



**José Carlos Franco de Abreu Neto**

**Quantificação do Risco de Crédito: Uma abordagem  
utilizando o modelo estrutural de Merton**

**Dissertação de Mestrado**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção da PUC - Rio como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Engenharia de Produção.

Orientador: Tara Keshar Nanda Baidya

Rio de Janeiro  
Agosto de 2008

**José Carlos Franco de Abreu Neto**

**Quantificação do Risco de Crédito: Uma abordagem  
utilizando o modelo estrutural de Merton**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção da PUC - Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

**Prof. Tara Keshar Nanda Baidya**

Orientador

Departamento de Engenharia de Produção – PUC - Rio

**Prof. Paulo Henrique Soto Costa**

Co-Orientador

Departamento de Engenharia de Produção – PUC - Rio

**Prof. Carlos Patrício Samanez**

Departamento de Engenharia de Produção – PUC – Rio

**Prof. José Paulo Teixeira**

Departamento de Engenharia de Produção – PUC - Rio

**Dr. Ernesto Kazuhiro Nomi**

Mitsubishi Corporation do Brasil S/A

**Prof. José Eugênio Leal**

Coordenador Setorial do Centro Técnico Científico – PUC- Rio

Rio de Janeiro, 26 de agosto de 2008

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

### **José Carlos Franco de Abreu Neto**

Graduado em Engenharia Civil pela Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro e com MBA em Finanças Corporativas pelo IBMEC-RJ. É analista de valores mobiliários e agente autônomo de investimentos, ambos registrados na CVM. Exerceu atividades profissionais na Construtora Azevedo & Cotrik, Mercado Gestão de Recursos e na NSG Capital Administração de Recursos.

#### Ficha catalográfica

Abreu Neto, José Carlos Franco de

Quantificação do risco de crédito : uma abordagem utilizando o modelo estrutural de Merton / José Carlos Franco de Abreu Neto ; orientador: Tara Keshar Nanda Baidya. – 2008.

123 f. : il. ; 30 cm

Dissertação (Mestrado em Engenharia Industrial)– Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2008.

Inclui bibliografia

1. Engenharia industrial – Teses. 2. Quantificação do risco de crédito. 3. Risco de crédito. 4. Modelo estrutural de Merton. 5. KMV. I. Baidya, Tara Keshar Nanda. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Engenharia Industrial. III. Título.

CDD: 658.5

À minha família.

## Agradecimentos

Ao Professor Tara Keshar Nanda Baidya, orientador desta dissertação, pelo imenso apoio e confiança depositada durante estes anos na PUC-Rio.

A todos os professores e funcionários do Departamento de Engenharia Industrial da PUC-Rio, especialmente aos professores, Tara Baidya, José Paulo Teixeira e Carlos Samanez, por todo conhecimento transmitido.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), pela ajuda financeira recebida durante todo o curso.

A todos que me apoiaram nesta caminhada.

A Deus, por tudo.

## Resumo

Abreu Neto, José Carlos Franco de; Baidya, Tara Keshar Nanda. **Quantificação do Risco de Crédito: Uma abordagem utilizando o modelo estrutural de Merton**. Rio de Janeiro, 2008. 123 p. Dissertação de Mestrado – Departamento de Engenharia de Produção, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-Rio).

Mensurar o risco de *default* justo para uma empresa sempre foi uma tarefa crucial para uma instituição financeira na hora de emprestar, principalmente, hoje em dia, com o aumento da competitividade e a redução dos *spreads*. Por outro lado, as empresas também precisam ser críticas e devem saber determinar o seu grau de risco com a mesma exatidão das instituições financeiras. Todos os agentes de mercado devem possuir as melhores ferramentas para mensurar o risco de crédito. Com esse intuito será apresentado nesta dissertação uma metodologia de análise de risco de crédito que está sendo muito discutida no momento. O foco será no modelo teórico de equilíbrio de Merton, 1974, que foi amplamente difundido pela KMV Corporation, que desenvolveu um modelo baseado nas premissas de Merton para fazer previsão de *default*. A dissertação começará com uma abordagem sobre o cenário que levou ao desenvolvimento de novos modelos para quantificar o risco de crédito. Em seguida, será feita uma revisão da modelagem KMV e da modelagem DLI (baseada na teoria de Merton, 1974). Após, será estimado o valor dos ativos a partir do valor do *equity* e calculada a probabilidade de *default* de empresas brasileiras, negociadas em bolsa, e que realmente entraram em *default*. Serão discutidas as vantagens e desvantagens apresentadas por estes dois modelos e as diferenças que existem entre a modelagem da KMV e a DLI.

## Palavras-chave

Quantificação do risco de crédito; risco de crédito; KMV; modelo estrutural de Merton.

## Abstract

Abreu Neto, José Carlos Franco de; Baidya, Tara Keshar Nanda Baidya. **Quantification of Credit Risk: An approach using Merton's structural model**. Rio de Janeiro, 2008. 123 p. MSc. Dissertation – Department of Industrial Engineering, Pontificia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-Rio).

Measuring the fair default risk for a company, has always been a crucial task for a financial institution when it comes to granting loans, especially nowadays, with the rise in competitiveness and the reduction of the spreads. On the other hand, companies need to be analytical and must know how to determine their level of risk with the same accuracy as the financial institutions. Every market agent must possess the best tools to measure the credit risk, and with this purpose, the most discussed subject of the moment will be presented in this dissertation. The focus will be on the theoretical model of equilibrium by Merton, 1974, which was widely spread by KMV Corporation, who developed a model based on Merton's premises in order to be able to predict default. The dissertation will start with an approach over the scenario that led to the development of new models to quantify the credit risk. Next, a review over the KMV model and the DLI model (based on Merton, 1974) will be done. After that, we will estimate the asset value starting from the equity value, and calculate the probability of default of Brazilian companies that are negotiated on the stock exchange, and who've really gone into default. We will discuss the advantages and disadvantages presented by these two models and the existing difference between the KMV and the DLI models.

## Keywords

Quantification of the credit risk; credit risk; KMV; Merton's structural model.

## Sumário

1 Introdução .....	14
2 Risco .....	19
3 Evolução da Avaliação do Crédito.....	33
4 Modelo de Equilíbrio Geral e Opções.....	37
4.1. Introdução .....	37
4.2. Derivativos.....	37
4.3. Conceito de opção: .....	38
5 Modelo KMV e DLI .....	48
5.1. Introdução .....	48
5.2. Premissas básicas para a modelagem.....	49
5.3. Modelagem KMV Corporation .....	52
5.4. Modelagem DLI .....	60
5.4.1. Introdução .....	60
5.4.2. Desenvolvimento da Modelagem DLI.....	63
6 Apresentação dos Resultados.....	72
6.1. Introdução .....	72
6.2. Análise de Sensibilidade das principais variáveis .....	72
6.3. Casos Práticos .....	85
7 Conclusões.....	106
8 Referências Bibliográficas .....	108

Apêndice A..... 112

Apêndice B..... 115

Apêndice C..... 118

## Lista de Figuras

Figura 1 – Capital como Opção de Compra sobre uma Empresa Alavancada .....	15
Figura 2 – Visualização da Probabilidade de Default .....	16
Figura 3 – Processo para extrair o valor e volatilidade dos ativos.....	56
Figura 4 – Fluxograma da modelagem KMV .....	57
Figura 5 – Distância para <i>Default</i> .....	71
Figura 6 – Simulação: Variação da taxa livre de risco ( $R_f$ ) x Dívida e o impacto na probabilidade de <i>default</i> .....	74
Figura 7 – Visão 3-D da influência da taxa livre de risco e a dívida na Probabilidade de <i>Default</i> .....	75
Figura 8 – Simulação: Variação da taxa livre de risco ( $R_f$ ) e o valor do <i>Equity</i> e seu impacto na probabilidade de <i>default</i> . ....	76
Figura 9 – Visão 3-D da influência da taxa livre de risco e o valor do <i>Equity</i> na Probabilidade de <i>Default</i> .....	76
Figura 10 – Simulação: Variação da taxa livre de risco ( $R_f$ ) e a volatilidade do <i>Equity</i> e seu impacto na probabilidade de <i>default</i> . ....	78
Figura 11 – Visão 3-D da influência da taxa livre de risco e a volatilidade do <i>Equity</i> na Probabilidade de <i>Default</i> . ....	78
Figura 12 – Influência da variação do <i>equity</i> e dívida na Probabilidade de <i>Default</i> . ....	79
Figura 13 – Visão 3-D da influência do <i>equity</i> e dívida na Probabilidade de <i>Default</i> . ....	80
Figura 14 – Outra visão 3-D da influência do <i>equity</i> e dívida na Probabilidade de <i>Default</i> . ....	80
Figura 15 – Influência da variação do <i>equity</i> e sua volatilidade na Probabilidade de <i>Default</i> . ....	81
Figura 16 - Visão 3-D da influência do <i>equity</i> e sua volatilidade na Probabilidade de <i>Default</i> . ....	82
Figura 17 – Influência da variação da dívida e volatilidade do <i>equity</i> na Probabilidade de <i>Default</i> . ....	83

Figura 18 - Visão 3-D da influência da dívida e volatilidade do <i>equity</i> na Probabilidade de <i>Default</i> .....	83
Figura 19 – Evolução do preço em dólares da ação da Mesbla.....	85
Figura 20 – Evolução dos retornos diários da Mesbla S.A.....	86
Figura 21 – Volatilidade Anualizada utilizando Janela Histórica de 40, 60, 90 e 120 dias.....	87
Figura 22 – Evolução do Risco de Crédito utilizando volatilidade com Janela Histórica 40, 60, 90 e 120 dias.....	88
Figura 23 – Evolução do risco de crédito utilizando volatilidade com Janela Histórica 60, contra o valor de mercado do <i>equity</i> .....	90
Figura 24 – Evolução da volatilidade anualizada utilizando GARCH (1,1).....	91
Figura 25 – Evolução do Parâmetro Alfa na modelagem GARCH (1,1).....	92
Figura 26 – Histograma do Parâmetro Alfa na modelagem GARCH (1,1).....	92
Figura 27 – Evolução do Parâmetro Beta na modelagem GARCH (1,1).....	93
Figura 28 – Histograma do Parâmetro Beta na modelagem GARCH (1,1).....	93
Figura 29 – Evolução do Parâmetro Omega na modelagem GARCH (1,1).....	94
Figura 30 – Histograma do Parâmetro Omega na modelagem GARCH (1,1).....	94
Figura 31 – Risco de crédito utilizando volatilidade anualizada por GARCH (1,1) contra o valor de mercado do <i>equity</i> .....	95
Figura 32 – Evolução da volatilidade anualizada utilizando EWMA com parâmetros calculados automaticamente.....	97
Figura 33 – Evolução do Risco de crédito utilizando volatilidade anualizada por EWMA contra o valor de mercado do <i>equity</i> .....	97
Figura 34 – Evolução da volatilidade anualizada utilizando EWMA com parâmetros calculados automaticamente contra EWMA com parâmetro fixo 0,94.....	98

Figura 35 – Evolução do Risco de crédito utilizando volatilidade anualizada por EWMA com parâmetro automático contra Risco de crédito utilizando volatilidade anualizada EWMA com parâmetro fixo de 0,94. ....	99
Figura 36 – Volatilidade Anualizada utilizando Janela Histórica para 40, 60, 90 e 120 dias.....	100
Figura 37 – Evolução do Risco de crédito utilizando volatilidade com Janela Histórica 40, 60, 90 e 120 dias.....	101
Figura 38 – Evolução do risco de crédito utilizando volatilidade com Janela Histórica 90, contra o valor de mercado do <i>equity</i> . ....	102
Figura 39 – Evolução da volatilidade anualizada utilizando GARCH (1,1).....	103
Figura 40 – Risco de crédito utilizando volatilidade anualizada por GARCH (1,1) contra o valor de mercado do <i>equity</i> . ....	103
Figura 41 – Evolução da volatilidade anualizada utilizando EWMA com parâmetros calculados automaticamente. ....	104
Figura 42 – Evolução do Risco de crédito utilizando volatilidade anualizada por EWMA contra o valor de mercado do <i>equity</i> . ....	105

## Lista de Quadros

Quadro 1 – As principais variáveis na modelagem do risco de crédito da KMV Corporation. ....	59
Quadro 2 – Simulação: Matriz de probabilidades de <i>default's</i> com duas variáveis taxa livre de risco e dívida. ....	74
Quadro 3 – Simulação: Matriz de probabilidades de <i>default's</i> com duas variáveis taxa livre de risco e o valor do <i>equity</i> .....	75
Quadro 4 – Simulação: Matriz de probabilidades de <i>default's</i> com duas variáveis taxa livre de risco e a volatilidade do <i>equity</i> .....	77
Quadro 5 – Simulação: Matriz completa de probabilidades de <i>default's</i> com duas variáveis <i>equity</i> e dívida.....	79
Quadro 6 – Simulação: Matriz completa de probabilidades de <i>default's</i> com duas variáveis valor do <i>equity</i> e a volatilidade <i>equity</i> . ....	81
Quadro 7 – Simulação: Matriz completa de probabilidades de <i>default's</i> com duas variáveis (dívida e volatilidade <i>equity</i> ).....	82
Quadro 8 – Evolução em U\$ da dívida da Mesbla S.A. ....	86

# 1

## Introdução

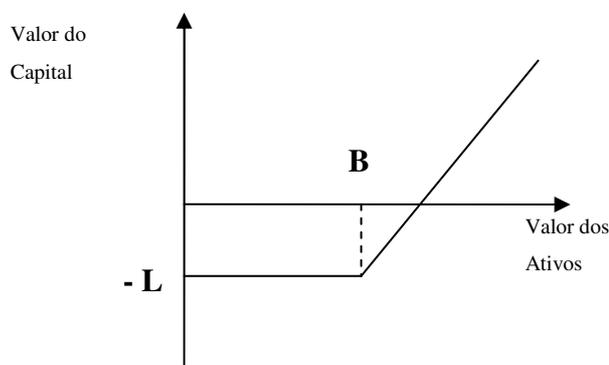
A avaliação de empréstimos com risco de crédito com base na teoria das opções foi originalmente apresentada no artigo "*On the Pricing of Corporate Debt: The Risk Structure of Interest Rate*", publicado no *Journal of Finance* por Robert MERTON (1974). Nos últimos anos, essa idéia foi expandida para incluir as estimativas de inadimplência além das avaliações dos empréstimos.

Para CAOUTTE, ALTMAN e NARAYANAN (1999), uma das principais vantagens da modelagem que utiliza a teoria de MERTON (1974) é a simplicidade da matéria-prima, base para estimação das probabilidades de *defaults* esperadas que, no caso, são os preços de mercado das ações.

Esta dissertação focará em empresas de capital aberto, ou seja, empresas negociadas na Bolsa de Valores brasileira. Já existem artigos, como do DWYER, KOCAGIL e STEIN (2004), para estimação da probabilidade de *default* de empresas com capital fechado, sem falar no estudo mais detalhado para instituições financeiras desenvolvido por SELLERS e ARORA (2004).

Quando uma empresa capta recursos por meio de um empréstimo corporativo, ela adquire uma opção muito valiosa de inadimplência ou pagamento (Figura 1), isto é, se os projetos de investimento de uma empresa fracassarem (ou seja, valor dos ativos menor do que B), impedindo que paguem o que devem ao banco, a empresa tem a opção de descumprir seus compromissos de pagamento de dívida, entregando os ativos remanescentes ao credor. Por causa da responsabilidade limitada dos acionistas, a perda da empresa é limitada, para baixo, pelo valor do capital aplicado na empresa, que é representado na figura 1 por – L. Por outro lado, se os projetos forem bem sucedidos, a empresa ficará com a maior parte dos resultados positivos que sobrarem após o pagamento prometido de juros e principal do empréstimo.

A figura 1 delimita o resultado para um acionista de uma empresa alavancada (empresa com dívida). O acionista tem um risco de queda limitado e uma acentuada possibilidade de aumento.



**Figura 1** – Capital como Opção de Compra sobre uma Empresa Alavancada  
Fonte: SAUNDERS (2000)

A função resultante para o acionista e a aquisição de uma opção de compra sobre uma ação são idênticas. Esta visão levou MERTON (1974) a evoluir nos seus estudos sobre probabilidades de *defaults*, os quais serão a base desta dissertação.

De modo geral, o valor de mercado do capital próprio (*equity*) é valorado como uma opção, portanto, pode-se modelar o valor de mercado do *equity* como sendo função das seguintes variáveis:

$$V_E^1 = f(V_A, \sigma_A, r, B, t) \quad (1.1)$$

$V_A$  – Valor de Mercado dos Ativos (*assets*)

$\sigma_A$  - Volatilidade dos Ativos (*assets*)

$r$  – taxa livre de Risco

$B$  – ponto de exercício

$T$  – tempo para maturação

<sup>1</sup> Esta formulação para valoração de uma opção de compra foi desenvolvida por BLACK e SCHOLES (1973), na qual MERTON, em 1974, estendeu para avaliar o patrimônio dos acionistas.

Quando se vai ao mercado para capturar tais variáveis, não é possível encontrar todas. No caso, apenas as variáveis  $V_E$ ,  $B$ ,  $r$  e  $t$  são observáveis e conhecidas. Por exclusão, existem duas incógnitas que são:  $V_A$  e  $\sigma_A$ .

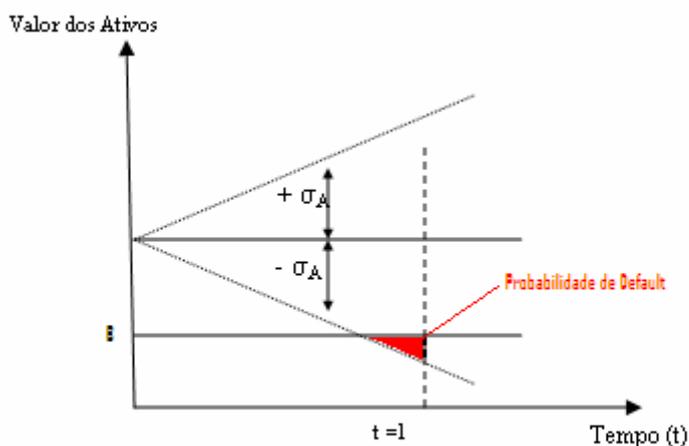
No capítulo III será discutido, mais detalhadamente, como serão encontradas todas as variáveis e as ponderações teóricas e práticas para cada uma delas.

MERTON (1974), no seu modelo estrutural, resolveu este problema observando que uma segunda relação pode ser utilizada, na qual relaciona teoricamente a volatilidade do valor do capital próprio da empresa ( $\sigma_E$ ) e a volatilidade do valor dos ativos da empresa ( $\sigma_A$ ). Em termos gerais:

$$G(V_E, \sigma_E) = f(V_A, \sigma_A)^2 \quad (1.2)$$

Com duas equações, 1.1 e 1.2, e duas incógnitas ( $V_A$  e  $\sigma_A$ ), interações sucessivas extraem tais incógnitas.

Na figura 2, está ilustrada a idéia básica desta modelagem, que consiste em descobrir qual a probabilidade dos valores dos ativos serem menores do que um determinado valor  $B$ .



**Figura 2** – Visualização da Probabilidade de Default  
**Fonte:** SAUNDERS (2000)

<sup>2</sup> A demonstração desta relação se encontra no Anexo A.

Essa modelagem é dinâmica, pois à medida que são geradas informações sobre um tomador, o preço de suas ações e a volatilidade desses preços reagirão, assim como reagirão o valor dos ativos implícitos ( $V_A$ ) e o desvio padrão do valor dos ativos ( $\sigma_A$ ). Mudanças em  $V_A$ ,  $\sigma_A$  geram mudanças na probabilidade de *default*.

Portanto, para empresas ativamente negociadas em bolsa, seria teoricamente possível atualizar sua probabilidade de *default* a cada instante.

A abordagem de precificação de opções à previsão de falências possui alguns pontos interessantes, como:

- I. Essa abordagem pode ser aplicada a qualquer empresa de capital aberto. Inclusive há avanços teóricos para estenderem seu uso e sua aplicação em empresas de capital fechado.
- II. Por ser baseada em dados de bolsas de valores em vez de dados históricos contábeis, tem uma visão do futuro.
- III. Possui forte fundamentação teórica, por ser um modelo estrutural baseado na moderna teoria de finanças corporativas e opções, segundo a qual o capital é visto como opção de compra sobre os ativos de uma empresa.

O objetivo desta dissertação é aplicar um modelo de equilíbrio geral, baseado na teoria de MERTON (1974), para avaliação da probabilidade de *default* de empresas brasileiras com ações cotadas em Bolsa de Valores. Existem dois modelos conhecidos e difundidos: KMV e DLI. O modelo da KMV se utiliza da teoria de MERTON (1974), mas possui alguns avanços proprietários interessantes, como será detalhado no capítulo III. A modelagem DLI é mais simples e acadêmica, portanto sua implantação é mais rápida e gera resultados eficazes.

Uma firma entra em *default* quando o valor de mercado de seus ativos é menor ou igual ao montante de suas obrigações (capítulo III há mais detalhes sobre essa barreira). Entretanto, como o valor de mercado e a volatilidade dos ativos são desconhecidos, há necessidade de se estimar tais variáveis. Para esse fim será utilizado o modelo DLI baseado na modelagem de MERTON (1974). Uma vez estimado o valor de mercado dos ativos e a sua volatilidade, o objetivo

será calcular a probabilidade de que o valor de mercado dos ativos seja menor ou igual ao valor das obrigações em um horizonte de tempo fixo.

Na parte prática, será aplicada a modelagem DLI ao mercado brasileiro, mais especificamente para duas firmas cotadas em bolsa, que são a Mesbla S.A. e a Lorenz S.A.

## 2 Risco

Existem alguns conceitos com os quais se convive, quase sempre, de forma natural. O risco, a certeza e a incerteza são conceitos deste tipo, visto que a vida se leva voltada para o futuro. Assim, habitua-se às condições de risco e incerteza. Naturalmente, esta questão torna-se mais importante no mundo dos negócios, onde a avaliação dos riscos é fundamental para a tomada de decisão.

Os negócios das empresas, em geral, estão relacionados à administração de riscos. As empresas com maior competência obtêm êxito; as outras, fracassam. Embora algumas aceitem os riscos financeiros incorridos de forma passiva, outras se esforçam para conseguir alguma vantagem competitiva, expondo-se a riscos de maneira estratégica. Porém, em ambos os casos, esses riscos devem ser monitorados cuidadosamente, visto que podem acarretar grandes perdas.

São conhecidas as histórias do mercado financeiro as quais operações praticamente sem riscos em determinado dia levam, no dia seguinte, bancos e corretoras à liquidação. Outro exemplo é o caso de carregamento de títulos públicos com ganhos praticamente seguros que se transformam em razoáveis prejuízos. São muitos os casos de empresas que iniciam um processo de ampliação da produção via endividamento e são pegas, no caminho, por uma recessão que as leva à concordata. Enfim, são muitos os casos, principalmente no Brasil, onde melhores avaliações de risco e incerteza poderiam ter colocado a empresa em situação mais vantajosa.

Tratada a questão do risco e incerteza do ponto de vista intuitivo, procura-se a formalização do conceito. A definição mais simples e prática é: risco é o grau de incerteza a respeito de um evento.

Para entender melhor esta definição, observa-se que ela estabelece um conceito relativo, que é o grau de incerteza de um evento. Lembre-se que um "evento certo", ou seja, que realmente ocorrerá, é tratado no estudo do cálculo de probabilidades como correspondendo à probabilidade de 100%; nestas condições,

sempre que estiver diante de eventos que apresentam certo grau de incerteza, pode-se estabelecer uma correspondente probabilidade de ocorrência do evento.

O grau de incerteza, ou seja, o risco estará intimamente ligado à probabilidade de ocorrência dos eventos em estudo. A condição limite será a condição de incerteza plena em que não se quer ou não se têm condições de usar o conceito de probabilidades para a avaliação do evento. Assim, desde que seja possível, a forma de atenuar as condições de incerteza consiste na utilização das probabilidades dos eventos em estudo. É por meio das probabilidades que se pretende captar a influência da experiência, do julgamento e do ambiente, em diferentes condições de projeções dos resultados, relativos a uma questão que será objeto de decisão.

As empresas estão expostas a diversos tipos de riscos, que podem ser divididos em duas formas básicas: em risco estratégico (ambiente operacional) e não estratégico (ambiente macro), conforme JORION (1997) coloca:

**Risco não estratégico:** Consiste no risco que os sistemas econômico, político e social, vistos de forma ampla, impõem ao ativo. Por exemplo, no início de uma recessão, se há uma crise política no Congresso ou greve em setores importantes na economia, o "sistema" estará atuando sobre todos os ativos de uma só vez.

Naturalmente, os ativos têm diferentes reações a cada conjuntura estabelecida. Estando no início de uma recessão profunda, com certeza a produção será prejudicada, então, de forma geral, os negócios declinarão e poucos estarão pensando em comprar fábricas, abrir lojas ou comprar imóveis. Estes ativos serão procurados ao fim do processo recessivo. Ocorrendo greves ou crises políticas, naturalmente, o ouro e moedas fortes serão beneficiados.

Assim, conforme a conjuntura econômica, política e social, tem-se estabelecida uma posição relativa da taxa de retorno dos vários ativos. Ocorre que variações da conjuntura, ou mesmo perspectivas de variações, rearranjam a maioria dos ativos. É este risco que o "sistema" impõe ao ativo e naturalmente a sua taxa de retorno.

A defesa para este tipo de risco é a administração diversificada da carteira de ativos, de forma a maximizar os retornos, minimizando os riscos. Desta forma,

há que se escolher os ativos conforme a perspectiva de conjuntura ou cenário que se anuncia mais provável, o que não é uma tarefa fácil.

É importante ressaltar que o risco conjuntural é tanto maior quanto maiores são as possibilidades de variação da conjuntura, em geral facilitadas pelas regras mal definidas ou mal aplicadas, pelos desmandos, pelos escândalos, enfim, por todo um processo que passa pela credibilidade do sistema como um todo. Assim, o Estado é sempre um dos maiores responsáveis pelo risco sistemático ou conjuntural a que um ativo está sujeito.

**Riscos Estratégicos:** Consiste no risco intrínseco ao ativo e ao subsistema ao qual pertence; é gerado por fatos que atingem diretamente o ativo em estudo ou o subsistema a que está ligado e não atingem os demais ativos e seus subsistemas.

A descoberta de uma mina de ouro fará com que os preços do ouro recuem; este tipo de risco é intrínseco ao ativo ouro e outros metais, assim como as pedras preciosas, mas não atinge ativos fora do subsistema ouro.

Outras vezes o risco advém do subsistema ao qual o ativo está ligado. O ouro está ligado ao mercado da prata, platina e petróleo, por exemplo; assim, poderá ter afetada sua cotação por fatos gerados nos elementos do subsistema. É muito provável que uma descoberta de grandes proporções de petróleo também atue sobre o preço do ouro.

Quando se aplica em certificados de depósitos bancários (CDB), existe o risco próprio de cada banco e do subsistema "setor bancário". Se ocorrer intervenções do Banco Central, ou mesmo boatos de intervenção, naturalmente todo o subsistema bancário será obrigado a aumentar a taxa de captação, em função do risco percebido pelos aplicadores. Neste caso, o processo de seleção do risco passa a ser tão cruel que pode levar bancos que tinham pequenos problemas de liquidez a grandes problemas ou mesmo à liquidação, o que afetará mais ainda o setor.

Do ponto de vista das empresas, o risco próprio pode ser visto sob os aspectos financeiros, da administração e do setor de atuação da empresa. O risco financeiro é entendido como a falta de liquidez da empresa para saldar seus compromissos e está intimamente ligado à questão do endividamento da empresa, do controle de custos ou da variabilidade das vendas. O risco de administração está ligado "à incompetência e, mesmo, à desonestidade dos administradores", e o

risco do setor consiste no risco a que a empresa está sujeita por pertencer a um subsistema dentro da economia.

Estas classificações, risco estratégico e não estratégico de um ativo, como partes do risco total, são muito relativas e dependem do ponto de vista do observador. Uma multinacional, examinando a possibilidade de investimento em vários países, entenderá o "sistema país" como um risco próprio; e estará avaliando a conjuntura e a sua variabilidade como características intrínsecas de cada país e do subsistema ao qual está ligado. É inegável que o ativo Brasil esteja ligado ao subsistema América Latina, o que representa um risco próprio do ponto de vista da empresa multinacional, visto que seu risco sistemático é em relação à conjuntura econômica, política e social de seu país de origem ou mundial.

Os riscos originam-se de várias fontes. Podem ser criados pelos seres humanos, como, por exemplo, os ciclos de negócio, a inflação, as mudanças das políticas do governo e as guerras. O risco também provém de fenômenos naturais imprevisíveis, tais como o clima e os terremotos, ou resultado das principais fontes de crescimento econômico de longo prazo. É o caso das inovações tecnológicas que podem tornar a tecnologia existente obsoleta e criar deslocamentos de emprego. Portanto, o risco e a vontade de assumi-lo são essenciais para o crescimento da economia.

Grande parte das indústrias financeiras e de seguros tem-se dedicado à criação de mercados para compartilhar esses riscos. Em um nível mais primário, a acumulação de ativos ou poupança provê um colchão contra o risco de renda. A introdução de empréstimos para pessoa física, inicialmente registrados na Grécia antiga, facilita o alisamento do consumo. Contratos de seguro, que remontam ao sistema de seguro contra roubo das caravanas na Babilônia, utilizam princípios de diversificação para proteção contra acidentes e outros desastres. Mesmo as empresas de capital aberto podem ser vistas como um arranjo que permite aos investidores diminuir o risco de controle de uma companhia ao reparti-lo com o mercado.

Todavia, os mercados financeiros não conseguem se proteger de todos os riscos. Extensos riscos macroeconômicos que criam flutuações nos níveis de renda e emprego são difíceis de *hedgear*. É por isso que os governos criaram "redes de segurança social" que o setor privado não pode prover. Nesse sentido, o estado do

bem-estar social pode ser visto como uma instituição que permite compartilhar riscos.

Infelizmente, os governos podem também contribuir para o risco. Por exemplo, a crise asiática de 1997 foi amplamente atribuída a políticas econômicas insustentáveis que causaram inúmeros estragos e a um mercado financeiro frágil. Periodicamente, as interferências do governo no setor bancário parecem levar a sistemáticas alocações ineficientes de crédito que, em última instância, resultam em crises bancárias. Os países que fixam sua taxa de câmbio em níveis irrealistas criam desequilíbrios sérios em suas economias. A aparente estabilidade incentiva as instituições a se endividarem em moeda estrangeira, permitindo que uma simples desvalorização gere um desastre. Isso explica por que grandes economias estão deixando suas moedas flutuarem livremente ou caminhando para total integração monetária, na forma de dolarização ou de união monetária, como na Europa.

Uma moeda comum, entretanto, pode não gerar mais estabilidade, pois isso poderia simplesmente deslocar o risco para outra localidade. Abrir mão de flutuações da taxa de câmbio em troca de maior flutuação do produto e do desemprego pode não ser um bom negócio.

Debater o melhor sistema para os riscos fundamentais encontra-se além do escopo desta dissertação. Esses riscos se manifestam por meio de risco financeiro ou macroeconômico. O que se sabe é que, nos mercados financeiros, existe a possibilidade de se imunizar ou se *hedgear* contra flutuações nos preços determinados pelos mercados. Essas flutuações, existentes ou potenciais, requerem a administração cautelosa do risco.

### **Risco de Mercado:**

O risco de mercado pode ser definido como uma medida numérica da incerteza relacionada aos retornos esperados de um investimento, em decorrência de variações em fatores como taxas de juros, taxas de câmbio, preços de ações e *commodities*.

O risco de mercado depende do comportamento do preço do ativo diante condições de mercado. Para entender e medir possíveis perdas causadas por flutuações do mercado, é importante identificar e quantificar o mais corretamente

possível as volatilidades e correlações dos fatores que impactam a dinâmica do preço do ativo.

Como colocado acima, o risco de mercado pode ser dividido em quatro grandes áreas:

- 1) Risco de Preços de Ações (Mercado acionário) – Este risco pode ser definido como o risco de perdas devido a mudanças no valor de mercado de carteiras de ações. Exemplo: Este risco pode ser aproximado por um fator de mercado como o Ibovespa.
- 2) Risco de Taxas de Câmbio – Este pode ser definido como o risco de perdas devido a mudanças adversas nas taxas de câmbio. Dois exemplos são dados: variação nos preços de NTN-Ds, NBC-Es, de ativos internacionais negociados em moeda estrangeira, devido à apreciação/depreciação relativa de moedas. O outro exemplo seria o descasamento em uma carteira indexada a alguma moeda estrangeira.
- 3) Risco do Mercado de *Commodities* – Este pode ser definido como o risco de perdas devido a mudanças no valor de mercado de carteiras de *commodities*. Segue um exemplo: Variações nos preços de carteiras constituídas por ouro, prata, platina, soja, café, boi gordo, cacau, etc.
- 4) Risco de Taxa de Juros – Este pode ser definido como o risco de perda no valor econômico de uma carteira decorrente dos efeitos de mudanças adversas das taxas de juros. Seguem dois exemplos: Eventual perda do valor de mercado de títulos públicos ou privados e o encarecimento do custo de *funding*. O risco de taxa de juros pode ser aproximado por um grupo de fatores de mercado que se relacionam com a estrutura a termo dos juros brasileiros.

