

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO

PUC-SP

EMILY CASSIANA SANTOLIN GRECCO

**O USO DE PADRÕES E SEQÜÊNCIAS: UMA PROPOSTA DE
ABORDAGEM PARA INTRODUÇÃO À ALGEBRA PARA ALUNOS
DE SÉTIMO ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL**

MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

São Paulo

2008

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO

PUC/SP

EMILY CASSIANA SANTOLIN GRECCO

**O USO DE PADRÕES E SEQÜÊNCIAS: UMA PROPOSTA DE
ABORDAGEM PARA INTRODUÇÃO À ALGEBRA PARA ALUNOS
DE SÉTIMO ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL**

*Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de **MESTRE PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA**, sob a orientação da Professora Doutora Cíleda de Queiroz e Silva Coutinho.*

São Paulo

2008

Banca Examinadora

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta Dissertação por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

Assinatura: _____ **Local e Data:** _____

*À minha mãe Inês que, mesmo não
mais fisicamente ao meu lado,
sempre foi e será minha fonte de
inspiração. Minha eterna saudade.*

AGRADECIMENTOS

A Deus, pela força, coragem e luz em todos os momentos desta caminhada.

À professora Doutora Cileda de Queiroz e Silva Coutinho pelo exemplo de profissionalismo e competência com que orientou esta pesquisa.

Ao brilhante corpo docente e coordenação do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC/SP, pelo convívio e apoio constante.

Ao meu marido Anderson, com quem tenho o privilégio de compartilhar um verdadeiro amor, pelo incentivo e conforto nos momentos difíceis.

À minha família. Meu pai, herói, a quem devo tudo o que sou hoje. Meus irmãos, Elaine, Elton e Eliane, os quais admiro pela bondade, força e bom humor. E à minha mais recente irmã, Luciana, que me acompanhou durante todo o curso e a quem destino um verdadeiro carinho fraterno. Obrigada por toda a ajuda concreta e espiritual.

À Secretaria da Educação do Estado de São Paulo, por conceder a bolsa de estudos para a realização deste trabalho.

Aos colegas de trabalho da Oficina Pedagógica da Diretoria Regional de Ensino Guarulhos-Sul, pelo auxílio e amizade que demonstraram durante nosso convívio.

Aos alunos, professores e direção do Colégio Júlio Mesquita, em especial à Coordenadora Valéria, pelo apoio e auxílio que sempre ofereceu.

Às minhas “companheiras” Nina, Neca e Dusquinha, pela constante demonstração de carinho e pela agradável companhia ao redigir este trabalho. Meus amores!

Enfim, agradeço a todos aqueles que de forma direta ou indireta contribuíram para a realização e a conclusão deste trabalho.

RESUMO

O objetivo desta pesquisa foi apresentar uma proposta de seqüência didática destinada a alunos de 7º ano do Ensino Fundamental para introdução à Álgebra, em particular a dois de seus componentes: a generalização e a construção de expressões algébricas a partir de padrões e seqüência apresentados sob a forma de problemas. As ferramentas teóricas utilizadas contaram com a organização do pensamento algébrico em níveis, segundo Fiorentini (2004), assim como os níveis de mobilização de um conhecimento, segundo Robert (1998), tanto para a orientação da organização didática das atividades como para análise dos dados observados. Os procedimentos metodológicos adotados foram baseados na teoria da Engenharia Didática, de Michele Artigue (1998, Apud MACHADO, 1999), que a define por dois pontos principais: uma parte experimental baseada nas realizações didáticas em sala de aula, que inclui a formulação, realização, observação e análise de uma seqüência de ensino e uma validação específica, baseada no confronto entre análise a priori e análise a posteriori. Dessa forma, após analisarmos os resultados obtidos no decorrer das sessões que compunham a seqüência didática elaborada, percebemos que houve um aumento gradual dos níveis do pensamento algébrico dos alunos. Assim, classificamos como satisfatórios os resultados apresentados nesta pesquisa.

Palavras-chave: introdução ao pensamento algébrico, seqüência didática, padrões e seqüências.

ABSTRACT

The objective of this research was to present a proposal of didactic sequence destined to the students of the 7th grade for introduction to Algebra, in particular the two of its components: the generalization and the construction of algebraic expressions from presented standards and sequence under the form of problems. The used theoretical tools had counted on the organization of the algebraic thought levels, according to Fiorentini (2004), as well as the levels of mobilization of a knowledge, according to Robert (1998), as much for the orientation of the didactic organization of the activities as for analysis of the observed data. The adopted methodological procedures had been based on the theory of Didactic Engineering, of Michele Artigue (1998, Apud MACHADO, 1999), that defines it for colon main: one has left experimental established in the didactic accomplishments in classroom, that includes the formularization, accomplishment, comment and analysis of a sequence of education and a specific validation, based in the confrontation between a priori analysis and analysis a posteriori. Of this form, after to analyze the results gotten in elapsing of the sessions that composed the elaborated didactic sequence, we perceive that it had a gradual increase of the levels of the algebraic thought the pupils. Thus, to classify as satisfactory the results presented in this research.

Key-Words: introduction to the algebraic thought, didactic sequence, standards and sequences.

LISTA DE FIGURAS

Figura	Descrição	Página
1	Organizações Didáticas (GASCÓN, 2003).....	39
2	Exemplo de atividade de nível técnico (ROBERT, 1998).....	40
3	Exemplo de atividade de nível mobilizável (ROBERT, 1998).....	41
4	Exemplo de atividade de nível disponível (ROBERT, 1998).....	42
5	Possível estratégia (E ₄) para segunda tarefa.....	56
6	Possível estratégia (E ₅) para segunda tarefa.....	56
7	Protocolo I atividade de sondagem.....	61
8	Protocolo II atividade de sondagem.....	62
9	Protocolo III atividade de sondagem.....	63
1ª sessão		
10	Protocolo dos alunos 3 e 4 para atividade 2	80
11	Protocolo parcial dos alunos 3 e 4 para atividade 2	80
12	Protocolo parcial dos alunos 3 e 4 para atividade 2	80
13	Protocolo dos alunos 7 e 8 para atividade 2	81
14	Protocolo parcial dos alunos 7 e 8 para atividade 2	82
15	Protocolo parcial dos alunos 7 e 8 para atividade 2	83
16	Protocolo parcial dos alunos 7 e 8 para atividade 2.....	84
17	Registro I dos alunos 11 e 12 sobre frações equivalentes	87
18	Registro II dos alunos 11 e 12 sobre frações equivalentes	88
2ª sessão		
19	Protocolo do aluno 7 para a atividade 1.....	91
20	Protocolo do aluno 12 para a atividade 1.....	91
21	Protocolo do aluno 12 para atividade 2.....	94

22	Protocolo do aluno 10 para atividade 2.....	94
23	Protocolo do aluno 9 para atividade 2.....	95
24	Protocolo do aluno 8 para atividade 2.....	96
25	Protocolo do aluno 13 para atividade 3.....	98
26	Protocolo do aluno 11 para atividade 3.....	99
27	Protocolos dos alunos 7 e 9 para atividade 3.....	101
28	Protocolos dos alunos 12, 6, 9, 14 e 1 para atividade 3.....	102
29	Protocolos dos alunos 3 e 8 para atividade 3.....	103
30	Protocolo do aluno 4 para atividade 3.....	104
	3ª sessão	
31	Material Concreto fornecido.....	108
32	Protocolos I dos alunos 7 e 8 para atividade 1	110
33	Protocolos II dos alunos 7 e 8 para atividade 1	110
34	Protocolos I dos alunos 3 e 4 para atividade 1	111
35	Protocolos II dos alunos 3 e 4 para atividade 1	112
36	Protocolos dos alunos 9 e 10 para atividade 1	113
37	Protocolos dos alunos 1 e 2, e 11 e 12 para atividade 1	115
38	Protocolos dos alunos 13 e 14, e 5 e 6 para atividade 1.....	116
39	Ilustração da situação proposta na atividade 2.....	118
40	Protocolos dos alunos 1 e 2, 9 e 10, 13 e 14 para atividade 2.....	119
41	Protocolos dos alunos 5 e 6 para atividade 2.....	120
42	Protocolos dos alunos 3 e 4 para atividade 2.....	121
43	Protocolos dos alunos 11 e 12, e 7 e 8 para atividade 2.....	122
	4ª sessão	
44	Protocolo I do aluno	127
45	Protocolo II do aluno 1.....	127
46	Protocolo III do aluno 1.....	128

47	Protocolo I do aluno 2.....	129
48	Protocolo II do aluno 2.....	129
49	Protocolo III do aluno 2.....	130
50	Protocolo I do aluno 3.....	131
51	Protocolo II do aluno 3.....	132
52	Protocolo I do aluno 4.....	133
53	Protocolo II do aluno 4.....	133
54	Protocolo III do aluno 4.....	134
55	Protocolo I do aluno 5.....	134
56	Protocolo II do aluno 5.....	135
57	Protocolo III do aluno 5.....	135
58	Protocolo I do aluno 6.....	136
59	Protocolo II do aluno 6.....	136
60	Protocolo do aluno 7.....	137
61	Protocolo I do aluno 8.....	139
62	Protocolo II do aluno 8.....	139
63	Protocolo I do aluno 9.....	140
64	Protocolo II do aluno 9.....	140
65	Protocolo III do aluno 9.....	140
66	Protocolo IV do aluno 9.....	141
67	Protocolo I do aluno 10.....	142
68	Protocolo II do aluno 10.....	142
69	Protocolo III do aluno 10.....	143
70	Protocolo IV do aluno 10.....	143
71	Protocolo I do aluno 11.....	144
72	Protocolo II do aluno 11.....	145
73	Protocolo do aluno 12.....	146

74	Protocolo do aluno 13.....	147
75	Protocolo I do aluno 14.....	148
76	Protocolo II do aluno 14.....	148
77	Protocolo III do aluno 14.....	149

LISTA DE QUADROS

Quadro	Descrição	Página
1	A proposta de ensino da Álgebra no Ensino Fundamental.....	35
2	Interpretações da Álgebra no Ensino Fundamental segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais.....	37
3	Fases da Engenharia Didática.....	47
4	Quantidade de tentativas das duplas antes de chegar à resposta esperada.....	74
5	Classificação dos níveis de pensamento ao final da segunda sessão.....	106
6	Classificação dos níveis de pensamento ao final da primeira atividade.....	117
7	Classificação dos níveis de pensamento ao final da 3ª sessão.....	124
8	Classificação dos níveis de pensamento ao final da 4ª sessão.....	150
9	Classificação dos níveis de pensamento ao final seqüência didática.....	153

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico	Descrição	Página
1	Número de tentativas para descobrir o “segredo” – primeira sessão.....	79
2	Fases atingidas ao final da atividade 1.....	93
3	Fases atingidas ao final da atividade 2.....	96
4	Fases atingidas ao final da atividade 3.....	104

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	16
CAPÍTULO I: Problemática	18
1.1 Relevância Social e Pessoal.....	19
1.2 Justificativa da Pesquisa.....	24
1.2.1 Alguns estudos realizados sobre o tema.....	24
1.2.2 Pesquisas Correlatas.....	31
1.2.3 A proposta nos PCN.....	32
1.2.4 Organização Didática Adotada.....	37
1.3 Quadro Referencial Teórico.....	39
1.4 Questão de Pesquisa.....	44
1.5 Hipóteses da Pesquisa.....	45
1.6 Procedimentos Metodológicos.....	46
1.6.1 Metodologia.....	46
1.6.2 Participantes da Pesquisa.....	49
1.6.3 Coleta e Análise dos Resultados.....	49
CAPÍTULO II: Aplicação e Análise da Sondagem	51
2.1 A Atividade.....	51
2.2 Elementos de análise <i>a priori</i>	52
2.3 Experimentação.....	58

2.4 Análise <i>a posteriori</i>	59
CAPÍTULO III: A Seqüência Didática: desenvolvimento das sessões e análise dos resultados	66
3.1 Primeira Sessão.....	70
3.1.1 Atividade 1.....	71
3.1.2 Atividade 2.....	76
3.1.3 Considerações sobre a primeira sessão.....	88
3.2 Segunda Sessão.....	90
3.2.1 Atividade 1.....	90
3.2.2 Atividade 2.....	93
3.2.3 Atividade 3.....	97
3.2.4 Considerações sobre a segunda sessão.....	105
3.3 Terceira Sessão.....	107
3.3.1 Atividade 1.....	108
3.3.2 Atividade 2.....	117
3.3.3 Considerações sobre a terceira sessão.....	123
3.4 Quarta Sessão.....	124
3.4.1 Considerações sobre a quarta sessão.....	149
CONSIDERAÇÕES FINAIS	152
REFERÊNCIAS	157
ANEXOS	159

INTRODUÇÃO

É cada vez maior o número de estudos e pesquisas que abordam o ensino e a aprendizagem da Álgebra nos diversos níveis de escolaridade. Acreditamos que, entre outros fatores, o princípio norteador dessa crescente investigação são os conhecidos resultados insatisfatórios apresentados pela maioria dos alunos em questões que abordam tal assunto nos exames como ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio), SAEB (Sistema de Avaliação da Educação Básica), SARESP (Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo) e mesmo nas avaliações usuais de sala de aula.

Acreditamos que o pensamento algébrico é um marco fundamental no desenvolvimento cognitivo do educando, e que o modo como é introduzido é de extrema importância para conhecimentos futuros. Tal pensamento permite que o aluno desenvolva de forma autônoma e segura, diferentes estratégias na resolução de problemas.

Diante dessa situação, escolhemos nosso tema de pesquisa, que apresenta uma proposta de seqüência de atividades para o trabalho com a introdução ao pensamento algébrico. Assim, um dos objetivos dessa pesquisa é verificar se o uso de seqüências aritméticas e padrões apresentados na forma de problema podem trazer algum benefício à construção do pensamento algébrico, em particular a dois de seus componentes: a generalização e a construção e utilização de expressões algébricas.

No **Capítulo I**, apresentamos a problemática de nossa pesquisa, abordando a relevância do tema, a questão investigada e as hipóteses levantadas. Relatamos os procedimentos metodológicos adotados, baseados na teoria da Engenharia Didática, de Michele Artigue (Apud MACHADO, 1999). Como ferramentas teóricas destacamos a abordagem dos três níveis de conhecimento proposto por Robert (1998), que nortearam a elaboração das atividades que

compõem a seqüência didática proposta nesta pesquisa, e as fases do desenvolvimento do pensamento algébrico, proposta por Fiorentini (2004), que nortearam as análises dos dados coletados durante a aplicação da seqüência proposta.

Ainda neste capítulo destacamos alguns estudos e pesquisas relacionadas ao ensino e aprendizagem da Álgebra. Apresentamos também neste capítulo uma análise do conteúdo de Álgebra presente nos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental, como justificativa para nossa pesquisa.

No **Capítulo II** apresentamos uma análise prévia da atividade de sondagem realizada com a turma, destacando possíveis estratégias de resolução e dificuldades durante a realização da atividade. Também neste capítulo, verificamos os resultados apresentados pelos alunos da turma, analisando as dificuldades apresentadas. Com isso, justificamos a elaboração das atividades que compõem a seqüência proposta nesta pesquisa.

No **Capítulo III** descrevemos a experimentação de nossa pesquisa e análises qualitativa e quantitativa dos resultados apresentados pelos alunos. A partir disso, buscaremos responder nossa questão de pesquisa, verificando o desempenho de cada aluno durante a realização da seqüência de atividades proposta, contemplando os três níveis de pensamento, segundo Fiorentini (2004): pré-algébrico, transição e algébrico mais avançado.

Finalmente, trazemos as Considerações Finais onde apresentamos uma discussão dos resultados observados em relação às nossas questões de pesquisa.

CAPÍTULO I

PROBLEMÁTICA

A partir de minhas experiências profissionais, e do relato de outros professores, notamos que uma das maiores dificuldades encontradas no decorrer do processo ensino e de aprendizagem é a introdução ao pensamento algébrico. Tal processo trata de uma transição entre o que outrora era tratado pelo aluno como “concreto” para o então desconhecido “abstrato”.

O pensamento algébrico é um marco fundamental no desenvolvimento cognitivo do educando. Tal pensamento permite-lhe, dentre outras habilidades, que se realizem abstrações e generalizações a partir do pensamento aritmético.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN - (1998):

... o ensino de matemática deve visar ao desenvolvimento do pensamento algébrico, por meio de exploração de situações de aprendizagem que levem o aluno a reconhecer que representações algébricas permitem expressar generalizações sobre propriedades das operações aritméticas, traduzir situações-problema e favorecer possíveis soluções (BRASIL, 1998, p. 64)

Assim, um dos objetivos dessa pesquisa é verificar se a introdução ao pensamento algébrico a partir do uso de seqüências aritméticas e padrões apresentadas na forma de problema, pode trazer algum benefício ao pensamento algébrico, em particular a dois de seus componentes: a generalização e a construção e utilização de expressões algébricas. Ainda de acordo com o PCN:

É interessante também propor situações em que os alunos possam investigar padrões, tanto em sucessões numéricas como em representações geométricas e identificar suas estruturas, construindo a linguagem algébrica para descrevê-los simbolicamente. Esse trabalho favorece a que o aluno construa a

idéia de Álgebra como uma linguagem para expressar regularidades (BRASIL, 1998, p. 117).

Conforme descrito no capítulo anterior, uma das dimensões da Álgebra proposta pelos PCN no Ensino Fundamental é como Aritmética Generalizada, em que o uso das letras decorre de generalizações de modelos aritméticos por meio de propriedades das operações generalizadas de padrões aritméticos. Dentre as quatro interpretações da Álgebra escolar (quadro 2), esta talvez seja a menos trabalhada pelos professores em sala de aula, de acordo com os PCN:

Nos resultados do SAEB, por exemplo, os itens referentes à Álgebra raramente atingem o índice de 40% de acerto em muitas regiões do país. Isso faz com que os professores procurem aumentar ainda mais o tempo dedicado a este assunto, propondo em suas aulas, na maioria das vezes, apenas a repetição mecânica de mais exercícios. Essa solução, além de ser ineficiente, provoca grave prejuízo no trabalho com outros temas da Matemática... (BRASIL, 1998, p. 116).

Assim, a presente pesquisa procura apresentar uma proposta de introdução à Álgebra, a partir do trabalho com a aritmética generalizada apresentada na forma de situações-problema. Entendemos que o trabalho “mecanizado” de propriedades e expressões algébricas muitas vezes faz com que os alunos apresentem uma interpretação bastante limitada dos conceitos e aplicações da Álgebra. Dessa forma, passam também a questionar sua finalidade enquanto elemento facilitador na resolução de problemas.

1.1 RELEVÂNCIA SOCIAL E PESSOAL

A escolha do tema desta pesquisa surgiu inicialmente a partir de minhas experiências profissionais e do interesse pelos processos de ensino e de aprendizagem. Sou professora da disciplina de Álgebra em um colégio privado da cidade de Guarulhos, região da Grande São Paulo, e também de uma escola

da rede estadual, na mesma cidade. Trabalho, dentre outras turmas, com alunos de 7º ano¹, período onde geralmente é estabelecida a introdução ao pensamento algébrico, de acordo com os currículos e propostas vigentes.

Notamos uma grande dificuldade por parte dos alunos no período de introdução à Álgebra, quando este deve abstrair conceitos que antes eram trabalhados aritmeticamente, com aplicações particulares a cada situação proposta em sala de aula.

Assim, a presente pesquisa busca propor subsídios ao professor para contribuir para uma aprendizagem mais significativa, neste caso da introdução à Álgebra, por meio de novas práticas pedagógicas construídas principalmente a partir de pesquisas disponíveis. Nossa preocupação se fundamenta em alguns autores que trabalham a formação de professores, que citaremos em seguida.

Segundo TARDIF (2002), o docente deve buscar continuamente aperfeiçoar seu conhecimento e sua prática.

Tanto em suas bases teóricas quanto em suas conseqüências práticas, os conhecimentos profissionais são evolutivos e progressivos, e necessitam, por conseguinte, uma formação contínua e continuada. Os profissionais devem, assim, autoformar-se e reciclar-se através de diferentes meios, após seus estudos universitários iniciais. Desse ponto de vista, a formação profissional ocupa, em princípio, uma boa parte da carreira e os conhecimentos profissionais partilham com os conhecimentos científicos e técnicos a propriedade de serem revisáveis, criticáveis e passíveis de aperfeiçoamento. (TARDIF, 2002, p. 7)

Torna-se assim necessário observar que o trabalho do professor tem sempre que direcionar sua prática à qualidade do ensino, de forma que propicie ao aluno a possibilidade de aplicação de seus conhecimentos em sua vida social, profissional, familiar, etc. O papel do docente é fundamental para a organização e gestão de atividades que permitam ao aluno essa percepção de

¹ Denominação à partir de 2007, em determinação da Secretaria da Educação, que instituiu o Ensino Fundamental de 9 anos. Equivale à 6ª série do ciclo de 8 anos. Lei nº 11274, de 06/02/2006

aplicabilidade da Matemática nos diversos níveis de seu cotidiano. Neste sentido, TARDIF (2000) relata que:

Quer se trate de uma aula ou do programa a ser ministrado durante o ano inteiro, percebe-se que o professor precisa mobilizar um vasto cabedal de saberes e de habilidades, porque sua ação é orientada por diferentes objetivos: objetivos emocionais ligados à motivação dos alunos, objetivos sociais ligados à disciplina e à gestão da turma, objetivos cognitivos ligados à aprendizagem da matéria ensinada, objetivos coletivos ligados ao projeto educacional da escola etc. (p. 15).

Para isso o professor precisa se preparar para ensinar, ou seja, precisa saber o que ensinar e qual a melhor estratégia de ensino e para isso, dispõe de um grande número de pesquisas que podem sugerir processos de mudança no trabalho pedagógico.

Outro autor que citamos é Shulman. Segundo o autor, o professor deve ter uma base de conhecimento a ser desenvolvido durante o processo de ensino e de aprendizagem, que consiste em um corpo de compreensões, conhecimentos, habilidades e disposições, que se subdividem em *conhecimento de conteúdo específico* e *conhecimento pedagógico (geral e de conteúdo)*. Essa base se torna mais aprofundada, diversificada e flexível com a experiência profissional do docente, e está em constante processo de construção (SHULMAN, 1987, Apud MIZUKAMI, 2004).

Segundo Mizukami (2004), Shulman entende como *conhecimento de conteúdo específico* um conjunto de compreensões, fatos, conceitos, processos e procedimentos de uma área específica que um professor leciona. O *conhecimento pedagógico geral* inclui teorias e princípios relacionados a processos de ensinar e de aprender, além da organização do Ensino. O *conhecimento pedagógico do conteúdo* é construído continuamente pelo professor durante sua atuação em sala de aula. Inclui compreensão do que significa ensinar um determinado conteúdo e as técnicas disponíveis e utilizadas para tal ensino.

Baseados nas contribuições de Shulman e Tardif buscamos propor na presente pesquisa uma seqüência de atividades que pode ser adotada pelo professor e caracterizada como um novo conhecimento pedagógico do conteúdo, já que constitui um conjunto de técnicas que pode viabilizar e facilitar o trabalho com a introdução ao pensamento algébrico no Ensino Fundamental. Além disso, os pressupostos teóricos aqui adotados podem contemplar um conhecimento pedagógico geral, tendo em vista a formação continuada do docente.

Visando uma proposta de trabalho docente capaz de viabilizar e facilitar o ensino e a aprendizagem de noções algébricas básicas no Ensino Fundamental, por meio da inserção da dimensão da Álgebra como Aritmética generalizada, chegamos a um primeiro questionamento: *a dimensão da Álgebra como Aritmética generalizada, proposta como introdução à Álgebra, pode facilitar o processo de ensino-aprendizagem deste conteúdo no Ensino Fundamental?*

No âmbito da relevância social do tema desta pesquisa, destacamos que é notável o crescente número de pesquisas na área da Educação Matemática, que têm como objetivo principal apontar dificuldades e defasagens no processo de aprendizagem, e propor modelos na tentativa de amenizar tais problemas.

Muitas dessas dificuldades de aprendizagem apresentadas pelos alunos, nos diversos tipos e níveis de ensino, vêm sendo avaliadas por Órgãos Públicos, no intuito de apresentar propostas para a melhoria da qualidade de ensino e, conseqüentemente, da aprendizagem.

Uma dessas avaliações é o Saresp (Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo), que consiste em uma avaliação diagnóstica externa proposta pela Secretaria da Educação do Estado de São Paulo - SEE/SP para avaliar o desempenho dos alunos do Ensino Fundamental (EF) e do Ensino Médio (EM) do Estado de São Paulo. Sua última edição aconteceu no ano de 2007, mas os resultados não foram divulgados até o momento da

redação deste texto. Assim, faremos um breve comentário acerca da edição anterior, que aconteceu em 2005.

Tendo em vista o conteúdo abordado nesta pesquisa, encontramos duas habilidades relacionadas: utilizar representações algébricas para expressar regularidades observadas em seqüências numéricas e calcular o valor numérico de expressões algébricas simples.

Dentre as 26 questões objetivas que integraram a prova de matemática do Saesp 2005, apenas uma envolvia as habilidades descritas. A questão citada é:

Para obter qualquer termo de seqüência de números ímpares (1, 3, 5, 7, ...) na qual n representa a posição do número na seqüência, devemos usar a seguinte regra:

(A) $2(n + 1)$

(B) $2n + 1$

(C) $2n - 1$

(D) $2(n - 1)$

O percentual de acerto desta questão variou de 22,7% a 30%, de acordo com o período das séries.

Neste contexto, realizamos mais um refinamento do objetivo dessa pesquisa: *uma vez que a introdução ao pensamento algébrico ocorra por meio do trabalho com uma proposta de acordo com a dimensão da Álgebra como Aritmética generalizada, o aluno poderia desenvolver as habilidades de utilizar representações algébricas para expressar regularidades observadas em seqüências numéricas e calcular o valor numérico de expressões algébricas simples?*

1.2 JUSTIFICATIVA DA PESQUISA

Diversos estudos referentes ao tema desta pesquisa têm sido realizados como tentativa de buscar novas estratégias e metodologias a serem aplicadas no processo de ensino e de aprendizagem. Neste sentido, apresentamos algumas pesquisas e propostas sobre o ensino e aprendizagem da Álgebra elementar no Ensino Fundamental.

1.2.1 ALGUNS ESTUDOS REALIZADOS SOBRE O TEMA

A partir de nossas experiências profissionais e após realizarmos várias leituras de pesquisas sobre o ensino e aprendizagem da Álgebra Escolar, e de analisarmos o desempenho dos alunos em algumas avaliações, como por exemplo o SARESP, podemos perceber uma grande dificuldade no que se refere ao tema no âmbito do ensino, por parte dos professores, e no âmbito da aprendizagem, por parte dos alunos.

De um lado, professores que se queixam do baixo rendimento apresentado pelos alunos. De outro, os alunos, que muitas vezes não percebem aplicabilidade alguma do que está sendo-lhes proposto e não percebem significados e nem que já usam ferramentas algébricas em diversos outros campos do saber.

A partir de análises feitas sobre os erros dos alunos, BOOTH (1995) acredita que estes estão relacionados às idéias que os alunos têm sobre aspectos como:

- *O foco da atividade algébrica e a natureza das respostas*

Enquanto o foco de uma atividade aritmética é encontrar uma solução numérica particular, numa atividade algébrica este foco está na realização de procedimentos e estabelecimento de relações, sendo o resultado uma forma simplificada geral, mas ainda algébrica. Assim, existe uma dificuldade, por parte do aluno, em aceitar tal tipo de solução ao final de uma atividade.

Um exemplo que poderia ilustrar esse tipo de resposta seria o trabalho envolvendo noções geométricas, como área e perímetro.

○ *O uso da notação e da convenção em Álgebra*

Uma das dificuldades apresentadas pelos alunos para simplificação de expressões algébricas diz respeito à interpretação de símbolos operatórios, como por exemplo, os símbolos “+” ou “=”. Aritmeticamente, esses símbolos indicam uma ação a ser efetuada. Dessa forma, é muito comum que os alunos simplifiquem a expressão $2a + 5b$, resultando em $7ab$. Isso se deve à noção, aritmética, de que a adição envolve a união “física” de dois conjuntos.

○ *O significado das letras e das variáveis*

Uma das principais diferenças entre a aritmética e a Álgebra é, sem dúvida, a utilização, nesta última, de letras para representar variáveis. É preciso tomar cuidado quando se afirma, por exemplo: “ a representa o número de abacaxis”, levando o aluno a acreditar que “ $3a$ ” é a representação de “3 abacaxis”, quando o correto seria que percebessem que a expressão representa “3 vezes o número de abacaxis”.

Outro aspecto importante é a noção de “variável”. *Mesmo quando as crianças interpretam as letras como representações de números, há uma forte tendência a considerar que as letras representam valores específicos únicos, como em “ $x + 3 = 8$ ”, e não números genéricos ou variáveis como em “ $A = b \times a$ ”.* (KUCHEMANN, Apud BOOTH e COOK, 1995, p. 31).

- *Os tipos de relações e métodos usados em aritmética*

Admitindo a Álgebra como uma “*aritmética generalizada*” (Usiskin, 1995), se os alunos tiverem concepções erradas de relações e procedimentos no contexto aritmético, seu desempenho em Álgebra será afetado. Um exemplo dessa dificuldade está no uso dos parênteses. Se o aluno não compreende a necessidade dos parênteses no campo aritmético, isso se estenderá para o âmbito algébrico, levando-o a cometer erros durante a simplificação de expressões.

Contrapondo essa perspectiva da Álgebra como uma “*aritmética generalizada*”, destacamos LINS e GIMENEZ (1997, p. 159), que afirmam que a idéia de que a aritmética deve preceder a Álgebra é infundada. Isso não deve ser interpretado como uma afirmação de que, portanto, a Álgebra deveria preceder a aritmética, já que esta última é vivenciada por um conjunto de experiências trazidas pelos alunos ao iniciar o trabalho escolar. *Devemos buscar uma coexistência da educação algébrica com a aritmética, de modo que uma esteja implicada no desenvolvimento da outra.*

Estes mesmos autores definem a Álgebra como *um conjunto de afirmações, para as quais é possível produzir significado em termos de números e operações aritméticas, possivelmente envolvendo igualdade ou desigualdade* (1997, p. 150).

Sobre o pensamento algébrico, eles apresentam três características fundamentais:

1. Produzir significados apenas em relação a números e operações aritméticas (aritmecismo);
2. Considerar números e operações apenas segundo suas propriedades, e não “modelando” números em outros objetos (internalismo);

3. Operar sobre números não conhecidos como se fossem conhecidos (analiticidade).

E descrevem:

Pensar algebricamente é pensar dessa forma; é produzir significado para situações em termos de números e operações aritméticas (e igualdades e desigualdades), e com base nisso transformar as expressões obtidas operando sempre de acordo com (1), (2) e (3) (LINS e GIMENEZ, 1997, p.151).

