



Gustavo Lourenço Gomes Pires

**Teoria dos Valores Extremos: Valor em Risco para Ativos
de Renda Variável**

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada como requisito parcial para
obtenção do título de Mestre pelo Programa de Pós-
Graduação em Engenharia Industrial da PUC-Rio.

Orientador: Carlos Patrício Samanez

Rio de Janeiro

Abril de 2008

Gustavo Lourenço Gomes Pires

**Teoria dos Valores Extremos: Valor em Risco para Ativos
de Renda Variável**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Industrial da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

Prof. Carlos Patrício Samanez

Orientador

Departamento de Engenharia Industrial – PUC-Rio

Prof. Fabio Rodrigo Siqueira Batista

Departamento de Engenharia Industrial – PUC-Rio

Prof. José Paulo Teixeira

Departamento de Engenharia Industrial – PUC-Rio

Prof. José Eugenio Leal

Coordenador Setorial do Centro Técnico Científico – PUC-Rio

Rio de Janeiro, 10 de abril de 2008.

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

Gustavo Lourenço Gomes Pires

Graduado em Engenharia de Produção Elétrica na Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro em 2005. Participou de palestras e cursos relacionados ao Mercado Financeiro.

Ficha Catalográfica

Pires, Gustavo Lourenço Gomes

Teoria dos valores extremos: valor em risco para ativos de renda variável / Gustavo Lourenço Gomes Pires.; orientador: Carlos Patrício Samanez. – 2008.
136 f.; 30 cm

Dissertação (Mestrado em Engenharia Industrial)–Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2008.
Inclui bibliografia

1. Engenharia Industrial – Teses. 2. Valor em risco. 3. Teoria dos valores extremos. 4. Backtest. I. Samanez, Carlos Patrício. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Engenharia Industrial. III. Título.

CDD: 658.5

Para minha família,
pelo incentivo e demonstração de carinho e amor.

Agradecimentos

Ao meu orientador, Professor Carlos Patrício Samanez, pelo estímulo e parceria para a realização deste trabalho.

Aos meus pais e irmã, pelo amor, educação e força.

A minha tia Conceição e a meu tio Dulciliam, pelo carinho, apoio e torcida constante.

Aos meus amigos da PUC-Rio.

Aos professores que participaram da Comissão Examinadora.

A todos os professores e funcionários do Departamento de Engenharia Industrial, pelos ensinamentos e pela ajuda.

A CAPES, pelo auxílio financeiro.

Resumo

Pires, Gustavo Lourenço Gomes. **Teoria dos Valores Extremos: Valor em Risco para Ativos de Renda Variável**. Rio de Janeiro, RJ, 2008. 136p. Dissertação de Mestrado – Departamento de Engenharia Industrial, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

A partir da década de 90, a metodologia de Valor em Risco (VaR) se difundiu pelo mundo, tanto em instituições financeiras quanto em não financeiras, como uma boa prática de mensuração de riscos. Um dos fatos estilizados mais pronunciados acerca das distribuições de retornos financeiros diz respeito à presença de caudas pesadas. Isso torna os modelos paramétricos tradicionais de cálculo de Valor em Risco (VaR) inadequados para a estimação de VaR de baixas probabilidades, dado que estes se baseiam na hipótese de normalidade para as distribuições dos retornos. Sendo assim, o objetivo do presente trabalho é investigar o desempenho de modelos baseados na Teoria dos Valores Extremos para o cálculo do VaR. Os resultados indicam que os modelos baseados na Teoria dos Valores Extremos são adequados para a modelagem das caudas, e consequentemente para a estimação de Valor em Risco quando os níveis de probabilidade de interesse são baixos.

Palavras-chave

Valor em risco; Teoria dos Valores Extremos; Backtest

Abstract

Pires, Gustavo Lourenço Gomes. **Extreme Value Theory: Value at Risk for Variable-Income Assets**. Rio de Janeiro, RJ, 2008. 136p. Msc. Dissertation - Department of Industrial Engineering, Pontifical Catholic University of Rio de Janeiro.

Since the 90 decade, the use of Value at Risk (VaR) methodology has been disseminated among both financial and non-financial institutions around the world, as a good practice in terms of risks management. The existence of fat tails is one of the striking stylized facts of financial returns distributions. This fact makes the use of traditional parametric models for Value at Risk (VaR) estimation unsuitable for the estimation of low probability events. This is because traditional models are based on the conditional normality assumption for financial returns distributions. The main purpose of this dissertation is to investigate the performance of VaR models based on Extreme Value Theory. The results indicates that Extreme Value Theory based models are suitable for low probability VaR estimation.

Keywords

Value at Risk; Extreme Value Theory; Backtest

Sumário

1 Introdução	17
1.1. Revisão Bibliográfica	18
1.2. Estrutura do Trabalho	20
2 Value at Risk e retorno de um investimento.....	22
2.1. Definição do valor em risco.....	23
2.2. Backtesting.....	25
2.2.1. Backtesting Hipotético.....	25
2.2.2. Validação de um Modelo de VaR utilizando a Taxa de Exceções.....	25
2.3. Retorno de um Ativo	26
2.3.1. Retorno Aritmético	27
2.3.2. Retorno Logarítmico.....	27
3 Modelos de escolha de carteiras de investimento	29
3.1. Modelo de Índice Único	29
3.1.1. Características do Modelo de Índice Único	33
3.2. Estimação de Beta.....	34
3.2.1. Estimação de betas históricos.....	35
3.3. Otimização de carteiras.....	36
3.4. Dominância Estocástica.....	38
4 A Teoria dos Valores Extremos	41
4.1. As medidas de risco e a Teoria dos Valores Extremos	41
4.2. A distribuição dos mínimos	41
4.2.1. O teorema de Fisher-Tippett	47
4.3. Métodos de estimação	49
4.3.1. Abordagem Paramétrica	50
4.3.2. Abordagem Não Paramétrica	52
4.4. Valores Extremos aplicados ao Value at Risk	54

4.4.1. Estimativa dos Parâmetros.....	55
4.5. Cálculo do VaR.....	57
4.6. VaR Multiperiódico.....	59
5 Elaboração das carteiras de ações	60
5.1. Considerações gerais	60
5.2. Divisão dos dados em sub-períodos	62
5.2.1. Aplicação do Modelo de Índice Único	62
5.2.2. Aplicação do critério de Dominância Estocástica de segunda ordem.....	65
5.2.3. Aplicação da metodologia do IBOVSPA	66
6 Descrição e Análise Exploratória dos Dados.....	69
6.1. Considerações gerais	69
6.2. Histogramas.....	70
6.3. Correlograma dos retornos.....	78
6.4. Correlograma dos retornos ao quadrado.....	87
6.5. Análise dos valores extremos.....	95
7 Metodologia e Resultados.....	100
7.1. Considerações gerais	100
7.2. Metodologia para obtenção dos parâmetros de forma de cauda	101
7.3. Comparativo entre as funções de distribuição acumulada.....	107
7.4. Resultados do Backtesting	116
8 Conclusão	128
9 Referências bibliográficas	130
Apêndice A: Método da Regressão para TVE.....	133

Lista de figuras

Figura 1 – Perdas acumuladas atribuídas aos Derivativos.....	18
Figura 2 – Função de distribuição acumulada das três distribuições para mínimos.	45
Figura 3 – Funções densidade de probabilidade para as três distribuições para mínimos.	47
Figura 4 – Histograma da carteira selecionada pelo M.I.U.	72
Figura 5 – Histograma da carteira selecionada pela Dominância Estocástica.	72
Figura 6 – Histograma da carteira do IBOVESPA.	72
Figura 7 – Histograma da carteira selecionada pelo M.I.U.	73
Figura 8 – Histograma da carteira selecionada pela Dominância Estocástica.	73
Figura 9 – Histograma da carteira do IBOVESPA.	74
Figura 10 – Histograma da carteira selecionada pela Dominância Estocástica.	74
Figura 11 – Histograma da carteira do IBOVESPA.	75
Figura 12 – Histograma da carteira selecionada pelo M.I.U.	76
Figura 13 – Histograma da carteira selecionada pela Dominância Estocástica.	76
Figura 14 – Histograma da carteira do IBOVESPA.	77
Figura 15 – Histograma da carteira selecionada pelo M.I.U.	77
Figura 16 – Histograma da carteira selecionada pela Dominância Estocástica.	78
Figura 17 – Histograma da carteira do IBOVESPA.	78
Figura 18 – Correlograma dos retornos da carteira selecionada pelo M.I.U.	80
Figura 19 – Correlograma dos retornos da carteira selecionada pela Dominância Estocástica.	80
Figura 20 – Correlograma dos retornos da carteira do IBOVESPA.	81

Figura 21 – Correlograma dos retornos da carteira selecionada pelo M.I.U.	81
Figura 22 – Correlograma dos retornos da carteira selecionada pela Dominância Estocástica.	82
Figura 23 – Correlograma dos retornos da carteira do IBOVESPA.	82
Figura 24 – Correlograma dos retornos da carteira selecionada pela Dominância Estocástica.	83
Figura 25 – Correlograma dos retornos da carteira do IBOVESPA.	83
Figura 26 – Correlograma dos retornos da carteira selecionada pelo M.I.U.	84
Figura 27 – Correlograma dos retornos da carteira selecionada pela Dominância Estocástica.	84
Figura 28 – Correlograma dos retornos da carteira do IBOVESPA.	85
Figura 29 – Correlograma dos retornos da carteira selecionada pelo M.I.U.	85
Figura 30 – Correlograma dos retornos da carteira selecionada pela Dominância Estocástica.	86
Figura 31 – Correlograma dos retornos da carteira do IBOVESPA.	86
Figura 32 – Correlograma dos retornos quadrados da carteira selecionada pelo M.I.U.	87
Figura 33 – Correlograma dos retornos quadrados da carteira selecionada pela Dominância Estocástica.	88
Figura 34 – Correlograma dos retornos quadrados da carteira do IBOVESPA.	88
Figura 35 – Correlograma dos retornos quadrados da carteira selecionada pelo M.I.U.	89
Figura 36 – Correlograma dos retornos quadrados da carteira selecionada pela Dominância Estocástica.	89
Figura 37 – Correlograma dos retornos quadrados da carteira do IBOVESPA.	90
Figura 38 – Correlograma dos retornos quadrados da carteira selecionada pela Dominância Estocástica.	90
Figura 39 – Correlograma dos retornos quadrados da carteira do IBOVESPA.	91

Figura 40 – Correlograma dos retornos quadrados da carteira selecionada pelo M.I.U.	91
Figura 41 – Correlograma dos retornos quadrados da carteira selecionada pela Dominância Estocástica.	92
Figura 42 – Correlograma dos retornos quadrados da carteira do IBOVESPA.	92
Figura 43 – Correlograma dos retornos quadrados da carteira selecionada pelo M.I.U.	93
Figura 44 – Correlograma dos retornos quadrados da carteira selecionada pela Dominância Estocástica.	93
Figura 45 – Correlograma dos retornos quadrados da carteira do IBOVESPA.	94
Figura 46 – 1% piores retornos da carteira selecionada pelo M.I.U.	95
Figura 47 – 1% piores retornos da carteira selecionada pela Dominância Estocástica.	95
Figura 48 – 1% piores retornos da carteira do IBOVESPA.	96
Figura 49 – 1% piores retornos da carteira selecionada pelo M.I.U.	96
Figura 50 – 1% piores retornos da carteira selecionada pela Dominância Estocástica.	96
Figura 51 – 1% piores retornos da carteira do IBOVESPA.	96
Figura 52 – 1% piores retornos da carteira selecionada pela Dominância Estocástica.	97
Figura 53 – 1% piores retornos da carteira do IBOVESPA.	97
Figura 54 – 1% piores retornos da carteira selecionada pelo M.I.U.	97
Figura 55 – 1% piores retornos da carteira selecionada pela Dominância Estocástica.	98
Figura 56 – 1% piores retornos da carteira do IBOVESPA.	98
Figura 57 – 1% piores retornos da carteira selecionada pelo M.I.U.	98
Figura 58 – 1% piores retornos da carteira selecionada pela Dominância Estocástica.	98
Figura 59 – 1% piores retornos da carteira do IBOVESPA.	99
Figura 60 – Hill-plot para a carteira selecionada pelo M.I.U.	101
Figura 61 – Hill-plot para a carteira selecionada pela Dominância Estocástica.	102

Figura 62 – Hill-plot para a carteira do IBOVESPA.	102
Figura 63 – Hill-plot para a carteira selecionada pelo M.I.U.	103
Figura 64 – Hill-plot para a carteira selecionada pela Dominância Estocástica.	103
Figura 65 – Hill-plot para a carteira do IBOVESPA.	103
Figura 66 – Hill-plot para a carteira selecionada pela Dominância Estocástica.	104
Figura 67 – Hill-plot para a carteira do IBOVESPA.	104
Figura 68 – Hill-plot para a carteira selecionada pelo M.I.U.	105
Figura 69 – Hill-plot para a carteira selecionada pela Dominância Estocástica.	105
Figura 70 – Hill-plot para a carteira do IBOVESPA.	105
Figura 71 – Hill-plot para a carteira selecionada pelo M.I.U.	106
Figura 72 – Hill-plot para a carteira selecionada pela Dominância Estocástica.	106
Figura 73 – Hill-plot para a carteira do IBOVESPA.	107
Figura 74 – Distribuição acumulada dos retornos da carteira selecionada pelo M.I.U.	107
Figura 75 – Distribuição acumulada dos retornos da carteira selecionada pela Dominância Estocástica.	108
Figura 76 – Distribuição acumulada dos retornos da carteira do IBOVESPA.	108
Figura 77 – Distribuição acumulada dos retornos da carteira selecionada pelo M.I.U.	109
Figura 78 – Distribuição acumulada dos retornos da carteira selecionada pela Dominância Estocástica.	110
Figura 79 – Distribuição acumulada dos retornos da carteira do IBOVESPA.	110
Figura 80 – Distribuição acumulada dos retornos da carteira selecionada pela Dominância Estocástica.	111
Figura 81 – Distribuição acumulada dos retornos da carteira do IBOVESPA.	112
Figura 82 – Distribuição acumulada dos retornos da carteira selecionada pelo M.I.U.	113

Figura 83 – Distribuição acumulada dos retornos da carteira selecionada pela Dominância Estocástica.	113
Figura 84 – Distribuição acumulada dos retornos da carteira do IBOVESPA.	114
Figura 85 – Distribuição acumulada dos retornos da carteira selecionada pelo M.I.U.	115
Figura 86 – Distribuição acumulada dos retornos da carteira selecionada pela Dominância Estocástica.	115
Figura 87 – Distribuição acumulada dos retornos da carteira do IBOVESPA.	116
Figura 88 – Período de backtest da carteira selecionada pelo M.I.U. com uma confiança de 97,5%.	117
Figura 89 – Período de backtest da carteira selecionada pela Dominância Estocástica com uma confiança de 97,5%.	117
Figura 90 – Período de backtest da carteira do IBOVESPA com uma confiança de 97,5%.	118
Figura 91 – Período de backtest da carteira selecionada pelo M.I.U. com uma confiança de 97,5%.	118
Figura 92 – Período de backtest da carteira selecionada pela Dominância Estocástica com uma confiança de 97,5%.	119
Figura 93 – Período de backtest da carteira do IBOVESPA com uma confiança de 97,5%.	119
Figura 94 – Período de backtest da carteira selecionada pela Dominância Estocástica com uma confiança de 97,5%.	120
Figura 95 – Período de backtest da carteira do IBOVESPA com uma confiança de 97,5%.	120
Figura 96 – Período de backtest da carteira selecionada pelo M.I.U. com uma confiança de 97,5%.	121
Figura 97 – Período de backtest da carteira selecionada pela Dominância Estocástica com uma confiança de 97,5%.	121
Figura 98 – Período de backtest da carteira do IBOVESPA com uma confiança de 97,5%.	122
Figura 99 – Período de backtest da carteira selecionada pelo M.I.U. com uma confiança de 97,5%.	122

Figura 100 – Período de backtest da carteira selecionada pela Dominância Estocástica com uma confiança de 97,5%.....	123
Figura 101 – Período de backtest da carteira do IBOVESPA com uma confiança de 97,5%.....	123

Lista de tabelas

Tabela 1 - Universo de ações disponíveis para investimento.	61
Tabela 2 - Sub-períodos amostrais.	62
Tabela 3 - Interpretação para o Coeficiente de Correlação.	63
Tabela 4 - Novo universo de ações candidatas a integrar as carteiras em cada intervalo.	64
Tabela 5 – Aumento do número de intervalos.....	69
Tabela 6 – Dias úteis entre retornos extremos usando M.I.U.....	95
Tabela 7 – Dias úteis entre retornos extremos usando D.E.	95
Tabela 8 – Dias úteis entre retornos extremos do IBOVESA96	96
Tabela 9 – Dias úteis entre retornos extremos usando M.I.U.....	96
Tabela 10 – Dias úteis entre retornos extremos usando D.E.	96
Tabela 11 – Dias úteis entre retornos extremos do IBOVESA96	96
Tabela 12 – Dias úteis entre retornos extremos usando D.E.	97
Tabela 13 – Dias úteis entre retornos extremos do IBOVESA97	97
Tabela 14 – Dias úteis entre retornos extremos usando M.I.U.	97
Tabela 15 – Dias úteis entre retornos extremos usando D.E.	98
Tabela 16 – Dias úteis entre retornos extremos do IBOVESA98	98
Tabela 17 – Dias úteis entre retornos extremos usando M.I.U.	98
Tabela 18 – Dias úteis entre retornos extremos usando D.E.	98
Tabela 19 – Dias úteis entre retornos extremos do IBOVESA99	99
Tabela 20 – Resultado do Backtesting para o Intervalo 1.	124
Tabela 21 – Resultado do Backtesting para o Intervalo 2.	125
Tabela 22 – Resultado do Backtesting para o Intervalo 3.	125
Tabela 23 – Resultados do Backtesting para o Intervalo 4.....	126
Tabela 24 – Resultado do Backtesting para o Intervalo 5.	127

1 Introdução

O mercado de capitais brasileiro tem apresentado substancial desenvolvimento, o que pode ser justificado pelos seguintes fatores: aumento da liquidez internacional, elevação dos preços das commodities metálicas e agrícolas, inflação sob controle e redução da taxa de juros básica da economia. Como consequência percebemos um aumento no volume financeiro diário negociado e um maior número de empresas cotadas na BOVESPA.

Do ponto de vista gerencial, percebe-se um movimento de âmbito mundial promovido por órgãos regulatórios e adotado por instituições financeiras e não financeiras sobre a importância de ferramentas de gestão de risco que sejam capazes de auxiliar na melhor alocação dos recursos disponíveis. É neste contexto que surge o Value at Risk. O VaR, metodologia desenvolvida pelo Banco JP Morgan em 1993 e divulgada um ano depois, tem sido adotado como metodologia de levantamento e gestão de risco de mercado, além de servir como base de cálculo para provisionamento mínimo de capital. Trata-se de um método estatístico que informa a perda máxima esperada para um dado perfil de carteira, em um determinado período de tempo, sob condições normais de mercado e sob um determinado nível de confiança.

Com o desenvolvimento da gestão de risco em todo o mundo, ficou mais aparente que as metodologias de cálculo de valor em risco não são exatas e livres de falhas. Premissas utilizadas por algumas metodologias de cálculo do VaR, como a que considera que os retornos dos ativos em geral seguem distribuição normal, mostram-se inadequadas. As distribuições de retornos claramente apresentam caudas mais pesadas que as das distribuições normais. Dado a inexatidão das medidas de risco existentes, alguns estudos surgiram na tentativa de aperfeiçoar o VaR, como, por exemplo, a aplicação da Teoria dos Valores Extremos como alternativa que mais se aproxima das distribuições de retornos com caudas pesadas.

1.1. Revisão Bibliográfica

O estudo de ferramentas de gerenciamento de risco não é algo recente. Uma das primeiras e mais importantes pesquisas sobre esse assunto foi a Teoria de Carteiras, desenvolvida por Harry Markowitz nos anos 50. Nela, Markowitz (1952) propunha que o risco de uma carteira estaria associado a sua variância, que por sua vez está associada à contribuição ponderada da variância de cada ativo envolvido, bem como de suas correlações. É por este pensamento que surgiu a idéia do benefício da diversificação para a redução do risco do portfólio.

A Teoria de Carteiras diz ainda que o investidor racional irá optar pela carteira eficiente, ou seja, optará pela carteira que, para cada nível de risco, tenha retorno máximo ou aquela que, para um certo retorno, incorra no menor risco possível. Uma das principais contribuições da Teoria de Carteiras é a idéia de que o risco de um ativo em um portfólio não corresponde à volatilidade de seus retornos, e sim ao quanto este ativo contribui ao risco total da carteira.

Durante as décadas de 80 e 90 ocorreram à perda de bilhões de dólares no mercado financeiro. De fato, na sua maioria, estas perdas são atribuídas à exposição ao risco do mercado de derivativos.

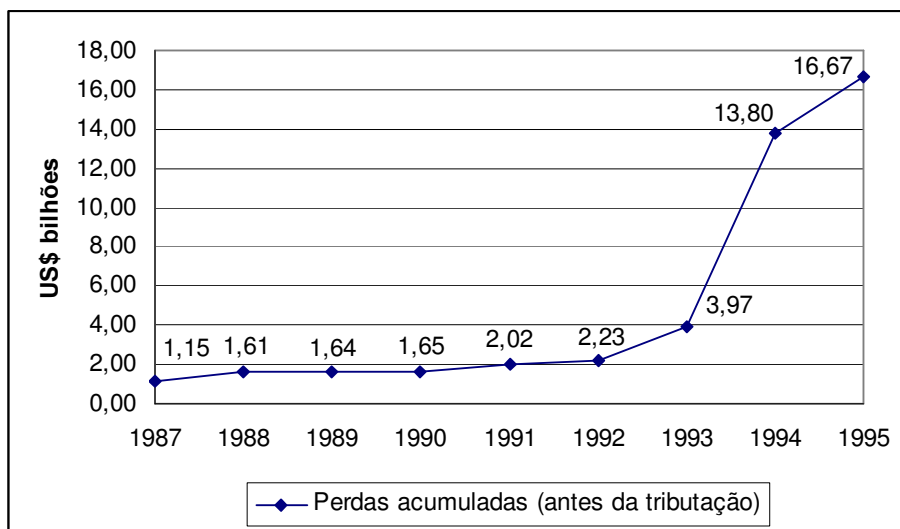


Figura 1 – Perdas acumuladas atribuídas aos Derivativos.

A figura mostra o total de perdas publicamente atribuídas (correta ou incorretamente) aos derivativos desde 1987. Os prejuízos cresceram significativamente em 1994, como resultado das oscilações das taxas de juro, que

geraram volatilidade nos mercados de títulos. De 1987 à 1995, as perdas totalizaram US\$ 16,7 bilhões. Essas perdas, em relação ao tamanho do mercado, que era de US\$ 50 trilhões, representava apenas 0,03% do volume total, o que é bem pequeno em termos relativos.

Tais perdas criaram a necessidade de um método analítico que fosse capaz de mensurar o montante financeiro em risco numa determinada carteira com ativos de expressiva volatilidade. É neste cenário que o banco JP Morgan em 1993 desenvolveu a metodologia de medição de risco conhecida como Value at Risk (VaR), disponibilizando tal documentação técnica ao público em 1994 sob o nome de RiskMetrics. Desde o seu aparecimento, o VaR tem sido amplamente utilizado pelo mercado e tornou-se a referência mundial quando o assunto é ferramenta de medição de risco financeiro. Todo este interesse pelo Value at Risk fez com que surgissem outras metodologias de cálculo de VaR além das propostas pela RiskMetrics (1996), bem como pesquisas comparando e propondo melhorias para estes estimadores de risco.

Uma das primeiras pesquisas no Brasil a propor o uso da Teoria dos Valores Extremos como uma boa solução para estimativas das caudas das distribuições de retornos foi realizada por Ferreira (1999), cujo análise eram os mercados acionários latino americanos. Neste estudo, Ferreira estimou as caudas superior e inferior das distribuições dos retornos de índices de ações negociadas na Argentina, Brasil, Chile e México.

Mendes (2000) propõe a utilização de métodos robustos para cálculo de medidas de risco em mercados emergentes de ações utilizando a Teoria dos Valores Extremos. Os mercados analisados, mais uma vez, foram Argentina, Brasil, Chile e México.

Martins (2000) faz uma comparação entre diversos métodos de cálculo de VaR para o mercado acionário brasileiro, utilizando, inclusive, metodologias baseadas na Teoria dos Valores Extremos.

A proposta deste estudo é validar a Teoria dos Valores Extremos como metodologia aplicável no cálculo do VaR em carteiras de investimento. Para tal,

utilizamos o Modelo de Índice Único e o Critério de Dominância Estocástica de Segunda Ordem para selecionar as ações que comporiam tais carteiras. Além disso, usamos a carteira hipotética do IBOVESPA.

1.2. Estrutura do Trabalho

O capítulo 2 relata definições qualitativas e quantitativas sobre o VaR. Apresenta também quais são os propósitos e usuários do VaR. Por fim, descreve o procedimento de validação de um modelo de VaR.

O capítulo 3 começa com definições e pressupostos do Modelo de Índice Único aplicados em uma determinada ação. Tem continuidade com definições, características e estimação de parâmetros do M.I.U. com aplicação em uma determinada carteira. Também apresenta a metodologia de otimização para composição da carteira. Finaliza com a apresentação das premissas realizadas no critério de Dominância Estocástica.

O capítulo 4 faz menção a metodologia da Teoria dos Valores Extremos para mensuração de risco. Nele é enunciado o teorema de Fisher-Tippett. São apresentados os três tipos de distribuições limites: Gumbel, Fréchet e Weibull. Em seguida se descreve os métodos de estimação das caudas de distribuições, tais como: Método de Máxima Verossimilhança e o Método da Regressão, ambos paramétricos. Também são mencionados os métodos não paramétricos de estimador Pickands e o de estimador Hill. Para finalizar é apresentada a fórmula que permite calcular o VaR.

O capítulo 5 inicia a análise empírica dos dados. Este capítulo relata a forma como o Modelo de Índice Único e a Dominância Estocástica foram utilizados para formação das carteiras de investimento. O capítulo termina com a descrição da metodologia usada na carteira teórica do IBOVESPA.

O capítulo 6 apresenta histograma, correlograma dos retornos e correlograma dos retornos ao quadrado para as carteiras de investimento. Em seguida é feita uma análise dos retornos extremos das séries financeiras das carteiras de investimento.

O capítulo 7 mostra a metodologia do Hill-plot para determinação dos parâmetros de forma de cauda. Após isso, apresentamos um comparativo entre as seguintes funções de distribuição acumuladas: Fréchet, Normal e Empírica. Este capítulo termina com os resultados do Backtesting dos modelos de VaR.

O capítulo 8 faz um breve resumo dos principais assuntos do estudo, conclusões e sugestão para trabalhos futuros.

2

Value at Risk e retorno de um investimento

O Value at Risk (VaR) é um método de mensuração de risco de mercado que utiliza técnicas estatísticas amplamente difundidas. De outra forma, o VaR mede a pior perda esperada ao longo de determinado intervalo de tempo, sob condições normais de mercado e dentro de determinado nível de confiança. Com base em fundamentos científicos, o VaR fornece aos seus usuários uma medida concisa do risco de mercado. Além disso, ele mede a perda esperada tanto em valor monetário quanto em percentual.

O VaR serve a diversos propósitos:

- **Fornecimento de Informações Gerenciais.** O VaR pode ser usado para informar a alta gerência dos riscos incorridos em transações e operações de investimento, bem como aos acionistas dos riscos financeiros da empresa. Com isso, o VaR ajuda a acelerar a atual tendência de um melhor fornecimento de informações de valores financeiros marcados a mercado;
- **Alocação de Recursos.** O VaR pode ser utilizado no estabelecimento de limites de posição para operadores e para a decisão sobre onde alocar recursos limitados de capital. A vantagem do VaR é a criação de um denominador comum que permita comparar as atividades de risco em diversos mercados. O risco total de uma empresa pode também ser decomposto em VaRs “incrementais”, os quais permitem que usuários reconheçam as posições que mais contribuem para o risco total;
- **Avaliação de Performance.** O VaR pode ser usado para que o desempenho seja ajustado ao risco, o que é essencial em um ambiente de negociações em que os operadores possuem tendência natural de assumir riscos extras. Os encargos relativos ao capital de risco, baseados na medida de VaR, proporcionam aos operadores os incentivos corretos.

O VaR tem como usuários:

- **Instituições Financeiras.** Os *dealers* detentores de grandes carteiras têm-se colocado na vanguarda da administração de risco. As instituições que lidam com várias fontes de risco financeiro e instrumentos complexos em geral já implementaram sistemas centralizados de administração de risco;
- **Órgãos Reguladores.** Uma regulamentação prudente de instituições financeiras requer a manutenção de níveis mínimos de capital como

reservas contra riscos financeiros. O Comitê de Supervisão Bancária da Basileia considera o VaR uma forma de mensuração de risco aceitável;

- **Instituições Não-Financeiras.** A administração centralizada de risco torna-se útil a qualquer empresa que esteja exposta a risco financeiro. É através desta administração que as decisões são tomadas no sentido de uma política aberta de *hedge* (proteção);
- **Administradores de Ativos.** Os investidores institucionais têm-se voltado para o VaR a fim de melhor controlar os riscos financeiros assumidos.

O cálculo do VaR tornou-se possível devido ao aumento dos recursos computacionais, necessários para a realização de simulações complexas.

O primeiro passo para a mensuração do VaR é a escolha de dois fatores quantitativos: o horizonte de tempo e o nível de confiança.

Como o prazo de manutenção de uma carteira corresponde a um período mais longo, necessário para que a liquidação da mesma seja feita de maneira ordenada, o horizonte de tempo do VaR deve estar relacionado à liquidez dos ativos, definida em termos da extensão de tempo necessária para volumes normais de transação.

Existem poucas diretrizes disponíveis para a escolha do nível de confiança. Deve-se atentar para o fato de que níveis maiores de confiança implicam em maiores valores para o VaR. É importante escolher um nível de confiança que permita aos usuários comparar o VaR com a perda de fato ocorrida.

2.1. Definição do valor em risco

O VaR de uma posição comprada ao longo do horizonte de tempo ℓ e com probabilidade p pode ser definido como:

$$p = P[\Delta V(\ell) \leq VaR] \quad (1)$$

onde: $\Delta V(\ell)$ é a mudança sofrida no valor dos ativos da posição financeira durante o período ℓ .

Como se está comprado na posição financeira, a perda ocorre quando $\Delta V(\ell) < 0$ e o VaR da equação acima assume valor negativo.

Caso fosse utilizada uma posição vendida, isto seria o contrário e o VaR seria definido assim:

$$p = P[\Delta V(\ell) \geq VaR] = 1 - P[\Delta V(\ell) < VaR] \quad (2)$$

As definições vistas até o momento mostram que em posições compradas, a cauda esquerda é importante no cálculo do Value at Risk, já em posições vendidas, a cauda direita é que deve ser levada em conta.

O VaR pode ser medido de forma relativa, consistindo na perda em relação a média, ou de forma absoluta, onde a perda não é calculada usando-se uma referência a valor esperado. Segundo Jorion (2003), o VaR relativo é o mais aconselhável, porém, quando o horizonte é pequeno, o retorno médio pode ser pequeno, o que acarretaria o VaR relativo e o VaR absoluto estimarem aproximadamente o mesmo valor.

Considerando W_0 como o investimento inicial, r a taxa de retorno e W o valor da carteira no final do horizonte, o VaR relativo pode ser obtido da seguinte forma:

$$VaR_{rel} = E(W) - W^* \quad (3)$$

onde W^* representa o menor valor da carteira para um nível de confiança c .

Porém,

$$W = W_0(1 + r) \quad \text{e} \quad W^* = W_0(1 + r^*)$$

onde r^* representa o menor retorno para o nível de confiança c .

Então,

$$VaR_{rel} = E(W) - W^* = E[W_0(1 + r)] - W_0(1 + r^*)$$

$$VaR_{rel} = W_0 E[(1 + r)] - W_0(1 + r^*) = W_0(1 + E[r]) - W_0(1 + r^*)$$

Definindo como μ o retorno esperado de r , temos que:

$$VaR_{rel} = W_0(1 + \mu) - W_0(1 + r^*)$$

$$VaR_{rel} = W_0 + W_0\mu - W_0 - W_0r^* = -W_0(r^* - \mu)$$

O VaR absoluto fica:

$$VaR_{abs} = W_0 - W^* = W_0 - W_0(1 + r^*) = W_0 - W_0 - W_0r^* = -W_0r^* \quad (4)$$

2.2. Backtesting

Verificar se os modelos de cálculo de VaR estão perto da realidade é tarefa necessária quando se desejam respostas consistentes de estimativas de valor em risco. O instrumento mais utilizado para realizar a validação dos modelos de Value at Risk é conhecido como Backtesting.

O Backtesting é uma ferramenta estatística que tem por objetivo verificar a consistência entre as perdas observadas e as perdas estimadas pelos modelos. Resumindo, isto implica em comparar o histórico das perdas estimadas pelo VaR com os retornos observados da carteira. Ele será muito útil, quando se estiver avaliando se os modelos de VaR testados estão bem ajustados e qual deles possibilita uma melhor estimativa das perdas.

2.2.1. Backtesting Hipotético

É o mais útil dos métodos de Backtesting. Consiste em “congelar” a carteira analisada para um determinado dia e aplicar variações históricas nos preços de fechamento dos ativos que a compõe, gerando uma série com perdas e ganhos hipotéticos. O cálculo do VaR é realizado diariamente, possibilitando a determinação do número e percentual de exceções por meio da comparação entre as estimativas de VaR e os resultados do dia posterior.