### **Riscos Operacionais:**

O risco operacional pode ser definido como aquele oriundo de erros humanos, tecnológicos ou de acidentes. Isso inclui fraudes (situações em que operadores falsificam informação de maneira intencional), falhas de gerência e controles e procedimentos inadequados. Erros técnicos podem ser causados por

interrupções de informação, por processamento inadequado de transações, por sistemas de liquidação e, de maneira geral, por qualquer problema de *back office* relacionado com o registro das transações e a conciliação das operações individuais com a posição agregada da empresa.

O risco operacional pode resultar em risco de crédito e de mercado. Por exemplo, um problema operacional, tal como uma falha na liquidação, pode gerar risco de crédito e risco de mercado, já que seu custo pode depender de movimentos nos preços de mercado.

A precificação de derivativos complexos pode também criar potenciais problemas operacionais. O risco de modelo corresponde ao perigo sutil de o modelo utilizado para precificar as posições ser inadequado. Os operadores que utilizam modelo convencional na precificação de opções podem ficar expostos ao risco de modelo, caso este seja especificado erroneamente ou caso seus parâmetros sejam incorretos. Infelizmente, o risco de modelo não é evidente e, para mensurá-lo, é necessário conhecimento profundo do processo de modelagem. Como medida preventiva, os modelos devem passar por avaliações independentes, utilizando preços de mercado, quando disponíveis, ou avaliações objetivas com dados fora da amostra.

O Banco Central do Brasil, inicialmente em 2004, comunicou os procedimentos para a implementação da nova estrutura de capital (Basiléia II) e, posteriormente, com a publicação da Resolução 3.380, em junho de 2006, sobre a implementação de estrutura de gerenciamento do risco operacional, passou a inserir o mercado financeiro brasileiro no contexto da preocupação crescente com os fatores de risco e, especialmente, com o impacto que o Risco Operacional passará a ter na alocação de capital das instituições financeiras.

A definição de Risco Operacional, conforme o artigo 2º da Resolução 3.380, é a possibilidade de ocorrência de perdas resultantes de falha, deficiência ou inadequação de processos internos, pessoas e sistemas, ou de eventos externos, incluindo o risco legal associado à inadequação ou deficiência em contratos firmados pela instituição, bem como a sanções em razão de descumprimento de dispositivos legais e a indenizações por danos a terceiros decorrentes das atividades desenvolvidas pela instituição.

A Resolução 3.380 lista os eventos considerados como incluídos na definição de Risco Operacional:

- I. Fraudes internas;
- II. Fraudes externas;
- III. Demandas trabalhistas e segurança deficiente do local de trabalho;
- IV. Práticas inadequadas relativas a clientes, produtos e serviços;
- V. Danos a ativos físicos próprios ou em uso pela instituição;
- VI. Aqueles que acarretem a interrupção das atividades da instituição;
- VII. Falhas em sistemas de tecnologia da informação;
- VIII. Falhas na execução, cumprimento de prazos e gerenciamento das atividades na instituição.

### **Risco Legal:**

O risco legal está relacionado a possíveis perdas quando um contrato não pode ser legalmente amparado. Podem-se incluir aqui riscos de perdas por documentação insuficiente, insolvência, ilegalidade, falta de representatividade e/ou autoridade por parte de um negociador etc.

O risco legal engloba vários riscos, como o risco de legislação, o risco tributário e o risco de contrato. Em seguida, serão vistas com mais detalhes estas subdivisões:

- I. Risco de Legislação: Este pode ser definido como o risco de perdas decorrentes de sanções por reguladores e indenizações por danos a terceiros por violação da legislação vigente. Por exemplo, podem-se citar: Multas por não cumprimento de exigibilidades e indenizações pagas a clientes por não cumprimento da legislação.
- II. Risco Tributário: Este pode ser definido como o risco de perdas devido à criação ou nova interpretação da incidência de tributos. Por exemplo, podem-se citar: Criação de impostos novos sobre ativos e/ou produtos e recolhimento de novas contribuições sobre receitas, não mais sobre lucros.
- III. Risco de Contrato: Este pode ser definido como o risco de perdas decorrentes de julgamentos desfavoráveis por contratos omissos, mal redigidos ou sem o devido amparo legal. Por exemplo, podem-se citar:

Pessoa sem poder para assinar contratos representando a instituição, não execução pronta de garantias, requerendo o acionamento do jurídico, e responsabilidades cobertas nos contratos de terceirização colocadas de forma pouco objetiva.

### **Risco de Crédito:**

O risco de crédito pode ser definido como a medida das possíveis perdas de uma empresa, instituição financeira ou até um fundo de investimento decorrente de uma obrigação não honrada, ou da capacidade modificada de uma contraparte em honrar seus compromissos, resultando em perda financeira.

O risco de crédito engloba um conjunto de riscos, como por exemplo, risco de inadimplência, risco de degradação, risco de garantia, risco soberano e risco de concentração. Vejam-se a seguir mais detalhes sobre essa subdivisão:

- I. Risco de Inadimplência: O risco de inadimplência diz respeito à possibilidade de a contraparte de empréstimo ou operação financeira não ser capaz de cumprir suas obrigações contratuais. Podem-se citar como exemplos: não pagamento de juros e/ou principal de empréstimos para pessoa jurídica, física, cartão de crédito, leasing e até de títulos de renda fixa emitidos.
- II. Risco de Degradação: Prováveis perdas devido à degradação da qualidade creditícia do tomador de um empréstimo, que acarreta a diminuição no valor de suas obrigações. Um exemplo clássico é a redução de *rating* de uma empresa e/ou país.
- III. Risco de Garantia: Este risco é fruto da deterioração da qualidade das garantias oferecidas por um tomador de empréstimo ou contraparte de uma transação. Podem-se citar como exemplos: empréstimos cujas garantias não existem mais e depreciação do valor das garantias colocadas como margem para garantir a operação.
- IV. Risco Soberano: o risco de crédito associado a operações de crédito concedido a Estados soberanos. O exercício de garantias e o monitoramento e cumprimento de contratos adquirem, evidentemente, características distintas daquelas presentes nos casos de crédito para agentes privados ou mesmo do setor público infra-nacional (estados,

províncias e municípios) e não soberanos (empresas estatais, por exemplo). Além disso, os determinantes da capacidade de pagamento e da disposição de pagar são de outra natureza, reportando-se a variáveis macroeconômicas como reservas de divisas e fluxos no balanço de pagamentos, crescimento econômico e capacidade de arrecadação tributária, fatores políticos, etc. As principais agências públicas e privadas internacionais de classificação de riscos de crédito – no caso das agências privadas, Moody's, Standard & Poor's (S&P) e Fitch – procedem regularmente à classificação de riscos soberanos, ainda que, no caso das agências privadas, não seja esta sua atividade econômica central.

- V. Risco de Concentração: É o risco de crédito em decorrência da não diversificação dos investimentos em crédito. Por exemplo, pode-se citar: concentração em determinados setores da economia e classes de ativos; também há risco de concentração se a instituição possuir parte substancial dos passivos de um devedor específico.

A forma mais conhecida de evitar a concentração foi tratada a partir do desenvolvimento por Harry Markowitz da moderna teoria de carteiras, no início da década de 50, que procura ativos, no caso de empréstimos, em setores poucos correlacionados, ou correlacionados negativamente, reduzindo-se conseqüentemente o risco de crédito total da carteira, pois permite que ganhos em determinados empréstimos contraponham perdas por inadimplência em outros (menor desvio padrão da carteira). Na prática, a possibilidade de redução do risco de crédito da carteira é limitada devido à escassez de oportunidades de diversificação, especialmente para instituições de pequeno porte, e como conseqüência o risco de sua carteira estará concentrado em um setor econômico e/ou em uma região geográfica.

O risco de crédito é um fator importante para bancos, investidores em títulos e empresas. Existem vários métodos para reduzir ou administrar o risco de crédito, que é a probabilidade de o tomador ficar inadimplente no compromisso de honrar suas obrigações financeiras seja pagamento de juros ou pagamento do principal – ocasionando uma perda aos credores.

Uma outra definição de risco de crédito aborda não a taxa de inadimplência absoluta, mas a variabilidade da taxa de inadimplência relativa à taxa de inadimplência esperada em uma carteira. A razão para utilização dessa definição é que a taxa de juros já estaria ajustada para a taxa de inadimplência esperada.

A atividade de seleção de crédito de uma empresa ou instituição financeira busca determinar se deve ser concedido crédito a um cliente, além de estabelecer os limites quantitativos para esse crédito. Em geral, o crédito está associado aos seguintes quesitos:

- I. **Caráter:** Aspectos como talento, confiabilidade, honestidade são sempre mencionados quando da definição de caráter. O histórico de crédito é muito importante na medida em que um cadastro ruim normalmente elimina o candidato, em contrapartida um cadastro perfeito não conta pontos (é tido como obrigação de qualquer um). Também pode ser verificada a idoneidade dos proprietários/administradores do negócio, tradição dos mesmos na praça, existência de restrições cadastrais (cheques devolvidos, protestos, registro no SERASA e outros órgãos especializados). Ainda, as referências bancárias e comerciais são importantes fontes de avaliação deste item. Além da avaliação individual da empresa, é importante a análise de interligações e participações societárias existentes entre essa e outras companhias.
- II. **Contribuição (capital):** Capital em uma análise de crédito de uma empresa não é entendido simplesmente como a conta de capital que se usa na contabilidade. Quando se fala de Capital em uma análise, refere-se a sua situação econômica, financeira e patrimonial, ou seja, refere-se aos recursos e bens que podem ser utilizados para honrar suas dívidas. Através da análise dos demonstrativos contábeis, pode-se levantar informações sobre como está o desempenho da empresa e sobre sua solidez.
- III. **Colateral (Garantias):** Nenhum financiador tomará decisão de emprestar dinheiro baseado somente em garantias. Porém tentará, após análise dos outros aspectos, conseguir as melhores garantias possíveis. Podem ser: alienações fiduciárias, hipotecas de ativos tangíveis, e mais

importante, a garantia dada pelo aval pessoal do tomador. Quando do aval pessoal, os financiadores querem de fato é um sinal de comprometimento real do tomador em relação à responsabilidade pelo pagamento da dívida.

- IV. Condições: representam as características específicas do ramo de negócio no qual o cliente está inserido, bem como os fatores econômicos que podem afetar sua atuação, tanto de forma positiva como negativa. Como exemplo de fatores específicos da empresa, pode-se citar o nível de concorrência do ramo (mercado com muitos concorrentes, mercado dominado por um grande fornecedor, mercado dinâmico, no qual os preços praticados ditam a participação no mercado), perfil da carteira de clientes da empresa potencial compradora (parcela significativa das vendas destinadas a um ou poucos clientes, carteira de clientes bastante diversificada, sem grandes concentrações de vendas). Também cabe levar em consideração os fatores econômicos que podem impactar na empresa, como taxa de juros, valorização câmbio, alterações de alíquotas de impostos, desemprego e outros.
- V. Capacidade de *Cash Flow*: Os financiadores precisam acreditar que o fluxo de caixa será adequado para cobrir o pagamento da dívida enquanto ela durar, ou seja, engloba a aptidão da empresa para gerar recursos financeiros para o pagamento de suas obrigações. Pode relacionar-se à capacidade de expandir suas vendas (entrada em novos mercados e segmentos, conquista de novos clientes), à capacidade tecnológica (aquisição de maquinário novo, modernização de parque fabril, atualização de sistemas de informática), à capacidade de produção (ampliação da capacidade produtiva), à capacidade administrativa (experiência e conhecimento do negócio por parte dos proprietários, plano de sucessão em empresas familiares).

Os itens I e V são os de maior importância para uma instituição financeira ou uma empresa. Isso porque eles representam os requisitos fundamentais para a concessão de crédito a um solicitante. A consideração para os demais C's – capital, colateral e condições – é importante para a definição do acordo de crédito

e tomada de decisão final, a qual depende da experiência e do julgamento da instituição financeira ou empresa.

Os 5 C's representam a espinha dorsal da avaliação de crédito, na qual todos os modelos de quantificação e aferição do risco de crédito estão baseados. Eles se diferenciam pela forma que abordam os C's.

Dentre as medidas usuais para aferição do risco de crédito, destacam-se principalmente duas: uma qualitativa e outra quantitativa. A primeira delas é o *rating* de crédito, normalmente realizado por empresas especializadas – como S&P (Standard and Poors), Moodys, entre outros –, que apuram a capacidade creditícia de uma empresa. Assim, por exemplo, segundo a S&P, uma empresa poderia classificar-se em AAA, AA, A, BBB, BB, B, CCC, CC e C com probabilidades crescentes de inadimplência.

Uma medida quantitativa do risco de crédito é o prêmio. Para títulos de renda fixa, o prêmio pelo risco de crédito pode ser entendido como a diferença entre a taxa de juros paga pela empresa emissora e a taxa referencial da economia. O prêmio é a compensação que o investidor exige ao emprestar para uma empresa que poderá ficar inadimplente. Quando o risco de crédito de uma empresa aumenta, maior será o prêmio demandado pelos investidores e/ou bancos. Existe uma forte relação entre o *rating* e o prêmio – quanto maior o *rating*, menor será o prêmio pelo risco de crédito exigido pelo mercado.

O risco de crédito afeta tanto credores como devedores. Os tomadores são afetados pelo risco de crédito, pois o custo do empréstimo depende de forma crucial do seu risco de inadimplência. Além disso, uma mudança na perspectiva da economia pode alterar o prêmio pelo risco de crédito, em média, e aumentará o custo de empréstimos para todos os eventuais tomadores, independentemente de sua classificação de crédito (*rating*).

Os investidores em títulos (por exemplo fundos ou pessoas) estão expostos ao risco de um declínio na classificação ou avaliação do título de crédito (risco de degradação). Um rebaixamento no *rating* (*downgrading*) de crédito ocasionará um prêmio pelo risco de crédito maior e, portanto, reduzirá o valor de um título já adquirido. De forma análoga, fundos que possuem carteira de títulos serão afetados por flutuações ocorridas nos prêmios de risco de crédito, refletindo no retorno total do fundo.

Os bancos expostos ao risco de crédito na forma de inadimplência dos empréstimos concedidos. O risco assumido pelos bancos, muitas vezes, é relativamente elevado devido à tendência dos bancos de concentrar seus empréstimos em nichos de mercado (risco de concentração) – sejam estes geográficos e/ou em um setor econômico. Além disso, o prêmio pelo risco de crédito é geralmente fixado no início da operação. Dessa forma, ocorrendo uma deterioração da qualidade de crédito, o prêmio exigido pelo risco sobe, sem, no entanto, refletir nos pagamentos que serão realizados – ocorrendo um descasamento entre o risco assumido e o prêmio pago.

### 3 Evolução da Avaliação do Crédito

Segundo CAOUETTE, ALTMAN e NARAYANAN (1999), a procura por mecanismos mais eficientes de administração das operações de crédito representa um dos principais problemas enfrentados pelas instituições financeiras. Reporta-se que o início de suas atividades na cidade italiana de Florença ocorreu há mais de 700 anos.

Isso ocorre porque as instituições financeiras têm como uma de suas principais funções a intermediação de recursos entre agentes deficitários e superavitários, sendo o banco responsável pelos pagamentos dos recursos captados dos superavitários.

ASSAF NETO e SILVA (1997) definem crédito como sendo a troca de bens presentes por bens futuros. Assim, pode-se definir resumidamente que uma operação de crédito é a troca de um valor atual pela promessa de pagamento futuro.

O ciclo de vida de uma operação financeira envolve dois grandes grupos de atividades. O primeiro é representado pelo processo de avaliação da capacidade financeira dos clientes e pela concessão dos recursos. O segundo está associado ao processo de acompanhamento da transação efetuada e pela recuperação do crédito inadimplente.

Para CAOUETTE, ALTMAN e NARAYANAN (1999), o processo de avaliação da capacidade financeira do cliente pode ser comparado a uma atividade de um alfaiate, ou seja, feita sob medida para as características do comprador.

Quando acontece uma concessão de crédito, a instituição financeira passa a possuir o chamado Risco de Crédito. Segundo JORION (1997), este risco pode ser definido como a possibilidade da contraparte não cumprir as obrigações monetárias contratuais relativas às transações financeiras. Esse não cumprimento das obrigações contratuais é chamado de *default*. SAUNDERS (2000) diz que há risco de crédito porque os fluxos de caixa prometidos pelos títulos primários possuídos por instituições financeiras podem não ser pagos.

Toda operação de crédito apresenta uma probabilidade de *default* esperado. Todavia, o risco de crédito pode ser mais bem definido como a perda inesperada decorrente de erro no processo de avaliação da probabilidade de *default* do agente contratante do negócio.

Esse erro de avaliação na probabilidade de *default* esperado pode ser classificado em dois tipos. O primeiro está associado à ocorrência de não pagamento de determinado agente, sendo este tipo de erro chamado de risco de crédito específico.

O segundo tipo de erro está associado às alterações ocorridas nos níveis gerais de *default* da economia, sendo este tipo de erro chamado de risco de crédito sistemático e sua ocorrência afeta todas as instituições financeiras.

As políticas de crédito em instituições financeiras sempre estiveram focadas no processo de análise e concessão do crédito. Contudo, esse quadro começou a se alterar em função dos altos níveis de *default* ocorridos, em meados dos anos 80 no EUA, nos empréstimos e títulos corporativos. A partir destes fatos, os administradores financeiros começaram a se preocupar mais com o ciclo completo das operações, ou seja, também com o processo de acompanhamento e de recuperação do crédito concedido.

Mesmo com a falta de interesse no desenvolvimento de metodologias, a preocupação com a gestão completa do ciclo de vida do crédito incentivou discussões acadêmicas que deram início à pesquisa de técnicas mais robustas para previsão de *default* esperado e mensuração das possíveis perdas associadas ao risco de crédito.

Outro fator importante no desenvolvimento dessas metodologias foi a divulgação, pelo *Basle Committee on Banking Supervision*<sup>3</sup>, em junho de 1988, do Acordo para Alocação de Capital visando à cobertura dos riscos de crédito<sup>4</sup>. Posteriormente foi divulgado um adendo que incorporava também os chamados

---

<sup>3</sup> Representa o comitê criado pelo B.I.S. (*Bank for International Settlement*) com sede na cidade de Basileia na Suíça, responsável pela supervisão bancária e pelo controle das exposições assumidas pelas instituições financeiras.

<sup>4</sup> Em 2001 foi apresentada proposta de revisão visando a incorporação de técnicas mais eficazes de gestão do risco de crédito.

riscos de mercado<sup>5</sup>. No Brasil este acordo e seu adendo ficaram conhecidos como o Acordo da Basiléia.

Apesar do Acordo de Basiléia tratar tanto de risco de crédito como de risco de mercado, só foi autorizada inicialmente pelos órgãos de regulamentação a utilização de modelos internos das instituições financeiras para o tratamento do risco de mercado no processo de apuração do capital regulamentar.

CROUHY, GALAI e MARK (2000) argumentam que, após o período de implementação e utilização diária de modelos internos para gestão de risco de mercado e *reportings* aos órgãos reguladores, as grandes instituições financeiras internacionais passaram a se preocupar com o desenvolvimento de modelos similares para tratar do risco de crédito.

Os modelos procuram estabelecer formas mais eficazes de apuração do risco de crédito de operações ou carteiras, em comparação com a regra do B.I.S., que alocava uma parcela fixa do valor das operações. O grande benefício desses modelos é a redução do nível de capital regulamentar exigido e a melhor previsibilidade do *default* esperado.

Além disso, verificou-se que o nível de capital exigido pelos órgãos de regulamentação para proteção contra o risco de crédito, na maioria dos casos, é muito superior ao capital exigido para o risco de mercado.

Na elaboração dos modelos internos de mensuração do risco de crédito, foram aplicadas as estruturas conceituais utilizadas para a apuração dos riscos de mercado. Procurou-se desenvolver técnicas matemáticas que apurassem um valor de perda potencial associada a um intervalo de tempo e a um grau de significância estatística. Segundo SAUNDERS (2000), os modelos mais conhecidos atualmente são:

- I. KMV – O modelo desenvolvido pela KMV Corporation será a base desta dissertação e tal modelagem está fundamentada na abordagem estrutural ou avaliação de ativos com base na teoria das opções.

Esta abordagem possui sua base na publicação do artigo de Robert MERTON, publicado no *Journal of Finance*, em junho de 1974. O modelo

---

<sup>5</sup> Risco de Mercado pode ser definido como incerteza quanto ao resultado de uma posição em função de oscilações nas condições de mercado. Estas condições podem ser os preços de ativos financeiros, as taxas de juros, as taxas de câmbio, o preço de commodities, etc.

considera o processo de falência endógeno e relacionado à estrutura de capital da firma. A falência acontece quando o valor dos ativos da empresa cai abaixo de um nível crítico. A KMV define esse nível crítico como sendo o total da dívida de curto prazo mais metade da dívida de longo prazo.

- II. CreditMetrics – O modelo desenvolvido pelo JP Morgan Bank Inc. está baseado na abordagem de migração da qualidade do crédito concedido. Este modelo procura definir probabilidades de mudanças da qualidade de crédito, inclusive de falência, dentro de um horizonte temporal. A partir das probabilidades e do intervalo de tempo, ele consegue estimar o valor da perda potencial da carteira dado um determinado nível de confiança estatístico.
- III. CreditRisk+ - O modelo desenvolvido pelo Credit Suisse Financial Products (CSFP) está baseado na abordagem atuarial. O modelo procura estabelecer medidas de perda esperada com base no perfil de sua carteira de empréstimos ou títulos, e no histórico de *default*.
- IV. CreditPortfolioView – O modelo desenvolvido pela Consultoria McKinsey está baseada no impacto de variáveis econômicas no *default*. Este modelo procura traçar cenários multi-períodos, onde a chance de falência está condicionada a variáveis, como desemprego, patamar de taxas de juros, taxa de crescimento na economia, etc.

É importante mencionar que apesar de estes modelos utilizarem técnicas similares às autorizadas pelos órgãos reguladores para apuração do risco de mercado, eles não foram aprovados pelo Acordo de Basiléia de 1998.

Esses modelos de crédito utilizam como variáveis as características dos devedores e condições econômicas e de mercado vigentes, para minimização do risco de crédito da instituição.

## 4 Modelo de Equilíbrio Geral e Opções

### 4.1. Introdução

Para melhor compreender a teoria utilizada para encontrar a probabilidade de *default* de uma empresa, é importante conhecer as bases conceituais do modelo apresentado por MERTON, em 1974, que está todo baseado na teoria das opções.

### 4.2. Derivativos

Derivativo é um contrato definido entre duas partes no qual se definem pagamentos futuros baseados no comportamento dos preços de um ativo de mercado. Pode-se resumir dizendo que um derivativo é um contrato cujo valor deriva de um outro ativo. O que se denomina por derivativo pode ser negociado em uma série de mercados, quais sejam:

- I. Mercado A Termo;
- II. Mercado Futuro;
- III. Mercado de Opções.

Os mercados futuros e de opções são extremamente importantes no mercado financeiro. Utilizados por hedgers, especuladores e arbitradores, a sua formação de preços deriva de mercadorias e de ativos financeiros. Foram desenvolvidos para atender a produtores e comerciantes expostos a riscos de preços, nos períodos de escassez e superprodução do produto negociado, reduzindo o risco de flutuação dos preços futuros da mercadoria.

No início do desenvolvimento dos mercados financeiros, os derivativos foram criados como forma de proteger os agentes econômicos contra os riscos das oscilações de preços. Estes ativos recebem esta denominação porque seus preços dependem do valor de outro ativo, denominado ativo-objeto.

A idéia básica dos agentes econômicos, ao operar com derivativos, é obter um ganho financeiro nas operações de forma a compensar uma perda em outras atividades econômicas. Desvalorização cambial e variações bruscas nas taxas de juros são exemplos de situações que já ocorreram na economia, cujos prejuízos foram reduzidos ou até se transformaram em ganhos para os agentes econômicos que protegeram os seus investimentos realizando operações com derivativos.

Entre os derivativos mais populares encontram-se as opções e, sobre estas, existem diversos modelos teóricos de valorização. Dentre estes modelos, um dos mais difundidos é o Modelo de BLACK e SCHOLLES (1973), cuja formulação será utilizada exaustivamente nesta dissertação.

### 4.3.

#### **Conceito de opção:**

O conceito de opção nasce como um direito negociável de compra ou venda de um ativo a um preço futuro predeterminado. Nasce, porque, apesar de esta ser a definição correta e a essência dos contratos de opções mais simples, é cada vez menos útil definir assim a gama de produtos gerados a partir desta base.

O fato de ser um direito implica que a parte titular possui uma escolha possível – exercer ou não exercer o direito. Contudo, não há praticamente nenhum tipo de opção em que, dada uma situação e assumida a racionalidade do titular, o resultado da escolha não seja conhecido. Isto é, assumindo-se que o titular é um agente racional que prefere mais dinheiro a menos dinheiro, na verdade não há escolha alguma sobre o exercício, e a opção deixa de representar uma escolha para representar um perfil de fluxo de caixa a ser atribuído ao titular em alguma data futura. Este perfil é sempre, pelo menos, uma função de um preço  $S$  em uma data qualquer. Pode ser função de outras coisas (como, de modo mais simples, de vários preços,  $S_1$ ,  $S_2$  etc. combinados da maneira que se queira), mas sempre guarda uma relação especial para com um preço, do qual o produto é derivativo. Esse perfil é chamado função *payoff* ou simplesmente *payoff* da opção.

As funções *payoff* que foram comentadas acima são as funções *payoff* de opções vanilla européias<sup>6</sup>. A forma matemática dessas funções é:

$$C^* = \max [ 0, V^* - B ]$$

$$P^* = \max [ 0, B - V^* ],$$

sendo  $C^*$  e  $P^*$  os valores de exercício de uma *call* e uma *put* (iguais ao valor da opção na data de exercício),  $B$  o preço de exercício da opção,  $V^*$  o preço do ativo na data de exercício.

O prêmio pelo qual uma opção é negociada reflete as expectativas sobre seu valor de exercício. Na data de exercício, o preço de uma opção é exatamente igual a seu valor de exercício, sendo indiferente exercê-la ou vendê-la. Isto significa que toda informação acerca do exercício de uma opção está contida em seu prêmio, e que o prêmio sempre converge para o valor de exercício, na data de exercício.

Refletir as expectativas significa dizer que uma opção deveria negociar hoje ao valor presente de seu valor de exercício esperado. Para se calcular o valor de exercício esperado, deve-se projetar  $V$  para a data de exercício de alguma forma. Esta projeção é feita utilizando-se as taxas de juros de mercado.

Pode-se questionar se a projeção via taxas de juro é uma boa estimativa; afinal, nenhum ativo real é obrigado a corrigir via taxas de juros. Pode-se argumentar que melhor estimativa seria projetar  $V$  pelo mesmo valor que ele apresenta hoje, ou no máximo acrescentar a ele a inflação. Acontece que a projeção por juros não parte da premissa de que todos os ativos devam acompanhar os juros, mas de uma outra sutilmente diferente: a de que o valor médio visualizado pelo mercado para um ativo em data futura coincida com seu valor futuro. Isto é, o mercado, como um todo, visualizaria o ativo no futuro como sendo o seu preço à vista carregado aos juros correntes. Se o mercado visualizasse o preço  $V$  acima de seu valor futuro, sem dúvida promoveria uma pressão compradora que acabaria elevando  $V$  e corrigindo a diferença; se visualizasse

---

<sup>6</sup> Uma opção européia é aquela que contratualmente só permite o exercício na data de vencimento.

abaixo, promoveria uma pressão vendedora. Em ambos os casos, o valor de  $V$  que hoje equilibra as expectativas teria a propriedade de, carregado a juros, coincidir com o preço esperado pelo mercado para a data futura.

Um mercado onde especuladores tenham essas expectativas é dito neutro ao risco, ou *risk-neutral*. Em um mercado neutro ao risco, é fácil justificar a projeção para o futuro pela taxa de juros livre de risco. O fato é que é difícil comprovar o comportamento *risk-neutral* no mercado real. No entanto, um axioma diz que a suposição de um mundo *risk-neutral* não é necessária para a precificação de futuros e opções: mesmo em um mundo não *risk-neutral*, derivativos têm preços iguais aos que seriam a eles atribuídos em um mundo *risk-neutral*, e isto se dá pela impossibilidade de haver arbitragem<sup>7</sup>.

Sabe-se, até o momento, que o preço de uma opção é que ele deve ser o valor presente da expectativa de valor de exercício em um mundo neutro ao risco. Este valor de exercício é obtido carregando-se  $V$  aos juros  $r$ , pelo prazo  $t$ , e achando-se a diferença sobre  $B$ . Se esta diferença for favorável ao exercício, este é o valor de exercício da opção; senão, seu valor de exercício é zero. Uma *call* vale o maior entre zero e  $V^* - B$ ; uma *put* vale o maior entre zero e  $B - V^*$ . Em ambos os casos, uma vez que o prêmio da opção é uma quantidade de dinheiro à vista, traz-se o valor de exercício a valor presente para se ter a primeira aproximação do preço de uma opção:

$$C_1 = VP [\max (0, VF(V) - B)] = \max [ 0, V - VP(B)]$$

$$P_1 = VP [ \max(0, B - VF(V))] = \max [ 0, VP(B) - V]$$

Estas são as expressões para o valor intrínseco das opções. O valor intrínseco de uma opção é a porção de seu preço que se deve à vantagem real que  $V$ , em relação a  $B$ , proporciona. O valor intrínseco de uma opção pode ser zero em qualquer tempo, ainda que seu prêmio nunca o seja antes do vencimento.

Existem dois tipos básicos de opções: primeiro são as opções de compra (*call*) e segundo são as opções de venda (*put*).

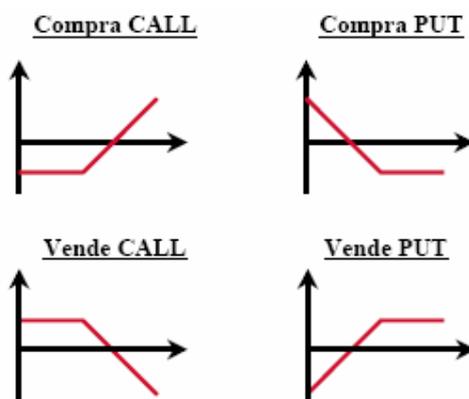
---

<sup>7</sup> Uma arbitragem é uma operação de ganho sem risco.

Esses dois tipos de opções podem ser subdivididos em quatro posições:

- I. Comprada numa opção de compra (titular da opção) – tem o direito de comprar os ativos subjacentes por um preço pré-determinado em uma data futura, também pré-determinada.
- II. Comprada numa opção de venda (titular da opção) – tem o direito de vender os ativos subjacentes por um preço pré-determinado em uma data futura, também pré-determinada.
- III. Vendida numa opção de compra – os vendedores são obrigados a vender esses ativos aos titulares quando for solicitado por estes.
- IV. Vendida numa opção de venda – os vendedores são obrigados a comprar esses ativos dos titulares quando for solicitado por estes.

Abaixo, estão representados os *payoffs* das opções do tipo *CALL* e *PUT*, conforme explicado acima:



**Figura 29** – Tipos de Opções

Fonte: CHAIA (2003)

No início da década de 1970, Fischer Black e Myron Scholes formularam matematicamente uma maneira de precificar as opções, basicamente as européias. Tal fórmula foi fundamental no campo das finanças, sendo responsável por uma considerável evolução em termos de precificação de ativos.

BLACK e SCHOLES (1973) abordaram o problema do preço das opções a partir da ótica de que, sendo uma opção um derivativo de  $V$ , ela deve servir para o propósito de *hedge*, e que, se há uma forma de implementar sistematicamente

*hedge* com opções, o preço atribuído a elas para esta finalidade é o seu preço justo. Por trás desta colocação está um argumento de arbitragem: o preço justo da opção é aquele que permite a entrada em uma posição *hedgeda*, isto é, uma posição sem riscos, de forma que o resultado ao longo do tempo seja sempre zero. Se o preço de mercado de uma opção difere deste, é possível a um operador tomar uma posição *hedgeda* – sem riscos - e com resultado diferente de zero (o operador tomará a posição de forma a produzir o resultado positivo para ele). Em um mundo em que os agentes preferem os ganhos sem risco a quaisquer tipos de aposta, um enorme volume de operações deste tipo responderia imediatamente a qualquer distorção entre o preço de mercado das opções e seu preço justo, e a consequência disso é que tal distorção sequer chegaria a se verificar.

