

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA
DO RIO DE JANEIRO



Pierre Alexandre Charles Burban

**Apreçamento de opções exóticas: Uma
abordagem pela simulação de Monte-Carlo**

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Finanças.

Orientador: Carlos Patrício Samanez

Rio de Janeiro
Abril de 2008



Pierre-Alexandre Charles Burban

**Apreçamento de opções exóticas: uma abordagem pela
simulação de Monte-Carlo**

Dissertação apresentada como requisito parcial para
obtenção do título de Mestre pelo Programa de Pós-
Graduação em Engenharia Industrial da PUC-Rio.
Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

Prof. Carlos Patrício Samanez

Orientador

Depto. De Engenharia Industrial – PUC-Rio

Prof. Paulo Henrique Soto Costa

Depto. De Engenharia Industrial – PUC-Rio

Prof. Fernando Antonio de Lucena Aiube

Depto. De Engenharia Industrial – PUC-Rio

Prof. José Eugenio Leal

Coordenador Setorial do Centro Técnico Científico – PUC-Rio

Rio de Janeiro, 18 de abril 2008

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização do autor, do orientador e da universidade.

Pierre Alexandre Charles Burban

Graduado em Física na Escola Superior de Engenharia de Marselha (Centrale Marseille, France) em 2005. Realizou intercâmbio na Escola Politécnica de Montreal no Canadá. Participou de cursos relacionados às áreas de mercado de capitais e finanças.

Ficha Catalográfica

Burban, Pierre Alexandre Charles

Apreçamento de opções exóticas: uma abordagem pela simulação de Monte-Carlo / Pierre-Alexandre Charles Burban; orientador: Carlos Patrício Samanez. – 2008.

163 f. ; 30 cm

Dissertação (Mestrado em Engenharia Industrial)– Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2008.

Inclui bibliografia

1. Engenharia Industrial – Teses. 2. Simulação de Monte-Carlo. 3. Opções exóticas. 4. Opção européia. 5. Método de Longstaff–Schwartz para opções americanas. I. Samanez, Carlos Patrício. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Engenharia Industrial. III. Título.

CDD: 658.5

A minha família, pelo apoio e confiança

Agradecimentos

- Ao meu orientador, Professor Carlos Patrício Samanez, pelo apoio e confiança depositada durante estes dois anos de PUC.
- A todos os professores do Departamento de Engenharia Industrial da PUC
- Rio.
- A minha família.
- Ao CAPES, pelo auxílio financeiro.
- A todos os alunos da turma de 2006 e 2007 pelo apoio.
- Aos professores que participaram da Comissão examinadora.

Resumo

Burban, Pierre Alexandre Charles; Samanez, Carlos Patrício. **Apreçamento de opções exóticas: Uma abordagem pela simulação de Monte-Carlo.** Rio de Janeiro, 2008. 163p. Dissertação de Mestrado – Departamento de Engenharia Industrial, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

As opções financeiras são instrumentos derivativos cada dia mais usados na gestão de risco de mercado das empresas e dos investidores. Dependendo do tipo e das características da opção escolhida, geralmente não existem soluções analíticas ao problema de apreçamento do instrumento. A simulação de Monte-Carlo é um método que, aplicado ao problema de apreçamento, possibilita uma grande flexibilidade na integração das variáveis de cálculo e uma precisão que depende do número de simulações efetuadas. As opções exóticas têm características especiais e seus valores podem ser estimados com precisão aplicando as técnicas de simulação. Esta dissertação propõe uma abordagem e aplica técnicas de cálculo no apreçamento das opções exóticas mais freqüentemente encontradas nos mercados de capitais. Os algoritmos desenvolvidos podem ser usados no estudo e valoração de casos reais.

Palavras-Chaves

Simulação de Monte-Carlo. Opções Exóticas. Opção Européia. Método de Longstaff – Schwartz para opções americanas.

Abstract

Burban, PierreAlexandre Charles; Samanez, Carlos Patricio. **Pricing of exotics options using Monte-Carlo simulation.** Rio de Janeiro, 2008. 163p. MSc. Dissertation – Departamento de Engenharia Industrial, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Financial options are derivatives tools each day more and more used in market and enterprise risk control systems. Depending on the option type used, it doesn't have an analytical solution for the pricing problem. A Monte-Carlo simulation is a very flexible method, which applied to the pricing problem, allows very-easy new variable implementation and accuracy increase with the number of simulation done. Exotics options have special features and pricing them by this method gives accurate results. Thus, this study explores a pricing solution and applied techniques of quite common exotics options traded on the market. The algorithms developed can be used for pricing real cases.

Key-Words

Monte-Carlo simulation. Exotics options. European option. Longstaff-Schwartz method for American option.

Sumário

1. Introdução	14
1.1 Introdução	14
1.2 Relevância do trabalho	14
1.3 Posicionamento da dissertação	15
2. Opção financeira	17
2.1 Definição clássica da opção de compra e de venda	17
2.2 Características das opções financeiras	17
2.3 Exemplo de utilização	17
2.4 Parâmetros envolvidos na definição do prêmio da opção	18
2.5 Exemplo numérico de uma opção europeia	19
2.6 O modelo de Black-Scholes	22
3. Método de Monte-Carlo	23
3.1 Introdução	23
3.2 Monte-Carlo, Quase Monte-Carlo	24
3.3 Técnicas de redução de variância	24
3.3.1 Variáveis antitéticas	24
3.3.2 Variável de controle	25
3.4 Método de Monte-Carlo para opções financeiras	25
3.5 Simulação dos preços	26
3.5.1 Exemplo	26
3.5.2 Exemplo numérico	27
4. Simulação de Monte-Carlo: o caso da opção europeia	29
4.1 Definição do método de Monte-Carlo	29
4.2 Exemplo de simulação da opção europeia	30
4.3 Análise de sensibilidade	32
4.3.1 Sensibilidade em relação ao número de simulações	32
4.3.2 Sensibilidade em relação ao preço de exercício	33
4.3.3 Sensibilidade em relação a mudanças na volatilidade	34
4.3.4 Sensibilidade em relação a mudanças na taxa livre de risco	35
5. Método dos mínimos quadrados de Monte-Carlo	36
5.1 Introdução	36
5.2 Apreçamento das opções americanas	37
5.3 Exemplo numérico dos "Mínimos Quadrados"	37
5.4 Análise de sensibilidade	45
5.4.1 Análise de sensibilidade no grau polinomial	46
5.4.2 Análise de sensibilidade no número de simulações	47
5.4.3 Análise de sensibilidade no número de datas de exercício	48

6. Opção asset-or-nothing	49
6.1 Definição	49
6.2 Exemplo numérico	50
6.3 Análise de sensibilidade	52
6.3.1 Sensibilidade em mudança no número de simulações	52
6.3.2 Sensibilidade em mudança no valor do strike	53
6.3.3 Sensibilidade em relação a mudanças na volatilidade	54
6.3.4 Sensibilidade em relação a mudanças na taxa livre de risco	55
7. Opção cash-or-nothing	56
7.1 Definição	56
7.2 Exemplo numérico	57
7.3 Formula exata de cálculo	59
7.4 Análise de sensibilidade	60
7.4.1 Sensibilidade em mudança no número de simulações	60
7.4.2 Sensibilidade em mudança no valor do strike	61
7.4.3 Sensibilidade em relação a mudanças na volatilidade	62
7.4.4 Sensibilidade em relação a mudanças na taxa livre de risco	63
8. Opção lookback	64
8.1 Definição	64
8.1.1 Fixed strike	64
8.1.2 Floating Strike	65
8.2 Exemplo numérico	65
8.3 Análise de sensibilidade: "fixed strike"	67
8.3.1 Sensibilidade em mudança no número de simulações	68
8.3.2 Sensibilidade em mudança no preço do strike	69
8.3.3 Sensibilidade em relação a mudanças na volatilidade	70
8.3.4 Sensibilidade em relação à mudança na taxa livre de risco	71
8.4 Análise de sensibilidade: "floating strike"	72
8.4.1 Sensibilidade em mudança no número de simulações	72
8.4.2 Sensibilidade em relação a mudanças na volatilidade	73
8.4.3 Sensibilidade em relação à mudança na taxa livre de risco	74
9. Opção asiática	75
9.1 Definição	75
9.2 Formula exata: forma geométrica	76
9.3 Exemplo numérico	77
9.4 Análise de sensibilidade	78
9.4.1 Sensibilidade em mudança no número de simulações	78
9.4.2 Sensibilidade em mudança no valor do strike	79
9.4.3 Sensibilidade em mudança na volatilidade	80
9.4.4 Sensibilidade em mudança na taxa livre de risco	81

10. Opção Chooser	82
10.1 Definição	82
10.2 Cálculo teórico (Rubinstein)	83
10.3 Método de Monte-Carlo	84
10.4 Análise de sensibilidade	85
10.4.1 Sensibilidade em mudança no número de simulações	85
10.4.2 Sensibilidade em mudança no tempo de escolha	86
10.4.3 Sensibilidade em mudança no preço do strike	87
10.4.4 Sensibilidade em mudança na volatilidade	88
10.4.5 Sensibilidade em mudança na taxa livre de risco	89
11. Opção europeia com barreira	90
11.1 Definição	90
11.2 Exemplo numérico	91
11.2.1 Simulação de um caminho valido para o exercício	92
11.2.2 Simulação dum caminho não valido para o exercício	93
11.3 Regra da paridade "in-out"	94
11.4 Análise de sensibilidade: call Down & Out	95
11.4.1 Sensibilidade em mudança no número de simulações	95
11.4.2 Sensibilidade em mudança no valor da barreira	96
12. Conclusão	97
13. Referências Bibliográficas	98
Apêndice 1: Calculo Estocástico	99
Apêndice 2: Demonstração Black-Scholes	106
Apêndice 3: Gráficos de sensibilidade	113
Apêndice 4: Apresentação dos programas	136
Apêndice 5: Método de Monte-Carlo. Código "Matlab" dos programas	146
Apêndice 6: Opção americana sem dividendos. Modelo de Coxx-Ross	159

Lista de figuras

Figura 1 – Payoff da opção de compra em função do preço do ativo objeto	20
Figura 2 – Ganho do comprador em função do preço do ativo objeto	20
Figura 3 – Payoff da opção de venda em função do preço do ativo objeto	21
Figura 4 – Ganho do comprador em função do preço do ativo objeto	21
Figura 5 – Exemplo numérico de simulação dos preços	28
Figura 6 – Gráfico de sensibilidade das opções em relação ao preço de exercício	33
Figura 7 – Regressão polinomial no tempo 2	41
Figura 8 – Regressão polinomial no tempo 1	44
Figura 9 – Payoff da opção de compra “asset-or-nothing”	51
Figura 10 – Payoff da opção de venda ”asset-or-nothing”	51
Figura 11 – Payoff da opção de compra “cash-or-nothing”	58
Figura 12 – Payoff da opção de venda “cash-or-nothing”	58
Figura 13 – Gráfico de simulação do preço do ativo objeto no ano	66
Figura 14 – Gráfico de simulação do preço do ativo objeto no ano e a média	77
Figura 15 – Gráfico de simulação do preço do ativo objeto no ano e a barreira – Caminho valido	92
Figura 16 – Gráfico de simulação do preço do ativo objeto no ano e a barreira – Caminho não valido	93

Lista de tabelas

Tabela 1 – Valores numéricos de simulação dos preços	28
Tabela 2 – Valores numéricos de simulação dos preços	31
Tabela 3 – Valores numéricos do payoff	31
Tabela 4 – Valores numéricos da média dos payoffs	31
Tabela 5 – Valores das opções – Sensibilidade em relação ao número de simulações	32
Tabela 6 – Valores das opções – Sensibilidade em relação ao preço de exercício	33
Tabela 7 – Valores das opções – Sensibilidade em relação a mudanças na volatilidade	34
Tabela 8 – Valores das opções – Sensibilidade em relação a mudanças na taxa livre de risco	35
Tabela 9 – Tabela dos preços do ativo nos 3 períodos – Payoff no tempo 3	38
Tabela 10 – Caminhos “in-the-money” e exercício imediato no tempo 2	39
Tabela 11 – Vetores da primeira regressão no tempo 2	39
Tabela 12 – Comparação dos valores de exercício imediato e de continuação	40
Tabela 13 – Payoff da opção no tempo 2	40
Tabela 14 – Caminhos “in-the-money” e exercício imediato no tempo 1	42
Tabela 15 – Vetores da segunda regressão no tempo 1	42
Tabela 16 – Comparação dos valores de exercício imediato e de continuação	43
Tabela 17 – Payoff da opção no tempo 1	43
Tabela 18 – Valores das opções – Sensibilidade em grau polinomial	46
Tabela 19 – Valores das opções – Sensibilidade em relação ao número de simulações	47
Tabela 20 – Valores das opções – Sensibilidade em relação ao número de datas de exercício	48
Tabela 21 – Valores das opções – Sensibilidade em relação ao número de simulações	52
Tabela 22 – Valores das opções – Sensibilidade em relação ao valor do preço de exercício	53
Tabela 23 – Valores das opções – Sensibilidade em relação a mudanças na volatilidade	54
Tabela 24 – Valores das opções – Sensibilidade em relação a mudanças na taxa livre de risco	55
Tabela 25 – Valores das opções – Sensibilidade em relação ao número de simulações	60
Tabela 26 – Valores das opções – Sensibilidade em relação ao valor do preço de exercício	61
Tabela 27 – Valores das opções – Sensibilidade em relação a mudanças na volatilidade	62
Tabela 28 – Valores das opções – Sensibilidade em relação a mudanças na taxa livre de risco	63
Tabela 29 – Valores das opções – Convergência com o aumento de número de simulações	68
Tabela 30 – Valores das opções – Sensibilidade em relação ao número de simulações	68

Tabela 31 – Valores das opções – Sensibilidade em relação ao valor do preço de exercício	69
Tabela 32 – Valores das opções – Sensibilidade em relação a mudanças na volatilidade	70
Tabela 33 – Valores das opções – Sensibilidade em relação a mudanças na taxa livre de risco	71
Tabela 34 – Valores das opções – Convergência com o aumento de número de simulações	72
Tabela 35 – Valores das opções – Sensibilidade em relação ao número de simulações	73
Tabela 36 – Valores das opções – Sensibilidade em relação a mudanças na volatilidade	73
Tabela 37 – Valores das opções – Sensibilidade em relação a mudanças na taxa livre de risco	74
Tabela 38 – Valores das opções – Sensibilidade em relação ao número de simulações	78
Tabela 39 – Valores das opções – Sensibilidade em relação ao valor do preço de exercício	79
Tabela 40 – Valores das opções europeias com mesmos parâmetros	79
Tabela 41 – Valores das opções – Sensibilidade em relação a mudanças na volatilidade	80
Tabela 42 – Valores das opções europeias com mesmos parâmetros	80
Tabela 43 – Valores das opções – Sensibilidade em relação a mudanças na taxa livre de risco	81
Tabela 44 – Valores das opções europeias com mesmos parâmetros	81
Tabela 45 – Valores das opções – Sensibilidade em relação ao número de simulações	85
Tabela 46 – Valores das opções – Sensibilidade em relação a mudanças no tempo de escolha	86
Tabela 47 – Valores das opções – Sensibilidade em relação ao valor do preço de exercício	87
Tabela 48 – Valores das opções – Sensibilidade em relação a mudanças na volatilidade	88
Tabela 49 – Valores das opções – Sensibilidade em relação a mudanças na taxa livre de risco	89
Tabela 50 – Valores das opções – Sensibilidade em mudanças no número de simulações	95
Tabela 51 – Valores das opções – Sensibilidade em mudanças no valor da barreira	96

1. Introdução

1.1 Introdução

Esta dissertação tem como objetivo aplicar e avaliar os resultados do método de Monte-Carlo para apreçamento das opções exóticas, adaptando esse método para cada caso.

A opção financeira é um derivativo cada dia mais usado na gestão do risco no mercado e apareceram diferentes tipos para solucionar os problemas cada vez mais complexos dos investidores. Essas opções exóticas foram criadas para resolver um problema financeiro específico ou para novos ativos com características especiais.

Nesse contexto, avaliar o preço dos derivativos com precisão é fundamental para usá-los corretamente nas estratégias de investimento.

O capítulo 2 realiza uma descrição das opções financeiras em geral: as definições de *call* e *put* onde parâmetros mais importantes são conhecidos. Além disso, o capítulo apresenta alguns exemplos de utilização.

O capítulo 3 trata do método de Monte-Carlo e suas características. Apresentando esse método no contexto financeiro, ele explica como foi usada a simulação do preço do ativo-objeto.

Cada capítulo de 4 a 11 apresenta um tipo de opção diferente, contendo as características próprias, uma descrição do “*payoff*”, um exemplo numérico e a análise de sensibilidade dessa opção com alteração nos parâmetros.

1.2 Relevância do trabalho

Os conhecimentos relativos às opções e aos derivativos financeiros em geral vêm experimentando significativo desenvolvimento nas últimas décadas. A criação de novos produtos pelo mercado e a necessidade de avaliá-los, têm gerado um nível de sofisticação cada vez maior nos modelos desenvolvidos.

A contribuição do trabalho é a utilização do método de Simulação de Monte-Carlo para avaliação dos derivativos exóticos mais usados. Desenvolvido para resolver problemas na área de física, este método é também usado no cálculo dos preços das opções clássicas (européias e americanas), no cálculo do Valor em Risco (*Value at Risk VaR*) e nos problemas de opções reais.

Esse método tem muitas vantagens que fazem seu sucesso. Primeiro, ele tem uma grande flexibilidade no uso das variáveis, simplificando muito as modificações necessárias para adaptar-se a cada tipo de opção diferente. Segundo, é um procedimento numérico que se utiliza de números aleatórios, ou pseudo-aleatórios, para computar algumas quantidades aleatórias, com base na Lei dos Grandes Números e no Teorema do Limite Central. Assim as distribuições das variáveis do modelo não precisam ser aproximadas e o nível de precisão da simulação pode ser melhorado através de um aumento no número de iterações calculadas. Por exemplo, o método dos mínimos quadrados de Monte-Carlo (MQMC) desenvolvido para Longstaff e Schwartz (2001) permite a avaliação das opções americanas.

1.3

Posicionamento da dissertação

Os primeiros modelos teóricos para apreçamento das opções surgiram nos anos setentas e o primeiro grande trabalho foi a teoria de Black e Scholes em 1973 para o apreçamento das opções européias. As relações matemáticas entre o valor da opção, o tempo até o vencimento do contrato e o preço do ativo objeto são obtidas pelo princípio de arbitragem. Este princípio afirma que em um mercado em equilíbrio não há como obter retorno acima da taxa livre de risco usando uma carteira sem risco. Para obter a fórmula analítica, Black e Scholes assumiram as seguintes condições:

- A taxa de juros sem risco é constante e conhecida no tempo;
- A ação não paga dividendos;
- Não há oportunidade de arbitragem (ganhos sem risco);
- O preço da ação segue um Movimento Geométrico Browniano. Assim, a distribuição de valores da ação no final de qualquer período finito é lognormal. A variância da taxa de retorno da ação é constante;

- A opção só pode ser exercida no vencimento;
- Não existem custos de transação;
- Todos os títulos são perfeitamente divisíveis;
- A negociação com títulos é contínua. As taxas de juros para emprestar e tomar emprestado é a mesma. Vendas a descoberto são permitidas.

(Ver anexo 2)

O trabalho conhecido com “Black-Scholes e Merton” (1973) mostrou que uma solução existe usando condições menos restritivas. Essa solução inclui o caso do ativo objeto que paga dividendos. Merton também mostrou que se a ação não paga dividendos nunca é ótimo o exercício antecipado de uma opção americana de compra antes do vencimento.

Para o apreçamento das opções americanas não foi encontrado uma solução analítica. Para solucionar esse problema está usado o método de Monte-Carlo que consegue simular a flexibilidade dessa opção tal como o exercício em qualquer instante antes do vencimento.

Longstaff e Schwartz (2001) usaram o método dos Mínimos Quadrados que compara o valor de manter a opção viva e o valor do exercício imediato. A estimação do valor de continuação (manter a opção viva) é feita para um modelo de regressão dos mínimos quadrados, e deve ser calculada a cada momento da vida útil da opção. (Capítulo 5)

Outro método usado para Grand, Vora e Weeks (1996) apreça a opção americana usando a curva de gatilho¹ calculada recursivamente.

Para todas as outras opções chamadas de “exóticas”, as características do *payoff* e as condições de exercício da opção não permitem achar uma solução analítica. O Movimento Geométrico Browniano (MGB) é o processo estocástico que simula a evolução dos preços do ativo-objeto ao longo do tempo e foi usado em cada simulação. Para cada tipo de opção exótica, devido a sua flexibilidade na programação, a simulação de Monte-Carlo consegue simular os preços do ativo objeto e aplicar as condições particulares.

¹ valor do ativo para um exercício ótimo da opção

2 Opção financeira

2.1 Definição clássica da opção de compra e de venda (*call*, *put*)

Uma opção de compra ou "*call*" do tipo europeu está definida sobre um ativo objeto, e dá ao comprador o direito, mas não a obrigação, de comprar o ativo a um preço determinado numa data definida.

Uma opção de venda ou "*put*" dá ao comprador o direito, mas não a obrigação, de vender o ativo a um preço determinado em uma data definida.

2.2 Características das opções financeiras

Uma opção financeira é um derivativo que permite a seu comprador limitar seu risco. Quer seja de compra ou de venda, o risco é limitado ao prêmio pago para obter a opção. Se a evolução do preço do ativo não é favorável ao cenário escolhido, a opção pode expirar sem ser exercida. A perda máxima é o prêmio.

As opções podem ser utilizadas para:

Limitar o risco de subida ou queda do preço do título (seguro)

Especular sobre a evolução dos preços do título

2.3 Exemplo de utilização

Usando opções, a rentabilidade da carteira pode ser aumentada da seguinte maneira:

- A venda coberta de uma opção de compra (*call*):

Suponhamos uma carteira composta de várias ações e que nos próximos meses nenhuma variação significativa dos preços ocorrerá. O administrador da carteira pode vender uma opção de compra (*call*) coberta pela posse das ações sobre as quais a "*call*" é lançada. Ele recebe o prêmio do comprador da opção. Se como previsto, o preço da ação não varia muito, a opção expira "*out-of-the-money*" sem valer nada, e o prêmio recebido terá aumentado a rentabilidade da carteira em um

contexto de neutralidade ao risco. No caso contrário, a opção será exercida e o ativo objeto será entregue nas condições descritas no contrato. A perda é diminuída pelo prêmio recebido.

Esse exemplo fornece só uma idéia de utilização de opções porém existem outras aplicações.

A compra de uma opção implica limitar o risco à perda do prêmio. A venda de opção, ao contrario, é potencialmente uma estratégia de alto risco e o vendedor deve ter certeza de poder respeitar as obrigações envolvidas.

Diferentes tipos de opções foram desenvolvidos para responder às exigências cada dia mais complexas dos investidores:

- Opção européia
- Opção americana
- Opção asiática
- Opção "*chooser*"
- Opção "*barrier*"
- Opção "*lookback*"
- Opção "*Cash/asset-or-nothing*"

Cada tipo foi criado para responder um problema diferente, e tem características especiais.

Fora da européia e americana, as outras opções mais elaboradas são chamadas de exóticas.

2.4

Parâmetros envolvidos na definição do prêmio da opção

Os parâmetros envolvidos na determinação do preço da opção são:

- Preço do ativo objeto no momento da criação da opção (S_0)
- O preço de exercício da opção, conhecido como "*strike*" da opção (k).
- O tempo ou prazo até a expiração da opção (T)

- A taxa livre de risco de um ativo sem risco (r), suposto constante.
- A volatilidade do ativo objeto (v), suposto constante.
- A taxa de dividendos continua do ativo (y), suposta constante.

2.5

Exemplo numérico de uma opção europeia

Uma opção europeia só pode ser exercida na data de expiração. Imaginemos um ativo objeto que tem uma volatilidade (v) que pode ser calculada por meio das oscilações históricas dos preços.

Seja uma opção de compra nesse ativo, com os seguintes parâmetros:

Preço do ativo objeto	S_0	100
Strike da opção	k	110
Tempo à expiração (ano)	T	1
Taxa livre de risco (anual)	r	3%
Volatilidade do ativo objeto	v	20%
Dividend Yield (anual)	y	0%

Essa opção de compra na data de vencimento (daqui a um ano) será exercida se o preço do ativo objeto estiver maior que o “*strike*” 110.

- Caso favorável

Exercendo a opção com um preço do ativo objeto de 120 no vencimento, temos o direito de comprar o ativo objeto ao preço de exercício de 110 (*strike*) e vendê-lo imediatamente ao preço corrente de 120. O ganho imediato está de: $120 - 110 = 10$.

- Caso desfavorável

Se o preço do ativo objeto no vencimento da opção é de 100, menor que o preço de exercício (*strike*), então devemos deixar expirar a opção para não ocorrer o prejuízo de -10 ($100 - 110$).

Para cada cenário, podemos resumir o payoff da opção como:

$$\text{PayoffCall} = \text{Max}(S - k, 0)$$

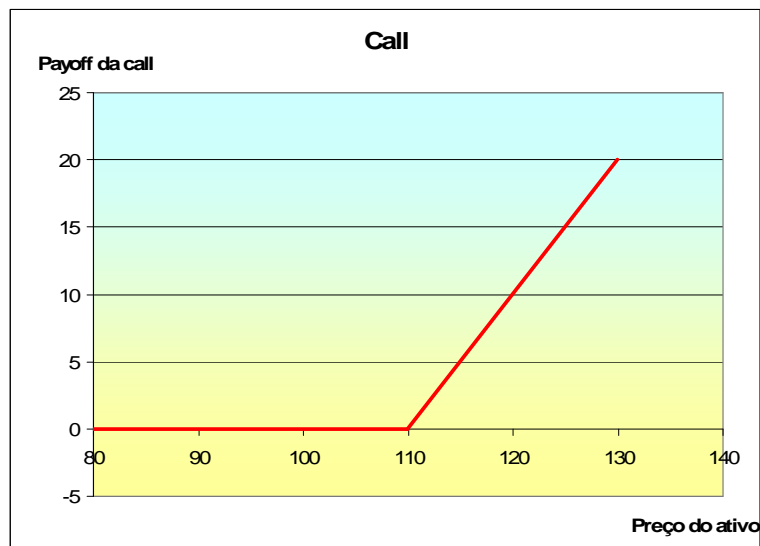


Figura 1 - Payoff da opção de compra em função do preço do ativo objeto

O problema é saber hoje quanto vale a opção com essas características. Qual vai ser o prêmio a pagar para ter o direito de comprar o ativo ao preço de 110 daqui a um ano? A resposta a essa pergunta soluciona o problema do apereçamento da opção.

Incluindo esse prêmio, o ganho do comprador da opção será:

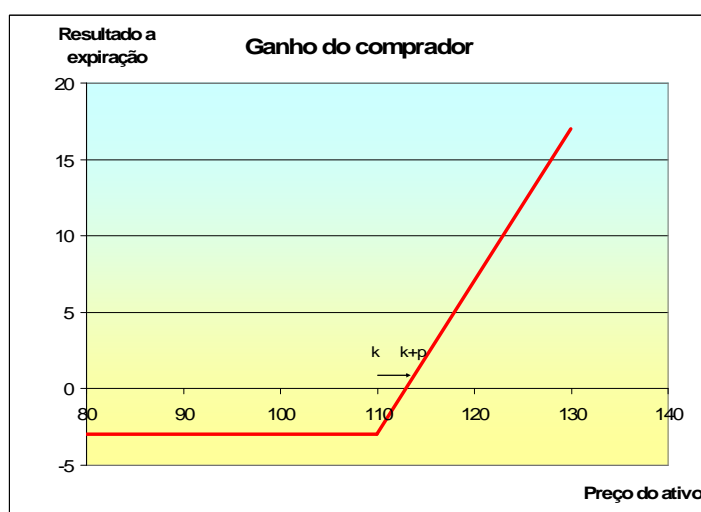


Figura 2 - Ganho do comprador em função do preço do ativo objeto

Da mesma maneira, uma opção de venda com os mesmos parâmetros:

$$\text{Payoff Put} = \text{Max}(k - S, 0)$$

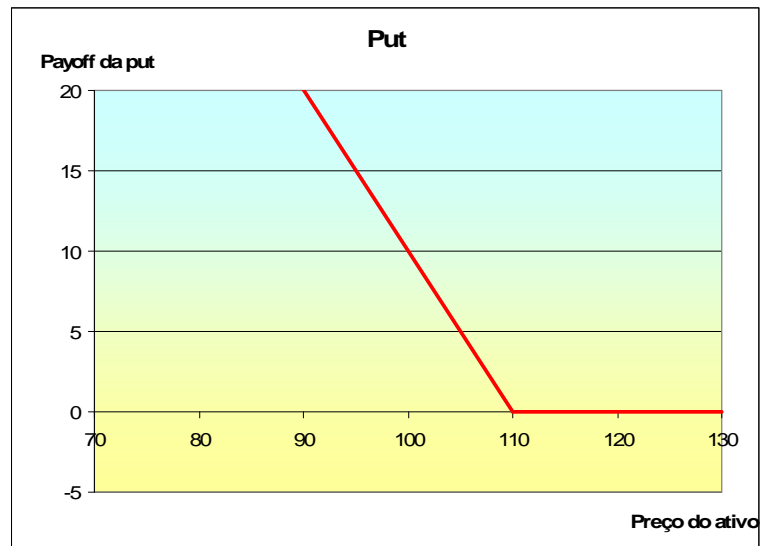


Figura 3 - Payoff da opção de venda em função do preço do ativo objeto

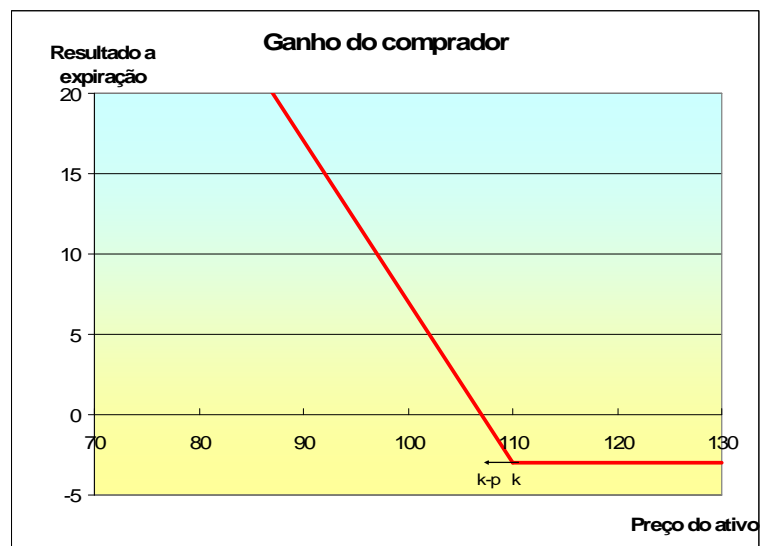


Figura 4 - Ganho do comprador em função do preço do ativo objeto

2.6

O modelo de Black-Scholes: o prêmio das opções européias

Esse modelo foi desenvolvido nos anos 70 para Black e Scholes (1973). Eles demonstraram que existe uma solução analítica ao problema de apreçamento das opções européias quando algumas condições são reunidas:

- O preço do ativo objeto segue um movimento geométrico browniano.
- A volatilidade do ativo é conhecida e constante.
- É possível comprar e vender o ativo em cada momento, sem pagar taxas.
- A posição a descoberto é autorizada.
- O ativo objeto não paga dividendos.
- A taxa livre de risco é conhecida e constante.
- A opção só pode ser exercida na data de vencimento.

Assim os preços das opções de compra "C" e de venda "P" são dados para:

$$C = S_0 \cdot N(d_1) - K \cdot e^{-r \cdot T} \cdot N(d_2)$$

$$P = K \cdot e^{-r \cdot T} \cdot N(-d_2) - S_0 \cdot N(-d_1)$$

Onde:

$$d_1 = \frac{\ln(S_0 / k) + (r + \sigma^2 / 2) \cdot T}{\sigma \cdot \sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(S_0 / k) + (r - \sigma^2 / 2) \cdot T}{\sigma \cdot \sqrt{T}} = d_1 - \sigma \cdot \sqrt{T}$$

$N(x)$ é a probabilidade acumulada de uma variável x normalmente distribuída com média 0 e desvio-padrão 1. A demonstração do modelo de Black-Scholes é disponível no Anexo 2.

3 Método de Monte-Carlo

3.1 Introdução

Os métodos numéricos são sempre mais usados como ferramentas na resolução de problemas que não possuem soluções analíticas. Inicialmente inventada para a simulação dos eventos físicos, o método de Monte-Carlo, ou a simulação de Monte-Carlo, foi introduzida em finanças por Boyle (1977).

A simulação de modelos estocásticos necessita o uso de números aleatórios, e é conhecida com o nome genérico de método de Monte-Carlo (devido aos jogos de cassino).

Vários problemas numéricos *a priori* sem relação aos números aleatórios, como a avaliação de uma integral ou a resolução de um sistema linear, podem ser traduzidos em termos estocásticos, fazendo os métodos de Monte-Carlo uma ferramenta geral, não exclusivamente para modelar os eventos aleatórios. Usado como método de cálculo do preço das opções, e na gestão de risco, esse método tem como característica uma grande flexibilidade na integração de múltiplas variáveis, tornando-se uma solução prática para resolver vários problemas. O aumento da capacidade de cálculo dos processadores e a dos computadores pessoais facilitou o acesso e democratizou esse método como ferramenta básica de resolução dos problemas financeiros.

A idéia principal é simular um grande número de eventos que têm uma parte aleatória. O valor médio dos resultados das simulações pode dar uma boa percepção do resultado esperado desses eventos aleatórios.

A Lei dos Grandes Números explica que quando o número de eventos simulados tende ao infinito, o resultado médio das simulações converge para a média matemática esperada. Usando esse valor, para aumentar a precisão do cálculo é necessário somente aumentar o número dos cenários possíveis simulados.

