

Adriano Siqueira Pylro

**Modelo Linear Dinâmico de Harrison & Stevens Aplicado
ao Controle Estatístico de Processos Autocorrelacionados**

Tese de Doutorado

Tese apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Engenharia de Produção pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Industrial da PUC-Rio.

Orientador: Eugenio Kahn Epprecht

Rio de Janeiro
Fevereiro de 2008



Adriano Siqueira Pylro

Modelo Linear Dinâmico de Harrison & Stevens Aplicado ao Controle Estatístico de Processos Autocorrelacionados

Tese apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Doutor pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Industrial da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

Prof. Eugenio Kahn Epprecht

Orientador

Departamento de Engenharia Industrial - PUC-Rio

Prof. Reinaldo Castro Souza

Departamento de Engenharia Elétrica - PUC-Rio

Prof. Flávio Sanson Fogliatto

UFRGS

Prof. Maysa Sacramento de Magalhães

ENCE/IBGE

Prof. Linda Lee Ho

Poli-USP

Prof. Jose Eugênio Leal

Coordenador Setorial do Centro Técnico Científico - PUC-Rio

Rio de Janeiro, 27 de fevereiro de 2008

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial deste trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

Adriano Siqueira Pylro

Graduado em Engenharia Mecânica pela Universidade Federal do Espírito Santo em 1993 e Mestre em Engenharia de Produção pela Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro em 1996.

Ficha Catalográfica

Pylro, Adriano Siqueira

Modelo linear dinâmico de Harrison & Stevens aplicado ao controle estatístico de processos autocorrelacionados / Adriano Siqueira Pylro ; orientador: Eugenio Kahn Epprecht. – 2008.

113 f. ; 30 cm

Tese (Doutorado em Engenharia Industrial)– Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2008.

Inclui bibliografia

1. Engenharia Industrial – Teses. 2. Gráficos de controle. 3. Controle estatístico de processo (CEP). 4. Autocorrelação. 5. Previsão bayesiana. 6. Modelo linear dinâmico. I. Epprecht, Eugenio Kahn. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Engenharia Industrial. III. Título.

CDD: 658.5

À minha família, Simone, Lucas e
Mateus, por todo apoio, amor e confiança de
você. Amo vocês.

Aos meus pais, Sylvio e Maria José,
por ter me oferecido todas as oportunidades
para aqui poder chegar. Obrigado.

Agradecimentos

Em primeiro lugar a Simone, minha esposa, por ter confiado em um doido como eu, pelo apoio em todos os momentos e, principalmente, pelo seu amor.

Aos meus filhos Lucas e Mateus, pois conseguiram entender a importância do esforço do seu pai em todos esses anos de doutorado.

Aos meu pais, pois sem eles eu não teria como chegar até aqui.

Ao meu orientador, Professor Eugenio K. Epprecht, pela confiança que depositou em mim e por muitas vezes ter segurado a pressão em meu favor.

Ao DEI e em especial à Cláudia que me ajudou muito na questões logísticas e burocráticas do curso e ao saudoso João, cuja vida se foi em um piscar de olhos.

À CAPES e à PUC-Rio pelo apoio financeiro.

À UNIVIX por ter tornado viável eu cumprir o período de créditos do curso de doutorado.

Finalmente, mas o mais importante agradecimento, à Deus, pois estou certo que nenhum dos Teus planos pode ser frustrado.

Resumo

Pylro, Adriano S.; Epprecht, Eugenio K. **Modelo Linear Dinâmico de Harrison & Stevens Aplicado ao Controle Estatístico de Processos Autocorrelacionados**. Rio de Janeiro, 2008. 113p. Tese de Doutorado – Departamento de Engenharia Industrial. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Um dos principais problemas em manufatura é como ajustar um processo de produção que não está obtendo uma performance desejada. O intuito é fazer com que o parâmetro do processo volte a assumir um valor alvo requerido. As técnicas de controle estatístico de processo (CEP) são amplamente utilizadas na indústria para monitorar processos e, conseqüentemente, para melhoria da qualidade. Os gráficos de controle para variáveis mais freqüentemente utilizados para monitorar a média e a variabilidade do processo são os gráficos de Shewhart, os gráficos de CUSUM e os gráficos de EWMA. Porém, as considerações básicas para se utilizar um gráfico de Shewhart são que os dados gerados pelo processo sejam independentes e identicamente distribuídos (IID). Quando a hipótese de independência dos dados não é satisfeita, tais gráficos não funcionam bem, pois fornecerão resultados não confiáveis na forma de excesso de alarme falsos, ou seja, conduz a interpretações equivocadas acerca do processo e gera custos adicionais de controle. Esta tese utiliza uma formulação bayesiana, o Modelo Linear Dinâmico de Harrison & Stevens (MLD-HS) para o monitoramento da média de processos cujas observações podem ser modeladas como um processo ARMA (1,1). O Fator de Bayes acumulado foi utilizado na detecção de desvios na média de um dado processo. Posteriormente, os resultados obtidos pelo modelo proposto, que foi nomeado como MLD-CEP, são comparados aos resultados obtidos por Lu & Reynolds (2001). Os resultados obtidos pelo MLD-CEP sugerem bom desempenho na detecção de alterações na média em processos de baixo a moderadamente alto nível de autocorrelação.

Palavras-chave

Gráficos de controle; controle estatístico de processo (CEP); autocorrelação; previsão bayesiana; Modelo Linear Dinâmico.

Abstract

Pylro, Adriano S.; Epprecht, Eugenio K. **Dynamic Linear Model of Harrison & Stevens Applied to Statistical Process Control Autocorrelated**. Rio de Janeiro, 2008. 113p. D.Sc Thesis – Departamento de Engenharia Industrial. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Monitoring a manufacturing process is an important subject in the industries currently. Statistical process control techniques are widely used for process monitoring and quality improvement. Control charts for variables more often used to control both process mean and variance are Shewhart control charts, CUSUM charts and EWMA charts. However, the basic assumptions to use a Shewhart chart are: independent and identically distributed observations (IID); but, autocorrelation may be present in many process, and may have a strong impact in the properties of control charts. This thesis used a bayesian formulation, Dynamic Linear Model of Harrison & Stevens (MLD-HS), for monitoring the process mean for the situation in which observations from the process can be modeled as an ARMA(1,1). The cumulative Bayes factor has been used for detecting shifts on the process mean. After that, the results obtained by MLD-CEP are compared with the results obtained by Lu & Reynolds (2001). The MLD-CEP results indicate a good performance in detecting shifts in the process mean.

Keywords

Control charts; statistical process control (SPC); autocorrelation; bayesian forecast; Dynamic Linear Model.

Sumário

1	Introdução	17
2	Controle Estatístico de Processos	21
2.1.	Gráficos de Controle de Shewhart	21
2.2.	Gráficos de Controle EWMA	25
2.3.	Gráficos de Controle de CUSUM	26
2.4.	Subgrupos Racionais	27
2.5.	Controle Estatístico de Processos com Observações Autocorrelacionadas	28
2.6.	Principais Abordagens para CEP de processos autocorrelacionados	32
3	Fundamentação Teórica de Modelos Bayesianos de Previsão	37
3.1.	Abordagem Bayesiana para Estimação	37
3.2.	Abordagem Bayesiana para Previsão	38
3.3.	Características Fundamentais dos Modelos Bayesianos de Previsão de Harrison & Stevens (HS)	39
3.4.	Modelo Linear Dinâmico – MLD	40
3.5.	Fator de Bayes	49
4	Modelo Estacionário para o CEP Autocorrelacionados	51
4.1.	O Processo AR(1) com Erro Aleatório Adicional	51
4.2.	MLD-CEP	54
4.3.	Suposições e Opções do Modelo Proposto – MLD-CEP	54
4.4.	Obtenção dos <i>Designs</i> para o Modelo Proposto – MLD-CEP	55
4.5.	Análise de desempenho do MLD-CEP para cada <i>design</i>	59
5	Conclusão	70

6 Referências Bibliográficas 73

7 Apêndice 78

Lista de figuras

Figura 1 – observações não correlatadas	28
Figura 2 – observações autocorrelatadas negativamente	28
Figura 3 – observações autocorrelatadas positivamente	29
Figura 4 – processo não estacionário	29
Figura 5 - um processo com comportamento do modelo estático.	43
Figura 6 - um processo com comportamento do modelo estacionário.	44

Lista de tabelas

Tabela 1 - Comparação dos Modelos Bayesianos (HS) com Modelos Tradicionais (MT)	40
Tabela 2 - Fatores de Desconto	46
Tabela 3 - Obtenção do $\overline{alarmes} = 7,45$ sem refino para $(\phi, \psi, \delta^*) = (0,4 / 0,5 / 0,5)$	56
Tabela 4 - Obtenção do $\overline{alarmes} = 7,45$ com refino para $(\phi, \psi, \delta^*) = (0,4 / 0,5 / 0,5)$	57
Tabela 5 - (β, τ) para $(\phi, \psi, \delta^*) = (0,4 / 0,5 / 0,5)$ e $\overline{alarmes} = 7,45 \Rightarrow NMA_0 \cong 370$	58
Tabela 6 - Valores obtidos pelo MLD-CEP e comparados ($\phi = 0,4$ e $\psi = 0,5$)	61
Tabela 7 - Valores obtidos pelo MLD-CEP e comparados ($\phi = 0,8$ e $\psi = 0,5$)	62
Tabela 8 - Valores obtidos pelo MLD-CEP e comparados ($\phi = 0,4$ e $\psi = 0,9$)	63
Tabela 9 - Valores obtidos pelo MLD-CEP e comparados ($\phi = 0,8$ e $\psi = 0,9$)	64
Tabela 10 - Valores obtidos pelo MLD-CEP e comparados ($\phi = 0,4$ e $\psi = 0,5$) – II	65
Tabela 11 - Valores obtidos pelo MLD-CEP e comparados ($\phi = 0,4$ e $\psi = 0,9$) – II	66
Tabela 12 - Valores obtidos pelo MLD-CEP e comparados ($\phi = 0,8$ e $\psi = 0,5$) – II	67
Tabela 13 - Valores obtidos pelo MLD-CEP e comparados ($\phi = 0,8$ e $\psi = 0,9$) – II	68
Tabela 14 - Obtenção do $\overline{alarmes} = 7,45$ sem refino para $(\phi, \psi, \delta^*) = (0,4 / 0,5 / 1,0)$	84
Tabela 15 - Obtenção do $\overline{alarmes} = 7,45$ com refino para $(\phi, \psi, \delta^*) = (0,4 / 0,5 / 1,0)$	84

Tabela 16 - (β, τ) para $(\phi, \psi, \delta^*) = (0,4 / 0,5 / 1,0)$ e $\overline{alarmes} = 7,45 \Rightarrow NMA_0 \cong 370$	85
Tabela 17 - Obtenção do $\overline{alarmes} = 7,45$ sem refino para $(\phi, \psi, \delta^*) = (0,4 / 0,5 / 2,0)$	87
Tabela 18 - Obtenção do $\overline{alarmes} = 7,45$ com refino para $(\phi, \psi, \delta^*) = (0,4 / 0,5 / 2,0)$	87
Tabela 19 - (β, τ) para $(\phi, \psi, \delta^*) = (0,4 / 0,5 / 2,0)$ e $\overline{alarmes} = 7,45 \Rightarrow NMA_0 \cong 370$	88
Tabela 20 - Obtenção do $\overline{alarmes} = 7,45$ sem refino para $(\phi, \psi, \delta^*) = (0,4 / 0,9 / 0,5)$	89
Tabela 21 - Obtenção do $\overline{alarmes} = 7,45$ com refino para $(\phi, \psi, \delta^*) = (0,4 / 0,9 / 0,5)$	89
Tabela 22 - (β, τ) para $(\phi, \psi, \delta^*) = (0,4 / 0,9 / 0,5)$ e $\overline{alarmes} = 7,45 \Rightarrow NMA_0 \cong 370$	91
Tabela 23 - Obtenção do $\overline{alarmes} = 7,45$ sem refino para $(\phi, \psi, \delta^*) = (0,4 / 0,9 / 1,0)$	91
Tabela 24 - Obtenção do $\overline{alarmes} = 7,45$ com refino para $(\phi, \psi, \delta^*) = (0,4 / 0,9 / 1,0)$	92
Tabela 25 - (β, τ) para $(\phi, \psi, \delta^*) = (0,4 / 0,9 / 1,0)$ e $\overline{alarmes} = 7,45 \Rightarrow NMA_0 \cong 370$	93
Tabela 26 - Obtenção do $\overline{alarmes} = 7,45$ sem refino para $(\phi, \psi, \delta^*) = (0,4 / 0,9 / 2,0)$	94
Tabela 27 - Obtenção do $\overline{alarmes} = 7,45$ com refino para $(\phi, \psi, \delta^*) = (0,4 / 0,9 / 2,0)$	94
Tabela 28 - (β, τ) para $(\phi, \psi, \delta^*) = (0,4 / 0,9 / 2,0)$ e $\overline{alarmes} = 7,45 \Rightarrow NMA_0 \cong 370$	98
Tabela 29 - Obtenção do $\overline{alarmes} = 7,45$ sem refino para $(\phi, \psi, \delta^*) = (0,8 / 0,5 / 0,5)$	98

Tabela 30 - Obtenção do $\overline{alarmes} = 7,45$ com refino para $(\phi, \psi, \delta^*) = (0,8 / 0,5 / 0,5)$	99
Tabela 31 - (β, τ) para $(\phi, \psi, \delta^*) = (0,8 / 0,5 / 0,5)$ e $\overline{alarmes} = 7,45 \Rightarrow NMA_0 \cong 370$	100
Tabela 32 - Obtenção do $\overline{alarmes} = 7,45$ sem refino para $(\phi, \psi, \delta^*) = (0,8 / 0,5 / 1,0)$	101
Tabela 33 - Obtenção do $\overline{alarmes} = 7,45$ com refino para $(\phi, \psi, \delta^*) = (0,8 / 0,5 / 1,0)$	101
Tabela 34 - (β, τ) para $(\phi, \psi, \delta^*) = (0,8 / 0,5 / 1,0)$ e $\overline{alarmes} = 7,45 \Rightarrow NMA_0 \cong 370$	102
Tabela 35 - Obtenção do $\overline{alarmes} = 7,45$ sem refino para $(\phi, \psi, \delta^*) = (0,8 / 0,5 / 2,0)$	102
Tabela 36 - Obtenção do $\overline{alarmes} = 7,45$ com refino para $(\phi, \psi, \delta^*) = (0,8 / 0,5 / 2,0)$	103
Tabela 37 - (β, τ) para $(\phi, \psi, \delta^*) = (0,8 / 0,5 / 2,0)$ e $\overline{alarmes} = 7,45 \Rightarrow NMA_0 \cong 370$	104
Tabela 38 - Obtenção do $\overline{alarmes} = 7,45$ com refino para $(\phi, \psi, \delta^*) = (0,8 / 0,9 / 0,5)$	105
Tabela 39 - Obtenção do $\overline{alarmes} = 7,45$ com refino para $(\phi, \psi, \delta^*) = (0,8 / 0,9 / 0,5)$	105
Tabela 40 - (β, τ) para $(\phi, \psi, \delta^*) = (0,8 / 0,9 / 0,5)$ e $\overline{alarmes} = 7,45 \Rightarrow NMA_0 \cong 370$	106
Tabela 41 - Obtenção do $\overline{alarmes} = 7,45$ sem refino para $(\phi, \psi, \delta^*) = (0,8 / 0,9 / 1,0)$	107
Tabela 42 - Obtenção do $\overline{alarmes} = 7,45$ com refino para $(\phi, \psi, \delta^*) = (0,8 / 0,9 / 1,0)$	107
Tabela 43 - (β, τ) para $(\phi, \psi, \delta^*) = (0,8 / 0,9 / 1,0)$ e $\overline{alarmes} = 7,45 \Rightarrow NMA_0 \cong 370$	109

Tabela 44 - Obtenção do $\overline{alarmes} = 7,45$ sem refino para $(\phi, \psi, \delta^*) = (0,8 / 0,9 / 2,0)$	109
Tabela 45 - Obtenção do $\overline{alarmes} = 7,45$ com refino para $(\phi, \psi, \delta^*) = (0,8 / 0,9 / 2,0)$	110
Tabela 46 - (β, τ) para $(\phi, \psi, \delta^*) =$ $(0,8 / 0,9 / 2,0)$ e $\overline{alarmes} = 7,45 \Rightarrow NMA_0 \cong 370$	111

1 Introdução

Em um ambiente cada vez mais competitivo, a importância da qualidade tem se tornado evidente, transformando o controle estatístico de processos (CEP) em um importante instrumento gerencial para redução da variação entre itens manufaturados e no crescimento da competitividade industrial através da melhoria contínua da qualidade.

As características de qualidade dos produtos resultantes de processos de manufatura podem ser avaliadas por modelos estatísticos, destacando-se, nesse contexto, os gráficos de controle propostos por Shewhart. Os gráficos de controle de Shewhart são amplamente utilizados para o monitoramento de processos produtivos e melhoria da qualidade, principalmente, em virtude de suas facilidades computacionais e por exigir treinamento mínimo em estatística. Além disso, com o avanço da informática, através da maior capacidade de processamento dos computadores pessoais, tornou-se possível automatizar o CEP e disponibilizar aos técnicos e gerentes flexibilidade para gastar menos tempo nas tarefas de cálculo e dedicar-se mais na identificação de formas para melhorar o processo. Contudo, Reis (2001) comenta que as técnicas estatísticas do controle de qualidade, dentre elas o CEP, não são aplicadas corretamente pelas empresas no Brasil, esse fato também se repete em outros países. A consequência imediata é o descrédito quanto à utilização do CEP e a redução do seu uso nas empresas.

O CEP envolve a utilização de gráficos de controle para monitorar variações em característica(s) de qualidade (sejam de um bem manufaturado, de um serviço, ou ainda variáveis de um processo que afetem características do produto), considera a dimensão temporal e estuda a natureza da variabilidade do processo.

A variabilidade é inerente a todo e qualquer processo, a questão é saber distinguir a variabilidade que é intrínseca ao processo daquela que é causada por agentes externos. A variabilidade intrínseca ou natural é resultado da existência de causas aleatórias e não pode ser evitada. Quando somente causas aleatórias são responsáveis pela variabilidade do processo, ele é dito em controle. Quando, além

das causas aleatórias, agentes externos ocasionam uma mudança na variabilidade, o processo é dito fora de controle. Nesse trabalho, agentes externos de aumento de variabilidade serão denominados causas especiais.

Monitorar, no contexto do CEP, é acompanhar o decurso de um processo com intuito de detectar possíveis causas especiais que possam vir a ocorrer.

Uma consideração básica para se utilizar um gráfico de controle convencional é que os dados gerados pelo processo sejam independentes, ou seja, não exista uma correlação serial. Porém, em muitos casos reais essa hipótese de independência dos dados não é satisfeita, acarretando interpretações equivocadas acerca do processo, gerando custo de retrabalho e de tempo do operador e/ou engenheiro. A autocorrelação (ou correlação serial) tem efeito imediato sobre a credibilidade de gráficos de controle convencionais, pois, segundo Montgomery (1997), tais gráficos não funcionam bem se a característica de qualidade exibir, mesmo em níveis baixos, correlação ao longo do tempo; uma vez que fornecerão resultados não confiáveis na forma de excesso de alarme falsos, ou seja, concluir que o processo está fora de controle quando na realidade o processo está em controle estatístico. Portanto, a existência de dados autocorrelacionados afeta sensivelmente o desempenho de gráficos de controle, fazendo com que a forma habitual de sua utilização tenha que ser modificada. Esse assunto tem recebido destaque cada vez maior por diversos autores, tais como, Montgomery (1997), Wheeler (1995), Zhang (1998), Runger & Willemain (1996), Pyzdek (1992), Iwersen (1997), Apley & Shi (1999), Charnes (1995), Guimarães & Epprecht (2000), Mingoti & Fidelis (2001), Jiang et al. (2000), entre outros.

Apesar desse interesse, nota-se que as questões relativas ao problema de monitoramento de processos autocorrelacionados não estão encerradas e há espaços para buscar um maior desenvolvimento do estado da arte. Embora, conforme comentado por Costa et al. (2004), grande parte dos processos hoje em dia exiba autocorrelação, a proporção de trabalhos dedicados a processos autocorrelacionados é ainda muito pequena, a maioria dos trabalhos ainda dedica-se a processos com observações independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.).

Este trabalho propõe uma solução, via modelos bayesianos de previsão¹, para a questão do controle estatístico de processos autocorrelacionados. Destaca-se que o autor não tem conhecimento da aplicação de tais modelos no contexto de CEP autocorrelacionado; desta forma, este trabalho contribui de forma original para o desenvolvimento do estado da arte do controle estatístico de processos.

No que tange a trabalhos que utilizam análise bayesiana no contexto da engenharia da qualidade, pode-se citar: Girard & Parent (2001), contudo, é um trabalho específico para dados categóricos. Peiris et al. (2003), descreve de forma bastante sucinta, métodos de estimação recursiva em CEP, dentre eles, estimação bayesiana e filtro de Kalman. Segundo Nembhard & Nembhard (2001), muitas operações de manufatura exibem um comportamento dinâmico antes de atingir um nível estacionário; sendo assim, eles desenvolveram uma política de ajuste para períodos transitórios baseada no uso de previsão bayesiana. Lian (2005) afirma que métodos tradicionais de controle estatístico de processo baseiam-se no fato de que os parâmetros são conhecidos, porém na prática é necessário estimar esses parâmetros antes de aplicar o controle estatístico e, caso o tamanho da amostra seja pequeno, isso poderá acarretar um erro substancial nessa estimação. Girshick & Rubin (1952) lida com a abordagem de Bayes para um modelo de controle de qualidade, o objetivo é encontrar procedimentos ótimos de controle estatístico de qualidade e de inspeção contínua. Vaughan (1993), utiliza análise bayesiana em um gráfico np para subsidiar decisões sobre o esquema de amostragem. Porteus & Angelus (1997), utilizam programação dinâmica bayesiana em decisões acerca de políticas de CEP, tais como, tamanho do lote, atraso na inspeção e manter ou não a inspeção durante o resto da produção. Calabrese (1995) desenvolveu uma metodologia bayesiana para CEP para atributos, por exemplo, quando a característica de qualidade de interesse é a fração de defeitos.

Este trabalho aplica uma formulação bayesiana, especificamente, o Modelo Linear Dinâmico de Harrison & Stevens (MLD-HS) ao controle estatístico de processos autocorrelacionados.

O texto é estruturado de forma a revisar os principais gráficos de controle utilizados no controle estatístico de processos no capítulo 2, bem como as

¹ Modelo linear dinâmico de Harrison & Stevens (MLD-HS).

principais medidas de desempenho de gráficos de controle, além de enfatizar a questão da autocorrelação, apresentando uma revisão bibliográfica das principais abordagens no trato da correlação serial no contexto do CEP. No capítulo 3, descreve-se as características fundamentais dos modelos bayesianos de previsão de Harrison & Stevens. O capítulo 4 apresenta o modelo estacionário para CEP autocorrelacionados, além de mostrar resultados de simulações e de análise de sensibilidade do modelo. Finalmente, nas conclusões do trabalho são sugeridos novos avanços no estado da arte do CEP autocorrelacionados. O apêndice mostra tabelas com os resultados obtidos e o programa desenvolvido em MATLAB R2006a.

2 Controle Estatístico de Processos

Esse capítulo apresenta os principais gráficos de controle para variáveis, não tendo o objetivo de maior aprofundamento, sendo o assunto tratado de forma geral. Maior detalhamento da operacionalização de gráficos de controle pode ser encontrado em Costa et al. (2004) e Montgomery (1997).

Existem dois tipos gerais de gráficos de controle – gráficos de controle para atributos e gráficos de controle para variáveis. O campo de estudo desse trabalho está inserido em gráficos de controle para variáveis, portanto somente será apresentado os principais gráficos de controle para variáveis neste trabalho.

Os gráficos de controle para variáveis mais frequentemente utilizados para monitorar a média e a variabilidade do processo são os gráficos de Shewhart, os gráficos de soma cumulativa (CUSUM - *cumulative-sum*) e os gráficos de média móvel ponderado exponencialmente (EWMA - *exponentially weighted moving average*).

2.1. Gráficos de Controle de Shewhart

Shewhart desenvolveu o gráfico de controle com intuito de detectar a presença de causas especiais de variação em um dado processo. O gráfico de controle é baseado na idéia de que, caso o processo esteja em um estado de controle estatístico, as observações futuras podem ser previstas baseadas em observações anteriores. Isso é possível graças à construção de certos limites e o cálculo da probabilidade de observações futuras caírem dentro desses limites. Esses limites são calculados em função das variações aleatórias do processo e são conhecidos como limites de controle.

