

Eric Conrado de Souza

# Modelagem e Controle de uma Classe de Sistemas Multi-Corpos Móveis

Tese apresentada a Escola Politécnica da  
Universidade de São Paulo para obtenção  
do Título de Doutor em Engenharia Mecâ-  
nica

São Paulo  
Março 2008

Eric Conrado de Souza

# Modelagem e Controle de uma Classe de Sistemas Multi-Corpos Móveis

Tese apresentada a Escola Politécnica da  
Universidade de São Paulo para obtenção  
do Título de Doutor em Engenharia Mecânica

Área de Concentração:  
Engenharia de Controle e Automação  
Mecânica

Orientador:  
Prof. Dr. Newton Maruyama

São Paulo  
Março 2008

# Agradecimentos

Ao Prof. Dr. Newton Maruyama por toda a jornada de acompanhamento, orientação e amizade.

A Profa. Dra. Naomi Ehrich Leonard pela co-orientação, introdução à geometria e incentivo durante o ano de 2005.

Ao Prof. Dr. Pedro Tonelli pela disponibilidade de conversar sobre assuntos relacionados aos meus estudos e pela oportunidade do seminário no IME-USP.

Aos Prof. Dr. Jair Koiller e Prof. Dr. Agenor de Toledo Fleury pela forma atenciosa com que se dispuseram a me receber algumas vezes para conversar sobre o trabalho que realizava.

Aos colegas de sala e laboratório pela convivência, amizade e ajuda.

A CAPES pela concessão das bolsas de Doutorado e PDEE.

A minha família pelo apoio. Dedico este trabalho a minha família.

A Deus, pela força, pela motivação, por mais um degrau galgado; sem Ele “nada que se fez, se fez”.

# Resumo

No que segue, propõe-se uma classe de sistemas robóticos multi-corpos, cujos corpos componentes estão fisicamente acoplados através de juntas rotativas ativas. Os sistemas da classe considerada possuem mobilidade irrestrita no espaço plano uma vez que propulsores distribuídos ao longo dos corpos do sistema. A modelagem dinâmica destes sistemas é apresentada sob as abordagens Hamiltoniana e Lagrangiana da mecânica analítica. A descrição destes métodos de modelagem, assim como os modelos por eles obtidos, é realizada com ênfase na interpretação geométrica da matemática envolvida. Alguns exemplos de parametrizações do espaço de fase do sistema são discutidos e exemplos de modelagem em função destas parametrizações são obtidos. Ademais, alguns critérios de análise de controlabilidade não-linear são revisados e aplicados aos modelos do sistema com a estrutura de entradas considerada. Alguns casos de estabilização da classe de sistemas são também discutidos. Resultados de simulação de estabilização são obtidos para sistemas através de estudos de casos. Sistemas completamente controlados no espaço de estados podem ser linearizados através de uma técnica de linearização por realimentação e estabilizados com uma realimentação de estados. Para os sistemas cuja controlabilidade é deficiente, propõe-se a modificação de um método de controle de sistemas sub-atuados e uma lei de controle por realimentação é obtida pela teoria de estabilidade de Lyapunov. A classe de sistemas aqui discutida possui grande potencial de aplicação nos ambientes espacial e submarino.

# Abstract

In the following, a class of multi-body robotic systems is proposed in which its system component bodies are physically coupled by active rotating joints. The systems belonging to the proposed class have unrestricted mobility on the plane since thrusters are distributed along the system. System dynamical modeling is obtained through the analytic mechanical Hamiltonian and Lagrangian methods. The presentation of these methods, as well as the dynamical models obtained by them, is realized with an emphasis in the geometrical interpretation of the corresponding mathematics. A few different system phase space parameterizations approaches are discussed and modeling examples are presented under these parameterizations. Additionally, some nonlinear controllability analysis criteria are reviewed and applied to system dynamical models composed by the input structure mentioned above. A few stabilization case studies for the class of systems are also discussed and simulation results are presented. Totally controlled systems in the phase space can be linearized by feedback linearization techniques and stabilized through a state feedback. For partially controllable systems a modification of a stabilization method for under-actuated systems is proposed which renders feedback control via Lypunov stability theory. The class of systems discussed has great potential for space and underwater applications.