3.2 Monte-Carlo, Quase Monte-Carlo

A implementação do método de Monte-Carlo necessita a geração de números aleatórios que devem seguir uma distribuição qualquer. A qualidade e as características do gerador de números aleatórios influencia a precisão do cálculo e, portanto, a viabilidade desse método. Existem geradores de números aleatórios de natureza diferentes: o gerador aleatório puro é impossível a prever. Extratos de fenômenos naturais, as seqüências aleatórias puras são disponíveis em listas e assim dificilmente implementadas nos programas. Elas são usadas no método de Monte-Carlo clássico. O gerador pseudo-aleatório usa um algoritmo simples para simular a aleatoriedade da seqüência. Eles são usados nos computadores para cálculos básicos. O gerador quase-aleatório usa um algoritmo simples igual ao gerador pseudo-aleatório, mas com condições restritivas para aproximar com precisão a distribuição simulada. De melhor qualidade que o pseudo-aleatório, ele é utilizado no método de quase Monte-Carlo desenvolvido nesta dissertação.

3.3 Técnicas de redução de variância

Mesmo usando geradores avançados de números aleatórios, podemos com técnicas simples aumentar a eficiência do método de Monte-Carlo, sem aumentar o tempo computacional. Vejamos algumas técnicas desse tipo:

3.3.1 Variáveis antitéticas

Sendo um número aleatório "*eps*" dado para um gerador quase-aleatorio que segue uma distribuição normal padronizada $N(0,1)$, o número aleatório "*-eps*" segue a mesma distribuição, e assim pode ser usado para gerar outra simulação. Esse método permite dobrar a quantidade dos números aleatórios gerados pelo programa, sem aumentar o tempo computacional. Esse método garante que a média dos números gerados é exatamente igual a 0. Esse método está incluído em todos os programas de cálculo nessa dissertação.

3.3.2 Variável de controle

O funcionamento desse método é:

Querendo estimar o valor de $E[f(S)]$, podemos escrever:

$$E[f(S)] = E[f(S) - h(S)] + E[h(S)].$$

Podendo calcular o $E[h(S)]$ de forma explícita, estimar $E[f(S)]$ é igual a estimar $E[f(S) - h(S)]$. Para ser eficiente, evidentemente devemos ter que:

$$\text{Var}(f(S) - h(S)) < \text{Var}(f(S))$$

Encontrar e escolher uma variável de controle adaptada para cada caso pode ser complicado, fazendo desse método uma ferramenta nem sempre muito fácil de ser programada.

3.4 Método de Monte-Carlo para opções financeiras

Para as opções financeiras, o valor simulado é o preço do ativo objeto, que segue um movimento geométrico browniano (MGB). Em cada simulação, um preço diferente do ativo objeto será gerado devido ao processo estocástico envolvido nesse MGB.

Para uma opção europeia, por exemplo, serão simulados preços ao vencimento da opção. Para todos os preços simulados, dependendo do valor de exercício, será tomada uma decisão diferente, que vai determinar o *payoff* da opção. A média desses payoffs descontados para o momento inicial proporciona uma estimativa do preço da opção.

Assim, a precisão do cálculo depende em grande parte do número de simulações realizadas, e será mais preciso quanto maior for esse número. A única limitação será o tempo computacional que aumenta com o número de simulações realizadas. O problema então é simular com precisão as variações do preço do ativo objeto.

A simulação de Monte-Carlo é muito usada para opções que são "*path-dependent*", ou seja opções cujo valor não depende só do preço final do ativo

objeto, mas também da sua variação no tempo. Este é o caso das opções exóticas, como as Asiáticas, *Lookback* ou *Barrier*.

3.5 Simulação dos preços

Para avaliar o preço de uma opção devemos simular a variação dos preços no tempo.

Esses preços têm que seguir um modelo definido numericamente para poder ser implementado. O movimento geométrico browniano (MGB) aplicado aos preços do ativo objeto consegue de uma forma geral dar uma representação viável da evolução dos preços no mundo real, e fornecer para cada simulação um caminho diferente. Assim, o MGB usado em simulações de Monte-Carlo com muitas iterações proporciona uma boa aproximação das trajetórias dos preços, e conseqüentemente uma avaliação precisa do preço do derivativo.

3.5.1 Exemplo

Nesse contexto de neutralidade ao risco, usamos a taxa livre de risco, nesse movimento geométrico browniano escrito na medida de Martingale equivalente.

Sendo:

rtaxa livre de risco

vvolatilidade do título

dt incremento de tempo

dZ incremento de Wiener (dZ segue a lei $N(0,dt)$)

Assumindo que o título S segue um movimento geométrico browniano:

$$dS = r.S.dt + \sigma.S.dZ \quad (1)$$

podemos escrever:

$$d(\ln(S)) = \frac{dS}{S} = r.dt + \sigma.dZ \quad (2)$$

Para um derivativo $F(S,t) = \ln(S)$ seguindo um processo de Itô podemos demonstrar:

$$dF(S,t) = \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dZ \quad (3)$$

Terminando o cálculo onde "*eps*" é uma variável aleatória cuja distribuição é normal com media zero e desvio-padrão 1: $N(0,1)$

$$\Delta F(S,t) = \Delta \ln S = \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t + \sigma \cdot eps \cdot \sqrt{\Delta t} \quad (4)$$

$$S_{\Delta t} = S_0 e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t + \sigma \cdot eps \cdot \sqrt{\Delta t}} \quad (5)$$

Podemos simular o preço $S_{\Delta t}$ para um ativo qualquer, de preço inicial S_0 , volatilidade σ , taxa livre de risco r e para um tempo de intervalo Δt .

Na fórmula com "*dividend yield*", ou seja quando o ativo objeto paga dividendos constantes, troca-se o r por " $r - y$ ". Pagando dividendos contínuos, a taxa de crescimento do preço do ativo " r " na simulação está diminuída de " y ". Trocando " r " por " $r - y$ " na equação (1) e fazendo o cálculo de novo, obtemos:

$$S_{\Delta t} = S_0 e^{\left(r - y - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t + \sigma \cdot eps \cdot \sqrt{\Delta t}} \quad (6)$$

A fórmula (6) será implementada nos cálculos desta dissertação e fornecerá a base numérica para a simulação da seqüência dos preços no tempo. Os detalhes dos cálculos estão disponíveis no anexo 1: "Calculo Estocástico".

3.5.2

Exemplo numérico

Preço do ativo no inicio	S=100
Strike da opção	k=100
Tempo a expiração	T=1
Taxa livre de risco	r=5%
Volatilidade do ativo	v=20%
Dividend Yield	y=0

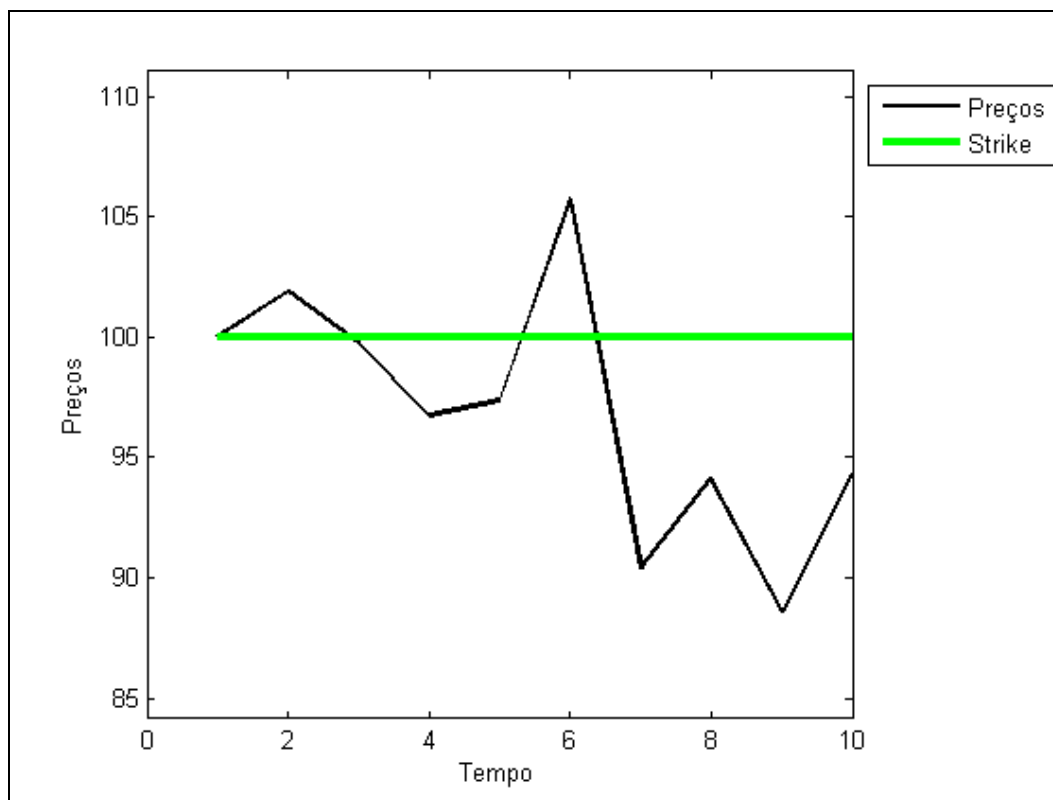


Figura 5 – Exemplo numérico de simulação dos preços

Tabela dos valores simulados para o ano, dividido em 9 períodos de tempo iguais, dando 10 valores diferentes:

Numero da simulação	<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>	<i>5</i>
Preço simulado	<i>100</i>	<i>101,89</i>	<i>99,74</i>	<i>96,76</i>	<i>97,39</i>
Numero da simulação	<i>6</i>	<i>7</i>	<i>8</i>	<i>9</i>	<i>10</i>
Preço simulado	<i>105,74</i>	<i>90,43</i>	<i>94,12</i>	<i>88,57</i>	<i>94,31</i>

Tabela 1 – Valores numéricos de simulação dos preços

Outros exemplos estão disponíveis no anexo 1: "Calculo Estocástico".

4

Simulação de Monte-Carlo: o caso da opção europeia

4.1

Definição do método de Monte-Carlo

A opção europeia dá ao comprador o direito, mas não a obrigação de comprar ou vender o ativo objeto a um preço determinado, somente em uma data definida.

Os parâmetros envolvidos no cálculo da opção pelo método de Monte-Carlo são:

S_0	O preço atual do ativo objeto
k	O "strike", ou seja, o preço de exercício da opção
T	O tempo até a expiração da opção
r	A taxa livre de risco
v	A volatilidade do título
y	O "dividend yield" do ativo
n	O número de simulações efetuadas

O objetivo da simulação de Monte-Carlo é de realizar, dependendo dos parâmetros do ativo objeto, varias simulações da evolução dos preços e calcular para cada simulação o payoff da opção. Fazendo a média dos payoffs e a atualização desse valor ao tempo de compra da opção, temos o prêmio a ser pago pela opção.

Os preços são simulados como visto no capítulo 3 com a fórmula seguinte:

$$S_T = S_0 e^{\left(r - y - \frac{v^2}{2}\right)T + v \cdot eps \cdot \sqrt{T}} \quad (1)$$

No vencimento da opção, ou seja, no tempo final, podemos calcular o payoff da opção dependendo do preço do ativo S na data de expiração:

$$\text{PayoffCall} = \text{Max}(S - K, 0)$$

$$\text{PayoffPut} = \text{Max}(K - S, 0)$$

O parâmetro "eps" é um valor aleatório de uma distribuição normal N(0,1) (média 0 e variância 1), e deve mudar para cada simulação realizada.

Realizando a média dos valores simulados e atualizando ao tempo inicial:

$$\text{PreçoOpção} = \frac{\sum \text{Payoff}_n}{n} \cdot \exp(-r.T) \quad (2)$$

4.2 Exemplo de simulação da opção europeia

Usando os seguintes parâmetros da opção:

Preço do ativo no início	S=100
Strike da opção	k=105
Tempo à expiração (ano)	T=1
Taxa livre de risco	r=5%
Volatilidade do ativo	v=20%
Dividend Yield	y=0
Número de simulações	n=10

Esses valores foram gerados pelo programa Matlab usando as fórmulas citadas acima.

1. Simulação dos preços:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
98,8660	112,4842	93,4073	138,2300	99,5720	104,2274	91,6089	110,3184	74,5464	103,4884

Tabela 2 – Valores numéricos de simulação dos preços

2. Cálculo do payoff para cada simulação:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	7,4842	0	33,2300	0	0	0	5,3184	0	0
2	6,1340	0	11,5927	0	5,4280	0,7726	13,3911	0	30,4536	1,5116

Tabela 3 – Valores numéricos do payoff

3. Cálculo do preço da opção obtido na simulação:

Média dos payoffs	
Opção de compra	4,6033
Opção de venda	6,9284

Tabela 4 – Valores numéricos da média dos payoffs

4. Atualização das médias calculadas:

$$PreçoOpçãoCompra = 4,6033 \times e^{-0,05.1} = 4,3788$$

$$PreçoOpçãoVenda = 6,9284 \times e^{-0,05.1} = 6,5905$$

4.3 Análise de sensibilidade

Os parâmetros padrões da opção usados pelas análises de sensibilidade são:

Preço do ativo no início	S=100
Strike da opção	k=105
Tempo a expiração (ano)	T=1
Taxa livre de risco	r=5%
Volatilidade do ativo	v=20%
Dividend Yield	y=0

4.3.1 Sensibilidade em relação ao número de simulações

A precisão da simulação de Monte-Carlo aumenta com o número de simulações. A aproximação da distribuição dos payoffs da opção é mais precisa, quando maiores foram os eventos simulados.

O preço teórico é conhecido e calculado pela fórmula analítica de Black e Scholes.

Número de simulações	10	100	1000	5000	10 000	50 000	100 000	Preço teórico
Preço Opção Compra	3,78	6,19	7,24	8,22	8,10	8,06	8,01	8,0213
Preço Opção Venda	4,91	6,56	7,36	8,01	7,94	7,93	7,89	7,9004
Erro no Call(%)	52,90	22,8	9,75	2,46	1	0,5	0,16	
Erro no Put (%)	37,89	16,91	6,73	1,35	0,56	0,32	0,07	

Tabela 5 – Valores das opções – Sensibilidade em relação ao número de simulações

A convergência do cálculo aumentando o número de simulações é verificada. A eficiência desse método de Monte-Carlo é muito grande: com 50 000 simulações e um tempo computacional de alguns segundos, a precisão cai por baixo de 1% em comparação ao preço teórico dado pela fórmula de Black e Scholes. Com 100 000, o resultado é quase igual.

O gráfico pode ser visto no anexo 3.1.

4.3.2 Sensibilidade em relação ao preço de exercício

Variando o preço de exercício somente, e usando 100 000 simulações para conservar a precisão obtemos os seguintes valores:

Preços de exercício	Opção de Compra	Opção de venda
90	16,74	2,33
92	15,29	2,81
94	13,97	3,39
96	12,71	4,03
98	11,53	4,77
100	10,43	5,56
102	9,41	6,43
104	8,48	7,40
106	7,58	8,41
108	6,79	9,52
110	6,02	10,65

Tabela 6 - Valores das opções – Sensibilidade em relação ao preço de exercício

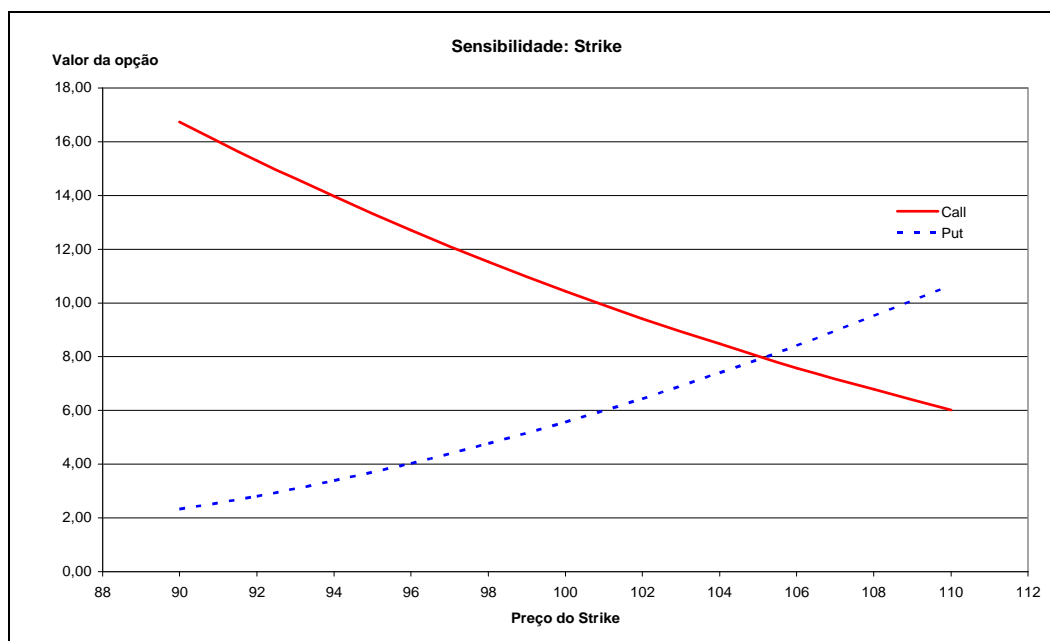


Figura 6 – Gráfico de sensibilidade das opções em relação ao preço de exercício

Mudando o preço do strike de 90 para 95, o preço da opção de compra varia de $-3,5$ e da opção de venda $+1,5$, mas só de -2 (*call*) e $+2,5$ (*put*) quando o strike passa de 105 a 110. Isso demonstra que a opção de compra fica mais sensível que a opção de venda na mudança do preço de exercício. O preço de uma opção é mais sensível quando ela está "*deep-in-the-money*" no instante inicial, seja com preço de exercício baixo para a opção de compra, e preço de exercício alto para a opção de venda.

4.3.3 Sensibilidade em relação a mudanças na volatilidade

Variando a volatilidade do ativo somente, e usando 100 000 simulações para conservar a precisão obtemos os seguintes valores:

Volatilidade (%)	Opção de compra	Opção de venda
5	2,05	1,93
9	3,65	3,53
13	5,25	5,12
17	6,84	6,71
21	8,42	8,30
25	10,00	9,89
29	11,59	11,47
33	13,16	13,04
37	14,73	14,61
41	16,29	16,17
45	17,86	17,74

Tabela 7 – Valores das opções – Sensibilidade em relação a mudanças na volatilidade

A volatilidade do título se torna uma variável decisiva na análise de sensibilidade. Quanto mais alta a volatilidade, mais alto será o preço. No aumento da volatilidade, aumenta também a incerteza nos preços futuros do ativo. Há assim mais oportunidades para a opção de acabar "*deep-in-the-money*" no vencimento, ou seja, de poder ser exercida. Ela fica logicamente mais cara.

Aumentando a volatilidade de 13 para 37 (multiplicando por 3 aproximadamente), o preço da opção se multiplica por 3 também, mostrando uma relação quase linear entre o aumento da volatilidade e do preço da opção, cujo coeficiente depende dos outros parâmetros escolhidos para o cálculo do preço da opção.

O gráfico pode ser visto no anexo 3.2.

4.3.4

Sensibilidade em relação a mudanças na taxa livre de risco

Variando a taxa livre de risco somente, e usando 100 000 simulações para conservar a precisão obtemos os seguintes valores:

Taxa livre de risco (%)	Opção de compra	Opção de venda
1	6,29	10,25
2	6,71	9,63
3	7,13	9,03
4	7,57	8,45
5	8,02	7,90
6	8,50	7,38
7	8,98	6,88
8	9,48	6,40
9	9,99	5,95
10	10,51	5,52
11	11,05	5,11

Tabela 8 – Valores das opções – Sensibilidade em relação a mudanças na taxa livre de risco

A variação do preço com a taxa livre de risco não é muito importante e em média:

Opção de compra: + 0,45 para cada 1% na taxa a mais. (modelo linear)

Opção de venda: – 0,55 para cada 1% na taxa a mais. (modelo linear)

Existe uma relação quadrática para relacionar o preço e a taxa livre de risco, com os outros parâmetros da opção constante, mas com coeficientes quadráticos bastante fracos.

O gráfico pode ser visto no anexo 3.3.

5 Método dos mínimos quadrados de Monte-Carlo

5.1 Introdução

Um método desenvolvido por "*Longstaff Schwartz*" (2001) permite estimar o valor de continuação da opção americana usando uma regressão "*cross-section*" que utiliza os mínimos quadrados. Esse método é conhecido como "*Least Squares Monte Carlo*".

Opções americanas são mais flexíveis que as européias. **Uma opção americana pode ser exercida em qualquer tempo antes do vencimento da opção**, se tornando mais valiosa que a européia. Procedendo *backwards*, em cada tempo antes da expiração, podemos exercer a opção. Mas qual é a regra de decisão ótima? Para sabê-la devemos avaliar em cada tempo duas coisas:

- O valor do exercício imediato
- O valor de espera, ou seja, o valor de continuação.

Assim, comparando os dois valores, podemos escolher qual é a decisão ótima. Se o valor de exercício imediato for maior que o valor de continuação estimado, a opção deveria ser exercida. Se for o caso de esperar, deveríamos avaliar esses valores de novo num tempo anterior.

Na simulação, a avaliação da opção é feita do final para o início. Praticamente, os preços no período inteiro e em cada data de exercício são simulados. Analisando *backwards* do vencimento até o início do período, podemos em cada momento tomar a decisão ótima.

A velocidade de convergência desse método depende de vários parâmetros: a função usada para realizar a regressão e achar o valor de continuação, ou a seleção dos caminhos usados na regressão por exemplo.

Através de um exemplo simples podemos ver o funcionamento desse método e os melhoramentos que foram implementados no programa computacional.

5.2 Apreçamento das opções americanas

O problema quando queremos avaliar uma opção americana é que essa opção pode ser exercida em todos os momentos até o vencimento. De fato devemos decidir em cada momento se a opção é exercida ou não.

Podemos agora ver que a precisão do cálculo depende do número de datas simuladas para cada caminho. Para simular eficientemente a propriedade da opção americana a ser exercida em qualquer momento, devemos ter o valor do ativo em cada momento. Mas numericamente no computador, o processo no tempo contínuo deve ser discretizado. Então, quanto menor for o intervalo de discretização, maior será a precisão do cálculo da opção americana.

Para tomar a decisão ótima no tempo "t-1", o método dos Mínimos Quadrados de Monte-Carlo usa uma regressão dos payoffs da opção do período "t" descontados no período "t-1", sobre os preços do período "t-1".

5.3 Exemplo numérico dos "Mínimos Quadrados"

No exemplo consideramos uma opção de compra (uma call). O ativo objeto não paga dividendos e tem as seguintes características:

Preço do ativo no início	$S=10$
Strike da opção	$k=10.5$
Tempo à expiração (ano)	$T=1$
Taxa livre de risco	$r=5\%$
Volatilidade do ativo	$v=20\%$
Dividend Yield	$y=0$

Para entender o funcionamento desse método, o tempo de 1 ano da opção será dividido em 3 períodos, sejam cada 4 meses. 3 é o número de datas de exercício simuladas no período total. Os preços são simulados usando o mesmo método que no capítulo 3 usando um movimento geométrico browniano escrito na medida de Martingale. Simulando 10 caminhos:

Caminho	t = 0	t = 1	t = 2	t = 3	Payoff em t = 3
1	10	8,2452	7,7990	8,1615	0
2	10	9,5905	7,6580	8,4797	0
3	10	10,4917	9,3992	7,6605	0
4	10	9,7570	10,4250	10,3200	0
5	10	11,4015	11,3580	10,6652	0,1652
6	10	12,3116	13,2126	12,8167	2,3167
7	10	10,5845	13,4559	12,3357	1,8357
8	10	10,6203	10,9632	13,6547	3,1547
9	10	10,4040	9,4321	10,1360	0
10	10	8,9034	9,0725	9,8078	0

Tabela 9 – Tabela dos preços do ativo nos 3 períodos – Payoff no tempo 3

Tempo 3

A análise da decisão ótima começa no tempo final. Dependendo do valor do ativo, temos na última coluna o payoff da opção de compra com valor de preço de exercício de 10.5.

Tempo 2

Agora devemos saber no tempo 2 se o exercício da opção é ótimo. O exercício somente ocorre quando a opção está "*in-the-money*" no tempo 2, e que o valor imediato é maior que o valor de esperar.

Os caminhos "in-the-money" ITM, no momento 2 são os "5-8":

Caminho	t = 0	t = 1	t = 2	Exercício imediato t = 2
1	10	8,2452	7,7990	0
2	10	9,5905	7,6580	0
3	10	10,4917	9,3992	0
4	10	9,7570	10,4250	0
5	10	11,4015	11,3580	0,8580
6	10	12,3116	13,2126	2,7126
7	10	10,5845	13,4559	2,9559
8	10	10,6203	10,9632	0,4632
9	10	10,4040	9,4321	0
10	10	8,9034	9,0725	0

Tabela 10 – Caminhos "in-the-money" e exercício imediato no tempo 2

Para cada caminho ITM temos que calcular o valor de continuação. Só os valores dos caminhos ITM são selecionados para calcular os valores de continuação e achar os parâmetros da regressão.

- X representa o vetor dos preços do título no momento do estudo, ou seja, no período 2.
- Y representa o vetor dos valores do payoff futuro (período 3) descontado ao período presente, se a opção não for exercida.

O desconto é de $e^{-0.05*(1/3)}$ e é feito sobre um terço do ano.

Y	X
-	-
-	-
-	-
-	-
$0,1652 \times e^{-0.05*(1/3)}$	11,3580
$2,3167 \times e^{-0.05*(1/3)}$	13,2126
$1,8357 \times e^{-0.05*(1/3)}$	13,4559
$3,1547 \times e^{-0.05*(1/3)}$	10,9632
-	-
-	-

Tabela 11 – Vetores da primeira regressão no tempo 2

O valor de continuação é estimado por meio de uma regressão do vetor Y sobre uma constante, o vetor X e X^2 da seguinte forma: $E[Y/X] = a.X^2 + b.X + c$ (O segundo grau foi usado aqui para simplificar o exemplo, mas qualquer grau maior pode ser usado). Usando o método dos Mínimos Quadrados de Monte-Carlo, e os dados acima para estimar os parâmetros "a,b,c":

$$E[Y/X] = 2,2474.X^2 - 54,9253.X + 334,7113$$

E finalmente os valores de continuação são calculados com a fórmula acima e o vetor X :

$E[Y/X]$	Exercício imediato $t = 2$	Decisão ótima
-	-	-
-	-	-
-	-	-
-	-	-
0,7854	0,8580	<i>Exercer</i>
1,3354	2,7126	<i>Exercer</i>
2,5577	2,9559	<i>Exercer</i>
2,6703	0,4632	<i>Esperar</i>
-	-	-
-	-	-

Tabela 12 – Comparação dos valores de exercício imediato e de continuação. Decisão ótima no tempo 2

Os valores do payoff da opção no tempo 2 são:

Payoff em $t = 2$
0
0
0
0
0,8580
2,7126
2,9559
$3,1547 \times e^{-0,05 \cdot (1/3)}$
0
0

Tabela 13 – Payoff da opção no tempo 2

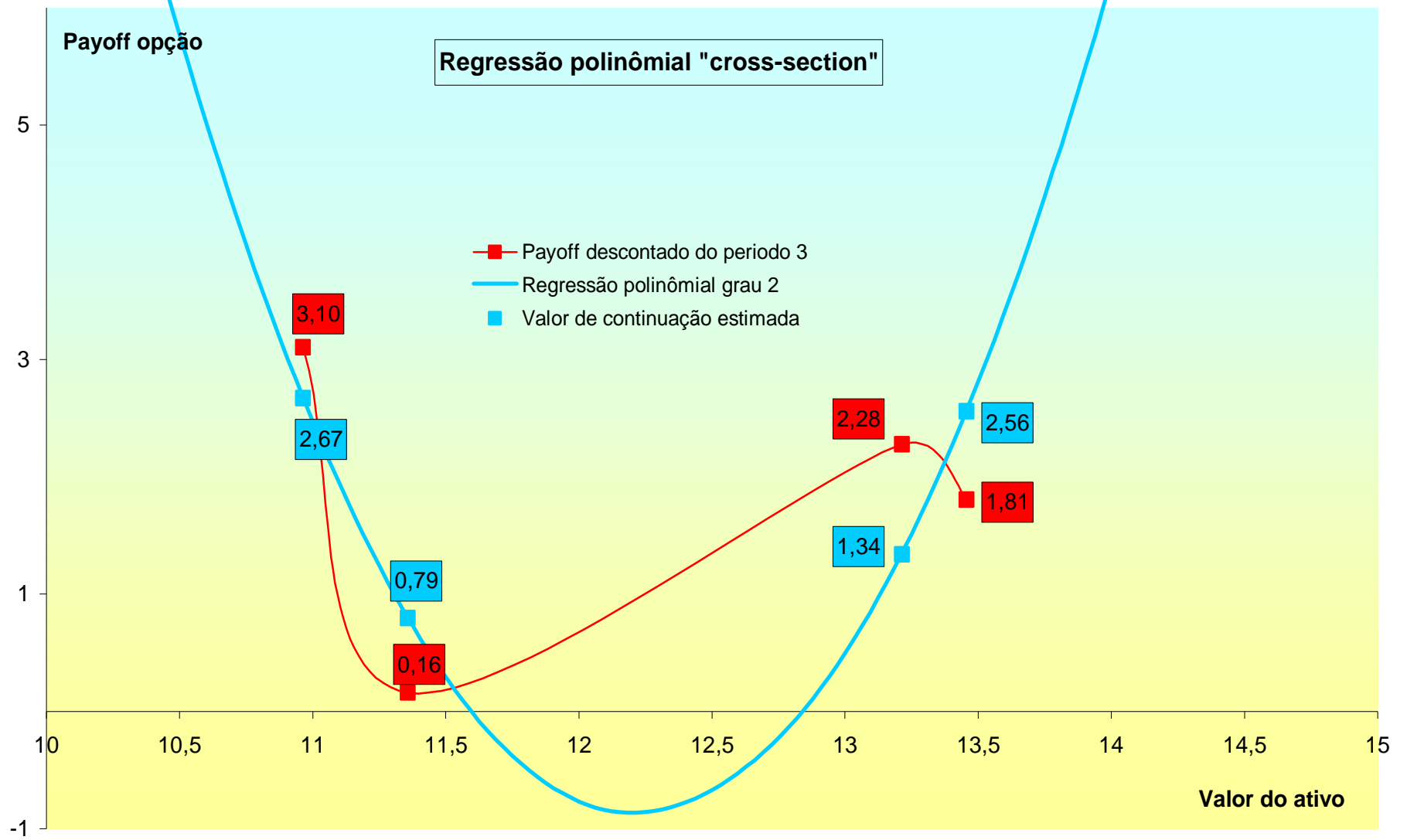


Figura 7 – Regressão polinomial no tempo 2

Tempo 1

Da mesma forma devemos escolher os caminhos ITM no momento 1 para realizar o cálculo dos valores estimados.

Caminho	t = 0	t = 1	Exercício imediato t = 1
1	10	8,2452	0
2	10	9,5905	0
3	10	10,4917	0
4	10	9,7570	0
5	10	11,4015	0,9015
6	10	12,3116	1,8116
7	10	10,5845	0,0845
8	10	10,6203	0,6203
9	10	10,4040	0
10	10	8,9034	0

Tabela 14 – Caminhos “in-the-money” e exercício imediato no tempo 1

X representa o vetor dos preços do título no momento do estudo, ou seja, no período 1.

Y representa o vetor dos valores do payoff futuro (período 3 e 2) descontado ao período presente, se a opção não for exercida. O desconto de $e^{-0.05*(1/3)}$ é feito sobre um terço do ano, e de $e^{-0.05*(2/3)}$ para o caminho 8, porque o valor deve ser descontado sobre 2 períodos consecutivos.

