



Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira - Departamento de Engenharia Mecânica

**unesp**

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA  
"Júlio de Mesquita Filho"

**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA**

**“IDENTIFICAÇÃO DE PARÂMETROS MODAIS  
UTILIZANDO APENAS AS RESPOSTAS DA ESTRUTURA”**

**-Identificação Estocástica de Subespaço e Decomposição no Domínio da Freqüência-**

**THIAGO CAETANO DE FREITAS**

**Orientador: Prof. Dr. João Antônio Pereira**

**Dissertação** apresentada à Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, como parte dos requisitos exigidos para obtenção do título de **Mestre em Engenharia Mecânica**

Ilha Solteira – SP

Julho/2008

Avenida Brasil Centro, 56 - Caixa Postal 31 - CEP 15385-000 - Ilha Solteira -SP BRASIL  
Fone: 18 3743-1000 Fax: +55 18 3742-2735

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

# RESUMO

Este trabalho apresenta o estudo, a implementação e a aplicação de duas técnicas de identificação de parâmetros modais utilizando apenas as respostas da estrutura, denominadas: Identificação Estocástica de Subespaço (IES) e Decomposição no Domínio da Freqüência (DDF). A IES é baseada na Decomposição em Valores Singulares (DVS) da projeção ortogonal do espaço das linhas das saídas futuras no espaço das linhas das saídas passadas. Uma vez realizada a DVS da projeção ortogonal é possível obter o modelo de espaço de estado da estrutura e os parâmetros modais são estimados diretamente através da decomposição em autovalores e autovetores da matriz dinâmica. A DDF é baseada na DVS da matriz de densidade espectral de potência de saída nas linhas de freqüências correspondentes a região em torno de um modo. O primeiro vetor singular obtido para cada linha de freqüência contém as respectivas informações daquele modo e os correspondentes valores singulares levam a função densidade espectral de um sistema equivalente de um grau de liberdade (1GL), permitindo a obtenção dos parâmetros do respectivo modo. Os métodos são avaliados utilizando dados simulados e experimentais. Os resultados mostram que as técnicas implementadas são capazes de estimar os parâmetros modais de estruturas utilizando apenas as respostas.

**Palavras Chave:** Análise Modal Experimental, Identificação Estocástica de subespaço, Decomposição no Domínio da Freqüência, Decomposição em Valores Singulares.

# SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO .....	1
1.1	Objetivos do Trabalho .....	5
1.2	Organização do Trabalho .....	6
2	LEVANTAMENTO BIBLIOGRÁFICO .....	7
2.1	Análise Modal Baseada Apenas nas Respostas .....	8
2.2	Métodos de Identificação dos Parâmetros Modais no Domínio do Tempo .....	10
2.3	Métodos de Identificação dos Parâmetros Modais no Domínio da Frequência .....	12
3	FERRAMENTAS GEOMÉTRICAS E NUMÉRICAS .....	15
3.1	Espaço Vetorial, Subespaço e Base .....	15
3.1.1	Espaço Vetorial .....	16
3.1.2	Subespaço .....	17
3.1.3	Base .....	18
3.2	Projeção Ortogonal .....	19
3.3	Decomposição QR .....	21
3.3.1	Expressões para as operações geométricas .....	23
3.4	Decomposição em Valores Singulares .....	26
3.4.1	O posto de uma matriz .....	26
3.4.2	Decomposição em valores singulares .....	27
3.5	Ângulos e Direções Principais .....	30
3.6	Ferramentas Geométricas no Contexto Estatístico .....	30
4	IDENTIFICAÇÃO DE PARÂMETROS MODAIS BASEADOS APENAS NAS RESPOSTAS ...	35
4.1	Identificação Estocástica de Subespaço – IES .....	35
4.1.1	Modelo de Espaço de Estado .....	36
4.1.2	Propriedades dos Sistemas Estocásticos .....	41
4.1.3	Matrizes de Hankel, Observabilidade e Controlabilidade .....	43
4.1.4	Estados do Filtro de Kalman .....	47
4.1.5	Teorema Principal da IES .....	49
4.1.6	Variantes dos Algoritmos de Identificação .....	52
4.1.7	Cálculo do Sistema de Matrizes .....	54
4.1.8	Identificação dos Parâmetros Modais .....	57
4.1.9	Diagrama de Estabilização .....	58
4.2	Decomposição no Domínio da Frequência .....	60
4.2.1	Identificação dos Parâmetros Modais .....	63

4.3 Criação da Interface Gráfica .....	66
5 EXEMPLOS SIMULADOS .....	71
5.1 Simulação de Uma Estrutura do Tipo Frame .....	71
5.2 Resultados da Identificação Estocástica de Subespaço .....	73
5.3 Resultados da Decomposição no Domínio da Frequência .....	77
5.4 Conclusões do Capítulo.....	81
6 RESULTADOS EXPERIMENTAIS .....	82
6.1 Estrutura Frame .....	83
6.1.1 Modelo Experimental .....	83
6.1.2 Modelo Analítico.....	88
6.1.3 Testes Experimentais.....	89
6.1.4 Análise Modal Utilizando a IES.....	91
6.1.5 Análise Modal Utilizando a DDF.....	95
6.1.6 Comparação entre IES e DDF.....	100
6.2 Avaliação da IES e DDF com dados do software ARTeMIS Extractor®.....	102
6.2.1 Análise Modal do HCT Utilizando a IES.....	105
6.2.1 Análise Modal do HCT Utilizando a DDF.....	107
6.3 Conclusões do Capítulo.....	108
7 CONCLUSÕES.....	110
REFERÊNCIAS .....	112
APÊNDICE .....	119
A.1 Demonstração do Teorema Principal da IES.....	120

# 1 INTRODUÇÃO

Atualmente, a crescente competitividade do mercado tem gerado a necessidade do desenvolvimento de produtos cada vez mais elaborados, com maiores capacidades de produção, desempenho e confiabilidade. A figura 1.1, mostra a vista frontal da maior aeronave de passageiros já construída, o Airbus A-380. Esta aeronave, é um ótimo exemplo de como o mercado tem se desenvolvido, propiciando aos consumidores produtos de alta tecnologia e performance.



Figura 1.1 - Airbus A-380

Fonte: <http://viagem.hsw.uol.com.br/airbus-a3804.htm>, acesso em maio de 2008.

O desenvolvimento de produtos de alta qualidade envolve o atendimento de uma série de especificações e normalizações que estabelecem as condições de operação ou utilização destes produtos. Neste cenário, cresce cada vez mais, a necessidade de serem utilizadas técnicas de modelagem mais robustas, envolvendo a análise de um maior número de detalhes do sistema, buscando a definição de modelos capazes de representar adequadamente, não só o comportamento estático do sistema físico, mas também o seu comportamento dinâmico estrutural.

Neste contexto, o interesse pelo estudo e desenvolvimento de modelos e técnicas de identificação de parâmetros modais mais eficientes e que possam ser utilizadas para a análise de desempenho e integridade de sistemas estruturais, principalmente quando se trata de questões ligadas à segurança, conforto e ao meio ambiente tem sido um desafio.

Uma das principais técnicas utilizadas para o estudo do comportamento dinâmico de sistemas estruturais é a Análise Modal. Esta técnica permite estudar o comportamento dinâmico estrutural do sistema a partir de um modelo matemático adequado, envolvendo uma formulação matricial, que permite estabelecer uma relação entre entradas (forças de excitação da estrutura) e saídas (respostas causadas pelas respectivas forças de excitação). Neste caso, os parâmetros de vibração do modelo podem ser obtidos, tanto através da abordagem analítica (Análise Modal Teórica) quanto da experimental (Análise Modal Experimental).

Na Análise Modal Teórica, o procedimento consiste inicialmente na formulação de um modelo matemático descrito através das matrizes de massa e rigidez da estrutura, obtidas, por exemplo, utilizando o método de Elementos Finitos (ZIENKIEWICZ, 1985). Em seguida, a solução do modelo matricial leva a formulação de um problema de autovalor e autovetor, cuja solução, fornece as características dinâmicas da estrutura, ou seja, os modos normais de vibração e suas respectivas frequências naturais (MEIROVICH, 1977). Na Análise Modal Experimental, a relação entre a entrada e a saída é calculada a partir da excitação e das respostas capturadas respectivamente nos pontos de excitação e de medição previamente selecionados (EWINS, 1984). Neste caso, obtém-se um conjunto de funções complexas, em que cada função representa a função de transferência  $H_{ij}(s)$  entre a força de excitação aplicada no ponto  $j$  e a resposta medida no ponto  $i$  da estrutura. As funções de transferências podem ser avaliadas no domínio da frequência, levando à definição das chamadas Funções de Resposta em Frequência (FRF(s)) ou suas equivalentes no domínio do tempo, as chamadas Funções de Resposta ao Impulso (FRI(s)). A identificação dos parâmetros modais do sistema pode ser obtida tanto utilizando técnicas de identificação no domínio da frequência como técnicas de identificação no domínio do tempo.

A Análise Modal Experimental neste caso, envolve o conhecimento (medição) tanto das entradas como das saídas do sistema, as quais são usadas para a construção das respectivas FRF(s) do modelo. Medir as forças de entrada em um sistema real nem sempre é possível e geralmente os testes de análise modal são realizados em laboratórios, em condições de ensaio bem controladas, em que a excitação possa ser medida. Neste caso, a excitação da estrutura é feita artificialmente, utilizando uma excitação eletromagnética (*shaker*) ou um martelo instrumentado, Fig. (1.2).



(a) – Shaker

(b) - Martelo

Figura 1.2 – Testes experimentais em condições controladas.

Fonte: (a) – (BORGES, 2006) (b) – (FREITAS, 2006)

Entretanto, o comportamento vibro - acústico de uma estrutura em condições de operação, por exemplo, um veículo em movimento, Fig. 1.3, pode apresentar um comportamento diferente da situação de um teste de laboratório, devido a efeitos de pré-tensão, suspensão, condições ambientais e outros.



Figura 1.3 – Mini-Baja – Equipe Kpeta – DEM/FEIS em uma pista de competição.

Fonte: (BORGES, 2006)

Neste contexto, o estudo do comportamento dinâmico estrutural de um sistema em operação parece mais representativo do que em testes realizados em laboratório e a identificação dos parâmetros modais do modelo, exceto devido às limitações técnicas dos algoritmos de identificação, é mais realística.

As técnicas de Análise Modal baseadas nas condições de operação do modelo fazem parte da Análise Modal Operacional e atualmente vêm se consolidando nesta área, visto que elas permitem a obtenção dos parâmetros modais a partir das próprias condições de operação

da estrutura e a identificação dos parâmetros modais neste caso é baseada apenas nas respostas do modelo.

Dessa forma, existe uma forte demanda para que os métodos de identificação modal não sejam usados somente para dados obtidos sob condições de laboratório bem controladas, mas também para a resposta dinâmica de estruturas reais de engenharia como aeronaves, prédios, pontes, automóveis e torres. A figura 1.4, vista da ponte Vasco da Gama, localizada em Lisboa, Portugal, mostra um exemplo desse tipo de aplicação. Nessa gigantesca estrutura Cunha e Caetano (2004) realizaram vários ensaios de vibração em condições naturais de operação (vento e tráfego), a fim de se determinar seus parâmetros modais.



Figura 1.4 - Ponte Vasco da Gama, Lisboa, Portugal.

Fonte: (CUNHA; CAETANO, 2004).

As vantagens encontradas na Análise Modal baseada apenas nas respostas é que esta pode utilizar dados obtidos em condições reais de carregamento, o que difere significativamente das condições de um teste de laboratório, proporcionando uma avaliação do comportamento do sistema sob influência das condições ambientais. Outro aspecto importante, é o fato de que, em muitos casos, produzir uma excitação forçada com equipamentos padrões é muito difícil ou mesmo impossível.

Na formulação da Análise Modal baseada apenas nas repostas assume-se que as forças que atuam no sistema sejam do tipo ruído branco gaussiano. Este fato leva a uma rediscussão do problema, que não é mais determinístico. Portanto, os dados passam a ser tratados estatisticamente, em termos de médias, variâncias, desvio padrão e etc. Ferramentas geométricas e estatísticas ganham importância nesta análise, e as funções de correlação são fundamentais para análise de sistemas utilizando somente a resposta.

---

No Brasil, nota-se que a Análise Modal baseada apenas nas respostas é ainda incipiente, trabalhos como Brasiliano (2005), Borges et al (2005), Nunes Jr. et al (2005), Cardoso (2006) e Freitas e Pereira (2007) mostram algumas aplicações desenvolvidas neste sentido. Acredita-se que esta é uma área de grande interesse para o país e que apresenta um potencial de aplicação muito vasto tanto em estruturas mecânicas como em estruturas de engenharia civil (pontes, viadutos, etc). A realização deste trabalho de dissertação busca contribuir com o desenvolvimento e consolidação das técnicas de Análise Modal baseada apenas nas respostas, visando ampliar sua utilização no país.

O trabalho discute a formulação, a implementação e a aplicação dos métodos de Identificação Estocástica de Subespaços - IES (OVERSCHEE; MOOR, 1996) e Decomposição no Domínio da Frequência - DDF (BRINCKER, 2000) para a identificação dos parâmetros modais utilizando apenas as respostas da estrutura. Adicionalmente, procura realizar uma avaliação crítica entre os resultados e potencialidades das duas técnicas para aplicações práticas. Numa primeira etapa foram utilizados exemplos simulados obtidos pela análise de elementos finitos, visando confrontar os resultados com dados de referência, que permitem uma avaliação da existência de erros ou não nos dados estimados e posteriormente, é estudada a eficiência dos métodos utilizando dados experimentais de estruturas reais.

## **1.1 Objetivos do Trabalho**

Estudar os conceitos básicos da análise modal baseada apenas nas respostas e discutir os aspectos numéricos e computacionais da Identificação Estocástica de Subespaço e da Decomposição no Domínio da Frequência, bem como proceder à comparação e uma avaliação crítica entre os resultados e potencialidades das técnicas para aplicações práticas.

## 1.2 Organização do Trabalho

A dissertação é organizada em 7 capítulos de forma a apresentar uma seqüência lógica dos tópicos necessários para o desenvolvimento e entendimento do trabalho.

O primeiro capítulo apresenta uma introdução do assunto discutido neste trabalho, mostrando sua importância e o posicionando num contexto atual, além dos objetivos e de como a dissertação está organizada.

O capítulo 2 apresenta o levantamento bibliográfico deste trabalho, mostrando como as técnicas de identificação de parâmetros modais vêm se desenvolvendo ao longo dos anos.

No capítulo 3 é apresentado as principais ferramentas numéricas e geométricas necessárias para o entendimento e implementação das técnicas baseadas apenas nas respostas da estrutura.

Os conceitos básicos e os fundamentos dos métodos de identificação implementados são apresentados no capítulo 4.

Os resultados dos exemplos simulados são mostrados no capítulo 5.

No sexto capítulo são apresentados os procedimentos e resultados dos testes experimentais realizados, bem como a comparação entre as duas técnicas, verificando suas potencialidades e aplicações.

Por fim, o capítulo 7 traz as conclusões e sugestões para trabalhos futuros.

---

## 2 LEVANTAMENTO BIBLIOGRÁFICO

O estudo do comportamento dinâmico estrutural vem sendo ao longo das últimas décadas um grande desafio para a comunidade científica. A grande demanda do mercado por produtos de alta qualidade e performance têm exigido cada vez mais a análise de um maior número de detalhes do produto em questão.

Neste contexto, a obtenção de um modelo matemático confiável e que seja capaz de reproduzir fielmente as características dinâmicas dos vários componentes presentes na estrutura é geralmente um problema difícil de resolver quando se utiliza apenas ferramentas analíticas e numéricas, e portanto, testes experimentais também são indicados para se obter um bom modelo, que represente adequadamente o verdadeiro comportamento dinâmico de uma estrutura. Modelos experimentais são baseados nas medidas realizadas diretamente na estrutura, de forma que os resultados obtidos, a menos dos erros de medição, levam a um modelo mais representativo.

A Análise Modal teórica teve um grande avanço nas últimas décadas. No passado recente, a grande preocupação dos engenheiros estruturais foi o desenvolvimento e aplicação de métodos numéricos mais eficientes para a análise estática e dinâmica de estruturas. Neste contexto, o rápido desenvolvimento do método dos elementos finitos (BATHE; WILSON, 1976, ZIENKIEWICZ, 1985) e o grande progresso tecnológico no campo dos microcomputadores permitiram aos engenheiros desenvolver pacotes de softwares, com os quais era possível simular o comportamento estrutural dos modelos.

Entretanto, o desenvolvimento e construção de estruturas civis e mecânicas mais complexas e ambiciosas, como barragens, pontes suspensas, edifícios, aeronaves, navios e outras estruturas especiais, fez com que os engenheiros estruturais sentissem a necessidade de desenvolver também ferramentas experimentais que pudessem ser capazes de estimar com precisão as mais relevantes propriedades estruturais, provendo dados confiáveis para a calibração, ajuste e validação dos modelos numéricos no estágio de desenvolvimento.

A Análise Modal Experimental começou a se tornar popular na década de 70, devido ao grande avanço da informática e ao desenvolvimento de algoritmos que realizavam eficientemente o cálculo computacional das séries de Fourier (COOLEY; TUKEY, 1965).

---

Desde então, a Análise Modal, tem sido muito utilizada em várias aplicações como acoplamento de estruturas, ajuste de modelos, detecção de falhas estruturais, análise vibro - acústica e outros.

A obtenção das características dinâmicas de uma estrutura geralmente é feita a partir de técnicas de identificação de sistemas, utilizando métodos que operam, tanto no domínio da frequência, quanto no domínio do tempo. A identificação de sistemas pode então ser definida como o processo de desenvolver ou melhorar uma representação matemática de um sistema físico usando dados experimentais.

De uma maneira geral nas últimas décadas, a Análise Modal apresentou uma grande evolução e tem se consolidado como uma importante ferramenta para o estudo dos problemas de dinâmica estrutural. Embora ainda existam pesquisas focalizando esta área, ela atingiu um status de maturidade tanto em relação aos testes experimentais quanto em relação à modelagem analítica. Existem vários textos que fornecem uma completa descrição dos métodos de estimação dos parâmetros modais utilizando a relação entre a entrada e a saída, tanto no domínio da frequência como no tempo (EWINS; GRIFFIN, 1981, ALLEMANG, 1982, ROST et al, 1985, LEURIDAN et al, 1990, SNOEYS et al, 1987, EWINS, 1984, HEYLEN et al, 1995, MAIA et al, 1997, ALLEMANG, 1999). Esses autores colocam, de uma forma clara e sistemática, a maioria dos conhecimentos disponíveis nesta área associados às suas respectivas experiências. Maia e Silva (2001) apresentam um panorama histórico e geral do desenvolvimento ao longo do tempo das técnicas de identificação da Análise Modal.

Já as técnicas de Análise Modal baseadas apenas nas respostas são mais recentes e ainda possuem um vasto potencial a ser explorado como mostra a próxima seção.

## **2.1 Análise Modal Baseada Apenas nas Respostas**

A Análise Modal baseada apenas nas respostas vem despertando um crescente interesse na comunidade científica na busca e obtenção de uma base sólida para a identificação dos parâmetros modais utilizando apenas as respostas. Isso pode ser verificado através do crescente número de publicações recentes nesta área.

---

A área de engenharia civil contribuiu com grande quantidade de trabalhos relativos à aplicação das técnicas de identificação de parâmetros modais utilizando apenas as respostas da estrutura. Uma vez que, ensaios experimentais controlados em estruturas civis são freqüentemente impraticáveis e de custo muito elevado e em contrapartida a excitação ambiente como vento, tráfego ou mesmo pequenos tremores, ao contrário, está disponível livremente. Cunha e Caetano (2006) fazem um breve levantamento da evolução da Análise Modal Experimental, partindo dos métodos baseados nas entradas e saídas até os métodos da Análise Modal baseada apenas nas respostas.

Uma vasta gama de técnicas e aplicações voltada para a identificação de sistemas a partir das condições de operação têm sido apresentadas, Moller e Gate (2004) discutem a identificação dos parâmetros modais do sistema de transmissão de um automóvel em funcionamento. Yang et al (2005) realizam a análise operacional de uma plataforma offshore excitada pela ação de ondas e do vento. Jacobsen et al (2006) mostram uma técnica de identificação no domínio da frequência robusta a presença de componentes harmônicos. Magalhães et al (2006) realizam a identificação dos parâmetros modais da cobertura de um estádio de futebol durante a realização de uma partida. Andersen et al (2007) realizam a avaliação de estruturas a partir de excitações sísmicas.

No Brasil, o estudo e a aplicação de métodos de identificação de parâmetros modais baseados apenas na resposta são incipientes, isso pode ser observado pelo pequeno número de trabalhos focando esta área. Alguns trabalhos como Brasiliano (2005), Rebolho (2006) e Cardoso (2006) mostram algumas aplicações desenvolvidas mais recentemente nesta área. Brasiliano (2005) estuda a avaliação das condições estruturais de construções civis através da Análise Modal Operacional. No trabalho de Rebolho (2006) é proposta a identificação modal de estruturas em tempo real e no trabalho de Cardoso (2006) é discutido a aplicação da transformada *wavelet* na identificação modal operacional.

Nesta linha de atuação, o Departamento de Engenharia Mecânica da Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira tem tido uma atuação bastante efetiva, ao longo da última década, tendo conseguido estruturar um grupo de pesquisa com uma considerável experiência no campo da Análise Modal Experimental, incluindo o desenvolvimento e apresentação de várias dissertações bem como a publicação de vários artigos técnicos. Mais recentemente, o grupo coordenado pelo orientador deste trabalho, tem voltado suas atividades para o campo da Análise Modal baseada apenas nas respostas, incluindo os trabalhos de Borges (2006) que

---

realiza o estudo e implementação de uma metodologia utilizando uma técnica de identificação baseada apenas na resposta, denominada, Decomposição no Domínio da Frequência e Nunes Jr. (2006) faz um estudo do método de Identificação Estocástica de Subespaço, onde é mostrado que uma estrutura vibrando excitada por forças não conhecidas pode ser modelada como um modelo de espaço de estado estocástico.

A seguir serão apresentados alguns dos métodos mais relevantes de identificação de parâmetros modais baseados apenas na resposta tanto no domínio do tempo como no domínio da frequência

## **2.2 Métodos de Identificação dos Parâmetros Modais no Domínio do Tempo**

Nas técnicas de identificação modal baseadas apenas nas respostas o trabalho de Clarkson e Mercer (1965) merece um destaque especial. Neste trabalho os autores estudaram a aplicação das funções de correlação cruzada entre a excitação (ruído branco) e a resposta para determinação das características das FRF(s) de uma estrutura ligeiramente amortecida. Embora assuma o conhecimento das forças de excitação, o procedimento merece destaque pela contribuição na disseminação da idéia da utilização das funções de correlação em lugar das tradicionais funções de resposta ao impulso, quando a excitação não pode ser medida. Segundo os autores, quando um sistema é excitado por uma força que tem densidade espectral constante, a correlação cruzada da excitação e da resposta é conhecida por fornecer o conjunto de FRI(s). Esse fato possibilita a utilização dessas funções de correlação nos algoritmos de identificação no domínio do tempo, originalmente formulados para a resposta ao impulso.

Conforme discutido em James et al (1995), o procedimento proposto por Clarkson e Mercer (1965), aliado às técnicas de extração de parâmetros modais no domínio do tempo tais como o Método de Ibrahim - ITD (IBRAHIM; MIKULCIK, 1977), Método Exponencial Complexa de Polireferência - PRCE (VOLD et al, 1982) e o Algoritmo de Realização de Sistemas - ERA (JUANG; PAPPA, 1985), deram origem a uma poderosa ferramenta para a Análise Modal de estruturas naturalmente excitadas, denominada Técnica de Excitação Natural (NExT). O novo método contribuiu para disseminar, na comunidade de engenharia mecânica, a idéia de que é possível extrair os parâmetros modais de estruturas excitadas por forças desconhecidas.

---

A técnica de Excitação Natural (NExT) permite a extração dos parâmetros modais de estruturas sob a ação de excitação natural utilizando para tanto as técnicas clássicas de identificação determinística. A método de identificação NexT (JAMES et al, 1995) é baseado no fato que um sistema com múltiplas entradas e múltiplas saídas (MIMO), excitado por forças aleatórias, produz funções de autocorrelação e correlação-cruzada que são somas de “senos amortecidos”. Além disso, cada seno apresenta uma frequência natural amortecida e um fator de amortecimento idêntico aos correspondentes parâmetros dos modos estruturais. Conseqüentemente, se as funções de correlação da resposta são equivalentes à função resposta ao impulso, elas podem ser utilizadas em métodos convencionais de identificação, tais como PRCE, ITD ou ERA, conhecidos e extensamente testados para a extração de parâmetros modais em modelos estruturais.

A utilização de técnicas de identificação estocástica vem se consolidando apenas mais recentemente, entretanto, a sua aplicação tem se mostrado bastante adequada para trabalhos de engenharia mecânica. Por exemplo, Pappa e Juang (1988) obtêm os parâmetros modais de uma aeronave durante testes de vôo utilizando os dados do sistema excitado naturalmente diretamente no algoritmo ERA. Hermans e Auweraer (1999) estudaram a aplicação da técnica NExT em três casos industriais, analisando suas capacidades e limitações. Tanto a técnica NExT quanto o ERA obtiveram sucesso na caracterização modal de um sistema de suspensão traseira de um carro durante testes de rodagem, na análise de *flutter* de uma aeronave comercial em vôo e na identificação dos modos de uma ponte de concreto em condições normais de operação.

O algoritmo de predição linear baseado no modelo Auto-Regressivo de Médias Móveis - ARMA (GERSCH, 1970), destaca-se como sendo a mais clássica das técnicas de identificação estocástica. Este método é fundamentado na teoria de séries temporais e foi inicialmente aplicado a problemas de engenharia elétrica e automação, sendo posteriormente transferido com sucesso à Análise Modal Experimental. Na formulação do método, os parâmetros do modelo estrutural ARMA guardam informações relativas à dinâmica do sistema, uma vez que estes estão relacionados com a covariância equivalente do sistema e ao processo de excitação. Infelizmente os parâmetros de Média Móvel – MA podem causar problemas de não-linearidade, e o método apresenta ainda problemas de convergência, alta sensibilidade às condições iniciais e excessiva carga computacional (PEETERS; ROECK, 1999).

---

A classe de métodos de identificação estocástica baseados em modelos em espaço de estado, denominada Identificação Estocástica de Subespaço - IES (OVERSCHEE; MOOR, 1996), é uma alternativa ao modelo ARMA.

Os métodos baseados na identificação de subespaço executam primeiramente uma redução no conjunto de estados do sistema e só então o modelo em espaço de estado é identificado a partir do subconjunto encontrado. A terminologia subespaço surgiu na teoria de controle e define o grupo de métodos que compõe a classe de problema denominada estocástica. Este grupo está relacionado com a realização determinística que retrocede ao algoritmo de Ho-Kalman e aplica a Decomposição em Valores Singulares (DVS) para o tratamento de sinais contaminados por ruído (KUNG, 1978).

Uma das desvantagens dos métodos no domínio do tempo é que embora estruturas reais tenham infinitas frequências e infinitos modos de vibrar, o limite dinâmico real faz com que o número de coordenadas independentes do modelo seja reduzido drasticamente, restringindo a análise a uma faixa de frequência previamente estabelecida. Assim é fundamental na identificação no domínio do tempo, a determinação correta do número de modos de vibrar contido nos sinais observados (ordem do modelo), de forma a evitar a presença de modos computacionais. Esse problema é discutido em vários artigos como (PEETERS; ROECK, 1999, AUWERAER; PEETERS, 2004, SCIONT; LANSLOTS, 2005) e uma das propostas para reduzir o efeito dos modos computacionais é a construção e utilização do diagrama de estabilização.

### **2.3 Métodos de Identificação dos Parâmetros Modais no Domínio da Frequência**

Os métodos de identificação dos parâmetros modais utilizando apenas as respostas no domínio da frequência podem ser agrupados basicamente em duas classes: Método Diretos no Domínio da Frequência - BFD ou *Peak Picking* - PP e o método de Decomposição no Domínio da Frequência - DDF. Neste caso, é possível traçar um cronograma temporal da evolução dos métodos de identificação utilizando apenas as repostas no domínio da frequência. Neste contexto, o método PP amplamente utilizado na análise modal experimental é um dos percussores.

---

A formulação sistemática e a implementação do método PP para análise modal baseada apenas nas respostas são atribuídas a Felber (1993), embora a idéia fundamental já tivesse sido formulada antes. Nesta linha, Andersen (1997), dando prosseguimento ao trabalho de Felber (1993), apresenta os conceitos básicos do método DDF. Posteriormente, Brincker (2000) discute de uma forma mais completa a aplicação do método DDF para análise modal baseada apenas nas respostas em estruturas reais. Ainda nesta mesma linha, Brincker (2001) propõe uma extensão do método DDF. Nesta extensão, é acrescido o uso dos coeficientes MAC - Valores para identificação da função de densidade espectral relacionada com um grau de liberdade correspondente ao k-ésimo modo de vibrar. Este fato permite a identificação dos coeficientes de amortecimento do sistema com uma maior precisão e eficácia.

Nos três métodos citados acima a identificação dos parâmetros modais é feita diretamente a partir das funções de densidade espectral de potência da resposta do sistema. Estas funções são utilizadas na construção de uma matriz de densidade espectral de potência, a qual é formada pelas funções de densidade espectral de potência na diagonal principal, e as funções de densidade espectral de potência cruzada nas demais posições. Uma vez encontrada a matriz de densidade espectral de potência, o procedimento para extração dos parâmetros modais do sistema é ligeiramente diferente em cada um dos métodos.

No método *Peak Picking*, Felber (1993) propõe fazer a normalização e a média das funções de densidades espectral a fim de se obter a média normalizada da densidade espectral de potência (ANPSD), que em um primeiro momento, mostra todos os picos de ressonâncias correspondentes aos modos de vibrar do sistema. A identificação das frequências desses picos fornece uma primeira idéia das frequências dos modos de vibrar do sistema.

O problema das forças de entrada não serem medidas representa uma dificuldade extra para a identificação dos parâmetros do modelo neste método. Esta limitação é freqüentemente superada pela adoção de uma técnica derivada da identificação dos parâmetros modais convencional, onde um sensor de referência é colocado em um determinado grau de liberdade, e posteriormente, usado como a “entrada” do sistema. As estimativas das funções de transmissibilidade e coerência são obtidas a partir da relação do sinal de referência e do sinal dos pontos de medida do sistema. Esta relação serve, não somente para ajudar na identificação das ressonâncias, mas também para estimar os modos operacionais de deflexão. De fato estes modos não são os modos de vibrar do sistema, mas de

---

qualquer forma, a diferença entre eles torna-se insignificante para sistemas com modos bem separados e levemente amortecidos.

Uma das principais vantagens das técnicas baseadas no domínio da frequência é a sua facilidade de interação (amigável) com o usuário. As técnicas são rápidas, sua utilização é simples e dá ao usuário um “sentimento” físico dos dados usados. Entretanto, as técnicas no domínio da frequência, tal como a PP, que são baseadas no simples processamento do sinal utilizando a Transformada Discreta de Fourier - FFT, fornecem uma estimativa razoável do amortecimento e dos modos de vibrar, apenas se os modos forem bem separados. Para modos próximos elas podem apresentar alguma dificuldade na identificação, mesmo que os modos possam ser identificados, a estimativa fica contaminada. Um outro aspecto é a limitação na estimativa da frequência devido aos problemas relacionados com a resolução do espectro de potência, assim como a incerteza na estimativa do amortecimento.

Conforme discutido em Brincker (2001), a utilização da técnica DDF pode reduzir os inconvenientes de modos próximos e da resolução do espectro de frequência, associados com as técnicas clássicas, ainda mantendo a características de ser “amigável” com o usuário.

Segundo Brincker (2001) no método DDF, para cada frequência discreta a matriz de densidade espectral é decomposta em valores e vetores singulares utilizando a Decomposição em Valores Singulares - DVS. A matriz de densidade espectral é decomposta para a contribuição dos diferentes modos da estrutura, em que cada pico de frequência contribui para a resposta do sistema. Neste caso, o primeiro vetor singular para o pico de frequência do  $k$ -ésimo modo é a própria estimativa deste modo, e a partir da análise dos valores singulares é possível identificar a função de densidade espectral relacionada com um dado grau de liberdade correspondente ao  $k$ -ésimo modo de vibrar do sistema.

Os métodos de identificação vistos acima, tem um grande potencial de aplicação e pode-se dizer que os mesmos são o futuro da análise modal. Assim, torna-se muito importante o estudo das técnicas IES e DDF, de forma que se possa contribuir com o desenvolvimento e consolidação das técnicas de análise modal baseada apenas na resposta.

A formulação, implementação e aplicação dos métodos IES e DDF serão mais detalhados nos próximos capítulos, fornecendo informações necessárias para o entendimento das técnicas.

---

## 3 FERRAMENTAS GEOMÉTRICAS E NUMÉRICAS

A proposta deste capítulo é fornecer as informações necessárias a respeito dos conceitos geométricos e numéricos que estão envolvidos na implementação da IES e da DDF e assim possibilitar um maior entendimento dos algoritmos propostos neste trabalho. Salienta-se que estes tópicos poderiam ser abordados em anexo, entretanto, dado a sua importância para o trabalho e buscando um texto auto-contido, o mesmo será apresentado como parte do corpo de texto.

