova do corolário 5.2, podemos mostrar que $f(t) = t^m + t^{m+1} + dt^{m+2}$ e $g(t) = t^m + t^{m+1} + d't^{m+2}$ não são $\mathcal{R}^\beta \times \mathcal{L}$ -equivalentes para $d \neq d'$.

- $m = 2$.

Neste caso, temos $\tilde{f}(t) = c_2 t^2 + c_3 t^3 + \dots$, $c_2 \neq 0$. Tomando $h(u) = \frac{u}{c_2} - \frac{c_4 u^2}{c_2^3}$, vemos que \tilde{f} é \mathcal{L} -equivalente ao germe $\bar{f}(t) = h \circ \tilde{f}(t) = t^2 + c'_3 t^3 + c'_5 t^5 + c'_6 t^6 + \dots$. Agora, dado $d \in \mathbb{R}$ qualquer, existe $\tilde{H} \in \mathcal{R}$ tal que

$$\bar{f} \circ \tilde{H}^{-1}(t) = t^2 + dt^3.$$

É possível escolher $d \in \mathbb{R}$ de modo que $\tilde{H} \in \mathcal{R}^\beta$. De fato, sendo $\tilde{H}(t)$ como antes, temos então a igualdade:

$$t^2 + c'_3 t^3 + c'_5 t^5 + \dots = a_1^2 t^2 + (2a_1 a_2 + da_1^3) t^3 + (a_2^2 + 2a_1 a_3 + 3da_1^2 a_2) t^4 + \dots$$

Tomando $d = \frac{c'_3}{a_1^3}$ e comparando os coeficientes, obtemos que $a_2 = a_3 = 0$. Portanto, \tilde{f} é $\mathcal{R}^\beta \times \mathcal{L}$ -equivalente a $t^2 + dt^3$. Novamente, com mudanças lineares de coordenadas, o resultado segue neste caso.

- $m = 1$.

Neste caso, é fácil ver que \tilde{f} é \mathcal{L} -equivalente a id .

□

Proposição 5.7 *Seja (f, α) um diagrama de curva plana tal que α tenha uma singularidade E_8 e f tenha ordem finita m . Então (f, α) é equivalente a um dos seguintes diagramas*

$$\text{se } m > 4 \begin{cases} t^m + t^{m+1} + ct^{m+2} + dt^{m+4} \leftarrow t \rightarrow (t^3, t^5), \quad c, d \in \mathbb{R} \\ t^m + t^{m+2} + ct^{m+4} \leftarrow t \rightarrow (t^3, t^5). \\ t^m + t^{m+4} \leftarrow t \rightarrow (t^3, t^5). \\ t^m \leftarrow t \rightarrow (t^3, t^5). \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
& \text{se } m = 3, 4 \begin{cases} t^m + t^{m+1} + ct^{m+2} \leftarrow t \rightarrow (t^3, t^5) \\ t^m + t^{m+2} \leftarrow t \rightarrow (t^3, t^5) \\ t^m \leftarrow t \rightarrow (t^3, t^5) \end{cases} \\
& \text{se } m = 2 \begin{cases} t^2 + t^3 \leftarrow t \rightarrow (t^3, t^5) \\ t^2 \leftarrow t \rightarrow (t^3, t^5) \end{cases} \\
& \text{se } m = 1 \quad t \leftarrow t \rightarrow (t^3, t^5)
\end{aligned}$$

Para cada escolha de $c, d \in \mathbb{R}$ temos uma classe distinta de diagrama de curva plana.

Demonstração: A demonstração segue a mesma linha da demonstração anterior. Mostraremos aqui apenas que se $\beta(t) = (t^3, t^5)$, então

$$\mathcal{R}^\beta = \{H \in \mathcal{R} : H''(0) = H^{(3)}(0) = H^{(5)}(0) = 0\}.$$

De fato, se $H \in \mathcal{R}^\beta$, existe um K tal que $K \circ \beta = \beta \circ H$. Se $K = (K_1, K_2)$, isto significa que $K_1(t^3, t^5) = H(t)^3$ e $K_2(t^3, t^5) = H(t)^5$. Sejam

$$\begin{aligned}
H(t) &= a_1 t + a_2 t^2 + \dots \\
K(x, y) &= (b_{10}x + b_{01}y + b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2 + \dots, \\
&\quad c_{10}x + c_{01}y + c_{20}x^2 + c_{11}xy + c_{02}y^2 + \dots).
\end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned}
H(t)^3 &= a_1^3 t^3 + 3a_1^2 a_2 t^4 + 3a_1(a_3 a_1 + a_2^2) t^5 + (3a_4 a_1^2 + 6a_3 a_1 a_2 + a_2^3) t^6 + \\
&\quad 3(a_5 a_1^2 + 2a_4 a_1 a_2 + a_1 a_3^2 + a_2^2 a_3) t^7 + \dots, \\
H(t)^5 &= a_1^5 t^5 + 5a_1^4 a_2 t^6 + 5a_1^3(2a_2^2 + a_1 a_3) t^7 + \dots, \\
K_1(t^3, t^5) &= b_{10} t^3 + b_{01} t^5 + b_{20} t^6 + b_{11} t^8 + \dots \text{ e} \\
K_2(t^3, t^5) &= c_{10} t^3 + c_{01} t^5 + c_{20} t^6 + c_{11} t^8 + \dots
\end{aligned}$$

Comparando os coeficientes na igualdade $K \circ \beta = \beta \circ H$, vemos que $3a_1^2 a_2 = 0$, $3(a_5 a_1^2 + 2a_4 a_1 a_2 + a_1 a_3^2 + a_2^2 a_3) = 0$ e $5a_1^3(2a_2^2 + a_1 a_3) = 0$. Como $a_1 \neq 0$, temos $a_2 = 0$ pela primeira igualdade e, portanto, segue-se das outras duas que $a_3 = a_5 = 0$.

Reciprocamente, seja $H \in \mathcal{R}$ tal que $H''(0) = H^{(3)}(0) = H^{(5)}(0) = 0$. Então, $H(t)^3$ não possui os termos de ordens 4 e 7 e $H(t)^5$ não possui o termo de ordem 7. Assim, usando o Teorema de Preparação de Malgrange, podemos escrever

$$\begin{aligned}
H(t)^3 &= t^3 p_1(t^3) + t^{10} \tilde{p}_2(t^3) + t^5 p_3(t^3), \\
H(t)^5 &= t^5 q_1(t^3) + t^6 q_2(t^3) + t^{10} \tilde{q}_3(t^3),
\end{aligned}$$

com $p_1(0) \neq 0$ e $q_1(0) \neq 0$. Logo, definindo K da forma

$$K(x, y) = (x p_1(x) + y^2 \tilde{p}_2(x) + y p_3(x), y q_1(x) + x^2 q_2(x) + y^2 \tilde{q}_3(x)),$$

temos satisfeita a igualdade $K \circ \beta = \beta \circ H$.

□

5.4 Classificação: Caso multilocal

Definição 5.8 Um diagrama de multigerme de curva plana é um diagrama $(f_1, \alpha_1); \dots; (f_r, \alpha_r)$ da forma 5.2 constituído de pares de germes de aplicações $f_i : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ e $\alpha_i : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ para $i = 1, \dots, r$.

Então, de acordo com a Definição 5.3, dois diagramas de multigerme de curvas planas $(f_1, \alpha_1); \dots; (f_r, \alpha_r)$ e $(f'_1, \alpha'_1); \dots; (f'_r, \alpha'_r)$ são equivalentes se existem germes de difeomorfismos H_i, h_i de $(\mathbb{R}, 0)$ e K de $(\mathbb{R}^2, 0)$ tais que $K \circ \alpha_i = \alpha'_i \circ H_i$ e $h_i \circ f_i = f'_i \circ H_i$, para $i = 1, \dots, r$.

A definição e o lema a seguir estendem a Definição 5.6 e o Lema 5.1 para o caso multilocal.

Definição 5.9 Dado um multigerme de curva plana $(\alpha_1; \dots; \alpha_r)$, definimos o subgrupo $\mathcal{R}_r^\alpha \subset \underbrace{\mathcal{R} \times \dots \times \mathcal{R}}_{r \text{ vezes}}$ por:

$$\mathcal{R}_r^\alpha = \left\{ (H_1, \dots, H_r) \in \underbrace{\mathcal{R} \times \dots \times \mathcal{R}}_{r \text{ vezes}} : \exists \text{ um germe de difeomorfismo } K \text{ de } (\mathbb{R}^2, 0) \right. \\ \left. \text{tal que } K \circ \alpha_i = \alpha_i \circ H_i, i = 1, 2, \dots, r \right\}.$$

Lema 5.4

- (i) Se os multigerme $(\alpha_1; \dots; \alpha_r)$ e $(\alpha'_1; \dots; \alpha'_r)$ são \mathcal{A} -equivalentes, então, dados quaisquer germes f_1, \dots, f_r , o diagrama $(f_1, \alpha_1); \dots; (f_r, \alpha_r)$ é equivalente a $(f_1 \circ H_1^{-1}, \alpha'_1); \dots; (f_r \circ H_r^{-1}, \alpha'_r)$ para alguma r -upla $(H_1, \dots, H_r) \in \mathcal{R} \times \dots \times \mathcal{R}$.
- (ii) Dois diagramas de multigerme de curvas planas $(f_1, \alpha_1); \dots; (f_r, \alpha_r)$ e $(f'_1, \alpha_1); \dots; (f'_r, \alpha_r)$ são equivalentes se, e somente se, existem $(H_1, \dots, H_r) \in \mathcal{R}_r^\alpha$ e $(h_1, \dots, h_r) \in \mathcal{L} \times \dots \times \mathcal{L}$ tais que $h_i \circ f_i = f'_i \circ H_i$, para $i = 1, \dots, r$.

Com um procedimento análogo ao do caso local, baseamos nossa classificação de diagramas de multigerme de curvas planas no Lema 5.4, levando em consideração as formas normais de multigerme de aplicações $(\mathbb{R}, S) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ com respeito ao grupo \mathcal{A} , dadas na tabela 2.2.

5.4.1 Diagramas de bigerme de curvas planas

Por definição, um diagrama de bigerme de curva plana $(f_1, \alpha_1); (f_2, \alpha_2)$ é um diagrama do tipo

$$(\mathbb{R}, 0) \xleftarrow{f_1} (\mathbb{R}, 0) \xrightarrow{\alpha_1} (\mathbb{R}^2, 0) \xleftarrow{\alpha_2} (\mathbb{R}, 0) \xrightarrow{f_2} (\mathbb{R}, 0). \quad (5.4)$$

A relação de equivalência nesse caso é dada pela comutatividade do seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccccccccc} (\mathbb{R}, 0) & \xleftarrow{f_1} & (\mathbb{R}, 0) & \xrightarrow{\alpha_1} & (\mathbb{R}^2, 0) & \xleftarrow{\alpha_2} & (\mathbb{R}, 0) & \xrightarrow{f_2} & (\mathbb{R}, 0) \\ h_1 \downarrow & & H_1 \downarrow & & K \downarrow & & H_2 \downarrow & & h_2 \downarrow \\ (\mathbb{R}, 0) & \xleftarrow{f'_1} & (\mathbb{R}, 0) & \xrightarrow{\alpha'_1} & (\mathbb{R}^2, 0) & \xleftarrow{\alpha'_2} & (\mathbb{R}, 0) & \xrightarrow{f'_2} & (\mathbb{R}, 0), \end{array}$$

onde $H_i, h_i, i = 1, 2$, e K são germes de difeomorfismos.

Proposição 5.8 *Seja $(f_1, \alpha_1); (f_2, \alpha_2)$ um diagrama de bigerme de curva plana tal que o bigerme $(\alpha_1; \alpha_2)$ tenha uma singularidade A_1 e os germes de funções f_1 e f_2 tenham ordens finitas m e n respectivamente. Então $(f_1, \alpha_1); (f_2, \alpha_2)$ é equivalente ao diagrama*

$$(t^m, (t, 0)) ; (t^n, (0, t))$$

Demonstração: Sejam $\alpha_1(t) = (\alpha_{11}(t), \alpha_{12}(t))$ e $\alpha_2(t) = (\alpha_{21}(t), \alpha_{22}(t))$. Podemos supor sem perda de generalidade que $\alpha'_{11}(0) \neq 0$ e $\alpha'_{22}(0) \neq 0$.