Y	X
-	-
-	-
-	-
-	-
$0,8580 \times e^{-0.05*(1/3)}$	11,4015
$2,7126 \times e^{-0.05*(1/3)}$	12,3116
$2,9559 \times e^{-0.05*(1/3)}$	10,5845
$3,15457 \times e^{-0.05*(2/3)}$	10,6203
-	-
-	-

Tabela 15 – Vetores da segunda regressão no tempo 1

Realizando de novo a estimação do valor de Y esperado $E[Y/X]$ para uma regressão polinomial de grau 2:

$$E[Y/X] = 2,6911.X^2 - 61,8534.X + 356,2609$$

Com os seguintes resultados:

$E[Y/X]$	Exercício imediato t = 1	Decisão ótima
-	-	-
-	-	-
-	-	-
-	-	-
0,8567	0,9015	<i>Exercer</i>
2,6650	1,8116	<i>Esperar</i>
3,0586	0,0845	<i>Esperar</i>
2,8895	0,6203	<i>Esperar</i>
-	-	-
-	-	-

Tabela 16 – Comparação dos valores de exercício imediato e de continuação. Decisão ótima no tempo 1

Os valores do payoff da opção no tempo 1, e o instante de exercício são:

Payoff a t = 1	Período de exercício
0	-
0	-
0	-
0	-
0,9015	1
$2,7126 \times e^{-0.05 \cdot (1/3)}$	2
$2,9559 \times e^{-0.05 \cdot (1/3)}$	2
$3,1547 \times e^{-0.05 \cdot (2/3)}$	3
0	-
0	-

Tabela 17 – Payoff da opção no tempo 1

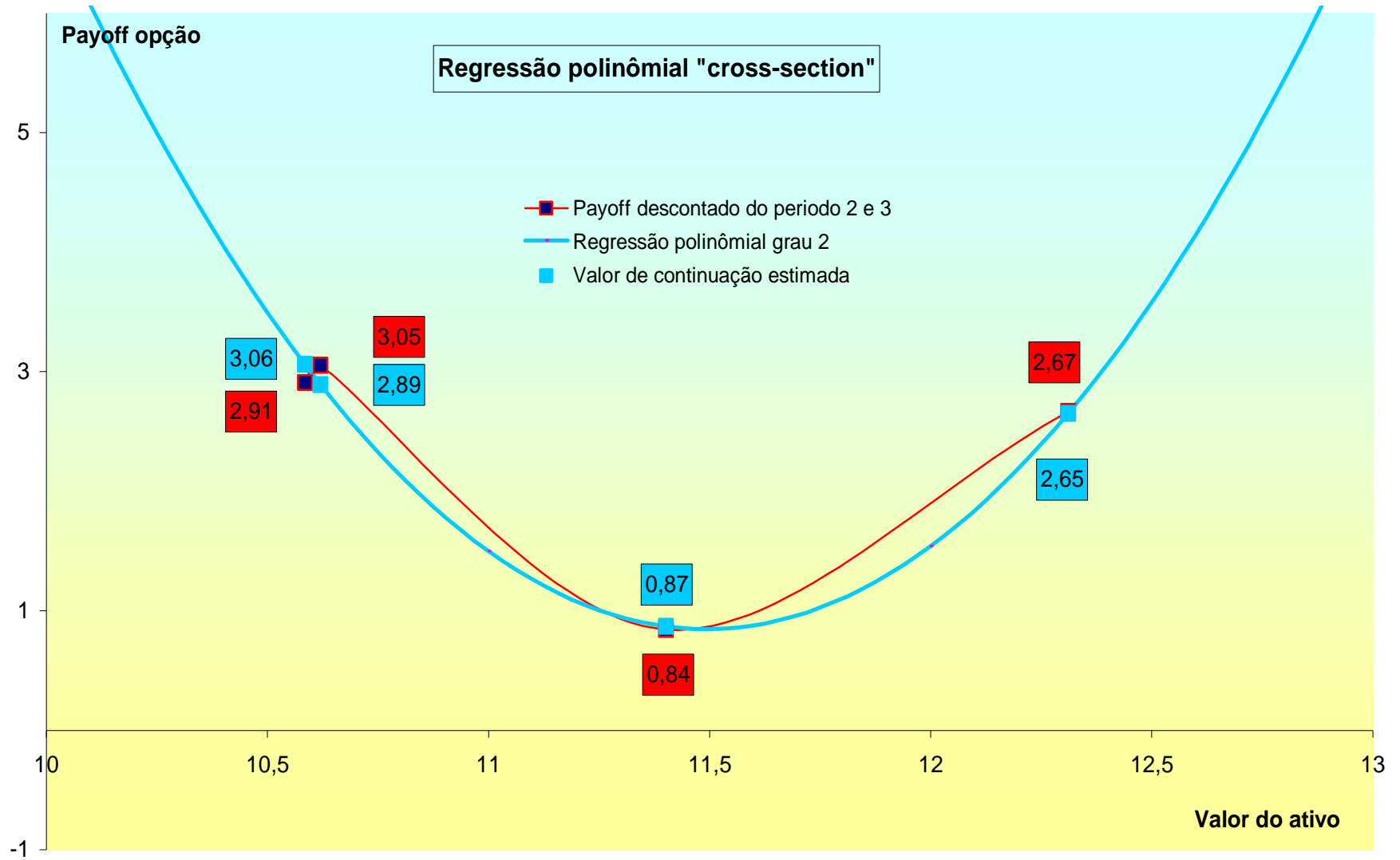


Figura 8 – Regressão polinomial no tempo I

Finalmente podemos obter o valor da opção descontando os valores dos payoff para cada caminho até o instante 0 e calcular a média sobre todos os caminhos simulados. Nesse exemplo, calculando a média dos valores dos payoffs da tabela 16:

$$ValorCall = 2,3425$$

Para uma opção americana, a precisão desse método depende do número de datas de exercício simulado, para simular eficientemente a possibilidade de exercer uma opção americana no qualquer momento. O número de caminhos simulados, como em cada simulação de Monte-Carlo, entra em consideração.

5.4 Análise de sensibilidade

O uso das funções polinomiais é muito intuitivo para aproximar com precisão uma função *a priori* não conhecida. Podemos entender que um grau muito grande no polinômio aumenta o tempo de cálculo e a precisão da aproximação. Os números manipulados são do tamanho 100^j com j sendo o grau escolhido. O melhor compromisso, no conjunto precisão-tempo computacional, é obtido com os graus entre 3 e 5.

Para conferir os valores numéricos, uma call sem dividendos será usada. Sabemos que uma opção de compra americana sem dividendos tem o mesmo valor que uma opção de compra européia, porque nunca é ótimo o seu exercício antecipado. Ao contrário, o valor da opção de venda americana sem dividendos é maior que a opção de venda européia.

Usando a definição da opção (call) e do título objeto seguinte e com os parâmetros padrões:

Preço do ativo no início	$S=100$
Strike da opção	$k=105$
Tempo à expiração (ano)	$T=1$
Taxa livre de risco	$r=5\%$
Volatilidade do ativo	$v=20\%$
Dividend Yield	$y=0$
Número de datas de exercício	$m=100$
Grau polinomial	$g=2$

5.4.1 Análise de sensibilidade no grau polinomial

O ano de exercício da opção foi dividido em 50 datas diferentes de exercício para o cálculo. A média e o desvio-padrão são calculados sobre 10 valores calculados pelo programa computacional:

Call Grau polinomial	Número de simulações Número de datas de exercício	10	100	1000	2000	5000
		10	50	50	50	50
2	μ	9,9365	8,5305	8,0952	8,0264	8,0121
	σ	3,0217	0,6224	0,3667	0,2761	0,1266
3	μ	10,5401	9,2395	7,9133	7,9442	7,9845
	σ	2,4399	0,9143	0,2541	0,1223	0,0767
4	μ	9,8056	8,8637	8,2256	8,0576	8,0098
	σ	2,2185	1,0053	0,2519	0,1228	0,0643
5	μ	10,8438	9,2781	8,0201	7,9595	8,0078
	σ	2,3660	0,5943	0,2522	0,1365	0,0621

Tabela 18 – Valores das opções – Sensibilidade em grau polinomial

Geralmente, o desvio-padrão cai com o aumento do grau polinomial da regressão. Uma regressão polinomial com alto grau aumenta a precisão do cálculo do valor da opção, mas aumenta também o tempo computacional.

No retângulo marcado foi encontrado problemas de aproximação no cálculo. Esses parâmetros para a simulação não permitem uma regressão precisa, as matrizes são quase singulares (números aproximados da ordem 10^{-6}). O grau 2 pode ser usado assim como o grau 3, sem problemas de aproximação nem grande tempo computacional. O grau 2 será usado nos outros cálculos, seguindo ao método original de "Longstaff Schwartz" (2001).

O preço da opção de compra americana obtida pelo método binomial é de 0,80207, e da opção de compra europeia sem dividendos (do mesmo valor) dado pela fórmula de *Black-Scholes* é de 0,80213, a comparar com os resultados da tabela acima.

5.4.2 Análise de sensibilidade no número de simulações

O ano foi dividido em 100 datas de exercício, ou seja, um valor do ativo simulado a cada 3 dias aproximadamente.

A média e desvio-padrão são calculados sobre 10 valores calculados pelo programa computacional:

Número de simulações	Opção de compra		Opção de venda	
	μ	σ	μ	σ
500	7,9957	0,5607	8,8880	0,2495
1000	8,1697	0,3114	8,8533	0,1817
5000	7,9348	0,1859	8,7373	0,0796
10000	7,9865	0,0455	8,7354	0,0332
20000	8,0187	0,0104	8,7397	0,0123

Tabela 19 – Valores das opções – Sensibilidade em relação ao número de simulações

Com 100 datas de exercícios simuladas, a discretização escolhida permite aproximar com precisão a característica da opção americana de ser exercida em qualquer momento. Assim, em média, o valor calculado fica próximo do valor real.

Aumentando o número de simulações, o desvio-padrão cai, tornando a simulação mais precisa, até encontrar o valor teórico com 20 000 simulações. Usando um computador com grande capacidade de cálculo, esse algoritmo pode ser usado com 50000 simulações e 365 datas de exercícios proporcionando um resultado muito preciso.

O gráfico pode ser visto no anexo 3.4.

5.4.3 Análise de sensibilidade no número de datas de exercício

Efetuada 5000 simulações para conservar a precisão do cálculo, podemos estudar a convergência da simulação com o número de datas de exercício variando de 10 a 150. A média e desvio-padrão são estimados sobre 10 valores calculados pelo programa:

Número de datas de exercício	Opção de compra		Opção de venda	
	μ	σ	μ	σ
10	7,3912	0,1946	8,5059	0,0648
20	7,7398	0,1552	8,6237	0,0319
50	7,9418	0,1623	8,6936	0,0698
100	7,9855	0,1476	8,7022	0,0556
150	8,0254	0,1245	8,7276	0,0678

Tabela 20 – Valores das opções – Sensibilidade em relação ao número de datas de exercício simuladas

Variando somente o número de datas de exercício, podemos ver a convergência da simulação para o valor teórico da opção americana. Usando um número de datas de exercício baixo, 10 e 20, os valores da opção de compra e de venda são subestimados. A característica da opção de poder ser exercida em qualquer momento é mal simulada. Logo, a opção assim simulada se torna menos valiosa. Aumentando esse número, a simulação se aproxima em média do valor real da opção americana, o exercício antecipado é simulado de uma forma mais próxima da realidade.

Os parâmetros básicos que funcionam sem aproximação de cálculo e que realizam uma boa estimativa do valor da opção são: "10000 simulações, 150 datas de exercícios, grau 2" para $T=1$, seja um ano. Quanto maior for o número de simulações e o número de datas de exercício, maior será a precisão do resultado.

O gráfico pode ser visto no anexo 3.5.

6

Opção asset-or-nothing

6.1

Definição

A opção "*asset-or-nothing*" paga o preço da ação no instante final, se a opção expira "*in-the-money*". Caso contrário, o payoff é zero.

Sendo S o preço no vencimento da ação e k o strike, temos que:

$$\text{PayoffCall} = \begin{cases} S & S > k \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$
$$\text{PayoffPut} = \begin{cases} S & S < k \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Nesse tipo de opção, o preço de exercício não entra no cálculo do payoff, mas somente na condição de exercício da opção, (opção "*in-the-money*" ou "*out-of-the-money*"). Pagando o preço da ação se for expirar "*in-the-money*", essa opção tem um preço diretamente dependente do valor do ativo, sendo muito mais caro se o ativo vale 100 do que se o ativo vale 10 .

Logicamente, comprar a call e a put com mesmos parâmetros na mesma ação é igual a comprar o ativo. A soma das opções de compra e de venda vale o valor esperado do ativo no vencimento, descontado ao tempo inicial.

6.2

Exemplo numérico

Considerando uma opção com os seguintes parâmetros:

Preço do ativo no início	$S=100$
Strike da opção	$k=100$
Tempo à expiração	$T=1$
Taxa livre de risco	$r=5\%$
Volatilidade do ativo	$v=20\%$
Dividend Yield	$y=0$

Exemplo da opção de compra:

No vencimento, o preço do ativo $S = 108,34$.

A opção de compra expira "*in-the-money*", o preço final é maior que o preço de exercício e a opção pode ser exercida. Essa opção paga o preço final do ativo, ou seja, 108,34.

Exemplo da opção de venda:

No vencimento, o preço do ativo: $S = 94,15$.

A opção venda com strike $k = 100$ expira "*in-the-money*", o preço final é menor que o preço de exercício e a opção paga o preço final do ativo, ou seja, 94,15.

O preço desse tipo de opção deve ser alto, devido ao payoff bastante alto da opção quando ela é exercida.

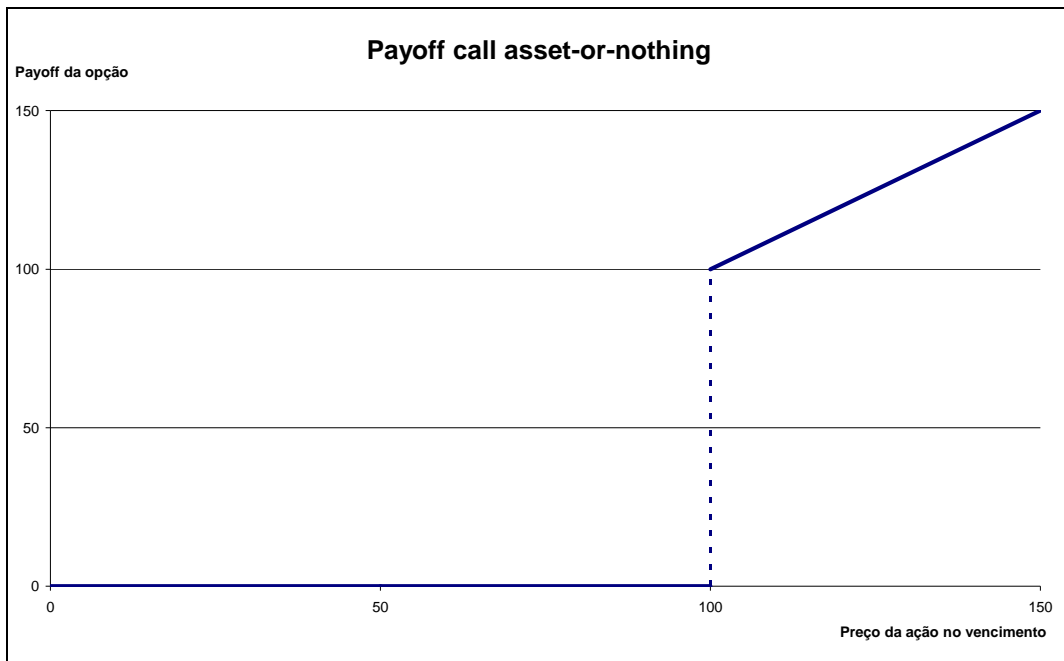


Figura 9 – Payoff da opção de compra “asset-or-nothing”

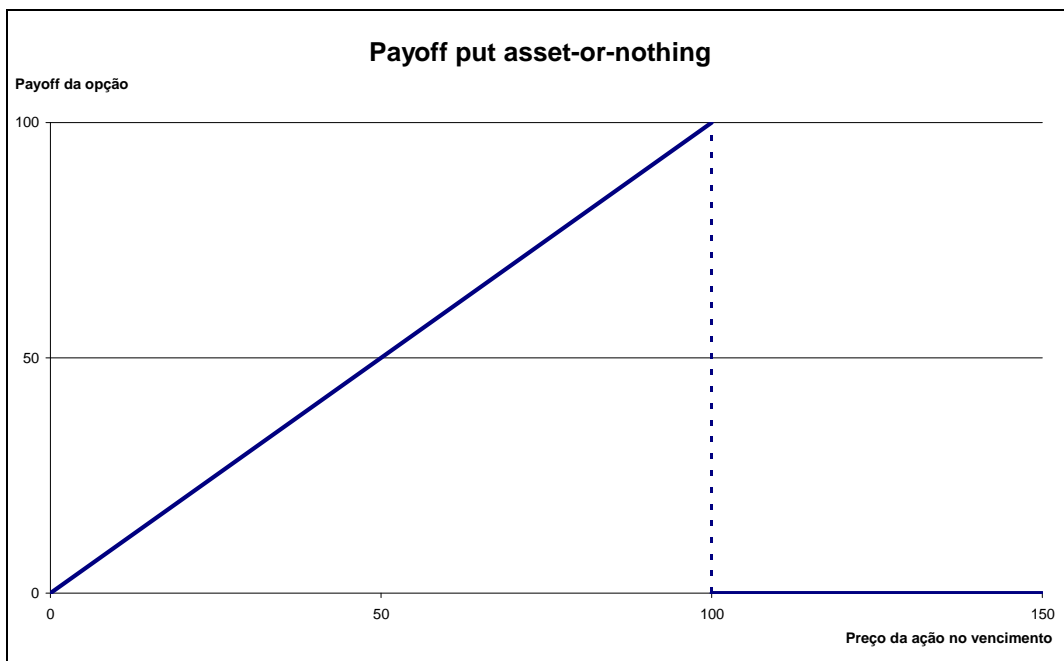


Figura 10 – Payoff da opção de venda “asset-or-nothing”

6.3 Análise de sensibilidade

Os parâmetros padrões da opção usados pelas análises de sensibilidade são os seguintes:

Preço do ativo no início	S=100
Strike da opção	k=100
Tempo a expiração (ano)	T=1
Taxa livre de risco	r=5%
Volatilidade do ativo	v=20%
Dividend Yield	y=0

6.3.1 Sensibilidade em mudança no número de simulações

A média é calculada sobre 10 valores dados pelo programa computacional com os parâmetros dados no quadro acima:

Número de simulações	Call		Put	
	μ	σ	μ	σ
100	63,7962	2,4765	36,3159	2,3407
1000	63,8615	0,6542	36,0911	0,7372
10 000	63,6591	0,2193	36,3387	0,2305
100 000	65,6572	0,0423	36,3398	0,0469
1 000 000	65,6585	0,0216	36,3201	0,0229

Tabela 21 – Valores das opções – Sensibilidade em relação ao número de simulações

Observamos uma convergência do resultado para os valores médios das opções de compra e de venda no aumento do número de simulações. O desvio-padrão cai também, mostrando a regularidade dos valores simulados e, portanto, a convergência.

Com 100 000 simulações, a precisão já é boa, e usa-se um tempo computacional muito curto de 3 segundos.

6.3.2 Sensibilidade em mudança no valor do preço de exercício

A simulação foi feita usando 100 000 simulações:

Preço de exercício	Opção de compra	Opção de venda	Soma
75	96,3526	3,6405	99,99
80	92,7068	7,3176	100,02
85	87,7330	12,2583	99,99
90	81,0117	18,9845	100,00
95	72,7793	27,2080	99,99
100	63,6761	36,3333	100,01
105	54,2766	45,7247	100,00
110	44,6566	55,3428	100,00
115	36,4091	63,6060	100,02
120	28,5758	71,4112	99,99
125	22,0071	77,9829	99,99

Tabela 22 – Valores das opções – Sensibilidade em relação ao valor do preço de exercício

Logicamente, o preço da call sobe quando o preço do strike desce. A opção tem mais chances de expirar "in-the-money". A variação contrária ocorre com o preço da put. Independentemente do valor do strike, podemos ver que a soma das opções de compra e de venda vale sempre o mesmo valor. Esse valor é o valor esperado do ativo no vencimento, descontado ao momento inicial. Se a ação paga dividendos, o *drift* da simulação diminui, (Ver anexo 1.5) e logicamente o valor esperado. A soma call-put resultante é menor.

Mudando todos os parâmetros:

Preço do ativo no início	S=105
Strike da opção	k=100
Tempo à expiração (ano)	T=2
Taxa livre de risco	r=10%
Volatilidade do ativo	v=20%
Dividend Yield	y=5%

Preço de exercício	Opção de compra	Opção de venda	Soma
90	80,8843	14,1267	95,00
95	76,302	18,6884	94,99
100	71,0460	23,9233	94,97
105	65,5180	29,5262	95,04

O gráfico pode ser visto no anexo 3.6.

6.3.3 Sensibilidade em relação a mudanças na volatilidade

A simulação foi feita usando 100 000 simulações:

Volatilidade	Call	Put	Volatilidade	Call	Put
5	84,9382	15,0597	53	64,2179	35,7855
9	72,6473	27,3551	57	64,5031	35,5427
13	67,4350	32,5695	61	65,1531	34,9532
17	64,8025	35,1795	65	65,9485	34,2689
21	63,4484	36,5354	69	66,3498	33,7333
25	62,7582	37,2398	73	66,5567	33,2160
29	62,4863	37,5238	77	67,5964	32,5160
33	62,3220	37,6277	81	68,2491	32,0284
37	62,5118	37,4923	85	68,8678	31,3489
41	62,7372	37,2603	89	68,8718	30,9743
45	63,0016	36,9062	93	69,9389	30,2524
49	63,3459	36,5419	97	70,7746	29,4513

Tabela 23 – Valores das opções - Sensibilidade em relação a mudanças na volatilidade

Para volatilidades baixas em torno de 5%, a opção de compra aumenta e de venda diminui.

Quando a volatilidade cai, o *drift* da simulação aumenta, aumentando do mesmo modo o valor esperado no vencimento. Com baixa volatilidade, os valores simulados ficam mais perto do valor esperado. (ver anexo 1.7). O exercício da opção de compra fica mais provável, ela então fica mais cara.

Para esses parâmetros, esse tipo de opção tem pouca sensibilidade para volatilidades na faixa 20-60, o preço fica quase constante em torno de 63 para a call e 37 para a put. A avaliação desse parâmetro com precisão para apreçar corretamente a opção é muito importante para valores baixos e altos, que fazem variar o preço da opção muito mais que nos valores médios.

O gráfico pode ser visto no anexo 3.7.

6.3.4 Sensibilidade em relação a mudanças na taxa livre de risco

A simulação foi feita usando 100 000 simulações:

Taxa livre de risco (%)	Call	Put
1	55,9711	44,0242
2	57,9751	42,0399
3	59,8751	40,1175
4	61,6730	38,3221
5	63,6474	36,3441
6	65,6085	34,3821
7	67,2280	32,7521
8	69,1068	30,8827
9	70,9712	29,0385
10	72,4873	27,5041
11	74,2463	25,7649

Tabela 24 – Valores das opções – Sensibilidade em relação a mudanças na taxa livre de risco

As variações dos preços da opção de compra e de venda seguem uma relação linear em relação às mudanças na taxa livre de risco. A opção de compra aumenta junto com a taxa livre de risco porque a tendência dos preços simulados é de subir, deixando o exercício dessa opção mais provável. A opção de venda cai pela mesma razão, sendo o exercício da opção menos provável.

O gráfico pode ser visto no anexo 3.9.

7 Opção cash-or-nothing

7.1 Definição

A opção "*cash-or-nothing*" paga um prêmio definido, se a opção expira "*in-the-money*" no vencimento. Caso contrário, o payoff é zero.

Sendo P o prêmio definido na opção e k o strike:

$$\text{PayoffCall} = \begin{cases} P & S > k \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$\text{PayoffPut} = \begin{cases} P & S < k \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Nesse tipo de opção, o preço de exercício não entra no cálculo do payoff, mas somente na condição de exercício da opção. (opção "*in-the-money*" ou "*out-of-the-money*"). O valor do prêmio logicamente influi sobre o preço da opção no momento da compra, seja uma opção de compra ou de venda, sendo mais alto quanto maior for o prêmio.

7.2 Exemplo numérico

Seja uma opção com os parâmetros seguintes:

Preço do ativo no início	$S=100$
Strike da opção	$k=100$
Prêmio	$P=40$
Tempo à expiração	$T=1$
Taxa livre de risco	$r=5\%$
Volatilidade do ativo	$v=20\%$
Dividend Yield	$y=0$

Exemplo da opção de compra:

No vencimento, o preço do ativo $S = 113,21$.

A opção de compra expira "*in-the-money*", sendo o preço final maior que o strike, podendo ser exercida. Essa opção paga um prêmio de 40.

Exemplo da opção de venda:

No vencimento, o preço do ativo $S = 87,49$.

A opção de venda com strike $k = 100$ expira "*in-the-money*", sendo preço final menor que o strike e pagando o prêmio de 40.

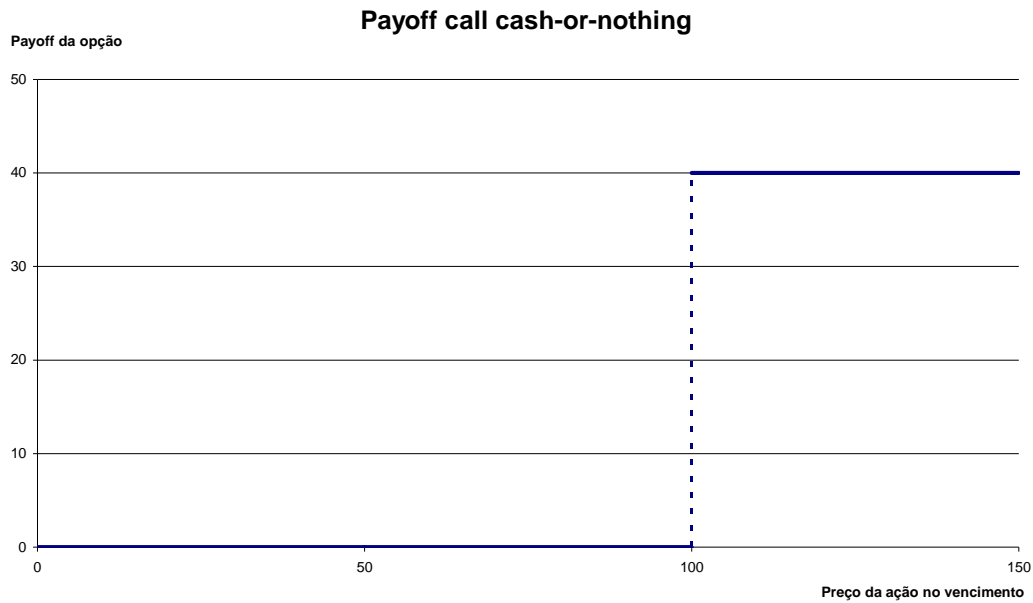


Figura 11 – Payoff da opção de compra “cash-or-nothing”

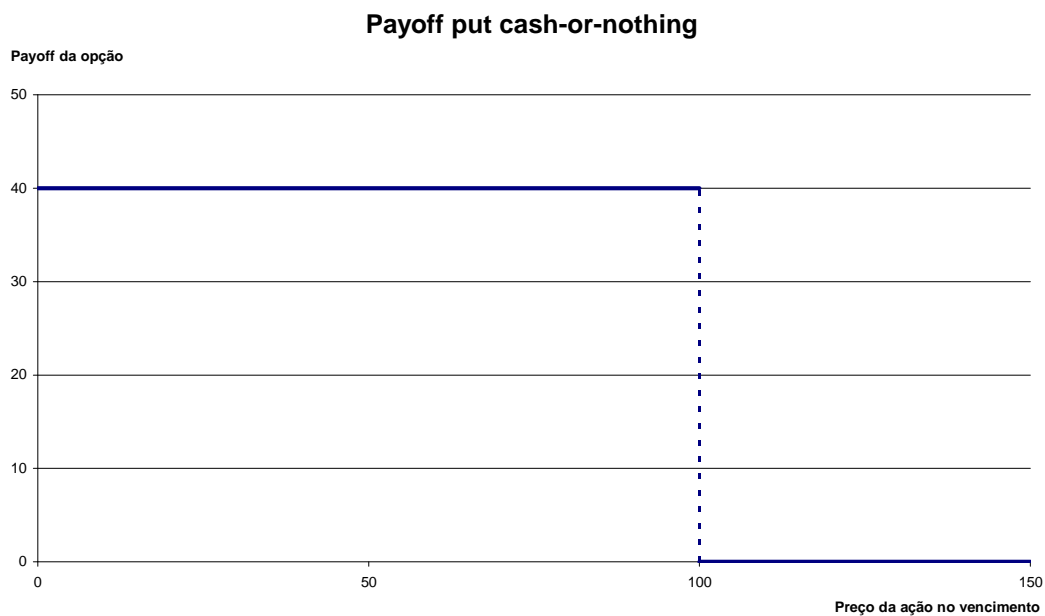


Figura 12 – Payoff da opção de venda “cash-or-nothing”

7.3 Formula exata de cálculo

Reiner & Rubinstein (1991) mostraram que apreçar esse tipo de opção pode ser feito usando a trabalho de Black & Scholes:

Usando

$$d = \frac{\ln\left(\frac{S}{k}\right) + \left(r - y - \frac{v^2}{2}\right).T}{v.\sqrt{T}}$$

$$\text{PreçoCall} = P \times e^{-r.T} \times N(d)$$

$$\text{PreçoPut} = P \times e^{-r.T} \times N(-d)$$

O valor da opção é o valor presente do payoff da opção (prêmio), multiplicado pela probabilidade de exercício da opção no vencimento. (no mundo neutro ao risco). Independentemente dos outros parâmetros, podemos ver que a soma das opções de compra e de venda é constante.

Usando as formulas exatas:

$$\text{PreçoCall} + \text{PreçoPut} = P \times e^{-r.T} \times N(d) + P \times e^{-r.T} \times N(-d)$$

Sabemos que para uma distribuição normal centrada padronizada:

$$N(-d) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} \int_{-\infty}^{-d} e^{-\frac{z^2}{2}} .dZ$$

E, conseqüentemente, pela simetria da função integrada:

$$N(-d) + N(d) = 1$$

Então:

$$\text{PreçoCall} + \text{PreçoPut} = P \times e^{-r.T}$$

7.4 Análise de sensibilidade

Os parâmetros padrões da opção usados pelas análises de sensibilidade são:

Preço do ativo no início	S=100
Strike da opção	k=100
Prêmio	P=40
Tempo à expiração (ano)	T=1
Taxa livre de risco	r=5%
Volatilidade do ativo	v=20%
Dividend Yield	y=0

7.4.1 Sensibilidade em mudança no número de simulações

A média é calculada sobre 10 valores dados pelo programa computacional com os parâmetros dados no quadro acima:

Numero de simulações	Opção de compra		Opção de venda	
	μ	σ	μ	σ
100	21,4978	1,1093	17.1982	1.4321
1000	21,3912	0,3043	16.6579	0.2564
10 000	21,2448	0,1041	16.8044	0.1041
100 000	21,2945	0,0343	16.7547	0.0403
1 000 000	21,2935	0,0115	16.7556	0.0123
Preço teórico	21,2930		16,7562	

Tabela 25 – Valores das opções – Sensibilidade em relação ao número de simulações

Observamos uma convergência em média do resultado para o valor teórico, aumentando o número de simulações. A queda do desvio-padrão prova que o preço simulado fica perto do valor teórico e que esse modelo converge para a solução teórica.

7.4.2 Sensibilidade em mudança no valor do strike

A simulação foi feita usando 100 000 simulações:

Preços de exercício	Opção de compra	Opção de venda
75	35,9070	2,1422
80	34,2176	3,8316
85	31,6269	6,4223
90	28,5449	9,5043
95	25,1094	12,9398
100	21,3182	16,7310
105	17,6156	20,4335
110	14,1356	23,9135
115	11,0289	27,0202
120	8,4739	29,5752
125	6,4063	31,6428

Tabela 26 – Valores das opções – Sensibilidade em relação ao valor do preço de exercício

O valor da opção é bastante sensível a mudanças do preço de exercício. Como visto acima, a soma das opções de compra e de venda fica constante.

Quando o strike cai para zero, a opção de compra tem mais probabilidade de estar "in-the-money".

Se $k \rightarrow 0$, então $\ln(S/k) \rightarrow \infty$. Conseqüentemente, $d \rightarrow \infty$, e

$N(d) \rightarrow 1$. O valor é: $\text{PreçoCall} = P \times e^{-rT}$.

Ao contrário, quando o strike tende ao infinito, a opção de venda tem mais chances de ser exercida:

Se $k \rightarrow \infty$, então $\ln(S/k) \rightarrow -\infty$. Conseqüentemente, $d \rightarrow -\infty$, e

$N(d) \rightarrow 0$. O valor é: $\text{PreçoPut} = P \times e^{-rT}$.

Uma simetria das curvas pode ser vista no gráfico dado no anexo 3.9, com valor mínimo 0 e máximo $P \times e^{-rT}$.

7.4.3 Sensibilidade em relação a mudanças na volatilidade

A simulação foi feita usando 100 000 simulações:

Volatilidade	Compra	Venda	Volatilidade	Compra	Venda
5	31,7893	6,2599	53	16,4395	21,6096
9	26,3898	11,6594	57	16,0393	22,0099
13	23,7480	14,3012	61	15,6687	22,3805
17	22,1754	15,8737	65	15,2684	22,7808
21	21,0633	16,9859	69	14,9408	23,1084
25	20,1390	17,9101	73	14,6257	23,4235
29	19,4378	18,6114	77	14,2072	23,8420
33	18,8256	19,2236	81	13,9302	24,1190
37	18,2526	19,7966	85	13,5033	24,5459
41	17,7903	20,2589	89	13,3613	24,6878
45	17,2937	20,7554	93	12,9439	25,1052
49	16,8493	21,1999	97	12,6765	25,3427

Tabela 27 – Valores das opções - Sensibilidade em relação a mudanças na volatilidade

Para esses parâmetros escolhidos, a volatilidade influi sobre o preço da opção. A variação do preço fica mais importante quanto menor for o valor da volatilidade, especialmente para os valores fracos de volatilidade (em torno de 5%). Depois do valor 20, a relação entre volatilidade e preço é linear, com uma boa aproximação.

Da mesma forma, a soma call-put fica constante, pois as curvas são simétricas.

O gráfico pode ser visto no anexo 3.10.

7.4.4

Sensibilidade em relação a mudanças na taxa livre de risco

A simulação foi feita usando 100 000 simulações:

Taxa livre de risco (%)	Opção de compra	Opção de venda
1	18,9998	20,6021
2	19,6040	19,6040
3	20,1666	18,6512
4	20,7388	17,6927
5	21,2177	16,8314
6	21,7713	15,8992
7	22,3182	14,9776
8	22,8453	14,0794
9	23,2705	13,2867
10	23,7154	12,4781
11	24,0861	11,7473

Tabela 28 – Valores das opções – Sensibilidade em relação a mudanças na taxa livre de risco

O aumento da taxa livre de risco aumenta o preço da call e diminui o preço da put. O *drift* na simulação dos preços (Ver anexo 1.5) aumenta o valor esperado médio no tempo.

Aumentar a taxa livre de risco aumenta o *drift*, e como o strike fica constante, os cenários do exercício da call ficam mais prováveis, e os da put menos prováveis, explicando a evolução dos preços.

O gráfico pode ser visto no anexo 3.11.

8

Opção lookback

8.1

Definição

A opção *lookback* foi definida originalmente para resolver o problema da saída ótima. (Heynen & Kat 1994). Dependendo das variações do ativo básico durante o período de tempo da opção, existe um momento ótimo para exercer uma opção de tipo americano: o momento que maximiza o retorno da opção. Mas, se esse momento ocorre antes do vencimento da opção, podemos esperar que no tempo restante aconteça um aumento no retorno da opção, se o cenário for favorável. Sempre tem uma chance de se ganhar mais.

Esse tipo de opção depende da evolução do preço do ativo objeto no período, sendo que os valores anteriores do ativo no período entram em consideração no cálculo do payoff da opção. Existem dois tipos de opção *lookback* diferentes.

