

Universidade de São Paulo
Instituto de Astronomia, Geofísica e Ciências
Atmosféricas

Octavio Ismael Miloni.

Teorias Hamiltonianas de Média e Ressonâncias

Orientador: Prof. Dr. Sylvio Ferraz–Mello.

· São Paulo - Dezembro de 2007 ·

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

Octavio Ismael Miloni.

Teorias Hamiltonianas de Média e Ressonâncias

Dissertação apresentada ao Departamento de Astronomia do Instituto de Astronomia, Geofísica e Ciências Atmosféricas da Universidade de São Paulo como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Ciências.

Orientador: Prof. Dr. Sylvio Ferraz-Mello.

· São Paulo - Dezembro de 2007 ·

Octavio Ismael Miloni.

Teorias Hamiltonianas de Média e Ressonâncias

Tese apresentada ao Departamento de Astronomia do Instituto de Astronomia, Geofísica e Ciências Atmosféricas da Universidade de São Paulo para a obtenção do título de Doutor em Ciências.

Aprovação em:

Banca Examinadora

Prof.Dr.:.....
Instituição :.....
Assinatura:.....
Prof.Dr.:.....
Instituição :.....
Assinatura:.....
Prof.Dr.:.....
Instituição :.....
Assinatura:.....
Prof.Dr.:.....
Instituição :.....
Assinatura:.....
Prof.Dr.:.....
Instituição :.....
Assinatura:.....

*“El verdadero viaje de descubrimiento no consiste
en buscar nuevos paisajes sino nuevos ojos”*

Marcel Proust

Conteúdo

1	Agradecimentos	5
2	Introdução	9
3	Teoria de séries de Lie para sistemas Ressonantes	12
3.1	Esquema de Construção da Solução	12
3.2	Desenvolvimentos em Séries de Lie	13
3.3	Desenvolvimentos na Condição de Ressonância	14
3.4	As Equações de Perturbação	16
4	Sobre os desenvolvimentos em série ao redor de uma Resonância	19
4.1	Introdução	19
4.2	Pontos singulares de uma equação algébrica	19
4.2.1	O teorema de Preparação de Weierstrass	19
4.2.2	Pontos Críticos. Séries de Puiseux	20
4.3	Aplicação ao problema restrito dos três corpos em ressonância	21
4.3.1	Variáveis Ressonantes	21
4.3.2	Modelo do Pêndulo: Potências em raiz quadrada da massa de Júpiter	22
4.3.3	Modelo de Andoyer: Potências em raiz cúbica da massa de Júpiter	23
5	Aplicação ao Problema Restrito dos Três Corpos Elíptico	25
5.1	Modelo Clássico. Órbita de Júpiter com Precessão Uniforme	25
5.1.1	Variáveis e Equações	25
5.2	O Problema Estendido. Inclusão das Perturbações Seculares na Órbita de Júpiter	28
5.2.1	Variáveis e Equações	28
6	A Função Perturbadora	30
6.1	A aproximação de Beaugé. O parâmetro δ	30
6.2	A parte Indireta	34
6.3	Inclusão da solução secular para a órbita de Júpiter	34
6.3.1	As Expressões de D_m^k e E_m^k	35
6.3.2	A Expressão Final da Função Perturbadora	36

7	Obtenção de Elementos Próprios	38
7.1	Cálculo de Elementos Próprios no problema Clássico. O Modelo do Pêndulo	39
7.1.1	Primeira Média: Os Elementos Semi-Médios	39
7.1.2	Segunda Média: Os Elementos Médios	40
7.1.3	Desenvolvimento do Hamiltoniano na ressonância	41
7.1.4	O Kernel de Hori. Escolha do Modelo Integrável	42
7.1.5	Extensão ao segundo grau de liberdade	44
7.1.6	Algumas transformações auxiliares	45
7.1.7	O Hamiltoniano até a ordem $\mathcal{O}(\varepsilon^{3/2}\mathcal{Q}^3)$	46
7.1.8	A Média	47
7.1.9	Terceira Média: Os Elementos Próprios	49
7.2	Cálculo de Elementos Próprios incluindo as perturbações na órbita de Júpiter	52
7.2.1	A Primeira Média: Os Elementos Semi-Médios	52
7.2.2	O Kernel de Hori	53
7.2.3	Construção do Modelo Integrável	54
7.2.4	Família de soluções periódicas proximas a um ponto de equilíbrio no plano $(\Theta_1, \mathcal{J}^*)$	58
7.2.5	A solução	60
7.2.6	A Variável Ação	65
7.2.7	Extensão da Transformação aos outros graus de liberdade	66
7.2.8	As equações de perturbação	68
7.2.9	A Média	76
7.2.10	Terceira Média: Os Elementos Próprios	78
8	Conclusão	79
A	Os Coeficientes D_m^k e E_m^k	85
B	Solução formal para o Hamiltoniano de Andoyer até a ordem $\mathcal{O}(\mathcal{Q}^6)$	92
C	Coeficientes de Fourier da Função perturbadora	97

Lista de Figuras

1	Distribuição dos Hildas em semieixo maior e excentricidade . A linha sólida representa o limite de convergência da desenvolvimento de Laplace da função perturbadora (ver Ferraz-Mello, 1994).	26
2	Limites de validade da aproximação de Beaugé para asteróides em ressonância 3:2 com Júpiter para $e_J = 0$ e diferentes valores de δ . A curva grossa preta mostra a posição dos pontos onde $x_{\min} = -1$ (curva de colisão). As curvas não marcadas adjacentes correspondem-se com $\delta = 0.001$. Eixos: $X = e \cos \theta_1$; $Y = e \sin \theta_1 $	31
3	Coefficientes principais da função perturbadora. Para excentricidades entre 0.15 e 0.3 o termo correspondente ao ângulo ressonante θ_1^* é dominante.	43
4	Coefficientes principais da função perturbadora. Nesta figura introduzimos mais coeficientes que na figura 3, já que para excentricidades menores são necessários mais termos para a construção do Kernel de Hori.	54
5	Neste gráfico notamos que a substituição de R_{10} por $B_1\sqrt{2J_1}$ para a construção do kernel de Hori é boa para excentricidades menores que 0.3, podendo considerar a diferença como perturbação.	55
6	Comparação entre R_{01}^0 com M_1e_J . Neste gráfico as curvas são bem diferentes, mas para excentricidades menores que 0.3 a diferença dos valores absolutos é menor que 0.05 e podem ser consideradas da mesma ordem de grandeza.	56
7	Comparação entre \mathcal{R}_{20}^0 e $B_22J_1^*$	57
8	Comparação entre integração numérica da integração do kernel de Hori com a aproximação analítica de ordem 2. A curva contínua corresponde à solução analítica e a tracejada corresponde a integração numérica.	60
9	Comparação entre integração numérica da integração do kernel de Hori com a aproximação analítica a ordem 5. A curva contínua corresponde à solução analítica (com as mesmas condições iniciais da figura anterior) e a tracejada corresponde a integração numérica. Podemos notar que a aproximação melhora com ordens maiores.	61

10	Comparação entre integração numérica com diferentes ordens de aproximação no modelo analítico no espaço de fases.	62
11	Comparação entre a integração numérica do kernel com aproximações analíticas para diferentes ordens no tempo para a variável	63
12	Comparação entre a integração numérica do kernel com aproximações analíticas para diferentes ordens no tempo para a variável H.	64

1 Agradecimentos

Foram muitos os anos que me levaram para acabar este projeto. Acabar? Não sei se é bem assim... Tem um ditado que diz que as teses não se acabam, se abandonam... Pode ser, já que sempre fica muita coisa para fazer.

Mas neste tempo todo tive a oportunidade de aprender muita coisa e não só no plano da ciência, mas na vida mesma. Conhecí muitos colegas que me apoiaram o tempo todo, até nesses momentos de dificuldades onde uma palavra da muita força.

É por isso que fico muito grato do pessoal que conheci, na USP e no Brasil.

Primeiro que tudo, eu quero agradecer ao professor Sylvio Ferraz-Mello. Foi ele que primeiro me aceitou para trabalhar no grupo. Depois com os anos foi me guiando para trabalhar em teoria de perturbações e sempre, sempre tinha alguma nova idéia para melhorar o meu trabalho. Sempre tinha alguma coisa a mais, para eu aprender.

À professora Tatiana Michtchenko, quem sempre estava aí, na hora em que precisava de ajuda e apoio.

A Cristián Beaugé que conheço a muitos anos e que sempre foi a mesma pessoa: um grande amigo con quem se aprende muita coisa.

A Fernando Roig, por sua amizade.

Quero agradecer a todos os colegas que com os anos viraram amigos. A meu grande amigo Juan Luna, o *Juancho*; Raimundo Lopes de Oliveira, o grande Raí; ao Abílio Matheus jr ; ao Nelson Callegari jr, o Nersão ; a Fernando Cachucho da Silva; ao *Compadre* Raúl Puebla. E, claro, ao Adrián Rodriguez, o *yorugua* a quem respeito muito por sua capacidade e sua simpleza (mesmo no futebol).

Aos caros funcionários do IAG que desde o primeiro dia que eu cheguei ao Brasil me ajudaram sempre: A Marina, Conceição , e todo o pessoal das secretarias.

Também aos que, com base na Argentina, fizeram possível tudo isto: A minha mulher, Florencia, *minha Flor* que com sua paciência e amor me ajudou para seguir sempre pra frente. Aos *muchachos* Julián y Nicolás pela alegria que dão à minha vida com sua presença; aos companheiros do grêmio docente da Universidad de La Plata, ADULP.

Aos professores da Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas de la Universidad Nacional de La Plata: Juan Carlos Altavista, Josué Núñez, Adrián Brunini, Pablo Cincotta, Juan Carlos Muzzio, Felipe Wachlin, Daniel

Carpintero e Claudia Giordano. Eles me introduziram no mundo da dinâmica e da Mecânica Celeste.

Para os meus amigos de sempre: Tatón, Franco, Diego, Aldo, Faca, Mendo, Toni, Sombra, Piqui (*el peruano*), a *La Flaca* Valeria, a Lean, a Claudin Cogo.

E, claro, aos meus pais Adolfo e Angélica que sempre me apoiaram, desde aquela maluquice inicial, quando comecei a estudar astronomia.

A minha irmã Sofía, *a Choufi*, porque sua alegria foi sempre para mim indispensável. A Juan, Fede e Violeta, *a Colachona*

E ao León, meu filhote, a quem dedico não só esta tese, mas todos os dias de minha vida.

Obrigado.

Resumo

Neste trabalho apresentamos as bases matemáticas para a construção de Elementos Próprios (EP) para asteróides em ressonância 3:2 com Júpiter a partir dos elementos Keplerianos osculadores. O método é baseado na aplicação de uma nova teoria de perturbações ressonante (Ferraz-Mello, 1997, 2007) a qual permite a construção de soluções formais no caso onde o ângulo crítico e de longo período aparecem simultaneamente. A função perturbadora usada é o desenvolvimento de Beaugé (Beaugé, 1996), modificada para incluir termos de curto período.

Abstract

In this work we present the mathematical basis for the calculation of proper elements (EP) for asteroids in a 3:2 mean-motion resonance with Jupiter, starting from the original osculating keplerian elements. The method is based on a new resonant perturbation theory (Ferraz-Mello, 1997, 2007), which allows the construction of formal solutions in cases where a resonant and long-period angles appear simultaneously. For the disturbing function, we used the Beaugé's expansion (Beaugé, 1996), adapted to include short period terms.

2 Introdução

Em um tempo onde a maioria dos trabalhos relacionados ao sistema solar estão relacionados ao estudo de movimentos caóticos e sua evolução, o estudo de Elementos Próprios está na direção oposta. Dado um sistema dinâmico (nosso caso os asteróides do cinturão principal perturbado por Júpiter), a idéia é construir uma aproximação integrável e sua evolução temporal. Os elementos próprios são funções das integrais primeiras. Mesmo que o sistema fosse caótico, estas integrais forneceriam informação se: *(i)* a região caótica esta confinada, ou *(ii)* o comportamento caótico possui escala de tempo muito longa. Em ambos casos, os elementos próprios podem ser considerados como quase-integrais de movimento, que possuem variações pequenas em longos períodos de tempo. Em outras palavras, estas magnitudes permitem estudar estruturas dinâmicas, que não mudam em milhões de anos.

A origem desta idéia deve-se a Hirayama (1918, 1923) que aplicou a teoria secular linear de Laplace-Lagrange (ver também Brouwer 1951) para determinar os EP para asteróides no cinturão principal. O resultado do estudo de Hirayama permitiu descobrir uma acumulação de corpos no espaço de elementos próprios, cada uma dela foi chamada *Família de Hirayama*.

Se acredita que os elementos próprios permitem determinar a origem comum destes asteróides que, produto de uma colisão, são o remanente de um corpo primordial. Por muitos anos, a maior parte do esforço foi colocada na construção de melhores determinações de elementos próprios tanto analíticas como numéricas, mas fora das regiões onde acontecem ressonâncias de movimentos médios.

Como é comum no problema de três corpos, a limitação principal na construção de teorias analíticas fica nos limites de convergência da função perturbadora. Foi Williams (1969) quem resolveu este problema mediante a construção de uma teoria semianalítica baseada numa determinação numérica do potencial perturbador numa grade de condições iniciais. O seu resultado não só determinou novos elementos próprios, mas também permitiu a determinação das ressonâncias seculares na região dos asteróides. Mais recentemente, e como o número de asteróides foi crescendo, Milani e Knezević (1990, 1992, 1994) introduziram o formalismo das séries de Lie para estimar elementos próprios até segunda (e terceira em alguns casos) ordem das massas. Lemaître e Morbidelli (1994) desenvolveram uma teoria semianalítica similar à de Williams, mas baseada em um formalismo Hamiltoniano. Todas as teorias obtém elementos próprios mediante uma serie de médias: a

primeira delas para obter o Hamiltoniano secular, e a segunda para calcular os elementos próprios. Finalmente, nos últimos anos Knezević e Milani (2001) adotaram uma nova abordagem puramente numérica a qual determina elementos próprios denominados sintéticos.

Para o caso ressonante, Schubart (1968) analisou o comportamento de longo período dos Hildas, via integrações numéricas sobre os termos de curto período (ângulo sinódico). Ele obteve três parâmetros característicos (excentricidade, inclinação e amplitude de libração) para todos os Hildas conhecidos na época (Schubart, 1982a, 1982b).

Milani (1993) calculou elementos próprios sintéticos para asteróides troianos por meio de um tratamento puramente numérico. Mais recentemente, Beaugé e Roig (2001) desenvolveram uma teoria semianalítica para obter elementos próprios para os asteróides troianos. Esta teoria consiste basicamente em uma sucessão de médias mediante uma estrutura hierárquica que permite distinguir entre ângulos de curto e longo período.

Neste trabalho construímos analiticamente os invariantes de movimento para asteróides do grupo de Hilda mediante a aplicação da teoria de séries de Lie, começando com os elementos osculadores e obtendo, no final do processo, os elementos próprios dinâmicos.

No segundo capítulo desenvolvemos a teoria das séries de Lie para problemas ressonantes. Esta teoria permite resolver o *problema dos pequenos denominadores* de maneira local, pois as soluções são válidas numa vizinhança da condição de ressonância.

No capítulo 3, apresentamos um método geral para determinar os diferentes tipos de desenvolvimentos em séries de potências no pequeno parâmetro perturbador. Isto é feito mediante a aplicação do Teorema de Preparação de Weierstrass que nos permitirá, a partir da escolha do modelo integrável, o desenvolvimento certo para a aplicação da teoria de perturbação .

No capítulo 4 escreveremos as diferentes formas de aplicar a teoria de perturbação ao caso do problema restrito dos três corpos, tanto no caso em que a órbita de Júpiter é considerada fixa, como no caso em que consideramos as perturbações seculares dos planetas gigantes sobre a órbita de Júpiter.

O capítulo 5 está dedicado à apresentação da função perturbadora escolhida para a nossa teoria de perturbações . O desenvolvimento da função perturbadora escolhido é o *Desenvolvimento de Beaugé* (Beaugé, 1994).

No capítulo 6 aplicaremos a teoria desenvolvida ao problema restrito dos três corpos no caso da ressonância 3:2 com Júpiter, para o caso onde consideramos a órbita de Júpiter fixa (Miloni, O. et al., 2005) e no caso que

a órbita de Júpiter é perturbada pela ação dos planetas maiores do sistema solar . Neste caso usamos para os elementos orbitais do planeta a solução da teoria secular de Lagrange–Laplace. Em todos os casos, o cálculo dos elementos próprios segue o seguinte roteiro: (i) passagem dos elementos osculadores a elementos médios (ou semimédios na nomenclatura adotada por Milani) fazendo uma média sobre os termos de curto período. (ii) Integração analítica do Kernel de Hori (modelo do pêndulo) sobre o ângulo librante. (iii) Aplicação da teoria de series de Lie ressonante para obter os elementos *médios-médios*. (iv) Cálculo dos elementos próprios eliminando a variável angular restante (Miloni, O. & Ferraz-Mello, S., [27]).

3 Teoria de séries de Lie para sistemas Resonantes

Para o caso de sistemas ressonantes, o princípio geral, na hora de propor uma solução de um sistema de equações diferenciais, segue o mesmo esquema que no caso de sistema não ressonante: É preciso considerar um Hamiltoniano integrável e considerar termos de ordens superiores como perturbações.

Seja com séries de Lie (Sérsic, 1959; Hori, 1966; Ferraz-Mello, 2007) ou com as *teorias clássicas* (Poincaré, von Zeipel-Brouwer, Delaunay), a solução obtida com estes métodos são pequenas variações da solução do problema não perturbado.

Desde o ponto de vista da topologia do espaço de fase, a solução do problema perturbado possui uma estrutura similar que o sistema não perturbado.

Para sistemas Hamiltonianos em que a parte integrável é uma forma quadrática das coordenadas e momentos, a topologia do espaço de fase é a de um toro (no caso unidimensional, o toro é a circunferência no plano de fase).

Para o caso não ressonante, os desenvolvimentos em séries das funções geratrizes possuem, nos seus coeficientes, singularidades. Este problema é bem conhecido e foi chamado *problema dos pequenos denominadores*.

A teoria das séries de Lie ressonante permite obter uma solução local ao problema dos pequenos denominadores. É local, pois as soluções obtidas, são válidas só numa vizinhança da condição de ressonância.

Os detalhes mais gerais da teoria podem ser achados no livro de Ferraz-Mello (Ferraz-Mello, S. 2007; seção 8).

Neste capítulo vamos considerar os aspectos principais da teoria, aqueles que serão aplicados para a construção dos elementos próprios ressonantes. Começaremos com as relações dos desenvolvimentos em série de Lie. As seções seguintes estão dedicadas à construção das equações de perturbação.

3.1 Esquema de Construção da Solução

Ao considerar um problema ressonante, basicamente os princípios gerais que devemos seguir, na hora de procurar uma solução formal em séries assintóticas, podem resumir-se nos seguintes:

1. Selecionar do Hamiltoniano original os termos que descrevam a geometria da ressonância (Kernel de Hori).

2. Construir a solução do Hamiltoniano ressonante, obtendo as variáveis ângulo-ação .

3. Introduzir a solução do kernel de Hori nas equações de perturbação e, desta maneira, obter a função geratriz que define a transformação canônica que leva às novas variáveis ângulo-ação para o Hamiltoniano completo (uma vez fixada a ordem de aproximação).

Cada um destes passos possui as dificuldades próprias, onde geralmente na hora de ir fazendo cada um desses passos deveremos fazer aproximações que deverão ser testadas, para não perder precisão no resultado final.

No nosso trabalho, a seleção no kernel de Hori, não só será feita levando em conta a topologia da ressonância, mas também escolhendo os termos do kernel de Hori pela grandeza (em termos numéricos) dos coeficientes da função perturbadora.

3.2 Desenvolvimentos em Séries de Lie

Consideremos uma função $f : T^n \times \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{R}$ definida sobre o espaço de fase de um sistema dinâmico e onde \mathcal{B} é um subconjunto de \mathcal{R}^n . Seja $W : T^n \times \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{R}$ uma outra função . Se define como a derivada de Lie à relação

$$\begin{aligned} D_W^0(f(\theta, J)) &= f(\theta, J) \\ D_W(f) &= \{f, W\} \\ D_W^k(f) &= D_W(D_W^{(k-1)}(f)) \end{aligned} \quad (1)$$

onde $\{f, W\}$ indica o colchete de Poisson de f com W ,

$$\{f, W\} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial \theta_i} \frac{\partial W}{\partial J_i} - \frac{\partial f}{\partial J_i} \frac{\partial W}{\partial \theta_i} \right) \quad (2)$$

O resultado mais importante para o uso das séries de Lie é o fato de que, para toda função f , a série

$$f(\theta, J) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} D_{W^*(\theta^*, J^*)}^k(f(\theta^*, J^*)) \quad (3)$$

define uma transformação canônica $(\theta, J) \rightarrow (\theta^*, J^*)$. Em particular, para a transformação das coordenadas, temos

$$\theta_l = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} D_{W^*(\theta^*, J^*)}^k(\theta_l^*)$$

$$J_l = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} D_{W^*(\theta^*, J^*)}^k (J_l^*) \quad (4)$$

Para nossas aplicações é importante obter não só a transformação (3), mas também a transformação inversa. Por causa da própria definição, a transformação inversa se obtém substituindo $W^*(\theta^*, J^*)$ por $-W^*(\theta, J)$ (Ferraz-Mello, S. 2007 seção 5.4), dando como resultado

$$\begin{aligned} \theta_l^* &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} D_{-W^*(\theta, J)}^k (\theta_l) \\ J_l^* &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} D_{-W^*(\theta, J)}^k (J_l) \end{aligned} \quad (5)$$

Então, procurar uma transformação canônica é equivalente a procurar a função W que a defina: *o gerador de Lie*.

Para obter a transformação canônica, consideremos um sistema dinâmico com n graus de liberdade definido no espaço de fase $T^n \times \mathcal{B}$, isto é, definido num conjunto de variáveis angulares e seus momentos conjugados. Seja $H(\theta, J)$ o Hamiltoniano do sistema. Para procurar o gerador de Lie que defina a transformação canônica, vamos aplicar a série (3) usando como função f a função Hamiltoniana do sistema. Então

$$H(\theta, J) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} D_{W^*(\theta^*, J^*)}^k (H(\theta^*, J^*)). \quad (6)$$

Seja H^* o Hamiltoniano nas novas variáveis (θ^*, J^*) . Se o Hamiltoniano não depende explicitamente do tempo, teremos que o Hamiltoniano é a energia do sistema, e, porém, constante, então $H^*(\theta^*, J^*) = H(\theta, J)$. Então, podemos escrever

$$H^*(\theta^*, J^*) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} D_{W^*(\theta^*, J^*)}^k (H(\theta^*, J^*)) \quad (7)$$

Esta última equação possui duas funções indeterminadas, H^* e W^* e temos que achar uma maneira de determiná-las. Na próxima seção vamos resolver esta questão.

3.3 Desenvolvimentos na Condição de Ressonância

As equações de perturbação permitem determinar as funções indeterminadas H^* e W^* .

Básicamente, estas equações se obtêm a partir dos desenvolvimentos em série das funções H^* e W^* e substituir nas eqns. (7). Este é o mecanismo, tanto para regime não ressonante, como para ressonante.

No caso de que uma ressonância acontece, os passos a seguir para obter as equações de perturbação são os seguintes:

- i)* Desenvolver o Hamiltoniano numa vizinhança da condição de ressonância exata.
- ii)* Considerar do Hamiltoniano os termos que contenham a topologia da ressonância.
- iii)* Identificar as ordens de grandeza das funções para obter as equações de perturbação .

Consideremos o caso em que uma ressonância simples ocorre. Seja J_r o valor do momento para a condição de ressonância exata.

O Hamiltoniano será desenvolvido em potências de $(J - J_r)$. Uma vez que escolhemos do Hamiltoniano os termos principais que descrevem a geometria da ressonância, devemos identificar a ordem de grandeza de $(J - J_r)$. Na seguinte seção encontramos uma forma para esta identificação de maneira formal.

Consideremos inicialmente um sistema dinâmico onde a função Hamiltoniana é

$$H(\theta, J) = H_0(J) + \varepsilon H_1(\theta, J)$$

onde ε é um parâmetro pequeno.

A condição de ressonância simples será

$$\frac{\partial H_0}{\partial J_1} = 0 \quad em \quad J_1 = J_r$$

Sem perda de generalidade, podemos supor que o ângulo crítico é θ_1 .

Consideremos um desenvolvimento do Hamiltoniano na condição de ressonância exata. Teremos que

$$H(\theta, J) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k}{\partial J_1^k} [H_0(J)] (J_1 - J_r)^k + \varepsilon \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k}{\partial J_1^k} [H_1(\theta, J)] (J_1 - J_r)^k$$

Introduzindo este desenvolvimento na condição de conservação da energia (7) devemos levar em conta que na hora de calcular os colchetes de Poisson, derivar com relação à variável J_1 diminui a ordem na função , e por tanto devemos fazer uma consideração especial neste ponto.

Consideremos uma função $f : T^n \times \mathcal{B} \rightarrow R$ que seja homogênea de grau r no conjunto $S = (\xi, \varepsilon^d)$, onde consideramos $\xi = J_1 - J_r$ e $J_1 - J_r = \mathcal{O}(\varepsilon^d)$. Temos o grau de homogeneidade $gr[f] = r$. Então, a derivada de f com relação a ξ possui um grau de homogeneidade

$$gr \left[\frac{\partial f}{\partial \xi} \right] = r - 1$$

Na hora de calcular o colchete de Poisson entre duas funções, devemos levar em conta este fato e, então, se consideramos uma outra função definida no espaço de fases, g , com grau de homogeneidade s no conjunto $S = (\xi, \varepsilon^d)$ o colchete de Poisson entre as duas funções deve ser separado da forma:

$$\{f, g\} = \{f, g\}_1 + \{f, g\}_m$$

onde o subíndice 1 indica que é a parte del colchete calculado com as derivadas com relação às variáveis θ_1 e ξ e o subíndice m às restantes.

Os graus de homogeneidade ficam

$$\begin{aligned} gr[\{f, g\}_1] &= r + s - 1 \\ gr[\{f, g\}_m] &= r + s \end{aligned}$$

Isto obriga a considerar o colchete sempre como composto por duas componentes: aquela que transforma o grau de homogeneidade e aquela que o preserva.

3.4 As Equações de Perturbação

Para obter as equações de perturbação precisamos considerar desenvolvimentos em série das funções presentes na condição de conservação da energia (7).

A teoria de séries de Lie para sistemas ressonantes presupõe a introdução de um Hamiltoniano que descreva a geometria da ressonância. Chamemos a este Hamiltoniano F_l , onde l indica o grau de homogeneidade no conjunto $S = (\xi, \varepsilon^d)$. Então, o desenvolvimento do Hamiltoniano original pode se escrever como

$$H(\theta, J) = F_l + F_{l+1} + \dots$$

Para o Hamiltoniano nas novas variáveis vamos supor um desenvolvimento similar:

$$H^*(\theta^*, J^*) = H_l^* + H_{l+1}^* + \dots$$

O gerador de Lie W^* possui um desenvolvimento¹

$$W^*(\theta^*, J^*) = W_2^* + W_3^* + \dots$$

As equações de perturbação são obtidas substituindo estes desenvolvimentos na eq. (7) e igualando termos da mesma ordem em $S = (\xi, \varepsilon^d)$.

Desta maneira obtemos

$$\begin{aligned} H_l^* &= F_l(\theta^*, J^*) \\ H_{l+1}^* &= F_{l+1}(\theta^*, J^*) + \{F_l(\theta^*, J^*), W_2^*\}_1 \\ H_{l+2}^* &= F_{l+2}(\theta^*, J^*) + \{F_{l+1}(\theta^*, J^*), W_2^*\}_1 + \{F_l(\theta^*, J^*), W_2^*\}_m + \\ &\quad + \frac{1}{2} \{ \{F_l(\theta^*, J^*), W_2^*\}_1, W_1^* \}_1 + \{F_l(\theta^*, J^*), W_3^*\}_1 \\ &\vdots = \vdots \end{aligned}$$

A primeira equação não trivial é a segunda, onde temos duas funções indeterminadas: H_{l+1}^* e W_2^* . Se de alguma maneira resolvemos esta equação, a próxima equação têm como incógnitas as funções H_{l+2}^* e W_3^* , e assim por diante.

Em geral, a k -ésima equação homológica tem a forma:

$$H_{l+k}^* = \Psi_k + \{F_l, W_{k+1}^*\}$$

onde as funções Ψ_k são obtidas uma vez resolvidas as equações das ordens anteriores.

Esta última equação fica particularmente simples se para o Hamiltoniano ressonante obtemos as variáveis ângulo-ação, (w, Λ) de maneira tal de que o Hamiltoniano toma a forma $F_l = F_l(\Lambda)$. Nestas variáveis, a equação homológica toma a forma

$$H_{l+k}^* = \Psi_k - \frac{\partial F_l}{\partial \Lambda_1^*} \frac{\partial W_{k+1}^*}{\partial w_1^*}$$

Novamente, a equação homológica tem duas funções indeterminadas, e para resolvê-la adoptamos a média

$$H_{l+k}^* = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} \Psi_k dw_1^* \dots dw_n^* = \Psi_k^{(S)}$$

¹A condição de que o menor grau de homogeneidade comece em dois vem do fato de que $F_l, \{F_l, W_1^*\}_1, \{\{F_l, W_1^*\}_1, W_1^*\}_1$, etc. possuem todos a mesma ordem, gerando uma indeterminação (para detalhes ver Ferraz-Mello, S. 2007).

onde o índice (S) indica secular.

Isto é, o Hamiltoniano H^* é escolhido de maneira tal que não dependa dos ângulos. Então, com os termos restantes, os quais são periódicos, obteremos a função W_{k+1}^* , da maneira:

$$W_{k+1}^* = \left(\frac{\partial F_l}{\partial \Lambda_1^*} \right)^{-1} \int (\Psi_k - H_l^*) dw_1^* = \left(\frac{\partial F_l}{\partial \Lambda_1^*} \right)^{-1} \int \Psi_k^{(P)} dw_1^*$$

onde o índice (P) indica periódico.

Será desta maneira que procuraremos os geradores de Lie, para os modelos que estudaremos.

Nas nossas aplicações, vamos considerar mais termos críticos, de curto e longo período e, portanto, a abordagem será um pouco diferente. No capítulo 6 deste trabalho consideraremos estas particularidades.

4 Sobre os desenvolvimentos em série ao redor de uma Ressonância

Neste capítulo vamos analisar os diferentes tipos de desenvolvimentos que devem ser adotados para pesquisar soluções formais em série de potências no caso em que uma ressonância acontece. Este estudo é feito mediante a aplicação do Teorema de Preparação de Weierstrass (Goursat, J. B. 1916, §357) que permite determinar os diferentes sistemas cíclicos de raízes da equação de Hamilton-Jacobi, considerada como uma equação algébrica singular na origem. Cada sistema cíclico possui um único desenvolvimento em série de Puiseux (Valiron, 1951, seção 2) que se correspondem com as séries adotadas, para a procura de soluções formais.

4.1 Introdução

O primeiro passo numa aplicação de uma teoria de perturbações é a suposição de que as funções podem ser desenvolvidas em série de potências de um certo parâmetro, que é considerado como pequeno. É bem conhecido que se o problema é não ressonante as funções podem ser desenvolvidas em potências inteiras do pequeno parâmetro, cuja convergência estará sujeita as condições do Teorema KAM. No caso do problema restrito dos três corpos, o pequeno parâmetro será a massa do corpo perturbador. Quando os corpos envolvidos satisfazem uma relação de ressonância, os desenvolvimentos não são em potências inteiras, mas em raiz quadrada (Poincaré, H. 1892, cap. XIX §201) ou em raízes cúbicas do pequeno parâmetro (Garfinkel, B., 1982; Ferraz-Mello, 1985a, 1985b). A questão é determinar analiticamente qual tipo de desenvolvimento deve ser usado. Neste capítulo abordaremos este problema.

4.2 Pontos singulares de uma equação algébrica

4.2.1 O teorema de Preparação de Weierstrass

Teorema (Weierstrass): Seja $F(x, \varepsilon)$ uma função analítica nas variáveis complexas x, ε talque $F(0, 0) = 0$. Consideremos que F pode ser expressa como uma série:

$$F(x, \varepsilon) = A_0 + A_1(\varepsilon)x + \dots + A_n(\varepsilon)x^n + \dots \quad (8)$$

onde cada coeficiente A_j é uma série de potências em ε . Se para $\varepsilon = 0$ a equação $F(x, 0) = 0$ têm $x = 0$ como raiz de multiplicidade k , então $F(x, \varepsilon)$ pode ser fatorizada como

$$F(x, \varepsilon) = [x^k + \alpha_{k-1}(\varepsilon)x^{k-1} + \dots + \alpha_1(\varepsilon)x + \alpha_0]G(x, \varepsilon) \quad (9)$$

onde as funções $\alpha_j(\varepsilon)$ são analíticas em ε , $\alpha_j(0) = 0$ e a função G satisfaz $G(0, 0) \neq 0$.

Nós vamos apenas aplicar o resultado. Uma demonstração deste teorema pode ser achada em Goursat (Goursat, J. B. 1916, §357).

4.2.2 Pontos Críticos. Séries de Puiseux

Para procurar soluções em série de Puiseux vamos estudar as raízes da equação $F(x, 0) = 0$. Numa vizinhança da origem do plano complexo, as raízes da equação (8) são as raízes da equação $x^k + \alpha_{k-1}(\varepsilon)x^{k-1} + \dots + \alpha_1(\varepsilon)x + \alpha_0 = 0$. Consideremos $\mathcal{D} \in C$ um domínio que contem a origem (da variável ε). Para algum valor de $\varepsilon \in \mathcal{D}$, e.g., ε_0 vamos estudar o comportamento das raízes da eqn. (8) mudando ε_0 , considerado como um parâmetro.

Sejam $x_1^0, x_2^0, \dots, x_k^0$ as raízes da eqn.(8) para um certo ε_0 . Consideremos a transformação a um parâmetro $\vartheta : C \times [0, k] \rightarrow C$ definida como:

$$(\varepsilon_0, l) \rightarrow \varepsilon_0 \exp(i2\pi l), \quad 0 \leq l \leq k \quad (10)$$

A eqn. (8) é transformada em

$$x^k + \alpha_{k-1}(\varepsilon_0 \exp(i2\pi l))x^{k-1} + \dots + \alpha_1(\varepsilon_0 \exp(i2\pi l))x + \alpha_0(\varepsilon_0 \exp(i2\pi l)) = 0 \quad (11)$$

Agora, os índices superiores 0 indicam as raízes para $l = 0$. É evidente que para valores inteiros de l , as raízes voltam a ser as mesmas, o problema consiste em considerar as mudanças em x quando l muda continuamente.

Introduzamos a seguinte notação: Seja x_r^m a r -ésima raiz da equação (8) para $l = m$. Um resultado da teoria de funções é que para cada r fixo, x_r^m é uma função contínua no parâmetro m .

Definição : Consideremos a equação $x^k + \alpha_{k-1}(\varepsilon)x^{k-1} + \dots + \alpha_1(\varepsilon)x + \alpha_0 = 0$. Um subconjunto de raízes $S_m = \{x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0\} \in C$, $m \leq k$ forma um sistema cíclico de ordem m se e somente se $x_j^m = x_j^0$.

A partir desta definição podemos enunciar o seguinte lema:

Lema (Goursat): As raízes da equação $x^k + \alpha_{k-1}(\varepsilon)x^{k-1} + \dots + \alpha_1(\varepsilon)x + \alpha_0 = 0$, as quais são nulas para $\varepsilon = 0$ formam um ou mais sistemas cíclicos na vizinhança da origem.

Cada sistema cíclico possui uma única série de Puiseux: Se mudamos a variável $\varepsilon_0 = \varepsilon_0'^m$ depois de uma volta ao redor da origem (na nova variável) voltamos ao mesmo valor ε_0 . Já que a raiz considerada está no conjunto S_m depois das m voltas retorna ao mesmo valor. Isto indica que cada raiz, considerada como função de ε' , é uma função uniforme e possui, portanto, o desenvolvimento

$$x = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j \varepsilon_0'^j, \quad (12)$$

onde x representa a um elemento de S_m . Se voltamos a ε_0 , obtemos

$$x = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j \varepsilon_0^{j/m}, \quad (13)$$

que é o desenvolvimento de Puiseux para cada elemento de S_m .

Para determinar em forma prática quantos sistemas cíclicos há, temos a proposição:

Proposição: Um polinômio $P(x) \in C[[x]]$ no anel de polinômios com coeficientes analíticos possui um só sistema cíclico se e somente se é irredutível

4.3 Aplicação ao problema restrito dos três corpos em ressonância

4.3.1 Variáveis Ressonantes

Para fazer uma aplicação do parágrafo precedente consideremos um asteróide se movendo ao redor do Sol numa relação ressonante $(p+1) : p$ de movimentos médios com Júpiter. Consideremos as variáveis ressonantes (Ferraz-Mello, 1987):

$$\begin{cases} \theta_1 = (p+1)\lambda_J - p\lambda - \varpi & J_1 = L - G \\ \theta_2 = (p+1)\lambda_J - p\lambda - \varpi_J & J_2 = G + \frac{1}{n_J}\Lambda \\ \theta_3 = \lambda - \lambda_J & J_3 = (p+1)L + \frac{p}{n_J}\Lambda \end{cases} \quad (14)$$

onde λ, ϖ são a longitude média e o argumento do periélio respectivamente. O subíndice indica Júpiter. n_J é o movimento médio de Júpiter; L, G são as variáveis de Delaunay usuais e Λ é o momento associado a λ_J no plano de fase estendido.

4.3.2 Modelo do Pêndulo: Potências em raiz quadrada da massa de Júpiter

Depois de fazer a primeira média sobre o ângulo rápido θ_3 o Hamiltoniano pode ser desenvolvido ao redor de a um valor de referência J_3 o qual é constante. Escolhemos $J_3 = L_{resonant}$. Já que $L - J_3^* = -p(J_1^* + J_2^*)$ o desenvolvimento resulta:

$$H_0^* = -\frac{\mu^2}{2(J_3^*)^2} - \frac{\mu^2}{2} \sum_{i=3}^{\infty} \frac{(i+1)}{J_3^{2+i}} p^i (J_1^* + J_2^*)^i \quad (15)$$

$$- n_J J_3^* - g_J J_2^* - \varepsilon R$$

Para a aplicação da teoria de perturbações para sistemas ressonantes (Ferraz-Mello, 1997) separamos do Hamiltoniano o termo que contem o ângulo lento θ_1 e podemos escrever:

$$F_0^* = \frac{1}{2} \nu_{11} \xi^2 - \varepsilon R_1 \cos \theta_1 - \frac{\mu^2}{2} \sum_{i=3}^{\infty} \frac{(i+1)}{J_3^{2+i}} p^i \xi^i - \varepsilon \Delta R \quad (16)$$

onde $\xi = J_1^* + J_2^*$

A equação de Hamilton-Jacobi se transforma em uma equação algébrica

$$F_0^*(\xi, \varepsilon) = \frac{1}{2} \nu_{11} \xi^2 - \varepsilon R_1 \cos \theta_1 - \frac{\mu^2}{2} \sum_{i=3}^{\infty} \frac{(i+1)}{J_3^{2+i}} p^i \xi^i - \varepsilon \Delta R = 0, \quad (17)$$

que satisfaz $F_0^*(\xi, \varepsilon) = 0$

Como $F(\xi, 0) = 0$ tem $\xi = 0$ como raiz com multiplicidade 2 e não depende de potências maiores que 2 em ε , podemos escrever a equação

$$F(\xi, \varepsilon) = (\xi^2 + b\varepsilon)G(\xi, \varepsilon) \quad (18)$$

Seguindo Valiron (Valiron, 1950, seção 2) e Dieudonné (Dieudonné 1971, seção 5.2) podemos escrever

$$\sqrt{\varepsilon/c} = \xi(1 + \psi(\xi)), \quad (19)$$

e numa vizinhança da origem podemos escrever:

$$\xi = \sqrt{\varepsilon/c} + \lambda_2 \left(\sqrt{\varepsilon/c}\right)^2 + \dots + \lambda_n \left(\sqrt{\varepsilon/c}\right)^n + \dots \quad (20)$$

o que é equivalente a dizer que $\xi = \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon})$. Este resultado permite procurar as funções geratrizes como séries potências da raiz quadrada na massa de Júpiter.

4.3.3 Modelo de Andoyer: Potências em raiz cúbica da massa de Júpiter

Em alguns casos, quando a excentricidade do asteróide é pequena, podemos aproximar o momento $J_1 = Le^2/2$ ou, em excentricidade, $e = \sqrt{2J_1/L}$ (Ferraz-Mello, 1987). Com esta aproximação o termo principal ressonante do Hamiltoniano pode se escrever

$$F_0 = a\xi^2 + \varepsilon \left(\sqrt{2J_1} \cos \theta_1 + \beta \cos \theta_2 \right) + \text{ordem superior} \quad (21)$$

Se usamos a integral de Sessin \mathcal{G} (Ferraz-Mello, 1987) as novas variáveis são

$$\begin{aligned} \Theta &= \arctan(H/K) \\ \mathcal{J} &= \frac{1}{2}(K^2 + H^2) \\ \mathcal{G} &= J_1 + J_2 - \mathcal{J} = \mathcal{O}(\mathcal{J}) \end{aligned} \quad (22)$$

onde $K = \sqrt{2J_1} \cos \theta_1 + \beta e_J \cos \theta_2$, $H = \sqrt{2J_1} \sin \theta_1 + \beta e_J \sin \theta_2$. Nestas variáveis, o Hamiltoniano pode ser escrito como

$$F_0 = 2a\mathcal{G}\mathcal{J} + a\mathcal{J}^2 + \varepsilon\sqrt{2\mathcal{J}} \cos \Theta + \text{higher orders} \quad (23)$$

Se $x = \sqrt{2\mathcal{J}}$, a equação de Hamilton-Jacobi toma a forma:

$$F = ax^2 + bx^4 + \varepsilon\mu x + \mathcal{O}(\varepsilon x^2) = 0 \quad (24)$$

μ contém o cosseno e o coeficiente. Dividindo a equação por x obtemos $F = ax + bx^3 + \varepsilon\mu + \mathcal{O}(\varepsilon x) = 0$. Levando em conta que $a = \mathcal{O}(x^2)$ podemos notar que $F(0,0) = 0$. A equação $F(x,0) = 0$ tem $x = 0$ como raiz com multiplicidade 3. Aplicando o teorema de preparação de Weierstrass podemos escrever:

$$F = (x^3 + \alpha_2(\varepsilon)x^2 + \alpha_1(\varepsilon)x + \alpha_0(\varepsilon))G(x, \varepsilon) \quad (25)$$

Falta ainda provar que o polinômio $x^3 + \alpha_2(\varepsilon)x^2 + \alpha_1(\varepsilon)x + \alpha_0(\varepsilon)$ é irredutível. Para provar isto, podemos fazer uso de que $a = \mathcal{O}(x^2)$ e substituir na equação, obtendo:

$$F = ax^3 + \varepsilon\mu + \mathcal{O}(\varepsilon x) = 0 \quad (26)$$

Numa vizinhança da origem podemos escrever:

$$\left(\frac{\varepsilon}{a'} \right)^{1/3} = x(1 + \phi(x)) \quad (27)$$

Em forma análoga podemos obter a série de Puiseux para o Hamiltoniano de Andoyer (Sessin, W., 1981; Garfinkel, B., 1982; Ferraz-Mello, S., 1985a, 1985b)

$$x = \left(\frac{\varepsilon}{a'}\right)^{1/3} + \lambda_2 \left(\frac{\varepsilon}{a'}\right)^{2/3} + \dots \quad (28)$$

Voltando à relação $x = \sqrt{2\mathcal{J}}$ obtemos que $\mathcal{J} = \mathcal{O}(\varepsilon^{2/3})$ que permite supor que as funções geratrizes podem ser desenvolvidas em potências de $\varepsilon^{2/3}$.

Neste capítulo apresentamos um método que permite obter os diferentes desenvolvimentos em série quando estamos em presença de uma ressonância. O método é baseado numa aplicação do Teorema de Preparação de Weierstrass o qual nos permite estudar as singularidades da equação de Hamilton-Jacobi, na hora da aplicação do teorema da função implícita.

Os exemplos que apresentamos são aqueles que vamos usar em nossas aplicações, mas os teoremas são gerais e fornecem o método para determinar os desenvolvimentos.

5 Aplicação ao Problema Restrito dos Três Corpos Elíptico

Neste capítulo vamos expressar a função Hamiltoniana do problema restrito dos três corpos a fim de poder aplicar a teoria de perturbações e, dessa maneira, obter os elementos próprios dos asteróides do grupo de Hilda.

O primeiro caso a estudar é o *clássico problema restrito dos três corpos*, isto é o problema onde fazemos a suposição de que a órbita de Júpiter só é modificada pela ação dos planetas maiores do sistema solar na precessão uniforme do periélio.

O segundo modelo a estudar é o conhecido como *problema restrito dos três corpos estendido*. Este modelo inclui as perturbações que sofre a órbita de Júpiter por causa dos planetas gigantes do sistema solar.

As perturbações dos planetas gigantes produzem, na órbita de Júpiter, variações no argumento do periélio, na excentricidade, na inclinação e na longitude no nodo ascendente. Para o caso plano, vamos considerar as variações na excentricidade e na longitude do periélio, as quais são fornecidas pela teoria secular de Lagrange–Laplace.

Em ambos modelos vamos considerar o caso onde uma ressonância ocorre. Em particular, vamos considerar a relação de ressonância de movimentos médios 3:2.

5.1 Modelo Clássico. Órbita de Júpiter com Precessão Uniforme

5.1.1 Variáveis e Equações

Consideremos um asteróide em movimento ao redor do Sol no mesmo plano que Júpiter e em ressonância de movimentos médios 3:2 com este planeta. Consideremos que o planeta está sobre uma órbita que precessiona uniformemente. Sejam a , e , ϖ , a_J , e_J , ϖ_J e n_J os semieixos maiores, excentricidades e argumentos do periélio do asteróide e Júpiter respectivamente e n_J é o movimento médio do planeta. Chamemos g_J à velocidade de precessão do periélio de Júpiter devida aos efeitos gravitacionais dos outros planetas. Para levar em conta a dependência temporal, vamos trabalhar no espaço de fases estendido (Ferraz-Mello, 2007). Neste espaço os elementos canônicos do asteróide são:

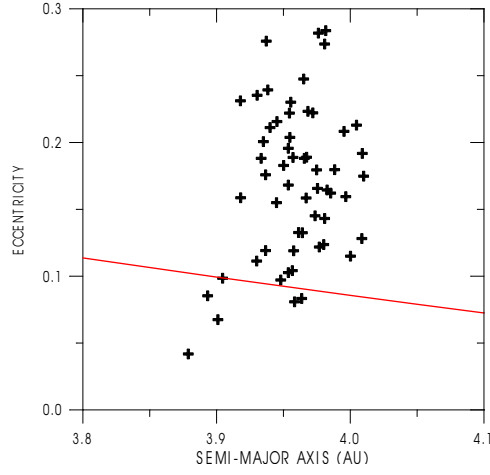


Figura 1: Distribuição dos Hildas em semieixo maior e excentricidade . A linha sólida representa o limite de convergência da desenvolvimento de Laplace da função perturbadora (ver Ferraz-Mello, 1994).

$$\begin{aligned}
 \lambda & , & L & = \sqrt{\mu a} \\
 \varpi & , & G - L & = L(\sqrt{1 - e^2} - 1) \\
 t & , & \mathcal{T} &
 \end{aligned} \tag{29}$$

onde L , G são as variáveis planas de Delaunay e \mathcal{T} é a coordenada canônica conjugada do tempo t .

No caso da ressonância 3:2, usamos as variáveis ressonantes usuais (Ferraz-Mello, 1987)

$$\begin{aligned}
 \theta_1 & = 3\lambda_J - 2\lambda - \varpi \\
 \theta_2 & = 3\lambda_J - 2\lambda - \varpi_J
 \end{aligned} \tag{30}$$

$$\begin{aligned}
 \theta_3 & = \lambda - \lambda_J \\
 J_1 & = L - G \\
 J_2 & = \frac{n_J G + \mathcal{T}}{n_J - g_J}
 \end{aligned} \tag{31}$$

$$J_3 = 3L + 2 \frac{(g_J G + \mathcal{T})}{n_J - g_J}.$$

As equações de movimento são

$$\begin{aligned}\dot{\theta}_i &= \frac{\partial H}{\partial J_i} \\ \dot{J}_i &= -\frac{\partial H}{\partial \theta_i}\end{aligned}\tag{32}$$

onde o Hamiltoniano se escreve como

$$H = -\frac{\mu^2}{2(J_3 - 2(J_1 + J_2))^2} + \mathcal{T} - \varepsilon\mathcal{R},\tag{33}$$

\mathcal{R} é a função perturbadora e $\varepsilon = Gm_J/m_\odot$. Para os cálculos que faremos mais adiante, podemos notar que se \mathcal{T} é eliminado das equações (31) (na definição de J_3) obtemos $L = J_3 - 2(J_1 + J_2)$.

Já que os Hildas tem geralmente excentricidades maiores do que o raio de convergência do desenvolvimento clássica em coeficientes de Laplace (ver a figura), no nosso modelo o desenvolvimento usado é o desenvolvimento de Beaugé (Beaugé, 1996) o qual não é dado por uma série infinita, e por tanto, válida para todos os valores da excentricidade.

A desenvolvimento assimétrico tampouco pode ser usada pelo fato de que os Hildas possuem uma amplitude de libração grande, que não permite usar este tipo de desenvolvimento.

Na próxima seção vamos desenvolver a função perturbadora nos termos formulados por Beaugé.

Esta desenvolvimento tem a forma

$$\begin{aligned}R &= \frac{1}{a_J} \sum_{i=0}^4 \sum_{j=0}^{15} \sum_{k=0}^{15} \sum_{l=-15}^{15} \sum_{m=-15}^{15} \sum_{n=-15}^{15} R_{ijklmn} \times \\ &\times (\alpha - \alpha_{res})^i e^j e_J^k \cos(l\theta_1 + m\theta_2 + n\theta_3)\end{aligned}\tag{34}$$

com

$$\begin{aligned}e &= \sqrt{1 - \left[1 - \frac{J_1}{J_3 - 2(J_1 + J_2)}\right]^2}, \\ a &= [J_3 - 2(J_1 + J_2)]^2 / \mu,\end{aligned}\tag{35}$$

onde R_{ijklmn} são coeficientes constantes, $\alpha = \frac{a}{a_J}$ e $\alpha_{res} = \frac{2}{3}$.

Para nossa aplicação vamos introduzir uma pequena modificação da função perturbadora porque faremos o desenvolvimento em potências de $\alpha - \alpha_{res}$ em vez de α . Por esta razão, adotaremos até a potência 4 nesta quantidade, pois numa vizinhança da ressonância é uma quantidade pequena.

5.2 O Problema Estendido. Inclusão das Perturbações Seculares na Órbita de Júpiter

5.2.1 Variáveis e Equações

Nesta seção vamos considerar as perturbações seculares da órbita de Júpiter, dada pela teoria secular de Lagrange-Laplace:

$$e_J \exp(i\varpi_J) = \sum_{j=5}^8 A_j \exp(i(g_j t + \nu_j)) \quad (36)$$

onde as amplitudes A_j , frequências g_j e as fases ν_j poden ser obtidos de Nobili et al (1989).

Na tabela seguinte colocamos os valores usados neste trabalho:

	Frequência ("/yr)	Fase (ν_j , em graus)	Amplitude
g_5	4.25749319	27.005	4.41872×10^{-2}
g_6	28.24552984	124.1994	-1.57002×10^{-2}
g_6	3.08675577	117.0516	1.8139×10^{-3}
g_5	0.67255084	70.7508	5.8×10^{-5}

Para trabalhar com as perturbações seculares, vamos separar as expressões em duas partes

$$e_J \exp(i\varpi_J) = e_J^p \exp(i\varpi_J^p) + \sum_{l=6}^8 A_l \exp(i\chi_l) \quad (37)$$

onde o índice (p) indica próprio, isto é $e_J^p = A_5$, $\varpi_J^p = g_5 t + \nu_5$ e $\chi_l = g_l t + \nu_l$ ($l = 6, 7, 8$).

A dependência com o tempo é também, nesta abordagem, explícita, pois a longitude média é uma função linear no tempo, e a função perturbadora depende desse ângulo.

Para eliminar esta dependência explícita com o tempo, introduzimos mais graus de liberdade associados com os argumentos da solução secular para Júpiter, seguindo a idéia de Morbidelli e Moons (Morbidelli & Moons, 1993). Esta eliminação é feita definindo novas coordenadas no espaço de fases, a quais são funções lineares do tempo, e seus momentos conjugados.

coordenada	momento
λ	L
λ_J	Λ
ϖ	$G - L$
$\varpi_J^{(p)}$	G_5
χ_6	G_6
χ_7	G_7
χ_8	G_8

Com esta extensão, o Hamiltoniano pode se escrever como

$$H = -\frac{\mu^2}{2(J_3 - 2(J_1 + J_2))^2} + n_J \Lambda + g_5 G_5 + g_6 G_6 + g_7 G_7 + g_8 G_8 - \varepsilon R, \quad (38)$$

onde R é a função perturbadora e $\varepsilon = Gm_J/m_\odot$.

Na ressonância 3:2, usamos as variáveis ressonantes estándar, como na seção anterior, mas com a introdução das novas coordenadas que eliminam a dependência temporal

coordenada	momento
$\theta_1 = 3\lambda_J - 2\lambda - \varpi$	$J_1 = L - G$
$\theta_2 = 3\lambda_J - 2\lambda - \varpi_J^{(p)}$	$J_2 = G + \Lambda$
$\theta_3 = \lambda - \lambda_J$	$J_3 = 3L + 2\Lambda$
$\theta_4 = \varpi_J^{(p)}$	$J_4 = G_5 + G + \Lambda$
$\theta_l = \chi_{l+1}$	$J_l = G_{l+1} \quad (l = 5, 6, 7)$

As equações de movimento são

$$\dot{\theta}_i = \frac{\partial H}{\partial J_i}; \quad \dot{J}_i = -\frac{\partial H}{\partial \theta_i}, \quad (39)$$

onde o Hamiltoniano é agora

$$H = -\frac{\mu^2}{2(J_3 - 2(J_1 + J_2))^2} + 3n_J(J_1 + J_2) - n_J J_3 - g_5 J_2 + \sum_{l=6}^8 g_l J_{l-1} - \varepsilon R. \quad (40)$$

6 A Função Perturbadora

Para o problema restrito dos três corpos, a função perturbadora é

$$\mathcal{R} = \frac{1}{\Delta} - \frac{\mathbf{r}\mathbf{r}_J}{r_J^3} \quad (41)$$

onde

$$\Delta = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_J| = (r^2 + r_J^2 - 2rr_J \cos S)^{1/2}. \quad (42)$$

S é o ângulo entre o asteróide e Júpiter relativo ao Sol.

Como foi mostrado por Ferraz-Mello (Ferraz-Mello, 1994), o desenvolvimento Laplaciano não pode ser usado para aplicação no caso dos Hildas, já que estes asteróides ficam fora da região de convergência.

Por essa razão, neste trabalho vamos trabalhar com o desenvolvimento da função perturbadora proposto por Beaugé (Beaugé, 1996). Este desenvolvimento é válido para todas as excentricidades excluindo regiões onde acontecem singularidades associadas a colisões entre Júpiter e o asteróide.

6.1 A aproximação de Beaugé. O parâmetro δ

O maior problema no desenvolvimento de \mathcal{R} vem do termo Δ^{-1} . Introduzindo a relação $\rho = r/r_J$, obtemos da equação .(42)

$$\frac{r_J}{\Delta} = (1 + \rho^2 - 2\rho \cos S)^{-1/2}. \quad (43)$$

Beaugé centra o seu desenvolvimento em um ajuste polinômico da função

$$\frac{r_J}{\Delta} = (1 + x)^{-1/2}. \quad (44)$$

onde

$$x = \rho^2 - 2\rho \cos S \quad (45)$$

representando a função $(1 + x)^{-1/2}$ por um polinômio de grau N na variável x :

$$(1 + x)^{-1/2} \simeq \sum_{n=0}^N b_n x^n \quad (46)$$

onde os coeficientes b_n são determinados numericamente partir de uma regressão linear.