Para desenvolver o seu modelo e aplicar a sua fórmula, BLACK e SCHOLES (1973) partiram de algumas hipóteses:

- I. Comportamento do preço dos ativos corresponde ao modelo lognormal;
- II. Não há custos operacionais<sup>8</sup>;
- III. O ativo objeto não paga dividendos ou qualquer outro rendimento durante a vida da opção<sup>9</sup>;
- IV. Não há oportunidade de arbitragem sem risco, pois tal condição permite que o preço do modelo seja aquele em vigor no mercado;
- V. A negociação com títulos é contínua e estes são perfeitamente divisíveis;
- VI. Os investidores podem captar ou emprestar a taxa de juros livre de risco. Isso permite que se faça a operação de arbitragem onde a carteira equivalente contém uma posição vendida no ativo objeto, permitindo assim a compra da opção quando ela for considerada barata;
- VII. A taxa de juros de curto prazo é a livre de risco e a volatilidade do ativo objeto é constante. Assim, a única fonte de risco da opção é o

---

<sup>8</sup> A adição de qualquer custo operacional (custos de transação, impostos, margens e outros) altera a operação de arbitragem levando a um intervalo de preço para opção.

<sup>9</sup> Caso venha a render, a fórmula deve ser ajustada, conforme mostra MERTON (1973)

ativo objeto, que é eliminada pelo próprio ativo quando a carteira equivalente for montada.

Além disso, a fórmula de Black & Scholes depende de seis parâmetros de mercado:

- Preço do ativo básico (V);
- Preço de exercício da opção (B);
- Volatilidade do ativo básico (desvio padrão da taxa de retorno do ativo básico, isto é, de  $dV/V$ ) ( $\sigma$ );
- Período a que se refere o preço da opção (t);
- Vencimento da opção (T);
- A taxa de juros livre de risco (r);
- A taxa de distribuição de dividendos do ativo básico ( $\delta$ ).

As fórmulas de precificação de BLACK e SCHOLES (1973) para os preços de opções de compra europeias de ações sem dividendos são:

$$C = V \cdot N(d1) - B \cdot e^{-r(T-t)} N(d2)$$

$$d1 = \frac{\ln\left(\frac{V}{B}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}} \quad d2 = d1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

Alimentando-se a equação diferencial de Black & Scholes com a condição inicial de uma *put*, a qual é  $P(V^*, 0) = \max [0, B - V^*]$ , chega-se à fórmula analítica do preço de uma *put* europeia. Uma maneira alternativa e mais simples de obtê-lo é substituir a fórmula do preço da *call* na da paridade *put-call*. De qualquer forma, obtém-se:

$$P = B \cdot e^{-r(T-t)} N(-d2) - V \cdot N(-d1)$$

$$d1 = \frac{\ln\left(\frac{V}{B}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}} \quad d2 = d1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

A função  $N(X)$ , por sua vez, representa a função de probabilidade acumulada de uma variável normal padronizada. O papel da volatilidade, que representa a incerteza do retorno do preço da ação, é de extrema importância, pois é o mais complexo de todos os parâmetros descritos, justamente por não ser observável necessitando de modelos para quantificá-los.

Se a volatilidade e a taxa de juros apresentarem a mesma periodicidade, o número  $(T - t)$  corresponde à fração do ano até o exercício da opção, sendo  $t$  o momento presente e  $T$  o prazo de expiração, conforme explicitado acima.

Alternativamente, COX, ROSS e RUBINSTEIN (1979) desenvolveram um modelo que converge para a solução de BLACK e SCHOLES. Para isto, eles mostraram que a equação do MGB poderia ser obtida como um limite contínuo de um caminho aleatório em tempo discreto. O objetivo central do método binomial usado por eles era discretizar o processo de neutralidade ao risco representado pela EDP de Black & Scholes e usar o modelo de programação dinâmica para achar o preço da opção. No artigo original de COX, ROSS e RUBINSTEIN, o modelo binomial é caracterizado pelos seguintes parâmetros:  $u = e^{\sigma\Delta t}$ ,  $d = 1/u$ ,  $\Delta t = T / n$ , onde  $n$  corresponde ao número de passos da árvore entre os instantes inicial e final ( $T$ ). Estabelecidos os parâmetros, a árvore binomial converge para o MGB à medida que  $n$  tende a infinito.

Até o momento, foram comentados apenas as opções européias, ou seja, são opções que podem ser completamente definidas em termos das funções *payoff* na data de vencimento. Contudo, há opções das quais o *payoff* não pode ser definido a priori, pois depende do que acontece durante o período até o vencimento.

Os dois exemplos (asiáticas e barreira) a serem analisados, a seguir, são classificados como opções *path-dependent*. As opções *path-dependent* significa que o valor da opção depende não somente do preço do ativo objeto mais também do caminho percorrido por ele. Caminho aqui é o percurso que o preço  $V$  fará até a data de vencimento. Elas têm de ser especificadas pelos eventos a que são sensíveis, além da curva Valor Intrínseco  $x V$  (às vezes, a curva é o menos importante de tudo). Assim como as opções *plain vanilla*, as *path-dependent* podem ser precificadas, admitem o cálculo de taxas de *hedge* (deltas, vegas etc.) e podem participar de *books* junto a outras opções quaisquer. O que as diferencia das opções *plain vanillas* não é isto, mas a aplicabilidade do tratamento matemático.

### Opção Asiática:

O segundo caso é o de uma opção pela média, chamada comumente de asiática. O valor final desta opção é igual à diferença positiva entre um preço fixo e uma média de preços do ativo  $V$ . Aparentemente, ela só se difere de uma opção comum pelo fato de que o preço que definirá seu valor no vencimento é um preço médio, e não um preço final. Contudo, essa diferença implica uma separação radical entre ambos os tipos.

A opção pela média não admite *payoff* conhecido antecipadamente. Podem existir infinitos caminhos até um mesmo valor  $S$  final, cada um deles com uma média diferente. Por exemplo, se em cinco dias o histórico do preço de um ativo for 100, 101, 105, 103, 101, sua média final será de 102. Se este mesmo ativo, em cinco dias, exibir o histórico 100, 99, 97, 98, 101, terá um preço médio de 99, apesar de ter encerrado o quinto dia no mesmo preço.

Aqui há que se abrir um parêntese para opções pela média geométrica. Devido a uma propriedade matemática, todo caminho que resultar em um mesmo número final possui a mesma média geométrica. Portanto, opções sobre a média geométrica – e não aritmética – possuem de fato um *payoff* fixo e conhecido.

### Opção de Barreira

Como último exemplo de opções que não têm *payoff* fixo, abordam-se as opções de barreira. A opção por barreira é o tipo mais antigo de opção exótica, sendo que sua existência remonta ao final da década de 1960 no mercado americano. Para esta dissertação, esse tipo de opção será exaustivamente comentada, pois será analisada nos próximos capítulos a utilização pela KMV Corporation desta opção para quantificar a probabilidade de *default* de uma empresa.

As opções de barreira podem ser divididas em *Knock-out* e *Knock-in*. As opções do tipo *Knock-out* são extintas no caso de algum evento ocorrer durante o prazo da opção ou durante um período definido entre duas datas. Este evento geralmente é o ativo atingir um determinado preço, chamado preço de barreira. As opções *Knock-in* inicialmente não existem, e passam a valer apenas se um

determinado evento ocorrer. A opção *Knock-in* não será relevante nesta dissertação. No caso de uma opção *Knock-out*, pode-se devolver ao comprador algum valor diferente de zero, no caso em que a opção é extinta, e este valor é chamado de rebate.

As opções de barreira foram criadas para dar maior proteção sem aumentar o valor do prêmio pago por ela. Por exemplo, se acreditar que a ação da Petrobras vai subir este ano, contudo não estar disposto a apostar que seu preço vá passar de R\$ 100,00, é necessário apenas comprar a opção até essa barreira e pagar menos prêmio do que as opções *plain vanilla*.

Opção de barreira é *path-dependent*, e se assemelha em alguns pontos com as opções *plain vanilla*. Existem opções de barreira do tipo *put* e *call*, sendo européia ou americana. Contudo, só se torna ativa (*knock-in*), ou então nula (*knock-out*), somente se o ativo subjacente atingir um nível pré-determinado (barreira).

Existem quatro tipos de opções de barreira:

- *Up and Out* – preço *spot* do ativo objeto começa abaixo de uma barreira pré-estabelecida e precisa fazer uma trajetória ascendente até a opção se tornar nula definitivamente.
- *Down and Out* - preço *spot* do ativo objeto começa acima de uma barreira pré-estabelecida e precisa fazer uma trajetória descendente até a opção se tornar nula definitivamente. Esse tipo de opção é utilizado na modelagem KMV para quantificar o risco de *default*.
- *Up and in* - preço *spot* do ativo objeto começa abaixo de uma barreira pré-estabelecida e precisa fazer uma trajetória ascendente até a opção se tornar ativa.
- *Down and in* - preço *spot* do ativo objeto começa acima de uma barreira pré-estabelecida e precisa fazer uma trajetória descendente até a opção se ativar.

Avaliar o valor de uma opção de barreira pode ser complicado, pois se trata de uma modelagem *path-dependent*, ou seja, o valor da opção não só depende do valor do ativo objeto mais também do seu trajeto. Contudo, mesmo não podendo

utilizar diretamente a formulação de BLACK e SCHOLES, alguns outros métodos mais complexos podem ser utilizados:

- I. Consiste em replicar uma opção de barreira utilizando um portfólio estático de opções *plain vanilla*, no qual são valoradas utilizando a metodologia de BLACK e SCHOLES. Essas opções *plain vanilla* são escolhidas para reproduzir o valor da barreira na maturação e para alguns pontos ao longo da barreira. Essa abordagem foi desenvolvida por Peter Carr.
- II. O método clássico seria utilizar a própria EDP de BLACK e SCHOLES para uma opção *plain vanilla*, adicionando uma condição de contorno que no momento que o ativo base tocar uma barreira predefinida essa opção se torna nula.
- III. Uma outra maneira de se obter o resultado final é utilizar a simulação de Monte Carlo, contudo é importante ressaltar a instabilidade no modelo decorrente da modelagem das gregas.
- IV. A abordagem mais rápida é utilizar o método de diferenças finitas, onde se encontram os resultados da condição de contorno voltando para o resultado básico, utilizando sempre a EDP de BLACK e SCHOLES (1973). Pode-se utilizar o método explícito ou Crank-Nicholson para obter as respostas.
- V. Metodologias mais modernas, como os modelos *lattice* (árvores Binomiais, Trinomiais e *Adaptive Mesh*), buscam, através de um passeio aleatório discreto, modelar um movimento browniano discreto. São modelos intuitivos e flexíveis, os quais podem ser aplicados tanto para opções européias como para americanas, e também as opções de barreira.

## 5 Modelo KMV e DLI

### 5.1. Introdução

O mercado acionário pode ser visto como um grande precificador das empresas, onde informações da economia, setores e firmas viajam rapidamente para todos os agentes de mercado e as oscilações no preço das ações oferecem evidências confiáveis de alterações nos níveis de crédito da empresa.

O modelo KMV, atualmente um dos mais conhecidos e de maior uso comercial, utiliza o mercado acionário para avaliação do risco de crédito de uma empresa, foi desenvolvido pela empresa californiana KMV (Stephen Kealhofer, John McQuown e Oldrich Vasicek, fundadores, em 1989). Esse modelo mensura a probabilidade de *default* das empresas com base na teoria de precificação de opções segundo a abordagem de MERTON (1974).

A outra modelagem a ser vista neste capítulo é a DLI. Ela está baseada nas mesmas premissas do modelo KMV, mas se diferencia, principalmente, dentre alguns aspectos, na distribuição dos *defaults* para encontrar as probabilidades de inadimplência (*default*). No caso, a DLI utiliza a distribuição normal, enquanto a modelagem KMV utiliza uma distribuição empírica.

Os modelos KMV e DLI não utilizam dados estatísticos de agências de classificação (Moody's, S&P, Fitch e outros) para estimar a probabilidade de inadimplência de uma firma, mas o modelo extrai tais informações analisando a estrutura de capital da empresa, a volatilidade e o valor de mercado dos ativos.

A metodologia da KMV e DLI apresentam melhores resultados se utilizarem empresas com ações negociadas em mercado aberto (Bolsa de Valores), pois assim os valores esperados dos ativos são retirados diretamente do mercado acionário e não por informações de balanço. Lembra-se que, se retira do mercado acionário o valor do *equity* da empresa e sua volatilidade, na qual se faz inferências, para chegar ao valor esperado de mercado dos ativos.

## 5.2. Premissas básicas para a modelagem

A principal premissa e base para modelagem KMV e DLI diz respeito à utilização irrestrita do mercado acionário como agente para precificar o risco de *default*. A partir dos valores de mercado do *equity*, e utilizando a formulação de MERTON (1974), é inferida a volatilidade de mercado dos ativos, valor de mercado dos ativos e conseqüentemente o risco de a empresa ficar inadimplente.

Confiando no mercado acionário para dar uma resposta em relação à probabilidade de *default* de uma empresa, é apostado que o mercado está refletindo, nos preços dos ativos, a informação disponível e que o preço de mercado é uma estimativa não-tendenciosa do valor real da empresa.

Isso se chama hipótese de eficiência dos mercados (HEM), a qual diz que os preços dos ativos nesses mercados refletem as informações disponíveis. A HEM implica que não é possível obter sistematicamente excesso de retorno (acima de  $R_f + \text{o prêmio de risco}$ ) em um mercado eficiente, ou seja, os investidores só devem esperar receber os retornos normais. FAMA (1970) classificou a eficiência de mercado em três formas: fraca, semi-forte e forte.

Na forma fraca apenas é requerido que os preços atuais dos ativos incorporem a informação dos preços passados. Não se requer, por exemplo, que incorporem informações de balanços ou informações privadas. Como a série de preços passados é uma informação muito barata, então é de se supor que ao menos isso os investidores tenham. Daí o nome *fraco*. A forma fraca da HEM implica que a análise técnica ou gráfica é inútil para o investidor ganhar excesso de retorno na bolsa de valores.

Na equação 3.1, a forma fraca da HEM para um ativo de preço  $V$ :

$$V(t) = V(t-1) + \text{retorno esperado} + \text{erro aleatório}, \quad (3.1)$$

onde o retorno esperado é função do risco do ativo ( $e$  de  $r$ ) e o erro aleatório de  $t-1$  para  $t$  é independente do erro aleatório do passado. Sendo os desvios dos preços de mercado em relação aos valores reais aleatórios, isso confirma que nenhum grupo de investidores é capaz de constantemente encontrar ações sub ou supervalorizadas. Na equação também não entram os preços anteriores ao preço

corrente  $V(t-1)$ , ou seja, só depende do preço corrente (toda informação relevante está contida no valor corrente) e independe da trajetória dos preços passados. Tecnicamente, quando é utilizada a forma HEM fraca, assume que  $V(t)$  segue um processo estocástico de *Markov*<sup>10</sup>.

As formas semi-forte e forte de HEM pressupõem mais que as ações não só incorporem as informações dos preços passados, mas toda informação pública disponível (semi-forte), ou então toda informação pública e privada disponível (forte).

Nas modelagens KMV e DLI, é necessária a forma mais fraca de eficiência para validar o modelo. Na verdade a teoria geral das opções está toda fundamentada na forma fraca, na qual as modelagens KMV e DLI se baseiam. No artigo de CROSBIE e BOHN (2003), é colocado que a modelagem KMV não assume eficiência forte do mercado acionário, ou seja, a KMV não assume que todas as informações relevantes estão refletidas nos preços correntes. Mas assume que é difícil obter sistematicamente retorno acima do mercado e utiliza os dados do mercado acionário somente com a intenção de se obter as informações que estão disponíveis no preço corrente. Assim a KMV se utiliza da HEM fraca.

Adicionalmente à hipótese de eficiência de mercado fraca, é importante completar as premissas do modelo que utiliza a teoria das opções, onde se assume que:

- I. Mercado é Completo (aproximadamente completo) – quando um derivativo pode ser artificialmente feito de instrumentos simples tais como o ativo sem risco e o ativo básico. Isso implica em um ambiente onde não há arbitragem. Também pode-se definir quando o número de ativos linearmente independentes é igual ao número de estados da natureza possíveis (realizações do mercado daqueles ativos). Uma outra

---

<sup>10</sup> Este processo tem como característica principal o fato de que a única informação relevante exigida para que se possa prever o seu comportamento futuro é a informação do valor presente da variável, ou seja, acontecimentos passados não têm importância para previsão de valores futuros. Assumindo que os preços das ações sigam um processo *Markov*, ele estimaria fazendo previsões futuras dos preços das ações pelos preços disponíveis no presente, sem considerar flutuações ocorridas no passado. Portanto, de acordo com a propriedade de Markov, o valor atual de uma variável é unicamente responsável para estabelecer seus valores probabilísticos em qualquer tempo futuro. Ver ANEXO C para mais detalhes.

definição alternativa de mercado completo é advinda do teorema fundamental: é um mercado com uma única medida equivalente de Martingale (medida  $Q$ ).

Não há nenhum custo de transação, taxas e problemas em divisibilidade dos ativos. Também existe um número suficiente de investidores com níveis de riqueza comparáveis que possam comprar ou vender quantos ativos desejarem ao preço de mercado.

- II. É possível tomar emprestado e emprestar a taxa de juro livre de risco em todo o instante de tempo; a estrutura a termo da taxa de juros é "*flat*" e é conhecida.
- III. As operações são todas em tempo contínuo.
- IV. Pelo teorema de Modigliani-Miller, diz-se que o valor da firma não varia com a sua estrutura de capital, ou seja, decisões de financiamento não importam em mercados eficientes.

Proposição I: Lei da conservação de valor. O valor de uma firma é determinado pelo lado esquerdo de seu balanço (seus ativos), não pelas proporções dos financiamentos em seu passivo.

Proposição II: A taxa esperada de retorno das ações de uma firma alavancada financeiramente aumenta na proporção da relação Dívida/Patrimônio a valores de mercado.

Observação: Ambiente onde Modigliani-Miller desenvolve suas proposições é:

- A. Ausência de impostos;
- B. Firms são classificadas por classe de risco operacional;
- C. Lucro líquido operacional = Dividendos (ou Dividendos + Juros; firma alavancada);
- D. Mercado de capitais perfeito;
- E. Sem custos de transações;
- F. Sem custos de falência; e
- G. Investidores são capazes de substituir alavancagem empresarial por alavancagem pessoal nas mesmas condições da firma.

Principais imperfeições que podem violar hipóteses de Modigliani-Miller:

- A. Custos de Insolvência;
- B. Impostos;
- C. Alavancagem pessoal não substitui alavancagem de firma; e
- D. Custos de monitoramento de contratos de dívida.

Em geral, basta a forma mais fraca de eficiência para valer os modelos DLI e KMV utilizados nesta dissertação.

### **5.3. Modelagem KMV Corporation**

Segundo CAOUILLE, ALTMAN e NARAYANAN (1999), o conceito de que os métodos de precificação de opções podem ser usados para avaliar o risco de crédito pode parecer improvável à primeira vista, contudo, em uma análise detalhada, percebe-se que o patrimônio líquido apresenta o mesmo perfil de pagamento de uma opção de compra.

DAMODARAN (2002) observa que o patrimônio líquido de uma empresa representa um direito residual, isto é, os detentores do patrimônio líquido têm o direito sobre todos os fluxos de caixa remanescentes depois do pagamento dos outros detentores de direitos financeiros (funcionários, governos, dívidas, etc.). O mesmo princípio se aplica ao caso de liquidação da empresa, ficando os detentores do patrimônio líquido com o residual do pagamento de todas as dívidas.

A relação entre patrimônio líquido e opção existe porque os detentores desse patrimônio possuem a responsabilidade limitada ao capital colocado na operação da empresa. Um exemplo simples pode ajudar a visualizar o processo de responsabilidade limitada. Quando uma empresa capta recursos por meio de um empréstimo corporativo, ela adquire uma opção muito valiosa de *default* ou pagamento, isto é, se os projetos de investimento de uma empresa fracassarem (ou seja, valor dos ativos menores do que B), impedindo que pague o que deve ao banco, a empresa tem a opção de descumprir seus compromissos de pagamento de dívida, entregando os ativos remanescentes ao credor. Por causa da responsabilidade limitada dos acionistas, a perda da empresa é limitada, para

baixo, pelo valor do capital aplicado na empresa. Por outro lado, se os projetos forem bem sucedidos, a empresa ficará com a maior parte dos resultados positivos que sobram após o pagamento prometido de juros e principal do empréstimo.

A figura 1 ilustra claramente o resultado para um acionista de uma empresa alavancada. O risco de queda é limitado e há uma acentuada possibilidade de aumento.

Assim, pode-se concluir que, do ponto de vista da instituição financeira, a concessão de um empréstimo equivale a fazer um empréstimo livre de risco e lançar uma opção do tipo *put* sobre os ativos da empresa com o preço de exercício igual ao valor final da dívida.

A importância de se analisar a teoria de precificação utilizando opções é porque a modelagem KMV se utiliza desses fundamentos. O grande objetivo desta modelagem é encontrar o risco de crédito, ou seja, a probabilidade de uma empresa entrar em *default*.

O risco de *default* é a incerteza em volta de uma empresa de continuar pagando suas obrigações e dívidas, as quais são provocadas por problemas operacionais e/ou financeiros. Os riscos operacionais que podem iniciar um processo de inadimplência em uma empresa podem ser uma elevação do preço da matéria-prima, queda do preço de venda dos produtos e diminuição ou paralisação da venda dos produtos e/ou serviços. Os riscos financeiros ligados à inadimplência de uma empresa têm origem na elevação dos juros a serem pagos aos credores, benefícios fiscais que não se concretizam e outras situações do gênero.

Antecedendo um evento de *default*, não há maneira de se identificar entre empresas qual irá entrar em *default* e qual não irá. Na melhor das hipóteses, pode-se apenas fazer inferências probabilísticas sobre a possibilidade de *default*. Com isso, as firmas normalmente pagam um spread sobre a taxa livre de risco, que é proporcional a sua probabilidade de *default*, e também que compense os agentes pela incerteza sobre o pagamento das contas.

*Default* é um evento raro decepcionante. Uma empresa típica possui a probabilidade de *default* em torno de 2% a cada ano. Contudo, existem variações consideráveis entre as probabilidades de *default* entre as empresas. Por exemplo, a chance de falência de uma empresa com *rating* AAA é de 2 em 10.000 por ano, enquanto uma empresa com *rating* A possui 10 chances de falência em 10.000 por

ano. Mudando de AAA para A aumenta em cinco vezes a probabilidade de *default* das empresas. A classificação mais baixa é CCC, que possui uma média de *default* de 4 empresas em 100 (4%), ou seja, 200 vezes mais arriscado que empresas com *ratings* AAA.

Em caso de *default* de uma empresa, a perda dos credores e contrapartes são significantes e amplificados pela extensão e detalhamento dos contratos e obrigações envolvidos. Por exemplo, tipicamente a taxa de perda em um evento de *default* para títulos dívida *senior*, dívida subordinada e títulos com zero coupon (*bullets*) são 49%, 68% e 81%, respectivamente, conforme CROSBIE e BOHN, 2003.

A probabilidade de *default* é igual para todos os agentes, credores ou contraparte, contudo, em um evento de *default*, a perda vai variar para cada agente e/ou contraparte, principalmente se houver seguros, garantias, colateral, etc.

Existem três principais elementos que determinam a probabilidade de *default*:

- I. Valor dos Ativos (valor de mercado dos ativos da empresa) – Valor presente do fluxo de caixa livre produzido pelos ativos da empresa descontado pela taxa apropriada ao nível de risco dos ativos (WACC – *Weighted Average Cost of Capital*), ou seja, o modelo KMV assume que a melhor estimativa do valor dos ativos de uma empresa é o preço de suas ações no mercado. Para analisar o risco do negócio, é indispensável a análise retrospectiva e atual do desempenho financeiro da empresa para que se façam projeções adequadas dos fluxos livres de caixa.
- II. Risco dos Ativos (volatilidade ou risco do valor dos ativos) – Mede o risco inerente ao negócio e ao setor onde a empresa está situada. O valor dos ativos é apenas uma estimativa e por isso existe incerteza. Com isso, o valor dos ativos de uma empresa sempre deverá ser considerado sob a ótica do negócio (setor de atuação) da empresa, ou seja, sobre seu risco.
- III. Alavancagem (tamanho da dívida contratada pela empresa) – É usual utilizar o valor contábil das dívidas, já que este é o valor que a empresa deverá repagar ao credor.

A probabilidade de *default* de uma empresa aumenta quando o valor de mercado dos ativos atinge o valor contábil das dívidas, até o ponto em que, o valor dos ativos não for suficiente para pagá-las.

Em estudos, a KMV chegou à conclusão de que, em geral, as empresas não entram em *default* quando o valor dos seus ativos alcançam o valor contábil das dívidas. Claro que existem empresas que entram em *default* quando atingem essa marca, mas muitas empresas continuam suas atividades trocando e pagando serviços das suas dívidas. O longo prazo destas dívidas normalmente dá mais tempo para as firmas. De qualquer jeito, a KMV observou que o ponto de *default* geralmente se encontra entre o total das dívidas contratadas e devidas de curto prazo.

Oldrich Vasicek e Stephen Kealhofer estenderam a modelagem de BLACK e SCHOLLES (1973) e MERTON (1974) para produzir um modelo de *default* chamando-o de *Vasicek-Kealhofer (VK) model*. Esse modelo assume que o valor do *equity* da empresa é uma opção perpétua com um ponto de *default* agindo como uma barreira absorvente para o valor dos ativos da empresa. Quando o valor dos ativos atinge o ponto de *default*, a empresa é considerada inadimplente, ou seja, a empresa entra em *default*. Múltiplas classes de dívidas e *equity* são modeladas: curto-prazo, longo-prazo, dívida conversível, ações preferenciais e ações comuns. Quando o valor dos ativos se torna muito grande, as dívidas conversíveis são chamadas para conversão e diluem, portanto, o *equity* existente. Adicionalmente, dividendos são explicitamente usados na modelagem VK. Uma base de dados extensa é utilizada para encontrar uma distribuição empírica, que relaciona a distância-para-*default* com a probabilidade de *default*.

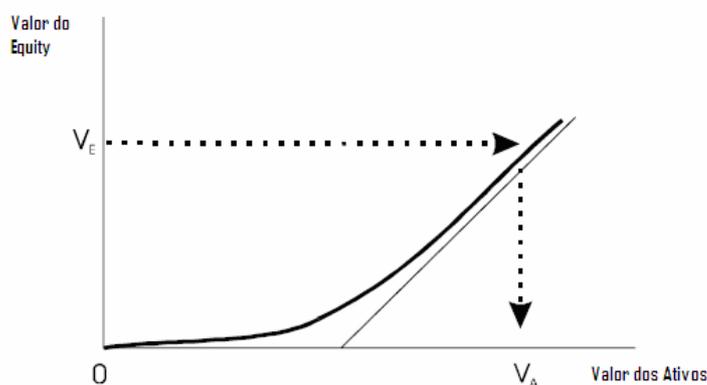
A KMV implementou o modelo de VK para calcular a EDF (*Expected Default Frequency*). É uma medida de probabilidade de *default* com uma janela de um ano para frente, mas essa janela pode ser variada (esse modelo EDF pode ser modificado para avaliar empresa de capital fechado).

Existem essencialmente três passos para encontrar a probabilidade de *default* de uma empresa:

- 1) **Estimar o valor dos ativos e sua volatilidade;**
- 2) **Calcular a distância de *default*; e**
- 3) **Probabilidade de *default*.**

### 1) Estimar o valor dos ativos e a sua volatilidade:

A modelagem de VK (modelo usado pela KMV) utiliza a abordagem das opções para chegar ao valor de mercado dos ativos e volatilidade, extraindo informações do valor de mercado da empresa, volatilidade do *equity* e alguns valores contábeis. Esse processo é semelhante ao procedimento utilizado pelos analistas para determinação da volatilidade implícita de uma opção do preço corrente da opção.



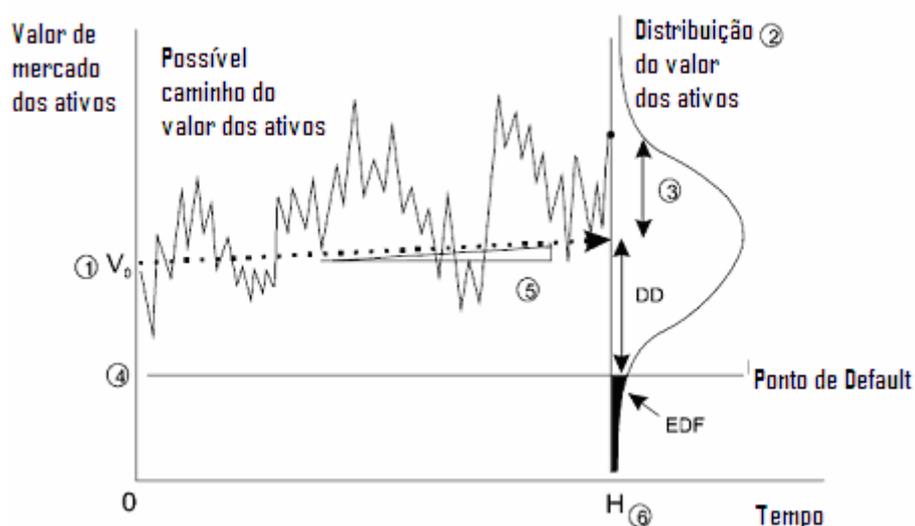
**Figura 3** – Processo para extrair o valor e volatilidade dos ativos  
**Fonte:** CROSBIE e BOHN (2003)

Na prática, a estrutura de capital de uma empresa é complexa, e para isso a modelagem VK considera diversas formas e natureza de dívidas (curto prazo, longo prazo, instrumentos conversíveis, dentre outros). Também leva em consideração a natureza de perpetuidade do *equity* e o valor do dinheiro no tempo.

### 2) Calcular a distância de *default*:

Pela abordagem KMV existem seis variáveis que determinam a probabilidade de *default*, sobre um horizonte de tempo até o ponto H.

1. Valor de mercado do ativo;
2. Distribuição dos valores dos ativos em H;
3. Volatilidade dos futuros valores dos ativos em H;
4. O ponto de *default* (valores contábeis da dívida);
5. A taxa de crescimento do valor dos ativos neste horizonte de tempo; e
6. Tamanho do horizonte H .



**Figura 4-** Fluxograma da modelagem KMV

**Fonte:** CROSBIE e BOHN (2003)

As primeiras quatro variáveis, valor dos ativos, distribuição futura dos ativos, volatilidade dos ativos e o nível do ponto de *default*, são as principais variáveis. A taxa de crescimento dos ativos possui pouco poder explicativo e analistas definem o tamanho do horizonte temporal sempre fixa em um ano.

A figura 4 mostra que a empresa entra em *default* quando os valores dos ativos caem abaixo do ponto de *default* (item 4). Essa área marcada em negrito é a região da EDF, ou melhor, a região da probabilidade de *default*.

Se a distribuição futura dos ativos fosse conhecida, a probabilidade de *default* (valor do EDF) seria simplesmente a probabilidade do valor final dos ativos que estivesse abaixo do ponto de *default* (item 4), dado que já se sabe a distribuição dos ativos. Contudo, na prática, a distribuição é muito difícil de se mensurar. Suposições de distribuição normal ou Log-normal não são recomendáveis pela visão da KMV (no processo DLI utiliza-se a distribuição normal diferente da idéia da VK). Para mensurar o risco de *default* corretamente, deve-se, também, ter cuidado na escolha do ponto de *default*. Conseqüentemente, a KMV primeiro mede a distância para o *default*, como sendo o número de desvios-padrão do valor dos ativos em relação ao ponto de *default*, e em seguida a KMV usa dados empíricos para determinar a

probabilidade de *default*. A distância para *default* é calculada pela seguinte fórmula:

$$[Distância\_Default] = \frac{[Valor\_mercado\_ativos] - [ponto\_default]}{[valor\_mercado\_ativos] \times [volatilidade\_ativos]}$$

### 3) Probabilidade de *default*:

Para conseguir a relação entre a distância para *default* e a probabilidade de *default*, a KMV utiliza dados históricos de empresas que entraram em *defaults*. O banco de dados da KMV possui 250.000 anos/empresa com mais de 4.700 incidentes de *default* e inadimplência. Com esses dados foi montada a distribuição empírica que relaciona a probabilidade de *default* com as distâncias para *default*.

Por exemplo, assumindo o interesse em determinar a probabilidade de *default* (EDF) de uma empresa, para o próximo ano, deve-se verificar no histórico de *default* a proporção de empresas, que estão a sete desvios-padrão do ponto de *default* e que realmente vieram a entrar em *default*. A resposta é aproximadamente 5 b.p. (*base points*) ou 0,05% ou equivalente a um *rating* AA.

A KMV testou a relação entre a distância para *default* e a frequência de *default* entre setores, tamanho, tempo e outros efeitos. O resultado foi que a relação entre a distância para *default* e a frequência de *default* é constante às variáveis apresentadas. Não se pode concluir que não há diferenças de *default rates* entre os setores, tamanho, tempo e outros efeitos, mas se pode afirmar que essas diferenças são capturadas com grande sucesso pela distância para *default*. Estudos internacionais também corroboram tais relações.

No quadro 1, abaixo, serão expostas as principais variáveis para modelar o risco de *default* pela modelagem KMV e as ferramentas para encontrar tais variáveis.