Nas seções 3.1 e 3.2 será apresentado a partir do ponto de vista da álgebra linear um esboço dos conceitos das principais ferramentas geométricas utilizadas no desenvolvimento deste trabalho. As seções 3.3 e 3.4 abordarão as ferramentas numéricas utilizadas na implementação dos algoritmos de identificação e finalmente a seção 3.5 discutirá como as ferramentas geométricas podem ser expressas dentro de um contexto estatístico.

### 3.1 Espaço Vetorial, Subespaço e Base

O método da Identificação Estocástica de Subespaço – IES faz uso da projeção ortogonal do espaço das linhas dos dados de saída futuros no espaço das linhas dos dados de saída passados agrupados numa matriz de blocos de Hankel. Tal projeção é calculada a partir da Decomposição QR da matriz de Hankel e a ordem do sistema é obtida através da Decomposição em Valores Singulares - DVS dessa projeção. Portanto, é de suma importância, o entendimento dos conceitos geométricos e numéricos que estão envolvidos na formulação e implementação das técnicas de identificação de parâmetros modais baseado apenas nas respostas.

### 3.1.1 Espaço Vetorial

Um espaço vetorial  $E$  é um conjunto, cujos elementos são chamados de vetores, na qual estão definidas duas operações: a adição, que a cada par de vetores  $u, v \in E$  faz corresponder um novo vetor  $u + v \in E$ , chamado a soma de  $u$  e  $v$ , e a multiplicação por um número real, que a cada número  $\alpha \in \mathbb{R}$  e a cada vetor  $v \in E$  faz corresponder um vetor  $\alpha.v$  chamado o produto de  $\alpha$  por  $v$ . Essas operações devem satisfazer, para quaisquer  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  e  $u, v, w \in E$ , as condições abaixo, denominadas os axiomas de espaço vetorial:

- **Comutatividade:**  $u + v = v + u$
- **Associatividade:**  $(u + v) + w = u + (v + w)$  e  $(\alpha\beta)v = \alpha(\beta v)$
- **Vetor nulo:** existe um vetor  $0 \in \mathbb{R}$  chamado vetor nulo, ou vetor zero, tal que  $v + 0 = 0 + v = v$  para todo  $v \in \mathbb{R}$
- **Inverso aditivo:** para cada vetor  $v \in \mathbb{R}$  existe um vetor  $-v \in \mathbb{R}$  chamado o inverso aditivo, ou simétrico de  $v$ , tal que  $-v + v = v + (-v) = 0$
- **Distributividade:**  $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$  e  $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$
- **Multiplicação por 1:**  $1.v = v$

Para todo número natural  $n$ , o símbolo  $\mathbb{R}^n$  representa o espaço vetorial euclidiano  $n$ -dimensional. Os elementos de  $\mathbb{R}^n$  são as listas ordenadas  $u = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ,  $v = (\beta_1, \dots, \beta_n)$  de números reais.

Os números  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  são chamados as coordenadas do vetor  $u$ . As operações do espaço vetorial  $\mathbb{R}^n$  são definidas fazendo:

$$u + v = (\alpha_1 + \beta_1, \dots, \alpha_n + \beta_n)$$

$$\alpha.u = (\alpha\alpha_1, \dots, \alpha\alpha_n)$$

A matriz  $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$  é uma lista de números reais  $a_{ij}$  com índices duplos, onde  $1 \leq i \leq m$  e  $1 \leq j \leq n$ . Costuma-se representar a matriz  $A$  como um quadrado numérico com  $m$

linhas e  $n$  colunas, no qual o elemento  $a_{ij}$  situa-se no cruzamento da  $i$ -ésima linha com a  $j$ -ésima coluna:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

O vetor  $(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}) \in \mathbb{R}^n$  é o  $i$ -ésimo vetor linha da matriz  $A$  e o vetor  $(a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj}) \in \mathbb{R}^m$  é o  $j$ -ésimo vetor coluna de  $A$ . O conjunto  $\mathcal{M}_{(m \times n)}$  de todas as matrizes  $(m \times n)$  torna-se um espaço vetorial quando nele se define a soma das matrizes  $A = [a_{ij}]$  e  $B = [b_{ij}]$  como  $A + B = [a_{ij} + b_{ij}]$  e o produto da matriz  $A$  pelo número real  $\alpha$  como  $\alpha A = [\alpha a_{ij}]$ . A matriz nula  $0 \in \mathcal{M}_{(m \times n)}$  é aquela formada por zeros e o inverso aditivo é  $-A = [-a_{ij}]$ .

### 3.1.2 Subespaço

Um subespaço vetorial do espaço vetorial  $E$  é um subconjunto  $F \subset E$  que, relativamente às operações de  $E$ , é ainda um espaço vetorial.

Seja  $E$  um espaço vetorial. Um subespaço vetorial (ou simplesmente um subespaço) de  $E$  é um subconjunto  $F \subset E$  com as seguintes propriedades:

- $0 \in F$
- Se  $u, v \in F$  então  $u + v \in F$
- Se  $v \in F$  então, para todo  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha v \in F$

Segue-se que se  $u$  e  $v$  pertencem ao subespaço  $F$  e  $\alpha, \beta$  são números reais quaisquer então  $\alpha u + \beta v \in F$ . Mais geralmente, dados  $v_1, \dots, v_m \in F$  e  $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}$  tem-se  $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m \in F$ .

O conjunto  $\{0\}$ , com o único elemento 0, e o espaço inteiro  $E$  são exemplos triviais de subespaços de  $E$ . Todo subespaço é, em si mesmo, um espaço vetorial.

O conjunto de vetores  $X = \{a_1, a_2, \dots, a_j\} \subset E$  é linearmente dependente se existir escalares  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_j$  não nulos, tais que  $\sum_{i=1}^j \beta_i a_i = 0$ . Por outro lado os vetores  $\{a_1, a_2, \dots, a_j\}$  são linearmente independentes se a condição  $\sum_{i=1}^j \beta_i a_i = 0$  implicar que todos os escalares  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_j$  sejam nulos.

O conjunto de todas as possíveis combinações lineares de  $\{a_1, a_2, \dots, a_j\}$  é um subespaço  $\mathcal{S}_x \in E$  referido como uma extensão de  $\{a_1, a_2, \dots, a_j\}$  e é denotado por:  $\mathcal{S}_x = \text{span}\{a_1, a_2, \dots, a_j\} = \{\beta_1 a_1, \beta_2 a_2, \dots, \beta_j a_j\}$ , para todos os escalares  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_j$ .

Se o conjunto de vetores  $\{a_1, a_2, \dots, a_j\}$  é linearmente independente então o espaço  $\mathcal{S}_x$  e dito ter dimensão  $j$ . Para qualquer espaço  $\mathcal{S}_x$  de dimensão  $r$ , sempre existirá vetores independentes  $a_1, a_2, \dots, a_r$  em  $\mathcal{S}_x$  tais que  $\mathcal{S}_x = \text{span}\{a_1, a_2, \dots, a_r\}$ .

Existem dois importantes subespaços associados com a matriz  $A$ :

- O **espaço das colunas de  $A$**  é o espaço compreendido pelas  $n$  colunas de  $A$ , sendo cada coluna considerada um vetor separado. O posto das colunas de  $A$  é o número máximo de vetores linearmente independentes formados pelas colunas de  $A$ .
- O **espaço das linhas de  $A$**  é o espaço compreendido pelas  $m$  linhas de  $A$ , sendo cada linha considerada um vetor separado. O posto das linhas de  $A$  é o número máximo de vetores linearmente independentes formados pelas linhas de  $A$ .

### 3.1.3 Base

Uma base de um espaço vetorial  $E$  é um conjunto  $\mathcal{B} \subset E$  linearmente independente que gera  $E$ . Isto significa que todo vetor  $v \in E$  se exprime, de modo único, como combinação linear  $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m$  de elementos  $v_1, \dots, v_m$  da base  $\mathcal{B}$ . Se  $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_m\}$  é uma base de

$E$  e  $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m$ , então os números  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  chamam-se as coordenadas do vetor  $v$  na base  $\mathcal{B}$ .

Os vetores  $e_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, \dots, 0, 1)$  constituem uma base  $\{e_1, \dots, e_n\}$  de  $\mathbb{R}^n$ , chamada a base canônica. Analogamente, os monômios  $1, x, \dots, x^n$  formam uma base para o espaço vetorial  $\mathcal{P}_n$  dos polinômios de grau  $\leq n$ . O conjunto  $\{1, x, \dots, x^n, \dots\}$  dos monômios de graus arbitrários constitui uma base (infinita) para o espaço vetorial  $\mathcal{P}$  de todos os polinômios reais.

Uma maior explanação sobre os conceitos de espaços vetoriais pode ser encontrada em Kolman e David, (2001).

### 3.2 Projeção Ortogonal

Sejam dadas as matrizes  $A \in \mathbb{R}^{p \times j}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{q \times j}$  e  $C \in \mathbb{R}^{r \times j}$ . Os elementos das linhas destas matrizes podem ser considerados como as coordenadas de um vetor em um espaço com dimensão  $j$ . Assim as linhas das matrizes  $A$ ,  $B$  e  $C$ , definem uma base para um espaço vetorial linear de dimensão  $j$ .

O operador  $\Pi_B$  realiza a projeção do espaço das linhas de uma dada matriz no espaço das linhas da matriz  $B$ , Eq. (3.1).

$$\Pi_B \stackrel{def}{=} B^T \cdot (BB^T)^\dagger \cdot B \tag{3.1}$$

onde:  $(\bullet)^\dagger$  denota a pseudo-inversa de uma matriz.

$A/B$  é a notação para a projeção do espaço das linhas da matriz  $A$  no espaço das linhas da matriz  $B$ , Eq. (3.2).

$$A/B \stackrel{def}{=} A \Pi_B = AB^T (BB^T)^\dagger B \tag{3.2}$$

Note que na notação  $A/\mathbf{B}$  a matriz  $B$  é colocada em negrito, isto indica que o resultado da operação  $A/\mathbf{B}$  se encontra no espaço das linhas de  $B$ . Esta notação será utilizada também nas operações geométricas seguintes, isto facilita a leitura das fórmulas referentes as projeções.

Por outro lado,  $\Pi_{B^\perp}$  é o operador geométrico que projeta o espaço das linhas de uma matriz no complemento ortogonal do espaço das linhas da matriz  $B$ , Eq. (3.3) e Eq. (3.4).

$$A/\mathbf{B}^\perp \stackrel{def}{=} A\Pi_{B^\perp} \tag{3.3}$$

$$\Pi_{B^\perp} = I_j - \Pi_B \tag{3.4}$$

onde:  $I_j$  é a matriz identidade.

Os operadores projeção ( $\Pi_B$  e  $\Pi_{B^\perp}$ ) podem ser interpretados geometricamente em um espaço de dimensão  $j$  como mostra a figura 3.1.

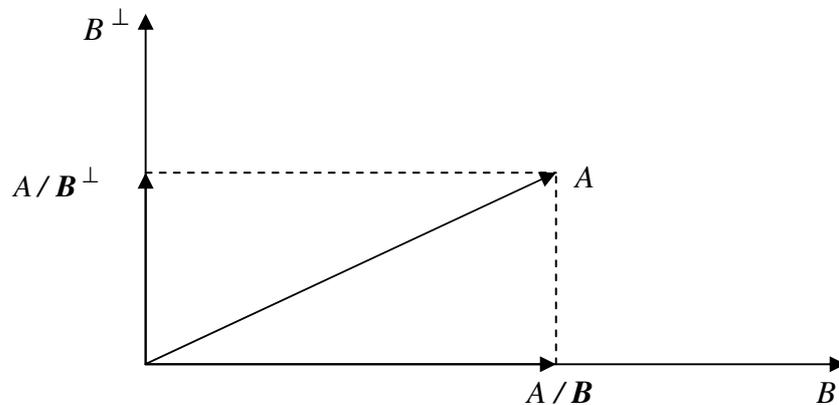


Figura 3.1 – Interpretação da projeção ortogonal no espaço de dimensão  $j$ . (Neste caso  $j=2$ ).

A combinação das projeções  $\Pi_B$  e  $\Pi_{B^\perp}$  decompõe a matriz  $A$  em duas matrizes das quais o espaço das linhas são ortogonais, Eq. (3.5).

$$A = A\Pi_B + A\Pi_{B^\perp} \tag{3.5}$$

Alternativamente, as projeções podem decompor a matriz  $A$  como uma combinação linear das linhas de  $B$  e das linhas do complemento ortogonal de  $B$ , Eq. (3.6) e Eq. (3.7).

$$L_B B \stackrel{def}{=} A / B \quad (3.6)$$

$$L_{B^\perp} B^\perp \stackrel{def}{=} A / B^\perp \quad (3.7)$$

$B^\perp$  é uma base para o complemento ortogonal do espaço de linhas de  $B$ , então se tem que, Eq. (3.8).

$$A = L_B B + L_{B^\perp} B^\perp \quad (3.8)$$

A equação (3.8) é a decomposição de  $A$  como a soma das combinações lineares das linhas de  $B$  e  $B^\perp$ . A ferramenta numérica utilizada para este tipo de projeção é a Decomposição QR.

### 3.3 Decomposição QR

A decomposição QR é uma ferramenta numérica amplamente utilizada em códigos computacionais para a solução de problemas de autovalores de uma matriz, resolução de sistemas lineares e para o cálculo de aproximações pelo método dos mínimos quadrados. Neste trabalho essa ferramenta é utilizada a fim de se obter a projeção ortogonal do espaço das linhas das saídas futuras sobre o espaço das linhas das saídas passadas, necessária no desenvolvimento dos algoritmos da IES.

A matriz  $A \in \mathbb{R}^{p \times j}$  com colunas linearmente independentes pode ser decomposta como mostra a equação (3.9).

$$A = QR \quad (3.9)$$

As colunas de  $Q \in \mathbb{R}^{p \times j}$  formam uma base ortonormal ( $Q^T Q = I$ ) do espaço das colunas de  $A$ . A matriz  $R \in \mathbb{R}^{j \times j}$  é uma matriz triangular superior não singular.

Sendo  $a_1, a_2, \dots, a_j$  as colunas linearmente independentes de  $A$  e  $a/e$  a projeção ortogonal das colunas de  $A$  na base  $e_1, e_2, \dots, e_j$  pode-se obter uma base ortonormal  $u_1, u_2, \dots, u_j$  para o espaço das colunas de  $A$  (GOLUB; VAN LOAN, 1996).

$$u_1 = a_1, \quad e_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} \quad (3.10)$$

$$u_2 = a_2 - a_2/e_1, \quad e_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|} \quad (3.11)$$

$$u_3 = a_3 - a_3/e_1 - a_2/e_2, \quad e_3 = \frac{u_3}{\|u_3\|} \\ \vdots \quad (3.12)$$

$$u_j = a_j - \sum_{i=1}^{j-1} a_j/e_i + e_j \|u_j\|, \quad e_j = \frac{u_j}{\|u_j\|}$$

Rearranjando as equações acima, tem-se:

$$a_1 = e_1 \|u_1\| \quad (3.13)$$

$$a_2 = a_2/e_1 + e_2 \|u_2\| \quad (3.14)$$

$$a_3 = a_3/e_1 + a_3/e_2 + e_3 \|u_3\| \\ \vdots \quad (3.15)$$

$$a_j = \sum_{i=1}^{j-1} a_j/e_i + e_j \|u_j\|$$

Como a base  $e$  é formada por vetores unitários, têm-se as seguintes relações:

$$a_1 = e_1 \|u_1\| \quad (3.16)$$

$$a_2 = (a_2 e_1^T) e_1 + e_2 \|u_2\| \quad (3.17)$$

$$a_3 = (a_3 e_1^T) e_1 + (a_3 e_2^T) e_2 + e_3 \|u_3\| \\ \vdots \quad (3.18)$$

$$a_j = \sum_{i=1}^{j-1} (a_j e_i^T) e_i + e_j \|u_j\|$$

O lado direito das equações acima pode ser redefinido em uma forma matricial, dada por:

$$\underbrace{(e_1 \mid \cdots \mid e_n)}_Q \underbrace{\begin{pmatrix} \|u_1\| & (a_2 e_1^T) & (a_3 e_1^T) & \cdots \\ 0 & \|u_2\| & (a_3 e_2^T) & \cdots \\ 0 & 0 & \|u_3\| & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}}_R \quad (3.19)$$

Realizando o produto de cada linha e coluna das matrizes na equação (3.19) têm-se as respectivas colunas de A. Dessa forma:

$$Q = (e_1 \mid \cdots \mid e_n) \quad (3.20)$$

$$R = \begin{pmatrix} \|u_1\| & (a_2 e_1^T) & (a_3 e_1^T) & \cdots \\ 0 & \|u_2\| & (a_3 e_2^T) & \cdots \\ 0 & 0 & \|u_3\| & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = Q^T A = \begin{pmatrix} a_1 e_1^T & (a_2 e_1^T) & (a_3 e_1^T) & \cdots \\ 0 & a_2 e_2^T & (a_3 e_2^T) & \cdots \\ 0 & 0 & a_3 e_3^T & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

onde  $\|u_j\| = a_j e_j$ ,  $(a_j e_i^T) = 0$  para  $j > i$  e  $QQ^T = I$  então  $Q^T = Q^{-1}$

Assim pode-se fatorar a matriz A em uma matriz Q ortogonal e uma matriz R triangular superior.

### 3.3.1 Expressões para as operações geométricas

Os dados contendo as informações sobre as resposta do sistema são, como será mostrado na seção 4.3, agrupados em uma matriz chamada matriz de bloco de Hankel  $\mathcal{H}$ , a qual é fatorada através da decomposição QR, a fim de se obter as projeções ortogonais do espaço das saídas futuras no espaço das saídas passadas do sistema.

A fim de facilitar o entendimento, simplifica-se a matriz  $\mathcal{H}$  como mostra a equação (3.22):

$$\mathcal{H}_{6 \times 6} = \begin{pmatrix} R_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ R_{21} & R_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & 0 & 0 & 0 \\ R_{41} & R_{42} & R_{43} & R_{44} & 0 & 0 \\ R_{51} & R_{52} & R_{53} & R_{54} & R_{55} & 0 \\ R_{61} & R_{62} & R_{63} & R_{64} & R_{65} & R_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1^T \\ Q_2^T \\ Q_3^T \\ Q_4^T \\ Q_5^T \\ Q_6^T \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

Será utilizada a notação  $R_{[4:6],[1:3]}$  para uma submatriz de  $R$  consistindo do bloco de linhas de 4 a 6 e do bloco de colunas de 1 a 3 e a notação  $Q_{[3:4]}^T$  para a submatriz  $Q$ . Por exemplo:

$$R_{[4:5],[4:6]} = \begin{pmatrix} R_{44} & 0 & 0 \\ R_{54} & R_{55} & R_{56} \end{pmatrix} \quad (3.23)$$

e

$$R_{[1,4],[1,3]} = \begin{pmatrix} R_{11} & 0 \\ R_{41} & R_{43} \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

Para matrizes transpostas, o subscrito tem prioridade sobre a transposição:

$$R_{[1,4],[1,3]}^T = [R_{[1,4],[1,3]}]^T \quad (3.25)$$

$$Q_{3:4}^T = [Q_{3:4}]^T \quad (3.26)$$

Uma projeção ortogonal pode ser expressa em função da decomposição QR. Tomando-se o caso geral  $A/B$ , onde  $A$  e  $B$  consistem de um número qualquer de linhas de  $\mathcal{H}$ , estas podem ser escritas como uma combinação linear da matriz  $Q^T$ , Eq. (3.27) e Eq. (3.28).

$$A = R_A Q^T \quad (3.27)$$

$$B = R_B Q^T \quad (3.28)$$

Assim, temos que:

$$A/B = AB^T (BB^T)^\dagger B \quad (3.29)$$

$$A/B = [R_A \underbrace{Q^T Q}_{I} R_B^T] [R_B \underbrace{Q^T Q}_{I} R_B^T]^\dagger R_B Q^T \quad (3.30)$$

$$A/B = R_A R_B^T [R_B R_B^T]^\dagger R_B Q^T \quad (3.31)$$

Em muitos casos, a equação (3.31) pode ser ainda mais simplificada, Eq. (3.32) e Eq. (3.33).

$$R_A = R_{[5:6],[1:6]} \quad (3.32)$$

$$R_B = R_{[1:4],[1:6]} \quad (3.33)$$

e assumindo que  $R_B$  tem posto completo, tem-se que:

$$A/B = R_{[5:6],[1:6]} R_{[1:4],[1:6]}^T [R_{[1:4],[1:6]} R_{[1:4],[1:6]}^T]^{-1} R_{[1:4],[1:6]} Q^T \quad (3.34)$$

$$A/B = R_{[5:6],[1:4]} R_{[1:4],[1:4]}^T [R_{[1:4],[1:4]} R_{[1:4],[1:4]}^T]^{-1} R_{[1:4],[1:4]} Q_{1:4}^T \quad (3.35)$$

$$A/B = R_{[5:6],[1:4]} \underbrace{R_{[1:4],[1:4]}^T R_{[1:4],[1:4]}^{-T}}_I \underbrace{R_{[1:4],[1:4]}^{-1} R_{[1:4],[1:4]}}_I Q_{1:4}^T \quad (3.36)$$

$$A/B = R_{[5:6],[1:4]} Q_{1:4}^T \quad (3.37)$$

De uma maneira similar, a projeção do complemento ortogonal do espaço das linhas de uma dada matriz pode ser calculado. Por exemplo:

$$\Pi_{A^\perp} = I_j - A^T [AA^T]^\dagger A \quad (3.38)$$

$$\Pi_{A^\perp} = I_j - QR_A^T [R_A R_A^T]^\dagger R_A Q^T \quad (3.39)$$

$$\Pi_{A^\perp} = Q [I_{2(m+l)i} - R_A^T [R_A R_A^T]^\dagger R_A] Q^T \quad (3.40)$$

A expressão (3.40) também pode ser simplificada. A projeção no complemento ortogonal do espaço das linhas de uma dada matriz pode ser escrita como:

$$\Pi_{A^\perp} = Q \begin{bmatrix} I_{2(m+l)} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{11}^T \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{11} & 0 \\ R_{11}^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} R_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q^T \quad (3.41)$$

$$\Pi_{A^\perp} = Q \begin{bmatrix} I_{2(m+l)} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q^T \quad (3.42)$$

$$\Pi_{A^\perp} = Q_{2:6} Q_{2:6}^T \quad (3.43)$$

As expressões mostradas acima serão utilizadas nos algoritmos da IES para o cálculo da projeção ortogonal do espaço das saídas futuras no espaço das saídas passadas.

### 3.4 Decomposição em Valores Singulares

No método da Decomposição no Domínio da Frequência - DDF a identificação dos parâmetros modais é baseada na Decomposição em Valores Singulares - DVS da matriz de densidade espectral de potência de saída do sistema.

Técnicas de decomposição matricial, como a DVS, são utilizadas para reduzir uma matriz a uma forma mais simplificada ou canônica. Estas técnicas têm uma grande importância na engenharia, principalmente na análise computacional de matrizes.

#### 3.4.1 O posto de uma matriz

O conceito de posto de uma matriz está diretamente relacionado com a dependência linear das linhas ou colunas da matriz. Por exemplo, se uma matriz de ordem  $n \times n$ , possui todas as linhas linearmente independentes ela tem *posto*  $n$ . Se uma linha é combinação linear das outras, a matriz tem *posto*  $n-1$ . Em outras palavras, o *posto* de uma matriz é igual ao número de linhas (ou colunas) linearmente independentes. Uma matriz  $m \times n$  com  $m > n$  possui *posto completo* se possui *posto*  $n$ , ou *posto* deficiente se possui *posto*  $< n$ . Uma matriz quadrada com *posto* deficiente implica necessariamente que a matriz é singular, isto é, determinante igual à zero.

Uma forma de se calcular o *posto* de uma matriz é através da eliminação de Gauss. Dada uma matriz  $n \times n$  com posto  $r < n$ , tem-se  $n-r$  linhas de zeros depois de efetuada a eliminação de Gauss. Supondo que as linhas de uma matriz sejam vetores, afirmar que duas linhas são linearmente dependentes é o mesmo que dizer que os vetores são paralelos e que duas linhas são totalmente independentes que os vetores são perpendiculares.

Na prática pode-se encontrar algo intermediário entre estes dois extremos, ou seja, os dois vetores comparados podem não ser exatamente paralelos, neste caso, as duas linhas da matriz são bem próximas de serem linearmente dependentes, resultando em linhas não exatamente iguais a zeros após a aplicação da eliminação de Gauss, mas com elementos com valores muito pequenos. Estas linhas de números pequenos devem ser comparadas com as outras linhas da matriz a fim de avaliar corretamente o *posto* da matriz. A comparação das linhas da matriz ou vetores não é uma tarefa muito fácil, especialmente para matrizes grandes. O problema se torna ainda mais complicado se os elementos das matrizes forem complexos e neste caso é adequado ter um meio para comparar estes vetores na forma escalar. A decomposição de valores singulares permite essa comparação.

### 3.4.2 Decomposição em valores singulares

Seja  $[A]$  uma matriz real de ordem  $p \times j$ , a decomposição em valores singulares desta matriz é dada por:

$$[A] = [U][S][V]^T \quad (3.44)$$

onde a matriz  $[U]$  é de ordem  $p \times p$  e a matriz  $[V]$  é de ordem  $j \times j$  e ambas as matrizes são ortogonais, de modo que:

$$[U]^T [U] = [U][U]^T = [I] \quad (3.45a)$$

$$[V]^T [V] = [V][V]^T = [I] \quad (3.45b)$$

$$[S] = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \sigma_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_j \end{pmatrix} \quad (3.46)$$

onde  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \dots \geq \sigma_r \geq \sigma_{r+1} = \sigma_j = 0$

$[S]$  é uma matriz diagonal de ordem  $j \times j$ , cujos elementos diagonais  $\sigma_j$  são chamados de valores singulares da matriz  $[A]$  (MAIA, 1991).

A relação entre esta decomposição e o *posto* da matriz  $[A]$  é dada pelo número de valores singulares não nulos (iguais à zero). Por exemplo, uma matriz de ordem  $3 \times 3$ , com uma linha linearmente dependente, teria necessariamente algum valor singular  $\sigma_j$  igual à zero. A vantagem de se usar a DVS para o cálculo do *posto* é que se as linhas da matriz não são totalmente dependentes, obtêm-se valores reais de  $\sigma_j$  bem próximos de zero, o que facilita compará-los com os outros valores singulares encontrados na matriz e assim estabelecer um critério para definir se os vetores (linhas) são linearmente dependentes ou não.

Se a matriz  $[A]$  é complexa, a equação (3.44) torna-se:

$$[A] = [U][S][V]^H \quad (3.47)$$

onde:  $[U]$  e  $[V]$  são matrizes unitárias e superescrito  $H$  significa matriz hermitiana.

A designação “unitária” substitui o termo “ortogonal” quando as matrizes são complexas, de modo que:

$$[U]^H [U] = [U][U]^H = [I] \quad (3.48a)$$

$$[V]^H [V] = [V][V]^H = [I] \quad (3.48b)$$

E ainda,

$$[U]^H = [U]^{-1} \quad (3.49a)$$

$$[V]^H = [V]^{-1} \quad (3.49b)$$

Os valores singulares  $\sigma_j$  são as raízes positivas dos autovalores da matriz  $[A]^T[A]$  quando a matriz  $[A]$  é real e as raízes de  $[A]^H[A]$  quando a matriz  $[A]$  é complexa. Desde que  $[A]^T[A]$  é simétrica e  $[A]^H[A]$  é hermitiana, seus autovalores são sempre reais, então ambas as equações (3.44) e (3.47) resultam em valores singulares reais.

As colunas de  $[U]$  e  $[V]$  são respectivamente os autovetores de  $[A][A]^T$  e  $[A]^T[A]$ , e são chamados de vetores singulares. Por esta razão, os algoritmos usados para calcular a decomposição em valores singulares são similares aos usados para calcular os autovetores e autovalores. Isso possibilita também o uso do DVS para o cálculo dos autovalores e autovetores de sistemas dinâmicos.

Com um particionamento apropriado de  $U$  e  $V$ , a equação (3.44) pode ser reescrita numa forma mais adequada para interpretação dos autovalores e autovetores, Eq. (3.50).

$$A = (U_1 \quad U_2) \begin{pmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{pmatrix} = U_1 S_1 V_1^T \quad (3.50)$$

Ou, equivalentemente:

$$\begin{pmatrix} U_1^T A \\ U_2^T A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S V_1^T \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.51)$$

$$(A V_1 \quad A V_2) = (U_1 S \quad 0) \quad (3.52)$$

Que implica em:

$$U_1^T A V_1 = S \quad (3.53)$$

$$A V_2 = 0 \quad (3.54)$$

$$U_2^T A = 0 \quad (3.55)$$

A matriz  $U_1$  contém o número máximo de vetores colunas independentes que compreendem o espaço das colunas de  $A$  e a matriz  $V_1$  contém o número máximo de vetores linhas independentes que compreendem o espaço das linhas de  $A$ .

### 3.5 Ângulos e Direções Principais

Dada as matrizes  $A \in \mathbb{R}^{p \times j}$  e  $B \in \mathbb{R}^{q \times j}$  e a decomposição em valores singulares:

$$A^T (AA^T)^{\dagger} AB^T (BB^T)^{\dagger} B = USV^T \quad (3.56)$$

As direções principais entre o espaço das linhas de  $A$  e  $B$  são iguais as linhas de  $U^T$  e  $V^T$ . Os cossenos dos ângulos principais entre o espaço das linhas de  $A$  e  $B$  são definidos como os valores singulares (diagonal de  $S$ ). As direções e ângulos principais entre o espaço das linhas de  $A$  e  $B$  são denotados por:

$$[A \rightarrow \rightarrow B] = U^T \quad (3.57a)$$

$$[A \rightarrow \rightarrow B] = V^T \quad (3.57b)$$

$$[A \bowtie B] = S \quad (3.57c)$$

O conceito dos ângulos e direções principais será utilizado nos algoritmos da IES, e com esses ângulos e direções calculados será possível encontrar os ângulos principais entre o espaço das saídas futuras e o espaço das saídas passadas, permitindo encontrar o número de valores singulares diferentes de zero e assim se obter a ordem do modelo.

### 3.6 Ferramentas Geométricas no Contexto Estatístico

Nesta seção será abordado como as propriedades geométricas de um conjunto de dados podem ser expressas em um contexto estatístico, visto que o uso de ferramentas estatísticas é importante para o melhor entendimento dos conceitos envolvidos na IES.

Dadas duas seqüências aleatórias  $a_k \in \mathbb{R}^{n_a}$  e  $e_k \in \mathbb{R}^{n_e}$ , com  $k = 0, 1, \dots, j$ . Onde a seqüência  $e_k$  possui média zero e não é correlacionada com a seqüência  $a_k$ , tem-se que:

$$E[e_k] = 0 \quad (3.58)$$

$$\mathbf{E}[a_k e_k^T] = 0 \quad (3.59)$$

onde:  $\mathbf{E}$  é o operador esperança.

Assumindo que as seqüência sejam infinitas ( $j \rightarrow \infty$ ) e os processos ergódigos, o operador esperança  $\mathbf{E}$  tomado ao longo de várias amostras pode ser substituído pelo operador  $\mathbf{E}_j$  aplicado a uma única amostra. Assim a correlação entre as seqüências  $a_k$  e  $e_k$  é agora dada por, Eq. (3.60):

$$\mathbf{E}[a_k e_k^T] = \lim_{j \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{j} \sum_{i=0}^j a_i e_i^T \right] = \mathbf{E}_j \left[ \sum_{i=0}^j a_i e_i^T \right] \quad (3.60)$$

onde:

$$\mathbf{E}_j[\bullet] \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{j} [\bullet] \quad (3.61)$$

Considere por exemplo  $a_k$  como sendo uma seqüência referente a dados de entrada de um certo processo e  $e_k$  sendo uma seqüência de ruído presente neste mesmo processo. Assumindo-se novamente que se tenha uma grande quantidade de dados amostrados, que o processo é ergódigo e as seqüências não correlacionadas, tem-se:

$$\mathbf{E}_j \left[ \sum_{i=0}^j a_i e_i^T \right] = 0 \quad (3.62)$$

Agora, considere a construção de dois vetores com os dados das seqüências  $a_k$  e  $e_k$ , Eq. (3.63) e Eq. (3.64).

$$a = (a_0 \quad a_1 \dots a_j) \quad (3.63)$$

$$e = (e_0 \quad e_1 \dots e_j) \quad (3.64)$$

Conseqüentemente, a partir da equação (3.62) tem-se que:

$$\mathbf{E}_j[ae^T] = 0 \quad (3.65)$$

Da equação (3.65) pode-se constatar que o vetor de entrada  $a$  é perpendicular ao vetor de ruído  $e$ . Então geometricamente, para  $j \rightarrow \infty$ , observa-se que as linhas dos vetores de ruído

são perpendiculares as linhas dos vetores de entradas (e também as outras variáveis que não são correlacionadas com o ruído). Esta propriedade é utilizada nos algoritmos de identificação de subespaço para minimizar os efeitos do ruído no processo.

Neste caso, o ruído pode ser eliminado projetando o vetor de ruído no vetor de entrada, Eq. (3.66).

$$E_j \left[ \|e/a\| \right] = 0 \tag{3.66}$$

onde:  $\|e/a\|$  representa a norma da projeção de  $e$  em  $a$ .

A equação (3.66) é ilustrada numericamente na figura 3.2.