# Sumário

<b>Resumo</b>	<b>ii</b>
<b>Abstract</b>	<b>iii</b>
<b>Sumário</b>	<b>iii</b>
<b>Lista de Figuras</b>	<b>vii</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Contextualização . . . . .	1
1.1.1 Sistemas Multi-Articulados . . . . .	2
1.1.2 Revisão da Literatura Técnica . . . . .	3
1.2 Proposta de uma Classe de Sistemas Robóticos Móveis . . . . .	4
1.3 Objetivos de Pesquisa . . . . .	7
1.3.1 Contribuições do Trabalho . . . . .	7
1.3.2 Justificativa do uso da Teoria Geométrica . . . . .	8
1.3.3 Aplicações . . . . .	10
1.3.4 Organização da Tese . . . . .	10
<b>Lista de Símbolos</b>	<b>1</b>
<b>2 Elementos da Mecânica Geométrica</b>	<b>12</b>
2.1 Geometria Diferencial . . . . .	12
2.1.1 Campos vetoriais e Espaços Tangentes . . . . .	13
2.1.2 Distribuições de Campos Vetoriais . . . . .	16
2.2 Mecânica Geométrica . . . . .	17
2.2.1 Grupos e Grupos de Lie . . . . .	17
2.2.2 Mecânica Lagrangiana . . . . .	20
2.2.3 Mecânica Hamiltoniana . . . . .	21
2.3 Sistemas Mecânicos Simples . . . . .	25
2.4 Sistemas com Simetria . . . . .	26
2.4.1 Redução de Sistemas com Simetria . . . . .	30
2.5 Espaços Fibrados e Conexões . . . . .	30
2.5.1 A Conexão de Ehresmann . . . . .	31
2.5.2 A Conexão Principal . . . . .	33
2.5.3 Curvatura do Fibrado Tangente . . . . .	34

<b>3</b>	<b>Mecânica não-Holonômica</b>	<b>35</b>
3.1	Mecânica Lagrangiana . . . . .	35
3.1.1	Princípio de Hamilton . . . . .	36
3.1.2	Sistemas com Restrições . . . . .	36
3.1.3	Princípio de Lagrange-d'Alembert . . . . .	38
3.1.4	Equações de Lagrange-d'Alembert . . . . .	38
3.1.5	Não-holonomicidade do Sistema . . . . .	40
3.2	A Conexão Mecânica . . . . .	40
3.3	Princípio Variacional Reduzido . . . . .	43
3.4	Reconstrução da Dinâmica . . . . .	44
3.5	Conclusão . . . . .	47
<b>4</b>	<b>Modelagem do Sistema Multi-Corpo</b>	<b>48</b>
4.1	Cinemática do Sistema no Espaço Completo . . . . .	49
4.1.1	Simetria do Sistema e Redução . . . . .	53
4.2	Modelo do Sistema no Espaço Cotangente . . . . .	56
4.2.1	Modelagem da Entrada do Sistema . . . . .	59
4.2.2	Sistema de Controle Multi-Corpos . . . . .	62
4.2.3	Exemplo: o sistema de 2-corpos . . . . .	64
4.3	Modelagem da Dinâmica no Fibrado Principal . . . . .	66
4.3.1	O Fibrado Principal . . . . .	66
4.3.2	Exemplos de Parametrizações da Configuração . . . . .	67
4.4	Modelagem Lagrangiana . . . . .	79
4.4.1	Exemplo: o sistema de 2-corpos ( $\theta_{cm} = \theta_1$ ) . . . . .	79
4.5	Conclusão . . . . .	84
<b>5</b>	<b>Análise do Sistema e Controlabilidade</b>	<b>85</b>
5.1	Equilíbrio e Estabilidade . . . . .	86
5.1.1	Equilíbrio do Sistema Multi-corpos . . . . .	86
5.2	Fases Geométricas: Análise . . . . .	90
5.2.1	O Contexto Geométrico . . . . .	92
5.3	Análise de Controlabilidade . . . . .	93
5.3.1	Álgebra e Distribuição de Acessibilidade de Sistemas Afim . . . . .	96
5.3.2	Controlabilidade . . . . .	99
5.3.3	Controlabilidade do Sistema de Dois Corpos . . . . .	101
5.4	Conclusão . . . . .	112
<b>6</b>	<b>Estabilização e Planejamento de Trajetórias</b>	<b>113</b>
6.1	Estabilização . . . . .	114
6.2	Linearização por Realimentação . . . . .	115
6.2.1	Linearização por Realimentação Dinâmica . . . . .	123
6.2.2	O Sistema Multi-Articulado . . . . .	125
6.3	Controle de Sistemas Sub-atuados . . . . .	128
6.3.1	O Sistema de 2-Corpos . . . . .	130
6.4	Planejamento de Trajetórias e Controle Ótimo . . . . .	138
6.4.1	Controle Ótimo do Modelo Cinemático . . . . .	140
6.5	Conclusão . . . . .	145