Variável	Ferramenta utilizada para encontrar os resultados
Valor de mercado do <i>Equity</i>	(Preço da ação) x (Quant. de ações)
Valor Contábil das Dívidas	Balanco Patrimonial
Valor de mercado dos ativos	Modelagem Opções
Volatilidade dos ativos	Modelagem Opções
Ponto de <i>Default</i> (B)	Valor Contábil
Distância para <i>Default</i>	$\frac{(\text{valor\_mercado\_ativos}) - (\text{default\_point})}{(\text{valor\_mercado\_ativos}) \times (\text{volativo})}$
Probabilidade de <i>Default</i>	Utilizar curva empírica das probabilidades de <i>default</i>

**Quadro 1** – As principais variáveis na modelagem do risco de crédito da KMV Corporation.

**Fonte:** Elaborado pelo autor.

Na prática, é importante usar uma modelagem mais geral, como a desenvolvida por VK.

## 5.4. Modelagem DLI

### 5.4.1. Introdução

Nesta seção será analisada extensivamente a modelagem DLI, com uma atenção especial, pois essa metodologia foi utilizada na parte prática da dissertação. A modelagem DLI se assemelha muito à modelagem KMV, e suas diferenças serão ressaltadas e explicadas a seguir.

VASSOLOU e XING (2004) também utilizam a abordagem DLI, inclusive a sigla DLI (*Default Likelihood Indicator*) foi descrita originalmente por eles. Neste mesmo alinhamento, GHARGHORI, CHAN e FAFF (2006) também utilizam a metodologia do DLI.

Equivalente à modelagem KMV, a DLI também utiliza a abordagem de MERTON (1974), na qual o valor do *equity* da empresa é visto como uma opção de compra sobre o valor dos ativos. Isso porque os acionistas só vão receber alguma parcela da empresa depois que todos os outros agentes envolvidos na empresa receberem. O ponto de exercício é um valor contábil das obrigações financeiras da empresa. Quando o valor dos ativos for menor que um determinado valor contábil destas obrigações, o valor do *equity* é zero.

A diferença básica entre as modelagens é que a KMV utiliza métodos mais complexos para obter as principais variáveis do modelo, e também possui algumas inovações adicionais, como:

- I. Incorporação de informações bayesianas para ajustes do tamanho da firma, indústria e país. DWYER (2006), em artigo, comenta sobre a validação destas informações. Na modelagem DLI não há incorporação de informações bayesianas.
- II. Na modelagem KMV há incorporação de estrutura de capital mais complexa, como já visto na seção 3.3, que são: ações conversíveis e ações preferenciais, dívida de curto prazo, bônus de subscrição, dívida de longo prazo e dívida conversível. Os dividendos também são explicitamente usados nessa modelagem. A modelagem KMV foi originalmente elaborada por VASICEK

(1984). Alguns anos depois, em conjunto com KEALHOFER, aperfeiçoaram a metodologia ficando, portanto, conhecida como *Vasicek-Kealhofer model* (VK model). A abordagem DLI utiliza somente *equity* e uma única estrutura de dívida.

- III. Na modelagem KMV utiliza-se uma distribuição empírica que relaciona a probabilidade de *default* e distâncias para *default*. Para encontrar essa distribuição empírica, a KMV utiliza dados históricos de empresas que realmente entraram em *default*. O banco de dados da KMV possui 250.000 anos/empresa (quantidade de empresas multiplicada pelos anos de informação) com mais de 4.700 incidentes de *default*.

Na abordagem DLI a distribuição que relaciona a probabilidade de *default* com a distância para *default* será a distribuição normal.

VASSALOU e XING (2004) utilizam a distribuição normal para encontrar a probabilidade de *default*, mas ressaltam que essa não é probabilidade real para grandes amostras. Eles também colocam que as probabilidades de *defaults* calculadas pela KMV são de fato as probabilidades de *default* reais já que utilizam a distribuição empírica dos *defaults*. Devido a isso, VASSALOU e XING (2004) não chamam sua medida de probabilidade de *default*, mas a chamam de DLI. Portanto nesta dissertação também será utilizado este termo.

Por outro lado, GHARGHORI, CHAN e FAFF (2006) argumentam que alguns pesquisadores acham inconsistente trabalhar com uma formulação para calcular probabilidades de *default* toda baseada no valor de mercado dos ativos, seguindo uma distribuição normal, e, no último momento, para calcular a probabilidade de *default*, a KMV se utiliza de uma distribuição que não é normal.

Esta dissertação não entrará na discussão sobre qual é a melhor distribuição a ser utilizada, mas como a distribuição da KMV é proprietária, será utilizada a distribuição normal, seguindo o mesmo procedimento que VASSALOU e XING (2004) e GHARGHORI, CHAN e FAFF (2006).

- IV. A formulação de MERTON (1974) é *path-independent* (independe do caminho percorrido), porque o evento de *default* só ocorre se o valor dos

ativos for menor que um determinado valor somente na maturidade, ou seja, está-se modelando uma opção européia (exerce ou não somente no vencimento) onde a estrutura de dívida continua constante até a maturidade. O caminho que o valor dos ativos percorre antes da maturidade, ou seja, o *path* percorrido pelo valor dos ativos, não afeta a probabilidade de *default*. Essa aproximação não condiz com a realidade já que empresas constantemente estão alterando e renegociando suas dívidas para atingirem suas obrigações corporativas.

A modelagem da KMV é *path-dependent* (depende do caminho percorrido), ou seja, o caminho percorrido pelo valor dos ativos é levado em consideração. Muitos pesquisadores afirmam que essa metodologia é mais realista para modelar o *equity*. O modelo VK, da KMV, trata o *equity* como uma opção perpétua *down-and-out call* (DOC) do valor dos ativos da empresa. Com o DOC, o valor do *equity* é zero se o valor dos ativos for menor que um determinado ponto ótimo antes ou na maturidade da opção.

BROCKMAN e TURTLE (2003) argumentam que opções *path-dependent* para modelar *equities* e inferir probabilidades de *default* para empresas são melhores do que as opções *path-independent*, como a opção padrão utilizada na modelagem de MERTON (1974).

Mesmo sabendo desta limitação, VASSALOU e XING (2004), GHARGHORI, CHAN e FAFF (2006), CHAN-LAU, JOBERT e KONG (2004) e outros, na literatura, utilizaram em seus trabalhos a abordagem de MERTON (1974).

GHARGHORI, CHAN e FAFF (2006) chegaram a uma conclusão interessante, pois além de modelarem utilizando a abordagem de MERTON (1974) também utilizaram a abordagem pela opção de barreira. Concluíram que as duas abordagens são excelentes para classificar empresas por probabilidade de *default*, e que o desempenho destas duas abordagens foi muito parecido e de difícil distinção.

Com isso, na parte prática desta dissertação, para modelar DLI será seguida a abordagem tradicional de MERTON (1974) para encontrar a probabilidade de *default*.

#### 5.4.2. Desenvolvimento da Modelagem DLI

O modelo de MERTON (1974) foi o gênesis para o entendimento da relação entre o valor de mercado dos ativos e o valor de mercado do *equity*. Com essa modelagem, juntamente com a abordagem das opções conforme BLACK e SCHOLES (1973) extraem-se as variáveis  $V_A$  e  $\sigma_A$ , dado que se tenham as variáveis: valor de mercado do equity ( $V_E$ ), volatilidade do equity ( $\sigma_E$ ), tempo ( $t$ ), taxa livre de risco ( $r$ ) e o ponto de *default* ( $B$ ). Em seguida, calcula-se a Distância para *Default* (D.D.), que dado uma distribuição de *default*, leva à probabilidade de uma empresa entrar em *default* com condições pré-estabelecidas de tempo e ponto de *default*.

Pela KMV, a modelagem de BLACK e SCHOLES (1973) é muito restritiva para utilizá-la na prática, contudo é altamente didática e possui resultados satisfatórios, conforme GHARGHORI, CHAN e FAFF (2006) encontraram no mercado australiano.

Basicamente, o modelo de MERTON (1974) considera que a empresa possui uma estrutura de capital composta de uma única dívida (não paga cupons) e *equity* sem dividendos. Ela considera que os ativos seguem um MGB (Movimento Geométrico Browniano), parametrizados por um *drift* e volatilidade. A dívida nesta modelagem é encarada como *bullet* (pagamento de juros e principal em um ponto específico do tempo). Com isso, pode-se obter para o valor do *equity* uma expressão analítica construindo um portfólio livre de risco, e resolver a EDP resultante utilizando duas condições de contorno, que é o valor da opção na expiração e valor da opção quando os ativos se tornam totalmente depreciados. Neste caso, a solução é utilizar a equação de BSM.

Portanto, será explorada a modelagem das opções para encontrar o valor de mercado dos ativos e sua volatilidade através das informações fornecidas pelo mercado com base no valor do seu *equity*. No caso, para encontrar tais variáveis ( $V_A$  e  $\sigma_A$ ), será utilizada a modelagem das opções na ordem inversa do convencional, ou seja, a partir do preço da opção (valor de mercado do *equity*) e da sua volatilidade (volatilidade do *equity*) será encontrado o valor implícito dos ativos ( $V_A$ ) e sua volatilidade ( $\sigma_A$ ).

O objetivo desta seção é obter a probabilidade de *default* utilizando a modelagem DLI, ou seja, utilizando a base conceitual de MERTON (1974). Para isso, será dividida em três etapas:

- 1) **Apresentação da relação entre volatilidade do *equity* e volatilidade dos ativos.**
- 2) **Apresentação da relação para encontrar a Distância para *Default* (DD).**
- 3) **Encontrar a Probabilidade de *Default***

### 1) **Apresentação da relação entre volatilidade dos ativos e volatilidade do *equity*.**

Assumindo que o valor de mercado dos ativos segue o processo estocástico MGB – Movimento Geométrico Browniano<sup>11</sup>:

$$dV_A = \mu V_A dt + \sigma_A V_A dz \quad (3.2)$$

Onde,

$V_A, dV_A$  – valor dos ativos e variação do valor dos ativos, respectivamente

$\mu, \sigma_A$  – *drift* do valor dos ativos e a volatilidade dos ativos

$dz$  – incremento do processo de *wiener*

Nesta modelagem, a estrutura de capital de uma empresa é dividida em duas formas simples, que são: dívida e patrimônio (*equity*). Se B for o ponto de exercício da opção e o seu vencimento é em T, pela formulação de BLACK e

---

<sup>11</sup> Conceituação e desenvolvimento do Movimento Geométrico Browniano, verificar ANEXO C

SCHOLES<sup>12</sup> <sup>13</sup> (1973) para uma opção de compra, o valor de mercado do *equity* e o valor de mercado dos ativos estão relacionados da seguinte forma:

$$V_E = V_A \cdot N(d1) - B \cdot e^{-rT} N(d2) \quad (3.3)$$

Sendo  $d1$  e  $d2$ ,

$$d1 = \frac{\ln\left(\frac{V_A}{B}\right) + \left(r + \frac{\sigma_A^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} \quad (3.4)$$

$$d2 = d1 - \sigma_A \sqrt{T} \quad (3.5)$$

$V_E$  – Valor de mercado do *equity* (capital próprio) da empresa

$r$  – taxa livre de risco

$V_A$  – Valor de mercado de seus ativos (*assets*)

$T$  - tempo de maturação

$\sigma_A$  – volatilidade do valor de mercado de seus ativos

$B$  – ponto de exercício para a empresa entrar em *default* (obrigações de curto prazo mais a metade do valor contábil da dívida de longo prazo em circulação,

---

<sup>12</sup> A formulação clássica BLACK e SCHOLE (1973) é a solução de uma equação diferencial parcial (EDP). Para se chegar à EDP pelo método clássico "*contingent claims*" a relação  $F$  (valor da opção) e  $V$  (valor do ativo base) é dada por um portfólio livre de risco:  $\Phi = F - nV$

1) Compra-se uma opção de investimento, ou seja,  $F$ .

2) Vende-se  $n$  unidades do ativo básico  $V$ , sendo  $n$  (conhecido por *delta hedge*) escolhido de forma a tornar o portfólio sem risco ( $n = F_V$ ).

Após montam-se as equações de retorno desses portfólio no tempo  $dt$ . Por ser livre de risco, o retorno exigido é a taxa livre de risco  $r$ .

Usa-se, então, o lemma de Itô para expandir  $dF$  em relação a  $V$  e  $t$ . Usa-se também a equação do processo estocástico de  $V$  para  $(dV)^2$ .

Calculando chega-se à EDP do derivativo  $F(V, t)$  com c.c.  $V=0, F(0,t) = 0$  (premissas para não deixar ficar negativo) e  $t = T, F(V,T) = \max(V-I, 0)$

Resolvendo essa EDP encontra-se a formulação de BLACK e SCHOLE (1973).

<sup>13</sup> Para conceituação e mais detalhes verificar BLACK e SCHOLE (1973).

segundo a KMV, VASSOLOU e XING (2004) e GHARGHORI, CHAN e FAFF (2006)).

VASSALOU e XING (2004), GHARGHORI, CHAN e FAFF (2006) utilizaram um processo iterativo para encontrar o valor de  $\sigma_A$ . Primeiro, utilizaram as informações diárias dos últimos 12 meses para os retornos do *equity*, e extraíram  $\sigma_E$ , para usá-lo como aproximação inicial do  $\sigma_A$ . Usando a fórmula de BSM, para cada dia dos últimos 12 meses, foi calculado o  $V_A$  diário utilizando o  $V_E$  diário. Com isso, obtêm-se valores diários de  $V_A$ . Em seguida será computado o desvio padrão desta série de  $V_A$ 's diários, e este desvio será utilizado como nova aproximação para a próxima interação. Esse procedimento foi repetido até convergirem dois resultados consecutivos. A tolerância para conversão é de  $10E-4$ . Foi colocado ainda que, para a maioria das vezes, é preciso apenas algumas interações para que  $\sigma_A$  convirja. Com  $\sigma_A$  convergido, utilizar novamente a formulação de B&S para extrair  $V_A$ .

Esse processo foi repetido no final de cada mês, resultando em estimativas mensais de  $\sigma_A$ . Para toda a avaliação utilizaram como taxa livre de risco o *T-bill* de 1 ano, observado no final de cada mês. No caso, se for utilizada essa metodologia para avaliar empresas brasileiras, será necessário incorporar o risco país na taxa livre de risco (*T-bill*) americana.

Uma vez que os valores diários de  $V_A$  foram obtidos, é calculado o *drift*  $\mu$ , como sendo a média das variações do  $\ln V_A$ . Lembra-se que o *drift*  $\mu$  será incorporado na modelagem somente na equação 3.10 (Distância para *Default*), a ser visto mais adiante.

Antes de explicar outra forma de interação, para encontrar os valores de  $V_A$  e  $\sigma_A$ , será explicada a razão de o espaço temporal ser de um ano para as modelagens:

- I. Um período maior é difícil de justificar, pois existem inúmeras incertezas que atingem a probabilidade de *default* da empresa, por exemplo, configuração de mercado, mudança estrutural na empresa, etc. Adicionalmente o modelo estrutural DLI está baseado em que os ativos seguem um MGB, e como apresentado no ANEXO C, a incerteza vai aumentando conforme o tempo aumenta.

- II. O período de um ano representa um equilíbrio razoável entre o peso colocado na alavancagem financeira, a volatilidade dos ativos e a taxa de crescimento dos ativos, na construção da equação da probabilidade de *default* (PD - utilizando MERTON, 1974). Adiante o desenvolvimento da formulação da PD mostrará com mais clareza essas variáveis preponderantes.
- III. Para o cálculo da PD, se o tempo for curto, o peso da alavancagem financeira será grande. Enquanto que se utilizar um tempo grande estará dando mais ênfase na volatilidade dos ativos e na taxa de crescimento desses ativos.
- IV. Basle II <sup>14</sup> recomenda a utilização de 12 meses.
- V. Autores como VASSALOU e XING (2004), GHARGHORI, CHAN e FAFF (2006), CHAN-LAU, JOBERT e KONG (2004) utilizaram um período de um ano.

Outra forma de encontrar os valores de  $V_A$  e  $\sigma_A$ , utilizada na parte prática desta dissertação, é trabalhar com algoritmo de Newton Raphson. Esse método é indicado por HULL (2002) em seu livro, no capítulo 26. Seguem os passos:

- I. A principal fórmula neste processo é a relação entre  $\sigma_A$  e  $\sigma_E$  :

$$\sigma_E = \left( \frac{V_A}{V_E} \right) \frac{\partial V_E}{\partial V_A} \sigma_A \quad ^{15} \quad (3.6)$$

---

<sup>14</sup> Basel II é um documento formalmente conhecido como *International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards*, publicado pela *Basel Committee on Banking Supervision of the Bank for International Settlements (2004)*.

<sup>15</sup> A demonstração da equação 3.6 encontra-se no ANEXO A

No modelo de BLACK & SCHOLES (1973), pode ser mostrado que

$\frac{\partial V_E}{\partial V_A} = N(d_1)$ , então, pelo modelo de MERTON (1974), a relação das volatilidades dos *assets* com o *equity* é:

$$\sigma_E = \left( \frac{V_A}{V_E} \right) N(d_1) \sigma_A \quad (3.7)$$

II. O próximo passo é interagir as equações 3.4 e 3.5 na equação 3.3, resultando:

$$V_A N \left( \frac{\ln \left( \frac{V_A}{B} \right) + \left( r + \frac{\sigma_A^2}{2} \right) T}{\sigma_A \sqrt{T}} \right) - B e^{-rT} N \left( \frac{\ln \left( \frac{V_A}{B} \right) + \left( r - \frac{\sigma_A^2}{2} \right) T}{\sigma_A \sqrt{T}} \right) - V_E = 0 \quad (3.8)$$

III. Em seguida, interagir as equações 3.4 em 3.7:

$$\sigma_E V_E - \sigma_A V_A N \left( \frac{\ln \left( \frac{V_A}{B} \right) + \left( r + \frac{\sigma_A^2}{2} \right) T}{\sigma_A \sqrt{T}} \right) = 0 \quad (3.9)$$

As equações 3.8 e 3.9 possuem variáveis  $V_A$  e  $\sigma_A$  que são incógnitas, enquanto as variáveis  $V_E$ ,  $\sigma_E$ ,  $r$ ,  $B$  e  $T$  são conhecidas<sup>16</sup>.

<sup>16</sup> Importante lembrar que  $r$  é a taxa livre de risco, e como *proxy* é usual utilizar a remuneração do título de renda fixa norte-americano *t-bill*.  $T$  é o tempo para maturação, conforme explicado acima, de um ano.  $\sigma_E$  é a volatilidade dos retornos contínuos do *equity* (US\$), utilizando uma janela diária dos 12 meses passados. Com isso, encontra-se a volatilidade anualizada após se multiplica por  $(252)^{1/2}$ .  $B$  é o ponto de exercício, no qual se utiliza dívida de curto prazo +  $\frac{1}{2}$  dívida de longo prazo (Fonte: KMV Corporation).

Portanto, o resultado é um sistema não linear, com duas incógnitas ( $V_A$  e  $\sigma_A$ ) e duas equações (3.8 e 3.9). Este sistema pode ser resolvido pela metodologia de Newton Raphson.

Conforme HULL (2002) sugere em seu livro, serão resolvidas estas duas equações não lineares no Excel®, minimizando a seguinte função:

$$\text{Equação 3.8} = F(V_A, \sigma_A) = F(x,y) = 0$$

$$\text{Equação 3.9} = G(V_A, \sigma_A) = G(x,y) = 0$$

$$\text{Minimizar } [ F(x,y) ]^2 + [ G(x,y) ]^2$$

Foram explicados dois métodos para calcular duas incógnitas que são  $V_A$  e  $\sigma_A$ . O próximo passo é explicar como chegar à distância de *default*. Antes, é importante explicar com mais detalhes o ponto de exercício (B).

O ponto de exercício ou ponto de *default* de uma empresa (B) é uma barreira muito difícil de quantificar. Atualmente a KMV utiliza como ponto de *default* toda a dívida de curto prazo mais a metade da dívida de longo prazo (CROSBIE e BOHN 2003). Esse ponto também é utilizado por diversos autores e pesquisadores que sabendo da dificuldade de se estimar tal barreira, baseiam-se na barreira da KMV para prosseguirem seus estudos sobre risco.

DAVYDENKO (2005) encontrou um ponto de *default médio*, ou seja, quando o valor de mercado dos ativos atingir 72% do valor de face de suas dívidas em média, essa empresa irá à *default*. Com tudo, cerca de um terço dos *defaults* ocorreu acima desta relação, enquanto um número igual de empresas evita *default* por pelo menos um ano. Mesmo calibrando o ponto de *default* em 72%, há de se ficar atento à falta de precisão na avaliação *cross-section*.

HUANG e HUANG (2003) encontraram um valor de 60% do valor de face das dívidas, enquanto LELAND (2004) encontrou 73%. A KMV, como visto anteriormente, utiliza dívida de curto prazo mais 50% da dívida de longo prazo (utilizando dados contábeis). ,Esse modelo é proprietário e não se conhecem as razões da escolha destes números.

Deve-se observar como flexibilidade da modelagem, que o usuário ou analista pode inserir qualquer valor de B que julgar economicamente apropriado.

Esse ponto de exercício é fonte para diversas discussões. E, para apimentar as discussões, nos últimos anos têm surgido modelos baseados em que tais

barreiras de *default* não são fixas, ou seja, são barreiras variáveis e que dependem de situações de risco exógenas específicas. Na literatura chamam essa abordagem de modelos baseados em intensidade. Essa teoria está baseada em que o *default* segue uma distribuição de Poisson, e ele surge contingente ao aparecimento de algum perigo específico.<sup>17</sup>

## 2) Apresentação da relação para encontrar a distância para *default*.

Após apresentar duas formas de interações para encontrar as variáveis  $V_A$  e  $\sigma_A$ , e comentar pontos importantes sobre as variáveis envolvidas, será apresentado o próximo passo: Distância para *Default* (D.D.)

Com todas as informações ( $V_A$ ,  $\sigma_A$ ,  $B$ ,  $r$ ,  $T$  e  $\mu$ ) necessárias, pode-se encontrar a Distância para *Default* (D.D.). A fórmula universal para calcular a distância para *default* na modelagem DLI é dada abaixo:

$$D.D.^{18} = \frac{\ln\left(\frac{V_{A,t}}{B_t}\right) + \left(\mu - \frac{\sigma_A^2}{2}\right)\Delta t}{\sigma_A \sqrt{\Delta t}} \quad (3.10)$$

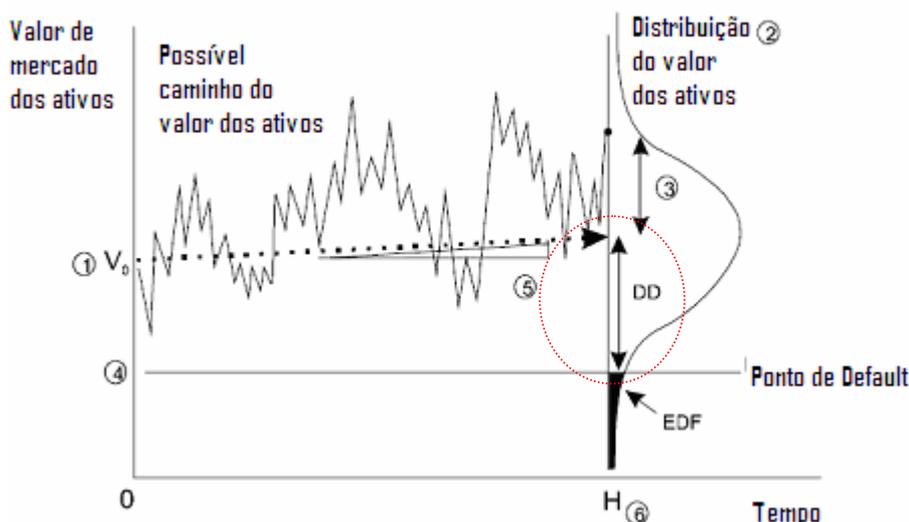
A distância para *default* consiste no número de desvios-padrão que  $\ln(V_{A,t}/B_t)$  tem que desviar negativamente da sua média para caracterizar o *default*. Assim, quanto menor esse valor, mais próxima do *default* a empresa estará e, conseqüentemente, maior será o seu risco de *default*.

Na modelagem DLI, que utiliza a metodologia de MERTON (1974), é comum trabalhar com o *drift* igual a zero ( $\mu = 0$ ). Na parte prática desta dissertação, todas as simulações consideram a variável *drift* como sendo zero.

---

<sup>17</sup> Ver DUFEE e SINGLETON (1999), JARROW e TURNBULL (1995) e JARROW, LANDO e TURNBULL (1997)

<sup>18</sup> A demonstração da equação 3.10 encontra-se no ANEXO B



**Figura 5** – Distância para *Default*  
**Fonte:** CROSBIE e BOHN (2003)

Pode-se visualizar na figura 5 a distância para *default* (DD).

### 3) Encontrar a Probabilidade de *Default*

Com a informação da Distância para *Default* (DD), utiliza-se, na modelagem DLI, uma distribuição normal para encontrar a probabilidade de *default*.

Utiliza-se a distribuição normal por diversas razões a serem expostas:

- I. Coerência com a modelagem básica, por trás da Distância para *Default* (D.D.), de MERTON (1974), além da coerência com a modelagem de BLACK e SCHOLES (1973), que assume normalidade dos retornos e lognormalidade para os preços.
- II. A KMV encontrou empiricamente a distribuição de *defaults*, utilizando dados reais. A distribuição encontrada é proprietária e acessível apenas nas modelagens quando utilizados programas específicos da KMV. Devido a esse fato complicador, a distribuição normal se torna uma boa aproximação.
- III. VASSALOU e XING (2004), GHARGHORI, CHAN e FAFF (2006) utilizaram a distribuição normal e a metodologia de MERTON (1974).

## 6 Apresentação dos Resultados

### 6.1. Introdução

Este capítulo consiste em testar empiricamente o modelo DLI apresentado. Primeiramente, serão analisadas as principais variáveis do modelo e o entendimento de suas dinâmicas; após será testado o modelo para algumas empresas brasileiras que entraram em *default*. É importante ressaltar que essa metodologia não se aplica às empresas estatais brasileiras, pois outros fatores, diferentes da hipótese do modelo, levam as estatais a irem à *default* e obviamente nesta condição não há possibilidade de aquisição.

### 6.2. Análise de Sensibilidade das principais variáveis

Nesta seção serão abordados de forma ilustrativa os efeitos das principais variáveis no modelo DLI. Conforme colocado nos capítulos anteriores, as variáveis de entrada do modelo DLI:

- I. T: Tempo de Maturação
- II. r: Taxa livre de risco
- III.  $\sigma_E$ : Volatilidade do *equity*
- IV.  $V_e$ : Valor de mercado do capital próprio (*equity*)
- V. B: Dívida
- VI.  $\mu$ : *Drift*

O objetivo desta seção é entender melhor a dinâmica das principais variáveis de entrada e os resultados no modelo DLI. Para isso, serão supostos alguns valores básicos para tais variáveis e, em seguida, serão estipuladas algumas faixas de variação.

Suposições iniciais para as variáveis de entrada do modelo:

- I. Tempo: 1 ano
- II.  $r$ : 6% a.a.
- III. Volatilidade do *equity*: 40% a.a.
- IV. *Equity*: \$ 10.000
- V. Dívida: \$ 10.000
- VI. *Drift*: zero

Faixas de variação a serem simuladas para as variáveis de entrada do modelo:

- I. Tempo: Fixo em 1 ano
- II.  $r$  : 2% até 10% a.a.
- III. Volatilidade do *equity*: 24% até 56% a.a.
- IV. *Equity*: \$ 6.000 até \$ 14.000
- V. Dívida: \$ 6.000 até \$ 14.000
- VI. *Drift*: Fixo em zero

Somente as variáveis tempo e *drift* permanecerão fixas, pois todos os estudos envolvendo a metodologia de MERTON (1974) para quantificação do risco de crédito utilizam  $t=1$  e  $\mu=0$ .

Serão feitas simulações, no modelo DLI, com duas variáveis oscilando ao mesmo tempo, enquanto as demais variáveis permanecerão fixas.

**Simulações com duas Variáveis**

	Variável 1	Variável 2
<b>Simulação 1</b>	Taxa Livre de Risco X	Dívida
<b>Simulação 2</b>	Taxa Livre de Risco X	Equity
<b>Simulação 3</b>	Taxa Livre de Risco X	Volatilidade Equity
<b>Simulação 4</b>	Equity X	Dívida
<b>Simulação 5</b>	Equity X	Volatilidade Equity
<b>Simulação 6</b>	Dívida X	Volatilidade Equity

### Simulação 1:

Variando Taxa Livre de Risco (r) x Dívida no modelo DLI.

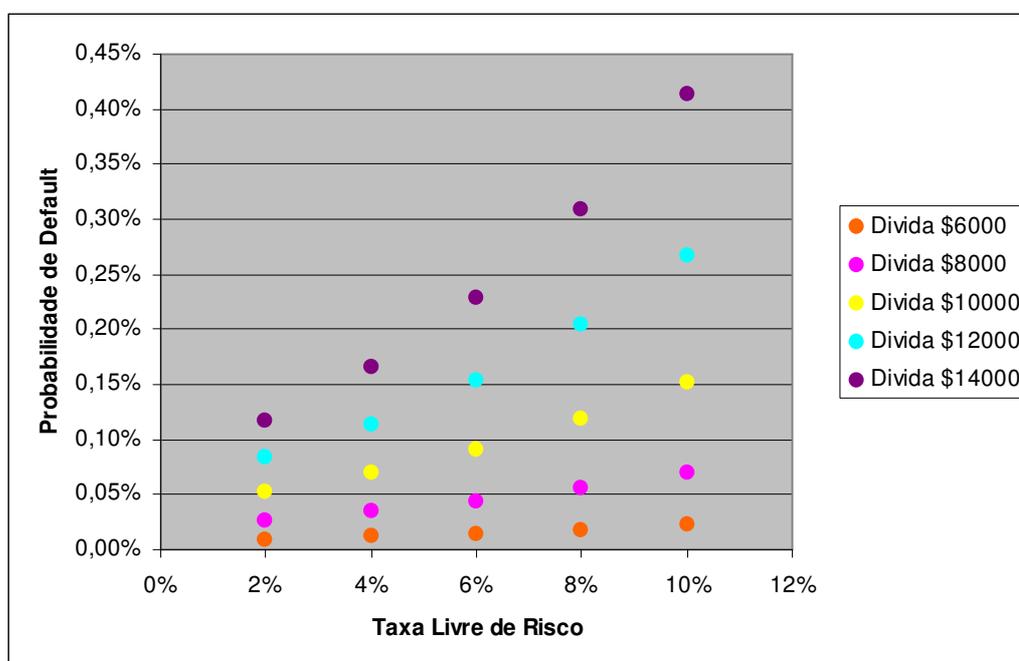
O resultado da simulação utilizando o modelo DLI pode ser encontrado no quadro 3, abaixo:

		Taxa Livre de Risco				
		2%	4%	6%	8%	10%
Dívida	6.000,00	0,009%	0,012%	0,015%	0,018%	0,022%
	8.000,00	0,026%	0,034%	0,044%	0,056%	0,071%
	10.000,00	0,052%	0,069%	<b>0,091%</b>	0,118%	0,152%
	12.000,00	0,083%	0,114%	0,153%	0,204%	0,267%
	14.000,00	0,118%	0,165%	0,228%	0,310%	0,413%

**Quadro 2** – Simulação: Matriz de probabilidades de *default's* com duas variáveis taxa livre de risco e dívida.

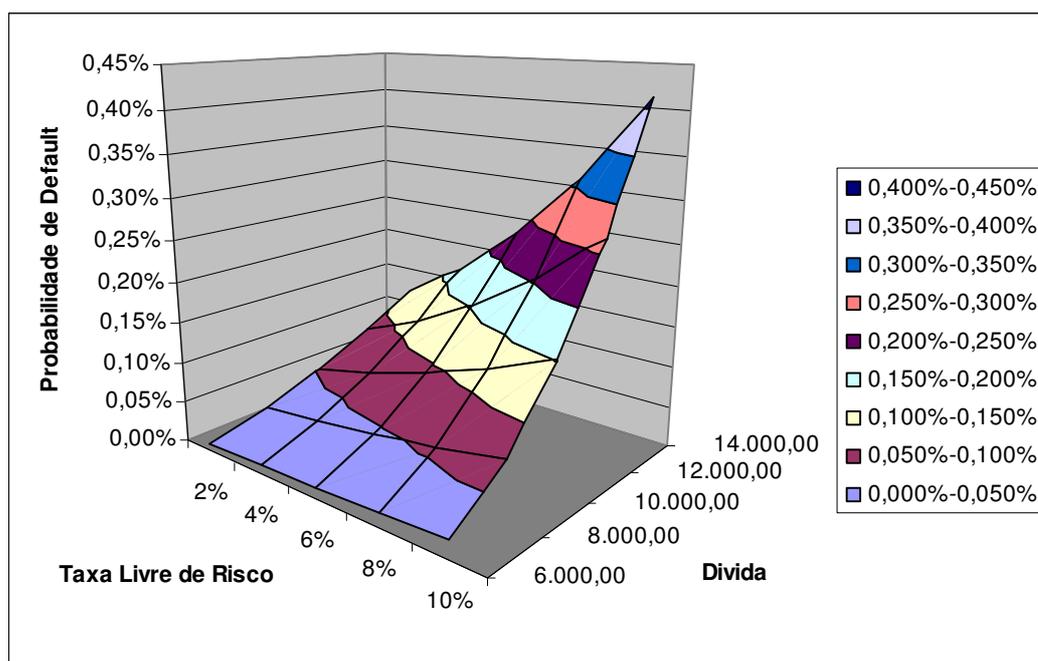
**Fonte:** Elaborado pelo autor.