Abordam também as concepções da Álgebra, que não serão apresentadas nesta pesquisa, por darmos preferência as concepções segundo Usiskin. Tal escolha decorre do fato de este último ser citado como autor de base do PCN.

Usiskin (1995) aborda duas questões fundamentais do ensino de Álgebra. A primeira seria sobre até que ponto se deve exigir dos alunos a destreza ao manipular diversas técnicas operatórias. A segunda questão é relacionada ao currículo de Álgebra, e aborda o papel das funções e o momento de introduzi-las.

Segundo o autor, as finalidades da Álgebra relacionam-se com as suas diferentes concepções. São elas:

Concepção 1: A Álgebra como aritmética generalizada

Nesta concepção, as variáveis são tratadas como generalizadoras de modelos. Esta noção é fundamental em modelagem matemática, já que as variáveis são instrumentos muito úteis para descrever situações. Dentro dessa concepção, o uso das variáveis tem a função de *traduzir e generalizar*.

Concepção 2: A Álgebra como um estudo de procedimentos para resolver certos tipos de problemas

Ao traduzir um problema para a linguagem algébrica, o aluno está diante de uma concepção da Álgebra como generalizadora de modelos (concepção 1). A partir de então, o aluno realiza uma série de procedimentos para resolver ou simplificar tal expressão. Diante disso, o aluno está diante da concepção da Álgebra como um estudo de procedimentos para resolver certos tipos de problemas. Nesta concepção, as variáveis são *incógnitas* ou *constantes* e neste caso, as instruções chave são *simplificar e resolver*.

Concepção 3: A Álgebra como estudo de relações entre grandezas

A fórmula que determina a área de um retângulo ($A = bh$) expressa, por exemplo, a relação entre três grandezas. Segundo o autor, não temos incógnitas, pois não estamos resolvendo nada. A distinção principal entre esta concepção e a anterior é que nesta, as variáveis podem assumir diferentes valores numéricos.

Concepção 4: A Álgebra como estudo das estruturas

Reconhece-se a Álgebra como estudo das estruturas de acordo com as propriedades que atribuímos às operações com números reais e polinômios. Neste caso as instruções chave são *manipular e justificar*.

Analisando a seqüência proposta nesta pesquisa sob as concepções da Álgebra descritas por Usiskin (1995), podemos relacioná-la com as duas primeiras concepções. A primeira concepção está presente nas tarefas que exigem do aluno a construção de expressões que generalizem situações propostas. A segunda concepção é tratada nas tarefas em que o aluno deve encontrar um valor desconhecido. Neste caso, entendemos que mesmo quando o aluno não constrói a expressão algébrica que generalize uma situação proposta, utiliza-se de conhecimentos já adquiridos, como o uso de operações inversas, para determinar tal valor.

Segundo Schoen (1995), o ensino da Álgebra elementar deve focalizar a resolução de bons problemas. Para isso, o autor descreve seis recomendações direcionadas ao docente:

1. Basear a aprendizagem de coisas novas no conhecimento e na compreensão que os alunos já têm.
2. Levar gradualmente da verbalização para o simbolismo algébrico.
3. Introduzir os tópicos de Álgebra com aplicações.
4. Ensinar os tópicos de Álgebra a partir da perspectiva de como eles podem ser aplicados.
5. Ensinar e modelar processos heurísticos específicos como auxiliares para compreensão e resolução de problemas.
6. Comprometer os alunos com a resolução de problemas.

Para que esse processo de ensino–aprendizagem ocorra da melhor forma possível com resultados satisfatórios, torna-se importante conscientizar o aluno sobre ser “autoformador”, da responsabilidade de envolver–se com informações novas que por meio de estratégias inteligentes e objetivas pode construir ou produzir seu próprio conhecimento, conquistando autonomia na aprendizagem e se preparando para outras tarefas mais complexas que na vida surgirão.

Seguindo esta perspectiva, Kantowsky (2003), pesquisadora da Universidade da Flórida, entende por problema uma situação enfrentada pelo aluno, em que o uso de algum algoritmo não garante uma solução. Assim, ele deve reunir os conhecimentos que julgar relevantes e organizá-los em uma nova disposição, almejando a solução, ou uma das soluções procuradas. Em seu artigo *Algumas considerações sobre o ensino para a resolução de problemas*, Kantowsky (2003) diferencia problema de exercício, citando alguns exemplos:

1. O preço de um novilho é 25 dólares e o de uma vaca 26 dólares. Um fazendeiro comprou 14 novilhos e 25 vacas. Quanto gastou ao todo?

2. Descubra duas seqüências formadas de três números primos consecutivos de maneira que a soma dos números de uma delas seja o inverso da soma dos números da outra.

No exemplo 1, o aluno dispõe de algoritmos que podem auxiliá-lo, de imediato, na busca da solução. Trata-se, portanto de um exercício. Já no exemplo 2, o aluno é levado a organizar conhecimentos já adquiridos e buscar estratégias para encontrar possíveis soluções.

Para Polya (2003), resolver um problema é encontrar um caminho, inicialmente desconhecido para chegar a um determinado fim.

Resolver um problema é encontrar os meios desconhecidos para um fim nitidamente imaginado. Se o fim por si só não sugere de imediato os meios, se por isso temos de procurá-los refletindo conscientemente sobre como alcançar o fim temos de resolver um problema. Resolver um problema é encontrar um caminho onde nenhum outro é conhecido de antemão, encontrar um caminho a partir de uma dificuldade, encontrar um caminho que contorne um obstáculo, para alcançar um fim desejado, mas não alcançável imediatamente, por meios adequados (POLYA, 2003, p. 1).

A seqüência de atividades proposta pode ser considerada uma seqüência de problemas, e não de exercícios, uma vez que o uso de algum processo já conhecido não garante a solução. E ainda, a seqüência de atividades apresentada permite que os alunos utilizem diferentes estratégias de interpretação e resolução.

Assim, tal proposta de seqüência de atividades traz uma abordagem atual para explorar a introdução ao pensamento algébrico a partir de generalizações e leis de formação com a utilização do pensamento aritmético como ferramenta, baseada em orientações dos PCN (Parâmetros Curriculares Nacionais). Foi destinada a alunos de sexta série do Ensino Fundamental (atualmente chamado sétimo ano), e busca contrapor o rigor matemático e linguagem estruturada, com forte “apelo algébrico” em demonstrações.

1.2.2 PESQUISAS CORRELATAS

Destacamos a seguir alguns trabalhos realizados que abordam o ensino-aprendizagem da introdução ao pensamento algébrico, pesquisadas entre os trabalhos desenvolvidos no Programa de Estudos de Pós-Graduação em Educação Matemática da PUC-SP.

Contemplamos a pesquisa de Modanez (2003), que apresenta uma proposta para a introdução ao pensamento algébrico a partir do uso de seqüências de padrões geométricos. A autora, após participar de um curso no CAEM (Centro de Aperfeiçoamento do Ensino de Matemática), no IME-USP, abordando o assunto: “Como seqüências de padrões geométricos poderiam ser úteis no ensino-aprendizagem da Álgebra”, reestruturou as atividades propostas e aplicou-as numa turma de 6^a série do Ensino Fundamental, com 30 alunos reunidos em duplas, de uma escola pública da Grande São Paulo. A seqüência didática proposta na pesquisa é composta por 8 atividades, que apresentam uma seqüência geométrica e, ao final de cada uma, solicita como tarefa a generalização, descrita ou algébrica, da mesma. A questão investigada foi: *Uma seqüência de ensino por meio de padrões geométricos pode proporcionar ao aluno a introdução ao pensamento algébrico?* Após análise dos resultados, a autora constata um percentual considerável de acertos, percebendo uma grande diversidade de estratégias de resolução. Assim, considera que os alunos *avançaram em seus conhecimentos em relação ao desenvolvimento do pensamento algébrico, bem como em suas atitudes e autonomia no sentido de observar, levantar hipóteses, tirar conclusões e justificar suas respostas.* (MODANEZ, 2003, p. 87).

PEREZ (2006), em sua dissertação de mestrado, investiga como os alunos de Ensino Médio resolvem situações-problema que envolvem generalização de padrões. Para isso, aplicou uma seqüência didática composta por 5 atividades entre padrões que a autora designa como figurativo-numéricos e numéricos, para 10 alunos de Ensino Médio de uma escola pública da cidade de Monte

Mor, no estado de São Paulo. A aplicação foi dividida em duas sessões, de aproximadamente 60 minutos cada uma.

Como professora de Matemática do Ensino Fundamental e Médio, a autora relata que só trabalhava com padrões e generalizações com seus alunos de 1º ano do Ensino Médio, ao trabalhar com Progressões Aritméticas e Geométricas. Percebeu, após sua pesquisa, que a observação e generalização de padrões poderia ser realizada por eles, por meio de construções de fórmulas que eram, anteriormente, fornecidas prontas.

A autora considera que o objetivo de sua pesquisa foi atingido, já que concluiu que os alunos do Ensino Médio resolveram questões de generalização de padrões utilizando diversas estratégias. De maneira geral, analisa, pela devolução do problema, que os alunos avançaram em seus conhecimentos relacionados ao pensamento algébrico, bem como em suas atitudes e autonomia ao observar, levantar hipóteses, tirar conclusões e justificá-las.

1.2.3 A PROPOSTA DO TEMA NOS PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS

Com o objetivo de conhecer como é proposta a abordagem da Álgebra elementar no Ensino Fundamental no Brasil, destacamos algumas recomendações dos Parâmetros Curriculares Nacionais, de 1998.

.A nova proposta de ensino do Brasil tem como objetivo valorizar o aluno e a aprendizagem, associando-a, assim, ao ensino:

Por muito tempo a pedagogia valorizou o que deveria ser ensinado, supondo que, como decorrência, estaria valorizando o conhecimento. Ensino, então, ganhou autonomia em relação à aprendizagem, criou seus próprios métodos e o processo de aprendizagem ficou relegado a segundo plano.

Os fracassos escolares decorrentes da Aprendizagem, das pesquisas que buscam apontar como sujeito conhecedor, das teorias que provocam reflexão sobre os aspectos que interferem no ensinar e no aprender, indicam que é necessário dar novo significado à unidade entre Aprendizagem e Ensino uma vez que, em última instância, sem aprendizagem não há ensino. (BRASIL, 1998, p.71).

No que diz respeito às concepções, o documento apresenta argumentos que caracterizam a Matemática como uma ciência capaz de compreender e atuar no mundo, inserida num contexto natural, social e cultural. (p. 24). Assim, a Matemática não apenas faz-se presente na quantificação de objetos concretos, mas é capaz também de explicar os mais diversos fenômenos por meio de abstrações e modelagens.

A Matemática faz-se presente na quantificação do real – contagem, medição de grandezas – e no desenvolvimento das técnicas de cálculo com os números e com as grandezas. No entanto, esse conhecimento vai além, criando sistemas abstratos, ideais, que organizam, inter-relacionam e revelam fenômenos do espaço, do movimento, das formas e dos números, associados quase sempre a fenômenos do mundo físico (BRASIL, 1998, p.25).

O conteúdo de Álgebra é apresentado como parte do “bloco” *Números e Operações*. Apesar das orientações dos PCN proporem que o trabalho com a introdução ao pensamento algébrico deve ser priorizado a partir do quarto ciclo, esse processo é trabalhado com os alunos, com o uso dos livros didáticos já no terceiro ciclo, especificamente na sexta série, atualmente designado sétimo ano.

Dentre os objetivos da Matemática apontados para o terceiro ciclo (5ª e 6ª séries), apresentam-se como sugestões para o desenvolvimento do pensamento algébrico a exploração de situações de aprendizagem que levem o aluno a:

(...) reconhecer que representações algébricas permitem expressar generalizações sobre propriedades das operações aritméticas, traduzir situações-problema e favorecer as possíveis soluções;

traduzir informações contidas em tabelas e gráficos em linguagem algébrica e vice-versa, generalizando regularidades e identificar os significados das letras;

utilizar os conhecimentos sobre as operações numéricas e suas propriedades para construir estratégias de cálculo algébrico. (BRASIL, 1998, p. 64)

Para o quarto ciclo (7^a e 8^a séries) o ensino de Matemática deve visar ao desenvolvimento do pensamento algébrico também por meio de situações de aprendizagem que leve o aluno a:

(...) produzir e interpretar diferentes escritas algébricas – expressões, igualdades e desigualdades -, identificando as equações, inequações e sistemas;

resolver situações-problema por meio de equações e inequações do primeiro grau, compreendendo os procedimentos envolvidos;

observar regularidades e estabelecer leis matemáticas que expressem a relação de dependência entre variáveis. (BRASIL, 1998, p. 81)

O documento sugere que, durante o terceiro ciclo, sejam desenvolvidas as primeiras noções de Álgebra, ainda durante o trabalho com os números, explorando padrões em seqüências numéricas e construindo generalizações e suas representações algébricas, por meio da resolução de situações-problema. É suficiente *que os alunos compreendam a noção de variável e reconheçam a expressão algébrica como uma forma de traduzir a relação existente entre a variação de duas grandezas.* (BRASIL, 1998, p. 68).

Podemos perceber na proposta para este ciclo uma tendência a uma concepção da Álgebra como uma generalização da aritmética.

Para o quarto ciclo, a proposta é que, também através da resolução de situações-problema, os alunos possam reconhecer diferentes funções da Álgebra. O trabalho, neste ciclo, parte da “pré-Álgebra” trabalhada no ciclo anterior, e sugere que a noção de variável seja trabalhada com a noção de função, além das operações com as expressões algébricas e as equações. Além disso, o trabalho com a Álgebra deve estar presente no desenvolvimento de conteúdos de outros blocos, como por exemplo, no bloco “Espaço e Forma”, ao generalizar os procedimentos para calcular o número de diagonais de um polígono qualquer, ou no bloco “Tratamento da Informação”, ao se calcular medidas de tendência central de uma pesquisa (BRASIL, 1998, p. 68 e 84).

Segundo as Orientações Didáticas para terceiro e quarto ciclos – 5ª a 8ª séries – o estudo da Álgebra possibilita ao aluno exercitar sua capacidade de abstração e generalização, além de lhe proporcionar uma nova ferramenta na resolução de problemas. (BRASIL, 1998, p. 115).

Apresentamos a seguir um esquema simplificado de como é proposto o desenvolvimento da Álgebra no Ensino Fundamental do Brasil, de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais:

Quadro 1 – A proposta de ensino da Álgebra no Ensino Fundamental.

Desenvolvimento da Álgebra no Ensino Fundamental		
	Terceiro Ciclo (5ª e 6ª série)	Quarto Ciclo (7ª e 8ª série)
Conteúdos	<ul style="list-style-type: none"> • noção de variável; • uso e resolução de expressões algébricas simples, para traduzir relação de variação entre duas grandezas (regra de três); • equações simples. 	<ul style="list-style-type: none"> • equações, inequações e sistemas de primeiro e segundo grau; • noção de função; • uso de propriedades para efetuar operações com expressões algébricas; • fatorações e simplificações;

Objetivos	<ul style="list-style-type: none"> • reconhecer que representações algébricas permitem expressar generalizações sobre propriedades das operações aritméticas; • traduzir informações contidas em tabelas e gráficos em linguagem algébrica e vice-versa, generalizando regularidades; • identificar os significados das letras; • utilizar os conhecimentos sobre as operações numéricas e suas propriedades para construir estratégias de cálculo algébrico. 	<ul style="list-style-type: none"> • produzir e interpretar diferentes escritas algébricas (expressões, igualdades e desigualdades); • resolver situações-problema por meio de equações e inequações do primeiro grau; • observar regularidades e estabelecer leis matemáticas que expressem a relação de dependência entre variáveis.
Procedimentos	<ul style="list-style-type: none"> • resolução de situações-problema; • exploração de padrões em seqüências numéricas que levem o aluno a fazer algumas generalizações; • jogos; • representações matemáticas (gráficos, modelos, etc.). 	<ul style="list-style-type: none"> • resolução de situações-problema; • demonstrar propriedades e fórmulas; • atividades e problemas envolvendo noções e conceitos de outros blocos e disciplinas.

Entretanto, nas avaliações como o SAEB (Sistema de Avaliação Escolar da Educação Básica) os alunos raramente atingem o índice de 40% de acerto nas questões referentes à Álgebra. Isso faz com que os professores trabalhem o assunto por mais tempo, porém de forma ainda inadequada, segundo relata o documento. Na maioria das vezes, o trabalho com a Álgebra é feito de forma mecanizada, apenas “manipulando” expressões e equações.

É importante que as concepções algébricas sejam construídas por meio de situações que levem os alunos a observar regularidades, estabelecendo

relações, levando-o a interpretar a variedade de representações da Álgebra escolar.

O quadro a seguir sintetiza as diferentes interpretações da Álgebra escolar e as diferentes funções das letras.

Quadro 2: Interpretações da Álgebra no Ensino Fundamental segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais.

Fonte: BRASIL, 1998, p. 116

Dimensões da Álgebra	Uso das letras	Conteúdos (conceitos e procedimentos)
Aritmética Generalizada	Letras como generalizações do modelo aritmético	Propriedades das operações generalizadas de padrões aritméticos
Funcional	Letras como variáveis para expressar relações e funções	Variação de grandezas
Equações	Letras como incógnitas	Resolução de equações
Estrutural	Letras como símbolo abstrato	Cálculo algébrico e obtenção de expressões equivalentes

Segundo o PCN, *é fato conhecido que os professores não desenvolvem todos esses aspectos da Álgebra no Ensino Fundamental, pois privilegiam fundamentalmente o estudo do cálculo algébrico e das equações – muitas vezes deslocadas de problemas.* (BRASIL, 1998, p. 117). Porém, é importante que o professor articule as quatro dimensões, durante o Ensino Fundamental.

1.2.4 ORGANIZAÇÃO DIDÁTICA ADOTADA

Entendemos que a seqüência de atividades proposta nesta pesquisa contempla uma forma de aprendizagem *modernista*, a partir da resolução de situações-problemas.

GASCÓN (2003) denomina como *Organizações Didáticas modernistas*, ou simplesmente *modernismo*, a forma de aprendizagem mediante uma exploração livre e criativa. Segundo o autor, ao se trabalhar com este tipo de atividades, “*tende-se a associar a atividade matemática com a exploração de problemas, Isto é, com as tarefas que se realizam quando não se sabe muito sobre a solução (tentar técnicas diversas, aplicar algum resultado conhecido, buscar problemas semelhantes, formular conjecturas)...*”

GASCÓN desenvolveu um modelo tridimensional, onde os eixos representam as Organizações Didáticas denominadas *unidimensionais*, pois se caracterizam por um único processo de estudo. Tais Organizações são denominadas: **Modernistas**, já citadas; **Teoricistas** (associa o “*ensinar e aprender matemática*” com o “*ensinar e aprender teorias ou axiomas*”) e **Tecnicistas** (associa o “*ensinar e aprender matemática*” com “*ensinar e aprender técnicas ou algoritmos*”).

A partir dessas Organizações unidimensionais, são formadas outras três Organizações, agora bidimensionais, pois associam dois processos de estudo. São elas: **Clássicas** (associam organizações tecnicistas com teoricistas); **Empiristas** (associam organizações tecnicistas com modernistas) e **Construtivistas** (associam organizações modernistas com teoricistas).

Apresentamos a seguir um modelo geométrico dessas Organizações Didáticas:

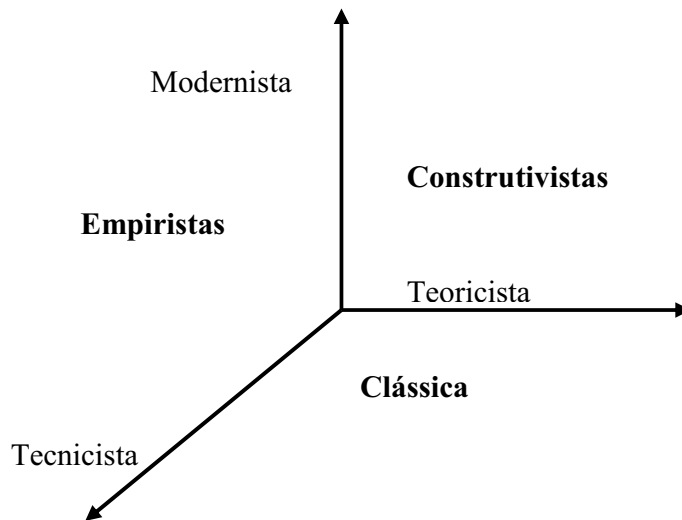


Figura 1: Organizações Didáticas (GASCÓN, 2003)
 Fonte: Educação Matemática e Pesquisa, 2003, v.5, p.21

Logo, segundo o autor, a proposta de seqüência desta pesquisa estaria localizada no plano das Organizações Construtivistas, já que consideramos a aprendizagem como um processo ativo de construção de conhecimentos seguindo fases determinadas, que dependem essencialmente de conhecimentos adquiridos anteriormente.

Dessa forma, a presente pesquisa busca apresentar uma proposta de ensino que tende para o eixo modernista, em contra-proposta ao trabalho que vem sendo realizado pela maioria dos professores, que segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais, apresenta características de um ensino tecnicista.

1.3 QUADRO REFERENCIAL TEÓRICO

As tradicionais abordagens realizadas na prática pedagógica na introdução ao pensamento algébrico, nos diferentes níveis de ensino, têm exaltado principalmente o uso, memorização e repetição de fórmulas, ou mecanismos pré-estabelecidos pelo docente, como modo exclusivo de aplicação dos conceitos algébricos.

A abordagem teórica dos três níveis de conhecimento (nível técnico, mobilizável e disponível) para a elaboração das atividades que compõem a seqüência proposta será fundamentada na definição de Robert (1998).

O **nível técnico** corresponde a um trabalho único e simples. Está relacionado principalmente às definições utilizadas em uma determinada tarefa.

Um exemplo de atividade que contempla o nível de funcionamento técnico é encontrado numa das sugestões de atividades de laboratório de matemática para o Ensino Fundamental, organizado pelo CAEM – Centro de Aperfeiçoamento do Ensino de Matemática - do Instituto de Matemática da Universidade de São Paulo. Tal atividade corresponde a uma aplicação imediata de fórmulas que são apresentadas, e há indicações dos métodos a utilizar.

Expressões do Dia-a-Dia

Expressão 1:

$$S = \frac{5p + 28}{4}$$

Atividade: Substitua p pela medida de seu pé em cm obtendo S, que deverá corresponder, aproximadamente ao número de seu sapato.

Expressão 2:

$$P = 2i + 8$$

Atividade: Substitua i pela sua idade, em anos, obtendo P que deverá corresponder, aproximadamente ao seu peso (válido para crianças)

Figura 2: Exemplo de atividade de nível técnico (ROBERT, 1998)

Fonte: CAEM – série caderno de atividades, nº 01, p. 177

O **nível mobilizável** corresponde a um início de justaposição de saberes de um certo domínio em que vários métodos podem ser mobilizados. Se um saber é identificado, ele é considerado mobilizado se ele é acessível, isto é, se o estudante o utiliza corretamente.

Um exemplo para ilustrar esse nível de funcionamento é apresentado a seguir. A atividade foi extraída da Revista Prove, e foi baseada em uma questão da Olimpíada Brasileira de Matemática. Para a realização desta atividade, os conhecimentos que serão utilizados são previamente identificados pelo aluno, mas necessitam de alguma adaptação antes que sejam aplicados.

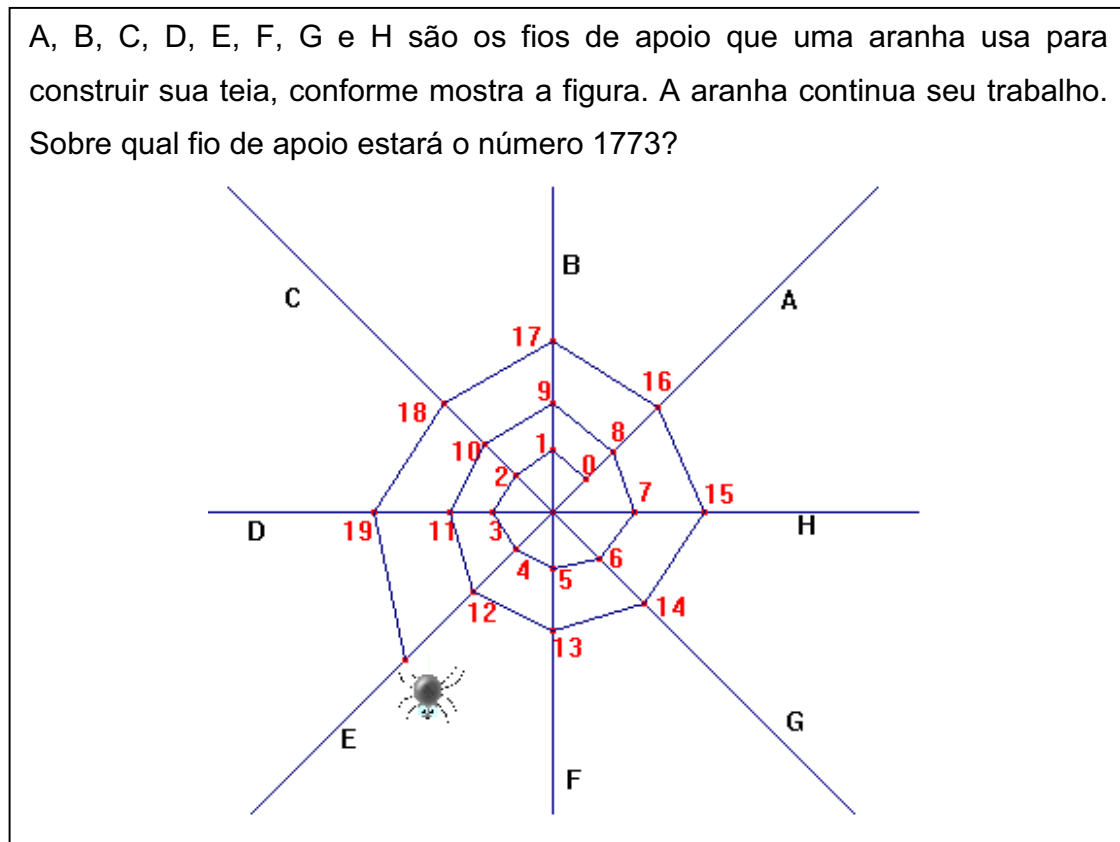


Figura 3: Exemplo de atividade de nível mobilizável (ROBERT, 1998)
 Fonte: Revista Prove, nº 6, 2007, p. 19.

O **nível disponível** corresponde em saber responder corretamente o que é proposto sem indicações, por exemplo, de contra-exemplos (encontrar ou criar), fazer relações, aplicar métodos não previstos. Este nível de conhecimento está associado ao conhecimento de referência variadas que o estudante

conhece, servem de questionamentos e de organização. Podendo funcionar para um único problema ou possibilitando fazer resumos.

Apresentamos um exemplo de atividade que permite um nível de funcionamento disponível, dentro do quadro algébrico. Para resolvê-la, o aluno não dispõe de nenhuma indicação ou sugestão fornecida pelo professor. As estratégias deverão ser baseadas em conhecimentos anteriores, ou pelo enunciado.

Fio de Arame

Atividade: É dado ao aluno um pedaço de arame ou barbante com medidas específicas. Também é fornecido o valor para a área do retângulo que o aluno deve construir com este arame. Por exemplo, pode ser fornecido um pedaço de arame de 40 cm, pedindo que os alunos formem um retângulo com 96 cm^2 de área.

Figura 4: Exemplo de atividade de nível disponível (ROBERT, 1998)
Fonte: CAEM – série caderno de atividades, nº 01, p. 110

Entendemos que o trabalho “mecanizado” de propriedades e conceitos algébricos, contempla apenas o nível técnico de conhecimento. De acordo com os PCN, o trabalho docente com a Álgebra elementar no Ensino Fundamental contempla especialmente a dimensão Estrutural (cálculo algébrico e obtenção de expressões equivalentes).

É fato conhecido que os professores não desenvolvem todos esses aspectos da Álgebra no Ensino Fundamental, pois privilegiam fundamentalmente o estudo do cálculo algébrico e das equações – muitas vezes deslocadas dos problemas. Apesar de esses aspectos serem necessários, eles não são, absolutamente, suficientes para a aprendizagem desses conteúdos. Para a compreensão de conceitos e procedimentos algébricos é necessário um trabalho articulado com essas quatro dimensões (...). (BRASIL, 1998, p. 117).

Dessa forma, faz-se necessária uma articulação entre as diferentes dimensões da Álgebra, proposta pelos Parâmetros Curriculares Nacionais, com o objetivo de desenvolver os diferentes níveis de conhecimento.

Visando classificar o desenvolvimento da linguagem e do pensamento algébrico do aluno durante a análise dos resultados obtidos em nossa pesquisa, destacamos Fiorentini (2004), que subdivide este processo em três fases: pré-álgebra, fase de transição do aritmético para o algébrico e um pensamento algébrico mais avançado.

Segundo o autor, podemos considerar o pensamento do aluno numa fase *pré-algébrica* quando utiliza algum elemento considerado algébrico (letras e outros símbolos) mas ainda não consegue concebê-lo como um número qualquer generalizado ou uma variável. A *fase de transição* do aritmético para o algébrico ocorre quando o aluno aceita e concebe a existência da representação simbólica de um número qualquer e estabelece alguns processos de generalização, mesmo não utilizando a linguagem simbólica. O *pensamento algébrico mais desenvolvido* pressupõe que o aluno apresenta a capacidade de pensar e se expressar genericamente, aceitando a existência de variáveis e sendo capaz de expressá-las e operá-las.

No artigo , Fiorentini (2004) investiga as potencialidades pedagógicas das investigações matemáticas no ensino da álgebra elementar identificando indícios de formação e desenvolvimento da linguagem e do pensamento algébricos de alunos de sétimo ano. Para isso, descreve e analisa os resultados obtidos a partir de uma tarefa proposta (de duas aplicadas). Observando suas análises, descrevemos alguns critérios adotados pelo autor para classificação quanto às fases do desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos, que servirão como aporte para as análises realizadas nesta pesquisa.

Pré algébrica: contornar um problema atribuindo ao símbolo (representação algébrica) um valor determinado, reduzindo a situação ao âmbito aritmético.

Transição: não admite o valor genérico de um símbolo (representação algébrica), mas percebe e estrutura a situação, em língua materna ou com o uso de expressões; não consegue encontrar uma representação genérica para uma quantidade desconhecida que sirva para qualquer número; mobiliza conceitos de equações e incógnitas.

Algébrica: representa genericamente o resultado variável de uma expressão (generalização); relaciona duas variáveis.