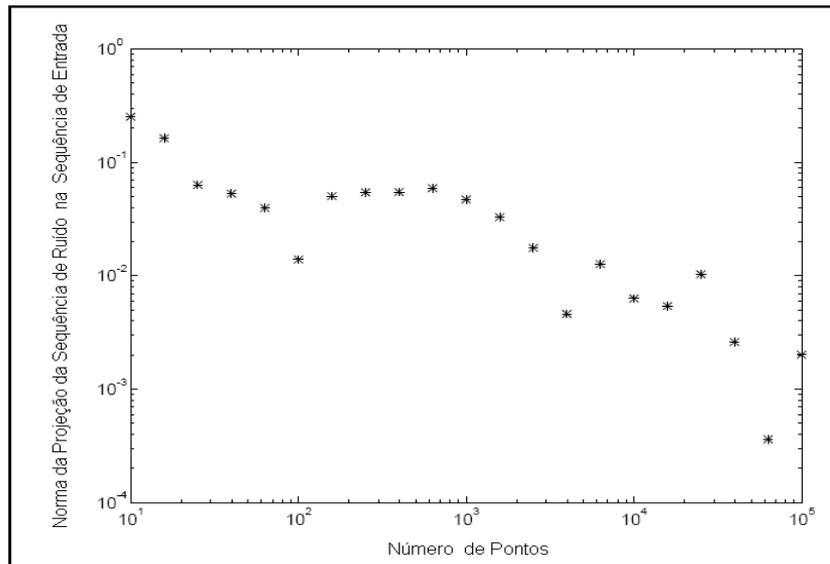


Figura 3.2 – Norma da projeção da seqüência de ruído na entrada

Fonte: ( Adaptada de Overshee e Moor (1996)).

Da figura acima verifica-se que a norma da projeção tende a zero com um fator  $1/\sqrt{j}$ . Quando  $j$  é grande o suficiente e é uma seqüência com média zero, os vetores  $e$  e  $a$  podem ser considerados perpendiculares um ao outro ( $\|e/a\| = 0$ ). Isto mostra porque os algoritmos de identificação de subespaços funcionam bem, mesmo com a presença de ruído, quando existe um grande número de amostras disponível. Em contrapartida, é possível verificar que a identificação de subespaços em geral não é adequada quando se tem amostras com um pequeno número de dados.

Uma outra ferramenta importante na identificação estocástica é a covariância. Estatisticamente, a covariância  $\Phi_{[A,B]}$  entre duas matrizes  $A \in \mathbb{R}^{p \times j}$  e  $B \in \mathbb{R}^{q \times j}$  é definida utilizando o operador  $E_j$ , Eq. (3.67):

$$\Phi_{[A,B]} \stackrel{def}{=} E_j[A \cdot B^T] \quad (3.67)$$

As propriedades geométricas introduzidas anteriormente, em um contexto determinístico são agora estendidas para o caso estocástico. Esta redefinição consiste simplesmente na substituição do produto das matrizes  $AB^T$  pela matriz de covariância, em todas as definições anteriores, Eq. (3.68).

$$AB^T \leftarrow \Phi_{[A,B]} \quad (3.68)$$

As equações (3.2) e (3.3) para as projeções ortogonais no caso estocástico são redefinidas como:

$$A/B = \Phi_{[A,B]} \Phi_{[B,B]}^\dagger B \quad (3.69)$$

$$A/B^\perp = A - \Phi_{[A,B]} \Phi_{[B,B]}^\dagger B \quad (3.70)$$

e os ângulos e direções principais, obtidos da DVS da equação (3.71):

$$\Phi_{[A,A]}^{-1/2} \Phi_{[A,B]} \Phi_{[B,B]}^{-1/2} = USV \quad (3.71)$$

são redefinidos como:

$$[A \rightarrow \rightarrow B] = U^T \Phi_{[A,A]}^{-1/2} A \quad (3.72)$$

$$[A \rightarrow \rightarrow B] = V^T \Phi_{[B,B]}^{-1/2} B \quad (3.73)$$

$$[A \bowtie B] = S \quad (3.74)$$

As ferramentas apresentadas neste capítulo poderiam ser discutidas e apresentadas em um anexo, entretanto optou-se por incluí-las neste capítulo dada sua importância para o entendimento e implementação das técnicas utilizadas neste trabalho. O próximo capítulo traz a teoria e a formulação necessária para o desenvolvimento e implementação da Identificação

---

Estocástica de Subespaço - IES e da Decomposição no Domínio da Frequência - DDF, ambas utilizadas para a identificação de parâmetros modais com base apenas na resposta.

---

## 4 IDENTIFICAÇÃO DE PARÂMETROS MODAIS BASEADOS APENAS NAS RESPOSTAS

A proposta deste capítulo é apresentar a formulação e os principais conceitos das técnicas de Identificação Estocástica de Subespaço - IES e Decomposição no Domínio da Frequência - DDF utilizadas na identificação de parâmetros modais utilizando apenas as respostas da estrutura. As seções do capítulo foram organizadas com o objetivo de fornecer os subsídios necessários para o entendimento e posterior implementação das técnicas.

### 4.1 Identificação Estocástica de Subespaço – IES

A IES é baseada na projeção ortogonal do espaço das saídas futuras sobre o espaço das saídas passadas e sua formulação está relacionada com a obtenção do modelo em espaço de estado da estrutura utilizando apenas seus respectivos dados de saída. A seção 4.1.1 discute a formulação dos modelos de espaço de estado contínuo, discreto e estocástico, sendo este último a base para a identificação de parâmetros modais quando apenas a resposta da estrutura é medida.

A seção 4.1.2 apresenta as propriedades de um sistema estocástico, nela são escritas as equações de Lyapunov em função das matrizes de covariância dos estados e dos dados de saída e também é mostrado que as funções de correlação dos dados de saída são equivalentes a resposta livre do sistema. Já a seção 4.1.3 apresenta a formulação das matrizes de Hankel, observabilidade e controlabilidade utilizadas no desenvolvimento do teorema principal da IES e na implementação do algoritmo.

Na IES a utilização dos estados do filtro de Kalman tem um importante papel, pois a partir deles é possível estimar o estado através dos dados de saída e sua formulação é apresentada na seção 4.1.4.

A seções 4.1.5, 4.1.6 e 4.1.7 apresentam os conceitos do teorema principal da IES, neste teorema são discutidos os principais aspectos da IES que levam aos procedimentos para a realização da identificação do sistemas de matrizes do modelo de espaço de estado estocástico. A partir da identificação do sistema de matrizes  $A$  e  $C$  do modelo estocástico os parâmetros modais desejados podem ser obtidos através da decomposição em autovalores e autovetores da matriz  $A$  e o diagrama de estabilização utilizado na escolha da ordem do modelo pode ser construído, esses passos são apresentados nas seções 4.1.8 e 4.1.9 respectivamente.

O desenvolvimento do modelo matemático que permitirá a implementação do algoritmo e posterior identificação dos parâmetros modais inicia-se neste momento. Para isso, serão utilizados como ferramentas os conceitos previamente discutidos no capítulo 3.

#### 4.1.1 Modelo de Espaço de Estado

As equações de movimento de um sistema dinâmico com  $n$  graus de liberdade, linear e invariante no tempo, podem ser representadas por um sistema de equações diferenciais ordinárias de segunda ordem, Eq. (4.1):

$$M\ddot{q}(t) + C\dot{q}(t) + Kq(t) = F(t) \quad (4.1)$$

onde  $M$ ,  $C$  e  $K$  são respectivamente as matrizes de massa, amortecimento e rigidez da estrutura. Essas matrizes são de ordem  $n \times n$ , sendo  $n$  o número de coordenadas generalizadas ( $n$ gl), que compõe o vetor  $q(t)$ . O vetor  $F(t)$ , de ordem  $n \times 1$ , representa as forças de entrada do sistema.

Em sistemas estruturais envolvendo parâmetros distribuídos essa equação é geralmente obtida por elementos finitos, onde o sistema físico é representado por um modelo discreto aproximado contendo  $n$  graus de liberdade. A equação (4.1) representa o comportamento estrutural de um sistema em vibração, entretanto, essa representação não é a forma mais adequada para ser utilizada diretamente na IES.

#### 4.1.1.1 Sistema em tempo contínuo

Uma forma mais adequada de representar o modelo neste caso é utilizar a formulação de estado (MEIROVITCH, 1980, LJUNG 1999) em que a equação original de segunda ordem, é reescrita como um sistema de equações diferenciais de primeira ordem através do modelo de espaço de estado, Eq. (4.2) e Eq. (4.3).

$$\dot{x}(t) = A_c x(t) + B_c u(t) \quad (4.2)$$

$$y(t) = C_c x(t) + D_c u(t) \quad (4.3)$$

onde:

$$x(t) = \{q(t) \quad \dot{q}(t)\}^T$$

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{bmatrix}$$

$$B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1}B_f \end{bmatrix}$$

$$F(t) = B_f u(t)$$

A matriz  $A_c$ , de ordem  $N \times N$ , sendo  $N$  duas vezes o número de graus de liberdade do sistema, é a matriz de estado que descreve a dinâmica do sistema, a matriz  $B_c$ , de ordem  $N \times m$ , sendo  $m$  o número de entradas, é a matriz de entrada. A matriz  $C_c$ , de ordem  $l \times N$ , sendo  $l$  o número de saídas, é a matriz de saída e a matriz  $D_c$ , de ordem  $l \times m$ , é a matriz de transmissão direta. O vetor  $x(t)$ , de ordem  $N \times 1$ , é o vetor de estado e o vetor  $u(t)$  é o vetor de entrada que é assumido ser um sinal de característica aleatória. O vetor de interesse neste caso, vetor de saída  $y(t)$ , é um estado ou uma combinação linear dos estados do sistema. O número de elementos do vetor de estado é o número de variáveis independentes necessário para descrever o estado do sistema.

A matriz de estado  $A_c$  é dada em função dos parâmetros do sistema, matriz de massa, amortecimento e rigidez. Já a matriz de entrada  $B_c$  depende também das entradas e, portanto, é

necessário antes conhecer o número de entradas  $u$  e suas localizações. A matriz de saída  $C_c$  depende do número e localização dos sensores usados para medir a saída do sistema.

As Equações (4.2) e (4.3) constituem o modelo de estado de um sistema dinâmico determinístico contínuo no tempo. Contínuo neste caso significa que as expressões podem ser avaliadas a cada instante de tempo  $t$  e determinístico significa que a entrada  $u(t)$  e a saída  $y(t)$  são conhecidas.

#### 4.1.1.2 Sistema em tempo discreto

A identificação das matrizes  $A_c$ ,  $B_c$ ,  $C_c$  e  $D_c$  é apropriada para modelos contínuos e determinísticos, no entanto, nos procedimentos experimentais as medidas são representadas por sinais discretos no tempo. Assim, se faz necessário à representação do modelo em espaço de estado em tempo discreto. Isso é feito considerando as variáveis medidas em intervalos de tempo igualmente espaçados de  $\Delta t$ , ou seja, a variável  $t$  é definida para os instantes  $t = 0, \Delta t, \dots, k\Delta t, (k+1)\Delta t, \dots, (l-1)\Delta t$ , sendo  $l$  o número de pontos (discretização) da variável medida. Neste caso, as matrizes do sistema de estado contínuo são redefinidas na forma discreta (JUANG; PHAN, 2001). A matriz de estado e a matriz de entrada no tempo discreto são dadas pelas equações (4.4) e (4.5).

$$A_d = e^{A_c \Delta t} \quad (4.4)$$

$$B_d = \left( \int_0^{\Delta t} e^{A_c \alpha} d\alpha \right) B_c \quad (4.5)$$

As matrizes representadas no tempo discreto e contínuo mantêm uma relação direta entre elas, dadas por:

$$A_c \Delta t = \ln A_d \Leftrightarrow A_c = \frac{1}{\Delta t} \ln A_d \quad (4.6)$$

$$B_d = [e^{A_c \Delta t} - I] A_c^{-1} B_c = [A_d - I] A_c^{-1} B_c \quad (4.7)$$

$$C_d = C_c \quad (4.8)$$

$$D_d = D_c \quad (4.9)$$

Desta forma, o modelo de estado em tempo discreto é dado pelas equações (4.10) e (4.11).

$$x_{k+1} = A_d x_k + B_d u_k \quad (4.10)$$

$$y_k = C_d x_k + D_d u_k \quad (4.11)$$

A variável  $x_{k+1}$  é o vetor de estado do processo no tempo discreto  $k+1$  e contém os valores numéricos dos  $n$  estados.

#### 4.1.1.3 Modelo de Espaço de Estado Estocástico

No modelo de espaço de estado discutido acima, além da entrada  $u_k$  existe a presença de ruído nos dados medidos e incertezas do modelo, associadas ao ruído no processo e na medição. No processo o ruído está presente devido às perturbações e erros de modelagem e nas medidas devido à influências externas não controladas. Se os componentes estocásticos, ruído do processo  $w_k$  e da medição  $v_k$  são incluídos nas equações (4.10) e (4.11), o modelo do sistema discreto pode ser redefinido para incluir também as incertezas, Eq. (4.12) e Eq. (4.13).

$$x_{k+1} = A_d x_k + B_d u_k + w_k \quad (4.12)$$

$$y_k = C_d x_k + D_d u_k + v_k \quad (4.13)$$

A determinação correta das características de cada componente individual de ruído é muito difícil e, portanto, fazem-se necessárias algumas suposições. Neste caso é assumido que as componentes do ruído, embora não medidas, sejam estacionárias, com média zero e que possuam as características de um ruído branco gaussiano, com matrizes de covariância dadas pela equação (4.14). Adicionalmente, as seqüências  $w_k$  e  $v_k$  são assumidas independentes uma da outra.

$$\mathbf{E} \left[ \begin{pmatrix} w_p \\ v_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_q^T & v_q^T \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} \mathbf{E} \begin{bmatrix} w_p & w_q^T \\ v_p & w_q^T \end{bmatrix} & \mathbf{E} \begin{bmatrix} w_p & v_q^T \\ v_p & v_q^T \end{bmatrix} \\ \mathbf{E} \begin{bmatrix} v_p & w_q^T \\ v_p & v_q^T \end{bmatrix} & \mathbf{E} \begin{bmatrix} v_p & v_q^T \end{bmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{pmatrix} \delta_{pq} \geq 0 \quad (4.14)$$

onde  $\delta_{pq}$  é o delta de Kronecker,  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}, S \in \mathbb{R}^{n \times l}, R \in \mathbb{R}^{l \times l}$  são as matrizes de covariância das seqüências de ruído  $w_k$  e  $v_k$ .

Nos testes de vibração baseados nas condições de operação, somente as respostas da estrutura são medidas e é assumido que a entrada é aleatória com características de um ruído branco gaussiano, portanto, é impossível distinguir a entrada  $u_k$  dos termos de ruído  $w_k$  e  $v_k$  nas equações (4.12) e (4.13). Se a característica da entrada é típica de um ruído branco então, a entrada  $u_k$  pode ser modelada implicitamente pelos termos de ruído  $w_k$  e  $v_k$ , resultando em um sistema puramente aleatório, equação (4.15) e (4.16).

$$x_{k+1} = A_d x_k + w_k \quad (4.15)$$

$$y_k = C_d x_k + v_k \quad (4.16)$$

A figura 4.1 mostra esquematicamente um modelo estocástico linear, invariante no tempo, formado pelas saídas  $y_k$ , os termos de ruídos  $w_k$  e  $v_k$ , os estados  $x_k$  e o sistema de matrizes  $A$  e  $C$ , descrito pelas equações (4.15) e (4.16).

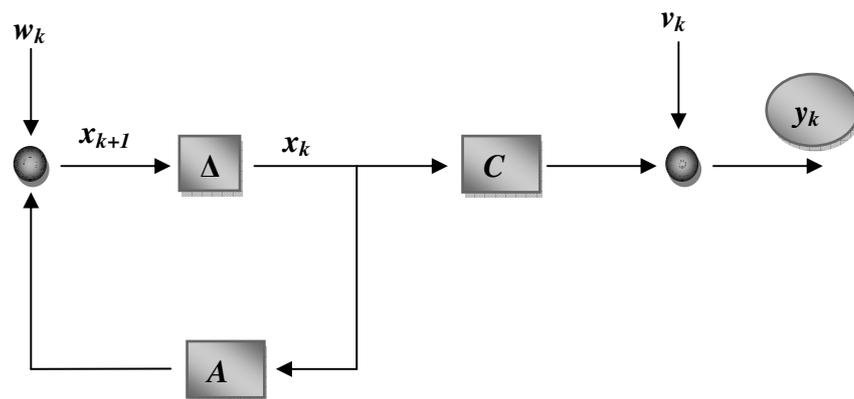


Figura 4.1 - Sistema linear, estocástico e invariante.

O símbolo  $\Delta$  representa a defasagem.

As equações (4.15) e (4.16) formam a base para a identificação de sistemas no domínio do tempo quando apenas as respostas do sistema são medidas, ou seja, testes de vibração ambiente.

#### 4.1.2 Propriedades dos Sistemas Estocásticos

Nesta seção serão apresentadas as principais propriedades de um processo estocástico linear e invariante no tempo, com o objetivo de fornecer as informações teóricas necessárias para o entendimento da formulação da IES.

Se o processo estocástico representado pelas equações (4.15) e (4.16) é estacionário, a matriz de covariância do estado  $x_k$ , pode ser definida como:

$$\sum_k \stackrel{\text{def}}{=} E[ x_k ( x_k )^T ] \quad (4.17)$$

sendo a matriz  $\sum$  independente do tempo  $k$ .

Na formulação de espaço de estado, conforme discutido em Van Overschee e De Moor, (1994.b), existem várias representações de modelos de espaço de estado estocásticos e todas as representações são equivalentes, no sentido de que todas as informações estatísticas geradas pelo modelo são as mesmas, ou seja, as seqüências das covariâncias dos dados de saída são idênticas. Neste trabalho foi utilizado um modelo recursivo com avanço (Modelo *Forward*) descrito abaixo.

##### 4.1.2.1 Modelo Forward

Nesta seção são desenvolvidas algumas relações estruturais para processos estocásticos lineares e invariantes no tempo. Como  $w_k$  e  $v_k$  são considerados ruídos brancos, independentes do estado  $x_k$ , tem-se que:

$$E[ x_k v_k^T ] = 0 \quad (4.18)$$

e

$$E[ x_k w_k^T ] = 0 \tag{4.19}$$

Das equações (4.17) e (4.18) é possível encontrar a equação de Lyapunov para a matriz de covariância do estado  $x_{k+1}$ , dada por :

$$\Sigma_{k+1} = E[ x_{k+1} ( x_{k+1} )^T ] \tag{4.20-a}$$

$$\Sigma_{k+1} = E[ ( Ax_k + w_k ) ( Ax_k + w_k )^T ] \tag{4.20-b}$$

$$\Sigma_{k+1} = AE[ x_k ( x_k )^T ] A^T + E[ w_k w_k^T ] \tag{4.20-c}$$

$$\Sigma_{k+1} = A \Sigma_k A^T + Q \tag{4.20-d}$$

As equações de Lyapunov possuem um importante papel na análise de estabilidade de sistemas. Na equação (4.20-d) como  $\Sigma$  e  $Q$  são maiores que zero o sistema  $x_{k+1} = A_d x_k$  é estável (LYAPUNOV, 1966).

A matriz  $A_i$  é definida como a matriz de covariância dos dados de saída  $y_k$ :

$$A_i \stackrel{def}{=} E[ y_{k+i} y_k^T ] \tag{4.21}$$

Para  $i = 0$  encontra-se:

$$A_0 = E[ y_k y_k^T ] \tag{4.22-a}$$

$$A_0 = E[ ( Cx_k + v_k ) ( Cx_k + v_k )^T ] \tag{4.22-b}$$

$$A_0 = CE[ x_k ( x_k )^T ] C^T + E[ v_k v_k^T ] \tag{4.22-c}$$

$$A_0 = C \Sigma_k C^T + R \tag{4.22-d}$$

Também pode-se escrever a matriz de covariância  $G$  entre o estado  $x_{k+1}$  e os dados de saída  $y_k$  :

$$G \stackrel{\text{def}}{=} E[ x_{k+1} y_k^T ] \quad (4.23-a)$$

$$G = E[ (Ax_k^s + w_k)(Cx_k^s + v_k)^T ] \quad (4.23-b)$$

$$G = AE[ x_k^s (x_k^s)^T ] C^T + E[ w_k v_k^T ] \quad (4.23-c)$$

$$G = A \sum_k C^T + S \quad (4.23-d)$$

Quando um sistema é excitado por uma força que tem densidade espectral constante, a correlação cruzada da excitação e da resposta é conhecida por fornecer o sistema de funções de resposta ao impulso (Parâmetros de Markov). No caso onde a excitação não é medida, mas a estrutura e as forças podem ser modeladas conforme descrito acima, as funções de correlação de saída  $A_i$  são equivalentes à resposta livre do sistema (JAMES et al, 1995).

Para ( $i = 1, 2, \dots$ ) tem-se que:

$$A_i = CA^{i-1}G \quad (4.24)$$

A equação (4.24) é muito importante, pois ela indica que as matrizes de correlação de saída podem ser consideradas como a resposta ao impulso e, portanto pode ser aplicada aos algoritmos de identificação estocástica.

Adicionalmente, os algoritmos de identificação de subespaço, conforme Van Overschee e De Moor (1996) mostram, fazem extensivo uso das matrizes de Hankel, Observabilidade e Controlabilidade da estrutura em análise. Essas matrizes serão definidas na próxima seção.

### 4.1.3 Matrizes de Hankel, Observabilidade e Controlabilidade

A matriz de Hankel possui um importante papel nos algoritmos de identificação de subespaço, pois é nela que os dados da saída do sistema ficam agrupados. Estas matrizes podem ser facilmente construídas a partir dos dados de saída. A matriz de Hankel  $\mathcal{H}$  é definida em termos das saídas passadas e saídas futuras, Eq. (4.25).

$$\mathcal{H} = Y_{0|2i-1} \stackrel{def}{=} \begin{array}{c} \begin{array}{c} \uparrow \\ \mathbf{i} \\ \downarrow \end{array} \left( \begin{array}{cccc} \overleftarrow{\mathbf{j}} & & & \overrightarrow{\mathbf{j}} \\ y_0 & y_1 & \cdots & y_{j-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{i-2} & y_{i-1} & \cdots & y_{i+j-3} \\ \hline y_{i-1} & y_i & \cdots & y_{i+j-2} \\ y_{i+1} & y_{i+2} & \cdots & y_{i+j} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{2i-1} & y_{2i} & \cdots & y_{2i+j-2} \end{array} \right) \begin{array}{c} \downarrow \\ \mathbf{i} \\ \uparrow \end{array} \end{array} \begin{array}{l} \text{“passado”} \\ \text{“futuro”} \end{array} \quad (4.25)$$

ou

$$\mathcal{H} = Y_{0|2i-1} \stackrel{def}{=} \begin{pmatrix} Y_{0|i-1} \\ Y_{i|2i-1} \end{pmatrix} \stackrel{def}{=} \begin{pmatrix} Y_p \\ Y_f \end{pmatrix} \quad (4.26)$$

O número de blocos de linhas ( $i$ ) é um parâmetro definido pelo usuário. Teoricamente seu valor deve ser maior que o maior índice de observabilidade, mas como no entanto esse índice é desconhecido assume-se que  $i$  deve ser maior que a ordem do sistema que se deseja identificar.

O número de colunas ( $j$ ) é usualmente igual a  $s - 2i + 1$ , sendo  $s$  o número de pontos dos sinais de saída medidos, isto implica que todos os dados amostrados serão utilizados. Neste trabalho por razões estatísticas será sempre assumido que  $j, s \rightarrow \infty$ .

Os subscritos de  $Y_{0|2i-1}$ ,  $Y_{0|i-1}$ ,  $Y_{i|i}$  denotam o subscrito do primeiro e último elemento da primeira coluna da matriz de Hankel. O subscrito “ $p$ ” denota passado e “ $f$ ” futuro. As matrizes  $Y_p$  (entradas passadas) e  $Y_f$  (entradas futuras) são definidas dividindo-se a matriz  $Y_{0|2i-1}$  em duas partes iguais de  $i$  blocos de linhas. As matrizes  $Y_p^+$  e  $Y_f^-$  por outro lado são definidas mudando-se a borda entre as regiões de passado e futuro um bloco de linhas para baixo. (O subscrito “+” denota a adição de um bloco de linha enquanto o subscrito “-” denota a retirada de um bloco de linha), Eq. (4.27).

$$\begin{pmatrix} Y_{0|i} \\ Y_{i+1|2i-1} \end{pmatrix} \stackrel{def}{=} \begin{matrix} \begin{matrix} \leftarrow j \rightarrow \\ \begin{pmatrix} y_0 & y_1 & \dots & y_{j-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{i-2} & y_{i-1} & \dots & y_{i+j-3} \\ y_{i-1} & y_i & \dots & y_{i+j-2} \\ y_i & y_{i+1} & \dots & y_{i+j-1} \\ \hline y_{i+1} & y_{i+2} & \dots & y_{i+j} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{2i-1} & y_{2i} & \dots & y_{2i+j-2} \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} \uparrow i+1 \\ \downarrow i-1 \end{matrix} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{“passado”} \\ \text{“futuro”} \end{matrix} \end{matrix} \stackrel{def}{=} \begin{pmatrix} Y_p^+ \\ Y_f^- \end{pmatrix} \quad (4.27)$$

Embora a distinção entre passado e futuro possa parecer sem sentido, esta notação é usual em um contexto intuitivo, pois os termos passado e futuro se referem aos instantes de tempo em que as respostas foram obtidas, ou seja, o conjunto de todas as respostas futuras foi obtido em instantes de tempo posteriores àqueles que foram obtidas as respostas passadas. Note também que as saídas passadas e futuras têm muitos elementos em comum, por exemplo,  $y_i$  pode ser encontrado tanto em  $Y_p$  como em  $Y_p^+$ . Entretanto as colunas de  $Y_p$  e  $Y_p^+$  não têm elementos em comum, desta maneira é feita a distinção entre passado e futuro.

A matriz de observabilidade  $\Gamma_i$  (onde  $i$  indica o número de blocos de linhas) é definida como:

$$\Gamma_i \stackrel{def}{=} \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \dots \\ CA^{i-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{li \times n} \quad (4.28)$$

Assumindo-se que o par  $\{A,C\}$  é observável, isso implica que o posto de  $\Gamma_i$  é igual a  $n$ .

A matriz de controlabilidade estendida estocástica  $\Delta_i^c$  (onde o subscrito  $i$  denota o número de bloco de colunas e o sobrescrito  $c$  denota “covariância”) é definida como:

$$\Delta_i^c \stackrel{def}{=} \begin{pmatrix} A^{i-1}G & A^{i-2}G & \dots & AG & G \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times li} \quad (4.29)$$

Assumindo-se que o par  $\{A, Q^{1/2}\}$  é controlável e todos os modos de  $A$  são estáveis, isto implica que todos os modos dinâmicos do sistema são excitados pelo ruído de processo.

As Matrizes de Toeplitz  $C_i$  e  $L_i$  são construídas a partir das matrizes de covariância dos dados de saída, Eq. (4.30) e Eq. (4.31).

$$C_i \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} A_i & A_{i-1} & \dots & A_2 & A_1 \\ A_{i+1} & A_i & \dots & A_3 & A_2 \\ A_{i+2} & A_{i+1} & \dots & A_4 & A_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{2i-1} & A_{2i-2} & \dots & A_{i+1} & A_i \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{lixli} \quad (4.30)$$

$$L_i \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} A_0 & A_{-1} & A_{-2} & \dots & A_{1-i} \\ A_1 & A_0 & A_{-1} & \dots & A_{2-i} \\ A_2 & A_1 & A_0 & \dots & A_{3-i} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{i-1} & A_{i-2} & A_{i-3} & \dots & A_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{lixli} \quad (4.31)$$

As matrizes  $C_i$  e  $L_i$  tem um importante papel no método de identificação estocástica baseado na análise das covariâncias de saída, pois a partir da DVS das matrizes de Toeplitz é possível obter as matrizes de observabilidade e controlabilidade estocásticas (PEETERS, 2000). No entanto, o método estudado neste trabalho é baseado diretamente nos dados de saída, sem a necessidade de se ter uma formulação explícita da covariância. Neste caso, as matrizes de Toeplitz serão utilizadas diretamente na formulação da estimativa dos estados do filtro de Kalman, como mostra a seção 4.1.4.

Finalmente, uma importante consideração deve ser observada sobre a estimativa da matriz de covariância dos dados de saída. Neste caso, assume-se que ela pode ser estimada diretamente a partir das equações (3.62) e (3.67) (ver seção 3.6 para a definição de  $E_j$  e de  $\Phi_{[A,B]}$ ).

$$A_i = E_j \left[ \sum_{k=0}^{j-1} y_{k+1} y_k^T \right] \quad (4.32)$$

$$A_i = \Phi_{[Y_i|Y_0]} \quad (4.33)$$

Da observação acima, conforme discutido em Van Overschee e De Moor (1994.a), segue que:

$$C_i = \Phi_{[Y_f, Y_p]} \quad (4.34)$$

$$L_i = \Phi_{[Y_p, Y_p]} \quad (4.35)$$

$$L = \Phi_{[Y_f, Y_f]} \quad (4.36)$$

#### 4.1.4 Estados do Filtro de Kalman

O filtro de Kalman possui um papel crucial no entendimento da formulação da IES. A teoria apresentada em Anderson e Moore (1979) e Jazwinski (1970) mostra que o filtro de Kalman é um procedimento recursivo que permite determinar um estimador ótimo do vetor de estado  $x_k$ , a partir das informações dos dados de saída do sistema até o tempo  $k$ .

O filtro de Kalman é um conjunto de equações matemáticas que constitui um processo recursivo eficiente de estimação, uma vez que o erro quadrático é minimizado (WELCH; BISHOP, 1995). Através da observação da variável denominada “variável de observação” outra variável, não observável, denominada “variável de estado” pode ser estimada eficientemente. Podem ser estimados os estados passados, o estado presente e mesmo previstos os estados futuros. O filtro de Kalman é um procedimento aplicável quando os modelos estão escritos sob a forma de espaço de estado.

Nesta seção, será introduzido uma formato para o estado do filtro de Kalman gerando uma seqüência de estados estimados, possibilitando assim, a avaliação das matrizes do sistema. A seqüência de estado estimada será denotado por  $\hat{x}_k$ .

A partir do estado inicial estimado ( $\hat{x}_0 = 0$ ), da covariância inicial do estado estimado ( $P_0 = E[\hat{x}_0 \hat{x}_0^T] = 0$ ) e das medidas dos dados de saída  $y_0, \dots, y_{k-1}$ , o estado estimado do filtro de Kalman  $\hat{x}_k$  pode ser explicitamente escrito como (VAN OVERSCHEE; DE MOOR, 1993):

$$\hat{x}_k = A_k^c L_k^{-1} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \dots \\ y_{k-1} \end{pmatrix} \tag{4.37}$$

A equação (4.37) é muito importante, pois indica que o estado estimado do filtro de Kalman pode ser escrito como uma combinação linear das medidas de saídas passadas  $y_0, \dots, y_{k-1}$ .

Esta observação permite a definição da seqüência do estado do filtro de Kalman que será utilizada nos algoritmos de identificação de subespaço, Eq. (4.38).

$$\hat{X}_i = (\hat{x}_i \quad \hat{x}_{i+1} \quad \dots \quad \hat{x}_{i+j-1}) \tag{4.38}$$

ou

$$\hat{X}_i = A_i^c L_i^{-1} Y_p \tag{4.39}$$

Esta seqüência de estado é gerada por um banco de estado de filtros de Kalman trabalhando em paralelo com cada coluna da matriz de bloco de Hankel das saídas passadas. A figura 4.2 ilustra esse conceito.

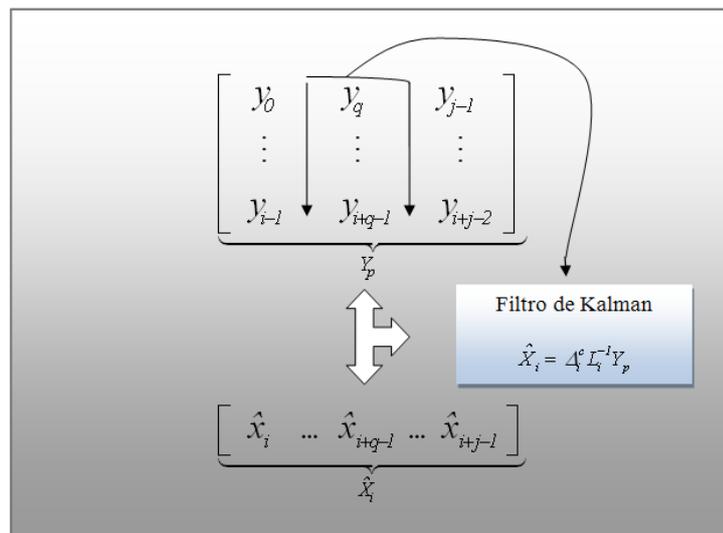


Figura 4.2 – Interpretação da seqüência  $\hat{X}_i$  como uma seqüência do filtro de estado de Kalman estimada sobre  $i$  medidas de  $y_k$ .

Os bancos do filtro de Kalman percorrem a direção vertical sobre as colunas, Eq. (4.40).

$$\hat{x}_{i+q} = \Delta_i^c L_i^{-1} \begin{pmatrix} y_q \\ \vdots \\ y_{i+q-1} \end{pmatrix} \tag{4.40}$$

A equação acima indica que o filtro de Kalman que gera a estimativa de  $\hat{x}_{i+q}$ , usa apenas  $i$  medidas de saída  $y_q, \dots, y_{i+q-1}$ , em vez de todas as medidas de saída até o tempo  $i+q-1$ , ou seja,  $y_0, \dots, y_{i+q-1}$ , como seria esperado.

