

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM  
ENGENHARIA MECÂNICA

PLANEJAMENTO DE TRAJETÓRIAS E EVITAMENTO  
DE COLISÃO EM TAREFAS DE MANIPULADORES  
REDUNDANTES OPERANDO EM  
AMBIENTES CONFINADOS

Tese de Doutorado

**HENRIQUE SIMAS**

Florianópolis, Fevereiro de 2008.

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM  
ENGENHARIA MECÂNICA

**PLANEJAMENTO DE TRAJETÓRIAS E EVITAMENTO  
DE COLISÃO EM TAREFAS DE MANIPULADORES  
REDUNDANTES OPERANDO EM  
AMBIENTES CONFINADOS**

Tese submetida à  
Universidade Federal de Santa Catarina  
como parte dos requisitos para a  
obtenção do grau de Doutor em Engenharia Mecânica.

**HENRIQUE SIMAS**

**Orientador : Prof. Altamir Dias, D.Sc.**  
**Orientador : Prof. Raul Guenther, D.Sc. (*in memoriam*)**

Florianópolis, Fevereiro de 2008.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

**PLANEJAMENTO DE TRAJETÓRIAS E  
EVITAMENTO DE COLISÃO EM TAREFAS DE  
MANIPULADORES REDUNDANTES  
OPERANDO EM AMBIENTES CONFINADOS**  
HENRIQUE SIMAS

Esta tese foi julgada adequada para a obtenção do título de **Doutor em Engenharia**, especialidade **Engenharia Mecânica**, sendo aprovada em sua forma final.

---

Prof. Altamir Dias, D.Sc.  
Orientador

---

Prof. Fernando Cabral, Dr.  
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica

**BANCA EXAMINADORA:**

---

Prof. Altamir Dias, D.Sc.  
Presidente

---

Prof. Glauco Augusto de Paula Caurin, Dr.  
Relator

---

Prof. José Antônio Riul, Dr.

---

Prof. Edson Roberto de Pieri, Dr.

---

Prof. Daniel Martins, Dr.Eng.

---

Prof. Armando Albertazzi  
Gonçalves Jr., Dr.Eng.

*"Faça devagar para fazer  
uma vez somente"*

*Raul Guenther*

# Agradecimentos

A Deus que nos dá força para seguir em frente.

Ao Prof. Raul Guenther (*in memoriam*), que nos deixou tão cedo, agradeço por ter feito parte da minha vida acadêmica, como um exemplo de educador que era e que sempre será. Peço a Deus que minhas orações cheguem até ele como agradecimento e reconhecimento pelo admirável profissional e amigo que deixou muitas saudades.

Quero agradecer especialmente a minha esposa Claudia, pela paciência e compreensão nos intermináveis dias, noites e fins de semana de trabalho. E claro também por suas palavras de carinho e motivação nos momentos mais difíceis.

Agradeço a Jorge Erthal por seu seminário de solução de cinemática inversa por algoritmos numéricos (DOUGHTY, 1988) a alguns anos. Este seminário serviu de inspiração e foi o princípio de tudo o que foi desenvolvido como trabalho de tese.

Agradeço aos Professores Altamir Dias, pela orientação, pela paciência e empenho dedicado durante todo o período de desenvolvimento da tese, principalmente nos últimos três meses, que não foi fácil, mas conseguimos.

Ao Prof. e amigo Daniel Martins por sua contribuição, apoio metodológico e teórico, pelas críticas (sempre bem-vindas), e sugestões dadas no decorrer deste trabalho.

Agradeço aos amigos e colegas: Júlio Golin, Waldoir Junior, Emerson Raposo, Tiago (TLP), Prof. Edson de Pieri, Walter Kapp, Daniel Fontan, Prof. Raimundo Teive, Prof<sup>a</sup> Fernanda Cunha, Nelso Bonacorso, Milton Pereira, Humberto Reder, Alexandre Rochinski, Giorgio Valmórbida, Diego Boesel, Cleber Ortiga, Saulo Rios, e todos, os quais neste momento não estou lembrando, mas que contribuíram neste trabalho.

Agradeço à família, aos meus pais, Hélio e Valda, pelo incentivo e apoio à D. Rose, mãe de minha esposa, também pelo incentivo e pelo feijão nas melhores horas.

Também agradeço aos amigos da turma Beco (Carlinho e Jane; Alcides e Zaira; Carlão e Luciane; Luiz Henrique e Cal), pelo incentivo e pela compreensão por minha ausência em alguns de nossos melhores churrascos.

Não poderia esquecer dos professores, bolsistas, engenheiros, do pessoal do Laboratório de Robótica e do projeto Roboturb que também contribuíram com este trabalho.

Agradeço ao LACTEC pelo apoio financeiro na execução deste projeto.

# *Sumário*

<b>Lista de Figuras</b> .....	p. x
<b>1 Introdução</b> .....	p. 19
1.1 A soldagem robotizada e o problema de cinemática inversa .....	p. 19
1.2 Planejamento de trajetórias e o projeto Roboturb .....	p. 22
1.3 Estrutura da tese .....	p. 23
<b>2 Um algoritmo para cálculo de caminhos paralelos sobre superfícies parametrizadas</b> .....	p. 25
2.1 O modelamento matemático de segmentos de superfícies .....	p. 27
2.2 Identificação das áreas erodidas .....	p. 29
2.3 Geometria diferencial de curvas e superfícies .....	p. 31
2.4 Um método para obtenção de caminhos paralelos .....	p. 35
2.4.1 Análise das propriedades locais para o cálculo de caminhos paralelos	p. 35
2.4.2 Estratégia para preenchimento de uma cavidade pelo processo de soldagem .....	p. 38
2.5 Laço no caminho .....	p. 43
2.6 Conclusão .....	p. 46
<b>3 Cinemática inversa de manipuladores redundantes</b> .....	p. 47
3.1 Redundância de manipuladores .....	p. 47
3.2 Cinemática direta .....	p. 48
3.3 Cinemática inversa .....	p. 49

3.4	A cinemática diferencial .....	p. 50
3.4.1	O mapeamento entre os espaços diferenciais de juntas e operacional	p. 51
3.4.2	O espaço nulo em manipuladores redundantes .....	p. 53
3.5	Métodos clássicos para resolução da cin. inversa para manipuladores redundantes .....	p. 54
3.5.1	A resolução da cinemática inversa via pseudoinversa do Jacobiano	p. 54
3.5.1.1	O vetor $\dot{q}_a$ .....	p. 57
3.5.2	Prioridade da tarefa .....	p. 58
3.5.3	Prioridade da tarefa robusta a singularidades .....	p. 59
3.5.4	Mínimos quadrados amortecidos.....	p. 59
3.6	Solução da redundância usando um sistema não-redundante .....	p. 60
3.6.1	Método da decomposição.....	p. 60
3.6.2	Método de extensão do espaço de tarefa .....	p. 60
3.7	Conclusão .....	p. 62
<b>4</b>	<b>Cinemática inversa diferencial utilizando restrições cinemáticas ..</b>	<b>p. 64</b>
4.1	Deslocamentos helicoidais sucessivos .....	p. 64
4.2	O método de Davies .....	p. 68
4.3	Representação de cadeias cinemáticas através de grafos .....	p. 71
4.3.1	Definição de cadeias virtuais .....	p. 73
4.3.2	A cadeia virtual <i>PPR</i> .....	p. 73
4.3.3	A cadeia virtual <i>RPR</i> .....	p. 74
4.3.4	A cadeia virtual <i>3P3R</i> .....	p. 75
4.3.5	O método das restrições cinemáticas .....	p. 76
4.4	Aplicação das restrições cinemáticas em um problema tridimensional ...	p. 83
4.5	Conclusão .....	p. 88
<b>5</b>	<b>O Jacobiano estendido a partir de restrições cinemáticas.....</b>	<b>p. 90</b>

5.1	Uma metodologia de eliminação de juntas passivas .....	p. 90
5.2	Aplicação do método .....	p. 93
5.3	Propriedades .....	p. 96
5.3.1	A singularidade do manipulador redundante <i>P3R</i> .....	p. 97
5.3.2	As singularidades do robô <i>P3R</i> com as restrições cinemáticas de colisão .....	p. 97
5.4	Conclusão .....	p. 101
<b>6</b>	<b>Integração da cinemática diferencial para manipuladores de cadeia fechada .....</b>	<b>p. 102</b>
6.1	Análise do problema .....	p. 103
6.2	Um método para controle do erro de fechamento via cadeias virtuais ...	p. 105
6.2.1	Estabilidade do algoritmo proposto .....	p. 107
6.2.2	Controle do erro .....	p. 108
6.2.3	Vetor erro de posição .....	p. 108
6.3	Aplicações desenvolvidas .....	p. 111
6.3.1	Simulação em um mecanismo de 4 barras .....	p. 112
6.3.2	Aplicação para o evitamento de colisão com o manipulador Roboturb .....	p. 113
6.4	Conclusão .....	p. 117
<b>7</b>	<b>Resultados experimentais .....</b>	<b>p. 118</b>
7.1	O manipulador Roboturb fora da região de colisão .....	p. 119
7.2	Experimentação na geração de trajetórias no espaço cartesiano .....	p. 122
7.2.1	Identificação da região erodida .....	p. 122
7.2.2	Recobrimento da superfície pelo processo de soldagem .....	p. 123
7.3	Operação do manipulador Roboturb sob iminência de colisão .....	p. 123

7.3.1	Resultados das trajetórias de junta do manipulador Roboturb com controle de colisão .....	p. 126
7.3.1.1	Trajетórias de contorno da região erodida .....	p. 126
7.3.1.2	Trajетórias de soldagem para deposição da 1 <sup>a</sup> camada ..	p. 130
7.4	Conclusão .....	p. 134
<b>8</b>	<b>Conclusão .....</b>	<b>p. 136</b>
8.1	Contribuições do trabalho de tese .....	p. 138
8.2	Perspectivas e trabalhos futuros .....	p. 139
8.3	Conclusão final .....	p. 139
	<b>Referências .....</b>	<b>p. 141</b>
	<b>Apêndice A – Análise da cinemática direta de posição pela notação de helicóides sucessivos .....</b>	<b>p. 146</b>
A.1	Introdução .....	p. 146
A.2	Descrição da cinemática de posição pelo método dos helicóides sucessivos	p. 147
A.3	Exemplo de aplicação .....	p. 151
	<b>Apêndice B – Análise da singularidade para robôs redundantes.....</b>	<b>p. 154</b>
B.1	Desenvolvimento do método.....	p. 154
B.2	Desenvolvimento do exemplo da qualificação .....	p. 155

# *Lista de Figuras*

Figura 1.1	Manipulador Roboturb. ....	22
Figura 2.1	Erosão provocada por cavitação em uma pá de uma turbina Francis. .	25
Figura 2.2	Representação dos dados numéricos de uma superfície. ....	28
Figura 2.3	Convexidade de um segmento de superfície de Bézier. ....	30
Figura 2.4	Poliedros referentes a uma iteração intermediária para cálculo da intersecção de superfícies. ....	31
Figura 2.5	(a) exemplo de uma superfície livre $S_{u_a}$ e (b) exemplo de uma superfície livre $S_{u_b}$ ....	31
Figura 2.6	(a) sobreposição das superfícies mostrando a intersecção e (b) curva de intersecção obtida entre as superfícies ....	32
Figura 2.7	Um caminho $r(u(t), v(t))$ sobre a superfície $S(u, v)$ ....	33
Figura 2.8	Erro cometido no deslocamento linear numa curva parametrizada. ...	34
Figura 2.9	Relações geométricas para cálculo do caminho paralelo. ....	35
Figura 2.10	Obtenção de $g$ para uma superfície plana. ....	36

Figura 2.11	Obtenção de $g$ para uma superfície com curvatura positiva.	37
Figura 2.12	Obtenção de $g$ para superfícies com curvatura negativa	37
Figura 2.13	Modelo de uma superfície erodida	39
Figura 2.14	Formulação da superfície erodida	40
Figura 2.15	Formulação da superfície de referência	40
Figura 2.16	Intercalamento de cordões	41
Figura 2.17	Primeira camada de deposição calculada	42
Figura 2.18	Segunda camada de deposição calculada	42
Figura 2.19	Terceira camada de deposição calculada	42
Figura 2.20	Quarta camada de deposição calculada	42
Figura 2.21	Quinta camada de deposição calculada	43
Figura 2.22	Sexta camada de deposição calculada	43
Figura 2.23	Delimitações obtidas para cada camada	43
Figura 2.24	Surgimento do laço no caminho	44
Figura 2.25	Conjunto de caminhos resultantes sobre a superfície	44

Figura 2.26	Conjunto de pontos eliminados para evitar o surgimento do laço no caminho .....	46
Figura 3.1	Mapeamento $J$ entre o espaço cartesiano e o espaço de juntas .....	52
Figura 4.1	Deslocamento espacial helicoidal .....	65
Figura 4.2	Mecanismo de quatro barras .....	68
Figura 4.3	Elos $E_i$ , $E_{i+1}$ e a junta $j$ . .....	71
Figura 4.4	Representação por grafo de um helicóide entre dois elos. ....	72
Figura 4.5	Dois circuitos sobre a junta $j$ . .....	72
Figura 4.6	Grafo de restrição para o mecanismo de 4 barras. ....	72
Figura 4.7	Cadeia PPR ortogonal. ....	74
Figura 4.8	Cadeia RPR ortogonal. ....	74
Figura 4.9	Cadeia virtual $3P3R$ tridimensional .....	75
Figura 4.10	Manipulador planar redundante .....	76
Figura 4.11	Cadeia cinemática fechada .....	77
Figura 4.12	Grafo da cadeia cinemática $P3R$ adicionada da cadeia virtual de geração de trajetória. ....	78

Figura 4.13	Robô planar $P3R$ conectado com as cadeias virtuais $PPR$ e $RPR$ (para o evitamento de colisão). . . . .	81
Figura 4.14	Representação da relação dos pares cinemáticos para geração de trajetória do robô $P3R$ . . . . .	81
Figura 4.15	Manipulador Roboturb no canal do rotor de uma turbina hidráulica . . . . .	84
Figura 4.16	Identificação dos elos e localização dos helicóides do manipulador Roboturb a partir uma visão superior (a) e frontal (b) . . . . .	84
Figura 4.17	Representação da relação espacial entre o manipulador Roboturb e o plano de colisão . . . . .	86
Figura 4.18	Representação da relação entre os pares cinemáticos e a direção do circuito em cada malha . . . . .	87
Figura 5.1	Condição singular do robô redundante. . . . .	97
Figura 5.2	1ª condição de singularidade . . . . .	98
Figura 5.3	2ª condição de singularidade . . . . .	100
Figura 6.1	Erro de fechamento do mecanismo de 4 barras . . . . .	105
Figura 6.2	Fechamento da cadeia utilizando uma cadeia virtual de erro . . . . .	106
Figura 6.3	Mecanismo de 4 barras fechado. . . . .	112
Figura 6.4	Avaliação da convergência em função de $K$ e do número de iterações . . . . .	113

Figura 6.5	Os locais de controle do erro nos circuitos cinemáticos para o evitamento de colisão no Roboturb - (círculos pontilhados) .....	114
Figura 6.6	Grafo representando a cadeia virtual de medição do erro de fechamento do circuito de trajetória (circuito 1). .....	115
Figura 6.7	Grafo representando a cadeia virtual de medição do erro de fechamento do circuito de evitamento de colisão (circuito 2) .....	115
Figura 7.1	Computador industrial de controle e comando do manipulador Roboturb. ....	119
Figura 7.2	Fonte de potência para alimentação do sistema e acionamento do manipulador Roboturb. ....	120
Figura 7.3	Grafo para solução da cinemática inversa fora da região de colisão. ..	120
Figura 7.4	Simulação (a) e execução (b) da trajetória de contorno da região erodida .....	122
Figura 7.5	Simulação (a) e execução (b) da trajetória de soldagem da primeira camada de deposição .....	123
Figura 7.6	Posicionamento inicial do manipulador Roboturb com relação à superfície plana ilustrada no ambiente de planejamento de trajetória e no ambiente real .....	124
Figura 7.7	Algoritmo para evitamento de colisão .....	125
Figura 7.8	Posições das juntas 1 a 4 do manipulador Roboturb na realização do contorno à região erodida .....	127

Figura 7.9	Posições das juntas 5 a 7 do manipulador Roboturb na realização do contorno à região erodida .....	128
Figura 7.10	Velocidades das juntas 1 a 4 do manipulador Roboturb na realização do contorno à região erodida .....	128
Figura 7.11	Velocidades das juntas 5 a 7 do manipulador Roboturb na realização do contorno à região erodida .....	129
Figura 7.12	Acelerações das juntas 1 a 4 do manipulador Roboturb na realização do contorno à região erodida .....	129
Figura 7.13	Acelerações das juntas 5 a 7 do manipulador Roboturb na realização do contorno à região erodida .....	130
Figura 7.14	Posições das juntas 1 a 4 do manipulador Roboturb na realização da soldagem .....	131
Figura 7.15	Posições das juntas 5 a 7 do manipulador Roboturb na realização da soldagem .....	132
Figura 7.16	Velocidades das juntas 1 a 4 do manipulador Roboturb na realização da soldagem .....	132
Figura 7.17	Velocidades das juntas 5 a 7 do manipulador Roboturb na realização da soldagem .....	133
Figura 7.18	Acelerações das juntas 1 a 4 do manipulador Roboturb na realização da soldagem .....	133
Figura 7.19	Acelerações das juntas 5 a 7 do manipulador Roboturb na realização da	

soldagem .....	134
Figura A.1 Cadeia cinemática com uma junta. ....	147
Figura A.2 Rotação da junta $q_A$ .....	148
Figura A.3 Referência dos helicóides fixo no corpo 1 .....	149
Figura A.4 Referência dos helicóides fixo no corpo 1 e coincidente com o efetuador. ....	150
Figura A.5 Cadeia aberta com 5 juntas rotativas .....	152

## Resumo

O planejamento de trajetórias de soldagem para manipuladores redundantes operando em ambientes confinados requer métodos precisos para obtenção de informações de suas variáveis de operação. Este trabalho desenvolve duas metodologias a serem aplicadas neste tipo de manipulador: primeiro, apresenta o desenvolvimento de uma sistemática para planejamento de tarefas fora de linha (*off-line*) e segundo, o estudo da solução da cinemática inversa de posição para mecanismos de cadeia fechada, usando o modelo de cinemática diferencial. As trajetórias desenvolvidas são utilizadas na tarefa de recobrimento de regiões pelo processo de soldagem, para tanto, é desenvolvida uma adaptação da metodologia baseada em algoritmos de rugosidade superficial (*Scallop-height*) para o cálculo de caminhos da ferramenta, de tal forma que estes sejam equidistantes ou paralelos entre si no espaço de trabalho. A metodologia de cálculo dos caminhos paralelos explora as propriedades das superfícies de trabalho usando os recursos matemáticos de modelagem de curvas e superfícies paramétricas. A solução analítica da cinemática inversa para manipuladores redundantes é geralmente de difícil obtenção, e uma solução é usar a integração da cinemática inversa diferencial, para isso é necessário o modelo de sua cinemática diferencial. O modelo da cinemática diferencial é obtido utilizando-se uma proposta de modelagem de mecanismos de cadeia fechada baseada no método de Davies e cadeias virtuais de Assur. Os modelos de cinemática diferencial são geralmente complexos, assim para obtenção da cinemática de posição é utilizada uma metodologia numérica para integração da cinemática diferencial. As aproximações características dos métodos numéricos, resultam em posições de juntas que geram erros de fechamento da cadeia cinemática. Nesta linha, esta tese apresenta uma nova metodologia de modelamento da cinemática diferencial a qual possibilita o controle do erro de fechamento da cadeia, proveniente da aplicação dos métodos numéricos de integração. Neste sentido, são discutidos os métodos clássicos de solução da redundância de manipuladores, baseados na pseudoinversa do Jacobiano, e propostas mais atuais baseadas em cadeias virtuais. São estudadas as propriedades e é comprovada a estabilidade do método proposto. Ao final são realizados experimentos de laboratório os quais servem para validação do método proposto. Nestas experimentações é desenvolvida uma aplicação com o manipulador redundante Roboturb, o qual realiza uma tarefa similar à deposição de material pelo processo de soldagem, para recobrimento de uma superfície, desviando de um obstáculo posicionado dentro do seu volume de trabalho.

# Abstract

Title: **Trajectory planning and collision avoidance in tasks of redundant manipulators operating in confined environments**

The trajectory planning for welding tasks using redundant robots operating in confined environments, requires precise methods for obtaining the joint variables. This work deals with the development of two methodologies to be applied redundant robots: first, it presents the development of a methodology for off-line task planning and second, it the studies of the solution of the position inverse kinematics for closed chain mechanisms using the differential kinematic model. The generated trajectories are used in the task of recovering regions by a welding process. The method consists of an adaptation of the scallop-height algorithm for the calculation of the tool paths guaranteeing that the paths are equidistant or parallel one another on the workspace. The parallel path planning methodology explores the properties of the work surfaces using mathematical tools from parametric curve and surface models. The analytical solution of the inverse kinematic for redundant robots is generally complex to obtain, and so one solution is to use the integration of the differential inverse kinematic, that must be obtained. The proposed differential kinematic model is based on the Davies method and Assur virtual chains. For the position kinematics, numerical methods for integrate the differential kinematic are used. Numerical methods are based in approximations which result in joint positions errors. In closed kinematic chains these approximations yield closure errors. This thesis presents a new methodology for modeling the differential kinematics which can control the closure error of closed-chains durong the numerical integration process. This thesis also discusses the classic methods to solution of the manipulators redundancy, *e.g.* based on Jacobian pseudoinverse, as well as current techniques *e.g.* those based on virtual chains. The properties of the proposed differential kinematic model are studied and the stability of the numerical integration is proved. At the end of this work, laboratory experiments are presented which validates the proposed method. In these experimentations, the redundant manipulator Roboturb which executes a task similar to the deposition of material by the welding process recovering of a complete surface while avoiding an obstacle inside his workspace.

# 1 *Introdução*

Esta tese de doutorado explora o problema da aplicação de manipuladores redundantes operando em ambientes confinados. O desenvolvimento do trabalho está baseado em dois assuntos principais: o problema de geração de trajetórias no espaço cartesiano para aplicação na tarefa de recobrimento de superfícies pelo processo de soldagem e a resolução da cinemática inversa para manipuladores redundantes. A introdução apresenta uma contextualização destes problemas e a estrutura do texto.

## 1.1 **A soldagem robotizada e o problema de cinemática inversa**

Em meados da década de 60 os manipuladores foram introduzidos na indústria, com o objetivo de retirar o ser humano das tarefas de risco (GARCIA et al., 2007). Dentre as várias aplicações de manipuladores nas linhas de produção, destacam-se as operações de pintura, montagem, manipulação de carga, soldagem automatizada, dentre outras (SCIAVICCO; SICILIANO, 1996). Uma das principais aplicações dos manipuladores é a execução de operações de soldagem (BIER, 2000).

Os processos de soldagem podem ser classificados em dois tipos: soldagem ponto-a-ponto, e soldagem contínua (QUINTINO L. E SANTOS, 1992), em ambas tarefas os manipuladores podem ser utilizados.

A utilização de manipuladores para realização dos processos de soldagem surge a partir da automatização dos processos produtivos. A grande vantagem da utilização de manipuladores esta vinculada às suas características de operação quais sejam: flexibilidade na programação; precisão na operação e a repetibilidade alcançada (SCIAVICCO; SICILIANO, 1996).

Os processos de soldagem evoluíram em termos de tecnologia e aplicação. Neste mesmo ritmo os manipuladores tiveram que se adaptar às novas exigências de soldagem.

Dentre estas adaptações podem-se destacar as concepções cinemáticas desenvolvidas para realização de operações especiais. Dentre estas operações especiais inclui-se o processo de soldagem realizado em volumes de trabalho restritos.

A automatização do processo de soldagem em volumes de trabalhos restritos requer manipuladores com a capacidade de realizar a tarefa sem que ocorra qualquer colisão de alguma de suas partes componentes com algum obstáculo dentro de seu volume de trabalho. O evitamento de colisão é alcançado a partir de estratégias de controle de colisão implementadas em algoritmos especializados incluídos na programação da tarefa.

Para que seja possível a realização do evitamento de colisão é necessário que o manipulador tenha maior mobilidade que a necessária para a realização da tarefa (GUENTHER et al., 2000). O grau de mobilidade de um manipulador é determinado pelo número de graus de liberdade de seu mecanismo, ou seja, para manipuladores de cadeia aberta está relacionado com o seu número de juntas (SCIAVICCO; SICILIANO, 1996). O acréscimo na mobilidade implica no acréscimo do número de juntas que compõem a cadeia cinemática do manipulador. Quando um manipulador possui um número maior de juntas que as necessárias para realização de uma tarefa, este manipulador é dito redundante (SCIAVICCO; SICILIANO, 1996). O tratamento da redundância para manipuladores não é simples, tanto que para sua solução várias abordagens físicas e matemáticas podem ser utilizadas.

Para a solução do problema de evitamento de colisão, destacam-se as estratégias implementadas a partir do modelo cinemático diferencial do manipulador. A solução obtida a partir de modelos da cinemática diferencial estão baseados na utilização da matriz Jacobiana (SCIAVICCO; SICILIANO, 1996) (TSAI, 1999). Nestas soluções são utilizadas abordagens relacionadas ao problema da otimização de movimentos baseadas, por exemplo, na pseudoinversa (SCIAVICCO; SICILIANO, 1996), e em projeções sobre o espaço nulo, ou seja, nos movimentos de junta que não geram movimentos no efetuador (RAMDANE-CHERIF et al., 1997) (WANG et al., 1999) (WANG et al., 1998) (XIE et al., 1998) (FREUND et al., 2001) (TANAKA et al., 2004).

Outras abordagens para resolução do evitamento de colisão utilizam-se de algoritmos evolutivos, tais como redes neurais (ZHANG; WANG, 2004)(WANG et al., 1999), lógica fuzzy (KIM; LEE, 1993) (DING; LI, 1999) (BEHESHTI; TEHRANI, 1999) e algoritmos genéticos (KHOOGAR; PARKER, 1991) (CHI-HAUR; YOUNG, 1996) (NEARCHOU; ASPRAGATHOS, 1997) (NEARCHOU; ASPRAGATHOS, 1998). Estas soluções baseiam-se em modelos não determinísticos, o que dificulta a análise das propriedades da cadeia

cinemática.

Abordagens modernas propõem a resolução da cinemática diferencial para manipuladores redundantes utilizando-se de cadeias virtuais (CAMPOS, 2004) (DAVIES, 2006). O modelo baseado em cadeias virtuais utiliza-se da abordagem matemática da teoria dos helicóides (GIBSON; HUNT, 1988) (HUNT, 2000). A inclusão de cadeias virtuais evita o problema dimensional das soluções baseadas na pseudoinversa (GUENTHER et al., 2007). A inclusão das cadeias virtuais implica no fechamento da cadeia cinemática do manipulador, o que generalizando a solução da cinemática diferencial, tratando então o manipulador, seja ele de cadeia aberta ou fechada como um manipulador de cadeia fechada (CAMPOS, 2004).

Os manipuladores paralelos possuem, por definição, cadeias cinemáticas fechadas (TSAI, 1999). A solução da cinemática de posição para manipuladores paralelos, pode ser obtida a partir da integração da cinemática diferencial destes manipuladores. Soluções analíticas são de difícil obtenção, assim as soluções numéricas geralmente são as mais apropriadas.

As soluções numéricas são baseadas em algoritmos de integração que possibilitam a estimação das posições de junta a partir da cinemática diferencial. O método de integração numérica mais simples utilizado na solução da cinemática de posição é o método de Euler (BURDEN; FAIRES, 2003). Este tipo de solução é conhecida como *resolved motion control* (integração numérica de primeira ordem da cinemática diferencial) e vem sendo aplicada desde a década de 60 (WHITNEY, 1969) até aplicações recentes (MARAI et al., 2002).

A solução numérica para a integração de funções não é exata pois as metodologias são baseadas em aproximações. Por causa destas aproximações, ocorre um fenômeno numérico chamado escorregamento (*drift*) (SCIAVICCO; SICILIANO, 1996). Na resolução da cinemática de posição para cadeias fechadas, o escorregamento numérico provoca erros nas posições de junta calculadas. Estas posições não possibilitam o fechamento da cadeia, ou seja, fisicamente a cadeia não se mantém fechada. Para que algoritmos numéricos possam ser utilizados, o escorregamento numérico necessita ser controlado (PAVLIN, 1995).

Este trabalho de tese explora o problema da integração numérica para solução da cinemática inversa de cadeias fechadas e sua aplicação ao problema de planejamento de trajetórias cartesianas e no espaço de juntas.

## 1.2 Planejamento de trajetórias e o projeto Roboturb

A UFSC em parceria com o LACTEC desenvolve projeto de pesquisa para a automação do processo de recuperação de pás erodidas pelo processo de cavitação de rotores de turbinas de grande porte, o projeto é denominado projeto Roboturb.

Neste projeto está sendo desenvolvido um manipulador o qual deverá operar dentro de um canal de uma turbina. O canal de uma turbina é um ambiente restrito, e a concepção cinemática deste manipulador foi definida como redundante, para que seja possível a implementação de rotinas para realização do evitamento de colisão (GUENTHER et al., 2000) (SIMAS et al., 2007). As tarefas que este manipulador deverá realizar são: medição da região cavitada e deposição pelo processo de soldagem.

A figura 1.1 apresenta o manipulador Roboturb.



Figura 1.1: Manipulador Roboturb.

O presente trabalho explora o problema do planejamento de trajetórias para operação

de manipuladores redundantes, como o manipulador Roboturb, em dois temas principais:

- O planejamento de trajetórias no espaço cartesiano;
- O planejamento de trajetórias no espaço de juntas.

No planejamento de trajetórias no espaço cartesiano, é tratado do problema do cálculo de caminhos paralelos sobre superfícies livres (FARIN, 1992). Na proposta, é realizada uma adaptação de algoritmos de cálculo de caminhos paralelos para máquinas ferramentas 5-eixos para o processo de soldagem. São considerados aqui a adequação das especificações do processo de soldagem, com relação às propriedades obtidas a partir da formulação da superfície.

### 1.3 Estrutura da tese

O capítulo 2 apresenta um algoritmo para cálculos de caminhos paralelos aplicados ao processo de recobrimento pelo processo de soldagem.

O planejamento de trajetórias no espaço de juntas necessita de estratégias de cálculo da cinemática inversa. O algoritmo precisa ser estável e considerar os seguintes aspectos:

- Lidar com volume de trabalho em regiões confinadas;
- Tratar o problema da permanente iminência de colisão;
- Trabalhar com manipuladores redundantes (como o Roboturb);
- Ter velocidade de cálculo suficiente para que possa ser aplicado em operações *on-line*.

Neste sentido são discutidas nos capítulos 3 e 4 as estratégias de solução da cinemática inversa para manipuladores redundantes. No capítulo 5 apresenta-se um estudo comparativo de metodologias de solução, avaliando a equivalência de ambas.

No capítulo 6 é apresentada uma nova metodologia de integração da cinemática diferencial para manipuladores de cadeia cinemática fechada. São apresentadas discussões quanto às vantagens do método e a análise da estabilidade numérica. A validação é realizada desenvolvendo uma solução para a cinemática inversa de posição para o manipulador Roboturb adicionando uma restrição para o evitamento de colisão.

---

No capítulo 7 é apresentada uma série de experimentos realizados em laboratório com o manipulador Roboturb. Os experimentos foram desenvolvidos para simular uma condição de iminência de colisão enquanto o manipulador realiza uma operação de manutenção pelo processo de soldagem. São apresentadas trajetórias no espaço cartesiano obtidas a partir da metodologia desenvolvida assim como para as trajetórias de juntas correspondentes.

## *2 Um algoritmo para cálculo de caminhos paralelos sobre superfícies parametrizadas*

Em geral as pás da turbina de geradores de grande porte de usinas hidrelétricas são submetidas a um processo agressivo de erosão chamado cavitação. A cavitação é criada pela interação entre o fluxo da água e as pás da turbina. A figura 2.1 apresenta uma pá cavitada de uma turbina Francis.

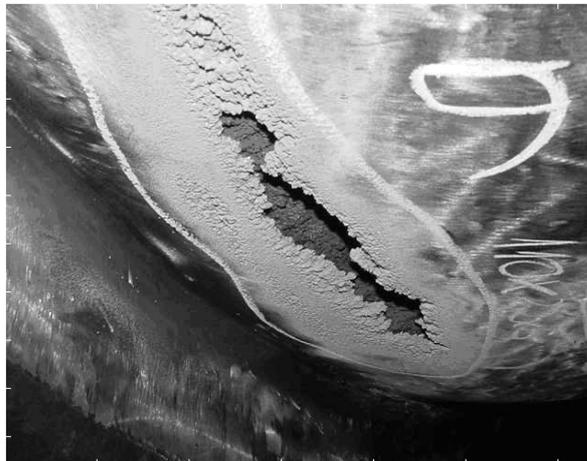


Figura 2.1: Erosão provocada por cavitação em uma pá de uma turbina Francis.

A cavitação danifica a forma da pá, provocando crateras que hoje em dia são recuperadas pelo processo de soldagem manual.

O processo de soldagem manual consiste nos seguintes passos: parada da turbina; preparação da superfície pelo processo de esmerilhamento, e finalmente a deposição de material pelo processo de soldagem que é realizado através de camadas formadas por cordões de solda. Uma camada é colocada sobre a outra interpondo-se os cordões de solda

de cada uma delas. A operação de recuperação é concluída com um esmerilhamento final, onde busca-se suavizar a superfície (BONACORSO, 2004). Nesta operação o ambiente de trabalho é confinado e insalubre aos operadores.

Uma proposta de solução é a utilização de robôs manipuladores para recuperação de erosões em turbinas hidráulicas. Esta proposta de solução foi chamada projeto Roboturb (SIMAS; GUENTHER, 2000). O manipulador do projeto Roboturb foi concebido para operar em ambientes confinados. O manipulador também é capaz de realizar duas tarefas para recuperação das pás das turbinas: medição da área erodida e a realização da tarefa de recuperação pelo processo de soldagem.

O processo de soldagem é realizado pela deposição de material em camadas, onde cada camada recupera toda superfície erodida de acordo com parâmetros de soldagem (BONACORSO, 2004). Os caminhos percorridos pelo efetuador do manipulador devem ser obtidos com significativa precisão para que sejam igualmente espaçados sobre a superfície, ou em outras palavras, geometricamente paralelos (SURESH; YANG, 1994) (SARMA; DUTTA, 1997). Com relação à tarefa de medição, os caminhos percorridos necessitam ser igualmente espaçados e portanto paralelos também. Como em qualquer processo de manufatura, o processo iterativo do manipulador tem como objetivo garantir um tempo ótimo de operação e a qualidade da superfície final recuperada.

O primeiro passo é obter as informações da região da superfície erodida. Este processo é realizado pela tarefa de medição da superfície. Para obtenção dos caminhos para a tarefa de medição, uma nuvem de pontos ordenada é obtida sobre a região erodida. Deste conjunto de pontos é realizada uma primeira aproximação numérica da superfície, a qual servirá de referência para o cálculo dos caminhos paralelos da tarefa de medição. Estes caminhos são obtidos de acordo com as especificações do processo de medição automatizada (PINTO, 2001).

Uma vez medida a superfície erodida, esta é comparada à superfície original da pá, também obtida a partir da nuvem de pontos resultante do processo de medição. É comum não existir documentação de projeto das superfícies das pás da turbina, uma razão disto é o fato das turbinas serem muito antigas e os desenhos disponíveis estarem apenas em papel outra é por ser segredo do fabricante. Assim as superfícies erodidas não possuem uma formulação matematicamente explícita, e alguns métodos de aproximação são necessários para descrevê-la. A superfície pode ser representada no planejamento da tarefa na forma de um *wireframe* através da ligação dos pontos através de linhas formando polígonos quadrangulares ou triangulares, que aproximam a superfície como uma superfície livre

(TONETTO, 2007).

Uma representação matemática aproximada é então a maneira para descrever as propriedades locais em um ponto sobre uma superfície. Estas propriedades são utilizadas para realização do cálculo dos caminhos paralelos. Neste trabalho foi utilizada a representação de superfícies através das formulações de Bézier no sentido de descrever as superfícies erodidas e implementar os passos necessários para a recuperação pelo processo de soldagem. Uma vez obtidos os caminhos paralelos, as trajetórias das juntas para realização das tarefas de medição e soldagem pelo manipulador são obtidas através de funções de cinemática inversa.

Neste capítulo apresenta-se uma proposta para cálculo de caminhos paralelos baseados em algoritmos *scallop-height* aplicados em máquinas ferramentas de 5 eixos (SARMA; DUTTA, 1997) (SURESH; YANG, 1994) (HUANG; OLIVER, 1994) (LONEY; OZSOY, 1987) (TONETTO, 2007). A proposta neste capítulo é desenvolvida considerando os parâmetros e especificações do processo de soldagem. É importante salientar que os desenvolvimentos apresentados também servem para cálculo de caminhos paralelos para a tarefa de medição, neste caso, devem ser consideradas as especificações deste processo, que diferem basicamente em termos de velocidades de avanço das medidas do passo lateral dos caminhos paralelos.

## 2.1 O modelamento matemático de segmentos de superfície

A identificação da superfície erodida é realizada a partir da medição de uma nuvem de pontos sobre a superfície da pá. Esta nuvem de pontos precisa ser ordenada de modo a ser possível uma aproximação matemática. Neste trabalho o conjunto de pontos são organizados em matrizes.

Estruturando os dados da nuvem de pontos em termos de linhas e colunas é possível representar a superfície por um conjunto de retalhos (*patches*), onde cada retalho é determinado a partir de um conjunto de quatro pontos adjacentes. Outros arranjos de dados podem ser utilizados, permitindo por exemplo, retalhos de superfície triangulares (TONETTO, 2007)(FARIN, 1992).

Cada ponto possui coordenadas  $x$ ,  $y$  e  $z$  no espaço cartesiano e são representados em termos dos indexadores de linhas e colunas de uma matriz. Cada coordenada cartesiana  $c$  ( $x$ ,  $y$  ou  $z$ ) é representada numa matriz  $c_c$ . Considerando um rede de pontos  $p_{ij}$ , a figura

2.2 mostra a disposição destes pontos no espaço em relação a sua localização na matriz  $c_c$ .

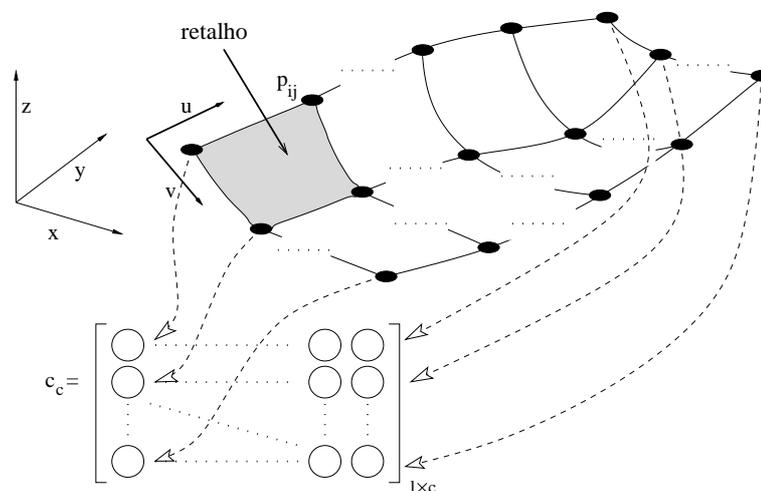


Figura 2.2: Representação dos dados numéricos de uma superfície.

Na figura 2.2 é possível observar que os retalhos da superfície são formados por 4 pontos cada.

Para cada retalho da superfície é necessário definir uma representação matemática. A representação mais adequada é obtida através das superfícies parametrizadas (QIULIN; DAVIES, 1987).

A formulação dos retalhos através de polinômios bicúbicos<sup>1</sup> de Bézier são uma opção, uma vez que possuem propriedades matemáticas relacionadas a continuidade de  $C_0$ ,  $C_1$  e  $C_2$  entre dois retalhos adjacentes (QIULIN; DAVIES, 1987) (ZEID, 1991). Estas continuidades são suficientes para calcular com precisão os caminhos paralelos sobre a superfície.

As curvas e superfícies de Bézier são construídas a partir de pontos de controle, definidos de acordo com os pontos iniciais e finais de curva e retalhos de superfície assim como estimativas de derivadas nestes mesmos pontos (QIULIN; DAVIES, 1987).

Uma propriedade importante do equacionamento de Bézier é chamada de *convex hull*, ou convexidade dos pontos de controle. A convexidade determina, no plano, que a segmento da curva de Bézier está totalmente dentro do polígono convexo formado pelos pontos de controle, enquanto que, no espaço tridimensional, que o retalho de superfície está totalmente dentro de um poliedro convexo formado pelas máximas e mínimas coor-

<sup>1</sup>O termo bicúbico está relacionado com o grau do polinômio dos parâmetros que descreve o retalho de superfície, neste caso, polinômios cúbicos nas direções  $u$  e  $v$  do espaço paramétrico.

denadas, nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ , dos pontos de controle. Esta propriedade é importante para a seção a seguir onde será tratado do problema da obtenção da curva que delimita a região erodida.

## 2.2 Identificação das áreas erodidas

No processo de recuperação da superfície da pá é necessário identificar os limites da região erodida. A região erodida pode ser obtida através de uma curva de intersecção de duas superfícies: a superfície erodida e a superfície de referência que representa a superfície original da pá.