Contudo, o autor esclarece que, o aluno pode atingir um nível de pensamento algébrico mais desenvolvido sem necessariamente fazer uso de uma linguagem estritamente algébrico-simbólica, uma vez que o pensamento algébrico se potencializa, gradativamente, à medida que se desenvolve uma linguagem mais apropriada a ele.

Chegamos então a um terceiro refinamento do objetivo desta pesquisa: o trabalho articulado com as diferentes dimensões da Álgebra, a partir de uma introdução à Álgebra tratada aqui como Aritmética generalizada, possibilita que o aluno desenvolva um conjunto de habilidades necessárias para que seus conhecimentos possam ser mobilizáveis ou disponíveis na resolução de problemas?

1.4 QUESTÃO DE PESQUISA

De acordo com os questionamentos realizados anteriormente, a presente pesquisa busca propor, uma seqüência didática de atividades que têm por objetivo explorar o que outrora denominamos de introdução à Álgebra. Tal seqüência contempla a dimensão da Álgebra como Aritmética generalizada buscando facilitar o desenvolvimento de habilidades necessárias para que seus

conhecimentos possam ser mobilizáveis ou disponíveis na resolução de problemas.

Assim, a questão dessa pesquisa é: o uso de seqüências aritméticas e padrões como ferramenta para a abordagem da Álgebra na Escola Básica permite que o aluno evolua de um pensamento pré-algébrico a um pensamento algébrico mais avançado (Fiorentini, 2004), desenvolvendo e construindo, de forma autônoma, estratégias e habilidades para resolução de problemas? Que elementos desse desenvolvimento podem ser identificados quando se usam seqüências didáticas preparadas com base nesse tipo de ferramentas? Entendemos aqui como forma autônoma aquela que permite que os conhecimentos sejam mobilizáveis ou disponíveis para o aluno, durante a resolução do problema.

1.5 HIPÓTESES

Com base nas leituras realizadas, efetuamos algumas hipóteses:

Muitas das dificuldades apresentadas pelos alunos estão diretamente relacionadas às abordagens do ensino de Álgebra elementar assumidas e executadas pelo professor em sala de aula. Dependendo da abordagem, as dificuldades tendem a manifestar-se mais em determinados aspectos do que em outros.

Acreditamos que ao trabalhar com uma aritmética centrada exclusivamente em exercícios e algoritmos finalizados, com a utilização de exemplos que contemplem apenas o trabalho com casos particulares, o professor faz com que o aluno deixe de compreender a natureza do *variável*. Atividades que exigem a análise de variações e sua representação em linguagens elaboradas pelo aluno

podem diminuir as dificuldades apresentadas e promover o desenvolvimento cognitivo de abstração, a partir de conhecimentos prévios inerentes à atividade proposta.

Em vista disso, consideramos que uma abordagem que trabalhe a construção do conceito e do pensamento algébrico à partir de generalizações e formulação de hipóteses pode fazer com que os alunos desenvolvam problemas de outros níveis de conhecimento que não apenas o técnico.

1.6 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Destacaremos neste item os procedimentos metodológicos adotados na presente pesquisa, desde a aplicação da atividade de sondagem, da organização da seqüência didática sugerida, até a análise dos resultados.

1.6.1 METODOLOGIA

Nossa Metodologia seguirá os pressupostos de uma Engenharia Didática. Este termo é utilizado na didática da matemática tanto para produção de situações de ensino como para metodologia de pesquisa.

Segundo Artigue (1988, Apud MACHADO, 1999), a Engenharia Didática é definida por dois pontos principais:

- Uma parte experimental baseada nas realizações didáticas em sala de aula, que inclui a formulação, realização, observação e análise de uma seqüência de ensino.

- Uma validação específica, baseada no confronto entre análise a priori e análise a posteriori.

Quanto à articulação do tempo dedicado à seqüência de ensino, a Engenharia Didática pode ser classificada como “micro engenharia” ou “macro engenharia”.

Artigue (1988) divide a Engenharia Didática de uma seqüência de ensino em quatro fases:

Quadro 3: Fases da Engenharia Didática

Fase 1	Análises preliminares
Fase 2	Concepção e análise a priori
Fase 3	Experimentação
Fase 4	Análise a posteriori e validação

Seguindo os pressupostos da Engenharia Didática, a primeira fase desta pesquisa, a de análises preliminares, apoiou-se em três etapas:

- estudo preliminar, no Capítulo I, de outras pesquisas realizadas sobre o tema, artigos e publicações acerca do tema *pensamento algébrico*.
- análise dos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental
- escolha, aplicação e análise de uma atividade de sondagem na turma participante da pesquisa, com o objetivo de identificar as concepções prévias e dificuldades apresentadas pelos alunos. Desse modo, após confrontarmos análise *a priori* e a *posteriori* dessa sondagem, poderíamos elaborar a seqüência didática proposta.

A segunda fase desta pesquisa, a de concepção e análise a priori da seqüência didática proposta, é uma análise teórica que independe da realização da situação proposta. Tal análise deve apresentar elementos como: objetivo da atividade, conhecimentos prévios necessários para sua realização, possíveis estratégias e dificuldades apresentadas pelos alunos, orientações que serão passadas aos alunos, etc.

Essa fase da Engenharia Didática será contemplada nesta pesquisa a partir de uma análise das atividades que compõem a seqüência didática proposta. Nesta análise, realizada no Capítulo IV, buscamos descrever aspectos como:

- objetivos gerais e específicos de cada atividade das 4 sessões que compõem a seqüência didática aplicada;
- classificação de cada atividade segundo os níveis de Robert (1998);
- conhecimentos prévios necessários para sua realização;
- orientações a serem fornecidas aos alunos;
- material necessário.

A terceira fase desta pesquisa, a de experimentação consiste na aplicação da seqüência de atividades proposta. Tal experiência contou com produções escritas dos alunos e dos observadores presentes, além de gravação em MP3 de alguns dos diálogos entre as duplas, quando eram assim organizados. Após entrega das produções, alguns alunos foram entrevistados pela pesquisadora, com o objetivo de esclarecer alguns aspectos pertinentes à análise *a posteriori* dos dados coletados.

Na quarta fase desta pesquisa, a análise dos dados será realizada a partir de um comparativo entre os resultados esperados e os resultados obtidos durante a experimentação. Tal análise foi baseada nos protocolos dos alunos, dos relatórios das observadoras e das entrevistas realizadas após a execução da atividade. Alguns elementos abordados na análise *a posteriori* são: apresentação estruturada e tabulada dos resultados obtidos; análise didática dos protocolos observados; análise das dificuldades que surgiram entre os

alunos durante a execução da atividade; análise da gestão da classe e atuação do pesquisador como orientador das sessões; análise da classificação do pensamento segundo os níveis de Fiorentini (2004).

1.6.2 PARTICIPANTES DA PESQUISA

Os sujeitos dessa pesquisa são alunos de uma turma de 6^a série do Ensino Fundamental de uma escola da Rede Privada de Ensino da cidade de Guarulhos. A turma é composta por 28 alunos.

Para a realização da atividade de sondagem, os alunos da turma foram reunidos em duplas, sem que fosse adotado qualquer critério para a escolha das mesmas. Tal atividade foi desenvolvida durante o horário das aulas regulares.

Para a realização da seqüência didática proposta, subdividida em 4 sessões, contamos com a participação de 14 alunos, que desenvolveram as atividades fora do horário das aulas regulares. Tais alunos foram os que aceitaram o convite verbal para participar da pesquisa, realizado durante a atividade de sondagem. Na primeira sessão, foi solicitado que pedissem a autorização dos pais para a participação na pesquisa (Anexo I).

Durante a aplicação de algumas sessões da seqüência de atividades, contamos com a colaboração de duas observadoras, além da pesquisadora.

1.6.3 COLETA E ANÁLISE DOS RESULTADOS

A atividade de sondagem era formada por uma única atividade, subdividida em três sub-ítems. Após o término de cada item, foi solicitado a cada dupla de alunos que deixasse registrado, em língua natural, como haviam pensado.

Os registros dos alunos e relatórios dos observadores que contribuíram com esta pesquisa e da própria pesquisadora, foram organizados com base nas dificuldades apresentadas segundo regularidades encontradas. Dessa forma pudemos elencá-las para que fossem exploradas na seqüência a ser aplicada posteriormente.

A seqüência didática desta pesquisa foi construída com o objetivo de proporcionar uma nova proposta de ensino para a introdução à Álgebra em alunos de 7º ano. Para isso, utilizamos como parâmetro as principais dificuldades apresentadas pelos alunos que participam desta pesquisa durante a atividade de sondagem.

Uma vez aplicada a seqüência didática proposta, foi realizado um estudo qualitativo acerca dos registros analisados, tomando por base os estudos de Fiorentini (2004) organizando-os em três categorias: *aqueles que apresentaram um pensamento pré-algébrico; aqueles que apresentaram um pensamento de transição do aritmético ao algébrico e aqueles que apresentaram um pensamento algébrico mais desenvolvido.*

CAPÍTULO II

APLICAÇÃO E ANÁLISE DA ATIVIDADE DE SONDAGEM

2.1 A ATIVIDADE

A seguir, apresentamos a atividade para o que denominamos de sondagem, utilizando o trabalho com o pensamento aritmético, apresentado sob a forma de problema. Tal atividade foi aplicada na mesma turma que realizaria a seqüência didática proposta nesta pesquisa: uma turma de 7º ano do Ensino Fundamental, sendo os alunos organizados em duplas. Tal atividade foi extraída da apostila do sistema de ensino *Anglo*, destinada ao sétimo ano do Ensino Fundamental.

1. Apertos de mão

Cinco pessoas estiveram presentes a uma reunião. Ao chegar, cada uma cumprimentou as demais.

- a. Quantos apertos de mão foram dados? Registre como pensou.

- b. Quantos apertos de mão seriam dados se estivessem presentes:
(Preencha a tabela com os resultados)

6 pessoas?

7 pessoas?

10 pessoas?

20 pessoas?

E um número n qualquer de pessoas?

Numero de pessoas presentes	Total de apertos de mão
2	
3	
4	
5	
6	
7	
10	
20	
n	

- c. Escreva uma expressão que permita calcular o número **A** de apertos de mão entre um número n qualquer de pessoas.

2.2 ELEMENTOS DE ANÁLISE *A PRIORI*

As soluções esperadas dos problemas propostos são apresentadas a seguir:

1) Apertos de mão

Cinco pessoas estiveram presentes a uma reunião. Ao chegar, cada uma cumprimentou as demais.

- a. Quantos apertos de mão foram dados? Registre como pensou.

Resposta: 10 apertos de mãos.

- b. Quantos apertos de mão seriam dados se estivessem presentes:
(Preencha a tabela com os resultados)

6 pessoas?

7 pessoas?

10 pessoas?

20 pessoas?

E um número **n** qualquer de pessoas?

Numero de pessoas presentes	Total de apertos de mão
2	1
3	3
4	6
5	10
6	15
7	21
10	45
20	190
n	$\frac{1}{2}[n(n-1)]$

- c. Escreva uma expressão que permita calcular o número **A** de apertos de mão entre um número **n** qualquer de pessoas.

$$\text{Resposta: } A = \frac{1}{2}[n(n-1)] \quad \text{ou} \quad A = \frac{n(n-1)}{2}$$

Apresentaremos a seguir algumas estratégias e respostas esperadas dos alunos, durante a realização da atividade de sondagem proposta.

A situação proposta na atividade apresenta a seguinte situação:

Cinco pessoas estiveram presentes a uma reunião. Ao chegar, cada uma cumprimentou as demais.

- a. *Quantos apertos de mão foram dados?*

Para a realização desta tarefa, adotamos como possíveis estratégias:

E₁: Os alunos da dupla podem simular a situação, com a ajuda de outros alunos da sala.

E₂: Os alunos podem representar as pessoas por “pontos”, e construir, no papel, um esquema que reproduza a simulação da situação.

E₃: Os alunos podem chegar a conclusão de que cada pessoa realiza quatro cumprimentos e, equivocadamente, aplicar o princípio multiplicativo, realizando a operação $4 \cdot 5$ (quatro cumprimentos “vezes” cinco pessoas).

E₄: Os alunos podem efetuar a adição: $4 + 3 + 2 + 1 + 0$. A primeira pessoa realiza 4 cumprimentos e, a partir daí, cada uma das outras realiza um cumprimento a menos, para não contar em duplicidade.

Antes da realização da segunda tarefa, os alunos foram orientados a não mais pedir o auxílio de alunos que não integravam a dupla. Assim, a estratégia de simular a situação de forma concreta, não mais lhes seria possível.

A segunda tarefa solicitada era:

Quantos apertos de mão seriam dados se estivessem presentes:

6 pessoas?

7 pessoas?

10 pessoas?

20 pessoas?

Para a realização desta tarefa, adotamos como possíveis estratégias:

E₁: Os alunos podem representar as pessoas por “pontos”, e construir, no papel, um esquema que reproduza a simulação da situação.

E₂: Os alunos podem chegar a conclusão de que cada pessoa realiza um número de cumprimentos uma unidade a menos que o número de pessoas, já que ele não o cumprimenta, e equivocadamente, aplicar o princípio multiplicativo, realizando a operação $(n - 1) \cdot n$ (número de pessoas, menos ele mesmo, “vezes” número de pessoas).

E₃: Os alunos podem efetuar a adição: $(n - 1) + (n - 2) + (n - 3) + \dots + 0$. A primeira pessoa realiza $(n - 1)$ cumprimentos e, a partir daí, cada uma das outras realiza um cumprimento a menos, para não contar em duplicidade.

E₄: Para o preenchimento da tabela, os alunos podem descobrir a seguinte regularidade entre as linhas, onde o total de apertos de mão é encontrado somando-se o número de pessoas e o total de apertos de mão da linha anterior:

Número de pessoas presentes	Total de apertos de mão
2	1
3	3
4	6
5	10
6	15
7	21
10	.
20	.
n	

Figura 5: Possível estratégia (E_4) para segunda tarefa

Porém, essa generalização poderia induzir os alunos a cometer erro na passagem de 7 para 10 pessoas, e de 10 para 20 pessoas, já que essas representações não configuram números inteiros consecutivos.

E_5 : Uma outra forma de regularidade possível para a construção da tabela seria a soma de inteiros consecutivos. Neste caso, o aluno não estaria associando tais inteiros com o número de pessoas n da primeira coluna:

Número de pessoas presentes	Total de apertos de mão
2	1
3	3
4	6
5	10
6	15
7	21
10	.
20	.
n	

Figura 6: Possível estratégia (E_5) para segunda tarefa

A terceira tarefa solicitada era:

*Escreva uma expressão que permita calcular o número **A** de apertos de mão entre um número **n** qualquer de pessoas.*

Para a realização desta tarefa, adotamos como possíveis respostas:

R₁: $A = n \cdot n$. Nesse caso, os alunos estariam admitindo que uma pessoa cumprimenta a si própria, e não perceberia a contagem em duplicidade (quando x cumprimenta y, y cumprimenta x).

R₂: $A = (n - 1) \cdot n$. Nesse caso, os alunos estariam admitindo que uma pessoa não cumprimenta ela mesma, mas estaria ignorando o fato da contagem em duplicidade.

R₃: $A = \frac{(n-1)n}{2}$. Nesse caso o aluno estaria admitindo que uma pessoa não cumprimenta a si mesma, e não estaria realizando a contagem de cumprimentos em duplicidade. Esta seria a resposta esperada.

O objetivo da atividade de sondagem proposta é proporcionar aos alunos um primeiro contato com o pensamento algébrico, de forma que eles percebam a generalização de padrões e propriedades como agente facilitador na resolução de problemas.

As variáveis didáticas admitidas na atividade proposta são observadas nas seguintes passagens:

- Sugestão da tabela: a tabela poderia não estar apresentada como sugestão, devendo o aluno perceber que sua construção poderia facilitar a observação dos resultados encontrados. Assim, o número de “pessoas presentes” que comporia a primeira coluna da tabela, poderia também constituir uma variável didática.

- A expressão que permita calcular o número **A** de apertos de mão entre um número **n** qualquer de pessoas, solicitado no item c da atividade 1, também poderia ser solicitada que fosse representada em língua materna (forma escrita).

2.3 EXPERIMENTAÇÃO

A atividade de sondagem proposta nesta pesquisa foi aplicada a uma turma de 6ª série (7º ano) de uma escola da rede Privada da cidade de Guarulhos, cidade da região metropolitana de São Paulo. A turma é composta por 28 alunos, dos quais 22 estavam presentes na aula em que foi aplicada a atividade. A atividade foi aplicada com a presença da pesquisadora, que é professora da turma e de uma observadora, que foi instruída a não fornecer qualquer orientação aos alunos.

Decidimos trabalhar com uma turma de 7º ano por ser a série em que normalmente se inicia o trabalho com conceitos algébricos, ainda durante o trabalho com os números, explorando padrões em seqüências numéricas e construindo generalizações e suas representações algébricas, por meio da resolução de situações-problema (BRASIL, 1998, p. 68). Dessa forma, a atividade proposta nessa pesquisa foi o primeiro contato que os alunos dessa turma de 7º ano tiveram com a Álgebra elementar, para assegurarmos que a seqüência abordaria a introdução ao pensamento algébrico.

Os alunos foram divididos em duplas, e não foi adotado nenhum critério para suas composições.

Inicialmente, informamos aos alunos a finalidade da atividade que estariam realizando. A seguir, relatamos a importância dos registros para a realização de

nossa pesquisa, já que explicitamos que o que estaríamos analisando seriam suas estratégias de resolução e não apenas as respostas finais.

Os alunos mostraram-se motivados para a realização da atividade. Perguntaram se teriam a ajuda da “professora” (observadora) e neste instante informei-os que realizariam a atividade sem qualquer tipo de interferência de nossa parte. A maioria dos alunos afirmou ter interesse em ter seus diálogos gravados em MP3.

A seguir, organizaram-se em duplas e entregamos a atividade. Neste momento, percebemos uma dificuldade por parte de muitos alunos em entender o que era solicitado como tarefa. Realizamos então uma intervenção na atividade, por julgar que uma interpretação equivocada do que estava sendo solicitado poderia acarretar alterações significativas na realização da atividade. Explicamos então utilizando uma situação hipotética, em que havia três pessoas na reunião. Para isso, pedimos que uma das duplas se levantasse e, com a minha participação, simulamos a situação.

Durante a realização da atividade muitos alunos indagavam às observadoras sobre os resultados encontrados por eles. Realizamos outra intervenção diante de toda a classe, ressaltando novamente que nossas análises se apoiariam em suas estratégias, e não apenas nas soluções encontradas.

2.4 ANÁLISE A POSTERIORI

Nossa análise dos dados coletados se baseará em um modelo qualitativo, por ser nosso objetivo perceber as dificuldades mais incidentes e, assim, construir uma seqüência didática capaz de explorá-las de forma a conduzir os

alunos a um pensamento algébrico mais avançado, segundo Fiorentini (2004), apresentado na página 43 deste trabalho.

Das 11 duplas que desenvolveram a atividade de sondagem, apenas uma delas realizou corretamente todas as tarefas propostas e construiu corretamente a expressão que permitiria calcular o número de apertos de mão entre um número n qualquer de pessoas (item b).

Todavia, nenhuma delas construiu uma expressão utilizando os símbolos A e n , conforme proposto como tarefa no item c. Realizaremos, portanto, uma análise acerca das estratégias realizadas pelas duplas para encontrar as quantidades de apertos de mãos propostas na atividade.

Para a primeira tarefa proposta, que solicitava o número de apertos de mão para 5 pessoas presentes a uma reunião, sete duplas encontraram corretamente o resultado de 10 apertos de mãos. Destacamos em nossa análise *a priori* quatro possíveis estratégias de resolução. São elas:

- E_1 : Os alunos da dupla podem simular a situação com a ajuda de outros alunos da sala.

Nenhuma das duplas utilizou esta estratégia para encontrar a resposta do problema.

- E_2 : Os alunos podem representar as pessoas por “pontos”, e construir, no papel, um esquema que reproduza a simulação da situação.

Duas duplas encontraram corretamente a resposta do problema utilizando esta estratégia. Neste sentido, entendemos que os alunos que compõem estas duplas realizaram uma tentativa de representar a situação de forma “concreta”.

- E_3 : Os alunos podem chegar à conclusão de que cada pessoa realiza quatro cumprimentos e, equivocadamente,

aplicar o princípio multiplicativo, realizando a operação $4 \cdot 5$ (quatro cumprimentos “vezes” cinco pessoas).

Duas duplas encontraram a resposta do problema utilizando esta estratégia. Neste caso, as duas duplas registraram como resultado o número 20. Entendemos que houve um erro de interpretação do problema, uma vez que os alunos não admitiram a reciprocidade do cumprimento.

- E₄: Os alunos podem efetuar a adição: $4 + 3 + 2 + 1 + 0$. A primeira pessoa realiza 4 cumprimentos e, a partir daí, cada uma das outras realiza um cumprimento a menos, para não contar em duplicidade.

Quatro duplas encontraram corretamente o resultado do problema utilizando esta estratégia. Assim, inferimos que houve uma interpretação correta do problema, tratado aritmeticamente.

Duas duplas utilizaram estratégias que não foram previstas em nossa análise *a priori*. Uma delas desenvolveu uma forma de resolução que admite em dois momentos distintos que uma pessoa não cumprimenta a si própria.

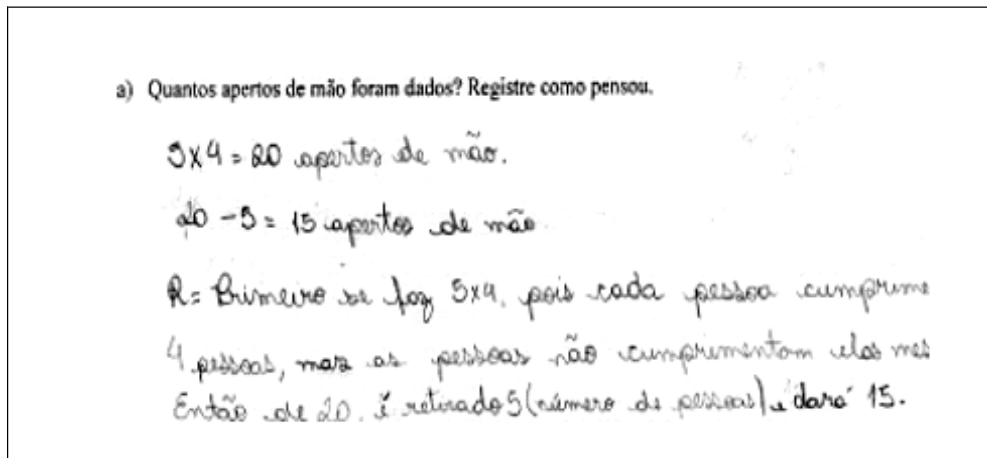


Figura 7: Protocolo I atividade de sondagem

Ao realizar a operação “5x4” o aluno admite que a pessoa não cumprimenta a si própria e, ao retirar 5 unidades do número total de apertos de mão encontrado, admite o fato novamente, subtraindo a quantidade de 5 apertos de mão em duplicidade. Entendemos que o erro foi proveniente de uma interpretação equivocada do problema.

A outra dupla a construir uma estratégia não prevista em nossa análise *a priori* desenvolveu um princípio de contagem baseada em análise combinatória, a partir de uma árvore de possibilidades.

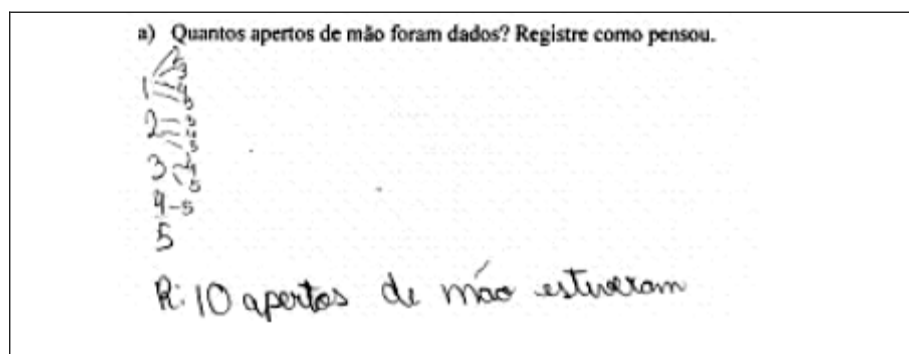


Figura 8: Protocolo II atividade de sondagem

Para a segunda tarefa proposta, que solicitava o número de apertos de mão para 2, 3, 4, 6, 7, 10, 20 e n pessoas presentes a uma reunião, apresentados sob a forma de tabela, 2 das 10 duplas em análise acertaram todos os resultados esperados, com exceção da expressão que generalizaria a estratégia utilizada, que não foi construída por nenhuma das 10 duplas.

Das 8 duplas que apresentaram algum tipo de erro durante a realização da segunda tarefa, destacamos algumas das estratégias previstas em nossas análises:

- E₂: Os alunos podem chegar a conclusão de que cada pessoa realiza um número de cumprimentos uma unidade a

menos que o número de pessoas, já que ele não o cumprimenta, e equivocadamente, aplicar o princípio multiplicativo, realizando a operação $(n - 1) \cdot n$ (número de pessoas, menos ele mesmo, “vezes” número de pessoas).

Uma das duplas utilizou esta estratégia, encontrando erroneamente os resultados. Entendemos que o erro, neste caso, é proveniente de uma interpretação equivocada do problema uma vez que os alunos não admitiram a reciprocidade do cumprimento.

- E₃: Os alunos podem efetuar a adição: $(n - 1) + (n - 2) + (n - 3) + \dots + 0$. A primeira pessoa realiza $(n - 1)$ cumprimentos e, a partir daí, cada uma das outras realiza um cumprimento a menos, para não contar em duplicidade.

Cinco duplas utilizaram esta estratégia. Para as duas primeiras quantidades de pessoas propostas, 6 e 7, todas encontraram corretamente os resultados. Para a proposta de 10 pessoas, três duplas acertaram e, para 20 pessoas, apenas duas duplas encontraram a resposta correta: 190 apertos de mão. Observamos que, quanto maior o número de pessoas propostas, maior a frequência de erros com a utilização desta estratégia. Entendemos que os resultados errados foram provenientes de uma adição com grande número de parcelas, conforme exemplo de protocolo.

40 - 60 - 45
 40 30 30 30 15
 20 pessoas?
~~45 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19~~
 R: 195 apertos.

Figura 9: Protocolo III atividade de sondagem

Neste caso, o número 45 registrado antes da adição com 10 parcelas, é proveniente do resultado encontrado anteriormente, para a proposta de 10 pessoas.

Duas duplas desenvolveram estratégias não previstas em nossa análise *a priori*. Tratam-se das mesmas duplas que as utilizaram na primeira tarefa. Uma delas utilizou novamente um princípio de contagem baseada em análise combinatória, à partir de uma árvore de possibilidades, e acertou todos os resultados. A outra dupla, também referenciada na análise da tarefa anterior, admitiu em dois momentos distintos que uma pessoa não cumprimenta a si própria, e errou todos os resultados.

Ainda nesta tarefa, foi solicitado que, na última linha da tabela proposta os alunos escrevessem o total de apertos de mão para n pessoas. Das 11 duplas que estamos analisando, 5 não responderam; 5 duplas admitiram um valor qualquer para n e realizaram, então, os cálculos seguindo as estratégias relatadas anteriormente. Entendemos que, em ambos os casos, existiu uma predominância do pensamento aritmético, evidenciando uma dificuldade em associar n como sendo um número genérico qualquer. Conforme já relatado, apenas uma das duplas construiu a expressão que permitiria calcular o número de apertos de mãos entre um número n qualquer de pessoas.

A terceira tarefa proposta solicitava que os alunos escrevessem uma expressão utilizando os símbolos A para representar o total de apertos de mão e n para representar um número qualquer de pessoas. Nenhuma das 11 duplas analisadas construiu tal expressão. Em todos os casos, o que ocorreu foi uma descrição, em língua materna, da estratégia utilizada durante a atividade.

Após analisarmos as estratégias e resultados obtidos pelos alunos, elencamos uma série de dificuldades apresentadas, com o objetivo de justificar a construção da seqüência a ser aplicada posteriormente.

- Transição do pensamento aritmético (concreto) para o pensamento algébrico (abstrato);
- Interpretação da situação proposta, uma vez que foi freqüente a realização do princípio multiplicativo $[n \cdot (n - 1)]$ sem admitirem a reciprocidade dos cumprimentos;
- Desenvolver uma estratégia de contagem que substituiria a abordagem estritamente aritmética do problema proposto;
- Atribuir um tratamento genérico ao símbolo n , o que denota uma resistência em admitir resultados que não sejam aritméticos em problemas;
- Construir expressões que associem duas grandezas;
- Construir expressões com o uso de símbolos.

CAPÍTULO III

A SEQÜÊNCIA DIDÁTICA: DESENVOLVIMENTO DAS SESSÕES E ANÁLISE DOS RESULTADOS

Neste capítulo relatamos a fase experimental da atividade e elementos de uma análise *a priori* e *a posteriori* das atividades e das resoluções observadas, em sentido qualitativo e quantitativo.

Num primeiro momento, apresentaremos a seqüência didática desenvolvida, realizando um comparativo entre os objetivos individuais e coletivos de cada atividade ou sessão com as dificuldades apresentadas em análise dos resultados da atividade de sondagem. Tais objetivos serão aprofundados durante análise de cada sessão.

A primeira sessão foi composta por duas atividades. Segue o diálogo do pesquisador com os alunos:

1. *Pesquisador:* Vocês irão me dizer alguns números e farei alguma (s) operação (ões) com ele. Vou dizer o resultado e vocês têm que descobrir o “segredo”, ou seja, quais as operações realizadas com o número que vocês haviam me dito.
2. Para esta atividade propomos que os segredos fossem criados por um dos alunos da dupla e descoberto pelo colega, e vice-versa, registrando os resultados em uma ficha como a seguinte;

Número	Número com “segredo”
Segredo:	

Construímos as atividades desta sessão com o objetivo de iniciarmos o desenvolvimento do pensamento abstrato nos alunos. Dessa forma, estaríamos explorando a primeira dificuldade elencada no capítulo anterior, após análise da atividade de sondagem: transição do pensamento aritmético (concreto) para o pensamento algébrico (abstrato). Entendemos que os alunos trabalhariam inconscientemente o conceito de variável, uma vez que os diferentes valores propostos por eles seguiam uma mesma seqüência de operações previamente definidas (“segredo”).

A segunda sessão foi composta por três atividades. Apresenta-se a seguir o diálogo entre o pesquisador e os alunos:

1. *Pesquisador:* Pensei em dois números e somando-os, obtive 12. Em que números eu posso ter pensado?
2. *Pesquisador:* Pensei em um certo número e, ao somá-lo com 12, obtive 39. Em que número pensei? (apresentada apenas oralmente).
3. *Pesquisador:* Agora, vou ditar um problema e vocês terão que representá-lo apenas utilizando símbolos, matemáticos ou não. Ou seja: vocês criarão uma “frase matemática” para o problema e depois, tentarão resolvê-lo. A soma de um número com 112 resulta 347. Que número é esse?

