



**UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA**  
Faculdade de Engenharia  
Campus de Bauru



# **Análise Numérica de um Sistema Integrado Coletor Solar/Armazenador Térmico**

**Guilherme Henrique Sempionato Souza Santos**

**Dissertação apresentada à Faculdade de  
Engenharia da UNESP - Campus de Bauru,  
para obtenção do título de Mestre em  
Engenharia Mecânica.**

**BAURU – SP**

**2007**

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.



**UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA**  
Faculdade de Engenharia  
Campus de Bauru



# **Análise Numérica de um Sistema Integrado Coletor Solar/Armazenador Térmico**

**Guilherme Henrique Sempionato Souza Santos**

Orientador: Prof. Dr. Alcides Padilha

**Dissertação apresentada à Faculdade de  
Engenharia da UNESP - Campus de Bauru,  
para obtenção do título de Mestre em  
Engenharia Mecânica.**

**BAURU – SP**

**Maio – 2007**

**DIVISÃO TÉCNICA DE BIBLIOTECA E DOCUMENTAÇÃO  
UNESP - BAURU**

Santos, Guilherme Henrique Sempionato Souza.  
Análise numérica de um sistema integrado  
coletor solar/armazenador térmico / Guilherme  
Henrique Sempionato Souza Santos, 2007.  
138 f. il.

Orientador : Alcides Padilha.

Dissertação (Mestrado) - Universidade  
Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia,  
Bauru, 2007.

1. Sistema integrado coletor solar/armazena-  
dor. 2. Energia - Armazenamento. 3. Estratifica-  
ção térmica. 4. Método dos elementos finitos. I  
- Universidade Estadual Paulista. Faculdade de  
Engenharia. II - Título.

*“O mais incompreensível de nosso universo é que ele pode ser compreendido.”*

*(Albert Einstein)*

## AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador Professor Alcides Padilha que com seu estímulo e capacidade de análise fez inúmeras barreiras caírem.

Ao meu professor Vicente Luiz Scalon, que de forma brilhante e essencial colaborou para a resolução de todos os problemas, grandes e pequenos, operacionais ou não, que ocorreram no difícil percurso.

À CAPES pelo suporte financeiro.

À minha mãe Maria de Lurdes, meu pai João Batista e minha irmã Anelise.

A todos aqueles, professores e alunos, da UNESP ou não, que auxiliaram de alguma forma, firmando as bases para a realização deste trabalho; em especial para Santiago Del Rio, Ismael de Marchi Neto, Marcos Paulo Oliveira, Robert Daschner, Wladimir Dourado.

**Santos, G. H. S. S. Análise Numérica de um Sistema Integrado Coletor Solar/Armazenador Térmico.** 2007. 88 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Bauru, 2007.

## RESUMO

Apresenta-se neste trabalho uma análise numérica dos campos de temperaturas e velocidades d'água durante seu processo de aquecimento via calor sensível no interior de um armazenador térmico cilíndrico, aquecido lateralmente e adiabático em seu topo e base, visando o estudo da condição de operação de um aquecedor de água coletor solar-armazenador integrados (ICSSWH – *Integrated Collector-Storage Water Heater*).

Em uma segunda análise é criado um modelo com parede interna direcionadora e os campos de velocidades e temperaturas são analisados.

A abordagem numérica é realizada a partir de um modelo bidimensional, transiente, não linear e em coordenadas cilíndricas, discretizada pela técnica de elementos finitos. Sua solução é obtida numericamente através de um código computacional desenvolvido em linguagem de programação C.

Os resultados numéricos são validados. Análises transientes dos campos de velocidades e temperaturas bem como das temperaturas de mistura e velocidade de carregamento, com e sem parede interna direcionadora são realizadas com a finalidade de estudar a influência da referida parede na convecção livre nessas condições.

Palavras-chave: Sistema Integrado Coletor Solar/Armazenador, armazenamento de energia, estratificação térmica, elementos finitos.

**Santos, G. H. S. S. Numerical Analysis of an Integrated Solar Collector/Thermal Storage System.** 2007. 88 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Bauru, 2007.

### **ABSTRACT**

This work aims at making a numerical analysis of the temperature and speed fields of water during the process of heating through sensible heat in the interior of a cylindric thermal storage, heated laterally and with adiabatic top and base, having as goal the research of the operational conditions of an integrated collector- storage solar water heater (ICSSWH).

In a second analysis a model with internal convection directional wall is created and temperature and velocity fields are analysed

The numerical study is done taking into consideration a bidimensional, transient non linear research in cylindric coordenates, discretized by the technique of finite elements. Its solution is obtained numerically through a computational code developed in a C programming language. The vertical wall is imposed to the first specie boundary condition and the superior and inferior walls are imposed to the conditions of zero gradient.

The numerical results are validated. A transient analysis of the speed and temperature fields so as of the mixing temperatures and the charging speed, with or without the directional walls are carried out taking into account the aim of studying the influence of the so called wall in the free convection of those conditions.

Keywords: Integrated Collector-Storage Solar Water Heaters, energy storage, thermal stratification, finite elements.



## Sumário

Capítulo 1- Introdução.....	1
1.1 - Generalidades.....	1
1.2 - Objetivo do trabalho.....	4
Capítulo 2 - Revisão bibliográfica.....	5
2.1-Estratificação e estocagem térmica.....	5
2.2-Coletores solares.....	15
2.2.1-Aquecedores de água solares com coletor/armazenador integrados.....	17
2.2.2 – Aquecedores solares de água de placa plana.....	21
Capítulo 3 – Modelagem matemática.....	25
3.1 – Modelo físico.....	25
3.2 - Modelo matemático.....	28
3.3 - Método numérico.....	33
3.4 – Aplicação da formulação geral às equações do problema.....	38
3.4.1 – Equação da conservação da energia.....	38
3.4.2 – Campo de velocidade e pressão com interpolação de mesma ordem.....	38
3.4.3 – Relação entre velocidade e pressão.....	41
3.5 – Considerações complementares.....	44
3.5.1 – Inclusão dos efeitos de convecção natural.....	44
3.5.2 – Definição do número de Nusselt.....	45
3.5.3 – Definição da temperatura de mistura.....	45
3.6 – Procedimento geral de solução.....	46
Capítulo 4. Análise de resultados.....	49
4.1. Validação do modelo matemático.....	50
4.2 – Teste de malha sem parede direcionadora.....	56
4.3. Análise do aquecimento sem parede direcionadora interna.....	64
4.4- Teste de malha com parede direcionadora.....	80
4.5- Análise transiente do aquecimento com parede direcionadora.....	83

Conclusões e sugestões.....	101
Referências Bibliográficas.....	104
Apêndice A.....	112
Anexo A.....	117
Anexo B.....	123

## Índice de figuras

Figura 1.1: Esquema de um aquecedor de água coletor solar/armazenador integrados.....	3
Figura 3.1: Representação esquemática da geometria do problema sem placa direcionadora e suas condições de contorno.....	26
Figura 3.2: Representação esquemática da geometria do problema com parede direcionadora e suas condições de contorno.....	27
Figura 3.3: Diagrama de blocos representando procedimento de solução do modelo.....	47
Figura 4.1. Geometria do modelo proposto por Ismail e Scalon (2000) .....	50
Figura 4.2. Cavidade anular proposta para validação do modelo matemático.....	50
Figura 4.3. Perfis de velocidades (a) e temperaturas (b) obtidos para cavidade anular e perfis de velocidades (c) e temperaturas (d) obtidos por Ismail e Scalon (2000).....	52
Figura 4.4. Variação da altura com o Número de Nusselt obtida para cavidade anular (a) e obtida por Ismail e Scalon(2000) (b) .....	53
Figura 4.5. Perfis de temperaturas e velocidades para três cavidades anulares com diferentes razões entre raios.....	54
Figura 4.6: Variação do Nu com a Altura para duas razões de raio.....	55
Figura 4.7: Perfil de temperaturas e velocidades. Razão de Aspecto 1, número de Rayleigh $1 \times 10^5$ e razão de raios 1.01. ....	56
Figura 4.8. Superelemento que constitui a geometria sem parede direcionadora. A e B indicam as subdivisões nos eixos r e z.....	57
Figura 4.9. Malhas para cavidade cilíndrica sem parede direcionadora para fator de refinamento 1,2.....	58
Figura 4.10. Variação das temperaturas com a altura em $R=0,0885$ para as malhas testadas com fator de deformação 1,2.. ..	59
Figura 4.11. Malhas para cavidade cilíndrica sem parede direcionadora para fator de refinamento 1,1.....	60
Figura 4.12. Variação das temperaturas com a altura em $R=0,0885$ para as malhas testadas com fator de deformação 1,1.....	61

Figura 4.13. Tempo de processamento para as malhas sem parede direcionadora com fator de deformação 1,2 até $Fo=0,01$ .....	62
Figura 4.14. Tempo de processamento para as malhas sem parede direcionadora com fator de deformação 1,1 até $Fo=0,01$ .....	62
Figura 4.15. Variação das temperaturas de mistura com o refino da malha para os números de Fourier especificados.....	63
Figura 4.16. Perfis de velocidades adimensionais para os $Fo$ indicados. Tanque sem parede direcionadora, de razão de aspecto 3,0 e $Ra=5 \times 10^8$ .....	65
Figura 4.17. Perfis de velocidades horizontais e verticais com a altura. Tanque sem parede direcionadora, para razão de aspecto 3,0 e $Ra=5 \times 10^8$ .....	66
Figura 4.18. Perfis de temperaturas adimensionais para tanque sem parede, razão de aspecto 3,0 e $Ra=5 \times 10^8$ .....	67
Figura 4.19. Variações das temperatura de centro com a altura para 16 $Fo$ . Tanque sem parede direcionadora, de razão de aspecto 3 e $Ra=5 \times 10^8$ .....	68
Figura 4.20. Variações das velocidades verticais para alturas especificadas. Tanque de razão de aspecto 3 e $Ra=5 \times 10^8$ . Fator de deformação é 1,2. ....	69
Figura 4.21: Variações das velocidades verticais para alturas especificadas. Tanque de razão de aspecto 3 e $Ra=5 \times 10^7$ . Fator de deformação é 1,2. ....	69
Figura 4.22. Variações das velocidades verticais para alturas especificadas. Tanque de razão de aspecto 3 e $Ra=5 \times 10^6$ . Fator de deformação é 1,2.....	70
Figura 4.23. Variações das velocidades verticais para alturas especificadas. Tanque de razão de aspecto 3 e $Ra=5 \times 10^8$ . Fator de deformação é 1,1.....	70
Figura 4.24. Formação das vorticidades no topo de reservatório de razão de aspecto 3,0 em $Ra=5 \times 10^8$ em dois instantes de tempo.....	71
Figura 4.25. Formação das vorticidades no topo de reservatório de razão de aspecto 3,0 em $Ra=5 \times 10^8$ em dois instantes de tempo. – Detalhe A.....	72
Figura 4.26. Formação das vorticidades no topo de reservatório de razão de aspecto 3,0 em $Ra=5 \times 10^8$ em dois instantes de tempo. – Detalhe B.....	72
Figura 4.27. Ondas de fluido decorrentes de vorticidades descendentes próximas à parede aquecida.....	73
Figura 4.28. Perfis de velocidades adimensionais para os $Fo$ indicados. Tanque sem	

parede direcionadora, de razão de aspecto 4 e $Ra=5 \times 10^8$ .....	74
Figura 4.29. Perfis de temperaturas adimensionais para tanque sem parede direcionadora, razão de aspecto 4 e $Ra=5 \times 10^8$ .....	75
Figura 4.30. Perfis de velocidades horizontais e verticais com a altura. Tanque sem parede direcionadora, para razão de aspecto 4 e $Ra=5 \times 10^8$ .....	76
Figura 4.31. Variações das temperatura de centro com a altura para 16 Fo. Tanque sem parede direcionadora, de razão de aspecto 4 e $Ra=5 \times 10^8$ .....	78
Figura 4.32. Variação transiente das temperaturas de mistura para três razões de aspecto.....	79
Figura 4.33. Variação transiente das temperaturas de mistura para três Ra.....	79
Figura 4.34. Superelementos que constituem a geometria com parede direcionadora. A, B, C, D e E indicam as subdivisões nos eixos r e z.....	80
Figura 4.35. Malhas para razão de aspecto 3 com parede direcionadora de altura 0,9 posicionada a $0,9 \times R_t$ .....	81
Figura 4.36. Variação das temperaturas com a altura em $R=0,08015$ para as malhas testadas com parede direcionadora a 90% de $R_t$ .....	82
Figura 4.37. Tempo de processamento para as malhas com parede direcionadora.....	83
Figura 4.38. Perfis de temperaturas para tanque com parede direcionadora com altura igual a 0,9 em $R=0,1503$ .....	84
Figura 4.39. Perfis de velocidades adimensionais para os Fo indicados. Tanque com parede direcionadora de altura igual a 0,9 em $R=0,1503$ .....	86
Figura 4.40. Perfis de velocidades verticais em um ponto próximo à parede e um ponto central para $Ra=5 \times 10^8$ e parede direcionadora em $R=0,1503$ com altura igual a 0,9.....	87
Figura 4.41: Perfis de velocidades horizontais e verticais com a altura. Tanque com parede direcionadora em $R=0,1503$ e altura igual a 0,9. ....	88
Figura 4.42. Perfis de temperaturas para tanque com parede direcionadora com altura igual a 0,9 em $R=0,1169$ .....	89
Figura 4.43. Perfis de velocidades adimensionais para os Fo indicados. Reservatório com parede direcionadora de altura igual a 0,9 em $R=0,1169$ .....	90
Figura 4.44. Perfis de velocidades verticais em um ponto próximo à parede e	

um ponto central para $Ra=5 \times 10^8$ e parede direcionadora em $R=0,1169$ com altura igual a $0,9$ .....	91
Figura 4.45. Variação das velocidades verticais com o tempo em três pontos próximos à parede aquecida do reservatório em questão.....	92
Figura 4.46. Perfis de temperaturas para tanque com parede direcionadora com altura igual a $0,6$ em $R=0,1169$ .....	93
Figura 4.47. Reservatório de razão de aspecto $3,0$ com parede direcionadora de altura $0,6$ posicionada a $0,7 \times R_t$ .....	94
Figura 4.48. Reservatório de razão de aspecto $3,0$ com parede direcionadora de altura $0,6$ posicionada a $0,7 \times R_t$ - Detalhe.....	94
Figura 4.49. Perfis de temperaturas para tanque com parede direcionadora com altura igual a $0,6$ em $R=0,1503$ . ....	95
Figura 4.50. Variação transiente das velocidades verticais em ponto próximo à parede aquecida do reservatório citado.....	96
Figura 4.51. Perfis de velocidades axiais em $R=0,159$ para dois refinamentos de malha em tanque sem parede direcionadora.....	121
Figura 4.52. Perfis de velocidades axiais em $R=0,159$ para três paredes direcionadoras em tanque com razão de aspecto $3$ e $Ra=5 \times 10^8$ .....	98
Figura 4.53: Perfis de velocidades adimensionais para os $Fo$ indicados. Tanque com parede direcionadora de altura igual a $0,95$ em $R=0,1419$ .....	53
Figura b.1: Erro comum na discretização do domínio.....	119
Figura b.1: Sistema de coordenadas local e global para um elemento.....	120
Figura b.1: Erro comum na discretização do domínio.....	119
Figura c.1: Esquema de geometria arbitrária em função das fronteiras.....	124

## Lista de símbolos

$a_{i,j}$	termo $i,j$ da matriz global A
$[\bar{A}]$	matriz global para solução dos perfis de velocidade
$[\bar{A}_p]$	matriz global do campo de pressões
$[\bar{B}_p]$	matriz carga do campo de pressões
$[\bar{B}_i]$	vetor carga para solução dos perfis de velocidade na direção genérica t
$C$	propriedade genérica associada aos termos transientes/convetivos
$[C]$	matriz referente à contribuição dos termos convectivos
$f_d$	fator de deformação da malha discretizada
$g$	aceleração da gravidade [ $m/s^2$ ]
$h$	coeficiente de película do fluido [ $W/m^2K$ ]
$\vec{i}$	vetor unitário na direção $r$
$\vec{j}$	vetor unitário na direção $z$
$[J]$	Jacobiano da transformação de coordenadas
$k_f$	condutividade térmica do fluido [ $W/m K$ ]
$K$	propriedade genérica associada aos termos difusivos
$[K]$	matriz referente à contribuição dos termos difusivos
$l$	valor de referência
$m$	indica o último instante de tempo já calculado
$n$	direção normal à superfície
$\vec{n}$	vetor unitário na direção normal à superfície
$H$	altura da cavidade [m]
$K_p$	termo de vínculo entre campo de pressões e a carga das velocidades
$[M]$	matriz referente à contribuição dos termos de massa do elemento
$N$	função elementar de aproximação
$Nu$	número de Nusselt
$p$	pressão [Pa]
$P$	pressão adimensional

$[P_t]$	matriz para avaliação das derivadas da pressão na direção <i>genérica t</i>
$Pr$	número de Prandtl
$q_c$	fluxo de calor na superfície [W/m <sup>2</sup> ]
$r$	coordenada na direção radial [m]
$R$	coordenada adimensional na direção radial
$R_t$	raio externo da cavidade cilíndrica (fim do domínio no eixo r).
$R_i$	raio interno (início do domínio no eixo r)
$Ra$	número de Rayleigh
$S$	termo fonte genérico
$\{S\}$	matriz referente à contribuição dos termos fonte
$S^t$	termo fonte na direção genérica t
$S^{p,t}$	termo fonte associado a determinado nó na direção <i>genérica t</i>
$t$	coordenada relativa ao tempo [s]
$T$	temperatura [K]
$T_f$	temperatura mínima de referência (fria) [K]
$T_q$	temperatura máxima de referência (quente) [K]
$u$	velocidade na direção r [m/s]
$U$	velocidade adimensional na direção $R$
$\hat{U}$	termo de correção da velocidade $U$
$\hat{V}$	termo de correção da velocidade $V$
$v$	velocidade na direção z [m/s]
$V$	velocidade adimensional na direção $Z$
$z$	coordenada na direção vertical [m]
$Z$	coordenada adimensional na direção axial
$\alpha$	difusividade térmica [m <sup>2</sup> /s]
$\beta$	coeficiente de expansão volumétrica [1/K]
$\gamma$	indica o esquema de tempo para avaliação das propriedades
$\Gamma$	representação do contorno de um domínio
$[T_t]$	contribuição dos termos de superfície na direção <i>genérica t</i>
$\bar{\delta}T$	diferença de temperatura de referência
$\varepsilon$	resíduo



$\xi$	coordenada do elemento de referência
$\theta$	temperatura adimensional
$\eta$	coordenada do elemento de referência
$\nu$	viscosidade cinemática [m <sup>2</sup> /s]
$\rho$	massa específica [kg/m <sup>3</sup> ]
$\tau$	coordenada adimensional relativa ao tempo
$\phi$	grau de liberdade genérico associado ao elemento ou nó
$\psi$	função peso de resíduos ponderados
$\Omega$	domínio de um problema

# Capítulo 1- Introdução

Aquecedores de água via coletor solar/armazenador integrados são dispositivos baseados na utilização do reservatório e coletor como um sistema único a fim de se reduzir custos. Esse tipo de dispositivo leva a uma maior facilidade de manutenção e menores gastos com material devido à eliminação das tubulações que conectam o coletor ao reservatório. São dispositivos normalmente sem concentradores, destinados a trabalhar com temperaturas relativamente baixas e tendo como propósito o fornecimento de água aquecida para utilização em residências.

As pesquisas atuais para o aproveitamento de energia solar tem focado fortemente tais equipamentos como alternativa de baixo custo e eficiente de aquecimento de água, voltando-se assim à simplicidade dos primeiros projetos americanos de aquecedores solares de água do final do século XIX, onde caixas metálicas cheias de água eram colocadas ao Sol.

Atualmente todas as reservas de combustíveis fósseis estão se esvaindo. Nações cada vez mais dependentes de energia necessitam que fontes alternativas à essa sejam urgentemente implantadas e fixadas. Estima-se que o crescimento da demanda de energia dos países em desenvolvimento aumente 4% a cada ano até 2020 (GOLDENBERG, 1998) e por outro lado a porcentagem de fontes não renováveis de energia (86%) ainda é muito alta frente às fontes renováveis (14%) (PERES, 2004).

Do ponto de vista ambiental as previsões são de muitas das espécies do planeta desaparecerem até o final deste século devido ao aquecimento global. Isto nos remete a desconsiderar qualquer impacto ecológico de grandes represas para geração de energia. Do ponto de vista energético a média de energia solar incidente no Brasil de aproximadamente 5,0 kWh/m<sup>2</sup>/dia (PEREIRA, 2000) é quase igual ao máximo observado no continente europeu, que é 5,5 kWh/m<sup>2</sup>/dia (HELIOCLIM, 2004) e mesmo no inverno é de cerca de 2,5 kWh/m<sup>2</sup>/dia; o total de energia solar incidente no território nacional é de

aproximadamente 15 trilhões de MWh (MOURÃO, 2002), sendo absurdamente maior que o total nacional gerado (365 mil MWh) quase que exclusivamente pelas grandes hidrelétricas. Seria irracional não se explorar tal fonte de energia através de métodos tecnicamente viáveis e pesquisas tecnológicas de ponta não podem ser tiradas de foco. Os benefícios são muitos, dentre eles a redução da demanda energética em horários de pico, devido à redução do consumo doméstico, minimização do impacto ambiental de hidrelétricas e termoelétricas, aumento da segurança na produção de energia, restringindo-se a implantação de usinas nucleares, economia de investimentos governamentais nas plantas de produção e na malha de transporte energético entre outros. A radiação solar deve continuar sendo renovável nos próximos seis bilhões de anos suprimindo todas as nossas necessidades energéticas no dia que a humanidade conseguir dominar as técnicas necessárias para seu aproveitamento.

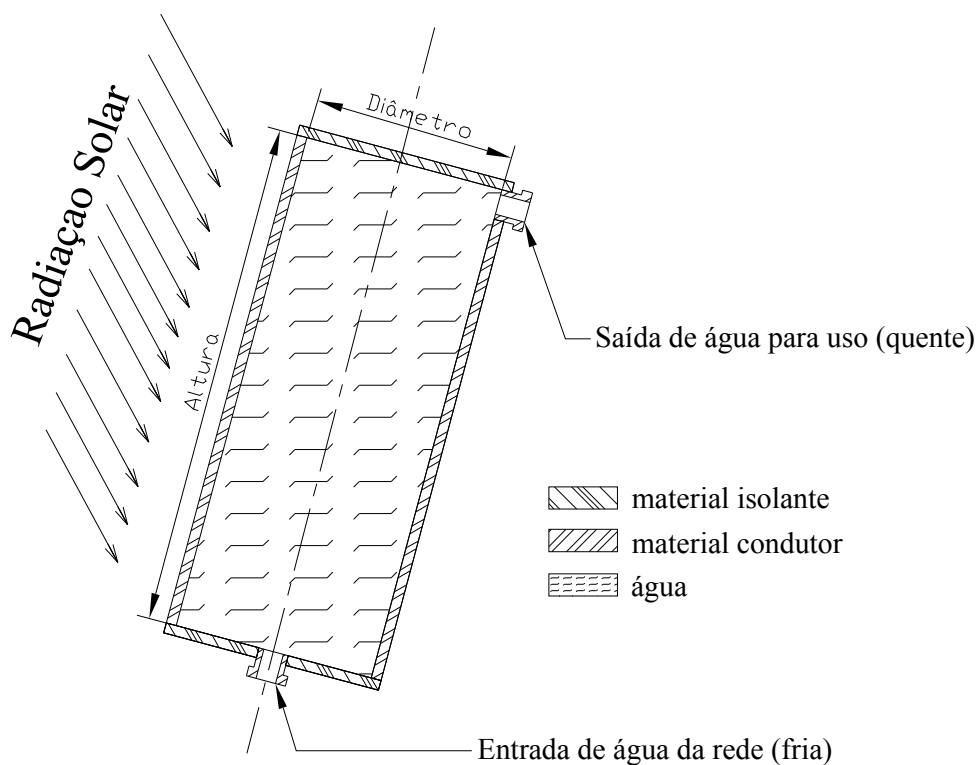
Em dispositivo coletor solar/armazenado integrados o próprio tanque é o coletor solar, conforme mostrado na figura 1.1. O sistema se baseia no princípio do termossifão, onde a água em temperaturas diferentes e conseqüentemente em densidades diferentes se estratifica. Por conta disso, quando se aquece a massa líquida, esta tem a tendência a estratificar-se movimentando-se em direção à parte superior do tanque.

No princípio de termossifão a água aquecida pelo Sol no coletor ganha movimento ascendente forçando a água fria da região superior a tomar seu lugar na região inferior do tanque. À noite a circulação ocorre no sentido inverso, o que pode ser evitado com termodiodos ou dispositivos que evitam a circulação reversa. Uma explicação mais detalhada nos remete ao fenômeno de convecção natural, que nada mais é do que o empuxo e a força gravitacional agindo sobre regiões de diferentes densidades do fluido. A quantidade excedente de energia cinética resultante do movimento de cada molécula se transforma em energia potencial, estratificando a água em diferentes níveis de temperaturas criando assim um gradiente no interior do tanque. A isso chamamos estratificação térmica.

A medida da temperatura e através desta, da quantidade de energia térmica armazenada no reservatório é importante tópico de pesquisa devido à tecnologia requerida para descrição dos fenômenos envolvidos. A estratificação nesse contexto é de fundamental importância pois com ela se pode medir corretamente a quantidade de energia armazenada e sua disponibilidade. Tais estudos podem ser aplicados para otimizar o tempo de carga entre a produção e armazenamento de energia térmica.

Uma das grandes vantagens de se utilizar a estratificação como processo de estocagem térmica por calor sensível é a capacidade de se conseguir temperaturas mais elevadas. Assim pode-se explicar a busca da ótima estratificação térmica com a maximização da segunda lei da termodinâmica. Dessa forma se houvesse mistura total da massa no reservatório ter-se-ia uma temperatura final menor que a atingida pelo fluido estratificado na região superior do tanque.

No caso de um sistema de aquecimento de água coletor solar/armazenador integrados tem-se como produto final a água aquecida e portanto, para minimizar os custos é de importância maior atingir as máximas temperaturas possíveis sem que haja mudança de fase da água no interior do reservatório.



*Figura 1.1: Esquema de um aquecedor de água coletor solar/armazenador integrados*

No capítulo 2 deste trabalho é apresentada uma revisão bibliográfica de modelos numéricos e experimentos sobre convecção natural, estratificação, armazenadores

térmicos em geral e coletores solares de placa plana e integrados especificamente.

No capítulo 3 é apresentado o modelo físico e numérico, com formulação das equações adimensionais da convecção natural para a geometria cilíndrica. Tais equações são aplicadas à geometria proposta, com e sem parede direcionadora de convecção, usando técnica de elementos finitos.

No capítulo 4 é apresentada a validação dos resultados numéricos, os teste de malha e perfis de velocidades, temperaturas e tempos de carga para diferentes reservatórios com e sem parede direcionadora. Os testes de malha são conduzidos para ambos no mesmo número de Rayleigh ( $5 \times 10^8$ , que foi o máximo testado). A influência do refinamento de malha é analisada no tocante ao comportamento transiente das isotermas em uma região central dos reservatórios. São conduzidas comparações da variação da posição da parede direcionadora no interior do tanque, bem como de sua altura.

## Capítulo 2 - Revisão Bibliográfica

### *2.1-Estratificação e estocagem térmica*

Na convecção natural, de acordo com Burmeister (1983), o movimento do fluido é iniciado por variações de densidade resultante de distribuições de temperaturas associadas à força gravitacional local e forças centrífugas. As velocidades são pequenas e os efeitos de inércia não são expressivos.

Em nível atômico, de acordo com Metaxas e Meredith (1983) a aplicação de energia com grandes comprimentos de onda (como a radiação infravermelha solar, microondas e outras, com comprimento maior que 0,75 micrômetro) altera o momento dipolar de moléculas de certos fluidos as quais têm modos vibracionais baixos (a água por exemplo). Esse fenômeno origina uma dissipação por parte das moléculas em comprimentos de onda igualmente grandes. O ser humano sente esse tipo de comprimento de onda na forma de calor, ou energia em trânsito, como foi descrita por Maxwell em 1871 em seu livro "*Theory of Heat*". A energia cinética proveniente da vibração molecular leva as moléculas à alturas diferentes formando um gradiente de densidade na direção vertical estratificando o fluido.

Os sistemas de armazenamento térmico podem usar fontes de energia internas ou externas para se aquecer o fluido. Em um exemplo do primeiro tipo a água fria contida na região do fundo do tanque armazenador é bombeada sobre uma superfície quente externa absorvendo calor desta e sendo descarregada na região superior devido à convecção natural. Em um exemplo do segundo tipo armazena-se a energia térmica diretamente no interior do tanque, através de um elemento fluido confinado em um recipiente que libera (ou absorve) calor para o (ou do) fluido circundante.

Uma interessante vertente das pesquisas sobre armazenamento de energia é a combinação entre as fontes convencionais de energia disponíveis, sob o aspecto da sua adequação, aos melhores períodos de utilização ou seja, fora dos chamados "horários de pico", onde as tarifas, particularmente as referentes à energia elétrica, são menores. Tais pesquisas contemplam a perfeita sincronização entre o consumo de energia fora do "horário

de pico”, armazenando esta energia para uso posterior em horários nos quais se faça necessário. Para se atingir tal fim, usa-se o armazenamento de energia sob a forma térmica (TES) (*Thermal Energy Storage*), ramo de pesquisa considerado de grande atualidade, devido à sua versatilidade e facilidade de aplicação aos mais diversos projetos de engenharia, satisfazendo as necessidades de aquecimento e resfriamento, inclusive os processos empregados em ar condicionado.

Segundo Dincer, Dost e Li (1997), dispositivos TES já estão sendo empregado em larga escala em plantas industriais ou em prédios comerciais existentes, no âmbito de um melhor aproveitamento dos recursos energéticos disponíveis ou como elemento vital no projeto de novas construções. Para tanto, as vantagens dos chamados processos TES superam largamente as desvantagens, a saber:

- Redução no custo da energia.
- Redução no consumo de energia.
- Melhora na qualidade do ar no interior dos prédios.
- Maior flexibilidade nos horários de operação.
- Redução dos custos de implantação e manutenção dos equipamentos.

Em conjunto com estas vantagens, podemos citar outros benefícios:

- Redução do tamanho dos equipamentos.
- Aumento da eficiência e da eficácia na utilização dos equipamentos.
- Melhor aproveitamento das fontes naturais de hidrocarbonetos (petróleo), pelo uso racional ou pela sua substituição.
- Redução na emissão de poluentes e gases que provocam o chamado “efeito estufa” (CO<sub>2</sub> e CFCs).

Vários trabalhos são desenvolvidos nesse sentido como o de Evans, Reid e Drake (1967), que realizam estudos analíticos e experimentais de convecção natural em cilindros verticais; nesse trabalho, um cilindro é cheio de líquido e submetido a um fluxo de calor constante nas paredes. Termopares são usados para medir o campo de temperaturas transientes no líquido e traçadores de tinta para estudar os padrões de fluxo. Os parâmetros variados são a razão de mistura água-glicerina, a profundidade do líquido e o fluxo de calor

na parede. Uma faixa de valores do número de Prandtl de 2 a 8000 bem com uma razão de aspecto de um a três e do número de Grashof de  $10^3$  a  $10^{11}$  são estudadas compreendendo regimes laminares e turbulentos. Um modelo analítico é desenvolvido dividindo-se o sistema em três regiões. O modelo implementado computacionalmente tem a capacidade de prever a distribuição de temperaturas no fluido em função do tempo com boa aproximação.

Enfocando o mesmo assunto Gupta e Garg (1968) desenvolvem um modelo matemático para a circulação da água em um reservatório de água quente confinado, sendo a radiação solar e a temperatura do meio ambiente representadas por meio de Séries de Fourier, tendo como resultado prático a otimização de vários experimentos ainda em fase de projeto.

Ong (1974) realiza estudo semelhante, visando à avaliação do rendimento de um aquecedor de água residencial através do emprego de energia solar. Para tal finalidade, ele realiza experimentos a partir da instrumentação de um coletor solar plano, consistindo na aplicação de cinco termopares nos tubos da base do mesmo e seis termopares na superfície do coletor. Para estudar a variação da temperatura no tanque armazenador, são utilizados seis termopares no seu interior e empregada a técnica de traço de tinta para discretizar o movimento ocasionado pela estratificação térmica.

Também realizando estudo experimental da estratificação Lavan e Thompson (1976) estudam sistemas de armazenamento de água quente. Em particular, altas taxas de extração de dispositivos cilíndricos plásticos são enfatizadas. Dados são coletados de vários razões de aspecto, diferenças de temperaturas de entrada e saída e taxa de fluxo de massa. O efeito da configuração da porta de entrada e saída na estratificação térmica é estudado. Melhorias no projeto dessa forma são obtidas e um esquema de configuração da entrada e saída é obtido para tanques de armazenamento de 300 e 1900 litros.

Em tanques armazenadores Kudish, Santamura e Beaufort (1985) estudam a influência do fluxo de água devido ao fenômeno do termossifão a partir de dados como temperatura e vazão, obtidos na saída de água para o tanque armazenador. Tais dados dão substrato para a construção de curvas de eficiência que denotam a eficiência como sendo função das características do dia de ensaio, como por exemplo, a luminosidade.

Na mesma linha de tanques armazenadores, Guo e Wu (1985) estudam a convecção natural em tanques cilíndricos destinados à estocagem térmica para sistemas de aquecimento solar; o modelo é baseado em convecção forçada e natural e são usados altos



números de Grashoff e Prandtl.

Morrison e Braun (1985) estudam a modelagem matemática e as características operacionais de um termosifão acoplado a um tanque armazenador de água vertical ou horizontal. Ambos concluem que o rendimento de tal equipamento é máximo quando o fluxo diário no coletor solar é aproximadamente igual ao fluxo de retirada de fluido (água) para consumo. Comprovam que o tanque armazenador vertical possui melhor rendimento que o horizontal.

Na mesma área Cabelli (1977) estuda a variação da temperatura e dos campos de função corrente em um reservatório térmico estratificado a partir do uso de energia solar. Para tanto, o autor utiliza a modelagem matemática das equações de Navier-Stokes, com sua solução obtida numericamente mediante o uso do método das diferenças finitas, com boa concordância entre os resultados teóricos e práticos.

Também estudando a estratificação térmica em um reservatório Padilha (1982) propõe um modelo semi-empírico unidimensional e transiente para descrever o histórico percorrido pelos diferentes perfis de temperatura no interior do mesmo, em particular ao longo das paredes verticais, durante as operações de carga, descarga e resfriamento natural. Tal modelo matemático é solucionado numericamente e verifica-se a concordância com os dados experimentais disponíveis na literatura. O citado autor ainda estuda a relação existente entre a altura e o diâmetro do reservatório, na manutenção da estratificação térmica chegando a um ponto ótimo de estratificação, que seria entre a razão de aspecto (razão entre a altura e diâmetro) três e quatro.

Sun e Oosthuizen (1988) empreendem estudo numérico em cilindros verticais sob condições de temperaturas impostas e novamente Sun e Oosthuizen (1989) realizam estudos numéricos para cilindros verticais com uma mudança abrupta no fluxo de calor e usando a técnica de diferenças finitas obtendo resultados para números de Rayleigh variando de 5000 a 30000 e Prandtl de 0.7 a 10, bem como razões de aspecto para os corpos cilíndricos de um a seis.

Segundo Al-Marafie (1989) a estocagem térmica é o ponto mais importante de um sistema de coletor solar. Um bom armazenador térmico deve permitir mínimas perdas térmicas e assim maior eficiência através da extratificação térmica da energia estocada. Tentando entender um pouco melhor o comportamento estacionário da

estocagem térmica com relação ao projeto eles estudam diversos fatores, dentro os quais: perdas de calor, relações geométricas e o material da parede do tanque.

Dentre os parâmetros que influenciam com maior relevância a perda da estratificação térmica, ressaltam-se as perdas térmicas por condução de calor ao longo das paredes do reservatório, bem como as trocas de calor entre o reservatório e o meio ambiente.

As citadas perdas são objeto de trabalho de Shyu, Lin e Fang (1989), ao realizarem estudos sobre estratificação térmica em um reservatório cilíndrico vertical, com comparações entre os resultados experimentais e os perfis teóricos das temperaturas de líquido no interior do mesmo. Comparando os valores dos citados resultados, fica comprovado que a difusão térmica ao longo do fluido não possui grande relevância para a queda da temperatura no interior de tanques verticais. Fica comprovado também que a espessura da parede do reservatório é fundamental no processo de degradação da estratificação térmica (perdas axiais), devido às grandes perdas de calor por condução térmica ao longo da mesma, concluindo ainda que a perda de calor para o meio ambiente é o fator de maior relevância na degradação da estratificação térmica em reservatórios livres da incidência de luz solar.

Truman e Wildin (1989) desenvolvem a solução de um modelo utilizando a técnica de diferenças finitas para tanques de armazenamento de líquido quente. O modelo determina a transferência de calor por convecção entre o líquido e as paredes e o piso e a condução vertical no líquido e a mixagem próximo ao difusor de entrada bem como a transferência de calor entre superfícies externas do tanque e o seu meio. A distribuição de temperaturas do líquido é assumida unidimensional enquanto a distribuição nas paredes é tratada como bidimensional nas direções horizontais e verticais. Características do tanque como composição da parede e isolamento ou condições de operação tais como vazão de carga ou descarga são variadas. O modelo permite simular múltiplos ciclos de carga e descarga para modelar o *performance* do tanque. O modelo é convincente e simples para tanques de armazenamento de água resfriada e estratificada. É feita uma comparação com um modelo experimental. Distribuições de temperaturas na água e fluxo de energia entre o tanque é muito bem diagnosticada.

Yoo e Pak (1993) prevêm um limite superior para performance de

tanques de armazenamento térmico estudando um modelo teórico do processo de carga. Primeiro é desenvolvido um modelo ideal pela introdução de considerações razoáveis em adição ao fluxo tipo pistão. As equações governantes derivadas do modelo aparecem sendo caracterizadas pelo único parâmetro, o número de Peclet. É aplicado a técnica da transformada de Laplace para obter os resultados das equações em uma solução de forma fechada para distribuição de temperaturas transientes. O modelo é validado pelos resultados de um modelo mais simples, de condução de calor entre duas regiões semi-infinitas em contato com uma interface móvel. São ilustrados e discutidos os perfis de temperaturas para casos representativos. A eficiência do armazenamento é analiticamente expressa em termos do número de Peclet.

Muitos estudos teóricos e práticos sob diferentes condições de operação e de arranjos físicos em tanques que empregam a estratificação térmica são realizados. Nas mudanças físicas (arranjos) pode-se citar a alteração na locação das entradas e saídas do fluido, a forma do difusor de entrada, as velocidades e temperaturas de entrada, etc.

Tratando-se da influência da posição da entrada e saída de água em tanques de estratificação Homan e Soo (1997) apresentam resultados para a eficiência de tanque de estratificação de água gelada. Os resultados são apresentados em termos de soluções numéricas para fluxo laminar, não-estacionário e bidimensional durante o abastecimento estável do tanque estratificado com água fria e também durante a saída de água quente. O modelo unidimensional representa o nível mínimo de mistura térmica. É apresentada ademais a diferença entre o modelo unidimensional e o bidimensional. Para números de Reynolds de aproximadamente 100 a eficiência do modelo bidimensional é menos de 10% abaixo da eficiência ótima do modelo. Exames de uma difusividade efetiva, a qual pode ser associada com a mistura ignorada no modelo unidimensional, revela que os primeiros e últimos estágios do processo de abastecimento do tanque são responsáveis pela maior parte do desvio entre os desempenhos atual e ideal. Para esta faixa de números de Reynolds as predições bidimensionais para a difusividade efetiva concordam bem com valores derivados dos dados experimentais publicados.

Somando conhecimento sobre tanques de estratificação térmica Alizadeh (1999) empreende estudo numérico e experimental sobre o assunto. Quatro experimentos são conduzidos para três campos de temperatura diferentes. O primeiro é um tanque

estratificado com a mesma temperatura de entrada. O segundo é um tanque também estratificado com uma temperatura mais alta do que a de entrada. O terceiro é um tanque aquecido sem estratificação e o quarto é o mesmo que o primeiro exceto que existe um desvio de entrada por um tubo cônico divergente de cerca de 30 graus. Os estudos tem como resultado a escolha desse último experimento como mais propício à estratificação devido à difusão do dispositivo de entrada. Também ligeira vantagem é conseguida no segundo experimento que tem a temperatura da região inferior ligeiramente superior à temperatura de entrada. Dois modelos numéricos são desenvolvidos e os resultados comparados com os experimentais e uma boa concordância é obtida entre eles principalmente no topo do tanque.

Ivancic et al (1999) analisam um cilindro vertical aquecido em sua superfície inferior com parede lateral sob duas condições: adiabática e condutora sendo que nesse último caso é levada em conta a transferência de calor por condução; os efeitos do número de Rayleigh, Prandtl, razão de aspecto e condições de contorno são estudadas.

Nelson, Balakrishnan e Murthy (1999) realizam estudo experimental sobre estratificação em armazenadores térmicos para sistemas de refrigeração de edifícios. Espessura, temperaturas iniciais, razões de aspecto e fluxo são variados para se avaliar o grau de estratificação na carga, descarga e estagnação. É observado que a degradação das termoclinas ocorre devido à transferência de calor para o ambiente, difusão térmica, condução axial e mistura devido à admissão do fluido no tanque. O grau de estratificação é expresso em termos de capacidade calorífica ou número modificado de Biot.

Lin e Armfield (2000) também realizam um importante estudo numéricos no tocante à cilindros verticais. No resfriamento e estratificação de fluidos por convecção natural é aplicado um modelo numérico para investigação dos padrões de fluxo transientes e identificação dos processos envolvidos no resfriamento. Um dos resultados obtidos mostra que atividades de fluxo vigorosos concentram-se principalmente na camada térmica vertical ao longo da parede lateral e na região inferior. São analisados também padrões de fluxo estacionários e quase estacionários incluindo as atividades de ondas que viajam pela camada térmica vertical ao longo da parede lateral.

Kalogirou e Papamarcou (2000) empregam técnicas computacionais no estudo e desenvolvimento de um equipamento de aquecimento de água residencial

equipado com termossifão, com grande concordância entre os resultados teóricos esperados e os obtidos na prática. Como aspectos desfavoráveis a tal estudo pode-se citar a dificuldade de se familiarizar com os procedimentos computacionais, bem como o custo de tal ferramenta de trabalho.

Papanicolaou e Belessiotis (2001) estudam numericamente a convecção natural de água para altos números de Rayleigh e também analisam aspectos para regime de fluxo turbulento. Um fluxo de calor constante é admitido para as paredes laterais e as horizontais são adiabáticas. É estudado também o aparecimento de um comportamento oscilatório onde fluxos secundários aparecem e desaparecem. O número de Rayleigh varia de  $10^{10}$  a  $10^{15}$ . É empreendida, ademais, validação com resultados experimentais.

A estratificação de fluxos turbulentos em um tanque de estocagem de água estratificada cilíndrico e axi-simétrico é investigada numericamente por Spall (1997). Os cálculos envolvem a injeção de água fria através de um orifício a base de um tanque isolado no qual o fluido repousa em temperatura constante. O número de Reynolds varia de 500 a 3000 e o número de Arquimedes varia de 0,5 a 5,0. São encontradas diferenças consideráveis na espessura das termoclinas usando-se diversos modelos.