A superfície de referência aproximada é obtida a partir de um conjunto de pontos que formam curvas no entorno da região erodida, ou seja, um conjunto de pontos que não estão localizados dentro da erosão. Uma solução adequada ao problema é a utilização do algoritmo de formulação de superfícies de Coons (FARIN, 1992). O algoritmo de Coons obtém-se os pontos aproximados intermediários os quais são utilizados para formulação de uma superfícies de Bézier de referência. A formulação de Bézier para a superfície de referência facilita a implementação do algoritmo de intersecção a ser apresentado a seguir.

Trabalhos relacionados apresentam estratégias de obtenção da intersecção entre superfícies parametrizadas livres (QIULIN; DAVIES, 1987) (BONACORSO, 2004) (ZEID, 1991). As estratégias apresentadas são baseadas em algoritmos numéricos como Newton-Raphson e bissecção. As estratégias baseadas em Newton-Raphson dependem de condições iniciais para convergir. Já o método da bissecção foi adotada visto que pode ser explorada melhor as características da estrutura de dados das superfícies de Bézier e a propriedade da convexidade.

Sejam duas superfícies de Bézier que representam a superfícies erodida  $S_{ue}$  e superfície de referência  $S_{ur}$ . Cada segmento da superfície determina um poliedro convexo que é obtido através de propriedades das superfícies de Bézier.

A figura 2.3 ilustra a relação entre o poliedro convexo e um segmento de superfície de Bézier.

O método de bissecção para encontrar a intersecção entre as superfícies consiste em achar o conjunto de poliedros  $P_{ue}$  da superfície  $S_{ue}$ , que interceptam pelo menos um poliedro,  $P_{ur}$ , da superfície  $S_{ur}$  e vice-versa.

Este procedimento indica que, se os poliedros das duas superfícies se interceptam, há

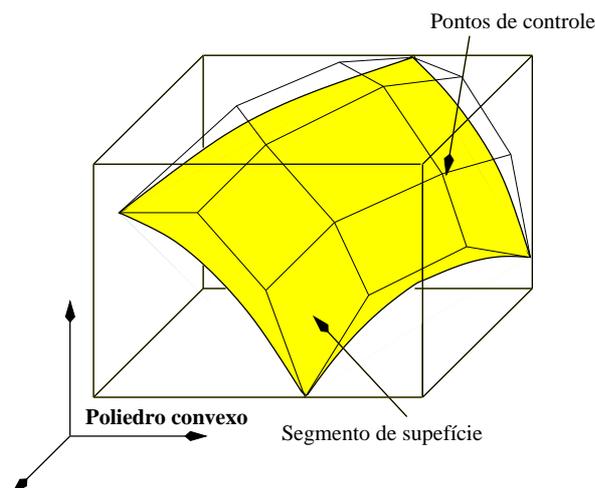


Figura 2.3: Convexidade de um segmento de superfície de Bézier.

uma probabilidade de haver intersecção entre os segmentos das superfícies que os definem. E assim determina-se uma curva de intersecção, através de um processo iterativo.

Como no início estas intersecções são grosseiras, os segmentos de superfície são subdivididos nas regiões de intersecção com o objetivo de refinar a procura. Em curvas e superfícies paramétricas de Bézier o algoritmo de De Casteljaeu (QUILIN; DAVIES, 1987) (FARIN, 1992) (ZEID, 1991) pode ser utilizado para realização do processo de subdivisão.

Aplicando-se recursivamente este procedimento sobre o conjunto de segmentos e respectivos poliedros que se interceptam, é possível obter poliedros cada vez menores para ambas superfícies. Trabalhos relacionados indicam que três subdivisões são o suficiente para encontrar um conjunto de poliedros de dimensões suficientemente pequenas, tal que a curva de intersecção seja aproximada por retas de intersecção de planos (QUILIN; DAVIES, 1987) (ZEID, 1991).

Na figura 2.4 é visualizada a implementação de um resultado intermediário do processo de cálculo da intersecção de superfícies pelo método da bissecção.

O critério de parada pode ser definido de várias formas. Neste trabalho foi considerado como critério de parada a medição das diagonais dos poliedros. O processo recursivo de cálculo de intersecção é concluído assim que o comprimento da maior diagonal do conjunto de poliedros,  $D_{p_{max}}$ , for menor que um erro admissível  $\epsilon$ . Adota-se o centro dos poliedros como os pontos de intersecção entre as superfícies.

Um experimento para validação da proposta foi desenvolvido e é apresentado a seguir.

Considere duas superfícies  $S_{u_a}$  e  $S_{u_b}$  onde se deseja encontrar a curva de intersecção

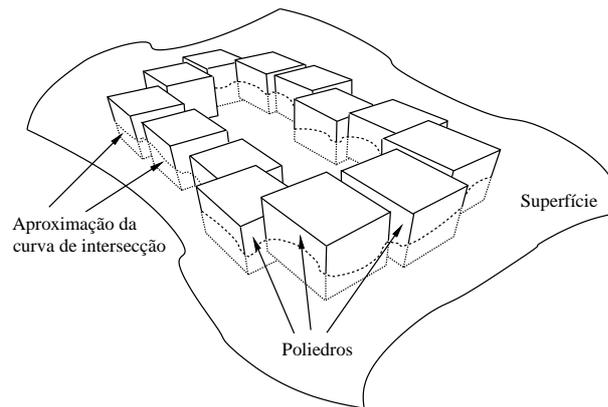


Figura 2.4: Poliedros referentes a uma iteração intermediária para cálculo da intersecção de superfícies.

entre estas. A figura 2.5 apresenta respectivamente as superfícies  $S_{u_a}$  e  $S_{u_b}$ .

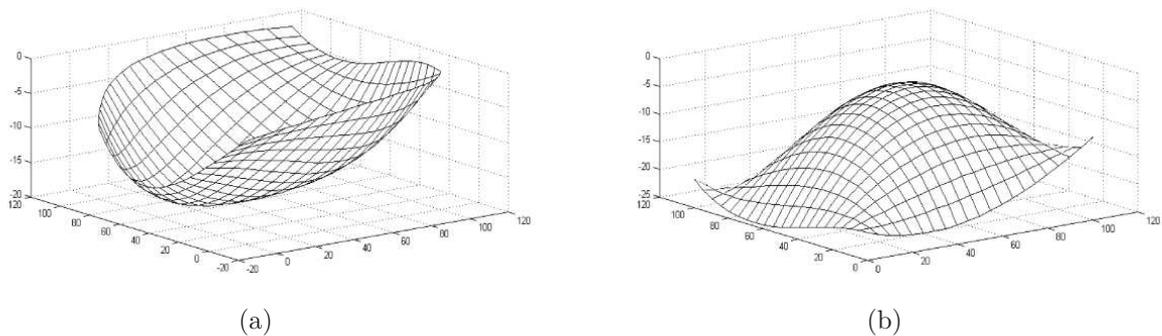


Figura 2.5: (a) exemplo de uma superfície livre  $S_{u_a}$  e (b) exemplo de uma superfície livre  $S_{u_b}$ .

Sobrepondo as superfícies é possível observar que estas possuem uma curva de intersecção. Utilizando o algoritmo da biseção proposto, tem-se como resultado a curva de intersecção no espaço cartesiano mostrada a figura 2.6.

Com a definição da curva de intersecção pode-se calcular os caminhos para o recobrimento da superfície erodida, agora delimitada, pelo processo de soldagem. Este assunto será tratado na seção 2.4.2. Antes um estudo da fundamentação teórica para implementação destes algoritmos é discutido na próxima seção.

## 2.3 Geometria diferencial de curvas e superfícies

O processo contínuo de soldagem automatizada exige que o caminho percorrido pela tocha seja bem definido na sua programação. No caso da tarefa de recobrimento de áreas

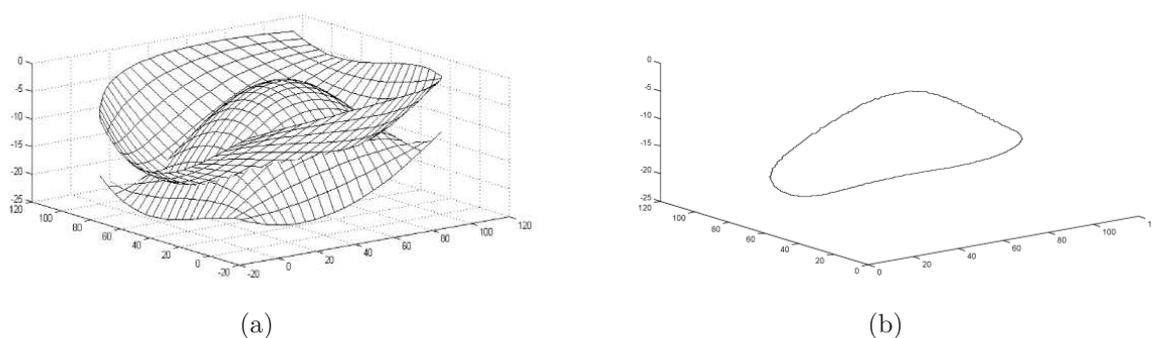


Figura 2.6: (a) sobreposição das superfícies mostrando a intersecção e (b) curva de intersecção obtida entre as superfícies

erodidas, é necessário que vários cordões sejam depositados. Esta deposição é melhor executada se os caminhos dos cordões forem paralelos, com parâmetros bem definidos evitando que vazios ou sobreposições de cordões apareçam, garantindo assim um acabamento superficial dentro das especificações de qualidade da operação (BONACORSO, 2004).

Caminhos paralelos são calculados utilizando-se informações da geometria diferencial, obtidos a partir das representações matemáticas das curvas sobre superfícies. O algoritmo proposto é baseado em métodos similares aplicados em processos de manufatura em máquinas 5 eixos (SARMA; DUTTA, 1997) (SURESH; YANG, 1994). Outros métodos para calcular caminhos sobre superfícies podem ser utilizados (BONACORSO, 2004). O método proposto a ser apresentado tem em vista ser um método preciso, robusto e de simples implementação para sistemas robóticos.

Propriedades locais de pontos sobre curvas e superfícies são a base para o algoritmo de obtenção de caminhos paralelos. Nesta seção são tratadas as propriedades locais de curvas e superfícies, utilizando-se para isto os princípios matemáticos da geometria diferencial.

Um caminho paralelo é obtido a partir de um caminho de referência. Na inicialização do processo é preciso definir um caminho inicial para servir de referência. Para descrição do caminho inicial, um parâmetro adicional  $t$  os parâmetros  $u$   $v$  do espaço paramétrico. Considere um parâmetro  $t$  que descreve uma curva no espaço paramétrico parametrizada  $u(t)$  a superfície parametrizada  $S(u, v)$  (FARIN, 1992), a qual sobre esta superfície, um caminho inicial é descrito por  $r(u(t), v(t))$ , onde  $t$  é um parâmetro que determina uma curva parametrizada no espaço paramétrico.  $r(u, v)$  definido no espaço paramétrico  $u$  e  $v$  descritos em termos de um novo parâmetro  $t$ . A figura 2.7 ilustra o caminho inicial, a superfície e as variáveis associadas.

O caminho inicial  $r(u(t), v(t))$  é conhecido e será a referência para obtenção de um

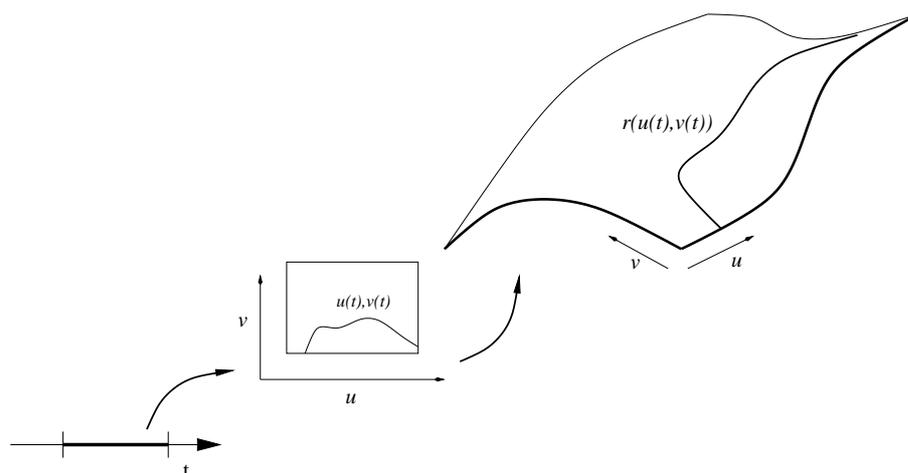


Figura 2.7: Um caminho  $r(u(t), v(t))$  sobre a superfície  $S(u, v)$

caminho paralelo sobre a superfície  $S(u, v)$ . Caminhar sobre o caminho de referência significa obter um conjunto de pontos definidos por uma sequência de valores do parâmetro  $t$  obtidos a cada passo como função de um parâmetro  $\Delta t$  que determina como será realizado o avanço da ferramenta. O parâmetro  $\Delta t$  precisa ser definido em função de um erro de aproximação admissível  $\delta$ . O parâmetro  $\delta$  é a medida de erro entre a aproximação linear definida pela reta entre dois pontos consecutivos sobre a curva e a curva originalmente dita.

Então, seja  $r(u(t_i), v(t_i))$  um ponto sobre o caminho de referência. O próximo ponto  $r(u(t_{i+1}), v(t_{i+1}))$  é calculado por  $\Delta t$ , ou seja,  $t_{i+1} = t_i + \Delta t$ , como mostrado na equação 2.1 (QIULIN; DAVIES, 1987)

$$\Delta t = \frac{2}{\|\dot{r}(t)\|} \sqrt{\delta(\rho(t_i) - \delta)} \quad (2.1)$$

onde  $\|\dot{r}(t)\|$  é o módulo do vetor tangente no ponto  $r(u(t_i), v(t_i))$ ;  $\rho(t_i)$  é o raio de curvatura no ponto  $r(u(t_i), v(t_i))$ , cujos elementos são mostrados na figura 2.8.

Estes elementos podem ser interpretados como parâmetros de manufatura ajustados pela equação 2.1.

Todos termos da equação 2.1 são definidos pelas propriedades da superfície e do caminho sobre a superfície. O raio de curvatura  $\rho(t_i)$  é obtido a partir da medição da curvatura do caminho no ponto  $r(t_i)$ . A curvatura do caminho é obtida a partir do cálculo da primeira e da segunda formas fundamentais da superfície (FARIN, 1992) (QIULIN;

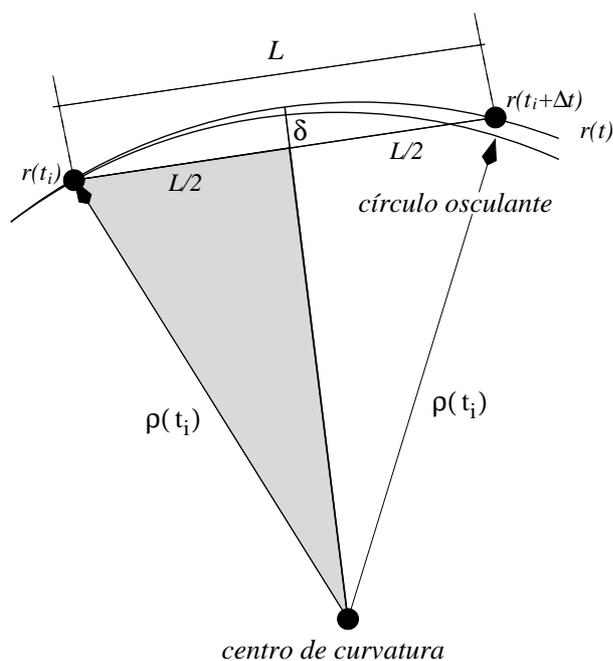


Figura 2.8: Erro cometido no deslocamento linear numa curva parametrizada.

DAVIES, 1987). As equações para cálculo da primeira forma fundamental ( $I$ ) e da segunda forma fundamental ( $II$ ) de uma superfície são apresentadas nas equações 2.2 e 2.3.

$$I = \|\dot{r}\|^2 = (r_u \cdot r_u)(\dot{u})^2 + 2(r_u \cdot r_v)\dot{u}\dot{v} + (r_v \cdot r_v)(\dot{v})^2 \quad (2.2)$$

$$II = k\|\dot{r}\|^2 = \mathbf{n} \cdot r_{uu}(\dot{u})^2 + 2\mathbf{n} \cdot (r_{uv})\dot{u}\dot{v} + \mathbf{n} \cdot r_{vv}(\dot{v})^2 \quad (2.3)$$

onde  $\mathbf{n}$  é vetor normal na superfície,  $r_j$  é a derivada de  $r(u, v)$  em relação ao parâmetro  $j$ , e  $\dot{u}$  e  $\dot{v}$  são as derivadas de  $u$  e  $v$  com relação ao parâmetro  $t$ . Os termos das equações 2.2 e 2.3 são calculados utilizando as equações de Frenet-Serret (QIULIN; DAVIES, 1987)

Da geometria diferencial, a curvatura  $k(t_i) = \frac{1}{\rho(t_i)}$  é obtida dividindo a segunda forma fundamental pela primeira forma fundamental resultando em  $k(t_i) = \frac{II}{I}$

## 2.4 Um método para obtenção de caminhos paralelos

Para cada ponto sobre a curva de referência é calculado um ponto pertencente ao caminho paralelo. Esta seção trata do equacionamento para este cálculo.

O cálculo do passo lateral de execução da tarefa determina a construção do caminho paralelo ao caminho de referência. O passo lateral é um parâmetro de fabricação definido de acordo com o tipo de acabamento desejado para a tarefa (HUANG; OLIVER, 1994). Em conjunto com o avanço calculado para o efetuador do manipulador sobre o caminho de referência, o caminho paralelo será determinado também pelo passo lateral. Estes parâmetros são influenciados pela topologia da superfície, de cujas propriedades são deduzidos seus valores.

### 2.4.1 Análise das propriedades locais para o cálculo de caminhos paralelos

A figura 2.9 ilustra a geometria local de um ponto sobre a superfície, a partir da qual, em função dos valores do passo lateral e do avanço sobre o caminho de referência, permite a obtenção de um ponto  $r_p(t_i)$  sobre um caminho paralelo ao caminho de referência.

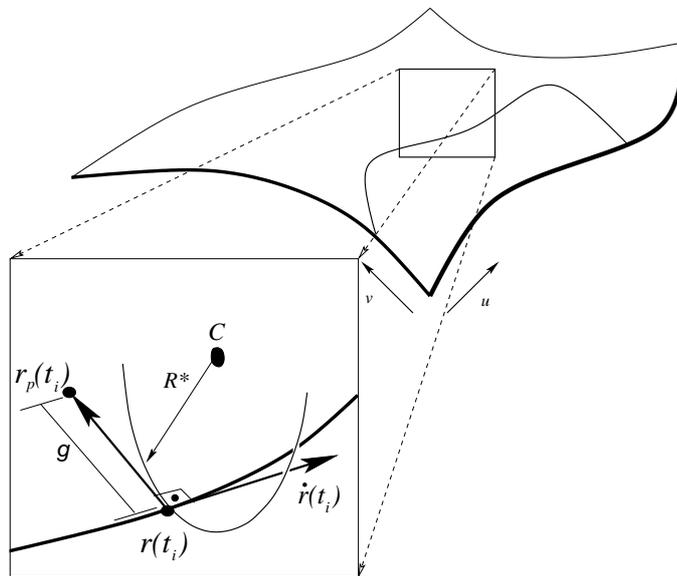


Figura 2.9: Relações geométricas para cálculo do caminho paralelo.

onde  $R^*$  é o raio de curvatura local equivalente à  $\rho(t_i)$  e  $\dot{r}(t_i)$  é a derivada de  $r(t_i)$  com relação ao parâmetro  $t$ , obtido pela relação:  $\dot{r}(t_i) = r_u \frac{\partial u}{\partial t} + r_v \frac{\partial v}{\partial t}$ .

Para que se obtenha um ponto sobre o caminho paralelo é necessário que: o vetor que

une os pontos  $r_p(t_i)$  e  $r(t_i)$  seja perpendicular ao vetor derivada ( $\dot{r}(t_i)$ ) do caminho de referência, calculado em  $r(t_i)$ , e que o comprimento deste mesmo vetor, que une os pontos  $r_p(t_i)$  e  $r(t_i)$ , deve ser aproximado em módulo o valor  $g$ . Por estes aspectos e considerando a geometria mostrada na figura 2.9 é possível deduzir um sistema de equações 2.4 (SARMA; DUTTA, 1997) (SURESH; YANG, 1994) para o cálculo do passo lateral para que se tenha um caminho paralelo.

$$\begin{cases} (r_p(t_i) - r(t_i)) \cdot (r_u \frac{\partial u}{\partial t} + r_v \frac{\partial v}{\partial t}) = 0 \\ \|(r_p(t_i) - r(t_i))\| = g \end{cases} \quad (2.4)$$

onde as derivadas  $r_u \frac{\partial u}{\partial t} + r_v \frac{\partial v}{\partial t}$  são calculadas no espaço paramétrico  $u$  e  $v$  em relação ao ponto  $t_i$

O valor da variável topológica  $g$  sobre a superfície será calculado satisfazendo especificações necessárias a execução da soldagem. Estas especificações levam em conta a distância  $w$  entre a tocha e a superfície erodida e o valor  $dc$  que determina a distância entre os caminhos paralelos, observado do ponto de vista da ponta do eletrodo da tocha de soldagem.

Três situações distintas podem ocorrer com relação entre os parâmetros  $g$ ,  $dc$  e  $w$  de acordo com a topologia da superfície:

1. Região plana de superfície como mostrado a figura 2.10. Neste caso o raio de curvatura  $R^* \rightarrow \infty$ .

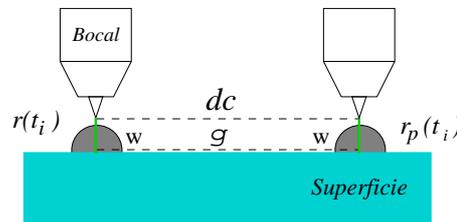


Figura 2.10: Obtenção de  $g$  para uma superfície plana.

2. Região convexa de superfície como mostrado a figura 2.11. A superfície é considerada convexa quando  $R^* > 0$ .

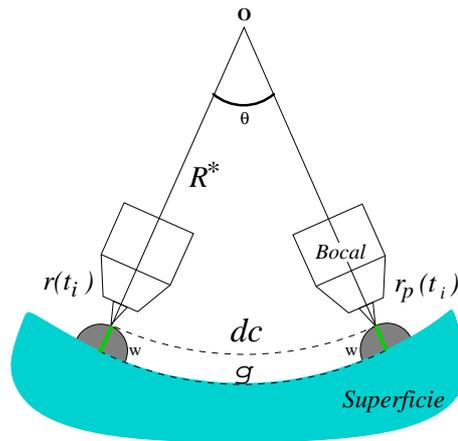


Figura 2.11: Obtenção de  $g$  para uma superfície com curvatura positiva.

3. Região côncava de superfície como mostrado a figura 2.12. Nesta situação o raio de curvatura  $R^* < 0$ .

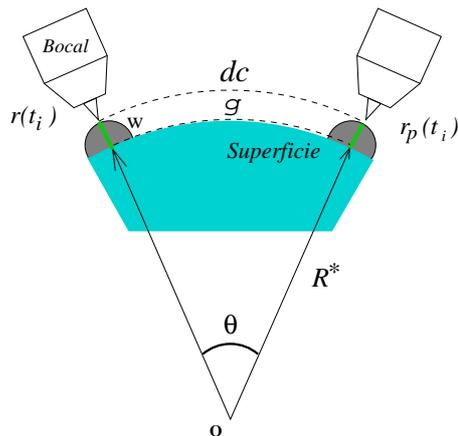


Figura 2.12: Obtenção de  $g$  para superfícies com curvatura negativa

Analisando geometricamente as três condições topológicas da superfície, o valor  $g$  pode ser obtido de acordo com a equação 2.5.

$$\begin{aligned}
 g &= dc && \text{para } R^* \rightarrow \infty \\
 g &= \frac{\|R^*\| + w}{\|R^*\|} dc && \text{para } R^* > 0 \\
 g &= \frac{\|R^*\|}{\|R^*\| + w} dc && \text{para } R^* < 0
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Tomando as derivadas em relação a  $u$  e  $v$ ,  $r_p(t_i)$  pode ser aproximado utilizando uma expansão da equação em termos de uma série de Taylor como mostra a equação 2.6

$$r_p(t_i) = r(t_i) + r_u \Delta u + r_v \Delta v \quad (2.6)$$

onde  $du$  é aproximado por  $\Delta u$  e  $dv$  é aproximado por  $\Delta v$ .

Substituindo a expressão  $r_p(t_i) - r(t_i)$  da equação 2.6 e as duas formas fundamentais da superfícies na equação 2.4 tem-se como resultado um sistema de equações não-lineares em função de  $\Delta u$  e  $\Delta v$ , como mostrado na equação 2.7 (SARMA; DUTTA, 1997)(SURESH; YANG, 1994) (FARIN, 1992).

$$\begin{cases} E\Delta u^2 + 2F\Delta v\Delta u + G\Delta v^2 = g^2 \\ E\Delta u \frac{\partial u}{\partial t} + F(\Delta u \frac{\partial v}{\partial t} + \Delta v \frac{\partial u}{\partial t}) + G\Delta v \frac{\partial v}{\partial t} = 0 \end{cases} \quad (2.7)$$

onde  $E = r_u \cdot r_u$ ,  $F = r_u \cdot r_v$  e  $G = r_v \cdot r_v$

Resolvendo o sistema de equações não-lineares mostrado em 2.7, são obtidos os valores de  $\Delta u$  e  $\Delta v$  como mostram as equações 2.8 e 2.9.

$$\Delta u = \frac{g \left( F \frac{\partial u}{\partial t} + G \frac{\partial v}{\partial t} \right)}{\sqrt{EG - F^2} \sqrt{E \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + 2F \frac{\partial u \partial v}{\partial t \partial t} + G \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)^2}} \quad (2.8)$$

$$\Delta v = \frac{g \left( E \frac{\partial u}{\partial t} + F \frac{\partial v}{\partial t} \right)}{\sqrt{EG - F^2} \sqrt{E \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + 2F \frac{\partial u \partial v}{\partial t \partial t} + G \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)^2}} \quad (2.9)$$

As relações para  $\Delta u$  e  $\Delta v$  obtidas acima são apropriadas para um valor de  $g$  suficientemente pequeno em relação ao raio de curvatura local ( $R^*$ ). Os valores  $\Delta u$  e  $\Delta v$  são utilizados, como mostrou a equação 2.6, para obter um ponto sobre a superfície pertencente ao caminho paralelo ao caminho de referência.

## 2.4.2 Estratégia para preenchimento de uma cavidade pelo processo de soldagem

A metodologia para calcular caminhos paralelos discutida seção anterior pode ser implementada em um algoritmo para o planejamento *off-line* de caminhos paralelos para a manutenção de superfícies erodidas nas tarefas de medição e soldagem.

O algoritmo proposto inicia-se com o processo de medição da superfície erodida. A partir dos dados obtidos da tarefa de medição, é estimada a superfície de referência e a

superfície erodida. A intersecção destas duas superfícies determina o limite de soldagem e sobre a superfície erodida são então calculados os caminhos paralelos que serão posteriormente programados no manipulador para execução da tarefa.

As trajetórias são programadas para que a realização da soldagem se dê numa única direção. Existe portanto a necessidade de se programar uma trajetória de retorno para execução do próximo cordão de solda. No algoritmo desenvolvido, este retorno é realizado sobre a próprio caminho de ida, mantendo apenas o arco piloto ligado.

Uma simulação do algoritmo proposto foi realizada utilizando os dados medidos de um modelo de superfície erodida. Os pontos medidos são mostrados na figura 2.13 e estão dispostos em segmentos em uma malha quadrangular sobre a superfície. Para a realização destas medições foi utilizado um sensor laser 3D (PINTO, 2001).

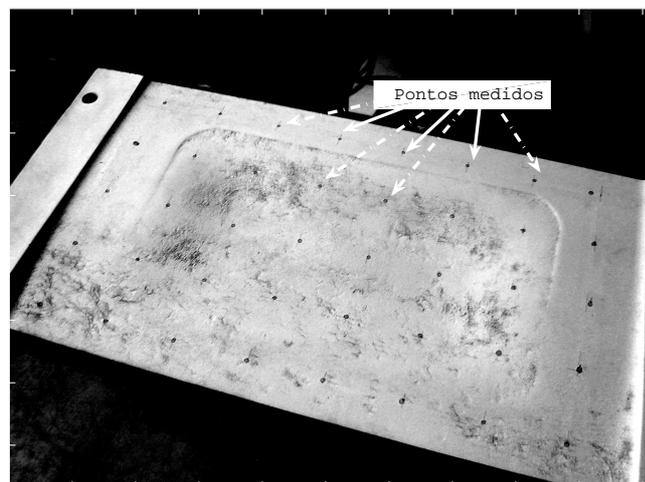


Figura 2.13: Modelo de uma superfície erodida

Utilizando o algoritmo de Bézier, a superfície foi formulada e os resultados utilizados como referência para o algoritmo de soldagem. A figura 2.14 mostra a superfície modelada. Utilizando os mesmos dados da superfície erodida estima-se a superfície de referência, mostrada na figura 2.15

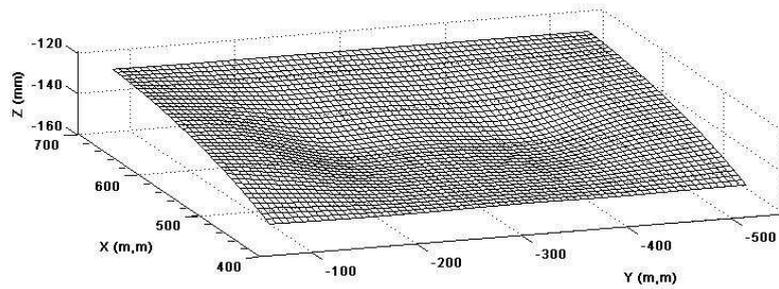


Figura 2.14: Formulação da superfície erodida

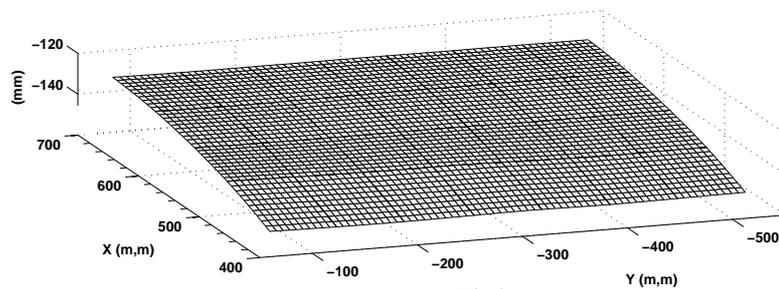


Figura 2.15: Formulação da superfície de referência

Para que fossem calculados os caminhos paralelos foram especificados os parâmetros de soldagem. A distância entre cordões,  $dc$ , foi definida em  $6mm$  e a distância entre camadas  $cd$  foi definida em  $3mm$ .

No algoritmo proposto é preciso atender uma especificação do processo de soldagem, a qual determina que os cordões de soldagem devem ser interpostos entre as camadas adjacentes. Para atender à esta especificação, os caminhos são calculados, sobre toda a superfície erodida, com distâncias programadas de  $dc/2$  (metade da distância entre caminhos desejada). O posicionamento dos caminhos é realizado de tal maneira que o vetor  $z$  do sistema de coordenadas de medição é apontado na direção do vetor normal médio da superfície, assim é possível deslocar todos caminhos na direção  $z$  do sistema de coordenadas de referência e posicionar cada camada de acordo com a altura  $w$  do cordão de solda.

De acordo com a camada em que estiver sendo calculadas as trajetórias, utiliza-se os caminhos pares para as camadas pares e os caminhos ímpares para os caminhos ímpares. Esta solução tem como resultado a interposição de cordões entre camadas sucessivas.

A figura 2.16 apresenta a interposição de trajetórias entre a primeira e a segunda

camada.

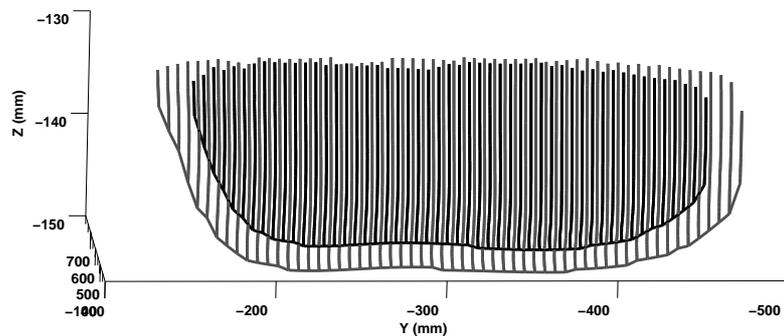


Figura 2.16: Intercalamento de cordões

A seguir é apresentado o algoritmo 1, na forma de um pseudocódigo, aplicado ao planejamento de caminhos paralelos para o processo de preenchimento de uma cavidade erodida (SIMAS H. DIAS; GUENTHER, 2007).

---

**Algoritmo 1** Planejamento de caminhos paralelos

---

**Entrada:**

Obter os dados provenientes do sistema de medição  $\implies$  **Formulação matemática da superfície erodida;**

Cálculo da superfície de referência  $\implies$  **Formulação matemática da superfície de referência;**

Cálculo dos caminhos paralelos de soldagem sobre toda superfície: utilizando os parâmetros  $g$ ,  $dc$  e  $w$ ;

**Para**  $camada = 1$  to  $limite\ de\ intersecção$  **faça**

    Cálculo da curva de intersecção para definição dos limites de soldagem;

**Se** camada é ímpar **então**

        Obter o conjunto de caminhos ímpares e delimitá-los dentro do limite de intersecção;

**Senão** {camada é par}

        Obter o conjunto de caminhos pares e delimitá-los dentro do limite de intersecção

**Fim Se**

    Segue para a próxima camada movendo os cordões de uma distância  $cd$  (altura dos cordões)

**Fim Para**

---

Aplicando a solução proposta, obteve-se como resultado seis camadas mostradas nas figuras 2.17, a 2.22.

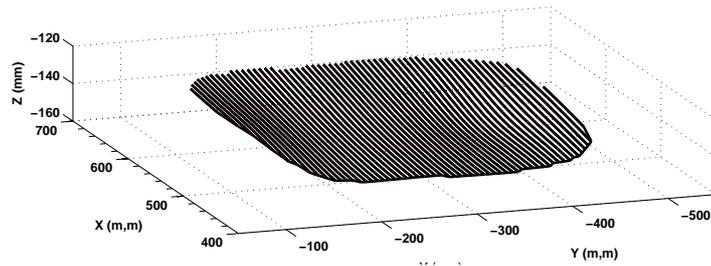


Figura 2.17: Primeira camada de deposição calculada

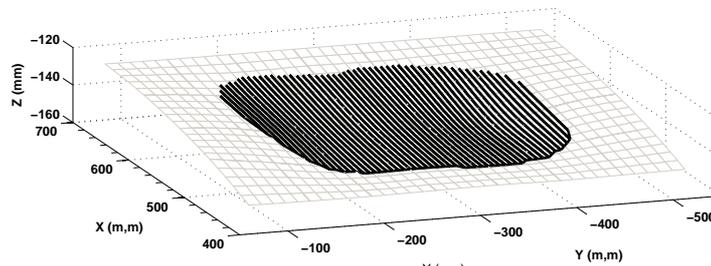


Figura 2.18: Segunda camada de deposição calculada

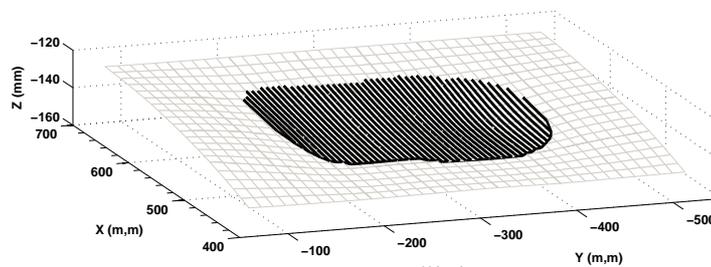


Figura 2.19: Terceira camada de deposição calculada

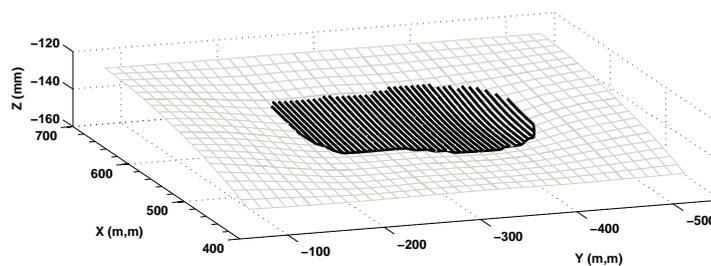


Figura 2.20: Quarta camada de deposição calculada

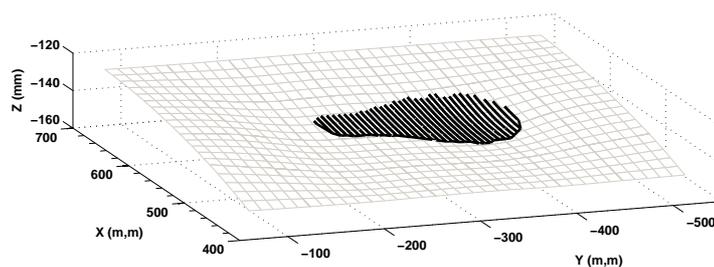


Figura 2.21: Quinta camada de deposição calculada

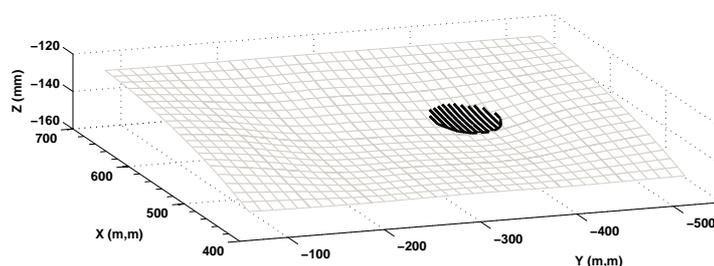


Figura 2.22: Sexta camada de deposição calculada

Para cada camada foram obtidos limites de deposição a partir das curvas de intersecção entre a camada e a superfície de referência. A figura 2.23 apresenta as curvas de intersecção obtidas para cada camada.

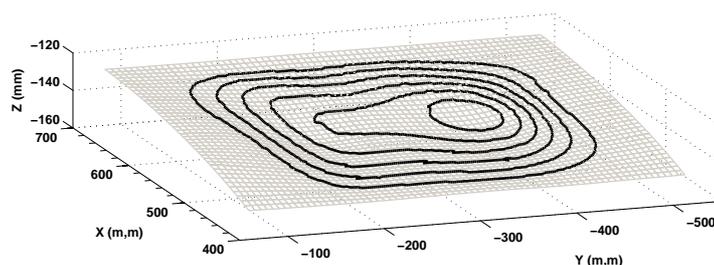


Figura 2.23: Delimitações obtidas para cada camada

## 2.5 Laço no caminho

Como em qualquer algoritmo numérico, o cálculo de caminhos paralelos apresenta problemas de propagação de erros devidos as propriedades da superfície usada (SARMA; DUTTA, 1997) (SURESH; YANG, 1994). Estes erros são gerados levando em conta os

aspectos topológicos e as propriedades matemáticas da superfície, interferindo na precisão do algoritmo de cálculo de caminhos paralelos. Estas interferências provocam o aparecimento de *laços* em alguns dos caminhos calculados. Estes erros serão aqui chamados de *laços no caminho*.

O laço no caminho tem o aspecto geométrico ilustrado na figura 2.24.

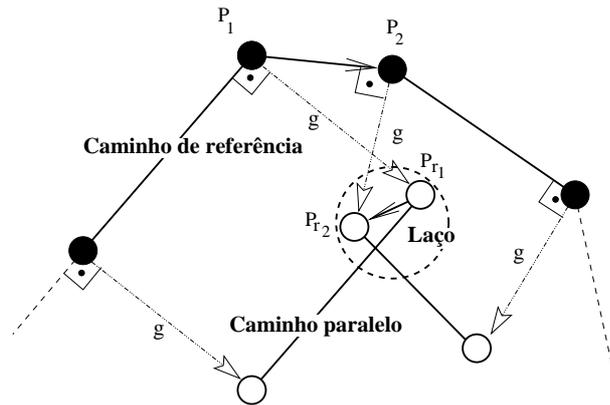


Figura 2.24: Surgimento do laço no caminho

A figura 2.24 exhibe o que acontece no surgimento do laço. Quando o raio de curvatura do caminho de referência é relativamente pequeno com relação ao valor de  $g$  calculado e o avanço no caminho paralelo deve retroceder para atender as restrições da equação 2.4.

Se o laço não for tratado adequadamente na iteração vigente na iteração a seguir, o atual caminho paralelo será o caminho de referência e uma propagação do laço ocorrerá. Esta propagação gera laços cada vez maiores inutilizando o conjunto de caminhos paralelos obtidos. A figura 2.25 apresenta a propagação dos laços.

