Fundação Getulio Vargas
Escola de Pós-Graduação em Economia – EPGE/FGV

Leilão Multiunidade: Principais resultados e aplicação ao mercado de energia brasileiro.

Dissertação a ser submetida à
Escola de Pós-Graduação em Economia da Fundação Getúlio Vargas como requisito para obtenção do Título de Mestre em Economia.

Aluno: Paulo Braulio de Souza Coutinho
Orientador: Humberto Moreira (EPGE/FGV)
Banca: André Rossi de Oliveira (UnB)
Paulo Klinger Monteiro (EPGE/FGV)

Rio de Janeiro
Julho 2008

SUMÁRIO

Resumo

O presente estudo é dividido em três partes: a primeira é um resumo dos principais resultados teóricos encontrados na literatura de Leilões Multiunidade que são úteis em leilões de geração de energia. Dentre eles, foram analisadas as características dos leilões Discriminatório, Uniforme, de Vickrey, Ascendente e Híbrido levando em consideração os critérios de eficiência e pagamento esperado. A segunda parte é uma tentativa de extensão de um modelo de leilão híbrido para o caso de uma unidade para o de multiunidade. Finalmente, a terceira parte explica como é feito o leilão de geração de energia no Brasil.

Palavras-chave: Leilão Multiunidade, Leilão Híbrido, Leilão de geração de energia

Classificação Jel: D44, D86, L50

Abstract

The present study is divided in three parts. The first one is a survey of the most important theoretic results in the literature of Multiunity auctions which are useful in energy auctions. I analyzed the Discriminatory, uniform, Vickrey, ascendant and the Hybrid Auctions taking the efficient an expected revenue criteria. The second part is a tentative to expand a model of a single unit hybrid auctions to a model of multiunit hybrid auction. Finally, the third part explain how energy is auctioned in Brazil.

Keywords: Multiunit Auctions, Hybrid Auctions, Energy Auctions
Jel Classification: D44, D86, L50

1. Introdução

Em grande parte do mundo, a comercialização de energia elétrica é feita através de leilões. Contudo, as regras que tangem estes mecanismos diferem substancialmente até mesmo dentro de um determinado país, dependendo de qual produto está sendo comercializado. No Brasil, por exemplo, a Aneel classifica as geradoras de energia como as de energia nova ou energia velha, e utiliza leilões diferentes para comercializar a geração de energia. Ademais a permissão de transmiti-las das geradoras até as distribuidoras também é definida através de leilões que diferem dos de geração.

O resultado de um leilão está intimamente interligado com as suas regras, já que estas influenciam diretamente no comportamento estratégico dos agentes envolvidos. Dependendo dos objetivos a que se quer chegar e do objeto a ser leiloado, alguns atributos de determinados tipos de leilões geram resultados superiores a outros quando utilizamos critérios de comparação como geração de receita, eficiência e preços menores aos consumidores. Como exemplo, podemos citar os leilões de licenças da "terceira geração" de telefonia móvel ocorridos na Europa no início desta década. Objetos similares foram arrematados a preços desde 20 euros per capita na Suíça a 650 na Inglaterra[1]. Acredita-se que a principal fonte causadora desta diferença de preços é exatamente as regras dos leilões nestes países. Portanto, a decisão de como fazer um leilão é decisiva quanto ao seu resultado.

Apesar de serem amplamente utilizados há bastante tempo, os economistas apenas começaram a estudar leilões recentemente. O primeiro trabalho na área foi o artigo pioneiro de Vickrey (1961), que além de ser o primeiro a reconhecer o problema como um jogo, ainda fez enorme progresso em analisá-lo. No entanto, a literatura sobre o assunto foi se desenvolver apenas no final dos anos setenta. Entre vários importantes autores, podemos destacar as contribuições seminais de Paul Milgrom, em trabalhos solo, ou em parceria com Weber, as de Riley, em artigos com Maskin e com Samuelson, e finalmente as de Myerson.

---

[1] Klemperer (2002) retrata essas diferenças explicitando as possíveis causas destas disparidades.

Enquanto, a literatura de leilão de apenas um objeto já está relativamente avançada, a questão de como leiloar mais de um objeto, ou um objeto divisível, é um pouco mais delicada. Energia elétrica, como é um bem divisível, se enquadra neste tipo estudo. Portanto, a dissertação dará maior ênfase a este tipo de leilão. Os tipos de leilão de múltiplos objetos mais comumente utilizados são os de preço uniforme, em que todas as unidades são vendidas ao preço do maior lance perdedor, e o leilão discriminatório, em que os ganhadores pagam exatamente o lance que foi dado.

Alguns economistas, ao fazerem falsas analogias com leilão de primeiro e segundo preço de apenas uma unidade, manifestaram opiniões mais favoráveis ao primeiro tipo de leilão. Contudo, alguns estudos sugerem que a performance relativa entre eles é ambígua. Ausubel e Cramton (2002), por exemplo, mostram que sob condições sobre os tipos dos agentes, o resultado tanto em relação a eficiência, como a de geração de receita o leilão discriminatório é superior ao uniforme. Contudo, sob condições diferentes, igualmente razoáveis, o resultado é contrário ao anterior. Fabra et ali (2006) mostram que, na ausência de incerteza sobre a demanda e no caso de um duopólio, leilões uniformes geram preços mais favoráveis em média do que leilão discriminatório.

O fato é que pequenas mudanças nas regras do leilão uniforme podem afetar profundamente o seu resultado de equilíbrio. Back e Zender (2001) mostram que se a quantidade a ser vendida no leilão for escolhida endogenamente, ou seja, o leiloeiro, em posse dos lances dados, escolher o quanto irá vender, o equilíbrio será o que gera maior renda ao leiloeiro. Kremer e Nyborg (2004a) mostram que se pode tornar o leilão uniforme arbitrariamente eficiente impondo apenas que os lances sejam discretos. Kremer e Nyborg (2004b) mostram que se a regra de alocação do leilão uniforme mudar apenas em relação as quantidades marginais, o equilíbrio também será eficiente.

Apesar destes dois tipos de leilão serem os mais utilizados, existem outras maneiras de leiloar múltiplos objetos que apresentam resultados fracamente superiores a estes dois. O primeiro deles, surpreendentemente, foi sugerido em 1961, por Vickrey. Nele, o ganhador do objeto deve pagar o custo de oportunidade do leiloeiro. Ausubel e Cramton (2002) mostram sob todas as condições estudadas em seu artigo, que este leilão gera resultados fracamente superiores aos leilões uniformes e discriminatórios.

Até aqui, tratamos apenas de leilões estáticos, ou seja, há apenas um lance por participante e de posse desses lances, o leiloeiro decide o resultado de acordo com algum dos critérios citados acima. Fazendo analogia ao caso de leilão de apenas um bem, estaríamos excluindo, por exemplo, o tradicional leilão inglês, em que os participantes dão lances até o momento em que apenas um deles dá um lance e nenhum outro se manifesta. Os leilões em que os participantes dão lances ao longo do tempo são chamados de leilões dinâmicos. Paul Milgrom sugeriu ao FCC[2] que os espectros de telecomunicação fossem leiloados através de leilões simultâneos ascendentes. Nele, os objetos eram leiloados simultaneamente e o lance ganhador era determinado tal como no leilão inglês. A diferença era que o leilão terminava apenas quando todas as unidades fossem vendidas impossibilitando assim que unidades iguais fossem vendidas a preços diferentes. Ele formalizou a sua idéia em Milgrom (2000). Ausubel (2004), por sua vez, propôs um leilão simultâneo ascendente como o de Milgrom, com a diferença que o ganhador pagaria para cada unidade adquirida o seu custo de oportunidade, tal como no leilão estático de Vickrey. Ele mostrou que este tipo de leilão é superior ao de Vickrey tanto no critério de eficiência como no de geração de receita.

Os artigos citados baseiam-se na hipótese de que os agentes se comportam de forma competitiva, excluindo assim, comportamentos de conluio entre os participantes do leilão, o que é comumente observado na vida real. Este comportamento pode acarretar em ineficiências alocativas dos bens a serem leiloados bem como redução da receita gerada pelo leilão. Klemperer (2000, 2002) sugere que leilões dinâmicos sejam mais propensos comportamentos anti-competitivos, já que a punição pode vir no momento seguinte ao desvio do combinado, ainda com o leilão em andamento. Ele sugere um leilão híbrido, com uma parte sendo dinâmica e outra estática. Levin e Ye (2008) estudam este tipo de leilão para o caso unitário. Sob suas hipóteses, eles mostram que o leilão híbrido gera uma receita esperada superior aos dois tipos de leilão quando realizados sozinhos.

2. Leilão Uniforme

---

[2] Federal Communication Commission (FCC). Órgão regulador das telecomunicações nos EUA.

Vamos aprofundar um pouco mais no estudo sobre o leilão uniforme. Este tipo de mecanismo é amplamente utilizado em mercados de commodities e financeiro para vender bens idênticos para vários compradores. Neste leilão estático, os participantes competem submetendo vários lances ou curvas de demanda (oferta). O preço que equilibra o mercado, ou seja, em que a demanda (oferta) iguala a oferta (demanda) é chamado de “stop-out price”. Todos os participantes pagam o mesmo preço (stop-out price) por todas as unidades que venham a receber (vender). A demanda (oferta) acima (abaixo) deste preço é totalmente entregue aos vencedores, enquanto a demanda (oferta) marginal no “stop-out price” é dividida de maneira pro - rata na margem.

Acreditava-se que a performance deste leilão era superior a do discriminatório. Alguns autores exaltavam o leilão uniforme baseado em argumentos informais fazendo analogias a comparação do leilão de segundo preço com o de primeiro preço quando se leiloa apenas um bem indivisível. Defendiam, por exemplo, que neste tipo de mecanismo a prática de conluio era menor que no discriminatório. O argumento é que o último desencorajava a participação de participantes menos informados relativamente porque o “winner’s curse” seria maior para estes. Desta maneira o número de participantes do leilão ficaria reduzido, o que tornaria mais fácil a formação de coalizões (Friedman (1960)). Outro argumento baseado na analogia com leilão unitário de segundo preço é de que o leilão uniforme geraria maior receita do que o discriminatório. Devido ao winner’s curse, em um ambiente de neutralidade ao risco, o leilão de segundo preço gera uma receita maior que o de primeiro preço. Ver, por exemplo, McAfee e McMillan (1987) e Milgrom (1989, p.3).

Analisando o leilão com instrumentos mais formais Back e Zender (1993) chegam a conclusões que vão de encontro com a intuição anterior sobre estes dois tipos de leilão. Mostram que existe uma gama de equilíbrios com preços arbitrariamente baixos em um leilão de um continuum de unidades. Isso se deve ao fato, como veremos a frente, de que em equilíbrio, cada participante é monopsonista sobre a oferta residual após as demandas dos outros participantes serem completadas.

Contudo, o problema de "underpricing"[3] do leilão uniforme não é tão sério quanto o proposto pelo modelo básico de Back e Zender. Particularmente, Kremer e Nyborg em dois artigos mostram que o “underpricing”, a diferença entre a valoração do participante e o valor que ele realmente paga pelo bem, não é tão grande quando os lances são discretos e que uma pequena mudança na regra de alocação das unidades marginais pode alterar drasticamente o resultado de equilíbrio. Até mesmo Back e Zender (2001) mostram que o underpricing pode sumir quando o leiloeiro escolhe estrategicamente a quantidade a ser vendida no leilão.

A análise formal destes resultados será descrita a seguir em um modelo que segue o de Back e Zender (1993) com uma pequena adaptação para o caso de leilão de energia. No modelo deles, o leiloeiro estava vendendo instrumentos financeiros e cada participante ofertava uma curva de demanda que refletia o quanto estavam dispostos a comprar para cada preço de venda. O caso de energia é um pouco diferente já que é um leilão de compra, e não de venda. Cada participante irá definir uma curva de oferta estipulando o quanto está disposto a produzir de energia para cada preço que lhe for oferecido.

2.1. Modelo Básico

Nesta seção, analisaremos o modelo básico presente em Back e Zender (1993) para analisar um leilão de venda de títulos públicos. Contudo, como nosso foco é em energia elétrica, em que normalmente se têm leilões de compra, iremos adaptar os resultados para esse tipo de leilão.

O leiloeiro quer comprar uma quantidade Q perfeitamente divisível de energia de um número $n > 1$ de participantes neutros ao risco. O custo marginal de se prover energia $\tilde{c}$. Antes do leilão, cada participante observa um sinal $\tilde{s}_i$ que é correlacionado com $\tilde{c}$. Seja $\tilde{s} = (s_1, ..., s_n)$ e denote um valor genérico de $\tilde{s}$ por s. A distribuição conjunta de $(\tilde{c}, \tilde{s})$ é de conhecimento comum entre os participantes. Seja S_i o suporte de $\tilde{s}_i$. Assuma que

[3] A diferença entre o valor do bem e o preço que é vendido.

existam números c^L e c^H tal que $0 \le c^L \le \tilde{c} \le c^H$ com probabilidade 1. Podemos encarar $\tilde{c}$ como o custo marginal de produção da energia.

O leiloeiro impõe um preço de reserva p^H. Uma estratégia para o participante i é a escolha de uma curva de oferta para cada $s_i \in S_i$. Uma curva de oferta é uma função contínua pela esquerda e não-decrescente $q:\left[0, p^H\right] \rightarrow [0, Q]$. Denote a curva de oferta do agente i por $q_i\left(\cdot \middle| s_i\right)$. A curva de oferta agregada é $q_A\left(\cdot \middle| s\right) \equiv \sum_{i=1}^{n} q_i\left(\cdot \middle| s_i\right)$.