Bouhdjar e Harhad (2002) desenvolvem um estudo bidimensional para avaliar a influência de parâmetros físicos e geométricos (como o número de Richardson, a disposição da entrada e saída de fluido) sobre o comportamento dinâmico e térmico de um fluido armazenado em um reservatório cilíndrico vertical com um eixo imaginário de simetria também vertical. No experimento, os citados autores empregam um tanque armazenador provido de uma entrada e uma saída de fluido, ficando mais uma vez corroborado o melhor desempenho, sob o aspecto da eficiência térmica, da entrada de fluido pela parte superior e conseqüente retirada do mesmo pela parte inferior do tanque armazenador.

Oliveski, Krenzinger e Vielmo (2003) empreendem estudo numérico e experimental sobre campos de velocidades e temperaturas dentro de um tanque de estocagem térmica submetido à convecção natural. A análise é feita em dois estágios: no primeiro o perfil de temperaturas ao longo do eixo vertical foi obtido experimentalmente e numericamente, para uma faixa de tempo de resfriamento de 45 a 60 horas. É confeccionado um modelo bidimensional em coordenadas cilíndricas. No segundo são estudados 40 casos de resfriamento com quatro razões de aspecto, cinco espessuras de isolamento e dois volumes

diferentes com um modelo validado. São consideradas as perdas de calor nas paredes e são obtidas correlações para o número de Nusselt.

Shah e Furbo (2003) analisam experimental e teoricamente a entrada de jatos de água no tanque de armazenamento. Cálculos computacionais de três projetos com diferentes taxas de entrada de fluxo são conduzidas para ilustrar a variação do comportamento das condições térmicas em um armazenador solar. Os resultados mostram o impacto do formato da entrada nos padrões de fluxo no tanque. As investigações numéricas são seguidas por experimentos. Um armazenador solar de teste, similar ao investigado por modelamento numérico é construído com paredes transparentes cilíndricas tal que as estruturas de fluxo devido aos jatos de entrada podem ser visualizados. Com os três formatos de entrada nove testes de descarga com diferentes taxas de fluxo são conduzidos em diferentes temperaturas de estratificação. Os resultados mostram que as mudanças de entropia e mudanças de exergia no armazenador durante as descargas são influenciadas pelo número de Richardson, pelo volume de descarga e pelas condições iniciais do tanque.

Knudsen e Furbo (2003) realizam investigações experimentais e numéricas de trocadores de calor verticais. Duas posições de entrada são investigadas e experimentos baseados em condições de operações típicas são empreendidas para investigar como a estratificação térmica é afetada por posições diferentes de entrada. A transferência de calor entre o fluido do coletor solar na camisa e a água doméstica no tanque é analisada por simulações computacionais. É demonstrado que para uma alta temperatura de entrada é melhor mover a entrada mais para baixo para melhor estratificação.

Zachár, Farkas e Szlivka (2003) provam que placas defletoras na entrada de fluido melhoram a estratificação nesses dispositivos. Uma análise numérica é feita para descrever os campos de velocidades e temperaturas dentro de um tanque de armazenamento usado em um sistema de coleta solar sob várias condições de contorno com fluxo de entrada e saída. Um dos objetivos principais é estudar o efeito da dimensão de placas situadas opostamente à entrada com propósito de melhorar a estratificação. Um modelo numérico é desenvolvido e validado usando resultados experimentais. Duas temperaturas iniciais diferentes são tomadas com uma configuração de duas camadas. Dois casos são considerados, a termoclina na vizinhança da placa e a a mesma no meio do tanque. No último caso o diâmetro da placa causa pouco impacto mas a termoclina sendo movida para

mais próximo à placa resulta no aumento da influência do diâmetro. É provado ser possível preservar a estratificação com grandes fluxos de entrada. É estudado também o fluxo de água fria no topo do tanque. A influência do diâmetro da placa nesse caso é significativa.

Badescu (2004) desenvolve pesquisa em tanques de armazenamento de líquido estratificado e totalmente misturado. A unidade estratificada é modelada usando três equações parciais diferenciais governantes: da dependência do tempo e do espaço do gás quente, do meio de armazenamento líquido e do material das paredes dos tubos respectivamente. Para o completo estudo de unidades de mistura um padrão baseado no conceito de unidades térmicas é levemente generalizado para ser acoplado na dependência do tempo dos coeficientes de transferência de calor. O indicador de desempenho adotado aqui é a destruição mínima de exergia. É considerada toda irreversibilidade relevante.

Shin et al (2004) estudam a estratificação em tanques verticais com o propósito de otimização. Para isto desenvolvem um estudo experimental e numérico usando algoritmo SIMPLE a fim de melhorar características como a capacidade de armazenamento térmica e a geometria. É comparado todo o estudo com dados experimentais e uma otimização detalhada é conduzida para melhoria da geometria, tempo de carga, forma do difusor, modelo de turbulência e velocidade de entrada. É proposto um modelo com mínima mistura entre o fluido quente e frio por avaliação do desempenho do sistema de estocagem. É demonstrado que grandes sistemas de estocagem tem melhor desempenho do que sistemas pequenos. Conforme aumenta o tempo de carga o grau de estratificação é reduzido devido ao incremento do efeito de transferência de calor por convecção e difusão pela região de estratificação térmica. Outro resultado obtido é que o difusor curvo mostra melhor desempenho que o difusor plano. No trabalho é concluído que o efeito da velocidade de entrada em tanques grandes não tem efeitos significativos na destruição da estratificação térmica.

Ma et al (2005) desenvolvem um modelo numérico tridimensional para modelagem de fluxo de fluido estacionário e transiente em um cilindro vertical aquecido lateralmente; os parâmetros são variados tais como razão de aspecto de dois a oito e o número de Prandtl fixo em 0,021.

Nos últimos 20 anos têm sido estudadas uma diversidade muito grande de formas de reservatórios destacando-se alguns autores neste trabalho.

Estudando geometrias não convencionais, Meli e Späte (2000) analisam o projeto de um tanque de armazenamento de água piramidal incluindo análise de custos que suprirá 50 a 60% da demanda de aquecimento do campus solar Julich. A cobertura do tanque de 2500 m<sup>3</sup> é constituída de muitos pontos flutuantes isolados, um conectado com o outro. São distribuídos 1200 m<sup>2</sup> de coletores em diferentes edificios e são acoplados com o armazenador subterrâneo. Devido à baixa demanda o consumo será baixo (2124 GJ anuais ). O custo do aquecimento é mais de três vezes superior ao similar à gás.

Com relação à pesquisa numérica em geometrias cilíndricas Yeung (1989) realiza uma análise simples da convecção natural em cavidade anular fechada, com paredes externas, temperaturas definidas e paredes superior e inferior isoladas. A análise prediz a estratificação térmica no espaço anular bem como as médias de transferência de calor para quaisquer razões de aspecto. Em sequência é realizada comparação experimental obtendo-se boa concordância com os dados numéricos.

Tratando-se da geometria citada anteriormente Fu, Jou e Lee (1991) estudam um modelo com superfícies superiores e inferiores adiabáticas, parede externa fria e parede interna com aumento abrupto de temperatura. É utilizado o método SIMPLE-R para resolver as equações governantes da convecção natural. Os números de Rayleigh de 10<sup>4</sup> e 10<sup>6</sup> são considerados como válidos para o estudo e é verificado que a influência da seção anular leva à disparidade entre o comportamento dessa geometria e a geometria retangular. Além disso o resultado mostra que na região inicial as variações do número de Nusselt total da parede interna aumenta muito com o número de Rayleigh 10<sup>6</sup> e não flutua sobre o de 10<sup>4</sup> o qual é similar àqueles apresentados na cavidade retangular.

## ***2.2 - Coletores solares***

Coletor solar é um dispositivo que absorve a energia do sol diretamente convertendo-a em uma ou mais formas de energia ou estocando-a geralmente em fluidos. A energia eletromagnética solar que provem do espaço compreende bandas que vão de antes do infravermelho (ondas longas) a após o ultra-violeta (ondas curtas). Até a superfície terrestre essa radiação é em grande parte absorvida e desviada pela atmosfera mas mesmo assim chega em quantidade suficiente para sustentar toda a biosfera, aquecer os



oceanos e grande parte da crosta terrestre; isso é representado em uma média de 1000 W por metro quadrado em um dia limpo com o sol a pino.

Um coletor solar de células fotovoltaicas converte a radiação do Sol diretamente em energia elétrica enquanto coletores solares térmicos armazenam a energia térmica proveniente do Sol em água ou solução anti-congelante de etileno-glicol; ambos os fluidos são de alta capacidade térmica. Nos dois tipos de coletores uma superfície de cor escura se encarrega de transformar grande parte da radiação visível em agitação molecular devido à quase ausência de reflexão dessa radiação (superfície de alta absorção de luz). Abaixo dessa camada uma superfície metálica rapidamente transmite essa vibração ao fluido do reservatório. Em coletores de alto desempenho são usadas superfícies seletivas que têm propriedades de altíssima absorção e baixíssima emissividade de comprimentos longos, os quais são responsáveis em grande parte pelo calor. Outro método utilizado para reduzir a perda radiativa emprega uma cobertura transparente geralmente de vidro de Borosilicato ou *Pyrex* os quais têm pouca emissividade; tal cobertura faz com que a energia térmica fique presa em um espaço entre a cobertura e o coletor sendo absorvida totalmente. O vidro somente deixa passar comprimentos de onda de luz visível ao ultravioleta, impedindo fortemente a passagem de ondas longas como o infravermelho.

Outro método de incrementar a eficiência do coletor é usar um fluido mais frio no interior do tanque seguindo a segunda lei da termodinâmica. O fluido quente pode ser usado para aquecer outro fluido, através de um trocador de calor, ou ser utilizado diretamente. Sistemas de coleta solar são mais eficientes com maiores diferenciais de temperaturas, não superando 10 a 20 graus Celsius.

Um sistema de coleta solar de placa plana consiste de três unidades básicas: O circuito de transferência de fluido, um sistema de estocagem e o coletor solar. O circuito pode ou não incluir circuitos secundários de armazenamento de calor e trocadores de calor.

Em um segundo tipo de sistema de coleta solar chamado aquecedor de água com coletor solar/armazenador integrados o circuito de transferência é eliminado pois o sistema de estocagem é diretamente aquecido pelo Sol.

Para os modelos de placa plana são adotados dois sistemas: O sistema de termossifão e o sistema de bombeamento. No sistema de termossifão o tanque de

armazenamento é colocado acima do coletor e conforme o fluido no coletor é aquecido ele flui naturalmente para cima através do circuito. No sistema de bombeamento o fluido é movimentado pelo circuito através de uma bomba e um controle eletrônico permite uma temperatura estável.

### **2.2.1-Aquecedores de água Coletor Solar/Armazenador Integrados**

Kemp (1891) propõe a primeira patente de aquecedor de água via coletor solar/armazenador integrados com cobertura transparente para impedir perdas de calor noturnas. O aspecto construtivo desse equipamento é vantajoso pois a eliminação dos sistemas de transporte de fluido, geralmente feitos de cobre e recobertos com material isolante, reduzem os gastos, melhoram o padrão estético e evitam perdas de energia para o meio ambiente. No final do século XX as crises energéticas provenientes da falta de petróleo reativam o interesse por esse tipo de tecnologia.

Estudos numéricos são poucos a cerca da convecção natural de água no interior de tanques cilíndricos de aquecedores solares integrados devido à enorme complexidade do perfil transiente de temperaturas e velocidades. Por outro lado estudos experimentais sobre o assunto aparecem na literatura em maior número criando necessidade de desenvolvimento de modelos numéricos para validação destes.

Na linha experimental Smyth, Eames e Norton (2001) desenvolvem trabalhos experimentais com modelos diferentes de coletores solares integrados para o clima no norte europeu com bons resultados. Chaurasia e Twidell (2000) utilizam como linha principal de seu trabalho os custos de um sistema integrado perante aos tradicionais de placa plana e tentam, com sucesso, reduzir as perdas de calor noturnas usando materiais transparentes.

Kaptan e Kilic (1996) conduzem estudos experimentais visando à avaliação de um coletor solar-armazenador para pequenos volumes de água (cerca de 87 litros), no âmbito teórico, mediante a simulação da luz solar incidente sobre o mesmo pelo emprego de 24 lâmpadas elétricas de 250 W cada. No interior do referido coletor-armazenador instala-se termopares para fornecer dados sobre a variação da temperatura do fluido ao longo do tempo

do experimento. A resolução das equações da variação da temperatura são resolvidas mediante o emprego do método das diferenças finitas. Isso resulta em boas aproximações entre o modelo matemático e teórico acerca do fenômeno da variação da temperatura ao longo do tempo no interior do coletor solar-armazenador. Como ponto desfavorável ao mérito do experimento, deve-se citar o fato de a fonte de energia (24 lâmpadas elétricas) não representarem com perfeição o efeito da luz solar, visto que a mesma varia ao longo do dia, sendo de intensidade máxima às 12 horas (meio-dia).

Em um trabalho importante sobre coletores integrados Smyth, Eames e Norton (2004) empreendem estudo tecno-econômico no sentido de destacar os ICSSWH (*Integrated Collector/Storage Solar Water Heaters*) como forma de energia competitiva às usadas no norte da Irlanda chegando à uma conclusão positiva sobre seus custos-benefícios. Novamente Smyth, Eames e Norton (2006) fazem coletânea sobre sistemas coletor solar/armazenador integrados para fixar tal tecnologia como eficiente meio de baixo custo para se aquecer água.

Vários avanços tecnológicos têm sido implementados visando à redução das perdas de energia através da cobertura dos sistemas com coletor solar-armazenador integrados. A utilização de uma cobertura isolante removível mostra-se efetiva quanto à diminuição das perdas para o meio, com o inconveniente da necessidade de ser colocada durante a noite e retirada durante o dia. Soluções visando à automação de tal procedimento têm a agravante de ser um mecanismo auxiliar que requer manutenção eficiente, possuindo um custo de implementação, além de custo adicional em termos de energia (geralmente elétrica) para o seu funcionamento.

Vários materiais têm sido pesquisados para utilização na superfície exposta ao sol do coletor solar-armazenador, com predominância do vidro, por reunir as qualidades de permeabilidade à luz solar, ter custo acessível e disponibilidade no comércio.

Tripanagnostopoulos et al (1999) introduzem melhoramentos na captação da energia solar visando uma maior eficiência em seu aproveitamento. Para isso utilizam o artifício construtivo de enclausurar completa ou parcialmente o coletor solar/armazenador em um receptáculo, livre da insolação direta. Com isso garantem à produção e manutenção de uma porção circundante de ar aquecido para isolar termicamente o sistema. A energia solar incidente sobre o dispositivo é obtida a partir da reflexão dos raios solares em um espelho, fazendo os mesmos incidirem em ângulos convenientes sobre a superfície coletora.

Tal procedimento construtivo tem o inconveniente de necessitar de materiais com elevada eficiência quanto à refletância e de alto custo de aquisição.

O uso conjunto de coletor solar plano e coletor solar integrado a armazenador, ambos conectados a um termossifão, são os equipamentos mais utilizados para aquecer volumes diários de água até 200 litros. Tal arranjo construtivo tem um custo acessível, de fácil construção e operação e possibilitam o retorno do investimento em pouco tempo. A vantagem de conservar a água em níveis de temperatura mais elevados é fator decisivo na difusão do uso de termossifão no projeto de tais equipamentos. Os coletores armazenadores sem termossifão são menos utilizados devido às perdas noturnas, embora seu custo seja menor e sejam mais aceitáveis sob o ponto de vista estético, quando comparados a equipamentos providos com termossifão.

Diferentes estudos visando melhorias no projeto e eficiência dos coletores integrados a armazenadores têm contribuído para a popularização do seu uso. Chinnappa e Gnanalingam (1973) realizaram estudos sobre o aquecimento de água, confinado-a em tubos pressurizados.

Prakash, Garg e Datta (1983) pesquisam a utilização de uma cobertura de material isolante a ser colocada sobre o coletor durante a noite, visando manter a água em torno de 40°C. Resultados práticos positivos são obtidos em coletores solares planos.

Novamente Prakash, Garg e Datta (1985) realizam pesquisas que forneceram elementos para a estimativa da energia armazenada em um coletor solar-armazenador via calor latente. Kumar e Tiwari (1988) pesquisam um coletor solar-armazenador provido com um trocador de calor no interior do reservatório. Mohamad (1997) implementa pesquisas em nível teórico e prático visando à redução das perdas de calor durante o período noturno, mediante o uso de um termo-diodo colocado na base do reservatório.

Uma outra linha de pesquisa visando à otimização da conservação de energia nos equipamentos supra-citados é a utilização de uma camada de material isolante transparente, aplicada sobre o coletor solar-armazenador. Mason e Davidson (1995) estudam a variação da temperatura no interior de um tanque armazenador isento de fluido, mas provido de sua superfície coletora de radiação solar com cobertura de diferentes materiais, sendo os resultados teóricos aplicados ao cálculo preliminar de coletor solar-

armazenador tubular.

Em comparação com os aquecedores solares planos, os aquecedores tubulares possuem algumas vantagens, como serem resistentes a pressões hidrostáticas e poderem ser diretamente conectados à rede de abastecimento de água. Schmidt, Goetzberger e Schmid (1988) pesquisam a construção de um coletor solar-armazenador adequado à climas frios, onde os períodos de insolação são menores. Colocam desvios no interior do reservatório tubular e tubulações auxiliares para circulação de fluido quente.

Tripanagnostopoulos e Yianoulis (1992) realizam pesquisas sobre aquecedores de água com coletor solar-armazenador integrados que utilizam refletores que concentram a energia solar. Tal dispositivo é baseado em um refletor parabólico assimétrico de raios solares, convenientemente instalado junto de um tanque (reservatório) cilíndrico horizontal.

Pesquisando novas geometrias Joudi, Hussein e Farhan (2004) realizam experimentos com coletor-armazenador em formato de prisma triangular contendo água em seu interior. A face inclinada é submetida a um fluxo de calor semelhante à radiação solar natural, sendo as demais paredes isoladas termicamente. Para estudar o comportamento desse dispositivo é utilizada a técnica dos elementos finitos. O resultado é obtido com a distribuição de temperaturas no interior do aparelho, do campo de velocidades do fluido, da energia armazenada e da temperatura média do tanque.

A partir destes parâmetros de investigação, Joudi e Al-Tabbakh (1999) concluíram que:

- A estratificação térmica no fluido é um fenômeno físico que independe dos valores de incidência de radiação solar.
- A variação da temperatura no interior do coletor solar-armazenador depende principalmente do valor da radiação solar incidente. O valor máximo da diferença de temperatura atinge 12,8°C durante o inverno e de 11,3°C no verão, em dias claros e sem nuvens.
- Este coletor solar-armazenador pode fornecer água aquecida a 37°C durante o mês de janeiro e 46,7°C em Junho, naquela região da Terra (Iraque);
- A entrada de água fria para o sistema coletor solar-armazenador integrados deve ser localizada onde existe água a menor temperatura (base do coletor); a saída de água

quente deve ser realizada na parte superior do mesmo.

- A utilização de uma parede horizontal no interior do coletor-armazenador resulta em um aumento da estratificação térmica, em aumento da temperatura intermediária do fluido, com aumento na sua eficiência.

Como ponto desfavorável a tal geometria construtiva e uso de uma parede, ficam as restrições acerca da otimização da geometria em si, pois não são explicitadas quais medidas são ideais e a dificuldade em se posicionar a parede no interior do equipamento.

### **2.2.2 – Aquecedores solares de água de placa plana.**

Com relação aos estudos experimentais em coletores solares de placa plana pode-se citar Sopian et al (2002). Eles apresentam o desempenho térmico de um coletor solar com tubulação TPNR (sigla em inglês para borracha natural termoplástica) como placa absorvedora do tipo paralela e satisfazendo as condições de teste indicadas. Para monitoramento do sistema é usado um sistema de coleta solar para aquecimento de água por termossifão com tanque vertical. O sistema é capaz de produzir saídas de temperatura acima de 65°C para um dia típico de 550 W/m<sup>2</sup>. São usados dois métodos para esse monitoramento. No primeiro método o tanque de estocagem é cheio com água quente na noite anterior ao teste e as leituras de temperatura são gravadas para o teste do dia seguinte. A temperatura no tanque de estocagem aumenta no final do dia e os valores de radiação solar total acumulada também são registrados no mesmo período. O teste é repetido sob condições ambientais variadas que cobre baixa e altas intensidades de radiação. Um incremento de temperatura de 15°C no tanque de estocagem do sistema de teste é obtido em uma radiação solar acumulada de 4,5 kWh/m<sup>2</sup>. No segundo método as leituras de temperaturas sem esvaziamento ou dreno da água quente do tanque de armazenamento são gravadas por seis dias e uma temperatura maior do que 60 °C pode ser atingida pelo tanque de armazenamento. Então este sistema tem o potencial de ser usado como sistema de água quente por termossifão doméstico.

Hussein (2003) estuda a circulação natural de um aquecedor solar de água de placa plana por termossifão de duas fases fechadas teoricamente sob as condições de

campo do Cairo, Egito. O projeto dos parâmetros do aquecedor são otimizados pelos meios da simulação do programa do autor que é verificado experimentalmente em um artigo anterior. Estes parâmetros incluem o volume do tanque de armazenamento para uma área de coleta, taxas de dimensões do tanque de armazenamento e altura entre o tanque de estocagem térmica e o coletor. Os resultados computacionais indicam que o tanque de armazenamento térmico para uma razão de área do coletor e as dimensões do tanque de armazenamento tem efeitos significantes no desempenho, enquanto a altura entre o tanque do aquecedor e o coletor tem pouco efeito.

Hussein, Mohamad e El-Asfour (2001) também se concentram em análises experimental e teórica de coletores solares de placa plana sob condições transientes. As equações governantes dos componentes do coletor são apresentadas e generalizadas em formas adimensionais. É usada técnica de diferenças finitas por meios de uma simulação numérica. Para fins de verificação um modelo de coletor solar de placa plana é construído e testado para diferentes temperaturas e vazões de água gelada. Os resultados experimentais são comparados com os teóricos e uma considerável concordância é observada entre esses dois modelos.

Na mesma linha de pesquisa Karaghoulis e Alnaser (2001) investigam dispositivo de coleta solar nas condições climáticas de Bahrein com intensidades solares máximas diárias variando de um a  $695 \text{ W/m}^2$  e temperaturas variando entre  $19^\circ\text{C}$  e  $25^\circ\text{C}$ . A eficiência alcançada é de 38% com temperatura d'água no tanque de armazenamento acima de  $50^\circ\text{C}$ .

Bojic, Kalogirou e Petronijevic (2001) apresentam um modelo e simulação de um sistema de aquecimento de água usando marca de tempo. São apresentados os resultados das simulações realizadas em um modelo construído e operado na antiga Iugoslávia que fornece água quente doméstica para uma família de quatro pessoas. O aquecedor de água consiste de um coletor solar de placa plana, um tanque de armazenamento de água e um aquecedor elétrico, e um dispositivo de mistura de água. O modelo matemático é usado para avaliar a variação anual da fração solar com respeito ao volume do tanque de armazenamento, demanda de temperatura de água quente requerida e diferença dessa temperatura e temperatura da água do tanque de armazenamento pré-definida e o perfil de consumo da demanda de água quente doméstica. Os resultados desta investigação podem ser usados para projetar um sistema de coleta solar e para operar sobre sistemas já projetados efetivamente.

Estudando também aquecedores de placa plana Nahar (2003) desenvolve um sistema que consiste de um coletor de placa plana e um tanque de armazenamento com superfície seletiva e fundo isolado. Um teste do desempenho do aquecedor solar é realizado e se demonstra que o aquecedor pode fornecer 100 litros de água quente a uma temperatura média de 60 graus Celsius após 16 horas mantendo água quente até a manhã seguinte com temperatura média de 51,6 graus Celsius. A eficiência média é de 57%. Baseado nesse resultado é desenvolvido um modelo usando temperatura ambiente e radiação solar. O desempenho predito considera que água quente é requerida na maioria dos locais para uso domésticos somente durante a estação de inverno, obtendo como resultado o fornecimento de 100 litros de água quente em uma temperatura média de 50°C a 70°C que pode ser captada de 40°C a 60°C durante um dia.

A vantagem de se analisar numericamente os fenômenos que ocorrem em equipamentos de aquecimento com auxílio de computadores reside na eliminação de gastos com protótipos, no estudo dos diferentes fenômenos envolvidos, na capacitação de total entendimento do sistema e sua operação e na possibilidade de rápida otimização e estimativa de variações de temperatura, velocidade, pressões e rendimento. É uma alternativa rápida, de baixo custo e flexibilidade de projeto.

Seguindo essa linha estudos numéricos em coletor de placa plana são realizados por Shariah e Löf (1997) que usam o programa de simulação TRNSYS para verificar o desempenho de um sistema de aquecimento de água solar com circulação natural (termossifão) e carga de água quente diária. O efeito da altura do tanque na fração anual solar do sistema é investigada para diferentes temperaturas de carga de água quente e volumes de armazenamento. Valores ótimos (valores que maximizam a fração solar anual do sistema) para altura do tanque de armazenamento e volume são calculadas para temperaturas de operação de 50°C a 80°C. A resposta do sistema para a taxa do volume do tanque de armazenamento e para a área do coletor é investigada. Nota-se mais a dependência da fração solar com a altura do tanque em caso de maiores volumes de reservatório e temperaturas de carga altas. Os resultados indicam a existência de um valor ótimo para o volume do tanque em uma dada altura e uma temperatura de carga. Em baixas temperaturas a fração solar aumenta rapidamente com o volume do tanque para um nível aproximadamente constante. Um valor ótimo da razão entre volume do tanque de armazenamento e da área do coletor é observado para altas temperaturas de carga.



Cardinale, Piccininni e Stefanizzi (2003) investigam o aquecimento de água quente através de um código de simulação. É considerado o consumo para uma família de quatro pessoas. A temperatura da demanda de água quente (53°C) é controlada por um aquecedor auxiliar por combustível convencional e uma válvula de controle. Um trocador de calor é inserido entre o coletor e o tanque armazenador. O fluido circula pela bomba ativada por painéis fotovoltaicos. A viabilidade econômica deste sistema foi avaliada com o método de economia de ciclo considerando três combustíveis tradicionais (óleo-gás, GLP e eletricidade). O estudo mostrou boa viabilidade econômica com a energia elétrica.

### **2.3 - Objetivos**

No presente trabalho propõe-se um modelo matemático para solução computacional, utilizando-se a técnica dos elementos finitos, a fim de se estudar o fenômeno da convecção natural de água em uma cavidade cilíndrica vertical fechada com condições determinadas e estabelecidas em suas paredes. Estabelece-se então os fundamentos para o projeto de um aquecedor de água coletor solar/armazenador integrados (*Integrated Collector/Storage Solar Water Heater – ICSSWH*). As análises são realizadas para escoamento laminar e abrangem a determinação dos comportamentos dos perfis de temperaturas e de velocidades, e, a partir destes, das temperaturas de mistura e dos tempos de carga. É estudada, em um segundo momento, a influência da utilização de uma casca cilíndrica concêntrica ao reservatório, de menor altura e menor diâmetro, a fim de se melhorar a estratificação.

## Capítulo 3 – Modelagem Matemática

### 3.1 – Modelo Físico

Neste trabalho é proposto um dispositivo integrado coletor-solar/armazenador-Térmico. O fluido de trabalho utilizado é a água. Considera-se um reservatório de geometria cilíndrica com as paredes superior e inferior perfeitamente isoladas e a parede lateral à uma temperatura fixa maior que a temperatura inicial do fluido. O desenvolvimento do escoamento no interior do tanque ocorre devido ao mecanismo de troca de calor por convecção natural, ou seja, a distribuição de temperaturas no fluido gera variações de densidades a qual proporciona a força de empuxo e conseqüentemente o movimento molecular ascendente. As correntes convectivas em direção à região superior do tanque estabelecem a circulação do fluido frio do topo para o fundo do armazenador.

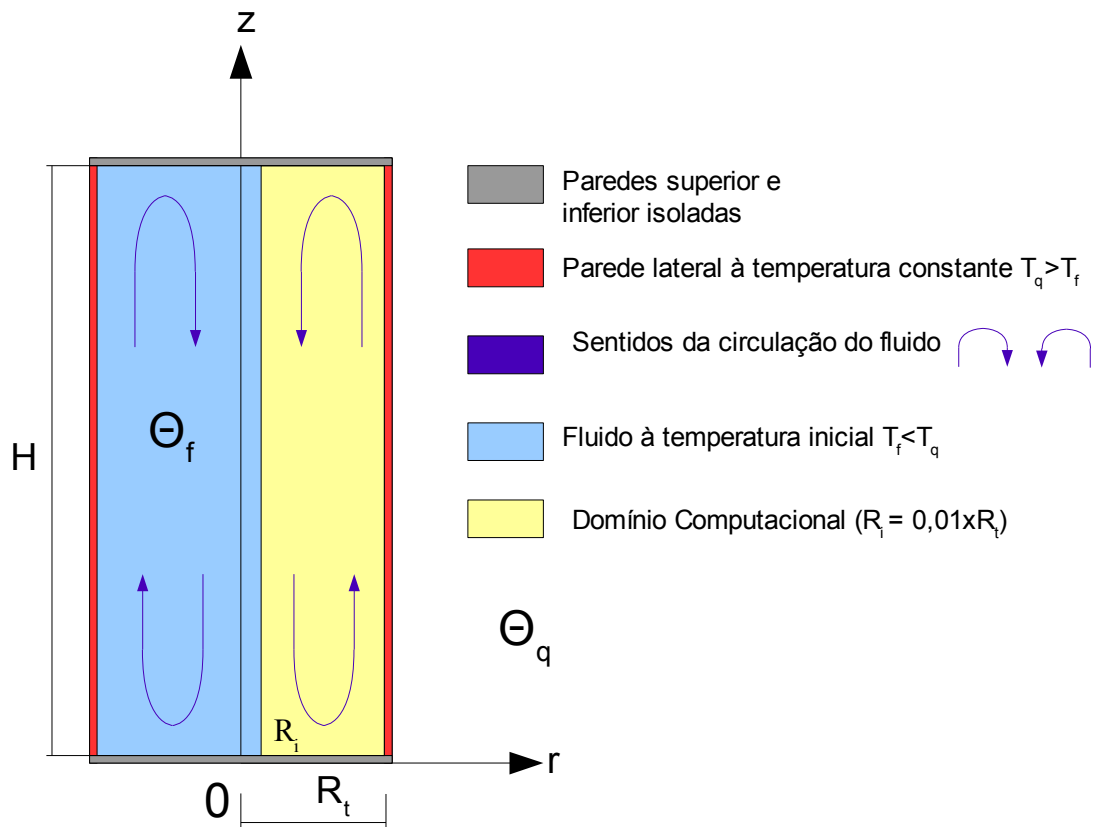
No processo de estocagem térmica por estratificação, o fluido no interior do reservatório distribui-se em três regiões de temperaturas distintas: uma região onde o fluido é quente (no topo), uma região fria (no fundo), e uma região intermediária, que separa as duas precedentes e está submetida a apreciável gradiente de temperatura.

A figura 3.1 representa o sistema integrado o coletor-solar/tanque-armazenador posicionado num sistema de eixos coordenados. A parede lateral absorve a radiação solar e a transfere para a água contida no interior do tanque iniciando o processo de estocagem térmica. O tanque é disposto com seu eixo axial na direção contrária a atuação gravitacional. Devido ao processo de convecção natural, o fluido aquecido na região lateral se desloca até a região superior do tanque e o fluido frio desta região para o fundo do armazenador.

Analisando o princípio da segunda lei da termodinâmica, conclui-se que a maior disponibilidade energética atingida por um sistema de armazenamento de energia integrado coletor-solar/tanque ocorre quando existem dois níveis distintos de temperaturas do fluido de trabalho no processo anteriormente descrito. Caso houvesse processo de mistura entre as massas de fluido quente e frio, a temperatura do fluido estocado teria um

valor médio abaixo da temperatura máxima atingida nas paredes.

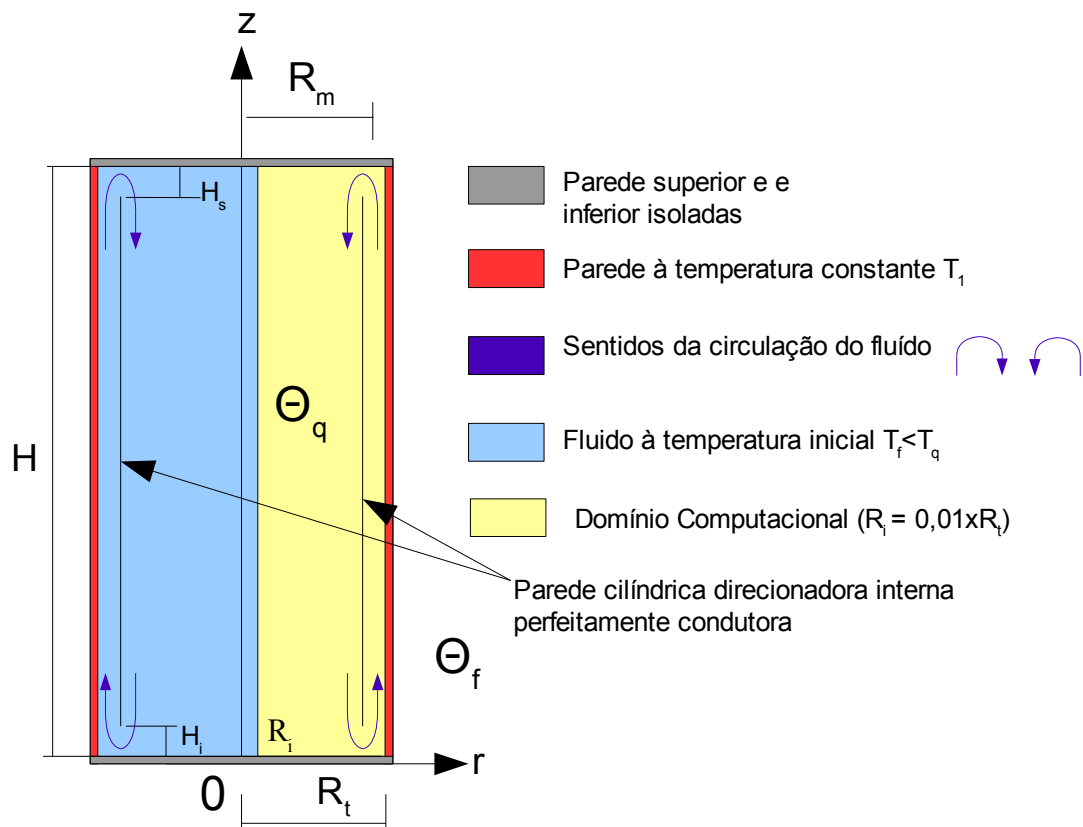
Sendo assim, este nível médio de temperatura atingido torna-se muitas vezes insuficiente para acionar uma máquina térmica, pois diminui o nível da disponibilidade de fornecimento de energia térmica. Portanto, considerando a necessidade de manutenção de níveis constantes de temperaturas nas fontes quente e fria e da obtenção, ao mesmo tempo, de um grande quantidade de energia térmica armazenada, é necessário utilizar o processo de estocagem por estratificação térmica de uma forma na qual seja prezada e otimizada a eficiência deste processo onde um líquido será mantido à temperaturas distintas sem que ocorra mistura.



*Figura 3.1. Representação esquemática da geometria do problema sem placa direcionadora e suas condições de contorno*

Segundo Padilha (1982), um dos fatores que instabilizam a estratificação, além das perdas externas, são as correntes convectivas que aparecem no interior do fluido de trabalho (recirculações) as quais aceleram o processo de degradação da estratificação. Pensando nisso, depois da primeira análise será estudada a influência de uma parede interna

cilíndrica (parede direcionadora), para direcionar o fluxo facilitando assim a estratificação térmica do fluido, conforme apresentado na figura 3.2. A parede direcionadora, considerada perfeitamente condutora térmica limita a espessura da difusão horizontal convectiva, ou seja, direciona o fluxo de moléculas aquecidas para o topo do tanque impedindo que as mesmas se afastem da parede quente; com isso a estratificação térmica será mais rapidamente estabelecida e as recirculações do líquido no centro amortecidas. Será representada no presente modelo como uma parede interna com altura menor que a do tanque com espessura nula e condutividade infinita disposta de forma que hajam espaçamentos de igual tamanho entre a base do tanque e a extremidade inferior desta parede e entre sua extremidade superior e o topo do tanque.



*Figura 3.2. Representação esquemática da geometria do problema com parede direcionadora e suas condições de contorno*

Pode-se enfatizar além disso o desenvolvimento transiente dos perfis de temperaturas (isotermas) e velocidades do fluido no interior do tanque armazenador. Com o aquecimento da parede lateral o tanque armazenador, anteriormente num estado

estratificado, tende termicamente para um estado homogêneo quando a temperatura da água se aproximar da temperatura da parede.

### 3.2 - Modelo Matemático

A solução do problema de convecção natural em qualquer cavidade nada mais é do que a solução das equações de Navier-Stokes e da energia.

Neste trabalho são feitas as seguintes considerações para o desenvolvimento do modelo matemático:

1. O escoamento é considerado incompressível, laminar, transiente e bidimensional;
2. As propriedades termofísicas do fluido de trabalho são assumidas constantes, exceto a densidade, cuja variação origina a força de empuxo;
3. É desprezada a dissipação viscosa da água e o termo de pressão na equação da energia.
4. As superfícies superior e inferior do tanque são consideradas perfeitamente isoladas.

Representa-se o modelo axissimétrico no sistema de coordenadas cilíndricas. As equações da continuidade (3.1), do movimento (3.2 e 3.3) e da energia (3.4), podem ser escritas da seguinte forma:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(ru)}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + v \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{-1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial(ru)}{\partial r} \right] + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] + g \beta \delta T \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial(v)}{\partial r} + v \frac{\partial(v)}{\partial z} = \frac{-1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right] + g \beta \delta T \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial r} + v \frac{\partial T}{\partial z} = \nu \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] \quad (3.4)$$

Definindo-se os parâmetros adimensionais na forma:

$$R = \frac{r}{H} ; R_e = \frac{r_e}{H} ; U = \frac{uH}{\alpha} ; V = \frac{vH}{\alpha} ; P = \frac{p - p_{ref}}{\rho} \left( \frac{H}{\alpha} \right)^2 ; \quad (3.5)$$

$$\theta = \frac{\Delta T}{T_q - T_f} ; Pr = \frac{\nu}{\alpha} ; Ra = \frac{g \beta \bar{\delta T} H^3}{\nu^2} Pr ; \tau = Fo = \frac{\alpha t}{H^2}$$

Aplicando-se no sistema de equações (3.1) a (3.4) se tem (lembrando-se que somente em z ocorre o empuxo):

$$\frac{1}{R} \frac{\partial(RU)}{\partial R} + \frac{\partial V}{\partial Z} = 0 \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + U \frac{\partial(U)}{\partial R} + V \frac{\partial(U)}{\partial Z} = -\frac{\partial P}{\partial R} + Pr \left[ \frac{\partial}{\partial R} \left( \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial(RU)}{\partial R} \right) + \frac{\partial^2 U}{\partial Z^2} \right] \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} + U \frac{\partial(V)}{\partial R} + V \frac{\partial(V)}{\partial Z} = \frac{\partial P}{\partial Z} + Pr \left[ \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial}{\partial R} \left( R \frac{\partial V}{\partial R} \right) + \frac{\partial^2 V}{\partial Z^2} \right] + Ra \cdot Pr \theta \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + u \frac{\partial \theta}{\partial R} + v \frac{\partial \theta}{\partial Z} = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left( R \frac{\partial \theta}{\partial R} \right) + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Z^2} \quad (3.9)$$

Onde os adimensionais Ra e Pr representam os números de Rayleigh e Prandtl, R e Z as coordenadas adimensionais, U e V as velocidades nas direções R e Z respectivamente, P a pressão adimensional e  $\theta$  a temperatura adimensional.

O número de Rayleigh fornece a razão entre as forças de empuxo e viscosa na camada limite fluidodinâmica. Assim, este parâmetro representa a intensidade da

convecção natural e determina o regime do escoamento (laminar ou turbulento).

A interpretação física do número de Prandtl é a razão entre as difusividades de momento e térmica. Este parâmetro fornece uma medida da efetividade dos transportes por difusão, de momento e energia no interior da camada limite fluidodinâmica e térmica, respectivamente.

Uma vez definidas as equações do modelo, é necessário definir o domínio, as condições de contorno e inicial. O domínio matemático do problema sem a parede direcionadora e com a parede direcionadora é definido da seguinte maneira, conforme figura 3.1:

- Fronteira vertical esquerda: segmento de reta formado entre pontos  $(R_i; 0)$  e  $(R_i; H)$ ;
- Fronteira horizontal superior: segmento de reta formado entre os pontos  $(R_i; H)$  e  $(R_t; H)$ ;
- Fronteira vertical direita: segmento de reta formado entre os pontos  $(R_t; 0)$  e  $(R_t; H)$  ;
- Fronteira horizontal inferior: segmento de reta formado entre os pontos  $(R_t; 0)$  e  $(R_i; 0)$ .

Sendo que na figura 3.2 tem-se ainda:

- Parede direcionadora: segmento de reta formado entre os pontos  $(R_m; H_i)$  e  $(R_m; H_s)$

O fato de se considerar o domínio iniciando de  $r = 0,01 \times R$  e não de zero decorre de fatores operacionais para inicializar o código computacional usado. Decidiu-se então desprezar os efeitos dessa pequena região visto que seu volume é dez mil vezes menor que do cilindro todo.

Considera-se o fluido inicialmente em repouso e a temperatura constante igual a do ambiente. Além disso, admite-se que no instante inicial as variáveis em estudo tem seus valores nulos. Em termos matemáticos isso pode ser escrito na forma dimensional da seguinte maneira:

$$t = 0: T=0; u=0; v=0; p=p_{ref}; \text{ para } \forall (r, z) \quad (3.10)$$

Utilizando as variáveis adimensionais definidas anteriormente, as

condições iniciais podem ser reescritas na sua forma adimensional, dada por:

$$\tau = 0: \theta = 0; U=0; V=0; P=0; \text{ para } \forall (R, Z) \quad (3.11)$$

Nas figuras 3.1 e 3.2, pode-se admitir que:

- As fronteiras rígidas superior e inferior (em  $z=0$  e  $z=H$ ) são consideradas adiabáticas, o que pode ser escrito matematicamente da seguinte forma:

$$\frac{\partial T}{\partial r} = 0, \text{ para } \forall (r, t), \text{ em } z = 0 \text{ e } z = H; \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} = 0, \text{ para } \forall (r, t), \text{ em } z = 0 \text{ e } z = H; \quad (3.13)$$

- O segmento de reta vertical posicionada em  $r = R_t$  é a superfície lateral do reservatório com a condição de contorno a seguinte temperatura imposta:

$$T = T_q \text{ para } \forall (z, t), \text{ em } r = R_t \quad (3.14)$$

- A fronteira posicionada na vertical em  $r = 0,01 \times R_t$  está muito próxima ao centro do tanque e é considerada o próprio eixo  $z$  a fim de que o modelo seja operacionalmente funcional. O erro desconsiderando essa região de  $r = 0$  para  $r = 0,01$  é considerado desprezível e se tem em tal fronteira uma condição de simetria caracterizada por velocidades radiais e axiais nulas. Assim se pode escrever:

$$u = 0, \text{ para } \forall (z, t), \text{ em } r = 0 \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial v}{\partial r} = 0, \text{ para } \forall (z, t), \text{ em } r = 0 \quad (3.16)$$

- Admite-se não ocorrer escorregamento nas fronteiras rígidas do tanque (parede



direcionadora, lateral, superior e inferior), ou seja, as velocidades nas direções horizontal e vertical são iguais a zero. Assim, as condições de contorno para as velocidades podem ser definidas da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} u=0, \text{ para } \forall (z, t) \text{ em } r=R_t, \text{ para } H_i \leq r \leq H-H_m \text{ em } r=R_m \text{ e } \forall (r, t), \text{ em } z=H \text{ e } z=0 \\ v=0 \end{aligned} \quad (3.17)$$

Utilizando as variáveis adimensionais citadas anteriormente, é possível reescrever as condições de contorno na forma adimensional da seguinte maneira:

➤ Nas fronteiras adiabáticas:

$$\frac{\partial \theta}{\partial R}=0, \text{ para } \forall (R, t), \text{ em } Z=0 \text{ e } Z=1; \quad (3.18)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial Z}=0, \text{ para } \forall (Z, t), \text{ em } R=0; \quad (3.19)$$

➤ Na fronteira vertical direita do domínio, a qual encontra-se sob temperatura imposta:

$$\Theta = \Theta_q = 1, \text{ para } \forall (Z, t), \text{ em } R = R_t \quad (3.20)$$

Com o uso de variáveis adimensionais os fenômenos convectivos podem ser descritos independentemente das dimensões do equipamento e valor das condições de contorno. Ademais a utilização de tratamento bidimensional em coordenadas cilíndricas suprime o elevado custo computacional decorrente da solução de problemas tridimensionais no sistema cartesiano.