### 4.1.5 Teorema Principal da IES

O teorema principal da IES permite estabelecer o espaço das linhas da seqüência de estado  $\hat{X}_i$  e o espaço de colunas da matriz de observabilidade estendida  $\Gamma_i$  diretamente dos dados de saída, sem qualquer conhecimento prévio do sistema de matrizes  $A$  e  $C$ , como exemplificado na figura 4.3.

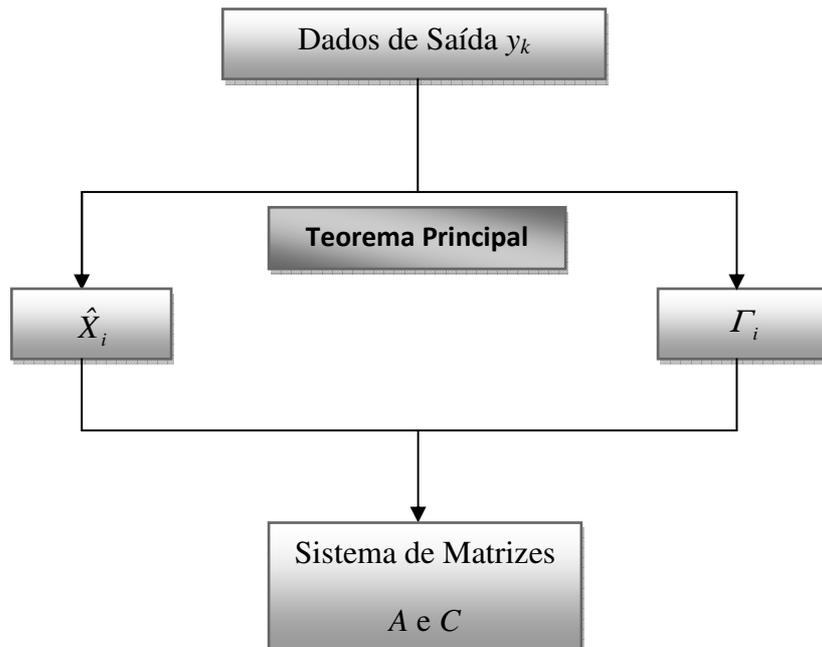


Figura 4.3 – Visão geral do teorema principal da IES

No decorrer da apresentação deste teorema serão utilizadas as matrizes de ponderação  $W_1$  e  $W_2$ , as quais, determinam a base do espaço de estado na qual o modelo será identificado. A interpretação e significados destas matrizes serão apresentados posteriormente na seção 4.1.6.

O teorema principal da IES é sustentado pelas seguintes considerações:

1. O ruído de processo  $w_k$  e o ruído de medida  $v_k$  não são nulos;
2. O número de pontos utilizados na medição dos sinais de saída tende ao infinito ( $j \rightarrow \infty$ );
3. As matrizes de ponderação  $W_1 \in \mathbb{R}^{l \times l}$  e  $W_2 \in \mathbb{R}^{j \times j}$  são tais que  $W_1$  tem posto completo e  $W_2$  obedece a igualdade:  $posto(Y_p) = posto(Y_p \cdot W_2)$ ;
4. O espaço das saídas futuras é projetado no espaço das saídas passadas, através da projeção ortogonal  $\mathcal{O}_i$ , Eq. (4.41);

$$\mathcal{O}_i \stackrel{def}{=} Y_f / Y_p \tag{4.41}$$

5. A projeção ortogonal  $\mathcal{O}_i$  ponderada pelas matrizes  $W_1$  e  $W_2$  é decomposta em valores singulares, Eq. (4.42).

$$W_1 \mathcal{O}_i W_2 = (U_1 \quad U_2) \begin{pmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{pmatrix} = U_1 S_1 V_1^T \tag{4.42}$$

A demonstração dessas 5 afirmações são mostrada no apêndice 1 e ela mostra que:

- I. A projeção ortogonal  $\mathcal{O}_i$  é igual ao produto da matriz de observabilidade estendida e da seqüência de estado do filtro de Kalman:

$$\mathcal{O}_i = \Gamma_i \hat{X}_i \tag{4.43}$$

- II. A ordem do sistema (4.15) - (4.16) é igual ao número de valores singulares  $S_1$  na equação (4.42) diferentes de zero.

III. A matriz de observabilidade estendida  $\Gamma_i$  e a matriz de controlabilidade estendida são iguais a:

$$\Gamma_i = W_i^{-1} U_i S_i^{\frac{1}{2}} T \tag{4.44}$$

$$A_i^c = \Gamma_i^{\dagger} \Phi_{(Y_f, Y_p, l)} \tag{4.45}$$

IV. A parte da seqüência de estado  $\hat{X}_i$  que se encontra no espaço das colunas de  $W_2$  pode ser obtido de:

$$\hat{X}_i W_2 = T^{-1} S_i^{\frac{1}{2}} V_i^T \tag{4.46}$$

V. A seqüência de estado  $\hat{X}_i$  é igual a:

$$\hat{X}_i = \Gamma_i^{\dagger} \mathcal{O}_i \tag{4.47}$$

#### 4.1.5.1 Interpretação Geométrica

A equação (4.41) mostra que o espaço das linhas dos estados  $\hat{X}_i$  pode ser encontrados através da projeção ortogonal do espaço das linhas das saídas futuras  $Y_f$  no espaço das linhas das saídas passadas  $Y_p$ . Este conceito é ilustrado na figura 4.4.

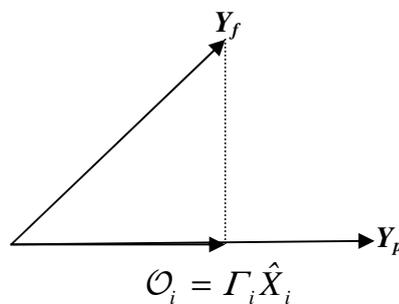


Figura 4.4 – Ilustração Gráfica do Teorema Principal da IES.

### 4.1.6 Variantes dos Algoritmos de Identificação

Existem algumas variantes que podem ser aplicadas nos algoritmos da IES. Elas diferem entre si quanto a ponderação da projeção ortogonal dos dados de saída antes da aplicação da DVS . Esta ponderação determina a base do espaço de estado na qual o modelo será identificado. A Tabela 4.1 mostra algumas variantes já bem conhecidas da literatura: Análise Canônica (CVA), Componentes Principais (PC) e Componentes Principais não Ponderados (UPC). Esta última variante algumas vezes é chamada também de Realização Balanceada (BR). Os nomes, abreviações e a descrição destas variantes correspondem a convenção mostrada em Arun e Kung, 1990.

Tabela 4.1 – Ponderações  $W_1$  e  $W_2$

	$W_1$	$W_2$
<i>PC</i>	$I_{li}$	$Y_p^T \Phi_{[Y_p, Y_p]}^{-1/2} Y_p$
<i>UPC</i>	$I_{li}$	$I_j$
<i>CVA</i>	$\Phi_{[Y_f, Y_f]}^{-1/2}$	$I_j$

Neste trabalho foi utilizada a variante CVA e esta seção mostrará como o teorema principal da IES pode ser relacionado com a variante CVA (AKAIKE, 1975). Para maiores detalhes das outras variantes ver (VAN OVERSCHEE; DE MOOR, 1996).

#### 4.1.6.1 Variação Canônica (CVA)

Através do algoritmo CVA é possível calcular os ângulos e direções principais entre o espaço das linhas das saída passadas  $Y_p$  e das saídas futuras  $Y_f$ . Este algoritmo se relaciona com o teorema principal da IES através das matrizes de ponderação  $W_1$  e  $W_2$ , escolhidas como mostram as equações (4.48) e (4.49)

$$W_1 = \Phi_{[Y_f, Y_f]}^{-1/2} \quad (4.48)$$

$$W_2 = I_j \quad (4.49)$$

A partir da escolha acima, encontra-se a matriz de covariância da projeção  $\mathcal{O}_i$  ponderada pelas matrizes  $W_1$  e  $W_2$  e sua respectiva DVS:

$$(W_1 \mathcal{O}_i)(W_1 \mathcal{O}_i)^T = \Phi_{[Y_f, Y_f]}^{-1/2} \Phi_{[Y_f, Y_p]} \Phi_{[Y_p, Y_p]}^{-1} \Phi_{[Y_p, Y_f]} \Phi_{[Y_f, Y_f]}^{-1/2} \quad (4.50)$$

$$(W_1 \mathcal{O}_i)(W_1 \mathcal{O}_i)^T = U_1 S_1^2 U_1^T \quad (4.51)$$

Comparando-se estas expressões com a equação (3.71), verifica-se que a diagonal de  $S_1$  contém os cossenos dos ângulos principais. Para esta escolha de pesos, e com  $U_1, S_1, V_1$  a decomposição em valores singulares da projeção  $\mathcal{O}_i$  é dada por:

$$W_1 \mathcal{O}_i = \Phi_{[Y_f, Y_f]}^{-1/2} \mathcal{O}_i \quad (4.52)$$

$$W_1 \mathcal{O}_i = \Phi_{[Y_f, Y_f]}^{-1/2} \Phi_{[Y_f, Y_p]} \Phi_{[Y_p, Y_p]}^{-1} Y_p \quad (4.53)$$

$$W_1 \mathcal{O}_i = U_1 S_1 V_1^T \quad (4.54)$$

Utilizando as equações (3.72) - (3.74), mostra-se que:

$$[Y_p \rightarrow \rightarrow Y_f] = V_1^T \quad (4.55)$$

$$[Y_p \rightarrow \rightarrow Y_f] = U_1^T \Phi_{[Y_f, Y_f]}^{-1/2} Y_f \quad (4.56)$$

$$[Y_p \ \leftarrow Y_f] = S_l \tag{4.57}$$

Além disso, encontra-se a partir do teorema principal que as matrizes de observabilidade e controlabilidade podem ser escritas como:

$$\Gamma_i = \Phi_{[Y_f, Y_p]}^{1/2} U_l S_l^{1/2}$$

$$A_i^c = S_l^{1/2} \Phi_{[V_l^T, Y_p]}$$

e que a seqüência de estado pode ser expressa como:

$$\hat{X}_i = S_l^{1/2} V_l^T \tag{4.58}$$

#### 4.1.7 Cálculo do Sistema de Matrizes

O sistema de matrizes  $A_d$  e  $C_d$  pode ser calculado a partir das informações descritas no teorema principal da IES. O sistema de matrizes pode ser obtido a partir de um algoritmo que utiliza a seqüência de estados  $\hat{X}_i$  e a matriz de observabilidade  $\Gamma_i$ . A matriz de observabilidade estendida  $\Gamma_i$  e a a seqüência de estados  $\hat{X}_i$  são obtidas a partir do teorema principal da IES utilizando as equações (4.44) e (4.47) respectivamente

De uma maneira similar ao raciocínio apresentado no teorema principal, pode obter uma nova projeção dando um deslocamento de  $\Delta t$  nas respostas passadas e futuras:

$$\mathcal{O}_{i-1} = Y_f^- \mid Y_p^+ \tag{4.59}$$

$$\mathcal{O}_{i-1} = \Gamma_{i-1} \hat{X}_{i+1} \tag{4.60}$$

Assim,  $\mathcal{O}_{i-1}$  pode ser facilmente calculado a partir dos dados de saída. É fácil checar também que retirando as  $l$  últimas linhas de  $\Gamma_i$  calculado de (4.44), encontra-se  $\Gamma_{i-1}$ :

$$\Gamma_{i-1} = \underline{\Gamma}_i \tag{4.61}$$

Onde  $\underline{\Gamma}_i$  denota a matriz  $\Gamma_i$  sem as últimas  $l$  linhas. Agora  $\hat{X}_{i+l}$  pode ser calculado, Eq. (4.62).

$$\hat{X}_{i+l} = \Gamma_{i-l}^+ \mathcal{O}_{i-l} \quad (4.62)$$

A formulação apresentada mostra que o objetivo final da identificação é encontrar as matrizes  $A_d$  e  $C_d$ . Até este momento, temos calculado  $\hat{X}_i$  e  $\hat{X}_{i+l}$  usando apenas os dados de saída.

Então, pode-se formar o seguinte conjunto de equações lineares:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \hat{X}_{i+l} \\ Y_{i|i} \end{pmatrix}}_{\text{Conhecido}} = \begin{pmatrix} A_d \\ C_d \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} \hat{X}_i \end{pmatrix}}_{\text{Conhecido}} + \underbrace{\begin{pmatrix} p_w \\ p_v \end{pmatrix}}_{\text{Resíduos}} \quad (4.63)$$

onde:  $Y_{i|i}$  é a matriz de bloco de Hankel com apenas um bloco de linhas. Este conjunto de equações pode ser facilmente resolvido para  $A$  e  $C$ . Intuitivamente, desde que os resíduos não sejam correlacionados com  $\hat{X}_i$  pode-se resolver o conjunto de equações pelo método dos mínimos quadrados:

$$\begin{pmatrix} A_d \\ C_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{X}_{i+l} \\ Y_{i|i} \end{pmatrix} \hat{X}_i^+ \quad (4.64)$$

A figura 4.5 resume os passos deste algoritmo.

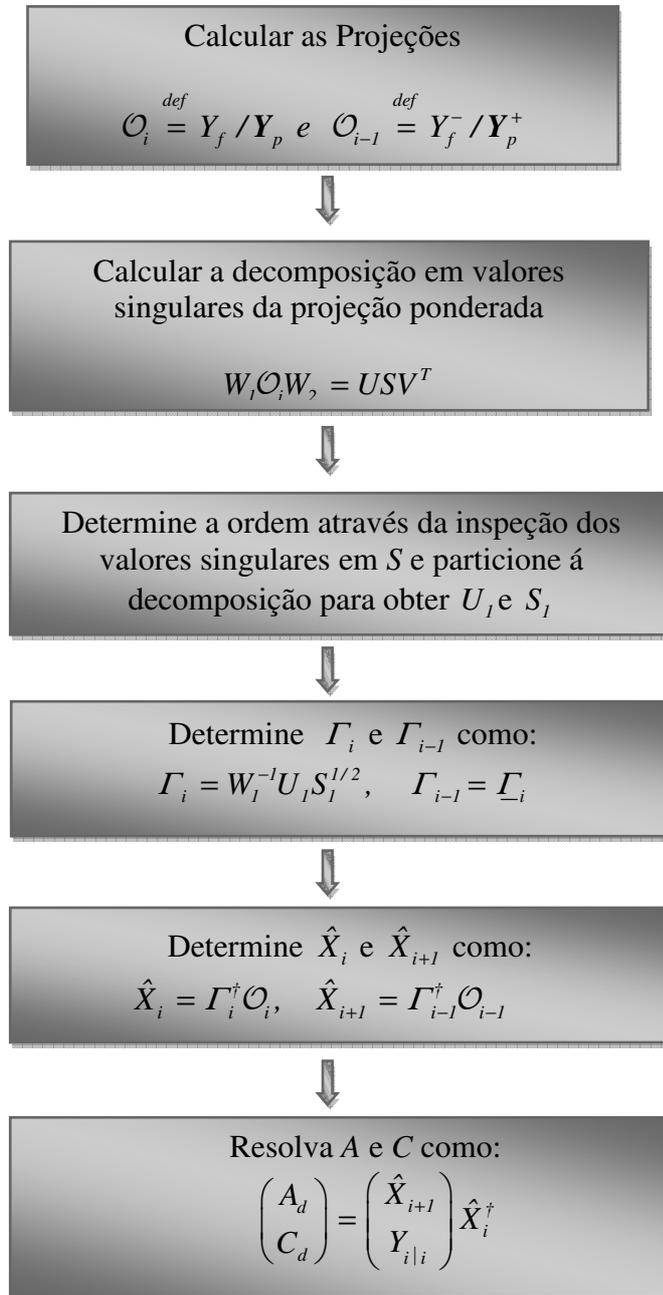


Figura 4.5 – Visão geral esquemática do algoritmo da IES.

#### 4.1.8 Identificação dos Parâmetros Modais

A aplicação do método de identificação de sistemas descrito anteriormente leva a identificação das matrizes de estado do sistema no tempo discreto e o cálculo dos autovalores e autovetores da matriz de estado contínua  $A_c$  caracteriza o comportamento dinâmico da estrutura. Entretanto a extração dos parâmetros modais não é tão imediata e é necessário uma readequação para o tempo contínuo.

Uma vez obtida a matriz de estado discreta  $A_d$ , cuja decomposição em autovalores e autovetores caracteriza o comportamento dinâmico da estrutura, é possível obter os parâmetros modais do modelo. A equação (4.65) mostra a decomposição em autovalores e autovetores da matriz  $A$ .

$$A_d = \Psi \Lambda \Psi^{-1} \quad (4.65)$$

Em que  $\Psi \in \mathbb{C}^{n \times n}$  é uma matriz cujas colunas são os autovetores do sistema discreto e  $\Lambda = \text{diag}(\lambda_i) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , com  $i=1,2,\dots,n$ , é uma matriz diagonal que contém os autovalores do sistema discreto  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ . Os autovalores discretos são relacionados com os autovalores  $\mu_i$  da matriz de estado no tempo contínuo pela equação (4.66).

$$\mu_i = \frac{1}{\Delta t} \ln(\lambda_i) \quad (4.66)$$

Os autovalores de  $A_c$  são pares de valores complexos conjugados. A razão de amortecimento modal  $\xi_i$  e a frequência natural  $\omega_i$  da estrutura são obtidas a partir dos autovalores contínuos da estrutura, Eq. (4.67)

$$\mu_i, \bar{\mu}_i = -\xi_i \omega_i \pm j \omega_i \sqrt{1 - \xi_i^2} \quad (4.67)$$

Onde  $j^2 = -1$ . Os autovetores do sistema (colunas de  $\Psi \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ) são os mesmos para a representação no tempo discreta como para a representação no tempo contínuo. Os modos de vibrar (definidos como colunas de  $\Phi \in \mathbb{C}^{l \times n}$ ) são a parte observável dos autovetores do sistema e são então obtidos usando a equação de observação, Eq. (4.68).

$$\Phi = C\Psi \quad (4.68)$$

Dessa forma, os parâmetros modais  $\omega_i$ ,  $\xi_i$  e  $\Phi_i$  são obtidos a partir das matrizes do sistema  $A$  e  $C$  identificadas no tempo discreto e posteriormente adaptadas para tempo contínuo.

#### 4.1.9 Diagrama de Estabilização

A determinação da ordem do modelo é um problema típico presente na estimativa de um modelo de espaço de estado a partir de um conjunto de dados experimentais. Na dinâmica estrutural costuma-se superestimar a ordem do modelo a fim de reduzir erros e permitir a captura de todas as características relevantes da estrutura. Entretanto, como consequência, da utilização da ordem superestimada e também devido a presença de ruído nas respostas medidas, pode ocorrer o surgimento de modos espúrios ou modos numéricos que não apresentam correlação com o problema estrutural. Neste caso, os modos espúrios podem ser identificados como modos físicos e contaminam a identificação dos parâmetros modais do modelo, comprometendo a confiabilidade dos resultados.

Uma ferramenta adequada para a estimativa da ordem do modelo a ser usado no cálculo dos parâmetros modais é a construção de um diagrama de estabilização. A idéia básica na construção do diagrama de estabilização (VAN DER AUWERAER; PEETERS, 2004) é proceder a repetição do processo de identificação, variando a ordem do modelo e posteriormente verificar a estabilidade (variação) dos parâmetros estimados em função da ordem utilizada.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ordem} = 1 \Rightarrow [\omega_n^1], [\xi_n^1], [\Phi_n^1] \\ \text{Ordem} = 2 \Rightarrow [\omega_n^2], [\xi_n^2], [\Phi_n^2] \\ \vdots \\ \text{Ordem} = p \Rightarrow [\omega_n^p], [\xi_n^p], [\Phi_n^p] \end{array} \right.$$

Isso é feito comparando os parâmetros estimados, frequências naturais, razões de amortecimento e modos de vibrar correspondentes a ordem  $p$  com os parâmetros estimados para a ordem superior  $p+1$ . Se os parâmetros estimados não variam de uma ordem para a outra, os mesmos são considerados estáveis e correspondem a um modo físico, caso contrário são considerados como modos numéricos.

A tolerância para a estabilidade de um parâmetro modal é dada pelo usuário e pode ser assumida como uma porcentagem do respectivo parâmetro. Geralmente são usados os valores para o critério de estabilidade da ordem de até 2% para a estabilidade em frequência, 5% para o amortecimento e correlação de 95% dos modos, Eq. (4.69), Eq. (4.70) e Eq. (4.71).

$$\frac{\omega_n^p - \omega_n^{p+1}}{\omega_n^p} 100\% < 2\% \quad (4.69)$$

$$\frac{\xi_n^p - \xi_n^{p+1}}{\xi_n^p} 100\% < 5\% \quad (4.70)$$

$$\{1 - \text{MAC}(\phi_n^p, \phi_n^{p+1})\} 100\% < 5\% \quad (4.71)$$

onde  $p$  é a ordem do modelo.

Os modos físicos ou estruturais tendem a permanecer estáveis (constantes) com o aumento da ordem enquanto que os modos computacionais não permanecem dentro dos critérios de estabilidade.

Teoricamente na IES a ordem do modelo é o número de valores singulares diferentes de zero, encontrados na Eq. (4.42), entretanto, na prática, devido a presença de ruído, todos os valores singulares são diferentes de zero o que torna praticamente impossível a determinação desse parâmetro utilizando esse conceito, assim a construção de um diagrama de estabilização tem se mostrado uma ótima ferramenta para se obter a ordem do modelo e conseqüente estimativas dos parâmetros modais de forma confiável para aplicações reais.

## 4.2 Decomposição no Domínio da Freqüência

A Decomposição no Domínio da Freqüência – DDF é baseada na decomposição da matriz densidade espectral de potência dos dados de saída utilizando a técnica da Decomposição em Valores Singulares - DVS, apresentada no capítulo 3. A decomposição da matriz densidade espectral de potência nas linhas de freqüências correspondentes as regiões em torno dos picos de ressonância permite a estimativa dos modos de vibrar do sistema. O primeiro vetor singular obtido com a decomposição contém as respectivas informações daquele modo e o correspondente valor singular leva a uma estimativa da função densidade espectral equivalente a sistema de um grau de liberdade (1GL). Posteriormente, esses dados são transformados para o domínio do tempo, utilizando a transformada inversa de Fourier, e as razões de amortecimento são estimadas utilizando o conceito de decremento logarítmico.

A relação entre a entrada (excitação)  $f(t)$  de um sistema e a sua respectiva saída  $y(t)$ , pode ser expressa no domínio da freqüência, pela equação (4.72) (PAPOULIS, 1991, BENDAT; PIERSOL, 1986).

$$[S_{yy}(j\omega)] = [\bar{H}(j\omega)][S_{ff}(j\omega)][H^T(j\omega)] \quad (4.72)$$

onde: o sobrescrito (-) denota o complexo conjugado,  $[S_{ff}(j\omega)]$  é a matriz densidade espectral de potência (PSD) de entrada e  $[S_{yy}(j\omega)]$  é a matriz de densidade espectral de potência de saída (BENDAT; PIERSOL, 1993, MAIA, 1997). Para  $r$  entradas,  $[S_{ff}]$  é uma matriz de ordem  $rxr$  e a matriz de saída  $[S_{yy}]$  é de ordem  $mxm$ , sendo  $m$  o número de respostas medidas.  $[H(j\omega)]$  é a matriz Função de Resposta em Freqüência (FRF) de ordem  $m \times r$ .

A equação (4.72) pode ser rearranjada em uma forma mais conveniente, escrevendo as FRF(s) em termos de frações parciais. Neste caso, a matriz  $[H(j\omega)]$  é expressa em termos dos respectivos polos e resíduos (HEYLEN et al, 1995), Eq. (4.73).

$$[H(j\omega)] = \sum_{k=1}^n \frac{R_k}{j\omega - \lambda_k} + \frac{\bar{R}_k}{j\omega - \bar{\lambda}_k} \quad (4.73)$$

onde:  $n$  é o número de modos,  $\lambda_k$  é o  $k$ -ésimo pólo e  $R_k$  é o resíduo.

A substituição da equação (4.73) na equação (4.72), permite escrever a matriz de densidade espectral de potência de saída em termos dos parâmetros  $\lambda_k$  e  $R_k$  da matriz de densidade espectral de potência de entrada, Eq. (4.74).

$$[S_{yy}(j\omega)] = \left[ \sum_{k=1}^n \frac{R_k}{j\omega - \lambda_k} + \frac{\bar{R}_k}{j\omega - \bar{\lambda}_k} \right]^H [S_{ff}(j\omega)] \left[ \sum_{k=1}^n \frac{R_k}{j\omega - \lambda_k} + \frac{\bar{R}_k}{j\omega - \bar{\lambda}_k} \right]^T \quad (4.74)$$

Na análise modal baseada apenas na saída a equação (4.74) é simplificada assumindo que a excitação da estrutura tem o caráter de um ruído branco gaussiano, isto é, um processo estocástico com densidade espectral constante em uma larga faixa de frequência. Esta consideração permite identificar os picos dos espectros de potência das respostas com os picos das funções de resposta em frequência, podendo a partir destes, serem estimadas as frequências naturais da estrutura. Neste caso, dado as características das forças de entrada, a matriz de densidade espectral de entrada,  $[S_{ff}(j\omega)]$ , é igual a uma constante  $C$ . Portanto, escrevendo a equação (4.74) na forma de frações parciais, e substituindo a densidade espectral de entrada pela constante  $C$ , têm-se, Eq. (4.75).

$$S_{xx}(j\omega) = \sum_{k=1}^n \sum_{s=1}^n \left[ \frac{R_k}{j\omega - \lambda_k} + \frac{\bar{R}_k}{j\omega - \bar{\lambda}_k} \right] C \left[ \frac{R_s}{j\omega - \lambda_s} + \frac{\bar{R}_s}{j\omega - \bar{\lambda}_s} \right]^H \quad (4.75)$$

O resíduo  $R_k$  é dado pela equação (4.76).

$$R_k = \phi_k \gamma_k^T \quad (4.76)$$

onde:  $\phi_k$  o vetor com os modos de vibrar e  $\gamma_k$  o vetor de participação modal.

Multiplicando as duas frações parciais por um fator e fazendo uso do teorema das frações parciais, a densidade espectral de saída pode ser reduzida na forma de pólos e resíduos apenas, Eq. (4.76).

$$S_{xx}(j\omega) = \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{j\omega - \lambda_k} + \frac{\bar{A}_k}{j\omega - \bar{\lambda}_k} + \frac{B_k}{-j\omega - \lambda_k} + \frac{\bar{B}_k}{-j\omega - \bar{\lambda}_k} \quad (4.77)$$

$A_k$  é a matriz de resíduos da densidade espectral de saída. Assim como a matriz de densidade espectral, a matriz de resíduo é de ordem  $m \times m$  e é dada pela equação (4.78).

$$A_k = R_K C \left( \sum_{s=1}^n \frac{\bar{R}_k^T}{-\lambda_k - \bar{\lambda}_s} + \frac{R_S^T}{-\lambda_k - \lambda_s} \right) \quad (4.78)$$

A contribuição do resíduo do k-ésimo modo é dada por:

$$A_k = \frac{R_k C \bar{R}_k^T}{2\alpha_k} \quad (4.79)$$

$\alpha_k$  é o negativo da parte real de  $\lambda_k = -\alpha_k + j\omega_k$ . No caso de um sistema pouco amortecido o termo  $R_k C \bar{R}_k^T$  torna-se dominante e, portanto, o resíduo passa a ser proporcional ao modo de vibrar do sistema e pode ser escrito em termos do k-ésimo modo para uma dada frequência  $\omega$ , pois apenas um número limitado de modos contribuirá significativamente para o resíduo, tipicamente um ou dois modos.

$$A_k \propto R_k C \bar{R}_k \quad (4.80)$$

ou

$$A_k = \phi_k \gamma_k^T C \gamma_k \phi_k^T = d_k \phi_k \phi_k^T \quad (4.81)$$

onde:  $d_k$  é um escalar constante.

Isso permite fixar o número de modos de interesse e a densidade espectral de saída no caso de sistemas levemente amortecidos, pode ser definida em termos desse conjunto de modos, denotado por  $Sub(\omega)$ .

$$[S_{xx}(j\omega)] = \sum_{k \in sub(\omega)} \frac{d_k \phi_k \phi_k^T}{j\omega - \lambda_k} + \frac{\bar{d}_k \bar{\phi}_k \bar{\phi}_k^T}{j\omega - \bar{\lambda}_k} \quad (4.82)$$

A equação (4.82) leva a resultados similares aos obtidos diretamente pela equação (4.72) e a decomposição modal da matriz espectral é dada em termos dos modos desse subespaço, os quais formam o conjunto de modos dominantes. Neste caso, a matriz de densidade espectral de potência de saída é expressa em termos dos parâmetros próprios do modelo e a identificação dos parâmetros modais é feita a partir da DVS da equação (4.82).

### 4.2.1 Identificação dos Parâmetros Modais

Uma vez obtida a matriz de densidade espectral de potência de saída nos pontos discretos de frequência ( $\omega = \omega_i$ ), a mesma é decomposta para cada ponto de frequência, utilizando o conceito de Decomposição em Valores Singulares (DVS), Eq. (4.83).

$$S_{yy}(j\omega_i) = U_i S_i U_i^H \quad (4.83)$$

Se a excitação for exatamente um ruído branco e a estrutura for levemente amortecida e apresentar modos geometricamente ortogonais a decomposição da matriz densidade espectral de saída leva a um conjunto de autofunções. Os parâmetros modais do modelo, neste caso, são obtidos diretamente a partir da matriz de densidade espectral de potência de saída.

A matriz  $U_i$  é uma matriz unitária formada pelos vetores singulares  $u_{ij}$  e  $S_i$  é uma matriz diagonal contendo os valores singulares  $s_{ij}$  da matriz de densidade espectral de saída nas proximidades de um pico correspondente ao  $i$ -ésimo modo. As amplitudes dominantes são devidas àquele modo ou a um outro modo próximo. No caso de um único modo dominante existe apenas um termo na equação (4.82), portanto o primeiro vetor singular é uma estimativa do próprio modo, Eq. (4.84).

$$\hat{\phi} = u_{i1} \quad (4.84)$$

ou seja, a decomposição da matriz de densidade espectral em valores singulares exatamente no pico máximo de amplitude associados ao respectivo vetor singular, permite a estimativa daquele modo de vibrar do sistema. Tem-se ainda que, o primeiro vetor singular de cada linha de frequência próxima ao modo fornece as informações daquele modo e o correspondente valor singular leva a função de densidade espectral equivalente a um sistema de um grau de liberdade (1GL) que corresponde àquele modo.

A função densidade espectral equivalente a um sistema de um grau de liberdade é estimada comparando o modo identificado na frequência de ressonância (modo próprio) com os vetores singulares para os pontos de frequência em torno do pico. Quando o vetor singular apresenta uma alta correlação com modo o identificado, este pertence à função densidade do sistema 1GL, caso contrário ele não pertence àquele modo. A correlação dos vetores neste caso é avaliada a partir do valor do coeficiente MAC-valor (ALEMANG, 82), que é calculado

para cada linha de frequência. Uma vez identificado à frequência em que nenhum vetor singular possui MAC-valores acima de um dado valor pré-definido, a procura por partes coincidentes com a função de densidade espectral é terminada e as linhas de frequências restantes são completadas com zeros.

A partir da identificação da função de densidade espectral do sistema equivalente de 1GL, pode-se obter a frequência natural e o amortecimento do referido modo, transformando a função densidade espectral para o domínio do tempo, utilizando a transformada de Fourier inversa.

Identificado a função de densidade espectral de um grau de liberdade correspondente ao  $r$ -ésimo modo, o coeficiente de amortecimento é obtido utilizando o conceito de decremento logarítmico. Primeiramente todos os extremos  $r_k$  correspondentes aos picos e vales da função de autocorrelação são encontrados e o decremento logarítmico  $\delta$  é dado pela equação (4.85):

$$\delta = \frac{2}{k} \ln \left( \frac{r_0}{|r_k|} \right) \quad (4.85)$$

$r_0$  é o valor inicial da função de autocorrelação e  $r_k$  é o  $k$ -ésimo extremo. O decremento logarítmico é obtido por regressão linear e o fator do amortecimento é calculado pela expressão (4.86):

$$\zeta = \frac{\delta}{\sqrt{(\delta^2 + 4\pi^2)}} \quad (4.86)$$

Um procedimento similar é adotado para a determinação das frequências naturais não amortecidas. Com o auxílio da regressão linear, obtida a partir dos vales e picos da função de autocorrelação de 1GL, construída para o cálculo do fator de amortecimento, é possível encontrar o período e assim a frequência natural amortecida. Encontrada a frequência natural amortecida e o fator de amortecimento é possível calcular a frequência natural não amortecida, equação (4.87).

$$\omega_n = \frac{\omega_d}{\sqrt{(1-\delta^2)}} \quad (4.87)$$

A figura 4.6 resume os passos do algoritmo implementado para a DDF.