De forma geral, as observações que são utilizadas com o propósito de monitorar o processo geralmente são agrupadas temporalmente, e esse processo chama-se criação de subgrupos racionais. Nesses subgrupos é possível calcular as

estatísticas: média, amplitude ou desvio-padrão, conforme necessidade do gráfico escolhido. A seção 2.4 discute como criar tais subgrupos racionais.

Em sua forma original, o gráfico de controle é simplesmente uma representação gráfica de seqüência de uma dada estatística, dos subgrupos, plotada temporalmente. Os pontos plotados são comparados aos limites de controle previamente calculados. Um desses pontos fora dos limites de controle sinaliza que o processo pode ter saído do estado de controle estatístico, ou seja, o parâmetro de controle do processo se alterou.

Importante ressaltar que os limites de controle não podem ser confundidos com especificações ou tolerâncias de projeto, tais limites unicamente refletem as variações aleatórias do processo impostas pelas chamadas causas comuns² de variação, já as especificações ou tolerâncias referem-se a cálculos determinísticos de cunho de projeto.

Os gráficos de Shewhart foram e continuam sendo amplamente utilizados na prática, principalmente devido à sua simplicidade e facilidade de interpretação. Em um gráfico de Shewhart, por exemplo, no caso de se querer monitorar a média de uma característica de qualidade contínua X , as médias dos subgrupos (amostras) ou as observações individuais são plotadas em uma seqüência temporal. Suponha que essas observações sejam independentes e normalmente distribuídas e que seu valor esperado μ (comumente chamado de “média do processo”) e o seu desvio-padrão (σ) sejam conhecidos, então existirá uma probabilidade de 99,73% de que as observações plotadas estejam dentro dos limites de controle $\mu \pm 3\sigma$. Qualquer ponto fora dos limites de controle ($\mu \pm 3\sigma$) indica forte evidência de que pode ter ocorrido uma mudança na média do processo.

Conforme Montgomery (1997), o gráfico de Shewhart para médias foi projetado (considerando amostras de tamanho $n = 4, 5$ ou 6) para detectar mudanças de magnitudes de 2 desvios-padrão ou maiores. O gráfico de Shewhart não tem bom desempenho para detectar rapidamente pequenas mudanças no processo; para tais situações são indicados os gráficos de controle CUSUM, EWMA, bem como os gráficos de controle adaptativos (Reynolds et al., 1988;

² Causas comuns são causas aleatórias de variações no processo, são naturais ao processo e não podem ser eliminadas

Park & Reynolds, 1994, são alguns exemplos de bibliografia nessa área). Os gráficos de controle adaptativos não serão revisados nesta tese, uma vez que o trabalho proposto tem como foco gráficos de controle com parâmetros fixos.

Como observado, um dos objetivos de um gráfico de controle é testar se um processo está ou não em controle estatístico³. Este fato, segundo Montgomery (1997), faz que haja uma estreita relação entre gráficos de controle e teste de hipóteses. Um teste de hipóteses é utilizado quando se deseja verificar a validade de uma suposição a respeito de um parâmetro de uma população, utilizando dados de amostras. Define-se a hipótese a ser testada, chamada hipótese H_0 , que será considerada verdadeira a menos que os dados amostrais apresentem evidência significativa em contrário.

No caso de controle de processos, é como se fosse feito a cada amostra um teste da hipótese H_0 de que o processo está em controle estatístico para a variável considerada. Esta hipótese equivale a dizer que a média da distribuição da variável permanece constante ao longo do tempo, em um valor μ_0 . Os limites de controle irão equivaler aos valores que delimitam a região de aceitação do teste. Portanto, se o valor de uma estatística computada a partir de uma amostra estiver entre os limites de controle, a hipótese de controle estatístico não será rejeitada e, aceita-se a hipótese de que o processo está em controle. Se, no entanto, o valor dessa estatística estiver fora dos limites de controle, rejeita-se a hipótese de controle estatístico, admite-se que o processo esteja fora de controle e deve-se buscar se de fato houve a ocorrência de uma causa especial.

Analogamente ao teste de hipóteses, os erros possíveis ao se utilizar gráficos de controle são: interpretar que o processo está fora de controle quando na verdade ele está em controle (erro do tipo I, chamado de alarme falso, probabilidade deste erro denotada por α) e interpretar que o processo está em controle quando na verdade ele está fora de controle (erro do tipo II, probabilidade deste erro denotada por β).

³ Segundo Costa et. al. (2004), entende-se que um dado processo esteja no estado de controle estatístico, quando esse processo apresenta apenas variações aleatórias ou variações naturais do processo.

A medida de desempenho mais comumente utilizada nos gráficos de controle é o NMA (número médio de amostras até um sinal)⁴, que consiste no número médio de observações até ocorrer um ponto fora dos limites de controle. Para um processo em controle estatístico, o NMA_0 (também chamado NMA em controle) expressa o número médio de observações analisadas até a primeira ocorrência de um alarme falso. Intuitivamente, observa-se que o NMA deve ser inversamente proporcional à probabilidade de ocorrência do alarme falso, pois quanto maior a probabilidade para este tipo de alarme, espera-se um número menor de observações até que ele aconteça. De fato, como as amostras são independentes, sendo α a probabilidade de alarme falso, o número de amostras até um alarme falso segue uma distribuição geométrica de parâmetro α , de modo que sua média (NMA_0) é efetivamente igual a $1/\alpha$. Para o caso de um processo fora de controle, o NMA_1 (ou NMA fora de controle) consiste no número médio de observações desde a ocorrência de uma causa especial até a detecção da mesma. O conceito para NMA em controle e fora de controle é o mesmo, porém a situação e os objetivos são diferentes. No caso de o processo estar em controle estatístico, deseja-se que o NMA_0 seja o maior possível, para que os alarmes falsos não sejam frequentes. Porém, na situação de falta de controle, a intenção é detectar o problema o mais rapidamente possível e, sendo assim, é interessante que o NMA_1 seja o menor possível.

Os gráficos de controle de Shewhart para variáveis são:

- Gráfico \bar{X} , gráfico de média: neste gráfico as médias amostrais da variável de interesse são “plotadas” de maneira a controlar o valor médio de um dado processo.
- Gráfico R, gráfico da amplitude: neste gráfico as amplitudes da variável de interesse de cada amostra (diferença entre o maior e o menor valor da amostra) são plotadas de maneira a controlar a variabilidade do processo; devido à simplicidade de construção, o gráfico R tornou-se muito popular, mas em alguns casos não é o mais indicado para descrever a variabilidade do processo.

⁴ Na literatura em língua inglesa o NMA é conhecido por ARL, *Average Run Length*

- Gráfico S^2 , gráfico da variância: o gráfico da variância serve para detectar alterações na dispersão do processo; é um gráfico com um desempenho melhor do que o da amplitude.

2.2. Gráficos de Controle EWMA

O gráfico de controle EWMA é um gráfico alternativo ao gráfico de Shewhart se o objetivo é detectar pequenos deslocamentos na média do processo.

O gráfico de controle EWMA baseia-se na estatística EWMA, que é definida como segue:

$$Y_i = \lambda x_i + (1 - \lambda)Y_{i-1}, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (1)$$

onde Y_i é o valor da estatística EWMA, x_i é a medida no instante i (médias amostrais ou valores individuais) de um processo e λ ($0 < \lambda < 1$) é uma constante. O valor inicial Y_0 pode ser o valor desejado para o processo ou uma média de dados preliminares. Recursivamente em (1) pode-se notar que a estatística EWMA é uma média ponderada de todas as observações anteriores, com pesos que decrescem exponencialmente conforme equação abaixo:

$$Y_i = \lambda \sum_{k=0}^{i-1} (1 - \lambda)^k x_{i-k} + (1 - \lambda)^i Y_0 \quad (2)$$

A variância da variável Y_i é dada como segue:

$$\sigma_{Y_i}^2 = \sigma^2 \left(\frac{\lambda}{2 - \lambda} \right) \left(1 - (1 - \lambda)^{2i} \right) \quad (3)$$

onde σ^2 é a variância da variável X . Assim, os limites de controle são assim determinados:

$$\begin{aligned} LSC &= \mu_0 + k\sigma_0 \sqrt{\left(\frac{\lambda}{2 - \lambda} \right) \left(1 - (1 - \lambda)^2 \right)} \\ LM &= \mu_0 \\ LIC &= \mu_0 - k\sigma_0 \sqrt{\left(\frac{\lambda}{2 - \lambda} \right) \left(1 - (1 - \lambda)^2 \right)} \end{aligned} \quad (4)$$

onde σ_0 é o desvio-padrão do processo quando em controle, μ_0 é o valor médio em controle de X e k é o afastamento em desvio-padrão de μ_0 , determinado em função da probabilidade de alarme falso (α).

2.3. Gráficos de Controle de CUSUM

Os gráficos de controle de soma acumulada (CUSUM) são alternativas viáveis aos gráficos de controle de Shewhart. Estes gráficos guardam informações acumuladas de toda a seqüência de pontos e por isso, são mais sensíveis para detectar pequenos desvios da média de um processo com um número médio de amostras menor do que fariam os tradicionais gráficos de Shewhart.

O gráfico de controle CUSUM é uma ferramenta estatística que acumula informações das amostras de um processo ponderando-as igualmente, isto é, as amostras têm o mesmo peso. O procedimento para a utilização do gráfico de Soma Acumulada baseia-se na coleta sucessiva de amostras de tamanho n na qual é obtida a estatística da soma acumulada.

Conforme anteriormente dito, o gráfico de controle CUSUM utiliza informações de diversas amostras para decidir acerca do estado do processo. Quando as amostras são obtidas, os desvios de \bar{X} em relação ao valor-alvo ξ_0 são acumulados, resultando a estatística C_k :

$$C_k = \sum_{j=1}^k (\bar{X}_j - \xi_0) \quad (5)$$

onde \bar{X}_j é a média da j -ésima amostra de tamanho $n \geq 1$.

Enquanto não houver alterações na média do processo, os desvios positivos ($\bar{X} > \xi_0$) serão compensados pelos desvios negativos ($\bar{X} < \xi_0$), fazendo com que a estatística C_k oscile de forma aleatória em torno do valor zero. Caso a média do processo aumente (ou diminua), a estatística C_k crescerá (ou decrescerá) indefinidamente.

O algoritmo CUSUM é como segue:

$$\begin{aligned} CO_k^+ &= \max\{0, CO_{k-1}^+ + (X_k - \xi_0 - r\sigma_Y)\} \\ CO_k^- &= \min\{0, CO_{k-1}^- + (X_k - \xi_0 - r\sigma_Y)\} \end{aligned} \quad (6)$$

Onde X_k é a i -ésima observação do processo, $r \geq 0$ é uma constante e conhecido como valor de referência, e o $C_0^+ = C_0^- = 0$. O algoritmo CUSUM produz um sinal sempre que C_k^+ ou C_k^- for maior que $c\sigma_Y$, onde c é uma constante.

Maiores detalhes da fundamentação teórica e construção do gráfico de CUSUM podem ser encontrados em Montgomery (1997) e Costa et al. (2004).

2.4. Subgrupos Racionais

A forma com que as observações são amostradas e agrupadas pode ter um grande efeito sobre o comportamento do gráfico de controle. Por exemplo, se as observações apresentarem uma correlação serial positiva, os limites de controle serão mais próximos um do outro, conduzindo ao aumento de alarmes falsos. A criação de subgrupos deve ser feita com cuidado, especialmente em situações onde as observações são autocorrelacionadas.

O conceito de subgrupos racionais introduzido por Shewhart teve por finalidade indicar a forma de se construir subgrupos com as observações coletadas. Um subgrupo racional é uma amostra nos quais todos os itens foram produzidos sob condições onde somente causas comuns são responsáveis pela variação de um dado processo. Causas especiais de variações não devem ocorrer dentro de um subgrupo racional, somente entre subgrupos. Caso as observações possam ser agrupadas de acordo com essas condições, então limites de controle apropriados poderão ser calculados e, a partir daí, determinar estado de controle estatístico ou não.

Um gráfico de controle precisa ser sensível o bastante para detectar o efeito das causas especiais de variação, mas, também, não deve gerar quantidade elevada de alarmes falsos. Um balanceamento desses dois extremos conduz a um melhor desempenho do gráfico de controle.

A construção de gráficos de controle envolve duas fases distintas, uma fase de ajustamento do gráfico de controle e, posteriormente, uma fase de monitoramento do processo. Observações passadas são necessárias para parametrizar um gráfico de controle, essa etapa de ajustamento é conhecida na literatura como Fase I, onde a magnitude da variação imposta por causas comuns é calculada e os limites de controle determinados. Já a chamada Fase II, conhecida

como fase de monitoramento, amostras são disponibilizadas sequencialmente no tempo para monitorar e identificar causas especiais de variação no processo.

2.5. Controle Estatístico de Processos com Observações Autocorrelacionadas

Quando existem somente causas comuns de variação presente em um processo de produção, as observações do processo geralmente se assemelham às observações das figuras 1, 2, 3 e 4.

A Figura 1 representa o caso onde sucessivas observações são não correlatadas. Não existe memória nos dados, observações prévias não influenciam observações futuras. O processo varia aleatoriamente em torno de um valor médio. Na maior parte das aplicações de gráficos de controle, assume-se esse tipo de comportamento das observações.

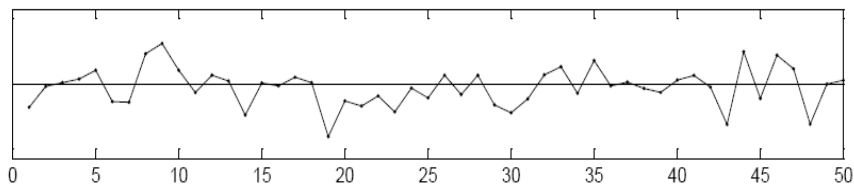


Figura 1 – observações não correlatadas

A Figura 2 mostra sucessivas observações que apresentam uma autocorrelação negativa, isto é, uma observação abaixo do valor médio tende a ser seguida por uma observação acima do valor médio e vice-versa.

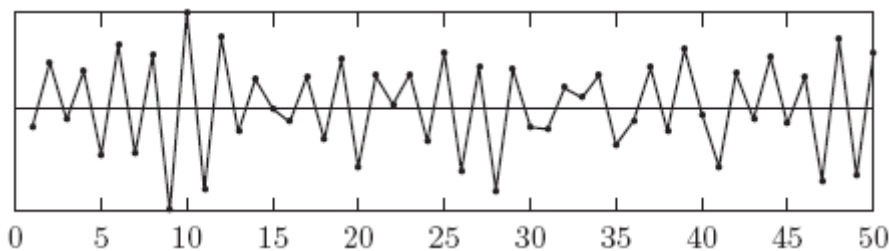


Figura 2 – observações autocorrelatadas negativamente

Os dados da Figura 3 mostram uma forte autocorrelação positiva, onde se a observação atual está de um dos lados da média, a próxima observação muito provavelmente estará desse mesmo lado.

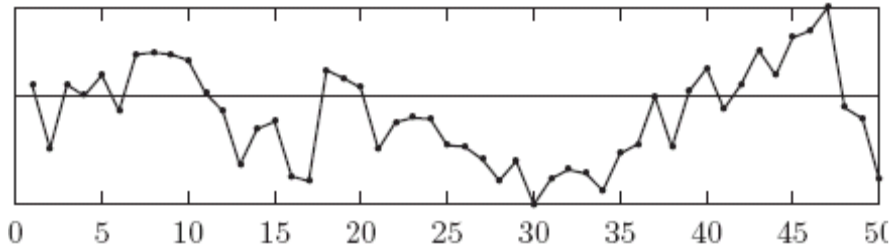


Figura 3 – observações autocorrelatadas positivamente

As Figuras 1 a 3 mostram observações que variam em torno de um valor médio que, idealmente coincide com o valor-alvo para a média do processo e que permanecem dessa maneira ao longo do tempo. A Figura 4 mostra uma situação diferente das demais, onde as observações tendem a se afastar do valor-alvo ao longo do tempo; sendo assim, esse processo é dito não estacionário, enquanto os demais são ditos estacionários.

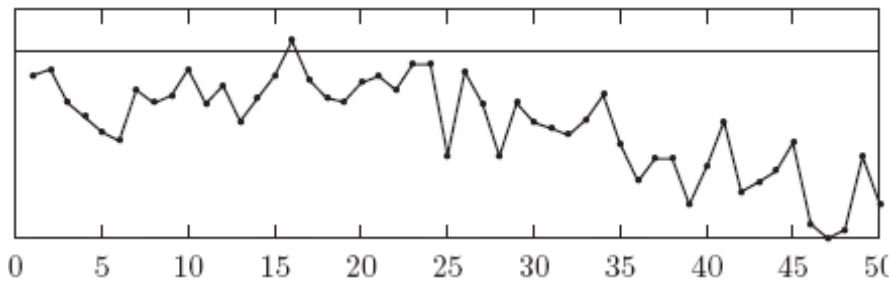


Figura 4 – processo não estacionário

Uma medida para avaliar o grau de dependência a k passos é através do coeficiente de autocorrelação de *lag* k , definido como:

$$\rho_k = \frac{E[(X_i - \mu)(X_{i-k} - \mu)]}{\sigma_x^2} \quad (7)$$

que será estimado pelo coeficiente de autocorrelação amostral de *lag* k :

$$r_k = \frac{\sum_{i=k+1}^n (x_i - \bar{X})(x_{i-k} - \bar{X})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2} \quad (8)$$

onde \bar{X} é a média amostra.

A relação do valor de r_k com os tipos de processo representados pelas Figuras 1, 2, 3 e 4 é como segue:

Figura 1: $r_k = 0$ para qualquer k .

Figura 2: $-1 < r_1 < 0$, sendo r_1 mais próximo de -1 que de 0.

Figura 3: $0 < r_1 < 1$, e r_1 mais próximo de 1 que de 0.

Figura 4: diferenças são autocorrelacionadas.

Em um ambiente manufatureiro, a forma de se monitorar um processo estacionário que se comporta como as Figuras 1, 2 e 3 é substancialmente diferente da forma de monitoramento de processos não estacionários como da Figura 4; esse último precisa ser ajustado regularmente, sendo necessário a utilização de algum tipo de controle, por exemplo, um controle automático, que permita que o processo volte ao seu valor-alvo. Esse tipo de controle se encontra no campo de APC (*automated process control*) ou EPC (*engineering process control*). Tal tipo de controle transforma um processo, que sem ele seria não estacionário, em um processo estacionário. Existem estudos de utilização de CEP combinados com EPC como o de Box & Luceño (1997).

As considerações básicas para se utilizar um gráfico de Shewhart são que os dados gerados pelo processo sejam independentes e igualmente distribuídos (*iid*). Como dito anteriormente, Montgomery (1997) afirma que a hipótese mais importante em relação a gráficos de controle convencionais é a da independência das observações (conforme Figura 1). Quando a hipótese de independência das observações é violada, isto é, quando o processo é autocorrelacionado, mesmo que em grau relativamente pequeno, a utilização de gráficos de controle convencionais resultará em um significativo aumento de alarmes falsos, fator indesejado que, além de aumentar o custo de controle, induzirá a conclusões erradas e a conseqüente perda de credibilidade nos gráficos de controle por parte do operador (COSTA et al., 2004).

Vários autores, entre eles Stoumbos et al. (2000), Woodall & Montgomery (1999) e Faltin et al. (1997), relatam que em muitos casos reais a hipótese de independência dos dados não é satisfeita. Eles afirmam que dados autocorrelacionados (ou “com correlação serial”) estão presentes em muitas aplicações, particularmente nos casos onde os dados são gerados em pequenos intervalos de tempo. Por exemplo, Montgomery (1997) afirma que nas indústrias químicas a maior parte dos processos utiliza tanques, reatores e fluxo de material, fazendo com que várias características de qualidade apresentem inércia, isto é, mesmo que o fluxo de um dos materiais que estão sendo misturados num tanque

seja bruscamente cortado, a proporção dos materiais no tanque (característica de qualidade) variará gradualmente. Geralmente, nesses casos, quando o intervalo de tempo entre amostras consecutivas torna-se relativamente pequeno, a seqüência de observações do processo será autocorrelacionada. Montgomery (1997, p. 375) apresenta uma demonstração analítica para esse fenômeno.

Para ilustrar, Montgomery (1997) mostra um gráfico de controle convencional (de Shewhart) para observações individuais da medida da viscosidade de um processo químico tomadas a cada hora. Observa-se que, de 100 observações, 19 ficaram fora dos limites de controle. Devido à natureza do processo e ao comportamento das medidas de viscosidade “plotadas” no gráfico, existiu uma grande suspeita de que essas estivessem autocorrelacionadas. Utilizando um *software* para análise de dados estatísticos, verificou-se uma forte autocorrelação positiva de *lag* 1, suficiente para distorcer enormemente o desempenho de um gráfico de controle de Shewhart, pois correlação positiva aumenta significativamente a freqüência de alarmes falsos de gráficos de controle convencionais (com limites calculados pelas fórmulas usuais, ignorando a autocorrelação). Utilizando um modelo apropriado de séries temporais para remover a autocorrelação dos dados (essa metodologia será comentada de forma mais detalhada mais adiante) e aplicando gráficos de controle aos resíduos, notou-se que nenhum ponto estava mais fora dos limites de controle, em contraste com o gráfico de controle convencional anteriormente aplicado, que apresentava 19 pontos fora dos limites de controle. Concluiu-se que esse processo estava em controle estatístico, e não fora de controle como indicado pelos gráficos convencionais.

Guimarães & Epprecht (2000) exemplificam uma outra situação. Citam que o supervisor de uma linha de montagem de pneus de uma grande indústria na Região Sudeste do Brasil se queixava do número elevado de alarmes falsos no gráfico de \bar{X} . Como esse excesso de alarmes era rotineiro nessa linha de montagem, o supervisor não mais investigava as causas dos pontos fora dos limites, pois dizia que o processo sempre retornava ao valor-alvo e que apresentava folga de capacidade. Entretanto, os autores afirmam que, numa série de amostras de pressão de pneus no mês de fevereiro de 2000, existiram alarmes verdadeiros no gráfico de R e, além disso, um dos valores individuais de uma amostra chegava a estar fora das especificações. Nota-se claramente que nesse

caso a utilização dos gráficos de controle tinha caído no descrédito e a sua utilização era por observância “burocrática” às regras da empresa. O diagnóstico dado pelos autores para a causa do excesso de alarmes falsos foi que as amostras não eram independentes e sim correlacionadas no tempo.

Costa et al. (2004) afirmam que o gráfico de Shewhart foi criado no contexto da indústria de partes discretas, “com nenhum ou quase nenhum grau de automação” (p.160), sendo a hipótese de independência das observações satisfatória. Segundo Costa et al. (2004), esse quadro não é mais realidade atualmente, onde “processos contínuos e por batelada são extremamente freqüentes,..., tais processos raramente produzem observações independentes, de modo que não podem ser monitorados pelos gráficos convencionais” (p.160-161).

2.6.

Principais Abordagens para CEP de processos autocorrelacionados

O objetivo desse tópico é apresentar os principais trabalhos encontrados na literatura que lidam com a questão da autocorrelação das observações em CEP.

Nesse ponto é importante destacar dois aspectos referentes à autocorrelação e à utilização de gráficos de controle, são eles: a autocorrelação inerente e a não inerente ao processo. Crowder et al. (1997) afirmam que a causa da autocorrelação deveria ser verificada antes de os dados serem analisados e interpretados. A causa da autocorrelação ditará qual(is) ação(ões), se alguma, será(ão) necessária(s). Segundo os autores acima referenciados, se um processo gera dados que são inerentemente autocorrelacionados, devido à dinâmica natural do processo, as tradicionais técnicas de CEP não deverão ser utilizadas. Em tais situações, os autores argumentam que tais técnicas de CEP seriam apropriadas para monitorar resíduos de um modelo de série temporal adequado. Para os casos onde a autocorrelação não é inerente ao processo, esta deverá ser identificada como causa especial de variação e retirada do processo. Esse trabalho lida com ambos os casos, isto é, a autocorrelação inerente e a não-inerente ao processo.

A literatura de controle estatístico de processos (CEP) com dados autocorrelacionados está em crescente evolução, muitos artigos foram produzidos nos últimos anos com diferentes propostas, porém, Stoumbos et al. (2000) afirmam que geralmente duas abordagens no estudo de CEP são utilizadas para

lidar com a autocorrelação. Uma utiliza os dados originais em gráfico de controle convencional, mas ajusta os limites de controle para levarem em consideração o efeito da autocorrelação. A segunda abordagem ajusta um modelo de série temporal adequado às observações e então aplica um gráfico de controle convencional aos resíduos desse modelo. Guimarães & Epprecht (2000) citam que há vários modelos e variações dessa segunda abordagem; como exemplo, são citados os trabalhos de Alwan & Roberts (1988), Box & Luceño (1997), Harris & Ross (1991), Hunter (1998), Montgomery & Mastrangelo (1991), Montgomery (1992) e Vander Wiel (1996). O método proposto por Yang & Hancock (1990) é um exemplo da primeira abordagem. Além dessas duas abordagens, Moreira Junior (2005) inclui outras, tais como: uso de controle automático, redes neurais, intervalo de amostragem variável e gráfico de médias de grupos.