### 3.3 - Método numérico

O método a ser utilizado é o de elementos finitos baseado em variáveis primitivas com solução acoplada e grade de igual ordem. Tal método é uma ramificação dos métodos integrais que se baseiam na aproximação por função da variável em um domínio determinado, considerando-se as condições de contorno iniciais. A discretização é realizada transformando-se equações diferenciais parciais em equações algébricas a serem resolvidas por iterações computacionais (DHATT & TOUZOT, 1984).

O procedimento a ser descrito permite que, a partir da equação de transporte em coordenadas cartesianas, se obtenha as equações equivalentes discretizadas em elementos finitos. Esta equação é a base para a solução do problema a ser formulado e fundamental para a compreensão de como foi desenvolvido este trabalho. A resolução será numericamente encontrada pelo método de elementos finitos o qual neste caso consiste na discretização das equações de Navier-Stokes usando o método de Galerkin para geometrias bidimensionais cilíndricas. Utilizando a formulação por resíduos ponderados obtém-se equações que pode ser subdivididas através da integração por partes resultando na forma fraca das equações reduzindo dessa forma sua ordem. Cada um dos termos resultantes são denominados por: termo transiente, termo convectivo, termo difusivo e termo fonte. São usadas então funções de interpolação em cada termo para elaboração das equações de transporte discretizadas. Após a utilização dos métodos descritos tais equações podem ser montadas em sua forma matricial:

Considerando a equação genérica que representa tanto a equação da quantidade de movimento em z quanto a equação da energia:

$$\frac{\partial \phi}{\partial \tau} + U \frac{\partial \phi}{\partial R} + v \frac{\partial \phi}{\partial Z} = \frac{K}{C} \left( \frac{1}{R} \frac{\partial \phi}{\partial R} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial R^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial Z^2} \right) - \frac{S}{C} \quad (3.21)$$

onde  $K$  e  $C$  dependem da natureza do problema.

Utilizando a formulação por resíduos ponderados do método dos elementos finitos obtém-se (na rotina computacional optou-se por multiplicar-se por  $R$  dos dois lados as equações 3.22 e 3.23 a fim de se eliminar a razão  $1/R$ , que seria um ponto de singularidade):

$$\int_{\Omega} \psi \left[ \frac{\partial \phi}{\partial \tau} + U \frac{\partial \phi}{\partial R} + V \frac{\partial \phi}{\partial Z} - \frac{K}{C} \left( \frac{1}{R} \frac{\partial \phi}{\partial R} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial R^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial Z^2} \right) + \frac{S}{C} \right] d\Omega = 0 \quad (3.22)$$

que dividindo-se em diversas integrais:

$$\int_{\Omega} \psi \frac{\partial \phi}{\partial \tau} d\Omega + \int_{\Omega} \left( \psi U \frac{\partial \phi}{\partial R} + \psi V \frac{\partial \phi}{\partial Z} \right) d\Omega = \int_{\Omega} \psi \frac{K}{C} \left( \frac{1}{R} \frac{\partial \phi}{\partial R} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial R^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial Z^2} \right) d\Omega - \int_{\Omega} \psi \frac{S}{C} d\Omega \quad (3.23)$$

Para detalhar o tratamento dado a cada uma das integrais, a expressão é subdividida, sendo que cada um dos termos receberá um tratamento independente. A subdivisão é feita a partir do primeiro termo da equação, passando cada um a ser denominado por: termo transiente, termo convectivo, termo difusivo (relacionado à viscosidade e à condução) e o termo fonte, respectivamente.

Ressalta-se que a equação da quantidade de movimento em r será a equação 3.21 com um termo a mais incluso segundo membro,  $-\phi/R^2$  (aceleração). Na rotina utilizada multiplica-se tal termo por R e por Pr (toda a equação é multiplicada por R a fim de se suprimir dificuldades operacionais, contudo se notou depois que para se extinguir a singularidade a multiplicação por  $R^2$  poderia ser a melhor opção).

**Tratamento do termo convectivo:** considerando-se a aproximação nodal para o campo de velocidades:  $U = N_k U_k$ , o termo convectivo pode ser expresso na forma:

$$\int_{\Omega} \psi U \frac{\partial \phi}{\partial R} d\Omega = \int_{\Omega} \psi N_k U_k \frac{\partial N_j \phi_j}{\partial R} d\Omega = \int_{\Omega} \psi N_k U_k \frac{\partial N_j}{\partial R} d\Omega \phi_j \quad (3.24)$$

Aplicando o método de Galerkin, onde o valor da função peso é igual à equação de interpolação, a expressão torna-se:

$$\int_{\Omega} \psi U \frac{\partial \phi}{\partial R} d\Omega = \int_{\Omega} N_i N_k U_k \frac{\partial N_j \phi_j}{\partial R} d\Omega = \int_{\Omega} N_i N_k U_k \frac{\partial N_j}{\partial R} d\Omega \phi_j \quad (3.25)$$

De maneira análoga, para o outro componente de velocidade do problema, obtém-se:

$$\int_{\Omega} \psi V \frac{\partial \phi}{\partial Z} d\Omega = \int_{\Omega} N_i N_k V_k \frac{\partial N_j}{\partial Z} d\Omega \phi_j \quad (3.26)$$

A solução desta integral resultará em uma matriz quadrada de dimensão igual ao número de nós do elemento discretizado, a qual será denominada de [C]. Assim:

$$[C] = \int_{\Omega} \left( N_k U_k N_i \frac{\partial N_j}{\partial R} + N_k V_k N_i \frac{\partial N_j}{\partial Z} \right) d\Omega \quad (3.27)$$

Deve-se ressaltar que a matriz [C] depende do perfil de velocidades e que, quando se busca a solução do próprio campo de velocidades, no caso da equação da quantidade de movimento, o processo torna-se iterativo.

**Tratamento do termo difusivo:** O estudo do termo difusivo é o mais difundido de todos quando se aplica o método dos elementos finitos para resolução da equação de transporte.

Como os termos resultantes envolvem derivadas de segunda ordem, trabalha-se com uma forma de redução da ordem da equação diferencial por meio de uma integração por partes, chamada “forma fraca” (*weak form*):

Conforme já visto o termo difusivo em r terá um termo acrescido  $-\phi/R^2$  e será considerado como termo fonte. A expressão geral do termo difusivo fica:

$$\int_{\Omega} \left( \psi \frac{1}{R} \frac{\partial \phi}{\partial R} + \psi \frac{\partial^2 \phi}{\partial R^2} + \psi \frac{\partial^2 \phi}{\partial Z^2} \right) d\Omega = \quad (3.28)$$

$$- \int_{\Omega} \left( \frac{\psi}{R} \frac{\partial \phi}{\partial R} + \frac{\partial \psi}{\partial R} \frac{\partial \phi}{\partial R} + \frac{\partial \psi}{\partial Z} \frac{\partial \phi}{\partial Z} \right) d\Omega + \int_{\Gamma} \psi \frac{\partial \phi}{\partial \vec{n}} d\Gamma$$

sendo  $\vec{n}$  o vetor normal à superfície do elemento. Esta formulação tem como complicador um termo de integral sobre uma superfície ( $\Gamma$ ). Este termo, no entanto, só precisa ser considerado nas fronteiras do domínio, uma vez que nos elementos internos sempre existe um  $\vec{n}$  de mesma direção e sentido contrário a de um elemento vizinho, fazendo com que o termo se anule.

Na superfície, estes valores de derivada normal são as condições de contorno naturais necessárias para a solução do problema. Quando os valores são especificados no contorno, basta desconsiderar toda a discretização e impor o valor de  $\phi$  para aquele ponto na matriz global. Desta forma cobre-se a maior parte das condições de contorno usuais e fica resolvido o problema da integral de superfície.

A integral sobre o domínio a ser resolvida, depois de utilizada a aproximação nodal, torna-se:

$$\int_{\Omega} \left( \frac{\partial \psi}{\partial R} \frac{\partial \phi}{\partial R} + \frac{\partial \psi}{\partial Z} \frac{\partial \phi}{\partial Z} + \frac{\psi}{R} \frac{\partial \phi}{\partial R} \right) d\Omega = \int_{\Omega} \left( \frac{\partial \psi}{\partial R} \frac{\partial N_j}{\partial R} + \frac{\partial \psi}{\partial Z} \frac{\partial N_j}{\partial Z} + \frac{\psi}{R} \frac{\partial N_j}{\partial R} \right) d\Omega \phi_j \quad (3.29)$$

Aplicando o método de Galerkin:

$$\int_{\Omega} \left( \frac{\partial \psi}{\partial R} \frac{\partial N_j \phi_j}{\partial R} + \frac{\partial \psi}{\partial Z} \frac{\partial N_j \phi_j}{\partial Z} + \frac{\psi}{R} \frac{\partial N_j \phi_j}{\partial R} \right) d\Omega = \int_{\Omega} \left( \frac{\partial N_i}{\partial R} \frac{\partial N_j}{\partial R} + \frac{\partial N_i}{\partial Z} \frac{\partial N_j}{\partial Z} + \frac{N_i}{N_i R_i} \frac{\partial N_j}{\partial r} \right) d\Omega \phi_i \quad (3.30)$$

Assim, o termo difusivo pode ser agrupado numa matriz  $K$ , onde, com a anteriormente referida multiplicação por  $R$  se torna:

$$[K] = \int_{\Omega} \left( N_i R_i \frac{\partial N_i}{\partial R} \frac{\partial N_j}{\partial R} + N_i R_i \frac{\partial N_i}{\partial Z} \frac{\partial N_j}{\partial Z} + N_i \frac{\partial N_j}{\partial R} \right) d\Omega \phi_i \quad (3.31)$$

**Tratamento do termo transiente:** este é um termo que sofre um tratamento diferenciado dos demais e diversas hipóteses podem ser adotadas. A utilização da matriz massa (ou matriz capacidade térmica) concentrada nos nós é amplamente reportado na literatura e será utilizado neste trabalho. Assim, a formulação para o termo transiente torna-se:

$$\int_{\Omega} \psi \frac{\partial \phi}{\partial t} d\Omega = \int_{\Omega} \psi d\Omega \frac{\phi_j^{m+1} - \phi_j^m}{\Delta t} \quad (3.32)$$

utilizando a aproximação sem considerar a variação da temperatura entre os nós pela função de interpolação. Este tipo de aproximação é comumente utilizada em diferenças finitas e o valor  $m$  indica avaliação em um tempo  $t$  e  $m+1$  em um tempo  $t+\Delta t$ .

Considerando a função peso de acordo com Galerkin:

$$\int_{\Omega} \psi \frac{\partial \phi}{\partial t} d\Omega = \int_{\Omega} N_i d\Omega \frac{\phi_j^{m+1} - \phi_j^m}{\Delta t} \quad (3.33)$$

e, deste modo, a matriz massa, que é uma matriz diagonal, passa a ser expressa por:

$$[M] = \int_{\Omega} N_i d\Omega \quad (3.34)$$

**Tratamento do termo fonte:** o termo fonte pode variar ao longo do domínio, portanto será admitido o caso onde este termo é diferente de acordo com a posição  $S(r,z)$ . Neste caso, a forma mais adequada é admitir uma variação se  $S$  de acordo com as equações de interpolação e usar a aproximação nodal para o mesmo:

$$\int_{\Omega} \psi S d\Omega = \int_{\Omega} \psi N_j S_j d\Omega = \int_{\Omega} \psi N_j d\Omega S_j \quad (3.35)$$

Aplicando o método de Galerkin:

$$\int_{\Omega} \psi S d\Omega = \int_{\Omega} N_i N_j d\Omega S_j \quad (3.36)$$

Neste caso, o termo fonte é independente de  $\phi$  e pode ser incluído diretamente no segundo termo do sistema de equações. Para tanto define-se um vetor  $\{S\}$  por:

$$S = \int_{\Omega} N_i N_j d\Omega S_j \quad (3.37)$$

Um tratamento alternativo em que não se considera a variação do termo fonte dada pelas próprias funções de interpolação também é largamente utilizado, e neste caso, a expressão é dada por:

$$\{S\} = [M] \vec{S} \quad (3.38)$$

sendo o valor de  $[M]$  dado pela expressão 3.34 e  $\vec{S}$  é o valor do termo fonte, avaliado em cada ponto.

Definidas todas as matrizes, é possível construir o sistema base para a solução do problema, ou seja, a matriz global, usando os critérios do método dos elementos finitos. Assim pode-se montar uma equação geral de transporte na forma:

$$[M] \frac{\phi_j^{m+1} - \phi_j^m}{\Delta t} + [C] \phi_j^{m+1} + \frac{K}{C} [K] \phi_j^{m+1} + \frac{1}{C} \{S\} = \{F\} \quad (3.39)$$

a partir da qual, depois de obtidas as matrizes globais, o problema está pronto para ser solucionado.

### 3.4 – Aplicação da formulação geral às equações do problema

O procedimento geral de solução para a equação de transporte obtido no item anterior pode ser aplicado para as equações do problema, no caso a equação da energia e a equação da quantidade de movimento. Para a equação da quantidade de movimento existe uma técnica especial de solução a ser descrita posteriormente.

#### 3.4.1 – Equação da Conservação da Energia

A equação da energia em sua forma adimensional (expressão 3.9) pode ser discretizada diretamente utilizando os procedimentos descritos anteriormente:

$$\frac{1}{\Delta\tau}[M]\{\theta\}^{m+1} + ([C] + [K])\{\theta\}^m = \frac{1}{\Delta\tau}[M]\{\theta\}^m + \Gamma \quad (3.40)$$

onde as matrizes [C], [K] e [M] são obtidas das expressões 3.27, 3.31 e 3.34. As integrações para obtenção destas matrizes devem ser realizadas com as coordenadas no domínio adimensional.

Rearranjando a equação, tem-se:

$$\left( \frac{1}{\Delta\tau}[M] + [C] + [K] \right) \{\theta\}^{m+1} = \frac{1}{\Delta\tau}[M]\{\theta\}^m + \Gamma \quad (3.41)$$

Para cada intervalo de tempo, a solução da equação acima deve ser obtida por várias iterações, até que o campo de temperaturas atinja uma oscilação menor que uma dada tolerância.

#### 3.4.2 – Campo de velocidade e pressão com interpolação de mesma ordem

Neste trabalho será utilizado o modelo de igual ordem com malhas coincidentes para pressão e velocidade para solução do problema do escoamento no interior

do tanque armazenador, seguindo procedimento proposto por Rice e Schnipke (1986).

A discretização do campo de velocidades é baseada nas considerações feitas para convecção e com a inclusão do termo de pressão. Assim, as equações da quantidade de movimento nas direções r e z, na forma adimensional apresentadas nas equações 3.7 e 3.8 serão discretizadas.

É possível notar que as equações da quantidade de movimento em r e z são idênticas à equação geral de transporte discutida no item anterior, exceto pela presença do termo de pressão que, no entanto, pode ser tratado como um termo fonte. Nesse caso  $C=\rho$ ,  $K=\mu$  e ainda  $S=S_R-\partial p/\partial R$  para r e  $S=S_Z-\partial p/\partial Z$ , de acordo com a direção considerada.

Considerando a equação geral do problema de transporte (3.39) nas equações da quantidade de movimento adimensionais (expressões 3.7 e 3.8), tem-se, de maneira análoga:

- Direção R

$$\left(\frac{1}{\Delta\tau}[M]+[C]+Pr[K]\right)\{U\}^{m+1}=\frac{1}{\Delta\tau}[M]\{U^m\}+\{S_R\}-\frac{\partial P}{\partial R}+Pr\int_{\Gamma}N_i\frac{\partial U}{\partial n}d\Gamma \quad (3.42)$$

- Direção Z

$$\left(\frac{1}{\Delta\tau}[M]+[C]+Pr[K]\right)\{V\}^{m+1}=\frac{1}{\Delta\tau}[M]\{V^m\}+\{S_Z\}-\frac{\partial P}{\partial Z}+Pr\int_{\Gamma}N_i\frac{\partial V}{\partial n}d\Gamma \quad (3.43)$$

onde os valores de [C], [K], [M] e {S} são dados, respectivamente, pelas expressões 3.27, 3.31, 3.34 e 3.38.

Depois de efetuadas as operações com as matrizes obtém-se um sistema de equações na forma:

$$[\overline{A}_R]\{U\}=\{\overline{B}_R\} \quad \text{e} \quad [\overline{A}_Z]\{V\}=\{\overline{B}_Z\} \quad (3.44)$$

sendo que as matrizes  $[\overline{A}_R]$  e  $[\overline{A}_Z]$  não são idênticas quando em coordenadas cilíndricas.



Este procedimento deve ser observado para a discretização futura da equação da continuidade, no entanto, neste trabalho optou-se por utilizar uma melhor aproximação do campo de pressões. A expressão que aparece na equação geral pode ser aproximada na forma:

$$\int_{\Omega} \psi \frac{\partial P}{\partial t} d\Omega = \int_{\Omega} \psi \frac{\partial N_j}{\partial t} d\Omega p_j = \int_{\Omega} N_i \frac{\partial N_j}{\partial t} d\Omega p_j \quad (3.45)$$

utilizada a aproximação de Galerkin e sendo  $t$  uma direção genérica.

Desta forma, uma nova matriz pode ser definida como:

$$[P_t] = \int_{\Omega} N_i \frac{\partial N_j}{\partial t} d\Omega \quad (3.46)$$

A expressão geral para a equação da quantidade de movimento nas duas direções passa a ser representada então em sua forma matricial por:

- Direção R

$$\left( \frac{1}{\Delta\tau} [M] + [C] + Pr[K] \right) \{U\}^{m+1} = \Gamma_R + \frac{1}{\Delta\tau} [M] \{U\}^m + \{S_R\} - [P_R] \{P\}^m \quad (3.47)$$

- Direção Z

$$\left( \frac{1}{\Delta\tau} [M] + [C] + Pr[K] \right) \{V\}^{m+1} = \Gamma_Z + \frac{1}{\Delta\tau} [M] \{V\}^m + \{S_Z\} - [P_Z] \{P\}^m + RaPr \{\theta\} \quad (3.48)$$

Assim, para a discretização das equações da quantidade de movimento é necessário considerar uma outra equação a ser resolvida: a equação da continuidade. Utilizando o método dos resíduos ponderados esta equação torna-se:

$$\int_{\Omega} \psi \left( \frac{\partial(RU)}{\partial R} + \frac{\partial V}{\partial Z} \right) d\Omega = \int_{\Omega} \psi \left[ U + R \left( \frac{\partial U}{\partial R} + \frac{\partial V}{\partial Z} \right) \right] d\Omega = 0 \quad (3.49)$$

que na sua forma fraca torna-se:

$$\int_{\Omega} \left( \psi U - \frac{\partial \psi}{\partial R} R U - \frac{\partial \psi}{\partial Z} R V \right) d\Omega = \int_{\Gamma} \psi U_n d\Gamma \quad (3.50)$$

Lembrando que o termo de superfície só é considerado nas fronteiras do domínio.

### 3.4.3 – Relação entre velocidade e pressão

Como foi visto, as equações discretizadas estabelecem uma relação entre o campo de velocidades e o gradiente de pressões. Tomando-se a expressão 3.44 e dividindo as matrizes de carga  $\{\overline{B}_R\}$  e  $\{\overline{B}_Z\}$ , obtém-se:

$$\{B_Z\} = -[M] \frac{\partial \vec{P}}{\partial Z} + \{S\} = -b_i \frac{\partial \vec{P}}{\partial Z} + s_i^{P,Z} \quad (3.51)$$

onde o primeiro termo representa a parte da carga indicada pela pressão e o segundo a contribuição de parcela do termo transiente, termos de superfície e ainda o termo fonte.

Na forma matricial pode se escrever as equações da quantidade de movimento da seguinte forma:

$$a_{i,i} U_i = - \sum a_{i,j} U_j - b_i \frac{\partial P}{\partial R} + s_i^{P,R} \quad (3.52)$$

$$a_{i,i} V_i = - \sum a_{i,j} V_j - b_i \frac{\partial P}{\partial Z} + s_i^{P,Z} \quad (3.53)$$

Assim, pode-se definir novas variáveis da seguinte forma:

$$\hat{U}_i = - \frac{\sum_{j \neq i} a_{i,j} U_j}{a_{i,i}}; \quad \hat{V}_i = - \frac{\sum_{j \neq i} a_{i,j} V_j}{a_{i,i}}; \quad K_{p,i} = \frac{b_i}{a_{i,i}}; \quad S_i^{p,Z} = \frac{s_i^{p,Z}}{a_{i,i}}; \quad (3.54)$$

Portanto, a equação da quantidade de movimento pode ser reescrita na forma:

$$U_i = \hat{U}_i + S_i^{p,R} - K_{p,i} \frac{\partial P}{\partial R} \quad (3.55)$$

$$V_i = \hat{V}_i + S_i^{p,Z} - K_{p,i} \frac{\partial P}{\partial Z} \quad (3.56)$$

Os valores de  $U$  e  $V$  podem ser expressos através das funções de interpolação:

$$U = N_j U_j = N_j \left( \hat{U}_j + S_i^{p,R} - K_{p,j} \frac{\partial P}{\partial R} \right) \quad \text{e} \quad V = N_j V_j = N_j \left( \hat{V}_j + S_i^{p,Z} - K_{p,j} \frac{\partial P}{\partial Z} \right) \quad (3.57)$$

Substituindo estas expressões na forma fraca da equação da continuidade (equação 3.50) e considerando a formulação de Galerkin, obtém-se:

$$\int_{\Omega} \left[ \frac{\partial N_i}{\partial R} N_j \left( \hat{U}_j + S_i^{p,R} - K_{p,j} \frac{\partial P}{\partial R} \right) + \frac{\partial N_i}{\partial Z} N_j \left( \hat{V}_j + S_i^{p,Z} - K_{p,j} \frac{\partial P}{\partial Z} \right) \right] d\Omega = \int_{\Gamma} N_i U_n d\Gamma \quad (3.58)$$

Lembrando ainda que a pressão dentro do elemento pode ser expressa através das funções de interpolação:

$$P = N_i(R, Z) P_i \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial P}{\partial R} = \frac{\partial N_i(R, Z)}{\partial R} P_i \\ \frac{\partial P}{\partial Z} = \frac{\partial N_i(R, Z)}{\partial Z} P_i \end{array} \right\} \quad (3.59)$$

Substituindo estes resultados, desprezando o resíduo e rearranjando a expressão a equação da continuidade, obtém-se:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left( \frac{\partial N_i}{\partial R} N_j K_{p,j} \frac{\partial N_k}{\partial R} P_k + \frac{\partial N_i}{\partial Z} N_j K_{p,j} \frac{\partial N_k}{\partial Z} P_k \right) d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \left( \frac{\partial N_i}{\partial R} N_j (\hat{U}_j + S_j^{p,R}) - \frac{\partial N_i}{\partial Z} N_j (\hat{V}_j + S_j^{p,Z}) \right) d\Omega - \int_{\Gamma} N_i U_n d\Gamma \end{aligned} \quad (3.60)$$

que é a expressão genérica a ser resolvida.

Deve-se ressaltar alguns pontos que permitem rearranjar a expressão 3.60, ou seja:

- A multiplicação de matrizes é comutativa e regras devem ser estabelecidas para a mudança de termos;
- A multiplicação é, no entanto associativa, o que permite que seja efetuado este tipo de operação;
- É possível notar que o produto  $N_j K_{p,j}$  resulta em um escalar. Isto permite a alteração da sua posição para uma outra mais conveniente, uma vez que a multiplicação de matriz por escalar é comutativa.

Considerando estas observações, associadas ao fato que os vetores  $P_i$  e  $K_{p,j}$  são valores nodais e, portanto, constantes podendo ser retirados da integral.

Para reduzir o problema a um sistema de equações na forma:

$$[\overline{A}_p]\{P\} = \{B_p\} \quad (3.61)$$

tem-se que os termos seriam dados por:

$$[\overline{A}_p] = \int_{\Omega} N_i R_l \left( \frac{\partial N_i}{\partial R} \frac{\partial N_k}{\partial R} + \frac{\partial N_i}{\partial Z} \frac{\partial N_k}{\partial Z} - N_i \frac{\partial N_k}{\partial R} \right) N_j K_{p,j} d\Omega \quad (3.62)$$

$$\begin{aligned} \{B_p\} = & \int_{\Omega} N_i R_l \left( \frac{\partial N_i}{\partial R} N_j (\hat{U}_j + S_j^{p,r}) \right) d\Omega - \\ & \frac{\partial N_i}{\partial Z} N_j (\hat{V}_j + S_j^{p,z}) - N_i N_j (\hat{U}_j + S_j^{p,r}) \Big) d\Omega - \int_{\Gamma} N_i U_n d\Gamma \end{aligned} \quad (3.63)$$

sendo que, considerando a hipótese das forças atuando apenas na direção Z, os termos de carga para cada direção seriam dados por:

$$\{B_{(p,R)}\} = -[M] \frac{\partial \vec{P}}{\partial R} + \frac{1}{\Delta \tau} [M] \{U\}^m = -b_i \frac{\partial \vec{P}}{\partial R} + s_i^{p,R} \quad (3.64)$$

$$\{B_{(p,Z)}\} = -[M] \frac{\partial \vec{P}}{\partial Z} + \left( \frac{1}{\Delta \tau} [M] \{V\}^m + RaPr \theta \right) = -b_i \frac{\partial \vec{P}}{\partial Z} + s_i^{p,Z} \quad (3.65)$$

sendo o valor total da carga  $\{\overline{B}_p\} = \{B_{(p,R)}\} + \{B_{(p,Z)}\} + \text{termos de superfície}$ .

Obtido o campo de pressões pode-se corrigir o valor das velocidades antes de se calcular os novos coeficientes. Isto é feito da seguinte forma:

$$U_i = \hat{U}_i + S_i^{p,R} - \frac{1}{a_{i,i}} \int_{\Omega} \psi \frac{\partial P}{\partial R} d\Omega \quad (3.66)$$

$$V_i = \hat{V}_i + S_i^{p,Z} - \frac{1}{a_{i,i}} \int_{\Omega} \psi \frac{\partial P}{\partial Z} d\Omega \quad (3.67)$$

ou utilizando a interpolação do campo de pressões e a aproximação de Galerkin, da mesma forma utilizada na equação da quantidade de movimento:

$$U_i = \hat{U}_i + S_i^{p,R} - \frac{1}{a_{i,i}} [P_R] \frac{P_{i,j}}{a_{i,i}} \quad (3.68)$$

$$V_i = \hat{V}_i + S_i^{p,Z} - \frac{1}{a_{i,i}} [P_Z] \frac{P_{i,j}}{a_{i,i}} \quad (3.69)$$

### 3.5 - Considerações complementares

#### 3.5.1 – Inclusão dos efeitos de convecção natural

O efeito de convecção natural depende da solução da equação de energia, uma vez que os efeitos da gravidade dependem da diferença de densidades que, por sua vez, são diretamente dependentes da temperatura. Assim, a primeira etapa consiste em solucionar a equação da energia. Resolvido o problema, obtém-se o campo de temperaturas que será usado para obter as forças de campo, as quais serão incluídas na equação do movimento.

A inclusão das forças de campo é feita na forma de um termo fonte, como já foi mostrado anteriormente. Estas forças são dependentes unicamente do campo de temperaturas e, assim sendo, elas implicarão numa alteração do termo de carga das equações da quantidade de movimento ( $b_i$ ). Desta forma, o procedimento geral de solução do problema de movimento do fluido não sofre nenhuma alteração significativa com esta inclusão.

### 3.5.2 – Definição do número de Nusselt

O número de Nusselt, segundo sua própria definição, representa a intensidade do gradiente de temperaturas sobre a superfície. Considerando a condição de balanço no fluido na superfície quente do problema como:

$$-k_f \frac{dT}{dn} = h(T_h - T_c) = h \overline{\delta T} \quad (3.70)$$

onde:

$n$ : coordenada na direção normal à superfície

$\delta T$  : diferença entre a temperatura da parede e a temperatura do meio

Aplicando-se as variáveis adimensionais definidas anteriormente, é possível mostrar que:

$$Nu = \frac{hH}{k_f} = - \frac{d\theta}{dn^*} \quad (3.71)$$

sendo  $n^*$  o valor adimensional de  $n$ .

Desta forma, o número de Nusselt pode ser calculado diretamente da derivada do perfil de temperaturas na direção normal à superfície.

### 3.5.3 – Definição da temperatura de mistura

A temperatura de mistura é um parâmetro que indica o nível da quantidade de energia armazenada pelo fluido no interior do tanque.

Para o cálculo deste parâmetro, utilizou-se a expressão similar à utilizada por Yee e Lai (2001), escrita na forma dimensional como:

$$T_{mix} = \frac{1}{V_e} \int_{V_e} T dV_e \quad (3.72)$$

Utilizando os adimensionais propostos anteriormente e após posterior manipulação algébrica, obtém-se a expressão para a temperatura de mistura na forma adimensional, dada por:

$$\theta_{mix} = \frac{1}{\pi(R_t^2 - R_i^2)} \int_{R_i}^{R_t} \int_0^1 \theta \cdot 2\pi R dZ dR \quad (3.73)$$

onde  $a_r$  é a área do domínio computacional representado na figura 3.1.

### 3.6 – Procedimento geral de solução

O procedimento de solução para o problema de simulação do comportamento da água no reservatório é iterativo e resolve o sistema de equações através de um acoplamento. Este fato apresenta grande vantagem em relação ao método direto: a minimização do tamanho da matriz a ser armazenada. O procedimento de solução é baseado no SIMPLE, proposto por Patankar (1980). As etapas de solução do modelo estão representadas na figura 3.3:

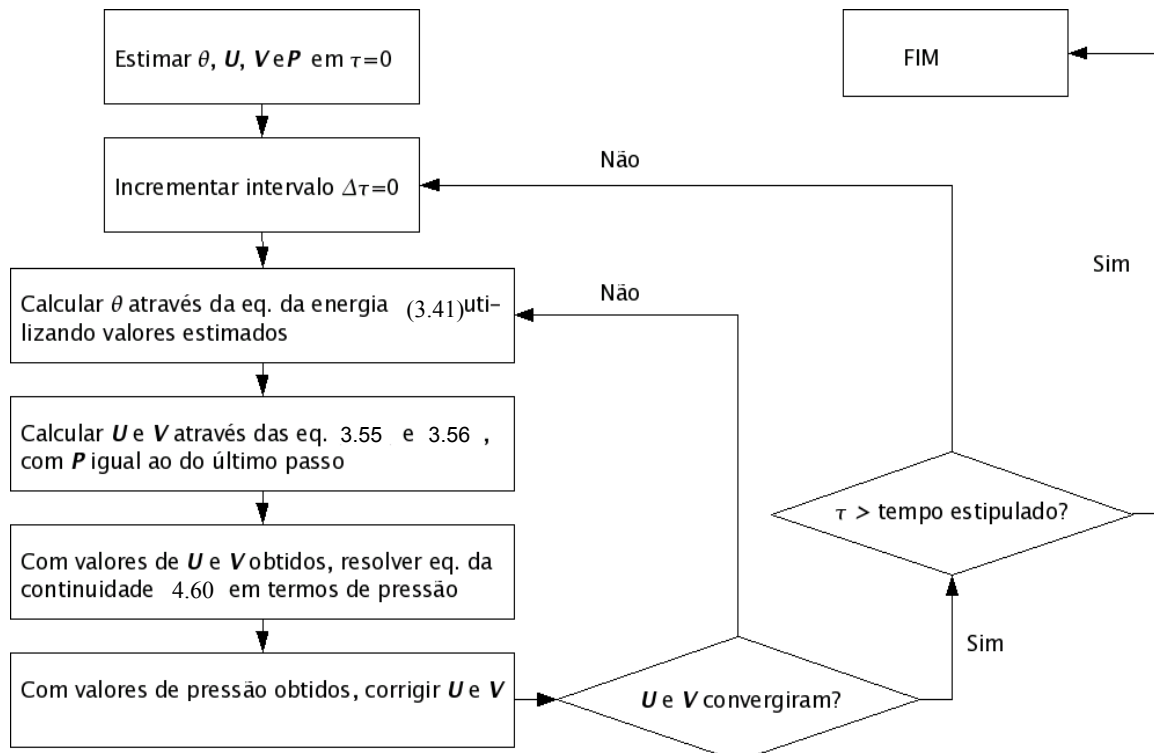


Figura 4.3: Diagrama de blocos representando procedimento de solução do modelo

O problema foi resolvido utilizando a geração de malha por mapeamento transfinito, proposto por Albert e O'Neil (1986) o qual gera malhas genéricas por projetores bilineares. Este procedimento pode ser agrupado através do uso de super-elementos dando origem a um flexível sistema de pré-processamento e geração de malha em superfícies complexas.

O método dos elementos finitos se aplicará às fórmulas altamente não lineares de Navier-Stokes para resolver problemas puramente difusivos de transferência de calor. Através de malhas não estruturadas o método dos elementos finitos permite que problemas de geometrias complexas possam ser resolvidos. Apesar do método não ter tido penetração forte na área de fluidos por muito tempo, porque se acreditava que a equação diferencial a ser resolvida necessitava de um princípio variacional para que o método pudesse ser aplicado. Como a equação de Navier-Stokes não tem esta propriedade a aplicação do MEF em fluidos foi retardada ou seja, não havia ferramentas para se tratar os termos convectivos presentes nas equações de movimento no método dos elementos finitos.

Nas últimas décadas o método de elementos finitos passou a empregar outras funções de interpolação para permitir o tratamento adequado dos termos convectivos não-lineares. As funções do tipo Petrov-Galerkin, que nada mais são do que a ponderação entre os efeitos difusivos e convectivos, semelhantes aos esquemas híbridos empregados em volumes finitos, possibilitaram um expressivo avanço desse método na área de escoamento de fluidos. Recentes formulações, onde estas funções são desenvolvidas ao longo da linha de corrente, também equivalente a esquemas usados em volumes finitos, permitiram que o método dos elementos finitos passasse, também, a tratar de fluidos minimizando os efeitos de difusão numérica possibilitando dessa forma, a resolução de problemas altamente convectivos, inclusive ondas de choque em geometrias arbitrárias, mostrando que existe entre eles uma forte semelhança em termos de generalidade. Todos os métodos numéricos são derivados do método dos resíduos ponderados, empregando-se diferentes funções peso, logo nenhum método é superior ao outro, visto que eles são derivados do mesmo princípio e diferem apenas na forma de minimização escolhida.

O procedimento utiliza a aproximação de Boussinesq que considera os efeitos de empuxo no termo fonte, em função da temperatura, enquanto a massa específica



é mantida constante em todos os outros termos das equações diferenciais.

## Capítulo 4. Análise de resultados

Todos os resultados são apresentados em cinco etapas:

1. Validação do modelo matemático.
2. Teste de malha sem parede direcionadora.
3. Análise transiente sem parede direcionadora com simulação de cinco razões de aspectos (1; 3; 3,5; 4 e 5) para a geometria proposta no número de Rayleigh  $5 \times 10^8$ .
4. Teste de malha com parede direcionadora.
5. Análise transiente com parede direcionadora com simulação de duas razões de aspectos (três e quatro) para números de Rayleigh  $5 \times 10^8$  e parede direcionadora posicionada a 70% e 90% do raio para as mesmas razões de aspectos.

O fluido utilizado é a água, cujas propriedades à temperatura média escolhida (320 K) se encontram na tabela 4.1:

*Tabela 4.1: Propriedades termofísicas da água a 320 K. Incropera e Dewitt, 1998.*

Densidade ( $\rho$ )	989,1 [kg/m <sup>3</sup> ]
Condutividade Térmica (k)	$640 \times 10^{-3}$ [W/m.K]
Calor Específico ( $C_p$ )	4180 [J/kg.K]
Coefficiente de Expansão Térmica	$436,7 \times 10^{-6}$ [K <sup>-1</sup> ]
Viscosidade Dinâmica	$577 \times 10^{-6}$ [N.s/m <sup>2</sup> ]
Número de Prandtl	3,5

#### 4.1. Validação do modelo matemático

A validação é realizada primeiramente com o modelo de Davis (1993) e Ismail e Scalon (2000) nos quais uma cavidade quadrada, adiabática em sua base e topo, tem a face esquerda à uma temperatura maior que a da face direita conforme a figura 4.1.

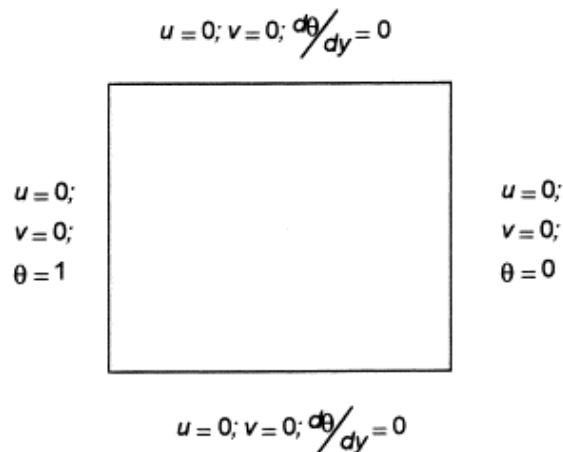


Figura 4.1. Geometria do modelo proposto por Ismail e Scalon (2000)

A título de validação dos resultados com os obtidos pelos referidos autores considerar-se-á uma geometria anular, com seção quadrada no plano r-z como se vê na figura 4.2.

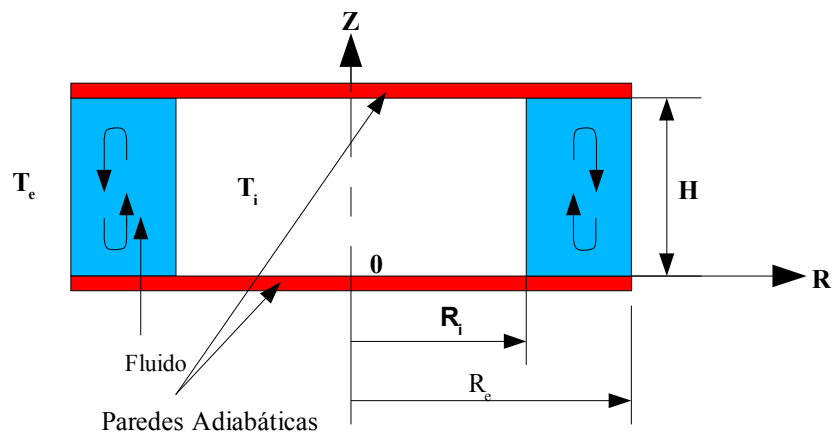


Figura 4.2. Cavidade anular proposta para validação do modelo matemático

O objetivo do teste é aumentar o raio interno ( $R_i$ ) e externo ( $R_e$ ) sem modificar a seção mencionada. Desta forma a influência de efeitos radiais se torna pequena. Na simulação o raio externo será 1,01 vezes o raio interno, ou seja, a seção estará distante do centro. Além disto considera-se a parede externa à uma temperatura adimensional nula ( $\Theta_e$ ) e a parede interna à temperatura adimensional unitária ( $\Theta_i$ ). As paredes superior e inferior são adiabáticas e as paredes internas e externas rígidas e perfeitamente condutivas. Nessas condições pode-se tratar o problema como uma cavidade de seção quadrada desprezando-se os efeitos de área ou seja, a área da parede externa aproximadamente igual à da parede interna.

Admitindo-se que não há escorregamento nas fronteiras rígidas do tanque ou seja, as velocidades nas direções radial e axial são zero. As condições de contorno são reformuladas na parede interna (fronteira vertical em  $R_i$ ) que agora tem temperatura constante imposta  $T_i$  com  $T_i > T_e$ . As novas condições tornam-se:

- Extremidades rígidas adiabáticas:

$$U=V=0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial Z}=0 \quad , \text{ em } Z=H \text{ e } Z=0 \text{ para } R_i \leq R \leq R_e \quad (4.1)$$

- Superfícies laterais rígidas sob temperatura imposta:

$$U=V=0, \quad \theta=1 \quad , \text{ em } R=R_i, \text{ para } 0 \leq Z \leq H \quad (4.2)$$

$$U=V=0, \quad \theta=0 \quad , \text{ para } R=R_e, \text{ para } 0 \leq Z \leq H \quad (4.3)$$

Na figura 4.3 (a) e 4.3 (b) são apresentados respectivamente os perfis de velocidades e temperaturas para razão de aspecto 1,0 e para razão de raios 1,01, ou seja, para as condições similares à cavidade retangular considerando número de Rayleigh  $1 \times 10^5$ . Na figura 4.3 (c) e 4.3 (d) são apresentados os perfis de velocidades e temperaturas do modelo para cavidade retangular obtido por Ismail e Scalón (2000) no mesmo número de Rayleigh, nas mesmas condições de contorno e idênticas propriedades do fluido, constatando-se semelhança.

Observa-se também que o comportamento do fluido mostra que existe proporcionalidade entre as superfícies aquecida e resfriada e, como as mesmas são praticamente iguais, existe simetria nos perfis de temperaturas e velocidades.