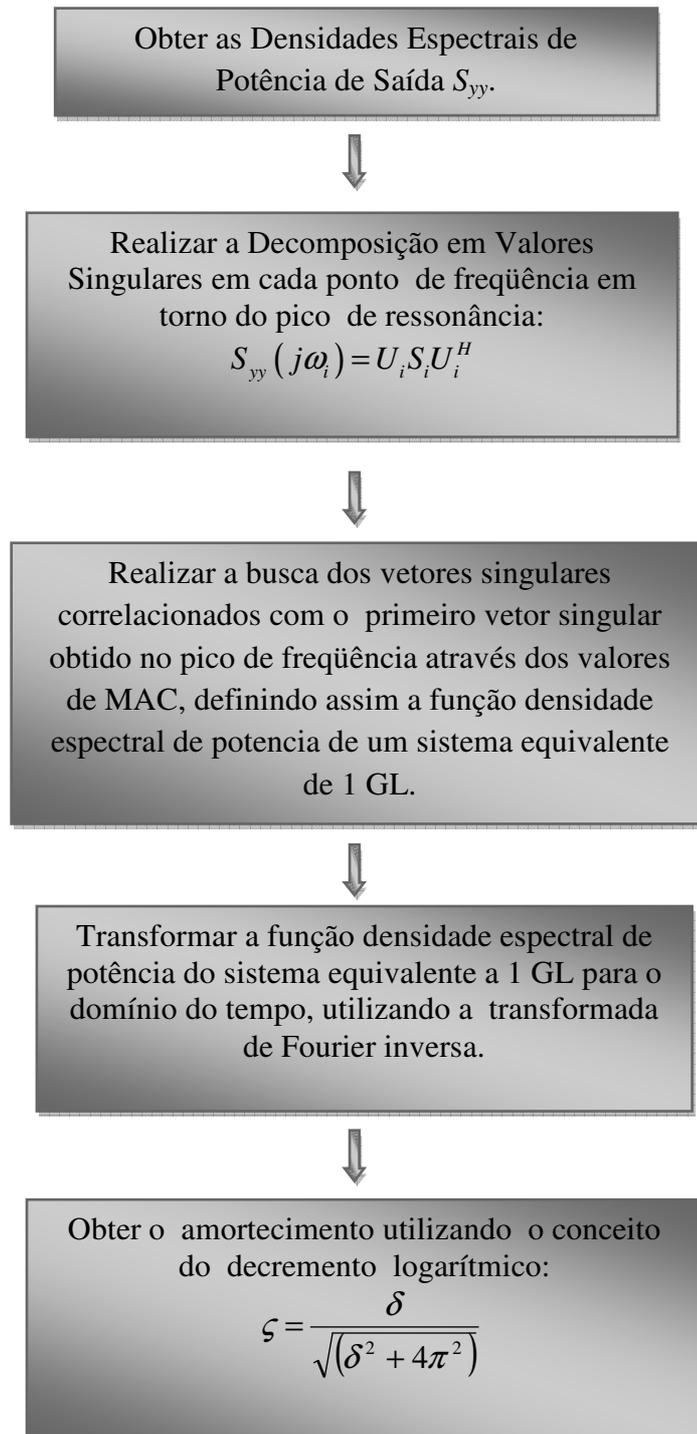


Figura 4.6 – Visão geral dos passos da DDF

Nas seções 4.1 e 4.2 foram apresentados os conceitos básicos e a formulação da IES e da DDF necessários para a implementação dos algoritmos utilizados na identificação dos parâmetros modais utilizando apenas as respostas. A próxima seção mostra o processo de criação de uma interface gráfica, utilizando os algoritmos da IES e da DDF, de forma a auxiliar o usuário nos procedimentos necessários para a determinação dos parâmetros modais.

### 4.3 Criação da Interface Gráfica

As técnicas IES e DDF foram implementadas em ambiente MATLAB® utilizando interfaces gráficas, as quais obedecem uma sistemática modular, possibilitando ao usuário uma maior interação com os procedimentos de identificação. A figura 4.7 mostra a primeira janela do programa. Esta janela contém os menus que dão acesso às técnicas IES e DDF.

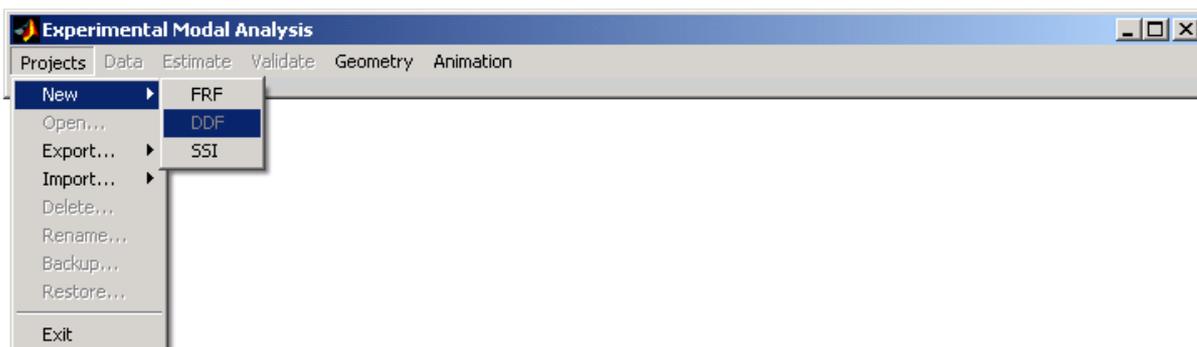


Figura 4.7 – Menu de acesso às técnicas IES e DDF

O programa também contém rotinas que importam os dados experimentais obtidos com o sistema de aquisição *Data Physics Corporation Signal Calc Ace*, Fig. 4.8 .

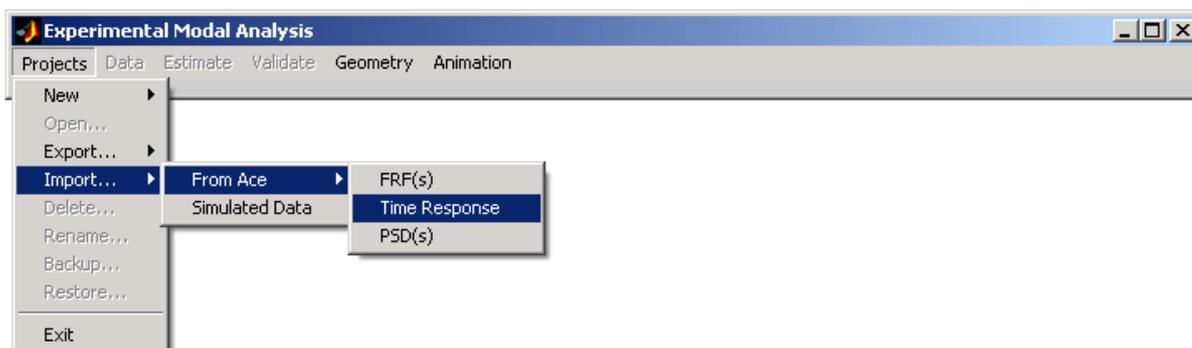


Figura 4.8 Menu para importar os dados experimentais.

Com os dados importados é possível realizar uma visualização prévia das informações no domínio do tempo e da frequência em cada ponto de medida da estrutura. A figura 4.9 mostra um exemplo simples dessa interface gráfica, a resposta no tempo e sua respectiva densidade espectral de potência para um sistema massa- mola de 2 graus de liberdade.

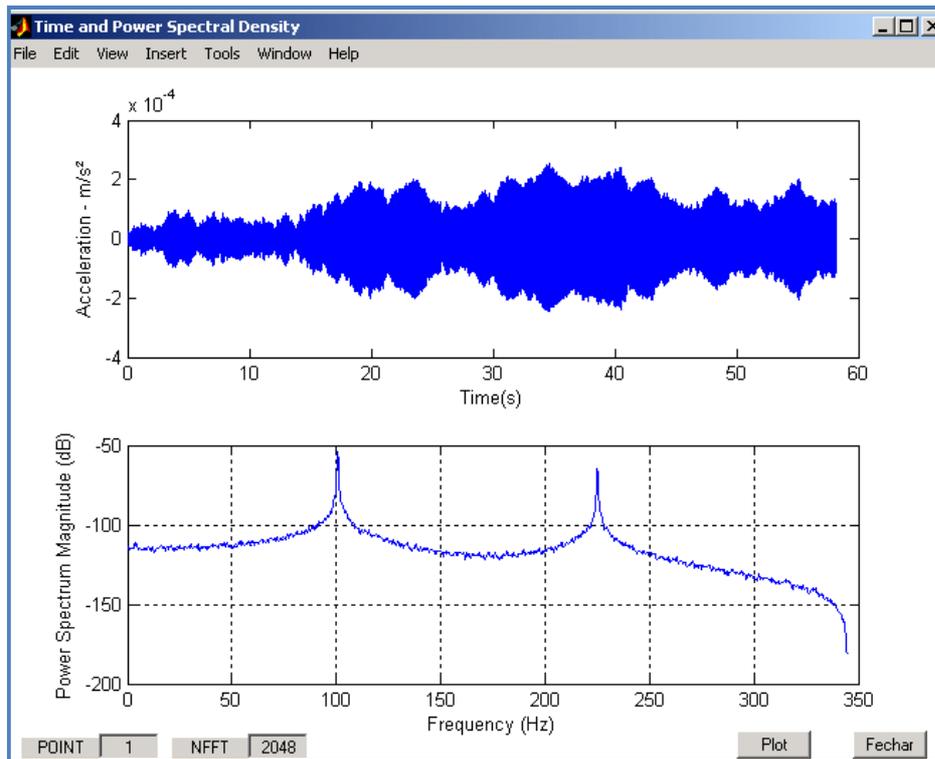


Figura 4.9 – Interface de visualização dos dados experimentais no tempo e frequência

As várias interfaces gráficas no módulo implementado para a IES contém diversas ferramentas de auxílio ao usuário, que possibilitam selecionar as frequências de corte, filtrar e decimar o sinal, inserir o valor do bloco de linhas e a faixa de ordens utilizada no diagrama de estabilização e etc. A figura 4.10 mostra essa janela.

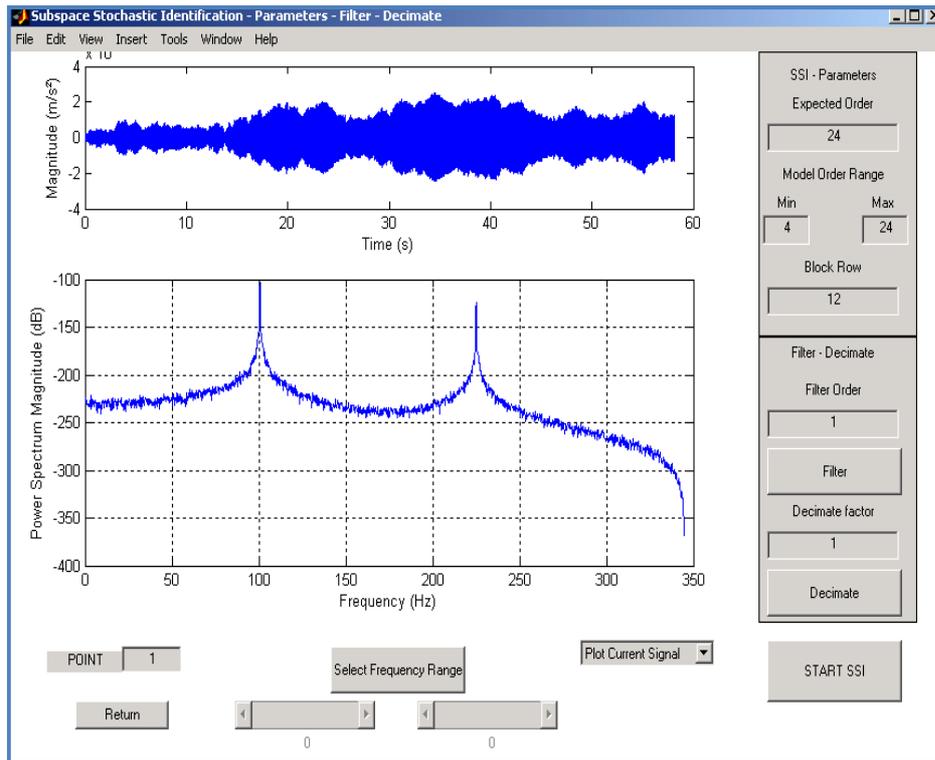


Figura 4.10 – Módulo de Pré-Identificação da IES

Após a seleção dos parâmetros de interesse o programa mostra o diagrama de estabilização, utilizado na estimativa da ordem do modelo, Fig. 4.11.

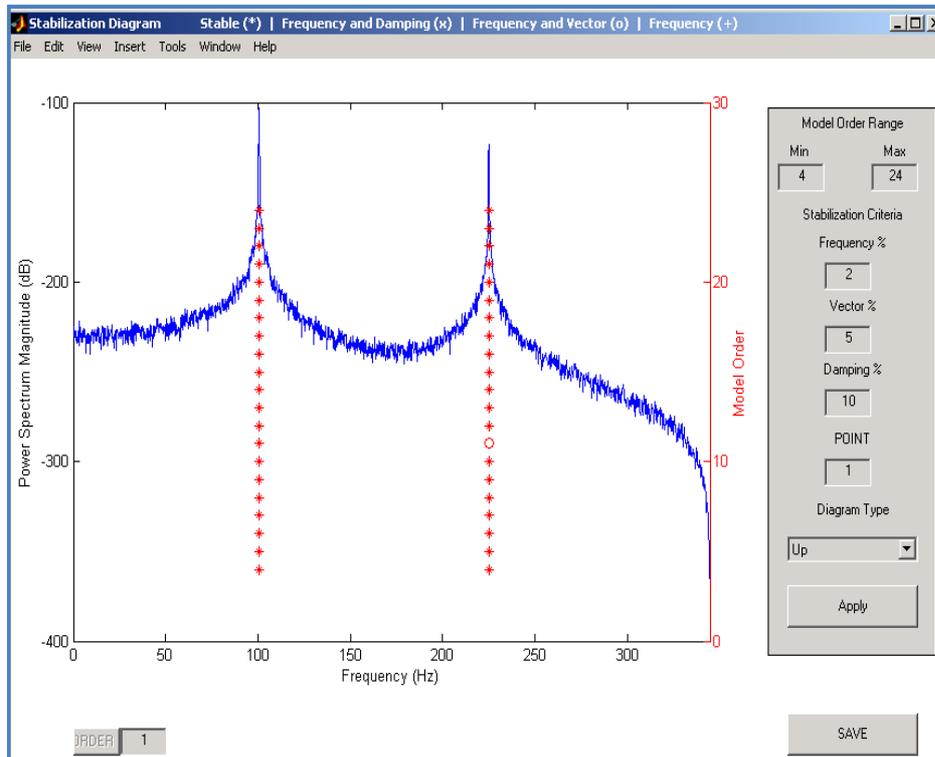


Figura 4.11 – Diagrama de Estabilização

O módulo desenvolvido para a identificação dos parâmetros modais utilizando a DDF também contém interfaces gráficas como ferramentas de auxílio ao usuário, que possibilitam selecionar as faixas de frequência em torno dos picos de ressonância com o uso do *mouse* e fazer uma verificação prévia dos valores das frequências naturais, como mostra a figura 4.12:

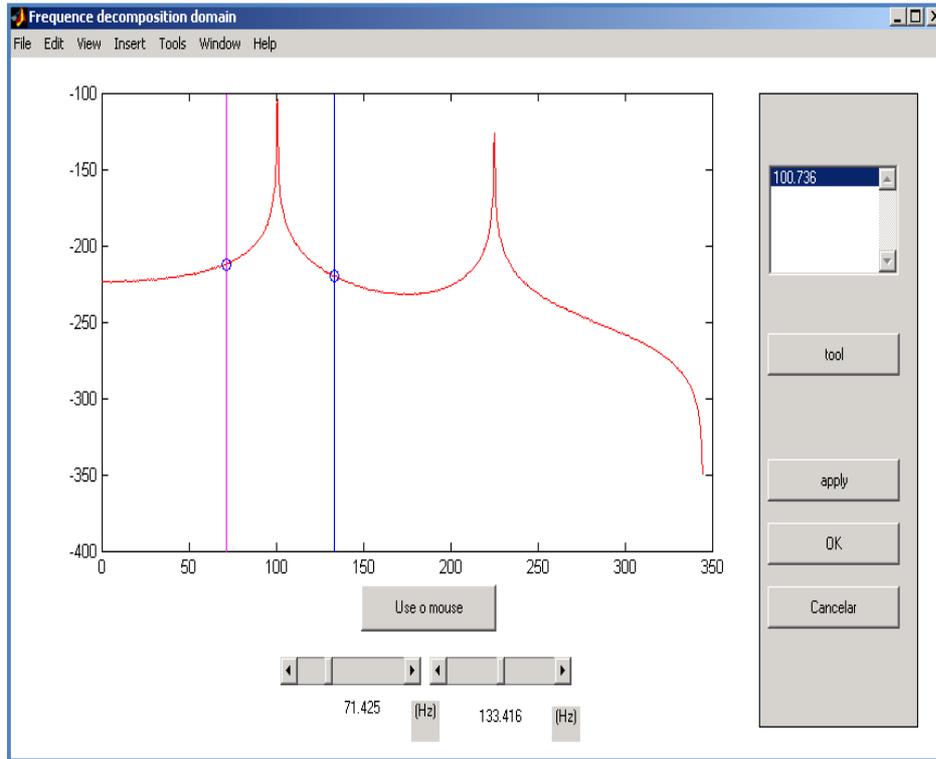


Figura 4.12 – Módulo de Pré-Identificação da DDF

As funções de densidade espectral de potência de um sistema equivalentes de 1 GL e suas respectivas transformadas inversas também podem ser visualizadas, como mostra a figura abaixo:

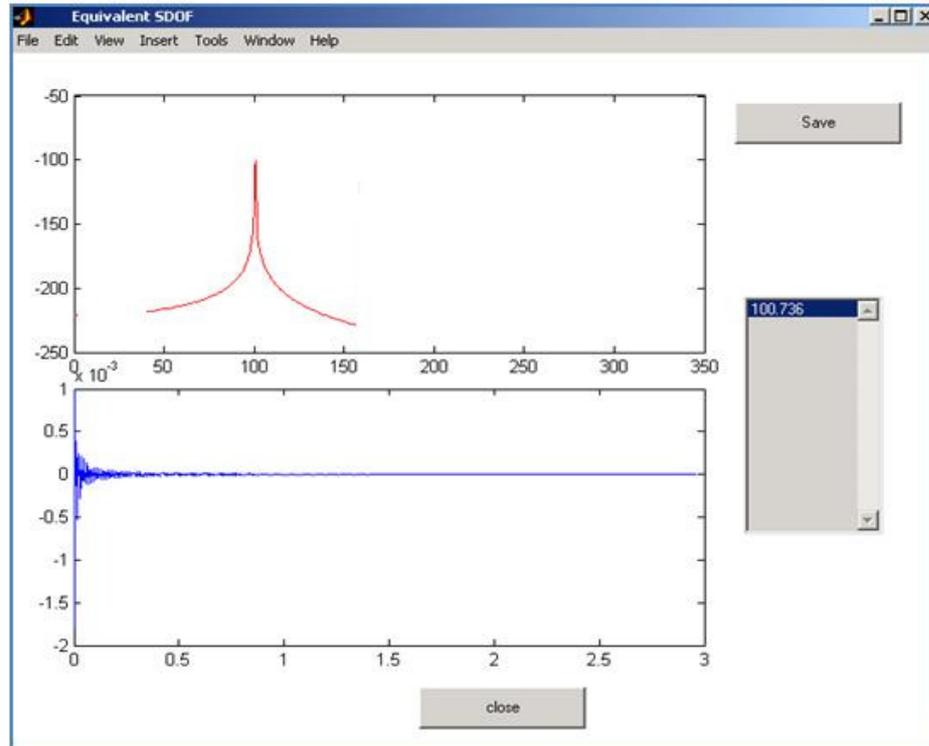


Figura 4.13 – Visualização das funções de 1 GL e suas respectivas transformadas de Fourier

A validação da implementação dos algoritmos será feita com dados simulados, conforme apresentado no capítulo 5 e finalmente, no capítulo 6, será feita a avaliação das potencialidades dos mesmos com dados experimentais.

## 5 EXEMPLOS SIMULADOS

Este capítulo apresenta os resultados obtidos através das técnicas IES e DDF descritas no capítulo anterior utilizando dados de um exemplo simulado. A utilização de dados simulados no processo de identificação e validação das metodologias é muito importante, pois, uma vez que se tem o conhecimento exato dos dados utilizados no modelo e conseqüentemente, o valor dos parâmetros que deverão ser obtidos no processo de identificação é possível estabelecer uma base de dados de referência para a avaliação das metodologias propostas, possibilitando assim uma avaliação mais segura dos resultados obtidos.

### 5.1 Simulação de Uma Estrutura do Tipo Frame

Os dados utilizados nesta seção foram provenientes da simulação das respostas de uma estrutura do tipo frame. A estrutura frame é simulada como sendo formada por barras de aço não ocas ABNT (1010) e com dimensões de 0.55 m de comprimento por 0.34 de largura e 0.69 de altura. A seção de área transversal das barras é de (0.01 x 0.01) m e sua densidade de 7830 Kg/m<sup>3</sup>. A figura (5.1) mostra a geometria da estrutura e os pontos de medição.

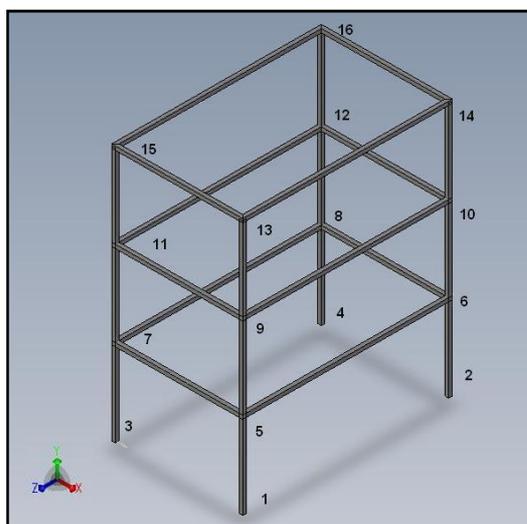


Figura 5.1 – Estrutura Frame Simulada

As matrizes de massa e rigidez foram obtidas utilizando o método de elementos finitos. A estrutura foi discretizada com elementos de viga, com seis graus de liberdade por nó e o amortecimento é considerado proporcional as matrizes de massa e rigidez.

A tabela (5.1) mostra os valores das frequências naturais e das razões de amortecimento obtidas pelo método dos elementos finitos.

Tabela 5.1 – Valores dos parâmetros modais de referência.

<b>Modo</b>	<b>Frequência (Hz)</b>	<b>Razão de Amortecimento (%)</b>
1°	42.3	0.0202
2°	92.5	0.0115
3°	120.6	0.0104
4°	155.0	0.0100
5°	177.6	0.0101
6°	211.2	0.0104

Neste caso, os resultados encontrados são tomados como referência (exatos) uma vez que são obtidos diretamente das matrizes de massa e rigidez do modelo, resolvendo o problema de autovalor.

As respostas do sistema foram obtidas através da formulação do modelo de espaço utilizando rotinas disponíveis no software comercial MATLAB® sendo que os dados utilizados na simulação foram as próprias matrizes de massa e rigidez obtidas no modelo de elementos finitos.

As respostas foram definidas assumindo que a estrutura esta engastada em sua base, ou seja, os pontos de 1 a 4 estão fixos. O modelo é excitado simultaneamente nos pontos de 5 a 16 na direção  $x$  por um ruído branco Gaussiano. Por conveniência, as respostas foram tomadas apenas na direção coincidente com a direção de excitação (eixo  $x$ ) em todos os pontos. Este procedimento é equivalente a medir somente as repostas para um sistema excitado naturalmente.

As respostas do modelo foram simuladas na faixa de frequência de 0 a 250 Hz, essa faixa de frequência inclui os seis primeiros modos do modelo. Como discutido na seção 3.6, pode-se minimizar o efeito do ruído na identificação dos parâmetros utilizando amostras com um elevado número de pontos. Após a realização de vários testes, variando-se o número de pontos, optou-se por utilizar uma amostragem de 40960 pontos, valor esse

suficiente para garantir uma boa estimativa dos parâmetros em função do esforço computacional.

Visando uma representação mais próxima da prática, as respostas foram contaminadas com ruído não correlacionado com a entrada do sistema. O ruído foi quantificado em termos da relação sinal-ruído, denominada nível de ruído, estabelecida de acordo com a energia do ruído, isto é, de acordo com o número obtido pela raiz média quadrática *RMS* do ruído em relação à *RMS* da resposta:

$$NR = \frac{RMS(\text{ruído})}{RMS(\text{resposta})} \quad (5.1)$$

onde *RMS(resposta)* representa o maior valor *RMS* dentre todos os sinais de resposta considerados. Neste trabalho foi considerado  $NR = 5\%$ .

## 5.2 Resultados da Identificação Estocástica de Subespaço

As respostas do modelo, conforme discutido anteriormente, foram definidas para os diferentes pontos de medidas apenas na direção *x*. A figura (5.2) mostra o sinal de resposta no domínio do tempo, medido no ponto 6 da estrutura.

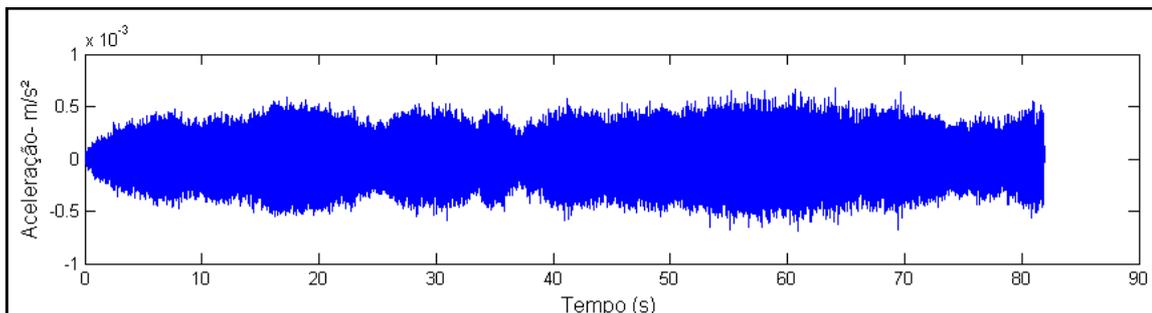


Figura 5.2 – Sinal no tempo medido no ponto 6 da estrutura

Uma vez definidas as repostas do modelo é possível iniciar a identificação dos parâmetros. O número de blocos de linhas *i* é um importante parâmetro e, como discutido na seção 4.1.3, seu valor deve ser maior ou igual a ordem que se deseja determinar. Neste caso *i*

foi considerado igual a 12. A ordem máxima que pode ser encontrada é igual ao produto do número de sinais medidos, neste caso os 12 pontos (5 - 16) da estrutura frame, pelo número de bloco de linhas  $i$ , assim a ordem máxima que poderá ser obtida é de 144.

O teorema principal da IES diz que a ordem do modelo é o número de valores singulares diferentes de zero obtidos da equação (4.42). Da seção 3.6 sabe-se que esses valores singulares são os cossenos dos ângulos principais entre o espaço das saídas futuras e o espaço das saídas passadas.

A figura (5.3) mostra o gráfico de barras contendo os valores singulares (ângulos principais) obtidos através da equação (4.42). Pode se observar claramente que todos os valores singulares são diferentes de zero, dessa forma, deve-se usar um outro critério para estimar a ordem do modelo. Um critério seria verificar a diferença entre dois valores singulares sucessivos. O valor singular onde a máxima diferença ocorre determina a ordem do modelo. Da figura (5.3), verifica-se que esta diferença ocorre em 12, resultado esperado, uma vez que existem 6 modos na faixa de frequência analisada.

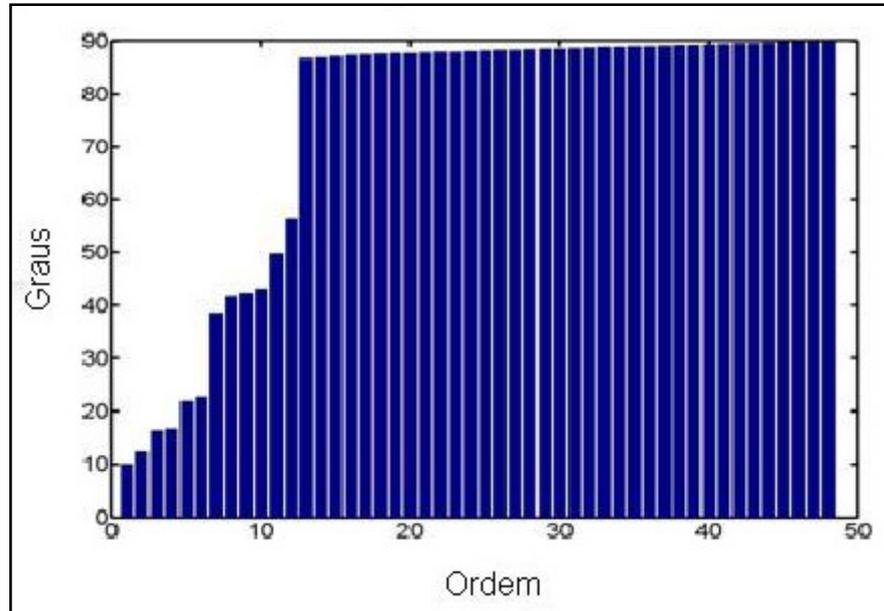


Figura 5.3 – Ordem do Modelo

Para relações sinal – ruído maiores que 5% foi observado que essa diferença não está bem definida e se torna praticamente impossível determinar a ordem do modelo através da

inspeção dos valores singulares, portanto, este critério não deve ser aplicado isoladamente. Um critério mais objetivo é a utilização do diagrama de estabilização.

A figura (5.4) mostra o diagrama de estabilização para a faixa de frequência analisada, como critério de estabilização foram utilizados respectivamente 1% e 5% para a frequência e amortecimento e MAC valor de 98% para os modos.

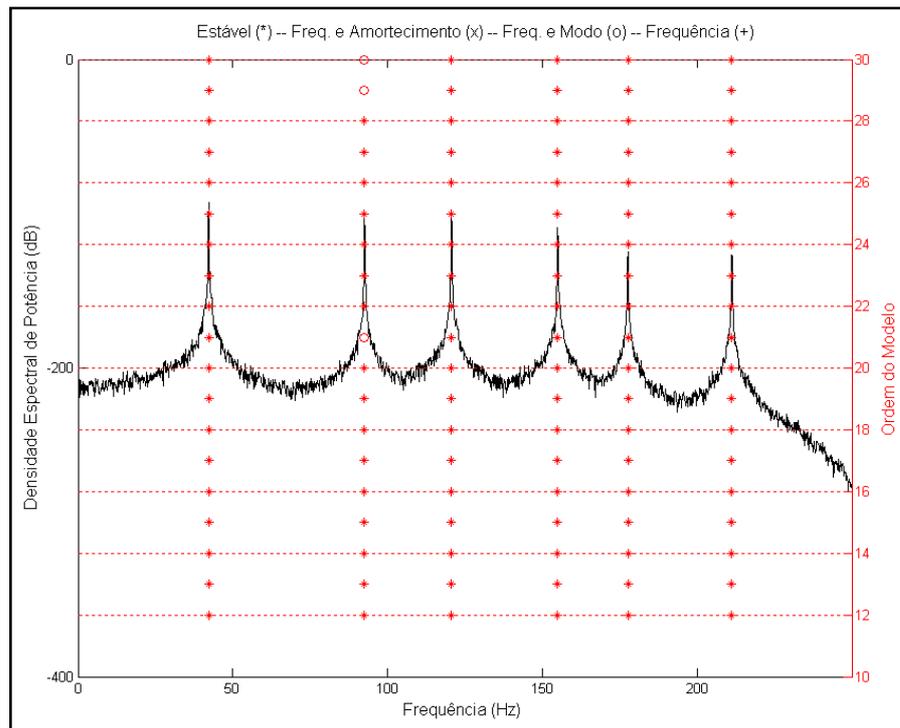


Figura 5.4 – Diagrama de Estabilização

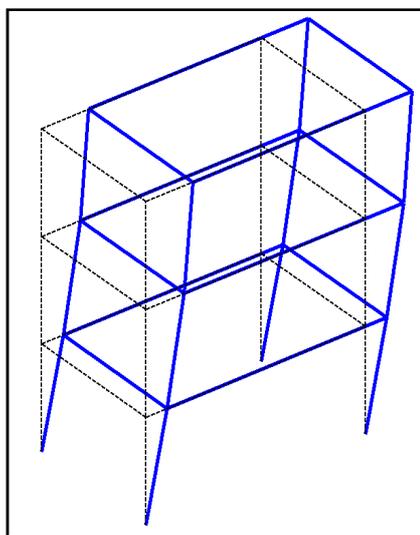
Os pólos numéricos tendem a não se estabilizarem com o aumento da ordem do modelo enquanto que os pólos físicos se estabilizam, no gráfico acima, pode-se observar que a partir da ordem 12 os pólos se tornam estáveis, assim a partir desta ordem é possível encontrar o sistema de matrizes  $A$  e  $C$  e iniciar a identificação dos parâmetros modais através da decomposição em autovalores da matriz dinâmica  $A$ .

A tabela (5.2) mostra a comparação entre os resultados encontrados pela IES e os resultados de referência. As frequências naturais e razões de amortecimento podem ser comparadas diretamente e os modos de vibrar são comparados através do MAC-valor. A

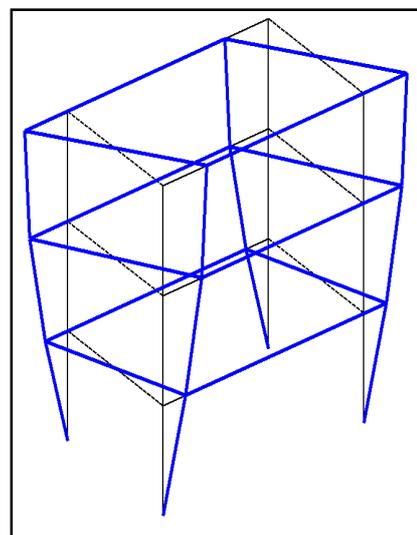
figura (5.5) mostra a visualização dos dois primeiros modos de vibrar identificados pela IES e a figura (5.6) um gráfico de barras contendo os valores de MAC .