A seguir, as figuras 6 e 7 ilustram o quadro 2 graficamente. É possível identificar que quanto maior a dívida maior o risco de *default*, e quando se aumenta a taxa livre de risco maior ainda será a probabilidade de *default*.



**Figura 6** – Simulação: Variação da taxa livre de risco (Rf) x Dívida e o impacto na probabilidade de *default*.

**Fonte:** Elaborado pelo autor.



**Figura 7** – Visão 3-D da influência da taxa livre de risco e a dívida na Probabilidade de *Default*.

**Fonte:** Elaborado pelo autor.

### **Simulação 2:**

Variando Taxa Livre de Risco ( $r$ ) x valor do *Equity* no modelo DLI.

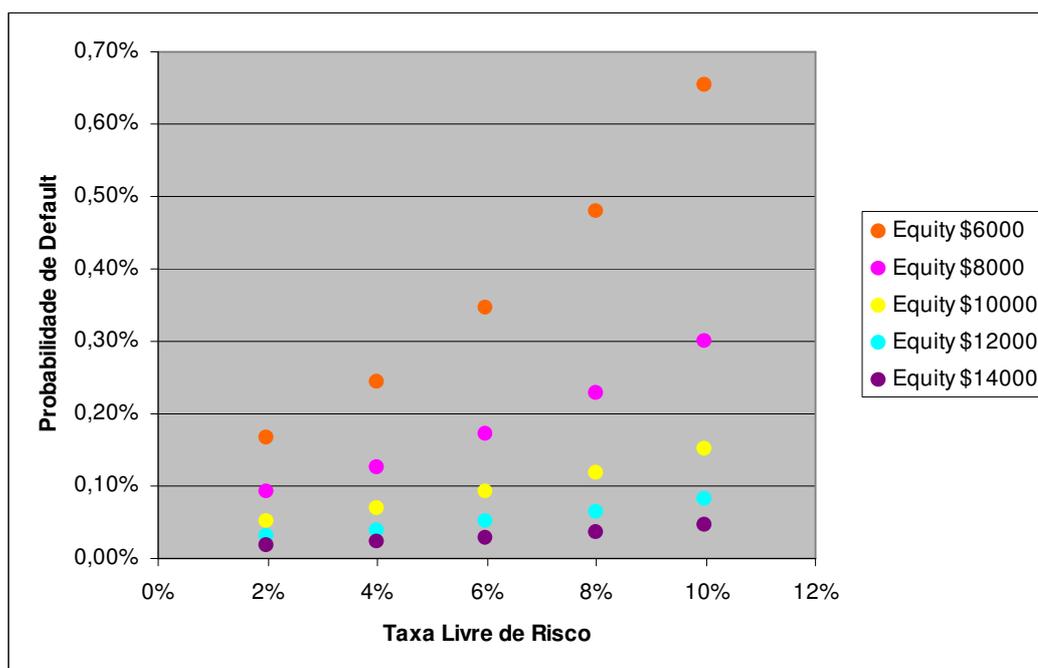
Na simulação 2 será analisada a probabilidade de *default* variando a taxa livre de risco em conjunto com o valor do *equity*. A seguir estão os resultados:

		Taxa Livre de Risco				
		2%	4%	6%	8%	10%
Equity	Equity \$6000	0,167%	0,243%	0,345%	0,480%	0,655%
	Equity \$8000	0,091%	0,126%	0,171%	0,228%	0,300%
	Equity \$10000	0,052%	0,069%	<b>0,091%</b>	0,118%	0,152%
	Equity \$12000	0,030%	0,039%	0,051%	0,065%	0,082%
	Equity \$14000	0,018%	0,023%	0,029%	0,037%	0,046%

**Quadro 3** – Simulação: Matriz de probabilidades de *default* com duas variáveis taxa livre de risco e o valor do *equity*.

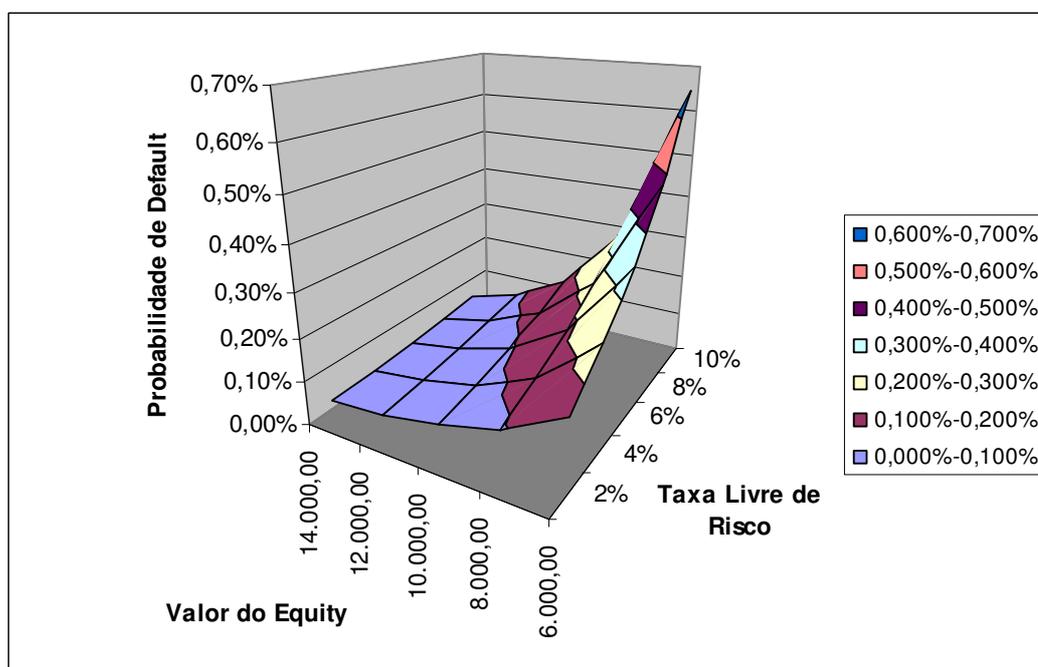
**Fonte:** Elaborado pelo autor.

A seguir, as figuras 8 e 9 ilustra, o quadro 3 graficamente. É possível identificar que quanto menor o valor do *equity* maior o risco de *default*, e quando se aumenta a taxa livre de risco maior ainda será a probabilidade de *default*.



**Figura 8** – Simulação: Variação da taxa livre de risco ( $R_f$ ) e o valor do *Equity* e seu impacto na probabilidade de *default*.

**Fonte:** Elaborado pelo autor.



**Figura 9** – Visão 3-D da influência da taxa livre de risco e o valor do *Equity* na Probabilidade de *Default*.

**Fonte:** Elaborado pelo autor.

**Simulação 3:**

Variando Taxa Livre de Risco (r) x volatilidade do *Equity* no modelo DLI.

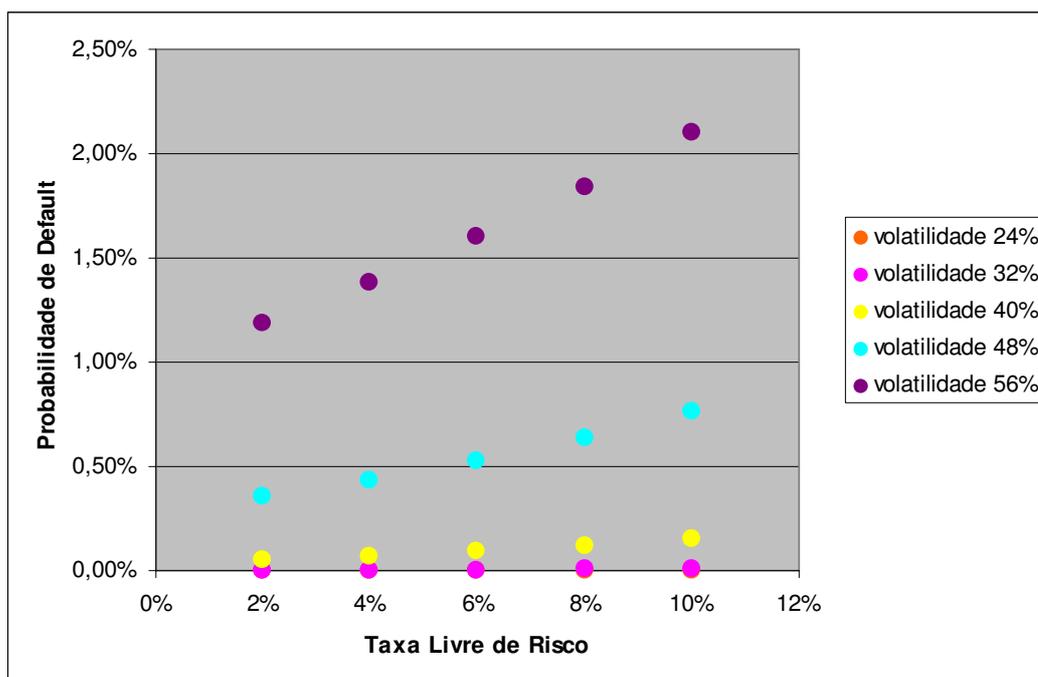
Na simulação 3 será analisada a probabilidade de *default* variando a taxa livre de risco em conjunto com a volatilidade do *equity*. A seguir estão os resultados:

		Taxa Livre de Risco				
		2%	4%	6%	8%	10%
Volatilidade	24%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%
	32%	0,002%	0,003%	0,004%	0,006%	0,009%
	40%	0,052%	0,069%	<b>0,091%</b>	0,118%	0,152%
	48%	0,354%	0,434%	0,528%	0,636%	0,759%
	56%	1,190%	1,385%	1,600%	1,838%	2,099%

**Quadro 4** – Simulação: Matriz de probabilidades de *default's* com duas variáveis taxa livre de risco e a volatilidade do *equity*

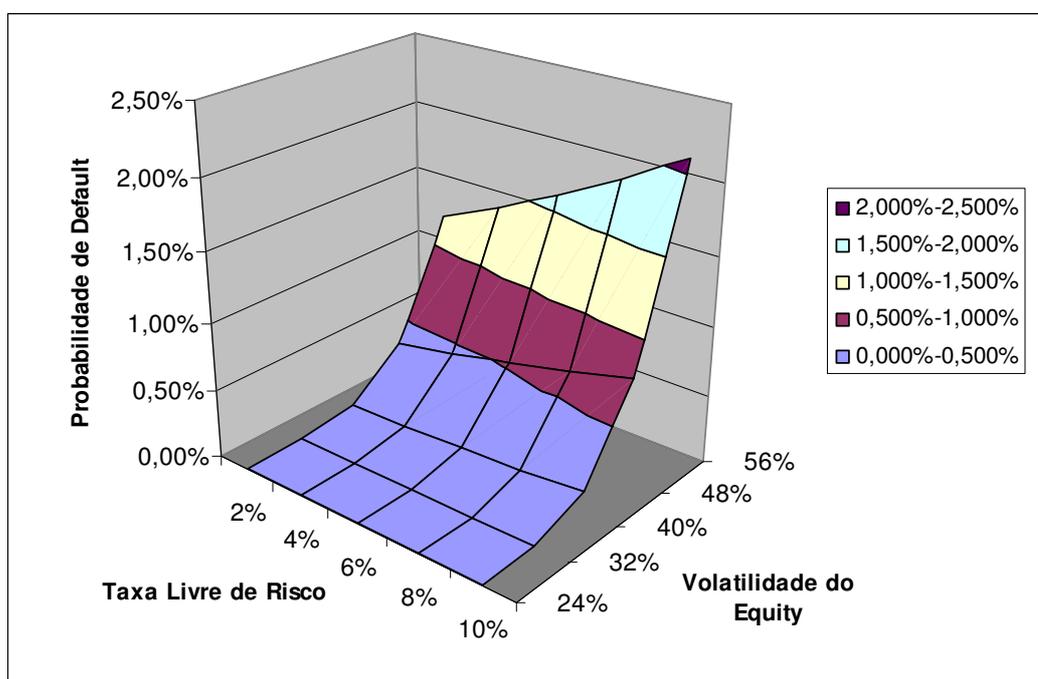
**Fonte:** Elaborado pelo autor.

A seguir, as figuras 10 e 11 ilustram o quadro 4 graficamente. É possível identificar que quanto maior a volatilidade do *equity* maior o risco de *default*, e quando se aumenta a taxa livre de risco maior ainda será a probabilidade de *default*.



**Figura 10** – Simulação: Variação da taxa livre de risco ( $R_f$ ) e a volatilidade do *Equity* e seu impacto na probabilidade de *default*.

**Fonte:** Elaborado pelo autor.



**Figura 11** – Visão 3-D da influência da taxa livre de risco e a volatilidade do *Equity* na Probabilidade de *Default*.

**Fonte:** Elaborado pelo autor

### Simulação 4:

Variando Valor do *Equity* x Valor da Dívida no modelo DLI.

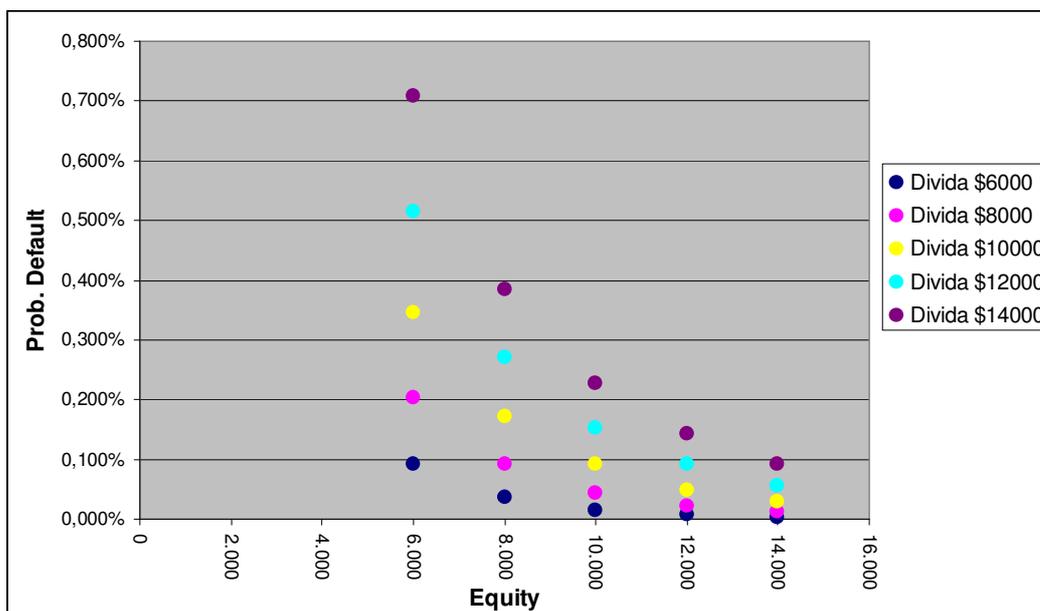
Nesta etapa será analisada a probabilidade de *default* variando conjuntamente o *equity* e a dívida em 40% para cima e para baixo, conforme quadro 5:

		Dívida				
		6.000,00	8.000,00	10.000,00	12.000,00	14.000,00
Equity	6.000,00	0,091%	0,202%	0,345%	0,515%	0,709%
	8.000,00	0,035%	0,091%	0,171%	0,270%	0,384%
	10.000,00	0,015%	0,044%	0,091%	0,153%	0,228%
	12.000,00	0,006%	0,022%	0,049%	0,091%	0,142%
	14.000,00	0,003%	0,012%	0,029%	0,055%	0,091%

**Quadro 5** – Simulação: Matriz completa de probabilidades de *default* 's com duas variáveis *equity* e dívida.

**Fonte:** Elaborado pelo autor.

A figura 7 ilustra o quadro 4 graficamente:

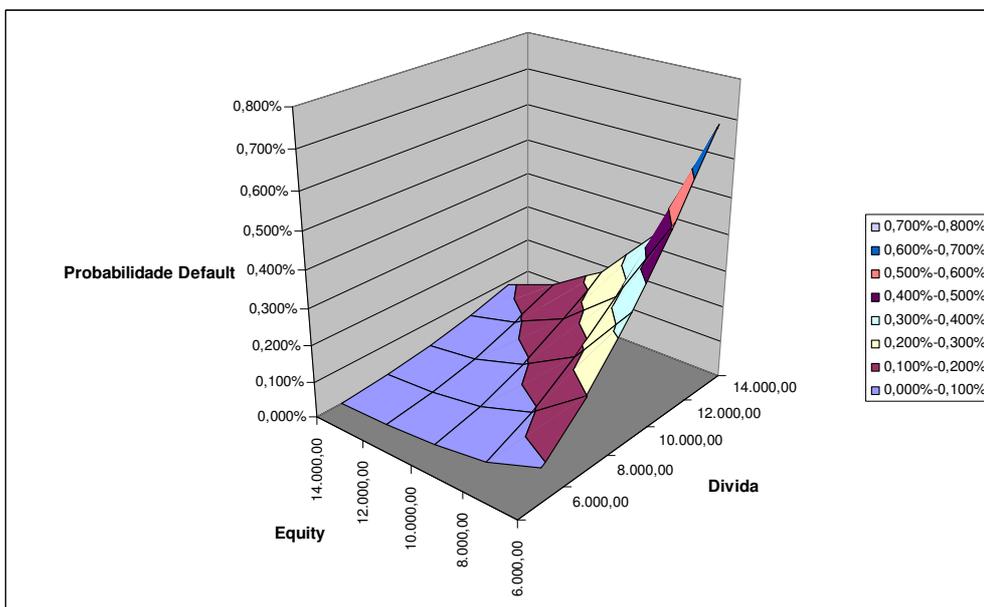


**Figura 12** – Influência da variação do *equity* e dívida na Probabilidade de *Default*.

**Fonte:** Elaborado pelo autor.

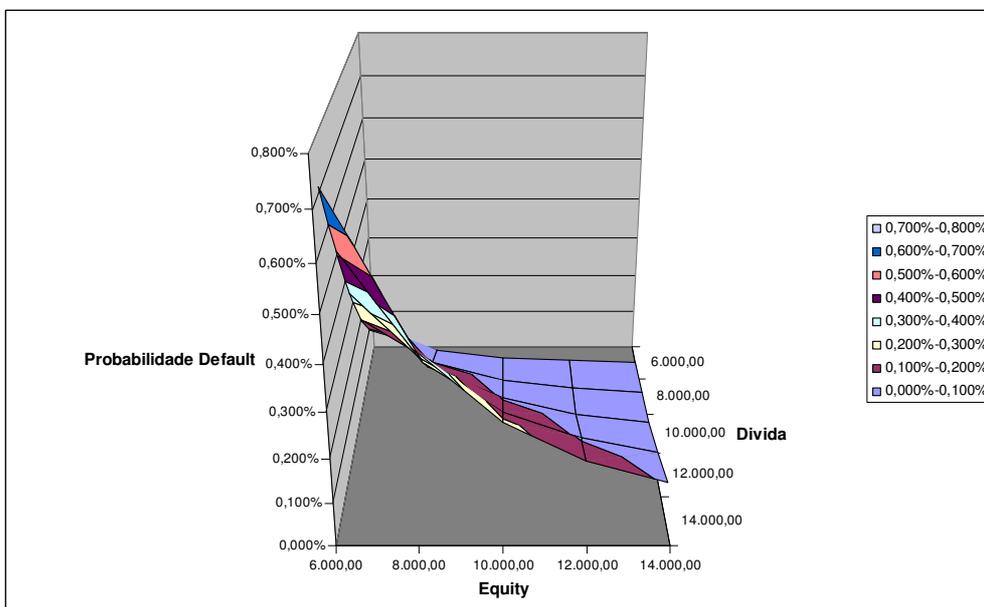
Observa-se na figura 12 que quanto maior a dívida, maior será o risco de *default* do agente. Esse já era um resultado esperado e apenas corrobora a eficiência teórica do modelo DLI.

Nas figuras 13 e 14 a interação entre equity e dívida no modelo DLI é mais bem visualizada.



**Figura 13** – Visão 3-D da influência do *equity* e dívida na Probabilidade de *Default*.

Fonte: Elaborado pelo autor.



**Figura 14** – Outra visão 3-D da influência do *equity* e dívida na Probabilidade de *Default*.

Fonte: Elaborado pelo autor.

### Simulação 5:

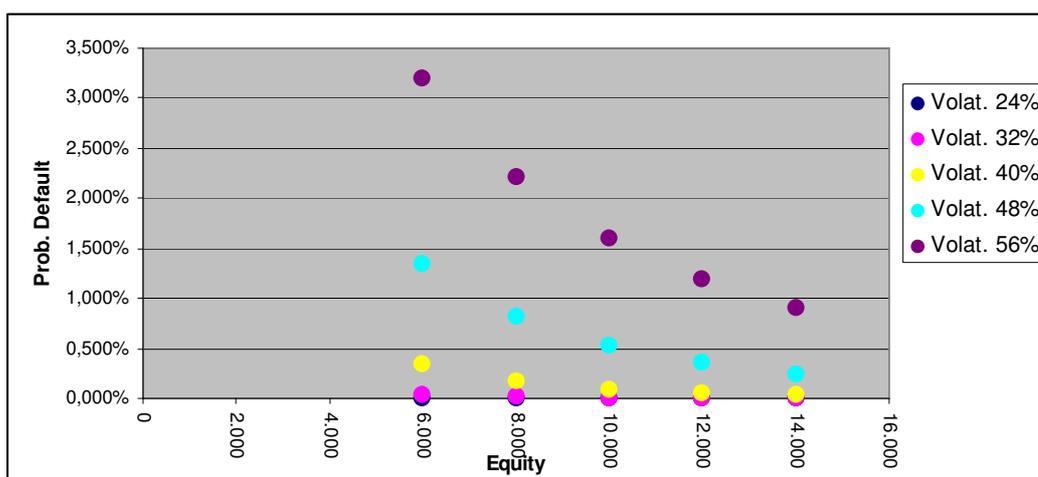
Variando Valor do *Equity* x volatilidade do *Equity* no modelo DLI.

Nesta etapa será analisado o efeito da volatilidade do *equity* com o próprio valor do *equity*. Os resultados são apresentados no quadro 6:

		Volatilidade				
		24%	32%	40%	48%	56%
Equity	6.000,00	0,000%	0,032%	0,345%	1,338%	3,197%
	8.000,00	0,000%	0,011%	0,171%	0,818%	2,215%
	10.000,00	0,000%	0,004%	0,091%	0,528%	1,600%
	12.000,00	0,000%	0,002%	0,050%	0,352%	1,186%
	14.000,00	0,000%	0,001%	0,029%	0,240%	0,895%

**Quadro 6** – Simulação: Matriz completa de probabilidades de *default's* com duas variáveis valor do *equity* e a volatilidade *equity*.

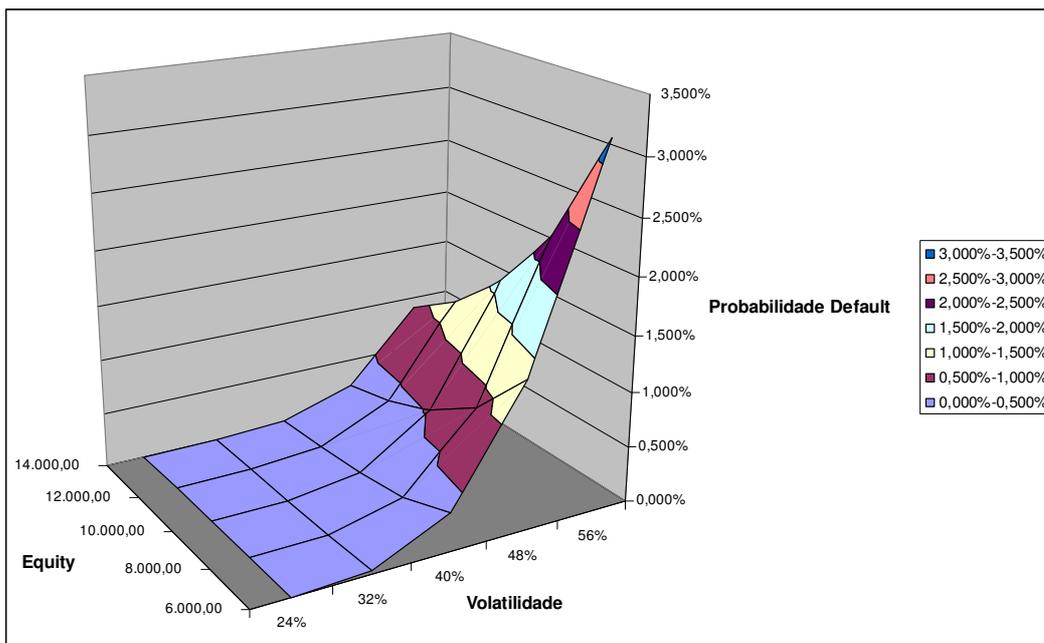
**Fonte:** Elaborado pelo autor.



**Figura 15** – Influência da variação do *equity* e sua volatilidade na Probabilidade de *Default*.

**Fonte:** Elaborado pelo autor.

Neste teste de sensibilidade, variando o *equity* e sua volatilidade, é observado que quanto maior o *equity* menor a probabilidade de *default*. Aliado a isso, a baixa volatilidade do *equity* também baixa o risco de crédito.



**Figura 16** - Visão 3-D da influência do *equity* e sua volatilidade na Probabilidade de *Default*.

**Fonte:** Elaborado pelo autor.

### **Simulação 6:**

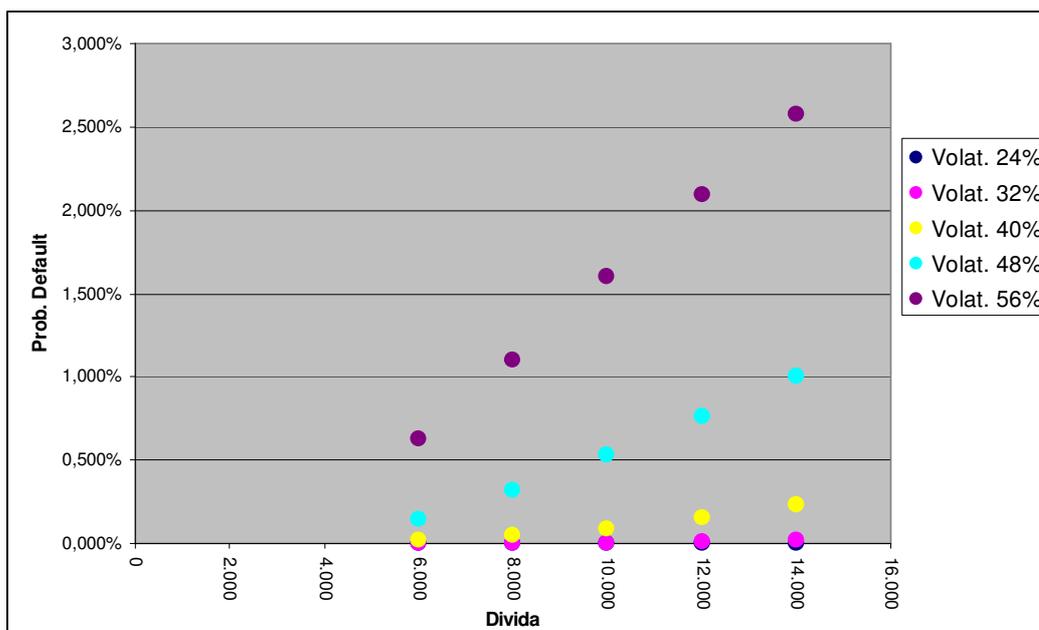
Variando Volatilidade do *Equity* x valor da Dívida no modelo DLI.

Nesta etapa a dívida e a volatilidade do *equity* serão variadas no modelo DLI. Os resultados das simulações são observáveis no quadro 7.

		Volatilidade				
		24%	32%	40%	48%	56%
Dívida	6.000,00	0,000%	0,000%	0,015%	0,148%	0,628%
	8.000,00	0,000%	0,001%	0,044%	0,319%	1,104%
	10.000,00	0,000%	0,004%	0,091%	0,528%	1,600%
	12.000,00	0,000%	0,009%	0,153%	0,758%	2,094%
	14.000,00	0,000%	0,017%	0,228%	1,002%	2,575%

**Quadro 7** – Simulação: Matriz completa de probabilidades de *default*'s com duas variáveis (dívida e volatilidade *equity*).

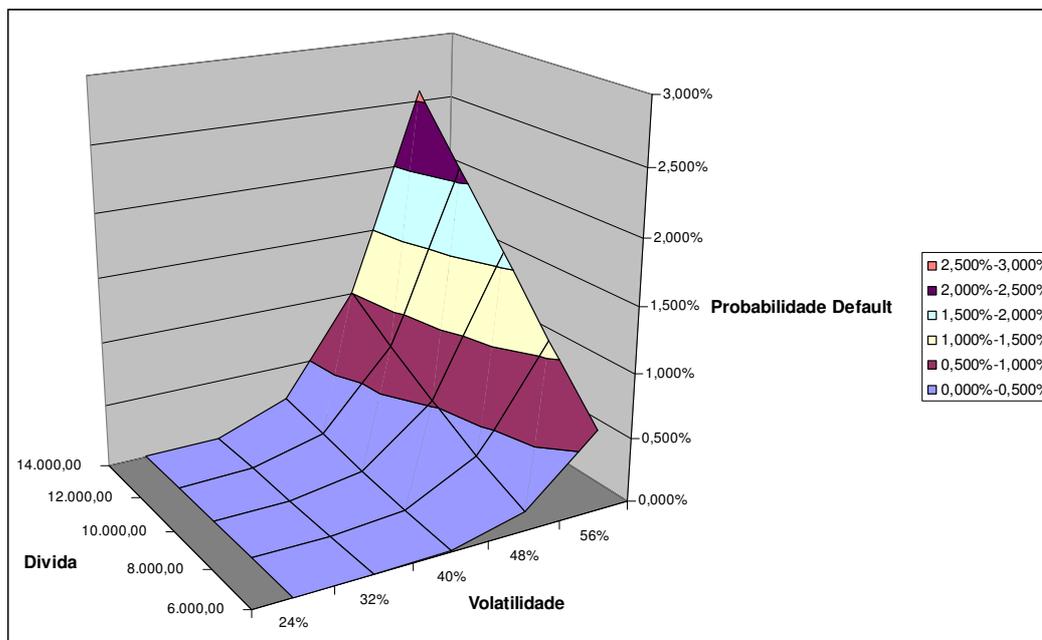
**Fonte:** Elaborado pelo autor.



**Figura 17** – Influência da variação da dívida e volatilidade do *equity* na Probabilidade de *Default*.

**Fonte:** Elaborado pelo autor.

Nas figuras 17 e 18 fica explícito que o aumento do montante da dívida em uma empresa aumenta a sua probabilidade de *default*. Conjuntamente, o aumento da volatilidade do *equity* aumenta ainda mais a probabilidade de *default* de uma empresa.



**Figura 18** - Visão 3-D da influência da dívida e volatilidade do *equity* na Probabilidade de *Default*.

**Fonte:** Elaborado pelo autor

Esta seção teve o objetivo de apresentar os principais *drivers* da modelagem e suas interações. Para passar uma visão intuitiva foram elaboradas as análises de sensibilidade para capturar os efeitos das variações dos principais *drivers* e seu impacto na probabilidade de *default* de uma empresa.

Alguns pontos-chave:

- I. Quanto maior o *equity* menor a Probabilidade de *Default*, e vice-versa.
- II. Quanto menor a dívida menor a Probabilidade de *Default*, e vice-versa.
- III. Quanto maior a volatilidade maior será a Probabilidade de *Default*, e vice-versa.
- IV. Quanto maior a taxa livre de risco maior a Probabilidade de *Default*, e vice-versa.

### 6.3. Casos Práticos

Na parte prática desta dissertação será analisada a probabilidade de *default* para algumas empresas que realmente entraram em *default* no Brasil. As empresas brasileiras avaliadas serão: a Mesbla S.A. e a empresa Lorenz S.A.