Segue-se da classificação de bigermes $(\mathbb{R}, S) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ que $(\alpha_1; \alpha_2)$ é \mathcal{A} -equivalente a $(\beta_1; \beta_2)$, onde $\beta_1(t) = (t, 0)$ e $\beta_2(t) = (0, t)$. Como consequência do Lema 5.4(i), $(f_1, \alpha_1); (f_2, \alpha_2)$ é equivalente a $(f_1 \circ H_1^{-1}, \beta_1); (f_2 \circ H_2^{-1}, \beta_2)$ para algum par $(H_1, H_2) \in \mathcal{R} \times \mathcal{R}$. Temos que $f_1 \circ H_1^{-1}$ e $f_2 \circ H_2^{-1}$ têm ordens m e n respectivamente, logo $f_1 \circ H_1^{-1}$ é \mathcal{A} -equivalente a \tilde{f}_1 e $f_2 \circ H_2^{-1}$ é \mathcal{A} -equivalente a \tilde{f}_2 , onde $\tilde{f}_1(t) = t^m$ e $\tilde{f}_2(t) = t^n$. Mas, neste caso, $\mathcal{R}_2^\beta = \mathcal{R} \times \mathcal{R}$ pois, se $(H_1, H_2) \in \mathcal{R} \times \mathcal{R}$, então o germe de difeomorfismo K , dado por $K(x, y) = (H_1(x), H_2(y))$, é tal que $K \circ \beta_i = \beta_i \circ H_i$, $i = 1, 2$, assim, $(H_1, H_2) \in \mathcal{R}_2^\beta$. Logo $(f_1 \circ H_1^{-1}, \beta_1); (f_2 \circ H_2^{-1}, \beta_2)$ é equivalente a $(\tilde{f}_1, \beta_1); (\tilde{f}_2, \beta_2)$ e, por transitividade, $(f_1, \alpha_1); (f_2, \alpha_2)$ é equivalente a $(\tilde{f}_1, \beta_1); (\tilde{f}_2, \beta_2)$. □

Proposição 5.9 *Seja $(f_1, \alpha_1); (f_2, \alpha_2)$ um diagrama tal que o bigerme $(\alpha_1; \alpha_2)$ tenha uma singularidade A_3 e os germes f_1 e f_2 tenham ordens finitas m e n , respectivamente. Então $(f_1, \alpha_1); (f_2, \alpha_2)$ é equivalente ao diagrama*

$$(t^m, (t, 0)) ; (t^n, (t, t^2)).$$

Demonstração: Dividiremos a demonstração em dois passos:

Passo 1: Aqui, vamos mostrar que se $\beta_1(t) = (t, 0)$ e $\beta_2(t) = (t, t^2)$, então \mathcal{R}_2^β admite a seguinte caracterização:

$$\mathcal{R}_2^\beta = \{(H_1, H_2) \in \mathcal{R} \times \mathcal{R} : H'_1(0) = H'_2(0)\}.$$

De fato, se $(H_1, H_2) \in \mathcal{R}_2^\beta$, existe um germe de difeomorfismo $K(x, y) = (K_1(x, y), K_2(x, y))$ tal que $K \circ \beta_i = \beta_i \circ H_i$, $i = 1, 2$. Logo

$$K_1(t, 0) = H_1(t) \quad \text{e} \quad K_1(t, t^2) = H_2(t).$$

Derivando as igualdades acima em relação à variável t e pondo $t = 0$, segue-se que $H_1'(0) = H_2'(0)$.

Reciprocamente, seja $(H_1, H_2) \in \mathcal{R} \times \mathcal{R}$ com $H_1'(0) = H_2'(0)$. Então, podemos escrever $H_2(t) - H_1(t) = t^2 Q_1(t)$, com $Q_1 \in C^\infty$. Por outro lado, também podemos escrever $H_2(t)^2 = t^2 Q_2(t)$ com $Q_2 \in C^\infty, Q_2(0) \neq 0$. Portanto, definindo K da forma

$$K(x, y) = \left(H_1(x) + yQ_1(x), yQ_2(x) \right),$$

temos satisfeitas as igualdades $K \circ \beta_i = \beta_i \circ H_i$, $i = 1, 2$.

Passo 2: Por hipótese, o bigerme $(\alpha_1; \alpha_2)$ é \mathcal{A} -equivalente a $(\beta_1; \beta_2)$. Então, pelo Lema 5.4(i), $(f_1, \alpha_1); (f_2, \alpha_2)$ é equivalente a $(f_1 \circ H_1^{-1}, (t, 0)); (f_2 \circ H_2^{-1}, (t, t^2))$ para algum par $(H_1, H_2) \in \mathcal{R} \times \mathcal{R}$. Afirmamos que esse último diagrama é equivalente ao diagrama $(t^m, (t, 0)); (t^n, (t, t^2))$. Logo, por transitividade, segue-se que $(f_1, \alpha_1); (f_2, \alpha_2)$ também é equivalente ao diagrama $(t^m, (t, 0)); (t^n, (t, t^2))$, concluindo assim a demonstração.

Para demonstrar a afirmação, observamos que pelo Lema 5.4(ii) é suficiente encontrar $(\tilde{H}_1, \tilde{H}_2) \in \mathcal{R}_2^\beta$ e $(h_1, h_2) \in \mathcal{L} \times \mathcal{L}$ tais que

$$h_1 \circ \tilde{f}_1 \circ \tilde{H}_1^{-1}(t) = t^m \quad \text{e} \quad h_2 \circ \tilde{f}_2 \circ \tilde{H}_2^{-1}(t) = t^n,$$

onde $\tilde{f}_1 = f_1 \circ H_1^{-1}$ e $\tilde{f}_2 = f_2 \circ H_2^{-1}$.

Veremos isso por partes. Primeiramente, como $\text{ord}(\tilde{f}_2) = n$, existe um par $(\tilde{H}_2, h_2) \in \mathcal{R} \times \mathcal{L}$ tal que $h_2 \circ \tilde{f}_2 \circ \tilde{H}_2^{-1}(t) = t^n$. Em seguida, fixemos $h_1 \in \mathcal{L}$, dado por $h_1(u) = \lambda u$, onde $\lambda = \frac{m! \tilde{H}_2'(0)^m}{\tilde{f}_1^{(m)}(0)}$. Dessa forma, como $\text{ord}(h_1 \circ \tilde{f}_1) = m$ e $(h_1 \circ \tilde{f}_1)^{(m)}(0) > 0$ quando m é par, existe um $\tilde{H}_1 \in \mathcal{R}$ tal que

$$h_1 \circ \tilde{f}_1 \circ \tilde{H}_1^{-1}(t) = t^m. \tag{5.5}$$

Observamos que, quando m é par, $-\tilde{H}_1$ também satisfaz a igualdade anterior. Calculando a m -ésima derivada em zero de ambos os lados da igualdade (5.5), obtemos $\tilde{H}_1'(0)^m = \tilde{H}_2'(0)^m$. Portanto, se m é ímpar então $\tilde{H}_1'(0) = \tilde{H}_2'(0)$, assim, $(\tilde{H}_1, \tilde{H}_2) \in \mathcal{R}_2^\beta$ e concluimos a demonstração neste caso. Se por outro lado m é par, temos $\tilde{H}_1'(0) = \pm \tilde{H}_2'(0)$, logo $(\tilde{H}_1, \tilde{H}_2) \in \mathcal{R}_2^\beta$ ou $(-\tilde{H}_1, \tilde{H}_2) \in \mathcal{R}_2^\beta$, como desejado. □

Proposição 5.10 *Seja $(f_1, \alpha_1); (f_2, \alpha_2)$ um diagrama tal que o bigerme $(\alpha_1; \alpha_2)$ tenha uma singularidade A_5 e os germe f_1 e f_2 tenham ordens finitas m e n , respectivamente. Então $(f_1, \alpha_1); (f_2, \alpha_2)$ é equivalente a um dos seguintes diagramas*

$$(t^m, (t, 0)) ; (t^n, (t, t^3)) \quad \text{ou} \quad (t^m, (t, 0)) ; (t^n + t^{n+1}, (t, t^3)).$$

Demonstração: Tal como na proposição anterior, dividiremos a demonstração em dois passos:

Passo 1: Aqui, vamos mostrar que se $\beta_1(t) = (t, 0)$ e $\beta_2(t) = (t, t^3)$, então \mathcal{R}_2^β admite a seguinte caracterização:

$$\mathcal{R}_2^\beta = \{(H_1, H_2) \in \mathcal{R} \times \mathcal{R} : H_1'(0) = H_2'(0) \text{ e } H_1''(0) = H_2''(0)\}.$$

De fato, se $(H_1, H_2) \in \mathcal{R}_2^\beta$, existe um germe de difeomorfismo $K = (K_1, K_2)$ tal que $K \circ \beta_i = \beta_i \circ H_i$, $i = 1, 2$. Logo

$$K_1(t, 0) = H_1(t) \quad \text{e} \quad K_1(t, t^3) = H_2(t).$$

Considerando as primeiras e segundas derivadas das igualdades acima em relação à variável t e pondo $t = 0$, obtemos $H_1'(0) = H_2'(0)$ e $H_1''(0) = H_2''(0)$.

Reciprocamente, seja $(H_1, H_2) \in \mathcal{R} \times \mathcal{R}$ com $H_1'(0) = H_2'(0)$ e $H_1''(0) = H_2''(0)$. Então $H_2(t) - H_1(t) = t^3 Q_1(t)$, com $Q_1 \in C^\infty$. Por outro lado, $H_2(t)^3 = t^3 Q_2(t)$ com $Q_2 \in C^\infty, Q_2(0) \neq 0$. Logo, definindo K por

$$K(x, y) = \left(H_1(x) + yQ_1(x), yQ_2(x) \right),$$

temos satisfeitas as igualdades $K \circ \beta_i = \beta_i \circ H_i$, $i = 1, 2$.

Passo 2: Seguindo as mesmas linhas do caso anterior, vamos encontrar $(\tilde{H}_1, \tilde{H}_2) \in \mathcal{R}_2^\beta$ e $(h_1, h_2) \in \mathcal{L} \times \mathcal{L}$ tais que

$$h_1 \circ \tilde{f}_1 \circ \tilde{H}_1^{-1}(t) = t^m \quad \text{e} \quad h_2 \circ \tilde{f}_2 \circ \tilde{H}_2^{-1}(t) = t^n + dt^{n+1}, \quad (5.6)$$

onde $d \in \mathbb{R}$, $\tilde{f}_1 = f_1 \circ H_1^{-1}$ e $\tilde{f}_2 = f_2 \circ H_2^{-1}$.

Primeiramente, observamos que, dado $d \in \mathbb{R}$ qualquer, existe um par $(\tilde{H}_2, h_2) \in \mathcal{R} \times \mathcal{L}$ tal que $h_2 \circ \tilde{f}_2 \circ \tilde{H}_2^{-1}(t) = t^n + dt^{n+1}$, pois \tilde{f}_2 tem ordem n . Agora, procedendo como na prova anterior, vemos que é possível escolher $h_1 \in \mathcal{L}$ de modo que exista $\tilde{H}_1 \in \mathcal{R}$ tal que (\tilde{H}_1, h_1) satisfaça a primeira igualdade em 5.6 e $\tilde{H}_1'(0) = \tilde{H}_2'(0)$. Para que a igualdade $\tilde{H}_1''(0) = \tilde{H}_2''(0)$ seja satisfeita, tomamos

$$d = \frac{h_2'(0)\tilde{f}_2^{(n+1)}(0) - \frac{n(n+1)!}{2}\tilde{H}_2'(0)^{n-1}\tilde{H}_1''(0)}{(n+1)!\tilde{H}_1'(0)^{n+1}}.$$

Portanto, o diagrama $(f_1, \alpha_1); (f_2, \alpha_2)$ é equivalente ao diagrama $(t^m, (t, 0)); (t^n + dt^{n+1}, (t, t^3))$. Se $d = 0$ então, estamos no primeiro caso. Se $d \neq 0$ então, com mudanças lineares de coordenadas, temos que $(f_1, \alpha_1); (f_2, \alpha_2)$ é equivalente a $(t^m, (t, 0)); (t^n + t^{n+1}, (t, t^3))$.

□

Observação 5.3 *Segue-se da demonstração que os dois diagramas*

$$(t^m, (t, 0)) ; (t^n, (t, t^3)) \quad e \quad (t^m, (t, 0)) ; (t^n + t^{n+1}, (t, t^3))$$

não são equivalentes. Além disso, suponhamos que

$$(f(t), \alpha_1(t)) = (c_m t^m + c_{m+1} t^{m+1} + \dots, (a_1 t + a_2 t^2 + \dots, b_2 t^2 + b_3 t^3 \dots))$$

$$(g(t), \alpha_2(t)) = (d_n t^n + d_{n+1} t^{n+1} + \dots, (a'_1 t + a'_2 t^2 + \dots, b'_2 t^2 + b'_3 t^3 \dots))$$

com $a_1, a'_1 \neq 0$. Então $(f, \alpha_1); (g, \alpha_2)$ é equivalente a $(t^m, (t, 0)); (t^n, (t, t^3))$, se

$$mnd_n c_m (a'_2 a_1^2 - a_2 a'_1) + a_1 a'_1 (nc_{m+1} d_n a'_1 - mc_m d_{n+1} a_1) = 0;$$

caso contrário, $(f, \alpha_1); (g, \alpha_2)$ é equivalente a $(t^m, (t, 0)); (t^n + t^{n+1}, (t, t^3))$.