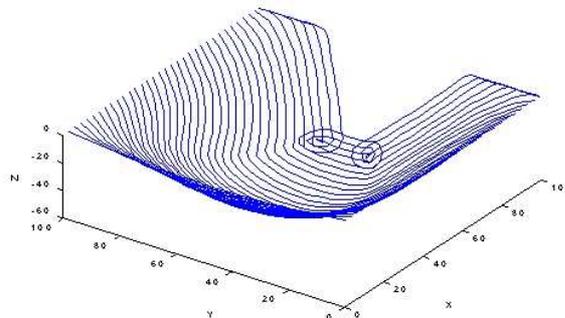


Figura 2.25: Conjunto de caminhos resultantes sobre a superfície

Assim é necessário tratar o laço antecipadamente evitando sua propagação. Medições dos parâmetros  $E$ ,  $F$ ,  $G$ ,  $r_u$ ,  $r_v$ ,  $\rho(t_i)$ , dentre outras propriedades locais foram realizadas

buscando uma relação que pudesse ser utilizada para identificar o surgimento do laço. Inicialmente uma análise gráfica foi realizada comparando a evolução das propriedades de um caminho sem laços com a a evolução das propriedades de um caminho com laços. Esta análise não revelou, de uma maneira precisa, qual seria a relação das propriedades locais com o surgimento do laço. Neste sentido a busca de uma abordagem heurística para a eliminação do laço foi adotada.

Outras propostas de solução do laço são apresentadas em trabalhos relacionados (SARMA; DUTTA, 1997) (SURESH; YANG, 1994). Entretanto estas propostas não se adaptam no cálculo de caminhos de soldagem, por serem adaptadas ao cálculo de caminhos para o processo de fresamento.

A abordagem heurística proposta consiste em realizar um teste local de cruzamento, verificando se o laço sobre o caminho surge a cada avanço calculado sobre o caminho paralelo. Consideremos um novo ponto  $r_p(t_i)$  calculado sobre o caminho paralelo e o ponto anterior a este obtido  $r_p(t_{i-1})$ . Os pontos  $r_p(t_i)$  e  $r_p(t_{i-1})$  possuem como parâmetros  $(u_i, v_i)$  e  $(u_{i-1}, v_{i-1})$  respectivamente no espaço paramétrico. Consideremos também um segmento de reta  $l_i$ , associado a reta que liga os pontos  $(u_i, v_i)$  e  $(u_{i-1}, v_{i-1})$  no espaço paramétrico. Se o segmento de reta  $l_i$  cruza com qualquer outro segmento de reta pertencente ao caminho paralelo no plano paramétrico, por exemplo, um segmento  $l_j$ , então detecta-se um laço no caminho paralelo sobre a superfície. A eliminação do laço se dá eliminando-se do vetor de pontos do caminho paralelo  $r_p$ , os pontos desde a posição  $j$  até a posição  $i-1$ . Esta estratégia garante a eliminação do laço e sua propagação no cálculo dos demais caminhos, mantendo o paralelismo desejado entre os caminhos.

A figura 2.26 apresenta os segmentos  $l_i$  e  $l_j$ , juntamente com os pontos a serem eliminados.

A eliminação dos pontos não afeta a precisão dos pontos calculados sobre o caminho, porque nas áreas onde o laço pode ocorrer o avanço é pequeno o suficiente, assim a eliminação mantém os caminhos corretamente calculados.

Esta heurística foi aplicada aos resultados obtidos nas simulações apresentadas nas figuras 2.17, 2.20 e 2.22.

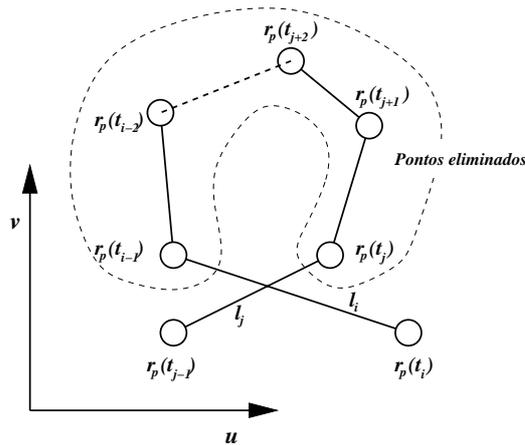


Figura 2.26: Conjunto de pontos eliminados para evitar o surgimento do laço no caminho

## 2.6 Conclusão

Este capítulo apresentou uma metodologia para cálculo de caminhos paralelos para obtenção de trajetórias para manipuladores baseada no critério de *Scallop-height*. A metodologia inclui a seleção de formulação para a superfície representada a partir de um conjunto de pontos, o cálculo da delimitação área erodida e um algoritmo que calcula caminhos paralelos dentro da região de trabalho, a partir de um caminho de referência sobre a superfície.

A metodologia proposta possibilita a implementação de aplicativos para o processo de soldagem robotizada onde o propósito seja a deposição de material sobre superfícies em camadas sobrepostas desenvolvendo trajetórias paralelas e intercaladas camada a camada. A metodologia também possibilita a implementação de aplicativos para realização de tarefas de medição robotizada.

Definidos os caminhos o próximo capítulo apresenta um estudo da cinemática inversa para o cálculo das trajetórias no espaço de juntas do manipulador. Nos próximos capítulos serão tratados os problemas da cinemática inversa considerando o principal do problema tratado neste trabalho, qual seja a utilização de manipuladores redundantes operando em um espaço de trabalho confinado.

## 3 *Cinemática inversa de manipuladores redundantes*

No projeto de manipuladores a concepção cinemática é definida de acordo com a tarefa a ser realizada. Na concepção são considerados aspectos estruturais tais como as dimensões dos elos, tipos e número de juntas.

O número de juntas é geralmente determinado de acordo com a mobilidade desejada para o manipulador, ou seja, quais os movimentos desejados que este deve realizar no espaço de trabalho. Entretanto sob circunstâncias especiais o manipulador pode ser definido com um número de juntas maior que as necessárias para realização da tarefa. Estes manipuladores fazem parte de uma classe chamada de manipuladores redundantes.

Os manipuladores redundantes possibilitam a inclusão de tarefa secundárias tais como o desvio de obstáculos. Para esta classe de manipuladores, a cinemática inversa é obtida a partir da cinemática diferencial.

Este capítulo trata da questão da cinemática para manipuladores enfocando a cinemática inversa para manipuladores redundantes. No decorrer da discussão serão apresentados os principais conceitos e as metodologias mais utilizadas para solução da cinemática inversa para manipuladores redundantes.

### 3.1 Redundância de manipuladores

O conceito de geral de redundância, válido para manipuladores de cadeia aberta ou fechada, está baseado a partir da definição de graus de controle  $K_{i,j}$  e da conectividade  $C_{i,j}$  entre dois elos  $i$  e  $j$  (CARBONI, 2008). A redundância  $R_{i,j}$  é dada pela diferença de  $K_{i,j}$  e  $C_{i,j}$ :  $R = K - C$ .

De maneira mais simples um manipulador de cadeia aberta é dito redundante quando o número de juntas disponíveis para atuar é maior do que aquelas necessárias para executar

a tarefa. Isso pode ser melhor entendido fazendo a relação entre o espaço de juntas e o espaço cartesiano.

O espaço de juntas é definido pelo número  $n$  de juntas que compõem o manipulador, enquanto o espaço operacional é definido pelo número  $r$  de coordenadas usadas para descrevê-lo. Se uma tarefa usar  $r$  das  $n$  juntas para executar uma tarefa e  $r < n$ , então o manipulador é definido como redundante. (SCIAVICCO; SICILIANO, 1996)

Para evidenciar a relação entre  $r$  e  $n$  considere um manipulador de seis juntas,  $n = 6$ , aplicado à operação de soldagem. O movimento no espaço tridimensional exige seis variáveis independentes (posições  $x, y$  e  $z$ , e as orientações  $\theta_x, \theta_y$  e  $\theta_z$ ). No processo de soldagem são necessários comumente calcular cinco parâmetros para localizar a tocha de soldagem: três posições e duas orientações, implicando em  $r=5$ . Nesta situação o manipulador possui 1 grau de liberdade a mais que o necessário para realizar a tarefa. Nesta caso, para realização do processo de soldagem por um manipulador de seis graus de liberdade o manipulador é dito redundante.

O grau de redundância é determinado pela relação  $n - r$ . Para o exemplo do processo de soldagem descrito acima, o manipulador possui grau de redundância  $n - r = 1$ .

Os manipuladores redundantes possuem algumas vantagens quando comparados aos manipuladores não-redundantes. Esta classe de manipuladores permite a otimização da trajetória do efetuador em situações onde haveria presença de obstáculos no espaço da tarefa ou na iminência de singularidades. Por outro lado, a cinemática inversa para estes manipuladores admite um número infinito de soluções, e assim tornam-se necessários critérios mais requintados na programação de suas tarefas.

## 3.2 Cinemática direta

A cinemática direta de um manipulador é denotada pela relação:

$$\mathbf{k} : Q \mapsto C \quad (3.1)$$

onde  $Q$  determina um vetor de posições de juntas,  $C$  a configuração de posição e orientação do efetuador do manipulador no espaço cartesiano, ambas representadas em algum sistema de coordenadas de referência e  $\mathbf{k}$  representa o mapeamento não-linear do espaço de posições de juntas ( $Q$ ) para o espaço cartesiano ( $C$ ) (BRADY, 1983).

É comum sistematizar a cinemática direta de manipuladores através do método de Denavit-Hartenberg. De maneira análoga pode-se utilizar o método de helicóides sucessivos para modelar a relação entre o espaço de junta e o cartesiano (TSAI, 1999). O anexo A apresenta uma proposta de sistematização da cinemática direta baseada na metodologia dos helicóides sucessivos.

### 3.3 Cinemática inversa

A cinemática inversa, denotada por  $\mathbf{k}^{-1}$ , determina o mapeamento inverso entre dois espaços, ou seja, o mapeamento entre o espaço de posições e orientações cartesianas ( $C$ ) e o espaço de juntas ( $Q$ ) do manipulador.

$$\mathbf{k}^{-1} : C \mapsto Q \quad (3.2)$$

Na cinemática inversa calculam-se os deslocamentos de juntas a partir da posição e orientação cartesiana do efetuador na execução de uma determinada tarefa.

A solução da cinemática inversa pode ser obtida de duas maneiras:

- **Análítica:** Esta metodologia baseia-se na análise da configuração geométrica da cadeia cinemática do manipulador, requerendo para tanto o uso de intuição geométrica e algébrica sobre o problema e que a cadeia cinemática não seja complexa. A cinemática inversa analítica tem aplicação restrita e seu desenvolvimento é realizado para cada caso (TSAI, 1999) (SCIavicco; Siciliano, 1996). Os resultados obtidos neste método são mais precisos e obtidos numa única sequência de operações.
- **Integração da cinemática inversa diferencial:** Esta metodologia baseia-se na integração das velocidades das juntas, calculadas utilizando a inversa da matriz Jacobiana. Esta metodologia é mais geral, abrangendo os manipuladores redundantes. Dada a complexidade do modelo diferencial é complexo e de difícil solução analítica, vale-se de algoritmos numéricos para solução da integral. Algoritmos numéricos são geradores de erros de aproximação, e a imprecisão resultante dependerá basicamente do número de iterações realizadas e da complexidade do método de integração utilizado.

O objetivo principal deste trabalho é explorar as particularidades da metodologia de

integração da cinemática inversa diferencial. Ela será aplicada para calcular a cinemática inversa de manipuladores redundantes. Antes de uma discussão dos métodos mais utilizados, é apresentado a seguir um estudo sobre cinemática inversa e a relação com a matriz Jacobiana.

### 3.4 A cinemática diferencial

Seja um manipulador com  $n$  juntas e seu vetor de posições no espaço de juntas descrito por  $q = [q_1, \dots, q_n]^T$ .

O objetivo da cinemática diferencial é obter uma relação entre as velocidades das juntas e as velocidades lineares e angulares do efetuador. Consideremos um manipulador com  $n$  juntas, cujas posições são representadas num vetor descrito por  $q = [q_1, \dots, q_n]^T$  e as respectivas velocidades das juntas representadas num vetor  $\dot{q} = [\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n]^T$ . É desejado representar as velocidades lineares do efetuador  $\dot{p}$  e as velocidades angulares  $\omega$ , como função das velocidades do espaço de juntas  $\dot{q}$ . Isso implica em obter um mapeamento entre os dois espaços, que pode ser expresso por:

$$\begin{aligned} \dot{p} &= J_P(q)\dot{q} \\ \omega &= J_O(q)\dot{q} \end{aligned} \tag{3.3}$$

onde

- $J_P$  é uma matriz  $j \times n$  que representa a contribuição do vetor de velocidades de junta  $\dot{q}$  na velocidade linear do efetuador  $\dot{p}$ ,  $j \times 1$ ;
- $J_O$  é uma matriz  $f \times n$  que representa a contribuição do vetor de velocidades de junta  $\dot{q}$  na velocidade angular do efetuador  $\omega$ ,  $f \times 1$ ;
- $j$  e  $f$  representam as dimensões dos vetores de velocidades lineares e angulares respectivamente, determinando assim a dimensão do espaço operacional usado para execução da tarefa, ou seja,  $r = j + f$ .

Reescrevendo as equação apresentadas em 3.3 na forma matricial tem-se:

$$v = \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \omega \end{bmatrix} = J(q)\dot{q} \tag{3.4}$$

a qual representa a equação cinemática diferencial. A matriz  $J(r \times n)$  é definida como matriz *Jacobiana*, ou simplesmente Jacobiano do manipulador e determina o mapeamento diferencial entre o espaço de juntas e o espaço cartesiano. Dependendo da forma de representação da orientação do efetuador o Jacobiano é definido como geométrico, indicado por  $J$  ou analítico, indicado por  $J_A$ . (SCIAVICCO; SICILIANO, 1996). Neste trabalho será utilizada a representação simples por  $J$ , uma vez que os desenvolvimentos apresentados aplicam-se tanto ao Jacobiano analítico como o geométrico.

A equação 3.4 pode ser invertida, isto é, permite obter as variáveis de velocidade de junta em função das variáveis de velocidade do espaço cartesiano se  $J$  tem posto completo. Assim ela pode ser escrita como:

$$\dot{q} = J^{-1}(q)v \quad (3.5)$$

onde  $J^{-1}(q)$  é a inversa do Jacobiano.

O Jacobiano é, em geral, função da configuração de  $q$ . Dependendo da configuração de  $q$  o Jacobiano pode não possuir posto completo e diz-se que o manipulador encontra-se numa condição de *singularidade* (SCIAVICCO; SICILIANO, 1996), isto implica que  $J(q)$  não é inversível. Sob esta condição, estruturalmente, o manipulador reduz suas possibilidades de movimento.

O Jacobiano de manipuladores redundantes possui maior número de colunas,  $n$ , que linhas  $r$ , uma vez que a dimensão do espaço de juntas é maior que a dimensão do espaço operacional, ou seja,  $r < n$ . Portanto a cinemática inversa diferencial mostrada na equação 3.5 apresenta um número infinito de soluções. A dificuldade de achar uma solução está na necessidade de escolha de um método adequado para determinar qual destas soluções seria a mais adaptada à uma determinada aplicação. Este problema é abordado nos métodos discutidos a seguir.

### 3.4.1 O mapeamento entre os espaços diferenciais de juntas e operacional

O mapeamento entre o espaço diferencial de juntas e o espaço diferencial operacional é apresentado na figura 3.1. Ele ilustra a relação entre as velocidades de juntas  $\dot{q} \in \mathbb{R}^n$  e as velocidades do efetuador dadas por  $v \in \mathbb{R}^r$ .

onde:

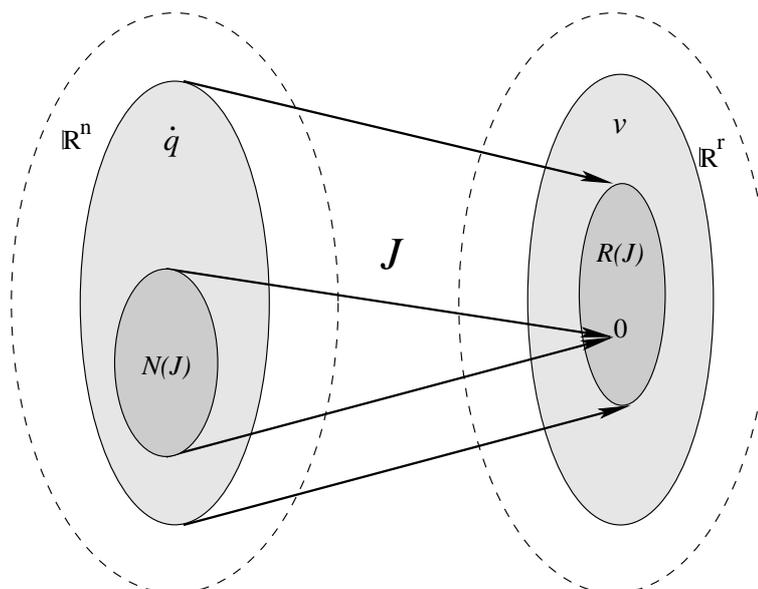


Figura 3.1: Mapeamento  $J$  entre o espaço cartesiano e o espaço de juntas

- $J$  é Jacobiano  $n \times r$  e define o mapeamento das velocidades do espaço operacional que podem ser alcançadas a partir de velocidades impostas nas juntas, de acordo com a equação 3.4;
- $N(J) \in \mathbb{R}^n$ , é o subespaço correspondente aos movimentos das juntas que não produzem velocidades no efetuador, ou seja, mapeia as velocidades de junta para  $0 \in \mathbb{R}^r$ .
- $R(J) \in \mathbb{R}^r$  representa as velocidades do efetuador final geradas pelas velocidades de junta numa dada configuração cinemática.

Se o Jacobiano tem posto completo então:

$$\dim(R(J)) = r \quad (3.6)$$

$$\dim(N(J)) = n - r \quad (3.7)$$

Desta forma, pode ser escrito que:

$$\dim(R(J)) + \dim(N(J)) = n \quad (3.8)$$

Em caso de singularidade ocorre uma diminuição no posto do Jacobiano e  $\dim(R(J))$

decrece ao mesmo tempo que  $\dim(N(J))$  aumenta. Com isso a relação 3.6 mantém-se válida independentemente do posto do Jacobiano.

Em manipuladores redundantes ( $r < n$ ). Examinando a equação 3.6, fica claro que  $\dim(N(J)) > 0$ , ou seja, sempre existe um espaço nulo.

Isto implica que existem infinitas soluções para a equação 3.5. Um número finito de soluções pode ser obtido estabelecendo critérios para o movimento no espaço nulo. Uma proposta seria achar os movimentos internos na cadeia cinemática que não alteram a trajetória que está sendo realizada pelo efetuator e assim solucionar a equação 3.5.

Nas seções a seguir são apresentadas algumas soluções para a cinemática diferencial inversa de manipuladores redundantes.

### 3.4.2 O espaço nulo em manipuladores redundantes

A existência do espaço nulo  $N(J) \neq \{0\}$  requer técnicas sistemáticas para resolver os graus de redundância de um manipulador (SANTOS, 2006)(SCIAVICCO; SICILIANO, 1996).

Suponha  $\dot{q}^*$  uma solução da cinemática direta dada pela equação 3.4 e seja  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é uma matriz tal que:

$$R(P) = N(J) \quad (3.9)$$

então, a solução  $\dot{q}$  pode ser escrita como:

$$\dot{q} = \dot{q}^* + P\dot{q}_a \quad (3.10)$$

onde  $\dot{q}_a$  é um vetor arbitrário que junto com  $P$  determina a solução da equação 3.4. Pré-multiplicando ambos os lados da igualdade pelo Jacobiano tem-se:

$$J\dot{q} = J\dot{q}^* + JP\dot{q}_a = v \quad (3.11)$$

Esta equação ilustra que  $\dot{q}^*$  é uma solução da cinemática direta, desde que  $JP\dot{q}_a = 0$

para qualquer  $\dot{q}_a$ . Assim,  $JP$  é o espaço projetor nulo. Ou seja, tem-se a possibilidade de escolha de um vetor arbitrário  $\dot{q}_a$  que contribuirá para a geração de movimentos internos da cadeia cinemática do manipulador sem interferir nas velocidades definidas para o efetuador.

## 3.5 Métodos clássicos para resolução da cinemática inversa para manipuladores redundantes

A seguir são discutidos os métodos clássicos para solução da cinemática inversa de manipuladores redundantes. São analisadas formulações destacando as limitações de cada método.

### 3.5.1 A resolução da cinemática inversa via pseudoinversa do Jacobiano

Uma estratégia simples de resolver a redundância é procurar um meio de distribuir o movimento necessário para realização de uma tarefa por todas juntas do manipulador. O objetivo desta distribuição é minimizar a energia utilizada pelas juntas em seus deslocamentos. A solução da equação 3.5 pode ser formulada como um problema de otimização de restrições lineares (SCIAVICCO; SICILIANO, 1996).

Assim, conhecidos os vetores  $v$  e o Jacobiano  $J$ , para uma dada configuração de  $q$ , é desejado encontrar a solução 3.4 que minimize um funcional de custo quadrático para as velocidades de junta. Este funcional está relacionado com a energia cinética resultante do movimento das juntas.

Este funcional quadrático é expresso por:

$$g(\dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T W \dot{q} \quad (3.12)$$

onde  $W$  é uma matriz  $n \times n$  definida positiva de pesos.

Este problema pode ser resolvido pelo método dos *multiplicadores de Lagrange* (SCIAVICCO; SICILIANO, 1996). Consideremos o funcional quadrático modificado:

$$g(\dot{q}, \lambda) = \frac{1}{2} \dot{q}^T W \dot{q} + \lambda^T (v - J\dot{q}) \quad (3.13)$$

onde  $\lambda$  é um vetor de multiplicadores de Lagrange  $r \times 1$  que incorporam a restrição definida pela equação 3.4 no funcional.

Para encontrar a solução minimizada de  $g(\dot{q}, \lambda)$  é necessário que:

$$\left(\frac{\partial g}{\partial \dot{q}}\right)^T = 0 \qquad \left(\frac{\partial g}{\partial \lambda}\right)^T = 0 \qquad (3.14)$$

Da primeira condição temos que  $W\dot{q} - J^T\lambda = 0$ , então:

$$\dot{q} = W^{-1}J^T\lambda \qquad (3.15)$$

A equação 3.5 pode ser reaproveitada resolvendo a segunda condição mostrada na equação 3.14. Assim, combinando estas duas condições obtém-se:

$$v = JW^{-1}J^T\lambda \qquad (3.16)$$

Assumindo que  $J$  tem posto completo,  $JW^{-1}J^T$  é uma matriz quadrada de posto completo, e que portanto pode ser invertida. Resolvendo  $\lambda$  na equação 3.16, tem-se:

$$\lambda = (JW^{-1}J^T)^{-1}v \qquad (3.17)$$

Substituindo o resultado da equação 3.17 na equação 3.15 encontra-se a solução otimizada.

$$\begin{aligned} \dot{q} &= W^{-1}J^T(JW^{-1}J^T)^{-1}v \\ \dot{q} &= J^\dagger v \end{aligned} \qquad (3.18)$$

onde a matriz  $J^\dagger = W^{-1}(J^T(JW^{-1}J^T)^{-1})$  é definida como a matriz *pseudoinversa* do Jacobiano. Num caso particular fazendo  $W$  uma matriz identidade de ordem  $I_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , obtém-se que:

$$J^\dagger = J^T (JJ^T)^{-1} \qquad (3.19)$$

onde  $J^\dagger$  satisfaz a seguinte igualdade:

$$JJ^\dagger = I_r \qquad (3.20)$$

onde  $I_r \in \mathbb{R}^{r \times r}$  é uma matriz identidade de ordem  $r$ . De acordo com a resolução a matriz  $J^\dagger$  é conhecida como pseudoinversa à direita.

Os métodos baseados na pseudoinversa possuem inconveniências (SANTOS, 2006). Dentre estas pode-se destacar:

- Não existe garantia de que as singularidades cinemáticas serão evitadas;
- Não é garantido o movimento conservativo, ou seja, movimentos repetitivos não resultam necessariamente em movimentos repetitivos nas juntas;
- A introdução do problema de inconsistência dimensional associado ao tipo de juntas que constituem o sistema. Esta limitação restringe o método a manipuladores constituídos somente de juntas rotativas ou somente de juntas prismáticas.(SANTOS, 2006).

Como mostrado em (ZERGEROGLU et al., 2000) a matriz pseudoinversa mostrada em (3.19) satisfaz as condições de Moore-Penrose dadas abaixo:

$$\begin{aligned}
 JJ^\dagger J &= J \\
 J^\dagger JJ^\dagger &= J^\dagger \\
 (J^\dagger J)^T &= J^\dagger J \\
 (JJ^\dagger)^T &= JJ^\dagger
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

Adicionalmente às propriedades acima, a matriz  $(I_n - J^\dagger J)$  satisfaz as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned}
 (I_n - J^\dagger J)(I_n - J^\dagger J) &= I_n - J^\dagger J \\
 J(I_n - J^\dagger J) &= 0 \\
 (I_n - J^\dagger J)^T &= (I_n - J^\dagger J) \\
 (I_n - J^\dagger J)J^\dagger &= 0
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

Uma modificação pode ser realizada incluindo no funcional outro termo com objetivo de aproveitar  $P\dot{q}_a$ , apresentado na equação 3.10. Neste caso o novo funcional quadrático passa a ter a seguinte forma:

$$g(\dot{q}) = \frac{1}{2}(\dot{q} - \dot{q}_a)^T W(\dot{q} - \dot{q}_a) \tag{3.23}$$

A escolha deste funcional tem por objetivo minimizar a norma do vetor  $(\dot{q} - \dot{q}_a)$ , ou seja, busca-se uma solução de  $\dot{q}$  de tal maneira que esta seja a mais próxima o possível de  $\dot{q}_a$ .

Procedendo de forma similar tem-se

$$g(\dot{q}) = \frac{1}{2}(\dot{q} - \dot{q}_a)^T W (\dot{q} - \dot{q}_a) + \lambda^T (v - J\dot{q}) \quad (3.24)$$

Aplicando as condições de otimalidade em 3.24 resulta em:

$$\dot{q} = J^\dagger v + (I - J^\dagger J)\dot{q}_a \quad (3.25)$$

A solução obtida possui dois termos:

1. O primeiro relativo à norma minimizada das velocidades;
2. O segundo está relacionado à solução adicional para  $\dot{q}_a$  e a matriz  $(I - J^\dagger J)$  é uma das matrizes de  $P$ .

### 3.5.1.1 O vetor $\dot{q}_a$

Para utilização dos graus de liberdade de redundância é necessário especificar o vetor  $\dot{q}_a$  vinculado ao espaço nulo do manipulador de maneira conveniente. Uma solução típica é dada por:

$$\dot{q}_a = k_a \left( \frac{\partial \omega(q)}{\partial q} \right)^T \quad (3.26)$$

onde  $k_a > 0$  e  $\omega(q)$  é uma função objetivo secundária para as variáveis de junta.

Funções  $\omega(q)$  típicas estão relacionadas à manipulabilidade, à limitação dos movimentos de junta, ao controle de colisões e singularidades (SCIAVICCO; SICILIANO, 1996) (SANTOS, 2006). Existem outros métodos baseados na pseudoinversa tais como: o método *Prioridade da tarefa*, *Prioridade da tarefa robusta a singularidades* e *Amortecimento por mínimos quadrados* e serem descritos a seguir.

### 3.5.2 Prioridade da tarefa

O método de prioridade da tarefa (*Task priority*) consiste em aproveitar o espaço nulo de manipuladores redundantes para definir tarefas (*tasks*) secundárias. A proposta é coordenar os movimentos do manipulador através de um funcional quadrático (ANTONELLI; CHIAVERINI, 1998) *apud* (SANTOS, 2006).

Estas tarefas secundárias, descritas por  $\dot{q}_a$  são projetadas dentro do espaço nulo de uma tarefa de maior prioridade, ou seja, a tarefa de condução do efetuador. (SANTOS, 2006)

As velocidades da tarefa primária,,  $v_{p,d}$  para seguimento de trajetória são definidas por  $p_{p,d} \in \mathbb{R}^r$  e o seu correspondente Jacobiano  $J_p(q) \in \mathbb{R}^{r \times n}$ , ou seja:

$$v_{p,d} = \dot{p}_{p,d} = J_p(q)\dot{q} \quad (3.27)$$

Para modelar uma segunda tarefa,  $p_{s,d} \in \mathbb{R}^b$  com  $b \leq r$ , e o correspondente Jacobiano  $J_s(q) \in \mathbb{R}^{b \times n}$

$$v_{s,d} = \dot{p}_{s,d} = J_s(q)\dot{q} \quad (3.28)$$

Com isso o vetor de velocidades para as juntas é obtido da seguinte forma: (ANTONELLI, 2003)

$$\dot{q} = J_p^\dagger v_{p,d} + (J_s(I_n - J_p^\dagger J_p))^\dagger (v_{s,d} - J_s J_p^\dagger) \quad (3.29)$$

O método apresenta limitações com relação às singularidades. A proposta apresenta singularidades algorítmicas, ou seja, podem ocorrer grandes valores de velocidades apesar de  $J_p$  e  $J_s$  serem de posto completo. O sistema torna-se mal-condicionado pelo fato da matriz  $(J_s(I_n - J_p^\dagger J_p))^\dagger$  perder seu posto. Além disso, o problema de inconsistência dimensional existe devido ao uso de matrizes pseudoinversas. (SANTOS, 2006)

### 3.5.3 Prioridade da tarefa robusta a singularidades

Neste método as tarefas primárias e secundárias são invertidas separadamente por pseudoinversas dos seus respectivos Jacobianos para evitar as singularidades algorítmicas, como mostra a equação 3.30.

$$\dot{q} = J_p^\dagger v_{p,d} + (I_n - J_p^\dagger J_p) J_s^\dagger v_{s,d} \quad (3.30)$$

Porém, como citado anteriormente, este método também utiliza-se da pseudoinversa o que implica no problema da inconsistência dimensional. (SANTOS, 2006)

### 3.5.4 Mínimos quadrados amortecidos

O método dos mínimos quadrados amortecidos (*Damped Least Square*) tenta contornar o problema da descontinuidade provocada em pontos singulares da matriz pseudoinversa. A descontinuidade nos pontos singulares é controlada utilizando-se um funcional a ser minimizado expresso por:

$$\|v_d - J\dot{q}\|^2 + \alpha \|\dot{q}\| \quad (3.31)$$

onde  $\alpha$  é um fator de amortecimento. Resolvendo este funcional tem-se a seguinte inversa generalizada:

$$J^\ddagger = J^T B^{-1}, \quad B = (J^T J + \alpha^2 I) \quad (3.32)$$

Formulações similares foram desenvolvidas combinando o método dos mínimos quadrados com pesos amortecidos. O resultado obtido para a inversa generalizada é apresentada a seguir:

$$J^\ddagger = (J^T W_1 J + W_2)^{-1} J^T W_1 \quad (3.33)$$

onde  $W_1, W_2 > 0$  são matrizes de pesos. Na equação 3.33  $W_2$  incorpora também o fator de amortecimento  $\alpha$ .

Apesar deste método ser robusto com relação ao problema das singularidades, ainda persistem os problemas relacionados com a inconsistência dimensional. (SANTOS, 2006)

## 3.6 Solução da redundância usando um sistema não-redundante

A utilização da pseudoinversa possui várias limitações e dentre estas a limitação mais grave é caracterizada por um problema da inconsistência dimensional das variáveis envolvidas (CAMPOS, 2004).

Os métodos apresentados a seguir apresentam soluções para a cinemática inversa sem a utilização da pseudoinversa. O objetivo é contornar as limitações impostas pela utilização da pseudoinversa.

### 3.6.1 Método da decomposição

O método da decomposição é baseado na idéia de particionar o Jacobiano em duas submatrizes de dimensões  $m \times m$  e  $(n - m) \times m$ , respectivamente (SANTOS, 2006). Esta formulação é exposta a seguir:

$$v = J_m \dot{q}_m + J_{n-m} \dot{q}_{n-m} \quad (3.34)$$

onde  $J_m$  é uma submatriz  $m \times m$  e  $\dot{q}_m \in \mathbb{R}^m$ , correspondem às velocidades das juntas, denominadas primárias;  $J_{n-m}$  é uma submatriz  $(n-m) \times m$  e  $\dot{q}_{n-m} \in \mathbb{R}^{n-m}$  são as correspondentes velocidades das juntas denominadas secundárias. Os valores das velocidades das juntas secundárias podem ser obtidos através de um procedimento de otimização  $(n - m)$ -dimensional com algum critério desejado. Assim, uma solução para as velocidades das juntas primárias pode ser obtido diretamente da relação apresentada na equação 3.35

$$\dot{q}_m = J_m^{-1}(v - J_{n-m} \dot{q}_{n-m}) \quad (3.35)$$

### 3.6.2 Método de extensão do espaço de tarefa

O método da extensão da tarefa também é conhecido como método do Jacobiano estendido e é baseado na imposição de funções de restrição da forma  $h(q) = 0$  ao Jacobiano

original.

Desta forma, a cinemática diferencial direta pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} p(t) &= k(q(t)) \\ 0 &= h(q) \end{aligned} \quad (3.36)$$

onde  $k$  representa o mapeamento da cinemática direta do manipulador e  $h(q)$  representa uma função que relaciona as posições de juntas do manipulador.

Considerando que  $h$  e  $k$  sejam diferenciáveis em  $q(t)$ , obtém-se a derivada da equação 3.36 como:

$$\begin{bmatrix} \dot{p}(t) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J(q) \\ \frac{\partial h(q)}{\partial q} \end{bmatrix} \dot{q} \quad (3.37)$$

Ou seja:

$$v = J_e \dot{q} \quad (3.38)$$

onde

$$J_e = \begin{bmatrix} J(q) \\ \frac{\partial h(q)}{\partial q} \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

Este método tem como inconveniência a introdução de singularidades algorítmicas. As singularidades algorítmicas são relacionadas apenas à linha adicional de  $J_e$ , mas não à cinemática do manipulador propriamente dita. Neste sentido, as vantagens dos manipuladores redundantes podem ser limitadas por falsas singularidades, possivelmente geradas por uma seleção inconveniente da função de restrição  $h(q)$  (SANTOS, 2006). A função  $h(q)$  mais utilizada é apresentada na equação 3.40.

$$h(q) = \sum_{i=1}^n q_i^2 \quad (3.40)$$

onde  $n$  é o número de juntas.

O método do Jacobiano estendido também possui uma outra limitação comum aos outros métodos relacionada também à existência de inconsistência dimensional para o caso do manipulador possuir diferentes tipos de juntas (CAMPOS, 2004).

## 3.7 Conclusão

Este capítulo apresentou uma revisão de métodos convencionais para a solução da cinemática inversa de manipuladores redundantes. Foram apresentadas algumas metodologias de soluções baseadas na cinemática inversa diferencial, que tem Jacobiano como elemento central.

Adicionalmente cada método possui limitações.

A metodologia baseada na pseudoinversa apresenta-se como uma solução limitada pelos seguintes fatores

- No caso da matriz  $W$  (equação 3.18) ser diferente da identidade, é necessário ajustar  $n$  variáveis pertencentes a diagonal principal de  $W$ ;
- A estabilidade numérica da cinemática inversa depende da trajetória;
- Ocorrem problemas por causa das dimensões dos elementos do Jacobiano na pseudoinversa em caso da cadeia cinemática do manipulador possuir juntas rotativas e prismáticas;
- Os movimentos resultantes nas juntas não são conservativos, ou seja, movimentos repetitivos não resultam necessariamente em movimentos repetitivos nas juntas.

Estas limitações também são presentes quando é incluído o projetor do espaço nulo na cinemática inversa diferencial.

Os métodos baseados em prioridades de tarefas, apesar de seu diferencial quanto a formulação do problema, também são baseados na determinação de uma tarefa que é projetada no espaço nulo do Jacobiano; portanto, são também sensíveis às mesmas limitações da utilização da matriz pseudoinversa.

A solução proposta pelos métodos de resolução por sistemas não redundantes também apresentam limitações relacionadas principalmente à adição de singularidades algorítmicas, não pertencentes ao manipulador propriamente dito.

---

No próximo capítulo é apresentada uma metodologia baseada na introdução de restrições cinemáticas através de cadeias cinemáticas virtuais. A metodologia proposta evita o problema dimensional, não adiciona singularidades algorítmicas e resolve o problema de conservação de movimentos repetitivos.

## 4 *Cinemática inversa diferencial utilizando restrições cinemáticas*

O estudo realizado no capítulo 3 discutiu os métodos de solução da cinemática inversa para robôs redundantes baseados na pseudoinversa. Estes métodos possuem várias limitações, que incluem, por exemplo, o problema dimensional quando o robô possui juntas rotativas e prismáticas e a inserção de singularidades algorítmicas.

Este capítulo apresenta uma metodologia de obtenção da cinemática inversa diferencial através inserção de restrições cinemáticas impostas por cadeias cinemáticas auxiliares, definidas como *cadeias virtuais*.

No método proposto a descrição das velocidades é realizada utilizando o conceito de helicóides, e para o levantamento da cinemática diferencial é utilizada a lei de circulação de Davies.

### 4.1 Deslocamentos helicoidais sucessivos

De acordo com o teorema de Chasles, o movimento de um corpo rígido no espaço pode ser representado por uma rotação sobre um eixo seguido de uma translação ao longo do mesmo eixo. Este movimento combinado de translação e rotação é chamado movimento helicoidal (BOTTEMA, 1979).

Na cinemática de mecanismos, o movimento relativo entre elos de uma cadeia cinemática pode ser descrito de maneira genérica por um deslocamento helicoidal.

A generalização do princípio do deslocamento de uma junta como sendo helicoidal permite tratar as questões de posição e orientação de maneira única, restringido o problema a um deslocamento rotacional, prismático ou helicoidal de acordo com o tipo de junta.

Um movimento helicoidal de um ponto  $P$  no espaço, em relação a um sistema de coordenadas fixo, pode ser descrito por dois vetores, e dois escalares:

- $\mathbf{s}_i$ : vetor unitário que determina a direção de translação e rotação do movimento helicoidal, com índice  $i$  indicando o corpo rígido, ou elo, em que é fixo;
- $\mathbf{s}_{oi}$ : vetor posição de  $\mathbf{s}_i$  em relação a um sistema de coordenadas fixo a um elo de referência;
- $\theta$ : ângulo de deslocamento rotativo do ponto  $P$ ;
- $t$ : comprimento do deslocamento de translação do ponto  $P$

Os vetores  $\mathbf{s}_i$  e  $\mathbf{s}_{oi}$  devem ser escolhidos, tal que sejam perpendiculares, ou seja:

$$\mathbf{s}_i^T \cdot \mathbf{s}_{oi} = 0 \quad (4.1)$$

A figura 4.1 mostra o deslocamento helicoidal do ponto  $P$  de acordo com os vetores  $\mathbf{s}_i$  e  $\mathbf{s}_{oi}$ , e os parâmetros  $\theta$  e  $t$ .

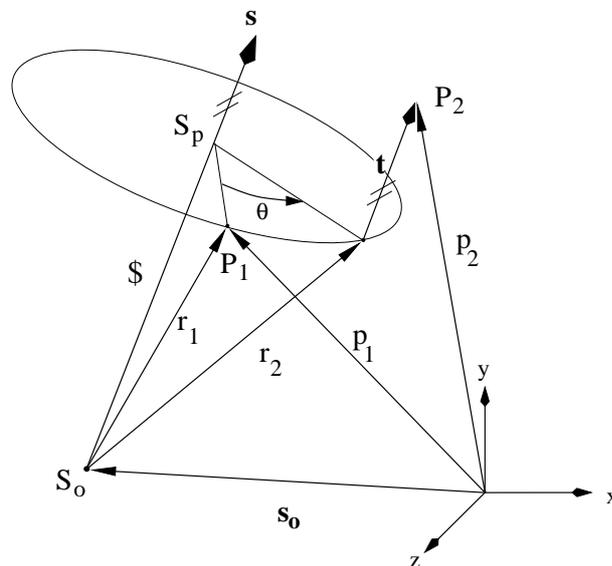


Figura 4.1: Deslocamento espacial helicoidal

onde:

- o vetor  $p_1$  indica a posição inicial do ponto  $P$ , ou seja, a posição  $P_1$ ;

- $r_1$  e  $r_2$  são vetores de mesmo comprimento e determinam a posição inicial e final do ponto  $P$  quando realizado o deslocamento rotacional;
- $p_2$  determina a localização do ponto  $P_2$ , ou seja, a posição do ponto  $P$  após o deslocamento de translação.

O helicóide,  $\$$ , associa o deslocamento diferencial entre dois corpos em relação a um sistema de coordenadas referencial. O helicóide é definido como  $\$ = (\omega; Vp)$ , onde o vetor  $\omega = (\mathcal{L}, \mathcal{M}, \mathcal{N})$  representa a velocidade angular do corpo e o vetor  $Vp = (\mathcal{P}^*, \mathcal{Q}^*, \mathcal{R}^*)$  representa a velocidade linear de um ponto  $P$  fixo no corpo passando instantaneamente pela origem do sistema referencial (TSAI, 1999).