Neuhardt (1987) aponta para o fato de que quando existir uma correlação positiva entre amostras, os limites de controle para o gráfico de \bar{X} que produzem uma taxa média de alarmes falsos igual a 0,0027 (para os limites de 3σ) serão substancialmente mais afastados do que os limites tradicionais de 3σ calculados com base na dispersão intra-amostral (usando a amplitude amostral, R, ou o desvio-padrão amostral, S). Isso ocorre pelo fato de $\sigma_{\bar{x}}$ ter sido subestimado na presença de correlação positiva entre amostras. Yang & Hancock (1990) estenderam o trabalho de Neuhardt, realizando simulações para determinar o efeito da autocorrelação nos gráficos de \bar{X} , R, S e S^2 . Concluíram que se uma correlação positiva está presente, mas não é detectada, a probabilidade do erro tipo I do gráfico de \bar{X} será significativamente maior do que a assumida, então eles propuseram outras formas de configurar os limites de controle desse tipo de gráfico. Já em relação aos gráficos de R, S e S^2 , afirmam que a não-deteção de uma correlação positiva também aumentará a probabilidade do erro tipo I, porém não de forma substancial, não acarretando necessidade de revisar os limites de controle desses gráficos. Uma vantagem clara dessa abordagem é a simplicidade, decorrente da utilização das próprias observações do processo para a construção do gráfico de controle, nos moldes de operação do gráfico de Shewhart convencional, onde apenas o cálculo do limites é que é ajustado.

Wheeler (1995) declara que o efeito da autocorrelação nos limites de controle para dados individuais não é significativo se a autocorrelação de lag 1 for

menor do que 0,7. Essa afirmação é contestada por outros autores que afirmam que a presença de autocorrelação, mesmo em pequena intensidade, já induzirá o aumento da frequência de alarmes falsos em gráficos convencionais. Como exemplo, Maragah & Woodall (1992), citados por Woodall (2000), mostram que níveis muito menores do que 0,7 de autocorrelação podem ter um efeito substancial sobre o desempenho estatístico do gráfico.

Montgomery (1992) afirma que é possível ajustar um modelo apropriado de série temporal a um conjunto de observações e então aplicar gráficos de controle aos resíduos desse modelo. Segundo Montgomery (1992), a maior parte dos pesquisadores utiliza um modelo ARIMA (*autoregressive integrated moving average*) para obtenção dos resíduos:

$$\Phi_p(B)\nabla^d x_t = \Theta_q(B)\varepsilon_t \quad (9)$$

onde

$$\Phi_p(B) = (1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p) \quad (10)$$

é um polinômio auto-regressivo de ordem p ,

$$\Theta_q(B) = (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q) \quad (11)$$

é um polinômio de média móvel de ordem q , ∇ é o operador de diferença (tal que $\nabla^d x_t = x_t - x_{t-d}$), B é o operador de retardo (tal que $B^k x_t = x_{t-k}$ e $B^k \varepsilon_t = \varepsilon_{t-k}$), ε_t é uma seqüência de ruídos independentemente e identicamente distribuída (i.i.d.) e $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$.

Sendo \hat{y}_t o valor previsto para o instante t por um modelo ARIMA apropriado, então $e_t = y_t - \hat{y}_t$ será o resíduo e se comportará como uma variável aleatória independente e identicamente distribuída. Portanto, os gráficos de controle convencionais podem ser aplicados a essa série de resíduos.

De acordo com Box e Jenkins (1976), a modelagem ARIMA deve seguir três passos básicos antes de se proceder aos cálculos das previsões para a variável y_t : a) identificação/seleção do modelo, b) estimação e c) verificação. O passo mais importante é o primeiro, em que se determinam os valores apropriados de p , d e q .

Montgomery (1992) afirma que existem pelo menos duas dificuldades na implementação dessa abordagem. A primeira é que o engenheiro de controle

precisará identificar e ajustar um modelo ARIMA apropriado para o processo. Um modelo inapropriado, identificado incorretamente, comprometerá o desempenho do método, e a identificação não é uma tarefa trivialmente livre de erros; essa também é a opinião de outros autores, tais como Zhang (1998) e Guimarães & Epprecht (2000). A segunda dificuldade é que quando uma mudança ocorre o modelo de série temporal tentará se adaptar a essa mudança e o tamanho do resíduo tenderá a ser menor nos períodos subseqüentes. Então, enquanto essa abordagem consegue resolver o problema dos alarmes falsos, ela pode não detectar mudanças muito rapidamente.

Dentro dessa abordagem, uma outra possibilidade, mais simples, é o ajuste de um modelo EWMA em vez de ARIMA à série, e o monitoramento dos resíduos. Tal abordagem simplifica o processo de modelagem da série, porém continua a apresentar o problema de lentidão de detecção.

Zhang (1998) propõe um gráfico de controle estatístico para dados de um processo estacionário, que ele chama de gráfico EWMAST, ou seja, um gráfico de controle EWMA para processos estacionários. Afirma que os limites do gráfico EWMAST são diferentes dos limites do gráfico EWMA tradicional e quando o processo é positivamente autocorrelacionado os limites do gráfico EWMAST são mais afastados do que do gráfico EWMA. Conclui que o gráfico EWMAST possui um desempenho superior ao do gráfico de resíduos e ao do gráfico proposto por Montgomery & Mastrangelo (1991) quando a autocorrelação do processo não é fortemente positiva e quando a mudança da média é relativamente pequena a moderada. Ainda, recomenda utilizar um gráfico EWMAST com limites 3σ e $\lambda = 0.2$ para monitorar a média do processo.

Como principal vantagem do gráfico EWMAST, Zhang (1998) afirma, está a facilidade de implementação do mesmo e, além disso, deste gráfico não exigir a construção de um modelo de série temporal como exige o gráfico de resíduos. Quando o processo é não estacionário ou próximo da não-estacionariedade, com forte autocorrelação positiva, gráficos de resíduos podem ser utilizados. (ZHANG, 1998, p.36).

Um novo tipo de gráfico de controle, o gráfico ARMA (*autoregressive moving average*), foi proposto por Jiang et al. (2000). Eles mostram que os gráficos SCC (*special cause chart*), também conhecidos como gráficos de resíduos, de Alwan & Roberts (1988) e os gráficos EWMAST de Zhang (1998)

são casos especiais do gráfico ARMA. Estudos feitos pelos autores mostram que o gráfico ARMA é tão competitivo quanto o gráfico EWMA para observações IID e apresenta um desempenho superior aos gráficos SCC e EWMAST para observações autocorrelacionadas. Segundo Jiang et al. (2000), a idéia do gráfico ARMA é transformar o processo autocorrelacionado original em um novo processo estacionário de tal forma que uma mudança particular na média possa ser facilmente detectada quando ela ocorre.

Uma outra abordagem, citada por Pyzdek (1992), Guimarães & Epprecht (2000) e Costa et al. (2004), para o caso de observações individuais, é adotar um intervalo de tempo entre observações consecutivas suficientemente longo para que o efeito da autocorrelação seja minimizado. Apesar de esse procedimento ser simples em termos operacionais, apresenta uma grande desvantagem, citada pelos autores dos dois últimos trabalhos, é a necessidade de esperar muito tempo entre duas amostras, retardando a detecção de possíveis descontroles.

Outra proposta para lidar com dados autocorrelacionados foi feita por Runger & Willemain (1996). Enquanto alguns autores defendem a idéia de monitorar as médias de pequenos subgrupos separados por um tempo suficientemente longo para reduzir o efeito da autocorrelação, Runger & Willemain (1996) mostram que é mais efetivo utilizar um tamanho grande de subgrupo do que fazer uma separação de tempo longo entre subgrupos, exceto para detectar mudanças muito grandes na média do processo. Lu & Reynolds (2001), fazem uma análise de desempenho comparando diversas alternativas de gráficos: Cusum, EWMA e Shewhart, tanto para as observações quanto para os resíduos.

Novas idéias aparecem constantemente na literatura. Um exemplo é a utilização de redes neurais no reconhecimento de padrões em gráficos de controle. Zorriassatine et al. (2002) citam que recentemente redes neurais têm sido aplicadas com bastante sucesso para interpretar gráficos de CEP.

3 Fundamentação Teórica de Modelos Bayesianos de Previsão

3.1. Abordagem Bayesiana para Estimação

A informação que se tem acerca de um parâmetro de interesse θ é crucial na ciência estatística. Se o valor verdadeiro de θ não é conhecido então, a idéia é buscar métodos para reduzir o desconhecimento sobre esse parâmetro. Do ponto de vista bayesiano, o grau de incerteza a respeito de θ é representado através de um modelo probabilístico para θ .

A abordagem clássica para estimação de um parâmetro populacional consiste em tomar uma amostra aleatória de tamanho n , proveniente de uma população cuja distribuição de probabilidades da variável aleatória, por exemplo, Y seja função de um parâmetro θ , distribuição essa denotada por $f(y|\theta)$ e, posteriormente, estimar o parâmetro θ através dos valores amostrais $y_i, i = 1, \dots, n$. Esse estimador poderia ser construído através do método da máxima verossimilhança, por exemplo.

A abordagem bayesiana para estimação de um parâmetro populacional usa uma distribuição a priori de θ , $f(\theta)$, e a distribuição de probabilidades conjunta da amostra, $f(y_1, y_2, \dots, y_n | \theta)$, para determinar a distribuição a posteriori de θ , denotada por $f(\theta | y_1, y_2, \dots, y_n)$. Essa distribuição a posteriori para θ contém informação proveniente da amostra e da distribuição a priori de θ . Sendo assim, o parâmetro θ é visto como uma variável aleatória na abordagem bayesiana, (MONTGOMERY & RUNGER, 2003, p. 437).

Pole et al. (1994) comentam que a análise bayesiana para a formulação de um modelo começa pela quantificação do conhecimento inicial acerca desse estado inicial. Essas informações a priori são então combinadas com a informação dos dados observados e quantificados probabilisticamente através da função de verossimilhança.

O mecanismo de combinar informações a priori e verossimilhança é o teorema de Bayes. Portanto, pode-se escrever:

$$P(\theta_t | D_t) = \frac{P(Y_t = y_t | \theta_t)P(\theta_t | D_{t-1})}{P(Y_t = y_t)} \quad (12)$$

O denominador $P(Y_t = y_t)$ não é função de θ e atua como uma constante. Sendo D_t o estado do conhecimento no instante t , a verossimilhança $L(\theta_t | Y_t = y_t) \propto P(Y_t = y_t | \theta_t)$, $P(\theta_t | D_t)$ é distribuição a posteriori e $P(\theta_t | D_{t-1})$ a distribuição a priori.

O resultado de combinar informações a priori e verossimilhança é a distribuição a posteriori. Então, a distribuição a posteriori é proporcional à distribuição a priori e à verossimilhança: *posteriori* \propto *priori* \times *verossimilhança*.

Esse processo de passagem da priori para a posteriori é referida como aprendizado bayesiano, sendo o mecanismo formal através do qual as incertezas são modificadas quando da obtenção de uma nova informação, (POLE et al., 1994, p. 16).

3.2. Abordagem Bayesiana para Previsão

No que se refere a modelos de previsão de uma forma geral, Pole et al. (1994, p. 9) declaram que

Whenever we make a forecast we actually make a statement of probability, or, more generally, state a probability distribution that quantifies the nature of our uncertainty. Any and every forecast is predicated upon a fount of knowledge; forecasts are therefore conditional probability statements, the conditioning being on the existing state of knowledge. If we change our knowledge base, then, typically, our forecast will change.[...] The Bayesian paradigm provides a rational, coherent, formal framework for combining information: routine model forecast (or individual model component quantifications, and more generally components forms too) are adjusted by subjective intervention to reflect so called ‘external’ information.

A abordagem bayesiana para previsão permite que informações não contidas nos dados históricos sejam incorporadas ao modelo. A possibilidade de se obter informações externas é o centro da inferência bayesiana. Os detalhes dessa abordagem são discutidos no decorrer desse trabalho.

3.3.

Características Fundamentais dos Modelos Bayesianos de Previsão de Harrison & Stevens (HS)

Segundo Souza & Farias Neto (1980), os fundamentos essenciais dos modelos bayesianos de Harrison & Stevens (HS) são:

- (i) Formulação Paramétrica (ou de espaço de estados) - Interpretação física dos parâmetros, isto é, as séries são representadas através de componentes que são diretamente interpretáveis, facilitando o entendimento do modelo por parte do analista.
- (ii) Informação Probabilística – parâmetros são variáveis aleatórias (com distribuição de probabilidade associada) e não simplesmente quantidades desconhecidas. A abordagem bayesiana explicita não apenas as estimativas dos componentes a cada instante de tempo, mas também indica automaticamente uma medida de incerteza associada a tais estimativas.
- (iii) Modelo Seqüencial – formulação através do Modelo Linear Dinâmico (MLD) que descreve como as estimativas dos parâmetros mudam temporalmente.
- (iv) Incerteza do Modelo – o modelo adequado em certo instante de tempo pode não ser mais apropriado em um instante seguinte.

Segundo Harrison & Stevens (1976), a incerteza associada ao modelo pode ser de dois tipos distintos:

Classe I – assume-se que o processo pode ser representado adequadamente por um único modelo (desconhecido).

Classe II – supõe-se que o modelo que melhor representa o processo pode mudar com o tempo. Dessa maneira, a qualquer instante de tempo considera-se que o modelo atuante é aquele de maior probabilidade associada.

A Tabela 1 faz uma comparação entre os modelos bayesianos (HS) versus os modelos tradicionais (MT) para a previsão.

Tabela 1 - Comparação dos Modelos Bayesianos (HS) com Modelos Tradicionais (MT)

Características	Modelos Tradicionais (MT)	Modelos Bayesianos (HS)
Estacionariedade do modelo	Existe um modelo constante para todo $t = 1, 2, \dots$	Pode existir mais de um modelo adequado para todo $t = 1, 2, \dots$
Informação externa	Utilizam somente os dados históricos.	Utilizam a série histórica e/ou outras informações relevantes.
Tamanho da série histórica	Tamanho suficientemente grande.	Tamanho qualquer, HS podem ser utilizados, inicialmente, mesmo na ausência de dados históricos.
Estacionariedade da série	O processo gerador dos dados deve ser estacionário e ergódico.	O processo pode ser qualquer.

3.4.

Modelo Linear Dinâmico – MLD

West & Harrison (1997) mostram que o modelo linear dinâmico normal pode ser escrito de forma geral como:

$$\text{Equação das Observações: } \mathbf{Y}_t = \mathbf{F}'_t \boldsymbol{\theta}_t + \mathbf{v}_t, \quad \mathbf{v}_t \sim N[\mathbf{0}, \mathbf{V}_t] \quad (13)$$

$$\text{Equação do Sistema: } \boldsymbol{\theta}_t = \mathbf{G}_t \boldsymbol{\theta}_{t-1} + \boldsymbol{\omega}_t, \quad \boldsymbol{\omega}_t \sim N[\mathbf{0}, \mathbf{W}_t] \quad (14)$$

onde \mathbf{Y}_t denota um vetor ($r \times 1$) das observações da série no tempo t ; \mathbf{F}_t é uma matriz ($n \times r$) de constantes conhecidas – vetor de regressão; $\boldsymbol{\theta}_t$ é o vetor ($n \times 1$) dos parâmetros de estado do modelo – vetor de estado; \mathbf{v}_t é o ruído das observações, vetor ($r \times 1$), tendo distribuição normal com média zero e variância \mathbf{V}_t , que é uma matriz ($r \times r$); \mathbf{G}_t é uma matriz ($n \times n$) de coeficientes conhecidos que determina a evolução sistemática dos parâmetros no tempo; e $\boldsymbol{\omega}_t$ é o ruído do sistema, vetor ($n \times 1$), tendo distribuição normal com média zero e matriz de covariância \mathbf{W}_t , matriz ($n \times n$). Supõe-se que \mathbf{v}_t e $\boldsymbol{\omega}_t$ são temporalmente e mutuamente independentes, ou seja, para todo t, s , tais que $t \neq s$, $\text{cov}[\mathbf{v}_t, \mathbf{v}_s] = 0$ e $\text{cov}[\boldsymbol{\omega}_t, \boldsymbol{\omega}_s] = 0$; e, para todo t, s , $\text{cov}[\mathbf{v}_t, \boldsymbol{\omega}_s] = 0$. Outra suposição importante é que $\mathbf{G}_t \equiv \mathbf{G}$, ou seja, o interesse se encontra em MLD's que possuem uma matriz de coeficientes que não se modifica com o tempo.

A eq. (13) descreve a forma como cada observação é gerada para um dado estado do sistema no instante t , é chamada equação das observações. A eq. (14), por conseguinte, descreve o modelo dinâmico, ou seja, a evolução paramétrica entre o instante $t-1$ e o instante t , e é chamada equação do sistema.

O problema de estimação do MLD refere-se a encontrar estimativas para o vetor de estados $\boldsymbol{\theta}_t$, a cada instante t , com base nas observações disponíveis até aquele instante, inclusive.

3.4.1.

Algoritmo do MLD com variância V_t conhecida

Em muitas situações é mais simples utilizar o Y_t (caso escalar) no lugar do vetor de observações \mathbf{Y}_t , esse procedimento caracteriza o MLD como univariado. West & Harrison (1997) definem o MLD univariado geral com variância V_t conhecida, como:

$$\text{Equação das Observações: } Y_t = \mathbf{F}_t' \boldsymbol{\theta}_t + \nu_t, \quad \nu_t \sim N[0, V_t] \quad (15)$$

$$\text{Equação do Sistema: } \boldsymbol{\theta}_t = \mathbf{G}_t \boldsymbol{\theta}_{t-1} + \boldsymbol{\omega}_t, \quad \boldsymbol{\omega}_t \sim N[\mathbf{0}, \mathbf{W}_t] \quad (16)$$

Especificações iniciais do usuário:

$$(\boldsymbol{\theta}_0 | D_0) \sim N(\mathbf{m}_0, \mathbf{C}_0) \text{ e } \{\mathbf{F}_t, \mathbf{G}_t, \mathbf{V}_t \text{ e } \mathbf{W}_t\}$$

$D_0 \rightarrow$ estado do conhecimento no instante inicial.

$D_t \rightarrow$ estado do conhecimento no instante t .

Informação:

$$(\boldsymbol{\theta}_{t-1} | D_{t-1}) \sim N[\mathbf{m}_{t-1}, \mathbf{C}_{t-1}] \rightarrow \text{posteriori no instante } t-1.$$

$$(\boldsymbol{\theta}_t | D_{t-1}) \sim N[\mathbf{a}_t, \mathbf{R}_t] \rightarrow \text{priori no instante } t.$$

$$\mathbf{a}_t = \mathbf{G}_t \mathbf{m}_{t-1} \quad (17)$$

$$\mathbf{R}_t = \mathbf{G}_t \mathbf{C}_{t-1} \mathbf{G}_t' + \mathbf{W}_t \quad (18)$$

Previsão no instante t :

$$(Y_t | D_{t-1}) \sim N[f_t, Q_t]$$

$$f_t = \mathbf{F}_t' \mathbf{a}_t \quad (19)$$

$$Q_t = \mathbf{F}_t' \mathbf{R}_t \mathbf{F}_t + V_t \quad (20)$$

Atualização:

$$(\boldsymbol{\theta}_t | D_t) \sim N[\mathbf{m}_t, \mathbf{C}_t] \rightarrow \text{posteriori no instante } t$$

$$\mathbf{m}_t = \mathbf{a}_t + \mathbf{A}_t e_t \quad (21)$$

$$\mathbf{C}_t = \mathbf{R}_t - \mathbf{A}_t \mathbf{Q}_t \mathbf{A}_t' \quad (22)$$

$$e_t = Y_t - f_t \quad (23)$$

$$\mathbf{A}_t = \mathbf{R}_t \mathbf{F}_t \mathbf{Q}_t^{-1} \quad (24)$$

Previsões na origem t , k passos à frente ($k \geq 1$):

$$(\boldsymbol{\theta}_{t+k} | D_t) \sim N[\mathbf{a}_t(k), \mathbf{R}_t(k)]$$

$$(Y_{t+k} | D_t) \sim N[f_t(k), Q_t(k)]$$

$$\mathbf{a}_t(k) = \mathbf{G}_{t+k} \mathbf{a}_t(k-1) \quad (25)$$

$$\mathbf{R}_t(k) = \mathbf{G}_{t+k} \mathbf{R}_t(k-1) \mathbf{G}_{t+k}' + \mathbf{W}_{t+k} \quad (26)$$

$$f_t(k) = \mathbf{F}_{t+k}' \mathbf{a}_t(k) \quad (27)$$

$$Q_t(k) = \mathbf{F}_{t+k}' \mathbf{R}_t(k) \mathbf{F}_{t+k} + V_{t+k} \quad (28)$$

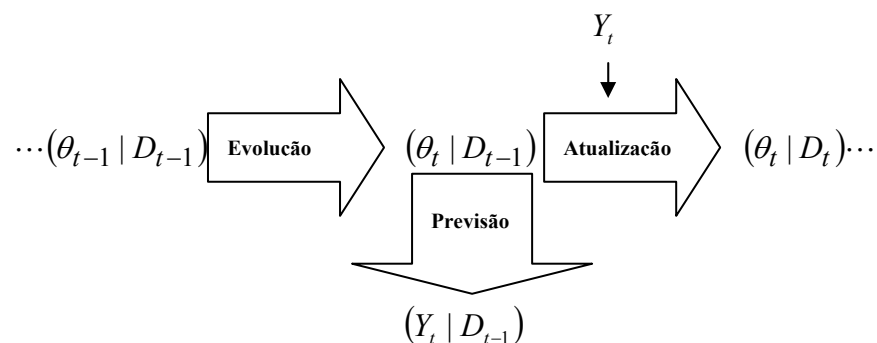
$$\mathbf{a}_t(0) = \mathbf{m}_t \quad (29)$$

$$\mathbf{R}_t(0) = \mathbf{C}_t \quad (30)$$

Como pôde ser observado, o processo de previsão envolve a estimação de três distribuições condicionais:

1. Distribuição a priori de θ_t , denotada por $(\theta_t | D_{t-1})$: representa a melhor idéia acerca do estado do sistema após observar $\langle Y_1, \dots, Y_{t-1} \rangle$, porém antes de observar Y_t .
2. Distribuição da previsão no instante t , $(Y_t | D_{t-1})$: é derivada da distribuição a priori $(\theta_t | D_{t-1})$.
3. Distribuição a posteriori de θ_t , $(\theta_t | D_t)$: esta resulta da revisão da distribuição a priori com a inclusão da observação Y_t , utilizando o Teorema de Bayes.

De forma esquemática:



3.4.2. MLD - Modelo Estático de HS

É o modelo mais simples dentro da classe de Modelos Bayesianos de HS, correspondendo ao problema clássico de estimação sequencial da média μ de uma população normal. Na formulação MLD, tem-se que:

$$\theta_t = \mu; \quad \mathbf{F}_t = 1; \quad \mathbf{G}_t \equiv \mathbf{G} = 1; \quad \nu_t \sim N[0, V]; \quad \omega_t = 0 \quad (31)$$

A formulação matemática para o modelo estático (Figura 5) se resume a:

$$\text{Equação das Observações: } Y_t = \theta_t + \nu_t; \quad \nu_t \sim N[0, V] \quad (32)$$

$$\text{Equação do Sistema: } \theta_t = \text{constante} = \mu \quad (33)$$

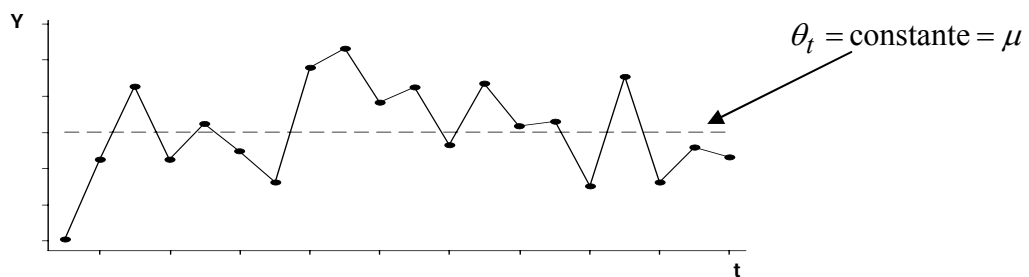


Figura 5 - um processo com comportamento do modelo estático.

