

Universidade Federal de São Carlos - UFSCar
Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Departamento de Física
Programa de Pós-Graduação em Física

Progressos na Solução Algébrica de Modelos Integráveis Bidimensionais

Cláudio Silva de Melo
Orientador: Prof. Dr. Márcio José Martins

Tese de doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de São Carlos como requisito parcial à obtenção do título de Doutor em Física.

São Carlos
Julho - 2008

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

**Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da
Biblioteca Comunitária/UFSCar**

M528ps

Melo, Cláudio Silva de.

Progressos na solução algébrica de modelos integráveis
bidimensionais / Cláudio Silva de Melo. -- São Carlos :
UFSCar, 2008.
193 f.

Tese (Doutorado) -- Universidade Federal de São Carlos,
2008.

1. Teoria e física matemática. 2. Modelos integráveis.
3. Ansatz de Bethe. I. Título.

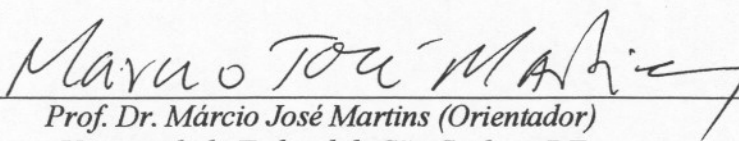
CDD: 530.1 (20^a)

CLAUDIO SILVA DE MELO

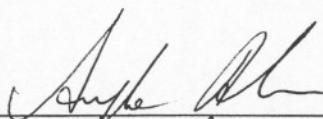
Tese de Doutorado submetida à
Coordenação do Programa de Pós-
Graduação em Física, da Universidade
Federal de São Carlos, como requisito
parcial para a obtenção do título de
Doutor em Ciências.

Aprovada em 27 de agosto de 2008.

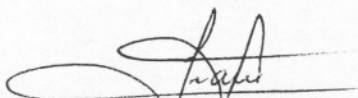
BANCA EXAMINADORA



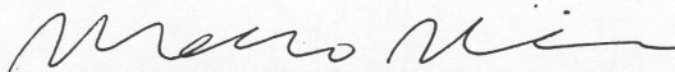
Prof. Dr. Márcio José Martins (Orientador)
Universidade Federal de São Carlos - DF



Prof. Dra. Ângela Foerster
Universidade Federal do Rio Grande do Sul - IF



Prof. Dr. Francisco Castilho Alcaraz
Universidade de São Paulo - IFSC



Prof. Dr. Marco Moriconi
Universidade Federal Fluminense- IF



Prof. Dr. Paulo Afonso Faria da Veiga
Universidade de São Paulo - ICMC-SC



Agradecimentos

Ao Departamento de Física da Universidade Federal de São Carlos pelo apoio institucional e pelas facilidades oferecidas.

À FAPESP, pelo suporte financeiro.

Ao Prof. Márcio José Martins por todas as oportunidades, pela orientação, amizade e motivação.

Aos meus amigos, Wellington, Patão, Juninho, Ioshi, Juca, Bambam, Chicão, Guto, Zé Gota, Dodonov, Cacheffo, Lara, Helder, Daniel, dentre outros, pelos bons tempos de convivência.

Aos meus pais, meus irmãos e minha irmã, Newton, Irene, Márcio, Milena, Bruno e Júnior por serem minha família.

A minha querida Patrícia, pelo apoio e incentivo incondicional à realização deste trabalho.

A minha querida Camila, luz do meu viver.

A Deus, pela Vida.

Resumo

Nesta tese desenvolvemos as ferramentas essenciais utilizadas na solução algébrica do ansatz de Bethe para modelos de vértices integráveis invariantes por uma única simetria de carga $U(1)$. O formalismo aqui apresentado tem como principal aspecto ser válido para pesos estatísticos arbitrários com N graus de liberdade. Demonstramos que as regras de comutação fundamentais entre os elementos da matriz de monodromia são obtidas por meio de determinados sistemas lineares. Os autovetores da matriz de transferência são determinados em termos de novas relações de recorrência descritas em termos de $N - 1$ tipos de campos de criação. A ação da matriz de transferência nos autovetores é determinada explicitamente em termos de pesos estatísticos arbitrários. Aplicamos nossa formulação no caso de modelos de vértices derivados de representações de tranças associadas a álgebra $U_q[SU(2)]$ para valores não genéricos do parâmetro q . Isto proporcionou uma oportunidade para empregarmos nosso formalismo em sistemas cujas respectivas matrizes R são aditivas ou não aditivas em relação ao parâmetro espectral.

Abstract

In this work we have developed the essential tools entering the algebraic Bethe ansatz solution of integrable vertex models that are invariant by a single $U(1)$ charge symmetry. The main feature of our formulation is its validity for both arbitrary form of the statistical weights and the respective number N of degrees of freedom. We argue that the fundamental commutation rules among the monodromy matrix elements are obtained by solving certain specific linear systems of equations. The corresponding transfer matrix eigenstates are given by means of a new recurrence relation that depends on $N - 1$ distinct types of creation fields. The necessary identities to solve the eigenvalue problem are obtained exploring the unitarity property and the Yang-Baxter equation satisfied by the R -matrix. The on-shell and off-shell properties of the algebraic Bethe ansatz are explicitly presented in terms of the arbitrary R -matrix elements. This includes the transfer matrix eigenvalues, the Bethe ansatz equations and the structure of the vectors not parallel to the eigenstates. We apply the formulation in the case of vertex models derived from the braid group representations of the quantum algebra $U_q[SU(2)]$ for non-generic values of q . This makes it possible to use our framework in systems where the respective R -matrix can be either additive or non-additive with respect the spectral parameters.

Sumário

Introdução	1
I.1 Integrabilidade Clássica	2
I.2 Integrabilidade Quântica	4
I.3 Método Algébrico	8
1 Representação de modelos de vértices	14
2 Relações fundamentais de comutação	17
2.1 Campos diagonal e criação	17
2.2 Campos de criação	24
2.3 Campos de criação e aniquilação	30
3 Identidades dos pesos de Boltzmann	49
3.1 Relação de unitariedade	49
3.2 Equação de Yang-Baxter	58
4 O problema de autovalor	70
4.1 Estado de uma partícula	71
4.2 Estado de duas partículas	73
4.3 Estado de três partículas	81
4.4 Estado de multi-partículas	93
5 Aplicações	105
5.1 Trança e a matriz R	105
5.2 Matrizes R não-aditivas	110
6 Conclusão	119
Apêndice A: caso $a = N - 1$ das identidades dos pesos de Boltzmann	122
Apêndice B: estado de duas partículas	131
Apêndice C: estado de três partículas	152

Apêndice D: estado de quatro partículas	182
Referências	191

Lista de Figuras

1	Espalhamento de duas partículas representando a troca de graus de liberdade internos: $(\alpha_1, \alpha_2) \rightarrow (\beta_1, \beta_2)$	5
2	Espalhamento fatorizável de três partículas.	6
3	Representação da rede bidimensional $m \times m$ e dos pesos estatísticos locais $R_{a,b}^{c,d}(\lambda, p_i)$	15

Lista de Tabelas

1	Combinação linear construída a partir da Eq.(31) para obter as relações de comutação entre os campos $\mathcal{T}_{a,a}(\lambda)$ e $\mathcal{T}_{1,b}(\lambda)$. O número de equações em cada combinação linear é governado pelo índice c	18
2	Combinação linear derivada da Eq.(50) para obtermos a relação apropriada de comutação entre os campos $\mathcal{T}_{1,b_1-d_1}(\lambda)$ e $\mathcal{T}_{a_1-1,a_1+d_1}(\lambda)$. Os índices a_1 , b_1 e d_1 pertencem aos intervalos definidos pela Eq.(49).	25
3	Número de relações de comutação entre os campos de criação para b_1 ou N fixo.	29
4	Combinação linear da Eq.(62) com $c_2 = 0$ para cancelar o produto de operadores $\mathcal{T}_{\bar{e},a_1-1}(\lambda)\mathcal{T}_{f_1+1-\bar{e},b}(\mu)$ quando \bar{e} pertence ao intervalo (64).	32
5	Combinação linear derivada da Eq.(62) para calcular os produtos da forma $\mathcal{T}_{c_1+1,\bar{e}}(\mu)\mathcal{T}_{f_1-c_1,a_1+b-1-\bar{e}}(\lambda)$	35
6	Combinações lineares derivadas da Eq.(62) necessárias para obtermos as regras de comutação entre os campos $\mathcal{T}_{a_1+d_1,a_1-1}(\lambda)$ e $\mathcal{T}_{1,b}(\mu)$	37
7	Estrutura dos blocos diagonais da matriz R associado ao autovalor $s_q = N - q$ do operador $S^z \otimes I_N + I_N \otimes S^z$	50
8	Duas famílias de combinações lineares utilizadas para derivar identidades que envolvam a fatorização de três termos distintos.	59

Introdução

A visão pragmática do conceito de integrabilidade em geral está diretamente associada com a possibilidade de calcular exatamente certas quantidades de um dado sistema físico de interesse. Esta definição de integrabilidade certamente está longe de ser rigorosa. De fato, na Mecânica Clássica o conceito de integrabilidade é fundamental na classificação de sistemas, pois os separam em duas classes distintas: integráveis e caóticos. Por outro lado, existe uma real dificuldade em estender o conceito de integrabilidade clássica para sistemas quânticos. Neste sentido, historicamente a contribuição considerada como o marco inicial da elaboração de métodos exatos em sistemas quânticos unidimensionais ou clássicos bidimensionais foi a solução dada por H. Bethe em 1931 [1], para o modelo isotrópico de Heisenberg. Hans Bethe utilizou uma hipótese para as funções de onda deste modelo que ficou conhecida com o nome de *ansatz* de Bethe. Outros grandes avanços foram a técnica da matriz de transferência desenvolvida por Kramers e Wannier em 1941 [2], que mais tarde desempenhou um papel fundamental na definição de integrabilidade, e a solução do modelo de Ising bidimensional dada por Onsager em 1944 [3]. No estudo do modelo totalmente anisotrópico de Heisenberg, Baxter [4] obteve condições de integrabilidade para os pesos de Boltzmann do modelo de 8-vértices equivalente. Paralelamente, no *ansatz* da solução de gás de Fermi interagente via potencial delta, condições similares foram encontradas por McGuire [5], Gaudin [6] e Yang [7]. Atualmente, essas condições são conhecidas como a equação de Yang-Baxter. A importância dessa equação foi melhor compreendida com o advento do Método do Espalhamento Inverso Quântico desenvolvido pela escola de Leningrado [8] que unificou a técnica da matriz de transferência, a equação de Yang-Baxter e o *ansatz* de Bethe. Através do Método do Espalhamento Inverso Quântico a matriz de transferência ganhou o papel de uma função geradora de uma família de quantidades conservadas, o *ansatz* de Bethe, que torna-se trabalhoso para modelos que possuem um grande número de estados acessíveis, adquire uma abordagem algébrica, que se fundamenta na comutatividade da matriz de transferência e por fim, passamos a melhor entender a estrutura algébrica da equação de Yang-Baxter. Subsequentemente, Sklyanin [9] generalizou o conceito de matriz de transferência comutante no caso de condição aberta de contorno. Tal extensão foi construída no espírito do Método do Espalhamento Inverso Quântico e envolveu a utilização de duas novas matrizes satisfazendo as chamadas equações de reflexão [9] que garantem a integrabilidade na

fronteira. Mencionamos também que recentemente progressos na formulação do espalhamento inverso quântico no caso de condições de fronteira abertas foram obtidas [10, 11]. Desta forma, a equação de Yang-Baxter passa a ser condição fundamental de integrabilidade para modelo de vértices com condição de fronteira aberta ou fechada. O estudo de métodos que nos permitam obter soluções dessa equação representa, sem sombra de dúvida, um tema de grande importância.

Para melhor entendermos a dificuldade em definir integrabilidade quântica, a seguir descrevemos o conceito de integrabilidade clássica, abordando a dificuldade de estender esse conceito e apresentando uma tentativa de definir integrabilidade quântica.

I.1 Integrabilidade Clássica

O conceito de integrabilidade na Mecânica Clássica possui um papel fundamental uma vez que esse é capaz de particionar sistemas Hamiltonianos. As soluções das equações de movimentos de sistemas clássicos integráveis numeram globalmente o espaço de fase em superfícies as quais no caso compacto e conexo possuem a topologia de um torus multi-dimensional. Como consequência, o espectro de Fourier das trajetórias é discreto e apenas uma pequena parte das regiões do espaço de fase total é visitada, mesmo após um intervalo de tempo muito grande (infinito). Por outro lado, sistemas clássicos não-integráveis não possuem este tipo de espaço de fase global. Em geral, as evoluções temporais de trajetórias vizinhas são bastante diferentes para tempos grandes. O espectro de Fourier das trajetórias contem uma componente contínua, e previsões confiáveis sobre a evolução temporal é um problema difícil devido a complexidade dos possíveis movimentos.

Uma questão bastante natural é se tal separação discutida acima permanece na Mecânica Quântica. Em outras palavras, o que significa um sistema ser quanticamente integrável e qual as consequências desta propriedade no comportamento físico do sistema. A resposta a esta questão aparenta ser altamente não-trivial devido à dificuldade em uma definição concreta de integrabilidade quântica. Com objetivo de entendermos a raiz do problema temos primeiramente que definir o conceito de integrabilidade clássica. Considere um sistema unidimensional de f partículas clássicas descritas pelas coordenadas generalizadas $\vec{q} = (q_1, \dots, q_f)$ e momentos $\vec{p} = (p_1, \dots, p_f)$, cuja dinâmica é descrita pela Hamiltoniana $H(\vec{q}, \vec{p})$ através das equações de

movimento,

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = 1, \dots, f. \quad (1)$$

Dizemos que tal sistema é integrável quando as seguintes propriedades são satisfeitas:

1. Existem f constantes de movimento I_1, \dots, I_f definidas no espaço de fase (\vec{q}, \vec{p}) , tal que o parêntese de Poisson¹ entre H e I_i é nulo,

$$\{H, I_i\} = 0, \quad i = 1, \dots, f. \quad (2)$$

2. Todas as f constantes de movimento I_i estão em evolução,

$$\{I_i, I_j\} = 0, \quad \forall i, j. \quad (3)$$

3. Todas as constantes de movimento I_i são funcionalmente independentes. Esta condição garante que em cada hipersuperfície, definidas pelos pontos do espaço de fase (\vec{q}, \vec{p}) tal que $I_i(\vec{q}, \vec{p}) = I_i$ mantenha seus valores iniciais de I_i , as direções do gradiente no espaço de fase ∇I_i são linearmente independentes².

A primeira vista é tentador estender a noção de integrabilidade clássica para sistemas quânticos não relativísticos usando a prescrição de Dirac. Ou seja, trocar os parênteses de Poisson por comutadores entre os respectivos operadores quânticos,

$$\{ , \} \rightarrow \frac{i}{\hbar} [,]. \quad (4)$$

Claramente, as condições (1) e (2) são facilmente transladadas no caso quântico com a prescrição de Dirac. Entretanto, a noção de independência funcional (3), a qual é crucial no conceito de integrabilidade clássica, aparentemente não possui uma clara extensão. Em outras palavras, qual deve ser a definição correta de independência das integrais de movimento no caso quântico? Infelizmente, até o presente momento, não sabemos como propor um análogo da idéia de independência clássica no caso de operadores.

¹ $\{F, G\} = \sum_{i=1}^f \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i}$.

²Devem existir f 1-formas linearmente independentes.

Desta forma a prescrição de Dirac torna-se apenas uma tentativa de definição de integrabilidade quântica. Até o presente momento, a nossa definição de integrabilidade quântica explora apenas o lado pragmático do problema: Dizemos que um sistema é integrável quanticamente quando é possível, pelo menos em princípio, determinar exatamente algumas das suas propriedades físicas, tais como o espectro do sistema, a natureza das excitações elementares e possivelmente funções de correlação entre operadores fundamentais. A seguir definiremos uma importante classe de sistemas quânticos que é conhecido ser passível de solução exata no sentido descrito acima.

I.2 Integrabilidade Quântica

Atualmente, a definição mais abrangente de sistemas quânticos interagentes e integráveis está restrita a uma dimensão espacial e uma dimensão temporal. Como exemplo, considere um sistema não relativístico de tamanho L composto por m partículas idênticas de massa M interagindo em uma dimensão através do potencial $V(x)$ invariante por translação espacial. A dinâmica deste sistema é governada pelo operador

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2M} \int_0^L dx \psi_\alpha^\dagger(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi_\alpha(x) + \int_0^L dx \int_0^L dy \psi_\alpha^\dagger(x) \psi_\beta^\dagger(y) V_{\alpha,\beta}^{\gamma,\delta}(x-y) \psi_\gamma(x) \psi_\delta(y) \quad (5)$$

onde $V_{\alpha,\beta}^{\gamma,\delta}(x-y)$ é o potencial de interação. A soma sobre os índices repetidos representados pelas letras gregas $\alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, \dots, N$ é assumida. Os operadores $\psi_\alpha(x)$ e $\psi_\alpha^\dagger(x)$ representam respectivamente a aniquilação ou criação da partícula com grau de liberdade interno α em relação ao estado de referência. O operador número de partículas é então definido por

$$\hat{N} = \int_0^L dx \psi_\alpha^\dagger(x) \psi_\alpha(x). \quad (6)$$

O problema central a ser resolvido trata-se da determinação dos autovalores e das autofunções do operador \hat{H} ,

$$\hat{H} |\Psi_m\rangle = E_m |\Psi_m\rangle, \quad (7)$$

onde

$$\hat{N} |\Psi_m\rangle = m |\Psi_m\rangle. \quad (8)$$

A priori o caso particular de duas partículas pode ser resolvido exatamente para qualquer potencial $V(x)$. O sistema pode de fato ser separado em termos das coordenadas relativas e a do centro de massa. Devido a conservação de energia e momento, o espalhamento entre duas partículas idênticas em uma dimensão simplesmente corrige a função de onda assintótica através de uma matriz de espalhamento $R(p_1, p_2)_{\alpha_1, \alpha_2}^{\beta_1, \beta_2}$, onde p_1 e p_2 são os momentos das partículas. Este cenário é pictoricamente representado na Figura 1.

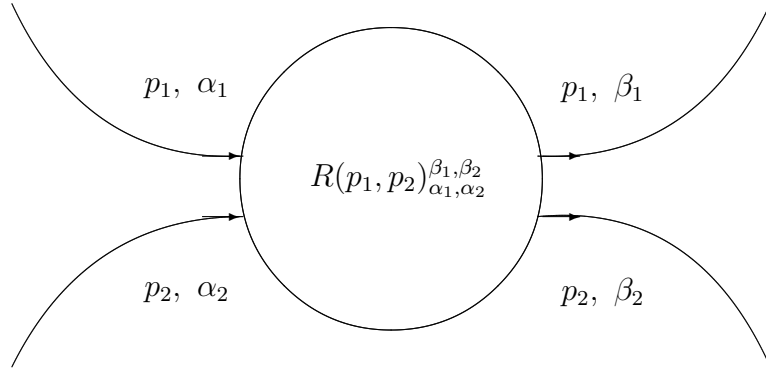


Figura 1: Espalhamento de duas partículas representando a troca de graus de liberdade internos: $(\alpha_1, \alpha_2) \rightarrow (\beta_1, \beta_2)$

Dizemos que o sistema de m -corpos (5-8) é exatamente solúvel quando o espalhamento entre as m -partículas é equivalente a uma sequência de espalhamentos de dois corpos. Em outras palavras, as partículas destes sistemas podem apenas trocar momentos e graus de liberdade internos. Esta noção de integrabilidade é portanto diretamente ligada a generalização mais simples que poderíamos imaginar de um sistema livre. Embora exista interação, esta proporciona apenas a permutação de um conjunto de momentos e graus de liberdades internos. Este espalhamento fatorizável impõe restrições importantes na possível forma das amplitudes da matriz $R(p_1, p_2)_{\alpha_1, \alpha_2}^{\beta_1, \beta_2}$. Com objetivo de discutir tais vínculos, é conveniente definir a seguinte matriz $R_{1,2}(p_1, p_2)$

$$R_{1,2}(p_1, p_2) = \sum_{\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2=1}^N R(p_1, p_2)_{\alpha_1, \alpha_2}^{\beta_1, \beta_2} e_{\alpha_1, \beta_1} \otimes e_{\alpha_2, \beta_2}, \quad (9)$$

através de um potencial delta de Dirac [5, 6, 7].

Assumindo a existência destas teorias integráveis, o próximo passo seria determinar a regra de quantização para os momentos p_i . Usualmente este problema é considerado distribuindo as m partículas em um círculo de raio L e assumindo que existem regiões nas coordenadas $|x_i - x_j| \geq R_c$, onde as partículas não interagem. Nestas regiões assintóticas a função de onda é simplesmente uma combinação linear de ondas planas com momento assintótico p_1, \dots, p_m . Ordenando as partículas da forma $0 \leq x_1 < \dots < x_m \leq L$, o vetor estado $|\Psi_m\rangle$ é expresso como uma função de onda generalizada de Bethe,

$$|\Psi_m\rangle = \int_0^L \int_{x_1}^L \dots \int_{x_{m-1}}^L dx_1 \dots dx_m \sum_{\mathcal{P}} A_{\alpha_1, \dots, \alpha_m}(\mathcal{P}|\mathcal{Q}) \exp \left[i \sum_{j=1}^m p_{\mathcal{P}_j} x_{\mathcal{Q}_j} \right] \prod_{k=1}^m \psi_{\alpha_k}^\dagger(x_{\alpha_k}) |0\rangle, \quad (13)$$

onde $\psi_{\alpha_k}^\dagger(x_{\alpha_k})$ representa um operador de criação de uma partícula com número quântico interno α_k no vácuo $|0\rangle$. A soma $\sum_{\mathcal{P}}$ é sobre todas as $m!$ permutações \mathcal{P} dos inteiros $\{1, \dots, m\}$ que identificam as partículas.

A interação entre as partículas permite que elas atravessem a região de interação e as correspondentes amplitudes $A_{\alpha_1, \dots, \alpha_m}(\mathcal{P}|\mathcal{Q})$ estão relacionadas uma a outra através da matriz $R_{1,2}(p_1, p_2)$ (9). Conseqüentemente, as amplitudes nas duas regiões distintas $(\mathcal{P}|\mathcal{Q})$ e $(\bar{\mathcal{P}}|\bar{\mathcal{Q}})$, onde não ocorre interação, diferem pela troca dos números quânticos internos entre partículas vizinhas e são conectadas através da seguinte relação

$$A_{\alpha_1, \dots, \bar{\alpha}_i, \bar{\alpha}_{i+1}, \dots, \alpha_m}(\bar{\mathcal{P}}|\bar{\mathcal{Q}}) = \sum_{\alpha_i, \alpha_{i+1}=1}^N R_{i,i+1}(p_i, p_{i+1})_{\bar{\alpha}_i, \bar{\alpha}_{i+1}}^{\alpha_i, \alpha_{i+1}} A_{\alpha_1, \dots, \alpha_m}(\mathcal{P}|\mathcal{Q}). \quad (14)$$

A energia E e o momento P totais da função de onda de Bethe (13) são dadas pelas expressões de partículas livres, isto é,

$$E = \sum_{k=1}^m \varepsilon(p_k) \quad P = \sum_{k=1}^m p_k, \quad (15)$$

onde $\varepsilon(p_k)$ é a relação de dispersão de uma partícula.

A regra de quantização para os momentos assintóticos é obtida considerando condições periódicas de contorno na função de onda (13) no anel de raio L . Operacionalmente esse procedimento é realizado utilizando sucessivamente a Eq.(14) com a finalidade de relacionar as

diferentes regiões do espaço de configuração. Considerando este procedimento, obtemos que o momentos p_k devem satisfazer à seguinte equação,

$$\exp[-Ip_k L] = \frac{\Lambda(\lambda = p_k)}{R(p_k, p_k)_{1,1}^{1,1}}, \quad \text{para } k = 1, \dots, m. \quad (16)$$

A função $\Lambda(\lambda = p_k)$ representa os autovalores de um operador auxiliar $T(\lambda)$ de dimensão $N^m \times N^m$ denominado de matriz de transferência. Esse problema de autovalor auxiliar é definido pela seguinte equação,

$$T(\lambda) |\Phi\rangle = \text{Tr}_{\mathcal{A}} [\mathcal{T}_{\mathcal{A}}(\lambda)] |\Phi\rangle = \Lambda(\lambda = p_k) |\Phi\rangle, \quad (17)$$

onde o traço é aplicado sobre o espaço auxiliar N -dimensional $\mathcal{A} = \mathcal{C}^N$. O operador monodromia $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}(\lambda)$ está relacionado aos elementos da matriz R através do seguinte produto ordenado,

$$\mathcal{T}_{\mathcal{A}}(\lambda) = R_{\mathcal{A},m}(\lambda, p_m) R_{\mathcal{A},m-1}(\lambda, p_{m-1}) \dots R_{\mathcal{A},1}(\lambda, p_1), \quad (18)$$

onde notamos que $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}(\lambda)$ depende implicitamente dos momentos p_1, \dots, p_m .

Desta forma, para realizarmos novos progressos é crucial obter a solução exata do problema de autovalores (17,18) para amplitudes de espalhamento de dois corpos e número de partículas m arbitrários. Todavia, esse é um problema em aberto não-trivial, especialmente quando não especificamos uma forma particular das amplitudes $R(\lambda, p_i)_{\alpha_1, \alpha_2}^{\beta_1, \beta_2}$.

I.3 Método Algébrico

O problema de autovalores mencionado na seção anterior pode em princípio ser resolvido pelo método do ansatz de Bethe algébrico [12, 13, 14]. Esta maneira algébrica de solucionar sistemas integráveis está diretamente associada ao método do espalhamento inverso quântico [12]. Enfatizamos que tal método possui um papel fundamental no desenvolvimento da teoria de modelos integráveis, pois proporcionou a descoberta de uma importante generalização do modelo de seis vértices [15], bem como da simetria de grupos quânticos [16, 17].

O objeto central no método de espalhamento inverso quântico é a matriz de monodromia (18) que depende continuamente do parâmetro espectral λ . Esse operador é comumente interpretado como uma matriz no espaço auxiliar \mathcal{A} e para um espaço N -dimensional podemos representá-lo

pela seguinte expressão

$$\mathcal{T}_A(\lambda) = \sum_{a,b=1}^N \mathcal{T}_{a,b}(\lambda) e_{a,b}. \quad (19)$$

Os elementos de matriz $\mathcal{T}_{a,b}(\lambda)$ atuam no espaço dos estados V de um sistema físico quântico e são os geradores de uma álgebra quadrática denominada de álgebra de Yang-Baxter. O conjunto das relações que definem essa álgebra é

$$\sum_{p,q=1}^N R(\lambda, \mu)_{a,b}^{p,q} \mathcal{T}_{p,c}(\lambda) \mathcal{T}_{q,d}(\mu) = \sum_{p,q=1}^N \mathcal{T}_{b,p}(\mu) \mathcal{T}_{a,q}(\lambda) R(\lambda, \mu)_{q,p}^{c,d}, \quad (20)$$

Análogo às álgebras de Lie, as funções $R(\lambda, \mu)_{a,b}^{c,d}$ podem ser interpretadas como constantes de estrutura da álgebra de Yang-Baxter (20). Conforme a Eq.(9), essas funções são frequentemente vistas como os elementos de uma matriz R de dimensão $N^2 \times N^2$ que atua no produto tensorial de dois espaços auxiliares. A associatividade da álgebra de Yang-Baxter exige que a matriz R satisfaça a equação de Yang-Baxter (12), onde $R_{ab}(p_a, p_b)$ denota a matriz R atuando no produto tensorial dos espaços $\mathcal{A}_a \otimes \mathcal{A}_b$.

Nesta tese consideramos somente as soluções da equação de Yang-Baxter (12) que satisfazem a propriedade de unitariedade (11). Salientamos que a propriedade de unitariedade (11) é uma consequência da equação de Yang-Baxter (12) assumindo que a matriz R seja regular. Esse hipótese é equivalente a exigirmos que $R_{ab}(\lambda, \lambda)$ seja proporcional ao permutador no espaço $C_a^N \otimes C_b^N$. Uma consequência direta da unitariedade é a existência da matriz inversa de $R_{1,2}(p_1, p_2)$. Ressaltamos que a invertibilidade da matriz R é uma condição necessária para demonstrarmos que a álgebra de Yang-Baxter conduz a uma matriz de transferência comutante (17), isto é,

$$[T(\lambda), T(\mu)] = 0 \quad (21)$$

Na teoria de modelos integráveis, o operador $T(\lambda)$ é tido como uma função geradora de quantidades conservadas, tais como a Hamiltoniana unidimensional associada. Portanto, o entendimento das propriedades físicas desses sistemas quânticos devem incluir ao menos o conhecimento dos autovalores e autovetores de $T(\lambda)$. Em princípio, a diagonalização de $T(\lambda)$ pode ser obtida através do formalismo algébrico do ansatz de Bethe. Para maiores detalhes sobre este assunto veja as referências [12, 18]. A idéia básica desse método consiste em explorar as relações de comutação entre os elementos da matriz de monodromia oriundas da álgebra

de Yang-Baxter (20). Em particular, os autovetores de $T(\lambda)$ são construídos aplicando apropriadas combinações de elementos fora da diagonal da matriz de monodromia em um estado de referência previamente escolhido. A principal característica exigida deste estado é que a projeção da matriz de monodromia neste vetor deve resultar em uma matriz triangular. Todavia, a existência desse estado de referência não garante de imediato o sucesso da solução do ansatz de Bethe. Na realidade, para valores gerais de N , não há nenhuma prescrição dos procedimentos a serem utilizados na implementação do ansatz de Bethe algébrico, mesmo quando o estado de referência é o estado ferromagnético. Para essa classe de modelos, a maioria dos resultados estão concentrados em sistemas integráveis muito específicos. Uma categoria representativa de modelos solúveis pelo ansatz de Bethe são aqueles cujas matrizes R são baseadas na representação de algumas álgebras de Lie especiais [19, 20, 21] e superálgebras graduadas Z_2 [22, 23, 24]. Aqui também destacamos a solução algébrica do modelo de Hubbard [24], a qual recentemente passou a desempenhar um papel relevante no estudo do espectro de energia de um model sigma não-linear no espaço $AdS_5 \times S^5$ [25, 26].

A abordagem do ansatz de Bethe algébrico torna-se mais envolvente quando a dependência da matriz R em relação ao parâmetro espectral não é especificada. Este fato torna-se evidente quando a matriz R comuta com pelo menos uma simetria de carga $U(1)$. Essa característica assegura que o pseudo-vácuo ferromagnético atua como um estado de referência para a maioria dos modelos integráveis fundamentais associados a essa matriz R . Em outras palavras, a teoria de modelos integráveis suporta implementarmos a diagonalização de $T(\lambda)$ sem fazer referência qualquer à forma funcional particular da matriz R . Lembramos que o principal ingrediente para iniciarmos uma análise algébrica é a existência de um estado de referência, tal que a ação da matriz de monodromia neste resulte em uma matriz triangular. Portanto, o problema de diagonalização deve ser completamente solucionado apenas baseado nas relações de comutação derivadas da álgebra de Yang-Baxter, nos vínculos impostos pela equação de Yang-Baxter e pela propriedade de unitariedade. Apesar da sua relevância, essa estratégia de solucionar modelos integráveis não foi praticamente explorada na literatura. Esse é particularmente o caso quando a dimensão da matriz de monodromia é $N \geq 3$, uma vez que devemos considerar a presença de diferentes tipos de campos de criação. O problema básico consiste em desvendar a maneira como esses campos contribuem à estrutura dos autovetores. Essa tarefa torna-se certamente mais complicada quando os elementos da matriz R não são especificados, uma

vez que é necessário utilizar identidades entre esses elementos para solucionar esse problema. Vale mencionar que tais identidades são obtidas a partir de combinações das relações geradas pela equação de Yang-Baxter e propriedade de unitariedade. De forma resumida o método de espalhamento inverso consiste em quatro etapas:

1. Encontrar um estado de referência, a partir do qual serão gerados os autovetores da matriz de transferência. Um requisito fundamental para esse estado é triangularizar a matriz de monodromia, isto é, a projeção dos elementos da matriz de monodromia neste vetor deve gerar uma matriz triangular. Além desse requisito, esse estado deve ser um autovetor dos elementos diagonais da matriz de monodromia.
2. Encontrar relações de comutação convenientes a partir da álgebra de Yang-Baxter (20).
3. Propor um autovetor (ansatz) e obter os autovalores da matriz de transferência. As restrições impostas sobre o ansatz afim de que esse seja um estado são determinadas a partir da análise da ação dos elementos diagonais da matriz de monodromia no vetor.
4. Calcular propriedades termodinâmica e funções de correlação. Neste trabalho não abordamos esse tópico.

Nesta tese apresentamos alguns progressos no sentido de formular o ansatz de Bethe algébrico para uma classe de modelos integráveis com matriz R arbitrária dada. Consideraremos a mais simples família de modelos cuja descrição do espaço de Hilbert requer a consideração de várias excitações independentes de quase-partículas. Essa família consiste dos sistemas cuja matriz R comuta com uma única simetria $U(1)$ para valores de N arbitrários,

$$[R_{12}(\lambda, \mu), S^z \otimes I_N + I_N \otimes S^z] = 0, \quad (22)$$

onde S^z denota a componente azimutal de um operador com spin $s = \frac{(N-1)}{2}$. Note que essa invariância estabelece que $R(\lambda, \mu)_{a,b}^{c,d} \neq 0$ somente quando a regra do gelo $a + b = c + d$ é satisfeita.

Explorando a simetria (22) podemos expressar a matriz R nos setores estabelecidos pelos autovalores do operador $U(1)$. Utilizando a base de Weyl, esses setores são facilmente parametrizados pela carga $q = a + b - 1$ e assim podemos reescrever a matriz R da seguinte

forma

$$R_{12}(\lambda, \mu) = \sum_{q=2}^{2N} \sum_{a,c=\bar{M}\{1,q-N\}}^{\bar{m}\{q-1,N\}} R(\lambda, \mu)_{a,q-a}^{c,q-c} e_{a,c} \otimes e_{q-a,q-c}, \quad (23)$$

onde $\bar{M}\{x, y\}$ ($\bar{m}\{x, y\}$) denota o máximo (mínimo) inteiro do par $\{x, y\}$.

Através da Eq.(23) derivamos que o número total de amplitudes não-nulas da matriz R é $N(2N^2 + 1)/3$. Esses sistemas estatísticos são generalizações multi-estados do modelos de seis vértices assimétricos $N = 2$ [27]. De acordo com nosso conhecimento, a solução exata desses modelos de vértices assimétricos para $N \geq 3$ para pesos $R(\lambda, \mu)_{a,b}^{c,d}$ arbitrários é um problema aberto. Nesta tese discutimos a diagonalização exata das matrizes de transferência desses modelos integráveis de uma maneira unificada [28, 29].

Esta tese está organizada de acordo com os procedimentos necessários para resolver esse problema de autovalor. Tais procedimentos estão separados da seguinte forma:

- Encontrar um estado de referência.

Na seção 1 descrevemos as propriedades básicas de modelos de vértices associados a representação fundamental da álgebra de Yang-Baxter baseada nas matrizes R que satisfazem a regra do gelo. Essa regra garante a existência de dois estados de referência.

- Encontrar relações de comutação convenientes a partir da álgebra de Yang-Baxter (20).

Na seção 2 descrevemos as ferramentas essenciais necessárias para obtermos as regras de comutação apropriada entre os elementos da matriz de monodromia. Demonstramos que essas relações são obtidas solucionando determinados sistemas lineares de equações. Para firmar as idéias centrais do nosso método, exemplificamos a estrutura de algumas das regras de comutação.

- Propor um autovetor (ansatz) e obter os autovalores da matriz de transferência.

As relações de comutação obtidas na seção 2 são largamente utilizadas na seção 4 para solucionar o problema de autovalor por meio do ansatz de Bethe algébrico. Os respectivos autovalores são construídos de forma similar a um espaço de Fock bosônico com $N - 1$ campos de criação. Para simplificarmos os resultados obtidos da ação dos elementos diagonais da matriz de monodromia no ansatz são necessárias identidades derivadas da propriedade de unitariedade e da equação de Yang-Baxter. Essas identidades que são

obtidas na seção 3 possibilitam a simplificação e conseqüentemente o entendimento da estrutura do ansatz de Bethe algébrico.

Na seção 5 exemplificamos os resultados obtidos na seção 4 resolvendo o problema de autovalor relacionado a modelos de vértices derivados de representações do grupo de tranças associado a álgebra quântica $U_q[SU(2)]$ quando q é uma raiz da unidade. Esse sistema proporciona uma oportunidade para aplicarmos nosso método para matrizes R da forma da diferença ou dependentes de ambos os valores dos parâmetros espectrais. As conclusões e perspectivas futuras são apresentadas na seção 6. Nos apêndices A-D resumimos informações extras e detalhes técnicos que foram utilizados para a compreensão do texto principal.

1 Representação de modelos de vértices

Cada solução da equação de Yang-Baxter (12) origina representações da álgebra de Yang-Baxter (20). As representações dependentes do parâmetro espectral são denominadas de operadores de Lax que simbolizaremos por $\mathcal{L}_{\mathcal{A}i}(\lambda, p_i)$. A mais simples dessas representações é obtida diretamente das amplitudes da matriz R por meio da expressão

$$\mathcal{L}_{\mathcal{A}i}(\lambda, p_i) = \sum_{a,b,c,d=1}^N R(\lambda, p_i)_{a,b}^{c,d} e_{a,c} \otimes e_{b,d}^{(i)}, \quad (24)$$

onde $e_{b,d}^{(i)}$ denota as matrizes de Weyl $N \times N$ atuando no espaço do produto tensorial $\prod_{i=1}^m \otimes_i^N$ de um rede unidimensional de tamanho m . As variáveis p_i desempenham o papel de parâmetros livres contínuos.

A álgebra de Yang-Baxter (20) tem a propriedade de coproduto, isto é, o produto tensorial de duas representações é ainda outra possível representação. Por esta razão, o produto ordenado dos operadores $\mathcal{L}_{\mathcal{A}i}(\lambda, p_i)$ definido pela Eq.(18) é de fato uma representação da álgebra quadrática (20).

Neste contexto clássico de modelos de vértice em mecânica estatística, $\mathcal{L}_{\mathcal{A}i}(\lambda, p_i)$ contém a estrutura dos pesos de Boltzmann no i -ésimo sítio de uma matriz quadrada de tamanho m . Assim, os possíveis estados desses sistemas estatísticos estão associados às possíveis configurações da ligação de cada vértice $a, b, c, d = 1, \dots, N$ na rede $m \times m$. A energia da configuração do i -ésimo vértice está associada ao peso estatístico local $R(\lambda, p_i)_{a,b}^{c,d}$ conforme representado na Figura 1. Logo, as variáveis p_i têm o papel de inhomogeneidades horizontais nos pesos. De acordo com a Eq.(17), a matriz de transferência $T(\lambda)$ desses modelos de vértices pode ser escrita de uma forma compacta com a ajuda da matriz de monodromia (18).

A fim de diagonalizar o operador $T(\lambda)$ dentro do abordagem do espalhamento inverso quântico devemos em primeiro lugar conhecer um autovetor $|0\rangle$ de $T(\lambda)$. Esse vetor desempenha a função de um estado de referência na construção do espaço de Hilbert de $T(\lambda)$ através de um ansatz algébrico. Em geral, tal estado é obtido impondo que a ação no vetor $|0\rangle$ dos elementos da matriz de monodromia situadas na triangular inferior seja nula para λ arbitrário. Isto significa que a matriz de monodromia atua como uma matriz triangular superior em $|0\rangle$,

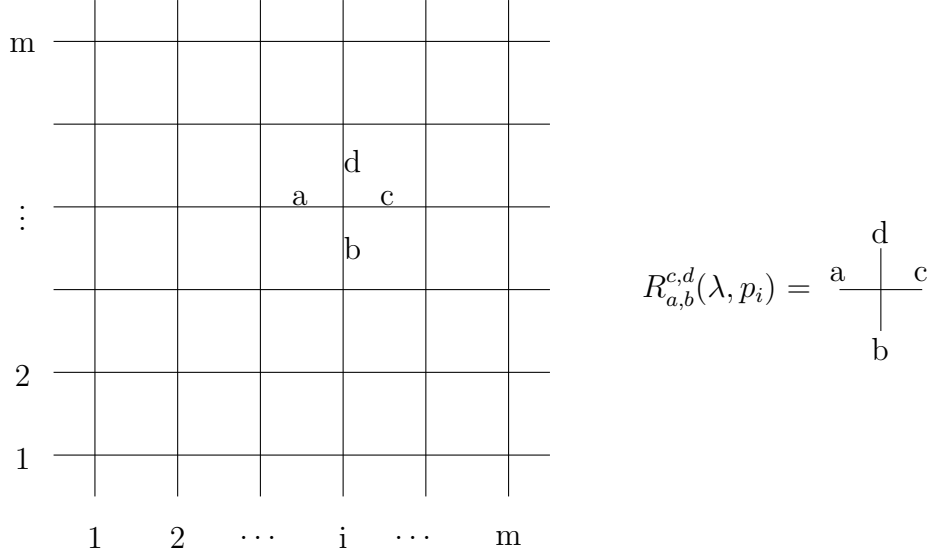


Figura 3: Representação da rede bidimensional $m \times m$ e dos pesos estatísticos locais $R_{a,b}^{c,d}(\lambda, p_i)$.

isto é,

$$\mathcal{T}_{a,b}(\lambda) |0\rangle = \begin{cases} w_a(\lambda) |0\rangle, & \text{para } a = b \\ 0, & \text{para } a > b \\ |ab\rangle, & \text{para } a < b, \end{cases} \quad (25)$$

onde $|ab\rangle$ denota um vetor qualquer não-nulo.

Portanto, a ação dos elementos superiores e inferiores $\mathcal{T}_{a,b}(\lambda)$ em $|0\rangle$ têm significados distintos. Para $a < b$, os elementos atuam como campos de criação, enquanto que para $a > b$, eles são interpretadas como campos de aniquilação. A presença do invariante $U(1)$ (22) torna possível construirmos tal estado de referência em termos do produto tensorial de vetores ferromagnéticos locais,

$$|0\rangle = \prod_{i=1}^m \otimes |s\rangle_i, \quad |s\rangle_i = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_N. \quad (26)$$

O estado $|s\rangle_i$ pode ser interpretado como o auto-estado superior $S_i^z |s\rangle_i = \frac{(N-1)}{2} |s\rangle_i$ de um operador azimutal de spin S_i^z com valor de spin $s = \frac{(N-1)}{2}$. Logo, o spin total do estado de referência é sm e essa é a razão pela qual $|0\rangle$ é chamado de estado ferromagnético. Das Eqs.(22,24,18) não é difícil vermos que a propriedade (25) é de fato satisfeita e a expressão das

funções $w_a(\lambda)$ é

$$w_a(\lambda) = \prod_{i=1}^m R(\lambda, p_i)_{a,1}^{a,1}. \quad (27)$$

O próximo passo consiste em construir os outros auto-estados de $T(\lambda)$. Para alcançar esse objetivo, em primeiro lugar devemos considerar a ação do operador de spin total $\sum_{i=1}^m S_i^z$ nos elementos da matriz de monodromia $\mathcal{T}_{a,b}(\lambda)$. Considerando a estrutura do operador de Lax (24) e o invariante $U(1)$ (22) é possível derivar a seguinte relação

$$\left[\mathcal{T}_{a,b}(\lambda), \sum_{i=1}^m S_i^z \right] = (b - a) \mathcal{T}_{a,b}(\lambda). \quad (28)$$

A relação de comutação acima é utilizada para elucidar o caráter físico dos campos de criação $\mathcal{T}_{a,b}(\lambda)$ para $a < b$. De fato, projetando a Eq.(28) no estado de referência $|0\rangle$ obtemos a propriedade abaixo

$$\sum_{i=1}^m S_i^z \mathcal{T}_{a,b}(\lambda) |0\rangle = (sm - b + a) \mathcal{T}_{a,b}(\lambda) |0\rangle \quad \text{para } a < b. \quad (29)$$

Da Eq.(29) concluímos que o campo $\mathcal{T}_{a,b}(\lambda)$ para $a < b$ comporta-se como um operador de criação de uma excitação sobre $|0\rangle$ com valor da componente azimutal de spin igual a $s_{a,b} = b - a$. Isso implica que os elementos da matriz de monodromia de uma mesma diagonal possuem o mesmo spin azimutal e portanto descrevem o mesmo tipo de excitação. Conseqüentemente ficamos com apenas $N - 1$ campos de criação linearmente independentes que são representados da maneira mais simples pela primeira linha da matriz de monodromia $\mathcal{T}_{1,b}(\lambda)$ para $b = 2, \dots, N$. A analogia com o espaço de Hilbert de magnetos de Heisenberg de spin $s > \frac{1}{2}$ sugere fortemente que os auto-estados da matriz de transferência (17) podem ser construídos de um modo algébrico por meio dos $N - 1$ campos de criação independentes. Todavia, essa construção depende da nossa habilidade em reformular a álgebra de Yang-Baxter (20) na forma de regras de comutação convenientes entre os elementos da diagonal e fora dessa na matriz de monodromia. Na próxima seção abordaremos essa parte artística do método do espalhamento inverso quântico.

2 Relações fundamentais de comutação

Essa seção tem por objetivo descrever a estrutura das relações de comutação que são relevantes na diagonalização da matriz de transferência (17). Essas relações envolvendo os elementos da matriz de monodromia são derivadas da álgebra de Yang-Baxter (20). Denotaremos por $[\alpha; \beta]$ o elemento da matriz $N^2 \times N^2$ definida pela Eq.(20) situado na linha α -ésima com a β -ésima coluna. Desse modo, a projeção da álgebra de Yang-Baxter no elemento genérico $[(\bar{a} - 1)N + \bar{b}; (\bar{c} - 1)N + \bar{d}]$ é dado pela equação abaixo,

$$\sum_{\bar{e}=\bar{M}\{1, \bar{a}+\bar{b}-N\}}^{\bar{m}\{\bar{a}+\bar{b}-1, N\}} R(\lambda, \mu)_{\bar{b}, \bar{a}}^{\bar{e}, \bar{a}+\bar{b}-\bar{e}} \mathcal{T}_{\bar{e}, \bar{c}}(\lambda) \mathcal{T}_{\bar{a}+\bar{b}-\bar{e}, \bar{d}}(\mu) = \sum_{\bar{e}=\bar{M}\{1, \bar{c}+\bar{d}-N\}}^{\bar{m}\{\bar{c}+\bar{d}-1, N\}} \mathcal{T}_{\bar{a}, \bar{e}}(\mu) \mathcal{T}_{\bar{b}, \bar{c}+\bar{d}-\bar{e}}(\lambda) R(\lambda, \mu)_{\bar{c}+\bar{d}-\bar{e}, \bar{e}}^{\bar{e}, \bar{d}} \quad (30)$$

$\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d} = 1 \dots N.$

A seguir descrevemos três diferentes classes de relações de comutação entre os operadores diagonal, criação e aniquilação que são derivados da Eq.(30).

2.1 Campos diagonal e criação

Os operadores de criação $\mathcal{T}_{1,b}(\lambda)$ para $b = 2, \dots, N$ formam uma base que possibilita a construção dos autovetores da matriz de transferência $T(\lambda)$. Assim, as relações de comutação entre esses operadores e os campos da diagonal da matriz de monodromia $\mathcal{T}_{a,a}(\lambda)$ para $a = 1, \dots, N$ são essenciais no problema de autovalor da matriz de transferência. Essas relações são obtidas da equação $[a; (a + c - 1)N + b - c]$ para escolhas específicas do índice c . Substituindo $\bar{a} = 1$, $\bar{b} = a$, $\bar{c} = a + c$ e $\bar{d} = b - c$ na Eq.(30) encontramos que a respectiva equação é dada por,

$$\sum_{\bar{e}=1}^a R(\lambda, \mu)_{a,1}^{\bar{e}, a-\bar{e}+1} \mathcal{T}_{\bar{e}, a+c}(\lambda) \mathcal{T}_{a-\bar{e}+1, b-c}(\mu) = \sum_{\bar{e}=\bar{M}\{1, a+b-N\}}^{\bar{m}\{a+b-1, N\}} \mathcal{T}_{1, \bar{e}}(\mu) \mathcal{T}_{a, a+b-\bar{e}}(\lambda) R(\lambda, \mu)_{a+b-\bar{e}, \bar{e}}^{a+c, b-c} \quad (31)$$

Em geral, para obtermos as relações de comutação úteis no problema de autovalor devemos trabalhar a Eq.(31). Essa manipulação adicional consiste em realizar combinações específicas de um determinado número de equações derivadas da Eq.(31) através da variação do índice c . Na Tabela 1 estão descritos os tipos de combinação linear requerida para cada campo diagonal.

Operador	Índice diagonal	Índice Combinatório	Número de equação
$\mathcal{T}_{1,1}(\mu)\mathcal{T}_{1,b}(\lambda)$	$a = 1$	$c = b - 1$	1
$\mathcal{T}_{a,a}(\lambda)\mathcal{T}_{1,b}(\mu)$	$2 \leq a \leq N + 1 - b$	$c = 0, \dots, b - 1$	b
$\mathcal{T}_{a,a}(\lambda)\mathcal{T}_{1,b}(\mu)$	$N + 2 - b \leq a < N$	$c = 0, \dots, N - a$	$N + 1 - a$
$\mathcal{T}_{N,N}(\lambda)\mathcal{T}_{1,b}(\mu)$	$a = N$	$c = 0$	1

Tabela 1: Combinação linear construída a partir da Eq.(31) para obter as relações de comutação entre os campos $\mathcal{T}_{a,a}(\lambda)$ e $\mathcal{T}_{1,b}(\lambda)$. O número de equações em cada combinação linear é governado pelo índice c .

Da Tabela 1 vemos que as relações de comutação para os operadores $\mathcal{T}_{1,1}(\lambda)$ e $\mathcal{T}_{N,N}(\lambda)$ seguem diretamente da Eq.(31). Fixando $c = b - 1$ para $\mathcal{T}_{1,1}(\lambda)$ e $c = 0$ para $\mathcal{T}_{N,N}(\lambda)$ obtemos as comutações destes operadores com $\mathcal{T}_{1,b}(\mu)$ que são dadas por

$$\mathcal{T}_{1,1}(\lambda)\mathcal{T}_{1,b}(\mu) = \frac{R(\mu, \lambda)_{1,1}^{1,1}}{R(\mu, \lambda)_{b,1}^{b,1}}\mathcal{T}_{1,b}(\mu)\mathcal{T}_{1,1}(\lambda) - \sum_{\bar{e}=2}^b \frac{R(\mu, \lambda)_{1+b-\bar{e},\bar{e}}^{b,1}}{R(\mu, \lambda)_{b,1}^{b,1}}\mathcal{T}_{1,\bar{e}}(\lambda)\mathcal{T}_{1,1+b-\bar{e}}(\mu) \quad (32)$$

e

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{N,N}(\lambda)\mathcal{T}_{1,b}(\mu) &= \frac{R(\lambda, \mu)_{N,b}^{N,b}}{R(\lambda, \mu)_{N,1}^{N,1}}\mathcal{T}_{1,b}(\mu)\mathcal{T}_{N,N}(\lambda) + \sum_{\bar{e}=b+1}^N \frac{R(\lambda, \mu)_{N+b-\bar{e},\bar{e}}^{N,b}}{R(\lambda, \mu)_{N,1}^{N,1}}\mathcal{T}_{1,\bar{e}}(\mu)\mathcal{T}_{N,N+b-\bar{e}}(\lambda) \\ &- \sum_{\bar{e}=1}^{N-1} \frac{R(\lambda, \mu)_{N,1}^{\bar{e},N-\bar{e}+1}}{R(\lambda, \mu)_{N,1}^{N,1}}\mathcal{T}_{\bar{e},N}(\lambda)\mathcal{T}_{N-\bar{e}+1,b}(\mu). \end{aligned} \quad (33)$$

A relação de comutação para o restante dos operadores $\mathcal{T}_{a,a}(\lambda)$ para $2 \leq a \leq N - 1$ exige um esforço maior. Nesses casos, devemos implementar a combinação linear de acordo com o índice c exibido na Tabela 1. Como exemplo, consideraremos o sistema linear associado aos campos diagonais com $2 \leq a \leq N + 1 - b$. Inicialmente, arranjamos as relações obtidas da Eq.(31) com $c = 0, \dots, b$ na seguinte forma,

$$\begin{aligned} A_1^{(a,b)}(\lambda, \mu) \begin{pmatrix} \mathcal{T}_{1,1}(\mu)\mathcal{T}_{a,a+b-1}(\lambda) \\ \mathcal{T}_{1,2}(\mu)\mathcal{T}_{a,a+b-2}(\lambda) \\ \vdots \\ \mathcal{T}_{1,b}(\mu)\mathcal{T}_{a,a}(\lambda) \end{pmatrix} &= \sum_{\bar{e}=1}^a R(\lambda, \mu)_{a,1}^{\bar{e},a-\bar{e}+1} \begin{pmatrix} \mathcal{T}_{\bar{e},a}(\lambda)\mathcal{T}_{a-\bar{e}+1,b}(\mu) \\ \mathcal{T}_{\bar{e},a+1}(\lambda)\mathcal{T}_{a-\bar{e}+1,b-1}(\mu) \\ \vdots \\ \mathcal{T}_{\bar{e},a+b-1}(\lambda)\mathcal{T}_{a-\bar{e}+1,1}(\mu) \end{pmatrix} \\ &- \sum_{\bar{e}=b+1}^{a+b-1} v_1^{(a,b)}(\lambda, \mu)\mathcal{T}_{1,\bar{e}}(\mu)\mathcal{T}_{a,a+b-\bar{e}}(\lambda) \\ \text{para } 2 \leq a \leq N + 1 - b, \end{aligned} \quad (34)$$

onde a matriz $A_1^{(a,b)}(\lambda, \mu)$ de dimensão $b \times b$ é dada pela equação abaixo

$$A_1^{(a,b)}(\lambda, \mu) = \begin{pmatrix} R(\lambda, \mu)_{a+b-1,1}^{a,b} & R(\lambda, \mu)_{a+b-2,2}^{a,b} & \cdots & R(\lambda, \mu)_{a,b}^{a,b} \\ R(\lambda, \mu)_{a+b-1,1}^{a+1,b-1} & R(\lambda, \mu)_{a+b-2,2}^{a+1,b-1} & \cdots & R(\lambda, \mu)_{a,b}^{a+1,b-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R(\lambda, \mu)_{a+b-1,1}^{a+b-1,1} & R(\lambda, \mu)_{a+b-2,2}^{a+b-1,1} & \cdots & R(\lambda, \mu)_{a,b}^{a+b-1,1} \end{pmatrix}, \quad (35)$$

enquanto que o vetor $v_1^{(a,b)}(\lambda, \mu)$ de dimensão $b \times 1$ é

$$v_1^{(a,b)}(\lambda, \mu) = \begin{pmatrix} R(\lambda, \mu)_{a+b-\bar{e},\bar{e}}^{a,b} \\ R(\lambda, \mu)_{a+b-\bar{e},\bar{e}}^{a+1,b-1} \\ \vdots \\ R(\lambda, \mu)_{a+b-\bar{e},\bar{e}}^{a+b-1,1} \end{pmatrix}. \quad (36)$$

O passo seguinte consiste em calcular o último termo $\mathcal{T}_{1,b}(\mu)\mathcal{T}_{a,a}(\lambda)$ no sistema linear (34) através da regra de Cramer. Note que o primeiro termo da parte não homogênea da Eq.(34) contém o produto reverso $\mathcal{T}_{a,a}(\lambda)\mathcal{T}_{1,b}(\mu)$ quando o índice da soma é igual a $\bar{e} = a$. Logo, calculando os determinantes de matrizes de dimensão $b \times b$ geramos uma equação linear que relaciona os produtos de operadores $\mathcal{T}_{a,a}(\lambda)\mathcal{T}_{1,b}(\mu)$ e $\mathcal{T}_{1,b}(\mu)\mathcal{T}_{a,a}(\lambda)$. Essa equação fornece a relação de comutação entre $\mathcal{T}_{a,a}(\lambda)$ e $\mathcal{T}_{1,b}(\mu)$ para $2 \leq a \leq N+1-b$, que será utilizada no problema de autovalor.

De forma análoga, o mesmo método descrito acima pode ser utilizado para fornecer a relação de comutação para os campos diagonais restantes $N+2-b \leq a \leq N-1$. Todavia, esse sistema linear é diferente do anterior e por uma questão de completeza também o descreveremos. As respectivas Eq.(31) ditadas pela Tabela 1 podem ser matriciadas na forma,

$$\begin{aligned} A_2^{(a,b)}(\lambda, \mu) \begin{pmatrix} \mathcal{T}_{1,a+b-N}(\mu)\mathcal{T}_{a,N}(\lambda) \\ \mathcal{T}_{1,a+b-N+1}(\mu)\mathcal{T}_{a,N-1}(\lambda) \\ \vdots \\ \mathcal{T}_{1,b}(\mu)\mathcal{T}_{a,a}(\lambda) \end{pmatrix} &= \sum_{\bar{e}=1}^a \begin{pmatrix} \mathcal{T}_{\bar{e},a}(\lambda)\mathcal{T}_{a-\bar{e}+1,b}(\mu) \\ \mathcal{T}_{\bar{e},a+1}(\lambda)\mathcal{T}_{a-\bar{e}+1,b-1}(\mu) \\ \vdots \\ \mathcal{T}_{\bar{e},N}(\lambda)\mathcal{T}_{a-\bar{e}+1,a+b-N}(\mu) \end{pmatrix} \\ &\times R(\lambda, \mu)_{a,1}^{\bar{e},a-\bar{e}+1} - \sum_{\bar{e}=b+1}^N v_2^{(a,b)}(\lambda, \mu) \mathcal{T}_{1,\bar{e}}(\mu) \mathcal{T}_{a,a+b-\bar{e}}(\lambda), \\ &\text{para } N+2-b \leq a \leq N-1, \end{aligned} \quad (37)$$

onde a matriz $A_2^{(a,b)}(\lambda, \mu)$ de dimensão $(N+1-a) \times (N+1-a)$ é dada por

$$A_2^{(a,b)}(\lambda, \mu) = \begin{pmatrix} R(\lambda, \mu)_{N,a+b-N}^{a,b} & R(\lambda, \mu)_{N-1,a+b-N+1}^{a,b} & \cdots & R(\lambda, \mu)_{a,b}^{a,b} \\ R(\lambda, \mu)_{N,a+b-N}^{a+1,b-1} & R(\lambda, \mu)_{N-1,a+b-N+1}^{a+1,b-1} & \cdots & R(\lambda, \mu)_{a,b}^{a+1,b-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R(\lambda, \mu)_{N,a+b-N}^{N,a+b-N} & R(\lambda, \mu)_{N-1,a+b-N+1}^{N,a+b-N} & \cdots & R(\lambda, \mu)_{a,b}^{N,a+b-N} \end{pmatrix}, \quad (38)$$

enquanto o vetor $v_2^{(a,b)}(\lambda, \mu)$ de dimensão $(N+1-a) \times 1$ é

$$v_2^{(a,b)}(\lambda, \mu) = \begin{pmatrix} R(\lambda, \mu)_{a+b-\bar{e},\bar{e}}^{a,b} \\ R(\lambda, \mu)_{a+b-\bar{e},\bar{e}}^{a+1,b-1} \\ \vdots \\ R(\lambda, \mu)_{a+b-\bar{e},\bar{e}}^{N,a+b-N} \end{pmatrix}. \quad (39)$$

Seguindo os passos descritos anteriormente, a relação de comutação procurada entre $\mathcal{T}_{a,a}(\lambda)$ e $\mathcal{T}_{1,b}(\mu)$ para $N+2-b \leq a \leq N-1$ é obtida aplicando a regra de Cramer no sistema linear (37-39). Ressaltamos que as relações de comutação discutidas nesta subseção possuem a propriedade que os campos $\mathcal{T}_{1,\bar{e}}(\mu)$ presentes no lado esquerdo dos produtos de operadores satisfazem a condição $\bar{e} \geq b$. Enfatizamos que esses campos participam diretamente na estrutura dos auto-estados. A condição $\bar{e} \geq b$ garante que tais operadores $\mathcal{T}_{1,\bar{e}}(\mu)$, gerados pela aplicação de $\mathcal{T}_{a,a}(\lambda)$ sobre $\mathcal{T}_{1,b}(\mu)$, contribuirão somente para os autovetores formados por campos de criação com spin menor ou igual a $s_{1,b} = s + 1 - b$. Assim, os autovetores construídos em termos de $N-1$ operadores $\mathcal{T}_{1,b}(\mu)$ podem ser interpretados como um estado de multipartículas ordenado pelos valores de seus spins.

A seguir exemplificamos como esse método geral funciona na prática. Com este objetivo em mente, apresentamos explicitamente a estrutura das relações de comutação dos dois primeiros campos de criação com todos os operadores diagonais. O exemplo mais simples refere-se ao campo $\mathcal{T}_{1,2}(\mu)$, cujas relações de comutação com os operadores diagonais ditam a dependência dos autovalores da matriz de transferência com relação aos elementos da matriz R . Essas relações para $a = 1$ e $a = N$ são dadas pelas Eqs.(32,33), enquanto que nos casos $2 \leq a \leq N-1$, essas são obtidas resolvendo o sistema linear (34-36) com dimensão 2×2 . Como resultado final

encontramos que as relações de comutações entre $\mathcal{T}_{a,a}(\lambda)$ e $\mathcal{T}_{1,2}(\mu)$ são

$$\mathcal{T}_{1,1}(\lambda)\mathcal{T}_{1,2}(\mu) = \frac{R(\mu, \lambda)_{1,1}^{1,1}}{R(\mu, \lambda)_{2,1}^{2,1}}\mathcal{T}_{1,2}(\mu)\mathcal{T}_{1,1}(\lambda) - \frac{R(\mu, \lambda)_{1,2}^{2,1}}{R(\mu, \lambda)_{2,1}^{2,1}}\mathcal{T}_{1,2}(\lambda)\mathcal{T}_{1,1}(\mu), \quad (40)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{a,a}(\lambda)\mathcal{T}_{1,2}(\mu) &= D_2^{(a,0)}(\lambda, \mu)\mathcal{T}_{1,2}(\mu)\mathcal{T}_{a,a}(\lambda) + \sum_{\bar{e}=3}^{a+1} D_2^{(a,\bar{e}-2)}(\lambda, \mu)\mathcal{T}_{1,\bar{e}}(\mu)\mathcal{T}_{a,a+2-\bar{e}}(\lambda) \\ &+ \sum_{\bar{e}=1}^a \frac{R(\lambda, \mu)_{a+1,1}^{a,2}}{R(\lambda, \mu)_{a+1,1}^{a+1,1}} \frac{R(\lambda, \mu)_{a,1}^{\bar{e},a-\bar{e}+1}}{R(\lambda, \mu)_{a,1}^{a,1}} \mathcal{T}_{\bar{e},a+1}(\lambda)\mathcal{T}_{a-\bar{e}+1,1}(\mu) \\ &- \sum_{\bar{e}=1}^{a-1} \frac{R(\lambda, \mu)_{a,1}^{\bar{e},a-\bar{e}+1}}{R(\lambda, \mu)_{a,1}^{a,1}} \mathcal{T}_{\bar{e},a}(\lambda)\mathcal{T}_{a-\bar{e}+1,2}(\mu) \quad \text{para } 2 \leq a \leq N-1, \end{aligned} \quad (41)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{N,N}(\lambda)\mathcal{T}_{1,2}(\mu) &= \frac{R(\lambda, \mu)_{N,2}^{N,2}}{R(\lambda, \mu)_{N,1}^{N,1}}\mathcal{T}_{1,2}(\mu)\mathcal{T}_{N,N}(\lambda) + \sum_{\bar{e}=3}^N \frac{R(\lambda, \mu)_{N+2-\bar{e},\bar{e}}^{N,2}}{R(\lambda, \mu)_{N,1}^{N,1}}\mathcal{T}_{1,\bar{e}}(\mu)\mathcal{T}_{N,N+2-\bar{e}}(\lambda) \\ &- \sum_{\bar{e}=1}^{N-1} \frac{R(\lambda, \mu)_{N,1}^{\bar{e},N-\bar{e}+1}}{R(\lambda, \mu)_{N,1}^{N,1}} \mathcal{T}_{\bar{e},N}(\lambda)\mathcal{T}_{N-\bar{e}+1,2}(\mu). \end{aligned} \quad (42)$$

A função $D_2^{(a,\bar{e})}(\lambda, \mu)$ é definida usando o determinante de uma matriz 2×2 , cujos elementos combinam a primeira coluna $A_1^{(a,2)}(\lambda, \mu)$ com o vetor $v_1^{(a,2)}(\lambda, \mu)$. Em termos dos elementos da matriz R , essa função possui a expressão abaixo

$$\begin{aligned} D_2^{(a,\bar{e})}(\lambda, \mu) &= - \frac{\begin{vmatrix} R(\lambda, \mu)_{a+1,1}^{a,2} & R(\lambda, \mu)_{a-\bar{e},\bar{e}+2}^{a,2} \\ R(\lambda, \mu)_{a+1,1}^{a+1,1} & R(\lambda, \mu)_{a-\bar{e},\bar{e}+2}^{a+1,1} \end{vmatrix}}{R(\lambda, \mu)_{a,1}^{a,1} R(\lambda, \mu)_{a+1,1}^{a+1,1}}, \\ \text{para } \bar{e} &= 0, \dots, a-1 \quad \text{e } 2 \leq a \leq N-1. \end{aligned} \quad (43)$$

O próximo exemplo refere-se ao campo $\mathcal{T}_{1,3}(\mu)$. Nesse caso, para obtermos o conjunto completo das relações de comutação, devemos solucionar dois sistemas lineares de dimensões 3×3 e 2×2 . De acordo com a Tabela 1, o primeiro sistema é definido pelas Eqs.(34-36), enquanto que o segundo está associado às Eqs.(37-39). Solucionando esses sistemas lineares,

encontramos que as relações de comutação entre $\mathcal{T}_{a,a}(\lambda)$ e $\mathcal{T}_{1,3}(\mu)$ são dadas por

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{1,1}(\lambda)\mathcal{T}_{1,3}(\mu) &= \frac{R(\mu, \lambda)_{1,1}^{1,1}}{R(\mu, \lambda)_{3,1}^{3,1}}\mathcal{T}_{1,3}(\mu)\mathcal{T}_{1,1}(\lambda) - \frac{R(\mu, \lambda)_{2,2}^{3,1}}{R(\mu, \lambda)_{3,1}^{3,1}}\mathcal{T}_{1,2}(\lambda)\mathcal{T}_{1,2}(\mu) \\ &\quad - \frac{R(\mu, \lambda)_{1,3}^{3,1}}{R(\mu, \lambda)_{3,1}^{3,1}}\mathcal{T}_{1,3}(\lambda)\mathcal{T}_{1,1}(\mu) \end{aligned} \quad (44)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{a,a}(\lambda)\mathcal{T}_{1,3}(\mu) &= D_3^{(a,0)}(\lambda, \mu)\mathcal{T}_{1,3}(\mu)\mathcal{T}_{a,a}(\lambda) + \sum_{\bar{e}=4}^{a+2} D_3^{(a,\bar{e}-3)}(\lambda, \mu)\mathcal{T}_{1,\bar{e}}(\mu)\mathcal{T}_{a,a+3-\bar{e}}(\lambda) \\ &\quad - \sum_{\bar{e}=1}^{a-1} \frac{R(\lambda, \mu)_{a,1}^{\bar{e},a-\bar{e}+1}}{R(\lambda, \mu)_{a,1}^{a,1}}\mathcal{T}_{\bar{e},a}(\lambda)\mathcal{T}_{a-\bar{e}+1,3}(\mu) \\ &\quad + \sum_{\bar{e}=1}^a \frac{R(\lambda, \mu)_{a,1}^{\bar{e},a-\bar{e}+1}}{R(\lambda, \mu)_{a,1}^{a,1}} \left| \begin{array}{cc} R(\lambda, \mu)_{a+2,1}^{a,3} & R(\lambda, \mu)_{a+1,2}^{a,3} \\ R(\lambda, \mu)_{a+2,1}^{a+2,1} & R(\lambda, \mu)_{a+1,2}^{a+2,1} \end{array} \right| \mathcal{T}_{\bar{e},a+1}(\lambda)\mathcal{T}_{a-\bar{e}+1,2}(\mu) \\ &\quad - \sum_{\bar{e}=1}^a \frac{R(\lambda, \mu)_{a,1}^{\bar{e},a-\bar{e}+1}}{R(\lambda, \mu)_{a,1}^{a,1}} \left| \begin{array}{cc} R(\lambda, \mu)_{a+2,1}^{a+1,2} & R(\lambda, \mu)_{a+1,2}^{a+1,2} \\ R(\lambda, \mu)_{a+2,1}^{a+2,1} & R(\lambda, \mu)_{a+1,2}^{a+2,1} \end{array} \right| \mathcal{T}_{\bar{e},a+2}(\lambda)\mathcal{T}_{a-\bar{e}+1,1}(\mu) \\ &\quad \text{para } 2 \leq a \leq N-2, \end{aligned} \quad (45)$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{T}_{N-1,N-1}(\lambda)\mathcal{T}_{1,3}(\mu) &= -\frac{\begin{vmatrix} R(\lambda, \mu)_{N,2}^{N-1,3} & R(\lambda, \mu)_{N-1,3}^{N-1,3} \\ R(\lambda, \mu)_{N,2}^{N,2} & R(\lambda, \mu)_{N-1,3}^{N,2} \end{vmatrix}}{R(\lambda, \mu)_{N-1,1}^{N-1,1}R(\lambda, \mu)_{N,2}^{N,2}}\mathcal{T}_{1,3}(\mu)\mathcal{T}_{N-1,N-1}(\lambda) \\
 &- \sum_{\bar{e}=4}^N \frac{\begin{vmatrix} R(\lambda, \mu)_{N,2}^{N-1,3} & R(\lambda, \mu)_{N+2-\bar{e},\bar{e}}^{N-1,3} \\ R(\lambda, \mu)_{N,2}^{N,2} & R(\lambda, \mu)_{N+2-\bar{e},\bar{e}}^{N,2} \end{vmatrix}}{R(\lambda, \mu)_{N-1,1}^{N-1,1}R(\lambda, \mu)_{N,2}^{N,2}}\mathcal{T}_{1,\bar{e}}(\mu)\mathcal{T}_{N-1,N+2-\bar{e}}(\lambda) \\
 &+ \sum_{\bar{e}=1}^{N-2} \left[\frac{R(\lambda, \mu)_{N,2}^{N-1,3}}{R(\lambda, \mu)_{N,2}^{N,2}}\mathcal{T}_{\bar{e},N}(\lambda)\mathcal{T}_{N-\bar{e},2}(\mu) - \mathcal{T}_{\bar{e},N-1}(\lambda)\mathcal{T}_{N-\bar{e},3}(\mu) \right] \\
 &\times \frac{R(\lambda, \mu)_{N-1,1}^{\bar{e},N-\bar{e}}}{R(\lambda, \mu)_{N-1,1}^{N-1,1}} + \frac{R(\lambda, \mu)_{N,2}^{N-1,3}}{R(\lambda, \mu)_{N,2}^{N,2}}\mathcal{T}_{N-1,N}(\lambda)\mathcal{T}_{1,2}(\mu)
 \end{aligned} \tag{46}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{T}_{N,N}(\lambda)\mathcal{T}_{1,3}(\mu) &= \frac{R(\lambda, \mu)_{N,3}^{N,3}}{R(\lambda, \mu)_{N,1}^{N,1}}\mathcal{T}_{1,3}(\mu)\mathcal{T}_{N,N}(\lambda) + \sum_{\bar{e}=4}^N \frac{R(\lambda, \mu)_{N+3-\bar{e},\bar{e}}^{N,3}}{R(\lambda, \mu)_{N,1}^{N,1}}\mathcal{T}_{1,\bar{e}}(\mu)\mathcal{T}_{N,N+3-\bar{e}}(\lambda) \\
 &- \sum_{\bar{e}=1}^{N-1} \frac{R(\lambda, \mu)_{N,1}^{\bar{e},N-\bar{e}+1}}{R(\lambda, \mu)_{N,1}^{N,1}}\mathcal{T}_{\bar{e},N}(\lambda)\mathcal{T}_{N-\bar{e}+1,3}(\mu)
 \end{aligned} \tag{47}$$

A função auxiliar $D_3^{(a,\bar{e})}(\lambda, \mu)$ é representada pela razão de determinantes de dimensão 3×3 e 2×2 , isto é,

$$\begin{aligned}
 D_3^{(a,\bar{e})}(\lambda, \mu) &= \frac{\begin{vmatrix} R(\lambda, \mu)_{a+2,1}^{a,3} & R(\lambda, \mu)_{a+1,2}^{a,3} & R(\lambda, \mu)_{a-\bar{e},3+\bar{e}}^{a,3} \\ R(\lambda, \mu)_{a+2,1}^{a+1,2} & R(\lambda, \mu)_{a+1,2}^{a+1,2} & R(\lambda, \mu)_{a-\bar{e},3+\bar{e}}^{a+1,2} \\ R(\lambda, \mu)_{a+2,1}^{a+2,1} & R(\lambda, \mu)_{a+1,2}^{a+2,1} & R(\lambda, \mu)_{a-\bar{e},3+\bar{e}}^{a+2,1} \end{vmatrix}}{R(\lambda, \mu)_{a,1}^{a,1} \begin{vmatrix} R(\lambda, \mu)_{a+2,1}^{a+1,2} & R(\lambda, \mu)_{a+1,2}^{a+1,2} \\ R(\lambda, \mu)_{a+2,1}^{a+2,1} & R(\lambda, \mu)_{a+1,2}^{a+2,1} \end{vmatrix}}, \\
 \text{para } \bar{e} &= 0, \dots, a-1 \quad \text{e} \quad 2 \leq a \leq N-2.
 \end{aligned} \tag{48}$$

2.2 Campos de criação

Os resultados da subseção anterior nos revelam que as relações de comutação entre os operadores $\mathcal{T}_{a,a}(\lambda)$ e $\mathcal{T}_{1,b}(\lambda)$ geram campos de criação adicionais além dos campos da base $\mathcal{T}_{1,b}(\lambda)$ ou $\mathcal{T}_{1,b}(\mu)$. Embora esses operadores extras não pertençam ao conjunto dos campos que compõem o estado de multipartículas, eles desempenham um papel decisivo na solução do problema de autovalor da matriz de transferência. Em outras palavras, além das relações de comutação entre os operadores da base, também é necessário calcularmos as relações envolvendo os operadores $\mathcal{T}_{1,b}(\lambda)$ com o restante dos campos de criação $\mathcal{T}_{\bar{a},\bar{b}}(\mu)$ para $\bar{b} > \bar{a} = 2, \dots, N-1$. Durante o desenvolvimento de nossa análise descobrimos ser conveniente descrever tais relações de comutação utilizando os campos $\mathcal{T}_{1,b_1-d_1}(\lambda)$ e $\mathcal{T}_{a_1-1,a_1+d_1}(\mu)$, onde os novos índices pertencem aos seguintes intervalos,

$$2 \leq a_1 \leq N, \quad 0 \leq d_1 \leq N - a_1, \quad 2 \leq b = b_1 - d_1 \leq N. \quad (49)$$

A estrutura de índices acima fornece pelo menos duas vantagens. Primeiro, ela assegura que todas as relações de comutação entre os campos de criação mencionados serão consideradas sem repetição. Em segundo lugar, de acordo com a Eq.(29), a componente azimutal efetiva de spin associada ao termo $\mathcal{T}_{1,b}(\lambda)\mathcal{T}_{a_1-1,a_1+d_1}(\mu)$ é dada pelo soma $b+d_1$. Portanto, a parametrização $b = b_1 - d_1$ tem a vantagem de fornecer a componente azimutal de spin deste produto de operadores de criação em termos de um único índice b_1 . Conseqüentemente, o número de distintas relações de comutação a serem utilizadas em um dado setor do estado de multipartículas é controlado pelos índices restantes a_1 e d_1 . Uma análise sistemática da relação de Yang-Baxter (30) nos revela que essas regras de comutação são derivadas dos elementos $[a_1 - 1; (a_1 + c - 1)N + b_1 - c]$ para certos valores do índice c . As respectivas relações são obtidas da Eq.(30) através das seguintes atribuições $\bar{a} = 1$, $\bar{b} = a_1 - 1$, $\bar{c} = a_1 + c$ e $\bar{d} = b_1 - c$, isto é,

$$\sum_{\bar{e}=1}^{a_1-1} R(\lambda, \mu)_{a_1-1,1}^{\bar{e},a_1-\bar{e}} \mathcal{T}_{\bar{e},a_1+c}(\lambda) \mathcal{T}_{a_1-\bar{e},b_1-c}(\mu) = \sum_{\bar{e}=\bar{M}\{1,a_1+b_1-N\}}^{\bar{m}\{a_1+b_1-1,N\}} \mathcal{T}_{1,\bar{e}}(\mu) \mathcal{T}_{a_1-1,a_1+b_1-\bar{e}}(\lambda) R(\lambda, \mu)_{a_1+b_1-\bar{e},\bar{e}}^{a_1+c,b_1-c}. \quad (50)$$

A maioria das relações de comutação entre os campos $\mathcal{T}_{1,b_1-d_1}(\lambda)$ e $\mathcal{T}_{a_1-1,a_1+d_1}(\mu)$ é obtida através de manipulações algébricas envolvendo a Eq.(50), não sendo possível determinar as relações de modo direto. Análogo à subseção anterior, devemos implementar certas combinações

lineares usando o grau de liberdade do índice c . Esse procedimento é altamente dependente das variáveis a_1, b_1 e está detalhado na Tabela 2.

Operador	Índice de criação	Índice de Combinação	Número de equações
$\mathcal{T}_{1,b_1-d_1}(\lambda)\mathcal{T}_{1,2+d_1}(\mu)$ $a_1 = 2$	$b_1 \geq N$	$c = b_1 - d_1 - 2$	1
$\mathcal{T}_{1,b_1-d_1}(\lambda)\mathcal{T}_{1,2+d_1}(\mu)$ $a_1 = 2$	$b_1 < N$	$c = b_1 - d_1 - 2, b_1 - 1$	2
$\mathcal{T}_{1,b_1-d_1}(\mu)\mathcal{T}_{a_1-1,a_1+d_1}(\lambda)$ $3 \leq a_1 \leq N+1-b_1$	$b_1 < N$	$c = 0, \dots, b_1 - 1$	b_1
$\mathcal{T}_{1,b_1-d_1}(\mu)\mathcal{T}_{a_1-1,a_1+d_1}(\lambda)$ $N+2-b_1 \leq a_1 \leq N$	$b_1 < N$	$c = 0, \dots, N - a_1$	$N+1-a_1$
$\mathcal{T}_{1,b_1-d_1}(\mu)\mathcal{T}_{a_1-1,a_1+d_1}(\lambda)$ $3 \leq a_1 \leq N$	$b_1 \geq N$	$c = b_1 - N, \dots, N - a_1$	$2N+1-a_1-b_1$

Tabela 2: Combinação linear derivada da Eq.(50) para obtermos a relação apropriada de comutação entre os campos $\mathcal{T}_{1,b_1-d_1}(\lambda)$ e $\mathcal{T}_{a_1-1,a_1+d_1}(\lambda)$. Os índices a_1, b_1 e d_1 pertencem aos intervalos definidos pela Eq.(49).

A primeira classe de relações de comutação entre os campos de criação envolve apenas aqueles que contribuem diretamente para os operadores da base do vetores. Essas relações são obtidas fixando $a_1 = 2$. Da Tabela 2, vemos que a regra de comutação entre $\mathcal{T}_{1,b_1-d_1}(\lambda)$ e $\mathcal{T}_{1,2+d_1}(\mu)$ para $b_1 \geq N$ segue diretamente do elemento $[1; (b_1 - d_1 - 1)N + 2 + d_1]$ da Eq.(50) dado por

$$\begin{aligned}
 \mathcal{T}_{1,b_1-d_1}(\lambda)\mathcal{T}_{1,2+d_1}(\mu) &= \frac{R(\lambda, \mu)_{b_1-d_1, 2+d_1}^{b_1-d_1, 2+d_1}}{R(\lambda, \mu)_{1,1}^{1,1}} \mathcal{T}_{1,2+d_1}(\mu)\mathcal{T}_{1,b_1-d_1}(\lambda) \\
 &+ \sum_{\substack{\bar{e}=2+b_1-N \\ \bar{e} \neq 2+d_1}}^N \frac{R(\lambda, \mu)_{2+b_1-\bar{e}, \bar{e}}^{b_1-d_1, 2+d_1}}{R(\lambda, \mu)_{1,1}^{1,1}} \mathcal{T}_{1,\bar{e}}(\mu)\mathcal{T}_{1,2+b_1-\bar{e}}(\lambda), \quad \text{para } b_1 \geq N.
 \end{aligned} \tag{51}$$

Todavia, para $b_1 < N$ devemos combinar os dois elementos $[1; (b_1 - d_1 - 1)N + 2 + d_1]$ e $[1; b_1N + 1]$ da Eq.(50). Matriciando essas equações geramos um sistema linear de dimensão

2×2 dado por

$$\begin{aligned}
 A_3^{(b_1, d_1)}(\lambda, \mu) \begin{pmatrix} \mathcal{T}_{1,1}(\mu) \mathcal{T}_{1, b_1+1}(\lambda) \\ \mathcal{T}_{1,2}(\mu) \mathcal{T}_{1, b_1}(\lambda) \end{pmatrix} &= R(\lambda, \mu)_{1,1}^{1,1} \begin{pmatrix} \mathcal{T}_{1, b_1-d_1}(\lambda) \mathcal{T}_{1, 2+d_1}(\mu) \\ \mathcal{T}_{1, 1+b_1}(\lambda) \mathcal{T}_{1,1}(\mu) \end{pmatrix} \\
 &- \sum_{\bar{e}=3}^{b_1+1} \begin{pmatrix} R(\lambda, \mu)_{2+b_1-\bar{e}, \bar{e}}^{b_1-d_1, 2+d_1} \\ R(\lambda, \mu)_{2+b_1-\bar{e}, \bar{e}}^{b_1+1, 1} \end{pmatrix} \mathcal{T}_{1, \bar{e}}(\mu) \mathcal{T}_{1, 2+b_1-\bar{e}}(\lambda) \\
 \text{para } b_1 < N, & \quad (52)
 \end{aligned}$$

onde a matriz $A_3^{(a_1, b_1)}(\lambda, \mu)$ é definida pela expressão

$$A_3^{(b_1, d_1)}(\lambda, \mu) = \begin{pmatrix} R(\lambda, \mu)_{b_1+1,1}^{b_1-d_1, 2+d_1} & R(\lambda, \mu)_{b_1,2}^{b_1-d_1, 2+d_1} \\ R(\lambda, \mu)_{b_1+1,1}^{b_1+1, 1} & R(\lambda, \mu)_{b_1,2}^{b_1+1, 1} \end{pmatrix}. \quad (53)$$

As relações de comutação procuradas são obtidas resolvendo a Eq.(52) para o produto $\mathcal{T}_{1,2}(\mu) \mathcal{T}_{1, b_1}(\lambda)$ com a ajuda da regra de Cramer. O resultado desse procedimento fornece uma equação linear que relaciona os termos $\mathcal{T}_{1, b_1-d_1}(\lambda) \mathcal{T}_{1, 2+d_1}(\mu)$ e $\mathcal{T}_{1, 2+d_1}(\mu) \mathcal{T}_{1, b_1-d_1}(\lambda)$ ⁵, sendo sua solução dada pela expressão

$$\begin{aligned}
 \mathcal{T}_{1, b_1-d_1}(\lambda) \mathcal{T}_{1, 2+d_1}(\mu) &= - \frac{\begin{vmatrix} R(\lambda, \mu)_{b_1+1,1}^{b_1-d_1, 2+d_1} & R(\lambda, \mu)_{b_1-d_1, 2+d_1}^{b_1-d_1, 2+d_1} \\ R(\lambda, \mu)_{b_1+1,1}^{b_1+1, 1} & R(\lambda, \mu)_{b_1-d_1, 2+d_1}^{b_1+1, 1} \end{vmatrix}}{R(\lambda, \mu)_{1,1}^{1,1} R(\lambda, \mu)_{b_1+1,1}^{b_1+1, 1}} \mathcal{T}_{1, 2+d_1}(\mu) \mathcal{T}_{1, b_1-d_1}(\lambda) \\
 &+ \frac{R(\lambda, \mu)_{b_1+1,1}^{b_1-d_1, 2+d_1}}{R(\lambda, \mu)_{b_1+1,1}^{b_1+1, 1}} \mathcal{T}_{1, b_1+1}(\lambda) \mathcal{T}_{1,1}(\mu) \\
 &- \sum_{\substack{\bar{e}=2 \\ \bar{e} \neq 2+d_1}}^{b_1+1} \frac{\begin{vmatrix} R(\lambda, \mu)_{b_1+1,1}^{b_1-d_1, 2+d_1} & R(\lambda, \mu)_{2+b_1-\bar{e}, \bar{e}}^{b_1-d_1, 2+d_1} \\ R(\lambda, \mu)_{b_1+1,1}^{b_1+1, 1} & R(\lambda, \mu)_{2+b_1-\bar{e}, \bar{e}}^{b_1+1, 1} \end{vmatrix}}{R(\lambda, \mu)_{1,1}^{1,1} R(\lambda, \mu)_{b_1+1,1}^{b_1+1, 1}} \mathcal{T}_{1, \bar{e}}(\mu) \mathcal{T}_{1, 2+b_1-\bar{e}}(\lambda), \\
 \text{para } b_1 < N. & \quad (54)
 \end{aligned}$$

A seguir descrevemos a estratégia utilizada para obtermos as relações de comutação entre os campos de criação. A idéia básica reside no fato que todos os produtos de operadores de criação situados no lado direito da relação de comutação devem possuir sempre o mesmo ordenamento λ, μ das variáveis espectrais. Esse ordenamento é o oposto do ordenamento do produto de

⁵Vale ressaltar que o produto $\mathcal{T}_{1, 2+d_1}(\mu) \mathcal{T}_{1, b_1-d_1}(\lambda)$ aparece no somatório da Eq.(52) para $\bar{e} = 2 + d_1 \leq b_1$.

operadores de criação situado no lado esquerdo. É importante mencionar que essa escolha do ordenamento é ditada pelos resultados encontrados na seção 2.1 para as relações de comutação entre os campos diagonais e os da base do vetores. Desse modo, as relações de comutação entre os campos de criação são construídas com objetivo de mover o parâmetro espectral da matriz de transferência para esquerda nos produtos de operadores de criação que não são proporcionais aos autovetores.

O procedimento acima é de grande importância quando abordamos as regras de comutação entre os operadores $\mathcal{T}_{1,b_1-d_1}(\mu)$ e $\mathcal{T}_{a_1-1,a_1+d_1}(\lambda)$ para $3 \leq a_1 \leq N$. Nesse caso, não é permitido à respectiva relação de comutação possuir termos da forma $\mathcal{T}_{1,b_1-\bar{e}}(\mu)\mathcal{T}_{a_1-1,a_1+\bar{e}}(\lambda)$ para $\bar{e} \geq 0$. Essa propriedade é facilmente vista considerando a forma explícita dos sistemas lineares associados a tais regras de comutação. Claramente, observamos da Tabela 2 que esses sistemas dependem se $b_1 < N$ ou $b_1 \geq N$. O primeiro caso é similar à combinação linear discutida na subseção anterior e assim temos que

$$\begin{aligned}
 A_1^{(a_1,b_1)}(\lambda, \mu) \begin{pmatrix} \mathcal{T}_{1,1}(\mu)\mathcal{T}_{a_1-1,a_1+b_1-1}(\lambda) \\ \mathcal{T}_{1,2}(\mu)\mathcal{T}_{a_1-1,a_1+b_1-2}(\lambda) \\ \vdots \\ \mathcal{T}_{1,b_1}(\mu)\mathcal{T}_{a_1-1,a_1}(\lambda) \end{pmatrix} &= \sum_{\bar{e}=1}^{a_1-1} \begin{pmatrix} \mathcal{T}_{\bar{e},a_1}(\lambda)\mathcal{T}_{a_1-\bar{e},b_1}(\mu) \\ \mathcal{T}_{\bar{e},a_1+1}(\lambda)\mathcal{T}_{a_1-\bar{e},b_1-1}(\mu) \\ \vdots \\ \mathcal{T}_{\bar{e},a_1+b_1-1}(\lambda)\mathcal{T}_{a_1-\bar{e},1}(\mu) \end{pmatrix} \\
 &\times R(\lambda, \mu)_{a_1-1,1}^{\bar{e},a_1-\bar{e}} - \sum_{\bar{e}=b_1+1}^{a_1+b_1-1} v_1^{(a_1,b_1)}(\lambda, \mu) \mathcal{T}_{1,\bar{e}}(\mu) \mathcal{T}_{a_1-1,a_1+b_1-\bar{e}}(\lambda), \\
 &\text{para } b_1 < N \text{ e } 3 \leq a_1 \leq N+1-b_1
 \end{aligned} \tag{55}$$

$$\begin{aligned}
 A_2^{(a_1,b_1)}(\lambda, \mu) \begin{pmatrix} \mathcal{T}_{1,a_1+b_1-N}(\mu)\mathcal{T}_{a_1-1,N}(\lambda) \\ \mathcal{T}_{1,a_1+b_1-N+1}(\mu)\mathcal{T}_{a_1-1,N-1}(\lambda) \\ \vdots \\ \mathcal{T}_{1,b_1}(\mu)\mathcal{T}_{a_1-1,a_1}(\lambda) \end{pmatrix} &= \sum_{\bar{e}=1}^{a_1-1} R(\lambda, \mu)_{a_1-1,1}^{\bar{e},a_1-\bar{e}} \\
 &\times \begin{pmatrix} \mathcal{T}_{\bar{e},a_1}(\lambda)\mathcal{T}_{a_1-\bar{e},b_1}(\mu) \\ \mathcal{T}_{\bar{e},a_1+1}(\lambda)\mathcal{T}_{a_1-\bar{e},b_1-1}(\mu) \\ \vdots \\ \mathcal{T}_{\bar{e},N}(\lambda)\mathcal{T}_{a_1-\bar{e},a_1+b_1-N}(\mu) \end{pmatrix} - \sum_{\bar{e}=b_1+1}^N v_2^{(a_1,b_1)}(\lambda, \mu) \mathcal{T}_{1,\bar{e}}(\mu) \mathcal{T}_{a_1-1,a_1+b_1-\bar{e}}(\lambda) \\
 &\text{para } b_1 < N \text{ e } N+2-b_1 \leq a_1 \leq N,
 \end{aligned} \tag{56}$$

onde a matriz $A_1^{(a_1, b_1)}(\lambda, \mu)$ $b_1 \times b_1$, o vetor $v_1^{(a_1, b_1)}(\lambda, \mu)$ $b_1 \times 1$, a matriz $A_2^{(a_1, b_1)}(\lambda, \mu)$ $(N+1-a_1) \times (N+1-a_1)$ e o vetor $v_2^{(a_1, b_1)}(\lambda, \mu)$ $(N+1-a_1) \times 1$ são dados respectivamente pelas Eqs.(35,36,38,39).

Todavia, para $b_1 \geq N$, temos um diferente sistema de equações lineares. Nesse caso, as relações oriundas da Eq.(50) para $c = b_1 - N, \dots, N - a_1$ são organizadas na seguinte forma,

$$A_4^{(a_1, b_1)}(\lambda, \mu) \begin{pmatrix} \mathcal{T}_{1, a_1+b_1-N}(\mu) \mathcal{T}_{a_1-1, N}(\lambda) \\ \mathcal{T}_{1, a_1+b_1-N+1}(\mu) \mathcal{T}_{a_1-1, N-1}(\lambda) \\ \vdots \\ \mathcal{T}_{1, N}(\mu) \mathcal{T}_{a_1-1, a_1+b_1-N}(\lambda) \end{pmatrix} = \sum_{\bar{e}=1}^{a_1-1} \begin{pmatrix} \mathcal{T}_{\bar{e}, a_1+b_1-N}(\lambda) \mathcal{T}_{a_1-\bar{e}, N}(\mu) \\ \mathcal{T}_{\bar{e}, a_1+b_1-N+1}(\lambda) \mathcal{T}_{a_1-\bar{e}, N-1}(\mu) \\ \vdots \\ \mathcal{T}_{\bar{e}, N}(\lambda) \mathcal{T}_{a_1-\bar{e}, a_1+b_1-N}(\mu) \end{pmatrix} \times R(\lambda, \mu)_{a_1-1, 1}^{\bar{e}, a_1-\bar{e}}$$

para $b_1 \geq N$ e $3 \leq a_1 \leq N$, (57)

onde a matriz $A_4^{(a_1, b_1)}(\lambda, \mu)$ $(2N+1-a_1-b_1) \times (2N+1-a_1-b_1)$ é dada por

$$A_4^{(a_1, b_1)}(\lambda, \mu) = \begin{pmatrix} R(\lambda, \mu)_{N, a_1+b_1-N}^{a_1+b_1-N, N} & R(\lambda, \mu)_{N-1, a_1+b_1-N+1}^{a_1+b_1-N, N} & \cdots & R(\lambda, \mu)_{a_1+b_1-N, N}^{a_1+b_1-N, N} \\ R(\lambda, \mu)_{N, a_1+b_1-N}^{a_1+b_1-N+1, N-1} & R(\lambda, \mu)_{N-1, a_1+b_1-N+1}^{a_1+b_1-N+1, N-1} & \cdots & R(\lambda, \mu)_{a_1+b_1-N, N}^{a_1+b_1-N+1, N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R(\lambda, \mu)_{N, a_1+b_1-N}^{N, a_1+b_1-N} & R(\lambda, \mu)_{N-1, a_1+b_1-N+1}^{N, a_1+b_1-N} & \cdots & R(\lambda, \mu)_{a_1+b_1-N, N}^{N, a_1+b_1-N} \end{pmatrix}. \quad (58)$$

Uma inspeção direta das Eqs.(55,56,57) nos revela que as variáveis dos correspondentes sistemas lineares são de fato os produtos $\mathcal{T}_{1, b_1-d_1}(\mu) \mathcal{T}_{a_1-1, a_1+d_1}(\lambda)$. A origem desses sistemas lineares está diretamente relacionada com a existência de três distintos intervalos para o índice d_1 uma vez que as variáveis a_1 e b_1 estão fixadas, dados que esses índices satisfazem as restrições Eq.(49). Em outras palavras, a divisão desses sistemas tem como motivação agrupar os produtos de campos de criação cujos respectivos valores do índice d_1 pertencem a um dos seus três possíveis intervalos. Por fim, as relações de comutação entre os operadores $\mathcal{T}_{1, b_1-d_1}(\mu)$ e $\mathcal{T}_{a_1-1, a_1+d_1}(\lambda)$ são determinadas através da sistemática aplicação da regra de Cramer para solucionar completamente os sistemas de equações lineares (55,56,57). Esse procedimento é similar ao descrito na subseção (2.1). Note que o produto reverso $\mathcal{T}_{a_1-1, a_1+d_1}(\lambda) \mathcal{T}_{1, b_1-d_1}(\mu)$ aparece no primeiro termo da parte não-homogênea das Eqs.(55,56,57) quando o índice da somatória é $\bar{e} = a_1 - 1$. Enfatizamos que os sistemas lineares (55,56,57) geram várias relações de comutação,

uma vez que aplicamos a regra de Cramer para cada produto de campos de criação situado no lado esquerdo do sistema. O número de diferentes regras de comutação associado a cada sistema linear depende fortemente do índice b_1 . Ilustramos na Tabela 3 essa propriedade, bem como, a dependência do número total de relações comutação para um dado N .

Sistema Linear	Número de Regras de Comutação	
	b_1 fixo	N fixo
$A_1^{(a_1, b_1)}(\lambda, \mu)$	$\sum_{a_1=3}^{N+1-b_1} (b_1 - 1)$ $= (N - b_1 - 1)(b_1 - 1)$	$\sum_{b_1=2}^{N-2} (N - b_1 - 1)(b_1 - 1)$ $= \frac{(N-1)(N-2)(N-3)}{6}$
$A_2^{(a_1, b_1)}(\lambda, \mu)$	$\sum_{a_1=N+2-b_1}^N (N+1-a_1)$ $= \frac{(b_1-1)b_1}{2}$	$\sum_{b_1=2}^{N-1} \frac{(b_1-1)b_1}{2}$ $= \frac{N(N-1)(N-2)}{6}$
$A_4^{(a_1, b_1)}(\lambda, \mu)$	$\sum_{a_1=3}^{2N-b_1} (2N+1-a_1-b_1)$ $= \frac{(2N-b_1-1)(2N-b_1-2)}{2}$	$\sum_{b_1=N}^{2N-2} \frac{(2N-b_1-1)(2N-b_1-2)}{2}$ $= \frac{N(N-1)(N-2)}{6}$

Tabela 3: Número de relações de comutação entre os campos de criação para b_1 ou N fixo.