2.2.2. Validação de um Modelo de VaR utilizando a Taxa de Exceções

O teste de razão de verossimilhança (likelihood ratio – LR), desenvolvido por Kupiec avalia estatisticamente a hipótese nula de que a proporção verdadeira de falhas p do modelo é igual ao nível de significância α % preestabelecido para o cálculo do VaR. Seja N o número de vezes em que o retorno observado

excedeu o VaR em uma amostra de tamanho T . Se cada uma das realizações diárias da série de retornos apresenta probabilidade de $\alpha\%$ de superar o VaR, então, a variável aleatória “número de violações do VaR” apresenta Distribuição Binomial com média T e variância p :

$$N \sim B(T, p)$$

Idealmente, o percentual de falhas de ocorrência deve ser igual à probabilidade associada à cauda esquerda da distribuição, isto é, $p = \alpha\%$. As hipóteses nula e alternativa são construídas da seguinte forma:

$$H_0 = \frac{N}{T} = p$$

$$H_A = \frac{N}{T} \neq p$$

e a estatística apropriada para se testar a LR é dada por:

$$LR = 2 \left\{ \ln \left[\left(\frac{N}{T} \right)^N \left(1 - \frac{N}{T} \right)^{T-N} \right] - \ln \left[p^N (1-p)^{T-N} \right] \right\} \quad (5)$$

Sob a hipótese nula que p é a verdadeira probabilidade do VaR ser excedido, a estatística do teste LR é assintoticamente distribuída como uma qui-quadrado (χ^2) com um grau de liberdade.

Compara-se, então, o LR com o valor crítico da distribuição qui-quadrado para um grau de liberdade e nível de significância do teste de 5%, isto é, $\chi^2 = 3,841$; a observação de valores superiores (inferiores) a este último leva à rejeição (aceitação) da hipótese nula.

2.3. Retorno de um Ativo

A maioria dos trabalhos acadêmicos analisa retornos ao invés de preços. Dentre as principais razões, destaca-se o fato de séries de retornos serem mais fáceis de manipular que as séries de preços, porque sua forma possui propriedades

estatísticas mais atrativas. Apresentamos, a seguir, algumas diferentes definições de retorno.

2.3.1. Retorno Aritmético

É o mais simples de ser calculado e pode ser obtido para um único período da seguinte forma:

$$R_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} = \frac{P_t}{P_{t-1}} - 1 \quad (6)$$

onde:

R_t : retorno no período t .

P_t : preço no período t .

Para múltiplos períodos, temos que:

$$R_{t,k} = \frac{P_t}{P_{t-k}} - 1$$

$$R_{t,k} + 1 = \frac{P_t}{P_{t-k}} = \frac{P_t}{P_{t-1}} \times \frac{P_{t-1}}{P_{t-2}} \times \dots \times \frac{P_{t-(k-1)}}{P_{t-k}}$$

$$R_{t,k} + 1 = \frac{P_t}{P_{t-k}} = (1 + R_t) \times (1 + R_{t-1}) \times \dots \times (1 + R_{t-(k-1)})$$

$$R_{t,k} = \left[\prod_{i=0}^{k-1} (1 + R_{t-i}) \right] - 1 \quad (7)$$

2.3.2. Retorno Logarítmico

Consiste no logarítmico natural do retorno aritmético.

$$r_t = \ln(1 + R_t) = \ln \frac{P_t}{P_{t-1}} = \ln P_t - \ln P_{t-1} = p_t - p_{t-1} \quad (8)$$

Uma grande vantagem dos retornos logarítmicos é que, para múltiplos períodos de tempo, o retorno é composto pela simples soma dos retornos em cada período de tempo, como pode ser visto a seguir.

$$r_{t,k} = \ln(1 + R_{t,k}) = \ln[(1 + R_t) \times (1 + R_{t-1}) \times \dots \times (1 + R_{t-(k-1)})]$$

$$r_{t,k} = \ln(1 + R_t) + \ln(1 + R_{t-1}) + \dots + \ln(1 + R_{t-(k-1)})$$

$$r_{t,k} = r_t + r_{t-1} + \dots + r_{t-(k-1)} \quad (9)$$

Para retornos pequenos, o valor do retorno logarítmico se aproxima do retorno aritmético. Com isso, podem-se usar as séries dos retornos logarítmicos dos ativos no lugar dos retornos aritméticos.

De acordo com a equação (8),

$$r_t = \ln(1 + R_t)$$

Aplicando a expansão de Taylor:

$$r_t = \ln(1 + R_t) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} R_t^k = R_t - \frac{1}{2} R_t^2 + \frac{1}{3} R_t^3 - \dots$$

Se R_t for pequeno, as parcelas que possuem R_t^2 e de ordem superiores são desprezíveis, ocasionando que:

$$r_t \cong R_t$$

Na ampla maioria dos casos os retornos logarítmicos podem e são utilizados.

3

Modelos de escolha de carteiras de investimento

3.1. Modelo de Índice Único

A observação casual do comportamento dos preços das ações revela que, quando o mercado sobe (o que é medido por qualquer um dos índices de mercado disponíveis), a maioria das ações tende a subir em termos de preço e que, quando o mercado cai, os preços da maioria das ações também caem. Isso sugere que um dos motivos pelos quais os retornos dos títulos são correlacionados poderia ser uma resposta comum a variações do mercado, e que uma medida útil dessa correlação poderia ser obtida ao se relacionar o retorno de uma ação ao retorno de um índice de mercado de ações (por exemplo ao IBOVESPA). Este processo de somente relacionar cada título ao mercado reduz drasticamente o número de parâmetros necessários e o tempo de computação no processo de seleção e otimização da carteira.

O retorno de uma ação poderia ser escrito do seguinte modo:

$$R_i = a_i + \beta_i R_m \quad (10)$$

onde:

a_i é o componente do retorno do título i que é independente do desempenho do mercado, em si uma variável aleatória.

R_m é a taxa de retorno do índice de mercado, ou seja, uma variável aleatória.

β_i é uma constante que mede a variação esperada de R_i dada uma variação de R .

Essa equação simplesmente decompõe o retorno de uma ação em dois elementos, a parte devida ao comportamento de mercado e a parte independente do mercado. O β_i na expressão mede a sensibilidade do retorno de uma ação ao retorno do mercado.

Representemos por α_i o valor esperado de a_i e seja e_i o componente aleatório de a_i . Nesse caso:

$$a_i = \alpha_i + e_i$$

onde e_i tem valor esperado igual a zero. A equação do retorno de uma ação pode ser escrita do seguinte modo:

$$R_i = \alpha_i + \beta_i R_m + e_i \quad (11)$$

Representemos os desvios-padrão de R_m e e_i por, respectivamente, σ_m e σ_{e_i} . Até o presente momento, não foi feita nenhuma hipótese simplificadora. O retorno está sendo definido como a soma de diversos componentes, mas esses componentes, quando somados, devem por definição ser igual ao retorno total.

É conveniente que os e_i sejam não correlacionados com R_m . Formalmente, isso significa que:

$$\text{cov}(e_i, R_m) = E[(e_i - 0)(R_m - \bar{R}_m)] = 0$$

Isso garante que a capacidade da regressão descrever o retorno de qualquer ação independe de qual é o retorno de mercado.

A hipótese-chave do modelo de índice único é a de que e é independente de e_j para todos os valores de i e j , ou, mais formalmente, $E(e_i e_j) = 0$. Isso significa que o único motivo pelo qual as ações variariam em conjunto, de forma sistemática, seria uma variação conjunta comum com o mercado. Não existiriam outros efeitos além do mercado que fossem responsáveis pelo movimento comum entre ações.

Desenvolveremos a seguir o retorno esperado, o desvio-padrão e a covariância quando o modelo de índice único é utilizado para representar o movimento conjunto das ações.

O retorno esperado de uma ação é:

$$E(R_i) = E[\alpha_i + \beta_i R_m + e_i]$$

Como o valor esperado da soma de variáveis aleatórias é igual à soma de seus valores esperados, temos:

$$E(R_i) = E(\alpha_i) + E(\beta_i R_m) + E(e_i)$$

Como α_i e β_i são constantes e, por construção, o valor esperado de e_i é zero, temos:

$$\boxed{E(R_i) = \alpha_i + \beta_i \bar{R}_m} \quad (12)$$

A variância do retorno de qualquer ação é:

$$\sigma_i^2 = E(R_i - \bar{R}_i)^2$$

Substituindo os valores de R_i e \bar{R}_i na expressão anterior, obtemos:

$$\sigma_i^2 = E[(\alpha_i + \beta_i R_m + e_i) - (\alpha_i + \beta_i \bar{R}_m)]^2$$

Cancelando os α_i 's colocando β_i em evidência, temos:

$$\sigma_i^2 = E[\beta_i (R_m - \bar{R}_m) + e_i]^2$$

Mas $E[e_i (R_m - \bar{R}_m)] = 0$. Então,

$$\sigma_i^2 = \beta_i^2 E[(R_m - \bar{R}_m)]^2 + E(e_i)^2$$

$$\boxed{\sigma_i^2 = \beta_i^2 \sigma_m^2 + E(e_i)^2} \quad (13)$$

A covariância entre os retornos de duas ações pode ser assim escrita:

$$\sigma_{ij} = E[(R_i - \bar{R}_i)(R_j - \bar{R}_j)]$$

Substituindo os valores de R_i , \bar{R}_i , R_j e \bar{R}_j , temos:

$$\sigma_{ij} = E\{[(\alpha_i + \beta_i R_m + e_i) - (\alpha_i + \beta_i \bar{R}_m)][(\alpha_j + \beta_j R_m + e_j) - (\alpha_j + \beta_j \bar{R}_m)]\}$$

Cancelando os α_i 's e os α_j 's e colocando β_i e β_j em evidência, temos:

$$\sigma_{ij} = E[(\beta_i (R_m - \bar{R}_m) + e_i)(\beta_j (R_m - \bar{R}_m) + e_j)]$$

Realizando a multiplicação,

$$\sigma_{ij} = \beta_i \beta_j E(R_m - \bar{R}_m)^2 + \beta_j E[e_i (R_m - \bar{R}_m)] + \beta_i E[e_j (R_m - \bar{R}_m)] + E(e_i e_j)$$

Mas, por hipótese, os três últimos termos são nulos:

$$\boxed{\sigma_{ij} = \beta_i \beta_j \sigma_m^2} \quad (14)$$

Posso ainda calcular o retorno esperado e a variância de qualquer carteira, supondo que o modelo de índice único seja válido.

O retorno esperado de uma carteira é dado por:

$$\bar{R}_p = \sum_{i=1}^N X_i \bar{R}_i$$

onde

X_i é o peso do ativo i na composição da carteira.

Substituindo \bar{R}_i , temos:

$$\boxed{\bar{R}_p = \sum_{i=1}^N X_i \alpha_i + \sum_{i=1}^N X_i \beta_i \bar{R}_m} \quad (15)$$

É sabido que a variância do retorno de uma carteira de ações é dada por:

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^N X_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i}^N X_i X_j \sigma_{ij}$$

Substituindo os resultados encontrados acima para σ_i^2 e σ_{ij} , temos:

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^N X_i^2 \beta_i^2 \sigma_m^2 + \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i}^N X_i X_j \beta_i \beta_j \sigma_m^2 + \sum_{i=1}^N X_i^2 \sigma_{ei}^2 \quad (16)$$

3.1.1. Características do Modelo de Índice Único

Defini-se o beta de uma carteira (β_p) como sendo uma média ponderada dos betas individuais de cada ação contida na carteira, sendo os pesos iguais às proporções aplicadas em cada ação. Portanto,

$$\beta_p = \sum_{i=1}^N X_i \beta_i$$

De maneira análoga, o alfa da carteira (α_p) é dado por:

$$\alpha_p = \sum_{i=1}^N X_i \alpha_i$$

Portanto, temos que:

$$\bar{R}_p = \alpha_p + \beta_p \bar{R}_m$$

Perceba que o beta da carteira de mercado é igual a 1 e as ações podem ser vistas como mais ou menos arriscadas do que o mercado, na medida em que seus betas são maiores ou menores do que 1.

A seguir, será examinado um pouco mais do risco de uma ação individual.

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^N X_i^2 \beta_i^2 \sigma_m^2 + \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i}^N X_i X_j \beta_i \beta_j \sigma_m^2 + \sum_{i=1}^N X_i^2 \sigma_{ei}^2$$

No somatório duplo, se $i=j$, então os termos seriam $X_i^2 \beta_i^2 \sigma_m^2$. Entretanto, esses são exatamente os termos na primeira soma. Portanto, a variância do retorno da carteira pode ser assim escrita:

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N X_i X_j \beta_i \beta_j \sigma_m^2 + \sum_{i=1}^N X_i^2 \sigma_{ei}^2$$

Reescrevendo após agrupar os termos, temos que:

$$\sigma_p^2 = \left(\sum_{i=1}^N X_i \beta_i \right) \left(\sum_{j=1}^N X_j \beta_j \right) \sigma_m^2 + \sum_{i=1}^N X_i^2 \sigma_{ei}^2$$

Ou seja, o risco da carteira do investidor poderia ser representado por:

$$\sigma_p^2 = \beta_p^2 \sigma_m^2 + \sum_{i=1}^N X_i^2 \sigma_{ei}^2 \quad (17)$$

À medida que aumentamos o número de ações na carteira (maior diversificação), a importância de $\sum_{i=1}^N X_i^2 \sigma_{ei}^2$ diminui drasticamente. O risco que não é eliminado à medida que aumenta o tamanho da carteira é o risco associado ao termo β_p . Logo, o risco da carteira tende para:

$$\sigma_p = \left[\beta_p^2 \sigma_m^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \beta_p \sigma_m = \sigma_m \left[\sum_{i=1}^N X_i \beta_i \right] \quad (18)$$

Como o valor de σ_m é o mesmo qualquer que seja a ação examinada, a medida de contribuição de uma ação ao risco de uma carteira ampla é β_j .

3.2. Estimação de Beta

O uso do modelo de índice único requer estimativas de beta de cada ação que seja candidata a inclusão numa carteira. Por outro lado, as estimativas de betas futuros podem resultar do processamento de dados passados e do uso de betas históricos como estimativas. Há evidências de que os betas históricos contêm informação útil sobre betas futuros.

3.2.1. Estimação de betas históricos

Representamos o retorno de uma ação da seguinte maneira:

$$R_i = \alpha_i + \beta_i R_m + e_i$$

Espera-se que esta equação seja válida em todos os momentos, embora os valores de α_i , β_i e $\sigma_{e_i}^2$ possam variar com o passar do tempo. Se fizermos a suposição de que α_i , β_i e $\sigma_{e_i}^2$ não variam com o passar do tempo, então deve ser esperado que a mesma equação seja sempre válida. Nesse caso, há um procedimento simples para estimar α_i , β_i e $\sigma_{e_i}^2$.

Note que a equação é de uma reta. Geralmente, estimamos a localização da linha característica da ação usando análise de regressão. Trata-se de ajustar a linha reta aos dados para minimizar a soma dos quadrados das diferenças em relação à linha na direção vertical. A inclinação dessa linha reta seria nossa melhor estimativa de beta no período ao qual a linha foi ajustada, e o intercepto seria nossa melhor estimativa de alfa (α_i).

Para estimar o beta de uma ação por meio de análise de regressão, usamos:

$$\beta_i = \frac{\sigma_{im}}{\sigma_m^2} \quad (19)$$

Para estimar o alfa, usamos:

$$\alpha_i = \bar{R}_{it} - \beta_i \bar{R}_{mt} \quad (20)$$

onde:

\bar{R}_{it} é o retorno médio do ativo i no período t ;

\bar{R}_{mt} é o retorno médio do mercado no período t .

Os valores de α_i e β_i produzidos numa análise de regressão correspondem a estimativas dos verdadeiros valores de α_i e β_i de uma ação. As estimativas

estão sujeitas a erro. Além disso, uma complicação adicional do processo reside no fato de que α_i e β_i não são perfeitamente estacionários no tempo. Esperaríamos que sofressem alterações à medida que mudassem as características fundamentais da empresa. Apesar do erro de mensuração do verdadeiro β_i e da possibilidade de mudanças no β_i verdadeiro com o tempo, a maneira mais direta de prever β_i para um período futuro consiste em usar uma estimativa de β_i obtida por meio de análise de regressão com dados de um período passado.

3.3. Otimização de carteiras

Otimizar a carteira é basicamente escolher as proporções ótimas de investimento nas ações de modo a minimizar o risco total da carteira, dado um determinado retorno esperado desejado.

O problema então é minimizar o risco da carteira (minimizar σ_p^2) sujeito a restrição de que o retorno esperado da carteira seja igual a \bar{R}_p , em que \bar{R}_p é a média ponderada dos retornos médios dos títulos com risco e sem risco da carteira, ou seja:

$$\bar{R}_p = \sum_{i=1}^N X_i \bar{R}_i + \left(1 - \sum_{i=1}^N X_i\right) R_f$$

Adicionalmente inclui uma restrição que proíba posições a descoberto. Formalizando o problema, temos que:

$$\text{Minimizar } \sigma_p^2 = \sum_{i=1}^N X_i^2 \beta_i^2 \sigma_m^2 + \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i}^N X_i X_j \beta_i \beta_j \sigma_m^2 + \sum_{i=1}^N X_i^2 \sigma_{ei}^2$$

$$\text{sujeito a } \bar{R}_p = \sum_{i=1}^N X_i \bar{R}_i + \left(1 - \sum_{i=1}^N X_i\right) R_f$$

$$X_i \geq 0 \quad i=1,2,\dots,N$$

A resolução deste sistema é um problema de programação quadrática, que foi resolvido por Elton, Gruber & Padberg (1976) e resulta nas seguintes frações ótimas:

$$y_i = \frac{\beta_i}{\sigma_{ei}^2} \left[\left(\frac{R}{V} \right)_i - C_i \right] \quad (21)$$

onde:

$$C_i = \frac{\sigma_m^2 \sum_{j=1}^i \frac{(\bar{R}_j - R_f) \beta_j}{\sigma_{ej}^2}}{1 + \sigma_m^2 \sum_{j=1}^i \frac{\beta_j^2}{\sigma_{ej}^2}} \quad (22)$$

$$\left(\frac{R}{V} \right)_i = \frac{\bar{R}_i - R_f}{\beta_i} \quad (23)$$

O processo de otimização no contexto do Modelo de Índice Único consiste nas seguintes etapas:

1. ordenar os títulos em ordem decrescente de $\left(\frac{R}{V} \right)_i$;

2. para cada título i calcula-se um valor C_i . Por exemplo, tendo-se N títulos candidatos a integrar a carteira, o cálculo de C_2 inclui unicamente os dois títulos com mais alto $\left(\frac{R}{V} \right)$. O cálculo de C_3 inclui unicamente os três títulos com mais alto $\left(\frac{R}{V} \right)$, e assim sucessivamente. O cálculo de C_N inclui todos os N títulos;

3. comparar todos os $\left(\frac{R}{V} \right)_i$ com o correspondente C_i . A seguir, identifica-se um C_i de modo que todos os títulos incluídos em seu cálculo tenham

$\left(\frac{R}{V}\right)_i > C_i$ e todos os não incluídos tenham $\left(\frac{R}{V}\right)_i < C_i$. O C_i com esta propriedade denota-se como taxa de corte C^* ;

4. todos os títulos com $\left(\frac{R}{V}\right)_i < C^*$ terão atribuídas fração zero;

5. a fração ótima dos títulos que não tiveram fração zero é calculada da seguinte forma:

$$y_i = \frac{\beta_i}{\sigma_i^2} \left[\frac{\bar{R}_i - R_f}{\beta_i} - C^* \right] \quad i=1,2,\dots,N \quad (24)$$

6. para satisfazer que $\sum_{i=1}^N X_i = 1$ as frações ótimas são calculadas da seguinte forma:

$$X_i = \frac{y_i}{\sum_{i=1}^N y_i} \quad i=1,2,\dots,N$$

3.4. Dominância Estocástica

A forma mais geral de dominância estocástica não faz qualquer hipótese sobre a forma da distribuição de probabilidades dos retornos. Além disso, quando empregamos o critério de dominância estocástica, não precisamos supor qualquer forma específica para as funções utilidade dos investidores. Há três premissas progressivamente mais fortes, sobre o comportamento dos investidores, empregadas na literatura de dominância estocástica. Elas conduzem diretamente à dominância estocástica de primeira, segunda e terceira ordem.

A dominância estocástica de primeira ordem pressupõe que um investidor prefere receber mais a receber menos.

A dominância estocástica de segunda ordem supõe que, além de preferirem mais a menos, os investidores têm aversão a risco.

A dominância estocástica de terceira ordem adiciona, às duas hipóteses da dominância estocástica de segunda ordem, a suposição de que os investidores têm aversão absoluta decrescente a risco.

O teorema da dominância estocástica de primeira ordem é: se os investidores preferem ter mais a ter menos, e se a probabilidade acumulada de A nunca é superior à probabilidade acumulada de B, e às vezes é menor, então A é preferível a B. A probabilidade acumulada de A nunca é superior à probabilidade acumulada de B se as duas curvas nunca se cruzarem e a de A não fica acima da curva de B.

Se as duas curvas cruzarem, não será possível optar entre A e B com base em dominância estocástica de primeira ordem. Para poder optar, precisamos fazer uma hipótese mais forte a respeito das características das funções utilidade. Se fizermos a suposição de aversão a risco, além da suposição de preferência por maior retorno, essa questão poderá ser resolvida. Aversão a risco significa que o investidor deve receber compensação por assumir risco. Ela surge quando cada acréscimo de retorno vale menos para o investidor do que o acréscimo anterior. Dito de outra forma, o investidor deve estar disposto a perder 1% de retorno em nível mais alto de retorno para poder conseguir 1% de retorno adicional num nível baixo de retorno.

Essas idéias podem ser formalizadas no seguinte teorema. Se:

- Os investidores preferem ter mais a ter menos.
- Os investidores têm aversão a risco.
- A soma das probabilidades acumuladas de todos os retornos nunca é maior com o investimento A do que com o investimento B, e às vezes é menor,

Então A domina B por dominância estocástica de segunda ordem.

É preciso tomar algum cuidado para não se exagerar a importância da dominância estocástica. Em geral, ela envolve comparações de todas as alternativas, mas aos pares.

A dominância estocástica de terceira ordem pressupõe que os investidores possuem aversão absoluta decrescente a risco. Uma das propriedades de uma função que possui essa característica é uma terceira derivada positiva. O teorema de dominância estocástica de terceira ordem utiliza este fato.

A domina B por dominância estocástica de terceira ordem se:

1. Os investidores preferem mais riqueza a menos riqueza.
2. Os investidores têm aversão a risco.
3. A terceira derivada da função utilidade dos investidores é positiva.
4. A média de A é maior do que a média de B.
5. A soma da soma da distribuição de probabilidade acumulada para todos os retornos nunca é maior para A do que para B, e às vezes é menor.

4 A Teoria dos Valores Extremos

A Teoria dos Valores Extremos (TVE) vem sendo bastante utilizada em campos ligados a eventos raros. Sua estatística é aplicada na estimação de eventos climáticos, cálculo de seguros e eventos pouco comuns no mercado financeiro. A utilização da TVE teve impulso em 1953, quando barragens que protegem a Holanda do avanço do mar se romperam e causaram a inundação de boa parte do país, provocando a morte de 1800 pessoas. Após o desastre, o governo da Holanda criou um comitê que utilizava o ferramental ligado a Teoria dos Valores Extremos para estabelecer a altura das barragens.

4.1. As medidas de risco e a Teoria dos Valores Extremos

Observando-se as definições do VaR, fica evidente que tais medidas são extremamente dependentes de boas estimativas das caudas da distribuição dos retornos, dado que são calculados a partir dos retornos mais baixos da carteira ou ativo em questão.

Os métodos tradicionais de cálculo de VaR podem apresentar deficiências ao estimar as caudas das distribuições, além de se basearem na distribuição inteira dos dados. Sendo assim, novas metodologias estão sendo propostas, com base na Teoria dos Valores Extremos, pois esta tem a capacidade de estimar com razoável precisão probabilidades e quantis nos extremos da amostra, bem como fora desta.

Isso torna a TVE atraente para modelos de cálculo de VaR, dado que este está intimamente relacionado às observações extremas. No entanto, uma das hipóteses fundamentais da TVE é que os dados que compõem a amostra sejam independentes e identicamente distribuídos.

4.2. A distribuição dos mínimos

Assuma que r_t é o retorno de um ativo medido em um intervalo de tempo fixo. Considere a reunião dos n retornos como $\{r_1, \dots, r_n\}$. O retorno mínimo desse

conjunto é $r_{(1)}$, ou seja, quando estes retornos são ordenados levando-se em conta seu valor, $r_{(1)}$ é o menor deles. Aplicando-se o mesmo conceito, $r_{(n)}$ é o retorno de maior valor.

Essa abordagem enfoca as propriedades de $r_{(1)}$ porque esse valor mínimo é de extrema relevância para o cálculo do VaR em posições compradas no ativo, que é o objeto do presente estudo.

Assuma ainda que os retornos r são serialmente independentes e com uma função de distribuição acumulada $F(x)$. Os limites do retorno r são $[l, u]$. Para retornos logarítmicos, tem-se $l = -\infty$ e $u = \infty$. Então a função de distribuição acumulada (CDF) de $r_{(1)}$, chamada de $F_{n,1}(x)$, é dada por:

$$F_{n,1}(x) = P[r_{(1)} \leq x] = 1 - P[r_{(1)} > x]$$

$$F_{n,1}(x) = 1 - P[r_1 > x, r_2 > x, \dots, r_n > x]$$

Utilizando a premissa de que os retornos dos ativos são independentes:

$$F_{n,1}(x) = 1 - \prod_{j=1}^n P(r_j > x)$$

$$F_{n,1}(x) = 1 - \prod_{j=1}^n [1 - P(r_j \leq x)]$$

Como os retornos seguem uma mesma distribuição de probabilidade:

$$F_{n,1}(x) = 1 - \prod_{j=1}^n [1 - F(x)]$$

$$F_{n,1}(x) = 1 - [1 - F(x)]^n \quad (25)$$

Na prática a CDF $F(x)$ de r_i é desconhecida e, portanto, $F_{n,1}(x)$ de $r_{(1)}$ também é desconhecida. Entretanto, fazendo uma adaptação da demonstração para

máximos descrita em Embrechts et al (1997), se n cresce para o infinito, $F_{n,1}(x)$ torna-se degenerada, pois teria-se:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{n,1}(x) = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} [1 - F(x)]^n$$

Se $x \leq l$, $F(x) = 0$ e, portanto, $\lim_{n \rightarrow \infty} [1 - F(x)]^n = \lim_{n \rightarrow \infty} [1]^n = 1$, o que daria:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{n,1}(x) = 1 - 1 = 0$$

Se $x > l$, $F(x) > 0$ e, portanto, $1 - F(x) < 1$, fazendo com que $\lim_{n \rightarrow \infty} [1 - F(x)]^n = 0$.

Teria-se então:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{n,1}(x) = 1 - 0 = 1$$

Essa CDF degenerada não possui valores práticos.

Dada as circunstâncias, recorre-se a resultados de convergência fraca para mínimos centrados e normalizados, fornecidos pelo teorema de Fisher-Tippett (anunciado adiante). Tal teorema argumenta que podem ser obtidas duas seqüências $\{\beta_n\}$ e $\{\alpha_n\}$ onde $\alpha_n > 0$, de tal forma que a distribuição de

$r_{(1)^*} = \frac{(r_{(1)} - \beta_n)}{\alpha_n}$ converge para uma distribuição não degenerada quando n vai

para infinito. A seqüência $\{\beta_n\}$ é uma série local e $\{\alpha_n\}$ é uma série de fatores escalares. Seguindo ainda a ótica do Teorema de Fisher-Tippett sobre o fato de assumirem-se retornos independentes, a distribuição limite dos mínimos normalizados $r_{(1)^*}$ é dada por:

$$F_*(x) = \begin{cases} 1 - \exp\left[-(1+kx)^{\frac{1}{k}}\right] & \text{se } k \neq 0 \\ 1 - \exp[-\exp(x)] & \text{se } k = 0 \end{cases} \quad (26)$$

para $x < -\frac{1}{k}$ se $k < 0$ e para $x > -\frac{1}{k}$ se $k > 0$, onde o subscrito * significa mínimo. No caso de $k = 0$, aplicou-se $\lim_{k \rightarrow 0} \left((1+kx)^{\frac{1}{k}} \right) = \exp(x)$. O parâmetro k é chamado de parâmetro de formato que governa o comportamento da cauda da distribuição limite.

A distribuição limite na eq. (26) é a distribuição generalizada do valor extremo de Jenkinson para mínimo. Ela compreende os três tipos de distribuições limites de Gnedenko:

Tipo 1: $k = 0$, a família Gumbel. A CDF é:

$$F_*(x) = 1 - \exp[-\exp(x)], \quad -\infty < x < \infty \quad (27)$$

Tipo 2: $k < 0$, a família Fréchet. A CDF é:

$$F_*(x) = \begin{cases} 1 - \exp\left[-(1+kx)^{\frac{1}{k}}\right] & \text{se } x < -\frac{1}{k} \\ 1 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (28)$$

Tipo 3: $k > 0$, a família Weibull. A CDF é:

$$F_*(x) = \begin{cases} 1 - \exp\left[-(1+kx)^{\frac{1}{k}}\right] & \text{se } x > -\frac{1}{k} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (29)$$

A figura abaixo mostra as CDFs para as três distribuições: Gumbel, Fréchet e Weibull.

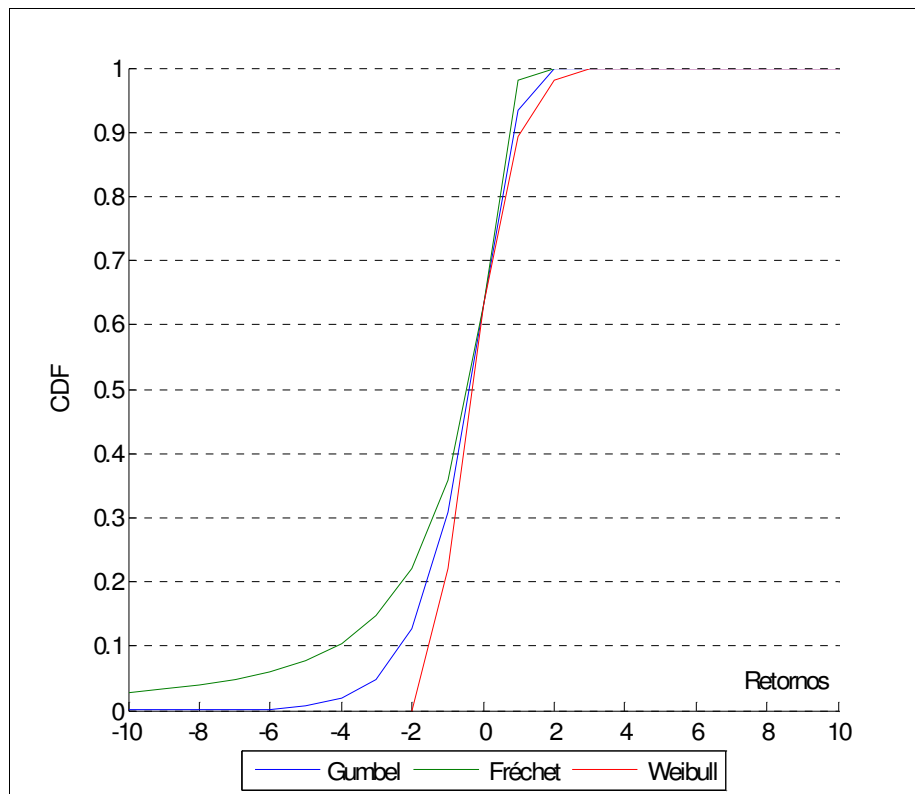


Figura 2 - Função de distribuição acumulada das três distribuições para mínimos.

A função de densidade de probabilidade (pdf) da distribuição limite generalizada da eq. (26) pode ser obtida por diferenciação e aplicação da regra da cadeia:

Se $k \neq 0$:

$$f_*(x) = \frac{dF_*(x)}{dx} = -\exp\left[-(1+kx)^{\frac{1}{k}}\right] \frac{d}{dx}\left[-(1+kx)^{\frac{1}{k}}\right] = -\exp\left[-(1+kx)^{\frac{1}{k}}\right] \left(-\frac{1}{k}(1+kx)^{\left(\frac{1}{k}-1\right)}k\right)$$

$$f_*(x) = (1+kx)^{\left(\frac{1}{k}-1\right)} \exp\left[-(1+kx)^{\frac{1}{k}}\right] \quad (30)$$

Se $k = 0$:

$$f_*(x) = \frac{dF_*(x)}{dx} = -(-\exp(x))\exp(-\exp(x)) = \exp(x)\exp(-\exp(x))$$

$$f_*(x) = \exp(x - \exp(x)) \quad (31)$$

Resumindo:

$$f_*(x) = \begin{cases} (1+kx)^{\left(\frac{1}{k}-1\right)} \exp\left[-(1+kx)^{\frac{1}{k}}\right] & \text{se } k \neq 0 \\ \exp(x - \exp(x)) & \text{se } k = 0 \end{cases} \quad (32)$$

onde $-\infty < x < \infty$ para $k = 0$;

$$x < -\frac{1}{k} \text{ para } k < 0;$$

$$x > -\frac{1}{k} \text{ para } k > 0.$$

A figura a seguir mostra o formato da função de densidade de probabilidade para as três distribuições. Resumindo, o comportamento da cauda de $F(x)$ determina a distribuição limite de mínimos $F_*(x)$. Analisando a cauda esquerda das três distribuições, nota-se que, para a família Gumbel, ela declina exponencialmente; para a Fréchet, ela declina seguindo uma função potência; na família Weibull ela é finita. Para gerenciamento de risco, na maior parte dos casos o interesse recai sobre a família Fréchet, que inclui distribuições estáveis e t-Student. A família Gumbel consiste em distribuições com caudas leves que mais se aproximam às distribuições normal e log-normal.