O eixo helicoidal  $\$$  pode ser decomposto em amplitude e eixo normalizado. A amplitude é a magnitude da velocidade angular do corpo  $\|\omega\|$ . Se o par cinemático é prismático, a magnitude é a velocidade linear  $\|Vp\|$ . Considerando um eixo helicoidal dado por  $\$ = (\omega; Vp)^T = (\mathcal{L}, \mathcal{M}, \mathcal{N}; \mathcal{P}^*, \mathcal{Q}^*, \mathcal{R}^*)^T$ , este pode ser representado pelo correspondente eixo normalizado  $\hat{\$} = (L, M, N, P^*, Q^*, R^*)^T$  e sua magnitude  $\dot{q}$ :

$$\$ = \hat{\$} \dot{q} \quad (4.2)$$

O eixo helicoidal normalizado  $\hat{\$}$  de uma junta  $i$  é dado por:

$$\hat{\$}_i = \begin{bmatrix} L \\ M \\ N \\ P^* \\ Q^* \\ R^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_i \\ \mathbf{s}_{oi} \times \mathbf{s}_i + h\mathbf{s}_i \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

onde  $h$  é o passo (*pitch*) do helicóide.

Para uma cadeia cinemática composta por  $n$  juntas, o helicóide resultante para o deslocamento do efetuador pode ser obtido de maneira linear pela soma dos helicóides de deslocamento de cada junta (TSAI, 1999), ou seja:

$${}^B\mathcal{S}_E = \sum_{i=1}^n {}^B\hat{\mathcal{S}}_i \dot{q}_i \quad (4.4)$$

onde

- ${}^B\hat{\mathcal{S}}_i$  é o  $i$ -ésimo helicóide normalizado descrito em relação a um sistema de coordenadas referencial ( $B$ );
- $\dot{q}_i$  é a correspondente magnitude;
- ${}^B\mathcal{S}_E$  é o helicóide que representa o movimento do efetuador em relação ao sistema de coordenadas  $B$ .

A disposição matricial da equação 4.4 é como segue:

$${}^B\mathcal{S}_E = \begin{bmatrix} {}^B\hat{\mathcal{S}}_1 & {}^B\hat{\mathcal{S}}_2 & \dots & {}^B\hat{\mathcal{S}}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

onde  $\begin{bmatrix} {}^B\hat{\mathcal{S}}_1 & {}^B\hat{\mathcal{S}}_2 & \dots & {}^B\hat{\mathcal{S}}_n \end{bmatrix}$  representa o Jacobiano do robô relacionando o deslocamento do efetuador no espaço cartesiano com as velocidades de deslocamentos no espaço de juntas ( $\dot{q}_i$ ).

Uma mudança de sistema de coordenadas de referência pode ser realizada utilizando para isto as matrizes de transformação (TSAI, 1999). Consideremos um outro elo  $L$  em que se deseja representar os helicóides. Portanto o helicóide  ${}^B\mathcal{S}_i$  representado no elo  $B$ , terá sua representação no elo  $L$  obtida pela equação 4.6.

$${}^L\mathcal{S}_i = {}^L T_B {}^B\mathcal{S}_i \quad (4.6)$$

onde  ${}^L T_B$  é a matriz de transformação de coordenadas de helicóides do sistema de coordenadas  $B$  para um sistema de coordenadas  $L$ .

## 4.2 O método de Davies

A lei de circulação de Kirchhoff estabelece que a soma algébrica das diferenças de potencial ao longo de um circuito elétrico é zero. Davies adaptou a lei de Kirchhoff para resolver a cinemática diferencial de mecanismos de cadeia fechada.

A lei de circulação de Davies estabelece que "A soma algébrica das velocidades relativas de pares cinemáticos ao longo de alguma cadeia cinemática fechada é zero"(CAMPOS, 2004).

Usando esta lei, a relação entre as velocidades de um cadeia cinemática fechada pode ser obtida pela resolução da cinemática diferencial, como segue no exemplo a seguir.

Seja um mecanismo de quatro barras planar como mostrado na figura 4.2 composto pelos elos 1, 2, 3 e 4 e pelas juntas rotativas  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$ .

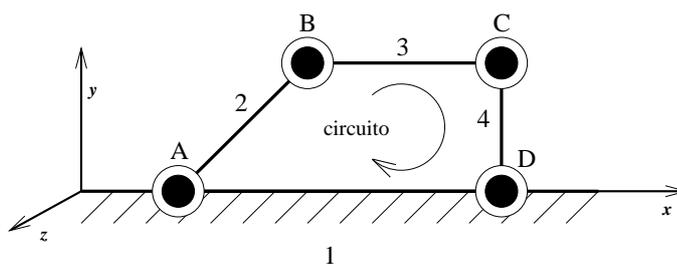


Figura 4.2: Mecanismo de quatro barras

Seja o helicóide  $\$A$  a representação do movimento do elo 2 em relação ao elo 1,  $\$B$  representa o movimento do elo 3 em relação ao elo 2,  $\$C$  representa o movimento do elo 4 em relação ao elo 3 e  $\$D$  representa o movimento do elo 1 em relação ao elo 4.

Os helicóides  $\$A$ ,  $\$B$ ,  $\$C$  e  $\$D$  representam os pares cinemáticos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  respectivamente. Considerando que o mecanismo está referenciado no plano  $XY$ , os helicóides  $\$A$ ,  $\$B$ ,  $\$C$  e  $\$D$  possuem somente três componentes, uma vez que  $Vp$ , não possui componente na direção  $z$ , ou seja  $\mathcal{R}$ .

Adicionalmente, a velocidade angular  $\omega$  de qualquer elo do mecanismo não possuem as componentes  $\mathcal{L}$  e  $\mathcal{M}$  no plano  $XY$ . Portanto, para este mecanismo de quatro barras no plano  $XY$ , as componentes do eixo helicoidal são somente  $\mathcal{N}$ ,  $\mathcal{P}^*$  e  $\mathcal{Q}^*$ .

O mecanismo de quatro barras da forma como foi definido, caracteriza-se por uma cadeia cinemática fechada. O movimento do elo 2 em relação ao elo 1 é representado pelo helicóide  $\$A$ . O movimento do elo 3 em relação ao elo 1 é expresso por  $\$A + \$B$ . O movimento do elo 4 em relação ao elo 1 é dado por  $\$A + \$B + \$C$  e o movimento do elo 1

em relação em relação a ele mesmo é dado por  $\$A + \$B + \$C + \$D$ .

O conexão do par cinemático do elo 1 com ele mesmo forma a cadeia fechada e, para cadeias fechadas, a lei de circulação de Davies, considerando o sentido do circuito indicado pela figura 4.2 é dada por:

$$\$A + \$B + \$C + \$D = \mathbf{0} \quad (4.7)$$

onde  $\mathbf{0}$  é o vetor zero com dimensão  $(3 \times 1)$  correspondente as dimensões dos helicóides  $\$A$ ,  $\$B$ ,  $\$C$  e  $\$D$ .

De acordo com (4.2), esta equação pode ser reescrita como:

$$\hat{\$}_A \dot{q}_A + \hat{\$}_B \dot{q}_B + \hat{\$}_C \dot{q}_C + \hat{\$}_D \dot{q}_D = \mathbf{0} \quad (4.8)$$

onde :

- $\hat{\$}_j$  representa a helicóide normalizado de  $\$j$  para  $j = A, B, C$  e  $D$ ;
- $\dot{q}_j$  representa a magnitude da velocidade (ângular neste caso) do helicóide  $\$j$ , para  $j = A, B, C$  e  $D$ .

A expressão 4.8 é conhecida como a equação de restrição para um mecanismo de quatro barras e, na forma matricial, pode ser escrita como:

$$\begin{bmatrix} \hat{\$}_A & \hat{\$}_B & \hat{\$}_C & \hat{\$}_D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_A \\ \dot{q}_B \\ \dot{q}_C \\ \dot{q}_D \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (4.9)$$

A ordem de um sistema helicoidal é dada pelas possibilidades de movimento de um mecanismo. Esta ordem é designada por  $\lambda$  (TSAI, 2000)(CAMPOS, 2004).

Em geral, a equação de restrição de um mecanismo representado por um sistema helicoidal de movimentos de ordem  $\lambda$  é dada por:

$$N_{(\lambda \times F_b)} \dot{q}_{(F_b \times 1)} = \mathbf{0}_{(\lambda \times 1)} \quad (4.10)$$

onde  $N$  é a matriz contendo os helicóides normalizados os quais os sinais dependem da orientação do circuito,  $\dot{q}$  é o vetor de magnitudes e  $F_b$  é a soma dos graus de liberdade das juntas do mecanismo. ( $F_b = \sum f_i$ , onde  $f_i$  é o grau de liberdade da  $i$ ésima junta)

Para obter a cinemática do espaço de juntas, reescreve-se o vetor  $\dot{q}$  rearranjando-o em duas partes : as magnitudes conhecidas, ou cadeia primária  $\dot{q}_p$  e magnitudes desconhecidas, ou cadeia secundária  $\dot{q}_s$ , ou seja,  $\dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{q}_s \\ \dot{q}_p \end{bmatrix}^T$ . Rearranjando a matrix  $N_{(\lambda \times F_b)}$  coerentemente com a divisão de magnitudes, tem-se  $N_{(\lambda \times F_b)} = \begin{bmatrix} N_{s(\lambda \times \lambda)} \\ N_{p(\lambda \times F_N)} \end{bmatrix}$  que resulta:

$$\begin{bmatrix} N_{s(\lambda \times \lambda)} \\ N_{p(\lambda \times F_N)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_s \\ \dot{q}_p \end{bmatrix} = \mathbf{0}_{(\lambda)} \quad (4.11)$$

onde a submatriz secundária  $N_s$  corresponde às juntas secundárias e a submatriz primária  $N_p$  corresponde às juntas primárias. A equação (4.11) pode ser escrita como:

$$N_s \dot{q}_s = -N_p \dot{q}_p \quad (4.12)$$

e a solução cinemática para o espaço de juntas é dada por:

$$\dot{q}_s = -N_s^{-1} N_p \dot{q}_p \quad (4.13)$$

O mecanismo de quatro barras na figura 4.2 é planar e possui quatro juntas, cada uma com um grau de liberdade ( $f_i=1$ ). A soma dos graus de liberdade de todo o mecanismo é 4,  $F_b=4$ . O mecanismo em si possui grau de liberdade  $F_N = F_b - \lambda = 4 - 3 = 1$ . Seja  $A$  um par atuado, portanto primária, e  $B$ ,  $C$  e  $D$  não são atuados ou pares passivos (secundários). Neste caso, a magnitude da velocidade  $\dot{q}_A$  do par  $A$  é determinado por um atuador externo e a magnitude das velocidades dos pares cinemáticos passivos  $\dot{q}_B$ ,  $\dot{q}_C$  e  $\dot{q}_D$ , são funções da magnitude  $\dot{q}_A$ .

Rearranjando a equação 4.9, a submatriz primária resulta  $N_p = \left[ \hat{\$}_A \right]$  e a submatriz secundária resulta em  $N_s = \left[ \hat{\$}_B \quad \hat{\$}_C \quad \hat{\$}_D \right]$ . Se  $N_s$  é inversível, as magnitudes das velocidades secundárias  $\dot{q}_s$  são calculadas por 4.13.

O método de Davies constitui um caminho sistemático para expressar a taxa de variação de juntas (velocidades) como função de juntas atuadas em cadeias cinemáticas fechadas.

### 4.3 Representação de cadeias cinemáticas através de grafos

Martins (2002) apresenta em seu trabalho uma análise hierárquica aplicada a manipuladores. Neste trabalho é desenvolvido um estudo da aplicação da teoria de grafos na representação de equações de restrições em cadeia cinemáticas de malha fechada. A representação tem, dentre outros objetivos, tornar mais clara a relação cinemática existente em cadeias cinemáticas fechadas e a equação de restrição.

A teoria de grafos é uma teoria geral que pode ser aplicada em diversas áreas de conhecimento. Um detalhamento de sua aplicação em mecanismos pode ser encontrado, por exemplo, em Tsai (2000) e suas referências.

Consideremos um par cinemático composto por dois elos  $E_i$  e  $E_{i+1}$ . O par cinemático tem a velocidade relativa definida por um helicóide  ${}^R\$\_j$  (junta  $j$ ) em relação a um sistema de coordenadas de referência  $R$ , como mostra a figura 4.3.

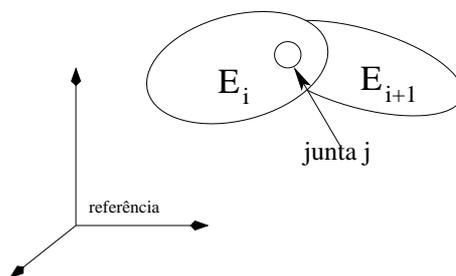


Figura 4.3: Elos  $E_i$ ,  $E_{i+1}$  e a junta  $j$ .

Consideremos também que a junta  $j$  representa o movimento relativo do elo  $E_{i+1}$  em relação ao elo  $E_i$ . Esta relação pode então ser representada na forma de um grafo como mostra a figura 4.4

O direcionamento da aresta entre os vértices, que identificam os elos, indica que a junta provoca um movimento relativo da junta  $i + 1$  em relação ao elo  $i$ .

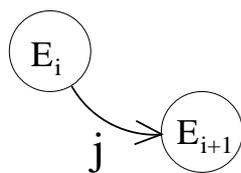


Figura 4.4: Representação por grafo de um helicóide entre dois elos.

Consideremos agora o seguinte exemplo, caso a junta  $j$  faça parte de duas malhas, onde o sentido de cada circuito é definido pela direção dos circuitos, *circuito a* e *circuito b* mostrados na figura 4.5.

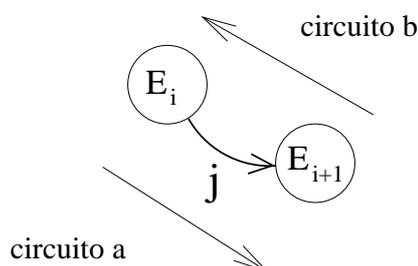


Figura 4.5: Dois circuitos sobre a junta  $j$ .

Como pode ser visto na figura 4.5 o circuito *a* tem a mesma direção da junta  $j$  enquanto o circuito *b* tem direção contrária. Isto implica que no somatório que compõe a equação de restrição do circuito *a* o helicóide da junta  $j$ ,  ${}^R\$_j$ , tem sinal positivo, enquanto que no somatório que compõe a equação de restrição do circuito *b* o helicóide  ${}^R\$_j$  tem sinal negativo.

Aplicando esta representação ao exemplo da equação de restrição do mecanismo de quatro barras tem-se o seguinte grafo apresentado na figura 4.6.

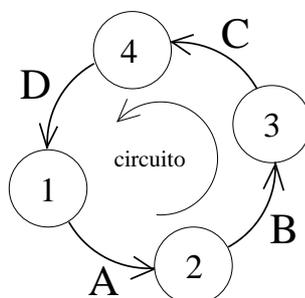


Figura 4.6: Grafo de restrição para o mecanismo de 4 barras.

Pode ser observado na figura 4.6 que o sentido do circuito é mesmo sentido das juntas que compõem o mecanismo, assim a representação está de acordo com a equação mostrada em 4.8.

Restringir cinematicamente consiste em impor ou restringir movimentos a uma cadeia cinemática. Estas restrições podem ser realizadas através de cadeias virtuais.

### 4.3.1 Definição de cadeias virtuais

Uma cadeia virtual consiste basicamente em uma ferramenta para monitorar ou para impor movimentos numa cadeia cinemática.

O conceito é apresentado em Campos (2004) sendo citado em outros trabalhos mais recentes (DAVIES, 2006). A cadeia virtual é uma cadeia cinemática composta de elos (elos virtuais) e juntas (juntas virtuais) satisfazendo três propriedades:

- É serial;
- Possui juntas as quais seus helicóides normalizados são linearmente independentes;
- Não altera a mobilidade da cadeia real quando colocada em paralelo.

Na sequência são apresentadas algumas cadeias virtuais mais utilizadas para obter e impor movimentos em um plano e no espaço cartesiano.

### 4.3.2 A cadeia virtual *PPR*

A cadeia virtual *PPR* é composta por dois elos  $C_1$  e  $C_2$  conectados por duas juntas prismáticas, onde ocorrem os movimentos nas direções  $x$  e  $y$ , e por uma junta rotativa, onde ocorre o movimento na direção  $z$ . A figura 4.7 apresenta esta cadeia.

Os corpos  $R_1$  e  $R_2$  são os corpos reais aos quais a cadeia está conectada.

Na cadeia *PPR* tem-se que:

- O helicóide  $\$_{px}$  representa o movimento do par  $px$  (junta prismática ao longo do eixo  $x$ )
- O helicóide  $\$_{py}$  representa o movimento do par  $py$  (junta prismática ao longo do eixo  $y$ );
- O helicóide  $\$_{rz}$  representa o movimento do par  $rz$  (junta rotacional ao longo do eixo  $z$ )

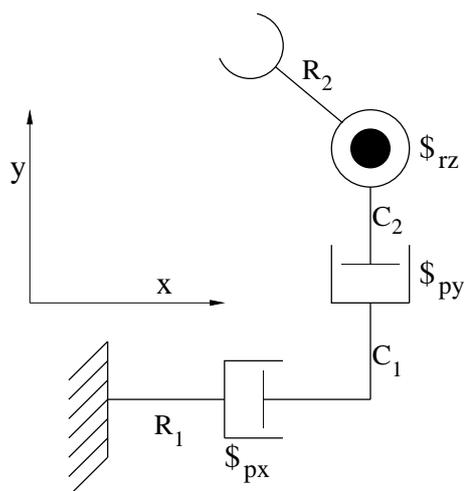


Figura 4.7: Cadeia PPR ortogonal.

### 4.3.3 A cadeia virtual *RPR*

A cadeia virtual *RPR* é composta por dois corpos virtuais ( $C_1$  e  $C_2$ ) conectados por uma junta prismática. A conexão do corpo  $C_1$  com o corpo real  $R_1$  é realizada através da junta rotativa  $rz_1$ ; a conexão do corpo  $C_2$  com o corpo real  $R_2$  é realizada através da junta rotativa  $rz_2$ . Ambas  $rz_1$  e  $rz_2$  têm seus movimentos na direção  $z$ .

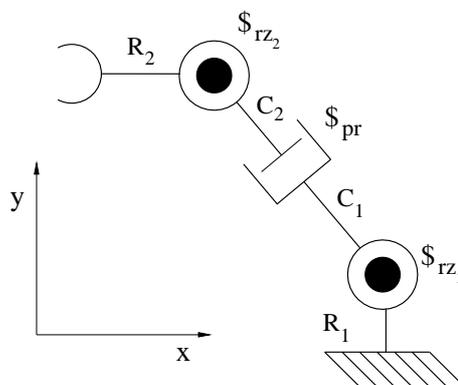


Figura 4.8: Cadeia RPR ortogonal.

Para a cadeia virtual *RPR* tem-se que:

- O helicóide  $\$_{rz_1}$  representa a primeira rotação na direção  $z$ ;
- O helicóide  $\$_{pr}$  representa o movimento do par prismático na direção  $x, y$ ;
- O helicóide  $\$_{rz_2}$  representa o segundo movimento rotativo na direção  $z$

#### 4.3.4 A cadeia virtual 3P3R

Uma cadeia cinemática espacial que atende às características de uma cadeia virtual é a cadeia 3P3R (CAMPOS, 2004).

A cadeia virtual 3P3R é constituída de três juntas prismáticas, ortogonais entre si nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ , seguido de três juntas rotativas ortogonais, nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ .

Uma representação da cadeia 3P3R é apresentada figura 4.9.

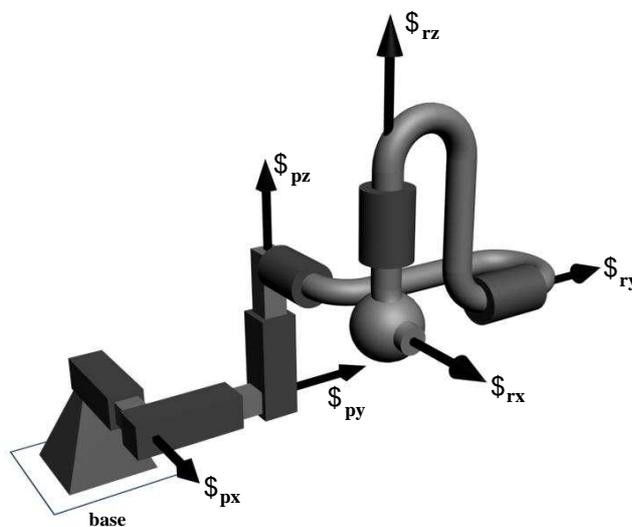


Figura 4.9: Cadeia virtual 3P3R tridimensional

Na cadeia 3P3R tem-se que:

- O helicóide  $\$_{px}$  representa o movimento da junta  $px$  (junta prismática ao longo do eixo  $x$ );
- O helicóide  $\$_{py}$  representa o movimento da junta  $py$  (junta prismática ao longo do eixo  $y$ );
- O helicóide  $\$_{pz}$  representa o movimento da junta  $pz$  (junta prismática ao longo do eixo  $z$ );
- O helicóide  $\$_{rx}$  representa o movimento da junta  $rx$  (junta rotacional ao longo do eixo  $x$ );
- O helicóide  $\$_{ry}$  representa o movimento da junta  $ry$  (junta rotacional ao longo do eixo  $y$ ) e;

- O helicóide  $\$_{rz}$  representa o movimento da junta  $rz$  (junta rotacional ao longo do eixo  $z$ ).

Outras cadeias planares ou espaciais podem ser definidas como cadeias virtuais desde que atendidas as propriedades apresentadas. As cadeias virtuais acima foram apresentadas por serem estas utilizadas neste trabalho.

### 4.3.5 O método das restrições cinemáticas

O método das restrições cinemáticas consiste em conectar ou fechar as cadeias cinemáticas reais com cadeias virtuais e a partir destas cadeias fechadas impor ou monitorar os movimentos da cadeia real.

Para apresentar o método um exemplo será desenvolvido, com intuito de tornar mais claro os seus detalhes.

Seja um manipulador planar  $P3R$ , como mostrado a figura 4.10, composto por 5 elos e 4 juntas. Os elos são numerados de 0, na base, a 4, no efetuador. As juntas são identificadas por letras de  $A$  à  $D$ .

A junta  $A$  é prismática e o helicóide  $\$_A$  representa o movimento do elo 1 com relação à base. As demais três juntas  $B$ ,  $C$  e  $D$  são juntas rotativas com direção de movimento em  $z$ .

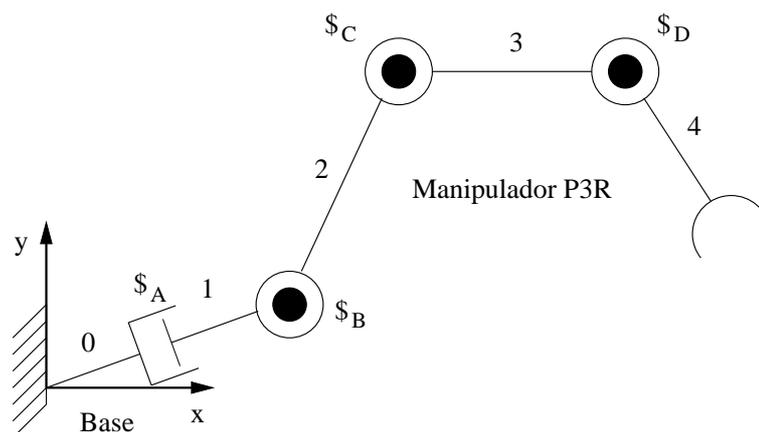


Figura 4.10: Manipulador planar redundante

Com relação aos movimentos tem-se que:

- O movimento do elo 2 relativo ao elo 1 ocorre na junta  $B$  e é representado pelo helicóide  $\$_B$ ;

- O movimento do elo 3 relativo ao elo 2 ocorre na junta  $C$  e é representado pelo helicóide  $\$C$ ;
- O movimento do elo 4 relativo ao elo 3 ocorre na junta  $D$  e é representado pelo helicóide  $\$D$ .

Considere uma trajetória desejada para o efetuador deste manipulador. As velocidades deste deslocamento podem ser impostas por uma cadeia virtual, com o primeiro elo virtual fixo à base e o último elo fixado ao efetuador.

Vai ser introduzida, neste caso uma cadeia  $PPR$ , a qual possibilita estudar os movimentos lineares  $x$  e  $y$  do efetuador, bem como sua rotação em torno do eixo  $z$ . A inclusão da cadeia virtual torna fechada a cadeia cinemática que pode ser modelada utilizando o método de Davies. A figura 4.11 mostra a cadeia cinemática fechada resultante.

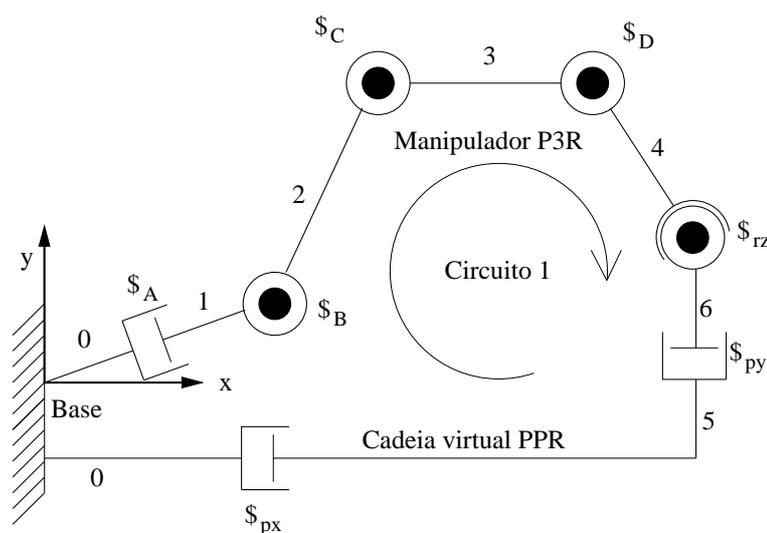


Figura 4.11: Cadeia cinemática fechada

onde  $\$_{px}$  representa o movimento relativo do elo 5 em relação ao elo 0,  $\$_{py}$  representa o movimento relativo do elo 6 em relação ao elo 5 e  $\$_{rz}$  representa o movimento relativo do elo 4 em relação ao elo 6.

De acordo com a direção do circuito e com a relação de movimentos das juntas tem-se o grafo desta cadeia apresentado na figura a seguir.

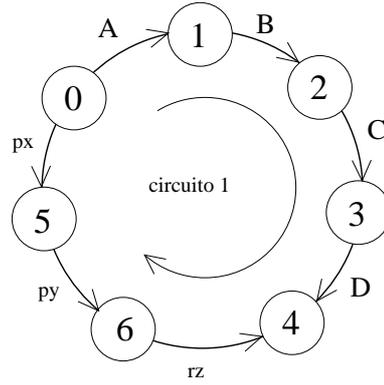


Figura 4.12: Grafo da cadeia cinemática  $P3R$  adicionada da cadeia virtual de geração de trajetória.

Assim de acordo com a orientação do circuito indicada na figura 4.11, (também mostrada na figura 4.12), o vetor  $N$  pode ser expresso por:

$$N = \left[ \hat{\$}_A \quad \hat{\$}_B \quad \hat{\$}_C \quad \hat{\$}_D \quad -\hat{\$}_{rz} \quad -\hat{\$}_{px} \quad -\hat{\$}_{py} \right] \quad (4.14)$$

e o vetor de magnitudes é expresso por:

$$\dot{q} = \left[ \dot{q}_A \quad \dot{q}_B \quad \dot{q}_C \quad \dot{q}_D \quad \dot{q}_{rz} \quad \dot{q}_{px} \quad \dot{q}_{py} \right]^T \quad (4.15)$$

Os helicóides relativos às juntas  $px$ ,  $py$  e  $rz$  tem sinal negativo por possuírem sentido contrário ao sentido do circuito, como mostrou o grafo na figura 4.12.

Considerando que a cadeia virtual  $PPR$  impõe o movimento no efetuador, suas três juntas são escolhidas para compor o vetor primário de juntas  $N_p$ . Desta forma as juntas do manipulador planar  $P3R$  vão compor o vetor de juntas secundárias  $N_s$ . Assim  $N$  será dividida em:

- $N_p = \left[ -\hat{\$}_{rz} \quad -\hat{\$}_{px} \quad -\hat{\$}_{py} \right]$
- $N_s = \left[ \hat{\$}_A \quad \hat{\$}_B \quad \hat{\$}_C \quad \hat{\$}_D \right]$

De uma maneira geral cada helicóide unitário no plano tem as seguintes coordenadas helicoidais:

$$\hat{\$}_A = \begin{bmatrix} 0 \\ P_A \\ Q_A \end{bmatrix} \quad \hat{\$}_B = \begin{bmatrix} 1 \\ P_B \\ Q_B \end{bmatrix} \quad \hat{\$}_C = \begin{bmatrix} 1 \\ P_C \\ Q_C \end{bmatrix} \quad \hat{\$}_D = \begin{bmatrix} 1 \\ P_D \\ Q_D \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

$$\hat{\$}_{rz} = \begin{bmatrix} 1 \\ P_{rz} \\ Q_{rz} \end{bmatrix} \quad \hat{\$}_{px} = \begin{bmatrix} 0 \\ P_{px} \\ Q_{px} \end{bmatrix} \quad \hat{\$}_{py} = \begin{bmatrix} 0 \\ P_{py} \\ Q_{py} \end{bmatrix}$$

onde  $P_i$  representa a coordenada helicoidal  $x$  da junta  $i$   $Q_i$  representa a coordenada helicoidal  $y$  da junta  $i$ .

As matrizes  $N_p$  e  $N_s$  respectivamente resultam:

$$N_p = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -P_{rz} & -P_{px} & -P_{py} \\ -Q_{rz} & -Q_{px} & -Q_{py} \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

$$N_s = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ P_A & P_B & P_C & P_D \\ Q_A & Q_B & Q_C & Q_D \end{bmatrix}$$

Um resultado intermediário que permite uma comparação é a obtenção do Jacobiano da cinemática direta diferencial. Usando os resultados obtidos para as matrizes  $N_p$  e  $N_s$  pode ser obtido o Jacobiano da cinemática direta diferencial como mostra a equação a seguir:

$$J = -N_p^{-1}N_s \quad (4.18)$$

Este Jacobiano é similar ao obtido pelos métodos clássicos (TSAI, 1999)(SCIAVICCO; SICILIANO, 1996). Os resultados serão totalmente equivalentes se forem utilizados os mesmos referenciais para as posições de junta, ou seja, se a posição inicial e a direção de deslocamento positiva das juntas forem definidas de maneira equivalente.

Assim para o exemplo do manipulador  $P3R$  o Jacobiano obtido tem a seguinte estru-

tura mostrada na equação:

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ P_a & -L_2s_2 - L_3s_{23} - L_4s_{234} & -L_3s_{23} - L_4s_{234} & -L_4s_{234} \\ Q_a & L_2c_2 + L_3c_{23} + L_4c_{234} & L_3c_{23} + L_4c_{234} & L_4c_{234} \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

onde  $L_2$ ,  $L_3$  e  $L_4$  são as dimensões dos elos 2, 3 e 4 respectivamente;  $s_{ij\dots}$ ,  $c_{ij\dots}$  são o *seno* e *co-seno* da soma de  $\theta_i + \theta_j + \dots$ ;  $\theta_2$  é o ângulo de rotação da junta  $B$ ,  $\theta_3$  é o ângulo de rotação da junta  $C$ , e  $\theta_4$  é o ângulo de rotação da junta  $D$ .

O resultado apresentado acima mostra uma matriz Jacobiana retangular, ou seja, o Jacobiano mapeia o espaço de juntas ( $n = 4$ ) para o espaço cartesiano ( $r = 3$ ). Por esse motivo este manipulador possui um grau de redundância ( $n - r = 1$ ).

Para resolver a cinemática inversa uma tarefa adicional precisa ser definida. A redundância pode ser resolvida definindo uma estratégia para o evitamento de colisão do manipulador com um ponto posicionado dentro de sua área de trabalho. Outras tarefas podem ser definidas, porém considerando os objetivos deste trabalho a tarefa adicionada será de evitamento de colisão.

Considere um ponto dentro do volume de trabalho do manipulador, fixo em relação ao sistema de coordenadas da base deste manipulador. O evitamento de colisão se dá conectando-se uma cadeia virtual  $RPR$  entre o ponto de colisão dentro do volume de trabalho do manipulador e o ponto no manipulador cuja colisão é iminente. A inclusão da cadeia virtual  $RPR$  resulta na estrutura cinemática apresentada na figura 4.13.

A cadeia  $RPR$  tem como base o sistema de coordenadas  $O_o$  definido pelos vetores unitários  $x_o$  e  $y_o$  fixo no obstáculo como mostra a figura 4.13.

O obstáculo pode ser considerado neste caso uma extensão do elo 0. O helicóide  $\$_{rz_2}$  representa o movimento do elo 2 em relação ao elo 8,  $\$_{pr}$  representa o movimento do elo 8 em relação ao elo 7 e  $\$_{rz_1}$  representa o movimento do elo 7 em relação ao elo 0.

Na forma de um grafo tem-se a seguinte configuração mostrada na figura 4.14.

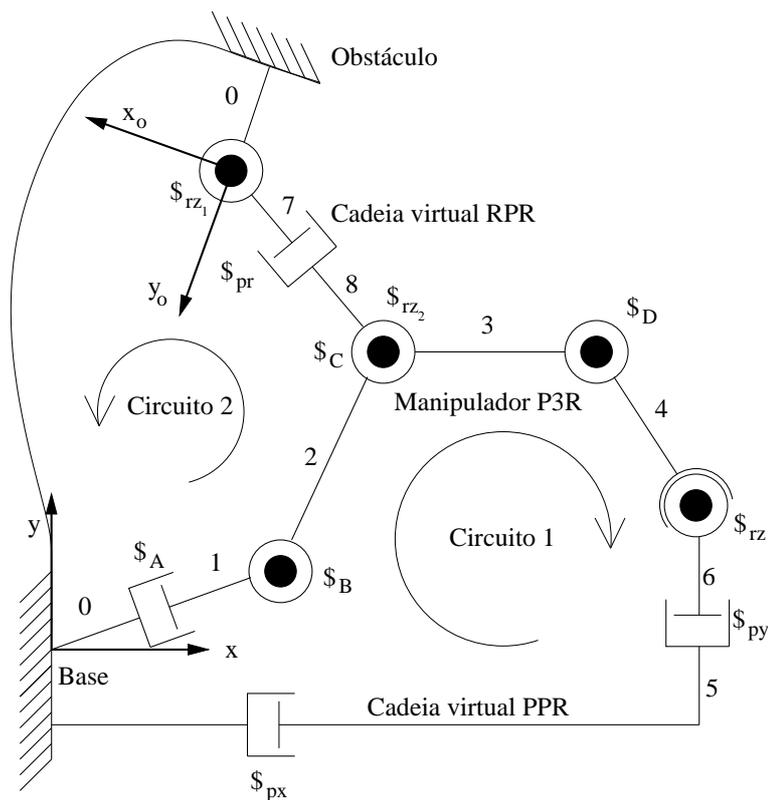


Figura 4.13: Robô planar  $P3R$  conectado com as cadeias virtuais  $PPR$  e  $RPR$  (para o evitamento de colisão).

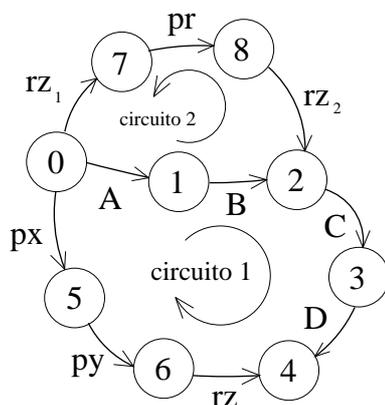


Figura 4.14: Representação da relação dos pares cinemáticos para geração de trajetória do robô  $P3R$ .

De acordo com a orientação dos circuitos mostrado na figura 4.14 ( *circuito 1* e *circuito 2* ) e da orientação das juntas, a equação de restrição é obtida pelo método de Davies e é composta por duas equações dispostas em uma matriz, mostrada na equação abaixo:

$$N\dot{q} = \begin{bmatrix} \hat{\$}_A & \hat{\$}_B & \hat{\$}_C & \hat{\$}_D & 0 & 0 & 0 & -\hat{\$}_{rz} & -\hat{\$}_{px} & -\hat{\$}_{py} \\ \hat{\$}_A & \hat{\$}_B & 0 & 0 & -\hat{\$}_{rz1} & -\hat{\$}_{pr} & -\hat{\$}_{rz2} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_A \\ \dot{q}_B \\ \dot{q}_C \\ \dot{q}_D \\ \dot{q}_{rz1} \\ \dot{q}_{pr} \\ \dot{q}_{rz2} \\ \dot{q}_{rz} \\ \dot{q}_{px} \\ \dot{q}_{py} \end{bmatrix} = 0 \quad (4.20)$$

A solução cinemática é obtida através da realização conjunta das tarefas de geração de trajetórias para o efetuador e pelo evitamento de colisão.

O seguimento de trajetórias pelo efetuador é realizado ativando as juntas virtuais identificadas pelos helicóides  $\$_{px}$ ,  $\$_{py}$  e  $\$_{rz}$ , que representam as velocidades da trajetória desejada. Desta maneira estas juntas passam a pertencer à matriz de juntas primárias ( $N_p$ ).

O evitamento de colisão é executado acionando a junta  $pr$ , que impede e afasta o manipulador do ponto de colisão. Assim o helicóide  $\$_{pr}$  também fará parte da matriz primária. Conseqüentemente as demais juntas da cadeia virtual de evitamento de colisão representadas pelos helicóides  $\$_{rz1}$  e  $\$_{rz2}$  farão parte da matriz secundária.

Definidas as juntas primárias, as juntas  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$ , representadas pelos helicóides  $\$_A$ ,  $\$_B$ ,  $\$_C$  e  $\$_D$  são parte da matriz secundária.

Separando a matriz de equações  $N$  nas parcelas primárias, secundárias tem-se a equação abaixo:

$$\begin{aligned}
N\dot{q} = & \begin{bmatrix} \hat{\$}_A & \hat{\$}_B & \hat{\$}_C & \hat{\$}_D & 0 & 0 \\ \hat{\$}_A & \hat{\$}_B & 0 & 0 & -\hat{\$}_{rz_1} & -\hat{\$}_{rz_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_A \\ \dot{q}_B \\ \dot{q}_C \\ \dot{q}_D \\ \dot{q}_{rz_1} \\ \dot{q}_{rz_2} \end{bmatrix} + \\
& \begin{bmatrix} 0 & -\hat{\$}_{rz} & -\hat{\$}_{px} & -\hat{\$}_{py} \\ -\hat{\$}_{pr} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_{pr} \\ \dot{q}_{rz} \\ \dot{q}_{px} \\ \dot{q}_{py} \end{bmatrix} = N_s \dot{q}_s + N_p \dot{q}_p = 0
\end{aligned} \tag{4.21}$$

A matriz  $N_s$  tem dimensão resultante  $6 \times 6$ , o que permite sua inversão e cálculo das magnitudes de velocidades nas juntas  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$ .

## 4.4 Aplicação das restrições cinemáticas em um problema tridimensional

O manipulador desenvolvido no projeto Roboturb deve operar em um ambiente confinado cuja iminência de colisão é constante. A iminência de colisão implica que o manipulador deve possuir uma maior flexibilidade de movimentos, de maneira que seja possível realizar as tarefas a que se destina, ou seja, a medição da superfície e a soldagem automatizada (SIMAS et al., 2001), adicionalmente à uma estratégia de evitamento de colisão com as superfícies dentro de seu volume de trabalho. A figura 4.15 mostra o manipulador Roboturb em seu ambiente de operação, montado no canal de um rotor de uma turbina hidráulica.

Um estudo foi realizado e foi definido que o manipulador Roboturb deveria ser cadeia aberta e possuir 7 juntas (GUENTHER et al., 2000). Considerando que o espaço de trabalho em que o manipulador estará inserido possui ordem 6, o manipulador Roboturb se caracteriza como um manipulador redundante com grau de redundância  $n - r = 1$ .

O manipulador Roboturb é composto de uma junta prismática, identificada como um trilho, e mais 6 juntas rotativas, sendo que as três últimas compõem um punho esférico. A figura 4.16 apresenta o esquema de concepção do robô e suas dimensões principais.

onde:



Figura 4.15: Manipulador Roboturb no canal do rotor de uma turbina hidráulica

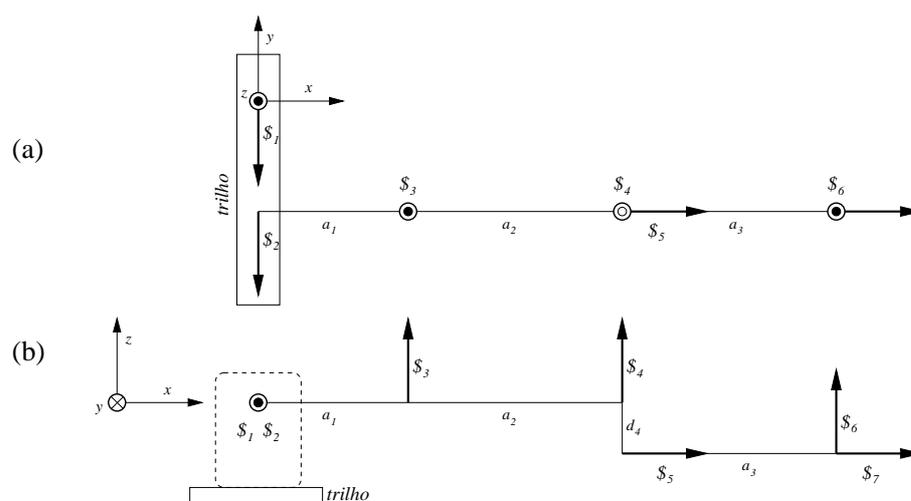


Figura 4.16: Identificação dos elos e localização dos helicóides do manipulador Roboturb a partir uma visão superior (a) e frontal (b)

- $a_1 = 150mm$ ,  $a_2 = a_3 = 300mm$  e  $d_4 = 89mm$ ;
- A junta 1 identificada pelo helicóide  $\$1$  representa o realizado pelo trilho, ou seja, o movimento de translação do "carro"(corpo 1) com relação à base (corpo 0)
- A junta 2 identificada pelo helicóide  $\$2$  representa o movimento rotativo do "ombro"(corpo 2) com relação ao "carro";
- A junta 3 identificada pelo helicóide  $\$3$  representa o movimento rotativo do corpo 3, de comprimento  $a_1$ , com relação ao "ombro";
- junta 4 identificada pelo helicóide  $\$4$  representa o movimento rotativo do "cotovelo" (corpo 4) com relação ao corpo 3.
- As juntas 5, 6 e 7 são rotativas e compõem um punho esférico no ponto de cruzamento dos eixos helicoidais das juntas 5, 6 e 7.