Proposição 5.11 *Seja $(f_1, \alpha_1); (f_2, \alpha_2)$ um diagrama tal que o bigerme $(\alpha_1; \alpha_2)$ tenha uma singularidade D_5 e os germes f_1 e f_2 tenham ordens finitas m e n respectivamente. Então $(f_1, \alpha_1); (f_2, \alpha_2)$ é equivalente a um dos seguintes diagramas*

$$(t^m, (0, t)) ; (t^n, (t^2, t^3)) \quad \text{ou} \quad (t^m, (0, t)) ; (t^n + t^{n+1}, (t^2, t^3)).$$

Demonstração: É análoga à demonstração da proposição anterior. Vamos mostrar apenas que se $\beta_1(t) = (0, t)$ e $\beta_2(t) = (t^2, t^3)$ então

$$\mathcal{R}_2^\beta = \{(H_1, H_2) \in \mathcal{R} \times \mathcal{R} : H'_1(0) = H'_2(0)^3 \text{ e } H''_2(0) = 0\}.$$

De fato, se $(H_1, H_2) \in \mathcal{R}_2^\beta$, existe um germe de difeomorfismo K tal que $K \circ \beta_i = \beta_i \circ H_i$, $i = 1, 2$. Sejam

$$H_i(t) = a_{i1}t + a_{i2}t^2 + a_{i3}t^3 + \dots, \quad i = 1, 2$$

$$K(x, y) = (b_{10}x + b_{01}y + b_{20}x^2 + \dots, c_{10}x + c_{01}y + c_{20}x^2 + \dots).$$

Como $K(0, t) = (0, H_1(t))$ e $K(t^2, t^3) = (H_2(t)^2, H_2(t)^3)$, temos:

$$\begin{aligned} b_{01}t + b_{02}t^2 + \dots &= 0, \\ c_{01}t + c_{02}t^2 + \dots &= a_{11}t + a_{12}t^2 + \dots, \\ b_{10}t^2 + b_{01}t^3 + \dots &= a_{21}^2 t^2 + 2a_{21}a_{22}t^3 + \dots, \\ c_{10}t^2 + c_{01}t^3 + c_{20}t^4 + \dots &= a_{21}^3 t^3 + 3a_{21}^2 a_{22}t^4 + \dots. \end{aligned}$$

Comparando os coeficientes nas igualdades acima, obtemos $a_{22} = 0$ e $a_{11} = a_{21}^3$.

Reciprocamente, seja $(H_1, H_2) \in \mathcal{R} \times \mathcal{R}$ com $H'_1(0) = H'_2(0)^3$ e $H''_2(0) = 0$. Então, podemos escrever $H_2(t)^2 = t^2 Q_1(t^2, t^3)$, onde $Q_1(0, 0) \neq 0$ e $H_2(t)^3 - H_1(t)^3 = t^2 Q_2(t^2, t^3)$.

Agora basta tomar K da seguinte forma

$$K(x, y) = \left(xQ_1(x, y), H_1(y) + xQ_2(x, y) \right).$$

□

5.4.2 Diagramas de trigerme de curvas planas

Proposição 5.12 *Consideremos um diagrama de trigerme de curva plana $(f_1, \alpha_1); (f_2, \alpha_2); (f_3, \alpha_3)$ tal que $(\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3)$ tenha uma singularidade D_4 e os germes f_1, f_2, f_3 tenham ordens finitas l, m e n respectivamente. Então $(f_1, \alpha_1); (f_2, \alpha_2); (f_3, \alpha_3)$ é equivalente ao diagrama*

$$(t^l, (t, 0)) ; (t^m; (0, t)) ; (t^n, (t, t)).$$

Demonstração: Com cálculos semelhantes aos anteriores, concluímos que se $\beta_1(t) = (t, 0)$, $\beta_2(t) = (0, t)$ e $\beta_3(t) = (t, t)$ então

$$\mathcal{R}_3^\beta = \{(H_1, H_2, H_3) \in \mathcal{R} \times \mathcal{R} \times \mathcal{R} : H_1'(0) = H_2'(0) = H_3'(0)\}.$$

Pelo Lema 5.4(i), o diagrama $(f_1, \alpha_1); (f_2, \alpha_2); (f_3, \alpha_3)$ é equivalente ao diagrama $(f_1 \circ H_1^{-1}, (t, 0)); (f_2 \circ H_2^{-1}, (0, t)); (f_3 \circ H_3^{-1}, (t, t))$ para alguma terna $(H_1, H_2, H_3) \in \mathcal{R} \times \mathcal{R} \times \mathcal{R}$. Então, para concluir a demonstração, basta encontrar $(\tilde{H}_1, \tilde{H}_2, \tilde{H}_3) \in \mathcal{R}_3^\beta$ e $(h_1, h_2, h_3) \in \mathcal{L} \times \mathcal{L} \times \mathcal{L}$ tais que

$$h_1 \circ \tilde{f}_1(t) \circ \tilde{H}_1^{-1}(t) = t^l, \quad (5.7)$$

$$h_2 \circ \tilde{f}_2(t) \circ \tilde{H}_2^{-1}(t) = t^m, \quad (5.8)$$

$$h_3 \circ \tilde{f}_3(t) \circ \tilde{H}_3^{-1}(t) = t^n. \quad (5.9)$$

onde $\tilde{f}_1 = f_1 \circ H_1^{-1}$, $\tilde{f}_2 = f_2 \circ H_2^{-1}$ e $\tilde{f}_3 = f_3 \circ H_3^{-1}$.

Primeiramente, como $\text{ord}(\tilde{f}_3) = n$, existe um par $(\tilde{H}_3, h_3) \in \mathcal{R} \times \mathcal{L}$ tal que $h_3 \circ \tilde{f}_3 \circ \tilde{H}_3^{-1}(t) = t^n$. Agora, tomemos $(h_1, h_2) \in \mathcal{L} \times \mathcal{L}$ com $h_1(u) = \lambda_1 u$ e $h_2(u) = \lambda_2 u$, onde

$$\lambda_1 = \frac{l! \tilde{H}_3'(0)^l}{\tilde{f}_1^{(l)}(0)} \quad \text{e} \quad \lambda_2 = \frac{m! \tilde{H}_3'(0)^m}{\tilde{f}_1^{(m)}(0)}.$$

Logo, pelos mesmos argumentos usados no passo 2 da prova da Proposição 5.9, existe um par $(\tilde{H}_1, \tilde{H}_2) \in \mathcal{R} \times \mathcal{R}$ que, juntamente com (h_1, h_2) , satisfaz as igualdades 5.7 e 5.8 e, além disso, $\tilde{H}_1'(0) = \tilde{H}_2'(0) = \tilde{H}_3'(0)$. □

Proposição 5.13 *Consideremos um diagrama de trigerme de curva plana $(f_1, \alpha_1); (f_2, \alpha_2); (f_3, \alpha_3)$ tal que $(\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3)$ tenha uma singularidade D_6 e f_1, f_2, f_3 tenham ordens finitas l, m e n , respectivamente. Então $(f_1, \alpha_1); (f_2, \alpha_2); (f_3, \alpha_3)$ é equivalente a um dos seguintes diagramas:*

$$(t^l, (t, 0)) ; (t^m; (0, t)) ; (t^n, (t, t^2)) \quad \text{ou} \quad (t^l, (t, 0)) ; (t^m; (0, t)) ; (t^n + t^{n+1}, (t, t^2)).$$

Demonstração: Basta observar que se $\beta_1(t) = (t, 0)$, $\beta_2(t) = (0, t)$ e $\beta_3(t) = (t, t^2)$ então

$$\mathcal{R}_3^\beta = \{(H_1, H_2, H_3) \in \mathcal{R} \times \mathcal{R} \times \mathcal{R} : \\ H_1'(0) = H_3'(0), H_2'(0) = H_3'(0)^2 \text{ e } H_1''(0) = H_3''(0)\}.$$

O restante segue de forma análoga ao passo 2 das demonstrações anteriores. □

5.4.3 Diagramas de quadrigermes de curvas planas

Proposição 5.14 *Consideremos um diagrama de quadrigerme de curva plana $\Gamma = (f_1, \alpha_1); (f_2, \alpha_2); (f_3, \alpha_3); (f_4, \alpha_4)$. Suponhamos que $(\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3; \alpha_4)$ tenha uma singularidade \tilde{E}_7 e f_1, f_2, f_3, f_4 tenham ordens finitas k, l, m e n respectivamente. Então Γ é equivalente a um dos seguintes diagramas:*

$$(t^k, (t, 0)) ; (t^l; (0, t)) ; (t^m, (t, t)) ; (t^n + t^{n+1}, (t, \lambda t)) \text{ ou} \\ (t^k, (t, 0)) ; (t^l; (0, t)) ; (t^m + t^{m+1}, (t, t)) ; (t^n + ct^{n+1}, (t, \lambda t)). \quad (*)$$

com $\lambda, c \in \mathbb{R}$ e $\lambda \neq 0, 1$. Em (*), cada $c \in \mathbb{R}$ corresponde a uma classe distinta de diagrama.

Demonstração: Segue de forma análoga aos casos anteriores, observando que se $\beta_1(t) = (t, 0)$, $\beta_2(t) = (0, t)$, $\beta_3(t) = (t, t)$ e $\beta_4(t) = (t, \lambda t)$, com $\lambda \neq 0, 1$, então:

$$\mathcal{R}_4^\beta = \{(H_1, H_2, H_3, H_4) \in \mathcal{R}^4 : H_1'(0) = H_2'(0) = H_3'(0) = H_4'(0), \\ H_3''(0) = H_1''(0) + H_2''(0) \text{ e } H_4''(0) = H_1''(0) + \lambda H_2''(0)\}.$$

□

Já vimos no capítulo 2 que, dado um mergulho genérico de uma curva γ no \mathbb{R}^3 , as singularidades que podem ocorrer para a família de projeções ortogonais em planos são as singularidades de \mathcal{A}_e -codimensão menor ou igual a 2. Assim, para o próximo capítulo o seguinte teorema terá um papel relevante.

Teorema 5.1 *Seja $\Gamma = (f_1, \alpha_1); \dots; (f_r, \alpha_r)$ com $r = 1, 2$ ou 3 , um diagrama de multi-germe de curva plana. Suponhamos que $(\alpha_1; \dots; \alpha_r)$ tenha \mathcal{A}_e -codimensão ≤ 2 . Então Γ é equivalente a um dos diagramas abaixo.*

Tipo	Germes	cod(Γ)
A_{0_m}	$t^m \leftarrow t \rightarrow (t, 0)$	$m-2$
A_{2_m}	$t^m \leftarrow t \rightarrow (t^2, t^3)$	m
A_{4_m}	$t^m + t^{m+1} \leftarrow t \rightarrow (t^2, t^5)$	$m+1$
A'_{4_m}	$t^m \leftarrow t \rightarrow (t^2, t^5)$	$m+2$

<i>Tipo</i>	<i>Bigermes</i>	<i>cod</i> (Γ)
$A_{1_{mn}}$	$t^m \leftarrow t \rightarrow (t, 0) ; t^n \leftarrow t \rightarrow (0, t)$	$m + n - 2$
$A_{3_{mn}}$	$t^m \leftarrow t \rightarrow (t, 0) ; t^n \leftarrow t \rightarrow (t, t^2)$	$m + n - 1$
$A_{5_{mn}}$	$t^m \leftarrow t \rightarrow (t, 0) ; t^n + t^{n+1} \leftarrow t \rightarrow (t, t^3)$	$m + n$
$A_{5'_{mn}}$	$t^m \leftarrow t \rightarrow (t, 0) ; t^n \leftarrow t \rightarrow (t, t^3)$	$m + n + 1$
$D_{5_{mn}}$	$t^m \leftarrow t \rightarrow (t, 0) ; t^n + t^{n+1} \leftarrow t \rightarrow (t^3, t^2)$	$m + n$
$D_{5'_{mn}}$	$t^m \leftarrow t \rightarrow (t, 0) ; t^n \leftarrow t \rightarrow (t^3, t^2)$	$m + n + 1$

<i>Tipo</i>	<i>Trigermes</i>	<i>cod</i> (Γ)
$D_{4_{lmn}}$	$t^l \leftarrow t \rightarrow (t, 0) ; t^m \leftarrow t \rightarrow (0, t) ; t^n \leftarrow t \rightarrow (t, t)$	$l + m + n - 2$
$D_{6_{lmn}}$	$t^l \leftarrow t \rightarrow (t, 0) ; t^m \leftarrow t \rightarrow (0, t) ; t^n + t^{n+1} \leftarrow t \rightarrow (t, t^2)$	$l + m + n - 1$
$D_{6'_{lmn}}$	$t^l \leftarrow t \rightarrow (t, 0) ; t^m \leftarrow t \rightarrow (0, t) ; t^n \leftarrow t \rightarrow (t, t^2)$	$l + m + n$

<i>Tipo</i>	<i>Quadrigermes</i>	<i>cod</i> (Γ)
$\tilde{E}_{7_{cklmn}}$	$(t^k, (t, 0)) ; (t^l; (0, t)) ; (t^m + t^{m+1}, (t, t)) ; (t^n + ct^{n+1}, (t, \lambda t))$	∞
$\tilde{E}_{7_{klmn}}$	$(t^k, (t, 0)) ; (t^l; (0, t)) ; (t^m, (t, t)) ; (t^n + t^{n+1}, (t, \lambda t))$	∞

\mathcal{A}_h -equivalência de curvas planas

Neste capítulo introduzimos uma relação de equivalência sobre uma classe especial de germes e de multigerms de curvas planas (\mathcal{A} -finitamente determinados), denominada \mathcal{A}_h -equivalência, de forma a refinar a \mathcal{A} -equivalência. Com o intuito de fornecer mais informações geométricas sobre projeções ortogonais em planos de curvas no \mathbb{R}^3 , determinamos a \mathcal{A}_h -classificação de germes e multigerms de curvas planas de \mathcal{A}_e -codimensão menor ou igual a 2, utilizando para isto, a classificação de diagramas de curvas planas obtida no capítulo anterior. Finalizamos o capítulo com a descrição geométrica das singularidades da projeção ortogonal.