3.4.3. MLD - Modelo Estacionário de HS

Esse modelo descreve a evolução dinâmica do nível, segundo um passeio aleatório. Nesse caso:

$$\theta_t = \mu_t; \quad \mathbf{F}_t = 1; \quad \mathbf{G}_t \equiv \mathbf{G} = 1; \quad \nu_t \sim N[0, V]; \quad \omega_t \sim N[0, W] \quad (34)$$

A formulação matemática para o modelo estacionário (Figura 6) então se resume a:

$$\text{Equação das Observações: } Y_t = \theta_t + \nu_t; \quad \nu_t \sim N[0, V] \quad (35)$$

$$\text{Equação do Sistema: } \theta_t = \theta_{t-1} + \omega_t; \quad \omega_t \sim N[0, W] \quad (36)$$

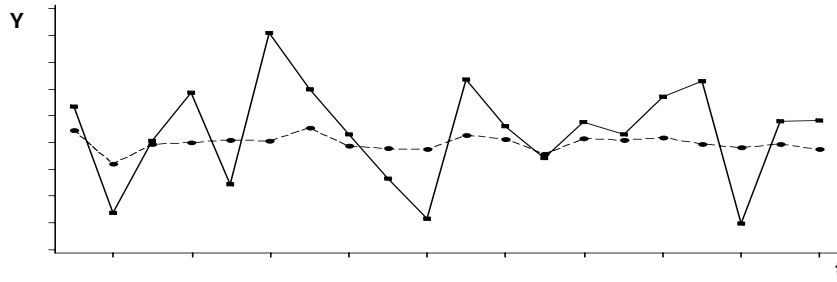


Figura 6 - um processo com comportamento do modelo estacionário.

3.4.4.

MLD – Modelo de Crescimento Linear (MCL) de HS

No modelo de crescimento linear (MCL), o processo é composto de um nível e de uma inclinação que variam no tempo segundo as equações:

$$\text{Equação das Observações: } Y_t = \mu_t + \varepsilon_t; \quad \varepsilon_t \sim N[0, V_t] \quad (37)$$

$$\mu_t = \mu_{t-1} + \beta_t + \delta_{\mu_t}; \quad \delta_{\mu_t} \sim N[0, V_{\mu}] \quad (38)$$

$$\text{Equações do Sistema: } \beta_t = \beta_{t-1} + \delta_{\beta_t}; \quad \delta_{\beta_t} \sim N[0, V_{\beta}] \quad (39)$$

onde,

μ_t - Nível no instante t .

β_t - Inclinação no instante t .

ε_t - Ruído das observações no instante t .

δ_{μ_t} - Ruído do nível no instante t .

δ_{β_t} - Ruído da inclinação no instante t .

O vetor de estado compreende dois elementos, $\theta_t = [\mu_t \quad \beta_t]'$: o primeiro representa o nível e o segundo a inclinação. Na formulação MLD, pode-se mostrar que:

$$\mathbf{F}_t = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{G}_t \equiv \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad v_t = \varepsilon_t; \quad \boldsymbol{\omega}_t = \begin{bmatrix} \delta_{\mu_t} + \delta_{\beta_t} \\ \delta_{\beta_t} \end{bmatrix} \quad (40)$$

O modelo estático e o modelo estacionário são casos particulares do modelo de crescimento linear. Se $\beta_t = 0$ e $\delta_{\beta_t} = 0$ para todo t , então fica caracterizado o modelo estacionário anteriormente citado.

Quando $\beta_t = 0$, $\delta_{\beta_t} = 0$, $\delta_{\mu_t} = 0$ e $\mu_t = \mu_{t-1}$ para todo t , então o modelo estático entra em uso.

Farias Neto (1981, p. 47-50) mostra que a matriz de covariância pode ser dada por:

$$\mathbf{W}_t = \begin{bmatrix} V_{\mu} + V_{\beta} & V_{\beta} \\ V_{\beta} & V_{\beta} \end{bmatrix} \quad (41)$$

Existem outros modelos, como o MCL sazonal, mas que não seriam úteis no contexto desse trabalho, ou seja, CEP para dados autocorrelacionados. Maiores detalhes da operacionalização de um modelo bayesiano geral de HS podem ser encontrados em Pole et al. (1994, p. 43 e p.63).

3.4.5.

Fatores de Desconto para \mathbf{W}_t

Ameen e Harrison (1985) introduziram o conceito de *fatores de desconto* com intuito de substituir a matriz de variância \mathbf{W}_t do MCL-HS. Citam que os fatores de desconto proporcionam simplicidade ao modelo.

O fator de desconto controla o grau de “envelhecimento” do conteúdo informativo de uma observação. O uso de fatores de desconto baseia-se na idéia de descontar a informação contida nas observações mais antigas; quanto maior o fator de desconto, menor será a perda de informações com o passar do tempo (o sistema é mais conservador). A recíproca também é verdadeira, quanto menor o fator desconto, menor será a relevância das observações antigas.

Utilizando a notação adotada por Baratojo (1989), β_x denota os fatores de desconto, onde x é a especificação da componente não observável. O valor de β_x é definido entre $0 < \beta_x \leq 1$, sendo que valores próximos de 1 fazem com que o sistema seja menos sensível a novas observações (conservador). Já valores próximos de 0 fazem com que o sistema seja mais sensível. Tabela 2 resume o uso de fatores de desconto.

Tabela 2 - Fatores de Desconto

Fatores de Desconto β_x	Variância do Sistema	Confiança nas Observações Antigas	Sensibilidade do Modelo
Próximos de 1	Pequena	Alta	Baixa
Próximos de 0	Grande	Baixa	Alta

Fonte: adaptado de Baratojo (1989)

Como pode ser visto em Pole et al. (1994, p.52), a matriz \mathbf{W}_t pode ser calculada através da formulação de fatores de desconto como:

$$\mathbf{W}_t = (\beta_x^{-1} - 1) \mathbf{G}_t \mathbf{C}_{t-1} \mathbf{G}'_t \quad (42)$$

$$\mathbf{R}_t = \beta_x^{-1} \mathbf{G}_t \mathbf{C}_{t-1} \mathbf{G}'_t \quad (43)$$

Desta forma, a variância da priori no instante t (R_t) é calculada como função da variância da posteriori (C_{t-1}) no instante $t-1$, de acordo com o fator de desconto β_x .

Em modelos com múltiplos componentes, Pole et al. (1994) recomendam que o procedimento seja feito componente por componente diferentes. Fatores de desconto são especificados para cada componente e a evolução de componentes individuais da matriz de variância é calculada. Então na forma matricial tem-se que:

$$\mathbf{R}_t = \boldsymbol{\beta} \mathbf{G} \mathbf{C}_{t-1} \mathbf{G}' \boldsymbol{\beta} \quad (44)$$

$$\boldsymbol{\beta} = \text{Diag} \left[\left(\frac{1}{\sqrt{\beta_1}} \right) \mathbf{I}_1, \left(\frac{1}{\sqrt{\beta_2}} \right) \mathbf{I}_2, \dots, \left(\frac{1}{\sqrt{\beta_k}} \right) \mathbf{I}_k \right]$$

$\mathbf{I}_i \rightarrow$ Matriz identidade de ordem $n_i \times n_i$.

O uso de $\boldsymbol{\beta}$ acima está associado à possibilidade de se escrever a matriz de transição \mathbf{G} estruturada em blocos, um para cada componente do sistema, ou seja, $\mathbf{G} = \text{Diag}[\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2, \dots, \mathbf{G}_k]$.

Onde $\mathbf{G}_i =$ bloco matricial, de ordem $n_i \times n_i$ correspondente ao i -ésimo componente.

Para exemplificar, seja o modelo com duas componentes, tendência (T) e sazonalidade (S). Definindo β_T e β_S como sendo os fatores de desconto para os respectivos componentes, então:

$$\mathbf{W}_t = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_T & 0 \\ 0 & \mathbf{W}_S \end{bmatrix}_t$$

$$\mathbf{W}_t = \begin{bmatrix} (\beta_T^{-1} - 1)\mathbf{G}_T\mathbf{C}_{T,t-1}\mathbf{G}'_T & 0 \\ 0 & (\beta_S^{-1} - 1)\mathbf{G}_S\mathbf{C}_{S,t-1}\mathbf{G}'_S \end{bmatrix}$$

3.4.6.

Algoritmo do MLD com variância V_t Desconhecida

Novamente, utilizando o procedimento descrito por Pole et al. (1994, p. 63) e sua notação, para MLD univariado e variância $V_t = k_t\phi^{-1}$ desconhecida e k_t conhecido, tem-se que:

$$\text{Equação das Observações: } Y_t = \mathbf{F}'_t \boldsymbol{\theta}_t + \nu_t, \quad \nu_t \sim N[0, k_t\phi_t^{-1}] \quad (45)$$

$$\text{Equação do Sistema: } \boldsymbol{\theta}_t = \mathbf{G}_t\boldsymbol{\theta}_{t-1} + \boldsymbol{\omega}_t, \quad \boldsymbol{\omega}_t \sim t_{n_{t-1}}[0, \mathbf{W}_t] \quad (46)$$

Informação:

$$(\boldsymbol{\theta}_{t-1} | D_{t-1}) \sim t_{n_{t-1}}[\mathbf{m}_{t-1}, \mathbf{C}_{t-1}] \rightarrow \text{posteriori no instante } t-1.$$

$$(\boldsymbol{\theta}_t | D_{t-1}) \sim t_{\delta_t n_{t-1}}[\mathbf{a}_t, \mathbf{R}_t] \rightarrow \text{priori no instante } t.$$

$$(\phi_{t-1} | D_{t-1}) \sim G\left[\frac{n_{t-1}}{2}, \frac{d_{t-1}}{2}\right]$$

$$(\phi_t | D_{t-1}) \sim G\left[\frac{\delta_t n_{t-1}}{2}, \frac{\delta_t d_{t-1}}{2}\right]$$

$$\mathbf{a}_t = \mathbf{G}_t \mathbf{m}_{t-1} \quad (47)$$

$$\mathbf{R}_t = \mathbf{G}_t \mathbf{C}_{t-1} \mathbf{G}'_t + \mathbf{W}_t \quad (48)$$

Previsão no instante t :

$$(Y_t | D_{t-1}) \sim t_{\delta_t n_{t-1}}[f_t, Q_t]$$

$$f_t = \mathbf{F}'_t \mathbf{a}_t \quad (49)$$

$$Q_t = \mathbf{F}'_t \mathbf{R}_t \mathbf{F}_t + k_t S_{t-1} \quad (50)$$

Atualização:

$$(\boldsymbol{\theta}_t | D_t) \sim t_{n_t}[\mathbf{m}_t, \mathbf{C}_t] \rightarrow \text{posteriori no instante } t$$

$$(\phi_t | D_t) \sim G\left[\frac{n_t}{2}, \frac{d_t}{2}\right]$$

$$\mathbf{m}_t = \mathbf{a}_t + \mathbf{A}_t e_t \quad (51)$$

$$\mathbf{C}_t = \left(\frac{S_t}{S_{t-1}} \right) \left[\mathbf{R}_t - \mathbf{A}_t \mathbf{A}_t' Q_t \right] \quad (52)$$

$$e_t = Y_t - f_t \quad (53)$$

$$\mathbf{A}_t = \frac{\mathbf{R}_t \mathbf{F}_t}{Q_t} \quad (54)$$

$$n_t = \delta_t n_{t-1} + 1$$

$$d_t = \delta_t d_{t-1} + \frac{S_{t-1} e_t^2}{Q_t}$$

$$S_t = \frac{d_t}{n_t}$$

Previsões na origem t , k passos à frente ($k \geq 1$):

$$(\boldsymbol{\theta}_{t+k} | D_t) \sim t_{\delta_t n_t} [\mathbf{a}_t(k), \mathbf{R}_t(k)]$$

$$(Y_{t+k} | D_t) \sim t_{\delta_t n_t} [f_t(k), Q_t(k)]$$

$$\mathbf{a}_t(k) = \mathbf{G}_{t+k} \mathbf{a}_t(k-1) \quad (55)$$

$$\mathbf{R}_t(k) = \mathbf{G}_{t+k} \mathbf{R}_t(k-1) \mathbf{G}_{t+k}' + \mathbf{W}_{t+k} \quad (56)$$

$$f_t(k) = \mathbf{F}_{t+k}' \mathbf{a}_t(k) \quad (57)$$

$$Q_t(k) = \mathbf{F}_{t+k}' \mathbf{R}_t(k) \mathbf{F}_{t+k} + k_{t+k} S_t \quad (58)$$

$$\mathbf{a}_t(0) = \mathbf{m}_t \quad (59)$$

$$\mathbf{R}_t(0) = \mathbf{C}_t \quad (60)$$

Desta forma, em qualquer instante de tempo o MLD pode ser caracterizado por:

$$M_t = \left\{ \mathbf{F}_t; \mathbf{G}; V_t; \mathbf{W}_t \right\} \quad (61)$$

O vetor M_t é conhecido como vetor de caracterização do sistema. O vetor \mathbf{F}_t é sempre conhecido a priori, assim como a matriz \mathbf{G} também será conhecida. Já os elementos de V_t e \mathbf{W}_t são todos desconhecidos e terão de ser especificados a priori. Para V_t , usualmente considera-se a lei de variância para modelar o aspecto de que a variância do componente irregular tende a variar de

acordo com o nível das séries. No caso da matriz \mathbf{W}_t , faz-se uso de fatores de desconto para caracterizar sua evolução temporal.

Além disso, antes de se iniciar o processo de estimação, também é necessário estipular alguns parâmetros:

- as condições iniciais para os componentes do modelo (m_0) e suas respectivas variâncias (R_0), ou seja, os parâmetros da distribuição a priori inicial;
- os fatores de desconto β_x para cada componente e δ para a lei de variância;
- o expoente da lei de variância i .

quando não se tem informação sobre a distribuição a priori inicial, inicializa-se o filtro adotando-se uma “priori de referência”, fazendo $m_0 = 0$ e $\mathbf{R}_0 = h\mathbf{I}$, onde h é um número grande e \mathbf{I} é a matriz identidade. Isto equivale a supor ignorância total a priori quanto ao vetor de estados $\boldsymbol{\theta}_t$.

3.5. Fator de Bayes

Segundo Pole et al. (1994) e Souza (2003), a ferramenta de avaliação de um MLD é o fator de Bayes, que lida com a razão da verossimilhança preditiva de dois modelos: o corrente e o alternativo.

Sendo:

M : modelo corrente; preditiva $\Rightarrow p(y_t | D_{t-1}; M)$.

M_A : modelo alternativo; preditiva $\Rightarrow p(y_t | D_{t-1}; M_A)$.

Então o fator de Bayes é definido por:

$$H_t = \frac{p(y_t | D_{t-1}; M)}{p(y_t | D_{t-1}; M_A)} \quad (62)$$

Dessa forma, o modelo corrente será adequado quando $H_t \gg 1$. Pole et al. (1994) e Souza (2003) sugerem que:

$H_t \geq 10 \Rightarrow$ indica evidência em favor de modelo corrente.

$H_t \geq 100 \Rightarrow$ indica forte evidência em favor de modelo corrente.

3.5.1. Fator de Bayes Acumulado

O fator de Bayes H_t mede a evidência de um dado modelo em uma única observação no tempo t com relação a outro modelo. Observar uma seqüência de observações é uma outra forma de avaliar o desempenho da previsão segundo Pole et al. (1994). O fator de Bayes acumulado para uma seqüência de observações $Y_t, Y_{t-1}, \dots, Y_{t-k+1}$ é definido como:

$$H_t(k) = \prod_{i=0}^{k-1} H_{t-i} \quad (63)$$

$$H_t(k) = H_t \cdot H_{t-1}(k-1)$$

Souza (2003) afirma que o fator de Bayes acumulado pode ser utilizado para detectar, rapidamente, variações no comportamento do processo provocadas por descontinuidades dos tipos transientes ou mudanças estruturais.

3.5.2. Algoritmo para identificação de Descontinuidades

Passo 1 – Calcular seqüencialmente as quantidades L_t e l_t :

$$L_t = H_t \cdot \min(1, L_{t-1})$$

$$l_t = \begin{cases} 1 + l_{t-1} & \Rightarrow L_{t-1} < 1 \\ 1 & \Rightarrow L_{t-1} \geq 1 \end{cases}$$

l_t é conhecido como comprimento da descontinuidade e L_t como fator de Bayes acumulado. Para efeito de inicialização, Pole et al. (1994) sugerem utilizar $L_0 = 1$ e $l_0 = 1$.

Passo 2 – Regra de decisão

Baratojo (1989) e Souza (2003) afirmam que se $L_t \geq \tau$, onde τ é um real positivo pré-estabelecido, o sistema será considerado em controle, ou seja, não é observada descontinuidade no instante t . Caso se $L_t < \tau$ no instante t , então:

- (i) $l_t = 1 \rightarrow$ a descontinuidade detectada em t é do tipo transiente.
- (ii) $l_t > 1 \rightarrow$ a descontinuidade detectada em t é do tipo mudança estrutural e ocorreu provavelmente a partir de $t - l_t + 1$.

4

Modelo Estacionário para o CEP Autocorrelacionados

4.1.

O Processo AR(1) com Erro Aleatório Adicional – ARMA(1,1)

Inicialmente, suponha que observações são tomadas de um processo em espaços de tempo regulares e, ainda, que Y_t seja definido como a observação tomada no tempo t .

Para a modelagem de observações tomadas de um processo autocorrelacionado, será utilizado, nessa dissertação, o modelo representado por

$$Y_t = \mu_t + \varepsilon_t, \quad t = 1, 2, \dots \quad (64)$$

onde:

μ_t → média do processo aleatório no tempo t .

ε_t → variável aleatória normal independente em t , com média 0 e variância constante σ_ε^2 .

Assume-se que μ_t pode ser descrito como um processo AR(1) conforme segue:

$$\mu_t = (1 - \phi)\xi + \phi\mu_{t-1} + \alpha_t \quad t = 1, 2, \dots \quad (65)$$

onde:

ξ → média global do processo, sendo $\xi = E[\mu_t]$.

α_t → choque aleatório, variável aleatória normal independente em t , com média 0 e variância constante σ_α^2 . Assume-se que α_t 's são independentes dos ε_t 's.

ϕ → parâmetro auto-regressivo que satisfaz $|\phi| < 1$.

Considera-se que o processo, cujo valor inicial é μ_0 , segue uma distribuição normal com média ξ e variância $\sigma_\mu^2 = \frac{\sigma_\alpha^2}{(1-\phi^2)}$ (ver a Prova 1, a seguir), implicando em $\sigma_Y^2 = \sigma_\mu^2 + \sigma_\varepsilon^2$.

Prova 1:

De (65) é conhecido que

$$\mu_t = (1-\phi)\xi + \phi\mu_{t-1} + \alpha_t \quad t = 1, 2, \dots$$

Sem perda de generalidade, considere $\xi = 0$

$$\mu_t = \phi\mu_{t-1} + \alpha_t \quad t = 1, 2, \dots$$

$$\mu_t - \phi\mu_{t-1} = \alpha_t \quad t = 1, 2, \dots$$

$$(1-\phi B)\mu_t = \alpha_t \quad t = 1, 2, \dots$$

$$\mu_t = \frac{\alpha_t}{(1-\phi B)} \quad t = 1, 2, \dots$$

onde B é o operador de retardo.

Sabe-se que $(1 + \phi B + \phi^2 B^2 + \dots) = \frac{1}{(1-\phi B)}$, desde que $|\phi| < 1$.

Conseqüentemente,

$$\mu_t = (1 + \phi B + \phi^2 B^2 + \dots)\alpha_t = \alpha_t + \phi\alpha_{t-1} + \phi^2\alpha_{t-2} + \dots \quad t = 1, 2, \dots \quad .(a)$$

Então, a variância de μ_t é dada por

$$\text{var}[\mu_t] = \sigma_\mu^2 = \text{var}[\alpha_t + \phi\alpha_{t-1} + \phi^2\alpha_{t-2} + \dots] \quad t = 1, 2, \dots$$

$$\text{var}[\mu_t] = \sigma_\mu^2 = \sigma_\alpha^2(1 + \phi^2 + \phi^4 + \dots) \quad t = 1, 2, \dots$$

Como $1 + \phi^2 + \phi^4 + \dots = \frac{1}{1-\phi^2}$, portanto $\sigma_\mu^2 = \frac{\sigma_\alpha^2}{(1-\phi^2)}$.

É considerado nesse trabalho que a variação em μ_t , representada pela equação (65), é uma característica inerente ao processo e não pode ser removida. Além disso, quando o processo segue as equações (64) e (65) com $\xi = \xi_0$, onde ξ_0 é o valor-alvo para o processo em controle. Esse trabalho considera o problema em detectar causas especiais de mudança na média de ξ_0 para um outro valor ξ , sendo conveniente expressar essa mudança em termos de $\delta = \frac{\xi - \xi_0}{\sigma_Y}$.

É útil definir $\psi = \frac{\sigma_\mu^2}{\sigma_Y^2} = \frac{\sigma_\mu^2}{\sigma_\mu^2 + \sigma_\varepsilon^2}$ como sendo a proporção da variação do

processo imposta por μ_t . Pode ser mostrado que a covariância entre duas observações consecutivas é $\phi\sigma_\mu^2$ e que a correlação é $\rho = \phi\psi$ (ver Prova 2, abaixo).

Prova 2:

$$\text{cov}[Y_t, Y_{t-1}] = E[(Y_t - E[Y_t])(Y_{t-1} - E[Y_{t-1}])]$$

$$\text{cov}[Y_t, Y_{t-1}] = E[(Y_t - \xi)(Y_{t-1} - \xi)]$$

$$\text{cov}[Y_t, Y_{t-1}] = E[Y_t Y_{t-1} - \xi Y_t - \xi Y_{t-1} + \xi^2]$$

$$\text{cov}[Y_t, Y_{t-1}] = E[Y_t Y_{t-1}] - \xi^2$$

Sem perda de generalidade, considere $\xi = 0$, então

$$\text{cov}[Y_t, Y_{t-1}] = E[Y_t Y_{t-1}] \quad (\text{b})$$

como,

$$E[Y_t Y_{t-1}] = E[(\mu_t + \varepsilon_t)(\mu_{t-1} + \varepsilon_{t-1})]$$

$$E[Y_t Y_{t-1}] = E[\mu_t \mu_{t-1} + \varepsilon_{t-1} \mu_t + \varepsilon_t \mu_{t-1} + \varepsilon_t \varepsilon_{t-1}]$$

$$E[Y_t Y_{t-1}] = E[\mu_t \mu_{t-1}] \quad (\text{c})$$

então, de (a), é possível afirmar que

$$E[\mu_t \mu_{t-1}] = E[(\alpha_t + \phi\alpha_{t-1} + \phi^2\alpha_{t-2} + \dots)(\alpha_{t-1} + \phi\alpha_{t-2} + \phi^2\alpha_{t-3} + \dots)]$$

$$E[\mu_t \mu_{t-1}] = E\left[\sum_{i=0}^{\infty} (\phi^i \alpha_{t-i}) \sum_{j=0}^{\infty} (\phi^j \alpha_{t-1-j})\right]$$

É conhecido que α_t é normal e independente em t , com média 0 e variância constante σ_α^2 , portanto

$$E[\alpha_t \alpha_{t-k}] = \begin{cases} 0 & \text{para } k \neq 0 \\ \sigma_\alpha^2 & \text{para } k = 0 \end{cases}$$

$$E[\mu_t \mu_{t-1}] = \phi\sigma_\alpha^2 + \phi^3\sigma_\alpha^2 + \phi^5\sigma_\alpha^2 \dots = \sigma_\alpha^2(\phi + \phi^3 + \phi^5 \dots)$$

$$E[\mu_t \mu_{t-1}] = \sigma_\alpha^2 \frac{\phi}{1 - \phi^2}$$

$$E[\mu_t \mu_{t-1}] = \phi\sigma_\mu^2 \quad (\text{d})$$

Substituindo (a), (b) e (c) em (d), tem-se:

$$\text{cov}[Y_t, Y_{t-1}] = \phi\sigma_\mu^2$$

$$\rho = \frac{\text{cov}[Y_t, Y_{t-1}]}{\sigma_Y^2} = \frac{\phi\sigma_\mu^2}{\sigma_Y^2} = \phi\psi$$

Como informação adicional e conforme Lu & Reynolds (2001), o processo AR(1) com um erro aleatório adicional é equivalente a um processo ARMA(1,1), que pode ser escrito como

$$(1 - \phi B)Y_t = (1 - \phi)\xi + (1 - \theta B)\gamma_t \quad (66)$$

Onde:

$\gamma_t \rightarrow$ variável aleatória normal independente com média 0 e variância σ_γ^2 .