Tabela 5.2 – Comparação entre a IES e os resultados de referência

Modo	REFERÊNCIA		IES		MAC
	Frequência (Hz)	Razão de Amortecimento (%)	Frequência (Hz)	Razão de Amortecimento (%)	
1°	42.30	0.0202	42.26	0.0191	1.00
2°	92.50	0.0115	92.53	0.0098	1.00
3°	120.60	0.0104	120.63	0.0097	1.00
4°	155.00	0.0100	154.95	0.0097	1.00
5°	177.60	0.0101	177.60	0.0140	1.00
6°	211.20	0.0104	211.16	0.0127	1.00



1° Modo



2° modo

Figura 5.5 – Visualização dos modos identificados pela IES

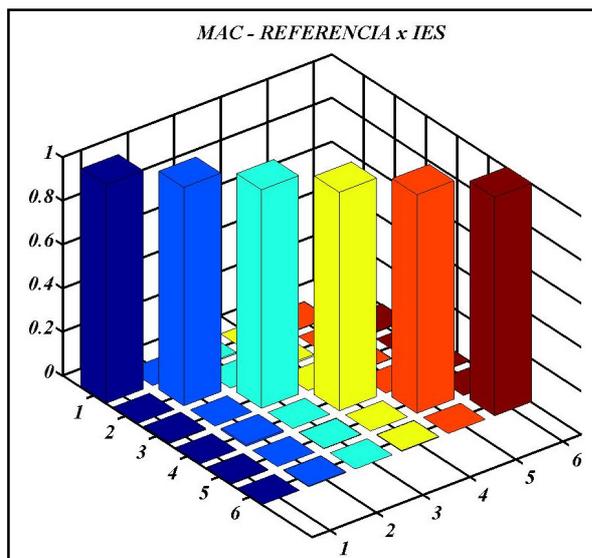


Figura 5.6 – Valores de MAC entre os resultados de referência e IES

### 5.3 Resultados da Decomposição no Domínio da Frequência

A identificação dos parâmetros modais neste caso é baseada na frequência e os parâmetros modais são estimados a partir da matriz de densidade espectral de potência de saída ( $S_{yy}$ ). As densidades espectrais de potência foram obtidas a partir da transformada das respostas no domínio do tempo utilizadas na IES para o domínio da frequência utilizando os comandos *psd* e *csd* disponíveis no software MATLAB®. A figura (5.7) mostra a função de densidade espectral de potência medida no ponto 6 da estrutura frame.

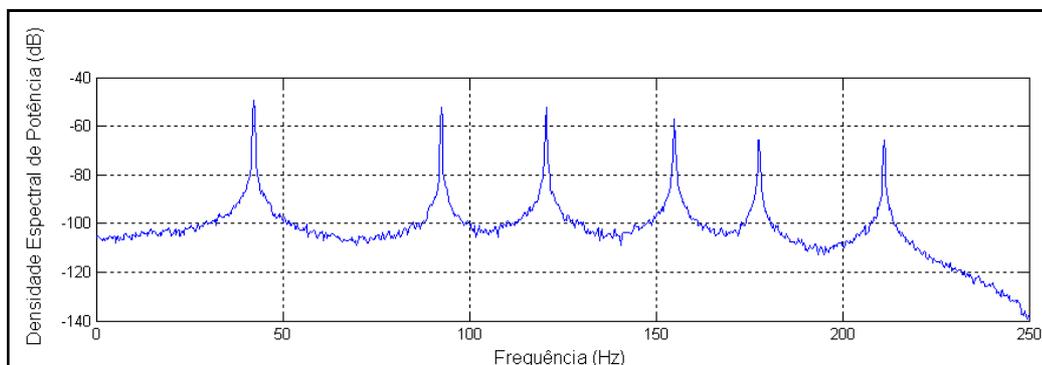


Figura 5.7 – Densidade espectral de potência

Uma vez definidas as densidades espectrais de potência da estrutura passa-se a fase de identificação dos parâmetros modais utilizando a técnica DDF. A identificação dos parâmetros neste caso é feita para cada modo individualmente. A figura (5.8) mostra a região selecionada em torno do 1º pico de frequência (1º modo).

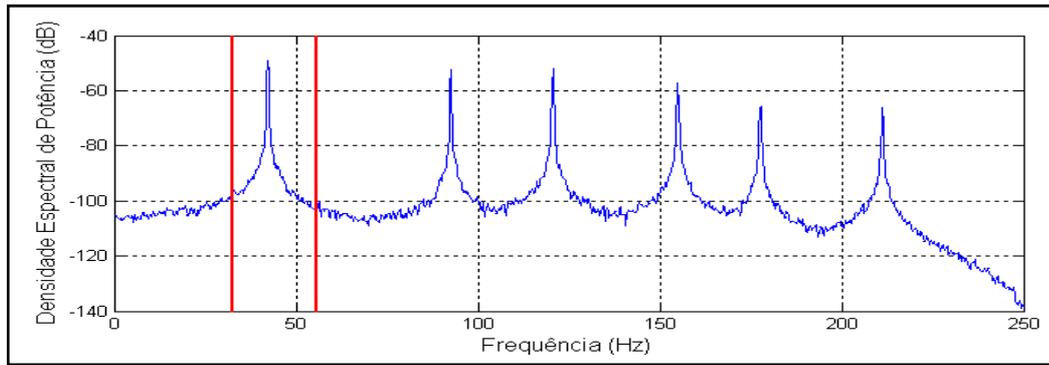


Figura 5.8 – Região selecionada em torno do 1º pico de frequência (1º Modo)

Numa primeira etapa é realizada a DVS da densidade espectral de potência para as linhas de frequências da região selecionada. Identificado o modo de vibrar referente ao pico de interesse é feita uma busca dos vetores singulares, em torno do pico de frequência correlacionado com o modo, que serão utilizados no cálculo da função de densidade espectral de potência do sistema equivalente de 1GL. Essa correlação é definida para MAC-valores maiores que um dado valor pré-definido pelo usuário. Neste caso, o índice utilizado foi 0.6 e o processo termina quando é encontrado algum valor singular com correlação inferior a este índice. A figura (5.9) mostra a função de densidade espectral de potência do sistema equivalente de 1 GDGL relacionado com o primeiro modo.

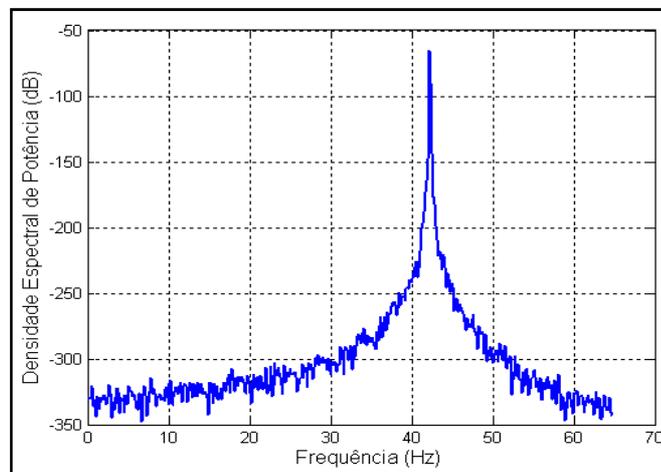


Figura 5.9 – Funções de densidade de potência espectral de 1GDGL

A razão de amortecimento neste caso é obtida a partir da função de densidade espectral de potência no domínio do tempo. A Figura (5.10) mostra a transformada inversa da função de densidade espectral de potência estimada para o primeiro modo, conforme discutido na seção 4.2.1, a transformada inversa equivale à resposta livre do sistema de 1 GL no domínio do tempo.

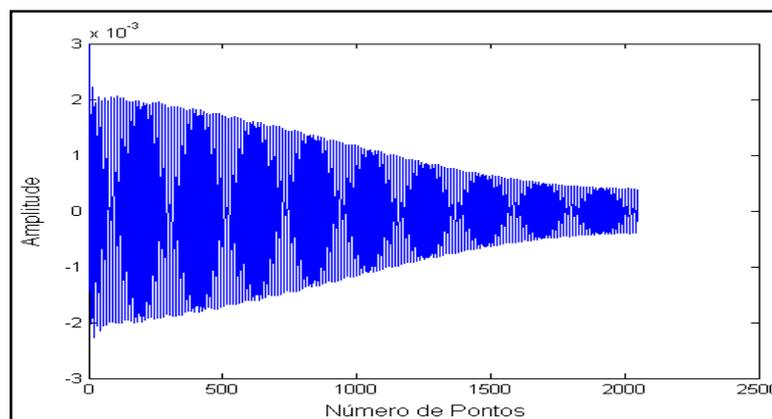


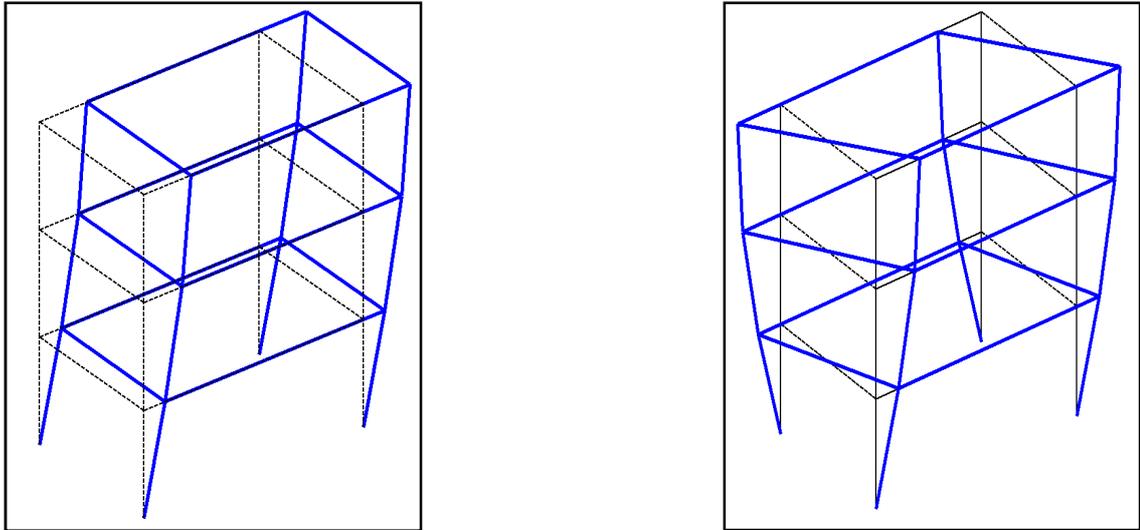
Figura 5.10 – Transformada inversa de Fourier da função de densidade espectral de potência do 1º modo

Para os demais modos, os parâmetros são estimados de forma similar.

A tabela (5.3) mostra a comparação entre os resultados encontrados pela DDF e os resultados de referência. A figura (5.11) mostra a visualização dos dois primeiros modos de vibrar identificados pela DDF e a figura (5.12) um gráfico de barras contendo os valores de MAC .

Tabela 5.3 – Comparação entre a DDF e os resultados de referência

Modo	REFERÊNCIA		DDF		MAC
	Frequência (Hz)	Razão de Amortecimento (%)	Frequência (Hz)	Razão de Amortecimento (%)	
1º	42.30	0.0202	42.25	0.0185	1.00
2º	92.50	0.0115	92.55	0.0149	1.00
3º	120.60	0.0104	120.63	0.0096	1.00
4º	155.00	0.0100	154.94	0.0127	1.00
5º	177.60	0.0101	177.01	0.00876	1.00
6º	211.20	0.0104	211.11	0.0126	1.00



1º Modo

2º modo

Figura 5.11 – Visualização dos modos identificados pela DDF

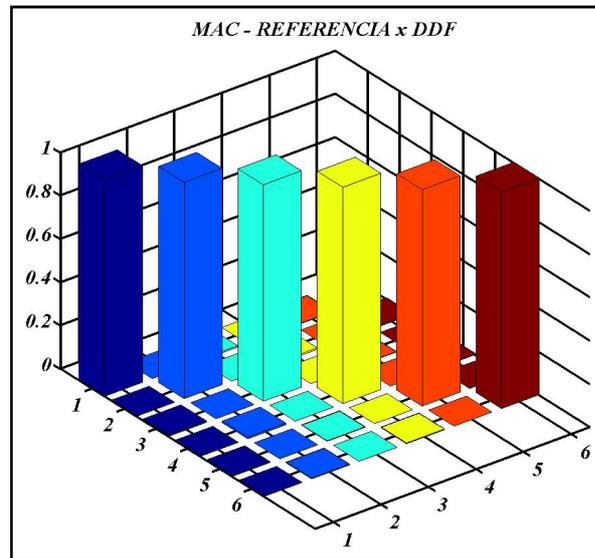


Figura 5.12 – Valores de MAC entre os resultados de referência e DDF

## 5.4 Conclusões do Capítulo

Os resultados obtidos mostram que as técnicas IES e DDF são capazes de estimar os parâmetros modais do modelo sem medir a entrada do sistema.

Os resultados mostrados nas tabelas (5.2) e (5.3) indicam uma ótima concordância das frequências naturais estimadas pelos dois métodos, o valor do amortecimento se mostra altamente adequado, uma vez que a estimativa desse parâmetro em muitos casos é incerta. Finalmente, todos os modos apresentam valor máximo para o MAC.

Em relação à DDF pode-se perceber que ela possui uma maior interação com o usuário, pois o mesmo ao analisar as densidades espectrais de potência, já pode ter uma estimativa prévia dos valores das frequências naturais e proceder à identificação apenas dos modos de interesse. A DDF se mostrou uma técnica rápida, de simples utilização, fornecendo ao usuário um sentimento físico dos dados utilizados.

Na IES notou-se a importância de se realizar a identificação com uma grande quantidade de número de pontos (amostras), embora este procedimento aumente o esforço computacional, os valores encontrados são muito mais próximos dos valores de referência. O uso do diagrama de estabilização também foi muito importante, pois a distinção entre os valores singulares obtidos pode não ser clara e a determinação da ordem do modelo pode ficar comprometida. No diagrama de estabilização da figura 5.4 se vê claramente que a partir da ordem 12 todos os pólos encontrados nas ordens superiores são estáveis, permitindo que a partir dessa mesma ordem, seja possível identificar os parâmetros modais da estrutura.

O estudo de exemplos simulados tanto na IES como na DDF foi importante para avaliação da implementação das metodologias, entretanto, é imprescindível que o próximo passo seja a verificação e comparação das metodologias com base em dados experimentais, coletados de estruturas físicas reais.

---

## 6 RESULTADOS EXPERIMENTAIS

No capítulo anterior foram realizadas as avaliações das técnicas IES e DDF utilizando dados simulados. Este procedimento foi muito importante para a validação da implementação dos algoritmos, pois a partir da base de dados de referência foi possível verificar a coerência dos resultados encontrados. Entretanto, dados simulados, por mais elaborados que sejam, não representam exatamente uma situação real e assim para uma avaliação mais realística dos métodos, se faz necessário a utilização de dados experimentais medidos diretamente em uma estrutura real.

Neste capítulo serão apresentados os estudos de dois testes experimentais. No primeiro caso, utilizou-se uma estrutura do tipo *frame* que representa de forma simplificada e reduzida o esqueleto de um prédio de três andares. No segundo caso, a estrutura é bem mais complexa, trata-se de dados de resposta capturados em uma estrutura real de um prédio.

Nos dois casos a identificação dos parâmetros modais foi realizada utilizando a IES e a DDF. No primeiro caso (estrutura *frame*) os resultados identificados pelas duas técnicas foram comparados entre si e com os resultados obtidos do modelo de elementos finitos da estrutura. A comparação dos resultados visa avaliar a capacidade de cada método e identificar os parâmetros modais do modelo bem como avaliar a existência de eventuais discrepâncias entre os resultados, para uma avaliação mais criteriosa das potencialidades das técnicas. Já no segundo caso (prédio real) os resultados obtidos pela IES e DDF foram comparados com o software comercial ARTEMIS EXTRACTOR, visando avaliar as potencialidades das técnicas implementadas para aplicações reais de engenharia.

## 6.1 Estrutura Frame

### 6.1.1 Modelo Experimental

O modelo avaliado neste caso é uma estrutura do tipo *frame* que foi construída em laboratório utilizando tubos de aço de seção quadrada, soldados de forma a representar o esqueleto de um prédio de três andares em modelo reduzido. O fator de escala utilizado foi 1:10, ou seja, a estrutura é equivalente à décima parte de um prédio. A estrutura é feita de tubos de aço (ABNT 1010) de seção quadrada e apresenta dimensões de 0.4 m de comprimento por 0.3m de largura por 0.7m de altura, Figura (6.1).



Figura 6.1 – Estrutura Frame

A seção de área transversal das barras horizontais é de  $(20 \times 20 \times 0.8) \times 10^{-3}$  m, a seção de área transversal das barras verticais de  $(30 \times 20 \times 0.5) \times 10^{-3}$  m e a massa total da estrutura é 5,5 kg. A Tabela (6.1) resume as principais propriedades da estrutura.

Tabela 6.1 – Propriedades da Estrutura Frame

Propriedades	Valores
Módulo de Elasticidade	$2.1 \times 10^{11}$ N/m <sup>2</sup>
Densidade	7850 kg/m <sup>3</sup>
Coefficiente de Poisson	0.33

Para a simplificação do modelo não foram simulados os efeitos de pré-tensão existentes em uma estrutura real deste porte, como por exemplo, o peso suportado pela estrutura em cada piso (laje) e outros, resumidamente esta é apenas uma representação que tem caráter ilustrativo de como uma estrutura de um prédio poderia ser avaliada.

Os testes foram realizados no Laboratório de Vibrações e Instrumentação do Departamento de Engenharia Mecânica da UNESP – Campus de Ilha Solteira, utilizando o sistema de aquisição de sinais *Data Physics Corporation Signal Calc Ace – 32 bits*. A Tabela 6.2 apresenta uma descrição dos instrumentos e materiais utilizados.

Tabela 6.2 Equipamentos Utilizados nos testes experimentais

Itens	Especificações
Sistema de aquisição	SignalCalc Ace – 32 bits Fabricante: Data Physics Corporation Frequência máxima de operação: 20Khz 2 entradas e 2 saídas
Acelerômetro axial	Fabricante: PCB Piezotronics, Inc Sensibilidade: 97,8 mV/g Erro de amplitude: 0.1%
Condicionador de sinais	Ganho: 1, 10 e 100V Banda de frequência: 0,15 Hz a 100kHz Fonte de alimentação: Baterias
Shaker	Frequência de operação: 15 a 5000 Hz Fator de transmissão: 15 N/A Pico máximo: $\pm 3$ mm
Microcomputador	Processador: Pentium / 256 MB – RAM
Estrutura	Tipo: Frame Fabricação: aço ABNT 1010

Nos testes realizados, procurou-se utilizar uma condição para as forças de entrada que simulassem um tipo de excitação semelhante a das próprias condições de operação. Neste caso, as forças de entrada são do tipo aleatória, com as características de um ruído branco gaussiano. Este procedimento foi realizado utilizando um excitador eletromecânico

(*shaker*), visando simular alguns tipos de excitações as quais o prédio poderia estar sujeito. Em condições reais a estrutura estaria sujeito a excitações de caráter aleatório provocadas pelo vento, pessoas em movimento e outros. A excitação não foi medida e, portanto, não são utilizadas diretamente na análise, apenas as respostas da estrutura são consideradas para a determinação dos parâmetros modais e as forças de entrada no frame são desconhecidas.

A Figura 6.2 mostra esquematicamente o aparato experimental utilizado, neste caso, o sinal de excitação é gerado pelo software *Signal CalcAce*, este sinal passa por um amplificador de sinais e assim chega ao shaker, que por sua vez transmite a força de excitação ao frame através de uma haste flexível.

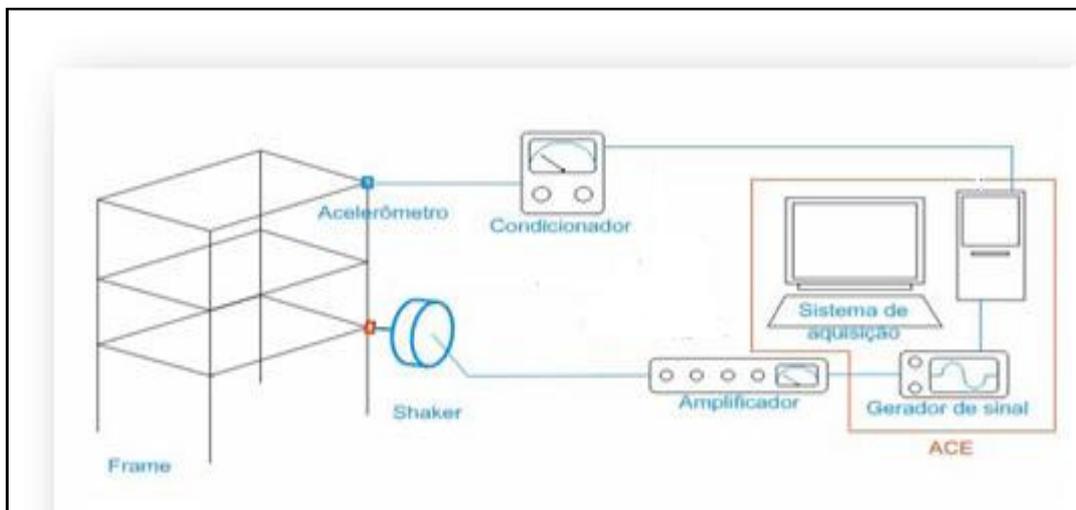


Figura 6.2 – Esquema do Aparato Experimental

A figura 6.3 mostra a bancada experimental utilizada para a realização dos testes.

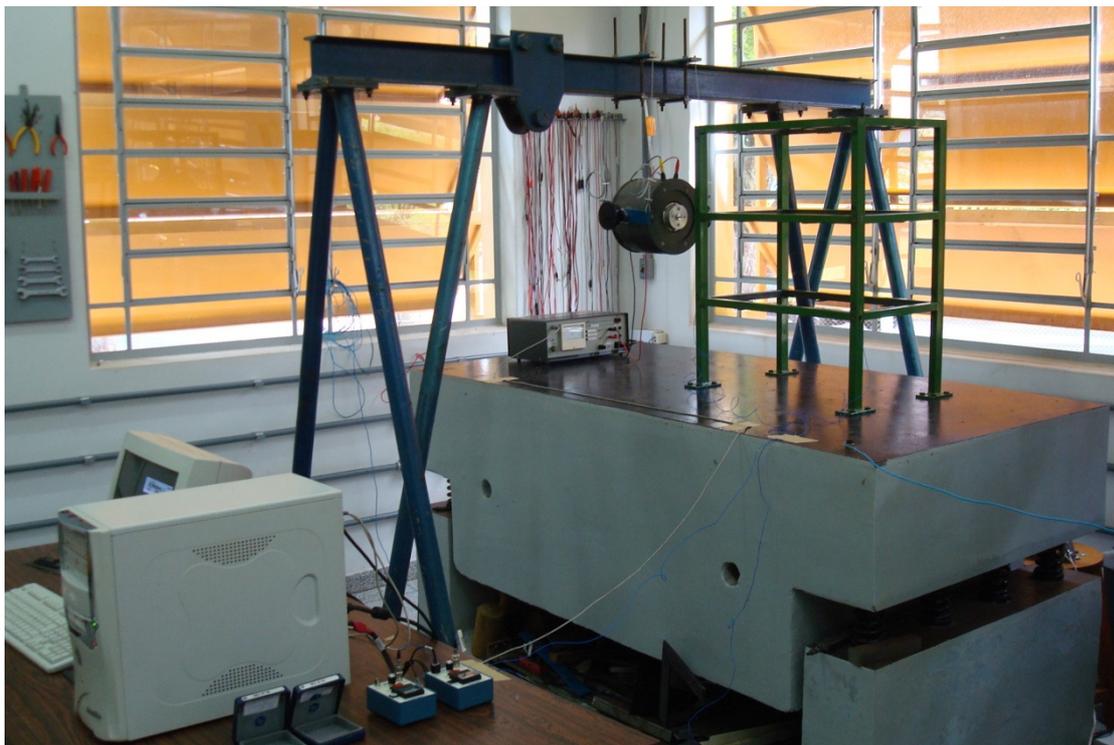


Figura 6.3 – Bancada Experimental

Os ensaios foram realizados com os 4 “pés” do frame fixos por parafusos em uma mesa inercial, buscando assim uma condição de engaste rígida. A figura 6.4 mostra o detalhe do engaste em um dos “pés” da estrutura.



Figura 6.4 – Condição de Engaste da Estrutura

A figura 6.5 mostra os detalhes da fixação e conexão do shaker na estrutura. Para que o shaker pudesse operar livremente, sem sobrecarga evitando assim sua quebra, o mesmo

foi pendurado através de cabos de aço em um pórtico sobre o frame, de modo que a estrutura fosse excitada naturalmente, com um mínimo de interferência externa.



Figura 6.5 Detalhes da Excitação da Estrutura utilizando o Shaker

Um outro aspecto importante a se ressaltar é a fixação correta do acelerômetro no ponto exato de medida, pois a fixação irregular do acelerômetro pode acarretar distorções no sinal medido. A figura 6.6 mostra os detalhes da fixação dos acelerômetros utilizados no frame.



Figura 6.6 – Detalhes da Fixação do acelerômetro no Frame

A discretização do modelo e a definição dos pontos de medição são muito importantes nos testes experimentais para a definição das condições de ensaio da estrutura. A Figura 6.7 mostra o modelo experimental discretizado e os respectivos pontos de medição, nós de 1 - 12.

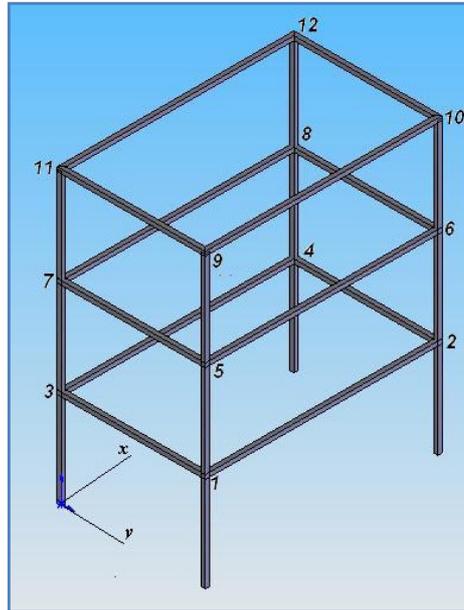


Figura 6.7 – Modelo Experimental Discretizado.

O modelo acima mostra os pontos de medidas onde os sinais de saída da estrutura foram capturados. Neste caso, a malha foi gerada levando em consideração a topologia dos pontos de medidas do modelo experimental, de tal forma que todos os pontos de medida tivessem um nó correspondente no modelo analítico de elementos finitos.

### 6.1.2 Modelo Analítico

Paralelo a realização dos testes experimentais, criou-se um modelo teórico através do método de elementos finitos, denominado modelo analítico. Os resultados obtidos no modelo de elementos finitos foram utilizados tanto para o planejamento dos experimentos como foram tomados como referência para o estudo e a avaliação dos parâmetros modais extraídos com o uso das técnicas IES e DDF.

A estrutura foi modelada utilizando o software comercial Ansys® versão acadêmica. Foram utilizados elementos de placa 3D (Shell) e a malha foi gerada levando em consideração a topologia dos pontos de medição do modelo experimental, de tal forma que todos os pontos de medida tivessem um nó correspondente no modelo analítico, como mostra a figura 6.8.

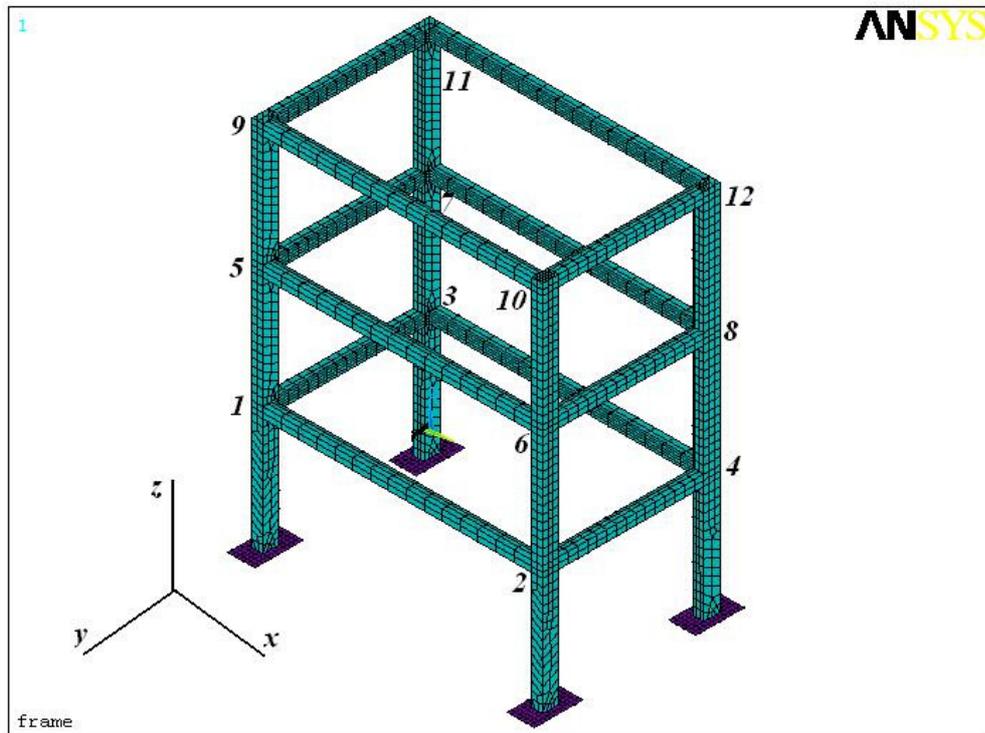


Figura 6.8 – Modelo Analítico

A tabela 6.3 mostra os valores das frequências naturais obtidas pelo método dos elementos finitos.

Tabela 6.3 – Frequências Naturais obtidas pelo método dos elementos finitos

Modo	Frequência (Hz)
1°	49.84
2°	76.60
3°	175.23
4°	229.39
5°	271.39

### 6.1.3 Testes Experimentais

Nos testes realizados as respostas da estrutura foram capturadas por acelerômetros fixados nos pontos de medição mostrados na figura 6.7. A força de excitação da estrutura foi aplicada no ponto 5, enquanto que as respostas foram medidas em todos os pontos, tanto a excitação quanto a captura das respostas foram realizadas na direção do eixo  $x$ .

Os sinais de resposta foram amostrados com uma frequência de Nyquist de 1000 Hz para um tempo total de aquisição de 16 segundos com discretização de 40960 pontos. Os sinais no tempo foram capturados simultaneamente através de dois acelerômetros e posteriormente processados pelo próprio sistema de aquisição para gerar as respectivas funções de densidade espectral.

A figura 6.9 mostra o sinal no tempo medido no ponto 1 e a sua respectiva função de densidade espectral de potência.

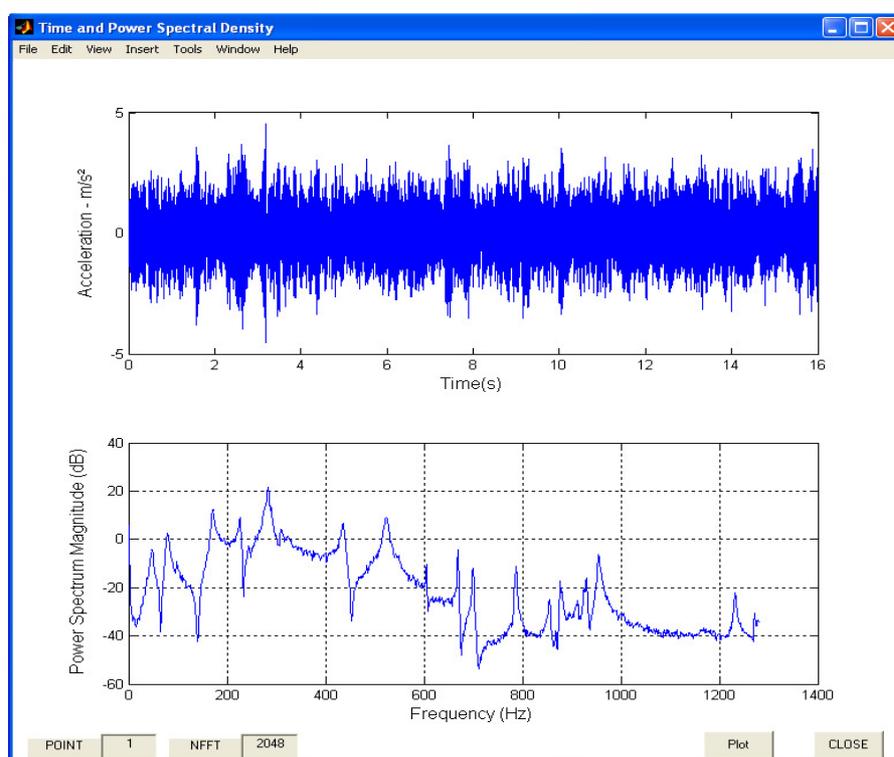


Figura 6.9 – Sinal de resposta medido no ponto 1.

Na faixa de frequência coletada, verifica-se que existe aproximadamente 15 modos de vibrar. Por motivos de simplificação da análise e devido ao fato de que geralmente em análise estrutural os modos mais baixos são mais importantes, optou-se por estudar apenas os primeiros 5 modos naturais. A faixa de frequência utilizada para a identificação dos parâmetros foi de 0 a 300 Hz.