6.1 \mathcal{A}_h -equivalência

Seja $\alpha : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ uma curva plana, \mathcal{A} -finitamente determinada (propriedade que será sempre considerada neste capítulo). Então, existe um inteiro $k \geq 1$ tal que

$$\alpha'(0) = \dots = \alpha^{(k-1)}(0) = 0, \quad \alpha^{(k)}(0) \neq 0.$$

Escolhemos um vetor $v_\alpha \in S^1$ ortogonal a $\alpha^{(k)}(0)$. Denotamos por $h_\alpha : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ o germe da função altura dado pelo produto interno $h_\alpha(t) = \langle \alpha(t), v_\alpha \rangle$.

Definição 6.1 *Dizemos que duas curvas planas $\alpha, \beta : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ são \mathcal{A}_h -equivalentes se os diagramas de curvas planas (h_α, α) e (h_β, β) são equivalentes, ou seja, existem germes de difeomorfismos H, h de $(\mathbb{R}, 0)$ e K de $(\mathbb{R}^2, 0)$ que comutam o diagrama*

$$\begin{array}{ccccc} (\mathbb{R}, 0) & \xleftarrow{h_\alpha} & (\mathbb{R}, 0) & \xrightarrow{\alpha} & (\mathbb{R}^2, 0) \\ h \downarrow & & H \downarrow & & \downarrow K \\ (\mathbb{R}, 0) & \xleftarrow{h_\beta} & (\mathbb{R}, 0) & \xrightarrow{\beta} & (\mathbb{R}^2, 0) \end{array}$$

É fácil ver que a definição acima independe da escolha dos vetores $v_\alpha, v_\beta \in S^1$.

Os lemas a seguir serão muito úteis na \mathcal{A}_h -classificação de germes e multigerms de curvas planas.

Lema 6.1

- (i) Se H é um germe de difeomorfismo de $(\mathbb{R}, 0)$, então as curvas planas α e $\alpha \circ H$ são \mathcal{A}_h -equivalentes.
- (ii) Se K é um germe de isomorfismo linear de $(\mathbb{R}^2, 0)$, então as curvas planas α e $K \circ \alpha$ são \mathcal{A}_h -equivalentes.

Demonstração:

(i) Observamos inicialmente que $\alpha'(0) = \dots = \alpha^{(k-1)}(0) = 0$ e $\alpha^{(k)}(0) \neq 0$ implicam $(\alpha \circ H)'(0) = \dots = (\alpha \circ H)^{(k-1)}(0) = 0$ e $(\alpha \circ H)^{(k)}(0) = H'(0)^k \alpha^{(k)}(0) \neq 0$. Então, podemos escolher v_α e $v_{\alpha \circ H}$ de modo que $v_\alpha = v_{\alpha \circ H}$ e assim $h_{\alpha \circ H} = h_\alpha \circ H$. É claro que os diagramas (h_α, α) e $(h_\alpha \circ H, \alpha \circ H)$ são equivalentes. Portanto, α e $\alpha \circ H$ são \mathcal{A}_h -equivalentes.

(ii) Suponhamos $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t))$ e $K(x, y) = (ax + by, cx + dy)$. Novamente $\alpha'(0) = \dots = \alpha^{(k-1)}(0) = 0$ e $\alpha^{(k)}(0) \neq 0$ implicam $(K \circ \alpha)'(0) = \dots = (K \circ \alpha)^{(k-1)}(0) = 0$ e $(K \circ \alpha)^{(k)}(0) = K(\alpha^{(k)}(0)) \neq 0$. Vamos escolher

$$v_\alpha = \frac{(-\alpha_2^{(k)}(0), \alpha_1^{(k)}(0))}{\|\alpha^{(k)}(0)\|} \quad \text{e} \quad v_{K \circ \alpha} = \frac{(-c\alpha_1^{(k)}(0) - d\alpha_2^{(k)}(0), a\alpha_1^{(k)}(0) + b\alpha_2^{(k)}(0))}{\|(K \circ \alpha)^{(k)}(0)\|}.$$

Com isso obtemos

$$h_{K \circ \alpha} = \det(K) \frac{\|\alpha^{(k)}(0)\|}{\|(K \circ \alpha)^{(k)}(0)\|} h_\alpha.$$

Logo, tomando os germes de difeomorfismos $H = id$ de $(\mathbb{R}, 0)$ e h de $(\mathbb{R}, 0)$, dado por $h(u) = \det(K) \frac{\|\alpha^{(k)}(0)\|}{\|(K \circ \alpha)^{(k)}(0)\|} u$, temos:

$$\begin{aligned} K \circ \alpha &= (K \circ \alpha) \circ H \\ h \circ h_\alpha &= h_{K \circ \alpha} \circ H. \end{aligned}$$

Portanto, α e $K \circ \alpha$ são \mathcal{A}_h -equivalentes. □

Lema 6.2 Uma curva plana α é \mathcal{A}_h -equivalente a uma curva plana $\beta = (\beta_1, \beta_2)$ tal que $ord(\beta_1) < ord(\beta_2)$.

Demonstração: Seja $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$. Se $ord(\alpha_1) < ord(\alpha_2)$ não temos nada a fazer. Caso $ord(\alpha_1) > ord(\alpha_2)$, então considerando a isometria $K(x, y) = (y, x)$, temos que a curva

$\beta = K \circ \alpha = (\alpha_2, \alpha_1)$ satisfaz a condição do enunciado e, além disso, o Lema 6.1(ii) garante que α é \mathcal{A}_h -equivalente a β .

Suponhamos agora que $\text{ord}(\alpha_1) = \text{ord}(\alpha_2) = k$. Consideremos a curva

$$\beta(t) = (\beta_1(t), \beta_2(t)) = \left(\alpha_1(t), \alpha_2(t) - \frac{\alpha_2^{(k)}(0)}{\alpha_1^{(k)}(0)} \alpha_1(t) \right),$$

para a qual vale $\text{ord}(\beta_1) < \text{ord}(\beta_2)$. O resultado agora segue do Lema 6.1(ii), já que $\beta = K \circ \alpha$ onde K é o isomorfismo linear

$$K(x, y) = \left(x, y - \frac{\alpha_2^{(k)}(0)}{\alpha_1^{(k)}(0)} x \right)$$

□

Dada uma curva plana $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ com $\text{ord}(\alpha_1) < \text{ord}(\alpha_2)$, estaremos sempre considerando $v_\alpha = (0, 1)$ e, portanto, $h_\alpha = \alpha_2$.

O conceito de \mathcal{A}_h -equivalência para multigerms de curvas planas, \mathcal{A} -finitamente determinados, é dado pela seguinte definição:

Definição 6.2 Dizemos que dois multigerms de curvas planas $(\alpha_1; \dots; \alpha_r)$ e $(\alpha'_1; \dots; \alpha'_r)$ são \mathcal{A}_h -equivalentes se os diagramas $(h_{\alpha_1}, \alpha_1); \dots; (h_{\alpha_r}, \alpha_r)$ e $(h_{\alpha'_1}, \alpha'_1); \dots; (h_{\alpha'_r}, \alpha'_r)$ são equivalentes, ou seja, existem germes de difeomorfismos H_i, h_i de $(\mathbb{R}, 0)$, $i = 1, \dots, r$ e K de $(\mathbb{R}^2, 0)$ tais que

$$\begin{aligned} K \circ \alpha_i &= \alpha'_i \circ H_i \\ h_i \circ h_{\alpha_i} &= h_{\alpha'_i} \circ H_i, \end{aligned}$$

para $i = 1, \dots, r$.

Tal como antes, a definição acima independe da escolha dos vetores $v_{\alpha_i}, v_{\alpha'_i} \in S^1$.

Os correspondentes aos Lemas 6.1 e 6.2 para multigerms, são dados pelos dois resultados seguintes:

Lema 6.3

- (i) Se H_1, \dots, H_r são germes de difeomorfismos de $(\mathbb{R}, 0)$, então os multigerms $(\alpha_1; \dots; \alpha_r)$ e $(\alpha_1 \circ H_1; \dots; \alpha_r \circ H_r)$ são \mathcal{A}_h -equivalentes.
- (ii) Se K é um germe de isomorfismo linear de $(\mathbb{R}^2, 0)$, então os multigerms $(\alpha_1; \dots; \alpha_r)$ e $(K \circ \alpha_1; \dots; K \circ \alpha_r)$ são \mathcal{A}_h -equivalentes.

Lema 6.4 Seja $(\alpha_1; \dots; \alpha_r)$ um multigerme de curva plana. Fixemos um índice i_0 , $1 \leq i_0 \leq r$. Então $(\alpha_1; \dots; \alpha_r)$ é \mathcal{A}_h -equivalente a um multigerme $(\tilde{\alpha}_1; \dots; \tilde{\alpha}_r)$, onde a curva $\tilde{\alpha}_{i_0} = (\tilde{\alpha}_{i_0 1}, \tilde{\alpha}_{i_0 2})$ satisfaz $\text{ord}(\tilde{\alpha}_{i_0 1}) < \text{ord}(\tilde{\alpha}_{i_0 2})$.

6.2 \mathcal{A}_h -Classificação de curvas planas

Tendo introduzido o conceito de \mathcal{A}_h -equivalência e mostrado algumas de suas propriedades, faremos nesta seção a \mathcal{A}_h -classificação de germes e multigerms de curvas planas de \mathcal{A}_e -codimensão menor ou igual a 2 tais que os germes das funções altura associados sejam de ordem finita.

6.2.1 \mathcal{A}_h -Classificação: Caso local

Para a classificação de germes de curvas planas sob a \mathcal{A}_h -equivalência, vamos supor primeiramente que a curva α seja regular.

Proposição 6.1 *Seja k um inteiro ≥ 2 e seja $\alpha : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ uma curva plana regular tal que*

$$\kappa_\alpha(0) = \cdots = \kappa_\alpha^{(k-3)}(0) = 0, \quad \kappa_\alpha^{(k-2)}(0) \neq 0,$$

onde κ_α é a curvatura de α . Então α é \mathcal{A}_h -equivalente à curva $t \mapsto (t, t^k)$.

Demonstração: Como α é regular, pelos Lemas 6.1 e 6.2, podemos escrever $\alpha(t) = (t, \alpha_2(t))$ com $\alpha_2'(0) = 0$. Observamos agora que, como $\text{ord}(\kappa_\alpha) = k-2$, então $\text{ord}(\alpha_2) = k$. Por outro lado, $h_\alpha(t) = \alpha_2(t)$ e $h_\beta(t) = t^k$, onde $\beta(t) = (t, t^k)$. Logo, pela Proposição 5.3, (h_α, α) é equivalente a (h_β, β) . Portanto, α e β são \mathcal{A}_h -equivalentes. □

O exemplo abaixo mostra que a \mathcal{A}_h -equivalência fornece mais informações geométricas do que a \mathcal{A} -equivalência.

Exemplo 6.1 *Consideremos duas curvas planas $\alpha(t) = (t, t^k)$ e $\beta(t) = (t, t^m)$ com $k, m \geq 2$. Com relação às funções curvatura κ_α e κ_β de α e β , temos:*

$$\begin{aligned} \kappa_\alpha(0) &= \cdots = \kappa_\alpha^{k-3}(0) = 0 \text{ e } \kappa_\alpha^{k-2}(0) \neq 0, \\ \kappa_\beta(0) &= \cdots = \kappa_\beta^{m-3}(0) = 0 \text{ e } \kappa_\beta^{m-2}(0) \neq 0. \end{aligned}$$

Embora as ordens das funções curvatura sejam diferentes para $k \neq m$, é fácil ver que as duas curvas são \mathcal{A} -equivalentes. Portanto, a ordem da função curvatura não é um invariante sob \mathcal{A} -equivalência. Por outro lado, α e β são \mathcal{A}_h -equivalentes se, e somente se, $k = m$.

Veremos a seguir que a \mathcal{A}_h -classe de uma curva plana regular é determinada pela ordem da função curvatura.

Proposição 6.2 *Sejam $\alpha, \beta : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ curvas planas regulares, Então α e β são \mathcal{A}_h -equivalentes se, e somente se, $\text{ord}(\kappa_\alpha) = \text{ord}(\kappa_\beta)$.*

Demonstração: Sem perda de generalidade, podemos escrever $\alpha(t) = (t, \alpha_2(t))$ e $\beta(t) = (t, \beta_2(t))$. Agora é fácil ver que $\text{ord}(h_\alpha) = \text{ord}(\kappa_\alpha) + 2$ e $\text{ord}(h_\beta) = \text{ord}(\kappa_\beta) + 2$. Portanto, $\text{ord}(\kappa_\alpha) = \text{ord}(\kappa_\beta)$ se, e somente se, $\text{ord}(h_\alpha) = \text{ord}(h_\beta)$. Assim,

$$\begin{aligned} \alpha \text{ e } \beta \text{ são } \mathcal{A}_h\text{-equivalentes} &\Leftrightarrow \text{ord}(h_\alpha) = \text{ord}(h_\beta) \\ &\Leftrightarrow \text{ord}(\kappa_\alpha) = \text{ord}(\kappa_\beta). \end{aligned}$$

A primeira equivalência é garantida pela Proposição 5.3. □

Corolário 6.1 *Nas condições da Proposição 6.2, se $\kappa_\alpha(0) = \kappa_\beta(0) = 0$, então as curvas α e β são \mathcal{A}_h -equivalentes se, e somente se, suas funções curvatura κ_α e κ_β são \mathcal{A} -equivalentes.*

Consideraremos agora o caso em que o germe de curva α é singular. Neste caso existem duas singularidades de \mathcal{A}_e -codimensão ≤ 2 , a saber: singularidades A_2 e A_4 .