Todos os lances abaixo do "stop-out price" são aceitos. O "stop-out price", que denotaremos por $p^e(s)$, é definido como o menor preço em que a oferta iguala ou supera a demanda ou é o preço de reserva no caso em que há excesso de demanda para todos os preços:

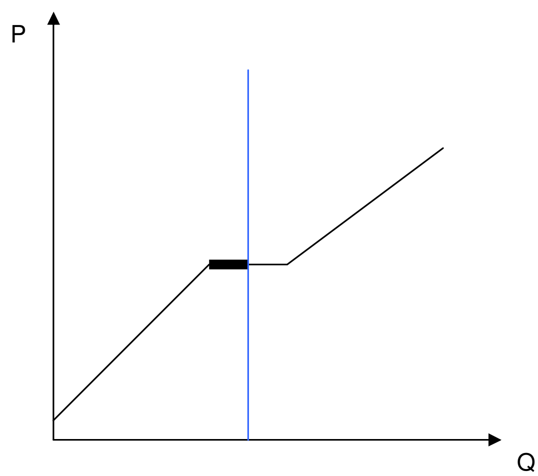
$$p^e(s) = \begin{cases} \min\left\{p \le p^H \middle| q_A(p,s) \ge Q\right\} & \text{se} \left\{p \le p^H \middle| q_A(p,s) \ge Q\right\} \ne \varnothing \\ p^H & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

No caso de empate no "stop-out price", as unidades marginais são divididas de uma maneira pro - rata na margem. Isto quer dizer que se há um excesso de oferta no "stop-out price", apenas as unidades marginais serão racionadas. O "flat" na curva de oferta individual é dado por $\Delta q_i\left(p \middle| s_i\right) = q_i\left(p \middle| s_i\right) - \lim_{p' \uparrow p} q_i\left(p' \middle| s_i\right)$. Da mesma forma, o flat na demanda agregada é dado por $\Delta q_A\left(p \middle| s_i\right) = q_A\left(p \middle| s_i\right) - \lim_{p' \uparrow p} q_A\left(p' \middle| s_i\right)$. Formalmente, a regra de alocação é dada por:

$$q_i^e(s) = \lim_{p' \uparrow p^e(s)} q_i\left(p' \middle| s_i\right) + \left(Q - \lim_{p' \uparrow p^e(s)} q_a\left(p' \middle| s_i\right)\right)\left(\frac{\Delta q_i\left(p^e(s) \middle| s_i\right)}{\Delta q_A\left(p^e(s) \middle| s_i\right)}\right)$$

A regra de pagamento do leilão uniforme estipula que o leiloeiro pague para cada participante o "stop-out price" por todas as unidades adquiridas, ou seja:

$$P_i = p^e(s)\,q_i^e(s)$$



No gráfico acima, a linha vertical representa a demanda por energia, e a curva crescente representa a oferta agregada. A quantidade que seria racionada é representada pela parte em negrito da curva de oferta agregada.

2.2. Overpricing.

Sob essas hipóteses, podemos encontrar equilíbrios no leilão uniforme com preços elevados, o que é extremamente negativo para o leiloeiro. Na realidade, podemos encontrar um equilíbrio simétrico em estratégias puras, que independe do sinal de cada participante, em que o preço de equilíbrio é dado por um $p^* \in [c^H, p^H]$ arbitrário. O que sustenta esses equilíbrios é o fato de que a parte da curva de oferta relativa as unidades que não são marginais não é relevante. Desse modo, os participantes oferecem curvas de oferta bastante inclinadas fazendo com que o custo de oportunidade da unidade marginal fique muito alto. A seguir, o resultado acima é demonstrado:

Teorema 1 (Back e Zender (1993) adaptado): *Assuma que* $p^H \geq c^H$. *Para cada* $p^* \in [c^H, p^H]$, existe um equilíbrio simétrico em estratégias puras do leilão uniforme em que $p^e(s) = p^*$ em todo estado s e que a curva de oferta de cada participante não varia com seus próprios sinais. A curva de oferta de equilíbrio é

Field Code Changed

(1.1) $$q_i(p) = \begin{cases} 0 & \text{se } p < p' \\ Q\left[\dfrac{p - p'}{(p^* - p) + n(p - p')}\right] & \text{se } p' < p \le p^* \\ \dfrac{Q}{n-1} & \text{se } p > p^*, \end{cases}$$

em que $p' = (n-1)c^L/n + p^*/n$. Cada participante recebe a quantidade Q/n em todo estado s.

Dem. Vamos mostrar que se todos os participantes $j \neq i$ escolhem esta curva de oferta como lance, então a melhor resposta para o agente i também será escolhê-la. O agente i defronta-se com a seguinte curva de demanda residual:

$$x(p) = \begin{cases} Q & \text{se } p < p' \\ \dfrac{Q}{n}\left(\dfrac{p^* - c^L}{p - c^L}\right) & \text{se } p' \le p < p^* \\ \left[0, \dfrac{Q}{n}\right] & \text{se } p = p^* \\ 0 & \text{se } p > p^*. \end{cases}$$

O participante i, defrontando-se com esta curva de demanda residual escolhe o "stop-out price" que maximiza a sua receita. Os outros participantes demandam toda a oferta ao preço p^*, portanto, nenhum lance acima de p^* pode ser vencedor. Como se pode observar, a demanda residual possui uma descontinuidade em p^*. Sendo assim, ao escolher este preço como "stop-out price", i receberá uma quantia $q^* \in \left[0, \dfrac{Q}{n}\right]$. Para tanto, basta escolher uma curva de oferta $q(p)$ que satisfaça $\lim_{p\uparrow p^*} q(p) = q^*$. Haverá racionamento no caso em que $\lim_{p\uparrow p^*} q(p) < \frac{Q}{n}$.

Se o participante i escolher p^* como o "stop-out price", então ele ofertará a maior quantidade possível, logo $q^* = \frac{Q}{n}$. Não faz sentido escolher $p < p'$, pois se escolher $p = p'$ este preço ele já vende a quantidade Q, e diminuir o preço apenas diminuiria a receita. Portanto, a escolha ótima do "stop-out price" está no intervalo $[p', p^*]$. Se ele escolher qualquer preço no interior deste intervalo, obterá a demanda residual $x(p) = \frac{Q}{n}\left(\frac{p^* - c^L}{p - c^L}\right)$. Contudo, temos que:

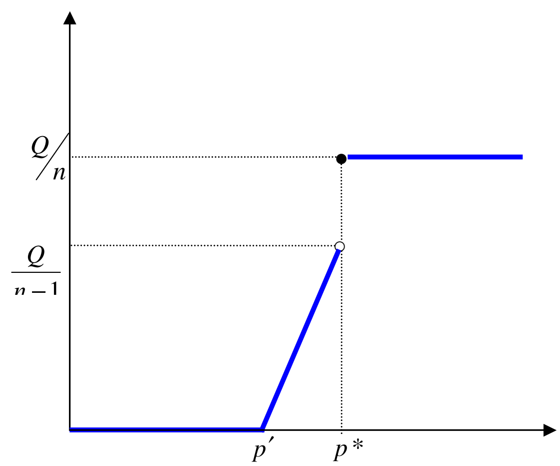
$$\frac{d}{dp}(p-c)x(p) = \frac{Q\left(p^* - c^L\right)\left(c - c^L\right)}{n\left(p - c^L\right)} \geq 0, \qquad \forall p \in [p', p^*].$$

Portanto, a receita do participante i aumenta quanto maior for o "stop-out price" neste intervalo. Note que i não pode melhorar escolhendo uma curva de oferta descontínua em nenhum ponto, já que não haveria racionamento fora de p^*.

Portanto, o melhor que i pode fazer é escolher $p = p^*$ e vender a quantidade $q^* = \frac{Q}{n}$. Para tanto, basta escolher uma curva de oferta que satisfaça $\lim_{p\uparrow p^*} q(p) = \frac{Q}{n}$. Note que a curva de oferta *(1.1)* satisfaz essa condição. Dado que esta curva de oferta é ótima para qualquer realização possível de c, ela será ótima condicional a qualquer sinal s_i. ■

Esse resultado nos diz que, sob as regras comumente utilizadas no leilão uniforme, existem equilíbrios muito ruins para o leiloeiro. Como dito anteriormente, neste leilão o formato da curva de oferta fora do "stop-out price" não tem importância nenhuma sobre o resultado do leilão. Isto possibilita que os participantes escolham curvas de oferta bastante inclinadas de modo a inibir um comportamento mais agressivo dos seus oponentes. Se os outros participantes submeterem a curva de oferta *(1.1)* então a porção inclinada da oferta de um participante qualquer não irá lhe custar nada, já que estes preços nunca serão atingidos.

No leilão uniforme, para um determinado participante ganhar uma quantidade um pouco maior, o preço diminuirá para todas as suas unidades, não só aquela marginal. Quando os agentes escolhem curvas de oferta bastante inclinadas eles fazem com que este "efeito preço" seja mais importante que o "efeito quantidade" no ponto p^*, eliminando assim, o incentivo de outros participantes aumentarem a quantidade ofertada.



Isso possibilita equilíbrios com preços arbitrariamente altos e ineficientes, já que a oferta será racionada igualmente para todos os participantes independendo de seus custos de produção de energia. Portanto, a intuição de que o leilão uniforme era o análogo ao leilão de segundo preço não estava correta. A razão pelo qual o leilão de segundo preço é eficiente é que nele, o agente vencedor paga o custo de oportunidade da unidade que recebe. No leilão uniforme, o vencedor paga por todas as unidades o custo de oportunidade da unidade marginal, e não o custo de oportunidade de cada unidade vencida. Analisaremos o leilão de Vickrey multiunidade, em que a propriedade do pagamento ser igual ao custo de oportunidade mais adiante.

Contudo, nem tudo está perdido para o leilão uniforme! Mudanças nas suas regras podem ter um profundo impacto sobre a eliminação de equilíbrios indesejáveis. Aqui, vamos estudar três delas. A primeira, analizada por Back e Zender (2001), mostra que se o leiloeiro escolher estrategicamente a quantidade demandada no leilão, então não haverá "overpricing". A segunda propõe pequenas mudanças na regra de alocação, sobretudo, do modo como é feito o racionamento das unidades marginais. Por último, se os participantes estiverem restritos a dar lances discretos, isto é, se os participantes submeterem múltiplos pares quantidade-preço ao invés de curvas, o "overpricing" não será tão severo. Os últimos dois resultados foram derivados por Kremer e Nyborg (2004a, 2004b).

2.3. Quantidade endógena

Vamos aqui mostrar, sob o mesmo arcabouço do modelo anterior, que se o leiloeiro determinar a quantidade transacionada no leilão de forma estratégica depois de observar os lances dos participantes, os equilíbrios com preços arbitrariamente indesejados pelo leiloeiro podem ser evitados. Como visto anteriormente, esses resultados podiam ser sustentados porque os participantes só se preocupam com um único ponto em sua curva de oferta, aquele correspondente ao "stop-out price". O resto da oferta não tem efeito sobre o resultado do leilão, e é utilizado somente para inibir comportamentos agressivos de outros participantes.

O leiloeiro acha vantajoso diminuir a demanda quando os participantes oferecem curvas de oferta bastante inclinadas, pois, uma pequena redução na quantidade altera o "stop-out price" significativamente. Essa possibilidade inibe comportamentos anti-competitivos dos participantes. O resultado final deste jogo é que em equilíbrio, o leiloeiro transaciona toda a quantidade que deseja e os participantes pagam a sua valoração real pelo bem.

Vamos seguir o modelo de Back e Zender visto acima, com exceção de que agora não há incerteza sobre o custo marginal da produção de energia c. Novamente, há um número $n > 1$ de possíveis vendedores de energia e apenas um comprador. Uma quantidade $Q \leq \overline{Q}$ de energia, escolhida endogenamente pelo leiloeiro será transacionada seguindo as regras do leilão uniforme (inclusive as de racionamento em caso de lances empatados).

Cada participante i submete uma curva de oferta $q:\left[0, p^{H}\right] \rightarrow \left[0, \bar{Q}\right]$. Denote por q_i a curva de oferta do indivíduo i. Depois de observadas todas as curvas de oferta $q_1, ..., q_n$, o leiloeiro escolhe a quantidade Q que irá comprar.

Com esta pequena alteração, chegamos ao seguinte resultado:

Teorema 2 (Back e Zender (2001) adaptado): Assuma que o vendedor possa escolher $Q \leq \bar{Q}$ depois de observar os lances dos participantes. Em qualquer equilíbrio, o vendedor escolhe $Q = \bar{Q}$ e o “stop-out price” é ao menos $(n-1)c/n$.

Dem. Suprimida.

Note que, o leiloeiro acaba não utilizando o direito que possui de determinar *ex post* a quantidade transacionada no leilão. Contudo, apenas a possibilidade de utilizá-lo inibe os participantes de escolherem curvas de oferta inclinadas de modo a inibir comportamentos mais agressivos dos outros participantes. Além disso, o Teorema 2 mostra que um aumento no número de participantes melhora o resultado do leilão, o que não era verdade no Teorema 1. Lá, os equilíbrios com “stop-out prices” relativamente baixos independiam do número de participantes.

A possibilidade da existência dessa regra pode explicar algumas contradições empíricas encontradas em alguns estudos relacionadas ao ranking entre os leilões uniforme e discriminatório. Por exemplo, o estudo de Simon (1992), que analisa esses tipos de leilões no mercado de títulos nos EUA, suporta que o leilão discriminatório seria superior em termos de receita o leiloeiro. Contudo, Umlauf (1993) indica o contrário. Nesse artigo, o autor analisou a experiência Mexicana com as mesmas regras de preços e indicou que o leilão uniforme seria superior. Todavia, o Tesouro mexicano possui o direito de restringir a oferta de títulos ex post a realização do leilão.

2.4. Regra de Alocação

Ilan Kremer e Kjell Nyborg (2004a) argumentam que não é o fato do bem ser divisível que possibilita uma gama de equilíbrios com “stop-out prices” arbitrariamente baixos, mas sim a maneira como estes são divididos. Eles mostram que, com uma pequena mudança na regra de alocação, os equilíbrios ruins para o leiloeiro são eliminados.

Essa pequena mudança será feita na regra de racionamento da demanda, no caso em que a oferta supera a demanda no “stop-out price”. Vimos que, parte das curvas de oferta que estavam acima desse preço era garantidas para os participantes, enquanto a parte relativa ao “stop-out price” era dividida de forma pro - rata.

Acreditava-se que esta regra incentivava os participantes serem mais agressivos, já que ele seria recompensado por dar lances com preços mais baixos. Contudo, essa regra propicia os comportamentos anti-competitivos vistos acima. Na verdade, essa regra possui o mesmo efeito de que se restringíssemos os participantes a submeterem curvas de oferta contínuas. Essa restrição resulta em equilíbrios com receita baixa, como é mostrado por Wilson (1979).

A intuição por detrás da mudança da regra de alocação é análoga a comparação entre as competições de Bertrand e Cournot. No primeiro, quando um agente desvia um pouco o preço para baixo, ele captura o mercado inteiro. Em Cournot, uma pequena mudança no preço é associado a apenas uma pequena elevação na quantidade suprida por um agente. Bertrand leva ao resultado competitivo, pois sua regra de alocação favorece uma recompensa substancial mesmo para um pequeno desvio no preço ofertado.