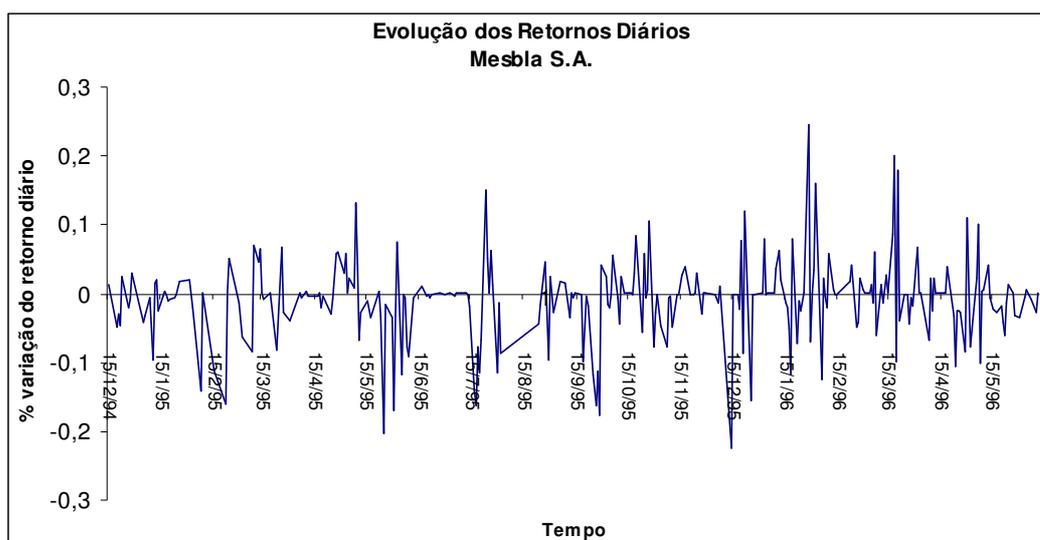
#### Mesbla S.A.

As ações da Mesbla pararam de ser negociadas em julho de 1996, portanto, para a simulação do risco de crédito esta será a data final da análise, enquanto o início será dezembro de 1994. Para as cotações serão utilizados os preços de fechamento diário da Mesbla PN em dólares. A taxa livre de risco utilizada foi a t-bill americano acrescida do prêmio de risco país (EMBI+ Brasil calculado pelo Banco JP Morgan), como melhor *proxy* da Rf. Abaixo a evolução dos preços da ação e sua volatilidade.



**Figura 19** – Evolução do preço em dólares da ação da Mesbla

Fonte: Economática.



**Figura 20** – Evolução dos retornos diários da Mesbla S.A.

**Fonte:** Economática.

Conforme visto no capítulo 3, a estrutura de capital da empresa, no modelo DLI, se divide em *equity* (ações) e dívida. Será utilizado como dívida, conforme recomendação KMV e VASSALOU e XING (2004), todo o passivo de curto prazo mais 50% do passivo de longo prazo. Serão consideradas não só as dívidas onerosas, mas também as dívidas não onerosas.

O quadro 8 mostra a evolução em U\$ (mil) da dívida da Mesbla S.A.:

U\$ (mil)			
Debt	Curto Prazo	Longo Prazo	Total Debt – KMV / DLI
31/12/1993	260.198,00	72.434,00	296.415,00
31/12/1994	425.934,00	86.145,00	469.006,50
31/12/1995	497.547,00	216.259,00	605.676,50
31/12/1996	929.400,00	160.112,00	1.009.456,00

**Quadro 8** – Evolução em U\$ da dívida da Mesbla S.A.

**Fonte:** Economática.

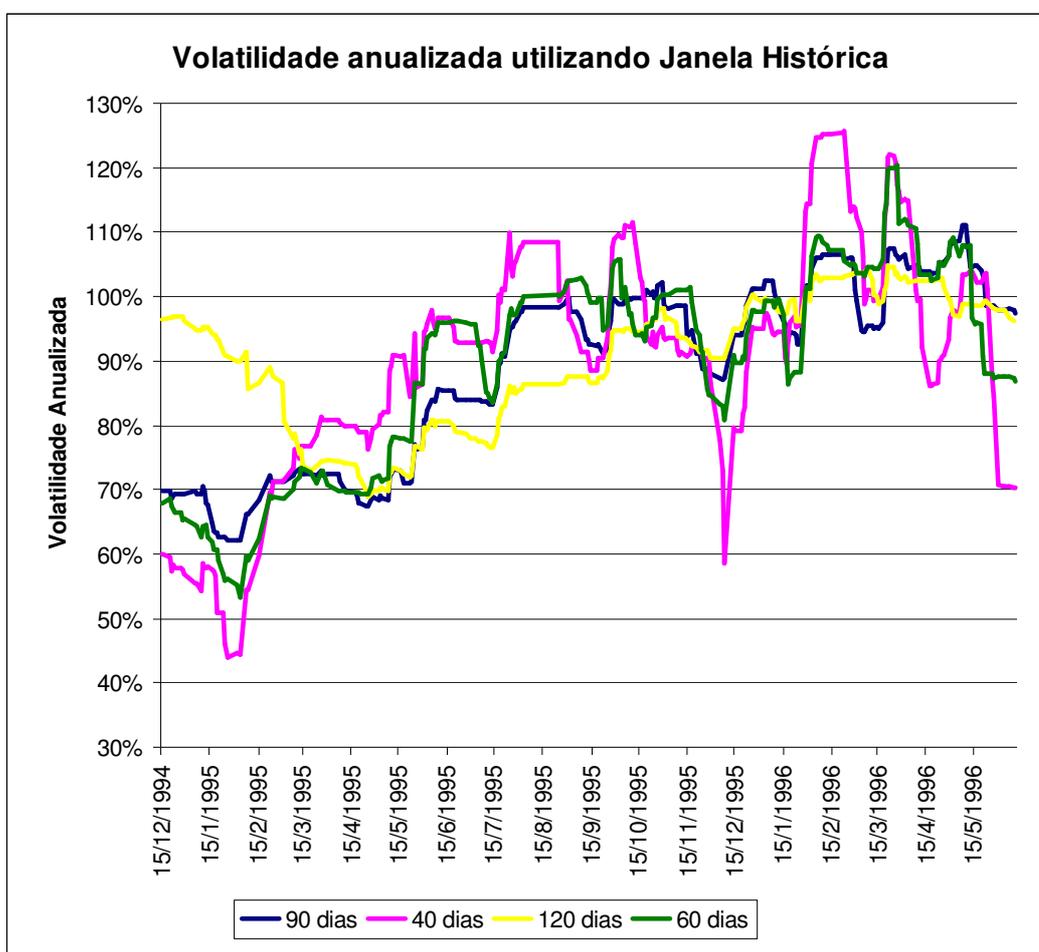
Como não havia demonstrações financeiras por trimestre foi utilizada uma relação linear simples para encontrar a evolução trimestral da dívida. A divisão por trimestre será o padrão utilizado nas simulações desta dissertação.

A estimação da volatilidade é um ponto de suma importância para o desenvolvimento interativo da modelagem DLI, e com essa idéia foi tomada prudência na escolha do modelo para previsão da volatilidade. Para isso será

adotada para a Mesbla a modelagem da volatilidade por GARCH, EWMA e Janela Histórica. Assim, será analisado o impacto de cada metodologia na quantificação do risco de *default*.

### Abordagem Janela Histórica<sup>19</sup>:

Primeiramente, será analisada a volatilidade histórica utilizando janelas de tempo. Este é o modelo mais simples e intuitivo: a volatilidade é definida como o desvio padrão amostral observado nos últimos  $k$  dias. Foram testados quatro valores para  $k$ , sendo eles 40, 60, 90 e 120 dias de pregão.



**Figura 21** – Volatilidade Anualizada utilizando Janela Histórica de 40, 60, 90 e 120 dias.

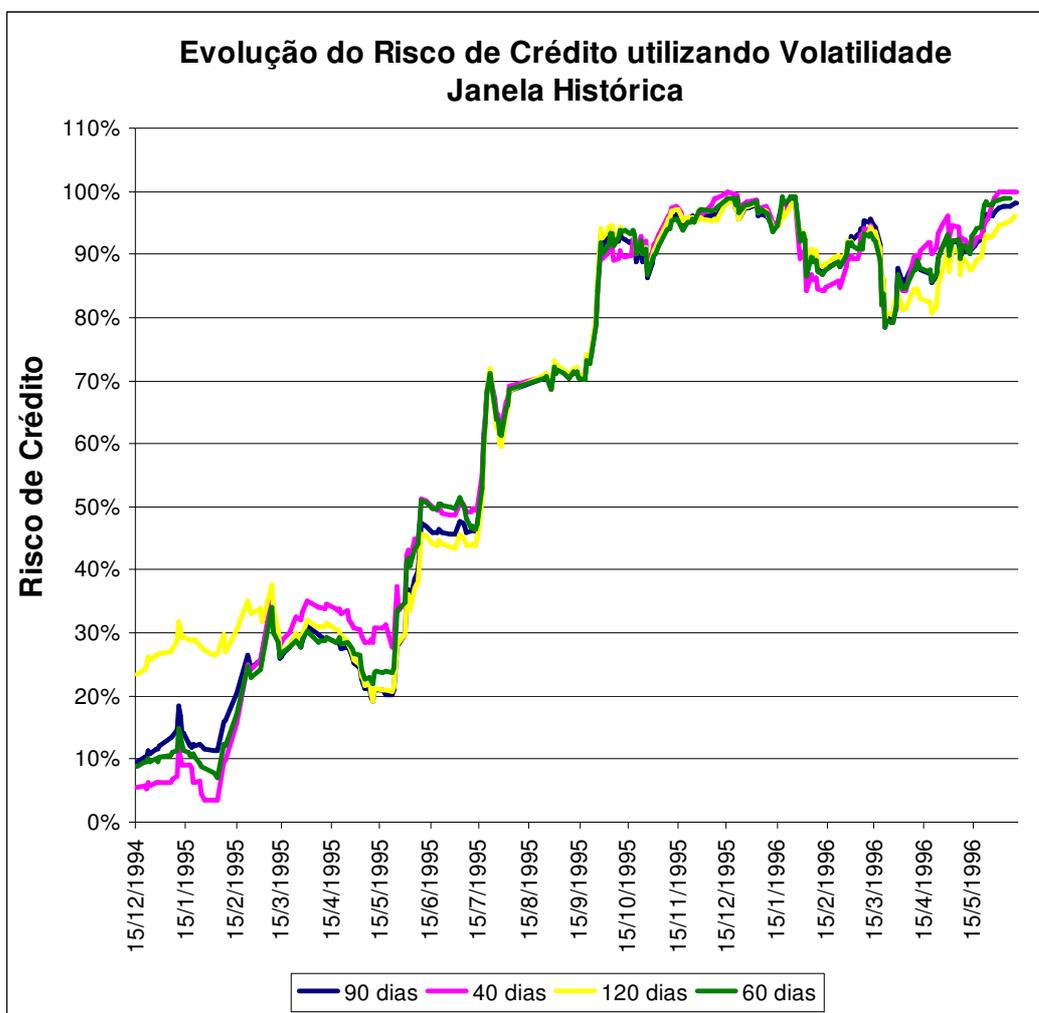
**Fonte:** Elaborado pelo autor.

<sup>19</sup> A base original dos dados está em dias, mas para a avaliação do risco de crédito, será utilizada a volatilidade anualizada, ou seja, volatilidade diária x raiz(252).

Pela figura 21, a volatilidade anualizada que utiliza uma série histórica de 40 dias (série ROSA) é relativamente nervosa, e conforme se aumenta a quantidade de dados na série, a volatilidade anualizada vai ficando mais comportada. Há de ser feita uma pequena ressalva para a série de 120 dias que por ter pego dados muito antigos, acabou distorcendo o início da série.

Com todas as variáveis à mão, serão colocadas agora no modelo DLI. É importante ressaltar que, a cada dia está se estimando a probabilidade de uma empresa entrar em *default* dado um conjunto de parâmetros, no período de 252 dias à frente.

Abaixo está o gráfico mostrando a evolução da probabilidade de *default*.



**Figura 22** – Evolução do Risco de Crédito utilizando volatilidade com Janela Histórica 40, 60, 90 e 120 dias.

**Fonte:** Elaborado pelo autor.

Pela figura 22, independente da série histórica da volatilidade, o risco de crédito calculado pelo método DLI possui uma tendência central.

A partir de janeiro de 1995, nota-se um aumento na probabilidade de *default* e em fevereiro de 1995 ultrapassa a barreira dos 20% de probabilidade de *default*. Após esse ponto, a probabilidade se mantém sempre superior a 20%.

Ao nível de comparação, a KMV classifica com D (*default*) uma firma com EDF<sup>20</sup> de 20% e AAA com EDF de 0,02%. Porém, apesar da probabilidade que é calculada não ser exatamente igual à calculada pela KMV, elas guardam relações fortes. Em primeiro lugar, a forma como foi estimado o valor dos ativos é exatamente igual à KMV e, em segundo, apesar de calculada a probabilidade teoricamente<sup>21</sup> e a KMV empiricamente, elas significam o mesmo, ou seja, a probabilidade de *default* de hoje é a mesma para daqui a um ano<sup>22</sup>.

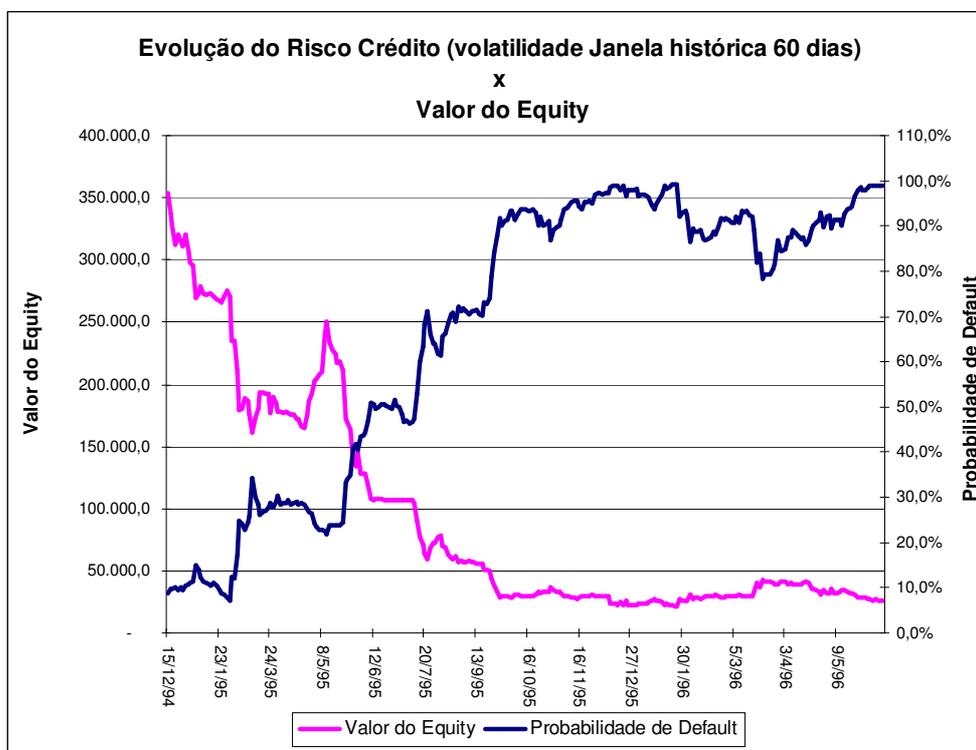
---

<sup>20</sup> *Expected Default Frequency* - É a probabilidade empírica, de hoje a daqui um ano, do que uma firma Americana vá a *default*. Ver KEALHOFER (2003)

<sup>21</sup> Para isso assumem-se algumas hipóteses que a KMV não faz. Por exemplo, assume-se que o *log* dos ativos é um movimento Browniano Geométrico. Apesar de ser uma hipótese forte, sem ela não se pode usar esse *approach* teórico.

<sup>22</sup> A KMV e DLI também dão liberdade para utilizar outros horizontes de tempo, mas como foi visto no capítulo 3, o prazo de 1 (ano) é largamente utilizado.

A figura 23 compara a evolução do valor do *equity* contra o risco de crédito utilizando volatilidade com janela histórica de 60 dias.



**Figura 23** – Evolução do risco de crédito utilizando volatilidade com Janela Histórica 60, contra o valor de mercado do *equity*.

**Fonte:** Elaborado pelo autor.

### Abordagem GARCH (*Generalized Autoregressive Heteroskedastic*):

Com o intuito de aperfeiçoar o cálculo do risco de crédito utilizando o DLI, será abordada a volatilidade utilizando a metodologia GARCH.

Este modelo, desenvolvido por Bollerslev 1986, é amplamente utilizado em Finanças, especialmente na modelagem de séries de retornos. Os retornos são da forma  $X_t = V_t U$ , onde  $U_t$  tem distribuição independente normal padronizada e o desvio padrão condicional é função determinística dos retornos passados o qual é dado pela equação 4.1:

$$\hat{\sigma}_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i x_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \hat{\sigma}_{t-j}^2 \quad \text{com } \omega > 0; \alpha_i, \beta_j \geq 0; \alpha + \beta < 1 \quad (4.1)$$

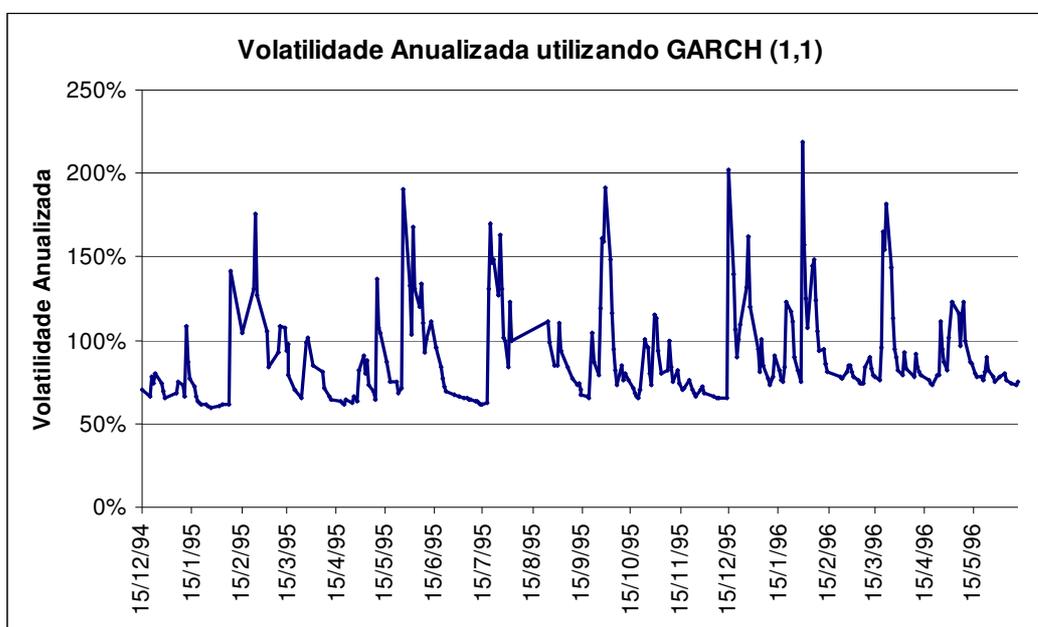
$x_{t-i}$  - retorno do dia  $t-i$

$\hat{\sigma}_{t-j}$  - volatilidade estimada para o dia  $t-j$

$\alpha_i$ ,  $\beta_j$ ,  $\omega$  – parâmetros fixos recalculados com entrada de dados novos

Utiliza-se para modelar a volatilidade o modelo GARCH (1,1), conforme DUARTE e MENDES (1998) indicam como melhor modelo para estimação de volatilidade no mercado brasileiro.

O processo para encontrar a volatilidade anualizada pelo método GARCH utilizou uma abordagem interativa, ou seja, a cada dia um novo dado entrava e novos parâmetros  $\omega$ ,  $\alpha$  e  $\beta$  eram encontrados. Os resultados podem ser visualizados pela figura 24:

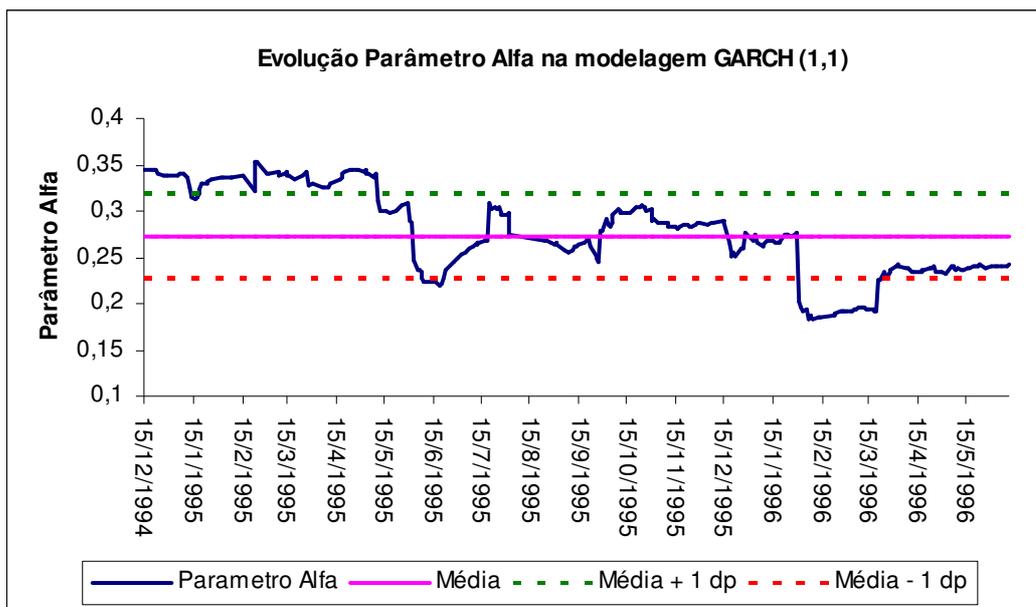


**Figura 24** – Evolução da volatilidade anualizada utilizando GARCH (1,1).

**Fonte:** Elaborado pelo autor.

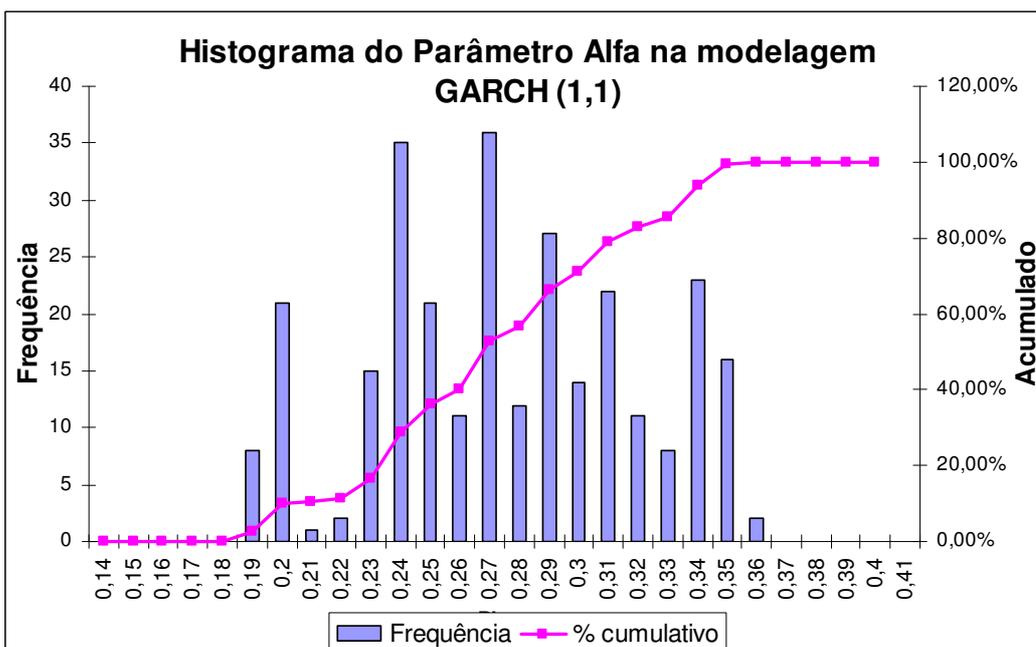
Quando é realizado esse processo interativo torna-se mais real a simulação, já que se utilizam dados que algum analista à época teria em mão para calcular a probabilidade de *default* da empresa dia-a-dia.

Antes de prosseguir na análise da probabilidade de *default* da Mesbla S.A., serão abordadas, com mais detalhes, a evolução e a distribuição dos parâmetros  $\omega$ ,  $\alpha$  e  $\beta$  da modelagem GARCH (1,1).



**Figura 25** – Evolução do Parâmetro Alfa na modelagem GARCH (1,1).

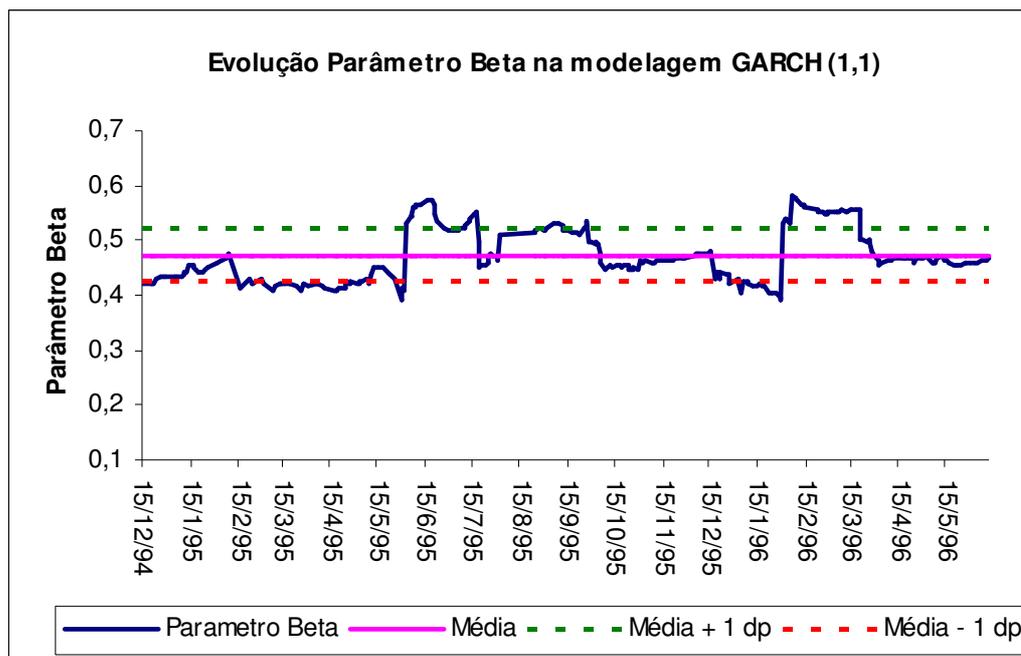
Fonte: Elaborado pelo autor.



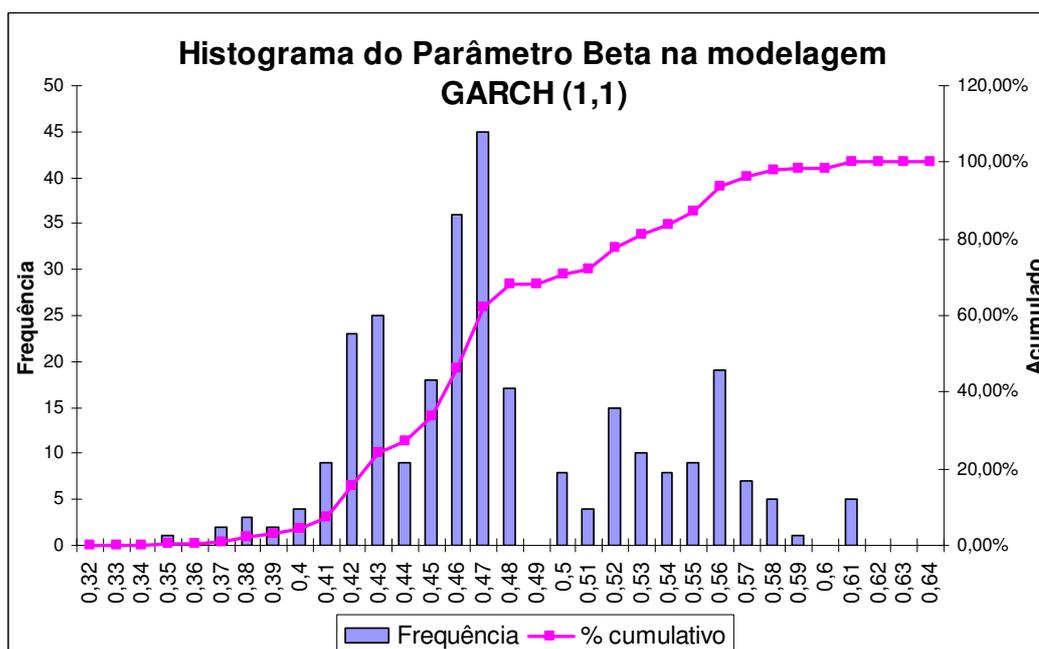
**Figura 26** – Histograma do Parâmetro Alfa na modelagem GARCH (1,1).

Fonte: Elaborado pelo autor.

Na figura 26, identifica-se a distribuição regular do parâmetro Alfa, enquanto na figura 29 identifica-se uma tendência na evolução do parâmetro Alfa ao longo do tempo.

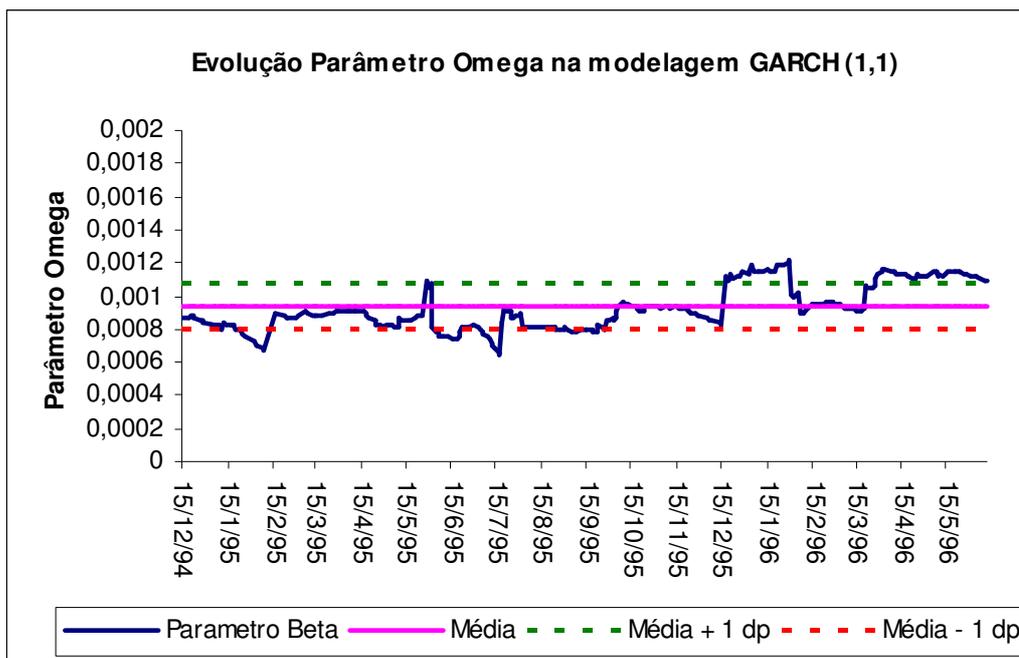


**Figura 27** – Evolução do Parâmetro Beta na modelagem GARCH (1,1).  
**Fonte:** Elaborado pelo autor.



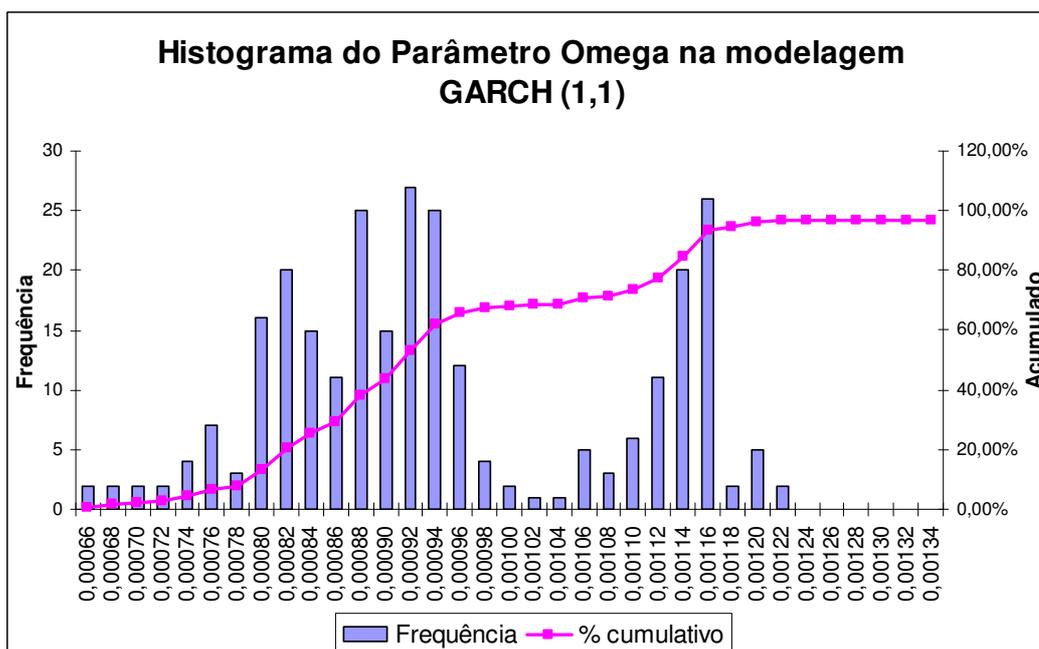
**Figura 28** – Histograma do Parâmetro Beta na modelagem GARCH (1,1).  
**Fonte:** Elaborado pelo autor.