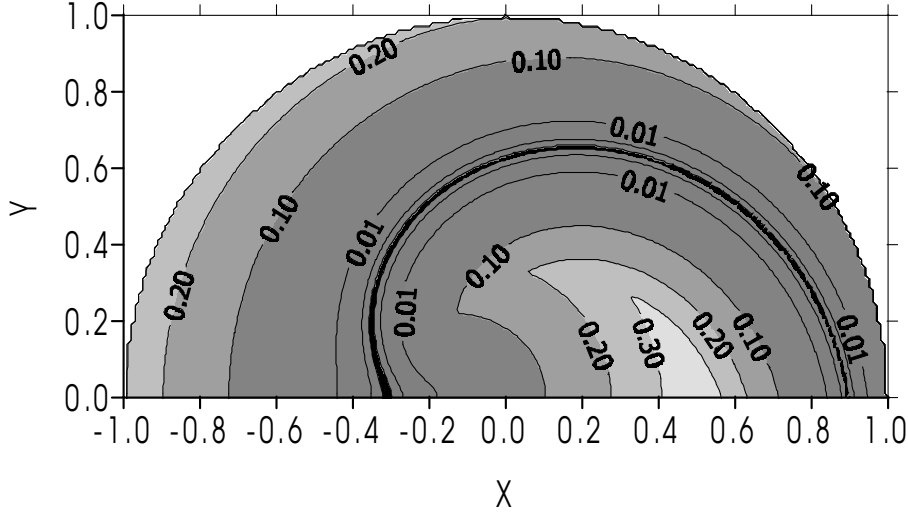


Figura 2: Limites de validade da aproximação de Beaugé para asteróides em ressonância 3:2 com Júpiter para $e_J = 0$ e diferentes valores de δ . A curva grossa preta mostra a posição dos pontos onde $x_{\min} = -1$ (curva de colisão). As curvas não marcadas adjacentes correspondem-se com $\delta = 0.001$. Eixos: $X = e \cos \theta_1$; $Y = |e \sin \theta_1|$.

A variável $1 + x$ é uma medida da proximidade da condição inicial com a singularidade em $\frac{1}{\Delta}$. Esta medida é igual a zero na singularidade e vai crescendo à medida que vai se afastando da curva de colisão. Notemos que os valores de ρ e S não são por separado significantes, só é importante a distância à singularidade.

O ajuste numérico é feito usando valores de $x > -1 + \delta$, onde δ é um parâmetro positivo próximo a zero. Na aproximação de Beaugé, o número necessário de termos para representar Δ^{-1} depende da magnitude de Δ^{-1} na região a ser estudada:

Perto do mínimo de Δ^{-1} , com poucos termos teremos uma boa representação de $(1 + x)^{-1/2}$.

Este número cresce rapidamente assim que as órbitas vão se aproximando, ficando próximas à colisão (Beaugé & Michtchenko, 2003).

Para o caso dos Hildas, $\delta > 0.1$ uma boa aproximação pode ser obtida com um número razoável de termos. Nesta tese, usaremos $N = 15$.

Os limites δ na comensurabilidade 3:2 ($\alpha \simeq 0.763$) são mostrados na figura 2 (para $e_J = 0$). O máximo valor ($\delta = 0.39$) fica em $e \sim 0.51, \theta_1 = 0$ (sobre o

eixo X). Este ponto é muito próximo à solução estacionária de corrotação da ressonância asteroidal 3:2 ($e_1 = 0.45$ para $e_2 \rightarrow 0$; ver Ferraz-Mello et al., 1993). As singularidades de Δ^{-1} estão sobre a curva preta grossa (curva de colisão).

Introduzindo a expressão explícita para x na equação (46), temos

$$\frac{r_J}{\Delta} \simeq \sum_{k=0}^N \sum_{j=0}^n c_k (-2)^j \binom{k}{j} \rho^{2k-j} \cos^j S \quad (47)$$

onde os c_k são coeficientes constantes, os quais podem ser obtidos a partir dos b_k .

Como nesta tese fazemos uma teoria plana, isto é as órbitas de Júpiter e do asteroide são coplanares, introduzimos a definição de S no caso plano: $S = f - f_J + \Delta\varpi$. Escrevendo as potências dos cossenos por múltiplos do argumento, e introduzindo a expressão plana de S , podemos reescrever a última equação como:

$$\frac{a_J}{\Delta} \simeq \sum_{k=0}^N \sum_{i=0}^{N-k} 2A_{k,i} \alpha^m \left(\frac{r_1}{a_1}\right)^m \left(\frac{r_2}{a_2}\right)^{-m-1} \cos k(f - f_J + \Delta\varpi) \quad (48)$$

onde $m = 2i + k$.

O próximo passo é a transformação da anomalia verdadeira em anomalia média. Para fazer isto, usamos os desenvolvimentos de Fourier para o problema dos dois corpos:

$$\begin{aligned} \left(\frac{r}{a}\right)^n \cos(kf) &= \sum_{j=0}^{\infty} (X_j^{n,k} + X_{-j}^{n,k}) \cos(j\ell) \\ \left(\frac{r}{a}\right)^n \sin(kf) &= \sum_{j=0}^{\infty} (X_j^{n,k} - X_{-j}^{n,k}) \sin(j\ell) \end{aligned} \quad (49)$$

onde o índices superiores n podem ser tanto positivos como negativos. Os coeficientes $X_j^{n,k}$ são os coeficientes de Hansen (ver, para detalhes, Tisserand, 1889, cap. XV §96; Kaula, 1962). Os coeficientes de Hansen são funções da excentricidade e podem ser desenvolvidos em série de potências nas mesmas:

$$X_j^{n,k} = e^{|k-j|} \sum_{s=0}^{\infty} Y_{s+u_1, s+u_2}^{n,k} e^{2s} \quad (50)$$

($u_1 = \max(0, j - k)$ e $u_2 = \max(0, k - j)$) onde os números $Y_{s+u_1, s+u_2}^{n,k}$ são os operadores de Newcomb.

Os operadores de Newcomb não dependem das excentricidades e , por tanto, são sempre os mesmos para todas as condições iniciais; eles obedecem relações de recorrência o que permite que sejam calculados facilmente para todos os subíndices (Brouwer & Clemence, 1961, cap. XV §4).

Introduzindo a eq. (50) na eq. (49), se obtém

$$\begin{aligned} \left(\frac{r}{a}\right)^n \cos(kf) &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_{n,k,i,m} e^i \cos(m\ell) \\ \left(\frac{r}{a}\right)^n \sin(kf) &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_{n,k,i,m} e^i \sin(m\ell) \end{aligned} \quad (51)$$

onde $B_{n,k,i,m}$ e $C_{n,k,i,m}$ são coeficientes constantes expressos como funções dos operadores de Newcomb. Estes coeficientes, primeiro calculados por Leverrier, não dependem dos parâmetros orbitais e podem ser calculados uma única vez. Eles tem propriedades interessantes. A mais importante delas é a propriedade de d'Alembert: $B_{n,k,i,m} = C_{n,k,i,m} = 0$ onde $|m| < i$ ou quando $|m| - i$ é ímpar.

O último destes desenvolvimentos é uma série de potência em e convergente para $e < 0.6627434 \dots$ (ver para detalhes Wintner, 1941, cap. IV).

Introduzindo agora a eq. (51), e suas analogas para Júpiter, na expressão da parte direta da função perturbadora, e reordenando os termos, obtemos:

$$\frac{1}{\Delta} \simeq \frac{1}{a_J} \sum_{j,k=0}^{\infty} \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} \sum_{l=0}^N \sum_{i=0}^{N-l} A_{l,i} D_{2i+l,j,k,m,n} \alpha^{2i+l} e^i e_J^j \cos(m\ell - n\ell_J + l\Delta\varpi) \quad (52)$$

onde os coeficientes $D_{2i+l,j,k,m,n}$ estão dados por:

$$D_{2i+l,j,k,m,n} = \frac{1}{2\gamma_m \gamma_n} (B_{2i+l,l,j,|m|} + \text{sign}(m)C_{2i+l,l,j,|m|}) \times (B_{-2i-l-1,l,k,|n|} + \text{sign}(n)C_{-2i-l-1,l,k,|n|}) \quad (53)$$

e γ_m é uma função definida como:

$$\gamma_m = \begin{cases} 1/2 & \text{if } m = 0 \\ 1 & \text{if } m > 0. \end{cases} \quad (54)$$

Esta é a parte direta da função perturbadora.

6.2 A parte Indireta

A função que aparece na parte indireta de \mathcal{R} é

$$\frac{\mathbf{r}\mathbf{r}_J}{r_J^3}. \quad (55)$$

Comparando as eqn. (41) e eq. (48), podemos ver que a contribuição tem exatamente a mesma forma funcional como um dos termos da desenvolvimento (eqn. 48). Isto significa que podemos adicionar a parte indireta diretamente na definição dos coeficientes usados na seção anterior.

Isto pode ser feito simplesmente modificando o coeficiente $A_{k,i}$ com $k = 1$, $i = 0$ da maneira:

$$A_{1,0} \longrightarrow A_{1,0} - 1/2. \quad (56)$$

Desta maneira, podemos obter uma única expressão em série para a função perturbadora do problema dos três corpos no caso planetario em coordenadas relativas heliocêntricas. É importante notar que os coeficientes são constantes para todas as condições iniciais, e somente os determinamos uma vez só. (para detalhes, ver Beaugé, 1996; Beaugé & Michtchenko, 2003.)

Cada termo em \mathcal{R} depende das anomalias médias ℓ, ℓ_J e da diferença entre as longitudes do periélio. $\Delta\varpi$. Em termos das variáveis canônicas usadas nesta teoria, estes argumentos podem ser escritos como $(m - \ell)\theta_1 + (\ell - n)\theta_2 + (3m - 2n)\theta_3$.

6.3 Inclusão da solução secular para a órbita de Júpiter

Começando com a expressão geral do desenvolvimento de Beaugé para a função perturbadora

$$R = \frac{1}{a_J} \sum_{i=0}^4 \sum_{j=0}^{15} \sum_{k=0}^{15} \sum_{l=-15}^{15} \sum_{m=-15}^{15} \sum_{n=-15}^{15} R_{ijklmn} \times (\alpha - \alpha_{res})^i e^j e_J^k \cos(l\theta_1 + m\theta_2^0 + n\theta_3), \quad (57)$$

vamos agora introduzir os efeitos das perturbações dos planetas gigantes na órbita de Júpiter, dada pela teoria secular de Lagrange-Laplace eqns. (37).

Necessitamos achar uma expressão para $e_J^k \cos(l\theta_1 \pm m\theta_2^0 + n\theta_3)$ (usamos os dois sinais para trabalhar com m positivos):

$$e_J^k \cos(l\theta_1 \pm m\theta_2^0 + n\theta_3) = e_J^k \cos m\theta_2^0 \cos(l\theta_1 + n\theta_3) \mp e_J^k \sin m\theta_2^0 \sin(l\theta_1 + n\theta_3) \quad (58)$$

Chamando $D_m^k = e^k \cos m\theta_2^0$ e $E_m^k = e^k \sin m\theta_2^0$, podemos escrever

$$e_J^k \cos(l\theta_1 \pm m\theta_2^0 + n\theta_3) = D_m^k \cos(l\theta_1 + n\theta_3) \mp E_m^k \sin(l\theta_1 + n\theta_3) \quad (59)$$

6.3.1 As Expressões de D_m^k e E_m^k

A partir das equações (37), multiplicando o complexo conjugado por $\exp(i\psi)$ ($\psi = 3\lambda_J - 2\lambda$), obtemos

$$e_J \exp(i\theta_2^0) = e_J^{(p)} \exp(i\theta_2) + \sum_{j=6}^8 A_j \exp[i(\psi - \chi_j)] \quad (60)$$

o que pode ser escrito como

$$e_J \exp(i\theta_2^0) = e_J^{(p)} \exp(i\theta_2) + \sum_{j=6}^8 A_j \exp[i(\theta_2 + \theta_4 - \theta_{j-1})]. \quad (61)$$

Com essas expressões vamos expressar D_m^k e E_m^k . Das regras de d'Alembert, sabemos que $k = m, m+2, m+4, \dots$. Por tanto, vamos calcular primeiro D_m^m e E_m^m .

Para simplificar a notação, introduzimos a variável complexa $X_k^m = e^k \exp(im\theta_2^0)$. Temos, então, $D_m^m = \text{Re}[X_m^m]$ e $E_m^m = \text{Im}[X_m^m]$.

A partir de $X_m^m = X_1^1 X_{(m-1)}^{(m-1)}$, temos

$$\begin{aligned} D_m^m &= \text{Re}[X_1^1 X_{(m-1)}^{(m-1)}] = D_1^1 D_{(m-1)}^{(m-1)} - E_1^1 E_{(m-1)}^{(m-1)} \\ E_m^m &= \text{Im}[X_1^1 X_{(m-1)}^{(m-1)}] = D_1^1 E_{(m-1)}^{(m-1)} + E_1^1 D_{(m-1)}^{(m-1)} \end{aligned} \quad (62)$$

Se usamos

$$\cos[(m-2)\theta_2^0] = \cos\theta_2^0 \cos[(m-1)\theta_2^0] + \sin\theta_2^0 \sin[(m-1)\theta_2^0]$$

e multiplicamos por e_J^m obtemos

$$E_1^1 E_{m-1}^{m-1} + D_1^1 D_{m-1}^{m-1} = e_J^2 D_{m-2}^{m-2}.$$

e combinando com (62) obtemos as relações de recorrência

$$\begin{aligned} D_m^m &= 2D_1^1 D_{(m-1)}^{(m-1)} - e_J^2 D_{(m-2)}^{(m-2)} \\ E_m^m &= D_1^1 E_{(m-1)}^{(m-1)} + E_1^1 D_{(m-1)}^{(m-1)} \end{aligned} \quad (63)$$

Para obter D_m^k e E_m^k precisamos levar em conta o fato que $k = m, m + 2, m + 4, \dots$. Por tanto, é preciso calcular

$$D_m^m, e_J^2 D_m^m, e_J^4 D_m^m, \dots$$

e o mesmo para E_m^k .

Para fazer estes cálculos, precisamos as expressões para e_J^2, e_J^4, e_J^6 , etc. Das relações de recorrência, e levando em conta que $e_J^2 D_{m-2}^{m-2} = D_{m-2}^m$, temos

$$D_m^{m+2} = 2D_1^1 D_{m+1}^{m+1} - D_{m+2}^{m+2} \quad (64)$$

e, em geral, conseguimos as relações que nos permitem obter todos os termos D_m^{m+2l} e E_m^{m+2l} como

$$\begin{aligned} D_m^{m+2l} &= 2D_1^1 D_{m+1}^{m+2l-1} - D_{m+2}^{m+2l} \\ E_m^{m+2l} &= E_1^1 D_{m-1}^{m+2l-1} + D_1^1 E_{m-1}^{m+2l-1} \end{aligned} \quad (65)$$

Com isto, completamos os cálculos dos termos D_m^k e E_m^k . Em anexo vamos colocar os primeiros coeficientes D_m^k e E_m^k .

6.3.2 A Expressão Final da Função Perturbadora

Uma vez que temos as expressões para os termos D_m^k e E_m^k , necessitamos voltar à função perturbadora, para dar uma expressão mais compacta e poder cumprimentar o processo de média

Como D_m^k é uma série de cossenos e E_m^k uma série de senos, podemos escrever

$$\begin{aligned} D_m^k \cos(l\theta_1 + n\theta_3) \pm E_m^k \sin(l\theta_1 + n\theta_3) &= \sum_{k_2, m_2, r, s, t, u} e_J^{(p)k_2} B_{k_2 m_2 r s t u}^{k m} \times \\ &\times \cos(l\theta_1 + m_2\theta_2 + n\theta_3 + r\theta_4 + s\theta_5 + t\theta_6 + u\theta_7) \end{aligned} \quad (66)$$

onde os índices k_2 e m_2 tem k e m como limite.

Então, a função perturbadora pode se escrita como

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{a_J} \sum_{i=0}^4 \sum_j \sum_k \sum_l \sum_{k_2} \sum_m \sum_{m_2} \sum_n \sum_r \sum_s \sum_t \sum_u R_{ijklmn} B_{k_2 m_2 r s t u}^{k m} \\ &\times (\alpha - \alpha_{res})^i e^j e_J^{(p)k_2} \cos(l\theta_1 + m_2\theta_2 + n\theta_3 + r\theta_4 + s\theta_5 + t\theta_6 + u\theta_7), \end{aligned} \quad (67)$$

Definindo

$$\mathbf{P}_{ijk_2lm_2nrst} = \sum_{k,m} R_{ijklmn} B_{k_2m_2rst}^{km} \quad (68)$$

temos que

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{a_J} \sum_{i=0}^4 \sum_j \sum_k \sum_l \sum_{k_2} \sum_n \sum_{m_2} \sum_r \sum_s \sum_t \sum_u \mathbf{P}_{ijk_2lm_2nrst} (\alpha - \alpha_{res})^i e^j e_J^{(p)k_2} \times \\ &\times \cos(l\theta_1 + m_2\theta_2 + n\theta_3 + r\theta_4 + s\theta_5 + t\theta_6 + u\theta_7), \end{aligned} \quad (69)$$

7 Obtenção de Elementos Próprios

A construção dos elementos próprios, começando dos elementos osculadores, consiste em uma sequência de passos, os quais podem ser resumidos como os seguintes:

- *Obtenção dos elementos semi-médios.*
Estes elementos são os obtidos a partir de uma média sobre o termo de curto período, isto é, na diferença de longitudes médias do asteroide e o planeta. Para o caso não ressonante, esta média proporciona os elementos médios (Milani & Knezević, 1991)
- *Obtenção dos elementos médios.*
Este segundo passo é o de maior importância e onde devemos aplicar a teoria de séries de Lie para sistemas ressonantes. Esta aplicação, para o caso asteroidal, está composta dos seguintes passos:
 - Desenvolvimento do Hamiltoniano ao redor da condição de ressonância.
 - Construção de um kernel de Hori integrável que descreva a topologia da ressonância.
 - Integração do kernel integrável.
 - Resolver termo-a-termo as equações de perturbação, obtendo a função geratriz
- *Obtenção dos elementos próprios*
Uma vez que foi feita a segunda média, o Hamiltoniano resultante depende de ângulos não críticos, os quais podem ser eliminados por uma média (via séries de Lie, não ressonante), dando como resultado o Hamiltoniano independente dos ângulos, e, em consequência, definindo variáveis ação invariantes. Estas variáveis serão denominadas *Elementos Próprios Dinâmicos*.

Com os elementos próprios dinâmicos e fazendo as transformações inversas (obtidas nos passos anteriores), podremos definir elementos Keplerianos Equivalentes -na nossa teoria plana- o semieixo e a excentricidade, a e e .

Neste capítulo vamos obter os elementos próprios dinâmicos nos dois modelos do problema restrito dos três corpos.

7.1 Cálculo de Elementos Próprios no problema Clássico. O Modelo do Pêndulo

7.1.1 Primeira Média: Os Elementos Semi-Médios

A primeira média é feita sobre o ângulo rápido θ_3 que é a diferença entre as longitudes médias. Esta média é feita aplicando a teoria de séries de Lie para sistemas não ressonantes (Hori, 1966; Ferraz-Mello, 1990) até a primeira ordem no parâmetro ε .

Começando com o Hamiltoniano dado pela equação (40) vamos construir uma transformação canônica que nos conduza a um Hamiltoniano transformado

$$H^* = E_{W^{(1)}} H(\theta_1^*, \theta_2^*, \theta_3^*; J_1^*, J_2^*, J_3^*) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^l}{l!} D_{W^{(1)}}^l(H). \quad (70)$$

Se fazemos a suposição

$$H^* = H_0^* + \varepsilon H_1^* + \varepsilon^2 H_2^* + \varepsilon^3 H_3^* + \dots, \quad (71)$$

$$W^{(1)} = W_1^{(1)} + \varepsilon W_2^{(1)} + \dots, \quad (72)$$

e introduzimos estes desenvolvimentos nas equações (70), obtemos as equações de perturbação

$$\begin{aligned} H_0^* &= \left(-\frac{\mu^2}{2L^2} + \mathcal{T} \right)_{(J_1^*, J_2^*, J_3^*)}, \\ H_1^* &= \left(R + \{H_0^*, W_1^{(1)}\} \right)_{(\theta_1^*, \theta_2^*, \theta_3^*; J_1^*, J_2^*, J_3^*)}, \\ &\vdots \quad \quad \quad \vdots \end{aligned} \quad (73)$$

Para resolver a equação homológica adotamos a regra de média

$$H_1^* = \langle R \rangle_{\theta_3^*} \quad (74)$$

e obtemos o gerador de Lie de primeira ordem

$$\begin{aligned} W_1^{(1)} &= \frac{1}{a_J} \sum_{i=0}^4 \sum_{j=0}^{15} \sum_{k=0}^{15} \sum_{l=-15}^{15} \sum_{m=-15}^{15} \sum_{n=-15}^{15} \frac{R_{ijklmn}}{l\Gamma_1 + m\Gamma_2 + n\Gamma_3} \times \\ &\quad (\alpha^* - \alpha_{res})^i e^{*j} e_J^k \sin(l\theta_1^* + m\theta_2^* + n\theta_3^*) \end{aligned} \quad (75)$$

onde

$$\Gamma_j = \frac{\partial H_0^*}{\partial J_j^*}, \quad j = 1, 2, 3. \quad (76)$$

As funções $e^*(J^*)$ e $a^*(J^*)$ são definidas da mesma relação funcional que $e(J)$ e $a(J)$ (eqns. 35).

Os elementos semi-médios e os elementos osciladores estão relacionados pela transformação canônica gerada por $W^{(1)}$, a qual, até primeira ordem é

$$\begin{aligned} \theta_i &= \theta_i^* + \{\theta_i^*, W_1^{(1)}\} \\ J_i &= J_i^* + \{J_i^*, W_1^{(1)}\}. \end{aligned} \quad (77)$$

O *Hamiltoniano semi-médio* é, então,

$$\begin{aligned} H^* &= H_0(J^*) - \varepsilon \frac{1}{a_J} \sum_{i=0}^4 \sum_{j=0}^{15} \sum_{k=0}^{15} \sum_{l=-15}^{15} \sum_{m=-15}^{15} R_{ijklm0} \times \\ &(\alpha^* - \alpha_{res})^i e^{*j} e_J^k \cos(l\theta_1^* + m\theta_2^*). \end{aligned} \quad (78)$$

7.1.2 Segunda Média: Os Elementos Médios

Como foi dito na introdução ao capítulo, para a obtenção do elementos médios devemos seguir o seguinte roteiro:

- Expandir o Hamiltoniano H^* ao redor da condição de ressonância;
- Separar o Hamiltoniano em duas partes:

$$H^*(\theta^*, J^*) = H_{p\acute{e}ndulo}^* + \Delta H^*; \quad (79)$$

- Integrar o pêndulo nas variáveis $\{\theta_1^*, (J_1^* + J_2^*)\}$ e obter as correspondentes variáveis ângulo-ação (w_1^*, Λ_1^*) ;
- Estender a transformação para incluir o outro grau de liberdade com a *Transformação de Henrard-Lemaître*;
- Obter as equações de perturbação ;
- Fazer a média no ângulo w_1^* .

7.1.3 Desenvolvimento do Hamiltoniano na ressonância

Uma vez feita a primeira média, o Hamiltoniano resultante não depende do ângulo θ_3^* . Então, J_3^* é uma constante. Este valor constante será fixado no valor de referência

$$J_3^* = L_{res} = \sqrt{\mu a_{res}} = \left[\frac{2\mu^2}{3n_J}\right]^{1/3}$$

e desenvolvemos L^* ao redor desse valor. Como $L^* = J_3^* - 2(J_1^* + J_2^*)$, isto é equivalente a desenvolver o Hamiltoniano em série de Taylor em $\xi = J_1^* + J_2^* = 0$.

A parte não perturbada do Hamiltoniano pode ser escrita como:

$$H_0^* = -\frac{\mu^2}{2} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(i+1)}{(J_3^*)^{(2+i)}} 2^i (J_1^* + J_2^*)^i + 3n_J (J_1^* + J_2^*) - n_J J_3^* - g_J J_2^*.$$

Introduzindo $n_{res} = \frac{\mu^2}{(J_3^*)^3}$, H_0^* pode se escrito:

$$\begin{aligned} H_0^* &= -\frac{\mu^2}{2(J_3^*)^2} + (3n_J - 2n)(J_1^* + J_2^*) - \\ &- \frac{\mu^2}{2} \sum_{i=3}^{\infty} \frac{(i+1)}{J_3^{2+i}} 2^i (J_1^* + J_2^*)^i - n_J J_3^* - g_J J_2^*. \end{aligned} \quad (80)$$

Devido à definição de n_{res} temos que $3n_J - 2n_{res} = 0$. O Hamiltoniano $H^*(\theta^*, J^*)$ é de dois graus de liberdade onde θ_1^* é crítico (ressonante) e θ_2^* é de longo período.

Nas seguintes expressões, vamos também desenvolver J_1^* numa vizinhança de $-J_2^*$ usando

$$J_1^* = -J_2^* + \xi \quad (81)$$

É importante notar que não consideramos que J_1^* e J_2^* são pequenos, mas $J_1^* + J_2^*$ é a quantidade pequena.

A função perturbadora é desenvolvida como:

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}^0 + \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} (J_1^* + J_2^*) + \dots$$

onde

$$\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} = \left[\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial a^*} \frac{\partial a^*}{\partial \xi} + \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial e^*} \frac{\partial e^*}{\partial \xi} \right] \Big|_{\xi=0}. \quad (82)$$

Em $\xi = 0$ temos (ver as eqs. 35)

$$\begin{aligned}
a^*|_{\xi=0} &= \frac{J_3^{*2}}{\mu} \\
e^*|_{\xi=0} &= \sqrt{1 - \left(\frac{J_2^* + J_3^*}{J_3^*}\right)^2} \\
\left(\frac{\partial a^*}{\partial \xi}\right)|_{\xi=0} &= -4\frac{J_3^*}{\mu} \\
\left(\frac{\partial e^*}{\partial \xi}\right)|_{\xi=0} &= (-1) \left[1 - \left(\frac{J_2^* + J_3^*}{J_3^*}\right)^2\right]^{-1/2} \frac{(J_2^* + J_3^*)(2J_2^* - J_3^*)}{J_3^{*3}}
\end{aligned} \tag{83}$$

Para calcular as derivadas parciais com relação a ξ nas eqs. (83), usamos a eq. (81) e consideramos o momento J_2^* como uma constante.

7.1.4 O Kernel de Hori. Escolha do Modelo Integrável

A condição de ressonância impõe condições sobre o Hamiltoniano a ser escolhido como Hamiltoniano integrável. Já sabemos que $H_0(J^*)$ não é adequado para ser usado como Hori. Temos que escolher um novo kernel de Hori que possua os aspectos topológicos de um fluxo Hamiltoniano no entorno de uma ressonância. Por esta razão, é necessário considerar ordens de grandeza (associadas ao pequeno parâmetro ε) de forma tal que no Kernel de Hori todos os termos possuam a mesma ordem e os termos restantes sejam de ordem superior. Usemos agora, o fato que $J_1^* + J_2^*$ é uma quantidade pequena:

$$\xi = J_1^* + J_2^* = \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon}).$$

Para asteróides com excentricidades entre 0.15 e 0.3 (valores típicos no grupo de Hilda) podemos supor que todos os termos que contem o ângulo θ_2^* podem ser considerados como perturbação (ver figura 4). Mesma coisa ocorre com os termos seculares $\varepsilon\mathcal{R}_{00}^0(J_2^*)$. Por tanto, podemos considerar que a parte principal do Hamiltoniano é agora

$$F_2^* = \frac{1}{2}\nu_{11}(J_1^* + J_2^*)^2 + \varepsilon\mathcal{R}_{00}^0(J_2^*) - g_J J_2^* + \varepsilon\mathcal{R}_{10}^0(J_2^*) \cos \theta_1^* \tag{84}$$

onde $\nu_{11} = -\frac{12\mu^2}{(J_3^*)^4}$ e as funções \mathcal{R}_{00}^0 e \mathcal{R}_{10}^0 são geralmente definidas por

$$\mathcal{R}_{\ell m}^0 = - \left(\sum_{i=0}^4 \sum_{j=0}^{15} \sum_{k=0}^{15} R_{ijklm0} \frac{(\alpha^* - \alpha_0)^i}{a_J} e^{*j} e_J^k \right)_{\xi=0} \tag{85}$$

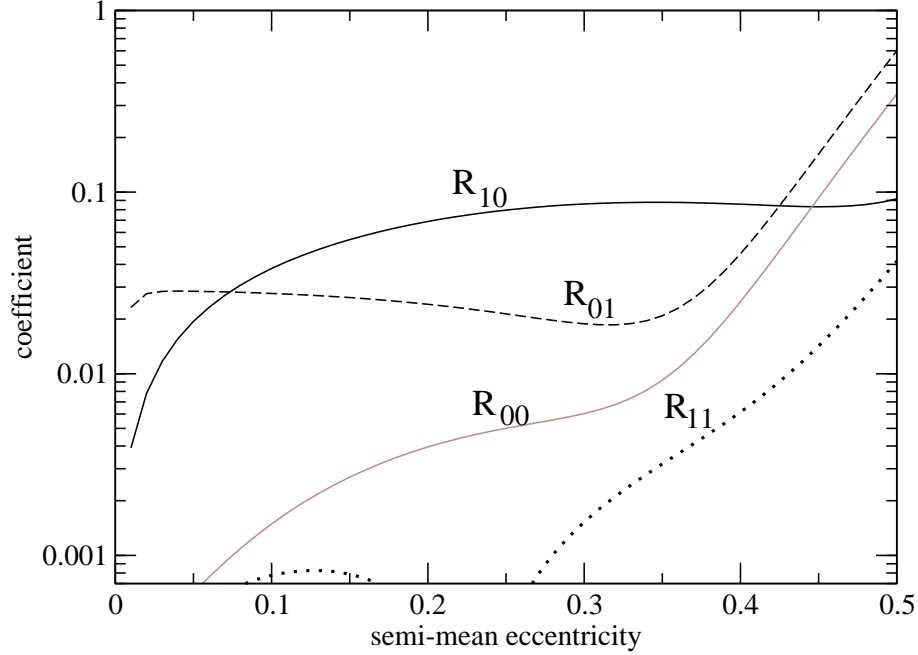


Figura 3: Coeficientes principais da função perturbadora. Para excentricidades entre 0.15 e 0.3 o termo correspondente ao ângulo ressonante θ_1^* é dominante.

(Nesta expressão, a excentricidade e semieixo são calculados em $\xi = 0$, isto é, em $J_3^* = \sqrt{\mu a_{res}}$ e $J_1^* = -J_2^*$.)

O ângulo θ_2^* é cíclico, portanto J_2^* é constante na solução deste Hamiltoniano.

Além do mais \mathcal{R}_{10}^0 é constante e F_2^* é o Hamiltoniano do pêndulo simples, cuja solução, no caso de librações de pequenas amplitudes pode ser escrita por (Ferraz-Mello, 2002)

$$\begin{aligned}
 J_1^* + J_2^* &= -8 \frac{\omega_1^0}{|\nu_{11}|} \{ [\cos w_1^*] \mathcal{Q} - [2 \cos w_1^* - \cos 3w_1^*] \mathcal{Q}^3 \\
 &\quad - [\frac{17}{2} \cos w_1^* - 5 \cos 3w_1^* - \cos 5w_1^*] \mathcal{Q}^5 \} + \mathcal{O}(\mathcal{Q}^7) \quad (86)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sin \theta_1^* &= 8 [\sin w_1^*] \mathcal{Q} - 24 [2 \sin w_1^* - \sin 3w_1^*] \mathcal{Q}^3 \\
 &\quad - 8 [\frac{25}{2} \sin w_1^* - 3 \sin 3w_1^* - 5 \sin 5w_1^*] \mathcal{Q}^5 + \mathcal{O}(\mathcal{Q}^7) \quad (87)
 \end{aligned}$$

A amplitude \mathcal{Q} se relaciona com a ação do pêndulo Λ_1^* como

$$\mathcal{Q} = \sqrt{\frac{\nu_{11}\Lambda_1^*}{32\omega_1^0}}.$$

O coeficiente \mathcal{R}_{10}^0 é uma quantidade positiva. No caso em que \mathcal{R}_{10}^0 seja negativa, a definição do ângulo θ_1 poderia ser mudado adicionando π antes de usar os resultados clássicos do pêndulo.

A ação é uma quantidade pequena da ordem $\mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon})$ já que \mathcal{Q} é, a priori, uma quantidade finita (a amplitude do pêndulo é uma constante arbitrária). Mais ainda, a hipótese de \mathcal{Q} pequeno é uma condição independente da magnitude de ε .

Depois de introduzir as novas variáveis, a eqn. (86) fica como

$$F_2^* = \mathcal{F}(\Lambda_1^*, J_2^*) - gJ_2^* + \varepsilon\mathcal{R}_{00}^0(J_2^*), \quad (88)$$

onde a função $\mathcal{F}(\Lambda_1^*, J_2^*)$ é a parte do Hamiltoniano semi-médio correspondente ao modelo do pêndulo em termos da nova ação :

$$\mathcal{F}(\Lambda_1^*, J_2^*) = \varepsilon\mathcal{R}_{10}^0(J_2^*) \left(1 - 32\mathcal{Q}^2 + 64\mathcal{Q}^4\right) + \mathcal{O}(\mathcal{Q}^6) \quad (89)$$

O kernel de Hori proposto só inclui o termo crítico do ângulo θ_1 . Os outros termos periódicos do Hamiltoniano semi-médio não foram considerados para a construção do kernel e foram levados em conta em ordens superiores. Esta escolha faz com que o trabalho fique relativamente simples, mas pode resultar em falta de precisão da teoria. Em aplicações mais reais, para obter melhor aproximação é conveniente incluir ao menos o termo dependente do ângulo de longo período $\theta_2 - \theta_1$, cujo coeficiente é da mesma ordem que \mathcal{R}_{10}^0 e usar a transformação de Sessin (Sessin and Ferraz-Mello, 1984) na integração .

7.1.5 Extensão ao segundo grau de liberdade

As variáveis introduzidas na seção anterior, w_1^*, Λ^* são variáveis ângulo-ação somente quando F_2^* é considerado como um Hamiltoniano de um grau de liberdade. Como as variáveis do sistema dado são $\theta_1^*, \theta_2^*, \Lambda_1^*, \Lambda_2^*$, temo que estender a transformação canônica para incluir o segundo grau de liberdade. Para fazer isto usamos a transformação introduzida por Henrard-Lemaître (Henrard & Lemaître, 1986).

$$\theta_1^* = \theta_1^*(w_1^*, \Lambda^*)$$

$$\begin{aligned}
J_1^* &= J_1^*(w_1^*, \Lambda^*) \\
\theta_2^* &= w_2^* - \Xi_2(w_1^*, \Lambda^*) \\
J_2^* &= \Lambda_2^*
\end{aligned} \tag{90}$$

onde

$$\Xi_2 = \int_0^{w_1} \left(\frac{\partial \theta_1^*}{\partial w_1^*} \frac{\partial J_1^*}{\partial \Lambda_2^*} - \frac{\partial \theta_1^*}{\partial \Lambda_2^*} \frac{\partial J_1^*}{\partial w_1^*} \right) dw_1^*.$$

É necessário, em princípio, escrever θ_1^* em termos de w_1^* , $\mathcal{Q}(\Lambda_1^*)$. Usamos, para $\sin \theta_1^*$ e $(J_1^* + J_2^*)$ a solução do pêndulo obtida na seção anterior. E, fazendo uso da hipótese de pequenas amplitudes podemos usar a aproximação

$$\theta_1^* = \arcsin(\sin \theta_1^*) = \sin \theta_1^* + \frac{\sin^3 \theta_1^*}{6} + \dots \tag{91}$$

a qual é desenvolvida ao redor de $\mathcal{Q} = 0$.

Até a ordem $\mathcal{O}(\mathcal{Q}^7)$, temos

$$\begin{aligned}
\theta_1^* &= 8 \sin w_1^* \mathcal{Q} + \left[16 \sin w_1^* + \frac{8}{3} \sin 3w_1^* \right] \mathcal{Q}^3 + \\
&+ \left[92 \sin w_1^* + 24 \sin 3w_1^* + \frac{8}{5} \sin 5w_1^* \right] \mathcal{Q}^5
\end{aligned} \tag{92}$$

e, depois de fazer álgebra, obtemos

$$\begin{aligned}
\Xi_2 &= -8 \sin w_1^* \mathcal{Q} - \frac{16}{|\nu_{11}|} \frac{\partial \omega_1^0}{\partial \Lambda_2^*} \sin 2w_1^* \mathcal{Q}^2 - \left[16 \sin w_1^* + \frac{8}{3} \sin 3w_1^* \right] \mathcal{Q}^3 - \\
&- \frac{16}{|\nu_{11}|} \frac{\partial \omega_1^0}{\partial \Lambda_2} [2 \sin 2w_1^* + \sin 4w_1^*] \mathcal{Q}^4 - \\
&- \left[92 \sin w_1^* + 24 \sin 3w_1^* + \frac{8}{5} \sin 5w_1^* \right] \mathcal{Q}^5 + \mathcal{O}(\mathcal{Q}^6)
\end{aligned} \tag{93}$$

e a transformação esta completa.

7.1.6 Algumas transformações auxiliares

Como precisamos escrever o Hamiltoniano em termos das novas variáveis, desenvolvemos os cossenos em potências de \mathcal{Q}

$$\begin{aligned}
\cos \theta_1^* &= 1 - 16[1 - \cos 2w_1^*] \mathcal{Q}^2 - 32[\cos 2w_1^* - \cos 4w_1^*] \mathcal{Q}^4 - \\
&- [64 + 112 \cos 2w_1^* - 128 \cos 4w_1^* - 48 \cos 6w_1^*] \mathcal{Q}^6 + \dots
\end{aligned} \tag{94}$$

Até a ordem \mathcal{Q}^3 , temos também:

$$\begin{aligned}
\cos \theta_2^* &= \cos w_2^* + 4[\cos(w_1^* + w_2^*) - \cos(w_2^* - w_1^*)]\mathcal{Q} + \\
&+ 8\{-2 \cos w_2^* + (1 + \frac{1}{|\nu_{11}|} \frac{\partial \omega_1^0}{\partial \Lambda_2^*}) \cos(w_2^* + 2w_1^*) + \\
&+ (1 - \frac{1}{|\nu_{11}|} \frac{\partial \omega_1^0}{\partial \Lambda_2^*}) \cos(w_2^* - 2w_1^*)\}\mathcal{Q}^2 - \\
&- \{(\frac{32}{|\nu_{11}|} \frac{\partial \omega_1^0}{\partial \Lambda_2^*} + 24) \cos(w_1^* + w_2^*) + \\
&- (\frac{32}{|\nu_{11}|} \frac{\partial \omega_1^0}{\partial \Lambda_2^*} - 24) \cos(w_2^* - w_1^*) + \\
&+ (\frac{32}{|\nu_{11}|} \frac{\partial \omega_1^0}{\partial \Lambda_2^*} + 12) \cos(3w_1^* + w_2^*) + \\
&+ (\frac{32}{|\nu_{11}|} \frac{\partial \omega_1^0}{\partial \Lambda_2^*} - 12) \cos(w_2^* - 3w_1^*)\}\mathcal{Q}^3
\end{aligned} \tag{95}$$

e

$$\begin{aligned}
\cos(\theta_1^* - \theta_2^*) &= \cos w_2^* - \{ \frac{8}{|\nu_{11}|} \frac{\partial \omega_1^0}{\partial \Lambda_2^*} \cos(w_2^* - 2w_1^*) - \\
&- \frac{8}{|\nu_{11}|} \frac{\partial \omega_1^0}{\partial \Lambda_2^*} \cos(2w_1^* + w_2^*) \}\mathcal{Q}^2 + \mathcal{O}(\mathcal{Q}^4)
\end{aligned} \tag{96}$$

7.1.7 O Hamiltoniano até a ordem $\mathcal{O}(\varepsilon^{3/2}\mathcal{Q}^3)$

Até a ordem $\mathcal{O}(\varepsilon^{3/2})$, o Hamiltoniano pode ser escrito na forma

$$H^* = F_2^* + F_3^* \tag{97}$$

onde F_2^* é dado pela equação (88) e

$$\begin{aligned}
F_3^* &= \frac{1}{6} \nu_{111} (J_1^* + J_2^*)^3 + \varepsilon (J_1^* + J_2^*) \frac{d\mathcal{R}_{00}}{d\xi} \Big|_{\xi=0} + \\
&+ \varepsilon (J_1^* + J_2^*) \frac{d\mathcal{R}_{10}}{d\xi} \Big|_{\xi=0} \cos \theta_1^* + \varepsilon \mathcal{R}_{10}^0 \cos \theta_2^* + \varepsilon \mathcal{R}_{1-1}^0 \cos(\theta_1^* - \theta_2^*).
\end{aligned}$$

Nesta equação, $\nu_{111} = -\frac{96\mu^2}{J_3^{*5}}$ e os novos coeficientes são definidos como na equação (115).

Nas novas variáveis, temos:

$$\begin{aligned}
F_3^* &= \left[-\frac{8\varepsilon\omega_1^0}{|\nu_{11}|} \left(\frac{\partial\mathcal{R}_{10}}{\partial\xi}\Big|_{\xi=0} + \frac{\partial\mathcal{R}_{00}}{\partial\xi}\Big|_{\xi=0} \right) \mathcal{Q} - \right. \\
&- \left. \left(\frac{64\nu_{111}(\omega_1^0)^3}{|\nu_{11}|^3} - \frac{16\varepsilon\omega_1^0}{|\nu_{11}|} \left(5\frac{\partial\mathcal{R}_{10}}{\partial\xi}\Big|_{\xi=0} + \frac{\partial\mathcal{R}_{00}}{\partial\xi}\Big|_{\xi=0} \right) \right) \mathcal{Q}^3 \right] \cos w_1^* + \\
&- \left(\frac{64\nu_{111}(\omega_1^0)^3}{3|\nu_{11}|^3} + \frac{8\varepsilon\omega_1^0}{|\nu_{11}|} \left(9\frac{\partial\mathcal{R}_{10}}{\partial\xi}\Big|_{\xi=0} + \frac{\partial\mathcal{R}_{00}}{\partial\xi}\Big|_{\xi=0} \right) \right) \mathcal{Q}^3 \cos 3w_1^* + \\
&+ \left[\varepsilon\mathcal{R}_{10}^0 + \varepsilon\mathcal{R}_{1-1}^0 - 16\varepsilon\mathcal{R}_{10}^0 \mathcal{Q}^2 \right] \cos w_2^* + \\
&- \left[4\varepsilon\mathcal{R}_{10}^0 \mathcal{Q} - \left(24\varepsilon\mathcal{R}_{10}^0 - \frac{32\varepsilon\mathcal{R}_{10}^0}{|\nu_{11}|} \frac{\partial\omega_1^0}{\partial\Lambda_2^*} \right) \mathcal{Q}^3 \right] \cos(w_1^* - w_2^*) + \\
&+ \left[4\varepsilon\mathcal{R}_{10}^0 \mathcal{Q} - \left(24\varepsilon\mathcal{R}_{10}^0 + \frac{32\varepsilon\mathcal{R}_{10}^0}{|\nu_{11}|} \frac{\partial\omega_1^0}{\partial\Lambda_2^*} \right) \mathcal{Q}^3 \right] \cos(w_1^* + w_2^*) + \\
&+ \left(\frac{8\varepsilon\mathcal{R}_{1-1}^0}{|\nu_{11}|} \frac{\partial\omega_1^0}{\partial\Lambda_2^*} + 8\varepsilon\mathcal{R}_{10}^0 + \frac{8\varepsilon\mathcal{R}_{10}^0}{|\nu_{11}|} \frac{\partial\omega_1^0}{\partial\Lambda_2^*} \right) \mathcal{Q}^2 \cos(2w_1^* + w_2^*) + \\
&- \left(\frac{8\varepsilon\mathcal{R}_{1-1}^0}{|\nu_{11}|} \frac{\partial\omega_1^0}{\partial\Lambda_2^*} - 8\varepsilon\mathcal{R}_{11}^0 + \frac{8\varepsilon\mathcal{R}_{11}^0}{|\nu_{11}|} \frac{\partial\omega_1^0}{\partial\Lambda_2^*} \right) \mathcal{Q}^2 \cos(2w_1^* - w_2^*) + \\
&+ \left(\frac{32\varepsilon\mathcal{R}_{10}^0}{|\nu_{11}|} \frac{\partial\omega_1^0}{\partial\Lambda_2^*} - 12\varepsilon\mathcal{R}_{10}^0 \right) \mathcal{Q}^3 \cos(3w_1^* - w_2^*) + \\
&+ \left(\frac{32\varepsilon\mathcal{R}_{10}^0}{|\nu_{11}|} \frac{\partial\omega_1^0}{\partial\Lambda_2^*} + 12\varepsilon\mathcal{R}_{10}^0 \right) \mathcal{Q}^3 \cos(3w_1^* + w_2^*) + \mathcal{O}(\mathcal{Q}^4) \tag{98}
\end{aligned}$$

7.1.8 A Média

Consideremos agora a transformação canônica $(w^*, \Lambda^*) \rightarrow (w^{**}, \Lambda^{**})$ gerada pelo gerador de Lie

$$W^{(2)}(w^{**}, \Lambda^{**}) = W_2^{(2)} + W_3^{(2)} + \dots \tag{99}$$

onde os subíndices indicam o grau em \mathcal{S} .

As equações de perturbação são

$$\begin{aligned}
F_2^{**} &= F_2^*(\Lambda^{**}) \\
F_3^{**} &= F_3^*(w^{**}, \Lambda^{**}) + \{F_2^{**}, W_2^{(2)}\}_1
\end{aligned} \tag{100}$$

Como a ação Λ_1^{**} tem uma ordem $\mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon})$, na aplicação da teoria das séries de Lie, é necessário levar em conta que os colchetes de Poisson contem duas

partes de diferentes ordens de grandeza. Em verdade, se f, g são duas funções com graus r e s no conjunto $\mathcal{S} \equiv (\Lambda_1^{**}, \sqrt{\varepsilon})$, o colchete de Poisson é

$$\{f, g\} = \{f, g\}_1 + \{f, g\}_2$$

onde

$$\begin{aligned} \{f, g\}_1 &= \frac{\partial f}{\partial w_1^{**}} \frac{\partial g}{\partial \Lambda_1^{**}} - \frac{\partial f}{\partial \Lambda_1^{**}} \frac{\partial g}{\partial w_1^{**}} = \mathcal{O}(r + s - 1) \\ \{f, g\}_2 &= \frac{\partial f}{\partial w_2^{**}} \frac{\partial g}{\partial \Lambda_2^{**}} - \frac{\partial f}{\partial \Lambda_2^{**}} \frac{\partial g}{\partial w_2^{**}} = \mathcal{O}(r + s) \end{aligned} \quad (101)$$

Para resolver a segunda equação (100), adotamos

$$F_3^{**} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_3^*(w^{**}, \Lambda^{**}) dw_1^{**}$$

e obtemos o gerador de Lie ressonante

$$W_2^{(2)} = \left(\frac{\partial F_2^{**}}{\partial \Lambda_1^{**}} \right)^{-1} \int F_3^*(w^{**}, \Lambda^{**}) dw_1^{**}$$

ou

$$\begin{aligned} \hat{\omega}_1 W_2^{(2)} &= \left[-\frac{8\varepsilon\omega_1^0}{|\nu_{11}|} \left(\frac{\partial \mathcal{R}_{10}}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} + \frac{\partial \mathcal{R}_{00}}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} \right) \mathcal{Q} - \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{64\nu_{111}(\omega_1^0)^3}{|\nu_{11}|^3} - \frac{16\varepsilon\omega_1^0}{|\nu_{11}|} \left(5 \frac{\partial \mathcal{R}_{10}}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} + \frac{\partial \mathcal{R}_{00}}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} \right) \right) \mathcal{Q}^3 \right] \sin w_1^{**} + \\ &\quad - \left(\frac{64\nu_{111}(\omega_1^0)^3}{9|\nu_{11}|^3} + \frac{8\varepsilon\omega_1^0}{3|\nu_{11}|} \left(9 \frac{\partial \mathcal{R}_{10}}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} + \frac{\partial \mathcal{R}_{00}}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} \right) \right) \mathcal{Q}^3 \sin 3w_1^{**} + \\ &\quad - \left[4\varepsilon \mathcal{R}_{10}^0 \mathcal{Q} - \left(24\varepsilon \mathcal{R}_{10}^0 - \frac{32\varepsilon \mathcal{R}_{10}^0}{|\nu_{11}|} \frac{\partial \omega_1^0}{\partial \Lambda_2^*} \right) \mathcal{Q}^3 \right] \sin(w_1^{**} - w_2^{**}) + \\ &\quad + \left[4\varepsilon \mathcal{R}_{10}^0 \mathcal{Q} - \left(24\varepsilon \mathcal{R}_{10}^0 + \frac{32\varepsilon \mathcal{R}_{10}^0}{|\nu_{11}|} \frac{\partial \omega_1^0}{\partial \Lambda_2^*} \right) \mathcal{Q}^3 \right] \sin(w_1^{**} + w_2^{**}) + \\ &\quad + \left(\frac{4\varepsilon \mathcal{R}_{1-1}^0}{|\nu_{11}|} \frac{\partial \omega_1^0}{\partial \Lambda_2^*} + 4\varepsilon \mathcal{R}_{10}^0 + \frac{4\varepsilon \mathcal{R}_{10}^0}{|\nu_{11}|} \frac{\partial \omega_1^0}{\partial \Lambda_2^*} \right) \mathcal{Q}^2 \sin(2w_1^{**} + w_2^{**}) + \\ &\quad - \left(\frac{4\varepsilon \mathcal{R}_{1-1}^0}{|\nu_{11}|} \frac{\partial \omega_1^0}{\partial \Lambda_2^*} - 4\varepsilon \mathcal{R}_{10}^0 + \frac{4\varepsilon \mathcal{R}_{10}^0}{|\nu_{11}|} \frac{\partial \omega_1^0}{\partial \Lambda_2^*} \right) \mathcal{Q}^2 \sin(2w_1^{**} - w_2^{**}) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{32\varepsilon\mathcal{R}_{10}^0}{3|\nu_{11}|} \frac{\partial\omega_1^0}{\partial\Lambda_2^*} - 4\varepsilon\mathcal{R}_{10}^0 \right) \mathcal{Q}^3 \sin(3w_1^{**} - w_2^{**}) + \\
& + \left(\frac{32\varepsilon\mathcal{R}_{10}^0}{3|\nu_{11}|} \frac{\partial\omega_1^0}{\partial\Lambda_2^*} + 4\varepsilon\mathcal{R}_{10}^0 \right) \mathcal{Q}^3 \sin(3w_1^{**} + w_2^{**}) + \mathcal{O}(\mathcal{Q}^4).
\end{aligned} \tag{102}$$

$\hat{\omega}_1$ é a frequência do ângulo w_1^{**} :

$$\hat{\omega}_1 = \frac{\partial F_2^{**}}{\partial \Lambda_1^{**}} = \frac{\partial \mathcal{F}(\Lambda^{**})}{\partial \Lambda_1^{**}} = \omega_1^0(1 - 4\mathcal{Q}^2) + \mathcal{O}(\mathcal{Q}^4). \tag{103}$$

Das equações do pêndulo para pequenas oscilações (Ferraz-Mello, 2002), podemos ver que,

$$\hat{\omega}_1 \approx \omega_1^0(\Lambda_2^{**})(1 - 4\mathcal{Q}(\Lambda_1^{**}, \Lambda_2^{**})^2)$$

As quantidades $\nu_{11}, \omega_1^0, \mathcal{Q}, \mathcal{R}_{ij}$ que aparecem no lado direito da equação (102) tem as mesmas definições de antes, mas substituindo Λ^* por Λ^{**} .

Até esta ordem, então, a transformação canônica das variáveis semi-médias em variáveis médias está dada por

$$\begin{aligned}
w_1^* &= w_1^{**} + \{w_1^{**}, W_2^{(2)}\}_1 \\
w_2^* &= w_2^{**} + \{w_2^{**}, W_2^{(2)}\}_1 \\
\Lambda_1^* &= \Lambda_1^{**} + \{\Lambda_1^{**}, W_2^{(2)}\}_1 \\
\Lambda_2^* &= \Lambda_2^{**} + \{\Lambda_2^{**}, W_2^{(2)}\}_1
\end{aligned} \tag{104}$$

e o Hamiltoniano resultante para os elementos médios é:

$$H^{**} = \mathcal{F}(\Lambda^{**}) - g_J \Lambda_2^{**} + \varepsilon \mathcal{R}_{00}^0(\Lambda_2^{**}) + \tag{105}$$

$$+ \left[\varepsilon \mathcal{R}_{10}^0(\Lambda_2^{**}) + \varepsilon \mathcal{R}_{1-1}^0(\Lambda_2^{**}) - 16\varepsilon \mathcal{R}_{10}^0(\Lambda_2^{**}) \mathcal{Q}^2 \right] \cos w_2^{**}. \tag{106}$$

7.1.9 Terceira Média: Os Elementos Próprios

O Hamiltoniano obtido na seção anterior é um Hamiltoniano de um grau de liberdade (as únicas variáveis são, agora, w_2^{**} and Λ_2^{**}), e, por tanto, integrável.

Podemos usar de novo uma série de Lie até a primeira ordem no pequeno parâmetro $\sqrt{\varepsilon}$ para construir a solução do sistema. Consideremos

uma transformação canônica $(w_2^{**}, \Lambda_2^{**}) \rightarrow (w_2^{***}, \Lambda_2^{***})$ gerada pelo gerador de Lie $W^{(3)}(w_2^{***}, \Lambda_2^{***})$ e as equações de perturbação²

$$H^{***} = H^{**}(w_2^{***}, \Lambda_2^{***}) + \{F_2^{***}, W^{(3)}\} \quad (107)$$

Para resolver esta equação, adotamos a média

$$H^{***} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H^{**}(w_2^{***}, \Lambda_2^{***}) dw_2^{***}$$

e o gerador de Lie

$$W^{(3)} = \left(\frac{\partial H^{***}}{\partial \Lambda_2^{***}} \right)^{-1} \int H^{**}(w_2^{***}, \Lambda_2^{***}) dw_2^{***}.$$

Por tanto obtemos

$$H^{***} = \mathcal{F}(\Lambda^{***}) - g_J \Lambda_2^{***} + \varepsilon \mathcal{R}_{00}^0(\Lambda_2^{***})$$

e

$$W_3^{(3)} = \frac{1}{\hat{\omega}_2} \left[\varepsilon \mathcal{R}_{10}^0(\Lambda_2^{***}) + \varepsilon \mathcal{R}_{1-1}^0(\Lambda_2^{***}) - 16\varepsilon \mathcal{R}_{10}^0(\Lambda_2^{***}) \mathcal{Q}^2 \right] \sin w_2^{***} \quad (108)$$

onde

$$\hat{\omega}_2 = \frac{\partial H_0^{**}}{\partial \Lambda_2^{**}}$$

Com isto obtivemos duas quase-integrais Λ_1^{**} e Λ_2^{***} , as quais chamamos *Elementos Próprios Dinâmicos*. Λ_2^{***} está relacionado com Λ_2^{**}

$$\begin{aligned} \Lambda_2^{***} &= \Lambda_2^{**} + \frac{\partial W_3^{(3)}(w_2^{**}, \Lambda_2^{**})}{\partial w_2^{**}} = \\ &= \Lambda_2^{**} + \frac{1}{\hat{\omega}_2} \left[\varepsilon \mathcal{R}_{10}^0(\Lambda_2^{**}) + \varepsilon \mathcal{R}_{1-1}^0(\Lambda_2^{**}) - 16\varepsilon \mathcal{R}_{10}^0(\Lambda_2^{**}) \mathcal{Q}^2 \right] \cos w_2^{**} \end{aligned}$$

A transformação na variável ângulo é similar.

Para aplicação no problema asteroidal, é de interesse a construção de elementos tipo Keplerianos: semieixo e excentricidade como funções das ações próprias Λ_1^{**} e Λ_2^{***} .

²Por razões de simplicidade omitimos em todas as equações desta seção a dependência com a constante Λ_1^{**} .

Estes elementos podem ser obtidos seguindo os passos: (i) Equações formalmente iguais às eqns. (90) são usadas para obter as variáveis formais J^{***} e θ^{***} ;

(ii) Estas variáveis podem ser usadas para determinar os equivalentes momentos de Delaunay; e com estes momentos de Delaunay (iii) Aplicando as eqns. (35) obter as *elementos próprios elípticos equivalentes* a^{***} e e^{***} .