Proposição 6.3 *Suponhamos que $\alpha : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ tenha uma cúspide ordinária. Então α é \mathcal{A}_h -equivalente à curva $t \mapsto (t^2, t^3)$.*

Demonstração: Como por hipótese α tem uma cúspide ordinária, pelos Lemas 6.1 e 6.2, podemos escrever $\alpha(t) = (t^2, \alpha_2(t))$ com $\text{ord}(\alpha_2) = 3$ e, assim, $h_\alpha = \alpha_2$. Portanto, α tem uma cúspide ordinária e h_α tem ordem finita 3. Pela Proposição 5.4, segue-se então que (h_α, α) é equivalente a $(t^3, (t^2, t^3))$. □

Proposição 6.4 *Suponhamos que $\alpha : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ tenha uma ramphoid cusp. Então α é \mathcal{A}_h -equivalente a uma das seguintes curvas*

$$t \mapsto (t^2, t^4 + t^5); \quad t \mapsto (t^2, t^5); \quad t \mapsto (t^2, t^5 + t^6).$$

Demonstração: Podemos escrever $\alpha(t) = (t^2, a_4t^4 + a_5t^5 + \dots)$, com $a_5 \neq 0$. Suponhamos primeiramente que $a_4 \neq 0$, assim, $\text{ord}(h_\alpha) = 4$. Como $a_5 \neq 0$, pela Observação 5.2, (h_α, α) é equivalente a $(t^4 + t^5, (t^2, t^5))$ que por sua vez é equivalente a $(t^4 + t^5, (t^2, t^4 + t^5))$ pelo Lema 5.1(i). Logo, α é \mathcal{A}_h -equivalente a $(t^2, t^4 + t^5)$. Suponhamos agora que $a_4 = 0$, então $\text{ord}(h_\alpha) = 5$ e, novamente pela Observação 5.2, temos que (h_α, α) é equivalente a $(t^5, (t^2, t^5))$ ou a $(t^5 + t^6, (t^2, t^5))$, dependendo se $a_6 = 0$ ou não. Portanto, α é \mathcal{A}_h -equivalente a (t^2, t^5) ou a $(t^2, t^5 + t^6)$. □

6.2.2 \mathcal{A}_h -Classificação: Caso multilocal

Começamos agora a classificação sob \mathcal{A}_h -equivalência para multigerme de curvas planas com \mathcal{A}_e -codimensão ≤ 2 , ou seja, as singularidades listadas na tabela 2.2. Nas posições que se seguem, ao invés de colocarmos o tipo de singularidade que o multigerme possui, daremos as condições geométricas para que ocorra tal singularidade.

Proposição 6.5 *Sejam $\alpha_1, \alpha_2 : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ curvas planas regulares, tais que*

- $\mathbf{t}_{\alpha_1}(0)$ é transversal a $\mathbf{t}_{\alpha_2}(0)$,
- $\kappa_{\alpha_1}(0) = \dots = \kappa_{\alpha_1}^{(k-3)}(0) = 0, \quad \kappa_{\alpha_1}^{(k-2)}(0) \neq 0, \quad k \geq 2,$
- $\kappa_{\alpha_2}(0) = \dots = \kappa_{\alpha_2}^{(m-3)}(0) = 0, \quad \kappa_{\alpha_2}^{(m-2)}(0) \neq 0, \quad m \geq 2.$

onde \mathbf{t}_{α_i} é a tangente de α_i . Então o bigerme $(\alpha_1; \alpha_2)$ é \mathcal{A}_h -equivalente ao bigerme

$$\left((t, t^k); (s^m, s) \right).$$

Demonstração: Pela condição de regularidade das curvas α_1 e α_2 , juntamente com o Lemas 6.3 e 6.4, podemos escrever o bigerme como $((t, \alpha_{12}(t)); (\alpha_{21}(s), \alpha_{22}(s)))$, onde $ord(\alpha_{12}) > 1$. Assim, a condição de transversalidade de $\mathbf{t}_{\alpha_1}(0)$ e $\mathbf{t}_{\alpha_2}(0)$, implica que $\alpha'_{22}(0) \neq 0$. Logo, pelo Lema 6.3 podemos escrever o bigerme como $((t, \alpha_{12}(t)); (\tilde{\alpha}_{21}(s), s))$. Agora, como $ord(\kappa_{\alpha_1}) = k - 2$ e $ord(\kappa_{\alpha_2}) = m - 2$, segue-se que $ord(\alpha_{12}) = k$ e $ord(\tilde{\alpha}_{21}) = m$. Portanto, pela Proposição 5.8, o diagrama $(h_{\alpha_1}, \alpha_1); (h_{\alpha_2}, \alpha_2)$ é equivalente ao diagrama $((t^k, (t, t^k)); (s^m, (s^m, s)))$. □

Proposição 6.6 *Sejam $\alpha_1, \alpha_2 : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ curvas planas regulares, tais que*

- $\mathbf{t}_{\alpha_1}(0)$ é paralelo a $\mathbf{t}_{\alpha_2}(0)$,
- $\kappa_{\alpha_1}(0) \neq \kappa_{\alpha_2}(0)$,
- $\kappa_{\alpha_2}(0) = \dots = \kappa_{\alpha_2}^{(k-3)}(0) = 0, \quad \kappa_{\alpha_2}^{(k-2)}(0) \neq 0, \quad k \geq 2.$

Então o bigerme $(\alpha_1; \alpha_2)$ é \mathcal{A}_h -equivalente ao bigerme

$$\left((t, -t^2); (s, s^k) \right).$$

Demonstração: Usando agora o fato de $\mathbf{t}_{\alpha_1}(0)$ ser paralelo a $\mathbf{t}_{\alpha_2}(0)$, podemos escrever $\alpha_1(t) = (t, \alpha_{12}(t))$ e $\alpha_2(s) = (s, \alpha_{22}(s))$. Como $\kappa_{\alpha_1}(0) \neq \kappa_{\alpha_2}(0)$, suponhamos sem perda de generalidade que $\kappa_{\alpha_1}(0) < 0$. Se $\kappa_{\alpha_2}(0) \neq 0$, podemos ainda supor $\kappa_{\alpha_2}(0) > 0$. Dessa forma, pela Proposição 5.9, temos que o diagrama $(h_{\alpha_1}, \alpha_1); (h_{\alpha_2}, \alpha_2)$ é equivalente ao diagrama $(-t^2, (t, -t^2)); (s^k, (s, s^k))$. Portanto, o bigerme $(\alpha_1; \alpha_2)$ é \mathcal{A}_h -equivalente a $((t, -t^2); (s, s^k))$. □

Proposição 6.7 *Sejam $\alpha_1, \alpha_2 : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ curvas planas regulares, tais que*

- $\mathbf{t}_{\alpha_1}(0)$ é paralelo a $\mathbf{t}_{\alpha_2}(0)$,
- $\kappa_{\alpha_1}(0) = \kappa_{\alpha_2}(0)$ mas $\kappa'_{\alpha_1}(0) \neq \kappa'_{\alpha_2}(0)$.
- $\kappa_{\alpha_2}(0) = \dots = \kappa_{\alpha_2}^{(k-3)}(0) = 0, \quad \kappa_{\alpha_2}^{(k-2)}(0) \neq 0, \quad k \geq 2.$

Então o bigerme $(\alpha_1; \alpha_2)$ é \mathcal{A}_h -equivalente a um dos seguintes bigermes:

$$\left((t, t^2); (s, s^2 + s^3) \right), \quad \left((t, -t^3); (s, s^k + s^{k+1}) \right), \quad \left((t, -t^3); (s, s^k) \right).$$

Demonstração: Dividimos a demonstração em dois casos:

i) $\kappa_{\alpha_1}(0) \neq 0$. Logo por hipótese $\kappa_{\alpha_2}(0) = \kappa_{\alpha_1}(0) \neq 0$ e $\kappa'_{\alpha_1}(0) \neq \kappa'_{\alpha_2}(0)$. Assim, podemos escrever $\alpha_1(t) = (t, a_2t^2 + a_3t^3 + \dots)$ e $\alpha_2(s) = (s, b_2s^2 + b_3s^3 + \dots)$, com $a_2 = b_2$ e $a_3 \neq b_3$. Logo, pela Proposição 5.10 e Observação 5.3, o diagrama $(h_{\alpha_1}, \alpha_1); (h_{\alpha_2}, \alpha_2)$ é equivalente a

$$(t^2, (t, 0)); (s^2 + s^3, (s, s^3)), \quad (6.1)$$

pois $b_3a_2 - a_3b_2 = a_2(b_3 - a_3) \neq 0$. Agora não é difícil ver que o diagrama 6.1 é equivalente ao diagrama $(t^2, (t, t^2)); (s^2 + s^3, (s, s^2 + s^3))$, bastando para isso tomar o germe de difeomorfismo $K(x, y) = (x, y + x^2)$.

ii) $\kappa_{\alpha_1}(0) = 0$. Assim, podemos escrever $\alpha_1(t) = (t, a_3t^3 + a_4t^4 + \dots)$ e $\alpha_2(s) = (s, b_3s^3 + b_4s^4 + \dots)$, com $a_3 \neq b_3$. Podemos supor sem perda de generalidade que $a_3 \neq 0$, ou seja, $\kappa'_{\alpha_1}(0) \neq 0$. De forma análoga ao caso anterior, concluímos então que $(h_{\alpha_1}, \alpha_1); (h_{\alpha_2}, \alpha_2)$ é equivalente a um dos seguintes diagramas:

$$(-t^3, (t, -t^3)); (s^k + s^{k+1}, (s, s^k + s^{k+1})) \text{ ou } (-t^3, (t, -t^3)); (s^k, (s, s^k)),$$

para $k \geq 3$, dependendo se $3a_3b_{k+1} - ka_4b_k = 0$ ou não, respectivamente. □

Proposição 6.8 *Sejam $\alpha_1, \alpha_2 : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ curvas planas regulares. Suponhamos que α_1 tenha uma cúspide ordinária e α_2 seja uma curva regular e, além disso:*

- $\alpha_1''(0)$ é transversal a $\mathbf{t}_{\alpha_2}(0)$,
- $\kappa_{\alpha_2}(0) = \dots = \kappa_{\alpha_2}^{(k-3)}(0) = 0, \quad \kappa_{\alpha_2}^{(k-2)}(0) \neq 0 \quad k \geq 2.$

Então o bigerme $(\alpha_1; \alpha_2)$ é \mathcal{A}_h -equivalente a um dos seguintes bigermes:

$$\left((t^2, t^3); (s^k, s) \right), \quad \left((t^2, t^3 + t^4); (s^k, s) \right).$$

Demonstração: Segue de forma semelhante às demonstrações das proposições anteriores, usando a Proposição 5.11. □

Proposição 6.9 *Sejam $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ curvas planas regulares, tais que*

- $\mathbf{t}_{\alpha_1}(0), \mathbf{t}_{\alpha_2}(0)$ e $\mathbf{t}_{\alpha_3}(0)$ são duas a duas transversais,
- $\kappa_{\alpha_1}(0) = \dots = \kappa_{\alpha_1}^{(k-3)}(0) = 0, \quad \kappa_{\alpha_1}^{(k-2)}(0) \neq 0, \quad k \geq 2,$
- $\kappa_{\alpha_2}(0) = \dots = \kappa_{\alpha_2}^{(m-3)}(0) = 0, \quad \kappa_{\alpha_2}^{(m-2)}(0) \neq 0, \quad m \geq 2,$
- $\kappa_{\alpha_3}(0) = \dots = \kappa_{\alpha_3}^{(n-3)}(0) = 0, \quad \kappa_{\alpha_3}^{(n-2)}(0) \neq 0, \quad n \geq 2.$

Então o trigerme $(\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3)$ é \mathcal{A}_h -equivalente ao trigerme

$$\left((t, t^k); (s^m, s); (u - u^n, u + u^n) \right).$$

Demonstração: Podemos escrever as três curvas nas seguintes formas:

$$\alpha_1(t) = (t, \alpha_{12}(t)), \quad \alpha_2(s) = (\alpha_{21}(s), s) \quad \text{e} \quad \alpha_3(u) = (\alpha_{31}(u), \alpha_{32}(u)),$$

onde $ord(\alpha_{12}) > 1, ord(\alpha_{21}) > 1$ e $ord(\alpha_{31}) = ord(\alpha_{32}) = 1$. Então, $h_{\alpha_1} = \alpha_{12}, h_{\alpha_2} = \alpha_{21}$ e, além disso, podemos definir h_{α_3} por

$$h_{\alpha_3}(u) = \frac{-\alpha'_{32}(0)\alpha_{31}(u) + \alpha'_{31}(0)\alpha_{32}(u)}{\|\alpha'_3(0)\|}.$$

Por hipótese, temos $ord(\kappa_{\alpha_1}) = k - 2, ord(\kappa_{\alpha_2}) = m - 2$ e $ord(\kappa_{\alpha_3}) = n - 2$, o que é equivalente a $ord(h_{\alpha_1}) = k, ord(h_{\alpha_2}) = m$ e $ord(h_{\alpha_3}) = n$. Portanto, pela Proposição 5.12, o diagrama $(h_{\alpha_1}, \alpha_1); (h_{\alpha_2}, \alpha_2); (h_{\alpha_3}, \alpha_3)$ é equivalente ao diagrama

$$(t^k, (t, 0)); (s^m, (0, s)); (u^n, (u, u)). \tag{6.2}$$

Agora, tomando os germes de difeomorfismos H_i, h_i iguais à identidade e K , dado por

$$K(x, y) = \left(x + y^m - x(y^{m-1} + y^{n-1}), y + x^k + y(x^{n-1} - x^{k-1}) \right),$$

vemos que o diagrama 6.2 é equivalente ao diagrama

$$(t^k, (t, t^k)); (s^m, (s^m, s)); (u^n, (u - u^n, u + u^n)).$$

□

Omitiremos as demonstrações das duas proposições a seguir que são análogas às anteriores.