Vamos analisar a performance do leilão uniforme com uma regra de alocação diferente, utilizando o mesmo modelo de Back e Zender (1993) sem incerteza sobre o custo marginal da produção de energia, tal qual fizemos para analisar o caso em que a quantidade leiloada é endógena. Começamos com a seguinte definição:

Definição 1. Uma regra de alocação satisfaz a propriedade majoritária se um participante cuja oferta é maior que 50% da oferta agregada vende uma quantidade acima de $.5Q$. Ou seja, para todo $\alpha > .5$ existe $\beta > .5$ tal que $q_i(p^*) = \alpha q(p^*)$ implica que $q_i > \beta Q$.

Um exemplo de alocação que respeita a propriedade majoritária é a chamada *pro rata*. Nela, cada participante vende uma quantidade proporcional a sua oferta no "stop-out price":

$$q_i = \frac{q_i(p^*)}{q(p^*)}$$

De posse dessa definição, podemos enunciar o seguinte resultado:

Teorema 3. (Kremer e Nyborg (2004) adaptado). Se a regra de alocação satisfaz a propriedade majoritária, então o único "stop-out price" de equilíbrio é $p^* = c$.

Dem. Denote o "stop-out price" de equilíbrio por p^*. Note que $p^* \geq c$, já que se $p < c$, qualquer participante poderia aumentar seu lucro (diminuir o prejuízo) ofertando zero para este preço. Assuma que $p^* > c$. Vamos mostrar, primeiramente, que isso é uma contradição no caso em que há mais de dois participantes. Nesse caso, há pelo menos um participante *j* tal que $q_j < .5Q$, pois $\sum_{i=1}^{n} q_i = Q$. Considere o seguinte desvio para o participante j:

$$q_j' = \begin{cases} Q & \text{se } p \geq p^* - \varepsilon \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Para ε suficientemente pequeno, o participante *j* iria se beneficiar com este desvio. Note que, se j adotasse essa estratégia, o novo "stop-out price" seria $p^* - \varepsilon$. Como p^* era o "stop-out price" anteriormente, tínhamos que $q^{-1}(p^* - \varepsilon) < Q$. Pela regra majoritária, j venderia com o desvio uma quantidade superior a $.5Q$. O seu lucro esperado nesse caso seria $.5Q(p^* - \varepsilon - c)$. Para ε suficientemente pequeno:

$$.5Q\left(p^{*}-\varepsilon-c\right)>q_{j}\left(p^{*}-c\right)$$

Ou seja, o desvio é lucrativo. Vamos analisar o caso em que há apenas dois participantes, 1 e 2. Se no equilíbrio $q_i < .5Q$, então argumento análogo ao utilizado no caso de mais de dois participantes. Se $q_1 = q_2 = .5Q$ então temos que $q_1\left(p^{*}-\varepsilon\right)+q_2\left(p^{*}-\varepsilon\right)<Q$ para todo $\varepsilon > 0$. Isso implica que $q_i\left(p^{*}-\varepsilon\right)<.5Q$ para algum $i=1,2$. Neste caso, o participante $j \neq i$ pode fazer o mesmo desvio que no caso anterior, a saber,

$$q_j' = \begin{cases} Q & \text{se } p \geq p^{*}-\varepsilon \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Pela propriedade majoritária, ele vende uma quantia $\beta Q > .5Q$ e obtém um lucro igual a $\beta Q\left(p^{*}-\varepsilon-c\right)$. Para ε suficientemente pequeno, $\beta Q\left(p^{*}-\varepsilon-c\right)>.5Q\left(p^{*}-c\right)$, logo o desvio é lucrativo. Temos então, que no equilíbrio, $p^{*}=c$. ■

Esse resultado exemplifica como uma pequena mudança na regra do leilão pode alterar significativamente o seu resultado. Talvez, muito dos resultados insatisfatórios do leilão uniforme devam-se apenas a uma simples regra de desempate. Isso serve como um sinal de alerta para quem desenha os mecanismos de leilão ao redor do mundo. Como veremos, o leilão de geração de energia possui uma quantidade considerável de regras peculiares que nunca foram objeto de um estudo formal.

2.5. Lances discretos

Na prática, muitas vezes os participantes devem submeter um número finito de lances relacionando preço e quantidade ao invés de uma curva de oferta propriamente dita. Outras vezes, esse número pode até ser infinito, mas devem seguir incrementos discretos ("tick sizes"), ou serem múltiplos de algum número. Kremer e Nyborg (2004b) mostram que nesses casos, o "overpricing" pode ser reduzido arbitrariamente.

Novamente, a idéia por detrás desse resultado é que o nível de "overpricing" é determinado pelo trade-off que o participante encara entre uma diminuição do preço e a quantidade que irá vender. Mostramos, que no modelo padrão, ao jogarem curvas de oferta bastante inclinadas, os participantes inibiam comportamentos mais agressivos, de modo a sustentar preços arbitrariamente altos no equilíbrio.

Quando os agentes são obrigados a submeterem lances discretos é que a oferta residual nos pontos de descontinuidade nunca é negligenciável. Nesses pontos, o “efeito quantidade” pode superar o “efeito preço”, estimulando a agressividade dos participantes. Eles podem ter um incremento em sua quantidade vendida com apenas uma diminuição de preço irrisória.

Vamos mostrar aqui os resultados encontrados em Kremer e Nyborg (2004b) que estabelecem que quando não há “tick size” para o movimento dos preços, então essa competição de preços marginais irá diminuir o “stop-out price” até o “overpricing” ser eliminado. Quando há “tick size” o “overpricing” será limitado e este limite é positivamente relacionado com o tamanho do leilão e negativamente com o número de participantes e quanto maior for o múltiplo das quantidades. Intuitivamente, o “overpricing” é reduzido quando a margem se torna relativamente maior, o que a torna mais atrativa para os participantes.

Primeiramente, vamos ver o caso em que os participantes estão restritos a submeter um número finito de lance. Cada um desses lances representa um par preço-quantidade representando a demanda marginal para um determinado preço. Nesse caso, o participante i submete o seguinte conjunto de lances:

$$b_i = \left\{ \left(p_{i,n}, q_{i,n} \right) \right\}_{n=1}^{T_i}.$$

Em que $T_i < \infty$ é o número de lances desse participante. Note que não restringimos o valor de T_i, esse pode ser escolhido por cada jogador, desde que seja finito. A coleção de lances acima pode ser representada por uma curva de oferta monótona, contínua pela esquerda e no formato escada:

$$q_i(p)=\sum_{n=1}^{T_i} q_{i,n} I\left[p_{i,n} \geq p\right]$$

Nesse caso, restringir os participantes a submeterem um número finito de lances é o mesmo que restringi-los a submeterem curvas de oferta do tipo acima. Se este for o caso, chegamos ao seguinte resultado:

Teorema 4. (Kremer e Nyborg (2004b) adaptado). Suponha que cada participante pode submeter apenas um número finito de lances. Então o stop-out price de equilíbrio é $p^* = c$.

Dem. Se os participantes estão restrito a dar um número finito de lances, então a curva de oferta residual para cada um deles também será discreta. Suponha por contradição que haja um equilíbrio em que $p^* > c$. Vamos mostrar que é vantajoso para algum participante e para algum ε arbitrariamente pequeno, um desvio da forma:

$$q_j' = \begin{cases} Q & \text{se } p \geq p^* - \varepsilon \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Estamos supondo que $p^* > c$. Como há apenas um número finito de lances podemos encontrar um E tal que não haja nenhum lance entre p^* e $p^* + \mathrm{E}$. Isso implica que para cada participante j há uma constante $\alpha_j{}^*$ tal que $q_j(p) = \alpha_j{}^*$ se $p \in (p^* + \mathrm{E}, p^*)$. Além disso, temos que se algum participante demandar uma quantidade $q < Q$ ao preço p^*, ele poderá aumentar a quantidade que irá vender escolhendo um lance em que a oferta é Q ao preço p^*. Portanto, no equilíbrio, todos os participantes devem ofertar Q ao preço p^*. Sendo assim, temos que haverá racionamento a este preço. Pela regra pro - rata na margem, todos os participantes iriam ofertar a quantidade Q/N.

Pegue um participante j qualquer. Se ele der um lance igual ao desvio proposto acima, irá ganhar o direito a ofertar toda a quantidade Q ao preço $p^* - \varepsilon$. Para ε arbitrariamente pequeno, isso será vantajoso. ■

Em muitos leilões, os participantes são obrigados a dar lances discretos. O resultado acima mostra que, nesse caso, o leilão uniforme não apresenta equilíbrios tão desfavoráveis ao leiloeiro como foi argumentado por Back e Zender (1993).

Note que, em todos os resultados que chegamos acima, foi utilizada a hipótese de valoração privada do bem pelos participantes, bem como informação completa. Ou seja, os participantes conheciam a sua valoração e a valoração que os outros tinham pelo bem. Em um ambiente de incerteza, os resultados acima podem não ser verdadeiros. Ausubel e Cramton (2002) mostram alguns resultados quando este é o caso. Em particular, mostram que tanto no critério de geração de receita, como no de eficiência, o ranking entre os leilões uniforme e discriminatório é ambíguo.

No ambiente descrito nessa seção, o leilão discriminatório também levaria a resultados ótimos. Para ver isso, basta perceber que, como não há incerteza, uma competição a lá Bertrand ocorreria o que implicaria em preços de equilíbrios iguais as verdadeiras valorações.

O que aprendemos com essa seção foi que a performance do leilão uniforme depende muitas vezes de pequenos detalhes de sua regra. Portanto, é preciso estar atento quando se propõem algumas mudanças nas regras de um leilão, seja ele uniforme, ou não. Isso indica que o leilão brasileiro de geração de energia deve ser olhado com maior cuidado, já que possui regras peculiares que não foram submetidas a estudos mais profundos. A criação de novas regras pode ter um profundo impacto sobre os seus resultados.

3. **Incerteza**.

Até agora analisamos os leilões em um ambiente em que um participante não possuía incerteza tanto sobre os próprios custos marginais como nos custos dos seus concorrentes. Até mesmo nesse ambiente mais simples existiam equilíbrios ineficientes tanto em sentido alocativo como no de minimização de receita em leilões uniformes. A seguir vamos mostrar que implementando incerteza e relaxando algumas hipóteses sobre simetria, não se consegue atingir equilíbrios eficientes tanto em leilões uniformes como em discriminatórios.

O modelo que utilizaremos será análogo ao utilizado em seções anteriores com algumas exceções. Vamos considerar que os custos marginais de todos os participantes são independentes e seguem uma distribuição ex ante conhecida por eles, $c_i \sim F[0,1]$. Além disso, cada um possui uma restrição de capacidade λ_i. Note que agora a função oferta que os participantes estão sujeitos a fazer dependerá do seu custo marginal. Uma estratégia será uma curva de oferta *inversa* para cada realização do seu custo marginal, $c_i, b(q,c_i):[0,1] \rightarrow [0,\lambda_i]$. A regra de alocação é a de um leilão convencional que implica que o critério de desempate é o pro - rata na margem. A seguir, enunciaremos um resultado importante para caracterizarmos algumas propriedades de cada tipo de leilão. Trata-se de uma condição necessária sobre os lances dos participantes para que se atinja um equilíbrio eficiente em um leilão convencional.

Lema 1. (Ausubel e Cramton, 2002). Em um leilão convencional com custos marginais independentes, eficiência ex post implica que os participantes devem oferecer curvas oferta simétricas e constantes para quase - todo $c_i : b(q,c_i) = \phi(c_i)$ para $q \in [0,\lambda_i]$. Além disso, $\phi:[0,1] \rightarrow [0,1]$ é estritamente crescente quase - sempre.

Dem. Suprimida.

O que esse Lema nos diz é que para um leilão convencional alocar eficientemente, é necessário que os participantes dêem lances constantes e que esses dependam de forma estritamente crescente dos seus custos marginais. Se os lances não fossem constantes, haveria um intervalo do preço em que, com probabilidade positiva um participante com um custo marginal superior estaria vendendo uma quantidade positiva de energia que outro com custo marginal menor poderia estar provendo.

Em um leilão uniforme multiunidade há uma probabilidade positiva de que um participante vai influenciar o preço e ganhar uma quantidade positiva. Isso gera incentivos para um participante dar lances maiores que o seu custo marginal, o que pode ser fonte causadora de ineficiência. A seguir, vamos enunciar o resultado contido em Ausubel e Milgrom (2002) que mostra que o leilão uniforme não será eficiente se algumas condições não forem atendidas.

Teorema 5. (Ausubel e Cramton, 2002). Considere um modelo com custos marginais constantes e independentes. A menos que $\lambda_i = \lambda$ para todo i e que $1/\lambda$ seja um inteiro, não existe um equilíbrio eficiente ex post para o leilão uniforme.

Dem. Suprimida.

Como dito anteriormente, se um participante possui uma probabilidade positiva de influenciar o preço na situação que ganha uma quantidade positiva, ele possui incentivo a esconder o seu lance. O ganho marginal de esconder o verdadeiro custo é dado pela multiplicação entre a quantidade que um participante ganha no caso em que é pivotal e a probabilidade de isso ocorrer.

Quando $\lambda_i = \lambda$ para todos *i* e $1/\lambda$ é inteiro, o resultado não é aplicável. Isso ocorre porque a quantidade que um participante ganha quando se torna pivotal é igual a zero. Nesse caso, ele só altera o preço quando ganha uma quantidade nula, logo terá incentivos a ofertar toda a sua quantidade ao seu verdadeiro custo marginal.

Vamos mostrar agora que, sob algumas hipóteses razoáveis em que eficiência não podia ser atingida no leilão uniforme, ela é atingida via leilão discriminatório. Seja $c_{(k)}$ a estatística de ordem inversa dos custos marginais dos participantes com exceção do produtor *i*. Ou seja, $c_{(1)} < c_{(2)} < ... < c_{(N-1)}$. Além disso, denote por *m* o maior inteiro positivo tal que $m\lambda < 1$. Eficiência requer que seja auferida uma quantidade λ do bem para o participante *i* se $c_i < c_{(m)}^{-i}$, $1 - m\lambda$ unidades se $c_{(m)} < c_i < c_{(m+1)}$ e nenhuma unidade se $c_{(m+1)} < c_i$. Sendo assim, a quantidade esperada que o participante *i* irá receber se o leilão for eficiente é dada por:

$$Q_i(c_i) = \lambda\left[1 - F_{(m)}^{-i}(c_i)\right] + (1 - m\lambda)\left\{\left[1 - F_{(m)}^{-i}(c_i)\right] - \left[1 - F_{(m+1)}^{-i}(c_i)\right]\right\}$$

Vamos encontrar um equilíbrio simétrico eficiente do leilão de primeiro preço. Veremos que ele é bem similar ao caso de leilão de uma unidade. Começaremos lembrando que a restrição de incentivo usual implica que o pagamento recebido por um participante com custo marginal c_i tem que obedecer:

$$P(c_i) = \int_{c_i}^{1} Q_i(x)\,dx$$

Suponha que exista um equilíbrio eficiente do leilão discriminatório. Pelo Lema 1, as curvas de ofertas dadas pelos participantes devem ser constantes. Supondo que tal equilíbrio exista, uma segunda maneira de calcular o pagamento esperado para o participante *i* é dada por:

$$P(c_i) = Q_i(c_i)\left[\phi_i(c_i) - c_i\right]$$

Combinando as duas equações, chegamos em:

Field Code Changed

(1.2) $$\phi_i(c_i) = c_i + \frac{\int_{c_i}^{1} Q_i(x)\,dx}{Q_i(c_i)}$$

Podemos enunciar o seguinte resultado:

Teorema 5. (Ausubel e Cramton, 2002). Se os custos marginais dos participantes são i.i.d e suas capacidades, λ_i são idênticas, então a equação (1.2) fornece um equilíbrio eficiente ex post do leilão discriminatório.