Concluimos a presente subseção exemplificando o conjunto completo das regras de comutação entre os operadores de criação em um dado estado de multipartículas. A primeira situação não-trivial ocorre quando a respectiva componente azimutal de spin é igual a $b_1 = 2$. De acordo com os intervalos (49), essas relações referem-se à comutação dos operadores $\mathcal{T}_{1,2}(\mu)$ e $\mathcal{T}_{a_1-1, a_1}(\lambda)$ para $2 \leq a_1 \leq N$. O caso $a_1 = 2$ segue da expressão geral (54), enquanto que para os valores restantes de a_1 devemos solucionar os sistemas (55,56). De forma compacta, esses

resultados são dados pelas seguintes expressões

$$\begin{aligned}
 D_2^{(a_1,0)}(\lambda, \mu) \mathcal{T}_{1,2}(\mu) \mathcal{T}_{a_1-1,a_1}(\lambda) &= \frac{R(\lambda, \mu)_{a_1-1,1}^{a_1-1,1}}{R(\lambda, \mu)_{a_1,1}^{a_1,1}} \mathcal{T}_{a_1-1,a_1}(\lambda) \mathcal{T}_{1,2}(\mu) \\
 &- \frac{R(\lambda, \mu)_{a_1-1,1}^{a_1-1,1}}{R(\lambda, \mu)_{a_1,1}^{a_1,1}} \frac{R(\lambda, \mu)_{a_1+1,1}^{a_1,2}}{R(\lambda, \mu)_{a_1+1,1}^{a_1+1,1}} \mathcal{T}_{a_1-1,a_1+1}(\lambda) \mathcal{T}_{1,1}(\mu) \\
 &- \sum_{\bar{e}=1}^{a_1-2} \frac{R(\lambda, \mu)_{a_1-1,1}^{\bar{e},a_1-\bar{e}}}{R(\lambda, \mu)_{a_1,1}^{a_1,1}} \frac{R(\lambda, \mu)_{a_1+1,1}^{a_1,2}}{R(\lambda, \mu)_{a_1+1,1}^{a_1+1,1}} \mathcal{T}_{\bar{e},a_1+1}(\lambda) \mathcal{T}_{a_1-\bar{e},1}(\mu) \\
 &+ \sum_{\bar{e}=1}^{a_1-2} \frac{R(\lambda, \mu)_{a_1-1,1}^{\bar{e},a_1-\bar{e}}}{R(\lambda, \mu)_{a_1,1}^{a_1,1}} \mathcal{T}_{\bar{e},a_1}(\lambda) \mathcal{T}_{a_1-\bar{e},2}(\mu) \\
 &- \sum_{\bar{e}=3}^{a_1+1} D_2^{(a_1,\bar{e}-2)}(\lambda, \mu) \mathcal{T}_{1,\bar{e}}(\mu) \mathcal{T}_{a_1-1,a_1+2-\bar{e}}(\lambda), \\
 \text{para } 2 \leq a_1 \leq N-1
 \end{aligned} \tag{59}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{T}_{1,2}(\mu) \mathcal{T}_{N-1,N}(\lambda) &= \frac{R(\lambda, \mu)_{N-1,1}^{N-1,1}}{R(\lambda, \mu)_{N,2}^{N,2}} \mathcal{T}_{N-1,N}(\lambda) \mathcal{T}_{1,2}(\mu) + \sum_{\bar{e}=1}^{N-2} \frac{R(\lambda, \mu)_{N-1,1}^{\bar{e},N-\bar{e}}}{R(\lambda, \mu)_{N,2}^{N,2}} \mathcal{T}_{\bar{e},N}(\lambda) \mathcal{T}_{N-\bar{e},2}(\mu) \\
 &- \sum_{\bar{e}=3}^{a_1+1} \frac{R(\lambda, \mu)_{N+2-\bar{e},\bar{e}}^{N,2}}{R(\lambda, \mu)_{N,2}^{N,2}} \mathcal{T}_{1,\bar{e}}(\mu) \mathcal{T}_{N-1,N+2-\bar{e}}(\lambda),
 \end{aligned} \tag{60}$$

onde a função $D_2^{(a_1,\bar{e})}(\lambda, \mu)$ é definida pela Eq.(43).

2.3 Campos de criação e aniquilação

A terceira classe de relação de comutação que abordaremos envolve os operadores $\mathcal{T}_{1,b}(\mu)$ e todos os possíveis operadores de aniquilação $\mathcal{T}_{a_1+d_1,a_1-1}(\lambda)$. Enfatizamos que os índices a_1 , d_1 e b são os mesmos utilizados na subseção (2.2) e portanto, esses pertencem aos intervalos definidos pela Eq.(49). Em geral, ao aplicarmos o operador $\mathcal{T}_{a_1+d_1,a_1-1}(\lambda)$ sobre o campo de criação $\mathcal{T}_{1,b}(\mu)$ geramos vários distintos campos de aniquilação além de $\mathcal{T}_{a_1+d_1,a_1-1}(\lambda)$. Assim, a estratégia básica que utilizaremos para construir essas relações é exigir que todos os campos de aniquilação gerados na comutação do campo $\mathcal{T}_{a_1+d_1,a_1-1}(\lambda)$ com $\mathcal{T}_{1,b}(\mu)$ estejam sempre à direita no produto de operadores a que esse pertence. Um estudo detalhado da álgebra de Yang-Baxter nos revela que essas regras de comutação são obtidas dos elementos $[a_1 + d_1 + c_1(N-1); (a_1-2)N + b + c_2(N-1)]$ da Eq.(30). A estrutura que descreve as manipulações algébricas

envolvendo a equação anterior é agora mais complicada, pois carrega uma dependência em dois índices independentes c_1 e c_2 . Devido ao fato que o índice d_1 aparece apenas na forma $a_1 + d_1$, achamos conveniente definir essa soma em termos do índice auxiliar

$$f_1 = a_1 + d_1. \quad (61)$$

De acordo com o parágrafo anterior a relação mestra é obtida da Eq.(30) atribuindo $\bar{a} = c_1 + 1$, $\bar{b} = f_1 - c_1$, $\bar{c} = a_1 + c_2 - 1$ e $\bar{d} = b - c_2$, isto é,

$$\begin{aligned} & \sum_{\bar{e}=1}^{f_1} R(\lambda, \mu)_{f_1-c_1, c_1+1}^{\bar{e}, f_1+1-\bar{e}} \mathcal{T}_{\bar{e}, a_1+c_2-1}(\lambda) \mathcal{T}_{f_1+1-\bar{e}, b-c_2}(\mu) \\ &= \sum_{\bar{e}=\bar{M}\{1, a_1+b-N-1\}}^{\bar{m}\{a_1+b-2, N\}} \mathcal{T}_{c_1+1, \bar{e}}(\mu) \mathcal{T}_{f_1-c_1, a_1+b-1-\bar{e}}(\lambda) R(\lambda, \mu)_{a_1+b-1-\bar{e}, \bar{e}}^{a_1+c_2-1, b-c_2}. \end{aligned} \quad (62)$$

A análise da Eq.(62) é mais complexa que as discutidas nas duas últimas subseções. As respectivas combinações lineares são geradas em duas etapas distintas que irão culminar em dois pares de sistemas lineares. Com intuito de introduzir de forma didática a análise da Eq.(62) é conveniente abordarmos inicialmente o caso partícular $c_1 = c_2 = 0$,

$$\begin{aligned} & \sum_{\bar{e}=1}^{f_1} R(\lambda, \mu)_{f_1, 1}^{\bar{e}, f_1+1-\bar{e}} \mathcal{T}_{\bar{e}, a_1-1}(\lambda) \mathcal{T}_{f_1+1-\bar{e}, b}(\mu) \\ &= \sum_{\bar{e}=\bar{M}\{1, a_1+b-N-1\}}^{\bar{m}\{a_1+b-2, N\}} \mathcal{T}_{1, \bar{e}}(\mu) \mathcal{T}_{f_1, a_1+b-1-\bar{e}}(\lambda) R(\lambda, \mu)_{a_1+b-1-\bar{e}, \bar{e}}^{a_1-1, b}, \end{aligned} \quad (63)$$

Concentremos nossa atenção no lado esquerdo da Eq.(63). Atribuindo $\bar{e} = f_1$ encontramos o produto $\mathcal{T}_{a_1+d_1, a_1-1}(\lambda) \mathcal{T}_{1, b}(\mu)$ que é indispensável na construção das regras de comutação desejadas. Infelizmente, para valores arbitrários de b , esse termo não é o único composto por operadores de aniquilação e criação gerado pela Eq.(63). A partir do lado esquerdo da Eq.(63) verificamos que $\mathcal{T}_{\bar{e}, a_1-1}(\lambda)$ comporta-se como operador de aniquilação ou diagonal quando $\bar{e} \geq a_1 - 1$, enquanto $\mathcal{T}_{a_1+d_1+1-\bar{e}, b}(\mu)$ atua como campos de criação para $\bar{e} \geq a_1 - (b - d_1 - 2)$. A combinação desses fatores vai de encontro à principal característica que exigimos da regra de comutação entre $\mathcal{T}_{a_1+d_1, a_1-1}(\lambda)$ e $\mathcal{T}_{1, b}(\mu)$. Portanto, a primeira tarefa a ser realizada consiste em eliminar os produtos $\mathcal{T}_{\bar{e}, a_1-1}(\lambda) \mathcal{T}_{a_1+d_1+1-\bar{e}, b}(\mu)$ do lado esquerdo quando o índice \bar{e} situa-se

na intersecção dos intervalos acima. Considerando o maior valor de \bar{e} na Eq.(63) não é difícil encontramos que o intervalo mencionado é

$$a_1 - \bar{m}\{1, b - d_1 - 2\} \leq \bar{e} < f_1 = a_1 + d_1. \quad (64)$$

O vínculo (64) nos revela que para $b = 2$, o intervalo acima não é definido. Isto implica que a regra de comutação entre $\mathcal{T}_{a_1+d_1, a_1-1}(\lambda)$ e $\mathcal{T}_{1,2}(\mu)$ é derivada diretamente da Eq.(63), isto é,

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{f_1, a_1-1}(\lambda) \mathcal{T}_{1,2}(\mu) &= \frac{R(\lambda, \mu)_{a_1-1,2}^{a_1-1,2}}{R(\lambda, \mu)_{f_1,1}^{f_1,1}} \mathcal{T}_{1,2}(\mu) \mathcal{T}_{f_1, a_1-1}(\lambda) \\ &+ \sum_{\substack{\bar{e}=1 \\ \bar{e} \neq 2}}^{a_1} \frac{R(\lambda, \mu)_{a_1+1-\bar{e}, \bar{e}}^{a_1-1,2}}{R(\lambda, \mu)_{f_1,1}^{f_1,1}} \mathcal{T}_{1, \bar{e}}(\mu) \mathcal{T}_{f_1, a_1+1-\bar{e}}(\lambda) \\ &- \sum_{\bar{e}=1}^{f_1-1} \frac{R(\lambda, \mu)_{f_1,1}^{\bar{e}, f_1+1-\bar{e}}}{R(\lambda, \mu)_{f_1,1}^{f_1,1}} \mathcal{T}_{\bar{e}, a_1-1}(\lambda) \mathcal{T}_{f_1+1-\bar{e}, 2}(\mu). \end{aligned} \quad (65)$$

Por outro lado, para $b \geq 3$, somos forçados a eliminar os produtos $\mathcal{T}_{\bar{e}, a_1-1}(\lambda) \mathcal{T}_{a_1+d_1+1-\bar{e}, b}(\mu)$ quando o índice \bar{e} pertence ao intervalo (64). Essa ação é efetuada explorando na forma de combinação linear as equações derivadas da Eq.(62) para certos valores do índice c_1 enquanto fixamos $c_2 = 0$. A estrutura dessa combinação linear depende do sinal da componente azimutal de spin do produto $\mathcal{T}_{f_1, a_1-1}(\lambda) \mathcal{T}_{1,b}(\mu)$ ⁶ conforme ilustrado na Tabela 4.

Operador eliminado	Índice criação	Índice combinação c_1	Número de equações
$\mathcal{T}_{\bar{e}, a_1-1}(\lambda) \mathcal{T}_{f_1+1-\bar{e}, b}(\mu)$	$b - 2 \leq d_1$	$c_1 = 0, \dots, b - 2$	$b - 1$
$\mathcal{T}_{\bar{e}, a_1-1}(\lambda) \mathcal{T}_{f_1+1-\bar{e}, b}(\mu)$	$b - 2 > d_1$	$c_1 = 0, \dots, d_1 + 1$	$d_1 + 2$

Tabela 4: Combinação linear da Eq.(62) com $c_2 = 0$ para cancelar o produto de operadores $\mathcal{T}_{\bar{e}, a_1-1}(\lambda) \mathcal{T}_{f_1+1-\bar{e}, b}(\mu)$ quando \bar{e} pertence ao intervalo (64).

⁶De acordo com a Eq.(28) o valor correspondente do spin é $b - 2 - d_1$.

De acordo com a Tabela 4, a estrutura de combinação linear para $b \geq 3$ é dada por

$$\begin{aligned}
 A_5^{(f_1, b)}(\lambda, \mu) \begin{pmatrix} \mathcal{T}_{f_1-b+2, a_1-1}(\lambda) \mathcal{T}_{b-1, b}(\mu) \\ \mathcal{T}_{f_1-b+3, a_1-1}(\lambda) \mathcal{T}_{b-2, b}(\mu) \\ \vdots \\ \mathcal{T}_{f_1, a_1-1}(\lambda) \mathcal{T}_{1, b}(\mu) \end{pmatrix} &= \sum_{\bar{e}=1}^{a_1+b-2} \begin{pmatrix} \mathcal{T}_{1, \bar{e}}(\mu) \mathcal{T}_{f_1, a_1+b-1-\bar{e}}(\lambda) \\ \mathcal{T}_{2, \bar{e}}(\mu) \mathcal{T}_{f_1-1, a_1+b-1-\bar{e}}(\lambda) \\ \vdots \\ \mathcal{T}_{b-1, \bar{e}}(\mu) \mathcal{T}_{f_1-b+2, a_1+b-1-\bar{e}}(\lambda) \end{pmatrix} \\
 &\times R(\lambda, \mu)_{a_1+b-1-\bar{e}, \bar{e}}^{a_1-1, b} - \sum_{\bar{e}=1}^{f_1-b+1} v_5^{(f_1, b)}(\lambda, \mu) \mathcal{T}_{\bar{e}, a_1-1}(\lambda) \mathcal{T}_{f_1+1-\bar{e}, b}(\mu) \\
 &\text{para } b-2 \leq d_1
 \end{aligned} \tag{66}$$

e

$$\begin{aligned}
 A_6^{(a_1, d_1)}(\lambda, \mu) \begin{pmatrix} \mathcal{T}_{a_1-1, a_1-1}(\lambda) \mathcal{T}_{d_1+2, b}(\mu) \\ \mathcal{T}_{a_1, a_1-1}(\lambda) \mathcal{T}_{d_1+1, b}(\mu) \\ \vdots \\ \mathcal{T}_{f_1, a_1-1}(\lambda) \mathcal{T}_{1, b}(\mu) \end{pmatrix} &= \sum_{\bar{e}=\bar{M}\{1, a_1+b-N-1\}}^{\bar{m}\{a_1+b-2, N\}} \begin{pmatrix} \mathcal{T}_{1, \bar{e}}(\mu) \mathcal{T}_{f_1, a_1+b-1-\bar{e}}(\lambda) \\ \mathcal{T}_{2, \bar{e}}(\mu) \mathcal{T}_{f_1-1, a_1+b-1-\bar{e}}(\lambda) \\ \vdots \\ \mathcal{T}_{d_1+2, \bar{e}}(\mu) \mathcal{T}_{a_1-1, a_1+b-1-\bar{e}}(\lambda) \end{pmatrix} \\
 &\times R(\lambda, \mu)_{a_1+b-1-\bar{e}, \bar{e}}^{a_1-1, b} - \sum_{\bar{e}=1}^{a_1-2} v_6^{(a_1, d_1)}(\lambda, \mu) \mathcal{T}_{\bar{e}, a_1-1}(\lambda) \mathcal{T}_{f_1+1-\bar{e}, b}(\mu) \\
 &\text{para } b-2 > d_1.
 \end{aligned} \tag{67}$$

As matrizes $A_5^{(f_1, b)}(\lambda, \mu)$ $(b-1) \times (b-1)$ e $A_6^{(a_1, d_1)}(\lambda, \mu)$ $(d_1+2) \times (d_1+2)$ são definidas pelas expressões

$$A_5^{(f_1, b)}(\lambda, \mu) = \begin{pmatrix} R(\lambda, \mu)_{f_1, 1}^{f_1-b+2, b-1} & R(\lambda, \mu)_{f_1, 1}^{f_1-b+3, b-2} & \cdots & R(\lambda, \mu)_{f_1, 1}^{f_1, 1} \\ R(\lambda, \mu)_{f_1-1, 2}^{f_1-b+2, b-1} & R(\lambda, \mu)_{f_1-1, 2}^{f_1-b+3, b-2} & \cdots & R(\lambda, \mu)_{f_1-1, 2}^{f_1, 1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R(\lambda, \mu)_{f_1-b+2, b-1}^{f_1-b+2, b-1} & R(\lambda, \mu)_{f_1-b+2, b-1}^{f_1-b+3, b-2} & \cdots & R(\lambda, \mu)_{f_1-b+2, b-1}^{f_1, 1} \end{pmatrix} \tag{68}$$

e

$$A_6^{(a_1, d_1)}(\lambda, \mu) = \begin{pmatrix} R(\lambda, \mu)_{f_1, 1}^{a_1-1, d_1+2} & R(\lambda, \mu)_{f_1, 1}^{a_1, d_1+1} & \cdots & R(\lambda, \mu)_{f_1, 1}^{f_1, 1} \\ R(\lambda, \mu)_{f_1-1, 2}^{a_1-1, d_1+2} & R(\lambda, \mu)_{f_1-1, 2}^{a_1, d_1+1} & \cdots & R(\lambda, \mu)_{f_1-1, 2}^{f_1, 1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R(\lambda, \mu)_{a_1-1, d_1+2}^{a_1-1, d_1+2} & R(\lambda, \mu)_{a_1-1, d_1+2}^{a_1, d_1+1} & \cdots & R(\lambda, \mu)_{a_1-1, d_1+2}^{f_1, 1} \end{pmatrix}, \tag{69}$$

enquanto os vetores $v_5^{(f_1,b)}(\lambda, \mu)$ $(b-1) \times 1$ e $v_6^{(a_1,d_1)}(\lambda, \mu)$ $(d_1+2) \times 1$ são

$$v_5^{(f_1,b)}(\lambda, \mu) = \begin{pmatrix} R(\lambda, \mu)_{f_1,1}^{\bar{e}, f_1+1-\bar{e}} \\ R(\lambda, \mu)_{f_1-1,2}^{\bar{e}, f_1+1-\bar{e}} \\ \vdots \\ R(\lambda, \mu)_{f_1-b+2,b-1}^{\bar{e}, f_1+1-\bar{e}} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad v_6^{(a_1,d_1)}(\lambda, \mu) = \begin{pmatrix} R(\lambda, \mu)_{f_1,1}^{\bar{e}, f_1+1-\bar{e}} \\ R(\lambda, \mu)_{f_1-1,2}^{\bar{e}, f_1+1-\bar{e}} \\ \vdots \\ R(\lambda, \mu)_{a_1-1,d_1+2}^{\bar{e}, f_1+1-\bar{e}} \end{pmatrix}. \quad (70)$$

Os sistemas lineares definidos pelas Eqs.(66,67) contêm explicitamente o produto $\mathcal{T}_{f_1,a_1-1}(\lambda) \times \mathcal{T}_{1,b}(\mu)$ que pode ser calculado por meio da regra de Cramer. De acordo com o lado direito das Eqs.(66,67), observamos que essa solução pode gerar produtos da forma $\mathcal{T}_{c_1+1,\bar{e}}(\mu) \mathcal{T}_{f_1-c_1,a_1+b-1-\bar{e}}(\lambda)$. Esses tipos de termos incluem o produto reverso $\mathcal{T}_{1,b}(\mu) \mathcal{T}_{f_1,a_1-1}(\lambda)$ ⁷ e também, diversos outros produtos que contêm propriedades não desejadas. Esse último fato ocorre quando $\bar{e} \leq b + c_1 - d_1 - 2$, pois o operador $\mathcal{T}_{f_1-c_1,a_1+b-1-\bar{e}}(\lambda)$ torna-se um campo de criação e sua presença na posição direita do lado direito das regras de comutação não é permitida. Ressaltamos que esse problema é independente do caráter do campo que o acompanha $\mathcal{T}_{c_1+1,\bar{e}}(\mu)$. Isto é claro quando $\mathcal{T}_{c_1+1,\bar{e}}(\mu)$ desempenha o papel de operador de aniquilação ou diagonal, uma vez que teríamos a mesma situação que tratamos no lado esquerdo da regra de comutação. O caso em que $\mathcal{T}_{c_1+1,\bar{e}}(\mu)$ atua como operador de criação é mais complicado. Nessa situação, o ordenamento das variáveis espectrais neste produto é o oposto do ordenamento escolhido na subseção (2.2). Por essa razão esse tipo de produto deve ser eliminado da regra de comutação. Logo, independente do tipo de operador que $\mathcal{T}_{c_1+1,\bar{e}}(\mu)$ seja, um segundo passo é necessário para calcularmos o produto $\mathcal{T}_{c_1+1,\bar{e}}(\mu) \mathcal{T}_{f_1-c_1,a_1+b-1-\bar{e}}(\lambda)$ desde que o índice \bar{e} satisfaça a relação

$$\bar{e} \leq b + c_1 - d_1 - 2. \quad (71)$$

Esse trabalho adicional deve ser realizado preservando a estrutura do primeiro sistema linear. Essa tarefa é feita utilizando o índice extra c_2 . Na Tabela 5 descrevemos a segunda combinação linear gerada com a ajuda do índice c_2 , sendo c_1 fixo. As equações derivadas dessa combinação linear fornecem os produtos $\mathcal{T}_{c_1+1,\bar{e}}(\mu) \mathcal{T}_{f_1-c_1,a_1+b-1-\bar{e}}(\lambda)$ para $\bar{M}\{1, a_1+b-N-1\} \leq \bar{e} \leq \bar{m}\{a_1+b-2, N\}$. Enfatizamos que esse é o intervalo total onde ocorre o índice \bar{e} nas

⁷Esse é o primeiro componente do vetor ($c_1 = 0$) situado no lado direito das Eqs.(66,67) quando atribuímos ao índice $\bar{e} = b$.

Eqs.(66,67).

Operadores calculados	Índice de criação	Índice de combinação c_2	Número de equação
$\mathcal{T}_{c_1+1,\bar{e}}(\mu)\mathcal{T}_{f_1-c_1,a_1+b-1-\bar{e}}(\lambda)$	$b-2 \leq N-a_1$	$c_2 = d_1 - c_1 + 2, \dots, b-1$	$c_1 + b - d_1 - 2$
$\mathcal{T}_{c_1+1,\bar{e}}(\mu)\mathcal{T}_{f_1-c_1,a_1+b-1-\bar{e}}(\lambda)$	$b-2 > N-a_1$	$c_2 = d_1 - c_1 + 2, \dots, N-a_1+1$	$c_1 + N - a_1 - d_1$

Tabela 5: Combinação linear derivada da Eq.(62) para calcular os produtos da forma $\mathcal{T}_{c_1+1,\bar{e}}(\mu)\mathcal{T}_{f_1-c_1,a_1+b-1-\bar{e}}(\lambda)$.

Substituindo os dados da Tabela 5 na Eq.(62) encontramos que o segundo sistema linear de equações é dado por

$$\begin{aligned}
 & A_7^{(f_1-c_1, b-d_1-2+c_1)}(\lambda, \mu) \begin{pmatrix} \mathcal{T}_{c_1+1,1}(\mu)\mathcal{T}_{f_1-c_1,a_1+b-2}(\lambda) \\ \mathcal{T}_{c_1+1,2}(\mu)\mathcal{T}_{f_1-c_1,a_1+b-3}(\lambda) \\ \vdots \\ \mathcal{T}_{c_1+1,b+c_1-d_1-2}(\mu)\mathcal{T}_{f_1-c_1,f_1-c_1+1}(\lambda) \end{pmatrix} = \\
 & = \sum_{\bar{e}=1}^{f_1} R(\lambda, \mu)_{f_1-c_1, c_1+1}^{\bar{e}, f_1+1-\bar{e}} \begin{pmatrix} \mathcal{T}_{\bar{e}, f_1-c_1+1}(\lambda)\mathcal{T}_{f_1+1-\bar{e}, b+c_1-d_1-2}(\mu) \\ \mathcal{T}_{\bar{e}, f_1-c_1+2}(\lambda)\mathcal{T}_{f_1+1-\bar{e}, b+c_1-d_1-3}(\mu) \\ \vdots \\ \mathcal{T}_{\bar{e}, a_1+b-2}(\lambda)\mathcal{T}_{f_1+1-\bar{e}, 1}(\mu) \end{pmatrix} \\
 & - \sum_{\bar{e}=b+c_1-d_1-1}^{a_1+b-2} v_7^{(f_1-c_1, b-d_1-2+c_1)}(\lambda, \mu) \mathcal{T}_{c_1+1,\bar{e}}(\mu) \mathcal{T}_{f_1-c_1, a_1+b-1-\bar{e}}(\lambda) \\
 & \text{para } b \leq N - a_1 + 2 \tag{72}
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 A_8^{(f_1-c_1, b-d_1-2+c_1)}(\lambda, \mu) & \begin{pmatrix} \mathcal{T}_{c_1+1, a_1+b-N-1}(\mu) \mathcal{T}_{f_1-c_1, N}(\lambda) \\ \mathcal{T}_{c_1+1, a_1+b-N}(\mu) \mathcal{T}_{f_1-c_1, N-1}(\lambda) \\ \vdots \\ \mathcal{T}_{c_1+1, b+c_1-d_1-2}(\mu) \mathcal{T}_{f_1-c_1, f_1-c_1+1}(\lambda) \end{pmatrix} = \\
 & = \sum_{\bar{e}=1}^{f_1} R(\lambda, \mu)_{f_1-c_1, c_1+1}^{\bar{e}, f_1+1-\bar{e}} \begin{pmatrix} \mathcal{T}_{\bar{e}, f_1-c_1+1}(\lambda) \mathcal{T}_{f_1+1-\bar{e}, b+c_1-d_1-2}(\mu) \\ \mathcal{T}_{\bar{e}, f_1-c_1+2}(\lambda) \mathcal{T}_{f_1+1-\bar{e}, b+c_1-d_1-3}(\mu) \\ \vdots \\ \mathcal{T}_{\bar{e}, N}(\lambda) \mathcal{T}_{f_1+1-\bar{e}, a_1+b-N-1}(\mu) \end{pmatrix} \\
 & - \sum_{\bar{e}=b+c_1-d_1-1}^N v_8^{(f_1-c_1, b-d_1-2+c_1)}(\lambda, \mu) \mathcal{T}_{c_1+1, \bar{e}}(\mu) \mathcal{T}_{f_1-c_1, a_1+b-1-\bar{e}}(\lambda) \\
 & \text{para } b > N - a_1 + 2, \tag{73}
 \end{aligned}$$

onde as matrizes $A_7^{(a,b)}(\lambda, \mu)$ $b \times b$ e $A_8^{(a,b)}(\lambda, \mu)$ $(N+1-a) \times (N+1-a)$ são definidas por

$$A_7^{(a,b)}(\lambda, \mu) = \begin{pmatrix} R(\lambda, \mu)_{a+b,1}^{a+1,b} & R(\lambda, \mu)_{a+b-1,2}^{a+1,b} & \cdots & R(\lambda, \mu)_{a+1,b}^{a+1,b} \\ R(\lambda, \mu)_{a+b,1}^{a+2,b-1} & R(\lambda, \mu)_{a+b-1,2}^{a+2,b-1} & \cdots & R(\lambda, \mu)_{a+1,b}^{a+2,b-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R(\lambda, \mu)_{a+b,1}^{a+b,1} & R(\lambda, \mu)_{a+b-1,2}^{a+b,1} & \cdots & R(\lambda, \mu)_{a+1,b}^{a+b,1} \end{pmatrix} \tag{74}$$

e

$$A_8^{(a,b)}(\lambda, \mu) = \begin{pmatrix} R(\lambda, \mu)_{N, a+b-N+1}^{a+1,b} & R(\lambda, \mu)_{N-1, a+b-N+2}^{a+1,b} & \cdots & R(\lambda, \mu)_{a+1,b}^{a+1,b} \\ R(\lambda, \mu)_{N, a+b-N+1}^{a+2,b-1} & R(\lambda, \mu)_{N-1, a+b-N+2}^{a+2,b-1} & \cdots & R(\lambda, \mu)_{a+1,b}^{a+2,b-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R(\lambda, \mu)_{N, a+b-N+1}^{N, a+b-N+1} & R(\lambda, \mu)_{N-1, a+b-N+2}^{N, a+b-N+1} & \cdots & R(\lambda, \mu)_{a+1,b}^{N, a+b-N+1} \end{pmatrix}, \tag{75}$$

enquanto os vetores $v_7^{(a,b)}(\lambda, \mu)$ $b \times 1$ e $v_8^{(a,b)}(\lambda, \mu)$ $N + 1 - a \times 1$ são

$$v_7^{(a,b)}(\lambda, \mu) = \begin{pmatrix} R(\lambda, \mu)_{a+b+1-\bar{e}, \bar{e}}^{a+1, b} \\ R(\lambda, \mu)_{a+b+1-\bar{e}, \bar{e}}^{a+2, b-1} \\ \vdots \\ R(\lambda, \mu)_{a+b+1-\bar{e}, \bar{e}}^{a+b, 1} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad v_8^{(a,b)}(\lambda, \mu) = \begin{pmatrix} R(\lambda, \mu)_{a+b+1-\bar{e}, \bar{e}}^{a+1, b} \\ R(\lambda, \mu)_{a+b+1-\bar{e}, \bar{e}}^{a+2, b-1} \\ \vdots \\ R(\lambda, \mu)_{a+b+1-\bar{e}, \bar{e}}^{N, a+b-N+1} \end{pmatrix}. \quad (76)$$

Índice de aniquilação	Índice de combinação 1	Índice de combinação 2
$b - 2 \leq d_1$	$c_1 = 0, \dots, b - 2$	$c_2 = d_1 - c_1 + 2, \dots, b - 1$
$b - 2 > d_1 \quad b - 1 \leq N - a_1$	$c_1 = 0, \dots, d_1 + 1$	$c_2 = d_1 - c_1 + 2, \dots, b - 1$
$b - 2 > d_1 \quad b - 1 > N - a_1$	$c_1 = 0, \dots, d_1 + 1$	$c_2 = d_1 - c_1 + 2, \dots, N - a_1 + 1$

Tabela 6: Combinações lineares derivadas da Eq.(62) necessárias para obtermos as regras de comutação entre os campos $\mathcal{T}_{a_1+d_1, a_1-1}(\lambda)$ e $\mathcal{T}_{1,b}(\mu)$.

A seguir ilustraremos o modo como o primeiro e o segundo sistemas lineares trabalham juntos. Para isto descreveremos em detalhes a regra de comutação entre os campos $\mathcal{T}_{f_1, a_1-1}(\lambda)$ e $\mathcal{T}_{1,3}(\mu)$. Inicialmente consideramos o primeiro sistema linear de equações (66,67) para $b = 3$, que é dado pelas seguintes expressões

$$\begin{aligned} A_5^{(f_1,3)}(\lambda, \mu) \begin{pmatrix} \mathcal{T}_{f_1-1, a_1-1}(\lambda) \mathcal{T}_{2,3}(\mu) \\ \mathcal{T}_{f_1, a_1-1}(\lambda) \mathcal{T}_{1,3}(\mu) \end{pmatrix} &= \sum_{\bar{e}=1}^{a_1+1} \begin{pmatrix} \mathcal{T}_{1,\bar{e}}(\mu) \mathcal{T}_{f_1, a_1+2-\bar{e}}(\lambda) \\ \mathcal{T}_{2,\bar{e}}(\mu) \mathcal{T}_{f_1-1, a_1+2-\bar{e}}(\lambda) \end{pmatrix} \\ &\times R(\lambda, \mu)_{a_1+2-\bar{e}, \bar{e}}^{a_1-1, 3} - \sum_{\bar{e}=1}^{f_1-2} v_5^{(f_1,3)}(\lambda, \mu) \mathcal{T}_{\bar{e}, a_1-1}(\lambda) \mathcal{T}_{f_1+1-\bar{e}, 3}(\mu) \\ &\text{para } d_1 \geq 1 \end{aligned} \quad (77)$$

e

$$\begin{aligned} A_6^{(a_1,0)}(\lambda, \mu) \begin{pmatrix} \mathcal{T}_{a_1-1, a_1-1}(\lambda) \mathcal{T}_{2,3}(\mu) \\ \mathcal{T}_{a_1, a_1-1}(\lambda) \mathcal{T}_{1,3}(\mu) \end{pmatrix} &= \sum_{\bar{e}=\bar{M}\{1, a_1+2-N\}}^{\bar{m}\{a_1+1, N\}} \begin{pmatrix} \mathcal{T}_{1,\bar{e}}(\mu) \mathcal{T}_{a_1, a_1+2-\bar{e}}(\lambda) \\ \mathcal{T}_{2,\bar{e}}(\mu) \mathcal{T}_{a_1-1, a_1+2-\bar{e}}(\lambda) \end{pmatrix} \\ &\times R(\lambda, \mu)_{a_1+2-\bar{e}, \bar{e}}^{a_1-1, 3} - \sum_{\bar{e}=1}^{a_1-2} v_6^{(a_1,0)}(\lambda, \mu) \mathcal{T}_{\bar{e}, a_1-1}(\lambda) \mathcal{T}_{a_1+1-\bar{e}, 3}(\mu) \\ &\text{para } d_1 = 0. \end{aligned} \quad (78)$$

As matrizes $A_5^{(f_1,3)}(\lambda, \mu)$ e $A_6^{(a_1,0)}(\lambda, \mu)$ são dadas por

$$A_5^{(f_1,3)}(\lambda, \mu) = \begin{pmatrix} R(\lambda, \mu)_{f_1,1}^{f_1-1,2} & R(\lambda, \mu)_{f_1,1}^{f_1,1} \\ R(\lambda, \mu)_{f_1-1,2}^{f_1-1,2} & R(\lambda, \mu)_{f_1-1,2}^{f_1,1} \end{pmatrix} \quad (79)$$

e

$$A_6^{(a_1,0)}(\lambda, \mu) = \begin{pmatrix} R(\lambda, \mu)_{a_1,1}^{a_1-1,2} & R(\lambda, \mu)_{a_1,1}^{a_1,1} \\ R(\lambda, \mu)_{a_1-1,2}^{a_1-1,2} & R(\lambda, \mu)_{a_1-1,2}^{a_1,1} \end{pmatrix}, \quad (80)$$

enquanto os vetores $v_5^{(f_1,3)}(\lambda, \mu)$ e $v_6^{(a_1,0)}(\lambda, \mu)$ são

$$v_5^{(f_1,3)}(\lambda, \mu) = \begin{pmatrix} R(\lambda, \mu)_{f_1,1}^{\bar{e}, f_1+1-\bar{e}} \\ R(\lambda, \mu)_{f_1-1,2}^{\bar{e}, f_1+1-\bar{e}} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad v_6^{(a_1,0)}(\lambda, \mu) = \begin{pmatrix} R(\lambda, \mu)_{a_1,1}^{\bar{e}, a_1+1-\bar{e}} \\ R(\lambda, \mu)_{a_1-1,2}^{\bar{e}, a_1+1-\bar{e}} \end{pmatrix}. \quad (81)$$

Aplicando a regra de Cramer nas Eqs.(77,78) calculamos o produto $\mathcal{T}_{f_1, a_1-1}(\lambda) \mathcal{T}_{1,3}(\mu)$, cujos resultados são

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{f_1, a_1-1}(\lambda) \mathcal{T}_{1,3}(\mu) &= \sum_{\bar{e}=1}^{a_1+1} \frac{R(\lambda, \mu)_{a_1+2-\bar{e}, \bar{e}}^{a_1-1,3} R(\lambda, \mu)_{f_1,1}^{f_1-1,2}}{\begin{vmatrix} R(\lambda, \mu)_{f_1,1}^{f_1-1,2} & R(\lambda, \mu)_{f_1,1}^{f_1,1} \\ R(\lambda, \mu)_{f_1-1,2}^{f_1-1,2} & R(\lambda, \mu)_{f_1-1,2}^{f_1,1} \end{vmatrix}} \mathcal{T}_{2,\bar{e}}(\mu) \mathcal{T}_{f_1-1, a_1+2-\bar{e}}(\lambda) \\ &- \sum_{\bar{e}=1}^{a_1+1} \frac{R(\lambda, \mu)_{a_1+2-\bar{e}, \bar{e}}^{a_1-1,3} R(\lambda, \mu)_{f_1-1,2}^{f_1-1,2}}{\begin{vmatrix} R(\lambda, \mu)_{f_1,1}^{f_1-1,2} & R(\lambda, \mu)_{f_1,1}^{f_1,1} \\ R(\lambda, \mu)_{f_1-1,2}^{f_1-1,2} & R(\lambda, \mu)_{f_1-1,2}^{f_1,1} \end{vmatrix}} \mathcal{T}_{1,\bar{e}}(\mu) \mathcal{T}_{f_1, a_1+2-\bar{e}}(\lambda) \\ &- \sum_{\bar{e}=1}^{f_1-2} \frac{\begin{vmatrix} R(\lambda, \mu)_{f_1,1}^{f_1-1,2} & R(\lambda, \mu)_{f_1,1}^{\bar{e}, f_1+1-\bar{e}} \\ R(\lambda, \mu)_{f_1-1,2}^{f_1-1,2} & R(\lambda, \mu)_{f_1-1,2}^{\bar{e}, f_1+1-\bar{e}} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R(\lambda, \mu)_{f_1,1}^{f_1-1,2} & R(\lambda, \mu)_{f_1,1}^{f_1,1} \\ R(\lambda, \mu)_{f_1-1,2}^{f_1-1,2} & R(\lambda, \mu)_{f_1-1,2}^{f_1,1} \end{vmatrix}} \mathcal{T}_{\bar{e}, a_1-1}(\lambda) \mathcal{T}_{f_1+1-\bar{e}, 3}(\mu) \\ &\quad \text{para } d_1 \geq 1 \end{aligned} \quad (82)$$

e

$$\begin{aligned}
 \mathcal{T}_{a_1, a_1-1}(\lambda) \mathcal{T}_{1,3}(\mu) &= \sum_{\bar{e}=\bar{M}\{1, a_1+2-N\}}^{\bar{m}\{a_1+1, N\}} \frac{R(\lambda, \mu)_{a_1+2-\bar{e}, \bar{e}}^{a_1-1, 3} R(\lambda, \mu)_{a_1, 1}^{a_1-1, 2}}{\begin{vmatrix} R(\lambda, \mu)_{a_1, 1}^{a_1-1, 2} & R(\lambda, \mu)_{a_1, 1}^{a_1, 1} \\ R(\lambda, \mu)_{a_1-1, 2}^{a_1-1, 2} & R(\lambda, \mu)_{a_1-1, 2}^{a_1, 1} \end{vmatrix}} \mathcal{T}_{2, \bar{e}}(\mu) \mathcal{T}_{a_1-1, a_1+2-\bar{e}}(\lambda) \\
 &- \sum_{\bar{e}=\bar{M}\{1, a_1+2-N\}}^{\bar{m}\{a_1+1, N\}} \frac{R(\lambda, \mu)_{a_1+2-\bar{e}, \bar{e}}^{a_1-1, 3} R(\lambda, \mu)_{a_1-1, 2}^{a_1-1, 2}}{\begin{vmatrix} R(\lambda, \mu)_{a_1, 1}^{a_1-1, 2} & R(\lambda, \mu)_{a_1, 1}^{a_1, 1} \\ R(\lambda, \mu)_{a_1-1, 2}^{a_1-1, 2} & R(\lambda, \mu)_{a_1-1, 2}^{a_1, 1} \end{vmatrix}} \mathcal{T}_{1, \bar{e}}(\mu) \mathcal{T}_{a_1, a_1+2-\bar{e}}(\lambda) \\
 &- \sum_{\bar{e}=1}^{a_1-2} \frac{\begin{vmatrix} R(\lambda, \mu)_{a_1, 1}^{a_1-1, 2} & R(\lambda, \mu)_{a_1, 1}^{\bar{e}, a_1+1-\bar{e}} \\ R(\lambda, \mu)_{a_1-1, 2}^{a_1-1, 2} & R(\lambda, \mu)_{a_1-1, 2}^{\bar{e}, a_1+1-\bar{e}} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R(\lambda, \mu)_{a_1, 1}^{a_1-1, 2} & R(\lambda, \mu)_{a_1, 1}^{a_1, 1} \\ R(\lambda, \mu)_{a_1-1, 2}^{a_1-1, 2} & R(\lambda, \mu)_{a_1-1, 2}^{a_1, 1} \end{vmatrix}} \mathcal{T}_{\bar{e}, a_1-1}(\lambda) \mathcal{T}_{a_1+1-\bar{e}, 3}(\mu) \\
 &\quad \text{para } d_1 = 0. \tag{83}
 \end{aligned}$$

Através de uma inspeção direta das Eqs.(82,83), observamos que essas regras de comutação entre $\mathcal{T}_{f_1=a_1+d_1, a_1-1}(\lambda)$ e $\mathcal{T}_{1,3}(\mu)$ possuem a forma apropriada somente quando $d_1 > 1$. Nestes casos o lado direito das Eqs.(82,83) não gera produtos de campos indesejáveis e portanto, não precisamos utilizar o segundo sistema linear de equações. Todavia, esse não é o caso para $d_1 = 1$ ou $d_1 = 0$. Por exemplo, quando $d_1 = 1$ vemos que o primeiro termo da Eq.(82) para $\bar{e} = 1$ produz o produto $\mathcal{T}_{2,1}(\mu) \mathcal{T}_{a_1, a_1+1}(\lambda)$ que representa um termo indesejável. Entretanto, podemos eliminar esse produto graças ao segundo sistema linear de equações. A partir da Eq.(72) com $c_1 = 1$ calculamos o produto $\mathcal{T}_{2,1}(\mu) \mathcal{T}_{a_1, a_1+1}(\lambda)$, isto é,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{T}_{2,1}(\mu) \mathcal{T}_{a_1, a_1+1}(\lambda) &= \sum_{\bar{e}=1}^{a_1+1} \frac{R(\lambda, \mu)_{a_1, 2}^{\bar{e}, a_1+2-\bar{e}}}{R(\lambda, \mu)_{a_1+1, 1}^{a_1+1, 1}} \mathcal{T}_{\bar{e}, a_1+1}(\lambda) \mathcal{T}_{a_1+2-\bar{e}, 1}(\mu) \\
 &- \sum_{\bar{e}=2}^{a_1+1} \frac{R(\lambda, \mu)_{a_1+2-\bar{e}, \bar{e}}^{a_1+1, 1}}{R(\lambda, \mu)_{a_1+1, 1}^{a_1+1, 1}} \mathcal{T}_{2, \bar{e}}(\mu) \mathcal{T}_{a_1, a_1+2-\bar{e}}(\lambda) \quad \text{para } a_1 \leq N-1. \tag{84}
 \end{aligned}$$

Substituindo a Eq.(84) na Eq.(82) com $d_1 = 1$, eliminamos o termo indesejável, obtendo assim a regra de comutação entre os operadores $\mathcal{T}_{a_1+1, a_1-1}(\lambda)$ e $\mathcal{T}_{1,3}(\mu)$,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{T}_{a_1+1,a_1-1}(\lambda)\mathcal{T}_{1,3}(\mu) &= - \sum_{\bar{e}=2}^{a_1+1} \frac{R(\lambda, \mu)_{a_1+1,1}^{a_1,2}}{R(\lambda, \mu)_{a_1+1,1}^{a_1+1,1}} \left| \begin{array}{cc} R(\lambda, \mu)_{a_1+1,1}^{a_1-1,3} & R(\lambda, \mu)_{a_1+1,1}^{a_1+1,1} \\ R(\lambda, \mu)_{a_1+2-\bar{e},\bar{e}}^{a_1-1,3} & R(\lambda, \mu)_{a_1+2-\bar{e},\bar{e}}^{a_1+1,1} \end{array} \right| \mathcal{T}_{2,\bar{e}}(\mu) \\
 &\times \mathcal{T}_{a_1,a_1+2-\bar{e}}(\lambda) - \sum_{\bar{e}=1}^{a_1+1} \frac{R(\lambda, \mu)_{a_1+2-\bar{e},\bar{e}}^{a_1-1,3} R(\lambda, \mu)_{a_1,2}^{a_1,2}}{\left| \begin{array}{cc} R(\lambda, \mu)_{a_1+1,1}^{a_1,2} & R(\lambda, \mu)_{a_1+1,1}^{a_1+1,1} \\ R(\lambda, \mu)_{a_1,2}^{a_1,2} & R(\lambda, \mu)_{a_1,2}^{a_1+1,1} \end{array} \right|} \mathcal{T}_{1,\bar{e}}(\mu) \mathcal{T}_{a_1+1,a_1+2-\bar{e}}(\lambda) \\
 &+ \sum_{\bar{e}=1}^{a_1+1} \frac{R(\lambda, \mu)_{a_1,2}^{\bar{e},a_1+2-\bar{e}}}{R(\lambda, \mu)_{a_1+1,1}^{a_1+1,1}} \frac{R(\lambda, \mu)_{a_1+1,1}^{a_1,2} R(\lambda, \mu)_{a_1+1,1}^{a_1-1,3}}{\left| \begin{array}{cc} R(\lambda, \mu)_{a_1+1,1}^{a_1,2} & R(\lambda, \mu)_{a_1+1,1}^{a_1+1,1} \\ R(\lambda, \mu)_{a_1,2}^{a_1,2} & R(\lambda, \mu)_{a_1,2}^{a_1+1,1} \end{array} \right|} \mathcal{T}_{\bar{e},a_1+1}(\lambda) \mathcal{T}_{a_1+2-\bar{e},1}(\mu) \\
 &- \sum_{\bar{e}=1}^{a_1-1} \frac{\left| \begin{array}{cc} R(\lambda, \mu)_{a_1+1,1}^{a_1,2} & R(\lambda, \mu)_{a_1+1,1}^{\bar{e},a_1+2-\bar{e}} \\ R(\lambda, \mu)_{a_1,2}^{a_1,2} & R(\lambda, \mu)_{a_1,2}^{\bar{e},a_1+2-\bar{e}} \end{array} \right|}{\left| \begin{array}{cc} R(\lambda, \mu)_{a_1+1,1}^{a_1,2} & R(\lambda, \mu)_{a_1+1,1}^{a_1+1,1} \\ R(\lambda, \mu)_{a_1,2}^{a_1,2} & R(\lambda, \mu)_{a_1,2}^{a_1+1,1} \end{array} \right|} \mathcal{T}_{\bar{e},a_1-1}(\lambda) \mathcal{T}_{a_1+2-\bar{e},3}(\mu). \tag{85}
 \end{aligned}$$

O caso $d_1 = 0$ exige um esforço maior devido à presença de três diferentes tipos de produtos indesejáveis. Estes estão presentes no primeiro ($\bar{e} = 1, 2$) e no segundo ($\bar{e} = 1$) termos da Eq.(83) e suas respectivas formas são $\mathcal{T}_{2,1}(\mu)\mathcal{T}_{a_1-1,a_1+1}(\lambda)$, $\mathcal{T}_{2,2}(\mu)\mathcal{T}_{a_1-1,a_1}(\lambda)$ e $\mathcal{T}_{1,1}(\mu)\mathcal{T}_{a_1,a_1+1}(\lambda)$. Conforme segue, podemos eliminar todos esses termos com a ajuda do segundo sistema linear de equações. O termo $\mathcal{T}_{1,1}(\mu)\mathcal{T}_{a_1,a_1+1}(\lambda)$ é facilmente calculado da Eq.(72) atribuindo $c_1 = d_1 = 0$, cujo resultado é

$$\begin{aligned}
 \mathcal{T}_{1,1}(\mu)\mathcal{T}_{a_1,a_1+1}(\lambda) &= \sum_{\bar{e}=1}^{a_1} \frac{R(\lambda, \mu)_{a_1,1}^{\bar{e},a_1+1-\bar{e}}}{R(\lambda, \mu)_{a_1+1,1}^{a_1+1,1}} \mathcal{T}_{\bar{e},a_1+1}(\lambda) \mathcal{T}_{a_1+1-\bar{e},1}(\mu) \\
 &- \sum_{\bar{e}=2}^{a_1+1} \frac{R(\lambda, \mu)_{a_1+2-\bar{e},\bar{e}}^{a_1+1,1}}{R(\lambda, \mu)_{a_1+1,1}^{a_1+1,1}} \mathcal{T}_{1,\bar{e}}(\mu) \mathcal{T}_{a_1,a_1+2-\bar{e}}(\lambda). \tag{86}
 \end{aligned}$$

Os produtos restantes $\mathcal{T}_{2,1}(\mu)\mathcal{T}_{a_1-1,a_1+1}(\lambda)$ e $\mathcal{T}_{2,2}(\mu)\mathcal{T}_{a_1-1,a_1}(\lambda)$ são obtidos solucionando um sistema linear de equações de dimensão 2×2 . Esse sistema é derivado das Eqs.(72,73) para

$c_1 = 1$ e $d_1 = 0$ e o resultado final é

$$\begin{aligned}
 A_7^{(a_1-1,2)}(\lambda, \mu) \begin{pmatrix} \mathcal{T}_{2,1}(\mu)\mathcal{T}_{a_1-1,a_1+1}(\lambda) \\ \mathcal{T}_{2,2}(\mu)\mathcal{T}_{a_1-1,a_1}(\lambda) \end{pmatrix} &= \sum_{\bar{e}=1}^{a_1} \begin{pmatrix} \mathcal{T}_{\bar{e},a_1}(\lambda)\mathcal{T}_{a_1+1-\bar{e},2}(\mu) \\ \mathcal{T}_{\bar{e},a_1+1}(\lambda)\mathcal{T}_{a_1+1-\bar{e},1}(\mu) \end{pmatrix} \\
 &\times R(\lambda, \mu)_{a_1-1,2}^{\bar{e},a_1+1-\bar{e}} - \sum_{\bar{e}=3}^{a_1+1} v_7^{(a_1-1,2)}(\lambda, \mu) \mathcal{T}_{2,\bar{e}}(\mu) \mathcal{T}_{a_1-1,a_1+2-\bar{e}}(\lambda) \\
 &\text{para } a_1 \leq N-1
 \end{aligned} \tag{87}$$

e

$$\begin{aligned}
 R(\lambda, \mu)_{N,2}^{N,2} \mathcal{T}_{2,2}(\mu) \mathcal{T}_{N-1,N}(\lambda) &= \sum_{\bar{e}=1}^N R(\lambda, \mu)_{N-1,2}^{\bar{e},N+1-\bar{e}} \mathcal{T}_{\bar{e},N}(\lambda) \mathcal{T}_{N+1-\bar{e},2}(\mu) \\
 &- \sum_{\bar{e}=3}^N R(\lambda, \mu)_{N+2-\bar{e},\bar{e}}^{N,2} \mathcal{T}_{2,\bar{e}}(\mu) \mathcal{T}_{N-1,N+2-\bar{e}}(\lambda),
 \end{aligned} \tag{88}$$

onde

$$A_7^{(a_1-1,2)}(\lambda, \mu) = \begin{pmatrix} R(\lambda, \mu)_{a_1+1,1}^{a_1,2} & R(\lambda, \mu)_{a_1,2}^{a_1,2} \\ R(\lambda, \mu)_{a_1+1,1}^{a_1+1,1} & R(\lambda, \mu)_{a_1,2}^{a_1+1,1} \end{pmatrix} \text{ e } v_7^{(a_1-1,2)}(\lambda, \mu) = \begin{pmatrix} R(\lambda, \mu)_{a_1+2-\bar{e},\bar{e}}^{a_1,2} \\ R(\lambda, \mu)_{a_1+2-\bar{e},\bar{e}}^{a_1+1,1} \end{pmatrix}. \tag{89}$$

Resolvendo a Eq.(87) por meio da regra de Cramer, calculamos os termos $\mathcal{T}_{2,1}(\mu)\mathcal{T}_{a_1-1,a_1+1}(\lambda)$ e $\mathcal{T}_{2,2}(\mu)\mathcal{T}_{a_1-1,a_1}(\lambda)$ para $a_1 \leq N-1$. Substituindo esses resultados, bem como a expressão (86) para $\mathcal{T}_{1,1}(\mu)\mathcal{T}_{a_1,a_1+1}(\lambda)$ na Eq.(83) e após algumas simplificações encontramos a seguinte regra

de comutação

$$\begin{aligned}
 \mathcal{T}_{a_1, a_1-1}(\lambda) \mathcal{T}_{1,3}(\mu) &= \sum_{\bar{e}=3}^{a_1+1} R(\lambda, \mu)_{a_1,1}^{a_1-1,2} R(\lambda, \mu)_{a_1-1,1}^{a_1-1,1} D_3^{(a_1-1, \bar{e}-3)}(\lambda, \mu) \mathcal{T}_{2, \bar{e}}(\mu) \mathcal{T}_{a_1-1, a_1+2-\bar{e}}(\lambda) \\
 &+ \sum_{\bar{e}=3}^{a_1+1} \frac{R(\lambda, \mu)_{a_1-1,2}^{a_1-1,2}}{R(\lambda, \mu)_{a_1+1,1}^{a_1+1,1}} \left| \begin{array}{cc} R(\lambda, \mu)_{a_1+1,1}^{a_1-1,3} & R(\lambda, \mu)_{a_1+2-\bar{e}, \bar{e}}^{a_1-1,3} \\ R(\lambda, \mu)_{a_1+1,1}^{a_1+1,1} & R(\lambda, \mu)_{a_1+2-\bar{e}, \bar{e}}^{a_1+1,1} \end{array} \right| \mathcal{T}_{1, \bar{e}}(\mu) \mathcal{T}_{a_1, a_1+2-\bar{e}}(\lambda) \\
 &- \sum_{\bar{e}=1}^{a_1-2} \left| \begin{array}{cc} R(\lambda, \mu)_{a_1,1}^{a_1-1,2} & R(\lambda, \mu)_{a_1,1}^{\bar{e}, a_1+1-\bar{e}} \\ R(\lambda, \mu)_{a_1-1,2}^{a_1-1,2} & R(\lambda, \mu)_{a_1-1,2}^{\bar{e}, a_1+1-\bar{e}} \end{array} \right| \mathcal{T}_{\bar{e}, a_1-1}(\lambda) \mathcal{T}_{a_1+1-\bar{e}, 3}(\mu) \\
 &+ \sum_{\bar{e}=1}^{a_1-1} \left[\frac{R(\lambda, \mu)_{a_1-1,2}^{\bar{e}, a_1+1-\bar{e}} R(\lambda, \mu)_{a_1,1}^{a_1-1,2}}{R(\lambda, \mu)_{a_1,1}^{a_1-1,2} R(\lambda, \mu)_{a_1,1}^{a_1,1}} \left| \begin{array}{cc} R(\lambda, \mu)_{a_1+1,1}^{a_1,2} & R(\lambda, \mu)_{a_1,2}^{a_1,2} \\ R(\lambda, \mu)_{a_1+1,1}^{a_1-1,3} & R(\lambda, \mu)_{a_1,2}^{a_1-1,3} \end{array} \right| \right. \\
 &\quad \left. \frac{R(\lambda, \mu)_{a_1-1,2}^{a_1-1,2} R(\lambda, \mu)_{a_1-1,2}^{a_1,1}}{R(\lambda, \mu)_{a_1-1,2}^{a_1-1,2} R(\lambda, \mu)_{a_1-1,2}^{a_1,1}} \left| \begin{array}{cc} R(\lambda, \mu)_{a_1+1,1}^{a_1,2} & R(\lambda, \mu)_{a_1,2}^{a_1,2} \\ R(\lambda, \mu)_{a_1+1,1}^{a_1+1,1} & R(\lambda, \mu)_{a_1,2}^{a_1+1,1} \end{array} \right| \right. \\
 &\quad \left. - \frac{R(\lambda, \mu)_{a_1+1,1}^{a_1-1,3} R(\lambda, \mu)_{a_1,1}^{\bar{e}, a_1+1-\bar{e}} R(\lambda, \mu)_{a_1-1,2}^{a_1-1,2}}{R(\lambda, \mu)_{a_1+1,1}^{a_1+1,1} \left| \begin{array}{cc} R(\lambda, \mu)_{a_1,1}^{a_1-1,2} & R(\lambda, \mu)_{a_1,1}^{a_1,1} \\ R(\lambda, \mu)_{a_1-1,2}^{a_1-1,2} & R(\lambda, \mu)_{a_1-1,2}^{a_1,1} \end{array} \right|} \right] \mathcal{T}_{\bar{e}, a_1+1}(\lambda) \mathcal{T}_{a_1+1-\bar{e}, 1}(\mu) \\
 &+ \sum_{\bar{e}=1}^{a_1-1} \frac{R(\lambda, \mu)_{a_1-1,2}^{\bar{e}, a_1+1-\bar{e}} R(\lambda, \mu)_{a_1,1}^{a_1-1,2}}{R(\lambda, \mu)_{a_1,1}^{a_1-1,2} R(\lambda, \mu)_{a_1,1}^{a_1,1}} \left| \begin{array}{cc} R(\lambda, \mu)_{a_1+1,1}^{a_1-1,3} & R(\lambda, \mu)_{a_1,2}^{a_1-1,3} \\ R(\lambda, \mu)_{a_1+1,1}^{a_1+1,1} & R(\lambda, \mu)_{a_1,2}^{a_1+1,1} \end{array} \right| \mathcal{T}_{\bar{e}, a_1}(\lambda) \mathcal{T}_{a_1+1-\bar{e}, 2}(\mu) \\
 &+ \left[\frac{R(\lambda, \mu)_{a_1-1,2}^{a_1,1} R(\lambda, \mu)_{a_1,1}^{a_1-1,2}}{R(\lambda, \mu)_{a_1-1,2}^{a_1-1,2} R(\lambda, \mu)_{a_1,1}^{a_1,1}} \left| \begin{array}{cc} R(\lambda, \mu)_{a_1+1,1}^{a_1,2} & R(\lambda, \mu)_{a_1,2}^{a_1,2} \\ R(\lambda, \mu)_{a_1+1,1}^{a_1-1,3} & R(\lambda, \mu)_{a_1,2}^{a_1-1,3} \end{array} \right| \right. \\
 &\quad \left. \frac{R(\lambda, \mu)_{a_1-1,2}^{a_1-1,2} R(\lambda, \mu)_{a_1-1,2}^{a_1,1}}{R(\lambda, \mu)_{a_1-1,2}^{a_1-1,2} R(\lambda, \mu)_{a_1-1,2}^{a_1,1}} \left| \begin{array}{cc} R(\lambda, \mu)_{a_1+1,1}^{a_1,2} & R(\lambda, \mu)_{a_1,2}^{a_1,2} \\ R(\lambda, \mu)_{a_1+1,1}^{a_1+1,1} & R(\lambda, \mu)_{a_1,2}^{a_1+1,1} \end{array} \right| \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{R(\lambda, \mu)_{a_1+1,1}^{a_1-1,3}}{R(\lambda, \mu)_{a_1+1,1}^{a_1+1,1}} \left[\frac{R(\lambda, \mu)_{a_1,1}^{a_1,1} R(\lambda, \mu)_{a_1-1,2}^{a_1-1,2}}{\begin{vmatrix} R(\lambda, \mu)_{a_1,1}^{a_1-1,2} & R(\lambda, \mu)_{a_1,1}^{a_1,1} \\ R(\lambda, \mu)_{a_1-1,2}^{a_1-1,2} & R(\lambda, \mu)_{a_1-1,2}^{a_1,1} \end{vmatrix}} \right] \mathcal{T}_{a_1, a_1+1}(\lambda) \mathcal{T}_{1,1}(\mu) \\
 & + \frac{R(\lambda, \mu)_{a_1-1,2}^{a_1-1,2}}{R(\lambda, \mu)_{a_1+1,1}^{a_1+1,1}} \left[\frac{R(\lambda, \mu)_{a_1,2}^{a_1+1,1} R(\lambda, \mu)_{a_1,2}^{a_1-1,3}}{\begin{vmatrix} R(\lambda, \mu)_{a_1+1,1}^{a_1+1,1} & R(\lambda, \mu)_{a_1+1,1}^{a_1-1,3} \\ R(\lambda, \mu)_{a_1,1}^{a_1-1,2} & R(\lambda, \mu)_{a_1,1}^{a_1,1} \end{vmatrix}} \right] \mathcal{T}_{1,2}(\mu) \mathcal{T}_{a_1, a_1}(\lambda) \\
 & + \frac{R(\lambda, \mu)_{a_1-1,2}^{a_1,1} R(\lambda, \mu)_{a_1,1}^{a_1-1,2}}{\begin{vmatrix} R(\lambda, \mu)_{a_1,1}^{a_1-1,2} & R(\lambda, \mu)_{a_1,1}^{a_1,1} \\ R(\lambda, \mu)_{a_1-1,2}^{a_1-1,2} & R(\lambda, \mu)_{a_1-1,2}^{a_1,1} \end{vmatrix}} \left[\frac{R(\lambda, \mu)_{a_1+1,1}^{a_1-1,3} R(\lambda, \mu)_{a_1,2}^{a_1-1,3}}{\begin{vmatrix} R(\lambda, \mu)_{a_1+1,1}^{a_1+1,1} & R(\lambda, \mu)_{a_1,2}^{a_1+1,1} \\ R(\lambda, \mu)_{a_1+1,1}^{a_1,2} & R(\lambda, \mu)_{a_1,2}^{a_1,2} \end{vmatrix}} \right] \mathcal{T}_{a_1, a_1}(\lambda) \mathcal{T}_{1,2}(\mu) \\
 & \text{para } a_1 < N,
 \end{aligned} \tag{90}$$

onde $D_3^{(a, \bar{e})}(\lambda, \mu)$ é definido pela Eq.(48).

No caso $a_1 = N$ devemos apenas eliminar o termo $\mathcal{T}_{2,2}(\mu) \mathcal{T}_{N-1, N}(\lambda)$ da Eq.(83) com a ajuda

da relação (88). Realizando esse cálculo encontramos o resultado a seguir

$$\begin{aligned}
 \mathcal{T}_{N,N-1}(\lambda)\mathcal{T}_{1,3}(\mu) &= -\sum_{\bar{e}=3}^N \frac{R(\lambda, \mu)_{N,1}^{N-1,2}}{R(\lambda, \mu)_{N,2}^{N,2}} \frac{\begin{vmatrix} R(\lambda, \mu)_{N+2-\bar{e},\bar{e}}^{N,2} & R(\lambda, \mu)_{N,2}^{N,2} \\ R(\lambda, \mu)_{N+2-\bar{e},\bar{e}}^{N-1,3} & R(\lambda, \mu)_{N,2}^{N-1,3} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R(\lambda, \mu)_{N,1}^{N-1,2} & R(\lambda, \mu)_{N,1}^{N,1} \\ R(\lambda, \mu)_{N-1,2}^{N-1,2} & R(\lambda, \mu)_{N-1,2}^{N,1} \end{vmatrix}} \mathcal{T}_{2,\bar{e}}(\mu)\mathcal{T}_{N-1,N+2-\bar{e}}(\lambda) \\
 &- \sum_{\bar{e}=3}^N \frac{R(\lambda, \mu)_{N-1,2}^{N-1,2}R(\lambda, \mu)_{N+2-\bar{e},\bar{e}}^{N-1,3}}{\begin{vmatrix} R(\lambda, \mu)_{N,1}^{N-1,2} & R(\lambda, \mu)_{N,1}^{N,1} \\ R(\lambda, \mu)_{N-1,2}^{N-1,2} & R(\lambda, \mu)_{N-1,2}^{N,1} \end{vmatrix}} \mathcal{T}_{1,\bar{e}}(\mu)\mathcal{T}_{N,N+2-\bar{e}}(\lambda) \\
 &- \sum_{\bar{e}=1}^{N-2} \frac{\begin{vmatrix} R(\lambda, \mu)_{N,1}^{N-1,2} & R(\lambda, \mu)_{N,1}^{\bar{e},N+1-\bar{e}} \\ R(\lambda, \mu)_{N-1,2}^{N-1,2} & R(\lambda, \mu)_{N-1,2}^{\bar{e},N+1-\bar{e}} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R(\lambda, \mu)_{N,1}^{N-1,2} & R(\lambda, \mu)_{N,1}^{N,1} \\ R(\lambda, \mu)_{N-1,2}^{N-1,2} & R(\lambda, \mu)_{N-1,2}^{N,1} \end{vmatrix}} \mathcal{T}_{\bar{e},N-1}(\lambda)\mathcal{T}_{N+1-\bar{e},3}(\mu) \\
 &+ \sum_{\bar{e}=1}^{N-1} \frac{R(\lambda, \mu)_{N,1}^{N-1,2}}{R(\lambda, \mu)_{N,2}^{N,2}} \frac{R(\lambda, \mu)_{N,2}^{N-1,3}R(\lambda, \mu)_{N-1,2}^{\bar{e},N+1-\bar{e}}}{\begin{vmatrix} R(\lambda, \mu)_{N,1}^{N-1,2} & R(\lambda, \mu)_{N,1}^{N,1} \\ R(\lambda, \mu)_{N-1,2}^{N-1,2} & R(\lambda, \mu)_{N-1,2}^{N,1} \end{vmatrix}} \mathcal{T}_{\bar{e},N}(\lambda)\mathcal{T}_{N+1-\bar{e},2}(\mu) \\
 &- \frac{R(\lambda, \mu)_{N-1,2}^{N-1,2}R(\lambda, \mu)_{N,2}^{N-1,3}}{\begin{vmatrix} R(\lambda, \mu)_{N,1}^{N-1,2} & R(\lambda, \mu)_{N,1}^{N,1} \\ R(\lambda, \mu)_{N-1,2}^{N-1,2} & R(\lambda, \mu)_{N-1,2}^{N,1} \end{vmatrix}} \mathcal{T}_{1,2}(\mu)\mathcal{T}_{N,N}(\lambda) \\
 &+ \frac{R(\lambda, \mu)_{N,1}^{N-1,2}}{R(\lambda, \mu)_{N,2}^{N,2}} \frac{R(\lambda, \mu)_{N,2}^{N-1,3}R(\lambda, \mu)_{N-1,2}^{N,1}}{\begin{vmatrix} R(\lambda, \mu)_{N,1}^{N-1,2} & R(\lambda, \mu)_{N,1}^{N,1} \\ R(\lambda, \mu)_{N-1,2}^{N-1,2} & R(\lambda, \mu)_{N-1,2}^{N,1} \end{vmatrix}} \mathcal{T}_{N,N}(\lambda)\mathcal{T}_{1,2}(\mu). \tag{91}
 \end{aligned}$$

Ainda há um procedimento final a ser realizado nas Eqs.(90,91) afim de obtermos as apropriadas relações de comutação entre os operadores $\mathcal{T}_{a_1,a_1-1}(\lambda)$ e $\mathcal{T}_{1,3}(\mu)$. De fato, o último termo $\mathcal{T}_{a_1,a_1}(\lambda)\mathcal{T}_{1,2}(\mu)$ nas Eqs.(90,91) tem a ordem oposta à esperada entre os campos diagonal e os de criação. Entretanto, esse empecilho é facilmente solucionado com a ajuda das regras de comutação entre $\mathcal{T}_{a_1,a_1}(\lambda)$ e $\mathcal{T}_{1,2}(\mu)$ discutidas na subseção 2.1. Assim, substituindo as Eqs.(41,42) nas Eqs.(90,91) encontramos as relações de comutação procuradas entre o campo de aniquilação

$\mathcal{T}_{a_1, a_1-1}(\lambda)$ e o operador de criação $\mathcal{T}_{1,3}(\mu)$ que são

$$\begin{aligned}
 \mathcal{T}_{a_1, a_1-1}(\lambda) \mathcal{T}_{1,3}(\mu) &= \sum_{\bar{e}=3}^{a_1+1} R(\lambda, \mu)_{a_1,1}^{a_1-1,2} R(\lambda, \mu)_{a_1-1,1}^{a_1-1,1} D_3^{(a_1-1, \bar{e}-3)}(\lambda, \mu) \mathcal{T}_{2, \bar{e}}(\mu) \mathcal{T}_{a_1-1, a_1+2-\bar{e}}(\lambda) \\
 &+ \sum_{\bar{e}=3}^{a_1+1} \left[\frac{R(\lambda, \mu)_{a_1-1,2}^{a_1-1,2} R(\lambda, \mu)_{a_1+1,1}^{a_1+1,1}}{R(\lambda, \mu)_{a_1+1,1}^{a_1+1,1}} \left| \begin{array}{cc} R(\lambda, \mu)_{a_1+1,1}^{a_1-1,3} & R(\lambda, \mu)_{a_1+2-\bar{e}, \bar{e}}^{a_1-1,3} \\ R(\lambda, \mu)_{a_1+1,1}^{a_1+1,1} & R(\lambda, \mu)_{a_1+2-\bar{e}, \bar{e}}^{a_1+1,1} \end{array} \right| \right. \\
 &\quad \left. + \frac{R(\lambda, \mu)_{a_1-1,2}^{a_1,1} R(\lambda, \mu)_{a_1,1}^{a_1-1,2}}{R(\lambda, \mu)_{a_1,1}^{a_1-1,2} R(\lambda, \mu)_{a_1,1}^{a_1,1}} \left| \begin{array}{cc} R(\lambda, \mu)_{a_1,1}^{a_1-1,2} & R(\lambda, \mu)_{a_1,1}^{a_1,1} \\ R(\lambda, \mu)_{a_1-1,2}^{a_1-1,2} & R(\lambda, \mu)_{a_1-1,2}^{a_1,1} \end{array} \right| \right. \\
 &\quad \times \left. \frac{\left| \begin{array}{cc} R(\lambda, \mu)_{a_1+1,1}^{a_1-1,3} & R(\lambda, \mu)_{a_1,2}^{a_1-1,3} \\ R(\lambda, \mu)_{a_1+1,1}^{a_1+1,1} & R(\lambda, \mu)_{a_1,2}^{a_1+1,1} \end{array} \right|}{\left| \begin{array}{cc} R(\lambda, \mu)_{a_1+1,1}^{a_1,2} & R(\lambda, \mu)_{a_1,2}^{a_1,2} \\ R(\lambda, \mu)_{a_1+1,1}^{a_1+1,1} & R(\lambda, \mu)_{a_1,2}^{a_1+1,1} \end{array} \right|} D_2^{(a, \bar{e}-2)}(\lambda, \mu) \right] \mathcal{T}_{1, \bar{e}}(\mu) \mathcal{T}_{a_1, a_1+2-\bar{e}}(\lambda) \\
 &- \sum_{\bar{e}=1}^{a_1-2} \frac{\left| \begin{array}{cc} R(\lambda, \mu)_{a_1,1}^{a_1-1,2} & R(\lambda, \mu)_{a_1,1}^{\bar{e}, a_1+1-\bar{e}} \\ R(\lambda, \mu)_{a_1-1,2}^{a_1-1,2} & R(\lambda, \mu)_{a_1-1,2}^{\bar{e}, a_1+1-\bar{e}} \end{array} \right|}{\left| \begin{array}{cc} R(\lambda, \mu)_{a_1,1}^{a_1-1,2} & R(\lambda, \mu)_{a_1,1}^{a_1,1} \\ R(\lambda, \mu)_{a_1-1,2}^{a_1-1,2} & R(\lambda, \mu)_{a_1-1,2}^{a_1,1} \end{array} \right|} \mathcal{T}_{\bar{e}, a_1-1}(\lambda) \mathcal{T}_{a_1+1-\bar{e}, 3}(\mu) \\
 &+ \sum_{\bar{e}=1}^{a_1-1} \left[\frac{R(\lambda, \mu)_{a_1-1,2}^{\bar{e}, a_1+1-\bar{e}} R(\lambda, \mu)_{a_1,1}^{a_1-1,2}}{\left| \begin{array}{cc} R(\lambda, \mu)_{a_1,1}^{a_1-1,2} & R(\lambda, \mu)_{a_1,1}^{a_1,1} \\ R(\lambda, \mu)_{a_1-1,2}^{a_1-1,2} & R(\lambda, \mu)_{a_1-1,2}^{a_1,1} \end{array} \right|} \left| \begin{array}{cc} R(\lambda, \mu)_{a_1+1,1}^{a_1,2} & R(\lambda, \mu)_{a_1,2}^{a_1,2} \\ R(\lambda, \mu)_{a_1+1,1}^{a_1-1,3} & R(\lambda, \mu)_{a_1,2}^{a_1-1,3} \end{array} \right| \right. \\
 &\quad \left. - \frac{R(\lambda, \mu)_{a_1+1,1}^{a_1-1,3}}{R(\lambda, \mu)_{a_1+1,1}^{a_1+1,1}} \left| \begin{array}{cc} R(\lambda, \mu)_{a_1+1,1}^{a_1,2} & R(\lambda, \mu)_{a_1,2}^{a_1,2} \\ R(\lambda, \mu)_{a_1+1,1}^{a_1+1,1} & R(\lambda, \mu)_{a_1,2}^{a_1+1,1} \end{array} \right| \right. \\
 &\quad \times \frac{R(\lambda, \mu)_{a_1,1}^{\bar{e}, a_1+1-\bar{e}} R(\lambda, \mu)_{a_1-1,2}^{a_1-1,2}}{\left| \begin{array}{cc} R(\lambda, \mu)_{a_1,1}^{a_1-1,2} & R(\lambda, \mu)_{a_1,1}^{a_1,1} \\ R(\lambda, \mu)_{a_1-1,2}^{a_1-1,2} & R(\lambda, \mu)_{a_1-1,2}^{a_1,1} \end{array} \right|} + \frac{R(\lambda, \mu)_{a_1-1,2}^{a_1,1} R(\lambda, \mu)_{a_1,1}^{a_1-1,2}}{\left| \begin{array}{cc} R(\lambda, \mu)_{a_1,1}^{a_1-1,2} & R(\lambda, \mu)_{a_1,1}^{a_1,1} \\ R(\lambda, \mu)_{a_1-1,2}^{a_1-1,2} & R(\lambda, \mu)_{a_1-1,2}^{a_1,1} \end{array} \right|} \\
 &\quad \times \left. \frac{\left| \begin{array}{cc} R(\lambda, \mu)_{a_1+1,1}^{a_1-1,3} & R(\lambda, \mu)_{a_1,2}^{a_1-1,3} \\ R(\lambda, \mu)_{a_1+1,1}^{a_1+1,1} & R(\lambda, \mu)_{a_1,2}^{a_1+1,1} \end{array} \right|}{\left| \begin{array}{cc} R(\lambda, \mu)_{a_1+1,1}^{a_1,2} & R(\lambda, \mu)_{a_1,2}^{a_1,2} \\ R(\lambda, \mu)_{a_1+1,1}^{a_1+1,1} & R(\lambda, \mu)_{a_1,2}^{a_1+1,1} \end{array} \right|} \frac{R(\lambda, \mu)_{a_1,1}^{\bar{e}, a_1+1-\bar{e}} R(\lambda, \mu)_{a_1+1,1}^{a_1,2}}{R(\lambda, \mu)_{a_1,1}^{a_1,1} R(\lambda, \mu)_{a_1+1,1}^{a_1+1,1}} \right] \mathcal{T}_{\bar{e}, a_1+1}(\lambda) \mathcal{T}_{a_1+1-\bar{e}, 1}(\mu)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{\bar{e}=1}^{a_1-1} \frac{R(\lambda, \mu)_{a_1,1}^{a_1-1,2}}{R(\lambda, \mu)_{a_1,1}^{a_1,1}} \left[\begin{array}{c|c} R(\lambda, \mu)_{a_1-1,2}^{\bar{e}, a_1+1-\bar{e}} & R(\lambda, \mu)_{a_1,1}^{\bar{e}, a_1+1-\bar{e}} \\ \hline R(\lambda, \mu)_{a_1-1,2}^{a_1,1} & R(\lambda, \mu)_{a_1,1}^{a_1,1} \end{array} \middle| \begin{array}{c|c} R(\lambda, \mu)_{a_1+1,1}^{a_1-1,3} & R(\lambda, \mu)_{a_1,2}^{a_1-1,3} \\ \hline R(\lambda, \mu)_{a_1+1,1}^{a_1+1,1} & R(\lambda, \mu)_{a_1,2}^{a_1+1,1} \end{array} \right. \\
 & \times \mathcal{T}_{\bar{e}, a_1}(\lambda) \mathcal{T}_{a_1+1-\bar{e}, 2}(\mu) + \left[\begin{array}{c|c} & R(\lambda, \mu)_{a_1+1,1}^{a_1,2} & R(\lambda, \mu)_{a_1,2}^{a_1,2} \\ \hline R(\lambda, \mu)_{a_1-1,2}^{a_1,1} R(\lambda, \mu)_{a_1,1}^{a_1-1,2} & R(\lambda, \mu)_{a_1+1,1}^{a_1-1,3} & R(\lambda, \mu)_{a_1,2}^{a_1-1,3} \\ \hline R(\lambda, \mu)_{a_1,1}^{a_1-1,2} & R(\lambda, \mu)_{a_1,1}^{a_1,1} & R(\lambda, \mu)_{a_1+1,1}^{a_1,2} & R(\lambda, \mu)_{a_1,2}^{a_1,2} \\ R(\lambda, \mu)_{a_1-1,2}^{a_1-1,2} & R(\lambda, \mu)_{a_1-1,2}^{a_1,1} & R(\lambda, \mu)_{a_1+1,1}^{a_1+1,1} & R(\lambda, \mu)_{a_1,2}^{a_1+1,1} \end{array} \right. \\
 & - \frac{R(\lambda, \mu)_{a_1+1,1}^{a_1-1,3}}{R(\lambda, \mu)_{a_1+1,1}^{a_1+1,1}} \frac{R(\lambda, \mu)_{a_1,1}^{a_1,1} R(\lambda, \mu)_{a_1-1,2}^{a_1-1,2}}{\begin{array}{c|c} R(\lambda, \mu)_{a_1,1}^{a_1-1,2} & R(\lambda, \mu)_{a_1,1}^{a_1,1} \\ \hline R(\lambda, \mu)_{a_1-1,2}^{a_1-1,2} & R(\lambda, \mu)_{a_1-1,2}^{a_1,1} \end{array}} \mathcal{T}_{a_1, a_1+1}(\lambda) \mathcal{T}_{1,1}(\mu) \\
 & + \left[\begin{array}{c|c} & R(\lambda, \mu)_{a_1,2}^{a_1+1,1} & R(\lambda, \mu)_{a_1,2}^{a_1-1,3} \\ \hline R(\lambda, \mu)_{a_1-1,2}^{a_1-1,2} & R(\lambda, \mu)_{a_1+1,1}^{a_1+1,1} & R(\lambda, \mu)_{a_1+1,1}^{a_1-1,3} \\ \hline R(\lambda, \mu)_{a_1+1,1}^{a_1+1,1} & R(\lambda, \mu)_{a_1,1}^{a_1-1,2} & R(\lambda, \mu)_{a_1,1}^{a_1,1} \\ R(\lambda, \mu)_{a_1-1,2}^{a_1-1,2} & R(\lambda, \mu)_{a_1-1,2}^{a_1,1} & \end{array} \right. \\
 & + \frac{R(\lambda, \mu)_{a_1-1,2}^{a_1,1} R(\lambda, \mu)_{a_1,1}^{a_1-1,2}}{R(\lambda, \mu)_{a_1,1}^{a_1,1} R(\lambda, \mu)_{a_1+1,1}^{a_1+1,1}} \left[\begin{array}{c|c} R(\lambda, \mu)_{a_1+1,1}^{a_1-1,3} & R(\lambda, \mu)_{a_1,2}^{a_1-1,3} \\ \hline R(\lambda, \mu)_{a_1+1,1}^{a_1+1,1} & R(\lambda, \mu)_{a_1,2}^{a_1+1,1} \\ \hline R(\lambda, \mu)_{a_1,1}^{a_1-1,2} & R(\lambda, \mu)_{a_1,1}^{a_1,1} \\ R(\lambda, \mu)_{a_1-1,2}^{a_1-1,2} & R(\lambda, \mu)_{a_1-1,2}^{a_1,1} \end{array} \right] \mathcal{T}_{1,2}(\mu) \mathcal{T}_{a_1, a_1}(\lambda) \\
 & \text{para } a_1 < N
 \end{aligned} \tag{92}$$

e

$$\begin{aligned}
 \mathcal{T}_{N,N-1}(\lambda)\mathcal{T}_{1,3}(\mu) &= - \sum_{\bar{e}=3}^N \frac{R(\lambda, \mu)_{N,1}^{N-1,2}}{R(\lambda, \mu)_{N,2}^{N,2}} \frac{\begin{vmatrix} R(\lambda, \mu)_{N+2-\bar{e},\bar{e}}^{N,2} & R(\lambda, \mu)_{N,2}^{N,2} \\ R(\lambda, \mu)_{N+2-\bar{e},\bar{e}}^{N-1,3} & R(\lambda, \mu)_{N,2}^{N-1,3} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R(\lambda, \mu)_{N,1}^{N-1,2} & R(\lambda, \mu)_{N,1}^{N,1} \\ R(\lambda, \mu)_{N-1,2}^{N-1,2} & R(\lambda, \mu)_{N-1,2}^{N,1} \end{vmatrix}} \mathcal{T}_{2,\bar{e}}(\mu) \\
 &\times \mathcal{T}_{N-1,N+2-\bar{e}}(\lambda) + \sum_{\bar{e}=3}^N \frac{R(\lambda, \mu)_{N,2}^{N-1,3} R(\lambda, \mu)_{N,1}^{N-1,2}}{R(\lambda, \mu)_{N,2}^{N,2} R(\lambda, \mu)_{N,1}^{N,1}} \frac{R(\lambda, \mu)_{N,1}^{N-1,2} R(\lambda, \mu)_{N+2-\bar{e},\bar{e}}^{N,2}}{\begin{vmatrix} R(\lambda, \mu)_{N,1}^{N-1,2} & R(\lambda, \mu)_{N,1}^{N,1} \\ R(\lambda, \mu)_{N-1,2}^{N-1,2} & R(\lambda, \mu)_{N-1,2}^{N,1} \end{vmatrix}} \\
 &\times \mathcal{T}_{1,\bar{e}}(\mu)\mathcal{T}_{N,N+2-\bar{e}}(\lambda) - \sum_{\bar{e}=1}^{N-2} \frac{\begin{vmatrix} R(\lambda, \mu)_{N,1}^{N-1,2} & R(\lambda, \mu)_{N,1}^{\bar{e},N+1-\bar{e}} \\ R(\lambda, \mu)_{N-1,2}^{N-1,2} & R(\lambda, \mu)_{N-1,2}^{\bar{e},N+1-\bar{e}} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R(\lambda, \mu)_{N,1}^{N-1,2} & R(\lambda, \mu)_{N,1}^{N,1} \\ R(\lambda, \mu)_{N-1,2}^{N-1,2} & R(\lambda, \mu)_{N-1,2}^{N,1} \end{vmatrix}} \mathcal{T}_{\bar{e},N-1}(\lambda)\mathcal{T}_{N+1-\bar{e},3}(\mu) \\
 &+ \sum_{\bar{e}=1}^{N-1} \frac{R(\lambda, \mu)_{N,1}^{N-1,2}}{R(\lambda, \mu)_{N,1}^{N,1}} \frac{R(\lambda, \mu)_{N,2}^{N-1,3}}{R(\lambda, \mu)_{N,2}^{N,2}} \frac{\begin{vmatrix} R(\lambda, \mu)_{N,1}^{\bar{e},N+1-\bar{e}} & R(\lambda, \mu)_{N-1,2}^{\bar{e},N+1-\bar{e}} \\ R(\lambda, \mu)_{N,1}^{N,1} & R(\lambda, \mu)_{N-1,2}^{N,1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R(\lambda, \mu)_{N,1}^{N-1,2} & R(\lambda, \mu)_{N,1}^{N,1} \\ R(\lambda, \mu)_{N-1,2}^{N-1,2} & R(\lambda, \mu)_{N-1,2}^{N,1} \end{vmatrix}} \mathcal{T}_{\bar{e},N}(\lambda)\mathcal{T}_{N+1-\bar{e},2}(\mu) \\
 &+ \frac{R(\lambda, \mu)_{N,2}^{N-1,3}}{R(\lambda, \mu)_{N,1}^{N,1}} \mathcal{T}_{1,2}(\mu)\mathcal{T}_{N,N}(\lambda). \tag{93}
 \end{aligned}$$

Analisando o resultado acima concluímos que tanto as equações oriundas dos sistemas (66,67,72,73) são necessárias para obter as relações de comutação entre os operadores de aniquilação e criação, quanto as relações de comutação entre os operadores diagonais e criação (41,42).

A origem dessa complicação reside no fato que as soluções dos sistemas (72,73) geram alguns termos compostos por operadores de aniquilação ou diagonal à esquerda e criação à direita, e portanto, não devem aparecer na relação de comutação entre $\mathcal{T}_{a_1+d_1,a_1-1}(\lambda)$ e $\mathcal{T}_{1,b}(\mu)$.

Para provar tal fato, observamos inicialmente que o primeiro termo do lado direito das Eqs.(72,73) é da forma $\mathcal{T}_{\bar{e},a_1+d_1+c_1+i}(\lambda)\mathcal{T}_{a_1+d_1+1-\bar{e},b+c_1-d_1-1-i}(\mu)$ onde $i = 1 \dots b + c_1 - d_1 - 2$. Assim se $e \geq a_1 + d_1 - c_1 + 1 + \bar{M}\{0, d_1 + 3 - b\}$, esse termo será composto por operadores de aniquilação ou diagonal à esquerda e criação à direita.

A primeira vista, somos levados a pensar que retornamos ao estágio inicial já que nos deparamos, novamente, com o problema resolvido na primeira etapa da construção das relações de comutação. Entretanto, utilizando a Eq.(65), as soluções dos sistemas lineares (66,67,72,73) e as relações de comutação entre os operadores diagonais e $\mathcal{T}_{1,b}(\mu)$, é possível construir um processo de iteração que gere a relação de comutação entre $\mathcal{T}_{a_1+d_1,a_1-1}(\lambda)$ e $\mathcal{T}_{1,b}(\mu)$.

Como exemplo, analisaremos o processo de obtenção da relação de comutação entre $\mathcal{T}_{3,1}(\lambda)$ e $\mathcal{T}_{1,4}(\mu)$. Durante a construção da relação de comutação envolvendo esses operadores, além dos resultados obtidos dos sistemas (67,72) para $a_1 = 2$, $d_1 = 1$ e $b = 4$, são necessárias as relações de comutação entre $\mathcal{T}_{3,3}(\lambda)$ e $\mathcal{T}_{1,2}(\mu)$, $\mathcal{T}_{2,2}(\lambda)$ e $\mathcal{T}_{2,3}(\mu)$, $\mathcal{T}_{3,2}(\lambda)$ e $\mathcal{T}_{1,3}(\mu)$. A relação de comutação entre $\mathcal{T}_{3,3}(\lambda)$ e $\mathcal{T}_{1,2}(\mu)$ foi obtida na seção (2.1). Já a relação de comutação entre $\mathcal{T}_{3,2}(\lambda)$ e $\mathcal{T}_{1,3}(\mu)$ e entre $\mathcal{T}_{2,2}(\lambda)$ e $\mathcal{T}_{2,3}(\mu)$ são dadas por (92,87). Assim, utilizando as equações obtidas na construção da relação de comutação entre $\mathcal{T}_{3,2}(\lambda)$ e $\mathcal{T}_{1,3}(\mu)$ geramos a relação de comutação entre os operadores $\mathcal{T}_{3,1}(\lambda)$ e $\mathcal{T}_{1,4}(\mu)$. Portanto, a relação de comutação entre $\mathcal{T}_{a_1+d_1,a_1-1}(\lambda)$ e $\mathcal{T}_{1,b}(\mu)$ são de fato obtidas por um processo de iteração.

3 Identidades dos pesos de Boltzmann

Essa seção tem como objetivo demonstrar que as identidades entre as amplitudes $R(\lambda, \mu)_{a,b}^{c,d}$ são obtidas da relação de unitariedade e da equação de Yang-Baxter. Essas identidades serão essenciais durante a solução do problema de autovalor da matriz de transferência na próxima seção. Inicialmente abordaremos a relação de unitariedade (11).

3.1 Relação de unitariedade

Para iniciarmos a análise da relação de unitariedade (11) é fundamental o entendimento das consequências da simetria de carga $U(1)$ para a matriz R . Assim, antes de atacar a propriedade de unitariedade, vamos explorar as consequências da simetria de carga $U(1)$. Conforme descrito na Introdução, uma matriz R possui essa simetria se satisfaz restrição (22). Combinando a Eq.(22) com o fato que o operador $S_{12}^z = S^z \otimes I_N + I_N \otimes S^z$ é diagonalizável, é imediato concluir que a matriz R possui a forma de blocos diagonais na base dos autovetores de S_{12}^z . Logo, entender a estrutura dos autovalores de S_{12}^z implica em entender a forma da matriz R e portanto, entender as consequências da simetria $U(1)$.

O operador S_{12}^z possui $2N - 1$ autovalores dados por $s_q = N - q$ para $q = 1, \dots, 2N - 1$. A multiplicidade do autovalor s_q é igual a $\bar{m}\{q, 2N - q\}$. Na base canônica, onde a matriz S_{12}^z é diagonal, o autovalor s_q situa-se nas posições $[q + (N - 1)i; q + (N - 1)i]$ para $i = 0, \dots, q - 1$ com $q \leq N$ e $[N(q - N + 1) + (N - 1)i; N(q - N + 1) + (N - 1)i]$ para $i = 0, \dots, 2N - q - 1$ com $q > N$. Conseqüentemente o bloco diagonal da matriz R associado ao autovalor s_q situa-se nas posições $[q + (N - 1)i; q + (N - 1)j]$ para $i, j = 0, \dots, q - 1$ com $q \leq N$ e $[N(q - N + 1) + (N - 1)i; N(q - N + 1) + (N - 1)j]$ para $i, j = 0, \dots, 2N - q - 1$ com $q > N$. Note que a dimensão do bloco diagonal associado ao autovalor s_q é igual a q para $q \leq N$.

Neste ponto observamos que os resultados acima mencionados podem ser estendidos no caso $q > N$ através da definição de uma carga auxiliar $\bar{q} = 2N - q$. Sejam $B_q^1(\lambda, \mu)$ e $B_{\bar{q}}^2(\lambda, \mu)$ os blocos diagonais da matriz R associados a carga q e \bar{q} com $q \leq N$ e $\bar{q} < N$ respectivamente. Resumimos na tabela 7 abaixo os resultados anteriores.

Uma vez descritas as implicações da Eq.(22), retornamos agora ao problema de construção de identidades fundamentais a partir da propriedade de unitariedade.

⁸Autovalor da matriz S_{12}^z

Carga ⁸	Multiplicidade	Bloco diagonal
$q \leq N$	q	$B_q^1(\lambda, \mu) = [R(\lambda, \mu)_{1+j, q-j}^{1+i, q-i}]_{i,j}$ para $i, j = 0, \dots, q-1$
$q > N$	$\bar{q} = 2N - q$	$B_{\bar{q}}^2(\lambda, \mu) = [R(\lambda, \mu)_{N+1-\bar{q}+j, N-j}^{N+1-\bar{q}+i, N-i}]_{i,j}$ para $i, j = 0, \dots, \bar{q}-1$

Tabela 7: Estrutura dos blocos diagonais da matriz R associado ao autovalor $s_q = N - q$ do operador $S^z \otimes I_N + I_N \otimes S^z$.

A partir da definição dos blocos diagonais da matriz R descritos na Tab.(7) não é complicado demonstrar que a relação de unitariedade é dada em termos destes blocos pela seguinte expressão

$$P_q B_q^j(\lambda, \mu) P_q B_q^j(\mu, \lambda) = I_q \quad \text{para } j = 1, 2 \text{ e } q = 1, \dots, N, \quad (94)$$

onde I_q é a matriz identidade $q \times q$ e P_q é uma matriz $q \times q$ cujos elementos da diagonal secundária são iguais a 1 e o restante dos elementos são nulos. Ressaltamos que a Eq.(94) é o resultado da combinação da simetria de conservação de carga $U(1)$ com a propriedade de unitariedade (11).

A análise da Eq.(94) e da definição da submatriz $B_q^j(\lambda, \mu)$ na Tab.(7) nos leva a introduzir a seguinte notação

$$\bullet \quad a_{b,c}^{1,q} = \begin{cases} R(\lambda, \mu)_{q+1-b, b}^{c, q+1-c}, & \text{para } j = 1 \\ R(\lambda, \mu)_{N+1-b, N-q+b}^{N-q+c, N+1-c}, & \text{para } j = 2, \end{cases} \quad (95)$$

$$\bullet \quad \bar{a}_{b,c}^{1,q} = \begin{cases} R(\mu, \lambda)_{q+1-b, b}^{c, q+1-c}, & \text{para } j = 1 \\ R(\mu, \lambda)_{N+1-b, N-q+b}^{N-q+c, N+1-c}, & \text{para } j = 2, \end{cases} \quad (96)$$

onde $q = 1, \dots, N$ e $b, c = 1, \dots, q$.

Utilizando as definições (95,96) podemos reescrever a relação de unitariedade (94) em uma forma simples dada por

$$U[b, c]_j^q \equiv \sum_{\bar{e}=1}^q a_{b, \bar{e}}^{j, q} \bar{a}_{\bar{e}, c}^{j, q} - \delta_{b, c} = 0 \quad \text{para } q = 1, \dots, N, \quad b, c = 1, \dots, q \text{ e } j = 1, 2. \quad (97)$$

É importante mencionar que a notação (95,96) facilita a construção de identidades funda-

mentais derivadas da propriedade de unitariedade, pois a Eq.(97) possui uma fórmula compacta e simples. A seguir descrevemos as técnicas de obtenção destas identidades.

A primeira identidade não trivial entre os pesos $R(\lambda, \mu)_{a,b}^{c,d}$ segue da equação $U[1, 2]_1^2$. Essa identidade é relevante já no problema de uma partícula e substituindo os respectivos índices na Eq.(97) encontramos

$$\frac{R(\lambda, \mu)_{2,1}^{1,2}}{R(\lambda, \mu)_{2,1}^{2,1}} = -\frac{R(\mu, \lambda)_{1,2}^{2,1}}{R(\mu, \lambda)_{2,1}^{2,1}}. \quad (98)$$

As identidades obtidas nesta seção são necessárias pois o uso combinado das relações de comutação discutidas nas seções anteriores nos força a reordenar os parâmetros espectrais de alguns elementos da matriz R . Felizmente a propriedade de unitariedade nos possibilita resolver esse problema. Entretanto, identidades mais complexas que a Eq.(98) são necessárias, e para derivá-las utilizaremos combinações lineares da Eq.(97). O primeiro desses sistemas é obtido através da combinação linear $U[b; i+1]_j^{i+2} \bar{a}_{1,i+2}^{j,i+2} - U[b; i+2]_j^{i+2} \bar{a}_{1,i+1}^{j,i+2}$, $b = 1, \dots, i+1$, que é dada por

$$\sum_{\bar{e}=2}^{i+2} a_{b,\bar{e}}^{j,i+2} (\bar{a}_{\bar{e},i+1}^{j,i+2} \bar{a}_{1,i+2}^{j,i+2} - \bar{a}_{\bar{e},i+2}^{j,i+2} \bar{a}_{1,i+1}^{j,i+2}) = \delta_{b,i+1} \bar{a}_{1,i+2}^{j,i+2}, \quad b = 1, \dots, i+1. \quad (99)$$

Matriciando a Eq.(99) nas variáveis $\bar{a}_{b+1,i+1}^{j,i+2} \bar{a}_{1,i+2}^{j,i+2} - \bar{a}_{b+1,i+2}^{j,i+2} \bar{a}_{1,i+1}^{j,i+2}$ com $b = 1, \dots, i+1$ geramos o seguinte sistema linear

$$\begin{pmatrix} a_{1,2}^{j,i+2} & a_{1,3}^{j,i+2} & \dots & a_{1,i+2}^{j,i+2} \\ a_{2,2}^{j,i+2} & a_{2,3}^{j,i+2} & \dots & a_{2,i+2}^{j,i+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i+1,2}^{j,i+2} & a_{i+1,3}^{j,i+2} & \dots & a_{i+1,i+2}^{j,i+2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{a}_{2,i+1}^{j,i+2} \bar{a}_{1,i+2}^{j,i+2} - \bar{a}_{2,i+2}^{j,i+2} \bar{a}_{1,i+1}^{j,i+2} \\ \bar{a}_{3,i+1}^{j,i+2} \bar{a}_{1,i+2}^{j,i+2} - \bar{a}_{3,i+2}^{j,i+2} \bar{a}_{1,i+1}^{j,i+2} \\ \vdots \\ \bar{a}_{i+2,i+1}^{j,i+2} \bar{a}_{1,i+2}^{j,i+2} - \bar{a}_{i+2,i+2}^{j,i+2} \bar{a}_{1,i+1}^{j,i+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \bar{a}_{1,i+2}^{j,i+2} \end{pmatrix} \quad (100)$$

A solução desse sistema de equações para três componentes particulares gera importantes classes de identidades. Aplicando a regra de Cramer para calcularmos a primeira, a segunda e a última componentes do vetor do sistema linear (100) encontramos os seguintes resultados

$$-\begin{vmatrix} a_{1,2}^{j,i+2} & \dots & a_{1,i+2}^{j,i+2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i+1,2}^{j,i+2} & \dots & a_{i+1,i+2}^{j,i+2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \bar{a}_{1,i+1}^{j,i+2} & \bar{a}_{1,i+2}^{j,i+2} \\ \bar{a}_{2,i+1}^{j,i+2} & \bar{a}_{2,i+2}^{j,i+2} \end{vmatrix} = \bar{a}_{1,i+2}^{j,i+2} (-1)^i \begin{vmatrix} a_{1,3}^{j,i+2} & \dots & a_{1,i+2}^{j,i+2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i,3}^{j,i+2} & \dots & a_{i,i+2}^{j,i+2} \end{vmatrix}, \quad (101)$$

$$- \begin{vmatrix} a_{1,2}^{j,i+2} & \cdots & a_{1,i+2}^{j,i+2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i+1,2}^{j,i+2} & \cdots & a_{i+1,i+2}^{j,i+2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \bar{a}_{1,i+1}^{j,i+2} & \bar{a}_{1,i+2}^{j,i+2} \\ \bar{a}_{3,i+1}^{j,i+2} & \bar{a}_{3,i+2}^{j,i+2} \end{vmatrix} = \bar{a}_{1,i+2}^{j,i+2} (-1)^{i+1} \begin{vmatrix} a_{1,2}^{j,i+2} & a_{1,4}^{j,i+2} & \cdots & a_{1,i+2}^{j,i+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i,2}^{j,i+2} & a_{i,4}^{j,i+2} & \cdots & a_{i,i+2}^{j,i+2} \end{vmatrix} \quad (102)$$

e

$$- \begin{vmatrix} a_{1,2}^{j,i+2} & \cdots & a_{1,i+2}^{j,i+2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i+1,2}^{j,i+2} & \cdots & a_{i+1,i+2}^{j,i+2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \bar{a}_{1,i+1}^{j,i+2} & \bar{a}_{1,i+2}^{j,i+2} \\ \bar{a}_{i+2,i+1}^{j,i+2} & \bar{a}_{i+2,i+2}^{j,i+2} \end{vmatrix} = \bar{a}_{1,i+2}^{j,i+2} \begin{vmatrix} a_{1,2}^{j,i+2} & \cdots & a_{1,i+1}^{j,i+2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i,2}^{j,i+1} & \cdots & a_{i,i+1}^{j,i+2} \end{vmatrix}. \quad (103)$$

A seguir dividindo a Eq.(101) com $j = 2$ e $i = N - 3$ pela Eq.(101) com $j = 2$ e $i = N - 2$ e as Eqs.(102,103) pela Eq.(101) geramos as três identidades abaixo

$$- \frac{a_{1,N}^{2,N}}{a_{1,N-1}^{2,N-1}} \begin{vmatrix} a_{1,N-2}^{2,N-1} & a_{1,N-1}^{2,N-1} \\ a_{2,N-2}^{2,N-1} & a_{2,N-1}^{2,N-1} \\ a_{1,N-1}^{2,N} & a_{1,N}^{2,N} \\ a_{2,N-1}^{2,N} & a_{2,N}^{2,N} \end{vmatrix} = \frac{\begin{vmatrix} \bar{a}_{1,3}^{2,N-1} & \cdots & \bar{a}_{1,N-1}^{2,N-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{a}_{N-3,3}^{2,N-1} & \cdots & \bar{a}_{N-3,N-1}^{2,N-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \bar{a}_{1,2}^{2,N} & \cdots & \bar{a}_{1,N}^{2,N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{a}_{N-1,2}^{2,N} & \cdots & \bar{a}_{N-1,N}^{2,N} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \bar{a}_{1,2}^{2,N-1} & \cdots & \bar{a}_{1,N-1}^{2,N-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{a}_{N-2,2}^{2,N-1} & \cdots & \bar{a}_{N-2,N-1}^{2,N-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \bar{a}_{1,3}^{2,N} & \cdots & \bar{a}_{1,N}^{2,N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{a}_{N-2,3}^{2,N} & \cdots & \bar{a}_{N-2,N}^{2,N} \end{vmatrix}}, \quad (104)$$

$$\begin{vmatrix} \bar{a}_{1,i+1}^{j,i+2} & \bar{a}_{1,i+2}^{j,i+2} \\ \bar{a}_{3,i+1}^{j,i+2} & \bar{a}_{3,i+2}^{j,i+2} \end{vmatrix} = - \frac{\begin{vmatrix} a_{1,2}^{j,i+2} & a_{1,4}^{j,i+2} & \cdots & a_{1,i+2}^{j,i+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i,2}^{j,i+2} & a_{i,4}^{j,i+2} & \cdots & a_{i,i+2}^{j,i+2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \bar{a}_{1,i+1}^{j,i+2} & \bar{a}_{1,i+2}^{j,i+2} \\ \bar{a}_{2,i+1}^{j,i+2} & \bar{a}_{2,i+2}^{j,i+2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{1,3}^{j,i+2} & \cdots & a_{1,i+2}^{j,i+2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i,3}^{j,i+2} & \cdots & a_{i,i+2}^{j,i+2} \end{vmatrix}} \quad (105)$$

e

$$\frac{\begin{vmatrix} \bar{a}_{1,i+1}^{j,i+2} & \bar{a}_{1,i+2}^{j,i+2} \\ \bar{a}_{i+2,i+1}^{j,i+2} & \bar{a}_{i+2,i+2}^{j,i+2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \bar{a}_{1,i+1}^{j,i+2} & \bar{a}_{1,i+2}^{j,i+2} \\ \bar{a}_{2,i+1}^{j,i+2} & \bar{a}_{2,i+2}^{j,i+2} \end{vmatrix}} = (-1)^i \frac{\begin{vmatrix} a_{1,2}^{j,i+2} & \cdots & a_{1,i+1}^{j,i+2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i,2}^{j,i+1} & \cdots & a_{i,i+1}^{j,i+2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{1,3}^{j,i+2} & \cdots & a_{1,i+2}^{j,i+2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i,3}^{j,i+2} & \cdots & a_{i,i+2}^{j,i+2} \end{vmatrix}}. \quad (106)$$

Abaixo discutiremos quatro específicas identidades que serão utilizadas na próxima seção.