Para impor as trajetórias do efetuador, uma cadeia virtual adequada deve ser definida. Considerando que as trajetórias são definidas por coordenadas cartesianas de posição e orientação, nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ , uma cadeia virtual do tipo  $3P3R$  (mostrada na figura 4.9) pode ser utilizada para representá-las. Neste caso, as três primeiras juntas prismáticas determinam as posições desejadas e as três últimas juntas rotativas determinam as rotações desejadas. Para tanto a base da cadeia virtual de trajetória é fixada na base do manipulador Roboturb e o último corpo da cadeia  $3P3R$  é fixado ao efetuador.

O cotovelo, representado na figura 4.17, é a parte do manipulador que possui a maior possibilidade de colisão com as superfícies que delimitam o volume de trabalho.

Consideremos uma superfície plana  $P$  definida como *plano de colisão*  $P$ , a qual deseje-se evitar que o cotovelo venha a colidir. O plano  $P$  pode ser parametrizado a partir de uma posição e orientação fixa (QIULIN; DAVIES, 1987) em relação ao sistema de coordenadas da base do manipulador Roboturb.

A figura 4.17 apresenta de uma forma simplificada o manipulador Roboturb em relação ao plano  $P$  de colisão.

Para realização do evitamento de colisão entre o cotovelo e o plano  $P$ , uma nova cadeia virtual  $3P3R$  também pode ser utilizada.

A base da cadeia virtual  $3P3R$  de evitamento de colisão é fixada no ponto sobre o plano de menor distância com relação ao cotovelo do manipulador Roboturb. As juntas

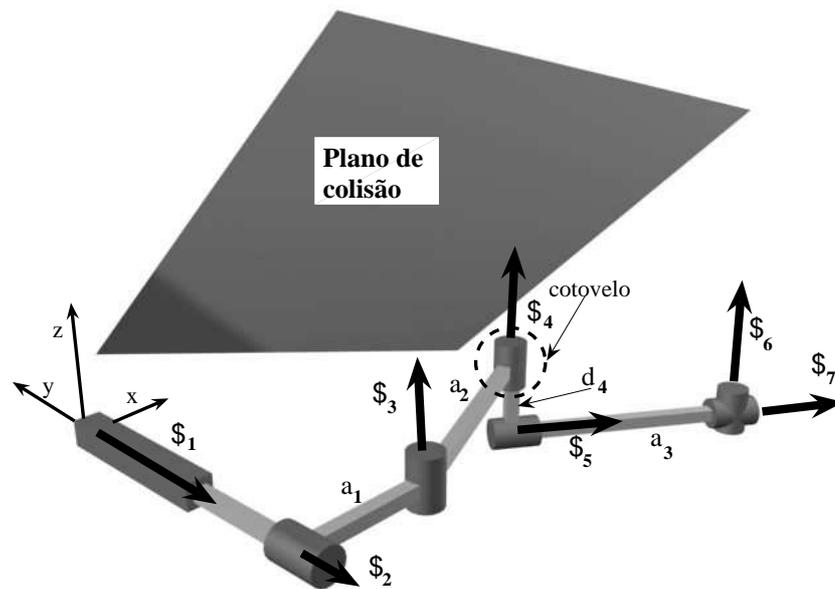


Figura 4.17: Representação da relação espacial entre o manipulador Roboturb e o plano de colisão

$p_{xc}$  e  $p_{yc}$  são posicionadas nas direções paralelas ao plano  $P$ , assim, o acionamento da junta  $p_{zc}$  é suficiente para evitar que o cotovelo venha se aproximar ou colidir com o plano  $P$ , uma vez que esta junta estará alinhada com a normal ao plano.

Considerando uma cadeia virtual  $3P3R$  para geração de trajetória e uma cadeia virtual  $3P3R$  para o evitamento de colisão tem-se o grafo dos circuitos das cadeias cinemáticas fechada mostrado na figura 4.18

No circuito 1, mostrado na figura 4.18 tem-se que:

- Os elos enumerados de  $1 \dots 7$  e as juntas enumeradas de  $1 \dots 7$  fazem parte do manipulador Roboturb como apresentado na figura 4.16;
- Os elos identificados por  $v1 \dots v5$ , e as juntas identificadas por  $p_x, p_y, p_z, r_x, r_y$  e  $r_z$  fazem parte da cadeia virtual  $3P3R$ ;

No circuito 2 tem-se a cadeia  $3P3R$  para evitamento de colisão constituída dos seguintes helicóides:

- $\$_{p_{xc}}$  que representa o movimento prismático na direção  $x$ ;

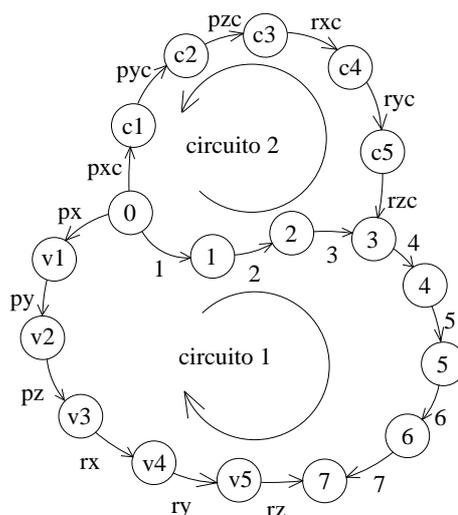


Figura 4.18: Representação da relação entre os pares cinemáticos e a direção do circuito em cada malha

- $\$_{pyc}$  que representa o movimento prismático na direção  $y$ ;
- $\$_{pzc}$  que representa o movimento prismático na direção  $z$ ;
- $\$_{rxc}$  que representa o movimento rotativo na direção  $x$ ;
- $\$_{ryc}$  que representa o movimento rotativo na direção  $y$ ;
- $\$_{rzc}$  que representa o movimento rotativo na direção  $z$ .

Na cadeia virtual de colisão os elos são identificados na sequência  $vc_1 \cdots vc_5$ .

Para realizar uma trajetória especificada é necessário que as juntas que compõem a cadeia virtual  $3P3R$  de trajetória sejam ativadas, portanto os helicóides desta cadeia fazem parte da matriz primária.

O evitamento de colisão é realizado impondo velocidades na junta  $p_{zc}$ , assim o helicóide  $\$_{pzc}$ , fará parte da matriz primária  $N_p$ .

As juntas 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7, pertencentes ao manipulador Roboturb, e as juntas  $p_{xc}$ ,  $p_{yc}$ ,  $r_{xc}$ ,  $r_{yc}$  e  $r_{zc}$  serão secundárias e portanto seus respectivos helicóides farão parte da matriz secundária  $N_s$ ,

De acordo com a direção definida para cada circuito, mostrado na figura 4.18, e da definição das juntas primárias e secundárias, tem-se a equação de restrição mostrada em 4.22

$$\begin{aligned}
& N_s \dot{q}_s + N_p \dot{q}_p = \\
& \begin{bmatrix} \hat{\$}_1 & \hat{\$}_2 & \hat{\$}_3 & \hat{\$}_4 & \hat{\$}_5 & \hat{\$}_6 & \hat{\$}_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hat{\$}_1 & \hat{\$}_2 & \hat{\$}_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\hat{\$}_{pxc} & -\hat{\$}_{pyc} & -\hat{\$}_{rxc} & -\hat{\$}_{ryc} & -\hat{\$}_{rzc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \\ \dot{q}_5 \\ \dot{q}_6 \\ \dot{q}_7 \\ \dot{q}_{pxc} \\ \dot{q}_{pyc} \\ \dot{q}_{rxc} \\ \dot{q}_{ryc} \\ \dot{q}_{rzc} \end{bmatrix} + \\
& \begin{bmatrix} 0 & -\hat{\$}_{px} & -\hat{\$}_{py} & -\hat{\$}_{pz} & -\hat{\$}_{rx} & -\hat{\$}_{ry} & -\hat{\$}_{rz} \\ -\hat{\$}_{pzc} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_{pzc} \\ \dot{q}_{px} \\ \dot{q}_{py} \\ \dot{q}_{pz} \\ \dot{q}_{rx} \\ \dot{q}_{ry} \\ \dot{q}_{rz} \end{bmatrix} = 0
\end{aligned} \tag{4.22}$$

De acordo com a equação 4.13, para obtenção das velocidades das juntas secundárias é necessário inverter a matriz  $N_s$ . No espaço tridimensional os helicóides tem dimensão  $6 \times 1$  (TSAI, 1999) o que garante que matriz  $N_s$  seja quadrada, e que portanto possua inversa.

## 4.5 Conclusão

As cadeias virtuais em conjunto com o método de Davies mostraram-se como uma possibilidade de solução para a cinemática inversa diferencial de robôs redundantes (CAMPOS, 2004). O método não apresenta o problema dimensional característico dos métodos baseados na pseudoinversa.

Este capítulo mostrou que o método apresentado é consistente e pode ser sistematizado.

---

Foi mostrado que a sistematização utilizando os grafos, facilita o entendimento das malhas que compõem a cadeia cinemática fechada.

O próximo capítulo apresenta um estudo comparativo entre o método apresentado neste capítulo que utilizou-se das cadeias virtuais em conjunto com o método de Davies e o método do Jacobiano estendido. Na análise é comprovado que o método das restrições cinemáticas é equivalente ao método do Jacobiano estendido.

## 5 *O Jacobiano estendido a partir de restrições cinemáticas*

A discussão apresentada no capítulo 3 mostrou que o método do Jacobiano estendido possibilita a solução da cinemática inversa de robôs redundantes mediante o acréscimo de restrições adicionais à matriz do Jacobiano. Estas restrições podem introduzir singularidades algorítmicas na cinemática (MARTINS, 2002)(ANTONELLI, 2003).

O capítulo 4 apresentou um método baseado em restrições cinemáticas. O método apresentado é baseado na utilização de cadeias virtuais associado ao método de Davies.

Este capítulo apresenta um estudo para mostrar que o método das restrições cinemáticas é equivalente ao método do Jacobiano estendido.

Ao final um estudo das singularidades mostra que o Jacobiano estendido proposto não introduz singularidades algorítmicas como os métodos clássicos apresentados no capítulo 3.

### 5.1 **Uma metodologia de eliminação de juntas passivas**

Quando utilizado o método das restrições cinemáticas pode acontecer que a matriz  $N_s$  contenha helicóides de juntas virtuais. Os helicóides das juntas virtuais aumentam o esforço numérico para inverter a matriz  $N_s$  e os resultados para as velocidades das juntas virtuais não são reutilizados.

Para tornar mais simples a inversão de  $N_s$  é interessante eliminar da matriz secundária, os helicóides das juntas virtuais.

Apresenta-se a seguir uma metodologia de eliminação de juntas passivas baseada no conceito da matriz aniquiladora (CAMPOS, 2004).

O conceito de matriz aniquiladora apresentado em Campos (2004) para manipuladores paralelos é discutido com mais detalhes a seguir, utilizando o exemplo desenvolvido no capítulo 4. Usando o manipulador planar  $P3R$  redundante composto pelos elos 1 (base), 2, 3, 4 e 5 e as cadeias virtuais de trajetória e de evitamento de colisão, mostrado na figura 4.13, vai ser demonstrado que é possível eliminar do equacionamento as juntas virtuais da matriz secundária tornando-a equivalente ao Jacobiano estendido.

Utilizando o método de Davies foram obtidas as matrizes  $N_p$  e  $N_s$ .

$$N\dot{q} = \begin{bmatrix} \hat{\$}_A & \hat{\$}_B & \hat{\$}_C & \hat{\$}_D & 0 & 0 \\ \hat{\$}_A & \hat{\$}_B & 0 & 0 & -\hat{\$}_{rz_1} & -\hat{\$}_{rz_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_A \\ \dot{q}_B \\ \dot{q}_C \\ \dot{q}_D \\ \dot{q}_{rz_1} \\ \dot{q}_{rz_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\hat{\$}_{rz} & -\hat{\$}_{px} & -\hat{\$}_{py} \\ -\hat{\$}_{pr} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_{pr} \\ \dot{q}_{rz} \\ \dot{q}_{px} \\ \dot{q}_{py} \end{bmatrix} = N_s\dot{q}_s + N_p\dot{q}_p = 0 \quad (5.1)$$

O manipulador possui quatro juntas,  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$ , cujos helicóides fazem parte da matriz secundária juntamente com os helicóides das juntas  $rz_1$  e  $rz_2$ . As velocidades das juntas  $rz_1$  e  $rz_2$  não são necessárias para calcular a posição do manipulador, portanto, é útil eliminá-las da matriz secundária.

Uma segunda partição pode ser feita na matriz secundária como segue:

$$N_s\dot{q}_s = \begin{bmatrix} \hat{\$}_A & \hat{\$}_B & \hat{\$}_C & \hat{\$}_D \\ \hat{\$}_A & \hat{\$}_B & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_A \\ \dot{q}_B \\ \dot{q}_C \\ \dot{q}_D \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\hat{\$}_{rz_1} & -\hat{\$}_{rz_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_{rz_1} \\ \dot{q}_{rz_2} \end{bmatrix} = N_{sa}\dot{q}_{sa} + N_{sp}\dot{q}_{sp} \quad (5.2)$$

onde  $N_{sa}$  corresponde aos helicóides das juntas de interesse (aqui denominadas ativas) e  $N_{sp}$  corresponde aos helicóides das juntas as quais não se tem interesse (aqui denominadas passivas).

As juntas passivas são eliminadas utilizando uma matriz aniquiladora  $\mathcal{K}$  que possui a seguinte estrutura:

$$\mathcal{K} = \left[ \begin{array}{c|c} I_{r \times r} & 0 \\ \hline 0 & {}^{ref}W_{N_{sp}(n-r) \times d} \end{array} \right] \quad (5.3)$$

onde  ${}^{ref}W_{N_{sp}}$ , cuja dimensão é  $(n - r) \times d$ , é um conjunto de helicóides recíprocos da matriz secundária passiva (CAMPOS, 2004)(MARTINS, 2002).

Os helicóides recíprocos representam um conjunto de forças e torques externos que não geram movimento nas juntas secundárias passivas. Assim pré-multiplicando  $N_{sp}$  por  $\mathcal{K}$  tem-se:

$$\mathcal{K}N_{sp} = 0 \quad (5.4)$$

Portanto, para manter a igualdade é necessário que a equação 5.1 seja reescrita levando em conta a equação 5.2 como segue:

$$\mathcal{K}N_p\dot{q}_p + \mathcal{K}N_{sa}\dot{q}_{sa} + \mathcal{K}N_{sp}\dot{q}_{sp} = 0 \quad (5.5)$$

Pela igualdade da equação 5.4 tem-se que:

$$\mathcal{K}N_p\dot{q}_p + \mathcal{K}N_{sa}\dot{q}_{sa} = 0 \quad (5.6)$$

As velocidades das juntas primárias são obtidas então por:

$$\dot{q}_p = -(\mathcal{K}N_p)^{-1}\mathcal{K}N_{sa}\dot{q}_{sa} \quad (5.7)$$

Assim empregando a definição usual do Jacobiano (equação 3.4) resulta:

$$J = -(\mathcal{K}N_p)^{-1}\mathcal{K}N_{sa} \quad (5.8)$$

Considerando a expressão 3.4 conclui-se que em 5.7 o vetor  $\dot{q}_p$  representa as magnitudes das velocidades do efetuador acrescidas das magnitudes das velocidades das juntas virtuais acionadas e  $\dot{q}_{sa}$  representa as magnitudes das velocidades das juntas ativas do manipulador *P3R*.

## 5.2 Aplicação do método

Para avaliar a metodologia de eliminação das juntas passivas, um exemplo foi desenvolvido para o manipulador *P3R*.

Consideremos o problema de geração de trajetória e evitamento de colisão para o manipulador *P3R* apresentado na capítulo anterior e mostrado na figura 4.13.

Tomando como sistema de coordenadas de referência o sistema de coordenadas  $O_r$ , são obtidos os helicóides normalizadas para cada junta do manipulador *P3R* e para cada junta da cadeia virtual de geração de trajetória do efetuador como segue:

$$\begin{aligned} \hat{\$}_A &= \begin{bmatrix} 0 \\ P_a \\ Q_a \end{bmatrix}; \quad \hat{\$}_B = \begin{bmatrix} 1 \\ L_a Q_a \\ -L_a P_a \end{bmatrix}; \quad \hat{\$}_C = \begin{bmatrix} 1 \\ L_a Q_a + L_2 s_2 \\ -L_a P_a - L_2 c_2 \end{bmatrix}; \quad \hat{\$}_D = \begin{bmatrix} 1 \\ x_d \\ y_d \end{bmatrix}; \\ \hat{\$}_{rz} &= \begin{bmatrix} 1 \\ x_e \\ y_e \end{bmatrix}; \quad \hat{\$}_{px} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \hat{\$}_{py} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{5.9}$$

onde:

- $P_a$  e  $Q_a$  definem a direção da junta prismática  $A$ ;
- $L_a$  representa o deslocamento da junta prismática  $A$ ;
- $L_2$ ,  $L_3$  e  $L_4$  são os comprimentos dos elos 2, 3 e 4;
- $s_i$  representa o  $\text{sen}(\theta_i)$ ;  $c_i$  representa o  $\text{cos}(\theta_i)$ ;
- $s_{ij}$  representa o  $\text{sen}(\theta_i + \theta_j)$ ;  $c_{ij}$  representa o  $\text{cos}(\theta_i + \theta_j)$ ;

- $\theta_2, \theta_3$  e  $\theta_4$  são os ângulos de junta do robô real;
- As grandezas  $x_d$  e  $y_d$  são dadas por:  $x_d = L_a Q_a + L_2 s_2 + L_3 s_{23}$  e  $y_d = -L_a P_a - L_2 c_2 - L_3 c_{23}$  e as grandezas  $x_e$  e  $y_e$  são dadas por:  $x_e = L_a P_a + L_2 c_2 + L_3 c_{23} + L_4 c_{234}$  e  $y_e = L_a Q_a + L_2 s_2 + L_3 s_{23} + L_4 s_{234}$ .

Com relação aos helicóides da cadeia virtual de evitamento de colisão tem-se as coordenadas normalizadas em relação ao sistema de coordenadas  $O_r$  dadas como:

$$\hat{\$}_{rz1} = \begin{bmatrix} 1 \\ p_y \\ -p_x \end{bmatrix} \quad \hat{\$}_{pr} = \begin{bmatrix} 0 \\ c_{rz1p1} \\ s_{rz1p1} \end{bmatrix} \quad \hat{\$}_{rz2} = \begin{bmatrix} 1 \\ p_y + L_r s_{rz1p1} \\ -p_x - L_r c_{rz1p1} \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

onde:

- $p_x, p_y$  e  $p_z$  é a posição da origem do sistema de coordenadas da base da cadeia virtual ( $O_v$ ) de evitamento de colisão com relação ao sistema de coordenadas base do manipulador  $P3R$  ( $O_r$ );
- $\theta_{p1}$  é o ângulo de rotação entre os sistemas tomado na direção  $z$  em relação ao sistema de coordenadas da base;
- $\theta_{rz1}, \theta_{rz2}$  são os ângulos das juntas rotativas da cadeia virtual  $RPR$  e  $L_r$  representa o deslocamento da junta prismática  $P_r$  da cadeia  $RPR$ .

Com objetivo de simplificar o desenvolvimento a seguir, o ângulo  $\theta_{p1}$  será considerado igual a zero. Esta condição determina que o sistema de coordenadas da cadeia virtual de evitamento de colisão  $O_v$  será paralelo ao sistema de coordenadas da base  $O_r$ .

Substituindo as coordenadas de  $\hat{\$}_{rz1}$  e  $\hat{\$}_{rz2}$  na matriz  $N_{sp}$  tem-se que:

$$N_{sp} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1 & -1 \\ -p_y & -p_y - L_r s_{rz1} \\ p_x & p_x + L_r c_{rz1} \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

Campos (2004) desenvolve uma metodologia sistemática para obtenção da matriz aniquiladora. Utilizando o procedimento é obtida uma matriz aniquiladora de  $N_{sp}$  como:

$$\mathcal{K} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L_r(p_x s_{rz_1} - p_y c_{rz_1}) & L_r c_{rz_1} & L_r s_{rz_1} \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

Com isso resulta  $\mathcal{K}N_{sp} = 0$ . Aplicando a matriz obtida em 5.12 na equação 5.6, tem-se como resultado para as matrizes  $\mathcal{K}N_p$  e  $\mathcal{K}N_{sa}$ :

$$\mathcal{K}N_{sa} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ P_a & L_a Q_a & L_a Q_a + L_1 s_2 & x_d \\ Q_a & -L_a P_a & -L_a P_a - L_1 c_2 & y_d \\ x_3 & x_4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

$$\mathcal{K}N_p = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -x_e & -1 & 0 & 0 \\ -y_e & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -L_r \end{bmatrix}$$

onde  $x_3 = L_r(P_a c_{rz_1} + Q_a s_{rz_1})$  e  $x_4 = -L_r((p_y - L_a Q_a)c_{rz_1} - (p_x - L_a P_a)s_{rz_1})$ .

Analisando a estrutura cinemática da figura 4.13 é possível obter as igualdades a seguir, que auxiliam na simplificação das equações obtidas. Assim:

$$p_x = L_a P_a + L_2 c_2 - L_r c_{rz_1} \quad (5.14)$$

$$p_y = L_a Q_a + L_2 s_2 - L_r s_{rz_1}$$

A matriz Jacobiana é então obtida pela equação 5.8 como mostra a equação 5.15.

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ P_a & -L_2s_2 - L_3s_{23} - L_4s_{234} & -L_3s_{23} - L_4s_{234} & -L_4s_{234} \\ Q_a & L_2c_2 + L_3c_{23} + L_4c_{234} & L_3c_{23} + L_4c_{234} & L_4s_{234} \\ P_a c_{rz_1} + Q_a s_{rz_1} & L_1 s_{rz_1-2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

e os vetores  $v$  e  $\dot{q}$  dados por:

$$v = \begin{bmatrix} \dot{q}_{rz} \\ \dot{q}_{px} \\ \dot{q}_{py} \\ \dot{q}_{pr} \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

$$\dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{q}_A \\ \dot{q}_B \\ \dot{q}_C \\ \dot{q}_D \end{bmatrix}$$

Comparando o Jacobiano da equação 5.15 com o Jacobiano obtido na equação 4.19, demonstra-se que a última linha em 5.15 é a linha adicional que o caracteriza como um Jacobiano estendido. Esta linha relaciona o vetor de velocidades de junta  $\dot{q}$  com a velocidade da junta virtual acionada  $p_r$ .

## 5.3 Propriedades

A matriz do Jacobiano estendido obtida na seção anterior, permite que sejam estudadas algumas propriedades da estrutura cinemática.

Esta seção discutirá as singularidades introduzidas pelas cadeias virtuais, explorando a relação existente entre os resultados obtidos matematicamente, através do determinante do Jacobiano e a configuração real das juntas.

Inicialmente as singularidades do manipulador redundante  $P3R$  são discutidas, utilizando-se para esta análise a metodologia apresentada em Nokleky-Podhorodeski (2001). O método proposto é apresentado em anexo (B) onde é desenvolvido como exemplo o manipulador  $P3R$  utilizado neste desenvolvimento.

### 5.3.1 A singularidade do manipulador redundante $P3R$

Utilizando a metodologia proposta por Nokleky-Podhorodeski (2001), é observado que a condição singular é alcançada quando ocorrem duas condições:

- $\theta_3 = \pm k_1 \pi$  ( $k_1 = 0, 1, 2, \dots$ );
- o ângulo  $\theta_a$  é igual a  $-\theta_2$ , desta maneira o ângulo formado entre a junta prismática  $A$  e o elo 3 tem magnitude igual a  $\pm(2k_2 + 1)\frac{\pi}{2}$  ( $k_2 = 0, 1, 2, \dots$ ).

Fazendo  $k_1 = 0$  e  $k_2 = 0$  tem-se a configuração mostrada na figura 5.1.

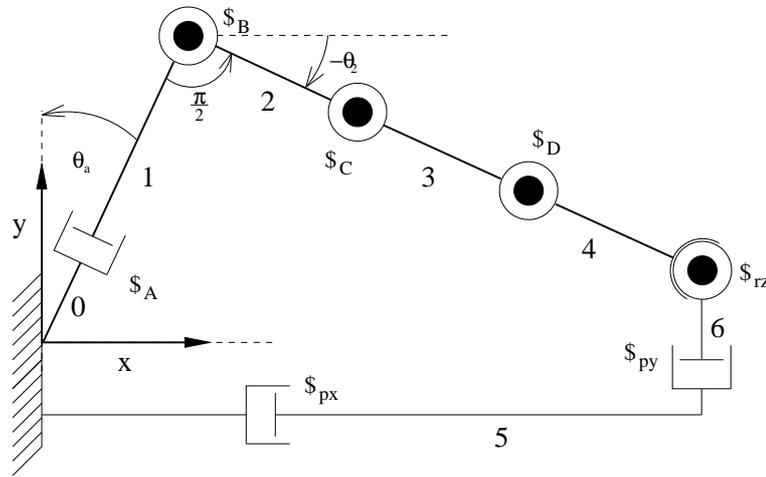


Figura 5.1: Condição singular do robô redundante.

Pela figura 5.1, é possível observar que velocidades comandadas na direção perpendicular à junta prismática  $A$  não podem ser executadas. Assim limitam-se as possibilidades de movimento, o que indica uma condição singular.

A seguir, com base no determinante da matriz do Jacobiano estendido apresentado na equação 5.15, são analisadas as singularidades impostas pela cadeia virtual de evitamento de colisão.

### 5.3.2 As singularidades do robô $P3R$ com as restrições cinemáticas de colisão

Calculando-se o determinante do Jacobiano estendido,  $D_J$ , tem-se que:

$$D_J = -L_2 L_3 (P_a c_2 + Q_a s_2) \text{sen}(\theta_{rz_1} - \theta_2 - \theta_3) \quad (5.17)$$

Analisando o  $D_J$  observa-se que a condição singular é alcançada em duas condições distintas.

Considerando que  $L_2$  e  $L_1$  são constantes diferentes de zero,  $D_J$  é zero somente se uma das condições abaixo for alcançada:

- $P_a c_2 + Q_a s_2 = 0$ ;
- $s_{rz_1-2-3} = 0$

Da primeira condição tem-se que:

$$\frac{P_a}{Q_a} = -\frac{s_2}{c_2} \quad (5.18)$$

ou seja, geometricamente, o ângulo formado entre o vetor direção da junta prismática  $A$  do robô real e o elo 3 é igual a  $\pm(2k + 1)\frac{\pi}{2}$  com  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Esta condição está mostrada na figura 5.2.

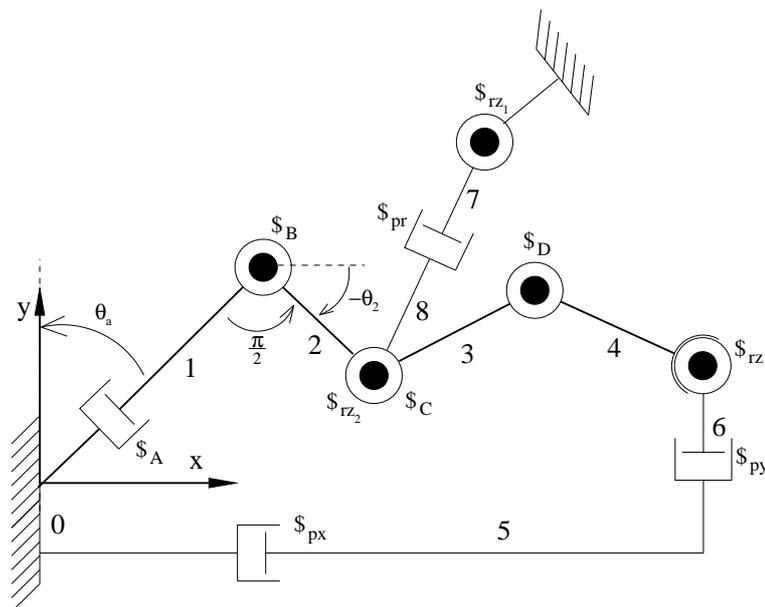


Figura 5.2: 1ª condição de singularidade

O ângulo formado pela junta prismática  $A$  tem seu complemento para o ângulo  $\frac{\pi}{2}$  dado por  $\theta_a$ , o qual pela equação 5.18 deve ser igual a  $-\theta_2$ . Por esta igualdade, a singularidade existe se a direção da junta  $A$  for perpendicular ao elo 3.

Pode-se observar que mantendo o par prismático  $\$_{pr}$  fixo numa determinada posição, evitando uma colisão por exemplo, o robô não poderá movimentar-se, pois qualquer deslocamento que incida em movimento da junta virtual  $rz_1$  não incidirá em movimentos nas juntas  $A$  e  $B$ .

Outro aspecto importante é que esta singularidade é um caso mais geral da singularidade do manipulador redundante apresentada na figura 5.1, pois esta condição singular aplica-se para qualquer valor para o ângulo  $\theta_3$  na junta  $C$  e  $\theta_4$  na junta  $D$ .

Aplicando a condição de singularidade mostrada na figura 5.2 à matriz Jacobiana tem-se o seguinte resultado:

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -s_2 & -L_2s_2 - L_3s_{23} - L_4s_{234} & -L_3s_{23} - L_4s_{234} & -L_4s_{234} \\ c_2 & L_2c_2 + L_3c_{23} + L_4c_{234} & L_3c_{23} + L_4c_{234} & L_4s_{234} \\ s_{rz_1-2} & L_2s_{rz_1-2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

Nota-se que a coluna 2 de  $J$  pode ser obtida pela soma da coluna 1 multiplicada por  $L_2$  e a coluna 3. Portanto o Jacobiano é linearmente dependente.

Da segunda condição tem-se que:

$$q_{rz_1} = q_2 + q_3 + k\pi, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (5.20)$$

Considerando a condição em que  $k = 0$ , tem-se a configuração cinemática resultante na figura 5.3.

Esta configuração determina uma condição de paralelismo entre o elo 4 e a junta prismática  $p_r$ . Observa-se pela figura 5.3 que não existe possibilidade de realização de movimento na direção da junta  $p_r$  se esta estiver travada, também para um exemplo de evitamento de colisão.

Nesta condição a matriz Jacobiana tem a seguinte configuração:

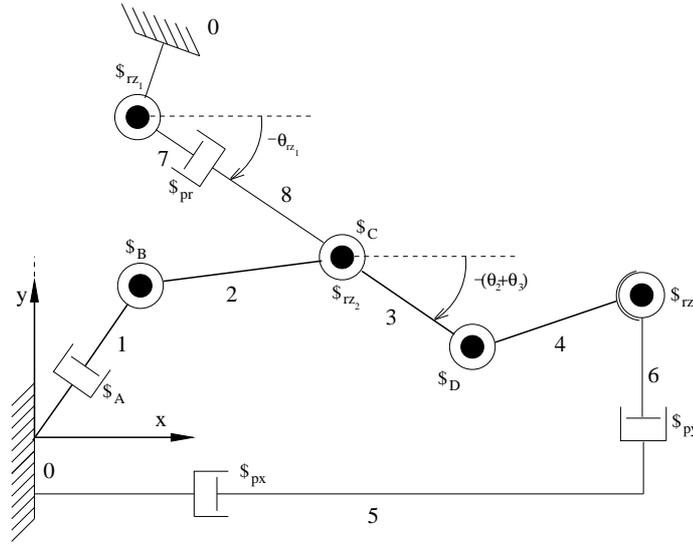


Figura 5.3: 2ª condição de singularidade

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ P_a & -L_2s_2 - L_3s_{23} - L_4s_{234} & -L_3s_{23} - L_4s_{234} & -L_4s_{234} \\ Q_a & L_2c_2 + L_3c_{23} + L_4c_{234} & L_3c_{23} + L_4c_{234} & L_4s_{234} \\ P_a c_{23} + Q_a s_{23} & L_2s_3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.21)$$

O Jacobiano da equação 5.21 apresenta uma condição de dependência pelo fato da linha 4 ser igual à soma do produto da linha 1 por  $s_3$ , da linha 2 por  $c_{23}$  e da linha 3 por  $s_{23}$ .

Estes resultados mostraram que a introdução das restrições cinemáticas para evitar colisões introduz duas singularidades adicionais à cinemática do manipulador redundante. Assim, o método do Jacobiano estendido a partir de restrições cinemáticas também introduz singularidades algorítmicas.

Estas singularidades algorítmicas são ocasionadas pelas restrições ao movimento e ocorrem nas configurações da cadeia cinemática em que existem incompatibilidades entre os movimentos impostos ao efetuador e as outras restrições.

No exemplo esta incompatibilidade ocorre em situações nas quais a trajetória imposta ao efetuador não pode ser realizada sem que haja colisão.

Cabe ressaltar que neste método as singularidades têm um significado cinemático claro que pode ser utilizado no desenvolvimento de métodos para evitá-las

## 5.4 Conclusão

Neste capítulo foi apresentada uma maneira diferenciada e sistematizada de obtenção da matriz Jacobiana estendida.

A metodologia proposta buscou mostrar que existe uma representação para o Jacobiano estendido a partir da representação cinemática obtida pelo método das cadeias virtuais.

Foi desenvolvido um exemplo que ilustrou a proposta. Neste exemplo foi modelada a cinemática resolvendo a redundância pela inclusão de uma tarefa de evitamento de colisão de uma junta do robô com um obstáculo pontual.

Na análise do determinante do Jacobiano estendido obtido, foi mostrado que outras singularidades ocorrem. Estas singularidades refletem condições de incompatibilidades entre a tarefa definida para o efetuador e para o evitamento de colisão.

O próximo passo é a realização da integração da cinemática diferencial com intuito de calcular as posições de junta da cadeia fechada. Considerando a complexidade do modelo diferencial, a solução para encontrar a cinemática de posição mais adequada é baseada em soluções numéricas.

O próximo capítulo trata do assunto da solução numérica para a cinemática inversa de posição, onde é apresentada uma nova proposta baseada na inclusão de cadeias virtuais de medição do erro.

## 6 *Integração da cinemática diferencial para manipuladores de cadeia fechada*

O Jacobiano pode ser utilizada para obtenção da cinemática inversa diferencial a partir de sua inversa. Como resultado se obtém as velocidades nas juntas de interesse (juntas secundárias) como função das velocidades desejadas (juntas primárias).

As posições das juntas secundárias são obtidas então, integrando em relação ao tempo as velocidades destas juntas. Em geral esta integração não é possível de ser realizada analiticamente, por conta da complexidade da matriz do Jacobiano. Neste caso utilizam-se de métodos numéricos para calcular as posições de juntas.

Os métodos numéricos de integração são baseados em aproximações, e por conta disso, surge um fenômeno chamado de *drift* (escorregamento) na solução. Como consequência, na integração da cinemática diferencial, erros são gerados no posicionamento do efetuador, por isso, os resultados obtidos não estarão de acordo com a localização desejada para o efetuador.

Quando consideramos manipuladores de cadeia fechada o fenômeno do escorregamento é mais crítico, uma vez que os erros gerados implicam que estruturalmente a cadeia cinemática deverá se abrir, ou ocorrerá a geração de torques excessivos nas juntas. O método das restrições cinemáticas apresentado está susceptível a este problema, uma vez que as cadeias cinemáticas devem ser fechadas pela inclusão de juntas virtuais, para obtenção do modelo da cinemática diferencial.

Para resolver e tratar este problema, um novo método de integração é apresentado neste capítulo. Na discussão do método são tratadas a metodologia de aplicação do método assim como suas propriedades.

## 6.1 Análise do problema

De forma geral, em uma cadeia cinemática fechada nem todas juntas podem ser controladas independentemente, ou seja, algumas destas juntas são atuadas, enquanto outras permanecem passivas.

O capítulo 4 tratou deste assunto desenvolvendo o método das restrições cinemáticas, onde foi definido que as juntas atuadas são chamadas de juntas primárias, enquanto que as juntas passivas são chamadas de juntas secundárias.

Sejam as juntas primárias denotadas por um vetor  $q_p$  e as juntas secundárias denotadas por um vetor  $q_s$ . Então, a restrição cinemática imposta pelo conjunto de juntas e elos da cadeia fechada pode ser escrita de uma forma geral como mostra a equação 6.1 (TSAI, 1999).

$$f(q_p, q_s) = 0 \quad (6.1)$$

onde :

- $f$  é uma função dos vetores  $q_p$  e  $q_s$ ,  $n$ -dimensional e implícita;
- $0$  é um vetor  $n$ -dimensional ( $n$  é o número de juntas da cadeia cinemática fechada).

A equação 6.1 é algumas vezes referida como equação de fechamento. Diferenciando a equação 6.1 com relação ao tempo, obtém-se a relação entre as velocidades das juntas primárias ( $\dot{q}_p$ ) e as velocidades das juntas secundárias ( $\dot{q}_s$ ) como mostra a equação 6.2 (equação esta equivalente a apresentada em 4.11).

$$N_p(q_p)\dot{q}_p + N_s(q_s)\dot{q}_s = 0 \quad (6.2)$$

onde :  $N_p(q_p) = \frac{\partial f}{\partial q_p}$  e  $N_s(q_s) = \frac{\partial f}{\partial q_s}$

Da equação 6.2 tem-se a solução das velocidades das juntas secundárias apresentada na equação 6.3.

$$\dot{q}_s = -N_s^{-1}(q_s)N_p(q_p)\dot{q}_p \quad (6.3)$$

As posições das juntas secundárias podem ser calculadas pela integração da equação 6.3 como mostrado a seguir:

$$q_s(t) - q_s(0) = \int_0^t \dot{q}_s dt = - \int_0^t N_s^{-1}(q_s) N_p(q_p) \dot{q}_p dt \quad (6.4)$$

A solução da posição para as juntas secundárias é independente da solução da estrutura cinemática. Por outro lado é necessário que a matriz  $N_s(q_s)$  seja inversível, nos casos em que esta matriz tenha mais colunas do que linhas, existirão infinitas soluções para a equação 6.3.

A solução da integração analítica pretendida na equação 6.4 é complexa e geralmente de difícil obtenção. Por isso são geralmente utilizados algoritmos numéricos para integração da cinemática diferencial e obtenção das posições de junta (SCIAVICCO; SICILIANO, 1996).

A técnica de integração numérica mais simples é baseada no método de integração de Euler (BURDEN; FAIRES, 2003); onde o tempo é discretizado de acordo com um dado intervalo de integração  $\Delta t$ . Considerando que as posições e velocidades de juntas são conhecidas no tempo  $t_i$ , as posições no tempo  $t_{i+1} = t_i + \Delta t$  podem ser calculadas como mostra a equação a seguir.

$$q_s(t_{i+1}) = q_s(t_i) - N_s^{-1}(q_s(t_i)) N_p(q_p(t_i)) \Delta q_p(t_i) \quad (6.5)$$

onde  $\Delta q_p(t_i) = q_p(t_{i+1}) - q_p(t_i)$ .

O resultado obtido para as juntas secundárias na equação 6.5, implica num erro acumulativo para as juntas  $q_s(t_i)$ , o *drift* numérico, ou escorregamento. Portanto a equação 6.1 não é satisfeita e uma abertura é introduzida na cadeia fechada.

Um exemplo é ilustrado num mecanismo de quatro barras cujo movimento é realizado pela ativação da junta  $A$ .

Se aplicada a solução apresentada em 6.5 as posições calculadas para as juntas  $B$ ,  $C$  e  $D$  fazem a estrutura do mecanismo se abrir. Na figura 6.1 pode ser visualizado este efeito.

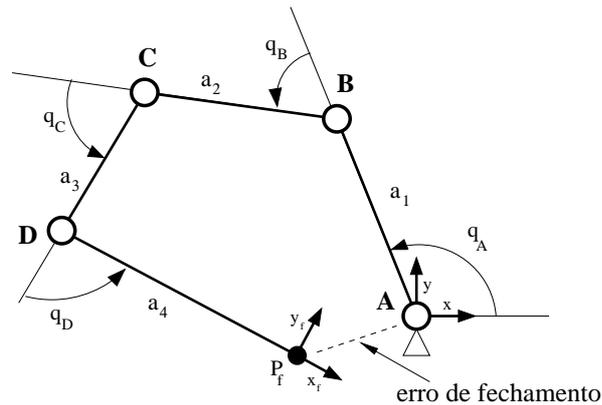


Figura 6.1: Erro de fechamento do mecanismo de 4 barras

onde o ponto  $P_f$ , representa a localização do sistema de coordenadas do final na cadeia do mecanismo de quatro barras.