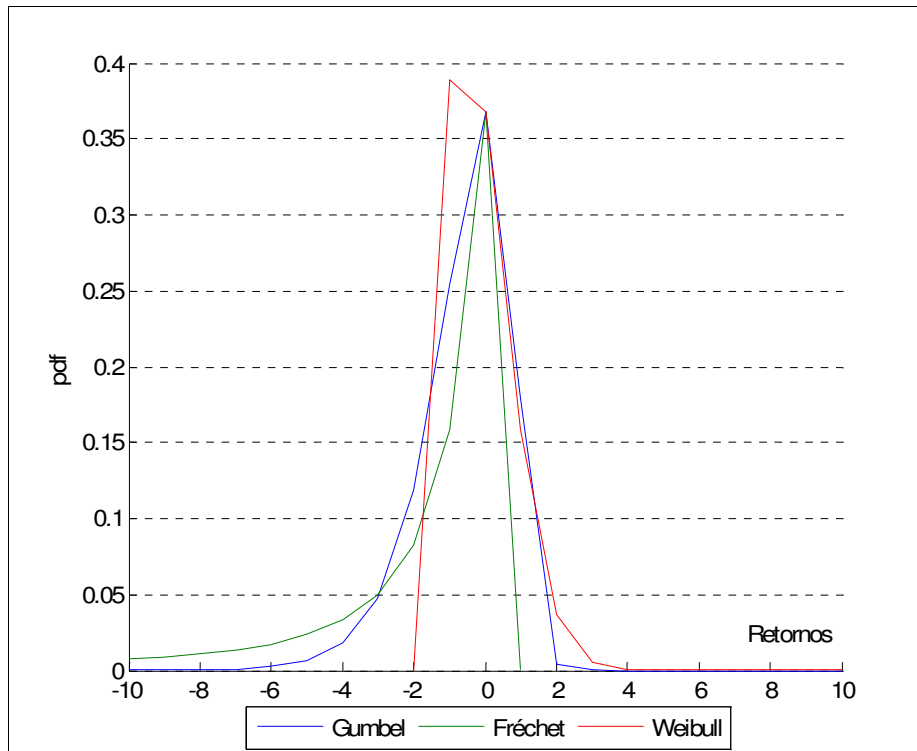


Figura 3 – Funções densidade de probabilidade para as três distribuições para mínimos.

A Teoria dos Valores Extremos possui duas importantes implicações. Primeiro, o comportamento da cauda da CDF $F(x)$ de r_t determina a distribuição limite (normalizada) de mínimos $F_*(x)$. Depois, a teoria é geralmente aplicável a um amplo número de distribuições de retornos r_t .

4.2.1. O teorema de Fisher-Tippett

Seja r_t , $t = 1, 2, \dots, n$ uma seqüência de variáveis aleatórias iid. Se existirem constantes $\alpha_n > 0$ e β_n e alguma distribuição não degenerada H tais que

$$\alpha_n^{-1}(r_{(1)} - \beta_n) \xrightarrow{d} H, \quad n \rightarrow \infty$$

então H pertence a um dos três tipos de distribuição:

Fréchet:

$$\Phi_{\alpha}(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \exp\{-x^{-\alpha}\} & x > 0 \end{cases} \quad \alpha > 0 \quad (33)$$

Weibull:

$$\Psi_{\alpha}(x) = \begin{cases} \exp\{-(-x)^{\alpha}\} & x \leq 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases} \quad \alpha > 0 \quad (34)$$

Gumbel:

$$\Lambda(x) = \exp\{-e^{-x}\} \quad x \in \mathfrak{R} \quad (35)$$

A referência da demonstração do teorema pode ser encontrada em Embrechts et al (1997).

Embora tais distribuições sejam diferentes, do ponto de vista matemático elas estão intimamente relacionadas, como pode ser verificado através das equivalências abaixo (Embrechts et al (1997)):

$$X \sim \Phi_{\alpha} \Leftrightarrow \ln X^{\alpha} \sim \Lambda \Leftrightarrow -X^{-1} \sim \Psi_{\alpha}$$

O teorema de Fisher-Tippett é válido para qualquer variável aleatória independente e identicamente distribuída, tal que a transformação referida produza uma variável aleatória não degenerada. Dizemos então que a variável aleatória pertence à classe das distribuições max-estáveis.

4.3. Métodos de estimação

Apresentaremos agora alguns dos métodos de estimação das caudas de distribuições utilizando-se a Teoria dos Valores Extremos. O método baseado no estimador de Hill será utilizado no presente trabalho.

A distribuição de valores extremos contém três parâmetros: k , β_n e α_n . Eles podem ser estimados usando-se tanto métodos paramétricos como não-paramétricos.

Para uma amostra dada, só existem um único máximo e um único mínimo. E sendo assim, não se consegue estimar os três parâmetros com apenas uma observação extrema. Usa-se então uma idéia alternativa, que consiste em dividir a amostra em sub-períodos e aplicar a Teoria dos Valores Extremos a esses sub-períodos.

Assuma que existem T retornos possíveis. Divide-se a amostra em g sub-períodos não repetidos, cada qual com n observações, de tal forma que $T = ng$. Se n for suficientemente grande, supõe-se que a Teoria dos Valores Extremos se aplica para cada sub-amostra.

Considere $r_{n,i}$ como o retorno mínimo da i -ésima sub-amostra, onde n significa o tamanho da sub-amostra. Quando n é suficientemente grande, $x_{n,i} = \frac{(r_{n,i} - \beta_n)}{\alpha_n}$ deve seguir uma distribuição de valor extremo, e o conjunto dos mínimos das sub-amostras $\{r_{n,i} \mid i = 1, \dots, g\}$ pode então ser considerada como uma amostra de g observações que segue uma distribuição de valores extremos. Especificamente, define-se:

$$r_{n,i} = \min_{1 \leq j \leq n} \{r_{(i-1)n+j}\}, \quad i = 1, \dots, g$$

Essa definição dá a exata localização dos mínimos das sub-amostras dentro da amostra como um todo. Esse conjunto dos mínimos das sub-amostras serão os dados utilizados na estimativa dos parâmetros da distribuição de valores extremos.

4.3.1. Abordagem Paramétrica

Nesta seção serão apresentadas duas abordagens paramétricas: o método de máxima verossimilhança e o da regressão.

4.3.1.1. Método de Máxima Verossimilhança

Assuma que o conjunto dos mínimos das sub-amostras segue uma distribuição de valores extremos de tal modo que a pdf de $x_{n,i} = \frac{(r_{n,i} - \beta_n)}{\alpha_n}$ é dada pela eq. (32). Pode-se obter a pdf de $r_{n,i}$ realizando uma simples substituição:

$$f(r_{n,i}) = \begin{cases} \left(1 + \frac{k_n(r_{n,i} - \beta_n)}{\alpha_n}\right)^{\left[\frac{1}{k_n}\right]-1} \exp\left[-\left(1 + \frac{k_n(r_{n,i} - \beta_n)}{\alpha_n}\right)^{\frac{1}{k_n}}\right] & \text{se } k_n \neq 0 \\ \exp\left[\frac{(r_{n,i} - \beta_n)}{\alpha_n} - \exp\left(\frac{(r_{n,i} - \beta_n)}{\alpha_n}\right)\right] & \text{se } k_n = 0 \end{cases} \quad (36)$$

onde se entende que $1 + \frac{k_n(r_{n,i} - \beta_n)}{\alpha_n} > 0$ se $k_n \neq 0$. O subscrito n adicionado ao parâmetro k significa que sua estimativa depende da escolha de n . Como se assumiu que os retornos são independentes, a função de verossimilhança do conjunto dos mínimos das sub-amostras é:

$$l(r_{n,1}, \dots, r_{n,g} | k_n, \beta_n, \alpha_n) = \prod_{i=1}^g f(r_{n,i}) \quad (37)$$

$$l(r_{n,1}, \dots, r_{n,g} | k_n, \beta_n, \alpha_n) = \prod_{i=1}^g \left\{ \left[1 + k_n \left(\frac{r_{n,i} - \beta_n}{\alpha_n}\right)\right]^{\left(\frac{-1+k_n}{k_n}\right)} \right\} \exp\left\{ \sum_{i=1}^g \left[- \left[1 + k_n \left(\frac{r_{n,i} - \beta_n}{\alpha_n}\right)\right]^{\frac{1}{k_n}} \right] \right\} \quad (38)$$

Logo, o logaritmo da função de verossimilhança é dado por:

$$L(k_n, \beta_n, \alpha_n) = \ln[l(r_{n,1}, \dots, r_{n,g} | k_n, \beta_n, \alpha_n)] \quad (39)$$

$$\begin{aligned}
&= -\left(\frac{-1+k_n}{k_n}\right) \sum_{i=1}^g \ln \left[1 + k_n \left(\frac{r_{n,i} - \beta_n}{\alpha_n} \right) \right] - \sum_{i=1}^g \left[1 + k_n \left(\frac{r_{n,i} - \beta_n}{\alpha_n} \right) \right]^{\frac{1}{k_n}} \\
&= \sum_{i=1}^g \left\{ \left[-\left(\frac{-1+k_n}{k_n}\right) \right] \ln \left[1 + k_n \left(\frac{r_{n,i} - \beta_n}{\alpha_n} \right) \right] - \left[1 + k_n \left(\frac{r_{n,i} - \beta_n}{\alpha_n} \right) \right]^{\frac{1}{k_n}} \right\} \quad (40)
\end{aligned}$$

Os estimadores de máxima verossimilhança de k_n , β_n e α_n são obtidos pela solução do sistema de equações não lineares formada pelas derivadas parciais da equação acima, em relação a cada parâmetro e igualadas a zero, ou seja:

$$\frac{\partial L(k_n, \beta_n, \alpha_n)}{\partial k_n} = 0$$

$$\frac{\partial L(k_n, \beta_n, \alpha_n)}{\partial \beta_n} = 0$$

$$\frac{\partial L(k_n, \beta_n, \alpha_n)}{\partial \alpha_n} = 0$$

Essa estimativa é não viesada, assintoticamente normal e de mínima variância sob premissas apropriadas. Devemos levar em conta que, ao ajustar a distribuição generalizada do valor extremo aos mínimos de mínimos disjuntos, podemos estar perdendo informações relevantes contidas em outras observações que não os mínimos. O estimador de Hill, o qual será discutido adiante, contorna tal problema, e por isso será utilizado no presente trabalho para estimação do índice de cauda da distribuição generalizada do valor extremo. Para referências sobre tal método de estimação, ver Mendes (2000) e McNeil(1998).

4.3.1.2. Método da Regressão

Esse método assume que o conjunto dos mínimos das sub-amostras são amostras aleatórias da distribuição de valores extremos generalizada e faz uso de propriedades de ordenação estatística. Como resultado, têm-se a regressão:

$$\ln \left[-\ln \left(\frac{g+1-i}{g+1} \right) \right] = \begin{cases} \frac{1}{k_n} \ln \left(1 + k_n \frac{(r_{n(i)} - \beta_n)}{\alpha_n} \right) + e_i & \text{se } k \neq 0 \\ \frac{r_{n(i)}}{\alpha_n} - \frac{\beta_n}{\alpha_n} + e_i & \text{se } k = 0 \end{cases} \quad (41)$$

onde: $i = 1, \dots, g$;

e_i é o erro associado a regressão.

A estimativa pelo método da regressão é consistente, mas menos eficiente do que os estimadores de máxima verossimilhança.

4.3.2. Abordagem Não Paramétrica

O parâmetro de forma k pode ser estimado por alguns métodos não paramétricos. Aqui, dois são mencionados, um proposto por Pickands (estimador Pickands) e outro por Hill (estimador Hill). Ambos estimadores usam diretamente os retornos, não necessitando dividi-los em sub-amostras.

Chamando a ordenação estatística de $r_{(1)} \leq r_{(2)} \leq \dots \leq r_{(r)}$ e chamando de q um número inteiro positivo, os dois estimadores de k são definidos como:

$$\hat{k}_p(q) = -\frac{1}{\ln(2)} \ln \left[\frac{-r_{(q)} + r_{(2q)}}{-r_{(2q)} + r_{(4q)}} \right] \quad (42)$$

$$\hat{k}_h(q) = -\frac{1}{q} \sum_{i=1}^q \{ \ln[-r_{(i)}] - \ln[-r_{(q+1)}] \} \quad (43)$$

onde o argumento (q) é usado para enfatizar que os estimadores dependem de q .

4.3.2.1. Propriedades do estimador de Hill

Segundo o teorema 6.4.6 em Embrechts et al (1997), é possível obter consistência fraca quando (r_i) é iid: se $q \rightarrow \infty$, $q/n \rightarrow 0$ para $n \rightarrow \infty$ então

$$\hat{k}_h(q) \xrightarrow{p} k.$$

Consistência forte e normalidade assintótica também podem ser obtidas sob hipóteses adicionais. Neste caso temos $\sqrt{q}(\hat{k}_h(q) - k) \xrightarrow{d} N(0, k^2)$.

Vale aqui lembrar que o estimador de Hill é derivado com base na hipótese de uma amostra de dados iid. No entanto, o trabalho de Resnick e Starica (1998) mostra que é possível se obter consistência para dados que apresentam dependência.

Como podemos notar na sua definição, o estimador de Hill depende do número de estatísticas de ordem a serem utilizadas. Definir tal número é um problema não muito trivial, o qual será tratado com detalhes a seguir.

O estimador de Hill é aplicado apenas para a distribuição Fréchet, porém, quando aplicável, é mais eficiente que o estimador Pickands.

O estimador de Hill utiliza a amostra de dados como um todo, não havendo a necessidade de divisão da base de dados em sub-amostras para posterior obtenção da distribuição de valores extremos.

4.3.2.2. Escolha do número q de estatísticas de ordem a serem utilizadas

Uma das dificuldades encontradas na utilização do estimador de Hill diz respeito à escolha de q , ou, equivalentemente, à escolha da última estatística de ordem a ser utilizada na estimação. Escolher um valor particular para q significa escolher um ponto de corte onde as caudas da distribuição efetivamente começam, e a partir do qual a TVE pode ser aplicada eficientemente.

O problema é que não existe um consenso sobre qual a melhor maneira de determinar este ponto de corte, e o estimador de Hill é altamente sensível a este valor, principalmente em amostras pequenas. Esta situação é normalmente enfrentada quando tentamos modelar dados do mercado financeiro brasileiro, e portanto, devemos ser cuidadosos ao utilizar o estimador de Hill.

Como dito anteriormente, podemos mostrar que, sob determinadas hipóteses, $\sqrt{q}(\hat{k}_h(q) - k) \xrightarrow{d} N(0, k^2)$. Isso significa que, quanto maior o número q

de estatísticas de ordem, menor a variância do estimador. Poderíamos então pensar em escolher um valor suficientemente alto para q de forma a manter a variância reduzida. No entanto, é possível detectar a existência de um viés em amostras finitas, crescente com o valor de q , o que nos priva de escolher tal elevado valor. Isso nos mostra que existe um “trade-off” entre viés e variância no estimador de Hill, o que nos sugere que deve existir um valor ótimo de q onde viés e variância se estabilizam.

Para resolver tal problema, alguns métodos foram propostos na literatura, dentre eles um método baseado em *bootstrap*, desenvolvido por Danielsson e de Vries (1997a). Preferimos aqui utilizar um método gráfico, chamado de Hillplot (Embrechts et al (1997)).

Método gráfico – “Hillplot”

O Hillplot consiste em traçar o gráfico $\{(q, \hat{k}_h(q)) : q = 1, 2, \dots, n\}$, e procurar a região onde o estimador de Hill se estabiliza, ou seja, onde viés e variância devem estar equilibrados. Vale aqui notar que nem sempre é fácil identificar tal patamar no gráfico.

Para finalizar, vale ressaltar que a escolha do q ótimo depende das características de cada série, e que dados dependentes, com maior ocorrência de valores extremos sugerem valores mais elevados para q . Maiores referências podem ser encontradas em Souza (1999) e Danielson e de Vries (1997b).

4.4. Valores Extremos aplicados ao Value at Risk

Nesta seção será discutida uma abordagem para o cálculo do VaR usando a Teoria dos Valores Extremos. Essa discussão será dividida em duas subseções: a primeira será destinada a estimar os parâmetros da distribuição de valor extremo e a segunda enfoca o cálculo do VaR usando as probabilidades de interesse associadas a diferentes intervalos de tempo.

4.4.1. Estimativa dos Parâmetros

Assuma que existem T observações dos retornos de um ativo realizadas no período amostral. Como abordado anteriormente, dividiu-se o período em g sub-períodos não sobrepostos de tamanho n tal que $T = ng$. Se $T = ng + m$, com $1 \leq m \leq n$, então descartam-se as m primeiras observações da amostra. Os parâmetros k_n , β_n e α_n podem ser obtidos usando-se a teoria já abordada anteriormente. Substituindo $x_n = \frac{(r_n - \beta_n)}{\alpha_n}$ na CDF da eq. (26) e chamando de p^* a menor probabilidade que indica perdas potenciais e r_n^* o p^* -ésimo quantil do sub-período sob a distribuição limite de valores extremos, tem-se:

$$p^* = \begin{cases} 1 - \exp\left[-\left(1 + \frac{k_n(r_n^* - \beta_n)}{\alpha_n}\right)^{\frac{1}{k_n}}\right] & \text{se } k \neq 0 \\ 1 - \exp\left[-\exp\left(\frac{(r_n^* - \beta_n)}{\alpha_n}\right)\right] & \text{se } k = 0 \end{cases}$$

$$-1 + p^* = \begin{cases} -\exp\left[-\left(1 + \frac{k_n(r_n^* - \beta_n)}{\alpha_n}\right)^{\frac{1}{k_n}}\right] & \text{se } k \neq 0 \\ -\exp\left[-\exp\left(\frac{(r_n^* - \beta_n)}{\alpha_n}\right)\right] & \text{se } k = 0 \end{cases}$$

$$1 - p^* = \begin{cases} \exp\left[-\left(1 + \frac{k_n(r_n^* - \beta_n)}{\alpha_n}\right)^{\frac{1}{k_n}}\right] & \text{se } k \neq 0 \\ \exp\left[-\exp\left(\frac{(r_n^* - \beta_n)}{\alpha_n}\right)\right] & \text{se } k = 0 \end{cases}$$

$$\ln(1-p^*) = \begin{cases} -\left(1 + \frac{k_n(r_n^* - \beta_n)}{\alpha_n}\right)^{\frac{1}{k_n}} & \text{se } k \neq 0 \\ -\exp\left(\frac{(r_n^* - \beta_n)}{\alpha_n}\right) & \text{se } k = 0 \end{cases}$$

O quantil r_n^* será:

Para $k \neq 0$

$$-\ln(1-p^*) = \left(1 + \frac{k_n r_n^* - k_n \beta_n}{\alpha_n}\right)^{\frac{1}{k_n}}$$

$$[-\ln(1-p^*)]^{k_n} = \left(1 + \frac{k_n r_n^* - k_n \beta_n}{\alpha_n}\right)$$

$$-\frac{k_n r_n^*}{\alpha_n} = -[-\ln(1-p^*)]^{k_n} + 1 - \frac{k_n \beta_n}{\alpha_n}$$

$$r_n^* = -\frac{\alpha_n}{k_n} \left(-[-\ln(1-p^*)]^{k_n} + 1 - \frac{k_n \beta_n}{\alpha_n}\right)$$

$$r_n^* = \beta_n - \frac{\alpha_n}{k_n} \left(1 - [-\ln(1-p^*)]^{k_n}\right)$$

Para $k = 0$:

$$-\ln(1-p^*) = \exp\left(\frac{(r_n^* - \beta_n)}{\alpha_n}\right)$$

$$\ln[-\ln(1-p^*)] = \frac{r_n^*}{\alpha_n} - \frac{\beta_n}{\alpha_n}$$

$$\frac{r_n^*}{\alpha_n} = \frac{\beta_n}{\alpha_n} + \ln[-\ln(1-p^*)]$$

$$r_n^* = \beta_n + \alpha_n \ln[-\ln(1-p^*)]$$

Resumindo:

$$r_n^* = \begin{cases} \beta_n - \frac{\alpha_n}{k_n} \left(1 - [-\ln(1-p^*)]^{k_n}\right) & \text{se } k \neq 0 \\ \beta_n + \alpha_n \ln[-\ln(1-p^*)] & \text{se } k = 0 \end{cases} \quad (44)$$

Como já havia sido dito anteriormente, em finanças, na maioria das vezes, estamos interessados no caso em que $k \neq 0$.

Caso a opção para cálculo do parâmetro de forma da cauda k seja o estimador de Hill, algumas mudanças devem ser efetuadas. Segundo Embrechts et al (1997), o estimador de Hill é uma particularização do estimador de máxima verossimilhança e depois de algum algebrismo, pode-se obter a função de distribuição acumulada abaixo:

$$F(r_i) = \frac{q}{n} \left(\frac{r_i}{r_{(q+1)}} \right)^{\frac{1}{k_n(q)}}$$

O estimador para o quantil torna-se:

$$r = \left[\frac{n}{q} (1-p) \right]^{k_n(q)} r_{(q+1)} \quad (45)$$

Como dito anteriormente, o estimador de Hill utiliza a amostra de dados como um todo, não havendo a necessidade de divisão da base de dados em sub-amostras para posterior obtenção da distribuição de valores extremos.

4.5. Cálculo do VaR

Para uma dada probabilidade p^* (cauda esquerda), o quantil r_n^* da eq. (44) é o VaR baseado na Teoria dos Valores Extremos aplicada aos mínimos dos sub-

períodos da amostra. Agora será explicitada a relação entre os mínimos dos sub-períodos da amostra e as séries de retornos observadas.

Como a maioria dos retornos dos ativos são serialmente não correlacionados ou são fracamente serialmente correlacionados, pode-se usar a relação na eq. (44) e obter-se:

$$p^* = P(r_{n,i} \leq r_n^*) = 1 - [1 - P(r_{n,i} \leq r_n^*)]^n$$

$$1 - p^* = [1 - P(r_{n,i} \leq r_n^*)]^n \quad (46)$$

Essa relação entre probabilidades permite que se obtenha o VaR através da série de retornos do ativo original. Mais precisamente, para uma pequena probabilidade p , o p -ésimo quantil de r_t é r_n^* se a probabilidade p^* for escolhida com base na eq. (46), onde $p = P(r_t \leq r_n^*)$. Conseqüentemente, para uma dada probabilidade pequena p , partindo da eq. (44), o VaR será:

$$\text{VaR} = \begin{cases} \beta_n - \frac{\alpha_n}{k_n} \left(1 - [-\ln(1 - p^*)]^{k_n} \right) & \text{se } k \neq 0 \\ \beta_n + \alpha_n \ln[-\ln(1 - p^*)] & \text{se } k = 0 \end{cases} \quad (47)$$

Substituindo a eq. (46) na eq. (44), temos que:

$$\text{VaR} = \begin{cases} \beta_n - \frac{\alpha_n}{k_n} \left(1 - [-\ln(1 - p)]^{k_n} \right) & \text{se } k \neq 0 \\ \beta_n + \alpha_n \ln[-\ln(1 - p)] & \text{se } k = 0 \end{cases}$$

$$\text{VaR} = \begin{cases} \beta_n - \frac{\alpha_n}{k_n} \left(1 - [-n \ln(1 - p)]^{k_n} \right) & \text{se } k \neq 0 \\ \beta_n + \alpha_n \ln[-n \ln(1 - p)] & \text{se } k = 0 \end{cases} \quad (48)$$

Voltando ao caso particular do estimador de Hill, seguindo o resultado da eq. (45), o VaR ficaria:

$$\text{VaR} = \left[\frac{n}{q} (1-p) \right]^{k_n(q)} r_{(q+1)} \quad (49)$$

4.6. VaR Multiperiódico

A regra da raiz quadrada do tempo da metodologia RiskMetrics torna-se um caso especial sob a ótica da Teoria dos Valores Extremos. A relação entre os horizontes de ℓ dias e de 1 dia pode ser dada por:

$$\text{VaR}(\ell) = \ell^{\frac{1}{\alpha}} \text{VaR}(1) = \ell^{-k} \text{VaR}(1) \quad (50)$$

onde:

α é o índice de cauda;

k é o parâmetro de forma da distribuição de valor extremo.

Essa relação é conhecida como a regra da raiz α do tempo. Têm-se que

$\alpha = -\frac{1}{k}$, ou seja, não se deve confundir-lo com o parâmetro α_n .

5

Elaboração das carteiras de ações

Este capítulo descreve a metodologia adotada para a criação de carteiras de investimento sobre períodos consecutivos. Para tal objetivo foram utilizadas duas análises de seleção de ativos, que são: o Modelo de Índice Único (M.I.U.) e o critério de Dominância Estocástica (D.E.) de segunda ordem.

5.1. Considerações gerais

Existiam 449 ações listadas na BOVESPA em janeiro de 2008. No entanto, para este trabalho, o universo das ações disponíveis para investimento foi diminuído, porém sem perda de generalidade. Para compor este universo, as ações precisavam ter transacionado um alto volume financeiro diário e ter disponível sua cotação no programa de coleta de dados Econômica. Veja a tabela seguinte que apresenta as ações trabalhadas neste estudo.

Número	Código	Ação	Tipo
1	ACES4	Acesita	PN
2	AMBV4	Ambev	PN
3	ARCZ6	Aracruz	PNB
4	BBDC4	Bradesco	PN
5	BBAS3	Brasil	ON
6	BRTO4	Brasil Telecom	PN
7	BRKM5	Braskem	PNA
8	CLSC6	Celesc	PNB
9	CMIG4	Cemig	PN
10	CSAN3	Cosan	ON
11	DURA4	Duratex	PN
12	ELET3	Eletrabras	ON
13	ELET6	Eletrabras	PNB
14	GGBR4	Gerdaul	PN
15	PTIP4	Ipiranga Petroquimica	PN
16	ITAU4	Itaubanco	PN
17	ITSA4	Itausa	PN
18	KLBN4	Klabin S/A	PN
19	LIGT3	Light S/A	ON
20	LAME4	Lojas Americanas	PN
21	PETR3	Petrobras	ON
22	PETR4	Petrobras	PN
23	SDIA4	Sadia S/A	PN
24	CSNA3	Siderurgica Nacional	ON
25	CRUZ3	Souza Cruz	ON
26	TLPP4	Telesp Participações	PN
27	USIM5	Usiminas	PNA
28	VCPA4	VCP	PN
29	VALE3	Vale Rio Doce	ON
30	VALE5	Vale Rio Doce	PNA

Tabela 1 - Universo de ações disponíveis para investimento.

Este universo contém 30 ações que representam os mais tradicionais setores da economia, tais como: Petróleo e Gás, Mineração, Bancos, Siderurgia, Varejo, dentre outros. Vale ainda ressaltar que quanto ao tipo, as ações podem ser Preferenciais Nominativas (PN) ou Ordinárias Nominativas (ON).

Para a Renda Fixa utilizou-se o Certificado de Depósito Interfinanceiro (CDI) de 252 dias.

A cotação diária das ações e do CDI foram extraídos do programa Economática. Foi utilizado as cotações de Fechamento nos cálculos realizados.

O período de coleta dos dados (cotações diárias de Fechamento) é bastante amplo e compreende o intervalo temporal entre 06/07/1994 e 01/08/2007, o que

corresponde a 3410 dias úteis. A escolha do início da coleta dos dados é justificada por ser o 1º mês do Plano Real.

Quanto ao cálculo dos retornos diários, utilizou-se a definição de retornos

logarítmicos, ou seja, $R_t = \ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right)$.

5.2. Divisão dos dados em sub-períodos

Com a intenção de formar carteiras de investimento, dividiu-se a amostra de dados em sub-períodos. Com isso, ficou arbitrado que seriam formadas 5 carteiras de investimento para cada uma das metodologias descritas a seguir.

Cada sub-período gera uma carteira de investimentos, sendo necessário portanto 5 sub-períodos para sua implementação. O tamanho de cada um destes sub-períodos foi escolhido de forma arbitrária. Segue abaixo a determinação das fronteiras dos sub-períodos.

Intervalo	Sub-período
1	06/07/94 a 05/01/96
2	08/01/96 a 07/07/97
3	08/07/97 a 07/01/99
4	08/01/99 a 07/07/00
5	10/07/00 a 09/01/02

Tabela 2 - Sub-períodos amostrais.

Observe que cada um dos intervalos tem 1,5 ano de duração.

5.2.1. Aplicação do Modelo de Índice Único

Recordando, o M.I.U. admite a seguinte equação:

$$R_i = \alpha_i + \beta_i R_m + e_i$$

onde o retorno de uma ação está linearmente relacionado ao retorno de mercado. Aqui, o retorno de mercado corresponde ao retorno obtido do Índice BOVESPA (IBOVESPA).

Como forma de avaliar a dependência linear entre o retorno de uma ação (R_i) e o retorno do mercado (R_m), foi calculada o coeficiente de correlação entre ambos para cada uma das ações contidas na Tabela 1 e em cada um dos sub-

períodos enunciados na Tabela 2. Isto permitiu averiguar a magnitude do relacionamento entre estas duas variáveis.

As ações candidatas a formarem as 5 carteiras de investimento precisam de um coeficiente de correlação mínimo de 0,40 com o mercado. A justificativa para tal pode ser obtida na Tabela 3.

Coeficiente de Correlação	Interpretação
0,00 a 0,19	Uma correlação bem fraca
0,20 a 0,39	Uma correlação fraca
0,40 a 0,69	Uma correlação moderada
0,70 a 0,89	Uma correlação forte
0,90 a 1,00	Uma correlação muito forte

Tabela 3 - Interpretação para o Coeficiente de Correlação.

A aplicação desta “filtragem” resulta nas seguintes ações para cada intervalo:

Ações	Intervalo				
	1	2	3	4	5
1	ACES4	BBDC4	ACES4	ACES4	ACES4
2	AMBV4	CMIG4	AMBV4	AMBV4	AMBV4
3	ARCZ6	ELET3	BBDC4	BBDC4	BBDC4
4	BBDC4	ELET6	BBAS3	BBAS3	BBAS3
5	BBAS3	PETR3	BRTO4	BRTO4	BRTO4
6	BRTO4	PETR4	BRKM5	BRKM5	BRKM5
7	BRKM5	TLPP4	CLSC6	CLSC6	CLSC6
8	CLSC6	USIM5	CMIG4	CMIG4	CMIG4
9	CMIG4	VALE5	ELET3	DURA4	ELET3
10	DURA4		ELET6	ELET3	ELET6
11	ELET3		GGBR4	ELET6	GGBR4
12	ELET6		PTIP4	GGBR4	PTIP4
13	PTIP4		ITAU4	PTIP4	ITAU4
14	ITAU4		ITSA4	ITAU4	ITSA4
15	ITSA4		LIGT3	ITSA4	KLBN4
16	KLBN4		PETR3	PETR3	LIGT3
17	LIGT3		PETR4	PETR4	LAME4
18	LAME4		SDIA4	CRUZ3	PETR3
19	PETR3		CSNA3	TLPP4	PETR4
20	PETR4		CRUZ3	USIM5	SDIA4
21	SDIA4		TLPP4	VALE3	CSNA3
22	CSNA3		USIM5	VALE5	TLPP4
23	CRUZ3		VCPA4		USIM5
24	TLPP4		VALE3		VCPA4
25	USIM5		VALE5		VALE3
26	VCPA4				VALE5
27	VALE3				
28	VALE5				

Tabela 4 - Novo universo de ações candidatas a integrar as carteiras em cada intervalo.

Uma vez conhecidas as ações candidatas a compor as carteiras em cada sub-período e após aplicar a metodologia proposta pelo M.I.U. foi possível obter que ações devem compor cada uma das 5 carteiras de investimento.

Não foi permitido as carteiras possuírem alavancagem e nem vendas a descoberto. Além disso, as carteiras não possuem ativos de Renda Fixa, sendo totalmente compostas por ações.

Para o intervalo 1, a carteira é composta por 25,03% de CLSC6 e 74,97% de VALE3.

Para o intervalo 2, a carteira é composta por 12,36% de CMIG4, 19,25% de ELET6, 35,01% de PETR3, 28,66% de PETR4 e 4,72% de TLPP4.

No entanto, para o intervalo 3 nenhum ativo foi selecionado. Isto decorre do fato de que $\left(\frac{R}{V}\right) < C$ para todas as ações candidatas a compor a carteira de investimentos.

Para o intervalo 4, a carteira é composta por 43,16% de BRKM5, 3,13% de BRTO4, 9,52% de GGBR4, 4,54% de ITAU4, 17,19% de PETR3, 9,78% de PTIP4 e 12,68% de VALE3.

Para o intervalo 5, a carteira é composta por 53,92% de AMBV4, 3,04% de ITSA4 e 43,04% de VALE3.

Repare que a quantidade de ações que compõem as carteiras varia entre os intervalos. Isto não significa, necessariamente, que a carteira com um maior número de ações esteja mais diversificada e por conseqüência com menor risco.

5.2.2. Aplicação do critério de Dominância Estocástica de segunda ordem

Por mera simplicidade e coerência, as ações candidatas a compor as 5 carteiras de investimento neste critério são as mesmas do que no M.I.U. (veja a Tabela 4).