<b>7 Conclusões</b>	<b>146</b>
7.1 Sugestões para Trabalhos Futuros . . . . .	147
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>149</b>
<b>Apêndices</b>	<b>153</b>
<b>A Fundamentos Gerais</b>	<b>154</b>
A.1 Aplicações e Conjuntos Usuais na Mecânica Geométrica . . . . .	154
A.2 Representações Espaciais com a Álgebra do Grupo . . . . .	156
A.2.1 Representações entre Referenciais . . . . .	156
A.2.2 O Grupo $SE(2)$ . . . . .	157
<b>B Resultados Auxiliares</b>	<b>161</b>
B.1 Superfície de Energia Constante para o Sistema de 2-corpos . . . . .	161
B.2 Desacoplamento dos Componentes da $\mathfrak{se}(2)$ . . . . .	162
B.3 Equação da Conexão Horizontal e Holonomia . . . . .	163
B.4 Curvatura da Conexão . . . . .	164
B.5 Constantes estruturais da álgebra $\mathfrak{se}(2)$ . . . . .	167
B.6 Espaço Tangente à Órbita do Grupo . . . . .	167
B.6.1 Gerador Infinitesimal de $SE(2)$ . . . . .	168
<b>C Modelagem Complementar</b>	<b>171</b>
C.1 O Corpo Rígido . . . . .	171
C.2 Sistema Multi-Corpos . . . . .	174
C.2.1 Matriz de Inércia do Sistema . . . . .	174
C.2.2 Modelo do sistema de 3-corpos . . . . .	176
C.2.3 Modelo do sistema de 5-corpos . . . . .	177
C.2.4 Modelo Cinemático do Sistema . . . . .	178
C.2.5 Modelagem Lagrangiana . . . . .	179



# Lista de Figuras

1.1	Sistema robótico multi-articulado móvel, como $N$ corpos, sob ação de forças $f_i$ e de torques das juntas $T_j$ .	6
2.1	Difeomorfismos $f$ entre variedades, levantamentos tangentes $Tf$ em espaços tangentes $T_m M$ e levantamentos cotangentes $T^*f$ em espaços cotangentes $T_n^* N$ .	14
2.2	O espaço de configuração $Q$ , o espaço tangente e o seu dual em $q$ , e a força $f(v_q)$ em $T_q^* Q$ .	17
2.3	Levantamento cotangente $T^*f$ das ações de grupo $f$ . Os campos vetoriais $X _Q$ e $X _S$ são definidos, respectivamente, em $Q$ e $S$ .	19
2.4	Equivariância da aplicação momento $\mathbf{J}$ equivale a comutação das ações.	25
2.5	Trajетórias da dinâmica de rotação do corpo rígido no espaço tridimensional. A intersecção da superfície de conservação do momento angular, dada por esferas concêntricas ao centro de massa do corpo, com a superfície representativa da conservação de energia, descrita por elipsóides (não ilustrados) fornece as possíveis trajetórias do corpo no espaço de variáveis.	29
2.6	Espaço tangente total $T_q Q$ , espaço tangente sobre $B$ e o levantamento da projeção $\pi$ .	32
2.7	O fibrado principal. $\Phi_g(q)$ corresponde a órbita da ação de $g \in G$ em $q$ , Seção A.1.	33
3.1	Em geral, o pareamento dos elementos duais de $TQ$ e $T^*Q$ é não nulo. Na mecânica, no entanto, as forças de restrições $f_c$ são perpendiculares a velocidade, pois não realizam trabalho.	39
3.2	Diagrama definindo a conexão mecânica.	41
4.1	O $i$ -ésimo sistema de coordenadas é especificado, através da posição da sua origem $\mathbf{r}_i$ e orientação $\theta_i$ , em relação ao $i - 1$ -ésimo referencial.	50
4.2	Trajетórias da dinâmica de rotação do sistema de dois corpos no plano. As trajetórias são determinadas pela intersecção da superfície cilíndrica, devida à conservação do momento angular do sistema $\mu_1 + \mu_2$ , com o elipsóide, representativo da conservação de energia $H$ . Ver Seção B.1.	55
4.3	Efeito das forças de propulsão nas juntas de rotação.	60
4.4	Entradas relativas aos propulsores no referencial móvel do sistema de 2-corpos.	72