As primeiras duas identidades são relevantes para verificar a propriedade de simetria do estado de duas partículas em relação permutação das variáveis espectrais. Ambas identidades são derivadas das Eqs.(105,106) fixando $i = j = 1$. Dividindo essas equações por $U[1; 1]_1^1$ encontramos respectivamente

$$D_2^{(2,0)}(\lambda, \mu) D_2^{(2,0)}(\mu, \lambda) = \frac{R(\lambda, \mu)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda, \mu)_{2,1}^{2,1}} \frac{R(\mu, \lambda)_{1,1}^{1,1}}{R(\mu, \lambda)_{2,1}^{2,1}}, \quad (107)$$

e

$$D_2^{(2,1)}(\lambda, \mu) = -\frac{R(\mu, \lambda)_{3,1}^{2,2}}{R(\mu, \lambda)_{3,1}^{3,1}} D_2^{(2,0)}(\lambda, \mu). \quad (108)$$

Os dois exemplos restantes referem-se ao problema de três partículas. Como nos exemplos anteriores (107,108), as próximas identidades são importantes na demonstração da propriedade de simetria desse estado em relação às variáveis espectrais. Novamente, as identidades são derivadas das Eqs.(105,106), onde fixamos os índices $i = 2$ e $j = 1$, obtendo assim o resultado abaixo

$$\frac{D_2^{(3,1)}(\lambda_1, \lambda)}{D_2^{(3,0)}(\lambda_1, \lambda)} = \frac{\begin{vmatrix} R(\lambda_1, \lambda)_{4,1}^{3,2} & R(\lambda_1, \lambda)_{2,3}^{3,2} \\ R(\lambda_1, \lambda)_{4,1}^{4,1} & R(\lambda_1, \lambda)_{2,3}^{4,1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R(\lambda_1, \lambda)_{4,1}^{3,2} & R(\lambda_1, \lambda)_{3,2}^{3,2} \\ R(\lambda_1, \lambda)_{4,1}^{4,1} & R(\lambda_1, \lambda)_{3,2}^{4,1} \end{vmatrix}} = -\frac{\begin{vmatrix} R(\lambda, \lambda_1)_{4,1}^{2,3} & R(\lambda, \lambda_1)_{3,2}^{2,3} \\ R(\lambda, \lambda_1)_{4,1}^{4,1} & R(\lambda, \lambda_1)_{3,2}^{4,1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R(\lambda, \lambda_1)_{4,1}^{3,2} & R(\lambda, \lambda_1)_{3,2}^{3,2} \\ R(\lambda, \lambda_1)_{4,1}^{4,1} & R(\lambda, \lambda_1)_{3,2}^{4,1} \end{vmatrix}} \quad (109)$$

e

$$\frac{D_2^{(3,2)}(\lambda_1, \lambda)}{D_2^{(3,0)}(\lambda_1, \lambda)} = \frac{\begin{vmatrix} R(\lambda_1, \lambda)_{4,1}^{3,2} & R(\lambda_1, \lambda)_{1,4}^{3,2} \\ R(\lambda_1, \lambda)_{4,1}^{4,1} & R(\lambda_1, \lambda)_{1,4}^{4,1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R(\lambda_1, \lambda)_{4,1}^{3,2} & R(\lambda_1, \lambda)_{3,2}^{3,2} \\ R(\lambda_1, \lambda)_{4,1}^{4,1} & R(\lambda_1, \lambda)_{3,2}^{4,1} \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} R(\lambda, \lambda_1)_{4,1}^{2,3} & R(\lambda, \lambda_1)_{3,2}^{2,3} \\ R(\lambda, \lambda_1)_{4,1}^{3,2} & R(\lambda, \lambda_1)_{3,2}^{3,2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R(\lambda, \lambda_1)_{4,1}^{3,2} & R(\lambda, \lambda_1)_{3,2}^{3,2} \\ R(\lambda, \lambda_1)_{4,1}^{4,1} & R(\lambda, \lambda_1)_{3,2}^{4,1} \end{vmatrix}}. \quad (110)$$

As próximas identidades construídas a partir da propriedade de unitariedade são derivadas da combinação de dois sistemas lineares de equações. O primeiro dos sistemas é obtido a partir da combinação linear $U[b; k+2]_j^{i+2} \bar{a}_{1,i+2}^{j,i+2} - U[b; i+2]_j^{i+2} \bar{a}_{1,k+2}^{j,i+2}$ para $b = 1, 2, 3$ e $k = 1, \dots, i-1$. Matriciando essas equações nas variáveis $\bar{a}_{\bar{e},k+2}^{j,i+2} \bar{a}_{1,i+2}^{j,i+2} - \bar{a}_{\bar{e},i+2}^{j,i+2} \bar{a}_{1,k+2}^{j,i+2}$ para $\bar{e} = i, i+1, i+2$ geramos

a seguinte expressão

$$\begin{pmatrix} a_{1,i}^{j,i+2} & a_{1,i+1}^{j,i+2} & a_{1,i+2}^{j,i+2} \\ a_{2,i}^{j,i+2} & a_{2,i+1}^{j,i+2} & a_{2,i+2}^{j,i+2} \\ a_{3,i}^{j,i+2} & a_{3,i+1}^{j,i+2} & a_{3,i+2}^{j,i+2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{a}_{i,k+2}^{j,i+2} \bar{a}_{1,i+2}^{j,i+2} - \bar{a}_{i,i+2}^{j,i+2} \bar{a}_{1,k+2}^{j,i+2} \\ \bar{a}_{i+1,k+2}^{j,i+2} \bar{a}_{1,i+2}^{j,i+2} - \bar{a}_{i+1,i+2}^{j,i+2} \bar{a}_{1,k+2}^{j,i+2} \\ \bar{a}_{i+2,k+2}^{j,i+2} \bar{a}_{1,i+2}^{j,i+2} - \bar{a}_{i+2,i+2}^{j,i+2} \bar{a}_{1,k+2}^{j,i+2} \end{pmatrix} + \sum_{\bar{e}=2}^{i-1} \begin{pmatrix} a_{1,i+1-\bar{e}}^{j,i+2} \\ a_{2,i+1-\bar{e}}^{j,i+2} \\ a_{3,i+1-\bar{e}}^{j,i+2} \end{pmatrix} \\ \times \begin{vmatrix} \bar{a}_{1,i+2}^{j,i+2} & \bar{a}_{1,k+2}^{j,i+2} \\ \bar{a}_{i+1-\bar{e},i+2}^{j,i+2} & \bar{a}_{i+1-\bar{e},k+2}^{j,i+2} \end{vmatrix} = \delta_{k,1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \bar{a}_{1,i+2}^{j,i+2} \end{pmatrix} \quad (111)$$

Calculando o primeiro termo $\bar{a}_{i,k+2}^{j,i+2} \bar{a}_{1,i+2}^{j,i+2} - \bar{a}_{i,i+2}^{j,i+2} \bar{a}_{1,k+2}^{j,i+2}$ da Eq.(111) através da regra de Cramer, encontramos o resultado abaixo

$$\sum_{\bar{e}=1}^{i-1} M_{\bar{e}} \bar{X}_{k,\bar{e}} = \delta_{k,1} \bar{a}_{1,i+2}^{j,i+2} \begin{vmatrix} a_{1,i+1}^{j,i+2} & a_{1,i+2}^{j,i+2} \\ a_{2,i+1}^{j,i+2} & a_{2,i+2}^{j,i+2} \end{vmatrix}, \quad \text{para } k = 1, \dots, i-1, \quad (112)$$

onde

$$M_{\bar{e}} = \begin{vmatrix} a_{1,i+1-\bar{e}}^{j,i+2} & a_{1,i+1}^{j,i+2} & a_{1,i+2}^{j,i+2} \\ a_{2,i+1-\bar{e}}^{j,i+2} & a_{2,i+1}^{j,i+2} & a_{2,i+2}^{j,i+2} \\ a_{3,i+1-\bar{e}}^{j,i+2} & a_{3,i+1}^{j,i+2} & a_{3,i+2}^{j,i+2} \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad \bar{X}_{k,\bar{e}} = \begin{vmatrix} \bar{a}_{1,i+2}^{j,i+2} & \bar{a}_{1,k+2}^{j,i+2} \\ \bar{a}_{i+1-\bar{e},i+2}^{j,i+2} & \bar{a}_{i+1-\bar{e},k+2}^{j,i+2} \end{vmatrix} \quad (113)$$

Uma análise direta da Eq.(112) revela que essas equações formam um sistema linear nas variáveis $M_{\bar{e}}$ para $\bar{e} = 1, \dots, i-1$, isto é,

$$\begin{pmatrix} \bar{X}_{1,1} & \bar{X}_{1,2} & \dots & \bar{X}_{1,i-1} \\ \bar{X}_{2,1} & \bar{X}_{2,2} & \dots & \bar{X}_{2,i-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{X}_{i-1,1} & \bar{X}_{i-1,2} & \dots & \bar{X}_{i-1,i-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{i-1} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1,i+1}^{j,i+2} & a_{1,i+2}^{j,i+2} \\ a_{2,i+1}^{j,i+2} & a_{2,i+2}^{j,i+2} \end{vmatrix} \begin{pmatrix} \bar{a}_{1,i+2}^{j,i+2} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (114)$$

Utilizando a regra de Cramer para calcular M_1 obtemos

$$\begin{vmatrix} \bar{X}_{1,1} & \bar{X}_{1,2} & \dots & \bar{X}_{1,i-1} \\ \bar{X}_{2,1} & \bar{X}_{2,2} & \dots & \bar{X}_{2,i-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{X}_{i-1,1} & \bar{X}_{i-1,2} & \dots & \bar{X}_{i-1,i-1} \end{vmatrix} M_1 = \bar{a}_{1,i+2}^{j,i+2} \begin{vmatrix} a_{1,i+1}^{j,i+2} & a_{1,i+2}^{j,i+2} \\ a_{2,i+1}^{j,i+2} & a_{2,i+2}^{j,i+2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \bar{X}_{2,2} & \dots & \bar{X}_{2,i-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{X}_{i-1,2} & \dots & \bar{X}_{i-1,i-1} \end{vmatrix}. \quad (115)$$

A próxima identidade é gerada da divisão da Eq.(115) pela Eq.(101) com $i \rightarrow i-1$ e $\lambda \leftrightarrow \mu$. Mais especificamente a Eq.(101) com $i \rightarrow i-1$ e $\lambda \leftrightarrow \mu$ é dada por

$$- \begin{vmatrix} \bar{a}_{1,2}^{j,i+1} & \dots & \bar{a}_{1,i+1}^{j,i+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{a}_{i,2}^{j,i+1} & \dots & \bar{a}_{i,i+1}^{j,i+1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{1,i}^{j,i+1} & a_{1,i+1}^{j,i+1} \\ a_{2,i}^{j,i+1} & a_{2,i+1}^{j,i+1} \end{vmatrix} = a_{1,i+1}^{j,i+1} (-1)^{i+1} \begin{vmatrix} \bar{a}_{1,3}^{j,i+1} & \dots & \bar{a}_{1,i+1}^{j,i+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{a}_{i-1,3}^{j,i+1} & \dots & \bar{a}_{i-1,i+1}^{j,i+1} \end{vmatrix} \quad (116)$$

e a razão da Eq.(115) com a Eq.(116) é igual a

$$\frac{\begin{vmatrix} \bar{X}_{1,1} & \bar{X}_{1,2} & \dots & \bar{X}_{1,i-1} \\ \bar{X}_{2,1} & \bar{X}_{2,2} & \dots & \bar{X}_{2,i-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{X}_{i-1,1} & \bar{X}_{i-1,2} & \dots & \bar{X}_{i-1,i-1} \end{vmatrix} M_1}{\begin{vmatrix} \bar{a}_{1,2}^{j,i+1} & \dots & \bar{a}_{1,i+1}^{j,i+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{a}_{i,2}^{j,i+1} & \dots & \bar{a}_{i,i+1}^{j,i+1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{1,i}^{j,i+1} & a_{1,i+1}^{j,i+1} \\ a_{2,i}^{j,i+1} & a_{2,i+1}^{j,i+1} \end{vmatrix}} = (-1)^i \frac{\bar{a}_{1,i+2}^{j,i+2}}{a_{1,i+1}^{j,i+1}} \frac{\begin{vmatrix} a_{1,i+1}^{j,i+2} & a_{1,i+2}^{j,i+2} \\ a_{2,i+1}^{j,i+2} & a_{2,i+2}^{j,i+2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \bar{X}_{2,2} & \dots & \bar{X}_{2,i-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{X}_{i-1,2} & \dots & \bar{X}_{i-1,i-1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \bar{a}_{1,3}^{j,i+1} & \dots & \bar{a}_{1,i+1}^{j,i+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{a}_{i-1,3}^{j,i+1} & \dots & \bar{a}_{i-1,i+1}^{j,i+1} \end{vmatrix}} \quad (117)$$

Usando as seguintes propriedades da função determinante

$$\begin{vmatrix} a_1 b_1 + c_1 & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_1 b_2 + c_2 & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 b_n + c_n & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_1 & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ b_2 & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_1 & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ c_2 & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_n & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} \quad (118)$$

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,i} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \dots & a_{2,i} & \dots & a_{2,j} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \dots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,i} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,i} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \dots & a_{2,j} & \dots & a_{2,i} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \dots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,i} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}, \quad (119)$$

encontramos as seguintes simplificações

$$\begin{vmatrix} \bar{X}_{1,1} & \bar{X}_{1,2} & \dots & \bar{X}_{1,i-1} \\ \bar{X}_{2,1} & \bar{X}_{2,2} & \dots & \bar{X}_{2,i-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{X}_{i-1,1} & \bar{X}_{i-1,2} & \dots & \bar{X}_{i-1,i-1} \end{vmatrix} = (\bar{a}_{1,i+2}^{j,i+2})^{i-2} \begin{vmatrix} \bar{a}_{1,i+2}^{j,i+2} & \bar{a}_{1,i+1}^{j,i+2} & \dots & \bar{a}_{1,3}^{j,i+2} \\ \bar{a}_{2,i+2}^{j,i+2} & \bar{a}_{2,i+1}^{j,i+2} & \dots & \bar{a}_{2,3}^{j,i+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{a}_{i,i+2}^{j,i+2} & \bar{a}_{i,i+1}^{j,i+2} & \dots & \bar{a}_{i,3}^{j,i+2} \end{vmatrix} \quad (120)$$

e

$$\begin{vmatrix} \bar{X}_{2,2} & \dots & \bar{X}_{2,i-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{X}_{i-1,2} & \dots & \bar{X}_{i-1,i-1} \end{vmatrix} = (\bar{a}_{1,i+2}^{j,i+2})^{i-3} \begin{vmatrix} \bar{a}_{1,i+2}^{j,i+2} & \bar{a}_{1,i+1}^{j,i+2} & \dots & \bar{a}_{1,4}^{j,i+2} \\ \bar{a}_{2,i+2}^{j,i+2} & \bar{a}_{2,i+1}^{j,i+2} & \dots & \bar{a}_{2,4}^{j,i+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{a}_{i-1,i+2}^{j,i+2} & \bar{a}_{i-1,i+1}^{j,i+2} & \dots & \bar{a}_{i-1,4}^{j,i+2} \end{vmatrix}. \quad (122)$$

Finalmente, utilizando esses resultados podemos simplificar a identidade (117) encontrando o seguinte resultado

$$\begin{vmatrix} a_{1,i}^{j,i+2} & a_{1,i+1}^{j,i+2} & a_{1,i+2}^{j,i+2} \\ a_{2,i}^{j,i+2} & a_{2,i+1}^{j,i+2} & a_{2,i+2}^{j,i+2} \\ a_{3,i}^{j,i+2} & a_{3,i+1}^{j,i+2} & a_{3,i+2}^{j,i+2} \end{vmatrix} a_{1,i+1}^{j,i+1} = (-1)^i \begin{vmatrix} \bar{a}_{1,i+2}^{j,i+2} & \bar{a}_{1,i+1}^{j,i+2} & \dots & \bar{a}_{1,4}^{j,i+2} \\ \bar{a}_{2,i+2}^{j,i+2} & \bar{a}_{2,i+1}^{j,i+2} & \dots & \bar{a}_{2,4}^{j,i+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{a}_{i-1,i+2}^{j,i+2} & \bar{a}_{i-1,i+1}^{j,i+2} & \dots & \bar{a}_{i-1,4}^{j,i+2} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \bar{a}_{1,2}^{j,i+1} & \dots & \bar{a}_{1,i+1}^{j,i+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{a}_{i,2}^{j,i+1} & \dots & \bar{a}_{i,i+1}^{j,i+1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \bar{a}_{1,3}^{j,i+1} & \dots & \bar{a}_{1,i+1}^{j,i+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{a}_{i-1,3}^{j,i+1} & \dots & \bar{a}_{i-1,i+1}^{j,i+1} \end{vmatrix} \quad (123)$$

Em seguida exemplificaremos três identidades que serão fundamentais na construção do

estado de duas partículas. As duas primeiras identidades originam-se da Eq.(105) com $j = 1$, $i = a - 1, a$ e $(\mu, \lambda) \rightarrow (\lambda, \lambda_1)$ e da Eq.(123) com $j = 1$, $i = a$ e $(\lambda, \mu) \rightarrow (\lambda, \lambda_1)$. De acordo com a definição (95) essas equações são dadas em termos dos elementos da matriz R por

$$\frac{D_2^{(i+1,1)}(\lambda, \lambda_1)}{D_2^{(i+1,0)}(\lambda, \lambda_1)} = \frac{\begin{vmatrix} R(\lambda, \lambda_1)_{i+2,1}^{i+1,2} & R(\lambda, \lambda_1)_{i+2,1}^{i+2,1} \\ R(\lambda, \lambda_1)_{i,3}^{i+1,2} & R(\lambda, \lambda_1)_{i,3}^{i+2,1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R(\lambda, \lambda_1)_{i+2,1}^{i+1,2} & R(\lambda, \lambda_1)_{i+2,1}^{i+2,1} \\ R(\lambda, \lambda_1)_{i+1,2}^{i+1,2} & R(\lambda, \lambda_1)_{i+1,2}^{i+2,1} \end{vmatrix}} = -\frac{D_5^{(i+2,2)}(\lambda, \lambda_1)}{D_4^{(i+2,3)}(\lambda, \lambda_1)}, \quad \text{para } i = a - 1, a \quad (124)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{D_3^{(a,0)}(\lambda, \lambda_1)}{D_2^{(a,0)}(\lambda, \lambda_1)} &= \frac{\begin{vmatrix} R(\lambda, \lambda_1)_{a+2,1}^{a,3} & R(\lambda, \lambda_1)_{a+2,1}^{a+1,2} & R(\lambda, \lambda_1)_{a+2,1}^{a+2,1} \\ R(\lambda, \lambda_1)_{a+1,2}^{a,3} & R(\lambda, \lambda_1)_{a+1,2}^{a+1,2} & R(\lambda, \lambda_1)_{a+1,2}^{a+2,1} \\ R(\lambda, \lambda_1)_{a,3}^{a,3} & R(\lambda, \lambda_1)_{a,3}^{a+1,2} & R(\lambda, \lambda_1)_{a,3}^{a+2,1} \end{vmatrix} R(\lambda, \lambda_1)_{a+1,1}^{a+1,1}}{\begin{vmatrix} R(\lambda, \lambda_1)_{a+1,1}^{a,2} & R(\lambda, \lambda_1)_{a+1,1}^{a+1,1} \\ R(\lambda, \lambda_1)_{a,2}^{a,2} & R(\lambda, \lambda_1)_{a,2}^{a+1,1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} R(\lambda, \lambda_1)_{a+2,1}^{a+1,2} & R(\lambda, \lambda_1)_{a+2,1}^{a+2,1} \\ R(\lambda, \lambda_1)_{a+1,2}^{a+1,2} & R(\lambda, \lambda_1)_{a+1,2}^{a+2,1} \end{vmatrix}} \\ &= \frac{D_4^{(a+1,2)}(\lambda, \lambda_1) D_4^{(a+2,4)}(\lambda, \lambda_1)}{D_4^{(a+1,3)}(\lambda, \lambda_1) D_4^{(a+2,3)}(\lambda, \lambda_1)}, \end{aligned} \quad (125)$$

onde os determinantes $D_4^{(i,b)}(\lambda, \lambda_1)$ e $D_5^{(i+2,2)}(\lambda, \lambda_1)$ são

$$D_4^{(i,b)}(\lambda, \lambda_1) = \begin{vmatrix} R(\lambda_1, \lambda)_{i,1}^{b,i+1-b} & \dots & R(\lambda_1, \lambda)_{i,1}^{i,1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ R(\lambda_1, \lambda)_{b,i+1-b}^{b,i+1-b} & \dots & R(\lambda_1, \lambda)_{b,i+1-b}^{i,1} \end{vmatrix}, \quad \text{para } i \leq N \quad (126)$$

e

$$D_5^{(i+2,2)}(\lambda, \lambda_1) = \begin{vmatrix} R(\lambda_1, \lambda)_{i+2,1}^{2,i+1} & R(\lambda_1, \lambda)_{i+2,1}^{4,i-1} & \dots & R(\lambda_1, \lambda)_{i+2,1}^{i+2,1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R(\lambda_1, \lambda)_{3,i}^{2,i+1} & R(\lambda_1, \lambda)_{3,i}^{4,i-1} & \dots & R(\lambda_1, \lambda)_{3,i}^{i+2,1} \end{vmatrix}, \quad \text{para } i \leq N - 2. \quad (127)$$

A terceira identidade, mais especificamente, é utilizada durante o cálculo do operador $\mathcal{T}_{N-1,N-1}(\lambda)$ no estado de duas partículas, sendo obtida da Eq.(104) com $(\lambda, \mu) \rightarrow (\lambda_1, \lambda)$,

isto é,

$$\begin{aligned}
 & \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{N,1}^{N,1}}{R(\lambda, \lambda_1)_{N,2}^{N,2}} \frac{\begin{vmatrix} R(\lambda, \lambda_1)_{N,2}^{N-1,3} & R(\lambda, \lambda_1)_{N,2}^{N,2} \\ R(\lambda, \lambda_1)_{N-1,3}^{N-1,3} & R(\lambda, \lambda_1)_{N-1,3}^{N,2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R(\lambda, \lambda_1)_{N,1}^{N-1,2} & R(\lambda, \lambda_1)_{N,1}^{N,1} \\ R(\lambda, \lambda_1)_{N-1,2}^{N-1,2} & R(\lambda, \lambda_1)_{N-1,2}^{N,1} \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} R(\lambda_1, \lambda)_{N,2}^{4,N-2} & \dots & R(\lambda_1, \lambda)_{N,2}^{N,2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ R(\lambda_1, \lambda)_{4,N-2}^{4,N-2} & \dots & R(\lambda_1, \lambda)_{4,N-2}^{N,2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R(\lambda_1, \lambda)_{N,2}^{3,N-1} & \dots & R(\lambda_1, \lambda)_{N,2}^{N,2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ R(\lambda_1, \lambda)_{3,N-1}^{3,N-1} & \dots & R(\lambda_1, \lambda)_{3,N-1}^{N,2} \end{vmatrix}} \\
 & \times \frac{D_4^{(N,2)}(\lambda, \lambda_1)}{D_4^{(N,3)}(\lambda, \lambda_1)} \quad (128)
 \end{aligned}$$

A última identidade que derivamos da propriedade de unitariedade é gerada a partir das equações $U[i; N-1]_2^{N-1}$ para $i = 1, \dots, N-2$. Através destas equações construímos um sistema linear de dimensão $N-2 \times N-2$ nas variáveis $\bar{a}_{\bar{e}, N-1}^{2, N-1}$ para $\bar{e} = 2, \dots, N-1$ e então calculando o termo $\bar{a}_{2, N-1}^{2, N-1}$ através da regra de Cramer, obtemos a seguinte expressão

$$\begin{aligned}
 & -\frac{R(\mu, \lambda)_{N-1,3}^{N,2}}{R(\mu, \lambda)_{N,2}^{N,2}} = \frac{\begin{vmatrix} R(\lambda, \mu)_{N,2}^{2,N} & R(\lambda, \mu)_{N,2}^{4,N-2} & \dots & R(\lambda, \mu)_{N,2}^{N,2} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ R(\lambda, \mu)_{3,N-1}^{2,N} & R(\lambda, \mu)_{3,N-1}^{4,N-2} & \dots & R(\lambda, \mu)_{3,N-1}^{N,2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R(\lambda, \mu)_{N,2}^{3,N-1} & \dots & R(\lambda, \mu)_{N,2}^{N,2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ R(\lambda, \mu)_{3,N-1}^{3,N-1} & \dots & R(\lambda, \mu)_{3,N-1}^{N,2} \end{vmatrix}}. \quad (129)
 \end{aligned}$$

Finalizamos essa subseção mencionando que as identidades aqui construídas em conjunção com a equação de Yang-Baxter são utilizadas para mostrar uma série de identidades que são imprescindíveis na resolução do problema de autovalor.

3.2 Equação de Yang-Baxter

Na prática, para extrairmos informações da equação de Yang-Baxter é conveniente projetar a Eq.(12) na base de Weyl. Em particular, a relação situada na linha $[(a_1-1)N^2 + (a_2-1)N + a_3]$ e coluna $[(c_1-1)N^2 + (c_2-1)N + c_3]$ da matriz $N^3 \times N^3$ da Eq.(12) é dada em termos das

amplitudes $R(\lambda, \mu)_{a_1, a_2}^{b_1, b_2}$ pela seguinte expressão

$$R(\lambda_1, \lambda_2)_{a_1, a_2}^{b_1, b_2} R(\lambda_1, \lambda_3)_{b_1, a_3}^{c_1, b_3} R(\lambda_2, \lambda_3)_{b_2, b_3}^{c_2, c_3} = R(\lambda_2, \lambda_3)_{a_2, a_3}^{b_2, b_3} R(\lambda_1, \lambda_3)_{a_1, b_3}^{b_1, c_3} R(\lambda_1, \lambda_2)_{b_1, b_2}^{c_1, c_2}, \quad (130)$$

onde a soma de $1, \dots, N$ nos índices repetidos b_1, b_2 e b_3 é assumida e substituímos $\lambda \rightarrow p$.

Com intuito de estabelecer uma referência para a Eq.(130), denotaremos os elementos desta equação através do símbolo $YB_{a_1, a_2, a_3}^{c_1, c_2, c_3}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$. Em geral, as identidades oriundas da equação de Yang-Baxter que serão utilizadas no problema de autovalor requerem manipulações da Eq.(130). Entretanto, há duas exceções que saem diretamente da Eq.(130). Essas identidades correspondem aos elementos $YB_{3,1,1}^{2,2,1}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda)$ e $YB_{N-1,3,1}^{N-1,2,2}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2)$, os quais após uma apropriada normalização podem ser escritos na seguinte forma

$$\frac{R(\lambda_2, \lambda)_{1,1}^{1,1} R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,1}^{2,2}}{R(\lambda_2, \lambda)_{2,1}^{2,1} R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,1}^{3,1}} = \frac{R(\lambda_2, \lambda)_{1,2}^{2,1} R(\lambda_1, \lambda)_{3,1}^{2,2}}{R(\lambda_2, \lambda)_{2,1}^{2,1} R(\lambda_1, \lambda)_{3,1}^{3,1}} + \frac{R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,1}^{2,2} R(\lambda_1, \lambda)_{2,1}^{2,1}}{R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,1}^{3,1} R(\lambda_1, \lambda)_{3,1}^{3,1}} \quad (131)$$

e

$$\frac{R(\lambda, \lambda_2)_{N,2}^{N,2} R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,1}^{2,2}}{R(\lambda, \lambda_2)_{N,1}^{N,1} R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,1}^{3,1}} = \frac{R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,1}^{2,2} R(\lambda, \lambda_1)_{N,3}^{N,3}}{R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,1}^{3,1} R(\lambda, \lambda_1)_{N,2}^{N,2}} - \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{N-1,3}^{N,2} R(\lambda, \lambda_2)_{N,1}^{N-1,2}}{R(\lambda, \lambda_1)_{N,2}^{N,2} R(\lambda, \lambda_2)_{N,1}^{N,1}}. \quad (132)$$

As Eqs.(131,132) possuem a importante característica de fatorar a soma dos dois termos do lado direito em um único produto (lado esquerdo). Essa classe de identidades permite realizarmos simplificações essenciais no problema de autovalor. Entretanto, os elementos restantes que compõem essa classe são mais complexos e envolvem no mínimo três termos distintos. Para derivarmos essas relações mais elaboradas é necessário o uso de combinações específicas de um determinado conjunto de equações oriundas de (130). Na tabela (8) estão listadas duas famílias de combinações lineares que geram identidades que fatorizam três termos distintos.

Equação	Índice da linha	Índice da coluna
$YB_{3+k, a-k, 1}^{2+j, a-j, 2}(\lambda_1, \lambda, \lambda_2)$	$0 \leq k \leq \bar{m}\{a-1, N-3\}$	$0 \leq j \leq a-1$
$YB_{3+k, a-k, 1}^{4+j, a-1-j, 1}(\lambda_1, \lambda, \lambda_2)$	$0 \leq k \leq \bar{m}\{a-1, N-3\}$	$j = -2$ $0 \leq j \leq \bar{m}\{a-2, N-4\}$

Tabela 8: Duas famílias de combinações lineares utilizadas para derivar identidades que envolvam a fatorização de três termos distintos.

A seguir explicaremos os procedimentos a serem realizados nos sistemas de equações descri-

tos na tabela (8), bem como seus objetivos. Inicialmente, utilizando a simetria de carga $U(1)$ (22) reescrevemos as equações $YB_{3+k,a-k,1}^{2+j,a-j,2}(\lambda_1, \lambda, \lambda_2)$ e $YB_{3+k,a-k,1}^{4+j,a-1-j,1}(\lambda_1, \lambda, \lambda_2)$ de Eq.(130) da seguinte forma respectivamente

$$\begin{aligned} & \sum_{b_2=\bar{M}\{a+3-N,1\}}^{a-j+1} R(\lambda_1, \lambda)_{3+k,a-k}^{a+3-b_2,b_2} R(\lambda_1, \lambda_2)_{a+3-b_2,1}^{2+j,a-j+2-b_2} R(\lambda, \lambda_2)_{b_2,a-j+2-b_2}^{a-j,2} \\ &= \sum_{b_2=1}^{a-k} R(\lambda, \lambda_2)_{a-k,1}^{b_2,a-k+1-b_2} R(\lambda_1, \lambda_2)_{3+k,a-k+1-b_2}^{a+2-b_2,2} R(\lambda_1, \lambda)_{a+2-b_2,b_2}^{2+j,a-j} \end{aligned} \quad (133)$$

e

$$\begin{aligned} & \sum_{b_2=\bar{M}\{a+3-N,1\}}^{a-j-1} R(\lambda_1, \lambda)_{3+k,a-k}^{a+3-b_2,b_2} R(\lambda_1, \lambda_2)_{a+3-b_2,1}^{4+j,a-j-b_2} R(\lambda, \lambda_2)_{b_2,a-j-b_2}^{a-j-1,1} \\ &= \sum_{b_2=\bar{M}\{a+3-N,1\}}^{a-k} R(\lambda, \lambda_2)_{a-k,1}^{b_2,a-k+1-b_2} R(\lambda_1, \lambda_2)_{3+k,a-k+1-b_2}^{a+3-b_2,1} R(\lambda_1, \lambda)_{a+3-b_2,b_2}^{4+j,a-j-1}. \end{aligned} \quad (134)$$

A primeira parte das manipulações envolvendo as Eqs.(133,134) tem o propósito de eliminar os termos do lado direito destas equações que não contenham as amplitudes $R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,1}^{2,2}$ e $R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,1}^{3,1}$ respectivamente. Uma verificação direta dessas equações, nos revela que apenas o caso $k = 0$ contém essas amplitudes no lado direito. Portanto, no caso $k \neq 0$ devemos eliminar todos os termos do lado direito das Eqs.(133,134) e no caso $k = 0$ isolar o termo que contém as amplitudes $R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,1}^{2,2}$ e $R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,1}^{3,1}$ respectivamente.

Iniciaremos nossa análise considerando a Eq.(133) para $k = 0$. A primeira combinação linear ocorre quando matriciamos essa equação ($k = 0$) para $0 \leq j \leq a - 1$ nas variáveis $R(\lambda, \lambda_2)_{a,1}^{b_2,a+1-b_2} R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,a+1-b_2}^{a+2-b_2,2}$, cujo sistema correspondente é

$$\begin{pmatrix} R(\lambda_1, \lambda)_{a+1,1}^{2,a} & \cdots & R(\lambda_1, \lambda)_{2,a}^{2,a} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ R(\lambda_1, \lambda)_{a+1,1}^{a+1,1} & \cdots & R(\lambda_1, \lambda)_{2,a}^{a+1,1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R(\lambda, \lambda_2)_{a,1}^{1,a} R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,a}^{a+1,2} \\ \vdots \\ R(\lambda, \lambda_2)_{a,1}^{a,1} R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,1}^{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{2,1}^{0,0} \\ \vdots \\ v_{2,1}^{0,a-1} \end{pmatrix} \quad \text{para } 2 \leq a \leq N - 2, \quad (135)$$

onde as componentes do lado direito do sistema não-homogêneo (135) são casos particulares

dos elementos gerais $v_{2,1}^{k,j}$ para $(0 \leq j \leq a-1)$ dados por

$$v_{2,1}^{k,j} = \sum_{b_2=1}^{a-j+1} R(\lambda_1, \lambda)_{3+k, a-k}^{a+3-b_2, b_2} R(\lambda_1, \lambda_2)_{a+3-b_2, 1}^{2+j, a-j+2-b_2} R(\lambda, \lambda_2)_{b_2, a-j+2-b_2}^{a-j, 2}, \quad \text{para } k = 0, \dots, a-1. \quad (136)$$

Para isolar o termo que contem a amplitude $R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,1}^{2,2}$ devemos resolver o sistema linear (135-136) para a última componente $R(\lambda, \lambda_2)_{a,1}^{a,1} R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,1}^{2,2}$ através da regra de Cramer. Em seguida, isolando o termo $v_{2,1}^{0,0}$ do lado direito da Eq.(135) geramos o seguinte resultado preliminar

$$\sum_{b_2=1}^{a+1} R(\lambda_1, \lambda)_{3,a}^{a+3-b_2, b_2} R(\lambda_1, \lambda_2)_{a+3-b_2, 1}^{2, a+2-b_2} R(\lambda, \lambda_2)_{b_2, a+2-b_2}^{a, 2} = S_{2,0}^0 + S_{2,1}^0 \quad \text{para } 2 \leq a \leq N-2, \quad (137)$$

onde a função $S_{2,0}^0$ e o caso particular $S_{2,1}^0$ da função $S_{2,1}^k$ são dados por

$$S_{2,0}^0 = (-1)^{a+1} R(\lambda, \lambda_2)_{a,1}^{a,1} R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,1}^{2,2} \frac{D_4^{(a+1,2)}(\lambda, \lambda_1)}{D_4^{(a+1,3)}(\lambda, \lambda_1)} \quad (138)$$

e

$$S_{2,1}^k = (-1)^a \frac{\begin{vmatrix} R(\lambda_1, \lambda)_{a+1,1}^{2,a} & \dots & R(\lambda_1, \lambda)_{3,a-1}^{2,a} & 0 \\ R(\lambda_1, \lambda)_{a+1,1}^{3,a-1} & \dots & R(\lambda_1, \lambda)_{3,a-1}^{3,a-1} & v_{2,1}^{k,1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ R(\lambda_1, \lambda)_{a+1,1}^{a+1,1} & \dots & R(\lambda_1, \lambda)_{3,a-1}^{a+1,1} & v_{2,1}^{k,a-1} \end{vmatrix}}{D_4^{(a+1,3)}(\lambda, \lambda_1)}, \quad (139)$$

sendo o determinante $D_4^{(i,b)}(\lambda, \lambda_1)$ definido pela Eq.(126).

Voltemos agora nossa atenção ao caso $k \neq 0$. Para entendermos os procedimentos utilizados na eliminação dos termos do lado direito da Eq.(133) para $0 \leq j \leq a-1$, escrevemos essas equações na seguinte forma vetorial

$$\begin{pmatrix} v_{2,1}^{k,0} \\ \vdots \\ v_{2,1}^{k,a-1} \end{pmatrix} = \sum_{b_2=1}^{a-k} R(\lambda, \lambda_2)_{a-k,1}^{b_2, a-k+1-b_2} R(\lambda_1, \lambda_2)_{3+k, a-k+1-b_2}^{a+2-b_2, 2} \begin{pmatrix} R(\lambda_1, \lambda)_{a+2-b_2, b_2}^{2,a} \\ \vdots \\ R(\lambda_1, \lambda)_{a+2-b_2, b_2}^{a+1,1} \end{pmatrix}, \quad \text{para } 1 \leq k \leq a-1. \quad (140)$$

Observe que o vetor do lado direito da Eq.(140) é exatamente a b_2 -ésima coluna da matriz definida no sistema (135). Dessa forma, se substituirmos a última coluna da matriz $a \times a$ da Eq.(135) pela Eq.(140) e então calcularmos o determinante da nova matriz, a soma de determinantes do lado direito será nula. Mais especificamente, o determinante da transformação descrita acima é dado pela seguinte equação

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} R(\lambda_1, \lambda)_{a+1,1}^{2,a} & \cdots & R(\lambda_1, \lambda)_{3,a-1}^{2,a} & v_{2,1}^{k,0} \\ R(\lambda_1, \lambda)_{a+1,1}^{3,a-1} & \cdots & R(\lambda_1, \lambda)_{3,a-1}^{3,a-1} & v_{2,1}^{k,1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ R(\lambda_1, \lambda)_{a+1,1}^{a+1,1} & \cdots & R(\lambda_1, \lambda)_{3,a-1}^{a+1,1} & v_{2,1}^{k,a-1} \end{vmatrix} = \sum_{b_2=1}^{a-k} R(\lambda, \lambda_2)_{a-k,1}^{b_2,a-k+1-b_2} R(\lambda_1, \lambda_2)_{3+k,a-k+1-b_2}^{a+2-b_2,2} \\ & \times \begin{vmatrix} R(\lambda_1, \lambda)_{a+1,1}^{2,a} & \cdots & R(\lambda_1, \lambda)_{3,a-1}^{2,a} & R(\lambda_1, \lambda)_{a+2-b_2,b_2}^{2,a} \\ R(\lambda_1, \lambda)_{a+1,1}^{3,a-1} & \cdots & R(\lambda_1, \lambda)_{3,a-1}^{3,a-1} & R(\lambda_1, \lambda)_{a+2-b_2,b_2}^{3,a-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ R(\lambda_1, \lambda)_{a+1,1}^{a+1,1} & \cdots & R(\lambda_1, \lambda)_{3,a-1}^{a+1,1} & R(\lambda_1, \lambda)_{a+2-b_2,b_2}^{a+1,1} \end{vmatrix} = 0, \quad \text{para } 1 \leq k \leq a-1. \end{aligned} \quad (141)$$

Uma vez que os determinantes do lado direito da Eq.(141) são nulos, o lado esquerdo desta equação também deve ser nulo. Assim, isolando o termo $v_{2,1}^{k,0}$ do determinante da Eq.(141) e considerando a expressão (137) obtemos o resultado abaixo

$$\begin{aligned} & \sum_{b_2=1}^{a+1} R(\lambda_1, \lambda)_{3+k,a-k}^{a+3-b_2,b_2} R(\lambda_1, \lambda_2)_{a+3-b_2,1}^{2,a+2-b_2} R(\lambda, \lambda_2)_{b_2,a+2-b_2}^{a,2} = \delta_{k,0} S_{2,0}^0 + S_{2,1}^k, \\ & \text{para } 0 \leq k \leq a-1 \text{ e } 2 \leq a \leq N-2, \end{aligned} \quad (142)$$

onde as funções $S_{2,0}^0$ e $S_{2,1}^k$ são definidas pelas Eqs.(138,139).

Voltemos agora nossa atenção à combinação linear associada à segunda linha da tabela (8). Neste caso devemos eliminar todos os termos do lado direito da Eq.(134) que não contenham a amplitude $R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,1}^{3,1}$. O mesmo tipo de manipulações descritas acima são aplicadas ao presente problema. Assim, seguindo a mesma linha de raciocínio, iniciamos nossa análise considerando o caso $k=0$ das equações $Y B_{3,a,1}^{4+j,a-1-j,1}(\lambda_1, \lambda, \lambda_2)$ com $j=-2$ e $0 \leq j \leq a-2$ sujeita a restrição $2 \leq a \leq N-2$. Matriciando essas equações nas variáveis $R(\lambda, \lambda_2)_{a,1}^{b_2,a+1-b_2} R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,a+1-b_2}^{a+3-b_2,1}$

obtemos o sistema abaixo

$$\begin{pmatrix} R(\lambda_1, \lambda)_{a+2,1}^{2,a+1} & \dots & R(\lambda_1, \lambda)_{3,a}^{2,a+1} \\ R(\lambda_1, \lambda)_{a+2,1}^{4,a-1} & \dots & R(\lambda_1, \lambda)_{3,a}^{4,a-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ R(\lambda_1, \lambda)_{a+2,1}^{a+2,1} & \dots & R(\lambda_1, \lambda)_{3,a}^{a+2,1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R(\lambda, \lambda_2)_{a,1}^{1,a} R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,a}^{a+2,1} \\ R(\lambda, \lambda_2)_{a,1}^{2,a-1} R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,a-1}^{a+1,1} \\ \vdots \\ R(\lambda, \lambda_2)_{a,1}^{a,1} R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,1}^{3,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{1,1}^{0,-2} \\ v_{1,1}^{0,0} \\ \vdots \\ v_{1,1}^{0,a-2} \end{pmatrix} \quad \text{para } 2 \leq a \leq N-2, \quad (143)$$

onde o elemento $v_{1,1}^{0,j}$ é um caso particular da função $v_{1,1}^{k,j}$, que é definida por

$$v_{1,1}^{k,j} = \sum_{b_2=1}^{a-j-1} R(\lambda_1, \lambda)_{3+k,a-k}^{a+3-b_2,b_2} R(\lambda_1, \lambda_2)_{a+3-b_2,1}^{4+j,a-j-b_2} R(\lambda, \lambda_2)_{b_2,a-j-b_2}^{a-j-1,1}, \quad \text{para } k = 0, \dots, a-1. \quad (144)$$

Calculando a última componente $R(\lambda, \lambda_2)_{a,1}^{a,1} R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,1}^{3,1}$ do sistema de equações (143-144) e então isolando o termo $v_{1,1}^{0,-2}$ obtemos

$$\sum_{b_2=1}^{a+1} R(\lambda_1, \lambda)_{3,a}^{a+3-b_2,b_2} R(\lambda_1, \lambda_2)_{a+3-b_2,1}^{2,a+2-b_2} R(\lambda, \lambda_2)_{b_2,a+2-b_2}^{a+1,1} = S_{1,0}^0 + S_{1,1}^0 \quad \text{para } 2 \leq a \leq N-2, \quad (145)$$

onde a função $S_{1,0}^0$ e a generalização $S_{1,1}^k$ da função $S_{1,1}^0$ são definidas por

$$S_{1,0}^0 = (-1)^{a+1} R(\lambda, \lambda_2)_{a,1}^{a,1} R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,1}^{3,1} \frac{D_5^{(a+2,2)}(\lambda, \lambda_1)}{D_4^{(a+2,4)}(\lambda, \lambda_1)} \quad (146)$$

e

$$S_{1,1}^k = (-1)^a \frac{\begin{vmatrix} R(\lambda_1, \lambda)_{a+2,1}^{2,a+1} & \dots & R(\lambda_1, \lambda)_{4,a-1}^{2,a+1} & 0 \\ R(\lambda_1, \lambda)_{a+2,1}^{4,a-1} & \dots & R(\lambda_1, \lambda)_{4,a-1}^{4,a-1} & v_{1,1}^{k,0} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ R(\lambda_1, \lambda)_{a+2,1}^{a+2,1} & \dots & R(\lambda_1, \lambda)_{4,a-1}^{a+2,1} & v_{1,1}^{k,a-2} \end{vmatrix}}{D_4^{(a+2,4)}(\lambda, \lambda_1)}, \quad (147)$$

sendo que os determinantes $D_4^{(a+2,4)}(\lambda, \lambda_1)$ e $D_5^{(a+2,2)}(\lambda, \lambda_1)$ são definidos pelas Eqs.(126,127).

O próximo procedimento tem como objetivo eliminar todos os termos do lado direito da Eq.(134) para $k \neq 0$. Essa tarefa é realizada no mesmo molde da eliminação feita através da

Eq.(141), isto é, inicialmente escrevemos a Eq.(134) na seguinte forma vetorial

$$\begin{pmatrix} v_{1,1}^{k,-2} \\ v_{1,1}^{k,0} \\ \vdots \\ v_{1,1}^{k,a-2} \end{pmatrix} = \sum_{b_2=1}^{a-k} R(\lambda, \lambda_2)_{a-k,1}^{b_2,a-k+1-b_2} R(\lambda_1, \lambda_2)_{3+k,a-k+1-b_2}^{a+3-b_2,1} \begin{pmatrix} R(\lambda_1, \lambda)_{a+3-b_2,b_2}^{2,a+1} v_{1,1}^{0,-2} \\ R(\lambda_1, \lambda)_{a+3-b_2,b_2}^{4,a-1} v_{1,1}^{0,0} \\ \vdots \\ R(\lambda_1, \lambda)_{a+3-b_2,b_2}^{a+2,1} v_{1,1}^{0,a-2} \end{pmatrix},$$

para $2 \leq a \leq N-2$, (148)

e então substituímos a última coluna da matriz $a \times a$ da Eq.(143) pela equação coluna (148).

Calculando o determinante dessa nova matriz encontramos o resultado abaixo

$$\begin{vmatrix} R(\lambda_1, \lambda)_{a+2,1}^{2,a+1} & \dots & R(\lambda_1, \lambda)_{4,a-1}^{2,a+1} & v_{1,1}^{k,-2} \\ R(\lambda_1, \lambda)_{a+2,1}^{4,a-1} & \dots & R(\lambda_1, \lambda)_{4,a-1}^{4,a-1} & v_{1,1}^{k,0} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ R(\lambda_1, \lambda)_{a+2,1}^{a+2,1} & \dots & R(\lambda_1, \lambda)_{4,a-1}^{a+2,1} & v_{1,1}^{k,a-2} \end{vmatrix} = \sum_{b_2=1}^{a-k} R(\lambda, \lambda_2)_{a-k,1}^{b_2,a-k+1-b_2} R(\lambda_1, \lambda_2)_{3+k,a-k+1-b_2}^{a+3-b_2,1}$$

$$\times \begin{vmatrix} R(\lambda_1, \lambda)_{a+2,1}^{2,a+1} & \dots & R(\lambda_1, \lambda)_{4,a-1}^{2,a+1} & R(\lambda_1, \lambda)_{a+3-b_2,b_2}^{2,a+1} \\ R(\lambda_1, \lambda)_{a+2,1}^{4,a-1} & \dots & R(\lambda_1, \lambda)_{4,a-1}^{4,a-1} & R(\lambda_1, \lambda)_{a+3-b_2,b_2}^{4,a-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ R(\lambda_1, \lambda)_{a+2,1}^{a+2,1} & \dots & R(\lambda_1, \lambda)_{4,a-1}^{a+2,1} & R(\lambda_1, \lambda)_{a+3-b_2,b_2}^{a+2,1} \end{vmatrix} = 0, \quad \text{para } 1 \leq k \leq a-1. \quad (149)$$

Uma vez que os determinantes do lado direito da Eq.(149) são nulos, isolamos o termo $v_{1,1}^{k,-2}$ do lado esquerdo da Eq.(149), cujo resultado combinado com a Eq.(145) gera a seguinte expressão

$$\sum_{b_2=1}^{a+1} R(\lambda_1, \lambda)_{3+k,a-k}^{a+3-b_2,b_2} R(\lambda_1, \lambda_2)_{a+3-b_2,1}^{2,a+2-b_2} R(\lambda, \lambda_2)_{b_2,a+2-b_2}^{a+1,1} = \delta_{k,0} S_{1,0}^0 + S_{1,1}^k,$$

para $0 \leq k \leq a-1$ e $2 \leq a \leq N-2$, (150)

onde as funções $S_{1,0}^0$ e $S_{1,1}^k$ são definidas pelas Eqs.(146,147).

As Eqs.(142,150) compõem os ingredientes básicos necessários para obtermos identidades úteis no problema de autovalor. Através destas equações construímos “a” sistemas lineares de

tamanho 2×2 dados por

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} R(\lambda, \lambda_2)_{a+1,1}^{a,2} & R(\lambda, \lambda_2)_{a,2}^{a,2} \\ R(\lambda, \lambda_2)_{a+1,1}^{a+1,1} & R(\lambda, \lambda_2)_{a,2}^{a+1,1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R(\lambda_1, \lambda_2)_{2,1}^{2,1} R(\lambda_1, \lambda)_{3+k,a-k}^{2,a+1} \\ R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,1}^{2,2} R(\lambda_1, \lambda)_{3+k,a-k}^{3,a} \end{pmatrix} + \sum_{b_2=1}^{a-1} R(\lambda_1, \lambda_2)_{a+3-b_2,1}^{2,a+2-b_2} \\ & \times \begin{pmatrix} R(\lambda, \lambda_2)_{b_2,a+2-b_2}^{a,2} \\ R(\lambda, \lambda_2)_{b_2,a+2-b_2}^{a+1,1} \end{pmatrix} R(\lambda_1, \lambda)_{3+k,a-k}^{a+3-b_2,b_2} = \begin{pmatrix} S_{2,1}^k \\ S_{1,1}^k \end{pmatrix} + \delta_{k,0} \begin{pmatrix} S_{2,0}^0 \\ S_{1,0}^0 \end{pmatrix}, \\ & \text{para } 0 \leq k \leq a-1 \text{ e } 2 \leq a \leq N-2. \end{aligned} \quad (151)$$

Resolvendo o sistema (151) para a componente $R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,1}^{2,2} R(\lambda_1, \lambda)_{3+k,a-k}^{3,a}$ por meio da regra de Cramer obtemos

$$\begin{aligned} & \sum_{b_2=1}^a \begin{vmatrix} R(\lambda, \lambda_2)_{a+1,1}^{a,2} & R(\lambda, \lambda_2)_{b_2,a+2-b_2}^{a,2} \\ R(\lambda, \lambda_2)_{a+1,1}^{a+1,1} & R(\lambda, \lambda_2)_{b_2,a+2-b_2}^{a+1,1} \end{vmatrix} R(\lambda_1, \lambda_2)_{a+3-b_2,1}^{2,a+2-b_2} R(\lambda_1, \lambda)_{3+k,a-k}^{a+3-b_2,b_2} \\ & = \begin{vmatrix} R(\lambda, \lambda_2)_{a+1,1}^{a,2} & S_{2,1}^k \\ R(\lambda, \lambda_2)_{a+1,1}^{a+1,1} & S_{1,1}^k \end{vmatrix} + \delta_{k,0} \begin{vmatrix} R(\lambda, \lambda_2)_{a+1,1}^{a,2} & S_{2,0}^0 \\ R(\lambda, \lambda_2)_{a+1,1}^{a+1,1} & S_{1,0}^0 \end{vmatrix}, \\ & \text{para } 0 \leq k \leq a-1 \text{ e } 2 \leq a \leq N-2. \end{aligned} \quad (152)$$

Através da Eq.(152) construímos o sistema linear de equações que gera as identidades procuradas. Matriciando a Eq.(152) através da variação do índice k , encontramos o seguinte sistema,

$$\begin{pmatrix} R(\lambda_1, \lambda)_{a+2,1}^{3,a} & \dots & R(\lambda_1, \lambda)_{a+2,1}^{a+2,1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ R(\lambda_1, \lambda)_{3,a}^{3,a} & \dots & R(\lambda_1, \lambda)_{3,a}^{a+2,1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} R(\lambda, \lambda_2)_{a+1,1}^{a,2} & R(\lambda, \lambda_2)_{a,2}^{a,2} \\ R(\lambda, \lambda_2)_{a+1,1}^{a+1,1} & R(\lambda, \lambda_2)_{a,2}^{a+1,1} \end{vmatrix} R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,1}^{2,2} \\ \vdots \\ \begin{vmatrix} R(\lambda, \lambda_2)_{a+1,1}^{a,2} & R(\lambda, \lambda_2)_{1,a+1}^{a,2} \\ R(\lambda, \lambda_2)_{a+1,1}^{a+1,1} & R(\lambda, \lambda_2)_{1,a+1}^{a+1,1} \end{vmatrix} R(\lambda_1, \lambda_2)_{a+2,1}^{2,a+1} \end{pmatrix} = \vec{b}, \quad (153)$$

onde \vec{b} é dado por

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} R(\lambda, \lambda_2)_{a+1,1}^{a,2} & S_{2,1}^{a-1} \\ R(\lambda, \lambda_2)_{a+1,1}^{a+1,1} & S_{1,1}^{a-1} \end{vmatrix} \\ \vdots \\ \begin{vmatrix} R(\lambda, \lambda_2)_{a+1,1}^{a,2} & S_{2,1}^0 \\ R(\lambda, \lambda_2)_{a+1,1}^{a+1,1} & S_{1,1}^0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \begin{vmatrix} R(\lambda, \lambda_2)_{a+1,1}^{a,2} & S_{2,0}^0 \\ R(\lambda, \lambda_2)_{a+1,1}^{a+1,1} & S_{1,0}^0 \end{vmatrix} \end{pmatrix}. \quad (154)$$

Calculando o primeiro termo do sistema (153) geramos a seguinte equação

$$\begin{aligned}
 & D_4^{(a+2,3)}(\lambda, \lambda_1) \begin{vmatrix} R(\lambda, \lambda_2)_{a+1,1}^{a,2} & R(\lambda, \lambda_2)_{a,2}^{a,2} \\ R(\lambda, \lambda_2)_{a+1,1}^{a+1,1} & R(\lambda, \lambda_2)_{a,2}^{a+1,1} \end{vmatrix} R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,1}^{2,2} = (-1)^{a+1} D_4^{(a+2,4)}(\lambda, \lambda_1) \\
 & \times \begin{vmatrix} R(\lambda, \lambda_2)_{a+1,1}^{a,2} & S_{2,0}^0 \\ R(\lambda, \lambda_2)_{a+1,1}^{a+1,1} & S_{1,0}^0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} R(\lambda, \lambda_2)_{a+1,1}^{a,2} & S_{2,1}^{a-1} \\ R(\lambda, \lambda_2)_{a+1,1}^{a+1,1} & S_{1,1}^{a-1} \end{vmatrix} & R(\lambda_1, \lambda)_{a+2,1}^{4,a-1} & \dots & R(\lambda_1, \lambda)_{a+2,1}^{a+2,1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \begin{vmatrix} R(\lambda, \lambda_2)_{a+1,1}^{a,2} & S_{2,1}^0 \\ R(\lambda, \lambda_2)_{a+1,1}^{a+1,1} & S_{1,1}^0 \end{vmatrix} & R(\lambda_1, \lambda)_{3,a}^{4,a-1} & \dots & R(\lambda_1, \lambda)_{3,a}^{a+2,1} \end{vmatrix}.
 \end{aligned} \tag{155}$$

Dividindo a Eq.(155) por $D_4^{(a+2,3)}(\lambda, \lambda_1) R(\lambda, \lambda_2)_{a,1}^{a,1} R(\lambda, \lambda_2)_{a+1,1}^{a+1,1} R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,1}^{3,1}$ e utilizando as definições (138,146) obtemos o resultado abaixo

$$\begin{aligned}
 & \frac{\begin{vmatrix} R(\lambda, \lambda_2)_{a,2}^{a,2} & R(\lambda, \lambda_2)_{a+1,1}^{a,2} \\ R(\lambda, \lambda_2)_{a,2}^{a+1,1} & R(\lambda, \lambda_2)_{a+1,1}^{a+1,1} \end{vmatrix} R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,1}^{2,2}}{R(\lambda, \lambda_2)_{a,1}^{a,1} R(\lambda, \lambda_2)_{a+1,1}^{a+1,1} R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,1}^{3,1}} = - \frac{R(\lambda, \lambda_2)_{a+1,1}^{a,2} D_5^{(a+2,2)}(\lambda, \lambda_1)}{R(\lambda, \lambda_2)_{a+1,1}^{a+1,1} D_4^{(a+2,3)}(\lambda, \lambda_1)} \\
 & + \frac{R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,1}^{2,2} D_4^{(a+1,2)}(\lambda, \lambda_1) D_4^{(a+2,4)}(\lambda, \lambda_1)}{R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,1}^{3,1} D_4^{(a+1,3)}(\lambda, \lambda_1) D_4^{(a+2,3)}(\lambda, \lambda_1)} \\
 & + \frac{\begin{vmatrix} \begin{vmatrix} R(\lambda, \lambda_2)_{a+1,1}^{a,2} & S_{2,1}^{a-1} \\ R(\lambda, \lambda_2)_{a+1,1}^{a+1,1} & S_{1,1}^{a-1} \end{vmatrix} & R(\lambda_1, \lambda)_{a+2,1}^{4,a-1} & \dots & R(\lambda_1, \lambda)_{a+2,1}^{a+2,1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \begin{vmatrix} R(\lambda, \lambda_2)_{a+1,1}^{a,2} & S_{2,1}^0 \\ R(\lambda, \lambda_2)_{a+1,1}^{a+1,1} & S_{1,1}^0 \end{vmatrix} & R(\lambda_1, \lambda)_{3,a}^{4,a-1} & \dots & R(\lambda_1, \lambda)_{3,a}^{a+2,1} \end{vmatrix}}{D_4^{(a+2,3)}(\lambda, \lambda_1)} \\
 & \text{para } 2 \leq a \leq N-2.
 \end{aligned} \tag{156}$$

Explorando as propriedades (118, 119) da função determinante e as definições (139,147), o

último termo da Eq.(156) simplifica na seguinte expressão

$$\frac{\begin{vmatrix} \begin{vmatrix} R(\lambda, \lambda_2)_{a+1,1}^{a,2} & S_{2,1}^{a-1} \\ R(\lambda, \lambda_2)_{a+1,1}^{a+1,1} & S_{1,1}^{a-1} \end{vmatrix} & R(\lambda_1, \lambda)_{a+2,1}^{4,a-1} & \dots & R(\lambda_1, \lambda)_{a+2,1}^{a+2,1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \begin{vmatrix} R(\lambda, \lambda_2)_{a+1,1}^{a,2} & S_{2,1}^0 \\ R(\lambda, \lambda_2)_{a+1,1}^{a+1,1} & S_{1,1}^0 \end{vmatrix} & R(\lambda_1, \lambda)_{3,a}^{4,a-1} & \dots & R(\lambda_1, \lambda)_{3,a}^{a+2,1} \end{vmatrix}}{D_4^{(a+2,3)}(\lambda, \lambda_1)} = \frac{D_5^{(a+1,2)}(\lambda, \lambda_1)}{D_4^{(a+1,3)}(\lambda, \lambda_1)} \frac{R(\lambda, \lambda_2)_{a,1}^{a-1,2}}{R(\lambda, \lambda_2)_{a,1}^{a,1}}. \quad (157)$$

Substituindo a Eq.(157) na Eq.(156) encontramos as identidades procuradas que serão utilizadas na próxima seção durante a resolução do problema de autovalor, isto é,

$$\begin{aligned} & \frac{\begin{vmatrix} R(\lambda, \lambda_2)_{a,2}^{a,2} & R(\lambda, \lambda_2)_{a+1,1}^{a,2} \\ R(\lambda, \lambda_2)_{a,2}^{a+1,1} & R(\lambda, \lambda_2)_{a+1,1}^{a+1,1} \end{vmatrix}}{R(\lambda, \lambda_2)_{a,1}^{a,1} R(\lambda, \lambda_2)_{a+1,1}^{a+1,1}} \frac{R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,1}^{2,2}}{R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,1}^{3,1}} = - \frac{R(\lambda, \lambda_2)_{a+1,1}^{a,2}}{R(\lambda, \lambda_2)_{a+1,1}^{a+1,1}} \frac{D_5^{(a+2,2)}(\lambda, \lambda_1)}{D_4^{(a+2,3)}(\lambda, \lambda_1)} \\ & + \frac{R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,1}^{2,2}}{R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,1}^{3,1}} \frac{D_4^{(a+1,2)}(\lambda, \lambda_1)}{D_4^{(a+1,3)}(\lambda, \lambda_1)} \frac{D_4^{(a+2,4)}(\lambda, \lambda_1)}{D_4^{(a+2,3)}(\lambda, \lambda_1)} + \frac{D_5^{(a+1,2)}(\lambda, \lambda_1)}{D_4^{(a+1,3)}(\lambda, \lambda_1)} \frac{R(\lambda, \lambda_2)_{a,1}^{a-1,2}}{R(\lambda, \lambda_2)_{a,1}^{a,1}}, \\ & \text{para } 2 \leq a \leq N-2. \end{aligned} \quad (158)$$

A seguir abordaremos o caso $a = N - 1$. De acordo com as Eqs.(126,127), os determinantes $D_4^{(i,b)}(\lambda, \lambda_1)$ e $D_5^{(i,2)}(\lambda, \lambda_1)$ são definidos apenas para $i \leq N$. A análise direta dos dois primeiros termos do lado direito da Eq.(156) nos revela que essa equação não é definida no caso $N - 1$. Conseqüentemente, para obtermos a identidade oriunda da equação de Yang-Baxter (130) precisamos resolver o sistema linear de equações descrito na tabela (8) no caso $a = N - 1$. Os procedimentos utilizados na resolução deste problema é similar aos utilizados na obtenção da Eq.(158) com a peculiaridade que devemos separar o caso $N = 3$ do caso $N \geq 4$. No Apêndice A descrevemos em detalhes a construção da identidade oriunda da Eq.(130) no caso $a = N - 1$. Todavia, existe outro procedimento de construção desta identidade. Este consiste em considerarmos a continuação analítica da Eq.(158) no caso $a = N - 1$. Mais especificamente precisaremos definir a continuação analítica dos primeiros dois termos do lado direito da Eq.(158), uma vez que esses não são definidos para $a = N - 1$.

De acordo com as Eqs.(126,127), os determinantes $D_4^{(N+1,b)}(\lambda, \lambda_1)$ e $D_5^{(N+1,2)}(\lambda, \lambda_1)$ são dados

por

$$D_4^{(N+1,b)}(\lambda, \lambda_1) = \begin{vmatrix} R(\lambda_1, \lambda)_{N+1,1}^{b,N+2-b} & \dots & R(\lambda_1, \lambda)_{N+1,1}^{N+1,1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ R(\lambda_1, \lambda)_{b,N+2-b}^{b,N+2-b} & \dots & R(\lambda_1, \lambda)_{b,N+2-b}^{N+1,1} \end{vmatrix} \quad (159)$$

e

$$D_5^{(N+1,2)}(\lambda, \lambda_1) = \begin{vmatrix} R(\lambda_1, \lambda)_{N+1,1}^{2,N} & R(\lambda_1, \lambda)_{N+1,1}^{4,N-2} & \dots & R(\lambda_1, \lambda)_{N+1,1}^{N+1,1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R(\lambda_1, \lambda)_{3,N-1}^{2,N} & R(\lambda_1, \lambda)_{3,N-1}^{4,N-2} & \dots & R(\lambda_1, \lambda)_{3,N-1}^{N+1,1} \end{vmatrix}, \quad (160)$$

onde os pesos $R(\lambda_1, \lambda)_{N+1,1}^{b,N+2-b}, \dots, R(\lambda_1, \lambda)_{N+1,1}^{N+1,1}$ e $R(\lambda_1, \lambda)_{b,N+2-b}^{N+1,1}, \dots, R(\lambda_1, \lambda)_{b,N+2-b}^{b,N+2-b}$ não são definidos.

A continuação analítica das Eqs.(159,160) é feita considerando a parte do determinante dependente de apenas uma amplitude $R(\lambda_1, \lambda)_{a,b}^{c,d}$ não definida, isto é,

$$D_4^{(N+1,b)}(\lambda, \lambda_1) \equiv \lim_{a \rightarrow N-1} \frac{D_4^{(a+2,b)}(\lambda, \lambda_1)}{R(\lambda_1, \lambda)_{a+2,1}^{a+2,1}} = (-1)^{N+1-b} \begin{vmatrix} R(\lambda_1, \lambda)_{N,2}^{b,N+2-b} & \dots & R(\lambda_1, \lambda)_{N,2}^{N,2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ R(\lambda_1, \lambda)_{b,N+2-b}^{b,N+2-b} & \dots & R(\lambda_1, \lambda)_{b,N+2-b}^{N,2} \end{vmatrix} \quad (161)$$

e

$$\begin{aligned} D_5^{(N+1,2)}(\lambda, \lambda_1) &\equiv \lim_{a \rightarrow N-1} \frac{D_5^{(a+2,2)}(\lambda, \lambda_1)}{R(\lambda_1, \lambda)_{a+2,1}^{a+2,1}} \\ &= (-1)^N \begin{vmatrix} R(\lambda_1, \lambda)_{N,2}^{2,N} & R(\lambda_1, \lambda)_{N,2}^{4,N-2} & \dots & R(\lambda_1, \lambda)_{N,2}^{N,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R(\lambda_1, \lambda)_{3,N-1}^{2,N} & R(\lambda_1, \lambda)_{3,N-1}^{4,N-2} & \dots & R(\lambda_1, \lambda)_{3,N-1}^{N,2} \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (162)$$

Através das definições (161,162) estendemos a Eq.(158) ao caso $a = N - 1$, isto é,

$$\begin{aligned} &\frac{\begin{vmatrix} R(\lambda, \lambda_2)_{N-1,2}^{N-1,2} & R(\lambda, \lambda_2)_{N,1}^{N-1,2} \\ R(\lambda, \lambda_2)_{N-1,2}^{N,1} & R(\lambda, \lambda_2)_{N,1}^{N,1} \end{vmatrix}}{R(\lambda, \lambda_2)_{N-1,1}^{N-1,1} R(\lambda, \lambda_2)_{N,1}^{N,1}} \frac{R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,1}^{2,2}}{R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,1}^{3,1}} = - \frac{R(\lambda, \lambda_2)_{N,1}^{N-1,2}}{R(\lambda, \lambda_2)_{N,1}^{N,1}} \frac{D_5^{(N+1,2)}(\lambda, \lambda_1)}{D_4^{(N+1,3)}(\lambda, \lambda_1)} \\ &+ \frac{R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,1}^{2,2}}{R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,1}^{3,1}} \frac{D_4^{(N,2)}(\lambda, \lambda_1)}{D_4^{(N,3)}(\lambda, \lambda_1)} \frac{D_4^{(N+1,4)}(\lambda, \lambda_1)}{D_4^{(N+1,3)}(\lambda, \lambda_1)} + \frac{D_5^{(N,2)}(\lambda, \lambda_1)}{D_4^{(N,3)}(\lambda, \lambda_1)} \frac{R(\lambda, \lambda_2)_{N-1,1}^{N-2,2}}{R(\lambda, \lambda_2)_{N-1,1}^{N-1,1}}, \\ &\text{para } N \geq 4. \end{aligned} \quad (163)$$

O caso limite $a = 2$ e $N = 3$ da Eq.(163) é obtido fixado $D_4^{(4,4)}(\lambda, \lambda_1) = 1$, isto é,

$$\begin{aligned}
 & \frac{\begin{vmatrix} R(\lambda, \lambda_2)_{2,2}^{2,2} & R(\lambda, \lambda_2)_{3,1}^{2,2} \\ R(\lambda, \lambda_2)_{2,2}^{3,1} & R(\lambda, \lambda_2)_{3,1}^{3,1} \end{vmatrix}}{R(\lambda, \lambda_2)_{2,1}^{2,1} R(\lambda, \lambda_2)_{3,1}^{3,1}} \frac{R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,1}^{2,2}}{R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,1}^{3,1}} = \frac{R(\lambda, \lambda_2)_{3,1}^{2,2} R(\lambda_1, \lambda)_{3,2}^{2,3}}{R(\lambda, \lambda_2)_{3,1}^{3,1} R(\lambda_1, \lambda)_{3,2}^{3,2}} \\
 & + \frac{R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,1}^{2,2}}{R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,1}^{3,1}} \frac{\begin{vmatrix} R(\lambda_1, \lambda)_{3,1}^{2,2} & R(\lambda_1, \lambda)_{3,1}^{3,1} \\ R(\lambda_1, \lambda)_{2,2}^{2,2} & R(\lambda_1, \lambda)_{2,2}^{3,1} \end{vmatrix}}{R(\lambda_1, \lambda)_{3,2}^{3,2} R(\lambda_1, \lambda)_{3,1}^{3,1}} - \frac{R(\lambda_1, \lambda)_{3,1}^{2,2} R(\lambda, \lambda_2)_{2,1}^{1,2}}{R(\lambda_1, \lambda)_{3,1}^{3,1} R(\lambda, \lambda_2)_{2,1}^{2,1}}, \\
 & \text{para } a = 2 \text{ e } N = 3.
 \end{aligned} \tag{164}$$

4 O problema de autovalor

Nesta seção abordaremos o problema de diagonalização da matriz de transferência (17) relacionada a modelos de vértice $U(1)$ inomogêneos definidos na seção 1. A invariância $U(1)$ dos respectivos pesos estatísticos implica que a matriz de transferência (17) comuta com a componente azimutal do operador de spin total,

$$[T(\lambda), \sum_{i=1}^m S_i^z] = 0. \quad (165)$$

Como consequência direta da Eq.(165), o espaço de Hilbert dos autovetores da matriz de transferência pode ser separado em setores disjuntos de acordo com os autovalores do operador de spin, isto é,

$$\sum_{i=1}^m S_i^z |\Phi_n\rangle = [ms - n] |\Phi_n\rangle, \quad (166)$$

onde $|\Phi_n\rangle$ denota o autovetor pertencente ao n -ésimo setor.

Em termos dos elementos da matriz de monodromia, o problema de autovalor da matriz de transferência é definido por

$$\sum_{a=1}^N \mathcal{T}_{a,a}(\lambda) |\Phi_n\rangle = \Lambda_n(\lambda) |\Phi_n\rangle. \quad (167)$$

Nesta seção resolveremos o problema de autovalor (167) apenas fazendo uso das três famílias de regras de comutação discutidas na seção 2 e da propriedade do estado de pseudo-vácuo (25). Para esse fim, investigaremos autovetores $|\Phi_n\rangle$ na forma de estados de multipartículas que podem ser expressos por

$$|\Phi_n\rangle = \phi_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n) |0\rangle, \quad (168)$$

onde as parâmetros espectrais $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ parametrizam os momentos das partículas.

Por consistência, identificamos o vetor de zero partícula $\phi_0 \equiv 1$ como o estado de referência $|0\rangle$. A propriedade (29) que refere-se ao spin dos elementos da matriz de monodromia nos sugere que a estrutura matemática dos vetores $\phi_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ para n geral pode ser obtida através de combinações lineares dos produtos de operadores de criação. Demonstraremos nas próximas subseções que esses vetores são obtidos em termos de uma relação de recorrência envolvendo os $N - 1$ campos de criação $\mathcal{T}_{1,b}(\lambda)$.

4.1 Estado de uma partícula

O estado de uma partícula $n = 1$ corresponde a uma excitação de spin $s_{1,2} = 1$ sobre o estado de referência $|0\rangle$. Da propriedade (29) vemos que dentre os campos dos vetores da base $\mathcal{T}_{1,b}(\lambda)$, apenas o operador $\mathcal{T}_{1,2}(\lambda)$ produz essa excitação. Logo, o vetor do estado de uma partícula $\phi_1(\lambda_1)$ é dado por

$$|\Phi_1\rangle = \mathcal{T}_{1,2}(\lambda_1) |0\rangle. \quad (169)$$

A solução do problema de autovalor (167) para este estado é obtida utilizando as regras de comutação entre os operadores $\mathcal{T}_{a,a}(\lambda)$ e $\mathcal{T}_{1,2}(\lambda)$. Através das propriedades do pseudovácuo (25), temos que as Eqs.(40-42) aplicadas neste estado são dadas por

$$\mathcal{T}_{1,1}(\lambda) |\Phi_1\rangle = w_1(\lambda) \frac{R(\lambda_1, \lambda)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_1, \lambda)_{2,1}^{2,1}} |\Phi_1\rangle - w_1(\lambda_1) \frac{R(\lambda_1, \lambda)_{1,2}^{2,1}}{R(\lambda_1, \lambda)_{2,1}^{2,1}} \mathcal{T}_{1,2}(\lambda) |0\rangle, \quad (170)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{a,a}(\lambda) |\Phi_1\rangle &= w_a(\lambda) \frac{\begin{vmatrix} R(\lambda, \lambda_1)_{a,2}^{a,2} & R(\lambda, \lambda_1)_{a+1,1}^{a,2} \\ R(\lambda, \lambda_1)_{a,2}^{a+1,1} & R(\lambda, \lambda_1)_{a+1,1}^{a+1,1} \end{vmatrix}}{R(\lambda, \lambda_1)_{a,1}^{a,1} R(\lambda, \lambda_1)_{a+1,1}^{a+1,1}} |\Phi_1\rangle + w_1(\lambda_1) \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{a+1,1}^{a,2}}{R(\lambda, \lambda_1)_{a+1,1}^{a+1,1}} \mathcal{T}_{a,a+1}(\lambda) |0\rangle \\ &- w_2(\lambda_1) \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{a,1}^{a-1,2}}{R(\lambda, \lambda_1)_{a,1}^{a,1}} \mathcal{T}_{a-1,a}(\lambda) |0\rangle, \quad \text{para } 2 \leq a \leq N-1, \end{aligned} \quad (171)$$

$$\mathcal{T}_{N,N}(\lambda) |\Phi_1\rangle = w_N(\lambda) \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{N,2}^{N,2}}{R(\lambda, \lambda_1)_{N,1}^{N,1}} |\Phi_1\rangle - w_2(\lambda_1) \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{N,1}^{N-1,2}}{R(\lambda, \lambda_1)_{N,1}^{N,1}} \mathcal{T}_{N-1,N}(\lambda) |0\rangle. \quad (172)$$

As contribuições do lado direito das Eqs.(170-172) proporcionais ao estado $|\Phi_1\rangle$ são denominadas de termos desejados, pois contribuem diretamente para o autovalor através de restrições ao parâmetro λ_1 . Observe que esses termos são proporcionais aos possíveis campos de criação $\mathcal{T}_{a,a+1}(\lambda)$ que carregam spin azimutal $s = 1$. Antes de procurarmos o vínculo para o parâmetro λ_1 , precisamos reescrever as Eqs.(170-172) como uma única expressão para todos os valores do índice diagonal a . Utilizando a identidade (98) para reordenar as variáveis espectrais do último termo na Eq.(170), encontramos que as Eqs.(170-172) podem ser expressas da seguinte forma

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{a,a}(\lambda) |\Phi_1\rangle &= w_a(\lambda) P_a(\lambda, \lambda_1) |\Phi_1\rangle - w_1(\lambda_1) {}_1\mathcal{F}_1^{(a)}(\lambda, \lambda_1) \bar{\delta}_a^N \mathcal{T}_{a,a+1}(\lambda) |0\rangle \\ &- w_2(\lambda_1) {}_0\mathcal{F}_1^{(a-1)}(\lambda, \lambda_1) \bar{\delta}_a^1 \mathcal{T}_{a-1,a}(\lambda) |0\rangle, \quad \text{para } 1 \leq a \leq N, \end{aligned} \quad (173)$$

onde a função $P_a(\lambda, \mu)$ é dada por

$$P_a(\lambda, \mu) = \begin{cases} \frac{R(\mu, \lambda)_{1,1}^{1,1}}{R(\mu, \lambda)_{2,1}^{2,1}}, & \text{para } a = 1 \\ \left| \begin{array}{cc} R(\lambda, \mu)_{a,2}^{a,2} & R(\lambda, \mu)_{a+1,1}^{a,2} \\ R(\lambda, \mu)_{a,2}^{a+1,1} & R(\lambda, \mu)_{a+1,1}^{a+1,1} \end{array} \right| \\ \frac{R(\lambda, \mu)_{a,1}^{a,1} R(\lambda, \mu)_{a+1,1}^{a+1,1}}{R(\lambda, \mu)_{N,2}^{N,2}}, & \text{para } 2 \leq a \leq N-1 \\ \frac{R(\lambda, \mu)_{N,2}^{N,2}}{R(\lambda, \mu)_{N,1}^{N,1}}, & \text{para } a = N, \end{cases} \quad (174)$$

enquanto a generalização⁹ $\bar{\delta}_i^{\{j_1, \dots, j_n\}}$ da distribuição discreta $\bar{\delta}_a^i$ é definida por

$$\bar{\delta}_i^{\{j_1, \dots, j_n\}} = 1 - \sum_{k=1}^n \delta_{i, j_k}. \quad (175)$$

As funções auxiliares ${}_0\mathcal{F}_1^{(a)}(\lambda, \mu)$ e ${}_1\mathcal{F}_1^{(a)}(\lambda, \mu)$ são fundamentais no problema de autovalor e serão utilizadas em durante todo processo de diagonalização. Elas são definidas por

$${}_0\mathcal{F}_1^{(a)}(\lambda, \mu) = -{}_1\mathcal{F}_1^{(a)}(\lambda, \mu) = \frac{R(\lambda, \mu)_{a+1,1}^{a,2}}{R(\lambda, \mu)_{a+1,1}^{a+1,1}}. \quad (176)$$

Antes de dar continuidade ao raciocínio, comentaremos o significado da notação introduzida para as funções auxiliares ${}_c\mathcal{F}_{b-a}^{(a)}(\lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_{b-a})$. Os dois índices da direita a e $b-a$ estão diretamente relacionados com os operadores não-desejados $\mathcal{T}_{a,b}(\lambda)$ que acompanham a função, explicitando o valor do spin azimutal $s_{a,b} = b-a$. O terceiro índice c conta o número de pesos $w_1(\lambda_i)$ presentes no respectivo termo não-desejável da forma $\prod_{i=1}^c w_1(\lambda_i) \prod_{i=c+1}^{b-a} w_2(\lambda_i) \mathcal{T}_{a,b}(\lambda) |0\rangle$. Ressaltamos que essa notação abrange resultados similares para estados de multipartículas. Retornemos agora à solução do problema de autovalor (167) no setor de uma partícula. Somando a Eq.(173) ao índice a encontramos que esse problema pode ser reescrito na seguinte forma

$$T(\lambda) |\Phi_1\rangle = \Lambda_1(\lambda) |\Phi_1\rangle + [w_1(\lambda_1) - w_2(\lambda_1)] \sum_{a=1}^{N-1} {}_0\mathcal{F}_1^{(a)}(\lambda, \lambda_1) \mathcal{T}_{a,a+1}(\lambda) |0\rangle. \quad (177)$$

⁹Essa generalização será utilizada nos estados de multi-partículas e tem como objetivo capturar a estrutura dos termos não-desejados.

Portanto, todos os termos não-desejáveis $\mathcal{T}_{a,a+1}(\lambda) |0\rangle$ para $a = 1, \dots, N - 1$ tornam-se proporcionais a uma função comum. Esses termos são eliminados à medida que a variável espectral λ_1 satisfaça a equação de Bethe para uma partícula, isto é,

$$\frac{w_1(\lambda_1)}{w_2(\lambda_1)} = 1, \quad (178)$$

e conseqüentemente, o autovalor do estado de uma partícula é dado por

$$\Lambda_1(\lambda) = \sum_{a=1}^N w_a(\lambda) P_a(\lambda, \lambda_1). \quad (179)$$

4.2 Estado de duas partículas

O estado de duas partículas pertence ao setor $n = 2$, cuja componente azimutal de spin associado é $s_{1,3} = 2$. A partir da Eq.(29) concluímos que todos os produtos da forma $\mathcal{T}_{1,k_1}(\lambda_{m_1}) \times \mathcal{T}_{1,k_2}(\lambda_{m_2})$ sujeitos a restrição $k_1 + k_2 = 4$ podem em princípio contribuir para este estado. Portanto, o ansatz mais geral para o vetor $\phi_2(\lambda_1, \lambda_2)$ é dado pela expressão

$$\phi_2(\lambda_1, \lambda_2) = \sum_{\substack{m_1, m_2=1 \\ m_1 \neq m_2}}^2 \sum_{\substack{k_1, k_2=1 \\ k_1 + k_2=4}}^N \bar{c}_{k_1, k_2}^{(m_1, m_2)}(\lambda_{m_1}, \lambda_{m_2}) \mathcal{T}_{1, k_1}(\lambda_{m_1}) \mathcal{T}_{1, k_2}(\lambda_{m_2}), \quad (180)$$

onde $\bar{c}_{k_1, k_2}^{(m_1, m_2)}(\lambda_{m_1}, \lambda_{m_2})$ são coeficientes de uma combinação linear arbitrária.

Todavia, as regras de comutação entre os operadores $\mathcal{T}_{1,1}(\lambda)$ e $\mathcal{T}_{1,3}(\mu)$, e entre $\mathcal{T}_{1,2}(\lambda)$ e $\mathcal{T}_{1,2}(\mu)$ nos revelam que nem todos os termos em Eq.(180) são linearmente independentes. Na realidade, utilizando as relações de comutação (44,59) notamos que os produtos $\mathcal{T}_{1,1}(\lambda_1)\mathcal{T}_{1,3}(\lambda_2)$, $\mathcal{T}_{1,1}(\lambda_2)\mathcal{T}_{1,3}(\lambda_1)$ e $\mathcal{T}_{1,2}(\lambda_2)\mathcal{T}_{1,2}(\lambda_1)$ podem ser eliminados da combinação linear (180). Implementado essa observação, concluímos que o ansatz para o vetor de duas partículas pode ser simplificado de acordo com a seguinte expressão

$$\phi_2(\lambda_1, \lambda_2) = \mathcal{T}_{1,2}(\lambda_1)\mathcal{T}_{1,2}(\lambda_2) + g_2^{(1)}(\lambda_1, \lambda_2)\mathcal{T}_{1,3}(\lambda_1)\mathcal{T}_{1,1}(\lambda_2) + g_2^{(2)}(\lambda_1, \lambda_2)\mathcal{T}_{1,3}(\lambda_2)\mathcal{T}_{1,1}(\lambda_1), \quad (181)$$

onde $g_2^{(i)}(\lambda_1, \lambda_2)$ são funções arbitrárias que fixamos abaixo.

A próxima tarefa consiste em investigar sobre que condições o ansatz (181) torna-se um autoestado da matriz de transferência. Em outras palavras, comutaremos os elementos de matriz

$\mathcal{T}_{a,a}(\lambda)$ com os operadores de criação presentes no vetor $\phi_2(\lambda_1, \lambda_2)$. Para implementarmos esse trabalho utilizaremos as três classes de relações de comutação descritas nas subseções 2.1, 2.2 e 2.3. Entretanto, os correspondentes cálculos envolvem uma seqüência de procedimentos técnicos que na prática são exaustivos. Por essa razão, uma abordagem minuciosa dessas technicalidades está descrita no Apêndice B. A seguir resumimos as principais conclusões obtidas neste apêndice.

O primeiro ponto relevante diz respeito à dependência funcional da combinação linear (181). A comutação dos operadores $\mathcal{T}_{a,a}(\lambda)$ com o vetor $\phi_2(\lambda_1, \lambda_2)$ gera classes especiais de termos não-desejáveis que são cruciais para fixarmos as funções $g_2^{(i)}(\lambda_1, \lambda_2)$. Denotaremos esses termos de termos fáceis. Essas classes possuem a propriedade peculiar de serem sempre gerados pelo mesmo operador diagonal $\mathcal{T}_{a,a}(\lambda)$ e de serem proporcionais a $g_2^{(2)}(\lambda_1, \lambda_2)$ ou a soma $g_2^{(1)}(\lambda_1, \lambda_2) + R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,1}^{2,2}/R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,1}^{3,1}$. Conforme descrito no Apêndice B, existem quatro diferentes classes de termos não-desejáveis com essas propriedades e todos são cancelados somente se fixarmos $g_2^{(i)}(\lambda_1, \lambda_2)$ por

$$g^{(1)}(\lambda_1, \lambda_2) = -\frac{R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,1}^{2,2}}{R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,1}^{3,1}} \quad \text{e} \quad g^{(2)}(\lambda_1, \lambda_2) = 0. \quad (182)$$

Como primeira consequência das Eqs.(182), observamos que o ansatz para o vetor $\phi_2(\lambda_1, \lambda_2)$ assume a seguinte forma

$$\phi_2(\lambda_1, \lambda_2) = \mathcal{T}_{1,2}(\lambda_1)\mathcal{T}_{1,2}(\lambda_2) - \frac{R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,1}^{2,2}}{R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,1}^{3,1}}\mathcal{T}_{1,3}(\lambda_1)\mathcal{T}_{1,1}(\lambda_2). \quad (183)$$

A análise direta da Eq.(183) revela que tal ansatz torna-se ordenado em relação às variáveis espectrais λ_1 e λ_2 . Outra propriedade, extremamente importante desse vetor de duas partículas diz respeito ao fato que esse vetor é simétrico em relação às variáveis espectrais λ_1 e λ_2 . Para demonstrarmos essa simetria substituímos a regra de comutação (59) para os operadores $\mathcal{T}_{1,2}(\lambda_1)$ e $\mathcal{T}_{1,2}(\lambda_2)$ na Eq.(183) e assim encontramos o resultado abaixo

$$\phi_2(\lambda_1, \lambda_2) = \theta(\lambda_1, \lambda_2) \left[\mathcal{T}_{1,2}(\lambda_2)\mathcal{T}_{1,2}(\lambda_1) + \frac{D_2^{(2,1)}(\lambda_1, \lambda_2)}{D_2^{(2,0)}(\lambda_1, \lambda_2)}\mathcal{T}_{1,3}(\lambda_2)\mathcal{T}_{1,1}(\lambda_1) \right], \quad (184)$$

onde a função de simetrização é definida por

$$\theta(\lambda, \mu) = D_2^{(2,0)}(\lambda, \mu) \frac{R(\lambda, \mu)_{2,1}^{2,1}}{R(\lambda, \mu)_{1,1}^{1,1}} = \frac{\begin{vmatrix} R(\lambda, \mu)_{2,2}^{2,2} & R(\lambda, \mu)_{3,1}^{2,2} \\ R(\lambda, \mu)_{2,2}^{3,1} & R(\lambda, \mu)_{3,1}^{3,1} \end{vmatrix}}{R(\lambda, \mu)_{1,1}^{1,1} R(\lambda, \mu)_{3,1}^{3,1}}. \quad (185)$$

Para concluirmos a prova da simetrização utilizamos duas identidades oriundas da propriedade de unitariedade. Substituindo a identidade (108) na Eq.(184) encontramos que $\phi_2(\lambda_1, \lambda_2)$ satisfaz a propriedade

$$\phi_2(\lambda_1, \lambda_2) = \theta(\lambda_1, \lambda_2) \phi_2(\lambda_2, \lambda_1), \quad (186)$$

enquanto que a segunda identidade (107) garante a consistência da Eq.(186), isto é,

$$\theta(\lambda_1, \lambda_2) \theta(\lambda_2, \lambda_1) = 1. \quad (187)$$

Enfatizamos que a simetria (186) é imprescindível para simplificarmos as expressões da ação dos operadores diagonais $\mathcal{T}_{a,a}(\lambda)$ no estado de duas partículas $|\Phi_2\rangle$. Mais especificamente, por meio desta simetria é possível representar diferentes contribuições dos termos não-desejados, que são geradas na comutação entre $\mathcal{T}_{a,a}(\lambda)$ e $\phi_2(\lambda_1, \lambda_2)$, em uma forma compacta e esclarecedora. Ressaltamos que a simetria (186) por si só já estabelece as restrições (182) às funções $g^{(1)}(\lambda_1, \lambda_2)$ e $g^{(2)}(\lambda_1, \lambda_2)$. Entretanto, a análise dos termos fáceis foi essencial para fixarmos completamente a combinação linear do ansatz (181). A seguir descrevemos as conclusões finais obtidas dos resultados do Apêndice B. Concluimos que as expressões para $\mathcal{T}_{a,a}(\lambda) |\Phi_2\rangle$ podem ser escritas como

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{1,1}(\lambda) |\Phi_2\rangle &= w_1(\lambda) \prod_{i=1}^{n=2} P_1(\lambda, \lambda_i) |\Phi_2\rangle \\ &- \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n=2} w_1(\lambda_i)_1 \mathcal{F}_1^{(1)}(\lambda, \lambda_i) \frac{R(\lambda_j, \lambda_i)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_j, \lambda_i)_{2,1}^{2,1}} \theta_{<}(\lambda_j, \lambda_i) \mathcal{T}_{1,2}(\lambda) \phi_1(\lambda_j) |0\rangle \\ &- w_1(\lambda_1) w_1(\lambda_2)_2 \mathcal{F}_2^{(1)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2) \mathcal{T}_{1,3}(\lambda) |0\rangle \end{aligned} \quad (188)$$

e

$$\begin{aligned}
 \mathcal{T}_{2,2}(\lambda) |\Phi_2\rangle &= w_2(\lambda) \prod_{i=1}^{n=2} P_2(\lambda, \lambda_i) |\Phi_2\rangle \\
 &- \sum_{\substack{i,j=1 \\ j \neq i}}^{n=2} w_1(\lambda_i)_1 \mathcal{F}_1^{(2)}(\lambda, \lambda_i) \frac{R(\lambda_j, \lambda_i)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_j, \lambda_i)_{2,1}^{2,1}} \theta_{<}(\lambda_j, \lambda_i) \mathcal{T}_{2,3}(\lambda) \phi_1(\lambda_j) |0\rangle \\
 &- \sum_{\substack{i,j=1 \\ j \neq i}}^{n=2} w_2(\lambda_i)_0 \mathcal{F}_1^{(1)}(\lambda, \lambda_i) \frac{R(\lambda_i, \lambda_j)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_i, \lambda_j)_{2,1}^{2,1}} \theta_{<}(\lambda_i, \lambda_j) \mathcal{T}_{1,2}(\lambda) \phi_1(\lambda_j) |0\rangle \\
 &- w_1(\lambda_1) w_1(\lambda_2)_2 \mathcal{F}_2^{(2)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2) \mathcal{T}_{2,4}(\lambda) |0\rangle \\
 &- \sum_{\substack{i,j=1 \\ j \neq i}}^{n=2} w_1(\lambda_i) w_2(\lambda_j)_1 \mathcal{F}_2^{(1)}(\lambda, \lambda_i, \lambda_j) \theta_{<}(\lambda_j, \lambda_i) \mathcal{T}_{1,3}(\lambda) |0\rangle
 \end{aligned} \tag{189}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{T}_{a,a}(\lambda) |\Phi_2\rangle &= w_a(\lambda) \prod_{i=1}^{n=2} P_a(\lambda, \lambda_i) |\Phi_2\rangle \\
 &- \sum_{\substack{i,j=1 \\ j \neq i}}^{n=2} w_1(\lambda_i)_1 \mathcal{F}_1^{(a)}(\lambda, \lambda_i) \frac{R(\lambda_j, \lambda_i)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_j, \lambda_i)_{2,1}^{2,1}} \theta_{<}(\lambda_j, \lambda_i) \mathcal{T}_{a,a+1}(\lambda) \phi_1(\lambda_j) |0\rangle \\
 &- \sum_{\substack{i,j=1 \\ j \neq i}}^{n=2} w_2(\lambda_i)_0 \mathcal{F}_1^{(a-1)}(\lambda, \lambda_i) \frac{R(\lambda_i, \lambda_j)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_i, \lambda_j)_{2,1}^{2,1}} \theta_{<}(\lambda_i, \lambda_j) \mathcal{T}_{a-1,a}(\lambda) \phi_1(\lambda_j) |0\rangle \\
 &- w_1(\lambda_1) w_1(\lambda_2)_2 \mathcal{F}_2^{(a)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2) \mathcal{T}_{a,a+2}(\lambda) |0\rangle \\
 &- \sum_{\substack{i,j=1 \\ j \neq i}}^{n=2} w_1(\lambda_i) w_2(\lambda_j)_1 \mathcal{F}_2^{(a-1)}(\lambda, \lambda_i, \lambda_j) \theta_{<}(\lambda_j, \lambda_i) \mathcal{T}_{a-1,a+1}(\lambda) |0\rangle \\
 &- w_2(\lambda_1) w_2(\lambda_2)_0 \mathcal{F}_2^{(a-2)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2) \mathcal{T}_{a-2,a}(\lambda) |0\rangle, \quad \text{para } 3 \leq a \leq N-2
 \end{aligned} \tag{190}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{T}_{N-1,N-1}(\lambda) |\Phi_2\rangle &= w_{N-1}(\lambda) \prod_{i=1}^{n=2} P_{N-1}(\lambda, \lambda_i) |\Phi_2\rangle \\
 &- \sum_{\substack{i,j=1 \\ j \neq i}}^{n=2} w_1(\lambda_i)_1 \mathcal{F}_1^{(N-1)}(\lambda, \lambda_i) \frac{R(\lambda_j, \lambda_i)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_j, \lambda_i)_{2,1}^{2,1}} \theta_{<}(\lambda_j, \lambda_i) \mathcal{T}_{N-1,N}(\lambda) \phi_1(\lambda_j) |0\rangle \\
 &- \sum_{\substack{i,j=1 \\ j \neq i}}^{n=2} w_2(\lambda_i)_0 \mathcal{F}_1^{(N-2)}(\lambda, \lambda_j) \frac{R(\lambda_i, \lambda_j)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_i, \lambda_j)_{2,1}^{2,1}} \theta_{<}(\lambda_i, \lambda_j) \mathcal{T}_{N-2,N-1}(\lambda) \phi_1(\lambda_j) |0\rangle \\
 &- \sum_{\substack{i,j=1 \\ j \neq i}}^{n=2} w_1(\lambda_i) w_2(\lambda_j)_1 \mathcal{F}_2^{(N-2)}(\lambda, \lambda_i, \lambda_j) \theta_{<}(\lambda_j, \lambda_i) \mathcal{T}_{N-2,N}(\lambda) |0\rangle \\
 &- w_2(\lambda_1) w_2(\lambda_2)_0 \mathcal{F}_2^{(N-3)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2) \mathcal{T}_{N-3,N-1}(\lambda) |0\rangle, \tag{191}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{T}_{N,N}(\lambda) |\Phi_2\rangle &= w_N(\lambda) \prod_{i=1}^{n=2} P_N(\lambda, \lambda_i) |\Phi_2\rangle \\
 &- \sum_{\substack{i,j=1 \\ j \neq i}}^{n=2} w_2(\lambda_i)_0 \mathcal{F}_1^{(N-1)}(\lambda, \lambda_i) \frac{R(\lambda_i, \lambda_j)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_i, \lambda_j)_{2,1}^{2,1}} \theta_{<}(\lambda_i, \lambda_j) \mathcal{T}_{N-1,N}(\lambda) \phi_1(\lambda_j) |0\rangle \\
 &- w_2(\lambda_1) w_2(\lambda_2)_0 \mathcal{F}_2^{(N-2)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2) \mathcal{T}_{N-2,N}(\lambda) |0\rangle, \tag{192}
 \end{aligned}$$

onde

$$\theta_{<}(\lambda_i, \lambda_j) = \begin{cases} \theta(\lambda_i, \lambda_j), & \text{para } i < j \\ 1, & \text{para } i \geq j. \end{cases} \tag{193}$$

As novas funções auxiliares ${}_0\mathcal{F}_2^{(a)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2)$, ${}_1\mathcal{F}_2^{(a)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2)$ e ${}_2\mathcal{F}_2^{(a)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2)$ estabelecem as quatro diferentes contribuições dos operadores que possuem componente azimutal de spin igual

a $s = 2$. Essas funções são fixadas pelas seguintes relações de recorrência

$${}_0\mathcal{F}_2^{(a)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2) = \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{a+1,1}^{a,2}}{R(\lambda, \lambda_1)_{a+2,1}^{a+2,1}} {}_0\mathcal{F}_1^{(a+1)}(\lambda, \lambda_2) + \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{a+2,1}^{a,3}}{R(\lambda, \lambda_1)_{a+2,1}^{a+2,1}} {}_1\mathcal{F}_1^{(2)}(\lambda_1, \lambda_2) \quad (194)$$

$${}_1\mathcal{F}_2^{(a)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2) = {}_0\mathcal{F}_1^{(a)}(\lambda, \lambda_2) {}_1\mathcal{F}_1^{(a+1)}(\lambda, \lambda_1) \frac{R(\lambda_2, \lambda_1)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_2, \lambda_1)_{2,1}^{2,1}} \quad (195)$$

$${}_2\mathcal{F}_2^{(a)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2) = -{}_0\mathcal{F}_2^{(a)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2) - \sum_{\substack{i,j=1 \\ j \neq i}}^{n=2} {}_1\mathcal{F}_2^{(a)}(\lambda, \lambda_i, \lambda_j) \frac{R(\lambda_j, \lambda_i)_{2,1}^{2,1}}{R(\lambda_j, \lambda_i)_{1,1}^{1,1}} \frac{R(\lambda_i, \lambda_j)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_i, \lambda_j)_{2,1}^{2,1}} \theta_{<}(\lambda_i, \lambda_j). \quad (196)$$

Devido à propriedade de simetria do ansatz $|\Phi_2\rangle$ (186), concluímos das Eqs.(188-192) que as funções ${}_0\mathcal{F}_2^{(a)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2)$ e ${}_2\mathcal{F}_2^{(a)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2)$ devem satisfazer às seguintes relações

$${}_0\mathcal{F}_2^{(a)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2) = \theta(\lambda_1, \lambda_2) {}_0\mathcal{F}_2^{(a)}(\lambda, \lambda_2, \lambda_1) \quad (197)$$

$${}_2\mathcal{F}_2^{(a)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2) = \theta(\lambda_1, \lambda_2) {}_2\mathcal{F}_2^{(a)}(\lambda, \lambda_2, \lambda_1). \quad (198)$$

Análogo ao estado de uma partícula, podemos representar as Eqs.(188-192) em uma única expressão. Para tal façanha utilizaremos a distribuição discreta (175) que capture as diferenças nas estruturas da ação dos primeiros e últimos dois operadores diagonais atuando no estado de duas partículas. Considerando a propriedade da distribuição $\bar{\delta}_i^{j_1, j_2}$ reescrevemos as Eqs.(188-192) em uma única expressão compacta dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{a,a}(\lambda) |\Phi_2\rangle &= w_a(\lambda) \prod_{i=1}^2 P_a(\lambda, \lambda_i) |\Phi_2\rangle \\ &- \bar{\delta}_a^N \mathcal{T}_{a,a+1}(\lambda) \sum_{\substack{i,j=1 \\ j \neq i}}^2 \phi_1(\lambda_j) w_1(\lambda_i) {}_1\mathcal{F}_1^{(a)}(\lambda, \lambda_i) \frac{R(\lambda_j, \lambda_i)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_j, \lambda_i)_{2,1}^{2,1}} \theta_{<}(\lambda_j, \lambda_i) |0\rangle \\ &- \bar{\delta}_a^1 \mathcal{T}_{a-1,a}(\lambda) \sum_{\substack{i,j=1 \\ j \neq i}}^2 \phi_1(\lambda_j) w_2(\lambda_i) {}_0\mathcal{F}_1^{(a-1)}(\lambda, \lambda_i) \frac{R(\lambda_i, \lambda_j)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_i, \lambda_j)_{2,1}^{2,1}} \theta_{<}(\lambda_i, \lambda_j) |0\rangle \\ &- \bar{\delta}_a^{N-1, N} \mathcal{T}_{a,a+2}(\lambda) w_1(\lambda_1) w_1(\lambda_2) {}_2\mathcal{F}_2^{(a)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2) |0\rangle \\ &- \bar{\delta}_a^{N, 1} \mathcal{T}_{a-1,a+1}(\lambda) \sum_{\substack{i,j=1 \\ j \neq i}}^2 w_1(\lambda_i) w_2(\lambda_j) {}_1\mathcal{F}_2^{(a-1)}(\lambda, \lambda_i, \lambda_j) \theta_{<}(\lambda_j, \lambda_i) |0\rangle \\ &- \bar{\delta}_a^{1, 2} \mathcal{T}_{a-2,a}(\lambda) w_2(\lambda_1) w_2(\lambda_2) {}_0\mathcal{F}_2^{(a-2)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2) |0\rangle, \quad \text{para } 1 \leq a \leq N. \quad (199) \end{aligned}$$

Antes de prosseguir faremos alguns comentários sobre o efeito da distribuição discreta $\bar{\delta}_a^{j_1, \dots, j_n}$ na equação acima. A análise direta da Eq.(199) revela a existência de termos da forma $\mathcal{T}_{a-i,a}(\lambda)$ e $\mathcal{T}_{a,a+i}(\lambda)$ para $i = 1, 2$ nesta equação. Entretanto, esses operadores de criação não são definidos para $a - i < 1$ e $a + i > N$ respectivamente. A utilização da distribuição $\bar{\delta}_a^{j_1, \dots, j_n}$ é uma maneira de evitar que tais condições sejam satisfeitas, eliminando assim possíveis inconsistências da Eq.(199). Porém, essa não é a única maneira de escrever a Eq.(199). Essa equação pode ser escrita de uma forma mais compacta, que apesar de não ser tão didática, possui uma expressão semelhante à fórmula dos operadores $\mathcal{T}_{a,a}(\lambda)$ aplicados no ansatz do estado de multi-partículas. Esta fórmula mais compacta é equivalente a Eq.(199) e pode ser descrita pela seguinte expressão

$$\begin{aligned}
 \mathcal{T}_{a,a}(\lambda) |\Phi_2\rangle &= w_a(\lambda) \prod_{i=1}^2 P_a(\lambda, \lambda_i) |\Phi_2\rangle - \sum_{t=1}^2 \sum_{p=\bar{M}}^{\bar{m}\{a-1,t\}} \mathcal{T}_{a-p,a+t-p}(\lambda) \\
 &\times \sum_{\substack{1 \leq j_1 < \dots < j_{(t-p)} \leq 2 \\ 1 \leq j_{(t-p+1)} < \dots < j_t \leq 2}}^* \phi_{2-t}(\{\lambda_i\}_{i \neq j_1, \dots, j_t}^{i=1,2}) {}_{t-p}\mathcal{F}_t^{(a-p)}(\lambda, \lambda_{j_1}, \dots, \lambda_{j_t}) \\
 &\times \left(\prod_{k=1}^{t-p} w_1(\lambda_{j_k}) \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j_1, \dots, j_t}}^2 \frac{R(\lambda_i, \lambda_{j_k})_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_i, \lambda_{j_k})_{2,1}^{2,1}} \theta_{<}(\lambda_i, \lambda_{j_k}) \right) \\
 &\times \left(\prod_{l=t-p+1}^t w_2(\lambda_{j_l}) \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j_1, \dots, j_t}}^2 \frac{R(\lambda_{j_l}, \lambda_i)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_{j_l}, \lambda_i)_{2,1}^{2,1}} \theta_{<}(\lambda_{j_l}, \lambda_i) \right) \prod_{k=1}^{t-p} \prod_{l=t-p+1}^t \theta_{<}(\lambda_{j_l}, \lambda_{j_k}) |0\rangle,
 \end{aligned} \tag{200}$$

onde o símbolo $*$ na somatória significa que os valores dos índices j_k, j_l para $l \in \{t-p+1, \dots, t\}$ e $k \in \{1, \dots, t-p\}$ não podem ser iguais. Além disto, a notação $\{\lambda_i\}_{i \neq j_1, \dots, j_p}^{i=1, \dots, n}$ representa que de todas as possíveis variáveis espectrais $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, aquelas cujos índices são $\lambda_{j_1}, \dots, \lambda_{j_p}$ não pertencem ao conjunto.