Este critério foi realizado através de uma análise comparativa entre pares de ações. Como resultado da comparação, duas conclusões são possíveis:

- O ativo A é preferível ao ativo B;
- O ativo A não é preferível ao ativo B, gerando uma resposta inconclusiva.

Para cada um dos 5 intervalos escolheu-se uma ação para servir como referência, de forma arbitrária. Então, efetuou-se as comparações entre todas as ações candidatas de um intervalo com a “ação de referência”. Esta decisão permitiu reduzir drasticamente o número de comparações a serem realizadas.

As cinco carteiras de investimento, sendo uma para cada intervalo, foram formadas pela “ação de referência” e por ações que são preferíveis a ela.

Como este critério não especifica o percentual a ser aplicado em cada ação, atribuiu-se pesos iguais as ações que fazem parte de uma determinada carteira de investimentos.

Aqui também não se permitiu as carteiras terem alavancagem e nem vendas a descoberto.

Para o intervalo 1, a carteira é composta por BRKM5, ITAU4 e ITSA4. O peso de cada ação na carteira é de 33,33%. A “ação de referência” utilizada neste intervalo foi a ITAU4.

Para o intervalo 2, a carteira é composta por PETR4 e TLPP4. O peso de cada ação na carteira é de 50,00%. A “ação de referência” utilizada neste intervalo foi a TLPP4.

Para o intervalo 3, a carteira é composta por AMBV4, BBDC4, CRUZ3, CSNA3 e ITAU4. O peso de cada ação na carteira é de 20,00%. A “ação de referência” utilizada neste intervalo foi a BBDC4.

Para o intervalo 4, a carteira é composta por BRKM5 e BRTO4. O peso de cada ação na carteira é de 50,00%. A “ação de referência” utilizada neste intervalo foi a BRTO4.

Para o intervalo 5, a carteira é composta por CMIG4, ITAU4, ITSA4, PETR3, PETR4, TLPP4 e VALE3. O peso de cada ação na carteira é de 14,28%. A “ação de referência” neste intervalo foi a CMIG4.

Aqui também se obteve carteiras de investimento com quantidade de ações diferente.

5.2.3. Aplicação da metodologia do IBOVESPA

A carteira teórica do IBOVESPA é composta pelas ações que atenderam cumulativamente aos seguintes critérios, com relação aos doze meses anteriores à formação da carteira:

- estar incluída em uma relação de ações cujos índices de negociabilidade somados representem 80% do valor acumulado de todos os índices individuais;
- apresentar participação, em termos de volume, superior a 0,1% do total;
- ter sido negociada em mais de 80% do total de pregões do período.

A participação de cada ação na carteira tem relação direta com a representatividade desse título no mercado à vista – em termos de número de negócios e volume financeiro – ajustada ao tamanho da amostra. Essa representatividade é obtida pelo índice de negociabilidade da ação, calculado pela seguinte fórmula:

$$IN = \sqrt{\frac{n_i}{N} * \frac{v_i}{V}} \quad (51)$$

onde:

IN : Índice de negociabilidade;

n_i : número de negócios com a ação i no mercado à vista (lote-padrão);

N : número total de negócios no mercado à vista da BOVESPA (lote-padrão);

v_i : volume financeiro gerado pelos negócios com a ação i no mercado à vista (lote-padrão);

V : volume financeiro total do mercado à vista da BOVESPA (lote-padrão).

O Índice BOVESPA é o somatório dos pesos (quantidade teórica da ação multiplicada pelo último preço da mesma) das ações integrantes de sua carteira teórica. Assim sendo, pode ser apurado, a qualquer momento, por meio da seguinte fórmula:

$$IBOVESPA_t = \sum_{i=1}^k P_{i,t} * Q_{i,t} \quad (52)$$

onde:

$IBOVESPA_t$: Índice BOVESPA no instante t ;

k : número total de ações componentes da carteira teórica;

$P_{i,t}$: último preço da ação i no instante t ;

$Q_{i,t}$: quantidade teórica da ação i na carteira no instante t .

Para que a representatividade do IBOVESPA mantenha-se ao longo do tempo, sua carteira é reavaliada ao final de cada quadrimestre, utilizando-se os procedimentos e critérios integrantes desta metodologia. Nas reavaliações, identificam-se as alterações na participação relativa de cada ação no índice, bem como sua permanência e exclusão, além da inclusão de novos papéis. A carteira teórica do IBOVESPA tem vigência de quatro meses, vigorando para os períodos de janeiro a abril, maio a agosto e setembro a dezembro.

6

Descrição e Análise Exploratória dos Dados

O presente capítulo objetiva entender o comportamento das séries de retorno financeiras para as carteiras de investimento elaboradas no capítulo anterior. Tal análise contribuirá para o entendimento do método utilizado para o cálculo do valor em risco (VaR).

6.1. Considerações gerais

Para dispor das séries financeiras para as carteiras de investimento é necessário ampliar o número de intervalos (veja a Tabela 2). Mantendo a mesma idéia, os sub-períodos continuaram tendo duração de 1,5 anos. Logo, apresentamos abaixo uma tabela onde foi adicionado novos sub-períodos.

Intervalo	Sub-período
1	06/07/94 - 05/01/96
2	08/01/96 - 07/07/97
3	08/07/97 - 07/01/99
4	08/01/99 - 07/07/00
5	10/07/00 - 09/01/02
6	10/01/02 - 09/07/03
7	10/07/03 - 07/01/05
8	10/01/05 - 07/07/06

Tabela 5 – Aumento do número de intervalos.

Para as carteiras geradas em um determinado intervalo, de um a cinco, o seu desempenho foi avaliado a posteriori. De forma mais explícita, as carteiras do intervalo 1 foram avaliadas entre os intervalos 2 e 5. As carteiras do intervalo 2 foram avaliadas entre os intervalos 3 e 5. As carteiras do intervalo 3 foram avaliadas entre os intervalos 4 e 6. As carteiras do intervalo 4 foram avaliadas entre os intervalos 5 e 7. Por fim, as carteiras do intervalo 5 foram avaliadas entre os intervalos 6 e 8.

O retorno de uma determinada carteira de investimentos é dada pela seguinte equação:

$$R_{p,t} = \sum_{i=1}^m w_i * R_{i,t} \quad (53)$$

onde:

$R_{p,t}$: Retorno da carteira p no tempo t.

w_i : peso da ação i na carteira.

$R_{i,t}$: retorno da ação i no tempo t.

m : quantidade de ações que compõem a carteira.

Neste capítulo são apresentadas as seguintes estatísticas: Histograma, Correlograma dos retornos e Correlograma dos retornos ao quadrado. Estas foram realizadas para cada uma das 14 carteiras de investimento.

A elaboração do histograma nos permite visualizar o formato da distribuição de probabilidade empírica do retorno da carteira de investimentos. Além disso, o software Eviews fornece estatísticas descritivas e o teste de Jarque-Bera.

Quanto ao correlograma dos retornos, ele nos certifica se os retornos são independentes ou dependentes entre si. O teste Box-Ljung (coluna Q-Stat) investiga a autocorrelação existente entre tais retornos.

O mesmo é válido para o correlograma dos retornos ao quadrado sendo que, para este caso, os dados fornecidos ao software são os retornos da carteira elevados ao quadrado.

6.2. Histogramas

O objetivo principal de plotar os histogramas é a verificação de normalidade para as séries de retornos das carteiras de investimento. Sob normalidade, teoricamente, a assimetria (skewness) e a curtose (kurtosis) deveriam ser, respectivamente, 0 e 3.

Para uma verificação formal utiliza-se o teste de Jarque-Bera (JB). O teste avalia a hipótese de que determinada variável tem distribuição normal com média e variância especificada, contra a hipótese alternativa de que não tem distribuição normal. Para tal, calcula-se a assimetria e a curtose. A estatística de Jarque-Bera é:

$$JB = n \left[\frac{A^2}{6} + \frac{(C-3)^2}{24} \right]$$

$$A = \frac{\sum_{i=1}^n (R_i - E(R))^3}{\sigma^3}$$

$$C = \frac{\sum_{i=1}^n (R_i - E(R))^4}{\sigma^4}$$

onde:

n: tamanho da amostra;

A: assimetria dos retornos;

C: curtose dos retornos.

Assintoticamente essa estatística segue distribuição qui-quadrado com 2 graus de liberdade.

A probabilidade de Jarque-Bera é a probabilidade de que a estatística JB exceda o valor observado se a hipótese nula de normalidade for verdadeira. Portanto, um valor de probabilidade de JB próxima de zero significa que a hipótese de normalidade deve ser rejeitada.

Estão apresentados, a seguir, os histogramas dos retornos das carteiras de investimento.

• Intervalo 1

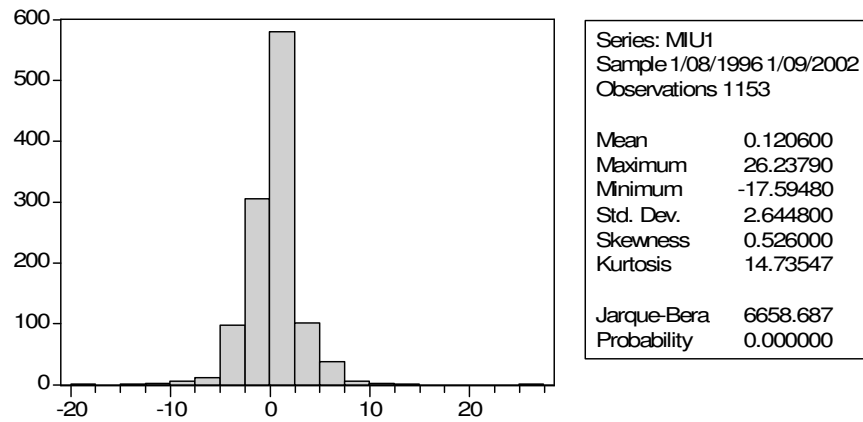


Figura 4 – Histograma da carteira selecionada pelo M.I.U.

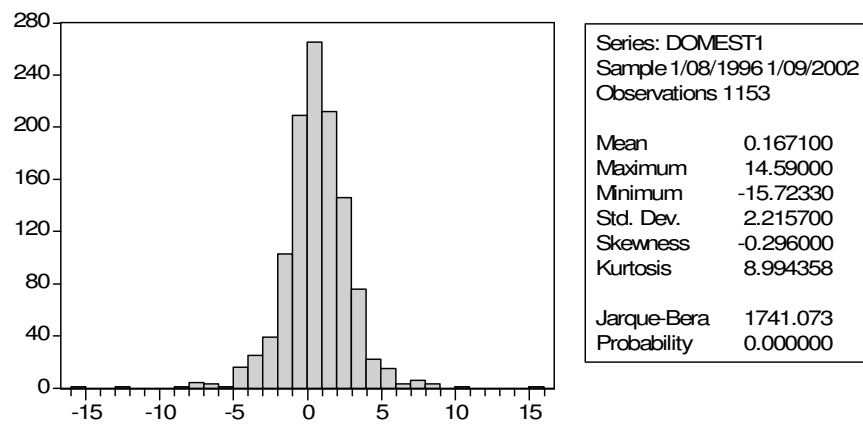


Figura 5 – Histograma da carteira selecionada pela Dominância Estocástica.

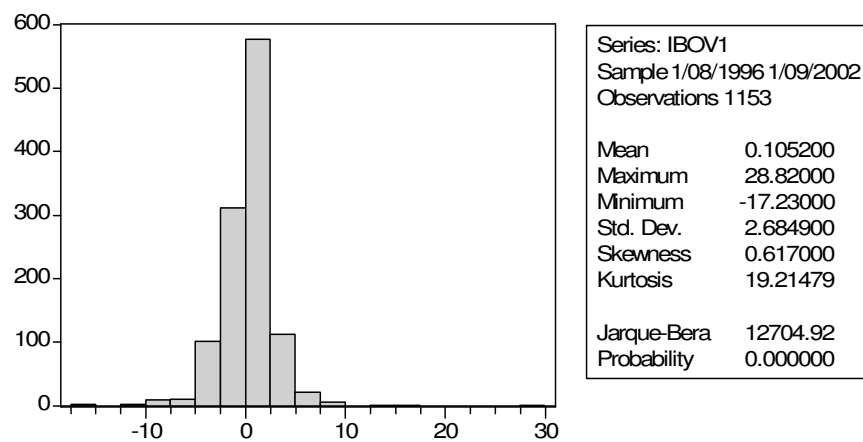


Figura 6 – Histograma da carteira do IBOVESPA.

Nas figuras 4, 5 e 6 encontram-se os histogramas e as estatísticas descritivas das séries em questão. Podemos concluir que as hipóteses de simetria e excesso de curtose nulo devem ser rejeitadas; o teste de Jarque-Bera rejeita a hipótese de normalidade.

• Intervalo 2

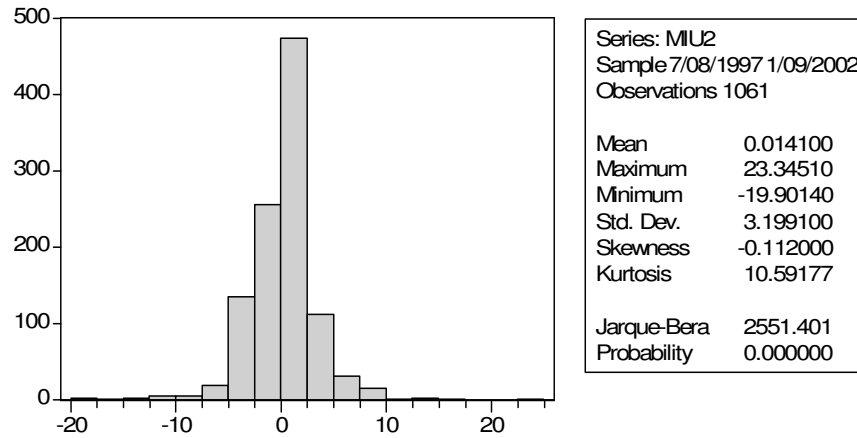


Figura 7 – Histograma da carteira selecionada pelo M.I.U.

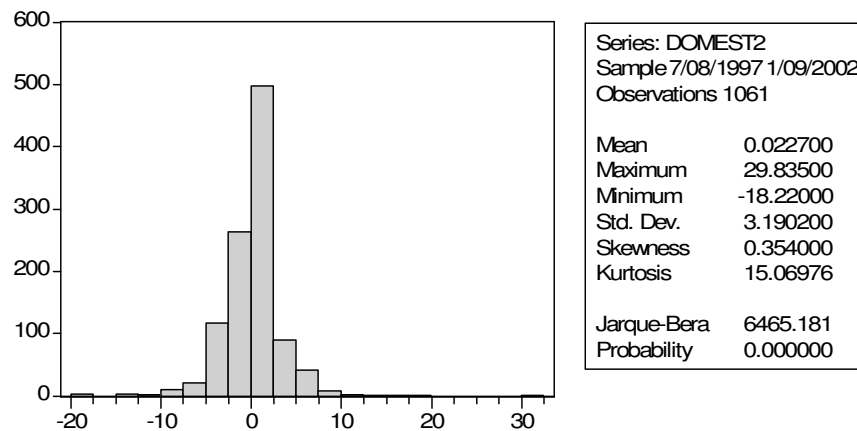


Figura 8 – Histograma da carteira selecionada pela Dominância Estocástica.

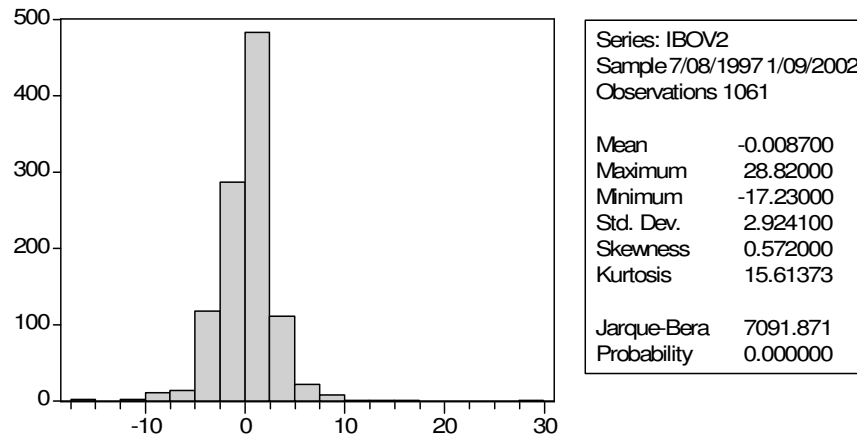


Figura 9 – Histograma da carteira do IBOVESPA.

Observando as figuras 7, 8 e 9 percebemos que as hipóteses de simetria e de excesso de curtose igual a zero são rejeitadas. Note também que o teste de Jarque-Bera rejeita a hipótese de normalidade.

- Intervalo 3

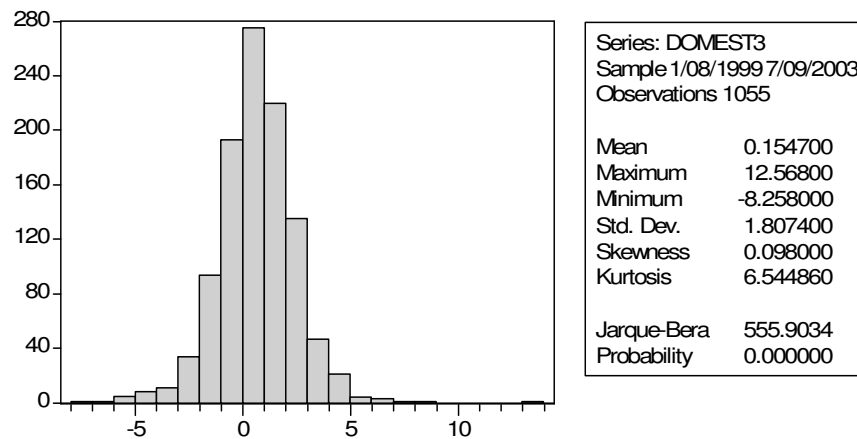


Figura 10 – Histograma da carteira selecionada pela Dominância Estocástica.

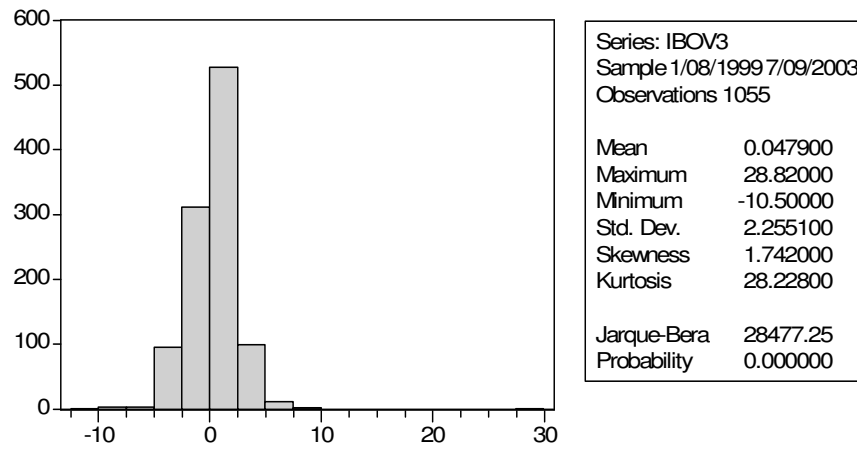


Figura 11 – Histograma da carteira do IBOVESPA.

Na série da figura 10 a hipótese de excesso de curtose nulo é rejeitada, mas a assimetria da série é consideravelmente menor. A hipótese de normalidade é rejeitada pelo teste de Jarque-Bera. Para a série da figura 11 também se verifica a não normalidade dos retornos.

- Intervalo 4

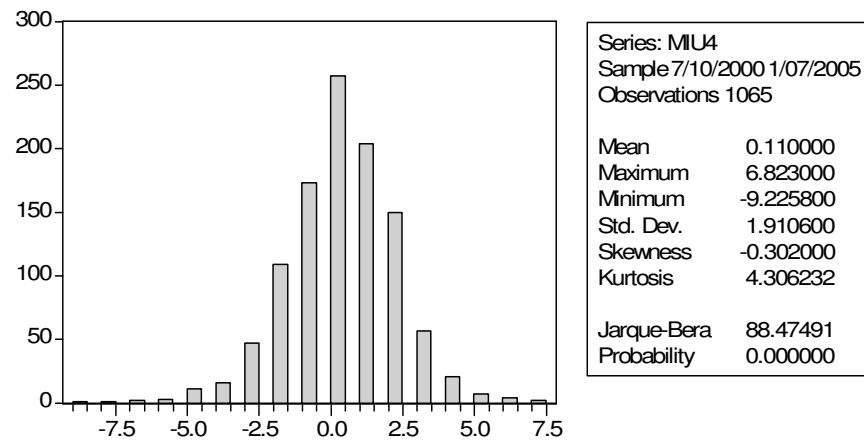


Figura 12 – Histograma da carteira selecionada pelo M.I.U.

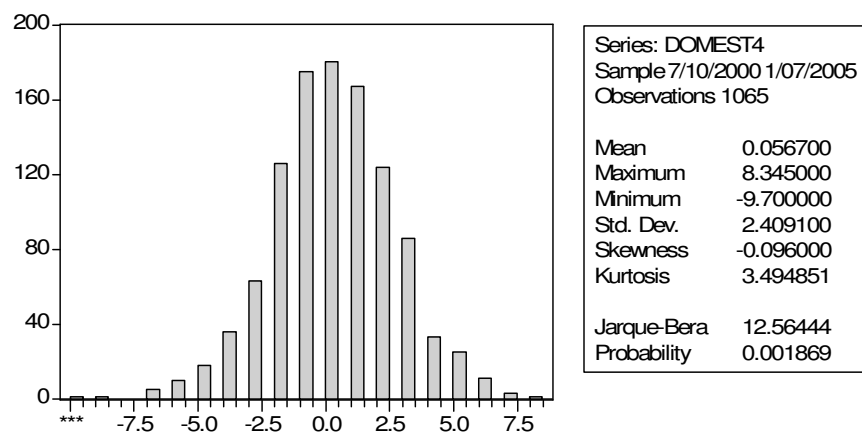


Figura 13 – Histograma da carteira selecionada pela Dominância Estocástica.

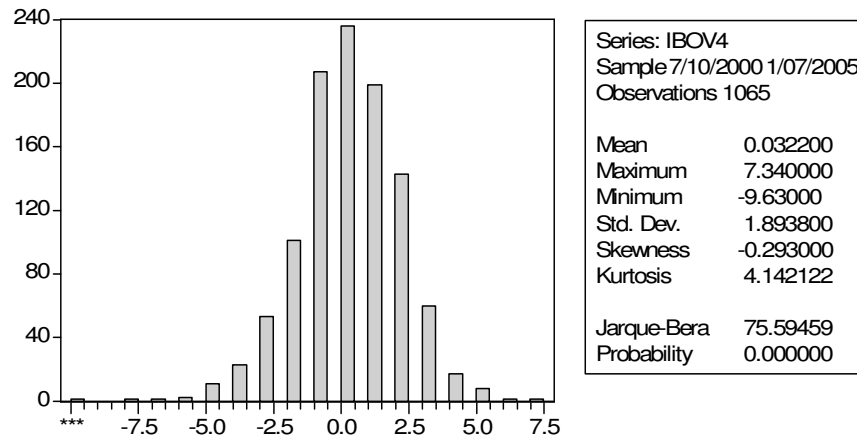


Figura 14 – Histograma da carteira do IBOVESPA.

Observando as figuras 12, 13 e 14, percebemos que estas apresentam as mesmas características dos histogramas anteriores, ou seja, curtose excessiva e assimetria não nula. A hipótese de normalidade também é rejeitada pelo teste de Jarque-Bera.

- Intervalo 5

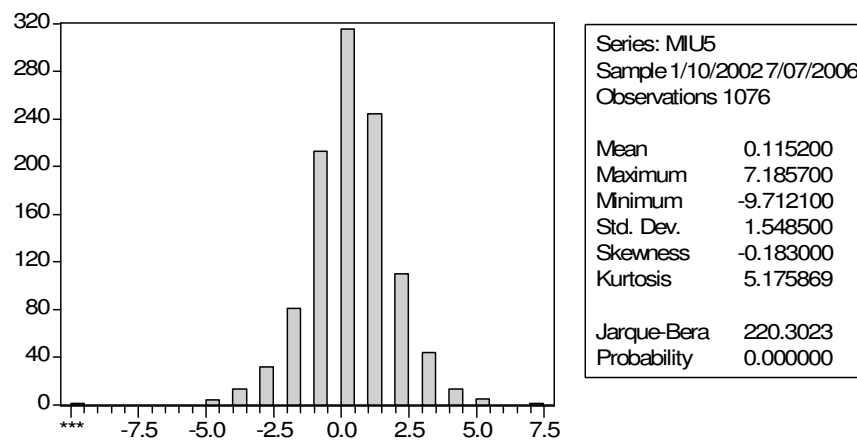


Figura 15 – Histograma da carteira selecionada pelo M.I.U.

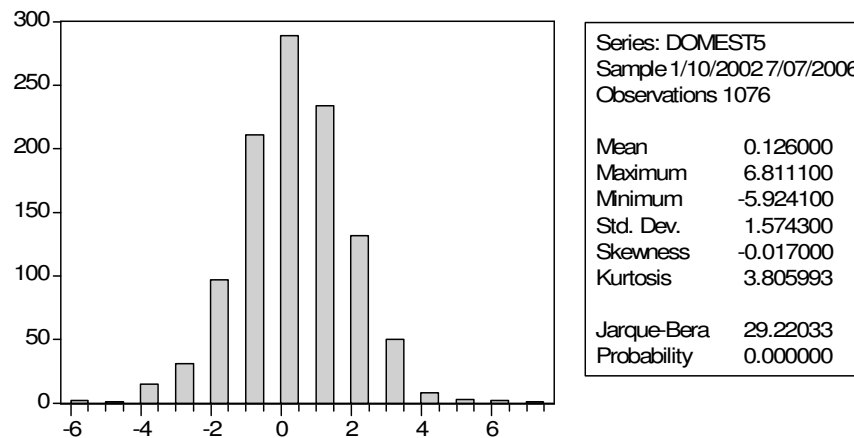


Figura 16 – Histograma da carteira selecionada pela Dominância Estocástica.

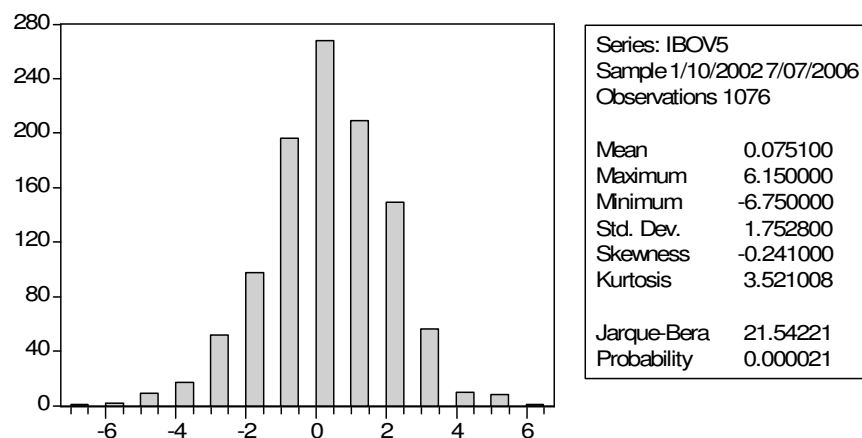


Figura 17 – Histograma da carteira do IBOVESPA.

Observando as figuras 15, 16 e 17 percebemos que as hipóteses de simetria e de excesso de curtose igual a zero são rejeitadas. O teste de Jarque-Bera também rejeita a hipótese de normalidade dos retornos.

Como esperado, as distribuições das séries dos retornos financeiros das carteiras de investimento são não normais. Elas apresentam leptocurtose, ou seja, excesso de curtose.

6.3. Correlograma dos retornos

O objetivo principal de plotar os correlogramas é investigar a presença de autocorrelação entre os retornos das carteiras de investimento. Na primeira coluna encontram-se os valores da função de autocorrelação (FAC), na segunda coluna os

valores da função de autocorrelação parcial e na terceira e quarta colunas os valores da estatística Q de Box-Ljung para o $\text{lag}(k)$ e o seu p -valor, respectivamente.

O teste de Box-Ljung possui as seguintes hipóteses:

Hipótese nula: os retornos são aleatórios.

Hipótese alternativa: os retornos não são aleatórios.

A estatística de teste é:

$$Q-Stat = n(n+2) \sum_{j=1}^k \frac{r^2(j)}{n-j}$$

onde:

n : tamanho da amostra;

$r^2(j)$: autocorrelação em $\text{lag}(j)$;

k : número de defasamentos a ser testado.

A hipótese nula é rejeitada se:

$$Q-Stat > \chi^2_{1-\alpha, k}$$

onde:

α : nível de significância.

Estão apresentados, a seguir, os correlogramas dos retornos das carteiras de investimento.

- Intervalo 1

Date: 10/23/07 Time: 17:40
 Sample: 1/08/1996 1/09/2002
 Included observations: 1153

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1 -0.033	-0.033	1.2726	0.259
		2 0.031	0.030	2.3589	0.307
		3 -0.027	-0.025	3.1901	0.363
		4 -0.062	-0.064	7.5817	0.108
		5 -0.079	-0.082	14.821	0.011
		6 0.059	0.057	18.886	0.004
		7 -0.006	0.000	18.928	0.008
		8 -0.007	-0.020	18.993	0.015
		9 -0.003	-0.012	19.007	0.025
		10 0.018	0.020	19.375	0.036
		11 0.059	0.070	23.483	0.015
		12 -0.014	-0.017	23.712	0.022

Figura 18 – Correlograma dos retornos da carteira selecionada pelo M.I.U.

Date: 10/23/07 Time: 17:46
 Sample: 1/08/1996 1/09/2002
 Included observations: 1153

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1 0.118	0.118	16.131	0.000
		2 -0.010	-0.024	16.250	0.000
		3 -0.037	-0.033	17.810	0.000
		4 -0.021	-0.014	18.343	0.001
		5 -0.007	-0.004	18.397	0.002
		6 0.080	0.080	25.757	0.000
		7 0.030	0.010	26.816	0.000
		8 -0.026	-0.030	27.629	0.001
		9 0.004	0.016	27.644	0.001
		10 -0.020	-0.020	28.118	0.002
		11 0.049	0.056	30.919	0.001
		12 0.006	-0.014	30.955	0.002

Figura 19 – Correlograma dos retornos da carteira selecionada pela Dominância Estocástica.

Date: 10/23/07 Time: 17:56
 Sample: 1/08/1996 1/09/2002
 Included observations: 1153

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
		1	0.008	0.008	0.0754	0.784
		2	-0.011	-0.011	0.2202	0.896
		3	-0.088	-0.088	9.2532	0.026
		4	-0.014	-0.013	9.4943	0.050
		5	-0.024	-0.026	10.158	0.071
		6	0.068	0.060	15.477	0.017
		7	0.003	-0.001	15.485	0.030
		8	-0.048	-0.051	18.110	0.020
		9	0.002	0.014	18.116	0.034
		10	-0.014	-0.014	18.334	0.050
		11	0.077	0.074	25.266	0.008
		12	-0.036	-0.043	26.812	0.008

Figura 20 – Correlograma dos retornos da carteira do IBOVESPA.

Os correlogramas das figuras 18, 19 e 20 permitem rejeitar a hipótese nula com significância estatística, porém a magnitude dos coeficientes das funções é sem relevância.

- Intervalo 2

Date: 10/23/07 Time: 18:15
 Sample: 7/08/1997 1/09/2002
 Included observations: 1061

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
		1	0.096	0.096	9.7298	0.002
		2	-0.034	-0.044	10.974	0.004
		3	-0.028	-0.021	11.838	0.008
		4	-0.046	-0.043	14.060	0.007
		5	-0.029	-0.023	14.974	0.010
		6	-0.004	-0.003	14.991	0.020
		7	0.055	0.052	18.178	0.011
		8	0.049	0.036	20.704	0.008
		9	0.009	0.002	20.784	0.014
		10	0.033	0.037	21.920	0.016
		11	0.002	0.002	21.924	0.025
		12	-0.061	-0.054	25.946	0.011

Figura 21 – Correlograma dos retornos da carteira selecionada pelo M.I.U.

Date: 10/23/07 Time: 18:23
 Sample: 7/08/1997 1/09/2002
 Included observations: 1061

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1 0.032	0.032	1.0856	0.297
		2 -0.025	-0.026	1.7690	0.413
		3 -0.030	-0.029	2.7518	0.431
		4 -0.058	-0.057	6.3932	0.172
		5 -0.026	-0.024	7.1359	0.211
		6 -0.023	-0.025	7.6847	0.262
		7 0.019	0.016	8.0740	0.326
		8 0.044	0.037	10.177	0.253
		9 0.028	0.023	11.029	0.274
		10 0.025	0.024	11.725	0.304
		11 -0.010	-0.007	11.827	0.377
		12 -0.034	-0.026	13.052	0.365

Figura 22 – Correlograma dos retornos da carteira selecionada pela Dominância Estocástica.

Date: 10/23/07 Time: 18:29
 Sample: 7/08/1997 1/09/2002
 Included observations: 1061

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1 0.029	0.029	0.8860	0.347
		2 -0.008	-0.009	0.9562	0.620
		3 -0.023	-0.022	1.4999	0.682
		4 -0.065	-0.064	5.9860	0.200
		5 -0.069	-0.066	11.009	0.051
		6 -0.041	-0.040	12.833	0.046
		7 0.029	0.027	13.717	0.056
		8 0.053	0.044	16.675	0.034
		9 0.030	0.018	17.629	0.040
		10 0.030	0.022	18.599	0.046
		11 0.022	0.022	19.142	0.059
		12 -0.067	-0.059	23.904	0.021

Figura 23 – Correlograma dos retornos da carteira do IBOVESPA.