5.1	Mudança de fase do sistema de três corpos. A mudança de fase foi calculada a partir de (5.2.9), para um caminho fechado no espaço de base $B$ parametrizado por $\alpha, \beta = 3$ . As coordenadas do espaço de base são dadas por $(\phi_1, \phi_2) = (\theta_{12}, \theta_{23})$ . . . . .	94
5.2	Curvatura $\mathcal{B}$ relativa à conexão principal do sistema de três corpos. A curvatura da conexão $\mathcal{A}$ dada em (5.2.9) foi obtida a partir de (5.2.10). . . . .	95
5.3	Cinemática do sistema de dois corpos. . . . .	101
6.1	Resultados da estabilização da configuração no ponto $(-9.90, -5.10, -1.55, 2.00, -2.00)$ do sistema de 3-corpos, através de linearização por realimentação. . . . .	121
6.2	Resultados da estabilização do momento do sistema de 3-corpos, através de linearização por realimentação. . . . .	122
6.3	Estabilização da velocidade do sistema de 2-corpos. . . . .	133
6.4	Planejamento de trajetória do sistema de 2-corpos. . . . .	136
6.5	Resultados de simulação em malha aberta do planejamento de trajetória do sistema de 2-corpos. . . . .	137
6.6	Resultados de estabilização de posição e velocidade pela composição das leis de controle. . . . .	139
6.7	Resultados do controle ótimo aplicado ao modelo cinemático do sistema de dois corpos. . . . .	143
6.8	Resultados do controle ótimo aplicado ao modelo cinemático do sistema de dois corpos. . . . .	144
C.1	O corpo rígido com dois propulsores no $SE(2)$ . . . . .	171
C.2	Esquema para a modelagem da matriz de inércia do sistema multi-articulado $\mathbb{J}$ . . . . .	174

# Lista de Símbolos

- $\mathbf{0}_{(\cdot)}$  vetor de zeros ou matriz
- $\mathbf{1}_N$  vetor coluna de  $N$  uns
- $A$  conexão de Ehresman
- $\mathcal{A}$  conexão principal
- $B$  curvatura da conexão de Ehresman  $A$
- $\mathcal{B}$  curvatura da conexão principal  $\mathcal{A}$
- $\mathbf{R}$  Matriz de rotação, elemento do grupo de Lie  $SO(n)$
- $f$  campo vetorial da dinâmica livre de um sistema
- $f_{(\cdot)}$  força de propulsão
- $g$  elemento do Grupo de Lie  $G$  ou campo vetorial de entrada de um sistema
- $B$  Espaço de base
- $G$  Grupo de Lie
- $\mathbb{G}$  inércia generalizada, isomorfismo da métrica de Riemann
- $\mathfrak{g}$  álgebra de Lie do grupo de Lie  $G$
- $\mathbb{J}$  Matriz de inércia do sistema
- $\mathbf{J}$  Aplicação momento
- $H$  Hamiltoniano de um sistema
- $K_E$  Energia cinética de um sistema
- $L$  Lagrangiano de um sistema
- $L_X(F)$  derivada direcional da função  $F$  na direção do campo vetorial  $X$
- $M$  variedade diferenciável genérica
- $m$  número de entradas ou restrições
- $n$  dimensão do espaço de estados ou de fase
- $N$  número de corpos componentes do sistema
- $q$  configuração do sistema,  $q \in Q$
- $Q$  variedade ou espaço de configuração
- $p$  elemento de uma variedade diferenciável genérica  $M$  ou elemento do espaço de fase de momento de um sistema,  $p \in T_q^*Q$
- $X$  campo vetorial genérico
- $x$  difeomorfismo ou parametrização de uma variedade diferenciável ao  $\mathbb{R}^n$
- $z$  elemento do espaço de fase  $T^*Q$ ,  $z = (q, p)$
- $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$  métrica de Riemann
- $[\cdot, \cdot]$  colchete de Lie dos elementos da álgebra ou de Jabobi-Lie para campos vetoriais
- $V$  função de Lyapunov
- $v$  vetor velocidade, elemento do espaço tangente de uma variedade
- $r$  coordenada genérica do espaço de base  $B$
- $s$  coordenada genérica do espaço de grupo  $G$

## Caracteres Gregos

$\theta$  orientação com relação a um referencial inercial

$\phi$  ângulo de junta

$\omega$  velocidade rotacional do sistema mecânico

$\mu$  momento rotacional do sistema mecânico

$\tau$  entrada do sistema mecânico

$\xi$  elemento da álgebra de Lie genérica ou novas coordenadas do processo de linearização por realimentação

## Superscrito

\* - referente a massa total do sistema

*ext* - referente às forças externas

## Subscrito

p - referente aos propulsores

t - referente aos torques das juntas rotativas

B - referente ao referencial móvel

S - referente ao referencial inercial

cm - referente ao centro de massa do sistema

x - referente ao eixo das abscissas do referencial inercial

y - referente ao eixo das ordenadas do referencial inercial

c - referente a cinemática do sistema

# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Contextualização

O projeto de sistemas robóticos, em particular os sistemas móveis, segue uma constante e irreversível crescente em termos da complexidade de inteligência e de reação ao ambiente, do projeto do desempenho dinâmico e de interação com o ambiente.