Dem. Vimos que uma condição necessária para um equilíbrio ex post eficiente é obedecer a equação (1.2). Se todos os participantes são simétricos, ou seja, se c_i e c_j serem i.i.d $\lambda_i = \lambda$, então $Q_i(\cdot) = Q_j(\cdot)$ e $\phi_i(\cdot) = \phi_i(\cdot) \equiv \phi(\cdot)$. Além disso, temos que $\phi(\cdot)$ é estritamente crescente, logo gera alocações eficientes. Cada participante utilizando $\phi(\cdot)$ constituirá um equilíbrio de Nash Bayesiano. Observe que é análogo ao equilíbrio clássico do caso de um leilão de primeiro preço de apenas um bem indivisível. ■

Ao contrário do leilão uniforme, esse resultado não depende de nenhuma restrição sobre o valor de $1/\lambda$ para que o leilão discriminatório seja eficiente. Encontramos então um conjunto de situações em que o leilão discriminatório é superior ao uniforme.

Contudo, é importante notar que o resultado anterior depende da simetria entre os participantes. É possível mostrar que se qualquer hipótese sobre simetria não for satisfeita, então não irá existir equilíbrios eficientes no leilão discriminatório. Basta notar que a função melhor resposta encontrada no Teorema anterior $\phi_i(\cdot)$ não será a mesma para todos os participantes em conjuntos com probabilidade positiva, abrindo margem para resultados ineficientes.

Portanto não podemos chegar a nenhuma conclusão sobre o ranking em termos de eficiência do leilão uniforme e o discriminatório. Sob algumas hipóteses razoáveis, o discriminatório apresenta equilíbrios eficientes enquanto o uniforme não. Porém, sob outras, também razoáveis, o contrário é válido.

4. Um caso simples: Duopólio.

Em toda a nossa análise sobre leilão multiunidade, supomos que os participantes não tinham restrição sob a quantidade que pretendiam ofertar. Ou, analogamente, podia até ter essa restrição, mas essa não era ativa. Fabra et all (2006) comparam os leilões uniforme e discreto em um caso simples em que há dois participantes com restrição de capacidade e custos marginais assimétricos sob uma variedade de hipóteses.

No artigo a conclusão que se chega é que os leilões com preço uniforme resultam em preços, em média, maiores que o leilão discriminatório, mas o ranking em termos de eficiência alocativa é ambíguo.

Os autores caracterizam o equilíbrio dos dois tipos de leilão em ambientes discretos e de multiunidade para os leilões de eletricidade sob uma variedade de hipóteses como configuração de capacidade e de custos, o formato dos lances, as elasticidades da demanda, e número de ofertantes no mercado.

A análise começa com um modelo simples de duopólio em que dois ofertantes “single units” com capacidades e custos marginais assimétricos defrontam-se com uma curva de demanda perfeitamente inelástica e conhecida. Por “single-unit”, os autores querem dizer que cada ofertante deve submeter apenas um preço de oferta para a sua capacidade inteira. A demanda é perfeitamente inelástica e estocástica. Contudo, ao fazer seus lances, os participantes já conhecem a realização da demanda no período.

Os equilíbrios dos leilões irão depender fundamentalmente da realização da demanda. Se esta for baixa, os lances do único equilíbrio são iguais ao custo marginal do agente mais ineficiente e apenas o mais eficiente despachará a energia. Deste modo, o resultado nos dois leilões serão o competitivo no sentido de que os preços são restritos ao custo marginal do agente ineficiente e o custo total da produção de energia é minimizado.

Há apenas dois agente, 1 e 2. Os dois participantes possuem custos marginais constantes $c_i \geq 0$ e restrições de capacidade $k_i > 0$, $i = 1, 2$. Os custos marginais são indexados de forma que $0 = c_1 \leq c_2 = c$.. O nível de demanda em qualquer período é uma variável aleatória $\theta \sim \left[\underline{\theta}, \overline{\theta}\right] \subseteq \left(0, k_1 + k_2\right)$ independente do preço do mercado e perfeitamente inelástica. Existe um preço de reserva máximo P que restringe o pagamento aos participantes. O primeiro resultado que os autores chegam é enunciado a seguir:

Resultado 1. (Fabra et all, 2006). Existe um $\hat{\theta} = \hat{\theta}\left(c, k_1, k_2 P\right)$ tal que:

(demanda baixa) Se $\theta \leq \hat{\theta}$, no único equilíbrio em estratégias puras o “stop-out price” é c

(demanda alta) Se $\theta \geq \hat{\theta}$, todos os ofertantes recebem preços que excedem c. Um equilíbrio em estratégias puras existe no leilão uniforme, com o “stop-out price” igual a P, mas não existe no leilão discriminatório.

No caso em que realização da demanda é alta os resultados de equilíbrio variam bastante entre os dois tipos de leilão. No leilão uniforme, todo equilíbrio de estratégias puras envolve um participante ofertando o preço de reserva enquanto o outro oferecendo um preço suficientemente baixo de modo a fazer com que qualquer redução no lance do primeiro gere lucros menores do que aquele que ganha se oferecer o preço de reserva como lance. Diferentemente do que acontecia anteriormente, o participante com menor custo não será necessariamente o vencedor do leilão. De fato, o equilíbrio será eficiente ou não dependendo dos parâmetros de cada agente e da realização da demanda.

No leilão discriminatório não existe equilíbrio em estratégias puras em estados em que a demanda é alta. Em particular, existe apenas um equilíbrio em estratégias mistas em que os dois agentes mixam em um suporte comum, e este está acima do custo marginal do agente ineficiente e que possui o preço de reserva de mercado. O equilíbrio não é necessariamente eficiente, já que com probabilidade positiva, o agente com maior custo é o ganhador do leilão.

As probabilidades de realizações dos estados em que a demanda é alta ou baixa depende fundamentalmente da estrutura da indústria e da diferença entre o preço de reserva e o custo do agente ineficiente. Primeiramente, os autores concluem que dado uma razão entre as capacidades dos ofertantes, a incidência de estados de demanda baixa aumenta quanto maior for a capacidade agregada. Além disso, a incidência de estados com demanda baixa é maior quanto mais os agentes forem simétricos em relação à capacidade e assimétrico quanto aos custos de produção, já que a perda no lucro do agente eficiente quando dá um lance igual ao custo marginal do ineficiente relativamente a servir a demanda residual é menor quanto maior for o custo do último. Por último, a incidência de demanda baixa depende do preço de reserva. Como o lucro de desviar do comportamento competitivo estará determinado pelo preço de reserva, quanto maior for este, maior o incentivo a este comportamento. Dessa forma, um preço de reserva menor melhora a performance do mercado não apenas diminuindo o poder de mercado, como também diminuindo a incidência de estados com demanda alta.

O artigo também compara os dois tipos de leilão. Para o formato do leilão $f = u, d$, denote por R^f e C^f a receita e o custo totais esperados pelo leilão do tipo f, respectivamente. Os autores chegam ao seguinte resultado:

Resultado 2. (Fabra et all). *Performance do mercado:*

$R^d = R^u$ se $\theta \leq \hat{\theta}$ e $R^d < R^u$ se $\theta > \hat{\theta}$

$C^d = C^u$ se $\theta \leq \hat{\theta}$. No caso em que $\theta > \hat{\theta}$, o ranking dependerá dos parâmetros e de quais dos equilíbrios irão ocorrer.

A primeira conclusão chegada é a de que o leilão discriminatório é fracamente superior ao uniforme quando se compara receita esperada. Já vimos que quando o estado da demanda é baixo, os dois leilões geram o mesmo resultado. Quando a demanda é alta, o preço de mercado está em seu máximo (o preço de reserva) no leilão uniforme, enquanto que com probabilidade positiva, ele está abaixo desse nível no leilão discriminatório. Quanto à eficiência, o resultado é ambíguo. Vimos que existem dois tipos de equilíbrio no leilão uniforme, sendo que em um deles os custos totais são minimizados enquanto no outro, são maximizados. A probabilidade de que os custos envolvidos no equilíbrio do leilão discriminatório fique entre esses dois níveis é 1. Portanto, o ranking dependerá dos parâmetros e da realização da demanda.

Pode-se generalizar o resultado acima para o caso em que os participantes podem dar um número discreto de lances, combinando quantidades e preços. A primeira conclusão que chegam nesse cenário é que em equilíbrio, a alocação da produção de energia é independente do número de lances possíveis. É sempre ótimo para os participantes darem lances constantes, portanto a restrição imposta anteriormente não altera os resultados do leilão.

No leilão uniforme, por exemplo, o equilíbrio em estratégias puras é único e independe do número de degraus possíveis no lance de cada jogador. A explicação desse resultada é dada na seção anterior. Quando os participantes podem dar lances diferenciáveis, um continuum de equilíbrios em estratégias puras era encontrado, alguns com receitas muito baixas para o leiloeiro. O que acontecia era que os participantes ofereciam uma curva de oferta muito inclinada a partir de um determinado ponto, o que inibe a competição na margem. Para poder vender uma unidade marginal, o participante perderia consideravelmente no preço dos outros objetos. Como o “efeito preço” é maior em unidades infinitesimais do que o “efeito quantidade”, equilíbrios extremamente coalizivos poderiam ser sustentados. Quando os lances são discretos, não é mais possível sustentar esses equilíbrios.

A segunda extensão faz uma análise dos leilões permitindo que a demanda por energia seja elástica. O resultado obtido anteriormente sobre a existência de um único “threshold” que determina se a demanda é alta ou baixa é estendido para esse caso. Contudo, o “threshold” dependerá da elasticidade da demanda, a saber:

Resultado 3. (Fabra et all, 2006).
Os preços de equilíbrio são não decrescente com a elasticidade da demanda.
O threshold crítico $\hat{\theta}$ é não decrescente na elasticidade da demanda.

A elasticidade preço da demanda afeta o mercado de duas maneiras. Primeiro, a distorção devido ao exercício do poder de mercado é menor com uma demanda mais elástica. Segundo, a incidência de estados em que a demanda é do tipo alta é reduzida também será menor quanto maior for a elasticidade.

A performance dos tipos de leilão com demanda elásticas também é essencialmente a mesma com duas observações: Como o preço no leilão discriminatório normalmente são mais baixos, há um ganho na eficiência alocativa correspondendo ao aumento no consumo.

A variação seguinte feita pelos autores possibilita um número maior de participantes do leilão. Primeiramente, supõe-se que os agentes sejam assimétricos, ou seja, cada um possui o seu determinado custo marginal de produção de energia e uma restrição de capacidade.

O primeiro resultado que chegam é que em equilíbrio, para cada participante, há dois “thresholds” em relação a realização da demanda. O menor deles limita o preço ao custo marginal do participante, ou seja, se a realização da demanda for menor que este threshold, o preço de equilíbrio do leilão não poderá ser maior que o custo marginal do participante correspondente. O maior deles faz a função inversa. Se a demanda for maior que este threshold, o preço de equilíbrio terá que ser estritamente maior que o custo marginal do participante. Uma condição suficiente para que sejam iguais é que a capacidade do participante correspondente seja maior que a capacidade de qualquer outro participante que seja mais eficiente.

Como no caso de duopólio, há uma dicotomia em relação ao ranking dos dois tipos de leilão. Isso ocorre porque o leilão discriminatório não possui nenhum equilíbrio em estratégias puras e depende de qual equilíbrio será jogado no leilão uniforme, já que este pode ou não ser eficiente.

Por fim, os autores consideram a relação entre estrutura e performance do mercado. Para tanto, consideram um modelo em que as capacidades sejam simétricas entre os agentes. A conclusão que chegam é que a estrutura do mercado afeta o equilíbrio diferentemente nos dois tipos de leilão. Em ambos os formatos, o threshold que determina se a demanda é alta ou baixa é crescente em relação ao número de ofertantes[4]. Contudo, no leilão discriminatório, a estrutura de mercado também afeta a estratégia dos participantes quando a realização da demanda é alta.

A última extensão do modelo assume que a demanda é estocástica ou variante no tempo, de forma a não ser conhecida pelos participantes. Essa hipótese é de particular importância quando os participantes fazem lances que permanecem válidos por mais de um período, ou mesmo quando há alguma regra peculiar do leilão que faça com que a demanda não seja conhecida pelos participantes, como no caso brasileiro.

Nesse caso, a incerteza sobre a demanda impossibilita qualquer equilíbrio em estratégias puras nos dois tipos de leilão. A boa notícia é que ambos os tipos possuem equilíbrios em estratégias mistas únicos. Nesses equilíbrios os ofertantes submetem lances superiores ao custo marginal do agente menos eficiente.