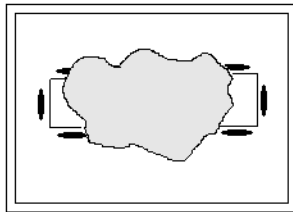
A atividade 1 desta sessão tinha ainda o objetivo de explorar o pensamento abstrato por meio do trabalho com o conceito de variável. Prevíamos, com isso, que os alunos percebessem que os dois números citados poderiam assumir diferentes valores, mantendo a soma 12.

A segunda e terceira atividades foram apresentadas apenas oralmente com o objetivo de incitarmos nos alunos uma necessidade a representação simbólica de quantidades desconhecidas. O valor desconhecido poderia ser encontrado mesmo sem conhecerem técnicas para a resolução de equações do primeiro grau, podendo fazer uso apenas de operações inversas.

Ao realizarem as atividades propostas nesta sessão, seria explorada uma das dificuldades encontradas durante análise dos resultados da atividade de sondagem: construir expressões com o uso de símbolos.

A terceira sessão foi composta por duas atividades:

1. Pesquisador: Vamos estudar como as pessoas costumam se sentar num bar. Numa mesa, podem sentar-se 4 pessoas (exposição com material lúdico). Juntando duas mesas, poderão se sentar 6 pessoas (exposição com material lúdico). Vocês receberão uma ficha para responder quantas pessoas poderiam se sentar juntando 3, 4, 10 ou 13 mesas. Ao lado vocês deverão justificar como chegaram ao resultado apresentado.
2. Pesquisador: Como você contaria a quantidade de pessoas que poderiam se sentar aqui? Vocês não sabem o número de mesas atrás do desenho, que não aparece em escala. Mas se soubessem, como fariam? Discuta com seu colega qual a melhor forma de escrever isso matematicamente.



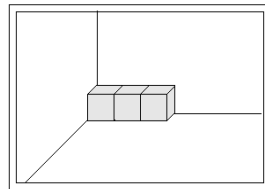
A primeira atividade tinha o objetivo de fazer com que os alunos desenvolvessem uma estratégia de contagem à partir dos primeiros resultados, que prevemos ser encontrados concretamente com o manuseio do material fornecido. Desenvolvendo uma estratégia que associe diretamente o número de pessoas que poderiam se sentar com a quantidade de mesas proposta, seria possível realizar a tarefa solicitada na atividade 2, em que o aluno descreveria matematicamente, com uso de símbolos, a estratégia desenvolvida. Apesar de

esperarmos que o registro simbólico também ocorresse nas sessões anteriores, inferimos que nesta sessão os alunos a construiriam com maior facilidade, uma vez admitido que algumas das dificuldades apresentadas durante a atividade de sondagem já foram exploradas nas duas sessões anteriores.

Dessa forma, estaríamos focando nesta sessão o trabalho com quatro dificuldades apresentadas anteriormente: desenvolver uma estratégia de contagem que substituiria a abordagem estritamente aritmética do problema proposto; atribuir um tratamento genérico a um símbolo qualquer, criado pelos próprios alunos; construir expressões que associem duas grandezas e construir expressões com o uso de símbolos.

A quarta sessão foi composta por uma única atividade:

Um primeiro cubo foi colocado no chão, no canto de uma sala. Os outros também serão colocados no chão, encostados numa parede, formando uma fila.




Qual será o número de faces expostas se enfileirarmos 1, 2, 5, 8, 15 e 35 cubos (Justifique):

Escreva, de modo geral, como você concluiu estes resultados.

O que se pode afirmar sobre o número de faces expostas? Será sempre par? Será sempre ímpar? Por quê?

Imagine que enfileirássemos um número de cubinhos, mas você não sabe qual é. Vamos chamar este valor desconhecido de \square (crie neste espaço um símbolo para representar este valor). Escreva, usando símbolos matemáticos e

o símbolo que você criou, uma expressão que represente quantas faces conseguiríamos ver nessa fileira com  cubinhos.

Esta sessão finaliza a seqüência didática proposta, e portanto exige do aluno todos os conceitos trabalhados nas sessões anteriores. Inicialmente espera-se que o aluno desenvolva uma estratégia de contagem do número de faces expostas à partir de uma regularidade observada nas primeiras quantidades de cubos propostas. Após definir esta estratégia, espera-se que registrem, em língua materna como encontraram os resultados registrados. A indagação sobre o número de faces expostas ser sempre par ou ímpar apresentaria uma orientação implícita de que a face exposta na lateral da fileira de cubos implicaria num resultado sempre ímpar, já que todos os cubos enfileirados apresentam a face frontal e superior expostas. E por fim, propomos que o aluno crie sua própria simbologia para representar o valor desconhecido (quantidade de cubos enfileirados) e assim, dar significado a este símbolo durante a construção da expressão algébrica. Entendemos que, nesta sessão serão exploradas todas as dificuldades observadas durante a análise da atividade de sondagem e verificar se houve evolução do pensamento algébrico desses alunos.

3.1 PRIMEIRA SESSÃO

A primeira sessão teve duração de aproximadamente duas aulas (120 minutos), e contamos com a participação de 14 alunos, organizados em duplas.

A sessão aconteceu fora do horário normal das aulas regulares dos alunos, que foram convidados a participar de uma pesquisa que trata sobre a introdução ao pensamento algébrico.

Para a aplicação das atividades que compunham a sessão, além da participação da pesquisadora, contamos com a colaboração de uma professora, também integrante do Programa de Pós - Graduação em Ensino de Matemática da PUC - SP, que assim como a pesquisadora, aplicou as atividades com cada dupla, separadamente das demais, e de forma subsequente, de forma a não ter interação entre as duplas, evitando-se assim uma possível contaminação das respostas. Os registros foram gravados em MP3 e, a segunda atividade da sessão apresentou, ainda, registros escritos dos alunos.

A aplicação das atividades em cada dupla deu-se de forma separada das demais para que os protocolos, gravados e escritos, fossem bastante detalhados, já que a presente pesquisa tem por objetivo estabelecer uma análise qualitativa dos resultados obtidos como fonte de dados para respondermos nossa questão de pesquisa.

3.1.1 A ATIVIDADE 1

O objetivo da atividade 1 da primeira sessão é explorar a oralidade durante a construção do pensamento algébrico. A abstração estará inserida num campo aritmético, uma vez que os alunos terão como tarefa descobrir as operações aritméticas realizadas com um número qualquer, fornecido previamente por eles.

A seguir apresentaremos a primeira atividade aplicada. A mesma contou apenas com registro gravado, por tratar-se de uma atividade oral.

Pesquisador: Vocês irão me dizer alguns números e farei alguma (s) operação (ões) com ele. Vou dizer o resultado e vocês têm que descobrir o

“segredo”, ou seja, quais as operações realizadas com o número que vocês haviam me dito.

Para ilustrar a aplicação da atividade, apresentamos um exemplo:

Pesquisador: Diga um número.

Aluno: 4.

Pesquisador: 6. Diga outro.

Aluno: 15

Pesquisador: 17. Já descobriram?

Aluno: Você está somando 2 ao número que eu falo.

Os “segredos” aplicados aos números propostos pelos alunos foram:

1º - Somar 2

2º - Dobrar

3º - Dobrar e somar 1

4º - Dividir por dois

Para a primeira atividade da sessão, planejamos um problema que, para sua realização, entendemos que os alunos apresentam os conhecimentos necessários, mas necessitam ser inicialmente identificados por eles e, depois, sofrer alguma adaptação antes que sejam aplicados, sendo portanto conhecimentos mobilizáveis, nos termos de Robert (1998)

Para a realização desta primeira atividade da sessão 1, os alunos devem ter um conhecimento prévio sobre as principais operações aritméticas. Por tratar-se de alunos de 7º ano, espera-se que ao menos as quatro operações fundamentais já tenham sido muito bem trabalhadas desde as séries iniciais. Fizemos a opção (variável didática) de abordar apenas as quatro operações

fundamentais, minimizando assim a complexidade cognitiva da atividade, preparando para o que é efetivamente o foco de nossa pesquisa, ou seja, para a busca de padrões.

Após o aluno ter o primeiro contato com o problema proposto, inicia-se o processo para encontrar a seqüência de operações aritméticas realizadas com números previamente propostos, em forma seqüencial (um após o outro). Tal processo almeja a abstração a partir de operações aritméticas e suas propriedades (particularmente comutativa e associativa), já conhecidas pelos alunos.

Espera-se como possível estratégia de resolução desta atividade que os alunos façam conjecturas acerca das operações aritméticas realizadas mentalmente. Outra técnica possível seria exatamente a explicitação por escrito da seqüência de operações escolhidas, para que a visualização facilite a validação por tentativa e erro em outros valores indicados. A possibilidade de verificar a aplicação da seqüência descoberta em outros números também propostos favorece a validação de suas conjecturas.

A explicitação por escrito será adotada aqui como possível estratégia de resolução por não determinarmos na apresentação da atividade que os alunos não poderiam utilizar quaisquer registros gráficos.

Uma possível dificuldade a ser encontrada pelos alunos seria a possibilidade de mais de uma operação que relacione o valor de partida ao valor de chegada. Assim, se o aluno dissesse, por exemplo, 4, e o pesquisador respondesse 8, as operações realizadas poderiam ser adicionar 4 ou multiplicar por 2. Essa ambigüidade deve ser sanada pela comparação entre os outros valores de partida e de chegada de uma mesma seqüência apresentada. É importante que os alunos percebam que em casos como esse, inicialmente haveria mais de uma resposta válida, e que apenas a validação pragmática com outros valores permite uma tomada de decisão.

Faremos a seguir uma análise qualitativa e quantitativa a partir dos resultados observados nesta primeira atividade da sessão 1.

A análise quantitativa se dará a partir do número de tentativas antes de chegarem à resposta esperada, uma vez que todas as duplas chegaram a tais respostas, variando de 1 a 16 tentativas, conforme quadro demonstrativo. Denominamos aqui “tentativas” a quantidade de números propostos pelo pesquisador até que a dupla descobrisse o “segredo”.

Quadro 4. Quantidade de tentativas das duplas antes de chegar à resposta esperada

“Segredo”	Nº de tentativas				
	1	2 a 3	4 a 5	6 a 7	8 ou mais
Somar 2	2	4	1	-	-
Dobrar	2	4	-	-	1
Dobrar e somar 1	2	-	1	3	1
Dividir por 2	4	2	1	-	-

Observando a tabela acima, percebe-se uma maior dificuldade para se descobrir o “segredo” dobrar e somar 1, mesmo sendo subsequente ao “segredo” dobrar, o que julgávamos, durante a elaboração da seqüência, atuar como agente facilitador. O protocolo seguinte é um exemplo do tipo de aplicação da atividade e da estratégia utilizada pelo aluno e o tipo de dificuldade encontrada (possibilidade de mais de uma operação como segredo procurado).

Pesquisador: Agora eu vou fazer outro “segredo”. Digam um número qualquer.

Aluno 1: 10.

Pesquisador: 20.

Aluno 2: Multiplicação.

Pesquisador: O que eu fiz com o número?

Aluno 2 : Multiplicou por dois.

Pesquisador: Você tem certeza?

Aluno 1 : Ou somou “mais” 10.

Pesquisador: Então fala outro nº pra gente ter certeza.

Aluno 1 : 6

Pesquisador: 12

[...]

Pesquisador: Qual é o “segredo”?

Aluno 2: Multiplicação.

Pesquisador: Por quanto eu estou multiplicando?

Aluno 2: Por 2.

Pesquisador: É isso? (perguntando ao aluno 1)

Aluno 1: É.

Outra situação em que o mesmo ocorreu foi a seguinte:

Pesquisador: ... Digam um número qualquer.

Aluno 4: 6

Pesquisador: 12.

[...]

Pesquisador: Já dá pra saber?

Aluno 4 : Já. Tá “juntando” 6.

Pesquisador: Ah é? É isso mesmo,?

Aluno 3 : Eu achei que era “vezes” 2.

Pesquisador: Então fala outro pra gente ter certeza.

Aluno 3: 10

Pesquisador: 20

Aluno 3: Ah, multiplicou por dois.

Pesquisador: (Olhando para aluno 4) Se o “segredo” fosse somar 6, eu teria respondido o quê?

Aluno 4: Ela falou... 10, né. Então ia ser 16...

Nas situações em que essa ambigüidade não aconteceu, os alunos, em sua maioria, num primeiro momento apenas nomeavam a operação aritmética realizada – adição, subtração, multiplicação ou divisão. Só depois apresentavam a parte numérica (os detalhes) de tais operações. Percebemos que talvez, um dos motivos que levaram os alunos a se expressarem dessa forma foi o modo como apresentamos a atividade para algumas duplas: “... *vocês devem descobrir qual, ou quais operações estou fazendo com o número que vocês me dirão...*”. Para ilustrar tais situações, apresentaremos alguns exemplos.

Pesquisador: Vocês vão me dizer um número qualquer, e eu vou aplicar um “segredo” nesse número. Esse “segredo” são operações que eu vou fazer mentalmente com o número. Vocês têm que descobrir quais são essas operações, tudo bem?! Digam um número qualquer.

Aluno 2: 8

Pesquisador: 10

[...]

Pesquisador: Qual é o segredo? Já dá pra saber?

Aluno 1: Já. Uma adição.

Pesquisador: Uma adição de quanto?

Aluno 2: Tá somando 2.

Outro exemplo que ilustra essa situação é o seguinte:

Pesquisador: Então a gente vai pra outro segredo, tá. Digam um número.

Aluno 9: 5

Pesquisador: 2,5

Aluno 10: Ah, você tá dividindo...

Pesquisador: Dividindo por quanto?

Aluno 9 e aluno 10: Por 2.

Assim, as possíveis dificuldades previstas para a realização desta atividade realmente aconteceram em algumas situações. Não constatamos dificuldades não previstas em nossa análise a priori. Observou-se que o conhecimento da adição e multiplicação era disponível para esses alunos, nos termos de Robert (1998). Conforme apresentamos anteriormente no texto, as operações se apresentaram como conhecimentos disponíveis e estáveis com todos os alunos participantes, ou seja, pudemos constatar que o “meio” organizado pelo pesquisador coincidia com o “meio” efetivo mobilizado pelos alunos, nos termos de Perrin-Glorian e Hersant (2003). A não dificuldade para encontrar a operação efetuada pode indicar uma prontidão cognitiva para a pesquisa de padrões simples.

3.1.2 A ATIVIDADE 2

O objetivo da atividade 2 da primeira sessão é explorar, mais uma vez, a abstração inserida num campo aritmético. Desta vez, as operações serão compostas e descobertas pelos próprios alunos de cada dupla, e os mesmos

utilizarão registros numéricos, expressos em forma tabular. Tais registros terão a finalidade de atuar ainda como “agente facilitador” enriquecendo as possibilidades de estratégia para resolução do problema, orientando também a atividade para a percepção de padrões.

Cada aluno formulou dois “segredos” e descobriu também dois “segredos”, num total de quatro fichas por dupla.

A seguir apresentaremos a atividade 2 desta sessão. A mesma contou com registro gravado e escrito.

Número	Número com “segredo”
Segredo:	

O aluno que terá que descobrir e registrar o “segredo” do outro, começa colocando um número qualquer na primeira coluna. Entrega a ficha para o colega que tem o “segredo”. Este, por sua vez, escreverá o resultado (número com “segredo”) na segunda coluna. Estão propostas até três tentativas. Ao descobrir o “segredo” formulado pelo colega, o aluno deverá escrevê-lo na última linha da tabela.

Para a segunda atividade da sessão, formulamos, assim como na primeira, um problema em que fossem necessários conhecimentos de níveis mobilizáveis para sua resolução, adotando o uso de tabelas como uma variável didática.

A segunda atividade desta sessão contemplou o uso de tabelas para o registro com a finalidade de induzir o aluno a uma possível generalização de padrões aritméticos. Espera-se que a generalização desenvolva-se na forma de língua materna, uma vez que o “segredo” aplica-se a valores pré-determinados pelo próprio aluno.

Após o primeiro contato dos alunos com o problema proposto, inicia-se o processo para encontrar a seqüência de operações aritméticas formuladas por um dos alunos da dupla (aluno A) e aplicadas a um número previamente proposto por um aluno B. Tal processo almeja explorar a abstração a partir de operações aritméticas já conhecidas pelos alunos. A utilização dos registros sob a forma de tabelas possibilita uma introdução à generalização de padrões, nesse caso, aritméticos.

Por tratar-se de um problema proposto com o registro numérico, espera-se que os alunos construam conjecturas acerca das operações aritméticas realizadas apropriando-se da visualização dos resultados, propostos sob a forma de tabela. A possibilidade de verificar a aplicação da seqüência descoberta em outros números também propostos favorece a validação de suas conjecturas.

Para a realização da atividade 2 desta primeira sessão, os alunos devem apresentar, assim como para a atividade 1, apenas um conhecimento disponível das operações básicas isoladas.

As possíveis dificuldades encontradas seriam as mesmas elencadas para a atividade anterior: a possibilidade de mais de uma operação, ou seqüência de operações válidas. Nesse sentido o conhecimento sobre operações e suas relações deveria ser, pelo menos, mobilizável.

Faremos a seguir uma análise qualitativa e quantitativa a partir dos resultados observados nesta segunda atividade da sessão 1.

Todos os alunos descobriram o “segredo” do colega. Porém, em uma das duplas, foram necessárias 7 tentativas e em outra, 4. Nas demais duplas e situações, as três tentativas foram suficientes.

Apresentamos uma análise quantitativa dos resultados obtidos à partir do número de tentativas necessárias para se descobrir o “segredo” do colega.

Consideramos “tentativa” a quantidade de números em que foram aplicados cada “segredo” formulado. Cada dupla construiu 4 fichas, totalizando 28.

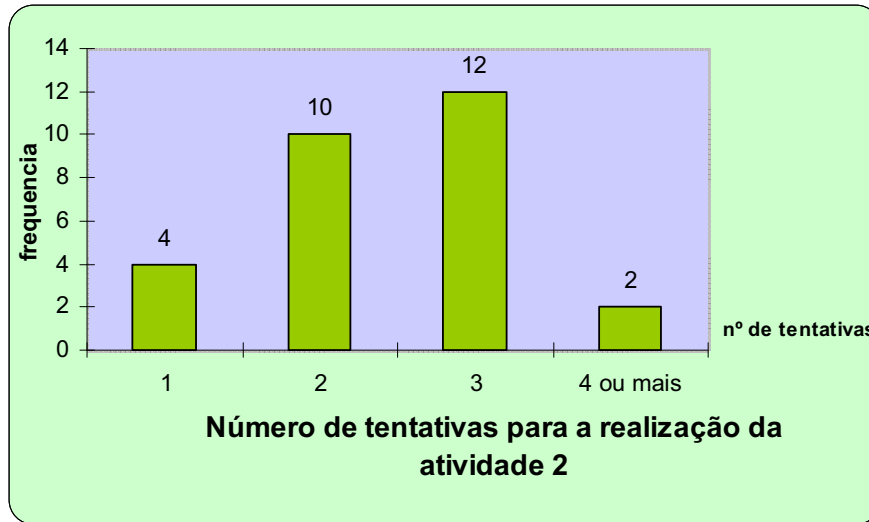


Gráfico 1: Número de tentativas para descobrir o “segredo” – primeira sessão.

Observando o gráfico construído, percebemos uma maior freqüência de três tentativas. Uma possível causa seria a proposta de três tentativas na ficha que os alunos registraram seus resultados, mesmo sendo alertados sobre a possibilidade de escreverem o “segredo” imediatamente após o descobrirem.

Encontramos casos em que os alunos demonstram algumas dificuldades, já previstas anteriormente: a possibilidade de mais de uma operação, ou seqüência de operações válidas. Um exemplo desse tipo de dificuldade pode ser observado no protocolo seguinte:

Número	Número com "segredo"
15	30
40	55
"Segredo": Aumentando 15	

Figura 10: Protocolo dos alunos 3 e 4 para atividade 2 da primeira sessão

Segue o diálogo da situação destacada:

Inicialmente, a situação apresentava-se da seguinte maneira:

Número	Número com "segredo"
15	30

Figura 11: Protocolo parcial dos alunos 3 e 4 para atividade 2 da primeira sessão

Aluno 3: Multiplica por 2

Aluno 4: Não...

Aluno 3: Não?!!!

Pesquisador: Escreva mais um número pra ela fazer o "segredo" novamente.

O segundo número em que o segredo foi aplicado foi:

Número	Número com "segredo"
15	30
40	55

Figura 12: Protocolo parcial dos alunos 3 e 4 para atividade 2 da primeira sessão

Aluno 3: Aumenta 15 ou multiplica por 2.

Pesquisador: Você ainda tem dúvidas?

Aluno 3: Não. Aqui ela multiplicou por 2. (Aponta para a primeira linha da tabela)

Pesquisador: Mas e na outra? (Aponta a segunda linha da tabela)

Aluno 3: Ai ela somou 15.

Pesquisador: Mas é o mesmo segredo para as duas linhas.

Aluno 3: Então tem que ser somar 15.

Observa-se nesse diálogo que os alunos não apresentaram nenhuma dificuldade quanto ao aspecto cognitivo para a resolução do problema proposto. A hesitação quanto à operação realizada vem da efetiva existência de mais de uma possibilidade ao ser observada apenas a primeira linha da tabela.

Numa outra situação, além da possibilidade de mais de uma seqüência de operações válidas, também surgiu a oportunidade de explorar-se as operações inversas entre si.

A ficha recolhida na situação foi a seguinte:

Número	Número com "segredo"
10	10
20	20
80	80
"Segredo": Invertem para ser X2	

Figura 13: Protocolo dos alunos 7 e 8 para atividade 2 da primeira sessão

Segue o diálogo da situação destacada:

Após a primeira linha ser preenchida, o aluno que tinha a função de descobrir o "segredo" do colega sorri, e diz:

Aluno 8: Mas não mudou nada...

Pesquisador: Se você está com dúvidas, coloca outro número.

Antes de registrar um novo número, o aluno diz:

Aluno 8: Ele dividiu por 2 e somou 5.

Pesquisador: É este o “segredo”? (Perguntando ao aluno 7)

Aluno 7: Não.

Pesquisador: Então escreva outro número.

Após registrar o segundo número, e aplicar o “segredo”, a situação apresentava-se neste ponto:

Número	Número com “segredo”
10	10
20	20

Figura 14: Protocolo parcial dos alunos 7 e 8 para atividade 2 da primeira sessão

Aluno 8: Ele somou zero.

Pesquisador: Foi isso?

Aluno 7: Não.

Aluno 8: Não?!!!

Pesquisador: Escreva mais um número.

Neste momento, após a aplicação do “segredo”, a ficha apresentava-se da seguinte forma:

Número	Número com "segredo"
10	10
20	20
80	80

Figura 15: Protocolo parcial dos alunos 7 e 8 para atividade 2 da primeira sessão

Aluno 8: Dividiu por 2 e fez "vezes" 2.

Aluno 7: É.

Pesquisador: Nossa, eu pensei em tanta coisa... Que outro "segredo" poderia ser?

Aluno 8: Não podia ter sido "mais" zero?

Pesquisador: O que você acha? (Perguntando ao aluno 7)

Aluno 7: Podia também... Mas não era...

Aluno 8: Podia ser "mais" 9 e "tirar" 9.

Neste momento, o pesquisador institucionalizou a situação, que não estava prevista antes da aplicação.

Pesquisador: E você pensou em "multiplicar" primeiro ou "dividir" primeiro? (Perguntando ao aluno 7)

Aluno 7: Multiplicar.

Pesquisador: E se você tivesse pensado em "dividir" primeiro?

Aluno 7: Dava no mesmo.

Pesquisador: E você sabe me dizer o porquê?

Aluno 7: 10 dividido por 2 dá 5. Vezes 2 dá 10. E do outro jeito, 10 vezes 2 dá 20. Dividido por 2 dá 10 também. É por isso.

Percebemos aqui que o aluno realizou a validação de sua conjectura, porém não numa linguagem matemática formal. Dessa forma, podemos inferir que o aluno construiu o conceito, mesmo sem denominá-lo de operações inversas entre si, conhecimento mobilizável, nos termos de Robert (1998).

Assim, o pesquisador decidiu por realizar uma breve formalização, durante a institucionalização da situação:

Pesquisador: Chamamos essas operações de “inversas”. A operação inversa da adição é a subtração, e vice-versa. E a operação inversa da multiplicação é a divisão, e vice-versa.

Percebemos nesta segunda atividade que, de modo geral, as operações, elaboradas pelos próprios alunos, foram mais complexas que as propostas pelo pesquisador na atividade 1.

A seguir apresentamos uma situação em que, além do “segredo” ser composto por uma seqüência de operações mais complexas que as propostas pelo pesquisador, possibilitou um trabalho com operações envolvendo frações. Esta foi uma das situações mencionadas anteriormente, em que foram necessárias mais de três tentativas para que o aluno descobrisse o “segredo”.

A ficha recolhida na referida situação foi a seguinte:

Número	Número com “segredo”
12	9
3	4,5
10	8
“Segredo”: acrescenta 6 ed. de por 2 ou divide por dois mais 3	

100 53

Frente
Verso

Figura 16: Protocolo dos alunos 11 e 12 para a atividade 2 da primeira sessão

Após a primeira linha, o aluno responsável por descobrir o “segredo” diz:

Aluno 12: Diminuiu 3.

Pesquisador: Só pode ser este o “segredo”? Não pode ser outra coisa?

[...]

Pesquisador: Coloque outro número pra termos certeza.

O aluno 12 registra então o número 3. Neste momento, o aluno 11, que tinha a função de formular o “segredo” pergunta:

Aluno 11: Faz outra conta?

Pesquisador: Você tem que aplicar o mesmo “segredo” da primeira linha.

Neste momento o aluno 11 demonstra uma certa dificuldade para registrar o resultado. O pesquisador oferece então um rascunho para que ele efetuasse os cálculos necessários. Enquanto isso, o aluno 12 prevê o resultado, formulado com base no “segredo” dito inicialmente: diminuir 3.

Aluno 12: Ele tem que por zero...

Pesquisador: Vamos aguardar...

O aluno 11 devolve então a ficha com o número 4,5 registrado.

Aluno 12: Eita... Se for o mesmo “segredo” eu não vou descobrir nunca.

Pesquisador: Coloca outro número.

O aluno 12 pensa por alguns instantes e antes de registrar sua terceira tentativa diz:

Aluno 12: Ah, tem um jeito... Ele faz... vezes 3 e depois divide por 2. Aí fica 9 dividido por 2, dá 4,5. (apontando a segunda linha da tabela)

Pesquisador: Veja se daria certo para a primeira linha.

Aluno 12: 12 vezes 3 dá 36. Dividido por 2 dá.... É, então não é isso...

Pesquisador: Marca outro número então.

O aluno 12 registra o número 10, e seu colega rapidamente registra ao lado o número 8.

Aluno 12: Não faço a mínima idéia. Não sei o que ele fez aqui não...

Pesquisador: Marca outro número... pode ser aqui atrás mesmo.

Em sua quarta tentativa, o aluno 12 registrou o número 100. Este parece ter sido um agente facilitador na busca do resultado esperado (ou seja, na identificação do segredo), já que após o colega registrar o resultado, 53, ao lado:

Aluno 12: Ah, só se ele dividiu por 2 e somou 3... ou somou 6 e dividiu por 2. Ou não é nada disso?

Pesquisador: Confira os resultados.

Aluno 12: 12 mais 6, 18. Divide por 2, 9.

Pesquisador: E na segunda linha?

Aluno 12: 3 soma 6, 9. Dividi por 2, 4,5.

Pesquisador: E qual era o outro segredo que você tinha falado?

Aluno 12: Dividiu por 2 e depois somou 3.

Pesquisador: Veja se daria certo...

Aluno 12: 12 dividido por 2, 6. Mais 3, 9. Dá certo.

Pesquisador: E a outra linha?

Aluno 12: 3 dividido por 2, 1,5. Mais 3, 4,5. Também deu.

Pesquisador: Em qual deles você havia pensado?

Aluno 11: Dividir por 2 e colocar "mais" 3.

Pesquisador: E por que será que os dois "segredos" dão o mesmo resultado?

Após alguns instantes de silêncio, os alunos afirmaram não saber. Neste momento, o pesquisador, durante a institucionalização da situação de aprendizagem, explica o que ocorreu, utilizando um caso particular: o número 10, presente na terceira linha da tabela. A escolha de um caso particular deu-se devido ao fato da atividade tratar-se de uma seqüência didática para a introdução ao pensamento algébrico, e, portanto, uma generalização com o uso de uma variável não seria recomendada.

Pesquisador: Se tivéssemos, por exemplo, o número 10. Dividíssemos por 2, e depois somássemos 3.

Durante sua fala, o pesquisador registra:

$$\frac{10}{2} + 3$$

O uso da fração como divisão não pareceu um obstáculo didático, já que um dos alunos, neste momento, perguntou se a representação não poderia ser também na forma: $10 : 2 + 3$. O pesquisador então afirma que sim, mas utilizará a representação na forma de fração para facilitar a visualização da explicação. Não demonstraram resistência, e afirmaram que estavam aprendendo “frações” nas aulas regulares. Ou seja, esse conhecimento ainda não é disponível, mas os dados (protocolo) nos permite inferir que é um conhecimento mobilizável, já que consegue fazer adaptações além das requeridas no nível técnico.

Pesquisador: Vocês se lembram o que são frações equivalentes?

Aluno 11: Sei. É aquele negócio assim: 1 sobre 2. Aí faz 1 vezes 3 e 2 vezes 3. Fica 3 e 6.

Esta explicação ocorreu durante um registro gráfico que segue abaixo:

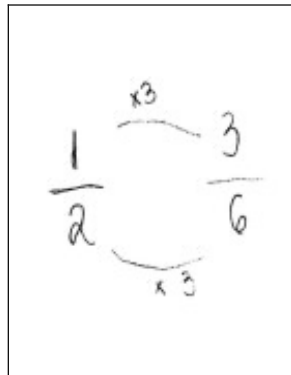


Figura 17: Registro I dos alunos 11 e 12 sobre frações equivalentes

Pesquisador: É quase isso. Elas se chamam “equivalentes” pois representam uma mesma quantidade de um inteiro. Se você dividir um chocolate, por exemplo, ao meio e comer uma parte, é a mesma quantidade que dividi-lo em 6 partes e comer 3 delas. Bem, e se eu quisesse escrever o 3 utilizando uma fração equivalente a ela, mas com denominador 2, como o de $\frac{10}{2}$?