### 6.1.4 Análise Modal Utilizando a IES

Os parâmetros modais da estrutura *frame* foram identificados na faixa de frequência de 0 a 300 Hz, a qual compreende os 5 primeiros modos da estrutura *frame*. A fim de diminuir o esforço computacional e reduzir a presença de pólos numéricos devido a valores de frequências que estão fora da faixa analisada, os sinais foram decimados por um fator 3 (OPPENHEIN, 1998), este procedimento consistiu em filtrar os sinais com um filtro digital passa-banda com frequências de corte entre 5Hz e 300 Hz e reamostrá-los em uma frequência de Nyquist de 1000/3 Hz. Esta operação reduz o número de pontos para 13653 e torna a identificação mais precisa na faixa de frequência considerada.

A figura 6.10 mostra a interface gráfica em que o usuário pode observar o sinal original, o sinal decimado, o sinal filtrado e definir alguns parâmetros do algoritmo.

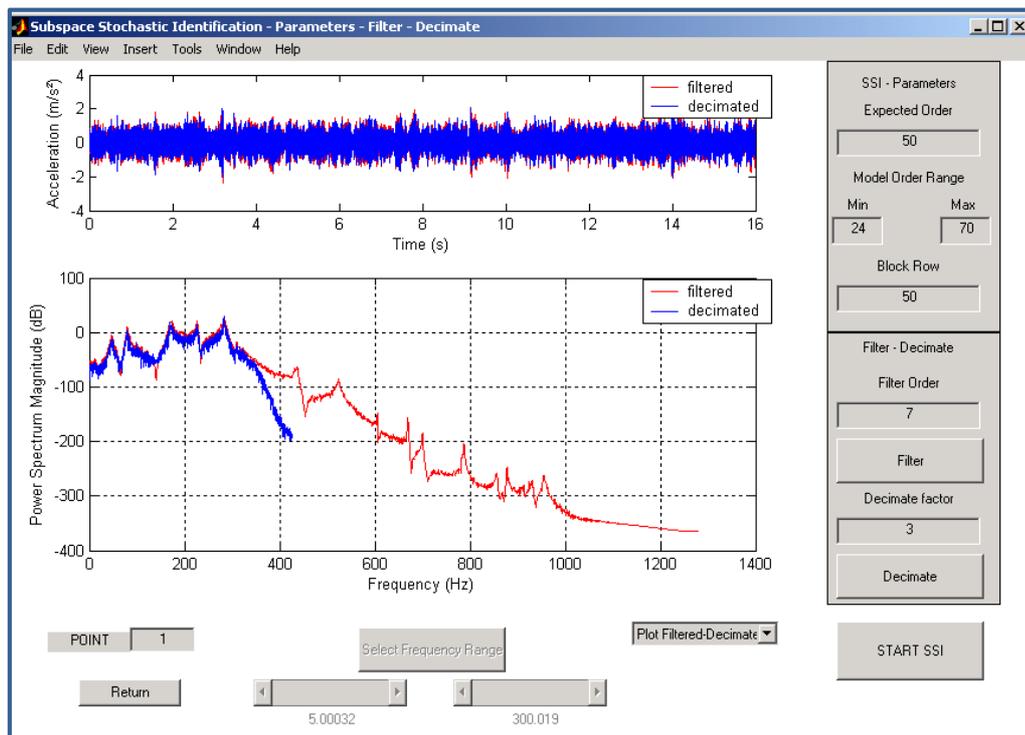


Figura 6.10 – Interface gráfica de parâmetros de entrada utilizados na IES

O número de blocos de linhas *i* como dito anteriormente deve ser maior que a ordem do modelo que se deseja identificar. Neste caso o número de blocos de linhas *i* foi considerado

igual a 50, assim a ordem máxima que pode ser encontrada é igual ao produto do número de sinais medidos, neste caso os 12 pontos, pelo número de bloco de linhas  $i$ , assim a ordem máxima que poderá ser obtida é igual a 600.

Definidos os principais parâmetros de entrada do software, inicia-se o processo de identificação dos parâmetros modais propriamente dito. A figura (6.11) mostra a interface gráfica do programa que apresenta o diagrama de estabilização para a faixa de frequência analisada.

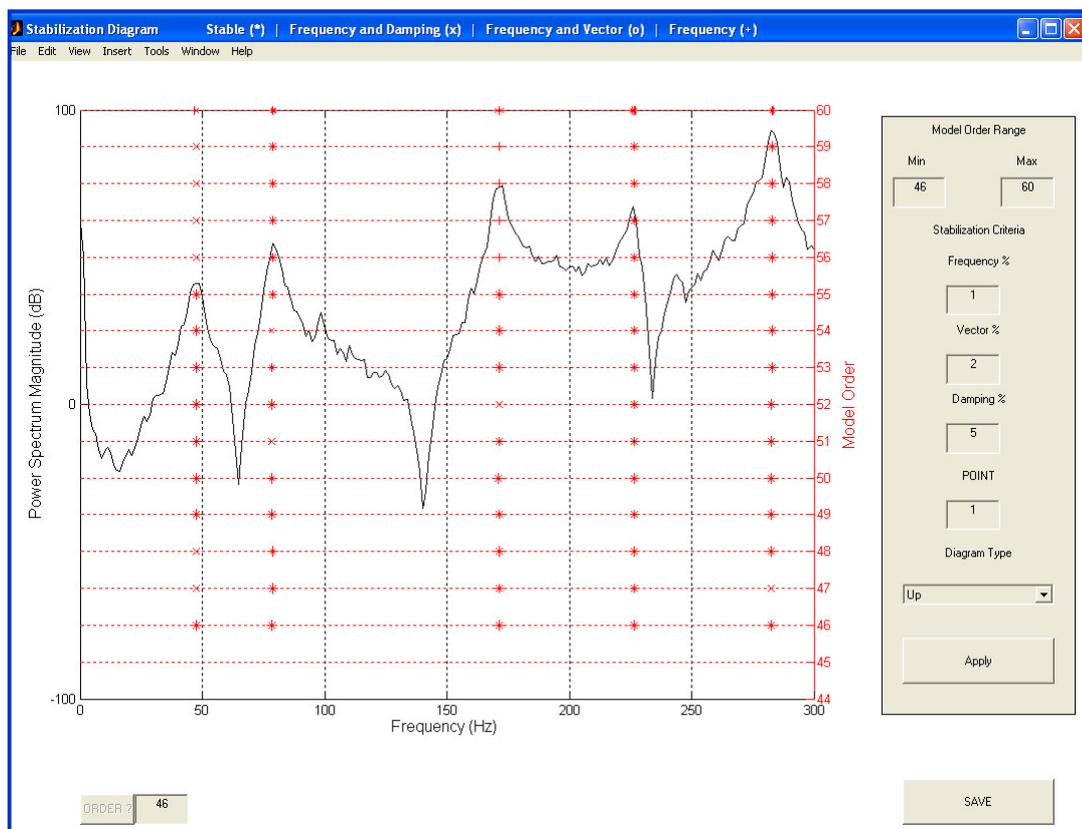


Figura 6.11 – Diagrama de Estabilização – (\*) Estável; (x) Frequência e Amortecimento; (o) Frequência e Modo; (+) Frequência

Neste caso, os critérios de estabilidade foram 1% para a frequência, 2% para os modos de vibrar (MAC) e 5% para o amortecimento. Da figura acima observa-se que a partir da ordem 46 os pólos se tornam estáveis para os primeiros cinco picos de frequência, indicando a provável ordem do modelo e conseqüentemente permitindo identificar as matrizes  $A$  e  $C$ , a partir dos dados de resposta do frame.

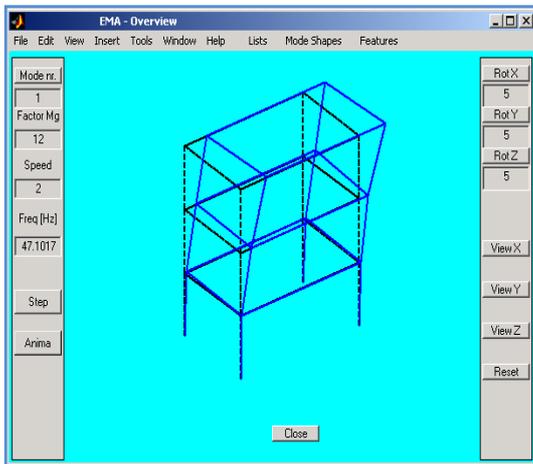
Os parâmetros modais do modelo são obtidos através da decomposição em autovalores da matriz dinâmica  $A$  como discutido na seção 4.1.8. A tabela 6.4 mostra os

resultados obtidos utilizando a técnica IES, os valores de MAC foram obtidos comparando os modos estimados com os resultados do modelo analítico obtidos utilizando o software ANSYS.

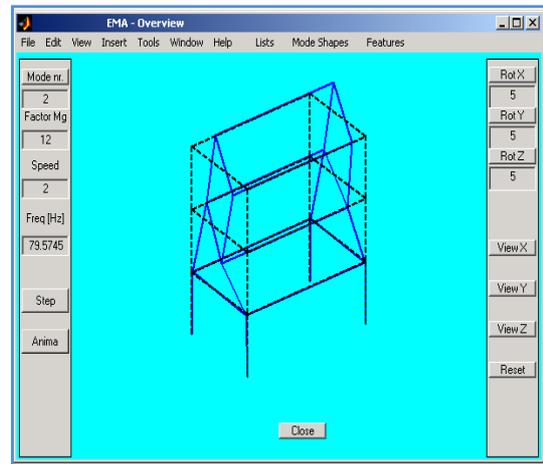
Tabela 6.4 – Resultados da IES

Modo	IES		Modelo Analítico	MAC
	Frequência (Hz)	Amortecimento (%)	Frequência (Hz)	
1°	47.10	3.25	49.84	0.86
2°	79.57	2.11	76.60	0.85
3°	171.75	1.40	175.235	0.80
4°	226.33	0.56	229.39	0.84
5°	283.25	0.43	271.39	0.85

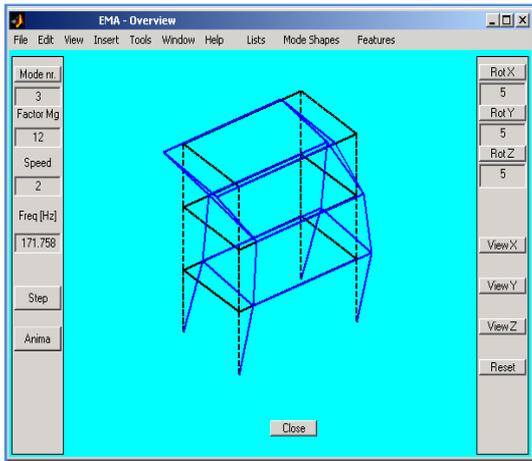
A interface gráfica também permite a animação dos modos de vibrar através da visualização da estrutura deformada e não deformada, rotação de eixos, entre outras. A Figura 6.12 mostra os cinco primeiros modos de vibrar estimados.



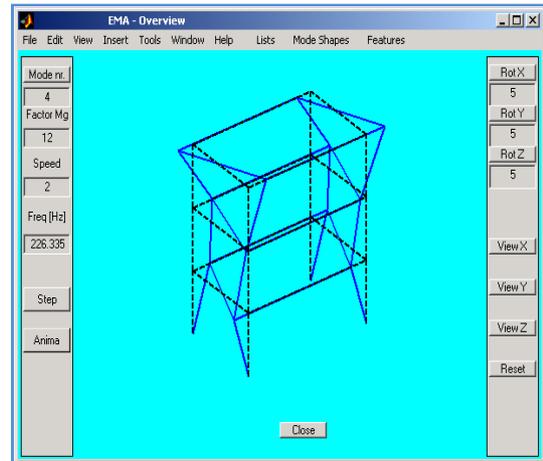
1 ° Modo [47.1001 Hz]



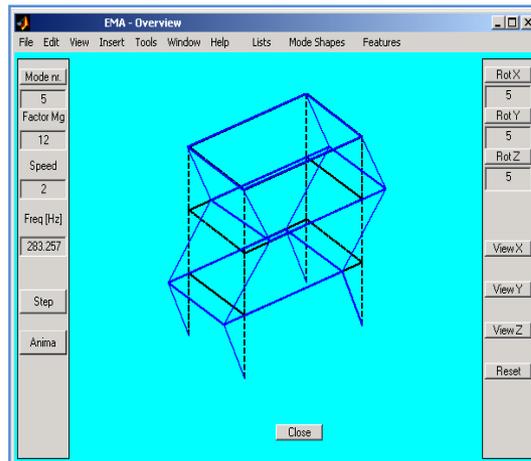
2° Modo [79.5745 Hz]



3º Modo [171.7583 Hz]



4º Modo [226.3356 Hz]



5º Modo [283.2572 Hz]

Figura 6.12 – Modos de Vibrar identificados pela IES

A figura 6.13 mostra um gráfico de barras com os valores de MAC entre os modos estimados pela IES e os modos analíticos.

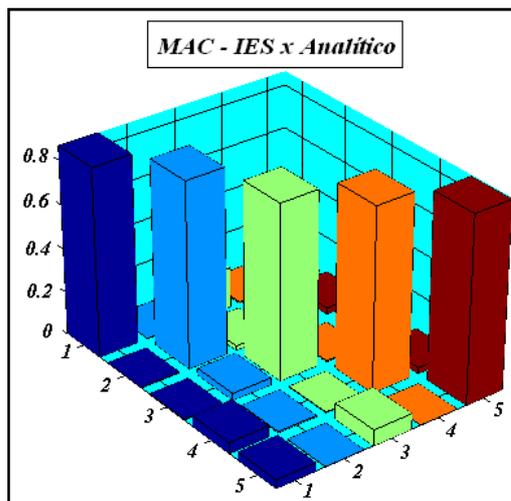


Figura 6.13 – Valores de MAC entre a IES e o modelo analítico

Analisando as figuras e as tabelas acima é possível verificar que foi possível obter os parâmetros modais da estrutura *frame* utilizando a técnica IES. Os valores encontrados quando comparados com o modelo analítico se mostram satisfatórios. Verifica-se também a importância da construção do diagrama de estabilização, pois para a ordem escolhida apenas 5 modos são estruturais sendo os 18 modos restantes são computacionais. Esses modos poderiam ser identificados como modos físicos comprometendo a qualidade da identificação.

### 6.1.5 Análise Modal Utilizando a DDF

Na DDF a identificação dos parâmetros modais do modelo envolve mais a participação do usuário, pois o mesmo, irá selecionar as regiões de frequência de interesse. Uma vez importadas as densidades espectrais de potência, passa-se a fase de identificação dos parâmetros propriamente dita. A figura 6.14 mostra o módulo do programa onde é realizado a escolha das faixas de frequências em torno dos picos de ressonância. Neste caso, conforme pode ser observado na figura, foi selecionado o primeiro pico de frequência, correspondente ao primeiro modo.

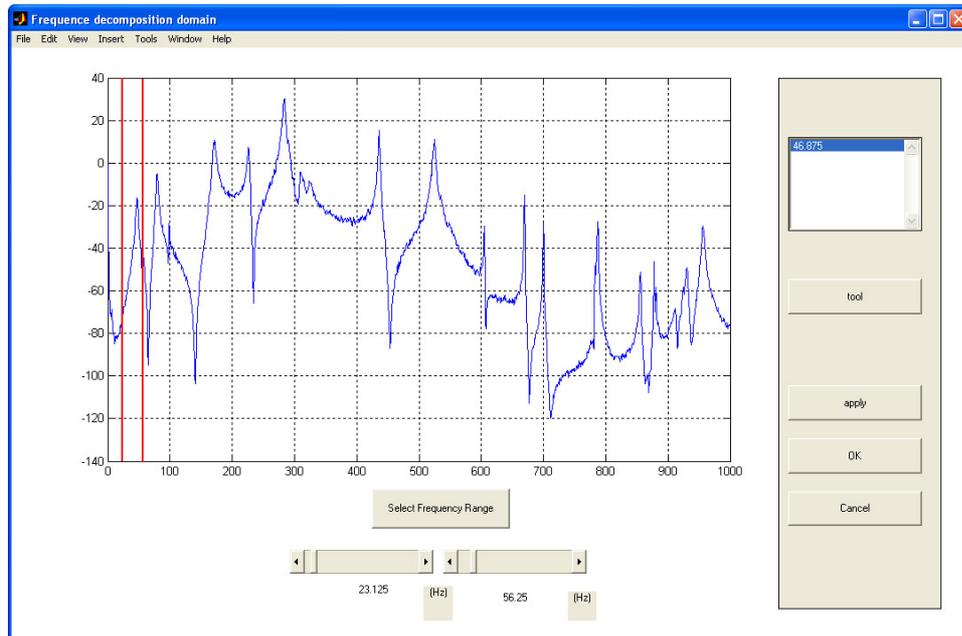


Figura 6.14 – Interface gráfica para seleção dos picos de interesse

Após a seleção das faixas de frequência em torno dos picos de ressonância de interesse é realizada a DVS das respectivas funções de densidade espectral de potência para cada linha de frequência da região selecionada, que irá fornecer o respectivo modo de vibrar. Finalizado a estimativa do modo de vibrar referente ao pico de interesse, é feita uma busca dos vetores singulares correlacionados com aquele modo em torno do pico de frequência. Essa correlação é definida para MAC-valores maiores que um dado valor pré-definido pelo usuário. Neste caso, o índice utilizado foi 0.8 e o processo termina quando é encontrado algum valor singular com correlação inferior a este índice.

Cada vetor singular obtido tem um correspondente valor singular, os quais definem uma função de valores singulares, que corresponde à função de densidade espectral de potência equivalente a um sistema de um grau de liberdade para o respectivo modo.

Identificado as funções de densidade espectral de potência do sistema de 1GL, pode-se obter o amortecimento do referido modo, transformando a função de valores singulares para o domínio do tempo, utilizando a transformada inversa de Fourier. O amortecimento é obtido com base no conceito de decremento logaritmo, equação (4.84). A Figura 6.15 mostra a função de densidade espectral de potência de 1GL obtida para o primeiro modo e a sua respectiva transformada inversa.

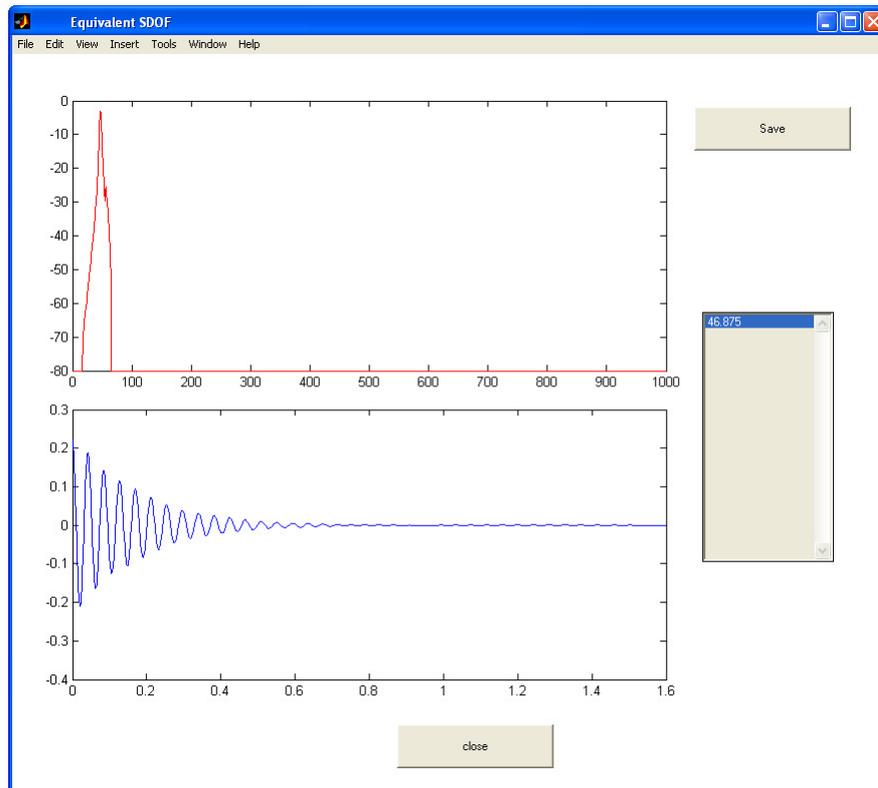


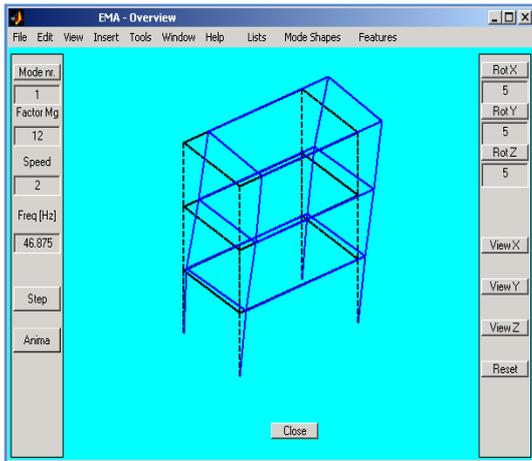
Figura 6.15 – função de 1 GDL e sua respectiva transformada inversa.

A tabela 6.5 mostra os resultados obtidos utilizando a técnica DDF, assim como na IES, os valores de MAC foram tomados utilizando os resultados do modelo analítico utilizando o software ANSYS.

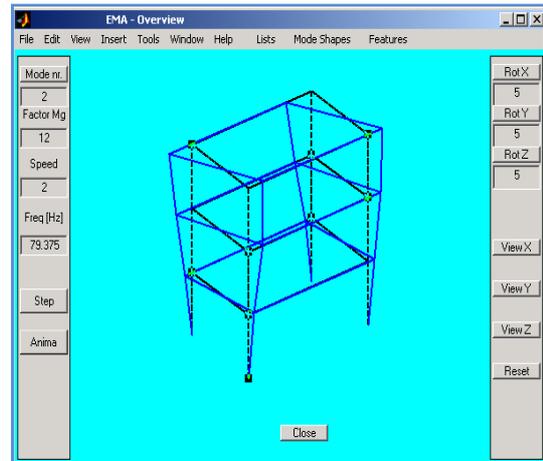
Tabela 6.5 – Resultados da DDF

Modo	DDF		Modelo Analítico	MAC
	Frequência (Hz)	Amortecimento (%)	Frequência (Hz)	
1°	46.87	3.05	49.84	0.95
2°	79.37	2.12	76.60	0.93
3°	170.63	1.23	175.23	0.70
4°	225.63	0.64	229.39	0.75
5°	283.13	0.58	271.39	0.76

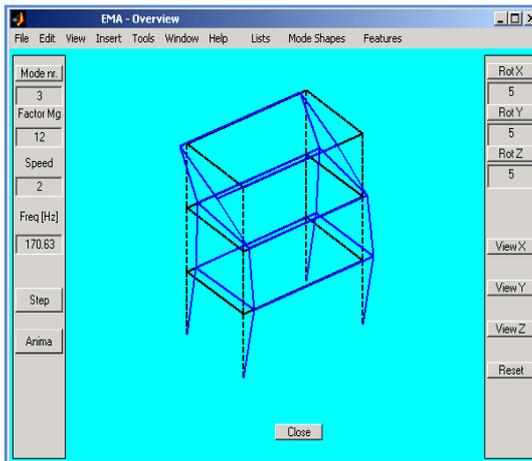
A Figura 6.16 mostra a visualização dos modos de vibrar estimados.



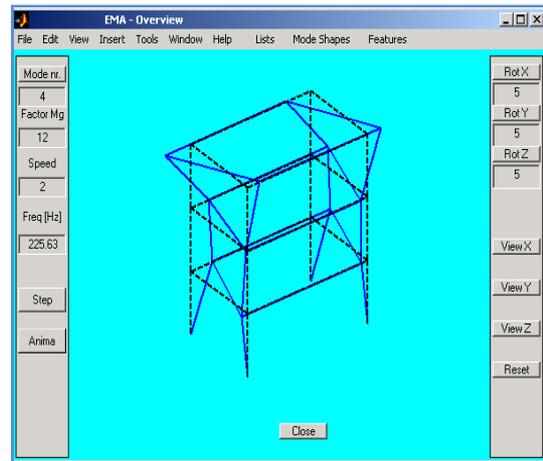
1º Modo [46.875 Hz]



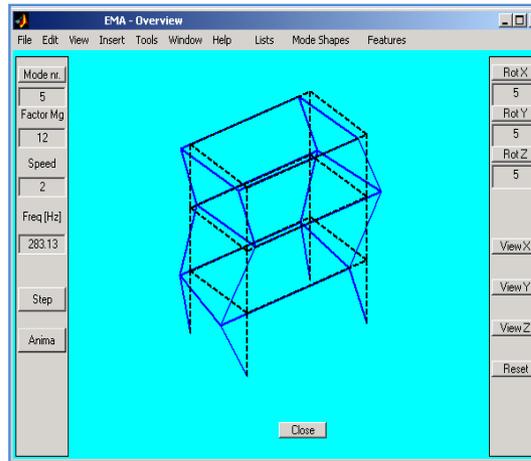
2º Modo [79.375 Hz]



3º Modo [170.630 Hz]



4º Modo [225.630 Hz]



5º Modo [283.130 Hz]

Figura 6.16 – Modos de Vibrar identificados pela DDF

A figura 6.17 mostra o gráfico de barras com os valores de MAC entre os modos estimados pela DDF e os modos analíticos.

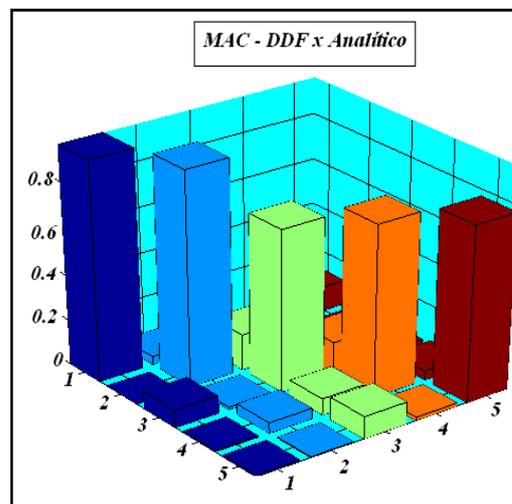


Figura 6.17 – Valores de MAC entre a DDF e o modelo analítico

Assim como na IES, também foi possível obter os parâmetros modais da estrutura *frame* utilizando a técnica DDF. Os valores encontrados quando comparados com o modelo analítico se mostram satisfatórios. É importante salientar que os modos da estrutura *frame*

são bem espaçados, facilitando assim a identificação dos parâmetros, uma vez que os modos não sofrem influência dos modos vizinhos.

### 6.1.6 Comparação entre IES e DDF

Visando uma melhor avaliação dos resultados obtidos pelas duas técnicas, os valores dos parâmetros modais identificados pela IES e DDF foram confrontados. Neste caso, as frequências naturais e o amortecimento podem ser comparados diretamente e os modos de vibrar são comparados a partir dos valores de MAC.

A tabela 6.6 mostra os valores identificados pelas duas técnicas.

Tabela 6.6 – Comparação entre a IES e DDF

Modo	IES		DDF		Erro		MAC
	Freq. (Hz)	Amort. (%)	Freq. (Hz)	Amort. (%)	Freq. (%)	Amort. (%)	
1°	47.10	3.25	46.87	3.05	0.48	6.19	0.94
2°	79.57	2.11	79.37	2.12	0.25	0.57	0.89
3°	171.75	1.40	170.63	1.23	0.66	12.64	0.79
4°	226.33	0.56	225.63	0.64	0.31	12.48	0.84
5°	283.25	0.43	283.13	0.58	0.04	24.43	0.74

A figura 6.18 mostra o gráfico de barras com os valores de MAC obtidos da comparação entre a IES e a DDF.

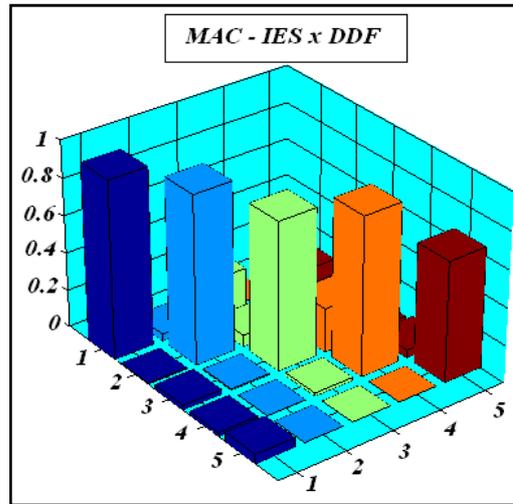


Figura 6.18 – Valores de MAC entre a IES e a DDF

Os resultados encontrados pelas duas técnicas apresentaram praticamente os mesmos valores para os parâmetros modais, os valores das frequências naturais estimadas pelas duas técnicas apresentam diferenças muito pequenas, mostrando uma ótima concordância na estimativa deste parâmetro. Já o amortecimento, que em muitas vezes apresenta valores incertos, devido a dificuldade de sua estimativa, neste caso, parece se mostrar adequado, uma vez que a discrepância apresentada está dentro do aceitável, e até pode ser considerada pequena se comparado com os encontrados na literatura. Já o valores de MAC mostraram uma relativa discrepância, evidenciando, que algum problema possa ter ocorrido durante a realização dos experimentos, causada pela escolha do ponto de referência ou alteração nos ganhos do equipamento durante o teste ou mesmo a fixação dos acelerômetros.

## 6.2 Avaliação da IES e DDF com dados do software ARTeMIS Extractor®

Os resultados obtidos na seção anterior mostraram que foi possível identificar os parâmetros da estrutura frame e que os valores encontrados pelas duas técnicas são coerentes. Para uma avaliação mais realista das técnicas implementadas na identificação dos parâmetros modais utilizando apenas as respostas, procedeu-se a análise de um edifício real. Neste caso, os dados experimentais utilizados foram obtidos por outros pesquisadores e se encontram disponíveis na página da internet do software ARTeMIS Extractor®.

O ARTeMIS Extractor® é um software utilizado na análise modal operacional e faz uso da Identificação Estocástica de Subespaço e Decomposição no Domínio da Frequência para estimar os parâmetros modais de estruturas mecânicas e civis.

Adicionalmente, os resultados obtidos pela IES e DDF implementadas neste trabalho, foram comparados com os resultados obtidos com o próprio software ARTeMIS Extractor®. Sua representante comercial, a *Structural Vibrations Solutions*, disponibiliza gratuitamente em seu site (<http://www.svibs.com> – acessado em 09/04/2008) uma versão demonstrativa do ARTeMIS Extractor®, afim de que usuários possam conhecê-lo e realizar seus próprios testes. Juntamente com o programa, a *Structural Vibrations Solutions* também disponibiliza alguns dados de testes experimentais realizados por alguns pesquisadores.

Os dados utilizados neste caso, foram os dados obtidos em testes experimentais realizados em um edifício chamado Heritage Court Tower – HCT, localizado na cidade de Vancouver – Canada. A figura 6.19 mostra uma das vistas do Heritage Court Tower.



Figura 6.19 – Vista do Heritage Court Tower – Vancouver Canada

A figura 6.20 mostra alguns dos sensores utilizados na aquisição dos sinais.



Figura 6.20 – Sensores utilizados nos testes do Heritage Court Tower

Os detalhes das características do HCT e os procedimentos experimentais são discutidos em (VENTURA et al, 2001).

A figura 6.21 mostra o HCT discretizado e os locais onde foram colocados os sensores para a aquisição dos sinais. As setas na cor azul representam os pontos de referência.

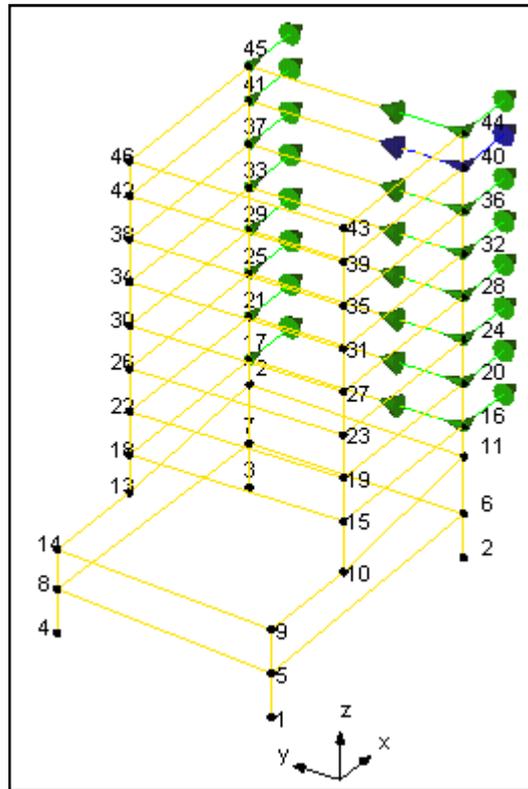


Figura 6.21 Discretização e pontos de medida do HCT

Há disponível no site da *Structural Vibrations Solutions* os dados de resposta no tempo de 4 sistemas de canais de aquisição distribuídos pelos pontos mostrados na figura 6.21. Estes dados foram utilizados na identificação dos parâmetros modais do HCT através da IES e DDF implementadas, os quais posteriormente foram comparados com os resultados obtidos utilizando o ARTeMIS Extractor®.

Os sinais de resposta foram amostrados com uma frequência de Nyquist de 20 Hz para um tempo total de aquisição de 327 segundos com discretização de 13108 pontos. As densidades espectrais de potência foram estimadas para 1024 linhas de frequência utilizando rotinas disponíveis no software MATLAB®.