Os correlogramas das figuras 21 e 23 permitem rejeitar a hipótese nula com significância estatística, porém a magnitude dos coeficientes das funções é sem relevância. No entanto, o correlograma da figura 22 não permite rejeitar a hipótese nula de independência dos retornos.

- Intervalo 3

Date: 10/23/07 Time: 18:52
 Sample: 1/08/1999 7/09/2003
 Included observations: 1055

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
		1	0.078	0.078	6.4227	0.011
		2	-0.005	-0.011	6.4487	0.040
		3	-0.033	-0.032	7.5960	0.055
		4	-0.061	-0.057	11.568	0.021
		5	-0.047	-0.039	13.898	0.016
		6	0.016	0.021	14.169	0.028
		7	-0.060	-0.068	18.038	0.012
		8	-0.031	-0.027	19.039	0.015
		9	-0.023	-0.024	19.614	0.020
		10	0.013	0.012	19.783	0.031
		11	0.017	0.007	20.089	0.044
		12	-0.017	-0.030	20.406	0.060

Figura 24 – Correlograma dos retornos da carteira selecionada pela Dominância Estocástica.

Date: 10/23/07 Time: 18:57
 Sample: 1/08/1999 7/09/2003
 Included observations: 1055

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
		1	0.028	0.028	0.8313	0.362
		2	-0.023	-0.024	1.4053	0.495
		3	-0.017	-0.016	1.7198	0.633
		4	-0.092	-0.092	10.761	0.029
		5	-0.053	-0.050	13.783	0.017
		6	0.012	0.010	13.945	0.030
		7	0.000	-0.006	13.945	0.052
		8	0.016	0.007	14.227	0.076
		9	0.050	0.041	16.895	0.050
		10	-0.033	-0.035	18.026	0.055
		11	0.026	0.031	18.729	0.066
		12	0.004	0.004	18.749	0.095

Figura 25 – Correlograma dos retornos da carteira do IBOVESPA.

Tanto o correlograma da figura 24 quanto o da figura 25 rejeitam a hipótese nula de independência dos retornos. No entanto, apenas o correlograma da figura 24 apresenta significância estatística. Mas, para tal correlograma, os coeficientes são sem relevância.

- Intervalo 4

Date: 10/23/07 Time: 19:13
 Sample: 7/10/2000 1/07/2005
 Included observations: 1065

























Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
		1	0.057	0.057	3.4480	0.063
		2	0.002	-0.001	3.4527	0.178
		3	0.003	0.003	3.4600	0.326
		4	-0.042	-0.043	5.3858	0.250
		5	0.025	0.030	6.0529	0.301
		6	0.051	0.049	8.8962	0.180
		7	0.085	0.080	16.577	0.020
		8	0.017	0.006	16.878	0.031
		9	-0.041	-0.041	18.719	0.028
		10	0.069	0.077	23.805	0.008
		11	0.069	0.068	28.983	0.002
		12	0.035	0.023	30.288	0.003

Figura 26 – Correlograma dos retornos da carteira selecionada pelo M.I.U.

Date: 10/23/07 Time: 19:18
 Sample: 7/10/2000 1/07/2005
 Included observations: 1065

























Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
		1	0.059	0.059	3.6860	0.055
		2	-0.005	-0.009	3.7178	0.156
		3	-0.017	-0.016	4.0156	0.260
		4	-0.018	-0.016	4.3476	0.361
		5	0.005	0.006	4.3702	0.497
		6	0.028	0.027	5.2080	0.517
		7	0.058	0.055	8.8617	0.263
		8	0.006	0.000	8.9012	0.351
		9	-0.036	-0.035	10.268	0.329
		10	0.050	0.057	13.002	0.224
		11	0.092	0.088	22.046	0.024
		12	0.032	0.020	23.127	0.027

Figura 27 – Correlograma dos retornos da carteira selecionada pela Dominância Estocástica.

Date: 10/23/07 Time: 19:25
 Sample: 7/10/2000 1/07/2005
 Included observations: 1065

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
		1	0.024	0.024	0.6053	0.437
		2	-0.029	-0.029	1.4899	0.475
		3	-0.033	-0.032	2.6849	0.443
		4	-0.008	-0.007	2.7567	0.599
		5	-0.030	-0.031	3.6957	0.594
		6	-0.005	-0.006	3.7280	0.713
		7	-0.010	-0.012	3.8320	0.799
		8	-0.032	-0.034	4.9003	0.768
		9	-0.050	-0.051	7.6292	0.572
		10	0.053	0.052	10.616	0.388
		11	0.065	0.057	15.155	0.176
		12	0.036	0.033	16.584	0.166

Figura 28 – Correlograma dos retornos da carteira do IBOVESPA.

Os correlogramas da figuras 26, 27 e 28 rejeitam a hipótese de independência dos retornos. Dentre estes, os correlogramas das figuras 26 e 27 apresentam significância estatística. Porém nenhum destes possui magnitude dos coeficientes das funções relevantes.

- Intervalo 5

Date: 10/23/07 Time: 19:39
 Sample: 1/10/2002 7/07/2006
 Included observations: 1076

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
		1	0.087	0.087	8.1825	0.004
		2	-0.046	-0.054	10.460	0.005
		3	-0.060	-0.052	14.342	0.002
		4	-0.039	-0.032	16.007	0.003
		5	0.041	0.042	17.823	0.003
		6	0.021	0.008	18.322	0.005
		7	-0.045	-0.049	20.535	0.005
		8	0.002	0.015	20.538	0.008
		9	0.010	0.010	20.658	0.014
		10	0.045	0.039	22.828	0.011
		11	0.047	0.037	25.195	0.009
		12	-0.040	-0.039	26.909	0.008

Figura 29 – Correlograma dos retornos da carteira selecionada pelo M.I.U.

Date: 10/23/07 Time: 19:43
 Sample: 1/10/2002 7/07/2006
 Included observations: 1076

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
		1	0.105	0.105	11.978	0.001
		2	-0.035	-0.047	13.304	0.001
		3	-0.064	-0.056	17.715	0.001
		4	-0.036	-0.025	19.078	0.001
		5	0.018	0.020	19.441	0.002
		6	0.043	0.034	21.486	0.001
		7	-0.034	-0.045	22.717	0.002
		8	-0.053	-0.042	25.804	0.001
		9	0.002	0.015	25.809	0.002
		10	0.042	0.036	27.738	0.002
		11	-0.008	-0.026	27.812	0.003
		12	-0.010	-0.007	27.925	0.006

Figura 30 – Correlograma dos retornos da carteira selecionada pela Dominância Estocástica.

Date: 10/23/07 Time: 19:47
 Sample: 1/10/2002 7/07/2006
 Included observations: 1076

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
		1	0.034	0.034	1.2115	0.271
		2	-0.027	-0.028	2.0090	0.366
		3	-0.062	-0.061	6.2197	0.101
		4	-0.027	-0.024	6.9988	0.136
		5	0.022	0.020	7.5021	0.186
		6	0.033	0.026	8.6500	0.194
		7	-0.027	-0.031	9.4493	0.222
		8	-0.026	-0.021	10.209	0.251
		9	-0.002	0.003	10.214	0.333
		10	0.049	0.046	12.859	0.232
		11	0.007	-0.001	12.918	0.299
		12	0.003	0.004	12.929	0.374

Figura 31 – Correlograma dos retornos da carteira do IBOVESPA.

Os correlogramas das figuras 29 e 30 rejeitam a hipótese nula de independência dos retornos. Estes também possuem significância estatística, mas a magnitude dos coeficientes das funções é irrelevante.

O correlograma da figura 31 não rejeita a hipótese de independência dos retornos.

Portanto, as séries de retornos financeiros das carteiras de investimento estudadas apresentam independência ou, mais frequentemente, dependência linear desprezível entre as suas observações.

6.4. Correlograma dos retornos ao quadrado

O principal objetivo de plotar estes correlogramas é investigar a presença de dependência não-linear entre os retornos. Tal como na seção anterior, o teste de Box-Ljung será utilizado.

- Intervalo 1

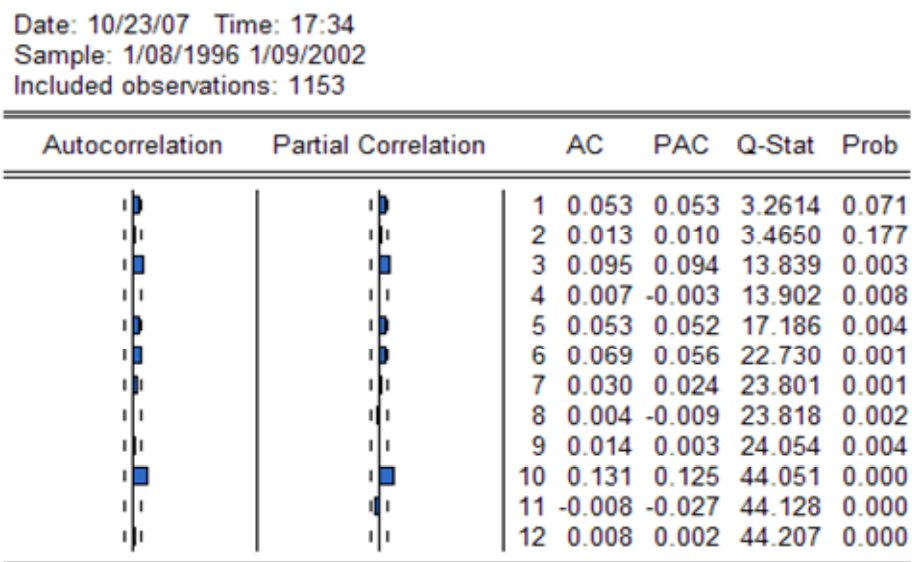


Figura 32 – Correlograma dos retornos quadrados da carteira selecionada pelo M.I.U.

Date: 10/23/07 Time: 17:51
 Sample: 1/08/1996 1/09/2002
 Included observations: 1153

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
		1	0.147	0.147	24.989	0.000
		2	0.152	0.134	51.856	0.000
		3	0.264	0.234	132.69	0.000
		4	0.052	-0.026	135.87	0.000
		5	0.087	0.023	144.64	0.000
		6	0.136	0.067	166.27	0.000
		7	0.096	0.065	177.08	0.000
		8	0.082	0.023	184.87	0.000
		9	0.205	0.148	233.65	0.000
		10	0.026	-0.059	234.46	0.000
		11	0.058	-0.002	238.43	0.000
		12	0.089	-0.002	247.59	0.000

Figura 33 – Correlograma dos retornos quadrados da carteira selecionada pela Dominância Estocástica.

Date: 10/23/07 Time: 17:59
 Sample: 1/08/1996 1/09/2002
 Included observations: 1153

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
		1	0.193	0.193	43.183	0.000
		2	0.121	0.086	60.009	0.000
		3	0.163	0.131	90.685	0.000
		4	0.041	-0.020	92.616	0.000
		5	0.053	0.025	95.915	0.000
		6	0.052	0.018	99.060	0.000
		7	0.049	0.031	101.82	0.000
		8	0.038	0.011	103.49	0.000
		9	0.115	0.098	118.76	0.000
		10	0.062	0.014	123.22	0.000
		11	0.051	0.017	126.27	0.000
		12	0.049	0.002	129.11	0.000

Figura 34 – Correlograma dos retornos quadrados da carteira do IBOVESPA.

Os correlogramas das figuras 32, 33 e 34 rejeitam a hipótese nula de independência dos retornos quadrados. Além disso, estes correlogramas apresentam significância estatística e relevância na magnitude dos coeficientes das funções.

- Intervalo 2

Date: 10/23/07 Time: 18:18
 Sample: 7/08/1997 1/09/2002
 Included observations: 1061

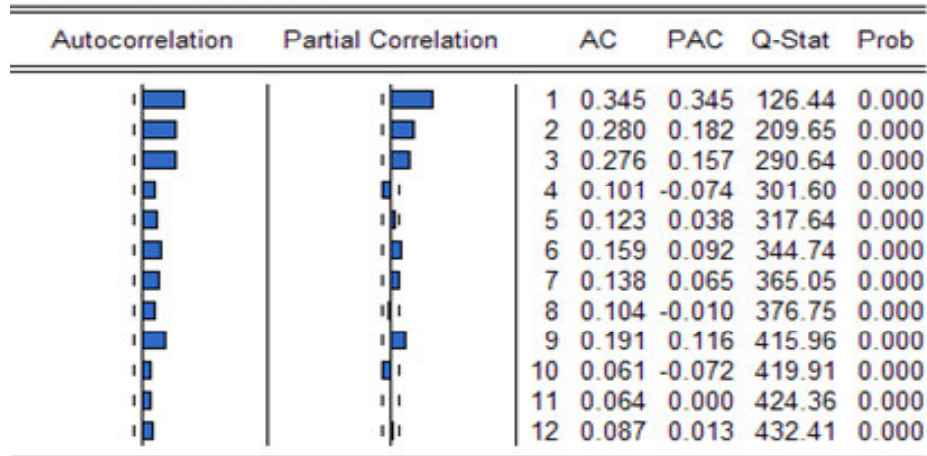


Figura 35 – Correlograma dos retornos quadrados da carteira selecionada pelo M.I.U.

Date: 10/23/07 Time: 18:26
 Sample: 7/08/1997 1/09/2002
 Included observations: 1061

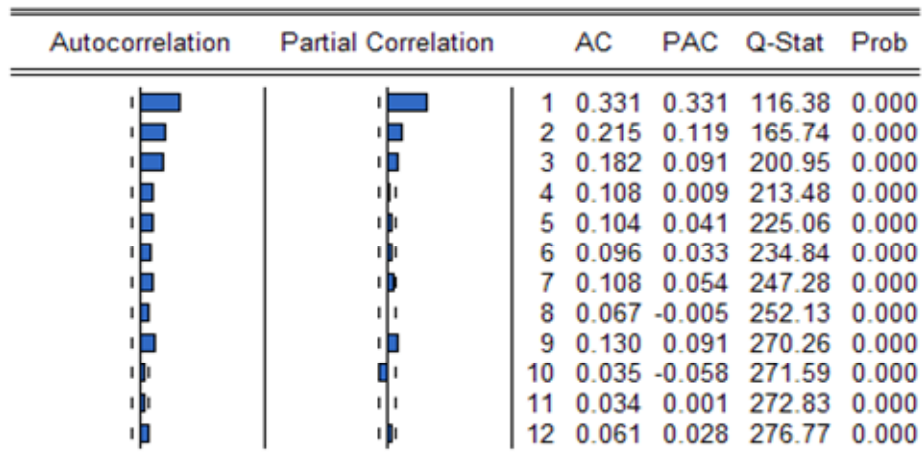


Figura 36 – Correlograma dos retornos quadrados da carteira selecionada pela Dominância Estocástica.

Date: 10/23/07 Time: 18:31
 Sample: 7/08/1997 1/09/2002
 Included observations: 1061

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
		1	0.191	0.191	38.917	0.000
		2	0.145	0.113	61.345	0.000
		3	0.202	0.163	104.69	0.000
		4	0.066	-0.009	109.29	0.000
		5	0.061	0.012	113.20	0.000
		6	0.109	0.065	125.86	0.000
		7	0.064	0.025	130.27	0.000
		8	0.032	-0.010	131.35	0.000
		9	0.122	0.089	147.36	0.000
		10	0.021	-0.031	147.84	0.000
		11	0.019	-0.007	148.22	0.000
		12	0.069	0.031	153.34	0.000

Figura 37 – Correlograma dos retornos quadrados da carteira do IBOVESPA.

Os correlogramas das figuras 35, 36 e 37 rejeitam a hipótese nula de independência dos retornos quadrados. Observe, por exemplo, que as primeiras duas autocorrelações possuem a magnitude dos coeficientes das funções relevantes e estatisticamente significantes.

- Intervalo 3

Date: 10/23/07 Time: 18:54
 Sample: 1/08/1999 7/09/2003
 Included observations: 1055

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
		1	0.201	0.201	42.703	0.000
		2	0.154	0.118	67.827	0.000
		3	0.242	0.201	129.68	0.000
		4	0.139	0.054	150.33	0.000
		5	0.100	0.023	160.92	0.000
		6	0.078	-0.005	167.41	0.000
		7	0.072	0.014	172.99	0.000
		8	0.034	-0.017	174.21	0.000
		9	0.047	0.017	176.53	0.000
		10	0.100	0.075	187.22	0.000
		11	0.098	0.066	197.39	0.000
		12	0.062	0.013	201.53	0.000

Figura 38 – Correlograma dos retornos quadrados da carteira selecionada pela Dominância Estocástica.

Date: 10/23/07 Time: 19:00
 Sample: 1/08/1999 7/09/2003
 Included observations: 1055

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
		1	0.153	0.153	24.874	0.000
		2	0.057	0.035	28.356	0.000
		3	0.088	0.076	36.549	0.000
		4	0.059	0.035	40.273	0.000
		5	0.010	-0.011	40.370	0.000
		6	0.002	-0.008	40.373	0.000
		7	0.016	0.010	40.652	0.000
		8	0.004	-0.001	40.668	0.000
		9	0.076	0.078	46.818	0.000
		10	0.013	-0.011	46.988	0.000
		11	-0.002	-0.008	46.991	0.000
		12	0.002	-0.008	46.996	0.000

Figura 39 – Correlograma dos retornos quadrados da carteira do IBOVESPA.

Os correlogramas das figuras 38 e 39 rejeitam a hipótese nula de independência dos retornos quadrados. Ambos apresentam significância estatística e relevância na magnitude dos coeficientes das funções.

- Intervalo 4

Date: 10/23/07 Time: 19:16
 Sample: 7/10/2000 1/07/2005
 Included observations: 1065

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
		1	0.076	0.076	6.1180	0.013
		2	0.142	0.138	27.810	0.000
		3	0.084	0.065	35.271	0.000
		4	0.030	0.001	36.231	0.000
		5	0.070	0.049	41.489	0.000
		6	0.040	0.024	43.181	0.000
		7	0.073	0.053	48.855	0.000
		8	0.026	0.003	49.571	0.000
		9	0.049	0.027	52.204	0.000
		10	-0.004	-0.024	52.221	0.000
		11	0.061	0.049	56.264	0.000
		12	0.056	0.043	59.672	0.000

Figura 40 – Correlograma dos retornos quadrados da carteira selecionada pelo M.I.U.

Date: 10/23/07 Time: 19:21
 Sample: 7/10/2000 1/07/2005
 Included observations: 1065

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
		1	0.007	0.007	12.053	0.817
		2	0.108	0.109	15.415	0.005
		3	0.085	0.044	16.705	0.008
		4	0.005	-0.004	16.923	0.027
		5	0.087	0.080	18.961	0.002
		6	0.009	0.006	19.050	0.004
		7	0.063	0.048	23.251	0.002
		8	-0.015	-0.024	23.489	0.003
		9	0.042	0.033	25.432	0.003
		10	-0.007	-0.016	25.492	0.004
		11	0.042	0.037	27.399	0.004
		12	0.065	0.055	31.911	0.001

Figura 41 – Correlograma dos retornos quadrados da carteira selecionada pela Dominância Estocástica.

Date: 10/23/07 Time: 19:27
 Sample: 7/10/2000 1/07/2005
 Included observations: 1065

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
		1	0.049	0.049	2.6107	0.106
		2	0.180	0.178	37.176	0.000
		3	0.087	0.074	45.363	0.000
		4	0.098	0.063	55.596	0.000
		5	0.025	-0.008	56.248	0.000
		6	0.041	0.007	58.027	0.000
		7	0.051	0.037	60.856	0.000
		8	0.012	-0.005	61.008	0.000
		9	0.059	0.042	64.765	0.000
		10	0.056	0.045	68.152	0.000
		11	0.037	0.013	69.655	0.000
		12	0.055	0.031	72.910	0.000

Figura 42 – Correlograma dos retornos quadrados da carteira do IBOVESPA.

Os correlogramas das figuras 40, 41 e 42 rejeitam a hipótese nula de independência dos retornos quadrados. Observe como, para todas estas figuras, o lag(2) apresenta significância estatística e magnitude dos coeficientes das funções relevantes.

- Intervalo 5

Date: 10/23/07 Time: 19:41
 Sample: 1/10/2002 7/07/2006
 Included observations: 1076

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
		1	0.122	0.122	16.188	0.000
		2	0.103	0.089	27.660	0.000
		3	0.085	0.064	35.542	0.000
		4	0.094	0.070	45.030	0.000
		5	0.093	0.065	54.429	0.000
		6	0.076	0.043	60.739	0.000
		7	0.023	-0.013	61.301	0.000
		8	0.088	0.065	69.791	0.000
		9	0.045	0.012	71.986	0.000
		10	0.170	0.145	103.43	0.000
		11	0.042	-0.009	105.33	0.000
		12	0.022	-0.020	105.86	0.000

Figura 43 – Correlograma dos retornos quadrados da carteira selecionada pelo M.I.U.

Date: 10/23/07 Time: 19:45
 Sample: 1/10/2002 7/07/2006
 Included observations: 1076

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
		1	0.048	0.048	2.4697	0.116
		2	0.081	0.079	9.5718	0.008
		3	0.165	0.159	39.081	0.000
		4	0.176	0.163	72.527	0.000
		5	0.041	0.010	74.352	0.000
		6	0.134	0.090	93.922	0.000
		7	0.091	0.036	102.97	0.000
		8	0.052	0.004	105.95	0.000
		9	0.150	0.110	130.40	0.000
		10	0.083	0.028	137.96	0.000
		11	0.019	-0.026	138.38	0.000
		12	0.147	0.094	161.90	0.000

Figura 44 – Correlograma dos retornos quadrados da carteira selecionada pela Dominância Estocástica.

Date: 10/23/07 Time: 19:50
 Sample: 1/10/2002 7/07/2006
 Included observations: 1076

























Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
		1	0.036	0.036	1.3680	0.242
		2	0.069	0.068	6.5238	0.038
		3	0.146	0.142	29.538	0.000
		4	0.120	0.110	45.188	0.000
		5	0.047	0.025	47.595	0.000
		6	0.102	0.069	58.837	0.000
		7	0.118	0.084	74.004	0.000
		8	0.046	0.014	76.264	0.000
		9	0.157	0.123	103.11	0.000
		10	0.058	0.012	106.81	0.000
		11	0.069	0.026	111.95	0.000
		12	0.119	0.071	127.40	0.000

Figura 45 – Correlograma dos retornos quadrados da carteira do IBOVESPA.

Os correlogramas das figuras 43, 44 e 45 rejeitam a hipótese nula dos retornos quadrados serem descorrelacionados. Todas estas figuras possuem significância estatística e magnitude dos coeficientes das funções relevantes.

Portanto, as séries dos retornos financeiros das carteiras de investimento analisadas apresentam um tipo de dependência não-linear, a qual é responsável pelos padrões alternantes de alta e baixa volatilidade observados nos gráficos da série de retornos.

É conveniente, neste momento, destacar os principais fatos estilizados observados:

- As séries são assimétricas;
- As séries apresentam curtose excessiva, o que significa que a probabilidade de ocorrência de valores extremos é mais alta do que a considerada pela distribuição de probabilidade Normal;
- Os retornos não são independentes, apresentando forte dependência no segundo momento. Tal característica é responsável pelos padrões alternantes de alta e baixa volatilidade observados nas séries de retornos.

Logo a hipótese de normalidade não deve ser assumida para séries de retornos financeiros, o que sugere que metodologias que levem em conta a

ocorrência de retornos extremos devem ser utilizadas no cálculo do VaR, principalmente quando o interesse está em baixas probabilidades.

6.5. Análise dos valores extremos

Os retornos extremos não apresentam as mesmas propriedades empíricas da série como um todo.

Sendo assim, faremos aqui uma breve análise dos extremos observados nas séries descritas acima, dado que são esses os retornos que carregam as informações necessárias para a estimação do VaR quando estamos interessados em baixas probabilidades.

Destacamos nos gráficos abaixo os 1% piores retornos ocorridos em cada série das carteiras de investimento, seguidos de tabelas com o número de dias de negociação entre suas ocorrências.

• Intervalo 1

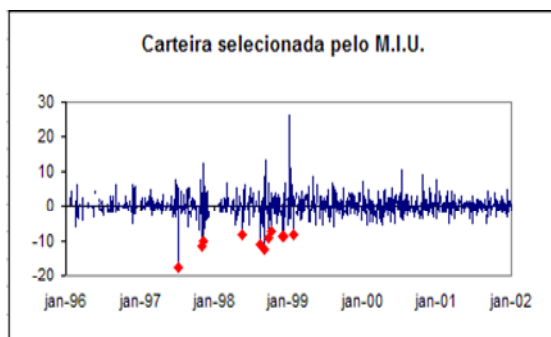


Figura 46 – 1% piores retornos da carteira selecionada pelo M.I.U.

Data	MIU1	Dias úteis
15/07/97	-17,59	-
07/11/97	-11,51	83
12/11/97	-10,33	3
26/05/98	-8,33	139
21/08/98	-11,13	63
10/09/98	-12,61	14
30/09/98	-9,04	14
14/10/98	-7,31	10
11/12/98	-8,58	42
14/12/98	-8,92	1
02/02/99	-8,46	36

Tabela 6 – Dias úteis entre retornos extremos usando M.I.U.

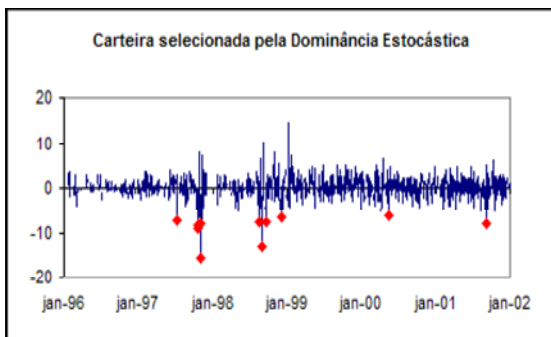


Figura 47 – 1% piores retornos da carteira selecionada pela Dominância Estocástica.

Data	Dom est1	Dias úteis
15/07/97	-7,10	-
27/10/97	-8,46	74
30/10/97	-9,17	3
07/11/97	-8,14	6
12/11/97	-15,72	3
27/08/98	-7,46	206
10/09/98	-13,24	10
01/10/98	-7,57	15
14/12/98	-6,53	52
22/05/00	-6,10	375
13/09/01	-7,83	343

Tabela 7 – Dias úteis entre retornos extremos usando D.E.

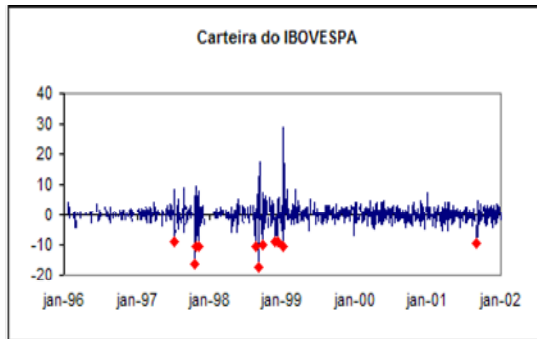


Figura 48 – 1% piores retornos da carteira do IBOVESPA.

Data	IBOVESPA1	Dias úteis
15/07/97	-8,90	-
27/10/97	-16,22	74
30/10/97	-10,33	3
12/11/97	-10,75	9
27/08/98	-10,48	206
10/09/98	-17,23	10
01/10/98	-10,09	15
03/12/98	-9,19	45
14/12/98	-8,89	7
14/01/99	-10,50	23
11/09/01	-9,63	693

Tabela 8 – Dias úteis entre retornos extremos do IBOVESPA.

• Intervalo 2

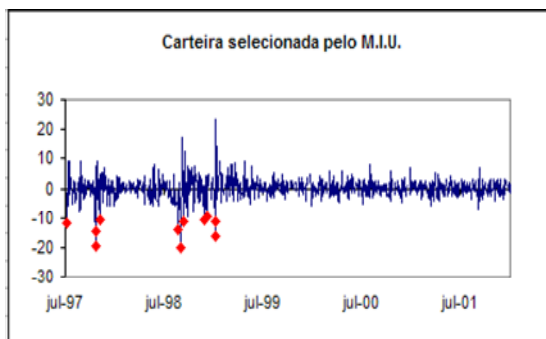


Figura 49 – 1% piores retornos da carteira selecionada pelo M.I.U.

Data	MIU2	Dias úteis
15/07/97	-11,70	-
27/10/97	-19,28	74
30/10/97	-14,60	3
12/11/97	-10,67	9
27/08/98	-14,08	206
10/09/98	-19,90	10
17/09/98	-11,44	5
03/12/98	-10,77	55
14/12/98	-9,53	7
13/01/99	-11,43	22
14/01/99	-16,27	1

Tabela 9 – Dias úteis entre retornos extremos usando M.I.U.

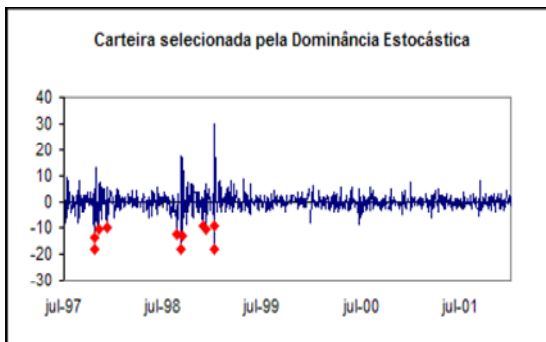


Figura 50 – 1% piores retornos da carteira selecionada pela Dominância Estocástica.

Data	Dom_est2	Dias úteis
27/10/97	-18,03	-
30/10/97	-13,64	3
12/11/97	-10,94	9
11/12/97	-9,91	21
27/08/98	-12,57	185
10/09/98	-18,02	10
17/09/98	-12,83	5
03/12/98	-9,43	55
14/12/98	-10,64	7
13/01/99	-9,47	22
14/01/99	-18,22	1

Tabela 10 – Dias úteis entre retornos extremos usando D.E.

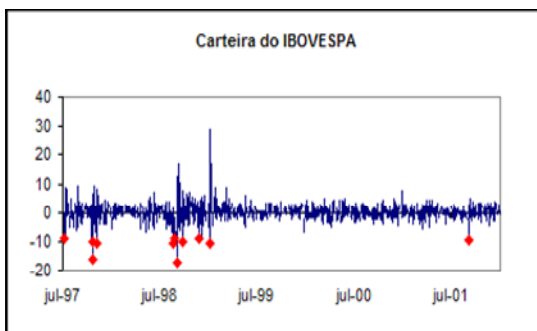


Figura 51 – 1% piores retornos da carteira do IBOVESPA.

Data	IBOVESPA2	Dias úteis
15/07/97	-8,90	-
27/10/97	-16,22	74
30/10/97	-10,33	3
12/11/97	-10,75	9
27/08/98	-10,48	206
03/09/98	-9,01	5
10/09/98	-17,23	5
01/10/98	-10,09	15
03/12/98	-9,19	45
14/01/99	-10,50	30
11/09/01	-9,63	693

Tabela 11 – Dias úteis entre retornos extremos do IBOVESPA.

- Intervalo 3

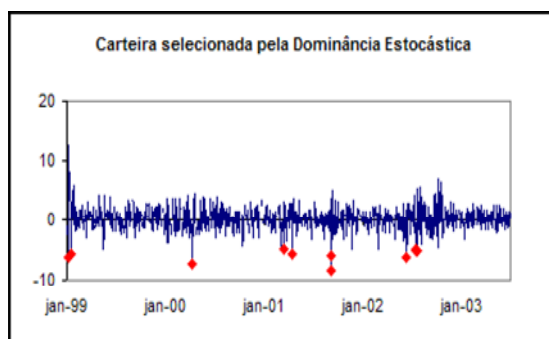


Figura 52 – 1% piores retornos da carteira selecionada pela Dominância Estocástica.

Data	Dom_est3	Dias úteis
14/01/99	-6,10	-
22/01/99	-5,54	6
14/04/00	-7,32	320
22/03/01	-4,78	244
20/04/01	-5,63	21
11/09/01	-8,26	102
13/09/01	-5,84	2
20/06/02	-6,31	200
25/07/02	-4,89	25
26/07/02	-5,21	1
30/07/02	-5,03	2

Tabela 12 – Dias úteis entre retornos extremos usando D.E.

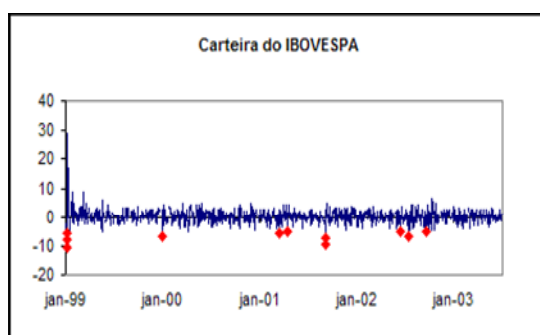


Figura 53 – 1% piores retornos da carteira do IBOVESPA.

Data	IBOVESPA3	Dias úteis
11/01/99	-5,74	-
12/01/99	-7,93	1
14/01/99	-10,50	2
04/01/00	-6,59	253
22/03/01	-5,43	317
20/04/01	-5,23	21
11/09/01	-9,63	102
13/09/01	-7,54	2
20/06/02	-5,22	200
22/07/02	-6,75	22
27/09/02	-5,40	49

Tabela 13 – Dias úteis entre retornos extremos do IBOVESPA.