Em um equilíbrio em estratégias mistas em qualquer tipo de leilão os participantes defronta-se com dois efeitos opostos, a saber: uma oferta de preço alto tende a resultar em equilíbrios com preços mais altos, contudo, ofertas com preços mais elevados diminuem a quantidade vendida esperada. O primeiro efeito é mais fraco no leilão uniforme, logo há uma tendência dos participantes serem mais agressivos no leilão discriminatório comparado ao leilão uniforme. Seja $E\left[R_l^f\right]$ e $E\left[R_s^f\right]$ o pagamento

[4] Neste caso, o threshold maior e menor de cada participante será igual, já que as capacidades são todas iguais.

esperado total aos participantes no caso de lances com vida curta e com vida longa, respectivamente, os autores confirmam esta intuição para o caso simétrico em que os custos marginais e as capacidades são idênticas entre os participantes no seguinte resultado:

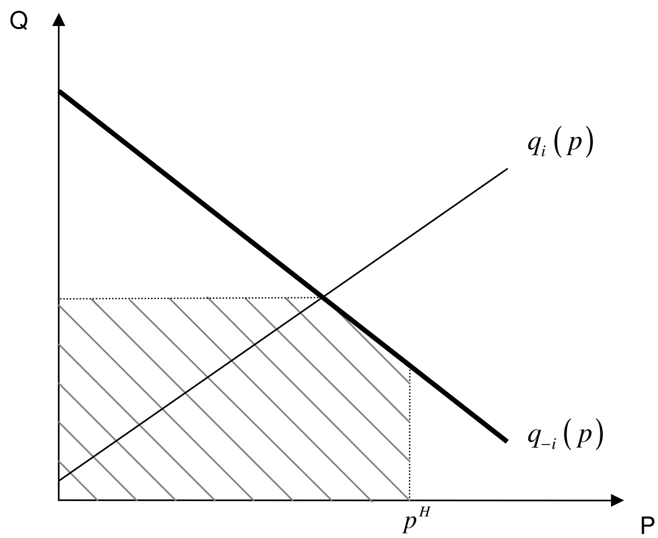
Resultado 3. (Fabra et all, 2006). No duopólio com capacidades simétricas, $E\left[R_l^u\right] < E\left[R_s^u\right]$ e $E\left[R_l^d\right] = E\left[R_s^d\right]$.

Os resultados encontrados nesse caso especial só corroboram com a ambigüidade do ranking entre leilão uniforme e discriminatório. No caso específico de duopólio em que não há incerteza sobre os parâmetros dos agentes, vimos que o leilão uniforme é fracamente preferível ao discriminatório. Contudo, vimos anteriormente que em alguns casos razoáveis, o leilão discriminatório gera resultados superiores quando implementamos incerteza no modelo.

5. Leilão de Vickrey

O leilão de Vickrey para o caso de apenas uma unidade possui a propriedade de que dar o lance igual a sua valoração é estratégia fracamente dominante. Uma pergunta que surge é se isso ocorre quando o generalizamos para o caso multiunidade. Antes disso, devemos definir as suas regras de forma correta. O princípio do leilão de Vickrey é que um participante que seja o ganhador de certa quantidade em um leilão de mais de um bem (ou um bem divisível) pague por ela o seu custo de oportunidade para o leiloeiro. Isso significa que ele paga por cada unidade o maior lance perdedor referente a ela. Por exemplo, no caso com M objetos indivisíveis, um participante que ganhe K objetos paga pela k-ésima unidade que ganha, o k-ésimo maior lance dos outros participantes.

Basicamente o que acontece, na versão contínua e de leilão de procuração, é que um participante recebe a área abaixo da curva de demanda residual entre a origem e a quantidade que ele ganha.



Formalizando, sendo $q_i(p)$ o lance do agente *i*, defina $q_{-i}(p)$ como a oferta residual dos outros participantes, ou seja, $q_{-i}(p) = \sum_{j \neq i} q_j(p)$. Lembrando que p^H é o preço de reserva do leiloeiro, vamos definir o "stop-out price" desse leilão como função do lance do participante *i*:

$$p^s(q_i(p)) = \begin{cases} \min\left\{ p \le p^H \middle| \sum_{j \neq i} q_j(p) + q_i(p) \ge Q \right\} & \text{se} \left\{ p \le p^H \middle| \sum_{j \neq i} q_j(p) + q_i(p) \ge Q \right\} \neq \varnothing \\ p^H \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Denote p^{-i} como o "stop-out price" no caso em que o agente i não participa do leilão, ou seja, $p^{-i} = \min\{p | q_{-i}(p) \le Q\}$. As regras do leilão de Vickrey estipulam que o participante *i* receba uma quantidade $q_i(p)$, e que pague por isso:

$$P_i = \int_0^{q_i(p)} p^s(x)dx$$

Teorema 6. Lances sinceros por parte dos participantes (a sua verdadeira demanda) são estratégias fracamente dominantes para o leilão de Vickrey no nosso ambiente de custos marginais privados.

Dem. Note que, se os participantes são obrigados a darem lances monótonos, a única coisa que importa no lance deles é quantidade que ele irá vender. O formato da curva de oferta até esse ponto não altera o resultado. Portanto, uma estratégia de um participante é apenas a escolha de um quantidade que maximize o seu lucro esperado. O lucro esperado de um participante *i* qualquer será dado por:

$$\pi(q) = \int_0^q p^s(x)dx - c_i q \qquad q \le Q$$

Analisando a expressão acima, podemos perceber que o lance sincero:

$$q_i(p) = \begin{cases} 0 & \text{se } p \le c_i \\ \text{Q} & \text{se } p > c_i \end{cases}$$

maximiza o lucro esperado acima, independentemente do lance dos outros participantes (contanto que sejam monótonos). Sendo assim, lance sincero é uma estratégia fracamente dominante para o nosso leilão de Vickrey. ■

O resultado acima mostra que esse leilão alocará de forma eficiente a produção de energia. Duas considerações devem ser feitas sobre o resultado acima. A primeira delas é que o nosso resultado depende da hipótese de custos marginais serem privados. Ausubel e Cramton (2004b) estudam esse leilão para o caso de leilão de venda. Eles mostram que se a valoração dos bens não forem privadas, então lance sincero pode não ser estratégia fracamente dominante.

A segunda é que muitas vezes o leiloeiro não se preocupa apenas com eficiência alocativa, mas também no pagamento que ele terá que fazer para comprar a energia. Leilões de Vickrey podem gerar despesas excessivamente altas para o leiloeiro. Como dito anteriormente, os preços nesse leilão são determinados pelo custo de oportunidade de vencer, isto é, um ganhador recebe pela sua produção de energia o menor valor cujo leiloeiro poderia comprar a energia no caso em que esse participante não estivesse no leilão. Se a quantidade que um participante vende é maior do que o excesso de oferta nesse leilão quando ele é removido, então o preço que ele receberá por todas as unidades vencidas será o preço de reserva.

Um exemplo clássico desse problema do leilão de Vickrey aconteceu na venda de licenças de espectro da Nova Zelândia em 1990. O leilão era um leilão de venda, e não de compra como o estudado aqui, portanto, o risco era de que o pagamento recebido pelo leiloeiro fosse muito baixo ao implantar esse mecanismo. E isso realmente aconteceu. Em um caso, o lance vencedor foi de $100.000, mas pagou-se apenas $6, e em outro, o lance vencedor foi de $7.000.000, mas pagou-se apenas $5.000.

6. Leilão Ascendente.

Até agora, todos os leilões que estudamos são classificados como estáticos. Nesses tipos de leilão, cada participante da apenas um lance, e de posse desses lances, o leiloeiro estabelece a quantidade que cada um irá produzir e o quanto deverá receber por isso. No caso de leilão unitário, exemplos de leilões estáticos são leilão selado de primeiro preço, leilão de Vickrey, leilão all-pay entre outros.

Vamos ver agora leilões que possuem vários estágios até que se determine o resultado final. Nestes tipos de leilão, os participantes recebem informação sobre o verdadeiro valor do bem ao longo do leilão. Essa informação é transmitida para um participante qualquer através do conhecimento dos lances dados por seus oponentes na medida em que os estágios ocorrem.

Esses leilões possuem uma performance relativa superior aos estáticos quando a valorização que um participante tem pelo objeto depende da valorização dos seus oponentes. Chamamos esse caso de valorização comum. Por exemplo, suponha um leilão unitário em que cada participante recebe um sinal com erro de média zero sobre o verdadeiro valor do bem. Cada participante irá levar em conta, além do próprio sinal, os sinais que os seus oponentes receberam para inferir sobre o verdadeiro valor do bem.

Nesse exemplo, quando o leilão é estático e assumindo que no equilíbrio, os lances são monótonos em relação ao sinal, então o participante com o maior sinal irá ser o vencedor. Contudo ele irá levar em conta que se ele for o ganhador, o seu sinal será o maior. Condicional a isso, a probabilidade de ele receber um sinal que superestime o verdadeiro valor é positiva. Isso faz com que ele seja mais cauteloso na escolha de seu lance.

Em um leilão dinâmico, por sua vez, os lances em cada estágio revelam informações sobre o sinal dos participantes, diminuindo assim a incerteza sobre o valor do bem ao longo do leilão. Dessa maneira, os participantes podem agir mais agressivamente, aumentando assim a receita esperada do leiloeiro. Esse é a grande vantagem dos leilões dinâmicos. No caso unitário, pode-se demonstrar que o leilão inglês, que é dinâmico supera, em termos de receita esperada os leilões de primeiro e de segundo preço quando há valorização comum[5].

Vamos estudar aqui alguns casos de leilões dinâmicos para o caso de leilão multiunidade. Leilões ascendentes simultâneos para múltiplos bens foram propostos pela primeira vez por Paul Milgrom para a venda de espectros de telecomunicação nos Estados Unidos[6]. O autor defendia que realizar leilões de vários bens simultaneamente resolve o problema que muitos leilões seqüenciais apresentavam que era a falha da lei de preço único. Ou seja, duas mercadorias homogêneas apresentavam preços diferentes quando leiloadas separadamente.

Ausubel e Cramton (2004) tratam de leilões simultâneos ascendentes de bens divisíveis. São chamados de “simultaneous clock auctions”. Neles os preços dos bens começam em um nível arbitrariamente alto e vão diminuindo de modo contínuo e os participantes dão suas ofertas para todos os bens simultaneamente para cada conjunto de preços. O leilão termina quando a oferta agregada dos participantes se iguala a demanda agregada. Cada participante recebe a quantidade de cada bem que ofertou no equilíbrio e a regra de preço é a uniforme, ou seja, o leiloeiro paga o preço de equilíbrio por todas as unidades infinitesimais ofertadas pelos participantes.

---

[5] Para uma análise mais detalhada, ver Monteiro e Menezes(2005).
[6] Ver Milgrom(2004).

Vamos considerar um modelo proposto pelos autores acima em que pode ser mostrado que o "simultaneous clock auction" geram resultados desejáveis. Novamente, farei uma pequena alteração em relação ao modelo do artigo para adequar o modelo a leilões de compra, que é o caso dos leilões de geração de energia. O leiloeiro quer alocar as unidades de K bens divisíveis distintos entre um continuum de participantes. Os participantes são subscritos por $i\left(i\in[0,1]\right)$. Assumimos que o conjunto de oferta do participante *i* é subespaço de $\Re_{+}^{K}$ compacto e convexo e sua cesta de oferta é dada por $x_i=\left(x_i^1,...,x_i^K\right)\in X_i$. A demanda do leiloeiro é dada por $D=\left(D^1,...,D^K\right)$.

Agora, assumiremos uma hipótese um pouco diferente daquela que consideramos na maioria das análises anteriores. Vamos supor que cada participante possua uma curva de custo de produção $C_i\left(x_i\right)$de energia estritamente convexa. Com essa hipótese, o custo marginal, que anteriormente era assumido ser constante, passa a ser estritamente crescente com a produção de energia.

O vetor de preços é denotado por $p=\left(p^1,...,p^K\right)\in\Re_{+}^{K}$. Cada participante oferta $q_i\left(p\right)$ ao preço *p*, a oferta agregada é dada por $\int_0^1 q_i\left(p\right)di$. O excesso de oferta, $z\left(p\right)$, é definida como a diferença entre a oferta agregada e a demanda do leiloeiro: $z\left(p\right)=\int_0^1 q_i\left(p\right)di-D$. Vamos assumir, tal como no tâtonnement Walrasiano (Walras, 1874 e formalizado por Samuelson 1941), que o leiloeiro ajusta o vetor de preços se continuamente de acordo com o excesso de oferta: $\dot{p}\left(t\right)=f\left(z\left(p\left(t\right)\right)\right)$, em que $f\left(\cdot\right)$ é uma transformação contínua que inverte o sinal. O vetor de preços *p*, e as alocações associadas formam um equilíbrio competitivo quando o excesso de oferta se iguala a zero para todos os produtos.

O leiloeiro anuncia um vetor de preços *p.*

Os participantes reportam as suas ofertas $q_i\left(p\right)$.

O leiloeiro ajusta o vetor de preços de acordo com o Tâtonnemment Walrasiano.

O processo se repete até que o vetor de preços convirja.

Temos então os seguintes resultados:

Teorema 5 (Ausubel e Cramton, 2004). Dar lances sinceros é um equilíbrio desse leilão. Além disso, começando de qualquer vetor de preços, o resultado converge para o equilíbrio competitivo.

Dem. A demonstração segue um argumento de estabilidade global[7]. Denote por $V_i(\cdot)$ como a função lucro do participante *i*: $V_i(p) = \max_{x_i \in X_i} \{p.x_i - C_i(x_i)\}$. Defina a seguinte função Lyapunov: $V(p) = \int_0^1 V_i(p)di - p \cdot d$. Então temos que: $\dot{V}(p) = \left(\int_0^1 x_i(p(t))di - D \right) \cdot \dot{p}(t) \leq 0$. Quando a oferta agregada, $\int_0^1 x_i(p(t))di$, é maior do que a demanda, D, então o preço diminui $(\dot{p}(t) \leq 0)$ e vice-versa. Portanto, $V(\cdot)$ é minimizada no equilíbrio competitivo. ■

Podemos chegar ao seguinte colorário que é útil para a nossa aplicação:

Corolário 1 (Ausubel e Cramton, 2004). Se os bens são substitutos no agregado, então lances sinceros são formam um equilíbrio do leilão, e começando com um vetor de preços suficientemente altos, os preços decaem monotonicamente ao único equilíbrio competitivo.

Podemos aplicar o corolário acima para o nosso "simultaneous clock-auction" de forma a mostrar que existe equilíbrio para esse leilão eficiente que gera preços competitivos. Importante ressaltar que os bens que estão sendo leiloados devem ser substitutos entre si. No caso do leilão de energia, muitas vezes não podemos considerar que essa hipótese seja verdadeira, já que há muitos ganhos de escala na produção de energia. Por exemplo, um projeto de construção de uma hidroelétrica só poderia ser viável se esta produzisse

[7] Ver, por exemplo, Varian 1981

uma quantidade grande de energia. Caso fosse vencedora de apenas um produto, não haveria possibilidade de obter lucros.

7. Leilão Híbrido

Klemperer (2002a, 2002b) argumenta que a literatura até então estudada era de segunda importância no ponto de vista prático na escolha das regras de um leilão. Argumentou que a literatura enfatizou em casos em que há um número grande de participantes agindo de forma não-cooperativa e focou-se em questões como aversão ao risco, correlação e informação, e complementariedade. Para o autor, muito dessa literatura não é muito útil para realmente desenhar leilões.