7.2 Cálculo de Elementos Próprios incluindo as perturbações na órbita de Júpiter

7.2.1 A Primeira Média: Os Elementos Semi-Médios

Como no caso do problema clássico, a primeira média é feita no ângulo rápido θ_3 (o ângulo sinódico do asteróide). Até a primeira ordem no pequeno parâmetro vamos obter o gerador de Lie, da mesma maneira que na seção 7.1.1, para o Hamiltoniano do problema estendido.

Neste caso, as equações de perturbação são:

$$\begin{aligned} H_0^* &= \left(-\frac{\mu^2}{2L^2} + 3n_J(J_1 + J_2) - n_J J_3 - g_5 J_2 + \sum_{l=5}^8 g_l J_{j-1} \right)_{J^*}, \\ H_1^* &= \left(-R + \{H_0^*, W_1^{(1)}\} \right)_{(\theta^*; J^*)}, \\ &\vdots \quad \quad \quad \vdots \end{aligned} \quad (109)$$

Adotando a regra de média

$$H_1^* = \langle -R \rangle_{\theta_3^*} \quad (110)$$

e, resolvendo a equação (110) para obter o gerador de Lie de primeira ordem

$$\begin{aligned} W_1^{(1)} &= \frac{1}{a_J} \sum_{i,j,k_2,l,m_2,n,r,s,t,u} \\ & y \frac{\mathbf{P}_{ijk_2lm_2nrstu}(\alpha - \alpha_{res})^i e^j}{l\Gamma_1 + m_2\Gamma_2 + n\Gamma_3 + r\Gamma_4 + s\Gamma_5 + t\Gamma_6 + u\Gamma_7} \times \\ & \times \sin[l\theta_1^* + m_2\theta_2^* + n\theta_3^* + r\theta_4^* + s\theta_5^* + t\theta_6^* + u\theta_7^*] \end{aligned} \quad (111)$$

onde

$$\Gamma_j = \frac{\partial H_0^*}{\partial J_j^*}, \quad j = 1, 2, \dots, 7 \quad (112)$$

O resultantes elementos semi-médios e os originais elementos osculadores estão relacionados pela transformação canônica gerada por $W^{(1)}$, a qual, até a primeira ordem é

$$\begin{aligned} \theta_i &= \theta_i^* + \varepsilon \{ \theta_i^*, W_1^{(1)} \} \\ J_i &= J_i^* + \varepsilon \{ J_i^*, W_1^{(1)} \}. \end{aligned} \quad (113)$$

O Hamiltoniano semi-médio é

$$H^* = H_0(J^*) - \varepsilon \frac{1}{a_J} \sum_{ijk_2lm_2rstu} \mathbf{P}_{ijk_2lm_2rstu} (\alpha - \alpha_{res})^i e^j \times \\ \times \cos[l\theta_1^* + m_2\theta_2^* + r\theta_4^* + s\theta_5^* + t\theta_6^* + u\theta_7^*].$$

7.2.2 O Kernel de Hori

Como sabemos, no caso em que uma ressonância acontece, não é possível usar o Hamiltoniano não perturbado como núcleo integrável.

O Hamiltoniano que descreva a topologia da ressonância não só deve conter a informação da ressonância, mas também deve ser um Hamiltoniano que possua a mesma ordem de grandeza.

Para a escolha do núcleo integrável vamos considerar as ordens de grandeza dos coeficientes por um estudo numérico, a fim de levar em conta os termos que sejam comparáveis.

O Hamiltoniano integrável correspondente será o Hamiltoniano de Andoyer, e, por tanto, as ordens de grandeza e os desenvolvimentos serão feitos no parâmetro $J_1^* + J_2^*$ o que é suposto da ordem:

$$\xi = J_1^* + J_2^* = \mathcal{O}(\varepsilon^{2/3}).$$

A figura 4 mostra os coeficientes da função perturbadora onde alguns deles já foram mostrados na figura 3. Isto foi feito para estudar a grandeza dos coeficientes. Neste gráfico observamos que para valores da excentricidade entre $0 \leq e \leq 0.2$ os termos que devem ser levados em conta são

$$\mathcal{R}_{10}^0(J_2^*) \cos \theta_1^* + \mathcal{R}_{01}^0(J_2^*) \cos \theta_2^* + \mathcal{R}_{20}^0(J_2^*) \cos 2\theta_1^* \quad (114) \\ \mathcal{R}_{02}^0(J_2^*) \cos 2\theta_2^* + \mathcal{R}_{11}^0(J_2^*) \cos(\theta_1^* + \theta_2^*).$$

onde as funções são geralmente definidas como

$$\mathcal{R}_{lm}^0 = - \left(\sum_{i=0}^4 \sum_{j=0}^{15} \sum_{k=0}^{15} \mathbf{P}_{ijklm0000} \frac{(\alpha^* - \alpha_0)^i}{a_J} e^{*j} e_J^k \right)_{\xi=0} \quad (115)$$

(no colchete, a excentricidade e o semieixo são avaliados em $\xi = 0$, isto é, em $J_3^* = \sqrt{\mu a_{res}}$ e $J_1^* = -J_2^*$.)

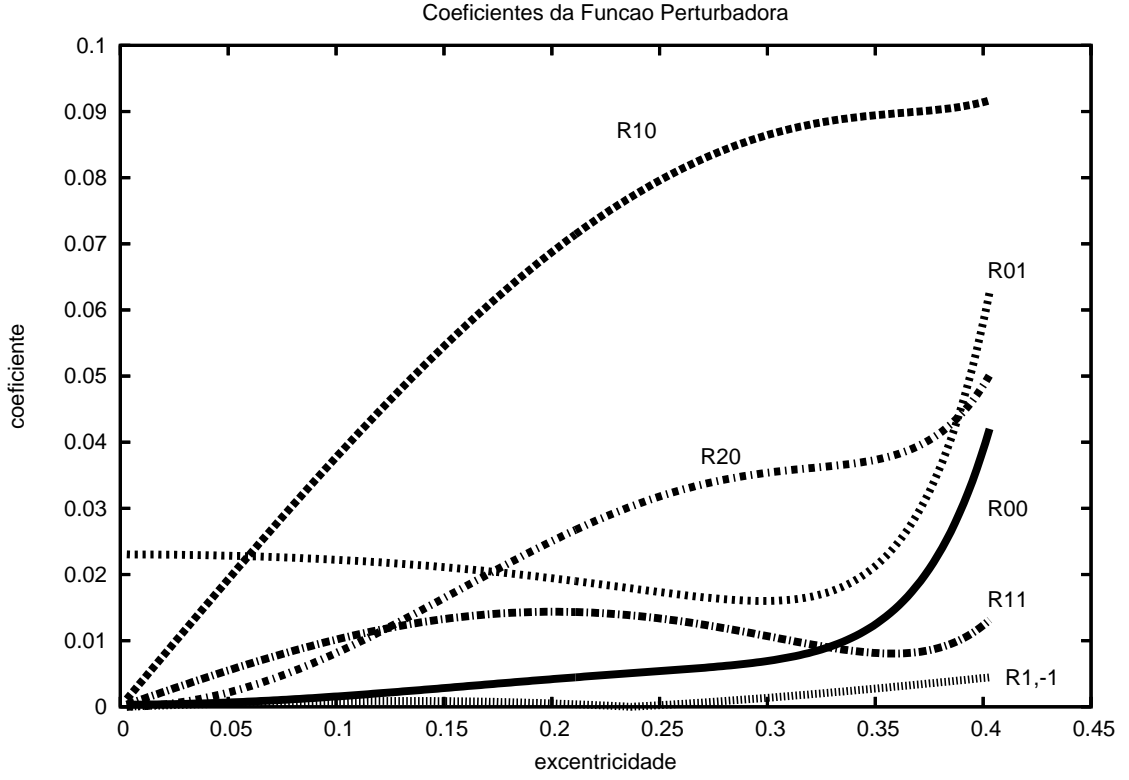


Figura 4: Coeficientes principais da função perturbadora. Nesta figura introduzimos mais coeficientes que na figura 3, já que para excentricidades menores são necessários mais termos para a construção do Kernel de Hori.

7.2.3 Construção do Modelo Integrável

Para contruir o modelo integrável vamos separar os coeficientes da função perturbadora (114) da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{R}_{10}^0 &= B_1 \sqrt{2J_1^*} + \delta \mathcal{R}_{10}^0 \\
 \mathcal{R}_{01}^0 &= M_1 e_J + \delta \mathcal{R}_{01}^0 \\
 \mathcal{R}_{20}^0 &\approx B_2 2J_1^* \\
 \mathcal{R}_{02}^0 &\approx M_2 e_J^2 \\
 \mathcal{R}_{11}^0 &= C_{11} \sqrt{2J_1^*} e_J + \delta \mathcal{R}_{11}^0
 \end{aligned} \tag{116}$$

$$\tag{117}$$

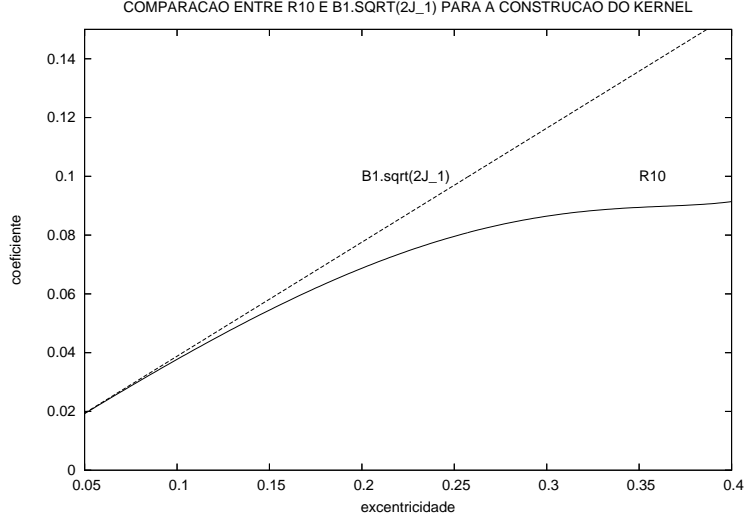


Figura 5: Neste gráfico notamos que a substituição de R_{10} por $B_1\sqrt{2J_1}$ para a construção do kernel de Hori é boa para excentricidades menores que 0.3, podendo considerar a diferença como perturbação.

onde B_1 , B_2 , M_1 , M_2 e C_{11} são

$$\begin{aligned}
B_1 &= \frac{1}{a_J} \sum_{i=0}^4 \sum_{k=0}^{15} \mathbf{P}_{i1k100000} \frac{(\alpha - \alpha_{res})^i}{\sqrt{L}} \Big|_{L=J_3^*} e_J^{(p)k}, \\
B_2 &= \frac{1}{a_J} \sum_{i=0}^4 \sum_{k=0}^{15} \mathbf{P}_{i2k200000} \frac{(\alpha - \alpha_{res})^i}{L} \Big|_{L=J_3^*} e_J^{(p)k} \\
M_1 &= \frac{1}{a_J} \sum_{i=0}^4 \mathbf{P}_{i01010100} \cdot (\alpha - \alpha_{res})^i \Big|_{L=J_3^*}, \\
M_2 &= \frac{1}{a_J} \sum_{i=0}^4 \mathbf{P}_{i02020200} (\alpha - \alpha_{res})^i \Big|_{L=J_3^*} e \\
C_{11} &= \frac{1}{a_J} \sum_{i=0}^4 \mathbf{P}_{i11110100} \frac{(\alpha - \alpha_{res})^i}{\sqrt{L}} \Big|_{L=J_3^*}
\end{aligned} \tag{118}$$

Esta separação dos coeficientes da função perturbadora deve ser estudada numericamente. As figuras 5, 6, e 7 mostram que para excentricidades menores que 0.3 podemos fazer estas separações considerando os $\delta\mathcal{R}_{10}^0$, $\delta\mathcal{R}_{01}^0$ e $\delta\mathcal{R}_{11}^0$ como de ordem superior.

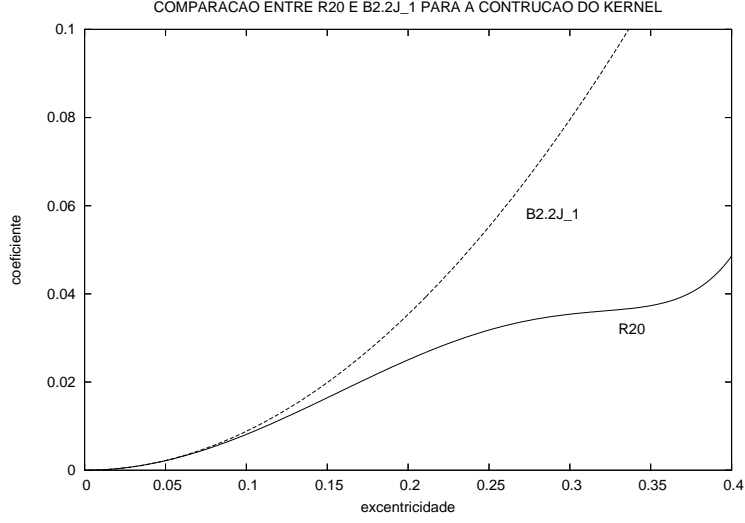


Figura 6: Comparação entre R_{01}^0 com $M_1 e_J$. Neste gráfico as curvas são bem diferentes, mas para excentricidades menores que 0.3 a diferença dos valores absolutos é menor que 0.05 e podem ser consideradas da mesma ordem de grandeza.

Usando as regras de D'Alembert, os coeficientes $\delta\mathcal{R}_{lm}^0$ podem ser escritos como:

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{R}_{10}^0 &= c_{10;1}(2J_1^*)^{3/2} + \mathcal{O}(e^5) \\ \delta\mathcal{R}_{01}^0 &= c_{01;1} + c_{01;2}J_1^* + c_{01;2}(J_1^*)^2 + \mathcal{O}(e^6)\end{aligned}\quad (119)$$

$$\delta\mathcal{R}_{11}^0 = c_{11;1}(2J_1^*)^{3/2} + \mathcal{O}(e^5)\quad (120)$$

Com estas definições e aplicando a transformação de Sessin (Sessin 1981, Ferraz-Mello, 2007):

$$\begin{aligned}\sqrt{2\mathcal{J}^*} \cos \Theta_1^* &= \sqrt{2J_1^*} \cos \theta_1^* + \beta_1 e_J \cos \theta_2^* \\ \sqrt{2\mathcal{J}^*} \sin \Theta_1^* &= \sqrt{2J_1^*} \sin \theta_1^* + \beta_1 e_J \sin \theta_2^* \\ \Theta_2^* &= \theta_2^* \\ \mathcal{G}^* &= J_2^* + \frac{1}{2}\beta_1^2 e_J^2 - \beta_1 e_J \sqrt{2J_1^*} \cos(\theta_1^* - \theta_2^*),\end{aligned}\quad (121)$$

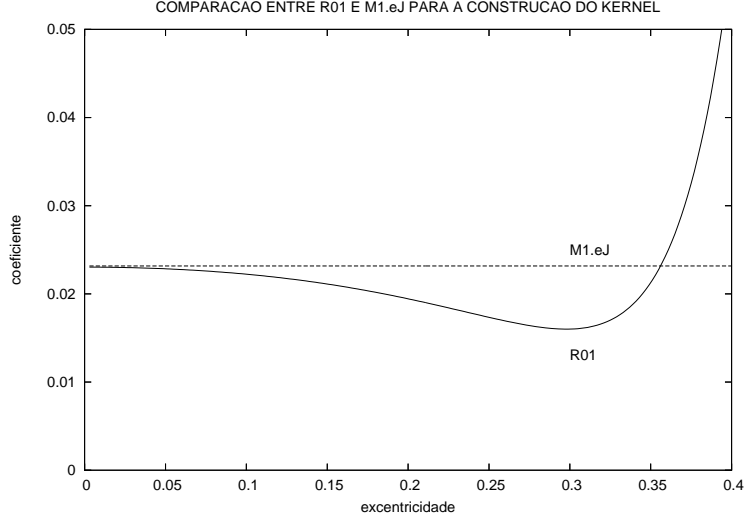


Figura 7: Comparação entre \mathcal{R}_{20}^0 e $B_2 2J_1^*$.

com $\beta_1 = M_1/B_1$ podemos escrever a função R como:

$$R^* = B_1 \sqrt{2\mathcal{J}^*} \cos \Theta_1^* + B_2 2\mathcal{J}^* \cos 2\Theta_1^* + \Delta\mathcal{R}^* \quad (122)$$

onde

$$\Delta\mathcal{R}^* = \Delta_1\mathcal{R}^* + \Delta_2\mathcal{R}^*, \quad (123)$$

com

$$\begin{aligned} \Delta_1\mathcal{R}^* = & B_2 \left[(\beta_1^2 - \beta_2^2) e_J^2 \cos 2\Theta_2^* + \left(\frac{C_{11}}{B_2} - 2\beta_1 \right) \sqrt{2J_1^*} e_J \cos(\theta_1^* + \Theta_2^*) \right] + \\ & + \delta\mathcal{R}_{10}^0 \cos \theta_1^* + \delta\mathcal{R}_{01}^0 \cos \Theta_2^* + \delta\mathcal{R}_{11}^0 \cos(\theta_1^* + \Theta_2^*), \end{aligned} \quad (124)$$

$\Delta_2\mathcal{R}^*$ contem os termos restantes da função perturbadora original nas novas variáveis, e $\beta_2^2 = M_2/B_2$.

O conjunto $(\Theta_1^*, \Theta_2^*; \mathcal{J}^*, \mathcal{G}^*)$ é canônico. \mathcal{G}^* é conhecida como a integral de Sessin.

Escolhamos como Hamiltoniano integrável (kernel de Hori)

$$F^* = \frac{1}{2} \nu_{11} (\mathcal{J}^* + \mathcal{G}^*)^2 + \varepsilon B_1 \sqrt{2\mathcal{J}^*} \cos \Theta_1^* + \varepsilon B_2 2\mathcal{J}^* \cos 2\Theta_1^* \quad (125)$$

onde $\nu_{11} = -\frac{12\mu^2}{J_3^{*4}}$.

Como os termos constantes da parte linear do Hamiltoniano não perturbado não contribuem ao fluxo do kernel, podemos considerar o Hamiltoniano

$$H^* = F^* - \varepsilon \Delta \mathcal{R}. \quad (126)$$

É importante pôr ênfase no fato de que $\Delta \mathcal{R}$ está ainda expressa em termos das novas e as velhas variáveis.

Vamos primeiro integrar o kernel de Hori e depois resolveremos este problema da mistura de variáveis.

Vamos definir $\varepsilon' = \varepsilon B_1$ e $\mu' = \varepsilon B_2$. Com estas definições escrevemos o kernel de Hori como

$$\begin{aligned} F^* &= a\mathcal{J}^* + b\mathcal{J}^{*2} + \varepsilon' \sqrt{2\mathcal{J}^*} \cos \Theta_1^* + \mu' 2\mathcal{J}^* \cos 2\Theta_1^* + \\ &+ \frac{1}{2} \nu_{11} \mathcal{G}^{*2} \end{aligned} \quad (127)$$

onde $a = \nu_{11} \mathcal{G}^*$, $b = \frac{1}{2} \nu_{11}$.

O conjunto completo de equações diferenciais associadas com F^* é (no parâmetro u)

$$\begin{aligned} \frac{d\Theta_1}{du} &= a + 2b\mathcal{J}^* + \varepsilon' \frac{1}{\sqrt{2\mathcal{J}^*}} \cos \Theta_1^* + 2\mu' \cos 2\Theta_1^* \\ \frac{d\mathcal{J}^*}{du} &= \varepsilon' \sqrt{2\mathcal{J}^*} \sin \Theta_1^* + 4\mu' \mathcal{J}^* \sin 2\Theta_1^* \end{aligned} \quad (128)$$

Observemos que o sistema no plano $(\Theta_1, \mathcal{J}^*)$ é autônomo e pode ser resolvido separadamente.

7.2.4 Família de soluções periódicas próximas a um ponto de equilíbrio no plano $(\Theta_1, \mathcal{J}^*)$

Para construir as variáveis ângulo-ação associadas com F^* , no subspaço $(\Theta_1^*, \mathcal{J}^*)$, vamos construir famílias de soluções periódicas (Ferraz-Mello, 2007 sec.2.2)

$$\begin{aligned} \mathcal{J}^* &= \sum_{l=0}^m a_l \mathcal{Q}^l \\ \Theta_1^* &= \sum_{l=1}^m s_l \mathcal{Q}^l \end{aligned} \quad (129)$$

onde a_l e s_l são polinômios de Fourier no ângulo w_1^* , e \mathcal{Q} é um parâmetro livre da ordem da amplitude das oscilações ao redor do ponto de equilíbrio $\mathcal{J}^* = a_0$, $\Theta_1^* = 0 \pmod{\pi}$.

Para a frequência $\omega_1^* = \frac{d\omega_1^*}{du}$, vamos considerar

$$\omega_1^* = \omega_1^{0*} + \sum_{i=1}^n o_i \mathcal{Q}^i \quad (130)$$

Substituindo estas expansões nas equações diferenciais, os coeficientes indeterminados são obtidos por identificação de termos da mesma ordem em \mathcal{Q} . No entanto, a determinação destes coeficientes indeterminados fica complicado pela aparição de denominadores (por causa da raiz quadrada). Para resolver esta questão, introduzimos a variável auxiliar $p = \sqrt{2\mathcal{J}^*}$ e as equações diferenciais podem ser escritas como

$$\begin{aligned} \frac{dp}{du} &= \varepsilon' \sin \Theta_1^* + 2\mu' p \sin 2\Theta_1^* \\ p \frac{d\Theta_1^*}{du} &= ap + bp^3 + \varepsilon' \cos \Theta_1^* + 2\mu' p \cos 2\Theta_1^*. \end{aligned} \quad (131)$$

A nova variável pode também ser desenvolvida em série de potências do parâmetro \mathcal{Q} : $p = \sum_{l=0}^n p_l \mathcal{Q}^l$

Para obter as funções p_l e s_l temos que comparar termos com a mesma ordem em \mathcal{Q} :

Ordem 0:

$$\begin{aligned} 2bp_0^3 - \rho p_0 - \varepsilon' &= 0 \\ p_0' &= 0 \end{aligned} \quad (132)$$

Ordem 1:

$$\begin{aligned} \omega_1^{0*} p_0 s_1' - \rho p_1 &= 0 \\ \omega_1^{0*} p_1' - (\varepsilon' + 4\mu' p_0) s_1 &= 0 \end{aligned} \quad (133)$$

Ordem 2:

$$\begin{aligned} \omega_1^{0*} p_0 s_2' - \rho p_2 &= -(o_1 p_0 + \omega_1^{0*} p_1) s_1' - \frac{1}{2} (\varepsilon' + 8\mu' p_0) s_1^2 + 3bp_0 p_1^2 \\ \omega_1^{0*} p_2' - (\varepsilon' + 4\mu' p_0) s_2 &= -o_1 p_1' + 4\mu' s_1 p_1 \end{aligned} \quad (134)$$

Ordem 3:

$$\begin{aligned} \omega_1^{0*} p_0 s_3' - \rho p_3 &= -(o_2 p_0 + o_1 p_1 + \omega_1^{0*} p_2) s_1' - (o_1 p_0 + \omega_1^{0*} p_1) s_2' + \\ &+ 6bp_0 p_1 p_2 - (\varepsilon' + 8\mu' p_0) s_1 s_2 - bp_0^3 - 4\mu' p_1 s_1^2 \\ \omega_1^{0*} p_3' - (\varepsilon' + 4\mu' p_0) s_3 &= -(o_1 p_2' + o_2 p_1') + 4\mu' (p_1 s_2 + p_2 s_1) - \\ &- \frac{1}{6} (\varepsilon' + 16\mu' p_0) s_1^3, \end{aligned} \quad (135)$$

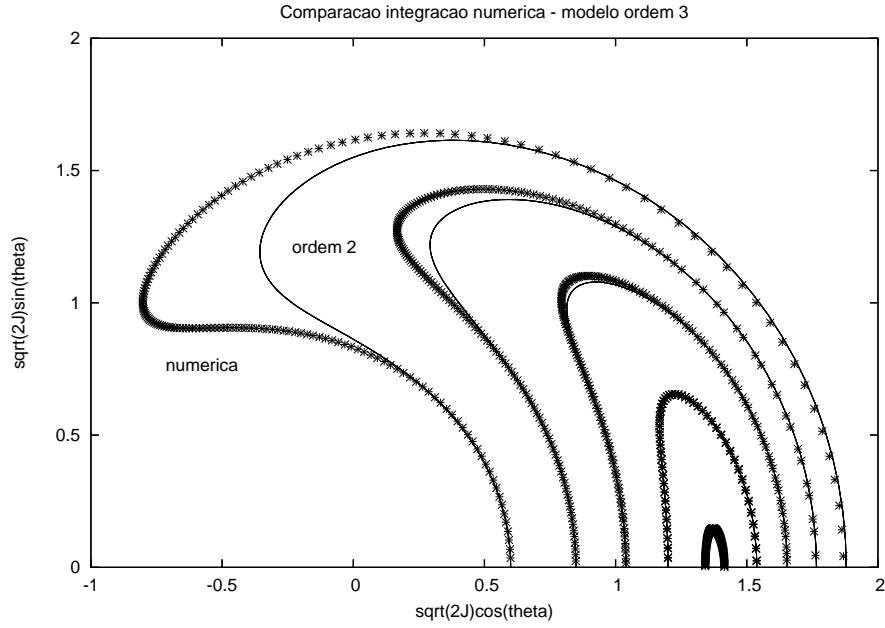


Figura 8: Comparação entre integração numérica da integração do kernel de Hori com a aproximação analítica de ordem 2. A curva contínua corresponde à solução analítica e a tracejada corresponde a integração numérica.

e assim sucessivamente. Nestas expressões a linha indica derivada com relação a w_1^* e definimos

$$\rho = a + 3bp_0^2 + 2\mu'.$$

7.2.5 A solução

As equações de ordem zero definem o centro de libração em $\mathcal{J}^* = \frac{1}{2}p_0^2 = \text{const.}$.

As equações de ordem um formam um sistema linear homogêneo de equações diferenciais com coeficientes constantes. A frequência própria é 1 (já que w_1^* é a variável ângulo, ver para detalhes Ferraz-Mello 2007, sec C.9). Então

$$\omega_1^{0*} = \frac{\sqrt{-p_0(\varepsilon' + 4\mu'p_0)\rho}}{p_0} \quad (136)$$

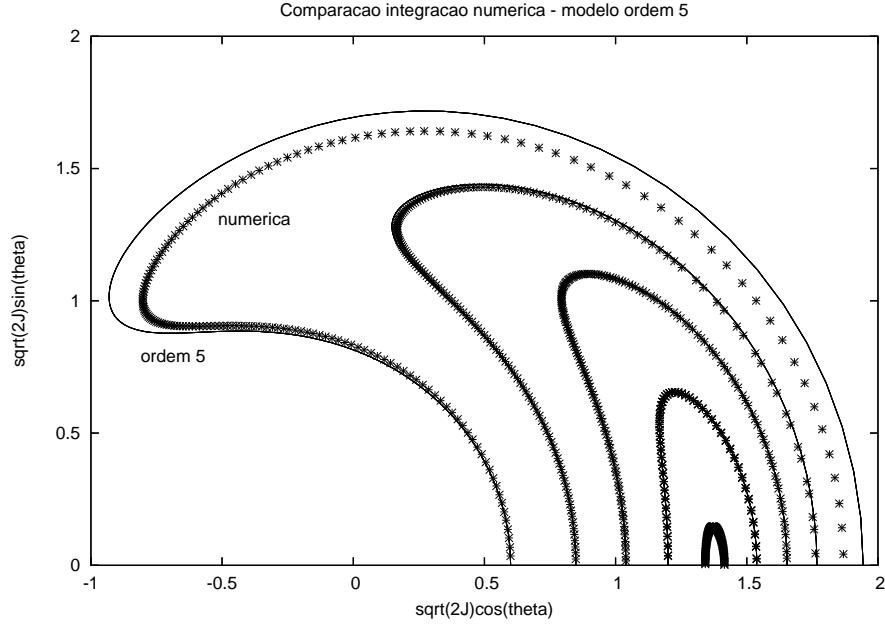


Figura 9: Comparação entre integração numérica da integração do kernel de Hori com a aproximação analítica a ordem 5. A curva contínua corresponde à solução analítica (com as mesmas condições iniciais da figura anterior) e a tracejada corresponde a integração numérica. Podemos notar que a aproximação melhora com ordens maiores.

A soluções de ordem um são

$$\begin{aligned} s_1 &= \sin w_1^* \\ p_1 &= \frac{p_0 \omega_1^{0*}}{\rho} \cos w_1^* \end{aligned} \quad (137)$$

A amplitude de w_1^* foi arbitrariamente fixada igual a 1 já que depois será multiplicada por um fator arbitrário Q .

Ordem 2:

$$\begin{aligned} s_2 &= \frac{\varepsilon' \omega_1^{0*}}{2p_0 \rho^2} \sin 2w_1^* \\ p_2 &= \frac{1}{4\rho^2} \left[(-\varepsilon' \rho + 24bp_0^3 \mu' + 6bp_0^2 \varepsilon') - \right. \\ &\quad \left. - (-\varepsilon' \rho + 8bp_0^3 \mu' + 2bp_0^2 \varepsilon') \cos 2w_1^* \right] \end{aligned}$$

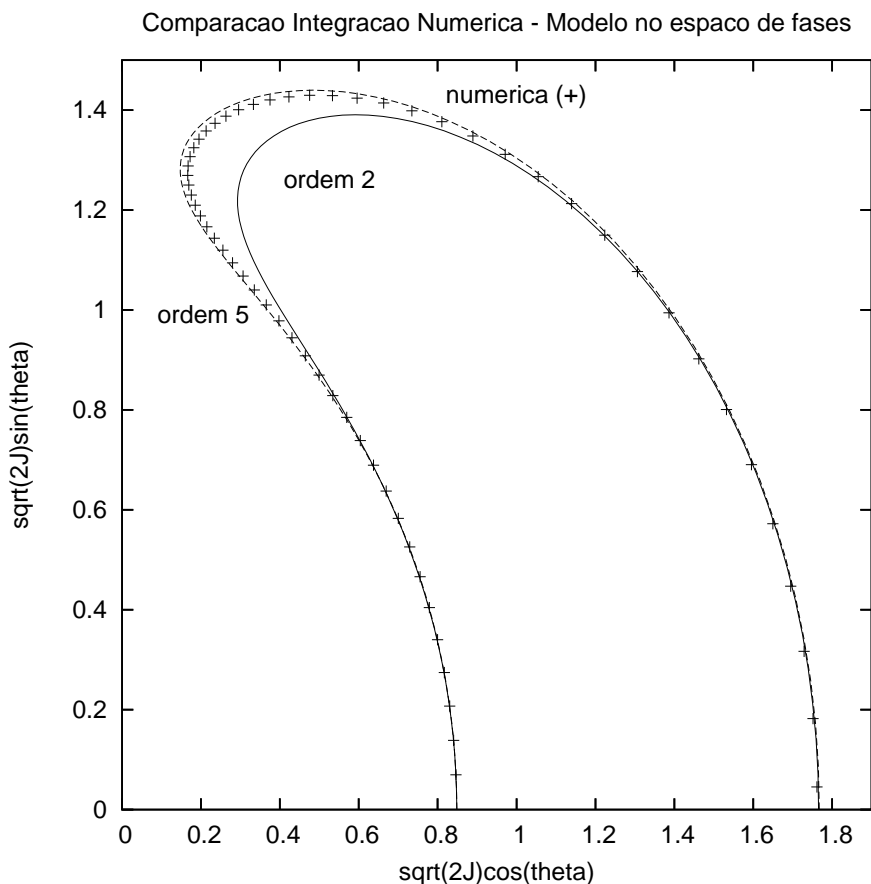


Figura 10: Comparação entre integração numérica com diferentes ordens de aproximação no modelo analítico no espaço de fases.

$$o_1 = 0 \quad (138)$$

Os termos restantes foram escritos de tal maneira que põem em evidência que fazendo as substituições, elas se combinam para formar sistemas não homogêneos de equações diferenciais, os quais têm a mesma parte homogênea que a equação de ordem um.

No caso destas equações somente são necessárias soluções particulares. Podemos notar que em cada lado esquerdo não podem ter termos com frequência 1. Esta condição nos conduz à obtenção das constantes o_j ($j \neq 0$).

Obtemos

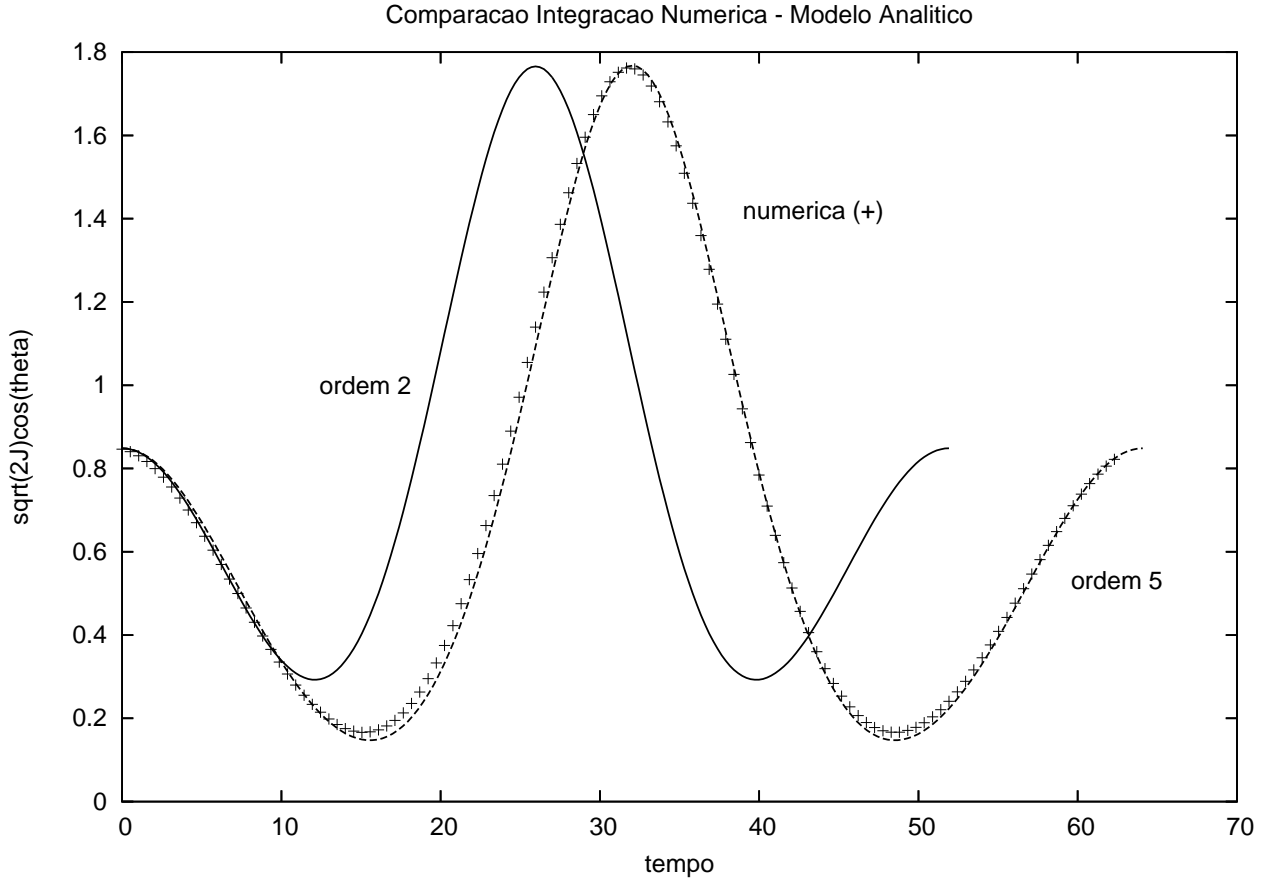


Figura 11: Comparação entre a integração numérica do kernel com aproximações analíticas para diferentes ordens no tempo para a variável

Ordem 3:

$$\begin{aligned}
 s_3 &= \frac{1}{192p_0^2\rho^2\omega_1^{0*2}} \left[108p_0^4b^2\varepsilon'^2 + 1728p_0^6b^2\mu'^2 - 1152p_0^3b\varepsilon'\mu'\rho + 864p_0^5b^2\varepsilon'\mu' + \right. \\
 &+ 63\varepsilon'^2\rho^2 - p_0\varepsilon'\rho^3 - 2016p_0^4b\mu'^2\rho + 432p_0\varepsilon'\mu'\rho^2 - \\
 &\left. - 16p_0^2\mu'\rho^3 - 162p_0^2b\varepsilon'^2\rho + 768p_0^2\mu'^2\rho^2 \right] \sin 3w_1^* \\
 p_3 &= \frac{1}{64p_0\rho^3\omega_1^{0*}} \left[4(960p_0^6b^2\mu'^2 + 480p_0^5b^2\varepsilon'\mu' - 416\mu'^2\rho p_0^4b + 60p_0^4b^2\varepsilon'^2 - \right. \\
 &- 176\mu'\rho p_0^3b\varepsilon' - 64\mu'^2\rho^2p_0^2 + 16\mu'p_0^2\rho^3 - 18p_0^2b\varepsilon'^2\rho - 8\mu'\rho^2p_0\varepsilon' + \\
 &\left. + \varepsilon'\rho^3p_0\varepsilon' - \varepsilon'^2\rho^2) \cos w_1^* + (192p_0^6b^2\mu'^2 + 96p_0^5b^2\varepsilon'\mu' + 32\mu'^2\rho p_0^4b + \right.
 \end{aligned}$$

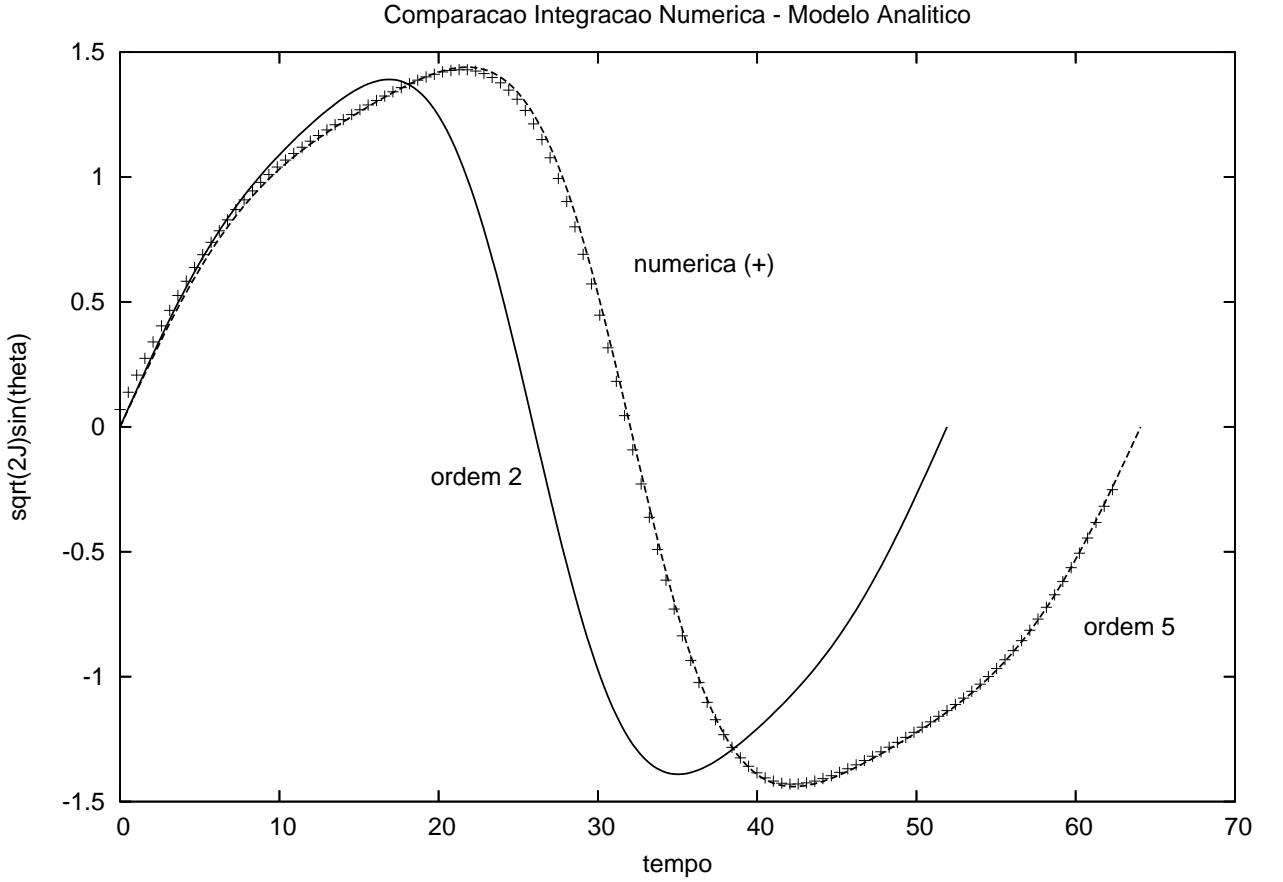


Figura 12: Comparação entre a integração numérica do kernel com aproximações analíticas para diferentes ordens no tempo para a variável H.

$$\begin{aligned}
& + 12p_0^4 b^2 \varepsilon'^2 - 64\mu' \rho p_0^3 b \varepsilon' - 16\mu' \rho^3 p_0^2 - 18p_0^2 b \varepsilon'^2 \rho + 16\mu' p_0 \rho^2 \varepsilon' - \\
& - \varepsilon' \rho^3 p_0 + 7\varepsilon'^2 \rho^2) \cos 3w_1^*] \\
o_2 = & \frac{1}{16p_0^2 \rho^2 \omega_1^{0*}} [60p_0^4 b^2 \varepsilon'^2 - \rho^2 \varepsilon'^2 + 960p_0^6 b^2 \mu'^2 - 480p_0^5 b^2 \varepsilon' \mu' - 96\mu'^2 \rho p_0^4 b - \\
& - 16\mu' \rho^2 p_0 \varepsilon' - 16\mu' p_0^2 \rho^3 - 18p_0^2 b \varepsilon'^2 \rho - 96\mu' \rho p_0^3 b \varepsilon' - \varepsilon' \rho^3 p_0] \quad (139)
\end{aligned}$$

Os termos de ordens superiores são calculados de maneira similar.

Quando comparamos a integração numérica para o Hamiltoniano de Andoyer com dois harmônicos e as aproximações analíticas, podemos notar que no espaço de fases a aproximação de ordem dois é boa (figura 10), mas se

olhamos o que acontece no plano (t, K) e (t, H) (fig. 11 e fig.12) as curvas correspondentes a diferentes aproximações são bem diferentes. Isto ocorre porque para ordens maiores de aproximação a frequência sofre correções importantes.

7.2.6 A Variável Ação

Uma vez que temos obtido a solução do kernel de Hori podemos calcular a variável ação

Por definição , temos que a ação :

$$\Lambda_1^* = \frac{1}{2\pi} \oint \mathcal{J}^* d\Theta_1^* = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{J}^* \frac{d\Theta_1^*}{dw_1} dw_1 \quad (140)$$

Calculando a integral, obtemos a variável ação em termos da amplitude Q . Obtemos:

$$\begin{aligned} \Lambda_1 = & \frac{1}{2} \left[p_0 p_{11} Q^2 + \left(p_0 p_{31} + p_{11} p_{20} + 2p_0 p_{22} s_{22} + \frac{1}{2} p_{11} p_{22} + \frac{1}{2} p_{11}^2 s_{22} \right) Q^4 \right. \\ & + \left(p_{20} p_{31} + p_{11} p_{31} s_{22} + \frac{1}{2} p_{22} p_{31} + p_{11} p_{33} s_{22} + \frac{1}{2} p_{11}^2 s_{42} + 2p_{20} p_{22} s_{22} + \right. \\ & \left. \left. + 2p_0 p_{22} s_{42} + \frac{1}{2} p_{11} p_{42} + 3p_0 p_{33} s_{33} + \frac{1}{2} p_{22} p_{33} + \frac{3}{2} p_{11} p_{22} s_{33} + 2p_0 p_{42} s_{22} \right) Q^6 \right] \end{aligned} \quad (141)$$

onde, para simplificar a notação , escrevemos a solução do kernel de Hori como:

$$\begin{aligned} p_1 &= p_{11} \cos w_1^* \\ s_2 &= s_{22} \sin 2w_1^* \\ p_2 &= p_{20} + p_{22} \cos 2w_1^* \\ s_3 &= s_{33} \sin 3w_1^* \\ p_3 &= p_{31} \cos w_1^* + p_{33} \cos 3w_1^* \\ s_4 &= s_{42} \sin 2w_1^* + s_{44} \sin 4w_1^* \\ p_4 &= p_{40} + p_{42} \cos 2w_1^* + p_{44} \cos 4w_1^* \end{aligned} \quad (142)$$

Para expressar a solução das equações diferenciais para o kernel de Hori, necessitamos escrever as variáveis em termos da variável ação . Para fazer isso, devemos invertir a última expressão para obter

$$Q^2 = \frac{2\rho}{p_0^2 \omega_1^{0*}} \Lambda_1^* - \frac{1}{4p_0^6 \omega_1^{0*4}} \left[608b^2 p_0^5 \varepsilon' \mu' + 1216b^2 p_0^6 \mu'^2 + 76b^2 p_0^4 \varepsilon'^2 - \right.$$

$$\begin{aligned}
& - 16\mu'\rho^2p_0\varepsilon' - 128\mu'^2\rho^2p_0^2 - 4p_0^2b\varepsilon'^2\rho - 368\mu'\rho p_0^3b\varepsilon' + \rho^2\varepsilon'^2 + \\
& + \varepsilon'\rho^3p_0 + 16\mu'p_0^2\rho^3 - 736\mu'^2\rho p_0^4b \Big] \Lambda_1^{*2} + \mathcal{O}(\Lambda_1^{*3})
\end{aligned} \tag{143}$$

A frequência em termos da ação é

$$\begin{aligned}
\omega_1^* &= \omega_1^{0*} + \frac{2o_2\rho}{\omega_1^{0*}p_0^2}\Lambda_1^* + \frac{o_2}{4p_0^6\omega_1^{0*4}} \left[608b^2p_0^5\varepsilon'\mu' + 1216b^2p_0^6\mu'^2 + 76b^2p_0^4\varepsilon'^2 - \right. \\
& - 16\mu'\rho^2p_0\varepsilon' - 128\mu'^2\rho^2p_0^2 - 4p_0^2b\varepsilon'^2\rho - 368\mu'\rho p_0^3b\varepsilon' + \rho^2\varepsilon'^2 + \\
& \left. + \varepsilon'\rho^3p_0 + 16\mu'p_0^2\rho^3 - 736\mu'^2\rho p_0^4b \right] \Lambda_1^{*2} + \mathcal{O}(\Lambda_1^{*3}),
\end{aligned} \tag{144}$$

e o Hamiltoniano é expresso na forma

$$\begin{aligned}
F^* &= \omega_1^{0*}\Lambda_1^* + \frac{o_2\rho}{\omega_1^{0*}}\Lambda_1^{*2} + \frac{o_2}{6p_0^6\omega_1^{0*4}} \left[608b^2p_0^5\varepsilon'\mu' + 1216b^2p_0^6\mu'^2 + 76b^2p_0^4\varepsilon'^2 - \right. \\
& - 16\mu'\rho^2p_0\varepsilon' - 128\mu'^2\rho^2p_0^2 - 4p_0^2b\varepsilon'^2\rho - 368\mu'\rho p_0^3b\varepsilon' + \rho^2\varepsilon'^2 + \\
& \left. + \varepsilon'\rho^3p_0 + 16\mu'p_0^2\rho^3 - 736\mu'\rho p_0^4b \right] \Lambda_1^{*3} + \mathcal{O}(\Lambda_1^{*4})
\end{aligned} \tag{145}$$

7.2.7 Extensão da Transformação aos outros graus de liberdade

O kernel de Hori foi construído a partir de um sistema de um grau de liberdade, mas na realidade o sistema possui mais graus de liberdade, só que no kernel os ângulos que lhes correspondem são cíclicos. No entanto, para continuar com o processo de perturbação, devemos levar em conta de que na função perturbadora os ângulos associados aos outros momentos aparecem. Isto obriga a estender, como na análise anterior, a transformação canônica aos outros graus de liberdade. Para fazer isto voltamos a usar a transformação de Henrard & Lemaître

$$\begin{aligned}
\Theta_1^* &= \Theta_1^*(w_1^*, \Lambda^*) \\
\mathcal{J}^* &= \mathcal{J}^*(w_1^*, \Lambda^*) \\
\Theta_2 &= w_2^* - \Xi_2(w_1^*, \Lambda^*) \\
\mathcal{G}^* &= \Lambda_2^* \\
\theta_j &= w_j^* - \Xi_j(w_1^*, \Lambda^*) \\
J_j &= \Lambda_j^* \quad j = 4, ..7
\end{aligned} \tag{146}$$

onde:

$$\Xi_j(w_1^*, \Lambda^*) = \int_0^{w_1^*} \left(\frac{\partial\Theta_1^*}{\partial w_1^*} \frac{\partial\mathcal{J}^*}{\partial\Lambda_j^*} - \frac{\partial\Theta_1^*}{\partial\Lambda_j^*} \frac{\partial\mathcal{J}^*}{\partial w_1^*} \right) dw_1^* \tag{147}$$

para $j = 2, 4, 5, 6, 7$.

Notemos que Θ_1^* , \mathcal{J}^* são independentes de Λ_j^* ($j \geq 4$), mas dependem de $\Lambda_2^* = \mathcal{G}^*$ por causa de $a = \nu_{11}\mathcal{G}^*$ e p_0 (já que $ap_0^3 + (2 + \mu')p_0 + \varepsilon' = 0$).

Usando a variável p ($p = \sqrt{2\mathcal{J}^*}$) a expressão para Ξ_2 fica

$$\Xi_2(w_1^*, \Lambda_1^*, \Lambda_2) = \int_0^{w_1^*} p \left(\frac{\partial \Theta_1^*}{\partial w_1^*} \frac{\partial p}{\partial \Lambda_2^*} - \frac{\partial \Theta_1^*}{\partial \Lambda_2^*} \frac{\partial p}{\partial w_1^*} \right) dw_1^* \quad (148)$$

Ao calcular a função Ξ_2 , se obtém que o termo não periódico

$$m_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Xi_2 dw$$

se escreve como

$$\begin{aligned} m_0 = & p_0 p_{11} \mathcal{Q} \frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial \Lambda_2^*} + \frac{1}{2} \frac{\partial p_0}{\partial \Lambda_2^*} p_{11} \mathcal{Q}^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial p_{11}}{\partial \Lambda_2^*} p_0 \mathcal{Q}^2 \\ & + \left[p_{11} p_{22} + p_{11}^2 s_{22} + p_{20} p_{11} + 4p_0 p_{22} s_{22} + 2p_0 p_{31} \right] \mathcal{Q}^3 \frac{\partial \mathcal{Q}}{\Lambda_2^*} + \\ & + \left[\frac{1}{4} \frac{\partial p_{11}}{\partial \Lambda_2^*} p_{22} + \frac{1}{4} \frac{\partial p_{22}}{\partial \Lambda_2^*} p_{11} + \frac{1}{2} p_{11} \frac{\partial p_{11}}{\partial \Lambda_2^*} s_{22} + \frac{1}{4} p_{11}^2 \frac{\partial s_{22}}{\partial \Lambda_2^*} + \frac{1}{2} \frac{\partial p_{20}}{\partial \Lambda_2^*} p_{11} + \frac{1}{2} \frac{\partial p_{11}}{\partial \Lambda_2^*} p_{20} + \right. \\ & \left. + \frac{\partial p_0}{\partial \Lambda_2^*} p_{22} s_{22} + \frac{\partial p_{22}}{\partial \Lambda_2^*} p_0 s_{22} + \frac{\partial s_{22}}{\partial \Lambda_2^*} p_0 p_{22} + \frac{1}{2} \frac{\partial p_0}{\partial \Lambda_2^*} p_{31} + \frac{1}{2} \frac{\partial p_{31}}{\partial \Lambda_2^*} p_0 \right] \mathcal{Q}^4 \quad (149) \end{aligned}$$

Se olhamos como ficou a expressão da ação (eqn. 141) podemos notar que (pelo menos até ordem $\mathcal{O}(\mathcal{Q}^5)$) temos

$$m_0 = \frac{\partial}{\partial \Lambda_2^*} [\Lambda_1^*] = 0$$

Isto significa que a função Ξ_2 é uma função periódica, como já foi observado por Henrard e Lemaître (Henrard & Lemaître, 1986).

Com este resultado, e, a partir da solução do kernel de Hori, podemos obter a função Ξ_2 até a ordem $\mathcal{O}(\mathcal{Q}^4)$:

$$\Xi_2 = m_1 \sin w_1^* + m_2 \sin 2w_1^* + m_3 \sin 3w_1^*, \quad (150)$$

onde os coeficientes m_1 , m_2 e m_3 são calculados como:

$$m_1 = \frac{1}{2} p_0 \frac{\partial p_0}{\partial \Lambda_2^*} \mathcal{Q} + \left[p_0 p_{20} + p_0 p_{22} + p_0 p_{11} s_{22} + \frac{1}{2} p_{11}^2 \right] \frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial \Lambda_2^*} \mathcal{Q}^2 +$$

$$\begin{aligned}
& + \left[\frac{1}{2} \frac{\partial p_0}{\partial \Lambda_2^*} p_{20} + \frac{1}{2} \frac{\partial p_0}{\partial \Lambda_2^*} p_{11} s_{22} + \frac{1}{2} p_0 \frac{\partial p_{11}}{\partial \Lambda_2^*} s_{22} + \frac{1}{4} p_0 p_{11} \frac{\partial s_{22}}{\partial \Lambda_2^*} + \right. \\
& + \left. \frac{1}{4} \frac{\partial p_0}{\partial \Lambda_2^*} p_{22} + \frac{1}{2} p_0 \frac{\partial p_{20}}{\partial \Lambda_2^*} + \frac{3}{8} p_{11} \frac{\partial p_{11}}{\partial \Lambda_2^*} + \frac{1}{4} p_0 \frac{\partial p_{22}}{\partial \Lambda_2^*} \right] \mathcal{Q}^3 \\
& = m_{10} + m_{12} \mathcal{Q}^2 + m_{13} \mathcal{Q}^3, \tag{151}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_2 & = \frac{1}{4} \left[\frac{\partial p_0}{\partial \Lambda_2^*} p_{11} + p_0 \frac{\partial p_{11}}{\partial \Lambda_2^*} + 4p_0 \frac{\partial p_0}{\partial \Lambda_2^*} s_{22} \right] \mathcal{Q}^2 + \left[\frac{3}{2} p_0 p_{33} + 2p_0 p_{20} s_{22} + \right. \\
& + \left. \frac{3}{2} p_0 p_{11} s_{33} + p_{11} p_{22} + \frac{1}{2} p_{11}^2 s_{22} + \frac{1}{2} p_0^2 p_{31} + \frac{1}{2} p_{11}^2 p_{20} \right] \mathcal{Q}^3 \frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial \Lambda_2^*} \\
& = m_{22} \mathcal{Q}^2 + m_{23} \mathcal{Q}^3 \tag{152}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
m_3 & = \left[\frac{1}{8} p_{11} \frac{\partial p_{11}}{\partial \Lambda_2^*} + \frac{1}{4} \frac{\partial p_0}{\partial \Lambda_2^*} p_{22} + \frac{1}{4} p_0 \frac{\partial p_{22}}{\partial \Lambda_2^*} + \frac{3}{2} p_0 \frac{\partial p_0}{\partial \Lambda_2^*} s_{33} + \frac{\partial p_0}{\partial \Lambda_2^*} p_{11} s_{22} \right. \\
& - \left. \frac{1}{4} p_0 p_{11} \frac{\partial s_{22}}{\partial \Lambda_2^*} + p_0 \frac{\partial p_{11}}{\partial \Lambda_2^*} s_{22} \right] \mathcal{Q}^3 \\
& = m_{33} \mathcal{Q}^3 \tag{153}
\end{aligned}$$

Já que Θ_1^* e \mathcal{J}^* não dependem de J_j ($j = 4, \dots, 8$), as derivadas com relação a estas variáveis são zero. Então, as funções $\Xi_j = 0$ são zero também.