Proposição 6.10 *Sejam $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ curvas planas regulares, tais que*

- $\mathbf{t}_{\alpha_1}(0)$ é transversal a $\mathbf{t}_{\alpha_2}(0)$ e $\mathbf{t}_{\alpha_1}(0)$ é paralelo a $\mathbf{t}_{\alpha_3}(0)$,
- $\kappa_{\alpha_1}(0) \neq \kappa_{\alpha_3}(0)$,
- $\kappa_{\alpha_2}(0) = \dots = \kappa_{\alpha_2}^{(k-3)}(0) = 0, \quad \kappa_{\alpha_2}^{(k-2)}(0) \neq 0, \quad k \geq 2,$
- $\kappa_{\alpha_3}(0) = \dots = \kappa_{\alpha_3}^{(m-3)}(0) = 0, \quad \kappa_{\alpha_3}^{(m-2)}(0) \neq 0, \quad m \geq 2.$

Então o trigerme $(\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3)$ é \mathcal{A}_h -equivalente a um dos seguintes trigermes:

$$\left((t, -t^2); (s^k, s); (u, u^m) \right), \quad \left((t, -t^2); (s^k, s); (u, u^m + u^{m+1}) \right).$$

Proposição 6.11 *Sejam $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ curvas planas regulares. Suponhamos:*

- $\mathbf{t}_{\alpha_i}(0)$ dois a dois transversais, para $i = 1, 2, 3$ e 4.
- $\kappa_{\alpha_1}(0) = \dots = \kappa_{\alpha_1}^{(k-3)}(0) = 0, \quad \kappa_{\alpha_1}^{(k-2)}(0) \neq 0, \quad k \geq 2,$
- $\kappa_{\alpha_2}(0) = \dots = \kappa_{\alpha_2}^{(l-3)}(0) = 0, \quad \kappa_{\alpha_2}^{(l-2)}(0) \neq 0, \quad l \geq 2,$
- $\kappa_{\alpha_3}(0) = \dots = \kappa_{\alpha_3}^{(m-3)}(0) = 0, \quad \kappa_{\alpha_3}^{(m-2)}(0) \neq 0, \quad m \geq 2.$
- $\kappa_{\alpha_4}(0) = \dots = \kappa_{\alpha_4}^{(n-3)}(0) = 0, \quad \kappa_{\alpha_4}^{(n-2)}(0) \neq 0, \quad n \geq 2.$

Então o quadrigerme $(\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3; \alpha_4)$ é \mathcal{A}_h -equivalente a um dos seguintes quadrigermes

$$\left((t, t^k + t^{k+1}); (s^l + cs^{l+1}, t); (u - u^m, u + u^m); (v - v^n, \lambda v + v^n) \right),$$

$$\left((t, t^k); (s^l + s^{l+1}, s); (u - u^m, u + u^m); (v - v^n, \lambda v + v^n) \right),$$

com $\lambda, c \in \mathbb{R}$ e $\lambda \neq 0, 1$. Cada $c \in \mathbb{R}$ corresponde a uma \mathcal{A}_h -classe distinta.

O seguinte teorema sintetiza os resultados de classificação obtidos anteriormente.

Teorema 6.1 *Se $(\alpha_1, \dots, \alpha_4)$ é um multigerme de curva plana $(\mathbb{R}, S) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ com \mathcal{A}_e -codimensão menor ou igual a 2 então $(\alpha_1, \dots, \alpha_4)$ é \mathcal{A}_h -equivalente a um dos seguintes multigerms na tabela abaixo.*

<i>Tipo</i> $k \geq 2$	<i>Germe</i>
A_{0_k}	(t, t^k)
A_{2_3}	(t^2, t^3)
A_{4_4}	$(t^2, t^4 + t^5)$
A_{4_5}	$(t^2, t^5 + t^6)$
$A_{4'_5}$	(t^2, t^5)

<i>Tipo</i> $k, m \geq 2$	<i>Bigerme</i>
$A_{1_{km}}$	$((t, t^k); (s^m, s))$
$A_{3_{2k}}$	$((t, -t^2); (s, s^k))$
$A_{5_{22}}$	$((t, t^2); (s, s^2 + s^3))$
$A_{5_{3k}}$	$((t, -t^3); (s, s^k + s^{k+1})), k \geq 3$
$A_{5'_{3k}}$	$((t, -t^3); (s, s^k)), k \geq 3$
$D_{5_{3k}}$	$((t^2, t^3 + t^4); (s^k, s))$
$D_{5'_{3k}}$	$((t^2, t^3); (s^k, s))$

<i>Tipo</i> $k, m, n \geq 2$	<i>Trigerme</i>
$D_{4_{kmn}}$	$((t, t^k); (s^m, s); (u - u^n, u + u^n))$
$D_{6_{2km}}$	$((t, -t^2); (s^k, s); (u, u^m + u^{m+1}))$
$D_{6'_{2km}}$	$((t, -t^2); (s^k, s); (u, u^m))$

<i>Tipo</i> $k, l, m, n \geq 2$	<i>Quadrigerme</i>
$\tilde{E}_{7_{c_{klmn}}}$	$((t, t^k + t^{k+1}); (s^l + cs^{l+1}, s); (u - u^m, u + u^m); (v - v^n, \lambda v + v^n))$
$\tilde{E}_{7_{klmn}}$	$((t, t^k); (s^l + s^{l+1}, s); (u - u^m, u + u^m); (v - v^n, \lambda v + v^n))$

6.3 Geometria das singularidades de projeções sob \mathcal{A}_h -equivalência

Nesta seção, damos a interpretação geométrica das singularidades descritas no Teorema 6.1. Mais precisamente, estabelecemos a relação existente entre o tipo de singularidade que ocorre para uma curva plana projetada e as propriedades geométricas da curva mergulhada no \mathbb{R}^3

Teorema 6.2 *Para um mergulho de uma curva γ no \mathbb{R}^3 , a projeção ortogonal na direção \vec{v} de γ apresenta uma singularidade:*

$A_{0_k} \Leftrightarrow$ a direção de projeção não é paralela à reta tangente a γ . Mas, pertence a um plano cujo contato com γ em t_0 tem ordem k .

$A_{2_3} \Leftrightarrow$ a direção de projeção é paralela à reta tangente a γ .

$A_{4_4} \Leftrightarrow$ a direção de projeção é paralela à reta tangente a γ em um ponto de torção nula.

$A_{4_5} \Leftrightarrow$ a direção de projeção é paralela à reta tangente a γ em um ponto de torção nula degenerado.

$A_{4'_5} \Leftrightarrow$ a direção de projeção é paralela à reta tangente a γ em um ponto t_0 , de torção nula degenerado. Com a condição adicional de que o vetor $\gamma^{(6)}(t_0)$ pertença ao plano osculador de γ no ponto t_0 .

$A_{1_{km}} \Leftrightarrow$ a direção de projeção \vec{v} , é dada por uma secante à curva γ , digamos em t_0 e s_0 . Além disso, o plano gerado pelos vetores \vec{v} e $\gamma'(t_0)$ (resp. \vec{v} e $\gamma'(s_0)$) tem ordem de contato k (resp. m) com a curva γ em t_0 (resp. s_0).

$A_{3_{2k}} \Leftrightarrow$ a direção de projeção está contida no plano bitangente à curva γ e é dada pela secante unindo-se os dois pontos de tangência, digamos t_0 e s_0 , (T-secante) e, além disso, o contato do plano bitangente com a curva γ em s_0 tem ordem k .

$A_{5_{22}} \Leftrightarrow$ projetamos ao longo de uma T-secante, com a condição adicional que o vetor $(|\gamma'(s_0)|^2 \text{sen}(\theta_2)^2 \gamma''(t_0) + |\gamma'(t_0)|^2 \text{sen}(\theta_1)^2 \gamma''(s_0))$ pertença ao plano bitangente à curva γ em s_0 e t_0 . Onde θ_1 (resp. θ_2) é o ângulo formado pelos vetores $\gamma(t_0) - \gamma(s_0)$ e $\gamma'(t_0)$ (resp. $\gamma(t_0) - \gamma(s_0)$ e $\gamma'(s_0)$).

$A_{5_{3k}} \Leftrightarrow$ projetamos ao longo de uma T-secante, cujo contato do plano bitangente com a curva γ em s_0 tem ordem k e oscula em t_0 .

$A_{5'_{3k}} \Leftrightarrow$ projetamos na mesma direção do caso anterior, com a condição adicional que o vetor $\gamma^{(k+1)}(s_0)$ pertença ao plano bitangente.

$D_{5_{3k}} \Leftrightarrow$ a direção de projeção \vec{v} é paralela à reta tangente a γ em t_0 , interceptando γ em outro ponto, digamos s_0 (cross-tangent). Além disso, o plano gerado pelos vetores \vec{v} e $\gamma'(s_0)$ tem ordem de contato k com a curva γ em s_0 .

$D_{5'_{3k}} \Leftrightarrow$ a direção é análoga ao caso anterior, com a condição adicional que o vetor $\gamma^{(4)}(t_0)$ pertença ao plano osculador de γ em t_0 .

$D_{4_{kmn}} \Leftrightarrow$ a direção de projeção \vec{v} é paralela a uma trissecante à curva γ em t_0 , s_0 e u_0 . Além disso, o plano $[\vec{v}, \gamma'(t_0)]$ (resp. $[\vec{v}, \gamma'(s_0)]$ e $[\vec{v}, \gamma'(u_0)]$) tem ordem de contato k (resp. m e n) com a curva γ em t_0 (resp. s_0 e u_0)

$D_{6_{2km}} \Leftrightarrow$ a direção de projeção \vec{v} é paralela a uma trissecante à curva γ em t_0 , s_0 e u_0 , contida no plano bitangente à curva γ em t_0 e u_0 , cujo contato com γ em u_0 tem ordem m . Além disso, o plano $[\vec{v}, \gamma'(s_0)]$ tem ordem de contato k com a curva γ em s_0 .

$D_{6'_{2km}} \Leftrightarrow$ a direção é análoga ao caso anterior, com a condição de que o vetor $\gamma^{(m+1)}(u_0)$

pertença ao plano bitangente a γ em t_0 e u_0 .

$\tilde{E}_{7_{cklmn}} \Leftrightarrow$ a direção de projeção é paralela a uma quadrissecante à curva γ em t_0, s_0, u_0 e v_0 . Além disso, o plano $[\vec{v}, \gamma'(t_0)]$ (resp. $[\vec{v}, \gamma'(s_0)], [\vec{v}, \gamma'(u_0)]$ e $[\vec{v}, \gamma'(v_0)]$) tem ordem de contato k (resp. l, m e n) com a curva γ em t_0 (resp. s_0, u_0 e v_0).

$\tilde{E}_{7_{klmn}} \Leftrightarrow$ a direção é análoga ao caso anterior, com a condição adicional de que o vetor $\gamma^{(k+1)}(t_0)$ pertença ao plano $[\vec{v}, \gamma'(t_0)]$.

Demonstração: Seja α a projeção ortogonal de γ . Suponhamos primeiramente que α tenha uma singularidade do tipo A_{0_k} em t_0 , ou seja, α é regular (portanto \vec{v} não é paralelo a $\gamma'(t_0)$) e

$$\kappa_\alpha(t_0) = \dots = \kappa_\alpha^{(k-3)}(t_0) = 0, \quad \kappa_\alpha^{(k-2)}(t_0) \neq 0.$$

Assim, $\alpha'(t_0)$ é paralelo ao vetor $\alpha''(t_0)$ e, pela Proposição 2.2, os vetores $\vec{v}, \gamma'(t_0)$ e $\gamma''(t_0)$ são coplanares. Mas, isto é equivalente a dizer que \vec{v} pertence ao plano osculador de γ em t_0 . Além disso, $\alpha'''(t_0)$ também é paralelo ao vetor $\alpha'(t_0)$ e novamente pela Proposição 2.2, os vetores $\vec{v}, \gamma'(t_0)$ e $\gamma'''(t_0)$ são coplanares, ou seja, $\gamma'''(t_0)$ pertence ao plano gerado pelos vetores \vec{v} e $\gamma'(t_0)$, que é o plano osculador.