A modelagem da dinâmica do corpo rígido compreende uma descrição dos movimentos de translação e rotação sob a ação de esforços externos. Para o sistema analisado a seguir, assim como para todos os sistemas que são compostos por mais de um corpo rígido, por exemplo, faz-se importante descrever a posição relativa entre os seus elementos componentes, em conjunto com a descrição da translação e rotação de um ponto representativo do sistema. Sistemas deste tipo, cujo a dinâmica de muitos corpos estão envolvidos na descrição do mesmo, são denominados **sistemas multi-corpos**. A complexidade relativamente maior da dinâmica destes sistemas reside nesta premissa, uma vez que é necessário um número maior de variáveis para descrever a evolução no tempo dos graus de liberdade adicionais. Por outro lado, um maior número de graus de liberdade envolvidos permite incrementar a variabilidade de desempenho do sistema pois é possível realizar uma maior quantidade de manobras no espaço de movimento.

Um típico exemplo do aumento da inteligência diz respeito aos atributos que conferem ao sistema maior autonomia, ou seja, capacidade de tomada de decisões, cuja implementação segue da estruturação de vários níveis hierárquicos ou cooperativos na arquitetura

do sistema de controle. Quanto a dinâmica de movimento, uma variedade de técnicas de controle estão disponíveis que possibilitam projetar trajetórias de movimentos com margens de estabilidade e de rejeição aos distúrbios bem determinadas e que, em muitas circunstâncias, são estabelecidas através de relações de compromisso. Além disso, muitos sistemas móveis são dotados de partes móveis internas ou de manipuladores, o que permite expandir as possibilidades de desempenho, ao passo que, e concomitantemente, tornam mais complexos os projetos dinâmico e dos subsistemas que garantem a autonomia do sistema, (Yuh e West, 2001) e (UUVMP Committee, 2004). Sistemas desta categoria não apenas realizam tarefas de monitoramento, inspeção ou segurança, mas operam alterando ativamente o seu meio de atuação ou simplesmente reagindo ao ambiente.

### 1.1.1 Sistemas Multi-Articulados

Os **sistemas multi-articulados** são particularizações dos sistema multi-corpos definidos acima, cujos corpos estão acoplados fisicamente entre si por articulações planas ou esféricas. Sistemas deste tipo possuem aplicação variada, como a espacial, onde o ônibus espacial e a estação espacial internacional (ISS) constituem exemplos típicos de veículos tripulados, e aquática, como nos veículos submarinos tripulados ou não, que possuem manipuladores, entre outros. Neste último exemplo, com o projeto de veículos operando com velocidades cada vez mais maiores, ocorre um aumentando do acoplamento dinâmico entre veículo e manipulador através das forças hidrodinâmicas (McLain, Rock e Lee, 1995). Isto demanda maior capacidade de desempenho do sistema de controle e dos atuadores do sistema.

No presente trabalho, investiga-se técnicas de modelagem dinâmica, análise da controlabilidade dinâmica e cinemática, geração de trajetória e controle para um sistema mecânico articulado restrito ao plano. O sistema mecânico mencionado consiste em múltiplos corpos rígidos articulados entre si através de juntas rotativas de um grau de liberdade. Tal idealização é representativa de sistemas físicos como sistemas mecânicos complexos ou uma rede de robôs ou veículos móveis acoplados através de manipuladores. Exemplos recentes de estudos com sistemas multi-corpos no espaço (3D) e acoplados através de juntas de rotação podem ser encontrados em (Dubowsky e Papadopoulos, 1993), (Walsh e Sastry, 1995), (Koningstein e Cannon Jr., 1995), (Rui, Kolmanovsky e McClamroch, 2000), entre outros.

Um exemplo de aplicação do sistema pode ser representado pela construção e instalação de estruturas submarinas com auxílio de veículos autônomos, como os AUVs<sup>1</sup> dotados de manipuladores, por exemplo. Neste caso, o movimento simultâneo e coordenado do veículo e manipulador(es) é considerado acoplado e determinado para atender a diversos cenários de operação.

O grupo de veículos, componentes do sistema multi-corpo, é passível da variação da geometria de formação, ou seja, a orientação relativa entre os corpos é variável, visando o interesse no desempenho de movimento dos corpos de forma coordenada. A atuação sobre o sistema é realizada através de entradas (ou atuadores) internos e externos, segundo a nomenclatura de sistemas robóticos. Atuadores internos são responsáveis pela orientação relativa entre os corpos. Esforços externos, como distúrbios por exemplo, alteram a dinâmica do sistema em relação a um referencial inercial.