Continuando o método de diagonalização, ressaltamos que resultados anteriores (199) ou (200) contém todos os ingredientes necessários para solucionarmos o problema de autovalor para duas partículas. Por fim, concluímos que a solução do problema de autovalor da matriz consiste basicamente em somar a Eq.(199) ou Eq.(200) sobre o índice a . Executando essa soma,

podemos reorganizá-la da seguinte forma

$$\begin{aligned}
 T(\lambda) |\Phi_2\rangle &= \sum_{a=1}^N w_a(\lambda) \prod_{i=1}^{n=2} P_a(\lambda, \lambda_i) |\Phi_2\rangle \\
 &- \sum_{a=1}^{N-1} \sum_{\substack{i,j=1 \\ j \neq i}}^{n=2} \left[w_1(\lambda_i) {}_1\mathcal{F}_1^{(a)}(\lambda, \lambda_i) \frac{R(\lambda_j, \lambda_i)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_j, \lambda_i)_{2,1}^{2,1}} + w_2(\lambda_i) {}_0\mathcal{F}_1^{(a)}(\lambda, \lambda_i) \frac{R(\lambda_i, \lambda_j)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_i, \lambda_j)_{2,1}^{2,1}} \theta(\lambda_i, \lambda_j) \right] \\
 &\times \theta_{<}(\lambda_j, \lambda_i) \mathcal{T}_{a,a+1}(\lambda) \phi_1(\lambda_j) |0\rangle \\
 &- \sum_{a=1}^{N-2} \left[w_1(\lambda_1) w_1(\lambda_2) {}_2\mathcal{F}_2^{(a)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2) + \sum_{\substack{i,j=1 \\ j \neq i}}^{n=2} w_1(\lambda_i) w_2(\lambda_j) {}_1\mathcal{F}_2^{(a)}(\lambda, \lambda_i, \lambda_j) \theta_{<}(\lambda_j, \lambda_i) \right. \\
 &\left. + w_2(\lambda_1) w_2(\lambda_2) {}_0\mathcal{F}_2^{(a)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2) \right] \mathcal{T}_{a,a+2}(\lambda) |0\rangle. \tag{201}
 \end{aligned}$$

Da Eq.(201) visualizamos as possíveis classes de termos não-desejáveis que devem ser cancelados. Os dois primeiros termos não-desejáveis são extensões diretas da estrutura presente no estado de uma partícula. Todavia, os termos restantes são inerentes ao estado de duas partículas e correspondem às quatro possíveis maneiras de construir termos não-desejados com spin azimutal $s = 2$ do tipo $\mathcal{T}_{a,a+2}(\lambda) w_i(\lambda_1) w_j(\lambda_2)$ para $i, j = 1, 2$. Para cancelarmos os termos não-desejáveis devemos utilizar as propriedades das funções auxiliares ${}_1\mathcal{F}_1^{(a)}(\lambda, \lambda_1)$ e ${}_2\mathcal{F}_2^{(a)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2)$ dadas pelas Eqs.(176, 196). Mais especificamente, considerando que ${}_0\mathcal{F}_1^{(a)}(\lambda, \lambda_1) = -{}_1\mathcal{F}_1^{(a)}(\lambda, \lambda_1)$ e substituindo a função ${}_2\mathcal{F}_2^{(a)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2)$ na Eq.(201) obtemos

$$\begin{aligned}
 T(\lambda) |\Phi_2\rangle &= \Lambda_2(\lambda) |\Phi_2\rangle \\
 &+ \sum_{a=1}^{N-1} \sum_{\substack{i,j=1 \\ j \neq i}}^{n=2} \left[w_1(\lambda_j) \frac{R(\lambda_i, \lambda_j)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_i, \lambda_j)_{2,1}^{2,1}} - w_2(\lambda_j) \frac{R(\lambda_j, \lambda_i)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_j, \lambda_i)_{2,1}^{2,1}} \theta(\lambda_j, \lambda_i) \right] {}_0\mathcal{F}_1^{(a)}(\lambda, \lambda_j) \\
 &\times \theta_{<}(\lambda_i, \lambda_j) \mathcal{T}_{a,a+1}(\lambda) \phi_1(\lambda_i) |0\rangle \\
 &+ \sum_{a=1}^{N-2} \left\{ [w_1(\lambda_1) w_1(\lambda_2) - w_2(\lambda_1) w_2(\lambda_2)] {}_0\mathcal{F}_2^{(a)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2) \right. \\
 &+ \sum_{\substack{i,j=1 \\ j \neq i}}^{n=2} w_1(\lambda_i) \left[w_1(\lambda_j) \frac{R(\lambda_i, \lambda_j)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_i, \lambda_j)_{2,1}^{2,1}} - w_2(\lambda_j) \frac{R(\lambda_j, \lambda_i)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_j, \lambda_i)_{2,1}^{2,1}} \theta(\lambda_j, \lambda_i) \right] \frac{R(\lambda_j, \lambda_i)_{2,1}^{2,1}}{R(\lambda_j, \lambda_i)_{1,1}^{1,1}} \\
 &\left. \times {}_1\mathcal{F}_2^{(a)}(\lambda, \lambda_i, \lambda_j) \theta_{<}(\lambda_i, \lambda_j) \right\} \mathcal{T}_{a,a+2}(\lambda) |0\rangle. \tag{202}
 \end{aligned}$$

Da Eq.(202) observamos que os fatores multiplicativos dos termos não-desejáveis $\mathcal{T}_{a,a+2}(\lambda) |0\rangle$

ou $\mathcal{T}_{a,a+1}(\lambda)\phi_1(\lambda_j)|0\rangle$ tornam-se nulos caso as variáveis espectrais λ_1 e λ_2 satisfaçam as seguinte equação do ansatz de Bethe¹⁰

$$\frac{w_1(\lambda_j)}{w_2(\lambda_j)} = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n=2} \theta(\lambda_j, \lambda_i) \frac{R(\lambda_j, \lambda_i)_{1,1}^{1,1} R(\lambda_i, \lambda_j)_{2,1}^{2,1}}{R(\lambda_j, \lambda_i)_{2,1}^{2,1} R(\lambda_i, \lambda_j)_{1,1}^{1,1}} \quad \text{para } j = 1, 2, \quad (203)$$

e conseqüentemente o autovalor do estado de duas partículas $\Lambda_2(\lambda)$ é

$$\Lambda_2(\lambda) = \sum_{a=1}^N w_a(\lambda) \prod_{i=1}^{n=2} P_a(\lambda, \lambda_i). \quad (204)$$

Um fato típico de teorias integráveis é que os resultados para duas partículas contém a principal característica da estrutura do espectro. Desse modo, acredita-se que as expressões (204) e (203) são válidas para qualquer estado de n partículas. Entretanto, para encontrarmos toda estrutura dos autovetores devemos analisar estados de multipartículas com $n > 2$.

4.3 Estado de três partículas

O próximo estado a ser analisado está relacionado a um estado cuja componenete azimutal de spin é $s_{1,4} = 3$. Logo, o denominamos de estado de três partículas. O ansatz $\phi_3(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)|0\rangle$, mais geral, composto pelos operadores da base que apresenta essa característica é dado por:

$$\phi_3(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \sum_{m_1, m_2, m_3=1}^3 \sum_{\substack{k_1, k_2, k_3=1 \\ k_1+k_2+k_3=6}}^N \bar{c}_{k_1, k_2, k_3}^{(m_1, m_2, m_3)}(\lambda_{m_1}, \lambda_{m_2}, \lambda_{m_3}) \mathcal{T}_{1, k_1}(\lambda_{m_1}) \mathcal{T}_{1, k_2}(\lambda_{m_2}) \mathcal{T}_{1, k_3}(\lambda_{m_3}), \quad (205)$$

onde o símbolo $*$ denota $m_1 \neq m_2 \neq m_3 \neq m_1$ e $\bar{c}_{k_1, k_2, k_3}^{(m_1, m_2, m_3)}(\lambda_{m_1}, \lambda_{m_2}, \lambda_{m_3})$ são coeficientes de uma combinação linear arbitrária.

Entretanto, podemos reduzir esse ansatz utilizando as relações de comutação entre o operador $\mathcal{T}_{1,1}(\lambda)$ e $\mathcal{T}_{1,b}(\mu)$, ($b = 2, \dots, 4$). Mais especificamente, utilizando a Eq.(32) eliminamos do ansatz $\phi_3(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ as seguintes famílias de termos $\mathcal{T}_{1,1}(\lambda_{m_1})\mathcal{T}_{1,1}(\lambda_{m_2})\mathcal{T}_{1,4}(\lambda_{m_3})$, $\mathcal{T}_{1,1}(\lambda_{m_1})\mathcal{T}_{1,4}(\lambda_{m_2})\mathcal{T}_{1,1}(\lambda_{m_3})$, $\mathcal{T}_{1,1}(\lambda_{m_1})\mathcal{T}_{1,2}(\lambda_{m_2})\mathcal{T}_{1,3}(\lambda_{m_3})$, $\mathcal{T}_{1,1}(\lambda_{m_1})\mathcal{T}_{1,3}(\lambda_{m_2})\mathcal{T}_{1,2}(\lambda_{m_3})$,

$\mathcal{T}_{1,2}(\lambda_{m_1})\mathcal{T}_{1,1}(\lambda_{m_2})\mathcal{T}_{1,3}(\lambda_{m_3})$ e $\mathcal{T}_{1,3}(\lambda_{m_1})\mathcal{T}_{1,1}(\lambda_{m_2})\mathcal{T}_{1,2}(\lambda_{m_3})$. Dessa forma a Eq.(205) assume a

¹⁰Note-se que a Eq.(203) implica na relação $\prod_{i=1}^{n=2} \frac{\omega_1(\lambda_i)}{\omega_2(\lambda_i)} = 1$ graças à propriedade (187) da função $\theta(\lambda_1, \lambda_2)$.

seguinte forma

$$\begin{aligned}
 \phi_3(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = & \sum_{\substack{m_1, m_2, m_3=1 \\ m_1 \neq m_2 \neq m_3 \neq m_1}}^3 \bar{c}_1^{(m_1, m_2, m_3)}(\lambda_{m_1}, \lambda_{m_2}, \lambda_{m_3}) \mathcal{T}_{1,2}(\lambda_{m_1}) \mathcal{T}_{1,2}(\lambda_{m_2}) \mathcal{T}_{1,2}(\lambda_{m_3}) \\
 & + \bar{c}_2^{(m_1, m_2, m_3)}(\lambda_{m_1}, \lambda_{m_2}, \lambda_{m_3}) \mathcal{T}_{1,3}(\lambda_{m_1}) \mathcal{T}_{1,2}(\lambda_{m_2}) \mathcal{T}_{1,1}(\lambda_{m_3}) \\
 & + \bar{c}_3^{(m_1, m_2, m_3)}(\lambda_{m_1}, \lambda_{m_2}, \lambda_{m_3}) \mathcal{T}_{1,3}(\lambda_{m_1}) \mathcal{T}_{1,2}(\lambda_{m_2}) \mathcal{T}_{1,1}(\lambda_{m_3}) \\
 & + \bar{c}_4^{(m_1, m_2, m_3)}(\lambda_{m_1}, \lambda_{m_2}, \lambda_{m_3}) \mathcal{T}_{1,4}(\lambda_{m_1}) \mathcal{T}_{1,1}(\lambda_{m_2}) \mathcal{T}_{1,1}(\lambda_{m_3}). \quad (206)
 \end{aligned}$$

Através das relações de comutação entre os operadores da base descritas na seção (2.2) podemos alterar o ordenamento dos produtos de operadores de criação na Eq.(206), simplificando novamente $\phi_3(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$. Esse procedimento é gerado a partir das relações de comutação entre os operadores $\mathcal{T}_{1,2}(\lambda)$ e $\mathcal{T}_{1,2}(\mu)$, $\mathcal{T}_{1,2}(\lambda)$ e $\mathcal{T}_{1,3}(\mu)$, $\mathcal{T}_{1,3}(\lambda)$ e $\mathcal{T}_{1,2}(\mu)$ dadas pela Eq.(54). Dessa maneira o ansatz $\phi_3(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ adquire a seguinte estrutura

$$\begin{aligned}
 \phi_3(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = & \mathcal{T}_{1,2}(\lambda_1) \mathcal{T}_{1,2}(\lambda_2) \mathcal{T}_{1,2}(\lambda_3) + \bar{g}_3^{(1)} \mathcal{T}_{1,2}(\lambda_1) \mathcal{T}_{1,3}(\lambda_2) \mathcal{T}_{1,1}(\lambda_3) \\
 & + \bar{g}_3^{(2)} \mathcal{T}_{1,2}(\lambda_1) \mathcal{T}_{1,3}(\lambda_3) \mathcal{T}_{1,1}(\lambda_2) + \bar{g}_3^{(3)} \mathcal{T}_{1,2}(\lambda_2) \mathcal{T}_{1,3}(\lambda_3) \mathcal{T}_{1,1}(\lambda_1) \\
 & + \bar{g}_3^{(4)} \mathcal{T}_{1,3}(\lambda_1) \mathcal{T}_{1,2}(\lambda_2) \mathcal{T}_{1,1}(\lambda_3) + \bar{g}_3^{(5)} \mathcal{T}_{1,3}(\lambda_1) \mathcal{T}_{1,2}(\lambda_3) \mathcal{T}_{1,1}(\lambda_2) \\
 & + \bar{g}_3^{(6)} \mathcal{T}_{1,3}(\lambda_2) \mathcal{T}_{1,2}(\lambda_3) \mathcal{T}_{1,1}(\lambda_1) + \bar{g}_3^{(7)} \mathcal{T}_{1,4}(\lambda_1) \mathcal{T}_{1,1}(\lambda_2) \mathcal{T}_{1,1}(\lambda_3) \\
 & + \bar{g}_3^{(8)} \mathcal{T}_{1,4}(\lambda_2) \mathcal{T}_{1,1}(\lambda_1) \mathcal{T}_{1,1}(\lambda_3) + \bar{g}_3^{(9)} \mathcal{T}_{1,4}(\lambda_3) \mathcal{T}_{1,1}(\lambda_1) \mathcal{T}_{1,1}(\lambda_2), \quad (207)
 \end{aligned}$$

onde $\bar{g}_3^{(i)}$ são funções arbitrárias dos parâmetros $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

Com objetivo de utilizarmos os resultados obtidos durante a construção do estado de duas partículas $|\Phi_2\rangle$ reorganizamos $|\Phi_3\rangle$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 |\Phi_3\rangle = & \phi_3(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) |0\rangle = \mathcal{T}_{1,2}(\lambda_1) \phi_2(\lambda_2, \lambda_3) |0\rangle + g_3^{(1)} \mathcal{T}_{1,3}(\lambda_1) \phi_1(\lambda_2) w_1(\lambda_3) |0\rangle \\
 & + g_3^{(2)} \mathcal{T}_{1,3}(\lambda_1) \phi_1(\lambda_3) w_1(\lambda_2) |0\rangle + g_3^{(3)} \mathcal{T}_{1,3}(\lambda_2) \phi_1(\lambda_3) w_1(\lambda_1) |0\rangle \\
 & + g_3^{(4)} \mathcal{T}_{1,4}(\lambda_1) w_1(\lambda_2) w_1(\lambda_3) |0\rangle + g_3^{(5)} \mathcal{T}_{1,4}(\lambda_2) w_1(\lambda_1) w_1(\lambda_3) |0\rangle \\
 & + g_3^{(6)} \mathcal{T}_{1,4}(\lambda_3) w_1(\lambda_1) w_1(\lambda_2) |0\rangle + g_3^{(7)} \mathcal{T}_{1,2}(\lambda_1) \mathcal{T}_{1,3}(\lambda_2) w_1(\lambda_3) |0\rangle \\
 & + g_3^{(8)} \mathcal{T}_{1,2}(\lambda_1) \mathcal{T}_{1,3}(\lambda_3) w_1(\lambda_2) |0\rangle + g_3^{(9)} \mathcal{T}_{1,2}(\lambda_2) \mathcal{T}_{1,3}(\lambda_3) w_1(\lambda_1) |0\rangle, \quad (208)
 \end{aligned}$$

onde $g_3^{(i)}$ são funções arbitrárias dos parâmetros $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ a serem determinadas.

Seguindo a metodologia utilizada na seção anterior para obter o estado de duas partículas, inicialmente, comutar os operadores diagonais com os operadores $\mathcal{T}_{1,2}(\lambda_1)\phi_2(\lambda_2, \lambda_3)$, $\mathcal{T}_{1,3}(\lambda_i) \times \phi_1(\lambda_j)$, $\mathcal{T}_{1,4}(\lambda_i)$ e $\mathcal{T}_{1,2}(\lambda_i)\mathcal{T}_{1,3}(\lambda_j)$. Posteriormente, analisando os resultados dessas comutações procuramos fixar as funções $g_3^{(i)}$. O primeiro resultado importante surge da comutação entre os operadores diagonais $\mathcal{T}_{a,a}(\lambda)$ e os operadores $\mathcal{T}_{1,2}(\lambda_i)\mathcal{T}_{1,3}(\lambda_j)$ $i, j = 1, 2, 3; i \neq j$, $\mathcal{T}_{1,3}(\lambda_2)\phi_1(\lambda_3)$ e $\mathcal{T}_{1,4}(\lambda_j)$ $j = 2, 3$.

A comutação entre $\mathcal{T}_{a,a}(\lambda)$ e $\mathcal{T}_{1,2}(\lambda_i)\mathcal{T}_{1,3}(\lambda_j)$ gera os seguintes termos fáceis

$$\bullet \quad g_3^{(4+i+j)}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)\mathcal{T}_{a-3,a-1}(\lambda)\mathcal{T}_{2,3}(\lambda_i)\mathcal{T}_{3,3}(\lambda_j), \quad \text{para } a > 3 \quad (209)$$

$$\bullet \quad g_3^{(4+i+j)}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)\mathcal{T}_{a-4,a-1}(\lambda)\mathcal{T}_{3,3}(\lambda_i)\mathcal{T}_{3,3}(\lambda_j), \quad \text{para } a > 4. \quad (210)$$

Por outro lado, as relações de comutação entre os operadores diagonais e os restantes dos operadores que compõem o ansatz (208) não produzem os termos (209,210). Isso nos permite fixar as funções $g_3^{(7)}$, $g_3^{(8)}$ e $g_3^{(9)}$. Ou seja, para cancelarmos os termos (209,210) é necessário que

$$g_3^{(7)} = g_3^{(8)} = g_3^{(9)} = 0. \quad (211)$$

A comutação entre os campos diagonais e $\mathcal{T}_{1,3}(\lambda_2)\phi_1(\lambda_3)$ produzem novos termos fáceis dados pelas seguintes expressões

$$\bullet \quad g_3^{(3)}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)\mathcal{T}_{a-1,a}(\lambda)\mathcal{T}_{2,3}(\lambda_2)\phi_1(\lambda_3), \quad \text{para } a > 1 \quad (212)$$

$$\bullet \quad g_3^{(3)}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)\mathcal{T}_{a-2,a}(\lambda)\mathcal{T}_{2,3}(\lambda_2)\mathcal{T}_{2,2}(\lambda_3), \quad \text{para } a > 2 \quad (213)$$

$$\bullet \quad g_3^{(3)}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)\mathcal{T}_{a-3,a}(\lambda)\mathcal{T}_{3,3}(\lambda_2)\mathcal{T}_{2,2}(\lambda_3), \quad \text{para } a > 3. \quad (214)$$

De maneira semelhante aos termos fáceis (209,210), as relações de comutação entre os operadores diagonais e os restantes dos operadores que compõem o ansatz (208) não produzem os termos (212,213,214) e conseqüentemente, para cancelarmos esses operadores devemos eliminar o termo $\mathcal{T}_{1,3}(\lambda_2)\phi_1(\lambda_3)$ do ansatz (208), isto é,

$$g_3^{(3)} = 0. \quad (215)$$

A relação de comutação entre os operadores diagonais e $\mathcal{T}_{1,4}(\lambda_j)$ $j = 2, 3$ também gera

termos fáceis, os quais são expressos por

$$\bullet \quad g_3^{(3+j)}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \mathcal{T}_{a-1,a}(\lambda) \mathcal{T}_{2,4}(\lambda_j), \quad \text{para } a > 1 \quad (216)$$

$$\bullet \quad g_3^{(3+j)}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \mathcal{T}_{a-2,a}(\lambda) \mathcal{T}_{3,4}(\lambda_j), \quad \text{para } a > 2 \quad (217)$$

$$\bullet \quad g_3^{(3+j)}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \mathcal{T}_{a-3,a}(\lambda) \mathcal{T}_{4,4}(\lambda_j), \quad \text{para } a > 3, \quad (218)$$

$$\bullet \quad g_3^{(3+j)}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \mathcal{T}_{a-1,a+1}(\lambda) \mathcal{T}_{2,3}(\lambda_j), \quad \text{para } 1 < a < N \quad (219)$$

$$\bullet \quad g_3^{(3+j)}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \mathcal{T}_{a-2,a+1}(\lambda) \mathcal{T}_{3,3}(\lambda_j), \quad \text{para } 2 < a < N. \quad (220)$$

De modo análogo aos produtos de operadores (209,210,212,213,214), para cancelarmos os termos (216-220) devemos anular as contribuições dos campos $\mathcal{T}_{1,4}(\lambda_j)$ $j = 2, 3$ no ansatz (208). Isso é feito impondo as seguintes restrições

$$g_3^{(5)} = g_3^{(6)} = 0. \quad (221)$$

Os próximos termos fáceis que analisaremos são dados por

$$\bullet \quad \mathcal{T}_{a-1,a}(\lambda) \mathcal{T}_{2,3}(\lambda_1) \phi_1(\lambda_i) \mathcal{T}_{1,1}(\lambda_j) \quad \text{para } a > 1 \quad (222)$$

$$\bullet \quad \mathcal{T}_{a-2,a}(\lambda) \mathcal{T}_{2,3}(\lambda_1) \mathcal{T}_{2,2}(\lambda_i) \mathcal{T}_{1,1}(\lambda_j) \quad \text{para } a > 2 \quad (223)$$

$$\bullet \quad \mathcal{T}_{a-3,a}(\lambda) \mathcal{T}_{3,3}(\lambda_1) \mathcal{T}_{2,2}(\lambda_i) \mathcal{T}_{1,1}(\lambda_j) \quad \text{para } a > 3. \quad (224)$$

Os termos (222-224) são gerados pelas comutação dos campos diagonais e os operadores $\mathcal{T}_{1,2}(\lambda_1) \phi_2(\lambda_2, \lambda_3)$ e $\mathcal{T}_{1,3}(\lambda_1) \phi_1(\lambda_j)$. Em particular, a comutação do campo diagonal $\mathcal{T}_{a,a}(\lambda)$ com $\phi_3(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ produz

$$\bullet \quad \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{a,1}^{a-1,2}}{R(\lambda, \lambda_1)_{a,1}^{a,1}} \left[{}_1\mathcal{F}_1^{(2)}(\lambda_1, \lambda_j) \frac{R(\lambda_i, \lambda_j)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_i, \lambda_j)_{2,1}^{2,1}} \prod_{\bar{e}=2}^{j-1} \theta(\lambda_{\bar{e}}, \lambda_j) - g_3^{(i-1)} \right] \mathcal{T}_{a-1,a}(\lambda) \mathcal{T}_{2,3}(\lambda_1) \\ \times \phi_1(\lambda_i) \mathcal{T}_{1,1}(\lambda_j), \quad \text{para } i, j = 2, 3 \text{ e } i \neq j. \quad (225)$$

Concluimos da Eq.(225), que para cancelarmos $\mathcal{T}_{a-1,a}(\lambda) \mathcal{T}_{2,3}(\lambda_1) \phi_1(\lambda_i) \mathcal{T}_{1,1}(\lambda_j)$ devemos im-

por as seguintes restrições

$$g_3^{(1)} = {}_1\mathcal{F}_1^{(2)}(\lambda_1, \lambda_3) \frac{R(\lambda_2, \lambda_3)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_2, \lambda_3)_{2,1}^{2,1}} \theta(\lambda_2, \lambda_3) \quad (226)$$

$$g_3^{(2)} = {}_1\mathcal{F}_1^{(2)}(\lambda_1, \lambda_2) \frac{R(\lambda_3, \lambda_2)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_3, \lambda_2)_{2,1}^{2,1}}. \quad (227)$$

É importante frisar que as Eqs.(226,227) implicam no cancelamento dos termos (223,224).

O último termo fácil que analisaremos é dado por

$$\bullet \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{a,1}^{a-1,2}}{R(\lambda, \lambda_1)_{a,1}^{a,1}} \left[{}_2\mathcal{F}_2^{(2)}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) - g_3^{(4)} \right] \mathcal{T}_{a-1,a}(\lambda) \mathcal{T}_{2,4}(\lambda_1) \mathcal{T}_{1,1}(\lambda_2) \mathcal{T}_{1,1}(\lambda_2) \text{ para } a > 1. \quad (228)$$

O termo (228) é gerado da comutação dos operador diagonal $\mathcal{T}_{a,a}(\lambda)$ com os operadores $\mathcal{T}_{1,2}(\lambda_1)\phi_2(\lambda_2, \lambda_3)$ e $\mathcal{T}_{1,4}(\lambda_1)$. A análise da Eq.(228) revela que para cancelarmos $\mathcal{T}_{a-1,a}(\lambda)\mathcal{T}_{2,4}(\lambda_1) \times \mathcal{T}_{1,1}(\lambda_2)\mathcal{T}_{1,1}(\lambda_2)$ a função $g_3^{(4)}$ deve satisfazer a seguinte restrição

$$g_3^{(4)} = {}_2\mathcal{F}_2^{(2)}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3). \quad (229)$$

A condição (229) também produz o cancelamento dos seguintes termos fáceis

$$\bullet \mathcal{T}_{a-2,a}(\lambda) \mathcal{T}_{3,4}(\lambda_1) \mathcal{T}_{1,1}(\lambda_2) \mathcal{T}_{1,1}(\lambda_3) \text{ para } a > 2 \quad (230)$$

$$\bullet \mathcal{T}_{a-3,a}(\lambda) \mathcal{T}_{4,4}(\lambda_1) \mathcal{T}_{1,1}(\lambda_2) \mathcal{T}_{1,1}(\lambda_3) \text{ para } a > 3 \quad (231)$$

$$\bullet \mathcal{T}_{a-1,a+1}(\lambda) \mathcal{T}_{2,3}(\lambda_1) \mathcal{T}_{1,1}(\lambda_2) \mathcal{T}_{1,1}(\lambda_3) \text{ para } 1 < a < N \quad (232)$$

$$\bullet \mathcal{T}_{a-2,a+1}(\lambda) \mathcal{T}_{3,3}(\lambda_1) \mathcal{T}_{1,1}(\lambda_2) \mathcal{T}_{1,1}(\lambda_3) \text{ para } 2 < a < N \quad (233)$$

$$\bullet \mathcal{T}_{1,4}(\lambda_1) w_1(\lambda_i) w_2(\lambda_j) w_{a-1}(\lambda) \text{ para } a > 1 \text{ e } i, j = 2, 3; i \neq j \quad (234)$$

$$\bullet \mathcal{T}_{1,4}(\lambda_1) w_2(\lambda_2) w_2(\lambda_3) w_{a-2}(\lambda) \text{ para } a > 2 \quad (235)$$

$$\bullet \mathcal{T}_{1,3}(\lambda_1) \mathcal{T}_{1,2}(\lambda_j) w_2(\lambda_i) w_{a-1}(\lambda) \text{ para } a > 1 \text{ e } i, j = 2, 3; i \neq j. \quad (236)$$

Assim, concluímos de maneira direta da comutação entre os operadores diagonais e o vetor $\phi_3(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ que o ansatz (208) terá a possibilidade de ser um autovetor da matriz de

transferência (17) se este possuir a seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 \phi_3(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) &= \mathcal{T}_{1,2}(\lambda_1)\phi_2(\lambda_2, \lambda_3) \\
 &+ \mathcal{T}_{1,3}(\lambda_1) \sum_{\substack{n=3 \\ i,j=2 \\ j \neq i}} \mathcal{F}_1^{(2)}(\lambda_1, \lambda_j) \frac{R(\lambda_i, \lambda_j)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_i, \lambda_j)_{2,1}^{2,1}} \theta_{<}(\lambda_i, \lambda_j) \phi_1(\lambda_i) \mathcal{T}_{1,1}(\lambda_j) \\
 &+ {}_2\mathcal{F}_2^{(2)}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \mathcal{T}_{1,4}(\lambda_1) \mathcal{T}_{1,1}(\lambda_2) \mathcal{T}_{1,1}(\lambda_3).
 \end{aligned} \tag{237}$$

Análogo ao estado de duas partículas (181), o ansatz (237) também é simétrico em relação aos parâmetros λ_1, λ_2 e λ_3 , isto é,

$$\phi_3(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \theta(\lambda_1, \lambda_2) \phi_3(\lambda_2, \lambda_1, \lambda_3) = \theta(\lambda_2, \lambda_3) \phi_3(\lambda_1, \lambda_3, \lambda_2). \tag{238}$$

A demonstração da propriedade (238) é realizada em duas etapas. Em primeiro lugar, a simetrização do ansatz (237) em relação aos parâmetros λ_2 e λ_3 decorre diretamente da propriedade de simetria do estado de duas partículas (186) e da Eq.(198). Por outro lado, para demonstrarmos a simetrização de (237) em relação aos parâmetros λ_1 e λ_2 utilizamos a propriedade de simetria do operador $\phi_2(\lambda_1, \lambda_2)$ (186) e as relações de comutação entre o operador diagonal $\mathcal{T}_{1,1}(\lambda)$ e o criação $\mathcal{T}_{1,2}(\mu)$ (173) e entre os operadores de criação $\mathcal{T}_{1,3}(\lambda)$ e $\mathcal{T}_{1,2}(\mu)$ dada pela Eq.(54) com $d_1 = 0$ e $b_1 = 3$, que pode ser reescrita da seguinte forma

$$\begin{aligned}
 \mathcal{T}_{1,2}(\mu) \mathcal{T}_{1,3}(\lambda) &= \frac{R(\lambda, \mu)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda, \mu)_{3,1}^{3,1}} \frac{1}{D_2^{(3,0)}(\lambda, \mu)} \mathcal{T}_{1,3}(\lambda) \mathcal{T}_{1,2}(\mu) - \frac{R(\lambda, \mu)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda, \mu)_{3,1}^{3,1}} \frac{R(\lambda, \mu)_{4,1}^{3,2}}{R(\lambda, \mu)_{4,1}^{4,1}} \frac{1}{D_2^{(3,0)}(\lambda, \mu)} \\
 &\times \mathcal{T}_{1,4}(\lambda) \mathcal{T}_{1,1}(\mu) - \frac{D_2^{(3,1)}(\lambda, \mu)}{D_2^{(3,0)}(\lambda, \mu)} \mathcal{T}_{1,3}(\mu) \mathcal{T}_{1,2}(\lambda) - \frac{D_2^{(3,2)}(\lambda, \mu)}{D_2^{(3,0)}(\lambda, \mu)} \mathcal{T}_{1,4}(\mu) \mathcal{T}_{1,1}(\lambda).
 \end{aligned} \tag{239}$$

Partindo do termo $\mathcal{T}_{1,2}(\lambda_1)\phi_2(\lambda_2, \lambda_3)$, inicialmente comutamos os operadores $\mathcal{T}_{1,2}(\lambda_1)\mathcal{T}_{1,2}(\lambda_2)$ através da Eq.(186) e então, movemos os operadores $\mathcal{T}_{1,1}(\lambda_1)$ e $\mathcal{T}_{1,1}(\lambda_2)$ sobre o operador $\mathcal{T}_{1,2}(\lambda_3)$

através da Eq.(173), obtendo o resultado abaixo

$$\begin{aligned}
 \mathcal{T}_{1,2}(\lambda_1)\phi_2(\lambda_2, \lambda_3) &= \theta(\lambda_1, \lambda_2)\mathcal{T}_{1,2}(\lambda_2)\phi_2(\lambda_1, \lambda_3) + \theta(\lambda_1, \lambda_2){}_1\mathcal{F}_1^{(2)}(\lambda_2, \lambda_1)\mathcal{T}_{1,3}(\lambda_2) \\
 &\times \left[P_1(\lambda_1, \lambda_3)\mathcal{T}_{1,2}(\lambda_3)\mathcal{T}_{1,1}(\lambda_1) - {}_1\mathcal{F}_1^{(1)}(\lambda_1, \lambda_3)\mathcal{T}_{1,2}(\lambda_1)\mathcal{T}_{1,1}(\lambda_3) \right] \\
 &- {}_1\mathcal{F}_1^{(2)}(\lambda_1, \lambda_2)\mathcal{T}_{1,3}(\lambda_1) \left[P_1(\lambda_2, \lambda_3)\mathcal{T}_{1,2}(\lambda_3)\mathcal{T}_{1,1}(\lambda_2) - {}_1\mathcal{F}_1^{(1)}(\lambda_2, \lambda_3)\mathcal{T}_{1,2}(\lambda_2)\mathcal{T}_{1,1}(\lambda_3) \right] \\
 &+ {}_1\mathcal{F}_1^{(2)}(\lambda_2, \lambda_3)\mathcal{T}_{1,2}(\lambda_1)\mathcal{T}_{1,3}(\lambda_2)\mathcal{T}_{1,1}(\lambda_3) \\
 &- \theta(\lambda_1, \lambda_2){}_1\mathcal{F}_1^{(2)}(\lambda_1, \lambda_3)\mathcal{T}_{1,2}(\lambda_2)\mathcal{T}_{1,3}(\lambda_1)\mathcal{T}_{1,1}(\lambda_3).
 \end{aligned} \tag{240}$$

A última manipulação algébrica que realizaremos tem como objetivo eliminar os termos $\mathcal{T}_{1,2}(\lambda_2)\mathcal{T}_{1,3}(\lambda_1)\mathcal{T}_{1,1}(\lambda_3)$ e $\mathcal{T}_{1,2}(\lambda_1)\mathcal{T}_{1,3}(\lambda_2)\mathcal{T}_{1,1}(\lambda_3)$ da Eq.(240) através da Eq.(239), isto é,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{T}_{1,2}(\lambda_1)\phi_2(\lambda_2, \lambda_3) &= \theta(\lambda_1, \lambda_2) \left[\mathcal{T}_{1,2}(\lambda_2)\phi_2(\lambda_1, \lambda_3) + {}_1\mathcal{F}_1^{(2)}(\lambda_2, \lambda_1)P_1(\lambda_1, \lambda_3)\mathcal{T}_{1,3}(\lambda_2)\mathcal{T}_{1,2}(\lambda_3) \right. \\
 &\times \mathcal{T}_{1,1}(\lambda_1) + {}_1\bar{\mathcal{H}}_1^{(2)}(\lambda_2, \lambda_1, \lambda_3|2)\mathcal{T}_{1,3}(\lambda_2)\mathcal{T}_{1,2}(\lambda_1)\mathcal{T}_{1,1}(\lambda_3) + {}_2\bar{\mathcal{F}}_2^{(2)}(\lambda_2, \lambda_1, \lambda_3)\mathcal{T}_{1,4}(\lambda_2) \\
 &\times \mathcal{T}_{1,1}(\lambda_1)\mathcal{T}_{1,1}(\lambda_3) \left. \right] - \left[{}_1\mathcal{F}_1^{(2)}(\lambda_1, \lambda_2)P_1(\lambda_2, \lambda_3)\mathcal{T}_{1,3}(\lambda_1)\mathcal{T}_{1,2}(\lambda_3)\mathcal{T}_{1,1}(\lambda_2) \right. \\
 &+ \left. {}_1\bar{\mathcal{H}}_1^{(2)}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3|2)\mathcal{T}_{1,3}(\lambda_1)\mathcal{T}_{1,2}(\lambda_2)\mathcal{T}_{1,1}(\lambda_3) + {}_2\bar{\mathcal{F}}_2^{(2)}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)\mathcal{T}_{1,4}(\lambda_1)\mathcal{T}_{1,1}(\lambda_2)\mathcal{T}_{1,1}(\lambda_3) \right],
 \end{aligned} \tag{241}$$

onde as funções ${}_1\bar{\mathcal{H}}_1^{(2)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2|2)$ e ${}_2\bar{\mathcal{F}}_2^{(2)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2)$ são dadas por

$$\begin{aligned}
 {}_1\bar{\mathcal{H}}_1^{(2)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2|2) &= -\frac{D_2^{(2,0)}(\lambda, \lambda_1)}{D_2^{(3,0)}(\lambda, \lambda_1)} \frac{R(\lambda, \lambda_2)_{3,1}^{2,2}}{R(\lambda, \lambda_2)_{3,1}^{3,1}} \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{2,1}^{2,1}}{R(\lambda, \lambda_1)_{3,1}^{3,1}} - \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{3,1}^{2,2}}{R(\lambda, \lambda_1)_{3,1}^{3,1}} \frac{R(\lambda_1, \lambda_2)_{2,1}^{1,2}}{R(\lambda_1, \lambda_2)_{2,1}^{2,1}} \\
 &- \frac{R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,1}^{2,2}}{R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,1}^{3,1}} \frac{D_2^{(3,1)}(\lambda_1, \lambda)}{D_2^{(3,0)}(\lambda_1, \lambda)}
 \end{aligned} \tag{242}$$

$$\begin{aligned}
 {}_2\bar{\mathcal{F}}_2^{(2)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2) &= \frac{D_2^{(2,0)}(\lambda, \lambda_1)}{D_2^{(3,0)}(\lambda, \lambda_1)} \frac{R(\lambda, \lambda_2)_{3,1}^{2,2}}{R(\lambda, \lambda_2)_{3,1}^{3,1}} \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{2,1}^{2,1}}{R(\lambda, \lambda_1)_{3,1}^{3,1}} \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{4,1}^{3,2}}{R(\lambda, \lambda_1)_{4,1}^{4,1}} - \frac{R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,1}^{2,2}}{R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,1}^{3,1}} \frac{D_2^{(3,2)}(\lambda_1, \lambda)}{D_2^{(3,0)}(\lambda_1, \lambda)}
 \end{aligned} \tag{243}$$

Utilizamos as identidades (109,110), oriundas da propriedade de unitariedade, para alterar o ordenamento dos determinantes $\frac{D_2^{(3,1)}(\lambda_1, \lambda)}{D_2^{(3,0)}(\lambda_1, \lambda)}$ e $\frac{D_2^{(3,2)}(\lambda_1, \lambda)}{D_2^{(3,0)}(\lambda_1, \lambda)}$ nas funções ${}_1\bar{\mathcal{H}}_1^{(2)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2|2)$ (242) e

${}_2\bar{\mathcal{F}}_2^{(2)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2)$ (243) obtemos as duas identidades abaixo

$$\begin{aligned} {}_1\bar{\mathcal{H}}_1^{(2)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2|2) &= \frac{{}_1\mathcal{H}_2^{(1)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2|2)}{{}_0\bar{\mathcal{F}}_1^{(1)}(\lambda_1, \lambda_2)} = {}_1\mathcal{H}_1^{(2)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2|2) \\ &= \theta(\lambda_1, \lambda_2) \frac{R(\lambda_1, \lambda_2)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_1, \lambda_2)_{2,1}^{2,1}} {}_1\mathcal{F}_1^{(2)}(\lambda, \lambda_2) \end{aligned} \quad (244)$$

$${}_2\bar{\mathcal{F}}_2^{(2)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2) = {}_2\mathcal{F}_2^{(2)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2) \quad (245)$$

Substituindo as Eqs.(244,245) na Eq.(241) encontramos que o produto $\mathcal{T}_{1,2}(\lambda_1)\phi_2(\lambda_2, \lambda_3)$ pode ser finalmente escrito da forma

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{1,2}(\lambda_1)\phi_2(\lambda_2, \lambda_3) &= \theta(\lambda_1, \lambda_2) \left[\mathcal{T}_{1,2}(\lambda_2)\phi_2(\lambda_1, \lambda_3) + {}_1\mathcal{F}_1^{(2)}(\lambda_2, \lambda_1)P_1(\lambda_1, \lambda_3)\mathcal{T}_{1,3}(\lambda_2)\mathcal{T}_{1,2}(\lambda_3) \right. \\ &\times \mathcal{T}_{1,1}(\lambda_1) + \theta(\lambda_1, \lambda_3){}_1\mathcal{F}_1^{(2)}(\lambda_2, \lambda_3)P_1(\lambda_3, \lambda_1)\mathcal{T}_{1,3}(\lambda_2)\mathcal{T}_{1,2}(\lambda_1)\mathcal{T}_{1,1}(\lambda_3) + {}_2\mathcal{F}_2^{(2)}(\lambda_2, \lambda_1, \lambda_3) \\ &\times \mathcal{T}_{1,4}(\lambda_2)\mathcal{T}_{1,1}(\lambda_1)\mathcal{T}_{1,1}(\lambda_3)] - \left[{}_1\mathcal{F}_1^{(2)}(\lambda_1, \lambda_2)P_1(\lambda_2, \lambda_3)\mathcal{T}_{1,3}(\lambda_1)\mathcal{T}_{1,2}(\lambda_3)\mathcal{T}_{1,1}(\lambda_2) \right. \\ &+ \theta(\lambda_2, \lambda_3){}_1\mathcal{F}_1^{(2)}(\lambda_1, \lambda_3)P_1(\lambda_3, \lambda_2)\mathcal{T}_{1,3}(\lambda_1)\mathcal{T}_{1,2}(\lambda_2)\mathcal{T}_{1,1}(\lambda_3) + {}_2\mathcal{F}_2^{(2)}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \\ &\times \mathcal{T}_{1,4}(\lambda_1)\mathcal{T}_{1,1}(\lambda_2)\mathcal{T}_{1,1}(\lambda_3)]. \end{aligned} \quad (246)$$

A equação anterior é equivalente à primeira igualdade da Eq.(238) e assim concluímos a demonstração da propriedade de simetria do ansatz $\phi_3(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ (238). Ressaltamos que essa simetria (238) permite simplificarmos as relações de comutação entre os operadores diagonais e $\phi_3(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$. A análise destas comutações, juntamente com os resultados obtidos na construção dos estados de uma e duas partículas, fornece uma receita para construirmos os autovalores e os autovetores da matriz de transferência. No apêndice C descrevemos os procedimentos utilizados

para obtermos a expressão simplificada de $\mathcal{T}_{a,a}(\lambda) |\Phi_3\rangle$ dada por

$$\begin{aligned}
 \mathcal{T}_{a,a}(\lambda) |\Phi_3\rangle &= w_a(\lambda) \prod_{i=1}^3 P_a(\lambda, \lambda_i) |\Phi_3\rangle \\
 &- \bar{\delta}_a^N \mathcal{T}_{a,a+1}(\lambda) \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq 3} \sum_{\substack{j_1=1 \\ i_1 \neq j_1 \neq i_2}}^3 \phi_2(\lambda_{i_1}, \lambda_{i_2}) w_1(\lambda_{j_1}) \prod_{k=1}^2 \frac{R(\lambda_{i_k}, \lambda_{j_1})_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_{i_k}, \lambda_{j_1})_{2,1}^{2,1}} \theta_{<}(\lambda_{i_k}, \lambda_{j_1})_1 \mathcal{F}_1^{(a)}(\lambda, \lambda_{j_1}) |0\rangle \\
 &- \bar{\delta}_a^1 \mathcal{T}_{a-1,a}(\lambda) \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq 3} \sum_{\substack{l_1=1 \\ i_1 \neq l_1 \neq i_2}}^3 \phi_2(\lambda_{i_1}, \lambda_{i_2}) w_2(\lambda_{l_1}) \prod_{k=1}^2 \frac{R(\lambda_{l_1}, \lambda_{i_k})_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_{l_1}, \lambda_{i_k})_{2,1}^{2,1}} \theta_{<}(\lambda_{l_1}, \lambda_{i_k})_0 \mathcal{F}_1^{(a-1)}(\lambda, \lambda_{l_1}) |0\rangle \\
 &- \bar{\delta}_a^{N-1,N} \mathcal{T}_{a,a+2}(\lambda) \sum_{i_1=1}^3 \sum_{\substack{1 \leq j_1 < j_2 \leq 3 \\ j_1 \neq i_1 \neq j_2}} \phi_1(\lambda_{i_1}) w_1(\lambda_{j_1}) w_1(\lambda_{j_2}) \prod_{k=1}^2 \frac{R(\lambda_{i_1}, \lambda_{j_k})_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_{i_1}, \lambda_{j_k})_{2,1}^{2,1}} \theta_{<}(\lambda_{i_1}, \lambda_{j_k}) \\
 &\times {}_2\mathcal{F}_2^{(a)}(\lambda, \lambda_{j_1}, \lambda_{j_2}) |0\rangle - \bar{\delta}_a^{1,N} \mathcal{T}_{a-1,a+1}(\lambda) \sum_{i_1=1}^3 \sum_{\substack{j_1=1 \\ j_1 \neq i_1}}^3 \sum_{\substack{l_1=1 \\ i_1 \neq l_1 \neq j_1}}^3 \phi_1(\lambda_{i_1}) w_1(\lambda_{j_1}) w_2(\lambda_{l_1}) \frac{R(\lambda_{i_1}, \lambda_{j_1})_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_{i_1}, \lambda_{j_1})_{2,1}^{2,1}} \\
 &\times \theta_{<}(\lambda_{i_1}, \lambda_{j_1}) \frac{R(\lambda_{l_1}, \lambda_{i_1})_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_{l_1}, \lambda_{i_1})_{2,1}^{2,1}} \theta_{<}(\lambda_{l_1}, \lambda_{i_1}) \theta_{<}(\lambda_{l_1}, \lambda_{j_1})_1 \mathcal{F}_2^{(a-1)}(\lambda, \lambda_{j_1}, \lambda_{l_1}) |0\rangle - \bar{\delta}_a^{1,2} \mathcal{T}_{a-2,a}(\lambda) \\
 &\times \sum_{i_1=1}^3 \sum_{\substack{1 \leq l_1 < l_2 \leq 3 \\ l_1 \neq i_1 \neq l_2}} \phi_1(\lambda_{i_1}) w_2(\lambda_{l_1}) w_2(\lambda_{l_2}) \prod_{k=1}^2 \frac{R(\lambda_{l_k}, \lambda_{i_1})_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_{l_k}, \lambda_{i_1})_{2,1}^{2,1}} \theta_{<}(\lambda_{l_k}, \lambda_{i_1})_0 \mathcal{F}_2^{(a-2)}(\lambda, \lambda_{l_1}, \lambda_{l_2}) |0\rangle \\
 &- \bar{\delta}_a^{N-2,N-1,N} \mathcal{T}_{a,a+3}(\lambda) w_1(\lambda_1) w_1(\lambda_2) w_1(\lambda_3) {}_3\mathcal{F}_3^{(a)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) |0\rangle - \bar{\delta}_a^{1,N-1,N} \mathcal{T}_{a-1,a+2}(\lambda) \\
 &\times \sum_{1 \leq j_1 < j_2 \leq 3} \sum_{\substack{l_1=1 \\ j_1 \neq l_1 \neq j_2}}^3 w_1(\lambda_{j_1}) w_1(\lambda_{j_2}) w_2(\lambda_{l_1}) \prod_{k=1}^2 \theta_{<}(\lambda_{l_1}, \lambda_{j_k})_2 \mathcal{F}_3^{(a-1)}(\lambda, \lambda_{j_1}, \lambda_{j_2}, \lambda_{l_1}) |0\rangle \\
 &- \bar{\delta}_a^{1,2,N} \mathcal{T}_{a-2,a+1}(\lambda) \sum_{j_1=1}^3 \sum_{\substack{1 \leq l_1 < l_2 \leq 3 \\ l_1 \neq j_1 \neq l_2}} w_1(\lambda_{j_1}) w_2(\lambda_{l_1}) w_2(\lambda_{l_2}) \prod_{k=1}^2 \theta_{<}(\lambda_{l_k}, \lambda_{j_1})_1 \mathcal{F}_3^{(a-2)}(\lambda, \lambda_{j_1}, \lambda_{l_1}, \lambda_{l_2}) |0\rangle \\
 &- \bar{\delta}_a^{1,2,3} \mathcal{T}_{a-3,a}(\lambda) w_2(\lambda_1) w_2(\lambda_2) w_2(\lambda_3) {}_0\mathcal{F}_3^{(a-3)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) |0\rangle, \tag{247}
 \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
 {}_0\mathcal{F}_3^{(a)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) &= \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{a+1,1}^{a,2}}{R(\lambda, \lambda_1)_{a+3,1}^{a+3,1}} {}_0\mathcal{F}_2^{(a+1)}(\lambda, \lambda_2, \lambda_3) + \sum_{\substack{i,j=2 \\ j \neq i}}^{n=3} \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{a+2,1}^{a,3}}{R(\lambda, \lambda_1)_{a+3,1}^{a+3,1}} {}_0\mathcal{F}_1^{(a+2)}(\lambda, \lambda_i) \\
 &\times {}_1\mathcal{F}_1^{(2)}(\lambda_1, \lambda_j) \frac{R(\lambda_i, \lambda_j)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_i, \lambda_j)_{2,1}^{2,1}} \theta_{<}(\lambda_i, \lambda_j) + \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{a+3,1}^{a,4}}{R(\lambda, \lambda_1)_{a+3,1}^{a+3,1}} {}_2\mathcal{F}_2^{(2)}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)
 \end{aligned} \quad (248)$$

$${}_1\mathcal{F}_3^{(a)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = {}_0\mathcal{F}_2^{(a)}(\lambda, \lambda_2, \lambda_3) {}_1\mathcal{F}_1^{(a+2)}(\lambda, \lambda_1) \frac{R(\lambda_2, \lambda_1)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_2, \lambda_1)_{2,1}^{2,1}} \frac{R(\lambda_3, \lambda_1)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_3, \lambda_1)_{2,1}^{2,1}} \quad (249)$$

$${}_2\mathcal{F}_3^{(a)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = {}_0\mathcal{F}_1^{(a)}(\lambda, \lambda_3) {}_2\mathcal{F}_2^{(a+1)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2) \frac{R(\lambda_3, \lambda_1)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_3, \lambda_1)_{2,1}^{2,1}} \frac{R(\lambda_3, \lambda_2)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_3, \lambda_2)_{2,1}^{2,1}} \quad (250)$$

$$\begin{aligned}
 {}_3\mathcal{F}_3^{(a)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) &= -{}_0\mathcal{F}_3^{(a)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \\
 &- \sum_{j_1=1}^{n=3} \sum_{\substack{1 \leq l_1 < l_2 \leq 3 \\ l_1 \neq j_1 \neq l_2}} {}_1\mathcal{F}_3^{(a)}(\lambda, \lambda_{j_1}, \lambda_{l_1}, \lambda_{l_2}) \prod_{k=1}^2 \theta_{<}(\lambda_{j_1}, \lambda_{l_k}) \frac{R(\lambda_{j_1}, \lambda_{l_k})_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_{j_1}, \lambda_{l_k})_{2,1}^{2,1}} \frac{R(\lambda_{l_k}, \lambda_{j_1})_{2,1}^{2,1}}{R(\lambda_{l_k}, \lambda_{j_1})_{1,1}^{1,1}} \\
 &- \sum_{1 \leq j_1 < j_2 \leq 3} \sum_{\substack{l_1=1 \\ j_1 \neq l_1 \neq j_2}}^{n=3} {}_2\mathcal{F}_3^{(a)}(\lambda, \lambda_{j_1}, \lambda_{j_2}, \lambda_{l_1}) \prod_{k=1}^2 \theta_{<}(\lambda_{j_k}, \lambda_{l_1}) \frac{R(\lambda_{j_k}, \lambda_{l_1})_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_{j_k}, \lambda_{l_1})_{2,1}^{2,1}} \frac{R(\lambda_{l_1}, \lambda_{j_k})_{2,1}^{2,1}}{R(\lambda_{l_1}, \lambda_{j_k})_{1,1}^{1,1}}.
 \end{aligned} \quad (251)$$

Análogo à Eq.(200), a Eq.(247) também pode ser escrita de uma forma mais compacta, cuja forma é facilmente generalizada para o estado de multi-partículas. Essa expressão mais compacta é dada por

$$\begin{aligned}
 \mathcal{T}_{a,a}(\lambda) |\Phi_3\rangle &= w_a(\lambda) \prod_{i=1}^3 P_a(\lambda, \lambda_i) |\Phi_3\rangle - \sum_{t=1}^3 \sum_{p=\bar{M}\{0,a+t-N\}}^{\bar{m}\{a-1,t\}} \mathcal{T}_{a-p,a+t-p}(\lambda) \\
 &\times \sum_{\substack{1 \leq j_1 < \dots < j_{(t-p)} \leq 3 \\ 1 \leq j_{(t-p+1)} < \dots < j_t \leq 3}}^* \phi_{3-t}(\{\lambda_i\}_{i \neq j_1, \dots, j_t}^{i=1,2,3}) {}_{t-p}\mathcal{F}_t^{(a-p)}(\lambda, \lambda_{j_1}, \dots, \lambda_{j_t}) \\
 &\times \left(\prod_{k=1}^{t-p} w_1(\lambda_{j_k}) \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j_1, \dots, j_t}}^3 \frac{R(\lambda_i, \lambda_{j_k})_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_i, \lambda_{j_k})_{2,1}^{2,1}} \theta_{<}(\lambda_i, \lambda_{j_k}) \right) \\
 &\times \left(\prod_{l=t-p+1}^t w_2(\lambda_{j_l}) \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j_1, \dots, j_t}}^3 \frac{R(\lambda_{j_l}, \lambda_i)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_{j_l}, \lambda_i)_{2,1}^{2,1}} \theta_{<}(\lambda_{j_l}, \lambda_i) \right) \prod_{k=1}^{t-p} \prod_{l=t-p+1}^t \theta_{<}(\lambda_{j_l}, \lambda_{j_k}) |0\rangle.
 \end{aligned} \quad (252)$$

Devido à propriedade de simetria do ansatz $|\Phi_3\rangle$ (238), concluímos da Eq.(247) que as funções ${}_0\mathcal{F}_3^{(a)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ e ${}_3\mathcal{F}_3^{(a)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ devem satisfazer as seguintes propriedades

$${}_0\mathcal{F}_3^{(a)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \theta(\lambda_1, \lambda_2) {}_0\mathcal{F}_3^{(a)}(\lambda, \lambda_2, \lambda_1, \lambda_3) = \theta(\lambda_2, \lambda_3) {}_0\mathcal{F}_3^{(a)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_3, \lambda_2) \quad (253)$$

$${}_3\mathcal{F}_3^{(a)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \theta(\lambda_1, \lambda_2) {}_3\mathcal{F}_3^{(a)}(\lambda, \lambda_2, \lambda_1, \lambda_3) = \theta(\lambda_2, \lambda_3) {}_3\mathcal{F}_3^{(a)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_3, \lambda_2). \quad (254)$$

Somando a Eq.(247) ou a Eq.(252) para $a = 1, \dots, N$ concluímos que a matriz de transferência aplicada no ansatz $|\Phi_3\rangle$ é dada por

$$\begin{aligned} T(\lambda) |\Phi_3\rangle &= \sum_{a=1}^N w_a(\lambda) \prod_{i=1}^3 P_a(\lambda, \lambda_i) |\Phi_3\rangle - \mathcal{T}_{a,a+1}(\lambda) \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq 3} \phi_2(\lambda_{i_1}, \lambda_{i_2}) \\ &\times \left[\sum_{\substack{j_1=1 \\ i_1 \neq j_1 \neq i_2}}^{n=3} w_1(\lambda_{j_1}) \prod_{k=1}^2 \frac{R(\lambda_{i_k}, \lambda_{j_1})_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_{i_k}, \lambda_{j_1})_{2,1}^{2,1}} \theta_{<}(\lambda_{i_k}, \lambda_{j_1}) {}_1\mathcal{F}_1^{(a)}(\lambda, \lambda_{j_1}) \right. \\ &+ \left. \sum_{\substack{l_1=1 \\ i_1 \neq l_1 \neq i_2}}^{n=3} w_2(\lambda_{l_1}) \prod_{k=1}^2 \frac{R(\lambda_{l_1}, \lambda_{i_k})_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_{l_1}, \lambda_{i_k})_{2,1}^{2,1}} \theta_{<}(\lambda_{l_1}, \lambda_{i_k}) {}_0\mathcal{F}_1^{(a)}(\lambda, \lambda_{l_1}) \right] |0\rangle \\ &- \mathcal{T}_{a,a+2}(\lambda) \sum_{i_1=1}^{n=3} \phi_1(\lambda_{i_1}) \left[\sum_{\substack{1 \leq j_1 < j_2 \leq 3 \\ j_1 \neq i_1 \neq j_2}} w_1(\lambda_{j_1}) w_1(\lambda_{j_2}) \prod_{k=1}^2 \frac{R(\lambda_{i_1}, \lambda_{j_k})_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_{i_1}, \lambda_{j_k})_{2,1}^{2,1}} \theta_{<}(\lambda_{i_1}, \lambda_{j_k}) \right. \\ &\times {}_2\mathcal{F}_2^{(a)}(\lambda, \lambda_{j_1}, \lambda_{j_2}) + \sum_{\substack{j_1=1 \\ j_1 \neq i_1}}^{n=3} \sum_{\substack{l_1=1 \\ i_1 \neq l_1 \neq j_1}}^{n=3} w_1(\lambda_{j_1}) w_2(\lambda_{l_1}) \frac{R(\lambda_{i_1}, \lambda_{j_1})_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_{i_1}, \lambda_{j_1})_{2,1}^{2,1}} \theta_{<}(\lambda_{i_1}, \lambda_{j_1}) \\ &\times \frac{R(\lambda_{l_1}, \lambda_{i_1})_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_{l_1}, \lambda_{i_1})_{2,1}^{2,1}} \theta_{<}(\lambda_{l_1}, \lambda_{i_1}) \theta_{<}(\lambda_{l_1}, \lambda_{j_1}) {}_1\mathcal{F}_2^{(a)}(\lambda, \lambda_{j_1}, \lambda_{l_1}) \\ &+ \left. \sum_{\substack{1 \leq l_1 < l_2 \leq 3 \\ l_1 \neq i_1 \neq l_2}} w_2(\lambda_{l_1}) w_2(\lambda_{l_2}) \prod_{k=1}^2 \frac{R(\lambda_{l_k}, \lambda_{i_1})_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_{l_k}, \lambda_{i_1})_{2,1}^{2,1}} \theta_{<}(\lambda_{l_k}, \lambda_{i_1}) {}_0\mathcal{F}_2^{(a)}(\lambda, \lambda_{l_1}, \lambda_{l_2}) \right] |0\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\mathcal{T}_{a,a+3}(\lambda) \left[w_1(\lambda_1)w_1(\lambda_2)w_1(\lambda_3)_3 \mathcal{F}_3^{(a)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \right. \\
 & + \sum_{1 \leq j_1 < j_2 \leq 3} \sum_{\substack{n=3 \\ l_1=1 \\ j_1 \neq l_1 \neq j_2}} w_1(\lambda_{j_1})w_1(\lambda_{j_2})w_2(\lambda_{l_1}) \prod_{k=1}^2 \theta_{<}(\lambda_{l_1}, \lambda_{j_k})_2 \mathcal{F}_3^{(a)}(\lambda, \lambda_{j_1}, \lambda_{j_2}, \lambda_{l_1}) \\
 & + \sum_{j_1=1}^{n=3} \sum_{\substack{1 \leq l_1 < l_2 \leq 3 \\ l_1 \neq j_1 \neq l_2}} w_1(\lambda_{j_1})w_2(\lambda_{l_1})w_2(\lambda_{l_2}) \prod_{k=1}^2 \theta_{<}(\lambda_{l_k}, \lambda_{j_1})_1 \mathcal{F}_3^{(a)}(\lambda, \lambda_{j_1}, \lambda_{l_1}, \lambda_{l_2}) \\
 & \left. + w_2(\lambda_1)w_2(\lambda_2)w_2(\lambda_3)_0 \mathcal{F}_3^{(a-3)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \right] |0\rangle. \tag{255}
 \end{aligned}$$

Para cancelarmos os termos não-desejados, inicialmente utilizamos as Eqs.(176,196,251) para reescrever a Eq.(255) na seguinte forma

$$\begin{aligned}
 T(\lambda) |\Phi_3\rangle &= \sum_{a=1}^N w_a(\lambda) \prod_{i=1}^3 P_a(\lambda, \lambda_i) |\Phi_3\rangle - \mathcal{T}_{a,a+1}(\lambda) \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq 3} \phi_2(\lambda_{i_1}, \lambda_{i_2}) \sum_{\substack{n=3 \\ l_1=1 \\ i_1 \neq l_1 \neq i_2}} {}_0\mathcal{F}_1^{(a)}(\lambda, \lambda_{l_1}) \\
 & \times \left[-w_1(\lambda_{l_1}) \prod_{k=1}^2 \frac{R(\lambda_{i_k}, \lambda_{l_1})_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_{i_k}, \lambda_{l_1})_{2,1}^{2,1}} \theta_{<}(\lambda_{i_k}, \lambda_{l_1}) + w_2(\lambda_{l_1}) \prod_{k=1}^2 \frac{R(\lambda_{l_1}, \lambda_{i_k})_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_{l_1}, \lambda_{i_k})_{2,1}^{2,1}} \theta_{<}(\lambda_{l_1}, \lambda_{i_k}) \right] |0\rangle \\
 & - \mathcal{T}_{a,a+2}(\lambda) \sum_{i_1=1}^{n=3} \phi_1(\lambda_{i_1}) \left\{ \sum_{\substack{1 \leq l_1 < l_2 \leq 3 \\ l_1 \neq i_1 \neq l_2}} {}_0\mathcal{F}_2^{(a)}(\lambda, \lambda_{l_1}, \lambda_{l_2}) \left[-w_1(\lambda_{l_1})w_1(\lambda_{l_2}) \prod_{k=1}^2 \frac{R(\lambda_{i_1}, \lambda_{l_k})_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_{i_1}, \lambda_{l_k})_{2,1}^{2,1}} \right. \right. \\
 & \times \theta_{<}(\lambda_{i_1}, \lambda_{l_k}) + w_2(\lambda_{l_1})w_2(\lambda_{l_2}) \prod_{k=1}^2 \frac{R(\lambda_{l_k}, \lambda_{i_1})_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_{l_k}, \lambda_{i_1})_{2,1}^{2,1}} \theta_{<}(\lambda_{l_k}, \lambda_{i_1}) \left. \right] + \sum_{\substack{j_1=1 \\ j_1 \neq i_1}}^{n=3} \sum_{\substack{l_1=1 \\ i_1 \neq l_1 \neq j_1}}^{n=3} {}_1\mathcal{F}_2^{(a)}(\lambda, \lambda_{j_1}, \lambda_{l_1}) \\
 & \times w_1(\lambda_{j_1}) \theta_{<}(\lambda_{i_1}, \lambda_{j_1}) \frac{R(\lambda_{i_1}, \lambda_{j_1})_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_{i_1}, \lambda_{j_1})_{2,1}^{2,1}} \frac{R(\lambda_{l_1}, \lambda_{j_1})_{2,1}^{2,1}}{R(\lambda_{l_1}, \lambda_{j_1})_{1,1}^{1,1}} \left[-w_1(\lambda_{l_1}) \frac{R(\lambda_{i_1}, \lambda_{l_1})_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_{i_1}, \lambda_{l_1})_{2,1}^{2,1}} \frac{R(\lambda_{j_1}, \lambda_{l_1})_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_{j_1}, \lambda_{l_1})_{2,1}^{2,1}} \right. \\
 & \left. \theta_{<}(\lambda_{i_1}, \lambda_{l_1}) \theta_{<}(\lambda_{j_1}, \lambda_{l_1}) + w_2(\lambda_{l_1}) \frac{R(\lambda_{l_1}, \lambda_{i_1})_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_{l_1}, \lambda_{i_1})_{2,1}^{2,1}} \frac{R(\lambda_{l_1}, \lambda_{j_1})_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_{l_1}, \lambda_{j_1})_{2,1}^{2,1}} \theta_{<}(\lambda_{l_1}, \lambda_{i_1}) \theta_{<}(\lambda_{l_1}, \lambda_{j_1}) \right] \left. \right\} |0\rangle \\
 & - \mathcal{T}_{a,a+3}(\lambda) \left\{ {}_0\mathcal{F}_3^{(a)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) [-w_1(\lambda_1)w_1(\lambda_2)w_1(\lambda_3) + w_2(\lambda_1)w_2(\lambda_2)w_2(\lambda_3)] \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{j_1=1}^{n=3} \sum_{\substack{1 \leq l_1 < l_2 \leq 3 \\ l_1 \neq j_1 \neq l_2}} {}_1\mathcal{F}_3^{(a)}(\lambda, \lambda_{j_1}, \lambda_{l_1}, \lambda_{l_2}) w_1(\lambda_{j_1}) \left[-w_1(\lambda_{l_1}) w_1(\lambda_{l_2}) \prod_{k=1}^2 \frac{R(\lambda_{j_1}, \lambda_{l_k})_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_{j_1}, \lambda_{l_k})_{2,1}^{2,1}} \frac{R(\lambda_{l_k}, \lambda_{j_1})_{2,1}^{2,1}}{R(\lambda_{l_k}, \lambda_{j_1})_{1,1}^{1,1}} \right. \\
 & \times \theta_{<}(\lambda_{j_1}, \lambda_{l_k}) + w_2(\lambda_{l_1}) w_2(\lambda_{l_2}) \prod_{k=1}^2 \theta_{<}(\lambda_{l_k}, \lambda_{j_1}) \left. \right] + \sum_{1 \leq j_1 < j_2 \leq 3} \sum_{\substack{l_1=1 \\ j_1 \neq l_1 \neq j_2}}^{n=3} {}_2\mathcal{F}_3^{(a)}(\lambda, \lambda_{j_1}, \lambda_{j_2}, \lambda_{l_1}) w_1(\lambda_{j_1}) \\
 & \times w_1(\lambda_{j_2}) \left[-w_1(\lambda_{l_1}) \prod_{k=1}^2 \frac{R(\lambda_{j_k}, \lambda_{l_1})_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_{j_k}, \lambda_{l_1})_{2,1}^{2,1}} \frac{R(\lambda_{l_1}, \lambda_{j_k})_{2,1}^{2,1}}{R(\lambda_{l_1}, \lambda_{j_k})_{1,1}^{1,1}} \theta_{<}(\lambda_{j_k}, \lambda_{l_1}) + w_2(\lambda_{l_1}) \prod_{k=1}^2 \theta_{<}(\lambda_{l_1}, \lambda_{j_k}) \right] \Big\} |0\rangle.
 \end{aligned} \tag{256}$$

Impondo as condições

$$\frac{w_1(\lambda_j)}{w_2(\lambda_j)} = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^3 \theta(\lambda_j, \lambda_i) \frac{R(\lambda_j, \lambda_i)_{11}^{11}}{R(\lambda_j, \lambda_i)_{21}^{21}} \frac{R(\lambda_i, \lambda_j)_{21}^{21}}{R(\lambda_i, \lambda_j)_{11}^{11}} \quad j = 1, 2, 3 \tag{257}$$

sobre os parâmetros $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, cancelamos os termos proporcionais a $\mathcal{T}_{a,a+1}(\lambda) \phi_2(\lambda_{i_1}, \lambda_{i_2}) |0\rangle$, $\mathcal{T}_{a,a+2}(\lambda) \phi_1(\lambda_{i_1}) |0\rangle$ e $\mathcal{T}_{a,a+3}(\lambda) |0\rangle$ e consequentemente, o vetor $|\Phi_3\rangle$ torna-se um autovetor da matriz de transferência, isto é,

$$T(\lambda) |\Phi_3\rangle = \Lambda(\lambda) |\Phi_3\rangle, \tag{258}$$

onde

$$\Lambda_3(\lambda) = \sum_{a=1}^N w_a(\lambda) \prod_{i=1}^3 P_a(\lambda, \lambda_i). \tag{259}$$

A equação (257) é denominada de equação do ansatz de Bethe para o estado de três partículas.

Concluimos esta seção mencionando que os resultados obtidos para os estados de duas e três partículas já são capazes de revelar um padrão comum para os termos desejados e também para os termos não-desejados dos problema de autovalor. Enfatizamos que esse fato é possível somente porque não fizemos referência a nenhuma forma particular da matriz R com simetria $U(1)$.

4.4 Estado de multi-partículas

O objetivo desta seção é analisar e generalizar os resultados obtidos na construção dos autovetores referentes aos estado de uma, duas e três partículas. O ansatz mais geral para um

estado de n partículas é dado pela seguinte combinação

$$\phi_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \sum_{\substack{m_1, \dots, m_n=1 \\ m_i \neq m_j \\ i \neq j}}^n \sum_{\substack{\bar{m}\{n+1, N\} \\ k_1, \dots, k_n=1 \\ \sum_{i=1}^n k_i=2n}} \bar{c}_{\{k_i\}_{i=1, \dots, n}}^{\{m_i\}_{i=1, \dots, n}}(\lambda_{m_1}, \dots, \lambda_{m_n}) \prod_{i=1}^n \mathcal{T}_{1, k_i}(\lambda_{m_i}), \quad (260)$$

onde $\bar{c}_{\{k_i\}_{i=1, \dots, n}}^{\{m_i\}_{i=1, \dots, n}}(\lambda_{m_1}, \dots, \lambda_{m_n})$ são coeficientes arbitrários.

Entretanto, as soluções anteriores dos problemas para uma, duas e três partículas fornecem normas básicas para os procedimentos a serem utilizados na construção do estado de multi-partículas. A primeira lição que extraímos diz que a maioria dos termos formados pelo produto de operadores de criação que compõem a combinação linear do ansatz (260) não contribuirão para o respectivo estado. A comutação desses produtos de campos com os operadores diagonais produzem termos não-desejados fáceis únicos que serão cancelados apenas se fixarmos os correspondentes coeficientes da combinação linear iguais a zero. O resultado até aqui obtido indica que os produtos de operadores de criação remanescentes têm as seguintes características. Das Eqs.(169,183,237) observamos que o operador do lado direito desses produtos possui a forma de campos de criação $\mathcal{T}_{1,b}(\lambda_1)$ com $2 \leq b \leq \bar{m}\{n+1, N\}$, onde n denota o número de partículas. Além disto, cada operador $\mathcal{T}_{1,b}(\lambda_1)$ é multiplicado pelo vetor de $(n+1-b)$ partículas determinado anteriormente, de modo que o spin azimutal $s_{1,n+1} = n$ do estado de n partículas seja reproduzido. Por fim, $(b-2)$ campos diagonais $\mathcal{T}_{1,1}(\lambda_i)$ são adicionados ao lado direito para completar o número total de variáveis espectrais $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ presentes no vetor de n partículas. Combinando essas informações encontramos que os termos da combinação linear do ansatz (260) remanescentes são escritos da seguinte forma

$$\mathcal{T}_{1,1+\bar{e}}(\lambda_1) \phi_{n-\bar{e}}(\{\lambda_i\}_{\substack{i=2, \dots, n \\ i \neq \{j_l\}_{l=1, \dots, \bar{e}-1}}}) \prod_{k_1=1}^{\bar{e}-1} \mathcal{T}_{1,1}(\lambda_{j_{k_1}}) \quad \text{para } \bar{e} = 1, \dots, \bar{m}\{n, N-1\}, \quad (261)$$

onde os índices j_l para $l = 1, \dots, \bar{e}-1$ assumem os seguintes valores $2 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_{\bar{e}-1} \leq n$. Considerando as discussões acima, um ansatz mais comportado para o estado de n partículas em termos dos produtos (261) é dado pela seguinte combinação

$$\phi_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \sum_{\bar{e}=1}^{m(n, N-1)} \phi_n^{(\bar{e})}(\lambda_1, \dots, \lambda_n), \quad (262)$$

onde

$$\begin{aligned} \phi_n^{(\bar{e})}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) &= \mathcal{T}_{1,1+\bar{e}}(\lambda_1) \sum_{\substack{2 \leq j_2 < \dots < j_{\bar{e}} \leq n \\ 2 \leq j_{\bar{e}+1} < \dots < j_n \leq n}}^* \phi_{n-\bar{e}}(\lambda_{j_{\bar{e}+1}}, \dots, \lambda_{j_n}) \\ &\times \prod_{k_1=2}^{\bar{e}} \mathcal{T}_{1,1}(\lambda_{j_{k_1}}) g_{\bar{e}}^{(j_2, \dots, j_{\bar{e}})}(\lambda_1, \dots, \lambda_n), \end{aligned} \quad (263)$$

e $g_{\bar{e}}^{(j_2, \dots, j_{\bar{e}})}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ representa os coeficientes de uma combinação linear arbitrária.

Desta forma, o número de coeficientes arbitrários para n e \bar{e} dados é $\frac{(n-1)!}{(n-\bar{e})!(\bar{e}-1)!}$. Normalizando o estado de n -partículas de modo que este seja proporcional ao primeiro termo $\mathcal{T}_{1,2}(\lambda_1)\phi_{n-1}(\lambda_2, \dots, \lambda_n)$ da combinação linear (262,263), o número total de coeficientes é $2^n - 1$. A primeira vista, a tarefa de determinar esses coeficientes parece impraticável. Entretanto, podemos reduzir esse número drasticamente exigindo que o ansatz (262) seja simétrico em relação a permutações das variáveis espectrais $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Conforme enfatizado nas seções anteriores, essa é uma importante simetria presente nos estados de duas (186) e três (238) partículas e utilizada durante a construção destes estados. Inspirados nesse resultado, é natural esperar que o ansatz $\phi_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ também seja simétrico com relação às permutações dos parâmetros $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. No caso de n arbitrário, a permutação $\lambda_j \leftrightarrow \lambda_{j+1}$ é dada por

$$\phi_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \theta(\lambda_j, \lambda_{j+1}) \phi_n(\lambda_1, \dots, \lambda_{j-1}, \lambda_{j+1}, \lambda_j, \lambda_{j+2}, \dots, \lambda_n). \quad (264)$$

A análise do estado de três partículas nos revela que a propriedade (238) correspondente a permutação $\lambda_2 \leftrightarrow \lambda_3$ decorre da simetria de $\phi_2(\lambda_1, \lambda_2)$. Portanto, assumimos que a propriedade (264) para $j \geq 2$ decorra da simetria dos $(n-1)$ estados anteriores¹¹. Em outras palavras, a propriedade (264) para $j \geq 2$ deve ser verdadeira para cada termo $\phi_n^{(\bar{e})}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ de maneira independente, isto é,

$$\begin{aligned} \phi_n^{(\bar{e})}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) &= \theta(\lambda_j, \lambda_{j+1}) \phi_n^{(\bar{e})}(\lambda_1, \dots, \lambda_{j-1}, \lambda_{j+1}, \lambda_j, \lambda_{j+2}, \dots, \lambda_n), \\ &\text{para } j \geq 2 \text{ e } 1 \leq \bar{e} \leq n. \end{aligned} \quad (265)$$

O próximo passo consiste em explorar as conseqüências da Eq.(265). Dado que

¹¹No Apêndice D, demonstramos que essa hipótese é verdadeira para o estado de quatro partículas.

$\phi_n^{(1)}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \mathcal{T}_{1,2}(\lambda_1)\phi_{n-1}(\lambda_2, \dots, \lambda_n)$, a Eq.(265) para $\bar{e} = 1$ é uma consequência imediata da simetria do estado $\phi_{n-1}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

Considere agora o caso $\bar{e} = 2$. Nesta situação, a Eq.(265) estabelece vínculos sobre os coeficientes $g_2^{(j_1)}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Mais especificamente, resolvendo a Eq.(265) para $\bar{e} = 2$ encontramos a seguinte relação de recorrência

$$g_2^{(j+1)}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \theta(\lambda_j, \lambda_{j+1})g_2^{(j)}(\lambda_1, \dots, \lambda_{j-1}, \lambda_{j+1}, \lambda_j, \lambda_{j+2}, \dots, \lambda_n). \quad (266)$$

Resolvendo a Eq.(266) recursivamente obtemos o resultado abaixo

$$\begin{aligned} g_2^{(j+1)}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) &= \prod_{i=2}^j \theta(\lambda_i, \lambda_{j+1})g_2^{(2)}(\lambda_1, \lambda_{j+1}, \lambda_2, \dots, \lambda_j, \lambda_{j+2}, \dots, \lambda_n) \\ &= \prod_{\substack{i=2 \\ i \neq j+1}}^n \theta_{<}(\lambda_i, \lambda_{j+1})g_2^{(2)}(\lambda_1, \lambda_{j+1}, \{\lambda_i\}_{i=2, \dots, n}^{i \neq j+1}). \end{aligned} \quad (267)$$

Portanto, para realizarmos novos progressos devemos determinar a amplitude $g_2^{(2)}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Neste sentido, as expressões dos estados de duas e três partículas são de grande utilidade. A comparação direta entre as Eqs.(183,237) com as Eqs.(262,263) para $n = 2, 3$ nos remete ao seguinte resultado

$$g_2^{(2)}(\lambda_1, \lambda_2) = {}_1\mathcal{F}_1^{(2)}(\lambda_1, \lambda_2) \quad (268)$$

$$g_2^{(2)}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \frac{R(\lambda_3, \lambda_2)_{11}^{11}}{R(\lambda_3, \lambda_2)_{21}^{21}} {}_1\mathcal{F}_1^{(2)}(\lambda_1, \lambda_2). \quad (269)$$

O pré-fator $\frac{R(\lambda_3, \lambda_2)_{11}^{11}}{R(\lambda_3, \lambda_2)_{21}^{21}}$ na Eq.(269), no caso geral, está diretamente relacionado com o termo desejado gerado pela relação de comutação entre o campo $\mathcal{T}_{1,1}(\lambda_2)$ e o vetor de $(n-2)$ -partículas $\phi_{n-2}(\lambda_3, \dots, \lambda_n)$. Considerando essa informação, somos levados a inferir a seguinte expressão para $g_2^{(2)}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

$$g_2^{(2)}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \prod_{i=3}^n \frac{R(\lambda_i, \lambda_2)_{11}^{11}}{R(\lambda_i, \lambda_2)_{21}^{21}} {}_1\mathcal{F}_1^{(2)}(\lambda_1, \lambda_2). \quad (270)$$

Substituindo esse resultado (270) na Eq.(267) obtemos a solução abaixo

$$g_2^{(j)}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \prod_{\substack{i=2 \\ i \neq j}}^n \frac{R(\lambda_i, \lambda_j)_{11}^{11}}{R(\lambda_i, \lambda_j)_{21}^{21}} \theta_{<}(\lambda_i, \lambda_{j+1})_1 \mathcal{F}_1^{(2)}(\lambda_1, \lambda_j). \quad (271)$$

O próximo caso a ser considerado é $\phi_n^{(3)}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. A analisando a condição imposta pela Eq.(265) com $\bar{e} = 3$ encontramos três restrições sobre a função $g_3^{(j_2, j_3)}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$,

$$g_3^{(j+1, j_3)}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \theta(\lambda_j, \lambda_{j+1}) g_3^{(j, j_3)}(\lambda_1, \dots, \lambda_{j-1}, \lambda_{j+1}, \lambda_j, \lambda_{j+2}, \dots, \lambda_n),$$

para $j_2 + 1 < j_3$, (272)

$$g_3^{(j_2, j+1)}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \theta(\lambda_j, \lambda_{j+1}) g_3^{(j_2, j)}(\lambda_1, \dots, \lambda_{j-1}, \lambda_{j+1}, \lambda_j, \lambda_{j+2}, \dots, \lambda_n),$$

para $j_2 + 1 < j_3$, (273)

$$g_3^{(j, j+1)}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \theta(\lambda_j, \lambda_{j+1}) g_3^{(j, j+1)}(\lambda_1, \dots, \lambda_{j-1}, \lambda_{j+1}, \lambda_j, \lambda_{j+2}, \dots, \lambda_n),$$

para $j_2 + 1 = j_3$. (274)

Através da implementação de procedimentos similares aos utilizados na resolução da Eq.(266), encontramos que a solução das relações de recorrência (272,273) é igual a

$$g_3^{(j_2, j_3)}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \prod_{\substack{i=2 \\ i \neq j_2, j_3}}^n \theta_{<}(\lambda_i, \lambda_{j_2}) \theta_{<}(\lambda_i, \lambda_{j_3}) g_3^{(2,3)}(\lambda_1, \lambda_{j_2}, \lambda_{j_3}, \{\lambda_i\}_{i=2, \dots, n}^{i \neq j_2, j_3}), \quad (275)$$

sendo que a condição (274) estabelece a restrição

$$g_3^{(2,3)}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \theta(\lambda_2, \lambda_3) g_3^{(2,3)}(\lambda_1, \lambda_3, \lambda_2, \lambda_4, \dots, \lambda_n). \quad (276)$$

O cálculo da amplitude $g_3^{(2,3)}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ é realizado considerando o mesmo tipo de argumento empregado no caso $\bar{e} = 2$. Comparando a Eq.(237) com as Eqs.(262,263) para $n = 3$ encontramos que $g_3^{(2,3)}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = {}_2\mathcal{F}_2^{(2)}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$. Os pré-fatores para valores gerais de n são regidos pelo primeiro termo da relação de comutação entre o produto $\mathcal{T}_{1,1}(\lambda_2)\mathcal{T}_{1,1}(\lambda_3)$ e $\phi_{n-3}(\lambda_4, \dots, \lambda_n)$. Ponderando todas essas informações encontramos o resultado

$$g_3^{(2,3)}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \prod_{i=4}^n \frac{R(\lambda_i, \lambda_2)_{11}^{11}}{R(\lambda_i, \lambda_2)_{21}^{21}} \frac{R(\lambda_i, \lambda_3)_{11}^{11}}{R(\lambda_i, \lambda_3)_{21}^{21}} {}_2\mathcal{F}_2^{(2)}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3). \quad (277)$$

Aqui ressaltamos que a Eq.(277) satisfaz a relação (276), uma vez que a função ${}_2\mathcal{F}_2^{(2)}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ possui a propriedade de permutação (198).

Os coeficientes $g_3^{(j_2, j_3)}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ são obtidos substituindo a Eq.(277) na Eq.(275), cujo resultado é

$$g_3^{(j_2, j_3)}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \prod_{\substack{i=2 \\ i \neq j_2, j_3}}^n \frac{R(\lambda_i, \lambda_{j_2})_{11}^{11}}{R(\lambda_i, \lambda_{j_2})_{21}^{21}} \frac{R(\lambda_i, \lambda_{j_3})_{11}^{11}}{R(\lambda_i, \lambda_{j_3})_{21}^{21}} \theta_{<}(\lambda_i, \lambda_{j_2}) \theta_{<}(\lambda_i, \lambda_{j_3}) {}_2\mathcal{F}_2^{(2)}(\lambda_1, \lambda_{j_2}, \lambda_{j_3}). \quad (278)$$

Seguindo a metodologia aqui adotada, o próximo passo seria analisar a Eq.(265) para $\bar{e} = 4$. Entretanto, os resultados (271,278) fornecem informações suficientes para explorarmos as conseqüências da simetria (265) para \bar{e} arbitrário. Utilizando a técnica de indução matemática para solucionar a equação (263,265) obtemos a solução abaixo

$$g_{\bar{e}}^{(j_2, \dots, j_{\bar{e}})}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \prod_{\substack{i=2 \\ i \neq j_2, \dots, j_{\bar{e}}}}^n \prod_{l=2}^{\bar{e}} \theta_{<}(\lambda_i, \lambda_{j_l}) g_{\bar{e}}^{(2, \dots, \bar{e})}(\lambda_1, j_2, \dots, j_{\bar{e}}, \{\lambda_i\}_{i=2, \dots, n}^{i \neq j_2, \dots, j_{\bar{e}}}). \quad (279)$$

Novamente devemos determinar a expressão da função $g_{\bar{e}}^{(2, \dots, \bar{e})}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Para progredir nesta direção é conveniente analisarmos os resultados obtidos até o momento. Inicialmente, note que, de acordo com as Eqs.(270,277), as funções $g_2^{(2)}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ e $g_3^{(2,3)}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ são dadas em termos do produto do pré-fatores $\frac{R(\lambda_i, \lambda_j)_{11}^{11}}{R(\lambda_i, \lambda_j)_{21}^{21}}$ com as amplitudes ${}_1\mathcal{F}_1^{(2)}(\lambda_1, \lambda_2)$ e ${}_2\mathcal{F}_2^{(2)}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ respectivamente. Dado que essas amplitudes são definidas durante a resolução do problema de autovalor de um e duas partículas, é natural assumir que a estrutura das funções $g_{\bar{e}}^{(2, \dots, \bar{e})}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ para \bar{e} arbitrário segue o mesmo padrão discutido acima. Neste contexto, mencionamos que as amplitudes ${}_{\bar{e}-i}\mathcal{F}_{\bar{e}-i}^{(2)}(\lambda_1, \dots, \lambda_{\bar{e}-i+1})$ para $i = 1, \dots, \bar{e} - 1$ são definidas durante a construção do estado de $(\bar{e} - i)$ -partículas. Por exemplo, o estado de quatro partículas é definido em termos da função ${}_3\mathcal{F}_3^{(2)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, que por sua vez é determinada durante a resolução do problema de autovalor do estado de três partículas conforme podemos verificar pela Eq.(251). Portanto, a expressão para $g_{\bar{e}}^{(2, \dots, \bar{e})}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ é dada pelo produto de pré-fatores $R(\lambda_i, \lambda_j)_{1,1}^{1,1}/R(\lambda_i, \lambda_j)_{2,1}^{2,1}$ com a amplitude ${}_{\bar{e}-1}\mathcal{F}_{\bar{e}-1}^{(2)}(\lambda_1, \lambda_{j_2}, \dots, \lambda_{j_{\bar{e}}})$. Seguindo o mesmo padrão, o produto dos pré-fatores são determinados considerando a comutação do produto $\mathcal{T}_{1,1}(\lambda_2) \dots \mathcal{T}_{1,1}(\lambda_{\bar{e}})$ com o operador $\phi_{n-\bar{e}}(\lambda_{\bar{e}+1}, \dots, \lambda_n)$. Levando em conta todas essas

informações obtemos

$$g_{\bar{e}}^{(2,\dots,\bar{e})}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \prod_{i=\bar{e}+1}^n \prod_{j=2}^{\bar{e}} \frac{R(\lambda_i, \lambda_j)_{11}^{11}}{R(\lambda_i, \lambda_j)_{21}^{21}} \bar{e}-1 \mathcal{F}_{\bar{e}-1}^{(2)}(\lambda_1, \dots, \lambda_{\bar{e}}). \quad (280)$$

e substituindo a Eq.(280) na Eq.(279) chegamos solução

$$g_{\bar{e}}^{(j_2, \dots, j_{\bar{e}})}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \prod_{k_1=2}^{\bar{e}} \prod_{\substack{k_2=2 \\ k_2 \neq j_2, \dots, j_{\bar{e}}}}^n \frac{R(\lambda_{k_2}, \lambda_{j_{k_1}})_{11}^{11}}{R(\lambda_{k_2}, \lambda_{j_{k_1}})_{21}^{21}} \theta_{<}(\lambda_{k_2}, \lambda_{j_{k_1}})_{\bar{e}-1} \mathcal{F}_{\bar{e}-1}^{(2)}(\lambda_1, \lambda_{j_2}, \dots, \lambda_{j_{\bar{e}}}). \quad (281)$$

Através dos procedimentos aplicados nesta seção, reduzimos o problema de determinação de um vetor de n -partículas ao cálculo de $N-1$ funções $\bar{e}-1 \mathcal{F}_{\bar{e}-1}^{(2)}(\lambda_1, \lambda_{j_2}, \dots, \lambda_{j_{\bar{e}}})$ para $\bar{e} = 2, \dots, N$. Combinando as Eqs.(262, 263) e a Eq.(281) chegamos ao seguinte ansatz para vetor de n -partículas

$$\begin{aligned} \phi_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n) &= \sum_{\bar{e}=1}^{m(n, N-1)} \mathcal{T}_{1,1+\bar{e}}(\lambda_1) \sum_{\substack{2 \leq j_2 < \dots < j_{\bar{e}} \leq n \\ 2 \leq j_{\bar{e}+1} < \dots < j_n \leq n}}^* \phi_{n-\bar{e}}(\lambda_{j_{\bar{e}+1}}, \dots, \lambda_{j_n}) \bar{e}-1 \mathcal{F}_{\bar{e}-1}^{(2)}(\lambda_1, \lambda_{j_2}, \dots, \lambda_{j_{\bar{e}}}) \\ &\times \prod_{k_1=2}^{\bar{e}} \mathcal{T}_{1,1}(\lambda_{j_{k_1}}) \prod_{k_2=\bar{e}+1}^n \frac{R(\lambda_{j_{k_2}}, \lambda_{j_{k_1}})_{11}^{11}}{R(\lambda_{j_{k_2}}, \lambda_{j_{k_1}})_{21}^{21}} \theta_{<}(\lambda_{j_{k_2}}, \lambda_{j_{k_1}}) \end{aligned} \quad (282)$$

onde assumimos a normalização ${}_0\mathcal{F}_0^{(2)}(\lambda) = 1$.