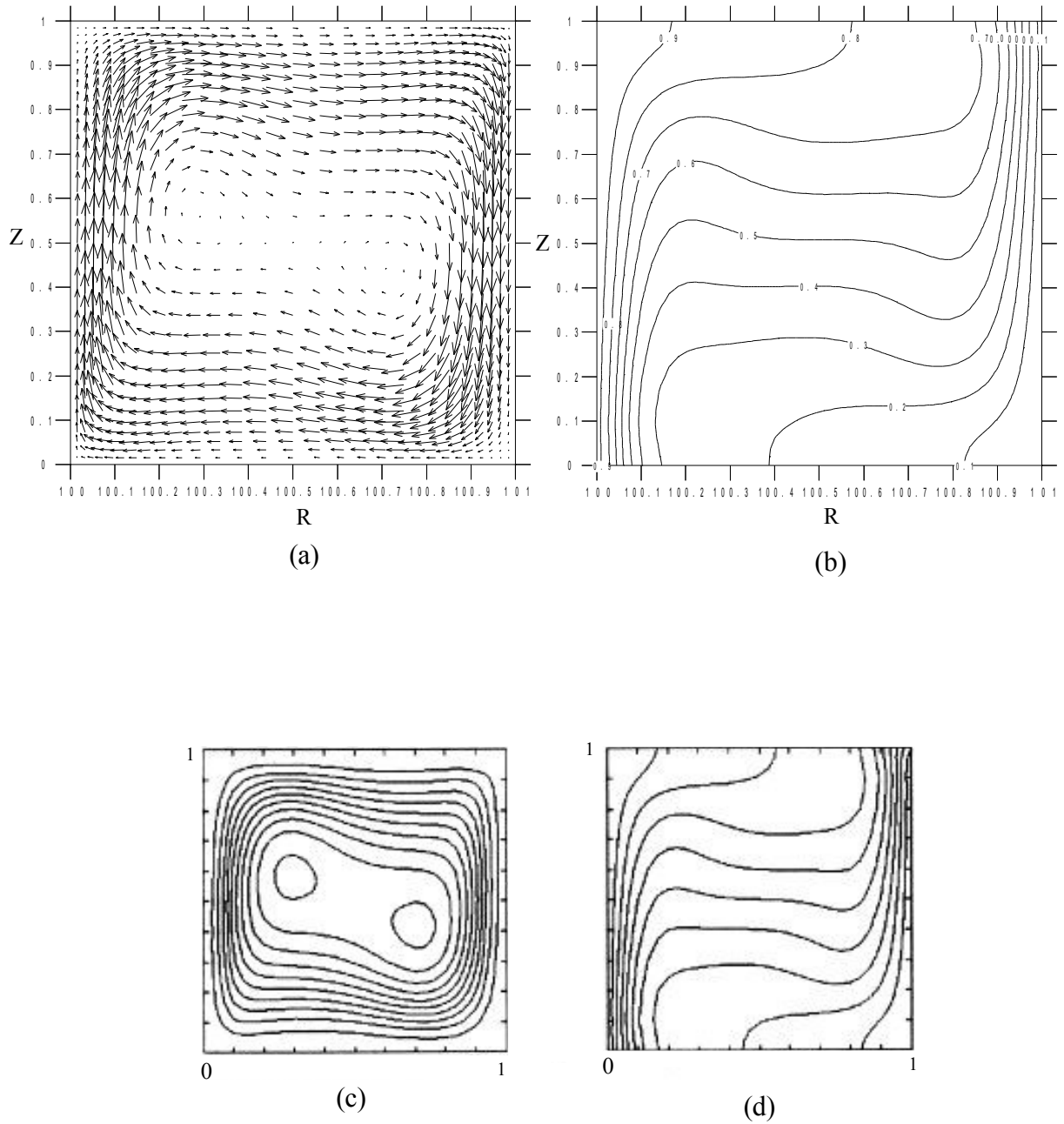
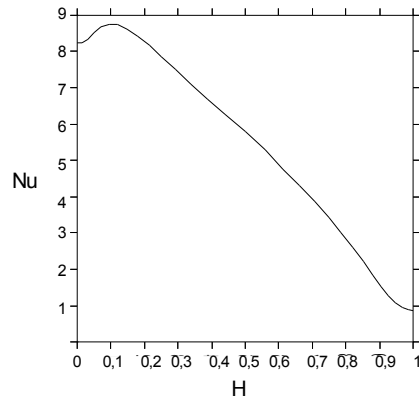


Figura 4.3. Perfis de velocidades (a) e temperaturas (b) obtidos para cavidade anular e perfis de velocidades (c) e temperaturas (d) obtidos por Ismail e Scalon (2000)

A figura 4.4 (a) mostra a variação do número de Nusselt com a altura adimensional para a cavidade anular. Se nota acentuada redução nos valores com a altura evidenciando a convecção em regiões superiores.



(a)

Figura 4.4. Variação da altura com o Número de Nusselt obtida para cavidade anular (a) e obtida por Ismail e Scalon(2000) (b)

As figuras 4.5(a), 4.5(b) e 4.5(c) mostram respectivamente os perfis de velocidades para cavidades anulares com razões entre o raio externo e raio interno (razão de raios) de 21, 2,0 e 1,01. As figuras 4.5(c), 4.5(d) e 4.5(e) apresentam os perfis de temperaturas para estas cavidades citadas.

Toda a análise é feita em regime permanente. O número de Rayleigh é de  $1,25 \times 10^7$  e a superfície aquecida é a interna (ver figura 4.2). Pode-se observar também a diminuição da razão de raios o que significa que a análise se aproxima das condições de convecção entre superfícies planas. Nota-se nas figuras 4.5(a), 4.5(b) e 4.5(c) o surgimento de vorticidades na região superior e inferior com o aumento da razão de raios, decorrentes do aumento do raio interno e, conseqüentemente, da área aquecida. Tais células de convecção distintas na região central superior da cavidade anular foram comprovadas experimentalmente por Elder (1965). O aumento da área aquecida é demonstrada pelos perfis de temperaturas apresentados pelas figuras 4.5(d), 4.5(e) e 4.5(f).

Na fig. 4.5(b) ocorre a formação de uma segunda célula de convecção (indicada pela seta na figura) de convecção na parte central superior, conforme descrito no modelo computacional de Davis (1969) para a mesma geometria e as mesmas condições de

contorno; os perfis de temperaturas e velocidades descritos pelo mesmo autor também são idênticos.

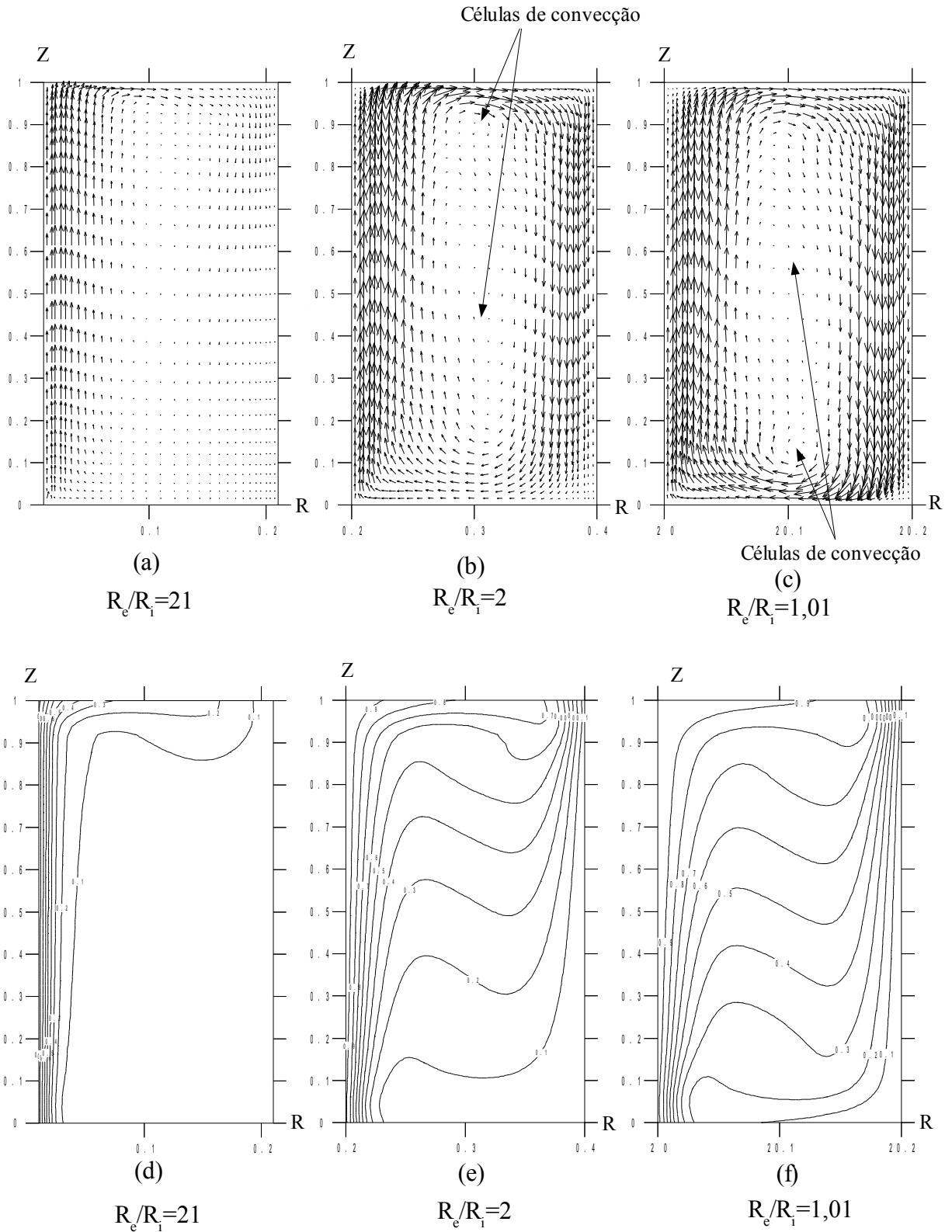


Figura 4.5. Perfis de temperaturas e velocidades para três cavidades anulares com diferentes razões entre raios.

Velocidades altas no canto inferior direito e superior esquerdo da figura 4.5(c) são notadas decorrentes da expansão do fluido na superfície interna aquecida. As velocidades diminuem abruptamente quando o fluido colide com a parede superior. As figuras 4.5(c) e 4.5(f), com raio interno muito grande, tem como intuito simular a convecção natural em cavidade retangular. Observa-se nas referidas figuras o início da formação de uma nova célula de convecção ao fundo da cavidade semelhante ao observado por Elder (1965). Pelo fato da área interna (aquecida) ser maior, se visualiza forte corrente convectiva atuante na fronteira interna, ao contrário de cavidades com altas razões de raio ( $R_e/R_i$ ) onde área aquecida é muito pequena em detrimento da resfriada.

A fim de se destacar os efeitos de área sobre o número de Nusselt apresentam-se as figuras 4.6(a) e 4.6(b). Estas mostram a relação do número de Nusselt com a altura da parede aquecida a medida que se afasta a cavidade anular de seu centro mantendo-se razão de aspecto (altura sobre base da seção da cavidade) igual a 5,0 com número de Rayleigh  $1,25 \times 10^7$ . Em 4.6(a) representa-se a razão de raios 2,0, e em 4.6(b) representa-se a razão de raios 1,01. Para altos números de Rayleigh (da ordem de  $10^7$  na adimensionalização proposta) atinge-se valores não ideais para a estratificação (DAVIS,1969) em cavidades anulares concêntricas com altas razões de aspecto, estando a faixa ótima situada entre  $Ra=2,5 \times 10^5$  e  $Ra=1,9 \times 10^6$ .

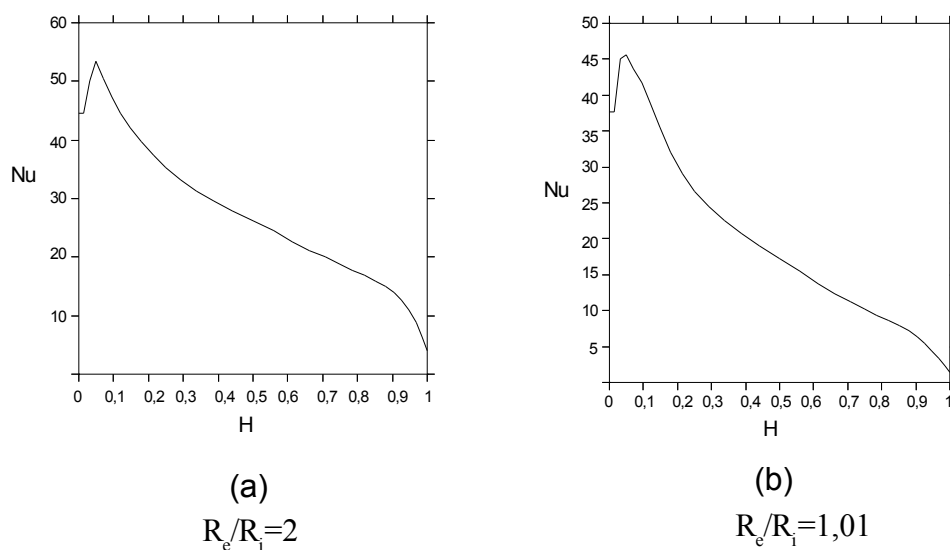


Figura 4.6. Variação do Nu com a Altura para duas razões de raio.



A título de comparação dos efeitos de área sobre a convecção natural na cavidade anular e estudo da influência do número Rayleigh, Nusselt e da razão de aspecto nessa geometria apresenta-se a figura 4.7. Nela são vistas as variações do número de Nusselt médio com a razão entre os raios externo e interno da cavidade anular para dois números de Rayleigh e duas razões de aspecto. Pode-se notar que para baixos números de Raileigh a variação da distância da sessão da cavidade ao centro pouco influi na mudança do número de Nusselt. Ademais nota-se que mudanças na razão de aspecto são bem mais sensíveis que variações do número de Raileigh no que tange ao aumento do número de Nusselt.

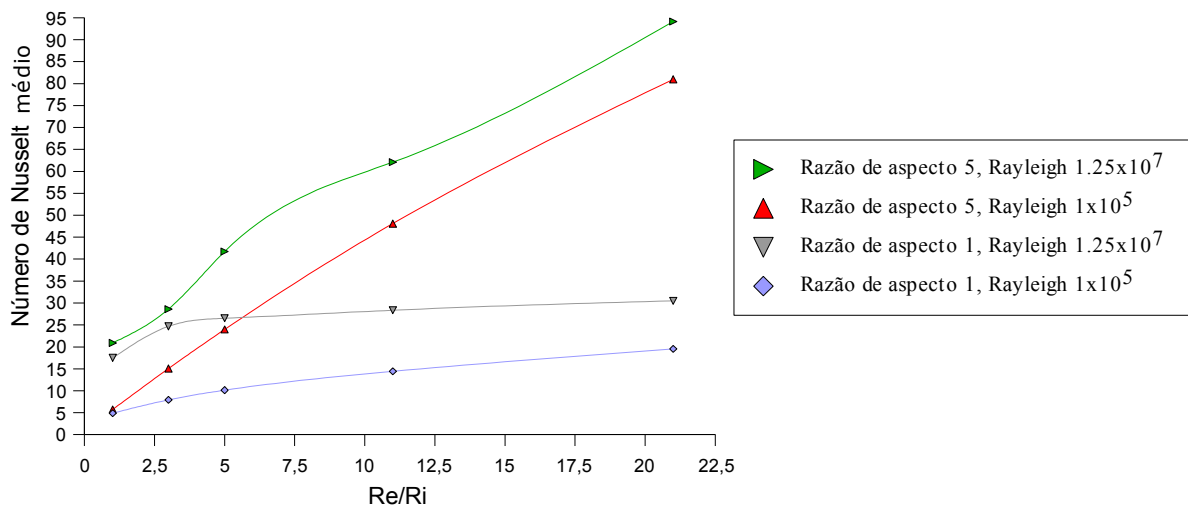


Figura 4.7. Variação dos número de números de Nusselt médios com a razão de raios para números de Rayleigh e razões de aspecto vistos na legenda.

## 4.2 – Teste de malha sem parede direcionadora

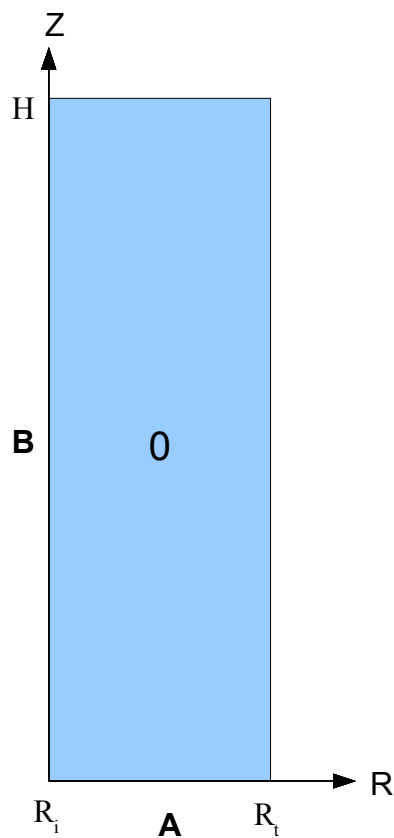
No caso de tanque sem parede direcionadora interna são analisadas cinco malhas, com elementos de geometria deformada igualmente em r e z por progressão geométrica. A deformação é menor no centro do domínio computacional e maior nas extremidades. Assim, são melhores os resultados na região próxima à parede aquecida, onde as velocidades são maiores.

O teste de malha é feito para o número de Rayleigh mais crítico

estudado, o de  $5 \times 10^8$ , considerado dentro do regime laminar de acordo com Hess e Miller (1979) que em seus estudos experimentais foi definido  $5 \times 10^9$  o limiar mínimo para o regime laminar dentro de cavidades cilíndricas verticais. Quanto maior o número de Rayleigh maior a complexidade do escoamento e conseqüentemente maior o tempo de processamento. A malha adotada é a que apresenta menor tempo de processamento.

Todas as análises de malha a seguir são para a razão de aspecto 3,0, definida como crítica, pois quanto maior o raio do reservatório maior o número de elementos radiais necessários e, conseqüentemente, maior o tempo de processamento. Portanto os testes de malha se basem em razão de aspecto três e número de Rayleigh  $5 \times 10^8$ .

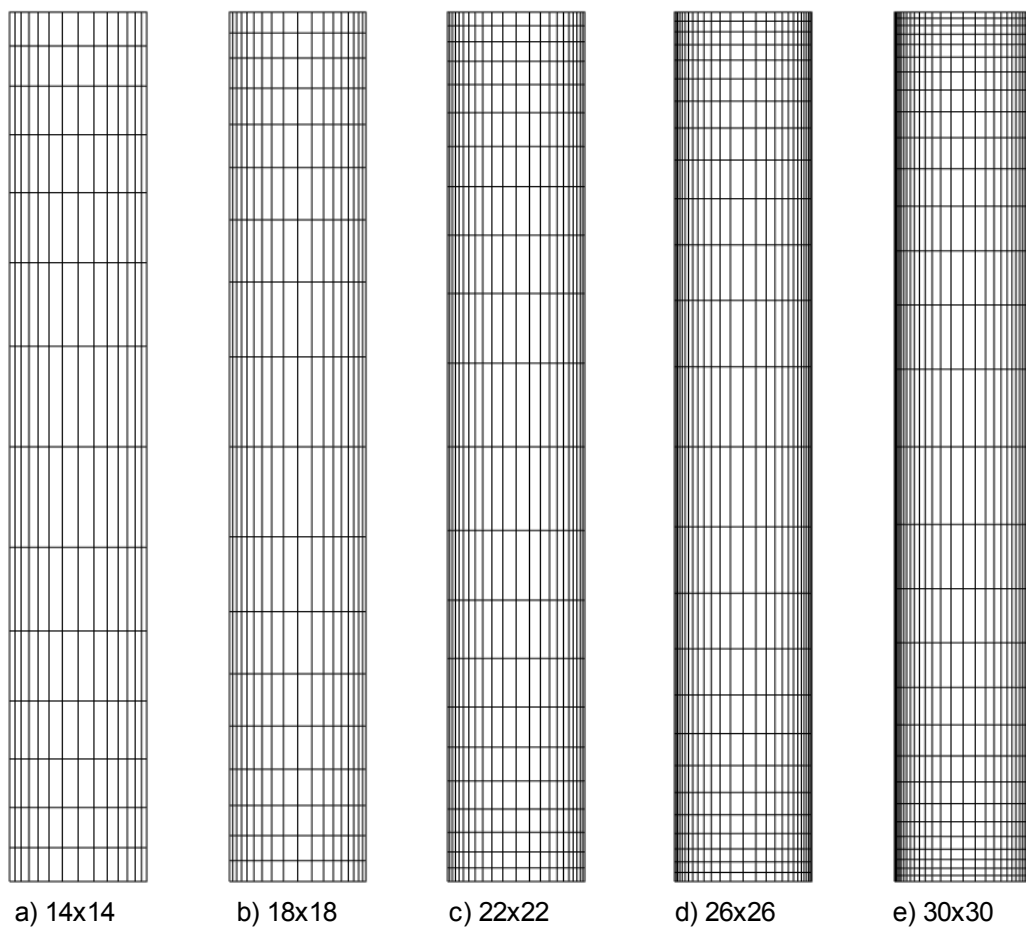
Quanto à aspectos práticos supõe-se, de antemão, que um tanque de razão de aspecto (altura sobre diâmetro) 3,0, com volume adimensional aproximado de 0,088 é melhor do que dois tanques de razão de aspecto 4,2 contendo o mesmo volume de água devido ao aumento da área e do número de componentes nessa última configuração.



*Figura 4.8. Superelemento que constitui a geometria sem parede direcionadora. A e B indicam as subdivisões nos eixos r e z.*

Na figura 4.8 apresenta-se um esquema do tanque sem parede direcionadora interna para melhor entendimento do processo de geração de malha. No código de pré-processamento para esta geração divide-se a geometria em um único superelemento. Para representação da malha será usada a notação  $A \times B$  onde  $A$  e  $B$  são os números de subdivisões do superelemento em  $r$  e  $z$  respectivamente. O fator de deformação usado primeiramente é de 1,1 e depois 1,2 em ambos eixos; a título de exemplificação nesse último caso cada elemento maior é 1,2 vezes menor do que o antecessor nas direções  $r$  e  $z$  respectivamente. Para o tanque sem parede direcionadora o número de subdivisões em  $r$  e  $z$  são iguais, ou seja, ou  $A=B$ .

Na figura 4.9 se têm as cinco malhas testadas para o reservatório de razão de aspecto 3,0 sem parede direcionadora interna para número de Rayleigh  $5 \times 10^8$  e fator de deformação 1,2.



*Figura 4.9. Malhas para cavidade cilíndrica sem parede direcionadora para fator de deformação=1,2.*

Para se testar as malhas escolhe-se uma linha vertical que corta a malha ao meio. Para um tanque de altura 1,0 e razão de aspecto 3,0 obviamente têm-se um raio de aproximadamente 0,167. Ao subtrair o espaço central, não computado na malha, que é de 0,01 têm-se que a largura da malha é de 0,157. O ponto do raio onde a reta vertical em estudo passa é 0,0885 para a referida razão de aspecto.

Na linha em  $R=0,0885$  mede-se as temperaturas ao longo do tempo através de um código de pós-processamento. Na figura 4.10 expõe-se alguns dos resultados da sondagem; são apresentados cinco números de Fourier,  $Fo=0,00025$  (6,25% do tempo de carga)  $Fo=0,00050$  (12,5% do tempo de carga),  $Fo=0,00100$  (25% do tempo de carga) e  $Fo=0,00200$  (50% do tempo de carga) e  $Fo=0,00400$  (cerca de 100% do tempo de carga) sendo o tempo de carga o tempo total para que todo o reservatório adquira a temperatura adimensional unitária.

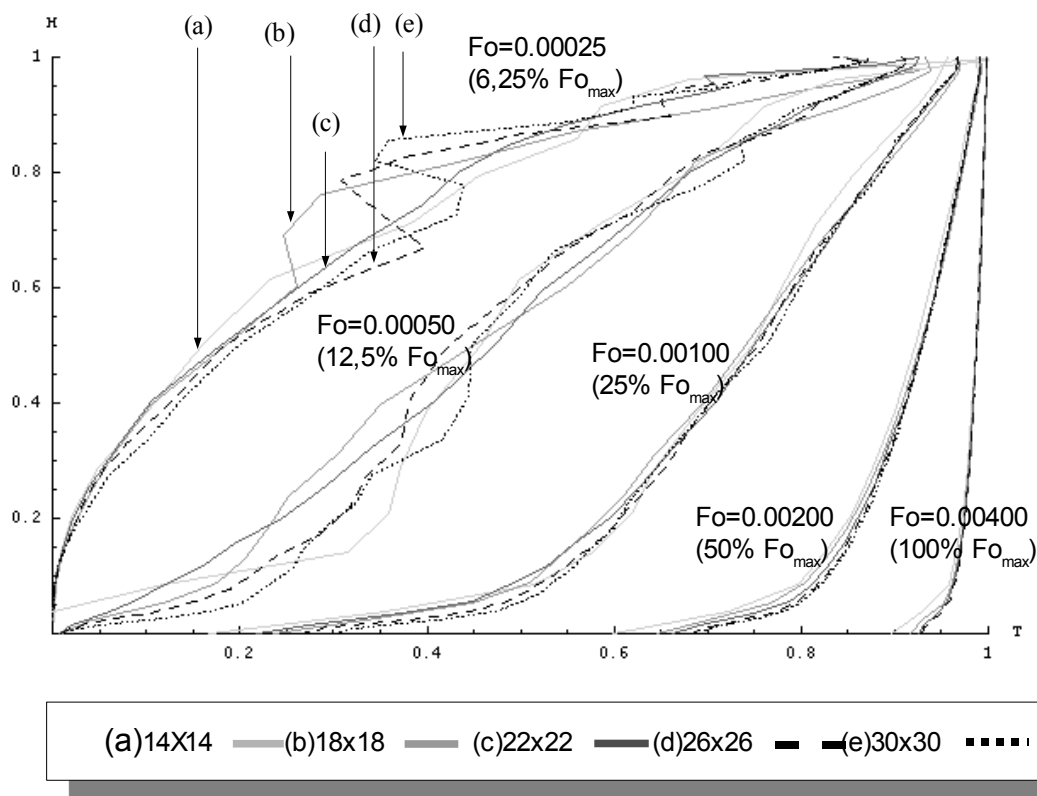
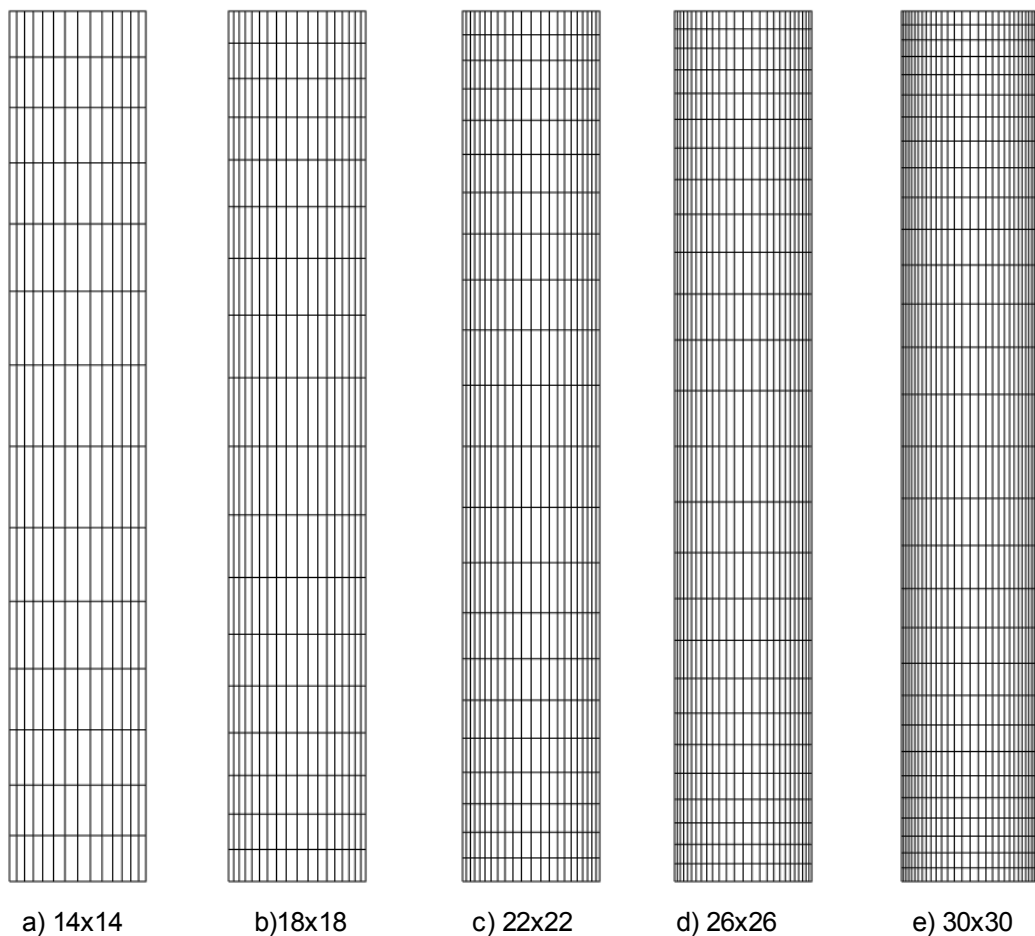


Figura 4.10. Variação das temperaturas com a altura em  $R=0,0885$  para as malhas testadas com fator de deformação 1,2.

No gráfico da figura 4.10 observa-se nos números de Fourier igual a 0,00025 e 0,0005 uma grande instabilidade no comportamento das malhas devido às altas velocidades presentes no início do processo de convecção natural. Nesses instantes ainda não há formação de estratificação térmica definida e a energia está fluindo sob o princípio do termosifão para eliminar os altos gradientes de temperaturas existente entre a parede e o resto do reservatório.

Diante de tais comportamentos observados reduz-se a deformação dos elementos para refinar a análise na região central. A proposta dessa diminuição no fator de deformação baseia-se na idéia de que as velocidades próximas à parede não sejam tão altas a ponto de ter que se refinar tanto os elementos nessa região lateral. Na figura 4.11 encontram-se as malhas testadas para fator de deformação 1,1 para  $Ra=1 \times 10^8$  e razão de aspecto 3,0.



*Figura 4.11. Malhas para cavidade cilíndrica sem parede direcionadora para fator de deformação igual a 1,1.*

Na figura 4.12 mede-se novamente as temperaturas na linha em estudo para o novo fator de deformação de 1,1 para os mesmos números de Fourier analisados na figura 4.10. Observa-se um ótimo comportamento das malhas 26x26 e 30x30 e grandes discordâncias entre as outras. Contudo comparando-se o gráfico da figura 4.10 com a figura 4.12 nota-se uma semelhança muito grande entre os comportamentos das malhas 26x26 e 30x30 no fator de deformação 1,1 (figura 4.12) e a malha 22x22 (figura 4.10) com fator de deformação 1,2. Analisando-se o tempo de processamento da figura 4.13 e 4.14 conclue-se de antemão a viabilidade de utilização da malha 22x22 e fator de refinamento 1,2, bem mais rápido do que as malhas 26x26 e 30x30 e fator de deformação 1,1.

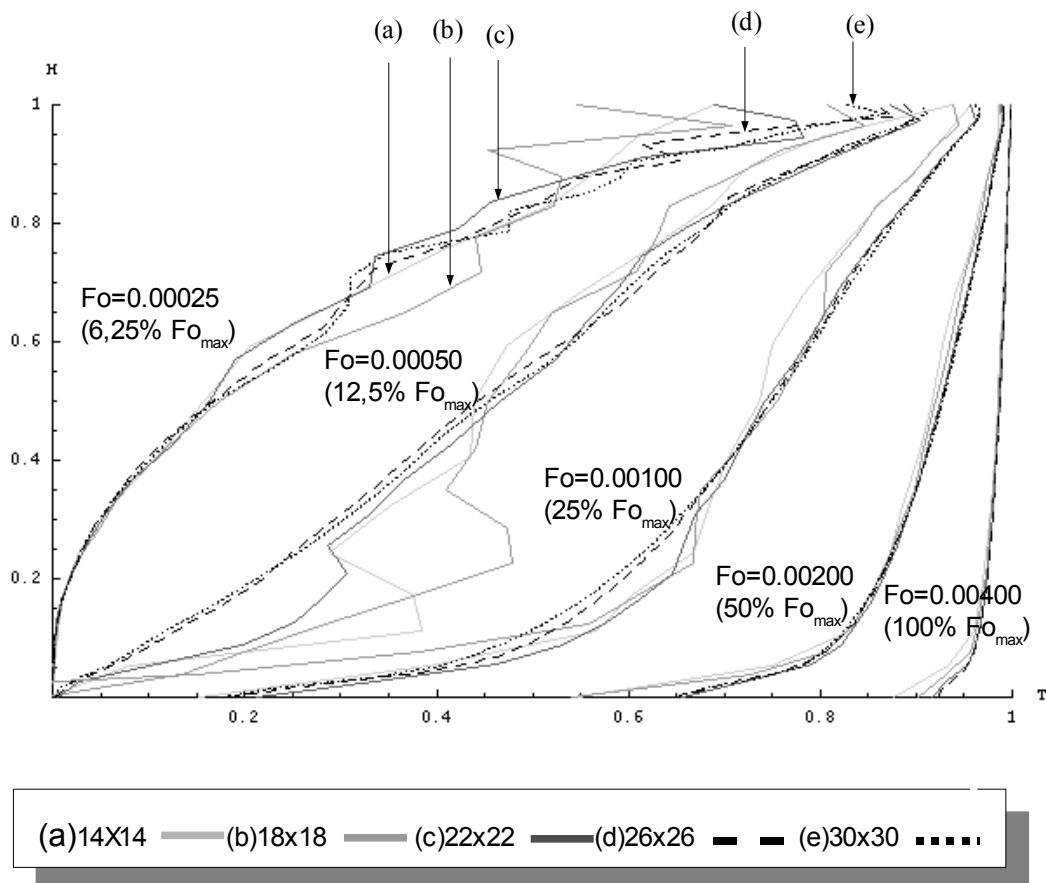


Figura 4.12. Variação das temperaturas com a altura em  $R=0,0885$  para as malhas testadas com fator de deformação 1,1.

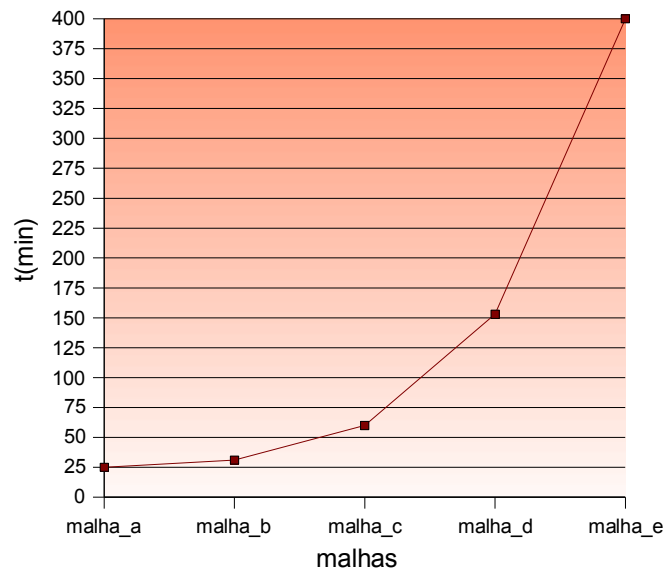


Figura 4.13. Tempo de processamento para as malhas sem parede direcionadora com fator de deformação 1,2 até  $Fo=0,01$ .

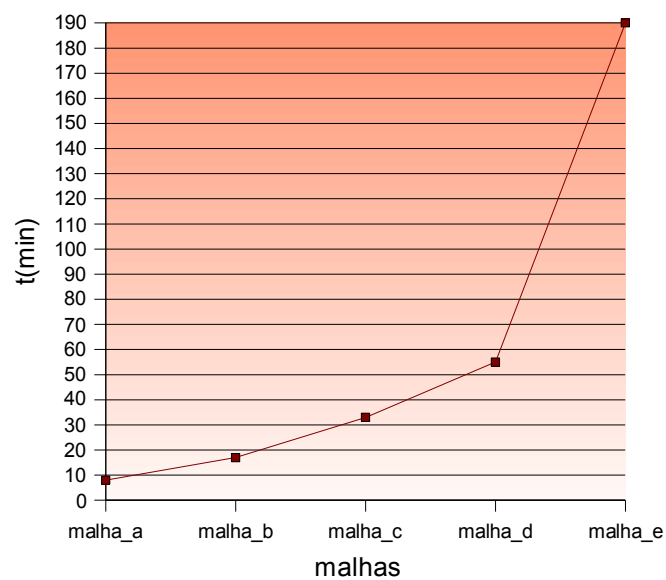
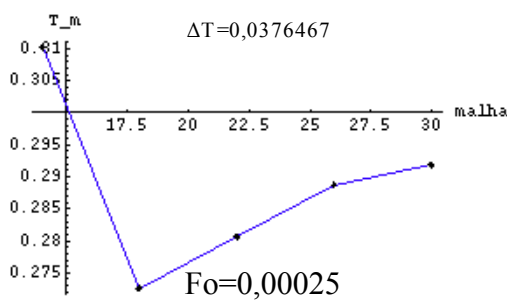


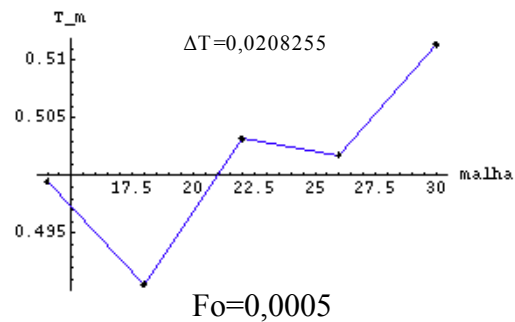
Figura 4.14. Tempo de processamento para as malhas sem parede direcionadora com fator de deformação 1,1 até  $Fo=0,01$ .

Na figura 4.15 apresenta-se a variação das temperaturas de mistura para cada malha nos números de Fourier analisados ( $Fo=0,00025$ ,  $Fo=0,0005$ ,  $Fo=0,001$  e  $Fo=0,002$ ). A temperatura de mistura (ver equação 4.4) representa uma temperatura homogênea que resultaria de uma mistura total de todo o fluido contido no tanque; é obtida pela integração ao longo dos eixos  $r$  e  $z$  do produto da função de interpolação spline ( $f(r,z)$ ) das temperaturas por  $r$  e posterior divisão pelo volume planar.

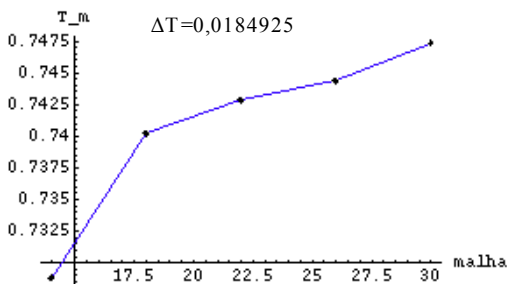
$$T_m = \frac{\int_0^1 \int_{0.01}^R f(r,z) \cdot r \, dr \, dz}{\int_0^1 \int_{0.01}^R r \, dr \, dz} \quad (4.4)$$



(a)

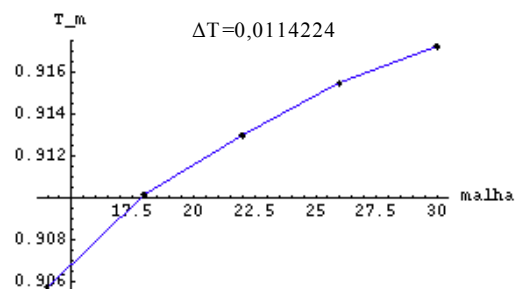


(b)



Fo=0,001

(c)



Fo=0,002

(d)

Figura 4.15. Variação das temperaturas de mistura com o refino da malha para os números de Fourier especificados.

Um fato a ser notado é a redução das disparidades das temperaturas de mistura medidas a diferentes malhas e nos mesmos instante. Tal queda reflete uma redução nas velocidades e conseqüentemente maior precisão numérica ao longo do tempo, até a velocidade se anular em um  $Fo$  infinito.



### ***4.3. Análise do aquecimento sem parede direcionadora interna***

Analisa-se nesta seção o aquecimento sem parede direcionadora interna, em um reservatório aquecido lateralmente e adiabático em seu topo e base, mantendo as propriedades físicas já referidas. O estudo tem como finalidade se comparar posteriormente os comportamentos dos reservatórios com e sem parede direcionadora.

Nas figuras 4.16(a), 4.16(b), 4.16(c) e 4.16(d) tem-se respectivamente as representações vetoriais bidimensionais das velocidades no tanque de razão de aspecto 3,0, na malha proposta, para os números de Fourier iguais a 0,00025 (6,25% do tempo de carga), 0,0005 (12,5% do tempo de carga), 0,001 (25% do tempo de carga) e 0,002 (50% do tempo de carga) respectivamente. Tais instantes foram escolhidos porque ainda apresentam velocidades consideráveis visto que estas diminuem com a uniformização das temperaturas no tanque devido à diminuição das diferenças de densidade. As velocidades tendem a zero em um número de Fourier infinito. Nota-se a princípio muitas recirculações junto à parede aquecida no  $Fo=0,00025$  e outras que se formam no topo do tanque. Na região central inferior do tanque em  $Fo=0,0005$  pode-se observar outra recirculação sensível, decorrente do desvio do fluxo convectivo descendente em direção à parede aquecida o que ocasiona um fluxo ascendente contra-corrente.

Na figura 4.17 apresentam-se as velocidades verticais e horizontais na linha vertical que passa por  $R=0,0885$ , ponto situado entre  $R=0,01$  e  $R=0,167$ . Analisando as figuras nota-se a presença das vorticidades, ou seja, mudanças abruptas de sentido das velocidades, supondo que algumas delas se iniciam nas paredes e atingem a região central.

Nas velocidades verticais, apresentadas nas figuras 4.17(a.2), 4.17(b.2), 4.17(c.2) e 4.17(d.2), nota-se a presença de movimentos contra-corrente, representados pela região positiva do eixo  $V_y$ , originários de vorticidades centrais que com o tempo tendem a desaparecer. Conforme se progride no tempo o reservatório é aquecido diminuindo-se a intensidade das velocidades.

Nas figuras 4.17(a.1), 4.17(b.1), 4.17(c.1) e 4.17(d.1) verifica-se mudanças de orientação das velocidades horizontais, levando-se à conclusão que no centro sempre existam vorticidades atuantes em todos os instantes, originadas nas paredes e as quais a primeira vista não interferem na estratificação central.