$\theta \rightarrow$ parâmetro média móvel

$BY_t = Y_{t-1} \rightarrow$ operador de retardo.

4.2. MLD-CEP

Como alternativa aos procedimentos já disponíveis na literatura para lidar com a ocorrência de observações autocorrelacionadas no âmbito do controle estatístico de processo (CEP), esse trabalho propõe o uso do modelo linear dinâmico de Harrison & Stevens (MLD-HS) para o CEP de variáveis na presença de dados serialmente correlacionados, e foi denominado MLD-CEP.

O pressuposto básico para elaboração desse trabalho é que se uma dada característica de qualidade se encontra em controle, ou seja, não existe nenhuma causa especial atuando, o modelo que estará operando é o modelo estacionário de HS. O intuito é detectar algum tipo de descontinuidade na série, pois essa descontinuidade indicará uma possível atuação de causa especial no processo.

Para se atingir esse objetivo, o fator de Bayes acumulado foi o instrumento utilizado para detecção de descontinuidades na série temporal.

4.3. Suposições e Opções do Modelo Proposto – MLD-CEP

Os resultados numéricos obtidos nesse trabalho são para valores não negativos de ϕ , correspondendo a valores não negativos de ρ . A justificativa para tal opção é que, segundo Lu & Reynolds (2001), em aplicações onde se deseja monitorar o processo, existem muito mais situações de autocorrelação positiva do que de autocorrelação negativa.

Ainda, optou-se em acompanhar os níveis de autocorrelação considerados no artigo de Lu & Reynolds (2001), ou seja, de baixo a moderadamente alto. Essa opção foi com intuito de viabilizar a comparação de desempenho do esquema de CEP aqui proposto, com os esquemas alternativos a ele, propostos na literatura. Importante salientar ainda que esse trabalho assume processo estacionário e variância conhecida.

A medida de desempenho utilizada é o NMA. Conforme dito anteriormente, o NMA é a medida de desempenho de gráficos de controle mais utilizada quando o intervalo de tempo entre amostras for constante. Quando o processo está em controle, espera-se obter $NMA_0 = 370$ observações até a sinalização de um alarme falso; quando o processo está fora de controle, deseja-se que o NMA_1 seja o menor possível, para que uma mudança seja rapidamente detectada.

Quando existe uma mudança em ξ , a abordagem mais simples para o cálculo do NMA_1 é assumir que essa mudança está presente no tempo em que o gráfico de controle foi inicializado. Porém, nesse trabalho, foi considerado que o processo está em controle por certo período de tempo e somente em um determinado instante t ocorre uma mudança em ξ . A eficiência, do esquema aqui proposto, em detectar mudanças pré-definidas na média do processo ξ é comparada com resultados obtidos por Lu & Reynolds (2001).

4.4.

Obtenção dos *Designs* para o Modelo Proposto – MLD-CEP

O processo para alcançar os melhores *designs* consistiu em obter valores de β , que é o fator de desconto discutido na seção 3.4.5, assim como valores de τ (*threshold*), fixando $NMA_0 \cong 370$. Foram obtidos pares (β, τ) para cada conjunto de parâmetros (ϕ, ψ, δ^*) escolhido, onde ϕ e ψ são definidos conforme seção 4.1.

Já δ^* é definido como o desvio (medido em número de desvio-padrão) na média do modelo alternativo para efeito do cálculo do fator de Bayes

$H_t = \frac{p(y_t | D_{t-1}; M)}{p(y_t | D_{t-1}; M_A)}$ (ver seção 3.5). Para facilitar o entendimento do parâmetro

δ^* , considerar que se deseja avaliar o modelo corrente (M) versus um modelo alternativo (M_A). Ainda, sem perda de generalidade, que o modelo corrente (M)

é fixado como $(e_t | D_{t-1}) \sim N[0, 1]$ e, portanto, a preditiva do M é dado por $p_M(e_t | D_{t-1}) = (2\pi)^{-1/2} \exp\{-0,5e_t^2\}$.

O modelo alternativo como $(e_t | D_{t-1}) \sim N[\delta^*, 1]$ tendo como preditiva $p_{M_A}(e_t | D_{t-1}) = (2\pi)^{-1/2} \exp\{-0,5(e_t - \delta^*)^2\}$. Então, para um conhecido δ^* , o fator de Bayes, em um instante t , é dado por $H_t = p_M(e_t | D_{t-1}) / p_{M_A}(e_t | D_{t-1}) = \exp\{0,5(\delta^{*2} - 2\delta^* e_t)\}$.

4.4.1.

Obtenção de pares (β, τ) para conjunto de $(\phi, \psi, \delta^*) = (0,4 / 0,5 / 0,5)$

Para cada par (β, τ) , rodaram-se 1600 vezes (erro menor que 5%) para obtenção da média de alarmes ($\overline{alarmes}$) igual a 7,45, que conduz ao $NMA_0 \cong 370$ em uma corrida de tamanho 2760. O número de repetições foi reduzido devido ao tempo computacional. Tabela 3 mostra os resultados obtidos.

Tabela 3 - Obtenção do $\overline{alarmes} = 7,45$ sem refino para $(\phi, \psi, \delta^*) = (0,4 / 0,5 / 0,5)$

β	τ	$\overline{alarmes}$
0,700	0,100	0,000
0,700	0,150	0,000
0,700	0,200	0,000
0,700	0,250	0,000
0,700	0,300	0,000
0,750	0,100	0,000
0,750	0,150	0,000
0,750	0,200	0,000
0,750	0,250	0,000
0,750	0,300	0,000
0,800	0,100	0,000
0,800	0,150	0,000
0,800	0,200	0,000
0,800	0,250	0,000
0,800	0,300	0,000
0,850	0,100	0,000
0,850	0,150	0,000
0,850	0,200	0,000

0,850	0,250	0,039
0,850	0,300	3,024
0,900	0,100	0,000
0,900	0,150	0,000
0,900	0,200	0,944
0,900	0,250	4,747
0,900	0,300	11,362
0,950	0,100	0,087
0,950	0,150	3,294
0,950	0,200	8,240
0,950	0,250	14,662
0,950	0,300	22,301

A partir dos dados da Tabela 3, é possível refinar o processo para menores intervalos de β e τ em torno de $\overline{alarmes} = 7,45$. O processo refinado pode ser observado na Tabela 4.

Tabela 4 - Obtenção do $\overline{alarmes} = 7,45$ com refino para $(\phi, \psi, \delta^*) = (0,4 / 0,5 / 0,5)$

β	τ	$\overline{alarmes}$
0,900	0,200	0,962
0,900	0,220	2,151
0,900	0,240	3,803
0,900	0,260	6,010
0,900	0,280	8,406
0,900	0,300	11,131
0,910	0,200	1,813
0,910	0,220	3,435
0,910	0,240	5,357
0,910	0,260	7,562
0,910	0,280	10,308
0,910	0,300	13,363
0,920	0,200	2,961
0,920	0,220	4,926
0,920	0,240	7,085
0,920	0,260	9,654
0,920	0,280	12,566
0,920	0,300	15,674
0,930	0,200	4,571

0,930	0,220	6,598
0,930	0,240	8,981
0,930	0,260	11,809
0,930	0,280	14,603
0,930	0,300	17,841
0,940	0,200	6,173
0,940	0,220	8,524
0,940	0,240	11,021
0,940	0,260	13,841
0,940	0,280	16,683
0,940	0,300	20,109
0,950	0,200	8,166
0,950	0,220	10,516
0,950	0,240	13,156
0,950	0,260	16,021
0,950	0,280	18,938
0,950	0,300	22,253

Em torno de $\overline{alarmes} = 7,45$, foi feita uma interpolação, sendo obtidos os valores da Tabela 5. Para cada par (β, τ) da tabela 5 obteve-se o NMA_1 (apêndice D), o critério de escolha do par (β, τ) foi o menor NMA_1 para um conhecido δ^* . Esse processo foi executado para todo conjunto de interesse (ϕ, ψ, δ^*) .

Tabela 5 - (β, τ) para $(\phi, \psi, \delta^*) = (0,4 / 0,5 / 0,5)$ e $\overline{alarmes} = 7,45 \Rightarrow NMA_0 \cong 370$

β	τ
0,90	0,272
0,91	0,259
0,92	0,243
0,93	0,227
0,94	0,211

O mesmo processo de obtenção de pares (β, τ) se repetiu para as demais combinações (ϕ, ψ, δ^*) e os resultados estão disponíveis no apêndice C.

4.5. Análise de desempenho do MLD-CEP para cada *design*

Nesta seção comparam-se os NMA_1 obtidos por Lu & Reynolds (2001) com o MLD-CEP. Nesse artigo, os autores investigaram o desempenho de gráficos de controle CUSUM para monitoramento da média de um dado processo, com nível de autocorrelação baixo até moderadamente alto, sendo as observações tomadas de um processo que pode ser modelado como um processo AR(1) mais um erro aleatório adicional. Eles investigaram tanto o desempenho dos gráficos de resíduos do modelo de previsão, quanto o dos gráficos das observações originais.

Lu & Reynolds (2001) adicionam ainda, no mesmo artigo, resultados de desempenho para gráficos de controle EWMA, também nas duas alternativas, utilizando os resíduos e utilizando as observações originais, resultados estes obtidos de um outro trabalho de investigação dos autores, Lu & Reynolds (1999a); além de resultados do uso de gráficos de Shewhart para resíduos e para as observações originais. Portanto, isso inclui os principais esquemas na literatura para controle estatístico de processos autocorrelacionados, possibilitando uma comparação abrangente do desempenho do MLD-CEP .

Os NMA_1 's para o MLD-CEP foram obtidos considerando a situação em que o processo está em controle por certo período de tempo e somente em um determinado instante t ocorre uma mudança em ξ . A mudança em ξ é definida por $\delta = (\xi - \xi_0)/\sigma_x$. Importante salientar que δ^* é o $\delta = (\xi - \xi_0)/\sigma_x$ para o qual determinado esquema foi otimizado.

O gráfico de Shewhart só possui um *design*. De fato, como se considera neste trabalho o mesmo tamanho de amostra para todos os esquemas, sendo o intervalo de tempo entre amostras considerado (também para todos os esquemas) igual a 1 unidade de tempo, sem perda de generalidade, então, só resta para o gráfico de Shewhart um parâmetro que pode ser variado: a largura dos limites de controle; mas esta largura é fixada em função do NMA_0 , de modo que o *design* do gráfico de Shewhart resulta fixo..

O apêndice D e as Tabelas 39 a 42 mostram os NMA_1 's obtidos para o MLD-CEP e para os demais esquemas considerados.

Como se observa nas Tabelas 6 a 9, o melhor *design* para detectar um desvio de magnitude δ^* não é o que utiliza δ^* como a média do modelo

alternativo. Portanto não se trata de *designs* ótimos, mas de uma gama de valores de δ^* de modo a fornecer um leque de *designs* para escolha — da mesma maneira que, para os esquemas concorrentes, Lu & Reynolds fornecem um leque de valores para os parâmetros, de modo a fornecer uma gama de *designs* para escolha do melhor, mas não se trata de *designs* otimizados. Contudo, é importante salientar, a comparação mostrou que o MLD-CEP é competitivo e vantajosos em um conjunto de situações. Notar que, em tais tabelas, Cusum-Obs e EWMA-Obs significa, respectivamente, gráfico Cusum e gráfico EWMA para as observações, e Cusum-Res e EWMA-Res são os mesmos gráficos aplicados aos resíduos. Além disso, λ ($0 < \lambda < 1$) e r ($r \geq 0$) são constantes e foram discriminadas nas seções 2.2 e 2.3 respectivamente.

Tabela 6 - Valores obtidos pelo MLD-CEP e comparados ($\phi = 0,4$ e $\psi = 0,5$)

$\psi = 0,5$		$\delta = (\xi - \xi_0)/\sigma_x$							
ϕ	δ^*	Gráfico	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	
0,5		Cusum-Obs $r = 0,20$	36,1	14,7	9,2	6,8	5,4	4,5	
		EWMA-Obs $\lambda = 0,05$	37,0	14,1	8,5	6,2	4,9	4,1	
	0,5	Cusum-Res $r = 0,20$	36,4	13,8	8,3	5,9	4,6	3,8	
		EWMA-Res $\lambda = 0,05$	36,7	14,0	8,4	6,0	4,7	3,8	
			MLD-CEP	86,3	10,9	5,8	3,8	2,6	1,9
	0,4	1,0	Cusum-Obs $r = 0,40$	40,3	12,9	7,4	5,2	4,0	3,3
EWMA-Obs $\lambda = 0,10$			40,5	13,3	7,5	5,2	4,0	3,3	
1,0		Cusum-Res $r = 0,30$	40,5	13,0	7,4	5,1	3,9	3,2	
		EWMA-Res $\lambda = 0,10$	42,1	13,3	7,4	5,1	3,9	3,1	
		MLD-CEP	188,8	45,2	7,4	3,4	2,3	1,6	
2,0		1,0	Cusum-Obs $r = 1,00$	77,6	17,1	7,1	4,1	2,9	2,2
	EWMA-Obs $\lambda = 0,35$		75,7	17,6	7,3	4,2	3,0	2,4	
	2,0	Cusum-Res $r = 0,80$	86,5	18,8	7,3	4,1	2,7	2,1	
		EWMA-Res $\lambda = 0,30$	74,7	17,7	7,5	4,3	3,0	2,3	
			MLD-CEP	284,8	222,5	126,3	34,6	6,2	1,5
			Shewhart – Obs.	160,9	47,0	16,4	7,2	3,6	2,2
		Shewhart – Res.	205,4	74,4	29,2	12,0	5,5	2,8	

Tabela 7 - Valores obtidos pelo MLD-CEP e comparados ($\phi = 0,8$ e $\psi = 0,5$)

$\psi = 0,5$		$\delta = (\xi - \xi_0)/\sigma_x$							
ϕ	δ^*	Gráfico	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	
0,5		Cusum-Obs $r = 0,20$	71,3	29,4	18,2	13,0	10,2	8,4	
		EWMA-Obs $\lambda = 0,05$	78,1	27,1	14,9	10,1	7,7	6,2	
	0,5	Cusum-Res $r = 0,10$	71,9	28,0	16,2	10,4	7,9	6,1	
		EWMA-Res $\lambda = 0,05$	80,3	26,9	14,0	8,8	6,2	4,6	
			MLD-CEP	175,2	62,1	18,7	9,8	7,5	5,7
	0,8		Cusum-Obs $r = 0,50$	83,3	26,8	14,2	8,3	6,9	5,5
EWMA-Obs $\lambda = 0,05$			78,1	27,1	14,9	10,1	7,7	6,2	
1,0		Cusum-Res $r = 0,20$	81,5	26,2	13,4	8,4	5,9	4,4	
		EWMA-Res $\lambda = 0,05$	80,3	26,9	14,0	8,8	6,2	4,6	
		MLD-CEP	249,3	179,0	101,7	36,5	14,7	5,5	
2,0			Cusum-Obs $r = 1,50$	135,3	38,6	14,7	6,8	13,9	2,5
	EWMA-Obs $\lambda = 0,35$		127,2	36,2	14,2	7,3	4,4	3,1	
	2,0	Cusum-Res $r = 0,50$	135,8	37,1	13,5	6,4	3,7	2,6	
		EWMA-Res $\lambda = 0,15$	119,1	34,2	14,0	7,3	4,4	3,1	
		MLD-CEP	281,3	250,8	186,1	125,9	60,4	29,5	
		Shewhart – Obs.	176,3	56,4	21,8	9,5	4,8	2,6	
		Shewhart – Res.	291,8	173,9	87,8	46,6	16,5	6,1	

Tabela 8 - Valores obtidos pelo MLD-CEP e comparados ($\phi = 0,4$ e $\psi = 0,9$)

$\psi = 0,9$		$\delta = (\xi - \xi_0)/\sigma_x$						
ϕ	δ^*	Gráfico	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
		Cusum-Obs $r = 0,20$	43,1	117,7	11,0	8,0	6,3	5,3
		EWMA-Obs $\lambda = 0,05$	44,9	16,5	10,0	7,2	5,5	4,6
	0,5	Cusum-Res $r = 0,10$	43,6	18,7	11,7	8,4	6,6	5,4
		EWMA-Res $\lambda = 0,05$	44,9	16,6	9,8	6,9	5,3	4,2
		MLD-CEP	27,9	12,1	7,5	5,3	3,9	3,0
		Cusum-Obs $r = 0,40$	49,1	16,0	9,2	6,4	4,9	4,0
		EWMA-Obs $\lambda = 0,10$	51,6	16,2	8,8	6,0	4,6	3,8
0,4	1,0	Cusum-Res $r = 0,30$	51,3	15,8	8,6	5,8	4,3	3,5
		EWMA-Res $\lambda = 0,10$	53,2	16,3	8,7	5,8	4,3	3,4
		MLD-CEP	83,2	13,3	6,8	4,6	3,3	2,6
		Cusum-Obs $r = 1,25$	101,1	25,1	9,4	5,0	3,2	2,4
		EWMA-Obs $\lambda = 0,20$	89,8	22,3	9,2	5,1	3,5	2,6
	2,0	Cusum-Res $r = 0,40$	96,7	22,6	8,8	4,8	3,2	2,3
		EWMA-Res $\lambda = 0,10$	84,2	21,2	9,1	5,2	3,5	2,6
		MLD-CEP	235,3	118,5	27,2	4,9	2,7	1,8
		Shewhart – Obs.	162,5	48,2	17,5	7,8	4,0	2,3
		Shewhart – Res.	232,2	98,9	40,5	17,2	7,4	3,5

Tabela 9 - Valores obtidos pelo MLD-CEP e comparados ($\phi = 0,8$ e $\psi = 0,9$)

$\psi = 0,9$		$\delta = (\xi - \xi_0)/\sigma_x$						
ϕ	δ^*	Gráfico	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
0,8	0,5	Cusum-Obs $r = 0,20$	96,3	41,3	25,7	18,4	14,2	11,7
		EWMA-Obs $\lambda = 0,05$	108,4	38,6	20,5	13,6	10,0	7,9
		Cusum-Res $r = 0,10$	97,7	38,2	21,6	14,4	10,3	7,8
		EWMA-Res $\lambda = 0,05$	113,2	39,2	19,9	12,2	8,3	5,9
		MLD-CEP	63,7	28,4	16,8	12,2	10,0	8,3
	1,0	Cusum-Obs $r = 0,40$	103,4	38,0	21,8	14,6	11,2	8,9
		EWMA-Obs $\lambda = 0,05$	108,4	38,6	20,1	13,6	10,0	7,9
		Cusum-Res $r = 0,10$	97,7	38,2	21,6	14,4	10,3	7,8
		EWMA-Res $\lambda = 0,05$	113,2	39,2	19,9	12,2	8,3	5,9
		MLD-CEP	175,1	83,9	27,5	14,0	9,5	7,5
2,0	Cusum-Obs $r = 1,25$	152,3	49,5	21,0	10,9	6,7	4,6	
	EWMA-Obs $\lambda = 0,20$	148,3	48,1	21,5	11,4	7,3	5,1	
	Cusum-Res $r = 0,40$	162,0	51,9	20,6	9,8	5,4	3,3	
	EWMA-Res $\lambda = 0,10$	140,6	46,2	20,7	11,3	6,9	4,5	
	MLD-CEP	254,4	189,8	132,1	61,4	21,9	10,5	
		Shewhart – Obs.	187,1	65,8	26,7	12,3	6,0	3,2
		Shewhart – Res.	317,2	209,4	117,0	50,4	15,1	4,1

Tabela 10 - Valores obtidos pelo MLD-CEP e comparados ($\phi = 0,4$ e $\psi = 0,5$) – II

$\psi = 0,5$		$\delta = (\xi - \xi_0) / \sigma_x$					
ϕ	Gráfico	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
0,5	Cusum-Obs $r = 0,20$	36,1	14,7	9,2	6,8	5,4	4,5
	EWMA-Obs $\lambda = 0,05$	37,0	14,1	8,5	6,2	4,9	4,1
	Cusum-Res $r = 0,20$	36,4	13,8	8,3	5,9	4,6	3,8
	EWMA-Res $\lambda = 0,05$	36,7	14,0	8,4	6,0	4,7	3,8
0,4	Cusum-Obs $r = 0,40$	40,3	12,9	7,4	5,2	4,0	3,3
	EWMA-Obs $\lambda = 0,10$	40,5	13,3	7,5	5,2	4,0	3,3
	Cusum-Res $r = 0,30$	40,5	13,0	7,4	5,1	3,9	3,2
	EWMA-Res $\lambda = 0,10$	42,1	13,3	7,4	5,1	3,9	3,1
2,0	Cusum-Obs $r = 1,00$	77,6	17,1	7,1	4,1	2,9	2,2
	EWMA-Obs $\lambda = 0,35$	75,7	17,6	7,3	4,2	3,0	2,4
	Cusum-Res $r = 0,80$	86,5	18,8	7,3	4,1	2,7	2,1
	EWMA-Res $\lambda = 0,30$	74,7	17,7	7,5	4,3	3,0	2,3
MLD-CEP		86,3	10,9	5,8	3,3	2,1	1,3
		$\delta^* = 0,5$	$\delta^* = 0,5$	$\delta^* = 0,5$	$\delta^* = 1,0$	$\delta^* = 1,0$	$\delta^* = 1,0$
	Shewh.-Obs.	160,9	47,0	16,4	7,2	3,6	2,2
	Shewh.-Res.	205,4	74,4	29,2	12,0	5,5	2,8

Tabela 11 - Valores obtidos pelo MLD-CEP e comparados ($\phi = 0,4$ e $\psi = 0,9$) – II

$\psi = 0,9$		$\delta = (\xi - \xi_0) / \sigma_x$					
ϕ	Gráfico	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
0,5	Cusum-Obs $r = 0,20$	43,1	117,7	11,0	8,0	6,3	5,3
	EWMA-Obs $\lambda = 0,05$	44,9	16,5	10,0	7,2	5,5	4,6
	Cusum-Res $r = 0,10$	43,6	18,7	11,7	8,4	6,6	5,4
	EWMA-Res $\lambda = 0,05$	44,9	16,6	9,8	6,9	5,3	4,2
0,4	Cusum-Obs $r = 0,40$	103,4	38,0	21,8	14,6	11,2	8,9
	EWMA-Obs $\lambda = 0,10$	108,4	38,6	20,1	13,6	10,0	7,9
	Cusum-Res $r = 0,30$	97,7	38,2	21,6	14,4	10,3	7,8
	EWMA-Res $\lambda = 0,10$	113,2	39,2	19,9	12,2	8,3	5,9
2,0	Cusum-Obs $r = 1,25$	101,1	25,1	9,4	5,0	3,2	2,4
	EWMA-Obs $\lambda = 0,20$	89,8	22,3	9,2	5,1	3,5	2,6
	Cusum-Res $r = 0,40$	96,7	22,6	8,8	4,8	3,2	2,3
	EWMA-Res $\lambda = 0,10$	84,2	21,2	9,1	5,2	3,5	2,6
	MLD-CEP	27,9	12,1	6,8	4,3	2,6	1,7
		$\delta^* = 0,5$	$\delta^* = 0,5$	$\delta^* = 1,0$	$\delta^* = 1,0$	$\delta^* = 2,0$	$\delta^* = 2,0$
	Shewh – Obs.	162,5	48,2	17,5	7,8	4,0	2,3
	Shewh – Res.	232,2	98,9	40,5	17,2	7,4	3,5

Tabela 12 - Valores obtidos pelo MLD-CEP e comparados ($\phi = 0,8$ e $\psi = 0,5$) – II

$\psi = 0,5$		$\delta = (\xi - \xi_0) / \sigma_x$					
ϕ	Gráfico	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
0,5	Cusum-Obs $r = 0,20$	71,3	29,4	18,2	13,0	10,2	8,4
	EWMA-Obs $\lambda = 0,05$	78,1	27,1	14,9	10,1	7,7	6,2
	Cusum-Res $r = 0,10$	71,9	28,0	16,2	10,4	7,9	6,1
	EWMA-Res $\lambda = 0,05$	80,3	26,9	14,0	8,8	6,2	4,6
0,8	Cusum-Obs $r = 0,50$	83,3	26,8	14,2	8,3	6,9	5,5
	EWMA-Obs $\lambda = 0,05$	78,1	27,1	14,9	10,1	7,7	6,2
	Cusum-Res $r = 0,20$	81,5	26,2	13,4	8,4	5,9	4,4
	EWMA-Res $\lambda = 0,05$	80,3	26,9	14,0	8,8	6,2	4,6
2,0	Cusum-Obs $r = 1,50$	135,3	38,6	14,7	6,8	13,9	2,5
	EWMA-Obs $\lambda = 0,35$	127,2	36,2	14,2	7,3	4,4	3,1
	Cusum-Res $r = 0,50$	135,8	37,1	13,5	6,4	3,7	2,6
	EWMA-Res $\lambda = 0,15$	119,1	34,2	14,0	7,3	4,4	3,1
MLD-CEP		175,2	62,1	18,7	9,8	7,5	5,5
		$\delta^* = 0,5$	$\delta^* = 0,5$	$\delta^* = 0,5$	$\delta^* = 0,5$	$\delta^* = 0,5$	$\delta^* = 0,5$
Shewh – Obs.		176,3	56,4	21,8	9,5	4,8	2,6
Shewh – Res.		291,8	173,9	87,8	46,6	16,5	6,1

Tabela 13 - Valores obtidos pelo MLD-CEP e comparados ($\phi = 0,8$ e $\psi = 0,9$) – II

$\psi = 0,9$		$\delta = (\xi - \xi_0) / \sigma_x$					
ϕ	Gráfico	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
0,5	Cusum-Obs $r = 0,20$	96,3	41,3	25,7	18,4	14,2	11,7
	EWMA-Obs $\lambda = 0,05$	108,4	38,6	20,5	13,6	10,0	7,9
	Cusum-Res $r = 0,10$	97,7	38,2	21,6	14,4	10,3	7,8
	EWMA-Res $\lambda = 0,05$	113,2	39,2	19,9	12,2	8,3	5,9
0,8	Cusum-Obs $r = 0,40$	103,4	38,0	21,8	14,6	11,2	8,9
	EWMA-Obs $\lambda = 0,05$	108,4	38,6	20,1	13,6	10,0	7,9
	Cusum-Res $r = 0,10$	97,7	38,2	21,6	14,4	10,3	7,8
	EWMA-Res $\lambda = 0,05$	113,2	39,2	19,9	12,2	8,3	5,9
2,0	Cusum-Obs $r = 1,25$	152,3	49,5	21,0	10,9	6,7	4,6
	EWMA-Obs $\lambda = 0,20$	148,3	48,1	21,5	11,4	7,3	5,1
	Cusum-Res $r = 0,40$	162,0	51,9	20,6	9,8	5,4	3,3
	EWMA-Res $\lambda = 0,10$	140,6	46,2	20,7	11,3	6,9	4,5
MLD-CEP		63,7	28,4	16,8	12,2	9,5	7,1
		$\delta^* = 0,5$	$\delta^* = 0,5$	$\delta^* = 0,5$	$\delta^* = 0,5$	$\delta^* = 1,0$	$\delta^* = 1,0$
	Shewh – Obs.	187,1	65,8	26,7	12,3	6,0	3,2
	Shewh – Res.	317,2	209,4	117,0	50,4	15,1	4,1

Observando os resultados obtidos, vê-se que, para processos com $(\phi, \psi) = (0,4/0,5)$, o *design* do MLD-CEP, com $\delta^* = 0,5$, mostrou-se bastante competitivo, versus os demais esquemas analisados, na detecção de *shifts* iguais ou superiores a 1 desvio-padrão. Tal esquema conduz a $\rho = \phi\psi = 0,20$, portanto, um nível de autocorrelação baixo.