Após alguns minutos, e do pesquisador lembrá-los que o número inteiro 3 pode ser escrito na forma fracionária $\frac{3}{1}$, os alunos chegaram à fração $\frac{6}{2}$. O registro dessa conclusão é o seguinte:

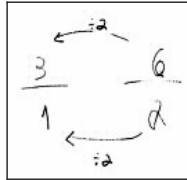


Figura 18: Registro II dos alunos 11 e 12 sobre frações equivalentes

Pesquisador: Então, a expressão $\frac{10}{2} + 3$ pode ser escrita como $\frac{10}{2} + \frac{6}{2}$, ou $\frac{10+6}{2}$.

3.1.3 CONSIDERAÇÕES SOBRE A PRIMEIRA SESSÃO

Destacamos a motivação dos alunos para o desenvolvimento da sessão, já que foi realizada fora do horário de aula, como um convite para toda a turma.

Inicialmente, os alunos se mostraram um pouco temerosos, por acharem que poderiam “errar” as respostas, uma vez que as duplas que finalizam a atividade não tinham contato com as que aguardavam para realizá-la, o que gerou uma certa expectativa.

. Alguns aspectos que não foram previamente admitidos, foram explorados durante a institucionalização realizada pela pesquisadora presentes. Tais institucionalizações aconteceram em momentos separados, apenas com a participação de cada dupla, e foram responsáveis pelo trabalho com outros

conteúdos matemáticos, que não são objeto de estudo desta pesquisa, mas foram destacados em nossa análise por julgarmos a institucionalização um importante momento em uma situação de aprendizagem.

Percebemos que o uso da tabela para os registros presentes na segunda atividade da sessão provocou uma considerável queda quanto à quantidade de tentativas de cada dupla para descobrir cada “segredo” proposto. Para a primeira atividade, em 8 jogadas das 28 desenvolvidas (4 de cada dupla) foram necessárias 4 ou mais tentativas para descobrir um determinado “segredo”. Na segunda atividade, o número de jogadas em que foram necessárias 4 ou mais tentativas caiu para 4, das também 28 desenvolvidas. Tal análise deve considerar que os “segredos” das duas atividades não eram os mesmos: na primeira atividade foram formulados pelo pesquisador, e na segunda, pelos próprios alunos. Porém, por julgarmos, conforme já descrito anteriormente, que as operações (“segredos”) propostas pelos alunos na segunda atividade, de forma geral, apresentavam um maior grau de complexidade, consideramos que o uso do registro tabular contribuiu efetivamente para o desenvolvimento do raciocínio necessário para a resolução do problema.

Uma possível explicação para essa contribuição a partir do uso de tabelas seria a possibilidade do aluno contar com o registro anterior, considerando o mesmo “segredo”. Percebemos, durante a primeira atividade da seqüência, que os alunos muitas vezes esqueciam-se dos resultados anteriores, necessitando uma retomada por parte do pesquisador.

A partir da análise dos dados coletados – produções escritas e diálogos dos alunos – consideramos que os participantes desenvolveram a primeira sessão de forma satisfatória, abordando aspectos previstos antes da aplicação das atividades que compuseram esta primeira sessão. Aspectos como possíveis dificuldades e conhecimentos prévios necessários foram determinantes na construção da análise qualitativa e quantitativa dos resultados obtidos.

3.2 SEGUNDA SESSÃO

A segunda sessão teve duração de aproximadamente quarenta minutos, foi coordenada apenas pela pesquisadora e aconteceu dois dias após a aplicação da primeira sessão. Contamos novamente com a participação dos mesmos 14 alunos que desta vez, trabalharam individualmente e reunidos numa mesma sala. A sessão aconteceu também fora do horário normal das aulas regulares dos alunos, e suas presenças foram provenientes de convite verbal realizado ao final da primeira sessão.

Por orientação, os alunos deveriam realizar seus registros a caneta, para que nenhum dado pudesse ser apagado, o que poderia comprometer uma posterior análise qualitativa dos resultados.

A sessão foi composta por três atividades, que apresentavam como objetivo geral proporcionar subsídios para que os alunos evoluíssem de uma fase pré-algébrica para uma fase de transição (FIORENTINI, 2004).

3.2.1 ATIVIDADE 1

Pesquisador: Pensei em dois números e somando-os, obtive 12. Em que números eu posso ter pensado?

A atividade foi apresentada aos alunos apenas oralmente. O objetivo desta atividade era verificar se os participantes perceberiam que os dois números citados, por assumirem no problema o papel de “valor desconhecido”, teriam o status de variáveis, e, dessa forma, propor uma situação em que eles pudessem iniciar um processo de interação entre as fases pré-algébrica e de transição. Não foi esclarecido a qual conjunto numérico pertenciam estes números, ampliando assim, a quantidade de respostas possíveis.

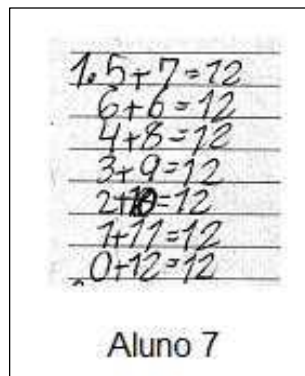
Por tratar-se da primeira atividade da sessão, planejamos um problema cuja tarefa solicitada é única e simples, podendo o aluno resolver apenas com o

conceito de adição, um conhecimento tratado neste problema como de nível técnico, nos termos de Robert (1998).

A seguir apresentaremos, juntamente com a ilustração de cada protocolo, o aluno responsável seguindo a mesma nomenclatura utilizada na primeira sessão.

Dos 14 alunos participantes, apenas 2 registraram mais de uma possibilidade de adição de dois números.

A seguir apresentamos os protocolos dessas situações:

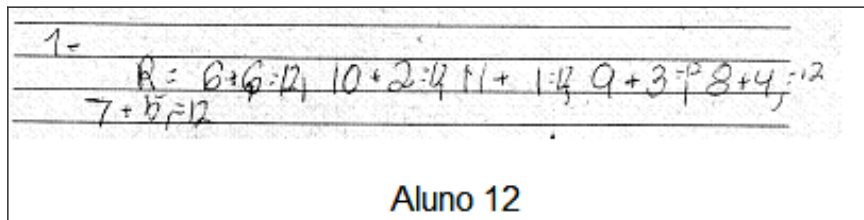


Handwritten protocol of Aluno 7 showing eight addition equations that sum to 12:

$$\begin{array}{l} 5+7=12 \\ 6+6=12 \\ 4+8=12 \\ 3+9=12 \\ 2+10=12 \\ 1+11=12 \\ 0+12=12 \end{array}$$

Aluno 7

Figura 19: Protocolo do aluno 7 para a atividade 1



Handwritten protocol of Aluno 12 showing several addition equations that sum to 12:

$$\begin{array}{l} 1= \\ 6+6=12 \\ 10+2=12 \\ 11+1=12 \\ 9+3=12 \\ 8+4=12 \\ 7+5=12 \end{array}$$

Aluno 12

Figura 20: Protocolo do aluno 12 para a atividade 1

Nestes dois casos, podemos classificar o pensamento do aluno como uma fase de transição, uma vez que esses alunos concebem a possibilidade de os dois números assumirem o papel de variáveis e, neste caso, podendo ser distintos. Inferimos tal classificação por entendermos que, ao realizarem tentativas para um resultado 12, esses alunos admitem que as parcelas de tal adição podem variar.

Destacamos, porém, que até o momento da aplicação das sessões que compõem a presente pesquisa, os alunos não haviam ainda trabalhado com o conceito de números inteiros negativos, conteúdo que consta no currículo de sexta série do Ensino Fundamental. Dessa forma, consideramos que somente seriam utilizados números positivos, naturais ou racionais, na resolução das atividades propostas.

Dos 12 alunos restantes, que registraram apenas um par de números em que a soma resultasse em 12, 8 deles registraram $6 + 6$. Interpretamos que essa relação deu-se pelo fato de que o enunciado da questão não apresentava a informação de que se tratava de dois números *distintos*, o que pode ter provocado uma possível interpretação limitante e errônea. Essa possível duplicidade de interpretação poderia ser eliminada apresentando-se uma soma de resultado ímpar, destacando durante a apresentação do problema que se tratam de números naturais.

A estratégia de encontrar um único par de números que satisfaça a expressão denota uma dificuldade comum nos alunos que se iniciam no estudo da Álgebra elementar. Segundo Booth (1995), isso ocorre porque no campo da aritmética, o foco das atividades é encontrar respostas numéricas particulares quase sempre únicas.

Para estes 12 alunos, podemos classificar o pensamento como uma fase pré-algébrica, já que não conseguiram perceber os dois números de forma generalizada e variável, atribuindo assim, um único par de números possível e, em 8 dos 12 casos, adotando números iguais.

Baseados nas análises dos resultados dos alunos, construímos para esta atividade, um gráfico das fases do pensamento algébrico dos quatorze alunos, segundo Fiorentini (2004):

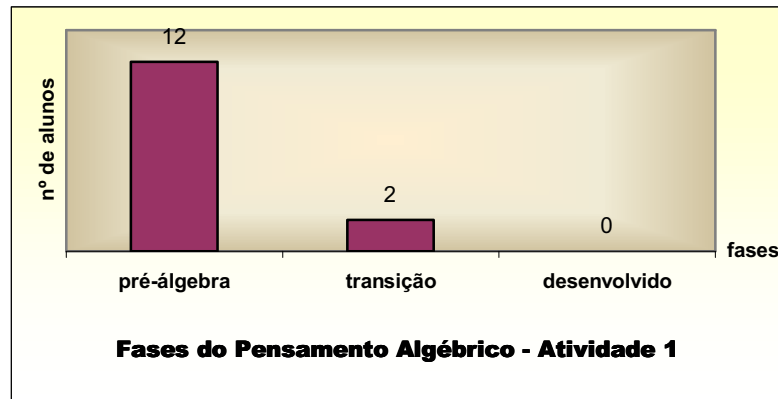


Gráfico 2: Fases atingidas ao final da atividade 1

3.2.2 ATIVIDADE 2

Pesquisador: Pensei em um certo número e , ao somá-lo com 12, obtive 39.
Em que número pensei?

A atividade foi apresentada aos alunos apenas oralmente. Foi realizada uma orientação de que não transcrevessem o que estava sendo-lhes ditado. Apenas deveriam registrar a estratégia para descobrir o número desconhecido. A escolha da apresentação apenas na forma oral foi admitida como uma variável didática, uma vez previsto que a falta do registro escrito provocaria nos alunos a necessidade de se criar um outro tipo de registro: o simbólico.

O objetivo desta atividade era verificar se os alunos apresentariam ou não uma estrutura de certa maneira formalizada da operação a ser realizada. Se isto ocorresse, poderiam perceber a necessidade de atribuir uma simbologia para tal valor desconhecido, o que nos permitiria classificar seu pensamento algébrico como fase de transição entre o pré-algébrico e o pensamento algébrico mais desenvolvido.

Construímos tal atividade buscando o trabalho com conhecimentos de nível mobilizável pelos alunos, nos termos de Robert (1998), já que para sua

realização, tais conhecimentos (como operações inversas) são previamente identificados pelo aluno, mas necessitam de alguma adaptação antes que sejam aplicados.

Dos 14 alunos participantes, apenas 3 apresentaram uma estrutura formalizada do que era-lhes proposto. A seguir apresentamos os protocolos dessas situações.

Handwritten work for Aluno 12:

$$\begin{array}{r} 2- \\ R = x + 12 = 39 \qquad 39 \\ \quad 27 + 12 = 39 \qquad - 12 \\ \hline \quad \qquad \qquad \quad 27 \\ B = \text{numero } 27 \end{array}$$

Aluno 12

Figura 21: Protocolo do aluno 12 para atividade 2

No caso ilustrado anteriormente, o aluno registra a situação proposta sob a forma de uma equação do primeiro grau, mesmo sem ter trabalhado tal conteúdo anteriormente. Após o aluno estruturar a operação a ser realizada, a resolução dá-se de forma aritmética, sem recorrer à simbologia utilizada (resolução da equação pelo isolamento da incógnita). A técnica utilizada para encontrar o valor desconhecido baseou-se em operações inversas. Inferimos, assim, que o aluno resolveu a equação sem um registro formal, usando ainda o registro numérico.

A mesma ocorrência pode ser observada no protocolo seguinte, em que o ponto de interrogação foi adotado como simbologia para indicar uma quantidade desconhecida.

Handwritten work for Aluno 10:

$$\begin{array}{r} \textcircled{2} ? + 12 = 39 \qquad 39 \\ \quad 39 - 12 = \boxed{27} \qquad - 12 \\ \hline \qquad \qquad \qquad 27 \end{array}$$

Aluno 10

Figura 22: Protocolo do aluno 10 para atividade 2

No próximo registro, encontramos uma formalização da operação a ser realizada, onde foi utilizado um traço como simbologia. O traço utilizado pelo aluno indica a ausência de uma determinada quantidade, que desta vez foi encontrada inicialmente de forma mental e depois verificada a partir do uso de operações inversas. O registro do número 27 sobre o traço só ocorreu após o cálculo realizado.

The image shows a student's handwritten work on a piece of paper. On the left, there is a calculation: $2) 27 + 12 = 39$. To the right of this, there is a vertical addition problem: 12 followed by $+ 27$ and a horizontal line, with 39 written below. Below the entire work, the name "Aluno 9" is written in blue ink.

Figura 23: Protocolo do aluno 9 para atividade 2

Nos três casos citados, classificamos a evolução do pensamento algébrico dos alunos numa fase de transição do aritmético para o algébrico, já que, mesmo utilizando a linguagem simbólica, as operações aritméticas não faziam referência à simbologia adotada por esses alunos. Observa-se que nesses alunos, a utilização da operação de subtração como operação inversa da adição é um conhecimento disponível, nos termos de Robert (1998), já que foi utilizada sem nenhuma indicação do enunciado ou do pesquisador. O mesmo para a mobilização de um registro que identifica um valor desconhecido a ser determinado (n, ou “?” ou “__”).

Dos 11 alunos restantes, 7 encontraram o valor desconhecido utilizando o conceito de operações inversas e o uso de algoritmo ($39 - 12$) para determinar a quantidade 27.

Os 4 alunos restantes determinaram a quantidade desconhecida por meio de cálculo mental. Porém todos registraram o algoritmo da “prova real” ($27 + 12$) como justificativa do resultado encontrado, já que a orientação inicial do pesquisador aplicador era de que deixassem registrado, a caneta, como

pensaram. Dentre esses alunos, apenas um deles realizou o cálculo à partir de uma tentativa. A seguir apresentamos o protocolo dessa situação.

Handwritten work for Aluno 8:

$$2-27$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 25 \\ \hline 37 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 27 \\ + 12 \\ \hline 39 \end{array}$$

Aluno 8

Figura 24: Protocolo do aluno 8 para atividade 2

Nestes casos, classificamos o pensamento algébrico dos alunos numa fase pré-algébrica, uma vez que não utilizam nenhum elemento considerado algébrico – uma letra, por exemplo – e a resolução do problema é baseada apenas em estruturas aritméticas já conhecidas.

Baseados nas análises dos resultados dos alunos, construímos, para esta atividade, um gráfico das fases do pensamento algébrico dos 14 alunos, segundo Fiorentini (2004):

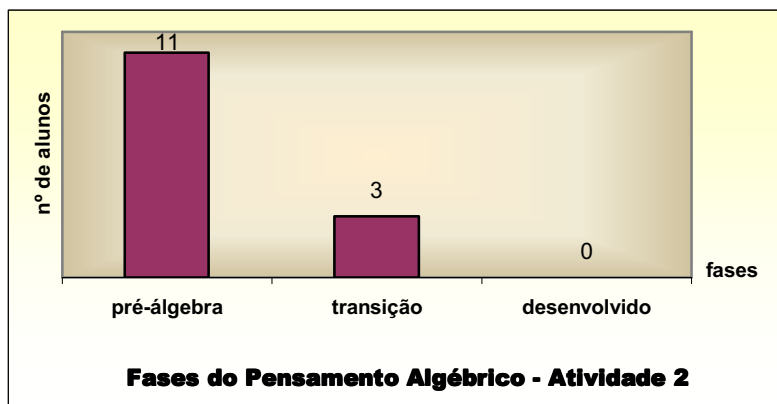


Gráfico 3: Fases atingidas ao final da atividade 2

3.2.3 ATIVIDADE 3

Pesquisador: Agora, vou ditar um problema e vocês terão que representá-lo apenas utilizando símbolos, matemáticos ou não. Ou seja: vocês criarão uma “frase matemática” para o problema e depois, tentarão resolvê-lo.

- A soma de um número com 112 resulta 347. Que número é esse?

A atividade foi apresentada aos alunos apenas oralmente e a orientação era que não transcrevessem o que lhes fosse ditado utilizando a língua materna. Mais uma vez, a escolha da apresentação apenas na forma oral foi admitida como uma variável didática, uma vez previsto que a falta do registro escrito provocaria nos alunos a necessidade de se criar um outro tipo de registro: o simbólico.

O objetivo desta atividade era verificar como os alunos reagiriam diante da situação de representar uma quantidade desconhecida utilizando algum tipo de simbologia. Desta vez, o uso de algum tipo de simbologia era uma das tarefas solicitadas no problema. Este fato a diferencia da atividade anterior, em que a simbologia poderia ser utilizada como estratégia de registro, mas não era apresentado como tarefa.

A escolha de números na ordem das centenas tinha como objetivo dificultar os cálculos mentais, provocando no aluno a necessidade de registrar o valor desconhecido com o uso de uma simbologia para uma posterior resolução aritmética.

Planejamos esta atividade buscando explorar os conhecimentos de nível mobilizável, nos termos de Robert (1998), visto que para sua realização, os alunos apresentavam os conhecimentos necessários (operações fundamentais aritméticas: adição, no momento da escrita simbólica da expressão apresentada, e subtração, uma vez que uma das possíveis resoluções se daria por meio de operações inversas). Tais conhecimentos deveriam apenas ser

adaptados, com o objetivo de criar uma simbologia capaz de representar o problema proposto (frase matemática).

Dos quatorze alunos, dois não atribuíram um símbolo ao número desconhecido. Os mesmos dois alunos não expressaram corretamente o valor procurado. A seguir apresentamos essas situações.

Observando o protocolo seguinte (figura 25), percebemos que a resolução antecederia a frase matemática. Dessa forma, o aluno registrou o valor desconhecido com a palavra **Resolução**, já que esta determinaria o número procurado.

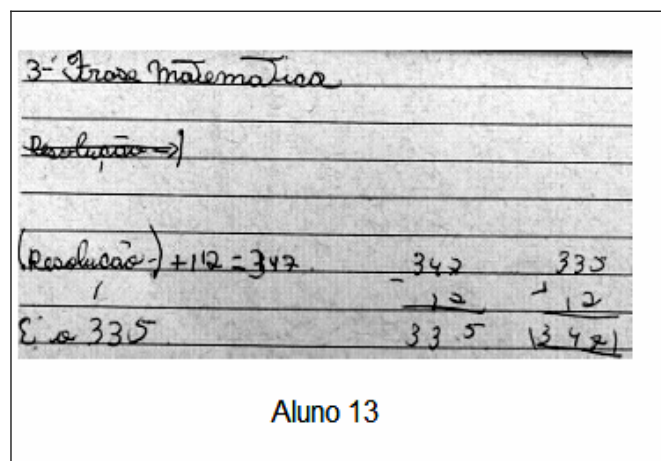


Figura 25: Protocolo do aluno 13 para atividade 3

Após observarmos este protocolo, indagamos o aluno sobre o porquê da rasura na primeira palavra “Resolução”:

Pesquisador: Você registrou aqui Frase Matemática. Onde ela está?

Aluno: (...) Está aqui. (Aponta para o registro logo abaixo: (Resolução) + 112 = 347)

Pesquisador: E por que esta rasura?

Aluno: (...) Eu ia resolver e colocar a conta. É que eu não tinha entendido o que você falou...

Pesquisador: Como assim colocar a conta?

Aluno: Eu ia fazer a conta e marcar o resultado.

Pesquisador: Então no lugar do número que você tinha que descobrir você já colocaria o resultado da sua resolução, é isso?

Aluno: É.

Pesquisador: E por que você não fez isso?

Aluno: Porque aí depois eu entendi o que era pra fazer.

Pesquisador: E o que era pra fazer?

Aluno: Era pra...primeiro escrever como que seria a conta...e depois fazer...

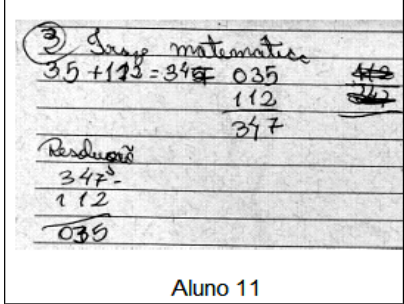
Pesquisador: E por que você marcou **Resolução** no número que você ia descobrir?

Aluno: Porque eu ia resolver a conta e achar.

Neste caso, entendemos que o aluno não atribuiu uma simbologia para representar o valor desconhecido, e sim registrou a ação subsequente a ser realizada, que determinaria o valor procurado. Destacamos ainda que, durante o diálogo com o aluno (fase de institucionalização) chamamos sua atenção para a troca de valores ao construir o algoritmo da operação de subtração, uma vez que no lugar de 112 como registrado na transcrição do problema, o mesmo registrou 12. Não consideramos tal fato um erro, já que o algoritmo realizado com o número 12 foi executado corretamente.

Mais uma vez, observamos a tentativa de validação do problema, uma vez que o aluno substituiu o valor por ele encontrado no que outrora se considerava como um valor desconhecido.

No registro seguinte (figura 27) encontramos também um caso em que o registro simbólico do valor desconhecido não ocorreu.



The image shows a student's handwritten work on lined paper. At the top, it is labeled '3) Grupo matemática'. Below this, the student has written an equation: $35 + 112 = 347$. To the right of this equation, the number '035' is written, and the number '112' is crossed out. Below the equation, the number '112' is written, and then '347' is written below it. The student has also written 'Resolução' and then a subtraction problem: $347 - 112 = 035$.

Aluno 11

Figura 26: Protocolo do aluno 11 para atividade 3

Após também indagarmos o aluno sobre a frase matemática, o mesmo afirmou ter efetuado o registro do número 35 no espaço que havia deixado em branco. Dessa forma, consideramos que o aluno não recorreu a qualquer simbologia, uma vez que o espaço deixado pelo aluno indica apenas a ausência de uma determinada quantidade e não sua representação simbólica.

Neste caso podemos observar que houve um erro no algoritmo da resolução, quando o aluno registra que 3 menos 1 resulta zero. O que nos chamou a atenção foi que também houve um erro no algoritmo de validação do problema (prova real), já que o aluno registra que 1 mais zero resulta 3. Após a análise dos protocolos, em entrevista com o pesquisador, foi solicitado ao aluno que efetuasse a mesma operação: $347 - 112$. O aluno resolve corretamente, encontrando como resultado o número 225. Quando indagado sobre o resultado encontrado por ele no protocolo da atividade, o mesmo não consegue explicar o porquê do resultado 35.

Nos dois casos descritos, classificamos o pensamento algébrico dos alunos numa fase pré-algébrica, já que não concebem um termo desconhecido representado com um elemento considerado algébrico.

Apresentamos a seguir (figura 27) duas ocorrências em que o aluno, após encontrar o valor desconhecido, embora ainda aritmeticamente, relaciona-o com o símbolo criado.

3. Frase matemática

$$x + 112 = 347$$

$$\begin{array}{r} 347 \\ - 112 \\ \hline 235 \end{array}$$

$x = 235$

Resolução $x = 235$

Aluno 7

3) frase matemática

$$\tilde{n} + 112 = 347$$

$$\tilde{n} = 235$$

Resolução:

$$\begin{array}{r} 347 \\ -112 \\ \hline 235 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 235 \\ +112 \\ \hline 347 \end{array}$$

Aluno 9

Figura 27: Protocolos dos alunos 7 e 9 para atividade 3

Em entrevista, o aluno responsável pelo segundo protocolo (aluno 9) afirma que o símbolo adotado representa uma quantidade que ele desconhece e, portanto, \tilde{n} significaria “não sei”.

Ainda em análise dos dois registros destacados, percebemos que, após a resolução, o aluno encontra o valor desconhecido e relaciona esse número com o símbolo adotado. Entendemos que, nesse caso, os alunos apresentaram um nível de pensamento algébrico numa fase mais desenvolvida, uma vez que concebem a relação entre o símbolo adotado e o resultado por ele encontrado por meio do algoritmo da subtração.

Nos dez protocolos restantes, os alunos atribuíram uma simbologia ao valor desconhecido, formulando uma “frase matemática”, de acordo com uma das tarefas solicitadas. Os símbolos encontrados nos protocolos foram: x , $?$, n , \tilde{n} e $_$, conforme apresentado nos exemplos a seguir:

3- frase matemática

$$n + 112 = 347$$

Aluno 12

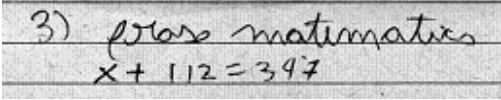
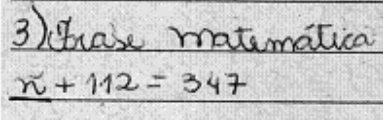
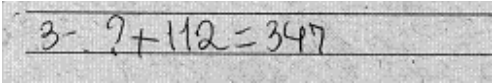
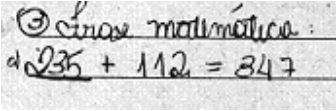

Aluno 6

Aluno 9

Aluno 14

Aluno 1

Figura 28: Protocolos dos alunos 12, 6, 9, 14 e 1 para atividade 3

Caracterizamos os dois últimos protocolos (alunos 14 e 1) também como uma simbologia para a representação do termo desconhecido, uma vez que o traço e o ponto de interrogação podem ser interpretados pelo aluno como uma quantidade a ser procurada. Segundo Usiskin (1995):

Os alunos tendem a acreditar que uma variável é sempre uma letra. Essa visão é corroborada por muitos professores, pois $3 + x = 7$ e $3 + \square = 7$ são em geral consideradas coisas da Álgebra, ao passo que $3 + _ = 7$ e $3 + ? = 7$ não, embora o traço e o ponto de interrogação sejam, na medida em que se deseja resolver uma equação, equivalentes ao x e ao \square . (UZISKIN, Z. 1995, p. 9)

O valor desconhecido foi encontrado, em todos os casos, com o conhecimento de operações inversas e o uso do algoritmo da subtração que efetivamente se mostra como um conhecimento disponível junto aos alunos, assim como é um conhecimento disponível o procedimento para determinação do valor desconhecido e o uso de um símbolo qualquer para representar esse valor desconhecido. Nestes casos, entendemos que os alunos encontram-se numa fase de transição entre as fases pré-algébrica e mais desenvolvida, considerando que a simbologia foi admitida como uma representação de uma quantidade desconhecida, mas que, uma vez determinada, não voltou a ser relacionada com a simbologia criada.

Observamos em dois casos a ocorrência do que, segundo Booth (1995) denota uma interpretação muito comum na aritmética: símbolos como + são interpretados como ações a serem efetuadas. Dessa forma, no momento em que o aluno ouve “Somei um número com 112...”, a reação foi substituir a palavra “somei” imediatamente pelo símbolo +. Seguem os protocolos de tais situações:

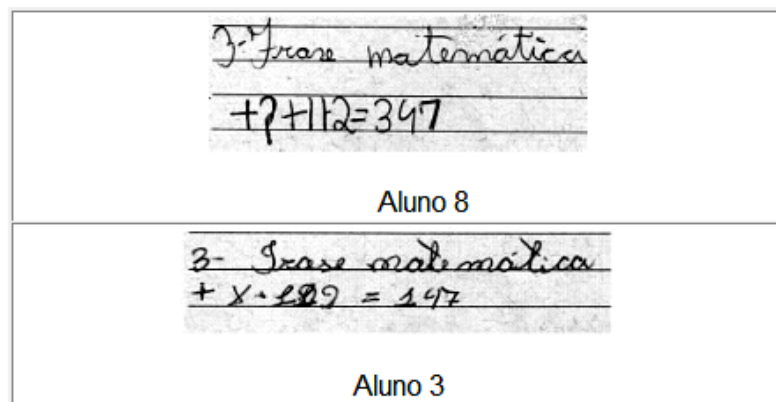


Figura 29: Protocolos dos alunos 8 e 3 para atividade 3

Em contraposição, encontramos uma situação em que há a ausência do sinal operatório na representação realizada pelo aluno. Contudo, tal ocorrência não impediu que o mesmo construísse o algoritmo e encontrasse o valor desconhecido. Segue o protocolo que ilustra tal situação:

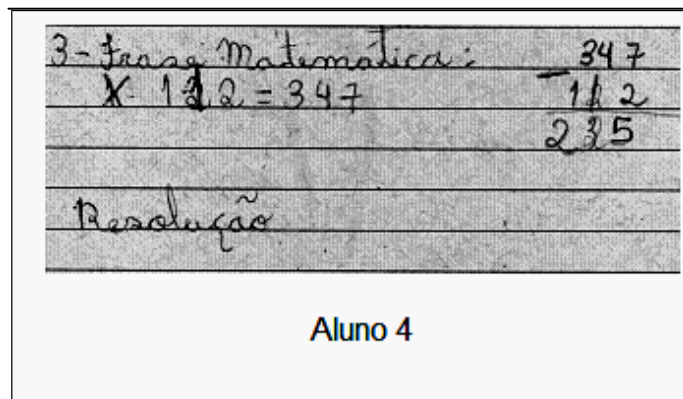


Figura 30: Protocolo do aluno 4 para atividade 3

Uma ocorrência recorrente observada durante a análise desta atividade foi o alto índice de tentativas de validação dos resultados encontrados pelos alunos. Dos quatorze protocolos recolhidos, nove apresentavam a operação inversa (prova real) para verificar se, ao utilizar o valor encontrado, a expressão seria verdadeira.