### 1.1.2 Revisão da Literatura Técnica

Os sistemas robóticos multi-corpos, como os manipuladores robóticos e robôs bípedes, são uma presente realidade e durante várias décadas vem sendo empregados como auxílio de produção nos processos industriais e como tema de estudo nas atividades de ensino e pesquisa. Publicações variadas sobre a teoria de modelagem envolvida, o projeto e construção, controle ou tendências experimentais tem sido produzidas; dentre estas, pode-se mencionar a referência pioneira (Wittenburg, 1977), além das citadas na seção anterior, entre outras.

Mais recentemente, sistemas multi-articulados são estudados com vista a aplicação espacial, em particular no controle de atitude de satélites artificiais. Apresentou-se em Sreenath (1987) a modelagem de um sistema multi-articulado no plano sob um tratamento geométrico. Em Reyhanoglu e McClamroch (1991) pode-se encontrar uma discussão sobre a controlabilidade e estabilização de sistemas multi-corpos com a restrição de invariância do momento angular. Dubowsky e Papadopoulos (1993) apresentou a dinâmica e controle de sistemas robóticos espaciais totalmente controláveis no espaço tridimensional. O controle não-linear da atitude e da forma de um sistema composto por apêndices articulados e rodas de inércia foi discutido em Rui et al. (2000). Shen (2002) dissertou sobre o controle de sistema multi-corpos através da variação de forma. Como aplicação submarina, Melli, Rowley e Rufat (2006) apresentam um algoritmo para a

---

<sup>1</sup>Do inglês: *Autonomous Underwater Vehicles*.

geração de trajetórias de translação pelo controle de forma do sistema multi-articulado em um meio fluido.

A mecânica geométrica, como no contexto apresentado em Marsden (2004) e nas referências ali citadas, entre outras, é aqui utilizada para modelagem do sistema, elaborada por uma descrição segundo a mecânica clássica através da linguagem devido a geometria diferencial (Spivak, 1999). Como será discutido ao longo do texto, as ferramentas disponíveis a partir do ramo da geometria, mais especificamente da geometria diferencial, permitem fragmentar a dinâmica de sistemas, possibilitando sua análise de forma elegante e consistente com o intuito de identificar características de movimento. Estas, por sua vez, permitem organizar e minimizar os cálculos de modelagem e de solução das equações diferenciais do modelo. Referências adicionais são feitas a seguir.

O estudo da controlabilidade de sistemas mecânicos não-lineares ganhou nova motivação, nas três últimas décadas, com o surgimento de ferramentas baseadas em resultados conhecidos da geometria diferencial. Em particular, este avanço se aplica na análise da estrutura dos campos vetoriais que descrevem as equações de dinâmica, pela álgebra determinada pelo colchete de Jacobi-Lie dos campos vetoriais, (Sussmann, 1987).

Em função das mesmas ferramentas de análise empregadas na determinação da controlabilidade, as técnicas de linearização por realimentação da dinâmica de estado (Isidori, 1995), utilizadas para a estabilização de sistema completamente controláveis, foram desenvolvidas por Brockett, Respondek, Krener e Isidori, entre outros. Nos sistemas que apresentam medidas de controlabilidade deficientes, outros métodos de estabilização devem ser utilizados como, por exemplo, técnicas cujas leis de controle não são infinitamente diferenciáveis nas variáveis do estado ou, mesmo, técnicas de controle variantes no tempo. A teoria de estabilidade proposta por Lyapunov, (Khalil, 2002), pode ser empregada com esta finalidade.

## 1.2 Proposta de uma Classe de Sistemas Robóticos Móveis

Uma das contribuições deste trabalho consiste em propor uma classe de sistemas robóticos móveis e multi-articulados, no qual o sistema propulsor está distribuído pelos elementos, ou corpos, do sistema ao invés de se concentrarem apenas no *corpo base* ou veículo.



Uma apresentação inicial da modelagem de um sistema multi-articulado no plano foi realizada em Sreenath (1987), através de uma abordagem Hamiltoniana.<sup>2</sup> No entanto, a modelagem e análise do sistema considerados naquele estudo compreendiam um sistema desprovido de uma configuração de entradas que permitisse a sua movimentação no plano. O sistema aqui considerado, em contraste, e como será proposto a seguir, possui entradas dispostas de maneira a possibilitar que este seja manobrado por todo o espaço de variáveis do plano.