- Intervalo 4

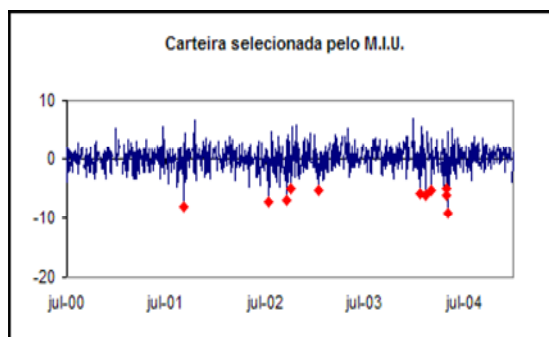


Figura 54 – 1% piores retornos da carteira selecionada pelo M.I.U.

Data	MIU4	Dias úteis
13/09/01	-8,00	-
22/07/02	-7,32	222
27/09/02	-6,91	49
14/10/02	-5,02	11
21/01/03	-5,27	71
29/01/04	-5,76	267
19/02/04	-5,99	15
10/03/04	-5,32	14
06/05/04	-6,12	41
07/05/04	-4,90	1
10/05/04	-9,23	1

Tabela 14 – Dias úteis entre retornos extremos usando M.I.U.

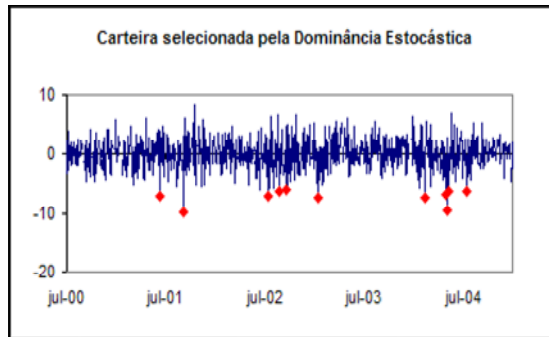


Figura 55 – 1% piores retornos da carteira selecionada pela Dominância Estocástica.

Data	Dom_est4	Dias úteis
18/06/01	-7,10	-
13/09/01	-9,70	63
22/07/02	-7,14	222
03/09/02	-6,22	31
27/09/02	-5,96	18
21/01/03	-7,30	82
19/02/04	-7,23	282
06/05/04	-6,67	55
10/05/04	-9,47	2
17/05/04	-6,14	5
23/07/04	-6,17	49

Tabela 15 – Dias úteis entre retornos extremos usando D.E.

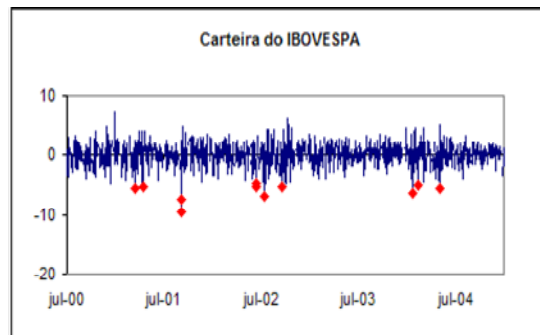


Figura 56 – 1% piores retornos da carteira do IBOVESPA.

Data	IBOVESPA4	Dias úteis
22/03/01	-5,43	-
20/04/01	-5,23	21
11/09/01	-9,63	102
13/09/01	-7,54	2
20/06/02	-5,22	200
21/06/02	-4,80	1
22/07/02	-6,75	21
27/09/02	-5,40	49
29/01/04	-6,34	349
19/02/04	-4,89	15
10/05/04	-5,61	57

Tabela 16 – Dias úteis entre retornos extremos do IBOVESPA.

• Intervalo 5

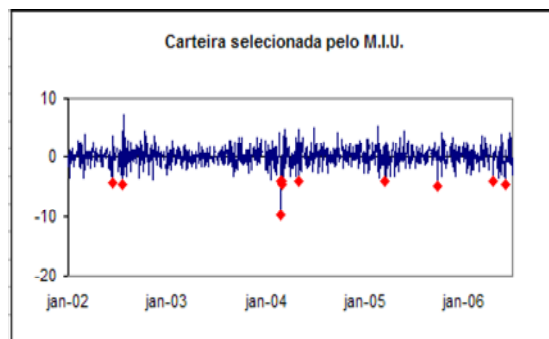


Figura 57 – 1% piores retornos da carteira selecionada pelo M.I.U.

Data	MIU5	Dias úteis
20/06/02	-4,26	-
26/07/02	-4,64	26
02/03/04	-4,07	417
03/03/04	-9,71	1
09/03/04	-4,56	4
10/03/04	-4,07	1
10/05/04	-4,17	43
23/03/05	-3,98	227
05/10/05	-4,86	140
27/04/06	-4,01	146
13/06/06	-4,51	33

Tabela 17 – Dias úteis entre retornos extremos usando M.I.U.

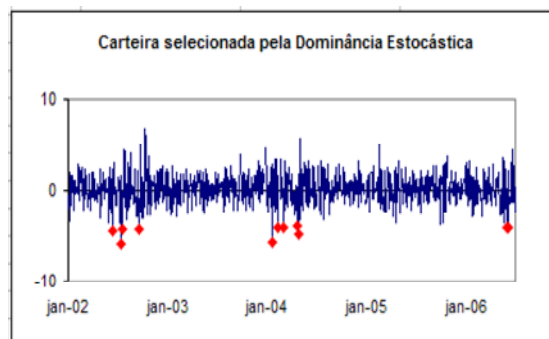


Figura 58 – 1% piores retornos da carteira selecionada pela Dominância Estocástica.

Data	Dom_est5	Dias úteis
20/06/02	-4,45	-
22/07/02	-5,92	22
26/07/02	-4,34	4
27/09/02	-4,29	45
29/01/04	-5,80	349
19/02/04	-4,04	15
10/03/04	-4,14	14
28/04/04	-3,87	35
06/05/04	-4,85	6
07/06/06	-4,08	544
12/06/06	-4,09	3

Tabela 18 – Dias úteis entre retornos extremos usando D.E.

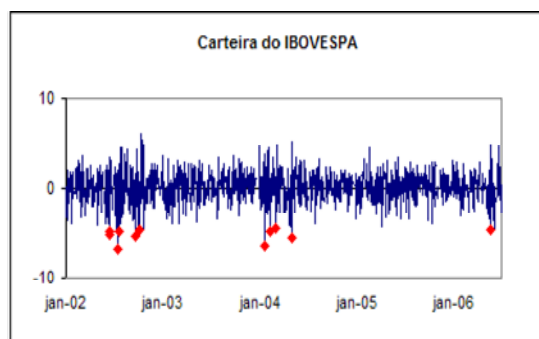


Figura 59 – 1% piores retornos da carteira do IBOVESPA.

Data	IBOVSPA5	Dias úteis
20/06/02	-5,22	-
21/06/02	-4,80	1
22/07/02	-6,75	21
26/07/02	-4,75	4
27/09/02	-5,40	45
14/10/02	-4,67	11
29/01/04	-6,34	338
19/02/04	-4,89	15
10/03/04	-4,52	14
10/05/04	-5,61	43
30/05/06	-4,65	536

Tabela 19 – Dias úteis entre retornos extremos do IBOVESPA.

Observando as figuras de 46 a 59, podemos notar que os extremos não se apresentam uniformemente distribuídos nas séries, mas sim formam aglomerados, o que indica que estes não devem ser considerados independentes. A ocorrência de um retorno extremo aumenta a probabilidade de que outro retorno extremo ocorra nos períodos subsequentes.

Quando se aplica a Teoria dos Valores Extremos, tal problema pode ser grave para os métodos da regressão e máxima verossimilhança, onde a amostra é dividida em sub-amostras. A possibilidade de perda de valores extremos para estes casos fica evidente. Quando se usa o estimador de Hill, a interdependência dos valores extremos parece não ser tão grave, já que este avalia os extremos de toda a amostra. Um outro agravante na utilização dos métodos da regressão e de máxima verossimilhança é que, por a amostra ser curta, cria-se uma dificuldade extra na escolha do tamanho das sub-amostras, já que se pode ter sub-períodos muito curtos (os valores extremos ficam pouco consistentes) ou número reduzido de sub-amostras (acarretando pouca quantidade de valores extremos).

As tabelas entre 6 e 19 confirmam a hipótese de que a ocorrência de um retorno extremo aumenta a probabilidade de ocorrência de outro retorno extremo em dias subsequentes. Não devemos, portanto, considerar os retornos extremos independentes para as séries das carteiras de investimento analisadas.

7

Metodologia e Resultados

O presente capítulo tem o objetivo de avaliar e validar o modelo baseado na Teoria dos Valores Extremos para o cálculo do VaR. Tal modelo foi aplicado às 14 séries de retorno das carteiras de investimento e a validação foi dada com base na frequência de violações e no teste de Kupiec.

7.1. Considerações gerais

Antes de partir para a avaliação da metodologia proposta, vale a pena lembrar que, conforme cita Souza (1999), uma das questões mais problemáticas na implementação de sistemas de estimação de VaR diz respeito à validação de metodologias alternativas. Uma das causas está relacionada com a seguinte pergunta:

Qual deve ser o tamanho da amostra utilizada para estimação do modelo (insample), ou ainda, qual deve ser o tamanho do conjunto de observações destinado a validação (out-of-sample)?

Não é nada fácil responder a tais perguntas. Na verdade, não existe um consenso sobre qual o tamanho ótimo de janela de estimação. Uma janela de tamanho fixo faz com que a estimação fique sensível a outliers (a cada dia ocorre a entrada e a saída de uma observação), ao passo que uma janela de tamanho variável, isto é, crescente, pode incorporar ao modelo o efeito de observações antigas que já não guardam mais relação com a atualidade. Além disso, o VaR é estimado com uma quantidade de observações cada vez maior, fazendo com que as previsões deste não sejam comparáveis (estão sendo realizadas com janelas diferentes a cada dia), dificultando portanto a validação do modelo.

Sendo assim, o tamanho da janela utilizada deve depender do modelo utilizado e da probabilidade do VaR que se pretende estimar. Estamos interessados aqui em probabilidades mais baixas, ou seja, nas perdas que ocorrem

a menores frequências, o que nos sugere uma janela de estimação que incorpore a quantidade máxima de dados possível. O problema é que tal janela fornece um período pequeno para validação.

Neste capítulo são apresentados os Hill-plots, um comparativo entre as funções de distribuição acumulada e tabelas com os resultados do backtesting.

Os Hill-plots nos permite obter o parâmetro de forma de cauda k , a partir do ponto onde tal gráfico parece estabilizado.

A motivação para comparar as funções de distribuição acumulada é verificar qual distribuição de probabilidade melhor se ajusta aos dados de retorno das carteiras de investimento.

No backtesting foi utilizado o teste de Kupiec. Através deste teste é possível aceitar ou rejeitar o modelo proposto para determinação do VaR, sob determinado nível de significância.

7.2. Metodologia para obtenção dos parâmetros de forma de cauda

Para determinação dos parâmetros de forma de cauda optou-se pela metodologia do Hill-plot. Os gráficos a seguir estão baseados na cauda inferior das séries analisadas.

Apresentamos, adiante, os Hill-plots das carteiras de investimento.

- Intervalo 1

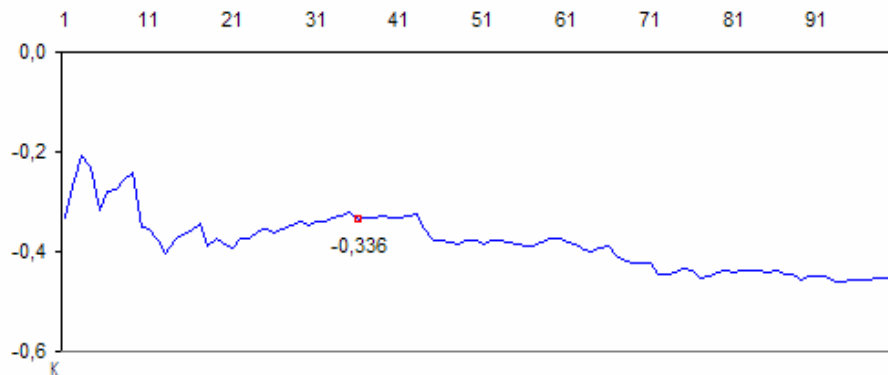


Figura 60 – Hill-plot para a carteira selecionada pelo M.I.U.

De acordo com a figura 60, o estimador de Hill para o parâmetro de forma de cauda é -0,336. Este valor é alcançado para $q=36$.

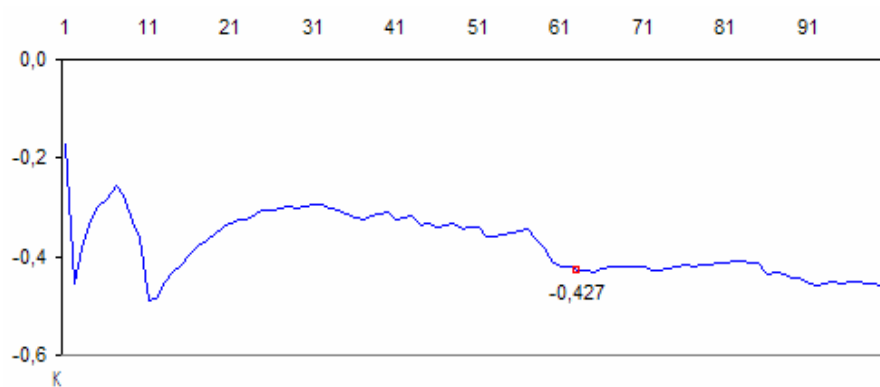


Figura 61 – Hill-plot para a carteira selecionada pela Dominância Estocástica.

De acordo com a figura 61, o estimador de Hill para o parâmetro de forma de cauda é -0,427. Este valor é alcançado para $q=63$.

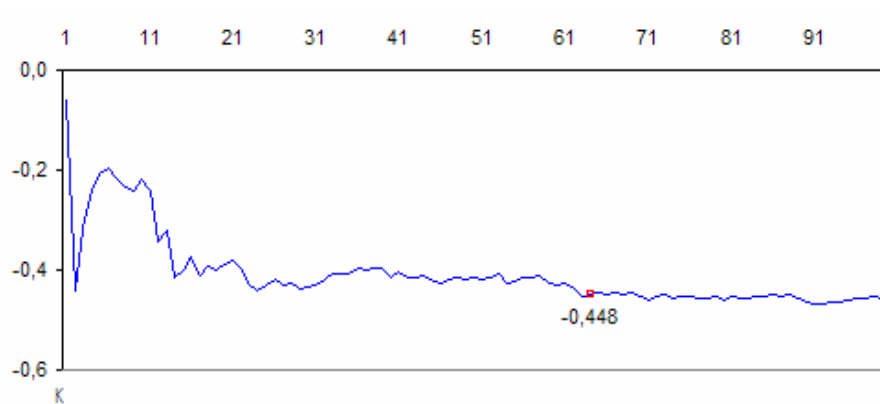


Figura 62 – Hill-plot para a carteira do IBOVESPA.

De acordo com a figura 62, o estimador de Hill para o parâmetro de forma de cauda é -0,448. Este valor é alcançado para $q=64$.

- Intervalo 2

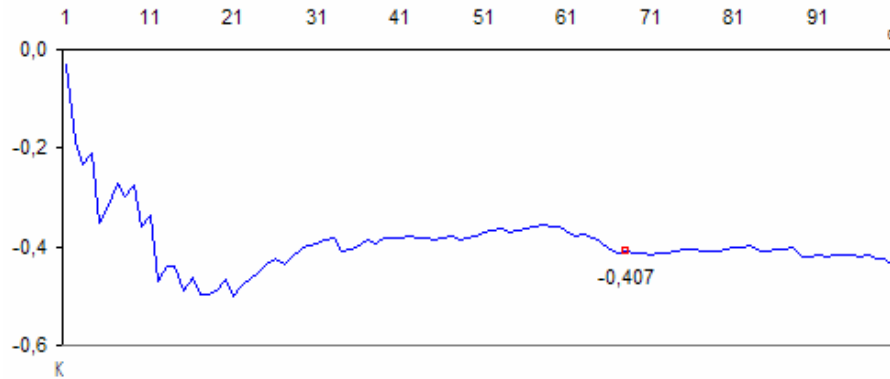


Figura 63 – Hill-plot para a carteira selecionada pelo M.I.U.

De acordo com a figura 63, o estimador de Hill para o parâmetro de forma de cauda é -0,407. Este valor é alcançado para $q=68$.

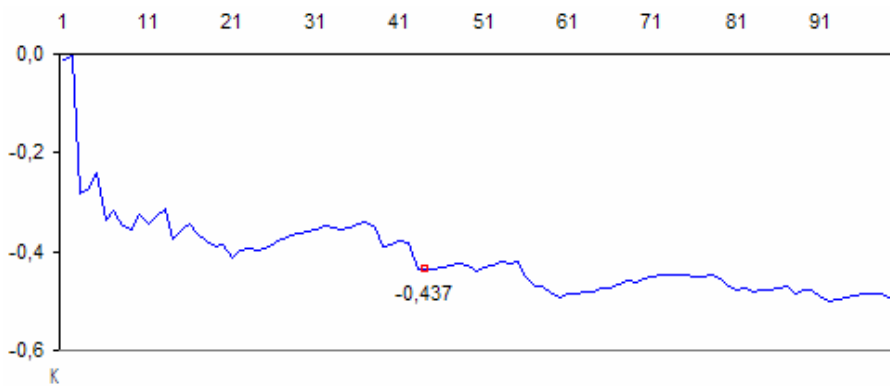


Figura 64 – Hill-plot para a carteira selecionada pela Dominância Estocástica.

De acordo com a figura 64, o estimador de Hill para o parâmetro de forma de cauda é -0,437. Este valor é alcançado para $q=44$.

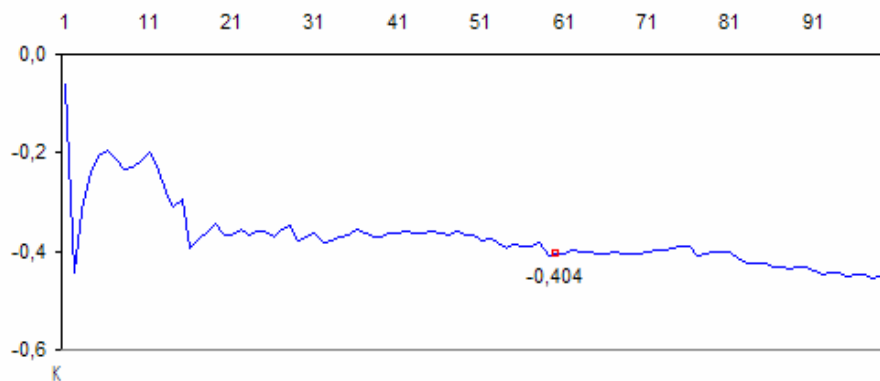


Figura 65 – Hill-plot para a carteira do IBOVESPA.

De acordo com a figura 65, o estimador de Hill para o parâmetro de forma de cauda é -0,404. Este valor é alcançado para $q=60$.

- Intervalo 3

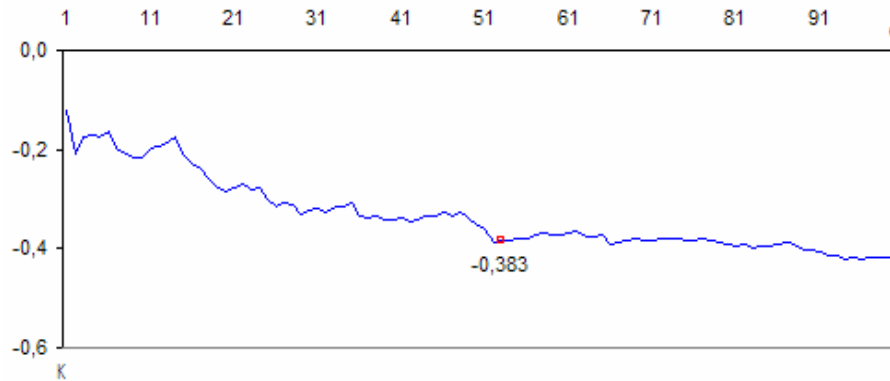


Figura 66 – Hill-plot para a carteira selecionada pela Dominância Estocástica.

De acordo com a figura 66, o estimador de Hill para o parâmetro de forma de cauda é -0,383. Este valor é alcançado para $q=53$.

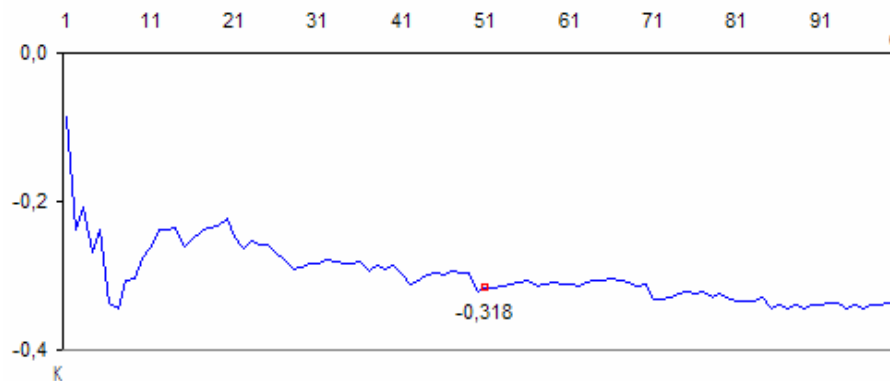


Figura 67 – Hill-plot para a carteira do IBOVESPA.

De acordo com a figura 67, o estimador de Hill para o parâmetro de forma de cauda é -0,318. Este valor é alcançado para $q=51$.

- Intervalo 4

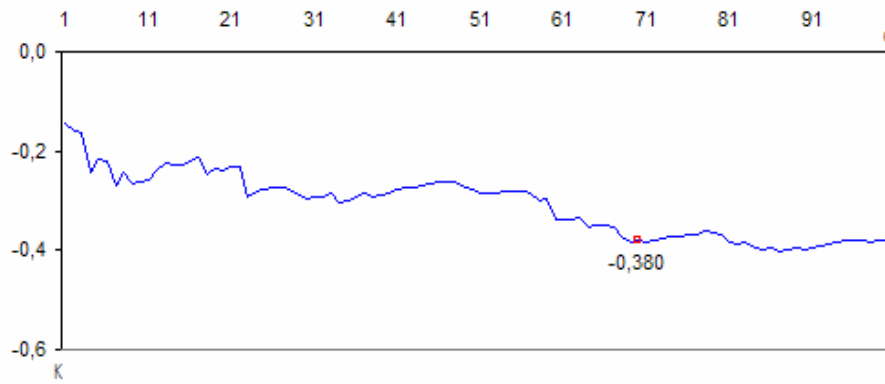


Figura 68 – Hill-plot para a carteira selecionada pelo M.I.U.

De acordo com a figura 68, o estimador de Hill para o parâmetro de forma de cauda é -0,380. Este valor é alcançado para $q=70$.

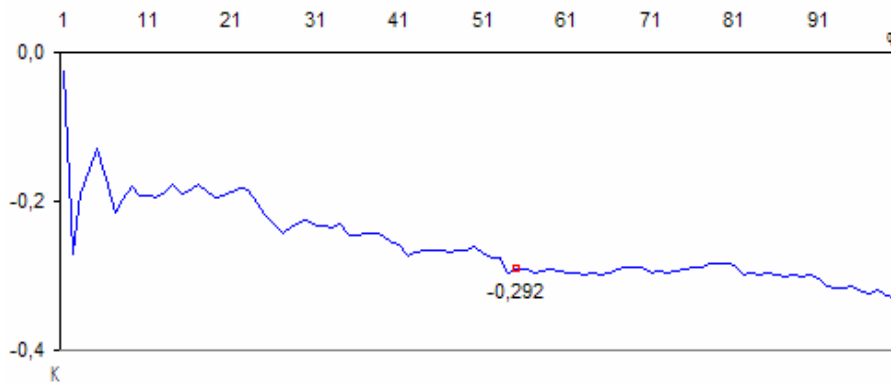


Figura 69 – Hill-plot para a carteira selecionada pela Dominância Estocástica.

De acordo com a figura 69, o estimador de Hill para o parâmetro de forma de cauda é -0,292. Este valor é alcançado para $q=55$.

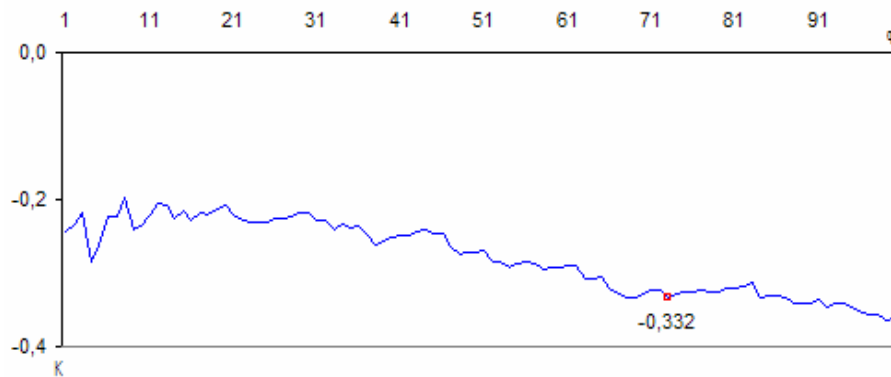


Figura 70 – Hill-plot para a carteira do IBOVESPA.

De acordo com a figura 70, o estimador de Hill para o parâmetro de forma de cauda é -0,332. Este valor é alcançado para $q=73$.

- Intervalo 5

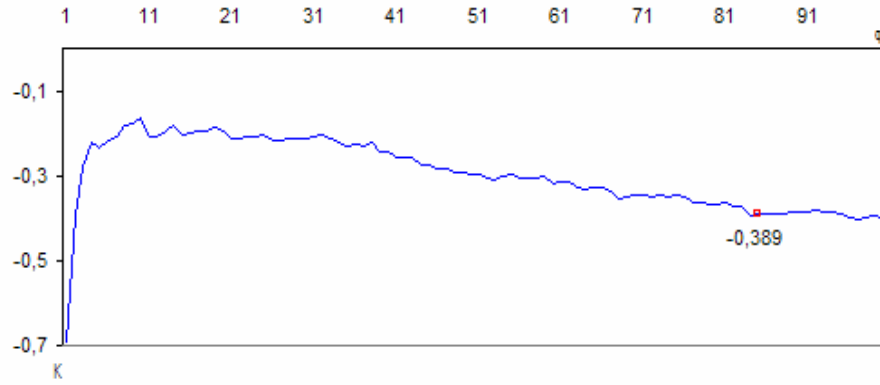


Figura 71 – Hill-plot para a carteira selecionada pelo M.I.U.

De acordo com a figura 71, o estimador de Hill para o parâmetro de forma de cauda é -0,389. Este valor é alcançado para $q=85$.

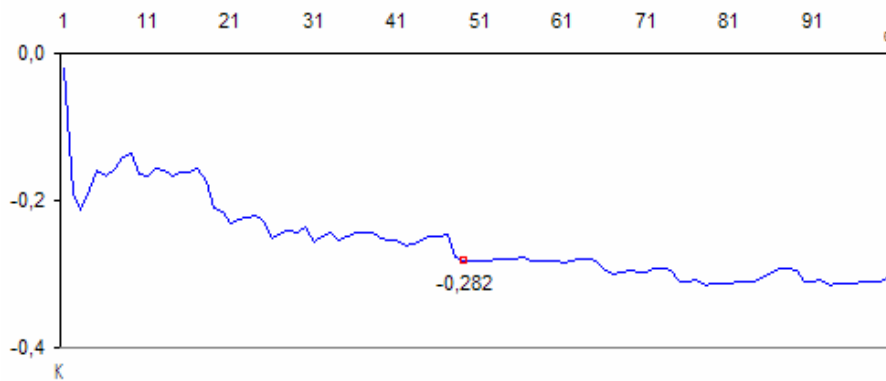


Figura 72 – Hill-plot para a carteira selecionada pela Dominância Estocástica.

De acordo com a figura 72, o estimador de Hill para o parâmetro de forma de cauda é -0,282. Este valor é alcançado para $q=49$.

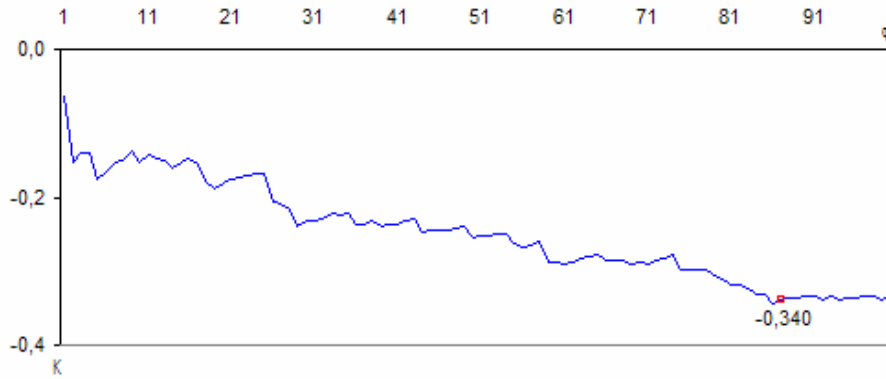


Figura 73 – Hill-plot para a carteira do IBOVESPA.

De acordo com a figura 73, o estimador de Hill para o parâmetro de forma de cauda é -0,340. Este valor é alcançado para $q=87$.

7.3. Comparativo entre as funções de distribuição acumulada

A proposta desta seção é realizar um comparativo entre as funções de distribuição acumulada Fréchet (TVE), Normal e Empírica. Tal análise permite avaliar qual função melhor se ajusta a função de distribuição acumulada empírica.

- Intervalo 1

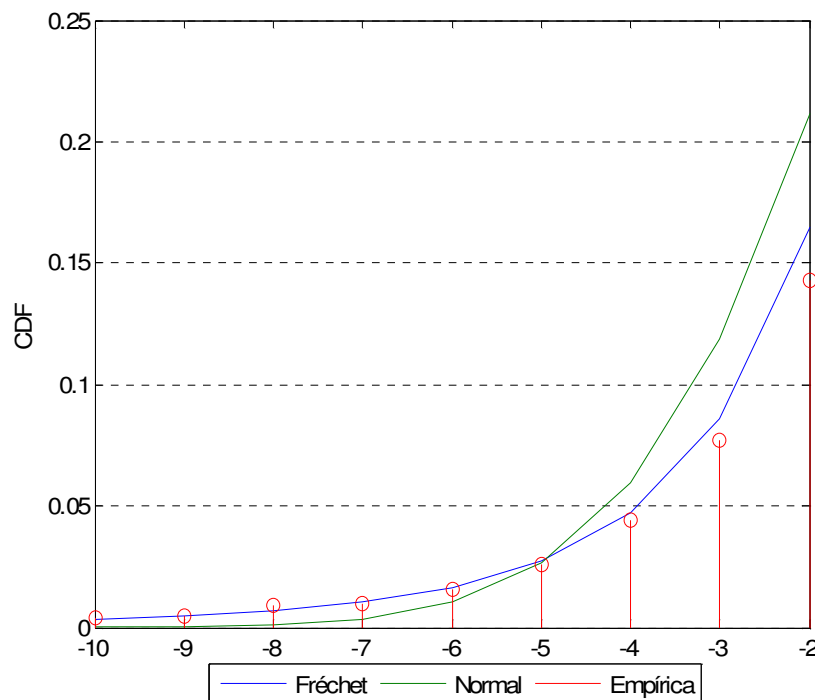


Figura 74 - Distribuição acumulada dos retornos da carteira selecionada pelo M.I.U.

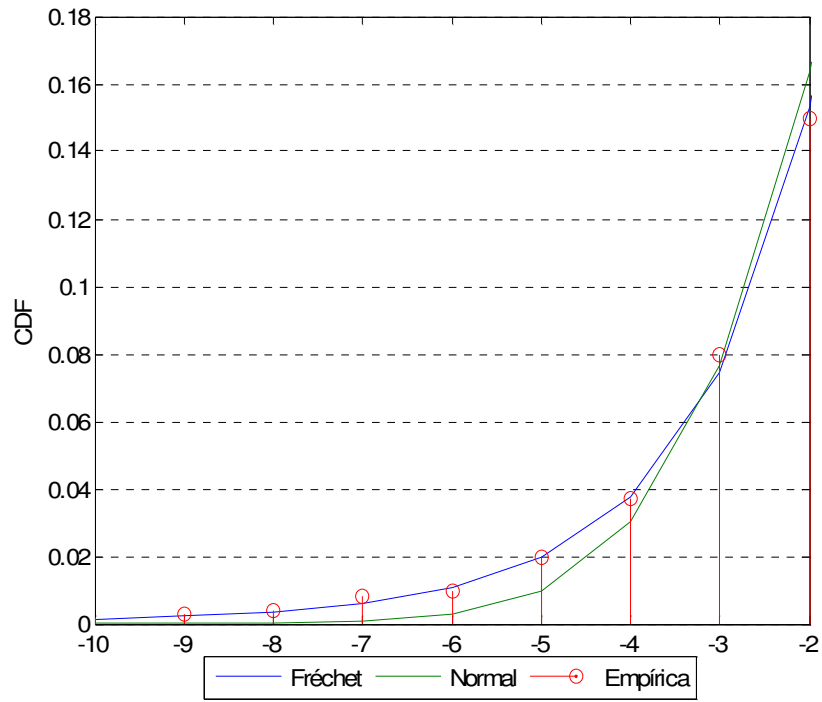


Figura 75 - Distribuição acumulada dos retornos da carteira selecionada pela Dominância Estocástica.