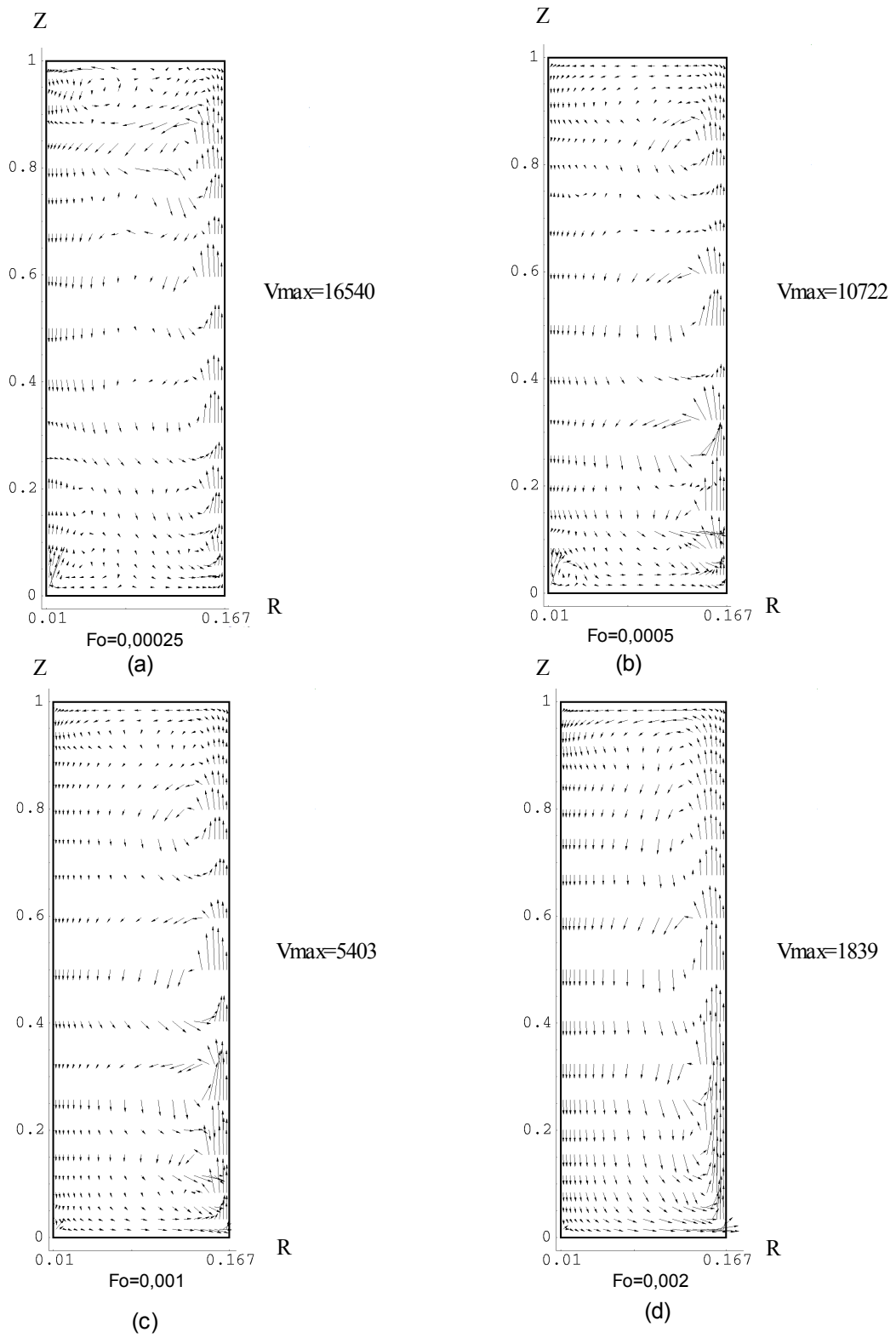


Figura 4.16: Perfis de velocidades adimensionais para os  $Fo$  indicados. Tanque sem parede direcionadora, de razão de aspecto 3,0 e  $Ra=5 \times 10^8$ .

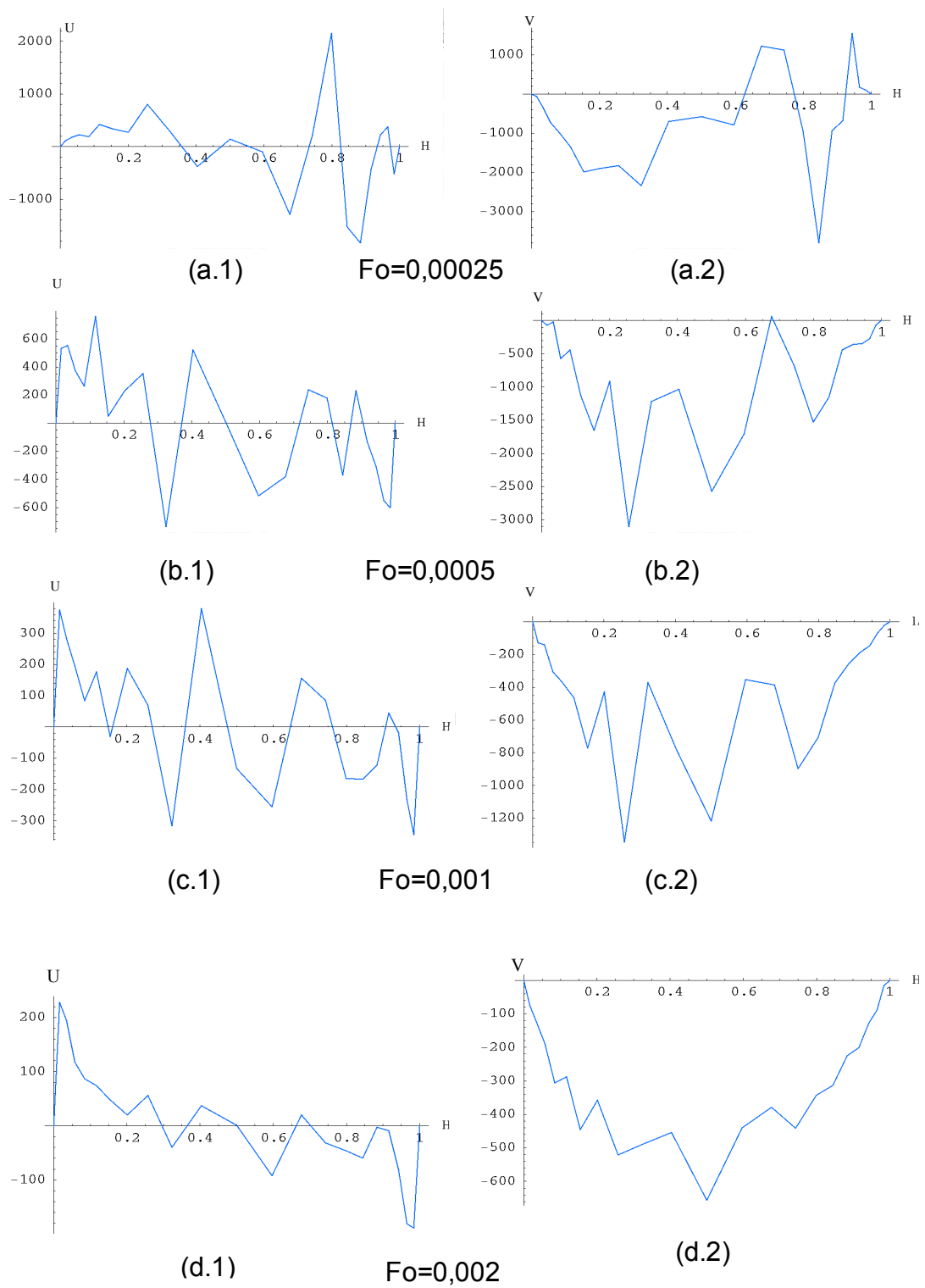
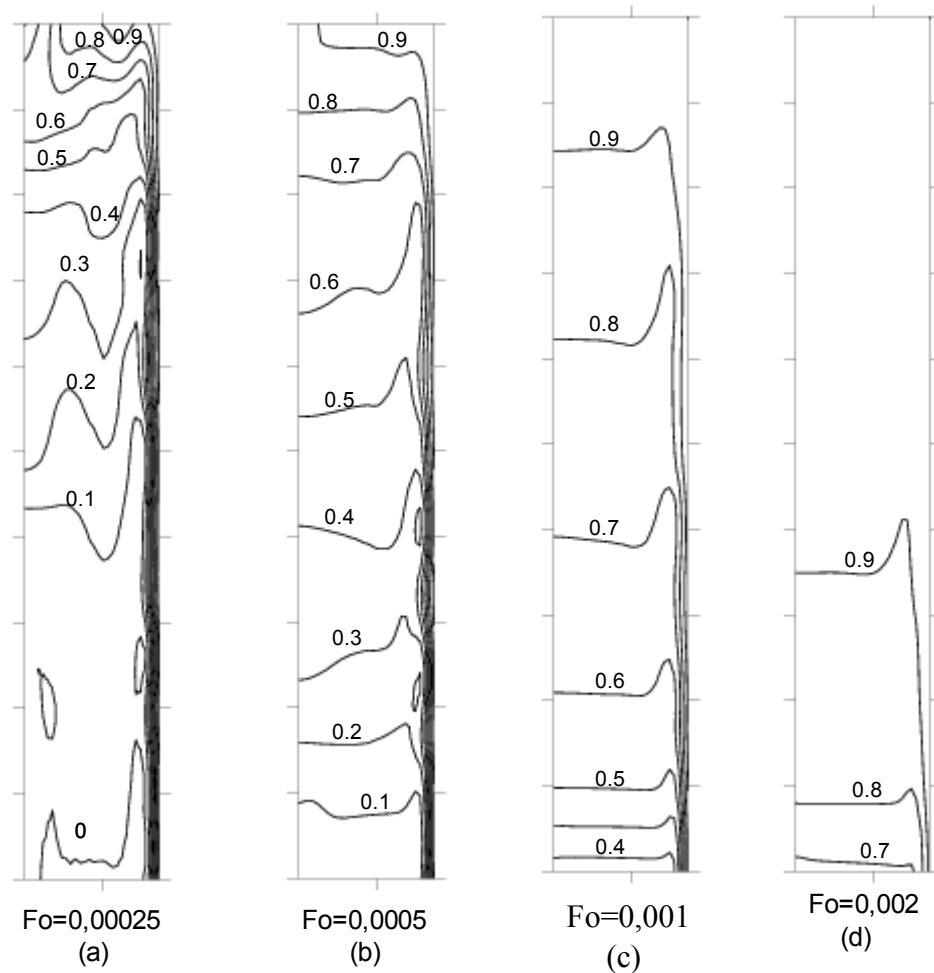


Figura 4.17. Perfis de velocidades horizontais e verticais com a altura. Tanque sem parede direcionadora, para razão de aspecto 3,0 e  $Ra=5 \times 10^8$ .



*Figura 4.18. Perfis de temperaturas adimensionais para tanque sem parede direcionadora, razão de aspecto 3,0 e  $Ra=5 \times 10^8$ .*

Na figura 4.18 são mostrados os perfis de temperaturas através de isothermas para os números de Fourier analisados (figuras 4.18(a) para  $Fo=0,00025$ , 4.18(b) para  $Fo=0,0005$ , 4.18(c) para  $Fo=0,001$  e 4.18(d) para  $Fo=0,002$ ). Através dessa exposição pode-se tirar algumas conclusões interessantes como o tempo para formação de uma estratificação definida. Na figura 4.18(b), observa-se algumas regiões frias junto à parede, que estão exatamente no interior das recirculações próximas à parede aquecida. Os picos à direita das isothermas são provocados pela ascensão do fluido quente sendo que suas intensidades se uniformizam à medida que a estratificação se estabelece. Nas figuras

4.18(c) e 4.18(d), representando  $Fo=0,001$  e  $Fo=0,002$  já se tem uma estratificação térmica estável e bem definida.

Visando uma análise da variação dos perfis de temperaturas em  $R=0,0885$  com a altura no tempo apresenta-se a figura 4.19. O mesmo estudo feito para análise de malhas apresentado nas figuras 4.10 e 4.12 é realizado em 16 instantes diferentes, variando de 0,00025 a 0,004. Com o passar do tempo verifica-se a diminuição da diferença de temperaturas o que significa crescente aproximação à temperatura unitária, quando gradientes de temperatura do fluido se aproximam de zero.

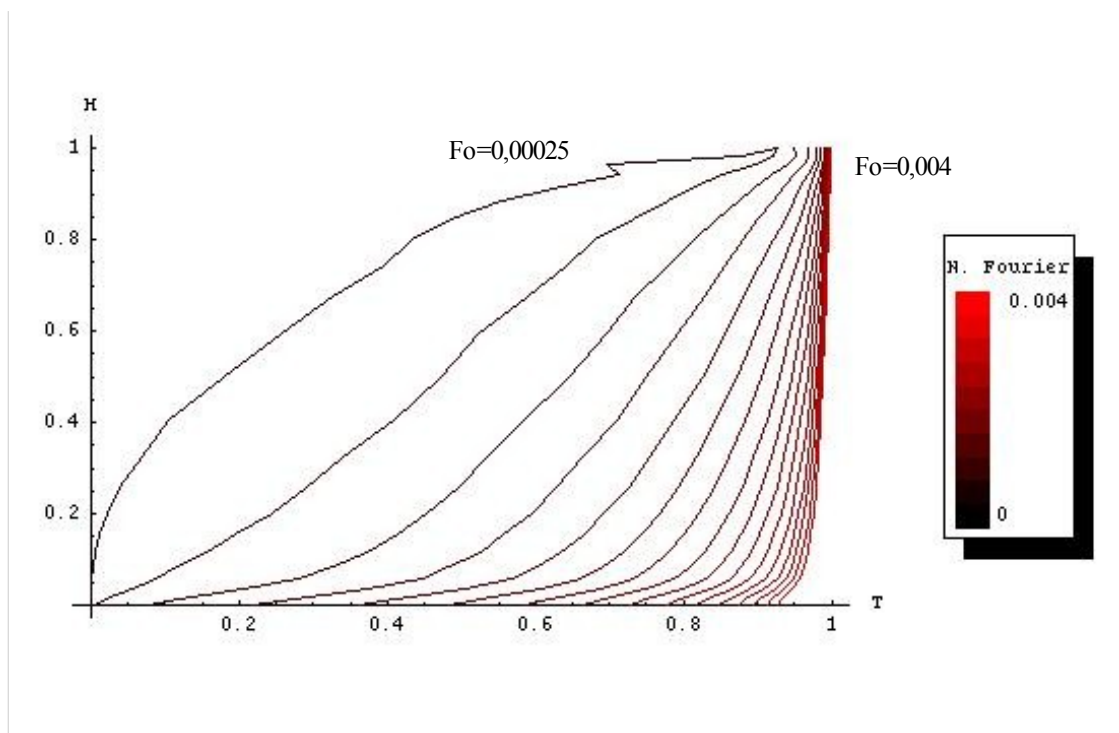


Figura 4.19. Variações das temperatura de centro com a altura para 16  $Fo$ . Tanque sem parede direcionadora, de razão de aspecto 3 e  $Ra=5 \times 10^8$ .

Nas figuras 4.20, 4.21 e 4.22 analisa-se a variação das velocidades axiais próximas à parede do tanque de razão de aspecto 3,0 ao longo do tempo a fim de se verificar a ocorrência de recirculações e ondas ascendentes. Esse estudo é feito em três alturas para  $Ra=5 \times 10^8$  (figuras 4.20(a), 4.20(b) e 4.20(c)),  $Ra=5 \times 10^7$  (figuras 4.21(a), 4.21(e) e 4.21(c)) e  $Ra=5 \times 10^6$  (figuras 4.22(a), 4.22(b) e 4.22(c)) sendo tais alturas 0,1544, 0,5 e 0,8455 respectivamente, medidas em uma reta vertical que passa no raio 0,1646 (cerca de 98% do raio total dessa razão de aspecto) . O incremento de tempo usado para cada

iteração feita pelo código computacional foi de  $1 \times 10^{-6}$ . Na figura 4.23(a), 4.23(b) e 4.23(c) é refinado tal passo para  $Ra=5 \times 10^8$  e as alturas 0,1544, 0,5 e 0,8455 são analisadas novamente na reta vertical para verificação de instabilidades numéricas em relação as figuras 4.20 (a), 4.20 (b) e 4.20 (c).

Nota-se pelas análises realizadas a partir do  $Ra=5 \times 10^7$  a presença de algumas frequências de onda amortecidas somada à curva de decréscimo usual das velocidades; tal fato é fortemente visualizado no  $Ra=5 \times 10^8$  (figuras 4.20(a), 4.20(b) e 4.20(c)).

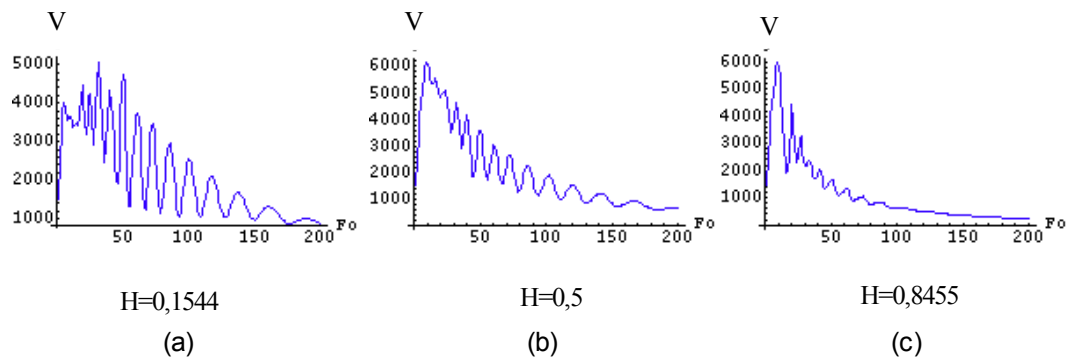


Figura 4.20. Variações das velocidades verticais adimensionais para alturas especificadas. Tanque de razão de aspecto 3 e  $Ra=5 \times 10^8$ . Fator de deformação é 1,2.

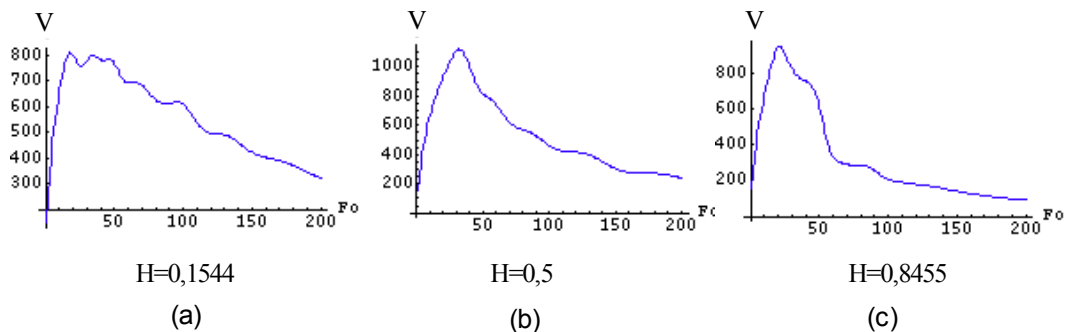


Figura 4.21. Variações das velocidades verticais adimensionais para alturas especificadas. Tanque de razão de aspecto 3 e  $Ra=5 \times 10^7$ . Fator de deformação é 1,2.

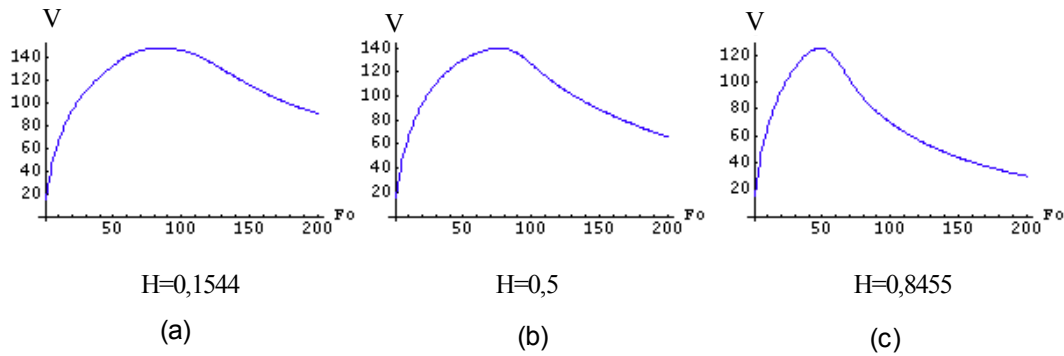


Figura 4.22. Variações das velocidades verticais adimensionais para alturas especificadas. Tanque de razão de aspecto 3 e  $Ra=5 \times 10^6$ . Fator de deformação é 1,2.

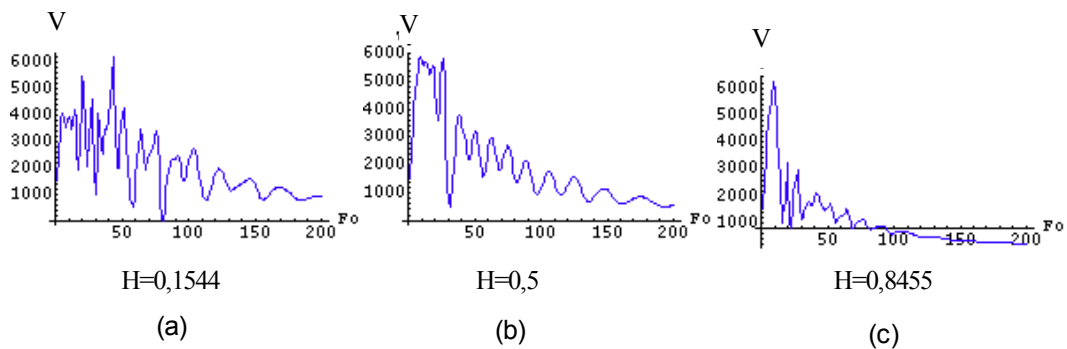


Figura 4.23. Variações das velocidades verticais adimensionais para alturas especificadas. Tanque de razão de aspecto 3 e  $Ra=5 \times 10^8$ . Fator de deformação é 1,1.

Para se verificar a causa de tais ondas axiais apresenta-se a figura 4.24. Nela são representados os perfis de velocidades em dois instantes iniciais (figura 4.24(a) em  $Fo=0,00012$  e figura 4.24(b) em  $Fo=0,00016$ ) quando a massa de água aquecida acaba de se chocar com a parede superior. Nota-se colisão diagonal do fluxo ascendente com a primeira vorticidade como mostra a figura 4.25, detalhe da figura 4.24(a). Em  $Fo=0,00016$ , visto na figura 4.26, detalhe da figura 4.24(b), ocorre formação de uma célula de convecção abaixo da primeira notando-se já a formação de outra abaixo dessa. As vorticidades dessa forma se deslocam de cima para baixo próximas à parede do reservatório.

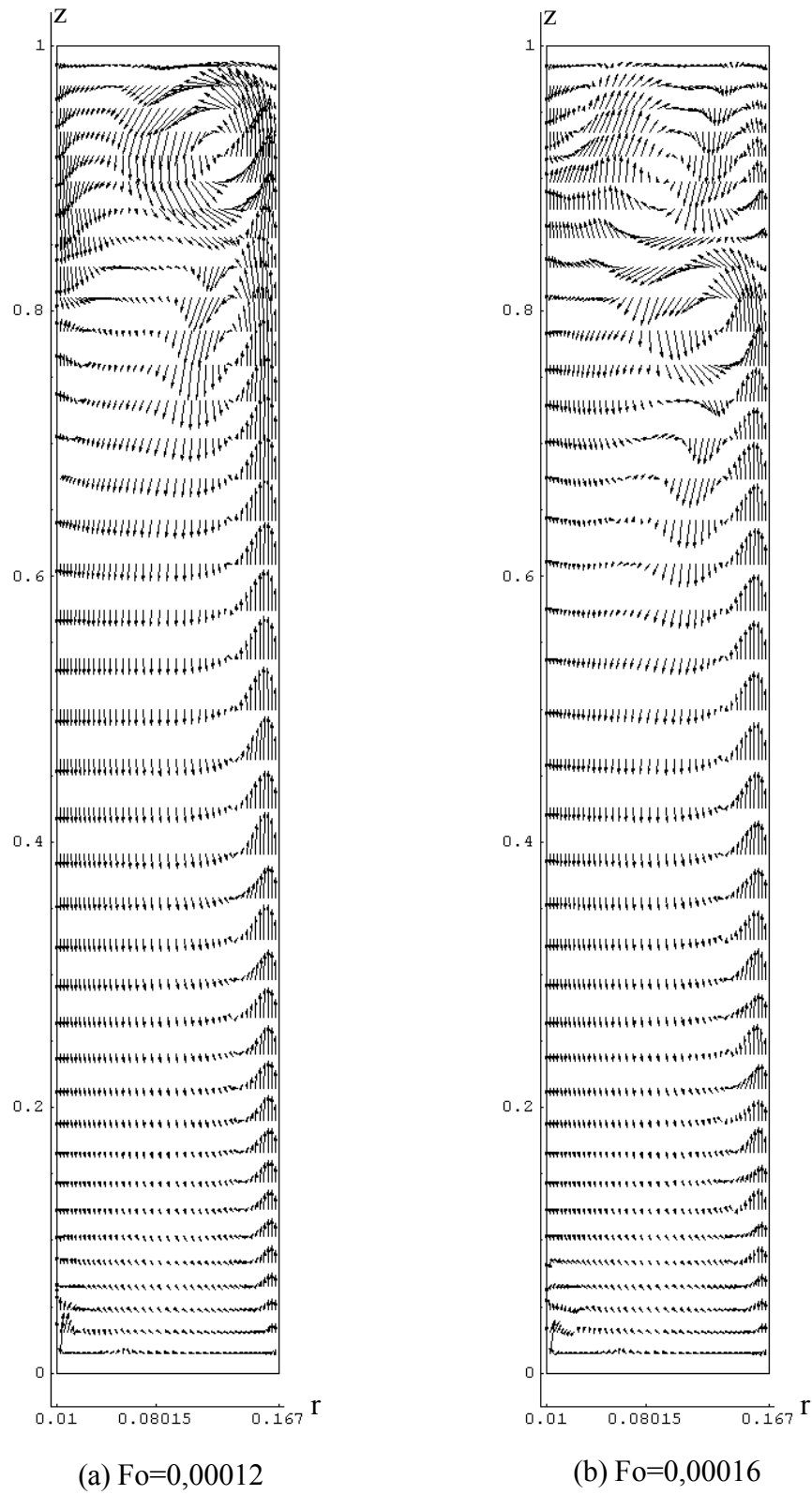


Figura 4.24: Formação das vorticidades no topo de reservatório de razão de aspecto 3,0 em  $Ra=5 \times 10^8$  em dois instantes de tempo.



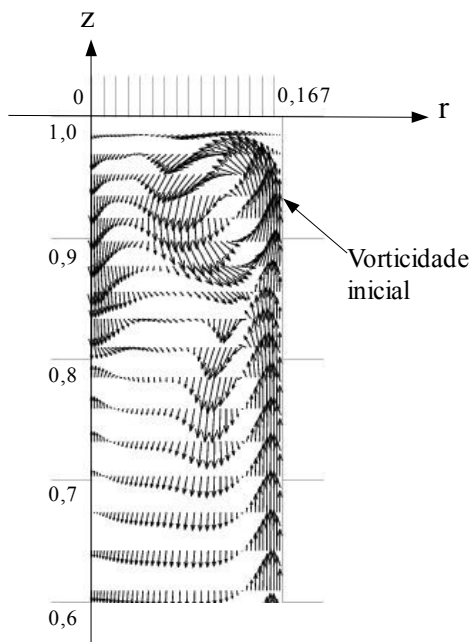


Figura 4.25. Formação das vorticidades no topo de reservatório de razão de aspecto 3,0 em  $Ra=5 \times 10^8$  em dois instantes de tempo. – Detalhe A

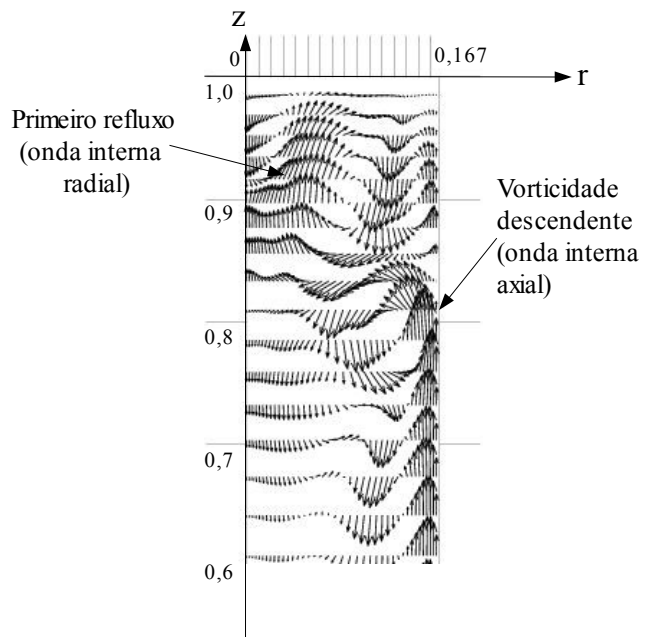
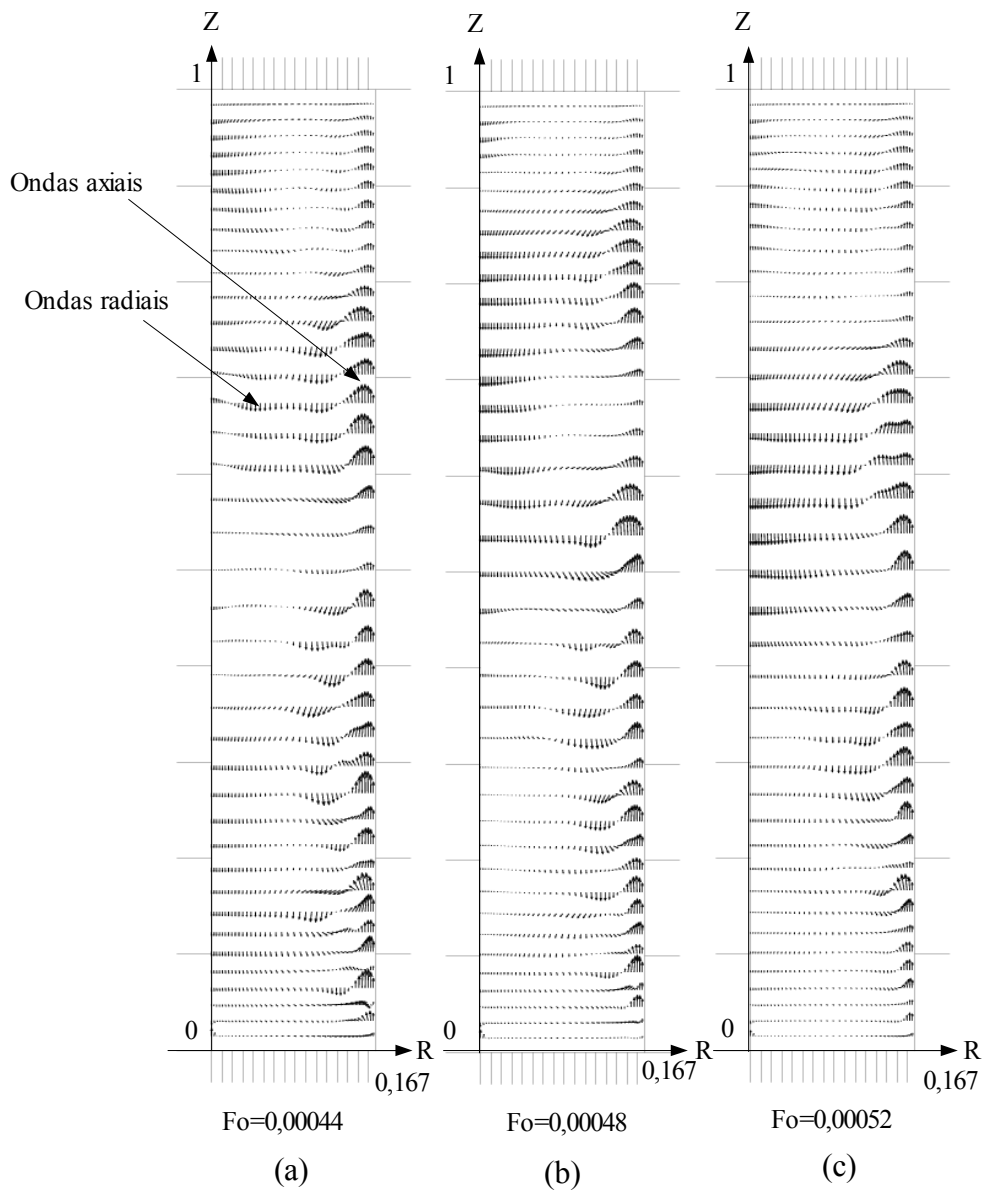


Figura 4.26: Formação das vorticidades no topo de reservatório de razão de aspecto 3,0 em  $Ra=5 \times 10^8$  em dois instantes de tempo. – Detalhe B

A formação das células descendentes acelera o fluido na região próxima à parede criando ondas internas axiais, como é visto na figura 4.27. Nela são visualizados os perfis de velocidade para reservatório de razão de aspecto 3,0, refinamento de malha  $40 \times 40$ , com número de Rayleigh  $5 \times 10^8$  e nos  $Fo=0,00044$  (figura 4.27(a)),  $Fo=0,00048$  (figura 4.27(b)) e  $Fo=0,00052$  (figura 4.27(c)). Nota-se na figura 4.27 ondas internas radiais que se movimentam do centro para as paredes, provocada pelo primeiro refluxo da água (ver figura 4.26).

A condição de contorno imposta, de velocidade radial nula em  $R=0,01$  cria as condições para que tais ondas radiais se propaguem refletindo nas paredes do reservatório.

O chamado fluxo secundário foi citado por Weidman e Mehrdadtehranfar (1985) onde ondas toroidais provocadas pelas células convectivas se propagam verticalmente do topo para a base e vice versa, dependendo do número de Prandtl, num cilindro vertical aquecido lateralmente e isolado no topo e na base.



*Figura 4.27. Ondas de fluido decorrentes de vorticidades descendentes próximas à parede aquecida.*

Na figura 4.28 realiza-se análise dos perfis de velocidades para um tanque sem parede direcionadora, de razão de aspecto 4,0, número de Rayleigh  $5 \times 10^8$  e nos números de Fourier iguais a 0,0025 (figura 4.28(a)), 0,0050 (figura 4.28(b)), 0,001 (figura 4.28(c)) e 0,002 (figura 4.28(d)). Esta figura tem como objetivo comparação do comportamento do fluido com o apresentado na razão de aspecto 3,0 (figura 4.16). Observa-se que algumas recirculações não surgem para o reservatório analisado, de menor diâmetro.

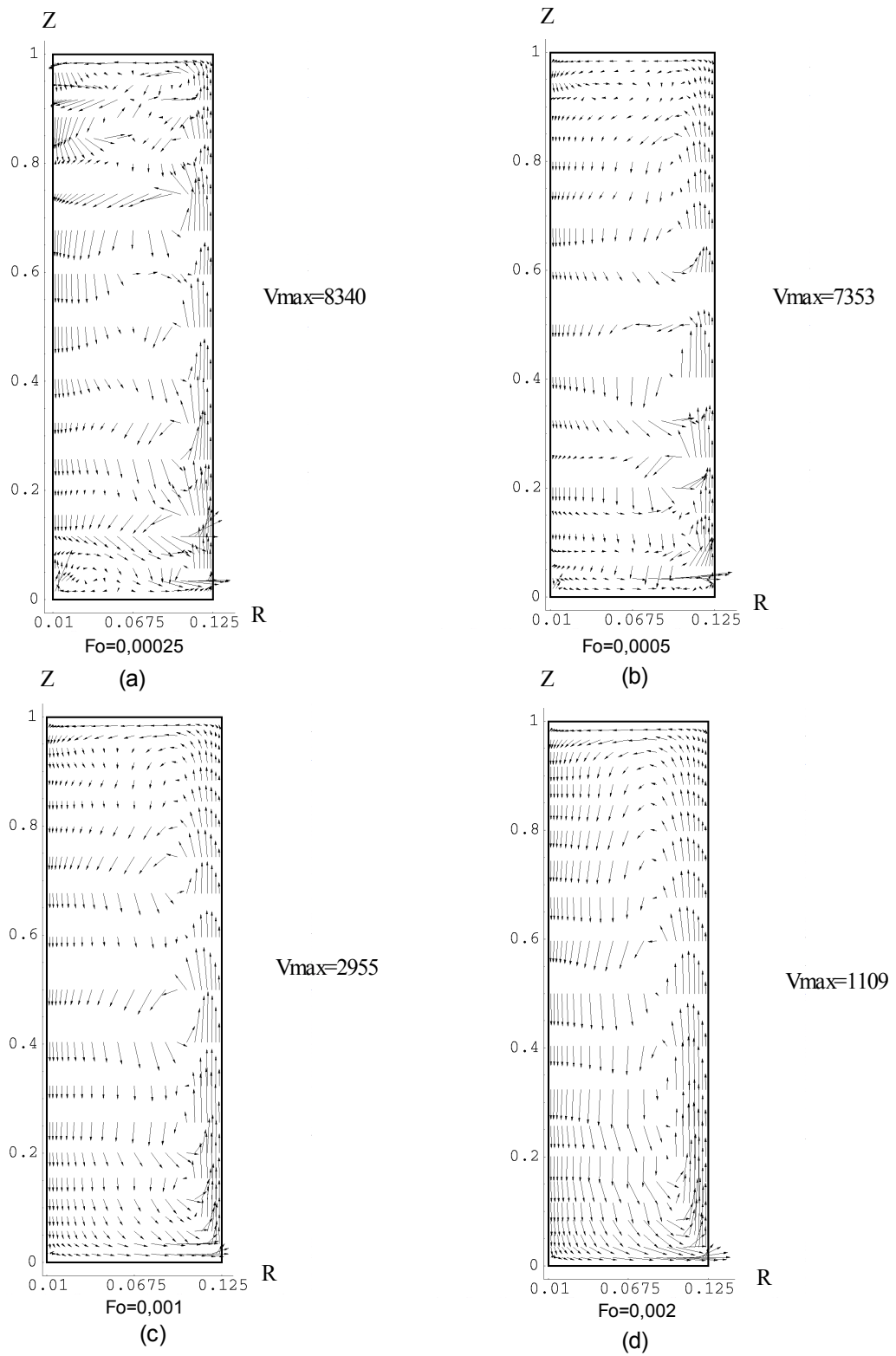


Figura 4.28: Perfis de velocidades adimensionais para os  $Fo$  indicados. Tanque sem parede direcionadora, de razão de aspecto 4 e  $Ra=5 \times 10^8$ .

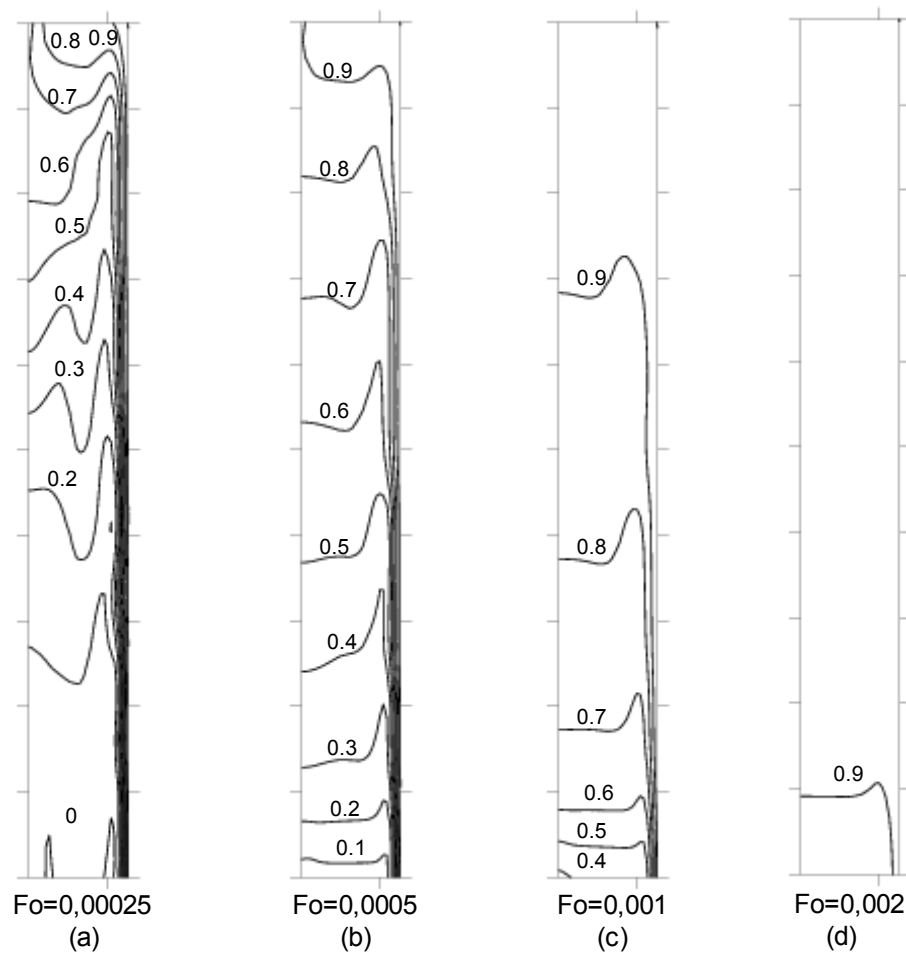


Figura 4.29. Perfis de temperaturas adimensionais para tanque sem parede direcionadora, razão de aspecto 4 e  $Ra=5 \times 10^8$ .

Na figura 4.29 tem-se os perfis das temperaturas em  $Fo=0,0025$  (4.29(a)),  $Fo=0,00050$  (4.29(b)),  $Fo=0,001$  (4.29(c)) e  $Fo=0,002$  (4.29(d)) para o tanque sem parede direcionadora de razão de aspecto 4,0 com número de Rayleigh igual a  $5 \times 10^8$ . Esta figura permite comparação dos perfis de temperaturas entre reservatórios de razão de aspecto 3,0 e 4,0.

Pode-se notar, comparando-se a figura 4.29 com a figura 4.18, que uma sensível melhora na estratificação já pode ser obtida para o número de Fourier igual a 0,0005. Para o número de Fourier igual a 0,001 tem-se uma maior rapidez na descensão das termoclinas visto que o volume em razão de aspecto 4,0 é menor e, portanto, se aquece mais rápido.

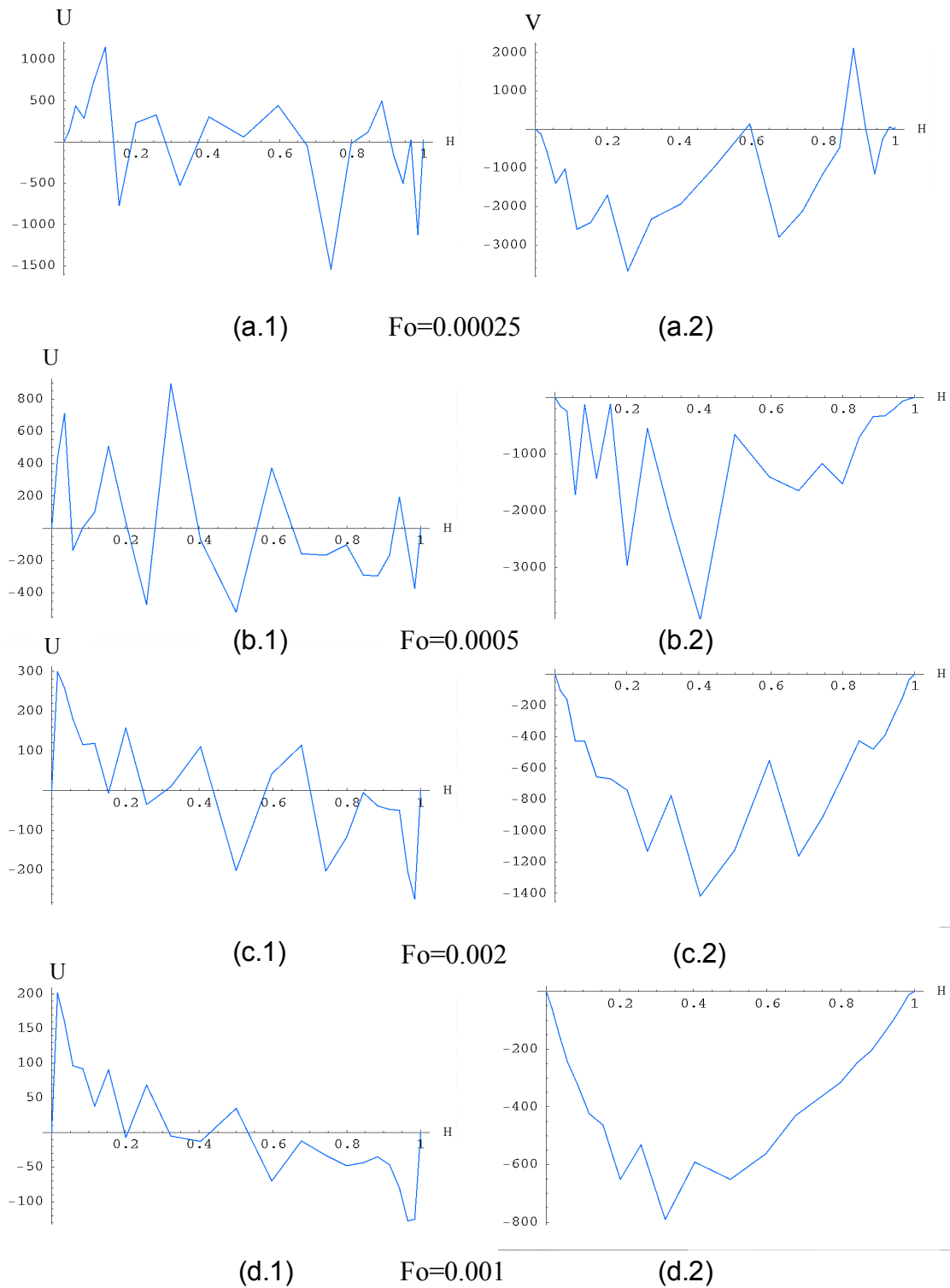


Figura 4.30. Perfis de velocidades horizontais e verticais adimensionais com a altura. Tanque sem parede direcionadora, para razão de aspecto 4 e  $Ra=5 \times 10^8$ .