Diferentemente, uma abordagem segundo uma visão Lagrangiana não é, até o presente momento, empregada de maneira freqüente na modelagem de sistemas multi-articulados. Exceções a esta afirmação são encontradas na modelagem do *Elroy's Benie* - sistema composto por dois corpos articulados no centro comum de massa e, portanto, mais simples do que o considerado aqui - discutido em Ostrowski (1995), Ostrowski (1999) e do sistema com restrições não-holonômicas denominado *snakeboard*, (Bloch, Krishna-prasad, Marsden e Murray, 1996; Bloch, 2003). Uma das possíveis razões para o uso não freqüente desta, deve-se a relativa complexidade da teoria em comparação com a alternativa Hamiltoniana. No entanto, a modelagem sob uma abordagem Lagrangiana permite, em geral, um melhor detalhamento da geometria da dinâmica envolvida.

Define-se, a seguir, a classe de sistemas multi-corpos considerada neste trabalho:

**Definição 1.2.1** (Sistema multi-articulado móvel). Define-se a classe de sistemas multi-corpos móveis, como aquele composto por mais de um corpo rígido, acoplados fisicamente entre si através de juntas rotativas e em que os seus atuadores, responsáveis pela sua mobilidade em relação a um referencial inercial, estão distribuídos nos corpos que o compõe, Fig. 1.1.

A qualidade de ser móvel na definição acima, em princípio, abrange o espaço físico tridimensional. No entanto, as discussões do presente trabalho restringem-se ao caso em que a mobilidade do sistema limita-se ao plano bidimensional. Como será visto nos capítulos de modelagem e análise, as juntas rotativas podem ser tomadas como ativas ou passivas. No presente capítulo, apresenta-se uma evolução em relação a acionamento dos sistemas multi-articulados apresentados em Sreenath (1987), por exemplo, no que diz respeito à capacidade de auto-manobra no espaço pela ação de propulsores. Estes

---

<sup>2</sup>Algumas correções de um resultado, no que diz respeito ao algoritmo para determinação da inércia do sistema multi-corpos, desta referência são apresentadas na Seção C.2.1 do Apêndice C do presente trabalho.

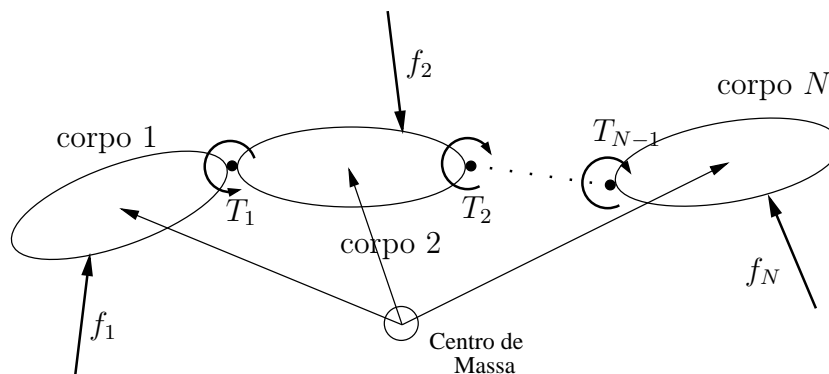


Figura 1.1: Sistema robótico multi-articulado móvel, como  $N$  corpos, sob ação de forças  $f_i$  e de torques das juntas  $T_j$ .

propulsores podem ser realizados por jatos de gases sob pressão ou provenientes de combustão, como encontrados em sistemas espaciais, ou pelo empuxo relativo de um fluido por uma hélice, como encontrado nos sistemas aquáticos, submarinos e aéreos. Observe, também, que a classe de sistemas definida acima difere dos considerados em Dubowsky e Papadopoulos (1993), em que os acionamentos de translação do sistema estão todos localizados em um único corpo rígido, denominado veículo base, por exemplo.

O sistema de interesse neste trabalho é, de maneira geral, caracterizado pelos seguintes atributos, e formalmente definidos nos próximos capítulos:

- Dinâmica livre não-linear e autônoma;
- Dinâmica representada na forma afim<sup>3</sup>;
- Sistema Lagrangiano, determinado apenas pela energia cinética;
- Sistema Hamiltoniano (Marsden e Ratiu, 1999), (Nijmeijer e van der Shaft, 1990);
- Configuração descrita por um grupo de Lie definido por  $N$  cópias do  $SE(2)$ , onde  $N$  é o número de corpos do sistema;<sup>4</sup>
- Sistema invariante à esquerda nas variáveis do referencial móvel;
- Sistema com restrição não-holonômica na velocidade e determinada pela conservação do momento angular total na ausência de esforços externos;

<sup>3</sup>Muitos sistemas mecânicos possuem esta propriedade.