Na figura 27, identifica-se a distribuição irregular do parâmetro Beta, enquanto na figura 28 identifica-se uma tendência na evolução do parâmetro Beta ao longo do tempo.



**Figura 29** – Evolução do Parâmetro Omega na modelagem GARCH (1,1).

Fonte: Elaborado pelo autor.

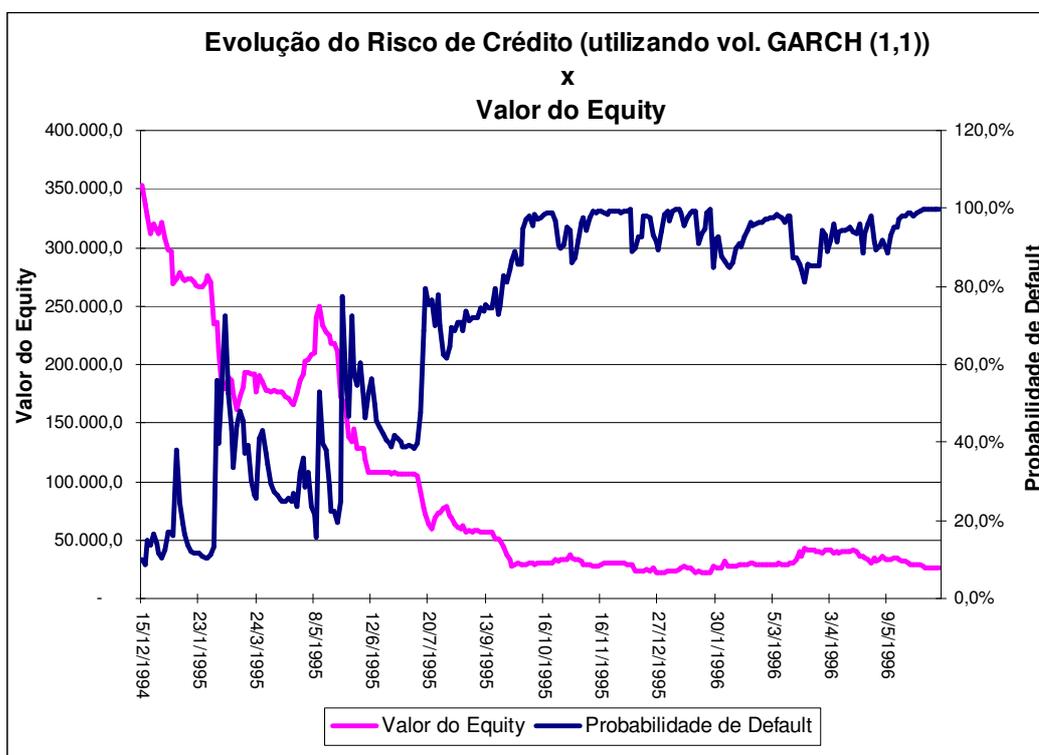


**Figura 30** – Histograma do Parâmetro Omega na modelagem GARCH (1,1).

Fonte: Elaborado pelo autor.

Na figura 30, não há um padrão na distribuição dos valores calculados do parâmetro Omega. Enquanto isso, na figura 29, identifica-se uma tendência comportada na evolução do parâmetro Omega ao longo do tempo, principalmente devido ao fato de que grande parte dos resultados fica dentro do *range* de 1 DP.

Abaixo, eis o gráfico do risco de crédito utilizando a volatilidade anualizada com abordagem GARCH (1,1):



**Figura 31** – Risco de crédito utilizando volatilidade anualizada por GARCH (1,1) contra o valor de mercado do *equity*.

**Fonte:** Elaborado pelo autor.

Os resultados encontrados são extremamente voláteis, como visto na figura 31, e não demonstram resultados comportados, como os encontrados utilizando volatilidade com janela histórica.

Isso se deve à característica da modelagem GARCH que dá pesos geometricamente decrescentes às observações passadas, ou seja, movimentos bruscos recentes são incorporados rapidamente à volatilidade. Ao contrário, da modelagem da janela de tempo que dá pesos iguais às observações passadas, os quais movimentos bruscos recentes do mercado não possuem tanta relevância na volatilidade calculada.

### Abordagem EWMA:

Uma outra abordagem para a modelagem da volatilidade é utilizar o amortecimento exponencial do retorno quadrado. O método computa o desvio padrão amostral dando mais peso às observações mais recentes, conforme a modelagem GARCH, mas possui uma formulação mais simples:

$$\hat{\sigma}_t^2 = (1 - \theta)x_{t-1}^2 + \theta \hat{\sigma}_{t-1}^2 \quad (4.2)$$

$\hat{\sigma}_t$  - volatilidade estimada para o dia  $t$

$x_{t-1}$  - retorno do dia  $t-1$

$\theta$  - parâmetro,  $0 < \theta < 1$

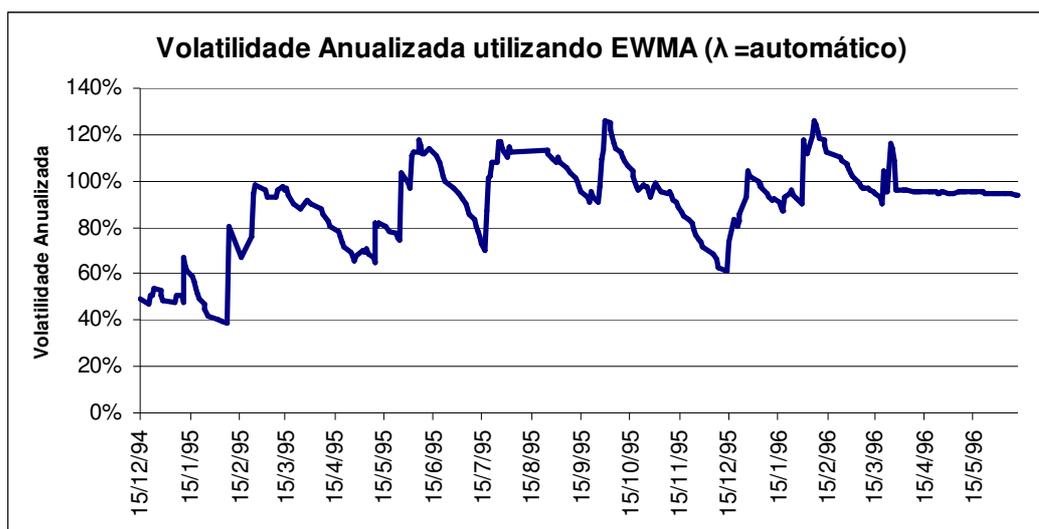
Através de substituições sucessivas das previsões passadas de volatilidade, chega-se a:

$$\hat{\sigma}_t^2 = (1 - \theta)(x_{t-1}^2 + \theta x_{t-2}^2 + \theta^2 x_{t-3}^2 + \dots) \quad (4.3)$$

Percebe-se que a volatilidade ao quadrado é a média ponderada dos retornos ao quadrado passados, que os pesos decrescem numa progressão geométrica e também que a soma dos pesos tende para a unidade.

O parâmetro  $\theta$  é recursivo, ou seja, a previsão baseia-se na previsão anterior e na inovação mais recente. A cada passo na série o parâmetro  $\theta$  é escolhido de maneira a minimizar a soma dos quadrados das diferenças entre o quadrado do retorno e o quadrado da volatilidade prevista para o período.

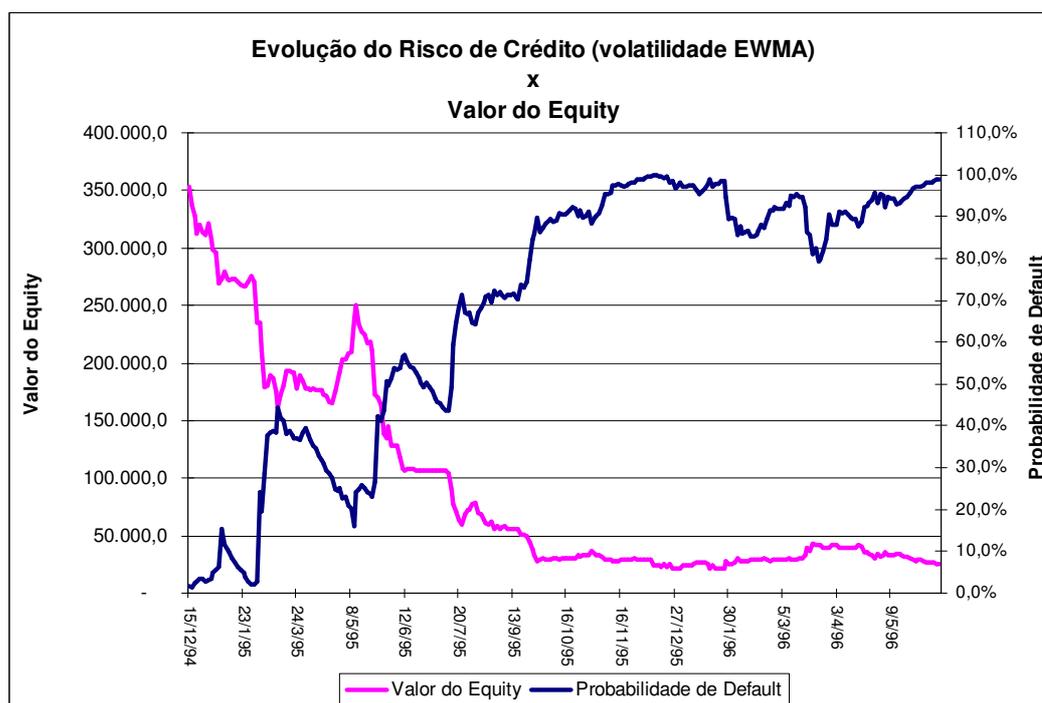
A volatilidade anualizada utilizando EWMA com parâmetros recalculados a cada instante ficou com a seguinte configuração disposta na figura 32:



**Figura 32** – Evolução da volatilidade anualizada utilizando EWMA com parâmetros calculados automaticamente.

**Fonte:** Elaborado pelo autor.

Em seguida, na figura 33, o risco de crédito da Mesbla S/A utilizando volatilidade EWMA:



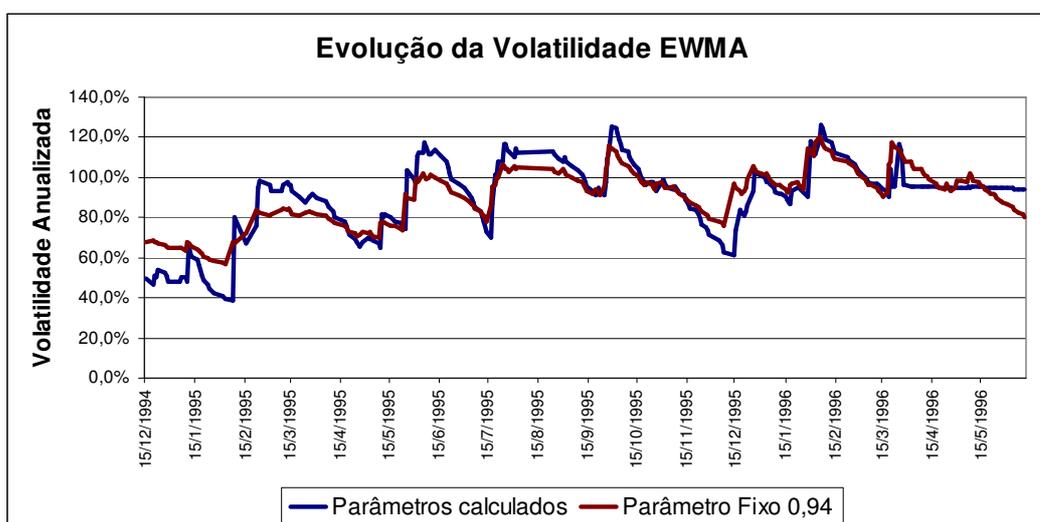
**Figura 33** – Evolução do Risco de crédito utilizando volatilidade anualizada por EWMA contra o valor de mercado do *equity*.

**Fonte:** Elaborado pelo autor.

A seguir será analisada a evolução do risco de crédito da Mesbla S/A com o parâmetro  $\theta$  fixo em 0,94. O RiskMetrics<sup>23</sup> utiliza a modelagem EWMA para fazer previsão da volatilidade, e fixa o parâmetro  $\theta$  para 0,94.

A importância de se fazer essa comparação, entre o parâmetro automático e o parâmetro fixo, está no fato de que o mercado financeiro utiliza em larga escala esse parâmetro de 0,94. Contudo, o uso deste parâmetro fixo necessita de cautela no Brasil, pois ele foi encontrado para o mercado norte-americano, onde a volatilidade das ações é muito menor do que no Brasil.

Todavia, foi encontrada a volatilidade utilizando EWMA com parâmetro fixo de 0,94 e compara-se à volatilidade EWMA com parâmetros automáticos, conforme figura 34.



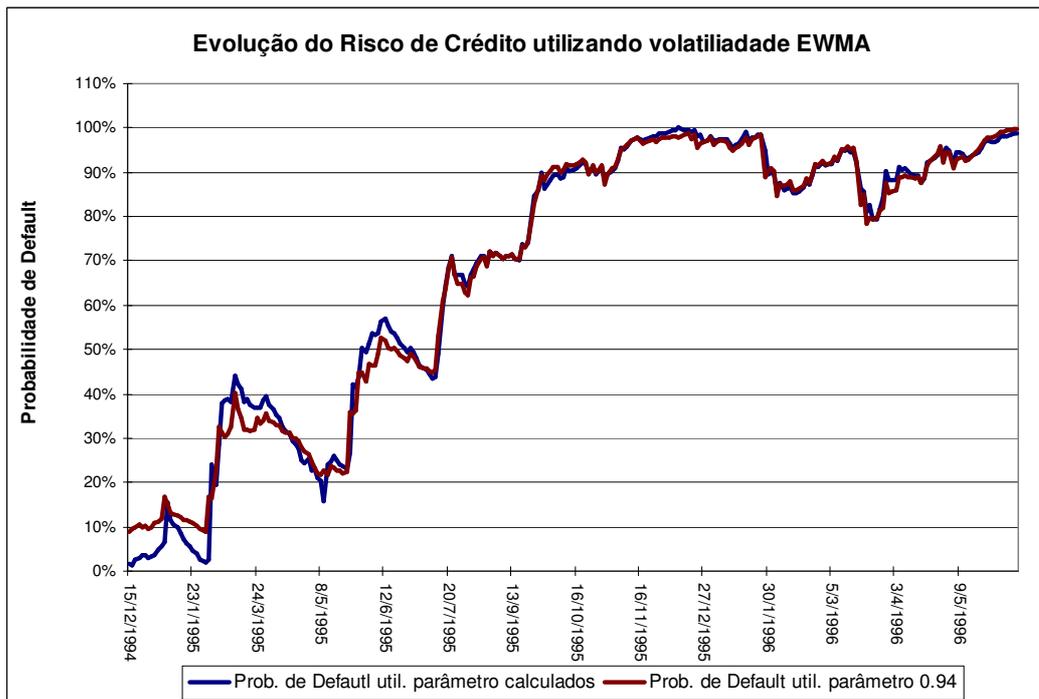
**Figura 34** – Evolução da volatilidade anualizada utilizando EWMA com parâmetros calculados automaticamente contra EWMA com parâmetro fixo 0,94.

**Fonte:** Elaborado pelo autor.

Pela figura 34, não há grandes diferenças entre a modelagem EWMA que utilizou parâmetro fixo e a que utilizou parâmetros calculados.

Na figura 35, foi calculado o risco de crédito da Mesbla S/A utilizando-se volatilidade EWMA com parâmetro calculado (otimizado) e parâmetro fixo 0,94:

<sup>23</sup> Para mais detalhes sobre a metodologia, veja o *RiskMetrics Technical Document* do J.P. Morgan (1996)



**Figura 35** – Evolução do Risco de crédito utilizando volatilidade anualizada por EWMA com parâmetro automático contra Risco de crédito utilizando volatilidade anualizada EWMA com parâmetro fixo de 0,94.

**Fonte:** Elaborado pelo autor.

### Lorenz:

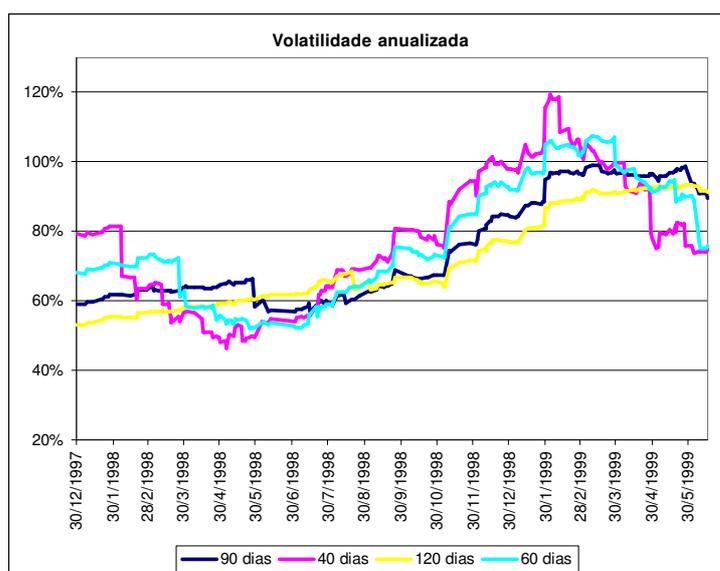
A empresa Lorenz S.A. entrou em processo de falência no dia 26/07/2000. Mas bem antes desta data já se visualizavam alterações no seu padrão histórico de risco de crédito.

Um ano e meio antes de sua falência, a empresa emitiu uma debênture com vencimento em 2004, e se fosse utilizada a modelagem DLI para quantificar o risco de crédito, o mercado não compraria essa operação. Portanto, essa modelagem seria uma ferramenta muito interessante para quantificação e tomada de decisão.

A mesma metodologia utilizada na Mesbla S.A. para encontrar a evolução da probabilidade de *default* será seguida para empresa Lorenz. Para o cálculo da volatilidade será utilizada a abordagem com janela histórica, GARCH (1,1) e EWMA.

### Abordagem Janela Histórica:

Conforme já visto no exemplo da Mesbla, este é o modelo mais simples e intuitivo: a volatilidade é definida como o desvio padrão amostral observado nos últimos  $k$  dias. Foram testados quatro valores para  $k$ , sendo eles 40, 60, 90 e 120 dias de pregão.

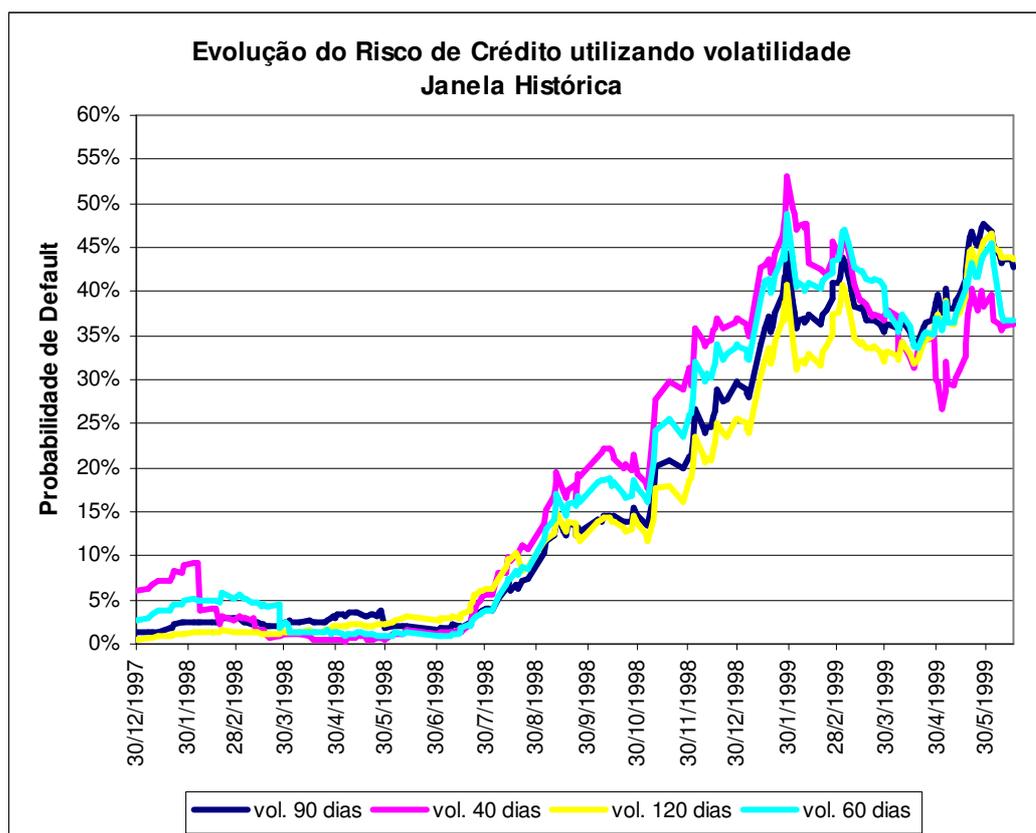


**Figura 36** – Volatilidade Anualizada utilizando Janela Histórica para 40, 60, 90 e 120 dias.

**Fonte:** Elaborado pelo autor.

Igual ao caso da Mesbla, há oscilações altas para janelas com menor prazo do que janelas de maior prazo.

Com todas as variáveis à mão, serão agora colocadas no modelo DLI. Lembra-se que a cada dia está se estimando a probabilidade de uma empresa entrar em *default* dado um conjunto de parâmetros, no período de 252 dias à frente.

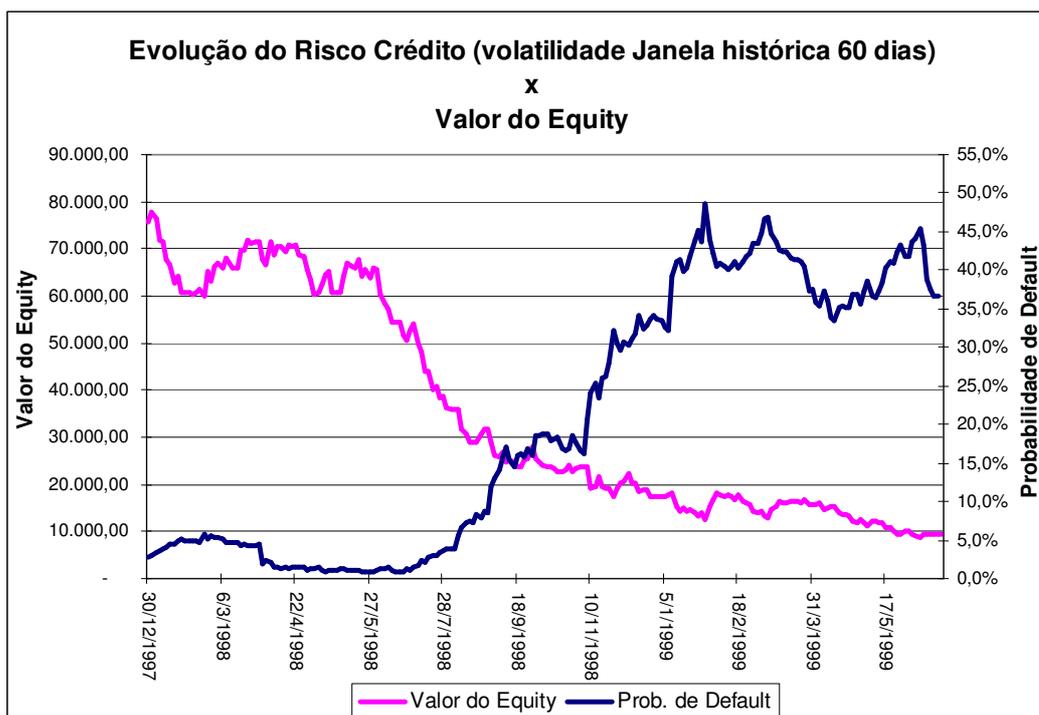


**Figura 37** – Evolução do Risco de crédito utilizando volatilidade com Janela Histórica 40, 60, 90 e 120 dias.

**Fonte:** Elaborado pelo autor.

Pela figura 37, a partir de agosto de 1998 o risco de crédito da Lorenz S.A. ultrapassou a barreira do 5,0% e foi constantemente subindo até estabilizar na faixa de 35-40%.

A figura 38, a seguir, compara o risco de crédito utilizando uma volatilidade com janela histórica de 90 dias, contra o valor de mercado da empresa.



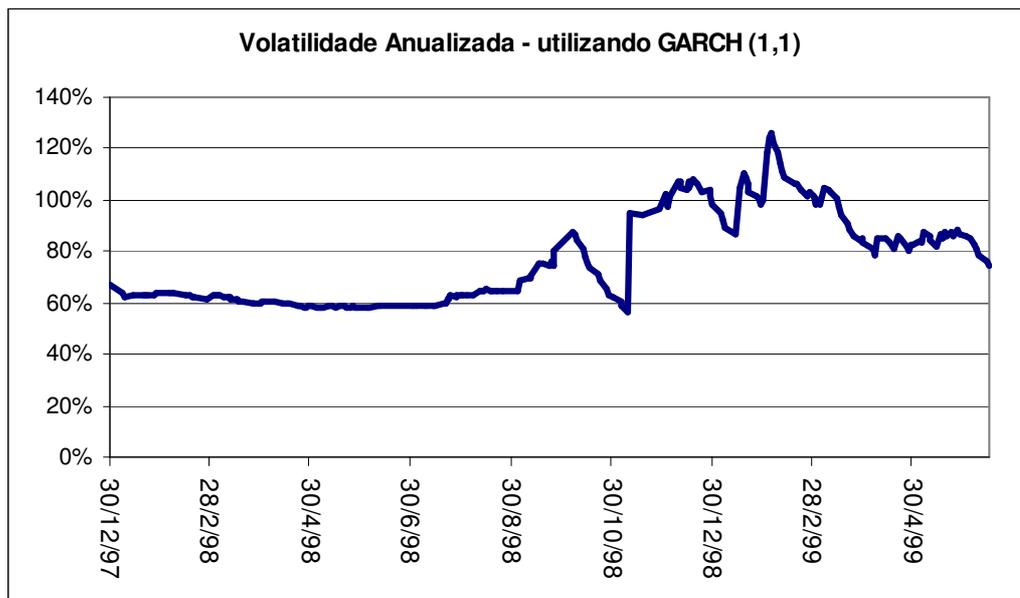
**Figura 38** – Evolução do risco de crédito utilizando volatilidade com Janela Histórica 90, contra o valor de mercado do *equity*.

**Fonte:** Elaborado pelo autor.

#### **Abordagem GARCH (*Generalized Autoregressive Heteroskedastic*):**

Buscando mais agilidade no alerta de um default, será abordado o risco de crédito utilizando uma volatilidade GARCH (1,1). Serão seguidos os mesmos passos do exemplo anterior para encontrar a evolução da volatilidade GARCH (1,1) da série de retornos da ação da Lorenz. Pode-se visualizar a evolução da volatilidade anualizada pela figura 39.

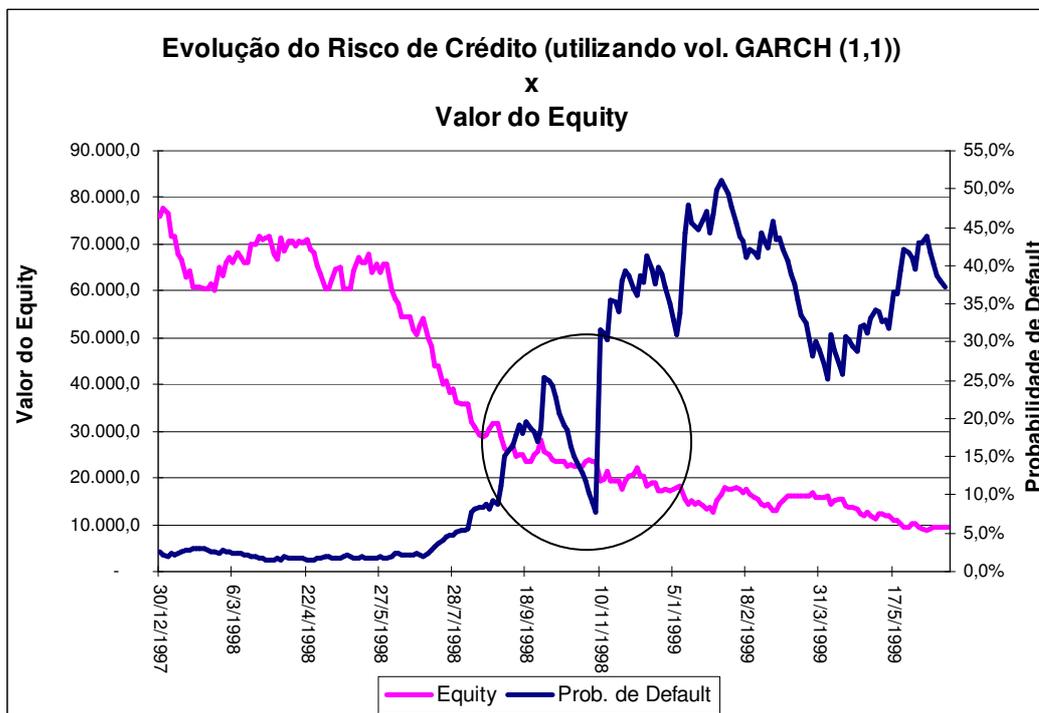
A metodologia do cálculo foi a mesma utilizada na simulação da Mesbla S.A. Os resultados obtidos utilizando a volatilidade GARCH tiveram as mesmas características do exemplo da Mesbla S.A., ou seja, com variações bruscas de curto prazo são incorporadas na volatilidade GARCH, e isso provoca distorções como visto na figura 40.



**Figura 39** – Evolução da volatilidade anualizada utilizando GARCH (1,1).

**Fonte:** Elaborado pelo autor.

Na figura 40, a evolução do risco de crédito utilizando a modelagem DLI com volatilidade GARCH (1,1):



**Figura 40** – Risco de crédito utilizando volatilidade anualizada por GARCH (1,1)

contra o valor de mercado do *equity*.

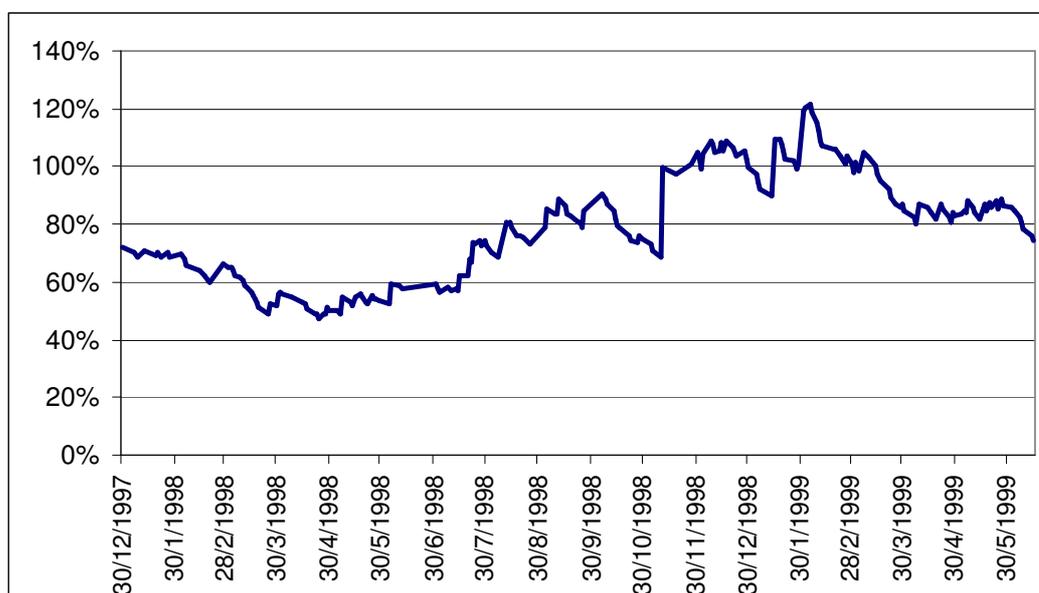
**Fonte:** Elaborado pelo autor.

Observa-se que essa modelagem captura melhor os movimentos de mercado de curto prazo, quando se compara com risco de crédito usando janela histórica. Essa sensibilidade provoca resultados interessantes, pois da mesma forma que há velocidade na quantificação do risco de crédito, existem resultados com alta frequência, como destaca o círculo na figura 40. Esses resultados são perigosos, pois o analista pode ser induzido a acreditar na recuperação da empresa, mas isso não é a real configuração dela.

### Abordagem EWMA:

Essa abordagem de volatilidade busca capturar as informações recentes e amenizar as oscilações encontradas na modelagem GARCH (1,1).