Com isto, a transformação completa é:

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}^* & = \frac{p^2(w_1^*, \Lambda_1^*, \Lambda_2^*)}{2} \\
\Theta_1^* & = \sin(w_1^*) \mathcal{Q}(\Lambda_1^*, \Lambda_2^*) + s_{22} \sin(2w_1^*) \mathcal{Q}^2(\Lambda_1^*, \Lambda_2^*) + s_{33} \sin(3w_1^*) \mathcal{Q}^3(\Lambda_1^*, \Lambda_2^*) \\
\mathcal{G}^* & = \Lambda_2^* \\
\Theta_2^* & = w_2^* - (m_1(\Lambda_1^*, \Lambda_2^*) \sin w_1^* + m_2(\Lambda_1^*, \Lambda_2^*) \sin 2w_1^* + m_3(\Lambda_1^*, \Lambda_2^*) \sin 3w_1^*) \\
J_l^* & = \Lambda_l^* \\
\theta_l^* & = w_l^* \quad l = 4, 5, 6, 7 \tag{154}
\end{aligned}$$

7.2.8 As equações de perturbação

Devemos lembrar que ainda temos a função perturbadora expressa em termos de novas e velhas variáveis. Precisamos, então escrever tudo em termos das novas variáveis.

Já que as médias são feitas diretamente nos ângulos, é apropriado escrever todas as funções separadas por harmônicos.

Cada coeficiente na desenvolvimento será um polinômio até ordem 3 em Q .

$$\begin{aligned}
\mathcal{J} &= \left[\frac{1}{2} p_0^2 + \left(p_0 p_{20} + \frac{1}{4} p_{11}^2 \right) Q^2 \right] + \\
&+ \left[\frac{1}{2} p_0 p_{11} Q + \left(\frac{1}{2} p_{11} p_{20} + \frac{1}{2} p_0 p_{31} + \frac{1}{4} p_{11} p_{22} \right) Q^3 \right] \cos w_1 + \\
&+ \left[\left(\frac{1}{2} p_0 p_{22} + \frac{1}{8} p_{11}^2 \right) Q^2 \right] \cos(2w_1) + \\
&+ \left[\left(\frac{1}{2} p_0 p_{33} + \frac{1}{4} p_{11} p_{22} \right) Q^3 \right] \cos(3w_1) \tag{155}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos \Theta_1^* &= \left[1 - \frac{1}{4} Q^2 \right] + \left[-\frac{1}{4} s_{22} Q^3 \right] \cos w_1 + \left(\frac{1}{8} Q^2 \right) \cos 2w_1 + \\
&+ \left[\frac{1}{4} s_{22} Q^3 \right] \cos 3w_1 \tag{156}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sqrt{2\mathcal{J}^*} \cos(\Theta_1^*) &= \left(p_0 + \left(-\frac{1}{4} p_0 + p_{20} \right) Q^2 \right) \\
&+ \left(\frac{1}{4} p_{11} Q + \left(\frac{1}{4} p_{31} - \frac{1}{8} p_0 s_{22} - \frac{3}{64} p_{11} \right) Q^3 \right) \cos w_1 + \\
&+ \left(\left(\frac{1}{16} p_0 + \frac{1}{4} p_{22} \right) Q^2 \right) \cos 2w_1 + \\
&+ \left(\left(\frac{1}{8} p_0 s_{22} + \frac{1}{64} p_{11} + \frac{1}{4} p_{33} \right) Q^3 \right) \cos 3w_1 \tag{157}
\end{aligned}$$

Para Θ_2 temos

$$\begin{aligned}
\cos(\Theta_2^*) &= \left[\left(1 - \frac{1}{4} m_{11}^2 Q^2 - \frac{1}{2} m_{11} m_{12} Q^3 \right) \cos(w_2^*) + \right. \\
&+ \left[-\frac{1}{2} m_{11} Q - \frac{1}{2} m_{12} Q^2 + \left(\frac{1}{16} m_{11}^3 - \frac{1}{2} m_{13} - \frac{1}{4} m_{11} m_{22} \right) Q^3 \right] \cos(w_1^* + w_2^*) \\
&+ \left[\frac{1}{2} m_{11} Q + \frac{1}{2} m_{12} Q^2 + \left(-\frac{1}{16} m_{11}^3 + \frac{1}{2} m_{13} - \frac{1}{4} m_{11} m_{22} \right) Q^3 \right] \cos(w_1^* - w_2^*) \\
&+ \left. \left[\left(\frac{1}{8} m_{11}^2 - \frac{1}{2} m_{22} \right) Q^2 + \left(-\frac{1}{2} m_{23} + \frac{1}{4} m_{11} m_{12} \right) Q^3 \right] \cos(2w_1^* + w_2^*) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[\left(\frac{1}{8} m_{11}^2 + \frac{1}{2} m_{22} \right) Q^2 + \left(\frac{1}{2} m_{23} + \frac{1}{4} m_{11} m_{12} \right) Q^3 \right] \cos(2w_1^* - w_2^*) \\
& + \left[\left(-\frac{1}{48} m_{11}^3 - \frac{1}{2} m_{33} + \frac{1}{4} m_{11} m_{22} \right) Q^3 \right] \cos(3w_1^* + w_2^*) \\
& + \left[\left(\frac{1}{48} m_{11}^3 + \frac{1}{2} m_{33} + \frac{1}{4} m_{11} m_{22} \right) Q^3 \right] \cos(3w_1^* - w_2^*) \\
\cos(2\Theta_2^*) & = \left[1 - m_{11}^2 Q^2 - 2 m_{11} m_{12} Q^3 \right] \cos(2w_2^*) \\
& + \left[-m_{11} Q - m_{12} Q^2 + \left(\frac{1}{2} m_{11}^3 - m_{13} - m_{11} m_{22} \right) Q^3 \right] \cos(w_1^* + 2w_2^*) \\
& + \left[m_{11} Q + m_{12} Q^2 + \left(-\frac{1}{2} m_{11}^3 + m_{13} - m_{11} m_{22} \right) Q^3 \right] \cos(w_1^* - 2w_2^*) \\
& + \left[\left(\frac{1}{2} m_{11}^2 - m_{22} \right) Q^2 + (-m_{23} + m_{11} m_{12}) Q^3 \right] \cos(2w_1^* + 2w_2^*) \\
& + \left[\left(\frac{1}{2} m_{11}^2 + m_{22} \right) Q^2 + (m_{23} + m_{11} m_{12}) Q^3 \right] \cos(2w_1^* - 2w_2^*) \\
& + \left[\left(-\frac{1}{6} m_{11}^3 - m_{33} + m_{11} m_{22} \right) Q^3 \right] \cos(3w_1^* + 2w_2^*) \\
& + \left[\left(\frac{1}{6} m_{11}^3 + m_{33} + m_{11} m_{22} \right) Q^3 \right] \cos(3w_1^* - 2w_2^*)
\end{aligned}$$

Para fazer a média (até a ordem $\varepsilon^{4/3}$) sobre o ângulo rápido, w_1^* , necessitamos escrever a parte perturbadora em termos das novas variáveis;

$$\begin{aligned}
\Delta_1 \mathcal{R} & = B_2 \left[(\beta_1^2 - \beta_2^2) e_J^2 \cos 2\Theta_2^* + \left(\frac{C_{11}}{B_2} - 2\beta_1 \right) \sqrt{2J_1^*} e_J \cos(\theta_1^* + \Theta_2^*) \right] + \\
& + \delta \mathcal{R}_{10}^0 \cos \theta_1^* + \delta \mathcal{R}_{01}^0 \cos \Theta_2^* + \delta \mathcal{R}_{11}^0 \cos(\theta_1^* + \Theta_2^*) \\
& - g_5 \left[\Lambda_2 - \frac{1}{2} \beta_1^2 e_J^{(p)2} + \beta_1 e_J^{(p)} \sqrt{2J_1} \cos(\theta_1 - \Theta_2) \right] \quad (158)
\end{aligned}$$

o último termo se corresponde às relações da transformação de Sessin $J_2 = \Lambda_2 - \frac{1}{2} \beta_1^2 e_J^{(p)2} + \beta_1 e_J^{(p)} \sqrt{2J_1} \cos(\theta_1 - \Theta_2)$.

Sinteticamente podemos escrever a função perturbadora como

$$\Delta_1 \mathcal{R} = \sum_l \sum_m (\Delta_1 R)_{lm} \cos(lw_1 + mw_2),$$

onde os coeficientes são calculados a partir da transformação às novas variáveis dos termos:

$$\sqrt{2J_1} \cos(\theta_1^*) = \left[p_0 + \left(-\frac{1}{4} p_0 + p_{20} \right) Q^2 \right]$$

$$\begin{aligned}
& + \left[-e_J^{(p)} \beta_1 + \frac{1}{4} e_J^{(p)} \beta_1 m_{11}^2 Q^2 + \frac{1}{2} e_J^{(p)} \beta_1 m_{11} m_{12} Q^3 \right] \cos(w_2^*) \\
& + \left[\frac{1}{4} p_{11} Q + \left(-\frac{3}{64} p_{11} - \frac{1}{8} p_0 s_{22} + \frac{1}{4} p_{31} \right) Q^3 \right] \cos(w_1^*) \\
& + \left[\frac{1}{2} e_J^{(p)} \beta_1 m_{11} Q + \frac{1}{2} e_J^{(p)} \beta_1 m_{12} Q^2 - \frac{1}{16} e_J^{(p)} \beta_1 (-4 m_{11} m_{22} - \right. \\
& \quad \left. - 8 m_{13} + m_{11}^3) Q^3 \right] \cos(w_1^* + w_2^*) \\
& + \left[-\frac{1}{2} e_J^{(p)} \beta_1 m_{11} Q - \frac{1}{2} e_J^{(p)} \beta_1 m_{12} Q^2 + \frac{1}{16} e_J^{(p)} \beta_1 (4 m_{11} m_{22} - \right. \\
& \quad \left. - 8 m_{13} + m_{11}^3) Q^3 \right] \cos(w_1^* - w_2^*) \\
& + \left[\left(\frac{1}{16} p_0 + \frac{1}{4} p_{22} \right) Q^2 \right] \cos(2w_1^*) \\
& + \left[-\frac{1}{8} e_J^{(p)} \beta_1 (-4 m_{22} + m_{11}^2) Q^2 - \frac{1}{8} e_J^{(p)} \beta_1 (-4 m_{23} + 2 m_{11} m_{12}) Q^3 \right] \cos(2w_1^* + w_2^*) \\
& + \left[-\frac{1}{8} e_J^{(p)} \beta_1 (4 m_{22} + m_{11}^2) Q^2 - \frac{1}{8} e_J^{(p)} \beta_1 (4 m_{23} + 2 m_{11} m_{12}) Q^3 \right] \cos(2w_1^* - w_2^*) \\
& + \left[\left(\frac{1}{8} p_0 s_{22} + \frac{1}{64} p_{11} + \frac{1}{4} p_{33} \right) Q^3 \right] \cos(3w_1^*) \\
& + \left[\frac{1}{48} e_J^{(p)} \beta_1 (24 m_{33} + m_{11}^3 - 12 m_{11} m_{22}) Q^3 \right] \cos(3w_1^* + w_2^*) \\
& + \left[-\frac{1}{48} e_J^{(p)} \beta_1 (24 m_{33} + m_{11}^3 + 12 m_{11} m_{22}) Q^3 \right] \cos(3w_1^* - w_2^*)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2J_1 & = \left[p_0^2 + e_J^{(p)2} \beta_1^2 + \left(2 p_0 p_{20} - \frac{15}{32} p_0^2 + \frac{1}{32} p_{11}^2 \right) Q^2 \right] + \\
& + \left[-2 p_0 e_J^{(p)} \beta_1 + \frac{1}{4} e_J^{(p)} \beta_1 (p_0 m_{11} + 2 p_0 - 8 p_{20} + 2 p_0 m_{11}^2) Q^2 + \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{4} e_J^{(p)} \beta_1 (p_0 m_{12} + 4 m_{11} p_0 m_{12}) Q^3 \right] \cos(w_2^*) + \\
& + \left[\frac{1}{2} p_0 p_{11} Q + \left(\frac{1}{2} p_{11} p_{20} + \frac{1}{2} p_0 p_{31} + \frac{1}{16} p_{11} p_{22} - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{3}{16} p_0^2 s_{22} - \frac{3}{16} p_0 p_{11} \right) Q^3 \right] \cos(w_1^*) + \\
& + \left[\frac{1}{64} e_J^{(p)} \beta_1 (-16 p_{11} + 64 p_0 m_{11} + 16 p_0) Q + e_J^{(p)} \beta_1 p_0 m_{12} Q^2 + \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{64} e_J^{(p)} \beta_1 (3 p_{11} + 4 p_{11} s_{22} + 8 m_{11} p_0 s_{22} - 2 p_0 - 8 m_{11} p_{22} + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 8 p_{11} m_{22} + 8 p_0 s_{22} - 4 p_{22} + 2 m_{11} p_{11} - 6 p_0 m_{11}^2 - 18 p_0 m_{11} + \\
& + 2 p_{11} m_{11}^2 + 8 p_0 m_{22} + 64 m_{11} p_{20} - 16 p_{31} + 64 p_0 m_{13} - \\
& + 8 p_0 m_{11}^3 + 16 p_0 s_{31} + 16 p_{20} + 32 p_0 m_{11} m_{22}) Q^3] \cos(w_1^* + w_2^*) + \\
& + \left[-\frac{1}{64} e_J^{(p)} \beta_1 (16 p_{11} + 64 p_0 m_{11} + 16 p_0) Q - e_J^{(p)} \beta_1 p_0 m_{12} Q^2 - \right. \\
& - \frac{1}{64} e_J^{(p)} \beta_1 (-3 p_{11} + 4 p_{11} s_{22} - 8 m_{11} p_0 s_{22} - 2 p_0 - 8 m_{11} p_{22} + \\
& + 8 p_{11} m_{22} - 8 p_0 s_{22} - 4 p_{22} - 2 m_{11} p_{11} - 6 p_0 m_{11}^2 - 18 p_0 m_{11} - \\
& + 2 p_{11} m_{11}^2 - 8 p_0 m_{22} + 64 m_{11} p_{20} + 16 p_{31} + 64 p_0 m_{13} - 8 p_0 m_{11}^3 + \\
& + 16 p_0 s_{31} + 16 p_{20} - 32 p_0 m_{11} m_{22}) Q^3] \cos(w_1^* - w_2^*) + \\
& + \left[\left(\frac{1}{32} p_{11}^2 + \frac{1}{2} p_0 p_{22} + \frac{3}{32} p_0^2 \right) Q^2 \right] \cos(2w_1^*) + \\
& + \left[-\frac{1}{16} e_J^{(p)} \beta_1 (-p_{11} - 2 m_{11} p_{11} - 16 p_0 m_{22} + p_0 + 4 p_{22} - 4 p_0 s_{22} + \right. \\
& + 2 p_0 m_{11} + 4 p_0 m_{11}^2) Q^2 - \frac{1}{16} e_J^{(p)} \beta_1 (8 m_{11} p_0 m_{12} + \\
& + 2 p_0 m_{12} - 2 p_{11} m_{12} - 16 p_0 m_{23}) Q^3] \cos(2w_1^* + w_2^*) + \\
& + \left[-\frac{1}{16} e_J^{(p)} \beta_1 (p_{11} + 2 m_{11} p_{11} + 16 p_0 m_{22} + p_0 + 4 p_{22} + 4 p_0 s_{22} + \right. \\
& + 2 p_0 m_{11} + 4 p_0 m_{11}^2) Q^2 - \frac{1}{16} e_J^{(p)} \beta_1 (8 m_{11} p_0 m_{12} + \\
& + 2 p_0 m_{12} + 2 p_{11} m_{12} + 16 p_0 m_{23}) Q^3] \cos(2w_1^* - w_2^*) \\
& + \left[\left(\frac{1}{16} p_{11} p_{22} + \frac{1}{2} p_0 p_{33} + \frac{3}{16} p_0^2 s_{22} + \frac{1}{32} p_0 p_{11} - e_J^{(p)2} \beta_1^2 m_{11} m_{22} \right) Q^3 \right] \cos(3w_1^*) \\
& + \left[\frac{1}{192} e_J^{(p)} \beta_1 (-3 p_{11} + 12 p_{11} s_{22} - 24 m_{11} p_0 s_{22} + 2 p_0 + 48 p_0 s_{33} - 48 p_{33} + \right. \\
& + 24 m_{11} p_{22} + 24 p_{11} m_{22} - 24 p_0 s_{22} + 12 p_{22} - 6 m_{11} p_{11} + 6 p_0 m_{11}^2 + 6 p_0 m_{11} - \\
& + 6 p_{11} m_{11}^2 - 24 p_0 m_{22}) Q^3] \cos(3w_1^* + w_2^*) \\
& + \left[-\frac{1}{192} e_J^{(p)} \beta_1 (3 p_{11} + 12 p_{11} s_{22} + 24 m_{11} p_0 s_{22} + 2 p_0 + 48 p_0 s_{33} + 48 p_{33} + \right. \\
& + 24 m_{11} p_{22} + 24 p_{11} m_{22} + 24 p_0 s_{22} + 12 p_{22} + 6 m_{11} p_{11} + 6 p_0 m_{11}^2 + 6 p_0 m_{11} + \\
& + 6 p_{11} m_{11}^2 + 24 p_0 m_{22}) Q^3] \cos(w_1^* - w_2^*)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sqrt{2J_1} \cos(\theta_1^* + \Theta_2^*) &= \left[p_0 + \left(-\frac{1}{4} p_0 - \frac{1}{4} p_0 m_{11}^2 + p_{20} + \frac{1}{8} p_0 m_{11} \right) Q^2 + \right. \\
&+ \left. \left(-\frac{1}{2} m_{11} p_0 m_{12} + \frac{1}{8} p_0 m_{12} \right) Q^3 \right] \cos(w_2^*) + \\
&+ \left[-e_J^{(p)} \beta_1 + e_J^{(p)} \beta_1 m_{11}^2 Q^2 + 2 e_J^{(p)} \beta_1 m_{11} m_{12} Q^3 \right] \cos(2w_2^*) + \\
&+ \left[\left(-\frac{1}{2} p_0 m_{11} + \frac{1}{8} p_{11} + \frac{1}{8} p_0 \right) Q - \frac{1}{2} p_0 m_{12} Q^2 + \right. \\
&+ \left. \left(-\frac{1}{4} p_0 m_{11} m_{22} + \frac{1}{16} m_{11} p_0 s_{22} + \frac{1}{8} p_{20} - \frac{1}{32} p_{22} - \right. \right. \\
&+ \left. \frac{1}{64} p_0 - \frac{1}{2} p_0 m_{13} + \frac{1}{32} p_{11} s_{22} + \frac{1}{8} p_0 s_{31} - \frac{1}{16} p_{11} m_{22} + \right. \\
&+ \left. \frac{1}{16} m_{11} p_{22} - \frac{3}{64} p_0 m_{11}^2 + \frac{1}{16} p_0 m_{11}^3 - \frac{1}{2} m_{11} p_{20} + \frac{9}{64} p_0 m_{11} + \right. \\
&+ \left. \frac{1}{16} p_0 m_{22} - \frac{1}{16} p_0 s_{22} - \frac{3}{128} p_{11} + \frac{1}{8} p_{31} + \frac{1}{64} m_{11} p_{11} - \right. \\
&- \left. \frac{1}{64} p_{11} m_{11}^2 \right) Q^3 \left. \right] \cos(w_1^* + w_2^*) + \\
&+ \left[e_J^{(p)} \beta_1 m_{11} Q + e_J^{(p)} \beta_1 m_{12} Q^2 - \right. \\
&- \left. \frac{1}{2} e_J^{(p)} \beta_1 \left(m_{11}^3 - 2 m_{13} - 2 m_{11} m_{22} \right) Q^3 \right] \cos(w_1^* + 2w_2^*) + \\
&+ \left[\left(\frac{1}{2} p_0 m_{11} + \frac{1}{8} p_{11} - \frac{1}{8} p_0 \right) Q + \frac{1}{2} p_0 m_{12} Q^2 + \right. \\
&+ \left. \left(-\frac{1}{4} p_0 m_{11} m_{22} + \frac{1}{16} m_{11} p_0 s_{22} - \frac{1}{8} p_{20} + \frac{1}{32} p_{22} + \frac{1}{64} p_0 + \right. \right. \\
&+ \left. \frac{1}{2} p_0 m_{13} - \frac{1}{32} p_{11} s_{22} - \frac{1}{8} p_0 s_{31} + \frac{1}{16} p_{11} m_{22} - \frac{1}{16} m_{11} p_{22} + \right. \\
&+ \left. \frac{3}{64} p_0 m_{11}^2 - \frac{1}{16} p_0 m_{11}^3 + \frac{1}{2} m_{11} p_{20} - \frac{9}{64} p_0 m_{11} + \frac{1}{16} p_0 m_{22} - \right. \\
&+ \left. \frac{1}{16} p_0 s_{22} - \frac{3}{128} p_{11} + \frac{1}{8} p_{31} + \frac{1}{64} m_{11} p_{11} - \right. \\
&+ \left. \frac{1}{64} p_{11} m_{11}^2 \right) Q^3 \left. \right] \cos(w_1^* - w_2^*) + \\
&+ \left[-e_J^{(p)} \beta_1 m_{11} Q - e_J^{(p)} \beta_1 m_{12} Q^2 + \right. \\
&+ \left. \frac{1}{2} e_J^{(p)} \beta_1 \left(m_{11}^3 - 2 m_{13} + 2 m_{11} m_{22} \right) Q^3 \right] \cos(w_1^* - 2w_2^*) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[\left(\frac{1}{8} p_0 s_{22} + \frac{1}{32} p_{11} - \frac{1}{2} p_0 m_{22} - \frac{1}{16} m_{11} p_{11} - \frac{1}{16} p_0 m_{11} + \right. \right. \\
& + \left. \frac{1}{8} p_0 m_{11}^2 + \frac{1}{8} p_{22} + \frac{1}{32} p_0 \right) Q^2 + \left(-\frac{1}{2} p_0 m_{23} - \frac{1}{16} p_{11} m_{12} - \right. \\
& - \left. \frac{1}{16} p_0 m_{12} + \frac{1}{4} m_{11} p_0 m_{12} \right) Q^3 \Big] \cos(2w_1^* + w_2^*) + \\
& + \left[-\frac{1}{2} e_J^{(p)} \beta_1 (m_{11}^2 - 2 m_{22}) Q^2 - \right. \\
& - \left. \frac{1}{2} e_J^{(p)} \beta_1 (2 m_{11} m_{12} - 2 m_{23}) Q^3 \right] \cos(2w_1^* + 2w_2^*) + \\
& + \left[\left(-\frac{1}{8} p_0 s_{22} - \frac{1}{32} p_{11} + \frac{1}{2} p_0 m_{22} + \frac{1}{16} m_{11} p_{11} - \frac{1}{16} p_0 m_{11} + \right. \right. \\
& + \left. \frac{1}{8} p_0 m_{11}^2 + \frac{1}{8} p_{22} + \frac{1}{32} p_0 \right) Q^2 + \left(\frac{1}{2} p_0 m_{23} + \frac{1}{16} p_{11} m_{12} - \right. \\
& - \left. \frac{1}{16} p_0 m_{12} + \frac{1}{4} m_{11} p_0 m_{12} \right) Q^3 \Big] \cos(2w_1^* - w_2^*) + \\
& + \left[\left(\frac{1}{4} p_0 m_{11} m_{22} - \frac{1}{16} m_{11} p_0 s_{22} + \frac{1}{8} p_0 s_{33} + \frac{1}{32} p_{22} + \frac{1}{192} p_0 + \right. \right. \\
& + \left. \frac{1}{32} p_{11} s_{22} - \frac{1}{16} p_{11} m_{22} - \frac{1}{16} m_{11} p_{22} + \frac{1}{64} p_0 m_{11}^2 - \frac{1}{48} p_0 m_{11}^3 - \right. \\
& + \left. \frac{1}{64} p_0 m_{11} - \frac{1}{16} p_0 m_{22} + \frac{1}{8} p_{33} + \frac{1}{16} p_0 s_{22} + \frac{1}{128} p_{11} - \right. \\
& + \left. \frac{1}{64} m_{11} p_{11} + \frac{1}{64} p_{11} m_{11}^2 - \frac{1}{2} p_0 m_{33} \right) Q^3 \Big] \cos(3w_1^* + w_2^*) + \\
& + \left[\frac{1}{6} e_J^{(p)} \beta_1 (m_{11}^3 - 6 m_{11} m_{22} + 6 m_{33}) Q^3 \right] \cos(3w_1^* + 2w_2^*) + \\
& + \left[\left(\frac{1}{4} p_0 m_{11} m_{22} - \frac{1}{16} m_{11} p_0 s_{22} - \frac{1}{8} p_0 s_{33} - \frac{1}{32} p_{22} - \right. \right. \\
& - \left. \frac{1}{192} p_0 - \frac{1}{32} p_{11} s_{22} + \frac{1}{16} p_{11} m_{22} + \frac{1}{16} m_{11} p_{22} - \frac{1}{64} p_0 m_{11}^2 + \right. \\
& + \left. \frac{1}{48} p_0 m_{11}^3 + \frac{1}{64} p_0 m_{11} - \frac{1}{16} p_0 m_{22} + \frac{1}{8} p_{33} + \frac{1}{16} p_0 s_{22} + \right. \\
& + \left. \frac{1}{128} p_{11} - \frac{1}{64} m_{11} p_{11} + \frac{1}{64} p_{11} m_{11}^2 + \frac{1}{2} p_0 m_{33} \right) Q^3 \Big] \cos(3w_1^* - w_2^*) + \\
& + \left[-\frac{1}{6} e_J^{(p)} \beta_1 (m_{11}^3 + 6 m_{11} m_{22} + 6 m_{33}) Q^3 \right] \cos(3w_1^* - 2w_2^*)
\end{aligned}$$

$$\sqrt{2J_1} \cos(\theta_1^* - \Theta_2^*) = -e_J^{(p)} \beta_1 +$$

$$\begin{aligned}
& + \left[p_0 + \left(p_{20} - \frac{1}{4} p_0 - \frac{1}{4} p_0 m_{11}^2 - \frac{1}{8} p_0 m_{11} \right) Q^2 + \right. \\
& + \left. \left(-\frac{1}{2} m_{11} p_0 m_{12} - \frac{1}{8} p_0 m_{12} \right) Q^3 \right] \cos(w_2^*) + \\
& + \left[\left(\frac{1}{8} p_{11} - \frac{1}{2} p_0 m_{11} - \frac{1}{8} p_0 \right) Q - \frac{1}{2} p_0 m_{12} Q^2 + \right. \\
& + \left(-\frac{3}{128} p_{11} - \frac{1}{32} p_{11} s_{22} - \frac{1}{16} m_{11} p_0 s_{22} + \frac{1}{64} p_0 + \right. \\
& + \frac{1}{16} m_{11} p_{22} - \frac{1}{16} p_{11} m_{22} - \frac{1}{16} p_0 s_{22} + \frac{1}{32} p_{22} - \\
& - \frac{1}{64} m_{11} p_{11} + \frac{3}{64} p_0 m_{11}^2 + \frac{9}{64} p_0 m_{11} - \frac{1}{64} p_{11} m_{11}^2 - \\
& - \frac{1}{16} p_0 m_{22} - \frac{1}{2} m_{11} p_{20} + \frac{1}{8} p_{31} - \frac{1}{2} p_0 m_{13} + \frac{1}{16} p_0 m_{11}^3 - \\
& - \left. \left. \frac{1}{8} p_0 s_{31} - \frac{1}{8} p_{20} - \frac{1}{4} p_0 m_{11} m_{22} \right) Q^3 \right] \cos(w_1^* + w_2^*) + \\
& + \left[\left(\frac{1}{8} p_{11} + \frac{1}{2} p_0 m_{11} + \frac{1}{8} p_0 \right) Q + \frac{1}{2} p_0 m_{12} Q^2 + \right. \\
& + \left(-\frac{3}{128} p_{11} + \frac{1}{32} p_{11} s_{22} - \frac{1}{16} m_{11} p_0 s_{22} - \frac{1}{64} p_0 - \frac{1}{16} m_{11} p_{22} + \right. \\
& + \frac{1}{16} p_{11} m_{22} - \frac{1}{16} p_0 s_{22} - \frac{1}{32} p_{22} - \frac{1}{64} m_{11} p_{11} - \\
& + \frac{3}{64} p_0 m_{11}^2 - \frac{9}{64} p_0 m_{11} - \frac{1}{64} p_{11} m_{11}^2 - \frac{1}{16} p_0 m_{22} + \\
& + \frac{1}{2} m_{11} p_{20} + \frac{1}{8} p_{31} + \frac{1}{2} p_0 m_{13} - \frac{1}{16} p_0 m_{11}^3 + \\
& + \left. \left. \frac{1}{8} p_0 s_{31} + \frac{1}{8} p_{20} - \frac{1}{4} p_0 m_{11} m_{22} \right) Q^3 \right] \cos(w_1^* - w_2^*) + \\
& + \left[\left(-\frac{1}{32} p_{11} - \frac{1}{16} m_{11} p_{11} - \frac{1}{2} p_0 m_{22} + \frac{1}{32} p_0 + \frac{1}{8} p_{22} - \right. \right. \\
& + \left. \left. \frac{1}{8} p_0 s_{22} + \frac{1}{16} p_0 m_{11} + \frac{1}{8} p_0 m_{11}^2 \right) Q^2 + \right. \\
& + \left. \left(\frac{1}{4} m_{11} p_0 m_{12} + \frac{1}{16} p_0 m_{12} - \frac{1}{16} p_{11} m_{12} - \frac{1}{2} p_0 m_{23} \right) Q^3 \right] \cos(2w_1^* + w_2^*) \\
& + \left[\left(\frac{1}{32} p_{11} + \frac{1}{16} m_{11} p_{11} + \frac{1}{2} p_0 m_{22} + \frac{1}{32} p_0 + \right. \right. \\
& + \left. \left. \frac{1}{8} p_{22} + \frac{1}{8} p_0 s_{22} + \frac{1}{16} p_0 m_{11} + \frac{1}{8} p_0 m_{11}^2 \right) Q^2 + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{1}{4} m_{11} p_0 m_{12} + \frac{1}{16} p_0 m_{12} + \frac{1}{16} p_{11} m_{12} + \frac{1}{2} p_0 m_{23} \right) Q^3 \Big] \cos(2w_1^* - w_2^*) + \\
& + \left[\left(\frac{1}{4} p_0 m_{11} m_{22} + \frac{1}{16} m_{11} p_0 s_{22} - \frac{1}{8} p_0 s_{33} - \frac{1}{32} p_{22} - \right. \right. \\
& - \frac{1}{192} p_0 - \frac{1}{32} p_{11} s_{22} - \frac{1}{16} p_{11} m_{22} - \frac{1}{16} m_{11} p_{22} - \\
& - \frac{1}{64} p_0 m_{11}^2 - \frac{1}{48} p_0 m_{11}^3 - \frac{1}{64} p_0 m_{11} + \frac{1}{16} p_0 m_{22} + \\
& + \frac{1}{8} p_{33} + \frac{1}{16} p_0 s_{22} + \frac{1}{128} p_{11} + \frac{1}{64} m_{11} p_{11} + \\
& + \left. \left. \frac{1}{64} p_{11} m_{11}^2 - \frac{1}{2} p_0 m_{33} \right) Q^3 \right] \cos(3w_1^* + w_2^*) + \\
& + \left[\left(\frac{1}{4} p_0 m_{11} m_{22} + \frac{1}{16} m_{11} p_0 s_{22} + \frac{1}{8} p_0 s_{33} + \frac{1}{32} p_{22} + \right. \right. \\
& + \frac{1}{192} p_0 + \frac{1}{32} p_{11} s_{22} + \frac{1}{16} p_{11} m_{22} + \frac{1}{16} m_{11} p_{22} + \\
& + \frac{1}{64} p_0 m_{11}^2 + \frac{1}{48} p_0 m_{11}^3 + \frac{1}{64} p_0 m_{11} + \frac{1}{16} p_0 m_{22} + \\
& + \frac{1}{8} p_{33} + \frac{1}{16} p_0 s_{22} + \frac{1}{128} p_{11} + \frac{1}{64} m_{11} p_{11} + \\
& + \left. \left. \frac{1}{64} p_{11} m_{11}^2 + \frac{1}{2} p_0 m_{33} \right) Q^3 \right] \cos(3w_1^* - w_2^*)
\end{aligned}$$

Uma vez que temos os desenvolvimentos de Fourier destes termos podemos calcular o desenvolvimento de Fourier para a função perturbadora, cujos coeficientes são $(\Delta_1 \mathcal{R})_{lm}$. Por causa do tamanho dos coeficientes, as expressões foram colocadas no anexo C.

7.2.9 A Média

Consideremos agora a transformação canônica $(w^*, \Lambda^*) \rightarrow (w^{**}, \Lambda^{**})$ gerada pelo gerador de Lie

$$W^{(2)}(w^{**}, \Lambda^{**}) = W_2^{(2)} + W_3^{(2)} + \dots \quad (159)$$

onde os subíndices estão relacionados com o grau de homogeneidade em $\varepsilon^{2/3}$.

As equações de perturbação são

$$\begin{aligned}
F^{**} &= F^*(\Lambda^{**}) \\
\Delta_1 \mathcal{R}^{**} &= \Delta_1 \mathcal{R}(w^{**}, \Lambda^{**}) + \{F^{**}, W_2^{(2)}\}_1
\end{aligned} \quad (160)$$

Como a ação Λ_1^{**} possui uma ordem $\mathcal{O}(\varepsilon^{2/3})$, na aplicação da teoria é necessário levar em conta o fato de que o colchete de Poisson contém duas partes de diferentes ordens (seção 2).

Para resolver a segunda das equações (160), adotamos

$$\Delta_1 \mathcal{R}^{**} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Delta_1 \mathcal{R}^*(w^{**}, \Lambda^{**}) dw_1^{**}$$

e obtemos o gerador de Lie ressonante

$$W_2^{(2)} = \left(\frac{\partial F_2^{**}}{\partial \Lambda_1^{**}} \right)^{-1} \int [\Delta_1 \mathcal{R}^{**} - \Delta_1 \mathcal{R}^*(w^{**}, \Lambda^{**})] dw_1^{**}$$

Para obter $W_2^{(2)}$ consideramos

$$W_2^{(2)} = \sum_l \sum_s W_{ls}^{(2)} \sin(lw_1^{**} + sw_2^{**}).$$

e reemplazando nas equações de perturbação, obtemos:

$$W_2^{(2)} = \left(\frac{\partial F_2^{**}}{\partial \Lambda_1^{**}} \right)^{-1} \sum_{l=1}^4 \sum_{s=-1}^1 \frac{[\Delta_1 \mathcal{R}]_{ls}}{l} \sin(lw_1^{**} + sw_2^{**}).$$

onde $[\Delta_1 \mathcal{R}]_{ls}$ são os coeficientes dos termos periódicos de $\Delta_1 \mathcal{R}$.

Até esta ordem, a transformação canônica que relaciona os elementos semi-médios com os elementos médios vem dada por

$$\begin{aligned} w^* &= w^{**} + \{w^{**}, W_2^{(2)}\}_1 \\ \Lambda^* &= \Lambda^{**} + \{\Lambda^{**}, W_2^{(2)}\}_1 \end{aligned} \quad (161)$$

O Hamiltoniano resultante para os *elementos médios* é:

$$H^{**} = F(\Lambda^{**}) + \sum_{j=6}^8 g_j \Lambda_{j-1}^{**} - \varepsilon \Delta(\mathcal{R}^{**})_{00} - \varepsilon \Delta_1 \mathcal{R}^{**}(w_2^{**}, \Lambda^{**}) \quad (162)$$

o último termo indica que após da média dependem do ângulo w_2^{**} .

7.2.10 Terceira Média: Os Elementos Próprios

Usando novamente as séries de Lie até primeira ordem no pequeno parâmetro $\varepsilon^{2/3}$ para construir a transformação canônica $(w^{**}, \Lambda^{**}) \rightarrow (w^{***}, \Lambda^{***})$ gerada pelo gerador de Lie $W^{(3)}(w^{***}, \Lambda^{***})$. as equações de perturbação são

$$H^{***} = H^{**}(w^{***}, \Lambda^{***}) + \{F^{***}, W^{(3)}\} \quad (163)$$

Para resolver esta última equação, adotamos novamente a média ³

$$H^{***} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H^{**}(w^{***}, \Lambda^{***}) dw_2^{***}$$

A maneira de obter o gerador de Lie é similar a forma da seção anterior. Por tanto com esta aplicação obtivemos as quase-integrais Λ^{***} , que chamamos *Elementos Próprios Dinâmicos*

Λ^{***} está relacionada com Λ^{**} por

$$\Lambda^{***} = \Lambda^{**} + \frac{\partial W_3^{(3)}(w^{**}, \Lambda^{**})}{\partial w^{**}} \quad (164)$$

e na transformação nos ângulos é similar.

Uma vez que temos elementos próprios dinâmicos podemos definir, em forma análoga os chamados *elementos próprios elípticos equivalentes* a^{***} e e^{***} como fora enunciado na seção anterior (Miloni et al. 2005).

³Neste caso consideramos os efeitos até primeira ordem em $\varepsilon^{1/3}$. Se precisamos fazer uma teoria até ordem maior, devemos levar em conta os termos que associados aos ângulos w_4, w_5, w_6, w_7 e w_8 .

8 Conclusão

Nesta tese deixamos formulado uma teoria que permite calcular os elementos próprios para asteróides ressonantes. Embora os desenvolvimentos tenham sido escritos para a ressonância 3:2, em geral esta abordagem pode ser usada para qualquer tipo de ressonância de primeira ordem.

Na aplicação da teoria de séries de Lie para sistemas ressonantes, houve dificuldades para a execução de cada passo no esquema formulado para a construção dos elementos próprios. Estas dificuldades em alguns casos foram algébricas, pelo tamanho das equações. Mas os principais problemas estiveram ligados ao próprio desenvolvimento da teoria.

A incorporação dos termos da solução secular de Lagrange-Laplace na função perturbadora nos obrigou a achar desenvolvimentos para que a expressão final contivesse todas as longitudes médias e argumentos do periélio dos planetas maiores, a fim de trabalhar com a excentricidade própria de Júpiter como constante.

A construção do modelo integrável, em vez de seguir o caminho clássico de escolha do modelo do pêndulo ou o Hamiltoniano de Andoyer com um harmônico, foi feita estudando a grandeza numérica dos coeficientes da função perturbadora. Esta maneira de escolher permite duas coisas:

- i)* Aplicar uma teoria ressonante sem perder a topologia da ressonância.
- ii)* Manter no Hamiltoniano ressonante os termos da função perturbadora da mesma ordem em termos absolutos.

Esta escolha do Hamiltoniano fez com que o kernel de Hori não necessariamente seja de aqueles com solução analítica conhecida. Mais ainda, este critério nos obriga a procurar as soluções propondo desenvolvimentos em série para todas as funções envolvidas e para os parâmetros relacionados. Neste trabalho procuramos as soluções por construção de soluções periódicas numa vizinhança do ponto de libração.

O estudo da periodicidade da função Ξ_2 que define a transformação de Henrard-Lemaître (seção 7.2.9), propriedade sem a qual não poderíamos continuar com as transformações, foi mostrada por cálculo direto em comparação com a expressão achada para a variável ação.

A limitação mais importante que possui esta teoria é o fato que apenas foi analisado o problema no plano: Isto permite só obter os elementos Keplerianos equivalentes semieixo e excentricidade.

Para poder ter uma comparação com outras teorias de elementos próprios, é preciso construir uma teoria no espaço, a fim de poder construir um con-

junto completo de elementos próprios, a , e e a inclinação I .

Referências

- [1] Beaugé, C. (1996) “On a global expansion of the disturbing function in the planar elliptic three-body problem”. *Cel. Mech. & Dynam. Astron.* **64**, 313-349.
- [2] Beaugé, C. and Roig, F. (2001) “A Semi-analytical Model for the Motion of the Trojan Asteroids: Proper Elements and Families”. *Icarus* **153**, 343-415.
- [3] Beaugé, C. and Michtchenko, T.A. (2003) “Modeling the high-eccentricity planetary three-body problem. Application to the GJ876 planetary system”. *Month. Not. Roy. Astron. Soc.* **341**, 760-770.
- [4] Brouwer, D. (1951) *Secular variations of the orbital elements of minor planets. Astron. J.* **56**, 9-32.
- [5] Brouwer, D. and Clemence, G.M. (1961). *Methods of Celestial Mechanics*. Academic Press Inc., New York.
- [6] Dieudonné, J. (1971). “Cálculo Infinitesimal”. Ediciones Omega.
- [7] Ferraz-Mello, S. (1985a). “Resonances in regular variables I: Morphogenetic Analysis of the orbits in the case of a first-order resonance”. *Cel. Mech & Dyn. Astron.* **35** pp. 209-220.
- [8] Ferraz-Mello, S. (1985b). “Resonances in regular variables part two: Formal Solutions for Central and Non Central first order Resonance”. *Cel. Mech & Dyn. Astron.* **35** pp. 221-234.
- [9] Ferraz-Mello, S. (1987). “Averaging the asteroidal problem near a first order resonance”. *Astronomical Journal* **94** pp. 208-212.
- [10] Ferraz-Mello, S. (1990). “Averaging Hamiltonians Systems”. in *Modern Methods in Celestial Mechanics*, C. Froeschlé & D. Benest (Eds.), Ed. Frontières, Gif-sur-Yvette, pp. 151-212.
- [11] Ferraz-Mello, S., Tsuchida, M. and Klafke, J.C. (1993). “On symmetrical planetary corotations”. *Cel. Mech. & Dynam. Astron.* **55**, 25-45.

- [12] Ferraz-Mello, S. (1994). “The convergence domain of the Laplacian expansion of the disturbing function”. *Cel. Mech. & Dynam. Astron.* **58**, 37-52.
- [13] Ferraz-Mello, S. (1997). “On Hamiltonian Averaging Theories and Resonance”. *Cel. Mech. & Dynam. Astron.* **66**, 39-50.
- [14] Ferraz-Mello, S. (2002). “Ideal Resonance Problem: The Post-Post-Pendulum Approximation”. *Cel. Mech. & Dynam. Astron.* **83**, 275-289.
- [15] Ferraz-Mello, S. (2007). “Canonical Perturbation Theories. Degenerate Systems and Resonance”. Astrophysics and Space Science Library vol. 345. Springer, New York.
- [16] Garfinkel, B. ”On resonance in Celestial Mechanics (A survey)”, *Cel. Mech. & Dyn. Astron.* **28**, 275.
- [17] Goursat, E. (1912). “Cours d’analyse mathématique” Vol. II. Gauthier-Villars.
- [18] Henrard, J. and Lemaître, A. (1986). “A perturbation method for problems with two critical arguments”. *Celest. Mech.* **39**, 213-238.
- [19] Hirayama, K. (1918). “Groups of asteroids probably of common origin” *Astronomical Journal* **31**, 185-188.
- [20] Hirayama, K. (1923). “Families of asteroids” *Annales de l’Observatoire astronomique de Tokyo* Append. 11, pp. 55-93.
- [21] Kaula, W.M. (1962). “Development of the lunar and solar disturbing functions for a close satellite”. *Astron. J.*, **67**, 300-303.
- [22] Knezević, Z and Milani, A. (2000). “ Synthetic Proper Elements for Outer Main Belt Asteroids” *Cel. Mech. & Dynam. Astron.* **78**, 17-46.
- [23] Lemaître, A. and Morbidelli, A. (1994). “Proper elements for highly inclined asteroidal orbits” *Cel. Mech. & Dynam. Astron.* **60**, 25-56.
- [24] Milani, A. and Knezević, Z. (1990). “Secular perturbation theory and computation of asteroid proper elements” *Cel. Mech. & Dynam. Astron.* **49**, 347-411.

- [25] Milani, A. and Knezević, Z. (1992). “Asteroid proper elements and secular resonances” *Icarus* **98**, 211-232.
- [26] Milani, A. and Knezević, Z. (1994). “ Asteroid proper elements and the dynamical structure of the asteroid main belt” *Icarus* **107**, 219-254.
- [27] Miloni, O., Ferraz-Mello, S. and Beaugé, C. (2005). “ Analytical Proper Elements for the Hilda Asteroids I: Construction of a Formal Solution” *Cel. Mech. & Dynam. Astron.* **92**, 89-111.
- [28] Miloni, O. and Ferraz-Mello, S. “ Analytical Proper Elements for the Hilda Asteroids II: A planar theory including the secular perturbations of Jupiter’s orbit” *Cel. Mech. & Dynam. Astron.* (para ser submetido).
- [29] Poincaré, H. (1892). “Les Methodes Nouvelles de la Mécanique Céleste Vol. II”. Gauthier-Villars et fils, Paris.
- [30] Schubart, J. (1968). “ Long-Period Effects in the Motion of Hilda-Type Planets” *Astron. J.* **73**,99-103.
- [31] Schubart, J. (1982a). “ Three characteristic parameters of orbits of Hilda-type asteroids” *Astron. Astroph.* **114**,200-204.
- [32] Schubart, J. (1982b). “ Numerical determination of proper inclinations of Hilda-type asteroids” *Cel. Mech. & Dynam. Astron.* **28**,189-194.
- [33] Sérsic, J. L. (1969) “*Aplicaciones de un cierto tipo de transformaciones canónicas a la Mecánica Celeste*”. Série Astronómica Observatorio Astronómico de La Plata, Nro. 35 (Publicação da tese de doutoramento, Universidad Nacional de La Plata, 1956).
- [34] Sessin, W. (1981) “*Estudo de um sistema de dois planetas com períodos comensuráveis na razão 2:1*. Tese de Doutorado (Universidade de São Paulo).
- [35] Sessin, W. and Ferraz-Mello, S. (1984) “Motion of two planets with periods commensurable in the ratio 2:1. Solutions of the Hori auxiliary system”. *Celest. Mech.* **32**, 307-332.
- [36] Tisserand, F. (1889). “*Traité de Mécanique Céleste*”, vol. I, Gauthier-Villars, Paris, chap. XV.

- [37] Valiron, G. (1950). “Course D’analyse Mathématique, Vol II, Sec. Ed.
- [38] Williams, J. G. (1969). “Secular Perturbations in the Solar System”,
Ph.D. Thesis University of California, Los Angeles **60**,25-56.
- [39] Wintner, A. (1941). “*The Analytical Foundations of Celestial Mechanics*”, Univ. Press, Princeton.

A Os Coeficientes D_m^k e E_m^k

$$\begin{aligned}
 e_J^2 &= e_J^{(p)2} + 2 e_J^{(p)} A_6 \cos(\theta_4 - \theta_5) + 2 e_J^{(p)} A_7 \cos(\theta_4 - \theta_6) + A_6^2 \\
 &+ 2 e_J^{(p)} A_8 \cos(\theta_4 - \theta_7) + 2 A_6 A_7 \cos(\theta_5 - \theta_6) + 2 A_6 A_8 \cos(\theta_5 - \theta_7) + \\
 &+ A_7^2 + 2 A_7 A_8 \cos(\theta_6 - \theta_7) + A_8^2 \tag{165}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 e_J^4 &= 2 e_J^{(p)2} A_6^2 \cos(2\theta_4 - 2\theta_5) + 2 e_J^{(p)2} A_8^2 \cos(2\theta_4 - 2\theta_7) + \\
 &+ 2 A_7^2 A_8^2 \cos(2\theta_6 - 2\theta_7) + 4 e_J^{(p)2} A_6^2 + 4 e_J^{(p)2} A_7^2 + 4 e_J^{(p)2} A_8^2 + \\
 &+ 4 A_6^2 A_7^2 + 4 A_6^2 A_8^2 + 4 A_7^2 A_8^2 + 8 e_J^{(p)2} A_6 A_7 \cos(\theta_5 - \theta_6) + \\
 &+ 8 e_J^{(p)2} A_6 A_8 \cos(\theta_5 - \theta_7) + 8 e_J^{(p)2} A_7 A_8 \cos(\theta_6 - \theta_7) + 8 e_J^{(p)} A_6 \cos(\theta_4 - \theta_5) A_7^2 + \\
 &+ 8 e_J^{(p)} A_6 \cos(\theta_4 - \theta_5) A_8^2 + 8 e_J^{(p)} A_7 \cos(\theta_4 - \theta_6) A_6^2 + 8 e_J^{(p)} A_7 \cos(\theta_4 - \theta_6) A_8^2 + \\
 &+ 8 A_6^2 e_J^{(p)} A_8 \cos(\theta_4 - \theta_7) + 8 A_6^2 A_7 A_8 \cos(\theta_6 - \theta_7) + 8 e_J^{(p)} A_8 \cos(\theta_4 - \theta_7) A_7^2 + \\
 &+ 8 A_6 A_7 \cos(\theta_5 - \theta_6) A_8^2 + 8 A_6 A_8 \cos(\theta_5 - \theta_7) A_7^2 + e_J^{(p)4} + A_6^4 + A_7^4 + A_8^4 + \\
 &+ 4 e_J^{(p)3} A_6 \cos(\theta_4 - \theta_5) + 4 e_J^{(p)3} A_7 \cos(\theta_4 - \theta_6) + 4 e_J^{(p)3} A_8 \cos(\theta_4 - \theta_7) + \\
 &+ 4 e_J^{(p)} A_6^3 \cos(\theta_4 - \theta_5) + 4 e_J^{(p)} A_7^3 \cos(\theta_4 - \theta_6) + 4 A_6^3 A_7 \cos(\theta_5 - \theta_6) + \\
 &+ 4 A_6^3 A_8 \cos(\theta_5 - \theta_7) + 4 e_J^{(p)} A_8^3 \cos(\theta_4 - \theta_7) + 4 A_6 A_7^3 \cos(\theta_5 - \theta_6) + \\
 &+ 4 A_6 A_8^3 \cos(\theta_5 - \theta_7) + 4 A_7^3 A_8 \cos(\theta_6 - \theta_7) + 4 A_7 A_8^3 \cos(\theta_6 - \theta_7) + \\
 &+ 4 e_J^{(p)2} A_6 A_7 \cos(2\theta_4 - \theta_5 - \theta_6) + 4 e_J^{(p)2} A_6 A_8 \cos(2\theta_4 - \theta_5 - \theta_7) + \\
 &+ 4 e_J^{(p)} A_6^2 A_7 \cos(\theta_4 - 2\theta_5 + \theta_6) + 4 e_J^{(p)} A_6^2 A_8 \cos(\theta_4 - 2\theta_5 + \theta_7) + \\
 &+ 8 e_J^{(p)} A_6 A_7 A_8 \cos(\theta_4 - \theta_5 - \theta_6 + \theta_7) + 8 e_J^{(p)} A_6 A_7 A_8 \cos(\theta_4 - \theta_5 + \theta_6 - \theta_7) + \\
 &+ 2 e_J^{(p)2} A_7^2 \cos(2\theta_4 - 2\theta_6) + 2 A_6^2 A_7^2 \cos(2\theta_5 - 2\theta_6) + \\
 &+ A_6^2 A_8^2 \cos(2\theta_5 - 2\theta_7) + 4 e_J^{(p)2} A_7 A_8 \cos(2\theta_4 - \theta_6 - \theta_7) + \\
 &+ 4 e_J^{(p)} A_7^2 A_6 \cos(\theta_4 - 2\theta_6 + \theta_5) + 4 e_J^{(p)} A_7^2 A_8 \cos(\theta_4 - 2\theta_6 + \theta_7) + \\
 &+ 4 e_J^{(p)} A_8^2 A_6 \cos(\theta_4 - 2\theta_7 + \theta_5) + 4 e_J^{(p)} A_8^2 A_7 \cos(\theta_4 - 2\theta_7 + \theta_6) + \\
 &+ 4 A_6^2 A_7 A_8 \cos(2\theta_5 - \theta_6 - \theta_7) + A_6 A_7^2 A_8 \cos(\theta_5 - 2\theta_6 + \theta_7) + \\
 &+ 4 A_6 A_8^2 A_7 \cos(\theta_5 - 2\theta_7 + \theta_6) + 8 e_J^{(p)} A_6 A_7 A_8 \cos(\theta_4 - \theta_6 + \theta_5 - \theta_7). \tag{166}
 \end{aligned}$$

Com as primeiras potências da excentricidade, podemos calcular os primeiros D_m^m e E_m^m .