Baseados nas análises dos resultados dos alunos, construímos para esta atividade um gráfico das fases do pensamento algébrico dos quatorze alunos, nos termos de Fiorentini (2004):

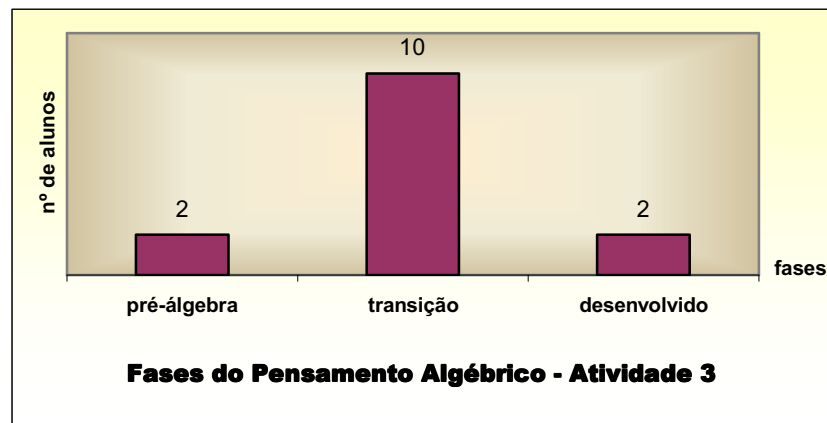


Gráfico 4: Fases atingidas ao final da atividade 3

3.2.4 CONSIDERAÇÕES SOBRE A SEGUNDA SESSÃO

Conforme relatado, o objetivo desta sessão era motivar o aluno a construir uma simbologia em caráter substitutivo a uma quantidade inicialmente desconhecida por eles. A subdivisão em três atividades buscava uma seqüência de tarefas que conduzisse o aluno a criar tal simbologia.

A atividade 1 buscava inferir no aluno a idéia de termos “variáveis”, de forma que o mesmo percebesse que os dois números desconhecidos poderiam assumir diferentes valores, tornando a sentença verdadeira. Não foi mencionado durante a apresentação da atividade pela pesquisadora, nenhum direcionamento que levasse o aluno a concluir ou não que poderiam registrar mais de um par de números. Com isso, tínhamos o objetivo de investigar se o aluno concebe ou não a noção de “variável” no sentido apresentado.

Percebemos, assim, que o número de alunos que apresentaram este tipo de concepção foi pequeno. Apenas dois dos quatorze alunos que realizaram a atividade registraram mais de uma possibilidade de adição de dois números em que a soma fosse 12. Para esta atividade, classificamos estes alunos em uma fase de transição entre o pensamento pré-algébrico e algébrico.

Destacamos, porém, que não desconsideramos o fato de que os demais alunos poderiam ter a mesma concepção, e apenas não registraram outras possibilidades senão aquela que lhes parecesse mais imediata. Contudo, entendemos que devido ao fato de não contarem com qualquer tipo de intervenção durante a realização da atividade, assumiram como resposta um único par de números por interpretarem que, mesmo com outras possibilidades, o problema requeria uma única resposta que o satisfizesse.

A atividade 2 foi elaborada com o propósito de verificar se os alunos admitiriam uma expressão em que um dos termos fosse desconhecido. Até então, os alunos apenas exploraram a resolução de expressões numéricas, em que todos os termos eram conhecidos e as operações entre eles apresentavam

uma ordem de resolução. Uma vez admitida essa “nova” expressão, os alunos poderiam perceber, espontaneamente a necessidade de atribuir uma simbologia para tal valor desconhecido e, assim, iniciar uma fase de transição entre o pensamento pré-algébrico e algébrico.

Três entre os quatorze alunos que realizaram esta atividade admitiram uma expressão em que um dos termos fosse desconhecido, atribuindo uma simbologia para tal. Dentre os três alunos, um deles (aluno 12) também atingiu o objetivo da atividade anterior, demonstrando que realmente apresenta um pensamento em fase de transição.

A atividade 3 apresentava como tarefa os requisitos almeçados nas duas atividades antecedentes. Dessa forma, pretendíamos que os alunos, principalmente os que ainda não haviam atingido a fase de transição espontaneamente nas outras sessões, construíssem o problema proposto admitindo expressões com uma simbologia criada por eles próprios.

Ao final da terceira atividade, inferimos que dos quatorze alunos participantes, conseguimos uma maior concentração de número de alunos numa fase de transição entre o pensamento pré-algébrico e algébrico. A seguir, registramos uma tabela com o desempenho individual dos alunos no decorrer da segunda sessão, com o objetivo de poder situá-los nas sessões subseqüentes e responder nossa questão de pesquisa. A numeração correspondente a cada aluno é a mesma admitida na primeira sessão.

Quadro 5: Classificação dos níveis de pensamento ao final da segunda sessão

	Atividade 1	Atividade 2	Atividade 3
Alunos na fase pré- algébrica	1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 13, 14	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 11, 13, 14	11, 13
Alunos na fase de Transição	7, 12	9, 10, 12	1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 14

Alunos na fase do pensamento algébrico mais avançado	-	-	7, 9
--	---	---	------

Analisando a tabela acima, destacamos os alunos 11 e 13, que ao final da sessão continuaram numa classificação do pensamento algébrico numa fase pré-algébrica, não apresentando avanços consideráveis. Numa outra vertente, observamos que os alunos 7 e 9 demonstraram um progresso cognitivo no decorrer da sessão, chegando ao que, segundo nossa interpretação, classificamos como fase do pensamento algébrico mais avançado, dentro dos parâmetros das atividades que compõem a sessão.

3.3 TERCEIRA SESSÃO

A terceira sessão teve duração de aproximadamente uma hora, foi coordenada apenas pela pesquisadora e aconteceu quatro dias após a aplicação da segunda sessão. Contamos novamente com a participação dos mesmos quatorze alunos que desta vez, trabalharam novamente organizados em duplas, obedecendo a mesma formação admitida na primeira sessão. Aconteceu também fora do horário normal das aulas regulares dos alunos, e suas presenças foram provenientes de convite verbal realizado ao final da segunda sessão.

Por orientação, os alunos deveriam realizar seus registros a caneta, para que nenhum dado pudesse ser apagado, o que poderia comprometer uma posterior análise qualitativa dos resultados.

A sessão foi composta por duas atividades, que apresentavam como objetivo geral verificar a habilidade cognitiva de abstração dos alunos diante de uma situação que apresentasse certa dificuldade para ser representada concretamente. Além disso, permite explorar o pensamento algébrico por meio de generalização de padrões.

Mais uma vez, a análise dos resultados será realizada segundo um processo cognitivo do aluno partindo de uma fase pré-algébrica, passando por uma fase de transição para então atingir uma fase de pensamento algébrico mais avançado (FIORENTINI, 2004).

3.3.1. ATIVIDADE 1

Esta atividade foi extraída do livro *par ou ímpar* (JAKUBOVIC, J., 1992, p. 19) e tinha como objetivo iniciar uma indução à generalização a partir da observação de padrões.

A atividade foi apresentada oralmente pelo pesquisador, antes de entregar as fichas onde os alunos registrariam suas conclusões. Juntamente com cada ficha, foi entregue um envelope a cada dupla contendo como material lúdico: 4 regiões quadradas (representando as mesas) e 10 regiões retangulares (representando as cadeiras), ilustradas na figura a seguir:

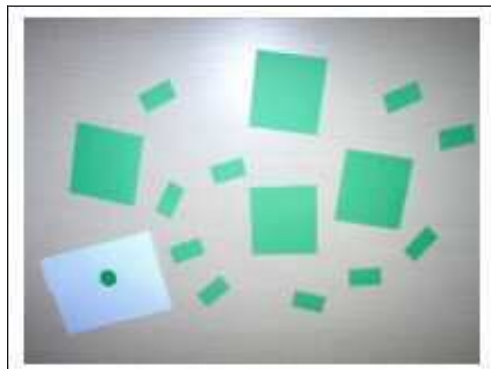


Figura 31: Material Concreto fornecido

Pesquisador: Vamos estudar como as pessoas costumam se sentar num bar. Numa mesa, podem sentar-se 4 pessoas (exposição com material lúdico). Juntando duas mesas, poderão se sentar 6 pessoas (exposição com material lúdico). Vocês receberão uma ficha para responder quantas pessoas poderiam se sentar juntando 3, 4, 10 ou 13 mesas. Ao lado vocês deverão justificar como chegaram ao resultado apresentado.

Classificamos esta atividade segundo os moldes de Robert (1998) de maneira subdividida: para as duas primeiras situações, 3 ou 4 mesas, buscamos explorar conhecimentos de nível técnico, pois a disponibilidade do material lúdico possibilita a simples contagem do número de cadeiras (regiões retangulares) a partir de um esquema concreto; para as situações seguintes, 10 ou 13 mesas, entendemos tratar-se de um problema que exigia conhecimentos de nível mobilizável, uma vez que seriam possíveis adaptações de alguns conhecimentos de nível técnico, como operações fundamentais, para encontrar os resultados.

O objetivo desta atividade era explorar, inicialmente a partir de situações concretas, o pensamento algébrico por meio de padrões admitidos nos problemas propostos. A generalização, neste momento da sessão, poderia acontecer na forma de língua materna, como uma descrição do procedimento adotado.

Para as duas primeiras situações propostas – 3 e 4 mesas – todas as duplas chegaram ao resultado correto: 8 e 10 cadeiras, respectivamente. Dentre as 7 duplas, 5 justificaram a resposta encontrada a partir da contagem das “peças” que ilustravam a situação.

As duas duplas restantes também construíram um esquema utilizando as “peças” disponíveis, conforme observação do pesquisador durante a realização da atividade. Todavia, para justificar suas respostas no protocolo, buscaram sistematizar uma justificativa matemática e mais estruturada.

Apresentamos os protocolos das duas duplas citadas:

3 meses 8	Justifique conte o número de lados (subtraia) multiplique por 2 e acrescente 2
4 meses 10	Justifique conte o número de lados (subtraia) multiplique por 2 e acrescente 2

Alunos 7 e 8

Figura 32: Protocolo I dos alunos 7 e 8 para atividade 1

Neste caso, percebemos que a dupla procurou estruturar uma estratégia de contagem desde a primeira situação, buscando uma generalização. Após observarmos as rasuras realizadas no protocolo, que existiu apenas nas duas situações iniciais, indagamos os alunos da dupla a respeito. Os mesmos disseram perceber o padrão ao final da segunda situação, e então alteraram a justificativa, que também foi utilizada nas próximas situações propostas.

10 meses 20	Justifique multiplique por dois e acrescente 2
13 meses 28	Justifique multiplique por dois e acrescente 2

Alunos 7 e 8

Figura 33: Protocolo II dos alunos 7 e 8 para atividade 1

Inferimos que os alunos dessa dupla apresentam grande habilidade de abstração, uma vez que os resultados foram todos obtidos a partir da generalização de um padrão observado.

A segunda dupla a justificar o resultado encontrado de maneira mais formalizada, sem a ilustração do material concreto, demonstrou perceber que a cada número de mesas aumentadas, o número de pessoas que aumentariam seria dois.

3 mesas 8 pessoas	Justifique De em duas mesas tem 6 pessoas, em três mesas tem 8 pessoas, porque não acrescenta mais 2 pessoas
4 mesas 10 pessoas	Justifique De em três mesas tem 8 pessoas em 4 mesas tem 10 pessoas, acrescenta 2.

Alunos 3 e 4

Figura 34: Protocolo I dos alunos 3 e 4 para atividade 1

Todavia, a mesma dupla errou os resultados das duas situações seguintes – 10 e 13 mesas – não apresentando qualquer semelhança com as justificativas anteriores.

10 mesas 26 pessoas	Justifique Multiplicamos: 2×10 $+6 = 26$
13 mesas 34 pessoas	Justifique Multiplicamos: 8×10 $+4 = 34$

Alunos 3 e 4


Figura 35: Protocolo II dos alunos 3 e 4 para atividade 1

Observando esse protocolo, percebemos que não houve uma generalização acerca dos padrões observados: nas duas situações iniciais os alunos somavam duas cadeiras a cada mesa que era acrescentada; na terceira situação – 10 mesas – adicionam 6 cadeiras; e, na quarta situação foi adicionada a quantidade de 4 cadeiras. Além disso, chamou-nos a atenção o produto “ 3×10 ”, já que haviam admitido anteriormente que a cada mesa correspondiam duas cadeiras, e o número de mesas da situação era 13, e não 10 como no produto apresentado.

Entrevistamos então os alunos que compunham a dupla para esclarecer-nos sobre eventuais divergências. Indagados sobre as duas últimas situações, os alunos afirmaram que, para 10 mesas, estabeleceram o seguinte raciocínio: o produto 2×10 representa “duas cadeiras em cada mesa \times 10 mesas” e a adição com 6 representavam as duas mesas das extremidades, onde poderiam se sentar 3 pessoas em cada uma. Neste caso, entendemos que aconteceu uma tentativa de generalização, e que o equívoco estaria apenas em adotar 10 mesas com 2 lugares, e não 8, uma vez que as duas mesas das extremidades seriam contabilizadas posteriormente.

Quanto à operação “ $3 \times 10 + 4 = 34$ ”, presente na última situação proposta, os alunos afirmaram que inicialmente chegaram ao resultado 34 adicionando os resultados obtidos para 10 mesas (26 pessoas) e 3 mesas (8 pessoas), chegando a 13 mesas e 34 pessoas. Relataram então que as operações registradas como justificativas foram “manipuladas” para se atingir o resultado previamente encontrado. Dessa forma, concluímos que os alunos que compõem essa dupla não utilizaram como estratégia a generalização de padrões, demonstrando uma dependência do uso de materiais concretos e resistência à abstração, operacionando ainda no campo aritmético.

De maneira bastante semelhante a este caso, encontramos outro protocolo com os mesmos resultados e operações:

3 mesas 7 cadeiras	Justifique: $3+3+2 = 6+2 = 8$ 
4 mesas 10 cadeiras	Justifique: $2 \times 4 + 2 =$ $8+2 = 10$
10 mesas 26 cadeiras	Justifique: $2 \times 10 = 20 + 6 = 26$ ↓ ↓ de 10 mesas ↓ duas mesas
13 mesas 34 cadeiras	Justifique: $3 \times 10 = 30 + 4 = 34$ ↓ 12 mesas + 1 mesa

Alunos 9 e 10

Figura 36: Protocolo dos alunos 9 e 10 para atividade 1

Analisando os registros dessa dupla, percebemos que para a primeira situação proposta houve uma contagem da quantidade de lugares a partir da ilustração do material concreto oferecido. Para a segunda situação – 4 mesas – os alunos apresentam uma seqüência de operações muito parecida com a primeira. Mesmo realizando apenas uma contagem, percebemos que a estrutura da expressão numérica construída induz a uma possível generalização de um padrão observado: 2 lugares por mesa mais os 2 lugares das extremidades. Contudo, esta previsão se desfez ao observarmos as duas situações seguintes.

Entrevistamos também os alunos dessa dupla, que relataram a seguinte estratégia para as duas situações seguintes:

Aluno 10: Para 10 mesas pensamos assim: a gente já tinha feito para 4 mesas e 3 mesas. Aí a gente fez $4 + 3 + 3$ pra dar as 10 mesas. Então: $10 + 8 + 8$. Aí deu 26 lugares.

Pesquisador: E isso tem alguma relação com a justificativa que vocês apresentaram?

[...]

Aluno 9: Não...Eu sei lá o que a gente fez aqui...

Pesquisador: Então vocês primeiro chegaram ao resultado 26, e depois tentaram escrever uma justificativa, é isso?

Aluno 9: É...

Pesquisador: E para 13 mesas?

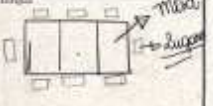



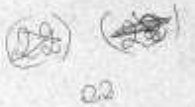

Aluno 9: Foi a mesma coisa. A gente já não fez 10 mesas? Então, aí a gente somou “mais” 3 mesas. Aí ficou 26 mais 8, 34.

Pesquisador: E a justificativa?

Aluno 10: Ah, professora...A gente não sabia como que ia escrever...aí a gente fez a conta.

Após as duas entrevistas, percebemos que, em nenhum dos dois casos houve uma estratégia de tentativa de generalização que associasse o número de mesas com a quantidade de lugares. O que aconteceu foi uma adição de resultados encontrados anteriormente, de forma concreta. Classificamos os alunos das duplas num nível pré-algébrico, já que os resultados foram inicialmente alcançados concretamente e a partir de então, associados como parcelas nas situações subseqüentes.

Duas duplas demonstraram utilizar uma estratégia de contagem que, de acordo com nossa interpretação, tornaria possível uma futura generalização.

3 mesas <u>8 pessoas</u>	Justifique: 	1 mesa 	Justifique: Contando
4 mesas <u>10 pessoas</u>	Justifique: Se com 3 mesas cabem 8 pessoas com 4 mesas cabem 10 pessoas. Então 10, classe! 	4 mesas 10	Justifique: Contando
10 mesas <u>22 pessoas</u>	Justifique: $5 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 22$  Não é importante as mesas cabem 2 pessoas, mas a priori 22 pessoas.	10 mesas 	Justifique: agente fez uma tabuada e contou 10x2=20 por que foi acrescentado 2
11 mesas <u>28 pessoas</u>	Justifique: Começa com uma que cabe 22 pessoas, então acrescentamos mais 6 pessoas, e mais 3 mesas.	11 mesas 	Justifique: agente fez uma tabuada e contou 10x2=20 por que foi acrescentado 8 10x2=20 por que foi acrescentado 8

Alunos 1 e 2

Alunos 11 e 12

Figura 37: Protocolos dos alunos 1 e 2, e 11 e 12 para atividade 1

No último protocolo ilustrado (alunos 11 e 12) percebemos uma inicialização do processo de generalização do problema proposto, uma vez que os alunos concebem a idéia de que a cada mesa acrescentada aumenta em 2 a quantidade de lugares. Neste caso, observando a justificativa apresentada, entendemos que a generalização não aconteceu devido à desvinculação desta concepção com o número de mesas proposto na situação, uma vez que da forma como foi apresentada, os alunos sempre deveriam saber a quantidade de lugares para $(n - 1)$ mesas. Assim, classificamos os alunos dessa dupla num nível de transição entre o pensamento pré-algébrico e algébrico.

Duas duplas chegaram ao resultado, corretamente, apenas manipulando o material concreto ou ilustrando a situação para uma posterior contagem.

3 meses	Justifique Coloquei 3 meses, coloquei os outros 5 meses e depois contei quantos meses sobraram. Assim	3 meses	Justifique meses
8 meses	Justifique 4 meses 10 meses e 10 meses	4 meses	Justifique meses
10 meses	Justifique Coloquei 10 meses, depois coloquei os outros e depois contei.	10 meses	Justifique colocamos 10 meses meses e em cada lado de um mês como um mês como coloco
13 meses	Justifique 13 meses imaginação meses e depois colocamos 13 meses e depois contei de 2 em 2 porque para somamos por cada meses de 2 em 2 cada mês	13 meses	Justifique colocamos 13 meses e em cada lado de um mês como meses

Alunos 13 e 14

Alunos 5 e 6

Figura 38: Protocolos dos alunos 13 e 14, e 5 e 6 para atividade 1

Nos dois casos citados, entendemos que os alunos encontram-se ainda numa fase pré-algébrica, muito ligados ao pensamento aritmético. Para eles, o número de 13 meses proposto não representou uma quantidade considerável, capaz de motivá-los a pensar numa outra estratégia de resolução.

Em referência à classificação do pensamento dos alunos no decorrer desta atividade da sessão, construímos uma tabela seguindo nossas interpretações:

Quadro 6: Classificação dos níveis de pensamento ao final da primeira atividade

Dupla	Nível (Fiorentini, 2004)
Alunos 1 e 2	Pré-algébrico
Alunos 3 e 4	Pré-algébrico
Alunos 5 e 6	Pré-algébrico
Alunos 7 e 8	Algébrico
Alunos 9 e 10	Pré-algébrico
Alunos 11 e 12	Transição
Alunos 13 e 14	Pré-algébrico

3.3.2 ATIVIDADE 2

Construímos esta atividade relacionando a atividade 1 apresentada nesta sessão e um problema proposto no projeto de pesquisa SESM – *Strategies and Errors in Secondary Mathematics*. O problema citado analisa se os alunos conseguem chegar a uma expressão para o perímetro de uma figura de n lados de comprimento 5, porém parte da figura está escondida (BOOTH, 1995, p. 26).

Inicialmente, o pesquisador apresentou para os alunos uma ilustração da situação, enquanto descrevia oralmente a tarefa esperada.

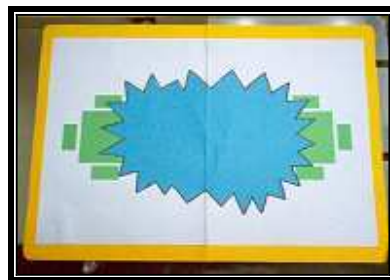


Figura 39: ilustração da situação proposta na atividade 2

Pesquisador: Como você contaria a quantidade de pessoas que poderiam se sentar aqui? Vocês não sabem o número de mesas atrás do desenho, que não aparece em escala. Mas se soubessem, como fariam? Discuta com seu colega qual a melhor forma de escrever isso matematicamente.

O objetivo desta atividade era induzir o aluno a uma generalização da situação proposta na atividade 1, uma vez admitido que o número de mesas era desconhecido. O uso de símbolos para representar essa situação abstratamente é, nesta atividade, uma das tarefas solicitadas. Desta forma, buscamos complementar a atividade anterior, que possibilitava como justificativa uma generalização em língua materna.

Entendemos que, para a realização desta atividade seriam necessários conhecimentos de nível mobilizável, segundo os moldes de Robert (1998) já que para sua realização, os alunos poderiam adaptar alguns conhecimentos de nível técnico, como adição e multiplicação, para construir um modelo de generalização para o problema.

Dentre as sete duplas que realizaram a atividade, três realizaram a mesma estratégia para generalização: admitiram que para cada mesa, quatro pessoas poderiam se sentar.

① Contaria o número de cadeiras ~~de uma mesa~~ de uma mesa e multiplica o tempo de mesas que tem.

② ~~Contaria o número de cadeiras de uma mesa~~
 $4 \times ? = ? \rightarrow \text{Total}$
 ↳ nº de cadeiras ↳ nº de mesas

Alunos 1 e 2

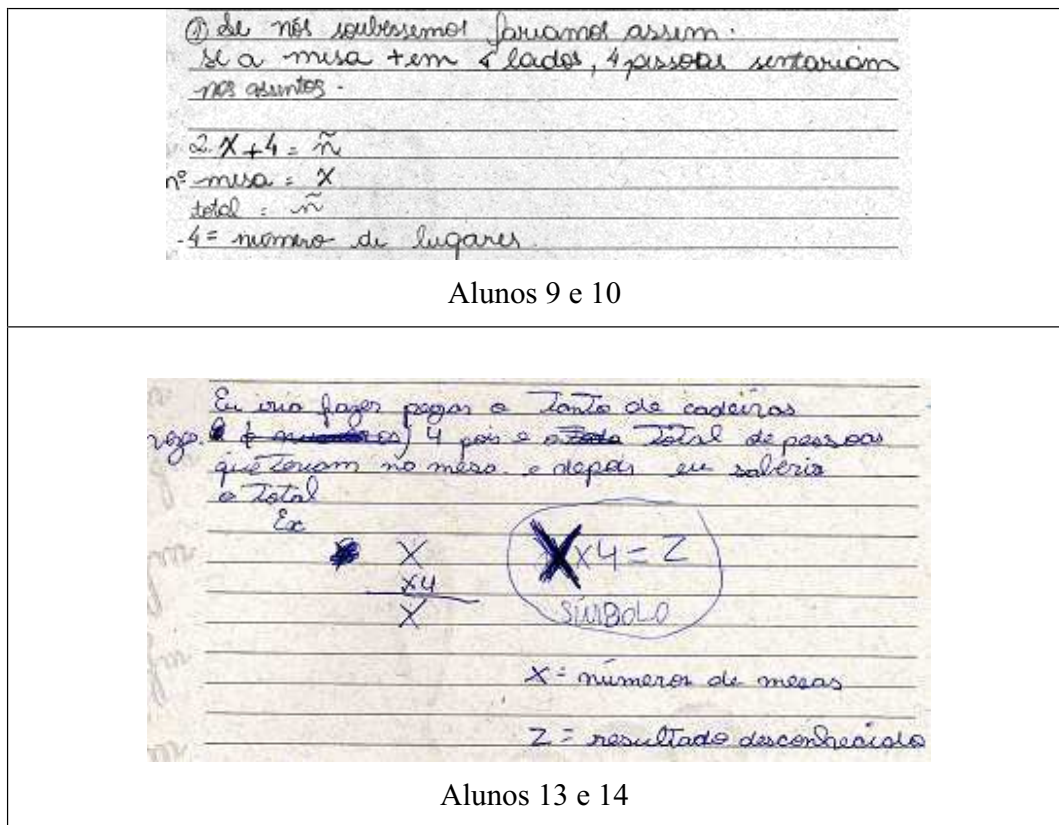


Figura 40: Protocolos dos alunos 1 e 2, 9 e 10, 13 e 14 para atividade 2

Nos três casos, a generalização construída pelos alunos não manteve nenhuma relação com as regularidades ou resultados encontrados na atividade 1. No protocolo dos alunos 1 e 2 percebemos que a regularidade observada pela dupla na atividade anterior – em cada mesa cabem duas pessoas “mais” as pontas – foi ignorada na construção da expressão.

Os alunos 9 e 10 construíram também uma expressão que relaciona 4 lugares em cada mesa. Mesmo tendo desenvolvido a atividade anterior a partir de resultados encontrados concretamente, entendemos que esses alunos não mantiveram a mesma estratégia de raciocínio, uma vez que, analisando o protocolo da atividade anterior, em nenhum momento foi admitida a concepção de multiplicar por 4 o número de mesas propostas.

Quanto aos alunos 13 e 14, percebemos que a expressão que representaria a generalização da situação proposta foi, assim como nos dois casos anteriores,

dissociada das regularidades encontradas durante a execução da atividade 1. Observando o protocolo da atividade anterior, percebemos que, ao final da quarta situação proposta – 13 mesas – ocorre a menção ao fato de que “... só cabem duas cadeiras em cada mesa.”, o que contradiz a expressão construída.

Entendemos que, nos três casos citados, a expressão matemática foi construída e justificada corretamente pelos alunos. Todavia, por ser o objetivo da atividade explorar a habilidade de abstração de um problema de generalização de padrões, inferimos que tais expressões não condizem com o contexto trabalhado na atividade anterior, e dessa forma classificamos os alunos numa fase de transição entre o pensamento pré-algébrico e algébrico.

Outro caso que também classificamos como nível de transição é o dos alunos 5 e 6, conforme ilustração a seguir:

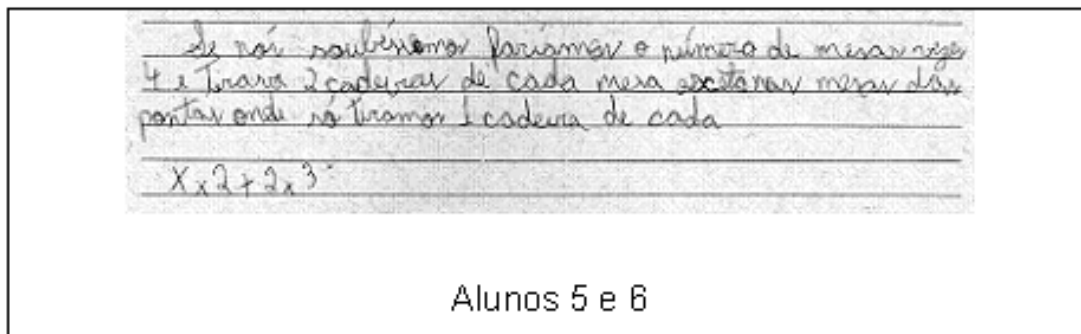


Figura 41: Protocolos dos alunos 5 e 6 para atividade 2

Entendemos que a generalização realizada em língua materna está correta, e que o equívoco estaria na expressão, em não admitirem 2 unidades a menos no número de mesas (representada por X), que seriam contabilizadas posteriormente ao contarem 3 cadeiras em cada uma (representado por 2×3). Observamos que os alunos que compõem essa dupla utilizaram três estratégias distintas: para a primeira atividade, utilizaram a contagem a partir da manipulação do material lúdico fornecido ou de ilustração; para a generalização em língua materna utilizaram a estratégia de “subtrair” do total (4 lugares por

mesa) os locais onde as mesas seriam unidas; e para a construção da expressão matemática que representaria um número desconhecido de mesas, utilizaram a contagem de 2 lugares por mesa, com exceção das mesas das extremidades, onde poderiam se sentar 3 pessoas. Assim, concluímos que os alunos dessa dupla partiram de resultados encontrados concretamente e atingiram uma generalização a partir de regularidades observadas, classificando-se no nível de transição.

Uma das duplas apresentou um procedimento que segundo Booth (1995) demonstra a dificuldade em conceber o foco da atividade algébrica, que é *estabelecer procedimentos e relações e expressá-los numa forma simplificada geral*. Para esses alunos, a tarefa de encontrar uma solução para um problema representa encontrar uma resposta numérica.

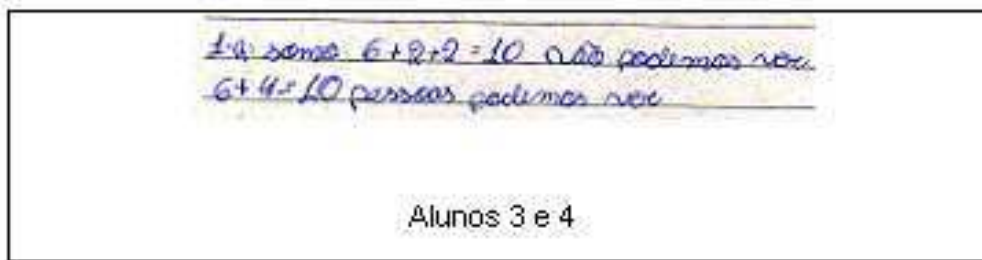


Figura 42: Protocolo dos alunos 3 e 4 para atividade 2

Durante entrevista com o pesquisador, os alunos admitem que adotaram uma quantidade de 4 mesas, supostas proporcionalmente em relação à parte da figura que estava aparente, e que os cálculos foram realizados a partir dessa quantidade. Destacamos, porém, que durante a apresentação da atividade, o pesquisador destacou o fato da figura em exposição não apresentar-se em escala, e que uma “fissura” no centro do cartaz poderia indicar, por exemplo, que a parte não aparente do desenho poderia estar dobrada ou recortada.

Assim, classificamos os alunos dessa dupla num nível pré-algébrico, uma vez que não concebem a idéia de generalização de uma situação não concreta.

As duas últimas duplas que realizaram esta atividade encontraram uma expressão algébrica que generaliza o número de pessoas que poderiam se sentar num bar, sendo desconhecida a quantidade de mesas enfileiradas.

~~Se eu soubesse quanto mesas tinha 2 vezes o~~
~~nº de mesas + 2 das pontas~~

~~2x~~
 $2 \times n = m + 2 = P$

$N =$ números de mesas
 $M =$ resultado
 $P =$ números de pessoas

Alunos 11 e 12

~~Se eu soubesse o número de mesas multiplicaria~~
~~por 2 mais 2~~

~~x~~ ~~x~~ ~~x~~ $x = x + 2$

Alunos 7 e 8

Figura 43: Protocolos dos alunos 11 e 12, e 7 e 8 para atividade 2

Os alunos 11 e 12, na atividade anterior, demonstraram estar num nível de transição entre o pensamento pré-algébrico e algébrico, justificado pelo fato de admitirem a idéia de 2 pessoas por mesa. Analisando a generalização e sua escrita matemática, percebemos que esta se relaciona com os procedimentos desenvolvidos anteriormente.