De posse do ansatz para o estado de n -partículas, voltemos agora nossa atenção a ação dos operadores diagonais $\mathcal{T}_{a,a}(\lambda)$ no estado de multi-partículas $|\Phi_n\rangle = \phi_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n) |0\rangle$. Esse estudo é fundamental para encontrarmos as expressões das funções $\bar{e}-1 \mathcal{F}_{\bar{e}-1}^{(2)}(\lambda_1, \lambda_{j_2}, \dots, \lambda_{j_{\bar{e}}})$ em termos dos elementos da matriz R . Ressaltamos que essa abordagem é consistente, pois uma vez solucionado o problema de autovalor para o estado de $(n-1)$ partículas, dispomos dos ingredientes básico para calcular o próximo setor com mais uma partícula e assim sucessivamente. Neste contexto, os resultados anteriores para uma, duas e três partículas elucidam a estrutura recursiva que determina a ação dos campos diagonais em $|\Phi_n\rangle$. A solução final desta

indução matemática é dada pela expressão abaixo

$$\begin{aligned}
 \mathcal{T}_{a,a}(\lambda) |\Phi_n\rangle &= w_a(\lambda) \prod_{i=1}^n P_a(\lambda, \lambda_i) |\Phi_n\rangle - \sum_{t=1}^n \sum_{p=\bar{M}\{0,a+t-N\}}^{\bar{m}\{a-1,t\}} \mathcal{T}_{a-p,a+t-p}(\lambda) \\
 &\times \sum_{\substack{1 \leq j_1 < \dots < j_{(t-p)} \leq n \\ 1 \leq j_{(t-p+1)} < \dots < j_t \leq n}}^* \phi_{n-t}(\{\lambda_i\}_{i \neq j_1, \dots, j_t}^{i=1, \dots, n}) {}_{t-p}\mathcal{F}_t^{(a-p)}(\lambda, \lambda_{j_1}, \dots, \lambda_{j_t}) \\
 &\times \left(\prod_{k=1}^{t-p} w_1(\lambda_{j_k}) \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j_1, \dots, j_t}}^n \frac{R(\lambda_i, \lambda_{j_k})_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_i, \lambda_{j_k})_{2,1}^{2,1}} \theta_{<}(\lambda_i, \lambda_{j_k}) \right) \\
 &\times \left(\prod_{l=t-p+1}^t w_2(\lambda_{j_l}) \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j_1, \dots, j_t}}^n \frac{R(\lambda_{j_l}, \lambda_i)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_{j_l}, \lambda_i)_{2,1}^{2,1}} \theta_{<}(\lambda_{j_l}, \lambda_i) \right) \prod_{k=1}^{t-p} \prod_{l=t-p+1}^t \theta_{<}(\lambda_{j_l}, \lambda_{j_k}) |0\rangle, \\
 &\text{para } 1 \leq a \leq N.
 \end{aligned} \tag{283}$$

Para que os resultados anteriores tenham sentido devemos definir a relação de recorrência que gera as funções ${}_c\mathcal{F}_b^{(a)}(\lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_b)$. No caso $c \neq 0$ e $c \neq b$, as Eqs.(195,249,250) dos estados de duas e três partículas são suficientes para nos conduzir a seguinte estrutura geral

$$\begin{aligned}
 {}_c\mathcal{F}_b^{(a)}(\lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_b) &= {}_0\mathcal{F}_{b-c}^{(a)}(\lambda, \lambda_{(c+1)}, \dots, \lambda_b) {}_c\mathcal{F}_c^{(a+b-c)}(\lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_c) \prod_{i=c+1}^b \prod_{j=1}^c \frac{R(\lambda_i, \lambda_j)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_i, \lambda_j)_{2,1}^{2,1}} \\
 &\text{para } b = 2, \dots, N-1; \ a = 1, \dots, N-b; \ c = 1, \dots, b-1.
 \end{aligned} \tag{284}$$

A Eq.(284) fornece ${}_c\mathcal{F}_b^{(a)}(\lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_b)$ para $c = 1, \dots, b-1$ em função do produto de ${}_{c_1}\mathcal{F}_{b_1}^{(a_1)}(\lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_{b_1})$ para $b_1 < b$, mas não gera as funções ${}_c\mathcal{F}_b^{(a)}(\lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_b)$ para $c = 0, b$. Todavia, as expressões para $c = 0, b$ seguem da generalização das Eqs.(194,196,248,251), cujas soluções são

$$\begin{aligned}
 {}_0\mathcal{F}_b^{(a)}(\lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_b) &= \sum_{\bar{e}=1}^b \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{a+1+\bar{e}}^{a,1+\bar{e}}}{R(\lambda, \lambda_1)_{a+b,1}^{a+b,1}} \sum_{\substack{2 \leq j_1 < \dots < j_{(b-\bar{e})} \leq b \\ 2 \leq j_{(b-\bar{e}+1)} < \dots < j_{(b-1)} \leq b}}^* {}_0\mathcal{F}_{b-\bar{e}}^{(a+\bar{e})}(\lambda, \lambda_{j_1}, \dots, \lambda_{(b-\bar{e})}) \\
 &\times {}_{\bar{e}-1}\mathcal{F}_{\bar{e}-1}^{(2)}(\lambda_1, \lambda_{j_{(b-\bar{e}+1)}}, \dots, \lambda_{j_{(b-1)}}) \prod_{l_1=1}^{b-\bar{e}} \prod_{l_2=b-\bar{e}+1}^{b-1} \frac{R(\lambda_{j_{l_1}}, \lambda_{j_{l_2}})_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_{j_{l_1}}, \lambda_{j_{l_2}})_{2,1}^{2,1}} \theta_{<}(\lambda_{j_{l_1}}, \lambda_{j_{l_2}}) \\
 &\text{para } b = 1, \dots, N-1; \ a = 1, \dots, N-b
 \end{aligned} \tag{285}$$

e

$$\begin{aligned}
 {}_b\mathcal{F}_b^{(a)}(\lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_b) &= - \sum_{\bar{f}=0}^{b-1} \sum_{1 \leq l_1 < l_2 < \dots < l_{(b-\bar{f})} \leq b} {}_{\bar{f}}\mathcal{F}_b^{(a)}(\lambda, \{\lambda_i\}_{i=1, \dots, b}^{i \neq l_1, \dots, l_{(b-\bar{f})}}, \lambda_{l_1}, \dots, \lambda_{l_{(b-\bar{f})}}) \\
 &\times \prod_{s=1}^{b-\bar{f}} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq l_1, \dots, l_{(b-\bar{f})}}}^b \theta_{<}(\lambda_i, \lambda_{l_s}) \frac{R(\lambda_i, \lambda_{l_s})_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_i, \lambda_{l_s})_{2,1}^{2,1}} \frac{R(\lambda_{l_s}, \lambda_i)_{2,1}^{2,1}}{R(\lambda_{l_s}, \lambda_i)_{1,1}^{1,1}}. \\
 \text{para} \quad &b = 1, \dots, N-1; \quad a = 1, \dots, N-b.
 \end{aligned} \tag{286}$$

É importante enfatizar que as equações anteriores foram obtidas a partir da generalização dos resultados dos estados de duas e três partículas, e portanto, a primeira verificação destas soluções consiste em resolver o estado de quatro partículas e então checar a veracidade das Eqs.(285,286). Esses procedimentos de comprovação foram realizados para as funções ${}_0\mathcal{F}_4^{(a)}(\lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_4)$ e ${}_4\mathcal{F}_4^{(a)}(\lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_4)$ e estão em concordância com as relações de recorrência (285,286). Nesta tese não descrevemos estas verificações, uma vez que não fornecem novas informações em relação aos resultados apresentados nesta seção.

As relações de recorrência (284,285,286) possuem como condição inicial a normalização ${}_0\mathcal{F}_0^{(a)}(\lambda) = 1$ e as amplitudes de uma partícula ${}_0\mathcal{F}_1^{(a)}(\lambda, \mu)$ e ${}_1\mathcal{F}_1^{(a)}(\lambda, \mu)$ que são definidas pela Eq.(176). Mencionamos também que devido ao fato da função ${}_b\mathcal{F}_b^{(a)}(\lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_b)$ ser definida em termos das funções ${}_c\mathcal{F}_b^{(a)}(\lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_b)$ para $c = 0, \dots, b-1$, podemos interpretar a Eq.(286) como a condição para cancelarmos os termos não-desejados relacionados ao operador $\mathcal{T}_{a,a+b}(\lambda)$.

Somando a Eq.(283) para $a = 1, \dots, N$ determinamos a ação da matriz de transferência

sobre $|\Phi_n\rangle$, isto é,

$$\begin{aligned}
 T(\lambda) |\Phi_n\rangle &= \sum_{a=1}^N w_a(\lambda) \prod_{i=1}^n P_a(\lambda, \lambda_i) |\Phi_n\rangle \\
 &- \sum_{t=1}^n \sum_{a=1}^{N-t} \mathcal{T}_{a,a+t}(\lambda) \sum_{p=0}^t \sum_{\substack{1 \leq j_1 < \dots < j_p \leq n \\ 1 \leq j_{(p+1)} < \dots < j_t \leq n}}^* \phi_{n-t}(\{\lambda_i\}_{i \neq j_1, \dots, j_t}^{i=1, \dots, n}) \\
 &\times {}_p\mathcal{F}_t^{(a)}(\lambda, \lambda_{j_1}, \dots, \lambda_{j_t}) \prod_{s=1}^p w_1(\lambda_{j_s}) \left(\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j_1, \dots, j_t}}^n \frac{R(\lambda_i, \lambda_{j_s})_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_i, \lambda_{j_s})_{2,1}^{2,1}} \theta_{<}(\lambda_i, \lambda_{j_s}) \right) \\
 &\times \prod_{t=p+1}^t w_2(\lambda_{j_t}) \left(\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j_1, \dots, j_t}}^n \frac{R(\lambda_{j_t}, \lambda_i)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_{j_t}, \lambda_i)_{2,1}^{2,1}} \theta_{<}(\lambda_{j_t}, \lambda_i) \right) \theta_{<}(\lambda_{j_t}, \lambda_{j_s}) |0\rangle. \quad (287)
 \end{aligned}$$

Substituindo a expressão (286) da amplitude ${}_b\mathcal{F}_b^{(a)}(\lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_b)$ na Eq.(287) obtemos

$$\begin{aligned}
 T(\lambda) |\Phi_n\rangle &= \sum_{a=1}^N w_a(\lambda) \prod_{i=1}^n P_a(\lambda, \lambda_i) |\Phi_n\rangle - \sum_{t=1}^n \sum_{a=1}^{N-t} \mathcal{T}_{a,a+t}(\lambda) \sum_{p=0}^{t-1} \sum_{\substack{1 \leq j_1 < \dots < j_p \leq n \\ 1 \leq j_{(p+1)} < \dots < j_t \leq n}}^* \\
 &\times \phi_{n-t}(\{\lambda_i\}_{i \neq j_1, \dots, j_t}^{i=1, \dots, n}) {}_p\mathcal{F}_t^{(a)}(\lambda, \lambda_{j_1}, \dots, \lambda_{j_t}) \left(\prod_{s=1}^p w_1(\lambda_{j_s}) \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j_1, \dots, j_t}}^n \frac{R(\lambda_i, \lambda_{j_s})_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_i, \lambda_{j_s})_{2,1}^{2,1}} \theta_{<}(\lambda_i, \lambda_{j_s}) \right) \\
 &\times \left(\prod_{r=p+1}^t \prod_{s=1}^p \theta_{<}(\lambda_{j_s}, \lambda_{j_r}) \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j_1, \dots, j_t}}^n \theta_{<}(\lambda_i, \lambda_{j_r}) \right) \left[\prod_{r=p+1}^t w_2(\lambda_{j_r}) \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j_1, \dots, j_t}}^n \frac{R(\lambda_{j_r}, \lambda_i)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_{j_r}, \lambda_i)_{2,1}^{2,1}} \theta_{<}(\lambda_{j_r}, \lambda_i) \right. \\
 &\times \left. \prod_{s=1}^p \theta_{<}(\lambda_{j_r}, \lambda_{j_s}) - \prod_{r=p+1}^t w_1(\lambda_{j_r}) \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j_1, \dots, j_t}}^n \frac{R(\lambda_i, \lambda_{j_r})_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_i, \lambda_{j_r})_{2,1}^{2,1}} \prod_{s=1}^p \frac{R(\lambda_{j_s}, \lambda_{j_r})_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_{j_s}, \lambda_{j_r})_{2,1}^{2,1}} \frac{R(\lambda_{j_r}, \lambda_{j_s})_{2,1}^{2,1}}{R(\lambda_{j_r}, \lambda_{j_s})_{1,1}^{1,1}} \right] |0\rangle. \quad (288)
 \end{aligned}$$

Os termos não-desejados na Eq.(288) são cancelados se impormos que o termo entre colchetes nesta equação seja nulo, isto é,

$$\begin{aligned} \prod_{t=p+1}^t \frac{w_1(\lambda_{j_t})}{w_2(\lambda_{j_t})} &= \prod_{t=p+1}^t \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j_1, \dots, j_t}}^n \theta(\lambda_{j_t}, \lambda_i) \frac{R(\lambda_{j_t}, \lambda_i)_{1,1}^{1,1} R(\lambda_i, \lambda_{j_t})_{2,1}^{2,1}}{R(\lambda_{j_t}, \lambda_i)_{2,1}^{2,1} R(\lambda_i, \lambda_{j_t})_{1,1}^{1,1}} \\ &\times \prod_{s=1}^p \theta(\lambda_{j_t}, \lambda_{j_s}) \frac{R(\lambda_{j_t}, \lambda_{j_s})_{1,1}^{1,1} R(\lambda_{j_s}, \lambda_{j_t})_{2,1}^{2,1}}{R(\lambda_{j_t}, \lambda_{j_s})_{2,1}^{2,1} R(\lambda_{j_s}, \lambda_{j_t})_{1,1}^{1,1}}. \end{aligned} \quad (289)$$

No caso $t = 1$, a Eq.(289) torna-se a famosa equação do ansatz de Bethe, que é dada pela seguinte expressão

$$\frac{w_1(\lambda_{j_1})}{w_2(\lambda_{j_1})} = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j_1}}^n \theta(\lambda_{j_1}, \lambda_i) \frac{R(\lambda_{j_1}, \lambda_i)_{1,1}^{1,1} R(\lambda_i, \lambda_{j_1})_{2,1}^{2,1}}{R(\lambda_{j_1}, \lambda_i)_{2,1}^{2,1} R(\lambda_i, \lambda_{j_1})_{1,1}^{1,1}} \quad \text{para } j_1 = 1, \dots, n. \quad (290)$$

A seguir demonstraremos que a Eq.(290) é uma condição suficiente para garantir que a Eq.(289) seja satisfeita. Substituindo a Eq.(290) no lado esquerdo da Eq.(289) encontramos o resultado abaixo

$$\begin{aligned} \prod_{t=p+1}^t \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j_t}}^n \theta(\lambda_{j_t}, \lambda_i) \frac{R(\lambda_{j_t}, \lambda_i)_{1,1}^{1,1} R(\lambda_i, \lambda_{j_t})_{2,1}^{2,1}}{R(\lambda_{j_t}, \lambda_i)_{2,1}^{2,1} R(\lambda_i, \lambda_{j_t})_{1,1}^{1,1}} &= \prod_{t=p+1}^t \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j_1, \dots, j_t}}^n \theta(\lambda_{j_t}, \lambda_i) \frac{R(\lambda_{j_t}, \lambda_i)_{1,1}^{1,1} R(\lambda_i, \lambda_{j_t})_{2,1}^{2,1}}{R(\lambda_{j_t}, \lambda_i)_{2,1}^{2,1} R(\lambda_i, \lambda_{j_t})_{1,1}^{1,1}} \\ &\times \prod_{s=1}^p \theta(\lambda_{j_t}, \lambda_{j_s}) \frac{R(\lambda_{j_t}, \lambda_{j_s})_{1,1}^{1,1} R(\lambda_{j_s}, \lambda_{j_t})_{2,1}^{2,1}}{R(\lambda_{j_t}, \lambda_{j_s})_{2,1}^{2,1} R(\lambda_{j_s}, \lambda_{j_t})_{1,1}^{1,1}}. \end{aligned} \quad (291)$$

Simplificando a equação anterior obtemos a seguinte expressão

$$\prod_{t=p+1}^t \prod_{\substack{i=p+1 \\ i \neq t}}^t \theta(\lambda_{j_t}, \lambda_{j_i}) \frac{R(\lambda_{j_t}, \lambda_{j_i})_{1,1}^{1,1} R(\lambda_{j_i}, \lambda_{j_t})_{2,1}^{2,1}}{R(\lambda_{j_t}, \lambda_{j_i})_{2,1}^{2,1} R(\lambda_{j_i}, \lambda_{j_t})_{1,1}^{1,1}} = \prod_{\substack{i=t=p+1 \\ i < t}}^t \theta(\lambda_{j_t}, \lambda_{j_i}) \theta(\lambda_{j_i}, \lambda_{j_t}) = 1. \quad (292)$$

Devido à propriedade (187) da função $\theta(\lambda, \mu)$, é imediato concluir que a Eq.(292) é verdadeira e portanto, a equação do ansatz de Bethe Eq.(290) é suficiente para cancelarmos os termos não-desejados da Eq.(288).

A eliminação dos termos não-desejados na Eq.(288) através da equação do ansatz de Bethe (290) implica que autovalor do estado de n partículas é

$$\Lambda_n(\lambda) = \sum_{a=1}^N w_a(\lambda) \prod_{i=1}^n P_a(\lambda, \lambda_i). \quad (293)$$

Concluimos mencionando que todas as fórmulas apresentadas nesta seção passaram pelos seguintes testes. Para $N = 2$ reproduzimos a solução do ansatz de Bethe algébrico do modelo de seis vértices [18]. Neste caso em especial ambos o numerador e o denominador da Eq.(185) são nulos, sendo a respectiva continuação analítica dada por $\theta(\lambda, \mu) = R(\lambda, \mu)_{2,2}^{2,2}/R(\lambda, \mu)_{1,1}^{1,1}$. Para $N = 3$ reproduzimos o ansatz de Bethe algébrico concebido por Tarasov [20] para o modelo de dezenove vértices. Mencionamos que nosso resultado pode ser visto como uma extensão do trabalho anterior citado, pois não assumimos nenhuma dependência particular do parâmetro espectral para a matriz R . Também verificamos que as expressões (290,293) reproduzem as equações do ansatz de Bethe e os autovalores para generalizações de spin $s > \frac{1}{2}$ do modelo de seis vértices [19].

5 Aplicações

Esta seção tem como objetivo aplicar os resultados anteriores do ansatz de Bethe algébrico para dois diferentes tipos modelos de vértices de N estados invariantes pela simetria $U(1)$. Os modelos de vértices aqui solucionados estão diretamente associados a soluções coloridas da equação de Yang-Baxter [30]. Mais especificamente, esses sistemas estão relacionados a representações do grupo quântico $U_q[Sl(2)]$ quando q é uma raiz da unidade [31, 32]. Os pesos de Boltzmann dessas soluções possuem uma dependência em três variáveis contínuas. Este fato permite definirmos dois tipos de matrizes R , uma que possui a propriedade da diferença no parâmetro espectral, e outra com uma dependência funcional não-aditiva em relação às outras duas variáveis extras. Dessa forma, exemplificamos nossos resultados em um contexto geral de matrizes R não-aditivas.

5.1 Trança e a matriz R

O grupo de tranças e modelos integráveis de mecânica estatística clássica apresentam estruturas algébricas similares [33]. O grupo das tranças de Artin é gerado por um conjunto de geradores S_i e suas inversas sujeitos à relação algébrica

$$S_i S_{i+1} S_i = S_{i+1} S_i S_{i+1} \quad (294)$$

$$S_i S_j = S_j S_i \quad \text{para } |i - j| \geq 2. \quad (295)$$

onde o índice i representa o i -ésimo sítio de uma cadeia de comprimento m .

Assumindo que a matriz S $N^2 \times N^2$ tenha inversa, então o produto tensorial

$$S_i = \bigotimes_{j=1}^{i-1} I_N S \bigotimes_{j=i+2}^m I_N \quad (296)$$

satisfaz a álgebra de tranças (294,295) caso S seja solução da relação

$$(S \otimes I_N)(I_N \otimes S)(S \otimes I_N) = (I_N \otimes S)(S \otimes I_N)(I_N \otimes S). \quad (297)$$

A principio, representações do grupo de tranças de N estados (297) que sejam invariantes pela simetria $U(1)$, podem ser obtidas baseado na extensão quântica das álgebras de Lie. Um

exemplo clássico é a representação de spin $s > \frac{1}{2}$ da álgebra quântica $U_q[SU(2)]$ para valores genéricos de q . Essa solução nos conduz à matriz R de cadeias de spin S de Heisenberg XXZ [34]. Claramente, esta não exauri todas as soluções da relação (297) que possuem simetria de carga $U(1)$. Um segundo possível estudo na literatura está associado a representações não-genéricas da álgebra $U_q[SU(2)]$ quando q é uma raiz da unidade [35]. Esse solução é um caso especial das matrizes de tranças coloridas relacionadas ao análogo Z_N da álgebra graduada [30]. Através da referência [30] encontramos que tais tranças não-coloridas são expressas por

$$S = \sum_{\substack{a,b,c,d=1 \\ a+b \geq c+d}} S_{a,b}^{c,d} e_{b,c} \otimes e_{a,d}. \quad (298)$$

As amplitudes $S_{a,b}^{c,d}$ são definidas pela seguinte equação

$$S_{a,b}^{c,d} = \begin{cases} q^{(c+d-2)} w^{(c-1)(d-1)} \Upsilon_c^a(q; w) \Upsilon_d^b(q; w), & \text{para } a + b = c + d \\ 0, & \text{para } a + b \neq c + d. \end{cases} \quad (299)$$

onde q é um parâmetro livre, $w = \exp \left[\frac{2\pi k I}{N} \right]$ com k e N primos entre si e $\Upsilon_n^m(q; w)$ é dado por

$$\Upsilon_c^a(q; w) = \begin{cases} \frac{(w; m-1)_w}{(w; m-n)_w (w; n-1)_w} \frac{(q^2; m-1)_w}{(q^2; n-1)_w}, & \text{para } m, n \text{ e } m-n \geq 0 \\ 0, & \text{para } m, n \text{ ou } m-n < 0. \end{cases} \quad (300)$$

A função $(z; n)_\alpha$ denota o análogo da função fatorial, que é representada pela seguinte expressão

$$(z; n)_\alpha = \begin{cases} \prod_{j=0}^{n-1} (1 - z\alpha^j), & \text{para } n > 0 \\ 1, & \text{para } n = 0. \end{cases} \quad (301)$$

A seguir discutiremos como gerar uma solução da equação de Yang-Baxter a partir da representação acima do grupo de tranças. Esse procedimento é comumente chamado de Baxterização, sendo capaz de produzir matrizes R aditivas em relação aos parâmetros espectrais,

$$R_{1,2}(\lambda) R_{1,3}(\lambda + \mu) R_{2,3}(\mu) = R_{2,3}(\mu) R_{1,3}(\lambda + \mu) R_{1,2}(\lambda). \quad (302)$$

O método de Baxterização assume que através de um limite apropriado na variável λ a respectiva matriz R torna-se assintoticamente independente do parâmetro espectral. Essa propriedade é facilmente explorada se primeiramente realizarmos a seguinte transformação

$$\check{R}(\lambda) = P.R(\lambda). \quad (303)$$

Essa matriz $\check{R}(\lambda)$ satisfaz a relação de Yang-Baxter da diferença que é expressa por

$$\check{R}_{1,2}(\lambda)\check{R}_{2,3}(\lambda + \mu)\check{R}_{1,2}(\mu) = \check{R}_{2,3}(\mu)\check{R}_{1,2}(\lambda + \mu)\check{R}_{2,3}(\lambda) \quad (304)$$

e possui uma notável semelhança com a relação de trança (297).

O primeiro procedimento da técnica de Baxterização baseia-se em analisar a estrutura dos autovalores da trança. A diagonalização da trança (298) revela que essa satisfaz a seguinte relação

$$\prod_{i=1}^N (S - \xi_i I_N \otimes I_N) = 0, \quad (305)$$

onde os N distintos autovalores ξ_i são dados por

$$\xi_i = (-1)^{i+1} w^{\frac{(i-2)(i-1)}{2}} q^{2(i-1)}. \quad (306)$$

Como consequência imediata do conhecimento exato dos autovalores da trança, podemos decompor S da forma

$$S = \prod_{i=1}^N \xi_i \check{P}_i \quad (307)$$

onde \check{P}_i é o projetor no subespaço de ξ_i , isto é,

$$\check{P}_i = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^N \frac{(S - \xi_k)}{(\xi_i - \xi_k)}. \quad (308)$$

A analogia com a forma da matriz R derivada no contexto de grupo quântico sugere considerarmos o seguinte ansatz para $\check{R}(\lambda)$

$$\check{R}(\lambda) = \sum_{i=1}^N \rho_i(\lambda) \check{P}_i. \quad (309)$$

As funções escalares $\rho_i(\lambda)$ são fixadas impondo a propriedade de unitariedade para $\check{R}(\lambda)$ e exigindo que a trança original S seja obtida da $\check{R}(\lambda)$ quando aplicarmos o seguinte limite,

$$S = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} [\rho_0(\lambda) \check{R}(\lambda)] \quad (310)$$

onde $\rho_0(\lambda)$ é um normalização apropriada.

De acordo com [36], uma possível forma funcional para $\rho_i(\lambda)$ satisfazendo as propriedades acima é

$$\rho_i(\lambda) = \prod_{k=1}^{i-1} \left(\exp[2\lambda] + \frac{\xi_{k+1}}{\xi_k} \right) \prod_{k=i}^{N-1} \left(1 + \exp[2\lambda] \frac{\xi_{k+1}}{\xi_k} \right) \quad (311)$$

Reunindo os resultados anteriores encontramos que a matriz R dada pela expressão

$$\check{R}(\lambda) = \sum_{i=1}^N \prod_{k=0}^{i-2} (\exp[2\lambda] - w^k q^2) \prod_{k=i-1}^{N-2} (1 - \exp[2\lambda] w^k q^2) \check{P}_i \quad (312)$$

satisfaz a equação de Yang-Baxter (304) para valores arbitrários de N e q .

A partir da Eq.(312) calculamos as correspondentes amplitudes $R(\lambda)_{c,d}^{a,b}$ da matriz R . Esse é o ingrediente básico que precisamos para implementar os resultados do ansatz de Bethe obtidos na seção 4. Considerando as Eqs.(290,293) encontramos após várias simplificações que o autovalor da respectiva matriz de transferência (17) é

$$\begin{aligned} \Lambda(\lambda) &= \sum_{a=1}^N \prod_{i=1}^m \left[\prod_{j=a}^{N-1} \sinh \left[\lambda - \mu_i + \gamma + \frac{I\pi k(j-1)}{N} \right] \prod_{j=1}^{a-1} \sinh \left[\lambda - \mu_i + \frac{I\pi k(j-1)}{N} \right] \right] \\ &\times \prod_{j=1}^n \frac{\sinh[-\lambda + \lambda_j + \gamma] \sinh[-\lambda + \lambda_j + \frac{I\pi k}{N}]}{\sinh[-\lambda + \lambda_j + \frac{I\pi k(2-a)}{N}] \sinh[-\lambda + \lambda_j + \frac{I\pi k(1-a)}{N}]}, \end{aligned} \quad (313)$$

desde que os parâmetros λ_j satisfaçam as seguintes equações do ansatz de Bethe

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^m \frac{\sinh[\lambda_l - \mu_i + \gamma]}{\sinh[\lambda_l - \mu_i]} &= \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^n \frac{\sinh[\lambda_l - \lambda_j - I\frac{k\pi}{N}]}{\sinh[\lambda_l - \lambda_j + I\frac{k\pi}{N}]} \\ l &= 1 \dots n, \end{aligned} \quad (314)$$

onde usamos a definição $q = \exp[i\gamma]$.

Os resultados apresentados nesta tese também fornecem informações extras dos termos

não-desejados do ansatz de Bethe algébrico. Uma inspeção direta da Eq.(283) revela que essas informações estão essencialmente contidas nas funções ${}_c\mathcal{F}_b^{(a)}(\lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_b)$. Por uma questão de completeza descrevemos explicitamente a forma dessas funções. Note que devido a estrutura recursiva da Eq.(284) é suficiente calcularmos ${}_0\mathcal{F}_b^{(a)}(\lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_b)$ e ${}_b\mathcal{F}_b^{(a)}(\lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_b)$. O resultado final é

$${}_0\mathcal{F}_b^{(a)}(\lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_b) = \mathcal{G}_1^{(a,b)}(\gamma) \left(\frac{1+w}{\sqrt{w}} \right)^{\frac{b(b-1)}{2}} \prod_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^b \frac{\sinh \left[\lambda_i - \lambda_j - \frac{\gamma}{2} \right]}{\sinh \left[\lambda_i - \lambda_j + \frac{I\pi k}{N} \right]} \prod_{i=1}^b {}_0\mathcal{F}_1^{(a+b-1)}(\lambda, \lambda_i) \quad (315)$$

$${}_b\mathcal{F}_b^{(a)}(\lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_b) = \mathcal{G}_2^{(a,b)}(\gamma) \left(\frac{1+w}{\sqrt{w}} \right)^{\frac{b(b-1)}{2}} \prod_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^b \frac{\sinh \left[\lambda_i - \lambda_j - \frac{\gamma}{2} \right]}{\sinh \left[\lambda_i - \lambda_j + \frac{I\pi k}{N} \right]} \prod_{i=1}^b {}_1\mathcal{F}_1^{(a)}(\lambda, \lambda_i), \quad (316)$$

onde a função ${}_0\mathcal{F}_1^{(a)}(\lambda, \mu)$ e as amplitudes independentes da variável espectral $\mathcal{G}_\alpha^{(a,b)}(\gamma)$ para $\alpha = 1, 2$ são dadas por

$${}_0\mathcal{F}_1^{(a)}(\lambda, \mu) = \frac{\sqrt{\sinh \left[\frac{\gamma}{2} \right] \sinh \left[\frac{I\pi k}{N} a \right] \sinh \left[\frac{\gamma}{2} + \frac{I\pi k}{N} (a-1) \right]}}{\sqrt{\sinh \left[\frac{I\pi k}{N} \right] \sinh \left[\lambda - \mu + \frac{I\pi k}{N} (a-1) \right]}} \quad (317)$$

$$\mathcal{G}_1^{(a,b)}(\gamma) = \left(\frac{\sqrt{w}}{1+\bar{w}} \right)^{\frac{b(b-1)}{2}} \prod_{i=1}^{b-1} \sqrt{\frac{\sinh \left[\frac{\gamma}{2} + \frac{I\pi k}{N} (a+i-2) \right] \sinh \left[\frac{I\pi k}{N} (a+b-1-i) \right]}{\sinh \left[\frac{\gamma}{2} + \frac{I\pi k}{N} (a+b-2) \right] \sinh \left[\frac{I\pi k}{N} (a+b-1) \right]}} \quad (318)$$

$$\mathcal{G}_2^{(a,b)}(\gamma) = \left(\frac{\sqrt{w}}{1+\bar{w}} \right)^{\frac{b(b-1)}{2}} \prod_{i=1}^{b-1} \sqrt{\frac{\sinh \left[\frac{\gamma}{2} + \frac{I\pi k}{N} (a+i-1) \right] \sinh \left[\frac{I\pi k}{N} (a+b-i) \right]}{\sinh \left[\frac{\gamma}{2} + \frac{I\pi k}{N} (a-1) \right] \sinh \left[\frac{I\pi k}{N} a \right]}} \quad (319)$$

As expressões para os valores restantes de c são facilmente calculadas com a ajuda da Eq.(284) que neste caso é dada por

$$\begin{aligned} {}_c\mathcal{F}_b^{(a)}(\lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_b) &= {}_0\mathcal{F}_{b-c}^{(a)}(\lambda, \lambda_{c+1}, \dots, \lambda_b) {}_c\mathcal{F}_c^{(a+b-c)}(\lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_c) \\ &\times \prod_{i=c+1}^b \prod_{j=1}^c \frac{\sinh [\lambda_j - \lambda_i - \gamma]}{\sinh [\lambda_j - \lambda_i]} \\ &\text{para } a = 1, \dots, N; \ b = 1, \dots, N-a; \ c = 0, \dots, b. \end{aligned} \quad (320)$$

Gostaríamos de finalizar comentando que a parte dos termos que não contribuem para o

estado gerada pela análise completa do ansatz de Bethe contem muito mais informações do que pode-se pensar a primeira vista [37]. Na realidade, o limite semi-clássico dos termos não-desejados tem um importante papel na solução de modelos tipo Gaudin e das equações de Knizhik-Zamolodchikov [38]. Devido ao fato que as funções ${}_c\mathcal{F}_b^{(a)}(\lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_b)$ são fatorizadas em termos das amplitudes de espalhamento de duas partículas, acreditamos que o estudo semi-clássico destas funções não seja tão complicado. Também esperamos que tal análise forneça a solução da equação de Knizhik-Zamolodchikov associada a esta deformação não-genérica do grupo quântico $U_q[Sl(2)]$.

5.2 Matrizes R não-aditivas

Uma possível maneira de encontrar matrizes R que satisfazem a regra do gelo (22) e que sejam dependentes de dois parâmetros livres é explorar as soluções da relação de tranças coloridas invariantes pela simetria $U(1)$. Neste caso, cada corda que compõem a trança carrega uma variável extra contínua denominada de cor [30]. A operação de trançar cordas com cor λ e μ é representada por meio de uma trança $S_i(\lambda, \mu)$ de dois parâmetros que satisfaz a seguinte generalização da relação de trança (297),

$$S_{i+1}(\lambda_1, \lambda_2)S_i(\lambda_1, \lambda_3)S_{i+1}(\lambda_2, \lambda_3) = S_i(\lambda_2, \lambda_3)S_{i+1}(\lambda_1, \lambda_3)S_i(\lambda_1, \lambda_2). \quad (321)$$

onde λ_i denota três possíveis variáveis da cor de cordas.

Vemos que as soluções da relação de tranças coloridas produzem modelos de vértices integráveis cujas matrizes $R(\lambda, \mu)$ são evidentemente não-aditivas. Isso é obtido considerando as variáveis de cor como parâmetros espectrais e realizando a identificação

$$R(\lambda, \mu) = P.S(\lambda, \mu). \quad (322)$$

A classe de tranças discutidas na subseção anterior possui tal generalização colorida [30]. Neste contexto, a variável de cor distingue diferentes representações do grupo quântico $U_q[Sl(2)]$ com mesma dimensão e $q = \exp \left[\frac{2\pi kI}{N} \right]$. As expressões explícitas de tais tranças coloridas, em termos da base de Weyl, é encontrada na literatura [30]. Uma importante propriedade dessas tranças é que suas amplitudes triangulares superior e inferior podem ser ambas não-

nulas. Portanto, os correspondentes modelos de vértices são ideais para testarmos a estrutura desenvolvida através de matrizes R não aditivas. O caso mais simples $N = 2$ está diretamente relacionado à parametrização de Felderhof de modelos de férmions livres [39]. A respectiva matriz R é a do modelo de seis vértices cujos pesos satisfazem a condição de férmions livres,

$$\begin{aligned} R_{12}(\lambda, \mu) &= (1 - \lambda\mu)(e_{1,1} \otimes e_{1,1} + e_{2,2} \otimes e_{2,2}) + (\lambda - \mu)(e_{1,1} \otimes e_{2,2} - e_{2,2} \otimes e_{1,1}) \\ &+ \sqrt{(1 - \lambda^2)(1 - \mu^2)}(e_{1,2} \otimes e_{2,1} + e_{2,1} \otimes e_{1,2}) \end{aligned} \quad (323)$$

e a função ${}_0\mathcal{F}_1^{(1)}(\lambda, \mu)$ é dada por

$${}_0\mathcal{F}_1^{(1)}(\lambda, \mu) = \frac{\sqrt{(1 - \lambda^2)(1 - \mu^2)}}{\mu - \lambda}. \quad (324)$$

Os autovalores da matriz de transferência correspondente são

$$\begin{aligned} \Lambda(\lambda, \mu_1, \dots, \mu_m) &= \sum_{a=1}^2 \prod_{j=1}^m \left[\prod_{i=a}^1 (1 - \lambda\mu_j w^{i-1}) \prod_{i=1}^{a-1} (\mu_j - \lambda w^{i-1}) \right] \prod_{j=1}^n \frac{(-1 + \lambda\lambda_j)(\lambda - \lambda_j w)}{\lambda w^{(a-1)} - \lambda_j} \\ &\times \frac{w^{(a-2)}}{\lambda w^{(a-2)} - \lambda_j} \end{aligned} \quad (325)$$

onde λ_j satisfaz a seguinte equação do ansatz de Bethe

$$\begin{aligned} \prod_{j=1}^m \frac{1 - \lambda_l \mu_j}{\mu_j - \lambda_l} &= \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^n \frac{\lambda_l - \lambda_j w}{\lambda_j - \lambda_l w} \\ l &= 1 \dots n. \end{aligned} \quad (326)$$

Para $N = 3$ surge um novo modelo de vértices. O caso de três estado é um modelo

interessante de dezenove vértices. A respectiva matriz R é definida por

$$\begin{aligned}
 R_{12}(\lambda, \mu) = & R(\lambda, \mu)_{1,1}^{1,1}(e_{1,1} \otimes e_{1,1} + e_{3,3} \otimes e_{3,3}) + R(\lambda, \mu)_{1,2}^{1,2}(e_{1,1} \otimes e_{2,2} - e_{2,2} \otimes e_{1,1}) \\
 & + R(\lambda, \mu)_{1,2}^{2,1}(e_{1,2} \otimes e_{2,1} + e_{2,1} \otimes e_{1,2}) + R(\lambda, \mu)_{1,3}^{1,3}e_{1,1} \otimes e_{3,3} \\
 & + R(\lambda, \mu)_{1,3}^{2,2}(e_{1,2} \otimes e_{3,2} + e_{2,1} \otimes e_{2,3}) + R(\lambda, \mu)_{1,3}^{3,1}(e_{1,3} \otimes e_{3,1} + e_{3,1} \otimes e_{1,3}) \\
 & + R(\lambda, \mu)_{2,2}^{2,2}e_{2,2} \otimes e_{2,2} + R(\lambda, \mu)_{2,2}^{3,1}(e_{2,3} \otimes e_{2,1} + e_{3,2} \otimes e_{1,2}) \\
 & + R(\lambda, \mu)_{2,3}^{2,3}(e_{2,2} \otimes e_{3,3} - e_{3,3} \otimes e_{2,2}) + R(\lambda, \mu)_{2,3}^{3,2}(e_{2,3} \otimes e_{3,2} + e_{3,2} \otimes e_{2,3}) \\
 & + R(\lambda, \mu)_{3,1}^{3,1}e_{3,3} \otimes e_{1,1}
 \end{aligned} \tag{327}$$

onde as amplitudes $R(\lambda, \mu)_{a,b}^{c,d}$ são dadas por

$$R(\lambda, \mu)_{1,1}^{1,1} = (1 - \mu\lambda)(1 - \mu\lambda w) \tag{328}$$

$$R(\lambda, \mu)_{1,2}^{1,2} = (\lambda - \mu)(1 - \mu\lambda w) \tag{329}$$

$$R(\lambda, \mu)_{1,2}^{2,1} = (1 - \mu\lambda w)\sqrt{(1 - \mu^2)(1 - \lambda^2)} \tag{330}$$

$$R(\lambda, \mu)_{1,3}^{1,3} = (\lambda - \mu)(\lambda - \mu w) \tag{331}$$

$$R(\lambda, \mu)_{1,3}^{2,2} = (\lambda - \mu)\sqrt{(1 - \lambda^2)(1 - \mu^2 w)(1 + w)} \tag{332}$$

$$R(\lambda, \mu)_{1,3}^{3,1} = \sqrt{(1 - \lambda^2)(1 - \lambda^2 w)(1 - \mu^2)(1 - \mu^2 w)} \tag{333}$$

$$R(\lambda, \mu)_{2,2}^{2,2} = (1 - \lambda^2)(1 - \mu^2 w) - (\mu - \lambda)(\mu - \lambda w) \tag{334}$$

$$R(\lambda, \mu)_{2,2}^{3,1} = (\mu - \lambda)\sqrt{(1 - \mu^2)(1 - \lambda^2 w)(1 + w)} \tag{335}$$

$$R(\lambda, \mu)_{2,3}^{2,3} = (1 + w)(\lambda - \mu)(1 - \mu\lambda) \tag{336}$$

$$R(\lambda, \mu)_{2,3}^{3,2} = (1 - \mu\lambda)\sqrt{(1 - \mu^2 w)(1 - \lambda^2 w)} \tag{337}$$

$$R(\lambda, \mu)_{3,1}^{3,1} = (\mu - \lambda)(\mu - \lambda w). \tag{338}$$

Considerando os resultados gerais do ansatz de Bethe na seção 4 encontramos que os autovalores da matriz de transferência (17) desse modelo de vértices de três estado é

$$\begin{aligned}
 \Lambda(\lambda, \mu_1, \dots, \mu_m) = & \sum_{a=1}^3 \prod_{j=1}^m \left[\prod_{i=a}^2 (1 - \lambda\mu_j w^{i-1}) \prod_{i=1}^{a-1} (\mu_j - \lambda w^{i-1}) \right] \prod_{j=1}^n \frac{(-1 + \lambda\lambda_j)(\lambda - \lambda_j w)}{\lambda w^{(a-1)} - \lambda_j} \\
 & \times \frac{w^{(a-2)}}{\lambda w^{(a-2)} - \lambda_j}
 \end{aligned} \tag{339}$$

e as respectivas equações do ansatz de Bethe são

$$\prod_{j=1}^m \frac{1 - \lambda_l \mu_j}{\mu_j - \lambda_l} = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^n \frac{\lambda_l - \lambda_j w}{\lambda_j - \lambda_l w} \quad (340)$$

$$l = 1 \dots n.$$

As funções auxiliares ${}_c\mathcal{F}_2^{(1)}(\lambda, \{\lambda_j\})$ para $c = 0, 1, 2$ são obtidas das expressões

$${}_0\mathcal{F}_2^{(1)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2) = \mathcal{G}_1^{(1,2)}(\lambda) \frac{(1+w)(-1+\lambda_1\lambda_2)}{(w\lambda_1 - \lambda_2)} \prod_{i=1}^2 {}_0\mathcal{F}_1^{(2)}(\lambda, \lambda_i) \quad (341)$$

$${}_1\mathcal{F}_2^{(1)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2) = {}_0\mathcal{F}_1^{(1)}(\lambda, \lambda_2) {}_1\mathcal{F}_1^{(2)}(\lambda, \lambda_1) \frac{-1 + \lambda_2\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} \quad (342)$$

$${}_2\mathcal{F}_2^{(1)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2) = \mathcal{G}_2^{(1,2)}(\lambda) \frac{(1+w)(-1+\lambda_1\lambda_2)}{(w\lambda_1 - \lambda_2)} \prod_{i=1}^2 {}_1\mathcal{F}_1^{(1)}(\lambda, \lambda_i), \quad (343)$$

sendo que a função ${}_0\mathcal{F}_1^{(a)}(\lambda, \mu)$ para $a = 1, 2$ e as amplitudes $\mathcal{G}_\alpha^{(1,2)}(\lambda)$ para $\alpha = 1, 2$ são definidas pelas seguintes fórmulas

$$\mathcal{G}_1^{(1,2)}(\lambda) = \frac{w}{(1+w)^{\frac{3}{2}}} \sqrt{\frac{1-\lambda^2}{1-w\lambda^2}} \quad (344)$$

$$\mathcal{G}_2^{(1,2)}(\lambda) = \frac{1}{(1+w)^{\frac{1}{2}}} \sqrt{\frac{1-w\lambda^2}{1-\lambda^2}} \quad (345)$$

$${}_0\mathcal{F}_1^{(a)}(\lambda, \mu) = \frac{\sqrt{(1+w)^{a-1}(1-w^{a-1}\lambda^2)(1-\mu^2)}}{\mu - w^{a-1}\lambda} \quad (346)$$

A matriz R do respectivo modelo de vértices de quatro estados $N = 4$ é igual a

$$\begin{aligned}
R_{12}(\lambda, \mu) = & R(\lambda, \mu)_{1,1}^{1,1}(e_{1,1} \otimes e_{1,1} + e_{4,4} \otimes e_{4,4}) + R(\lambda, \mu)_{1,2}^{1,2}(e_{1,1} \otimes e_{2,2} - e_{2,2} \otimes e_{1,1}) \\
& + R(\lambda, \mu)_{1,2}^{2,1}(e_{1,2} \otimes e_{2,1} + e_{2,1} \otimes e_{1,2}) + R(\lambda, \mu)_{1,3}^{1,3}e_{1,1} \otimes e_{3,3} \\
& + R(\lambda, \mu)_{1,3}^{2,2}(e_{1,2} \otimes e_{3,2} + e_{2,1} \otimes e_{2,3}) + R(\lambda, \mu)_{1,3}^{3,1}(e_{1,3} \otimes e_{3,1} + e_{3,1} \otimes e_{1,3}) \\
& + R(\lambda, \mu)_{1,4}^{4,1}(e_{1,4} \otimes e_{4,1} + e_{4,1} \otimes e_{1,4}) + R(\lambda, \mu)_{1,4}^{3,2}(e_{1,3} \otimes e_{4,2} + e_{3,1} \otimes e_{2,4}) \\
& + R(\lambda, \mu)_{1,4}^{2,3}(e_{1,2} \otimes e_{4,3} + e_{2,1} \otimes e_{3,4}) + R(\lambda, \mu)_{1,4}^{1,4}e_{1,1} \otimes e_{4,4} + R(\lambda, \mu)_{2,1}^{2,1}e_{2,2} \otimes e_{1,1} \\
& + R(\lambda, \mu)_{2,2}^{3,1}(e_{2,3} \otimes e_{2,1} + e_{3,2} \otimes e_{1,2}) + R(\lambda, \mu)_{2,2}^{2,2}e_{2,2} \otimes e_{2,2} \\
& + R(\lambda, \mu)_{2,3}^{2,3}e_{2,2} \otimes e_{3,3} + R(\lambda, \mu)_{2,3}^{3,2}e_{2,3} \otimes e_{3,2} + R(\lambda, \mu)_{3,2}^{2,3}e_{3,2} \otimes e_{2,3} + R(\lambda, \mu)_{3,2}^{3,2}e_{3,3} \otimes e_{2,2} \\
& + R(\lambda, \mu)_{3,1}^{3,1}e_{3,3} \otimes e_{1,1} + R(\lambda, \mu)_{3,3}^{3,3}e_{3,3} \otimes e_{3,3} + R(\lambda, \mu)_{4,1}^{4,1}e_{4,4} \otimes e_{1,1} + R(\lambda, \mu)_{4,2}^{4,2}e_{4,4} \otimes e_{2,2} \\
& + R(\lambda, \mu)_{2,4}^{2,4}e_{2,2} \otimes e_{4,4} + R(\lambda, \mu)_{2,3}^{4,1}(e_{2,4} \otimes e_{3,1} + e_{4,2} \otimes e_{1,3}) \\
& + R(\lambda, \mu)_{2,4}^{3,3}(e_{2,3} \otimes e_{4,3} + e_{3,2} \otimes e_{3,4}) + R(\lambda, \mu)_{2,4}^{4,2}(e_{2,4} \otimes e_{4,2} + e_{4,2} \otimes e_{2,4}) \\
& + R(\lambda, \mu)_{3,2}^{4,1}(e_{3,4} \otimes e_{2,1} + e_{4,3} \otimes e_{1,2}) + R(\lambda, \mu)_{3,3}^{4,2}(e_{3,4} \otimes e_{3,2} + e_{4,3} \otimes e_{2,3}) \\
& + R(\lambda, \mu)_{3,4}^{4,3}(e_{3,4} \otimes e_{4,3} + e_{4,3} \otimes e_{3,4}) + R(\lambda, \mu)_{3,4}^{3,4}(e_{3,3} \otimes e_{4,4} - e_{4,4} \otimes e_{3,3}) \tag{347}
\end{aligned}$$

onde as amplitudes $R(\lambda, \mu)_{a,b}^{c,d}$ são dadas por

$$R(\lambda, \mu)_{1,1}^{1,1} = (1 - \mu\lambda)(1 - \mu\lambda w)(1 - \mu\lambda w^2) \quad (348)$$

$$R(\lambda, \mu)_{1,2}^{1,2} = (\lambda - \mu)(1 - \mu\lambda w)(1 - \mu\lambda w^2) \quad (349)$$

$$R(\lambda, \mu)_{1,2}^{2,1} = \sqrt{(1 - \mu^2)(1 - \lambda^2)}(1 - \mu\lambda w)(1 - \mu\lambda w^2) \quad (350)$$

$$R(\lambda, \mu)_{1,3}^{1,3} = (\lambda - \mu)(\lambda - \mu w)(1 - \mu\lambda w^2) \quad (351)$$

$$R(\lambda, \mu)_{1,3}^{2,2} = \sqrt{(1 - \lambda^2)(1 - \mu^2 w)(1 + w)}(\lambda - \mu)(1 - \mu\lambda w^2) \quad (352)$$

$$R(\lambda, \mu)_{1,3}^{3,1} = \sqrt{(1 - \lambda^2)(1 - \lambda^2 w)(1 - \mu^2)(1 - \mu^2 w)}(1 - \mu\lambda w^2) \quad (353)$$

$$R(\lambda, \mu)_{2,2}^{2,2} = ((1 - \lambda^2)(1 - \mu^2 w) - (\mu - \lambda)(\mu - \lambda w))(1 - \mu\lambda w^2) \quad (354)$$

$$R(\lambda, \mu)_{2,2}^{3,1} = (\mu - \lambda)\sqrt{(1 - \mu^2)(1 - \lambda^2 w)(1 + w)}(1 - \mu\lambda w^2) \quad (355)$$

$$R(\lambda, \mu)_{2,3}^{2,3} = (1 + w)(\lambda - \mu)((1 - \mu^2 \lambda^2)(1 + w) - w(\lambda - \mu w)(\lambda - \mu)) \quad (356)$$

$$R(\lambda, \mu)_{2,3}^{3,2} = \sqrt{(1 - \mu^2 w)(1 - \lambda^2 w)}((1 - \mu^2)(1 - \lambda^2 w^2) - (1 + w)(\lambda - \mu w)(\lambda - \mu)) \quad (357)$$

$$R(\lambda, \mu)_{3,1}^{3,1} = (\mu - \lambda)(\mu - \lambda w)(1 - \lambda\mu w^2) \quad (358)$$

$$R(\lambda, \mu)_{1,4}^{4,1} = \sqrt{(1 - \lambda^2)(1 - \lambda^2 w)(1 - \lambda^2 w^2)}\sqrt{(1 - \mu^2)(1 - \mu^2 w)(1 - \mu^2 w^2)} \quad (359)$$

$$R(\lambda, \mu)_{1,4}^{3,2} = \sqrt{(1 - \lambda^2)(1 - \lambda^2 w)}\sqrt{(1 - \mu^2 w)(1 - \mu^2 w^2)}\sqrt{1 + w + w^2}(\lambda - \mu) \quad (360)$$

$$R(\lambda, \mu)_{1,4}^{2,3} = \sqrt{(1 - \lambda^2)(1 - \mu^2 w^2)}\sqrt{1 + w + w^2}(\lambda - \mu)(\lambda - \mu w) \quad (361)$$

$$R(\lambda, \mu)_{1,4}^{1,4} = (\lambda - \mu)(\lambda - \mu w)(\lambda - \mu w^2) \quad (362)$$

$$R(\lambda, \mu)_{2,1}^{2,1} = (\mu - \lambda)(1 - \lambda\mu w)(1 - \lambda\mu w^2) \quad (363)$$

$$R(\lambda, \mu)_{2,3}^{4,1} = \sqrt{(1 - \lambda^2 w)(1 - \lambda^2 w^2)}\sqrt{(1 - \mu^2)(1 - \mu^2 w)}\sqrt{1 + w + w^2}(\mu - \lambda) \quad (364)$$

$$R(\lambda, \mu)_{2,4}^{4,2} = \sqrt{(1 - \lambda^2 w)(1 - \lambda^2 w^2)}\sqrt{(1 - \mu^2 w)(1 - \mu^2 w^2)}(1 - \mu\lambda) \quad (365)$$

$$R(\lambda, \mu)_{2,4}^{3,3} = \sqrt{(1 - \lambda^2 w)(1 - \mu^2 w^2)}\sqrt{(1 + w)(1 + w + w^2)}(1 - \lambda\mu)(\lambda - \mu) \quad (366)$$

$$R(\lambda, \mu)_{2,4}^{2,4} = (1 + w + w^2)(1 - \lambda\mu)(\lambda - \mu)(\lambda - \mu w) \quad (367)$$

$$R(\lambda, \mu)_{2,4}^{2,4} = \sqrt{(1 - \lambda^2)(1 - \mu^2)}\sqrt{1 + w + w^2}(1 - \lambda\mu)(\mu - \lambda)(\mu - \lambda w) \quad (368)$$

$$R(\lambda, \mu)_{3,2}^{3,2} = ((1 - \lambda^2 \mu^2)(1 + w) - w(\mu - \lambda)(\mu - \lambda w))(\mu - \lambda) \quad (369)$$

$$R(\lambda, \mu)_{3,2}^{2,3} = ((1 - \lambda^2)(1 - \mu^2 w^2) - (1 + w)(\mu - \lambda)(\mu - \lambda w))\sqrt{(1 - \lambda^2 w)(1 - \mu^2 w)} \quad (370)$$

$$R(\lambda, \mu)_{3,3}^{4,2} = \sqrt{(1 - \lambda^2 w^2)(1 - \mu^2 w)} \sqrt{(1 + w)(1 + w + w^2)} (1 - \lambda \mu)(\mu - \lambda) \quad (371)$$

$$R(\lambda, \mu)_{3,3}^{3,3} = ((1 - \lambda^2 w)(1 - \mu^2 w^2) - (1 + w + w^2)(\mu - \lambda)(\mu - \lambda w))(1 - \lambda \mu) \quad (372)$$

$$R(\lambda, \mu)_{3,4}^{4,3} = \sqrt{(1 - \lambda^2 w^2)(1 - \mu^2 w^2)} (1 - \lambda \mu)(1 - \lambda \mu w) \quad (373)$$

$$R(\lambda, \mu)_{3,4}^{3,4} = (1 + w + w^2)(1 - \lambda \mu)(1 - \lambda \mu w)(\lambda - \mu) \quad (374)$$

$$R(\lambda, \mu)_{4,1}^{4,1} = (\mu - \lambda)(\mu - \lambda w)(\mu - \lambda w^2) \quad (375)$$

$$R(\lambda, \mu)_{4,2}^{4,2} = (1 + w + w^2)(1 - \lambda \mu)(\mu - \lambda)(\mu - \lambda w) \quad (376)$$

Os autovalores da matriz de transferência (17) associada a esse modelo de vértices de quatro estados, de acordo com a seção 4 é igual a

$$\begin{aligned} \Lambda(\lambda, \mu_1, \dots, \mu_m) &= \sum_{a=1}^4 \prod_{j=1}^m \left[\prod_{i=a}^3 (1 - \lambda \mu_j w^{i-1}) \prod_{i=1}^{a-1} (\mu_j - \lambda w^{i-1}) \right] \prod_{j=1}^n \frac{(-1 + \lambda \lambda_j)(\lambda - \lambda_j w)}{\lambda w^{(a-1)} - \lambda_j} \\ &\quad \times \frac{w^{(a-2)}}{\lambda w^{(a-2)} - \lambda_j} \end{aligned} \quad (377)$$

onde λ_j deve satisfazer a equação de Bethe

$$\begin{aligned} \prod_{j=1}^m \frac{1 - \lambda_l \mu_j}{\mu_j - \lambda_l} &= \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^n \frac{\lambda_l - \lambda_j w}{\lambda_j - \lambda_l w} \\ l &= 1 \dots n. \end{aligned} \quad (378)$$

As funções auxiliares ${}_c \mathcal{F}_b^{(a)}(\lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_b)$ para $a = 1, 2$, $b = 2, \dots, 4 - a$, $c = 0, b$ pode ser escrita da seguinte maneira

$${}_0 \mathcal{F}_2^{(a)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2) = \mathcal{G}_1^{(a,2)}(\lambda) \frac{(1 + w)(-1 + \lambda_1 \lambda_2)}{(w \lambda_1 - \lambda_2)} \prod_{i=1}^2 {}_0 \mathcal{F}_1^{(a+1)}(\lambda, \lambda_i) \quad \text{para } a = 1, 2 \quad (379)$$

$${}_2 \mathcal{F}_2^{(a)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2) = \mathcal{G}_2^{(a,2)}(\lambda) \frac{(1 + w)(-1 + \lambda_1 \lambda_2)}{(w \lambda_1 - \lambda_2)} \prod_{i=1}^2 {}_1 \mathcal{F}_1^{(a)}(\lambda, \lambda_i) \quad \text{para } a = 1, 2 \quad (380)$$

$${}_0 \mathcal{F}_3^{(1)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \mathcal{G}_1^{(1,3)}(\lambda) (1 + w)^3 \prod_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^3 \frac{(-1 + \lambda_i \lambda_j)}{(w \lambda_i - \lambda_j)} \prod_{i=1}^3 {}_0 \mathcal{F}_1^{(3)}(\lambda, \lambda_i) \quad (381)$$

$${}_3 \mathcal{F}_3^{(1)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \mathcal{G}_2^{(1,3)}(\lambda) (1 + w)^3 \prod_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^3 \frac{(-1 + \lambda_i \lambda_j)}{(w \lambda_i - \lambda_j)} \prod_{i=1}^3 {}_1 \mathcal{F}_1^{(1)}(\lambda, \lambda_i) \quad (382)$$

onde as amplitudes ${}_0\mathcal{F}_1^{(a)}(\lambda, \mu)$ para $a = 1, 2, 3$ e $\mathcal{G}_\alpha^{(a,b)}(\lambda)$ para $\alpha = 1, 2$ são dadas por

$${}_0\mathcal{F}_1^{(a)}(\lambda, \mu) = \frac{\sqrt{(1-w^a)(1-w^{a-1}\lambda^2)(1-\mu^2)}}{\sqrt{1-w}(\mu-w^{a-1}\lambda)} \quad (383)$$

$$\mathcal{G}_1^{(a,b)}(\lambda) = \left(\frac{w}{1+w}\right)^{\frac{b(b-1)}{2}} \prod_{i=1}^{b-1} \sqrt{\left(\frac{1-w^{a+b-1-i}}{1-w^{a+b-1}}\right) \left(\frac{1-\lambda^2 w^{a+i-2}}{1-\lambda^2 w^{a+b-2}}\right)} \quad (384)$$

$$\mathcal{G}_2^{(a,b)}(\gamma) = \frac{1}{(1+w)^{\frac{b(b-1)}{2}}} \prod_{i=1}^{b-1} \sqrt{\left(\frac{1-w^{a+b-i}}{1-w^a}\right) \left(\frac{1-\lambda^2 w^{a+i-1}}{1-\lambda^2 w^{a-1}}\right)} \quad (385)$$

As funções ${}_c\mathcal{F}_b^{(a)}(\lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_b)$ para os valores restantes de c são facilmente calculadas através da Eq.(284) que no presente caso é expressa por

$$\begin{aligned} {}_c\mathcal{F}_b^{(a)}(\lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_b) &= {}_0\mathcal{F}_{b-c}^{(a)}(\lambda, \lambda_{c+1}, \dots, \lambda_b) {}_c\mathcal{F}_c^{(a+b-c)}(\lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_c) \\ &\times \prod_{i=c+1}^b \prod_{j=1}^c \frac{-1 + \lambda_i \lambda_j}{\lambda_j - \lambda_i} \\ &\text{para } a = 1, \dots, 4; \ b = 1, \dots, 4-a; \ c = 0, \dots, b. \end{aligned} \quad (386)$$

Analisando as informações obtidas para $N = 2, 3, 4$ podemos estender os resultados anteriores para N arbitrário. Desse modo concluímos por indução que os autovalores da matriz de transferência (17) relacionada a esses modelos de vértice para N geral é igual a

$$\begin{aligned} \Lambda(\lambda, \mu_1, \dots, \mu_m) &= \sum_{a=1}^N \prod_{j=1}^m \left[\prod_{i=a}^{N-1} (1 - \lambda \mu_j w^{i-1}) \prod_{i=1}^{a-1} (\mu_j - \lambda w^{i-1}) \right] \prod_{j=1}^n \frac{(-1 + \lambda \lambda_j)(\lambda - \lambda_j w)}{\lambda w^{a-1} - \lambda_j} \\ &\times \frac{w^{a-2}}{\lambda w^{a-2} - \lambda_j}. \end{aligned} \quad (387)$$

A respectiva equação do ansatz de Bethe é

$$\begin{aligned} \prod_{j=1}^m \frac{1 - \lambda_l \mu_j}{\mu_j - \lambda_l} &= \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^n \frac{\lambda_l - \lambda_j w}{\lambda_j - \lambda_l w} \\ l &= 1 \dots n, \end{aligned} \quad (388)$$

As funções auxiliares ${}_c\mathcal{F}_b^a(\lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_b)$ são expressas pelas seguintes fórmulas

$${}_0\mathcal{F}_b^{(a)}(\lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_b) = \mathcal{G}_1^{(a,b)}(\lambda)(1+w)^{\frac{b(b-1)}{2}} \prod_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^b \frac{(-1 + \lambda_i \lambda_j)}{(w\lambda_i - \lambda_j)} \prod_{i=1}^b {}_0\mathcal{F}_1^{(a+b-1)}(\lambda, \lambda_i) \quad (389)$$

$${}_b\mathcal{F}_b^{(a)}(\lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_b) = \mathcal{G}_2^{(a,b)}(\lambda)(1+w)^{\frac{b(b-1)}{2}} \prod_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^b \frac{(-1 + \lambda_i \lambda_j)}{(w\lambda_i - \lambda_j)} \prod_{i=1}^b {}_1\mathcal{F}_1^{(a)}(\lambda, \lambda_i) \quad (390)$$

sendo que a função ${}_0\mathcal{F}_1^{(a)}(\lambda, \mu)$ e as amplitudes $\mathcal{G}_\alpha^{(a,b)}(\lambda)$ para $\alpha = 1, 2$ podem ser escrita da seguinte forma

$${}_0\mathcal{F}_1^{(a)}(\lambda, \mu) = \frac{\sqrt{(1-w^a)(1-w^{a-1}\lambda^2)(1-\mu^2)}}{\sqrt{1-w}(\mu - w^{a-1}\lambda)} \quad (391)$$

$$\mathcal{G}_1^{(a,b)}(\lambda) = \left(\frac{w}{1+w}\right)^{\frac{b(b-1)}{2}} \prod_{i=1}^{b-1} \sqrt{\left(\frac{1-w^{a+b-1-i}}{1-w^{a+b-1}}\right) \left(\frac{1-\lambda^2 w^{a+i-2}}{1-\lambda^2 w^{a+b-2}}\right)} \quad (392)$$

$$\mathcal{G}_2^{(a,b)}(\gamma) = \frac{1}{(1+w)^{\frac{b(b-1)}{2}}} \prod_{i=1}^{b-1} \sqrt{\left(\frac{1-w^{a+b-i}}{1-w^a}\right) \left(\frac{1-\lambda^2 w^{a+i-1}}{1-\lambda^2 w^{a-1}}\right)} \quad (393)$$

As expressões para os valores restantes de c são dadas por

$$\begin{aligned} {}_c\mathcal{F}_b^{(a)}(\lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_b) &= {}_0\mathcal{F}_{b-c}^{(a)}(\lambda, \lambda_{c+1}, \dots, \lambda_b) {}_c\mathcal{F}_c^{(a+b-c)}(\lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_c) \\ &\times \prod_{i=c+1}^b \prod_{j=1}^c \frac{-1 + \lambda_i \lambda_j}{\lambda_j - \lambda_i} \\ &\text{para } a = 1, \dots, N; \ b = 1, \dots, N-a; \ c = 0, \dots, b. \end{aligned} \quad (394)$$

Concluimos esta seção mencionando que nossos resultados algébricos podem também ser aplicados a sistemas que possuem um número infinito de graus de liberdade. Por exemplo, este é o caso de modelos de vértices não-compactos baseados na álgebra $Sl(2, R)$ [40]. Nesta referência mostramos também uma relação surpreendente entre este sistema não-compacto e os modelos de vértices tratados nesta seção.

6 Conclusão

Nesta tese demonstramos como o método do ansatz de Bethe algébrico funciona para modelos de vértices com N estados, cuja matriz R comuta com uma única simetria de carga $U(1)$. Essa invariância garante a existência de dois estados de referência onde a projeção da respectiva matriz de monodromia é triangular. Mencionamos que essa é a primeira exigência para implementarmos a técnica do ansatz de Bethe algébrico. Solucionamos o problema de autovalor desta matriz de transferência sem fazer menção a qualquer forma funcional particular da matriz R . Alegamos que a formulação algébrica dos estados de Bethe da matriz de transferência é obtida baseada apenas na álgebra de Yang-Baxter e exigindo que a matriz R satisfaça a equação de Yang-Baxter e a propriedade de unitariedade. Neste sentido, apresentamos um método de construção das relações de comutação apropriadas entre os elementos da matriz de monodromia. Também introduzimos técnicas de construção de identidades entre os elementos da matriz R derivadas da equação Yang-Baxter e da propriedade de unitariedade, que são utilizadas na resolução do problema de autovalor.

Nossa formulação fornece expressões para os autovalores e autovetores da matriz de transferência, bem como, as equações do ansatz de Bethe e a estrutura dos termos não-desejados. As respectivas amplitudes dos termos não-desejados são determinadas através de uma relação de recorrência, cujas entradas são elementos da matriz R . Até o presente momento, o entendimento da estrutura dos termos não-desejados estava restrito aos modelos de seis [18] e dezenove [20] vértices. Todavia, fornecemos os ingredientes básicos para o cálculo de tais propriedades para quaisquer modelos de vértices bidimensionais com simetria $U(1)$. Apresentamos a estrutura dos termos não-desejados no caso de modelos de vértices baseados no grupo quântico $U_q[SL(2)]$ e futuramente publicaremos [40] estes resultados, bem como essa estrutura no caso de modelos de vértice não-compactos baseados na álgebra $SL(2, R)$. Nestes casos encontramos que as amplitudes ${}_c\mathcal{F}_b^{(a)}(\lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_b)$ são fatorizáveis em produtos de funções elementares.

Acreditamos que nossa formulação será relevante na resolução de outras famílias de modelos integráveis através do ansatz de Bethe algébrico. Em particular, temos convicção que a estrutura universal de nossas expressões para os autovetores e termos não-desejados são fundamentais na solução do ansatz de Bethe “nested” de modelos cuja matriz R comuta com mais de uma simetria $U(1)$. Verificamos essa afirmação no caso do modelo de Hubbard [26], cuja

solução do ansatz de Bethe algébrico assemelha-se a formulação do ansatz de Bethe algébrico de modelos de vértice com três estados $N = 3$ e uma simetria $U(1)$ [41]. Em geral, esperamos que a solução algébrica de um modelo integrável de N estados com m_1 cargas conservadas $U(1)$ será descrita em termos de uma matriz de monodromia $(N - m_1 + 1) \times (N - m_1 + 1)$. A partição da matriz de monodromia de $N \times N$ para $(N - m_1 + 1) \times (N - m_1 + 1)$ é ditada pela forma dos operadores $U(1)$ que comutam com a matriz R . Isto implica que as respectivas relações de recorrência para os autovetores e termos não-desejados são governados pelo número efetivo $\bar{N} = N - m_1 + 1$. Desse modo, as amplitudes ${}_c\mathcal{F}_b^{(a)}(\lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_b)$ serão vetores com m_1^2 componentes enquanto que a função $\theta(\lambda, \mu)$ atuará como uma matriz $\bar{R}(\lambda, \mu)$ auxiliar, fatorizável de dimensão $m_1^2 \times m_1^2$ com simetria de unitariedade. Esse cenário funciona para modelos específicos de vértices de N estados de duas simetria $U(1)$, como por exemplo os modelos baseados nas álgebras de Lie não-excepcionais [21]. Também verificamos essa afirmação para o modelo de vértices relacionado a representação fundamental da álgebra $U_q[G_2]$ [42]. Neste caso a respectiva matriz R tem dimensão $7^2 \times 7^2$, enquanto que a corresponde solução do ansatz de Bethe algébrico é formulada por uma matriz de monodromia 5×5 . Em todos esses casos, as matrizes R auxiliares correspondentes $\bar{R}(\lambda, \mu)$ são derivadas da análise das relações de comutação geradas pelo método geral descrito na seção 2. A fatorização e a unitariedade destas matrizes foram verificadas utilizando os respectivos pesos particulares. Os resultados desta tese sugerem que essas propriedades são conseqüências da equação de Yang-Baxter e da relação de unitariedade da matriz R original com que iniciamos. Acreditamos que essa hipótese pode ser confirmada a partir da generalização do método descrito na seção 3.

Por fim, acrescentamos que essa tese elucida a expectativa de que as propriedades do ansatz de Bethe para modelos integráveis devem ser expressas em termos de fórmulas universais dependentes apenas das amplitudes da matriz R . Acreditamos que nossos resultados sirvam de ponto de partida para a formulação geral do método do ansatz de Bethe algébrico para sistemas integráveis com mais de uma simetria de carga $U(1)$.

A aplicação dessa estratégia na abordagem do problema de diagonalização da respectiva matriz de transferência culminou nos seguintes resultados. Em primeiro lugar, obtemos os autovalores da matriz de transferência (293) em termos das amplitudes $R(\lambda, \mu)_{a,b}^{c,d}$, bem como os respectivos autovetores em termos de uma nova relação de recorrência (282) envolvendo os $N - 1$ distintos operadores de criação $\mathcal{T}_{1,b}(\lambda)$ para $b = 2, \dots, N$. Também calculamos expli-

tamente a ação individual dos operadores diagonais da matriz de monodromia nos autovetores da matriz de transferência (283). Esse resultado fornece outra nova relação de recorrência (284,285,286) para as funções ${}_c\mathcal{F}_b^{(a)}(\lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_b)$. Enfatizamos que uma classe dessas funções determina os coeficientes da combinação envolvendo os operadores de criação $\mathcal{T}_{1,b}(\lambda)$ que define os autovetores. As funções ${}_c\mathcal{F}_b^{(a)}(\lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_b)$ também determinam as contribuições dos termos não-desejados oriundos da ação individual dos operadores diagonais nos autovetores. Acreditamos que esse fato possibilitará importantes aplicações dos resultados encontrados. A estrutura encontrada durante a construção do estado de três partículas fornece fortes evidências que as funções ${}_c\mathcal{F}_b^{(a)}(\lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_b)$ também determinam de maneira simplificada a ação dos operadores de aniquilação nos autovetores da matriz de transferência. Certamente, esse é um importante passo no cálculo das normas desses vetores, o que, sem sombra de dúvidas, auxiliará no cálculo de funções de correlação.

Gostaríamos de comentar que a parte composta pelos termos não-desejados produzida pela análise completa do ansatz de Bethe contém muito mais informações do que pode-se pensar a primeira vista [37]. Por exemplo, o limite semi-clássico dos termos não-desejados tem um importante papel na solução de modelos tipo Gaudin e das equações de Knizhik-Zamolodchikov [38]. De acordo com os resultados obtidos na seção 5, acreditamos que em geral as funções ${}_c\mathcal{F}_b^{(a)}(\lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_b)$ são fatorizadas em termos das amplitudes de espalhamento de duas partículas. Assim, esperamos que o estudo dessas funções não seja tão complicado. A próxima etapa da pesquisa tem o objetivo de tratado o problema de autovalor da matriz de transferência para sistema com condição aberta de contorno. Futuramente, pretendemos estender a estratégia apresentada nesta tese para modelos de vértices com mais de uma simetria $U(1)$. Em seguida, abordaremos o problema do cálculo das normas dos autovetores da matriz de transferência. Conforme descrito acima, acreditamos que os resultados aqui obtidos são um importante passo para solucionarmos essa questão e então, atacar o problema do cálculo de função de correlação [43].

Apêndice A: caso $a = N - 1$ das identidades dos pesos de Boltzmann

Na seção 3.2 estão descritas algumas técnicas de obtenção de identidades a partir da Equação de Yang-Baxter (12) utilizadas no problema de autovalor da matriz de transferência. Entretanto, ainda resta abordarmos os procedimentos que geram identidades a partir dos elementos da equação de Yang-Baxter descritos na tabela (8) no caso $a = N - 1$ para $N = 3$ e $N \geq 4$, sendo este o propósito deste apêndice.

Os elementos $YB_{3+k, N-1-k, 1}^{2+j, N-1-j, 2}(\lambda_1, \lambda, \lambda_2)$ e $YB_{3+k, N-1-k, 1}^{4+j, N-2-j, 1}(\lambda_1, \lambda, \lambda_2)$ da Eq.(12) descritos na tabela (8) para $a = N - 1$ são casos particulares das Eqs.(133,134). As manipulações algébrica envolvendo essas equações para $a = N - 1$ são semelhantes às manipulações descritas na seção 3.2. Seguindo a mesma linha de raciocínio estabelecida nesta seção, a primeira etapa a ser realizada tem como objetivo eliminar os termos do lado direito das Eqs.(133,134) que não possuam as amplitudes $R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,1}^{2,2}$ e $R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,1}^{3,1}$ respectivamente. No caso $k = 0$, essa tarefa é realizada matriciando a Eq.(133) com $a = N - 1$ para $0 \leq j \leq N - 2$ e a Eq.(134) com $a = N - 1$ para $j = -2$ e $0 \leq j \leq N - 4$ nas variáveis $R(\lambda, \lambda_2)_{N-1,1}^{b_2, N-b_2} R(\lambda_1, \lambda_2)_{3, N-b_2}^{N+1-b_2, 2}$ e $R(\lambda, \lambda_2)_{N-1,1}^{b_2, N-b_2} R(\lambda_1, \lambda_2)_{3, N-b_2}^{N+2-b_2, 1}$ respectivamente. Tais sistemas lineares de equações são dados por

$$\begin{pmatrix} R(\lambda_1, \lambda)_{N,1}^{2, N-1} & \dots & R(\lambda_1, \lambda)_{2, N-1}^{2, N-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ R(\lambda_1, \lambda)_{N,1}^{N,1} & \dots & R(\lambda_1, \lambda)_{2, N-1}^{N,1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R(\lambda, \lambda_2)_{N-1,1}^{1, N-1} R(\lambda_1, \lambda_2)_{3, N-1}^{N,2} \\ \vdots \\ R(\lambda, \lambda_2)_{N-1,1}^{N-1,1} R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,1}^{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{2,1}^{0,0} \\ \vdots \\ v_{2,1}^{0, N-2} \end{pmatrix} \quad (\text{A.1})$$

e

$$\begin{pmatrix} R(\lambda_1, \lambda)_{N,2}^{2, N} & \dots & R(\lambda_1, \lambda)_{3, N-1}^{2, N} \\ R(\lambda_1, \lambda)_{N,2}^{4, N-2} & \dots & R(\lambda_1, \lambda)_{3, N-1}^{4, N-2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ R(\lambda_1, \lambda)_{N,2}^{N,2} & \dots & R(\lambda_1, \lambda)_{3, N-1}^{N,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R(\lambda, \lambda_2)_{N-1,1}^{2, N-2} R(\lambda_1, \lambda_2)_{3, N-2}^{N,1} \\ R(\lambda, \lambda_2)_{N-1,1}^{3, N-3} R(\lambda_1, \lambda_2)_{3, N-3}^{N-1,1} \\ \vdots \\ R(\lambda, \lambda_2)_{N-1,1}^{N-1,1} R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,1}^{3,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{1,1}^{0,-2} \\ v_{1,1}^{0,0} \\ \vdots \\ v_{1,1}^{0, N-4} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.2})$$

onde no caso $a = N - 1$ as generalizações $v_{2,1}^{k,j}$ e $v_{1,1}^{k,j}$ das funções $v_{2,1}^{0,j}$ e $v_{1,1}^{0,j}$ são redefinidas por

$$v_{2,1}^{k,j} = \sum_{b_2=2}^{N-j} R(\lambda_1, \lambda)_{3+k, N-1-k}^{N+2-b_2, b_2} R(\lambda_1, \lambda_2)_{N+2-b_2, 1}^{2+j, N+1-j-b_2} R(\lambda, \lambda_2)_{b_2, N+1-j-b_2}^{N-1-j, 2} \quad (\text{A.3})$$

e

$$v_{1,1}^{k,j} = \sum_{b_2=2}^{N-j-2} R(\lambda_1, \lambda)_{3+k, N-1-k}^{N+2-b_2, b_2} R(\lambda_1, \lambda_2)_{N+2-b_2, 1}^{4+j, N-1-j-b_2} R(\lambda, \lambda_2)_{b_2, N-1-j-b_2}^{N-j-2, 1}. \quad (\text{A.4})$$

Calculando o último termo $R(\lambda, \lambda_2)_{N-1,1}^{N-1,1} R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,1}^{2,2}$ e $R(\lambda, \lambda_2)_{N-1,1}^{N-1,1} R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,1}^{3,1}$ dos sistemas (A.1,A.2) e então isolando $v_{2,1}^{0,0}$ e $v_{1,1}^{0,-2}$ respectivamente encontramos os resultados

$$\sum_{b_2=2}^N R(\lambda_1, \lambda)_{3, N-1}^{N+2-b_2, b_2} R(\lambda_1, \lambda_2)_{N+2-b_2, 1}^{2, N+1-b_2} R(\lambda, \lambda_2)_{b_2, N+1-b_2}^{N-1, 2} = S_{2,0}^0 + S_{2,1}^0 \quad (\text{A.5})$$

e

$$\sum_{b_2=2}^N R(\lambda_1, \lambda)_{3, N-1}^{N+2-b_2, b_2} R(\lambda_1, \lambda_2)_{N+2-b_2, 1}^{2, N+1-b_2} R(\lambda, \lambda_2)_{b_2, N+1-b_2}^{N, 1} = S_{1,0}^0 + S_{1,1}^0, \quad (\text{A.6})$$

onde as funções $S_{2,0}^0$ e $S_{1,0}^0$ e as generalizações $S_{2,1}^k$ e $S_{1,1}^k$ das funções $S_{2,1}^0$ e $S_{1,1}^0$ no caso $a = N - 1$

são redefinidas por

$$S_{2,0}^0 = (-1)^N R(\lambda, \lambda_2)_{N-1,1}^{N-1,1} R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,1}^{2,2} \frac{D_4^{(N,2)}(\lambda, \lambda_1)}{D_4^{(N,3)}(\lambda, \lambda_1)}, \quad (\text{A.7})$$

$$S_{1,0}^0 = (-1)^N R(\lambda, \lambda_2)_{N-1,1}^{N-1,1} R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,1}^{3,1} \frac{D_5^{(N+1,2)}(\lambda, \lambda_1)}{D_4^{(N+1,4)}(\lambda, \lambda_1)}, \quad (\text{A.8})$$

$$S_{2,1}^k = (-1)^{N-1} \frac{\begin{vmatrix} R(\lambda_1, \lambda)_{N,1}^{2,N-1} & \dots & R(\lambda_1, \lambda)_{3,N-2}^{2,N-1} & 0 \\ R(\lambda_1, \lambda)_{N,1}^{3,N-2} & \dots & R(\lambda_1, \lambda)_{3,N-2}^{3,N-2} & v_{2,1}^{k,1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ R(\lambda_1, \lambda)_{N,1}^{N,1} & \dots & R(\lambda_1, \lambda)_{3,N-2}^{N,1} & v_{2,1}^{k,N-2} \end{vmatrix}}{D_4^{(N,3)}(\lambda, \lambda_1)} \quad (\text{A.9})$$

e

$$S_{1,1}^k = (-1)^{N-1} \frac{\begin{vmatrix} R(\lambda_1, \lambda)_{N,2}^{2,N} & \dots & R(\lambda_1, \lambda)_{4,N-2}^{2,N} & 0 \\ R(\lambda_1, \lambda)_{N,2}^{4,N-2} & \dots & R(\lambda_1, \lambda)_{4,N-2}^{4,N-2} & v_{1,1}^{k,0} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ R(\lambda_1, \lambda)_{N,2}^{N,2} & \dots & R(\lambda_1, \lambda)_{4,N-2}^{N,2} & v_{1,1}^{k,N-4} \end{vmatrix}}{D_4^{(N+1,4)}(\lambda, \lambda_1)}, \quad (\text{A.10})$$

onde os determinantes $D_4^{(i,b)}(\lambda, \lambda_1)$ e $D_5^{(i,2)}(\lambda, \lambda_1)$ para $i \leq N$ são definidos pelas Eqs.(126,127), sendo que no caso $i = N + 1$ esses determinantes são dados por

$$D_4^{(N+1,b)}(\lambda, \lambda_1) = (-1)^{b-1} \begin{vmatrix} R(\lambda_1, \lambda)_{N,2}^{b,N+2-b} & \dots & R(\lambda_1, \lambda)_{N,2}^{N,2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ R(\lambda_1, \lambda)_{b,N+2-b}^{b,N+2-b} & \dots & R(\lambda_1, \lambda)_{b,N+2-b}^{N,2} \end{vmatrix} \quad (\text{A.11})$$

e

$$D_5^{(N+1,2)}(\lambda, \lambda_1) = \begin{vmatrix} R(\lambda_1, \lambda)_{N,2}^{2,N} & R(\lambda_1, \lambda)_{N,2}^{4,N-2} & \dots & R(\lambda_1, \lambda)_{N,2}^{N,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R(\lambda_1, \lambda)_{3,N-1}^{2,N} & R(\lambda_1, \lambda)_{3,N-1}^{4,N-2} & \dots & R(\lambda_1, \lambda)_{3,N-1}^{N,2} \end{vmatrix}. \quad (\text{A.12})$$

A próxima etapa das manipulações algébricas tem o propósito de eliminar os termos do lado direito das Eqs.(133,134) para $a = N - 1$ e $1 \leq k \leq N - 2$. Análogo as Eqs.(140,148), inicialmente reescrevemos a Eq.(133) com $a = N - 1$ para $0 \leq j \leq N - 2$ e a Eq.(134) com

$a = N - 1$ para $j = -2$ e $0 \leq j \leq N - 4$ da seguinte forma vetorial respectivamente

$$\begin{pmatrix} v_{2,1}^{k,0} \\ \vdots \\ v_{2,1}^{k,N-2} \end{pmatrix} = \sum_{b_2=1}^{N-1-k} R(\lambda, \lambda_2)_{N-1-k,1}^{b_2,N-k-b_2} R(\lambda_1, \lambda_2)_{3+k,N-k-b_2}^{N+1-b_2,2} \begin{pmatrix} R(\lambda_1, \lambda)_{N+1-b_2,b_2}^{2,N-1} \\ \vdots \\ R(\lambda_1, \lambda)_{N+1-b_2,b_2}^{N,1} \end{pmatrix},$$

para $a = N - 1$ e $1 \leq k \leq N - 2$ (A.13)

e

$$\begin{pmatrix} v_{1,1}^{k,-2} \\ v_{1,1}^{k,0} \\ \vdots \\ v_{1,1}^{k,N-4} \end{pmatrix} = \sum_{b_2=2}^{N-1-k} R(\lambda, \lambda_2)_{N-1-k,1}^{b_2,N-k-b_2} R(\lambda_1, \lambda_2)_{3+k,N-k-b_2}^{N+2-b_2,1} \begin{pmatrix} R(\lambda_1, \lambda)_{N+2-b_2,b_2}^{2,N} v_{1,1}^{0,-2} \\ R(\lambda_1, \lambda)_{N+2-b_2,b_2}^{4,N-2} v_{1,1}^{0,0} \\ \vdots \\ R(\lambda_1, \lambda)_{N+2-b_2,b_2}^{N+1,1} v_{1,1}^{0,N-3} \end{pmatrix},$$

para $a = N - 1$ e $1 \leq k \leq N - 2$. (A.14)

Para eliminar a somatória do lado direito das Eqs.(A.13,A.14), substituímos a última coluna das matrizes dos sistemas (A.1,A.2) pelas equações vetoriais anteriores e então calculamos o determinante das novas matrizes, cujo resultado final é

$$\begin{vmatrix} R(\lambda_1, \lambda)_{N,1}^{2,N-1} & \dots & R(\lambda_1, \lambda)_{3,N-2}^{2,N-1} & v_{2,1}^{k,0} \\ R(\lambda_1, \lambda)_{a+1,1}^{3,a-1} & \dots & R(\lambda_1, \lambda)_{3,a-1}^{3,a-1} & v_{2,1}^{k,1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ R(\lambda_1, \lambda)_{N,1}^{N,1} & \dots & R(\lambda_1, \lambda)_{3,N-2}^{N,1} & v_{2,1}^{k,N-2} \end{vmatrix} = \sum_{b_2=1}^{N-1-k} R(\lambda, \lambda_2)_{N-1-k,1}^{b_2,N-k-b_2} R(\lambda_1, \lambda_2)_{3+k,N-k-b_2}^{N+1-b_2,2}$$

$$\times \begin{vmatrix} R(\lambda_1, \lambda)_{N,1}^{2,N-1} & \dots & R(\lambda_1, \lambda)_{3,N-2}^{2,N-1} & R(\lambda_1, \lambda)_{N+1-b_2,b_2}^{2,N-1} \\ R(\lambda_1, \lambda)_{N,1}^{3,N-2} & \dots & R(\lambda_1, \lambda)_{3,N-2}^{3,N-2} & R(\lambda_1, \lambda)_{N+1-b_2,b_2}^{3,N-2} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ R(\lambda_1, \lambda)_{N,1}^{N,1} & \dots & R(\lambda_1, \lambda)_{3,N-2}^{N,1} & R(\lambda_1, \lambda)_{N+1-b_2,b_2}^{N,1} \end{vmatrix} \quad (\text{A.15})$$

e

$$\begin{aligned}
 & \begin{vmatrix} R(\lambda_1, \lambda)_{N,2}^{2,N} & \dots & R(\lambda_1, \lambda)_{4,N-2}^{2,N} & v_{1,1}^{k,-2} \\ R(\lambda_1, \lambda)_{N,2}^{4,N-2} & \dots & R(\lambda_1, \lambda)_{4,N-2}^{4,N-2} & v_{1,1}^{k,0} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ R(\lambda_1, \lambda)_{N,2}^{N,2} & \dots & R(\lambda_1, \lambda)_{4,N-2}^{N,2} & v_{1,1}^{k,N-4} \end{vmatrix} = \sum_{b_2=2}^{N-1-k} R(\lambda, \lambda_2)_{N-1-k,1}^{b_2,N-k-b_2} R(\lambda_1, \lambda_2)_{3+k,N-k-b_2}^{N+2-b_2,1} \\
 & \times \begin{vmatrix} R(\lambda_1, \lambda)_{N,2}^{2,N} & \dots & R(\lambda_1, \lambda)_{4,N-2}^{2,N} & R(\lambda_1, \lambda)_{N+2-b_2,b_2}^{2,N} \\ R(\lambda_1, \lambda)_{N,2}^{4,N-2} & \dots & R(\lambda_1, \lambda)_{4,N-2}^{4,N-2} & R(\lambda_1, \lambda)_{N+2-b_2,b_2}^{4,N-2} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ R(\lambda_1, \lambda)_{N,2}^{N,2} & \dots & R(\lambda_1, \lambda)_{4,N-2}^{N,2} & R(\lambda_1, \lambda)_{N+2-b_2,b_2}^{N,2} \end{vmatrix} \quad (A.16)
 \end{aligned}$$

Análogo as Eqs.(141,149), a somatória do lado direito das Eqs.(A.15,A.16) é nula. Isolando o termo $v_{2,1}^{k,0}$ e $v_{1,1}^{k,-2}$ e levando em consideração as expressões (A.5,A.6), obtemos os seguintes resultados respectivamente

$$\sum_{b_2=2}^N R(\lambda_1, \lambda)_{3+k,N-1-k}^{N+2-b_2,b_2} R(\lambda_1, \lambda_2)_{N+2-b_2,1}^{2,N+1-b_2} R(\lambda, \lambda_2)_{b_2,N+1-b_2}^{N-1,2} = \delta_{k,0} S_{2,0}^0 + S_{2,1}^k, \quad \text{para } 0 \leq k \leq N-3 \quad (A.17)$$

e

$$\sum_{b_2=2}^N R(\lambda_1, \lambda)_{3+k,N-1-k}^{N+2-b_2,b_2} R(\lambda_1, \lambda_2)_{N+2-b_2,1}^{2,N+1-b_2} R(\lambda, \lambda_2)_{b_2,N+1-b_2}^{N,1} = \delta_{k,0} S_{1,0}^0 + S_{1,1}^k, \quad \text{para } 0 \leq k \leq N-3. \quad (A.18)$$

A partir das Eqs.(A.17,A.18) geramos $N - 2$ sistemas lineares de dimensão 2×2 dados pela seguinte expressão

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} R(\lambda, \lambda_2)_{N,1}^{N-1,2} & R(\lambda, \lambda_2)_{N-1,2}^{N-1,2} \\ R(\lambda, \lambda_2)_{N,1}^{N,1} & R(\lambda, \lambda_2)_{N-1,2}^{N,1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R(\lambda_1, \lambda_2)_{2,1}^{2,1} R(\lambda_1, \lambda)_{3+k,N-1-k}^{2,N} \\ R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,1}^{2,2} R(\lambda_1, \lambda)_{3+k,N-1-k}^{3,N-1} \end{pmatrix} \\
 & + \sum_{b_2=2}^{N-2} \begin{pmatrix} R(\lambda, \lambda_2)_{b_2,N+1-b_2}^{N-1,2} \\ R(\lambda, \lambda_2)_{b_2,N+1-b_2}^{N,1} \end{pmatrix} R(\lambda_1, \lambda_2)_{N+2-b_2,1}^{2,N+1-b_2} R(\lambda_1, \lambda)_{3+k,N-1-k}^{N+2-b_2,b_2} \\
 & = \begin{pmatrix} S_{2,1}^k \\ S_{1,1}^k \end{pmatrix} + \delta_{k,0} \begin{pmatrix} S_{2,0}^0 \\ S_{1,0}^0 \end{pmatrix}, \quad \text{para } 0 \leq k \leq N-3 \text{ e } N \geq 4. \quad (A.19)
 \end{aligned}$$

Computando o termo $R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,1}^{2,2} R(\lambda_1, \lambda)_{3+k,N-1-k}^{3,N-1}$ no sistema (A.19) encontramos a se-

guinte identidade

$$\begin{aligned}
 & \sum_{b_2=2}^{N-1} \begin{vmatrix} R(\lambda, \lambda_2)_{N,1}^{N-1,2} & R(\lambda, \lambda_2)_{b_2, N+1-b_2}^{N-1,2} \\ R(\lambda, \lambda_2)_{N,1}^{N,1} & R(\lambda, \lambda_2)_{b_2, N+1-b_2}^{N,1} \end{vmatrix} R(\lambda_1, \lambda_2)_{N+2-b_2,1}^{2, N+1-b_2} R(\lambda_1, \lambda)_{3+k, N-1-k}^{N+2-b_2, b_2} \\
 &= \begin{vmatrix} R(\lambda, \lambda_2)_{N,1}^{N-1,2} & S_{2,1}^k \\ R(\lambda, \lambda_2)_{N,1}^{N,1} & S_{1,1}^k \end{vmatrix} + \delta_{k,0} \begin{vmatrix} R(\lambda, \lambda_2)_{N,1}^{N-1,2} & S_{2,0}^0 \\ R(\lambda, \lambda_2)_{N,1}^{N,1} & S_{1,0}^0 \end{vmatrix}, \quad \text{para } 0 \leq k \leq N-3 \text{ e } N \geq 4.
 \end{aligned} \tag{A.20}$$

Matriciando a Eq.(A.20) através da variação do índice k obtemos o sistema linear de equações que gera uma das identidades utilizadas no problema de autovalor da matriz de transferência. Tal sistema é dado pela equação abaixo

$$\begin{pmatrix} R(\lambda_1, \lambda)_{N,2}^{3, N-1} & \dots & R(\lambda_1, \lambda)_{N,2}^{N,2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ R(\lambda_1, \lambda)_{3, N-1}^{3, N-1} & \dots & R(\lambda_1, \lambda)_{3, N-1}^{N,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} R(\lambda, \lambda_2)_{N,1}^{N-1,2} & R(\lambda, \lambda_2)_{N-1,2}^{N-1,2} \\ R(\lambda, \lambda_2)_{N,1}^{N,1} & R(\lambda, \lambda_2)_{N-1,2}^{N,1} \end{vmatrix} R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,1}^{2,2} \\ \vdots \\ \begin{vmatrix} R(\lambda, \lambda_2)_{N,1}^{N-1,2} & R(\lambda, \lambda_2)_{2, N-1}^{N-1,2} \\ R(\lambda, \lambda_2)_{N,1}^{N,1} & R(\lambda, \lambda_2)_{2, N-1}^{N,1} \end{vmatrix} R(\lambda_1, \lambda_2)_{N,1}^{2, N-1} \end{pmatrix} = \vec{b}, \tag{A.21}$$

onde o vetor \vec{b} é definido da forma

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} R(\lambda, \lambda_2)_{N,1}^{N-1,2} & S_{2,1}^{N-3} \\ R(\lambda, \lambda_2)_{N,1}^{N,1} & S_{1,1}^{N-3} \end{vmatrix} \\ \vdots \\ \begin{vmatrix} R(\lambda, \lambda_2)_{N,1}^{N-1,2} & S_{2,1}^0 \\ R(\lambda, \lambda_2)_{N,1}^{N,1} & S_{1,1}^0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \begin{vmatrix} R(\lambda, \lambda_2)_{N,1}^{N-1,2} & S_{2,0}^0 \\ R(\lambda, \lambda_2)_{N,1}^{N,1} & S_{1,0}^0 \end{vmatrix} \end{pmatrix}. \tag{A.22}$$

Calculando através da regra de Cramer o primeiro termo do sistema linear (A.21) obtemos

a seguinte identidade

$$\begin{aligned}
 & D_4^{(N+1,3)}(\lambda, \lambda_1) \begin{vmatrix} R(\lambda, \lambda_2)_{N,1}^{N-1,2} & R(\lambda, \lambda_2)_{N-1,2}^{N-1,2} \\ R(\lambda, \lambda_2)_{N,1}^{N,1} & R(\lambda, \lambda_2)_{N-1,2}^{N,1} \end{vmatrix} R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,1}^{2,2} = (-1)^N D_4^{(N+1,4)}(\lambda, \lambda_1) \\
 & \times \begin{vmatrix} R(\lambda, \lambda_2)_{N,1}^{N-1,2} & S_{2,0}^0 \\ R(\lambda, \lambda_2)_{N,1}^{N,1} & S_{1,0}^0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} R(\lambda, \lambda_2)_{N,1}^{N-1,2} & S_{2,1}^{N-3} \\ R(\lambda, \lambda_2)_{N,1}^{N,1} & S_{1,1}^{N-3} \end{vmatrix} & R(\lambda_1, \lambda)_{N,2}^{4,N-2} & \dots & R(\lambda_1, \lambda)_{N,2}^{N,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \begin{vmatrix} R(\lambda, \lambda_2)_{N,1}^{N-1,2} & S_{2,1}^0 \\ R(\lambda, \lambda_2)_{N,1}^{N,1} & S_{1,1}^0 \end{vmatrix} & R(\lambda_1, \lambda)_{3,N-1}^{4,N-2} & \dots & R(\lambda_1, \lambda)_{3,N-1}^{N,2} \end{vmatrix}. \quad (A.23)
 \end{aligned}$$

Substituindo as funções $S_{2,0}^0$, $S_{1,0}^0$, $S_{2,1}^k$ e $S_{1,1}^k$ pelas respectivas definições (A.7-A.10) na Eq.(A.23) e então dividindo o resultado por $-D_4^{(N+1,3)}(\lambda, \lambda_1)R(\lambda, \lambda_2)_{N-1,1}^{N-1,1}R(\lambda, \lambda_2)_{N,1}^{N,1}R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,1}^{3,1}$, após algumas simplificação do último determinante desta equação obtemos como resultado a Eq.(163). Mencionamos que na seção 3.2 utilizamos como definição dos determinantes $D_4^{(N+1,b)}(\lambda, \lambda_1)$ e $D_5^{(N+1,2)}(\lambda, \lambda_1)$ as expressões (161,162) e neste apêndice utilizamos as definições (A.11,A.12). Apesar desta aparente inconsistência, devido ao fato que na Eq.(163) esses determinantes aparecem sempre como razões $\frac{D_4^{(N+1,4)}(\lambda, \lambda_1)}{D_4^{(N+1,3)}(\lambda, \lambda_1)}$ ou $\frac{D_5^{(N+1,2)}(\lambda, \lambda_1)}{D_4^{(N+1,3)}(\lambda, \lambda_1)}$, ambas as definições conduzem ao mesmo resultado.