Estes são :

$$\begin{aligned}
D_2^2 &= A_6^2 \cos(2\theta_2 + 2\theta_4 - 2\theta_5) + e_J^{(p)2} \cos(2\theta_2) + A_8^2 \cos(2\theta_2 + 2\theta_4 - 2\theta_7) + \\
&+ A_7^2 \cos(2\theta_2 + 2\theta_4 - 2\theta_6) + 2e_J^{(p)} A_6 \cos(2\theta_2 + \theta_4 - \theta_5) + \\
&+ 2A_6 A_8 \cos(2\theta_2 + 2\theta_4 - \theta_5 - \theta_7) + 2A_6 A_7 \cos(2\theta_2 + 2\theta_4 - \theta_5 - \theta_6) + \\
&+ 2e_J^{(p)} A_8 \cos(2\theta_2 + \theta_4 - \theta_7) + 2e_J^{(p)} A_7 \cos(2\theta_2 + \theta_4 - \theta_6) + \\
&+ 2A_7 A_8 \cos(2\theta_2 + 2\theta_4 - \theta_6 - \theta_7)
\end{aligned} \tag{167}$$

$$\begin{aligned}
E_2^2 &= 2e_J^{(p)} A_6 \sin(2\theta_2 + \theta_4 - \theta_5) + e_J^{(p)2} \sin(2\theta_2) + 2e_J^{(p)} A_8 \sin(2\theta_2 + \theta_4 - \theta_7) + \\
&+ 2e_J^{(p)} A_7 \sin(2\theta_2 + \theta_4 - \theta_6) + A_6^2 \sin(2\theta_2 + 2\theta_4 - 2\theta_5) + \\
&+ 2A_6 A_8 \sin(2\theta_2 + 2\theta_4 - \theta_5 - \theta_7) + 2A_6 A_7 \sin(2\theta_2 + 2\theta_4 - \theta_5 - \theta_6) + \\
&+ 2A_7 A_8 \sin(2\theta_2 + 2\theta_4 - \theta_6 - \theta_7) + A_7^2 \sin(2\theta_2 + 2\theta_4 - 2\theta_6) + \\
&+ A_8^2 \sin(2\theta_2 + 2\theta_4 - 2\theta_7)
\end{aligned} \tag{168}$$

$$\begin{aligned}
D_3^3 &= 3A_7^2 A_8 \cos(3\theta_2 + 3\theta_4 - 2\theta_6 - \theta_7) + 3A_8 A_6^2 \cos(3\theta_2 + 3\theta_4 - \theta_7 - 2\theta_5) + \\
&+ 3A_8 e_J^{(p)2} \cos(3\theta_2 + \theta_4 - \theta_7) + 3A_8^2 A_6 \cos(3\theta_2 + 3\theta_4 - 2\theta_7 - \theta_5) + \\
&+ 6A_8 e_J^{(p)} A_7 \cos(3\theta_2 + 2\theta_4 - \theta_7 - \theta_6) + 3A_8^2 e_J^{(p)} \cos(3\theta_2 + 2\theta_4 - 2\theta_7) + \\
&+ 3A_8^2 A_7 \cos(3\theta_2 + 3\theta_4 - 2\theta_7 - \theta_6) + 3e_J^{(p)} A_6^2 \cos(3\theta_2 + 2\theta_4 - 2\theta_5) + \\
&+ 6A_6 A_7 A_8 \cos(3\theta_2 + 3\theta_4 - \theta_5 - \theta_6 - \theta_7) + 6A_6 e_J^{(p)} A_7 \cos(3\theta_2 + 2\theta_4 - \theta_5 - \theta_6) + \\
&+ 6A_6 e_J^{(p)} A_8 \cos(3\theta_2 + 2\theta_4 - \theta_5 - \theta_7) + 3e_J^{(p)} A_7^2 \cos(3\theta_2 + 2\theta_4 - 2\theta_6) + \\
&+ 3e_J^{(p)2} A_6 \cos(3\theta_2 + \theta_4 - \theta_5) + 3e_J^{(p)2} A_7 \cos(3\theta_2 + \theta_4 - \theta_6) + \\
&+ 3A_6 A_7^2 \cos(3\theta_2 + 3\theta_4 - \theta_5 - 2\theta_6) + 3A_6^2 A_7 \cos(3\theta_2 + 3\theta_4 - 2\theta_5 - \theta_6) + \\
&+ A_6^3 \cos(3\theta_2 + 3\theta_4 - 3\theta_5) + A_7^3 \cos(3\theta_2 + 3\theta_4 - 3\theta_6) + \\
&+ A_8^3 \cos(3\theta_2 + 3\theta_4 - 3\theta_7) + e_J^{(p)3} \cos(3\theta_2)
\end{aligned} \tag{169}$$

$$\begin{aligned}
E_3^3 &= 6A_6 e_J^{(p)} A_8 \sin(3\theta_2 + 2\theta_4 - \theta_5 - \theta_7) + 6A_6 e_J^{(p)} A_7 \sin(3\theta_2 + 2\theta_4 - \theta_5 - \theta_6) + \\
&+ 6A_8 e_J^{(p)} A_7 \sin(3\theta_2 + 2\theta_4 - \theta_7 - \theta_6) + 3e_J^{(p)2} A_6 \sin(3\theta_2 + \theta_4 - \theta_5) + \\
&+ 3A_8 e_J^{(p)2} \sin(3\theta_2 + \theta_4 - \theta_7) + e_J^{(p)3} \sin(3\theta_2) + A_8^3 \sin(3\theta_2 + 3\theta_4 - 3\theta_7) + \\
&+ A_7^3 \sin(3\theta_2 + 3\theta_4 - 3\theta_6) + A_6^3 \sin(3\theta_2 + 3\theta_4 - 3\theta_5) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 6 A_6 A_7 A_8 \sin (3 \theta_2 + 3 \theta_4 - \theta_5 - \theta_6 - \theta_7) + 3 e_J^{(p)2} A_7 \sin (3 \theta_2 + \theta_4 - \theta_6) + \\
& + 3 e_J^{(p)} A_6^2 \sin (3 \theta_2 + 2 \theta_4 - 2 \theta_5) + 3 e_J^{(p)} A_7^2 \sin (3 \theta_2 + 2 \theta_4 - 2 \theta_6) + \\
& + 3 A_8^2 e_J^{(p)} \sin (3 \theta_2 + 2 \theta_4 - 2 \theta_7) + 3 A_8 A_6^2 \sin (3 \theta_2 + 3 \theta_4 - \theta_7 - 2 \theta_5) + \\
& + 3 A_6^2 A_7 \sin (3 \theta_2 + 3 \theta_4 - 2 \theta_5 - \theta_6) + 3 A_6 A_7^2 \sin (3 \theta_2 + 3 \theta_4 - \theta_5 - 2 \theta_6) + \\
& + 3 A_8^2 A_6 \sin (3 \theta_2 + 3 \theta_4 - 2 \theta_7 - \theta_5) + 3 A_7^2 A_8 \sin (3 \theta_2 + 3 \theta_4 - 2 \theta_6 - \theta_7) + \\
& + 3 A_8^2 A_7 \sin (3 \theta_2 + 3 \theta_4 - 2 \theta_7 - \theta_6) \tag{170}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_1^3 & = 2 A_6 A_7 A_8 \cos (\theta_2 + \theta_4 + \theta_5 - \theta_6 - \theta_7) + 2 e_J^{(p)} A_8 A_6 \cos (\theta_2 + \theta_5 - \theta_7) + \\
& + 2 A_6 A_7 A_8 \cos (\theta_2 + \theta_4 + \theta_7 - \theta_5 - \theta_6) + 2 e_J^{(p)} A_8 A_7 \cos (\theta_2 + \theta_6 - \theta_7) + \\
& + 2 A_7 e_J^{(p)} A_6 \cos (\theta_2 + 2 \theta_4 - \theta_5 - \theta_6) + 2 A_6^2 e_J^{(p)} \cos (\theta_2) + 2 e_J^{(p)2} A_6 \cos (\theta_2 + \theta_4 - \theta_5) + \\
& + 2 e_J^{(p)2} A_7 \cos (\theta_2 + \theta_4 - \theta_6) + 2 e_J^{(p)2} A_8 \cos (\theta_2 + \theta_4 - \theta_7) + 2 A_6^2 A_7 \cos (\theta_2 + \theta_4 - \theta_6) + \\
& + 2 A_6^2 A_8 \cos (\theta_2 + \theta_4 - \theta_7) + 2 A_7^2 e_J^{(p)} \cos (\theta_2) + 2 A_7^2 A_6 \cos (\theta_2 + \theta_4 - \theta_5) + \\
& + 2 A_7^2 A_8 \cos (\theta_2 + \theta_4 - \theta_7) + 2 A_8^2 e_J^{(p)} \cos (\theta_2) + 2 A_8^2 A_6 \cos (\theta_2 + \theta_4 - \theta_5) + \\
& + 2 A_8^2 A_7 \cos (\theta_2 + \theta_4 - \theta_6) + A_6 e_J^{(p)2} \cos (\theta_2 - \theta_4 + \theta_5) + 2 e_J^{(p)} A_8 A_6 \cos (\theta_2 + \theta_7 - \theta_5) + \\
& + 2 e_J^{(p)} A_8 A_6 \cos (\theta_2 + 2 \theta_4 - \theta_5 - \theta_7) + 2 e_J^{(p)} A_8 A_7 \cos (\theta_2 + \theta_7 - \theta_6) + \\
& + 2 e_J^{(p)} A_8 A_7 \cos (\theta_2 + 2 \theta_4 - \theta_6 - \theta_7) + 2 A_7 e_J^{(p)} A_6 \cos (\theta_2 + \theta_6 - \theta_5) + \\
& + 2 A_7 e_J^{(p)} A_6 \cos (\theta_2 + \theta_5 - \theta_6) + 2 A_6 A_7 A_8 \cos (\theta_2 + \theta_4 + \theta_6 - \theta_5 - \theta_7) + e_J^{(p)3} \cos (\theta_2) + \\
& + A_6^3 \cos (\theta_2 + \theta_4 - \theta_5) + A_7^3 \cos (\theta_2 + \theta_4 - \theta_6) + A_8^3 \cos (\theta_2 + \theta_4 - \theta_7) + \\
& + A_6^2 e_J^{(p)} \cos (\theta_2 + 2 \theta_4 - 2 \theta_5) + A_7 e_J^{(p)2} \cos (\theta_2 - \theta_4 + \theta_6) + \\
& + A_7^2 e_J^{(p)} \cos (\theta_2 + 2 \theta_4 - 2 \theta_6) + e_J^{(p)2} A_8 \cos (\theta_2 - \theta_4 + \theta_7) + \\
& + e_J^{(p)} A_8^2 \cos (\theta_2 + 2 \theta_4 - 2 \theta_7) + A_6^2 A_7 \cos (\theta_2 + \theta_4 + \theta_6 - 2 \theta_5) + \\
& + A_6 A_7^2 \cos (\theta_2 + \theta_4 + \theta_5 - 2 \theta_6) + A_6^2 A_8 \cos (\theta_2 + \theta_4 + \theta_7 - 2 \theta_5) + \\
& + A_6 A_8^2 \cos (\theta_2 + \theta_4 + \theta_5 - 2 \theta_7) + A_7^2 A_8 \cos (\theta_2 + \theta_4 + \theta_7 - 2 \theta_6) + \\
& + A_7 A_8^2 \cos (\theta_2 + \theta_4 + \theta_6 - 2 \theta_7) \tag{171}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_2^4 & = 6 A_8^2 e_J^{(p)} A_7 \cos (2 \theta_2 + \theta_4 - \theta_6) + 6 A_8^2 e_J^{(p)} A_6 \cos (2 \theta_2 + \theta_4 - \theta_5) + \\
& + 6 A_8^2 A_6 A_7 \cos (2 \theta_2 + 2 \theta_4 - \theta_5 - \theta_6) + 3 e_J^{(p)} A_6^2 A_8 \cos (2 \theta_2 + 3 \theta_4 - 2 \theta_5 - \theta_7) + \\
& + 3 e_J^{(p)} A_6 A_8^2 \cos (2 \theta_2 + \theta_4 + \theta_5 - 2 \theta_7) + 3 e_J^{(p)} A_6 A_8^2 \cos (2 \theta_2 + 3 \theta_4 - \theta_5 - 2 \theta_7) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 3 e_J^{(p)2} A_7 A_6 \cos(2\theta_2 + \theta_6 - \theta_5) + 3 e_J^{(p)} A_7^2 A_6 \cos(2\theta_2 + 3\theta_4 - 2\theta_6 - \theta_5) + \\
& + 3 e_J^{(p)2} A_8^2 \cos(2\theta_2 + 2\theta_4 - 2\theta_7) + 3 e_J^{(p)2} A_6^2 \cos(2\theta_2 + 2\theta_4 - 2\theta_5) + \\
& + 3 A_6^2 A_7^2 \cos(2\theta_2 + 2\theta_4 - 2\theta_6) + 3 A_6^3 e_J^{(p)} \cos(2\theta_2 + \theta_4 - \theta_5) + \\
& + 3 A_6^3 A_7 \cos(2\theta_2 + 2\theta_4 - \theta_5 - \theta_6) + 3 A_6^3 A_8 \cos(2\theta_2 + 2\theta_4 - \theta_5 - \theta_7) + \\
& + 3 A_6^2 A_8^2 \cos(2\theta_2 + 2\theta_4 - 2\theta_7) + 3 A_6^2 e_J^{(p)2} \cos(2\theta_2) + \\
& + 3 A_7^3 e_J^{(p)} \cos(2\theta_2 + \theta_4 - \theta_6) + 3 A_7^3 A_6 \cos(2\theta_2 + 2\theta_4 - \theta_5 - \theta_6) + \\
& + 3 A_7^3 A_8 \cos(2\theta_2 + 2\theta_4 - \theta_6 - \theta_7) + 3 A_7^2 A_8^2 \cos(2\theta_2 + 2\theta_4 - 2\theta_7) + \\
& + 3 A_7^2 A_6^2 \cos(2\theta_2 + 2\theta_4 - 2\theta_5) + 3 A_7^2 e_J^{(p)2} \cos(2\theta_2) + \\
& + 3 A_8^2 A_7^2 \cos(2\theta_2 + 2\theta_4 - 2\theta_6) + 3 A_8^3 e_J^{(p)} \cos(2\theta_2 + \theta_4 - \theta_7) + \\
& + 3 A_8^3 A_6 \cos(2\theta_2 + 2\theta_4 - \theta_5 - \theta_7) + 3 A_8^3 A_7 \cos(2\theta_2 + 2\theta_4 - \theta_6 - \theta_7) + \\
& + 3 A_8^2 A_6^2 \cos(2\theta_2 + 2\theta_4 - 2\theta_5) + 3 A_8^2 e_J^{(p)2} \cos(2\theta_2) + \\
& + 6 e_J^{(p)2} A_6 A_7 \cos(2\theta_2 + 2\theta_4 - \theta_5 - \theta_6) + e_J^{(p)4} \cos(2\theta_2) + \\
& + A_7^4 \cos(2\theta_2 + 2\theta_4 - 2\theta_6) + A_8^4 \cos(2\theta_2 + 2\theta_4 - 2\theta_7) + \\
& + A_6^4 \cos(2\theta_2 + 2\theta_4 - 2\theta_5) + 3 e_J^{(p)2} A_7^2 \cos(2\theta_2 + 2\theta_4 - 2\theta_6) + \\
& + 3 e_J^{(p)3} A_7 \cos(2\theta_2 + \theta_4 - \theta_6) + 3 e_J^{(p)3} A_6 \cos(2\theta_2 + \theta_4 - \theta_5) + \\
& + 3 e_J^{(p)3} A_8 \cos(2\theta_2 + \theta_4 - \theta_7) + 6 e_J p^2 A_6 A_8 \cos(2\theta_2 + 2\theta_4 - \theta_5 - \theta_7) + \\
& + 6 e_J^{(p)2} A_7 A_8 \cos(2\theta_2 + 2\theta_4 - \theta_6 - \theta_7) + 6 A_6^2 e_J^{(p)} A_7 \cos(2\theta_2 + \theta_4 - \theta_6) + \\
& + 6 A_6^2 e_J^{(p)} A_8 \cos(2\theta_2 + \theta_4 - \theta_7) + 6 A_6^2 A_7 A_8 \cos(2\theta_2 + 2\theta_4 - \theta_6 - \theta_7) + \\
& + 6 A_7^2 e_J^{(p)} A_6 \cos(2\theta_2 + \theta_4 - \theta_5) + 6 A_7^2 e_J^{(p)} A_8 \cos(2\theta_2 + \theta_4 - \theta_7) + \\
& + 6 A_7^2 A_6 A_8 \cos(2\theta_2 + 2\theta_4 - \theta_5 - \theta_7) + 6 e_J^{(p)} A_6 A_7 A_8 \cos(2\theta_2 + \theta_4 + \theta_5 - \theta_6 - \theta_7) + \\
& + 6 e_J^{(p)} A_6 A_7 A_8 \cos(2\theta_2 + 3\theta_4 - \theta_6 - \theta_5 - \theta_7) + A_7 A_8^3 \cos(2\theta_2 + 2\theta_4 + \theta_6 - 3\theta_7) + \\
& + 3 e_J^{(p)} A_7 A_8^2 \cos(2\theta_2 + \theta_4 + \theta_6 - 2\theta_7) + 3 e_J^{(p)} A_7 A_8^2 \cos(2\theta_2 + 3\theta_4 - \theta_6 - 2\theta_7) + \\
& + 3 e_J^{(p)} A_7 A_6^2 \cos(2\theta_2 + \theta_4 + \theta_6 - 2\theta_5) + 3 e_J^{(p)} A_7 A_6^2 \cos(2\theta_2 + 3\theta_4 - \theta_6 - 2\theta_5) + \\
& + 6 e_J^{(p)} A_6 A_7 A_8 \cos(2\theta_2 + \theta_4 + \theta_6 - \theta_5 - \theta_7) + 3 e_J^{(p)2} A_7 A_8 \cos(2\theta_2 + \theta_6 - \theta_7) + \\
& + 3 e_J^{(p)} A_7^2 A_8 \cos(2\theta_2 + 3\theta_4 - 2\theta_6 - \theta_7) + 3 A_7^2 A_8 A_6 \cos(2\theta_2 + 2\theta_4 + \theta_7 - 2\theta_6 - \theta_5) + \\
& + 3 A_7 A_8^2 A_6 \cos(2\theta_2 + 2\theta_4 + \theta_6 - \theta_5 - 2\theta_7) + 3 A_6 A_8 e_J^{(p)2} \cos(2\theta_2 + \theta_7 - \theta_5) + \\
& + 3 A_6 A_8 e_J^{(p)2} \cos(2\theta_2 + \theta_5 - \theta_7) + 3 e_J^{(p)} A_7^2 A_8 \cos(2\theta_2 + \theta_4 + \theta_7 - 2\theta_6) + \\
& + 3 e_J^{(p)} A_6^2 A_8 \cos(2\theta_2 + \theta_4 + \theta_7 - 2\theta_5) + 3 e_J^{(p)} A_7^2 A_6 \cos(2\theta_2 + \theta_4 + \theta_5 - 2\theta_6) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 3 A_7^2 A_8 A_6 \cos(2\theta_2 + 2\theta_4 + \theta_5 - 2\theta_6 - \theta_7) + 3 A_7 A_8^2 A_6 \cos(2\theta_2 + 2\theta_4 + \theta_5 - \theta_6 - 2\theta_7) + \\
& + 3 e_J^{(p)2} A_7 A_6 \cos(2\theta_2 + \theta_5 - \theta_6) + e_J^{(p)} A_6^3 \cos(2\theta_2 + 3\theta_4 - 3\theta_5) + \\
& + e_J^{(p)3} A_6 \cos(2\theta_2 - \theta_4 + \theta_5) + 3 A_7 A_8 A_6^2 \cos(2\theta_2 + 2\theta_4 + \theta_7 - \theta_6 - 2\theta_5) + \\
& + 3 A_7 A_8 A_6^2 \cos(2\theta_2 + 2\theta_4 + \theta_6 - 2\theta_5 - \theta_7) + 3 e_J^{(p)2} A_7 A_8 \cos(2\theta_2 + \theta_7 - \theta_6) + \\
& + e_J^{(p)} A_7^3 \cos(2\theta_2 + 3\theta_4 - 3\theta_6) + e_J^{(p)3} A_7 \cos(2\theta_2 - \theta_4 + \theta_6) + \\
& + e_J^{(p)} A_8^3 \cos(2\theta_2 + 3\theta_4 - 3\theta_7) + e_J^{(p)3} A_8 \cos(2\theta_2 - \theta_4 + \theta_7) + \\
& + A_6 A_7^3 \cos(2\theta_2 + 2\theta_4 + \theta_5 - 3\theta_6) + A_6^3 A_7 \cos(2\theta_2 + 2\theta_4 + \theta_6 - 3\theta_5) + \\
& + A_6 A_8^3 \cos(2\theta_2 + 2\theta_4 + \theta_5 - 3\theta_7) + A_6^3 A_8 \cos(2\theta_2 + 2\theta_4 + \theta_7 - 3\theta_5) + \\
& + A_7^3 A_8 \cos(2\theta_2 + 2\theta_4 + \theta_7 - 3\theta_6) + 6 e_J^{(p)} A_6 A_7 A_8 \cos(2\theta_2 + \theta_4 + \theta_7 - \theta_5 - \theta_6) \quad (172)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_1^3 & = 2 e_J^{(p)} A_8 A_6 \sin(\theta_2 + 2\theta_4 - \theta_5 - \theta_7) + 2 e_J^{(p)} A_8 A_6 \sin(\theta_2 + \theta_5 - \theta_7) + \\
& + 2 e_J^{(p)} A_8 A_6 \sin(\theta_2 + \theta_7 - \theta_5) + 2 e_J^{(p)} A_7 A_6 \sin(\theta_2 + 2\theta_4 - \theta_5 - \theta_6) + \\
& + 2 e_J^{(p)} A_7 A_6 \sin(\theta_2 + \theta_6 - \theta_5) + 2 e_J^{(p)} A_7 A_8 \sin(\theta_2 + 2\theta_4 - \theta_6 - \theta_7) + \\
& + 2 e_J^{(p)} A_7 A_8 \sin(\theta_2 + \theta_6 - \theta_7) + 2 A_6^2 A_8 \sin(\theta_2 + \theta_4 - \theta_7) + \\
& + 2 A_7^2 e_J^{(p)} \sin(\theta_2) + 2 A_7^2 A_6 \sin(\theta_2 + \theta_4 - \theta_5) + \\
& + 2 A_7^2 A_8 \sin(\theta_2 + \theta_4 - \theta_7) + 2 A_8^2 e_J^{(p)} \sin(\theta_2) + \\
& + 2 A_8^2 A_6 \sin(\theta_2 + \theta_4 - \theta_5) + 2 A_8^2 A_7 \sin(\theta_2 + \theta_4 - \theta_6) + \\
& + 2 A_6^2 e_J^{(p)} \sin(\theta_2) + 2 e_J^{(p)2} A_6 \sin(\theta_2 + \theta_4 - \theta_5) + \\
& + 2 e_J^{(p)2} A_7 \sin(\theta_2 + \theta_4 - \theta_6) + 2 e_J^{(p)2} A_8 \sin(\theta_2 + \theta_4 - \theta_7) + \\
& + 2 A_6^2 A_7 \sin(\theta_2 + \theta_4 - \theta_6) + e_J^{(p)} A_8^2 \sin(\theta_2 + 2\theta_4 - 2\theta_7) + \\
& + A_6^2 A_7 \sin(\theta_2 + \theta_4 + \theta_6 - 2\theta_5) + A_7^3 \sin(\theta_2 + \theta_4 - \theta_6) + \\
& + A_8^3 \sin(\theta_2 + \theta_4 - \theta_7) + 2 e_J^{(p)} A_7 A_6 \sin(\theta_2 + \theta_5 - \theta_6) + \\
& + 2 A_6 A_7 A_8 \sin(\theta_2 + \theta_4 + \theta_5 - \theta_6 - \theta_7) + 2 A_6 A_7 A_8 \sin(\theta_2 + \theta_4 + \theta_6 - \theta_5 - \theta_7) + \\
& + 2 A_6 A_7 A_8 \sin(\theta_2 + \theta_4 + \theta_7 - \theta_5 - \theta_6) + 2 e_J^{(p)} A_7 A_8 \sin(\theta_2 + \theta_7 - \theta_6) + \\
& + A_6^2 A_8 \sin(\theta_2 + \theta_4 + \theta_7 - 2\theta_5) + A_6 A_8^2 \sin(\theta_2 + \theta_4 + \theta_5 - 2\theta_7) + \\
& + A_7^2 A_8 \sin(\theta_2 + \theta_4 + \theta_7 - 2\theta_6) + A_7 A_8^2 \sin(\theta_2 + \theta_4 + \theta_6 - 2\theta_7) + \\
& + e_J^{(p)} A_6^2 \sin(\theta_2 + 2\theta_4 - 2\theta_5) + e_J^{(p)2} A_7 \sin(\theta_2 - \theta_4 + \theta_6) + \\
& + e_J^{(p)} A_7^2 \sin(\theta_2 + 2\theta_4 - 2\theta_6) + e_J^{(p)2} A_8 \sin(\theta_2 - \theta_4 + \theta_7) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + e_J^{(p)2} A_6 \sin(\theta_2 - \theta_4 + \theta_5) + A_6^3 \sin(\theta_2 + \theta_4 - \theta_5) + A_6 A_7^2 \sin(\theta_2 + \theta_4 + \theta_5 - 2\theta_6) + \\
& + e_J^{(p)3} \sin(\theta_2)
\end{aligned} \tag{173}$$

$$\begin{aligned}
E_2^4 = & 3 A_7^3 A_8 \sin(2\theta_2 + 2\theta_4 - \theta_6 - \theta_7) + 3 A_6 A_8^3 \sin(2\theta_2 + 2\theta_4 - \theta_5 - \theta_7) + \\
& + A_7^3 A_8 \sin(2\theta_2 + 2\theta_4 + \theta_7 - 3\theta_6) + 3 e_J^{(p)} A_7^3 \sin(2\theta_2 + \theta_4 - \theta_6) + \\
& + A_6^3 A_7 \sin(2\theta_2 + 2\theta_4 + \theta_6 - 3\theta_5) + 3 A_7^2 A_8^2 \sin(2\theta_2 + 2\theta_4 - 2\theta_6) + \\
& + 3 A_6^2 A_7^2 \sin(2\theta_2 + 2\theta_4 - 2\theta_6) + e_J^{(p)3} A_7 \sin(2\theta_2 - \theta_4 + \theta_6) + \\
& + A_6 A_7^3 \sin(2\theta_2 + 2\theta_4 + \theta_5 - 3\theta_6) + 3 e_J^{(p)2} A_7^2 \sin(2\theta_2 + 2\theta_4 - 2\theta_6) + \\
& + A_6^3 A_8 \sin(2\theta_2 + 2\theta_4 + \theta_7 - 3\theta_5) + 3 e_J^{(p)2} A_6^2 \sin(2\theta_2 + 2\theta_4 - 2\theta_5) + \\
& + e_J^{(p)} A_7^3 \sin(2\theta_2 + 3\theta_4 - 3\theta_6) + 3 A_7 A_8^3 \sin(2\theta_2 + 2\theta_4 - \theta_6 - \theta_7) + \\
& + 3 e_J^{(p)3} A_6 \sin(2\theta_2 + \theta_4 - \theta_5) + 3 A_6 A_7^3 \sin(2\theta_2 + 2\theta_4 - \theta_5 - \theta_6) + \\
& + 3 A_6^3 A_8 \sin(2\theta_2 + 2\theta_4 - \theta_5 - \theta_7) + 3 e_J^{(p)2} A_6^2 \sin(2\theta_2) + \\
& + 3 e_J^{(p)3} A_7 \sin(2\theta_2 + \theta_4 - \theta_6) + 3 e_J^{(p)3} A_8 \sin(2\theta_2 + \theta_4 - \theta_7) + \\
& + e_J^{(p)3} A_6 \sin(2\theta_2 - \theta_4 + \theta_5) + 3 e_J^{(p)2} A_7^2 \sin(2\theta_2) + \\
& + e_J^{(p)} A_6^3 \sin(2\theta_2 + 3\theta_4 - 3\theta_5) + 3 e_J^{(p)2} A_8^2 \sin(2\theta_2 + 2\theta_4 - 2\theta_7) + \\
& + e_J^{(p)3} A_8 \sin(2\theta_2 - \theta_4 + \theta_7) + 3 A_6^2 A_8^2 \sin(2\theta_2 + 2\theta_4 - 2\theta_7) + \\
& + e_J^{(p)} A_8^3 \sin(2\theta_2 + 3\theta_4 - 3\theta_7) + 3 A_6^3 A_7 \sin(2\theta_2 + 2\theta_4 - \theta_5 - \theta_6) + \\
& + 3 e_J^{(p)} A_8^3 \sin(2\theta_2 + \theta_4 - \theta_7) + A_7 A_8^3 \sin(2\theta_2 + 2\theta_4 + \theta_6 - 3\theta_7) + \\
& + 3 e_J^{(p)} A_6^3 \sin(2\theta_2 + \theta_4 - \theta_5) + 3 e_J^{(p)2} A_8^2 \sin(2\theta_2) + \\
& + A_6 A_8^3 \sin(2\theta_2 + 2\theta_4 + \theta_5 - 3\theta_7) + 3 A_6^2 A_7^2 \sin(2\theta_2 + 2\theta_4 - 2\theta_5) + \\
& + 3 A_7^2 A_8^2 \sin(2\theta_2 + 2\theta_4 - 2\theta_7) + 3 A_6^2 A_8^2 \sin(2\theta_2 + 2\theta_4 - 2\theta_5) + \\
& + e_J^{(p)4} \sin(2\theta_2) + A_6^4 \sin(2\theta_2 + 2\theta_4 - 2\theta_5) + \\
& + A_8^4 \sin(2\theta_2 + 2\theta_4 - 2\theta_7) + A_7^4 \sin(2\theta_2 + 2\theta_4 - 2\theta_6) + \\
& + 3 e_J^{(p)} A_7^2 A_8 \sin(2\theta_2 + 3\theta_4 - 2\theta_6 - \theta_7) + 6 e_J^{(p)} A_6 A_7 A_8 \sin(2\theta_2 + 3\theta_4 - \theta_5 - \theta_6 - \theta_7) + \\
& + 3 e_J^{(p)} A_6^2 A_8 \sin(2\theta_2 + 3\theta_4 - 2\theta_5 - \theta_7) + 3 e_J^{(p)} A_8^2 A_7 \sin(2\theta_2 + 3\theta_4 - \theta_6 - 2\theta_7) + \\
& + 3 e_J^{(p)} A_8^2 A_6 \sin(2\theta_2 + 3\theta_4 - \theta_5 - 2\theta_7) + 3 e_J^{(p)} A_7^2 A_6 \sin(2\theta_2 + 3\theta_4 - \theta_5 - 2\theta_6) + \\
& + 3 e_J^{(p)} A_6^2 A_7 \sin(2\theta_2 + 3\theta_4 - 2\theta_5 - \theta_6) + 6 e_J^{(p)2} A_6 A_7 \sin(2\theta_2 + 2\theta_4 - \theta_5 - \theta_6) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 6 e_J^{(p)^2} A_6 A_8 \sin (2 \theta_2 + 2 \theta_4 - \theta_5 - \theta_7) + 6 e_J^{(p)^2} A_7 A_8 \sin (2 \theta_2 + 2 \theta_4 - \theta_6 - \theta_7) + \\
& + 3 e_J^{(p)^2} A_6 A_7 \sin (2 \theta_2 + \theta_5 - \theta_6) + 3 A_6 A_7^2 A_8 \sin (2 \theta_2 + 2 \theta_4 + \theta_5 - 2 \theta_6 - \theta_7) + \\
& + 3 e_J^{(p)} A_7^2 A_6 \sin (2 \theta_2 + \theta_4 + \theta_5 - 2 \theta_6) + 3 A_6 A_8^2 A_7 \sin (2 \theta_2 + 2 \theta_4 + \theta_5 - \theta_6 - 2 \theta_7) + \\
& + 3 e_J^{(p)^2} A_6 A_8 \sin (2 \theta_2 + \theta_5 - \theta_7) + 3 e_J^{(p)} A_8^2 A_6 \sin (2 \theta_2 + \theta_4 + \theta_5 - 2 \theta_7) + \\
& + 6 e_J^{(p)} A_6^2 A_7 \sin (2 \theta_2 + \theta_4 - \theta_6) + 6 e_J^{(p)} A_6^2 A_8 \sin (2 \theta_2 + \theta_4 - \theta_7) + \\
& + 6 A_6^2 A_7 A_8 \sin (2 \theta_2 + 2 \theta_4 - \theta_6 - \theta_7) + 3 e_J^{(p)^2} A_6 A_7 \sin (2 \theta_2 + \theta_6 - \theta_5) + \\
& + 3 A_6^2 A_7 A_8 \sin (2 \theta_2 + 2 \theta_4 + \theta_6 - 2 \theta_5 - \theta_7) + 3 A_6 A_8^2 A_7 \sin (2 \theta_2 + 2 \theta_4 + \theta_6 - \theta_5 - 2 \theta_7) + \\
& + 3 e_J^{(p)} A_6^2 A_7 \sin (2 \theta_2 + \theta_4 + \theta_6 - 2 \theta_5) + 3 e_J^{(p)^2} A_7 A_8 \sin (2 \theta_2 + \theta_6 - \theta_7) + \\
& + 3 e_J^{(p)} A_8^2 A_7 \sin (2 \theta_2 + \theta_4 + \theta_6 - 2 \theta_7) + 6 e_J^{(p)} A_7^2 A_6 \sin (2 \theta_2 + \theta_4 - \theta_5) + \\
& + 6 e_J^{(p)} A_7^2 A_8 \sin (2 \theta_2 + \theta_4 - \theta_7) + 6 A_6 A_7^2 A_8 \sin (2 \theta_2 + 2 \theta_4 - \theta_5 - \theta_7) + \\
& + 3 e_J^{(p)^2} A_7 A_8 \sin (2 \theta_2 + \theta_7 - \theta_6) + 6 e_J^{(p)} A_6 A_7 A_8 \sin (2 \theta_2 + \theta_4 + \theta_5 - \theta_6 - \theta_7) + \\
& + 6 e_J^{(p)} A_6 A_7 A_8 \sin (2 \theta_2 + \theta_4 + \theta_6 - \theta_5 - \theta_7) + 3 e_J^{(p)} A_7^2 A_8 \sin (2 \theta_2 + \theta_4 + \theta_7 - 2 \theta_6) + \\
& + 3 e_J^{(p)^2} A_6 A_8 \sin (2 \theta_2 + \theta_7 - \theta_5) + 3 e_J^{(p)} A_6^2 A_8 \sin (2 \theta_2 + \theta_4 + \theta_7 - 2 \theta_5) + \\
& + 3 A_6 A_7^2 A_8 \sin (2 \theta_2 + 2 \theta_4 + \theta_7 - \theta_5 - 2 \theta_6) + 3 A_6^2 A_7 A_8 \sin (2 \theta_2 + 2 \theta_4 + \theta_7 - 2 \theta_5 - \theta_6) + \\
& + 6 e_J^{(p)} A_8^2 A_6 \sin (2 \theta_2 + \theta_4 - \theta_5) + 6 e_J^{(p)} A_8^2 A_7 \sin (2 \theta_2 + \theta_4 - \theta_6) + \\
& + 6 A_6 A_8^2 A_7 \sin (2 \theta_2 + 2 \theta_4 - \theta_5 - \theta_6) + 6 e_J^{(p)} A_6 A_7 A_8 \sin (2 \theta_2 + \theta_4 + \theta_7 - \theta_5 - \theta_6) \quad (174)
\end{aligned}$$

B Solução formal para o Hamiltoniano de Andoyer até a ordem $\mathcal{O}(\mathcal{Q}^6)$

Neste apêndice vamos escrever as soluções para o Hamiltoniano de Andoyer até a ordem $\mathcal{O}(\mathcal{Q}^6)$.

Os passos para obter as soluções foram explicados na seção 6. Neste apêndice vamos escrever as soluções até a ordem $\mathcal{O}(\mathcal{Q}^6)$.

Para as variáveis $p = \sqrt{2\mathcal{J}^*}$ e Θ_1^* supomos os desenvolvimentos

$$\begin{aligned} p &= \sum_{l=0}^5 p_l \mathcal{Q}^l \\ \Theta_1^* &= \sum_{l=1}^5 s_l \mathcal{Q}^l \end{aligned} \quad (175)$$

e para a frequência

$$\omega_1^* = \omega_1^{0*} + \sum_{i=1}^n o_i \mathcal{Q}^i. \quad (176)$$

Chamando $\rho = a + 3bp_0^2 + 2\mu'$, obtemos

$$\omega_1^{0*} = \frac{\sqrt{-p_0(\varepsilon' + 4\mu'p_0)\rho}}{p_0} \quad (177)$$

Ordem 1:

$$\begin{aligned} s_1 &= \sin w_1^* \\ p_1 &= \frac{p_0 \omega_1^{0*}}{\rho} \cos w_1^* \end{aligned} \quad (178)$$

Ordem 2:

$$\begin{aligned} s_2 &= \frac{(2bp_0^2 - \rho)\omega_1^{0*}}{2\rho^2} \sin 2w_1^* \\ p_2 &= \frac{1}{4\rho^2} \left[(-\varepsilon'\rho + 24bp_0^3\mu' + 6bp_0^2\varepsilon') - \right. \\ &\quad \left. - (-\varepsilon'\rho + 8bp_0^3\mu' + 2bp_0^2\varepsilon') \cos 2w_1^* \right] \\ o_1 &= 0 \end{aligned} \quad (179)$$

Ordem 3:

$$\begin{aligned}
s_3 &= \frac{1}{192p_0^2\rho^2\omega_1^{0*2}} \left[108p_0^4b^2\varepsilon'^2 + 172p_0^6b^2\mu'^2 1152p_0^3b\varepsilon'\mu'\rho + 864p_0^5b^2\varepsilon'\mu' + \right. \\
&+ 63\varepsilon'^2\rho^2 - p_0\varepsilon'\rho^3 - 2016p_0^4b\mu'^2\rho + 432p_0\varepsilon'\mu'\rho^2 - \\
&\left. - 16p_0^2\mu'\rho^3 - 162p_0^2b\varepsilon'^2\rho + 768p_0^2\mu'^2\rho^2 \right] \sin 3w_1^* \\
p_3 &= \frac{1}{64p_0\rho^3\omega_1^{0*}} \left[4(960p_0^6b^2\mu'^2 + 480p_0^5b^2\varepsilon'\mu' - 416\mu'^2\rho p_0^4b + 60p_0^4b^2\varepsilon'^2 - \right. \\
&- 176\mu'\rho p_0^3b\varepsilon' - 64\mu'^2\rho^2p_0^2 + 16\mu'p_0^2\rho^3 - 18p_0^2b\varepsilon'^2\rho - 8\mu'\rho^2p_0\varepsilon' + \\
&+ \varepsilon'\rho^3p_0\varepsilon' - \varepsilon'^2\rho^2) \cos w_1^* + (192p_0^6b^2\mu'^2 + 96p_0^5b^2\varepsilon'\mu' - 32\mu'^2\rho p_0^4b + \\
&+ 12p_0^4b^2\varepsilon'^2 - 64\mu'\rho p_0^3b\varepsilon' - 16\mu'\rho p_0^3 - 18p_0^2b\varepsilon'^2\rho + 16\mu'p_0\rho^2\varepsilon' - \\
&\left. - \varepsilon'\rho^3p_0 + 7\varepsilon'^2\rho^2) \cos 2w_1^* \right] \\
o_2 &= \frac{1}{16p_0^2\rho^2\omega_1^{0*}} \left[60p_0^4b^2\varepsilon'^2 - \rho^2\varepsilon'^2 + 960p_0^6b^2\mu'^2 - 480p_0^5b^2\varepsilon'\mu' - 96\mu'^2\rho p_0^4b - \right. \\
&\left. - 16\mu'\rho^2p_0\varepsilon' - 16\mu'p_0^2\rho^3 - 18p_0^2b\varepsilon'^2\rho - 96\mu'\rho p_0^3b\varepsilon' - \varepsilon'\rho^3p_0 \right] \quad (180)
\end{aligned}$$

Ordem 4:

$$\begin{aligned}
s_4 &= \frac{-1}{192p_0^2\rho^4\omega_1^{0*}} \left[-8160p_0^5b^2\varepsilon'\mu'\rho - 16512b^2p_0^6\mu'^2\rho - 112\mu'p_0^2\rho^4 - 7\varepsilon'p_0\rho^4 + 2136b^3p_0^6\varepsilon'^2 - \right. \\
&- 7\varepsilon'^2\rho^3 + 17088b^3p_0^7\varepsilon'\mu' + 34176b^3p_0^8\mu'^2 + 96\varepsilon'\mu'bp_0^3\rho^2 - 14b\varepsilon'p_0^3\rho^3 - \\
&\left. - 288bp_0^4\mu'^2\rho^2 - 112\varepsilon'\mu'p_0\rho^3 + 224bp_0^4\mu'\rho^3 - 1008p_0^4b^2\varepsilon'^2\rho \right] \sin 2w_1^* - \\
&- \frac{-1}{96p_0^2\rho^4\omega_1^{0*}} \left[432\varepsilon'\mu'bp_0^3\rho^2 - 2p_0^3b\varepsilon'\rho^3 + 672p_0^4b\mu'^2\rho^2 + 192p_0^7b^3\varepsilon'\mu' - 72p_0^4b^2\varepsilon'^2\rho + \right. \\
&+ 72p_0^2b\varepsilon'^2\rho^2 - 768p_0^6b^2\mu'^2\rho - 192p_0^2\mu'^2\rho^3 - 480p_0^5b^2\varepsilon'\mu'\rho + 16p_0^2\mu'\rho^4 + \\
&+ 384p_0^8b^3\mu'^2 - 128p_0\varepsilon'\mu'\rho^3 - 23\varepsilon'^2\rho^3 + 24p_0^6b^3\varepsilon'^2 - 32p_0^4b\mu'\rho^3 + p_0\varepsilon'\rho^4 \left. \right] \sin 4w_1^* \\
p_4 &= -\frac{1}{64p_0\rho^5} \left[18816p_0^8b^3\mu'^2 + 9408p_0^7b^3\varepsilon'\mu' - 6912p_0^6b^2\mu'^2\rho + 1176p_0^6b^3\varepsilon'^2 - \right. \\
&- 3808p_0^5b^2\varepsilon'\mu'\rho - 768p_0^4b\mu'^2\rho^2 + 192p_0^4b\mu'\rho^3 - 520p_0^4b^2\varepsilon'^2\rho + 16p_0^3b\varepsilon'\mu'\rho^2 + \\
&+ 12p_0^3b\varepsilon'\rho^3 - 32p_0^2\mu'\rho^4 + 34p_0^2b\varepsilon'^2\rho^2 - 16p_0\varepsilon'\mu'\rho^3 - 3p_0\varepsilon'\rho^4 - 4\varepsilon'^2\rho^3 \left. \right] - \\
&- \frac{1}{384p_0^2\rho^4\omega_1^{0*2}} \left[137088p_0^8b^3\varepsilon'\mu'^2 - 63744p_0^7b^2\mu'^3\rho - 80p_0\varepsilon'^2\mu'\rho^3 + 2856p_0^6b^3\varepsilon'^3 - \right. \\
&- 6144p_0^5b\mu'^3\rho^2 - 256p_0^2\varepsilon'\mu'^2\rho^3 + 3200p_0^5b\mu'^2\rho^3 - 1584p_0^4b^2\varepsilon'^3\rho + \\
&+ 25p_0\varepsilon'^2\rho^4 - \varepsilon'^3\rho^3 - 16656p_0^5b^2\varepsilon'^2\mu'\rho + 96p_0^2b\varepsilon'^3\rho^2 + 182784p_0^9b^3\mu'^3 -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 864p_0^4 b \varepsilon' \mu'^2 \rho^2 + 1000p_0^4 b \varepsilon' \mu' \rho^3 + 552p_0^3 b \varepsilon'^2 \mu' \rho^2 - 57216p_0^6 b^2 \varepsilon' \mu'^2 \rho + \\
& + 34272p_0^7 b^3 \varepsilon'^2 \mu' - 368p_0^2 \varepsilon' \mu' \rho^4 - 1024p_0^3 \mu'^2 \rho^4 + 50p_0^3 b \varepsilon'^2 \rho^3 \Big] \cos 2w_1^* - \\
& - \frac{1}{384p_0^2 \rho^4 \omega_1^{0*2}} \left[1536p_0^9 b^3 \mu'^3 + 24p_0^6 b^3 \varepsilon'^3 - 112p_0 \varepsilon'^2 \mu' \rho^3 - 280p_0^4 b \varepsilon' \mu' \rho^3 + \right. \\
& + 408p_0^3 b \varepsilon'^2 \mu' \rho^2 256p_0^3 \mu'^2 \rho^4 + 480p_0^4 b \varepsilon' \mu'^2 \rho^2 - 14p_0^3 b \varepsilon'^2 \rho^3 + \\
& + 7p_0 \varepsilon'^2 \rho^4 + 1152p_0^8 b^3 \varepsilon' \mu'^2 + 288p_0^7 b^3 \varepsilon'^2 \mu' - 23\varepsilon'^3 \rho^3 - 72p_0^4 b^2 \varepsilon'^3 + \\
& + 72p_0^2 b \varepsilon'^3 \rho^2 + 104p_0^2 \varepsilon' \mu' \rho^4 - 896p_0^5 b \mu'^2 \rho^3 - 128p_0^2 \varepsilon' \mu'^2 \rho^3 - \\
& \left. - 768p_0^6 b^2 \varepsilon' \mu'^2 \rho + 768p_0^7 b^2 \mu'^3 \rho - 528p_0^5 b^2 \varepsilon'^2 \mu' \rho \right] \cos 4w_1^* \\
o_3 & = 0 \tag{181}
\end{aligned}$$

Ordem 5:

$$\begin{aligned}
s_5 & = \frac{1}{4096\rho^6 p_0^2 (\varepsilon'^2 + 8\varepsilon' \mu' p_0 + 16\mu'^2 p_0^2)} \left[145408 p_0^8 \rho^3 b^2 \mu'^3 - 154624 \mu'^3 p_0^6 \rho^4 b + 213 \rho^4 \varepsilon'^4 + \right. \\
& + \varepsilon'^2 \rho^6 p_0^2 + 51408 b^4 p_0^8 \varepsilon'^4 + 47104 \mu'^3 p_0^4 \rho^5 - 52032 \rho^3 \varepsilon'^2 \mu'^2 p_0^4 b + \\
& + 1842432 \rho^2 \varepsilon'^2 b^2 p_0^6 \mu'^2 + 326016 \rho^2 \varepsilon'^3 b^2 p_0^5 \mu' - 7680 \rho^3 \varepsilon'^3 \mu' p_0^3 b + 214 \rho^5 \varepsilon'^3 p_0 - \\
& - 5916672 p_0^8 b^3 \varepsilon'^2 \rho \mu'^2 - 1028736 p_0^7 b^3 \varepsilon'^3 \rho \mu' - 15095808 \mu'^3 \rho p_0^9 b^3 \varepsilon' - 15264 p_0^4 b \varepsilon'^2 \rho^4 \mu' + \\
& - 4800 \rho^4 \varepsilon'^3 \mu' p_0 + 81792 b^2 p_0^7 \varepsilon' \mu'^2 \rho^3 - 88896 \mu'^2 \rho^4 p_0^5 b \varepsilon' - 24576 \mu'^4 p_0^6 \rho^3 b + \\
& + 4784 \rho^5 \varepsilon'^2 \mu' p_0^2 + 27904 \mu'^2 p_0^2 \rho^4 \varepsilon'^2 + 568 \varepsilon'^3 \rho^3 p_0^5 b^2 - 16 \varepsilon' \rho^6 p_0^3 \mu' - \\
& - 14413824 \mu'^4 \rho p_0^{10} b^3 + 4310016 \mu'^4 \rho^2 p_0^8 b^2 + 822528 b^4 p_0^9 \varepsilon'^3 \mu' + 4935168 b^4 p_0^{10} \varepsilon'^2 \mu'^2 + \\
& + 13160448 b^4 p_0^{11} \varepsilon' \mu'^3 - 66960 p_0^6 b^3 \varepsilon'^4 \rho - 676 p_0^3 b \varepsilon'^3 \rho^4 + 28160 \mu'^2 p_0^3 \rho^5 \varepsilon' + \\
& + 21564 \rho^2 \varepsilon'^4 b^2 p_0^4 - 252 \rho^3 \varepsilon'^4 p_0^2 b + 13632 b^2 p_0^6 \varepsilon'^2 \mu' \rho^3 + 4611072 \mu'^3 p_0^7 \rho^2 \varepsilon' b^2 - \\
& - 107520 \mu'^3 p_0^5 \rho^3 \varepsilon' b + 47104 \mu'^3 p_0^3 \rho^4 \varepsilon' + 256 p_0^4 \rho^6 \mu'^2 + 13160448 b^4 p_0^{12} \mu'^4 \Big] \sin 3w_1^* + \\
& + \frac{1}{61440\rho^6 p_0^2 (\varepsilon'^2 + 8\varepsilon' \mu' p_0 + 16\mu'^2 p_0^2)} \left[-563200 p_0^8 \rho^3 b^2 \mu'^3 + 609280 \mu'^3 p_0^6 \rho^4 b + \right. \\
& + 11375 \rho^4 \varepsilon'^4 + 3\varepsilon'^2 \rho^6 p_0^2 + 6000 b^4 p_0^8 \varepsilon'^4 - 194560 \mu'^3 p_0^4 \rho^5 - \\
& - 2558400 \rho^3 \varepsilon'^2 \mu'^2 p_0^4 b + 3705600 \rho^2 \varepsilon'^2 b^2 p_0^6 \mu'^2 + 739200 \rho^2 \varepsilon'^3 b^2 p_0^5 \mu' - 537600 \rho^3 \varepsilon'^3 \mu' p_0^3 b - \\
& - 910 \rho^5 \varepsilon'^3 p_0 - 2304000 p_0^8 b^3 \varepsilon'^2 \rho \mu'^2 - 432000 p_0^7 b^3 \varepsilon'^3 \rho \mu' - 5376000 \mu'^3 \rho p_0^9 b^3 \varepsilon' + \\
& + 62880 p_0^4 b \varepsilon'^2 \rho^4 \mu' + 139200 \rho^4 \varepsilon'^3 \mu' p_0 - 316800 b^2 p_0^7 \varepsilon' \mu'^2 \rho^3 + 360000 \mu'^2 \rho^4 p_0^5 b \varepsilon' - \\
& - 4300800 \mu'^4 p_0^6 \rho^3 b - 20400 \rho^5 \varepsilon'^2 \mu' p_0^2 + 633600 \mu'^2 p_0^2 \rho^4 \varepsilon'^2 - 2200 \varepsilon'^3 \rho^3 p_0^5 b^2 + \\
& + 144 \varepsilon' \rho^6 p_0^3 \mu' - 4608000 \mu'^4 \rho p_0^{10} b^3 + 6835200 \mu'^4 \rho^2 p_0^8 b^2 + 96000 b^4 p_0^9 \varepsilon'^3 \mu' + \\
& + 576000 b^4 p_0^{10} \varepsilon'^2 \mu'^2 + 1536000 b^4 p_0^{11} \varepsilon' \mu'^3 - 30000 p_0^6 b^3 \varepsilon'^4 \rho +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2740 p_0^3 b \varepsilon'^3 \rho^4 - 115200 \mu'^2 p_0^3 \rho^5 \varepsilon' + 54900 \rho^2 \varepsilon'^4 b^2 p_0^4 - 42100 \rho^3 \varepsilon'^4 p_0^2 b - \\
& - 52800 b^2 p_0^6 \varepsilon'^2 \mu' \rho^3 + 8217600 \mu'^3 p_0^7 \rho^2 \varepsilon' b^2 - 5401600 \mu'^3 p_0^5 \rho^3 \varepsilon' b + 1280000 \mu'^3 p_0^3 \rho^4 \varepsilon' + \\
& + 983040 p_0^4 \mu'^4 \rho^4 + 768 p_0^4 \rho^6 \mu'^2 + 1536000 b^4 p_0^{12} \mu'^4 \Big] \sin 5w_1^* \\
p_5 = & - \frac{1}{3072 p_0 (\varepsilon' + 4 \mu' p_0) \sqrt{-p_0 \rho \varepsilon' - 4 p_0^2 \rho \mu' \rho^6}} \Big[552960 p_0^8 \rho^3 b^2 \mu'^3 - \\
& - 289792 \mu'^3 p_0^6 \rho^4 b - 63 \rho^4 \varepsilon'^4 + 3 \varepsilon'^2 \rho^6 p_0^2 + 199440 b^4 p_0^8 \varepsilon'^4 - \\
& - 13312 \mu'^3 p_0^4 \rho^5 + 102912 \rho^3 \varepsilon'^2 \mu'^2 p_0^4 b + 1278336 \rho^2 \varepsilon'^2 b^2 p_0^6 \mu'^2 + 217920 \rho^2 \varepsilon'^3 b^2 p_0^5 \mu' + \\
& + 3072 \rho^3 \varepsilon^3 \mu' p_0^3 b - 12 \rho^5 \varepsilon'^3 p_0 - 12052224 p_0^8 b^3 \varepsilon'^2 \rho \mu'^2 - 1901760 p_0^7 b^3 \varepsilon'^3 \rho \mu' - \\
& - 33850368 \mu'^3 \rho p_0^9 b^3 \varepsilon' - 22480 p_0^4 b \varepsilon'^2 \rho^4 \mu' - 568 \rho^4 \varepsilon'^3 \mu' p_0 + 311040 b^2 p_0^7 \varepsilon' \mu'^2 \rho^3 - \\
& - 149696 \mu'^2 \rho^4 p_0^5 b \varepsilon' + 1148928 \mu'^4 p_0^6 \rho^3 b - 184 \rho^5 \varepsilon'^2 \mu' p_0^2 - 704 \mu'^2 p_0^2 \rho^4 \varepsilon'^2 + \\
& + 2160 \varepsilon'^3 \rho^3 p_0^5 b^2 + 384 \varepsilon' \rho^6 p_0^3 \mu' - 35561472 \mu'^4 \rho p_0^{10} b^3 + 2006016 \mu'^4 \rho^2 p_0^8 b^2 + \\
& + 3191040 b^4 p_0^9 \varepsilon'^3 \mu' + 19146240 b^4 p_0^{10} \varepsilon'^2 \mu'^2 + 51056640 b^4 p_0^{11} \varepsilon' \mu'^3 - 112176 p_0^6 b^3 \varepsilon'^4 \rho - \\
& - 792 p_0^3 b \varepsilon'^3 \rho^4 - 5312 \mu'^2 p_0^3 \rho^5 \varepsilon' + 12300 \rho^2 \varepsilon'^4 b^2 p_0^4 - 60 \rho^3 \varepsilon'^4 p_0^2 b + \\
& + 51840 b^2 p_0^6 \varepsilon'^2 \mu' \rho^3 + 2915328 \mu'^3 p_0^7 \rho^2 \varepsilon' b^2 + 645888 \mu'^3 p_0^5 \rho^3 \varepsilon' b + 17408 \mu'^3 p_0^3 \rho^4 \varepsilon' + \\
& + 49152 p_0^4 \mu'^4 \rho^4 + 768 p_0^4 \rho^6 \mu'^2 + 51056640 b^4 p_0^{12} \mu'^4 \Big] \cos w_1^* - \\
& - \frac{1}{4096 p_0 (\varepsilon' + 4 \mu' p_0) \sqrt{-p_0 \rho \varepsilon' - 4 p_0^2 \rho \mu' \rho^6}} \Big[67584 p_0^8 \rho^3 b^2 \mu'^3 - \\
& - 41984 \mu'^3 p_0^6 \rho^4 b + 43 \rho^4 \varepsilon'^4 - \varepsilon'^2 \rho^6 p_0^2 + 20016 b^4 p_0^8 \varepsilon'^4 + \\
& + 18432 \mu'^3 p_0^4 \rho^5 - 17600 \rho^3 \varepsilon'^2 \mu'^2 p_0^4 b + 363264 \rho^2 \varepsilon'^2 b^2 p_0^6 \mu'^2 + 108672 \rho^2 \varepsilon'^3 b^2 p_0^5 \mu' - \\
& - 5248 \rho^3 \varepsilon^3 \mu' p_0^3 b + 202 \rho^5 \varepsilon'^3 p_0 - 1529856 p_0^8 b^3 \varepsilon'^2 \rho \mu'^2 - 347520 p_0^7 b^3 \varepsilon'^3 \rho \mu' - \\
& - 2598912 \mu'^3 \rho p_0^9 b^3 \varepsilon' - 8672 p_0^4 b \varepsilon'^2 \rho^4 \mu' + 1024 \rho^4 \varepsilon'^3 \mu' p_0 + 38016 b^2 p_0^7 \varepsilon' \mu'^2 \rho^3 - \\
& - 36544 \mu'^2 \rho^4 p_0^5 b \varepsilon' - 24576 \mu'^4 p_0^6 \rho^3 b + 3152 \rho^5 \varepsilon'^2 \mu' p_0^2 + 4352 \mu'^2 p_0^2 \rho^4 \varepsilon'^2 + \\
& + 264 \varepsilon'^3 \rho^3 p_0^5 b^2 - 176 \varepsilon' \rho^6 p_0^3 \mu' - 1118208 \mu'^4 \rho p_0^{10} b^3 - 328704 \mu'^4 \rho^2 p_0^8 b^2 + \\
& + 320256 b^4 p_0^9 \varepsilon'^3 \mu' + 1921536 b^4 p_0^{10} \varepsilon'^2 \mu'^2 + 5124096 b^4 p_0^{11} \varepsilon' \mu'^3 - 27504 p_0^6 b^3 \varepsilon'^4 \rho - \\
& - 540 p_0^3 b \varepsilon'^3 \rho^4 + 14848 \mu'^2 p_0^3 \rho^5 \varepsilon' + 10116 \rho^2 \varepsilon'^4 b^2 p_0^4 - 516 \rho^3 \varepsilon'^4 p_0^2 b + \\
& + 6336 b^2 p_0^6 \varepsilon'^2 \mu' \rho^3 + 279552 \mu'^3 p_0^7 \rho^2 \varepsilon' b^2 - 25600 \mu'^3 p_0^5 \rho^3 \varepsilon' b + 2048 \mu'^3 p_0^3 \rho^4 \varepsilon' - \\
& - 256 p_0^4 \rho^6 \mu'^2 + 5124096 b^4 p_0^{12} \mu'^4 \Big] \cos 3w_1^* - \\
& - \frac{1}{12288 p_0 (\varepsilon' + 4 \mu' p_0) \sqrt{-p_0 \rho \varepsilon' - 4 p_0^2 \rho \mu' \rho^6}} \Big[-145408 p_0^8 \rho^3 b^2 \mu'^3 + \\
& + 84992 \mu'^3 p_0^6 \rho^4 b + 455 \rho^4 \varepsilon'^4 + 3 \varepsilon'^2 \rho^6 p_0^2 + 240 b^4 p_0^8 \varepsilon'^4 - \\
& - 18432 \mu'^3 p_0^4 \rho^5 - 35520 \rho^3 \varepsilon'^2 \mu'^2 p_0^4 b + 57600 \rho^2 \varepsilon'^2 b^2 p_0^6 \mu'^2 + 20352 \rho^2 \varepsilon'^3 b^2 p_0^5 \mu' -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 13824 \rho^3 \varepsilon'^3 \mu' p_0^3 b - 214 \rho^5 \varepsilon'^3 p_0 - 46080 p_0^8 b^3 \varepsilon'^2 \rho \mu'^2 - 13440 p_0^7 b^3 \varepsilon'^3 \rho \mu' - \\
& - 30720 \mu'^3 \rho p_0^9 b^3 \varepsilon' + 12640 p_0^4 b \varepsilon'^2 \rho^4 \mu' + 3424 \rho^4 \varepsilon'^3 \mu' p_0 - 81792 b^2 p_0^7 \varepsilon' \mu'^2 \rho^3 + \\
& + 60992 \mu'^2 \rho^4 p_0^5 b \varepsilon' - 3344 \rho^5 \varepsilon'^2 \mu' p_0^2 + 8192 \mu'^2 p_0^2 \rho^4 \varepsilon'^2 - 568 \varepsilon'^3 \rho^3 p_0^5 b^2 + \\
& + 144 \varepsilon' \rho^6 p_0^3 \mu' + 61440 \mu'^4 \rho p_0^{10} b^3 + 3072 \mu'^4 \rho^2 p_0^8 b^2 + 3840 b^4 p_0^9 \varepsilon'^3 \mu' + \\
& + 23040 b^4 p_0^{10} \varepsilon'^2 \mu'^2 + 61440 b^4 p_0^{11} \varepsilon' \mu'^3 - 1200 p_0^6 b^3 \varepsilon'^4 \rho + 676 p_0^3 b \varepsilon'^3 \rho^4 - \\
& - 14080 \mu'^2 p_0^3 \rho^5 \varepsilon' + 2196 \rho^2 \varepsilon'^4 b^2 p_0^4 - 1684 \rho^3 \varepsilon'^4 p_0^2 b - 13632 b^2 p_0^6 \varepsilon'^2 \mu' \rho^3 + \\
& + 46080 \mu'^3 p_0^7 \rho^2 \varepsilon' b^2 - 28672 \mu'^3 p_0^5 \rho^3 \varepsilon' b + 6144 \mu'^3 p_0^3 \rho^4 \varepsilon' + 768 p_0^4 \rho^6 \mu'^2 + \\
& + 61440 b^4 p_0^{12} \mu'^4 \Big] \cos 5w_1^* \tag{182}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
o_4 = & \frac{1}{1024 p_0^2 \sqrt{-p_0 \rho \varepsilon' - 4 p_0^2 \rho \mu' \rho^5 (\varepsilon' + 4 \mu' p_0)}} \Big[137216 p_0^8 \rho^3 b^2 \mu'^3 + \\
& + 1024 \mu'^3 p_0^6 \rho^4 b - 25 \rho^4 \varepsilon'^4 - \varepsilon'^2 \rho^6 p_0^2 + 52080 b^4 p_0^8 \varepsilon'^4 - \\
& - 4096 \mu'^3 p_0^4 \rho^5 + 7488 \rho^3 \varepsilon'^2 \mu'^2 p_0^4 b + 138240 \rho^2 \varepsilon'^2 b^2 p_0^6 \mu'^2 + 38208 \rho^2 \varepsilon'^3 b^2 p_0^5 \mu' - \\
& - 384 \rho^3 \varepsilon'^3 \mu' p_0^3 b - 26 \rho^5 \varepsilon'^3 p_0 - 2515968 p_0^8 b^3 \varepsilon'^2 \rho \mu'^2 - 439680 p_0^7 b^3 \varepsilon'^3 \rho \mu' - \\
& - 6383616 \mu'^3 \rho p_0^9 b^3 \varepsilon' - 1728 p_0^4 b \varepsilon'^2 \rho^4 \mu' - 480 \rho^4 \varepsilon'^3 \mu' p_0 + 77184 b^2 p_0^7 \varepsilon' \mu'^2 \rho^3 - \\
& - 4800 \mu'^2 \rho^4 p_0^5 b \varepsilon' + 49152 \mu'^4 p_0^6 \rho^3 b - 608 \rho^5 \varepsilon'^2 \mu' p_0^2 - 2304 \mu'^2 p_0^2 \rho^4 \varepsilon'^2 + \\
& + 536 \varepsilon'^3 \rho^3 p_0^5 b^2 - 128 \varepsilon' \rho^6 p_0^3 \mu' - 6057984 \mu'^4 \rho p_0^{10} b^3 - 156672 \mu'^4 \rho^2 p_0^8 b^2 + \\
& + 833280 b^4 p_0^9 \varepsilon'^3 \mu' + 4999680 b^4 p_0^{10} \varepsilon'^2 \mu'^2 + 13332480 b^4 p_0^{11} \varepsilon' \mu'^3 - 28752 p_0^6 b^3 \varepsilon'^4 \rho - \\
& - 116 p_0^3 b \varepsilon'^3 \rho^4 - 2560 \mu'^2 p_0^3 \rho^5 \varepsilon' + 3284 \rho^2 \varepsilon'^4 b^2 p_0^4 - 164 \rho^3 \varepsilon'^4 p_0^2 b + \\
& + 12864 b^2 p_0^6 \varepsilon'^2 \mu' \rho^3 + 112640 \mu'^3 p_0^7 \rho^2 \varepsilon' b^2 + 37888 \mu'^3 p_0^5 \rho^3 \varepsilon' b - 4096 \mu'^3 p_0^3 \rho^4 \varepsilon' - \\
& - 256 p_0^4 \rho^6 \mu'^2 + 13332480 b^4 p_0^{12} \mu'^4 \Big] \tag{183}
\end{aligned}$$