Os melhores resultados para o MLD-CEP, considerando a mesma comparação já comentada, foram conquistados para $(\phi, \psi) = (0,4/0,9)$, com $\delta^* = 0,5$, ou seja, $\rho = \phi\psi = 0,36$, nível ainda relativamente baixo de autocorrelação. Para tais valores de ϕ e ψ , o desempenho foi superior a todos os outros modelos, inclusive para detectar pequenos *shifts* na média do processo.

Para um nível moderadamente alto de autocorrelação, $\rho = \phi\psi = 0,72$, $(\phi, \psi) = (0,8/0,9)$ e $\delta^* = 0,5$, também conduziu a bons resultados, principalmente na detecção de *shifts* pequenos a moderados, como poder ser observado na Tabela 9.

Os piores resultados foram para $(\phi, \psi) = (0,8/0,5)$: $\rho = 0,40$, tais valores conduziram a um desempenho inferior em relação a todos os outros modelos, somente tendo um resultado satisfatório quando comparado ao modelo de Shewhart com resíduos para $\delta^* = 0,5$.

Note-se que não se pode generalizar o conjunto de situações em que o MLD-CEP é superior aos demais esquemas apenas em função de ρ , pois seus melhores resultados foram para $\rho = 0,36$, seguidos dos resultados para $\rho = 0,20$, depois para $\rho = 0,72$, e seus piores resultados foram para $\rho = 0,40$. Não há uma regularidade em termos de valores altos ou baixos para ρ , uma monotonicidade da relação, e o melhor e o pior de todos os desempenhos ocorreram para valores intermediários e muito próximos de ρ (os dois mais próximos entre si dentre os 4 valores). O fator dominante parece ser o valor de ϕ , com os melhores desempenhos ocorrendo para $\phi = 0,4$, e os piores, para $\phi = 0,8$.

O MLD-CEP apresentou melhor desempenho para detectar pequenas alterações na média, independente do valor de ρ , quando comparado aos modelos de Shewhart-obs. e Shewhart-res.

5 Conclusão

Esse trabalho propôs o uso do modelo linear dinâmico de Harrison & Stevens (MLD-HS) para o CEP de variáveis na presença de dados serialmente correlacionados e analisou seu desempenho. Esse novo modelo de controle foi denominado de MLD-CEP. O pressuposto básico utilizado na elaboração desse trabalho é que se uma dada característica de qualidade se encontra em controle, ou seja, não existe nenhuma causa especial atuando, o modelo que estará operando é o modelo estacionário de HS. O intuito foi detectar algum tipo de descontinuidade na série, pois essa descontinuidade indicará uma possível atuação de causa especial no processo.

O fator de Bayes acumulado foi o instrumento utilizado para detecção de descontinuidades na série temporal e os resultados numéricos obtidos nesse trabalho foram para valores não negativos de ϕ , correspondendo a valores não negativos de ρ , pelo fato de valores não negativos de ρ serem típicos da quase totalidade dos processos autocorrelacionados industriais.

Os níveis de autocorrelação considerados nesse trabalho foram os mesmos utilizados no artigo de Lu & Reynolds (2001), ou seja, de baixo a moderadamente alto. Essa opção teve o intuito de viabilizar a comparação entre diferentes modelos citados no artigo e o MLD-CEP. O NMA_1 (o número médio de amostras até um sinal verdadeiro) foi a medida de desempenho considerada para efeito de comparação.

Para efeito da simulação, foi considerado que o processo está em controle ao iniciar-se o monitoramento e somente após transcorrido um certo tempo ocorre uma mudança na média do processo ξ .

O MLD-CEP para $(\phi, \psi) = (0,4/0,5)$ e $\delta^* = 0,5$, conduziu a bons resultados na detecção de *shifts* iguais ou superiores a 1 desvio-padrão. Já para $(\phi, \psi) = (0,8/0,9)$ e $\delta^* = 0,5$, o modelo apresentou melhores resultados na detecção de *shifts* pequenos a moderados.

Independente do *shift*, os melhores resultados, foram para $(\phi, \psi) = (0,4/0,9)$, com $\delta^* = 0,5$, ou seja, $\rho = \phi\psi = 0,36$, nível esse relativamente baixo de autocorrelação. Para tais valores de ϕ e ψ , o desempenho foi superior a todos os outros modelos, inclusive para detectar pequenos *shifts* na média do processo.

Os piores resultados foram para $(\phi, \psi) = (0,8/0,5) \therefore \rho = 0,40$, tais valores conduziram a um desempenho inferior em relação a todos os outros modelos, somente tendo um resultado satisfatório quando comparado ao modelo de Shewhart com resíduos para $\delta^* = 0,5$.

A principal dificuldade de se utilizar o esquema, operacionalmente falando, é a dependência maciça de processamento, os cálculos precisam ser programados, contudo, uma vez isso feito, é automático. Os resultados obtidos, menores NMA_1 's, podem tornar compensador esse investimento. Para uso em ambiente industrial, o usuário deverá entrar com os parâmetros (ϕ, ψ, δ^*) , além de estimar a média e a variância do processo.

Sugestões para prosseguimento da pesquisa com o MLD-CEP :

1. Otimização do *design*, gerando uma tabela de *designs* ótimos para uma série de triplas (ϕ, ψ, δ_0) onde δ_0 é o delta para o qual se quer minimizar o NMA_1 . Esta tabela serviria para pelo menos três propósitos:
 - Obter *designs* que minimizem o NMA_1 . Nesse trabalho, o δ^* foi discretizado entre os valores 0,5; 1,0; 2,0; mas não foi otimizado.
 - Ampliar a comparação com os esquemas EWMA-obs, EWMA-res, Cusum-obs, Cusum-res, Shewhart-obs, Shewhart-res, para outros valores de (ϕ, ψ) , de modo a indicar qual o esquema mais vantajoso em cada situação. Contudo, para que a comparação seja em igualdade de condições — i.e., entre *designs* ótimos —, caberia otimizar também cada um dos outros esquemas; por isso o trabalho seria muito extenso e fica indicado para pesquisa futura.
 - Guia para que o usuário escolha um *design* sem precisar ter o trabalho de otimizar o *design*.
2. Análise de sensibilidade, para ver quanto se deterioram (aumentam) os NMA_1 's quando se usa um *design* que foi desenvolvido (se foi

otimizado, melhor ainda) para um certo valor de (ϕ_0, ψ_0) , com intuito de controlar um processo que na realidade tem outros valores de (ϕ, ψ) (próximos de (ϕ_0, ψ_0) , mas diferentes). Isso faz sentido por duas ou mais razões: (a) se o usuário quiser aplicar o MLD-CEP para um processo com (ϕ, ψ) que não conste da (futura) tabela de *designs* ótimos, e utilizar então o *design* para os valores de (ϕ, ψ) mais próximos aos “seus” que ele encontrar na tabela, em quanto o desempenho do esquema se deterioraria? (b) mesmo se a tabela tiver os valores de (ϕ, ψ) que foram estimados para o processo, sempre existe um erro na estimação. Qual a “robustez” do *design* (ou do seu desempenho) em relação a esses erros? (c) quanto mais sensível for o desempenho aos valores de (ϕ, ψ) , menor deverá ser o intervalo de discretização dos valores de (ϕ, ψ) na(s) tabela(s) a ser(em) produzida(s), cabendo também analisar o que acontece com o NMA_0 .

Finalmente, os resultados mostram que o esquema MLD-CEP é competitivo e uma opção a ser considerada, se ainda restam aspectos a investigar (sugeridos como prosseguimentos da pesquisa), é porque o esquema é original e a pesquisa nele apenas se iniciou agora. Espera-se que este trabalho esteja inaugurando uma linha de pesquisa em MLD-CEP.

6

Referências Bibliográficas

ALWAN, L. C.; ROBERTS, H. H. **Time-series modeling for statistical process control**. Journal of Business and Economic Statistics, v.6, p. 87 – 95, 1988.

AMEEN, J. R. M.; HARRISON, P. J. **Normal discount bayesian models**. Bayesian Statistics 2, p. 271-298. Elsevier Science Publishers B. V. North-Holland, 1985.

APPLEY, D. C.; SHI, J. **The GLRT for statistical process control of autocorrelated processes**. IIE Transactions, v. 31, p. 1123 – 1134, 1999.

BARATOJO, S. C. **Fator de Bayes e uma nova abordagem na formulação bayesiana de estados múltiplos**. Dissertação de Mestrado. Departamento de Engenharia Elétrica. PUC-Rio. Rio de Janeiro, 1989.

BOX, G.; JENKINS, G. **Time series analysis: forecasting and control**. New York: Holden Day, 1976.

BOX, G.; LUCEÑO, A. **Statistical control by monitoring and feedback adjustment**. New York: John Wiley, 1997.

CALABRESE, J. M. **Bayesian process control for attributes**. Management Science, v. 41, n. 4, april 1995.

CHARNES, J. M. **Tests for special causes with multivariate autocorrelated data**. Computer Ops. Res., v. 22, n. 4, p. 443 – 453, 1995.

COSTA, A. F. B.; EPPRECHT, E. K.; CARPINETTI, L. C. R. **Controle estatístico de qualidade**. São Paulo: Ed. Atlas, 2004.

CROWDER, S. V. et al. **Process control and statistical inference**. Journal of Quality Technology, v. 29, n. 2, p. 134 – 139, 1997.

FALTIN, F. W. et al. **Considerations in the monitoring of autocorrelated and independent data.** Journal of Quality Technology, v. 29, n. 2, p. 131 – 133 1997.

FARIAS NETO, J. J. **Modelo bayesiano de crescimento linear para previsão de séries temporais.** Dissertação de Mestrado. Departamento de Engenharia Elétrica. PUC-Rio. Rio de Janeiro, 1981.

GIRARD, P.; PARENT ERIC. **Bayesian analysis of autocorrelated ordered categorical data for industrial quality monitoring.** Technometrics, v. 42, n. 2, p. 180 – 191, 2001.

GIRSHICK, M. A.; RUBIN, H. **A Bayes approach to a quality control model.** The annals of mathematical statistics, 23, 114-125. 1952

GUIMARÃES, N. R.; EPPRECHT, E. K. **Uma proposta prática para o controle estatístico de processos com correlação.** Anais do ENEGEP 2000 (em CD-ROM), São Paulo, SP, 2000.

HARRIS, T. J.; ROSS, W. H. **Statistical process control procedures for correlated observations.** The Canadian Journal of Chemical Engineering, v. 69, p. 48-57, 1991.

HARRISON, P. J.; STEVENS, C. F. **Bayesian forecasting (with discussion).** J. R. Statist. Soc., B, 38, 3, 205-247, 1976.

HUNTER, J. S. **The Box-Jenkins bounded manual adjustment chart: a graphical tool designed for use in the production floor.** Quality Progress, v. 31, n. 8, p.129-137, 1998.

IWERSEN, J. **Statistical process control for autocorrelated processes: a case study.** In: H.-J. Lenz & P.-Th. Wilrich (eds.), Frontiers in Statistical Quality Control 5, p. 138-155, Physica-Verlag, Heidelberg, Springer-Verlag, 1997.

JIANG, W.; TSUI, K. L.; WOODALL, W. H. **A new SPC monitoring method: the ARMA chart.** Technometrics, v. 42, n. 4, p. 399 – 411, 2000.

LIAN, Z. **Bayesian statistical process adjustment for unknown parameter systems.** Ph.D thesis. Department of Industrial & Manufacturing Engineering. The Pennsylvania State University, 2005.

LU, C. W.; REYNOLDS, M. R. **EWMA control charts for monitoring the mean of autocorrelated process.** Journal of Quality Technology, v. 31, p. 166 – 188, 1999.

LU, C. W.; REYNOLDS, M. R. **Cusum charts for monitoring an autocorrelated process.** Journal of Quality Technology, v. 33, p. 316 – 334, jul. 2001.

MINGOTI, S. A.; FIDELIS, M. T. **Aplicando a geoestatística no controle estatístico de processos.** Produto & Produção, v. 5, p.55-70, jun. 2001.

MONTGOMERY, D. C. **The use of statistical process control and design of experiments in product and process improvement.** IIE Transactions, v. 24, n. 5, nov. 1992.

MONTGOMERY, D. C. **Introduction to statistical quality control.** 3 ed. New York: John Wiley, 1997.

MONTGOMERY, D. C.; MASTRANGELO, C. M. **Some statistical process control methods for autocorrelated data (with discussion).** Journal of Quality Technology, v. 23, p. 179-193, 1991.

MONTGOMERY, D. C.; RUNGER, G. C. **Estatística aplicada e probabilidade para engenheiros.** 2 ed. Rio de Janeiro: LTC, 2003.

MOREIRA JR., F. J. **Proposta de um método para o controle estatístico de processo para observações autocorrelacionadas.** Dissertação de Mestrado. Departamento de Engenharia de Produção. UFRGS. 2005.

NEMBHARD, H. B.; NEMBHARD, D. A. **The use of bayesian forecasting to make process adjustments during transitions.** European Journal of Operational Research, 130. p. 437 – 448, 2001.

NEUHARDT, J. B. **Effect of correlated subsamples in statistical process control.** IIE Transactions, 19, 208-214. 1987.

PARK, C.; REYNOLDS, M.R., JR. **Economic Design of a Variable Sample Size Xbar Chart.** Communications in Statistics – Simulation and Computation, v.23, p.467-83, 1994.

PEIRIS, S. et al. **Applications of recursive estimation methods in statistical process control**. School of Accounting, Finance and Economics Working Paper Series. Edith Cowan University. Working paper 0306, sep. 2003.

POLE, A.; WEST, M.; HARRISON, J. **Applied bayesian forecasting and time series analysis**. New York: Chapman & Hall, 1994.

PORTEUS, E. L.; ANGELUS, A. **Opportunities for improved statistical process control**. Management Science, v. 43, n. 9, sept. 1997.

PYZDEK, T. **Pyzdek's guide to SPC, volume 2: applications and special topics**. Milwaukee: ASQC Quality Press, 1992.

REYNOLDS Jr., M. R.; AMIN, R. W.; ARNOLD, J. C.; NACHLAS, J. A. **\bar{X} Charts with variable sampling intervals**. Technometrics, v. 30, p. 181-192, 1988.

REIS, M. M. **Um modelo para o ensino do controle estatístico da qualidade**. Tese de Doutorado. Departamento de Engenharia de Produção. UFSC. 2001.

RUNGER, G. C.; WILLEMAIN, T. R. **Batch-means control charts for autocorrelated data**. IIE Transactions, v. 28, p. 483 – 487, 1996.

SOUZA, R. C. **Notas de aula da disciplina modelos bayesianos de previsão**. Departamento de Engenharia Elétrica. PUC-Rio. 2003.

SOUZA, R. C.; FARIAS NETO, J. J. **Modelo bayesiano de crescimento linear aplicado à previsão de demanda**. Anais do 3º Congresso da SBA, p. 203-210, 1980.

STOUMBOS, Z. G. et al. **The state of statistical process control as we proceed into the 21st century**. Journal of the American Statistical Association, v. 95, sept. 2000.

VANDER WIEL, S. A. **Monitoring processes that wander using integrated moving average models**. Technometrics, v. 38, n. 2, p. 139-151, 1996.

VAUGHAN, T. S. **Variable sampling interval np process control chart**. Commun. Statist. – Theory Math., 22(1), 147-167, 1993.

WEST, M.; HARRISON, J. **Bayesian forecasting and dynamic models**. 2 ed. New York: Springer-Verlag, 1997.

WHEELER, D. J. **Advanced topics in statistical process control: the power of Shewhart charts**. SPC Press, 1995.

WOODALL, W.H. **The design of CUSUM quality control charts**. Journal of Quality Technology, 18(2) p.99-102, 1986.

WOODALL, W. H. **Controversies and contradictions in statistical process control**. Journal of Quality Technology, v. 32, n. 4, p. 341 – 350, Oct. 2000.

WOODALL, W. H.; MONTGOMERY, D. C. **Research issues and ideas in statistical process control**. Journal of Quality Technology, v. 31, n. 4, p. 376 – 386, 1999.

YANG, K.; HANCOCK, W. M. **Statistical quality control for correlated samples**. International Journal of Production Research, v. 28, n. 3, p. 595-608, 1990.

ZHANG, N. F. **A statistical control chart for stationary process data**. Technometrics, v. 40, n. 1, p. 24 – 38, Feb. 1998.

ZORRIASSATINE, F.; TANNOCK, J. D. T.; O'BRIEN, C. **Using novelty detection to identify abnormalities caused by mean shifts in bivariate processes**. Computers & Industrial Engineering, em fase de publicação, 2002.

7

Apêndice

Apêndice A

Obtenção NMA_0

```
% Rotina de obtenção NMAo
clear
clc
n=2760; % tamanho da corrida para determinar o ARLo - P(X>n)=0.001
qsi=100;
var_eps=5;
psi=0.9;
fi=0.8;
delta=2;
cont1=1;
for beta=0.7:0.05:0.95;
    fprintf('\n')
    % MODELO LINEAR DINÂMICO(MLD) DE HS
    % MODELO ESTACIONÁRIO
    % MLD UNIVARIADO: VARIANCIA OBSERVACIONAL V(t) CONHECIDA +
    Fator de desconto para W(t)
    % Modificações na média do processo, supondo V conhecida e
    constante
    % Y(t)=mi(t) + v(t) => v(t)~N[0,V] - Eq. das Observações
    % mi(t)=mi(t-1) + w(t) => w(t)~N[0,W(t)] - Eq. do Sistema
    mo=100;
    Co=100;
    F = 1;
    G = 1;
    var_mi = (var_eps*psi)/(1-psi);
    V=var_mi + var_eps;
    cont2=1;
    for thr=0.1:0.05:0.3;
    for num=1:1000
        Y=gerador_arl(n,qsi,fi,psi,var_eps);
        % Informação
        a(1)=G*mo;
        R(1)=(1/beta)*G*Co*transp(G);
        % Previsão no instante t=1
        f(1)=transp(F)*a(1);
        Q(1)=transp(F)*R(1)*F+V;
        e(1)=Y(1)-f(1);
        H(1)=exp((0.5*(delta^2)-(delta*e(1)))/Q(1));
        L(1)=H(1)*min(1,1);
        aux(1)=L(1);
        rl(1)=1; % rl -> run length
        auxrl(1)=rl(1);
        sinal(1)=0;
        % Atualização
        for t=1:1:n
```

```

A(t)=(R(t)*F)/Q(t);
m(t)=a(t)+A(t)*e(t);
C(t)=R(t)-A(t)*Q(t)*transp(A(t));
a(t+1)=G*m(t);
R(t+1)=(1/beta)*G*C(t)*transp(G);
f(t+1)=transp(F)*a(t+1);
Q(t+1)=transp(F)*R(t+1)*F+V;
if t<=n-1
    e(t+1)=Y(t+1)-f(t+1);
    e_std(t+1)=e(t+1)/sqrt(Q(t+1));
    % Fator de Bayes
    H(t+1)=exp((0.5*(delta^2)-(delta*e(t+1)))/Q(t+1));
    % Fator de Bayes Acumulado
    L(t+1)=H(t+1)*min(1,aux(t));
    aux(t+1)=L(t+1);
    %threshold (0 < thr << 1) apropriado entre 0,1 e
0,2 - ver pag 397 do livro harrison
    if aux(t)>=1
        rl(t+1)=1;
    else
        rl(t+1)=auxrl(t)+1;
    end
    if L(t+1)< thr
        aux(t+1)=1;
        auxrl(t+1)=1;
        sinal(t+1)=1;
    else
        sinal(t+1)=0;
    end
    auxrl(t+1)=rl(t+1);
end
end
    analisel(num,:)=[beta,thr,sum(sinal)-1,mse(e)];
end
teste=analisel(:,3);
ARLo=mean(teste);
fprintf('%6.2f %6.2f %6.2f %6.2f\n',beta,thr,ARLo, mse(e))
resultado(cont2,:,cont1)=[beta,thr,ARLo,mse(e)];
cont2=cont2+1;
end
cont1=cont1+1;
end
save 080920_ARLo_novo

```

```

function Y=gerador_arl(n,qsi,fi,psi,var_eps)
% PROCESSO AR(1) COM UM ERRO ALEATÓRIO ADICIONAL
% OBJ.: Gerar um processo simples autocorrelacionado
% n -> tamanho da amostra; qsi -> média do processo
% fi -> fator auto-regressivo; psi -> razão var da média pela var
das obs
% CUSUM CHARTS FOR MONITORING AN AUTOCORRELATED PROCESS
% LU & REYNOLDS (2001)
%echo off
mi(1)=qsi;
var_mi = (var_eps*psi)/(1-psi);
var_shock = var_mi * (1-(fi^2));
sigma=sqrt(var_eps);
epso=normrnd(0,sigma,n,1);
signal=sqrt(var_shock);

```

```
alfa=normrnd(0,sigma1,n,1);
Y(1)=mi(1)+epso(1);
k=1;
for k=2:n
    mi(k)=(1-fi)*qsi + fi*mi(k-1) + alfa(k);
    Y(k) = mi(k) + epso(k);
end
x=1:n;
subplot(3,2,1)
plot(x,Y,'-*')
echo on
```