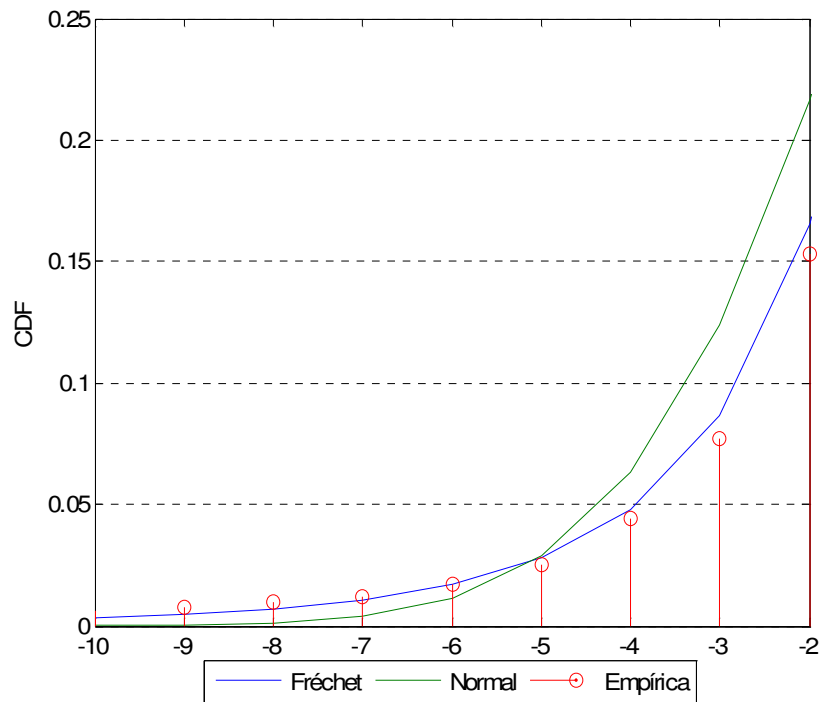


Figura 76 - Distribuição acumulada dos retornos da carteira do IBOVESPA.

Observando as figuras 74, 75 e 76 é possível afirmar que a função de distribuição Fréchet se ajusta melhor a distribuição empírica, quando comparada com a distribuição Normal.

- Intervalo 2

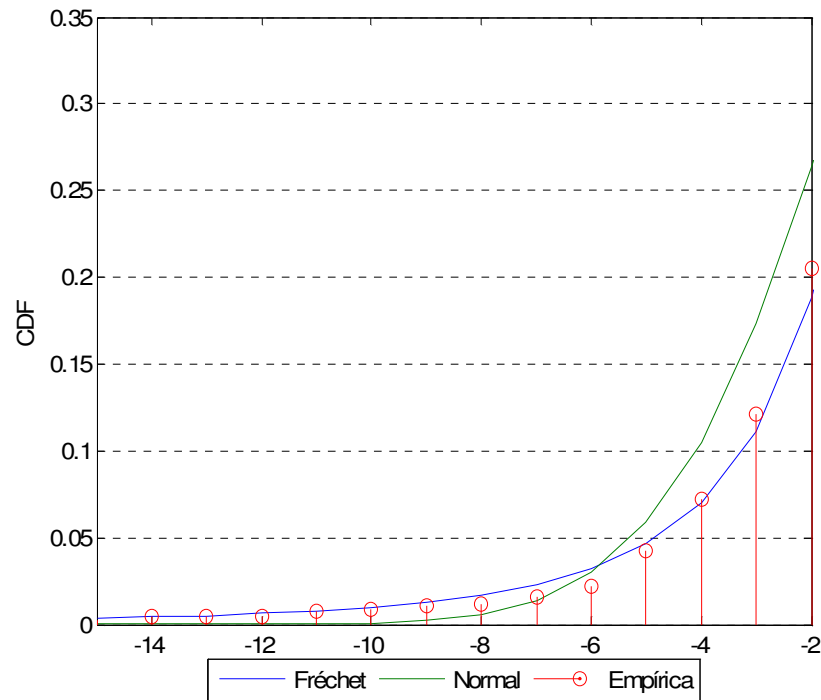


Figura 77 - Distribuição acumulada dos retornos da carteira selecionada pelo M.I.U.

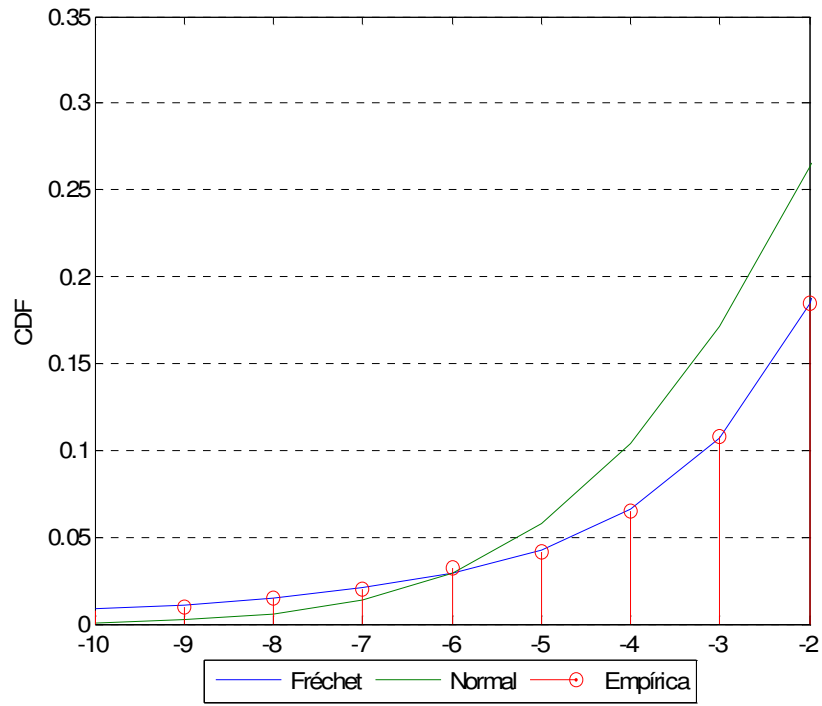


Figura 78 - Distribuição acumulada dos retornos da carteira selecionada pela Dominância Estocástica.

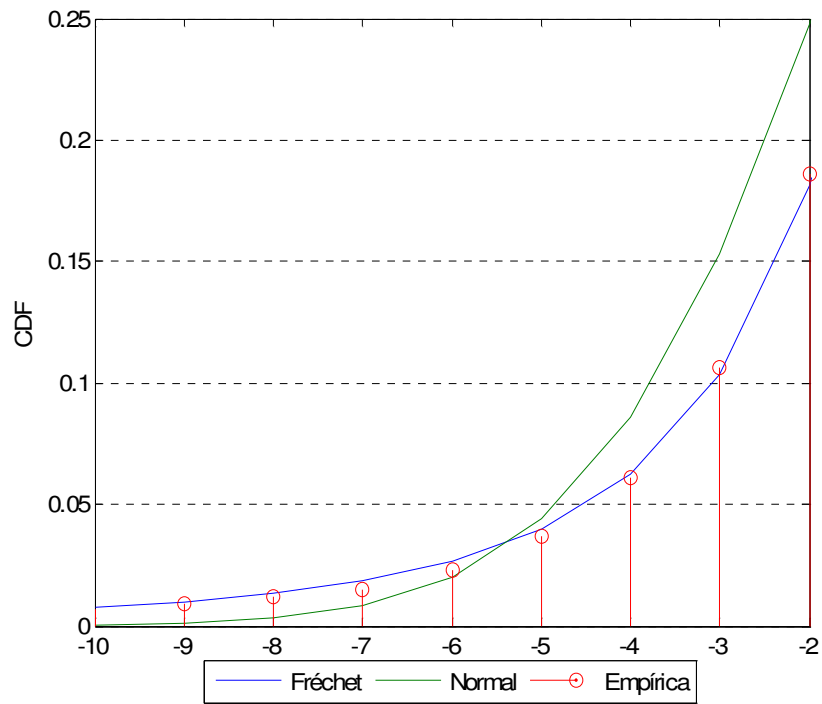


Figura 79 - Distribuição acumulada dos retornos da carteira do IBOVESPA.

As figuras 77, 78 e 79 confirmam que a distribuição acumulada Fréchet apresenta um melhor ajuste da distribuição acumulada empírica, quando comparada a distribuição acumulada Normal.

- Intervalo 3

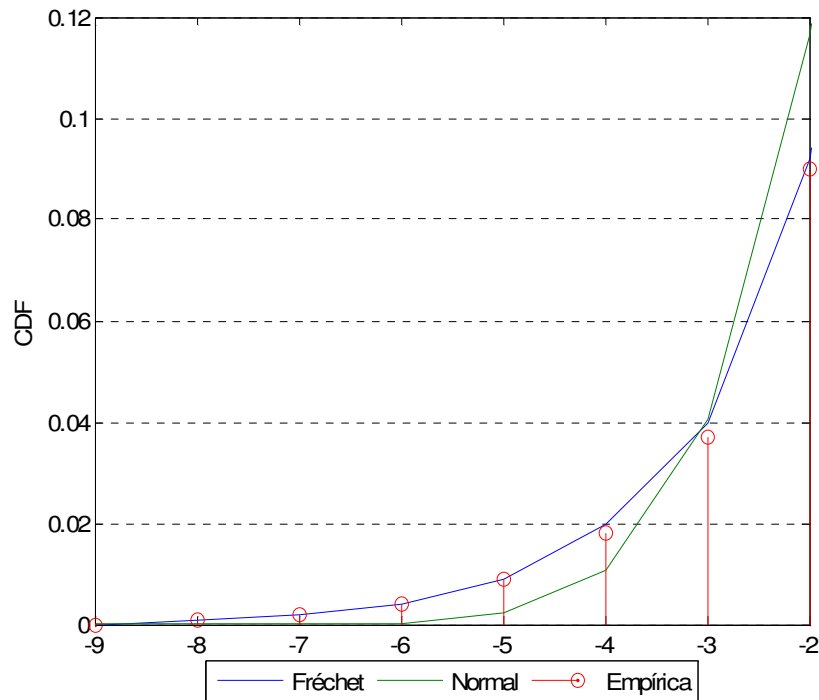


Figura 80 - Distribuição acumulada dos retornos da carteira selecionada pela Dominância Estocástica.

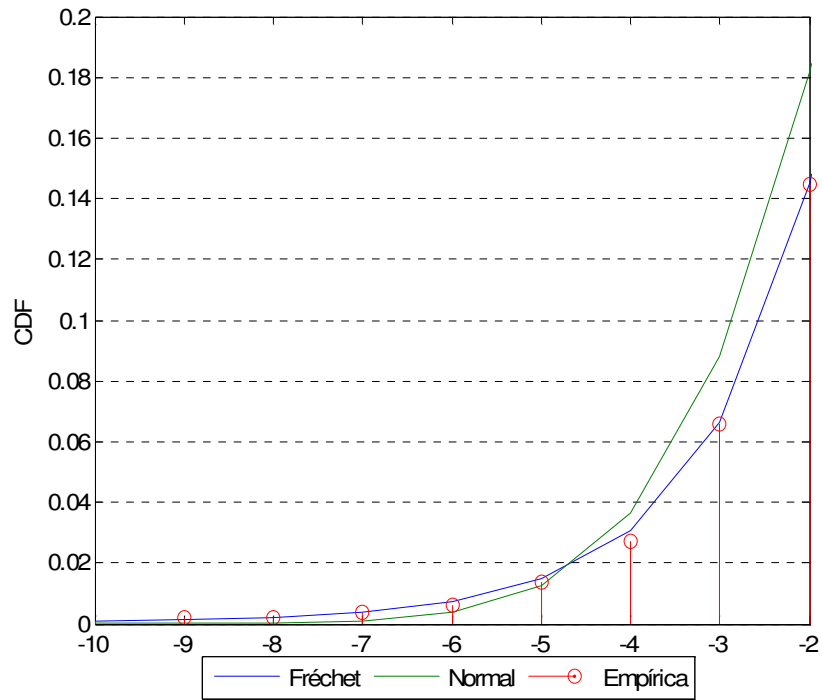


Figura 81 - Distribuição acumulada dos retornos da carteira do IBOVESPA.

Nas figuras 80 e 81 é possível visualizar que a distribuição acumulada Fréchet possui um ajuste superior a distribuição acumulada empírica, quando comparada com a distribuição acumulada da Normal.

- Intervalo 4

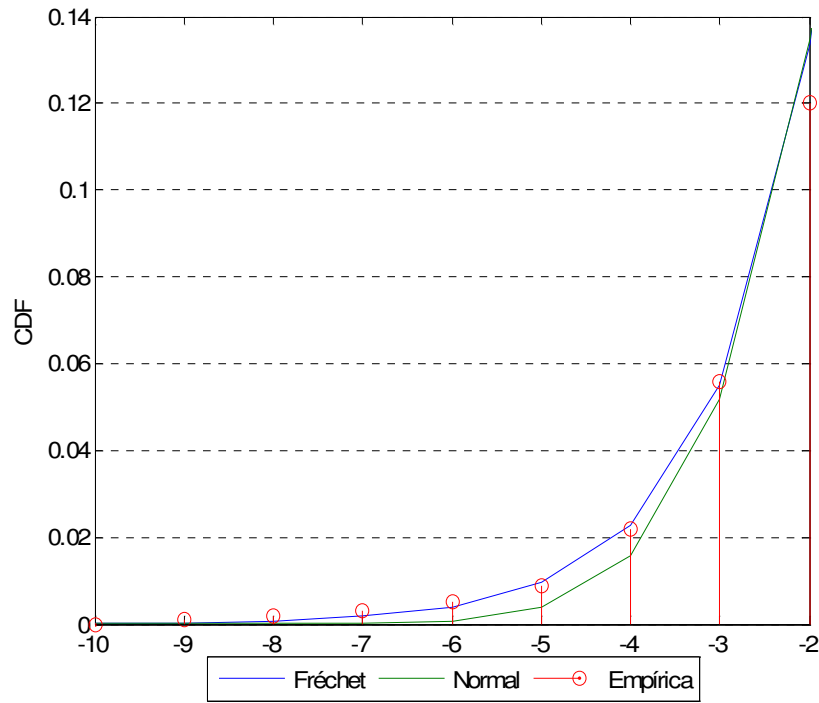


Figura 82 - Distribuição acumulada dos retornos da carteira selecionada pelo M.I.U.

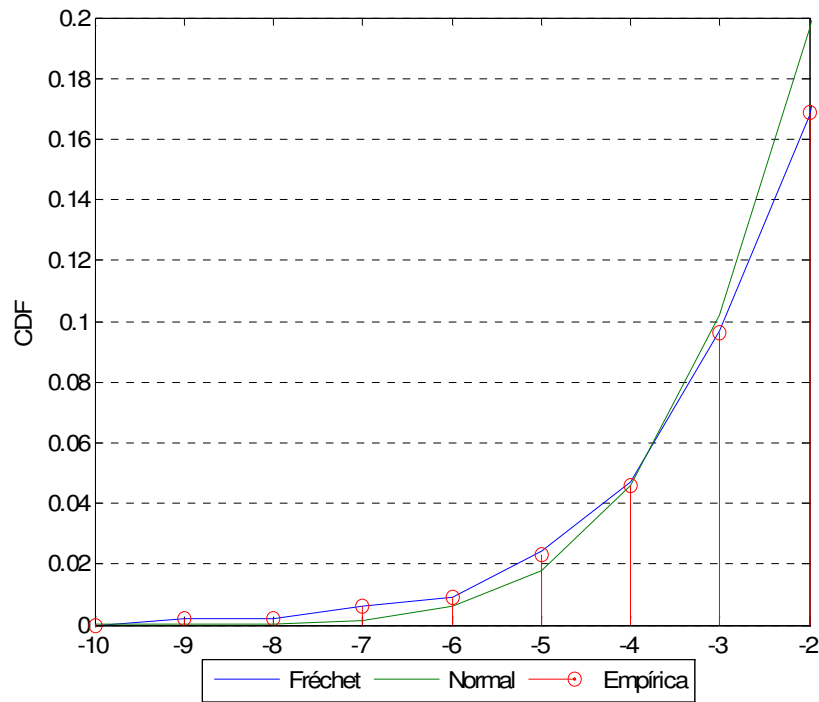


Figura 83 - Distribuição acumulada dos retornos da carteira selecionada pela Dominância Estocástica.

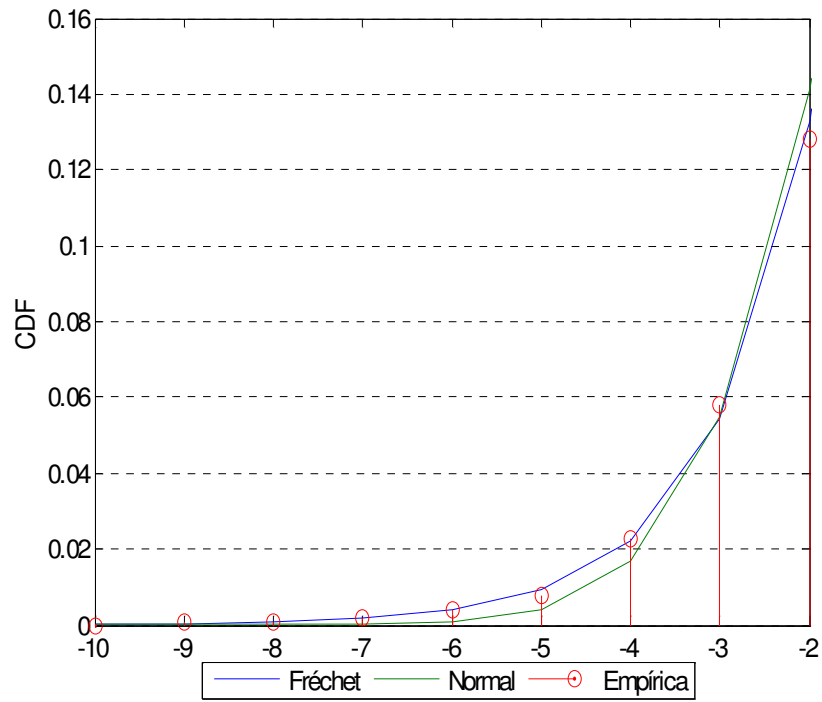


Figura 84 - Distribuição acumulada dos retornos da carteira do IBOVESPA.

As figuras 82, 83 e 84 mostram como a distribuição acumulada Fréchet ajusta mais adequadamente a distribuição acumulada empírica, quando comparada com a distribuição acumulada da Normal.

- Intervalo 5

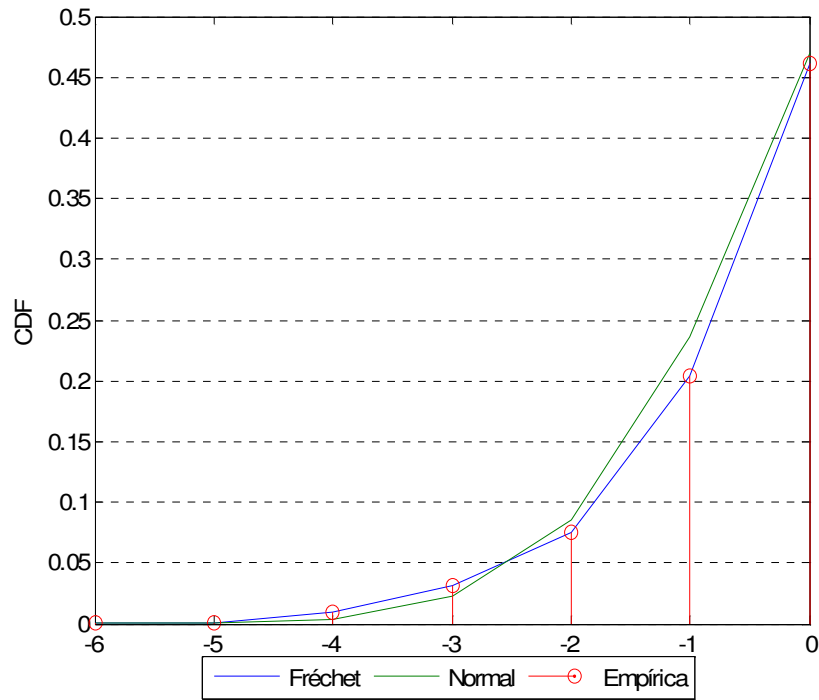


Figura 85 - Distribuição acumulada dos retornos da carteira selecionada pelo M.I.U.

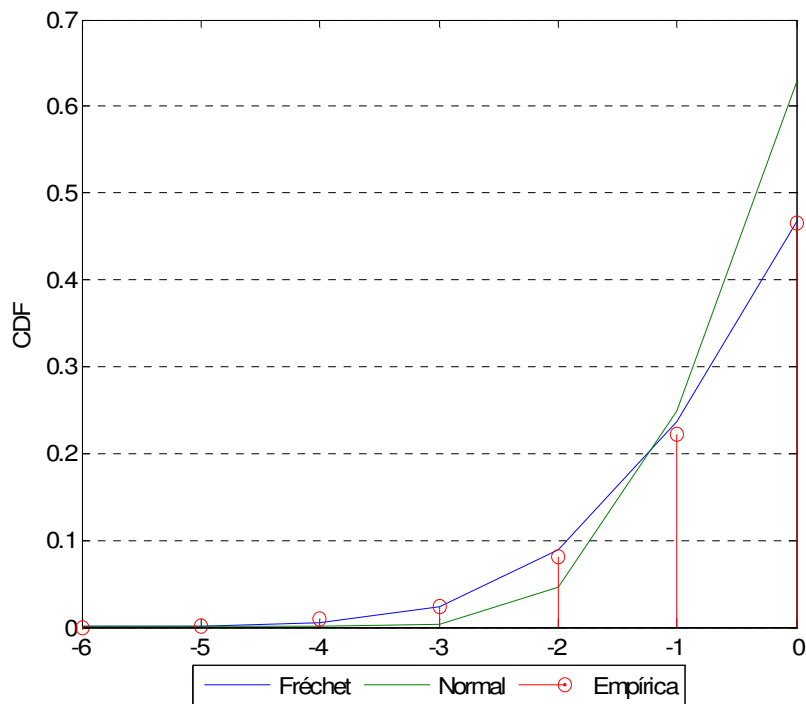


Figura 86 - Distribuição acumulada dos retornos da carteira selecionada pela Dominância Estocástica.

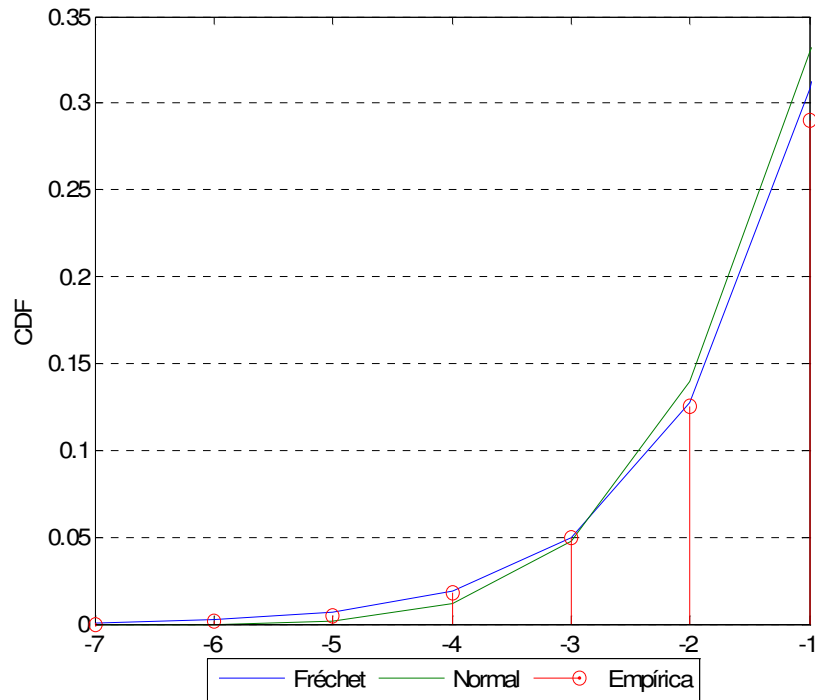


Figura 87 - Distribuição acumulada dos retornos da carteira do IBOVESPA.

As figuras 85, 86 e 87 confirmam que a distribuição acumulada Fréchet possui um “poder” superior no ajuste da distribuição empírica, quando comparada a distribuição Normal.

7.4. Resultados do Backtesting

O Backtesting utiliza uma janela móvel de tamanho 750 dias (fixo). O parâmetro de forma da cauda k e a estatística de ordem q foram mantidos constantes durante todo o horizonte de validação, tendo extraído seus valores do Hill-plot.

O teste consiste em calcular o VaR utilizando a amostra do dia 1 ao 750 e compará-lo com o retorno da carteira do dia 751; calcular o VaR com uma amostra do dia 2 ao 751 e compará-lo com o 752º dia; e assim por diante.

A seguir apresentamos gráficos entre os retornos ocorridos e os VaR estimados para as 14 carteiras de investimento. O grau de confiança escolhido é de 97,5%. Os retornos assinalados com “X” representam as violações efetivas no modelo de VaR estimado pela TVE.

- Intervalo 1

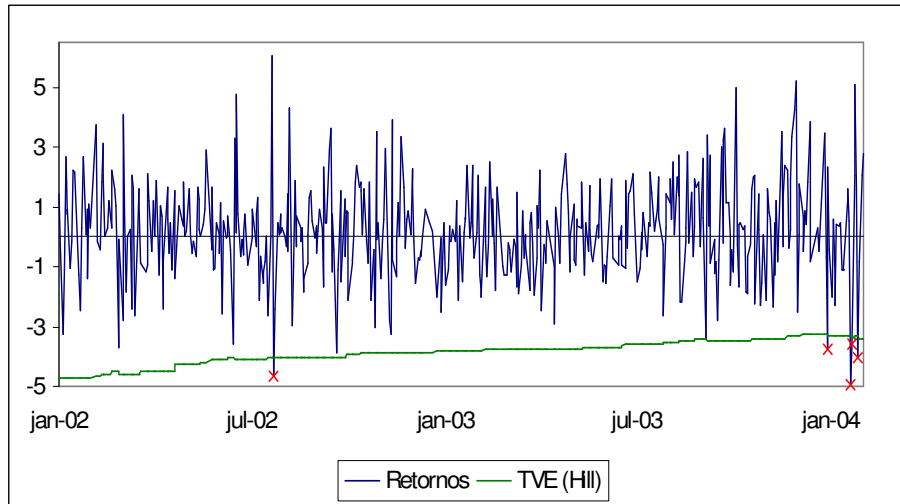


Figura 88 - Período de backtest da carteira selecionada pelo M.I.U. com uma confiança de 97,5%.

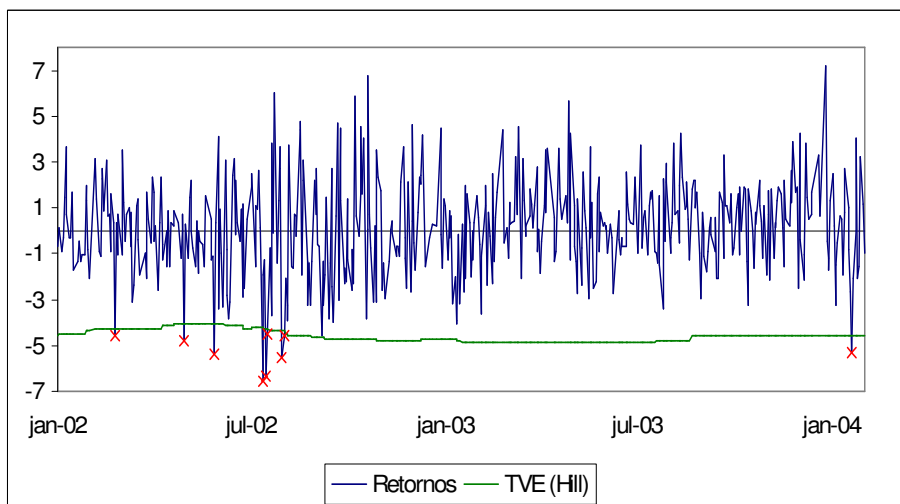


Figura 89 - Período de backtest da carteira selecionada pela Dominância Estocástica com uma confiança de 97,5%.

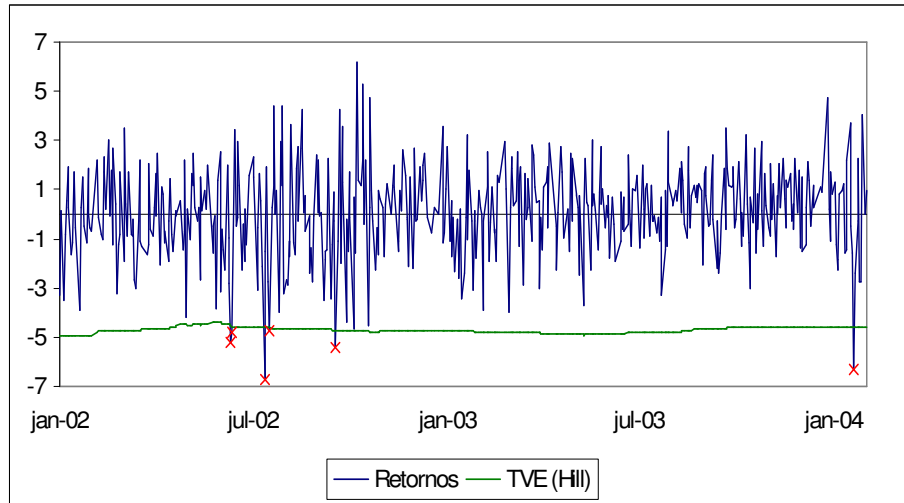


Figura 90 - Período de backtest da carteira do IBOVESPA com uma confiança de 97,5%.

As figuras 88, 89 e 90 permitem averiguar o número de violações ocorridas ao se prever o VaR utilizando a TVE. O nível de confiança aplicado é de 97,5%.

- Intervalo 2

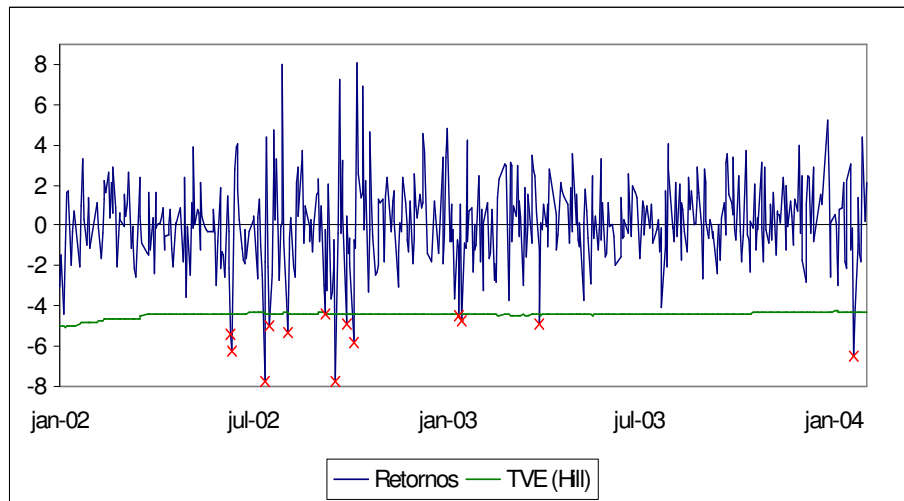


Figura 91 - Período de backtest da carteira selecionada pelo M.I.U. com uma confiança de 97,5%.

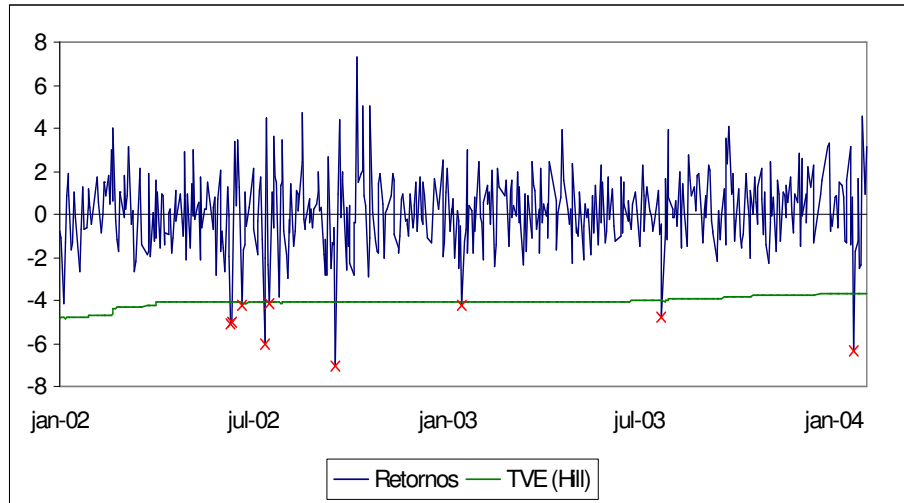


Figura 92 - Período de backtest da carteira selecionada pela Dominância Estocástica com uma confiança de 97,5%.