Para manter a cadeia fechada vai se valer da teoria de helicóides e do uso do método das restrições cinemáticas para resolver o problema do erro de fechamento da cadeia.

## 6.2 Um método para controle do erro de fechamento via cadeias virtuais

Considerando o erro de fechamento que ocorre quando são utilizados algoritmos numéricos, um novo método é proposto para minimizar o erro de fechamento em cadeias cinemáticas (GUENTHER et al., 2007).

O método proposto mantém a integridade da cadeia fechada, adicionando para isso uma cadeia virtual de controle do erro de fechamento. Utilizando o método de Davies para o levantamento do modelo da cinemática diferencial, vai-se atuar nas juntas da cadeia de erro com o propósito de minimizar o erro de fechamento.

Inicialmente introduz-se uma cadeia virtual para representação do erro de fechamento resultante da integração numérica.

De acordo com a dimensão do espaço operacional a cadeia virtual de erro pode ser definida de maneira conveniente de duas formas (FONTAN, 2007):

- No plano a estrutura cinemática mais conveniente é a  $PPR$ ;
- No espaço tridimensional a estrutura cinemática mais conveniente é a  $3P3R$ .

A razão para esta escolha refere-se a dois fatores:

- Com estas cadeias é possível medir o erro de fechamento desacoplando o erro linear do erro de orientação;
- Outras cadeias (por exemplo para o plano poderia ser utilizada uma cadeia  $RPR$  ou no espaço poderia ser utilizada uma cadeia  $RRPS$ ) podem ocorrer efeitos numéricos similares a singularidades quando as dimensões dos erros forem relativamente pequenas (FONTAN, 2007).

Assim a figura 6.2 mostra o fechamento da cadeia apresentada em 6.1 utilizando uma cadeia virtual  $PPR$  para medição do erro.

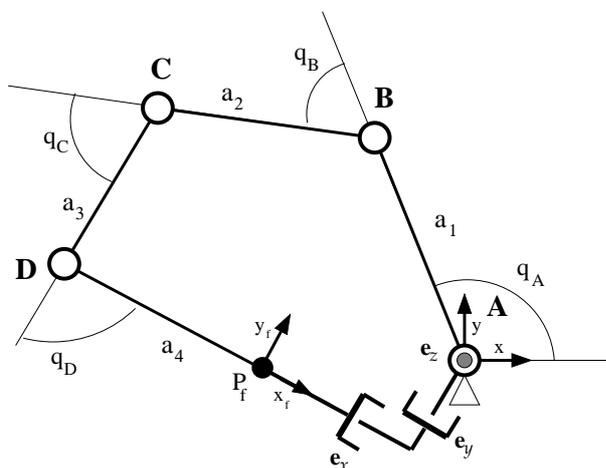


Figura 6.2: Fechamento da cadeia utilizando uma cadeia virtual de erro

Considerando a cadeia virtual de erro, e usando a mesma metodologia da seção 6.1, a equação que descreve a nova cadeia cinemática é dada por:

$$N_p(q_p)\dot{q}_p + N_s(\bar{q}_s)\dot{q}_s + N_e(q_e)\dot{q}_e = 0 \quad (6.6)$$

onde:

- $N_p(q_p)$  é a matriz que contém os helicóides das juntas primárias;
- $N_s(\bar{q}_s)$  é a matriz que contém os helicóides das juntas secundárias correspondentes às posições obtidas pela integração numérica ( $\bar{q}_s$ );
- $\dot{q}_p$  e  $\dot{q}_s$  são vetores de magnitudes das velocidades primárias e secundárias respectivamente e

- $N_e$  é a matriz que contém os helicóides unitários das juntas da cadeia virtual de erro, e  $\dot{q}_e$  é o vetor magnitude das velocidades das juntas de erro.

Desta forma, a magnitude das velocidades das juntas secundárias pode ser obtida isolando  $\dot{q}_s$  da equação 6.6 como mostrado abaixo:

$$\dot{q}_s = -N_s^{-1}(\bar{q}_s)N_p(q_p)\dot{q}_p - N_s^{-1}(\bar{q}_s)N_e(q_e)K_e q_e \quad (6.7)$$

onde  $K_e$  é uma matriz de ganhos escolhida definida positiva e  $q_e$  é o vetor de erros de fechamento obtido a partir da posição das juntas da cadeia virtual de erro. O produto  $K_e q_e$  representa uma aproximação geral para as velocidades das juntas de erro.

A equação 6.7 não tem restrições relacionadas à dimensão do espaço operacional. Por isso o resultado obtido pode ser aplicado também para cadeias cinemáticas fechadas tridimensionais.

Para aplicação do modelo proposto é importante uma análise de sua estabilidade. A seção a seguir apresenta esta análise.

### 6.2.1 Estabilidade do algoritmo proposto

A estabilidade do algoritmo pode ser verificada substituindo a equação 6.7 na equação 6.6. Assim obtém-se a relação apresentada na equação 6.8.

$$N_e \dot{q}_e + N_e K_e q_e = 0 \quad (6.8)$$

relembrando que  $\dot{q}_e$  e  $q_e$  são os vetores velocidade e posição das juntas da cadeia virtual de medição do erro de fechamento.

Multiplicando todos termos da equação 6.8 por  $N_e^{-1}$ , tem-se o resultado mostrado na equação 6.9.

$$\dot{q}_e + K_e q_e = 0 \quad (6.9)$$

Como a matriz de ganhos  $K_e$  é definida positiva, a equação 6.9 estabelece que o vetor

erro de posição tende para zero na medida que o tempo  $t$  tende para infinito.

Deve ser observado que, apesar de que teoricamente os ganhos da matriz  $K_e$  poderem ser tão grandes o quanto se desejar, na prática estes são limitados por conta da possibilidade de introdução de problemas numéricos, tais como oscilações ou instabilidades.

Portanto para controlar o erro, e tornar efetivamente estável a solução proposta, devem ser combinados ganhos da matriz  $K_e$  limitados com intervalos de tempo suficientemente pequenos, juntamente com a utilização de iterações numéricas, para que o erro de fechamento seja minimizado a valores desejados.

### 6.2.2 Controle do erro

A convergência exponencial é garantida no caso geral em que as posições e velocidades das juntas primárias variam no tempo. Em casos onde o erro seja maior que um valor desejado, as posições e velocidades das juntas primárias podem ser mantidas em novas iterações numéricas. As iterações possibilitam o controle do erro, tornando-o menor que uma tolerância admissível (SCIAVICCO; SICILIANO, 1996).

### 6.2.3 Vetor erro de posição

Os deslocamentos helicoidais de um elo de uma cadeia cinemática podem ser expressos através de uma matriz homogênea. O deslocamento resultante de um elo  $j$  com relação a um sistema de coordenadas de referência pode ser calculado pelo método dos deslocamentos helicoidais sucessivos (veja anexo A para maiores detalhes). Assim a matriz homogênea  $A_j$  é obtida através da multiplicação sucessiva das matrizes homogêneas correspondentes as juntas precedentes ao elo  $j$  como mostrado a seguir:

$$A_j = \prod_{i=1}^{j-1} A_i \quad (6.10)$$

Considerando que em uma cadeia cinemática fechada o último e o primeiro elos são os mesmos, e que a orientação e a posição de um elo com relação a ele mesmo é uma matriz homogênea representada por uma identidade, então numa cadeia fechada composta de  $np$  juntas primárias e  $ns$  juntas secundárias, a equação 6.10 resulta equação 6.11.

$$\prod_{i=1}^{np} [A_p]_i \prod_{j=1}^{ns} [A_s]_j = I \quad (6.11)$$

onde  $[A_p]_i$ ,  $i = 1, \dots, np$ , são as matrizes homogêneas correspondentes às juntas primárias,  $[A_s]_j$ ,  $j = 1, \dots, ns$ , são as matrizes homogêneas correspondentes às juntas secundárias.

O erro de fechamento da cadeia resultante da aplicação de soluções numéricas de integração, pode então ser medido tomando como referência a equação obtida em 6.11. Como em Pavlin(1995), representa-se o erro de fechamento no instante de tempo  $k$ , por uma matriz homogênea  $E_k$ , assim a equação de fechamento fica com a seguinte forma:

$$\left\{ \prod_{i=1}^{np} [A_p]_i \prod_{j=1}^{ns} [A_s]_j \right\} E_k = I \quad (6.12)$$

Portanto o erro de fechamento pode ser calculado como segue:

$$E_k = \left\{ \prod_{i=1}^{np} [A_p]_i \prod_{j=1}^{ns} [A_s]_j \right\}^{-1} = \begin{bmatrix} R_e & p_e \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.13)$$

onde  $p_e = [p_{ex} \ p_{ey} \ p_{ez}]^T$  é o vetor erro de posição e  $R_e$  é matriz que representa o erro de orientação.

A matriz  $R_e$  pode representar alguma notação mínima de ângulos, tais como Euler, *Roll – Pitch – Yaw*, (SCIAVICCO; SICILIANO, 1996) ou a configuração de um conjunto de juntas de acordo com a estrutura da cadeia de medição do erro.

No caso tridimensional, a cadeia virtual  $3P3R$  representa de maneira conveniente o erro de fechamento. Esta conveniência vem do fato da matriz homogênea  $E_k$  resultante, conter uma submatriz  $p_e$  que representa os deslocamentos das juntas prismáticas  $px$ ,  $py$  e  $pz$  e uma submatriz  $R_e$  o produto dos deslocamentos sucessivos nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ , como mostra a equação 6.14 a seguir:

$$R_e = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_x & -s_x \\ 0 & s_x & c_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_y & 0 & s_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_y & 0 & c_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_z & -s_z & 0 \\ s_z & c_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \quad (6.14)$$

$$\begin{bmatrix} c_y c_z & -c_y s_z & s_y \\ c_z s_x s_y + c_x s_z & c_x c_z - s_x s_y s_z & -c_y s_x \\ -c_x c_z s_y + s_x s_z & c_z s_x + c_x s_y s_z & c_x c_y \end{bmatrix} \quad (6.15)$$

Obtendo-se  $R_e$  é possível extrair o erro de orientação analiticamente.

Assim o vetor erro de posição, o qual envolve posição e orientação, é dado por um vetor  $q_e = [r_{ex} \ r_{ey} \ r_{ez} \ p_{ex} \ p_{ey} \ p_{ez}]^T$

Aplicando o método de Euler a equação 6.7 obtém-se:

$$q_s(t_{i+1}) = q_s(t_i) - N_s^{-1}(q_s(t_i))N_p(q_p(t_i))\Delta q_p - N_s^{-1}(q_s(t_i))N_e(q_e(t_i))K_e q_e(t_i)\Delta t \quad (6.16)$$

A equação apresentada em 6.16 permite o controle do erro de fechamento considerando variações de posição e conseqüentemente de velocidade das juntas primárias.

Uma simplificação é possível de ser realizada quando se deseja que o erro de fechamento seja menor que uma determinada tolerância e mais de uma iteração seja realizada para cada posição das juntas primárias.

Considere a situação em que não ocorrem mudanças de posições das juntas primárias ao longo do tempo  $t_i$ , ou seja, antes da aplicação do algoritmo, realizam-se os movimentos desejados nas juntas primárias mantendo as juntas secundárias fixas. No caso do controle de erro onde várias iterações serão realizadas, isto significa que neste processo iterativo  $\Delta q_p = 0$ , pois não ocorrerão variações de movimento enquanto o erro de fechamento não estiver em valores abaixo de tolerâncias especificadas. Pode-se notar entretanto, que na equação para cálculo do erro de fechamento, apresentada em 6.13 a influência das juntas permanece inalterada uma vez que as matrizes homogêneas  $A_p$  dependem apenas das posições de junta.

Considerando a simplificação,  $\Delta q_p = 0$ , pode-se reescrever a equação 6.16:

$$q_s(t_{i+1}) = q_s(t_i) - N_s^{-1}(q_s(t_i))N_e(q_e(t_i))K_e q_e(t_i)\Delta t \quad (6.17)$$

A equação 6.17 pode ser então implementada como é mostrado no algoritmo 2.

---

**Algoritmo 2** Integração numérica de mecanismos de cadeia fechada utilizando cadeias virtuais de erro

---

**Entrada:**

Define-se os valores para a diagonal de  $K_e$

Define-se a tolerância do erro de fechamento  $\rightarrow \epsilon_f$

Ajuste inicial para as juntas secundárias  $\rightarrow q_s$

Ajuste inicial para as juntas primárias  $\rightarrow$  condição inicial :  $q_p$

Inicialização do erro de fechamento da malha  $\rightarrow E_M \rightarrow \infty$

**Para** cada posição desejada das juntas primárias **faça**

Ajustam-se as posições das juntas primárias

**Repita**

Calcula-se a matriz do erro de fechamento  $\rightarrow E_k$  da equação 6.13

São extraídos da matriz  $E_k$  o vetor de erro  $q_e$

Calculam-se os helicóides para composição de  $N_p$ ,  $N_s$  e  $N_e$

Calcula-se as novas posições para as juntas secundárias  $\rightarrow$  equação 6.16

Calcula-se  $E_M$

**Até**  $\|E_M\| > \epsilon_f$

**Saída:** Armazenar os valores das juntas secundárias num vetor

**Fim Para**

---

## 6.3 Aplicações desenvolvidas

O método de integração utilizando cadeias virtuais de erro possibilita aplicações para manipuladores bidimensionais e tridimensionais. A seguir são apresentados dois exemplos de aplicação do método.

Na primeira aplicação usa-se o mecanismo de 4 barras, onde é realizado um estudo com relação a influência da variação dos valores da diagonal da matrix  $K_e$ .

O segundo exemplo de aplicação apresenta o controle de trajetória para o protótipo do manipulador do projeto Roboturb. Neste caso é implementada uma solução para o evitamento de colisão utilizando cadeias virtuais e para cinemática inversa de posição utilizando o método de integração apresentado.

### 6.3.1 Simulação em um mecanismo de 4 barras

Considere um mecanismo de quatro barras mostrado na figura 6.3.

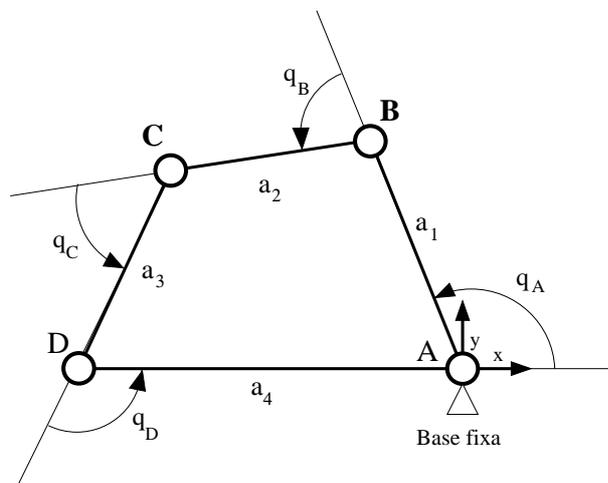


Figura 6.3: Mecanismo de 4 barras fechado.

Para esta simulação foi utilizada a junta  $A$  como primária e as demais secundárias e os seguintes parâmetros foram determinados:

- A junta  $A$  realizará um movimento da posição  $\frac{\pi}{4}$  até a posição  $\frac{\pi}{2}$ , de acordo com a equação:  $q_p(t) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \text{sen} \left( \frac{\pi t}{8} \right)$  com  $t = 0 \rightarrow 4\text{s}$ .
- As dimensões dos elos são:  $a_1 = 0,5\text{m}$ ;  $a_2 = 1,0\text{m}$ ;  $a_3 = 0,5\text{m}$ ;  $a_4 = 1,0\text{m}$ ;
- O vetor de posições iniciais para as juntas secundárias é dado por:  $q_s = \left[ \frac{-\pi}{4} \quad \frac{-3\pi}{4} \quad \frac{-\pi}{4} \right]$  radianos;
- O intervalo de integração é fixado por  $\Delta t = 0,01$

O sistema de coordenadas de referência é fixado no final do último elo do mecanismo. Ele é coincidente com o primeiro elo da cadeia virtual de erro, como mostrou a figura 6.2. A partir desta referência são obtidas as seguintes matrizes  $N_e$ ,  $N_p$  e  $N_s$ :

$$N_e = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ py & 1 & 0 \\ -px & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad N_p = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad N_s = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ yB & yC & yD \\ -xB & -xC & xD \end{bmatrix} \quad (6.18)$$

O vetor de soluções é calculado utilizando o algoritmo proposto e os resultados são comparáveis com a solução analítica proposta por Waldron-Kinzel(1999).

A solução para o mecanismo de quatro barras planar é obtida impondo inicialmente que  $K_e = K I_3$ , onde  $K$  é um escalar positivo e  $I_3$  é uma matriz identidade de ordem 3. Fazendo variar  $K$  de 10 a 190 e o número de iterações de 1 a 4, tem-se o resultado ilustrado na figura 6.4 (FONTAN, 2007).

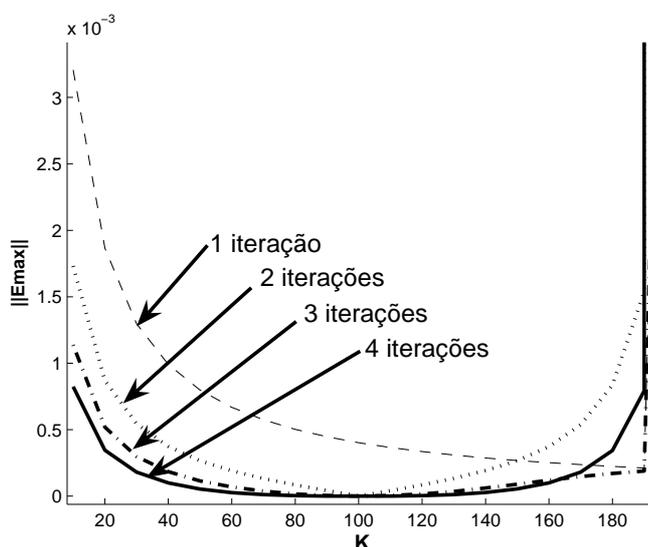


Figura 6.4: Avaliação da convergência em função de  $K$  e do número de iterações

Pode ser observado que o módulo do erro de fechamento  $E_M$  decresce na medida que o número de iterações aumenta. Também é possível observar que o melhor desempenho é obtido quando  $K$  é um valor relativamente grande e inversamente proporcional ao período de amostragem. Quando o valor de  $K = \frac{1}{\Delta t}$  tem-se os menores valores para o módulo do erro de fechamento  $E_M$ . Para valores maiores que 190 ocorre instabilidade numérica no algoritmo e o erro tende para infinito.

Simulações posteriores, onde foram realizadas alterações de  $K$  mostraram que o melhor desempenho em termos de convergência foi obtido fazendo  $K = \frac{1}{\Delta t}$ .

### 6.3.2 Aplicação para o evitamento de colisão com o manipulador Roboturb

Agora uma análise do método proposto é realizada em um experimento com o manipulador Roboturb.

A configuração das malhas cinemáticas foi apresentada no capítulo 4, e ilustrado no grafo apresentado na figura 4.18.

Para solução da cinemática de posição pelo método de integração proposto se faz

necessário a abertura dos 2 circuitos, uma vez que o erro numérico ocorrerá em cada malha. Para cada erro é aplicada uma cadeia virtual  $3P3R$ , onde através do controle de medição de erro vai se manter a integridade da malha.

O local do controle do erro pode ser dado em qualquer ponto do circuito (em algum dos elos que compõem o circuito).

Impõe-se o controle de erro sobre o elo 7 para o circuito 1 e no elo 3 para o circuito 2. Estes locais são ilustrados no grafo da figura 6.5.

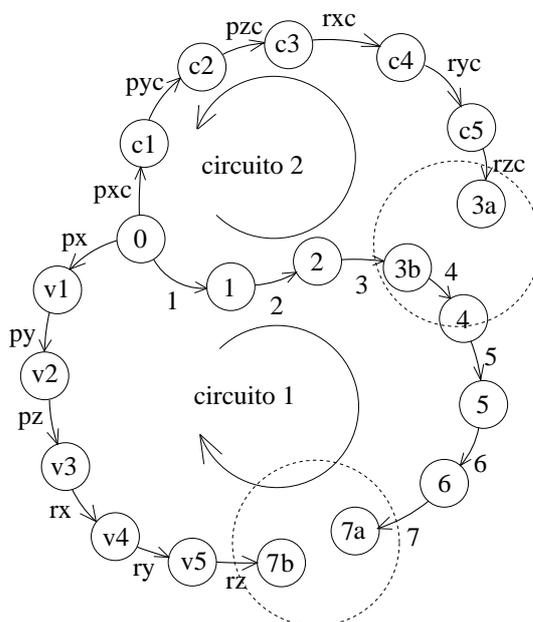


Figura 6.5: Os locais de controle do erro nos circuitos cinemáticos para o evitamento de colisão no Roboturb - (círculos pontilhados)

O elo 3 é separado nos elos 3a e 3b e o elo 7 é separado nos elos 7a e 7b.

Mais uma vez vale-se das cadeias virtuais inseridas entre os elos 7a e 7b, para controle do erro de fechamento da cadeia do circuito de trajetória. E entre os elos 3a e 3b para controle do erro de fechamento da cadeia do circuito de evitamento de colisão.

As figuras 6.6 e 6.7 apresentam respectivamente as cadeias de controle de erro para o circuito de trajetória e colisão.

Na figura 6.6 tem-se que:

- As juntas  $pxe_t$ ,  $pye_t$  e  $pze_t$  indicam o erro de posição de fechamento do circuito 1 medido pelas juntas prismáticas da cadeia virtual;
- As juntas  $rxet$ ,  $ryet$  e  $rzet$  indicam o erro de orientação de fechamento do circuito

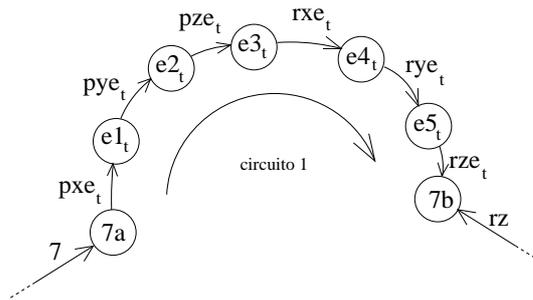


Figura 6.6: Grafo representando a cadeia virtual de medição do erro de fechamento do circuito de trajetória (circuito 1).

1, medido pelas juntas rotativas da cadeia virtual.

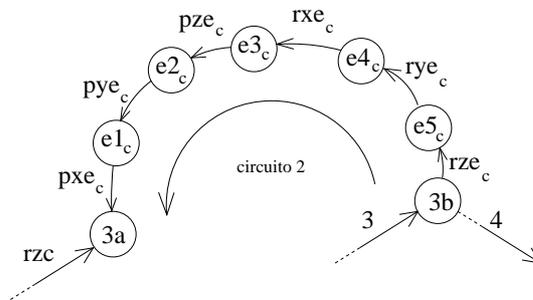


Figura 6.7: Grafo representando a cadeia virtual de medição do erro de fechamento do circuito de evitamento de colisão (circuito 2)

Na figura 6.7 tem-se que:

- As juntas  $pxe_c$ ,  $pye_c$  e  $pze_c$  indicam o erro de posição de fechamento do circuito 2 medido pelas juntas prismáticas da cadeia virtual;
- As juntas  $rxec$ ,  $rye_c$  e  $rze_c$  indicam o erro de orientação de fechamento do circuito 2, medido pelas juntas rotativas da cadeia virtual.

Esta configuração pode ser equacionada a partir da definição dos helicóides na seguinte forma:

$$\begin{aligned}
N_s \dot{q}_s + N_p \dot{q}_p + N_e \dot{q}_e = & \\
& \begin{bmatrix} \hat{\$}_1 & \hat{\$}_2 & \hat{\$}_3 & \hat{\$}_4 & \hat{\$}_5 & \hat{\$}_6 & \hat{\$}_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hat{\$}_1 & \hat{\$}_2 & \hat{\$}_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\hat{\$}_{pxc} & -\hat{\$}_{pyc} & -\hat{\$}_{rxc} & -\hat{\$}_{ryc} & -\hat{\$}_{rzc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \\ \dot{q}_5 \\ \dot{q}_6 \\ \dot{q}_7 \\ \dot{q}_{pxc} \\ \dot{q}_{pyc} \\ \dot{q}_{rxc} \\ \dot{q}_{ryc} \\ \dot{q}_{rzc} \end{bmatrix} + \\
& \begin{bmatrix} 0 & -\hat{\$}_{px} & -\hat{\$}_{py} & -\hat{\$}_{pz} & -\hat{\$}_{rx} & -\hat{\$}_{ry} & -\hat{\$}_{rz} \\ -\hat{\$}_{pzc} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_{pzc} \\ \dot{q}_{px} \\ \dot{q}_{py} \\ \dot{q}_{pz} \\ \dot{q}_{rx} \\ \dot{q}_{ry} \\ \dot{q}_{rz} \end{bmatrix} + \\
& \begin{bmatrix} \hat{\$}_{pxe_t} & \hat{\$}_{pye_t} & \hat{\$}_{pze_t} & \hat{\$}_{rx_e_t} & \hat{\$}_{rye_t} & \hat{\$}_{rze_t} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{\$}_{pxe_c} & \hat{\$}_{pye_c} & \hat{\$}_{pze_c} & \hat{\$}_{rx_e_c} & \hat{\$}_{rye_c} & \hat{\$}_{rze_c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_{pxe_t} \\ \dot{q}_{pye_t} \\ \dot{q}_{pze_t} \\ \dot{q}_{rx_e_t} \\ \dot{q}_{rye_t} \\ \dot{q}_{rze_t} \\ \dot{q}_{pxe_c} \\ \dot{q}_{pye_c} \\ \dot{q}_{pze_c} \\ \dot{q}_{rx_e_c} \\ \dot{q}_{rye_c} \\ \dot{q}_{rze_c} \end{bmatrix} = 0
\end{aligned} \tag{6.19}$$

onde a equação 6.19 é uma soma das velocidades referentes as juntas primárias, secundárias e de erro.

Para que seja possível a realização do algoritmo proposto é necessário que todos helicóides estejam representados num mesmo corpo. Para isto matrizes de transformação de coordenadas de helicóides devem ser utilizadas, como mostrado no anexo A.

## 6.4 Conclusão

Uma das possibilidades de obtenção da cinemática inversa é integrar no tempo a cinemática inversa diferencial. Por conta da complexidade, a forma mais conveniente de realização desta integração é utilizar-se de algoritmos numéricos. Para cadeias cinemáticas fechadas a utilização de métodos numéricos de integração acarreta em erros de fechamento da cadeia.

Este capítulo apresentou uma nova metodologia para obtenção da cinemática inversa para cadeias fechadas através de métodos numéricos. O método apresentado é inovador e define o objetivo principal deste trabalho.

A nova metodologia emprega o método das restrições e o uso de cadeias virtuais para medição e controle do erro de fechamento das cadeias cinemáticas.

Foram desenvolvidos os equacionamentos e uma sistemática de solução foi apresentada. Também foi discutida a questão da estabilidade da solução proposta.

Para validação dos resultados dois estudos foram realizados; primeiramente foi analisada a cinemática inversa para uma cadeia cinemática bidimensional, o mecanismo de 4 barras; o segundo estudo consistiu no desenvolvimento de uma solução aplicada ao espaço tridimensional, para a cinemática inversa para o manipulador do Roboturb, considerando uma estratégia de evitamento de colisão.

Os resultados obtidos nestas aplicações comprovaram que a sistemática proposta é válida e que os equacionamentos podem ser plenamente aplicados na prática.

O próximo capítulo apresenta uma série de experimentos de laboratório, onde os resultados obtidos são testados em aplicações práticas com o manipulador Roboturb. São experimentados o gerador de trajetórias desenvolvido no capítulo 2 e o comportamento destas trajetórias no espaço de juntas obtidas pelo método de integração proposto. São comparados as trajetórias de juntas com e sem a presença de um obstáculo dentro do volume de trabalho do manipulador Roboturb.

## 7 *Resultados experimentais*

O capítulo anterior apresentou uma nova proposta para solução numérica da cinemática inversa para cadeias cinemáticas fechadas. O método proposto está baseado na inclusão de cadeias cinemáticas virtuais para correção do erro de fechamento.

A sistemática apresentada foi validada no desenvolvimento da solução da cinemática inversa de posição para o manipulador Roboturb sob a condição de colisão.

Neste capítulo são apresentadas os resultados experimentais executados usando o manipulador Roboturb. Para obtenção destes resultados foi utilizada a metodologia de solução da cinemática inversa proposta no capítulo 6.

Na primeira seção é apresentada uma proposta para solução da redundância quando o manipulador Roboturb está fora da região de colisão. Esta estratégia de tratamento fora da colisão juntamente com o controle proposto para evitamento de colisão compõem um algoritmo para seguimento de trajetórias com evitamento de colisão.

Na segunda seção são apresentados os resultados referentes à execução da trajetória de contorno da região erodida e a trajetória de soldagem definida através de caminhos paralelos (capítulo 2).

Na terceira seção são apresentados os resultados relativos a uma aplicação com desvio de colisão levando em conta uma estratégia de controle de colisão.

Os programas desenvolvidos foram executados em computador PC-Intel Duo-Core de velocidade 2.8GHz e com 1GB de memória. A saída de dados consistiu em arquivos de texto ASCII do tipo *.dat* cuja formatação está de acordo com a normatização definida para o projeto Roboturb. Esta normatização define que os arquivos de trajetórias de juntas devem ser compostos de três arquivos: para armazenar dados de posição, velocidade e aceleração. Os arquivos são compostos por 7 colunas, uma para cada junta, com o número de linhas igual ao número de pontos da trajetória.

Na execução da trajetória foi utilizado o computador industrial de controle do mani-

pulador Roboturb, que contém um processador Pentium 4, 256Mb de memória e placas de interface com barramento PXI. A figura 7.1 apresenta o computador industrial e a figura 7.2 mostra a fonte de potência do manipulador.



Figura 7.1: Computador industrial de controle e comando do manipulador Roboturb.

Para simular a ferramenta, uma caneta foi usada para marcar sobre a superfície a ser recuperada as trajetórias executadas.

## 7.1 O manipulador Roboturb fora da região de colisão

Nas discussões a seguir o manipulador Roboturb pode operar numa situação em que não ocorre colisão. Assim, fora da colisão o manipulador Roboturb apresenta mais uma vez um grau de redundância que deve ser resolvido. A solução desta redundância também pode ser obtida através de restrições cinemáticas. A definição da redundância fora da colisão em conjunto com a estratégia de evitamento de colisão determinam a forma de operação do manipulador.

Dentre as restrições possíveis de serem implementadas a escolhida foi impor uma velocidade ao carro. A razão desta escolha deve-se à particularidade da tarefa e ao fato de que a superfície a ser recuperada tem uma dimensão preferencial (maior comprimento que largura). Pode-se determinar que a velocidade do carro seja projeção de velocidade



Figura 7.2: Fonte de potência para alimentação do sistema e acionamento do manipulador Roboturb.

da ferramenta na direção de maior comprimento, assim tem-se como resultado uma maior mobilidade do manipulador entre as pás da turbina.

Modelando a cinemática inversa pelo método de Davies tem-se dois circuitos.

O grafo apresentado na figura 7.3 mostra os circuitos cinemáticos para a condição de operação fora da região de colisão.

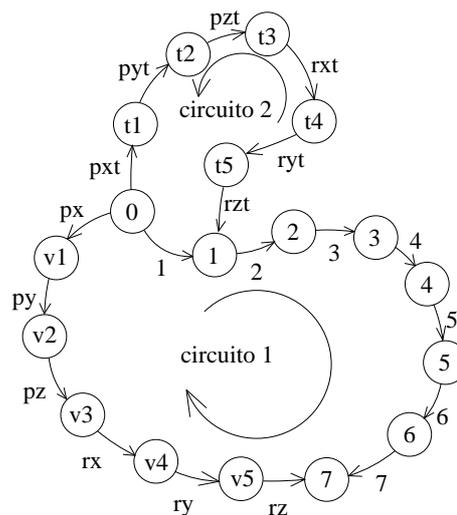


Figura 7.3: Grafo para solução da cinemática inversa fora da região de colisão.

onde:

- $pxt$ ,  $pyt$ ,  $pzt$ ,  $rxt$ ,  $ryt$ , e  $rzt$  são juntas de uma cadeia virtual  $3P3R$  fixada na base

do manipulador e o carro.

Estruturalmente a junta *pyt* da cadeia virtual é paralela ao carro. Então acionando esta junta com a velocidade desejada o carro deverá acompanhar o movimento, assim a junta *pyt* é definida como primária no circuito 2 para a condição quando o manipulador estiver fora da região de colisão. Consequentemente as demais juntas do circuito 2 deverão fazer parte das juntas secundárias.

A equação de restrição possui então a estrutura apresentada em 7.1.

$$N_s \dot{q}_s + N_p \dot{q}_p + N_e \dot{q}_e =$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\$}_1 & \hat{\$}_2 & \hat{\$}_3 & \hat{\$}_4 & \hat{\$}_5 & \hat{\$}_6 & \hat{\$}_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hat{\$}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\hat{\$}_{pxt} & -\hat{\$}_{pzt} & -\hat{\$}_{rxt} & -\hat{\$}_{ryt} & -\hat{\$}_{rzt} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \\ \dot{q}_5 \\ \dot{q}_6 \\ \dot{q}_7 \\ \dot{q}_{pxt} \\ \dot{q}_{pzt} \\ \dot{q}_{rxt} \\ \dot{q}_{ryt} \\ \dot{q}_{rzt} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\hat{\$}_{px} & -\hat{\$}_{py} & -\hat{\$}_{pz} & -\hat{\$}_{rx} & -\hat{\$}_{ry} & -\hat{\$}_{rz} \\ -\hat{\$}_{pyt} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_{pyt} \\ \dot{q}_{px} \\ \dot{q}_{py} \\ \dot{q}_{pz} \\ \dot{q}_{rx} \\ \dot{q}_{ry} \\ \dot{q}_{rz} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{\$}_{pxe_t} & \hat{\$}_{pye_t} & \hat{\$}_{pze_t} & \hat{\$}_{rxe_t} & \hat{\$}_{rye_t} & \hat{\$}_{rze_t} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{\$}_{pxe_c} & \hat{\$}_{pye_c} & \hat{\$}_{pze_c} & \hat{\$}_{rxe_c} & \hat{\$}_{rye_c} & \hat{\$}_{rze_c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_{pxe_t} \\ \dot{q}_{pye_t} \\ \dot{q}_{pze_t} \\ \dot{q}_{rxe_t} \\ \dot{q}_{rye_t} \\ \dot{q}_{rze_t} \\ \dot{q}_{pxe_c} \\ \dot{q}_{pye_c} \\ \dot{q}_{pze_c} \\ \dot{q}_{rxe_c} \\ \dot{q}_{rye_c} \\ \dot{q}_{rze_c} \end{bmatrix} = 0 \quad (7.1)$$

## 7.2 Experimentação na geração de trajetórias no espaço cartesiano

Para realização da experimentação real da metodologia para cálculo das trajetórias de contorno da região erodida e das trajetórias paralelas de soldagem, foi utilizada o modelo de superfície apresentado na figura 2.13.

### 7.2.1 Identificação da região erodida

O primeiro experimento consistiu em identificar a região erodida sobre o modelo da superfície utilizando o algoritmo de cinemática inversa proposto para o manipulador Roboturb, sem a iminência de colisão.

O estudo apresentado no capítulo 2 mostrou que é possível obter um conjunto de pontos que representam o contorno da superfície erodida. A ordenação deste conjunto de pontos permite calcular uma trajetória de contorno da região erodida, sobre a qual o manipulador Roboturb deverá conduzir a ferramenta e percorrer o contorno da região erodida.

Para a obtenção das trajetórias de juntas foi definido que a velocidade desejada para o deslocamento da ferramenta sobre a trajetória fosse de 20 mm/s.

A figura 7.4 ilustra o resultado em simulador da trajetória desejada e o resultado da execução desta trajetória realizada pelo manipulador Roboturb.

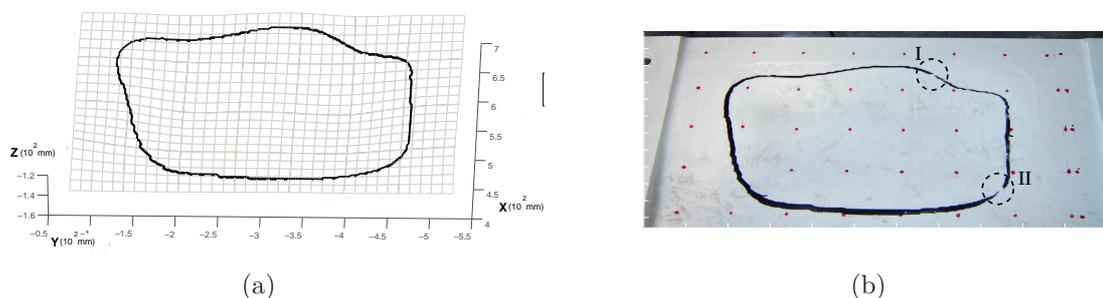


Figura 7.4: Simulação (a) e execução (b) da trajetória de contorno da região erodida

A trajetória real representa com precisão os resultados obtidos em simulação. Algumas discontinuidades que podem ser visualizadas na experimentação real (círculos pontilhados *I* e *II*) são decorrentes de imperfeições da superfície as quais não permitem que a ferramenta (caneta) mantenha-se constantemente em contato.

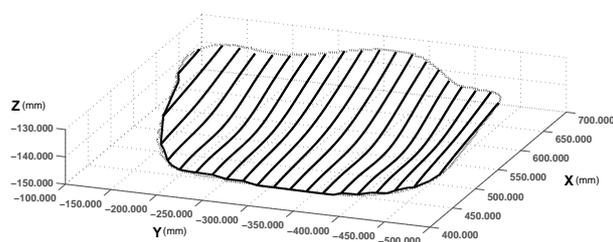
## 7.2.2 Recobrimento da superfície pelo processo de soldagem

Nesta experimentação são usadas trajetórias calculadas pela metodologia de obtenção de caminhos paralelos desenvolvida no capítulo 2. O intuito de aplicação no processo é o recobrimento de superfícies pelo processo de soldagem.

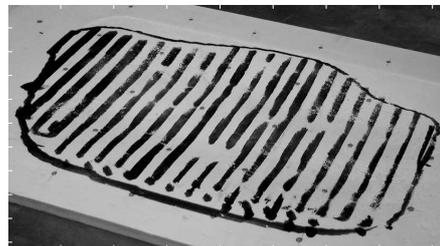
Para recobrir a erosão são necessários vários passes de soldagem. Isso implica que os caminhos paralelos sejam organizados em camadas, como mostraram as figuras 2.17, 2.20 e 2.22. Os resultados obtidos são caminhos paralelos dispostos em camadas interpostas.

Considere as trajetórias obtidas para a primeira camada de deposição, ou seja, a camada que será depositada sobre superfície erodida como ilustra a figura 7.5(a). Resolvendo a cinemática inversa de posição para o manipulador Roboturb e executando a trajetória, tem-se como resultado a figura 7.5.

A figura 7.5 apresenta o resultado em simulação e o resultado experimental, onde a distância entre os caminhos e a velocidade da ferramenta foram ajustados em 20mm e 25mm/s respectivamente.



(a)



(b)

Figura 7.5: Simulação (a) e execução (b) da trajetória de soldagem da primeira camada de deposição

Nesta experimentação ocorreram descontinuidades provenientes de imperfeições da superfície que também não permitiram o contínuo contato entre a caneta e a superfície.

## 7.3 Operação do manipulador Roboturb sob iminência de colisão

Para realização do controle de colisão uma superfície plana foi colocada dentro do volume de trabalho do manipulador Roboturb. A colisão foi garantida ajustando-se a posição inicial do cotovelo de maneira que colidisse com a superfície plana quando o

manipulador realizasse a tarefa de contorno da região erodida, ou de deposição da primeira camada.

A figura 7.6(a) ilustra o ambiente de simulação onde foi implementado o gerador de trajetórias, enquanto que a figura 7.6(b) mostra comparativamente o ambiente real onde foram validadas as trajetórias obtidas no ambiente de simulação.

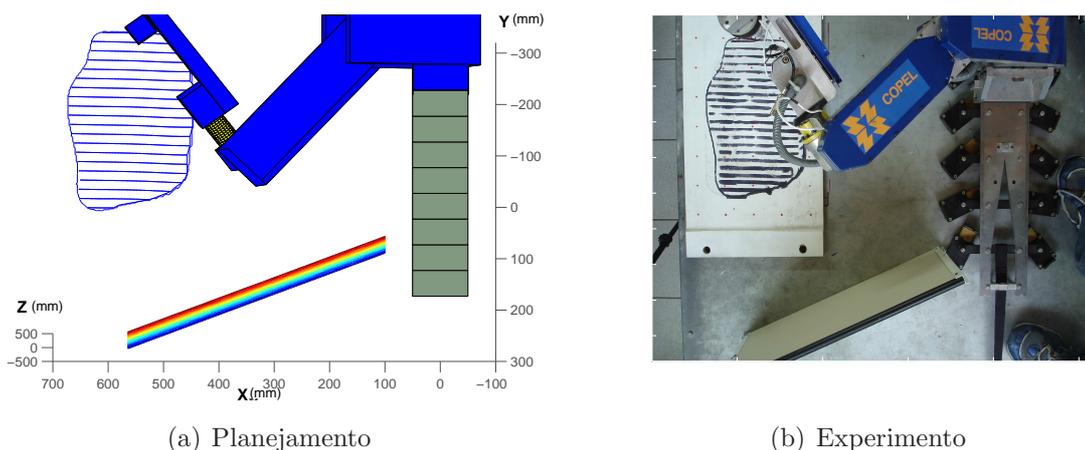


Figura 7.6: Posicionamento inicial do manipulador Roboturb com relação à superfície plana ilustrada no ambiente de planejamento de trajetória e no ambiente real

Para realização do controle de colisão um algoritmo foi desenvolvido e é apresentado na figura 7.7.