A seguir analisaremos o caso $a = 2$ e $N = 3$ da Tab.(8). De acordo com essa tabela a Eq.(164) é obtida a partir das equações $YB_{3,2,1}^{2+j,2-j,2}(\lambda_1, \lambda, \lambda_2)$ para $j = 0, 1$ e $YB_{3,2,1}^{2,3,1}(\lambda_1, \lambda, \lambda_2)$ que são dadas respectivamente por

$$\begin{aligned}
 & \sum_{b_2=2}^3 R(\lambda_1, \lambda)_{3,2}^{5-b_2,b_2} R(\lambda_1, \lambda_2)_{5-b_2,1}^{2,4-b_2} R(\lambda, \lambda_2)_{b_2,4-b_2}^{2,2} \\
 & = \sum_{b_2=1}^2 R(\lambda, \lambda_2)_{2,1}^{b_2,3-b_2} R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,3-b_2}^{4-b_2,2} R(\lambda_1, \lambda)_{4-b_2,b_2}^{2,2}, \quad \text{para } j = 0, \quad (A.24)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R(\lambda_1, \lambda)_{3,2}^{3,2} R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,1}^{3,1} R(\lambda, \lambda_2)_{2,1}^{1,2} & = \sum_{b_2=1}^2 R(\lambda, \lambda_2)_{2,1}^{b_2,3-b_2} R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,3-b_2}^{4-b_2,2} R(\lambda_1, \lambda)_{4-b_2,b_2}^{3,1}, \\
 & \text{para } j = 1 \quad (A.25)
 \end{aligned}$$

e

$$\sum_{b_2=2}^3 R(\lambda_1, \lambda)_{3,2}^{5-b_2,b_2} R(\lambda_1, \lambda_2)_{5-b_2,1}^{2,4-b_2} R(\lambda, \lambda_2)_{b_2,4-b_2}^{3,1} = R(\lambda, \lambda_2)_{2,1}^{2,2} R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,1}^{3,1} R(\lambda_1, \lambda)_{3,2}^{2,3}. \quad (\text{A.26})$$

Utilizando as Eqs.(A.24,A.25) construímos o seguinte sistema linear de dimensão 2×2

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} R(\lambda_1, \lambda)_{3,1}^{2,2} & R(\lambda_1, \lambda)_{2,2}^{2,2} \\ R(\lambda_1, \lambda)_{3,1}^{3,1} & R(\lambda_1, \lambda)_{2,2}^{3,1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R(\lambda, \lambda_2)_{2,1}^{1,2} R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,2}^{3,2} \\ R(\lambda, \lambda_2)_{2,1}^{2,1} R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,1}^{2,2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{b_2=2}^3 R(\lambda_1, \lambda)_{3,2}^{5-b_2,b_2} R(\lambda_1, \lambda_2)_{5-b_2,1}^{2,4-b_2} R(\lambda, \lambda_2)_{b_2,4-b_2}^{2,2} \\ R(\lambda_1, \lambda)_{3,2}^{3,2} R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,1}^{3,1} R(\lambda, \lambda_2)_{2,1}^{1,2} \end{pmatrix}, \\ & \text{para } a = 2 \text{ e } N = 3. \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

Calculando o termo $R(\lambda, \lambda_2)_{2,1}^{2,1} R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,1}^{2,2}$ no sistema (A.27) e então isolando a somatória $\sum_{b_2=2}^3 R(\lambda_1, \lambda)_{3,2}^{5-b_2,b_2} R(\lambda_1, \lambda_2)_{5-b_2,1}^{2,4-b_2} R(\lambda, \lambda_2)_{b_2,4-b_2}^{2,2}$ geramos a seguinte expressão

$$\begin{aligned} & \sum_{b_2=2}^3 R(\lambda_1, \lambda)_{3,2}^{5-b_2,b_2} R(\lambda_1, \lambda_2)_{5-b_2,1}^{2,4-b_2} R(\lambda, \lambda_2)_{b_2,4-b_2}^{2,2} = - \frac{\begin{vmatrix} R(\lambda_1, \lambda)_{3,1}^{2,2} & R(\lambda_1, \lambda)_{2,2}^{2,2} \\ R(\lambda_1, \lambda)_{3,1}^{3,1} & R(\lambda_1, \lambda)_{2,2}^{3,1} \end{vmatrix}}{R(\lambda_1, \lambda)_{3,1}^{3,1}} \\ & \times R(\lambda, \lambda_2)_{2,1}^{2,1} R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,1}^{2,2} + \frac{R(\lambda_1, \lambda)_{3,1}^{2,2}}{R(\lambda_1, \lambda)_{3,1}^{3,1}} R(\lambda_1, \lambda)_{3,2}^{3,2} R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,1}^{3,1} R(\lambda, \lambda_2)_{2,1}^{1,2} \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

A partir das Eqs.(A.26,A.28) construímos o sistema linear de dimensão 2×2 que gera a

identidade procurada. Matriciando essas equações encontramos que tal sistema é dado por

$$\begin{pmatrix} R(\lambda, \lambda_2)_{2,2}^{2,2} & R(\lambda, \lambda_2)_{3,1}^{2,2} \\ R(\lambda, \lambda_2)_{2,2}^{3,1} & R(\lambda, \lambda_2)_{3,1}^{3,1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R(\lambda_1, \lambda)_{3,2}^{3,2} R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,1}^{2,2} \\ R(\lambda_1, \lambda)_{3,2}^{2,3} R(\lambda_1, \lambda_2)_{2,1}^{2,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R(\lambda_1, \lambda)_{3,2}^{3,2} R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,1}^{3,1} \\ 0 \end{pmatrix} \\
 \times \frac{R(\lambda_1, \lambda)_{3,1}^{2,2}}{R(\lambda_1, \lambda)_{3,1}^{3,1}} R(\lambda, \lambda_2)_{2,1}^{1,2} + \begin{pmatrix} \left| \begin{matrix} R(\lambda_1, \lambda)_{3,1}^{2,2} & R(\lambda_1, \lambda)_{2,2}^{2,2} \\ R(\lambda_1, \lambda)_{3,1}^{3,1} & R(\lambda_1, \lambda)_{2,2}^{3,1} \end{matrix} \right| \\ R(\lambda_1, \lambda)_{3,1}^{3,1} \\ R(\lambda, \lambda_2)_{2,1}^{2,2} R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,1}^{3,1} R(\lambda_1, \lambda)_{3,2}^{2,3} \end{pmatrix} R(\lambda, \lambda_2)_{2,1}^{2,1} R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,1}^{2,2}, \\
 \text{para } a = 2 \text{ e } N = 3.
 \end{pmatrix} \tag{A.29}$$

Calculando o termo $R(\lambda_1, \lambda)_{3,2}^{3,2} R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,1}^{2,2}$ no sistema (A.29), após algumas simplificações e normalizações chegamos a identidade (164).

Apêndice B: estado de duas partículas

Neste apêndice estão descritos os detalhes técnicos envolvendo o problema de autovalor para o estado de duas partículas. A principal tarefa consiste em comutar os elementos diagonais da matriz de monodromia $\mathcal{T}_{a,a}(\lambda)$ com o ansatz $\phi_2(\lambda_1, \lambda_2)$ dado pela Eq.(181). Para esse fim, é conveniente considerarmos o estado de duas partículas $|\Phi_2\rangle$ em duas partes independentes, isto é,

$$|\Phi_2\rangle = \phi_2(\lambda_1, \lambda_2) |0\rangle = \left| \Phi_2^{(1)} \right\rangle + \left| \Phi_2^{(2)} \right\rangle \quad (\text{B.1})$$

onde, de acordo com o ansatz (181), estas duas partes são definidas por

$$\left| \Phi_2^{(1)} \right\rangle = \mathcal{T}_{1,2}(\lambda_1) \mathcal{T}_{1,2}(\lambda_2) |0\rangle \quad \text{e} \quad \left| \Phi_2^{(2)} \right\rangle = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^2 g_2^{(i)}(\lambda_1, \lambda_2) \mathcal{T}_{1,3}(\lambda_i) \mathcal{T}_{1,1}(\lambda_j) |0\rangle. \quad (\text{B.2})$$

O número e o tipo de regras de comutação necessárias para resolvermos cada uma das partes do estado de duas partículas são bem distintas. Iniciamos nossa análise considerando a ação do campo $\mathcal{T}_{a,a}(\lambda)$ sobre a primeira parte $\mathcal{T}_{1,2}(\lambda_1) \mathcal{T}_{1,2}(\lambda_2)$. Para este caso utilizaremos as três classes de comutação definidas na seção 2. O primeiro procedimento se resume em mover os operadores diagonais sobre os campos de criação $\mathcal{T}_{1,2}(\lambda_1)$ e $\mathcal{T}_{1,2}(\lambda_2)$ com a ajuda das relações (40-42). Os resultados finais são

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{1,1}(\lambda) \left| \Phi_2^{(1)} \right\rangle &= w_1(\lambda) \prod_{i=1}^2 P_1(\lambda, \lambda_i) \left| \Phi_2^{(1)} \right\rangle \\ &- w_1(\lambda_1) \frac{R(\lambda_1, \lambda)_{1,2}^{2,1}}{R(\lambda_1, \lambda)_{2,1}^{2,1}} \frac{R(\lambda_2, \lambda_1)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_2, \lambda_1)_{2,1}^{2,1}} \mathcal{T}_{1,2}(\lambda) \mathcal{T}_{1,2}(\lambda_2) |0\rangle \\ &+ w_1(\lambda_2) \frac{R(\lambda_1, \lambda)_{1,2}^{2,1}}{R(\lambda_1, \lambda)_{2,1}^{2,1}} \frac{R(\lambda_2, \lambda_1)_{1,2}^{1,1}}{R(\lambda_2, \lambda_1)_{2,1}^{2,1}} \mathcal{T}_{1,2}(\lambda) \mathcal{T}_{1,2}(\lambda_1) |0\rangle \\ &- w_1(\lambda_2) \frac{R(\lambda_1, \lambda)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_1, \lambda)_{2,1}^{2,1}} \frac{R(\lambda_2, \lambda)_{1,2}^{2,1}}{R(\lambda_2, \lambda)_{2,1}^{2,1}} \mathcal{T}_{1,2}(\lambda_1) \mathcal{T}_{1,2}(\lambda) |0\rangle \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{T}_{a,a}(\lambda) \left| \Phi_2^{(1)} \right\rangle &= w_a(\lambda) \prod_{i=1}^2 P_a(\lambda, \lambda_i) \left| \Phi_2^{(1)} \right\rangle \\
 &+ w_1(\lambda_1) \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{a+1,1}^{a,2}}{R(\lambda, \lambda_1)_{a+1,1}^{a+1,1}} \frac{R(\lambda_2, \lambda_1)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_2, \lambda_1)_{2,1}^{2,1}} \mathcal{T}_{a,a+1}(\lambda) \mathcal{T}_{1,2}(\lambda_2) |0\rangle \\
 &- w_1(\lambda_2) \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{a+1,1}^{a,2}}{R(\lambda, \lambda_1)_{a+1,1}^{a+1,1}} \frac{R(\lambda_2, \lambda_1)_{1,2}^{2,1}}{R(\lambda_2, \lambda_1)_{2,1}^{2,1}} \mathcal{T}_{a,a+1}(\lambda) \mathcal{T}_{1,2}(\lambda_1) |0\rangle \\
 &- w_2(\lambda_1) \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{a,1}^{a-1,2}}{R(\lambda, \lambda_1)_{a,1}^{a,1}} D_2^{(2,0)}(\lambda_1, \lambda_2) \mathcal{T}_{a-1,a}(\lambda) \mathcal{T}_{1,2}(\lambda_2) |0\rangle \\
 &+ w_2(\lambda_2) \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{a,1}^{a-1,2}}{R(\lambda, \lambda_1)_{a,1}^{a,1}} \frac{R(\lambda_1, \lambda_2)_{2,1}^{1,2}}{R(\lambda_1, \lambda_2)_{2,1}^{2,1}} \mathcal{T}_{a-1,a}(\lambda) \mathcal{T}_{1,2}(\lambda_1) |0\rangle \\
 &- w_1(\lambda_2) \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{a,1}^{a-1,2}}{R(\lambda, \lambda_1)_{a,1}^{a,1}} \frac{R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,1}^{2,2}}{R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,1}^{3,1}} \mathcal{T}_{a-1,a}(\lambda) \mathcal{T}_{2,3}(\lambda_1) |0\rangle \\
 &+ w_1(\lambda_2) P_a(\lambda, \lambda_1) \frac{R(\lambda, \lambda_2)_{a+1,1}^{a,2}}{R(\lambda, \lambda_2)_{a+1,1}^{a+1,1}} \mathcal{T}_{1,2}(\lambda_1) \mathcal{T}_{a,a+1}(\lambda) |0\rangle \\
 &- w_2(\lambda_2) P_a(\lambda, \lambda_1) \frac{R(\lambda, \lambda_2)_{a,1}^{a-1,2}}{R(\lambda, \lambda_2)_{a,1}^{a,1}} \mathcal{T}_{1,2}(\lambda_1) \mathcal{T}_{a-1,a}(\lambda) |0\rangle \\
 &+ \sum_{\bar{e}=3}^{a+1} D_2^{(a,\bar{e}-2)}(\lambda, \lambda_1) \mathcal{T}_{1,\bar{e}}(\lambda_1) \mathcal{T}_{a,a+2-\bar{e}}(\lambda) \mathcal{T}_{1,2}(\lambda_2) |0\rangle \\
 &+ \sum_{\bar{e}=1}^{a-1} \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{a+1,1}^{a,2}}{R(\lambda, \lambda_1)_{a+1,1}^{a+1,1}} \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{a,1}^{\bar{e},a-\bar{e}+1}}{R(\lambda, \lambda_1)_{a,1}^{a,1}} \mathcal{T}_{\bar{e},a+1}(\lambda) \mathcal{T}_{a-\bar{e}+1,1}(\lambda_1) \mathcal{T}_{1,2}(\lambda_2) |0\rangle \\
 &- \sum_{\bar{e}=1}^{a-2} \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{a,1}^{\bar{e},a-\bar{e}+1}}{R(\lambda, \lambda_1)_{a,1}^{a,1}} \mathcal{T}_{\bar{e},a}(\lambda) \mathcal{T}_{a-\bar{e}+1,2}(\lambda_1) \mathcal{T}_{1,2}(\lambda_2) |0\rangle \\
 &\text{para } 2 \leq a \leq N-1,
 \end{aligned} \tag{B.4}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{T}_{N,N}(\lambda) \left| \Phi_2^{(1)} \right\rangle &= w_N(\lambda) \prod_{i=1}^2 P_N(\lambda, \lambda_i) \left| \Phi_2^{(1)} \right\rangle \\
 &- w_2(\lambda_1) D_2^{(2,0)}(\lambda_1, \lambda_2) \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{N,1}^{N-1,2}}{R(\lambda, \lambda_1)_{N,1}^{N,1}} \mathcal{T}_{N-1,N}(\lambda) \mathcal{T}_{1,2}(\lambda_2) |0\rangle \\
 &+ w_2(\lambda_2) \frac{R(\lambda_1, \lambda_2)_{2,1}^{1,2}}{R(\lambda_1, \lambda_2)_{2,1}^{2,1}} \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{N,1}^{N-1,2}}{R(\lambda, \lambda_1)_{N,1}^{N,1}} \mathcal{T}_{N-1,N}(\lambda) \mathcal{T}_{1,2}(\lambda_1) |0\rangle \\
 &- w_1(\lambda_2) \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{N,1}^{N-1,2}}{R(\lambda, \lambda_1)_{N,1}^{N,1}} \frac{R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,1}^{2,2}}{R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,1}^{3,1}} \mathcal{T}_{N-1,N}(\lambda) \mathcal{T}_{2,3}(\lambda_1) |0\rangle \\
 &- w_2(\lambda_2) P_N(\lambda, \lambda_1) \frac{R(\lambda, \lambda_2)_{N,1}^{N-1,2}}{R(\lambda, \lambda_2)_{N,1}^{N,1}} \mathcal{T}_{1,2}(\lambda_1) \mathcal{T}_{N-1,N}(\lambda) |0\rangle . \\
 &+ \sum_{\bar{e}=3}^N \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{N+2-\bar{e},\bar{e}}^{N,2}}{R(\lambda, \lambda_1)_{N,1}^{N,1}} \mathcal{T}_{1,\bar{e}}(\lambda_1) \mathcal{T}_{N,N+2-\bar{e}}(\lambda) \mathcal{T}_{1,2}(\lambda_2) |0\rangle \\
 &- \sum_{\bar{e}=1}^{N-2} \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{N,1}^{\bar{e},N-\bar{e}+1}}{R(\lambda, \lambda_1)_{N,1}^{N,1}} \mathcal{T}_{\bar{e},N}(\lambda) \mathcal{T}_{N-\bar{e}+1,2}(\lambda_1) \mathcal{T}_{1,2}(\lambda_2) |0\rangle
 \end{aligned} \tag{B.5}$$

Infelizmente, as expressões (B.3-B.5) requerem mais simplificação. O último termo da Eq.(B.3), os cinco últimos termos da Eq.(B.4) e os três últimos termos da Eq.(B.5) não possuem uma estrutura conveniente. Note que nem todos os produtos de campos de criação $\mathcal{T}_{1,2}(\lambda)$ e $\mathcal{T}_{a-1,a}(\mu)$ que geram termos não-desejáveis possuem um ordenamento da forma $\mathcal{T}_{a-1,a}(\lambda) \mathcal{T}_{1,2}(\lambda_1)$ ou $\mathcal{T}_{a-1,a}(\lambda) \mathcal{T}_{1,2}(\lambda_2)$ para $a = 2, \dots, N$. Assim, através das regras de comutação (51,54) estabelecemos esse ordenamento entre os campos $\mathcal{T}_{1,2}(\lambda_1)$ e $\mathcal{T}_{a-1,a}(\lambda)$. A próxima dificuldade consiste da presença de campos de aniquilação à esquerda de operadores de criação, e assim devemos movê-los à direita. Esse empecilho é sanado por meio da regra de comutação (65) entre os campos de aniquilação e o operador de criação $\mathcal{T}_{1,2}(\lambda_2)$. Implementado esses procedimentos, encontramos que a ação de $\mathcal{T}_{a,a}(\lambda)$ na primeira parte do ansatz $\left| \Phi_2^{(1)} \right\rangle$ se divide em cinco partes,

as quais são representadas pelas seguintes expressões

$$\begin{aligned}
 \mathcal{T}_{1,1}(\lambda) \left| \Phi_2^{(1)} \right\rangle &= w_1(\lambda) \prod_{i=1}^2 P_1(\lambda, \lambda_i) \left| \Phi_2^{(1)} \right\rangle - w_1(\lambda) \frac{R(\lambda_1, \lambda)_{1,1}^{1,1} R(\lambda_2, \lambda)_{1,2}^{2,1} R(\lambda_1, \lambda)_{3,1}^{2,2}}{R(\lambda_1, \lambda)_{2,1}^{2,1} R(\lambda_2, \lambda)_{2,1}^{2,1} R(\lambda_1, \lambda)_{3,1}^{3,1}} \\
 &\times \mathcal{T}_{1,3}(\lambda_1) \mathcal{T}_{1,1}(\lambda_2) |0\rangle - w_1(\lambda_1) \frac{R(\lambda_1, \lambda)_{1,2}^{2,1} R(\lambda_2, \lambda_1)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_1, \lambda)_{2,1}^{2,1} R(\lambda_2, \lambda_1)_{2,1}^{2,1}} \mathcal{T}_{1,2}(\lambda) \mathcal{T}_{1,2}(\lambda_2) |0\rangle \\
 &- w_1(\lambda_2) \left[\frac{R(\lambda_2, \lambda)_{1,2}^{2,1}}{R(\lambda_2, \lambda)_{2,1}^{2,1}} D_2^{(2,0)}(\lambda_1, \lambda) - \frac{R(\lambda_1, \lambda)_{1,2}^{2,1} R(\lambda_2, \lambda_1)_{1,2}^{2,1}}{R(\lambda_1, \lambda)_{2,1}^{2,1} R(\lambda_2, \lambda_1)_{2,1}^{2,1}} \right] \mathcal{T}_{1,2}(\lambda) \mathcal{T}_{1,2}(\lambda_1) |0\rangle \\
 &- w_1(\lambda_1) w_1(\lambda_2) \frac{R(\lambda_2, \lambda)_{1,2}^{2,1}}{R(\lambda_2, \lambda)_{2,1}^{2,1}} D_2^{(2,1)}(\lambda_1, \lambda) \mathcal{T}_{1,3}(\lambda) |0\rangle
 \end{aligned} \tag{B.6}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{T}_{2,2}(\lambda) \left| \Phi_2^{(1)} \right\rangle &= w_2(\lambda) \prod_{i=1}^2 P_2(\lambda, \lambda_i) \left| \Phi_2^{(1)} \right\rangle \\
 &+ w_2(\lambda) P_2(\lambda, \lambda_1) \left[\frac{D_2^{(2,1)}(\lambda, \lambda_1)}{D_2^{(2,0)}(\lambda, \lambda_1)} \frac{R(\lambda, \lambda_2)_{2,1}^{1,2}}{R(\lambda, \lambda_2)_{2,1}^{2,1}} - \frac{R(\lambda, \lambda_2)_{3,1}^{2,2}}{R(\lambda, \lambda_2)_{3,1}^{3,1}} \frac{D_2^{(3,1)}(\lambda, \lambda_1)}{D_2^{(3,0)}(\lambda, \lambda_1)} \right] \\
 &\times \mathcal{T}_{1,3}(\lambda_1) \mathcal{T}_{1,1}(\lambda_2) |0\rangle - w_2(\lambda_1) P_2(\lambda_1, \lambda_2) \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{2,1}^{1,2}}{R(\lambda, \lambda_1)_{2,1}^{2,1}} \mathcal{T}_{1,2}(\lambda) \mathcal{T}_{1,2}(\lambda_2) |0\rangle \\
 &- w_2(\lambda_2) \left[\frac{R(\lambda, \lambda_2)_{2,1}^{1,2}}{R(\lambda, \lambda_2)_{2,1}^{2,1}} \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda, \lambda_1)_{2,1}^{2,1}} - \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{2,1}^{1,2}}{R(\lambda, \lambda_1)_{2,1}^{2,1}} \frac{R(\lambda_1, \lambda_2)_{2,1}^{1,2}}{R(\lambda_1, \lambda_2)_{2,1}^{2,1}} \right] \mathcal{T}_{1,2}(\lambda) \mathcal{T}_{1,2}(\lambda_1) |0\rangle \\
 &+ w_1(\lambda_1) \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{3,1}^{2,2}}{R(\lambda, \lambda_1)_{3,1}^{3,1}} \frac{R(\lambda_2, \lambda_1)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_2, \lambda_1)_{2,1}^{2,1}} \mathcal{T}_{2,3}(\lambda) \mathcal{T}_{1,2}(\lambda_2) |0\rangle \\
 &+ w_1(\lambda_2) \left[\frac{D_2^{(2,0)}(\lambda, \lambda_1)}{D_2^{(3,0)}(\lambda, \lambda_1)} \frac{R(\lambda, \lambda_2)_{3,1}^{2,2}}{R(\lambda, \lambda_2)_{3,1}^{3,1}} \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{2,1}^{2,1}}{R(\lambda, \lambda_1)_{3,1}^{3,1}} - \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{3,1}^{2,2}}{R(\lambda, \lambda_1)_{3,1}^{3,1}} \frac{R(\lambda_2, \lambda_1)_{2,1}^{2,1}}{R(\lambda_2, \lambda_1)_{2,1}^{2,1}} \right] \\
 &\times \mathcal{T}_{2,3}(\lambda) \mathcal{T}_{1,2}(\lambda_1) |0\rangle \\
 &+ \left[\frac{D_2^{(2,0)}(\lambda, \lambda_1)}{D_2^{(3,0)}(\lambda, \lambda_1)} \frac{R(\lambda, \lambda_2)_{3,1}^{2,2}}{R(\lambda, \lambda_2)_{3,1}^{3,1}} \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{2,1}^{1,2}}{R(\lambda, \lambda_1)_{3,1}^{3,1}} + \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{3,1}^{2,2}}{R(\lambda, \lambda_1)_{3,1}^{3,1}} \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{2,1}^{1,2}}{R(\lambda, \lambda_1)_{2,1}^{2,1}} \frac{R(\lambda_1, \lambda_2)_{2,1}^{1,2}}{R(\lambda_1, \lambda_2)_{2,1}^{2,1}} \right] \\
 &\times w_1(\lambda_2) w_2(\lambda_1) \mathcal{T}_{1,3}(\lambda) |0\rangle \\
 &+ \left[\frac{R(\lambda, \lambda_2)_{2,1}^{1,2}}{R(\lambda, \lambda_2)_{2,1}^{2,1}} \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda, \lambda_1)_{2,1}^{2,1}} \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{3,1}^{2,2}}{R(\lambda, \lambda_1)_{3,1}^{3,1}} - \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{3,1}^{2,2}}{R(\lambda, \lambda_1)_{3,1}^{3,1}} \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{2,1}^{1,2}}{R(\lambda, \lambda_1)_{2,1}^{2,1}} \frac{R(\lambda_1, \lambda_2)_{2,1}^{1,2}}{R(\lambda_1, \lambda_2)_{2,1}^{2,1}} \right] \\
 &\times w_1(\lambda_1) w_2(\lambda_2) \mathcal{T}_{1,3}(\lambda) |0\rangle \\
 &- w_1(\lambda_1) w_1(\lambda_2) \frac{D_2^{(2,0)}(\lambda, \lambda_1)}{D_2^{(3,0)}(\lambda, \lambda_1)} \frac{R(\lambda, \lambda_2)_{3,1}^{2,2}}{R(\lambda, \lambda_2)_{3,1}^{3,1}} \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{2,1}^{2,1}}{R(\lambda, \lambda_1)_{3,1}^{3,1}} \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{4,1}^{3,2}}{R(\lambda, \lambda_1)_{4,1}^{4,1}} \mathcal{T}_{2,4}(\lambda) |0\rangle \\
 &- w_1(\lambda_2) \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{2,1}^{1,2}}{R(\lambda, \lambda_1)_{2,1}^{2,1}} \frac{R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,1}^{2,2}}{R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,1}^{3,1}} \mathcal{T}_{1,2}(\lambda) \mathcal{T}_{2,3}(\lambda_1) |0\rangle
 \end{aligned} \tag{B.7}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{T}_{a,a}(\lambda) \left| \Phi_2^{(1)} \right\rangle &= w_a(\lambda) \prod_{i=1}^2 P_a(\lambda, \lambda_i) \left| \Phi_2^{(1)} \right\rangle \\
 + w_a(\lambda) P_a(\lambda, \lambda_1) &\left[\frac{D_2^{(a,1)}(\lambda, \lambda_1)}{D_2^{(a,0)}(\lambda, \lambda_1)} \frac{R(\lambda, \lambda_2)_{a,1}^{a-1,2}}{R(\lambda, \lambda_2)_{a,1}^{a,1}} - \frac{R(\lambda, \lambda_2)_{a+1,1}^{a,2}}{R(\lambda, \lambda_2)_{a+1,1}^{a+1,1}} \frac{D_2^{(a+1,1)}(\lambda, \lambda_1)}{D_2^{(a+1,0)}(\lambda, \lambda_1)} \right] \\
 \times \mathcal{T}_{1,3}(\lambda_1) \mathcal{T}_{1,1}(\lambda_2) |0\rangle &- w_2(\lambda_1) P_2(\lambda_1, \lambda_2) \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{a,1}^{a-1,2}}{R(\lambda, \lambda_1)_{a,1}^{a,1}} \mathcal{T}_{a-1,a}(\lambda) \mathcal{T}_{1,2}(\lambda_2) |0\rangle \\
 - w_2(\lambda_2) &\left[\frac{R(\lambda, \lambda_2)_{a,1}^{a-1,2}}{R(\lambda, \lambda_2)_{a,1}^{a,1}} \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{a-1,1}^{a-1,1}}{R(\lambda, \lambda_1)_{a,1}^{a,1}} - \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{a,1}^{a-1,2}}{R(\lambda, \lambda_1)_{a,1}^{a,1}} \frac{R(\lambda_1, \lambda_2)_{2,1}^{1,2}}{R(\lambda_1, \lambda_2)_{2,1}^{2,1}} \right] \mathcal{T}_{a-1,a}(\lambda) \mathcal{T}_{1,2}(\lambda_1) |0\rangle \\
 + w_1(\lambda_1) &\frac{R(\lambda, \lambda_1)_{a+1,1}^{a,2}}{R(\lambda, \lambda_1)_{a+1,1}^{a+1,1}} \frac{R(\lambda_2, \lambda_1)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_2, \lambda_1)_{2,1}^{2,1}} \mathcal{T}_{a,a+1}(\lambda) \mathcal{T}_{1,2}(\lambda_2) |0\rangle \\
 + w_1(\lambda_2) &\left[\frac{D_2^{(a,0)}(\lambda, \lambda_1)}{D_2^{(a+1,0)}(\lambda, \lambda_1)} \frac{R(\lambda, \lambda_2)_{a+1,1}^{a,2}}{R(\lambda, \lambda_2)_{a+1,1}^{a+1,1}} \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{a,1}^{a,1}}{R(\lambda, \lambda_1)_{a+1,1}^{a+1,1}} - \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{a+1,1}^{a,2}}{R(\lambda, \lambda_1)_{a+1,1}^{a+1,1}} \frac{R(\lambda_2, \lambda_1)_{1,2}^{2,1}}{R(\lambda_2, \lambda_1)_{2,1}^{2,1}} \right] \\
 \times \mathcal{T}_{a,a+1}(\lambda) \mathcal{T}_{1,2}(\lambda_1) |0\rangle &- w_1(\lambda_1) w_1(\lambda_2) \frac{D_2^{(a,0)}(\lambda, \lambda_1)}{D_2^{(a+1,0)}(\lambda, \lambda_1)} \frac{R(\lambda, \lambda_2)_{a+1,1}^{a,2}}{R(\lambda, \lambda_2)_{a+1,1}^{a+1,1}} \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{a,1}^{a,1}}{R(\lambda, \lambda_1)_{a+1,1}^{a+1,1}} \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{a+2,1}^{a+1,2}}{R(\lambda, \lambda_1)_{a+2,1}^{a+2,1}} \mathcal{T}_{a,a+2}(\lambda) |0\rangle \\
 + \left[\frac{D_2^{(a,0)}(\lambda, \lambda_1)}{D_2^{(a+1,0)}(\lambda, \lambda_1)} \frac{R(\lambda, \lambda_2)_{a+1,1}^{a,2}}{R(\lambda, \lambda_2)_{a+1,1}^{a+1,1}} \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{a,1}^{a-1,2}}{R(\lambda, \lambda_1)_{a+1,1}^{a+1,1}} + \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{a+1,1}^{a,2}}{R(\lambda, \lambda_1)_{a+1,1}^{a+1,1}} \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{a,1}^{a-1,2}}{R(\lambda, \lambda_1)_{a,1}^{a,1}} \frac{R(\lambda_1, \lambda_2)_{2,1}^{1,2}}{R(\lambda_1, \lambda_2)_{2,1}^{2,1}} \right] \\
 \times w_1(\lambda_2) w_2(\lambda_1) \mathcal{T}_{a-1,a+1}(\lambda) |0\rangle &+ \left[\frac{R(\lambda, \lambda_2)_{a,1}^{a-1,2}}{R(\lambda, \lambda_2)_{a,1}^{a,1}} \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{a-1,1}^{a-1,1}}{R(\lambda, \lambda_1)_{a,1}^{a,1}} \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{a+1,1}^{a,2}}{R(\lambda, \lambda_1)_{a+1,1}^{a+1,1}} - \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{a+1,1}^{a,2}}{R(\lambda, \lambda_1)_{a+1,1}^{a+1,1}} \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{a,1}^{a-1,2}}{R(\lambda, \lambda_1)_{a,1}^{a,1}} \frac{R(\lambda_1, \lambda_2)_{2,1}^{1,2}}{R(\lambda_1, \lambda_2)_{2,1}^{2,1}} \right] \\
 \times w_1(\lambda_1) w_2(\lambda_2) \mathcal{T}_{a-1,a+1}(\lambda) |0\rangle &+ w_2(\lambda_1) w_2(\lambda_2) \left[\frac{R(\lambda, \lambda_1)_{a,1}^{a-2,3}}{R(\lambda, \lambda_1)_{a,1}^{a,1}} \frac{R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,1}^{2,2}}{R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,1}^{3,1}} - \frac{R(\lambda, \lambda_2)_{a,1}^{a-1,2}}{R(\lambda, \lambda_2)_{a,1}^{a,1}} \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{a-1,1}^{a-2,2}}{R(\lambda, \lambda_1)_{a,1}^{a,1}} \right] \mathcal{T}_{a-2,a}(\lambda) |0\rangle \\
 - w_1(\lambda_2) &\frac{R(\lambda, \lambda_1)_{a,1}^{a-1,2}}{R(\lambda, \lambda_1)_{a,1}^{a,1}} \frac{R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,1}^{2,2}}{R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,1}^{3,1}} \mathcal{T}_{a-1,a}(\lambda) \mathcal{T}_{2,3}(\lambda_1) |0\rangle \\
 - w_1(\lambda_2) w_3(\lambda_1) &\frac{R(\lambda, \lambda_1)_{a,1}^{a-2,3}}{R(\lambda, \lambda_1)_{a,1}^{a,1}} \frac{R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,1}^{2,2}}{R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,1}^{3,1}} \mathcal{T}_{a-2,a}(\lambda) |0\rangle, \quad \text{para } 3 \leq a \leq N-2, \quad (\text{B.8})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{T}_{N-1,N-1}(\lambda) \left| \Phi_2^{(1)} \right\rangle &= w_{N-1}(\lambda) \prod_{i=1}^2 P_{N-1}(\lambda, \lambda_i) \left| \Phi_2^{(1)} \right\rangle \\
 + w_{N-1}(\lambda) P_{N-1}(\lambda, \lambda_1) &\left[\frac{D_2^{(N-1,1)}(\lambda, \lambda_1)}{D_2^{(N-1,0)}(\lambda, \lambda_1)} \frac{R(\lambda, \lambda_2)_{N-1,1}^{N-2,2}}{R(\lambda, \lambda_2)_{N-1,1}^{N-1,1}} - \frac{R(\lambda, \lambda_2)_{N,1}^{N-1,2}}{R(\lambda, \lambda_2)_{N,1}^{N,1}} \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{N-1,3}^{(N,2)}}{R(\lambda, \lambda_1)_{N,2}^{(N,2)}} \right] \\
 \times \mathcal{T}_{1,3}(\lambda_1) \mathcal{T}_{1,1}(\lambda_2) |0\rangle &- w_2(\lambda_1) P_2(\lambda_1, \lambda_2) \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{N-1,1}^{N-2,2}}{R(\lambda, \lambda_1)_{N-1,1}^{N-1,1}} \mathcal{T}_{N-2,N-1}(\lambda) \mathcal{T}_{1,2}(\lambda_2) |0\rangle \\
 - w_2(\lambda_2) &\left[\frac{R(\lambda, \lambda_2)_{N-1,1}^{N-2,2}}{R(\lambda, \lambda_2)_{N-1,1}^{N-1,1}} \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{N-2,1}^{N-2,1}}{R(\lambda, \lambda_1)_{N-1,1}^{N-1,1}} - \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{N-1,1}^{N-2,2}}{R(\lambda, \lambda_1)_{N-1,1}^{N-1,1}} \frac{R(\lambda_1, \lambda_2)_{2,1}^{1,2}}{R(\lambda_1, \lambda_2)_{2,1}^{2,1}} \right] \\
 \times \mathcal{T}_{N-2,N-1}(\lambda) \mathcal{T}_{1,2}(\lambda_1) |0\rangle &+ w_1(\lambda_1) \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{N,1}^{N-1,2}}{R(\lambda, \lambda_1)_{N,1}^{N,1}} \frac{R(\lambda_2, \lambda_1)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_2, \lambda_1)_{2,1}^{2,1}} \mathcal{T}_{N-1,N}(\lambda) \mathcal{T}_{1,2}(\lambda_2) |0\rangle \\
 + w_1(\lambda_2) &\left[\frac{D_2^{(N-1,0)}(\lambda, \lambda_1)}{D_2^{(N,0)}(\lambda, \lambda_1)} \frac{R(\lambda, \lambda_2)_{N,1}^{N-1,2}}{R(\lambda, \lambda_2)_{N,1}^{N,1}} \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{N-1,1}^{N-1,1}}{R(\lambda, \lambda_1)_{N,1}^{N,1}} - \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{N,1}^{N-1,2}}{R(\lambda, \lambda_1)_{N,1}^{N,1}} \frac{R(\lambda_2, \lambda_1)_{1,2}^{2,1}}{R(\lambda_2, \lambda_1)_{2,1}^{2,1}} \right] \\
 \times \mathcal{T}_{N-1,N}(\lambda) \mathcal{T}_{1,2}(\lambda_1) |0\rangle &+ \left[\frac{D_2^{(N-1,0)}(\lambda, \lambda_1)}{D_2^{(N,0)}(\lambda, \lambda_1)} \frac{R(\lambda, \lambda_2)_{N,1}^{N-1,2}}{R(\lambda, \lambda_2)_{N,1}^{N,1}} \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{N-1,1}^{N-2,2}}{R(\lambda, \lambda_1)_{N,1}^{N,1}} \right. \\
 + \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{N,1}^{N-1,2}}{R(\lambda, \lambda_1)_{N,1}^{N,1}} &\frac{R(\lambda, \lambda_1)_{N-1,1}^{N-2,2}}{R(\lambda, \lambda_1)_{N-1,1}^{N-1,1}} \frac{R(\lambda_1, \lambda_2)_{2,1}^{1,2}}{R(\lambda_1, \lambda_2)_{2,1}^{2,1}} \left. \right] w_1(\lambda_2) w_2(\lambda_1) \mathcal{T}_{N-2,N}(\lambda) |0\rangle \\
 + \left[\frac{R(\lambda, \lambda_2)_{N-1,1}^{N-2,2}}{R(\lambda, \lambda_2)_{N-1,1}^{N-1,1}} \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{N-2,1}^{N-2,1}}{R(\lambda, \lambda_1)_{N-1,1}^{N-1,1}} \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{N,1}^{N-1,2}}{R(\lambda, \lambda_1)_{N,1}^{N,1}} \right. \\
 - \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{N,1}^{N-1,2}}{R(\lambda, \lambda_1)_{N,1}^{N,1}} &\frac{R(\lambda, \lambda_1)_{N-1,1}^{N-2,2}}{R(\lambda, \lambda_1)_{N-1,1}^{N-1,1}} \frac{R(\lambda_1, \lambda_2)_{2,1}^{1,2}}{R(\lambda_1, \lambda_2)_{2,1}^{2,1}} \left. \right] w_1(\lambda_1) w_2(\lambda_2) \mathcal{T}_{N-2,N}(\lambda) |0\rangle \\
 + w_2(\lambda_1) w_2(\lambda_2) &\left[\frac{R(\lambda, \lambda_1)_{N-1,1}^{N-3,3}}{R(\lambda, \lambda_1)_{N-1,1}^{N-1,1}} \frac{R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,1}^{2,2}}{R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,1}^{3,1}} - \frac{R(\lambda, \lambda_2)_{N-1,1}^{N-2,2}}{R(\lambda, \lambda_2)_{N-1,1}^{N-1,1}} \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{N-2,1}^{N-3,2}}{R(\lambda, \lambda_1)_{N-1,1}^{N-1,1}} \right] \\
 \times \mathcal{T}_{N-3,N-1}(\lambda) |0\rangle &- w_1(\lambda_2) \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{N-1,1}^{N-2,2}}{R(\lambda, \lambda_1)_{N-1,1}^{N-1,1}} \frac{R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,1}^{2,2}}{R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,1}^{3,1}} \mathcal{T}_{N-2,N-1}(\lambda) \mathcal{T}_{2,3}(\lambda_1) |0\rangle \\
 - w_1(\lambda_2) w_3(\lambda_1) &\frac{R(\lambda, \lambda_1)_{N-1,1}^{N-3,3}}{R(\lambda, \lambda_1)_{N-1,1}^{N-1,1}} \frac{R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,1}^{2,2}}{R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,1}^{3,1}} \mathcal{T}_{N-3,N-1}(\lambda) |0\rangle
 \end{aligned} \tag{B.9}$$

e

$$\begin{aligned}
 \mathcal{T}_{N,N}(\lambda) \left| \Phi_2^{(1)} \right\rangle &= w_N(\lambda) \prod_{i=1}^2 P_N(\lambda, \lambda_i) \left| \Phi_2^{(1)} \right\rangle + w_N(\lambda) \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{N-1,3}^{N,2}}{R(\lambda, \lambda_1)_{N,1}^{N,1}} \frac{R(\lambda, \lambda_2)_{N,1}^{N-1,2}}{R(\lambda, \lambda_2)_{N,1}^{N,1}} \\
 &\times \mathcal{T}_{1,3}(\lambda_1) \mathcal{T}_{1,1}(\lambda_2) |0\rangle \\
 &- w_2(\lambda_1) D_2^{(2,0)}(\lambda_1, \lambda_2) \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{N,1}^{N-1,2}}{R(\lambda, \lambda_1)_{N,1}^{N,1}} \mathcal{T}_{N-1,N}(\lambda) \mathcal{T}_{1,2}(\lambda_2) |0\rangle \\
 &- w_2(\lambda_2) \left[\frac{R(\lambda, \lambda_2)_{N,1}^{N-1,2}}{R(\lambda, \lambda_2)_{N,1}^{N,1}} \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{N-1,1}^{N-1,1}}{R(\lambda, \lambda_1)_{N,1}^{N,1}} - \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{N,1}^{N-1,2}}{R(\lambda, \lambda_1)_{N,1}^{N,1}} \frac{R(\lambda_1, \lambda_2)_{2,1}^{1,2}}{R(\lambda_1, \lambda_2)_{2,1}^{2,1}} \right] \\
 &\times \mathcal{T}_{N-1,N}(\lambda) \mathcal{T}_{1,2}(\lambda_1) |0\rangle \\
 &+ w_2(\lambda_1) w_2(\lambda_2) \left[\frac{R(\lambda, \lambda_1)_{N,1}^{N-2,3}}{R(\lambda, \lambda_1)_{N,1}^{N,1}} \frac{R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,1}^{2,2}}{R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,1}^{3,1}} - \frac{R(\lambda, \lambda_2)_{N,1}^{N-1,2}}{R(\lambda, \lambda_2)_{N,1}^{N,1}} \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{N-1,1}^{N-2,2}}{R(\lambda, \lambda_1)_{N,1}^{N,1}} \right] \\
 &\times \mathcal{T}_{N-2,N}(\lambda) |0\rangle \\
 &- w_1(\lambda_2) \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{N,1}^{N-1,2}}{R(\lambda, \lambda_1)_{N,1}^{N,1}} \frac{R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,1}^{2,2}}{R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,1}^{3,1}} \mathcal{T}_{N-1,N}(\lambda) \mathcal{T}_{2,3}(\lambda_1) |0\rangle \\
 &- w_1(\lambda_2) w_3(\lambda_1) \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{N,1}^{N-2,3}}{R(\lambda, \lambda_1)_{N,1}^{N,1}} \frac{R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,1}^{2,2}}{R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,1}^{3,1}} \mathcal{T}_{N-2,N}(\lambda) |0\rangle, \tag{B.10}
 \end{aligned}$$

Voltemos agora nossa atenção à segunda parte do ansatz de duas partículas $\left| \Phi_2^{(2)} \right\rangle$. Nesse caso, os cálculos são bem mais simples, uma vez que envolvem apenas as regras de comutação entre os operadores $\mathcal{T}_{a,a}(\lambda)$ e $\mathcal{T}_{1,3}(\lambda_i)$ para $i = 1, 2$. Esse trabalho é implementado por meio das Eqs.(44-47) e os resultados finais são

$$\begin{aligned}
 \mathcal{T}_{1,1}(\lambda) \left| \Phi_2^{(2)} \right\rangle &= \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^2 g_2^{(i)}(\lambda_1, \lambda_2) \frac{R(\lambda_i, \lambda)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_i, \lambda)_{3,1}^{3,1}} w_1(\lambda_j) w_1(\lambda) \mathcal{T}_{1,3}(\lambda_i) |0\rangle \\
 &- \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^2 g_2^{(i)}(\lambda_1, \lambda_2) \frac{R(\lambda_i, \lambda)_{2,2}^{3,1}}{R(\lambda_i, \lambda)_{3,1}^{3,1}} w_1(\lambda_j) \mathcal{T}_{1,2}(\lambda) \mathcal{T}_{1,2}(\lambda_i) |0\rangle \\
 &- \sum_{i=1}^2 g_2^{(i)}(\lambda_1, \lambda_2) \frac{R(\lambda_i, \lambda)_{1,3}^{3,1}}{R(\lambda_i, \lambda)_{3,1}^{3,1}} w_1(\lambda_1) w_1(\lambda_2) \mathcal{T}_{1,3}(\lambda) |0\rangle
 \end{aligned} \tag{B.11}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{T}_{a,a}(\lambda) \left| \Phi_2^{(2)} \right\rangle &= \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^2 g_2^{(i)}(\lambda_1, \lambda_2) D_3^{(a,0)}(\lambda, \lambda_i) w_1(\lambda_j) w_a(\lambda) \mathcal{T}_{1,3}(\lambda_i) |0\rangle \\
 &+ \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^2 g_2^{(i)}(\lambda_1, \lambda_2) \frac{\begin{vmatrix} R(\lambda, \lambda_i)_{a+2,1}^{a,3} & R(\lambda, \lambda_i)_{a+1,2}^{a,3} \\ R(\lambda, \lambda_i)_{a+2,1}^{a+2,1} & R(\lambda, \lambda_i)_{a+1,2}^{a+2,1} \\ R(\lambda, \lambda_i)_{a+2,1}^{a+1,2} & R(\lambda, \lambda_i)_{a+1,2}^{a+1,2} \\ R(\lambda, \lambda_i)_{a+2,1}^{a+2,1} & R(\lambda, \lambda_i)_{a+1,2}^{a+2,1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R(\lambda, \lambda_i)_{a+2,1}^{a,3} & R(\lambda, \lambda_i)_{a+1,2}^{a,3} \\ R(\lambda, \lambda_i)_{a+2,1}^{a+2,1} & R(\lambda, \lambda_i)_{a+1,2}^{a+2,1} \\ R(\lambda, \lambda_i)_{a+2,1}^{a+1,2} & R(\lambda, \lambda_i)_{a+1,2}^{a+1,2} \\ R(\lambda, \lambda_i)_{a+2,1}^{a+2,1} & R(\lambda, \lambda_i)_{a+1,2}^{a+2,1} \end{vmatrix}} w_1(\lambda_j) \mathcal{T}_{a,a+1}(\lambda) \mathcal{T}_{1,2}(\lambda_i) |0\rangle \\
 &+ \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^2 g_2^{(i)}(\lambda_1, \lambda_2) \frac{R(\lambda, \lambda_i)_{a,1}^{a-1,2}}{R(\lambda, \lambda_i)_{a,1}^{a,1}} \frac{\begin{vmatrix} R(\lambda, \lambda_i)_{a+2,1}^{a,3} & R(\lambda, \lambda_i)_{a+1,2}^{a,3} \\ R(\lambda, \lambda_i)_{a+2,1}^{a+2,1} & R(\lambda, \lambda_i)_{a+1,2}^{a+2,1} \\ R(\lambda, \lambda_i)_{a+2,1}^{a+1,2} & R(\lambda, \lambda_i)_{a+1,2}^{a+1,2} \\ R(\lambda, \lambda_i)_{a+2,1}^{a+2,1} & R(\lambda, \lambda_i)_{a+1,2}^{a+2,1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R(\lambda, \lambda_i)_{a+2,1}^{a+1,2} & R(\lambda, \lambda_i)_{a+1,2}^{a+1,2} \\ R(\lambda, \lambda_i)_{a+2,1}^{a+2,1} & R(\lambda, \lambda_i)_{a+1,2}^{a+2,1} \end{vmatrix}} w_2(\lambda_i) w_1(\lambda_j) \mathcal{T}_{a-1,a+1}(\lambda) |0\rangle \\
 &- \sum_{i=1}^2 g_2^{(i)}(\lambda_1, \lambda_2) \frac{\begin{vmatrix} R(\lambda, \lambda_i)_{a+2,1}^{a,3} & R(\lambda, \lambda_i)_{a+1,2}^{a,3} \\ R(\lambda, \lambda_i)_{a+2,1}^{a+1,2} & R(\lambda, \lambda_i)_{a+1,2}^{a+1,2} \\ R(\lambda, \lambda_i)_{a+2,1}^{a+2,1} & R(\lambda, \lambda_i)_{a+1,2}^{a+2,1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R(\lambda, \lambda_i)_{a+2,1}^{a+1,2} & R(\lambda, \lambda_i)_{a+1,2}^{a+1,2} \\ R(\lambda, \lambda_i)_{a+2,1}^{a+2,1} & R(\lambda, \lambda_i)_{a+1,2}^{a+2,1} \end{vmatrix}} w_1(\lambda_1) w_1(\lambda_2) \mathcal{T}_{a,a+2}(\lambda) |0\rangle \\
 &- \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^2 g_2^{(i)}(\lambda_1, \lambda_2) \frac{R(\lambda, \lambda_i)_{a,1}^{a-1,2}}{R(\lambda, \lambda_i)_{a,1}^{a,1}} w_1(\lambda_j) \mathcal{T}_{a-1,a}(\lambda) \mathcal{T}_{2,3}(\lambda_i) |0\rangle \\
 &- \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^2 g_2^{(i)}(\lambda_1, \lambda_2) \frac{R(\lambda, \lambda_i)_{a,1}^{a-2,3}}{R(\lambda, \lambda_i)_{a,1}^{a,1}} w_3(\lambda_i) w_1(\lambda_j) \mathcal{T}_{a-2,a}(\lambda) |0\rangle \quad \text{para } 2 \leq a \leq N-2, \quad (\text{B.12})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{T}_{N-1,N-1}(\lambda) \left| \Phi_2^{(2)} \right\rangle &= - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^2 g_2^{(i)}(\lambda_1, \lambda_2) \frac{\begin{vmatrix} R(\lambda, \lambda_i)_{N,2}^{N-1,3} & R(\lambda, \lambda_i)_{N-1,3}^{N-1,3} \\ R(\lambda, \lambda_i)_{N,2}^{N,2} & R(\lambda, \lambda_i)_{N-1,3}^{N,2} \end{vmatrix}}{R(\lambda, \lambda_i)_{N-1,1}^{N-1,1} R(\lambda, \lambda_i)_{N,2}^{N,2}} w_1(\lambda_j) w_{N-1}(\lambda) \\
 &\times \mathcal{T}_{1,3}(\lambda_i) |0\rangle + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^2 g_2^{(i)}(\lambda_1, \lambda_2) \frac{R(\lambda, \lambda_i)_{N,2}^{N-1,3}}{R(\lambda, \lambda_i)_{N,2}^{N,2}} w_1(\lambda_j) \mathcal{T}_{N-1,N}(\lambda) \mathcal{T}_{1,2}(\lambda_i) |0\rangle \\
 &+ \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^2 g_2^{(i)}(\lambda_1, \lambda_2) \frac{R(\lambda, \lambda_i)_{N-1,1}^{N-2,2}}{R(\lambda, \lambda_i)_{N-1,1}^{N-1,1}} \frac{R(\lambda, \lambda_i)_{N,2}^{N-1,3}}{R(\lambda, \lambda_i)_{N,2}^{N,2}} w_2(\lambda_i) w_1(\lambda_j) \mathcal{T}_{N-2,N}(\lambda) |0\rangle \\
 &- \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^2 g_2^{(i)}(\lambda_1, \lambda_2) \frac{R(\lambda, \lambda_i)_{N-1,1}^{N-2,2}}{R(\lambda, \lambda_i)_{N-1,1}^{N-1,1}} w_1(\lambda_j) \mathcal{T}_{N-2,N-1}(\lambda) \mathcal{T}_{2,3}(\lambda_i) |0\rangle \\
 &- \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^2 g_2^{(i)}(\lambda_1, \lambda_2) \frac{R(\lambda, \lambda_i)_{N-1,1}^{N-3,3}}{R(\lambda, \lambda_i)_{N-1,1}^{N-1,1}} w_3(\lambda_i) w_1(\lambda_j) \mathcal{T}_{N-3,N-1}(\lambda) |0\rangle \quad (B.13)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{T}_{N,N}(\lambda) \left| \Phi_2^{(2)} \right\rangle &= \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^2 g_2^{(i)}(\lambda_1, \lambda_2) \frac{R(\lambda, \lambda_i)_{N,3}^{N,3}}{R(\lambda, \lambda_i)_{N,1}^{N,1}} w_1(\lambda_j) w_N(\lambda) \mathcal{T}_{1,3}(\lambda_i) |0\rangle \\
 &- \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^2 g_2^{(i)}(\lambda_1, \lambda_2) \frac{R(\lambda, \lambda_i)_{N,1}^{N-1,2}}{R(\lambda, \lambda_i)_{N,1}^{N,1}} w_1(\lambda_j) \mathcal{T}_{N-1,N}(\lambda) \mathcal{T}_{2,3}(\lambda_i) |0\rangle \\
 &- \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^2 g_2^{(i)}(\lambda_1, \lambda_2) \frac{R(\lambda, \lambda_i)_{N,1}^{N-2,3}}{R(\lambda, \lambda_i)_{N,1}^{N,1}} w_3(\lambda_i) w_1(\lambda_j) \mathcal{T}_{N-2,N}(\lambda) |0\rangle \quad (B.14)
 \end{aligned}$$

De posse dos resultados obtidos acima, iniciemos as conclusões sobre o problema de duas partículas. Das Eqs.(B.6-B.14) observamos que a ação dos campos diagonais no estado de duas partículas $|\Phi_2\rangle$ gera vários tipos de termos que não são proporcionais a $|\Phi_2^{(1)}\rangle$ ou $|\Phi_2^{(2)}\rangle$. Dentre esses termos não-desejáveis existe uma classe que é sempre gerada pelo mesmo operador diagonal $\mathcal{T}_{a,a}(\lambda)$ para $a = 2, \dots, N$. Essa classe de termos é cancelada somente através de uma escolha específica dos coeficientes da combinação linear (181). Há quatro tipos de termos nessa classe e suas estruturas são representadas pelos últimos dois termos nas Eqs.(B.12-B.14). Coletando

esses termos presentes nas Eqs.(B.7-B.10) e nas Eqs.(B.12-B.14) chegamos aos resultados abaixo

$$\begin{aligned}
 & \bullet - w_1(\lambda_2) \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{a,1}^{a-1,2}}{R(\lambda, \lambda_1)_{a,1}^{a,1}} \left[\frac{R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,1}^{2,2}}{R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,1}^{3,1}} + g_2^{(1)}(\lambda_1, \lambda_2) \right] \mathcal{T}_{a-1,a}(\lambda) \mathcal{T}_{2,3}(\lambda_1) |0\rangle \\
 & \bullet - w_1(\lambda_2) w_3(\lambda_1) \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{a,1}^{a-2,3}}{R(\lambda, \lambda_1)_{a,1}^{a,1}} \left[\frac{R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,1}^{2,2}}{R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,1}^{3,1}} + g_2^{(1)}(\lambda_1, \lambda_2) \right] \mathcal{T}_{a-2,a}(\lambda) |0\rangle \\
 & \bullet - w_1(\lambda_1) \frac{R(\lambda, \lambda_2)_{a,1}^{a-1,2}}{R(\lambda, \lambda_2)_{a,1}^{a,1}} g_2^{(2)}(\lambda_1, \lambda_2) \mathcal{T}_{a-1,a}(\lambda) \mathcal{T}_{2,3}(\lambda_2) |0\rangle \\
 & \bullet - w_1(\lambda_1) w_3(\lambda_2) \frac{R(\lambda, \lambda_2)_{a,1}^{a-2,3}}{R(\lambda, \lambda_2)_{a,1}^{a,1}} g_2^{(2)}(\lambda_1, \lambda_2) \mathcal{T}_{a-2,a}(\lambda) |0\rangle
 \end{aligned} \tag{B.15}$$

Os termos acima são eliminados do problema de duas partículas fixando as funções $g_2^{(i)}(\lambda_1, \lambda_2)$ por

$$g_2^{(1)}(\lambda_1, \lambda_2) = -\frac{R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,1}^{2,2}}{R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,1}^{3,1}} \quad \text{e} \quad g_2^{(2)}(\lambda_1, \lambda_2) = 0. \tag{B.16}$$

Conseqüentemente, o ansatz para o estado de duas partículas torna-se

$$|\Phi_2\rangle = \mathcal{T}_{1,2}(\lambda_1) \mathcal{T}_{1,2}(\lambda_2) |0\rangle - \frac{R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,1}^{2,2}}{R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,1}^{3,1}} w_1(\lambda_2) \mathcal{T}_{1,3}(\lambda_1) |0\rangle. \tag{B.17}$$

A seguir somamos os resultados da ação do operador $\mathcal{T}_{a,a}(\lambda)$ nas duas partes do auto-estado (B.17). A partir das Eqs.(B.6-B.14) e considerando as restrições (B.16), concluímos que a ação de $\mathcal{T}_{a,a}(\lambda)$ no estado de duas partículas $|\Phi_2\rangle$ possui a seguinte forma

$$\begin{aligned}
 \mathcal{T}_{1,1}(\lambda) |\Phi_2\rangle &= w_1(\lambda) P_1(\lambda, \lambda_1) \left[P_1(\lambda, \lambda_2) \left| \Phi_2^{(1)} \right\rangle + \bar{P}_1(\lambda, \lambda_1, \lambda_2) \left| \Phi_2^{(2)} \right\rangle \right] \\
 &- \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^2 w_1(\lambda_i) {}_1\mathcal{H}_1^{(1)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2 | i) \mathcal{T}_{1,2}(\lambda) \mathcal{T}_{1,2}(\lambda_j) |0\rangle \\
 &- w_1(\lambda_1) w_1(\lambda_2) {}_2\mathcal{F}_2^{(1)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2) \mathcal{T}_{1,3}(\lambda) |0\rangle
 \end{aligned} \tag{B.18}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{T}_{2,2}(\lambda) |\Phi_2\rangle &= w_2(\lambda) P_2(\lambda, \lambda_1) \left[P_2(\lambda, \lambda_2) \left| \Phi_2^{(1)} \right\rangle + \bar{P}_2(\lambda, \lambda_1, \lambda_2) \left| \Phi_2^{(2)} \right\rangle \right] \\
 &- \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^2 w_1(\lambda_i)_1 \mathcal{H}_1^{(2)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2 | i) \mathcal{T}_{2,3}(\lambda) \mathcal{T}_{1,2}(\lambda_j) |0\rangle \\
 &- \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^2 w_2(\lambda_i)_0 \mathcal{H}_1^{(1)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2 | i) \mathcal{T}_{1,2}(\lambda) \mathcal{T}_{1,2}(\lambda_j) |0\rangle \\
 &- w_1(\lambda_1) w_1(\lambda_2)_2 \mathcal{F}_2^{(2)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2) \mathcal{T}_{2,4}(\lambda) |0\rangle \\
 &- \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^2 w_1(\lambda_i) w_2(\lambda_j)_1 \mathcal{H}_2^{(1)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2 | i) \mathcal{T}_{1,3}(\lambda) |0\rangle
 \end{aligned} \tag{B.19}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{T}_{a,a}(\lambda) |\Phi_2\rangle &= w_a(\lambda) P_a(\lambda, \lambda_1) \left[P_a(\lambda, \lambda_2) \left| \Phi_2^{(1)} \right\rangle + \bar{P}_a(\lambda, \lambda_1, \lambda_2) \left| \Phi_2^{(2)} \right\rangle \right] \\
 &- \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^2 w_1(\lambda_i)_1 \mathcal{H}_1^{(a)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2 | i) \mathcal{T}_{a,a+1}(\lambda) \mathcal{T}_{1,2}(\lambda_j) |0\rangle \\
 &- \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^2 w_2(\lambda_i)_0 \mathcal{H}_1^{(a-1)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2 | i) \mathcal{T}_{a-1,a}(\lambda) \mathcal{T}_{1,2}(\lambda_j) |0\rangle \\
 &- w_1(\lambda_1) w_1(\lambda_2)_2 \mathcal{F}_2^{(a)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2) \mathcal{T}_{a,a+2}(\lambda) |0\rangle \\
 &- \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^2 w_1(\lambda_i) w_2(\lambda_j)_1 \mathcal{H}_2^{(a-1)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2 | i) \mathcal{T}_{a-1,a+1}(\lambda) |0\rangle \\
 &- w_2(\lambda_1) w_2(\lambda_2)_0 \mathcal{F}_2^{(a-2)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2) \mathcal{T}_{a-2,a}(\lambda) |0\rangle
 \end{aligned}$$

para $3 \leq a \leq N-2$, (B.20)

$$\begin{aligned}
 \mathcal{T}_{N-1,N-1}(\lambda) |\Phi_2\rangle &= w_{N-1}(\lambda) P_{N-1}(\lambda, \lambda_1) \left[P_{N-1}(\lambda, \lambda_2) \left| \Phi_2^{(1)} \right\rangle + \bar{P}_{N-1}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2) \left| \Phi_2^{(2)} \right\rangle \right] \\
 &- \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^2 w_1(\lambda_i)_1 \mathcal{H}_1^{(N-1)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2 | i) \mathcal{T}_{a,a+1}(\lambda) \mathcal{T}_{1,2}(\lambda_j) |0\rangle \\
 &- \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^2 w_2(\lambda_i)_0 \mathcal{H}_1^{(N-2)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2 | i) \mathcal{T}_{N-2,N-1}(\lambda) \mathcal{T}_{1,2}(\lambda_j) |0\rangle \\
 &- \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^2 w_1(\lambda_i) w_2(\lambda_j)_1 \mathcal{H}_2^{(N-2)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2 | i) \mathcal{T}_{N-2,N}(\lambda) |0\rangle \\
 &- w_2(\lambda_1) w_2(\lambda_2)_0 \mathcal{F}_2^{(N-3)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2) \mathcal{T}_{N-3,N-1}(\lambda) |0\rangle
 \end{aligned} \tag{B.21}$$

e

$$\begin{aligned}
 \mathcal{T}_{N,N}(\lambda) |\Phi_2\rangle &= w_N(\lambda) P_N(\lambda, \lambda_1) \left[P_N(\lambda, \lambda_2) \left| \Phi_2^{(1)} \right\rangle + \bar{P}_N(\lambda, \lambda_1, \lambda_2) \left| \Phi_2^{(2)} \right\rangle \right] \\
 &- \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^2 w_2(\lambda_i)_0 \mathcal{H}_1^{(N-1)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2 | i) \mathcal{T}_{N-1,N}(\lambda) \mathcal{T}_{1,2}(\lambda_j) |0\rangle \\
 &- w_2(\lambda_1) w_2(\lambda_2)_0 \mathcal{F}_2^{(N-2)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2) \mathcal{T}_{N-2,N}(\lambda) |0\rangle.
 \end{aligned} \tag{B.22}$$

Relembramos que as funções $P_a(\lambda, \mu)$ estão definidas no problema de uma partícula através da Eq.(174). As funções adicionais $\bar{P}_a(\lambda, \lambda_1, \lambda_2)$ são dadas em termos dos elementos da matriz R pelas expressões abaixo

$$\bar{P}_1(\lambda, \lambda_1, \lambda_2) = \frac{R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,1}^{3,1}}{R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,1}^{2,2}} \left[\frac{R(\lambda_2, \lambda)_{1,2}^{2,1}}{R(\lambda_2, \lambda)_{2,1}^{2,1}} \frac{R(\lambda_1, \lambda)_{3,1}^{2,2}}{R(\lambda_1, \lambda)_{3,1}^{3,1}} + \frac{R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,1}^{2,2}}{R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,1}^{3,1}} \frac{R(\lambda_1, \lambda)_{2,1}^{2,1}}{R(\lambda_1, \lambda)_{3,1}^{3,1}} \right] \tag{B.23}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{P}_a(\lambda, \lambda_1, \lambda_2) &= \frac{R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,1}^{3,1}}{R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,1}^{2,2}} \left[\frac{R(\lambda, \lambda_2)_{a+1,1}^{a,2}}{R(\lambda, \lambda_2)_{a+1,1}^{a+1,1}} \frac{D_2^{(a+1,1)}(\lambda, \lambda_1)}{D_2^{(a+1,0)}(\lambda, \lambda_1)} + \frac{R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,1}^{2,2}}{R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,1}^{3,1}} \frac{D_3^{(a,0)}(\lambda, \lambda_1)}{D_2^{(a,0)}(\lambda, \lambda_1)} \right. \\
 &- \left. \frac{D_2^{(a,1)}(\lambda, \lambda_1)}{D_2^{(a,0)}(\lambda, \lambda_1)} \frac{R(\lambda, \lambda_2)_{a,1}^{a-1,2}}{R(\lambda, \lambda_2)_{a,1}^{a,1}} \right], \quad \text{para } 2 \leq a \leq N-2
 \end{aligned} \tag{B.24}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{P}_{N-1}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2) &= \frac{R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,1}^{3,1}}{R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,1}^{2,2}} \left[\frac{R(\lambda, \lambda_2)_{N,1}^{N-1,2}}{R(\lambda, \lambda_2)_{N,1}^{N,1}} \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{N-1,3}^{N,2}}{R(\lambda, \lambda_1)_{N,2}^{N,2}} + \frac{R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,1}^{2,2}}{R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,1}^{3,1}} \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{N,1}^{N,1}}{R(\lambda, \lambda_1)_{N,2}^{N,2}} \right. \\
 &\quad \times \left. \frac{\begin{vmatrix} R(\lambda, \lambda_1)_{N,2}^{N-1,3} & R(\lambda, \lambda_1)_{N,2}^{N,2} \\ R(\lambda, \lambda_1)_{N-1,3}^{N-1,3} & R(\lambda, \lambda_1)_{N-1,3}^{N,2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R(\lambda, \lambda_1)_{N,1}^{N-1,2} & R(\lambda, \lambda_1)_{N,1}^{N,1} \\ R(\lambda, \lambda_1)_{N-1,2}^{N-1,2} & R(\lambda, \lambda_1)_{N-1,2}^{N,1} \end{vmatrix}} - \frac{D_2^{(N-1,1)}(\lambda, \lambda_1)}{D_2^{(N-1,0)}(\lambda, \lambda_1)} \frac{R(\lambda, \lambda_2)_{N-1,1}^{N-2,2}}{R(\lambda, \lambda_2)_{N-1,1}^{N-1,1}} \right] \\
 &\quad (B.25)
 \end{aligned}$$

$$\bar{P}_N(\lambda, \lambda_1, \lambda_2) = \frac{R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,1}^{3,1}}{R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,1}^{2,2}} \left[\frac{R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,1}^{2,2}}{R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,1}^{3,1}} \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{N,3}^{N,3}}{R(\lambda, \lambda_1)_{N,2}^{N,2}} - \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{N-1,3}^{N,2}}{R(\lambda, \lambda_1)_{N,2}^{N,2}} \frac{R(\lambda, \lambda_2)_{N,1}^{N-1,2}}{R(\lambda, \lambda_2)_{N,1}^{N,1}} \right]. \quad (B.26)$$

Por uma questão de didática, as funções proporcionais aos termos não-desejáveis são divididas em duas categorias. A primeira classe é composta pelas funções ${}_c\mathcal{H}_b^{(a)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2|1)$ e ${}_c\mathcal{H}_b^{(a)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2|2)$, tal que

$$1 \leq b \leq 2, \quad 1 \leq a \leq N - b \quad \text{e} \quad b - 1 \leq c \leq 1. \quad (B.27)$$

As expressões das funções ${}_c\mathcal{H}_b^{(a)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2|i)$ para $i = 1, 2$ são

$${}_1\mathcal{H}_1^{(a)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2|1) = \frac{R(\lambda_2, \lambda_1)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_2, \lambda_1)_{2,1}^{2,1}} {}_1\mathcal{F}_1^{(a)}(\lambda, \lambda_1) \quad \text{para } a = 1, \dots, N - 1 \quad (B.28)$$

$${}_0\mathcal{H}_1^{(a)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2|1) = P_2(\lambda_1, \lambda_2) {}_0\mathcal{F}_1^{(a)}(\lambda, \lambda_1) \quad \text{para } a = 1, \dots, N - 1 \quad (B.29)$$

$${}_1\mathcal{H}_2^{(a-1)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2|1) = {}_1\mathcal{F}_1^{(a)}(\lambda, \lambda_1) {}_0\mathcal{H}_1^{(a-1)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2|2) \quad \text{para } a = 2, \dots, N - 1 \quad (B.30)$$

$$\begin{aligned}
 {}_1\mathcal{H}_1^{(1)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2|2) &= \frac{R(\lambda_2, \lambda)_{1,2}^{2,1}}{R(\lambda_2, \lambda)_{2,1}^{2,1}} P_2(\lambda_1, \lambda) - \frac{R(\lambda_1, \lambda)_{1,2}^{2,1}}{R(\lambda_1, \lambda)_{2,1}^{2,1}} \frac{R(\lambda_2, \lambda_1)_{1,2}^{2,1}}{R(\lambda_2, \lambda_1)_{2,1}^{2,1}} - \frac{R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,1}^{2,2}}{R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,1}^{3,1}} \\
 &\times \frac{R(\lambda_1, \lambda)_{2,2}^{3,1}}{R(\lambda_1, \lambda)_{3,1}^{3,1}}
 \end{aligned} \tag{B.31}$$

$$\begin{aligned}
 {}_1\mathcal{H}_1^{(a)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2|2) &= \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{a+1,1}^{a,2}}{R(\lambda, \lambda_1)_{a+1,1}^{a+1,1}} \frac{R(\lambda_2, \lambda_1)_{1,2}^{2,1}}{R(\lambda_2, \lambda_1)_{2,1}^{2,1}} - \frac{D_2^{(a,0)}(\lambda, \lambda_1)}{D_2^{(a+1,0)}(\lambda, \lambda_1)} \frac{R(\lambda, \lambda_2)_{a+1,1}^{a,2}}{R(\lambda, \lambda_2)_{a+1,1}^{a+1,1}} \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{a,1}^{a,1}}{R(\lambda, \lambda_1)_{a+1,1}^{a+1,1}} \\
 &+ \frac{R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,1}^{2,2}}{R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,1}^{3,1}} \left| \begin{array}{cc} R(\lambda, \lambda_1)_{a+2,1}^{a,3} & R(\lambda, \lambda_1)_{a+1,2}^{a,3} \\ R(\lambda, \lambda_1)_{a+2,1}^{a+2,1} & R(\lambda, \lambda_1)_{a+1,2}^{a+2,1} \end{array} \right| \\
 &\quad \left| \begin{array}{cc} R(\lambda, \lambda_1)_{a+2,1}^{a+1,2} & R(\lambda, \lambda_1)_{a+1,2}^{a+1,2} \\ R(\lambda, \lambda_1)_{a+2,1}^{a+2,1} & R(\lambda, \lambda_1)_{a+1,2}^{a+2,1} \end{array} \right|, \quad \text{para } a = 2, \dots, N-1
 \end{aligned} \tag{B.32}$$

$$\begin{aligned}
 {}_1\mathcal{H}_1^{(N-1)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2|2) &= \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{N,1}^{N-1,2}}{R(\lambda, \lambda_1)_{N,1}^{N,1}} \frac{R(\lambda_2, \lambda_1)_{1,2}^{2,1}}{R(\lambda_2, \lambda_1)_{2,1}^{2,1}} - \frac{D_2^{(N-1,0)}(\lambda, \lambda_1)}{D_2^{(N,0)}(\lambda, \lambda_1)} \frac{R(\lambda, \lambda_2)_{N,1}^{N-1,2}}{R(\lambda, \lambda_2)_{N,1}^{N,1}} \\
 &\times \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{N-1,1}^{N-1,1}}{R(\lambda, \lambda_1)_{N,1}^{N,1}} + \frac{R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,1}^{2,2}}{R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,1}^{3,1}} \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{N,2}^{N-1,3}}{R(\lambda, \lambda_1)_{N,2}^{N,2}}
 \end{aligned} \tag{B.33}$$

$${}_0\mathcal{H}_1^{(a)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2|2) = \frac{R(\lambda, \lambda_2)_{a+1,1}^{a,2}}{R(\lambda, \lambda_2)_{a+1,1}^{a+1,1}} \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{a,1}^{a,1}}{R(\lambda, \lambda_1)_{a+1,1}^{a+1,1}} - \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{a+1,1}^{a,2}}{R(\lambda, \lambda_1)_{a+1,1}^{a+1,1}} \frac{R(\lambda_1, \lambda_2)_{2,1}^{1,2}}{R(\lambda_1, \lambda_2)_{2,1}^{2,1}} \tag{B.34}$$

$$\begin{aligned}
 {}_1\mathcal{H}_2^{(a-1)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2|2) &= -\frac{D_2^{(a,0)}(\lambda, \lambda_1)}{D_2^{(a+1,0)}(\lambda, \lambda_1)} \frac{R(\lambda, \lambda_2)_{a+1,1}^{a,2}}{R(\lambda, \lambda_2)_{a+1,1}^{a+1,1}} \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{a,1}^{a-1,2}}{R(\lambda, \lambda_1)_{a+1,1}^{a+1,1}} - \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{a+1,1}^{a,2}}{R(\lambda, \lambda_1)_{a+1,1}^{a+1,1}} \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{a,1}^{a-1,2}}{R(\lambda, \lambda_1)_{a,1}^{a,1}} \\
 &\times \frac{R(\lambda_1, \lambda_2)_{2,1}^{1,2}}{R(\lambda_1, \lambda_2)_{2,1}^{2,1}} + \frac{R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,1}^{2,2}}{R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,1}^{3,1}} \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{a,1}^{a-1,2}}{R(\lambda, \lambda_1)_{a,1}^{a,1}} \left| \begin{array}{cc} R(\lambda, \lambda_1)_{a+2,1}^{a,3} & R(\lambda, \lambda_1)_{a+1,2}^{a,3} \\ R(\lambda, \lambda_1)_{a+2,1}^{a+2,1} & R(\lambda, \lambda_1)_{a+1,2}^{a+2,1} \end{array} \right| \\
 &\quad \left| \begin{array}{cc} R(\lambda, \lambda_1)_{a+2,1}^{a+1,2} & R(\lambda, \lambda_1)_{a+1,2}^{a+1,2} \\ R(\lambda, \lambda_1)_{a+2,1}^{a+2,1} & R(\lambda, \lambda_1)_{a+1,2}^{a+2,1} \end{array} \right|, \\
 &\quad \text{para } a = 2, \dots, N-1
 \end{aligned} \tag{B.35}$$

$$\begin{aligned}
 {}_1\mathcal{H}_2^{(N-2)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2|2) &= -\frac{D_2^{(N-1,0)}(\lambda, \lambda_1)}{D_2^{(N,0)}(\lambda, \lambda_1)} \frac{R(\lambda, \lambda_2)_{N,1}^{N-1,2}}{R(\lambda, \lambda_2)_{N,1}^{N,1}} \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{N-1,1}^{N-2,2}}{R(\lambda, \lambda_1)_{N,1}^{N,1}} - \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{N,1}^{N-1,2}}{R(\lambda, \lambda_1)_{N,1}^{N,1}} \\
 &\times \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{N-1,1}^{N-2,2}}{R(\lambda, \lambda_1)_{N-1,1}^{N-1,1}} \frac{R(\lambda_1, \lambda_2)_{2,1}^{1,2}}{R(\lambda_1, \lambda_2)_{2,1}^{2,1}} + \frac{R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,1}^{2,2}}{R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,1}^{3,1}} \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{N-1,1}^{N-2,2}}{R(\lambda, \lambda_1)_{N-1,1}^{N-1,1}} \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{N,2}^{N-1,3}}{R(\lambda, \lambda_1)_{N,2}^{N,2}} \\
 &\quad \left| \begin{array}{cc} R(\lambda, \lambda_1)_{a+2,1}^{a,3} & R(\lambda, \lambda_1)_{a+1,2}^{a,3} \\ R(\lambda, \lambda_1)_{a+2,1}^{a+2,1} & R(\lambda, \lambda_1)_{a+1,2}^{a+2,1} \end{array} \right|,
 \end{aligned} \tag{B.36}$$

Por outro lado, as funções restantes ${}_0\mathcal{F}_2^{(a)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2)$ e ${}_2\mathcal{F}_2^{(a)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2)$ são dadas por

$${}_0\mathcal{F}_2^{(a)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2) = \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{a+1,1}^{a,2} R(\lambda, \lambda_2)_{a+2,1}^{a+1,2}}{R(\lambda, \lambda_1)_{a+2,1}^{a+2,1} R(\lambda, \lambda_2)_{a+2,1}^{a+2,1}} - \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{a+2,1}^{a,3} R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,1}^{2,2}}{R(\lambda, \lambda_1)_{a+2,1}^{a+2,1} R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,1}^{3,1}} \quad \text{para } 1 \leq a \leq N-2 \quad (\text{B.37})$$

$${}_2\mathcal{F}_2^{(1)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2) = \frac{R(\lambda_2, \lambda)_{1,2}^{2,1}}{R(\lambda_2, \lambda)_{2,1}^{2,1}} D_2^{(2,1)}(\lambda_1, \lambda) - \frac{R(\lambda_1, \lambda)_{1,3}^{3,1} R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,1}^{2,2}}{R(\lambda_1, \lambda)_{3,1}^{3,1} R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,1}^{3,1}} \quad (\text{B.38})$$

$$\begin{aligned} {}_2\mathcal{F}_2^{(a)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2) = & - \left[\frac{R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,1}^{2,2}}{R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,1}^{3,1}} \begin{vmatrix} R(\lambda, \lambda_1)_{a+2,1}^{a,3} & R(\lambda, \lambda_1)_{a+1,2}^{a,3} \\ R(\lambda, \lambda_1)_{a+2,1}^{a+1,2} & R(\lambda, \lambda_1)_{a+1,2}^{a+1,2} \end{vmatrix} \right. \\ & \left. - \frac{R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,1}^{3,1}}{R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,1}^{3,1}} \begin{vmatrix} R(\lambda, \lambda_1)_{a+2,1}^{a+1,2} & R(\lambda, \lambda_1)_{a+1,2}^{a+1,2} \\ R(\lambda, \lambda_1)_{a+2,1}^{a+2,1} & R(\lambda, \lambda_1)_{a+1,2}^{a+2,1} \end{vmatrix} \right] \\ & - \frac{D_2^{(a,0)}(\lambda, \lambda_1)}{D_2^{(a+1,0)}(\lambda, \lambda_1)} \frac{R(\lambda, \lambda_2)_{a+1,1}^{a,2}}{R(\lambda, \lambda_2)_{a+1,1}^{a+1,1}} \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{a,1}^{a,1}}{R(\lambda, \lambda_1)_{a+1,1}^{a+1,1}} \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{a+2,1}^{a+1,2}}{R(\lambda, \lambda_1)_{a+2,1}^{a+2,1}} \quad \text{para } 2 \leq a \leq N-2. \end{aligned} \quad (\text{B.39})$$

Para prosseguirmos com o problema de autovalor de duas partículas é imprescindível o uso de uma série de identidades envolvendo os elementos da matriz R com três diferentes valores dos parâmetros espectrais. A primeira classe de identidades tem o objetivo de garantir que as amplitudes os termos desejados $|\Phi_2^{(1)}\rangle$ e $|\Phi_2^{(2)}\rangle$ sejam iguais. De acordo com as Eqs.(B.18-B.22), esta condição é verdadeira se

$$\bar{P}_a(\lambda, \lambda_1, \lambda_2) = P_a(\lambda, \lambda_2) \quad \text{para } a = 1, \dots, N. \quad (\text{B.40})$$

As propriedades (B.40) seguem das identidades derivadas nas seções (3.1,3.2). Em particular, os casos $a = 1$ e $a = N$ são conseqüências imediatas da equação de Yang-Baxter. Esse fato é facilmente verificado comparando as definições (B.23,B.26) das funções $\bar{P}_a(\lambda, \lambda_1, \lambda_2)$ com as Eqs.(131,132) respectivamente. Para demonstrar a propriedade (B.40) para os casos restantes $2 \leq a \leq N-1$ devemos combinar as identidades derivadas da relação de unitariedade e da equação de Yang-Baxter. No caso do intervalo $2 \leq a \leq N-2$, tais procedimentos consistem em substituir os determinantes $D_4^{(i,b)}(\lambda, \lambda_1)$ e $D_5^{(i,2)}(\lambda, \lambda_1)$ na identidade (158) através das iden-

tidades (124,125). Já a prova do caso $a = N - 1$ requer duas etapas. Inicialmente, utilizando as definições (A.11,A.12), reescrevemos as identidades (128,129) na seguinte forma

$$\frac{R(\lambda, \lambda_1)_{N,1}^{N,1}}{R(\lambda, \lambda_1)_{N,2}^{N,2}} \frac{\begin{vmatrix} R(\lambda, \lambda_1)_{N,2}^{N-1,3} & R(\lambda, \lambda_1)_{N,2}^{N,2} \\ R(\lambda, \lambda_1)_{N-1,3}^{N-1,3} & R(\lambda, \lambda_1)_{N-1,3}^{N,2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R(\lambda, \lambda_1)_{N,1}^{N-1,2} & R(\lambda, \lambda_1)_{N,1}^{N,1} \\ R(\lambda, \lambda_1)_{N-1,2}^{N-1,2} & R(\lambda, \lambda_1)_{N-1,2}^{N,1} \end{vmatrix}} = \frac{D_4^{(N,2)}(\lambda, \lambda_1)}{D_4^{(N,3)}(\lambda, \lambda_1)} \frac{D_4^{(N+1,4)}(\lambda, \lambda_1)}{D_4^{(N+1,3)}(\lambda, \lambda_1)} \quad (\text{B.41})$$

$$-\frac{R(\mu, \lambda)_{N-1,3}^{N,2}}{R(\mu, \lambda)_{N,2}^{N,2}} = \frac{D_5^{(N+1,2)}(\lambda, \lambda_1)}{D_4^{(N+1,3)}(\lambda, \lambda_1)}. \quad (\text{B.42})$$

Em segundo lugar, eliminamos os determinantes $D_5^{(i,2)}(\lambda, \lambda_1)$ e $D_4^{(i,b)}(\lambda, \lambda_1)$ da Eq.(163) através das Eqs.(124,B.41,B.42) obtemos a fatorização (B.40) da função $\bar{P}_{N-1}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2)$.

Ressaltamos que as identidades (B.40) derivadas da relação de unitariedade e da equação de Yang-Baxter são fundamentais para assegurar que as amplitudes dos termos desejados $|\Phi_2^{(1)}\rangle$ e $|\Phi_2^{(2)}\rangle$ sejam iguais.

Agora, retornemos nossa atenção às identidades responsáveis pela simplificação da estrutura dos termos não-desejáveis. As expressões utilizadas para esse fim são derivadas da propriedade de simetria do estado de duas partículas (186) e culminam no agrupamento de diversas contribuições em um único termo. Devido à fatorização (B.40) da função $\bar{P}_a(\lambda, \lambda_1, \lambda_2)$, a aplicação da propriedade (186) nas Eqs.(B.18-B.22) implica necessariamente na seguinte relação

$${}_c\mathcal{H}_b^{(a)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2|2) = \theta(\lambda_1, \lambda_2) {}_c\mathcal{H}_b^{(a)}(\lambda, \lambda_2, \lambda_1|1). \quad (\text{B.43})$$

Antes de iniciar nossa análise das conseqüências da Eq.(B.43), precisamos integrar duas informações esparsas no texto. Utilizando as definições (174,185) reescrevemos a função $P_2(\lambda, \mu)$ da forma

$$P_2(\lambda, \mu) = \theta(\lambda, \mu) \frac{R(\lambda, \mu)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda, \mu)_{2,1}^{2,1}}. \quad (\text{B.44})$$

No primeiro caso $b = 1$, a Eq.(B.43) implica em duas simplificações dadas por

$${}_1\mathcal{H}_1^{(a)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2|2) = \theta(\lambda_1, \lambda_2) \frac{R(\lambda_1, \lambda_2)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_1, \lambda_2)_{2,1}^{2,1}} {}_1\mathcal{F}_1^{(a)}(\lambda, \lambda_2), \quad (\text{B.45})$$

$${}_0\mathcal{H}_1^{(a)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2|2) = \frac{R(\lambda_2, \lambda_1)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_2, \lambda_1)_{2,1}^{2,1}} {}_0\mathcal{F}_1^{(a)}(\lambda, \lambda_2), \quad (\text{B.46})$$

onde utilizamos as definições (B.28,B.29) e a propriedade (187) da função $\theta(\lambda, \mu)$.

A partir das Eqs.(B.28,B.29,B.45,B.46), encontramos a primeira simplificação geral oriunda da Eq.(B.43) para $b = 1$,

$${}_1\mathcal{H}_1^{(a)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2|i) = \theta_{<}(\lambda_j, \lambda_i) \frac{R(\lambda_j, \lambda_i)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_j, \lambda_i)_{2,1}^{2,1}} {}_1\mathcal{F}_1^{(a)}(\lambda, \lambda_i), \quad (\text{B.47})$$

$${}_0\mathcal{H}_1^{(a)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2|i) = \theta_{<}(\lambda_i, \lambda_j) \frac{R(\lambda_i, \lambda_j)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_i, \lambda_j)_{2,1}^{2,1}} {}_0\mathcal{F}_1^{(a)}(\lambda, \lambda_i), \quad (\text{B.48})$$

para $i, j = 1, 2$ e $i \neq j$,

onde a função $\theta_{<}(\lambda, \mu)$ é definida pela Eq.(193).

A Eq.(B.46) acarreta outra simplificação fundamental na estrutura dos termos não-desejados. Substituindo a Eq.(B.46) na definição (B.30) obtemos como resultado

$${}_1\mathcal{H}_2^{(a-1)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2|1) = \frac{R(\lambda_2, \lambda_1)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_2, \lambda_1)_{2,1}^{2,1}} {}_1\mathcal{F}_1^{(a)}(\lambda, \lambda_1) {}_0\mathcal{F}_1^{(a-1)}(\lambda, \lambda_2), \quad \text{para } a = 2, \dots, N-1. \quad (\text{B.49})$$

Através da definição de uma nova função ${}_1\mathcal{F}_2^{(a)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2)$, encontramos que o resultado da fatorização (B.49) da amplitude ${}_1\mathcal{H}_2^{(a-1)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2|1)$, juntamente com a informação gerada pela Eq.(B.43) para $b = 2$, são expressos pela seguinte equação

$${}_1\mathcal{H}_2^{(a)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2|i) = \theta_{<}(\lambda_j, \lambda_i) {}_1\mathcal{F}_2^{(a)}(\lambda, \lambda_i, \lambda_j), \quad \text{para } a = 2, \dots, N-1; \quad i, j = 1, 2 \text{ e } i \neq j, \quad (\text{B.50})$$

onde

$${}_1\mathcal{F}_2^{(a)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2) = {}_0\mathcal{F}_1^{(a)}(\lambda, \lambda_2) {}_1\mathcal{F}_1^{(a+1)}(\lambda, \lambda_1) \frac{R(\lambda_2, \lambda_1)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_2, \lambda_1)_{2,1}^{2,1}}. \quad (\text{B.51})$$

Voltemos agora nossa atenção às expressões que descrevem ${}_c\mathcal{F}_2^{(a)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2)$ para $c = 0, 1, 2$. Essas funções podem ser definidas em termos de relações de recorrência envolvendo ${}_0\mathcal{F}_1^{(a)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2)$,

${}_1\mathcal{F}_1^{(a)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2)$ e certas amplitudes da matriz R . No caso da função ${}_0\mathcal{F}_2^{(a)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2)$, a relação de recorrência é obtida eliminando as razões de amplitudes $\frac{R(\lambda, \lambda_2)_{a+2,1}^{a+1,2}}{R(\lambda, \lambda_2)_{a+2,1}^{a+2,1}}$ e $\frac{R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,1}^{2,2}}{R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,1}^{3,1}}$ da Eq.(B.37) através da definição (176), cujo resultado final é igual a

$${}_0\mathcal{F}_2^{(a)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2) = \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{a+1,1}^{a,2}}{R(\lambda, \lambda_1)_{a+2,1}^{a+2,1}} {}_0\mathcal{F}_1^{(a+1)}(\lambda, \lambda_2) + \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{a+2,1}^{a,3}}{R(\lambda, \lambda_1)_{a+2,1}^{a+2,1}} {}_1\mathcal{F}_1^{(2)}(\lambda_1, \lambda_2). \quad (\text{B.52})$$

A última simplificação tem como objetivo demonstrar que as definições (B.38,B.39) da função ${}_2\mathcal{F}_2^{(a)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2)$ são equivalentes a seguinte expressão

$${}_2\mathcal{F}_2^{(a)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2) = -{}_0\mathcal{F}_2^{(a)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2) - \sum_{\substack{i,j=1 \\ j \neq i}}^{n=2} {}_1\mathcal{F}_2^{(a)}(\lambda, \lambda_i, \lambda_j) \frac{R(\lambda_j, \lambda_i)_{2,1}^{2,1}}{R(\lambda_j, \lambda_i)_{1,1}^{1,1}} \frac{R(\lambda_i, \lambda_j)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_i, \lambda_j)_{2,1}^{2,1}} \prod_{k=1}^{j-1} \theta(\lambda_k, \lambda_j). \quad (\text{B.53})$$

Para demonstrarmos a equivalência entre Eqs.(B.38,B.39) e (B.53) é necessário o uso de relações particulares oriundas da Eq.(B.43). Mais especificamente, utilizaremos as seguintes expressões

$${}_0\mathcal{H}_1^{(a+1)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2|2) = \theta(\lambda_1, \lambda_2) {}_0\mathcal{H}_1^{(a+1)}(\lambda, \lambda_2, \lambda_1|1) \quad \text{para } 1 \leq a \leq N-2 \quad (\text{B.54})$$

e

$${}_1\mathcal{H}_1^{(a)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2|2) = \theta(\lambda_1, \lambda_2) {}_1\mathcal{H}_1^{(a)}(\lambda, \lambda_2, \lambda_1|1) \quad \text{para } 1 \leq a \leq N-2. \quad (\text{B.55})$$

Inicialmente substituímos as expressões da função ${}_1\mathcal{H}_1^{(a)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2|i)$ dadas pelas Eqs.(B.28, B.31,B.32) na relação (B.55). Então reordenamos as razões de amplitudes da forma $\frac{R(\lambda, \mu)_{1,2}^{2,1}}{R(\lambda, \mu)_{2,1}^{2,1}}$ para $(\lambda, \mu) = (\lambda_2, \lambda_1)$ e $(\lambda, \mu) = (\lambda_1, \lambda)$ com a ajuda da identidade (98), obtendo o seguinte resultado

$$\begin{aligned} \frac{R(\lambda_2, \lambda)_{1,2}^{2,1}}{R(\lambda_2, \lambda)_{2,1}^{2,1}} P_2(\lambda_1, \lambda) - \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{2,1}^{1,2}}{R(\lambda, \lambda_1)_{2,1}^{2,1}} \frac{R(\lambda_1, \lambda_2)_{2,1}^{1,2}}{R(\lambda_1, \lambda_2)_{2,1}^{2,1}} - \frac{R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,1}^{2,2}}{R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,1}^{3,1}} \frac{R(\lambda_1, \lambda)_{2,2}^{3,1}}{R(\lambda_1, \lambda)_{3,1}^{3,1}} \\ = \theta(\lambda_1, \lambda_2) \frac{R(\lambda_1, \lambda_2)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_1, \lambda_2)_{2,1}^{2,1}} {}_1\mathcal{F}_1^{(1)}(\lambda, \lambda_2), \quad \text{para } a = 1 \end{aligned} \quad (\text{B.56})$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{D_2^{(a,0)}(\lambda, \lambda_1)}{D_2^{(a+1,0)}(\lambda, \lambda_1)} {}_0\mathcal{F}_1^{(a)}(\lambda, \lambda_2) \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{a,1}^{a,1}}{R(\lambda, \lambda_1)_{a+1,1}^{a+1,1}} - {}_0\mathcal{F}_1^{(a)}(\lambda, \lambda_1) \frac{R(\lambda_1, \lambda_2)_{2,1}^{1,2}}{R(\lambda_1, \lambda_2)_{2,1}^{2,1}} \\
 & + \frac{R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,1}^{2,2}}{R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,1}^{3,1}} \left| \begin{array}{cc} R(\lambda, \lambda_1)_{a+2,1}^{a,3} & R(\lambda, \lambda_1)_{a+1,2}^{a,3} \\ R(\lambda, \lambda_1)_{a+2,1}^{a+2,1} & R(\lambda, \lambda_1)_{a+1,2}^{a+2,1} \\ R(\lambda, \lambda_1)_{a+2,1}^{a+1,2} & R(\lambda, \lambda_1)_{a+1,2}^{a+1,2} \\ R(\lambda, \lambda_1)_{a+2,1}^{a+2,1} & R(\lambda, \lambda_1)_{a+1,2}^{a+2,1} \end{array} \right| = \theta(\lambda_1, \lambda_2) \frac{R(\lambda_1, \lambda_2)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_1, \lambda_2)_{2,1}^{2,1}} {}_1\mathcal{F}_1^{(a)}(\lambda, \lambda_2), \\
 & \text{para } 2 \leq a \leq N-2. \quad (\text{B.57})
 \end{aligned}$$

Em seguida, eliminamos o termo $\frac{R(\lambda_1, \lambda_2)_{2,1}^{1,2}}{R(\lambda_1, \lambda_2)_{2,1}^{2,1}}$ da Eq.(B.57) através da Eq.(B.54) e das definições (B.29,B.34) das funções ${}_1\mathcal{H}_1^{(a)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2|1)$ e ${}_1\mathcal{H}_1^{(a)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2|2)$. Essa tarefa é realizada por meio da combinação linear (B.57) ${}_0\mathcal{F}_1^{(a+1)}(\lambda, \lambda_1) - (\text{B.54}){}_0\mathcal{F}_1^{(a)}(\lambda, \lambda_1)$, onde substituímos as definições das funções ${}_1\mathcal{H}_1^{(a)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2|1)$ e ${}_1\mathcal{H}_1^{(a)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2|2)$ na Eq.(B.54). O resultado deste procedimento é expresso pela equação abaixo

$$\begin{aligned}
 & {}_0\mathcal{F}_1^{(a)}(\lambda, \lambda_1) {}_0\mathcal{F}_1^{(a+1)}(\lambda, \lambda_2) \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{a+1,1}^{a+1,1}}{R(\lambda, \lambda_1)_{a+2,1}^{a+2,1}} + \frac{D_2^{(a,0)}(\lambda, \lambda_1)}{D_2^{(a+1,0)}(\lambda, \lambda_1)} {}_0\mathcal{F}_1^{(a)}(\lambda, \lambda_2) {}_0\mathcal{F}_1^{(a+1)}(\lambda, \lambda_1) \\
 & \times \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{a,1}^{a,1}}{R(\lambda, \lambda_1)_{a+1,1}^{a+1,1}} - \frac{R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,1}^{2,2}}{R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,1}^{3,1}} {}_0\mathcal{F}_1^{(a+1)}(\lambda, \lambda_1) \left| \begin{array}{cc} R(\lambda, \lambda_1)_{a+2,1}^{a,3} & R(\lambda, \lambda_1)_{a+1,2}^{a,3} \\ R(\lambda, \lambda_1)_{a+2,1}^{a+2,1} & R(\lambda, \lambda_1)_{a+1,2}^{a+2,1} \\ R(\lambda, \lambda_1)_{a+2,1}^{a+1,2} & R(\lambda, \lambda_1)_{a+1,2}^{a+1,2} \\ R(\lambda, \lambda_1)_{a+2,1}^{a+2,1} & R(\lambda, \lambda_1)_{a+1,2}^{a+2,1} \end{array} \right| = {}_0\mathcal{F}_1^{(a)}(\lambda, \lambda_1) \\
 & \times {}_0\mathcal{F}_1^{(a+1)}(\lambda, \lambda_2) \frac{R(\lambda_2, \lambda_1)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_2, \lambda_1)_{2,1}^{2,1}} - \theta(\lambda_1, \lambda_2) \frac{R(\lambda_1, \lambda_2)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_1, \lambda_2)_{2,1}^{2,1}} {}_1\mathcal{F}_1^{(a)}(\lambda, \lambda_2) {}_0\mathcal{F}_1^{(a+1)}(\lambda, \lambda_1). \quad (\text{B.58})
 \end{aligned}$$

Na Eq.(B.58) está imputido a informação de que as definições (B.39,B.53) são equivalentes. Para explicitarmos esse fato devemos manipular a Eq.(B.58) de modo a rearranjá-la da forma

abaixo

$$\begin{aligned}
 & \frac{D_2^{(a,0)}(\lambda, \lambda_1)}{D_2^{(a+1,0)}(\lambda, \lambda_1)} {}_0\mathcal{F}_1^{(a)}(\lambda, \lambda_2) {}_0\mathcal{F}_1^{(a+1)}(\lambda, \lambda_1) \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{a,1}^{a,1}}{R(\lambda, \lambda_1)_{a+1,1}^{a+1,1}} - \frac{\begin{vmatrix} R(\lambda, \lambda_1)_{a+2,1}^{a,3} & R(\lambda, \lambda_1)_{a+1,2}^{a,3} \\ R(\lambda, \lambda_1)_{a+2,1}^{a+1,2} & R(\lambda, \lambda_1)_{a+1,2}^{a+1,2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R(\lambda, \lambda_1)_{a+2,1}^{a+1,2} & R(\lambda, \lambda_1)_{a+1,2}^{a+1,2} \\ R(\lambda, \lambda_1)_{a+2,1}^{a+2,1} & R(\lambda, \lambda_1)_{a+1,2}^{a+2,1} \end{vmatrix}} \\
 & \times \frac{R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,1}^{2,2}}{R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,1}^{3,1}} = \frac{R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,1}^{2,2}}{R(\lambda_1, \lambda_2)_{3,1}^{3,1}} \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{a+2,1}^{a,3}}{R(\lambda, \lambda_1)_{a+2,1}^{a+2,1}} - {}_0\mathcal{F}_1^{(a+1)}(\lambda, \lambda_2) \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{a+1,1}^{a,2}}{R(\lambda, \lambda_1)_{a+2,1}^{a+2,1}} - {}_0\mathcal{F}_1^{(a)}(\lambda, \lambda_1) \\
 & \times {}_1\mathcal{F}_1^{(a+1)}(\lambda, \lambda_2) \frac{R(\lambda_2, \lambda_1)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_2, \lambda_1)_{2,1}^{2,1}} - \theta(\lambda_1, \lambda_2) \frac{R(\lambda_1, \lambda_2)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_1, \lambda_2)_{2,1}^{2,1}} {}_0\mathcal{F}_1^{(a)}(\lambda, \lambda_2) {}_1\mathcal{F}_1^{(a+1)}(\lambda, \lambda_1). \quad (\text{B.59})
 \end{aligned}$$

Por fim resta demonstrar a equivalência das Eq.(B.38) e Eq.(B.53) para $a = 1$. Novamente devemos eliminar o termo $\frac{R(\lambda_1, \lambda_2)_{2,1}^{1,2}}{R(\lambda_1, \lambda_2)_{2,1}^{2,1}}$ da Eq.(B.56). Realizarmos essa tarefa através da combinação linear $(\text{B.54})_0\mathcal{F}_1^{(1)}(\lambda, \lambda_1) - (\text{B.56})_0\mathcal{F}_1^{(2)}(\lambda, \lambda_1)$ com $a=1$ dada pela expressão

$$\begin{aligned}
 & {}_0\mathcal{F}_1^{(2)}(\lambda, \lambda_2) {}_0\mathcal{F}_1^{(1)}(\lambda, \lambda_1) \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{2,1}^{2,1}}{R(\lambda, \lambda_1)_{3,1}^{3,1}} - \frac{R(\lambda_2, \lambda)_{1,2}^{2,1}}{R(\lambda_2, \lambda)_{2,1}^{2,1}} P_2(\lambda_1, \lambda) {}_0\mathcal{F}_1^{(2)}(\lambda, \lambda_1) \\
 & + {}_0\mathcal{F}_1^{(2)}(\lambda_1, \lambda_2) {}_0\mathcal{F}_1^{(2)}(\lambda, \lambda_1) \frac{R(\lambda_1, \lambda)_{2,2}^{3,1}}{R(\lambda_1, \lambda)_{3,1}^{3,1}} = \frac{R(\lambda_2, \lambda_1)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_2, \lambda_1)_{2,1}^{2,1}} {}_0\mathcal{F}_1^{(2)}(\lambda, \lambda_2) {}_0\mathcal{F}_1^{(1)}(\lambda, \lambda_1) \\
 & - \theta(\lambda_1, \lambda_2) \frac{R(\lambda_1, \lambda_2)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_1, \lambda_2)_{2,1}^{2,1}} {}_1\mathcal{F}_1^{(1)}(\lambda, \lambda_2) {}_0\mathcal{F}_1^{(2)}(\lambda, \lambda_1). \quad (\text{B.60})
 \end{aligned}$$

O próximo passo tem o propósito de eliminar os termos $P_2(\lambda_1, \lambda)$ e ${}_0\mathcal{F}_1^{(2)}(\lambda, \lambda_1) \frac{R(\lambda_1, \lambda)_{2,2}^{3,1}}{R(\lambda_1, \lambda)_{3,1}^{3,1}}$ da Eq.(B.60). Para implementarmos esses procedimentos utilizamos duas identidades derivadas da relação de unitariedade. A primeira identidade é dada pela Eq.(108), sendo que a segunda é proveniente da relação $U[1, 3]_1^3$ da Eq.(97), cuja expressão explícita é

$$R(\lambda, \mu)_{3,1}^{1,3} R(\mu, \lambda)_{3,1}^{3,1} + R(\lambda, \mu)_{3,1}^{2,2} R(\mu, \lambda)_{2,2}^{3,1} + R(\lambda, \mu)_{3,1}^{3,1} R(\mu, \lambda)_{1,3}^{3,1} = 0. \quad (\text{B.61})$$

Realizando esses procedimentos encontramos o seguinte resultado

$$\begin{aligned}
 & \frac{R(\lambda_2, \lambda)_{1,2}^{2,1}}{R(\lambda_2, \lambda)_{2,1}^{2,1}} D_2^{(2,1)}(\lambda_1, \lambda) + {}_1\mathcal{F}_1^{(2)}(\lambda_1, \lambda_2) \frac{R(\lambda_1, \lambda)_{1,3}^{3,1}}{R(\lambda_1, \lambda)_{3,1}^{3,1}} = - \frac{R(\lambda_2, \lambda_1)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_2, \lambda_1)_{2,1}^{2,1}} {}_0\mathcal{F}_1^{(2)}(\lambda, \lambda_2) {}_1\mathcal{F}_1^{(1)}(\lambda, \lambda_1) \\
 & - \theta(\lambda_1, \lambda_2) \frac{R(\lambda_1, \lambda_2)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_1, \lambda_2)_{2,1}^{2,1}} {}_1\mathcal{F}_1^{(1)}(\lambda, \lambda_2) {}_0\mathcal{F}_1^{(2)}(\lambda, \lambda_1) - {}_0\mathcal{F}_1^{(2)}(\lambda, \lambda_2) \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{2,1}^{1,2}}{R(\lambda, \lambda_1)_{3,1}^{3,1}} \\
 & + {}_0\mathcal{F}_1^{(2)}(\lambda_1, \lambda_2) \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{3,1}^{1,3}}{R(\lambda, \lambda_1)_{3,1}^{3,1}}. \tag{B.62}
 \end{aligned}$$

A inspeção direta da Eq.(B.62) nos revela que as Eqs.(B.38,B.53) para $a = 1$ são equivalentes.