Assim, sucessivamente, chegamos que os vetores $\gamma'''(t_0), \dots, \gamma^{(k-1)}(t_0)$ pertencem ao plano osculador, enquanto que $\gamma^{(k)}(t_0)$ não. Portanto, o plano osculador de γ em t_0 , tem contato de ordem k com a curva γ em t_0 .

As descrições geométricas das singularidades A_{2_3} e $A_{5_{22}}$ foram dadas no capítulo 2.

Suponhamos agora que α tenha uma singularidade do tipo A_{4_4} , ou seja, $\alpha'(t_0) = 0$, o conjunto $\{\alpha''(t_0), \alpha'''(t_0)\}$ é L.D. e o conjunto $\{\alpha''(t_0), \alpha^{(4)}(t_0)\}$ é L.I. Dessa forma, temos que

$$\alpha'(t_0) = 0 \Leftrightarrow P_{\vec{v}}(\gamma'(t_0)) = 0 \Leftrightarrow \gamma'(t_0) \in \text{Ker} P_{\vec{v}} = \langle \vec{v} \rangle.$$

O fato do conjunto $\{\alpha''(t_0), \alpha'''(t_0)\}$ ser L.D., juntamente com o fato de \vec{v} ser paralelo ao vetor $\gamma'(t_0)$, implica que o conjunto $\{\gamma'(t_0), \gamma''(t_0), \gamma'''(t_0)\}$ é L.D., ou seja, a torção de γ em t_0 é igual a zero. Por outro lado, $\{\alpha''(t_0), \alpha^{(4)}(t_0)\}$ é L.I., equivale a dizer que a derivada da torção em t_0 é diferente de zero.

A descrição geométrica da singularidade A_{4_5} segue de forma análoga à singularidade A_{4_4} , com a exceção de que os vetores $\alpha''(t_0)$ e $\alpha^{(4)}(t_0)$ são linearmente dependentes. Portanto, a direção de projeção \vec{v} é paralela à reta tangente à curva γ em um ponto de torção nula degenerado.

A descrição da singularidade $A_{4'_5}$ é análoga ao caso anterior, com a condição adicional de que os vetores $\alpha''(t_0)$ e $\alpha^{(6)}(t_0)$ são paralelos, o que equivale a dizer que o vetor $\gamma^{(6)}(t_0)$ pertence ao plano osculador de γ em t_0 .

Quando α apresenta uma singularidade do tipo $A_{1_{km}}$, temos primeiramente que $\alpha(t_0) = \alpha(s_0)$, ou seja, a direção de projeção \vec{v} é paralela a uma secante à curva γ nos pontos t_0 e s_0 . Temos também que $\alpha'(t_0) \neq 0$ e $\alpha'(s_0) \neq 0$. Equivalentemente, os conjuntos $\{\vec{v}, \gamma'(t_0)\}$ e $\{\vec{v}, \gamma'(s_0)\}$ são L.I. E por último, de forma análoga ao que foi feito no caso A_{0_k} , concluímos que as condições $ord(\kappa_\alpha) = k - 2$ em t_0 e $ord(\kappa_\alpha) = m - 2$ em s_0 são equivalentes ao plano $[\vec{v}, \gamma'(t_0)]$ (resp. $[\vec{v}, \gamma'(s_0)]$) ter contato de ordem k (resp. m) com a curva γ em t_0 (resp. s_0).

Suponhamos agora, α com uma singularidade do tipo $A_{3_{2k}}$. Assim, $\alpha(t_0) = \alpha(s_0)$ e os vetores $\alpha'(t_0)$ e $\alpha'(s_0)$ são paralelos. Isto é equivalente a dizer que \vec{v} é paralelo ao vetor $\gamma(t_0) - \gamma(s_0)$ e o conjunto $\{\vec{v}, \gamma'(t_0), \gamma'(s_0)\}$ é L.I., ou seja, \vec{v} pertence ao plano bitangente a γ em t_0 e s_0 . Como também, $ord(\kappa_\alpha) = k - 2$ em s_0 , concluímos que o plano bitangente tem contato de ordem k com γ em s_0 .

De modo análogo ao caso $A_{3_{2k}}$, a curva α apresenta uma singularidade $A_{5_{3k}}$, quando a direção de projeção é dada por uma T-secante. Mas, neste caso temos $\kappa_\alpha(t_0) = \kappa_\alpha(s_0) = 0$, ou seja, os conjuntos $\{\alpha'(t_0), \alpha''(t_0)\}$ e $\{\alpha'(s_0), \alpha''(s_0)\}$ são L.I. Portanto, pela proposição 2.2, os conjuntos $\{v, \gamma'(t_0), \gamma''(t_0)\}$ e $\{v, \gamma'(s_0), \gamma''(s_0)\}$ também são L.I. Assim, concluímos que o plano bitangente oscula nos dois pontos de tangência. Além disso, como $ord(\kappa_\alpha) = k - 2$ em s_0 , segue-se que o plano bitangente tem contato de ordem k com a curva γ em s_0 .

A descrição geométrica da singularidade $A_{5'_{3k}}$ é análoga ao caso anterior, com a condição adicional de que o vetor $\alpha^{(k+1)}(s_0) = 0$. Equivalentemente, $\gamma^{(k+1)}(s_0) // \vec{v}$ e, portanto, $\gamma^{(k+1)}(s_0)$ pertence ao plano bitangente a γ em s_0 .

Quando α apresenta uma singularidade $D_{5_{3k}}$, temos $\alpha'(t_0) = 0$ e, além disso, existe um s_0 tal que $\alpha(t_0) = \alpha(s_0)$. Isto é equivalente a dizer que \vec{v} é paralelo aos vetores $\gamma(t_0) - \gamma(s_0)$ e $\gamma'(t_0)$, ou seja, \vec{v} é paralelo a uma reta cross-tangent a γ . Temos também que $\alpha'(s_0) \neq 0$. Portanto, os vetores $\gamma'(s_0)$ e \vec{v} geram um plano e como $ord(\kappa_\alpha) = k - 2$ em s_0 , concluímos que esse plano tem contato de ordem k com a curva γ em s_0 .

A condição para a singularidade $D_{5'_{3k}}$, é análoga à singularidade $D_{5_{3k}}$, com a condição de que os vetores $\alpha''(t_0)$ e $\alpha^{(4)}(t_0)$ sejam L.D., ou seja, o conjunto $\{v, \gamma''(t_0), \gamma^{(4)}(t_0)\}$ é L.D. Portanto, concluímos que o vetor $\gamma^{(4)}(t_0)$ pertence ao plano osculador de γ em t_0 .

A curva α apresenta uma singularidade $D_{4_{kmn}}$ quando $\alpha(t_0) = \alpha(s_0) = \alpha(u_0)$, isto equivale a dizer que o vetor \vec{v} é paralelo a uma reta trissecante à curva γ . O restante da demonstração, neste caso, segue com argumentos semelhantes aos usados no caso $A_{1_{km}}$

Para que ocorra uma singularidade $D_{6_{2km}}$, primeiramente é necessário que \vec{v} seja paralelo a uma trissecante à curva γ , digamos em t_0, s_0 e u_0 . Outra condição é que os vetores $\alpha'(t_0)$ e $\alpha'(u_0)$ sejam paralelos. Isto é equivalente a dizer que o conjunto $\{\vec{v}, \gamma'(t_0), \gamma'(u_0)\}$ é L.I. Portanto, \vec{v} pertence ao plano bitangente a γ em t_0 e u_0 . Novamente, como $ord(\kappa_\alpha) = k - 2$ em s_0 e $ord(\kappa_\alpha) = m - 2$ em u_0 , segue-se que o plano bitangente tem contato de ordem m com a curva γ em u_0 e o plano $[\vec{v}, \gamma'(s_0)]$ tem ordem de contato k com a curva γ em s_0 .

A condição para que ocorra a singularidade $D_{6'_{2km}}$ é análoga à singularidade $D_{6_{2km}}$. E como neste caso $\alpha^{(m+1)}(u_0) = 0$, temos que $\gamma^{(m+1)}(u_0)$ pertence ao plano bitangente a γ em t_0 e u_0 .

Finalmente, a curva α apresenta uma singularidade $\tilde{E}_{7c_{klmn}}$ quando $\alpha(t_0) = \alpha(s_0) = \alpha(u_0) = \alpha(v_0)$, isto equivale a dizer que o vetor \vec{v} é paralelo a uma reta quadrissecante à curva γ . O restante da demonstração, neste caso, também segue com argumentos semelhantes aos usados no caso $A_{1_{km}}$. A descrição da singularidade $\tilde{E}_{7c_{klmn}}$ também segue o mesmo padrão.

□

6.4 Singularidades genéricas

Nesta seção, determinamos quais das singularidades do teorema 6.1 são genéricas para a projeção ortogonal. Para isso, juntamente com as condições (a) e (b) da definição 2.4 de genericidade de uma curva γ no \mathbb{R}^3 , assumiremos as seguintes condições para γ :

- (i) Se existe uma secante a γ em t_0 e s_0 , contida no plano osculador de γ em t_0 e no plano osculador de γ em s_0 . Então, $\tau(t_0) \neq 0$.
- (ii) Se existe uma trissecante a γ em t_0, s_0 , e u_0 , contida no plano osculador de γ em t_0 . Então, $\tau(t_0) \neq 0$ e também a reta trissecante não esta contida em nenhum dos planos osculadores de γ nos pontos t_0, s_0 e u_0 .
- (iii) Se existe uma trissecante a γ em t_0, s_0 , e u_0 , contida no plano bitangente a γ em t_0 e s_0 . Então, o plano bitangente não oscula em nenhum dos pontos t_0, s_0 , e u_0 da curva γ .
- (iv) Se existe uma quadrissecante a γ em t_0, s_0, u_0 e v_0 . Então, $\tau(t_0) \neq 0$ e a reta quadrissecante não esta contida em nenhum dos planos osculadores de γ nos pontos t_0, s_0, u_0 e v_0 .

Proposição 6.12 *O conjunto das curvas genéricas satisfazendo as condições acima é residual em $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$ com a topologia C^∞ de Whitney.*

Demonstração: Consideramos o espaço multijato ${}_2J^3(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$ e tomemos as coordenadas

$$(t_1, t_2, r_1^0, r_2^0, \dots, r_1^2, r_2^2),$$

onde $t_i \in \mathbb{R}$ e $r_i^j \in \mathbb{R}^3$ para $i = 1, 2$ e $j = 0, 1, 2$. Definimos o subconjunto $W_1 \subset {}_2J^3(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$ pelas equações:

$$\det(r_2^0 - r_1^0, r_1^1, r_1^2) = 0, \quad \det(r_2^0 - r_1^0, r_2^1, r_2^2) = 0 \quad \text{e} \quad \det(r_1^1, r_1^2, r_1^3) = 0.$$

W_1 é um subconjunto algébrico de ${}_2J^3(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$ de codimensão 3. Pelo Teorema de transversalidade de Thom, na versão multijato, o conjunto de curvas $\gamma \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$ tal que ${}_2j^3\gamma : (\mathbb{R})^3 \rightarrow {}_2J^3(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$ é transversal a W_1 é residual em $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$. Mas como $(\mathbb{R})^2$ tem dimensão 2, a condição de transversalidade é equivalente a condição (i).

$$\begin{aligned} T_{W_1} &= \{\gamma \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3) : {}_2j^3\gamma \not\cap W_1\} \\ &= \{\gamma \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3) : {}_2j^3\gamma(\mathbb{R}) \cap W_1 = \emptyset\}. \end{aligned}$$

Para a condição (ii), consideramos o espaço multijato ${}_3J^3(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$ e tomemos as coordenadas

$$(t_1, t_2, t_3, r_1^0, r_2^0, r_3^0, \dots, r_1^3, r_2^3, r_3^3)$$

onde $t_i \in \mathbb{R}$ e $r_i^j \in \mathbb{R}^3$ para $i, j = 1, \dots, 3$. Definimos agora o subconjunto $W_2 \subset {}_3J^3(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$ pelas equações

$$(r_2^0 - r_1^0) \times (r_3^0 - r_1^0) = 0, \quad \det(r_2^0 - r_1^0, r_1^1, r_1^2) = 0 \quad \text{e} \quad \det(r_1^1, r_1^2, r_1^3) = 0$$

e $W_3 \subset {}_3J^3(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$ pelas equações

$$(r_2^0 - r_1^0) \times (r_3^0 - r_1^0) = 0, \quad \det(r_2^0 - r_1^0, r_1^1, r_1^2) = 0 \quad \text{e} \quad \det(r_2^0 - r_1^0, r_2^1, r_2^2) = 0.$$

Assim, W_2 e W_3 são subconjuntos algébricos de ${}_3J^3(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$ de codimensão 4 e portanto, o resultado segue do Teorema de transversalidade de Thom.

A demonstração para as demais condições segue as mesmas linhas do caso anterior. \square

Considerando agora o conjunto das curvas genéricas como sendo o conjunto das curvas no \mathbb{R}^3 satisfazendo as condições (a), (b), (i), ..., (iv), podemos mostrar quais das singularidades descritas no teorema 6.1 ocorrem genericamente para uma família de projeções ortogonais em planos.