Para  $Ra=5 \times 10^8$ , em todas as razões de aspecto analisadas se mantém altura unitária, ou seja, qualquer redução no raio reduzirá a área da face aquecida. A área da face aquecida se reduz com o quadrado do raio e por sua vez o volume do reservatório se reduz com o cubo do raio. Quando se aumenta a razão de aspecto de 3,0 para 4,0 o aquecimento é mais rápido mesmo sendo área de aquecimento menor.

A figura 4.30 apresenta as variações das velocidades horizontais (4.30 (a.1), 4.30 (b.1), 4.30 (c.1) e 4.30 (d.1)) e verticais (4.30 (a.2), 4.30 (b.2), 4.30 (c.2) e 4.30 (d.2)) para razão de aspecto quatro; a reta vertical de análise agora passa no raio igual a 0,0675.

A comparação da figura 4.30, para razão de aspecto 4,0, com a figura 4.17 ressalta algumas diferenças como maiores velocidades axiais e sensivelmente menores velocidades radiais para a razão de aspecto quatro em todos os números de Fourier.

A própria razão de aspecto, mais estreita e portanto, com maior gradiente radial de temperatura, faz com que o fluido no tanque se aqueça mais rápido nesse sentido e as velocidades radiais diminuem se comparadas com a de um tanque de maior diâmetro no mesmo instante.

Com a redução da razão de aspecto toda a energia transmitida em uma menor parede lateral flui através de um novo volume menor ainda. A área diminui cerca de 25% enquanto o volume se reduz em cerca de 45%. e, como a energia aplicada é proporcional à área, tem-se mais energia por unidade de volume em razões de aspecto menores. Parte dessa energia é conseqüentemente convertida na forma cinética e as velocidades axiais resultantes são aumentadas.

O maior gradiente radial de temperaturas associado ao menor volume da razão de aspecto quatro é explicitado comparando-se as figuras 4.31 e 4.19 onde são dispostos 16 perfis de temperaturas na reta que passa por  $R=0,0675$  com incremento de 0,00025 nos números de Fourier de zero até 0,002. Observa-se na figura 4.31 que para esta razão de aspecto as curvas em cada instante estão mais aglomeradas à direita denotando que o aquecimento é mais rápido.

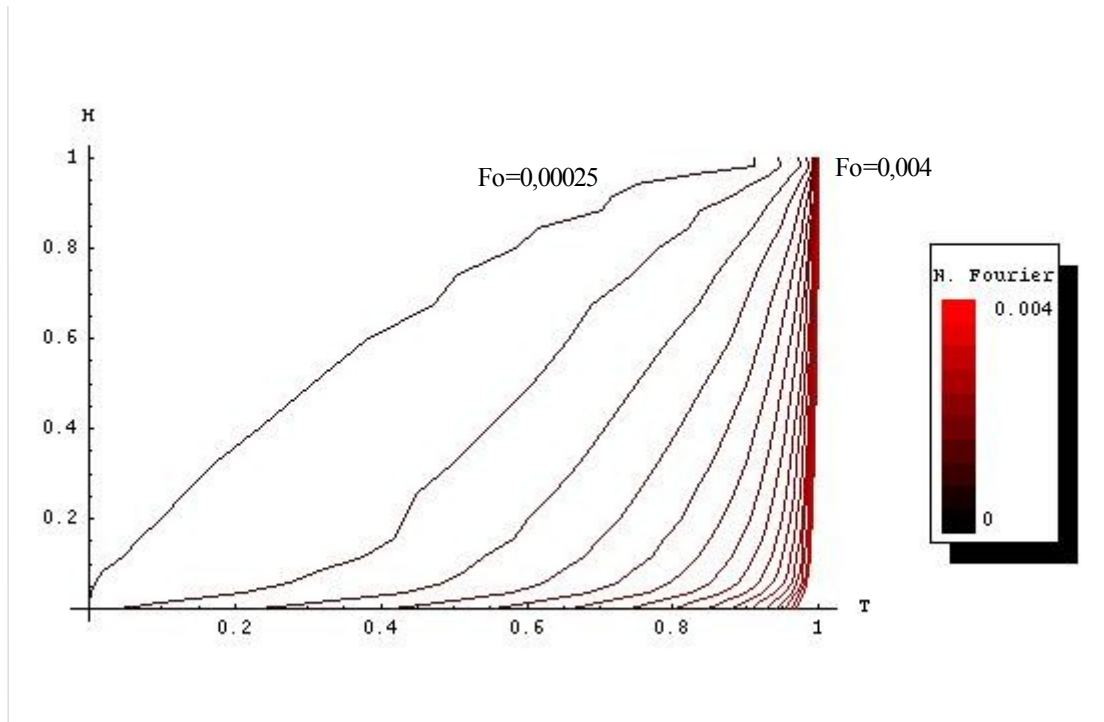


Figura 4.31. Variações das temperatura de centro com a altura para 16  $Fo$ . Tanque sem parede direcionadora, de razão de aspecto 4 e  $Ra=5 \times 10^8$ .

A fim de se verificar as velocidades de carga em reservatórios de quatro razões de aspecto em três números de Rayleigh diferentes apresentam-se as figuras 4.32 e 4.33. Na figura 4.32 mostra-se a evolução das temperaturas de mistura para razão de aspecto cinco (figura 4.32(a)), quatro (figura 4.32 (b)) e três e meio (figura 4.32 (c)) para número de Rayleigh  $5 \times 10^8$ . Na figura 4.33 mostra-se a evolução das temperaturas de mistura para para número de Rayleigh igual a  $5 \times 10^8$  (figura 4.33(a)),  $5 \times 10^7$  (figura 4.33(b)) e  $2 \times 10^6$  para razão de aspecto 3,0.

Verifica-se nas figuras que razões de aspecto menores (menores volumes) obviamente tem incrementos maiores da temperatura de mistura. A diferença entre as curvas principalmente na região próxima à  $Fo=0,001$  se deve às crescentes velocidades verticais de razões de aspecto menores, o que favorece a convecção natural. Os tanques com razões de aspecto menores sempre chegam à estabilidade (temperatura de mistura unitária) em instantes menores em relação aos de razões de aspecto maiores devido à maior energia aplicada por volume. A cavidade de razão de aspecto 4,0 portanto, se estabilizou antes que a cavidade de 3,0.

Para números de Rayleigh menores (figuras 4.33 (b) e 4.33 (c)) se observa diminuição expressiva dos efeitos convectivos.

A modificação da diferença de temperaturas (e conseqüentemente do número de Rayleigh) provoca efeitos muito mais acentuados do que a variação da razão de aspecto no que diz respeito ao tempo de carga de um reservatório.

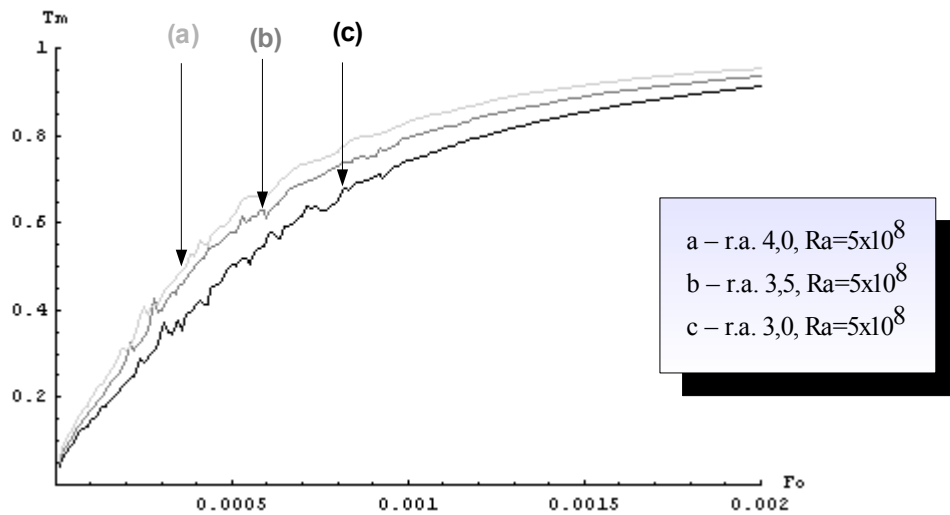


Figura 4.32. Variação transiente das temperaturas de mistura para diferentes razões de aspecto (r.a.)

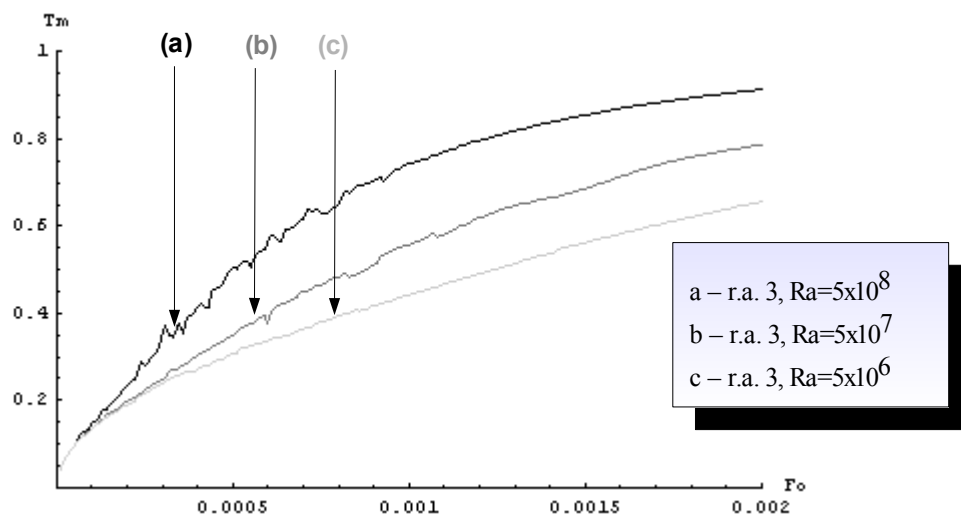


Figura 4.33. Variação transiente das temperaturas de mistura para três  $Ra$ .



#### 4.4- Teste de malha com parede direcionadora

No código de pré-processamento para geração de malha é dividida a geometria em seis superelementos, numerados como apresentados na figura 4.34 de zero a cinco, da mesma forma que foram inseridos no módulo de geração de malha. Para representação da malha será usada a notação (A-B)x(C-D-E) onde A e B são o número de subdivisões dos superelementos em r e C, D e E representam o número de subdivisões destes em z. Lembrando-se do capítulo três, a parede direcionadora está entre os elementos 1 e 4, e tem altura  $ms-m_i$ , localizada em uma reta vertical que passa pelo raio  $R_m$ .

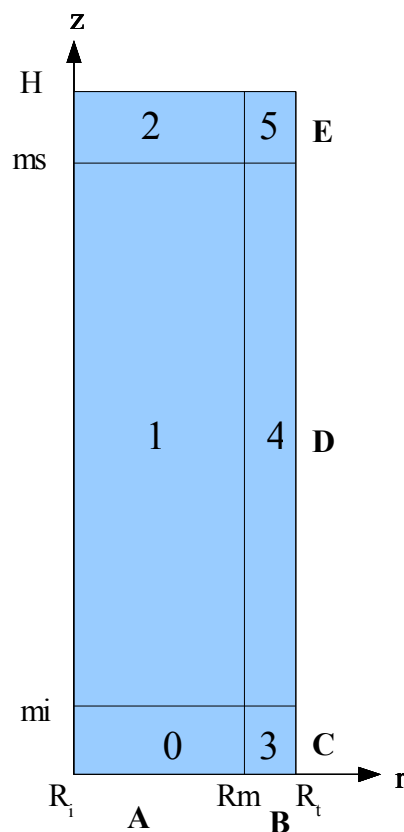
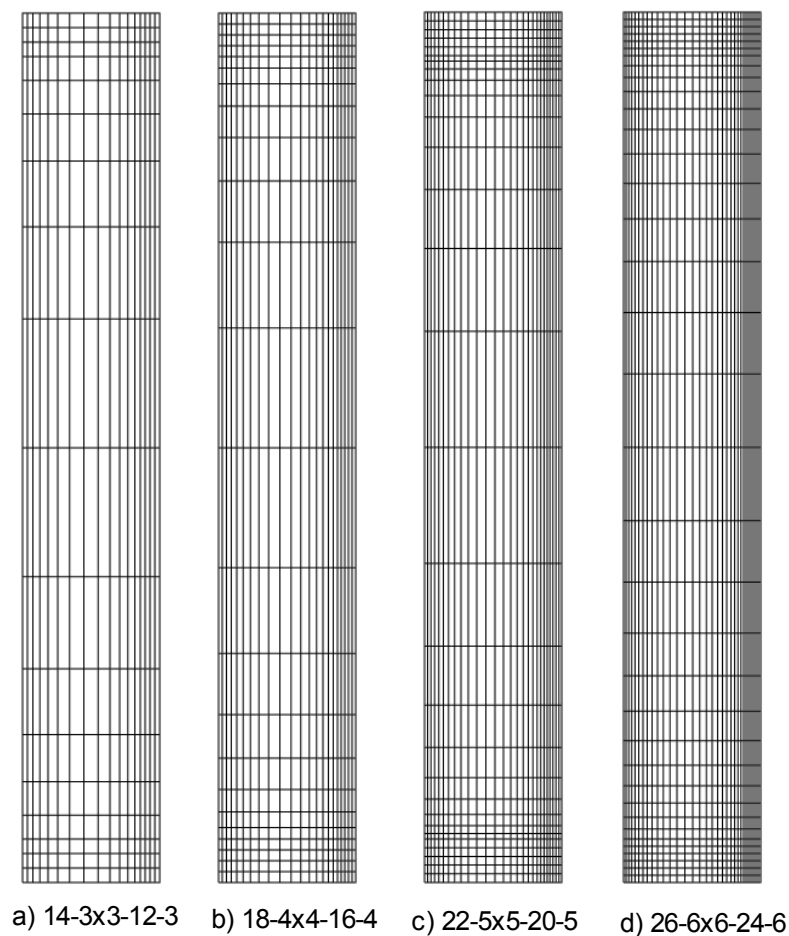


Figura 4.34. Superelementos que constituem a geometria com parede direcionadora. A, B, C, D e E indicam as subdivisões nos eixos r e z.

Na figura 4.35 se apresentam as quatro malhas testadas para o reservatório de razão de aspecto 3 com parede direcionadora interna para número de Rayleigh  $5 \times 10^8$  e posicionamento da parede direcionadora em 90% do raio ( $0,1503 \times H$  de um raio total de  $0,167 \times H$ ). A taxa de deformação do superelemento quatro é limitada pela deformação do superelemento um, pois o código computacional exige que a largura dos elementos adjacentes à fronteira entre os superelementos quatro e um tenham larguras semelhantes.



*Figura 4.35. Malhas para razão de aspecto 3 com parede direcionadora de altura igual a  $0,9$  posicionada a  $0,9 \times R_t$*

O superelemento quatro, pelo fato de já ser bem estreito não necessita de ser deformado, optando-se assim pela taxa de deformação nula (1,0). Dessa forma seus elementos têm a máxima largura possível e a deformação do superelemento um fica dependente da deformação do superelemento quatro devido às restrições anteriormente explicadas.

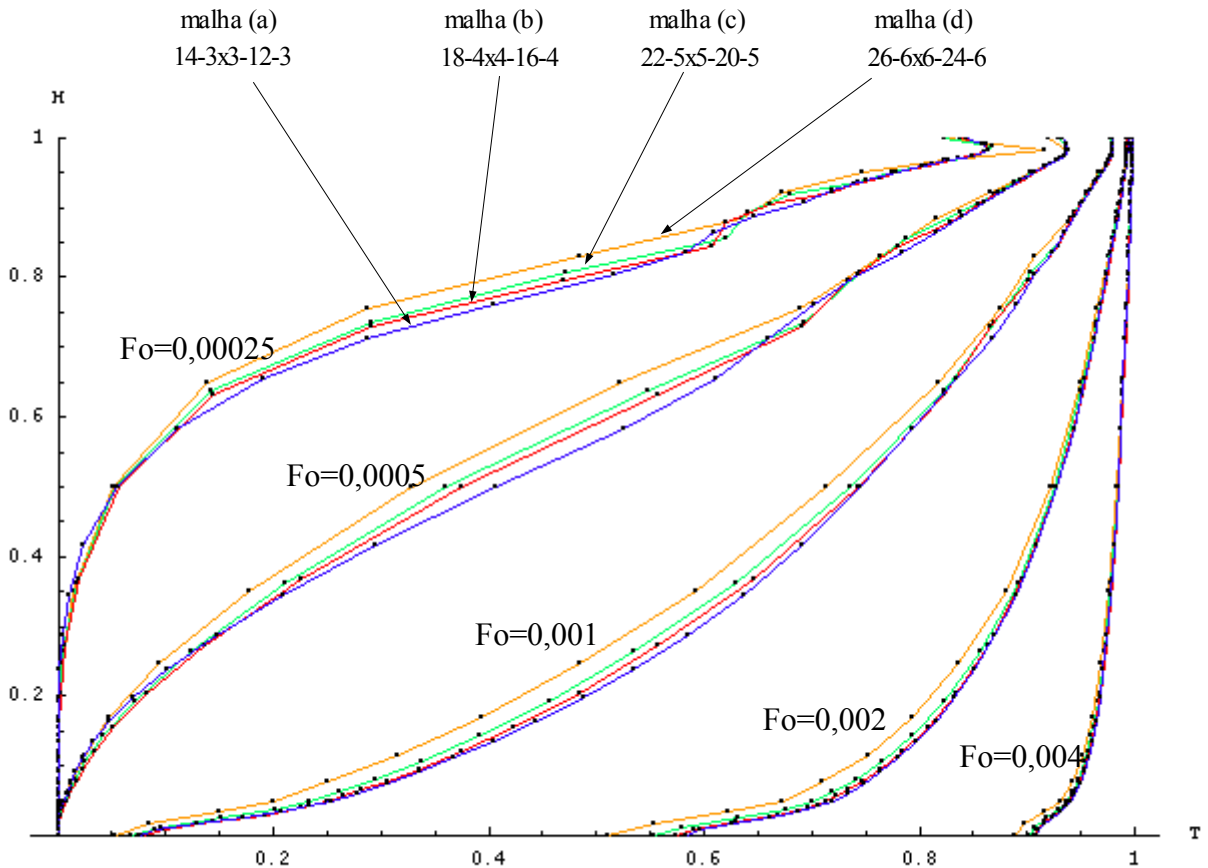


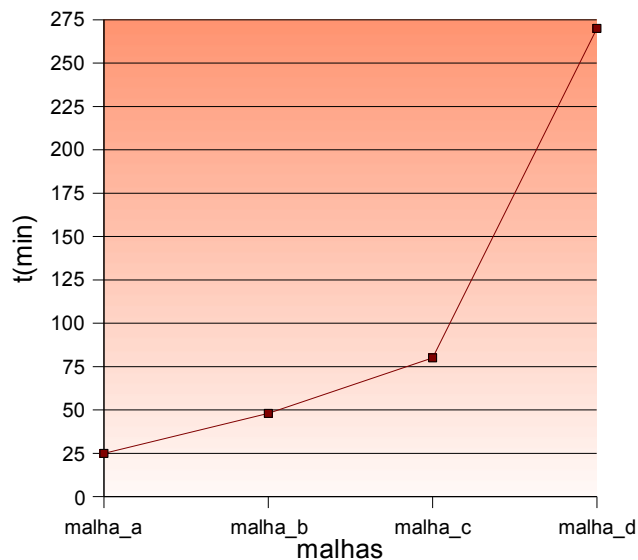
Figura 4.36. Variação das temperaturas com a altura em  $R=0,08015$  para as malhas testadas com parede direcionadora a 90% de  $R_i$

O teste de malha é realizado sobre uma linha que passa verticalmente na metade da distância entre o início da geometria (0,01) e a parede direcionadora (0,1503) o que equivale a 0,08015 do centro do tanque. Nessa linha são analisadas as variações das temperaturas da base ao topo ( 0 a H ) em quatro números de Fourier para cada uma das quatro malhas e dispostas em um gráfico único, como anteriormente feito para o tanque sem parede direcionadora. Para se padronizar os números de Fourier são os mesmos testados para o tanque sem parede direcionadora ( $Fo=0,00025$ ,  $Fo=0,0005$ ,  $Fo=0,001$  e  $Fo=0,002$ ). Os resultados são apresentados na figura 4.36.

Prontamente se vê que no caso com parede direcionadora não devem haver recirculações na área central visto que todas as curvas apresentam um mesmo comportamento. Não são testadas malhas com refinamento superior por esse motivo.

Os tempos de processamento para as malhas testadas são apresentados na figura 4.37. Pelos gráficos observa-se que o refinamento da malha influi muito para o

aumento do tempo de processamento. Observa-se pela figura 4.36 que a importância do refinamento, visto que a análise não necessita de um grau de precisão elevado, é pequena; dessa forma escolher-se-á então a malha (b), que se assemelha bem às malhas (c) e (d), mais refinadas, e não apresenta comportamentos anômalos como a malha (a) no topo em instantes iniciais. Nessa mesma figura pode-se observar que o desenvolvimento do perfil no topo apresenta uma visível protuberância que vai sumindo com o passar do tempo. Tal evolução localizada se deve à bolsões de água fria que permanecem por inércia em sua posição próximo ao topo e se aquecem aos poucos por condução.



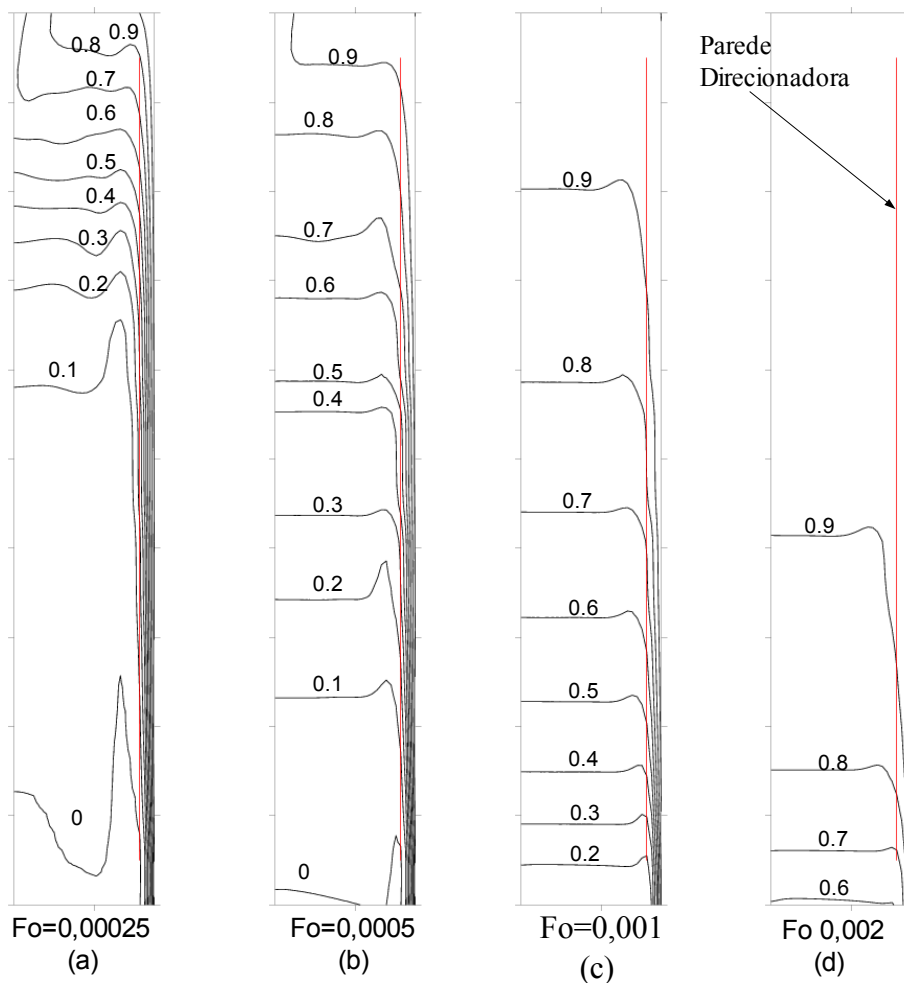
*Figura 4.37. Tempo de processamento para as malhas com parede direcionadora.*

#### ***4.5- Análise transiente do aquecimento com parede direcionadora***

Nessa seção analisa-se a influência na convecção de fluido com a inserção de uma parede direcionadora interna em uma cavidade cilíndrica adiabática em seu topo e base e com paredes verticais à temperatura constante. A parede direcionadora consiste de uma casca cilíndrica interna concêntrica à cavidade, posicionada verticalmente à igual distância do topo e da base e radialmente à uma distancia menor que o raio da cavidade.

Considera-se feita de material condutor e portanto serve somente para direcionar a convecção, evitando a formação de recirculações e vorticidades próximas à parede da cavidade. Estas são prejudiciais à estratificação e são verificadas na cavidade sem parede direcionadora em números de Rayleigh próximos ao regime turbulento.

A fim de se comparar os perfis de temperaturas e velocidades dos casos com e sem parede direcionadora empreendem-se doravante simulações com diversas alturas e posicionamentos desta, todas em número de Rayleigh igual a  $5,0 \times 10^8$ .



*Figura 4.38. Perfis de temperaturas para tanque com parede direcionadora com altura igual a 0,9 em  $R=0,1503$ .*

A figura 4.38 apresenta o campo de temperaturas de um reservatório de razão de aspecto 3,0 com parede direcionadora de altura 0,9 posicionada em  $R=0,9xR_t$  nos instantes  $Fo=0,00025$  (figura 4.38(a)), 0,0005 (figura 4.38(b)), 0,001 (figura 4.38(c)) e

0,002(figura 4.38(d)). Comparando-se com o perfil da mesma razão de aspecto para o caso sem parede direcionadora observa-se uma estratificação já bem definida para  $Fo=0,00025$ . Em instantes posteriores observa-se comportamento semelhante entre as termoclinas.

Na figura 4.39 se apresentam os perfis de velocidade para os quatro instantes analisados na figura 4.38. Em todas as figuras nota-se a ausência de vorticidades junto à parede, características do tanque sem parede direcionadora. As velocidades no espaço entre essa casca cilíndrica direcionadora e a parede aquecida são predominantemente verticais e com altos valores.

Analisando-se o sentido do fluxo próximo à superfície interna da parede direcionadora chega-se a algumas conclusões. O fluxo nessa região se dirige ao topo do reservatório quando a parede interna está suficientemente aquecida para imprimir força de empuxo às moléculas. Em contrapartida, os efeitos da recirculação proporcionados pelo aquecimento junto à parede aquecida imprimem força descendente.

O estudo do sentido do fluxo na região interna próxima à parede direcionadora deve ser baseado no número de Rayleigh e na distância entre a parede direcionadora e a superfície aquecida. Quando a temperatura da parede aquecida (e consequentemente o número de Rayleigh) é maior que um limite existe uma tendência do fluxo na região em estudo se mover para o fundo do tanque. Quando a distância entre a parede direcionadora e a parede aquecida é menor que uma distância crítica o aquecimento da parede direcionadora é suficiente para impedir esse movimento descendente. Contudo, quando se distancia a parede direcionadora da superfície aquecida, a ponto dos dois efeitos, ascendente e descendente, se contrabalancearem e o fluxo ascendente se anular na região interna da parede direcionadora, existe a possibilidade de o espaço entre elas ser tão grande que podem ser formadas vorticidades junto à parede aquecida, como foi visto no caso do tanque sem parede direcionadora.

A formação de um fluxo ascendente na superfície interna da parede direcionadora, portanto, é sinal de boa configuração desde que ele tenha baixas velocidades para não originar vorticidades. Já a ocorrência de fluxo descendente na região em análise garante que a parede direcionadora está muito longe, o que representa fator negativo.

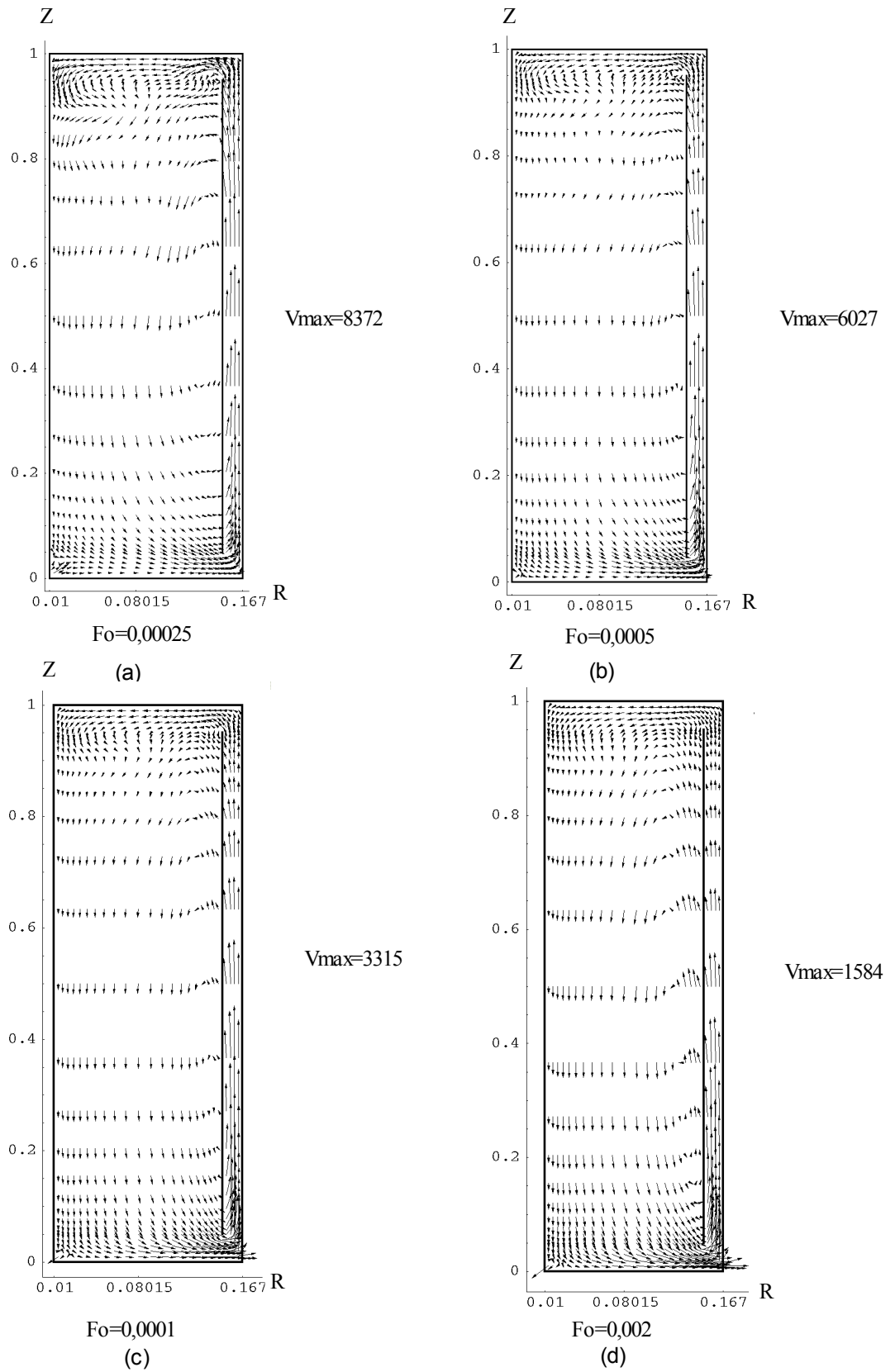
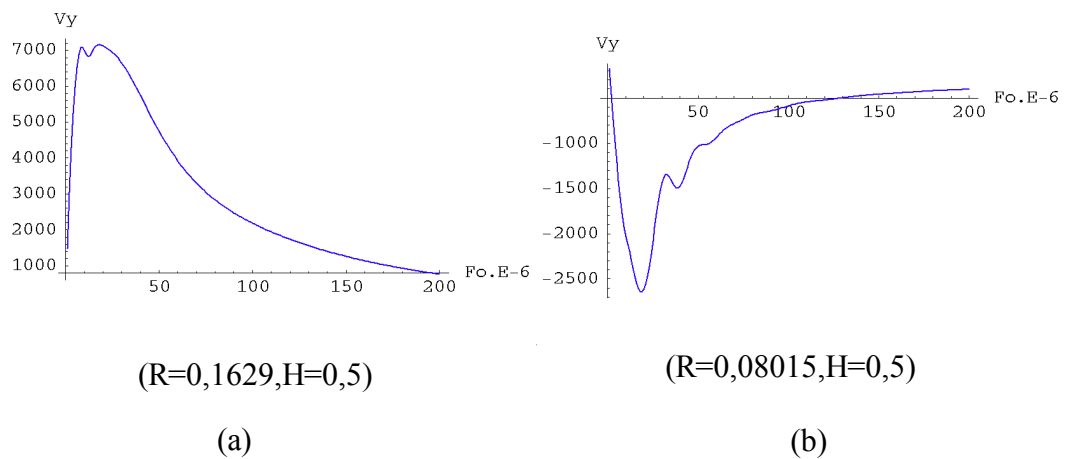


Figura 4.39: Perfis de velocidades adimensionais para os  $Fo$  indicados. Tanque com parede direcionadora de altura igual a 0,9 em  $R=0,1503$ .

Tendo por objetivo verificar a ocorrência de recirculações e vorticidades na figura 4.40(a) se faz análise transiente das velocidades verticais em um ponto muito próximo à parede aquecida ( $R=0,1630$  e  $H=0,5$ ) e na figura 4.40(b) em um ponto intermediário entre a parede direcionadora e o início do domínio ( $R=0,01$ ) que se situa em  $R=0,08015$  e  $H=0,5$ . Observa-se que não há a ocorrência das ondas ascendentes próximas à parede aquecida notadas no reservatório sem parede direcionadora. Na figura 4.40(a) as velocidades são ascendentes e na figura 4.40(b) descendentes. O decréscimo das velocidades visto nas figuras remete ao fato de que elas diminuem conforme as temperaturas se uniformizam na cavidade.



*Figura 4.40. Perfis de velocidades verticais adimensionais em um ponto próximo à parede e um ponto central para  $Ra=5 \times 10^8$  e parede direcionadora em  $R=0,1503$  com altura igual a 0,9.*

Para realizar uma análise de recirculações na região entre a parede direcionadora e o centro do reservatório apresenta-se a figura 4.41, onde se tem os perfis de velocidades horizontais e verticais para as posições axiais em  $R=0,08015$  nos instantes  $Fo=0,00025$  (4.41(a)),  $Fo=0,0005$  (4.41(b)),  $Fo=0,001$  (4.41(c)) e  $Fo=0,002$  (4.41(d)). Em todos os perfis de velocidades verticais observa-se um comportamento uniforme, o que não indica presença de recirculações na região central do reservatório. Quanto às velocidades horizontais pode-se dizer que há um comportamento normal, com o fluido se dirigindo para o interior do tanque no topo e em direção à parede aquecida na base.



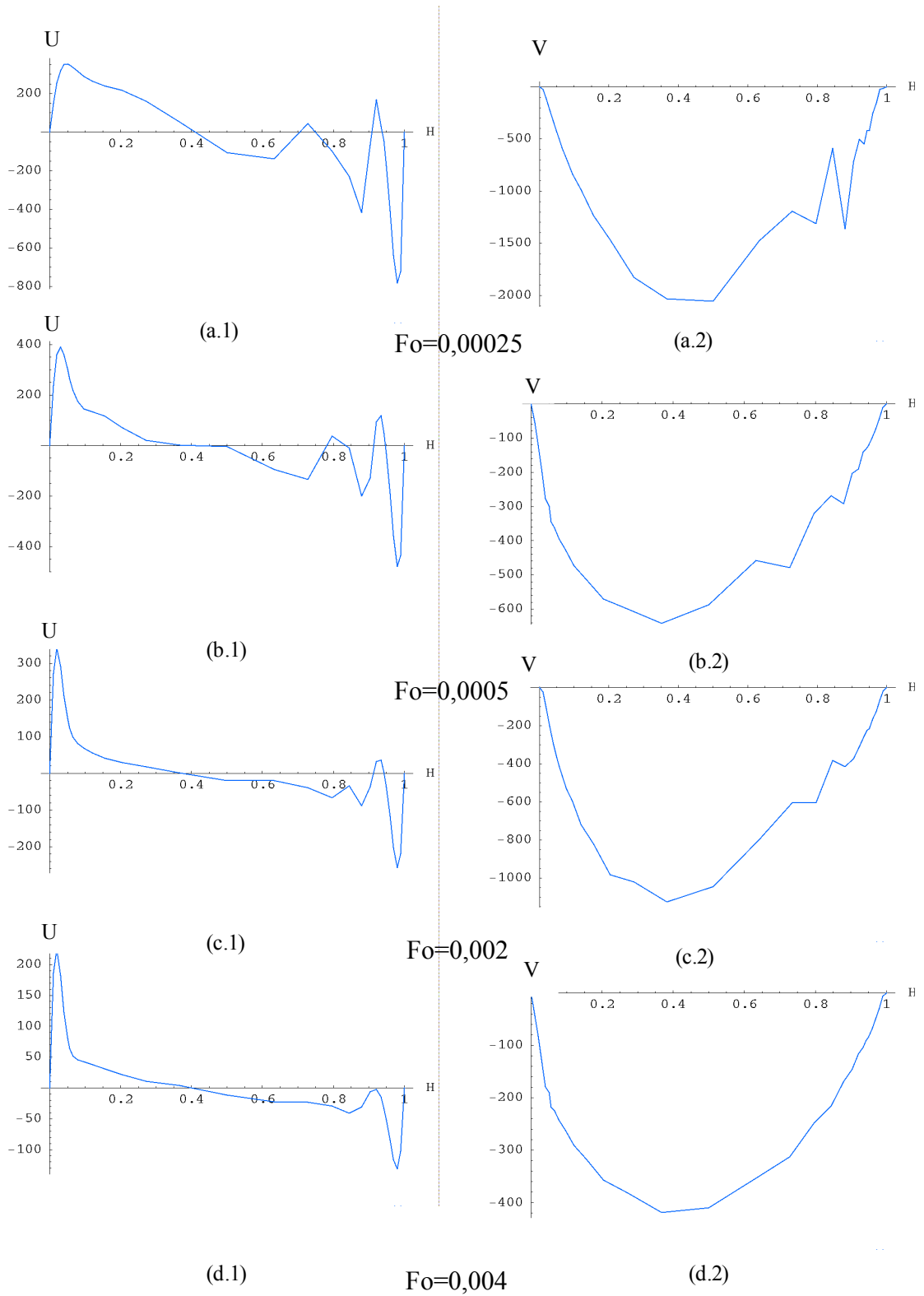


Figura 4.41: Perfis de velocidades horizontais e verticais adimensionais com a altura. Tanque com parede direcionadora em  $R=0,1503$  e altura igual a 0,9.

Diminuindo o raio da parede direcionadora de altura 0,9, de forma que ela se situe agora em  $R=0,1169$  (70% do raio total) é feita análise dos perfis de temperaturas em quatro instantes na figura 4.42.

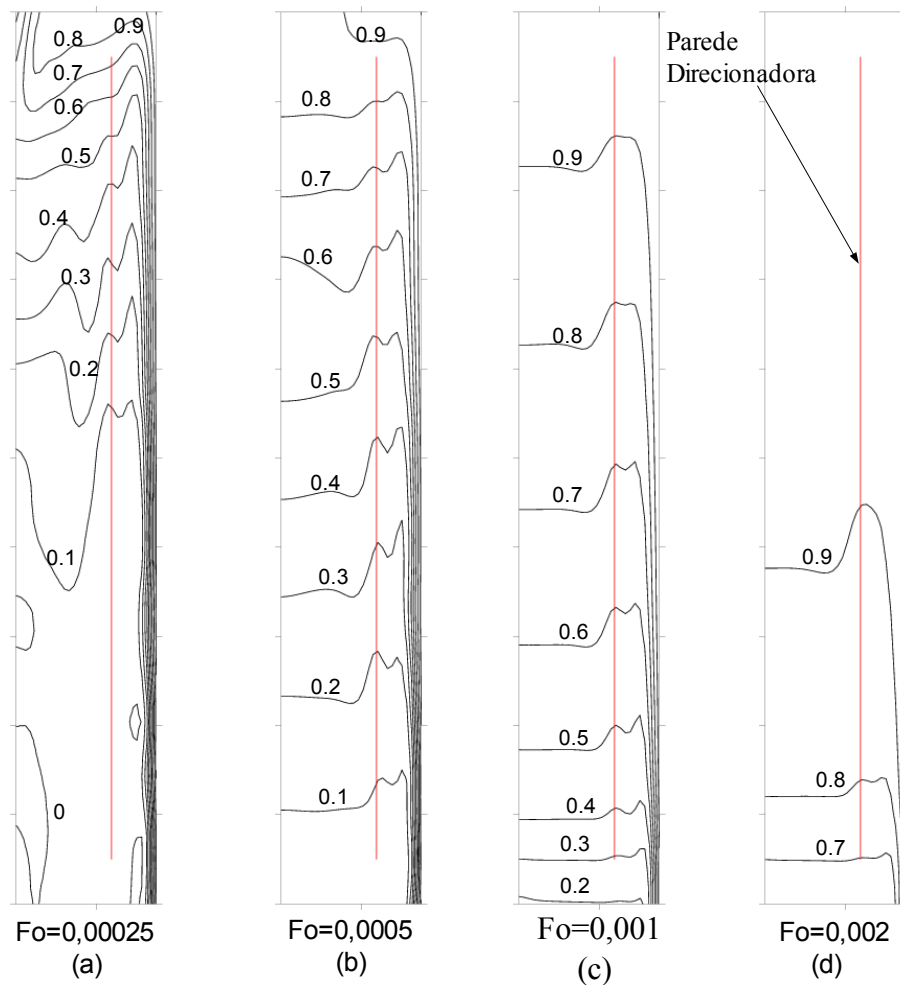


Figura 4.42. Perfis de temperaturas para tanque com parede direcionadora com altura igual a 0,9 em  $R=0,1169$ .

Constata-se que há um comportamento desordenado das termoclinas na figura 4.42(a) o que indica baixa estratificação neste instante. Nos outros instantes evidencia-se o fluido bem estratificado.