Substituindo as relações (B.40,B.47,B.48,B.50) nas Eqs.(B.18-B.22) obtemos os resultados (188-192) descritos na subseção 4.2.

Apêndice C: estado de três partículas

Neste apêndice descrevemos os detalhes envolvendo a construção do estado de três partículas. A maior dificuldade neste processo está em obter a relação de comutação entre os operadores diagonais $\mathcal{T}_{a,a}(\lambda)$ e o operador $\phi_3(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ (208).

Conforme descrito na seção 4.3, o ansatz mais geral composto pelos operadores da base que descreve um estado com componente azimutal de spin 3, é dado pela Eq.(208). Entretanto, de acordo com as restrições (211,215,221,226,227,229) obtidas na seção 4.3 da análise dos termos fáceis gerados na aplicação dos operadores diagonais $\mathcal{T}_{a,a}(\lambda)$ no ansatz (208), este vetor (208) terá possibilidade de ser um autovetor da matriz de transferência (17) somente se

$$\begin{aligned} \phi_3(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = & \mathcal{T}_{1,2}(\lambda_1)\phi_2(\lambda_2, \lambda_3) + \mathcal{T}_{1,3}(\lambda_1) \left[\frac{R(\lambda_3, \lambda_2)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_3, \lambda_2)_{2,1}^{2,1}} {}_1\mathcal{F}_1^{(2)}(\lambda_1, \lambda_2)\phi_1(\lambda_3)\mathcal{T}_{1,1}(\lambda_2) \right. \\ & + \left. \theta(\lambda_2, \lambda_3) \frac{R(\lambda_2, \lambda_3)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_2, \lambda_3)_{2,1}^{2,1}} {}_1\mathcal{F}_1^{(2)}(\lambda_1, \lambda_3)\phi_1(\lambda_2)\mathcal{T}_{1,1}(\lambda_3) \right] \\ & + \mathcal{T}_{1,4}(\lambda_1) {}_2\mathcal{F}_2^{(2)}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)\mathcal{T}_{1,1}(\lambda_2)\mathcal{T}_{1,1}(\lambda_3). \end{aligned} \quad (\text{C.1})$$

Assim, restringiremos nossa análise ao ansatz (C.1). Em outras palavras, descreveremos neste apêndice os detalhes envolvendo a comutação dos operadores diagonais $\mathcal{T}_{a,a}(\lambda)$ com os operadores que compoem $|\Phi_3\rangle$.

Análogo à estratégia utilizada na obtenção do estado de duas partículas, dividimos o ansatz (C.1) em três partes

$$|\Phi_3\rangle = |\Phi_3^{(1)}\rangle + |\Phi_3^{(2)}\rangle + |\Phi_3^{(3)}\rangle, \quad (\text{C.2})$$

onde

$$\begin{aligned} |\Phi_3^{(1)}\rangle &= \mathcal{T}_{1,2}(\lambda_1)\phi_2(\lambda_2, \lambda_3) |0\rangle \\ |\Phi_3^{(2)}\rangle &= w_1(\lambda_2) \frac{R(\lambda_3, \lambda_2)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_3, \lambda_2)_{2,1}^{2,1}} {}_1\mathcal{F}_1^{(2)}(\lambda_1, \lambda_2)\mathcal{T}_{1,3}(\lambda_1)\phi_1(\lambda_3) |0\rangle \\ &\quad + w_1(\lambda_3)\theta(\lambda_2, \lambda_3) \frac{R(\lambda_2, \lambda_3)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_2, \lambda_3)_{2,1}^{2,1}} {}_1\mathcal{F}_1^{(2)}(\lambda_1, \lambda_3)\mathcal{T}_{1,3}(\lambda_1)\phi_1(\lambda_2) |0\rangle \\ |\Phi_3^{(3)}\rangle &= w_1(\lambda_2)w_1(\lambda_3) {}_2\mathcal{F}_2^{(2)}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)\mathcal{T}_{1,4}(\lambda_1) |0\rangle \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

Para gerarmos a relação de comutação entre $\mathcal{T}_{a,a}(\lambda)$ e $|\Phi_3^{(1)}\rangle$ inicialmente comutamos os operadores $\mathcal{T}_{a,a}(\lambda)$ e $\mathcal{T}_{1,2}(\lambda_1)$ através das Eqs. (40-42) obtendo

$$\mathcal{T}_{1,1}(\lambda) |\Phi_3^{(1)}\rangle = \left[\frac{R(\lambda_1, \lambda)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_1, \lambda)_{2,1}^{2,1}} \mathcal{T}_{1,2}(\lambda_1) \mathcal{T}_{1,1}(\lambda) - \frac{R(\lambda_1, \lambda)_{1,2}^{2,1}}{R(\lambda_1, \lambda)_{2,1}^{2,1}} \mathcal{T}_{1,2}(\lambda) \mathcal{T}_{1,1}(\lambda_1) \right] \phi_2(\lambda_2, \lambda_3) |0\rangle, \quad (\text{C.4})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{a,a}(\lambda) |\Phi_3^{(1)}\rangle &= \left[D_2^{(a,0)}(\lambda, \lambda_1) \mathcal{T}_{1,2}(\lambda_1) \mathcal{T}_{a,a}(\lambda) + \sum_{\bar{e}=3}^{a+1} D_2^{(a,\bar{e}-2)}(\lambda, \lambda_1) \mathcal{T}_{1,\bar{e}}(\lambda_1) \mathcal{T}_{a,a+2-\bar{e}}(\lambda) \right. \\ &+ \sum_{\bar{e}=1}^a \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{a+1,1}^{a,2}}{R(\lambda, \lambda_1)_{a+1,1}^{a+1,1}} \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{a,1}^{\bar{e},a-\bar{e}+1}}{R(\lambda, \lambda_1)_{a,1}^{a,1}} \mathcal{T}_{\bar{e},a+1}(\lambda) \mathcal{T}_{a-\bar{e}+1,1}(\lambda_1) \\ &- \left. \sum_{\bar{e}=1}^{a-1} \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{a,1}^{\bar{e},a-\bar{e}+1}}{R(\lambda, \lambda_1)_{a,1}^{a,1}} \mathcal{T}_{\bar{e},a}(\lambda) \mathcal{T}_{a-\bar{e}+1,2}(\lambda_1) \right] \phi_2(\lambda_2, \lambda_3) |0\rangle, \\ &\text{para } 2 \leq a \leq N-1, \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

e

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{N,N}(\lambda) |\Phi_3^{(1)}\rangle &= \left[\frac{R(\lambda, \lambda_1)_{N,2}^{N,2}}{R(\lambda, \lambda_1)_{N,1}^{N,1}} \mathcal{T}_{1,2}(\lambda_1) \mathcal{T}_{N,N}(\lambda) + \sum_{\bar{e}=3}^N \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{N+2-\bar{e},\bar{e}}^{N,2}}{R(\lambda, \lambda_1)_{N,1}^{N,1}} \mathcal{T}_{1,\bar{e}}(\lambda_1) \mathcal{T}_{N,N+2-\bar{e}}(\lambda) \right. \\ &- \left. \sum_{\bar{e}=1}^{N-1} \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{N,1}^{\bar{e},N-\bar{e}+1}}{R(\lambda, \lambda_1)_{N,1}^{N,1}} \mathcal{T}_{\bar{e},N}(\lambda) \mathcal{T}_{N-\bar{e}+1,2}(\lambda_1) \right] \phi_2(\lambda_2, \lambda_3) |0\rangle. \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

Analisando as Eqs.(C.4,C.5,C.6) concluímos que o próximo procedimento é mover os operadores diagonais e de aniquilação à direita. Dessa maneira, devemos calcular o operador $\mathcal{T}_{d+a,a}(\lambda)$ com $d = 0, \dots, N-a$ aplicado no vetor $\phi_2(\lambda_2, \lambda_3) |0\rangle$. No caso $d = 0$, a ação do operador $\mathcal{T}_{a,a}(\lambda)$ aplicado no vetor $\phi_2(\lambda_2, \lambda_3) |0\rangle$ já foi obtido, sendo esta expressa pela Eq.(199). Por outro lado, para calcularmos $\mathcal{T}_{d+a,a}(\lambda) \phi_2(\lambda_2, \lambda_3) |0\rangle$ com $d \geq 1$ é conveniente dividirmos o vetor $\phi_2(\lambda_2, \lambda_3) |0\rangle$ em duas partes:

$$\phi_2(\lambda_2, \lambda_3) |0\rangle = |\Phi_2^{(1)}\rangle + |\Phi_2^{(2)}\rangle \quad (\text{C.7})$$

onde

$$\left| \Phi_2^{(1)} \right\rangle = \mathcal{T}_{1,2}(\lambda_2) \mathcal{T}_{1,2}(\lambda_3) |0\rangle \quad \left| \Phi_2^{(2)} \right\rangle = {}_1\mathcal{F}_1^{(2)}(\lambda_2, \lambda_3) \mathcal{T}_{1,3}(\lambda_2) \mathcal{T}_{1,1}(\lambda_3) |0\rangle. \quad (\text{C.8})$$

O cálculo do campo $\mathcal{T}_{d+a,a}(\lambda)$ para $d \geq 3$ aplicado no vetor $\left| \Phi_2^{(2)} \right\rangle$ é obtido diretamente da Eq.(82), e o resultado é

$$\mathcal{T}_{d+a,a}(\lambda) \left| \Phi_2^{(2)} \right\rangle = 0 \quad \text{para } d \geq 3. \quad (\text{C.9})$$

Os casos $\mathcal{T}_{a+1,a}(\lambda)$ e $\mathcal{T}_{a+2,a}(\lambda)$ também são obtidos de forma direta, e para tal, devemos aplicar as Eqs.(92,93) e (85) com $\mu = \lambda_2$ no vetor $|0\rangle$ obtendo assim $\mathcal{T}_{d+a,a}(\lambda) \left| \Phi_2^{(2)} \right\rangle$ para $d = 1, 2$.

Por fim, resta calcularmos o operador $\mathcal{T}_{d+a,a}(\lambda)$ aplicado no vetor $\left| \Phi_2^{(1)} \right\rangle$ com $d \geq 1$. Para implementarmos essas manipulações utilizaremos as Eqs.(65,86,173) e também as regras de comutação dos operadores $\mathcal{T}_{a,a}(\lambda)$ e $\mathcal{T}_{a+1,a}(\lambda)$ com o operador $\mathcal{T}_{2,3}(\mu)$ que estão descritas a seguir. Aplicando a regra de Cramer na Eq.(78) para calcular o termo $\mathcal{T}_{a+1,a}(\lambda) \mathcal{T}_{2,3}(\mu)$ obtemos a relação de comutação entre os operadores $\mathcal{T}_{a,a}(\lambda)$ e $\mathcal{T}_{2,3}(\mu)$, isto é,

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{a,a}(\lambda) \mathcal{T}_{2,3}(\mu) &= \sum_{\bar{e}=\bar{M}\{1,a+3-N\}}^{\bar{m}\{a+2,N\}} \frac{R(\lambda, \mu)_{a+3-\bar{e},\bar{e}}^{a,3} R(\lambda, \mu)_{a,2}^{a+1,1}}{\begin{vmatrix} R(\lambda, \mu)_{a+1,1}^{a,2} & R(\lambda, \mu)_{a+1,1}^{a+1,1} \\ R(\lambda, \mu)_{a,2}^{a,2} & R(\lambda, \mu)_{a,2}^{a+1,1} \end{vmatrix}} \mathcal{T}_{1,\bar{e}}(\mu) \mathcal{T}_{a+1,a+3-\bar{e}}(\lambda) \\ &- \sum_{\bar{e}=\bar{M}\{1,a+3-N\}}^{\bar{m}\{a+2,N\}} \frac{R(\lambda, \mu)_{a+3-\bar{e},\bar{e}}^{a,3} R(\lambda, \mu)_{a+1,1}^{a+1,1}}{\begin{vmatrix} R(\lambda, \mu)_{a+1,1}^{a,2} & R(\lambda, \mu)_{a+1,1}^{a+1,1} \\ R(\lambda, \mu)_{a,2}^{a,2} & R(\lambda, \mu)_{a,2}^{a+1,1} \end{vmatrix}} \mathcal{T}_{2,\bar{e}}(\mu) \mathcal{T}_{a,a+3-\bar{e}}(\lambda) \\ &- \sum_{\bar{e}=1}^{a-1} \frac{\begin{vmatrix} R(\lambda, \mu)_{a+1,1}^{\bar{e},a+2-\bar{e}} & R(\lambda, \mu)_{a+1,1}^{a+1,1} \\ R(\lambda, \mu)_{a,2}^{\bar{e},a+2-\bar{e}} & R(\lambda, \mu)_{a,2}^{a+1,1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R(\lambda, \mu)_{a+1,1}^{a,2} & R(\lambda, \mu)_{a+1,1}^{a+1,1} \\ R(\lambda, \mu)_{a,2}^{a,2} & R(\lambda, \mu)_{a,2}^{a+1,1} \end{vmatrix}} \mathcal{T}_{\bar{e},a}(\lambda) \mathcal{T}_{a-\bar{e},3}(\mu). \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

A relação de comutação entre os operadores $\mathcal{T}_{a+1,a}(\lambda)$ e $\mathcal{T}_{2,3}(\mu)$ é obtida da Eq.(77) com $d_1 = 1$. Calculando o termo $\mathcal{T}_{a+1,a-1}(\lambda) \mathcal{T}_{2,3}(\mu)$ na Eq.(77) encontramos que a relação de comutação

entre $\mathcal{T}_{a+1,a}(\lambda)$ e $\mathcal{T}_{2,3}(\mu)$ é dada por

$$\begin{aligned}
 \mathcal{T}_{a+1,a}(\lambda)\mathcal{T}_{2,3}(\mu) &= \sum_{\bar{e}=1}^{a+2} \frac{R(\lambda, \mu)_{a+3-\bar{e}, \bar{e}}^{a,3} R(\lambda, \mu)_{a+1,2}^{a+2,1}}{\begin{vmatrix} R(\lambda, \mu)_{a+2,1}^{a+1,2} & R(\lambda, \mu)_{a+2,1}^{a+2,1} \\ R(\lambda, \mu)_{a+1,2}^{a+1,2} & R(\lambda, \mu)_{a+1,2}^{a+2,1} \end{vmatrix}} \mathcal{T}_{1,\bar{e}}(\mu) \mathcal{T}_{a+2,a+3-\bar{e}}(\lambda) \\
 &- \sum_{\bar{e}=1}^{a+2} \frac{R(\lambda, \mu)_{a+3-\bar{e}, \bar{e}}^{a,3} R(\lambda, \mu)_{a+2,1}^{a+2,1}}{\begin{vmatrix} R(\lambda, \mu)_{a+2,1}^{a+1,2} & R(\lambda, \mu)_{a+2,1}^{a+2,1} \\ R(\lambda, \mu)_{a+1,2}^{a+1,2} & R(\lambda, \mu)_{a+1,2}^{a+2,1} \end{vmatrix}} \mathcal{T}_{2,\bar{e}}(\mu) \mathcal{T}_{a+1,a+3-\bar{e}}(\lambda) \\
 &- \sum_{\bar{e}=1}^a \frac{\begin{vmatrix} R(\lambda, \mu)_{a+2,1}^{\bar{e}, a+3-\bar{e}} & R(\lambda, \mu)_{a+2,1}^{a+2,1} \\ R(\lambda, \mu)_{a+1,2}^{\bar{e}, a+3-\bar{e}} & R(\lambda, \mu)_{a+1,2}^{a+2,1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R(\lambda, \mu)_{a+2,1}^{a+1,2} & R(\lambda, \mu)_{a+2,1}^{a+2,1} \\ R(\lambda, \mu)_{a+1,2}^{a+1,2} & R(\lambda, \mu)_{a+1,2}^{a+2,1} \end{vmatrix}} \mathcal{T}_{\bar{e},a}(\lambda) \mathcal{T}_{a+3-\bar{e},3}(\mu). \quad (\text{C.11})
 \end{aligned}$$

As relações de comutação (65,86,173,C.10,C.11) fornecem todos os ingredientes necessários para determinarmos $\mathcal{T}_{d+a,a}(\lambda) \left| \phi_2^{(1)} \right\rangle$ com $d = 1, 2$. Na primeira etapa desse cálculo devemos mover os operadores diagonais e aniquilação sobre os campos de criação $\mathcal{T}_{1,2}(\lambda_2)$ e $\mathcal{T}_{1,2}(\lambda_3)$

através das Eqs.(65,173), cujo resultado é

$$\begin{aligned}
 \mathcal{T}_{a+1,a}(\lambda) \left| \phi_2^{(1)} \right\rangle &= {}_0\mathcal{F}_1^{(a)}(\lambda, \lambda_2) \mathcal{T}_{1,2}(\lambda_3) [-P_2(\lambda_2, \lambda_3) P_a(\lambda, \lambda_3) w_2(\lambda_2) w_a(\lambda) \\
 &+ P_{a+1}(\lambda, \lambda_3) P_1(\lambda_2, \lambda_3) w_1(\lambda_2) w_{a+1}(\lambda)] |0\rangle \\
 &+ \mathcal{T}_{1,2}(\lambda_2) \left\{ \left[{}_0\mathcal{F}_1^{(a)}(\lambda, \lambda_2) {}_0\mathcal{F}_1^{(1)}(\lambda_2, \lambda_3) P_a(\lambda, \lambda_2) - \frac{R(\lambda, \lambda_2)_{a,2}^{a,2}}{R(\lambda, \lambda_2)_{a+1,1}^{a+1,1}} {}_0\mathcal{F}_1^{(a)}(\lambda, \lambda_3) \right] w_2(\lambda_3) w_a(\lambda) \right. \\
 &+ \left. \left[\frac{R(\lambda, \lambda_2)_{a,2}^{a,2}}{R(\lambda, \lambda_2)_{a+1,1}^{a+1,1}} {}_0\mathcal{F}_1^{(a)}(\lambda, \lambda_3) - {}_0\mathcal{F}_1^{(a)}(\lambda, \lambda_2) {}_1\mathcal{F}_1^{(1)}(\lambda_2, \lambda_3) P_{a+1}(\lambda, \lambda_3) \right] w_1(\lambda_3) w_{a+1}(\lambda) \right\} |0\rangle \\
 &+ \mathcal{T}_{a-1,a}(\lambda) \left\{ \frac{R(\lambda, \lambda_2)_{a+1,1}^{a-1,3}}{R(\lambda, \lambda_2)_{a+1,1}^{a+1,1}} {}_1\mathcal{F}_1^{(2)}(\lambda_2, \lambda_3) w_3(\lambda_2) w_1(\lambda_3) + \left[-\frac{R(\lambda, \lambda_2)_{a+1,1}^{a-1,3}}{R(\lambda, \lambda_2)_{a+1,1}^{a+1,1}} {}_1\mathcal{F}_1^{(2)}(\lambda_2, \lambda_3) \right. \right. \\
 &+ \left. \left. {}_0\mathcal{F}_1^{(a)}(\lambda, \lambda_2) {}_0\mathcal{F}_1^{(a-1)}(\lambda, \lambda_3) P_2(\lambda_2, \lambda_3) - {}_0\mathcal{F}_1^{(a)}(\lambda, \lambda_2) {}_0\mathcal{F}_1^{(a-1)}(\lambda, \lambda_2) {}_0\mathcal{F}_1^{(1)}(\lambda_2, \lambda_3) \right] \right. \\
 &\times \left. w_2(\lambda_2) w_2(\lambda_3) \right\} |0\rangle + \mathcal{T}_{a,a+1}(\lambda) {}_0\mathcal{F}_1^{(a)}(\lambda, \lambda_2) \left[-P_2(\lambda_2, \lambda_3) {}_1\mathcal{F}_1^{(a)}(\lambda, \lambda_3) w_2(\lambda_2) w_1(\lambda_3) \right. \\
 &- \left. {}_0\mathcal{F}_1^{(1)}(\lambda_2, \lambda_3) {}_1\mathcal{F}_1^{(a)}(\lambda, \lambda_2) w_1(\lambda_2) w_2(\lambda_3) \right] |0\rangle - {}_0\mathcal{F}_1^{(a)}(\lambda, \lambda_2) {}_0\mathcal{F}_1^{(a)}(\lambda, \lambda_3) w_2(\lambda_3) \mathcal{T}_{1,1}(\lambda_2) \\
 &\times \mathcal{T}_{a,a+1}(\lambda) |0\rangle - {}_0\mathcal{F}_1^{(a)}(\lambda, \lambda_2) {}_1\mathcal{F}_1^{(a+1)}(\lambda, \lambda_3) w_1(\lambda_3) \mathcal{T}_{1,1}(\lambda_2) \mathcal{T}_{a+1,a+2}(\lambda) |0\rangle \\
 &+ {}_0\mathcal{F}_1^{(a)}(\lambda, \lambda_2) {}_1\mathcal{F}_1^{(2)}(\lambda_2, \lambda_3) w_1(\lambda_3) \mathcal{T}_{a,a}(\lambda) \mathcal{T}_{2,3}(\lambda_2) |0\rangle, \tag{C.12}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{T}_{a+2,a}(\lambda) \left| \phi_2^{(1)} \right\rangle &= w_a(\lambda) \left\{ w_2(\lambda_2) w_2(\lambda_3) \left[-\frac{R(\lambda, \lambda_2)_{a+2,1}^{a,3}}{R(\lambda, \lambda_2)_{a+2,1}^{a+2,1}} {}_1\mathcal{F}_1^{(2)}(\lambda_2, \lambda_3) \right. \right. \\
 &+ \left. \left. {}_0\mathcal{F}_1^{(a+1)}(\lambda, \lambda_2) {}_0\mathcal{F}_1^{(a)}(\lambda, \lambda_3) P_2(\lambda_2, \lambda_3) - {}_0\mathcal{F}_1^{(a+1)}(\lambda, \lambda_2) {}_0\mathcal{F}_1^{(a)}(\lambda, \lambda_2) {}_0\mathcal{F}_1^{(1)}(\lambda_2, \lambda_3) \right] \right. \\
 &+ \left. w_3(\lambda_2) w_1(\lambda_3) \frac{R(\lambda, \lambda_2)_{a+2,1}^{a,3}}{R(\lambda, \lambda_2)_{a+2,1}^{a+2,1}} {}_1\mathcal{F}_1^{(2)}(\lambda_2, \lambda_3) \right\} |0\rangle + w_{a+1}(\lambda) \left\{ w_1(\lambda_2) w_2(\lambda_3) \right. \\
 &\times \left[-\frac{R(\lambda, \lambda_2)_{a+1,1}^{a,2}}{R(\lambda, \lambda_2)_{a+2,1}^{a+2,1}} {}_0\mathcal{F}_1^{(a+1)}(\lambda, \lambda_3) + {}_0\mathcal{F}_1^{(a+1)}(\lambda, \lambda_2) {}_0\mathcal{F}_1^{(a)}(\lambda, \lambda_2) {}_0\mathcal{F}_1^{(1)}(\lambda_2, \lambda_3) \right] \\
 &- \left. w_2(\lambda_2) w_1(\lambda_3) {}_0\mathcal{F}_1^{(a+1)}(\lambda, \lambda_2) {}_0\mathcal{F}_1^{(a)}(\lambda, \lambda_3) P_2(\lambda_2, \lambda_3) \right\} |0\rangle \\
 &+ w_{a+2}(\lambda) w_1(\lambda_2) w_1(\lambda_3) \frac{R(\lambda, \lambda_2)_{a+1,1}^{a,2}}{R(\lambda, \lambda_2)_{a+2,1}^{a+2,1}} {}_0\mathcal{F}_1^{(a+1)}(\lambda, \lambda_3) |0\rangle \\
 &+ {}_0\mathcal{F}_1^{(a+1)}(\lambda, \lambda_2) {}_1\mathcal{F}_1^{(2)}(\lambda_2, \lambda_3) w_1(\lambda_3) \mathcal{T}_{a+1,a}(\lambda) \mathcal{T}_{2,3}(\lambda_2) |0\rangle \tag{C.13}
 \end{aligned}$$

e

$$\mathcal{T}_{a+d,a}(\lambda) \left| \phi_2^{(1)} \right\rangle = {}_0\mathcal{F}_1^{(a+d-1)}(\lambda, \lambda_2)_1 \mathcal{F}_1^{(2)}(\lambda_2, \lambda_3) w_1(\lambda_3) \mathcal{T}_{a+d-1,a}(\lambda) \mathcal{T}_{2,3}(\lambda_2) |0\rangle \quad \text{para } d \geq 3. \quad (\text{C.14})$$

Os últimos três termos na Eq.(C.12) e o último termo na Eq.(C.13) são compostos por operadores diagonais ou aniquilação à esquerda e criação à direita, portanto, devemos comutá-los. Essas comutações são realizadas através das Eqs.(86,C.10,C.11) e ao final desse processo obtemos a regra de comutação do campo $\mathcal{T}_{d+a,a}(\lambda)$ com $\left| \phi_2^{(1)} \right\rangle$ para $d = 1, 2$. Já a comutação dos campos $\mathcal{T}_{a+d-1,a}(\lambda)$ e $\mathcal{T}_{2,3}(\lambda_2)$ na Eq.(C.14) é feita através da relação de comutação obtida do sistema linear (66) com $b = 3$ e $a_1 = a + 1$. Aplicando a regra de Cramer no sistema (66) calculamos $\mathcal{T}_{a+d-1,a}(\lambda) \mathcal{T}_{2,3}(\lambda_2)$ e assim concluímos da Eq.(C.14) que $\mathcal{T}_{a+d,a}(\lambda) \left| \phi_2^{(1)} \right\rangle = 0$. Somando as contribuições do operador $\mathcal{T}_{d+a,a}(\lambda)$ com $d \geq 1$ aplicado nos vetores $\left| \phi_2^{(1)} \right\rangle$ e $\left| \phi_2^{(2)} \right\rangle$ encontramos os seguintes resultados

$$\mathcal{T}_{d+a,a}(\lambda) \phi_2(\lambda_2, \lambda_3) |0\rangle = 0 |0\rangle, \quad \text{para } d \geq 3, \quad (\text{C.15})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{a+2,a}(\lambda) \phi_2(\lambda_2, \lambda_3) |0\rangle &= w_{a+2}(\lambda) w_1(\lambda_2) w_1(\lambda_3) {}_0\mathcal{F}_2^{(a)}(\lambda, \lambda_2, \lambda_3) |0\rangle \\ &+ w_{a+1}(\lambda) w_2(\lambda_2) w_1(\lambda_3) {}_1\mathcal{F}_2^{(a)}(\lambda, \lambda_2, \lambda_3) \frac{R(\lambda_2, \lambda_3)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_2, \lambda_3)_{2,1}^{2,1}} \frac{R(\lambda_3, \lambda_2)_{2,1}^{2,1}}{R(\lambda_3, \lambda_2)_{1,1}^{1,1}} \theta(\lambda_2, \lambda_3) |0\rangle \\ &- w_{a+1}(\lambda) w_1(\lambda_2) w_2(\lambda_3) {}_0\mathcal{F}_1^{(a)}(\lambda, \lambda_2)_0 \mathcal{H}_1^{(a+1)}(\lambda, \lambda_2, \lambda_3 | 2) |0\rangle \\ &+ w_a(\lambda) w_2(\lambda_2) w_2(\lambda_3) {}_2\mathcal{F}_2^{(a)}(\lambda, \lambda_2, \lambda_3 | 1) |0\rangle \end{aligned} \quad (\text{C.16})$$

e

$$\begin{aligned}
 \mathcal{T}_{a+1,a}(\lambda)\phi_2(\lambda_2, \lambda_3) |0\rangle &= \mathcal{T}_{1,2}(\lambda_3)_0 \mathcal{F}_1^{(a)}(\lambda, \lambda_2) [w_{a+1}(\lambda)w_1(\lambda_2)P_1(\lambda_2, \lambda_3)P_{a+1}(\lambda, \lambda_3) \\
 &- w_a(\lambda)w_2(\lambda_2)P_2(\lambda_2, \lambda_3)P_a(\lambda, \lambda_3)] |0\rangle \\
 &+ \mathcal{T}_{1,2}(\lambda_2) [w_{a+1}(\lambda)w_1(\lambda_3)P_{1,a+1}(\lambda, \lambda_2, \lambda_3) \\
 &- w_a(\lambda)w_2(\lambda_3)P_{2,a}(\lambda, \lambda_2, \lambda_3)] |0\rangle \\
 &+ \mathcal{T}_{a+1,a}(\lambda)w_1(\lambda_2)w_1(\lambda_3)_0 \mathcal{F}_2^{(a)}(\lambda, \lambda_2, \lambda_3) |0\rangle \\
 &- \mathcal{T}_{a,a+1}(\lambda)_0 \mathcal{F}_1^{(a)}(\lambda, \lambda_2) \left[w_1(\lambda_2)w_2(\lambda_3)_0 \mathcal{H}_1^{(a)}(\lambda, \lambda_2, \lambda_3|2) \right. \\
 &+ \left. w_2(\lambda_2)w_1(\lambda_3)_0 \mathcal{F}_1^{(a)}(\lambda, \lambda_3) \frac{R(\lambda_2, \lambda_3)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_2, \lambda_3)_{2,1}^{2,1}} \theta(\lambda_2, \lambda_3) \right] |0\rangle \\
 &+ \bar{\delta}_a^1 \mathcal{T}_{a-1,a}(\lambda)w_2(\lambda_2)w_2(\lambda_3)_2 \mathcal{F}_2^{(a-1)}(\lambda, \lambda_2, \lambda_3) |0\rangle
 \end{aligned} \tag{C.17}$$

onde

$$\begin{aligned}
 {}_2\mathcal{F}_2^{(a)}(\lambda, \lambda_2, \lambda_3|1) &= \frac{R(\lambda, \lambda_2)_{a+2,1}^{a,3}}{R(\lambda, \lambda_2)_{a+2,1}^{a+2,1}} {}_0\mathcal{F}_1^{(2)}(\lambda_2, \lambda_3) + P_2(\lambda_2, \lambda_3)_0 \mathcal{F}_1^{(a+1)}(\lambda, \lambda_2)_0 \mathcal{F}_1^{(a)}(\lambda, \lambda_3) \\
 &- {}_0\mathcal{F}_1^{(a+1)}(\lambda, \lambda_2)_0 \mathcal{F}_1^{(a)}(\lambda, \lambda_2)_0 \mathcal{F}_1^{(1)}(\lambda_2, \lambda_3),
 \end{aligned} \tag{C.18}$$

$$\begin{aligned}
 P_{1,a+1}(\lambda, \lambda_2, \lambda_3) &= P_{a+1}(\lambda, \lambda_3)_0 \mathcal{F}_1^{(a)}(\lambda, \lambda_2)_0 \mathcal{F}_1^{(1)}(\lambda_2, \lambda_3) - {}_0\mathcal{F}_1^{(a+1)}(\lambda, \lambda_3)_0 \mathcal{F}_1^{(a)}(\lambda, \lambda_2) \\
 &\times \frac{R(\lambda, \lambda_2)_{a+1,2}^{a+2,1}}{R(\lambda, \lambda_2)_{a+2,1}^{a+2,1}} + \frac{R(\lambda, \lambda_2)_{a,2}^{a,2}}{R(\lambda, \lambda_2)_{a+1,1}^{a+1,1}} {}_0\mathcal{F}_1^{(a)}(\lambda, \lambda_3) \\
 &- {}_1\mathcal{F}_1^{(2)}(\lambda_2, \lambda_3) \frac{\begin{vmatrix} R(\lambda, \lambda_2)_{a+2,1}^{a,3} & R(\lambda, \lambda_2)_{a+1,2}^{a,3} \\ R(\lambda, \lambda_2)_{a+2,1}^{a+2,1} & R(\lambda, \lambda_2)_{a+1,2}^{a+2,1} \end{vmatrix}}{R(\lambda, \lambda_2)_{a+2,1}^{a+2,1} R(\lambda, \lambda_2)_{a+1,1}^{a+1,1}},
 \end{aligned} \tag{C.19}$$

$$\begin{aligned}
 P_{1,N}(\lambda, \lambda_2, \lambda_3) &= P_N(\lambda, \lambda_3)_0 \mathcal{F}_1^{(N-1)}(\lambda, \lambda_2)_0 \mathcal{F}_1^{(1)}(\lambda_2, \lambda_3) + \frac{R(\lambda, \lambda_2)_{N-1,2}^{N-1,2}}{R(\lambda, \lambda_2)_{N,1}^{N,1}} {}_0\mathcal{F}_1^{(N-1)}(\lambda, \lambda_3) \\
 &+ {}_1\mathcal{F}_1^{(2)}(\lambda_2, \lambda_3) \frac{R(\lambda, \lambda_2)_{a+1,2}^{a,3}}{R(\lambda, \lambda_2)_{a+1,1}^{a+1,1}}
 \end{aligned} \tag{C.20}$$

e

$$\begin{aligned}
 P_{2,a}(\lambda, \lambda_2, \lambda_3) &= -P_a(\lambda, \lambda_2)_0 \mathcal{F}_1^{(a)}(\lambda, \lambda_2)_0 \mathcal{F}_1^{(1)}(\lambda_2, \lambda_3) - {}_0\mathcal{F}_1^{(a)}(\lambda, \lambda_3)_0 \mathcal{F}_1^{(a)}(\lambda, \lambda_2) \frac{R(\lambda, \lambda_2)_{a,2}^{a+1,1}}{R(\lambda, \lambda_2)_{a+1,1}^{a+1,1}} \\
 &+ \frac{R(\lambda, \lambda_2)_{a,2}^{a,2}}{R(\lambda, \lambda_2)_{a+1,1}^{a+1,1}} {}_0\mathcal{F}_1^{(a)}(\lambda, \lambda_3). \tag{C.21}
 \end{aligned}$$

As próximas manipulações algébricas têm como objetivo simplificar as funções (C.18-C.21). Utilizando as definições (B.34,B.37,B.51) podemos reescrever a função ${}_2\mathcal{F}_2^{(a)}(\lambda, \lambda_2, \lambda_3|1)$ na forma

$$\begin{aligned}
 {}_2\mathcal{F}_2^{(a)}(\lambda, \lambda_2, \lambda_3|1) &= -{}_0\mathcal{F}_2^{(a)}(\lambda, \lambda_2, \lambda_3) - {}_1\mathcal{F}_2^{(a)}(\lambda, \lambda_2, \lambda_3) \frac{R(\lambda_2, \lambda_3)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_2, \lambda_3)_{2,1}^{2,1}} \frac{R(\lambda_3, \lambda_2)_{2,1}^{2,1}}{R(\lambda_3, \lambda_2)_{1,1}^{1,1}} \theta(\lambda_2, \lambda_3) \\
 &+ {}_0\mathcal{F}_1^{(a)}(\lambda, \lambda_2)_0 \mathcal{H}_1^{(a+1)}(\lambda, \lambda_2, \lambda_3|2). \tag{C.22}
 \end{aligned}$$

Em seguida, comparando as Eqs.(B.53,C.22) concluímos o seguinte resultado

$${}_2\mathcal{F}_2^{(a)}(\lambda, \lambda_2, \lambda_3|1) = {}_2\mathcal{F}_2^{(a)}(\lambda, \lambda_2, \lambda_3). \tag{C.23}$$

A propriedade de simetria do operador $\phi_2(\lambda_2, \lambda_3)$ (186) permite realizarmos duas simplificações. Aplicando essa simetria nas Eqs.(C.16,C.17) é imediato concluir que o lado direito dessas equações deve ser simétrico em relação a $\lambda_2 \leftrightarrow \lambda_3$ e conseqüentemente as duas identidades abaixo devem ser satisfeitas,

$$P_{1,a+1}(\lambda, \lambda_2, \lambda_3) = \theta(\lambda_2, \lambda_3) P_1(\lambda_3, \lambda_2) P_{a+1}(\lambda, \lambda_2)_0 \mathcal{F}_1^{(a)}(\lambda, \lambda_3) \tag{C.24}$$

$$P_{2,a}(\lambda, \lambda_2, \lambda_3) = \theta(\lambda_2, \lambda_3) P_2(\lambda_3, \lambda_2) P_a(\lambda, \lambda_2)_0 \mathcal{F}_1^{(a)}(\lambda, \lambda_3). \tag{C.25}$$

De acordo com as identidades (C.24,C.25), podemos simplificar as Eqs.(C.16,C.17) e desse

modo reescrevê-las nas seguintes formas simétricas

$$\begin{aligned}
 \mathcal{T}_{a+2,a}(\lambda)\phi_2(\lambda_2, \lambda_3) |0\rangle &= w_{a+2}(\lambda)w_1(\lambda_2)w_1(\lambda_3)_0\mathcal{F}_2^{(a)}(\lambda, \lambda_2, \lambda_3) |0\rangle \\
 &+ w_{a+1}(\lambda)w_2(\lambda_2)w_1(\lambda_3)_1\mathcal{F}_2^{(a)}(\lambda, \lambda_2, \lambda_3) \frac{R(\lambda_2, \lambda_3)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_2, \lambda_3)_{2,1}^{2,1}} \frac{R(\lambda_3, \lambda_2)_{2,1}^{2,1}}{R(\lambda_3, \lambda_2)_{1,1}^{1,1}} \theta(\lambda_2, \lambda_3) |0\rangle \\
 &+ w_{a+1}(\lambda)w_1(\lambda_2)w_2(\lambda_3)_1\mathcal{F}_2^{(a)}(\lambda, \lambda_3, \lambda_2) \frac{R(\lambda_3, \lambda_2)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_3, \lambda_2)_{2,1}^{2,1}} \frac{R(\lambda_2, \lambda_3)_{2,1}^{2,1}}{R(\lambda_2, \lambda_3)_{1,1}^{1,1}} |0\rangle \\
 &+ w_a(\lambda)w_2(\lambda_2)w_2(\lambda_3)_2\mathcal{F}_2^{(a)}(\lambda, \lambda_2, \lambda_3) |0\rangle, \quad \text{para } 1 \leq a \leq N-2
 \end{aligned} \tag{C.26}$$

e

$$\begin{aligned}
 \mathcal{T}_{a+1,a}(\lambda)\phi_2(\lambda_2, \lambda_3) |0\rangle &= \mathcal{T}_{1,2}(\lambda_3)_0\mathcal{F}_1^{(a)}(\lambda, \lambda_2) \left[w_{a+1}(\lambda)w_1(\lambda_2) \frac{R(\lambda_3, \lambda_2)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_3, \lambda_2)_{2,1}^{2,1}} P_{a+1}(\lambda, \lambda_3) \right. \\
 &- \left. w_a(\lambda)w_2(\lambda_2)\theta(\lambda_2, \lambda_3) \frac{R(\lambda_2, \lambda_3)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_2, \lambda_3)_{2,1}^{2,1}} P_a(\lambda, \lambda_3) \right] |0\rangle \\
 &+ \mathcal{T}_{1,2}(\lambda_2)_0\mathcal{F}_1^{(a)}(\lambda, \lambda_3) \left[w_{a+1}(\lambda)w_1(\lambda_3)\theta(\lambda_2, \lambda_3) \frac{R(\lambda_2, \lambda_3)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_2, \lambda_3)_{2,1}^{2,1}} P_{a+1}(\lambda, \lambda_2) \right. \\
 &- \left. w_a(\lambda)w_2(\lambda_3) \frac{R(\lambda_3, \lambda_2)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_3, \lambda_2)_{2,1}^{2,1}} P_a(\lambda, \lambda_2) \right] |0\rangle \\
 &+ \mathcal{T}_{a+1,a}(\lambda)w_1(\lambda_2)w_1(\lambda_3)_0\mathcal{F}_2^{(a)}(\lambda, \lambda_2, \lambda_3) |0\rangle \\
 &- \mathcal{T}_{a,a+1}(\lambda)_0\mathcal{F}_1^{(a)}(\lambda, \lambda_2)_0\mathcal{F}_1^{(a)}(\lambda, \lambda_3) \left[w_1(\lambda_2)w_2(\lambda_3) \frac{R(\lambda_3, \lambda_2)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_3, \lambda_2)_{2,1}^{2,1}} \right. \\
 &+ \left. w_2(\lambda_2)w_1(\lambda_3) \frac{R(\lambda_2, \lambda_3)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_2, \lambda_3)_{2,1}^{2,1}} \theta(\lambda_2, \lambda_3) \right] |0\rangle \\
 &+ \delta_a^1 \mathcal{T}_{a-1,a}(\lambda)w_2(\lambda_2)w_2(\lambda_3)_2\mathcal{F}_2^{(a-1)}(\lambda, \lambda_2, \lambda_3) |0\rangle, \quad \text{para } 1 \leq a \leq N-1.
 \end{aligned} \tag{C.27}$$

Com a obtenção das relações de comutação entre $\mathcal{T}_{d+a,a}(\lambda)$ e $\phi_2(\lambda_2, \lambda_3)$ para $d \geq 0$ determinamos um ingrediente fundamental na construção do estado de três partículas. Todavia, ainda resta determinarmos um último resultado que utilizaremos neste problema de autovalor. A necessidade dessa última informação surge do seguinte fato. O primeiro termo do lado direito das Eqs.(C.4,C.5,C.6) possui a forma $P_a(\lambda, \lambda_1)\mathcal{T}_{1,2}(\lambda_1)\mathcal{T}_{a,a}(\lambda)\phi_2(\lambda_2, \lambda_3) |0\rangle$. Através da Eq.(199) calculamos a ação dos operadores $\mathcal{T}_{a,a}(\lambda)$ no vetor $\phi_2(\lambda_2, \lambda_3) |0\rangle$, e desta forma obtemos dentre outros, os termos $\mathcal{T}_{a,a+1}(\lambda)\mathcal{T}_{1,2}(\lambda_j) |0\rangle$ para $j = 2, 3$. Esse resultado acarreta o surgimento do termo $\mathcal{T}_{1,2}(\lambda_1)\mathcal{T}_{a,a+1}(\lambda)\mathcal{T}_{1,2}(\lambda_j) |0\rangle$, que corresponde ao produto de três operadores de criação

com o parâmetro espectral λ situado no campo do meio. Logo, tornar-se necessário alterarmos o ordenamento desse produto de operadores de criação de modo a movermos o parâmetro espectral λ à esquerda. As relações de comutação que alteram esse ordenamento corresponde ao último ingrediente que utilizaremos na construção do estado de três partículas. O primeiro procedimento que devemos executar para realizar essa tarefa é alterar o ordenamento entre os campos $\mathcal{T}_{1,2}(\lambda_1)$ e $\mathcal{T}_{a,a+1}(\lambda)$ através das Eqs.(59,60) e então utilizando as Eqs.(65,173) movemos os operadores diagonais e aniquilação à direita sobre o campo $\mathcal{T}_{1,2}(\lambda_i)$. O resultado dessas manipulações algébricas são

$$\begin{aligned}
& \mathcal{T}_{1,2}(\lambda_1)\mathcal{T}_{1,2}(\lambda)\mathcal{T}_{1,2}(\lambda_j) |0\rangle = \theta(\lambda_1, \lambda)\mathcal{T}_{1,2}(\lambda)\mathcal{T}_{1,2}(\lambda_1)\mathcal{T}_{1,2}(\lambda_j) |0\rangle \\
& - {}_1\mathcal{F}_1^{(2)}(\lambda_1, \lambda)P_1(\lambda, \lambda_j)w_1(\lambda)\mathcal{T}_{1,3}(\lambda_1)\mathcal{T}_{1,2}(\lambda_j) |0\rangle \\
& + \theta(\lambda_1, \lambda){}_1\mathcal{F}_1^{(2)}(\lambda, \lambda_1)\mathcal{T}_{1,3}(\lambda) \left[w_1(\lambda_1)P_1(\lambda_1, \lambda_j)\mathcal{T}_{1,2}(\lambda_j) - w_1(\lambda_j){}_1\mathcal{F}_1^{(1)}(\lambda_1, \lambda_j)\mathcal{T}_{1,2}(\lambda_1) \right] |0\rangle \\
& + {}_1\mathcal{F}_1^{(2)}(\lambda_1, \lambda){}_1\mathcal{F}_1^{(1)}(\lambda, \lambda_j)w_1(\lambda_j)\mathcal{T}_{1,3}(\lambda_1)\mathcal{T}_{1,2}(\lambda) |0\rangle
\end{aligned} \tag{C.28}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{T}_{1,2}(\lambda_1) \mathcal{T}_{a,a+1}(\lambda) \mathcal{T}_{1,2}(\lambda_j) |0\rangle &= -\frac{R(\lambda, \lambda_1)_{a,1}^{a,1}}{R(\lambda, \lambda_1)_{a+1,1}^{a+1,1}} \frac{{}_0\mathcal{F}_1^{(a+1)}(\lambda, \lambda_1)}{D_2^{(a+1,0)}(\lambda, \lambda_1)} \mathcal{T}_{a,a+2}(\lambda) \\
 &\times \left[w_1(\lambda_1) P_1(\lambda_1, \lambda_j) \mathcal{T}_{1,2}(\lambda_j) - w_1(\lambda_j) {}_1\mathcal{F}_1^{(1)}(\lambda_1, \lambda_j) \mathcal{T}_{1,2}(\lambda_1) \right] |0\rangle \\
 &- \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{a,1}^{a-1,2}}{R(\lambda, \lambda_1)_{a+1,1}^{a+1,1}} {}_0\mathcal{F}_1^{(1)}(\lambda_1, \lambda_j) \frac{{}_0\mathcal{F}_1^{(a+1)}(\lambda, \lambda_1)}{D_2^{(a+1,0)}(\lambda, \lambda_1)} \mathcal{T}_{a-1,a+2}(\lambda) [w_1(\lambda_j) w_2(\lambda_1) - w_2(\lambda_j) w_1(\lambda_1)] |0\rangle \\
 &+ \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{a,1}^{a,1}}{R(\lambda, \lambda_1)_{a+1,1}^{a+1,1}} \frac{1}{D_2^{(a+1,0)}(\lambda, \lambda_1)} \mathcal{T}_{a,a+1}(\lambda) \mathcal{T}_{1,2}(\lambda_1) \mathcal{T}_{1,2}(\lambda_j) |0\rangle \\
 &+ \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{a,1}^{a-1,2}}{R(\lambda, \lambda_1)_{a+1,1}^{a+1,1}} \frac{1}{D_2^{(a+1,0)}(\lambda, \lambda_1)} \mathcal{T}_{a-1,a+1}(\lambda) [w_2(\lambda_1) P_2(\lambda_1, \lambda_j) \mathcal{T}_{1,2}(\lambda_j) \\
 &- w_1(\lambda_j) {}_1\mathcal{F}_1^{(2)}(\lambda_1, \lambda_j) \mathcal{T}_{2,3}(\lambda_1) - w_2(\lambda_j) {}_0\mathcal{F}_1^{(1)}(\lambda_1, \lambda_j) \mathcal{T}_{1,2}(\lambda_1)] |0\rangle \\
 &- w_a(\lambda) \frac{D_2^{(a+1,1)}(\lambda, \lambda_1)}{D_2^{(a+1,0)}(\lambda, \lambda_1)} P_a(\lambda, \lambda_j) \mathcal{T}_{1,3}(\lambda_1) \mathcal{T}_{1,2}(\lambda_j) |0\rangle \\
 &- \frac{D_2^{(a+1,2)}(\lambda, \lambda_1)}{D_2^{(a+1,0)}(\lambda, \lambda_1)} {}_0\mathcal{F}_1^{(a-1)}(\lambda, \lambda_j) \mathcal{T}_{1,4}(\lambda_1) [w_1(\lambda_j) w_a(\lambda) - w_2(\lambda_j) w_{a-1}(\lambda)] |0\rangle \\
 &+ \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{a,1}^{a-2,3}}{R(\lambda, \lambda_1)_{a+1,1}^{a+1,1}} \frac{{}_0\mathcal{F}_1^{(2)}(\lambda_1, \lambda_j)}{D_2^{(a+1,0)}(\lambda, \lambda_1)} \mathcal{T}_{a-2,a+1}(\lambda) [w_1(\lambda_j) w_3(\lambda_1) - w_2(\lambda_j) w_2(\lambda_1)] |0\rangle \\
 &+ w_1(\lambda_j) \frac{D_2^{(a+1,1)}(\lambda, \lambda_1)}{D_2^{(a+1,0)}(\lambda, \lambda_1)} {}_1\mathcal{F}_1^{(a)}(\lambda, \lambda_j) \mathcal{T}_{1,3}(\lambda_1) \mathcal{T}_{a,a+1}(\lambda) |0\rangle \\
 &+ w_2(\lambda_j) \frac{D_2^{(a+1,1)}(\lambda, \lambda_1)}{D_2^{(a+1,0)}(\lambda, \lambda_1)} {}_0\mathcal{F}_1^{(a-1)}(\lambda, \lambda_j) \mathcal{T}_{1,3}(\lambda_1) \mathcal{T}_{a-1,a}(\lambda) |0\rangle, \quad \text{para } 2 \leq a \leq N-2 \quad (\text{C.29})
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 \mathcal{T}_{1,2}(\lambda_1)\mathcal{T}_{N-1,N}(\lambda)\mathcal{T}_{1,2}(\lambda_j)|0\rangle &= \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{N-1,1}^{N-1,1}}{R(\lambda, \lambda_1)_{N,2}^{N,2}}\mathcal{T}_{N-1,N}(\lambda)\mathcal{T}_{1,2}(\lambda_1)\mathcal{T}_{1,2}(\lambda_j)|0\rangle \\
 &+ \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{N-1,1}^{N-2,2}}{R(\lambda, \lambda_1)_{N,2}^{N,2}}\mathcal{T}_{N-2,N}(\lambda)\left[w_2(\lambda_1)P_2(\lambda_1, \lambda_j)\mathcal{T}_{1,2}(\lambda_j) - w_1(\lambda_j)_1\mathcal{F}_1^{(2)}(\lambda_1, \lambda_j)\mathcal{T}_{2,3}(\lambda_1) \right. \\
 &- \left. w_2(\lambda_j)_0\mathcal{F}_1^{(1)}(\lambda_1, \lambda_j)\mathcal{T}_{1,2}(\lambda_1)\right]|0\rangle \\
 &+ \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{N-1,1}^{N-3,3}}{R(\lambda, \lambda_1)_{N,2}^{N,2}}{}_0\mathcal{F}_1^{(2)}(\lambda_1, \lambda_j)\mathcal{T}_{N-3,N}(\lambda)[w_1(\lambda_j)w_3(\lambda_1) - w_2(\lambda_j)w_2(\lambda_1)]|0\rangle \\
 &- w_{N-1}(\lambda)\frac{R(\lambda, \lambda_1)_{N-1,3}^{N,2}}{R(\lambda, \lambda_1)_{N,2}^{N,2}}P_{N-1}(\lambda, \lambda_j)\mathcal{T}_{1,3}(\lambda_1)\mathcal{T}_{1,2}(\lambda_j)|0\rangle \\
 &- \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{N-2,4}^{N,2}}{R(\lambda, \lambda_1)_{N,2}^{N,2}}{}_0\mathcal{F}_1^{(N-2)}(\lambda, \lambda_j)\mathcal{T}_{1,4}(\lambda_1)[w_1(\lambda_j)w_{N-1}(\lambda) - w_2(\lambda_j)w_{N-2}(\lambda)]|0\rangle \\
 &- w_1(\lambda_j)\frac{R(\lambda, \lambda_1)_{N-1,3}^{N,2}}{R(\lambda, \lambda_1)_{N,2}^{N,2}}\frac{R(\lambda, \lambda_j)_{N,1}^{N-1,2}}{R(\lambda, \lambda_j)_{N,1}^{N,1}}\mathcal{T}_{1,3}(\lambda_1)\mathcal{T}_{N-1,N}(\lambda)|0\rangle \\
 &+ w_2(\lambda_j)\frac{R(\lambda, \lambda_1)_{N-1,3}^{N,2}}{R(\lambda, \lambda_1)_{N,2}^{N,2}}\frac{R(\lambda, \lambda_j)_{N-1,1}^{N-2,2}}{R(\lambda, \lambda_j)_{N-1,1}^{N-1,1}}\mathcal{T}_{1,3}(\lambda_1)\mathcal{T}_{N-2,N-1}(\lambda)|0\rangle. \tag{C.30}
 \end{aligned}$$

O último termo da Eq.(C.28) e os dois últimos termos das Eqs.(C.29,C.30) são formados pelo produto de dois operadores de criação com a variável λ à direita $\mathcal{T}_{1,3}(\lambda_1)\mathcal{T}_{a-1,a}(\lambda)|0\rangle$, logo precisamos alterar novamente o ordenamento das variáveis λ_1 e λ . Realizamos esses procedimentos algébricos por meio das regras de comutação geradas pela Eq.(54) e pelos sistemas lineares (55,56) com $d_1 = 0$, $b_1 = 3$. Mais precisamente, a Eq.(54) com $d_1 = 0$, $b_1 = 3$ é dada por

$$\begin{aligned}
 \mathcal{T}_{1,3}(\lambda_1)\mathcal{T}_{1,2}(\lambda)|0\rangle &= \frac{R(\lambda_1, \lambda)_{3,1}^{3,1}}{R(\lambda_1, \lambda)_{1,1}^{1,1}}D_2^{(3,0)}(\lambda_1, \lambda)\mathcal{T}_{1,2}(\lambda)\mathcal{T}_{1,3}(\lambda_1)|0\rangle \\
 &+ \frac{R(\lambda_1, \lambda)_{3,1}^{3,1}}{R(\lambda_1, \lambda)_{1,1}^{1,1}}D_2^{(3,1)}(\lambda_1, \lambda)\mathcal{T}_{1,3}(\lambda)\mathcal{T}_{1,2}(\lambda_1)|0\rangle + w_1(\lambda_1)\frac{R(\lambda_1, \lambda)_{3,1}^{3,1}}{R(\lambda_1, \lambda)_{1,1}^{1,1}}D_2^{(3,2)}(\lambda_1, \lambda)\mathcal{T}_{1,4}(\lambda)|0\rangle \\
 &+ w_1(\lambda)\frac{R(\lambda_1, \lambda)_{4,1}^{3,2}}{R(\lambda_1, \lambda)_{4,1}^{4,1}}\mathcal{T}_{1,4}(\lambda_1)|0\rangle \tag{C.31}
 \end{aligned}$$

e aplicando a regra de Cramer nos sistemas (55,56) com $d_1 = 0$, $b_1 = 3$ para calcularmos

$\mathcal{T}_{1,3}(\lambda_1)\mathcal{T}_{a-1,a}(\lambda)$ obtemos

$$\begin{aligned}
 \mathcal{T}_{1,3}(\lambda_1)\mathcal{T}_{a-1,a}(\lambda) |0\rangle &= \frac{1}{D_3^{(a,0)}(\lambda, \lambda_1)} \sum_{\bar{e}=1}^3 \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{a-1,1}^{a-\bar{e},\bar{e}}}{R(\lambda, \lambda_1)_{a,1}^{a,1}} \mathcal{T}_{a-\bar{e},a}(\lambda) \mathcal{T}_{\bar{e},3}(\lambda_1) |0\rangle \\
 &- \frac{\begin{vmatrix} R(\lambda, \lambda_1)_{a+2,1}^{a,3} & R(\lambda, \lambda_1)_{a+1,2}^{a,3} \\ R(\lambda, \lambda_1)_{a+2,1}^{a+2,1} & R(\lambda, \lambda_1)_{a+1,2}^{a+2,1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R(\lambda, \lambda_1)_{a+2,1}^{a,3} & R(\lambda, \lambda_1)_{a+1,2}^{a,3} & R(\lambda, \lambda_1)_{a,3}^{a,3} \\ R(\lambda, \lambda_1)_{a+2,1}^{a+1,2} & R(\lambda, \lambda_1)_{a+1,2}^{a+1,2} & R(\lambda, \lambda_1)_{a,3}^{a+1,2} \\ R(\lambda, \lambda_1)_{a+2,1}^{a+2,1} & R(\lambda, \lambda_1)_{a+1,2}^{a+2,1} & R(\lambda, \lambda_1)_{a,3}^{a+2,1} \end{vmatrix}} \sum_{\bar{e}=1}^2 R(\lambda, \lambda_1)_{a-1,1}^{a-\bar{e},\bar{e}} \mathcal{T}_{a-\bar{e},a+1}(\lambda) \mathcal{T}_{\bar{e},2}(\lambda_1) |0\rangle \\
 &+ \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{a-1,1}^{a-1,1} \begin{vmatrix} R(\lambda, \lambda_1)_{a+2,1}^{a,3} & R(\lambda, \lambda_1)_{a+1,2}^{a,3} \\ R(\lambda, \lambda_1)_{a+2,1}^{a+1,2} & R(\lambda, \lambda_1)_{a+1,2}^{a+1,2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R(\lambda, \lambda_1)_{a+2,1}^{a,3} & R(\lambda, \lambda_1)_{a+1,2}^{a,3} & R(\lambda, \lambda_1)_{a,3}^{a,3} \\ R(\lambda, \lambda_1)_{a+2,1}^{a+1,2} & R(\lambda, \lambda_1)_{a+1,2}^{a+1,2} & R(\lambda, \lambda_1)_{a,3}^{a+1,2} \\ R(\lambda, \lambda_1)_{a+2,1}^{a+2,1} & R(\lambda, \lambda_1)_{a+1,2}^{a+2,1} & R(\lambda, \lambda_1)_{a,3}^{a+2,1} \end{vmatrix}} w_1(\lambda_1) \mathcal{T}_{a-1,a+2}(\lambda) |0\rangle \\
 &+ \frac{D_3^{(a,1)}(\lambda, \lambda_1)}{D_3^{(a,0)}(\lambda, \lambda_1)} w_{a-1}(\lambda) \mathcal{T}_{1,4}(\lambda_1) |0\rangle, \quad \text{para } 3 \leq a \leq N-2, \tag{C.32}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\begin{vmatrix} R(\lambda, \lambda_1)_{N,2}^{N-1,3} & R(\lambda, \lambda_1)_{N-1,3}^{N-1,3} \\ R(\lambda, \lambda_1)_{N,2}^{N,2} & R(\lambda, \lambda_1)_{N-1,3}^{N,2} \end{vmatrix} \mathcal{T}_{1,3}(\lambda_1) \mathcal{T}_{N-2,N-1}(\lambda) |0\rangle = \sum_{\bar{e}=1}^3 R(\lambda, \lambda_1)_{N-2,1}^{N-1-\bar{e},\bar{e}} \\
 &\times \left[R(\lambda, \lambda_1)_{N,2}^{N-1,3} \mathcal{T}_{N-1-\bar{e},N}(\lambda) \mathcal{T}_{\bar{e},2}(\lambda_1) - R(\lambda, \lambda_1)_{N,2}^{N,2} \mathcal{T}_{N-1-\bar{e},N-1}(\lambda) \mathcal{T}_{\bar{e},3}(\lambda_1) \right] |0\rangle \\
 &- \begin{vmatrix} R(\lambda, \lambda_1)_{N,2}^{N-1,3} & R(\lambda, \lambda_1)_{N-2,4}^{N-1,3} \\ R(\lambda, \lambda_1)_{N,2}^{N,2} & R(\lambda, \lambda_1)_{N-2,4}^{N,2} \end{vmatrix} w_{N-2}(\lambda) \mathcal{T}_{1,4}(\lambda_1) |0\rangle \tag{C.33}
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 R(\lambda, \lambda_1)_{N,3}^{N,3} \mathcal{T}_{1,3}(\lambda_1) \mathcal{T}_{N-1,N}(\lambda) |0\rangle &= \sum_{\bar{e}=1}^3 R(\lambda, \lambda_1)_{N-1,1}^{N-\bar{e},\bar{e}} \mathcal{T}_{N-\bar{e},N}(\lambda) \mathcal{T}_{\bar{e},3}(\lambda_1) |0\rangle \\
 &- R(\lambda, \lambda_1)_{N-1,4}^{N,3} w_{N-1}(\lambda) \mathcal{T}_{1,4}(\lambda_1) |0\rangle. \tag{C.34}
 \end{aligned}$$

Através das Eqs.(C.31-C.34) eliminamos o último termo da Eq.(C.28) e os dois últimos termos das Eqs.(C.29,C.30), obtendo assim as relações de comutação que alteram o ordenamento dos termos $\mathcal{T}_{1,2}(\lambda_1)\mathcal{T}_{a,a+1}(\lambda)\mathcal{T}_{1,2}(\lambda_j) |0\rangle$ para $a = 1, \dots, N-1$.

De posse das ferramentas que geram a regra de comutação entre $\mathcal{T}_{a,a}(\lambda)$ e $\mathcal{T}_{1,2}(\lambda_1)\phi_2(\lambda_2, \lambda_3)$, iniciemos a descrição dos procedimentos que devem ser seguidos para adquirir tais relações de comutação. As manipulações algébricas realizadas na construção das relações de comutação entre $\mathcal{T}_{a,a}(\lambda)$ e $\mathcal{T}_{1,2}(\lambda_1)\phi_2(\lambda_2, \lambda_3)$ dividem-se em duas etapas. Inicialmente movemos os operadores diagonais e aniquilação $\mathcal{T}_{d+a,a}(\lambda)$ $d \geq 0$ nas Eqs.(C.4,C.5,C.6) à direita sobre $\phi_2(\lambda_2, \lambda_3) |0\rangle$ através das Eqs.(199,C.27, C.26,C.15). Então fixamos o ordenamento de todos termos compostos por produto de operadores de criação de modo a posicionar o parâmetro espectral λ à esquerda. Para tal tarefa utilizamos as Eqs.(C.28-C.34). Ao final desses cálculos obtermos os operadores diagonais $\mathcal{T}_{a,a}(\lambda)$ aplicados no vetor $|\Phi_3^{(1)}\rangle$.

O segundo vetor que compoem o ansatz (C.1) é

$$\begin{aligned} |\Phi_3^{(2)}\rangle &= w_1(\lambda_2) \frac{R(\lambda_3, \lambda_2)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_3, \lambda_2)_{2,1}^{2,1}} \mathcal{F}_1^{(2)}(\lambda_1, \lambda_2) \mathcal{T}_{1,3}(\lambda_1) \phi_1(\lambda_3) |0\rangle \\ &+ w_1(\lambda_3) \theta(\lambda_2, \lambda_3) \frac{R(\lambda_2, \lambda_3)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_2, \lambda_3)_{2,1}^{2,1}} \mathcal{F}_1^{(2)}(\lambda_1, \lambda_3) \mathcal{T}_{1,3}(\lambda_1) \phi_1(\lambda_2) |0\rangle \end{aligned} \quad (C.35)$$

A fim de determinarmos as regras de comutação dos operadores diagonais $\mathcal{T}_{a,a}(\lambda)$ com os campos que compoem $|\Phi_3^{(2)}\rangle$, inicialmente comutamos os operadores $\mathcal{T}_{a,a}(\lambda)$ e $\mathcal{T}_{1,3}(\lambda_1)$ através das Eqs.(44-47), cujos resultados são

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{1,1}(\lambda) \mathcal{T}_{1,3}(\lambda_1) \phi_1(\lambda_j) |0\rangle &= \left[\frac{R(\lambda_1, \lambda)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_1, \lambda)_{3,1}^{3,1}} \mathcal{T}_{1,3}(\lambda_1) \mathcal{T}_{1,1}(\lambda) - \frac{R(\lambda_1, \lambda)_{2,2}^{3,1}}{R(\lambda_1, \lambda)_{3,1}^{3,1}} \mathcal{T}_{1,2}(\lambda) \mathcal{T}_{1,2}(\lambda_1) \right. \\ &\left. - \frac{R(\lambda_1, \lambda)_{1,3}^{3,1}}{R(\lambda_1, \lambda)_{3,1}^{3,1}} \mathcal{T}_{1,3}(\lambda) \mathcal{T}_{1,1}(\lambda_1) \right] \phi_1(\lambda_j) |0\rangle \end{aligned} \quad (C.36)$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{T}_{a,a}(\lambda)\mathcal{T}_{1,3}(\lambda_1)\phi_1(\lambda_j)|0\rangle &= \left[D_3^{(a,0)}(\lambda, \lambda_1)\mathcal{T}_{1,3}(\lambda_1)\mathcal{T}_{a,a}(\lambda) \right. \\
 &+ \sum_{\bar{e}=4}^{a+2} D_3^{(a,\bar{e}-3)}(\lambda, \lambda_1)\mathcal{T}_{1,\bar{e}}(\lambda_1)\mathcal{T}_{a,a+3-\bar{e}}(\lambda) - \sum_{\bar{e}=1}^{a-1} \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{a,1}^{\bar{e},a-\bar{e}+1}}{R(\lambda, \lambda_1)_{a,1}^{a,1}} \mathcal{T}_{\bar{e},a}(\lambda)\mathcal{T}_{a-\bar{e}+1,3}(\lambda_1) \\
 &+ \sum_{\bar{e}=1}^a \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{a,1}^{\bar{e},a-\bar{e}+1}}{R(\lambda, \lambda_1)_{a,1}^{a,1}} \left[\begin{array}{cc} R(\lambda, \lambda_1)_{a+2,1}^{a,3} & R(\lambda, \lambda_1)_{a+1,2}^{a,3} \\ R(\lambda, \lambda_1)_{a+2,1}^{a+2,1} & R(\lambda, \lambda_1)_{a+1,2}^{a+2,1} \end{array} \right] \mathcal{T}_{\bar{e},a+1}(\lambda)\mathcal{T}_{a-\bar{e}+1,2}(\lambda_1) \\
 &- \sum_{\bar{e}=1}^a \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{a,1}^{\bar{e},a-\bar{e}+1}}{R(\lambda, \lambda_1)_{a,1}^{a,1}} \left[\begin{array}{cc} R(\lambda, \lambda_1)_{a+2,1}^{a+1,2} & R(\lambda, \lambda_1)_{a+1,2}^{a+1,2} \\ R(\lambda, \lambda_1)_{a+2,1}^{a+2,1} & R(\lambda, \lambda_1)_{a+1,2}^{a+2,1} \end{array} \right] \mathcal{T}_{\bar{e},a+2}(\lambda)\mathcal{T}_{a-\bar{e}+1,1}(\lambda_1) \left. \right] \phi_1(\lambda_j)|0\rangle, \\
 &\text{para } 2 \leq a \leq N-2, \tag{C.37}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{T}_{N-1,N-1}(\lambda)\mathcal{T}_{1,3}(\lambda_1)\phi_1(\lambda_j)|0\rangle &= \left\{ - \frac{\left| \begin{array}{cc} R(\lambda, \lambda_1)_{N,2}^{N-1,3} & R(\lambda, \lambda_1)_{N-1,3}^{N-1,3} \\ R(\lambda, \lambda_1)_{N,2}^{N,2} & R(\lambda, \lambda_1)_{N-1,3}^{N,2} \end{array} \right|}{R(\lambda, \lambda_1)_{N-1,1}^{N-1,1}R(\lambda, \lambda_1)_{N,2}^{N,2}} \mathcal{T}_{1,3}(\lambda_1)\mathcal{T}_{N-1,N-1}(\lambda) \right. \\
 &- \sum_{\bar{e}=4}^N \frac{\left| \begin{array}{cc} R(\lambda, \lambda_1)_{N,2}^{N-1,3} & R(\lambda, \lambda_1)_{N+2-\bar{e},\bar{e}}^{N-1,3} \\ R(\lambda, \lambda_1)_{N,2}^{N,2} & R(\lambda, \lambda_1)_{N+2-\bar{e},\bar{e}}^{N,2} \end{array} \right|}{R(\lambda, \lambda_1)_{N-1,1}^{N-1,1}R(\lambda, \lambda_1)_{N,2}^{N,2}} \mathcal{T}_{1,\bar{e}}(\lambda_1)\mathcal{T}_{N-1,N+2-\bar{e}}(\lambda) \\
 &+ \sum_{\bar{e}=1}^{N-2} \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{N-1,1}^{\bar{e},N-\bar{e}}}{R(\lambda, \lambda_1)_{N-1,1}^{N-1,1}} \left[\frac{R(\lambda, \lambda_1)_{N,2}^{N-1,3}}{R(\lambda, \lambda_1)_{N,2}^{N,2}} \mathcal{T}_{\bar{e},N}(\lambda)\mathcal{T}_{N-\bar{e},2}(\lambda_1) - \mathcal{T}_{\bar{e},N-1}(\lambda)\mathcal{T}_{N-\bar{e},3}(\lambda_1) \right] \\
 &\left. + \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{N,2}^{N-1,3}}{R(\lambda, \lambda_1)_{N,2}^{N,2}} \mathcal{T}_{N-1,N}(\lambda)\mathcal{T}_{1,2}(\lambda_1) \right\} \phi_1(\lambda_j)|0\rangle \tag{C.38}
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 \mathcal{T}_{N,N}(\lambda) \mathcal{T}_{1,3}(\lambda_1) \phi_1(\lambda_j) |0\rangle &= \left[\frac{R(\lambda, \lambda_1)_{N,3}^{N,3}}{R(\lambda, \lambda_1)_{N,1}^{N,1}} \mathcal{T}_{1,3}(\lambda_1) \mathcal{T}_{N,N}(\lambda) + \sum_{\bar{e}=4}^N \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{N+3-\bar{e},\bar{e}}^{N,3}}{R(\lambda, \lambda_1)_{N,1}^{N,1}} \right. \\
 \times \quad &\left. \mathcal{T}_{1,\bar{e}}(\lambda_1) \mathcal{T}_{N,N+3-\bar{e}}(\lambda) - \sum_{\bar{e}=1}^{N-1} \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{N,1}^{\bar{e},N-\bar{e}+1}}{R(\lambda, \lambda_1)_{N,1}^{N,1}} \mathcal{T}_{\bar{e},N}(\lambda) \mathcal{T}_{N-\bar{e}+1,3}(\lambda_1) \right] \phi_1(\lambda_j) |0\rangle \quad (C.39)
 \end{aligned}$$

Em seguida, movemos os operadores diagonais e aniquilação à direita utilizando as Eqs.(65, 173) e por fim, alteramos o ordenamento dos produtos de operadores de criação da forma $\mathcal{T}_{1,3}(\lambda_1) \mathcal{T}_{a,a+1}(\lambda) |0\rangle$ através das Eqs.(C.31-C.34), e assim determinamos a ação dos operadores diagonais $\mathcal{T}_{a,a}(\lambda)$ no vetor $|\Phi_3^{(2)}\rangle$.

A ação dos operadores diagonais aplicados no vetor $|\Phi_3^{(3)}\rangle$ é determinada através das regras de comutação entre os operadores diagonais $\mathcal{T}_{a,a}(\lambda)$ e o campo $\mathcal{T}_{1,4}(\lambda_1)$. Essas relações de comutação nos casos $a = 1, N$ são dadas pelas Eqs.(32,33) com $b = 4$ respectivamente. Os casos $2 \leq a \leq N - 1$ são obtidos dos sistemas (34,37) com $b = 4$. Mais especificamente, aplicando a regra de Cramer nos sistemas (34,37) calculamos $\mathcal{T}_{1,4}(\mu) \mathcal{T}_{a,a}(\lambda)$ obtendo assim as relações de comutação entre os operadores $\mathcal{T}_{a,a}(\lambda)$ e $\mathcal{T}_{1,4}(\lambda_1)$ para $2 \leq a \leq N - 1$. Após as manipulações algébricas descritas acima ficamos em condição de somar as contribuições dos operadores diagonais aplicados nos vetores $|\Phi_3^{(i)}\rangle$ com $i = 1, 2, 3$. O resultado desta soma é

dado pela seguinte expressão

$$\begin{aligned}
 \mathcal{T}_{a,a}(\lambda) |\Phi_3\rangle &= w_a(\lambda) P_a(\lambda, \lambda_1) \left[\prod_{i=2}^3 P_a(\lambda, \lambda_i) \mathcal{T}_{1,2}(\lambda_1) \phi_2(\lambda_2, \lambda_3) \right. \\
 &+ \mathcal{T}_{1,3}(\lambda_1) \sum_{\substack{i,j=2 \\ j \neq i}}^{n=3} \frac{R(\lambda_j, \lambda_i)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_j, \lambda_i)_{2,1}^{2,1}} \theta_{<}(\lambda_j, \lambda_i)_1 \mathcal{F}_1^{(2)}(\lambda, \lambda_i) P_a(\lambda, \lambda_j) \bar{P}_a(\lambda, \lambda_1, \lambda_i) \phi_1(\lambda_1) w_1(\lambda_i) \\
 &+ \mathcal{T}_{1,4}(\lambda_1) w_1(\lambda_1) w_1(\lambda_2) w_1(\lambda_3) \bar{\bar{P}}_a(\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \left. \right] |0\rangle \\
 &- \bar{\delta}_a^N \mathcal{T}_{a,a+1}(\lambda) w_1(\lambda_1) \prod_{i=2}^3 P_1(\lambda_1, \lambda_i)_1 \mathcal{F}_1^{(a)}(\lambda, \lambda_1) \phi_2(\lambda_2, \lambda_3) |0\rangle \\
 &- \bar{\delta}_a^N \mathcal{T}_{a,a+1}(\lambda) \sum_{\substack{i,j=2 \\ j \neq i}}^{n=3} w_1(\lambda_i) \frac{R(\lambda_j, \lambda_i)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_j, \lambda_i)_{2,1}^{2,1}} \theta_{<}(\lambda_j, \lambda_i)_1 \frac{{}_1\mathcal{H}_2^{(a-1)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_i|2)}{{}_0\mathcal{F}_1^{(a-1)}(\lambda, \lambda_1)} \mathcal{T}_{1,2}(\lambda_1) \mathcal{T}_{1,2}(\lambda_j) |0\rangle \\
 &- \bar{\delta}_a^N \mathcal{T}_{a,a+1}(\lambda) \mathcal{T}_{1,3}(\lambda_1) w_1(\lambda_2) w_1(\lambda_3)_1 \mathcal{H}_1^{(a)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3|3) |0\rangle \\
 &- \bar{\delta}_a^1 \mathcal{T}_{a-1,a}(\lambda) w_2(\lambda_1) \prod_{i=2}^3 P_2(\lambda_1, \lambda_i)_0 \mathcal{F}_1^{(a-1)}(\lambda, \lambda_1) \phi_2(\lambda_2, \lambda_3) |0\rangle \\
 &- \bar{\delta}_a^1 \mathcal{T}_{a-1,a}(\lambda) \sum_{\substack{i,j=2 \\ j \neq i}}^{n=3} w_2(\lambda_i) \frac{R(\lambda_i, \lambda_j)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_i, \lambda_j)_{2,1}^{2,1}} \theta_{<}(\lambda_i, \lambda_j)_0 \mathcal{H}_1^{(a-1)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_i|2) \mathcal{T}_{1,2}(\lambda_1) \mathcal{T}_{1,2}(\lambda_j) |0\rangle \\
 &- \bar{\delta}_a^1 \mathcal{T}_{a-1,a}(\lambda) \mathcal{T}_{1,3}(\lambda_1) \sum_{\substack{i,j=2 \\ j \neq i}}^{n=3} w_1(\lambda_i) w_2(\lambda_j) \frac{R(\lambda_j, \lambda_i)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_j, \lambda_i)_{2,1}^{2,1}} \theta_{<}(\lambda_j, \lambda_i)_1 \mathcal{F}_1^{(2)}(\lambda_1, \lambda_i) \\
 &\times {}_0\mathcal{H}_1^{(a-1)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_j|2) |0\rangle \\
 &- \bar{\delta}_a^{N-1,N} \mathcal{T}_{a,a+2}(\lambda) w_1(\lambda_1) \sum_{\substack{i,j=2 \\ j \neq i}}^{n=3} \mathcal{T}_{1,2}(\lambda_j) w_1(\lambda_i) \frac{R(\lambda_j, \lambda_1)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_j, \lambda_1)_{2,1}^{2,1}} \frac{R(\lambda_j, \lambda_i)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_j, \lambda_i)_{2,1}^{2,1}} \theta_{<}(\lambda_j, \lambda_i) \\
 &\times {}_2\mathcal{F}_2^{(a)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_i) |0\rangle \\
 &- \bar{\delta}_a^{N-1,N} \mathcal{T}_{a,a+2}(\lambda) w_1(\lambda_2) w_1(\lambda_3) \mathcal{T}_{1,2}(\lambda_1)_2 \mathcal{H}_2^{(a)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3|1) |0\rangle - \mathcal{T}_{a-1,a+1}(\lambda) \mathcal{T}_{1,2}(\lambda_1) \\
 &\times \sum_{\substack{i,j=2 \\ j \neq i}}^{n=3} w_1(\lambda_i) w_2(\lambda_j) \frac{R(\lambda_j, \lambda_i)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_j, \lambda_i)_{2,1}^{2,1}} \theta_{<}(\lambda_j, \lambda_i)_0 \mathcal{H}_1^{(a-1)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_j|2) \frac{{}_1\mathcal{H}_2^{(a-1)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_i|2)}{{}_0\mathcal{F}_1^{(a-1)}(\lambda, \lambda_1)} |0\rangle
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\bar{\delta}_a^{1,N} \mathcal{T}_{a-1,a+1}(\lambda) w_2(\lambda_1) \sum_{\substack{i,j=2 \\ j \neq i}}^{n=3} w_1(\lambda_i) \mathcal{T}_{1,2}(\lambda_j) P_2(\lambda_1, \lambda_j) \frac{R(\lambda_j, \lambda_i)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_j, \lambda_i)_{2,1}^{2,1}} \theta_{<}(\lambda_j, \lambda_i) \\
 & \times {}_1\mathcal{H}_2^{(a-1)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_i|2) |0\rangle \\
 & -\bar{\delta}_a^{1,N} \mathcal{T}_{a-1,a+1}(\lambda) w_1(\lambda_1) \sum_{\substack{i,j=2 \\ j \neq i}}^{n=3} w_2(\lambda_i) \mathcal{T}_{1,2}(\lambda_j) \frac{R(\lambda_j, \lambda_1)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_j, \lambda_1)_{2,1}^{2,1}} \frac{R(\lambda_i, \lambda_j)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_i, \lambda_j)_{2,1}^{2,1}} \theta_{<}(\lambda_i, \lambda_j) {}_1\mathcal{F}_1^{(a)}(\lambda, \lambda_1) \\
 & \times {}_0\mathcal{H}_1^{(a-1)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_i|2) |0\rangle \\
 & -\bar{\delta}_a^{1,2} \mathcal{T}_{a-2,a}(\lambda) w_2(\lambda_1) \sum_{\substack{i,j=2 \\ j \neq i}}^{n=3} w_2(\lambda_i) \mathcal{T}_{1,2}(\lambda_j) P_2(\lambda_1, \lambda_j) \frac{R(\lambda_i, \lambda_j)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_i, \lambda_j)_{2,1}^{2,1}} \theta_{<}(\lambda_i, \lambda_j) {}_0\mathcal{F}_2^{(a-2)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_i) |0\rangle \\
 & -\bar{\delta}_a^{1,2} \mathcal{T}_{a-2,a}(\lambda) w_2(\lambda_2) w_2(\lambda_3) \mathcal{T}_{1,2}(\lambda_1) {}_0\mathcal{H}_2^{(a-2)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3|1) |0\rangle \\
 & -\bar{\delta}_a^{1,2,3} \mathcal{T}_{a,a+3}(\lambda) w_1(\lambda_1) w_1(\lambda_2) w_1(\lambda_3) {}_3\mathcal{F}_3^{(a)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) |0\rangle \\
 & -\bar{\delta}_a^{1,N-1,N} \mathcal{T}_{a-1,a+2}(\lambda) w_1(\lambda_1) \sum_{\substack{i,j=2 \\ j \neq i}}^{n=3} w_1(\lambda_i) w_2(\lambda_j) \frac{R(\lambda_j, \lambda_i)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_j, \lambda_i)_{2,1}^{2,1}} \theta_{<}(\lambda_j, \lambda_i) {}_0\mathcal{H}_1^{(a-1)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_j|2) \\
 & \times {}_2\mathcal{F}_2^{(a)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_i) |0\rangle \\
 & -\bar{\delta}_a^{1,N-1,N} \mathcal{T}_{a-1,a+2}(\lambda) w_2(\lambda_1) w_1(\lambda_2) w_1(\lambda_3) {}_0\mathcal{F}_1^{(a-1)}(\lambda, \lambda_1)_2 \mathcal{H}_2^{(a)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3|1) \\
 & -\bar{\delta}_a^{1,2,N} \mathcal{T}_{a-2,a+1}(\lambda) w_2(\lambda_1) \sum_{\substack{i,j=2 \\ j \neq i}}^{n=3} w_1(\lambda_i) w_2(\lambda_j) \frac{R(\lambda_j, \lambda_i)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_j, \lambda_i)_{2,1}^{2,1}} \theta_{<}(\lambda_j, \lambda_i) \\
 & \times {}_0\mathcal{F}_2^{(a-2)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_j) \frac{{}_1\mathcal{H}_2^{(a-1)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_i|2)}{{}_0\mathcal{F}_1^{(a-1)}(\lambda, \lambda_1)} |0\rangle \\
 & -\bar{\delta}_a^{1,2,N} \mathcal{T}_{a-2,a+1}(\lambda) w_1(\lambda_1) w_2(\lambda_2) w_2(\lambda_3) {}_1\mathcal{F}_1^{(a)}(\lambda, \lambda_1)_0 \mathcal{H}_2^{(a-2)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3|1) |0\rangle \\
 & -\bar{\delta}_a^{1,2,3} \mathcal{T}_{a-3,a}(\lambda) w_2(\lambda_1) w_2(\lambda_2) w_2(\lambda_3) {}_0\mathcal{F}_3^{(a-3)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) |0\rangle, \tag{C.40}
 \end{aligned}$$

onde a função ${}_0\mathcal{F}_3^{(a)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ é definida pela Eq.(248),