A figura 6.22 mostra a resposta no tempo medida no ponto 45-x e sua respectiva densidade espectral de potência.

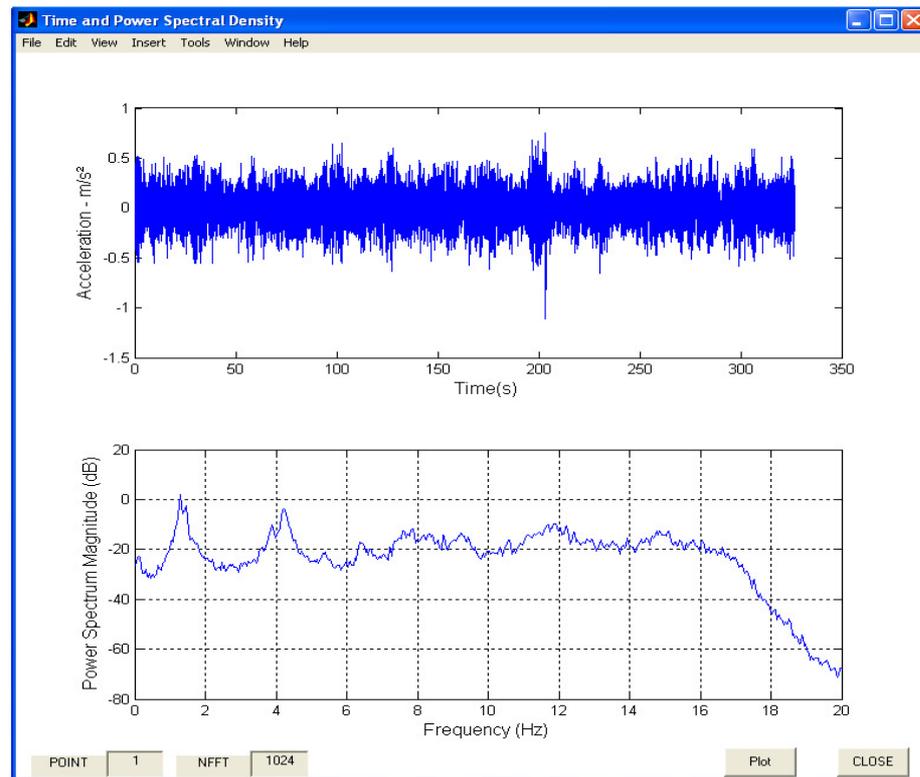


Figura 6.22 – Sinal no tempo e sua respectiva densidade espectral medidos no ponto 45-x do HCT

A identificação dos parâmetros foi realizada para os 7 primeiros modos, englobando a faixa de 0 a 7 Hz.

### 6.2.1 Análise Modal do HCT Utilizando a IES

Para cada canal de aquisição um conjunto de modelos de diferentes ordens foi identificado e assim pode-se estabelecer o diagrama de estabilização. A figura 6.23 mostra o diagrama de estabilização do primeiro canal de aquisição utilizado na identificação dos parâmetros pela IES. O número de blocos de linhas  $i$  foi igual a 36 e os critérios de estabilidade foram 1% para frequência, 2% para frequência e modo (MAC) e 5% para frequência e amortecimento.

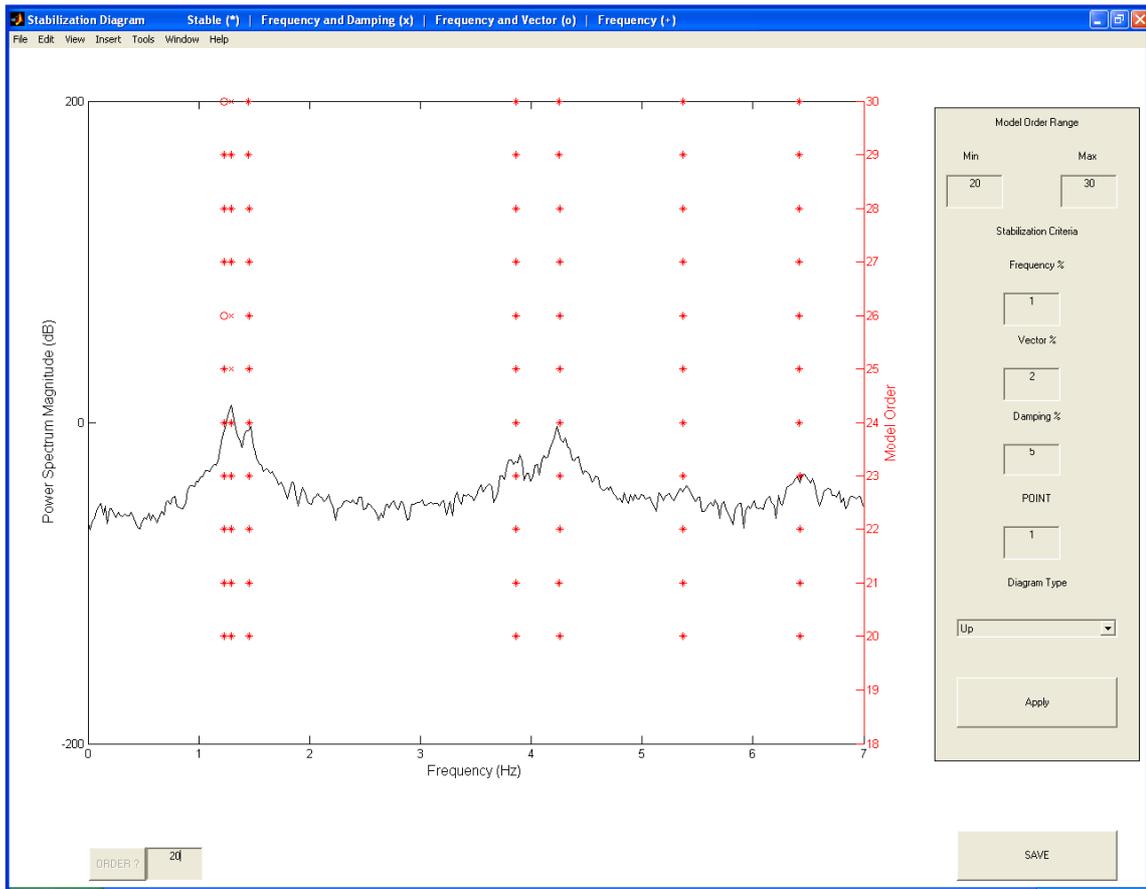


Figura 6.23 – Diagrama de Estabilização – (\*) Estável; (x) Freqüência e Amortecimento; (o) Freqüência e Modo; (+) Freqüência

Da figura acima, observa-se que a partir da ordem 20 existe estabilidade em todos os picos na faixa de freqüência analisada. A partir desta ordem, as matrizes *A* e *C* são obtidas e os parâmetros modais são encontrados resolvendo o problema de autovalor. A tabela 6.7 mostra os valores identificados pela IES, juntamente com os valores de referência tomados do software ARTeMIS Extractor®.

Tabela 6.7 – Comparação entre a IES e ARTeMIS Extractor®

Modo	IES		ARTEMIS®		Erro		MAC
	Freq. (Hz)	Amort. (%)	Freq. (Hz)	Amort. (%)	Freq. (%)	Amort. (%)	
1°	1.23	1.81	1.23	2.12	--	14.62	0.90
2°	1.29	1.59	1.29	1.68	--	5.35	0.90
3°	1.45	1.20	1.45	1.24	--	3.22	0.88
4°	3.85	1.14	3.85	1.17	--	2.56	0.92
5°	4.25	1.46	4.25	1.43	--	2.05	0.87
6°	5.35	1.97	5.33	2.07	0.37	4.83	0.89
7°	6.42	1.51	6.39	1.36	0.46	9.93	0.88

Da tabela acima nota-se que foi possível identificar os parâmetros modais do HCT utilizando a técnica SSI. Como o método IES é baseado diretamente nos dados medidos no tempo, a presença de modos próximos não prejudica a identificação dos resultados. Mais uma vez se nota-se a importância do diagrama de estabilização, pois a ordem encontrada foi igual a 20, evidenciando que nem todos os modos são estruturais.

### 6.2.1 Análise Modal do HCT Utilizando a DDF

Nesta análise foram identificados 7 modos, a figura 6.24 mostra a função de densidade espectral de potência equivalente de 1GDL obtida através da DVS das linhas de frequência em torno do 5º modo e a sua respectiva transformada inversa utilizada para determinar o amortecimento.

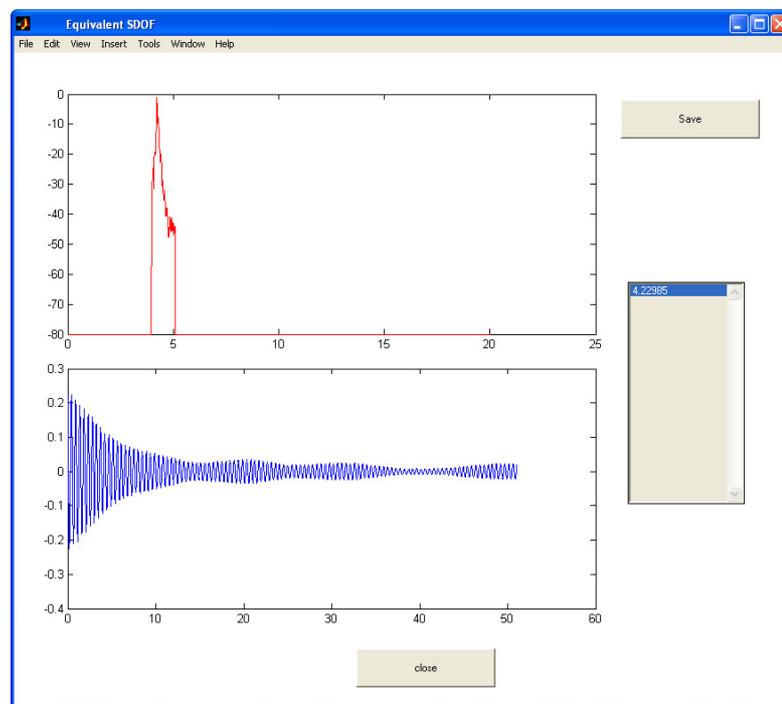


Figura 6.24 – funções de 1 GDL e a transformada inversa do 7º modo

A tabela 6.8 mostra a comparação dos valores identificados pela DDF com os valores de referência tomados do software ARTEMIS Extractor®.

Tabela 6.8 – Comparação entre a DDF e ARTeMIS®

Modo	DDF		ARTeMIS®		Erro		MAC
	Freq. (Hz)	Amort. (%)	Freq. (Hz)	Amort. (%)	Freq. (%)	Amort. (%)	
1°	1.23	1.56	1.23	1.81	--	13.81	0.85
2°	1.27	1.38	1.26	2.04	0.78	32.00	0.81
3°	1.45	1.57	1.44	1.70	0.68	7.64	0.91
4°	3.87	1.48	3.87	1.50	--	1.33	0.91
5°	4.24	1.0967	4.24	1.63	--	32.52	0.90
6°	5.35	1.14	5.35	2.13	--	46.47	0.91
7°	6.40	0.8452	6.40	1.56	--	46.15	0.86

Com a técnica DDF também foi possível identificar os parâmetros modais do HCT, no entanto, como os modos na faixa de frequência analisada estão próximos, existe certa dificuldade da DDF em se separar as regiões em tornos dos picos de ressonância, pois a resolução em frequência não é suficiente para uma boa separação dos modos. Como consequência existe a influência de um modo sobre o outro, afetando principalmente o valor do amortecimento.

### 6.3 Conclusões do Capítulo

No primeiro caso experimental, o estudo da estrutura *frame*, os resultados identificados pelas duas técnicas foram primeiramente comparados com dados obtidos pelo método dos elementos finitos. As pequenas diferenças encontradas entre os valores identificados pelas duas técnicas em relação ao modelo analítico, comprovam que os resultados obtidos são satisfatórios, principalmente devido ao fato de os testes serem realizados para uma condição de engaste bastante complexa, quando comparada com o modelo analítico. Posteriormente os resultados das duas técnicas foram comparados entre si e se mostraram bastante consistentes.

Quanto a potencialidade de cada método para esta aplicação, nota-se que não houve diferenças significativas entre os resultados estimados pelas duas técnicas, a maior diferença esta quanto a praticidade de cada método. A IES exige uma maior experiência do usuário, quanto aos procedimentos de pré-identificação, como a aplicação de filtros, decimação e

---

interpretação do diagrama de estabilização, enquanto que na DDF é apenas necessário selecionar as regiões em torno dos picos de frequência. Dessa forma, pode-se dizer que para estruturas simples, com os modos bem espaçados, como é o caso da estrutura *frame*, o uso da DDF se mostra mais viável, pois é mais rápido, exige menos conhecimento do usuário e necessita de um menor esforço computacional.

No segundo teste, realizado no HCT, os valores de referência foram tomados da versão demonstrativa do software de análise modal operacional ARTeMIS Extractor®. Este teste representa uma estrutura bem mais complexa, excitada pelas próprias condições de operação, o que possibilita uma avaliação mais consistente das técnicas. Neste caso, ambas as técnicas estimaram adequadamente os parâmetros do HCT, no entanto percebe-se que os resultados da IES são mais próximos dos resultados tomados como referência. Como os modos na faixa de frequência analisada estão próximos, existe certa dificuldade da DDF em se separar as regiões em torno dos picos de ressonância, pois não se consegue obter uma resolução em frequência que permita uma boa separação. Como consequência existe a influência de um modo sobre o outro, afetando principalmente o valor do amortecimento. Já na IES, este problema não influencia os resultados, pois o método é baseado diretamente nos dados de resposta medidos no tempo. Adicionalmente, na identificação utilizando a DDF percebe-se que as funções de valores singulares de 1GDL, Fig. 6.24, não possuem um comportamento suave como nos casos simulados e no *frame*, isso pode ter prejudicado a estimativa dos parâmetros.

Para o caso mais complexo, identificação estrutural de estruturas civis de grande porte, a IES mostrou mais viável que a DDF, pois a mesma demonstra ser mais robusta a presença de modos pouco espaçados, garantindo assim resultados mais precisos. De uma maneira geral, os resultados obtidos nos dois casos mostram que as técnicas são capazes de estimar os parâmetros modais do modelo sem medir a entrada e possuem um grande potencial a ser explorado na área de identificação estrutural.

---

## 7 CONCLUSÕES

O presente trabalho mostrou os principais aspectos da Identificação Estocástica de Subespaço (IES) e da Decomposição no Domínio da Frequência (DDF). Os dois métodos foram confrontados, visando avaliar suas potencialidades para o uso em aplicações práticas.

As técnicas em um primeiro momento foram avaliadas com dados de exemplos simulados de uma estrutura do tipo *frame*. A utilização de dados simulados foi muito importante, pois com ela se tem uma base de resultados de referência que permitem uma avaliação sistemática das técnicas.

Os resultados obtidos nesta fase mostraram-se bastante consistentes, os parâmetros modais do sistema foram estimados com exatidão. Contudo, a avaliação utilizando modelos simulados é limitada, pois, por mais bem elaborados que sejam os modelos, a simulação é incapaz de reproduzir toda a complexidade de um experimento. E portanto, exemplos experimentais são decisivos para avaliação das potencialidades das metodologias, o que demanda a realização de testes em estruturas reais.

Numa segunda fase, as técnicas foram avaliadas com dados experimentais de duas estruturas reais. No primeiro caso, os testes foram realizados em laboratório para uma estrutura do tipo *frame*. No segundo caso foi utilizado dados experimentais de outros pesquisadores, mais especificamente, foram utilizadas as respostas de um prédio real, o Heritage Court Tower - HCT, localizado na cidade de Vancouver – Canada.

Os resultados obtidos nos testes experimentais foram satisfatórios, pois as duas técnicas foram capazes de estimar os parâmetros modais das estruturas analisadas. Verificou-se que para casos mais simples, como a estrutura *frame* a utilização da DDF é mais viável, uma vez que elas possui uma maior praticidade. Já no caso do HCT onde os modos estão muito próximos a identificação com a IES foi mais precisa, mostrando que a técnica neste caso é robusta a presença de modos pouco espaçados.

De uma maneira geral, os resultados obtidos em todos os casos, exemplos simulados e experimentais, mostraram-se bastante promissores. Os parâmetros modais dos sistemas estimados com as técnicas propostas têm a mesma ordem de precisão dos resultados tomados

---

como referência. Isto demonstra que as metodologias foram capazes de identificar os parâmetros modais dos modelos e que podem ser aplicadas na identificação de estruturas reais, utilizando apenas as respostas.

O próximo passo deste trabalho é a realização da identificação da presença de componentes harmônicos nos resultados obtidos pelas técnicas, uma vez que tanto a IES quanto a DDF consideram as forças de entradas como sendo um ruído branco gaussiano fazendo com que a presença de harmônicos possa levar a resultados errôneos e também realização de testes em estruturas com condições reais de operação nos laboratórios do Departamento de Engenharia Mecânica da UNESP de Ilha Solteira.

---

## REFERÊNCIAS

AKAIKE, H. **Markovian representation of stochastic processes by canonical variables.** Siam J. Control. 1975. v. 13, n.1, p. 162-173.

ALLEMANG, R. **Experimental modal analysis bibliography.** In: International Modal Analysis Conference - IMAC, 1. 1982, Orlando - FL. Proceedings of I-IMAC.

ALLEMANG, R. J. **Vibrations: experimental modal analysis.** 7th ed. Course Notes, Structural Dynamics Research Laboratory, University of Cincinnati, OH.1999.

ANDERSEN, P. **Identification of civil engineering structures using vector ARMA models.** 1997. 244 f. Thesis (PhD) - Department of Building Technology and Structural Engineering, University of Aalborg, Denmark, 1997.

ANDERSEN, P.; BASSEVILLE, M.; BRINCKER, R.; MEVEL L.; VENTURA, C. E.; ZHOU, W. **Seismic damage assessment in structures using stochastic subspace-based algorithm.** In: Thematic Conference on Computational Methods in Structural Dynamics and Earthquake Engineering - ECCOMAS. 2007, Rethymno, Crete, Greece. Proceedings of The ECCOMAS.

ANDERSON, B.D.O.; MOORE, J.B. **Optimal filtering.** Prentice-Hall. 1979.

ARUN, K.S.; KUNG, S.Y. **Balanced approximation of stochastic systems.** SIAM J. Matrix Analysis and Applications. 1990. v.11, p. 42-68.

BATHE, J., WILSON, E. L. **Numerical methods in finite elements analysis.** Prentice-Hall Inc. Englewood Cliffs. 1976.

BENDAT, J. S.; PIERSOL, A. G. **Random Data, Analysis and Measurement Procedures.** New York: Wiley. 1986.

BENDAT, J. S.; JULIUS, S.; PIERSOL, A.G. **Engineering applications of correlation and spectral analysis.** John Wiley & Sons. 1993.

---

BORGES, A.S.; NUNES JUNIOR, O.A.; PEREIRA, J.A. **Output-Only modal analysis using frequency domain decomposition**. In: INTERNATIONAL CONGRESS OF MECHANICAL ENGINEERING - COBEM, 18, 2005, Ouro Preto – MG. Proceedings of COBEM 2005.

BORGES, A. **Análise modal baseada apenas na resposta - Decomposição no Domínio na Frequência**. 2006. 106 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) - Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Ilha Solteira – SP, 2006.

BRASILIANO, A. **Identificação de sistemas e atualização de modelos numéricos com vistas à avaliação da integridade estrutural**. 2005. Tese (Doutorado em Estruturas e Construção Civil) - Universidade de Brasília, Brasília - DF, 2005.

BRINCKER, R.; ZHANG, L.; ANDERSEN, P. **Modal identification from ambient responses using frequency domain decomposition**. In: International Modal Analysis Conference - IMAC, 18. 2000, San Antonio – TX. Proceedings of IMAC-XVIII: A Conference on Structural Dynamics. p. 625.

BRINCKER, B.; VENTURA, C.; ANDERSEN, P. **Damping Estimation by Frequency Domain Decomposition**. In: International Modal Analysis Conference - IMAC, 19. 2001, Kissimmee. Proceedings of IMAC-XIX.

CARDOSO, A. **A transformada wavelet aplicada à identificação modal operacional**. 2006. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) - Escola de Engenharia de São Carlos, USP, São Carlos – SP, 2006.

CLARKSON, B.L.; MERCER, C.A. **Use of cross-correlation in studying the response of lightly damped structures to random forces**. AIAA Journal. 1965. v.3, n.12, p.2287-2291.

COOLEY, J., W.; TUKEY J. W. **An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series**. Mathematics of Computation. 1965, v. 19, n. 90, p. 297-301.

EWINS, D. J.; GRIFFIN, J. **A state-of-the-art assessment of mobility measurement techniques - results for the mid-range structures**. Journal of Sound and Vibration. 1981, v. 78, p. 197-222.

---

CUNHA, A.; CAETANO, E. **Reanálise dos ensaios dinâmicos da ponte Vasco da Gama com base no método de identificação estocástica por sub-espacos**. In: Congresso Nacional de Sismologia e Engenharia Sísmica, 6, 2004, Guimarães – Portugal.

CUNHA, A.; CAETANO, E. **Experimental modal analysis of civil engineering structures**. Sound and Vibration. 2006. v. 6, n. 40, pp.12-20.

EWINS, D. J. **Modal testing: theory and practice**. New York: John Wiley & Sons Inc, 1984.

FELBER, A. **Development of a hybrid bridge evaluation system**. 1993. 277 f. Thesis (PhD) – Department of Civil Engineering, University of British Columbia, Vancouver, Canada, 1993.

FREITAS, T. C. **Estudo e análise do comportamento de estruturas flexíveis utilizando elementos de contato**. 2006. 30 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Engenharia Mecânica) - Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Ilha Solteira – SP, 2006.

FREITAS, T. C.; PEREIRA, J. A. **Modal parameters identification using only response data – Stochastic Subspace Identification and Frequency Domain Decomposition**. In: INTERNATIONAL CONGRESS OF MECHANICAL ENGINEERING - COBEM, 19, 2007, Brasília – DF. Proceedings of COBEM 2007.

GERSCH, W. **Estimation of the autoregressive parameters of a mixed autoregressive moving-average time serie**. IEEE Transactions on Automatic Control. 1970. AC-15, p. 583-588.

GOLUB, G. H.; VAN LOAN, C.F. **Matrix computations**. 3rd ed. Johns Hopkins. 1996.

HERMANS, L.; AUWERAER, V.D. **Modal testing and analysis of structures under operational conditions: industrial applications**. Mechanical System and Signal Processes. 1999. v.13, p. 193-216.

HEYLEN, W.; LAMMENS, S.; SAS, P. **Modal Analysis Theory and Testing**. Belgium: Division of Production Engineering. 1995.

---

HEYLEN, W.; LAMMENS, S.; SAS, P. **Modal analysis theory and testing**. Division of Production Engineering, Belgium, 1995

MAIA, S. et al. **Theoretical and experimental modal analysis**. Research Studies Press Ltd, 1997.

IBRAHIM, S. R.; MIKULCIK, E. C. **A method for the direct identification of vibration parameters from the free response**. The Shock and Vibration Bulletin. 1977. v. 47, p.183-198.

JACOBSEN, N.; J.; ANDERSEN, P.; BRINCKER, R. **Using enhanced frequency domain decomposition as a robust technique to harmonic excitation in operational modal analysis**. In: International Conference on Noise and Vibration Engineering - ISMA. 2006, Leuven, Belgium. Proceedings of ISMA 2006.

JAMES III, G.H.; CARNE, T.G.; LAUFFER, J.P. **The natural excitation technique (NExT) for modal parameter extraction from operating structures**. Modal Analysis: the international journal of analytical and experimental modal analysis. 1995. v.10, n.4, p.260-277.

JAZWINSKI, A.H. **Stochastic processes and filtering theory**. Academic Press, 1970.

JUANG, J-N.; PAPPA, R. S. **An eigensystem realization algorithm for modal parameter identification and model reduction**. Journal of Guidance. 1985. v. 8, n. 5, p. 620-627.

JUANG, J-N.; PHAN, M. Q. **Identification and control of mechanical systems**. 1st ed. Cambridge University Press. 2001

KOLMAN, B.; DAVID, R. H. **Introductory linear algebra with applications**. Prentice Hall. 2001.

KUNG, S.Y. **A new identification method and model reduction algorithm via singular value decomposition**. In: Asilomar Conference on Circuits, Systems and Computer. 12. 1978, Asilomar – CA. Proceedings of 12th Asilomar Conf. p. 705 – 714

LJUNG, L. **System identification: theory for the user**. 2nd ed. Prentice-Hall. 1999.

LYAPUNOV, A.M. **Stability of motion**. New-York and London: Academic Press. 1966

---

MAGALHÃES, F.; CAETANO, E.; CUNHA, A. **Operational modal analysis of the braga sports stadium suspended roof**. In: International Modal Analysis Conference - IMAC, 24. 2006, St. Louis – Missouri. Proceedings of XXIV IMAC.

MAIA, N. M. M. **Fundamentals of singular value decomposition**. In: International Modal Analysis Conference – IMAC. 9. 1991, Florence - Italy. Proceedings of IMAC-IX. v. 2, p. 1515 – 1521.

MAIA, N. M. M.; SILVA, J. M. M. **Philosophical transactions: mathematical, physical and engineering sciences**. Experimental Modal Analysis. 2001. v. 359, n. 177, pp. 29-40.

MEIROVITCH, L. **Elements of vibration analysis**. 4th ed. McGraw-Hill Book Company, 1977.

MEIROVITCH, L. **Computational methods in structural dynamics**, Sijthoff e Noordhoof International Publisher B. V. 1980.

MOLLER, N.; GADE, S. **Operation Modal Analysis on an Automotive Transmission System**. In: International Modal Analysis Conference - IMAC, 22. 2004, Detroit – MI. Proceedings of IMAC-XXII.

NUNES JUNIOR, O. A.; BORGES, A.S.; PEREIRA, J.A. **Modal parameters identification applied to operational data**. In: INTERNATIONAL CONGRESS OF MECHANICAL ENGINEERING - COBEM, 18, 2005, Ouro Preto – MG. Proceedings of COBEM 2005.

NUNES JUNIOR, O. A. **Identificação dos parâmetros modais utilizando apenas as respostas da estrutura – Identificação no Domínio do tempo**. 2006. 111 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) - Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Ilha Solteira – SP, 2006.

OPPENHEIM, A. V. **Discrete-Time Signal Processing**. New Jersey: Prentice-Hall Inc.1998.

PAPOULIS, A. **Probability, random variables and stochastic processes**. 3rd ed. Singapore: McGraw-Hill Inc. 1991.

PAPPA, R.S.; JUANG, J-N. **Same experiences with the eigensystem realization algorithm**. Journal of Sound and Vibration. 1988. v.120, n.1, p.30-34.

---

PEETERS, B.; ROECK, G. D. **Reference-Based Stochastic Subspace Identification for Output-only Modal Analysis**. Mechanical Systems and Signal Processing. 1999. v.13, p. 855- 878.

PEETERS, B. **System Identification and Damage Detection in Civil Engineering**. 2000. Thesis (Ph.D) - Katholieke Universiteit Leuven, 2000.

REBOLHO, D. C. **Um método para identificação de parâmetros modais em tempo real**. 2006. 147 f. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) - Escola de Engenharia de São Carlos, USP, São Carlos – SP, 2006.

ROST, R. et al. **Recent advances in multiple input frequency response functions estimation**. In: International Seminar on Modal Analysis, 10. 1985, Leuven. Proceedings of the X International Seminar on Modal Analysis.

LEURIDAN, J. et al. **Review of parameters identification techniques**. In: International Seminar on Modal Analysis, 13. 1990, Leuven. Proceedings of the XIII International Seminar on Modal Analysis.

SCIONTI, M.; LANSLOTS, J. P. **Stabilisation diagrams: pole identification using fuzzy clustering techniques**. Advances in Engineering Software. 2005. v.36, p.768–779.

SNOEYS, R.; SAS, P.; HEYLEN, W.; VAN DER AUWERAER, H. **Trends in experimental modal analysis**. Mechanical Systems and Signal Processing. 1987, v. 1, p. 5-27.

VAN DER AUWERAER, H.; PEETERS, B. **Discriminating physical poles from mathematical poles in high order systems: use and automation of the stabilization diagram**. In: Instrumentation and Measurement Technology Conference - IMIC. 2004, Cornu – Italy.

VAN OVERSCHEE, P.; DE MOOR, B. **Subspace algorithms for the stochastic identification problem**. Automatica, Special Issue on Statistical Signal Processing and Control.1993. v. **29**, n. 3, p. 649-660.

VAN OVERSCHEE P.; DE MOOR B. **A unifying theorem for three subspace system identification algorithms**. 1994, Copenhagen, Denmark. Proceedings. of SYSID . v. 2, p. 145-150.

---

VAN OVERSCHEE, P., DE MOOR, B. **N4SID: Subspace algorithms for the identification of combined deterministic - stochastic systems**. Automatica, Special Issue on Statistical Signal Processing and Control.1994. v. **30**, n. 1, p. 75-93

VAN OVERSCHEE, P.; DE MOOR, B. **Subspace identification for linear systems: theory - implementation - applications**. Kluwer Academic Publishers, 1996.

VENTURA, C. E.; BRINCKER, R.; DASCOTTE, E.; ANDERSEN, P. **Fem Updating Of The Heritage Court Building Structure**. In: International Modal Analysis Conference - IMAC, 19. 2001, Kissimmee - Florida. Proceedings of IMAC-XIX. p.324-330.

VOLD, H.; KUNDRAT, J.; ROCKLIN, T.; RUSSELL, R. **A Multi-Input modal estimation algorithm for mini-computers**. SAE Paper. 1982. v. 91/1, n. 820194, p. 815-821.

WELCH, G.; BISHOP, G. **An introduction to Kalman Filter**. Technical Report. University of North Carolina at Chapel Hill. 1995.

YANG, H.; LI, H. ; HUANG, W. **Experimental modal analysis of offshore platform under operational conditions**. Journal of Vibration and Shock. 2005. v .24, n. 2, p. 129-133.

ZIENKIEWICZ, O. C. **The finite element method**. 3rd ed. McGraw-Hill Book Company, 1985.

# APÊNDICE

### A.1 Demonstração do Teorema Principal da IES

Das equações (4.34), (4.35) e (4.36) encontra-se para a equação (4.41) que:

$$\mathcal{O}_i = C_i L_i^{-1} Y_p \quad (\text{A.1})$$

Da teoria de realização estocástica, (KUNG, 1978), encontra-se para a seqüência de covariância  $C_i$ :

$$C_i = \begin{pmatrix} A_1 & A_{i-1} & \dots & A_2 & A_1 \\ A_{i+1} & A_1 & \dots & A_3 & A_2 \\ A_{i+2} & A_{i+1} & \dots & A_4 & A_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{2i-1} & A_{2i-2} & \dots & A_{i+1} & A_i \end{pmatrix} \quad (\text{A.2})$$

$$C_i = \begin{pmatrix} CA^{i-1}G & CA^{i-2}G & \dots & CAG & CG \\ CA^iG & CA^{i-1}G & \dots & CA^2G & CAG \\ CA^{i+1}G & CA^iG & \dots & CA^3G & CA^2G \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ CA^{2i-2}G & CA^{2i-3}G & \dots & CAG & CA^{i-1}G \end{pmatrix} \quad (\text{A.3})$$

$$C_i = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{i-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{i-1}G & A^{i-2}G & \dots & AG & G \end{pmatrix} \quad (\text{A.4})$$

$$C_i = \Gamma_i \mathcal{A}_i^c \quad (\text{A.5})$$

O que implica em:

$$\mathcal{O}_i = \Gamma_i \mathcal{A}_i^c L_i^{-1} Y_p \quad (\text{A.6})$$

Usando (4.39), determina-se que:

$$\mathcal{O}_i = \Gamma_i \hat{X}_i \quad (\text{A.7})$$

As equações (A.1) - (A.8) provam a afirmação 1 do teorema principal da IES.

A segunda afirmação que discute a ordem do sistema, vem do fato de que uma vez que  $W_1$  possui posto completo e o posto da matriz  $Y_p W_2$  é igual ao posto de  $Y_p$ , pode-se afirmar que  $W_1 \mathcal{O}_i W_2$  tem posto igual ao de  $\mathcal{O}_i$ , o qual é igual a  $n$  (ordem do sistema). Isto vem do fato de que  $\mathcal{O}_i$  é igual ao produto de duas matrizes  $W_1 \Gamma_i$  ( $n$  colunas) e  $\hat{X}_i W_2$  ( $n$  linhas). Uma vez que estas duas matrizes possuem posto  $n$  este produto também possui posto igual a  $n$ .

A decomposição em valores singulares da projeção  $\mathcal{O}_i$ , equação (4.42) pode ser dividida em duas partes (onde  $T \in \mathbb{R}^{n \times m}$  é uma matriz arbitraria não singular representando a transformação de similiariedade).

$$W_1 \Gamma_i = U_1 S_1^{\frac{1}{2}} T \tag{A.8}$$

$$X_i W_2 = T^{-1} S_1^{\frac{1}{2}} V_1^T \tag{A.9}$$

As equações (A.8) e (A.9) conduzem a terceira afirmação do teorema, provando as equações (4.44) e (4.46), respectivamente. A equação (4.45) vem do fato de que :

$$\Phi[Y_f, Y_p] = C_i = \Gamma_i \mathcal{A}^c \tag{A.10}$$

A prova da afirmação 5 segue a prova da afirmação 1, pois é fácil notar que de  $\mathcal{O}_i = \Gamma_i \hat{X}_i$  segue que  $\hat{X}_i = \Gamma_i^+ \mathcal{O}_i$ .

# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)