Primeiramente, um dos problemas que envolve a escolha das regras do leilão na prática envolve o risco de elas serem suscetíveis a coalizões explícitas ou tácitas. Isso fica evidente no caso de leilões dinâmicos simultâneos. Neles, os participantes podem utilizar os estágios iniciais, enquanto os preços continuam baixos, para sinalizar quem deveria ganhar qual objeto (ou a quantidade de cada um) e depois tacitamente concordarem em parar de tentar diminuir (aumentar) os preços. Além disso, possui um mecanismo de punição eficiente, já que o desvio de um participante do combinado poderia ser punido no estágio imediatamente posterior.

Vimos em seções anteriores que comportamentos anti-competitivos podem ocorrer em leilões com preço uniforme. Nesse tipo de leilão, os participantes ofertavam curvas de oferta (demanda) bastante inclinadas de modo a inibir o desvio de qualquer agente, já que o preço cairia (aumentaria) com apenas um pequeno aumento na quantidade que este ganharia. Por fim, um mercado de leilão freqüentemente repetido, como o de geração de eletricidade, é particularmente mais vulnerável a coalizão, pois a iteração repetida entre os participantes aumenta o conjunto de estratégias de sinalização e punição existentes.

Outro ponto a ser levado em questão na escolha de um determinado tipo de leilão se refere a capacidade desse atrair um número significativo de participantes. Leilões com poucos participantes contém o risco de gerar pagamentos extraordinários (receitas pífias) para o leiloeiro. Via de regra, em leilões dinâmicos, os participantes com maior valorização sobre o bem acabam sendo o vencedor do leilão, pois mesmo que eles dêem lances perdedores em algum estágio no começo do leilão, eles pode reverter em estágios mais a frente. Sendo assim, esses leilões desestimulam a entrada de outras firmas já que entrar em um leilão envolve custos como consultorias para avaliar o negócio e custos operacionais.

Contudo, sabemos que os leilões ascendentes podem ser superiores aos selados, pois aumentam a informação sobre o valor dos bens durante o processo, o que diminuiria a probabilidade de um participante incorrer em um “winner’s curse”. Uma solução para o dilema entre escolher um leilão dinâmico ou selado é combinar os dois em um leilão híbrido. Esse tipo de leilão, que é chamado de “Anglo-Dutch”, foi proposto por Klemperer (1998).

Suponha, para simplificar, que apenas um bem indivisível esteja sendo leiloado. No leilão “Anglo-Dutch”, há uma fase dinâmica e outra estática. O leilão começa com uma fase ascendente em que o preço desce (sobe) continuamente até que um determinado número de participantes desistam do bem. Na segunda fase, os participantes que restaram competem em um leilão selado de primeiro preço em que os lances não podem ser maiores (menores) que o preço determinado na primeira fase. Esse leilão pode ser interpretado como um leilão selado com preço de reserva endógeno.

Quando há um participante muito forte em um leilão, competidores potenciais podem não estar dispostos a participar de um leilão dinâmico, que iria ser vencido pelo participante mais forte com certeza. Mas o estágio selado final produz certa incerteza sobre o vencedor do leilão, o que atrai os participantes mais fracos, já que estes sabem que podem ter uma chance de se tornarem vencedores no estágio final. Dessa forma, o preço pode ser mais baixo (alto) mesmo ao término da primeira fase de um leilão “Anglo-Dutch” do que um leilão puramente ascendente. Além disso, coalizões são desencorajadas devido a segunda fase do leilão, pois os participantes podem romper com qualquer acordo nessa fase sem medo de retaliação.

Os benefícios do leilão ascendente também são parcialmente capturados nesse leilão. A probabilidade de se vender para o agente com menor custo marginal (maior valoração) é maior que em um leilão selado puro. Além disso, há revelação de informação durante a primeira fase do leilão, o que é importante para os casos de valoração comum, fazendo com que os participantes possam competir mais agressivamente na segunda fase, pois o efeito do “winner’s curse” será menor já que a incerteza é reduzida.

Vamos agora formalizar a idéia do leilão proposto por Klemperer e mostrar que, em certas circunstâncias, ele pode gerar receitas superiores ao leilão ascendente até mesmo com o mesmo número de participantes.

Levin e Ye (2008) mostram um caso em que o leilão híbrido gera resultados superiores aos de leilões inglês convencionais e leilões de primeiro preço. Consideram um caso de apenas uma unidade indivisível. A valoração que cada indivíduo possui pelo objeto leiloado é privada e não é de conhecimento comum, contudo depende de um sinal comum desconhecido *ex ante* pelos participantes. Se pensarmos nas valorações dos participantes como variáveis aleatórias, as hipóteses do modelo as tornam afiliadas. Vamos estender a análise dos autores para o caso de leilão de um bem divisível e com valoração constante.

7.1. Modelo

Diferentemente do que fizemos até agora, iremos analisar o caso de um leilão de venda tradicional. Agora, o leiloeiro está interessado em vender uma determinada quantia de um bem divisível. O lance de um participante é uma curva de demanda que informa a quantia que está disposto a comprar para cada preço.

7.1.1. Preliminares.

Antes de estudarmos esse tipo de leilão no caso multiunidade, vamos expor alguns resultados preliminares que poderão nos ajudar na análise do leilão proposto por Klemperer.

Primeiramente, vamos considerar um leilão de uma unidade em que os participantes possuem valorações privadas, porém estes são correlacionados, $x_i \sim f\left(x_1,...,x_n\right)$. Suponha que f seja simétrica nos *n* argumentos e seja afiliada. Defina $f_{X^{-i}|X^i}$ como a densidade condicional do vetor da valoração dos participantes além do i, X^{-i}, dado a valoração do participante *i* e $F_{X^{-i}|X^i}$ a sua função de distribuição.

Como anteriormente, defina $Y_{(k)}$ a estatística de ordem inversa das valorações dos participantes com exceção do produtor *i*. Ou seja, $Y_{(1)} > Y_{(2)} > ... > Y_{(N-1)}$. Ou seja, se $\left(X_1,...,X_{i-1},X_{i+1},...X_N\right)$ for um vetor de variáveis aleatórias, $\left(X_i,Y_{(1)},Y_{(2)},...Y_{(N-1)}\right)$ é o vetor de variáveis aleatórias em que $Y_{(n)}$ é o n-ésimo maior número dentre $\left(X_1,...,X_{i-1},X_{i+1},...X_N\right)$. Vamos enunciar alguns resultados que serão importantes para o nosso estudo sobre Leilões Híbridos. A prova desses resultados pode ser encontrada em Menezes e Monteiro (2005). Dado que a função densidade do vetor $\left(X_1,...,X_N\right)$ é $f : D \to \mathbb{R}$, $f\left(x_1,...,x_n\right)$, em que $D = \left[0,\bar{v}\right]^N$ o conjunto dos possíveis tipos dos N jogadores, temos:

Lema 1. *A densidade de* $\left(X_i,Y_{(1)},Y_{(2)},...Y_{(N-1)}\right)$ *é*

$$\bar{f}\left(x_i,y\right) = \begin{cases} (n-1)!\,f\left(x_i,y_{(1)}...,y_{(N-1)}\right) & \text{se } y_{(1)} \geq ... \geq y_{(N-1)} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Dem. Suprimida.

Vamos supor que $X_1,...,X_n$ são n variáveis independente, cada uma com função distribuição acumulada $F(x)$. Denote por $F_r\left(x\right)$ a distribuição acumulada da r-ésima estatística de ordem. Então temos que:

$$\begin{aligned} F_r\left(x\right) &= \Pr\left\{X_{(r)} \leq x\right\} \\ &= \Pr\left\{\text{ao menos } r \text{ das } X_i \text{ são menores ou iguais a } x\right\} \\ &= \sum_{i=n-r}^{n} \binom{n}{i} F^i\left(x\right)\left[1-F\left(x\right)\right]^{n-i} \end{aligned}$$

Como o termo no somatório é uma probabilidade binomial de exatamente *i* de $X_1,...,X_n$ ser menores ou iguais a *x*. Escrevemos a equação acima como:

$$F_r(x) = E_{F(x)}(n, n-r)$$

Alternativamente, pela relação existente entre a soma de binomiais e funções beta incompletas, nós temos que:

$$F_r(x) = I_{F(x)}(r, n-r+1)$$

em que

$$B(a,b) = \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}\, dt \quad a > 0, b > o$$

$$I_p(a,b) = \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}\, dt \Big/ B(a,b)$$

No estudo de leilões com valorações correlacionadas, é muito comum fazer a hipótese mais forte de que, além de serem correlacionadas, elas são afiliadas. Afiliação é um conceito estatístico que dá uma idéia de correlação não negativa entre as variáveis[8]. Precisamente, temos que:

Def. 1. *As variáveis aleatórias* $(X_1,...,X_N)$ *são afiliadas se a densidade conjunta delas* $f(x_1,...,x_n)$ *possuem a propriedade de razão de verossimilhança monótona, a saber, para todo* $x, y \in D$ *:*

$$f(x \vee y) f(x \wedge y) \geq f(x) f(y)$$

Com essa definição em mãos, podemos enunciar o seguinte resultado:

[8] Ver se, afiliação implica em correlação positiva/

Lema 2. *Se a distribuição f for afiliada em **X** e for simétrica, então as variáveis aleatórias* $(X_i, Y_{(1)}, Y_{(2)}, ...Y_{(N-1)})$ *também são afiliadas.*

Dem. Suprimida.

O próximo resultado diz que se as variáveis são aleatórias, então a esperança condicional é crescente, ou seja:

Lema 3. *Suponha que* $(X_1, ..., X_N)$ *é um vetor aleatório com densidade afiliada. Então para qualquer função crescente* $u : X \to \mathbb{R}_+$*, nós temos que:*

$$E\left[u(X) \middle| X_{K+1} = x_{K+1}, ..., X_N = x_n\right]$$

é crescente em $(x_{K+1}, ..., x_N)$*.*

De posse desses resultados, podemos avançar no estudo sobre leilões em que os participantes possuem valorações correlacionadas. A literatura já tratou bem do caso de leilão unitário. A primeira pequena extensão que farei é considerar um leilão selado de primeiro preço de M objetos em que cada participante está restrito a adquirir apenas um objeto.

Vamos assumir que cada agente possui uma informação privada sobre o verdadeiro valor do objeto. A informação privada do participante *i* é resumida pela realização de uma variável aleatória $X_i \sim [0, \bar{v}]$, chamada de sinal de *i.* Assume-se que a valoração do agente *i* pode ser expressa por uma função comum a todos os participantes:

$$V_i = v(X_1, ..., X_N)$$

não decrescente em todas as variáveis e duas vezes continuamente diferenciáveis. Além disso, assumimos que ela é estritamente crescente em X_i. Defina a seguinte função:

$$v_m(x,y) = E\left[V_i \middle| X_i = x, Y_{(m)} = y\right]$$

ou seja, é a esperança da valoração do agente *i* por um objeto dado que o sinal que ele recebeu é *x* e o m-ésimo maior sinal dos outros participantes foi *y*.

7.1.2. Equilíbrio no leilão selado.

Vamos agora caracterizar um equilíbrio desse leilão. A estratégia é a mesma que a utilizada para encontrar equilíbrios no leilão de primeiro preço que aparece na maioria dos livros didáticos sobre o assunto. Partimos da hipótese de que os participantes possuem uma função lance $b(\cdot)$ estritamente crescente e diferenciável cujo domínio é um intervalo $[u,v]$. Se o participante *i* der um lance $t<u$ ele nunca irá ganhar um dos objetos. Se $t>v$ então ele sempre irá ganhar, mas pagará mais do que o necessário. Podemos supor então que $t\in[u,v]$. Vamos então procurar $s\in[0,\bar{v}]$ que maximize o valor esperado do participante *i* dado por:

$$\begin{aligned}
h(s) &= E\left[\left(V_i - b(s)\right) I_{b(s)\geq b(Y_m)} \middle| X_i = x\right] \\
&= E\left[\left(V_i - b(s)\right) I_{s\geq Y_m} \middle| X = x\right] \\
&= E\left[\left(v_m(x,y) - b(s)\right) I_{b(s)\geq b(Y_m)} \middle| X_i = x\right] \\
&= \int_0^s \left(v_m(x,y) - b(s)\right) f_{Y_m|X}(y|x)\,dy \\
&= \int_0^s v_m(x,y) f_{Y_m|X}(y|x)\,dy - b(s) F_{Y_m|X}(s|x)
\end{aligned}$$

Em que $f_{Y_m|X}(y|x)$ é a densidade do m-ésimo maior número entre $(X_1,...,X_{i-1},X_{i+1},...X_N)$ condicional a valoração do participante *i* ser $X_i = x$ e $F_{Y_m|X}(y|x)$ é a sua distribuição. Diferenciando a equação acima, obtemos:

$$h'(s) = v_m(x,s) f_{Y_m|X}(s|x) - b'(s) F_{Y_m|X}(s|x) - b(s) f_{Y_m|X}(s|x)$$

Rearranjando os termos e para que $s = x$ ser ótimo temos:

(1.3~~1~~) $$b'(x) = \left(v_m(x,x) - b(x)\right)\frac{f_{Y_m|X}(x|x)}{F_{Y_m|X}(x|x)}$$

Field Code Changed

Utilizando o método do fator integrante e a condição inicial $b(0) = v(0,0) = 0$, a solução dessa equação diferencial é dada por:

(1.4~~2~~) $$b_m(x) = v_m(x,x) - \int_0^x \exp\left[-\int_t^x \gamma_m(u)\,du\right]\left(\frac{d}{dt}\left(v(t,t)\right)\right)dt$$

Field Code Changed

em que $\gamma_m(x) = \dfrac{f_{Y_{(m)}|X}(x|x)}{F_{Y_{(m)}|X}(x|x)}$.