Apêndice B

Obtenção NMA₁

```

%PROGRAMA PARA ENCONTRAR ARL1 - BETA VS THR ARLo = 370
clear
clc
n=2760; % tamanho da corrida para determinar o ARLo - P(X>n)=0.001
qsi=100;
var_eps=5;
fi=0.4;
psi=0.9;
delta=0.5;
kont=0;
for shift=0.5:0.5:3.0
cont=0;
while cont<=1599
    cont=cont+1;
    beta=0.98;
    fprintf('\n')
    % MODELO LINEAR DINÂMICO(MLD) DE HS
    % MODELO ESTACIONÁRIO
    % MLD UNIVARIADO: VARIANCIA OBSERVACIONAL V(t) CONHECIDA +
Fator de desconto para W(t)
    % Modificações na média do processo, supondo V conhecida e
constante
    % Y(t)=mi(t) + v(t) => v(t)~N[0,V] - Eq. das Observações
    % mi(t)=mi(t-1) + w(t) => w(t)~N[0,W(t)] - Eq. do Sistema
    %
    % Especificações iniciais do usuário
    mo=100;
    Co=100;
    F = 1;
    G = 1;
    var_mi = (var_eps*psi)/(1-psi);
    V=var_mi + var_eps;
    newqsi=(sqrt(V)*shift)+qsi;
    thr=0.301;
    loop=1;
    while loop==1
        Y=gerador_ar1_ARL1(n,qsi,newqsi,fi,psi,var_eps);
        % Informação
        a(1)=G*mo;
        R(1)=(1/beta)*G*Co*transp(G);
        % Previsão no instante t=1
        f(1)=transp(F)*a(1);
        Q(1)=transp(F)*R(1)*F+V;
        e(1)=Y(1)-f(1);
        H(1)=exp((0.5*(delta^2)-(delta*e(1)))/Q(1));
        L(1)=H(1)*min(1,1);
        aux(1)=L(1);
        rl(1)=1; % rl -> run length
        auxrl(1)=rl(1);
        sinal(1)=0;
        % Atualização
        for t=1:1:500
            A(t)=(R(t)*F)/Q(t);

```

```

m(t)=a(t)+A(t)*e(t);
C(t)=R(t)-A(t)*Q(t)*transp(A(t));
a(t+1)=G*m(t);
R(t+1)=(1/beta)*G*C(t)*transp(G);
f(t+1)=transp(F)*a(t+1);
Q(t+1)=transp(F)*R(t+1)*F+V;
if t<=n-1
    e(t+1)=Y(t+1)-f(t+1);
    e_std(t+1)=e(t+1)/sqrt(Q(t+1));
    % Fator de Bayes
    H(t+1)=exp((0.5*(delta^2)-
(delta*e(t+1)))/Q(t+1));
    % Fator de Bayes Acumulado
    L(t+1)=H(t+1)*min(1,aux(t));
    aux(t+1)=L(t+1);
    if aux(t)>=1
        rl(t+1)=1;
    else
        rl(t+1)=auxrl(t)+1;
    end
    if L(t+1)< thr
        aux(t+1)=1;
        auxrl(t+1)=1;
        sinal(t+1)=1;
    else
        sinal(t+1)=0;
    end
    auxrl(t+1)=rl(t+1);
end
end
alarmes=sum(sinal);
if alarmes==0
    loop=0;
else
    loop=1;
    sinal=zeros(t+1,1);
end
end
for t=501:1:n
    A(t)=(R(t)*F)/Q(t);
    m(t)=a(t)+A(t)*e(t);
    C(t)=R(t)-A(t)*Q(t)*transp(A(t));
    a(t+1)=G*m(t);
    R(t+1)=(1/beta)*G*C(t)*transp(G);
    f(t+1)=transp(F)*a(t+1);
    Q(t+1)=transp(F)*R(t+1)*F+V;
    if t<=n-1
        e(t+1)=Y(t+1)-f(t+1);
        e_std(t+1)=e(t+1)/sqrt(Q(t+1));
        % Fator de Bayes
        H(t+1)=exp((0.5*(delta^2)-(delta*e(t+1)))/Q(t+1));
        % Fator de Bayes Acumulado
        L(t+1)=H(t+1)*min(1,aux(t));
        aux(t+1)=L(t+1);
        if aux(t)>=1
            rl(t+1)=1;
        else
            rl(t+1)=auxrl(t)+1;
        end
        if L(t+1)< thr
            aux(t+1)=1;

```

```

        auxrl(t+1)=1;
        sinal(t+1)=1;
    else
        sinal(t+1)=0;
    end
    auxrl(t+1)=rl(t+1);
    if sinal(t+1)==1
        arl(cont)=t-501;
        break
    end
end
end
end
kont=kont+1;
arl_medio(kont,:)=[shift,mean(arl)]
arl=0;
end
save arl1_040905_novoproc

function Y=gerador_arl(n,qsi,newqsi,fi,psi,var_eps)
% PROCESSO AR(1) COM UM ERRO ALEATÓRIO ADICIONAL
% OBJ.: Gerar um processo simples autocorrelacionado
% n -> tamanho da amostra; qsi -> média do processo; newqsi ->
nova média
% fi -> fator auto-regressivo; psi -> razão var da média pela var
das obs
% var_eps -> variância erro (epson)
% CUSUM CHARTS FOR MONITORING AN AUTOCORRELATED PROCESS
% LU & REYNOLDS (2001)
%echo off
mi(1)=qsi;
var_mi = (var_eps*psi)/(1-psi);
var_shock = var_mi * (1-(fi^2));
sigma=sqrt(var_eps);
epso=normrnd(0,sigma,n,1);
sigmal=sqrt(var_shock);
alfa=normrnd(0,sigmal,n,1);
Y(1)=mi(1)+epso(1);
k=1;
for k=2:500
    mi(k)=(1-fi)*qsi + fi*mi(k-1) + alfa(k);
    Y(k) = mi(k) + epso(k);
end
for k=501:n
    mi(k)=(1-fi)*newqsi + fi*mi(k-1) + alfa(k);
    Y(k) = mi(k) + epso(k);
end
x=1:n;
subplot(3,2,1)
plot(x,Y,'-*')
echo on

```

Apêndice C

Obtenção de pares (β, τ) para conjunto de $(\phi, \psi, \delta^*) = (0,4 / 0,5 / 1,0)$

Tabela 14 - Obtenção do $\overline{alarmes} = 7,45$ sem refino para $(\phi, \psi, \delta^*) = (0,4 / 0,5 / 1,0)$

β	τ	$\overline{alarmes}$
0,700	0,100	0,000
0,700	0,150	0,000
0,700	0,200	0,000
0,700	0,250	2,085
0,700	0,300	8,201
0,750	0,100	0,000
0,750	0,150	0,000
0,750	0,200	1,656
0,750	0,250	7,469
0,750	0,300	17,721
0,800	0,100	0,000
0,800	0,150	1,279
0,800	0,200	6,685
0,800	0,250	16,770
0,800	0,300	30,324
0,850	0,100	0,704
0,850	0,150	6,128
0,850	0,200	15,372
0,850	0,250	28,552
0,850	0,300	44,468
0,900	0,100	5,084
0,900	0,150	14,704
0,900	0,200	26,542
0,900	0,250	41,087
0,900	0,300	57,848
0,950	0,100	13,701
0,950	0,150	25,420
0,950	0,200	38,558
0,950	0,250	53,590
0,950	0,300	70,899

Tabela 15 - Obtenção do $\overline{alarmes} = 7,45$ com refino para $(\phi, \psi, \delta^*) = (0,4 / 0,5 / 1,0)$

β	τ	$\overline{alarmes}$
0,700	0,100	0,000
0,700	0,120	0,000
0,700	0,140	0,000
0,700	0,160	0,000
0,700	0,180	0,000
0,700	0,200	0,000
0,700	0,220	0,269
0,700	0,240	1,299
0,700	0,260	2,783

0,700	0,280	5,117
0,700	0,300	8,160
0,750	0,100	0,000
0,750	0,120	0,000
0,750	0,140	0,000
0,750	0,160	0,000
0,750	0,180	0,444
0,750	0,200	1,699
0,750	0,220	3,491
0,750	0,240	5,912
0,750	0,260	8,969
0,750	0,280	13,003
0,750	0,300	17,729
0,800	0,100	0,000
0,800	0,120	0,000
0,800	0,140	0,603
0,800	0,160	2,001
0,800	0,180	4,004
0,800	0,200	6,678
0,800	0,220	10,116
0,800	0,240	14,180
0,800	0,260	18,993
0,800	0,280	24,494
0,800	0,300	30,324
0,850	0,100	0,709
0,850	0,120	2,218
0,850	0,140	4,611
0,850	0,160	7,639
0,850	0,180	11,271
0,850	0,200	15,586
0,850	0,220	20,188
0,850	0,240	25,618
0,850	0,260	31,362
0,850	0,280	37,441
0,850	0,300	44,184
0,900	0,100	5,055
0,900	0,120	8,691
0,900	0,140	12,562
0,900	0,160	16,933
0,900	0,180	21,703
0,900	0,200	26,649
0,900	0,220	32,472
0,900	0,240	38,004
0,900	0,260	44,225
0,900	0,280	50,631
0,900	0,300	57,447

Tabela 16 - (β, τ) para $(\phi, \psi, \delta^*) = (0,4 / 0,5 / 1,0)$ e $\overline{alarmes} = 7,45 \Rightarrow NMA_0 \cong 370$

β	τ
0,70	0,295

0,75	0,250
0,80	0,205
0,85	0,159
0,90	0,113

Obtenção de pares (β, τ) para conjunto de $(\phi, \psi, \delta^*) = (0,4 / 0,5 / 2,0)$

Tabela 17 - Obtenção do $\overline{alarmes} = 7,45$ sem refino para $(\phi, \psi, \delta^*) = (0,4 / 0,5 / 2,0)$

β	τ	$\overline{alarmes}$
0,700	0,100	1,792
0,700	0,150	9,566
0,700	0,200	23,319
0,700	0,250	42,136
0,700	0,300	65,343
0,750	0,100	5,688
0,750	0,150	18,186
0,750	0,200	35,586
0,750	0,250	56,979
0,750	0,300	82,206
0,800	0,100	12,243
0,800	0,150	28,822
0,800	0,200	49,083
0,800	0,250	72,464
0,800	0,300	99,069
0,850	0,100	20,836
0,850	0,150	40,559
0,850	0,200	62,726
0,850	0,250	87,176
0,850	0,300	115,439
0,900	0,100	31,620
0,900	0,150	52,520
0,900	0,200	76,022
0,900	0,250	101,835
0,900	0,300	130,924
0,950	0,100	42,258
0,950	0,150	65,150
0,950	0,200	89,706
0,950	0,250	116,530
0,950	0,300	146,523

Tabela 18 - Obtenção do $\overline{alarmes} = 7,45$ com refino para $(\phi, \psi, \delta^*) = (0,4 / 0,5 / 2,0)$

β	τ	$\overline{alarmes}$
0,700	0,100	1,903
0,700	0,110	2,928
0,700	0,120	4,390
0,700	0,130	5,808
0,700	0,140	7,573
0,700	0,150	9,741
0,710	0,100	2,465
0,710	0,110	3,758
0,710	0,120	5,368
0,710	0,130	6,914
0,710	0,140	9,001

0,720	0,100	3,124
0,720	0,110	4,650
0,720	0,120	6,188
0,720	0,130	8,236
0,720	0,140	10,441
0,720	0,150	12,710
0,730	0,100	3,939
0,730	0,110	5,562
0,730	0,120	7,475
0,730	0,130	9,481
0,730	0,140	11,938
0,730	0,150	14,541
0,740	0,100	4,779
0,740	0,110	6,581
0,740	0,120	8,608
0,740	0,130	11,026
0,740	0,140	13,580
0,740	0,150	16,296
0,750	0,100	5,885
0,750	0,110	7,900
0,750	0,120	10,014
0,750	0,130	12,579
0,750	0,140	15,143
0,750	0,150	18,114

Tabela 19 - (β, τ) para $(\phi, \psi, \delta^*) = (0,4 / 0,5 / 2,0)$ e $\overline{alarmes} = 7,45 \Rightarrow NMA_0 \cong 370$

β	τ
0,70	0,139
0,71	0,133
0,72	0,126
0,73	0,120
0,74	0,114
0,75	0,108

Obtenção de pares (β, τ) para conjunto de $(\phi, \psi, \delta^*) = (0,4 / 0,9 / 0,5)$

Tabela 20 - Obtenção do $\overline{alarmes} = 7,45$ sem refino para $(\phi, \psi, \delta^*) = (0,4 / 0,9 / 0,5)$

β	τ	$\overline{alarmes}$
0,700	0,100	0,000
0,700	0,150	0,000
0,700	0,200	0,000
0,700	0,250	0,000
0,700	0,300	0,000
0,750	0,100	0,000
0,750	0,150	0,000
0,750	0,200	0,000
0,750	0,250	0,000
0,750	0,300	0,000
0,800	0,100	0,000
0,800	0,150	0,000
0,800	0,200	0,000
0,800	0,250	0,000
0,800	0,300	0,000
0,850	0,100	0,000
0,850	0,150	0,000
0,850	0,200	0,000
0,850	0,250	0,000
0,850	0,300	0,000
0,900	0,100	0,000
0,900	0,150	0,000
0,900	0,200	0,000
0,900	0,250	0,000
0,900	0,300	0,000
0,950	0,100	0,000
0,950	0,150	0,000
0,950	0,200	0,000
0,950	0,250	0,000
0,950	0,300	1,870

Tabela 21 - Obtenção do $\overline{alarmes} = 7,45$ com refino para $(\phi, \psi, \delta^*) = (0,4 / 0,9 / 0,5)$

β	τ	$\overline{alarmes}$
0,950	0,300	1,864
0,950	0,320	3,078
0,950	0,340	4,354
0,950	0,360	5,958
0,950	0,380	7,616
0,950	0,400	9,480
0,950	0,420	11,571
0,950	0,440	13,688
0,950	0,460	16,153
0,950	0,480	18,716
0,950	0,500	21,813

0,950	0,520	24,760
0,950	0,540	28,288
0,950	0,560	32,156
0,950	0,580	36,458
0,950	0,600	41,384
0,960	0,300	3,574
0,960	0,320	4,896
0,960	0,340	6,366
0,960	0,360	7,886
0,960	0,380	9,616
0,960	0,400	11,421
0,960	0,420	13,461
0,960	0,440	15,709
0,960	0,460	17,999
0,960	0,480	20,679
0,960	0,500	23,611
0,960	0,520	26,831
0,960	0,540	30,317
0,960	0,560	34,223
0,960	0,580	38,746
0,960	0,600	43,672
0,970	0,300	5,473
0,970	0,320	6,836
0,970	0,340	8,266
0,970	0,360	9,857
0,970	0,380	11,488
0,970	0,400	13,337
0,970	0,420	15,265
0,970	0,440	17,556
0,970	0,460	19,960
0,970	0,480	22,634
0,970	0,500	25,458
0,970	0,520	28,734
0,970	0,540	32,341
0,970	0,560	36,486
0,970	0,580	40,774
0,970	0,600	45,756
0,980	0,300	7,350
0,980	0,320	8,716
0,980	0,340	10,118
0,980	0,360	11,752
0,980	0,380	13,452
0,980	0,400	15,179
0,980	0,420	17,217
0,980	0,440	19,363
0,980	0,460	21,776
0,980	0,480	24,524
0,980	0,500	27,403
0,980	0,520	30,867
0,980	0,540	34,444
0,980	0,560	38,616
0,980	0,580	42,979
0,980	0,600	47,944

0,990	0,300	9,127
0,990	0,320	10,449
0,990	0,340	11,862
0,990	0,360	13,547
0,990	0,380	15,208
0,990	0,400	17,186
0,990	0,420	19,133
0,990	0,440	21,396
0,990	0,460	23,758
0,990	0,480	26,437
0,990	0,500	29,499
0,990	0,520	32,974
0,990	0,540	36,562
0,990	0,560	40,683
0,990	0,580	45,101
0,990	0,600	50,161

Tabela 22 - (β, τ) para $(\phi, \psi, \delta^*) = (0,4 / 0,9 / 0,5)$ e $\overline{alarmes} = 7,45 \Rightarrow NMA_0 \cong 370$

β	τ
0,95	0,378
0,96	0,354
0,97	0,329
0,98	0,301

Obtenção de pares (β, τ) para conjunto de $(\phi, \psi, \delta^*) = (0,4 / 0,9 / 1,0)$

Tabela 23 - Obtenção do $\overline{alarmes} = 7,45$ sem refino para $(\phi, \psi, \delta^*) = (0,4 / 0,9 / 1,0)$

β	τ	$\overline{alarmes}$
0,700	0,100	0,000
0,700	0,150	0,000
0,700	0,200	0,000
0,700	0,250	0,000
0,700	0,300	0,000
0,750	0,100	0,000
0,750	0,150	0,000
0,750	0,200	0,000
0,750	0,250	0,000
0,750	0,300	0,000
0,800	0,100	0,000
0,800	0,150	0,000
0,800	0,200	0,000
0,800	0,250	0,000
0,800	0,300	0,000

0,850	0,100	0,000
0,850	0,150	0,000
0,850	0,200	0,000
0,850	0,250	0,494
0,850	0,300	3,772
0,900	0,100	0,000
0,900	0,150	0,000
0,900	0,200	1,647
0,900	0,250	6,144
0,900	0,300	12,971
0,950	0,100	0,669
0,950	0,150	4,551
0,950	0,200	10,014
0,950	0,250	16,479
0,950	0,300	24,193

Tabela 24 - Obtenção do $\overline{alarmes} = 7,45$ com refino para $(\phi, \psi, \delta^*) = (0,4 / 0,9 / 1,0)$

β	τ	$\overline{alarmes}$
0,900	0,150	0,000
0,900	0,170	0,151
0,900	0,190	1,059
0,900	0,210	2,347
0,900	0,230	4,083
0,900	0,250	6,228
0,910	0,150	0,000
0,910	0,170	0,836
0,910	0,190	2,081
0,910	0,210	3,694
0,910	0,230	5,729
0,910	0,250	8,025
0,920	0,150	0,644
0,920	0,170	1,798
0,920	0,190	3,368
0,920	0,210	5,269
0,920	0,230	7,474
0,920	0,250	10,131
0,930	0,150	1,660
0,930	0,170	3,206
0,930	0,190	4,839
0,930	0,210	7,156
0,930	0,230	9,521
0,930	0,250	12,351
0,940	0,150	2,965
0,940	0,170	4,734
0,940	0,190	6,754
0,940	0,210	9,195
0,940	0,230	11,740
0,940	0,250	14,457
0,950	0,150	4,583
0,950	0,170	6,584
0,950	0,190	8,927

0,950	0,210	11,308
0,950	0,230	13,819
0,950	0,250	16,423

Tabela 25 - (β, τ) para $(\phi, \psi, \delta^*) = (0,4 / 0,9 / 1,0)$ e $\overline{alarmes} = 7,45 \Rightarrow NMA_0 \cong 370$

β	τ
0,91	0,245
0,92	0,230
0,93	0,213
0,94	0,196
0,95	0,177

Obtenção de pares (β, τ) para conjunto de $(\phi, \psi, \delta^*) = (0,4 / 0,9 / 2,0)$

Tabela 26 - Obtenção do $\overline{alarmes} = 7,45$ sem refino para $(\phi, \psi, \delta^*) = (0,4 / 0,9 / 2,0)$

β	τ	$\overline{alarmes}$
0,700	0,100	0,000
0,700	0,150	0,000
0,700	0,200	0,000
0,700	0,250	2,221
0,700	0,300	8,413
0,750	0,100	0,000
0,750	0,150	0,000
0,750	0,200	1,957
0,750	0,250	8,040
0,750	0,300	18,729
0,800	0,100	0,000
0,800	0,150	1,822
0,800	0,200	8,164
0,800	0,250	18,394
0,800	0,300	32,026
0,850	0,100	1,368
0,850	0,150	7,766
0,850	0,200	17,958
0,850	0,250	31,239
0,850	0,300	46,198
0,900	0,100	7,127
0,900	0,150	17,782
0,900	0,200	30,001
0,900	0,250	43,823
0,900	0,300	59,912
0,950	0,100	17,205
0,950	0,150	29,089
0,950	0,200	41,984
0,950	0,250	56,957
0,950	0,300	73,436

Tabela 27 - Obtenção do $\overline{alarmes} = 7,45$ com refino para $(\phi, \psi, \delta^*) = (0,4 / 0,9 / 2,0)$

β	τ	$\overline{alarmes}$
0,700	0,150	0,000
0,700	0,170	0,000
0,700	0,190	0,000
0,700	0,210	0,000
0,700	0,230	0,917
0,700	0,250	2,199
0,700	0,270	4,176
0,700	0,290	6,786
0,710	0,150	0,000
0,710	0,170	0,000
0,710	0,190	0,000

0,710	0,210	0,415
0,710	0,230	1,442
0,710	0,250	3,103
0,710	0,270	5,339
0,710	0,290	8,429
0,720	0,150	0,000
0,720	0,170	0,000
0,720	0,190	0,000
0,720	0,210	0,836
0,720	0,230	2,178
0,720	0,250	4,139
0,720	0,270	6,688
0,720	0,290	10,044
0,730	0,150	0,000
0,730	0,170	0,000
0,730	0,190	0,306
0,730	0,210	1,494
0,730	0,230	3,068
0,730	0,250	5,248
0,730	0,270	8,276
0,730	0,290	12,066
0,740	0,150	0,000
0,740	0,170	0,000
0,740	0,190	0,821
0,740	0,210	2,095
0,740	0,230	4,143
0,740	0,250	6,688
0,740	0,270	9,969
0,740	0,290	13,900
0,750	0,150	0,000
0,750	0,170	0,263
0,750	0,190	1,319
0,750	0,210	2,981
0,750	0,230	5,257
0,750	0,250	8,276
0,750	0,270	11,914
0,750	0,290	16,331
0,760	0,150	0,000
0,760	0,170	0,666
0,760	0,190	2,057
0,760	0,210	4,086
0,760	0,230	6,558
0,760	0,250	10,086
0,760	0,270	13,713
0,760	0,290	18,601
0,770	0,150	0,179
0,770	0,170	1,281
0,770	0,190	2,859
0,770	0,210	5,120
0,770	0,230	8,052
0,770	0,250	11,739
0,770	0,270	16,144
0,770	0,290	21,251

0,780	0,150	0,539
0,780	0,170	1,969
0,780	0,190	3,944
0,780	0,210	6,548
0,780	0,230	9,875
0,780	0,250	13,786
0,780	0,270	18,434
0,780	0,290	23,675
0,790	0,150	1,135
0,790	0,170	2,697
0,790	0,190	5,111
0,790	0,210	8,054
0,790	0,230	11,824
0,790	0,250	15,937
0,790	0,270	20,789
0,790	0,290	26,171
0,800	0,150	1,848
0,800	0,170	3,856
0,800	0,190	6,488
0,800	0,210	9,817
0,800	0,230	13,686
0,800	0,250	18,443
0,800	0,270	23,564
0,800	0,290	28,908
0,810	0,150	2,603
0,810	0,170	5,061
0,810	0,190	8,146
0,810	0,210	11,721
0,810	0,230	15,838
0,810	0,250	20,634
0,810	0,270	26,040
0,810	0,290	31,630
0,820	0,150	3,688
0,820	0,170	6,364
0,820	0,190	9,816
0,820	0,210	13,575
0,820	0,230	18,302
0,820	0,250	23,264
0,820	0,270	28,826
0,820	0,290	34,457
0,830	0,150	4,853
0,830	0,170	7,897
0,830	0,190	11,513
0,830	0,210	15,789
0,830	0,230	20,616
0,830	0,250	25,785
0,830	0,270	31,578
0,830	0,290	37,278
0,840	0,150	6,298
0,840	0,170	9,524
0,840	0,190	13,588
0,840	0,210	18,347
0,840	0,230	22,890

0,840	0,250	28,358
0,840	0,270	34,232
0,840	0,290	40,031
0,850	0,150	7,863
0,850	0,170	11,494
0,850	0,190	15,838
0,850	0,210	20,431
0,850	0,230	25,438
0,850	0,250	31,017
0,850	0,270	36,919
0,850	0,290	42,828
0,860	0,150	9,450
0,860	0,170	13,473
0,860	0,190	18,108
0,860	0,210	22,830
0,860	0,230	28,051
0,860	0,250	33,641
0,860	0,270	39,367
0,860	0,290	45,703
0,870	0,150	11,286
0,870	0,170	15,669
0,870	0,190	20,275
0,870	0,210	25,276
0,870	0,230	30,485
0,870	0,250	36,056
0,870	0,270	42,015
0,870	0,290	48,452
0,880	0,150	13,216
0,880	0,170	18,063
0,880	0,190	22,624
0,880	0,210	27,782
0,880	0,230	33,326
0,880	0,250	38,814
0,880	0,270	44,633
0,880	0,290	51,084
0,890	0,150	15,530
0,890	0,170	20,087
0,890	0,190	25,085
0,890	0,210	30,312
0,890	0,230	35,701
0,890	0,250	41,540
0,890	0,270	47,336
0,890	0,290	53,649
0,900	0,150	17,729
0,900	0,170	22,513
0,900	0,190	27,617
0,900	0,210	32,768
0,900	0,230	38,304
0,900	0,250	44,068
0,900	0,270	49,829
0,900	0,290	56,453

Tabela 28 - (β, τ) para $(\phi, \psi, \delta^*) = (0,4 / 0,9 / 2,0)$ e $\overline{alarmes} = 7,45 \Rightarrow NMA_0 \cong 370$

β	τ
0,71	0,284
0,72	0,275
0,73	0,265
0,74	0,255
0,75	0,245
0,76	0,235
0,77	0,226
0,78	0,215
0,79	0,206
0,80	0,196
0,81	0,186
0,82	0,176
0,83	0,167
0,84	0,157

7.1.1.