Teorema 6.3 *Para um mergulho de uma curva genérica γ no \mathbb{R}^3 , as singularidades que podem ocorrer para a família de projeções ortogonais em planos são dadas na tabela abaixo.*

<i>Tipo</i>	<i>Germe</i>
A_{0_2}	(t, t^2)
A_{0_3}	(t, t^3)
A_{0_4}	(t, t^4)
A_{2_3}	(t^2, t^3)
A_{4_4}	$(t^2, t^4 + t^5)$

<i>Tipo</i>	<i>Bigerme</i>
$A_{1_{22}}$	$((t, t^2); (s^2, s))$
$A_{1_{23}}$	$((t, t^2); (s^3, s))$
$A_{1_{24}}$	$((t, t^2); (s^4, s))$
$A_{1_{33}}$	$((t, t^3); (s^3, s))$
$A_{3_{22}}$	$((t, -t^2); (s, s^2))$
$A_{3_{23}}$	$((t, -t^2); (s, s^3))$
$A_{5_{22}}$	$((t, t^2); (s, s^2 + s^3))$
$D_{5_{32}}$	$((t^2, t^3 + t^4); (s^2, s))$

<i>Tipo</i>	<i>Trigerme</i>
$D_{4_{222}}$	$((t, t^2); (s^2, s); (u - u^2, u + u^2))$
$D_{4_{232}}$	$((t, t^2); (s^3, s); (u - u^2, u + u^2))$
$D_{6_{222}}$	$((t, -t^2); (s^2, s); (u, u^2 + u^3))$

<i>Tipo</i>	<i>Quadrigerme</i>
$\tilde{E}_{7c_{2222}}$	$((t, t^2 + t^3); (s^2 + cs^3, s); (u - u^2, u + u^2); (v - v^2, \lambda v + v^2))$

Demonstração: Dentre as singularidades do teorema 6.1, destacamos aqui as singularidades que não ocorrem genericamente para a projeção ortogonal. Restando assim, as singularidades descritas nas tabelas acima.

Pela condição (a), temos que as singularidades

$$A_{0_k}, k \geq 5, \quad A_{4_5}, \quad A_{4'_5}, \quad A_{1_{2m}}, m \geq 5,$$

não ocorrem genericamente pois a curva γ possui um ponto de torção degenerada. Também pela condição (a) as singularidades $A_{5_{3k}}, A_{5'_{3k}}, k \geq 3$ não ocorrem genericamente pois existe um plano bitangente osculando nos dois pontos de tangência.

Já a condição (i) garante que as singularidades $A_{1_{km}}, k \geq 3, m \geq 4$, não ocorrem genericamente pois existe uma secante pertencente a intersecção dos planos osculadores de γ em t_0 e s_0 , com $\tau(t_0) = 0$.

Pela condição (b), as singularidades

$$A_{3_{2k}}, k \geq 4, \quad D_{5_{3k}}, D_{5'_{3k}}, k \geq 3,$$

não ocorrem genericamente pois no caso $A_{3_{2k}}$, existe um plano bitangente a γ em t_0 e s_0 , osculando em s_0 com $\tau(s_0) = 0$. E nas singularidades $D_{5_{3k}}$ e $D_{5'_{3k}}$, existe uma cross-tangent em t_0 e s_0 e o plano gerado por $\{\gamma(t_0) - \gamma(s_0), \gamma'(s_0)\}$ oscula em s_0 .

A condição (ii) garante que as singularidades

$$D_{4_{kmn}}, k \geq 2, m, n \geq 3, \quad D_{4_{22k}}, k \geq 4,$$

não ocorrem genericamente pois na primeira singularidade existe uma trissecante a γ contida na intersecção dos planos osculadores de γ em t_0 e s_0 . Já na segunda, existe uma trissecante a γ contida no plano osculador de γ em s_0 , com $\tau(s_0) = 0$.

Pela condição (iii) as singularidades

$$D_{6_{2km}}, k \geq 2, m \geq 3, \quad D_{6_{2km}}, k \geq 3, m \geq 2,$$

não ocorrem genericamente pois na primeira singularidade existe uma trissecante a γ contida no plano bitangente a γ em t_0 e s_0 , osculando em s_0 . Já na segunda, existe uma trissecante a γ contida no plano bitangente a γ em t_0 e s_0 , e além disso a trissecante pertence ao plano osculador de γ em u_0 .

Finalmente, a condição (iv) garante que as singularidades $\tilde{E}_{7c_{klmn}}$, para algum k, l, m ou $n > 2$ e $\tilde{E}_{7_{klmn}}, \forall k, l, m$ ou n , não ocorrem genericamente pois existe uma quadrissecante a curva γ pertence a um plano osculador.

□

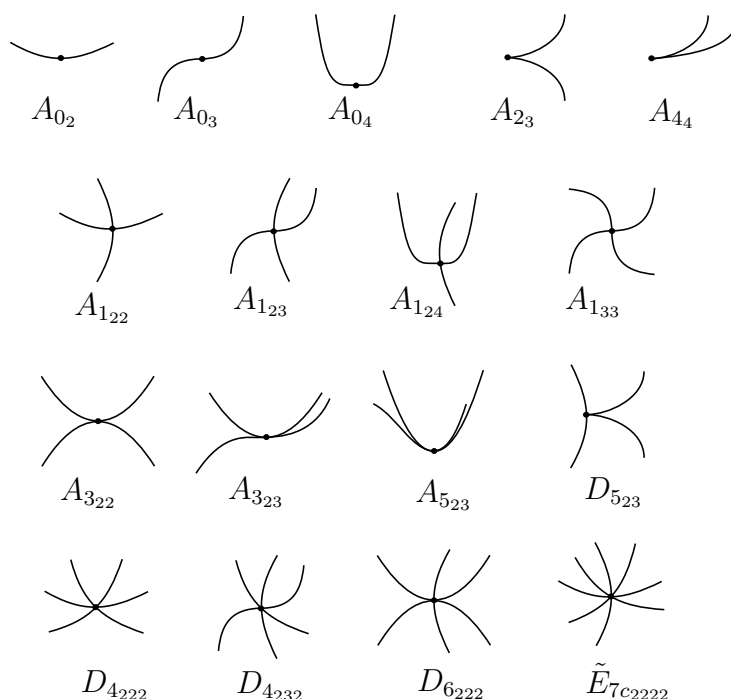


Figura 6.1: Multigerms de $(\mathbb{R}, S) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$

Portanto, com \mathcal{A}_h -equivalência obtivemos 17 singularidades genéricas para a projeção ortogonal, cada uma contendo informações geométricas sobre curvas no \mathbb{R}^3 (Teorema 6.2), enquanto que com \mathcal{A} -equivalência existem 10 singularidades genéricas. Mais especificamente, temos as seguintes estratificações

$$A_0 = \begin{cases} A_{02} \\ A_{03} \\ A_{04} \end{cases} \quad A_1 = \begin{cases} A_{122} \\ A_{123} \\ A_{124} \\ A_{133} \end{cases} \quad A_3 = \begin{cases} A_{322} \\ A_{323} \end{cases} \quad D_4 = \begin{cases} D_{4222} \\ D_{4223} \end{cases}.$$

Com isso, uma melhor descrição geométrica para curvas no \mathbb{R}^3 é obtida, por exemplo, como já havíamos observado no final do capítulo 2, não existe uma singularidade na \mathcal{A} -classificação de germes de curvas planas que descreva um plano bitangente osculador de uma curva genérica no \mathbb{R}^3 , propriedade essa descrita pela singularidade A_{323} . E também agora os germes $(\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ dados por

$$t \mapsto (t^2, t^5) \quad \text{e} \quad t \mapsto (t^2, t^4 + t^5)$$

estão em \mathcal{A}_h -classes diferentes.

Referências Bibliográficas

- [1] A'CAMPO, N. Le groupe de monodromie du déploiement des singularités isolées de courbes planes I. *Math. Annalen*, 213 (1975), 1-32.
- [2] ARNOLD, V. I., GUSEIN-ZADE, S. M., VARCHENKO, A. N., Singularities of differentiable maps I, II. Birkhauser, Basel, 1986, 1988.
- [3] BRUCE, J. W., Projections and reflections of generic surfaces in \mathbb{R}^3 , *Math. Scan.* 54 (1984), 262-278.
- [4] BRUCE, J.W., du PLESSIS, A.A., WALL, C.T.C., Determinacy and unipotency, *Invent. Math.* 88 (1987), 521-554.
- [5] BRUCE, J. W, GAFFNEY, T. J. Simple singularities of mappings $(\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$. *Journal London Math. Soc.* (2), 26, (1982), 465-474.
- [6] BRUCE, J.W., GIBLIN, P.J., Curves and Singularities, Cambridge University Press, 1984.
- [7] BRUCE, J.W., KIRK, N.P., du PLESSIS, A.A. Complete transversals and the classifications os singularities. *Nonlinearity*, 10, 1997.
- [8] BRUCE, J. W, ROMERO FUSTER, M. C. Duality and projections of curves and surfaces in 3-space. *Quartely J. Math. Oxford* (2), 42, (1991), 433-441.
- [9] BRUCE, J.W., Wilkinson, T. V., Folding maps and focal sets. *Proceedings of Warwick Symposium on Singularities, Springer Lectures Notes in Math.*, Vol. 1462, 63-72, (1991).
- [10] DAVID, J.M.S. - 'Projection-generic curves', *J. London Math. Soc.* (2) 27 (1983), 552-562
- [11] DUFOUR, J.P. Diagrammes D'Applications Differentiables. *These - Université Des Sciences et Techniques Du Languedoc.*

- [12] DUFOUR, J.P. Stabilité simultanée de deux fonctions. *Ann. Inst. Fourier, Grenoble*, (1979), 263-282.
- [13] DUFOUR, J.P. Families de courbes planes différentiables. *Topology* 22, (1983) 449-474.
- [14] GAFFNEY, T., RUAS, M. A. S., Singularities of orthogonal projections of surfaces in 3-space, *preprint*, (1977). (*Notices of the Am. Math. Soc.*, jan. 1978).
- [15] GOLUBITSKY, M., GUILLEMIN, V., Stable Mappings and their singularities, *Graduate Text in Mathematics*, (14), Springer - Verlage, (New York, 1973), Heidelberg Berlin.
- [16] GUSEIN-ZADE, S. M. Intersection matrices for certain singularities of functions of two variables. *Functional Analysis and Appl.* 8:1, 11-15 (1974).
- [17] GUSEIN-ZADE, S. M. Dynkin diagrams for certain singularities of functions of two real variable. *Functional Analysis and Appl.* 8:4 (1974), 23-30.
- [18] KUROKAWA, Y. Singularities for projections of contour lines of surfaces onto planes, *Hokkaido Math. Journal*, Vol- 30 (2001) 573-587.
- [19] MANCINI, S., RUAS, M.A.S., TEIXEIRA, M.A., On divergent diagrams of finite coimension, *Port. Math. (N.S.)* 59 (2002), no. 2, 179-194.
- [20] MANCINI, S., φ -equivalência, *Tese de doutorado*, ICMC-USP, São Carlos 1989.
- [21] MARAR, W. L. Mapping fibrations, *Manuscripta Math.* 80 (1993) 273-281.
- [22] MARTINET, J., Singularities of Smooth Functions and Maps, London Math. Soc. *Lecture Note Series* 58, (Cambridge University Press, 1982).
- [23] MATHER, J. N. Generic Projections, *Annals of Math.* 98 (1973) 226-245.
- [24] MATHER, Stability of C^∞ mappings VI: The nice dimensions. *Proc. Liverpool Singularities Symposium, Vol.1, Springer Lecture Notes in Math.* 192 (1971), 207-255.
- [25] MILNOR, J., Singular points of complex hypersurfaces. *Ann. of Math. Studies* 61, (Princeton University Press, 1968).
- [26] MOND, D. Vanishing cycles for analytic maps. *Singularity Theory and Applications*, Warwick -1989, Springer Lectures Notes in Math. 1462 (1991), 221-234.
- [27] MOND, D. Looking at bent wires - \mathcal{A}_e -codimension and the vanishing topology of parametrized curve singularities, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* 117 (1995), 213-222.

-
- [28] MONTALDI, J. A. On generic composite of maps, *Bull. London Math. Soc.*, 23 (1991) 81-85.
- [29] NUÑO BALLESTEROS, J. J. Sobre la funcion de bitangencia asociada a una curva generica en \mathbb{R}^3 , *Doctoral thesis Univerisat de València*, 1991
- [30] NUÑO BALLESTEROS, J. J, ROMERO FUSTER, M. C. Global bitangency properties of generic closed space curves, *Math. Proc. Camb.Soc.* 112,(1992), 519-526.
- [31] NUÑO BALLESTEROS, J. J, ROMERO FUSTER, M. C. Generic 1-parameter families of closed space curves, *Contemporary Mathematics* 161 (1992), 259-270.
- [32] PORTEOUS, I. R., The normal singularities of a submanifold, *Journal Diff. Geom.*, 5 (1971), 543-564.
- [33] SAN MARTIN, L.A.B. Álgebras de Lie, *Editora da Unicamp*, 1999.
- [34] TARI, F. Singularidades de aplicações diferenciáveis, *Notas didáticas do ICMC-USP*, São Carlos, 34 (1999).
- [35] WALL, C.T.C. - Geometric properties of generic differentiable manifolds, in *Geometry and Topology*, Rio de Janeiro 1976. *Lecture Notes in Mathematics* 597, 707-774 (Berlin, Springer, 1977).