Neste algoritmo tem-se as condições iniciais as quais determinam e descrevem os parâmetros que serão utilizados na geração das trajetórias.

Para cada ponto da trajetória cartesiana são calculadas as posições de junta para avaliação da iminência de colisão ou não. A possibilidade de colisão é avaliada calculando-se a distância entre o cotovelo do manipulador Roboturb o ponto sobre a superfície de colisão cuja normal esteja alinhada com a reta que liga o cotovelo a este ponto.

Caso a distância entre o cotovelo e a superfície de colisão seja menor que um valor pré-definido ( $Distmin$ ) a junta  $pzc$  da cadeia virtual de colisão é acionada. O objetivo deste acionamento é posicionar o cotovelo no limite da região de colisão. Neste caso são controlados os erros de fechamento do circuito cinemático de geração de trajetória e de fechamento do circuito cinemático de evitamento de colisão. Uma vez obtidas as posições das juntas secundárias, estas são atualizadas no manipulador e são calculados os erros de fechamento.

Caso a distância entre o cotovelo e a superfície seja maior que  $Distmin$  então as

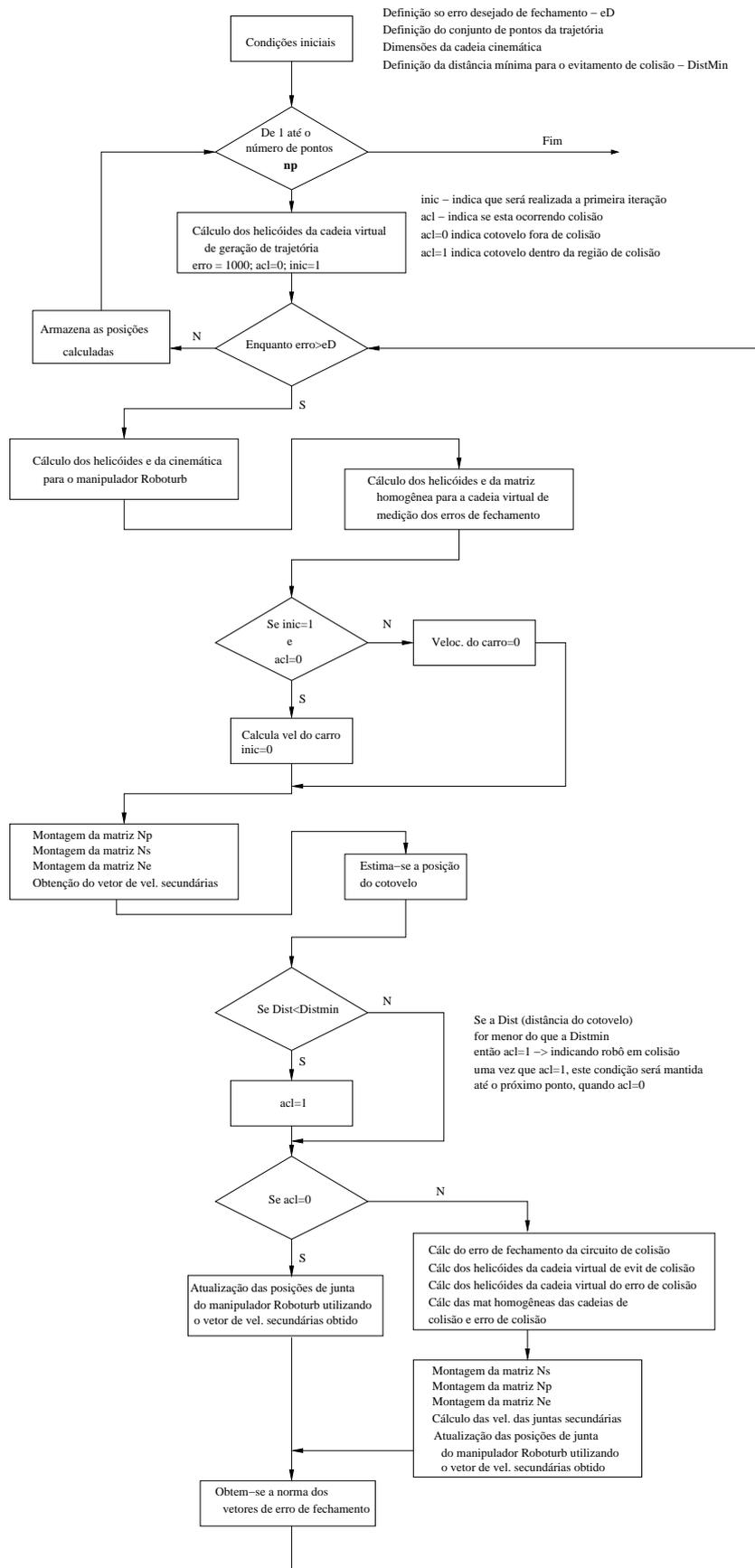


Figura 7.7: Algoritmo para evitamento de colisão

posições das juntas secundárias do manipulador calculadas inicialmente são ajustadas e os erros de fechamento são calculados.

Este procedimento de controle de colisão e erro de fechamento segue iterativamente até que os erros desejados sejam alcançados. Uma vez alcançados parte-se para o próximo ponto da trajetória.

Foram realizadas experimentações para as tarefas de seguimento de trajetória de contorno na região erodida e de deposição da primeira camada de soldagem. As figuras mostradas em 7.4(a) e 7.5(a) apresentam as trajetórias utilizadas para a experimentação do controle e evitamento de colisão.

Em cada trajetória foram obtidos resultados das posições, velocidades e acelerações para as juntas do manipulador Roboturb. São comparados os resultados da utilização ou não do controle de colisão. A próxima seção apresenta estes resultados.

### **7.3.1 Resultados das trajetórias de junta do manipulador Roboturb com controle de colisão**

#### **7.3.1.1 Trajetórias de contorno da região erodida**

A trajetória de contorno da região erodida, obtida no espaço de juntas, foi armazenada em arquivos de posição, velocidade e aceleração das juntas. Cada um dos arquivos em formato ASCII, compõem-se de 7 colunas, onde cada coluna refere-se a cada junta do manipulador. De acordo com a cinemática inversa foram obtidos 92 pontos sobre a trajetória para realização da tarefa.

Para realização da tarefa com o manipulador Roboturb, os valores obtidos foram escalonados para a faixa de operação de cada *encoder* de cada junta do manipulador (SIMAS et al., 2004).

As figuras 7.8 e 7.9 ilustram as posições de juntas obtidas na realização da trajetória de contorno da região erodida, comparando as trajetórias obtidas com controle de colisão e sem o controle de colisão.

Os resultados com desvio de obstáculo indicam que está ocorrendo o controle de colisão proposto no algoritmo.

É possível observar que sem o controle de colisão, ou seja, sem desvios de obstáculos, as posições tem um comportamento com melhor continuidade se comparado com as posições obtidas para o controle de colisão.

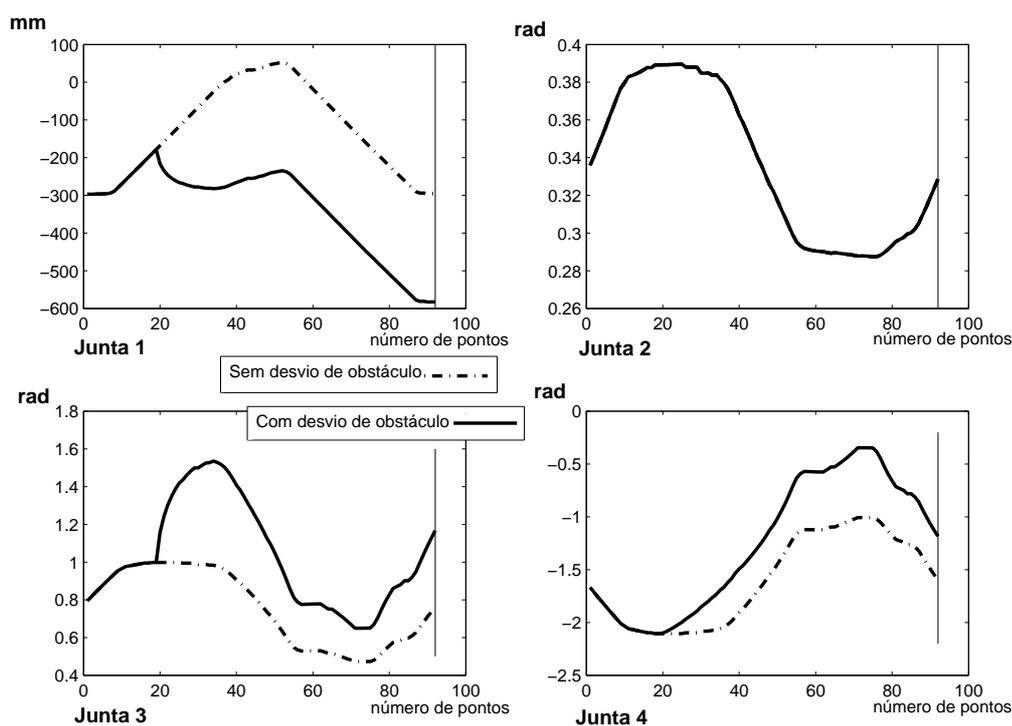


Figura 7.8: Posições das juntas 1 a 4 do manipulador Roboturb na realização do contorno à região erodida

Já quando se usa o controle de colisão observa-se um desvio brusco nas trajetórias das juntas. Na prática o efeito dos desvios nas juntas apresenta-se como um desvio súbito de movimento. Apesar do desvio súbito, o objetivo principal que é o seguimento de trajetória no espaço cartesiano é mantido.

As figuras 7.10 e 7.11 apresentam as velocidades de juntas obtidas na realização da trajetória de contorno da região erodida.

Com relação aos resultados obtidos para as velocidades de junta, o controle de colisão fica mais evidente, como pode ser observado na velocidade da junta 1 (trilho). Na junta 1 ocorre uma descontinuidade que altera a taxa de variação de um valor de 20 mm/s para -80mm/s. Com exceção da junta 2, o mesmo efeito pode ser observado nas demais velocidades de junta.

Na junta 2 ocorre um comportamento praticamente igual quando com ou sem controle de colisão. Isto pode ser observado na posição da junta apresentada anteriormente, na velocidade e na aceleração, apresentada nas figuras 7.12 e 7.13.

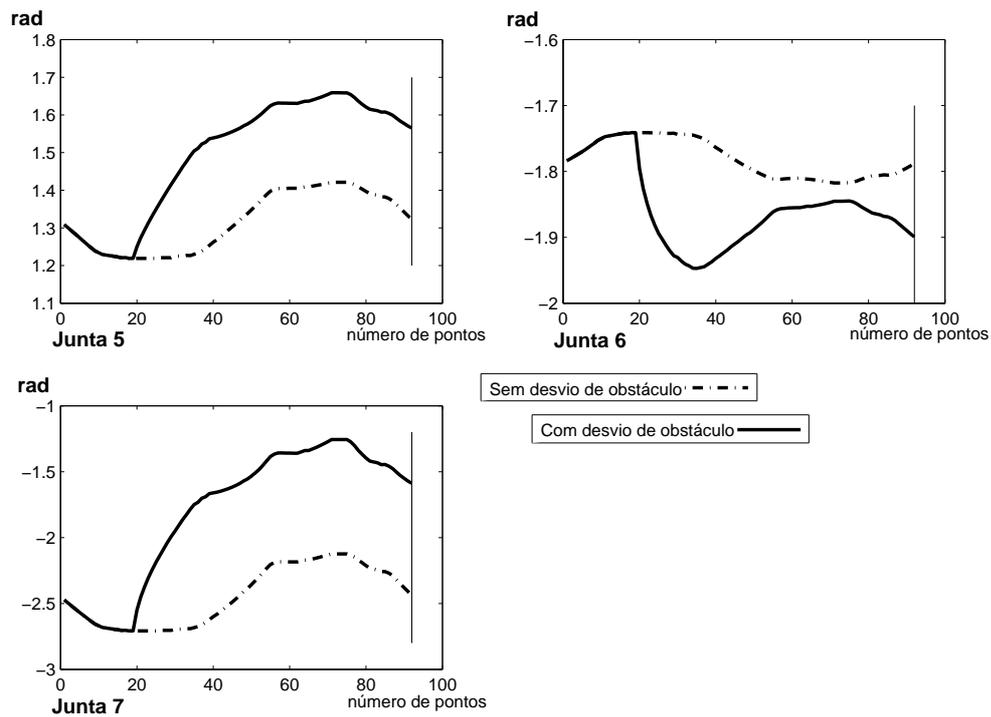


Figura 7.9: Posições das juntas 5 a 7 do manipulador Roboturb na realização do contorno à região erodida

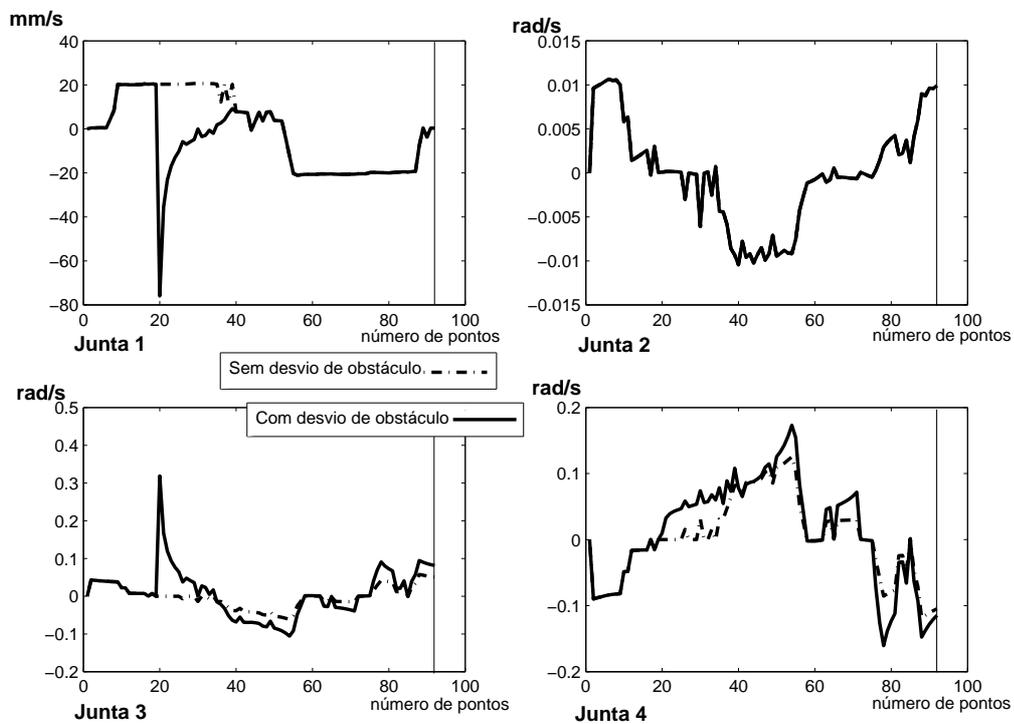


Figura 7.10: Velocidades das juntas 1 a 4 do manipulador Roboturb na realização do contorno à região erodida

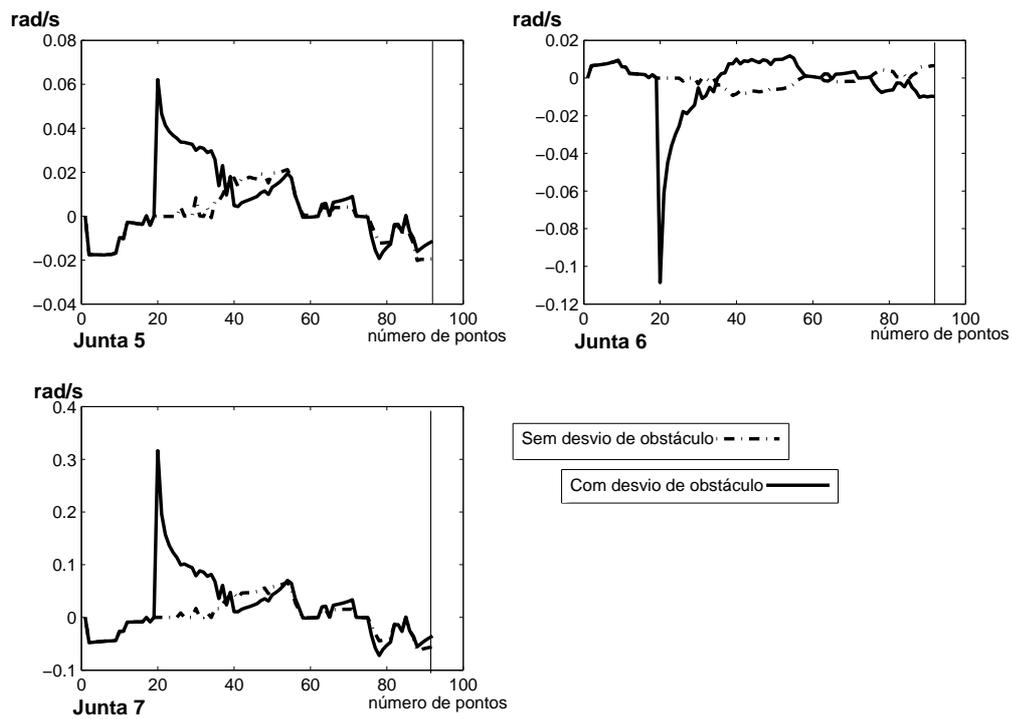


Figura 7.11: Velocidades das juntas 5 a 7 do manipulador Roboturb na realização do contorno à região erodida

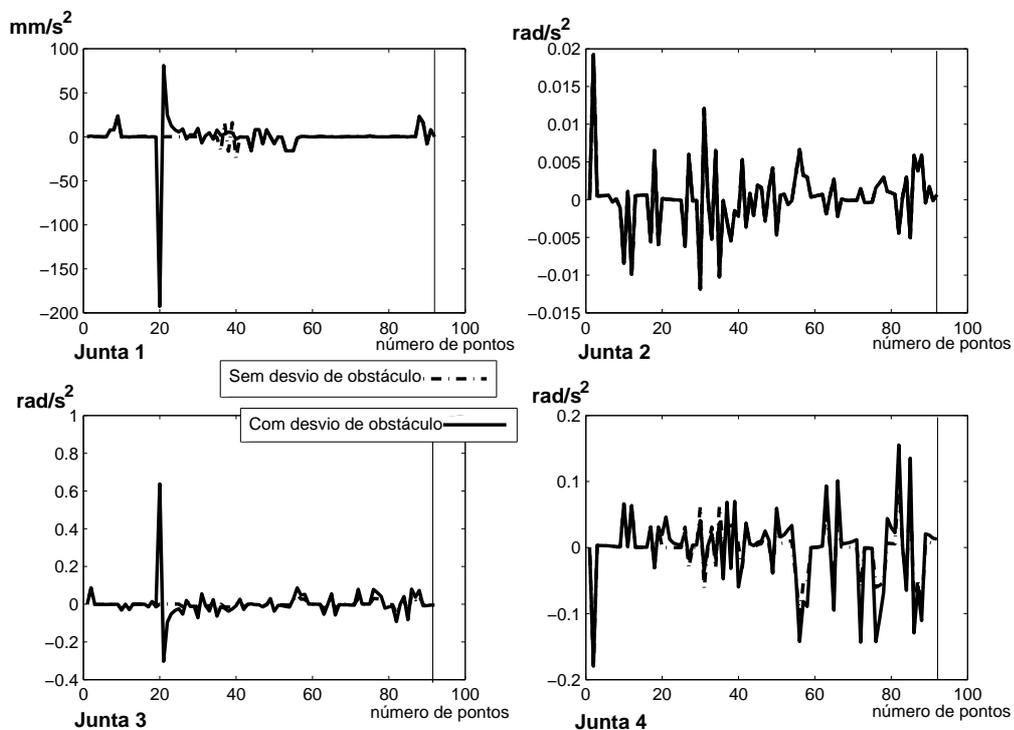


Figura 7.12: Acelerações das juntas 1 a 4 do manipulador Roboturb na realização do contorno à região erodida

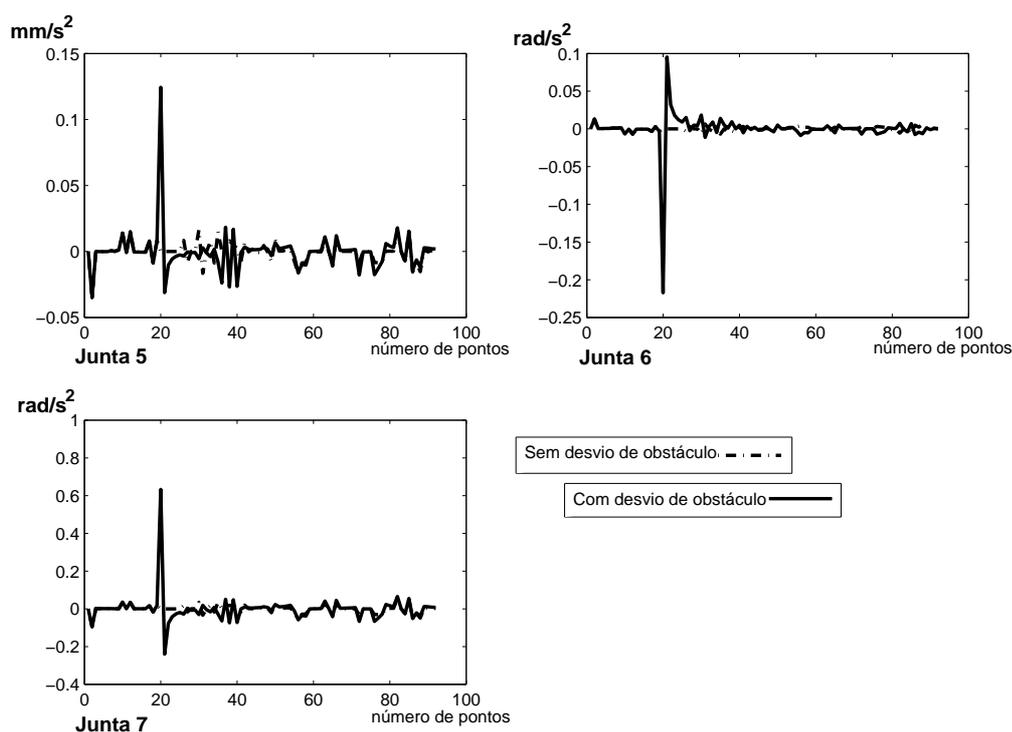


Figura 7.13: Acelerações das juntas 5 a 7 do manipulador Roboturb na realização do contorno à região erodida

As acelerações mostram que ocorre uma mudança brusca de velocidade quando o manipulador encontra a região de colisão. Em todos gráficos os picos de acelerações são decorrentes da variação brusca de velocidades. Não fica evidente nas simulações a saída do controle de colisão.

Apesar das descontinuidades resultantes para as posições, velocidades e acelerações nas juntas, os resultados obtidos na experimentação real representaram adequadamente os movimentos obtidos na simulação.

### 7.3.1.2 Trajetórias de soldagem para deposição da 1ª camada

A trajetória de soldagem no espaço de juntas foi obtida como resultado da cinemática inversa de posição, considerando o controle de colisão. Foram calculados um total de 2295 pontos para realização da deposição de toda primeira camada.

De maneira análoga aos arquivos para a trajetória de contorno, os dados foram armazenados em arquivos ASCII com 7 colunas referentes a cada junta do manipulador.

A figura 7.14 e 7.15 apresentam os resultados obtidos para as posições de juntas. O

resultado mostra uma comparação da cinemática inversa sem o controle de colisão e com controle de colisão.

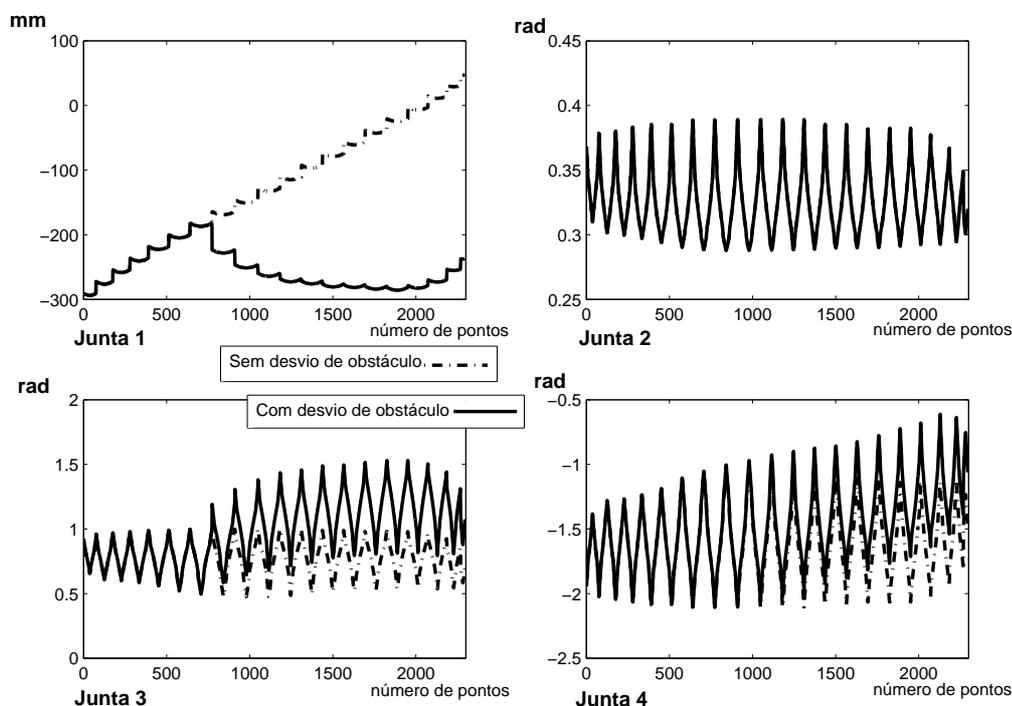


Figura 7.14: Posições das juntas 1 a 4 do manipulador Roboturb na realização da soldagem

Os resultados obtidos para as posições das juntas mostram o controle de colisão ocorrendo a partir do sétimo cordão de solda.

Pode-se observar também que a junta 2 tem praticamente o mesmo comportamento tanto fora quanto sob controle de colisão.

As figuras 7.16 e 7.17 apresentam os resultados para as velocidades de junta na realização da soldagem.

Nos resultados para as velocidades observa-se que o controle de colisão inicia-se no sétimo cordão. No sétimo cordão de solda ocorre uma alteração mais brusca de velocidade evidenciando a ativação do controle de colisão. Este mesmo comportamento é visto em todas demais juntas, com exceção da junta 2 que se mantém indiferente ao controle de colisão.

As figuras 7.18 e 7.19 apresentam os resultados para as acelerações nas juntas na realização da soldagem.

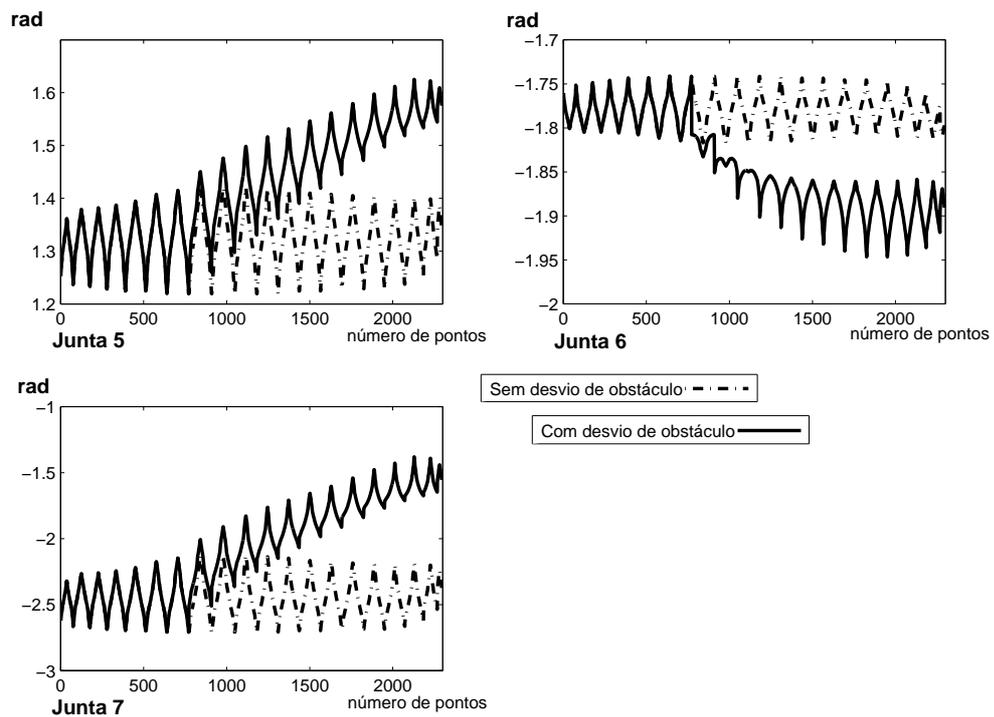


Figura 7.15: Posições das juntas 5 a 7 do manipulador Roboturb na realização da soldagem

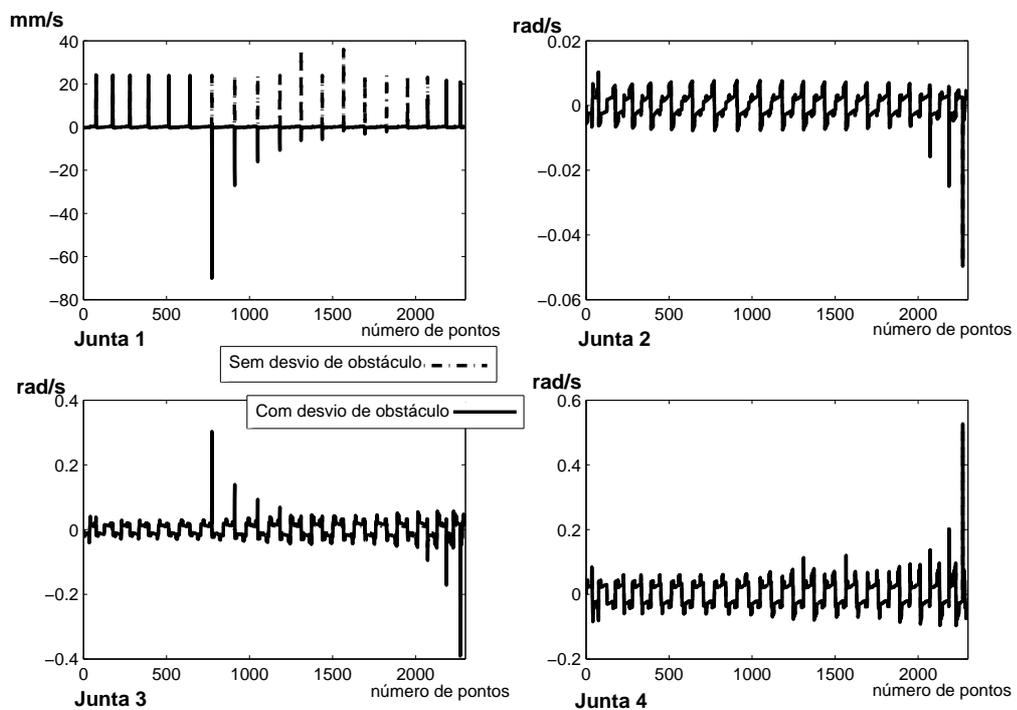


Figura 7.16: Velocidades das juntas 1 a 4 do manipulador Roboturb na realização da soldagem

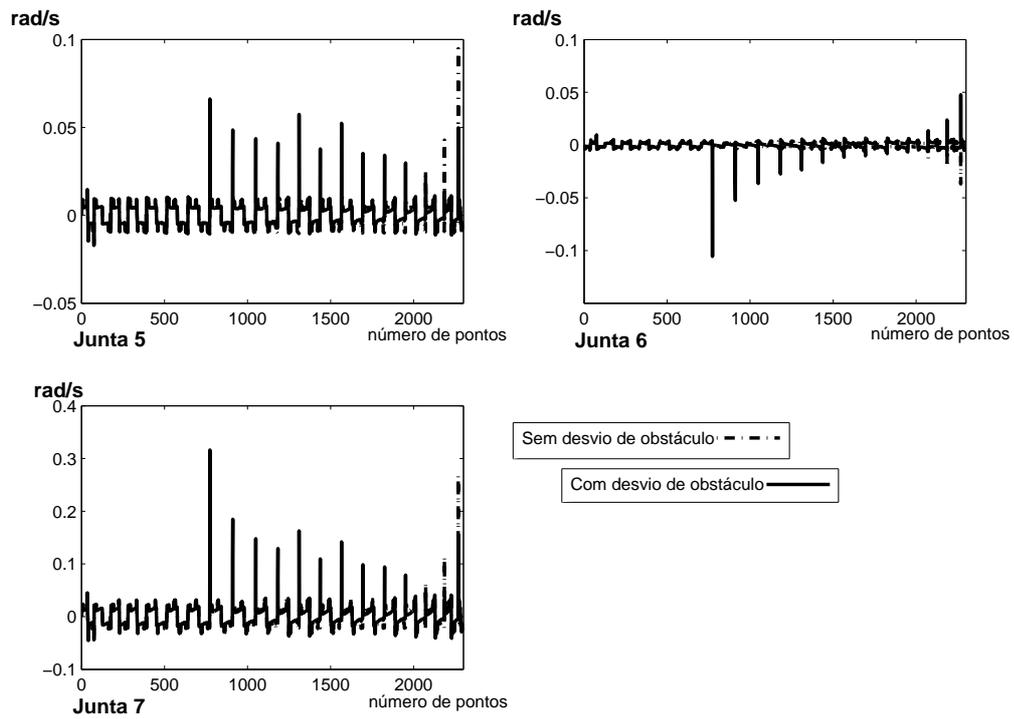


Figura 7.17: Velocidades das juntas 5 a 7 do manipulador Roboturb na realização da soldagem

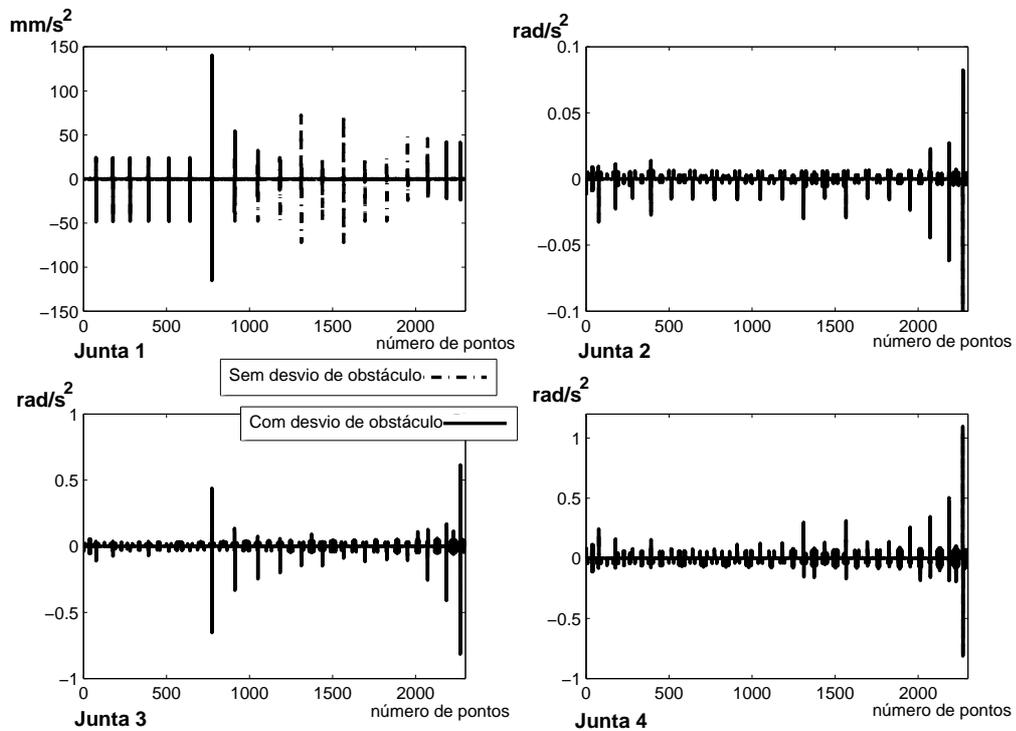


Figura 7.18: Acelerações das juntas 1 a 4 do manipulador Roboturb na realização da soldagem

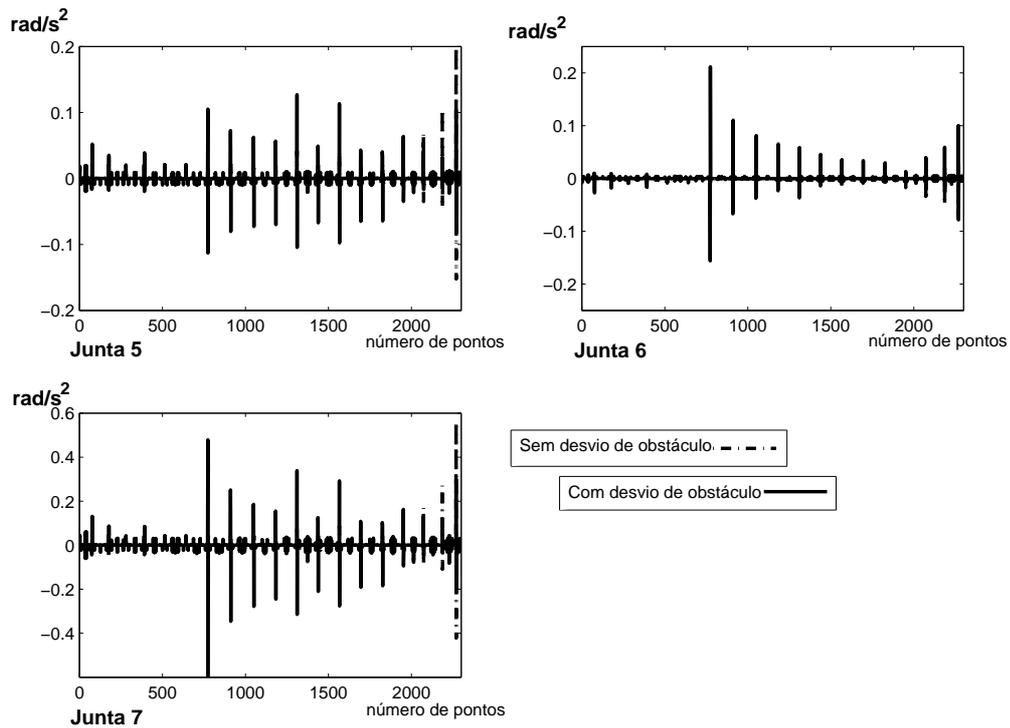


Figura 7.19: Acelerações das juntas 5 a 7 do manipulador Roboturb na realização da soldagem

## 7.4 Conclusão

Foram apresentados neste capítulo os resultados experimentais para o controle de colisão com o manipulador Roboturb. Foram desenvolvidos experimentos práticos para a realização de duas tarefas: o seguimento da trajetória de contorno da região erodida; e o seguimento de trajetória de soldagem para deposição da primeira camada sobre uma superfície.

Os experimentos foram realizados em laboratório a partir de algoritmos especializados que possibilitaram validar as estratégias de controle de colisão, na cinemática inversa.

O algoritmo proposto para realização dos experimentos possibilitou o pleno atendimento das especificações, ou seja: o controle de colisão juntamente com a obtenção da trajetória dentro de uma faixa de erros admissíveis.

Os resultados obtidos mostraram que o controle de colisão provoca em geral, uma alteração de sentido (sinal) na aceleração e conseqüentemente alterações bruscas na velocidade, que resultam em movimentos súbitos do manipulador. Em seis juntas do mani-

pulador este efeito ficou evidente, entretanto na junta 2 (que realiza o movimento entre o ombro e o carro) não ocorreu tal efeito.

Uma possibilidade que pode justificar a manutenção dos deslocamentos da junta 2, relaciona-se ao fato desta junta atuar apenas no movimento vertical da ferramenta (para cima e para baixo na direção  $z$  do sistema de coordenadas de referência). Na experimentação o plano de colisão foi posicionado de tal maneira que o seu vetor normal perpendicular ao eixo  $z$  do sistema de coordenadas de referência, sendo assim a atuação do controle de colisão não interfere na trajetória da junta 2.

Os resultados obtidos e o algoritmo desenvolvido são plenamente aplicáveis na operação do manipulador Roboturb. O próximo passo é a implementação em linguagem de programação.

As experimentações mostraram que o modelo de cinemática diferencial proposto, utilizando as cadeias virtuais de erro comportaram-se de maneira estável, tal como havia sido comprovado, o que permitiu um correto controle sobre o erro das trajetórias obtidas na cinemática inversa.