Os alunos 7 e 8, já na atividade anterior, demonstraram apresentar um pensamento no nível algébrico. A expressão algébrica construída recorre exatamente às justificativas realizadas na atividade 1.

Classificamos, portanto, o pensamento dos alunos das duas duplas num nível algébrico mais avançado, capaz de construir uma generalização decorrente de padrões e regularidades encontradas anteriormente, que era o objetivo da atividade.

3.3.3 CONSIDERAÇÕES SOBRE A TERCEIRA SESSÃO

A sessão composta por duas atividades tinha como objetivo geral explorar o pensamento abstrato dos alunos e motivá-los a expressar matematicamente suas conjecturas. Optamos por permitir o uso do material concreto na primeira atividade por entendermos que os alunos ainda apresentavam grande ligação com a aritmética como ferramenta na resolução de problemas. Dessa forma, previmos que tal situação poderia beneficiar o desenvolvimento da atividade no sentido de facilitar a interpretação da situação proposta como problema. Todavia, por ser o objetivo da sessão o pensamento abstrato, tentamos restringir o uso do material às primeiras situações da atividade 1, controlando o número de peças oferecidas a cada dupla.

Não foi oferecida nenhuma orientação quanto ao tipo de justificativa que deveria ser apresentada. Com isso, nosso objetivo era verificar qual o tipo de representação foi utilizada: língua materna, figural ou simbólica. Entendemos que o uso representação figural denota um pensamento pré-algébrico; o uso da língua materna poderia indicar uma fase de transição entre o pensamento pré-algébrico e algébrico; e o uso da representação simbólica poderia evidenciar um pensamento algébrico.

Após classificarmos o pensamento dos alunos de acordo com os níveis de Fiorentini (2004), entendemos que os resultados apresentados pelos alunos foram bastante satisfatórios em relação aos objetivos pré-estabelecidos. Das quatro duplas classificadas num nível pré-algébrico ao final da primeira

atividade, apenas uma manteve tal classificação ao término da segunda atividade, admitindo nossa interpretação como parâmetro comparativo

Quadro 7: Classificação dos níveis de pensamento ao final da 3ª sessão

Duplas	Nível do Pensamento (Fiorentini, 2004)	
	Atividade 1	Atividade 2
Alunos 1 e 2	Transição	Transição
Alunos 3 e 4	Pré-algébrico	Pré-algébrico
Alunos 5 e 6	Pré-algébrico	Transição
Alunos 7 e 8	Algébrico	Algébrico
Alunos 9 e 10	Pré-algébrico	Transição
Alunos 11 e 12	Transição	Algébrico
Alunos 13 e 14	Pré-algébrico	Transição

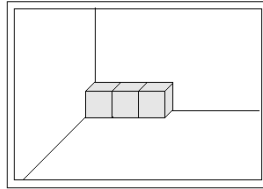
3.4 QUARTA SESSÃO

A quarta sessão, coordenada apenas pela pesquisadora, teve duração de aproximadamente 50 minutos e aconteceu três dias após a aplicação da terceira sessão. Num primeiro momento, estavam presentes 11 dos 14 alunos participantes da pesquisa, que realizaram a atividade fora do horário normal das aulas regulares. Os três alunos restantes desenvolveram a atividade no dia seguinte, durante a aula regular de matemática.

A sessão foi composta por uma única atividade, e os alunos a realizaram individualmente. O objetivo desta última sessão era verificar se a habilidade de abstração do pensamento cognitivo dos alunos havia avançado de um nível pré-algébrico (fortemente ligado à aritmética) para um nível algébrico, por meio da generalização de padrões e regularidades observadas em situações problemas apresentadas nas sessões anteriores.

A atividade foi entregue por escrito conforme representado a seguir.

Um primeiro cubo foi colocado no chão, no canto de uma sala. Os outros também serão colocados no chão, encostados numa parede, formando uma fila.



Qual será o número de faces expostas se enfileirarmos:

1 cubo	Justifique
2 cubos	Justifique
5 cubos	Justifique
8 cubos	Justifique
15 cubos	Justifique
35 cubos	Justifique

Escreva, de modo geral, como você concluiu estes resultados.

O que se pode afirmar sobre o número de faces expostas? Será sempre par? Será sempre ímpar? Por quê?

Imagine que enfileirássemos um número de cubinhos, mas você não sabe qual é. Vamos chamar este valor desconhecido de (crie neste espaço um símbolo para representar este valor). Escreva, usando símbolos matemáticos e o símbolo que você criou, uma expressão que represente quantas faces conseguiríamos ver nessa fileira com hinhos.

A primeira parte da atividade propõe quantidades de cubos a serem enfileirados no chão, encostados na parede, e desta vez, não foi oferecido nenhum material lúdico aos alunos. Por tratar-se da última atividade da seqüência proposta, nossa intenção era verificar a evolução do pensamento abstrato de cada aluno. As quantidades foram apresentadas de forma crescente com o objetivo de dificultar a tentativa de representar concretamente a situação, levando o aluno a sentir a necessidade de criar uma estratégia de contagem.

Essa estratégia seria descrita na próxima tarefa solicitada, onde o aluno apresentaria a forma como foram concluídos os resultados encontrados anteriormente.

Esperava-se que os alunos concluíssem que o número de faces expostas seria sempre ímpar e, para isso, apresentamos tal afirmação sob a forma de pergunta, com o objetivo de levar o aluno a re-analisar suas respostas.

Finalmente, a última tarefa solicitada na atividade propunha a criação de uma simbologia para representar uma quantidade desconhecida. Entendemos que o fato do próprio aluno criar um signo para descrever suas estratégias poderia facilitar a construção de uma expressão matemática para expor suas conclusões acerca da atividade desenvolvida.

As orientações oferecidas pelo pesquisador foram:

- Os registros deveriam ser realizados a caneta;
- A figura tratava apenas de um exemplo, e que os números de cubos propostos não deveriam ser “acrescentados” a ela;
- As justificativas e o modo como foram concluídos os resultados poderiam ser escritas em língua materna ou simbolicamente;

Com a finalidade de facilitar nossa resposta à questão de pesquisa, faremos uma análise individual das atividades dos alunos, analisando sua evolução no decorrer da seqüência proposta.

Aluno 1

Na primeira parte da atividade, sobre o número de faces expostas para a quantidade de cubos proposta, o aluno acertou 3 dos 6 resultados. Os acertos são referentes às três primeiras quantidades, que o aluno justificou tendo desenhado e contado. Para as quantidades seguintes – 8, 15 e 35 cubos – o aluno argumenta acrescentar 3 faces em cada cubo ou desenhar e contar.

8 cubos 15 faces	Justifique Por se 5 cubos com 11 faces acrescentar mais 3 faces.
15 cubos 27 faces	Justifique <u>Desenhei e contei</u>
35 cubos 87 faces	Justifique Eu multipliquei 20 por 3, pelo de 15, p/ 35 dá 10 então multipliquei por 3, pois acresci ta 3 faces.

Figura 44: Protocolo I do aluno 1

Para justificar a conclusão dos resultados, de modo geral, o aluno apresentou a mesma justificativa: serão vistas três faces de cada cubo.

Escreva, de modo geral, como você concluiu estes resultados.

Acrescentando 3 faces pelo número de
Cubos

Figura 45: Protocolo II do aluno 1

Sobre o número de faces expostas, o aluno afirmou sempre ser um número ímpar, mas não apresentou justificativa.

Para representar simbolicamente a regularidade encontrada, o aluno demonstra uma forte ligação com a contagem aritmética, por meio de representação concreta de uma situação.

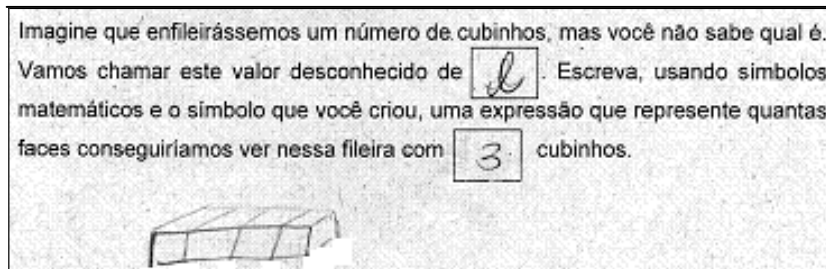


Figura 46: Protocolo III do aluno 1

Em relação ao objetivo desta atividade, entendemos que o aluno não desenvolveu uma estratégia de contagem aplicável a qualquer quantidade de cubos proposta. Dessa, forma, segundo nossa interpretação, classificamos o aluno em um nível pré-algébrico, devido à forte relação com o campo aritmético e sua aparente dificuldade de generalização de situações não concretas.

Aluno 2

Na primeira parte da atividade, sobre o número de faces expostas para a quantidade de cubos proposta, o aluno acertou todos os resultados.

Observando o registro entregue pelo aluno, observamos que o mesmo assumiu uma estratégia de contagem a partir de 8 cubos propostos, já que para os três primeiros resultados encontrados, o aluno apresenta outra estratégia: subtrair as faces que estariam “encostadas”.



1 cubo 3 faces expostas	Justifique 6 faces, 3 encobertos. 2x
2 cubos 5 faces expostas	Justifique 12 faces, 7 encobertos
5 cubos 15 faces expostas	Justifique 
8 cubos 27 faces expostas	Justifique  $8 \cdot 2 + 2$ $16 + 2$ <u>18</u>
15 cubos 33 faces expostas	Justifique $15 \cdot 2 + 2 =$ $30 + 2 = 32$
35 cubos 73 faces expostas	Justifique $35 \cdot 2 + 2 =$ $70 + 2 = 72$

Figura 47: Protocolo I do aluno 2

Para justificar como concluiu os resultados, o aluno apresenta em língua materna a seqüência de operações realizadas a partir das quantidades propostas.

Escreva, de modo geral, como você concluiu estes resultados.

Tomando a multiplicação dos cubos vezes 2 e somando 2 (da face ao lado)

Figura 48: Protocolo II do aluno 2

Sobre o número de faces expostas, o aluno afirmou sempre ser um número ímpar, por “ter que somar 1 (da face ao lado)”.

Para representar simbolicamente a regularidade encontrada, o aluno constrói corretamente uma expressão algébrica relacionando o número de cubos com o número de faces expostas, para uma quantidade qualquer.

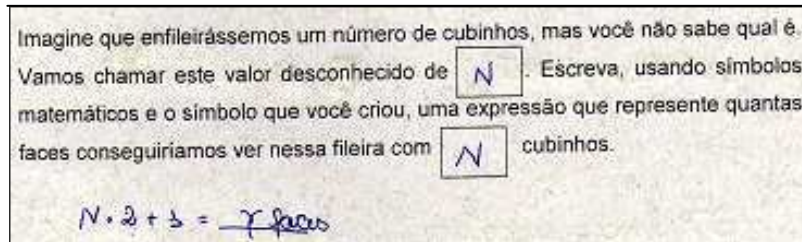


Figura 49: Protocolo III do aluno 2

Para esta atividade, classificamos o pensamento do aluno em um nível algébrico mais avançado, por entendermos que o aluno apresenta um pensamento abstrato capaz de generalizar uma situação não concreta e expressá-la algebricamente.

Aluno 3

Na primeira parte da atividade, o aluno acertou 3 dos 6 resultados. Os três resultados corretos foram os três primeiros, determinados a partir de desenhos e contagem. Todavia, na segunda justificativa, observamos o argumento de que duas faces correspondem a um cubo.

Para as outras três quantidades de cubos – 8, 15 e 35 – o aluno atribui um tratamento aritmético ao problema. Assim, os resultados encontrados anteriormente foram associados como parcelas para encontrar o número de faces expostas nessas situações. Para encontrar a resposta do problema para 8 cubos, por exemplo, o aluno associou $(5 + 2 + 1)$ cubos, encontrando como resultados, $(11 + 5 + 3)$, respectivamente, justificando a resposta de 19 faces expostas.

1 cubo 3	Justifique porque se dá para ver 3 faces porque 3 lados não dá para ver
2 cubos 5	Justifique porque se num cubo dá para ver 3 faces e se acrescentar 2 faces que é um cubo.
5 cubos 11	Justifique eu desenhei e contei as faces
8 cubos 13	Justifique eu acrescentei 2 cubos mais 3.
15 cubos 19	Justifique eu somei 8 cubos mais 7 cubos.
35 cubos 31	Justifique 8 mais 15 $15 + 16 + 5 =$ 36 cubos

Figura 50: Protocolo I do aluno 3

Para justificar a conclusão dos resultados, o aluno afirma apenas ter “somado os cubinhos”. Entendemos que, dessa forma, ele justifica que os resultados foram encontrados associando como parcelas os resultados anteriores, encontrados a partir de representação com desenhos.

Sobre o número de faces expostas, o aluno afirma ser sempre ímpar, mas não apresenta justificativa.

Quanto à representação simbólica da estratégia desenvolvida, o aluno não apresenta uma expressão relacionada à adição de parcelas. Ao contrário, foi apresentada uma expressão que, embora utilizando dois símbolos distintos para representar um mesmo valor no enunciado do problema, apresenta coerência quando justificada.

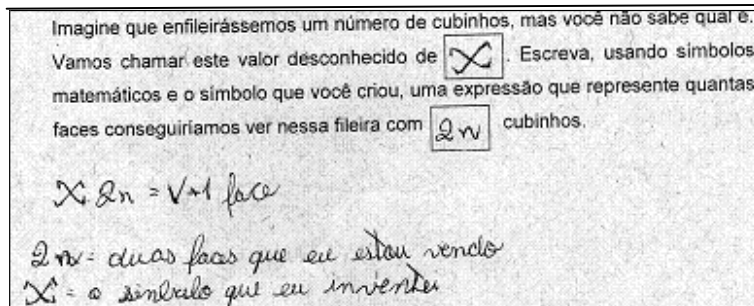


Figura 51: Protocolo II do aluno 3

Nesse caso, o aluno multiplica indevidamente uma variável n por 2, numa tentativa de expressar que o número de cubos, que o aluno chama de X , deve ser multiplicado por 2 (duas faces vistas em cada cubo enfileirado) para depois acrescentar a face lateral do último cubo.

Assim, inferimos que o aluno encontra-se numa fase de transição, por entendermos que, mesmo ainda admitindo um tratamento aritmético para encontrar os resultados, quando proposto que generalizasse a situação, demonstra abstratamente ter percebido regularidades como 2 faces vistas em cada cubo enfileirado e a adição de 1 face ao resultado encontrado.

Aluno 4

Na primeira parte da atividade, o aluno acertou todos os resultados. Em todos os casos, a justificativa apresentada demonstra que o aluno realiza uma adição de seqüência de números ímpares, a partir do número 1. Todavia, se admitirmos que o aluno construiu uma seqüência em que os elementos seriam os números ímpares, percebemos que a resposta é obtida pelo elemento que ocuparia a posição $(n + 1)$, sendo n a quantidade de cubos enfileirados.

1 cubo 3 faces	Justifique Pois aumenta 2, pois são os faces que aparecem.
2 cubos 5 faces	Justifique Pois aumenta 2, pois são mais duas faces que aparecem.
5 cubos 11 faces	Justifique Pois aumenta mais 4 Exemplo: 3 5 7 9 11
8 cubos 17 faces	Justifique Pois vai aumentando pela sequência 3 5 7 9 11 13 15 17
15 cubos 31 faces	Justifique Pois vai aumentando pela sequência, de maneira
35 cubos 71 faces	Justifique Pois ainda sim continua pela sequência. E todos os números são ímpares.

Figura 52: Protocolo I do aluno 4

Para justificar os resultados encontrados, o aluno confirma nossa previsão de acordo com as justificativas parciais da primeira parte da atividade.

Escreva, de modo geral, como você concluiu estes resultados.

Vendo pelas faces dos cubos, eu ia contando de ímpar a ímpar "2 em 2".

Figura 53: Protocolo II do aluno 4

Admitindo esta estratégia, o aluno afirma que todos os resultados encontrados foram ímpares, apresentando como justificativa uma seqüência com os números naturais ímpares, a partir do número um.

Para representar simbolicamente a regularidade encontrada, o aluno constrói erroneamente uma expressão que, segundo nossa interpretação,

demonstra apenas como o aluno encontraria o termo seguinte em uma seqüência: adicionando 2 unidades ao termo anterior.

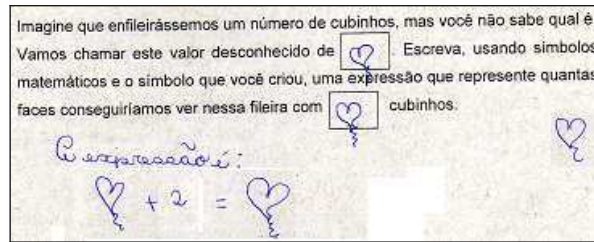


Figura 54: Protocolo III do aluno 4

Todavia, entendemos que a generalização é condizente à estratégia admitida pelo aluno: somar duas unidades a quantidade anterior. Dessa forma, considerando uma dialética entre o pensamento e a linguagem desenvolvida, classificamos esse aluno num nível de transição do pensamento.

Aluno 5

Na primeira tarefa proposta, o aluno acertou os seis resultados das situações apresentadas. Para as 4 primeiras justificativas, o aluno afirma ter desenhado e contado as faces. Nas duas últimas quantidades – 15 e 35 cubos - encontramos o registro de uma estratégia de contagem, em que são somadas duas parcelas iguais ao número que representa a quantidade de cubos enfileirados e 1.

15 cubos 31 faces	Justifique Não vemos as faces do chão da parede e as misturadas nos outros cubos, fiz $15 + 15$ e o resultado coloquei +1.
35 cubos 71 faces	Justifique Não vemos as faces do chão da parede e as misturadas nos outros cubos, desicidi $35 + 35$ e o resultado +1.

Figura 55: Protocolo I do aluno 5

Apesar de registrar nesta primeira parte da atividade a seqüência de operações realizadas para encontrar os resultados, na tarefa seguinte em que o aluno deve escrever a estratégia utilizada encontramos apenas a citação de que são todos ímpares. Já na próxima questão, o aluno justifica a resposta dada anteriormente. Entendemos que a justificativa apresentada remete a uma interpretação figural dos resultados encontrados.

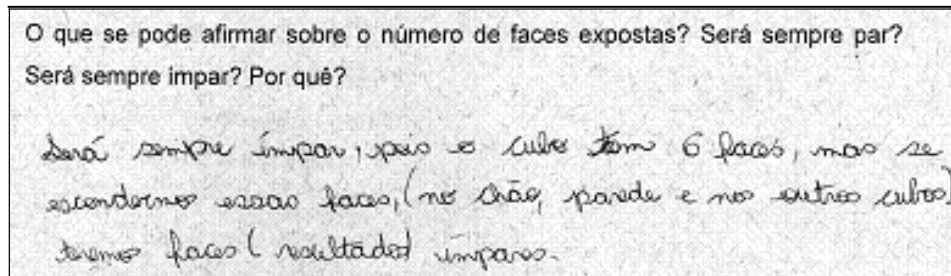


Figura 56: Protocolo II do aluno 5

Quanto à representação simbólica da estratégia desenvolvida, o aluno construiu corretamente uma expressão algébrica, coerente com a estratégia desenvolvida nas atividades anteriores desta sessão. O símbolo y , segundo nossa interpretação, representa a quantidade de faces expostas.

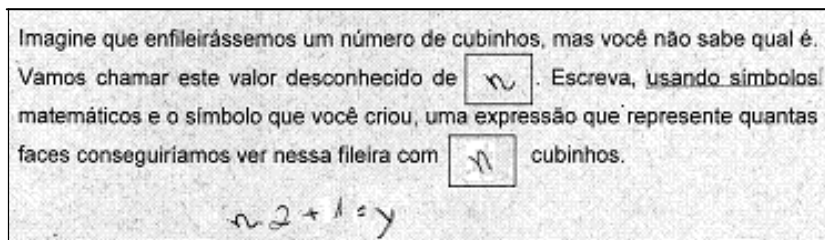


Figura 57: Protocolo III do aluno 5

Concluimos que o aluno atingiu os objetivos da atividade, generalizando uma situação desconhecida e construindo algebricamente uma expressão para representá-la. Assim, entendemos que este aluno encontra-se num nível algébrico mais avançado.

Aluno 6

Na primeira parte da atividade, o aluno acertou todos os resultados. Nas três primeiras quantidades propostas – 1, 2 e 5 cubos – a justificativa registrada foi de que os cubos foram desenhados e contados. Para as quantidades de 8, 15 e 35 cubos enfileirados, o aluno registra uma só justificativa: “*multipliquei o número de cubos e somei 1*”.

Quando solicitado que registrasse como foram concluídos os resultados encontrados, o aluno afirma ter utilizado duas estratégias distintas, que dependiam da quantidade de cubos enfileirados a ser contada.

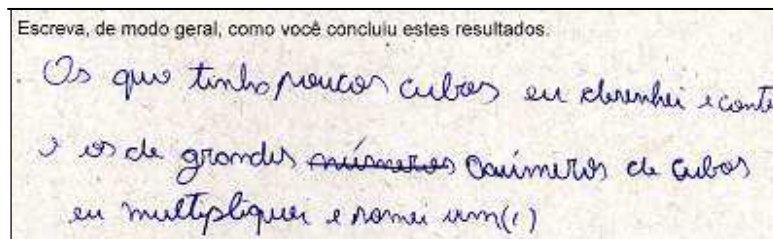


Figura 58: Protocolo I do aluno 6

Quanto à quantidade de faces expostas, se era uma quantidade par ou ímpar o aluno afirma ser sempre ímpar, e justifica que “*sempre vai ter mais uma face exposta*”. Essa regularidade foi, provavelmente, em referência a operação somar 1 na justificativa sobre a estratégia utilizada.

Observamos que, até este momento da atividade, o aluno afirma ter realizado uma operação de multiplicação em que um dos fatores seria o número de cubos, mas não registra o outro fator adotado. O número 2 aparece como fator apenas quando lhe foi solicitada a construção de uma expressão.

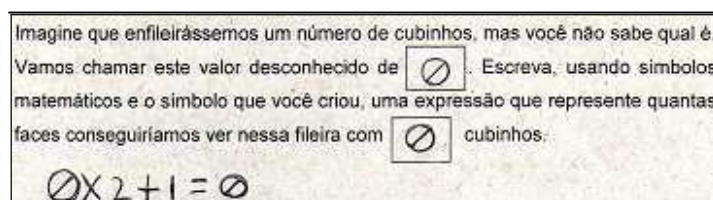


Figura 59: Protocolo II do aluno 6

Apesar de o aluno adotar o mesmo símbolo para representar o valor desconhecido de cubos enfileirados e do total de faces expostas, entendemos que este aluno atingiu os objetivos da atividade, e que este equívoco decorre da inexperiência com o tratamento algébrico de problemas. Classificamos este aluno como um nível de pensamento algébrico mais avançado.

Aluno 7

Na primeira parte da atividade, o aluno acertou todos os resultados, e a justificativa registrada em todos foi: “o número de cubos vezes 2 mais 1”. O mesmo registro foi encontrado para a tarefa de escrever, de modo geral, como os resultados foram concluídos.

Quanto à quantidade de faces expostas, se era uma quantidade par ou ímpar o aluno afirma *ser sempre ímpar, porque o último cubo sempre aparecerá a face do lado*.

Dessa forma, o aluno não apresentou nenhuma dificuldade em escrever a expressão algébrica que representasse sua estratégia, conforme registro de protocolo a seguir.

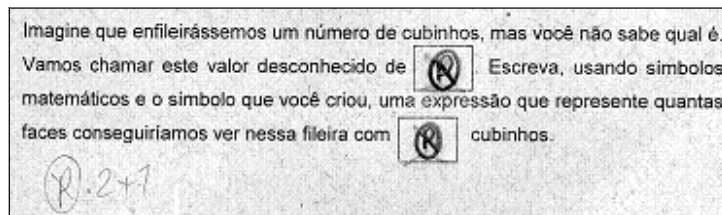


Figura 60: Protocolo I do aluno 7

Aluno 8

Na primeira parte da atividade o aluno acertou apenas o primeiro resultado, com o número de faces expostas para um único cubo enfileirado. Por não apresentar a justificativa, entendemos que foi encontrado apenas com a contagem a partir de um modelo. Os outros resultados foram encontrados a

partir de uma mesma estratégia: o aluno associa duas faces em cada cubo enfileirado, mas ignora a contagem da face lateral exposta no último cubo. Assim, todos os valores erroneamente encontrados equivalem ao antecessor do resultado correto.

1 cubo 3	Justifique
2 cubos 4	Justifique porque 2x2=4 porque $2 \times 2 = 4$
5 cubos 10	Justifique porque $5 \times 2 = 10$
8 cubos 16	Justifique porque $8 \times 2 = 16$
15 cubos 30	Justifique porque $15 \times 2 = 30$
35 cubos 70	Justifique $35 \times 2 = 70$

Figura 61: Protocolo I do aluno 8

A estratégia apresentada pelo aluno sobre o modo como foram encontrados os resultados é coerente com a interpretação da tarefa solicitada anteriormente, afirmando que “é o número de cubos $\times 2$ ”. Quanto ao número de faces expostas, registra ser sempre par, pois “o número $\times 2$ é par”.

Quanto à representação da estratégia adotada por meio de uma expressão utilizando símbolos, o aluno a apresenta corretamente, de acordo com a generalização admitida por ele.

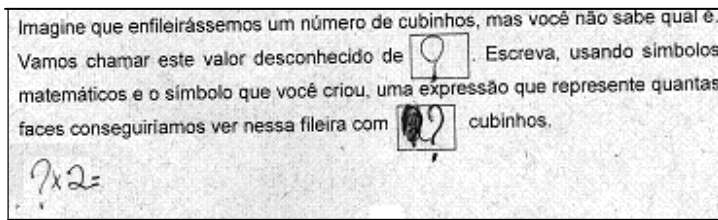


Figura 62: Protocolo II do aluno 8

Mesmo não encontrando os resultados esperados para as situações propostas, entendemos que o que existiu foi uma interpretação errônea acerca da contagem das faces, deixando o aluno de contar a face exposta na lateral da fileira de cubos. Contudo, a generalização da regularidade admitida está correta e apresenta coerência com o desenvolvimento da atividade. Por isso, classificamos o pensamento desse aluno como um nível algébrico mais avançado.

Aluno 9

Na primeira tarefa proposta, o aluno acertou todos os resultados. Para as três primeiras justificativas, foi construído um esquema figural, o que demonstra uma abordagem concreta do problema.

A partir da quarta quantidade de cubos proposta – 8, 15 e 35 cubos – o aluno apresenta um esquema de contagem que poderia induzir a uma futura generalização: o aluno adiciona duas parcelas iguais ao número de cubos enfileirados com 1 unidade.


8 cubos 17 faces	Justifique?  Chequei a conclusão que fizemos $8 \times 3 + 1$
15 cubos 31 faces	Justifique $15 + 16 + 1 = 32$ faces
35 cubos 71 faces	Justifique $35 + 36 + 1 = 71$

Figura 63: Protocolo I do aluno 9

Para justificar a conclusão dos resultados de modo geral, o aluno recorre novamente a uma abordagem concreta (representação figural) e aritmética (exemplo particular para dois cubos enfileirados) do problema.

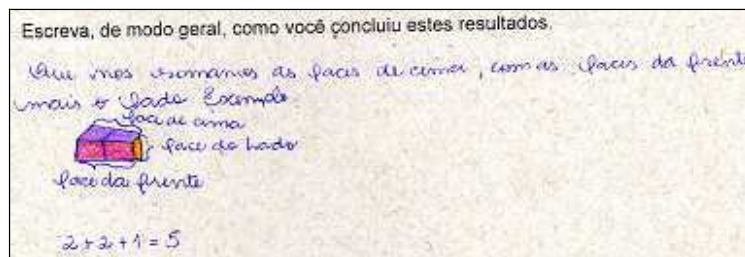


Figura 64: Protocolo II do aluno 9

Quanto ao número de faces expostas, o aluno afirma ser sempre ímpar. Mais uma vez a justificativa recorre a uma abordagem concreta do problema.

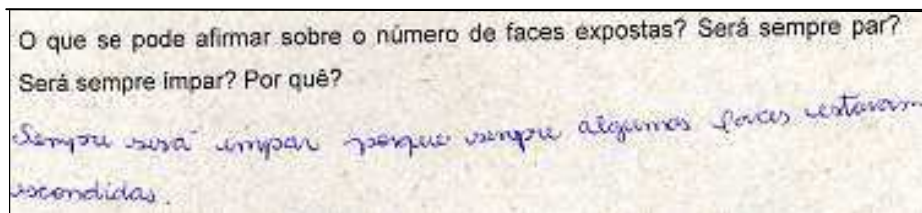


Figura 65: Protocolo III do aluno 9

Quando solicitada a construção de uma expressão que representasse a estratégia admitida, o aluno demonstra corretamente uma relação abstrata e

generalizada do que outrora fora tratado concretamente. O único equívoco observado foi a criação de dois símbolos para representar um mesmo valor desconhecido: l e m representariam a quantidade de cubos enfileirados, de acordo com o preenchimento do enunciado. Todavia, a variável m na expressão construída representa a quantidade de faces expostas.

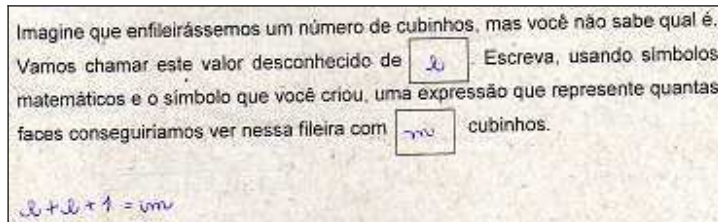


Figura 66: Protocolo IV do aluno 9

Entendemos que o equívoco descrito acima se deve apenas a inexperiência com a abordagem algébrica, uma vez que o aluno utiliza a mesma seqüência de operações da expressão algébrica para a resolução de casos particulares da atividade proposta. Assim, classificamos o pensamento desse aluno em um nível algébrico mais avançado.

Aluno 10

Na primeira parte da atividade, o aluno acertou 4 dos 6 resultados esperados. Os quatro resultados corretos foram justificados sem a utilização de nenhuma estratégia de contagem, transpondo a idéia de que foram encontrados a partir da contagem de uma representação figural.