Obtenção de pares (β, τ) para conjunto de $(\phi, \psi, \delta^*) = (0,8 / 0,5 / 0,5)$ Tabela 29 - Obtenção do $\overline{alarmes} = 7,45$ sem refino para $(\phi, \psi, \delta^*) = (0,8 / 0,5 / 0,5)$

β	τ	$\overline{alarmes}$
0,700	0,100	0,000
0,700	0,150	0,000
0,700	0,200	0,000
0,700	0,250	0,000
0,700	0,300	0,000
0,750	0,100	0,000
0,750	0,150	0,000
0,750	0,200	0,000
0,750	0,250	0,000
0,750	0,300	0,363
0,800	0,100	0,000
0,800	0,150	0,000
0,800	0,200	0,000
0,800	0,250	1,264
0,800	0,300	5,267
0,850	0,100	0,000
0,850	0,150	0,105
0,850	0,200	2,922

0,850	0,250	8,158
0,850	0,300	15,171
0,900	0,100	1,076
0,900	0,150	5,650
0,900	0,200	12,122
0,900	0,250	19,260
0,900	0,300	27,072
0,950	0,100	9,592
0,950	0,150	16,334
0,950	0,200	23,525
0,950	0,250	31,611
0,950	0,300	40,662

Tabela 30 - Obtenção do $\overline{alarmes} = 7,45$ com refino para $(\phi, \psi, \delta^*) = (0,8 / 0,5 / 0,5)$

β	τ	$\overline{alarmes}$
0,850	0,150	0,105
0,850	0,170	0,931
0,850	0,190	2,161
0,850	0,210	3,863
0,850	0,230	5,909
0,850	0,250	8,193
0,860	0,150	0,725
0,860	0,170	1,877
0,860	0,190	3,518
0,860	0,210	5,358
0,860	0,230	7,536
0,860	0,250	10,218
0,870	0,150	1,531
0,870	0,170	3,147
0,870	0,190	4,926
0,870	0,210	7,203
0,870	0,230	9,666
0,870	0,250	12,251
0,880	0,150	2,554
0,880	0,170	4,500
0,880	0,190	6,654
0,880	0,210	9,075
0,880	0,230	11,797
0,880	0,250	14,577
0,890	0,150	4,138
0,890	0,170	6,228
0,890	0,190	8,614
0,890	0,210	11,329
0,890	0,230	13,947
0,890	0,250	16,816
0,900	0,150	5,735
0,900	0,170	8,097
0,900	0,190	10,706
0,900	0,210	13,411
0,900	0,230	16,226
0,900	0,250	19,244

Tabela 31 - (β, τ) para $(\phi, \psi, \delta^*) = (0,8 / 0,5 / 0,5)$ e $\overline{alarmes} = 7,45 \Rightarrow NMA_0 \cong 370$

β	τ
0,85	0,244
0,86	0,229
0,87	0,212
0,88	0,197
0,89	0,180
0,90	0,165

Obtenção de pares (β, τ) para conjunto de $(\phi, \psi, \delta^*) = (0,8 / 0,5 / 1,0)$

Tabela 32 - Obtenção do $\overline{alarmes} = 7,45$ sem refino para $(\phi, \psi, \delta^*) = (0,8 / 0,5 / 1,0)$

β	τ	$\overline{alarmes}$
0,700	0,100	0,000
0,700	0,150	0,000
0,700	0,200	1,463
0,700	0,250	6,028
0,700	0,300	13,743
0,750	0,100	0,000
0,750	0,150	1,861
0,750	0,200	7,009
0,750	0,250	15,363
0,750	0,300	26,099
0,800	0,100	1,895
0,800	0,150	8,125
0,800	0,200	17,037
0,800	0,250	27,437
0,800	0,300	40,188
0,850	0,100	8,366
0,850	0,150	18,467
0,850	0,200	29,323
0,850	0,250	42,045
0,850	0,300	55,841
0,900	0,100	19,274
0,900	0,150	31,314
0,900	0,200	43,342
0,900	0,250	57,421
0,900	0,300	72,730
0,950	0,100	32,203
0,950	0,150	45,693
0,950	0,200	59,751
0,950	0,250	75,397
0,950	0,300	92,259

Tabela 33 - Obtenção do $\overline{alarmes} = 7,45$ com refino para $(\phi, \psi, \delta^*) = (0,8 / 0,5 / 1,0)$

β	τ	$\overline{alarmes}$
0,700	0,100	0,000
0,700	0,120	0,000
0,700	0,140	0,000
0,700	0,160	0,000
0,700	0,180	0,486
0,700	0,200	1,618
0,700	0,220	3,053
0,700	0,240	4,953
0,700	0,260	7,406
0,700	0,280	10,244
0,700	0,300	13,784

0,750	0,100	-0,471
0,750	0,120	0,124
0,750	0,140	1,207
0,750	0,160	2,651
0,750	0,180	4,639
0,750	0,200	7,056
0,750	0,220	10,100
0,750	0,240	13,335
0,750	0,260	17,261
0,750	0,280	21,665
0,750	0,300	26,153
0,800	0,100	1,923
0,800	0,120	3,963
0,800	0,140	6,544
0,800	0,160	9,410
0,800	0,180	13,092
0,800	0,200	16,869
0,800	0,220	20,841
0,800	0,240	25,337
0,800	0,260	30,101
0,800	0,280	35,149
0,800	0,300	40,151

Tabela 34 - (β, τ) para $(\phi, \psi, \delta^*) = (0,8 / 0,5 / 1,0)$ e $\overline{alarmes} = 7,45 \Rightarrow NMA_0 \cong 370$

β	τ
0,70	0,260
0,75	0,203
0,80	0,146

Obtenção de pares (β, τ) para conjunto de $(\phi, \psi, \delta^*) = (0,8 / 0,5 / 2,0)$

Tabela 35 - Obtenção do $\overline{alarmes} = 7,45$ sem refino para $(\phi, \psi, \delta^*) = (0,8 / 0,5 / 2,0)$

β	τ	$\overline{alarmes}$
0,700	0,100	3,391
0,700	0,150	11,374
0,700	0,200	22,358
0,700	0,250	36,726
0,700	0,300	54,106
0,750	0,100	9,430
0,750	0,150	21,507
0,750	0,200	35,480
0,750	0,250	52,244
0,750	0,300	71,260
0,800	0,100	19,001
0,800	0,150	33,907

0,800	0,200	50,434
0,800	0,250	68,748
0,800	0,300	90,302
0,850	0,100	30,831
0,850	0,150	48,263
0,850	0,200	67,167
0,850	0,250	88,096
0,850	0,300	110,916
0,900	0,100	45,973
0,900	0,150	65,454
0,900	0,200	86,263
0,900	0,250	108,497
0,900	0,300	133,397
0,950	0,100	62,998
0,950	0,150	85,028
0,950	0,200	107,882
0,950	0,250	131,975
0,950	0,300	158,791

Tabela 36 - Obtenção do $\overline{alarmes} = 7,45$ com refino para $(\phi, \psi, \delta^*) = (0,8 / 0,5 / 2,0)$

β	τ	$\overline{alarmes}$
0,700	0,100	3,470
0,700	0,110	4,654
0,700	0,120	6,029
0,700	0,130	7,538
0,700	0,140	9,454
0,700	0,150	11,064
0,710	0,100	4,479
0,710	0,110	5,784
0,710	0,120	7,331
0,710	0,130	9,048
0,710	0,140	10,873
0,710	0,150	12,898
0,720	0,100	5,527
0,720	0,110	6,979
0,720	0,120	8,923
0,720	0,130	10,596
0,720	0,140	12,744
0,720	0,150	14,881
0,730	0,100	6,643
0,730	0,110	8,507
0,730	0,120	10,497
0,730	0,130	12,364
0,730	0,140	14,578
0,730	0,150	16,811
0,740	0,100	8,123
0,740	0,110	9,973
0,740	0,120	11,934
0,740	0,130	14,228
0,740	0,140	16,522
0,740	0,150	19,138

0,750	0,100	9,629
0,750	0,110	11,511
0,750	0,120	13,769
0,750	0,130	16,261
0,750	0,140	18,526
0,750	0,150	21,081

Tabela 37 - (β, τ) para $(\phi, \psi, \delta^*) = (0,8 / 0,5 / 2,0)$ e $\overline{alarmes} = 7,45 \Rightarrow NMA_0 \cong 370$

	β	τ
	0,70	0,129
⇒	0,71	0,121
	0,72	0,112
	0,73	0,104

Obtenção de pares (β, τ) para conjunto de $(\phi, \psi, \delta^*) = (0,8 / 0,9 / 0,5)$

Tabela 38 - Obtenção do $\overline{alarmes} = 7,45$ com refino para $(\phi, \psi, \delta^*) = (0,8 / 0,9 / 0,5)$

β	τ	$\overline{alarmes}$
0,700	0,100	0,000
0,700	0,150	0,000
0,700	0,200	0,000
0,700	0,250	0,000
0,700	0,300	0,000
0,750	0,100	0,000
0,750	0,150	0,000
0,750	0,200	0,000
0,750	0,250	0,000
0,750	0,300	0,000
0,800	0,100	0,000
0,800	0,150	0,000
0,800	0,200	0,000
0,800	0,250	0,000
0,800	0,300	0,000
0,850	0,100	0,000
0,850	0,150	0,000
0,850	0,200	0,000
0,850	0,250	0,000
0,850	0,300	0,000
0,900	0,100	0,000
0,900	0,150	0,000
0,900	0,200	0,000
0,900	0,250	1,818
0,900	0,300	5,420
0,950	0,100	0,425
0,950	0,150	3,327
0,950	0,200	6,982
0,950	0,250	11,055
0,950	0,300	15,628

Tabela 39 - Obtenção do $\overline{alarmes} = 7,45$ com refino para $(\phi, \psi, \delta^*) = (0,8 / 0,9 / 0,5)$

β	τ	$\overline{alarmes}$
0,950	0,150	3,320
0,950	0,170	4,861
0,950	0,190	6,274
0,950	0,210	7,870
0,950	0,230	9,414
0,950	0,250	11,049
0,950	0,270	12,780
0,950	0,290	14,535
0,960	0,150	5,256

0,960	0,170	6,718
0,960	0,190	8,253
0,960	0,210	9,800
0,960	0,230	11,346
0,960	0,250	13,027
0,960	0,270	14,779
0,960	0,290	16,532
0,970	0,150	7,227
0,970	0,170	8,549
0,970	0,190	10,163
0,970	0,210	11,694
0,970	0,230	13,271
0,970	0,250	14,918
0,970	0,270	16,739
0,970	0,290	18,694
0,980	0,150	8,918
0,980	0,170	10,559
0,980	0,190	12,017
0,980	0,210	13,610
0,980	0,230	15,331
0,980	0,250	17,123
0,980	0,270	19,034
0,980	0,290	20,974
0,990	0,150	10,971
0,990	0,170	12,456
0,990	0,190	14,073
0,990	0,210	15,839
0,990	0,230	17,557
0,990	0,250	19,382
0,990	0,270	21,352
0,990	0,290	23,425

Tabela 40 - (β, τ) para $(\phi, \psi, \delta^*) = (0,8 / 0,9 / 0,5)$ e $\overline{alarmes} = 7,45 \Rightarrow NMA_0 \cong 370$

β	τ
0,95	0,205
0,96	0,180
0,97	0,153

Obtenção de pares (β, τ) para conjunto de $(\phi, \psi, \delta^*) = (0,8 / 0,9 / 1,0)$

Tabela 41 - Obtenção do $\overline{alarmes} = 7,45$ sem refino para $(\phi, \psi, \delta^*) = (0,8 / 0,9 / 1,0)$

β	τ	$\overline{alarmes}$
0,700	0,100	0,000
0,700	0,150	0,000
0,700	0,200	0,000
0,700	0,250	0,000
0,700	0,300	0,000
0,750	0,100	0,000
0,750	0,150	0,000
0,750	0,200	0,000
0,750	0,250	0,000
0,750	0,300	1,801
0,800	0,100	0,000
0,800	0,150	0,000
0,800	0,200	0,447
0,800	0,250	3,574
0,800	0,300	8,901
0,850	0,100	0,000
0,850	0,150	1,838
0,850	0,200	6,513
0,850	0,250	12,690
0,850	0,300	20,127
0,900	0,100	3,837
0,900	0,150	10,280
0,900	0,200	16,854
0,900	0,250	24,475
0,900	0,300	32,511
0,950	0,100	14,121
0,950	0,150	21,460
0,950	0,200	29,354
0,950	0,250	37,595
0,950	0,300	47,065

Tabela 42 - Obtenção do $\overline{alarmes} = 7,45$ com refino para $(\phi, \psi, \delta^*) = (0,8 / 0,9 / 1,0)$

β	τ	$\overline{alarmes}$
0,800	0,100	0,000
0,800	0,120	0,000
0,800	0,140	0,000
0,800	0,160	0,000
0,800	0,180	0,000
0,800	0,200	0,441
0,800	0,220	1,546
0,800	0,240	2,752
0,800	0,260	4,489
0,800	0,280	6,626
0,800	0,300	8,903

0,820	0,100	0,000
0,820	0,120	0,000
0,820	0,140	0,000
0,820	0,160	0,032
0,820	0,180	0,946
0,820	0,200	2,073
0,820	0,220	3,641
0,820	0,240	5,580
0,820	0,260	7,808
0,820	0,280	10,344
0,820	0,300	13,085
0,840	0,100	0,000
0,840	0,120	0,000
0,840	0,140	0,439
0,840	0,160	1,460
0,840	0,180	2,895
0,840	0,200	4,816
0,840	0,220	6,766
0,840	0,240	9,323
0,840	0,260	12,018
0,840	0,280	14,645
0,840	0,300	17,675
0,860	0,100	0,000
0,860	0,120	0,789
0,860	0,140	2,131
0,860	0,160	3,885
0,860	0,180	6,094
0,860	0,200	8,248
0,860	0,220	10,858
0,860	0,240	13,444
0,860	0,260	16,394
0,860	0,280	19,449
0,860	0,300	22,494
0,880	0,100	1,283
0,880	0,120	2,923
0,880	0,140	4,974
0,880	0,160	7,333
0,880	0,180	9,913
0,880	0,200	12,544
0,880	0,220	15,377
0,880	0,240	18,328
0,880	0,260	21,213
0,880	0,280	24,294
0,880	0,300	27,431
0,900	0,100	3,848
0,900	0,120	6,356
0,900	0,140	8,757
0,900	0,160	11,514
0,900	0,180	14,313
0,900	0,200	17,087
0,900	0,220	20,027
0,900	0,240	22,908
0,900	0,260	25,984

0,900	0,280	29,193
0,900	0,300	32,555

Tabela 43 - (β, τ) para $(\phi, \psi, \delta^*) = (0,8 / 0,9 / 1,0)$ e $\overline{alarmes} = 7,45 \Rightarrow NMA_0 \cong 370$

	β	τ
\Rightarrow	0,80	0,287
	0,82	0,257
	0,84	0,225
	0,86	0,193
	0,88	0,161
	0,90	0,129

Obtenção de pares (β, τ) para conjunto de $(\phi, \psi, \delta^*) = (0,8 / 0,9 / 2,0)$

Tabela 44 - Obtenção do $\overline{alarmes} = 7,45$ sem refino para $(\phi, \psi, \delta^*) = (0,8 / 0,9 / 2,0)$

β	τ	$\overline{alarmes}$
0,700	0,100	0,000
0,700	0,150	0,197
0,700	0,200	3,153
0,700	0,250	8,740
0,700	0,300	16,665
0,750	0,100	0,307
0,750	0,150	4,136
0,750	0,200	10,729
0,750	0,250	19,470
0,750	0,300	29,699
0,800	0,100	4,582
0,800	0,150	12,613
0,800	0,200	22,259
0,800	0,250	32,733
0,800	0,300	44,484
0,850	0,100	13,964
0,850	0,150	24,659
0,850	0,200	35,784
0,850	0,250	47,796
0,850	0,300	61,086
0,900	0,100	26,502
0,900	0,150	38,783
0,900	0,200	51,482
0,900	0,250	65,382
0,900	0,300	80,329
0,950	0,100	40,853
0,950	0,150	55,323

0,950	0,200	70,364
0,950	0,250	85,945
0,950	0,300	103,417

Tabela 45 - Obtenção do $\overline{alarmes} = 7,45$ com refino para $(\phi, \psi, \delta^*) = (0,8 / 0,9 / 2,0)$

β	τ	$\overline{alarmes}$
0,700	0,100	0,000
0,700	0,120	0,000
0,700	0,140	0,000
0,700	0,160	0,628
0,700	0,180	1,769
0,700	0,200	3,146
0,700	0,220	5,092
0,700	0,240	7,405
0,700	0,260	10,204
0,700	0,280	13,082
0,700	0,300	16,827
0,720	0,100	0,000
0,720	0,120	0,000
0,720	0,140	0,776
0,720	0,160	1,946
0,720	0,180	3,609
0,720	0,200	5,723
0,720	0,220	8,136
0,720	0,240	11,122
0,720	0,260	14,199
0,720	0,280	17,850
0,720	0,300	21,444
0,740	0,100	0,000
0,740	0,120	0,811
0,740	0,140	2,129
0,740	0,160	4,052
0,740	0,180	6,196
0,740	0,200	8,903
0,740	0,220	11,838
0,740	0,240	15,126
0,740	0,260	18,793
0,740	0,280	22,796
0,740	0,300	26,756
0,760	0,100	0,864
0,760	0,120	2,362
0,760	0,140	4,421
0,760	0,160	6,778
0,760	0,180	9,586
0,760	0,200	12,707
0,760	0,220	16,373
0,760	0,240	20,043
0,760	0,260	23,941
0,760	0,280	28,058
0,760	0,300	32,299
0,780	0,100	2,424

0,780	0,120	4,604
0,780	0,140	7,260
0,780	0,160	10,269
0,780	0,180	13,753
0,780	0,200	17,182
0,780	0,220	21,090
0,780	0,240	25,238
0,780	0,260	29,297
0,780	0,280	33,676
0,780	0,300	38,226
0,800	0,100	4,654
0,800	0,120	7,592
0,800	0,140	10,874
0,800	0,160	14,373
0,800	0,180	18,296
0,800	0,200	22,231
0,800	0,220	26,526
0,800	0,240	30,554
0,800	0,260	34,861
0,800	0,280	39,484
0,800	0,300	44,288

Tabela 46 - (β, τ) para $(\phi, \psi, \delta^*) = (0,8 / 0,9 / 2,0)$ e $\overline{alarmes} = 7,45 \Rightarrow NMA_0 \cong 370$

	β	τ
\Rightarrow	0,70	0,240
	0,72	0,214
	0,74	0,189
	0,76	0,165
	0,78	0,141
	0,80	0,119

Apêndice D

Obtenção do esquema ótimo para NMA_1

	β	τ	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
0,4 / 0,5 / 0,5	0,90	0,272	142,7	19,4	5,6	3,4	2,4	1,7
	0,91	0,259	125,5	17,9	5,7	3,4	2,4	1,8
	0,92	0,243	105,5	15,3	5,5	3,4	2,4	1,9
	0,93	0,227	96,8	12,3	5,8	3,7	2,5	1,9
	0,94	0,211	86,3	10,9	5,8	3,8	2,6	1,9
0,4 / 0,5 / 1,0	0,70	0,295	277,6	194,5	87,5	21,4	3,2	1,4
	0,75	0,250	278,0	176,9	61,7	9,1	3,1	1,3
	0,80	0,205	235,3	136,3	34,7	5,4	2,1	1,3
	0,85	0,159	234,2	95,8	13,2	3,3	2,1	1,4
	0,90	0,113	188,8	45,2	7,4	3,4	2,3	1,6
0,4 / 0,5 / 2,0	0,70	0,139	294,7	228,6	150,7	59,1	11,2	2,8
	0,71	0,133	270,3	224,2	136,1	50,6	14,8	1,9
	0,72	0,126	302,0	223,7	143,1	50,3	9,9	1,6
	0,73	0,120	280,3	225,3	140,9	45,7	9,4	1,9
	0,74	0,114	297,4	231,9	119,7	40,2	8,6	1,3
	0,75	0,108	284,8	222,5	126,3	34,6	6,2	1,5
0,4 / 0,9 / 0,5	0,95	0,378	44,9	12,6	6,9	4,5	3,4	2,6
	0,96	0,354	36,7	12,3	6,9	4,8	3,4	2,7
	0,97	0,329	33,8	12,1	7,2	4,8	3,6	2,9
	0,98	0,301	27,9	12,1	7,5	5,3	3,9	3,0
0,4 / 0,9 / 1,0	0,91	0,245	126,9	23,3	7,3	4,3	3,0	2,2
	0,92	0,230	125,5	18,3	6,8	4,3	3,0	2,2
	0,93	0,213	105,0	16,4	6,8	4,3	3,1	2,3
	0,94	0,196	89,4	15,4	7,2	4,5	3,1	2,4
	0,95	0,177	83,2	13,3	6,8	4,6	3,3	2,6
0,4 / 0,9 / 2,0	0,71	0,284	271,5	184,7	98,5	24,5	5,8	1,8
	0,73	0,265	265,9	185,6	88,1	22,2	3,7	1,6
	0,75	0,245	263,3	170,6	72,4	16,0	2,7	1,8
	0,77	0,226	259,6	171,0	60,8	10,5	2,9	1,8
	0,79	0,206	255,5	144,7	46,3	9,2	2,7	1,8
	0,82	0,176	252,6	135,6	34,2	5,8	2,6	1,7

	0,83	0,167	244,5	117,4	33,1	5,3	2,7	1,7
	0,84	0,157	235,3	118,5	27,2	4,9	2,7	1,8
	0,85	0,244	211,2	108,0	35,5	11,4	7,1	5,4
0.8 / 0.5 / 0.5	0,86	0,229	201,6	93,2	29,8	11,1	7,1	5,7
	0,87	0,212	200,7	85,6	25,9	10,7	7,1	5,7
	0,88	0,197	189,0	75,8	24,1	10,2	7,2	5,7
	0,89	0,18	177,0	82,8	21,1	10,4	7,2	5,6
	0,9	0,165	175,2	62,1	18,7	9,8	7,5	5,7
		0,7	0,26	268,0	218,4	156,6	81,8	25,1
0.8 / 0.5 / 1.0	0,75	0,203	259,7	198,3	125,4	62,9	17,4	6,5
	0,8	0,146	249,3	179,0	101,7	36,5	14,7	5,5
	0,7	0,129	278,7	246,7	200,5	135,2	82,8	31,0
0.8 / 0.5 / 2.0	0,71	0,121	285,2	242,3	186,2	127,4	72,3	30,0
	0,72	0,112	293,0	236,9	198,0	130,3	64,7	29,6
	0,73	0,104	281,3	250,8	186,1	125,9	60,4	29,5
	0,95	0,205	92,2	34,0	17,3	12,3	9,7	7,7
0.8 / 0.9 / 0.5	0,96	0,18	78,2	28,8	17,5	12,3	9,6	7,9
	0,97	0,153	63,7	28,4	16,8	12,2	10,0	8,3
	0,8	0,287	237,0	151,9	81,5	34,0	12,8	7,2
0.8 / 0.9 / 1.0	0,82	0,257	238,4	141,9	68,1	23,0	10,2	7,2
	0,84	0,225	212,2	137,4	59,7	20,5	9,9	7,4
	0,86	0,193	206,9	120,6	48,2	18,7	9,7	7,1
	0,88	0,161	198,4	104,8	36,6	16,2	9,8	7,5
	0,9	0,129	175,1	83,9	27,5	14,0	9,5	7,5
	0,7	0,24	273,2	223,2	178,2	102,6	55,5	22,8
0.8 / 0.9 / 2.0	0,72	0,214	279,8	220,3	170,1	101,2	41,6	15,2
	0,74	0,189	271,6	216,3	162,9	89,5	33,1	17,1
	0,76	0,165	266,6	209,5	153,6	79,5	29,5	13,2
	0,78	0,141	254,4	189,8	132,1	61,4	21,9	10,5
	0,8	0,119	253,4	203,2	138,3	74,5	28,3	13,4