## 8 Conclusão

Esta tese apresentou uma nova metodologia para obtenção da cinemática inversa em cadeias cinemáticas fechadas. O método proposto aplica-se na solução da cinemática inversa para cadeias fechadas, usando a integração numérica da cinemática diferencial. Neste método é sugerida uma nova proposta de modelamento diferencial, onde os erros decorrentes dos algoritmos de integração são controlados.

O objeto de avaliação desta tese foi aplicado ao manipulador Roboturb. O manipulador Roboturb é um manipulador redundante que opera em ambientes confinados, realizando tarefas de medição e deposição de material pelo processo de soldagem em camadas, recuperando regiões erodidas em pás de turbinas de geradores de grande porte em usinas hidrelétricas.

O planejamento da tarefa foi desenvolvido usando uma metodologia baseada no critério de rugosidade superficial (*Scallop-height*) e o caminho da ferramenta foi calculado usando a estratégia de caminhos paralelos. Esta mesma metodologia permitiu desenvolver um algoritmo de delimitação da área erodida, e o intercalamento de trajetórias em camadas adjacentes. As trajetórias obtidas foram validadas em laboratório, e os testes finais se mostraram aplicáveis nas operações do manipulador Roboturb.

Com intuito de realizar-se uma contextualização referente ao problema de cinemática inversa para manipuladores redundantes, foram apresentadas algumas metodologias de solução baseadas na cinemática inversa diferencial, que tem a matriz Jacobiana como elemento central. No estudo realizado foi detectado que os métodos convencionais possuem limitações, principalmente relacionadas com o uso da pseudoinversa e com singularidades algorítmicas.

Considerando o problema das cadeias fechadas, o método de Davies foi estudado e aplicado ao problema do manipulador Roboturb. Neste estudo, um resultado importante foi provar que o modelo de cinemática diferencial obtido pelo método de Davies, é equivalente ao método do Jacobiano estendido. Foi comprovado também que o Jacobiano

estendido obtido apresentava singularidades relacionadas apenas com a estrutura cinemática, diferente do método convencional, onde singularidades adicionais podem ocorrer além das estruturais (singularidades algorítmicas), o que configura uma vantagem adicional do método proposto nesta tese.

No desenvolvimento do modelo diferencial para cadeias cinemáticas abertas e para imposições de restrições ou tarefas adicionais, foram apresentadas e definidas as cadeias virtuais. O uso de cadeias virtuais conduz a um modelo cinemático diferencial onde a estrutura cinemática é sempre fechada inclusive para manipuladores de cadeia aberta.

Considerando a complexidade do modelo diferencial para cadeias fechadas, a cinemática inversa de posição é obtida a partir de algoritmos numéricos de integração. As posições de juntas obtidas, pela integração numérica da cinemática diferencial, são tais que não é garantido o fechamento da cadeia. Este problema foi tratado nesta tese, através do desenvolvimento de um método para controlar o erro numérico de fechamento de cadeias cinemáticas fechadas.

Este novo método implementado é inovador e fundamenta-se na utilização de cadeias virtuais de medição e de atuação para controle do erro de fechamento em cadeias cinemáticas fechadas, bidimensionais e tridimensionais. Foram desenvolvidos todos os equacionamentos necessários e a sistemática de solução foi apresentada. Também foi discutido o critério da estabilidade da solução proposta.

A validação da aplicação do método foi realizada num mecanismo de 4 barras e no levantamento do modelo da cinemática diferencial para o manipulador Roboturb, considerando o evitamento de colisão.

Para validação dos resultados dois estudos foram realizados. Primeiramente foi analisada a cinemática inversa para uma cadeia cinemática fechada bidimensional, o mecanismo de quatro barras; o segundo estudo consistiu no desenvolvimento de uma solução aplicada ao espaço tridimensional, para a cinemática inversa para o manipulador do Roboturb, considerando uma estratégia de evitamento de colisão. Os resultados obtidos nestas aplicações comprovaram que a sistemática proposta é válida e que os equacionamentos podem ser plenamente aplicados na prática.

Ao final um conjunto de experimentações mostrou a funcionalidade do modelamento da cinemática diferencial. Foi aplicado o método de Euler de integração numérica e as posições de junta calculadas, quando aplicadas ao manipulador, em simulação e em ambiente real de experimentação, conduziram a ferramenta de operação com erro controlado

dentro da trajetória desejada evitando a colisão do cotovelo do manipulador Roboturb com um plano posicionado dentro do volume de trabalho..

Os resultados obtidos e o algoritmo desenvolvido são plenamente aplicáveis na operação do manipulador Roboturb.

As experimentações mostraram que o modelo de cinemática diferencial proposto, utilizando as cadeias virtuais de erro comportaram-se de maneira estável nas experimentações. Isso permitiu um controle correto sobre o erro das trajetórias obtidas na cinemática inversa.

## 8.1 Contribuições do trabalho de tese

O desenvolvimento desta tese de doutorado destaca as seguintes contribuições descritas ao longo deste trabalho:

- Uma metodologia para obtenção de caminhos paralelos sobre superfícies livres, com objetivo da geração de trajetórias de soldagem, para o recobrimento de superfícies;
- Uma metodologia para obtenção de caminhos intercalados paralelos em camadas de deposição para o processo de preenchimento de cavidades erodidas por cavitação;
- Uma metodologia para obtenção da curva de intersecção entre superfícies livres adaptado ao problema de identificação da delimitação de regiões cavitadas;
- Um algoritmo iterativo aplicado à recuperação de cavidades erodidas pelo processo de cavitação;
- A prova de que o método das restrições cinemáticas é equivalente ao método do Jacobiano estendido, sem os problemas de singularidades algorítmicas;
- O desenvolvimento de uma nova metodologia de modelamento da cinemática diferencial aplicado a cadeias cinemáticas fechadas. O método proposto tem como objetivo principal controlar o erro numérico quando são aplicados métodos de integração numérica para obtenção da cinemática inversa de posição;
- Uma estratégia de evitamento de colisão.

## 8.2 Perspectivas e trabalhos futuros

A generalização proposta para os modelos cinemáticos diferenciais de mecanismos, tratando-os sempre como cadeias fechadas associada a possibilidade de utilização de métodos numéricos, com estabilidade, para obtenção da cinemática inversa abre uma série de possibilidades de trabalho.

Uma evolução natural deste trabalho é o evitamento de colisão monitorando paralelamente várias juntas.

Observa-se em alguns trabalhos a dificuldade da obtenção do modelo cinemático de posição e diferencial. Este último muitas vezes não é tratado por sua complexidade, como os manipuladores paralelos Eclipse-I e Eclipse-II (KIM et al., 2001). Análises já realizadas mostraram que é possível obter o modelo de cinemática diferencial destes manipuladores e simulações já foram realizadas com resultados promissores.

O método proposto tem aplicações em trabalhos de pesquisa e desenvolvimento que envolvam a necessidade de obtenção da cinemática inversa de posição, tanto para mecanismos ou manipuladores de cadeia aberta ou fechada.

Estudos podem ser realizados para o levantamento de modelos diferenciais para força e momentos incluindo cadeias de erro de forças e momentos.

Uma análise de grande valor, e não aprofundada neste trabalho, é o tratamento diferencial da orientação. A obtenção das variáveis de junta por métodos numéricos para uma dada velocidade angular desejada é instável para "grandes" variações de orientações. (SCIAVICCO; SICILIANO, 1996) trata deste assunto de acordo com uma heurística onde propõe que as variações angulares de orientação devam ser suficientemente pequenas. Simulações mostraram que existe sim um limite, mas não foi possível determinar quais seriam estes limites.

## 8.3 Conclusão final

Algumas das perspectivas deste trabalho já foram plenamente cumpridas. Paralelo ao desenvolvimento desta tese, uma dissertação de mestrado tratou do problema dos transitórios de Jacobianos, no evitamento de colisão. Para determinadas situações podem ocorrer variações bruscas de velocidade e aceleração. Cruz (2007) desenvolveu uma estratégia de suavização de transitórios de velocidade e acelerações quando ocorrem mu-

danças de Jacobianos. Os resultados foram plenamente validados em laboratório.

Vários trabalhos de mestrado e doutorado vem sendo desenvolvidos no laboratório de robótica da UFSC, e alguns destes utilizam de maneira eficaz o método proposto.

## *Referências*

- ANTONELLI, G. *Underwater Robots: Motion and Force Control of Vehicle-manipulator Systems*: Springer-Verlag, 2003.
- ANTONELLI, G.; CHIAVERINI, S. Task-priority redundancy resolution for underwater vehicle-manipulator systems. In: *Proceedings of the 1998 IEEE International Conference on Robotics and Automation*. Leuven, Belgium: 1998. p. 768–773.
- BEHESHTI, M.; TEHRANI, A. Obstacle avoidance for kinematically redundant robots using an adaptive fuzzy logic algorithm. In: *Proceeding of the American Control Conference*. San Diego, California, USA: 1999. p. 1371–1375.
- BIER, C. C. *Implementação de um Algoritmo de Controle de Força em um Manipulador do Tipo SCARA*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Santa Catarina-UFSC, Florianópolis, SC, maio 2000.
- BONACORSO, N. G. *Automatização dos processos de medição de superfícies e de deposição por soddagem visando a recuperação de rotores de turbinas hidráulicas de grande porte*. Tese (Tese de doutorado) — Universidade Federal de Santa Catarina, Agosto 2004.
- BOTTEMA, O. O. *Theoretical kinematics / O. Bottema, B. Roth*. Amsterdam ; New York : New York: North-Holland Pub. Co. ; sole distributors for the U.S.A. and Canada, Elsevier/North-Holland,, 1979.
- BRADY, M. e. a. *Robot motion: planning and control*. MIT Press, 1983.
- BURDEN, R.; FAIRES, J. *Análise Numérica*. Pioneira Thomson Learning, 2003.
- CAMPOS, A. A. *Cinemática diferencial de manipuladores empregando cadeias virtuais*. Tese (Tese de doutorado) — Universidade Federal de Santa Catarina, 2004.
- CARBONI, A. P. *Análise Conceitual de Estruturas Cinemáticas Planas e Espaciais*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Santa Catarina, 2008.
- CHI-HAUR, S.; YOUNG, K.-Y. A heuristic approach to robot path planning based on task requirements using a genetic algorithm. *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, v. 16, n. 1, p. 65–88, May 1996.
- DAVIES, T. Freedom and constrain in coupling networks. In: *Proceedings IMechE*. 2006. v. 220 Part C, p. 989–1010.
- DING, H.; LI, H. X. Fuzzy avoidance control strategy for redundant manipulators. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, v. 12, p. 513–521, March 1999.

- DOUGHTY, S. *Mechanics of Machines*. John Wiley & Sons, Inc., 1988.
- FARIN, G. *Curves and Surfaces for CADG: A Practical Guide*. 3. ed. Academic Press Inc, 1992.
- FONTAN, D. *Implementação da Cinemática Inversa de Robôs Redundantes Operando em Ambientes Confinados no Projeto Roboturb*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Santa Catarina, 2007.
- FREUND, E.; SCHLUSE, M.; ROSSMAN, J. Dynamic collision avoidance for redundant multi-robot system. In: IEEE. *Proceedings of the 2001 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*. Maui, Hawaii, USA, 2001. p. 1201–1206.
- GARCIA, E.; JIMENEZ, M. A.; SANTOS, P. G.; ARMADA, M. The evolution of the robotics research. *IEEE Robotics and Automation Magazine*, p. 2–15, March 2007.
- GIBSON, C. G.; HUNT, K. H. Geometry of screw systems: Part 1—screws: Genesis and geometry. *Mechanism and Machine Theory*, v. 2, p. 307–327, 1988.
- GUENTHER, R.; SIMAS, H.; CRUZ, D. F. M.; MARTINS, D. A new integration method for differential inverse kinematics of closed-chain robots. In: *19th International Congress of Mechanical Engineering - COBEM 2007*. 2007.
- GUENTHER, R.; SIMAS, H.; PIERI, E. R. D. Concepção cinemática de um manipulador para volumes de trabalho restrito. In: *Anais do Congresso Nacional de Engenharia Mecânica - CONEM*. Natal, RN: 2000.
- HUANG, Y.; OLIVER, J. H. Nc milling error assessment and tool path correction. In: *SIGGRAPH '94: Proceedings of the 21st annual conference on computer graphics and interactive techniques*. New York, NY, USA: ACM Press, 1994. p. 287–294.
- HUNT, K. H. Don't cross-thread the screw! In: UNIVERSITY OF CAMBRIDGE. *Proceeding of A Symposium Commemorating the Legacy, Works, and Life of Sir Robert Stawell Ball Upon the 100th Anniversary of A Treatise on the Theory of Screws*. 2000.
- KHOOGAR, A.; PARKER, J. Obstacle avoidance of redundant manipulators using genetic algorithms. In: *Proceedings of the 1991 IEEE Southeastcon*. IEEE, 1991. v. 1, p. 317–320.
- KIM, J.; HWANG, J.; PARK, F. C. Eclipse-II: A new parallel mechanism enabling continuous 360-degree spinning plus three-axis translational motion. In: IEEE (Ed.). *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*. Seoul, Korea: 2001. p. 3274–3279.
- KIM, S.; LEE, J. Resolved motion rate control of redundant robots using fuzzy logic. In: IEEE. *Proceedings of Second IEEE International Conference on Fuzzy Systems*. San Francisco, USA, 1993. p. 333–338.
- LONEY, G. C.; OZSOY, T. M. Nc machining of free form surfaces. *Comput. Aided Des.*, Butterworth-Heinemann, Newton, MA, USA, v. 19, n. 2, p. 85–90, 1987.

- MARAI, G.; KIM, J.; YUH, J.; CHUNG, W. K. A real-time approach for singularity avoidance in resolved motion rate control of robotic manipulators. In: IEEE. *Proceedings of the 2002 IEEE International Conference on Robotics and Automation*. Washington, USA, 2002. p. 1973–1978.
- MARTINS, D. *Análise Cinemática hierárquica de robôs manipuladores*. Tese (Tese de doutorado) — PG-EMC- Universidade Federal de Santa Catarina, 2002.
- MARTINS, D.; GUENTHER, R. Hierarchical singularity analysis of robots. In: ESPINDOLA, J. J.; LOPES, E. M. O.; BAZAN, F. S. V. (Ed.). *Proceedings of the Nineth International Symposium on Dynamic Problems in Mechanics -IX DINAME*. Florianopolis: Brazilian Society of Mechanical Sciences, 2001. p. 219–224.
- NEARCHOU, A. C.; ASPRAGATHOS, N. A. A genetic path planning algorithm for redundant articulated robots. *Robotica*, Cambridge University Press, New York, NY, USA, v. 15, n. 2, p. 213–224, 1997.
- NEARCHOU, A. C.; ASPRAGATHOS, N. A. Collision-free cartesian trajectory generation using raster scanning and genetic algorithms. *J. Intell. Robotics Syst.*, Kluwer Academic Publishers, Hingham, MA, USA, v. 23, n. 2-4, p. 351–377, 1998..
- PAVLIN, G. *Automatic Position Analysis of Spatial Kinematic Chains*. Dissertação (Mestrado) — Institut für Mechanik, TU-Wien, Austria, 1995.
- PINTO, T. L. F. *Desenvolvimento de uma metodologia para avaliação de desempenho de um sistema automatizado para recuperação de turbinas hidráulicas de grande porte*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Santa Catarina, 2001.
- QIULIN, D.; DAVIES, B. *Surface engineering geometry for computer-aided design and manufacture*. Ellis Horwood Limited, 1987.
- QUINTINO L. E SANTOS, J. L. O. *Automatização e robotização em soldadura*. Instituto de Soldadura e Qualidade, 1992.
- RAMDANE-CHERIF, A. MEDDAH, D. Y.; PERDEREAU, V.; DROUIN, M. Inverse kinematic solution based on lyapunov function for redundant and non-redundant robots. In: IEEE. *Proceedings of the 1997 International Symposium on Computational Intelligence in Robotic and Automation (CIRA '97)*. 1997.
- SANTOS, C. H. *Movimento Coordenado de Sistemas Veículo Manipulador Submarinos utilizando Técnicas de Inteligência Artificial e Sistemas Híbridos*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Santa Catarina, 2006.
- SARMA, R.; DUTTA, D. The geometry and generation of nc tool paths. *Journal of Mechanical Design*, v. 119, p. 253–258, June 1997.
- SCIAVICCO, L.; SICILIANO, B. *Modeling and control of robot manipulator*. McGraw-Hill Companies, 1996.
- SIMAS, H.; CRUZ, D. F. M.; GUENTHER, R.; MARTINS, D. A collision avoidance method using Assur virtual chains. In: *19th International Congress of Mechanical Engineering - COBEM 2007*. 2007.

- SIMAS, H.; GUENTHER, R. *Roboturb - Relatório interno da equipe de robótica*. 2000.
- SIMAS, H.; MARTINS, D.; GUENTHER, R. Cinemática inversa de robôs via helicóides. In: *COBEM 2001*. 2001.
- SIMAS, H.; MARTINS, D.; GUENTHER, R. A redundant manipulator to operate in confined spaces. In: *VI INDUSCON - Conferência Internacional de Aplicações Industriais*. Joinville,SC: 2004.
- SIMAS H. DIAS, A.; GUENTHER, R. A scallop-height based algorithm to compute parallel paths on parametric surfaces. In: *19th International Congress of Mechanical Engineering - COBEM 2007*. 2007.
- SURESH, K.; YANG, D. H. Constant scallop-height machining of free-form surface. *Journal of engineering industry*, v. 116, p. 254–259, May 1994.
- TANAKA, H.; TAKAHARA, M.; MINAMI, M. Trajectory tracking control redundant manipulators based on avoidance manipulability. In: *Proceedings SICE Annual Conference in Sapporo*, 2004.
- TONETTO, C. *Uma proposta de sistematização do processo de planejamento de trajetórias para o desenvolvimento de tarefas de robôs manipuladores*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Santa Catarina, 2007.
- TSAI, L.-W. *Robot Analysis: the Mechanics of serial and parallel manipulators*. New York: John Wiley & Sons, 1999.
- TSAI, L.-W. *Mechanism design : enumeration of kinematic structures according to function*. CRC-Press, 2000.
- WANG, C.; KUMAR, V.; CHIU, G. A motion control and obstacle avoidance algorithm for hyper redundant manipulators. In: *Proceedings of the 1998 International Symposium on Underwater Technology*. Tokyo, Japan: 1998. p. 466–471.
- WANG, J.; HU, Q.; JIANG, D. A lagrangian network for kinematic control of redundant robot manipulator. *IEEE Transactions on Neural Networks*, v. 10, n. 5, p. 1123–1132, September 1999.
- WHITNEY, D. Resolved motion rate control of manipulators and human prostheses. *IEEE Transactions on Man-Machine Systems*, v. 10, n. 2, p. 47–53, June 1969.
- XIE, H.; KALAYCOIGLU, S.; PATEL, R. V.; ASMER, H. Real-time collision avoidance for a redundant manipulator in an unstructured environment. In: IEEE (Ed.). *Proceedings of the 1998 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*. Victoria, Canada, 1998. p. 1925–1930.
- ZEID, I. *CAD/CAM - Theory and Practic*: McGraw-Hill-New York, 1991.
- ZERGEROGLU, E.; DAWSON, D. M.; WALKER, I.;BEHAL, A. Nonlinear tracking control of kinematically redundant robot manipulators. In: *Proc. American Control Conference*: 2000. v. 4, p. 2513–2517.

---

ZHANG, Y.; WANG, J. Obstacle avoidance for kinematically redundant manipulators using a dual neural networking. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics-Part B: Cybernetics*, v. 34, n. 1, p. 752–759, February 2004.

# *APÊNDICE A – Análise da cinemática direta de posição pela notação de helicóides sucessivos*

## **A.1 Introdução**

A aplicação mais comum dos helicóides é na descrição da cinemática direta diferencial de um mecanismo. Um problema ainda não totalmente dominado e entendido é a utilização dos helicóides sucessivos no tratamento da cinemática de posição. A cinemática de posição consiste na descrição da localização do efetuador de uma cadeia cinemática, ou de um ponto qualquer sobre um corpo qualquer, em relação a um sistema de coordenadas definido como base.

A aplicação da teoria de helicóides para análise da cinemática diferencial implica que a descrição da cinemática de posição precisa ser representada de uma forma adequada. A cinemática de posição serve de referência para levantamento dos vetores  $s$  e  $s_o$  que são utilizados para obtenção dos helicóides de cada junta.

O método de Denavit-Hartenberg tem sua praticidade e sistematização bem reconhecidas, entretanto o método possui limitações. As limitações do método surgem em função das regras e procedimentos que o definem, tais como:

- O eixo  $z$  do sistema de coordenadas de um corpo é sempre alinhado ao eixo de uma junta, com exceção do efetuador, o qual este eixo é definido de forma arbitrária;
- A posição de uma junta rotativa entre dois elos, é definida pelo ângulo formado entre as normais comuns entre estes dois elos. A normal comum define a posição e direção do eixo  $x$  do sistema de coordenadas de um elo;

- As regras do método de Denavit-Hartenberg fazem com que a postura inicial de uma cadeia cinemática seja única, ou seja, se todos ângulos e deslocamentos prismáticos estiverem na posição zero, a configuração cinemática do robô não pode ser alterada.

O método dos helicóides sucessivos permite a definição de uma postura inicial adequada a cada situação em que o manipulador é aplicado e a esparsidade dos helicóides é obtida através de um adequado posicionamento de um sistema de coordenadas de referência (SIMAS; GUENTHER, 2000)(MARTINS; GUENTHER, 2001).

## A.2 Descrição da cinemática de posição pelo método dos helicóides sucessivos

Para iniciar a análise consideremos uma cadeia cinemática composta por um único elo e uma única junta, como mostra a figura A.1

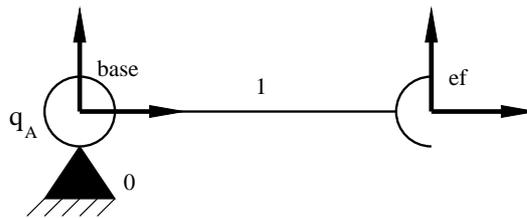


Figura A.1: Cadeia cinemática com uma junta.

Neste exemplo a base é colocada com o eixo  $z$  coincidente com a junta  $A$ . A junta  $A$  representa o movimento de rotação entre os corpos 1 e 0.

O objetivo é encontrar a matriz homogênea que descreve a localização do efetuador, na extremidade do corpo 1, em relação à base dado um deslocamento rotativo  $q_A$ .

Considerando o sistema de referência helicoidal coincidente à base e fixo ao corpo 0 tem-se os seguintes parâmetros do helicóide associado (TSAI, 1999):

junta	$s$	$s_o$	$t$	$q$
$A$	0, 0, 1	0, 0, 0	0	$q_A$

Por estes parâmetros e utilizando a matriz homogênea de Rodrigues (TSAI, 1999), é possível obter a matriz homogênea para este deslocamento helicoidal, como segue na equação A.1.

$$A_A = \begin{bmatrix} \cos(q_A) & -\text{sen}(q_A) & 0 \\ \text{sen}(q_A) & \cos(q_A) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

É possível observar que independentemente do corpo em que estará fixo o sistema de coordenadas de referência a matriz homogênea será sempre igual à obtida em A.1. Esta matriz muda se o sistema de coordenadas de referência for mudado de posição ou orientação.

A matriz homogênea obtida em A.1 representa uma rotação simples do sistema de coordenadas do corpo 1 em relação ao sistema de coordenadas do corpo 0. Isto porque a junta  $A$  representa a rotação do corpo 1 em relação ao corpo 0 da cadeia cinemática.

Aplicando uma rotação na junta  $q_A$ , tem-se a seguinte configuração da cadeia cinemática mostrada na figura A.2.

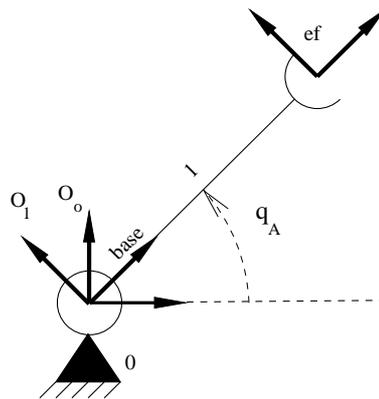


Figura A.2: Rotação da junta  $q_A$

Observando a figura A.2 é possível verificar que para se obter a matriz homogênea que, descreve a localização do efetuador em relação ao sistema de coordenadas base, é necessário pós-multiplicar a matriz obtida em A.1 pela matriz que descreve a localização do efetuador em relação à referência dos helicóides  ${}^{ref}\overline{A}_{ef}$ . Esta matriz é fixa se apresenta como um parâmetro da cinemática direta definida na postura inicial do robô.

Assim, analisando a postura inicial na figura A.1 é possível obter a matriz homogênea,  ${}^{ref}\overline{A}_{ef}$  na equação A.2.

$${}^{ref}\overline{A}_{ef} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & L_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

onde  $L_1$  representa o comprimento do corpo 1.

Pós-multiplicação de A.1 por A.2 tem-se a equação A.3.

$$A_A \text{ }^{ref}\overline{A}_{ef} = {}^b A_{ef} = \begin{bmatrix} \cos(q_A) & -\text{sen}(q_A) & L_1 \\ \text{sen}(q_A) & \cos(q_A) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

Realizando uma alteração do corpo em que é fixo o sistema de coordenadas de referência, ou seja, mudando do corpo 0, para o corpo 1, a mesma relação também é obtida tal como mostrada na equação A.3. Entretanto a observação do deslocamento da junta  $q_A$  pode ser definida como mostra a figura A.3

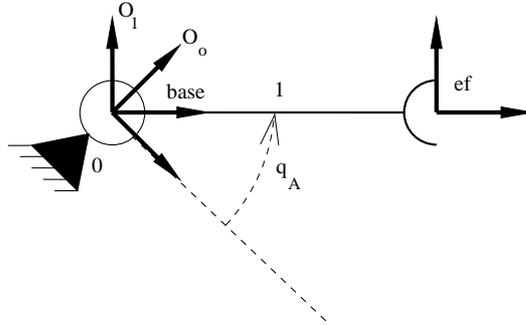


Figura A.3: Referência dos helicóides fixo no corpo 1

Uma segunda análise pode ser realizada, mudando a posição do sistema de coordenadas dos helicóides de maneira que este fique paralelo ao sistema de coordenadas do efetuator. Neste caso, tomando a figura A.1 como postura inicial da cadeia, tem-se os parâmetros do helicóide da junta A:

junta	s	so	t	q
A	0, 0, 1	-L <sub>1</sub> , 0, 0	0	q <sub>A</sub>

Substituindo estes parâmetros na matriz de Rodrigues, obtém-se a matriz homogênea  $A_A$ , agora em relação a esta nova referência.

$$A_A = \begin{bmatrix} \cos(q_A) & -\text{sen}(q_A) & L_1(\cos(q_A) - 1) \\ \text{sen}(q_A) & \cos(q_A) & L_1\text{sen}(q_A) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.4})$$

Considerando o sistema de coordenadas de referência fixo no corpo 1, a matriz ho-

homogênea apresentada em A.4 representa geometricamente o deslocamento entre o sistema de coordenadas  $O_1$  em relação ao sistema de coordenadas  $O_0$  como mostra a figura A.4, de acordo com um deslocamento positivo da junta  $A$

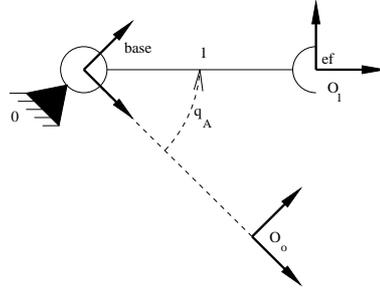


Figura A.4: Referência dos helicóides fixo no corpo 1 e coincidente com o efetuador.

Na análise da figura A.4 é possível observar que a localização do efetuador em relação à base é obtida pela pré-multiplicação da matriz obtida em A.4 pela matriz que descreve a localização do sistema de coordenadas de referência dos helicóides em relação ao sistema de coordenadas da base. Esta matriz também pode ser obtida a partir da postura inicial e de acordo com a figura A.1 a matriz homogênea é a mesma apresentada em A.2. Tem-se como resultado:

$${}^{ref}\bar{A}_{ef}A_A = {}^b A_{ef} = \begin{bmatrix} \cos(q_A) & -\text{sen}(q_A) & L_1 \\ \text{sen}(q_A) & \cos(q_A) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.5})$$

Escrevendo  $A_{A_b}$  como sendo a matriz homogênea  $A_A$  descrita pela referência paralela à base e  $A_{A_{ef}}$  como sendo a matriz homogênea  $A_A$  descrita pela referência paralela ao efetuador tem-se a seguinte igualdade, obtida dos resultados de A.3 e A.5.

$$A_{A_b} {}^{ref}\bar{A}_{ef} = {}^{ref}\bar{A}_{ef} A_{A_{ef}} \quad (\text{A.6})$$

De maneira geral podemos definir o problema da cinemática de posição de maneira geral considerando os seguintes aspectos:

Seja uma cadeia cinemática composta por juntas rotativas e prismáticas enumeradas de 1 a  $n$ . Cada junta descreve o deslocamento entre dois corpos sucessivos desde uma base, definida pelo corpo 0 até o último corpo da cadeia, definido corpo  $n$ . Desta maneira a junta  $i$  descreve o movimento relativo entre o corpo  $i$  e o corpo  $i - 1$ . Consideremos também que os sistemas da base, referência e do efetuador, não sejam necessariamente paralelos aos sistemas de coordenadas do corpo 0 da base, corpo de referência  $r$  e do

efetuador  $n$ , mas sim fixos em relação a estes respectivamente.

A obtenção da localização de um ponto sobre um corpo  $k$  da cadeia em relação à um corpo  $c$  da mesma cadeia pode ser dada pela equação A.7.

$${}^c A_k = {}^c \bar{A}_r \left( \prod_{i=c+1}^k {}^r A_{q_i} \right) {}^r \bar{A}_k \quad (\text{A.7})$$

onde  $r$  indica o corpo ao qual o sistema de coordenadas é fixo;  ${}^c A_k$  é a matriz homogênea que descreve a localização de um ponto sobre o corpo  $k$  em relação a um sistema de coordenadas descrito no corpo  $c$ ;  ${}^c \bar{A}_r$  é a matriz homogênea definida na postura inicial da cadeia que descreve a localização do sistema de coordenadas de referência fixo ao corpo  $r$  em relação ao sistema de coordenadas  $c$ ;  ${}^r \bar{A}_k$  é a matriz homogênea também definida na postura inicial que descreve a localização do sistema de coordenadas do ponto sobre o corpo  $k$  em relação à referência sobre o corpo  $r$  e  ${}^r A_{q_i}$  é a matriz homogênea que descreve o deslocamento relativo entre os corpos  $i$  e  $i - 1$  descrita através de helicóides definidos em relação ao sistema de coordenadas de referência  $r$ .

### A.3 Exemplo de aplicação

Considere um mecanismo composto por seis corpos identificados desde o corpo 0, que define a base, até o corpo 5 onde encontra-se o efetuador. Cada elo  $i$  da cadeia possui um comprimento  $L_i$  e cada junta rotativa  $q_i$  que descreve o movimento relativo entre os corpos  $i$  e  $i - 1$ . Para este exemplo fixou-se um sistema de coordenadas de referência na posição exata do meio do corpo 3, como mostra a figura A.5.

Considerando uma postura inicial onde todas juntas são posicionadas com ângulo 0, obtém-se os parâmetros dos eixos helicoidais  $s$  e  $s_0$ , como mostra a tabela abaixo:

<i>junta</i>	<i>s</i>	<i>s<sub>0</sub></i>	<i>t</i>	<i>q</i>
1	0, 0, 1	$-(L_1 + L_2 + \frac{L_3}{2}), 0, 0$	0	$q_1$
2	0, 0, 1	$-(L_2 + \frac{L_3}{2}), 0, 0$	0	$q_2$
3	0, 0, 1	$-(\frac{L_3}{2}), 0, 0$	0	$q_3$
4	0, 0, 1	$\frac{L_3}{2}, 0, 0$	0	$q_4$
5	0, 0, 1	$\frac{L_3}{2} + L_4, 0, 0$	0	$q_5$

Deseja-se obter a cinemática direta a qual decreve a localização do efetuador, ou seja

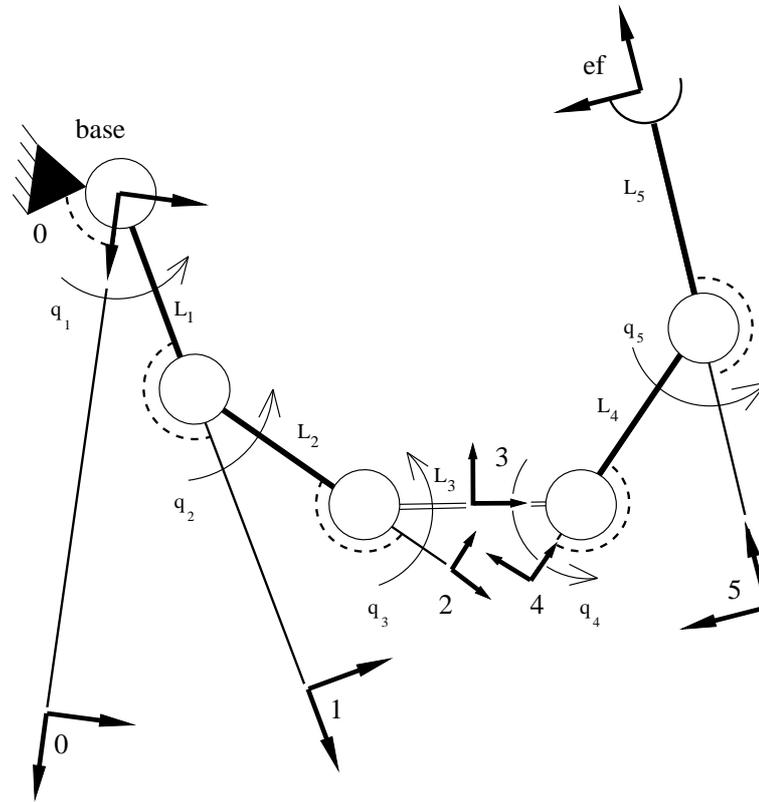


Figura A.5: Cadeia aberta com 5 juntas rotativas

o ponto no final  $k$  do corpo 5, em relação à base, ou seja, o ponto inicial  $c$ , sobre o corpo 0.

Também na postura inicial são obtidas as matrizes  ${}^c\bar{A}_r$  e  ${}^r\bar{A}_k$ , como mostram as equações A.8 e A.9.

$${}^c\bar{A}_r = {}^0\bar{A}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & L_1 + L_2 + \frac{L_3}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.8})$$

$${}^r\bar{A}_k = {}^3\bar{A}_{ef} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{L_3}{2} + L_4 + L_5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.9})$$

Construindo as matrizes homogêneas por Rodrigues tem-se para cada junta as seguintes matrizes homogêneas em relação ao corpo de referência 3:

$${}^3A_1 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & (L_1 + L_2 + \frac{L_3}{2})(c_1 - 1) \\ s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^3A_2 = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & (L_2 + \frac{L_3}{2})(c_2 - 1) \\ s_2 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^3A_3 = \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & (\frac{L_3}{2})(c_3 - 1) \\ s_3 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^3A_4 = \begin{bmatrix} c_4 & -s_4 & -(\frac{L_3}{2})(c_4 - 1) \\ s_4 & c_4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^3A_5 = \begin{bmatrix} c_5 & -s_5 & -(\frac{L_3}{2} + L_4)(c_5 - 1) \\ s_5 & c_5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

onde  $c_i$  e  $s_i$  são respectivamente o seno e o co-seno do ângulo da junta  $q_i$

Aplicando a equação A.7 aos resultados obtidos acima, tem-se na equação A.10 a matriz homogênea que descreve a posição do efetuador em relação a base do mecanismo.

$${}^cA_k = {}^0A_{ef} = \begin{bmatrix} c_{12345} & -s_{12345} & L_1c_1 + L_2c_{12} + L_3c_{123} + L_4c_{1234} + L_5c_{12345} \\ s_{12345} & c_{12345} & L_1s_1 + L_2s_{12} + L_3s_{123} + L_4s_{1234} + L_5s_{12345} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (A.10)$$

onde  $c_{ij\dots}$  e  $s_{ij\dots}$  representam o  $\cos(q_1 + q_2 + \dots)$  e  $\sin(q_1 + q_2 + \dots)$  respectivamente.

## *APÊNDICE B – Análise da singularidade para robôs redundantes*

Uma metodologia para análise da redundância em robôs redundantes é discutida em Nokleby-Podhorodeski (2001). O princípio utilizado para resolução é a reciprocidade (CAMPOS, 2004)

### B.1 Desenvolvimento do método

Considere o espaço operacional com 6 graus de liberdade, e um manipulador redundante cujo número de juntas  $k$  é maior que 6.

Para a análise da singularidade, inicialmente são escolhidos seis helicóides de juntas ( $\$_{sub1}, \$_{sub2}, \dots, \$_{sub6}$ ) para formar um sub-Jacobiano  $J_{sub}$ . Estes helicóides devem ser linearmente independentes. As  $k - 6$  juntas que não fazem parte de  $J_{sub}$  são consideradas juntas redundantes ( $\$_{r1}, \$_{r2}, \dots, \$_{rk-6}$ ).

Calculando o determinante de  $J_{sub}$  são identificadas as condições que causam degeneração (singularidade) neste sub-grupo de velocidades.

Na condição singular existe um helicóide  $W_{recip}$  que é recíproco a todos helicóides de juntas do manipulador, ou seja:

$$W_{recip}^T \cdot \$_i = 0 \quad \text{para } i=1 \text{ até } k \quad (\text{B.1})$$

onde  $\$_i$  é o  $i_{esimo}$  helicóide e  $k$  é número total de juntas.

O helicóide  $W_{recip}$  é recíproco aos seis helicóides de  $J_{sub}$ , mas não necessariamente recíproco aos helicóides redundantes  $\$_{r1}, \$_{r2}, \dots, \$_{rk-6}$ . Geralmente condições adicionais devem ser obtidas para que  $W_{recip}$  seja recíproco aos helicóides redundantes.

Tomando o helicóide recíproco e as juntas redundantes  $\$_{r_1}, \$_{r_2}, \dots, \$_{r_{k-6}}$  e igualando a zero tem-se:

$$\begin{aligned} W_{recip}^T \cdot \$_{r_1} &= 0, \\ W_{recip}^T \cdot \$_{r_2} &= 0, \\ &\vdots \\ W_{recip}^T \cdot \$_{r_{k-6}} &= 0 \end{aligned} \quad (B.2)$$

A primeira condição definida pelo determinante de  $J_{sub}$  combinada com as condições adicionais identificadas através da equação B.2 determina a condição de singularidade para o manipulador redundante. Desta maneira, para robôs redundantes, a singularidade é um estado alcançado por um conjunto de condições que devem ocorrer simultaneamente, ou seja, as singularidades de  $J_{sub}$  e as condições para que  $W_{recip}^T \cdot \$_{r_j}$  seja igual a zero.

## B.2 Desenvolvimento do exemplo da qualificação

Considerando o mesmo exemplo apresentado na qualificação, ou seja, o manipulador  $P3R$ . Fixando um sistema de coordenadas de referência sobre o helicóide  $\$_D$  com direções de acordo com a figura. A postura inicial é definida com os ângulos iguais a 0 e com a junta prismática com deslocamento 0. Esta configuração é a que resulta nos helicóides mais esparsos. Tem-se portanto o Jacobiano:

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ P_a & -L_1 s_2 - L_2 s_{23} & -L_2 s_{23} & 0 \\ Q_a & L_1 c_2 + L_2 c_{23} & L_2 c_{23} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \$_1 & \$_2 & \$_3 & \$_4 \end{bmatrix} \quad (B.3)$$

onde  $s_i$  é o  $\text{sen}(q_i)$ ,  $s_{ij}$  é o  $\text{sen}(q_i + q_j)$  e  $L_i$  são os comprimentos dos elos.

Escolhendo  $\$_2, \$_3$  e  $\$_4$  para  $J_{sub}$  e o helicóide  $\$_1$  como redundante tem-se:

$$J_{sub} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -L_1 s_2 - L_2 s_{23} & -L_2 s_{23} & 0 \\ L_1 c_2 + L_2 c_{23} & L_2 c_{23} & 0 \end{bmatrix} \quad (B.4)$$

Calculando o determinante de  $J_{sub}$  tem-se:

$$|J_{sub}| = L_1 L_2 s_3 \quad (\text{B.5})$$

Pelo determinante de  $J_{sub}$  tem-se que a condição singular é obtida quando  $s_3 = 0$ , ou  $\theta_3 = 0$ . Aplicando a condição singular em  $J_{sub}$  tem-se:

$$J_{sub} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -(L_1 + L_2)s_2 & -L_2 s_2 & 0 \\ (L_1 + L_2)c_2 & L_2 c_2 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.6})$$

Um helicóide recíproco  $W_{recip}$ , obtido por inspeção, para os helicóides de  $J_{sub}$  é dado por:

$$W_{recip} = \begin{bmatrix} 0 \\ c_2 \\ s_2 \end{bmatrix} \quad (\text{B.7})$$

Aplicando  $W_{recip}$  ao helicóide redundante  $\$1$  tem-se a segunda condição de singularidade:

$$W_{recip}^T \cdot \$r_1 = P_a c_2 + Q_a s_2 = 0 \quad (\text{B.8})$$

Assim a condição da singularidade é dada por:

- $s_3 = 0$  e  $P_a c_2 = -Q_a s_2$

A configuração cinemática é apresentada e discutida na seção 5.3.1

# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)