Podemos enunciar o seguinte resultado:

Proposição 1. *Todos os participantes dando lances de acordo com a função* $b_m(.)$ *é equilíbrio do leilão de m unidades com cada participante restrito a ganhar apenas uma unidade.*

Dem. Temos que $b_m(.)$ é diferenciável. Podemos ver que ela é estritamente crescente pela sua diferencial. Se cada participante jogar $b_m(.)$, a utilidade esperada do participante *i* quando ele joga $b_m(.)$ será dada por:

$$h(s) = \int_0^s v_m(x,y) f_{Y_m|X}(y|x)\,dy - b_m(s)\,F_{Y_m|X}(s|x)$$

Temos então que:

$$h'(s)=\left(v_m(x,s)-b_m(s)\right)f_{Y_m|X}(s|x)-b'(s)F_{Y_m|X}(s|x)$$

Utilizando (1.1) na primeira parte da equação acima obtemos que:

$$\begin{aligned}\left(v_m(x,s)-b_m(s)\right)f_{Y_m|X}(s|x)&=\left(v_m(x,s)-v_m(s,s)\right)f_{Y_m|X}(s|x)+\left(v_m(s,s)-b_m(s)\right)f_{Y_m|X}(s|x)\\&=\left(v_m(x,s)-v_m(s,s)\right)f_{Y_m|X}(s|x)+b'(s)\frac{f_{Y_m|X}(s|x)}{\gamma(s)}\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}h'(s)&=\left(v_m(x,s)-v_m(s,s)\right)f_{Y_m|X}(s|x)+b'(s)\left(\frac{f_{Y_m|X}(s|x)}{\gamma(s)}-F_{Y_m|X}(s|x)\right)\\&=\left(v_m(x,s)-v_m(s,s)\right)f_{Y_m|X}(s|x)+b'(s)f_{Y_m|X}(s|x)\left(\frac{1}{\gamma(s)}-\frac{1}{\gamma(s,x)}\right)\end{aligned}$$

Pelos Lemas 3 e 2 temos que, se $s>x$, então $v_m(x,s)-v_m(s,s)<0$ e $f_{Y_m|X}(s|x)/F_{Y_m|X}(s|x)-f_{Y_m|X}(s|s)/F_{Y_m|X}(s|s)\leq 0$. Analogamente se $s<x$, $h'(s)>0$. Como $h(.)$ é contínua, temos que $s=x$ é o ponto máximo dessa função. Assim sendo, a estratégia $b_m(.)$ é um equilíbrio simétrico desse leilão. ■

É simples encontramos o pagamento esperado do participante *i*. Ele é simplesmente o seu lance multiplicado pela probabilidade da sua valoração sobre o objeto ser no mínimo o m-ésimo maior. Sendo assim, o seu pagamento esperado será:

$$\begin{aligned}P^{FP}&=b_m(\cdot)F_{Y_{(m)}|X}(x|x)\\&=\left(v_m(x,x)-\int_0^x\exp\left[-\int_t^x\gamma_m(u)\,du\right]\left(\frac{d}{dt}\left(v_m(t,t)\right)\right)dt\right)F_{Y_{(m)}|X}(x|x)\end{aligned}$$

A receita esperada do leiloeiro é exatamente n vezes o pagamento esperado do participante *i*: $nE\left[P^{FP}\right]$.

7.1.3. Equilíbrio no Leilão Híbrido.

Vamos agora analisar as propriedades do leilão híbrido. Como dito anteriormente, esse leilão é dividido em duas fases. A primeira é ascendente, onde o leiloeiro começa aumentando o preço continuamente até que k participantes se retirem do leilão. O restante dos participantes $(N-k)$, competem em um leilão selado de primeiro preço.

Definimos $v_m\left(x,y\,|\,x_{N-k-1},\ldots,x_{N-1}\right)=E\left[V_i\,|\,X_i=x,Y_m=y,Y_{N-k}=x_{N-k-1},\ldots Y_{N-1}=x_{N-1}\right]$, isto é, a esperança da valoração que o participante *i* possui dado que o sinal que ele recebeu foi $X_i=x$, a m-ésima estatística de ordem é $Y_m=y$ e a (n-i)-ésima estatística de ordem é $X_{N-i}=x_{N-i}$.

Suponha um leilão híbrido de *m* unidades indivisíveis e que cada consumidor esteja restrito a ganhar apenas uma unidade. Se k participantes abandonaram o leilão na primeira fase, então o equilíbrio desse leilão na segunda fase será dado por:

(1.~~3~~5)

$$b_{m,k}(x)=v_m\left(x,y\,|\,x_{N-k-1},\ldots,x_{N-1}\right)-\int_0^x \exp\left[-\int_t^x \gamma_m(u)\,du\right]\left(\frac{d}{dt}\left(v_m\left(t,t\,|\,x_{N-k-1},\ldots,x_{N-1}\right)\right)\right)dt$$

Por conseguinte, a receita esperada desse leilão será dada pelo pagamento esperado dos $N-k$ participantes desse leilão:

$$\begin{aligned}P^H&=(n-k)\,b_{m,k}(x)\,F_{Y_{(m)}|X}\left(x\,|\,x,x_{N-k-1},\ldots,x_{N-1}\right)\\&=(n-k)\left[v_m\left(x,y\,|\,x_{N-k-1},\ldots,x_{N-1}\right)-\int_0^x \exp\left[-\int_t^x \gamma_m(u)\,du\right]\left(\frac{d}{dt}\left(v_m\left(t,t\,|\,x_{N-k-1},\ldots,x_{N-1}\right)\right)\right)dt\right]F_{Y_{(m)}|X}\left(x\,|\,x,x_{N-k-1},\ldots,x_{N-1}\right)\end{aligned}$$

Não é possível ranquear de maneira geral esses dois tipos de leilão em termos de geração de receitas. A idéia intuitiva que temos é que quanto maior for o “winner´s curse”, o leilão híbrido tenderá a ser melhor do que o leilão de primeiro preço. Contudo, a competição na segunda fase de um leilão híbrido é menor que a de um leilão de primeiro preço. Portanto, creio que o ranking dependerá de que caso específico estaremos analisando.

7.1.4. Multiunidade.

Field Code Changed

O caso acima nos ajuda a caracterizar um equilíbrio de um leilão de uma unidade de um bem divisível em que os participantes estão restritos a comprar uma determinada quantidade λ desse bem. Novamente, defina $Y_{(k)}$ a estatística de ordem inversa das valorações dos participantes com exceção do produtor *i*, ou seja, $Y_{(1)} > Y_{(2)} > ... > Y_{(N-1)}$. Além disso, denote por *m* o maior inteiro positivo tal que $m\lambda < 1$. Por hora, vamos assumir que 1 seja divisível por λ, de forma a que $m\lambda = 1$. Dessa forma, todos os ganhadores desse leilão recebem a mesma quantidade λ.

Assuma que a valoração pelo objeto é constante e que é dada da mesma maneira que no caso anterior. O que queremos mostrar é que existe um equilíbrio para esse leilão similar ao equilíbrio do leilão multiunidade estudado na seção anterior. O fato da valoração pelo bem é constante e que o lance por uma unidade marginal não altera o preço pago pelo participante por outras unidades marginais (dado que ele as receba no leilão) implica em um equilíbrio com o mesmo formato do encontrado acima.

Proposição 2. *Todos os participantes dando lances uniformes para as λ unidades de acordo com:*

$$b_m(x) = v(x,x) - \int_0^x \exp\left[-\int_t^x \gamma_m(u)\,du\right]\left(\frac{d}{dt}\big(v(t,t)\big)\right)dt$$

constitui um equilíbrio de Nash Bayesiano desse leilão.

Dem. Partimos da hipótese de que os participantes possuem uma função lance $b(\cdot)$ estritamente crescente e diferenciável e constante para todas as λ unidades, vamos analisar o comportamento de um participante *i* qualquer.

Vamos estender um pouco a análise permitindo que $m\lambda < 1$. Para encontrarmos o equilíbrio do leilão nesse caso, procedemos da mesma forma que nos casos anteriores. Vamos ver que precisamos de uma hipótese um pouco mais forte que afiliação para chegarmos ao equilíbrio.

Para chegar ao equilíbrio, utilizaremos a mesma estratégia que nos resultados anteriores. Partimos da hipótese de que todos os participantes ofertam lances constantes de acordo com uma função $b(\cdot)$ crescente e diferenciável para todas as unidades.

Se isso for verdade, o participante *i* receberá uma quantidade λ do bem se a sua valoração x for maior que $Y_{(m)}$, o que ocorre com probabilidade $F_{Y_{(m)}|X}(x|x)$ e ganhará uma quantidade $1-m\lambda$ se $Y_{(m+1)} < x < Y_{(m)}$, o que ocorre com probabilidade $F_{Y_{(m+1)}|X}(x|x) - F_{Y_{(m)}|X}(x|x)$. Em que $F_{Y_{(m)}|X}(s|x)$ é a distribuição condicional da m-ésima estatística de ordem condicional a valoração do participante *i* ser *x*.

Proposição 3. Todos os participantes dando lances uniformes para as λ unidades de acordo com:

$$b(x) = \frac{\int_0^x \frac{\left\{\lambda v_m(w,w) f_{Y_{(m)}|X}(w|w) + (1-m\lambda) v_{m+1}(w,w)\left[f_{Y_{(m+1)}|X}(w|w) - f_{Y_{(m)}|X}(w|w)\right]\right\}}{\left[\lambda F_{Y_{(m)}|X}(w|w) + (1-m\lambda)\left[F_{Y_{(m+1)}|X}(w|x) - F_{Y_{(m)}|X}(w|x)\right]\right]}\left(\exp\int_w^v -\hat{\gamma}(u,u)du\right)dw}{\exp\int_x^v -\hat{\gamma}(u,u)du}$$

constitui um equilíbrio de Nash Bayesiano desse leilão.

Dem. Se todos os participantes escolherem $b(\cdot)$ como estratégia, o payoff esperado do participante *i* será:

$$\begin{aligned} h(s) &= E\left[\lambda\left(v_m(x,y) - b(s)\right) I_{s>Y_{(m)}} \middle| X = x\right] + E\left[(1-m\lambda)\left(v_{m+1}(x,y) - b(s)\right) I_{Y_{(m+1)}<s<Y_{(m)}} \middle| X = x\right] \\ &= \lambda\int_0^x \left(v_m(x,y) - b(s)\right) f_{Y_{(m)}|X}(y|x)dy + \\ &\quad + (1-m\lambda)\int_0^x \left(v_{m+1}(x,y) - b(s)\right)\left[f_{Y_{(m+1)}|X}(y|x) - f_{Y_{(m)}|X}(s|x)\right]dy \end{aligned}$$

A expressão acima pode ser reescrita como:

$$h(s)=\lambda\int_0^s v_m(x,y)f_{Y_{(m)}|X}(y|x)dy-\lambda b(s)F_{Y_{(m)}|X}(s|x)+$$
$$+(1-m\lambda)\int_0^s v_{m+1}(x,y)\left[f_{Y_{(m+1)}|X}(y|x)-f_{Y_{(m)}|X}(y|x)\right]dy-$$
$$-(1-m\lambda)b(s)\left[F_{Y_{(m+1)}|X}(s|x)-F_{Y_{(m)}|X}(s|x)\right]$$

Diferenciando e impondo a condição de equilíbrio, obtemos:

(1.~~6~~4)

$$h'(s)=\lambda v_m(x,s)f_{Y_{(m)}|X}(s|x)-\lambda b'(s)F_{Y_{(m)}|X}(s|x)-\lambda b(s)f_{Y_{(m)}|X}(s|x)$$
$$+(1-m\lambda)v_{m+1}(x,s)\left[f_{Y_{(m+1)}|X}(s|x)-f_{Y_{(m)}|X}(s|x)\right]-$$
$$-(1-m\lambda)b'(s)\left[F_{Y_{(m+1)}|X}(s|x)-F_{Y_{(m)}|X}(s|x)\right]-$$
$$-(1-m\lambda)b(s)\left[f_{Y_{(m+1)}|X}(s|x)-f_{Y_{(m)}|X}(s|x)\right]$$

Field Code Changed

Rearranjando os termos, e impondo a condição de otimalidade em *x*, chegamos em:

$$b'(x)\left[\lambda F_{Y_{(m)}|X}(x|x)+(1-m\lambda)\left[F_{Y_{(m+1)}|X}(s|x)-F_{Y_{(m)}|X}(s|x)\right]\right]$$
$$=\lambda\left(v_m(x,x)-b(x)\right)f_{Y_{(m)}|X}(x|x)+$$
$$+(1-m\lambda)\left(v_{m+1}(x,x)-b(x)\right)\left[f_{Y_{(m+1)}|X}(x|x)-f_{Y_{(m)}|X}(x|x)\right]$$

O que implica em:

(1.7~~5~~)

Field Code Changed

$$b'(x)=\frac{1}{\left[\lambda F_{Y_{(m)}|X}(x|x)+(1-m\lambda)\left[F_{Y_{(m+1)}|X}(x|x)-F_{Y_{(m)}|X}(x|x)\right]\right]}\left\{\lambda\left(v_m(x,x)-b(x)\right)f_{Y_{(m)}|X}(x|x)+\right.$$
$$\left.+(1-m\lambda)\left(v_{m+1}(x,x)-b(x)\right)\left[f_{Y_{(m+1)}|X}(x|x)-f_{Y_{(m)}|X}(x|x)\right]\right\}$$

A equação diferencial acima é parecida com a encontrada nos resultados anteriores. Para resolvê-la, devemos encontrar um fator integrante. Definindo:

$$\hat{\gamma}(x,s)=\frac{\lambda f_{Y_{(m)}|X}(s|x)+(1-m\lambda)\left[f_{Y_{(m+1)}|X}(s|x)-f_{Y_{(m)}|X}(s|x)\right]}{\lambda F_{Y_{(m)}|X}(s|x)+(1-m\lambda)\left[F_{Y_{(m+1)}|X}(s|x)-F_{Y_{(m)}|X}(s|x)\right]}$$

A solução dessa equação diferencial é dada por:

$$b(x)=\frac{\int_0^x \frac{\left\{\lambda v_m(w,w) f_{Y_{(m)}|X}(w|w)+(1-m\lambda)v_{m+1}(w,w)\left[f_{Y_{(m+1)}|X}(w|w)-f_{Y_{(m)}|X}(w|w)\right]\right\}}{\left[\lambda F_{Y_{(m)}|X}(w|w)+(1-m\lambda)\left[F_{Y_{(m+1)}|X}(w|x)-F_{Y_{(m)}|X}(w|x)\right]\right]}\left(\exp\int_w^v -\hat{\gamma}(u,u)du\right)dw}{\exp\int_x^v -\hat{\gamma}(u,u)du}$$

Apesar de essa expressão respeitar as condições de primeira ordem, não foi possível mostrar que $s=x$ é um ponto ótimo <u>global</u> mesmo com a hipótese de afiliação das valorações dos indivíduos.

8. Caso Brasileiro[9].

No Brasil, as distribuidoras de energia têm a obrigação de contratar a integralidade de sua demanda prevista com até 5 anos de antecedência, através de leilões realizados no âmbito da CCEE (Câmara de Comercialização de Energia Elétrica), definindo assim, a quantidade de energia que irá ser negociada nos leilões.

Essa regra implica em uma curva de demanda de energia perfeitamente inelástica. Os agentes de geração vencedores formalizam contratos bilaterais de venda de energia com todos os agentes de distribuição participantes, com prazos de duração que podem variar

[9] Para uma análise mais completa do caso brasieiro, ver Dutra e Menezes(2005)

de 5 a 15 anos (no caso de “energia velha”, ou seja, proveniente de usinas existentes) ou de 15 a 30 anos (no caso de “energia nova”, ou seja, proveniente de novos empreendimentos).