C Coeficientes de Fourier da Função perturbadora

$$\begin{aligned}
(\Delta_1 R)_{00} &= c_{10;1} p_0^3 + g_5 \Lambda_2 - \frac{1}{2} g_5 \beta_1^2 e_J^{(p)2} - \\
&+ e_J^{(p)2} \beta_1^2 - c_{11;1} p_0^2 e_J^{(p)} \beta_1 - c_{01;1} p_0 e_J^{(p)} \beta_1 + 2 c_{10;1} e_J^{(p)2} \beta_1^2 p_0 - \\
&+ 2 c_{01;2} p_0 e_J^{(p)3} \beta_1^3 - 2 e_J^{(p)} \beta_1 p_0^3 c_{01;2} + \left(-6 c_{01;2} p_0^2 e_J^{(p)} \beta_1 p_{20} + \right. \\
&+ \frac{17}{32} c_{11;1} p_0^2 e_J^{(p)} \beta_1 - 2 c_{11;1} p_0 e_J^{(p)} \beta_1 p_{20} - \frac{1}{32} c_{11;1} p_{11}^2 e_J^{(p)} \beta_1 - \frac{3}{16} c_{01;2} p_0 e_J^{(p)} \beta_1 p_{11}^2 + \\
&+ \frac{1}{4} c_{01;1} p_0 e_J^{(p)} \beta_1 + \frac{1}{2} c_{01;2} p_0 e_J^{(p)3} \beta_1^3 + \frac{23}{16} e_J^{(p)} \beta_1 p_0^3 c_{01;2} - \frac{1}{2} c_{10;1} e_J^{(p)2} \beta_1^2 p_0 - \\
&+ c_{01;1} e_J^{(p)} \beta_1 p_{20} - \frac{23}{32} c_{10;1} p_0^3 + \frac{3}{32} c_{10;1} p_{11}^2 p_0 + 3 c_{10;1} p_0^2 p_{20} + \\
&+ \left. 2 c_{10;1} e_J^{(p)2} \beta_1^2 p_{20} - 2 c_{01;2} e_J^{(p)3} \beta_1^3 p_{20} \right) Q^2 \\
\\
(\Delta_1 R)_{10} &= \left(-\frac{3}{2} e_J^{(p)} \beta_1 p_{11} c_{01;2} p_0^2 - \frac{1}{2} e_J^{(p)3} \beta_1^3 p_{11} c_{01;2} + \frac{1}{2} c_{10;1} e_J^{(p)2} \beta_1^2 p_{11} - \right. \\
&+ \left. \frac{1}{4} e_J^{(p)} \beta_1 p_{11} c_{01;1} + \frac{3}{4} c_{10;1} p_0^2 p_{11} - \frac{1}{2} c_{11;1} p_0 p_{11} e_J^{(p)} \beta_1 \right) Q + \\
&+ \left(\frac{3}{4} c_{10;1} p_0^2 p_{31} - \frac{1}{2} c_{11;1} p_0 e_J^{(p)} \beta_1 p_{31} - \frac{1}{2} c_{11;1} e_J^{(p)} \beta_1 p_{11} p_{20} + \frac{5}{16} c_{11;1} p_0^2 e_J^{(p)} \beta_1 s_{22} - \right. \\
&+ \frac{1}{16} c_{11;1} e_J^{(p)} \beta_1 p_{11} p_{22} - \frac{3}{128} c_{01;2} e_J^{(p)} \beta_1 p_{11}^3 - \frac{5}{16} c_{10;1} p_0^3 s_{22} + \frac{7}{32} c_{11;1} p_0 p_{11} e_J^{(p)} \beta_1 + \\
&+ \frac{3}{64} e_J^{(p)} \beta_1 p_{11} c_{01;1} + \frac{3}{32} e_J^{(p)3} \beta_1^3 p_{11} c_{01;2} - \frac{115}{256} c_{10;1} p_0^2 p_{11} - \frac{3}{32} c_{10;1} e_J^{(p)2} \beta_1^2 p_{11} + \\
&+ \frac{115}{128} e_J^{(p)} \beta_1 p_{11} c_{01;2} p_0^2 + \frac{3}{2} c_{10;1} p_0 p_{11} p_{20} - \frac{3}{2} c_{01;2} p_0^2 e_J^{(p)} \beta_1 p_{31} + \frac{1}{2} c_{10;1} e_J^{(p)2} \beta_1^2 p_{31} - \\
&- 3 c_{01;2} p_0 e_J^{(p)} \beta_1 p_{11} p_{20} - \frac{3}{8} c_{01;2} p_0 e_J^{(p)} \beta_1 p_{11} p_{22} - \frac{1}{2} c_{01;2} e_J^{(p)3} \beta_1^3 p_{31} - \frac{1}{4} c_{01;1} e_J^{(p)} \beta_1 p_{31} - \\
&- \frac{1}{4} c_{10;1} e_J^{(p)2} \beta_1^2 p_0 s_{22} + \frac{1}{8} c_{01;1} p_0 e_J^{(p)} \beta_1 s_{22} + \frac{1}{4} c_{01;2} p_0 e_J^{(p)3} \beta_1^3 s_{22} + \frac{3}{16} c_{10;1} p_{11} p_{22} p_0 + \\
&+ \left. \frac{3}{256} c_{10;1} p_{11}^3 + \frac{5}{8} e_J^{(p)} \beta_1 p_0^3 c_{01;2} s_{22} \right) Q^3 \\
\\
(\Delta_1 R)_{11} &= \left(\frac{1}{8} p_0^3 c_{11;1} + \frac{1}{8} p_0 C_{11} - \frac{1}{4} p_0 B_2 \beta_1 + \frac{1}{4} p_0 \beta_1^2 e_J^{(p)2} c_{11;1} - \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{4} \beta_1^2 e_J^{(p)2} p_0^2 c_{01;2} + \frac{1}{4} \beta_1 e_J^{(p)} p_0^2 c_{10;1} - \frac{1}{2} m_{11} p_0^3 c_{11;1} - \frac{5}{2} m_{11} \beta_1^2 e_J^{(p)2} p_0^2 c_{01;2} + \\
& + \frac{3}{2} p_0^2 m_{11} \beta_1 e_J^{(p)} c_{10;1} - \frac{1}{2} m_{11} p_0 C_{11} - \frac{1}{2} e_J^{(p)} \beta_1 m_{11} p_0 - \frac{1}{8} p_0 e_J^{(p)} \beta_1 - \\
& - m_{11} p_0 \beta_1^2 e_J^{(p)2} c_{11;1} + \\
& + \frac{1}{8} C_{11} p_{11} + \frac{1}{2} c_{10;1} e_J^{(p)3} \beta_1^3 m_{11} + \frac{1}{2} p_0^3 p_{11} c_{01;2} - \frac{1}{2} m_{11} c_{01;1} p_0^2 - \\
& + \frac{1}{2} m_{11} c_{01;1} e_J^{(p)2} \beta_1^2 + \frac{1}{4} c_{11;1} e_J^{(p)2} \beta_1^2 p_{11} + \frac{1}{8} e_J^{(p)} \beta_1 p_{11} - \frac{1}{2} m_{11} c_{01;0} + \\
& + \frac{3}{8} c_{11;1} p_0^2 p_{11} - \frac{3}{4} c_{10;1} e_J^{(p)} \beta_1 p_{11} p_0 - \frac{1}{2} m_{11} c_{01;2} e_J^{(p)4} \beta_1^4 + \frac{5}{4} e_J^{(p)2} \beta_1^2 p_{11} c_{01;2} p_0 - \\
& + \frac{1}{2} m_{11} c_{01;2} p_0^4 + \frac{1}{4} p_0 p_{11} c_{01;1} - \frac{1}{4} \beta_1 B_2 p_{11} + m_{11} p_0 B_2 \beta_1 \Big) Q + \\
& + \left(-\frac{1}{2} c_{01;2} e_J^{(p)4} \beta_1^4 m_{12} - \frac{1}{2} c_{01;2} p_0^4 m_{12} + m_{12} p_0 B_2 \beta_1 + \frac{1}{2} c_{10;1} e_J^{(p)3} \beta_1^3 m_{12} - \right. \\
& + m_{12} p_0 \beta_1^2 e_J^{(p)2} c_{11;1} - \frac{1}{2} m_{12} p_0 C_{11} - \frac{5}{2} m_{12} \beta_1^2 e_J^{(p)2} p_0^2 c_{01;2} + \frac{3}{2} m_{12} \beta_1 e_J^{(p)} p_0^2 c_{10;1} - \\
& + \frac{1}{2} c_{01;1} e_J^{(p)2} \beta_1^2 m_{12} - \frac{1}{2} c_{01;1} p_0^2 m_{12} - \frac{1}{2} m_{12} p_0^3 c_{11;1} - \frac{1}{2} c_{01;0} m_{12} - \\
& + \left. \frac{1}{2} e_J^{(p)} \beta_1 p_0 m_{12} \right) Q^2 + \left(-\frac{41}{512} p_0^3 c_{11;1} - \frac{1}{64} p_0 C_{11} + \frac{1}{32} p_0 B_2 \beta_1 - \right. \\
& + \frac{1}{32} p_0 \beta_1^2 e_J^{(p)2} c_{11;1} + \frac{13}{128} \beta_1^2 e_J^{(p)2} p_0^2 c_{01;2} - \frac{13}{128} \beta_1 e_J^{(p)} p_0^2 c_{10;1} - \frac{3}{64} m_{11}^2 p_0^3 c_{11;1} - \\
& + \frac{1}{8} e_J^{(p)} \beta_1 p_{20} + \frac{5}{512} p_0 p_{11}^2 c_{11;1} - \frac{1}{4} p_{20} B_2 \beta_1 + \frac{3}{8} p_{20} p_0^2 c_{11;1} - \\
& + \frac{1}{128} p_{11}^2 \beta_1^2 e_J^{(p)2} c_{01;2} + \frac{51}{128} m_{11} p_0^3 c_{11;1} + \frac{171}{128} m_{11} \beta_1^2 e_J^{(p)2} p_0^2 c_{01;2} + \\
& + \frac{3}{32} m_{11}^2 \beta_1^2 e_J^{(p)2} p_0^2 c_{01;2} + \frac{3}{32} m_{11}^2 p_0 \beta_1^2 e_J^{(p)2} c_{11;1} + \\
& + \frac{105}{128} p_0^2 m_{11} \beta_1 e_J^{(p)} c_{10;1} + \frac{1}{2} p_{20} \beta_1 e_J^{(p)} p_0 c_{10;1} - \frac{1}{2} p_{20} p_0 \beta_1^2 e_J^{(p)2} c_{01;2} + \\
& + \frac{9}{64} m_{11} p_0 C_{11} - \frac{3}{32} m_{11}^2 \beta_1 e_J^{(p)} p_0^2 c_{10;1} + \frac{9}{64} e_J^{(p)} \beta_1 m_{11} p_0 - \frac{3}{64} m_{11}^2 p_0 C_{11} + \\
& + \frac{3}{64} p_0 e_J^{(p)} \beta_1 m_{11}^2 + \frac{1}{128} \beta_1 e_J^{(p)} p_{11}^2 c_{10;1} + \frac{1}{64} p_0 e_J^{(p)} \beta_1 - \frac{1}{2} c_{01;2} p_0^4 m_{13} + \\
& + \frac{1}{32} C_{11} p_{11} s_{22} - \frac{1}{128} m_{11} c_{01;1} p_{11}^2 + \frac{1}{16} c_{01;2} p_0^4 m_{11}^3 - \frac{1}{2} C_{11} p_{20} m_{11} + \\
& + \left. \frac{1}{8} c_{11;1} p_0^3 s_{31} - \frac{1}{2} C_{11} p_0 m_{13} + \frac{1}{4} c_{01;1} p_0 p_{31} + \frac{1}{16} C_{1,1} p_0 m_{11}^3 + \frac{9}{32} m_{11} p_0 \beta_1^2 e_J^{(p)2} c_{11;1} - \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{3}{16} c_{01;2} p_0^4 s_{22} + \frac{3}{128} c_{01;2} p_0 p_{11}^3 + \frac{1}{32} c_{01;1} p_{11} p_{22} - \frac{1}{4} \beta_1 B_2 p_{31} - \\
& + \frac{3}{32} c_{01;1} p_0^2 s_{22} + \frac{1}{8} p_{20} C_{11} + \frac{1}{16} c_{11;1} p_0^3 m_{11}^3 + \frac{1}{8} e_J^{(p)} \beta_1 p_{31} + \\
& + \frac{1}{2} c_{01;2} p_0^3 p_{31} + \frac{1}{16} C_{11} m_{11} p_{22} + \frac{1}{64} C_{11} m_{11} p_{11} + \frac{1}{16} c_{11;1} p_0^3 m_{22} + \\
& + \frac{1}{16} C_{11} p_0 m_{22} - \frac{5}{32} c_{11;1} p_0^3 s_{22} - \frac{1}{16} C_{11} p_0 s_{22} - \frac{3}{128} C_{11} p_{11} - \\
& + \frac{51}{128} p_0^3 p_{11} c_{01;2} + \frac{33}{128} m_{11} c_{01;1} p_0^2 - \frac{3}{64} c_{11;1} e_J^{(p)2} \beta_1^2 p_{11} - \frac{3}{128} e_J^{(p)} \beta_1 p_{11} - \\
& + \frac{115}{512} c_{11;1} p_0^2 p_{11} + \frac{19}{64} c_{10;1} e_J^{(p)} \beta_1 p_{11} p_0 - \frac{31}{64} e_J^{(p)2} \beta_1^2 p_{11} c_{0,1,2} p_0 + \frac{1}{32} e_J^{(p)} \beta_1 p_{22} + \\
& + \frac{33}{64} m_{11} c_{01;2} p_0^4 - \frac{3}{32} p_0 p_{11} c_{0,1,1} + \frac{3}{64} \beta_1 B_2 p_{11} - \frac{1}{32} e_J^{(p)} \beta_1 p_{11} s_{22} - \\
& + \frac{1}{16} e_J^{(p)} \beta_1 m_{11} p_0 s_{22} - \frac{1}{4} c_{01;2} p_0^3 p_{11} m_{22} - \frac{5}{8} c_{01;2} e_J^{(p)2} \beta_1^2 p_0 p_{11} m_{22} - \frac{3}{64} m_{11} c_{01;2} p_0^2 p_{11}^2 - \\
& + \frac{1}{8} \beta_1 B_2 m_{11} p_{22} - \frac{1}{2} c_{01;2} e_J^{(p)4} \beta_1^4 m_{13} + \frac{1}{16} c_{01;0} m_{11}^3 + \frac{3}{32} c_{10;1} e_J^{(p)} \beta_1 p_{11} s_{22} p_0 - \\
& + c_{11;1} e_J^{(p)2} \beta_1^2 p_{20} m_{11} + \frac{3}{8} c_{10;1} e_J^{(p)} \beta_1 p_{11} m_{22} p_0 - \frac{1}{16} c_{01;2} p_0^3 p_{11} m_{11}^2 + \frac{1}{16} c_{11;1} p_0^3 m_{11} s_{22} - \\
& + \frac{1}{8} c_{01;1} p_0 p_{11} m_{22} + \frac{1}{2} \beta_1 B_2 p_0 m_{11} m_{22} - \frac{3}{128} c_{11;1} p_{11}^2 p_0 m_{11} + \frac{3}{8} c_{11;1} p_0^2 p_{31} + \\
& + \frac{1}{8} \beta_1 B_2 p_{11} m_{22} - \frac{1}{16} \beta_1 B_2 p_{11} s_{22} - \frac{1}{8} \beta_1 B_2 p_0 m_{11}^3 - \frac{1}{4} \beta_1 B_2 p_0 s_{31} + \\
& + \frac{3}{512} c_{11;1} p_{11}^3 - \frac{17}{32} c_{01;2} p_0^2 e_J^{(p)2} \beta_1^2 s_{22} - c_{11;1} e_J^{(p)2} \beta_1^2 p_0 m_{13} - \frac{1}{16} p_0 e_J^{(p)} \beta_1 m_{22} - \\
& + \frac{1}{8} c_{11;1} e_J^{(p)2} \beta_1^2 p_0 s_{22} - \frac{1}{16} e_J^{(p)} \beta_1 p_0 s_{22} - \frac{1}{8} c_{01;2} p_0^2 e_J^{(p)2} \beta_1^2 m_{22} - \frac{1}{64} e_J^{(p)} \beta_1 m_{11} p_{11} - \\
& + \frac{1}{8} c_{01;2} p_0^2 e_J^{(p)2} \beta_1^2 m_{11} s_{22} - \frac{3}{32} c_{01;2} e_J^{(p)2} \beta_1^2 p_0 p_{11} s_{22} + \frac{1}{16} c_{11;1} p_0^2 p_{11} s_{22} - \frac{1}{4} p_0 e_J^{(p)} \beta_1 m_{11} m_{22} - \\
& + \frac{5}{4} c_{01;2} p_0^2 e_J^{(p)2} \beta_1^2 m_{11} m_{22} + \frac{5}{8} c_{01;2} e_J^{(p)2} \beta_1^2 p_0 m_{11} p_{22} - \frac{1}{8} e_J^{(p)} \beta_1 p_0 s_{31} + \frac{1}{16} p_0 e_J^{(p)} \beta_1 m_{11}^3 - \\
& + \frac{1}{2} p_0 e_J^{(p)} \beta_1 m_{13} - \frac{1}{2} e_J^{(p)} \beta_1 m_{11} p_{20} + \frac{3}{32} c_{11;1} p_0 p_{11} p_{22} + \frac{3}{32} c_{10;1} p_{11} e_J^{(p)} \beta_1 m_{11}^2 p_0 + \\
& + \frac{5}{32} c_{01;2} e_J^{(p)2} \beta_1^2 p_{11} p_{22} + \frac{1}{8} c_{11;1} e_J^{(p)2} \beta_1^2 p_0 m_{11}^3 - \frac{1}{2} c_{11;1} p_0 e_J^{(p)2} \beta_1^2 m_{11} m_{22} - \frac{1}{4} c_{11;1} p_0^3 m_{11} m_{22} + \\
& + \frac{3}{4} c_{11;1} p_0 p_{20} p_{11} - \frac{1}{4} c_{0,1,2} e_J^{(p)4} \beta_1^4 m_{11} m_{22} - \frac{1}{32} c_{01;1} p_0 p_{11} m_{11}^2 - \frac{3}{4} c_{10;1} e_J^{(p)} \beta_1 p_{11} p_{20} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{16} c_{01;1} p_0^2 m_{11}^3 - \frac{5}{128} m_{11} c_{01;2} e_J^{(p)2} \beta_1^2 p_{11}^2 + \frac{1}{4} c_{11;1} e_J^{(p)2} \beta_1^2 p_0 s_{31} + \frac{1}{32} \beta_1 B_2 p_{11} m_{11}^2 - \\
& + 2 m_{11} c_{01;2} p_0^3 p_{20} - m_{11} c_{01;1} p_0 p_{20} - \frac{3}{8} c_{10;1} e_J^{(p)} \beta_1 m_{11} p_{22} p_0 - \frac{1}{4} C_{11} p_0 m_{11} m_{22} - \\
& + 5 c_{01;2} e_J^{(p)2} \beta_1^2 p_0 m_{11} p_{20} - \frac{1}{2} c_{11;1} p_0^3 m_{13} + \frac{1}{8} c_{11;1} e_J^{(p)2} \beta_1^2 m_{11} p_0 s_{22} + \\
& + \frac{3}{4} c_{10;1} p_0^2 e_J^{(p)} \beta_1 m_{11} m_{22} - \frac{3}{64} m_{11} c_{01;2} p_0 e_J^{(p)2} \beta_1^2 p_{11} - \frac{1}{64} p_{11} e_J^{(p)} \beta_1 m_{11}^2 + \\
& + \frac{1}{2} c_{10;1} e_J^{(p)3} \beta_1^3 m_{13} - \frac{5}{32} c_{01;2} p_0 e_J^{(p)2} \beta_1^2 p_{11} m_{11}^2 + - \\
& - \frac{1}{16} p_{11} e_J^{(p)} \beta_1 m_{22} + \frac{1}{16} e_J^{(p)} \beta_1 m_{11} p_{22} - \frac{1}{4} c_{01;2} p_0^4 m_{11} m_{22} + \frac{1}{8} m_{11} c_{01;1} p_0 p_{22} - \\
& - \frac{1}{64} C_{11} p_{11} m_{11}^2 - \frac{1}{2} c_{01;1} e_J^{(p)2} \beta_1^2 m_{13} - \frac{1}{2} c_{01;1} p_0^2 m_{13} + 3 c_{10;1} e_J^{(p)} \beta_1 p_0 m_{11} p_{20} + \\
& + \frac{1}{16} c_{11;1} e_J^{(p)2} \beta_1^2 p_{11} s_{22} - \frac{1}{4} c_{01;1} e_J^{(p)2} \beta_1^2 m_{11} m_{22} - \frac{1}{16} C_{11} p_{11} m_{22} + \frac{5}{4} c_{01;2} p_0 e_J^{(p)2} \beta_1^2 p_{31} - \\
& - \frac{1}{4} c_{01;0} m_{11} m_{22} + \frac{3}{16} c_{01;2} p_0^2 p_{11} p_{22} + \frac{1}{8} C_{11} p_0 s_{31} + \frac{3}{2} c_{01;2} p_0^2 p_{11} p_{20} + \frac{1}{4} c_{11;1} e_J^{(p)2} \beta_1^2 p_{31} + \\
& + \frac{1}{16} C_{11} m_{11} p_0 s_{22} + \beta_1 B_2 p_0 m_{13} + \frac{1}{4} c_{10;1} e_J^{(p)3} \beta_1^3 m_{11} m_{22} + \frac{1}{8} C_{11} p_{31} - \\
& - \frac{1}{8} \beta_1 B_2 m_{11} p_0 s_{22} + \frac{1}{8} c_{11;1} e_J^{(p)2} \beta_1^2 m_{11} p_{22} + \frac{1}{4} c_{01;1} p_{11} p_{20} - \frac{3}{64} c_{11;1} p_0^2 p_{11} m_{11}^2 + \\
& + \frac{3}{16} c_{11;1} p_0^2 m_{11} p_{22} + \frac{1}{4} m_{11} c_{01;2} p_0^3 p_{22} - \frac{1}{32} C_{11} p_{22} + \frac{1}{16} c_{01;1} e_J^{(p)2} \beta_1^2 m_{11}^3 + \\
& + \beta_1 B_2 p_{20} m_{11} - \frac{3}{4} c_{10;1} e_J^{(p)} \beta_1 p_{31} p_0 - \frac{5}{2} c_{01;2} p_0^2 e_J^{(p)2} \beta_1^2 m_{13} - \frac{1}{32} c_{11;1} e_J^{(p)2} \beta_1^2 p_{11} m_{11}^2 - \\
& - \frac{3}{16} c_{10;1} p_0^2 e_J^{(p)} \beta_1 m_{11}^3 + \frac{3}{128} c_{10;1} p_{11}^2 e_J^{(p)} \beta_1 m_{11} - \frac{1}{4} c_{01;2} p_0^2 e_J^{(p)2} \beta_1^2 s_{31} + \frac{5}{4} c_{01;2} e_J^{(p)2} \beta_1^2 p_{11} p_{20} + \\
& + \frac{1}{4} c_{10;1} p_0^2 e_J^{(p)} \beta_1 s_{31} - \frac{1}{16} c_{10;1} e_J^{(p)3} \beta_1^3 m_{11}^3 - \frac{3}{2} c_{11;1} p_0^2 p_{20} m_{11} - \frac{3}{16} c_{11;1} p_0^2 p_{11} m_{22} - \\
& + \frac{1}{4} c_{01;1} p_0^2 m_{11} m_{22} + \frac{3}{2} c_{10;1} p_0^2 e_J^{(p)} \beta_1 m_{13} + \frac{1}{8} c_{10;1} e_J^{(p)} \beta_1 m_{11} p_0^2 s_{22} + \frac{1}{32} c_{11;1} p_0^2 m_{11} p_{11} + \\
& + \frac{3}{32} c_{01;2} e_J^{(p)2} \beta_1^2 p_0 p_{22} + \frac{1}{8} c_{10;1} p_0^2 e_J^{(p)} \beta_1 m_{22} - \frac{1}{32} \beta_1 B_2 m_{11} p_{11} - \frac{1}{8} \beta_1 B_2 p_0 m_{22} + \\
& + \frac{1}{8} \beta_1 B_2 p_0 s_{22} - \frac{1}{16} c_{11;1} p_0^2 p_{22} + \frac{3}{64} c_{10;1} e_J^{(p)} \beta_1 m_{11} p_{11} p_0 + \frac{1}{16} \beta_1 B_2 p_{22} + \\
& + \frac{11}{32} c_{10;1} p_0^2 e_J^{(p)} \beta_1 s_{22} + \frac{1}{8} c_{11;1} e_J^{(p)2} \beta_1^2 p_0 m_{22} + \frac{5}{16} c_{01;2} p_0^2 e_J^{(p)2} \beta_1^2 m_{11}^3 - \frac{1}{8} c_{11;1} e_J^{(p)2} \beta_1^2 p_{11} m_{22} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{16} c_{01;2} e_J^{(p)4} \beta_1^4 m_{11}^3 - \frac{3}{32} c_{10;1} e_J^{(p)} \beta_1 p_{22} p_0 - \frac{1}{16} c_{11;1} e_J^{(p)2} \beta_1^2 p_{22} - \frac{3}{32} c_{10;1} p_{11} p_{22} e_J^{(p)} \beta_1 + \\
& + \frac{1}{32} c_{11;1} e_J^{(p)2} \beta_1^2 m_{11} p_{11} - \frac{1}{2} c_{01;0} m_{13} - \frac{9}{32} m_{11} p_0 B_2 \beta_1 + \frac{1}{4} p_{20} \beta_1^2 e_J^{(p)2} c_{11;1} + \\
& + \frac{3}{32} m_{11}^2 p_0 B_2 \beta_1 \Big) Q^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\Delta_1 R)_{12} &= \frac{1}{256} e_J^{(p)} \left(256 c_{11;1} e_J^{(p)2} \beta_1^3 m_{11} - 256 e_J^{(p)} m_{11} B_2 \beta_1^2 - 32 c_{10;1} e_J^{(p)} \beta_1^2 p_0 - \right. \\
& - 64 e_J^{(p)2} \beta_1^3 p_{11} c_{01;2} + 512 c_{11;1} p_0^2 \beta_1 m_{11} + 256 p_0 \beta_1 m_{11} c_{01;1} + 512 c_{01;2} p_0^3 \beta_1 m_{11} + \\
& + 512 c_{01;2} e_J^{(p)2} \beta_1^3 p_0 m_{11} - 128 c_{11;1} p_0 p_{11} \beta_1 + 32 c_{01;1} p_0 \beta_1 - 192 \beta_1 p_{11} c_{01;2} p_0^2 - \\
& - 32 \beta_1 p_{11} c_{01;1} + 64 \beta_1 p_0^3 c_{01;2} - 256 c_{10;1} e_J^{(p)} \beta_1^2 p_0 m_{11} - 512 \beta_1^2 B_2 m_{11} + \\
& + 32 c_{10;1} e_J^{(p)} \beta_1^2 p_{11} + 256 C_{11} \beta_1 m_{11} + 64 c_{01;2} p_0 e_J^{(p)2} \beta_1^3 + 256 e_J^{(p)} m_{11} B_2 \beta_2^2 \Big) Q + \\
& + \frac{1}{256} e_J^{(p)} \left(512 c_{01;2} e_J^{(p)2} \beta_1^3 p_0 m_{12} + 256 e_J^{(p)} B_2 \beta_2^2 m_{12} + 512 c_{01;2} p_0^3 \beta_1 m_{12} + \right. \\
& + 512 c_{11;1} p_0^2 \beta_1 m_{12} + 256 c_{01;1} \beta_1 p_0 m_{12} - 256 e_J^{(p)} B_2 \beta_1^2 m_{12} - 256 c_{10;1} e_J^{(p)} \beta_1^2 p_0 m_{12} - \\
& + 512 \beta_1^2 B_2 m_{12} + 256 C_{1,1} \beta_1 m_{12} + 256 c_{11;1} e_J^{(p)2} \beta_1^3 m_{12} \Big) Q^2 + \\
& + \frac{1}{256} e_J^{(p)} \left(256 C_{11} \beta_1 m_{13} - 8 c_{01;1} \beta_1 p_{22} - 32 c_{01;1} \beta_1 p_{31} - \right. \\
& + 128 C_{11} \beta_1 m_{11}^3 + 256 \beta_1^2 B_2 m_{11}^3 - 512 \beta_1^2 B_2 m_{13} - 3 c_{01;2} \beta_1 p_{11}^3 + \\
& + 32 c_{01;1} \beta_1 p_{20} + 8 c_{01;1} \beta_1 m_{11} p_{11} - 512 \beta_1^2 B_2 m_{11} m_{22} + 128 e_J^{(p)} B_2 \beta_1^2 m_{11}^3 - \\
& + 128 e_J^{(p)} B_2 \beta_2^2 m_{11}^3 - 256 c_{01;2} p_0^3 \beta_1 m_{11}^3 + 256 C_{11} \beta_1 m_{11} m_{22} + 32 c_{01;1} \beta_1 p_0 s_{31} + \\
& + 8 c_{01;1} \beta_1 p_{11} s_{22} - 32 c_{01;1} \beta_1 m_{11} p_{22} + 512 c_{11;1} p_0^2 \beta_1 m_{13} + 256 e_J^{(p)} B_2 \beta_2^2 m_{13} + \\
& + 256 c_{01;1} \beta_1 p_0 m_{13} - 16 c_{01;2} e_J^{(p)2} \beta_1^3 p_{22} + 32 c_{01;1} \beta_1 p_0 m_{22} + 256 c_{11;1} e_J^{(p)2} \beta_1^3 m_{13} + \\
& + 16 c_{01;1} \beta_1 p_{11} m_{11}^2 + 64 c_{01;2} p_0^3 \beta_1 s_{31} + 8 c_{10;1} e_J^{(p)} \beta_1^2 p_{22} + 80 c_{01;2} p_0^3 \beta_1 s_{22} + \\
& + 32 c_{01;1} \beta_1 p_{11} m_{22} - 192 c_{01;2} p_0^2 \beta_1 p_{31} + 16 c_{01;1} \beta_1 p_0 s_{22} - 128 c_{11;1} e_J^{(p)2} \beta_1^3 m_{11}^3 - \\
& + 64 c_{01;2} e_J^{(p)2} \beta_1^3 p_{31} + 48 c_{11;1} p_0^2 \beta_1 s_{22} - 128 c_{11;1} \beta_1 p_{11} p_{20} - 16 c_{11;1} \beta_1 p_{11} p_{22} - \\
& - 128 c_{11;1} p_0 \beta_1 p_{31} - 256 c_{11;1} p_0^2 \beta_1 m_{11}^3 - 32 c_{01;2} p_0^2 \beta_1 p_{22} + 512 c_{01;2} p_0^3 \beta_1 m_{13} + \\
& + 32 c_{10;1} e_J^{(p)} \beta_1^2 p_{31} + 8 c_{11;1} p_{11}^2 \beta_1 m_{11} + 64 c_{01;2} p_0^3 \beta_1 m_{22} - 128 c_{01;1} \beta_1 p_0 m_{11}^3 - \\
& - 264 c_{11;1} p_0^2 \beta_1 m_{11} - 32 c_{10;1} e_J^{(p)} \beta_1^2 m_{11} p_0 s_{22} + 512 c_{01;2} p_0 e_J^{(p)2} \beta_1^3 m_{11} m_{22} + \\
& + 64 c_{01;2} e_J^{(p)2} \beta_1^3 m_{11} p_0 s_{22} - \\
& - 256 c_{10;1} p_0 e_J^{(p)} \beta_1^2 m_{11} m_{22} - 6 c_{10;1} e_J^{(p)} \beta_1^2 p_{11} + 12 e_J^{(p)2} \beta_1^3 p_{11} c_{01;2} + 48 c_{11;1} p_0 p_{11} \beta_1 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 6 \beta_1 p_{11} c_{01;1} + 115 \beta_1 p_{11} c_{01;2} p_0^2 - 256 e_J^{(p)} B_2 \beta_1^2 m_{11} m_{22} - \\
& + 8 c_{10;1} e_J^{(p)} \beta_1^2 m_{11} p_{11} + \\
& + 32 c_{01;2} e_J^{(p)2} \beta_1^3 p_{11} m_{11}^2 + 16 c_{01;2} e_J^{(p)2} \beta_1^3 m_{11} p_{11} + 256 c_{11;1} e_J^{(p)2} \beta_1^3 m_{11} m_{22} - \\
& - 32 c_{10;1} p_0 e_J^{(p)} \beta_1^2 m_{22} - \\
& - 16 c_{10;1} p_{11} e_J^{(p)} \beta_1^2 m_{11}^2 + 32 c_{10;1} e_J^{(p)} \beta_1^2 m_{11} p_{22} - 256 e_J^{(p)} B_2 \beta_1^2 m_{13} + 16 e_J^{(p)2} \beta_1^3 p_{11} c_{01;2} s_{22} - \\
& - 256 c_{10;1} p_0 e_J^{(p)} \beta_1^2 m_{13} + 64 c_{1,1,1} p_0 \beta_1 p_{11} m_{11}^2 + 96 c_{01;2} p_0^2 \beta_1 p_{11} m_{11}^2 + 32 c_{01;1} \beta_1 m_{11} p_0 s_{22} + \\
& + 512 c_{01;2} p_0^3 \beta_1 m_{11} m_{22} + 32 c_{01;2} p_0^2 p_{11} \beta_1 m_{11} + 32 c_{01;2} p_0^2 p_{11} \beta_1 s_{22} + 64 c_{01;2} p_0^3 \beta_1 m_{11} s_{22} + \\
& + 24 c_{01;2} p_0 \beta_1 p_{11}^2 m_{11} + 1024 c_{11;1} p_0 p_{20} \beta_1 m_{11} + 512 c_{11;1} p_0^2 \beta_1 m_{11} m_{22} - 128 c_{11;1} p_0 \beta_1 m_{11} p_{22} + \\
& + 256 e_J^{(p)} B_2 \beta_2^2 m_{11} m_{22} - 256 c_{01;2} e_J^{(p)2} \beta_1^3 p_0 m_{11}^3 + 32 c_{01;2} e_J^{(p)2} \beta_1^3 p_0 s_{22} - \\
& - 16 c_{10;1} e_J^{(p)} \beta_1^2 p_0 s_{22} - \\
& - 8 c_{10;1} e_J^{(p)} \beta_1^2 p_{11} s_{22} - 256 c_{10;1} e_J^{(p)} \beta_1^2 m_{11} p_{20} + 128 c_{11;1} p_0 \beta_1 p_{11} m_{22} + \\
& + 64 c_{01;2} e_J^{(p)2} \beta_1^3 p_0 s_{31} - \\
& - 32 c_{10;1} e_J^{(p)} \beta_1^2 p_{11} m_{22} + 512 c_{01;2} e_J^{(p)2} \beta_1^3 p_0 m_{13} + 512 c_{01;2} e_J^{(p)2} \beta_1^3 m_{11} p_{20} - \\
& - 64 c_{01;2} e_J^{(p)2} \beta_1^3 m_{11} p_{22} + \\
& + 128 c_{10;1} p_0 e_J^{(p)} \beta_1^2 m_{11}^3 + 64 e_J^{(p)2} \beta_1^3 p_{11} c_{01;2} m_{22} - 32 c_{10;1} p_0 e_J^{(p)} \beta_1^2 s_{31} - 48 c_{01;2} p_0 \beta_1 p_{11} p_{22} - \\
& - 384 c_{01;2} p_0 \beta_1 p_{11} p_{20} + 1536 c_{01;2} p_0^2 \beta_1 m_{11} p_{20} + 192 c_{01;2} p_0^2 p_{11} \beta_1 m_{22} - 192 c_{01;2} p_0^2 \beta_1 m_{11} p_{22} + \\
& + 256 c_{01;1} p_0 \beta_1 m_{11} m_{22} + 256 c_{01;1} \beta_1 m_{11} p_{20} + 64 c_{01;2} e_J^{(p)2} \beta_1^3 p_0 m_{22} - 8 c_{01;2} p_0 e_J^{(p)2} \beta_1^3 + \\
& + 4 c_{10;1} e_J^{(p)} \beta_1^2 p_0 - 41 \beta_1 p_0^3 c_{01;2} - 4 c_{01;1} p_0 \beta_1 - 32 c_{10;1} e_J^{(p)} \beta_1^2 p_{20} + \\
& + 64 c_{01;2} e_J^{(p)2} \beta_1^3 p_{20} - 72 p_0 \beta_1 m_{11} c_{01;1} + 192 c_{01;2} p_0^2 \beta_1 p_{20} + 5 c_{01;2} p_0 \beta_1 p_{11}^2 - \\
& + 96 c_{01;2} p_0^3 \beta_1 m_{11}^2 - 48 c_{01;1} p_0 \beta_1 m_{11}^2 - 408 c_{01;2} p_0^3 \beta_1 m_{11} - 144 c_{01;2} e_J^{(p)2} \beta_1^3 p_0 m_{11} + \\
& + 48 c_{10;1} p_0 e_J^{(p)} \beta_1^2 m_{11}^2 - 96 c_{01;2} p_0 e_J^{(p)2} \beta_1^3 m_{11}^2 + 72 c_{10;1} e_J^{(p)} \beta_1^2 p_0 m_{11} \Big) Q^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\Delta_1 R)_{13} & = -\frac{1}{128} e_J^{(p)2} \beta_1^2 \left(192 c_{01;2} p_0^2 m_{11} + 192 c_{11;1} p_0 m_{11} + 32 c_{01;2} p_0^2 + \right. \\
& + 16 c_{11;1} p_0 - 16 c_{11;1} p_{11} - 32 p_{11} c_{01;2} p_0 \Big) Q - \\
& + \frac{1}{128} e_J^{(p)2} \beta_1^2 \left(192 c_{11;1} p_0 m_{12} + 192 c_{01;2} p_0^2 m_{12} \right) Q^2 - \\
& - \frac{1}{128} e_J^{(p)2} \beta_1^2 \left(-117 c_{01;2} p_0^2 m_{11} - 108 c_{01;2} p_0^2 m_{11}^2 + 64 c_{01;2} p_0 p_{20} - \right. \\
& \left. - 54 c_{11;1} p_0 m_{11}^2 - 54 c_{11;1} p_0 m_{11} - 16 c_{11;1} p_{31} - 13 c_{01;2} p_0^2 - \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 2 c_{11;1} p_0 + 16 c_{11;1} p_{20} + c_{01;2} p_{11}^2 + 32 c_{01;2} p_0^2 s_{31} - \\
& - 32 c_{01;2} p_{11} p_{20} - 32 c_{01;2} p_0 p_{31} + 18 c_{11;1} p_{11} m_{11}^2 + 192 c_{11;1} p_{20} m_{11} + \\
& + 4 c_{11;1} p_{11} s_{22} + 24 c_{11;1} p_{11} m_{22} - 216 c_{01;2} p_0^2 m_{11}^3 + 20 c_{01;2} p_0^2 s_{22} + \\
& + 192 c_{11;1} p_0 m_{13} + 24 c_{11;1} p_0 m_{22} + 192 c_{01;2} p_0^2 m_{13} + 3 m_{11} c_{01;2} p_{11}^2 + \\
& + 16 c_{11;1} p_0 s_{31} + 6 c_{11;1} m_{11} p_{11} - 216 c_{11;1} p_0 m_{11}^3 - 4 c_{01;2} p_{11} p_{22} - \\
& - 24 c_{11;1} m_{11} p_{22} - 12 c_{01;2} p_0 p_{22} + 8 c_{11;1} p_0 s_{22} + 48 c_{01;2} p_0^2 m_{22} - \\
& - 48 c_{01;2} p_0 m_{11} p_{22} + 288 c_{01;2} p_0^2 m_{11} m_{22} + 12 c_{01;2} p_0 p_{11} s_{22} + 18 c_{01;2} p_0 m_{11} p_{11} + \\
& + 48 c_{01;2} p_0^2 m_{11} s_{22} + 48 c_{01;2} p_0 p_{11} m_{22} - 4 c_{11;1} p_{22} + 36 c_{01;2} p_0 p_{11} m_{11}^2 + \\
& + 24 c_{11;1} m_{11} p_0 s_{22} + 14 p_{11} c_{01;2} p_0 + 384 c_{01;2} p_0 m_{11} p_{20} + 288 c_{11;1} p_0 m_{11} m_{22} + 3 c_{11;1} p_{11}) Q^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\Delta_1 R)_{1-1} &= \left(-\frac{1}{8} p_0^3 c_{11;1} - \frac{1}{8} p_0 C_{11} + \frac{1}{4} p_0 B_2 \beta_1 - \frac{1}{4} p_0 \beta_1^2 e_J^{(p)2} c_{11;1} + \right. \\
& + \frac{1}{4} \beta_1^2 e_J^{(p)2} p_0^2 c_{01;2} - \frac{1}{4} \beta_1 e_J^{(p)} p_0^2 c_{10;1} + \frac{1}{2} m_{11} p_0^3 c_{11;1} + \\
& + \frac{5}{2} m_{11} \beta_1^2 e_J^{(p)2} p_0^2 c_{01;2} - \frac{3}{2} p_0^2 m_{11} \beta_1 e_J^{(p)} c_{10;1} + \frac{1}{2} m_{11} p_0 C_{11} + \frac{1}{2} e_J^{(p)} \beta_1 m_{11} p_0 + \\
& + \frac{1}{8} p_0 e_J^{(p)} \beta_1 + m_{11} p_0 \beta_1^2 e_J^{(p)2} c_{11;1} + \frac{1}{8} C_{11} p_{11} - \frac{1}{2} c_{10;1} e_J^{(p)3} \beta_1^3 m_{11} + \\
& + \frac{1}{2} p_0^3 p_{11} c_{01;2} + \frac{1}{2} m_{11} c_{01;1} p_0^2 + \frac{1}{2} m_{11} c_{01;1} e_J^{(p)2} \beta_1^2 + \frac{1}{4} c_{11;1} e_J^{(p)2} \beta_1^2 p_{11} + \\
& + \frac{1}{8} e_J^{(p)} \beta_1 p_{11} + \frac{1}{2} m_{11} c_{01;0} + \frac{3}{8} c_{11;1} p_0^2 p_{11} - \frac{3}{4} c_{10;1} e_J^{(p)} \beta_1 p_{11} p_0 + \\
& + \frac{1}{2} m_{11} c_{01;2} e_J^{(p)4} \beta_1^4 + \frac{5}{4} e_J^{(p)2} \beta_1^2 p_{11} c_{01;2} p_0 + \frac{1}{2} m_{11} c_{01;2} p_0^4 + \frac{1}{4} p_0 p_{11} c_{01;1} - \\
& \left. - \frac{1}{4} \beta_1 B_2 p_{11} - m_{11} p_0 B_2 \beta_1 \right) Q + \\
& + \left(-\frac{3}{2} m_{12} \beta_1 e_J^{(p)} p_0^2 c_{10;1} + \frac{1}{2} c_{01;0} m_{12} + \frac{1}{2} e_J^{(p)} \beta_1 p_0 m_{12} + \frac{1}{2} c_{01;2} e_J^{(p)4} \beta_1^4 m_{12} - \right. \\
& - m_{12} p_0 B_2 \beta_1 + \frac{1}{2} c_{01;2} p_0^4 m_{12} + \frac{1}{2} m_{12} p_0^3 c_{11;1} - \frac{1}{2} c_{10;1} e_J^{(p)3} \beta_1^3 m_{12} + \\
& + m_{12} p_0 \beta_1^2 e_J^{(p)2} c_{11;1} + \frac{1}{2} c_{01;1} p_0^2 m_{12} + \frac{1}{2} c_{01;1} e_J^{(p)2} \beta_1^2 m_{12} + \frac{1}{2} m_{12} p_0 C_{11} + \\
& \left. + \frac{5}{2} m_{12} \beta_1^2 e_J^{(p)2} p_0^2 c_{01;2} \right) Q^2 + \\
& + \left(\frac{41}{512} p_0^3 c_{11;1} + \frac{1}{64} p_0 C_{11} - \frac{1}{32} p_0 B_2 \beta_1 + \frac{1}{32} p_0 \beta_1^2 e_J^{(p)2} c_{11;1} - \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{13}{128} \beta_1^2 e_J^{(p)2} p_0^2 c_{01;2} + \frac{13}{128} \beta_1 e_J^{(p)} p_0^2 c_{10;1} + \frac{3}{64} m_{11}^2 p_0^3 c_{11;1} + \frac{1}{8} e_J^{(p)} \beta_1 p_{20} - \\
& - \frac{5}{512} p_0 p_{11}^2 c_{11;1} + \frac{1}{4} p_{20} B_2 \beta_1 - \frac{3}{8} p_{20} p_0^2 c_{11;1} + \frac{1}{128} p_{11}^2 \beta_1^2 e_J^{(p)2} c_{01;2} - \\
& - \frac{51}{128} m_{11} p_0^3 c_{11;1} - \frac{171}{128} m_{11} \beta_1^2 e_J^{(p)2} p_0^2 c_{01;2} + \frac{3}{32} m_{11}^2 p_0 \beta_1^2 e_J^{(p)2} c_{11;1} + \\
& + \frac{105}{128} p_0^2 m_{11} \beta_1 e_J^{(p)} c_{10;1} - \frac{1}{2} p_{20} \beta_1 e_J^{(p)} p_0 c_{10;1} + \frac{1}{2} p_{20} p_0 \beta_1^2 e_J^{(p)2} c_{01;2} - \frac{3}{32} m_{11}^2 \beta_1^2 e_J^{(p)2} p_0^2 c_{01;2} - \\
& - \frac{9}{64} m_{11} p_0 C_{11} + \frac{3}{32} m_{11}^2 \beta_1 e_J^{(p)} p_0^2 c_{10;1} - \frac{9}{64} e_J^{(p)} \beta_1 m_{11} p_0 + \\
& + \frac{3}{64} m_{11}^2 p_0 C_{11} - \\
& - \frac{3}{64} p_0 e_J^{(p)} \beta_1 m_{11}^2 - \frac{1}{128} \beta_1 e_J^{(p)} p_{11}^2 c_{10;1} - \frac{1}{64} p_0 e_J^{(p)} \beta_1 + \frac{1}{2} c_{01;2} p_0^4 m_{13} - \\
& - \frac{1}{32} C_{11} p_{11} s_{22} + \frac{1}{128} m_{11} c_{01;1} p_{11}^2 - \frac{1}{16} c_{01;2} p_0^4 m_{11}^3 + \frac{1}{2} C_{11} p_{20} m_{11} - \\
& - \frac{1}{8} c_{11;1} p_0^3 s_{31} + \frac{1}{2} C_{11} p_0 m_{13} + \frac{1}{4} c_{01;1} p_0 p_{31} - \frac{1}{16} C_{1,1} p_0 m_{11}^3 - \\
& - \frac{9}{32} m_{11} p_0 \beta_1^2 e_J^{(p)2} c_{11;1} - \frac{3}{16} c_{01;2} p_0^4 s_{22} + \frac{3}{128} c_{01;2} p_0 p_{11}^3 + \frac{1}{32} c_{01;1} p_{11} p_{22} - \\
& - \frac{1}{4} \beta_1 B_2 p_{31} - \frac{3}{32} c_{01;1} p_0^2 s_{22} - \frac{1}{8} p_{20} C_{11} - \frac{1}{16} c_{11;1} p_0^3 m_{11}^3 + \\
& + \frac{1}{8} e_J^{(p)} \beta_1 p_{31} + \frac{1}{2} c_{01;2} p_0^3 p_{31} - \frac{1}{16} C_{11} m_{11} p_{22} + \frac{1}{64} C_{11} m_{11} p_{11} + \\
& + \frac{1}{16} c_{11;1} p_0^3 m_{22} + \frac{1}{16} C_{11} p_0 m_{22} - \frac{5}{32} c_{11;1} p_0^3 s_{22} - \frac{1}{16} C_{11} p_0 s_{22} - \\
& - \frac{3}{128} C_{11} p_{11} - \frac{51}{128} p_0^3 p_{11} c_{01;2} - \frac{33}{128} m_{11} c_{01;1} p_0^2 - \frac{3}{64} c_{11;1} e_J^{(p)2} \beta_1^2 p_{11} - \\
& - \frac{3}{128} e_J^{(p)} \beta_1 p_{11} - \frac{115}{512} c_{11;1} p_0^2 p_{11} + \frac{19}{64} c_{10;1} e_J^{(p)} \beta_1 p_{11} p_0 - \frac{31}{64} e_J^{(p)2} \beta_1^2 p_{11} c_{01;2} p_0 - \\
& - \frac{1}{32} e_J^{(p)} \beta_1 p_{22} - \frac{33}{64} m_{11} c_{01;2} p_0^4 - \frac{3}{32} p_0 p_{11} c_{01;1} + \frac{3}{64} \beta_1 B_2 p_{11} + \\
& + \frac{1}{32} e_J^{(p)} \beta_1 p_{11} s_{22} - \frac{1}{16} e_J^{(p)} \beta_1 m_{11} p_0 s_{22} + \frac{1}{4} c_{01;2} p_0^3 p_{11} m_{22} + \frac{5}{8} c_{01;2} e_J^{(p)2} \beta_1^2 p_0 p_{11} m_{22} + \\
& + \frac{3}{64} m_{11} c_{01;2} p_0^2 p_{11}^2 + \frac{1}{8} \beta_1 B_2 m_{11} p_{22} + \frac{1}{2} c_{01;2} e_J^{(p)4} \beta_1^4 m_{13} - \frac{1}{16} c_{01;0} m_{11}^3 - \\
& - \frac{3}{32} c_{10;1} e_J^{(p)} \beta_1 p_{11} s_{22} p_0 + c_{11;1} e_J^{(p)2} \beta_1^2 p_{20} m_{11} - \frac{3}{8} c_{10;1} e_J^{(p)} \beta_1 p_{11} m_{22} p_0 - \frac{1}{16} c_{01;2} p_0^3 p_{11} m_{11}^2 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{16} c_{11;1} p_0^3 m_{11} s_{22} + \frac{1}{8} c_{01;1} p_0 p_{11} m_{22} + \frac{1}{2} \beta_1 B_2 p_0 m_{11} m_{22} + \frac{3}{128} c_{11;1} p_{11}^2 p_0 m_{11} + \\
& + \frac{3}{8} c_{11;1} p_0^2 p_{31} - \frac{1}{8} \beta_1 B_2 p_{11} m_{22} + \frac{1}{16} \beta_1 B_2 p_{11} s_{22} + \frac{1}{8} \beta_1 B_2 p_0 m_{11}^3 + \\
& + \frac{1}{4} \beta_1 B_2 p_0 s_{31} + \frac{3}{512} c_{11;1} p_{11}^3 - \frac{17}{32} c_{01;2} p_0^2 e_J^{(p)2} \beta_1^2 s_{22} + c_{11;1} e_J^{(p)2} \beta_1^2 p_0 m_{13} - \\
& - \frac{1}{16} p_0 e_J^{(p)} \beta_1 m_{22} - \frac{1}{8} c_{11;1} e_J^{(p)2} \beta_1^2 p_0 s_{22} - \frac{1}{16} e_J^{(p)} \beta_1 p_0 s_{22} - \frac{1}{8} c_{01;2} p_0^2 e_J^{(p)2} \beta_1^2 m_{22} - \\
& - \frac{1}{64} e_J^{(p)} \beta_1 m_{11} p_{11} - \frac{1}{8} c_{01;2} p_0^2 e_J^{(p)2} \beta_1^2 m_{11} s_{22} + \frac{3}{32} c_{01;2} e_J^{(p)2} \beta_1^2 p_0 p_{11} s_{22} - \\
& - \frac{1}{16} c_{11;1} p_0^2 p_{11} s_{22} - \frac{1}{4} p_0 e_J^{(p)} \beta_1 m_{11} m_{22} - \frac{5}{4} c_{01;2} p_0^2 e_J^{(p)2} \beta_1^2 m_{11} m_{22} - \\
& - \frac{5}{8} c_{01;2} e_J^{(p)2} \beta_1^2 p_0 m_{11} p_{22} + \frac{1}{8} e_J^{(p)} \beta_1 p_0 s_{31} - \frac{1}{16} p_0 e_J^{(p)} \beta_1 m_{11}^3 + \frac{1}{2} p_0 e_J^{(p)} \beta_1 m_{13} + \\
& + \frac{1}{2} e_J^{(p)} \beta_1 m_{11} p_{20} + \frac{3}{32} c_{11;1} p_0 p_{11} p_{22} + \frac{3}{32} c_{10;1} p_{11} e_J^{(p)} \beta_1 m_{11}^2 p_0 + \\
& - \frac{5}{32} c_{01;2} e_J^{(p)2} \beta_1^2 p_{11} p_{22} - \frac{1}{8} c_{11;1} e_J^{(p)2} \beta_1^2 p_0 m_{11}^3 - \frac{1}{2} c_{11;1} p_0 e_J^{(p)2} \beta_1^2 m_{11} m_{22} - \\
& - \frac{1}{4} c_{11;1} p_0^3 m_{11} m_{22} + \frac{3}{4} c_{11;1} p_0 p_{20} p_{11} - \frac{1}{4} c_{01;2} e_J^{(p)4} \beta_1^4 m_{11} m_{22} - \frac{1}{32} c_{01;1} p_0 p_{11} m_{11}^2 - \frac{3}{4} c_{10;1} e_J^{(p)} \beta_1 \\
& - \frac{1}{16} c_{01;1} p_0^2 m_{11}^3 + \frac{5}{128} m_{11} c_{01;2} e_J^{(p)2} \beta_1^2 p_{11}^2 - \frac{1}{4} c_{11;1} e_J^{(p)2} \beta_1^2 p_0 s_{31} + \\
& + \frac{1}{32} \beta_1 B_2 p_{11} m_{11}^2 + 2 m_{11} c_{0;1,2} p_0^3 p_{20} + m_{11} c_{01;1} p_0 p_{20} + \frac{3}{8} c_{10;1} e_J^{(p)} \beta_1 m_{11} p_{22} p_0 - \\
& - \frac{1}{4} C_{11} p_0 m_{11} m_{22} + 5 c_{01;2} e_J^{(p)2} \beta_1^2 p_0 m_{11} p_{20} + \frac{1}{2} c_{11;1} p_0^3 m_{13} + \frac{1}{8} c_{11;1} e_J^{(p)2} \beta_1^2 m_{11} p_0 s_{22} - \\
& - \frac{5}{32} c_{01;2} p_0 e_J^{(p)2} \beta_1^2 p_{11} m_{11}^2 + \frac{3}{4} c_{10;1} p_0^2 e_J^{(p)} \beta_1 m_{11} m_{22} - \frac{3}{64} m_{11} c_{01;2} p_0 e_J^{(p)2} \beta_1^2 p_{11} - \\
& - \frac{1}{64} p_{11} e_J^{(p)} \beta_1 m_{11}^2 - \frac{1}{2} c_{10;1} e_J^{(p)3} \beta_1^3 m_{13} + \frac{1}{16} p_{11} e_J^{(p)} \beta_1 m_{22} - \frac{1}{16} e_J^{(p)} \beta_1 m_{11} p_{22} - \\
& - \frac{1}{4} c_{01;2} p_0^4 m_{11} m_{22} - \\
& - \frac{1}{8} m_{11} c_{01;1} p_0 p_{22} - \frac{1}{64} C_{11} p_{11} m_{11}^2 + \frac{1}{2} c_{01;1} e_J^{(p)2} \beta_1^2 m_{13} + \frac{1}{2} c_{01;1} p_0^2 m_{13} - \\
& - 3 c_{10;1} e_J^{(p)} \beta_1 p_0 m_{11} p_{20} - \frac{1}{16} c_{11;1} e_J^{(p)2} \beta_1^2 p_{11} s_{22} - \frac{1}{4} c_{01;1} e_J^{(p)2} \beta_1^2 m_{11} m_{22} + \\
& + \frac{1}{16} C_{11} p_{11} m_{22} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{5}{4} c_{01;2p_0} e_J^{(p)2} \beta_1^2 p_{31} - \frac{1}{4} c_{01;0} m_{11} m_{22} + \frac{3}{16} c_{01;2p_0^2} p_{11} p_{22} - \frac{1}{8} C_{11} p_0 s_{31} + \\
& + \frac{3}{2} c_{01;2p_0^2} p_{11} p_{20} + \\
& + \frac{1}{4} c_{11;1} e_J^{(p)2} \beta_1^2 p_{31} + \frac{1}{16} C_{11} m_{11} p_0 s_{22} - \beta_1 B_2 p_0 m_{13} + \\
& + \frac{1}{4} c_{10;1} e_J^{(p)3} \beta_1^3 m_{11} m_{22} + \frac{1}{8} C_{11} p_{31} - \frac{1}{8} \beta_1 B_2 m_{11} p_0 s_{22} - \frac{1}{8} c_{11;1} e_J^{(p)2} \beta_1^2 m_{11} p_{22} + \\
& + \frac{1}{4} c_{01;1} p_{11} p_{20} - \frac{3}{64} c_{11;1} p_0^2 p_{11} m_{11}^2 - \frac{3}{16} c_{11;1} p_0^2 m_{11} p_{22} - \frac{1}{4} m_{11} c_{01;2p_0^3} p_{22} + \\
& + \frac{1}{32} C_{11} p_{22} - \frac{1}{16} c_{01;1} e_J^{(p)2} \beta_1^2 m_{11}^3 - \beta_1 B_2 p_{20} m_{11} - \\
& - \frac{3}{4} c_{10;1} e_J^{(p)} \beta_1 p_{31} p_0 + \\
& + \frac{5}{2} c_{01;2p_0^2} e_J^{(p)2} \beta_1^2 m_{13} - \frac{1}{32} c_{11;1} e_J^{(p)2} \beta_1^2 p_{11} m_{11}^2 + \frac{3}{16} c_{10;1} p_0^2 e_J^{(p)} \beta_1 m_{11}^3 - \\
& - \frac{3}{128} c_{10;1} p_{11}^2 e_J^{(p)} \beta_1 m_{11} + \frac{1}{4} c_{01;2p_0^2} e_J^{(p)2} \beta_1^2 s_{31} + \frac{5}{4} c_{01;2} e_J^{(p)2} \beta_1^2 p_{11} p_{20} - \\
& - \frac{1}{4} c_{10;1} p_0^2 e_J^{(p)} \beta_1 s_{31} + \frac{1}{16} c_{10;1} e_J^{(p)3} \beta_1^3 m_{11}^3 + \frac{3}{2} c_{11;1} p_0^2 p_{20} m_{11} + \\
& + \frac{3}{16} c_{11;1} p_0^2 p_{11} m_{22} - \frac{1}{4} c_{01;1} p_0^2 m_{11} m_{22} - \frac{3}{2} c_{10;1} p_0^2 e_J^{(p)} \beta_1 m_{13} + \\
& + \frac{1}{8} c_{10;1} e_J^{(p)} \beta_1 m_{11} p_0^2 s_{22} + \frac{1}{32} c_{11;1} p_0^2 m_{11} p_{11} - \frac{3}{32} c_{01;2} e_J^{(p)2} \beta_1^2 p_0 p_{22} + \\
& + \frac{1}{8} c_{10;1} p_0^2 e_J^{(p)} \beta_1 m_{22} - \frac{1}{32} \beta_1 B_2 m_{11} p_{11} - \frac{1}{8} \beta_1 B_2 p_0 m_{22} + \frac{1}{8} \beta_1 B_2 p_0 s_{22} + \\
& + \frac{1}{16} c_{11;1} p_0^2 p_{22} + \frac{3}{64} c_{10;1} e_J^{(p)} \beta_1 m_{11} p_{11} p_0 - \frac{1}{16} \beta_1 B_2 p_{22} + \frac{11}{32} c_{10;1} p_0^2 e_J^{(p)} \beta_1 s_{22} + \\
& + \frac{1}{8} c_{11;1} e_J^{(p)2} \beta_1^2 p_0 m_{22} - \frac{5}{16} c_{01;2p_0^2} e_J^{(p)2} \beta_1^2 m_{11}^3 + \frac{1}{8} c_{11;1} e_J^{(p)2} \beta_1^2 p_{11} m_{22} - \\
& - \frac{1}{16} c_{01;2} e_J^{(p)4} \beta_1^4 m_{11}^3 + \frac{3}{32} c_{10;1} e_J^{(p)} \beta_1 p_{22} p_0 + \frac{1}{16} c_{11;1} e_J^{(p)2} \beta_1^2 p_{22} - \\
& - \frac{3}{32} c_{10;1} p_{11} p_{22} e_J^{(p)} \beta_1 + \frac{1}{32} c_{11;1} e_J^{(p)2} \beta_1^2 m_{11} p_{11} + \frac{1}{2} c_{01;0} m_{13} + \frac{9}{32} m_{11} p_0 B_2 \beta_1 - \\
& - \frac{1}{4} p_{20} \beta_1^2 e_J^{(p)2} c_{11;1} - \frac{3}{32} m_{11}^2 p_0 B_2 \beta_1 \Big) Q^3
\end{aligned}$$