Na figura 4.43 estuda-se o campo de velocidades nos mesmos instantes analisados na figura 4.42 ( $Fo=0,00025$  na figura 4.43(a),  $Fo=0,0005$  na figura 4.43(b),  $Fo=0,001$  na figura 4.43(c) e  $Fo=0,002$  na figura 4.43(d)). Recirculações aparecem entre a parede direcionadora e a parede aquecida decorrentes do grande espaço entre elas. Tais recirculações são responsáveis pela baixa estratificação apresentada em 4.42(a).

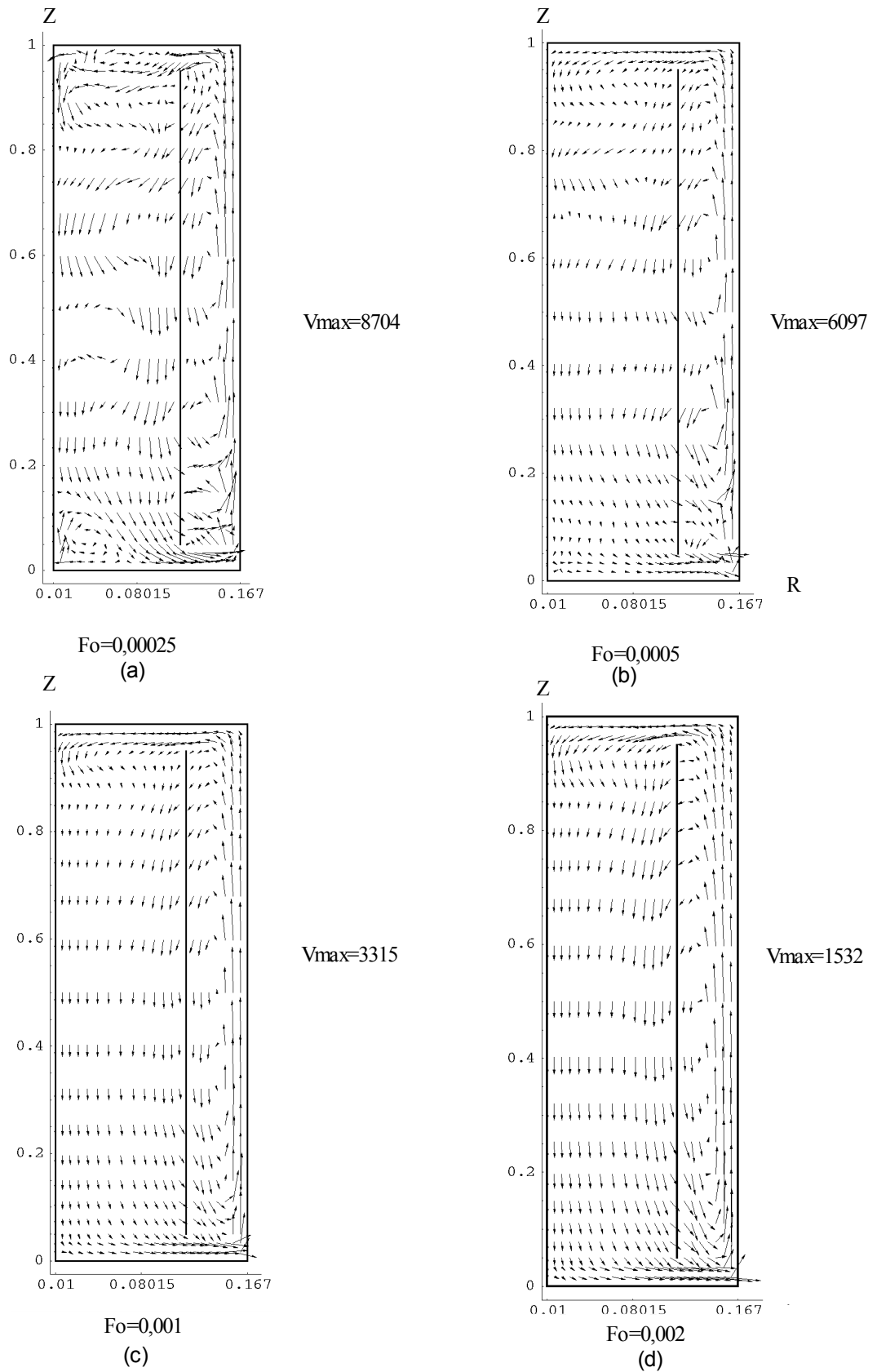


Figura 4.43. Perfis de velocidades adimensionais para os  $Fo$  indicados. Reservatório com parede direcionadora de altura igual a 0,9 em  $R=0,1169$ .

Buscando-se a ocorrência de ondas ascendentes próximas à parede aquecida realiza-se na figura 4.44 um estudo da variação das velocidades axiais ao longo do tempo. Na figura 4.44(a) o ponto localiza-se próximo à parede e na figura 4.44(b) o ponto em estudo situa-se em uma reta intermediária entre a parede direcionadora e o centro do reservatório. O instante máximo é  $Fo=0,002$ . Nota-se que se reduzindo o raio da parede direcionadora para 70% do raio total ocorre novamente a presença de vorticidades pois a parede direcionadora à essa distância não consegue direcionar o fluxo convectivo propriamente.

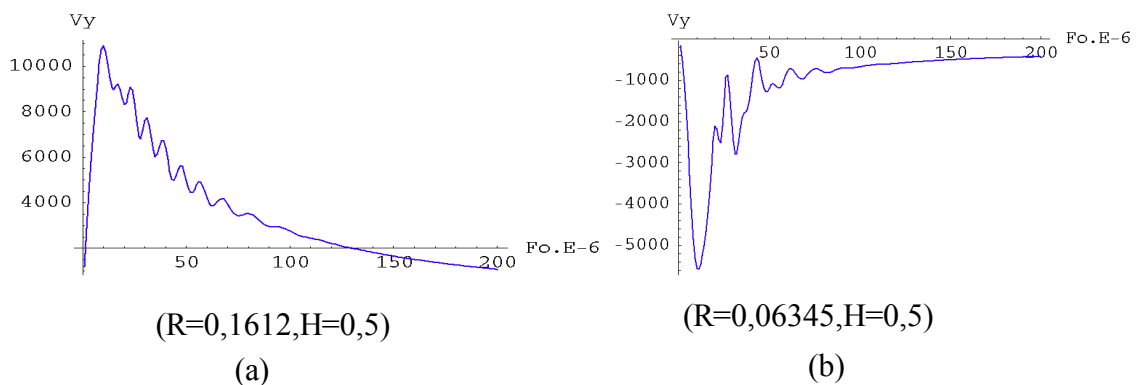
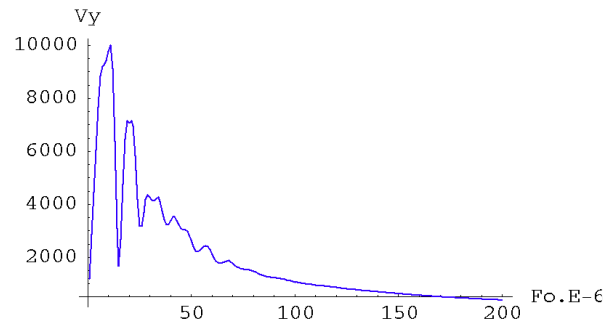


Figura 4.44. Perfis de velocidades verticais adimensionais em um ponto próximo à parede e um ponto central para  $Ra=5 \times 10^8$  e parede direcionadora em  $R=0,1169$  com altura igual a 0,9.

Se a altura da parede direcionadora for reduzida para 0,6 e posicionada no raio da simulação anterior ( $R=0,1169$  ou 70% do raio total) têm-se maiores frequências de onda como se observa na figura 4.45. Nela se mostra a variação das velocidades verticais ao longo do tempo em três pontos próximos à parede aquecida; o primeiro em  $H=0,12$ , o segundo em  $H=0,5$  e o terceiro em  $H=0,88$ , todos em  $R=0,1612$ .

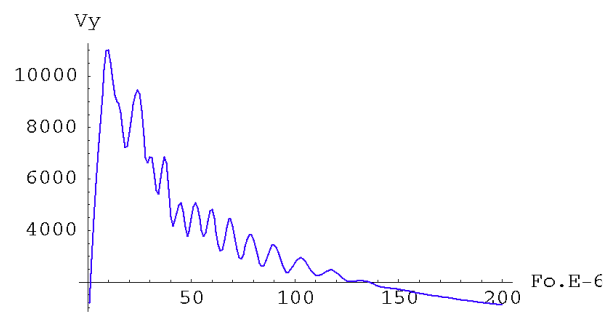
Comparando-se as figuras 4.45 (b) e 4.20 (b) observa-se pouca diferença. Contudo, a análise conduz à conclusão de que na região entre a parede direcionadora e a parede aquecida as vorticidades diminuem. Isso é observado relacionando-se a figura 4.45 (b), que está sob efeito da parede direcionadora, com as figuras 4.45 (a) e 4.45 (c), sem parede direcionadora. Lembrando-se que a extremidade inferior da parede direcionadora está em 0,2 e a superior em 0,8 nesse caso. O primeiro ponto situa-se na altura  $H=0,88$ , o

segundo em  $H=0,5$  e o terceiro em  $H=0,12$ .



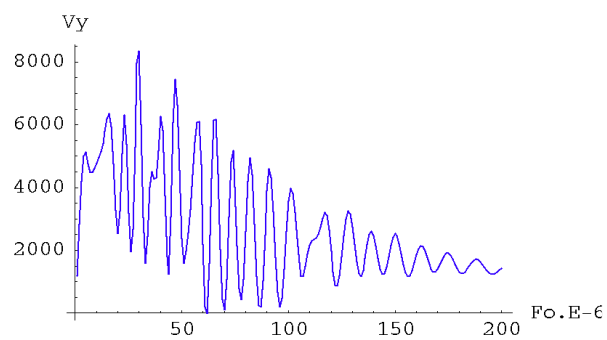
( $R=0,1612$ ,  $H=0,88$ )...

(a)



( $R=0,1612$ ,  $H=0,5$ )

(b)

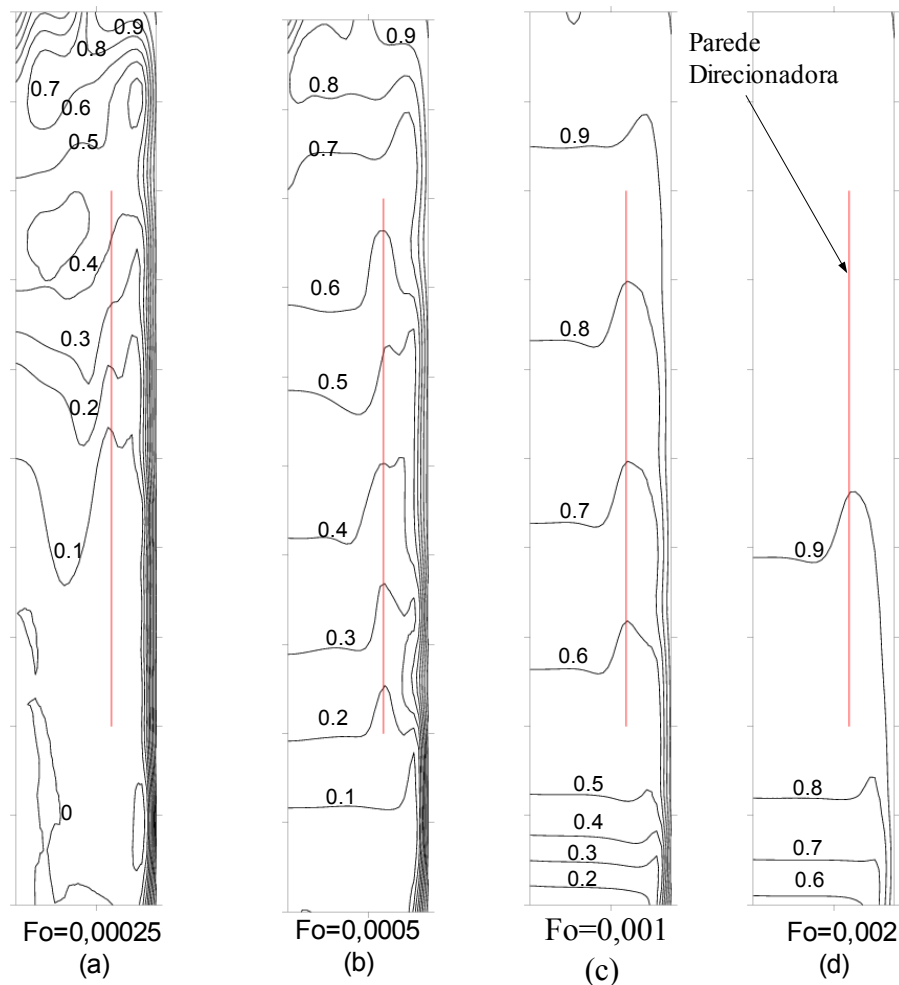


( $R=0,1612$ ,  $H=0,12$ )

(c)

*Figura 4.45. Variação das velocidades verticais adimensionais com o tempo em três pontos próximos à parede aquecida do reservatório em questão.*

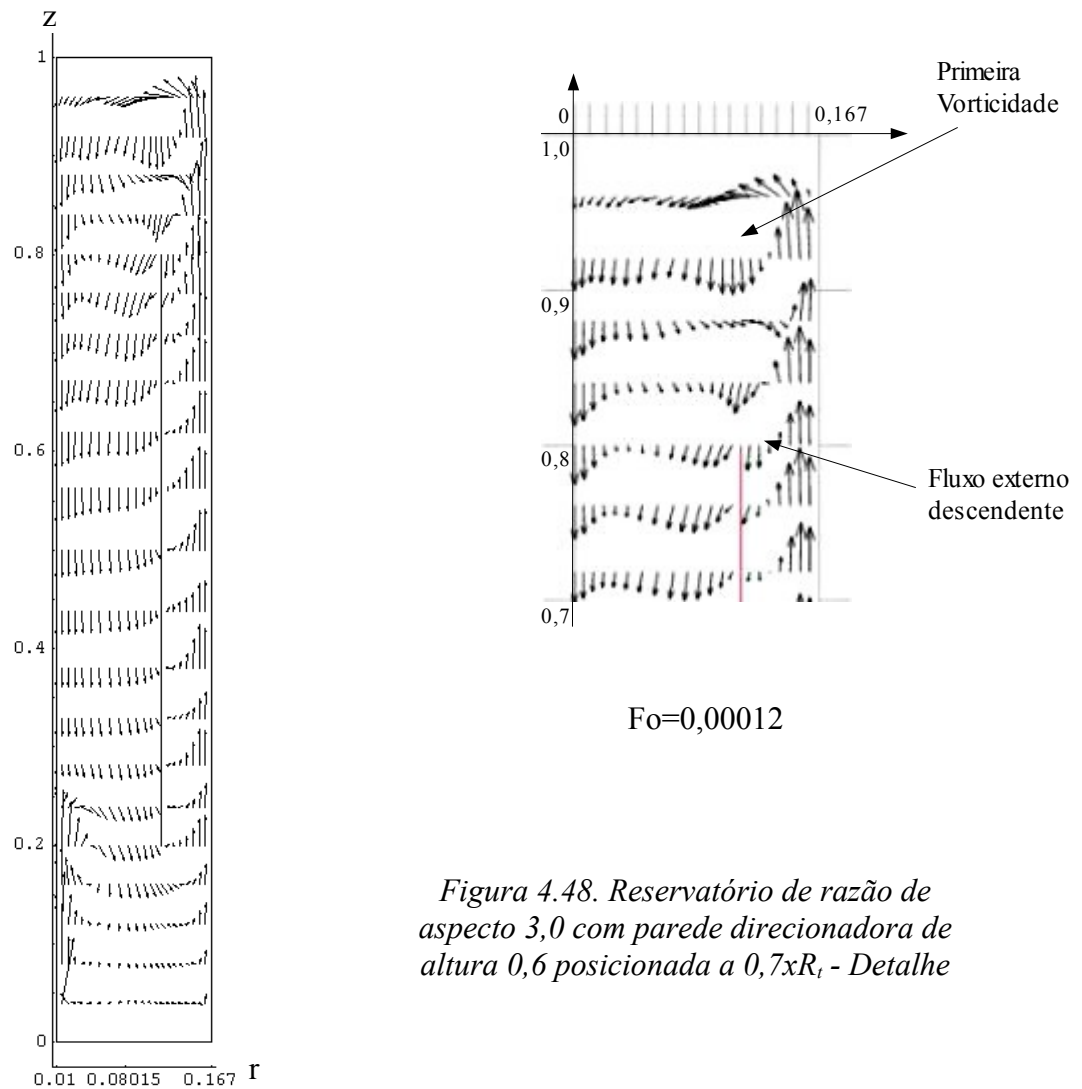
Na figura 4.46 observa-se a ineficácia da disposição da parede direcionadora no raio igual a 0,1169 em relação a estratificação. Verifica-se novamente a direta interação entre as recirculações provocadas pela diminuição da altura da parede direcionadora e a destruição da estratificação. A parede direcionadora, neste caso, além de estar radialmente muito longe, é baixa e não evita que ocorra o aparecimento de células convectivas entre ela e a parede aquecida.



*Figura 4.46. Perfis de temperaturas para tanque com parede direcionadora com altura igual a 0,6 em  $R=0,1169$ .*

Na figura 4.47 se observa uma grande vorticidade decorrente do primeiro impacto do fluido ascendente; ela é vista em detalhe na figura 4.48, em malha 40x40. Essa vorticidade, já analisada no caso sem parede direcionadora, origina as ondas axiais detalhadas nas figuras 4.25 e 4.26. No caso com parede direcionadora com raios pequenos

ela fica livre para propagar recirculações descendentes entre a parede direcionadora e a parede aquecida como é visto no detalhe da figura 4.47.

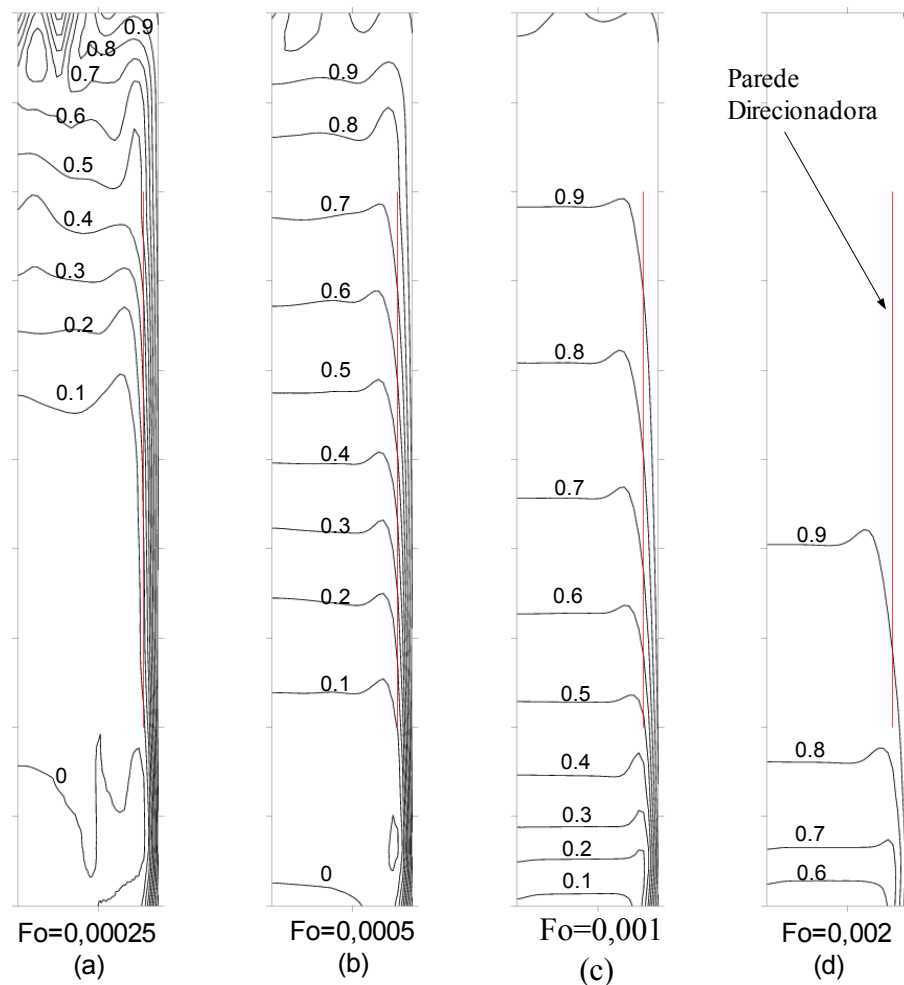


*Figura 4.48. Reservatório de razão de aspecto 3,0 com parede direcionadora de altura 0,6 posicionada a  $0,7xR_i$  - Detalhe*

*Figura 4.47: Reservatório de razão de aspecto 3,0 com parede direcionadora de altura 0,6 posicionada a  $0,7xR_i$*

Um fato de maior importância que deve ser destacado é a existência de fluxo descendente externo à parede direcionadora, o qual causa instabilidades na dispersão radial ascendente. Isso sempre ocorre quando a parede direcionadora está à grande distância da parede aquecida.

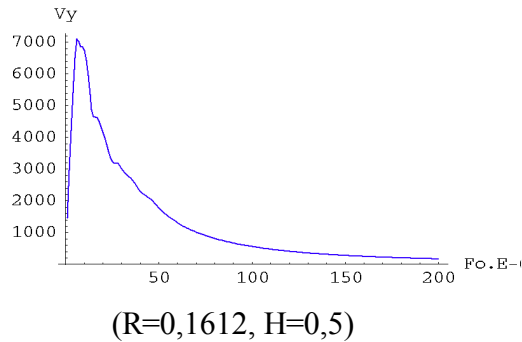
Simulando-se agora o caso de uma parede direcionadora baixa contudo bem próxima à parede têm-se a figura 4.49. Nela dispõe-se os perfis de temperaturas para a parede direcionadora posicionada no raio a 90% do raio total e com altura igual a 0,7. Nessa disposição, mesmo existindo o choque diagonal apresentado em 4.48, não há como as vorticidades se formarem no estreito espaço entre a parede direcionadora e a parede aquecida, onde a velocidade do fluxo ascendente é muito grande.



*Figura 4.49. Perfis de temperaturas para tanque com parede direcionadora com altura igual a 0,6 em  $R=0,1503$ .*

Na figura 4.50 estuda-se a formação das ondas axiais em uma análise da variação transiente das velocidades axiais de  $Fo=0$  a  $Fo=0,002$  medidas no ponto ( $R=0,1612$ ,  $H=0,5$ ) para reservatório com parede direcionadora de altura igual a 0,6 em  $R=0,1503$ . As ondas são formadas novamente mas em frequências de amplitude muito baixas garantindo que a distância da parede direcionadora à parede aquecida é bem mais importante que a altura para a estratificação térmica.





*Figura 4.50. Variação transiente das velocidades verticais adimensionais em ponto próximo à parede aquecida do reservatório citado.*

Nas figuras 4.51(a) e 4.51(b), para refinamentos de malha 22x22 e 40x40 respectivamente, analisam-se as velocidades axiais medidas em uma reta vertical posicionada em  $R=0,159$  no reservatório de razão de aspecto três sem parede direcionadora. Com essa análise se vê que o refinamento de malha influi muito em regiões próximas à parede, onde as velocidades são altas, visto que as variações diminuem de forma notável. O comportamento das velocidades medido na reta em questão nos instantes iniciais, tanto em 4.51(a) quanto em 4.51(b) evidencia variações aleatórias mesmo com o refinamento da malha, que são típicas da turbulência.

Para o mesmo reservatório analisado na figura 4.51 agora se faz uma análise com parede direcionadora da variação transiente das velocidades verticais na mesma reta que passa junto à parede (passando por  $R=0,159$ ). Apresenta-se na figura 4.52(a), 4.52(b) e 4.52(c) o caso com parede direcionadora de altura 0,9 a 90% do raio total, de altura 0,6 a 90% do raio total e de altura 0,95 a 85% do raio total respectivamente.

Um interessante fato a ser notado é o tempo de carga é de 5 a 10% mais rápido com a parede direcionadora de altura 0,9 (cerca de  $Fo=0,0385$  para a parede direcionadoras de altura 0,9 e 0,0405 para as de 0,7), fato decorrente da melhor distribuição de temperatura.

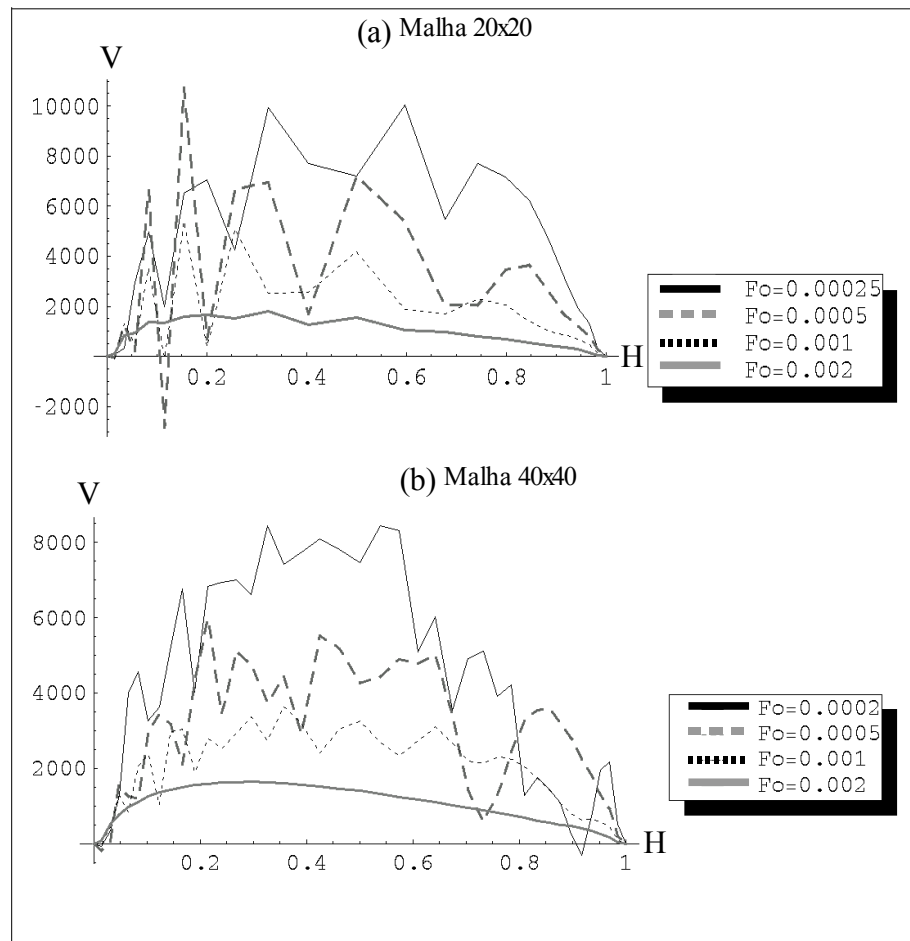


Figura 4.51: Perfis de velocidades axiais adimensionais em  $R=0,159$  para dois refinamentos de malha em tanque sem parede direcionadora.

Os resultados mostram o melhor comportamento do reservatório com parede direcionadora de altura 0,9 a 90% do raio total. Para o caso com parede direcionadora de altura 0,7 a 90% do raio total vemos um comportamento semelhante, mas inferior ao de parede direcionadora de altura 0,95 a 85% do raio total no que diz respeito às variações das velocidades verticais. Este último caso é mostrado na figura 4.52(c).

Contudo não se pôde no presente trabalho definir a posição e altura ótimas da parede direcionadora, as quais tem forte ligação com a camada limite hidrodinâmica. Um melhor estudo de tal fenômeno para determinação da posição e altura ótimas se basearia na supressão do descolamento de tal camada impedindo assim a formação de vorticidades e conseqüentemente de instabilidades numéricas na rotina.

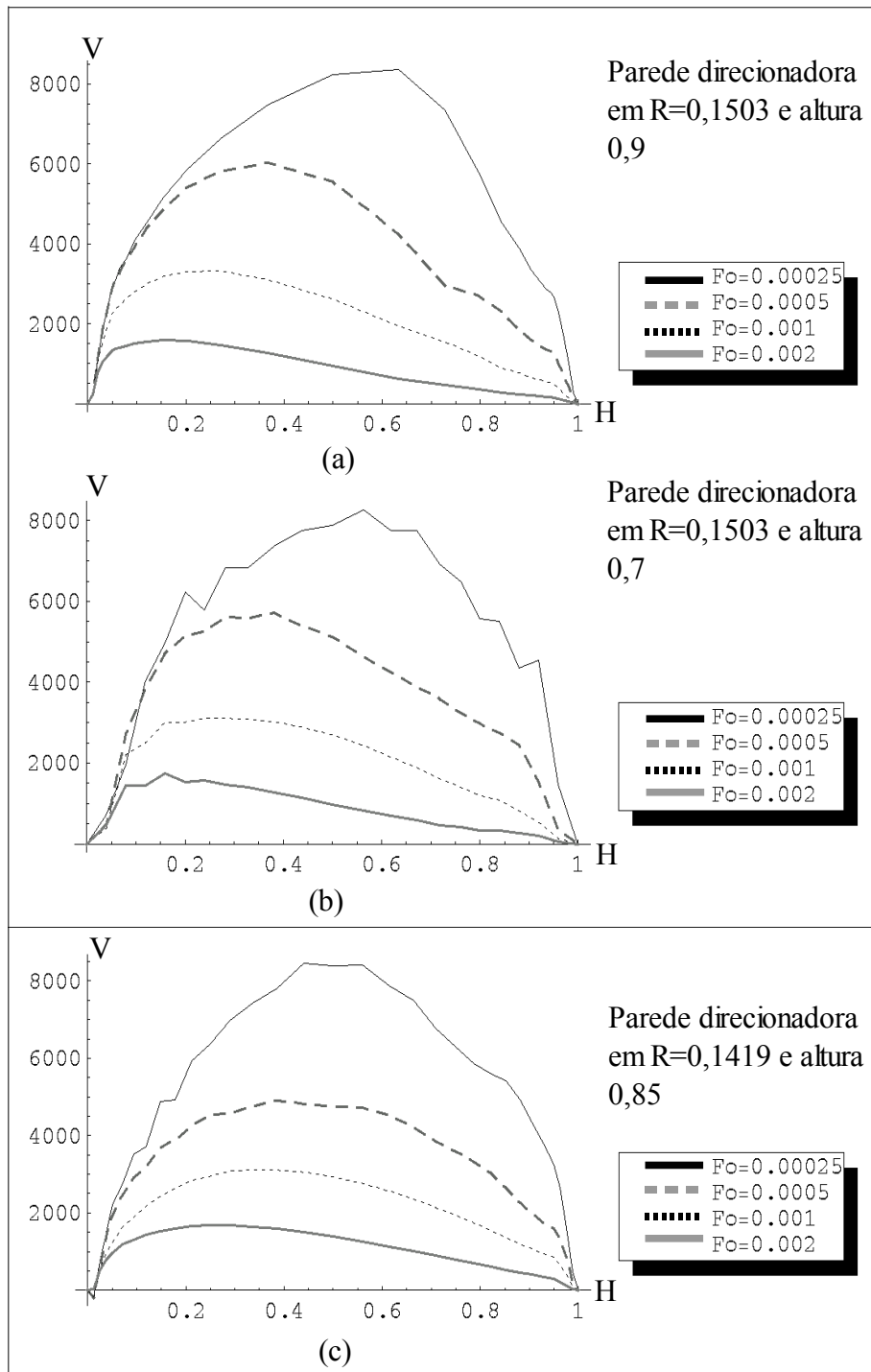


Figura 4.52: Perfis de velocidades axiais em  $R=0,159$  para três paredes direcionadoras tem tanque com razão de aspecto 3 e  $Ra=5 \times 10^8$

Levando-se em conta a área superficial do caso da figura 4.52 (a) que é 0,85, da figura 4.52 (b) que é de 0,66 e a da figura 4.52 (c) que também é 0,85 se nota que o decréscimo da altura da parede direcionadora de 0,9 para 0,6, cerca de 23% não influencia tanto a estabilidade das velocidades próximas à parede. Comparando-se as figuras 4.52 (a) e 4.52 (c), embora ambos casos tenham paredes direcionadoras de igual área, tem-se maior descontrolado da dispersão radial ascendente no último caso. Isto ocorre devido ao aumento do espaço entre a parede aquecida e a parede direcionadora e à maior restrição de saída do fluido do espaço entre elas.

Em nenhum momento no caso da figura 4.52(c) há fluxo descendente externo à parede direcionadora ou fluxo ascendente interno à esta, como se pode verificar na figura 4.53(a), 4.53(b), 4,53(c) e 4,53(d), na qual se apresentam as velocidades nos instantes  $Fo=0,00025$ ,  $Fo=0,0005$ ,  $Fo=0,001$  e  $Fo=0,002$  respectivamente.

Um fato a ser notado são os jatos formados no topo, decorrentes da redução da área e conseqüente aumento de velocidades, observados na figura 4.53(a) principalmente. A área mostrada pela seta 1 na figura 4.53(a), que é o prolongamento do topo da parede direcionadora até o topo do tanque, mede 0,022, e a área mostrada pela seta 2, que é a seção anular entre a parede direcionadora e a parede aquecida, mede 0,024). O jato proporcionado por essa redução de área é visualizado em todas as figuras.

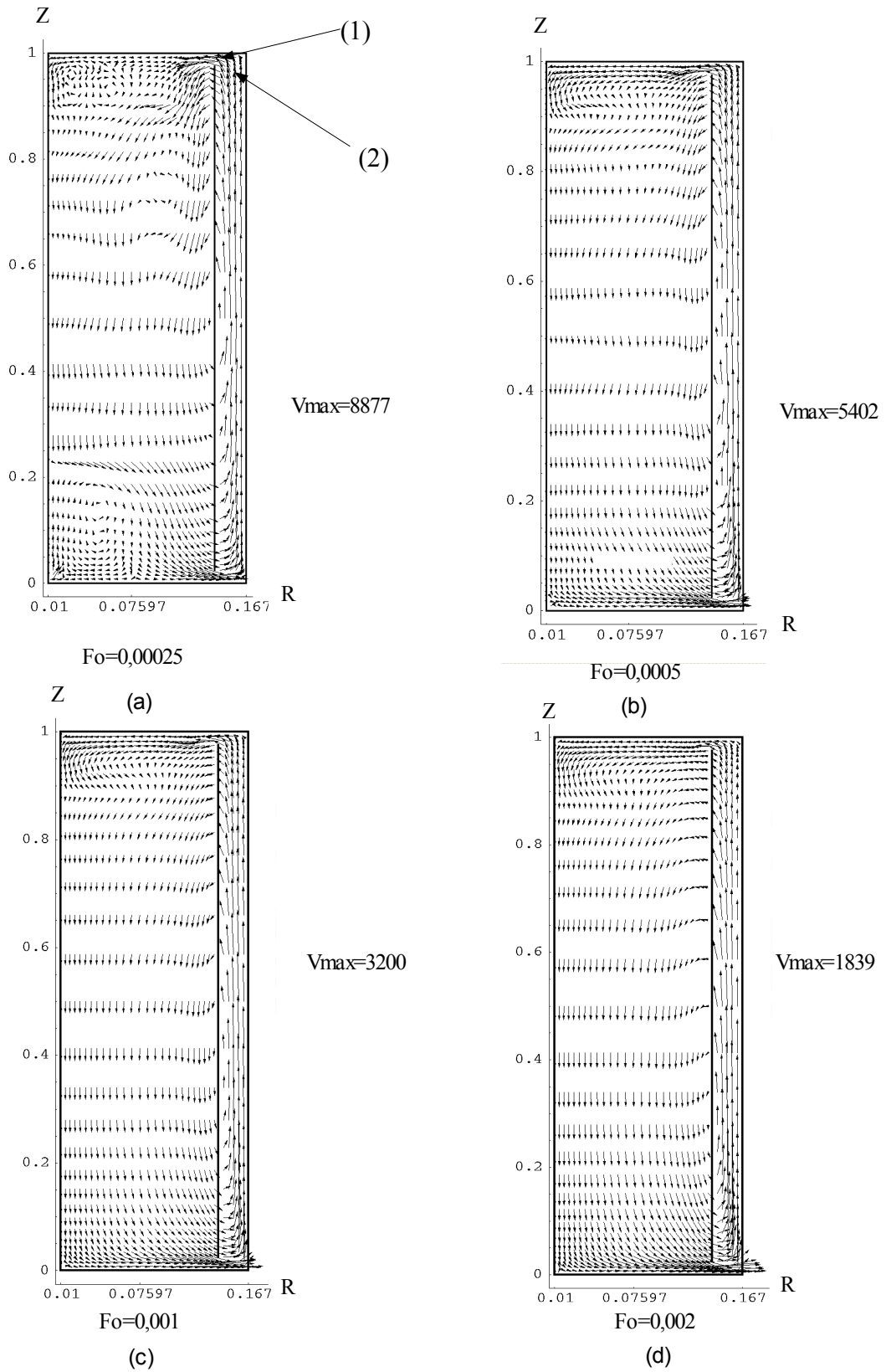


Figura 4.53: Perfis de velocidades adimensionais para os  $Fo$  indicados. Tanque com parede direcionadora de altura igual a 0,95 em  $R=0,1419$ .

## Capítulo 5 - Conclusões e Sugestões

No presente trabalho analisa-se o processo de convecção natural em uma cavidade cilíndrica adiabática em seu topo e fundo e com sua parede lateral à temperatura constante maior que a temperatura admitida inicialmente. Foram verificados aspectos relacionados ao tempo de estabilização total das temperaturas, estratificação e formação de vorticidades. Uma segunda etapa consiste na inserção de uma casca cilíndrica perfeitamente condutora com menor diâmetro e menor altura concêntrica ao tanque e com distâncias iguais entre sua base e a do tanque e entre seu topo e o do tanque.

Com os resultados conclui-se que fatores fundamentais para uma melhor estratificação são:

- Redução do diâmetro do tanque até um quarto da altura: quanto menor o diâmetro do tanque menor o número de recirculações centrais. O limite é ditado por aspectos práticos e pelo limite do mínimo diâmetro ser 0,25 vezes a altura para boa estratificação como cita Padilha (1982); por outro lado quanto maior o diâmetro maior volume de água quente que o sistema acumulará, sem que seja necessário mais tanques e conseqüentemente mais material e componentes.
- Aumento da altura da parede direcionadora: quanto mais alta a parede direcionadora menor será a formação de células convectivas próximas à parede. O limite é dado quando a abertura entre o topo da parede direcionadora e o topo do tanque é pequena a ponto de restringir a saída da dispersão radial. Isso pode desestabilizar a estratificação e provocar o retorno do fluido para o interior da região entre a parede direcionadora e a parede aquecida. A altura ótima é próxima a 0,9 todavia não foi definida com precisão.
- Diminuição do espaço entre a parede direcionadora e a parede aquecida: quanto menor a abertura entre essas duas superfícies menor a chance de ocorrerem recirculações próximas à parede aquecida. A distância ótima entre a parede direcionadora e a parede aquecida é próxima a 0,1 para  $Ra=5 \times 10^8$  contudo não foi definida com precisão.
- Redução da temperatura de aquecimento da parede: quanto menor a temperatura da

parede aquecida menores as velocidades junto à referida parede e menor o número de recirculações próximas à parede aquecida. O valor limite é a temperatura necessária para que se atinja uma temperatura de utilização adequada no topo do reservatório para um tempo pré-estabelecido. Para  $Ra=5 \times 10^8$  se teve ausência de recirculações com parede direcionadora de altura 0,9 posicionada a  $0,9xR_t$  e representa segundo a tabela 4.1 temperatura de 60° Celsius.

O ponto principal em um projeto de um sistema de aquecimento de água coletor solar-armazenador integrados são as velocidades adquiridas pelo fluido junto à parede aquecida. Pelo fato de o escoamento ser turbulento, em uma situação real, altos números de Rayleigh estariam envolvidos e a canalização da dispersão radial é de muita importância para melhoria da estratificação.

Um fato importante é o aparecimento da transição turbulenta entre  $5 \times 10^6$  e  $5 \times 10^7$  para todas as geometrias excetuando-se a com parede direcionadora para altura de 0,9 e raio igual a 0,1509. É interessante contrastar os resultados, com temperatura constante imposta, sem parede direcionadora, com os resultados, para a mesma geometria mas com paredes verticais sob fluxo de calor constante, citados por Hess e Miller (1979). Estes autores estabelecem que a transição se situa entre  $4,5 \times 10^9$  e  $6,4 \times 10^{10}$ .

Observa-se que com a inserção da parede direcionadora, as velocidades horizontais adquiridas pelo fluido nas proximidades da parede lateral, as quais originam as recirculações, se reduziram, principalmente quando posicionada a 90% do raio total, e a estratificação se definiu em tempos menores. Quando a parede é posicionada a cerca de 70% do raio total seus efeitos são desprezíveis. Embora a mínima distância entre a parede direcionadora e a parede aquecida testada tenha sido de 0,0167 (para exemplificação 0,0167 m em um tanque de um metro), ela pode ser diminuída ainda mais em condições reais visto que com maiores números de Rayleigh e conseqüentemente maior empuxo a pluma convectiva será muito mais fina. O maior número de Rayleigh testado,  $5 \times 10^8$ , representa uma diferença de apenas 0,01 Kelvin para as condições da água dadas na tabela 4.1 e um tanque de um metro de altura e o funcionamento do código no regime laminar e transição turbulenta foi testada com sucesso. O tempo de carga para o tanque referido e para as propriedades citadas girou em torno de 25800 segundos para todos os casos sendo mais rápido com paredes direcionadoras mais altas e tanques menores.

Tal geometria é uma primeira aproximação do funcionamento de um sistema de aquecimento de água por coletor solar e tanque integrados; contudo para uma maior similaridade alguns trabalhos posteriores a esse podem ser realizados, sendo de primeira importância a implementação de um modelo de turbulência ao código computacional para se atingir uma condição real com números de Rayleigh da ordem de  $10^{12}$  (quatro mil vezes maior que o máximo testado no presente trabalho). Em segunda instância a condição de contorno de fluxo constante poderia ser imposta na parede lateral.

O desenvolvimento de um modelo tridimensional para análise com fluxo constante em somente um lado também é importante para imprimir condições de incidência solar reais. Poderia, ademais, ser estudada a disposição diagonal do aquecedor, de forma que uma maior área fique exposta ao longo do dia.



## Referências Bibliográficas

ALBERT, M. e O'NEIL, K. Moving Boundary-Moving Mesh Analysis of Phase Change Using Finite Elements with Transfinite Mappings, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 23, p. 591-607, 1986.

ALIZADEH, S. An experimental and numerical study of thermal stratification in a horizontal cylindrical solar storage tank, *Solar Energy*, v. 66, n. 6, p. 409-421, 1999.

AL-MARAFIE, ABBAS, MOUSTAFA, SAFWAT M. AND AL-KANDARIE, ABDULLAH. Factors Affecting Static Stratification of Thermal Water Storage, *Energy Sources*, v. 11, n. 3, p. 183-200, 1989.

BADESCU, V. Optimal operation of thermal energy storage units based on stratified and fully mixed water tanks, *Applied Thermal Engineering*, v. 24, n. 14-15, p. 2101-2116, 2004.

BOJIC, M., KALOGIROU, S. e PETRONIJEVIC, K. Simulation of a solar domestic water heating system using a time marching model, *Renewable Energy*, v. 27, n. 3, p. 441-452, 2001.

BOUHDJAR A., HARHAD A. Numerical Analysis of Transient Mixed Convection Flow in Storage Tank: Influence of Fluid Properties and Aspect Ratios on Stratification, *Renewable Energy*, v. 25, p 555-567, 2002.

BURMEISTER, Convective Heat Transfer, *John Wiley & Sons*, 1983.