Existem dois tipos de leilão de energia no Brasil. O primeiro, que é destinado a negociação de energia com empreendimentos já existentes, segue as regras de um leilão híbrido com algumas peculiaridades que serão discutidas a frente. Para novos empreendimentos, os leilões seguem regras de leilão descendentes, portanto, possuem apenas uma fase.

O leilão de geração brasileiro para empreendimentos existentes é dividido em duas partes. Na primeira, ocorre um leilão simultâneo decrescente, que classifica os participantes com as menores ofertas de preços para a segunda fase. Nesta, há um leilão estático discriminatório, em que os ganhadores são os que oferecem os menores lances até que se atinja a quantidade que as distribuidoras demandam.

O objeto a ser leiloado é energia que será consumido no país em um período de três anos a partir de uma data posterior. Antes do início do leilão as distribuidoras de energia comunicam ao órgão regulador a sua demanda para cada período futuro. A Demanda Total de energia a ser leiloada é definida como a soma das demandas de cada produto a ser leiloado[10]. Ela permanece secreta durante todo o processo. A Demanda de Referência é a demanda total multiplicada por um fator maior que um e é utilizada para determinar a transição da primeira para a segunda fase do leilão. Esta é determinada pela demanda total multiplicada por um fator maior que um.

Como dito anteriormente, a primeira fase constitui-se em um leilão simultâneo decrescente. Inicialmente, a ANEEL estipula um preço a ser pago por MW para cada produto a ser leiloado, e este irá decrescendo até que a oferta total seja maior que a demanda de referência, ou seja, a soma das ofertas de cada produto for menor que a demanda de referência. Neste momento encerra-se a primeira fase do leilão.

---

[10] O produto aqui é a oferta de energia com início em uma determinada data.

Importante mencionarmos duas regras importantes dessa primeira fase. Primeiramente, os participantes devem obedecer a regra de monotonicidade dos lances. É estipulado que a oferta total dos lances não aumente quando há redução dos preços durante toda a primeira fase. Esta regra foi proposta por Milgrom pela primeira vez no leilão de espectros de radiofreqüência dos EUA. Ela previne que os participantes esperem até um momento mais avançado do leilão para começar a dar lances seriamente.

Em segundo lugar, o leilão diferencia os produtos de acordo com seu status. Em um determinado período do leilão, um produto é chamado de Aberto caso a oferta pelo seu provimento seja maior que a sua demanda. Analogamente, um produto é dito Fechado, caso a sua oferta seja menor que a sua demanda. Já foi dito que a primeira fase termina quando a demanda de referência for maior que a oferta total. Mas não mencionamos nada sobre a dinâmica dos preços durante a primeira fase do leilão. Como veremos a seguir, esta depende tanto da oferta e demanda total, bem como as ofertas e demandas de cada produto.

Inicialmente, é estipulado um preço de reserva para cada produto. As geradoras comunicam a quantidade de energia que estão dispostas a ofertar dados esses preços. Se a oferta total for menor que a demanda de referência, a primeira fase é terminada. Caso contrário, temos que analisar produto por produto e aferir se a demanda individual é maior que a oferta individual, ou seja, se o produto está Aberto ou Fechado. A primeira fase segue com os preços dos produtos abertos diminuindo enquanto os preços dos fechados permanecem iguais. Espera-se que a oferta pelos produtos fechados aumente já que seus preços relativos serão menores. Esse processo continua até que a oferta total fique maior que a demanda de referência. Quando isso acontece, passa-se para a segunda fase do leilão.

Na segunda fase, ocorre um leilão selado discriminatório, ou seja, os participantes recebem os preços dos seus lances. Nessa fase, cada participante dá um lance dizendo o quanto está disposto a ofertar de cada produto a um determinado preço. Esses lances não podem exceder os preços dos produtos ao término da primeira fase bem como devem respeitar a regra de monotonicidade citada anteriormente. O leiloeiro, tomando conhecimento dos lances, constrói a curva de oferta e determina o preço de equilíbrio do leilão, ou seja, aquele em que a oferta é igual à demanda. Todos os participantes que deram lances abaixo desse preço de equilíbrio garantem o direito de ofertar o produto recebendo por isso o equivalente ao seu lance.

Novamente, existe uma regra peculiar do leilão brasileiro que possui potencial caráter distorcivo. Ao término da primeira fase, é possível que alguns produtos encontrem-se Fechados. As regras do leilão estipulam que os participantes que, ao término da primeira fase, estão na briga para ofertar produtos que se encontram abertos, possuem direito de dar um lance para esses produtos abertos e um lance para os produtos que estão fechados de modo que se não obter êxito em seu lance para o primeiro, pode disputar a oferta do produto fechado. Enquanto as quantidades ofertadas em produtos fechados só poderão ser utilizadas na segunda fase para este produto fechado.

Há, em parte, uma quebra da regra de monotonicidade. O participante não pode ofertar uma quantidade maior para os produtos abertos do que a sua oferta total ao término da primeira fase, mas pode ofertar essa quantidade tanto nos produtos abertos como nos fechados.

Para entendermos melhor esta regra, daremos um exemplo. Suponha que estejam sendo leiloados dois produtos: A e F. Ao término da primeira fase, o produto A está aberto e o B está fechado. Suponha que dois participantes (João e Maria) terminaram a primeira fase ofertando uma quantidade a_J e a_M para o produto A, respectivamente, e outro participante (Osvaldo) terminou ofertando uma quantidade b_O para B. Na segunda fase, as quantidades que João e Maria estão restritos a dar em seus lances é $q_J^A \leq a_J$ e $q_M^A \leq a_M$ para o produto A. Como A era aberto e B fechado, eles possuem a opção de dar um lance também restrito as quantidades $q_j^B \leq a_j$ e $q_M^B \leq a_M$ para o produto B. Contudo a quantidade válida dos lances no produto B será determinada apenas após o resultado do leilão do produto A. Por exemplo, se João receber uma quantidade $x_J^A \leq q_J^A$ do produto A, então a quantidade máxima que ele poderá ganhar do produto B será $x_J^B \leq q_J^A - x_J^A$. Ou seja, a quantidade ofertada para o produto fechado é aquela que sobrou depois do leilão do produto aberto.

Todavia, Osvaldo não possui o direito a dar lances para o produto A, caso ele perca no leilão do produto B. Isso ocorre devido ao produto B estar fechado na primeira fase. Essa regra pode gerar distorções no comportamento dos agentes na primeira fase, pois é mais vantajoso terminar a primeira fase ofertando produtos abertos do que fechados (coeteris paribus). Além disso, cria-se uma distorção também na segunda fase do leilão, pois os participantes que tem direito a dar lances em produtos abertos sabem que, se perderem o leilão desses produtos, ainda podem competir pelos produtos que estavam fechados.

Outro ponto fraco do modelo brasileiro foi levantado por Dutra e Menezes (2005). Há casos em que alguns participantes, mesmo dispostos a aceitar os preços menores que os preços vigentes no início do segundo estágio, não podem fazê-lo devido as regras do leilão.

Para exemplificar essa falha, vamos supor que ao término do primeiro estágio, existam dois produtos fechados (A e B) e um aberto (C). A ineficiência pode ocorrer quando o excesso de oferta do produto C é canalizada para o produto A e toma o lugar de lances preexistentes para o produto A. Esses lances que perderam o lugar no produto A são simplesmente eliminados do processo e não podem competir pelo produto B. Isso ocorre, pois os participantes não podem dar lances adicionais para produtos fechado. Nesse caso, poderiam existir participantes que perderam certa quantidade do produto A na segunda fase dispostos a dar lances pelo produto B e suprir a carência de demanda, mas não podem fazê-lo devido às regras.

Binmore et all (2004) é uma nota em que os autores tecem alguns comentários sobre o leilão de energia brasileiro descrito acima. Primeiramente, falam que a segunda fase é um leilão discriminatório para o qual seria muito difícil prever o resultado de equilíbrio. Essas dificuldades são devidas às regras que possibilitam o movimento entre os lotes dos produtos abertos para os fechados (mas não dos fechados para os abertos). Em suas próprias palavras, os autores exaltam essa dificuldade:

“(...)Given that bidders will have little information upon which to base their calculations in the Second Phase, determining their optimal biding strategies will be a formidable, and probably unrealizable, task.”

Além disso, argumentam que a segunda fase do leilão parece distorcer seriamente os incentivos dos lances na primeira fase, pois fazem parecer que é mais vantajoso alocar mais quantidade em produtos abertos do que em fechados.

9. Conclusão

O problema de estabelecer regras para leiloar um bem possui especial dificuldade quando este é divisível. Vimos que algumas intuições provindas de resultados teóricos do caso de leilão de um bem não divisível não procedem para o caso multiunitário. Em especial, o leilão uniforme não apresenta algumas características positivas que inicialmente pensava-se que fosse verdade.

A analogia entre esse leilão e o leilão de segundo preço de um bem indivisível mostrou-se não ser verdadeira, pois a possibilidade de influência do lance no preço final do leilão uniforme não é presente no leilão de segundo preço ordinário. Isso implica em incentivos aos participantes a não revelarem os seus verdadeiros custos em seus lances. Incentivos esses que não aparecem no leilão de segundo preço. Vimos que a maneira correta de se generalizar é através do leilão de Vickrey multiunitário, em que os participantes recebem pelo custo de oportunidade de seus lances. Mostramos que no caso de custos privados, lances sinceros formam um equilíbrio desse leilão. Contudo, apesar dessa característica desejável, pouco se viu esse tipo de leilão ser implementado na prática.

Outra maneira de se leiloar um bem divisível é através do leilão discriminatório. Nele, cada participante paga por uma determinada quantidade exatamente o que ofereceu no lance. Vimos que esse leilão pode apresentar equilíbrios eficientes em algumas determinadas circunstâncias. Contudo, as hipóteses para que isso ocorra são bastante fortes (simetria entre as capacidades e etc.).

Muitas vezes, o custo da produção pode apresentar um componente comum a todos os potenciais ofertantes de energia. Se cada participante possuir uma informação privada sobre este componente é aconselhável que se faça um leilão dinâmico. Nesses tipos de leilão as informação privadas sobre os custos comuns dos participantes são reveladas à medida que os lances vão sendo feitos. Dessa forma, os participantes podem dar lances mais agressivos, pois a incerteza sobre os verdadeiros custos vai sendo reduzida ao longo do leilão. Uma condição necessária para que lances sinceros sejam estratégias dominantes em um leilão descendente é que o custo marginal seja crescente na quantidade.

Estudamos também uma forma de mesclar os formatos dinâmico e estático através de um leilão híbrido. Em alguns casos específicos, o leilão híbrido pode ser superior a esses dois tipos no critério de geração de receitas. O governo brasileiro institui um leilão desse tipo para o mercado de geração de energia. Contudo, regras complicadas e não muito claras provavelmente impossibilita um funcionamento pleno desse tipo de leilão.

Uma mensagem importante que podemos aprender com esse estudo sobre leilões é que pequenas regras são capazes de alterar totalmente o resultado de um leilão. O leilão brasileiro, ao impor várias pequenas regras não ortodoxas, pode estar alterando significativamente a eficiência de um leilão híbrido. Portanto, o melhor (mais seguro) a se fazer seria simplificar o funcionamento do leilão de geração de energia brasileiro.

10. Bibliografia

Ausubel, Lawrence (2004) "An Efficient Ascending-Bid Auction for Multiple Objects". American Economic Review **94**: 1452-1475.

Ausubel, Lawrence e Peter Cramton. (2002) Demand Reduction and Inefficiency in Multi-Unit Auctions", University of Maryland Working Paper 96-07 , Revisão de Julho 2002.

Ausubel, Lawrence e Peter Cramton. (2004a) "Auctioning Many Divisible Goods". *Journal of the European Economic Association* **2**: 480-493.

Ausubel, Lawrence e Peter Cramton. (2004b) "Vickrey Auctions with Reserve Pricing". *Economic Theory* **23**: 493-493.

Back, Kerry e Jaime Zender. (1993) "Auctions of Divisible Goods: On the Rationale for Treasury Experiment," The Review of Financial Studies, **6**:733-764.

Back, Kerry e Jaime Zender. (2001) "Auctions of Divisible Goods with Endogenous Supply" *Economics Letters* **73**:29-34.

Binmore, Ken N-H von der Fehr e David Harbord (2004) "Comments on the Proposed Electricity Contract Auctions in Brazil"

Dutra, Joisa a Flavio Menezes (2005) "Electricity Auctions in Brazil," Working Paper, http://ssrn.com/abstract=790924.

Levin, Dan e Lixin Ye (2008) "Hybrid Auctions Revisited," Economics Letters **99**: 591-594

Fabra, Natalia, N-H von der Fehr e David Harbord (2002) "Modeling Electricity Auctions," *The Electricity Journal*, **15**:7, 72-81

Fabra, Natalia, N-H von der Fehr e David Harbord (2006) "Designing Electricity Auctions", *The RAND Journal of Economics,* **37**:23-46.

Klemperer, Paul. (2002a) "What Really Matters in Auction," Journal of Economic Perspectives **16**:169-189.

Klemperer, Paul. (2002b) "How (not) to Run Auctions: The European 3G Telecom Auctions", *European Economic Review,* **46**: 829-845.

Kremer, Ilan e Kjell Nyborg (2004a) "Underpricing and Market Power in Uniform Price Auctions," *The Review of Financial Studies,* **17**: 849-877.

Kremer, Ilan e Kjell Nyborg (2004b) "Divisible-good auctions: the Role of Allocation Rules," *The RAND Journal of Economics* **35**:147-159.

Friedman, Milton (1960), *A Program for Monetary Stability* New York, NY: Fordham University Press.

McAfee, Preston e Jonh McMillan (1987) "Auctions and Bidding," *Journal of Economics Literature* **25**:699-738.

Baixar livros de Literatura
Baixar livros de Literatura de Cordel
Baixar livros de Literatura Infantil
Baixar livros de Matemática
Baixar livros de Medicina
Baixar livros de Medicina Veterinária
Baixar livros de Meio Ambiente
Baixar livros de Meteorologia
Baixar Monografias e TCC
Baixar livros Multidisciplinar
Baixar livros de Música
Baixar livros de Psicologia
Baixar livros de Química
Baixar livros de Saúde Coletiva
Baixar livros de Serviço Social
Baixar livros de Sociologia
Baixar livros de Teologia
Baixar livros de Trabalho
Baixar livros de Turismo