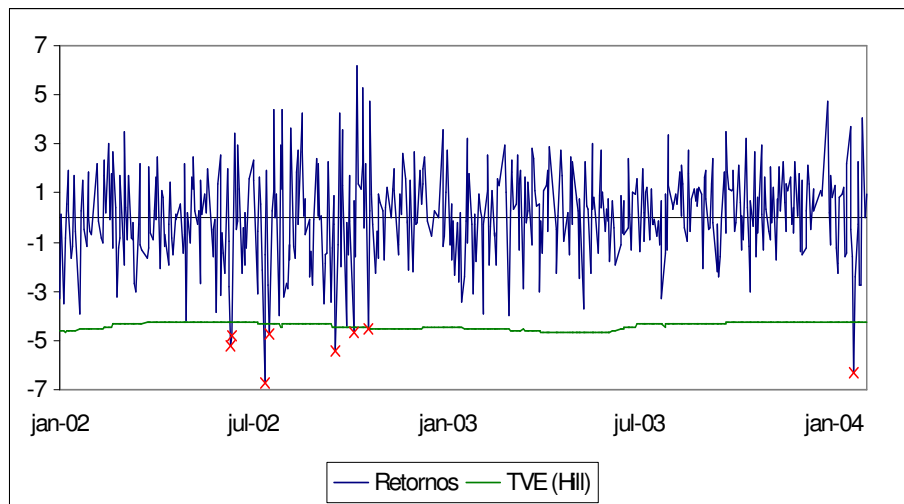


Figura 93 - Período de backtest da carteira do IBOVESPA com uma confiança de 97,5%.

As figuras 91, 92 e 93 ilustram o número de violações ocorridas ao se prever o VaR utilizando a TVE. O nível de confiança aplicado é de 97,5%.

- Intervalo 3

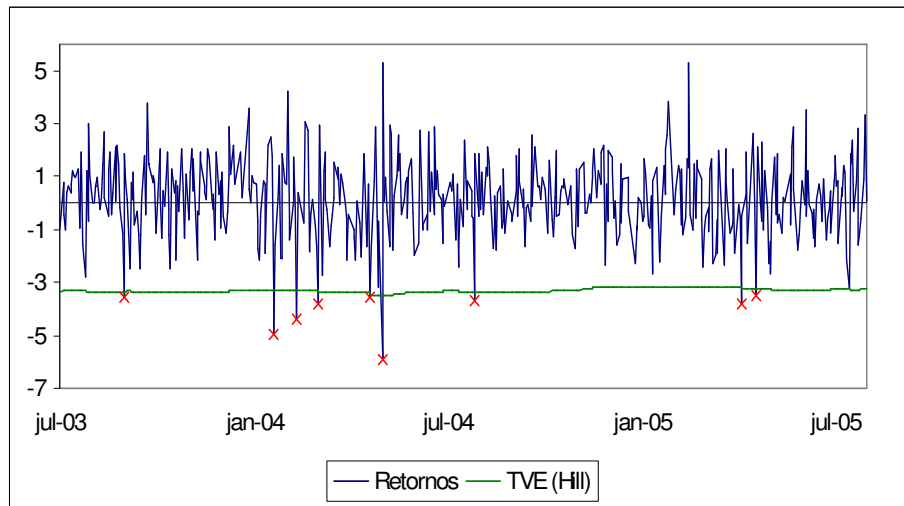


Figura 94 - Período de backtest da carteira selecionada pela Dominância Estocástica com uma confiança de 97,5%.

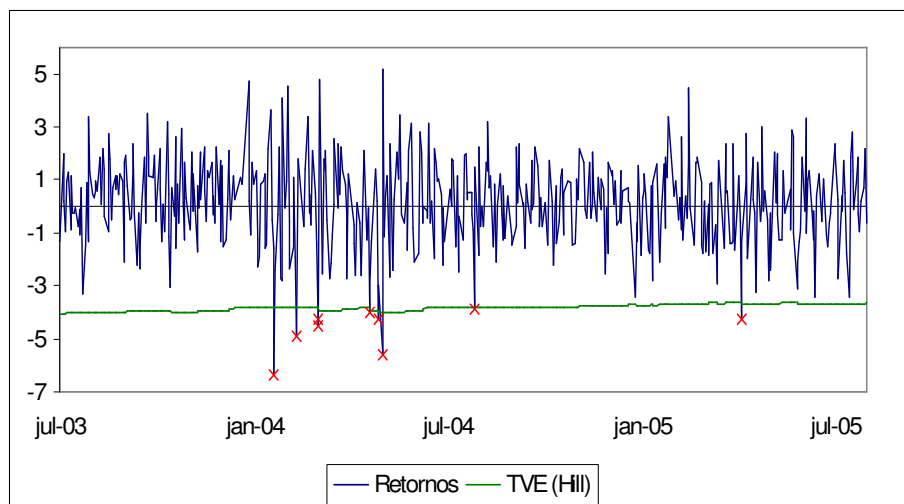


Figura 95 - Período de backtest da carteira do IBOVESPA com uma confiança de 97,5%.

As figuras 94 e 95 mostram as violações ocorridas ao se prever o VaR utilizando a TVE. O nível de confiança aplicado é de 97,5%.

- Intervalo 4

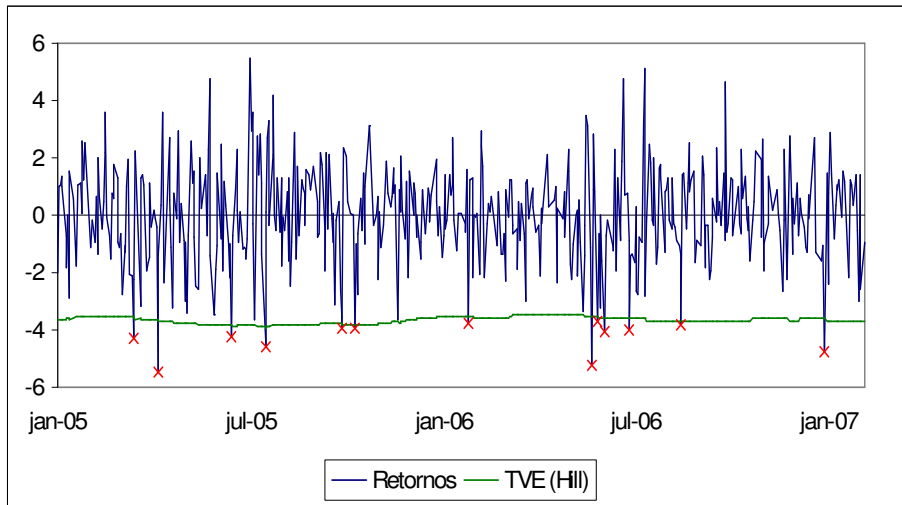


Figura 96 - Período de backtest da carteira selecionada pelo M.I.U. com uma confiança de 97,5%.

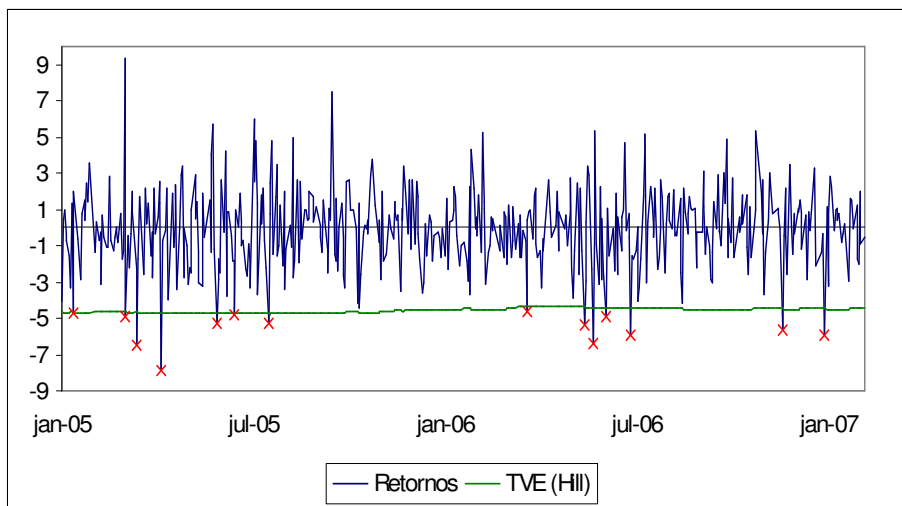


Figura 97 - Período de backtest da carteira selecionada pela Dominância Estocástica com uma confiança de 97,5%.

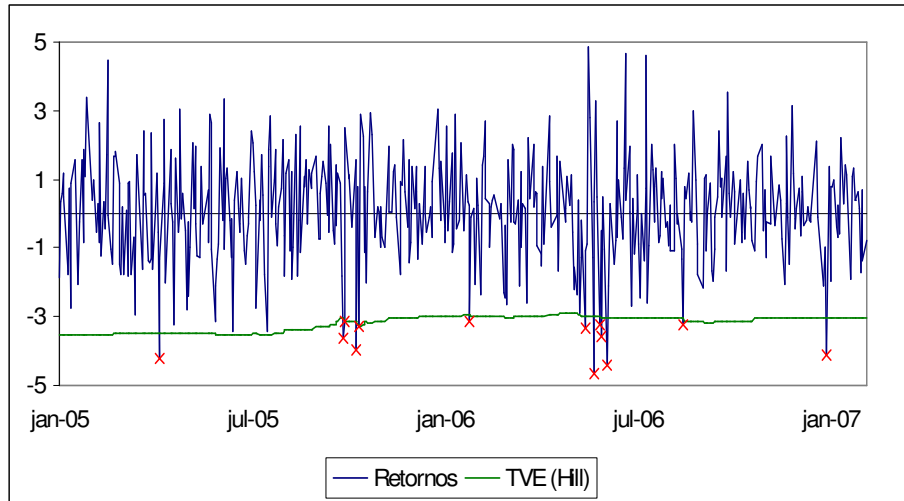


Figura 98 - Período de backtest da carteira do IBOVESPA com uma confiança de 97,5%.

As figuras 96, 97 e 98 ilustram o número de violações ocorridas ao se prever o VaR utilizando a TVE. O nível de confiança aplicado é de 97,5%.

- Intervalo 5

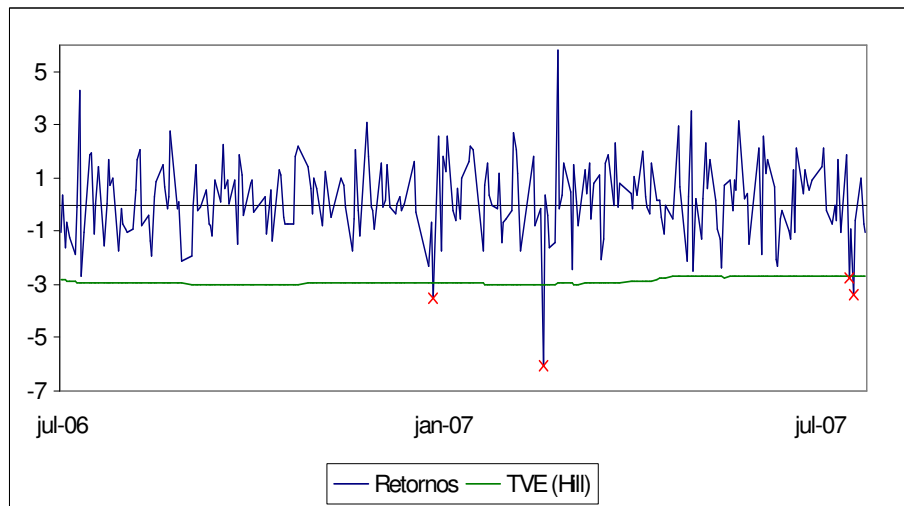


Figura 99 - Período de backtest da carteira selecionada pelo M.I.U. com uma confiança de 97,5%.

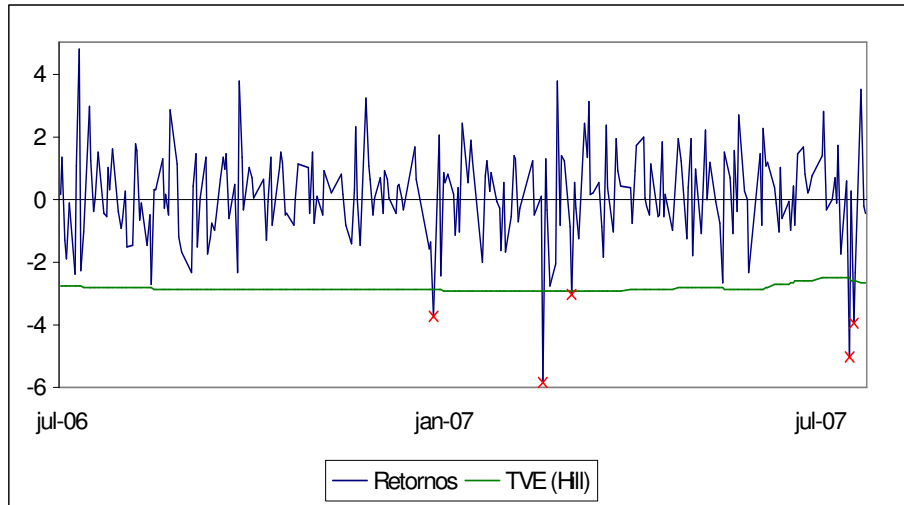


Figura 100 - Período de backtest da carteira selecionada pela Dominância Estocástica com uma confiança de 97,5%.

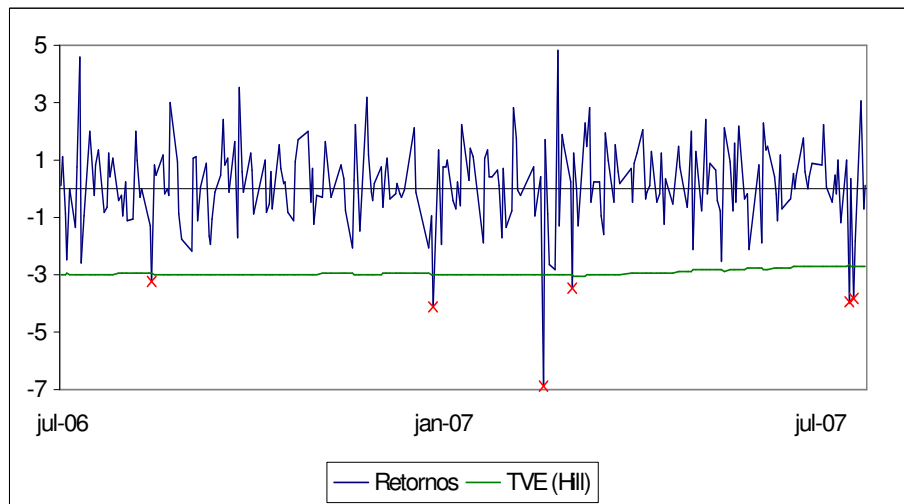


Figura 101 - Período de backtest da carteira do IBOVESPA com uma confiança de 97,5%.

As figuras 99, 100 e 101 permitem averiguar as violações ocorridas ao se prever o VaR utilizando a TVE. O nível de confiança aplicado é de 97,5%.

A análise de tais gráficos nos permite concluir que o modelo da TVE não é capaz de responder rapidamente à aumentos na volatilidade dos retornos. Este fato se deve ao modelo ser incondicional, o qual reflete o comportamento de longo termo da série. Portanto, aconselhamos que em períodos de crise seja utilizado outro modelo capaz de capturar mais eficientemente o aumento abrupto na volatilidade dos retornos.

O resultado do Backtesting foi gerado utilizando o teste de Kupiec. Tal teste foi aplicado nas 14 carteiras de investimento sob análise. Os níveis de significância considerados são os de baixa probabilidade (0,5% e 1,0%), além de 2,5% e 5,0%.

Apresentamos, a seguir, as tabelas com os resultados.

Retornos do Intervalo 1 - 1153 observações. Tamanho do teste: 505 dias				
VaR	0,5%	1,0%	2,5%	5,0%
Violações esperadas	3	5	13	25
TVE (Hill) - M.I.U.				
Violações efetivas	1	1	5	11
Frequência efetiva	0,20%	0,20%	0,99%	2,18%
LR	1,202	4,894	6,105	10,639
Resultado	Aceito	Rejeito	Rejeito	Rejeito
TVE (Hill) - Dominância Estocástica				
Violações efetivas	1	2	9	21
Frequência efetiva	0,20%	0,40%	1,78%	4,16%
LR	1,202	2,414	1,184	0,797
Resultado	Aceito	Aceito	Aceito	Aceito
TVE (Hill) - IBOVESPA				
Violações efetivas	1	2	6	17
Frequência efetiva	0,20%	0,40%	1,19%	3,37%
LR	1,202	2,414	4,412	3,190
Resultado	Aceito	Aceito	Rejeito	Aceito

Tabela 20 - Resultado do Backtesting para o Intervalo 1.

De acordo com a tabela 20, ocorreram rejeições para os níveis de significância de 1,0%, 2,5% e 5,0% para a carteira selecionada pelo M.I.U. Além disso, a carteira do IBOVESPA também apresentou rejeição para o nível de significância de 2,5%. Repare, no entanto, que o modelo de VaR foi aceito para as 3 carteiras de investimento no nível de significância de 0,5%.

Retornos do Intervalo 2 - 1061 observações. Tamanho do teste: 505 dias				
VaR	0,5%	1,0%	2,5%	5,0%
Violações esperadas	3	5	13	25
TVE (Hill) - M.I.U.				
Violações efetivas	1	3	13	23
Frequência efetiva	0,20%	0,59%	2,57%	4,55%
LR	1,202	0,984	0,011	0,217
Resultado	Aceito	Aceito	Aceito	Aceito
TVE (Hill) - Dominância Estocástica				
Violações efetivas	1	2	9	11
Frequência efetiva	0,20%	0,40%	1,78%	2,18%
LR	1,202	2,414	1,184	10,639
Resultado	Aceito	Aceito	Aceito	Rejeito
TVE (Hill) - IBOVESPA				
Violações efetivas	1	2	8	21
Frequência efetiva	0,20%	0,40%	1,58%	4,16%
LR	1,202	2,414	1,994	0,797
Resultado	Aceito	Aceito	Aceito	Aceito

Tabela 21 - Resultado do Backtesting para o Intervalo 2.

A tabela 21 apresenta uma rejeição para o modelo de VaR proposto para a carteira selecionada pela Dominância Estocástica, ao nível de significância de 5,0%. Em contrapartida, os modelos de VaR para os níveis de significância de 0,5%, 1,0% e 2,5% são aceitos para as 3 carteiras de investimento.

Retornos do Intervalo 3 - 1055 observações. Tamanho do teste: 504 dias				
VaR	0,5%	1,0%	2,5%	5,0%
Violações esperadas	3	5	13	25
TVE (Hill) - Dominância Estocástica				
Violações efetivas	1	2	11	17
Frequência efetiva	0,20%	0,40%	2,18%	3,37%
LR	1,196	2,401	0,218	3,156
Resultado	Aceito	Aceito	Aceito	Aceito
TVE (Hill) - IBOVESPA				
Violações efetivas	1	2	9	16
Frequência efetiva	0,20%	0,40%	1,79%	3,17%
LR	1,196	2,401	1,170	4,039
Resultado	Aceito	Aceito	Aceito	Rejeito

Tabela 22 - Resultado do Backtesting para o Intervalo 3.

Na tabela 22 é apresentada uma rejeição para o modelo de VaR proposto para a carteira do IBOVESPA, ao nível de significância de 5%. Da mesma forma, são aceitos os modelos de VaR propostos para as 2 carteiras de investimento nos níveis de significância de 0,5%, 1,0% e 2,5%.

Retornos do Intervalo 4 - 1065 observações. Tamanho do teste: 495 dias				
VaR	0,5%	1,0%	2,5%	5,0%
Violações esperadas	2	5	12	25
TVE (Hill) - M.I.U.				
Violações efetivas	1	2	13	30
Frequência efetiva	0,20%	0,40%	2,63%	6,06%
LR	1,142	2,293	0,032	1,101
Resultado	Aceito	Aceito	Aceito	Aceito
TVE (Hill) - Dominância Estocástica				
Violações efetivas	1	5	14	23
Frequência efetiva	0,20%	1,01%	2,83%	4,65%
LR	1,142	0,001	0,210	0,133
Resultado	Aceito	Aceito	Aceito	Aceito
TVE (Hill) - IBOVESPA				
Violações efetivas	1	2	13	27
Frequência efetiva	0,20%	0,40%	2,63%	5,45%
LR	1,142	2,293	0,032	0,209
Resultado	Aceito	Aceito	Aceito	Aceito

Tabela 23 - Resultados do Backtesting para o Intervalo 4.

A tabela 23 aceita todos os modelos propostos de VaR para os diferentes níveis de significância nas 3 carteiras de investimento.

Retornos do Intervalo 5 - 1076 observações. Tamanho do teste: 250 dias				
VaR	0,5%	1,0%	2,5%	5,0%
Violações esperadas	1	3	6	13
TVE (Hill) - M.I.U.				
Violações efetivas	1	1	4	12
Frequência efetiva	0,40%	0,40%	1,60%	4,80%
LR	0,054	1,176	0,950	0,021
Resultado	Aceito	Aceito	Aceito	Aceito
TVE (Hill) - Dominância Estocástica				
Violações efetivas	2	4	5	12
Frequência efetiva	0,80%	1,60%	2,00%	4,80%
LR	0,382	0,769	0,275	0,021
Resultado	Aceito	Aceito	Aceito	Aceito
TVE (Hill) - IBOVESPA				
Violações efetivas	1	4	6	11
Frequência efetiva	0,40%	1,60%	2,40%	4,40%
LR	0,054	0,769	0,010	0,197
Resultado	Aceito	Aceito	Aceito	Aceito

Tabela 24 - Resultado do Backtesting para o Intervalo 5.

Por fim, a Tabela 24 também aceita os modelos de VaR propostos para as 3 carteiras de investimento em todos os níveis de significância.

A interpretação conjunta das tabelas acima permite destacar que:

- ✓ Os modelos de VaR utilizando TVE nos intervalos 4 e 5 não são rejeitados em nenhum nível de significância;
- ✓ A quantidade de modelos de VaR utilizando TVE rejeitados diminui com a redução do nível de significância (3 rejeições para 5%, 2 rejeições para 2,5% e 1 rejeição para 1%);
- ✓ Os modelos de VaR utilizando TVE com nível de significância de 0,5% não foram rejeitados em nenhum dos intervalos.

8

Conclusão

O objetivo deste trabalho foi estimar a cauda da distribuição de retornos financeiros das carteiras de investimentos composta por ações da BOVESPA, dando ênfase à medida de risco de mercado conhecida como Value at Risk (VaR). Tal metodologia está fortemente ligada à percentis localizados nos extremos da distribuição.

Para obter estimativas confiáveis para esses percentis, utilizou-se a Teoria dos Valores Extremos. Para tal análise, foi adotado o modelo baseado no estimador de Hill, pois considera o comportamento dos retornos extremos distribuídos por toda a amostra estudada, sem a necessidade da divisão dos dados em sub-amostras.

As séries de retornos das carteiras de investimento confirmam que a distribuição normal não é uma boa aproximação para as suas caudas, pois estas são assimétricas e apresentam leptocurtose, ou seja, excesso de curtose. Um outro detalhe é que os retornos das carteiras não são independentes, apresentando dependência não-linear relevante. Além disso, os retornos extremos não devem ser considerados decorrelacionados, ou seja, a ocorrência de um extremo aumenta a probabilidade de que outro retorno extremo ocorra nos períodos subsequentes.

É possível afirmar que, nas carteiras de investimento analisadas, a função de distribuição acumulada Fréchet se ajusta melhor a distribuição empírica, quando comparada com a distribuição acumulada da Normal.

O modelo da TVE apresenta bons resultados para as confianças de 95% e 97,5%, bem como para confianças mais altas, como as de 99% e 99,5%. No entanto, tal modelo não é capaz de responder rapidamente à aumentos na volatilidade dos retornos, tendo assim suas previsões de VaR bastante violadas em

períodos de alta volatilidade. É recomendável, neste caso, a utilização de outro modelo capaz de capturar mais eficientemente o aumento abrupto na volatilidade dos retornos.

Como sugestão para trabalhos futuros, seria interessante realizar o mesmo trabalho de Value at Risk, utilizando a Teoria dos Valores Extremos, com carteiras de investimento composta por ações de mercados desenvolvidos, tal como os Estados Unidos.

9

Referências bibliográficas

CARVALHO, R. R. **Teoria dos Valores Extremos: Valor em Risco para ativos de Renda Fixa**. Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia Industrial – PUC-Rio, 2006.

CHÁVEZ, C. M. G. **Valor em Risco: Uma Comparação entre Métodos de Escolha da Fração Amostral na Estimação do Índice de Cauda de Distribuições GEV**. Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia Elétrica – PUC-Rio, 2002.

DANIELSSON, J.; VRIES C. G. **Beyond the Sample: Extreme Quantile and Probability Estimation**. Mimeo. Tinbergen Institute Rotterdam, 1997a.

DANIELSSON, J.; VRIES, C. G. **Value-at-Risk and Extreme Returns**. Mimeo. Tinbergen Institute Rotterdam, 1997b.

ELTON, E. J.; GRUBER M. J.; PADBERG M. W. Simple criteria for optimal portfolio selection. **The Journal of Finance**, v. 31, n. 5, p. 1341-1357, 1976.

ELTON, E. J.; GRUBER, M. J.; BROWN, S. J.; GOETZMANN, W. N. **Moderna Teoria de Carteiras e Análise de Investimentos**, 1ª edição, 2004, 602p, Editora Atlas S.A.

EMBRECHTS, P.; KLUPPELBERG, C.; MIKOSCH, T. **Modelling Extremal Events for Insurance and Finance**. 1997, 645p, Springer-Verlag, Berlin.

FERNANDES, C. PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO RIO DE JANEIRO. Departamento de Engenharia Elétrica. **Modelos GARCH para séries de retornos financeiros – aplicação ao cálculo do Valor em Risco (VaR)**. Rio de Janeiro, 2006.

FERREIRA, R. R. **Eventos Extremos nos Mercados Acionários Latino Americanos**. Dissertação de Mestrado. Instituto de Matemática – UFRJ, 1999.

FOCARDI, S.; JONAS, C. **Risk Management: Framework, Methods, and Practice**. 1998, 219p, publicado por New Hope, PA: Frank J. Fabozzi Associates.

HULL, J. C. **Options, futures and other derivatives**. 2004, 744p, publicado por Pearson Education Limited.

JOHNSTON, J.; DINARDO, J. **Econometric Methods**. 4º edição, 2002, 531p, McGraw-Hill International Editions.

JORION, P. **Value at Risk: A nova fonte de referência para a gestão do risco financeiro**, tradução Bolsa de Mercadorias e Futuros, 2º edição, São Paulo: Bolsa de Mercadorias e Futuros, 2003, 487p, editora BM&F Brasil. Título original: **Value at Risk: the new benchmark for managing financial risk**.

MARINS, A. **Mercados Derivativos e Análise de Risco (Volumes 1)**. 1º edição, 2004, 495p, MAS Editora.

MARINS, A. **Mercados Derivativos e Análise de Risco (Volumes 2)**. 1º edição, 2004, 576p, MAS Editora.

MARKOWITZ, H. Portfolio Selection. **The Journal of Finance**, v. 7, n. 1, p. 77-91, 1952.

MARTINS, F. C. **A Teoria dos Valores Extremos: Uma Abordagem Condicional para a Estimção de Valor em Risco no Mercado Acionário Brasileiro**. Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia Elétrica – PUC-Rio, 2000.

MCNEIL, A. **Calculating Quantile Risk Measures for Financial Return Series using Extreme Value Theory**. Preprint. Departement Mathematik. ETH Zentrum. Zurich, 1998.

MENDES, B. **Computing Risk Measures using Extreme Value Theory: An Application to Latin American Stock Markets**. *Emerging Markets Quarterly* 4, n. 2, p. 25-42, 2000.

MORGAN, J. P. **RiskMetrics: technical document**. 4th ed. New York: Morgan Guarantu Trust Company, 1996, acessível a:
<http://hp.idefi.cnrs.fr/bruno/enseignements/master2/RiskMetrics.pdf>.

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO RIO DE JANEIRO. Departamento de Engenharia Industrial. **Introdução às Finanças Corporativas**. Rio de Janeiro, [2006], v. 1.

RESNICK, S.; STARICA C. Tail index estimation for dependent data. **The Annals of Applied Probability**, v. 8, n. 4, p. 1156-1183, 1998.

SAUNDERS, A. **Administração de Instituições Financeiras**. 1^o edição, 2000, 666p, editora Atlas.

SOUZA, L. A. R. **Valor em Risco em Épocas de Crise**. Dissertação de Mestrado, Departamento de Economia - Universidade de São Paulo, 1999.

TSAY, R. S. **Analysis of Financial Time Series**, 2002, 448p, John Wiley & Sons, New York.

Apêndice A: Método da Regressão para TVE

Esse método assume que o conjunto dos mínimos das sub-amostras são amostras aleatórias da distribuição de valores extremos generalizadas e faz uso de propriedades de ordenação estatística. Fazendo tal ordenação, obtemos:

$$r_{n(1)} \leq r_{n(2)} \leq \dots \leq r_{n(g)}$$

Usando propriedades da ordenação estatística:

$$E\{F_*[r_{n(i)}]\} = \frac{i}{g+1} \quad i = 1, \dots, g \quad (\text{A.1})$$

Por simplicidade, separou-se em dois casos diferentes, dependendo do valor de k .

Para $k \neq 0$:

$$F_*(x) = 1 - \exp\left[-(1+kx)^{\frac{1}{k}}\right]$$

$$F_*(r_{n(i)}) = 1 - \exp\left[-\left(1 + k_n \frac{(r_{n(i)} - \beta_n)}{\alpha_n}\right)^{\frac{1}{k_n}}\right] \quad (\text{A.2})$$

Usando as equações (A.1) e (A.2) e aproximando o valor esperado ao valor observado, tem-se:

$$\frac{i}{g+1} = E \left\{ 1 - \exp \left[- \left(1 + k_n \frac{(r_{n(i)} - \beta_n)}{\alpha_n} \right)^{\frac{1}{k_n}} \right] \right\} = 1 - \exp \left[- \left(1 + k_n \frac{(r_{n(i)} - \beta_n)}{\alpha_n} \right)^{\frac{1}{k_n}} \right]$$

$$\exp \left[- \left(1 + k_n \frac{(r_{n(i)} - \beta_n)}{\alpha_n} \right)^{\frac{1}{k_n}} \right] = 1 - \frac{i}{g+1} = \frac{g+1-i}{g+1}$$

Tirando o logaritmo neperiano:

$$- \left(1 + k_n \frac{(r_{n(i)} - \beta_n)}{\alpha_n} \right)^{\frac{1}{k_n}} = \ln \left(\frac{g+1-i}{g+1} \right)$$

$$\left(1 + k_n \frac{(r_{n(i)} - \beta_n)}{\alpha_n} \right)^{\frac{1}{k_n}} = - \ln \left(\frac{g+1-i}{g+1} \right)$$

Tirando o logaritmo neperiano novamente:

$$\ln \left[\left(1 + k_n \frac{(r_{n(i)} - \beta_n)}{\alpha_n} \right)^{\frac{1}{k_n}} \right] = \ln \left[- \ln \left(\frac{g+1-i}{g+1} \right) \right]$$

$$\ln \left[- \ln \left(\frac{g+1-i}{g+1} \right) \right] = \frac{1}{k_n} \ln \left(1 + k_n \frac{(r_{n(i)} - \beta_n)}{\alpha_n} \right)$$

Na prática, chamemos de e_i o desvio entre os dois termos da equação anterior e assumindo que a série $\{e_i\}$ não é serialmente correlacionada, tem-se a regressão:

$$\ln \left[- \ln \left(\frac{g+1-i}{g+1} \right) \right] = \frac{1}{k_n} \ln \left(1 + k_n \frac{(r_{n(i)} - \beta_n)}{\alpha_n} \right) + e_i, \quad i = 1, \dots, g$$

Para $k_n = 0$:

$$F_*(x) = 1 - \exp[-\exp(x)]$$

$$F_*(r_{n(i)}) = 1 - \exp\left[-\exp\left(\frac{(r_{n(i)} - \beta_n)}{\alpha_n}\right)\right] \quad (\text{A.3})$$

Substituindo a equação (A.3) na equação (A.1):

$$E\left\{1 - \exp\left[-\exp\left(\frac{(r_{n(i)} - \beta_n)}{\alpha_n}\right)\right]\right\} = \frac{i}{g+1}$$

$$1 - \exp\left[-\exp\left(\frac{(r_{n(i)} - \beta_n)}{\alpha_n}\right)\right] = \frac{i}{g+1}$$

$$1 - \frac{i}{g+1} = \exp\left[-\exp\left(\frac{(r_{n(i)} - \beta_n)}{\alpha_n}\right)\right]$$

$$\frac{g+1-i}{g+1} = \exp\left[-\exp\left(\frac{(r_{n(i)} - \beta_n)}{\alpha_n}\right)\right]$$

$$\ln\left(\frac{g+1-i}{g+1}\right) = \ln\left\{\exp\left[-\exp\left(\frac{(r_{n(i)} - \beta_n)}{\alpha_n}\right)\right]\right\}$$

$$\ln\left(\frac{g+1-i}{g+1}\right) = -\exp\left(\frac{(r_{n(i)} - \beta_n)}{\alpha_n}\right)$$

$$-\ln\left(\frac{g+1-i}{g+1}\right) = \exp\left(\frac{(r_{n(i)} - \beta_n)}{\alpha_n}\right)$$

$$\ln\left[-\ln\left(\frac{g+1-i}{g+1}\right)\right] = \ln\left[\exp\left(\frac{(r_{n(i)} - \beta_n)}{\alpha_n}\right)\right]$$

$$\ln\left[-\ln\left(\frac{g+1-i}{g+1}\right)\right] = \frac{(r_{n(i)} - \beta_n)}{\alpha_n}$$

Portanto, a regressão fica:

$$\ln\left[-\ln\left(\frac{g+1-i}{g+1}\right)\right] = \frac{r_{n(i)}}{\alpha_n} - \frac{\beta_n}{\alpha_n} + e_i, \quad i = 1, \dots, g$$