8.1.1

Fixed strike

A opção *lookback* com "*fixed strike*" permite resolver o problema da saída ótima, sendo que o payoff dessa opção está definido por:

$$\text{PayoffCall} = \text{Max}(S_{\text{max}} - k, 0)$$

$$\text{PayoffPut} = \text{Max}(k - S_{\text{min}}, 0)$$

Sempre o payoff é maximizado, como se a opção fosse exercida no momento ótimo. S_{max} representa o valor máximo do ativo básico durante o período total de exercício da opção, e S_{min} o mínimo, sendo que esses valores que maximizam o retorno no período da opção de compra e da opção de venda, acabando com o problema da saída ótima.

8.1.2 Floating Strike

A opção *lookback* com "*floating strike*" funciona um pouco diferentemente. Os valores usados para o cálculo do payoff são o preço do ativo básico ao vencimento S_f , e o valor mínimo S_{\min} e máximo S_{\max} do título no período para definir o strike final. Assim:

$$\text{PayoffCall} = \text{Max}(S_f - S_{\min}, 0)$$

$$\text{PayoffPut} = \text{Max}(S_{\max} - S_f, 0)$$

Usando o movimento dos preços para redefinir o valor do strike, a opção com "*floating strike*" permite sempre poder exercer a opção até o vencimento. Por exemplo, para a opção de compra quando o preço cai, o strike cai também, e a opção fica "*at-the-money*" até o preço subir de novo.

8.2 Exemplo numérico

Sendo uma opção *lookback* com parâmetros:

Preço do ativo no início	S=100
Strike da opção	k=100
Tempo à expiração	T=1
Taxa livre de risco	r=5%
Volatilidade do ativo	v=20%
Dividend Yield	y=0

O tempo de um ano será dividido em 365 dias, sendo que o programa realizará uma simulação de preço para cada dia. Logo, para "um" caminho simulado temos o seguinte gráfico:

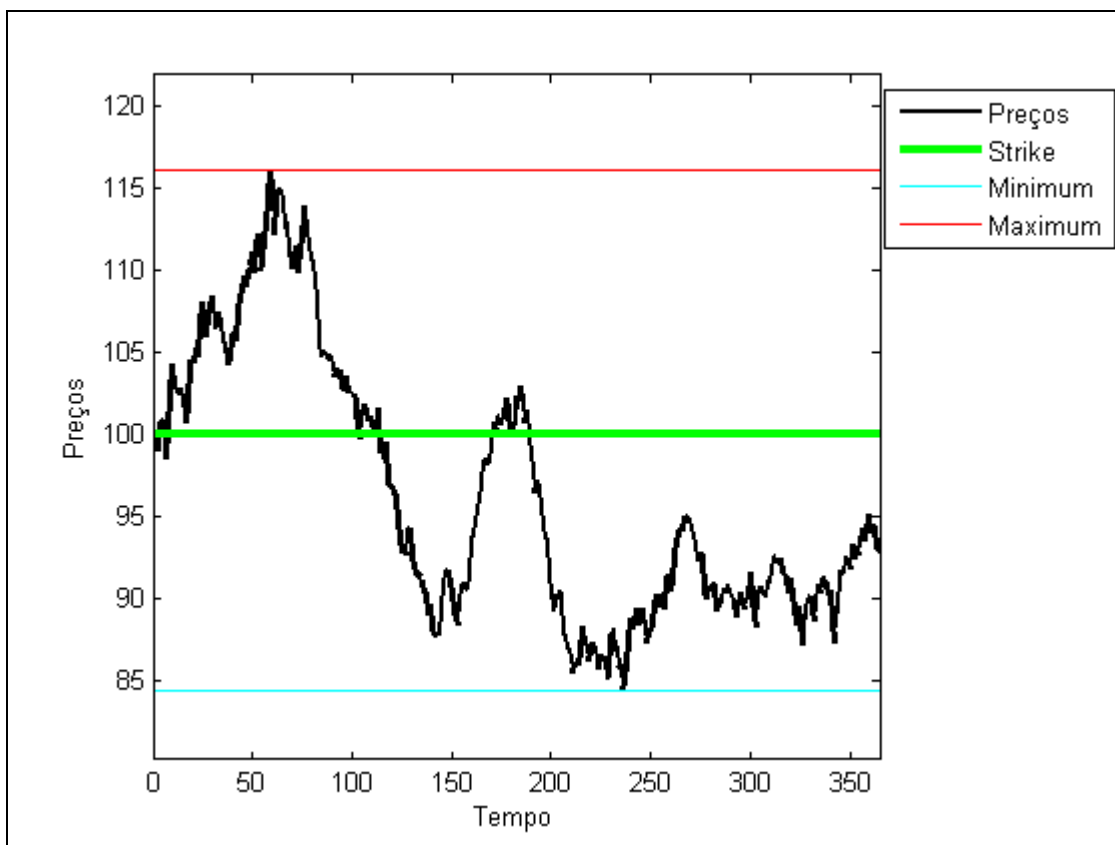


Figura 13 – Gráfico de simulação do preço do ativo objeto no ano com máximo e mínimo

Os valores importantes dessa simulação são:

Preço final do ativo	S_f	= 92,82
Strike da opção	k	= 100
Valor mínimo do ativo no período	S_{\min}	= 84,48
Valor máximo do título no período	S_{\max}	= 116,02

Pelas formulas do cálculo do payoff da opção, temos os seguintes valores para essa simulação:

Opção "*fixed strike*":

Payoff da opção de compra	16,02
Payoff da opção de venda	15,52

Opção "*floating strike*":

Payoff da opção de compra	8,34
Payoff da opção de venda	23,20

Realizando varias simulações de preços, calculando a média e trazendo para o valor presente:

$$MediaCall = \frac{\sum_{i=1}^n PayoffCall}{n}$$

$$PreçoCall = MédiaCall \times e^{-r.T}$$

$$MediaPut = \frac{\sum_{i=1}^n PayoffPut}{n}$$

$$PreçoPut = MédiaPut \times e^{-r.T}$$

Assim com o método de Monte-Carlo podemos encontrar o preço dessa opção.

8.3 Análise de sensibilidade: "fixed strike"

Os parâmetros padrões da opção usados pelas análises de sensibilidade são:

Preços do ativo no início	S=100
Strike da opção	k=100
Tempo a expiração	T=1
Taxa livre de risco	r=5%
Volatilidade do ativo	v=20%
Dividend Yield	y=0
Número de datas de exercício	m=365

O ano foi dividido em 365 dias. A simulação calcula um preço para cada dia.

8.3.1

Sensibilidade em mudança no número de simulações

Número de simulações	Preço da opção de compra	Preço da opção de venda
100	18,12	11,23
500	18,89	11,79
1000	18,35	11,85
5000	18,56	11,82
10000	18,63	11,83
20000	18,61	11,83

Tabela 29 – Valores das opções – Convergência com o aumento de número de simulações

Podemos ver que usando a simulação e, a partir de 10 000 simulações, os resultados começam a convergir para o valor mais provável, sendo 18,61 para a opção de compra e 11,83 para a opção de venda.

Para ver a distribuição dos resultados da simulação foi simulado 10 vezes o preço da opção. Assumindo a distribuição normal, podemos calcular a média e o desvio-padrão dos valores encontrados pelo método de Monte-Carlo.

Número de simulações	Opção de compra		Opção de venda	
	μ	σ	μ	σ
100	18,03	1,026	10,90	0,548
500	18,33	0,378	12,02	0,213
1000	18,78	0,245	11,90	0,132
5000	18,57	0,133	11,84	0,069
10000	18,64	0,081	11,82	0,043
20000	18,62	0,071	11,83	0,038

Tabela 30 – Valores das opções – Sensibilidade em relação ao número de simulações

O desvio-padrão cai com o aumento do número de simulações usadas. A convergência e a precisão no resultado final são obtidas com o aumento do número de simulações no método de Monte-Carlo.

8.3.2 Sensibilidade em mudança no preço de exercício

A simulação foi feita usando 10 000 simulações:

Preços do Strike	Call	Put
90	28,0585	4,8342
92	26,1565	5,8890
94	24,1868	7,1336
96	22,1538	8,4447
98	20,2818	10,0118
100	18,6524	11,8350
102	16,6934	13,7452
104	15,0614	15,6714
106	13,5147	17,5684
108	11,8773	19,3521
110	10,6462	21,3048

Tabela 31 – Valores das opções – Sensibilidade em relação ao valor do preço de exercício

Quando o strike cai, mais cara fica a opção de compra, usando o mesmo preço no instante inicial de 100. A opção de compra fica mais "*deep-in-the-money*" quando o preço de exercício cai, e as chances de dar um payoff positivo aumentam. Acontece exatamente o contrário com uma opção de venda que tenha os mesmos parâmetros.

Um valor de 18,65 para uma opção de compra com preço de exercício igual a 100 quer dizer que com os parâmetros do título (volatilidade de 20%) e da taxa livre de risco (5%), a expectativa média descontada do valor do título base é de atingir $100 + 18,65 = 118,65$ no período de um ano, e de cair em média até $100 - 11,83 = 88,17$ no mesmo período.

O gráfico pode ser visto no anexo 3.12.

8.3.3 Sensibilidade em relação a mudanças na volatilidade

A simulação foi feita usando 10 000 simulações:

Volatilidade (%)	Call	Put
5	6,8244	1,8494
9	9,7192	4,5068
13	12,8927	7,2404
17	15,9697	9,8400
21	19,2950	12,4766
25	22,6075	15,0130
29	25,9995	17,5361
33	29,9981	20,0542
37	33,3215	22,4543
41	36,8406	24,7475
45	40,6552	27,0946

Tabela 32 – Valores das opções - Sensibilidade em relação a mudanças na volatilidade

Quando a volatilidade aumenta, os valores extremos possíveis do título base são mais distantes do preço no instante inicial. As variações têm mais liberdade. O preço da opção de compra aumenta logicamente com a volatilidade, tendo um valor máximo esperado mais alto, e o preço da put aumenta, obtendo-se um valor mínimo esperado mais baixo.

O gráfico pode ser visto no anexo 3.13.

8.3.4 Sensibilidade em relação à mudança na taxa livre de risco

A simulação foi feita usando 10 000 simulações:

Taxa livre de risco (%)	Call	Put
1	16,7647	13,9288
2	17,0880	13,3393
3	17,5783	12,8441
4	18,0015	12,3294
5	18,5301	11,8620
6	18,9709	11,3801
7	19,3932	10,9038
8	19,7657	10,3840
9	20,4768	10,0723
10	20,8929	9,6785
11	21,2034	9,2062

Tabela 33 – Valores das opções - Sensibilidade em relação a mudanças na taxa livre de risco

Com o aumento da taxa livre de risco, o *drift* da simulação aumenta conseqüentemente. (Ver anexo 1.5). O valor esperado médio sobe, quando o preço de exercício da opção fica o mesmo. Assim, o preço da opção de compra sobe, porque fica mais provável o cenário favorável (preço acima do preço de exercício), e a opção de venda desce (preço acima do preço de exercício não favorável para o exercício).

O gráfico pode ser visto no anexo 3.14.

8.4 Análise de sensibilidade: "floating strike"

Os parâmetros padrões da opção usados pelas análises de sensibilidade são:

Preço do ativo no início	S=100
Strike da opção	k=100
Tempo à expiração	T=1
Taxa livre de risco	r=5%
Volatilidade do ativo	v=20%
Dividend Yield	y=0
Número de datas de exercício	m=365

O ano foi dividido em 365 dias. A simulação calcula um preço para cada dia.

8.4.1 Sensibilidade em mudança no número de simulações

Exemplo de convergência para diferentes números de simulações.

Número de simulações	Preço do Call	Preço do Put
100	17,1007	13,9216
500	16,9609	13,6160
1000	16,3762	13,4141
5000	16,7773	13,6443
10000	16,7184	13,6350
20000	16,6913	13,5656

Tabela 34 – Valores das opções – Convergência com o aumento de número de simulações

Para ver a distribuição dos resultados da simulação foi simulado 10 vezes o preço da opção. Assumindo uma distribuição normal, podemos calcular a média e o desvio-padrão dos valores estimados pelo método de Monte-Carlo.

Número de simulações	Call		Put	
	μ	σ	μ	σ
100	17,0028	0,6337	13,8100	0,5332
500	16,6660	0,3128	13,5610	0,2646
1000	16,8552	0,1671	13,6614	0,1256
5000	16,7048	0,1165	13,5800	0,0809
10000	16,7146	0,1072	13,6086	0,0686
20000	16,7120	0,0897	13,6050	0,0502

Tabela 35 – Valores das opções – Sensibilidade em relação ao número de simulações

O desvio-padrão cai com o aumento do número de simulações usadas. A convergência no resultado final e a precisão são obtidas com o aumento do número de simulações no método de Monte-Carlo.

8.4.2

Sensibilidade em relação a mudanças na volatilidade

A simulação foi feita usando 10 000 simulações:

Volatilidade (%)	Call	Put
5	6,7562	2,0113
9	9,3233	4,7898
13	12,0100	7,9160
17	14,7835	11,2062
21	17,3430	14,4488
25	19,9548	17,8244
29	22,3924	21,3155
33	24,9255	24,7670
37	27,4355	28,5239
41	29,8233	32,0731
45	31,7375	35,6618

Tabela 36 – Valores das opções - Sensibilidade em relação a mudanças na volatilidade

Quando a volatilidade aumenta, as variações possíveis no valor do título são maiores. Os valores máximos e mínimos são mais distantes do valor do preço de exercício, e o preço das opções de compra e de venda tendem a subir. O preço das opções é muito sensível ao aumento da volatilidade. Esse parâmetro deve ser estimado com muita precisão para não errar na avaliação das opções escritas sobre esse título.

O gráfico pode ser visto no anexo 3.15.

8.4.3 Sensibilidade em relação à mudança na taxa livre de risco

A simulação foi feita usando 10 000 simulações:

Taxa livre de risco (%)	Call	Put
1	14,9099	15,6415
2	15,3993	15,2367
3	15,7111	14,5810
4	16,2527	14,0809
5	16,5808	13,5249
6	17,1904	13,1368
7	17,6836	12,7113
8	18,1337	12,2047
9	18,6915	11,8223
10	18,9583	11,2879
11	19,6509	10,8955

Tabela 37 – Valores das opções - Sensibilidade em relação a mudanças na taxa livre de risco

Como visto, o aumento na taxa livre de risco aumenta o valor médio esperado na simulação do preço do ativo (ver anexo 1.5). Sendo a definição do payoff dessa opção o seguinte:

$$\text{PayoffCall} = \text{Max}(S - S_{\min}, 0)$$

$$\text{PayoffPut} = \text{Max}(S_{\max} - S, 0)$$

Em média, o valor final S fica mais alto, aumentando o preço da opção de compra e abaixando o preço da opção de venda. Essa hipótese é verificada numericamente.

O gráfico pode ser visto no anexo 3.16.

9

Opção asiática

9.1

Definição

A opção asiática não usa o valor do ativo no cálculo do payoff, mas o valor médio do ativo no período de exercício da opção. Desse modo, as opções asiáticas têm menor volatilidade que as opções europeias, deixando elas menos caras. A opção asiática é uma opção "path-dependent", e a evolução do ativo na vida da opção influi no payoff dela. Essas opções são usadas com ativos "money exchange", ou ativos que têm pequeno volume negociado no mercado. Elas foram usadas pela primeira vez em 1987 pelo *Banker's Trust Tokyo* e assim ganharam o nome de "Asian option".

Podemos calcular a média de duas formas: a forma geométrica e a forma aritmética. O payoff geométrico usa a média geométrica e é dado por:

$$\text{PayoffCall} = \max\left(\left(\prod_{i=1}^n S_i\right)^{1/n} - k, 0\right) \quad \text{PayoffPut} = \max\left(k - \left(\prod_{i=1}^n S_i\right)^{1/n}, 0\right)$$

e o payoff aritmético usa a média aritmética clássica dada por:

$$\text{PayoffCall} = \max\left(\frac{\sum_{i=1}^n S_i}{n} - k, 0\right) \quad \text{PayoffPut} = \max\left(k - \frac{\sum_{i=1}^n S_i}{n}, 0\right)$$

onde os S_i são os valores consecutivos do ativo no período considerado. O método de cálculo da média está incluído como informação na definição da opção asiática.

9.2 Formula exata: forma geométrica

Kemna e Vorst (1990) conseguiram uma solução analítica para apreçar as opções asiáticas, usando a média geométrica. O ativo seguindo uma distribuição lognormal, a média geométrica segue também essa mesma distribuição, mas com parâmetros diferentes.

Com os parâmetros iniciais seguintes:

Preço do ativo no início	S
Strike da opção	k
Tempo à expiração	T
Taxa livre de risco	r
Volatilidade do ativo	v
Dividend Yield do ativo	y

$$\text{PreçoCall} = S.e^{-(r-b)T} .N(d_1) - k.e^{-rT} .N(d_2)$$

$$\text{PreçoPut} = -S.e^{-(r-b)T} .N(-d_1) + k.e^{-rT} .N(-d_2)$$

Com

$$d_1 = \frac{\ln(S/k) + (b + \frac{w^2}{2}).T}{w.\sqrt{T}} \quad d_2 = \frac{\ln(S/k) + (b - \frac{w^2}{2}).T}{w.\sqrt{T}} = d_1 - w.\sqrt{T} \text{ e}$$

$$w = \frac{v}{\sqrt{3}} \quad b = \frac{1}{2}(r - d - \frac{v^2}{6})$$

e b são os novos parâmetros da volatilidade e do *dividend yield* ajustados para o cálculo da opção asiática na forma geométrica.

9.3 Exemplo numérico

Sendo uma opção asiática com os seguintes parâmetros:

Preço do ativo no início	$S=100$
Strike da opção	$k=100$
Tempo à expiração	$T=1$
Taxa livre de risco	$r=5\%$
Volatilidade do ativo	$v=20\%$
Dividend Yield	$y=0$
Número de datas de exercício	$m=365$

O programa computacional divide o tempo total (1 ano) em 365 períodos e simula um preço para cada dia. Usando a média geométrica:

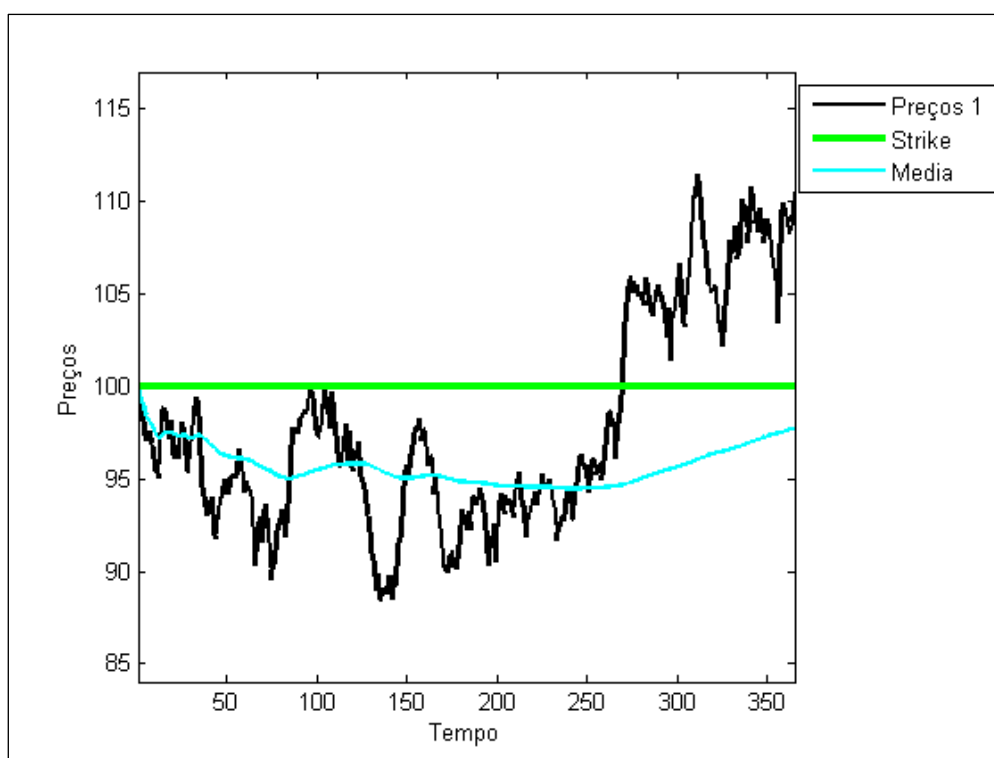


Figura 14 – Gráfico de simulação do preço do ativo objeto no ano e a média no ano

No vencimento, o preço do ativo é maior que o valor do preço de exercício. Mas em média no ano, o ativo ficou abaixo do strike. A opção asiática usando a média para calcular o payoff, dá um payoff nulo para a opção de compra e positivo para a opção de venda (média menor que o preço de exercício). Graficamente podemos ver que a volatilidade da média é menor que a do ativo. A média tem variações menores no período.

9.4 Análise de sensibilidade

Os parâmetros padrões da opção usados pelas análises de sensibilidade são:

Preço do ativo no início	S=100
Strike da opção	k=100
Tempo à expiração	T=1
Taxa livre de risco	r=5%
Volatilidade do ativo	v=20%
Dividend Yield	y=0
Número de datas de exercício	m=365

O ano foi dividido em 365 dias e a simulação calcula um preço para cada dia. As sensibilidades foram calculadas para os dois tipos de cálculo da média, geométrico e aritmético.

9.4.1 Sensibilidade em relação ao número de simulações

Número de simulações	Opção de compra				Opção de venda			
	Aritmético		Geométrico		Aritmético		Geométrico	
	μ	σ	μ	σ	μ	σ	μ	σ
100	5,89	0,56	5,27	0,44	3,43	0,40	3,26	0,34
500	5,64	0,26	5,49	0,27	3,25	0,19	3,42	0,18
1000	5,66	0,21	5,52	0,17	3,29	0,16	3,45	0,12
2000	5,75	0,14	5,66	0,11	3,38	0,13	3,47	0,09
5000	5,73	0,10	5,55	0,07	3,36	0,07	3,49	0,05
10 000	5,67	0,07	5,63	0,04	3,42	0,04	3,47	0,03

Tabela 38 – Valores das opções – Sensibilidade em relação ao número de simulações

A convergência do valor médio dos resultados existe, tanto pelo método aritmético quanto pelo geométrico. O desvio-padrão cai com o aumento do número de simulações. O método geométrico tem sempre um desvio-padrão menor que o método aritmético, para qualquer número de simulações consideradas. Os valores teóricos da opção de compra e de venda são respectivamente: 5,94 e 3,20.

9.4.2

Sensibilidade em mudança no valor do preço de exercício

A simulação foi feita usando 5 000 simulações:

Preços do Strike	Opção de compra		Opção de venda	
	Aritmético	Geométrico	Aritmético	Geométrico
90	12,58	12,38	0,65	0,76
92	11,08	10,71	1,03	1,03
94	9,49	9,40	1,38	1,56
96	8,08	7,76	1,89	1,91
98	6,94	6,61	2,61	2,64
100	5,83	5,60	3,40	3,51
102	4,80	4,50	4,28	4,33
104	3,95	3,89	5,33	5,57
106	3,12	3,03	6,43	6,64
108	2,50	2,30	7,70	7,85
110	1,80	1,79	8,97	9,24

Tabela 39 – Valores das opções – Sensibilidade em relação ao valor do preço de exercício

Os dois métodos em geral dão um resultado próximo, tanto para a opção de compra quanto para a opção de venda. Como previsto, o valor da opção de compra cai com a diminuição do preço de exercício (a opção tem maior chances de expirar *in-the-money*) e o valor da opção de venda aumenta com o aumento do preço de exercício. Esses valores das opções asiáticas são comparados com o valor da opção europeia de mesmos parâmetros na tabela seguinte:

Preço de exercício	Opção de compra	Opção de venda
90	16,74	2,33
110	6,02	10,65

Tabela 40 – Valores das opções europeias com mesmos parâmetros

A média tem uma volatilidade menor que a do ativo, as expectativas de retorno são menores e o preço das opções fica menor para o tipo asiático em comparação com o tipo europeu.

Existe uma relação quadrática entre valor do strike e preço da opção que pode ser visto no gráfico do anexo 3.17.

9.4.3 Sensibilidade em mudança na volatilidade

A simulação foi feita usando 5 000 simulações:

Volatilidade	Opção de compra		Opção de venda	
	Aritmético	Geométrico	Aritmético	Geométrico
5	2,71	2,70	0,30	0,31
9	3,43	3,36	1,02	1,03
13	4,22	4,18	1,81	1,90
17	4,93	4,93	2,55	2,76
21	5,94	5,70	3,53	3,67
25	6,81	6,46	4,42	4,59
29	7,87	7,42	5,41	5,65
33	8,77	8,11	6,27	6,57
37	9,63	8,85	7,16	7,40
41	9,97	9,70	7,72	8,56
45	11,34	9,94	8,84	9,31

Tabela 41 – Valores das opções – Sensibilidade em relação a mudanças na volatilidade

Os preços das opções de compra e de venda aumentam com o aumento da volatilidade. As variações dos valores do ativo são mais fortes, e assim a probabilidade de expirar “*in-the-money*” aumenta.

Comparando com os valores da opção européia com os mesmos parâmetros:

Volatilidade (%)	Opção de compra	Opção de venda
5	2,05	1,93
45	17,86	17,74

Tabela 42 – Valores das opções européias com mesmos parâmetros

O cálculo da média em cada data, no período considerado, deve incluir todos os preços passados. Assim, quando o tempo passa, o número de valores considerados aumenta. Cada valor tem um peso menor, e a influencia de um valor a mais fica menor. A opção asiática fica muito menos cara que a européia, para valores de volatilidade altos.

Existe uma relação linear entre volatilidade e preço da opção que pode ser visto no gráfico do anexo 3.18.

9.4.4 Sensibilidade em mudança na taxa livre de risco

A simulação foi feita usando 5 000 simulações:

Taxa livre de risco	Opção de compra		Opção de venda	
	Aritmético	Geométrico	Aritmético	Geométrico
1	4,77	4,63	4,29	4,46
2	5,12	4,94	4,12	4,26
3	5,33	5,15	3,86	3,99
4	5,56	5,32	3,61	3,72
5	5,77	5,52	3,35	3,44
6	6,10	5,81	3,20	3,26
7	6,25	5,98	2,92	2,99
8	6,55	6,30	2,76	2,85
9	6,84	6,52	2,60	2,64
10	7,15	6,77	2,45	2,45
11	7,32	6,94	2,21	2,22

Tabela 43 – Valores das opções – Sensibilidade em relação a mudanças na taxa livre de risco

O aumento da taxa livre de risco faz aumentar o preço da call e diminuir o preço da put. O *drift* da simulação aumenta com o aumento da taxa livre de risco. (ver Anexo 1.5 e 1.6).

A mudança da taxa livre de risco não influi sobre a volatilidade, e a volatilidade da média fica menor que a do ativo. De novo, os valores das opções call e put asiáticas são menores neste nível de volatilidade, comparadas com a opção europeia de mesmos parâmetros:

Taxa livre de risco (%)	Opção de compra	Opção de venda
1	6,29	10,25
11	11,05	5,11

Tabela 44 – Valores das opções europeias com mesmos parâmetros

Uma relação linear existe entre taxa livre de risco e preço da opção que pode ser visto no gráfico do anexo 3.19.

10

Opção Chooser

10.1

Definição

A opção chooser permite de **escolher em uma data definida** se a opção será **uma opção de compra ou de venda**. No início, essa opção é uma opção de compra e de venda simultaneamente. Na data t será uma opção de compra ou de venda definitivamente até o vencimento. Esse tipo de opção foi introduzido em 1990.

A opção "*simple chooser*" feita com opções européias tem o payoff seguinte:

$$\text{Chooser} = \text{Max}[C(S_t, k, T - t), P(S_t, k, T - t), t]$$

Onde

S_t é o valor do ativo no instante t , o tempo onde devemos escolher o tipo de opção, k é o strike das opções de compra e de venda, T é a data final de exercício. "C" e "P" são os valores das opções européias de compra e de venda com os parâmetros dados.

O payoff da função representa o máximo entre a opção de compra e de venda européia com data de exercício "T" calculados no instante "t" onde deverá ser escolhida a natureza da opção.

10.2 Cálculo teórico (Rubinstein)

Rubinstein (1991) mostrou o cálculo seguinte para avaliar a opção chooser:

“ y ” é o dividend yield do título (%), “ t ” é o tempo de escolha do tipo da opção, “ r ” é a taxa livre de risco (%), “ v ” a volatilidade do título.

Usando a fórmula da paridade entre as opções de compra e de venda na data “ t ”:

$$P(S_t, k, T) = C(S_t, k, T) - S_t \cdot e^{-y(T-t)} + k \cdot e^{-r(T-t)}$$

Então temos:

$$\text{Chooser} = \text{Max}[C(S_t, k, T), P(S_t, k, T), t] = C(S_t, k, T) + \text{Max}[0, k \cdot e^{-r(T-t)} - S_t \cdot e^{-y(T-t)}]$$

E finalmente:

$$\text{Chooser} = S \cdot e^{-yT} \cdot N(d_1) - k \cdot e^{-rT} \cdot N(d_1 - v \cdot \sqrt{T}) - S \cdot e^{-yT} \cdot N(-f_1) + k \cdot e^{-rT} \cdot N(-f_1 + v \cdot \sqrt{t})$$

com

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S \cdot e^{-yT}}{k \cdot e^{-rT}}\right)}{v \cdot \sqrt{T}} + \frac{1}{2} v \cdot \sqrt{T} \qquad f_1 = \frac{\ln\left(\frac{S \cdot e^{-yT}}{k \cdot e^{-rT}}\right)}{v \cdot \sqrt{t}} + \frac{1}{2} v \cdot \sqrt{t}$$

e onde $N(x)$ é a probabilidade acumulada de $-\infty$ a x , da distribuição normal centrada padronizada.

10.3 Método de Monte-Carlo

Para apreçar a opção chooser com o método de Monte-Carlo, primeiro devemos realizar a simulação de preço do ativo básico no instante "t", a seguir deve-se escolher a natureza final da opção nesse momento, simular o preço final até o instante "T" e calcular o payoff dependendo do tipo de opção escolhida.

Para escolher a natureza da opção, devemos avaliar no instante "t" com a fórmula de Black-Scholes os preços das opções de compra e de venda com data de exercício "T", e escolher a mais valiosa.

Sendo uma opção chooser com os parâmetros:

Preço do ativo no início	S=100
Strike da opção	k=100
Tempo à expiração	T=1
Taxa livre de risco	r=5%
Volatilidade do ativo	v=20%
Dividend Yield	y=0
Chooser Time	t=0.3

Usando a mesma fórmula de simulação de preço (ver Capítulo 3):

$$S_t = S_0 e^{\left(r - y - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma \cdot eps \cdot \sqrt{t}}$$

podemos achar um preço no instante "t".

- Se, no momento "t", o preço da opção de compra europeia for maior que o preço da opção de venda, a opção de compra será escolhida.

O payoff dessa simulação deverá ser: $Payoff = Max[S_T - k, 0]$, com

$$S_T = S_t e^{\left(r - y - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) + \sigma \cdot eps \cdot \sqrt{T-t}} \quad eps = N(0,1)$$

o preço no instante final simulado a partir do preço no instante "t".

- Se, no momento "t", o preço da opção de venda europeia for maior que o preço da opção de compra, a opção de venda será escolhida.

Temos: $Payoff = Max[k - S_T, 0]$ e a mesma fórmula para S_T .

10.4 Análise de sensibilidade

Os parâmetros padrões da opção usados pelas análises de sensibilidade são:

Preço do ativo no início	S=100
Strike da opção	k=100
Tempo à expiração	T=1
Taxa livre de risco	r=5%
Volatilidade do ativo	v=20%
Dividend Yield	y=0
Chooser Time	t=0.3

10.4.1 Sensibilidade em mudança no número de simulações

Calculando 10 preços consecutivamente, podemos calcular a média do preço e o desvio-padrão assumindo a distribuição normal.

Número de simulações	Preço simulado		Preço teórico	Erro médio (%)
	μ	σ		
100	12,2507	1,6978	12,7094	3,60
1000	12,4849	0,5211		1,76
10 000	12,6922	0,1459		0,13
100 000	12,7104	0,0478		0,008

Tabela 45 – Valores das opções – Sensibilidade em relação ao número de simulações

O aumento do número de simulações faz convergir o preço simulado em média para o valor teórico, o erro é de somente 0,008% quando 100 000 simulações são usadas. O desvio-padrão da distribuição dos preços simulados cai e a precisão aumenta.

10.4.2 Sensibilidade em mudança no tempo de escolha

Os cálculos são feitos com *100 000* simulações para garantir a precisão.

Tempo escolha	Preço simulado	Preço teórico	Erro (%)
<i>0,05</i>	<i>10,78</i>	<i>10,74</i>	<i>0,38</i>
<i>0,20</i>	<i>11,96</i>	<i>12,02</i>	<i>0,52</i>
<i>0,35</i>	<i>12,96</i>	<i>13,02</i>	<i>0,43</i>
<i>0,50</i>	<i>13,83</i>	<i>13,85</i>	<i>0,15</i>
<i>0,65</i>	<i>14,50</i>	<i>14,58</i>	<i>0,52</i>
<i>0,80</i>	<i>15,30</i>	<i>15,23</i>	<i>0,44</i>
<i>0,95</i>	<i>15,82</i>	<i>15,83</i>	<i>0,11</i>

Tabela 46 – Valores das opções – Sensibilidade em relação a mudanças no tempo de escolha

Aumentando o tempo de escolha e deixando os outros parâmetros fixos, a precisão fica igual. Precisamos só aumentar o número de simulações para fazer diminuir o erro.

Na simulação, o preço do ativo é simulado duas vezes. Uma vez no tempo de escolha, onde a decisão da natureza da opção será escolhida, e no instante final quando o payoff é calculado. Quanto maior for o tempo depois da escolha, maior será a incerteza no preço final. Assim, é normal ver o preço da opção chooser cair, sendo menos flexível quando o tempo de escolha diminui.

O gráfico pode ser visto no anexo 3.20.

10.4.3 Sensibilidade em relação ao preço de exercício

Os cálculos são feitos com 100 000 simulações para garantir a precisão.