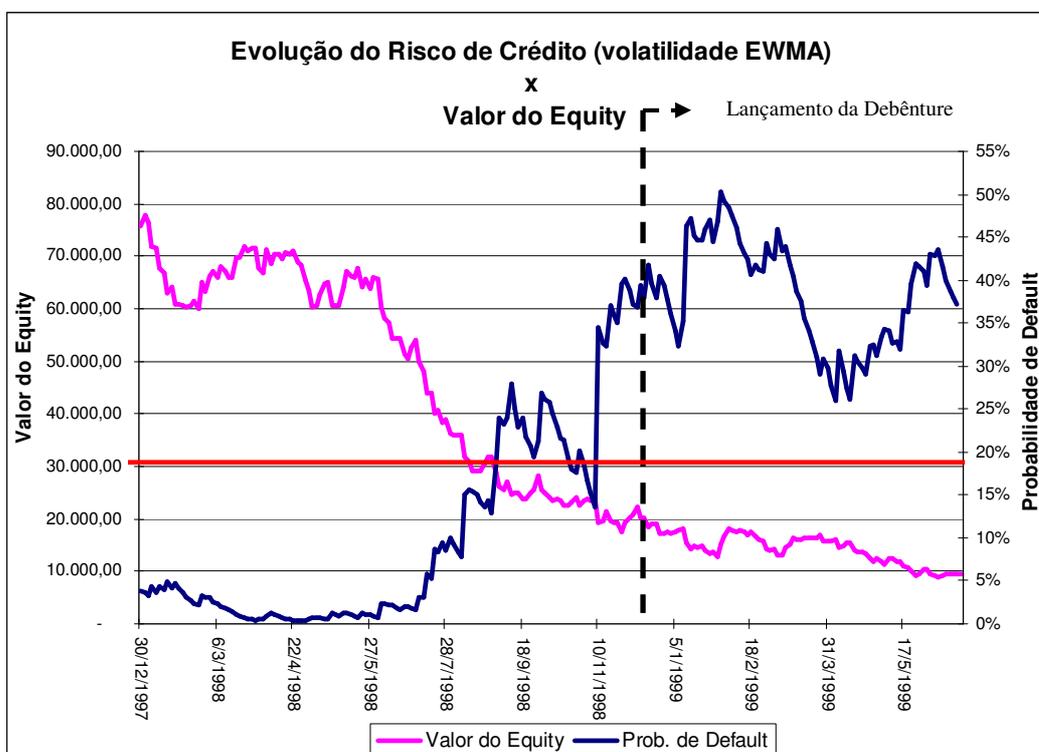
A figura 41 mostra a evolução da volatilidade anualizada utilizando a abordagem EWMA. Ela possui características parecidas com a modelagem GARCH, mas quando analisada com mais detalhes, as oscilações são mais brandas quando comparadas às modelagens.



**Figura 41** – Evolução da volatilidade anualizada utilizando EWMA com parâmetros calculados automaticamente.

**Fonte:** Elaborado pelo autor.

Na figura 42, observa-se a evolução da Probabilidade de Default utilizando EWMA:



**Figura 42** – Evolução do Risco de crédito utilizando volatilidade anualizada por EWMA contra o valor de mercado do *equity*.

**Fonte:** Elaborado pelo autor.

A evolução do risco de crédito utilizando uma volatilidade EWMA possui não só a característica de ser sensível em capturar os movimentos recentes do *equity*, mas também o risco de crédito possui uma volatilidade mais comportada do que a encontrada quando utilizado o modelo de volatilidade GARCH.

No final de 1998, a empresa Lorenz lança no mercado debêntures conversíveis em ações no valor total de R\$ 16.041.000,00. Analisando a figura 42, o risco de *default* da empresa já era alto (mais ou menos trinta 30%) e se fosse utilizado o modelo DLI com volatilidade EWMA, como ferramenta de decisão ou auxiliar, evitaria perdas caso um investidor estivesse interessado na operação.

## 7 Conclusões

Nesta dissertação foi abordado um modelo de equilíbrio para estimar a probabilidade que uma empresa com ações negociadas em bolsa de valores não honre seus compromissos e entre em *default*. O mais interessante deste modelo de equilíbrio, ao contrário dos modelos baseados em dados contábeis, está no fato de toda informação necessária estar implícita nos preços de mercado das ações.

Os métodos baseados em dados contábeis não levam em conta as informações existentes no mercado e muitas vezes o tempo de reação é demorado. Além disso, podem ser subjetivos e incompletos, uma vez que os dados utilizados não estão disponíveis todos os dias.

Em nível teórico e aplicado, o mercado financeiro avança para buscar formas mais eficientes de quantificar seu risco, principalmente hoje em dia, o risco de crédito. É claro que, atualmente, os sistemas de classificação tradicionais, como da *Moody's* e *Standard & Poors* necessitam de uma remodelagem, e neste vácuo a empresa KMV Corporation desenvolveu um sistema contínuo de avaliação do risco.

O objetivo desta dissertação era ajustar a modelagem teórica DLI ao mercado e á realidade brasileira, sendo alcançados os resultados esperados para os nossos dois exemplos práticos. A proposta do uso desta modelagem para o mercado nacional é viável e apresenta resultados interessantes, assim como os encontrados em estudos internacionais.

Entretanto, há muito a ser aprimorado no modelo teórico desta dissertação, a fim de que seja usado eficientemente no mercado brasileiro. Por outro lado, identificou-se que os dados passados corroboram o modelo teórico; logo, esse parece adequado ao mercado brasileiro, porém é ainda necessário que se façam mais testes com outras empresas e explorar diferentes setores da economia.

Dentre os diversos pontos a serem abordados em futuros estudos sobre o tema, destacam-se, por exemplo, qual exatamente deve ser o valor ideal da dívida no vencimento, qual deve ser o prazo de vencimento ótimo a ser colocado no

modelo, desenvolver para o mercado brasileiro uma modelagem utilizando opções de barreira (*path-dependent*).

Uma abordagem muito interessante seria comparar estimativas do modelo apresentado com a de modelos tradicionais de risco de crédito.

A modelagem utilizada nesta dissertação está baseada nos ativos seguindo o processo estocástico MGB (Movimento Geométrico Browniano), e seus principais parâmetros são extraídos do mercado de capitais. Contudo, muitas vezes o MGB não é satisfatório para modelar um determinado ativo, e ainda seus parâmetros podem ser instáveis e com viés quando extraídos do mercado de capitais. Para tanto, segue a sugestão para futuros estudos que incorporem processos estocásticos diferentes do MGB, como, por exemplo, o Movimento de Reversão à Média, cujos parâmetros são normalmente extraídos do mercado de commodities, que são mais estáveis. No entanto, essa avaliação vale para empresas os quais seus ativos são diretamente influenciados por estas commodities específicas, ou seja, não vale para todas as empresas o uso do MRM.

Risco de crédito é uma área em que ainda há muito para se pesquisar, tanto em nível teórico quanto aplicado.

## 8 Referências Bibliográficas

- [1] ASSEF NETO, A.; SILVA, C.A.T.; **Administração do Capital de Giro**. Editora Atlas S.A., São Paulo, 2<sup>a</sup> edição, 1997.
- [2] BANDYOPADHYAY, A.; **Mapping Corporate Drift Towards Default, Part I: a market-based approach**. The Journal of Risk Finance, v. 8, 2007, p. 35-45.
- [3] BANDYOPADHYAY, A.; **Mapping Corporate Drift Towards Default, Part II: a hybrid credit-scoring model**. The Journal of Risk Finance, v. 8, 2007, p. 46-55.
- [4] BHARATH, S.; SHUMWAY, T.; **Forecasting Default with the KMV-Merton Model**. Department of Finance, University of Michigan Business School.
- [5] BLACK, F; SCHOLES, M. **The Pricing of Options and Corporate Liabilities**. Journal of Political Economy, v. 81, 1973, p. 637-659.
- [6] BREALEY, R.; MYERS, S.; **Principles of Corporate Finance**. McGraw-Hill Companies, Inc. New York, 1996.
- [7] BROCKMAN, P.; TURTLE, H.J.; **A Barrier Option framework for Corporate Security Valuation**; Journal of Financial Economics, v. 67, 2003, p. 511-529.
- [8] CAOUILLE, J.B.; ALTMAN, E.; NARAYANAN, P.; **Gestão do Risco de Crédito: o próximo grande desafio financeiro**. Qualitymark, Rio de Janeiro, 1999.
- [9] CHAIA, A.J. **Modelos de Gestão do Risco de Crédito e sua Aplicabilidade ao Mercado Brasileiro**. Dissertação de Mestrado. Departamento de Administração da Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade, USP, 2003.
- [10] CHAN-LAU, J.A.; JOBERT, A.; KONG, J.; **An Option-Based Approach to Bank Vulnerabilities in Emerging Markets**. IMF Working Paper N° 04/33, Fevereiro 2004. .

- [11] COSTA, C.L.; **Opções: operando a volatilidade**. Bolsa de Mercadorias & Futuros, São Paulo, 1998.
- [12] COX, J.C.; ROSS, S.A.; RUBINSTEIN, M.; **Option Pricing: A Simplified Approach**. Journal of Financial Economics, v. 7, 1979 p.229-263.
- [13] CROSBIE, P.; BOHN, J.; **Modeling Default Risk**. Moody's KMV Company , Dezembro 18, 2003.
- [14] CROUHY, M.; GALAI, D.; MARK, R.; **A Comparative Analysis of Current Credit Risk Models** Journal of Banking & Finance, v. 24, 2000, p. 59-117.
- [15] DAMODARAN, A.; **Investment Valuation: Tools and Techniques for Determining the Value of Any Asset**. John Wiley & Sons, Inc., New York, 2<sup>o</sup> edição, 2002.
- [16] DAVYDENKO, S. A.; **When do Firms Default? A Study of the Default Boundry**. London Business School, Fevereiro 1, 2005.
- [17] DIXIT, A. K.; PINDYCK, R.S.; **Investment Under Uncertainty**. Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1994.
- [18] DUFFIE, D.; SINGLETON, K.; **Modeling Term Structures of Defaultable Bonds**; Review of Finance Studies, v.12, 1999, p. 687-720.
- [19] DWYER, D.W.; **The Distribution of Defaults and Bayesian Model Validation**; Moody's KMV Company , Novembro 6, 2006.
- [20] DWYER, D.W.; **The Distribution of Defaults and Bayesian Model Validation**; Moody's KMV Company , Novembro 6, 2006.
- [21] DWYER, D.W.; KOCAGIL, A.E.; STEIN, R.M.; **Moody's KMV RiskCalc v3.1 Model – Next Generation Technology for Predicting Private Firm Credit Risk**; Moody's KMV Company , Abril 5, 2004.
- [22] FAMA, E.; **Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Emperical Work**; Journal of Finance, v. 25, 1970, p. 383-417.
- [23] GALLATI, R. R.; **Risk Management and Capital Adequacy**. McGraw-Hill Companies, Inc. New York, 2003.
- [24] GHAGHORI, P.; CHAN, H.; FAFF, R.; **Investigating the Performance of Alternative Default-Risk Models: Option-Based Versus Accounting-Based Approaches**. Australian Journal of Management, v. 31, 2006, p. 207-234.

- [25] HERMANNY, P. F. **Modelos de Equilíbrio Geral e Precificação de Risco de Crédito**. Dissertação de Mestrado. Instituto de Economia da Universidade Federal do Rio de Janeiro, UFRJ, 2000.
- [26] HUANG, J.; HUANG, M.; **How Much of the Corporate-Treasury Yield Spread is Due to Credit Risk?**. Working Paper, Pennsylvania State University, 2003.
- [27] HULL, J.C.; **Options, Futures and Other Derivatives**. Pearson Education. Prentice Hall, New Jersey, 5<sup>th</sup> edition, 2002.
- [28] JARROW, R.A.; TURNBULL, S.M.; **Pricing Derivatives on Financial Securities Subject to Credit Risk**. Journal of Finance, v. 50, 1995, p. 53-86.
- [29] JARROW, R.A.; LANDO, D.; TURNBULL, S.M.; **A Markov Model for the Term Structure of Credit Risk Spreads**. The Review of Financial Studies, v. 10, 1997, p. 481-583.
- [30] JPMORGAN & CO. INCORPORATED; RiskMetrics<sup>TM</sup> – Technical Document. RiskMetrics Group, New York, 1996.
- [31] JORION, P.; **Value at Risk: The New Benchmark for Controlling Market Risk**. McGraw-Hill Companies, Inc. New York, 1997.
- [32] KEALHOFER, S.; **Quantifying Credit Risk I: Default Prediction**. Financial Analyst Journal; Jan/Fev 2003; 59, 1; pg. 30.
- [33] KEALHOFER, S.; **Quantifying Credit Risk II: Debt Valuation**. Financial Analyst Journal; Mai/Jun 2003; 59, 3; pg. 78.
- [34] LELAND, H.E.; **Predictions of Default Probabilities in Structural Models of Debt**. Journal of Investment Management, v.2, 2004, p. 5-20.
- [35] MCKEAN, H.P.; **Stochastic Integrals**; Academic Press, New York, 1969.
- [36] MERTON, R.C.; **Theory of Rational option pricing**; Journal of Economics and Management Science, v. 4, 1973, p. 141-83.
- [37] MERTON, R.C.; **On the Pricing of Corporate Debt: The Risk Structure of Interest Rate**; Journal of Finance, v. 29, 1974, p. 449-470.
- [38] SAUNDERS, A.; **Medindo o Risco de Crédito: Novas Abordagens para Value at Risk e outros paradigmas**. Qualitymark, Rio de Janeiro, 2000.
- [39] SELLERS, M.; ARORA, N.; **Financial EDF Measures – A new model of dual business lines**; Moody's KMV Company, Agosto, 2004.
- [40] VASICEK, O. A.; **Credit Valuation**; KMV, LLC (KMV), March 1984.

[41] VASSALOU, M.; XING, Y.; **Default Risk in Equity Returns**; The Journal of Finance, v. 59, 2004, p. 831-868

[42] WESTGAARD, S.; **Real Default Probability and its Sensitivity in an Option Based Framework**. Workshop Stockholm School of Economics, 2003.

## Apêndice A

Para encontrar a relação teórica entre a volatilidade do valor de mercado de uma empresa ( $\sigma_E$ ) e a volatilidade do valor dos ativos da empresa ( $\sigma_A$ ), é preciso começar escrevendo a famosa EDP de BLACK e SCHOLES (1973):

$$\frac{1}{2}\sigma^2 v^2 F_{vv} + (rV - C)F_v - rF + F_t + C_y = 0$$

Isolando,

$$\frac{1}{2}\sigma^2 v^2 F_{vv} + F_{ty} = -(rV - C)F_v + rF - C_y \quad (\text{A.1})$$

Agora, a equação do Lemma de Itô<sup>24</sup>:

$$dV = F_v dV + \frac{1}{2} F_{vv} (dV)^2 + F_t dt$$

Lembrando que o ativo segue um MGB

$$dV_A = \mu V_A dt + \sigma_A V_A dz \quad (\text{A.2})$$

Substituindo o MGB (A.2) do ativo na equação do Lemma de Itô:

$$dV = F_v (\mu V_A dt + \sigma_A V_A dz) + \frac{1}{2} F_{vv} (dV)^2 + F_t dt$$

Sabendo que  $dV_A^2 = \mu^2 V_A^2 dt^2 + 2\mu V_A^2 \cdot \sigma_A \cdot dt \cdot dw + \sigma^2 V_A^2 dw^2 = \sigma^2 V_A^2 dt$

<sup>24</sup> Para discussão rigorosa do Lemma de Itô, veja MCKEAN 1969 ou então ANEXO C.

$$dV = F_v \mu V_A dt + F_v \sigma_A V_A dz + \frac{1}{2} F_{vv} \sigma^2 V^2 dt + F_t dt$$

$$dV = \left( \frac{1}{2} F_{vv} \sigma^2 V^2 + \mu F_v V + F_t \right) dt + F_v \sigma_A V_A dz$$

Fazendo,  $\mu V = (\mu V - C)$ , ou seja, com presença de dividendos, obtém-se:

$$dV = \left( \frac{1}{2} F_{vv} \sigma^2 V^2 + (\mu V - C) F_v + F_t \right) dt + F_v \sigma_A V_A dz \quad (A.3)$$

Substitui-se na equação A.3 a equação A.1,

$$dV = ((\mu V - C) F_v - (rV - C) F_v + rF - C_y) dt + F_v \sigma_A V_A dz$$

Calculando, tem-se:

$$dV = ((\mu - r) V F_v + rF - C_y) dt + F_v \sigma_A V_A dz \quad (A.4)$$

Analisando as equações A.2 e a equação A.4, verifica-se que os parâmetros são iguais, ou seja:

$$\mu V_A = (\mu - r) V F_v + rF$$

$$\mu V_A = \frac{(\mu - r) \sigma V F}{\sigma_y} + rF$$

$$(\mu - r) V_A = \frac{(\mu - r) \sigma V F}{\sigma_y} \quad \text{com isso é encontrada a relação desejada,}$$

$$V_A \sigma_y = \sigma V F_v$$

$$\sigma_E = \left( \frac{V_A}{V_E} \right) \frac{\partial V_E}{\partial V_A} \sigma_A \quad (\text{A.5})$$

No modelo de BLACK e SCHOLLES (1973), pode-se mostrar que  $\frac{\partial V_E}{\partial V_A} = N(d_1)$ , então pelo modelo de MERTON (1974), a relação das volatilidades dos *assets* com o *equity* é:

$$\sigma_E = \left( \frac{V_A}{V_E} \right) N(d_1) \sigma_A \quad (\text{A.6})$$

## Apêndice B

Neste apêndice será visto o detalhamento da formulação de MERTON (1974) para encontrar a probabilidade de *default* de firmas:

Primeiramente será assumido que os ativos seguem em MGB

$$dV_A = \mu V_A dt + \sigma_A V_A dW \quad dW \approx N(0, dt)$$

Seja  $f = \ln V_A$

pelo lemma de Itô<sup>25</sup>,

$$df(\ln V_A) = \frac{df}{dV_A} dV_A + \frac{1}{2} \frac{d^2 f}{dV_A^2} dV_A^2 \quad 26 \quad (B.1)$$

Calculando,

$$\frac{df}{dV_A} = \frac{d(\ln V_A)}{dV_A} = \frac{1}{V_A} \quad (B.2) \quad \text{e} \quad \frac{d^2 f}{dV_A^2} = \frac{d^2(\ln V_A)}{dV_A^2} = \frac{d(1/V_A)}{dV_A} = \frac{-1}{V_A^2} \quad (B.3)$$

Agora substitui B.2 e B.3 na equação B.1:

$$df(\ln V_A) = \frac{1}{V_A} dV_A + \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{V_A^2} \right) \sigma_A^2 V_A^2 dt$$

<sup>25</sup> Parcela sem o resto de Itô e a parcela em dt. Para mais detalhes verificar Anexo C

<sup>26</sup>  $dV_A^2 = \mu^2 V_A^2 dt^2 + 2\mu V_A^2 \sigma_A dt.dw + \sigma^2 V_A^2 dw^2$ , sabendo que  $dt^2 = 0$ ,  $dt.dw = 0$  e  $dw^2 = dt$

Reescrevendo:  $dV_A^2 = \sigma_A^2 V_A^2 dt$

$$df(\ln V_A) = \frac{1}{V_A} dV_A - \frac{1}{2} \sigma_A^2 dt \quad (\text{B.4})$$

Substituindo a equação B.4 no MGB do ativo:

$$df(\ln V_A) = \frac{1}{V_A} (\mu V_A dt + \sigma_A V_A dw) - \frac{1}{2} \sigma_A^2 dt$$

Calculando,

$$df(\ln V_A) = \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma_A^2 \right) dt + \sigma_A dw$$

O próximo passo é integrar pelos dois lados:

$$\int_t^{t+\Delta t} d(\ln V_A) = \int_t^{t+\Delta t} \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma_A^2 \right) dt + \int_t^{t+\Delta t} \sigma_A dw$$

$$\ln \left( \frac{V_{A,t+\Delta t}}{V_{A,t}} \right) = \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma_A^2 \right) \Delta t + \sigma_A (w_{t+\Delta t} - w_t)$$

Sabendo que:

$$\varepsilon_{t+\Delta t} = \frac{w_{t+\Delta t} - w_t}{\sqrt{\Delta t}} \text{ sendo } \varepsilon_{t+\Delta t} \approx N(0,1)$$

O objetivo de fazer isso é "normalizar" o erro. Com isso, obtém-se a seguinte relação importante:

$$\ln V_{A,t+\Delta t} = \ln V_{A,t} + \left( \mu - \frac{\sigma_A^2}{2} \right) \Delta t + \sigma_A \sqrt{\Delta t} \cdot \varepsilon_{t+\Delta t}$$

Sabendo que a probabilidade de *default* é dada pela equação:

$$P_{def,t} = \text{Prob}[V_{A,t+\Delta t} \leq B_t / V_{A,t}] = \text{Prob}[\ln(V_{A,t+\Delta t}) \leq \ln(B_t) / V_{A,t}]$$

É a probabilidade de o valor dos ativos ser menor do que o valor contábil das suas dívidas.

$$\begin{aligned}
 P_{def,t} &= Prob[\ln(V_{A,t+\Delta t}) - \ln(B_t) / V_{A,t} \leq 0] \\
 &= Prob \left[ \ln V_{A,t} + \left( \mu - \frac{\sigma_A^2}{2} \right) \Delta t + \sigma_A \sqrt{\Delta t} \cdot \varepsilon_{t+\Delta t} - \ln(B_t) \leq 0 \right] \\
 &= Prob \left[ \ln V_{A,t} + \left( \mu - \frac{\sigma_A^2}{2} \right) \Delta t - \ln(B_t) \leq -\sigma_A \sqrt{\Delta t} \cdot \varepsilon_{t+\Delta t} \right] \\
 &= Prob \left[ -\frac{\ln V_{A,t} + \left( \mu - \frac{\sigma_A^2}{2} \right) \Delta t - \ln(B_t)}{\sigma_A \sqrt{\Delta t}} \geq \varepsilon_{t+\Delta t} \right]
 \end{aligned}$$

Portanto, a fórmula desejada para a distância de *default*:

$$D.D = \frac{\ln\left(\frac{V_{A,t}}{B_t}\right) + \left(\mu - \frac{\sigma_A^2}{2}\right)\Delta t}{\sigma_A \sqrt{\Delta t}}$$

## Apêndice C

### Processo de Wiener Generalizado e Movimento Browniano Simples

O processo de Wiener generalizado pode ser descrito pela seguinte equação:

$$dx = a(x,t) dt + b(x,t) dz \quad (C.1)$$

Onde  $a(x,t)$  é a função não-aleatória de tendência,  $b(x,t)$  é a função não-aleatória de variância, as variáveis presentes nesta fórmula serão definidas adiante. Além de ser um processo estocástico não-estacionário fundamentalmente pelo fato de a sua variância crescer linearmente no tempo, o processo de Wiener possui três características principais, conforme afirmam DIXIT e PINDYCK (1994):

1. É considerado como um processo de Markov pelo fato de que a distribuição de probabilidades dos valores futuros do processo depende somente do seu valor atual, ou seja, não é afetado pelos valores passados do processo ou por qualquer informação;
2. Apresenta incrementos independentes, ou seja, a distribuição de probabilidade para as variações no processo em qualquer intervalo de tempo são independentes de qualquer outro intervalo de tempo (que não se sobreponha ao primeiro);
3. Variações no processo em qualquer intervalo finito de tempo têm distribuição normal, com uma variância proporcional (linear) ao intervalo de tempo ocorrido.

Portanto, supondo que um processo de Wiener apresente uma variável  $z(t)$ , sua variação ( $\Delta z$ ) em um intervalo de tempo ( $\Delta t$ ) seria dada pela fórmula:

$\Delta z = \varepsilon t \sqrt{\Delta t}$ , onde,  $\varepsilon t$  é uma variável aleatória com distribuição normal, ou seja,  $\varepsilon t \sim N(0,1)$ ; e os valores de  $\Delta z$ , para quaisquer intervalos, são independentes. Além disso, a variável aleatória ( $\varepsilon t$ ) não tem correlação serial, ou seja:

$$E(\varepsilon t, \varepsilon s) = 0 \text{ para } t \neq s.$$

Ao se considerar um intervalo de tempo infinitesimalmente pequeno, ou seja,  $\Delta t \rightarrow 0$ , refletindo na derivada  $dt = 0$ , é possível representar o incremento do Processo de Wiener ( $dz$ ) no tempo contínuo como:

$$dz = \varepsilon t \sqrt{dt} \quad (\text{C.2})$$

Pelo fato de que  $\varepsilon t \sim N(0,1)$  e tomando a equação C.2, pode-se verificar que o valor esperado da variação de  $z$  é zero e sua variância é proporcional ao intervalo de tempo da variação ( $dt$ ):

$$E[dz] = E[\varepsilon t \sqrt{dt}] = 0, \text{ pois } E[\varepsilon t] = 0 \quad (\text{C.3})$$

$\text{Var}[dz] = \text{Var}[\varepsilon t \sqrt{dt}] = (\sqrt{dt})^2 \cdot \text{Var}[\varepsilon t] = dt \cdot (1)^2 = dt$ , pois o DP  $[\varepsilon] = 1$ . (C.4)

$$\text{Logo, define-se que: } dz = \varepsilon t \cdot \sqrt{dt} \leftrightarrow dz \sim N(0, \sqrt{dt}) \quad (\text{C.5})$$

Voltando à equação generalizada do Processo de Wiener, que já foi anteriormente descrito:

$$dx = a(x,t) dt + b(x,t) dz \quad (\text{C.1})$$

Onde,

- $dz$  é o chamado incremento de Wiener;
- $a(x,t)$  e  $b(x,t)$  são funções não aleatórias conhecidas.

Substituindo-se os parâmetros  $a(x,t)$  e  $b(x,t)$  por, respectivamente,  $\alpha$  (conhecido como parâmetro *drift*) e  $\sigma$  (parâmetro de variância), ambos constantes, chega-se à seguinte equação:

$$dx = \alpha dt + \sigma dz \quad (C.6)$$

Nesta equação,  $\alpha$  representa o parâmetro de tendência no tempo (ou crescimento),  $\sigma$  o parâmetro de variância, que exprime a incerteza ou ruído do processo, ou seja, determina a amplitude dos choques aleatórios que  $x$  sofre ao longo do tempo e é conhecido como volatilidade, e  $x$  é um processo estocástico.

Considerando-se em um intervalo de tempo  $\Delta t$ , a mudança em  $x$ , denotada por  $\Delta x$ , tem-se:

$$\Delta x = \alpha \Delta t + \sigma \varepsilon \sqrt{\Delta t} \quad (C.7)$$

Onde:

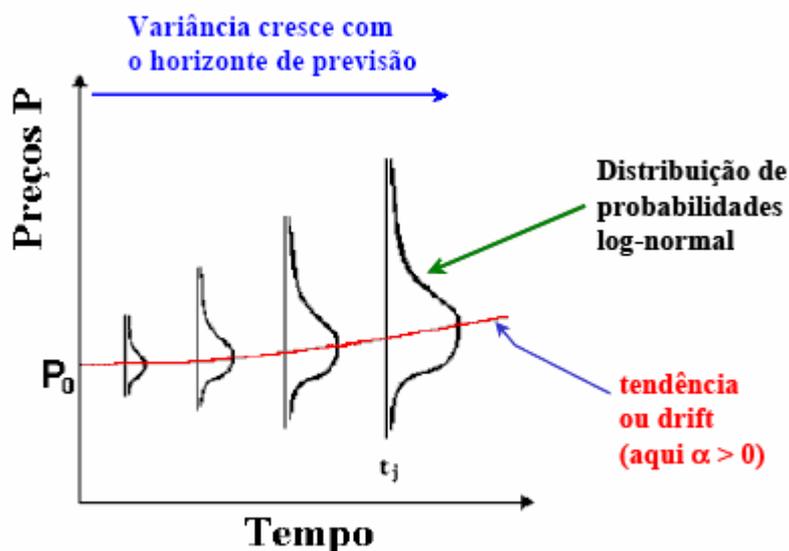
$$E[\Delta x] = \alpha \Delta t \quad (C.8)$$

$$\text{Var}[\Delta x] = \sigma^2 \Delta t \quad (C.9)$$

O processo  $dx$  pode ser representado pela soma de um componente determinístico (*drift* ou tendência) com um componente aleatório normalmente distribuído. Pela equação C.2, a soma de uma constante com uma variável aleatória normal resulta numa variável ( $dx$ ) também normal com média  $\alpha$  e variância  $\sigma^2$ .

O movimento geométrico browniano é, em geral, utilizado para modelar preço, taxas de juros, preços de produtos e outras variáveis financeiras e econômicas. A restrição que existe ao uso do Movimento Geométrico Browniano é o fato de que este processo pode divergir, levando  $x(t)$  para o infinito, de forma que alguns modelos que seguem este processo podem não

ser muito realistas (Brandão, 2001). Uma representação gráfica deste processo está apresentada na figura abaixo:



**Figura 30** – Aumento da Variância conforme aumenta o tempo de previsão  
**Fonte:** Notas de Aula; Prof. Marco Antonio Dias

O processo de Wiener é um processo estocástico em tempo contínuo. Este processo é caracterizado por ser um processo de Markov, em tempo contínuo, e pode ser utilizado para representar a dinâmica do valor de um projeto, preços de vendas de mercadorias e variáveis em geral, que se desenvolvem estocasticamente no tempo e que afetam a decisão de investir. Conforme DIXIT e PINDYCK (1994), este processo estocástico contínuo de Itô  $x(t)$  também pode ser representado pela equação C.1. O processo de Itô é conhecido como Movimento Browniano Generalizado.

No MGB, os parâmetros *drift* e variância são dados por:

$$a(x,t) = \alpha x$$

$$b(x,t) = \sigma x$$

Substituindo estes valores na equação do processo de Ito, tem-se:

$$dx = \alpha x dt + \sigma x dz \quad \text{ou} \quad \frac{dx}{x} = \alpha dt + \sigma dz \quad (\text{C.10})$$

Assim, o comportamento dinâmico de uma variável aleatória, cuja taxa de retorno contínua tem distribuição normal, pode ser descrito pelo MGB, conforme mostra a equação C.10. Contudo, para se manipular esta equação, é preciso um resultado importante de cálculo estocástico conhecido como Lema e Itô.

O processo do MGB tende a divergir para longe do seu ponto de partida original. Esta característica não costuma ser desejada para algumas variáveis como, por exemplo, o preço de commodities. É interessante ressaltar também que o MGB nunca assume valores negativos e, portanto, mais adequados para representar o movimento do preço de ativos financeiros.

Voltando ao caso de processos de Itô, sabe-se que eles são processos contínuos no tempo, mas que não são diferenciáveis pelas regras ordinárias de cálculo. Entretanto, isto seria essencial para a valoração de uma opção. Sendo assim, faz-se necessário utilizar-se o Lema de Itô, chamado também de Teorema Fundamental do Cálculo Estocástico.

### Lema de Itô

O Lema de Itô pode ser entendido como uma versão da Expansão de Taylor para o cálculo estocástico. O Lema de Itô permite que sejam calculadas funções (ou transformações) processos de Itô. Assim, considerando-se ainda a função  $F(x,t)$ , que é diferenciável ao menos duas vezes em relação a  $x$ , e uma vez em relação a  $t$ , utilizando-se o Lema de Itô, esta derivada será:

$$dF = \frac{dF}{dx} dx + \frac{dF}{dt} dt + \frac{1}{2} \frac{d^2 F}{dx^2} dx^2 + R(x)$$

Onde,

$$R(x) = \frac{1}{6} \frac{d^3 F}{dx^3} dx^3 + \frac{1}{2} \frac{d^4 F}{dx^4} dx^4 + \dots$$

Conhecido como Resto de Itô.

Convencionalmente adota-se  $dt^n = 0$  para  $n > 1$ ,  $dz^2 = dt$  <sup>27</sup>

Além disso, sabendo que  $x$  segue processo de Itô -  $dx = a(x,t)dt + b(x,t)dz$  :

$$dx^2 = a^2(x,t)dt^2 + a(x,t)b(x,t).dt^{3/2} + b^2(x,t)dt^2 = b^2(x,t)dt$$

$n > 2 \rightarrow dx^n = 0$ , ou seja, os termos contidos no Resto de Itô "desaparecem" na fórmula.

Substituindo-se este resultado na equação C.10, tem-se o Lema de Itô:

$$dF = \left[ \frac{dF}{dt} dt + a(x,t) \frac{dF}{dx} + \frac{1}{2} b^2 \frac{d^2 F}{dx^2} dx^2 \right] dt + b(x,t) \frac{dF}{dx} dz$$

---

<sup>27</sup>  $\text{var}[dz] = \text{Var}[\varepsilon_t \cdot \sqrt{dt}] = (\sqrt{dt})^2 \cdot \text{Var}[\varepsilon_t] = dt$

$\text{Var}(dz) = E[(dz - E[dz])^2] = E[dz^2] = dt$

$\text{Var}(dz^2) = 0 \rightarrow E[(dz^2 - E[dz^2])^2] = 0 \rightarrow dz^2 = E[dz^2] \therefore dz^2 = dt$