$$\begin{aligned}
 \bar{\bar{P}}_1(\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) &= {}_0\mathcal{F}_1^{(3)}(\lambda_1, \lambda) {}_0\mathcal{F}_1^{(2)}(\lambda_1, \lambda) {}_0\mathcal{F}_1^{(1)}(\lambda, \lambda_2) {}_0\mathcal{F}_1^{(1)}(\lambda, \lambda_3) (P_1(\lambda_2, \lambda_3) \\
 & + P_2(\lambda_2, \lambda_3)) - \frac{R(\lambda_1, \lambda)_{4,1}^{2,3}}{R(\lambda_1, \lambda)_{4,1}^{4,1}} {}_2\mathcal{F}_2^{(1)}(\lambda, \lambda_2, \lambda_3) - \frac{R(\lambda_1, \lambda)_{2,1}^{2,1}}{R(\lambda_1, \lambda)_{3,1}^{3,1}} \frac{R(\lambda_1, \lambda)_{4,1}^{3,2}}{R(\lambda_1, \lambda)_{4,1}^{4,1}} \\
 & \times \left(\frac{R(\lambda_3, \lambda)_{1,2}^{2,1}}{R(\lambda_3, \lambda)_{2,1}^{2,1}} {}_1\mathcal{F}_1^{(2)}(\lambda_1, \lambda_2) P_1(\lambda_2, \lambda_3) + \frac{R(\lambda_2, \lambda)_{1,2}^{2,1}}{R(\lambda_2, \lambda)_{2,1}^{2,1}} {}_1\mathcal{F}_1^{(2)}(\lambda_1, \lambda_3) P_2(\lambda_2, \lambda_3) \right) \\
 & + \frac{R(\lambda_1, \lambda)_{2,1}^{2,1}}{R(\lambda_1, \lambda)_{4,1}^{4,1}} {}_2\mathcal{F}_2^{(2)}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3), \tag{C.41}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{\bar{P}}_a(\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) &= \frac{D_2^{(a+1,2)}(\lambda, \lambda_1)}{D_2^{(a+1,0)}(\lambda, \lambda_1)} \sum_{\substack{i,j=2 \\ j \neq i}}^{n=3} {}_1\mathcal{F}_2^{(a-1)}(\lambda, \lambda_i, \lambda_j) \theta_{<}(\lambda_j, \lambda_i) \\
 &+ {}_2\mathcal{F}_2^{(a)}(\lambda, \lambda_2, \lambda_3) \left[\begin{array}{ccc} R(\lambda, \lambda_1)_{a+3,1}^{a+1,3} & R(\lambda, \lambda_1)_{a,4}^{a+1,3} & R(\lambda, \lambda_1)_{a+1,3}^{a+1,3} \\ R(\lambda, \lambda_1)_{a+3,1}^{a+2,2} & R(\lambda, \lambda_1)_{a,4}^{a+2,2} & R(\lambda, \lambda_1)_{a+1,3}^{a+2,2} \\ R(\lambda, \lambda_1)_{a+3,1}^{a+3,1} & R(\lambda, \lambda_1)_{a,4}^{a+3,1} & R(\lambda, \lambda_1)_{a+1,3}^{a+3,1} \end{array} \right] \\
 &- \left[\begin{array}{ccc} R(\lambda, \lambda_1)_{a+3,1}^{a+1,3} & R(\lambda, \lambda_1)_{a+2,2}^{a+1,3} & R(\lambda, \lambda_1)_{a,4}^{a+1,3} \\ R(\lambda, \lambda_1)_{a+3,1}^{a+2,2} & R(\lambda, \lambda_1)_{a+2,2}^{a+2,2} & R(\lambda, \lambda_1)_{a,4}^{a+2,2} \\ R(\lambda, \lambda_1)_{a+3,1}^{a+3,1} & R(\lambda, \lambda_1)_{a+2,2}^{a+3,1} & R(\lambda, \lambda_1)_{a,4}^{a+3,1} \end{array} \right] \left[\frac{D_2^{(a,1)}(\lambda, \lambda_1)}{D_2^{(a,0)}(\lambda, \lambda_1)} {}_0\mathcal{F}_2^{(a-1)}(\lambda, \lambda_2, \lambda_3) \right] \\
 &- \frac{D_2^{(a+1,1)}(\lambda, \lambda_1)}{D_2^{(a+1,0)}(\lambda, \lambda_1)} {}_0\mathcal{F}_1^{(a)}(\lambda, \lambda_2) {}_0\mathcal{F}_1^{(a)}(\lambda, \lambda_3) \sum_{\substack{i,j=2 \\ j \neq i}}^{n=3} \frac{R(\lambda_j, \lambda_i)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_j, \lambda_i)_{2,1}^{2,1}} \theta_{<}(\lambda_j, \lambda_i)
 \end{aligned} \tag{C.42}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{\substack{i,j=2 \\ j \neq i}}^{n=3} \frac{R(\lambda_j, \lambda_i)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_j, \lambda_i)_{2,1}^{2,1}} \theta_{<}(\lambda_j, \lambda_i)_1 \mathcal{F}_1^{(2)}(\lambda_1, \lambda_i)_0 \mathcal{F}_1^{(a)}(\lambda, \lambda_j) \frac{D_3^{(a,0)}(\lambda, \lambda_1)}{D_2^{(a,0)}(\lambda, \lambda_1)} \Bigg] - {}_2\mathcal{F}_2^{(2)}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \\
 & \times \frac{\begin{vmatrix} R(\lambda, \lambda_1)_{a+3,1}^{a,4} & R(\lambda, \lambda_1)_{a+2,2}^{a,4} & R(\lambda, \lambda_1)_{a+1,3}^{a,4} & R(\lambda, \lambda_1)_{a,4}^{a,4} \\ R(\lambda, \lambda_1)_{a+3,1}^{a+1,3} & R(\lambda, \lambda_1)_{a+2,2}^{a+1,3} & R(\lambda, \lambda_1)_{a+1,3}^{a+1,3} & R(\lambda, \lambda_1)_{a,4}^{a+1,3} \\ R(\lambda, \lambda_1)_{a+3,1}^{a+2,2} & R(\lambda, \lambda_1)_{a+2,2}^{a+2,2} & R(\lambda, \lambda_1)_{a+1,3}^{a+2,2} & R(\lambda, \lambda_1)_{a,4}^{a+2,2} \\ R(\lambda, \lambda_1)_{a+3,1}^{a+3,1} & R(\lambda, \lambda_1)_{a+2,2}^{a+3,1} & R(\lambda, \lambda_1)_{a+1,3}^{a+3,1} & R(\lambda, \lambda_1)_{a,4}^{a+3,1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R(\lambda, \lambda_1)_{a+3,1}^{a+1,3} & R(\lambda, \lambda_1)_{a+2,2}^{a+1,3} & R(\lambda, \lambda_1)_{a+1,3}^{a+1,3} \\ R(\lambda, \lambda_1)_{a+3,1}^{a+2,2} & R(\lambda, \lambda_1)_{a+2,2}^{a+2,2} & R(\lambda, \lambda_1)_{a+1,3}^{a+2,2} \\ R(\lambda, \lambda_1)_{a+3,1}^{a+3,1} & R(\lambda, \lambda_1)_{a+2,2}^{a+3,1} & R(\lambda, \lambda_1)_{a+1,3}^{a+3,1} \end{vmatrix}} \frac{1}{P_a(\lambda, \lambda_1)} \\
 & + \bar{\delta}_a^2 \frac{D_2^{(a,2)}(\lambda, \lambda_1)}{D_2^{(a,0)}(\lambda, \lambda_1)} {}_0\mathcal{F}_2^{(a-2)}(\lambda, \lambda_2, \lambda_3) + \sum_{\substack{i,j=2 \\ j \neq i}}^{n=3} \frac{R(\lambda_j, \lambda_i)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_j, \lambda_i)_{2,1}^{2,1}} \theta_{<}(\lambda_j, \lambda_i) \\
 & \times {}_1\mathcal{F}_1^{(2)}(\lambda_1, \lambda_i)_0 \mathcal{F}_1^{(a-1)}(\lambda, \lambda_j) \frac{D_3^{(a,1)}(\lambda, \lambda_1)}{D_2^{(a,0)}(\lambda, \lambda_1)}, \quad \text{para } 2 \leq a \leq N-3, \tag{C.43}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{P}_{N-2}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) &= \frac{D_2^{(N-1,2)}(\lambda, \lambda_1)}{D_2^{(N-1,0)}(\lambda, \lambda_1)} \sum_{\substack{i,j=2 \\ j \neq i}}^{n=3} {}_1\mathcal{F}_2^{(N-3)}(\lambda, \lambda_i, \lambda_j) \theta_{<}(\lambda_j, \lambda_i) + {}_2\mathcal{F}_2^{(N-2)}(\lambda, \lambda_2, \lambda_3) \\
 &\times \left[\frac{\begin{vmatrix} R(\lambda, \lambda_1)_{N-2,4}^{N-1,3} & R(\lambda, \lambda_1)_{N-1,3}^{N-1,3} \\ R(\lambda, \lambda_1)_{N-2,4}^{N,2} & R(\lambda, \lambda_1)_{N-1,3}^{N,2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R(\lambda, \lambda_1)_{N-2,4}^{N-1,3} & R(\lambda, \lambda_1)_{N-1,3}^{N-1,3} \\ R(\lambda, \lambda_1)_{N-2,4}^{N,2} & R(\lambda, \lambda_1)_{N-1,3}^{N,2} \end{vmatrix}} - \frac{\begin{vmatrix} R(\lambda, \lambda_1)_{N,2}^{N-1,3} & R(\lambda, \lambda_1)_{N-2,4}^{N-1,3} \\ R(\lambda, \lambda_1)_{N,2}^{N,2} & R(\lambda, \lambda_1)_{N-2,4}^{N,2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R(\lambda, \lambda_1)_{N,2}^{N-1,3} & R(\lambda, \lambda_1)_{N-1,3}^{N-1,3} \\ R(\lambda, \lambda_1)_{N,2}^{N,2} & R(\lambda, \lambda_1)_{N-1,3}^{N,2} \end{vmatrix}} \right] \left[\frac{D_2^{(N-2,1)}(\lambda, \lambda_1)}{D_2^{(N-2,0)}(\lambda, \lambda_1)} \right. \\
 &\times {}_0\mathcal{F}_2^{(N-3)}(\lambda, \lambda_2, \lambda_3) - \frac{D_2^{(N-1,1)}(\lambda, \lambda_1)}{D_2^{(N-1,0)}(\lambda, \lambda_1)} {}_0\mathcal{F}_1^{(N-2)}(\lambda, \lambda_2) {}_0\mathcal{F}_1^{(N-2)}(\lambda, \lambda_3) \sum_{\substack{i,j=2 \\ j \neq i}}^{n=3} \frac{R(\lambda_j, \lambda_i)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_j, \lambda_i)_{2,1}^{2,1}} \\
 &\times \theta_{<}(\lambda_j, \lambda_i) + \sum_{\substack{i,j=2 \\ j \neq i}}^{n=3} \frac{R(\lambda_j, \lambda_i)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_j, \lambda_i)_{2,1}^{2,1}} \theta_{<}(\lambda_j, \lambda_i) {}_1\mathcal{F}_1^{(2)}(\lambda_1, \lambda_i) {}_0\mathcal{F}_1^{(N-2)}(\lambda, \lambda_j) \frac{D_3^{(N-2,0)}(\lambda, \lambda_1)}{D_2^{(N-2,0)}(\lambda, \lambda_1)} \left. \right] \\
 &+ {}_2\mathcal{F}_2^{(2)}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \frac{\begin{vmatrix} R(\lambda, \lambda_1)_{N,2}^{N-2,4} & R(\lambda, \lambda_1)_{N-1,3}^{N-2,4} & R(\lambda, \lambda_1)_{N-2,4}^{N-2,4} \\ R(\lambda, \lambda_1)_{N,2}^{N-1,3} & R(\lambda, \lambda_1)_{N-1,3}^{N-1,3} & R(\lambda, \lambda_1)_{N-2,4}^{N-1,3} \\ R(\lambda, \lambda_1)_{N,2}^{N,2} & R(\lambda, \lambda_1)_{N-1,3}^{N,2} & R(\lambda, \lambda_1)_{N-2,4}^{N,2} \end{vmatrix}}{R(\lambda, \lambda_1)_{N-2,1}^{N-2,1} \begin{vmatrix} R(\lambda, \lambda_1)_{N,2}^{N-1,3} & R(\lambda, \lambda_1)_{N-1,3}^{N-1,3} \\ R(\lambda, \lambda_1)_{N,2}^{N,2} & R(\lambda, \lambda_1)_{N-1,3}^{N,2} \end{vmatrix}} \frac{1}{P_{N-2}(\lambda, \lambda_1)} \\
 &+ \frac{D_2^{(N-2,2)}(\lambda, \lambda_1)}{D_2^{(N-2,0)}(\lambda, \lambda_1)} {}_0\mathcal{F}_2^{(N-4)}(\lambda, \lambda_2, \lambda_3) + \sum_{\substack{i,j=2 \\ j \neq i}}^{n=3} \frac{R(\lambda_j, \lambda_i)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_j, \lambda_i)_{2,1}^{2,1}} \theta_{<}(\lambda_j, \lambda_i) {}_1\mathcal{F}_1^{(2)}(\lambda_1, \lambda_i) {}_0\mathcal{F}_1^{(N-3)}(\lambda, \lambda_j) \\
 &\times \frac{D_3^{(N-2,1)}(\lambda, \lambda_1)}{D_2^{(N-2,0)}(\lambda, \lambda_1)}, \tag{C.44}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{P}_{N-1}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) &= \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{N-2,4}^{N,2}}{R(\lambda, \lambda_1)_{N,2}^{N,2}} \sum_{\substack{i,j=2 \\ j \neq i}}^{n=3} {}_1\mathcal{F}_2^{(N-2)}(\lambda, \lambda_i, \lambda_j) \theta_{<}(\lambda_j, \lambda_i) - \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{N-1,4}^{N,3}}{R(\lambda, \lambda_1)_{N,3}^{N,3}} \\
 &\times \left[\frac{D_2^{(N-1,1)}(\lambda, \lambda_1)}{D_2^{(N-1,0)}(\lambda, \lambda_1)} {}_0\mathcal{F}_2^{(N-2)}(\lambda, \lambda_2, \lambda_3) - \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{N-1,3}^{N,2}}{R(\lambda, \lambda_1)_{N,2}^{N,2}} {}_0\mathcal{F}_1^{(N-1)}(\lambda, \lambda_2) {}_0\mathcal{F}_1^{(N-1)}(\lambda, \lambda_3) \right. \\
 &\times \left. \sum_{\substack{i,j=2 \\ j \neq i}}^{n=3} \frac{R(\lambda_j, \lambda_i)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_j, \lambda_i)_{2,1}^{2,1}} \theta_{<}(\lambda_j, \lambda_i) \right] \\
 &- {}_2\mathcal{F}_2^{(2)}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \frac{\begin{vmatrix} R(\lambda, \lambda_1)_{N,3}^{N-1,4} & R(\lambda, \lambda_1)_{N-1,4}^{N-1,4} \\ R(\lambda, \lambda_1)_{N,3}^{N,3} & R(\lambda, \lambda_1)_{N-1,4}^{N,3} \end{vmatrix}}{R(\lambda, \lambda_1)_{N-1,1}^{N-1,1} R(\lambda, \lambda_1)_{N,3}^{N,3}} \frac{1}{P_{N-1}(\lambda, \lambda_1)} \\
 &+ \frac{D_2^{(N-1,2)}(\lambda, \lambda_1)}{D_2^{(N-1,0)}(\lambda, \lambda_1)} {}_0\mathcal{F}_2^{(N-3)}(\lambda, \lambda_2, \lambda_3) - \sum_{\substack{i,j=2 \\ j \neq i}}^{n=3} \frac{R(\lambda_j, \lambda_i)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_j, \lambda_i)_{2,1}^{2,1}} \theta_{<}(\lambda_j, \lambda_i) {}_1\mathcal{F}_1^{(2)}(\lambda_1, \lambda_i) \frac{1}{D_2^{(N-1,0)}(\lambda, \lambda_1)} \\
 &\times \left[{}_0\mathcal{F}_1^{(N-2)}(\lambda, \lambda_j) \frac{\begin{vmatrix} R(\lambda, \lambda_1)_{N,2}^{N-1,3} & R(\lambda, \lambda_1)_{N-2,4}^{N-1,3} \\ R(\lambda, \lambda_1)_{N,2}^{N,2} & R(\lambda, \lambda_1)_{N-2,4}^{N,2} \end{vmatrix}}{R(\lambda, \lambda_1)_{N-1,1}^{N-1,1} R(\lambda, \lambda_1)_{N,2}^{N,2}} - \frac{\begin{vmatrix} R(\lambda, \lambda_1)_{N,2}^{N-1,3} & R(\lambda, \lambda_1)_{N-1,3}^{N-1,3} \\ R(\lambda, \lambda_1)_{N,2}^{N,2} & R(\lambda, \lambda_1)_{N-1,3}^{N,2} \end{vmatrix}}{R(\lambda, \lambda_1)_{N-1,1}^{N-1,1} R(\lambda, \lambda_1)_{N,2}^{N,2}} \right. \\
 &\times \left. {}_0\mathcal{F}_1^{(N-1)}(\lambda, \lambda_j) \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{N-1,4}^{N,3}}{R(\lambda, \lambda_1)_{N,3}^{N,3}} \right], \tag{C.45}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{P}_N(\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) &= \frac{1}{P_N(\lambda, \lambda_1)} \left[{}_2\mathcal{F}_2^{(2)}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{N,4}^{N,4}}{R(\lambda, \lambda_1)_{N,1}^{N,1}} + {}_0\mathcal{F}_2^{(N-2)}(\lambda, \lambda_2, \lambda_3) \right. \\
 &\times \left. \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{N-2,4}^{N,2}}{R(\lambda, \lambda_1)_{N,1}^{N,1}} + \sum_{\substack{i,j=2 \\ j \neq i}}^{n=3} \frac{R(\lambda_j, \lambda_i)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_j, \lambda_i)_{2,1}^{2,1}} \theta_{<}(\lambda_j, \lambda_i) {}_1\mathcal{F}_1^{(2)}(\lambda_1, \lambda_i) {}_0\mathcal{F}_1^{(N-1)}(\lambda, \lambda_j) \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{N-1,4}^{N,3}}{R(\lambda, \lambda_1)_{N,1}^{N,1}} \right], \tag{C.46}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 {}_1\mathcal{H}_1^{(1)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3|3) = & - \frac{\begin{vmatrix} R(\lambda, \lambda_1)_{4,1}^{2,3} & R(\lambda, \lambda_1)_{3,2}^{2,3} \\ R(\lambda, \lambda_1)_{4,1}^{4,1} & R(\lambda, \lambda_1)_{3,2}^{4,1} \end{vmatrix}}{R(\lambda, \lambda_1)_{2,1}^{2,1} R(\lambda, \lambda_1)_{4,1}^{4,1}} {}_2\mathcal{F}_2^{(1)}(\lambda, \lambda_2, \lambda_3) \\
 & + \frac{\begin{vmatrix} R(\lambda, \lambda_1)_{4,1}^{3,2} & R(\lambda, \lambda_1)_{3,2}^{3,2} \\ R(\lambda, \lambda_1)_{4,1}^{4,1} & R(\lambda, \lambda_1)_{3,2}^{4,1} \end{vmatrix}}{R(\lambda, \lambda_1)_{2,1}^{2,1} R(\lambda, \lambda_1)_{4,1}^{4,1}} {}_0\mathcal{F}_1^{(1)}(\lambda, \lambda_2) {}_0\mathcal{F}_1^{(1)}(\lambda, \lambda_3) {}_0\mathcal{F}_1^{(2)}(\lambda_1, \lambda) \sum_{\substack{i,j=2 \\ j \neq i}}^{n=3} \frac{R(\lambda_j, \lambda_i)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_j, \lambda_i)_{2,1}^{2,1}} \theta_{<}(\lambda_j, \lambda_i) \\
 & + {}_0\mathcal{F}_1^{(1)}(\lambda, \lambda_1) {}_2\mathcal{F}_2^{(1)}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) + \frac{\begin{vmatrix} R(\lambda, \lambda_1)_{4,1}^{3,2} & R(\lambda, \lambda_1)_{3,2}^{3,2} \\ R(\lambda, \lambda_1)_{4,1}^{4,1} & R(\lambda, \lambda_1)_{3,2}^{4,1} \end{vmatrix}}{R(\lambda, \lambda_1)_{3,1}^{3,1} R(\lambda, \lambda_1)_{4,1}^{4,1}} \sum_{\substack{i,j=2 \\ j \neq i}}^{n=3} \frac{R(\lambda_j, \lambda_i)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_j, \lambda_i)_{2,1}^{2,1}} \theta_{<}(\lambda_j, \lambda_i) \\
 & \times {}_1\mathcal{F}_1^{(2)}(\lambda_1, \lambda_i) {}_0\mathcal{F}_1^{(1)}(\lambda, \lambda_j) + {}_2\mathcal{F}_2^{(2)}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \frac{R(\lambda_1, \lambda)_{3,2}^{4,1}}{R(\lambda_1, \lambda)_{4,1}^{4,1}}, \tag{C.47}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 {}_1\mathcal{H}_1^{(a)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3|3) = & - \frac{D_2^{(a,0)}(\lambda, \lambda_1)}{D_3^{(a+1,0)}(\lambda, \lambda_1)} \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{a,1}^{a,1}}{R(\lambda, \lambda_1)_{a+1,1}^{a+1,1}} \left[\frac{D_2^{(a+2,1)}(\lambda, \lambda_1)}{D_2^{(a+2,0)}(\lambda, \lambda_1)} {}_2\mathcal{F}_2^{(a)}(\lambda, \lambda_2, \lambda_3) \right. \\
 & + \frac{D_2^{(a,1)}(\lambda, \lambda_1)}{D_2^{(a,0)}(\lambda, \lambda_1)} {}_0\mathcal{F}_2^{(a-1)}(\lambda, \lambda_2, \lambda_3) - \frac{D_2^{(a+1,1)}(\lambda, \lambda_1)}{D_2^{(a+1,0)}(\lambda, \lambda_1)} {}_0\mathcal{F}_1^{(a)}(\lambda, \lambda_2) {}_0\mathcal{F}_1^{(a)}(\lambda, \lambda_3) \\
 & \times \left. \sum_{\substack{i,j=2 \\ j \neq i}}^{n=3} \frac{R(\lambda_j, \lambda_i)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_j, \lambda_i)_{2,1}^{2,1}} \theta_{<}(\lambda_j, \lambda_i) \right] \\
 & + {}_0\mathcal{F}_1^{(a)}(\lambda, \lambda_1) {}_2\mathcal{F}_2^{(1)}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) - \frac{D_3^{(a,0)}(\lambda, \lambda_1)}{D_3^{(a+1,0)}(\lambda, \lambda_1)} \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{a,1}^{a,1}}{R(\lambda, \lambda_1)_{a+1,1}^{a+1,1}} \sum_{\substack{i,j=2 \\ j \neq i}}^{n=3} \frac{R(\lambda_j, \lambda_i)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_j, \lambda_i)_{2,1}^{2,1}} \theta_{<}(\lambda_j, \lambda_i) \\
 & \times {}_1\mathcal{F}_1^{(2)}(\lambda_1, \lambda_i) {}_0\mathcal{F}_1^{(a)}(\lambda, \lambda_j) - {}_2\mathcal{F}_2^{(2)}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \frac{\begin{vmatrix} R(\lambda, \lambda_1)_{a+3,1}^{a,4} & R(\lambda, \lambda_1)_{a+2,2}^{a,4} & R(\lambda, \lambda_1)_{a+1,3}^{a,4} \\ R(\lambda, \lambda_1)_{a+3,1}^{a+2,2} & R(\lambda, \lambda_1)_{a+2,2}^{a+2,2} & R(\lambda, \lambda_1)_{a+1,3}^{a+2,2} \\ R(\lambda, \lambda_1)_{a+3,1}^{a+3,1} & R(\lambda, \lambda_1)_{a+2,2}^{a+3,1} & R(\lambda, \lambda_1)_{a+1,3}^{a+3,1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R(\lambda, \lambda_1)_{a+3,1}^{a+1,3} & R(\lambda, \lambda_1)_{a+2,2}^{a+1,3} & R(\lambda, \lambda_1)_{a+1,3}^{a+1,3} \\ R(\lambda, \lambda_1)_{a+3,1}^{a+2,2} & R(\lambda, \lambda_1)_{a+2,2}^{a+2,2} & R(\lambda, \lambda_1)_{a+1,3}^{a+2,2} \\ R(\lambda, \lambda_1)_{a+3,1}^{a+3,1} & R(\lambda, \lambda_1)_{a+2,2}^{a+3,1} & R(\lambda, \lambda_1)_{a+1,3}^{a+3,1} \end{vmatrix}}, \\
 & \text{para } 2 \leq a \leq N-3, \tag{C.48}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 {}_1\mathcal{H}_1^{(N-2)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3|3) = & \left[D_2^{(N-2,0)}(\lambda, \lambda_1) \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{N-2,1}^{N-2,1}}{R(\lambda, \lambda_1)_{N-1,1}^{N-1,1}} \left(\frac{R(\lambda, \lambda_1)_{N-1,3}^{N,2}}{R(\lambda, \lambda_1)_{N,2}^{N,2}} {}_2\mathcal{F}_2^{(N-2)}(\lambda, \lambda_2, \lambda_3) \right. \right. \\
 & + \frac{D_2^{(N-2,1)}(\lambda, \lambda_1)}{D_2^{(N-2,0)}(\lambda, \lambda_1)} {}_0\mathcal{F}_2^{(N-3)}(\lambda, \lambda_2, \lambda_3) - \frac{D_2^{(N-1,1)}(\lambda, \lambda_1)}{D_2^{(N-1,0)}(\lambda, \lambda_1)} {}_0\mathcal{F}_1^{(N-2)}(\lambda, \lambda_2) {}_0\mathcal{F}_1^{(N-2)}(\lambda, \lambda_3) \\
 & \times \sum_{\substack{i,j=2 \\ j \neq i}}^{n=3} \frac{R(\lambda_j, \lambda_i)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_j, \lambda_i)_{2,1}^{2,1}} \theta_{<}(\lambda_j, \lambda_i) \left. \right) + D_3^{(N-2,0)}(\lambda, \lambda_1) \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{N-2,1}^{N-2,1}}{R(\lambda, \lambda_1)_{N-1,1}^{N-1,1}} \sum_{\substack{i,j=2 \\ j \neq i}}^{n=3} \frac{R(\lambda_j, \lambda_i)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_j, \lambda_i)_{2,1}^{2,1}} \theta_{<}(\lambda_j, \lambda_i) \\
 & \times {}_1\mathcal{F}_1^{(2)}(\lambda_1, \lambda_i) {}_0\mathcal{F}_1^{(N-2)}(\lambda, \lambda_j) \left. \right] \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{N-1,1}^{N-1,1} R(\lambda, \lambda_1)_{N,2}^{N,2}}{\begin{vmatrix} R(\lambda, \lambda_1)_{N,2}^{N-1,3} & R(\lambda, \lambda_1)_{N-1,3}^{N-1,3} \\ R(\lambda, \lambda_1)_{N,2}^{N,2} & R(\lambda, \lambda_1)_{N-1,3}^{N,2} \end{vmatrix}} \\
 & + {}_0\mathcal{F}_1^{(N-2)}(\lambda, \lambda_1) {}_2\mathcal{F}_2^{(1)}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) - {}_2\mathcal{F}_2^{(2)}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \frac{\begin{vmatrix} R(\lambda, \lambda_1)_{N,2}^{N-2,4} & R(\lambda, \lambda_1)_{N-1,3}^{N-2,4} \\ R(\lambda, \lambda_1)_{N,2}^{N,2} & R(\lambda, \lambda_1)_{N-1,3}^{N,2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R(\lambda, \lambda_1)_{N,2}^{N-1,3} & R(\lambda, \lambda_1)_{N-1,3}^{N-1,3} \\ R(\lambda, \lambda_1)_{N,2}^{N,2} & R(\lambda, \lambda_1)_{N-1,3}^{N,2} \end{vmatrix}}, \quad (C.49)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 {}_1\mathcal{H}_1^{(N-1)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3|3) = & -D_2^{(N-1,0)}(\lambda, \lambda_1) \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{N-1,1}^{N-1,1}}{R(\lambda, \lambda_1)_{N,3}^{N,3}} \left[\frac{D_2^{(N-1,1)}(\lambda, \lambda_1)}{D_2^{(N-1,0)}(\lambda, \lambda_1)} {}_0\mathcal{F}_2^{(N-2)}(\lambda, \lambda_2, \lambda_3) \right. \\
 & - \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{N-1,3}^{N,2}}{R(\lambda, \lambda_1)_{N,2}^{N,2}} {}_0\mathcal{F}_1^{(N-1)}(\lambda, \lambda_2) {}_0\mathcal{F}_1^{(N-1)}(\lambda, \lambda_3) \sum_{\substack{i,j=2 \\ j \neq i}}^{n=3} \frac{R(\lambda_j, \lambda_i)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_j, \lambda_i)_{2,1}^{2,1}} \theta_{<}(\lambda_j, \lambda_i) \left. \right] + {}_0\mathcal{F}_1^{(N-1)}(\lambda, \lambda_1) \\
 & \times {}_2\mathcal{F}_2^{(1)}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) + \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{N-1,1}^{N-1,1}}{R(\lambda, \lambda_1)_{N,3}^{N,3}} \sum_{\substack{i,j=2 \\ j \neq i}}^{n=3} \frac{R(\lambda_j, \lambda_i)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_j, \lambda_i)_{2,1}^{2,1}} \theta_{<}(\lambda_j, \lambda_i) {}_1\mathcal{F}_1^{(2)}(\lambda_1, \lambda_i) {}_0\mathcal{F}_1^{(N-1)}(\lambda, \lambda_j) \\
 & \times \frac{\begin{vmatrix} R(\lambda, \lambda_1)_{N,2}^{N-1,3} & R(\lambda, \lambda_1)_{N-1,3}^{N-1,3} \\ R(\lambda, \lambda_1)_{N,2}^{N,2} & R(\lambda, \lambda_1)_{N-1,3}^{N,2} \end{vmatrix}}{R(\lambda, \lambda_1)_{N-1,1}^{N-1,1} R(\lambda, \lambda_1)_{N,2}^{N,2}} - {}_2\mathcal{F}_2^{(2)}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{N,3}^{N-1,4}}{R(\lambda, \lambda_1)_{N,3}^{N,3}}, \quad (C.50)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 {}_2\mathcal{H}_2^{(1)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3|1) = & -P_1(\lambda, \lambda_1) \sum_{\substack{i,j=2 \\ j \neq i}}^{n=3} \frac{R(\lambda_j, \lambda_i)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_j, \lambda_i)_{2,1}^{2,1}} \theta_{<}(\lambda_j, \lambda_i)_1 \mathcal{F}_1^{(1)}(\lambda, \lambda_i) \\
 & \times \left[{}_0\mathcal{F}_1^{(1)}(\lambda, \lambda_j)_0 \mathcal{F}_1^{(2)}(\lambda_1, \lambda) \frac{\begin{vmatrix} R(\lambda_1, \lambda)_{4,1}^{3,2} & R(\lambda_1, \lambda)_{2,3}^{3,2} \\ R(\lambda_1, \lambda)_{4,1}^{4,1} & R(\lambda_1, \lambda)_{2,3}^{4,1} \end{vmatrix}}{R(\lambda_1, \lambda)_{1,1}^{1,1} R(\lambda_1, \lambda)_{4,1}^{4,1}} + \theta(\lambda_1, \lambda)_0 \mathcal{F}_1^{(1)}(\lambda_1, \lambda_j)_0 \mathcal{F}_1^{(2)}(\lambda, \lambda_1) \right] \\
 & - P_1(\lambda, \lambda_1)_2 \mathcal{F}_2^{(1)}(\lambda, \lambda_2, \lambda_3) \frac{\begin{vmatrix} R(\lambda_1, \lambda)_{4,1}^{2,3} & R(\lambda_1, \lambda)_{2,3}^{2,3} \\ R(\lambda_1, \lambda)_{4,1}^{4,1} & R(\lambda_1, \lambda)_{2,3}^{4,1} \end{vmatrix}}{R(\lambda_1, \lambda)_{1,1}^{1,1} R(\lambda_1, \lambda)_{4,1}^{4,1}} - \sum_{\substack{i,j=2 \\ j \neq i}}^{n=3} \frac{R(\lambda_j, \lambda_i)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_j, \lambda_i)_{2,1}^{2,1}} \theta_{<}(\lambda_j, \lambda_i)_1 \mathcal{F}_1^{(2)}(\lambda_1, \lambda_i) \\
 & \times \left[D_2^{(3,1)}(\lambda_1, \lambda)_0 \mathcal{F}_1^{(1)}(\lambda, \lambda_j) - {}_0\mathcal{F}_1^{(1)}(\lambda_1, \lambda_j) \frac{R(\lambda_1, \lambda)_{1,3}^{3,1}}{R(\lambda_1, \lambda)_{3,1}^{3,1}} \right] + {}_2\mathcal{F}_2^{(2)}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \frac{R(\lambda_1, \lambda)_{2,3}^{4,1}}{R(\lambda_1, \lambda)_{4,1}^{4,1}} \quad (C.51)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 {}_2\mathcal{H}_2^{(a)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3|1) = & -\frac{D_2^{(a,0)}(\lambda, \lambda_1)}{D_2^{(a+1,0)}(\lambda, \lambda_1)} \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{a,1}^{a,1}}{R(\lambda, \lambda_1)_{a+1,1}^{a+1,1}} {}_0\mathcal{F}_1^{(a+1)}(\lambda, \lambda_1) \\
 & \times \sum_{\substack{i,j=2 \\ j \neq i}}^{n=3} \frac{R(\lambda_j, \lambda_i)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_j, \lambda_i)_{2,1}^{2,1}} \theta_{<}(\lambda_j, \lambda_i)_1 \mathcal{F}_1^{(a)}(\lambda, \lambda_i)_0 \mathcal{F}_1^{(1)}(\lambda_1, \lambda_j) + \frac{D_2^{(a,0)}(\lambda, \lambda_1)}{D_3^{(a+1,0)}(\lambda, \lambda_1)} \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{a,1}^{a,1}}{R(\lambda, \lambda_1)_{a+1,1}^{a+1,1}} \\
 & \times \frac{\begin{vmatrix} R(\lambda, \lambda_1)_{a+3,1}^{a+1,3} & R(\lambda, \lambda_1)_{a+1,3}^{a+1,3} \\ R(\lambda, \lambda_1)_{a+3,1}^{a+3,1} & R(\lambda, \lambda_1)_{a+1,3}^{a+3,1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R(\lambda, \lambda_1)_{a+3,1}^{a+2,2} & R(\lambda, \lambda_1)_{a+2,2}^{a+2,2} \\ R(\lambda, \lambda_1)_{a+3,1}^{a+3,1} & R(\lambda, \lambda_1)_{a+2,2}^{a+3,1} \end{vmatrix}} \left[{}_2\mathcal{F}_2^{(a)}(\lambda, \lambda_2, \lambda_3) + \frac{D_2^{(a,1)}(\lambda, \lambda_1)}{D_2^{(a,0)}(\lambda, \lambda_1)} {}_0\mathcal{F}_2^{(a-1)}(\lambda, \lambda_2, \lambda_3) \right. \\
 & \left. - \frac{D_2^{(a+1,1)}(\lambda, \lambda_1)}{D_2^{(a+1,0)}(\lambda, \lambda_1)} {}_0\mathcal{F}_1^{(a)}(\lambda, \lambda_2)_0 \mathcal{F}_1^{(a)}(\lambda, \lambda_3) \sum_{\substack{i,j=2 \\ j \neq i}}^{n=3} \frac{R(\lambda_j, \lambda_i)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_j, \lambda_i)_{2,1}^{2,1}} \theta_{<}(\lambda_j, \lambda_i) \right] \\
 & - \sum_{\substack{i,j=2 \\ j \neq i}}^{n=3} \frac{R(\lambda_j, \lambda_i)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_j, \lambda_i)_{2,1}^{2,1}} \theta_{<}(\lambda_j, \lambda_i)_1 \mathcal{F}_1^{(2)}(\lambda_1, \lambda_i) \left[\frac{D_3^{(a,0)}(\lambda, \lambda_1)}{D_3^{(a+1,0)}(\lambda, \lambda_1)} \frac{\begin{vmatrix} R(\lambda, \lambda_1)_{a+3,1}^{a+1,3} & R(\lambda, \lambda_1)_{a+2,2}^{a+1,3} \\ R(\lambda, \lambda_1)_{a+3,1}^{a+3,1} & R(\lambda, \lambda_1)_{a+2,2}^{a+3,1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R(\lambda, \lambda_1)_{a+3,1}^{a+2,2} & R(\lambda, \lambda_1)_{a+2,2}^{a+2,2} \\ R(\lambda, \lambda_1)_{a+3,1}^{a+3,1} & R(\lambda, \lambda_1)_{a+2,2}^{a+3,1} \end{vmatrix}} \right. \\
 & \left. \times \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{a,1}^{a,1}}{R(\lambda, \lambda_1)_{a+1,1}^{a+1,1}} \mathcal{F}_1^{(a)}(\lambda, \lambda_j) + \frac{\begin{vmatrix} R(\lambda, \lambda_1)_{a+2,1}^{a,3} & R(\lambda, \lambda_1)_{a+1,2}^{a,3} \\ R(\lambda, \lambda_1)_{a+2,1}^{a+1,2} & R(\lambda, \lambda_1)_{a+1,2}^{a+1,2} \\ R(\lambda, \lambda_1)_{a+2,1}^{a+1,2} & R(\lambda, \lambda_1)_{a+1,2}^{a+1,2} \\ R(\lambda, \lambda_1)_{a+2,1}^{a+2,1} & R(\lambda, \lambda_1)_{a+1,2}^{a+2,1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R(\lambda, \lambda_1)_{a+2,1}^{a+1,2} & R(\lambda, \lambda_1)_{a+1,2}^{a+1,2} \\ R(\lambda, \lambda_1)_{a+2,1}^{a+2,1} & R(\lambda, \lambda_1)_{a+1,2}^{a+2,1} \end{vmatrix}} {}_1\mathcal{F}_1^{(1)}(\lambda_1, \lambda_j) \right] \\
 & + {}_2\mathcal{F}_2^{(2)}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \frac{\begin{vmatrix} R(\lambda, \lambda_1)_{a+3,1}^{a,4} & R(\lambda, \lambda_1)_{a+2,2}^{a,4} & R(\lambda, \lambda_1)_{a+1,3}^{a,4} \\ R(\lambda, \lambda_1)_{a+3,1}^{a+1,3} & R(\lambda, \lambda_1)_{a+2,2}^{a+1,3} & R(\lambda, \lambda_1)_{a+1,3}^{a+1,3} \\ R(\lambda, \lambda_1)_{a+3,1}^{a+3,1} & R(\lambda, \lambda_1)_{a+2,2}^{a+3,1} & R(\lambda, \lambda_1)_{a+1,3}^{a+3,1} \\ R(\lambda, \lambda_1)_{a+3,1}^{a+1,3} & R(\lambda, \lambda_1)_{a+2,2}^{a+1,3} & R(\lambda, \lambda_1)_{a+1,3}^{a+1,3} \\ R(\lambda, \lambda_1)_{a+3,1}^{a+2,2} & R(\lambda, \lambda_1)_{a+2,2}^{a+2,2} & R(\lambda, \lambda_1)_{a+1,3}^{a+2,2} \\ R(\lambda, \lambda_1)_{a+3,1}^{a+3,1} & R(\lambda, \lambda_1)_{a+2,2}^{a+3,1} & R(\lambda, \lambda_1)_{a+1,3}^{a+3,1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R(\lambda, \lambda_1)_{a+3,1}^{a+1,3} & R(\lambda, \lambda_1)_{a+2,2}^{a+1,3} & R(\lambda, \lambda_1)_{a+1,3}^{a+1,3} \\ R(\lambda, \lambda_1)_{a+3,1}^{a+2,2} & R(\lambda, \lambda_1)_{a+2,2}^{a+2,2} & R(\lambda, \lambda_1)_{a+1,3}^{a+2,2} \\ R(\lambda, \lambda_1)_{a+3,1}^{a+3,1} & R(\lambda, \lambda_1)_{a+2,2}^{a+3,1} & R(\lambda, \lambda_1)_{a+1,3}^{a+3,1} \end{vmatrix}}, \quad \text{para } 2 \leq a \leq N-3,
 \end{aligned}
 \tag{C.52}$$

$$\begin{aligned}
 {}_2\mathcal{H}_2^{(N-2)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3|1) &= -\frac{D_2^{(N-2,0)}(\lambda, \lambda_1)}{D_2^{(N-1,0)}(\lambda, \lambda_1)} \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{N-2,1}^{N-2,1}}{R(\lambda, \lambda_1)_{N-1,1}^{N-1,1}} {}_0\mathcal{F}_1^{(N-1)}(\lambda, \lambda_1) \\
 &\times \sum_{\substack{i,j=2 \\ j \neq i}}^{n=3} \frac{R(\lambda_j, \lambda_i)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_j, \lambda_i)_{2,1}^{2,1}} \theta_{<}(\lambda_j, \lambda_i) {}_1\mathcal{F}_1^{(N-2)}(\lambda, \lambda_i) {}_0\mathcal{F}_1^{(1)}(\lambda_1, \lambda_j) - D_2^{(N-2,0)}(\lambda, \lambda_1) \\
 &\times \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{N-2,1}^{N-2,1} R(\lambda, \lambda_1)_{N-1,3}^{N-1,3}}{\begin{vmatrix} R(\lambda, \lambda_1)_{N,2}^{N-1,3} & R(\lambda, \lambda_1)_{N-1,3}^{N-1,3} \\ R(\lambda, \lambda_1)_{N,2}^{N,2} & R(\lambda, \lambda_1)_{N-1,3}^{N,2} \end{vmatrix}} \left[{}_2\mathcal{F}_2^{(N-2)}(\lambda, \lambda_2, \lambda_3) + \frac{D_2^{(N-2,1)}(\lambda, \lambda_1)}{D_2^{(N-2,0)}(\lambda, \lambda_1)} {}_0\mathcal{F}_2^{(N-3)}(\lambda, \lambda_2, \lambda_3) \right. \\
 &\left. - \frac{D_2^{(N-1,1)}(\lambda, \lambda_1)}{D_2^{(N-1,0)}(\lambda, \lambda_1)} {}_0\mathcal{F}_1^{(N-2)}(\lambda, \lambda_2) {}_0\mathcal{F}_1^{(N-2)}(\lambda, \lambda_3) \sum_{\substack{i,j=2 \\ j \neq i}}^{n=3} \frac{R(\lambda_j, \lambda_i)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_j, \lambda_i)_{2,1}^{2,1}} \theta_{<}(\lambda_j, \lambda_i) \right] \\
 &- \sum_{\substack{i,j=2 \\ j \neq i}}^{n=3} \frac{R(\lambda_j, \lambda_i)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_j, \lambda_i)_{2,1}^{2,1}} \theta_{<}(\lambda_j, \lambda_i) {}_1\mathcal{F}_1^{(2)}(\lambda_1, \lambda_i) \left[-D_3^{(N-2,0)}(\lambda, \lambda_1) \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{N-2,1}^{N-2,1} R(\lambda, \lambda_1)_{N,2}^{N-1,3}}{\begin{vmatrix} R(\lambda, \lambda_1)_{N,2}^{N-1,3} & R(\lambda, \lambda_1)_{N-1,3}^{N-1,3} \\ R(\lambda, \lambda_1)_{N,2}^{N,2} & R(\lambda, \lambda_1)_{N-1,3}^{N,2} \end{vmatrix}} \right. \\
 &\times {}_1\mathcal{F}_1^{(N-2)}(\lambda, \lambda_j) + \frac{\begin{vmatrix} R(\lambda, \lambda_1)_{N,1}^{N-2,3} & R(\lambda, \lambda_1)_{N-1,2}^{N-2,3} \\ R(\lambda, \lambda_1)_{N,1}^{N-1,2} & R(\lambda, \lambda_1)_{N-1,2}^{N-1,2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R(\lambda, \lambda_1)_{N,1}^{N-1,2} & R(\lambda, \lambda_1)_{N-1,2}^{N-1,2} \\ R(\lambda, \lambda_1)_{N,1}^{N,1} & R(\lambda, \lambda_1)_{N-1,2}^{N,1} \end{vmatrix}} {}_1\mathcal{F}_1^{(1)}(\lambda_1, \lambda_j) \left. + {}_2\mathcal{F}_2^{(2)}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \right] \\
 &\times \frac{\begin{vmatrix} R(\lambda, \lambda_1)_{N,2}^{N-2,4} & R(\lambda, \lambda_1)_{N-1,3}^{N-2,4} \\ R(\lambda, \lambda_1)_{N,2}^{N-1,3} & R(\lambda, \lambda_1)_{N-1,3}^{N-1,3} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R(\lambda, \lambda_1)_{N,2}^{N-1,3} & R(\lambda, \lambda_1)_{N-1,3}^{N-1,3} \\ R(\lambda, \lambda_1)_{N,2}^{N,2} & R(\lambda, \lambda_1)_{N-1,3}^{N,2} \end{vmatrix}} \tag{C.53}
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 {}_0\mathcal{H}_2^{(a-2)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3|1) &= {}_0\mathcal{F}_2^{(a-2)}(\lambda, \lambda_2, \lambda_3) \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{a-2,1}^{a-2,1}}{R(\lambda, \lambda_1)_{a,1}^{a,1}} + \frac{R(\lambda, \lambda_1)_{a,1}^{a-2,3}}{R(\lambda, \lambda_1)_{a,1}^{a,1}} {}_2\mathcal{F}_2^{(1)}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \\
 &- \sum_{\substack{i,j=2 \\ j \neq i}}^{n=3} \frac{R(\lambda_i, \lambda_j)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_i, \lambda_j)_{2,1}^{2,1}} \theta_{<}(\lambda_i, \lambda_j) {}_0\mathcal{F}_1^{(a-1)}(\lambda, \lambda_i), \quad \text{para } 3 \leq a \leq N. \tag{C.54}
 \end{aligned}$$

A partir das identidades (B.40,B.43) obtidas na construção do estado de duas partículas podemos simplificar as funções $\bar{P}_a(\lambda, \lambda_1, \lambda_2)$ e ${}_c\mathcal{H}_b^{(a)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2|2)$ na relação de comutação (C.40)

ficando com a seguinte expressão

$$\begin{aligned}
 \mathcal{T}_{a,a}(\lambda) |\Phi_3\rangle &= w_a(\lambda) \prod_{i=1}^3 P_a(\lambda, \lambda_i) |\Phi_3\rangle \\
 &- \bar{\delta}_a^N \mathcal{T}_{a,a+1}(\lambda) w_1(\lambda_1) \prod_{i=2}^3 \frac{R(\lambda_i, \lambda_1)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_i, \lambda_1)_{2,1}^{2,1}} {}_1\mathcal{F}_1^{(a)}(\lambda, \lambda_1) \phi_2(\lambda_2, \lambda_3) |0\rangle \\
 &- \bar{\delta}_a^N \mathcal{T}_{a,a+1}(\lambda) \sum_{\substack{i,j=2 \\ j \neq i}}^{n=3} w_1(\lambda_i) \frac{R(\lambda_1, \lambda_i)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_1, \lambda_i)_{2,1}^{2,1}} \frac{R(\lambda_j, \lambda_i)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_j, \lambda_i)_{2,1}^{2,1}} \theta_{<}(\lambda_1, \lambda_i) \theta_{<}(\lambda_j, \lambda_i) {}_1\mathcal{F}_1^{(a)}(\lambda, \lambda_i) \phi_2(\lambda_1, \lambda_j) |0\rangle \\
 &- \bar{\delta}_a^1 \mathcal{T}_{a-1,a}(\lambda) w_2(\lambda_1) \prod_{i=2}^3 \theta(\lambda_1, \lambda_i) \frac{R(\lambda_1, \lambda_i)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_1, \lambda_i)_{2,1}^{2,1}} {}_0\mathcal{F}_1^{(a-1)}(\lambda, \lambda_1) \phi_2(\lambda_2, \lambda_3) |0\rangle \\
 &- \bar{\delta}_a^1 \mathcal{T}_{a-1,a}(\lambda) \sum_{\substack{i,j=2 \\ j \neq i}}^{n=3} w_2(\lambda_i) \frac{R(\lambda_i, \lambda_1)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_i, \lambda_1)_{2,1}^{2,1}} \frac{R(\lambda_i, \lambda_j)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_i, \lambda_j)_{2,1}^{2,1}} \theta_{<}(\lambda_i, \lambda_j) {}_0\mathcal{F}_1^{(a-1)}(\lambda, \lambda_i) \phi_2(\lambda_1, \lambda_j) |0\rangle \\
 &- \bar{\delta}_a^{N-1,N} \mathcal{T}_{a,a+2}(\lambda) w_1(\lambda_1) \sum_{\substack{i,j=2 \\ j \neq i}}^{n=3} \phi_1(\lambda_j) w_1(\lambda_i) \frac{R(\lambda_j, \lambda_1)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_j, \lambda_1)_{2,1}^{2,1}} \frac{R(\lambda_j, \lambda_i)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_j, \lambda_i)_{2,1}^{2,1}} \theta_{<}(\lambda_j, \lambda_i) {}_2\mathcal{F}_2^{(a)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_i) |0\rangle \\
 &- \bar{\delta}_a^{N-1,N} \mathcal{T}_{a,a+2}(\lambda) \phi_1(\lambda_1) w_1(\lambda_2) w_1(\lambda_3) \frac{R(\lambda_1, \lambda_2)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_1, \lambda_2)_{2,1}^{2,1}} \frac{R(\lambda_1, \lambda_3)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_1, \lambda_3)_{2,1}^{2,1}} {}_2\mathcal{F}_2^{(a)}(\lambda, \lambda_2, \lambda_3) |0\rangle \\
 &- \bar{\delta}_a^{1,N} \mathcal{T}_{a-1,a+1}(\lambda) \phi_1(\lambda_1) \sum_{\substack{i,j=2 \\ j \neq i}}^{n=3} w_1(\lambda_i) w_2(\lambda_j) {}_1\mathcal{F}_2^{(a-1)}(\lambda, \lambda_i, \lambda_j) \frac{R(\lambda_1, \lambda_i)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_1, \lambda_i)_{2,1}^{2,1}} \frac{R(\lambda_j, \lambda_1)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_j, \lambda_1)_{2,1}^{2,1}} \theta(\lambda_1, \lambda_i) \\
 &\times \theta_{<}(\lambda_j, \lambda_i) |0\rangle - \bar{\delta}_a^{1,N} \mathcal{T}_{a-1,a+1}(\lambda) w_2(\lambda_1) \sum_{\substack{i,j=2 \\ j \neq i}}^{n=3} w_1(\lambda_i) \phi_1(\lambda_j) {}_1\mathcal{F}_2^{(a-1)}(\lambda, \lambda_i, \lambda_1) \frac{R(\lambda_1, \lambda_j)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_1, \lambda_j)_{2,1}^{2,1}} \\
 &\times \frac{R(\lambda_j, \lambda_i)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_j, \lambda_i)_{2,1}^{2,1}} \theta(\lambda_1, \lambda_j) \theta(\lambda_1, \lambda_i) \theta_{<}(\lambda_j, \lambda_i) |0\rangle - \bar{\delta}_a^{1,N} \mathcal{T}_{a-1,a+1}(\lambda) w_1(\lambda_1) \sum_{\substack{i,j=2 \\ j \neq i}}^{n=3} w_2(\lambda_i) \phi_1(\lambda_j) \\
 &\times {}_1\mathcal{F}_2^{(a-1)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_i) \frac{R(\lambda_j, \lambda_1)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_j, \lambda_1)_{2,1}^{2,1}} \frac{R(\lambda_j, \lambda_i)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_j, \lambda_i)_{2,1}^{2,1}} \theta_{<}(\lambda_i, \lambda_j) |0\rangle \\
 &- \bar{\delta}_a^{1,2} \mathcal{T}_{a-2,a}(\lambda) w_2(\lambda_1) \sum_{\substack{i,j=2 \\ j \neq i}}^{n=3} w_2(\lambda_i) \phi_1(\lambda_j) P_2(\lambda_1, \lambda_j) \frac{R(\lambda_i, \lambda_j)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_i, \lambda_j)_{2,1}^{2,1}} \theta_{<}(\lambda_i, \lambda_j) {}_0\mathcal{F}_2^{(a-2)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_i) |0\rangle \\
 &- \bar{\delta}_a^{1,2} \mathcal{T}_{a-2,a}(\lambda) w_2(\lambda_2) w_2(\lambda_3) \phi_{12}(\lambda_1) {}_0\mathcal{F}_2^{(a-2)}(\lambda, \lambda_2, \lambda_3) \frac{R(\lambda_2, \lambda_1)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_2, \lambda_1)_{2,1}^{2,1}} \frac{R(\lambda_3, \lambda_1)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_3, \lambda_1)_{2,1}^{2,1}} |0\rangle \\
 &- \bar{\delta}_a^{N-2,N-1,N} \mathcal{T}_{a,a+3}(\lambda) w_1(\lambda_1) w_1(\lambda_2) w_1(\lambda_3) {}_3\mathcal{F}_3^{(a)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) |0\rangle
 \end{aligned} \tag{C.55}$$

$$\begin{aligned}
 & -\bar{\delta}_a^{1,N-1,N} \mathcal{T}_{a-1,a+2}(\lambda) w_1(\lambda_1) \sum_{\substack{i,j=2 \\ j \neq i}}^{n=3} w_1(\lambda_i) w_2(\lambda_j)_2 \mathcal{F}_3^{(a-1)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_i, \lambda_j) \theta_{<}(\lambda_j, \lambda_i) |0\rangle \\
 & -\bar{\delta}_a^{1,N-1,N} \mathcal{T}_{a-1,a+2}(\lambda) w_2(\lambda_1) w_1(\lambda_2) w_1(\lambda_3)_2 \mathcal{F}_3^{(a-1)}(\lambda, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_1) \theta(\lambda_1, \lambda_2) \theta(\lambda_1, \lambda_3) \\
 & -\bar{\delta}_a^{1,2,N} \mathcal{T}_{a-2,a+1}(\lambda) w_2(\lambda_1) \sum_{\substack{i,j=2 \\ j \neq i}}^{n=3} w_1(\lambda_i) w_2(\lambda_j)_1 \mathcal{F}_3^{(a-2)}(\lambda, \lambda_i, \lambda_1, \lambda_j) \theta(\lambda_1, \lambda_i) \theta_{<}(\lambda_j, \lambda_i) |0\rangle \\
 & -\bar{\delta}_a^{1,2,N} \mathcal{T}_{a-2,a+1}(\lambda) w_1(\lambda_1) w_2(\lambda_2) w_2(\lambda_3)_1 \mathcal{F}_3^{(a-2)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) |0\rangle \\
 & -\bar{\delta}_a^{1,2,3} \mathcal{T}_{a-3,a}(\lambda) w_2(\lambda_1) w_2(\lambda_2) w_2(\lambda_3)_0 \mathcal{F}_3^{(a-3)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) |0\rangle \\
 & +w_a(\lambda) P_a(\lambda, \lambda_1) w_1(\lambda_1) w_1(\lambda_2) w_1(\lambda_3) \mathcal{T}_{1,4}(\lambda_1) \\
 & \times \left[\bar{P}_a(\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) - {}_2\mathcal{F}_2^{(2)}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \prod_{i=2}^3 P_a(\lambda, \lambda_i) \right] |0\rangle - \bar{\delta}_a^N w_1(\lambda_2) w_1(\lambda_3) \mathcal{T}_{a,a+1}(\lambda) \mathcal{T}_{1,3}(\lambda_1) \\
 & \times \left[{}_1\mathcal{H}_1^{(a)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3|3) |0\rangle - \sum_{\substack{i,j=2 \\ j \neq i}}^{n=3} \frac{R(\lambda_1, \lambda_i)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_1, \lambda_i)_{2,1}^{2,1}} \frac{R(\lambda_j, \lambda_i)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_j, \lambda_i)_{2,1}^{2,1}} \theta(\lambda_1, \lambda_i) \theta_{<}(\lambda_j, \lambda_i) {}_1\mathcal{F}_1^{(a)}(\lambda, \lambda_i) \right. \\
 & \times {}_1\mathcal{F}_1^{(2)}(\lambda_1, \lambda_j) \left. \right] |0\rangle - w_1(\lambda_2) w_1(\lambda_3) \\
 & \times \left[{}_2\mathcal{H}_2^{(a)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3|1) - \frac{R(\lambda_1, \lambda_2)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_1, \lambda_2)_{2,1}^{2,1}} \frac{R(\lambda_1, \lambda_3)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_1, \lambda_3)_{2,1}^{2,1}} \theta(\lambda_1, \lambda_2) \theta(\lambda_1, \lambda_3) {}_2\mathcal{F}_2^{(a)}(\lambda, \lambda_2, \lambda_3) \right] \\
 & \times \left[\bar{\delta}_a^{N-1,N} \mathcal{T}_{a,a+2}(\lambda) \mathcal{T}_{1,2}(\lambda_1) + \bar{\delta}_a^{1,N-1,N} w_2(\lambda_1) \mathcal{T}_{a-1,a+2}(\lambda) {}_0\mathcal{F}_1^{(a-1)}(\lambda, \lambda_1) \right] |0\rangle \\
 & -w_2(\lambda_2) w_2(\lambda_3) \left[{}_0\mathcal{H}_2^{(a-2)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3|1) - \frac{R(\lambda_2, \lambda_1)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_2, \lambda_1)_{2,1}^{2,1}} \frac{R(\lambda_3, \lambda_1)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_3, \lambda_1)_{2,1}^{2,1}} {}_0\mathcal{F}_2^{(a-2)}(\lambda, \lambda_2, \lambda_3) \right] \\
 & \times \left[\bar{\delta}_a^{1,2} \mathcal{T}_{a-2,a}(\lambda) \mathcal{T}_{1,2}(\lambda_1) + \bar{\delta}_a^{1,2,N} w_1(\lambda_1) \mathcal{T}_{a-2,a+1}(\lambda) {}_1\mathcal{F}_1^{(a)}(\lambda, \lambda_1) \right] |0\rangle. \tag{C.56}
 \end{aligned}$$

Para que o ansatz (C.1) seja um autovetor da matriz de transferência é necessário que os termos desejados tenham um fator único e comum. Em outras palavras, os termos desejados devem ser proporcionais ao vetor (C.1). Essa condição é satisfeita se a função $\bar{P}_a(\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ satisfaz a identidade

$$\bar{P}_a(\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = P_a(\lambda, \lambda_2) P_a(\lambda, \lambda_3) {}_2\mathcal{F}_2^{(2)}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3). \tag{C.57}$$

A demonstração da Eq.(C.57) a partir da propriedade de unitariedade (11) e da equação de Yang-Baxter (12) exige inúmeras manipulações. Todavia, outra possível estratégia de verificação da veracidade da Eq.(C.57) é checar essa identidade para os modelos de vértices bidi-

dimensionais integráveis conhecidos. Essa validação da Eq.(C.57) foi realizada. Assim prosseguimos com o problema de autovalor explorando a propriedade de simetria do ansatz $|\Phi_3\rangle$ (238). Aplicando essa simetria na Eq.(C.56) não é difícil concluir que as funções ${}_1\mathcal{H}_1^{(a)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3|3)$, ${}_2\mathcal{H}_2^{(a)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3|1)$, ${}_0\mathcal{H}_2^{(a)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3|1)$, ${}_0\mathcal{F}_3^{(a)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ e ${}_3\mathcal{F}_3^{(a)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ satisfazem as seguintes identidades

$$\begin{aligned}
 {}_1\mathcal{H}_1^{(a)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3|3) &= \sum_{\substack{i,j=2 \\ j \neq i}}^{n=3} \frac{R(\lambda_1, \lambda_i)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_1, \lambda_i)_{2,1}^{2,1}} \frac{R(\lambda_j, \lambda_i)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_j, \lambda_i)_{2,1}^{2,1}} \theta(\lambda_1, \lambda_i) \prod_{k=2}^{i-1} \theta(\lambda_k, \lambda_i) {}_1\mathcal{F}_1^{(a)}(\lambda, \lambda_i) \\
 &\times {}_1\mathcal{F}_1^{(2)}(\lambda_1, \lambda_j) \quad (C.58)
 \end{aligned}$$

$${}_2\mathcal{H}_2^{(a)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3|1) = {}_2\mathcal{F}_2^{(a)}(\lambda, \lambda_2, \lambda_3) \prod_{k=2}^3 \frac{R(\lambda_1, \lambda_k)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_1, \lambda_k)_{2,1}^{2,1}} \theta(\lambda_1, \lambda_k) \quad (C.59)$$

$${}_0\mathcal{H}_2^{(a)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3|1) = {}_0\mathcal{F}_2^{(a)}(\lambda, \lambda_2, \lambda_3) \prod_{k=2}^3 \frac{R(\lambda_k, \lambda_1)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_k, \lambda_1)_{2,1}^{2,1}} \quad (C.60)$$

$${}_0\mathcal{F}_3^{(a)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \theta(\lambda_1, \lambda_2) {}_0\mathcal{F}_3^{(a)}(\lambda, \lambda_2, \lambda_1, \lambda_3) = \theta(\lambda_2, \lambda_3) {}_0\mathcal{F}_3^{(a)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_3, \lambda_2) \quad (C.61)$$

$${}_3\mathcal{F}_3^{(a)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \theta(\lambda_1, \lambda_2) {}_3\mathcal{F}_3^{(a)}(\lambda, \lambda_2, \lambda_1, \lambda_3) = \theta(\lambda_2, \lambda_3) {}_3\mathcal{F}_3^{(a)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_3, \lambda_2). \quad (C.62)$$

As condições impostas pelas Eqs.(C.57-C.60) anulam os últimos quatro termos da Eq.(C.56). Dessa forma concluímos que a ação dos campos diagonais $\mathcal{T}_{a,a}(\lambda)$ no vetor $\phi_3(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) |0\rangle$ é expressa pela Eq.(247).

Apêndice D: estado de quatro partículas

A estratégia utilizada nesta tese para calcular os autovetores da matriz de transferência consiste de forma resumida em fixar os coeficientes e parâmetros arbitrários do ansatz para o estado. Essa tarefa foi realizada a partir da análise das relações de comutação descritas no capítulo 2. Mais especificamente, os coeficientes e parâmetros arbitrários são fixados quando exigimos o cancelamento dos termos fáceis e dos termos não desejados ambos gerados na ação dos operadores diagonais sobre o ansatz. O resultado desse procedimento revela que o ansatz para os estados de duas e três partículas são simétricos em relação a permutação das variáveis de Bethe. A presença dessa simetria nesses dois casos é um forte indício que os estados de multi-partículas são simétrico e portanto, é razoável considerarmos apenas com ansatz que possuem essa propriedade. Além dessa informação, também constatamos que os estados são gerados por uma relação de recorrência. Em outras palavras, o estado de duas partículas é gerado a partir do estado de uma partícula, e o estado de três partículas é gerado a partir dos estados de uma e duas partículas. Logo, é natural esperar que o estado de quatro partículas seja simétrico e gerado a partir do estados de uma, duas e três partículas. Com o propósito de investigar tais informações, neste apêndice determinamos o estado de quatro partículas através de uma técnica diferente da utilizada no cálculo do estados de duas e três partículas. Mais precisamente, determinamos o ansatz mais geral referente ao estado de quatro partículas que seja simétrico e gerado a partir do estado de uma, duas e três partículas. Por fim demonstramos que esse ansatz é único e portanto esse vetor corresponde ao respectivo estado a menos das variáveis de Bethe $\lambda_1, \dots, \lambda_4$.

Antes de iniciarmos os cálculos esclareceremos alguns pontos fundamentais utilizados na estratégia adotada. Através da análise dos estados de duas e três partículas (183,237) é direto concluir que a variável de Bethe λ_1 situa-se sempre no operador a esquerda dos termos que compõem o estado e que o primeiro termo desses autovetores possui a forma $\mathcal{T}_{1,2}(\lambda_1)\phi_{n-1}(\lambda_2, \dots, \lambda_n)$ para $n = 2, 3$. Ressaltamos que esse é o unico termo do autovetor formado pelo operador $\mathcal{T}_{1,2}(\lambda_1)$. Conseqüentemente, o estado de quatro partículas é composto dentre outros pelo termo $\mathcal{T}_{1,2}(\lambda_1)\phi_3(\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$, sendo este o único termo que contem o operador $\mathcal{T}_{1,2}(\lambda_1)$.

Estabelecido a base da estratégia adotada, a seguir descrevemos as manipulações algébricas.

O primeiro procedimento a ser realizado é comutar os operadores $\mathcal{T}_{1,2}(\lambda_1)$ e $\mathcal{T}_{1,2}(\lambda_2)$ presentes

no termo $\mathcal{T}_{1,2}(\lambda_1)\phi_3(\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$. Executamos essa tarefa através da relação de comutação (186) e o resultado final é

$$\begin{aligned}
 \mathcal{T}_{1,2}(\lambda_1)\phi_3(\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) &= \left\{ \theta(\lambda_1, \lambda_2) \left[\mathcal{T}_{1,2}(\lambda_2)\mathcal{T}_{1,2}(\lambda_1) + {}_1\mathcal{F}_1^{(2)}(\lambda_2, \lambda_1)\mathcal{T}_{1,3}(\lambda_2)\mathcal{T}_{1,1}(\lambda_1) \right] \right. \\
 &\quad \left. - {}_1\mathcal{F}_1^{(2)}(\lambda_1, \lambda_2)\mathcal{T}_{1,3}(\lambda_1)\mathcal{T}_{1,1}(\lambda_2) \right\} \phi_2(\lambda_3, \lambda_4) \\
 &+ \mathcal{T}_{1,2}(\lambda_1) \left[\mathcal{T}_{1,3}(\lambda_2) \sum_{i,j=3}^{n=4} {}_1\mathcal{F}_1^{(2)}(\lambda_2, \lambda_j) \frac{R(\lambda_i, \lambda_j)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_i, \lambda_j)_{2,1}^{2,1}} \theta_{<}(\lambda_i, \lambda_j) \phi_1(\lambda_i) \mathcal{T}_{1,1}(\lambda_j) \right. \\
 &\quad \left. + {}_2\mathcal{F}_2^{(2)}(\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \mathcal{T}_{1,4}(\lambda_2) \mathcal{T}_{1,1}(\lambda_3) \mathcal{T}_{1,1}(\lambda_4) \right] \\
 &= \theta(\lambda_1, \lambda_2) \mathcal{T}_{1,2}(\lambda_2) \phi_3(\lambda_1, \lambda_3, \lambda_4) \\
 &+ \mathcal{T}_{1,2}(\lambda_1) \left[\mathcal{T}_{1,3}(\lambda_2) \sum_{i,j=3}^{n=4} {}_1\mathcal{F}_1^{(2)}(\lambda_2, \lambda_j) \frac{R(\lambda_i, \lambda_j)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_i, \lambda_j)_{2,1}^{2,1}} \theta_{<}(\lambda_i, \lambda_j) \phi_1(\lambda_i) \mathcal{T}_{1,1}(\lambda_j) \right. \\
 &\quad \left. + {}_2\mathcal{F}_2^{(2)}(\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \mathcal{T}_{1,4}(\lambda_2) \mathcal{T}_{1,1}(\lambda_3) \mathcal{T}_{1,1}(\lambda_4) \right] \\
 &- \theta(\lambda_1, \lambda_2) \mathcal{T}_{1,2}(\lambda_2) \left[\mathcal{T}_{1,3}(\lambda_1) \sum_{i,j=3}^{n=4} {}_1\mathcal{F}_1^{(2)}(\lambda_1, \lambda_j) \frac{R(\lambda_i, \lambda_j)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_i, \lambda_j)_{2,1}^{2,1}} \theta_{<}(\lambda_i, \lambda_j) \phi_1(\lambda_i) \mathcal{T}_{1,1}(\lambda_j) \right. \\
 &\quad \left. + {}_2\mathcal{F}_2^{(2)}(\lambda_1, \lambda_3, \lambda_4) \mathcal{T}_{1,4}(\lambda_1) \mathcal{T}_{1,1}(\lambda_3) \mathcal{T}_{1,1}(\lambda_4) \right] \\
 &+ \left[-{}_1\mathcal{F}_1^{(2)}(\lambda_1, \lambda_2) \mathcal{T}_{1,3}(\lambda_1) \mathcal{T}_{1,1}(\lambda_2) + \theta(\lambda_1, \lambda_2) {}_1\mathcal{F}_1^{(2)}(\lambda_2, \lambda_1) \mathcal{T}_{1,3}(\lambda_2) \mathcal{T}_{1,1}(\lambda_1) \right] \phi_2(\lambda_3, \lambda_4).
 \end{aligned} \tag{D.1}$$

Em seguida devemos mover os operadores diagonais $\mathcal{T}_{1,1}(\lambda_1)$ e $\mathcal{T}_{1,1}(\lambda_2)$ do último termo da Eq.(D.1) para a direita. Para essa tarefa utilizaremos a Eq.(188) não projetada no vetor $|0\rangle$. Enfatizamos que excepcionalmente a Eq.(188) é verdadeira independente da projeção e nesse caso podemos expressá-la da forma

$$\begin{aligned}
 \mathcal{T}_{1,1}(\lambda)\phi_2(\lambda_3, \lambda_4) &= \prod_{i=3}^{n=4} \frac{R(\lambda_i, \lambda)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_i, \lambda)_{2,1}^{2,1}} \phi_2(\lambda_3, \lambda_4) \mathcal{T}_{1,1}(\lambda) \\
 &- \sum_{i,j=3}^{n=4} {}_1\mathcal{F}_1^{(1)}(\lambda, \lambda_i) \frac{R(\lambda_j, \lambda_i)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_j, \lambda_i)_{2,1}^{2,1}} \theta_{<}(\lambda_j, \lambda_i) \mathcal{T}_{1,2}(\lambda) \phi_1(\lambda_j) \mathcal{T}_{1,1}(\lambda_i) \\
 &- {}_2\mathcal{F}_2^{(1)}(\lambda, \lambda_3, \lambda_4) \mathcal{T}_{1,3}(\lambda) \mathcal{T}_{1,1}(\lambda_3) \mathcal{T}_{1,1}(\lambda_4).
 \end{aligned} \tag{D.2}$$

Comutando os operadores diagonais $\mathcal{T}_{1,1}(\lambda_1)$ e $\mathcal{T}_{1,1}(\lambda_2)$ do último termo da Eq.(D.1) com

$\phi_2(\lambda_3, \lambda_4) |0\rangle$ através da Eq.(D.2) chegamos a seguinte expressão

$$\begin{aligned}
 & \mathcal{T}_{1,2}(\lambda_1)\phi_3(\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) - \theta(\lambda_1, \lambda_2)\mathcal{T}_{1,2}(\lambda_2)\phi_3(\lambda_1, \lambda_3, \lambda_4) \\
 &= \mathcal{T}_{1,2}(\lambda_1) \left[\mathcal{T}_{1,3}(\lambda_2) \sum_{i,j=3}^{n=4} {}_1\mathcal{F}_1^{(2)}(\lambda_2, \lambda_j) \frac{R(\lambda_i, \lambda_j)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_i, \lambda_j)_{2,1}^{2,1}} \theta_{<}(\lambda_i, \lambda_j) \phi_1(\lambda_i) \mathcal{T}_{1,1}(\lambda_j) \right. \\
 &+ {}_2\mathcal{F}_2^{(2)}(\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \mathcal{T}_{1,4}(\lambda_2) \mathcal{T}_{1,1}(\lambda_3) \mathcal{T}_{1,1}(\lambda_4) \left. \right] \\
 &- \theta(\lambda_1, \lambda_2) \mathcal{T}_{1,2}(\lambda_2) \left[\mathcal{T}_{1,3}(\lambda_1) \sum_{i,j=3}^{n=4} {}_1\mathcal{F}_1^{(2)}(\lambda_1, \lambda_j) \frac{R(\lambda_i, \lambda_j)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_i, \lambda_j)_{2,1}^{2,1}} \theta_{<}(\lambda_i, \lambda_j) \phi_1(\lambda_i) \mathcal{T}_{1,1}(\lambda_j) \right. \\
 &+ {}_2\mathcal{F}_2^{(2)}(\lambda_1, \lambda_3, \lambda_4) \mathcal{T}_{1,4}(\lambda_1) \mathcal{T}_{1,1}(\lambda_3) \mathcal{T}_{1,1}(\lambda_4) \left. \right] \\
 &- {}_1\mathcal{F}_1^{(2)}(\lambda_1, \lambda_2) \mathcal{T}_{1,3}(\lambda_1) \left[\prod_{i=3}^{n=4} \frac{R(\lambda_i, \lambda_2)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_i, \lambda_2)_{2,1}^{2,1}} \phi_2(\lambda_3, \lambda_4) \mathcal{T}_{1,1}(\lambda_2) \right. \\
 &- \sum_{i,j=3}^{n=4} {}_1\mathcal{F}_1^{(1)}(\lambda_2, \lambda_i) \frac{R(\lambda_j, \lambda_i)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_j, \lambda_i)_{2,1}^{2,1}} \theta_{<}(\lambda_j, \lambda_i) \mathcal{T}_{1,2}(\lambda_2) \phi_1(\lambda_j) \mathcal{T}_{1,1}(\lambda_i) \\
 &- {}_2\mathcal{F}_2^{(1)}(\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \mathcal{T}_{1,3}(\lambda_2) \mathcal{T}_{1,1}(\lambda_3) \mathcal{T}_{1,1}(\lambda_4) \left. \right] \\
 &+ \theta(\lambda_1, \lambda_2) {}_1\mathcal{F}_1^{(2)}(\lambda_2, \lambda_1) \mathcal{T}_{1,3}(\lambda_2) \left[\prod_{i=3}^{n=4} \frac{R(\lambda_i, \lambda_1)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_i, \lambda_1)_{2,1}^{2,1}} \phi_2(\lambda_3, \lambda_4) \mathcal{T}_{1,1}(\lambda_1) \right. \\
 &- \sum_{i,j=3}^{n=4} {}_1\mathcal{F}_1^{(1)}(\lambda_1, \lambda_i) \frac{R(\lambda_j, \lambda_i)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_j, \lambda_i)_{2,1}^{2,1}} \theta_{<}(\lambda_j, \lambda_i) \mathcal{T}_{1,2}(\lambda_1) \phi_1(\lambda_j) \mathcal{T}_{1,1}(\lambda_i) \\
 &- {}_2\mathcal{F}_2^{(1)}(\lambda_1, \lambda_3, \lambda_4) \mathcal{T}_{1,3}(\lambda_1) \mathcal{T}_{1,1}(\lambda_3) \mathcal{T}_{1,1}(\lambda_4) \left. \right]. \tag{D.3}
 \end{aligned}$$

Ressaltamos que o lado esquerdo da Eq.(D.3) é simétrico e formado por termos gerados a partir do estado de três partículas. Seguindo o raciocínio descrito acima, esperamos a partir da informação anterior que o lado direito da Eq.(D.3) seja composto apenas pelos estados de uma e duas partículas. A verificação direta da Eq.(D.3) fornece que os dois únicos termos formados pelo estado de duas partículas de forma explícita são

$$\bullet \quad - {}_1\mathcal{F}_1^{(2)}(\lambda_1, \lambda_2) \mathcal{T}_{1,3}(\lambda_1) \prod_{i=3}^{n=4} \frac{R(\lambda_i, \lambda_2)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_i, \lambda_2)_{2,1}^{2,1}} \phi_2(\lambda_3, \lambda_4) \mathcal{T}_{1,1}(\lambda_2) \tag{D.4}$$

$$\bullet \quad \theta(\lambda_1, \lambda_2) {}_1\mathcal{F}_1^{(2)}(\lambda_2, \lambda_1) \mathcal{T}_{1,3}(\lambda_2) \prod_{i=3}^{n=4} \frac{R(\lambda_i, \lambda_1)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_i, \lambda_1)_{2,1}^{2,1}} \phi_2(\lambda_3, \lambda_4) \mathcal{T}_{1,1}(\lambda_1) \tag{D.5}$$

Com objetivo de tornar a Eq.(D.3) simétrica em relação aos termos que contém de forma explícita o estado de duas partículas, manipulamos essa equação de modo a tornar claro essa estrutura. A expressão resultante dessas manipulações é dada por

$$\begin{aligned}
 & \phi_4^{(1)}(\lambda_1, \dots, \lambda_4) - \theta(\lambda_1, \lambda_2) \phi_4^{(1)}(\lambda_2, \lambda_1, \lambda_3, \lambda_4) \\
 &= \mathcal{T}_{1,2}(\lambda_1) \left[\mathcal{T}_{1,3}(\lambda_2) \sum_{i,j=3}^{n=4} {}_1\mathcal{F}_1^{(2)}(\lambda_2, \lambda_j) \frac{R(\lambda_i, \lambda_j)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_i, \lambda_j)_{2,1}^{2,1}} \theta_{<}(\lambda_i, \lambda_j) \phi_1(\lambda_i) \mathcal{T}_{1,1}(\lambda_j) \right. \\
 &+ {}_2\mathcal{F}_2^{(2)}(\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \mathcal{T}_{1,4}(\lambda_2) \mathcal{T}_{1,1}(\lambda_3) \mathcal{T}_{1,1}(\lambda_4) \left. \right] \\
 &- \theta(\lambda_1, \lambda_2) \mathcal{T}_{1,2}(\lambda_2) \left[\mathcal{T}_{1,3}(\lambda_1) \sum_{i,j=3}^{n=4} {}_1\mathcal{F}_1^{(2)}(\lambda_1, \lambda_j) \frac{R(\lambda_i, \lambda_j)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_i, \lambda_j)_{2,1}^{2,1}} \theta_{<}(\lambda_i, \lambda_j) \phi_1(\lambda_i) \mathcal{T}_{1,1}(\lambda_j) \right. \\
 &+ {}_2\mathcal{F}_2^{(2)}(\lambda_1, \lambda_3, \lambda_4) \mathcal{T}_{1,4}(\lambda_1) \mathcal{T}_{1,1}(\lambda_3) \mathcal{T}_{1,1}(\lambda_4) \left. \right] \\
 &+ \mathcal{T}_{1,3}(\lambda_1) \left[{}_1\mathcal{F}_1^{(2)}(\lambda_1, \lambda_3) \frac{R(\lambda_2, \lambda_3)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_2, \lambda_3)_{2,1}^{2,1}} \frac{R(\lambda_4, \lambda_3)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_4, \lambda_3)_{2,1}^{2,1}} \theta(\lambda_2, \lambda_3) \phi_2(\lambda_2, \lambda_4) \mathcal{T}_{1,1}(\lambda_3) \right. \\
 &+ {}_1\mathcal{F}_1^{(2)}(\lambda_1, \lambda_4) \frac{R(\lambda_2, \lambda_4)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_2, \lambda_4)_{2,1}^{2,1}} \frac{R(\lambda_3, \lambda_4)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_3, \lambda_4)_{2,1}^{2,1}} \theta(\lambda_2, \lambda_4) \theta(\lambda_3, \lambda_4) \phi_2(\lambda_2, \lambda_3) \mathcal{T}_{1,1}(\lambda_4) \left. \right] \\
 &- \theta(\lambda_1, \lambda_2) \mathcal{T}_{1,3}(\lambda_2) \left[{}_1\mathcal{F}_1^{(2)}(\lambda_2, \lambda_3) \frac{R(\lambda_1, \lambda_3)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_1, \lambda_3)_{2,1}^{2,1}} \frac{R(\lambda_4, \lambda_3)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_4, \lambda_3)_{2,1}^{2,1}} \theta(\lambda_1, \lambda_3) \phi_2(\lambda_1, \lambda_4) \mathcal{T}_{1,1}(\lambda_3) \right. \\
 &+ {}_1\mathcal{F}_1^{(2)}(\lambda_2, \lambda_4) \frac{R(\lambda_1, \lambda_4)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_1, \lambda_4)_{2,1}^{2,1}} \frac{R(\lambda_3, \lambda_4)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_3, \lambda_4)_{2,1}^{2,1}} \theta(\lambda_1, \lambda_4) \theta(\lambda_3, \lambda_4) \phi_2(\lambda_1, \lambda_3) \mathcal{T}_{1,1}(\lambda_4) \left. \right] \\
 &+ {}_1\mathcal{F}_1^{(2)}(\lambda_1, \lambda_2) \mathcal{T}_{1,3}(\lambda_1) \left[\sum_{i,j=3}^{n=4} {}_1\mathcal{F}_1^{(1)}(\lambda_2, \lambda_i) \frac{R(\lambda_j, \lambda_i)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_j, \lambda_i)_{2,1}^{2,1}} \theta_{<}(\lambda_j, \lambda_i) \right. \\
 &\times \mathcal{T}_{1,2}(\lambda_2) \phi_1(\lambda_j) \mathcal{T}_{1,1}(\lambda_i) + {}_2\mathcal{F}_2^{(1)}(\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \mathcal{T}_{1,3}(\lambda_2) \mathcal{T}_{1,1}(\lambda_3) \mathcal{T}_{1,1}(\lambda_4) \left. \right] \\
 &- \theta(\lambda_1, \lambda_2) {}_1\mathcal{F}_1^{(2)}(\lambda_2, \lambda_1) \mathcal{T}_{1,3}(\lambda_2) \left[\sum_{i,j=3}^{n=4} {}_1\mathcal{F}_1^{(1)}(\lambda_1, \lambda_i) \frac{R(\lambda_j, \lambda_i)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_j, \lambda_i)_{2,1}^{2,1}} \theta_{<}(\lambda_j, \lambda_i) \right. \\
 &\times \mathcal{T}_{1,2}(\lambda_1) \phi_1(\lambda_j) \mathcal{T}_{1,1}(\lambda_i) + {}_2\mathcal{F}_2^{(1)}(\lambda_1, \lambda_3, \lambda_4) \mathcal{T}_{1,3}(\lambda_1) \mathcal{T}_{1,1}(\lambda_3) \mathcal{T}_{1,1}(\lambda_4) \left. \right], \tag{D.6}
 \end{aligned}$$

onde $\phi_4^{(1)}(\lambda_1, \dots, \lambda_4)$ é definido por

$$\begin{aligned}
 \phi_4^{(1)}(\lambda_1, \dots, \lambda_4) = & \mathcal{T}_{1,2}(\lambda_1)\phi_3(\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \\
 & + \mathcal{T}_{1,3}(\lambda_1) \left[{}_1\mathcal{F}_1^{(2)}(\lambda_1, \lambda_2) \frac{R(\lambda_3, \lambda_2)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_3, \lambda_2)_{2,1}^{2,1}} \frac{R(\lambda_4, \lambda_2)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_4, \lambda_2)_{2,1}^{2,1}} \phi_2(\lambda_3, \lambda_4) \mathcal{T}_{1,1}(\lambda_2) \right. \\
 & + {}_1\mathcal{F}_1^{(2)}(\lambda_1, \lambda_3) \frac{R(\lambda_2, \lambda_3)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_2, \lambda_3)_{2,1}^{2,1}} \frac{R(\lambda_4, \lambda_3)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_4, \lambda_3)_{2,1}^{2,1}} \theta(\lambda_2, \lambda_3) \phi_2(\lambda_2, \lambda_4) \mathcal{T}_{1,1}(\lambda_3) \\
 & \left. + {}_1\mathcal{F}_1^{(2)}(\lambda_1, \lambda_4) \frac{R(\lambda_2, \lambda_4)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_2, \lambda_4)_{2,1}^{2,1}} \frac{R(\lambda_3, \lambda_4)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_3, \lambda_4)_{2,1}^{2,1}} \theta(\lambda_2, \lambda_4) \theta(\lambda_3, \lambda_4) \phi_2(\lambda_2, \lambda_3) \mathcal{T}_{1,1}(\lambda_4) \right]. \quad (\text{D.7})
 \end{aligned}$$

Uma vez fixado os termos do ansatz que contém de forma explícita o estado de duas partículas, para prosseguirmos com a construção do ansatz simétrico devemos eliminar os termos do lado direito da Eq.(D.6) que contém o operador $\mathcal{T}_{1,2}(\lambda_1)$ ou $\mathcal{T}_{1,2}(\lambda_2)$ à direita. Inicialmente cancelaremos os termos $\mathcal{T}_{1,2}(\lambda_1)\mathcal{T}_{1,3}(\lambda_2)$ e $\mathcal{T}_{1,2}(\lambda_2)\mathcal{T}_{1,3}(\lambda_1)$. Para esse trabalho utilizaremos a relação de comutação (54) com $b_1 = 3$ e $d_1 = 0$, que por sua vez pode ser reescrita dada forma

$$\begin{aligned}
 \mathcal{T}_{1,2}(\mu)\mathcal{T}_{1,3}(\lambda) = & \frac{R(\lambda, \mu)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda, \mu)_{3,1}^{3,1}} \frac{1}{D_2^{(3,0)}(\lambda, \mu)} \mathcal{T}_{1,3}(\lambda)\mathcal{T}_{1,2}(\mu) \\
 & - \frac{D_2^{(3,1)}(\lambda, \mu)}{D_2^{(3,0)}(\lambda, \mu)} \mathcal{T}_{1,3}(\mu)\mathcal{T}_{1,2}(\lambda) - \frac{D_2^{(3,2)}(\lambda, \mu)}{D_2^{(3,0)}(\lambda, \mu)} \mathcal{T}_{1,4}(\mu)\mathcal{T}_{1,1}(\lambda) \\
 & - \frac{R(\lambda, \mu)_{4,1}^{3,2}}{R(\lambda, \mu)_{4,1}^{4,1}} \frac{R(\lambda, \mu)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda, \mu)_{3,1}^{3,1}} \frac{1}{D_2^{(3,0)}(\lambda, \mu)} \mathcal{T}_{1,4}(\lambda)\mathcal{T}_{1,1}(\mu) \quad (\text{D.8})
 \end{aligned}$$

Realizado o cancelamento dos termos $\mathcal{T}_{1,2}(\lambda_1)\mathcal{T}_{1,3}(\lambda_2)$ e $\mathcal{T}_{1,2}(\lambda_2)\mathcal{T}_{1,3}(\lambda_1)$ da Eq.(D.6) através da relação de comutação (D.8), movemos os operadores diagonais $\mathcal{T}_{1,1}(\lambda_1)$ e $\mathcal{T}_{1,1}(\lambda_1)$ para a direita sobre o campo $\phi_1(\lambda_i)$ por meio da Eq.(40). Simplificando o resultado gerado por esses

procedimentos encontramos a seguinte expressão

$$\begin{aligned}
 & \phi_4^{(1)}(\lambda_1, \dots, \lambda_4) - \theta(\lambda_1, \lambda_2) \phi_4^{(1)}(\lambda_2, \lambda_1, \lambda_3, \lambda_4) \\
 &= \mathcal{T}_{1,3}(\lambda_1) \mathcal{T}_{1,2}(\lambda_2) \sum_{i,j=3}^{n=4} \mathcal{T}_{1,2}(\lambda_i) \mathcal{T}_{1,1}(\lambda_j) \frac{R(\lambda_i, \lambda_j)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_i, \lambda_j)_{2,1}^{2,1}} \theta_{<}(\lambda_i, \lambda_j) \\
 &\times \left[{}_1\mathcal{F}_1^{(2)}(\lambda_1, \lambda_j) \frac{R(\lambda_2, \lambda_j)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_2, \lambda_j)_{2,1}^{2,1}} \theta(\lambda_2, \lambda_j) - {}_1\mathcal{H}_1^{(2)}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_j|2) \right] \\
 &- \theta(\lambda_1, \lambda_2) \mathcal{T}_{1,3}(\lambda_2) \mathcal{T}_{1,2}(\lambda_1) \sum_{i,j=3}^{n=4} \mathcal{T}_{1,2}(\lambda_i) \mathcal{T}_{1,1}(\lambda_j) \frac{R(\lambda_i, \lambda_j)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_i, \lambda_j)_{2,1}^{2,1}} \theta_{<}(\lambda_i, \lambda_j) \\
 &\times \left[{}_1\mathcal{F}_1^{(2)}(\lambda_2, \lambda_j) \frac{R(\lambda_1, \lambda_j)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_1, \lambda_j)_{2,1}^{2,1}} \theta(\lambda_1, \lambda_j) - {}_1\mathcal{H}_1^{(2)}(\lambda_2, \lambda_1, \lambda_j|2) \right] \\
 &+ {}_2\mathcal{F}_2^{(2)}(\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \mathcal{T}_{1,2}(\lambda_1) \mathcal{T}_{1,4}(\lambda_2) \mathcal{T}_{1,1}(\lambda_3) \mathcal{T}_{1,1}(\lambda_4) \\
 &- \theta(\lambda_1, \lambda_2) {}_2\mathcal{F}_2^{(2)}(\lambda_1, \lambda_3, \lambda_4) \mathcal{T}_{1,2}(\lambda_2) \mathcal{T}_{1,4}(\lambda_1) \mathcal{T}_{1,1}(\lambda_3) \mathcal{T}_{1,1}(\lambda_4) \\
 &+ \mathcal{T}_{1,3}(\lambda_1) \mathcal{T}_{1,3}(\lambda_2) \mathcal{T}_{1,1}(\lambda_3) \mathcal{T}_{1,1}(\lambda_4) \left[{}_1\mathcal{F}_1^{(2)}(\lambda_1, \lambda_3) \frac{R(\lambda_2, \lambda_3)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_2, \lambda_3)_{2,1}^{2,1}} \frac{R(\lambda_4, \lambda_3)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_4, \lambda_3)_{2,1}^{2,1}} \theta(\lambda_2, \lambda_3) \right. \\
 &\times {}_1\mathcal{F}_1^{(2)}(\lambda_2, \lambda_4) + {}_1\mathcal{F}_1^{(2)}(\lambda_1, \lambda_4) \frac{R(\lambda_2, \lambda_4)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_2, \lambda_4)_{2,1}^{2,1}} \frac{R(\lambda_3, \lambda_4)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_3, \lambda_4)_{2,1}^{2,1}} \theta(\lambda_2, \lambda_4) \theta(\lambda_3, \lambda_4) {}_1\mathcal{F}_1^{(2)}(\lambda_2, \lambda_3) \\
 &\left. + {}_1\mathcal{F}_1^{(2)}(\lambda_1, \lambda_2) {}_2\mathcal{F}_2^{(1)}(\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \theta(\lambda_1, \lambda_2) \mathcal{T}_{1,3}(\lambda_2) \mathcal{T}_{1,3}(\lambda_1) \mathcal{T}_{1,1}(\lambda_3) \mathcal{T}_{1,1}(\lambda_4) \left[{}_1\mathcal{F}_1^{(2)}(\lambda_2, \lambda_3) \frac{R(\lambda_1, \lambda_3)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_1, \lambda_3)_{2,1}^{2,1}} \frac{R(\lambda_4, \lambda_3)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_4, \lambda_3)_{2,1}^{2,1}} \right. \\
 & \times \theta(\lambda_1, \lambda_3) {}_1\mathcal{F}_1^{(2)}(\lambda_1, \lambda_4) + {}_1\mathcal{F}_1^{(2)}(\lambda_2, \lambda_4) \frac{R(\lambda_1, \lambda_4)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_1, \lambda_4)_{2,1}^{2,1}} \frac{R(\lambda_3, \lambda_4)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_3, \lambda_4)_{2,1}^{2,1}} \theta(\lambda_1, \lambda_4) \theta(\lambda_3, \lambda_4) \\
 & \times \left. {}_1\mathcal{F}_1^{(2)}(\lambda_1, \lambda_3) + {}_1\mathcal{F}_1^{(2)}(\lambda_2, \lambda_1) {}_2\mathcal{F}_2^{(1)}(\lambda_1, \lambda_3, \lambda_4) \right] \\
 & - \mathcal{T}_{1,4}(\lambda_1) \left[\sum_{i,j=3}^{n=4} \frac{R(\lambda_i, \lambda_2)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_i, \lambda_2)_{2,1}^{2,1}} \frac{R(\lambda_i, \lambda_j)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_i, \lambda_j)_{2,1}^{2,1}} \theta_{<}(\lambda_i, \lambda_j) {}_2\mathcal{F}_2^{(2)}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_j) \phi_1(\lambda_i) \mathcal{T}_{1,1}(\lambda_2) \mathcal{T}_{1,1}(\lambda_j) \right. \\
 & + \left. \sum_{i,j=3}^{n=4} \frac{R(\lambda_i, \lambda_j)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_i, \lambda_j)_{2,1}^{2,1}} \theta_{<}(\lambda_i, \lambda_j) {}_0\mathcal{F}_1^{(2)}(\lambda_2, \lambda_i) {}_2\mathcal{F}_2^{(2)}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_j) \phi_1(\lambda_2) \mathcal{T}_{1,1}(\lambda_3) \mathcal{T}_{1,1}(\lambda_4) \right] \\
 & + \theta(\lambda_1, \lambda_2) \mathcal{T}_{1,4}(\lambda_2) \left[\sum_{i,j=3}^{n=4} \frac{R(\lambda_i, \lambda_1)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_i, \lambda_1)_{2,1}^{2,1}} \frac{R(\lambda_i, \lambda_j)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_i, \lambda_j)_{2,1}^{2,1}} \theta_{<}(\lambda_i, \lambda_j) {}_2\mathcal{F}_2^{(2)}(\lambda_2, \lambda_1, \lambda_j) \right. \\
 & \times \phi_1(\lambda_i) \mathcal{T}_{1,1}(\lambda_1) \mathcal{T}_{1,1}(\lambda_j) \\
 & + \left. \sum_{i,j=3}^{n=4} \frac{R(\lambda_i, \lambda_j)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_i, \lambda_j)_{2,1}^{2,1}} \theta_{<}(\lambda_i, \lambda_j) {}_0\mathcal{F}_1^{(2)}(\lambda_1, \lambda_i) {}_2\mathcal{F}_2^{(2)}(\lambda_2, \lambda_1, \lambda_j) \phi_1(\lambda_1) \mathcal{T}_{1,1}(\lambda_3) \mathcal{T}_{1,1}(\lambda_4) \right] \quad (D.9)
 \end{aligned}$$

De acordo com a identidade (B.43) e a definição (B.28) da função ${}_1\mathcal{H}_1^{(2)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2|1)$, os dois primeiros produtos de operadores do lado direito da Eq.(D.9) são nulos. Considerando essa informação e manipulando a Eq.(D.9), reescrevemos essa equação da forma

$$\begin{aligned}
 & \phi_4^{(2)}(\lambda_1, \dots, \lambda_4) - \theta(\lambda_1, \lambda_2) \phi_4^{(2)}(\lambda_2, \lambda_1, \lambda_3, \lambda_4) \\
 & = {}_2\mathcal{F}_2^{(2)}(\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \mathcal{T}_{1,2}(\lambda_1) \mathcal{T}_{1,4}(\lambda_2) \mathcal{T}_{1,1}(\lambda_3) \mathcal{T}_{1,1}(\lambda_4) \\
 & - \theta(\lambda_1, \lambda_2) {}_2\mathcal{F}_2^{(2)}(\lambda_1, \lambda_3, \lambda_4) \mathcal{T}_{1,2}(\lambda_2) \mathcal{T}_{1,4}(\lambda_1) \mathcal{T}_{1,1}(\lambda_3) \mathcal{T}_{1,1}(\lambda_4) \\
 & + \mathcal{T}_{1,3}(\lambda_1) \mathcal{T}_{1,3}(\lambda_2) \mathcal{T}_{1,1}(\lambda_3) \mathcal{T}_{1,1}(\lambda_4) \left[{}_1\mathcal{F}_1^{(2)}(\lambda_1, \lambda_3) \frac{R(\lambda_2, \lambda_3)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_2, \lambda_3)_{2,1}^{2,1}} \frac{R(\lambda_4, \lambda_3)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_4, \lambda_3)_{2,1}^{2,1}} \theta(\lambda_2, \lambda_3) \right. \\
 & \times \left. {}_1\mathcal{F}_1^{(2)}(\lambda_2, \lambda_4) + {}_1\mathcal{F}_1^{(2)}(\lambda_1, \lambda_4) \frac{R(\lambda_2, \lambda_4)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_2, \lambda_4)_{2,1}^{2,1}} \frac{R(\lambda_3, \lambda_4)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_3, \lambda_4)_{2,1}^{2,1}} \theta(\lambda_2, \lambda_4) \theta(\lambda_3, \lambda_4) {}_1\mathcal{F}_1^{(2)}(\lambda_2, \lambda_3) \right. \\
 & + \left. {}_1\mathcal{F}_1^{(2)}(\lambda_1, \lambda_2) {}_2\mathcal{F}_2^{(1)}(\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \theta(\lambda_1, \lambda_2) \mathcal{T}_{1,3}(\lambda_2) \mathcal{T}_{1,3}(\lambda_1) \mathcal{T}_{1,1}(\lambda_3) \mathcal{T}_{1,1}(\lambda_4) \left[{}_1\mathcal{F}_1^{(2)}(\lambda_2, \lambda_3) \frac{R(\lambda_1, \lambda_3)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_1, \lambda_3)_{2,1}^{2,1}} \frac{R(\lambda_4, \lambda_3)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_4, \lambda_3)_{2,1}^{2,1}} \right. \\
 & \times \theta(\lambda_1, \lambda_3) {}_1\mathcal{F}_1^{(2)}(\lambda_1, \lambda_4) + {}_1\mathcal{F}_1^{(2)}(\lambda_2, \lambda_4) \frac{R(\lambda_1, \lambda_4)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_1, \lambda_4)_{2,1}^{2,1}} \frac{R(\lambda_3, \lambda_4)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_3, \lambda_4)_{2,1}^{2,1}} \theta(\lambda_1, \lambda_4) \theta(\lambda_3, \lambda_4) \\
 & \times \left. {}_1\mathcal{F}_1^{(2)}(\lambda_1, \lambda_3) + {}_1\mathcal{F}_1^{(2)}(\lambda_2, \lambda_1) {}_2\mathcal{F}_2^{(1)}(\lambda_1, \lambda_3, \lambda_4) \right] \\
 & + \mathcal{T}_{1,4}(\lambda_1) \mathcal{T}_{1,2}(\lambda_2) \mathcal{T}_{1,1}(\lambda_3) \mathcal{T}_{1,1}(\lambda_4) \left[\frac{R(\lambda_2, \lambda_3)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_2, \lambda_3)_{2,1}^{2,1}} \frac{R(\lambda_2, \lambda_4)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_2, \lambda_4)_{2,1}^{2,1}} \theta(\lambda_2, \lambda_3) \theta(\lambda_2, \lambda_4) \right. \\
 & \times \left. {}_2\mathcal{F}_2^{(2)}(\lambda_1, \lambda_3, \lambda_4) - \sum_{i,j=3}^{n=4} \frac{R(\lambda_i, \lambda_j)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_i, \lambda_j)_{2,1}^{2,1}} \theta_{<}(\lambda_i, \lambda_j) {}_0\mathcal{F}_1^{(2)}(\lambda_2, \lambda_i) {}_2\mathcal{F}_2^{(2)}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_j) \right] \\
 & - \theta(\lambda_1, \lambda_2) \mathcal{T}_{1,4}(\lambda_2) \mathcal{T}_{1,2}(\lambda_1) \mathcal{T}_{1,1}(\lambda_3) \mathcal{T}_{1,1}(\lambda_4) \left[\frac{R(\lambda_1, \lambda_3)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_1, \lambda_3)_{2,1}^{2,1}} \frac{R(\lambda_1, \lambda_4)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_1, \lambda_4)_{2,1}^{2,1}} \theta(\lambda_1, \lambda_3) \theta(\lambda_1, \lambda_4) \right. \\
 & \times \left. {}_2\mathcal{F}_2^{(2)}(\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) - \sum_{i,j=3}^{n=4} \frac{R(\lambda_i, \lambda_j)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_i, \lambda_j)_{2,1}^{2,1}} \theta_{<}(\lambda_i, \lambda_j) {}_0\mathcal{F}_1^{(2)}(\lambda_1, \lambda_i) {}_2\mathcal{F}_2^{(2)}(\lambda_2, \lambda_1, \lambda_j) \right], \quad (D.10)
 \end{aligned}$$

onde $\phi_4^{(2)}(\lambda_1, \dots, \lambda_4)$ é definido por

$$\begin{aligned}
 \phi_4^{(2)}(\lambda_1, \dots, \lambda_4) &= \phi_4^1(\lambda_1, \dots, \lambda_4) + \mathcal{T}_{1,4}(\lambda_1) \left[\frac{R(\lambda_2, \lambda_3)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_2, \lambda_3)_{2,1}^{2,1}} \frac{R(\lambda_2, \lambda_4)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_2, \lambda_4)_{2,1}^{2,1}} \theta(\lambda_2, \lambda_3) \theta(\lambda_2, \lambda_4) \right. \\
 & \times {}_2\mathcal{F}_2^{(2)}(\lambda_1, \lambda_3, \lambda_4) \phi_1(\lambda_2) \mathcal{T}_{1,1}(\lambda_3) \mathcal{T}_{1,1}(\lambda_4) + \sum_{i,j=3}^{n=4} \frac{R(\lambda_i, \lambda_2)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_i, \lambda_2)_{2,1}^{2,1}} \frac{R(\lambda_i, \lambda_j)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_i, \lambda_j)_{2,1}^{2,1}} \theta_{<}(\lambda_i, \lambda_j) \\
 & \times \left. {}_2\mathcal{F}_2^{(2)}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_j) \phi_1(\lambda_i) \mathcal{T}_{1,1}(\lambda_2) \mathcal{T}_{1,1}(\lambda_j) \right]. \quad (D.11)
 \end{aligned}$$

Novamente devemos cancelar os termos que contém o operador $\mathcal{T}_{1,2}(\lambda_1)$ ou $\mathcal{T}_{1,2}(\lambda_2)$ na Eq.(D.10). Para executarmos esse procedimento utilizamos a Eq.(54) com $b_1 = 4$ e $d_1 = 0$, que é igual a expressão abaixo

$$\begin{aligned}
 \mathcal{T}_{1,2}(\mu) \mathcal{T}_{1,4}(\lambda) &= \frac{R(\lambda, \mu)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda, \mu)_{4,1}^{4,1}} \frac{1}{D_2^{(4,0)}(\lambda, \mu)} \mathcal{T}_{1,4}(\lambda) \mathcal{T}_{1,2}(\mu) \\
 & - \frac{D_2^{(4,1)}(\lambda, \mu)}{D_2^{(4,0)}(\lambda, \mu)} \mathcal{T}_{1,3}(\mu) \mathcal{T}_{1,3}(\lambda) - \frac{D_2^{(4,2)}(\lambda, \mu)}{D_2^{(4,0)}(\lambda, \mu)} \mathcal{T}_{1,4}(\mu) \mathcal{T}_{1,2}(\lambda) - \frac{D_2^{(4,3)}(\lambda, \mu)}{D_2^{(4,0)}(\lambda, \mu)} \mathcal{T}_{1,5}(\mu) \mathcal{T}_{1,1}(\lambda) \\
 & - \frac{R(\lambda, \mu)_{5,1}^{4,2}}{R(\lambda, \mu)_{5,1}^{5,1}} \frac{R(\lambda, \mu)_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda, \mu)_{4,1}^{4,1}} \frac{1}{D_2^{(4,0)}(\lambda, \mu)} \mathcal{T}_{1,5}(\lambda) \mathcal{T}_{1,1}(\mu). \quad (D.12)
 \end{aligned}$$

Por fim, eliminando os termos $\mathcal{T}_{1,2}(\lambda_1)\mathcal{T}_{1,4}(\lambda_2)\mathcal{T}_{1,1}(\lambda_3)\mathcal{T}_{1,1}(\lambda_4)$ e $\mathcal{T}_{1,2}(\lambda_2)\mathcal{T}_{1,4}(\lambda_1)\mathcal{T}_{1,1}(\lambda_3)\mathcal{T}_{1,1}(\lambda_4)$ da Eq.(D.10) através da relação de comutação (D.12) e então simplificando o resultado obtido através das identidades relacionadas ao estado de duas e três partículas encontramos o seguinte resultado

$$\begin{aligned} & \phi_4^{(2)}(\lambda_1, \dots, \lambda_4) - \theta(\lambda_1, \lambda_2)\phi_4^{(2)}(\lambda_2, \lambda_1, \lambda_3, \lambda_4) \\ &= -{}_3\mathcal{F}_3^{(2)}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)\mathcal{T}_{1,5}(\lambda_1)\mathcal{T}_{1,1}(\lambda_2)\mathcal{T}_{1,1}(\lambda_3)\mathcal{T}_{1,1}(\lambda_4) \\ &+ \theta(\lambda_1, \lambda_2){}_3\mathcal{F}_3^{(2)}(\lambda_2, \lambda_1, \lambda_3, \lambda_4)\mathcal{T}_{1,5}(\lambda_2)\mathcal{T}_{1,1}(\lambda_1)\mathcal{T}_{1,1}(\lambda_3)\mathcal{T}_{1,1}(\lambda_4), \end{aligned} \quad (\text{D.13})$$

onde a função ${}_3\mathcal{F}_3^{(2)}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ é definida pela Eq.(251).

Conseqüentemente, o ansatz simétrico associado ao estado de quatro partículas é

$$\begin{aligned} \phi_4(\lambda_1, \dots, \lambda_4) &= \mathcal{T}_{1,2}(\lambda_1)\phi_3(\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \\ &+ \mathcal{T}_{1,3}(\lambda_1) \sum_{\substack{2 \leq j_2 \leq 4 \\ 2 \leq j_3 < j_4 \leq 4}}^* {}_1\mathcal{F}_1^{(2)}(\lambda_1, \lambda_{j_2}) \frac{R(\lambda_{j_3}, \lambda_{j_2})_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_{j_3}, \lambda_{j_2})_{2,1}^{2,1}} \frac{R(\lambda_{j_4}, \lambda_{j_2})_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_{j_3}, \lambda_{j_2})_{2,1}^{2,1}} \\ &\times \theta_{<}(\lambda_{j_3}, \lambda_{j_2})\theta_{<}(\lambda_{j_4}, \lambda_{j_2})\phi_2(\lambda_{j_3}, \lambda_{j_4})\mathcal{T}_{1,1}(\lambda_{j_2}) \\ &+ \mathcal{T}_{1,4}(\lambda_1) \sum_{\substack{2 \leq j_2 < j_3 \leq 4 \\ 2 \leq j_4 \leq 4}}^* \frac{R(\lambda_{j_4}, \lambda_{j_2})_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_{j_4}, \lambda_{j_2})_{2,1}^{2,1}} \frac{R(\lambda_{j_3}, \lambda_{j_2})_{1,1}^{1,1}}{R(\lambda_{j_4}, \lambda_{j_2})_{2,1}^{2,1}} \theta_{<}(\lambda_{j_4}, \lambda_{j_2})\theta_{<}(\lambda_{j_4}, \lambda_{j_3}) \\ &\times {}_2\mathcal{F}_2^{(2)}(\lambda_1, \lambda_{j_2}, \lambda_{j_3})\phi_1(\lambda_2)\mathcal{T}_{1,1}(\lambda_{j_2})\mathcal{T}_{1,1}(\lambda_{j_3}) \\ &+ \mathcal{T}_{1,5}(\lambda_1)\mathcal{T}_{1,1}(\lambda_2)\mathcal{T}_{1,1}(\lambda_3)\mathcal{T}_{1,1}(\lambda_4){}_3\mathcal{F}_3^{(2)}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4), \end{aligned} \quad (\text{D.14})$$

o qual pela construção acima é único. Portanto, caso as variáveis de Bethe $\lambda_1, \dots, \lambda_4$ satisfaçam a respectiva equação do ansatz de Bethe, o autovalor equivalente é determinado pela expressão

$$|\Phi_4\rangle = \phi_4(\lambda_1, \dots, \lambda_4) |0\rangle. \quad (\text{D.15})$$

Referências

- [1] H. A. Bethe, *Z.Phys.* 71 (1931) 205.
- [2] H. A. Kramers e G.H. Wannier, *Phys. Rev.* 60 (1941) 257.
- [3] L. Onsager, *Phys. Rev.* 65 (1944) 117.
- [4] R. J. Baxter, “Exactly Solved Models in Statistical Mechanics”, Academic Press, New York, 1982.
- [5] J. McGuire, *J.Math. Phys.* 5 (1964) 622.
- [6] M. Gaudin, *Phys. Lett. A* 24 (1967) 55.
- [7] C. N. Yang, *Phys. Rev. Lett.* 19 (1967) 1312.
- [8] L. A. Takhtajan and L. D. Faddeev, *Russ. Math. Sur.*, 34(1979) 11.
- [9] E. K. Sklyanin, *J.Phys.A:Math.Gen.* 21 (1988) 2375.
- [10] H. Fan, *Nuc. Phys.B* 488 (1997) 409.
- [11] C. S. Melo, G. A. P. Ribeiro and M. J. Martins, *Nucl. Phys. B* 711 (2005) 565-603.
- [12] V. E. Korepin, G. Izergin and N. M. Bogoliubov, “Quantum Inverse Scattering Method, Correlation Functions and Algebraic Bethe ansatz”, Cambridge University Press, 1992, Cambridge.
- [13] E.K. Sklyanin, L.A. Takhtadzhn and L.D. Faddeev, *Theor. Math. Fiz.* 40 (1979) 194; L.A. Takhtajan and L.D. Faddeev, *Russ Math Sur.* 34 (1979) 11
- [14] H.B. Thacker, *Rev. Mod. Phys.* 53 (1981) 253
- [15] P.P. Kulish, N.Y. Reshetikhin and E.K. Sklyanin, *Lett. Math. Phys.* 5 (1981) 393
- [16] L.D. Faddeev, N.Y. Reshetikhin and L.A. Takhtadzhn, *Algebra Anal.* 1 (1987) 178; V.G. Drinfeld, *J. Soviet. Math.* 41 (1988) 898
- [17] M. Jimbo, *Lett. Math. Phys.* 10 (1985) 63

-
- [18] L.A. Takhtajan, “Introduction to algebraic Bethe ansatz”, Lecture Notes in Physics, Vol. 242, 1985, Springer-Verlag, p.158; L.D. Faddeev, “How algebraic Bethe ansatz works for integrable model”, Les Houches school on Symétries Quantiques, 1995, North-Holland, p.149
- [19] P.P. Kulish and N. Yu. Reshetikhin, *Sov. Phys. JETP* 54 (1981) 108; *J. Phys. A: Math. gen.* 16 (1983) L 591; O. Babelon, H. J. de Vega and C.M. Viallet, *Nucl. Phys. B* 200 (1982) 266
- [20] V.O. Tarasov, *Teor.Math.Phys.* 76 (1988) 793
- [21] M.J. Martins, *Phys. Rev. E* 59 (1999) 7220
- [22] P.P. Kulish, *J. Sov. Math* 35 (1986) 26 48
- [23] F.H.L. Essler and V.E. Korepin, *Phys. Rev. B* 46 (1992) 9147; A. Foerster and M. Karowski, *Nucl. Phys. B* 396 (1993) 611; F.H.L. Essler, V.E. Korepin and K. Schoutens, *Int. J. Mod. Phys. B* 8 (1994) 3205; F. Gohmann, *Nucl. Phys. B* 620 (2002) 501
- [24] M.J. Martins and P.B. Ramos, *Nucl. Phys. B* 500 (1997) 579; W. Galleas and M.J. Martins, *Nucl. Phys. B* 699 (2004) 455
- [25] N. Beisert, *J. Stat. Mech.* 0701 (2007) P017.
- [26] M.J. Martins and C.S. Melo, *Nucl. Phys. B* 785 (2007) 246-262.
- [27] B. Sutherland, C.N. Yang and C.P. Yang, *Phys.Rev.Lett.* 19 (1967) 558
- [28] C.S. Melo and M.J. Martins, *J.Phys.A:Math.Theor.*40 (2007) F127
- [29] C.S. Melo and M.J. Martins, *math-ph:0806.2404v1*
- [30] T.Deguchi and Y.Akutsu, *J.Phys.Soc.Jpn.* 60 (1992) 4051; *Phys.Rev.Lett.* 67 (1991) 777.
- [31] C. Gomez and G. Sierra, *Phys. Lett. B* 285 (1992) 126; *Nucl. Phys. B* 373 (1992) 761.
- [32] A Berkovich, C. Gomez and G. Sierra, *Int. J. Mod. Phys. B* 6 (1992) 1939.
- [33] V.F.R.Jones, *Commun.Math.Phys.* 125 (1989) 459; *Int.J.Mod.Phys. B* 4 (1990) 98.

-
- [34] H.M. Babujian and A.M.Tsvelick, *Nucl.Phys.B* 265 (1986) 24; A.N.Kirillov and N.Yu.Reshetikhin, *J.Phys.A* 20 (1987) 1565
- [35] M.Couture, *J.Phys.A: Math. Gen.* 24 (1991) 2103; M. Couture, H.C. Lee and N.C.Schmeing, in *Proceedings of “Physics, Geometry and Topology”, NATO ASI V 238 (1989) 573*
- [36] M.L.Ge, Y.S. Wu and K.Xue, *Int.J.Mod.Phys. A* 6 (1991) 3735.
- [37] H.M. Babujian, *J. Phys. A: Math. Gen.* 26 (1993) 6981.
- [38] H.M. Babujian and R. Flume, *Mod. Phys. Lett. A* 9 (1994) 2029.
- [39] B.U.Felderhof, *Physica* 66 (1973) 279.
- [40] C.S. Melo and M.J. Martins, *Algebraic Bethe ansatz for $U(1)$ Invariant Integrable Models: Compact and non-Compact Applications*, in preparation.
- [41] M.J. Martins and P.B. Ramos, *Nucl. Phys. B* 522 (1998) 413
- [42] A. Kuniba, *J.Phys.A:Math.Gen.* 23 (1990) 1349; A. Lima-Santos and M.J. Martins, *Nucl.Phys.B* 760 (2007) 184
- [43] N. Kitanine, J.M. Maillet and V. Terras, *Nucl. Phys. B* 567 (2000) 554; N. Kitanine, J.M. Maillet, N.A. Slavnov and V. Terras, *Int. J. Mod. Phys. A* 19 (2004) 248

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)