Preço de exercício	Preço simulado	Preço teórico	Erro (%)
80	24,51	24,60	0,37
85	20,48	20,56	0,39
90	16,99	17,05	0,35
95	14,29	14,35	0,42
100	12,68	12,71	0,24
105	12,24	12,32	0,65
110	13,15	13,20	0,38
115	15,15	15,19	0,26
120	18,01	18,04	0,17

Tabela 47 – Valores das opções – Sensibilidade em relação ao valor do preço de exercício

A opção *chooser* é uma call e uma put no mesmo tempo até ser feita a escolha. É lógico ver o preço da opção aumentar, na diminuição e no aumento no preço do strike. Assim, com strike baixo, a parte da opção de compra se torna muito valiosa (maior chances de ficar "*in-the-money*") e a opção ganha valor (o preço aumenta). Ocorre o contrário com um preço de exercício alto e a parte put da opção.

O mínimo da opção pode ser encontrado, com o valor do preço de exercício igual ao valor esperado no vencimento da opção, valor que minimiza a opção de compra e de venda no mesmo tempo. O *drift* da simulação é dado por $Drift = \left(r - y - \frac{\sigma^2}{2} \right)$ e indica daqui ao vencimento qual é o valor esperado da simulação. (Ver anexo 1.7).

Com os parâmetros escolhidos, o *drift* vale $Drift = \left(r - y - \frac{\sigma^2}{2} \right) = 0,05 - \frac{0,2^2}{2} = 3\%$, é o valor esperado daqui a 1 ano é: $E[Preços] = 103$, sendo 100 o preço inicial.

O gráfico pode ser visto no anexo 3.21.

10.4.4 Sensibilidade em mudança na volatilidade

Os cálculos são feitos com *100 000* simulações para garantir a precisão.

Volatilidade	Preço simulado	Preço teórico	Erro (%)
5	5,33	5,32	0,10
9	6,84	6,85	0,19
13	8,88	8,85	0,33
17	11,17	11,02	1,37
21	13,18	13,27	0,68
25	15,48	15,57	0,58
29	17,94	17,89	0,28
33	20,28	20,22	0,30
37	22,44	22,56	0,53
41	24,94	24,89	0,17
45	27,29	27,23	0,22

Tabela 48 – Valores das opções – Sensibilidade em relação a mudanças na volatilidade

Quando a volatilidade aumenta, a incerteza sobre o valor futuro do ativo aumenta também. Os preços podem atingir valores mais extremos, tanto para baixo quanto para acima. Assim, o preço da opção aumenta com a volatilidade, quase linearmente para valores maiores que *13%*. O erro da simulação é muito baixo para todos os valores de volatilidade e converge para o preço teórico.

O gráfico pode ser visto no anexo 3.22.

10.4.5 Sensibilidade em relação à taxa livre de risco

Os cálculos são feitos com *100 000* simulações para garantir a precisão.

Taxa livre de risco	Preço simulado	Preço teórico	Erro (%)
<i>1</i>	<i>12,35</i>	<i>12,30</i>	<i>0,42</i>
<i>2</i>	<i>12,25</i>	<i>12,32</i>	<i>0,57</i>
<i>3</i>	<i>12,33</i>	<i>12,39</i>	<i>0,48</i>
<i>4</i>	<i>12,55</i>	<i>12,52</i>	<i>0,24</i>
<i>5</i>	<i>12,69</i>	<i>12,71</i>	<i>0,16</i>
<i>6</i>	<i>12,98</i>	<i>12,93</i>	<i>0,39</i>
<i>7</i>	<i>13,28</i>	<i>13,21</i>	<i>0,53</i>
<i>8</i>	<i>13,45</i>	<i>13,53</i>	<i>0,59</i>
<i>9</i>	<i>13,94</i>	<i>13,89</i>	<i>0,36</i>
<i>10</i>	<i>14,39</i>	<i>14,29</i>	<i>0,70</i>
<i>11</i>	<i>14,65</i>	<i>14,72</i>	<i>0,48</i>

Tabela 49 – Valores das opções – Sensibilidade em relação na taxa livre de risco

Aumentando a taxa livre de risco, o erro na simulação fica igual e o preço simulado converge para a solução teórica.

Na fórmula analítica, uma relação quadrática existe entre o preço da opção e o valor da taxa livre de risco.

O gráfico pode ser visto no anexo 3.23.

11

Opção europeia com barreira

11.1

Definição

A opção europeia com barreira não é uma opção que pode ser sempre exercida. A condição de ativação ou desativação da opção depende dos valores do ativo durante a vida da opção. Por causa disso, ela faz parte das opções que dependem das evoluções passadas dos preços.

Existem quatro tipos de opção europeia com barreira, cada uma podendo ser uma opção de compra ou de venda.

- Up & in
Para que a opção seja ativa, o ativo deve atingir um valor definido.
- Up & out
Para que a opção fique ativa, o ativo não deve ultrapassar um valor definido.
- Down & in
Para que a opção seja ativa, o ativo deve descer abaixo de um valor definido.
- Down & out
Para que a opção fique ativa, o ativo não deve descer abaixo de um valor definido.

Se a condição acima para cada tipo de opção não é respeitada, a opção estará inativa, ou seja sem valor e não pode ser exercida. O payoff então é nulo. Se a condição é respeitada durante a vida útil, a opção se comporta como uma opção europeia clássica.

11.2

Exemplo numérico:

Sendo uma opção com os parâmetros seguintes:

Preço do ativo no início	$S=100$
Strike da opção	$k=105$
Barreira	$b=95$
Tempo à expiração	$T=1$
Taxa livre de risco	$r=5\%$
Volatilidade do ativo	$v=20\%$
Dividend Yield	$y=0$

No caso de uma opção tipo “*Down & out*” com os parâmetros dados acima, o valor do ativo nunca deve descer por baixo de 95 no período de vida da opção.

Essa condição realizada, o payoff dessa opção de compra é dado pela a fórmula clássica:

$$\text{Payoff} = \text{Max}[S_T - k, 0]$$

com S_T sendo o preço à expiração e k o preço de exercício.

11.2.1 Simulação de um caminho válido para o exercício

O ano foi dividido em 365 dias e a simulação calcula um preço para cada dia.

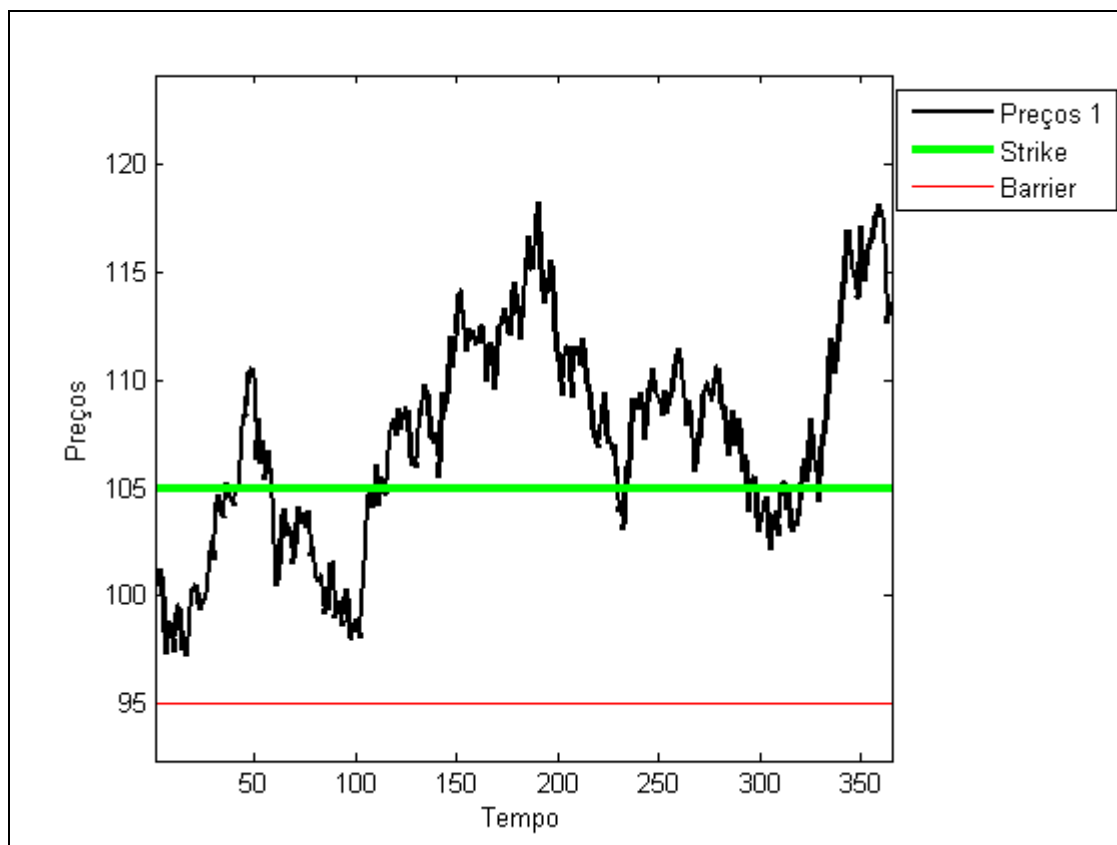


Figura 15 – Gráfico de simulação do preço do ativo objeto no ano e a barreira – Caminho válido

No ano inteiro, o preço do ativo nunca desceu por baixo de 95, valor que iria desativar a opção. Então, essa opção pode ser exercida. Ela se comporta como uma call europeia normal.

No vencimento, quando o valor do ativo é maior que o strike:

$$\text{Payoff} = \text{Max}[S_T - k, 0] = 113,43 - 105 = 8,43$$

11.2.2 Simulação de um caminho não válido para o exercício

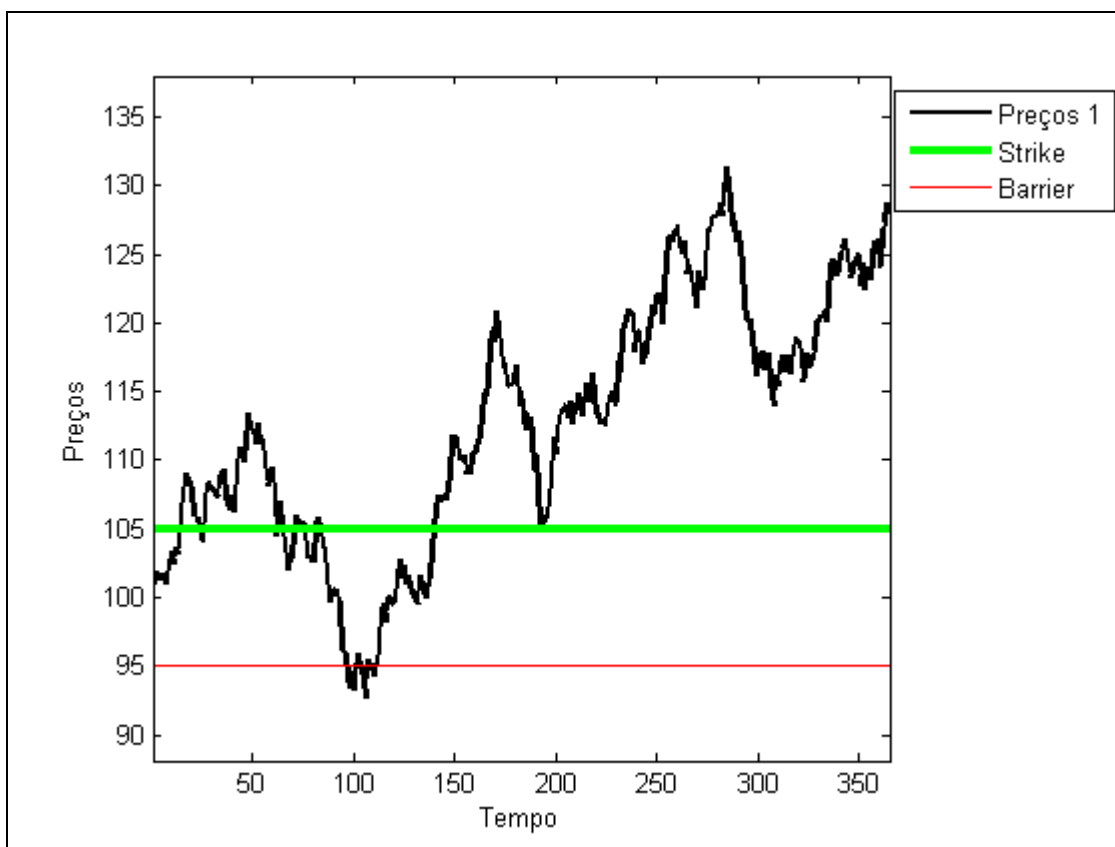


Figura 16 – Gráfico de simulação do preço do ativo objeto no ano e a barreira – Caminho não válido

A opção expira "*in-the-money*". Sendo uma opção de compra, o valor do ativo ao vencimento é maior que o valor do strike. Mas, o ativo desceu a baixo de 95 durante o ano, desativando a opção em torno do dia 100. Mesmo expirando "*in-the-money*", a opção não pode ser exercida. O payoff é nulo.

Esse exemplo simples mostra que a opção não pode ser sempre exercida, e essa condição implica um payoff médio para esse tipo de opção europeia com barreira menor que o de uma opção europeia clássica. O valor dessa opção é menor, pois tem menos flexibilidade que a europeia.

11.3

Regra da paridade "in-out": opções europeias sem dividendos

Para esse caso somente, podemos replicar uma opção europeia com duas opções com barreira. Devemos por isso comprar duas opções de compra com os mesmos parâmetros. A primeira call será uma "Up & in" e a segunda um "Up & out", as duas com o mesmo valor de ativação ou desativação. Sendo assim, só uma das duas opções será ativa para qualquer evolução do preço do ativo. Comprar duas opções, assim definidas, é igual a comprar a opção europeia de mesmos parâmetros.

Exemplo:

Preço do ativo no início	S=100
Strike da opção	k=105
Barreira	b=95
Tempo à expiração	T=1
Taxa livre de risco	r=5%
Volatilidade do ativo	v=20%
Dividend Yield	y=0
Número de simulações	n=5000
Divisão do tempo	m=365

O ano foi dividido em 365 datas para simular o preço diariamente.

Para a call Down & in: $Call_{Down\&in} = 3,0712$

Para a call Down & out: $Call_{Down\&out} = 4,9732$

Para a put Down & in: $Put_{Down\&in} = 7,8508$

Para a put Down & out: $Put_{Down\&out} = 0,0834$

Soma das call: $Call_{Down\&in} + Call_{Down\&out} = 3,0712 + 4,9732 = 8,0444$

Soma das put: $Put_{Down\&in} + Put_{Down\&out} = 7,8508 + 0,0834 = 7,9342$

A call europeia vale: (para a fórmula de Black e Scholes)

$$Call = 8,0213 \quad Put = 7,9004$$

11.4

Análise de sensibilidade: opção de compra "Down & Out"

Os parâmetros padrões da opção usados pelas análises de sensibilidade são:

Preço do ativo no início	$S=100$
Strike da opção	$k=105$
Barreira	$b=95$
Tempo à expiração	$T=1$
Taxa livre de risco	$r=5\%$
Volatilidade do ativo	$v=20\%$
Dividend Yield	$y=0$
Número de datas de exercício	$m=365$

O ano foi dividido em 365 datas para simular o preço diariamente.

11.4.1

Sensibilidade em mudança no número de simulações

Calculando 10 preços consecutivamente, podemos calcular a média do preço e o desvio padrão assumindo a distribuição normal.

Número de simulações	Preço simulado	
	μ	σ
100	5,1320	1,4783
1000	4,9367	0,2917
5000	4,9657	0,1133
10 000	4,9841	0,0856
20 000	5,02	0,0734

Tabela 50 – Valores das opções – Sensibilidade em mudanças no número de simulações

O valor da opção converge em média para 5. Usando mais simulações, o desvio-padrão da distribuição dos resultados cai, mostrando uma convergência do modelo com o aumento do número de simulações.

11.4.2 Sensibilidade em mudança no valor da barreira

Os cálculos são feitos com 5 000 simulações:

Valor da barreira	Call
80	7,9795
83	7,8650
86	7,7387
89	7,3706
92	6,4111
95	4,9016
98	2,6748

Tabela 51 – Valores das opções – Sensibilidade em mudanças no valor da barreira

A opção européia de barreira de compra é maior quanto menor for o valor da barreira. Logicamente, o ativo tem menos chances de descer por baixo da barreira. A opção tem, assim, mais chance de ficar ativa e de ter um payoff positivo.

Observação: o preço da opção barreira nunca ultrapassa o preço da opção européia com os mesmos parâmetros: valor 8,0213 para o call.

12 Conclusão

As opções existem sobre várias formas, da mais simples até a mais complexa. Usadas para resolver problemas específicos, as opções exóticas tem características especiais e geralmente não existe uma solução analítica no problema de apreçamento dessas opções. O uso da simulação de Monte-Carlo resolveu o problema do apreçamento de derivativos complexos, com condições de exercício especiais para a opção barreira, ou características de exercício antecipado para opções americanas por exemplo. O método original de Longstaff e Schwartz foi usado para apreçar as opções americanas, mas algumas modificações foram implementadas, tal como a possibilidade de escolher o grau da regressão.

Para todos os outros tipos de opções exóticas, o método de Monte-Carlo ajustado a cada particularidade conseguiu apreçar corretamente a opção e os modelos convergem a medida que o número de simulações se eleva.

A aplicação do método de Monte-Carlo a cada tipo de opção, com payoffs e condições de exercício diferentes, demonstrou a flexibilidade de programação desse método. A convergência e a precisão dos resultados atingidos na simulação em comparação aos valores teóricos da formula analítica (quando existem) mostraram a eficiência desse método em termos numéricos. Algumas técnicas de redução da variância existem embora só a técnica das variáveis antitéticas fosse programada e as outras técnicas mencionadas podem ajudar a diminuir o tempo computacional assim que aumentar a precisão do método de Monte-Carlo. Usando um grande número de simulações (100 000, por exemplo), o tempo computacional para calcular o preço de uma opção é baixo (alguns segundos) facilitando o uso desses programas em computadores pessoais. Todos os programas de cálculo possuem janelas gráficas que deixa mais atrativo e simples o uso da simulação, escondendo a rotina dos cálculos e deixando aparecer só os resultados. A acessibilidade e simplicidade da interface facilitam o entendimento do usuário.

A análise de sensibilidade foi feita para cada tipo de opção. As curvas características em relação a mudanças das diferentes variáveis têm varias formas diferentes dependendo da opção escolhida. Para uma boa utilização desses programas de apreçamento num caso real a análise de sensibilidade fornece uma idéia dos parâmetros os mais sensíveis e que devem ser definidos com precisão. Desta forma, torna-se possível avaliar as opções pelo programa e comparar com os preços no mercado, apoiando a tomada de decisão de investimento em cada momento e ajudando a melhorar a gestão de risco.

Referências Bibliográficas

- ANDERSEN BROTHERTON-RATCLIFF, “**Exact exotics**”, 1996.
- BLACK F. & SCHOLES M. "The Pricing of Options & Corporate Liabilities", The Journal of Political Economy. 1973
- BOYLE BROADIE GLASSERMAN, “**Monte carlo methods for security pricing**”. Journal of Economic Dynamics and Control, 1997.
- COX ROSS RUBINSTEIN, “**Option Pricing: A Simplified Approach.**” Journal of Financial Economics, 1979.
- DOUADY, “**Monte-Carlo Path Weighing**”. Working paper (CIBC and Ecole Normale Superieure of Cachan), 1999.
- DUPIRE B, “**Monte-Carlo Methodologies and Applications for Pricing and Risk Management**”,1998.
- FISHMAN, “**Monte Carlo: Concepts, Algorithms, and Applications**”, 1996.
- GLASSERMAN, “**Monte Carlo Methods in Financial Engineering**”, 2004.
- GRANT D, G. VORA, D. WEEKS. “**Simulation and the early-exercise option problem. Journal of Financial Engineering**”, 1996.
- HEYNEN R., & KAT H. "Lookback options with Discrete and Partial Monitoring of the Underlying Price", Applied Mathematical Finance, Vol 2, p273-283. 1995
- HIGHAM DESMOND J., “**An Introduction to Financial Option Valuation**”, 2004.
- HULL JOHN C., “**Options, Futures and Other Derivatives**”, 2000.
- KEMNA A. G. Z. & VORST A. C. F., "A Pricing Method for Options Based on Average Asset Values", Journal of Banking and Finance, 14, p113-129, 1990
- LONGSTAFF SCHWARTZ: “**Valuing American Options by Simulation: A Simple Least-Squares Approach**”, Review of Financial Studies vol. 14, 2001
- REINER E. & RUBINSTEIN M., “**Unscrambling the Binary Code**”. 1991
- RUBINSTEIN M., "Options for the Undecided", 1991
- ZHOU AGLEHOLE DYBVIG , “**Going to extremes: Correcting simulation in exotic option valuation**”. Financial Analysts Journal, 1997.

Apêndice 1

Calculo Estocástico

Para um título S que segue um movimento geométrico browniano:

$$dS = \mu.S.dt + \sigma.S.dZ \quad (1)$$

μ : taxa ajustada ao risco do título

σ : volatilidade do título

dt : incremento de tempo

dZ : incremento de Wiener (dZ segue $N(0,dt)$)

e trocando μ por r a taxa livre de risco na equação (1),

$$dS = r.S.dt + \sigma.S.dZ \quad (2)$$

assim podemos escrever:

$$d(\ln(S)) = \frac{dS}{S} = r.dt + \sigma.dZ \quad (3)$$

Para um derivativo $F(S,t) = \ln(S)$ seguindo um processo d'Itô temos:

$$dF(S,t) = \frac{\partial F}{\partial S} dS + \frac{\partial F}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} dS^2 \quad (4)$$

Análise do incremento de Wiener dZ :

Os termos dt^i com $i > 1$ são considerados nulos, considerando as expressões truncadas na ordem 1 somente.

$$dt^i = 0 \text{ para } i > 1 \quad (5)$$

Calcular $(dS)^2$:

$$(dS)^2 = (r.S.dt + \sigma.S.dZ)^2 = r^2.S^2.dt^2 + 2.r.\sigma.S^2.dt.dZ + \sigma^2.S^2.dZ^2 \quad (6)$$

Distribuição de dZ :

dZ segue por definição uma distribuição normal, media 0 e variância dt : seja $N(0, dt)$.

Distribuição de dZ^2 :

Sabendo a distribuição acima, podemos escrever:

$$Var(dZ) = E[dZ^2] - (E[dZ])^2 = E[dZ^2] - 0 = dt \quad (7)$$

Então

$$E[dZ^2] = dt \quad (8)$$

$$Var(dZ^2) = E[(dZ^2)^2] - (E[dZ^2])^2 = E[dZ^4] - (E[dZ^2])^2 = 3.dt^2 - dt^2 = 2.dt^2$$

$$Var(dZ^2) = 0 \quad (9)$$

Então com (8) e (9), dZ^2 segue a distribuição $N(dt, 0)$, seja é determinístico.

$$dZ^2 = dt \quad (10)$$

Finalmente usando (5) e (10), (6) da:

$$(dS)^2 = \sigma^2.S^2.dt \quad (11)$$

Calculo das derivadas de $F(S,t) = \ln(S)$:

$$\frac{\partial F(S,t)}{\partial S} = \frac{\partial(\ln S)}{\partial S} = \frac{dS}{S}$$

$$\frac{\partial^2 F(S,t)}{\partial S^2} = \frac{\partial^2(\ln S)}{\partial S^2} = \frac{\partial}{\partial S} \left(\frac{dS}{S} \right) = -\frac{1}{2} \frac{dS^2}{S^2}$$

$$\frac{\partial F(S,t)}{\partial t} = \frac{\partial(\ln S)}{\partial t} = 0$$

Substituindo as expressões, temos finalmente a formula (4) que define o movimento do derivativo F, e sendo o movimento geométrico browniano do ativo:

$$dF(S,t) = \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma \cdot dZ \quad (12)$$

Terminando o calculo onde "eps" esta uma variável aleatória tirada da distribuição N(0,1):

$$\Delta F(S,t) = \Delta \ln S = \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t + \sigma \cdot eps \cdot \sqrt{\Delta t}$$

$$\Delta \ln S = \ln S_t - \ln S_0 = \ln \frac{S_t}{S_0} = \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t + \sigma \cdot eps \cdot \sqrt{\Delta t}$$

$$\frac{S_t}{S_0} = \exp \left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t + \sigma \cdot eps \cdot \sqrt{\Delta t} \right)$$

$$\boxed{S_t = S_0 e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t + \sigma \cdot eps \cdot \sqrt{\Delta t}} \quad (13)}$$

Assim podemos simular o preço S_t para um ativo qualquer, de preço inicio S_0 , volatilidade σ e para um tempo futuro distante de Δt .

Dividindo o tempo total da simulação T em vários intervalos de tempo " dt " todos iguais, cada $S_{n.dt}$ pode ser calculado usando o termo precedente da seguinte maneira:

$$S_{n.dt} = S_{(n-1).dt} e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma \cdot eps \cdot \sqrt{dt}} \quad (14)$$

iniciando com S_0 , o preço da ação no instante inicial.

A fórmula com "*dividend yield*" esta quase igual, trocando o r acima para " $r - y$ " onde y representa a taxa de dividendos continua da ação:

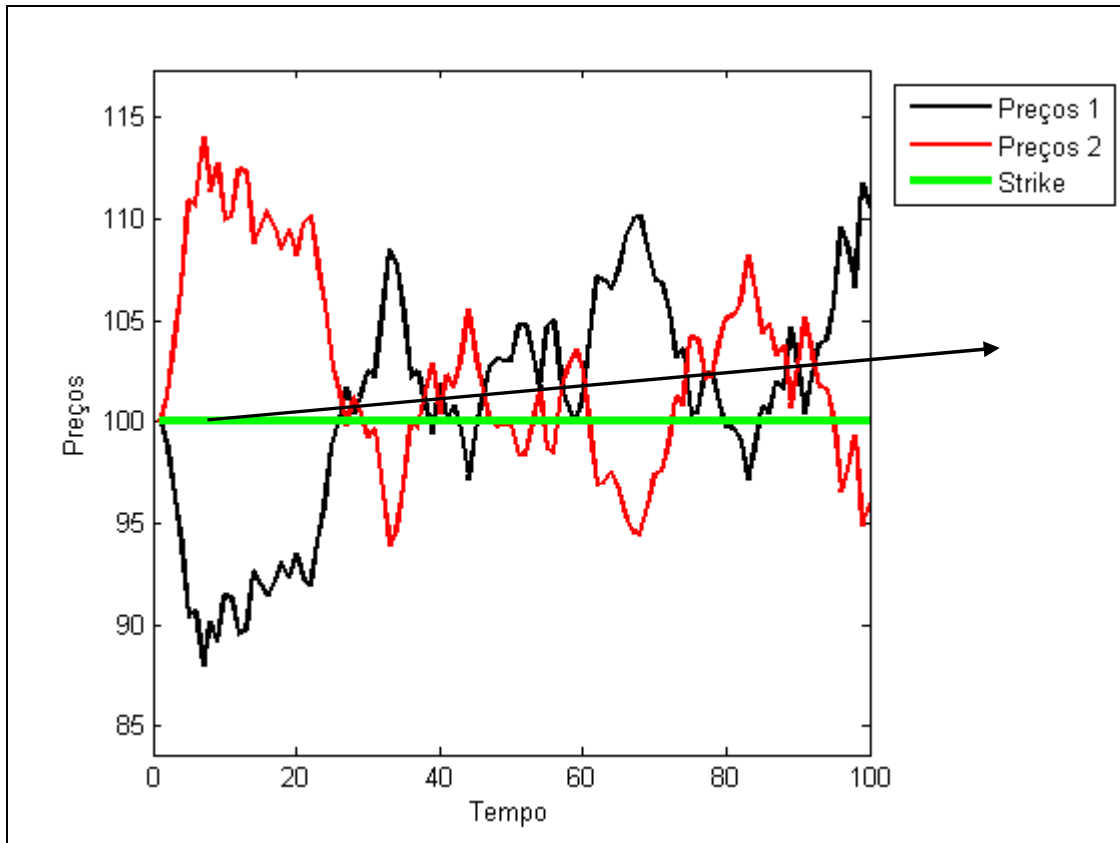
$$S_{n.dt} = S_{(n-1).dt} e^{\left(r - y - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma \cdot eps \cdot \sqrt{dt}} \quad (15)$$

Exemplo 1:

Preços do ativo no inicio	$S=100$
Strike da opção	$k=100$
Tempo a expiração	$T=1$
Taxa livre de risco	$r=5\%$
Volatilidade do ativo	$v=20\%$
Dividend Yield	$y=0$

A simulação dos preços foi feita sobre 100 divisões iguais do tempo de um ano da opção.

O "preços 1" representa o caminho normal, e "preços 2" o caminho "antitético" correspondente.



Podemos ver que ao longo do tempo, a tendência normal do preço está de aumentar. A simulação dos preços com esses parâmetros tem um "drift" como visto no modelo que explica a variação da variável $dF(S,t)$ em função de dt e de dZ . O "drift" é a tendência que ocorre no tempo, seja o parâmetro fator de dt :

$$dF(S,t) = \left(r - y - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dZ \quad \text{Drift} = \left(r - y - \frac{\sigma^2}{2} \right)$$

Nesse exemplo:

$$\text{Drift} = \left(r - y - \frac{\sigma^2}{2} \right) = \left(0.05 - \frac{0.2^2}{2} \right) = 0.03 = 3\%$$

Exemplo 2: Sem drift

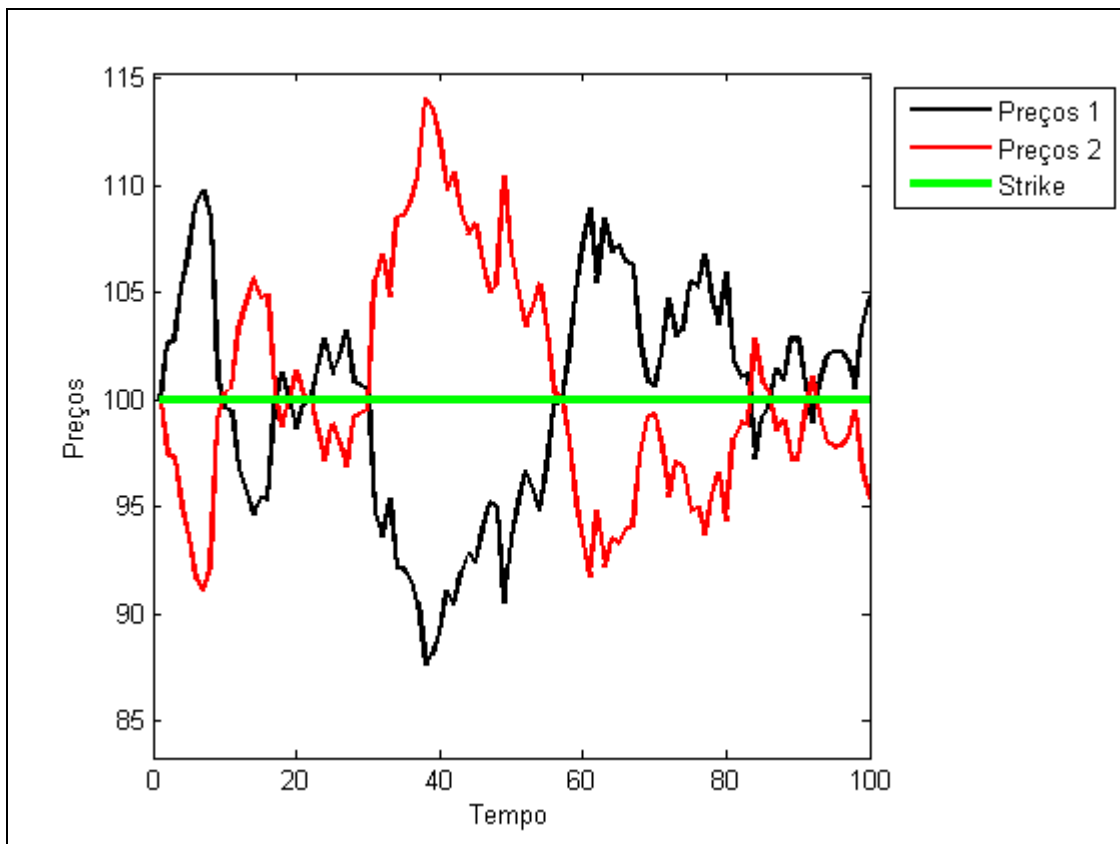
Usando parâmetros ajustado tais que $Drift = \left(r - y + \frac{\sigma^2}{2} \right) = 0$, seja $r = \frac{\sigma^2}{2}$ com

$y = 0$, a média dos dois caminhos antitéticos será exatamente igual a zero.