1 cubo 3 faces	Justifique porque atrás não dá pra ver nem em baixo e nem do lado de cima só do pra vir 3 faces
2 cubos 5 faces	Justifique $1 + 2 = 3$ cubos = 5 faces ↓ cubo 1 cubo 2 3 faces
5 cubos 11 faces	Justifique se dois cubos tem de 5 faces de 10 faces 3 faces cubos 
8 cubos 17	Justifique se 5 cubos tem 10 faces, + 3 tem 17

Figura 67: Protocolo I do aluno 10

Para as duas situações seguintes – 15 e 35 – o aluno atribui um tratamento aritmético ao problema. Assim, os resultados encontrados anteriormente foram associados como parcelas para encontrar o número de faces expostas nessas situações.

15 cubos 30 faces	Justifique se 5 tem 10 eu 3x3 10x10=30
35 cubos 70 faces	Justifique se 10 cubos tem 30 faces + mais 10 cubos tem 60 $10 + 10 + 10 = 30$ ↓ cubo cubo cubo 30 30 10 70

Figura 68: Protocolo II do aluno 10

Para encontrar a resposta do problema para 15 cubos, por exemplo, o aluno associou 5 cubos vezes 3, encontrando como resultados, (10 + 10 + 10), justificando a resposta de 30 faces expostas. Vemos que a quantidade de 10 faces expostas para 5 cubos enfileirados, utilizada para esta tarefa, encontra-se

rasurada. A mesma interpretação foi utilizada para o problema com 35 cubos: a quantidade 35 foi associada como $15 + 15 + 5$ e, seus respectivos resultados $30 + 30 + 10$.

Para justificar a conclusão dos resultados, o aluno recorre a uma interpretação concreta do problema.

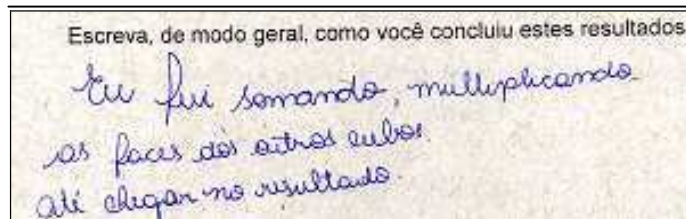


Figura 69: Protocolo III do aluno 10

Quanto à quantidade de faces expostas, o aluno não consegue determinar uma única resposta, afirmando que “*será par e ímpar*”. Ainda assim, não percebemos uma re-análise dos resultados parciais encontrados.

Quanto à representação simbólica da estratégia desenvolvida, o aluno constrói uma expressão que não mantém nenhuma relação com a situação proposta. A simbologia admitida é aplicada incoerentemente, sendo uma mesma quantidade representada por dois símbolos distintos.

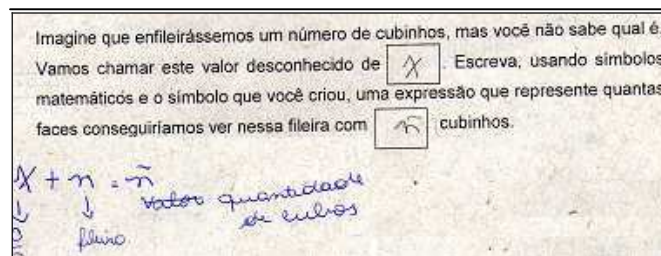


Figura 70: Protocolo IV do aluno 10

Diante da abordagem concreta do problema proposto e da dificuldade de generalizar e expressar de modo geral uma situação, classificamos esse aluno em um nível pré-algébrico de pensamento.

Aluno 11

Todos os resultados da primeira tarefa solicitada na atividade foram apresentados corretamente. A justificativa descrita apresenta dupla abordagem: concreta, uma vez que o aluno afirma ter construído um desenho para representar a figura e abstrata, supondo que o aluno desenvolve uma mesma estratégia de contagem para todas as quantidades de cubos propostas.

1 cubo 3 faces	Justifique $1+1+1=3$ (Desenho) Estou vendo uma face na frente, uma em cima e a outra do lado.
2 cubos 5 faces	Justifique $2+2+1=5$ (Desenho) Estou vendo duas faces na frente, uma duas em cima e uma do lado.
5 cubos 15 faces	Justifique $5+5+5=15$ (Desenho) Estou vendo cinco faces na frente, cinco em cima e uma do lado.
8 cubos 17 faces	Justifique (Desenho) $8+8+1=17$ Estou vendo oito faces na frente, oito em cima e uma do lado.
15 cubos 35 faces	Justifique $15+15+5=35$ (Desenho) Estou vendo quinze faces na frente, quinze em cima e uma do lado.
35 cubos 75 faces	Justifique $35+35+5=75$ (Desenho) Estou vendo trinta e cinco faces na frente, trinta e cinco em cima e um do lado.

Figura 71: Protocolo I do aluno 11

Para justificar de modo geral como foram concluídos os resultados encontrados, o aluno remete a uma abordagem concreta do problema, afirmando “Somar as faces da frente, as de cima e uma face que está ao lado”. Essa interpretação deu-se pelo fato de que o aluno não registra que o número

de faces da frente e de cima representam, ambos, o número de cubos enfileirados.

Sobre o número de faces expostas, afirma ser sempre ímpar, mas não apresenta justificativa.

No momento da construção de uma expressão para representar a estratégia utilizada, o aluno demonstra facilidade em abstrair e generalizar o que outrora interpretara aritmeticamente.

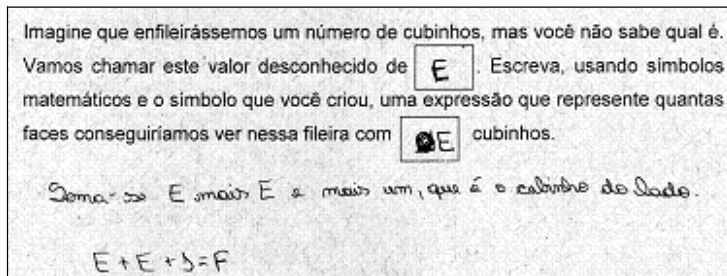


Figura 72: Protocolo II do aluno 11

Classificamos esse aluno em um nível de pensamento algébrico mais avançado, devido a facilidade de transposição de abordagem do problema proposto, de um campo aritmético tratando individualmente cada situação para um campo algébrico, generalizando a mesma situação.

Aluno 12

Desde a primeira parte da atividade, o aluno apresenta uma estratégia de contagem que não depende da representação figural da situação. Todos os resultados registrados estavam corretos e a justificativa de todos era: “O número de cubos vezes dois mais 1 chega no total”. Esta mesma justificativa foi apresentada na tarefa seguinte solicitada, em que o aluno deveria escrever, de modo geral, como concluiu os resultados encontrados.

Quanto ao número de faces expostas, afirma ser sempre ímpar, “...*porque acrescenta mais 1*”.

Coerentemente ao desenvolvimento da atividade, a expressão criada para representar a estratégia admitida foi registrada corretamente, analisando a justificativa apresentada.

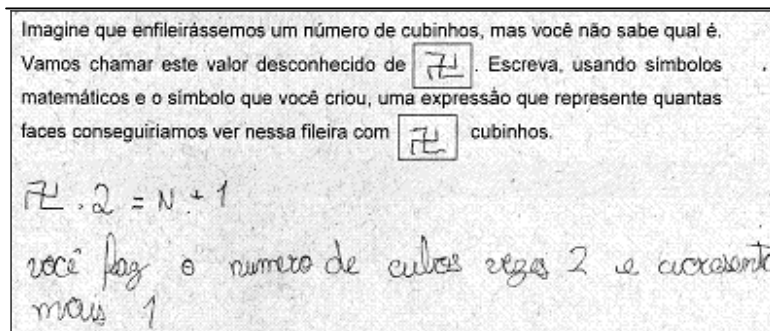


Figura 73: Protocolo I do aluno 12

Dessa forma, classificamos o aluno em um nível algébrico mais avançado, demonstrando grande facilidade em generalizar situações não concretas a partir de regularidades observadas.

Aluno 13

Na primeira parte da atividade, para todas as propostas de quantidades de cubos enfileirados, o aluno registrou a mesma justificativa. Em todos os casos, afirma ter “*pensado no número de cubinhos e somado*”.

Todavia, os resultados apresentados estavam corretos apenas para as quatro primeiras quantidades de cubos enfileirados. Para 15 e 35 cubos enfileirados, os resultados apresentados foram 20 e 70, respectivamente.

Para justificar como foram concluídos os resultados, afirma novamente ter “*somado os lados*”.

Para a próxima tarefa solicitada na atividade, que indagava a respeito do total de faces expostas, o aluno registrou ser sempre ímpar, mesmo encontrando dois resultados pares.

Para construir uma expressão que representasse a estratégia de contagem, o aluno demonstra não estabelecer relação entre a abordagem concreta realizada e uma abordagem geral da situação proposta.

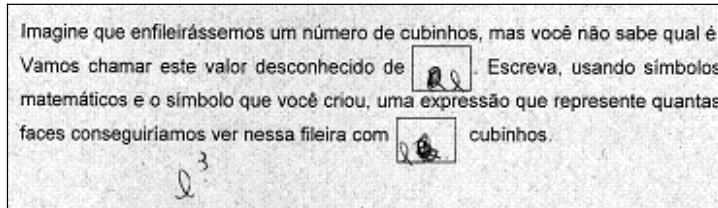


Figura 74: Protocolo I do aluno 13

Ao analisarmos este registro, supomos que o registro de l elevado ao expoente 3 denotaria a interpretação de uma semelhança de leitura, uma vez que o problema proposto refere-se a cubos e, a leitura do expoente 3 na expressão também é “cubo”. Tal suposição foi confirmada em posterior conversa com o aluno. Classificamos este aluno em um nível pré-algébrico, em decorrência a grande dificuldade apresentada em estabelecer e representar relações abordadas inicialmente de forma concreta.

Aluno 14

Na primeira parte da atividade, o aluno apresenta corretamente todos os resultados e suas justificativas referem-se sempre a uma mesma estratégia, que consiste em “dobrar” o número que representa a quantidade de cubos enfileirados e admitir como resultado o sucessor deste número encontrado.







1 cubo  3	Justifique O dobro de 1 e o sucessor do resultado
2 cubos  5	Justifique O dobro de 2 e o sucessor do resultado
5 cubos  11	Justifique O dobro de 5 e o sucessor do resultado
8 cubos  17	Justifique O dobro de 8 e o sucessor do resultado
15 cubos  31	Justifique O dobro de 15 e o sucessor do resultado
35 cubos  71	Justifique O dobro de 35 e o sucessor do resultado

Figura 75: Protocolo I do aluno 14

As rasuras existentes no protocolo devem-se a uma interpretação errônea do enunciado do problema. O aluno adicionou o número de cubos propostos à quantidade representada na figura inicial. Tal equívoco foi esclarecido pelo pesquisador durante a execução da atividade.

Para justificar de modo geral como foram concluídos os resultados, o aluno generaliza a situação, representando-a em língua materna.

Escreva, de modo geral, como você concluiu estes resultados.

É só pegar $\times 2$ quanto ao número de cubos solicitado e somar o resultado 1

Figura 76: Protocolo II do aluno 14

Quanto ao número de faces expostas, afirma ser um número sempre ímpar e justifica: “pois multiplica o número $\times 2$ e soma 1”.

Contudo, para registrar por meio de uma expressão a estratégia admitida verificamos que o aluno faz uma tentativa de construir uma generalização à partir de um exemplo.

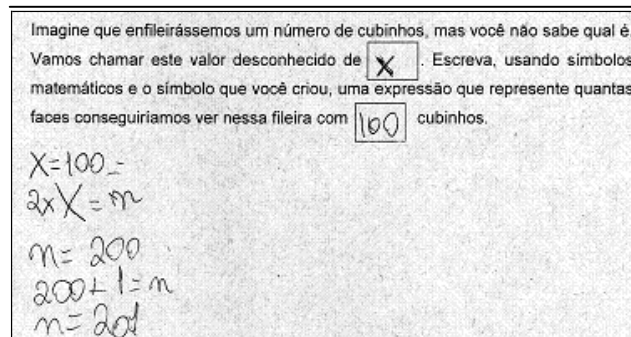


Figura 77: Protocolo III do aluno 14

Classificamos o pensamento desse aluno em um nível de transição pois, construiu uma expressão algébrica com características aritméticas, evidenciando dificuldades em encontrar uma representação genérica para uma quantidade desconhecida que sirva para qualquer número.

3.4.1 CONSIDERAÇÕES SOBRE A QUARTA SESSÃO

Esta sessão apresentava como objetivo geral verificar se os alunos conseguiriam generalizar uma situação proposta a partir da observação de regularidades, sem a recorrência a nenhum material concreto. Para isso, entendemos que as tarefas realizadas em sessões anteriores poderiam compor um conjunto de conhecimentos prévios para sua realização.

Por ser nosso objeto de estudo o pensamento dos alunos, e não apenas a representação algébrica de suas conjecturas, novamente não restringimos as justificativas apresentadas. Dessa forma, teríamos uma dupla interpretação

acerca dos protocolos entregues: numa das vertentes, poderíamos analisar o processo do pensamento cognitivo dos alunos; em outra, seria possível entendermos como interpretam uma expressão utilizando símbolos.

A proposta de uma simbologia criada pelo próprio aluno teve como objetivo motivá-los e facilitar a interpretação da seqüência de operações construídas a partir dela.

Após classificarmos o pensamento dos alunos de acordo com os níveis de Fiorentini (2004) e seguindo nossa interpretação dos resultados obtidos, entendemos que a 4ª sessão desempenhou um papel de extrema importância no desenvolvimento do processo cognitivo explorado com a seqüência de atividades proposta nesta pesquisa. Por ser esta a sessão que finalizou a proposta, foi nela que pudemos observar o avanço do pensamento algébrico de cada aluno.

Dos quatorze alunos que desenvolveram a seqüência desde a primeira sessão proposta, nove atingiram o nível algébrico mais avançado, um deles demonstrou estar em um nível de transição entre o pensamento pré-algébrico e algébrico mais avançado e quatro alunos terminaram a sessão ainda em um nível pré-algébrico.

A seguir, construímos uma tabela com a classificação do pensamento de cada aluno ao final da 4ª sessão, segundo Fiorentini (2004).

Quadro 8: Classificação dos níveis de pensamento ao final da 4ª sessão

Aluno	Nível do Pensamento (Fiorentini, 2004)
1	Pré-algébrico
2	Algébrico
3	Transição
4	Transição
5	Algébrico
6	Algébrico

7	Algébrico
8	Algébrico
9	Algébrico
10	Pré-algébrico
11	Algébrico
12	Algébrico
13	Pré-algébrico
14	Transição

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo desta pesquisa foi apresentar uma proposta de seqüência didática destinada a alunos de 7º ano do Ensino Fundamental para introdução à Álgebra, em particular a dois de seus componentes: a generalização e a construção de expressões algébricas a partir de padrões e seqüência apresentados sob a forma de problemas. A organização do pensamento algébrico em níveis, segundo Fiorentini (2004), assim como os níveis de mobilização de um conhecimento, segundo Robert (1998) foram as teorias utilizadas, tanto para a orientação da organização didática das atividades como para análise dos dados observados.

Analisando o desenvolvimento deste trabalho, desde a aplicação de uma atividade de sondagem para identificação das dificuldades apresentadas até a construção e aplicação de uma seqüência didática com os objetivos acima descritos, acreditamos que a metodologia admitida contribuiu satisfatoriamente para o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos.

Além dos objetivos apresentados, entendemos que também foi possível explorarmos outras habilidades inerentes a esse tipo de abordagem investigativa em sala de aula. Dentre tais habilidades destacamos o trabalho com a argumentação e conjecturas, desenvolvido nas atividades executadas em duplas.

Apresentamos a seguir um quadro individual dos alunos e sua respectiva evolução do pensamento algébrico no decorrer da seqüência didática aplicada. Para a análise segundo os níveis de Fiorentini (2004), adotamos P para o pensamento no nível pré-algébrico ou ainda aritmético; T para uma transição entre o pensamento pré-algébrico e algébrico mais avançado, e A para um pensamento algébrico mais avançado. A primeira sessão não foi considerada

nesse quadro, pelas características já apresentadas no decorrer desse trabalho.

Quadro 9: Classificação dos níveis de pensamento ao final seqüência didática

	2ª sessão			3ª sessão		4ª sessão
	Atividade 1	Atividade 2	Atividade 3	Atividade 1	Atividade 2	
Aluno 1	P	P	T	T	T	P
Aluno 2	P	P	T	T	T	A
Aluno 3	P	P	T	P	P	T
Aluno 4	P	P	T	P	P	T
Aluno 5	P	P	T	P	T	A
Aluno 6	P	P	T	P	T	A
Aluno 7	T	P	A	A	A	A
Aluno 8	P	P	T	A	A	A
Aluno 9	P	T	A	P	T	A
Aluno 10	P	T	T	P	T	P
Aluno 11	P	P	P	T	A	A
Aluno 12	T	T	T	T	A	A
Aluno 13	P	P	P	P	T	P
Aluno 14	P	P	T	P	T	T

Observando o quadro acima, percebemos que houve um aumento gradual dos níveis do pensamento algébrico dos alunos no decorrer das sessões, chegando, segundo nossa interpretação, a nove alunos, entre os 14 participantes, que atingiram o pensamento algébrico mais avançado ao final da quarta sessão. Contudo, mesmo que na última sessão possam ser observados quatro alunos no nível pré-algébrico, entendemos que não foi assim durante toda a seqüência didática tendo, esses alunos, oscilado entre os níveis pré-algébrico e de transição.

Retomando nossos estudos preliminares, apresentamos nossas questões de pesquisa: o uso de seqüências aritméticas e padrões como ferramenta para a abordagem da Álgebra na Escola Básica permite que o aluno evolua de um pensamento pré-algébrico a um pensamento algébrico mais avançado

(Fiorentini, 2004), desenvolvendo e construindo, de forma autônoma, estratégias e habilidades para resolução de problemas? Que elementos desse desenvolvimento podem ser identificados quando se usam seqüências didáticas preparadas com base nesse tipo de ferramentas? Entendemos aqui como forma autônoma aquela que permite que os conhecimentos sejam mobilizáveis ou disponíveis para o aluno, durante a resolução do problema.

Por meio da análise dos dados levantados a partir desses questionamentos, procuramos confirmar algumas hipóteses:

- Atividades que exigem a análise de variações e sua representação em linguagens elaboradas pelo aluno podem diminuir as dificuldades apresentadas e promover o desenvolvimento cognitivo de abstração, a partir de conhecimentos prévios inerentes à atividade proposta.
- Acreditamos que ao trabalhar com uma aritmética centrada exclusivamente em exercícios e algoritmos finalizados, com a utilização de exemplos que contemplem apenas o trabalho com casos particulares, o professor faz com que o aluno deixe de compreender a natureza do *variável*.
- Consideramos que uma abordagem que trabalhe a construção do conceito e do pensamento algébrico à partir de generalizações e formulação de hipóteses pode fazer com que os alunos desenvolvam problemas de outros níveis de conhecimento que não apenas o técnico.

Destacamos aqui a importância da elaboração e aplicação de seqüências didáticas no processo de ensino-aprendizagem. Dessa forma, pudemos diagnosticar as principais dificuldades apresentadas e explorá-las com atividades direcionadas. O planejamento da atividade de sondagem, com elementos de análise *a priori* foi fundamental nesse processo.

Resgatando alguns aportes teóricos adotados nesta pesquisa, retomamos Schoen (1995), que descreve seis recomendações direcionadas ao docente:

1. Basear a aprendizagem de coisas novas no conhecimento e na compreensão que os alunos já têm.
2. Levar gradualmente da verbalização para o simbolismo algébrico.
3. Introduzir os tópicos de Álgebra com aplicações.
4. Ensinar os tópicos de Álgebra a partir da perspectiva de como eles podem ser aplicados.
5. Ensinar e modelar processos heurísticos específicos como auxiliares para compreensão e resolução de problemas.
6. Comprometer os alunos com a resolução de problemas.

Entendemos que a presente pesquisa contempla especialmente as duas primeiras recomendações, uma vez que a seqüência de atividades elaborada utiliza-se de conhecimentos prévios dos alunos como operações fundamentais e inversas e, gradualmente, conduz o aluno a expressar-se oral e simbolicamente.

Quanto ao desenvolvimento da Álgebra no Ensino Fundamental proposto pelo PCN (quadro 1), destacamos para o terceiro ciclo as principais abordagens tratadas nesta pesquisa quanto a:

- Conteúdos: noção de variável (intuitivamente) e uso e resolução de expressões algébricas simples, para traduzir relação de variação entre duas grandezas.
- Objetivos: reconhecer que representações algébricas permitem expressar generalizações sobre propriedades das operações aritméticas; identificar o significado das letras; utilizar os conhecimentos sobre as operações numéricas e suas propriedades para construir estratégias de cálculo algébrico.
- Procedimentos: resolução de situações-problema; exploração de padrões em seqüências numéricas que levem o aluno a fazer algumas generalizações.

Apesar de classificarmos como satisfatórios os resultados apresentados pelos alunos quanto a introdução à Álgebra, entendemos que exploramos apenas dois de seus componentes: a generalização e a construção de expressões algébricas a partir de padrões e seqüências apresentados sob a forma de problemas. Dessa forma, é de nosso interesse continuar os estudos realizados, partindo para o trabalho com as expressões algébricas construídas, abordando outros componentes da Álgebra.

Está em andamento um artigo referente a presente pesquisa, que tem por objetivo destacar as principais fases e resultados apresentados.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, S. A. *Fundamentos da didática da matemática*. São Paulo, Ed. UFPR, 2007.

BOOTH, L. R. *Dificuldades das crianças que se iniciam em Álgebra*, in COXFORD A. F. e SHULTE A. P., *As idéias da Álgebra*, Trad. Higino H. Domingues. São Paulo, Ed. Atual, 1995, p. 23-36.

BRASIL, Ministério da Educação e do Desporto. *Parâmetros Curriculares Nacionais*. Brasília, SEF, 1998.

CAEM – IME/USP *Série cadernos de atividades nº 01: atividades de laboratório de matemática – Ensino Fundamental*. Coordenadora: GOMIDE, E. F. Organizadora: ROCHA, J. C.

DUVAL, R. *Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática*. Organizadora: MACHADO, S.D.A. *Aprendizagem em Matemática*. Ed. Papyrus,. São Paulo, 2003, p. 11- 33.

FIORENTINI, D; FERNANDES, F. L. P.; CRISTOVÃO, E. M. *Um estudo das potencialidades pedagógicas das investigações matemáticas no desenvolvimento do pensamento algébrico*. Unicamp, 2004.

GASCÓN, J. *La necesidad de utilizar modelos en didáctica de las matemáticas*. *Revista Educação Matemática Pesquisa*, São Paulo, v. 5, pp. 11-37, 2003.

KANTOWSKI, M. G. *Sobre a resolução de problemas de matemática na high school*, in KRULIK, S. e REYS R. E., *A resolução de problemas na matemática escolar*, Ed. Atual, 2003, p. 270-282.

LINS, R.C. e GIMENEZ, J. *Perspectivas em aritmética e Álgebra para o século XXI*, Ed. Papyrus, 1997.

MACHADO, S.D.A. *Engenharia Didática*. *Educação Matemática – uma introdução*. São Paulo, EDUC, pp. 197-208, 1999.

MIZUKAMI, M. G. N. *Aprendizagem da docência: algumas contribuições de L. S. Shulman*, *Revista Educação*, edição nº 02, vol 29, 2004.

MODANEZ, L. *Das seqüências de padrões geométricos à introdução ao pensamento algébrico*. 2003. Dissertação de Mestrado. PUC/SP.

PEREZ, E. P. Z. *Alunos de Ensino Médio e a generalização de padrão*. 2006. Dissertação de Mestrado. PUC/SP.

PERRIN-GLORIAN M. J, HERSANT M. *Milieu et contrat didactique, outils pour l'analyse de sequences ordinaries*, Recherches en didactique dees mathématiques, 2003, 23(2), pp. 217-276.

POLYA, G. *Sobre a resolução de problemas de matemática na high school*, in KRULIK, S. e REYS R. E., *A resolução de problemas na matemática escolar*, Ed. Atual, 2003, p. 1-3.

Revista Prove, nº 06,. SANTOS D. O. *Uma professora de matemática faz pesquisa na oitava série*. Novembro 2007, p. 19 – 20.

RIBEIRO, R. M. *O papel da reflexão sobre a prática no contexto da formação continuada de professores de matemática*. 2005. Dissertação de Mestrado. PUC/SP.

ROBERT, A. *Ferramentas de análise de conteúdos matemáticos à ensinar no liceu e na universidade*. Em: *Recherches em didactique des Mathématiques*. 1998, vol. 18, nº 2, p. 139-190.

SCHOEN, H. L. *Ensinar a Álgebra elementar focalizando problemas*, in COXFORD A. F. e SHULTE A. P., *As idéias da Álgebra*, Trad. Higinio H. Domingues. São Paulo, Ed. Atual, 1995, p. 135-144.

TARDIF, M. *Revista Brasileira de Educação: "Saberes profissionais dos professores e conhecimentos universitários"*, 2000. p. 13.

USISKIN, Z. *Concepções sobre a Álgebra da escola média e utilizações das variáveis*, in COXFORD A. F. e SHULTE A. P., *As idéias da Álgebra*, Trad. Higinio H. Domingues. São Paulo, Ed. Atual, 1995, p. 9-22.

ANEXOS

ANEXO I

Modelo de Autorização

Eu, _____, RG _____, autorizo o aluno _____ a participar das atividades que compõem o instrumento de coleta de dados para o projeto de pesquisa da professora Emily Cassiana Santolin Grecco.

Guarulhos, ____/____/2008

Assinatura do responsável legal

ANEXO II

Atividade de Sondagem

Apertos de mão

Cinco pessoas estiveram presentes a uma reunião. Ao chegar, cada uma cumprimentou as demais.

- a) Quantos apertos de mão foram dados? Registre como pensou.
- b) Quantos apertos de mão seriam dados se estivessem presentes: (Preencha a tabela com os resultados)

6 pessoas?

7 pessoas?

10 pessoas?

20 pessoas?

E um número n qualquer de pessoas?

Numero de pessoas presentes	Total de apertos de mão
2	
3	
4	
5	
6	
7	
10	
20	
n	

- c) Escreva uma expressão que permita calcular o número A de apertos de mão entre um número n qualquer de pessoas.

ANEXO III

Seqüência Didática

1ª sessão

Atividade 1

1. *Pesquisador:* Vocês irão me dizer alguns números e farei alguma (s) operação (ões) com ele. Vou dizer o resultado e vocês têm que descobrir o “segredo”, ou seja, quais as operações realizadas com o número que vocês haviam me dito.

Segredos aplicados:

- Somar 2
- Dobrar
- Dobrar e somar 1
- Dividir por dois

Atividade 2

1. Para esta atividade propomos que os segredos fossem criados por um dos alunos da dupla e descoberto pelo colega, e vice-versa, registrando os resultados em uma ficha como a seguinte:

Número	Número com “segredo”
Segredo:	

2ª sessão

As atividades a seguir foram apresentadas oralmente à turma pelo pesquisador. Os alunos receberam a instrução de não copiar o que estava sendo-lhes ditado. Apenas deveriam registrar as estratégias para a resolução dos problemas.

Atividade 1

Pesquisador: Pensei em dois números e somando-os, obtive 12. Em que números eu posso ter pensado?

Atividade 2

Pesquisador: Pensei em certo número e, ao somá-lo com 12, obtive 39. Em que número pensei?

Atividade 3

Pesquisador: Agora, eu vou ditar um problema e vocês terão que representá-lo apenas utilizando símbolos, matemáticos ou não. Ou seja, vocês criarão uma frase matemática para o problema e depois, tentarão resolvê-lo.

- A soma de um número com 112 resulta 347. Que número é esse?

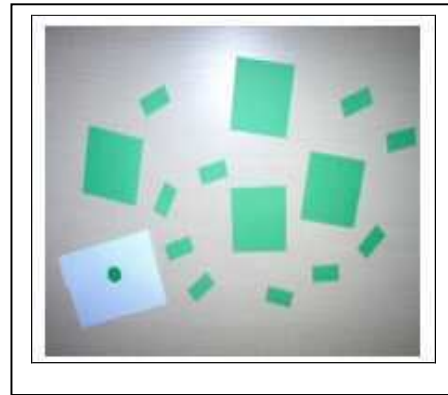
3ª sessão

Atividade 1

Pesquisador: Vamos estudar como as pessoas costumam se sentar num bar. Numa mesa, podem sentar-se 4 pessoas (exposição com material lúdico). Juntando duas mesas, poderão se sentar 6 pessoas (exposição com material lúdico). Vocês receberão uma ficha em branco para responder quantas pessoas poderiam se sentar juntando 3, 4, 10 ou 13 mesas. Ao lado vocês deverão justificar como chegaram ao resultado apresentado.

3 mesas	Justifique
4 mesas	Justifique
10 mesas	Justifique
13 mesas	Justifique

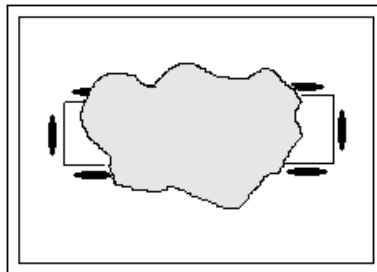
Modelo de ficha



Material fornecido aos alunos

Atividade 2

Expor o seguinte cartaz: (BOOTH, 1994)

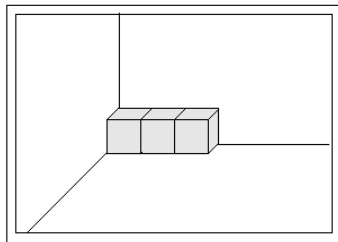


Será entregue uma ficha em branco para cada dupla. Nela, deverão registrar:

Pesquisador: Como você contaria o número de pessoas que poderiam se sentar aqui? Vocês não sabem o número de mesas atrás do desenho, que não aparece em escala. Mas se soubessem, como fariam? Discuta com seu colega qual a melhor forma de escrever isso matematicamente.

4ª sessão

Um primeiro cubo foi colocado no chão, no canto de uma sala. Os outros também serão colocados no chão, encostados numa parede, formando uma fila.



Qual será o número de faces expostas se enfileirarmos:

1 cubo	Justifique
2 cubos	Justifique
5 cubos	Justifique
8 cubos	Justifique
15 cubos	Justifique
35 cubos	Justifique

Escreva, de modo geral, como você concluiu estes resultados.

O que se pode afirmar sobre o número de faces expostas? Será sempre par? Será sempre ímpar? Por quê?

Imagine que enfileirássemos um número de cubinhos, mas você não sabe qual é. Vamos chamar este valor desconhecido de (crie neste espaço um símbolo para representar este valor). Escreva, usando símbolos matemáticos e o símbolo que você criou, uma expressão que represente quantas faces conseguiríamos ver nessa fileira com cubinhos.

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)