CABELLI, A. Storage tanks: A numerical experiment. *Solar Energy*, v. 19, p. 4554, 1977.

CARDINALE, N., PICCININI, F. e STEFANIZZI, P. Economic optimization of low-flow solar domestic hot water plants, *Renewable Energy*, v. 28, n. 12, p. 1899-1914, 2003.

COMUNICAÇÃO DA COMISSÃO AO CONSELHO E AO PARLAMENTO EUROPEU, A quota das energias renováveis na UE, *Serviço das Publicações da União Europeia*, 2004.

- CHAURASIA, P., TWIDELL, J. Collector cum storage solar water heaters with and without transparent insulation material. *Solar Energy*, v. 70, n. 5, p. 403-416, 2000.
- CHINNAPPA, J. C. V. e GNANALINGAM, K. Performance at Colombo, Ceylon, of a pressurised solar water heater of the combined collector and storage type, *Solar Energy*, v. 15, n. 3, p. 195-204, 1973.
- DAVIS, G. DE VAHL AND THOMAS, R. W., Natural Convection between Concentric Vertical Cylinders, *Physics of Fluids*, v.12, n.12, pp. 198-207, 1969.
- DAVIS, G. V e JONES, I. Natural convection in a square cavity: a comparison exercise, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, v. 3, p. 227-248, 1993.
- DAVIS, G. V. Natural convection of air in a square cavity: a bench mark numerical solution, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, v. 3, p. 249-264, 1993.
- DHATT, G. AND TOUZOT, G, The Finite Element Method Displayed. [s.i.], John Wiley & Sons, 1984.
- DINCER, I.; DOST, S.; LI, X. Performance Analyses of Sensible Heat Storage Systems for Thermal Applications, *International Journal of Energy Research*, .v 21, p. 1157-1171, 1997.
- ELDER, J. W. Laminar convection in a vertical slot, *Journal of Fluid Mechanics*, v.23, p. 77-98, 1965
- EVANS, L.B., REID, R.C. AND DRAKE, E.M. Transient Natural Convection in a Vertical Cylinder, *AIChE Journal*, v. 14, n. 2, p. 251-259, 1967.
- FU, W, JOU, Y. e LEE, C. A transient natural convection in an annular enclosure, *International Communications in Heat and Mass Transfer*, v. 18, n. 3, p. 373-384, 1991.
- GOLDEMBERG, JOSÉ. Energia, *Meio Ambiente & Desenvolvimento*, EDUSP, 1998.
- GUO, K. AND WU, S. T. Numerical Study of Flow and Temperature Stratifications in a Liquid Thermal Storage Tank, *Journal of Solar Energy Engineering*, v.107, n.1, p.15-20, 1985.

GUPTA, C. L.; GARG, H.P. System Design in Solar Water Heater with Natural Circulation, *Solar Energy*, v.12, p.163-182, 1968.

HELIOCLIM “Providing Information on Solar Radiation”, *European Solar Radiation Atlas*, 2004. Disponível em <[www.helioclim.net/esra/index.htm](http://www.helioclim.net/esra/index.htm)>. Acesso em: 2 Jan. 2007.

HESS, C.F. AND MILLER, C.W., Natural Convection in a Vertical Cylinder Subject to Constant Heat Flux, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v.22, n.3, p.421-430, 1979.

HOBSON, P. A.; NORTON, B. Verified Performance Simulation Model of Direct Thermosyphon Solar-Energy Water Heaters, *ASME Journal of Solar Energy Engineering*, v. 110, p. 288-292, 1988.

HOMAN K.O. e SOO S.L. Model of the transient stratified flow into a chilled-water storage tank, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 40, n.18,p. 4367-4377, 1997.

HUSSEIN, H. M. S., Optimization of a natural circulation two phase closed thermosyphon flat plate solar water heater, *Energy Conversion and Management*, v. 44, n. 14 , p. 2341-2352, 2003.

HUSSEIN, H. M. S., MOHAMAD, M. A. e EL-ASFOURI, M. S., Theoretical analysis of laminar-film condensation heat transfer inside inclined wickless heat pipes flat-plate solar collector, v. 23, n. 3-4 , p. 525-535, 2001.

INCROPERA, F.P. e DE WITT, D.P. Fundamentos de Transferência de Calor e de Massa, L.T.C. Livros Técnicos e Científicos Ltda., 1998.

ISMAIL, K. A. R. AND SCALON, V. L., A finite element free convection model for the side wall heated cavity, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 43, p. 1373-1389, 2000.

IVANCIC, A., OLIVA, A., SEGARRA, C. D. PÉREZ AND COSTA, M. Heat Transfer Simulation in Vertical Cylindrical Enclosures for Supercritical Rayleigh Number and

Arbitrary Side-Wall Conductivity, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 42, n. 2, p. 323-343, 1999.

JOUDI, K. A., AL-TABBAKH, A. A. Computer simulation of a two phase thermosyphon solar domestic hot water heating system, *Energy Conversion and Management*, v. 40, n. 7, p. 775-793, 1999.

JOUDI, K. A., HUSSEIN, I. A. e FARHAN, A. A. Computational model for a prism shaped storage solar collector with a right triangular cross section, *Energy Conversion and Management*, v. 45, n. 3, p. 391-409, 2004.

KALOGIROU, S. A. e PAPAMARCOU, C. Modelling of a Thermosyphon Solar Water Heating System and Simple Model Validation, *Renewable Energy*, v. 21, p. 471-493, 2000.

KARAGHOULI, A. A. e ALNASER, W. E. Experimental study on thermosyphon solar water heater in Bahrain, *Renewable Energy*, v. 24, n. 3-4, p. 389-396, 2001.

KAPTAN, I. N. e KILIC, A. theoretical and experimental investigation of a novel built-in-storage solar water heater, *Solar Energy*, v. 57, n. 5, p. 393-400, 1996.

KAUSHIK, S. C., KUMAR, R e GARG, H. P. Effect of baffle plate on the performance of a triangular built-in-storage solar water heater, *Energy Conversion and Management*, v. 36, n. 5, p. 337-342

KEMP, M. C. Apparatus for Utilizing the Sun Rays for Heating Water, United States Patent Office, n. 451384. 14 jun. 1890, 28 abr. 1891.

KNUDSEN, S. e FURBO S., Thermal stratification in vertical mantle heat-exchangers with application to solar domestic hot-water systems, *Applied Energy*, v. 78, n. 3, p. 257-272, 2003.

KUDISH, A. I., SANTAMAURA, P., BEAUFORT, P. Direct Measurement and Analysis of Thermosyphon Flow, *Solar Energy*, v.35, p.167-173, 1985.

KUMAR, A. e TIWARI, G. N. Transient analysis of collection-cum-storage water heater integrated with heat exchanger, *Energy Conversion and Management*, v. 28, n. 3, p. 201-206, 1988

LAVAN, Z.; THOMPSON, J. Experimental Study of Thermal Stratified Hot Water Storage Tanks, *Solar Energy*, v 19, p 519-524, 1976.

LIN, W. e ARMFIELD, S.W. Direct Simulation of Natural Convection Cooling in a Vertical Circular Cylinder, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 42, n. 22, p. 4117-4130, 1999.

LIN, W e ARMFIELD, S. W. Long-term behavior of cooling fluid in a vertical cylinder, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 48, n. 1, p. 53-66, 2000.

MA, D. J., HENRY, D. E HADID, BEN H. Three-dimensional numerical study of natural convection in vertical cylinders partially heated from the side, *Physic of Fluids*, v. 17, p. 124101-124101-12, 2005.

MELI M. e SPATE F. The Solar Heating System with Seasonal Storage at the Solar-Campus Julich, *Solar Energy*, v. 69, n. 6, p. 525-533, 2000

MASON, A.A. e DAVIDSON, J. H. Measured performance and modeling of an evacuated-tube, integral-collector-storage solar water heater, *Journal of Solar Energy Engineering, Transactions of the ASME*, v. 117, n. 3, p. 221-228, 1995.

METAXAS, A.C. e MEREDITH, R.J. *Industrial Microwave Heating*, Peter Peregrinus Ltd., 1983.

MOHAMAD, A. A. Integrated solar collector-storage tank system with thermal diode, *Solar Energy*, v. 61, n. 3, p. 211-218, 1997.

MORRISON, G. L. e BRAUN, J. E. System Modelling and Operation Characteristics of Thermosyphon Solar Water Heaters, *Solar Energy*, v.34, p. 389-405, 1985.

MOURÃO, R. R. DE FREITAS, Uma Solução para a Crise Energética sem Poluição, *Revista da Escola Superior de Guerra*, n. 41, 2002.

NAHAR, M. Year round performance and potential of a natural circulation type of solar water heater in India, *Energy and buildings*, v. 35, n. 3, p. 239-247, 2003.

NELSON, J. E. B., BALAKRISHNAN, A. R. e MURTHY, S. S. Parametric studies on thermally stratified chilled water storage systems, *Applied Thermal Engineering*, v. 19, n.1,

p. 89-115, 1999.

OLIVESKI, R. C. Análise numérica e experimental dos campos de velocidade e temperatura em armazenadores térmicos, tese (doutorado), Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2000.

OLIVESKI, R. C., KRENZINGER, A. e VIELMO, H. A., “Cooling of cylindrical vertical tanks submitted to natural internal convection”, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 46, n. 11, p. 2015-2026, 2003.

ONG, K. S. A Finite Difference Method to Evaluate the Thermal Performance of a Solar Water Heater, *Solar Energy*, v. 18, p. 181-191, 1974.

PATANKAR, S. *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*. [S.I.]: Hemisphere Pub., 1980.

PADILHA, A. Estocagem por Estratificação Térmica de Líquido em Reservatório, dissertação (mestrado), Universidade Federal do Rio de Janeiro (copperj), 1982.

PAPANICOLAOU, E. E BELESSIOTIS, V. Transient natural convection in a cylindrical enclosure at high Rayleigh numbers, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 45, n. 7, p. 1425-1444, 2001.

PATANKAR, S. *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*. [S.I.]: Hemisphere Pub., 1980.

PEREIRA, E. B., MARTINS, F. R., ABREU, S. L., COUTO, P., STUHLMANN, R., COLLE, S. Effects of burning of biomass on satellite estimations of solar irradiation in Brazil. *Solar Energy*, v. 68, n. 1, p. 91-107, 2000.

PERES, E. Fontes renováveis de energia para o desenvolvimento sustentável, 2004. Disponível em <<http://www.comciencia.br/reportagens/2004/12/15.shtml>>. Acesso em: 5 nov. 2006.

PRAKASH, J., GARG, H. P. e DATTA, G., Effect of baffle plate on the performance of built-in storage type solar water heater, *Energy*, v.8, n.5, p. 381-387, 1983.

PRAKASH, J., GARG, H. P. e DATTA, G. A solar water heater with a built-in latent heat storage, *Energy Conversion and Management*, v. 25, n. 1, p. 51-56, 1985.

RICE, J., SCHNIPKE, R. An equal order velocity pressure formulation that does not exhibit spurious pressure modes. *Comp. Meth. Applied Mechanical Eng.*, v. 58, p. 135149, 1986.

SCALON, V. L. Estudo de Mudança de Fase em Geometria Plana Aletada Incluindo os Efeitos Convectivos, Dissertação (Doutorado) – Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), 1998.

SHAH, L. J. e FURBO, S. Entrance effects in solar storage tanks, *Solar Energy*, v. 75, n. 4, p. 337-348, 2003.

SHARIAH, A. M. e LÖF, G. O. G., Effects of auxiliary heater on annual performance of thermosyphon solar water heater simulated under variable operating conditions, *Solar Energy*, v. 60, n. 2, p. 119-126, 1997.

SHIN, M., KIM, H., JANG, D., LEE, D., LEE, Y., e YOON, H., Numerical and experimental study on the design of a stratified thermal storage system, *Applied Thermal Engineering*, v. 24, n. 1, p. 17-27, 2004.

SCHMIDT, C. H., GOETZBERGER, A. e SCHMID, J. Test results and evaluation of integrated collector storage systems with transparent insulation, *Solar Energy* v. 41, n. 5, 1988, p. 487-494, 1988.

SOPIAN, K., ZULKIFLI, R., SAHARI, J. e OTHMAN, M. Y. Thermal performance of thermoplastic natural rubber solar collector, *Journal of Materials Processing Technology*, v. 123, n 1, p.179-184, 2002.

SHYU, R.J., LIN, J.Y. e FANG, L.J. Thermal Analysis of Stratified Storage Tanks, *ASME. J. Solar Energy Eng.*, v.111, p.54-61, 1989.

SMYTH, M., EAMES, P. C. e NORTON, B. Integrated collector storage solar water heaters, *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, v. 10, n. 6, p. 503-538, 2006

SMYTH, M., EAMES, P. C. e NORTON, B. Techno-economic appraisal of an integrated collector/storage solar water heaters, *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, v. 29, n. 9, p. 1503-1514, 2004

SMYTH, M., EAMES, P. C. e NORTON, B. Annual performance of heat retaining integrated collector/storage solar water heaters in a northern maritime climate, *Renewable*

*and Sustainable Energy Reviews*, v. 70, n. 5, p. 391-401, 2001

SPALL, R. E. A numerical study of transient mixed convection in cylindrical thermal storage tanks, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 41, n. 13, 1997.

SUN, J. AND OOSTHUIZEN, P.H., Transient Natural Convection in a Vertical Cylinder with a Specified Wall Temperature, *American Society of Mechanical Engineers Procedures*, National Heat Transfer Conference, v. 2, p. 145-153, 1988

SUN, J. AND OOSTHUIZEN, P.H. Transient Natural Convection in a Vertical Cylinder with a Specified Wall Flux, *ASME Heat Transfer Division (publication)*, v. 107, p. 305-314, 1989.

TRIPANAGNOSTOPOULOS, Y. e YIANOULIS. P. Integrated collector-storage systems with suppressed thermal losses, *Solar Energy*, v. 48, n. 1, p. 31-43, 1992.

TRIPANAGNOSTOPOULOS, Y, YIANOULIS, P., PAPAETHIMIOU, S., SOULIOTIS, M. e NOUSIA, T. H. Cost effective asymmetric CPC solar collectors, *Renewable Energy*, v. 16, n. 1-4 , p. 628-631, 1999.

TRUMAN, C.R. e WILDIN, M.W. Finite difference model for heat transfer in a stratified thermal energy storage tank with throughflow. *Numerical heat transfer with personal computers and supercomputing*, ASME HTD 110, p. 45-55, 1989.

WEIDMAN, P. D. E MEHRDADTHRANFAR, G. Instability of natural convection in a tall vertical annulus, *Physics of Fluids*, v. 28, n. 3, p. 776-787, 1985.

YEE, C. K., LAI, F. C. Effects of porous manifold on thermal stratification in a liquid storage tank. *Solar Energy*, v. 71, n. 4, p. 241-254, 2001.

YEUNG, W. Analysis of natural convection in a closed vertical annulus, *International Communications in Heat and Mass Transfer*, v. 16, n. 3, p. 445-455, 1989.

YOO, H. e PAK, E. T. Theoretical model of the charging process for stratified thermal storage tanks, *Solar Energy*, v. 51 n. 6, p. 513-519, 1993.

ZACHAR, A., FARKAS, I. E SZLIVKA, F. Numerical analyses of the impact of plates for thermal stratification inside a storage tank with upper and lower inlet flows, *Solar Energy*, v. 74, p. 287-302, 2003.



## Apêndice A – Adimensionalização

As equações de Navier Stokes são abaixo descritas:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho r u)}{\partial r} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial z} = 0 \quad (\text{A.1})$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + u \frac{\partial(\rho u)}{\partial r} + v \frac{\partial(\rho u)}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial(r u)}{\partial r} \right] + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] + \rho g \quad (\text{A.2})$$

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + u \frac{\partial(\rho v)}{\partial r} + v \frac{\partial(\rho v)}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right] + \rho g \quad (\text{A.3})$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial r} + v \frac{\partial T}{\partial z} = \mu \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] \quad (\text{A.4})$$

As variáveis para adimensionalização são definidas pelas equações abaixo:

$$R = \frac{r}{H} \rightarrow \partial R = \frac{1}{H} \partial r \rightarrow \partial^2 R = \frac{1}{H} \partial^2 r \quad (\text{A.5})$$

$$Z = \frac{z}{H} \rightarrow \partial Z = \frac{1}{H} \partial z \rightarrow \partial^2 Z = \frac{1}{H} \partial^2 z \quad (\text{A.6})$$

$$U = \frac{u H}{\alpha} \rightarrow \partial U = \frac{H}{\alpha} \partial u \rightarrow \partial^2 U = \frac{H}{\alpha} \partial^2 u \quad (\text{A.7})$$

$$V = \frac{v H}{\alpha} \rightarrow \partial V = \frac{H}{\alpha} \partial v \quad (\text{A.8})$$

$$P = \frac{p}{\rho} \left( \frac{H}{\alpha} \right)^2 \rightarrow \partial P = \left( \frac{H}{\alpha} \right)^2 \frac{1}{\rho} \partial p \quad (\text{A.9})$$

$$\theta = \frac{T - T_f}{\delta T} \rightarrow \partial \theta = \frac{1}{\delta T} \partial T \quad (\text{A.10})$$

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha} \quad (\text{A.11})$$

$$Ra = \frac{g \beta \delta T H^3}{\nu^2} Pr \quad (\text{A.12})$$

$$\tau = Fo = \frac{\alpha t}{H^2} \rightarrow \partial \tau = \frac{\alpha}{H^2} \partial t \quad (\text{A.13})$$

A hipótese de Boussinesq nos diz que diferenças de densidade no fluido são suficientemente pequenas para serem negligenciadas exceto em termos onde elas são multiplicadas pela aceleração da gravidade, ou seja, a densidade é constante a não ser no termo convectivo. A gravidade é a principal responsável por fazer o peso específico apreciavelmente diferente para haver convecção natural. A aproximação de Boussinesq lança mão da gravidade reduzida que é:

$$g' = g \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho}, \quad \rho_1 < \rho_2 \quad (\text{A.14})$$

Multiplicando-se e dividindo-se pela diferença de temperatura:

$$g' = -g \frac{1}{\rho} \frac{\Delta \rho}{\Delta T} \Delta T \quad (\text{A.15})$$

Mas o coeficiente de expansão volumétrica é:

$$\beta = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \quad (\text{A.16})$$

Portanto a equação A.15 fica:

$$g' = g \beta \Delta T \quad (\text{A.17})$$

Obs: Continuaremos chamando  $g'$  de  $g$  após a aproximação.

Dessa forma a equação da continuidade (A.1), com densidade constante, ficará:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \rho \frac{\partial(ru)}{\partial r} + \frac{\rho \partial(v)}{\partial z} = 0 \quad (\text{A.18})$$

ou seja,

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(ru)}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \quad (\text{A.19})$$

Substituindo A.5, A.6, A.7 e A.8 em A.19 se tem:

$$\frac{1}{(R\alpha)} \frac{\partial(R\alpha U \frac{\alpha}{H})}{H \partial R} + \frac{\partial(V \frac{\alpha}{H})}{H \partial Z} = 0 \quad (\text{A.20})$$

$$\frac{\alpha}{H^2} \frac{1}{R} \frac{\partial(RU)}{\partial R} + \frac{\alpha}{H^2} \frac{\partial V}{\partial Z} = 0 \quad (\text{A.21})$$

$$\frac{1}{R} \frac{\partial(RU)}{\partial R} + \frac{\partial V}{\partial Z} = 0 \quad (\text{A.22})$$

A equação da quantidade de movimento em  $r$  (A.2), após a aproximação de Boussinesq fica:

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial r}+v\frac{\partial u}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial r}+\mu\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial(ru)}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right]+\rho g\beta\Delta T \quad (\text{A.23})$$

Sendo a viscosidade cinemática a razão entre a viscosidade dinâmica pela densidade divide-se então os dois membros de A.23 por  $\rho$ . Se tem dessa forma:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial r}+v\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}+\nu\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial(ru)}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right]+g\beta\Delta T \quad (\text{A.24})$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial r}+v\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}+\nu\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\left(u+r\frac{\partial u}{\partial r}\right)\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right]+g\beta\Delta T \quad (\text{A.25})$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial r}+v\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}+\nu\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(u+\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right]+g\beta\Delta T \quad (\text{A.27})$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial r}+v\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}+\nu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{u}{r^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right]+g\beta\Delta T \quad (\text{A.28})$$

Substituindo-se em A.24 as equações de A.5 a A.9 se tem:

$$\frac{\frac{\alpha}{H}\frac{\partial U}{\partial \tau}+U\frac{\alpha}{H}\frac{\partial U}{H\partial R}+V\frac{\alpha}{H}\frac{\partial U}{H\partial Z}}{\alpha}=-\frac{1}{\rho}\frac{\left(\frac{\alpha}{H}\right)^2\rho\partial P}{H\partial R}+\rightarrow \quad (\text{A.25})$$

$$\rightarrow\nu\left[\frac{1}{RH}\frac{\alpha}{H}\frac{\partial U}{\partial R}-\frac{U}{H^2R^2}+\frac{\alpha}{H}\frac{\partial^2 U}{\partial R^2}+\frac{\alpha}{H}\frac{\partial^2 U}{\partial Z^2}\right]+g\beta\Delta T$$

$$\frac{\alpha^2}{H^3}\left(\frac{\partial U}{\partial \tau}+U\frac{\partial U}{\partial R}+V\frac{\partial U}{\partial Z}\right)=-\frac{\alpha^2}{H^3}\frac{\partial P}{\partial R}+\rightarrow \quad (\text{A.26})$$

$$\rightarrow+\nu\frac{\alpha}{H^3}\left[\frac{1}{R}\frac{\partial U}{\partial R}-\frac{U}{R^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial R^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial Z^2}\right]+g\beta\Delta T$$

$$\frac{\partial U}{\partial \tau}+U\frac{\partial U}{\partial R}+V\frac{\partial U}{\partial Z}=-\frac{\partial P}{\partial R}+\rightarrow \quad (\text{A.27})$$

$$\rightarrow+\frac{\nu}{\alpha}\left[\frac{1}{R}\frac{\partial U}{\partial R}-\frac{U}{R^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial R^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial Z^2}\right]+g\beta\Delta T\frac{H^3}{\alpha^2}$$

Utiliza-se o seguinte artifício no termo convectivo da equação A.27:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial U}{\partial \tau} + U \frac{\partial U}{\partial R} + V \frac{\partial U}{\partial Z} = -\frac{\partial P}{\partial R} + \rightarrow \\
& \rightarrow + \frac{\nu}{\alpha} \left[ \frac{1}{R} \frac{\partial U}{\partial R} - \frac{U}{R^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial R^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Z^2} \right] + g \beta \Delta T \frac{H^3}{\alpha^2} \frac{\alpha^2}{\alpha^2} \frac{\nu^2}{\nu^2}
\end{aligned} \tag{A.28}$$

Mas o número de Grashoff para a geometria proposta é:

$$Gr = \frac{g \beta \Delta T H^3}{\nu^2} \tag{A.29}$$

Portanto tem-se, levando-se em conta a equação A.11:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial U}{\partial \tau} + U \frac{\partial U}{\partial R} + V \frac{\partial U}{\partial Z} = -\frac{\partial P}{\partial R} + \rightarrow \\
& \rightarrow + Pr \left[ \frac{1}{R} \frac{\partial U}{\partial R} - \frac{U}{R^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial R^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Z^2} \right] + Gr Pr^2
\end{aligned} \tag{A.30}$$

A equação da quantidade de movimento em z (A.3), após a aproximação de Boussinesq e as mesmas manipulações realizadas de A.23 a A.24 fica:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial r} + v \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right] + g \beta \Delta T \tag{A.31}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial r} + v \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left[ \frac{1}{r} \left( \frac{\partial v}{\partial r} + r \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} \right) + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right] + g \beta \Delta T \tag{A.32}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial r} + v \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right] + g \beta \Delta T \tag{A.33}$$

Substituindo-se em A.33 as equações de A.5 a A.9 se tem:

$$\begin{aligned}
& \frac{\frac{\alpha}{H} \partial V}{\frac{H^2 \tau}{\alpha}} + U \frac{\frac{\alpha}{H} \partial V}{H} \frac{\frac{\alpha}{H} \partial V}{H \partial R} + \frac{\alpha}{H} V \frac{\frac{\alpha}{H} \partial V}{H \partial Z} = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\alpha}{H} \right)^2 \frac{\rho \partial P}{H \partial R} + \rightarrow \\
& \rightarrow + \nu \left[ \frac{1}{RH} \frac{\frac{\alpha}{H} \partial V}{H \partial R} + \frac{\frac{\alpha}{H} \partial^2 V}{H^2 \partial R^2} + \frac{\frac{\alpha}{H} \partial^2 V}{H^2 \partial Z^2} \right] + g \beta \Delta T
\end{aligned} \tag{A.34}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\alpha^2}{H^3} \left( \frac{\partial V}{\partial \tau} + U \frac{\partial V}{\partial R} + v \frac{\partial V}{\partial Z} \right) = -\frac{\alpha^2}{H^3} \frac{\partial P}{\partial R} + \rightarrow \\
& \rightarrow + \nu \frac{\alpha}{H^3} \left[ \frac{1}{R} \frac{\partial V}{\partial R} + \frac{\partial^2 V}{\partial R^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Z^2} \right] + g \beta \Delta T
\end{aligned} \tag{A.35}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial V}{\partial \tau} + U \frac{\partial V}{\partial R} + v \frac{\partial V}{\partial Z} = -\frac{\partial P}{\partial R} + \rightarrow \\ \rightarrow & + \frac{\nu}{\alpha} \left[ \frac{1}{R} \frac{\partial V}{\partial R} + \frac{\partial^2 V}{\partial R^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Z^2} \right] + g \beta \Delta T \frac{H^3}{\alpha^2} \end{aligned} \quad (\text{A.36})$$

Usando-se o mesmo artifício da equação A.28 e substituindo-se o número de Grashof (Equação A.29) têm-se.

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} + U \frac{\partial V}{\partial R} + V \frac{\partial V}{\partial Z} = -\frac{\partial P}{\partial R} + Pr \left[ \frac{1}{R} \frac{\partial V}{\partial R} + \frac{\partial^2 V}{\partial R^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Z^2} \right] + Gr Pr^2 \quad (\text{A.37})$$

A equação da energia (A.4) ficará:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial r} + v \frac{\partial T}{\partial z} = \mu \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] \quad (\text{A.38})$$

Utilizado-se o mesmo desenvolvimento de A.31 para A.33 se tem:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial r} + v \frac{\partial T}{\partial z} = \mu \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] \quad (\text{A.39})$$

$$\frac{\overline{\delta T} \partial \theta}{H^2 \tau} + U \frac{\alpha}{H} \frac{\overline{\delta T} \partial \theta}{H \partial R} + V \frac{\alpha}{H} \frac{\overline{\delta T} \partial \theta}{H \partial Z} = \rightarrow \quad (\text{A.40})$$

$$\rightarrow = \mu \left[ \frac{1}{RH} \frac{\overline{\delta T} \partial \theta}{H \partial R} + \frac{\overline{\delta T} \partial^2 \theta}{H^2 \partial R^2} + \frac{\overline{\delta T} \partial^2 \theta}{H^2 \partial Z^2} \right]$$

$$\frac{\alpha \overline{\delta T}}{H^2} \left( \frac{\partial \theta}{\tau} + U \frac{\partial \theta}{\partial R} + V \frac{\partial \theta}{\partial Z} \right) = \frac{\mu \overline{\delta T}}{H^2} \left[ \frac{1}{R} \frac{\partial \theta}{\partial R} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial R^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Z^2} \right] \quad (\text{A.41})$$

Levando-se em conta a equação A.11 a equação da energia adimensionalizada fica da forma:

$$\left( \frac{\partial \theta}{\tau} + U \frac{\partial \theta}{\partial R} + V \frac{\partial \theta}{\partial Z} \right) = Pr \left[ \frac{1}{R} \frac{\partial \theta}{\partial R} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial R^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Z^2} \right] \quad (\text{A.41})$$

## Anexo A – Aplicação da Técnica de Elementos Finitos

As áreas da engenharia (mecânica dos sólidos, fenômenos de transporte, entre outras) são formadas por fenômenos físicos descritos, em sua maioria, por equações diferenciais parciais. Atualmente, o método dos elementos finitos tem se tornado o mais popular na resolução de problemas em regime permanente ou transiente, em regiões lineares ou não lineares, com domínios uni ou multidimensionais.

O processo de discretização na formulação por elementos finitos, assim como no método das diferenças finitas, transforma as equações diferenciais parciais, suas condições de contorno e iniciais, em equações algébricas, as quais são resolvidas computacionalmente.

A finalidade deste anexo é apresentar os conceitos do método dos elementos finitos mais importantes e pertinentes a este trabalho, sem a pretensão de esgotar o assunto. Os procedimentos a serem descritos são encontrados em Dhatt & Touzot (1984).

O método dos elementos finitos é uma ramificação dos métodos integrais que são utilizados na obtenção de soluções aproximadas de um grande número de problemas. Estes métodos integrais baseiam sua solução em aproximações por funções da variável no domínio determinado e devem, ainda, satisfazer as condições iniciais e de contorno e do problema.

A formulação por elementos finitos é baseada nos mesmos princípios de resolução por resíduos ponderados, ou seja, a busca de uma solução segundo a qual o desvio obtido pela integral desta solução ao longo do domínio, utilizando uma função peso definida, seja mínimo. Assim, admitindo que a equação que rege determinado problema seja  $L(u) - f = 0$ , sua formulação em resíduos ponderados é dada por:

$$\int_{\Omega} \psi(\mathcal{L}(u) - f) d\Omega = \varepsilon \quad (\text{a.1})$$

O domínio do problema é dividido em diversos elementos que, quando agrupados, devem representar toda a região de solução.

Para facilitar ainda mais, as expressões utilizadas em elementos finitos, ao invés de usar variáveis de espaço nas funções de interpolação, utilizam o valor da propriedade nos nós como parâmetro básico. Ou seja, conhecido o valor de uma dada propriedade em todos os nós, é possível calculá-la em qualquer ponto do domínio usando as funções de interpolação. Esta forma de aplicação das funções de aproximação é conhecida como aproximação nodal.

A subdivisão de um domínio  $\Omega$  em subdomínios  $\Omega_e$  deve obedecer algumas regras, tais como:

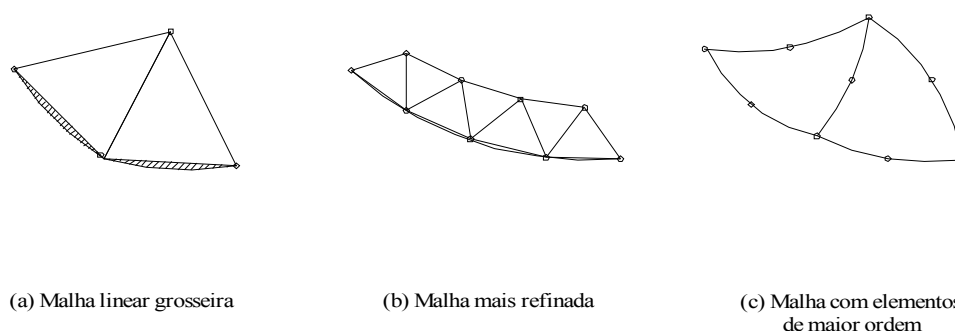
- Deve haver sempre uma fronteira comum entre os elementos adjacentes onde estarão os únicos pontos comuns entre os elementos. Estas fronteiras podem ser compostas por pontos, linhas ou áreas.
- Não é permitida a existência de regiões comuns a mais de um elemento (sobreposição) e nem regiões dentro do domínio que não pertençam a região alguma (holes).
- Quando a fronteira do domínio não é exatamente representada pelo elemento escolhido, ocorre uma anomalia (vazio), que acarreta um erro impossível de ser mensurado. Entretanto, estes erros, denominados erros geométricos, podem ser minimizados utilizando-se elementos menores ou elementos de maior ordem, que melhor se adequam à fronteira.

Nota-se na figura a.1(a) que a discretização é feita com elementos grosseiros e não é possível representar a fronteira de forma adequada devido a ocorrência de vazios. Na figura a.1(b), foram utilizados elementos menores e a fronteira foi melhor representada. Finalmente, na figura a.1(c), nota-se que foi obtida uma boa representação da fronteira mesmo com elementos mais grosseiros, uma vez que estes são de ordem superior e suas fronteiras podem ser deformadas.

Respeitadas as regras básicas, a discretização pode ser feita da maneira mais adequada ao domínio do problema. A geração da malha pode ser manual ou

automática, como é o caso do mapeamento transfinito (*transfinite mappings*).

A formulação por elementos finitos deve seguir uma seqüência de conexão entre os elementos, não podendo ser apresentada em uma ordem aleatória. Sendo assim, os nós devem ser numerados de forma seqüencial e deve ser montada uma tabela com a posição de cada um no domínio.



*Figura a.1. Erro comum na discretização do domínio*

Os elementos são descritos pelo número de cada nó que o compõe e, utilizando um ponto como referência inicial e um sentido de numeração, horário ou anti-horário, obtém-se uma tabela de conectividade dos nós. Considerando todo o procedimento, não faz diferença qual o ponto que se adota como origem para o elemento e nem o sentido de rotação. No entanto, para todos os elementos deve ser adotado o mesmo sentido de rotação.

Conhecidas as interligações e as coordenadas dos nós de um determinado elemento é possível obter valores para determinada propriedade e sua derivada em qualquer posição. Isto é possível graças às funções de interpolação  $N_j$ , que podem ser obtidas utilizando os conceitos de aproximação nodal ou consultadas diretamente nos livros texto de elementos finitos<sup>1</sup>. Estas funções dependem, basicamente, do número de nós do elemento. Assim sendo, qualquer propriedade pode ser descrita como uma composição das propriedades vizinhas na forma:

<sup>1</sup> Este procedimento não será detalhado e, caso haja interesse, pode ser encontrado em Dhatt & Touzot (1984)



$$\Phi = \sum_j N_j \Phi_j \quad (\text{a.2})$$

A função de interpolação é dada como função de variáveis espaciais locais,  $\xi$  e  $\eta$ , dos elementos. A figura a.2 mostra os sistemas de coordenadas local e global para um elemento genérico.

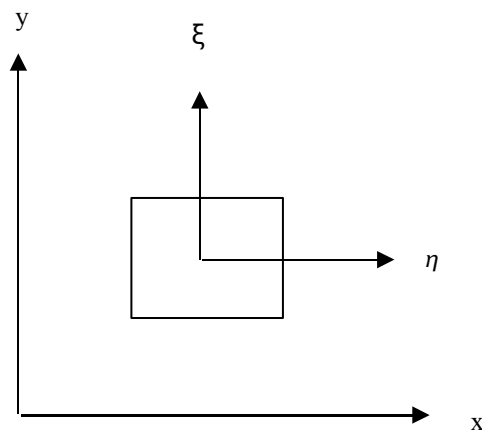


Figura a.2. Sistema de coordenadas local e global para um elemento

As equações que governam os fenômenos físicos envolvem, normalmente, não somente a propriedade genérica  $\phi$ , mas também suas derivadas. A aproximação no espaço real é sempre complexa devendo ser dada preferência para se trabalhar no domínio elementar. Cuidados especiais devem ser tomados quando se deseja obter a derivada de uma determinada função de interpolação em relação à variáveis globais pois, pela regra da cadeia:

$$\frac{\partial N_i}{\partial R} = \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial R} + \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial R} \quad (\text{a.3})$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial Z} = \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial Z} + \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial Z} \quad (\text{a.4})$$

Na forma matricial:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial R} \\ \frac{\partial N_i}{\partial Z} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial R} & \frac{\partial \eta}{\partial R} \\ \frac{\partial \xi}{\partial Z} & \frac{\partial \eta}{\partial Z} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{pmatrix} = [J]^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{pmatrix} \quad (\text{a.5})$$

Como normalmente as expressões a serem resolvidas são equações diferenciais, é preciso utilizar o Jacobiano da transformação ( $[J]$ ) e não o inverso ( $[J]^{-1}$ ). Para obter  $[J]$  é preciso considerar a transformação direta, ou seja:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial R}{\partial \xi} & \frac{\partial Z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial R}{\partial \eta} & \frac{\partial Z}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial R} \\ \frac{\partial N_i}{\partial Z} \end{pmatrix} = [J] \begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial R} \\ \frac{\partial N_i}{\partial Z} \end{pmatrix} \quad (\text{a.6})$$

Utilizando na expressão do Jacobiano a aproximação nodal tem-se:

$$[J] = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n \frac{\partial N_j}{\partial \xi} R_j & \sum_{j=1}^n \frac{\partial N_j}{\partial \xi} Z_j \\ \sum_{j=1}^n \frac{\partial N_j}{\partial \eta} R_j & \sum_{j=1}^n \frac{\partial N_j}{\partial \eta} Z_j \end{bmatrix} \quad (\text{a.7})$$

O inverso do Jacobiano é calculado pela definição de matriz inversa, sendo expresso por:

$$[J]^{-1} = \frac{1}{\det[J]} \begin{bmatrix} \frac{\partial R}{\partial \xi} & -\frac{\partial R}{\partial \eta} \\ -\frac{\partial Z}{\partial \xi} & \frac{\partial Z}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (\text{a.8})$$

onde:

$$\det[J] = \frac{\partial R}{\partial \xi} \frac{\partial Z}{\partial \eta} - \frac{\partial R}{\partial \eta} \frac{\partial Z}{\partial \xi} \quad (\text{a.9})$$

Além disto, todo problema de elementos finitos envolve a integração sobre

um determinado domínio. Esta integração é feita normalmente de forma numérica sendo que o Jacobiano é obtido para todos os pontos de integração separadamente. A partir da soma dos determinantes do Jacobiano de cada um dos pontos de integração, levado em conta seu peso, também pode ser calculada a área do elemento. Para o caso de um elemento de quatro nós, a área é a própria soma, enquanto que para elementos de três nós a área é a metade deste valor.

Com este procedimento obtém-se as integrais em todo o domínio das funções de interpolação ( $N_i$ ) e de suas respectivas derivadas. Este é o requisito básico para a montagem da matriz elementar, que será utilizada juntamente com a matriz carga na montagem da matriz global.

Na realidade, o único procedimento presente nesta etapa de montagem da matriz global é a transposição da numeração (interna de cada elemento e limitada ao seu respectivo número de nós) para a numeração geral (válida para todo o domínio), igual ao número total de nós do problema. Parte-se do princípio que cada uma das variáveis do problema ocupará uma coluna na matriz global.

Com a matriz global montada, o próximo passo é a inclusão das condições de contorno. Neste caso, quando se tratar de alguma condição de influxo pela superfície, se utiliza o termo de integral de superfície do problema, um procedimento que será detalhado posteriormente. Quando se tratar de uma condição de valor imposto, alguns procedimentos podem ser aplicados. Um destes procedimentos consiste em simplesmente manter a linha e adicionar ao termo da diagonal principal um valor bastante elevado, além de adicionar o valor especificado para o termo da fronteira, multiplicado pelo mesmo número elevado. Outra alternativa é substituir todos os elementos da linha por zero, exceto o termo da diagonal principal, que é substituído por 1, e substituir o valor da matriz carga pelo valor a ser especificado. Existem outras alternativas, mas de aplicação um pouco mais complexa e que serão deixadas de lado.

Obtida a solução, são conhecidos os valores da variável para todos os nós do domínio, graças à aproximação nodal. A partir desta solução é possível utilizar as funções de interpolação para obtenção de valores em pontos não nodais e localizados dentro do domínio.

## Anexo B – Geração automática da malha

Uma das formas mais simples para geração de malha é chamada de mapeamento transfinito e utilizada neste trabalho da forma proposta por Albert e O'Neil (1986). Os esquemas citados geram malhas genéricas e, portanto, não podem ser utilizados quando se deseja trabalhar com malhas ortogonais, caso mais comum de diferenças finitas.

O esquema de geração baseia-se em funções de transformação de domínio e, no caso específico para a geração de malhas quadradas, utiliza-se projetores bilineares na forma:

$$x_{i,j} = (1 - \zeta_{y,j})\psi_1^{x,i} + \zeta_{y,j}\psi_2^{x,i} + (1 - \zeta_{x,i})\xi_1^{x,j} + \zeta_{x,i}\xi_2^{x,j} - (1 - \zeta_{y,j})(1 - \zeta_{x,i})\psi_1^{x,0} - (1 - \zeta_{x,i})\zeta_{y,j}\psi_2^{x,0} - \zeta_{x,i}\zeta_{y,j}\psi_2^{x,n} - (1 - \zeta_{y,j})\zeta_{x,i}\psi_1^{x,n} \quad (\text{b.1})$$

$$y_{i,j} = (1 - \zeta_{y,j})\psi_1^{y,i} + \zeta_{y,j}\psi_2^{y,i} + (1 - \zeta_{x,i})\xi_1^{y,j} + \zeta_{x,i}\xi_2^{y,j} - (1 - \zeta_{y,j})(1 - \zeta_{x,i})\psi_1^{y,0} - (1 - \zeta_{x,i})\zeta_{y,j}\psi_2^{y,0} - \zeta_{x,i}\zeta_{y,j}\psi_2^{y,n} - (1 - \zeta_{y,j})\zeta_{x,i}\psi_1^{y,n} \quad (\text{b.2})$$

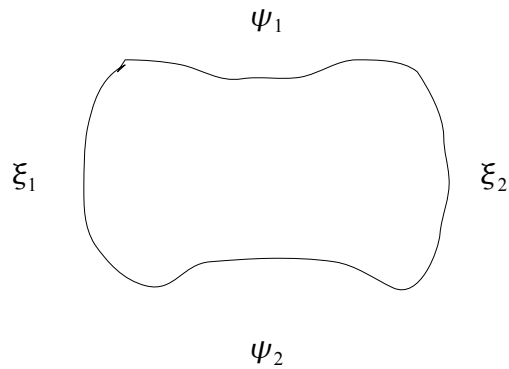
sendo que  $\zeta_{x,j}$  e  $\zeta_{y,j}$  representam posições em relação a cada uma das fronteiras e variam entre 0 e 1. A figura b.1 mostra a representação de um domínio e de suas respectivas fronteiras.

É importante ainda ressaltar que, embora as expressões mostradas para geração de malha utilizem os valores extremos representados através dos valores de  $\psi$ , um procedimento similar pode ser feito utilizando estes mesmos valores através de  $\xi$ , desde que se observe a sua correspondência.

Imagine um caso com  $n$  subdivisões em  $\psi$  e  $m$  subdivisões em  $\xi$ , esta correspondência é dada por:  $\psi_1^{z,0} = \xi_1^{z,0}$ ,  $\psi_1^{z,n} = \xi_2^{z,0}$ ,  $\psi_2^{z,0} = \xi_1^{z,m}$  e  $\psi_2^{z,n} = \xi_2^{z,m}$ , onde  $z$  representa a direção genérica, uma vez que todas as coordenadas do ponto são coincidentes. Existe ainda um procedimento, similar a este, para a utilização de elementos triangulares. Detalhes desta função, chamada de projetor trilinear, podem ser encontrados

em Albert e O'Neil (1986).

Este procedimento pode ser agrupado através do uso de super-elementos dando origem a um flexível sistema de pré-processamento e geração de malha em superfícies complexas.



*Figura b.1. Esquema de geometria arbitrária em função das fronteiras*

A especificação dos mapeamentos para a geração de malhas de elementos finitos no domínio de superfícies que possuem descrição geométrica previamente definida consiste apenas da determinação da topologia dos elementos (comumente quadriláteros ou triangulares), e da lista de vértices relativa ao espaço paramétrico.

# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)