Preços do ativo no início	S=100
Strike da opção	k=100
Tempo a expiração	T=1
Taxa livre de risco	r=2%
Volatilidade do ativo	v=20%
Dividend Yield	y=0

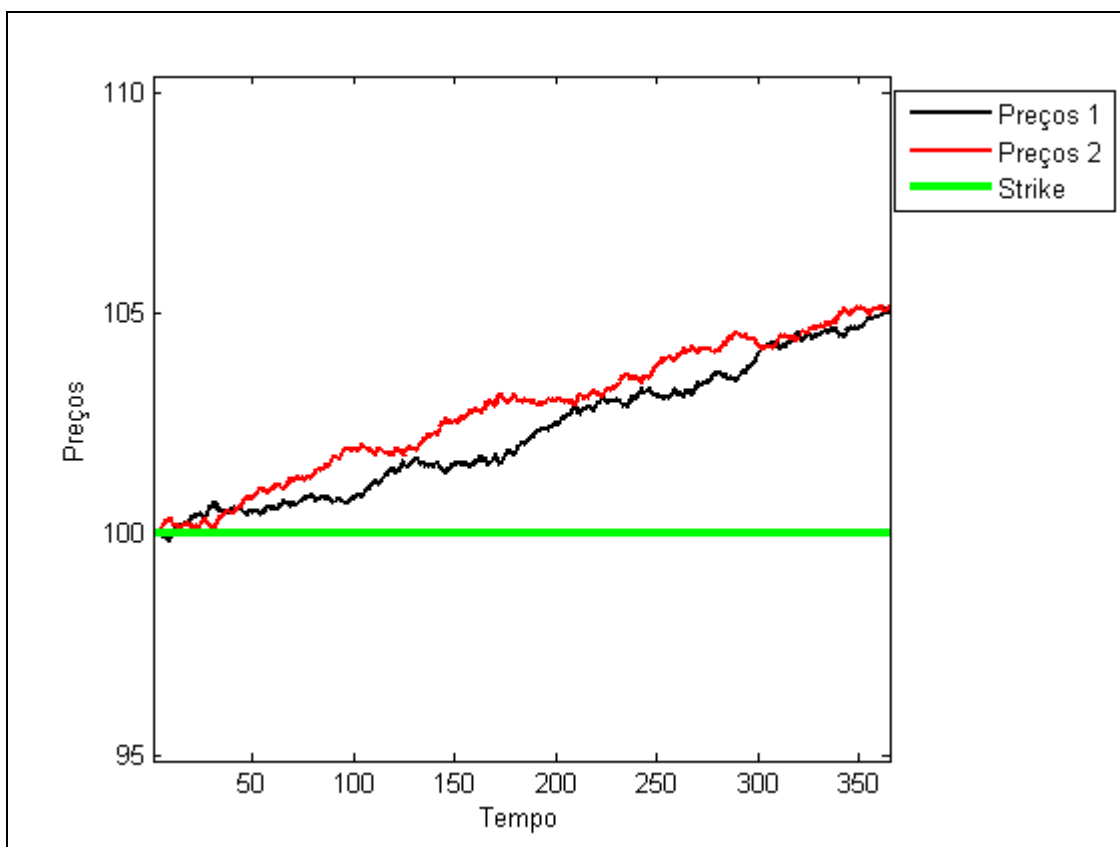
Assim, $r = 2\%$ e $\frac{\sigma^2}{2} = \frac{0.2^2}{2} = 2\%$. Segue o gráfico abaixo onde as duas curvas

são perfeitamente simétricas para o valor inicial de 100:



Exemplo 3: Volatilidade baixa

Preços do ativo no início	S=100
Strike da opção	k=100
Tempo a expiração	T=1
Taxa livre de risco	r=5%
Volatilidade do ativo	v=0.1%
Dividend Yield	y=0



Com volatilidade fraca, os valores simulados ficam mais perto do valor esperado, seguindo o aumento clássica de 5% da taxa livre de risco, para atingir 105 em 1 ano.

$$Drift = \left(r - y - \frac{\sigma^2}{2} \right) = 0.05 - \frac{0.01^2}{2} \approx 5\%$$

O valor esperado da simulação, com valor 100 no instante inicial, e um drift de 5% é:

$$E[Preços] = 100 \cdot (1 + 0.05) = 105$$

Apêndice 2

Demonstração Black-Scholes

O objetivo é de provar a formula de Black-Scholes para precificação de opções, ou seja:

$$w = x \cdot \underline{N}(d_1) - C \cdot e^{-r(T-t)} \cdot \underline{N}(d_2)$$

Com

$$d_1 = \frac{\ln(X/C) + (r + \frac{v^2}{2})(T-t)}{v \cdot \sqrt{T-t}} \quad \text{e} \quad d_2 = \frac{\ln(X/C) + (r - \frac{v^2}{2})(T-t)}{v \cdot \sqrt{T-t}}$$

Onde

w	valor da opção
x	valor do ativo objeto
C	preço de exercício da opção
t	data atual
T	data de exercício da opção
r	taxa livre de risco
v	volatilidade do ativo

Queremos achar uma formula para $w(x,t)$ em qualquer instante de tempo. Mas sabemos que no vencimento ($T = t$):

$$w(x,T) = \max(x_T - C, 0) \quad (1)$$

Para encontramos $w(x,t)$, podemos trazer a expressão $w(x,T)$ a valor presente, de forma que sendo neutro ao risco:

$$w(x,t) = e^{-r(T-t)} \cdot E[\max(x_T - C, 0)] \quad (2)$$

Considerando que a variação do preço das opções siga um movimento geométrico browniano MGB:

$$dx = r \cdot x \cdot dt + \sigma \cdot x \cdot dZ \quad (3)$$

Onde o incremento de Wiener $dZ \sim N(0, dt)$

Seja $f = f(x)$ uma função apenas da variável estocástica x . Do lema de Itô, teremos:

$$df(x) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} dx^2$$

Usando $f(x) = \ln(x)$, e aplicando o lema de Itô:

$$d \ln(x) = \frac{\partial \ln(x)}{\partial x} dx + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \ln(x)}{\partial^2 x} dx^2$$

$$d \ln(x) = \frac{1}{x} dx + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{x^2} \right) dx^2$$

$$d \ln(x) = \frac{1}{x} dx - \frac{dx^2}{2x^2} \quad (6)$$

Do MGB, na equação (4) temos:

$$(dx)^2 = (r \cdot x \cdot dt + \sigma \cdot x \cdot dZ)^2 = r^2 \cdot x^2 \cdot dt^2 + 2 \cdot r \cdot \sigma \cdot x^2 \cdot dt \cdot dZ + \sigma^2 \cdot x^2 \cdot dZ^2$$

e finalmente:

$$(dx)^2 = \sigma^2 \cdot x^2 \cdot dt \quad (7) \quad (\text{ver anexo 1 p2 para detalho})$$

Substituindo (4) e (7) em (6):

$$d \ln(x) = \frac{1}{x}(r.x.dt + v.x.dz) - \frac{1}{2x^2}v^2.x^2.dt$$

$$d \ln(x) = \left(r - \frac{v^2}{2}\right).dt + v.dz \quad (9)$$

Integrando a expressão acima (9) de t a T :

$$\int_t^T d \ln(x) = \int_t^T \left(r - \frac{v^2}{2}\right).dt + \int_t^T v.dz_x \quad (\text{a segunda parte é uma integral estocástica que sabemos resolver})$$

$$\ln(x_T) - \ln(x_t) = \left(r - \frac{v^2}{2}\right)(T-t) + v.(z_T - z_t) \quad (10) \quad (\text{onde } (z_T - z_t) \sim N(0, T-t))$$

$$\ln(x_T) = \ln(x_t) + \left(r - \frac{v^2}{2}\right)(T-t) + v.(z_T - z_t) \quad (11)$$

Seja y_T a função definida para:
$$y_T = \left(r - \frac{v^2}{2}\right)(T-t) + v.(z_T - z_t) \quad (12)$$

Como $(z_T - z_t)$ é a única parcela estocástica com distribuição $N(0, T-t)$, y_T também terá distribuição normal com parâmetros:

Media:

$$E[y_T] = \left(r - \frac{v^2}{2}\right)(T-t) + E[v.(z_T - z_t)]$$

$$E[y_T] = \left(r - \frac{v^2}{2}\right)(T-t) \quad \text{devido á distribuição da variável estocástica } z.$$

Variância:

$$\text{Var}[y_T] = \text{Var}[v.(z_T - z_t)]$$

$$\text{Var}[y_T] = v^2.\text{Var}(z_T - z_t)$$

$$\text{Var}[y_T] = v^2.(T-t)$$

$$y_T \text{ tem a distribuição } N\left(\left(r - \frac{v^2}{2}\right)(T-t), v^2.(T-t)\right) \quad (13)$$

Ainda sobre y_T , da expressão (11):

$$\ln\left(\frac{x_T}{x_t}\right) = y_T \quad x_T = x_t \cdot e^{y_T} \quad (14)$$

Pela teoria das probabilidades temos para quaisquer funções g e h :

$$g(y_T) = h(x_T) \cdot \left| \frac{dx_T}{dy_T} \right|$$

Mas temos $\frac{dx_T}{dy_T} = x_T \cdot e^{y_T}$ que é sempre positivo, então

$$g(y_T) \cdot dy_T = h(x_T) \cdot dx_T \quad (15)$$

Voltando na definição de $w(x, t)$ (2) que queremos calcular:

$$w(x, t) = e^{-r(T-t)} \cdot E[\max(x_T - C, 0)]$$

Da definição de valor esperado temos:

$$w(x, t) = e^{-r(T-t)} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \max(x_T - C, 0) \cdot f(x_T) \cdot d(x_T)$$

Considerando que a integral é nula para $x_T < C$ pela definição da função

$$\max(x_T - C, 0): \quad w(x, t) = e^{-r(T-t)} \cdot \int_C^{+\infty} (x_T - C) \cdot f(x_T) \cdot d(x_T)$$

E usando (15):

$$w(x, t) = e^{-r(T-t)} \cdot \int_u^{+\infty} (x_t \cdot e^{y_T} - C) \cdot g(y_T) \cdot d(y_T)$$

Onde u é o novo limite inferior para a integral em $d(y_T)$ de forma que:

$$u = \ln\left(\frac{C}{x_t}\right).$$

Finalmente

$$w(x, t) = e^{-r(T-t)} \cdot \int_{\ln(C/x_t)}^{+\infty} (x_t \cdot e^{y_T} - C) \cdot g(y_T) \cdot d(y_T)$$

$$w(x, t) = x_t \cdot I_1 - C \cdot e^{-r(T-t)} \cdot I_2 = x_t \cdot e^{-r(T-t)} \cdot \int_{\ln(C/x_t)}^{+\infty} e^{y_T} \cdot g(y_T) \cdot d(y_T) - C \cdot e^{-r(T-t)} \cdot \int_{\ln(C/x_t)}^{+\infty} g(y_T) \cdot d(y_T) \quad (16)$$

Calcular I_1 :

Como y_T tem distribuição normal com parâmetros dados na expressão (13):

$$I_1 = e^{-r(T-t)} \cdot \int_{\ln(C/x_t)}^{+\infty} e^{y_T} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot v^2 \cdot (T-t)}} \cdot \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{y_T - (r - \frac{v^2}{2}) \cdot (T-t)}{v \cdot \sqrt{(T-t)}} \right)^2 \right] \cdot dy_T$$

$$I_1 = \int_{\ln(C/x_t)}^{+\infty} e^{y_T} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot v^2 \cdot (T-t)}} \cdot \exp \left[-r \cdot (T-t) + y_T - \frac{1}{2} \left(\frac{y_T - (r - \frac{v^2}{2}) \cdot (T-t)}{v \cdot \sqrt{(T-t)}} \right)^2 \right] \cdot dy_T$$

(17)

Abrindo a expressão do expoente de e na integração, teremos:

$$A = -r \cdot (T-t) + y_T - \frac{1}{2} \left(\frac{y_T - (r - \frac{v^2}{2}) \cdot (T-t)}{v \cdot \sqrt{(T-t)}} \right)^2$$

$$A = -\frac{1}{2 \cdot v^2 \cdot (T-t)} \left[\left(y_T - (r - \frac{v^2}{2}) \cdot (T-t) \right)^2 + (-2) \cdot (y_T - r \cdot (T-t)) \cdot v^2 \cdot (T-t) \right]$$

$$A = -\frac{1}{2} \left[\frac{y_T - (r + \frac{v^2}{2}) \cdot (T-t)}{v \cdot \sqrt{(T-t)}} \right]^2$$

(18)

Observação:

usando uma distribuição normal com média μ_x e variância σ_x^2 , temos:

$$I = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot \sigma_x^2}} \int_b^{+\infty} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x - \mu_x}{\sigma_x} \right)^2 \right] \cdot dx$$

fazendo $Z = \frac{x - \mu_x}{\sigma_x}$, $dx = \sigma_x \cdot dZ$. Para $x = b$, temos: $Z = \frac{b - \mu_x}{\sigma_x}$

$$I = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{b-\mu_x}{\sigma_x}}^{+\infty} \exp\left[-\frac{1}{2}(Z)^2\right].dx \quad \text{e} \quad I = \int_{\frac{b-\mu_x}{\sigma_x}}^{+\infty} N(Z).dZ = \int_{-\infty}^{\frac{\mu_x-b}{\sigma_x}} N(Z).dZ$$

Onde $N(Z)$ é a função de densidade de probabilidade da $N(0,1)$, função simétrica.

De forma análoga em I_1 temos com esses parâmetros:

$$l = \ln(c/x) \quad \mu_x = \left(r + \frac{v^2}{2}\right).(T-t) \quad \sigma_x = \sqrt{v^2.(T-t)}$$

$$I_1 = \underline{N} \left(\frac{\ln(x/c) + \left(r + \frac{v^2}{2}\right).(T-t)}{\sqrt{v^2.(T-t)}} \right) \quad (19)$$

onde \underline{N} é a função cumulativa da densidade de probabilidade normal N .

$$I_1 = \underline{N}(d_1) \quad \text{onde} \quad d_1 = \frac{\ln(x/c) + \left(r + \frac{v^2}{2}\right).(T-t)}{\sqrt{v^2.(T-t)}}$$

Calcular I_2 :

$$I_2 = \int_{\ln(c/x_t)}^{+\infty} e^{y_T} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi.v^2.(T-t)}} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{y_T - \left(r - \frac{v^2}{2}\right).(T-t)}{v.\sqrt{(T-t)}}\right)^2\right].dy_T$$

Da mesma forma e usando os parâmetros seguintes:

$$l = \ln(c/x) \quad \mu_x = \left(r - \frac{v^2}{2}\right).(T-t) \quad \sigma_x = \sqrt{v^2.(T-t)}$$

$$I_1 = \underline{N} \left(\frac{\ln(x/c) + \left(r - \frac{v^2}{2}\right).(T-t)}{\sqrt{v^2.(T-t)}} \right) \quad (20)$$

$$I_2 = \underline{N}(d_2) \quad \text{onde} \quad d_2 = \frac{\ln(x/c) + (r - \frac{v^2}{2}) \cdot (T - t)}{\sqrt{v^2 \cdot (T - t)}}$$

Usando (16), (19) e (20):

A fórmula de Black-Scholes

$$w(x, t) = x_t \cdot \underline{N}(d_1) - C \cdot e^{-r(T-t)} \cdot \underline{N}(d_2)$$

Onde

$$d_1 = \frac{\ln(x/c) + (r + \frac{v^2}{2}) \cdot (T - t)}{\sqrt{v^2 \cdot (T - t)}} \quad d_2 = \frac{\ln(x/c) + (r - \frac{v^2}{2}) \cdot (T - t)}{\sqrt{v^2 \cdot (T - t)}}$$

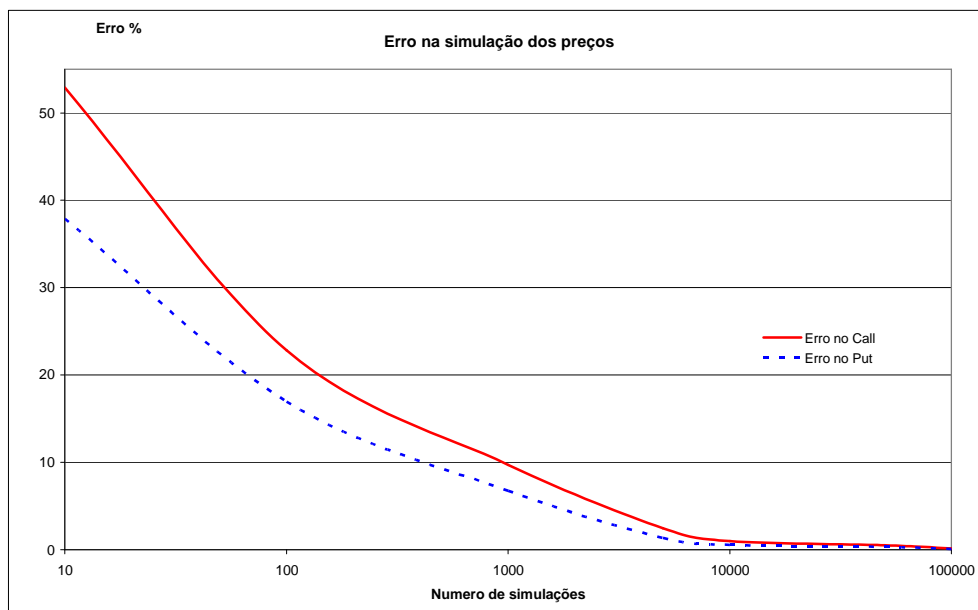
Apêndice 3

Gráficos de sensibilidade

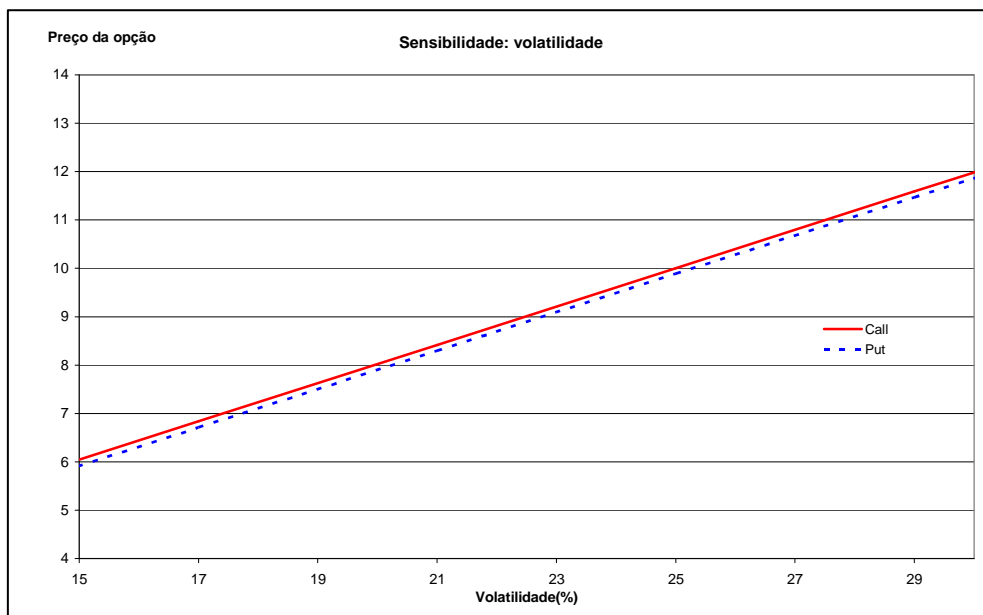
Opção europeia

Sensibilidade em relação ao número de simulações

Evolução do erro com o aumento do número de simulações, em comparação no valor teórico da fórmula de Black e Scholes.



Sensibilidade em relação a mudanças na volatilidade

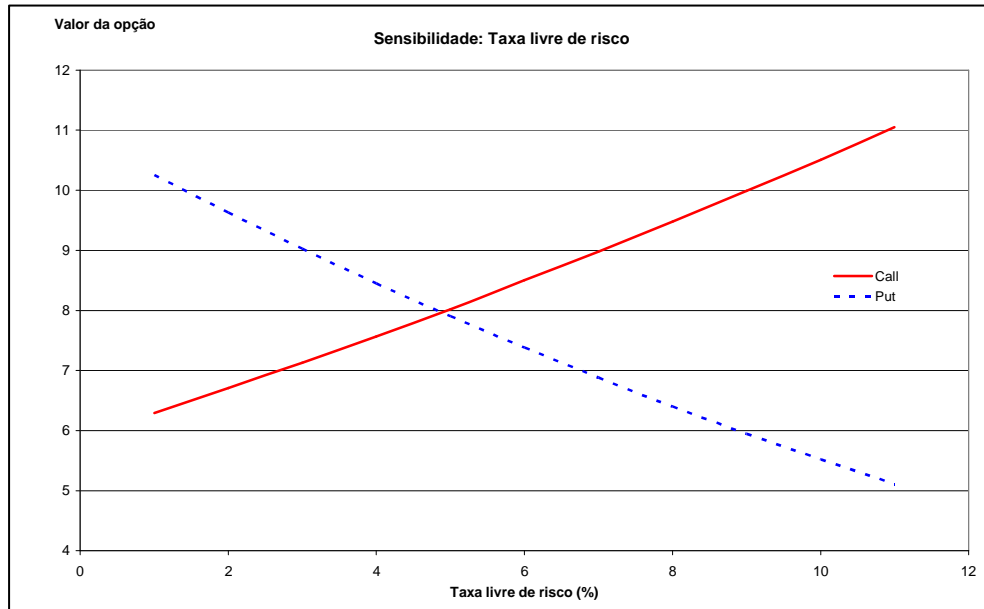


Ilustrando a linearidade com a volatilidade v , uma regressão linear mostra que:

$$Pr eçoCall = 0,3951 \cdot v + 0,107$$

$$Pr eçoPut = 0,3953 \cdot v - 0,0167$$

Sensibilidade em relação a mudanças na taxa livre de risco



Usando uma regressão quadrática para aproximar as curvas, obtemos:

$$\text{PreçoCall} = 0,007.r^2 + 0,3921.r + 5,8922$$

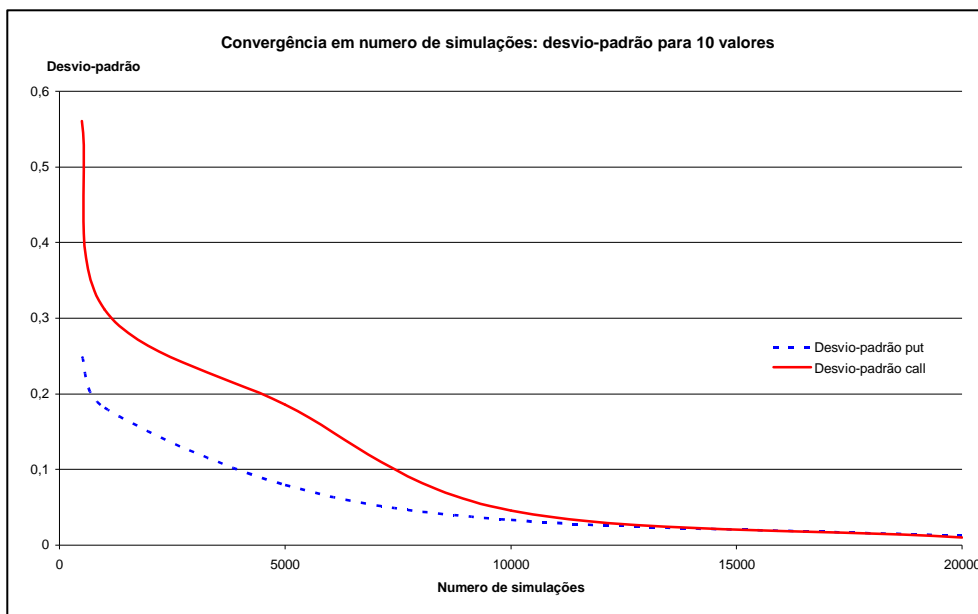
$$R^2 = 1$$

$$\text{PreçoPut} = 0,0121.r^2 - 0,6591.r + 10,897$$

$$R^2 = 1$$

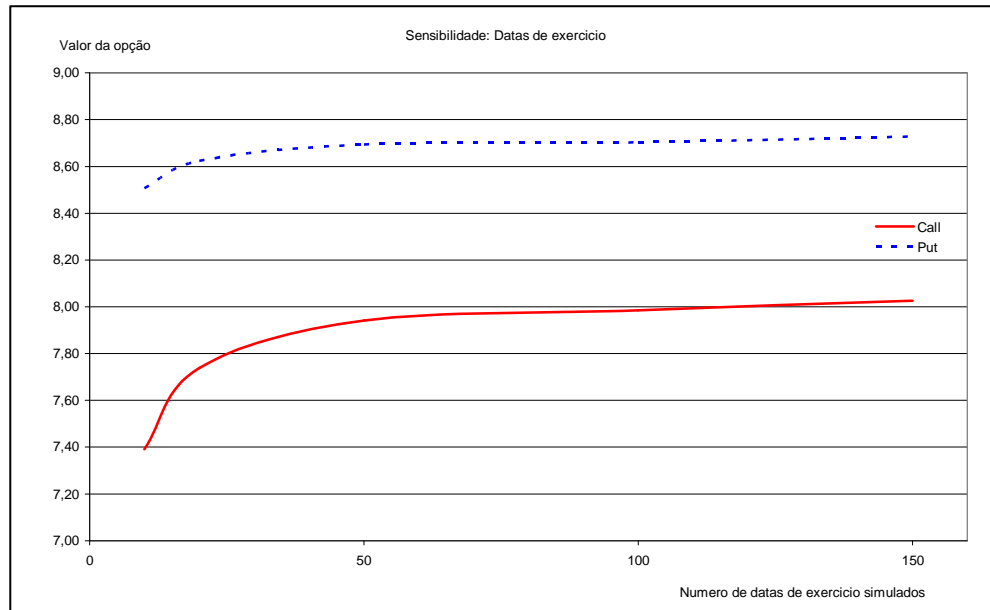
Opção americana

Sensibilidade em mudança no numero de simulações



A precisão no método de Monte-Carlo é obtida através o aumento dos eventos possíveis simulados.

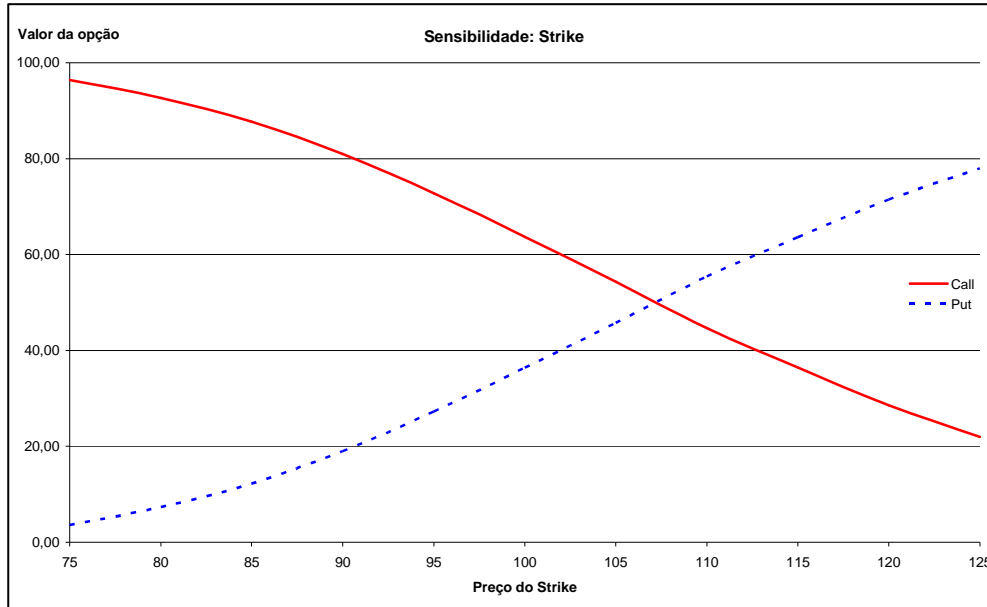
Sensibilidade em mudança no numero de datas de exercício simuladas



Com o aumento de datas de exercício simuladas, os preços aumentam junto com a flexibilidade de poder exercer em qualquer momento.

Opção *asset-or-nothing*

Sensibilidade em relação à mudança no preço do strike



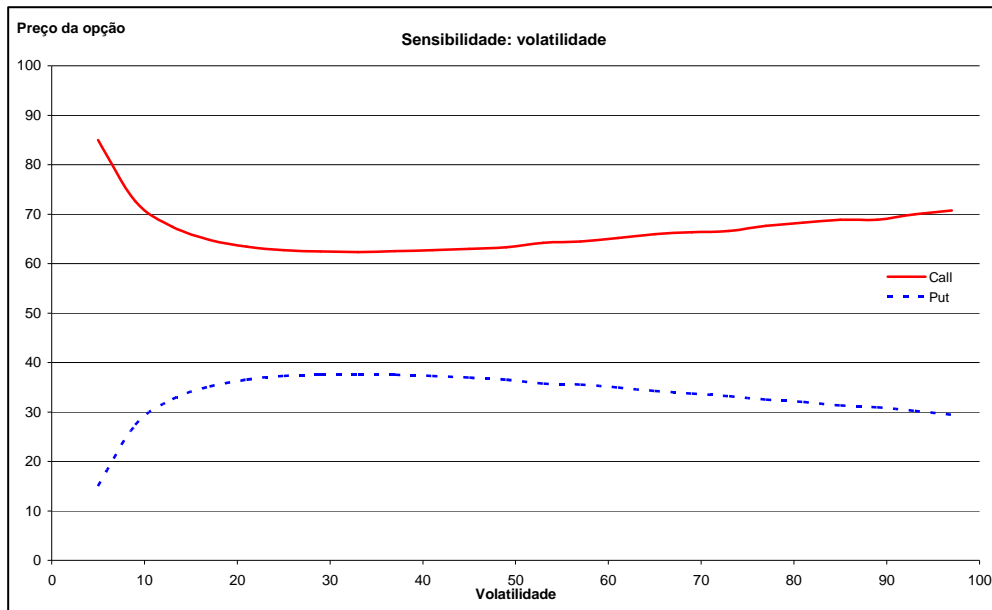
As curvas são simétricas, conseqüentemente a: $Call + Put = C$, com C uma constante. (aqui $C = 100$ nesse exemplo).

Os limites são:

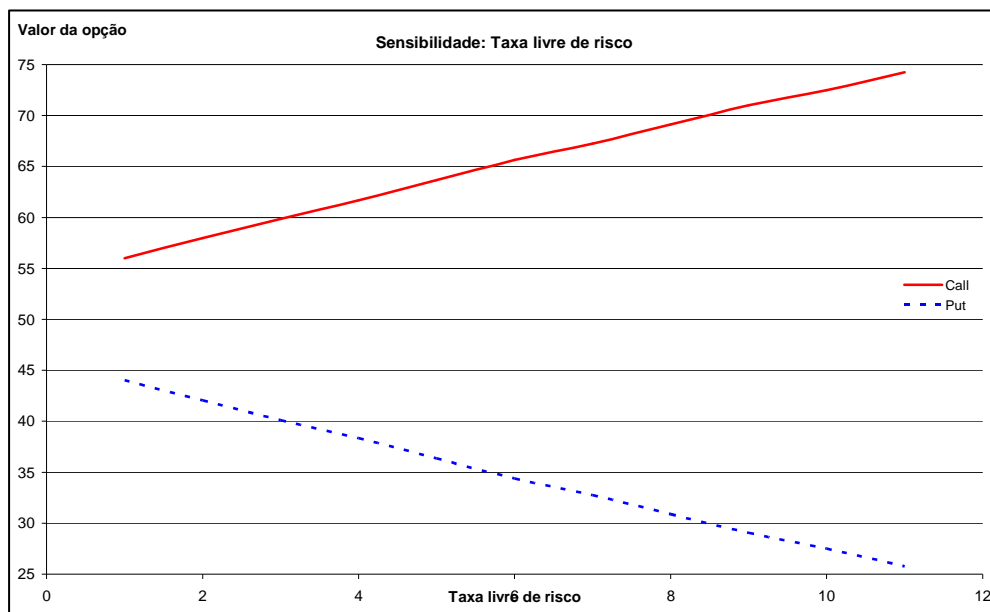
$Strike \rightarrow 0$: $Call \rightarrow 100$ porque sempre vai ficar "*in-the-money*", sendo o preço do ativo maior que o strike
 $Put \rightarrow 0$ porque sempre "*out-of-the-money*", pela mesma razão.

$Strike \rightarrow +\infty$: $Call \rightarrow 0$ O preço do ativo tem maior probabilidade de ficar menor que o strike.
 $Put \rightarrow 100$ pela mesma razão.