$$(\Delta_1 R)_{1-2} = -\frac{1}{256} e_J^{(p)} \left(256 c_{11;1} e_J^{(p)2} \beta_1^3 m_{11} - 256 e_J^{(p)} m_{11} B_2 \beta_1^2 + 512 c_{11;1} p_0^2 \beta_1 m_{11} + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + 256 e_J^{(p)} m_{11} B_2 \beta_2^2 + 256 C_{11} \beta_1 m_{11} - 512 \beta_1^2 B_2 m_{11} - 32 c_{10;1} e_J^{(p)} \beta_1^2 p_{11} + \\
& + 64 e_J^{(p)2} \beta_1^3 p_{11} c_{01;2} + 128 c_{11;1} p_0 p_{11} \beta_1 + 32 \beta_1 p_{11} c_{01;1} + 192 \beta_1 p_{11} c_{01;2} p_0^2 + \\
& + 64 c_{01;2} p_0 e_J^{(p)2} \beta_1^3 - 32 c_{10;1} e_J^{(p)} \beta_1^2 p_0 + 64 \beta_1 p_0^3 c_{01;2} + 32 c_{01;1} p_0 \beta_1 + \\
& + 256 p_0 \beta_1 m_{11} c_{01;1} + 512 c_{01;2} p_0^3 \beta_1 m_{11} + 512 c_{01;2} e_J^{(p)2} \beta_1^3 p_0 m_{11} - \\
& - 256 c_{10;1} e_J^{(p)} \beta_1^2 p_0 m_{11} \Big) Q - \\
& - \frac{1}{256} e_J^{(p)} \left(512 c_{01;2} e_J^{(p)2} \beta_1^3 p_0 m_{12} + 256 e_J^{(p)} B_2 \beta_2^2 m_{12} + 512 c_{01;2} p_0^3 \beta_1 m_{12} + \right. \\
& + 512 c_{11;1} p_0^2 \beta_1 m_{12} + 256 c_{01;1} \beta_1 p_0 m_{12} - 256 e_J^{(p)} B_2 \beta_1^2 m_{12} - 256 c_{10;1} e_J^{(p)} \beta_1^2 p_0 m_{12} - \\
& \left. - 512 \beta_1^2 B_2 m_{12} + 256 C_{11} \beta_1 m_{12} + 256 c_{11;1} e_J^{(p)2} \beta_1^3 m_{12} \right) Q^2 - \\
& - \frac{1}{256} e_J^{(p)} \left(256 C_{11} \beta_1 m_{13} - 8 c_{01;1} \beta_1 p_{22} + 32 c_{01;1} \beta_1 p_{31} - \right. \\
& - 128 C_{11} \beta_1 m_{11}^3 + 256 \beta_1^2 B_2 m_{11}^3 - 512 \beta_1^2 B_2 m_{13} + 3 c_{01;2} \beta_1 p_{11}^3 + \\
& + 32 c_{01;1} \beta_1 p_{20} - 8 c_{01;1} \beta_1 m_{11} p_{11} + 512 \beta_1^2 B_2 m_{11} m_{22} + 128 e_J^{(p)} B_2 \beta_1^2 m_{11}^3 - \\
& - 128 e_J^{(p)} B_2 \beta_2^2 m_{11}^3 - 256 c_{01;2} p_0^3 \beta_1 m_{11}^3 - 256 C_{11} \beta_1 m_{11} m_{22} + 32 c_{01;1} \beta_1 p_0 s_{31} + \\
& + 8 c_{01;1} \beta_1 p_{11} s_{22} - 32 c_{01;1} \beta_1 m_{11} p_{22} + 512 c_{11;1} p_0^2 \beta_1 m_{13} + 256 e_J^{(p)} B_2 \beta_2^2 m_{13} + \\
& + 256 c_{01;1} \beta_1 p_0 m_{13} - 16 c_{01;2} e_J^{(p)2} \beta_1^3 p_{22} - 32 c_{01;1} \beta_1 p_0 m_{22} + 256 c_{11;1} e_J^{(p)2} \beta_1^3 m_{13} - \\
& - 16 c_{01;1} \beta_1 p_{11} m_{11}^2 + 64 c_{01;2} p_0^3 \beta_1 s_{31} + 8 c_{10;1} e_J^{(p)} \beta_1^2 p_{22} - 80 c_{01;2} p_0^3 \beta_1 s_{22} + \\
& + 32 c_{01;1} \beta_1 p_{11} m_{22} + 192 c_{01;2} p_0^2 \beta_1 p_{31} - 16 c_{01;1} \beta_1 p_0 s_{22} - 128 c_{11;1} e_J^{(p)2} \beta_1^3 m_{11}^3 + \\
& + 64 c_{01;2} e_J^{(p)2} \beta_1^3 p_{31} - 48 c_{11;1} p_0^2 \beta_1 s_{22} + 128 c_{11;1} \beta_1 p_{11} p_{20} + 16 c_{11;1} \beta_1 p_{11} p_{22} + \\
& + 128 c_{11;1} p_0 \beta_1 p_{31} - 256 c_{11;1} p_0^2 \beta_1 m_{11}^3 - 32 c_{01;2} p_0^2 \beta_1 p_{22} + 512 c_{01;2} p_0^3 \beta_1 m_{13} - \\
& - 32 c_{10;1} e_J^{(p)} \beta_1^2 p_{31} + 8 c_{11;1} p_{11}^2 \beta_1 m_{11} - 64 c_{01;2} p_0^3 \beta_1 m_{22} - 128 c_{01;1} \beta_1 p_0 m_{11}^3 - \\
& - 264 c_{11;1} p_0^2 \beta_1 m_{11} + 32 c_{10;1} e_J^{(p)} \beta_1^2 m_{11} p_0 s_{22} - 512 c_{01;2} p_0 e_J^{(p)2} \beta_1^3 m_{11} m_{22} - \\
& - 64 c_{01;2} e_J^{(p)2} \beta_1^3 m_{11} p_0 s_{22} + 256 c_{10;1} p_0 e_J^{(p)} \beta_1^2 m_{11} m_{22} + 6 c_{10;1} e_J^{(p)} \beta_1^2 p_{11} - \\
& - 12 e_J^{(p)2} \beta_1^3 p_{11} c_{01;2} - \\
& - 48 c_{11;1} p_0 p_{11} \beta_1 - 6 \beta_1 p_{11} c_{01;1} - 115 \beta_1 p_{11} c_{01;2} p_0^2 + 256 e_J^{(p)} B_2 \beta_1^2 m_{11} m_{22} + \\
& + 8 c_{10;1} e_J^{(p)} \beta_1^2 m_{11} p_{11} - 32 c_{01;2} e_J^{(p)2} \beta_1^3 p_{11} m_{11}^2 - 16 c_{01;2} e_J^{(p)2} \beta_1^3 m_{11} p_{11} - \\
& - 256 c_{11;1} e_J^{(p)2} \beta_1^3 m_{11} m_{22} + 32 c_{10;1} p_0 e_J^{(p)} \beta_1^2 m_{22} + 16 c_{10;1} p_{11} e_J^{(p)} \beta_1^2 m_{11}^2 + \\
& + 32 c_{10;1} e_J^{(p)} \beta_1^2 m_{11} p_{22} - \\
& - 256 e_J^{(p)} B_2 \beta_1^2 m_{13} + 16 e_J^{(p)2} \beta_1^3 p_{11} c_{01;2} s_{22} - 256 c_{10;1} p_0 e_J^{(p)} \beta_1^2 m_{13} -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 64 c_{11;1} p_0 \beta_1 p_{11} m_{11}^2 - \\
& - 96 c_{01;2} p_0^2 \beta_1 p_{11} m_{11}^2 - 32 c_{01;1} \beta_1 m_{11} p_0 s_{22} - 512 c_{01;2} p_0^3 \beta_1 m_{11} m_{22} - \\
& - 32 c_{01;2} p_0^2 p_{11} \beta_1 m_{11} + \\
& + 32 c_{01;2} p_0^2 p_{11} \beta_1 s_{22} - 64 c_{01;2} p_0^3 \beta_1 m_{11} s_{22} + 24 c_{01;2} p_0 \beta_1 p_{11}^2 m_{11} + \\
& + 1024 c_{11;1} p_0 p_{20} \beta_1 m_{11} - \\
& - 512 c_{11;1} p_0^2 \beta_1 m_{11} m_{22} - 128 c_{11;1} p_0 \beta_1 m_{11} p_{22} - 256 e_J^{(p)} B_2 \beta_2^2 m_{11} m_{22} - \\
& - 256 c_{01;2} e_J^{(p)2} \beta_1^3 p_0 m_{11}^3 - \\
& - 32 c_{01;2} e_J^{(p)2} \beta_1^3 p_0 s_{22} + 16 c_{10;1} e_J^{(p)} \beta_1^2 p_0 s_{22} - 8 c_{10;1} e_J^{(p)} \beta_1^2 p_{11} s_{22} - \\
& + 256 c_{10;1} e_J^{(p)} \beta_1^2 m_{11} p_{20} + 128 c_{11;1} p_0 \beta_1 p_{11} m_{22} + 64 c_{01;2} e_J^{(p)2} \beta_1^3 p_0 s_{31} - \\
& - 32 c_{10;1} e_J^{(p)} \beta_1^2 p_{11} m_{22} + \\
& + 512 c_{01;2} e_J^{(p)2} \beta_1^3 p_0 m_{13} + 512 c_{01;2} e_J^{(p)2} \beta_1^3 m_{11} p_{20} - 64 c_{01;2} e_J^{(p)2} \beta_1^3 m_{11} p_{22} + \\
& + 128 c_{10;1} p_0 e_J^{(p)} \beta_1^2 m_{11}^3 + 64 e_J^{(p)2} \beta_1^3 p_{11} c_{01;2} m_{22} - 32 c_{10;1} p_0 e_J^{(p)} \beta_1^2 s_{31} + \\
& + 48 c_{01;2} p_0 \beta_1 p_{11} p_{22} + \\
& + 384 c_{01;2} p_0 \beta_1 p_{11} p_{20} + 1536 c_{01;2} p_0^2 \beta_1 m_{11} p_{20} + 192 c_{01;2} p_0^2 p_{11} \beta_1 m_{22} - \\
& - 192 c_{01;2} p_0^2 \beta_1 m_{11} p_{22} - \\
& - 256 c_{01;1} p_0 \beta_1 m_{11} m_{22} + 256 c_{01;1} \beta_1 m_{11} p_{20} - 64 c_{01;2} e_J^{(p)2} \beta_1^3 p_0 m_{22} - 8 c_{01;2} p_0 e_J^{(p)2} \beta_1^3 + \\
& + 4 c_{10;1} e_J^{(p)} \beta_1^2 p_0 - 41 \beta_1 p_0^3 c_{01;2} - 4 c_{01;1} p_0 \beta_1 - 32 c_{10;1} e_J^{(p)} \beta_1^2 p_{20} + \\
& + 64 c_{01;2} e_J^{(p)2} \beta_1^3 p_{20} - 72 p_0 \beta_1 m_{11} c_{01;1} + 192 c_{01;2} p_0^2 \beta_1 p_{20} + 5 c_{01;2} p_0 \beta_1 p_{11}^2 - \\
& - 96 c_{01;2} p_0^3 \beta_1 m_{11}^2 - 48 c_{01;1} p_0 \beta_1 m_{11}^2 - 408 c_{01;2} p_0^3 \beta_1 m_{11} - 144 c_{01;2} e_J^{(p)2} \beta_1^3 p_0 m_{11} + \\
& + 48 c_{10;1} p_0 e_J^{(p)} \beta_1^2 m_{11}^2 - 96 c_{01;2} p_0 e_J^{(p)2} \beta_1^3 m_{11}^2 + 72 c_{10;1} e_J^{(p)} \beta_1^2 p_0 m_{11} \Big) Q^3 \quad (184)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\Delta_1 R)_{1-3} &= \frac{1}{128} e_J^{(p)2} \beta_1^2 \left(32 c_{01;2} p_0^2 + 192 c_{11;1} p_0 m_{11} + 192 c_{01;2} p_0^2 m_{11} + \right. \\
& + 16 c_{11;1} p_{11} + 16 c_{11;1} p_0 + 32 p_{11} c_{01;2} p_0 \Big) Q + \\
& + \frac{1}{128} e_J^{(p)2} \beta_1^2 \left(192 c_{11;1} p_0 m_{12} + 192 c_{01;2} p_0^2 m_{12} \right) Q^2 + \\
& + \frac{1}{128} e_J^{(p)2} \beta_1^2 \left(-117 c_{01;2} p_0^2 m_{11} - 108 c_{01;2} p_0^2 m_{11}^2 + 64 c_{01;2} p_0 p_{20} - \right. \\
& + 54 c_{11;1} p_0 m_{11}^2 - 54 c_{11;1} p_0 m_{11} + 16 c_{11;1} p_{31} - 13 c_{01;2} p_0^2 - \\
& + 2 c_{11;1} p_0 + 16 c_{11;1} p_{20} + c_{01;2} p_{11}^2 + 32 c_{01;2} p_0^2 s_{31} + 32 c_{01;2} p_{11} p_{20} + \\
& + 32 c_{01;2} p_0 p_{31} - 18 c_{11;1} p_{11} m_{11}^2 + 192 c_{11;1} p_{20} m_{11} + 4 c_{11;1} p_{11} s_{22} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 24 c_{11;1} p_{11} m_{22} - 216 c_{01;2} p_0^2 m_{11}^3 - 20 c_{01;2} p_0^2 s_{22} + 192 c_{11;1} p_0 m_{13} - \\
& - 24 c_{11;1} p_0 m_{22} + 192 c_{01;2} p_0^2 m_{13} + 3 m_{11} c_{01;2} p_{11}^2 + 16 c_{11;1} p_0 s_{31} - \\
& - 6 c_{11;1} m_{11} p_{11} - 216 c_{11;1} p_0 m_{11}^3 + 4 c_{01;2} p_{11} p_{22} - 24 c_{11;1} m_{11} p_{22} - \\
& - 12 c_{01;2} p_0 p_{22} - 8 c_{11;1} p_0 s_{22} - 48 c_{01;2} p_0^2 m_{22} - 48 c_{01;2} p_0 m_{11} p_{22} - \\
& - 288 c_{01;2} p_0^2 m_{11} m_{22} + 12 c_{01;2} p_0 p_{11} s_{22} - 18 c_{01;2} p_0 m_{11} p_{11} - 48 c_{01;2} p_0^2 m_{11} s_{22} + \\
& + 48 c_{01;2} p_0 p_{11} m_{22} - 4 c_{11;1} p_{22} - 36 c_{01;2} p_0 p_{11} m_{11}^2 - 24 c_{11;1} m_{11} p_0 s_{22} - \\
& + 14 p_{11} c_{01;2} p_0 + 384 c_{01;2} p_0 m_{11} p_{20} - 288 c_{11;1} p_0 m_{11} m_{22} - 3 c_{11;1} p_{11}) Q^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\Delta_1 R)_{20} & = \left(-\frac{1}{4} c_{01;1} e_J^{(p)} \beta_1 p_{22} + \frac{1}{2} c_{10;1} e_J^{(p)2} \beta_1^2 p_{22} - \frac{1}{2} c_{01;2} e_J^{(p)3} \beta_1^3 p_{22} - \right. \\
& - \frac{3}{2} c_{01;2} p_0^2 e_J^{(p)} \beta_1 p_{22} - \frac{1}{2} c_{11;1} p_0 p_{22} e_J^{(p)} \beta_1 + \frac{3}{4} c_{10;1} p_0^2 p_{22} - \frac{5}{32} c_{11;1} p_0^2 e_J^{(p)} \beta_1 - \\
& - \frac{1}{32} c_{11;1} p_{11}^2 e_J^{(p)} \beta_1 - \frac{3}{16} c_{01;2} p_0 e_J^{(p)} \beta_1 p_{11}^2 - \frac{1}{16} c_{01;1} p_0 e_J^{(p)} \beta_1 - \frac{1}{8} c_{01;2} p_0 e_J^{(p)3} \beta_1^3 - \\
& \left. - \frac{5}{16} e_J^{(p)} \beta_1 p_0^3 c_{01;2} + \frac{1}{8} c_{10;1} e_J^{(p)2} \beta_1^2 p_0 + \frac{5}{32} c_{10;1} p_0^3 + \frac{3}{32} c_{10;1} p_{11}^2 p_0 \right) Q^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\Delta_1 R)_{21} & = \left(\frac{3}{32} p_0^4 c_{01;2} + \frac{5}{64} p_0^3 c_{11;1} + \frac{1}{32} p_0 C_{11} - \frac{1}{16} p_0 B_2 \beta_1 + \right. \\
& + \frac{3}{64} p_0^2 c_{01;1} + \frac{1}{16} p_0 \beta_1^2 e_J^{(p)2} c_{11;1} + \frac{17}{64} \beta_1^2 e_J^{(p)2} p_0^2 c_{01;2} - \\
& - \frac{11}{64} \beta_1 e_J^{(p)} p_0^2 c_{10;1} + \frac{1}{8} m_{11}^2 p_0^3 c_{11;1} + \frac{3}{64} p_0 p_{11}^2 c_{11;1} + \frac{1}{8} m_{11}^2 p_0^4 c_{01;2} + \\
& + \frac{3}{32} p_{11}^2 p_0^2 c_{01;2} + \frac{1}{8} m_{11}^2 c_{01;0} + \frac{5}{64} p_{11}^2 \beta_1^2 e_J^{(p)2} c_{01;2} - \\
& - \frac{1}{16} m_{11} p_0^3 c_{11;1} + \frac{1}{8} m_{11} \beta_1^2 e_J^{(p)2} p_0^2 c_{01;2} + \frac{1}{4} m_{11}^2 p_0 \beta_1^2 e_J^{(p)2} c_{11;1} - \\
& - \frac{1}{8} p_0^2 m_{11} \beta_1 e_J^{(p)} c_{10;1} + \frac{5}{8} m_{11}^2 \beta_1^2 e_J^{(p)2} p_0^2 c_{01;2} - \frac{1}{16} m_{11} p_0 C_{11} - \\
& - \frac{3}{8} m_{11}^2 \beta_1 e_J^{(p)} p_0^2 c_{10;1} - \frac{1}{8} m_{11}^2 \beta_1^3 e_J^{(p)3} c_{10;1} + \frac{1}{8} m_{11}^2 p_0^2 c_{01;1} + \\
& + \frac{1}{16} e_J^{(p)} \beta_1 m_{11} p_0 + \frac{1}{64} p_{11}^2 c_{01;1} + \frac{1}{8} m_{11}^2 p_0 C_{11} + \frac{1}{8} p_0 e_J^{(p)} \beta_1 m_{11}^2 + \\
& \left. + \frac{1}{8} m_{11}^2 \beta_1^2 e_J^{(p)2} c_{01;1} - \frac{3}{64} \beta_1 e_J^{(p)} p_{11}^2 c_{10;1} - \frac{1}{2} c_{01;0} m_{22} + \frac{1}{32} p_0 e_J^{(p)} \beta_1 - \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{8} m_{11} p_0 \beta_1^2 e_J^{(p)2} c_{11;1} - \frac{1}{16} C_{11} m_{11} p_{11} - \frac{1}{2} c_{11;1} p_0^3 m_{22} - \frac{1}{2} C_{11} p_0 m_{22} + \\
& + \frac{1}{8} c_{11;1} p_0^3 s_{22} + \frac{1}{8} C_{11} p_0 s_{22} + \frac{1}{32} C_{11} p_{11} + \frac{1}{2} c_{01;2} p_0^3 p_{22} - \\
& - \frac{1}{8} p_0 m_{11} p_{11} c_{01;1} - \frac{1}{2} c_{01;2} e_J^{(p)4} \beta_1^4 m_{22} - \frac{1}{4} m_{11} c_{01;2} p_0^3 p_{11} + \\
& - \frac{1}{16} c_{11;1} e_J^{(p)2} \beta_1^2 p_{11} - \frac{1}{32} e_J^{(p)} \beta_1 p_{11} - \frac{1}{2} c_{01;2} p_0^4 m_{22} - \frac{1}{2} c_{01;1} p_0^2 m_{22} + \\
& - \frac{1}{4} c_{01;1} p_0 p_{22} + \frac{1}{2} c_{10;1} e_J^{(p)3} \beta_1^3 m_{22} + \frac{1}{16} c_{11;1} p_0^2 p_{11} + \frac{3}{32} c_{10;1} e_J^{(p)} \beta_1 p_{11} p_0 - \\
& - \frac{1}{2} c_{01;1} e_J^{(p)2} \beta_1^2 m_{22} - \frac{3}{32} e_J^{(p)2} \beta_1^2 p_{11} c_{01;2} p_0 + \frac{1}{8} e_J^{(p)} \beta_1 p_{22} - \frac{1}{16} \beta_1 B_2 p_{11} - \\
& - \frac{1}{4} c_{01;2} p_0^2 e_J^{(p)2} \beta_1^2 s_{22} - \frac{1}{2} p_0 e_J^{(p)} \beta_1 m_{22} + \frac{1}{4} c_{11;1} e_J^{(p)2} \beta_1^2 p_0 s_{22} - \\
& - \frac{1}{8} e_J^{(p)} \beta_1 p_0 s_{22} - \frac{5}{2} c_{01;2} p_0^2 e_J^{(p)2} \beta_1^2 m_{22} - \frac{1}{16} e_J^{(p)} \beta_1 m_{11} p_{11} - \\
& - \frac{5}{8} m_{11} c_{01;2} p_0 e_J^{(p)2} \beta_1^2 p_{11} + \frac{1}{8} C_{11} p_{22} - \frac{3}{16} c_{11;1} p_0^2 m_{11} p_{11} + \\
& - \frac{5}{4} c_{01;2} e_J^{(p)2} \beta_1^2 p_0 p_{22} + \frac{3}{2} c_{10;1} p_0^2 e_J^{(p)} \beta_1 m_{22} + \frac{1}{8} \beta_1 B_2 m_{11} p_{11} + \\
& + \beta_1 B_2 p_0 m_{22} - \frac{1}{4} \beta_1 B_2 p_0 s_{22} + \frac{3}{8} c_{11;1} p_0^2 p_{22} + \frac{3}{8} c_{10;1} e_J^{(p)} \beta_1 m_{11} p_{11} p_0 - \frac{1}{4} \beta_1 B_2 p_{22} + \\
& + \frac{1}{4} c_{10;1} p_0^2 e_J^{(p)} \beta_1 s_{22} - c_{11;1} e_J^{(p)2} \beta_1^2 p_0 m_{22} - \frac{3}{4} c_{10;1} e_J^{(p)} \beta_1 p_{22} p_0 + \\
& + \frac{1}{4} c_{11;1} e_J^{(p)2} \beta_1^2 p_{22} - \frac{1}{8} c_{11;1} e_J^{(p)2} \beta_1^2 m_{11} p_{11} + \frac{1}{8} m_{11} p_0 B_2 \beta_1 + \\
& - \frac{1}{8} m_{11}^2 \beta_1^4 e_J^{(p)4} c_{01;2} - \frac{1}{4} m_{11}^2 p_0 B_2 \beta_1 \Big) Q^2 + \left(\frac{1}{16} e_J^{(p)} \beta_1 p_0 m_{12} + \right. \\
& + \frac{1}{4} m_{12} m_{11} \beta_1^4 e_J^{(p)4} c_{01;2} + \frac{1}{4} p_0 e_J^{(p)} \beta_1 m_{11} m_{12} + \frac{1}{4} m_{12} m_{11} \beta_1^2 e_J^{(p)2} c_{01;1} + \\
& + \frac{1}{4} m_{12} m_{11} c_{01;0} + \frac{1}{4} m_{12} m_{11} p_0^4 c_{01;2} + \frac{1}{4} m_{12} m_{11} p_0^3 c_{11;1} - \\
& - \frac{1}{8} m_{12} p_0 \beta_1^2 e_J^{(p)2} c_{11;1} + \frac{1}{8} m_{12} \beta_1^2 e_J^{(p)2} p_0^2 c_{01;2} - \frac{1}{2} m_{12} m_{11} p_0 B_2 \beta_1 + \\
& + \frac{1}{8} m_{12} p_0 B_2 \beta_1 - \frac{1}{4} m_{12} m_{11} \beta_1^3 e_J^{(p)3} c_{10;1} + \frac{1}{2} m_{12} m_{11} p_0 \beta_1^2 e_J^{(p)2} c_{11;1} + \\
& + \frac{5}{4} m_{12} \beta_1^2 e_J^{(p)2} p_0^2 c_{01;2} m_{11} - \frac{1}{8} m_{12} \beta_1 e_J^{(p)} p_0^2 c_{10;1} - \frac{1}{16} m_{12} p_0 C_{11} -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{16} m_{12} p_0^3 c_{11;1} - \frac{1}{2} c_{01;0} m_{23} - \frac{1}{16} C_{11} p_{11} m_{12} - \frac{1}{2} c_{01;2} p_0^4 m_{23} - \\
& - \frac{1}{2} c_{01;1} p_0^2 m_{23} - \frac{1}{2} C_{11} p_0 m_{23} - \frac{1}{2} c_{11;1} p_0^3 m_{23} + \frac{1}{4} m_{12} m_{11} p_0 C_{11} - \\
& - \frac{3}{4} m_{12} m_{11} \beta_1 e_J^{(p)} p_0^2 c_{10;1} + \frac{3}{8} c_{10;1} e_J^{(p)} \beta_1 p_{11} m_{12} p_0 + \beta_1 B_2 p_0 m_{23} + \\
& + \frac{1}{2} c_{10;1} e_J^{(p)3} \beta_1^3 m_{23} + \frac{1}{4} m_{12} m_{11} p_0^2 c_{01;1} - \frac{1}{2} p_0 e_J^{(p)} \beta_1 m_{23} - \frac{1}{16} p_{11} e_J^{(p)} \beta_1 m_{12} - \\
& - \frac{1}{8} c_{01;1} p_0 p_{11} m_{12} - \frac{1}{2} c_{01;2} e_J^{(p)4} \beta_1^4 m_{23} - \frac{1}{2} c_{01;1} e_J^{(p)2} \beta_1^2 m_{23} - \\
& - \frac{3}{16} c_{11;1} p_0^2 p_{11} m_{12} - \frac{1}{4} c_{01;2} p_0^3 p_{11} m_{12} + \frac{3}{2} c_{10;1} p_0^2 e_J^{(p)} \beta_1 m_{23} + \frac{1}{8} \beta_1 B_2 p_{11} m_{12} - \\
& - \frac{5}{2} c_{01;2} p_0^2 e_J^{(p)2} \beta_1^2 m_{23} - c_{11;1} e_J^{(p)2} \beta_1^2 p_0 m_{23} - \\
& + \frac{5}{8} c_{01;2} e_J^{(p)2} \beta_1^2 p_0 p_{11} m_{12} - \frac{1}{8} c_{11;1} e_J^{(p)2} \beta_1^2 p_{11} m_{12} \Big) Q^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\Delta_1 R)_{22} &= -\frac{1}{32} e_J^{(p)} \left(4 c_{01;1} \beta_1 p_{22} + 16 C_{11} \beta_1 m_{11}^2 - 32 \beta_1^2 B_2 m_{11}^2 + \right. \\
& + c_{11;1} p_{11}^2 \beta_1 - 4 c_{01;1} \beta_1 m_{11} p_{11} + 8 c_{01;2} e_J^{(p)2} \beta_1^3 p_{22} - 32 c_{01;1} \beta_1 p_0 m_{22} - \\
& - 4 c_{10;1} e_J^{(p)} \beta_1^2 p_{22} - 8 c_{01;2} p_0^3 \beta_1 s_{22} - 4 c_{01;1} \beta_1 p_0 s_{22} + \\
& + 24 c_{01;2} p_0^2 \beta_1 p_{22} - 64 c_{01;2} p_0^3 \beta_1 m_{22} + c_{10;1} e_J^{(p)} \beta_1^2 p_{11} - \\
& - 2 e_J^{(p)2} \beta_1^3 p_{11} c_{01;2} - \beta_1 p_{11} c_{01;1} - 4 \beta_1 p_{11} c_{01;2} p_0^2 + \\
& + 4 c_{10;1} e_J^{(p)} \beta_1^2 m_{11} p_{11} - 8 c_{01;2} e_J^{(p)2} \beta_1^3 m_{11} p_{11} + 32 c_{10;1} p_0 e_J^{(p)} \beta_1^2 m_{22} - \\
& - 24 c_{01;2} p_0^2 p_{11} \beta_1 m_{11} - 8 c_{01;2} e_J^{(p)2} \beta_1^3 p_0 s_{22} + 4 c_{10;1} e_J^{(p)} \beta_1^2 p_0 s_{22} - \\
& - 64 c_{01;2} e_J^{(p)2} \beta_1^3 p_0 m_{22} - 32 c_{11;1} e_J^{(p)2} \beta_1^3 m_{22} + 64 \beta_1^2 B_2 m_{22} - \\
& - 32 e_J^{(p)} B_2 \beta_2^2 m_{22} - 32 C_{11} \beta_1 m_{22} - 64 c_{11;1} p_0^2 \beta_1 m_{22} + \\
& + 16 c_{11;1} p_0 p_{22} \beta_1 - 16 c_{11;1} p_0 \beta_1 m_{11} p_{11} + 32 e_J^{(p)} B_2 \beta_1^2 m_{22} + \\
& + 3 c_{11;1} p_0^2 \beta_1 + 2 c_{01;2} p_0 e_J^{(p)2} \beta_1^3 - c_{1,0,1} e_J^{(p)} \beta_1^2 p_0 + 5 \beta_1 p_0^3 c_{01;2} + \\
& + c_{01;1} p_0 \beta_1 - 16 m_{11}^2 e_J^{(p)} B_2 \beta_1^2 + 16 c_{11;1} e_J^{(p)2} \beta_1^3 m_{11}^2 + 4 p_0 \beta_1 m_{11} c_{01;1} + \\
& + 3 c_{01;2} p_0 \beta_1 p_{11}^2 + 32 c_{01;2} p_0^3 \beta_1 m_{11}^2 + 16 c_{01;1} p_0 \beta_1 m_{11}^2 + \\
& + 32 c_{11;1} p_0^2 \beta_1 m_{11}^2 + 16 e_J^{(p)} B_2 \beta_2^2 m_{11}^2 + 8 c_{01;2} p_0^3 \beta_1 m_{11} + 8 c_{01;2} e_J^{(p)2} \beta_1^3 p_0 m_{11} - \\
& \left. - 16 c_{10;1} p_0 e_J^{(p)} \beta_1^2 m_{11}^2 + 32 c_{01;2} p_0 e_J^{(p)2} \beta_1^3 m_{11}^2 - 4 c_{10;1} e_J^{(p)} \beta_1^2 p_0 m_{11} \right) Q^2 -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{32} e_J^{(p)} \left(64 \beta_1^2 B_2 m_{23} - 32 C_{11} \beta_1 m_{23} - 32 c_{11;1} e_J^{(p)2} \beta_1^3 m_{23} - \right. \\
& - 64 c_{01;2} p_0^3 \beta_1 m_{23} + 32 e_J^{(p)} B_2 \beta_1^2 m_{23} - 32 c_{01;1} \beta_1 p_0 m_{23} - 64 c_{11;1} p_0^2 \beta_1 m_{23} - \\
& - 4 c_{01;1} \beta_1 p_{11} m_{12} - 32 e_J^{(p)} B_2 \beta_2^2 m_{23} - 16 c_{11;1} p_0 \beta_1 p_{11} m_{12} - \\
& - 24 c_{01;2} p_0^2 p_{11} \beta_1 m_{12} + 32 c_{10;1} p_0 e_J^{(p)} \beta_1^2 m_{23} - 8 e_J^{(p)2} \beta_1^3 p_{11} c_{01;2} m_{12} + \\
& + 4 c_{10;1} e_J^{(p)} \beta_1^2 p_{11} m_{12} - 64 c_{01;2} e_J^{(p)2} \beta_1^3 p_0 m_{23} - 64 \beta_1^2 B_2 m_{11} m_{12} + \\
& + 32 e_J^{(p)} B_2 \beta_2^2 m_{11} m_{12} + 8 c_{01;2} p_0^3 \beta_1 m_{12} + 32 C_{11} \beta_1 m_{11} m_{12} + \\
& + 64 c_{01;2} p_0 e_J^{(p)2} \beta_1^3 m_{11} m_{12} + 4 c_{01;1} \beta_1 p_0 m_{12} + 32 c_{01;1} p_0 \beta_1 m_{11} m_{12} + \\
& + 64 c_{11;1} p_0^2 \beta_1 m_{11} m_{12} - 32 m_{12} m_{11} e_J^{(p)} B_2 \beta_1^2 - 4 c_{10;1} e_J^{(p)} \beta_1^2 p_0 m_{12} + \\
& + 8 c_{01;2} e_J^{(p)2} \beta_1^3 p_0 m_{12} + 32 c_{11;1} e_J^{(p)2} \beta_1^3 m_{11} m_{12} + \\
& \left. + 64 c_{01;2} p_0^3 \beta_1 m_{11} m_{12} - 32 c_{10;1} p_0 e_J^{(p)} \beta_1^2 m_{11} m_{12} \right) Q^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\Delta_1 R)_{23} &= \frac{1}{64} e_J^{(p)2} \beta_1^2 \left(24 c_{01;2} p_0^2 m_{11} + \right. \\
& + 72 c_{01;2} p_0^2 m_{11}^2 + 72 c_{11;1} p_0 m_{11}^2 + 12 c_{11;1} p_0 m_{11} + 5 c_{01;2} p_0^2 + \\
& + 2 c_{11;1} p_0 + c_{01;2} p_{11}^2 - 96 c_{01;2} p_0^2 m_{22} - 24 c_{01;2} p_0 m_{11} p_{11} + 8 c_{11;1} p_{22} - \\
& + 6 p_{11} c_{01;2} p_0 - 2 c_{1,1,1} p_{11} - 96 c_{11;1} p_0 m_{22} - 12 c_{11;1} m_{11} p_{11} + 16 c_{01;2} p_0 p_{22} - \\
& \left. + 16 c_{01;2} p_0^2 s_{22} - 8 c_{11;1} p_0 s_{22} \right) Q^2 + \\
& + \frac{1}{64} e_J^{(p)2} \beta_1^2 \left(144 c_{11;1} p_0 m_{11} m_{12} + 144 m_{11} c_{01;2} p_0^2 m_{12} - \right. \\
& - 24 c_{01;2} p_0 p_{11} m_{12} - 96 c_{11;1} p_0 m_{23} - 12 c_{11;1} p_{11} m_{12} - 96 c_{01;2} p_0^2 m_{23} + \\
& \left. + 24 c_{01;2} p_0^2 m_{12} + 12 c_{11;1} p_0 m_{12} \right) Q^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\Delta_1 R)_{2-1} &= \left(\frac{3}{32} p_0^4 c_{01;2} + \frac{5}{64} p_0^3 c_{11;1} + \frac{1}{32} p_0 C_{11} - \frac{1}{16} p_0 B_2 \beta_1 + \frac{3}{64} p_0^2 c_{01;1} + \right. \\
& + \frac{1}{16} p_0 \beta_1^2 e_J^{(p)2} c_{11;1} + \frac{17}{64} \beta_1^2 e_J^{(p)2} p_0^2 c_{01;2} - \\
& + \frac{11}{64} \beta_1 e_J^{(p)} p_0^2 c_{10;1} + \frac{1}{8} m_{11}^2 p_0^3 c_{11;1} + \frac{3}{64} p_0 p_{11}^2 c_{11;1} + \\
& \left. + \frac{1}{8} m_{11}^2 p_0^4 c_{01;2} + \frac{3}{32} p_{11}^2 p_0^2 c_{01;2} + \frac{1}{8} m_{11}^2 c_{01;0} + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{5}{64} p_{11}^2 \beta_1^2 e_J^{(p)2} c_{01;2} - \frac{1}{16} m_{11} p_0^3 c_{11;1} + \frac{1}{8} m_{11} \beta_1^2 e_J^{(p)2} p_0^2 c_{01;2} + \\
& + \frac{1}{4} m_{11}^2 p_0 \beta_1^2 e_J^{(p)2} c_{11;1} - \frac{1}{8} p_0^2 m_{11} \beta_1 e_J^{(p)} c_{10;1} + \\
& + \frac{5}{8} m_{11}^2 \beta_1^2 e_J^{(p)2} p_0^2 c_{01;2} - \frac{1}{16} m_{11} p_0 C_{11} - \frac{3}{8} m_{11}^2 \beta_1 e_J^{(p)} p_0^2 c_{10;1} - \\
& - \frac{1}{8} m_{11}^2 \beta_1^3 e_J^{(p)3} c_{10;1} + \frac{1}{8} m_{11}^2 p_0^2 c_{01;1} + \frac{1}{16} e_J^{(p)} \beta_1 m_{11} p_0 + \\
& + \frac{1}{64} p_{11}^2 c_{01;1} + \frac{1}{8} m_{11}^2 p_0 C_{11} + \frac{1}{8} p_0 e_J^{(p)} \beta_1 m_{11}^2 + \frac{1}{8} m_{11}^2 \beta_1^2 e_J^{(p)2} c_{01;1} - \\
& - \frac{3}{64} \beta_1 e_J^{(p)} p_{11}^2 c_{10;1} + \frac{1}{2} c_{01;0} m_{22} + \frac{1}{32} p_0 e_J^{(p)} \beta_1 - \\
& - \frac{1}{8} m_{11} p_0 \beta_1^2 e_J^{(p)2} c_{11;1} + \frac{1}{16} C_{11} m_{11} p_{11} + \frac{1}{2} c_{11;1} p_0^3 m_{22} + \frac{1}{2} C_{11} p_0 m_{22} - \\
& - \frac{1}{8} c_{11;1} p_0^3 s_{22} - \frac{1}{8} C_{11} p_0 s_{22} - \frac{1}{32} C_{11} p_{11} + \frac{1}{2} c_{01;2} p_0^3 p_{22} + \\
& + \frac{1}{8} p_0 m_{11} p_{11} c_{01;1} + \frac{1}{2} c_{01;2} e_J^{(p)4} \beta_1^4 m_{22} + \frac{1}{4} m_{11} c_{01;2} p_0^3 p_{11} - \\
& - \frac{1}{16} c_{11;1} e_J^{(p)2} \beta_1^2 p_{11} + \frac{1}{32} e_J^{(p)} \beta_1 p_{11} + \frac{1}{2} c_{01;2} p_0^4 m_{22} + \frac{1}{2} c_{01;1} p_0^2 m_{22} + \\
& + \frac{1}{4} c_{01;1} p_0 p_{22} - \frac{1}{2} c_{10;1} e_J^{(p)3} \beta_1^3 m_{22} - \frac{1}{16} c_{11;1} p_0^2 p_{11} - \frac{3}{32} c_{10;1} e_J^{(p)} \beta_1 p_{11} p_0 + \\
& + \frac{1}{2} c_{01;1} e_J^{(p)2} \beta_1^2 m_{22} + \frac{3}{32} e_J^{(p)2} \beta_1^2 p_{11} c_{01;2} p_0 + \frac{1}{8} e_J^{(p)} \beta_1 p_{22} + \\
& + \frac{1}{16} \beta_1 B_2 p_{11} + \frac{1}{4} c_{01;2} p_0^2 e_J^{(p)2} \beta_1^2 s_{22} + \frac{1}{2} p_0 e_J^{(p)} \beta_1 m_{22} - \\
& - \frac{1}{4} c_{11;1} e_J^{(p)2} \beta_1^2 p_0 s_{22} + \frac{1}{8} e_J^{(p)} \beta_1 p_0 s_{22} + \frac{5}{2} c_{01;2} p_0^2 e_J^{(p)2} \beta_1^2 m_{22} + \\
& + \frac{1}{16} e_J^{(p)} \beta_1 m_{11} p_{11} + \frac{5}{8} m_{11} c_{01;2} p_0 e_J^{(p)2} \beta_1^2 p_{11} + \\
& + \frac{1}{8} C_{11} p_{22} + \frac{3}{16} c_{11;1} p_0^2 m_{11} p_{11} + \frac{5}{4} c_{01;2} e_J^{(p)2} \beta_1^2 p_0 p_{22} - \\
& - \frac{3}{2} c_{10;1} p_0^2 e_J^{(p)} \beta_1 m_{22} - \frac{1}{8} \beta_1 B_2 m_{11} p_{11} - \beta_1 B_2 p_0 m_{22} + \frac{1}{4} \beta_1 B_2 p_0 s_{22} + \\
& + \frac{3}{8} c_{11;1} p_0^2 p_{22} - \frac{3}{8} c_{10;1} e_J^{(p)} \beta_1 m_{11} p_{11} p_0 - \frac{1}{4} \beta_1 B_2 p_{22} - \\
& + \frac{1}{4} c_{10;1} p_0^2 e_J^{(p)} \beta_1 s_{22} + c_{11;1} e_J^{(p)2} \beta_1^2 p_0 m_{22} - \frac{3}{4} c_{10;1} e_J^{(p)} \beta_1 p_{22} p_0 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{4} c_{11;1} e_J^{(p)2} \beta_1^2 p_{22} + \frac{1}{8} c_{11;1} e_J^{(p)2} \beta_1^2 m_{11} p_{11} + \frac{1}{8} m_{11} p_0 B_2 \beta_1 + \\
& + \frac{1}{8} m_{11}^2 \beta_1^4 e_J^{(p)4} c_{01;2} - \frac{1}{4} m_{11}^2 p_0 B_2 \beta_1 \Big) Q^2 + \\
& + \left(\frac{1}{16} e_J^{(p)} \beta_1 p_0 m_{12} + \frac{1}{4} m_{12} m_{11} \beta_1^4 e_J^{(p)4} c_{01;2} + \frac{1}{4} p_0 e_J^{(p)} \beta_1 m_{11} m_{12} + \right. \\
& + \frac{1}{4} m_{12} m_{11} \beta_1^2 e_J^{(p)2} c_{01;1} + \frac{1}{4} m_{12} m_{11} c_{0,1,0} + \frac{1}{4} m_{12} m_{11} p_0^4 c_{01;2} + \\
& + \frac{1}{4} m_{12} m_{11} p_0^3 c_{11;1} - \frac{1}{8} m_{12} p_0 \beta_1^2 e_J^{(p)2} c_{11;1} + \\
& + \frac{1}{8} m_{12} \beta_1^2 e_J^{(p)2} p_0^2 c_{01;2} - \frac{1}{2} m_{12} m_{11} p_0 B_2 \beta_1 + \frac{1}{8} m_{12} p_0 B_2 \beta_1 - \\
& - \frac{1}{4} m_{12} m_{11} \beta_1^3 e_J^{(p)3} c_{10;1} + \frac{1}{2} m_{12} m_{11} p_0 \beta_1^2 e_J^{(p)2} c_{11;1} + \\
& + \frac{5}{4} m_{12} \beta_1^2 e_J^{(p)2} p_0^2 c_{01;2} m_{11} - \frac{1}{8} m_{12} \beta_1 e_J^{(p)} p_0^2 c_{10;1} - \\
& - \frac{1}{16} m_{12} p_0 C_{11} - \frac{1}{16} m_{12} p_0^3 c_{11;1} + \frac{1}{2} c_{01;0} m_{23} + \frac{1}{16} C_{11} p_{11} m_{12} + \frac{1}{2} c_{01;2} p_0^4 m_{23} + \\
& + \frac{1}{2} c_{01;1} p_0^2 m_{23} + \frac{1}{2} C_{11} p_0 m_{23} + \frac{1}{2} c_{11;1} p_0^3 m_{23} + \frac{1}{4} m_{12} m_{11} p_0 C_{11} - \\
& - \frac{3}{4} m_{12} m_{11} \beta_1 e_J^{(p)} p_0^2 c_{10;1} - \frac{3}{8} c_{10;1} e_J^{(p)} \beta_1 p_{11} m_{12} p_0 - \\
& + \beta_1 B_2 p_0 m_{23} - \frac{1}{2} c_{10;1} e_J^{(p)3} \beta_1^3 m_{23} + \frac{1}{4} m_{12} m_{11} p_0^2 c_{01;1} + \\
& + \frac{1}{2} p_0 e_J^{(p)} \beta_1 m_{23} + \frac{1}{16} p_{11} e_J^{(p)} \beta_1 m_{12} + \frac{1}{8} c_{01;1} p_0 p_{11} m_{12} + \\
& + \frac{1}{2} c_{01;2} e_J^{(p)4} \beta_1^4 m_{23} + \frac{1}{2} c_{01;1} e_J^{(p)2} \beta_1^2 m_{23} + \frac{3}{16} c_{11;1} p_0^2 p_{11} m_{12} + \\
& + \frac{1}{4} c_{01;2} p_0^3 p_{11} m_{12} - \frac{3}{2} c_{10;1} p_0^2 e_J^{(p)} \beta_1 m_{23} - \\
& - \frac{1}{8} \beta_1 B_2 p_{11} m_{12} + \frac{5}{2} c_{01;2} p_0^2 e_J^{(p)2} \beta_1^2 m_{23} + c_{11;1} e_J^{(p)2} \beta_1^2 p_0 m_{23} + \\
& + \left. \frac{5}{8} c_{01;2} e_J^{(p)2} \beta_1^2 p_0 p_{11} m_{12} + \frac{1}{8} c_{11;1} e_J^{(p)2} \beta_1^2 p_{11} m_{12} \right) Q^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\Delta_1 R)_{2-2} & = -\frac{1}{32} e_J^{(p)} \left(4 c_{01;1} \beta_1 p_{22} + 16 C_{11} \beta_1 m_{11}^2 - 32 \beta_1^2 B_2 m_{11}^2 + c_{11;1} p_{11}^2 \beta_1 + \right. \\
& + 4 c_{01;1} \beta_1 m_{11} p_{11} + 8 c_{01;2} e_J^{(p)2} \beta_1^3 p_{22} + 32 c_{01;1} \beta_1 p_0 m_{22} -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 4 c_{10;1} e_J^{(p)} \beta_1^2 p_{22} + 8 c_{01;2} p_0^3 \beta_1 s_{22} + 4 c_{01;1} \beta_1 p_0 s_{22} + \\
& + 24 c_{01;2} p_0^2 \beta_1 p_{22} + 64 c_{01;2} p_0^3 \beta_1 m_{22} - c_{10;1} e_J^{(p)} \beta_1^2 p_{11} + \\
& + 2 e_J^{(p)2} \beta_1^3 p_{11} c_{01;2} + \beta_1 p_{11} c_{01;1} + 4 \beta_1 p_{11} c_{01;2} p_0^2 - \\
& - 4 c_{10;1} e_J^{(p)} \beta_1^2 m_{11} p_{11} + 8 c_{01;2} e_J^{(p)2} \beta_1^3 m_{11} p_{11} - 32 c_{10;1} p_0 e_J^{(p)} \beta_1^2 m_{22} + \\
& + 24 c_{01;2} p_0^2 p_{11} \beta_1 m_{11} + 8 c_{01;2} e_J^{(p)2} \beta_1^3 p_0 s_{22} - 4 c_{10;1} e_J^{(p)} \beta_1^2 p_0 s_{22} + \\
& + 64 c_{01;2} e_J^{(p)2} \beta_1^3 p_0 m_{22} + 32 c_{11;1} e_J^{(p)2} \beta_1^3 m_{22} - 64 \beta_1^2 B_2 m_{22} + \\
& + 32 e_J^{(p)} B_2 \beta_2^2 m_{22} + 32 C_{11} \beta_1 m_{22} + 64 c_{11;1} p_0^2 \beta_1 m_{22} + \\
& + 16 c_{11;1} p_0 p_{22} \beta_1 + 16 c_{11;1} p_0 \beta_1 m_{11} p_{11} - 32 e_J^{(p)} B_2 \beta_1^2 m_{22} + \\
& + 3 c_{11;1} p_0^2 \beta_1 + 2 c_{01;2} p_0 e_J^{(p)2} \beta_1^3 - c_{10;1} e_J^{(p)} \beta_1^2 p_0 + \\
& + 5 \beta_1 p_0^3 c_{01;2} + c_{01;1} p_0 \beta_1 - 16 m_{11}^2 e_J^{(p)} B_2 \beta_1^2 + \\
& + 16 c_{11;1} e_J^{(p)2} \beta_1^3 m_{11}^2 + 4 p_0 \beta_1 m_{11} c_{01;1} + 3 c_{01;2} p_0 \beta_1 p_{11}^2 + \\
& + 32 c_{01;2} p_0^3 \beta_1 m_{11}^2 + 16 c_{01;1} p_0 \beta_1 m_{11}^2 + 32 c_{11;1} p_0^2 \beta_1 m_{11}^2 + \\
& + 16 e_J^{(p)} B_2 \beta_2^2 m_{11}^2 + 8 c_{01;2} p_0^3 \beta_1 m_{11} + 8 c_{01;2} e_J^{(p)2} \beta_1^3 p_0 m_{11} - \\
& - 16 c_{10;1} p_0 e_J^{(p)} \beta_1^2 m_{11}^2 + 32 c_{01;2} p_0 e_J^{(p)2} \beta_1^3 m_{11}^2 - 4 c_{10;1} e_J^{(p)} \beta_1^2 p_0 m_{11} \Big) Q^2 - \\
& - \frac{1}{32} e_J^{(p)} \left(-64 \beta_1^2 B_2 m_{23} + 32 C_{11} \beta_1 m_{23} + \right. \\
& + 32 c_{11;1} e_J^{(p)2} \beta_1^3 m_{23} + 64 c_{01;2} p_0^3 \beta_1 m_{23} - 32 e_J^{(p)} B_2 \beta_1^2 m_{23} + \\
& + 32 c_{01;1} \beta_1 p_0 m_{23} + 64 c_{11;1} p_0^2 \beta_1 m_{23} + 4 c_{01;1} \beta_1 p_{11} m_{12} + \\
& + 32 e_J^{(p)} B_2 \beta_2^2 m_{23} + 16 c_{11;1} p_0 \beta_1 p_{11} m_{12} + 24 c_{01;2} p_0^2 p_{11} \beta_1 m_{12} - \\
& - 32 c_{10;1} p_0 e_J^{(p)} \beta_1^2 m_{23} + 8 e_J^{(p)2} \beta_1^3 p_{11} c_{01;2} m_{12} - \\
& - 4 c_{10;1} e_J^{(p)} \beta_1^2 p_{11} m_{12} + 64 c_{01;2} e_J^{(p)2} \beta_1^3 p_0 m_{23} - 64 \beta_1^2 B_2 m_{11} m_{12} + \\
& + 32 e_J^{(p)} B_2 \beta_2^2 m_{11} m_{12} + 8 c_{01;2} p_0^3 \beta_1 m_{12} + 32 C_{11} \beta_1 m_{11} m_{12} + \\
& + 64 c_{01;2} p_0 e_J^{(p)2} \beta_1^3 m_{11} m_{12} + 4 c_{01;1} \beta_1 p_0 m_{12} + 32 c_{01;1} p_0 \beta_1 m_{11} m_{12} + \\
& + 64 c_{11;1} p_0^2 \beta_1 m_{11} m_{12} - 32 m_{12} m_{11} e_J^{(p)} B_2 \beta_1^2 - 4 c_{10;1} e_J^{(p)} \beta_1^2 p_0 m_{12} + \\
& + 8 c_{01;2} e_J^{(p)2} \beta_1^3 p_0 m_{12} + 32 c_{11;1} e_J^{(p)2} \beta_1^3 m_{11} m_{12} + 64 c_{01;2} p_0^3 \beta_1 m_{11} m_{12} - \\
& \left. - 32 c_{10;1} p_0 e_J^{(p)} \beta_1^2 m_{11} m_{12} \right) Q^3
\end{aligned}$$