Sensibilidade em relação à mudança na volatilidade



Sensibilidade em relação à mudança na taxa livre de risco



Usando uma regressão linear, obtemos as equações seguintes:

$$\text{PreçoCall} = 1,8287.r + 54,372$$

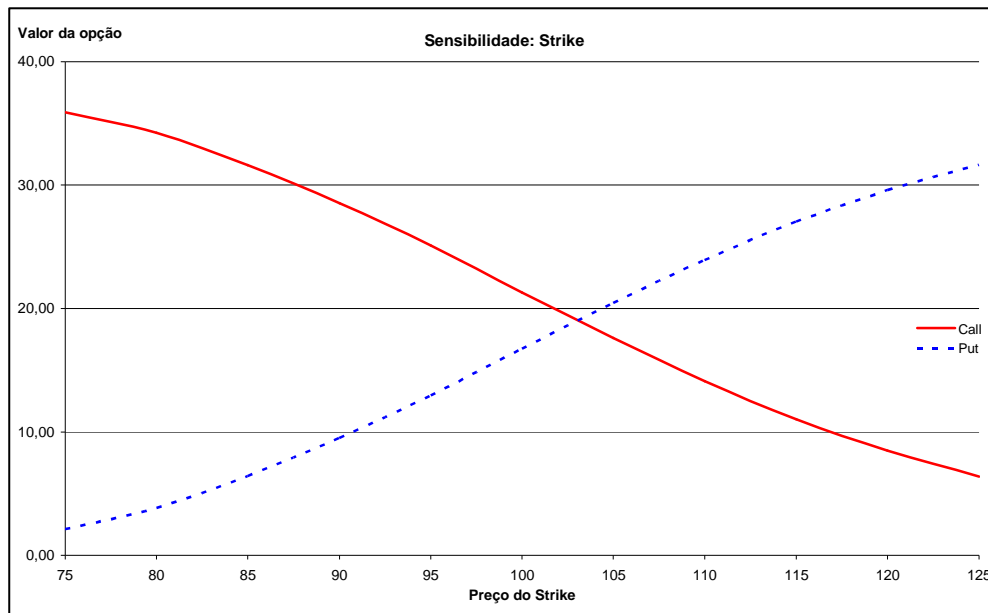
$$R^2 = 0,9993$$

$$\text{PreçoPut} = -1,8286.r + 45,624$$

$$R^2 = 0,9992$$

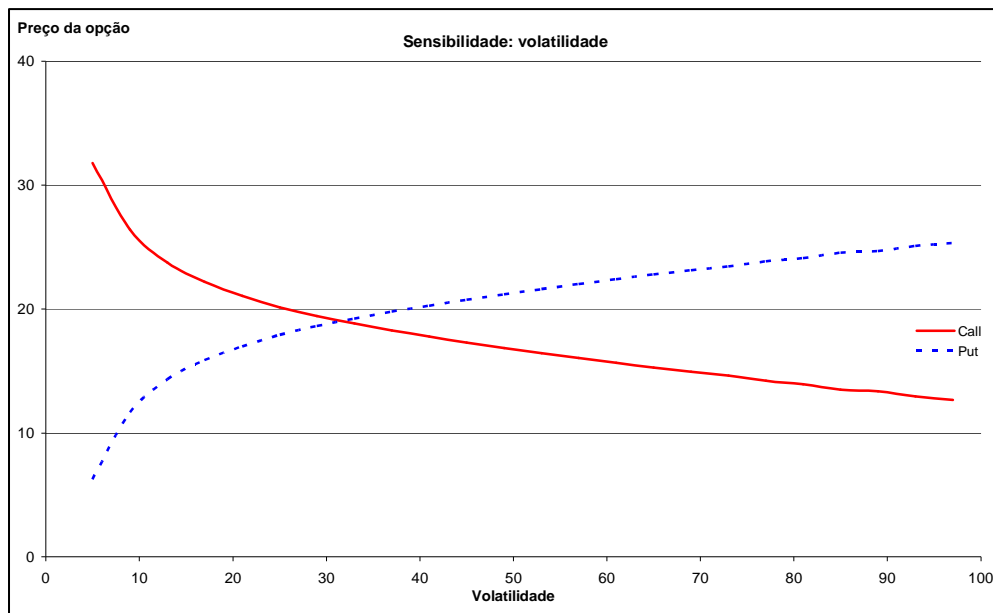
Opção *cash-or-nothing*

Sensibilidade em relação à mudança no preço do strike

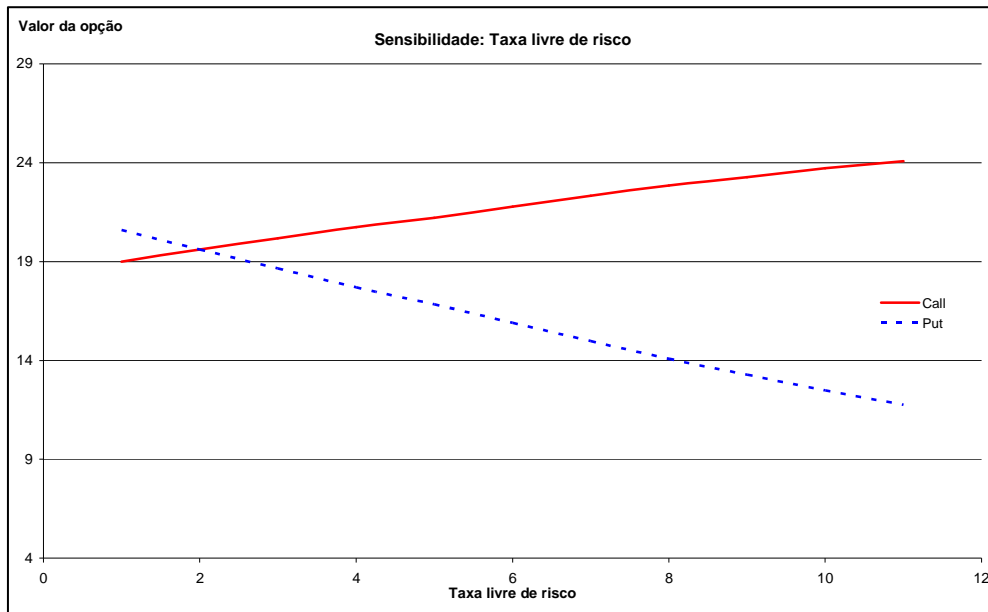


Da mesma forma que para a opção *asset-or-nothing*, as curvas são simétricas e as mesmas conclusões podem ser tiradas quando as limites das curvas em 0 e em $+\infty$

Sensibilidade em relação à mudança na volatilidade



Sensibilidade em relação à mudança na taxa livre de risco



Usando uma regressão linear, obtemos as equações seguintes:

$$\text{PreçoCall} = 0,5137.r + 18,621$$

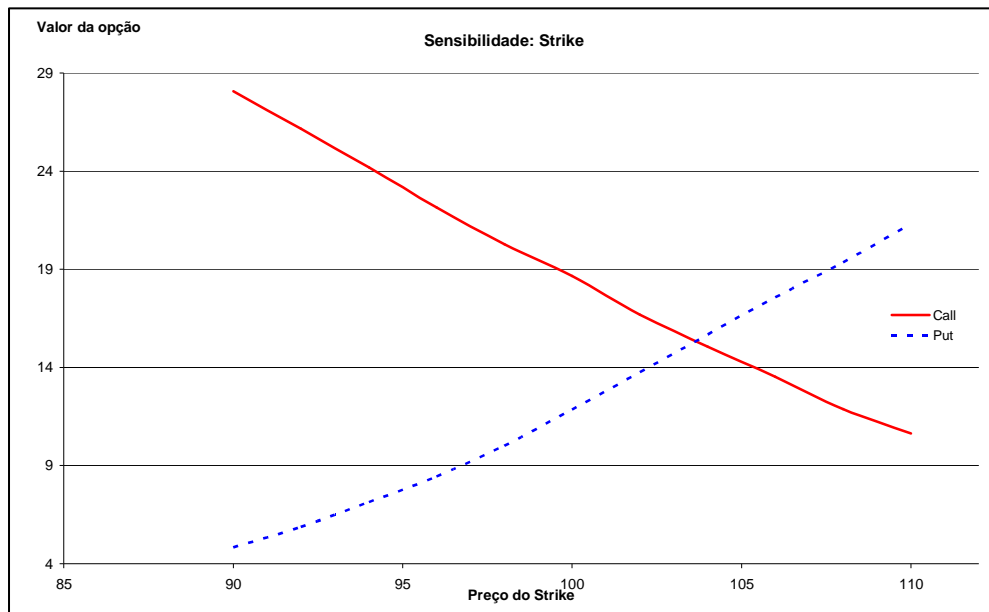
$$R^2 = 0,9969$$

$$\text{PreçoPut} = -0,8905.r + 21,329$$

$$R^2 = 0,9986$$

Opção *Lookback fixed strike*

Sensibilidade em relação à mudança no preço do strike



Usando uma regressão quadrática, obtemos as equações seguintes:

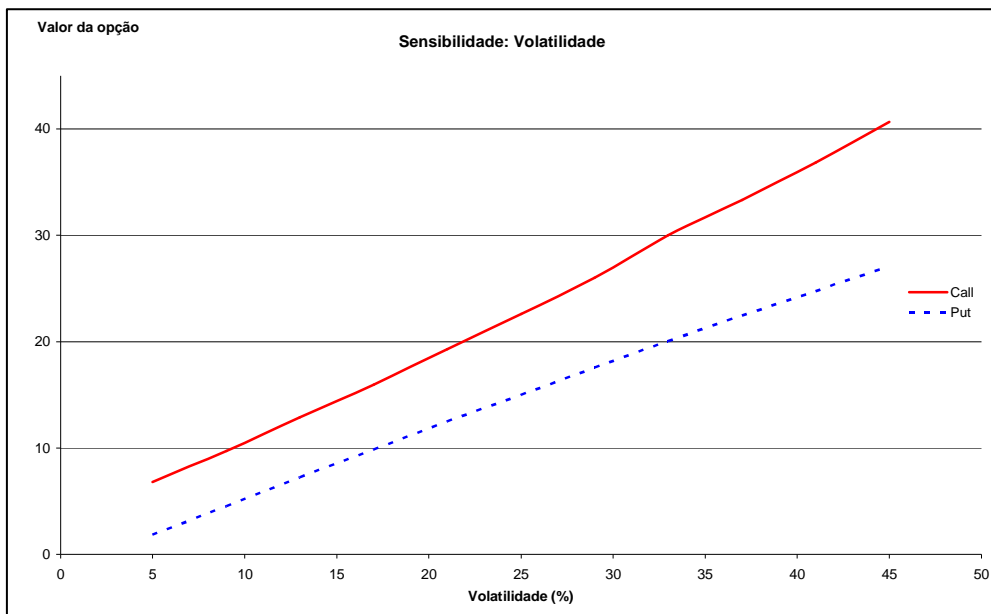
$$\text{PreçoCall} = 0,0083.k^2 - 2,5413.k + 189,66$$

$$R^2 = 0,9998$$

$$\text{PreçoPut} = 0,0122.k^2 - 1,5959.k + 49,449$$

$$R^2 = 0,9996$$

Sensibilidade em relação à mudança na volatilidade



Usando uma regressão linear, obtemos as equações seguintes:

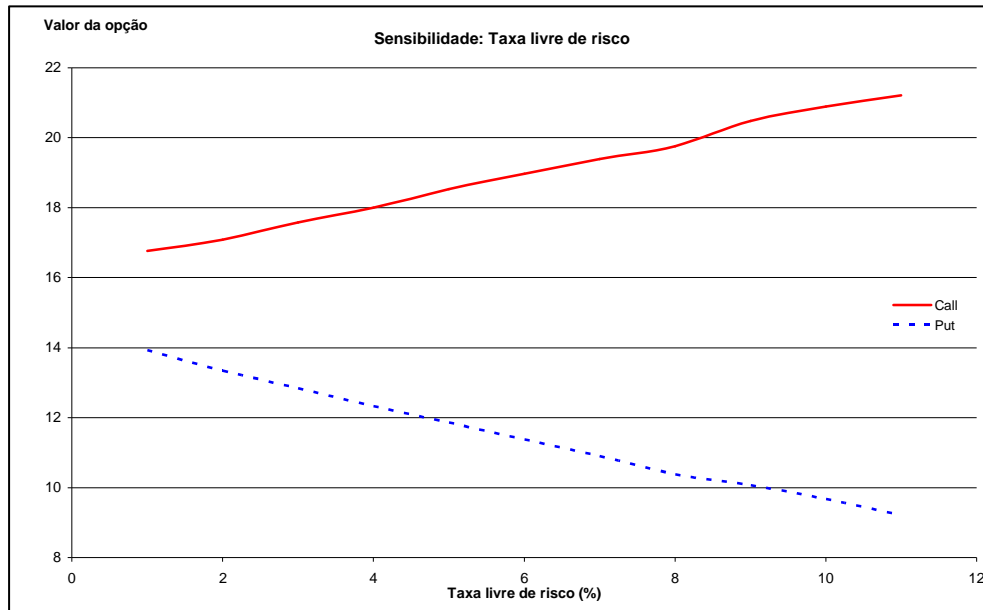
$$\text{PreçoCall} = 0,8493.v + 1,8699$$

$$R^2 = 0,9987$$

$$\text{PreçoPut} = 0,6325.v - 1,0124$$

$$R^2 = 0,9993$$

Sensibilidade em relação à mudança na taxa livre de risco



Usando uma regressão linear, obtemos as equações seguintes:

$$\text{PreçoCall} = 0,4591.r + 16,215$$

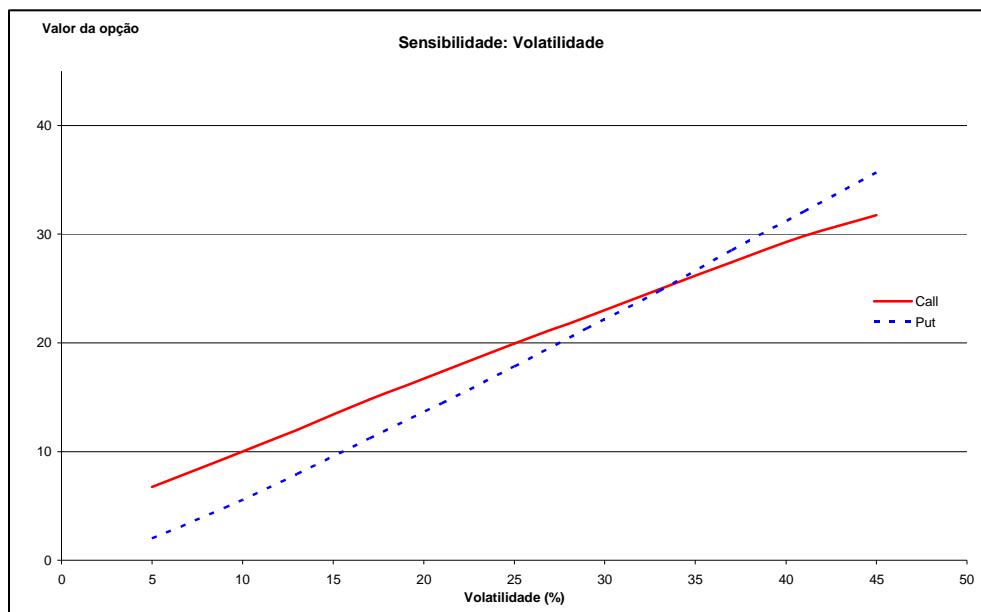
$$R^2 = 0,9975$$

$$\text{PreçoPut} = -0,4675.r + 14,253$$

$$R^2 = 0,9969$$

Opção *Lookback floating strike*

Sensibilidade em relação à mudança na volatilidade



Usando uma regressão linear, obtemos as equações seguintes:

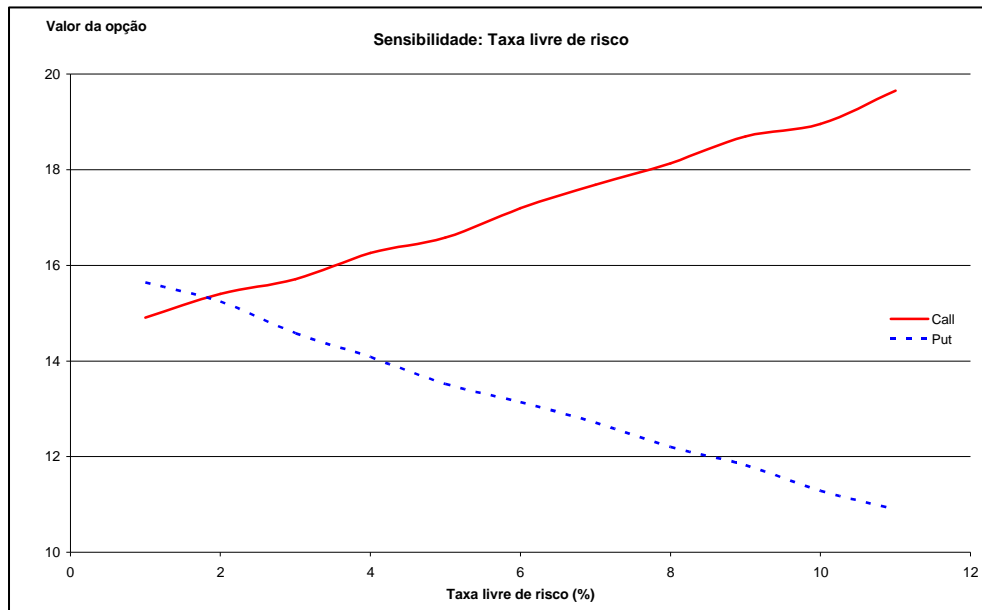
$$\text{PreçoCall} = 0,633.v + 3,8557$$

$$R^2 = 0,999$$

$$\text{PreçoPut} = -0,8482.v - 2,9737$$

$$R^2 = 0,9989$$

Sensibilidade em relação à mudança na taxa livre de risco



Usando uma regressão linear, obtemos as equações seguintes:

$$\text{PreçoCall} = 0,4704.r + 14,374$$

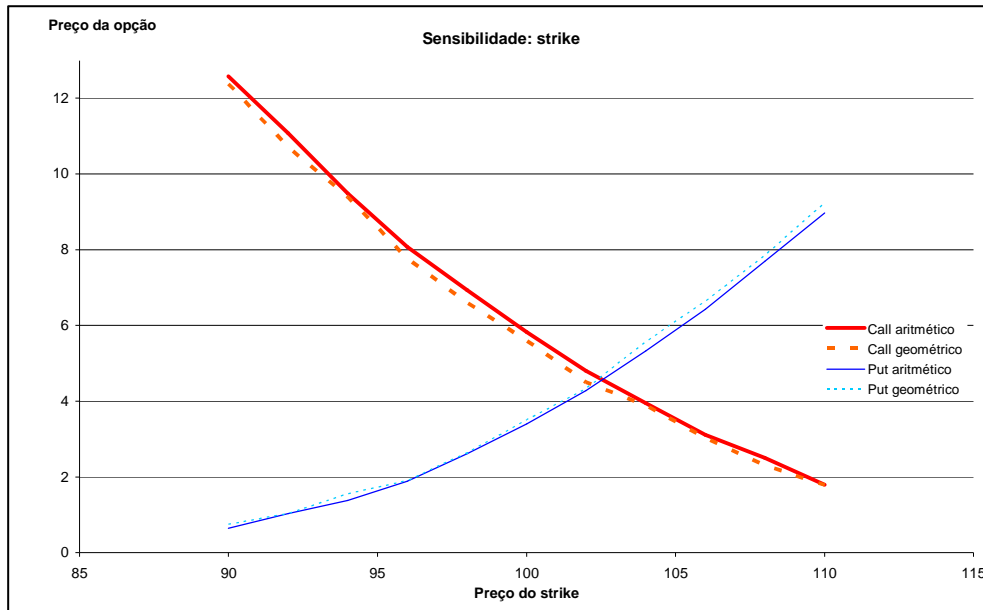
$$R^2 = 0,9971$$

$$\text{PreçoPut} = -0,4761.r + 16,049$$

$$R^2 = 0,9974$$

Opção Asiática

Sensibilidade em relação à mudança no preço do strike



Usando uma regressão quadrática, obtemos as equações seguintes:

$$\text{PreçoCall} = 0,0141.k^2 - 1,5959.k + 49,449$$

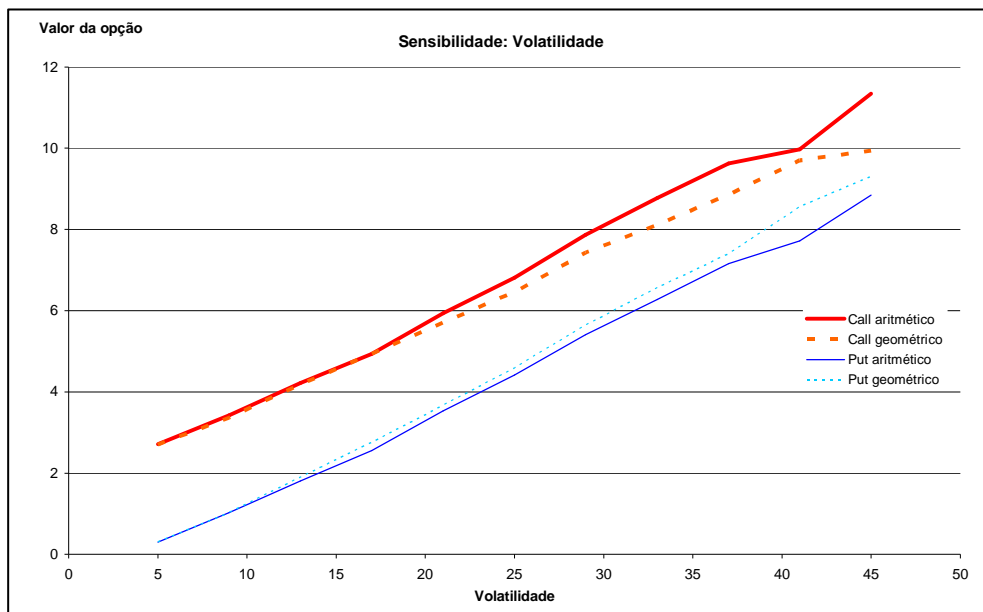
$$R^2 = 0,9998$$

$$\text{PreçoPut} = 0,0144.k^2 - 2,4689.k + 105,93$$

$$R^2 = 0,9998$$

Sensibilidade em relação à mudança na volatilidade

Usando uma regressão linear, obtemos as equações seguintes:



Aritmético

$$\text{PreçoCall} = 0,2163.v + 1,4683$$

$$R^2 = 0,9963$$

$$\text{PreçoPut} = 0,2156.v - 0,9331$$

$$R^2 = 0,9983$$

Geométrico

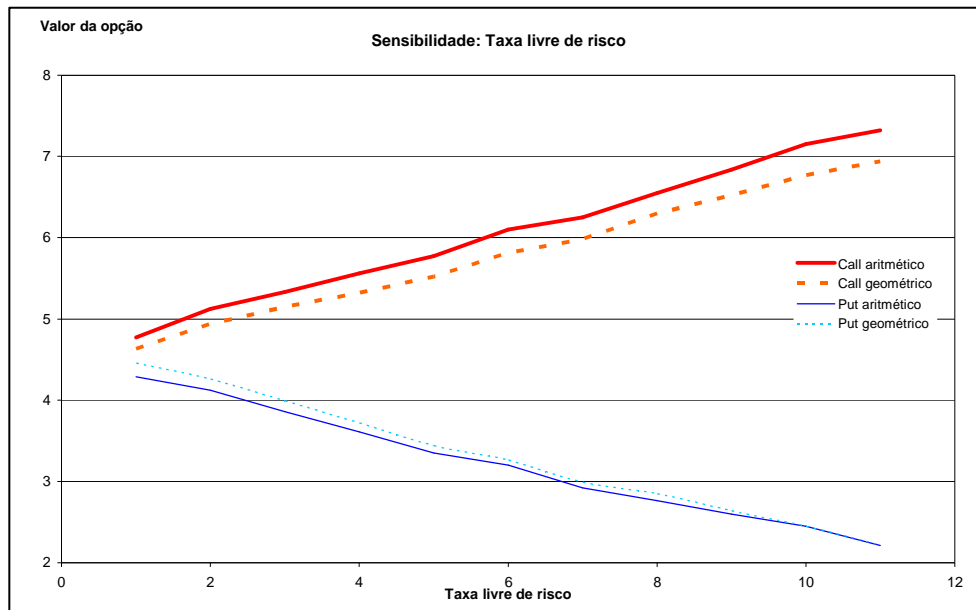
$$\text{PreçoCall} = 0,1901.v + 1,7335$$

$$R^2 = 0,9967$$

$$\text{PreçoPut} = -0,23.v - 1,0466$$

$$R^2 = 0,9987$$

Sensibilidade em relação à mudança na taxa livre de risco



Usando uma regressão linear, obtemos as equações seguintes:

Aritmético

$$\text{PreçoCall} = 0,2533.r + 4,5495$$

$$R^2 = 0,9972$$

$$\text{PreçoPut} = -0,209.r + 4,4695$$

$$R^2 = 0,9943$$

Geométrico

$$\text{PreçoCall} = 0,2309.r + 4,4218$$

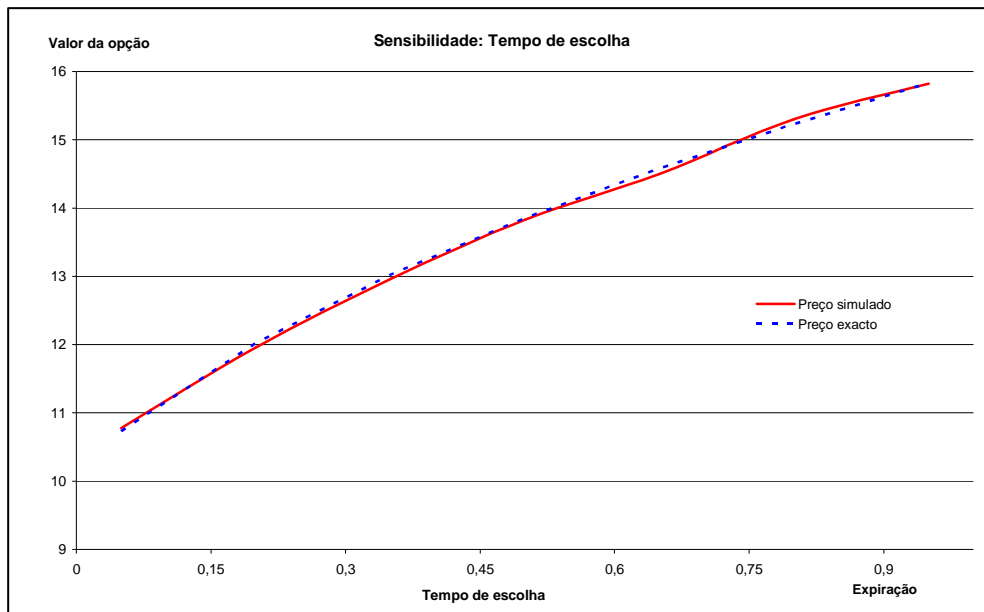
$$R^2 = 0,9974$$

$$\text{PreçoPut} = -0,2244.r + 4,6444$$

$$R^2 = 0,9952$$

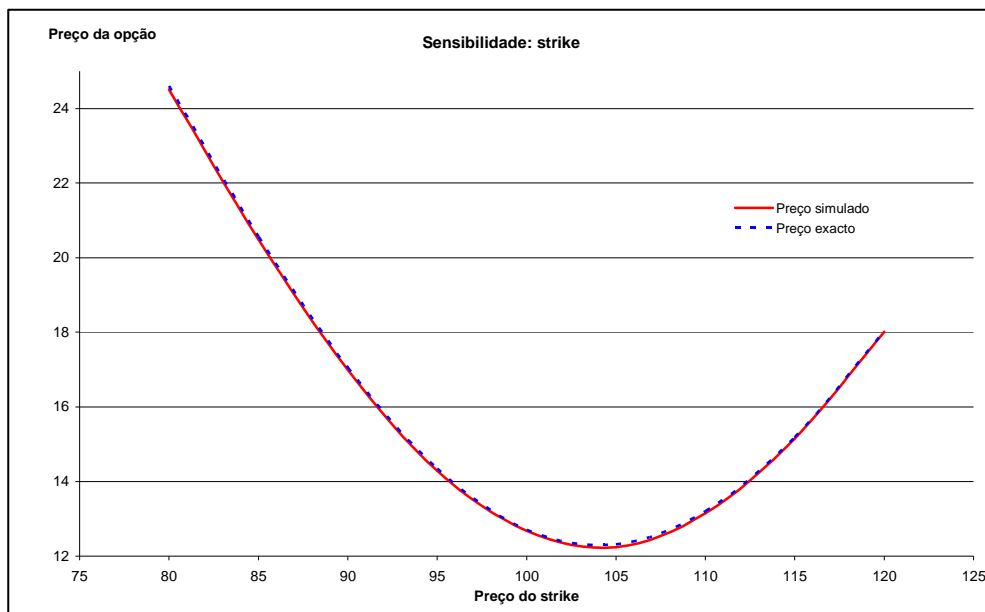
Opção Chooser

Sensibilidade em relação à mudança no tempo de escolha



O preço da opção aumenta com o tempo de escolha, a incerteza sobre o valor final do ativo sendo reduzida.

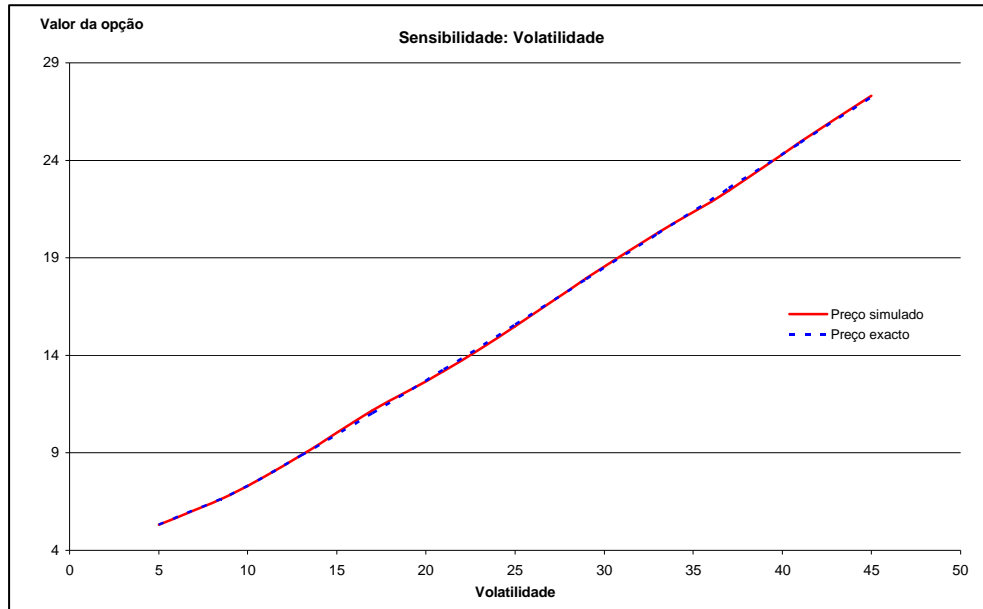
Sensibilidade em relação à mudança no preço do strike



O mínimo do valor do preço da opção depende do *drift* da simulação, então dos parâmetros do ativo.

O preço da opção aumenta com strike baixo, e com strike alto, a opção *chooser* sendo um call e um put no mesmo tempo até o tempo de escolher.

Sensibilidade em relação à mudança na volatilidade

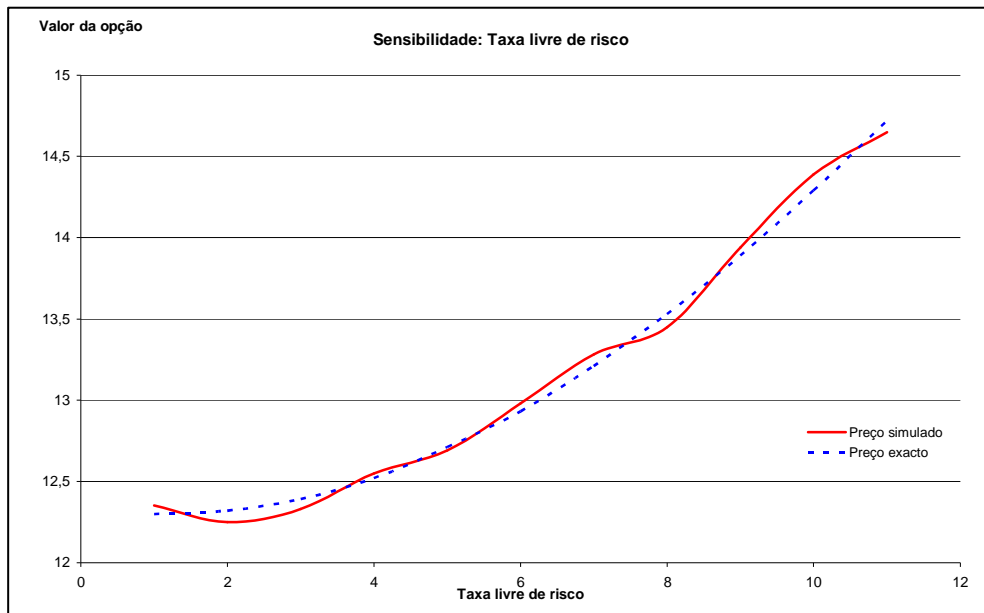


Uma relação linear existe para valores maiores que 10%:

$$\text{Preço Chooser} = 0,5588.v + 11,8189$$

$$R^2 = 0,9984$$

Sensibilidade em relação à mudança na taxa livre de risco



Para o preço teórico existe uma relação quadrática:

$$\text{Preço Chooser} = 0,0231.r^2 - 0,0315.r + 12,292$$

$$R^2 = 0,9998$$

O preço simulado converge para todos os valores da taxa livre de risco.

Apêndice 4

Apresentação dos programas

Para iniciar um cálculo de opção, abrir "*Matlab*" e iniciar o programa:

"*maingui.m*" (RUN).

A janela seguinte aparece:



Selecionar o tipo de opção desejado, e apertar "*Go to calculate*" para entrar no programa particular da opção.

Para cada tipo de opção, a janela que aparece é a seguinte:

European option

The screenshot shows a software window titled "mceuropean" with the subtitle "Monte-Carlo Simulation: European Option". The interface is divided into two main sections: "Parameters" and "Value".

Parameters:

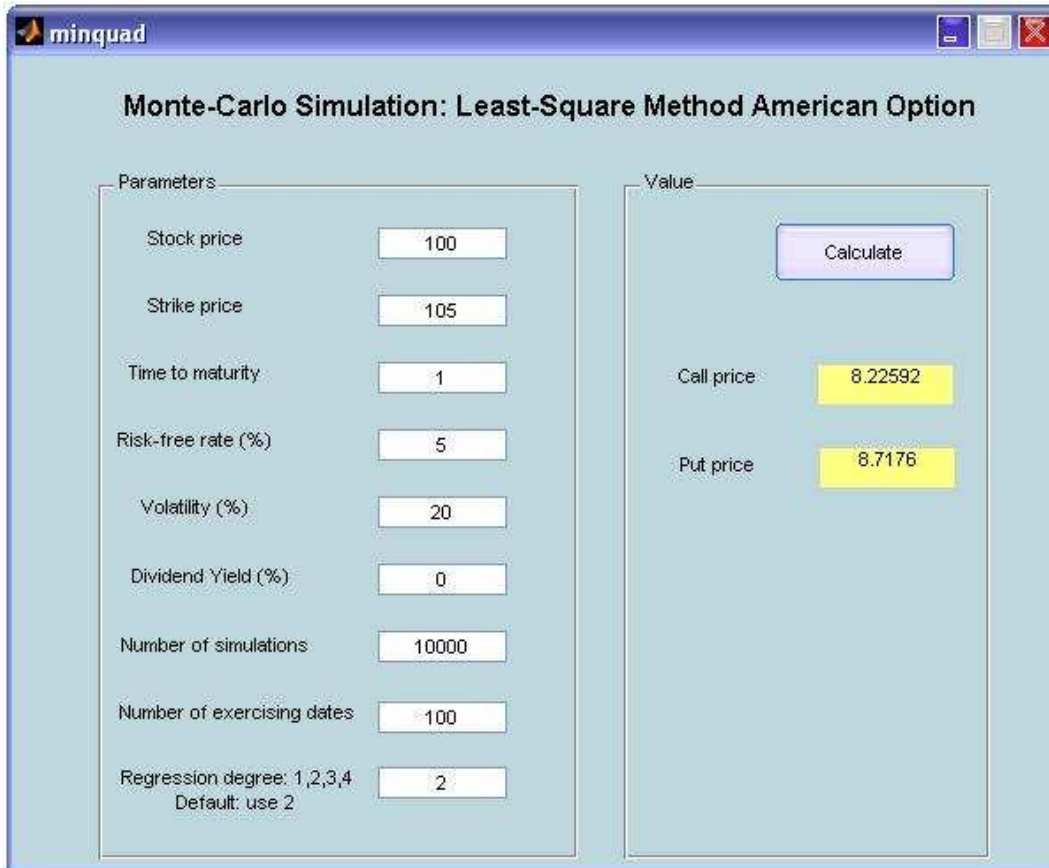
Stock price	100
Strike price	105
Time to maturity	1
Risk-free rate (%)	5
Volatility (%)	20
Dividend Yield (%)	0
Number of simulations	100000

Value:

Calculate

Call price	8.01182
Put price	7.89555
Black-Sholes prices	
Call price	8.02135
Put price	7.90044
Errors	
Call price (%)	0.118847
Put price (%)	0.0619514

American option Least-square method



The screenshot shows a software window titled "minquad" with the subtitle "Monte-Carlo Simulation: Least-Square Method American Option". The window is divided into two main sections: "Parameters" and "Value".