$$(\Delta_1 R)_{2-3} = \frac{1}{64} e_J^{(p)2} \beta_1^2 \left(24 c_{01;2} p_0^2 m_{11} + 72 c_{01;2} p_0^2 m_{11}^2 + 72 c_{11;1} p_0 m_{11}^2 + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + 12 c_{11;1} p_0 m_{11} + 5 c_{01;2} p_0^2 + 2 c_{11;1} p_0 + c_{01;2} p_{11}^2 + 96 c_{01;2} p_0^2 m_{22} + \\
& + 24 c_{01;2} p_0 m_{11} p_{11} + 8 c_{11;1} p_{22} + 6 p_{11} c_{01;2} p_0 + 2 c_{11;1} p_{11} + 96 c_{11;1} p_0 m_{22} + \\
& + 12 c_{11;1} m_{11} p_{11} + 16 c_{01;2} p_0 p_{22} + 16 c_{01;2} p_0^2 s_{22} + 8 c_{11;1} p_0 s_{22} \Big) Q^2 + \\
& + \frac{1}{64} e_J^{(p)2} \beta_1^2 \left(144 m_{11} c_{01;2} p_0^2 m_{12} + 24 c_{01;2} p_0 p_{11} m_{12} + \right. \\
& + 96 c_{11;1} p_0 m_{23} + 12 c_{11;1} p_{11} m_{12} + 96 c_{01;2} p_0^2 m_{23} + 24 c_{01;2} p_0^2 m_{12} + \\
& \left. + 12 c_{11;1} p_0 m_{12} + 144 c_{11;1} p_0 m_{11} m_{12} \right) Q^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\Delta_1 R)_{30} = & \left(-\frac{5}{16} c_{11;1} p_0^2 e_J^{(p)} \beta_1 s_{22} - \frac{1}{16} c_{11;1} e_J^{(p)} \beta_1 p_{11} p_{22} - \right. \\
& - \frac{1}{128} c_{01;2} e_J^{(p)} \beta_1 p_{11}^3 + \frac{5}{16} c_{10;1} p_0^3 s_{22} - \frac{1}{16} c_{11;1} p_0 p_{11} e_J^{(p)} \beta_1 - \\
& - \frac{1}{64} e_J^{(p)} \beta_1 p_{11} c_{01;1} - \frac{1}{32} e_J^{(p)3} \beta_1^3 p_{11} c_{01;2} + \frac{19}{256} c_{10;1} p_0^2 p_{11} + \\
& + \frac{1}{32} c_{10;1} e_J^{(p)2} \beta_1^2 p_{11} - \frac{19}{128} e_J^{(p)} \beta_1 p_{11} c_{01;2} p_0^2 - \\
& - \frac{3}{8} c_{01;2} p_0 e_J^{(p)} \beta_1 p_{11} p_{22} + \frac{1}{4} c_{10;1} e_J^{(p)2} \beta_1^2 p_0 s_{22} - \\
& - \frac{1}{8} c_{01;1} p_0 e_J^{(p)} \beta_1 s_{22} - \frac{1}{4} c_{01;2} p_0 e_J^{(p)3} \beta_1^3 s_{22} + \frac{3}{16} c_{10;1} p_{11} p_{22} p_0 + \\
& + \frac{1}{256} c_{10;1} p_{11}^3 - \frac{5}{8} e_J^{(p)} \beta_1 p_0^3 c_{01;2} s_{22} + c_{01;2} p_0^3 e_J^{(p)} \beta_1 m_{11} m_{22} - \\
& - \frac{1}{4} c_{01;1} e_J^{(p)} \beta_1 p_{33} + \frac{3}{4} c_{10;1} p_0^2 p_{33} - \frac{3}{2} c_{01;2} p_0^2 e_J^{(p)} \beta_1 p_{33} - \\
& - \frac{1}{2} c_{11;1} p_0 e_J^{(p)} \beta_1 p_{33} + 3 c_{01;2} p_0 e_J^{(p)3} \beta_1^3 m_{11} m_{22} - \frac{1}{2} c_{01;2} e_J^{(p)3} \beta_1^3 p_{33} + \\
& + \frac{1}{2} c_{11;1} p_0^2 e_J^{(p)} \beta_1 m_{11} m_{22} + \frac{1}{2} c_{10;1} e_J^{(p)2} \beta_1^2 p_{33} + \\
& \left. + \frac{1}{2} c_{01;1} p_0 e_J^{(p)} \beta_1 m_{11} m_{22} - \frac{3}{2} c_{10;1} p_0 e_J^{(p)2} \beta_1^2 m_{11} m_{22} \right) Q^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\Delta_1 R)_{31} = & \left(\frac{17}{1536} p_0^3 c_{11;1} + \frac{1}{192} p_0 C_{11} - \frac{1}{96} p_0 B_2 \beta_1 + \frac{1}{96} p_0 \beta_1^2 e_J^{(p)2} c_{11;1} - \right. \\
& - \frac{7}{384} \beta_1^2 e_J^{(p)2} p_0^2 c_{01;2} + \frac{7}{384} \beta_1 e_J^{(p)} p_0^2 c_{10;1} + \\
& \left. + \frac{1}{64} m_{11}^2 p_0^3 c_{11;1} + \frac{5}{512} p_0 p_{11}^2 c_{11;1} - \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{128} p_{11}^2 \beta_1^2 e_J^{(p)2} c_{01;2} - \frac{5}{128} m_{11} p_0^3 c_{11;1} - \\
& - \frac{17}{128} m_{11} \beta_1^2 e_J^{(p)2} p_0^2 c_{01;2} + \frac{1}{32} m_{11}^2 p_0 \beta_1^2 e_J^{(p)2} c_{11;1} + \\
& + \frac{11}{128} p_0^2 m_{11} \beta_1 e_J^{(p)} c_{10;1} - \frac{1}{32} m_{11}^2 \beta_1^2 e_J^{(p)2} p_0^2 c_{01;2} - \\
& - \frac{1}{64} m_{11} p_0 C_{11} + \frac{1}{32} m_{11}^2 \beta_1 e_J^{(p)} p_0^2 c_{10;1} - \frac{1}{64} e_J^{(p)} \beta_1 m_{11} p_0 + \\
& + \frac{1}{64} m_{11}^2 p_0 C_{11} - \frac{1}{64} p_0 e_J^{(p)} \beta_1 m_{11}^2 + \frac{1}{128} \beta_1 e_J^{(p)} p_{11}^2 c_{10;1} - \\
& - \frac{1}{2} c_{01;0} m_{33} + \frac{1}{8} C_{11} p_{33} - \frac{1}{192} p_0 e_J^{(p)} \beta_1 + \frac{1}{32} C_{11} p_{11} s_{22} - \frac{1}{128} m_{11} c_{01;1} p_{11}^2 - \\
& + \frac{1}{4} 8 c_{01;2} p_0^4 m_{11}^3 - \frac{1}{4} 8 C_{11} p_0 m_{11}^3 - \frac{1}{32} m_{11} p_0 \beta_1^2 e_J^{(p)2} c_{11;1} + \\
& + \frac{3}{16} c_{01;2} p_0^4 s_{22} + \frac{1}{128} c_{01;2} p_0 p_{11}^3 + \frac{1}{32} c_{01;1} p_{11} p_{22} + \frac{3}{32} c_{01;1} p_0^2 s_{22} - \\
& - \frac{1}{4} 8 c_{11;1} p_0^3 m_{11}^3 - \frac{1}{16} C_{11} m_{11} p_{22} - \frac{1}{64} C_{11} m_{11} p_{11} - \frac{1}{16} c_{11;1} p_0^3 m_{22} - \\
& + \frac{1}{16} C_{11} p_0 m_{22} + \frac{5}{32} c_{11;1} p_0^3 s_{22} + \frac{1}{16} C_{11} p_0 s_{22} + \frac{1}{128} C_{11} p_{11} + \\
& + \frac{7}{128} p_0^3 p_{11} c_{01;2} - \frac{3}{128} m_{11} c_{01;1} p_0^2 + \frac{1}{64} c_{11;1} e_J^{(p)2} \beta_1^2 p_{11} + \\
& + \frac{1}{128} e_J^{(p)} \beta_1 p_{11} + \frac{19}{512} c_{11;1} p_0^2 p_{11} - \frac{1}{16} c_{10;1} e_J^{(p)} \beta_1 p_{11} p_0 + \\
& + \frac{3}{32} e_J^{(p)2} \beta_1^2 p_{11} c_{01;2} p_0 - \frac{1}{32} e_J^{(p)} \beta_1 p_{22} - \frac{3}{64} m_{11} c_{01;2} p_0^4 + \\
& + \frac{1}{64} p_0 p_{11} c_{01;1} - \frac{1}{64} \beta_1 B_2 p_{11} - \frac{1}{32} e_J^{(p)} \beta_1 p_{11} s_{22} + \frac{1}{16} e_J^{(p)} \beta_1 m_{11} p_0 s_{22} - \\
& - \frac{1}{4} c_{01;2} p_0^3 p_{11} m_{22} - \frac{5}{8} c_{01;2} e_J^{(p)2} \beta_1^2 p_0 p_{11} m_{22} - \frac{3}{64} m_{11} c_{01;2} p_0^2 p_{11}^2 + \\
& + \frac{1}{8} \beta_1 B_2 m_{11} p_{22} - \frac{1}{4} 8 c_{01;0} m_{11}^3 + \frac{3}{32} c_{10;1} e_J^{(p)} \beta_1 p_{11} s_{22} p_0 + \frac{3}{8} c_{10;1} e_J^{(p)} \beta_1 p_{11} m_{22} p_0 + \\
& + \frac{1}{16} c_{01;2} p_0^3 p_{11} m_{11}^2 - \frac{1}{16} c_{11;1} p_0^3 m_{11} s_{22} - \frac{1}{8} c_{01;1} p_0 p_{11} m_{22} - \frac{1}{2} \beta_1 B_2 p_0 m_{11} m_{22} - \\
& + \frac{3}{128} c_{11;1} p_{11}^2 p_0 m_{11} + \frac{1}{8} \beta_1 B_2 p_{11} m_{22} - \frac{1}{16} \beta_1 B_2 p_{11} s_{22} + \\
& + \frac{1}{2} 4 \beta_1 B_2 p_0 m_{11}^3 + \frac{1}{512} c_{11;1} p_{11}^3 + \frac{17}{32} c_{01;2} p_0^2 e_J^{(p)2} \beta_1^2 s_{22} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{16} p_0 e_J^{(p)} \beta_1 m_{22} + \frac{1}{8} c_{11;1} e_J^{(p)2} \beta_1^2 p_0 s_{22} + \frac{1}{16} e_J^{(p)} \beta_1 p_0 s_{22} + \\
& + \frac{1}{8} c_{01;2} p_0^2 e_J^{(p)2} \beta_1^2 m_{22} + \frac{1}{64} e_J^{(p)} \beta_1 m_{11} p_{11} + \\
& + \frac{1}{8} c_{01;2} p_0^2 e_J^{(p)2} \beta_1^2 m_{11} s_{22} - \frac{3}{32} c_{01;2} e_J^{(p)2} \beta_1^2 p_0 p_{11} s_{22} + \\
& + \frac{1}{16} c_{11;1} p_0^2 p_{11} s_{22} + \frac{1}{4} p_0 e_J^{(p)} \beta_1 m_{11} m_{22} - \frac{5}{4} c_{01;2} p_0^2 e_J^{(p)2} \beta_1^2 m_{11} m_{22} - \\
& - \frac{5}{8} c_{01;2} e_J^{(p)2} \beta_1^2 p_0 m_{11} p_{22} - \frac{1}{4} 8 p_0 e_J^{(p)} \beta_1 m_{11}^3 + \\
& + \frac{3}{32} c_{11;1} p_0 p_{11} p_{22} - \frac{3}{32} c_{10;1} p_{11} e_J^{(p)} \beta_1 m_{11}^2 p_0 + \\
& + \frac{5}{32} c_{01;2} e_J^{(p)2} \beta_1^2 p_{11} p_{22} - \frac{1}{16} c_{11;1} e_J^{(p)2} \beta_1^2 p_0 m_{11}^3 - \\
& - \frac{1}{4} c_{11;1} p_0 e_J^{(p)2} \beta_1^2 m_{11} m_{22} + \frac{1}{4} c_{11;1} p_0^3 m_{11} m_{22} - \\
& - \frac{3}{4} c_{01;2} e_J^{(p)4} \beta_1^4 m_{11} m_{22} + \frac{1}{32} c_{01;1} p_0 p_{11} m_{11}^2 - \frac{1}{4} 8 c_{01;1} p_0^2 m_{11}^3 - \\
& - \frac{5}{128} m_{11} c_{01;2} e_J^{(p)2} \beta_1^2 p_{11}^2 - \frac{1}{32} \beta_1 B_2 p_{11} m_{11}^2 + \\
& + \frac{3}{8} c_{10;1} e_J^{(p)} \beta_1 m_{11} p_{22} p_0 + \frac{1}{4} C_{11} p_0 m_{11} m_{22} - \frac{1}{8} c_{11;1} e_J^{(p)2} \beta_1^2 m_{11} p_0 s_{22} + \\
& + \frac{5}{32} c_{01;2} p_0 e_J^{(p)2} \beta_1^2 p_{11} m_{11}^2 - \frac{1}{4} c_{10;1} p_0^2 e_J^{(p)} \beta_1 m_{11} m_{22} + \\
& + \frac{3}{64} m_{11} c_{01;2} p_0 e_J^{(p)2} \beta_1^2 p_{11} + \frac{1}{64} p_{11} e_J^{(p)} \beta_1 m_{11}^2 - \frac{1}{16} p_{11} e_J^{(p)} \beta_1 m_{22} - \\
& - \frac{1}{16} e_J^{(p)} \beta_1 m_{11} p_{22} + \frac{1}{4} c_{01;2} p_0^4 m_{11} m_{22} - \frac{1}{8} m_{11} c_{01;1} p_0 p_{22} + \\
& + \frac{1}{64} C_{11} p_{11} m_{11}^2 + \frac{1}{16} c_{11;1} e_J^{(p)2} \beta_1^2 p_{11} s_{22} - \frac{1}{4} c_{01;1} e_J^{(p)2} \beta_1^2 m_{11} m_{22} - \\
& - \frac{1}{16} C_{11} p_{11} m_{22} + \frac{1}{4} c_{01;0} m_{11} m_{22} + \frac{3}{16} c_{01;2} p_0^2 p_{11} p_{22} - \frac{1}{16} C_{11} m_{11} p_0 s_{22} + \\
& + \frac{1}{4} c_{10;1} e_J^{(p)3} \beta_1^3 m_{11} m_{22} + \frac{1}{8} \beta_1 B_2 m_{11} p_0 s_{22} - \frac{1}{8} c_{11;1} e_J^{(p)2} \beta_1^2 m_{11} p_{22} + \\
& + \frac{3}{64} c_{11;1} p_0^2 p_{11} m_{11}^2 - \frac{3}{16} c_{11;1} p_0^2 m_{11} p_{22} - \\
& - \frac{1}{4} m_{11} c_{01;2} p_0^3 p_{22} + \frac{1}{32} C_{11} p_{22} - \frac{1}{4} 8 c_{01;1} e_J^{(p)2} \beta_1^2 m_{11}^3 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{32} c_{11;1} e_J^{(p)2} \beta_1^2 p_{11} m_{11}^2 + \frac{1}{4} 8 c_{10;1} p_0^2 e_J^{(p)} \beta_1 m_{11}^3 + \\
& + \frac{3}{128} c_{10;1} p_{11}^2 e_J^{(p)} \beta_1 m_{11} + \frac{1}{4} 8 c_{10;1} e_J^{(p)3} \beta_1^3 m_{11}^3 - \frac{3}{16} c_{11;1} p_0^2 p_{11} m_{22} + \\
& + \frac{1}{4} c_{01;1} p_0^2 m_{11} m_{22} - \frac{1}{8} c_{10;1} e_J^{(p)} \beta_1 m_{11} p_0^2 s_{22} - \frac{1}{32} c_{11;1} p_0^2 m_{11} p_{11} - \\
& + \frac{3}{32} c_{01;2} e_J^{(p)2} \beta_1^2 p_0 p_{22} - \frac{1}{8} c_{10;1} p_0^2 e_J^{(p)} \beta_1 m_{22} + \frac{1}{32} \beta_1 B_2 m_{11} p_{11} + \\
& + \frac{1}{8} \beta_1 B_2 p_0 m_{22} - \frac{1}{8} \beta_1 B_2 p_0 s_{22} + \frac{1}{16} c_{11;1} p_0^2 p_{22} - \\
& - \frac{3}{64} c_{10;1} e_J^{(p)} \beta_1 m_{11} p_{11} p_0 - \frac{1}{16} \beta_1 B_2 p_{22} - \frac{11}{32} c_{10;1} p_0^2 e_J^{(p)} \beta_1 s_{22} - \\
& - \frac{1}{8} c_{11;1} e_J^{(p)2} \beta_1^2 p_0 m_{22} - \frac{1}{16} c_{01;2} p_0^2 e_J^{(p)2} \beta_1^2 m_{11}^3 - \\
& - \frac{1}{8} c_{11;1} e_J^{(p)2} \beta_1^2 p_{11} m_{22} - \frac{1}{4} 8 c_{01;2} e_J^{(p)4} \beta_1^4 m_{11}^3 + \\
& + \frac{3}{32} c_{10;1} e_J^{(p)} \beta_1 p_{22} p_0 + \frac{1}{16} c_{11;1} e_J^{(p)2} \beta_1^2 p_{22} - \\
& - \frac{3}{32} c_{10;1} p_{11} p_{22} e_J^{(p)} \beta_1 - \frac{1}{32} c_{11;1} e_J^{(p)2} \beta_1^2 m_{11} p_{11} + \frac{1}{32} m_{11} p_0 B_2 \beta_1 - \\
& - \frac{1}{8} e_J^{(p)} \beta_1 p_0 s_{33} + \frac{1}{8} e_J^{(p)} \beta_1 p_{33} + \frac{5}{4} c_{01;2} e_J^{(p)2} \beta_1^2 p_0 p_{33} - \\
& - \frac{3}{2} c_{11;1} e_J^{(p)2} \beta_1^2 p_0 m_{33} - \frac{3}{2} c_{01;2} p_0^2 e_J^{(p)2} \beta_1^2 m_{33} + \\
& + \frac{1}{4} c_{11;1} e_J^{(p)2} \beta_1^2 p_0 s_{33} - \frac{1}{2} C_{11} p_0 m_{33} - \frac{1}{4} \beta_1 B_2 p_{33} + \\
& + \frac{1}{4} c_{01;1} p_0 p_{33} - \frac{3}{4} c_{10;1} e_J^{(p)} \beta_1 p_{33} p_0 - \frac{1}{2} c_{01;2} e_J^{(p)4} \beta_1^4 m_{33} - \\
& - \frac{1}{4} c_{01;2} p_0^2 e_J^{(p)2} \beta_1^2 s_{33} - \frac{1}{2} c_{11;1} p_0^3 m_{33} + \beta_1 B_2 p_0 m_{33} - \\
& - \frac{1}{4} \beta_1 B_2 p_0 s_{33} + \frac{1}{4} c_{10;1} p_0^2 e_J^{(p)} \beta_1 s_{33} + \frac{1}{4} c_{11;1} e_J^{(p)2} \beta_1^2 p_{33} - \\
& - \frac{1}{2} c_{01;1} p_0^2 m_{33} + \frac{1}{8} C_{11} p_0 s_{33} + \frac{1}{8} c_{11;1} p_0^3 s_{33} - \\
& - \frac{1}{2} c_{01;1} e_J^{(p)2} \beta_1^2 m_{33} - \frac{1}{2} e_J^{(p)} \beta_1 p_0 m_{33} - \frac{1}{2} c_{01;2} p_0^4 m_{33} + \\
& + \frac{3}{8} c_{11;1} p_0^2 p_{33} + \frac{1}{2} c_{10;1} p_0^2 e_J^{(p)} \beta_1 m_{33} + \frac{1}{2} c_{10;1} e_J^{(p)3} \beta_1^3 m_{33} +
\end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{2} c_{01;2} p_0^3 p_{33} - \frac{1}{32} m_{11}^2 p_0 B_2 \beta_1 \Big) Q^3 \quad (185)$$

$$\begin{aligned} (\Delta_1 R)_{32} &= \frac{1}{16} e_J^{(p)} \left(-16 c_{11;1} e_J^{(p)2} \beta_1^3 - 32 c_{11;1} p_0^2 \beta_1 + 16 e_J^{(p)} B_2 \beta_1^2 + 32 \beta_1^2 B_2 + \right. \\ &+ 16 c_{10;1} e_J^{(p)} \beta_1^2 p_0 - 16 C_{11} \beta_1 - 16 e_J^{(p)} B_2 \beta_2^2 - \\ &- 32 \beta_1 p_0^3 c_{01;2} - 16 c_{01;1} p_0 \beta_1 - 32 c_{01;2} p_0 e_J^{(p)2} \beta_1^3 \Big) + \\ &+ \frac{1}{16} e_J^{(p)} \left(16 C_{11} \beta_1 m_{11}^2 - 16 c_{01;1} \beta_1 p_{20} - 32 \beta_1^2 B_2 m_{11}^2 - \right. \\ &- c_{11;1} p_{11}^2 \beta_1 + 15 c_{11;1} p_0^2 \beta_1 + 8 c_{01;2} p_0 e_J^{(p)2} \beta_1^3 - 4 c_{10;1} e_J^{(p)} \beta_1^2 p_0 + \\ &+ 23 \beta_1 p_0^3 c_{01;2} + 4 c_{01;1} p_0 \beta_1 - 16 m_{11}^2 e_J^{(p)} B_2 \beta_1^2 + \\ &+ 16 c_{10;1} e_J^{(p)} \beta_1^2 p_{20} - 32 c_{01;2} e_J^{(p)2} \beta_1^3 p_{20} + \\ &+ 16 c_{11;1} e_J^{(p)2} \beta_1^3 m_{11}^2 + 4 p_0 \beta_1 m_{11} c_{01;1} - 96 c_{01;2} p_0^2 \beta_1 p_{20} - \\ &- 3 c_{01;2} p_0 \beta_1 p_{11}^2 - 64 c_{11;1} p_0 \beta_1 p_{20} + 32 c_{01;2} p_0^3 \beta_1 m_{11}^2 + \\ &+ 16 c_{01;1} p_0 \beta_1 m_{11}^2 + 32 c_{11;1} p_0^2 \beta_1 m_{11}^2 + 16 e_J^{(p)} B_2 \beta_2^2 m_{11}^2 + \\ &+ 8 c_{01;2} p_0^3 \beta_1 m_{11} + 8 c_{01;2} e_J^{(p)2} \beta_1^3 p_0 m_{11} - 16 c_{10;1} p_0 e_J^{(p)} \beta_1^2 m_{11}^2 + \\ &+ 32 c_{01;2} p_0 e_J^{(p)2} \beta_1^3 m_{11}^2 - 4 c_{10;1} e_J^{(p)} \beta_1^2 p_0 m_{11} \Big) Q^2 + \\ &+ \frac{1}{16} e_J^{(p)} \left(-32 m_{12} m_{11} e_J^{(p)} B_2 \beta_1^2 + 64 c_{01;2} p_0 e_J^{(p)2} \beta_1^3 m_{11} m_{12} - \right. \\ &+ 4 c_{10;1} e_J^{(p)} \beta_1^2 p_0 m_{12} + 32 c_{01;1} p_0 \beta_1 m_{11} m_{12} + 64 c_{11;1} p_0^2 \beta_1 m_{11} m_{12} + \\ &+ 32 C_{11} \beta_1 m_{11} m_{12} + 32 c_{11;1} e_J^{(p)2} \beta_1^3 m_{11} m_{12} - 32 c_{10;1} p_0 e_J^{(p)} \beta_1^2 m_{11} m_{12} + \\ &+ 4 c_{01;1} \beta_1 p_0 m_{12} + 8 c_{01;2} e_J^{(p)2} \beta_1^3 p_0 m_{12} + 64 c_{01;2} p_0^3 \beta_1 m_{11} m_{12} - \\ &- 64 \beta_1^2 B_2 m_{11} m_{12} + 32 e_J^{(p)} B_2 \beta_2^2 m_{11} m_{12} + 8 c_{01;2} p_0^3 \beta_1 m_{12} \Big) Q^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\Delta_1 R)_{33} &= -\frac{1}{384} e_J^{(p)2} \beta_1^2 \left(-48 c_{11;1} p_{33} - 96 c_{01;2} p_0 p_{33} + 384 c_{11;1} p_0 m_{33} + \right. \\ &+ 192 c_{01;2} p_0^2 m_{33} + 48 c_{11;1} p_0 s_{33} + 96 c_{01;2} p_0^2 s_{33} + 45 c_{01;2} p_0^2 m_{11} + \\ &+ 108 c_{01;2} p_0^2 m_{11}^2 + 54 c_{11;1} p_0 m_{11}^2 + 18 c_{11;1} p_0 m_{11} + 7 c_{01;2} p_0^2 + 2 c_{11;1} p_0 + \\ &+ 3 c_{01;2} p_{11}^2 - 54 c_{11;1} p_{11} m_{11}^2 + 12 c_{11;1} p_{11} s_{22} + 72 c_{11;1} p_{11} m_{22} + \\ &+ 200 c_{01;2} p_0^2 m_{11}^3 - 60 c_{01;2} p_0^2 s_{22} - 72 c_{11;1} p_0 m_{22} + 9 m_{11} c_{01;2} p_{11}^2 - \\ &- 18 c_{11;1} m_{11} p_{11} + 208 c_{11;1} p_0 m_{11}^3 - 12 c_{01;2} p_{11} p_{22} + 72 c_{11;1} m_{11} p_{22} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 36 c_{01;2} p_0 p_{22} - 24 c_{11;1} p_0 s_{22} - 144 c_{01;2} p_0^2 m_{22} + 144 c_{01;2} p_0 m_{11} p_{22} - \\
& - 672 c_{01;2} p_0^2 m_{11} m_{22} + 36 c_{01;2} p_0 p_{11} s_{22} - 54 c_{01;2} p_0 m_{11} p_{11} - \\
& - 144 c_{01;2} p_0^2 m_{11} s_{22} + 144 c_{01;2} p_0 p_{11} m_{22} + 12 c_{11;1} p_{22} - 108 c_{01;2} p_0 p_{11} m_{11}^2 - \\
& - 72 c_{11;1} m_{11} p_0 s_{22} - 12 p_{11} c_{01;2} p_0 - 768 c_{11;1} p_0 m_{11} m_{22} - 3 c_{11;1} p_{11} \Big) Q^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\Delta_1 R)_{3-1} & = \left(-\frac{17}{1536} p_0^3 c_{11;1} - \frac{1}{192} p_0 C_{11} + \frac{1}{96} p_0 B_2 \beta_1 - \right. \\
& + \frac{1}{96} p_0 \beta_1^2 e_J^{(p)2} c_{11;1} + \frac{7}{384} \beta_1^2 e_J^{(p)2} p_0^2 c_{01;2} - \frac{7}{384} \beta_1 e_J^{(p)} p_0^2 c_{10;1} - \\
& - \frac{1}{64} m_{11}^2 p_0^3 c_{11;1} - \frac{5}{512} p_0 p_{11}^2 c_{11;1} + \frac{1}{128} p_{11}^2 \beta_1^2 e_J^{(p)2} c_{01;2} + \\
& + \frac{5}{128} m_{11} p_0^3 c_{11;1} + \frac{17}{128} m_{11} \beta_1^2 e_J^{(p)2} p_0^2 c_{01;2} - \\
& - \frac{1}{32} m_{11}^2 p_0 \beta_1^2 e_J^{(p)2} c_{11;1} - \frac{11}{128} p_0^2 m_{11} \beta_1 e_J^{(p)} c_{10;1} + \\
& + \frac{1}{32} m_{11}^2 \beta_1^2 e_J^{(p)2} p_0^2 c_{01;2} + \frac{1}{64} m_{11} p_0 C_{11} - \\
& - \frac{1}{32} m_{11}^2 \beta_1 e_J^{(p)} p_0^2 c_{10;1} + \frac{1}{64} e_J^{(p)} \beta_1 m_{11} p_0 - \frac{1}{64} m_{11}^2 p_0 C_{11} + \\
& + \frac{1}{64} p_0 e_J^{(p)} \beta_1 m_{11}^2 - \frac{1}{128} \beta_1 e_J^{(p)} p_{11}^2 c_{10;1} + \\
& + \frac{1}{2} c_{01;0} m_{33} + \frac{1}{8} C_{11} p_{33} + \frac{1}{192} p_0 e_J^{(p)} \beta_1 - \frac{1}{32} C_{11} p_{11} s_{22} + \frac{1}{128} m_{11} c_{01;1} p_{11}^2 + \\
& + \frac{1}{4} 8 c_{01;2} p_0^4 m_{11}^3 + \frac{1}{4} 8 C_{11} p_0 m_{11}^3 + \frac{1}{32} m_{11} p_0 \beta_1^2 e_J^{(p)2} c_{11;1} + \\
& + \frac{3}{16} c_{01;2} p_0^4 s_{22} + \frac{1}{128} c_{01;2} p_0 p_{11}^3 + \frac{1}{32} c_{01;1} p_{11} p_{22} + \frac{3}{32} c_{01;1} p_0^2 s_{22} + \\
& + \frac{1}{4} 8 c_{11;1} p_0^3 m_{11}^3 + \frac{1}{16} C_{11} m_{11} p_{22} - \frac{1}{64} C_{11} m_{11} p_{11} - \frac{1}{16} c_{11;1} p_0^3 m_{22} - \\
& - \frac{1}{16} C_{11} p_0 m_{22} + \frac{5}{32} c_{11;1} p_0^3 s_{22} + \frac{1}{16} C_{11} p_0 s_{22} + \frac{1}{128} C_{11} p_{11} + \\
& + \frac{7}{128} p_0^3 p_{11} c_{01;2} + \frac{3}{128} m_{11} c_{01;1} p_0^2 + \frac{1}{64} c_{11;1} e_J^{(p)2} \beta_1^2 p_{11} + \\
& + \frac{1}{128} e_J^{(p)} \beta_1 p_{11} + \frac{19}{512} c_{11;1} p_0^2 p_{11} - \frac{1}{16} c_{10;1} e_J^{(p)} \beta_1 p_{11} p_0 + \\
& + \frac{3}{32} e_J^{(p)2} \beta_1^2 p_{11} c_{01;2} p_0 + \frac{1}{32} e_J^{(p)} \beta_1 p_{22} + \frac{3}{64} m_{11} c_{01;2} p_0^4 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{64} p_0 p_{11} c_{01;1} - \frac{1}{64} \beta_1 B_2 p_{11} + \frac{1}{32} e_J^{(p)} \beta_1 p_{11} s_{22} + \\
& + \frac{1}{16} e_J^{(p)} \beta_1 m_{11} p_0 s_{22} + \frac{1}{4} c_{01;2} p_0^3 p_{11} m_{22} + \frac{5}{8} c_{01;2} e_J^{(p)2} \beta_1^2 p_0 p_{11} m_{22} + \\
& + \frac{3}{64} m_{11} c_{01;2} p_0^2 p_{11}^2 - \frac{1}{8} \beta_1 B_2 m_{11} p_{22} + \frac{1}{4} 8 c_{01;0} m_{11}^3 - \\
& - \frac{3}{32} c_{10;1} e_J^{(p)} \beta_1 p_{11} s_{22} p_0 - \frac{3}{8} c_{10;1} e_J^{(p)} \beta_1 p_{11} m_{22} p_0 + \\
& + \frac{1}{16} c_{01;2} p_0^3 p_{11} m_{11}^2 - \frac{1}{16} c_{11;1} p_0^3 m_{11} s_{22} + \frac{1}{8} c_{01;1} p_0 p_{11} m_{22} - \frac{1}{2} \beta_1 B_2 p_0 m_{11} m_{22} + \\
& + \frac{3}{128} c_{11;1} p_{11}^2 p_0 m_{11} - \frac{1}{8} \beta_1 B_2 p_{11} m_{22} + \frac{1}{16} \beta_1 B_2 p_{11} s_{22} - \\
& + \frac{1}{2} 4 \beta_1 B_2 p_0 m_{11}^3 + \frac{1}{512} c_{11;1} p_{11}^3 + \\
& + \frac{17}{32} c_{01;2} p_0^2 e_J^{(p)2} \beta_1^2 s_{22} + \frac{1}{16} p_0 e_J^{(p)} \beta_1 m_{22} + \frac{1}{8} c_{11;1} e_J^{(p)2} \beta_1^2 p_0 s_{22} + \\
& + \frac{1}{16} e_J^{(p)} \beta_1 p_0 s_{22} + \frac{1}{8} c_{01;2} p_0^2 e_J^{(p)2} \beta_1^2 m_{22} + \\
& + \frac{1}{64} e_J^{(p)} \beta_1 m_{11} p_{11} + \frac{1}{8} c_{01;2} p_0^2 e_J^{(p)2} \beta_1^2 m_{11} s_{22} + \\
& + \frac{3}{32} c_{01;2} e_J^{(p)2} \beta_1^2 p_0 p_{11} s_{22} - \frac{1}{16} c_{11;1} p_0^2 p_{11} s_{22} + \frac{1}{4} p_0 e_J^{(p)} \beta_1 m_{11} m_{22} - \\
& - \frac{5}{4} c_{01;2} p_0^2 e_J^{(p)2} \beta_1^2 m_{11} m_{22} + \frac{5}{8} c_{01;2} e_J^{(p)2} \beta_1^2 p_0 m_{11} p_{22} + \\
& + \frac{1}{4} 8 p_0 e_J^{(p)} \beta_1 m_{11}^3 + \frac{3}{32} c_{11;1} p_0 p_{11} p_{22} - \\
& - \frac{3}{32} c_{10;1} p_{11} e_J^{(p)} \beta_1 m_{11}^2 p_0 + \frac{5}{32} c_{01;2} e_J^{(p)2} \beta_1^2 p_{11} p_{22} + \\
& + \frac{1}{16} c_{11;1} e_J^{(p)2} \beta_1^2 p_0 m_{11}^3 - \frac{1}{4} c_{11;1} p_0 e_J^{(p)2} \beta_1^2 m_{11} m_{22} + \\
& + \frac{1}{4} c_{11;1} p_0^3 m_{11} m_{22} - \frac{3}{4} c_{01;2} e_J^{(p)4} \beta_1^4 m_{11} m_{22} + \frac{1}{32} c_{01;1} p_0 p_{11} m_{11}^2 + \\
& + \frac{1}{4} 8 c_{01;1} p_0^2 m_{11}^3 + \frac{5}{128} m_{11} c_{01;2} e_J^{(p)2} \beta_1^2 p_{11}^2 - \\
& - \frac{1}{32} \beta_1 B_2 p_{11} m_{11}^2 - \frac{3}{8} c_{10;1} e_J^{(p)} \beta_1 m_{11} p_{22} p_0 + \frac{1}{4} C_{11} p_0 m_{11} m_{22} - \\
& - \frac{1}{8} c_{11;1} e_J^{(p)2} \beta_1^2 m_{11} p_0 s_{22} + \frac{5}{32} c_{01;2} p_0 e_J^{(p)2} \beta_1^2 p_{11} m_{11}^2 -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{4} c_{10;1} p_0^2 e_J^{(p)} \beta_1 m_{11} m_{22} + \frac{3}{64} m_{11} c_{01;2} p_0 e_J^{(p)2} \beta_1^2 p_{11} + \\
& + \frac{1}{64} p_{11} e_J^{(p)} \beta_1 m_{11}^2 + \frac{1}{16} p_{11} e_J^{(p)} \beta_1 m_{22} + \frac{1}{16} e_J^{(p)} \beta_1 m_{11} p_{22} + \\
& + \frac{1}{4} c_{01;2} p_0^4 m_{11} m_{22} + \frac{1}{8} m_{11} c_{01;1} p_0 p_{22} + \frac{1}{64} C_{11} p_{11} m_{11}^2 - \\
& + \frac{1}{16} c_{11;1} e_J^{(p)2} \beta_1^2 p_{11} s_{22} - \frac{1}{4} c_{01;1} e_J^{(p)2} \beta_1^2 m_{11} m_{22} + \frac{1}{16} C_{11} p_{11} m_{22} + \\
& + \frac{1}{4} c_{01;0} m_{11} m_{22} + \frac{3}{16} c_{01;2} p_0^2 p_{11} p_{22} - \frac{1}{16} C_{11} m_{11} p_0 s_{22} + \\
& + \frac{1}{4} c_{10;1} e_J^{(p)3} \beta_1^3 m_{11} m_{22} + \frac{1}{8} \beta_1 B_2 m_{11} p_0 s_{22} + \frac{1}{8} c_{11;1} e_J^{(p)2} \beta_1^2 m_{11} p_{22} + \\
& + \frac{3}{64} c_{11;1} p_0^2 p_{11} m_{11}^2 + \frac{3}{16} c_{11;1} p_0^2 m_{11} p_{22} + \frac{1}{4} m_{11} c_{01;2} p_0^3 p_{22} - \\
& - \frac{1}{32} C_{11} p_{22} + \frac{1}{4} 8 c_{01;1} e_J^{(p)2} \beta_1^2 m_{11}^3 + \frac{1}{32} c_{11;1} e_J^{(p)2} \beta_1^2 p_{11} m_{11}^2 - \\
& - \frac{1}{4} 8 c_{10;1} p_0^2 e_J^{(p)} \beta_1 m_{11}^3 - \frac{3}{128} c_{10;1} p_{11}^2 e_J^{(p)} \beta_1 m_{11} - \\
& - \frac{1}{4} 8 c_{10;1} e_J^{(p)3} \beta_1^3 m_{11}^3 + \frac{3}{16} c_{11;1} p_0^2 p_{11} m_{22} + \frac{1}{4} c_{01;1} p_0^2 m_{11} m_{22} - \\
& - \frac{1}{8} c_{10;1} e_J^{(p)} \beta_1 m_{11} p_0^2 s_{22} - \frac{1}{32} c_{11;1} p_0^2 m_{11} p_{11} + \\
& + \frac{3}{32} c_{01;2} e_J^{(p)2} \beta_1^2 p_0 p_{22} - \frac{1}{8} c_{10;1} p_0^2 e_J^{(p)} \beta_1 m_{22} + \frac{1}{32} \beta_1 B_2 m_{11} p_{11} + \\
& + \frac{1}{8} \beta_1 B_2 p_0 m_{22} - \frac{1}{8} \beta_1 B_2 p_0 s_{22} - \frac{1}{16} c_{11;1} p_0^2 p_{22} - \\
& + \frac{3}{64} c_{10;1} e_J^{(p)} \beta_1 m_{11} p_{11} p_0 + \frac{1}{16} \beta_1 B_2 p_{22} - \frac{11}{32} c_{10;1} p_0^2 e_J^{(p)} \beta_1 s_{22} - \\
& - \frac{1}{8} c_{11;1} e_J^{(p)2} \beta_1^2 p_0 m_{22} + \frac{1}{16} c_{01;2} p_0^2 e_J^{(p)2} \beta_1^2 m_{11}^3 + \\
& + \frac{1}{8} c_{11;1} e_J^{(p)2} \beta_1^2 p_{11} m_{22} + \frac{1}{4} 8 c_{01;2} e_J^{(p)4} \beta_1^4 m_{11}^3 - \\
& - \frac{3}{32} c_{10;1} e_J^{(p)} \beta_1 p_{22} p_0 - \frac{1}{16} c_{11;1} e_J^{(p)2} \beta_1^2 p_{22} - \\
& - \frac{3}{32} c_{10;1} p_{11} p_{22} e_J^{(p)} \beta_1 - \frac{1}{32} c_{11;1} e_J^{(p)2} \beta_1^2 m_{11} p_{11} - \frac{1}{32} m_{11} p_0 B_2 \beta_1 + \\
& + \frac{1}{8} e_J^{(p)} \beta_1 p_0 s_{33} + \frac{1}{8} e_J^{(p)} \beta_1 p_{33} + \frac{5}{4} c_{01;2} e_J^{(p)2} \beta_1^2 p_0 p_{33} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{3}{2} c_{11;1} e_J^{(p)2} \beta_1^2 p_0 m_{33} + \frac{3}{2} c_{01;2} p_0^2 e_J^{(p)2} \beta_1^2 m_{33} - \\
& - \frac{1}{4} c_{11;1} e_J^{(p)2} \beta_1^2 p_0 s_{33} + \frac{1}{2} C_{11} p_0 m_{33} - \frac{1}{4} \beta_1 B_2 p_{33} + \\
& + \frac{1}{4} c_{01;1} p_0 p_{33} - \frac{3}{4} c_{10;1} e_J^{(p)} \beta_1 p_{33} p_0 + \frac{1}{2} c_{01;2} e_J^{(p)4} \beta_1^4 m_{33} + \\
& + \frac{1}{4} c_{01;2} p_0^2 e_J^{(p)2} \beta_1^2 s_{33} + \frac{1}{2} c_{11;1} p_0^3 m_{33} - \beta_1 B_2 p_0 m_{33} + \\
& + \frac{1}{4} \beta_1 B_2 p_0 s_{33} - \frac{1}{4} c_{10;1} p_0^2 e_J^{(p)} \beta_1 s_{33} + \frac{1}{4} c_{11;1} e_J^{(p)2} \beta_1^2 p_{33} + \\
& + \frac{1}{2} c_{01;1} p_0^2 m_{33} - \frac{1}{8} C_{11} p_0 s_{33} - \frac{1}{8} c_{11;1} p_0^3 s_{33} + \\
& + \frac{1}{2} c_{01;1} e_J^{(p)2} \beta_1^2 m_{33} + \frac{1}{2} e_J^{(p)} \beta_1 p_0 m_{33} + \frac{1}{2} c_{01;2} p_0^4 m_{33} + \\
& + \frac{3}{8} c_{11;1} p_0^2 p_{33} - \frac{1}{2} c_{10;1} p_0^2 e_J^{(p)} \beta_1 m_{33} - \frac{1}{2} c_{10;1} e_J^{(p)3} \beta_1^3 m_{33} + \\
& + \frac{1}{2} c_{01;2} p_0^3 p_{33} + \frac{1}{32} m_{11}^2 p_0 B_2 \beta_1 \Big) Q^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\Delta_1 R)_{3-2} & = -\frac{1}{768} e_J^{(p)} \left(24 c_{01;1} \beta_1 p_{22} + 128 C_{11} \beta_1 m_{11}^3 - 256 \beta_1^2 B_2 m_{11}^3 + \right. \\
& + 3 c_{01;2} \beta_1 p_{11}^3 + 24 c_{0;1,1} \beta_1 m_{11} p_{11} - 1536 \beta_1^2 B_2 m_{11} m_{22} - 128 e_J^{(p)} B_2 \beta_1^2 m_{11}^3 + \\
& + 128 e_J^{(p)} B_2 \beta_2^2 m_{11}^3 + 224 c_{01;2} p_0^3 \beta_1 m_{11}^3 + 768 C_{11} \beta_1 m_{11} m_{22} + \\
& + 24 c_{01;1} \beta_1 p_{11} s_{22} + 96 c_{01;1} \beta_1 m_{11} p_{22} + 48 c_{01;2} e_J^{(p)2} \beta_1^3 p_{22} + 96 c_{01;1} \beta_1 p_0 m_{22} + \\
& + 48 c_{01;1} \beta_1 p_{11} m_{11}^2 - 24 c_{10;1} e_J^{(p)} \beta_1^2 p_{22} + 240 c_{01;2} p_0^3 \beta_1 s_{22} + \\
& + 96 c_{01;1} \beta_1 p_{11} m_{22} + 48 c_{01;1} \beta_1 p_0 s_{22} + 128 c_{11;1} e_J^{(p)2} \beta_1^3 m_{11}^3 + \\
& + 144 c_{11;1} p_0^2 \beta_1 s_{22} + 48 c_{11;1} \beta_1 p_{11} p_{22} + 240 c_{11;1} p_0^2 \beta_1 m_{11}^3 + \\
& + 96 c_{01;2} p_0^2 \beta_1 p_{22} + 24 c_{11;1} p_{11}^2 \beta_1 m_{11} + 192 c_{01;2} p_0^3 \beta_1 m_{22} + 112 c_{01;1} \beta_1 p_0 m_{11}^3 + \\
& + 72 c_{11;1} p_0^2 \beta_1 m_{11} - 96 c_{10;1} e_J^{(p)} \beta_1^2 m_{11} p_0 s_{22} + \\
& + 384 c_{01;2} p_0 e_J^{(p)2} \beta_1^3 m_{11} m_{22} + 192 c_{01;2} e_J^{(p)2} \beta_1^3 m_{11} p_0 s_{22} - \\
& - 576 c_{10;1} p_0 e_J^{(p)} \beta_1^2 m_{11} m_{22} - 6 c_{10;1} e_J^{(p)} \beta_1^2 p_{11} + 12 e_J^{(p)2} \beta_1^3 p_{11} c_{01;2} + \\
& + 24 c_{11;1} p_0 p_{11} \beta_1 + 6 \beta_1 p_{11} c_{01;1} + 57 \beta_1 p_{11} c_{01;2} p_0^2 - 768 e_J^{(p)} B_2 \beta_1^2 m_{11} m_{22} - \\
& - 24 c_{10;1} e_J^{(p)} \beta_1^2 m_{11} p_{11} + 96 c_{01;2} e_J^{(p)2} \beta_1^3 p_{11} m_{11}^2 + \\
& + 48 c_{01;2} e_J^{(p)2} \beta_1^3 m_{11} p_{11} + 384 c_{11;1} e_J^{(p)2} \beta_1^3 m_{11} m_{22} -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 96 c_{10;1} p_0 e_J^{(p)} \beta_1^2 m_{22} - 48 c_{10;1} p_{11} e_J^{(p)} \beta_1^2 m_{11}^2 - 96 c_{10;1} e_J^{(p)} \beta_1^2 m_{11} p_{22} + \\
& + 48 e_J^{(p)2} \beta_1^3 p_{11} c_{01;2} s_{22} + 192 c_{11;1} p_0 \beta_1 p_{11} m_{11}^2 + \\
& + 288 c_{01;2} p_0^2 \beta_1 p_{11} m_{11}^2 + 96 c_{01;1} \beta_1 m_{11} p_0 s_{22} + 1152 c_{01;2} p_0^3 \beta_1 m_{11} m_{22} + \\
& + 96 c_{01;2} p_0^2 p_{11} \beta_1 m_{11} + 96 c_{01;2} p_0^2 p_{11} \beta_1 s_{22} + 192 c_{01;2} p_0^3 \beta_1 m_{11} s_{22} + \\
& + 72 c_{01;2} p_0 \beta_1 p_{11}^2 m_{11} + 1344 c_{11;1} p_0^2 \beta_1 m_{11} m_{22} + 384 c_{11;1} p_0 \beta_1 m_{11} p_{22} + \\
& + 768 e_J^{(p)} B_2 \beta_2^2 m_{11} m_{22} + 224 c_{01;2} e_J^{(p)2} \beta_1^3 p_0 m_{11}^3 + \\
& + 96 c_{01;2} e_J^{(p)2} \beta_1^3 p_0 s_{22} - 48 c_{10;1} e_J^{(p)} \beta_1^2 p_0 s_{22} - \\
& + 24 c_{10;1} e_J^{(p)} \beta_1^2 p_{11} s_{22} + 384 c_{11;1} p_0 \beta_1 p_{11} m_{22} - 96 c_{10;1} e_J^{(p)} \beta_1^2 p_{11} m_{22} + \\
& + 192 c_{01;2} e_J^{(p)2} \beta_1^3 m_{11} p_{22} - 112 c_{10;1} p_0 e_J^{(p)} \beta_1^2 m_{11}^3 + \\
& + 192 e_J^{(p)2} \beta_1^3 p_{11} c_{01;2} m_{22} + 144 c_{01;2} p_0 \beta_1 p_{11} p_{22} + 576 c_{01;2} p_0^2 p_{11} \beta_1 m_{22} + \\
& + 576 c_{01;2} p_0^2 \beta_1 m_{11} p_{22} + 576 c_{01;1} p_0 \beta_1 m_{11} m_{22} + 192 c_{01;2} e_J^{(p)2} \beta_1^3 p_0 m_{22} + 8 c_{01;2} p_0 e_J^{(p)2} \beta_1^3 - \\
& + 4 c_{10;1} e_J^{(p)} \beta_1^2 p_0 + 17 \beta_1 p_0^3 c_{01;2} + 4 c_{01;1} p_0 \beta_1 + 24 p_0 \beta_1 m_{11} c_{01;1} + \\
& + 15 c_{01;2} p_0 \beta_1 p_{11}^2 + 96 c_{01;2} p_0^3 \beta_1 m_{11}^2 + 48 c_{01;1} p_0 \beta_1 m_{11}^2 + \\
& + 120 c_{01;2} p_0^3 \beta_1 m_{11} + 48 c_{01;2} e_J^{(p)2} \beta_1^3 p_0 m_{11} - \\
& + 48 c_{10;1} p_0 e_J^{(p)} \beta_1^2 m_{11}^2 + 96 c_{01;2} p_0 e_J^{(p)2} \beta_1^3 m_{11}^2 - \\
& + 24 c_{10;1} e_J^{(p)} \beta_1^2 p_0 m_{11} - 384 c_{10;1} p_0 e_J^{(p)} \beta_1^2 m_{33} + 192 c_{01;2} e_J^{(p)2} \beta_1^3 p_{33} + \\
& + 96 c_{01;1} \beta_1 p_{33} + 384 c_{11;1} p_0 \beta_1 p_{33} + 576 c_{01;2} p_0^2 \beta_1 p_{33} + \\
& + 768 c_{01;2} p_0^3 \beta_1 m_{33} - 96 c_{10;1} p_0 e_J^{(p)} \beta_1^2 s_{33} + 192 c_{01;2} p_0^3 \beta_1 s_{33} + \\
& + 96 c_{01;1} \beta_1 p_0 s_{33} + 192 c_{01;2} e_J^{(p)2} \beta_1^3 p_0 s_{33} + 768 c_{01;2} e_J^{(p)2} \beta_1^3 p_0 m_{33} + \\
& + 1152 c_{11;1} p_0^2 \beta_1 m_{33} - 1536 \beta_1^2 B_2 m_{33} + 384 c_{01;1} \beta_1 p_0 m_{33} + \\
& + 768 c_{11;1} e_J^{(p)2} \beta_1^3 m_{33} - 96 c_{10;1} e_J^{(p)} \beta_1^2 p_{33} + 768 C_{11} \beta_1 m_{33} + 768 e_J^{(p)} B_2 \beta_2^2 m_{33} - \\
& - 768 e_J^{(p)} B_2 \beta_1^2 m_{33}) Q^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\Delta_1 R)_{3-3} &= \frac{1}{384} e_J^{(p)2} \beta_1^2 (48 c_{11;1} p_{33} + 96 c_{01;2} p_0 p_{33} + \\
& + 384 c_{11;1} p_0 m_{33} + 192 c_{01;2} p_0^2 m_{33} + 48 c_{11;1} p_0 s_{33} + 96 c_{01;2} p_0^2 s_{33} + \\
& + 45 c_{01;2} p_0^2 m_{11} + 108 c_{01;2} p_0^2 m_{11}^2 + 54 c_{11;1} p_0 m_{11}^2 + \\
& + 18 c_{11;1} p_0 m_{11} + 7 c_{01;2} p_0^2 + 2 c_{11;1} p_0 + 3 c_{01;2} p_{11}^2 + 54 c_{11;1} p_{11} m_{11}^2 + \\
& + 12 c_{11;1} p_{11} s_{22} + 72 c_{11;1} p_{11} m_{22} + 200 c_{01;2} p_0^2 m_{11}^3 + 60 c_{01;2} p_0^2 s_{22} + \\
& + 72 c_{11;1} p_0 m_{22} + 9 m_{11} c_{01;2} p_{11}^2 + 18 c_{11;1} m_{11} p_{11} + 208 c_{11;1} p_0 m_{11}^3 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 12 c_{01;2} p_{11} p_{22} + 72 c_{11;1} m_{11} p_{22} + 36 c_{01;2} p_0 p_{22} + 24 c_{11;1} p_0 s_{22} + \\
& + 144 c_{01;2} p_0^2 m_{22} + 144 c_{01;2} p_0 m_{11} p_{22} + 672 c_{01;2} p_0^2 m_{11} m_{22} + 36 c_{01;2} p_0 p_{11} s_{22} + \\
& + 54 c_{01;2} p_0 m_{11} p_{11} + 144 c_{01;2} p_0^2 m_{11} s_{22} + 144 c_{01;2} p_0 p_{11} m_{22} + \\
& + 12 c_{11;1} p_{22} + 108 c_{01;2} p_0 p_{11} m_{11}^2 + 72 c_{11;1} m_{11} p_0 s_{22} + 12 p_{11} c_{01;2} p_0 + \\
& + 768 c_{11;1} p_0 m_{11} m_{22} + 3 c_{11;1} p_{11}) Q^3
\end{aligned}$$

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)