Parameters:

Stock price	100
Strike price	105
Time to maturity	1
Risk-free rate (%)	5
Volatility (%)	20
Dividend Yield (%)	0
Number of simulations	10000
Number of exercising dates	100
Regression degree: 1,2,3,4 Default: use 2	2

Value:

Call price	8.22592
Put price	8.7176

A "Calculate" button is located at the top of the Value section.

Asian option

Monte-Carlo Simulation: Asian Option

Parameters	Value									
Stock price	100									
Strike price	100									
Time to maturity	1									
Risk-free rate (%)	5									
Volatility (%)	20									
Dividend Yield (%)	0									
Number of simulations	2000									
Number of exercising dates	365									
	<input type="button" value="Calculate"/>									
	<input checked="" type="checkbox"/> Geometric Method Call price: 5.52367 Put price: 3.44472									
	<input checked="" type="checkbox"/> Arithmetic Method Call price: 5.86822 Put price: 3.42399									
	Black-Scholes exacts prices									
	Call price: 5.94218 Put price: 3.20848									
	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th style="text-align: left;">Errors %</th> <th style="text-align: center;">Geometric</th> <th style="text-align: center;">Arithmetic</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Call price</td> <td style="text-align: center;">7.04293</td> <td style="text-align: center;">1.24468</td> </tr> <tr> <td>Put price</td> <td style="text-align: center;">7.36299</td> <td style="text-align: center;">6.71691</td> </tr> </tbody> </table>	Errors %	Geometric	Arithmetic	Call price	7.04293	1.24468	Put price	7.36299	6.71691
Errors %	Geometric	Arithmetic								
Call price	7.04293	1.24468								
Put price	7.36299	6.71691								

Asset-or-nothing option

The screenshot shows a software window titled "assetornothing" with a subtitle "Monte-Carlo Simulation: European Asset-or-nothing Option". The interface is divided into two main sections: "Parameters" and "Value".

Parameters:

Stock price	100
Strike price	100
Time to maturity	1
Risk-free rate (%)	5
Volatility (%)	20
Dividend rate (%)	0
Number of simulations	1000000

Value:

Calculate

Call price	63.6739
Put price	36.3197

Cash-or-nothing option

The screenshot shows a software window titled "cashornothing" with a subtitle "Monte-Carlo Simulation: European Cash-or-nothing Option". The window is divided into two main sections: "Parameters" and "Value".

Parameters:

Stock price	100
Strike price	100
Time to maturity	1
Risk-free rate (%)	5
Volatility (%)	20
Dividend rate (%)	0
Premium	40
Number of simulations	1000000

Value:

Calculate	
Call price	21.311
Put price	16.7382
Exact call price	21.293
Exact put price	16.7562
Error call (%)	0.0843983
Error put (%)	0.107249

Lookback option: fixed strike

The screenshot shows a software window titled "fixedstrikelookback" with a subtitle "Monte-Carlo Simulation: Fixed Strike Lookback Option". The interface is divided into two main sections: "Parameters" and "Value".

Parameters:

Stock price	100
Strike price	100
Time to maturity	1
Risk-free rate (%)	5
Volatility (%)	20
Dividend Yield (%)	0
Number of simulations	10000
Number of exercising dates	365

Value:

Calculate

Call price	18.5412
Put price	11.8536

Lookback option: floating strike

The screenshot shows a software window titled "floatingstrikelookback" with the subtitle "Monte-Carlo Simulation: Floating Strike Lookback Option". The window is divided into two main sections: "Parameters" and "Value".

Parameters:

Stock price	100
Time to maturity	1
Risk-free rate (%)	5
Volatility (%)	20
Dividend Yield (%)	0
Number of simulations	10000
Number of exercising dates	365

Value:

Calculate

Call price	16.7375
Put price	13.6329

Chooser option

The screenshot shows a software window titled "chooser" with a subtitle "Monte-Carlo Simulation: Chooser Option". The interface is divided into two main sections: "Parameters" and "Value".

Parameters:

Stock price	100
Strike price Put/Call	100
Time to maturity Put/call	1
Risk-free rate (%)	5
Volatility (%)	20
Dividend Yield (%)	0
Chooser Time	0.3
Number of simulations	100000

Value:

Calculate

Chooser price	12.5903
Exact chooser price	12.7094
Error (%)	0.936409

Barrier option

The screenshot shows a software window titled "simplebarrier" with a subtitle "Monte-Carlo Simulation: European Barrier Option". The interface is divided into two main sections: "Parameters" and "Value".

Parameters:

Stock price	100
Strike price	105
Barrier	95
Time to maturity	1
Risk-free rate (%)	5
Volatility (%)	20
Dividend Yield (%)	0
Number of simulations	10000
Number of exercising dates	365

Value:

Calculate

Option type

1: Up and out
2: Up and in
3: Down and out
4: Down and in

Call price: 4.75462
Put price: 0.0932278

Apêndice 5

Método de Monte-Carlo

Código "Matlab" dos programas

Variáveis padrões dos programas:

s: Preço inicial
k: Strike
T: Tempo
r: Taxa livre de risco
v: Volatilidade
y: Dividend yield

NumSim: Numero de simulações
DivTemp: Numero de datas de exercício

grau: Grau da regressão

premium: Prêmio

b: Barrier
type: Tipo de opção *barrier*

Opção europeia

```
function [call,put] =
mceuropeanoption(price,strike,time,riskfreerate,volatility,dividendyield,NumSim)

x=price;
k=strike;
r=riskfreerate;
v=volatility;
n=NumSim;
t=time;
y=dividendyield;

%Inicializacao e calculo das variaveis intermediarios
F=(r-y-v^2/2)*t;
FF=v*sqrt(t);
call_vector =0;
call_vector_inv=0;
put_vector =0;
put_vector_inv=0;

for i=1:n/2
%Optimizar por "antithetic"
eps =random('Normal',0,1);
eps_inv=-eps;

%Calculo do valor da opcao para cada simulacao
call_vector =max( x*exp(F+FF*eps)-k,0) +call_vector;
call_vector_inv =max( x*exp(F+FF*eps_inv)-k,0) +call_vector_inv;
put_vector =max(-x*exp(F+FF*eps)+k,0) +put_vector;
put_vector_inv =max(-x*exp(F+FF*eps_inv)+k,0) +put_vector_inv;
end

%Calculo da media do valor do payoff
c=(1/n)*(call_vector + call_vector_inv);
p=(1/n)*( put_vector + put_vector_inv);

% Valor da opcao
call=exp(-r*t)*c;
put=exp(-r*t)*p;
```

Opção americana: Método dos mínimos quadrados de Monte-Carlo

```
function [ put_value,call_value ] = minquadooption(s,k,T,r,v,y,NumSim,DivTemp,grau)

% Divisão de tempo usada pela simulação, (tempo total dividido pelo numero de datas de
exercicios)
dt = T/DivTemp;
% Simulação dos preços
prices=zeros(NumSim,DivTemp);
% Inicialização da primeira coluna da simulação dos preços
for i=1:NumSim
    prices(i,1)=s;
end
% Simulação dos preços do ativo básico
for j=2:DivTemp
    for i=1:NumSim/2
        eps=normrnd(0,1);
        prices(i,j) =prices(i,j-1)*exp( (r-y-v^2/2)*dt + v*eps*sqrt(dt) );
        prices(i+NumSim/2,j)=prices(i+NumSim/2,j-1)*exp( (r-y-v^2/2)*dt - v*eps*sqrt(dt)
);
    end
end

% Calculo do Put
% Criação da matriz de calculo do preço da opção no exercicio imediato em cada tempo.
option = max( k-prices , 0);
% Inicialização do valor de continuação ao tempo final, seja o preço da opção.
continue_value=option(:,DivTemp);
% Metodo do MQ para calculo da opção
for j=DivTemp-1:-1:2
    temp=regression( exp(-r*dt)*continue_value , prices(:,j) , option(:,j) , grau);
    % Condicao de exercicio da opcao (exercicio immediatio > valor esperado).
    for i=1:NumSim
        if (option(i,j) > temp(i))
            continue_value(i)=option(i,j);
        else
            continue_value(i)=exp(-r*dt)*continue_value(i);
        end
    end
end
put_value=sum(continue_value)/NumSim;

% Calculo do Call
% Criação da matriz de calculo do preço da opção no exercicio imediato em cada tempo.
option = max( prices-k , 0);
% Inicialização do valor de continuação ao tempo final, seja o preço da opção.
continue_value=option(:,DivTemp);
% Metodo do MQ para calculo da opção
for j=DivTemp-1:-1:2
    temp=regression( exp(-r*dt)*continue_value , prices(:,j) , option(:,j) , grau);
    % Condicao de exercicio da opcao (exercicio immediatio > valor esperado).
```

```

for i=1:NumSim
    if (option(i,j) > temp(i))
        continue_value(i)=option(i,j);
    else
        continue_value(i)=exp(-r*dt)*continue_value(i);
    end
end
end
call_value=sum(continue_value)/NumSim;

```

Função de regressão

```

function [vector]=regression(A,B,C,grau)
% Função de calculo dos parametros da regreção e do valor de continuacao da opcao.

% Vetor de valor de continuacao
Y=[];
Y=A;
% Vetor de valor dos precos
X=[];
X=B;
% Vetor de valor da opcao corespondante
Z=[];
Z=C;
% Vetor marcando os caminhos "ITM"
W=[];
n=length(Y);
YY=[];
XX=[];

% Selecao dos preços "in-the-money" e do vetor dos caminhos "in-the-money"
% A linha tem o valor "1" se "ITM", "0" se "out-of-the-money"
i=1;
for j=1:n
    if Z(j)==0
        W(j,1)=0;
    else
        YY(i,1)=Y(j);
        XX(i,1)=X(j);
        W(j,1)=1;
        i=i+1;
    end
end
end

% Calculo da matriz dos valores de (XX^0,XX,XX^2,XX^3...) para o calculo dos
% coeficientes da regressao, so com os caminhos "in-the-money".
% Dependendo do grau desejado:
if (grau==1) % regressao linear
    matrixx=[ones(size(XX)) XX];
    matrix=[ones(size(X)) X];
elseif (grau==2) % regressao quadratica
    matrixx=[ones(size(XX)) XX XX.*XX];
    matrix=[ones(size(X)) X X.*X];

```

```

elseif (grau==3) %regressao grau 3
    matrixx=[ones(size(XX)) XX XX.*XX XX.*XX.*XX];
    matrix=[ones(size(X)) X X.*X X.*X.*X];
elseif (grau==4) %regressao grau 4
    matrixx=[ones(size(XX)) XX XX.*XX XX.*XX.*XX XX.*XX.*XX.*XX];
    matrix=[ones(size(X)) X X.*X X.*X.*X X.*X.*X.*X];
elseif (grau==5) %regressao grau 5
    matrixx=[ones(size(XX)) XX XX.*XX XX.*XX.*XX XX.*XX.*XX.*XX XX.*XX.*XX.*XX.*XX];
    matrix=[ones(size(X)) X X.*X X.*X.*X X.*X.*X.*X X.*X.*X.*X.*X];
end
%Calculo dos coeficientes da regressão
coef = matrixx\YY;
%Calculo dos precos esperados
vector = (matrix*coef).*W;

```

Opção asset-or-nothing

```
function [call,put] = assetnothingoption(s,k,T,r,v,y,NumSim)
```

```

%Inicialização das variaveis usadas
eps =0;
price =0;
price_inv=0;
valuecall=0;
valueput =0;
call =0;
put =0;
%Simulação dos preços do ativo basico e calculo do valor do payoff em cada
tempo
for i=1:NumSim/2
    eps =normrnd(0,1);
    price =s*exp( (r-y-v^2/2)*T + v*eps*sqrt(T) );
    price_inv=s*exp( (r-y-v^2/2)*T - v*eps*sqrt(T) );
    %Calculo do payoff do call
    if(price>k)
        valuecall =valuecall + price;
    end
    if(price_inv>k)
        valuecall =valuecall + price_inv;
    end
    %Calculo do payoff do put
    if(k>price)
        valueput =valueput + price;
    end
    if(k>price_inv)
        valueput =valueput + price_inv;
    end
end
call=exp(-r*T)*(valuecall/NumSim);
put=exp(-r*T)* (valueput /NumSim);

```

Opção cash-or-nothing

```
function [call,put] = cashnothingoption(s,k,T,r,v,y,premium,NumSim)
```

```
% Inicialização das variáveis usadas
```

```
eps = 0;
price = 0;
price_inv = 0;
valuecall = 0;
valueput = 0;
call = 0;
put = 0;
```

```
% Simulação dos preços do ativo básico e cálculo do valor do payoff em cada
% tempo
```

```
for i=1:NumSim/2
    eps = normrnd(0,1);
    price = s*exp((r-y-v^2/2)*T + v*eps*sqrt(T));
    price_inv = s*exp((r-y-v^2/2)*T - v*eps*sqrt(T));
```

```
% Cálculo do payoff do call
```

```
if(price > k)
    valuecall = valuecall + premium;
end
if(price_inv > k)
    valuecall = valuecall + premium;
end
```

```
% Cálculo do payoff do put
```

```
if(k > price)
    valueput = valueput + premium;
end
if(k > price_inv)
    valueput = valueput + premium;
end
```

```
end
```

```
call = exp(-r*T)*(valuecall/NumSim);
put = exp(-r*T)*(valueput/NumSim);
```

```
% Função de cálculo exacto:
```

```
function [call,put] =
exactcashnothingoption(s,k,T,r,v,y,premium)
m)
```

```
% Reiner e Rubinstein 1991 solução
```

```
d = (log(s/k) + (r-y-v^2/2)*T) / (v*sqrt(T));
call = exp(-r*T)*normcdf(d)*premium;
put = exp(-r*T)*normcdf(-d)*premium;
```

Opção lookback: *fixed strike*

```

function [call,put] = fixedstrikelookbackoption(s,k,T,r,v,y,NumSim,DivTemp)

% Divisão de tempo usada pela simulação, (tempo total dividido pelo numero de
datas de exercicios)
dt = T/DivTemp;
% Simulação dos preços
prices=zeros(NumSim,DivTemp);
% Inicialização da primeira coluna da simulação dos preços
for i=1:NumSim
    prices(i,1)=s;
end
% Simulação dos preços do ativo basico
for j=2:DivTemp
    for i=1:NumSim/2
        eps=normrnd(0,1);
        prices(i,j) =prices(i,j-1)*exp( (r-y-v^2/2)*dt + v*eps*sqrt(dt) );
        prices(i+NumSim/2,j)=prices(i+NumSim/2,j-1)*exp( (r-y-v^2/2)*dt -
v*eps*sqrt(dt) );
    end
end

% Pesquisando o minimo e o maximo para cada caminho
for i=1:NumSim
    callpayoff(i,1)=max( max(prices(i,:))-k ,0);
    putpayoff (i,1)=max( k-min(prices(i,:)) ,0);
end

call=exp(-r*T)*(sum(callpayoff)/NumSim);
put =exp(-r*T)*(sum(putpayoff) /NumSim);

```


Opção lookback: *floating strike*

```
function [call,put] = floatingstrikelookbackoption(s,T,r,v,y,NumSim,DivTemp)
```

```
% Divisão de tempo usada pela simulação, (tempo total dividido pelo numero de  
datas de exercicios)
```

```
dt = T/DivTemp;
```

```
% Simulação dos preços
```

```
prices=zeros(NumSim,DivTemp);
```

```
% Inicialização da primeira coluna da simulação dos preços
```

```
for i=1:NumSim
```

```
    prices(i,1)=s;
```

```
end
```

```
% Simulação dos preços do ativo basico
```

```
for j=2:DivTemp
```

```
    for i=1:NumSim/2
```

```
        eps=normrnd(0,1);
```

```
        prices(i,j) =prices(i,j-1)*exp( (r-y-v^2/2)*dt + v*eps*sqrt(dt) );
```

```
        prices(i+NumSim/2,j)=prices(i+NumSim/2,j-1)*exp( (r-y-v^2/2)*dt -
```

```
v*eps*sqrt(dt) );
```

```
    end
```

```
end
```

```
% Pesquisando o minimo e o maximo para cada caminho
```

```
for i=1:NumSim
```

```
    callpayoff(i,1)=max( prices(i,DivTemp)-min(prices(i,:)) ,0);
```

```
    putpayoff (i,1)=max( max(prices(i,:))-prices(i,DivTemp) ,0);
```

```
end
```

```
call=exp(-r*T)*(sum(callpayoff)/NumSim);
```

```
put =exp(-r*T)*(sum(putpayoff) /NumSim);
```

Opção asiática: método geométrico

```
function [call,put] =
geometricasianoptionmontecarlo(s,k,T,r,v,y,NumSim,DivTemp)

% Divisão de tempo usada pela simulação, (tempo total dividido pelo numero de
datas de exercicios)
dt = T/DivTemp;
% Simulação dos preços
prices=zeros(NumSim,DivTemp);
% Inicialização da primeira coluna da simulação dos preços
for i=1:NumSim
    prices(i,1)=s;
end
% Simulação dos preços do ativo basico
for j=2:DivTemp
    for i=1:NumSim/2
        eps=normrnd(0,1);
        prices(i,j) =prices(i,j-1)*exp( (r-y-v^2/2)*dt + v*eps*sqrt(dt) );
        prices(i+NumSim/2,j)=prices(i+NumSim/2,j-1)*exp( (r-y-v^2/2)*dt -
v*eps*sqrt(dt) );
    end
end
% Inicialização do vetor coluna recebendo o produto dos preços
for i=1:NumSim
    payoff(i,1)=1;
end
% Calculo do producto dos preços e da raiz "^(1/DivTemp)"
for j=1:DivTemp
    payoff(:,1) = payoff(:,1).*(prices(:,j).^(1/DivTemp));
end
% Calculo do payoff final de cada simulação
callpayoff(:,1)= max(payoff(:,1)-k,0);
putpayoff(:,1) = max(k-payoff(:,1),0);

call=sum(callpayoff(:,1))/NumSim;
call=call*exp(-r*T);

put=sum(putpayoff(:,1))/NumSim;
put=put*exp(-r*T);
```

```
% Função de calculo exacto:
```

```
function [ call,put ] =
geometricasianoption(s,k,T,r,v,y)
% Modificação dos parametros: volatilidade e
dividend yield
va = v/sqrt(3);
ya = (r-y-v^2/6)/2;
[call,put]=blsprice(s,k,r,T,va,ya);
```

Opção asiática: método aritmético

```

function [call,put] =
arithmeticsianoptionmontecarlo(s,k,T,r,v,y,NumSim,DivTemp)

% Divisão de tempo usada pela simulação, (tempo total dividido pelo numero de
datas de exercicios)
dt = T/DivTemp;
% Simulação dos preços
prices=zeros(NumSim,DivTemp);
% Inicialização da primeira coluna da simulação dos preços
for i=1:NumSim
    prices(i,1)=s;
end
% Simulação dos preços do ativo basico
for j=2:DivTemp
    for i=1:NumSim/2
        eps=normrnd(0,1);
        prices(i,j) =prices(i,j-1)*exp( (r-y-v^2/2)*dt + v*eps*sqrt(dt) );
        prices(i+NumSim/2,j)=prices(i+NumSim/2,j-1)*exp( (r-y-v^2/2)*dt -
v*eps*sqrt(dt) );
    end
end

% Inicialização do vetor coluna recebendo a soma dos preços
for i=1:NumSim
    payoff(i,1)=0;
end

% Calculo da soma dos preços
for j=1:DivTemp
    payoff(:,1) = payoff(:,1)+prices(:,j);
end

% Calculo da media do payoff em cada simulação
payoff(:,1)=payoff(:,1)/DivTemp;

% Calculo do payoff final de cada simulação
callpayoff(:,1)= max(payoff(:,1)-k,0);
putpayoff(:,1) = max(k-payoff(:,1),0);

call=sum(callpayoff(:,1))/NumSim;
call=call*exp(-r*T);

put=sum(putpayoff(:,1))/NumSim;
put=put*exp(-r*T);

```

Opção chooser

```

function [chooservalue ] = chooseroption(s,k,T,t,r,v,y,NumSim)

price=0;
price_inv=0;
valuecall=0;
valueput =0;
numbercall=0;
numberput=0;
unpriceablepaths=0;

% Simulação dos preços do ativo básico e cálculo do valor do payoff em cada
tempo
for i=1:NumSim/2
    eps =normrnd(0,1);
    epss=normrnd(0,1);

    % Simulação do preço dependendo do call ou do put escolhido no tempo t
    price      =s      *exp( (r-y-v^2/2)*t  + v*eps*sqrt(t) );
    pricee     =price*exp( (r-y-v^2/2)*(T-t) + v*epss*sqrt(T-t) );
    [blscall,blsput] =blsprice(price,k,r,T-t,v,y);

    if (blscall>blsput)
        valuecall      =valuecall  + max(pricee-k,0);
        numbercall     =numbercall+1;
    elseif (blsput>blscall)
        valueput       =valueput   + max(k-pricee,0);
        numberput      =numberput+1;
    else
        unpriceablepaths =unpriceablepaths+1;
    end

    price_inv      =s      *exp( (r-y-v^2/2)*t  - v*eps*sqrt(t) );
    price_invv     =price_inv*exp( (r-y-v^2/2)*(T-t) - v*epss*sqrt(T-t) );
    [blscalltemp,blsputtemp] =blsprice(price_inv,k,r,T-t,v,y);

    if (blscalltemp>blsputtemp)
        valuecall      =valuecall  + max(price_invv-k,0);
        numbercall     =numbercall+1;
    elseif (blsputtemp>blscalltemp)
        valueput       =valueput   + max(k-price_invv,0);
        numberput      =numberput+1;
    else
        unpriceablepaths=unpriceablepaths+1;
    end
end

average=(valuecall+valueput)/(numbercall+numberput);
chooservalue=average*exp(-r*T);

```

Opção *barrier*

```
function [call,put] = simplebarrieroption(s,k,b,T,r,v,y,NumSim,DivTemp,type)
```

```
% valor do "type":
% 1: up and out
% 2: up and in
% 3: down and out
% 4: down and in
```

```
% Inicialização das variáveis
valuecall =0;
valueput =0;
optionactive=0;
```

```
% Divisão de tempo usada pela simulação, (tempo total dividido pelo numero de
datas de exercicios)
```

```
dt = T/DivTemp;
```

```
% Simulação dos preços
```

```
prices=zeros(NumSim,DivTemp);
```

```
% Inicialização da primeira coluna da simulação dos preços
```

```
for i=1:NumSim
```

```
    prices(i,1)=s;
```

```
end
```

```
% Simulação dos preços do ativo basico
```

```
for j=2:DivTemp
```

```
    for i=1:NumSim/2
```

```
        eps=normrnd(0,1);
```

```
        prices(i,j) =prices(i ,j-1)*exp( (r-y-v^2/2)*dt + v*eps*sqrt(dt) );
```

```
        prices(i+NumSim/2,j)=prices(i+NumSim/2,j-1)*exp( (r-y-v^2/2)*dt -
```

```
v*eps*sqrt(dt) );
```

```
    end
```

```
end
```

```
% type=1: up and out
```

```
if (type==1)
```

```
    for i=1:NumSim
```

```
        optionactive=b-max(prices(i,:));
```

```
        % Opção esta ativa se optionactive positivo
```

```
        if (optionactive>0)
```

```
            valuecall=max(prices(i,DivTemp)-k,0)+valuecall;
```

```
            valueput =max(k-prices(i,DivTemp),0)+valueput ;
```

```
        end
```

```
    end
```

```
    call=exp(-r*T)*valuecall/NumSim;
```

```

    put =exp(-r*T)*valueput /NumSim;
end

```

```

%type=2: up and in

```

```

if (type==2)
    for i=1:NumSim
        optionactive=max(prices(i,:))-b;
        % Opção esta ativa se optionactive positivo
        if (optionactive>0)
            valuecall=max(prices(i,DivTemp)-k,0)+valuecall;
            valueput =max(k-prices(i,DivTemp),0)+valueput ;
        end
    end
    call=exp(-r*T)*valuecall/NumSim;
    put =exp(-r*T)*valueput /NumSim;
end

```

```

%type=3: down and out

```

```

if (type==3)
    for i=1:NumSim
        optionactive=min(prices(i,:))-b;
        % Opção esta ativa se optionactive positivo
        if (optionactive>0)
            valuecall=max(prices(i,DivTemp)-k,0)+valuecall;
            valueput =max(k-prices(i,DivTemp),0)+valueput ;
        end
    end
    call=exp(-r*T)*valuecall/NumSim;
    put =exp(-r*T)*valueput /NumSim;
end

```

```

%type=4: down and in

```

```

if (type==4)
    for i=1:NumSim
        optionactive=b-min(prices(i,:));
        % Opção esta ativa se optionactive positivo
        if (optionactive>0)
            valuecall=max(prices(i,DivTemp)-k,0)+valuecall;
            valueput =max(k-prices(i,DivTemp),0)+valueput ;
        end
    end
    call=exp(-r*T)*valuecall/NumSim;
    put =exp(-r*T)*valueput /NumSim;
end

```

Apêndice 6

Opção americana sem dividendos Modelo de Coxx-Ross-Rubinstein

Nesse modelo, r a taxa livre de risco é considerada constante.

Seja S_n o valor do ativo no instante n :

Assim existe duas constantes a e b tais que: $-1 < a < b$ e que $\frac{S_{n+1}}{S_n}$ só pode pegar os valores “ $(1+a)$ ” ou “ $(1+b)$ ” no instante $(n+1)$, com probabilidades “ p ” e “ $(p-1)$ ” respectivamente:

Instante n	Instante $(n+1)$
S_n	$S_{n+1} = S_n \cdot (1+a)$ Valor S_U com probabilidade p
	$S_{n+1} = S_n \cdot (1+b)$ Valor S_D com probabilidade $(p-1)$

Usando a definição da opção de venda seguinte:

Preços do ativo no inicio	$S=100$
Strike da opção	$k=100$
Tempo a expiração (ano)	$T=1$
Taxa livre de risco	$R=5\%$
Volatilidade do ativo	$v=20\%$
Dividend Yield	$y=0$

Para avaliar as opções americanas nesse contexto e usando o método binomial devemos escolher os parâmetros assim:

- N Numero de simulações
- $r = \frac{R.T}{N}$ A taxa livre de risco no período.
- $(1+a) = (1+r).e^{-\sigma.\sqrt{\frac{T}{N}}}$ Definição do parâmetro a
- $(1+b) = (1+r).e^{\sigma.\sqrt{\frac{T}{N}}}$ Definição do parâmetro b
- $p = \frac{b-r}{b-a}$ Definição da probabilidade neutra ao risco

Foi provado que com esses parâmetros o modelo binomial converge, por N grande, no valor da opção americana sem dividendos.

Obtemos um algoritmo rápido e determinístico para avaliar uma opção americana sem dividendos e onde o único parâmetro importante é “ N ” que deve ser alto para ter precisão no calculo. O tempo computacional para $N = 5000$ está de 1 minuto aproximadamente.

Os resultados da convergência são:

Numero de simulações	Valor da opção de venda
<i>10</i>	<i>6.1842</i>
<i>50</i>	<i>6.0917</i>
<i>100</i>	<i>6.0945</i>
<i>500</i>	<i>6.0915</i>
<i>1000</i>	<i>6.0898</i>
<i>5000</i>	<i>6.0904</i>

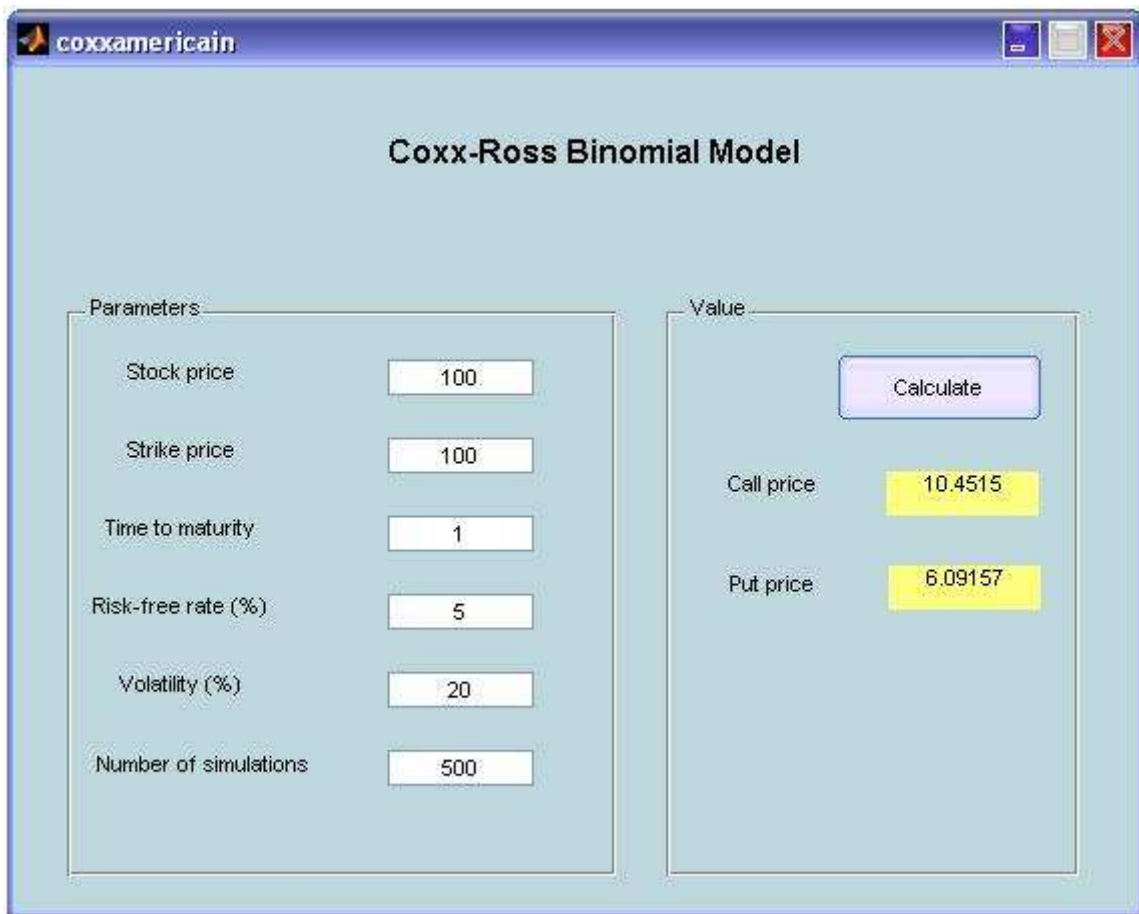
A precisão do calculo esta rapidamente boa, porque com $N = 1000$ o erro é só de 0,01% em comparação ao valor teórico, obtido com $N=5000$.

O preço da opção européia de venda com os mesmos parâmetros é 5.5735, valor menor que a opção americana.

O preço da opção de compra americana sem dividendos é o mesmo que a opção européia, porque foi provado que o exercício antecipado nunca é ótimo. Esse preço teórico é dado pela formula de Black-Scholes. (ver anexo 2).

Os resultados da convergência são:

Numero de simulações	Valor do Call	Valor Black-Scholes	Erro (%)
<i>10</i>	<i>10.6085</i>		<i>1.51</i>
<i>50</i>	<i>10.4423</i>		<i>0.08</i>
<i>100</i>	<i>10.4586</i>		<i>0.07</i>
<i>500</i>	<i>10.4515</i>	<i>10.4506</i>	<i>0.009</i>
<i>1000</i>	<i>10.4493</i>		<i>0.008</i>
<i>5000</i>	<i>10.4506</i>		<i>0</i>



Código Matlab do programa:

```
function [call,put] =
coxxamericainoption(price,strike,time,riskfreerate,volatility,NumSim)

%Definição das constantes no calculo
s=price; k=strike; t=time; R=riskfreerate; v=volatility; n=NumSim;
%Taxa ajustada no período
r=R*t/n;

A=(1+r)*exp(-v*sqrt(t/n));
B=(1+r)*exp(v*sqrt(t/n));

p=((B-1)-r) / ((B-1)-(A-1)); %Probabilidade neutra ao risco de queda
q=1-p; %Probabilidade neutra ao risco de subida
m=zeros(n+1,n+1);

%Calculo da opção call
for j=1:n+1
for i=1:j
m(i,j)= max ( s*(B)^(i-1)*(A)^(j-i)-k , 0 );
end
```

```

end

for j=n+1:-1:2
  for i=j:-1:2
    m(i-1,j-1)= max ( (q*m(i,j)+p*m(i-1,j))/(1+r) , m(i-1,j-1) );
  end
end
call = m(1,1);

```

%Calculo da opção put

```

for j=1:n+1
  for i=1:j
    m(i,j)= max ( k-s*(B)^(i-1)*(A)^(j-i) , 0 );
  end
end

for j=n+1:-1:2
  for i=j:-1:2
    m(i-1,j-1)= max ( (q*m(i,j)+p*m(i-1,j))/(1+r) , m(i-1,j-1) );
  end
end
put = m(1,1);

```