<sup>4</sup>Note que o conceito de *configuração*, como definido no próximo capítulo é, por definição, distinto da relativa ao estado, podendo esta última incluir a *configuração* do sistema - composto pela posição, orientação e variáveis de forma - além das variáveis de *velocidade*.

- Sistema de controle sobre-atuado, atuado ou sub-atuado, dependendo do número de entradas estipulado.

## 1.3 Objetivos de Pesquisa

Ambas as abordagens analíticas da mecânica, segundo Hamilton e Lagrange, são utilizadas na modelagem do sistema proposto. Como será visto, estas abordagens se alternam em permitir uma melhor elucidação da física do problema. Por exemplo, quando da caracterização de restrições não-holonômicas para um sistema, é usual deparar-se com um desenvolvimento Lagrangiano. Alternativamente, a abordagem Hamiltoniana permite obter de maneira direta as equações de movimento, adequando-se melhor à análise de controlabilidade.

O foco principal de aplicação da teoria relativa aos métodos geométricos são empregados, na presente pesquisa, à modelagem, análise da dinâmica, planejamento de trajetórias e síntese de controle em malha fechada de sistemas mecânicos, em particular dos sistema multi-corpos como apresentado acima. Neste contexto, apresentam-se a dinâmica e técnicas de controle para um robô móvel e composto por corpos rígidos articulados com interesse no desempenho de tarefas de forma coordenada e autônoma. Uma das principais motivações para o presente trabalho consiste na investigação do aumento de desempenho do sistema robótico móvel proposto, ou sistema multi-corpos, em relação aos robôs móveis na forma como geralmente são utilizados, ou seja, composto por um único corpo rígido. Estas medidas de desempenho podem ser determinados para otimização do comprimento da trajetória, variáveis temporais, esforço de controle ou consumo energético.

### 1.3.1 Contribuições do Trabalho

Dentre as principais contribuições deste trabalho, podem-se destacar as seguintes:

- Proposta de uma classe de robôs móveis multi-articulados;
- Modelagem dinâmica fundamentada na teoria geométrica sob as abordagens Lagrangiana e Hamiltoniana. Modelagem das entradas do sistema, como descrito na definição da classe de sistemas acima, Fig. 1.1;

- Análises de controlabilidade de exemplos de sistemas da classe proposta;
- Estabilização por regulação do sistema mediante um método de linearização por realimentação, aliado a realimentação do estado, e através da teoria de estabilidade de Lyapunov.

Dentre os principais resultados obtidos neste trabalho, os seguintes são notáveis:

- Apresenta-se a modelagem da dinâmica do sistema através de diferentes parametrizações do espaço de configuração  $Q$ ;
- Apresenta-se a modelagem das entradas de propulsão do sistema;
- A análise de controlabilidade mostra que um sistema multi-articulado de  $N$ -corpos, com pelo menos dois propulsores, é sempre acessível e controlável dos pontos de equilíbrio:
  - Mostra-se que o sistema é sempre linearizável por realimentação quando o número de entradas iguala-se à dimensão do espaço de configuração  $Q$ . Neste caso, pode-se estabilizar o sistema através de uma realimentação *suave* do estado, dada uma matriz de ganhos do compensador projetada adequadamente;
- Nos casos em que a controlabilidade é deficiente, obtém-se uma extensão de um resultado de estabilização para sistemas sub-atuados (Fantoni, Lozano, Mazenc e Pettersen, 1999).

### 1.3.2 Justificativa do uso da Teoria Geométrica

Como mencionado acima, o caminho seguido para abordar o tema proposto baseia-se nos métodos geométricos para a mecânica clássica, ramo da matemática que agrega elementos do cálculo diferencial, álgebra linear e topologia, denominada geometria diferencial. Neste contexto, a modelagem do sistema é realizada através da obtenção dos campos vetoriais, que nada mais representam que um sistema de EDOs autônomas descritas adequadamente. De maneira bastante simplista pode-se dizer que estes métodos geométricos correspondem a uma especialização do ramo da mecânica denominado *mecânica analítica*<sup>5</sup>, que por sua vez permitem uma análise do sistema como um

<sup>5</sup>Formalmente, esta analogia não é aceita, não sendo endossada por muitos autores.

todo, em contraste da abordagem Newtoniana, que trata do estudo individual de cada componente do sistema.

De maneira mais abrangente, a geometria diferencial permite estabelecer uma associação entre a análise e a geometria, permite ainda “sintetizar figuras” da geometria do problema em estudo, o que garante potencial heurístico na inferência de certas propriedades inerentes ao sistema dinâmico e que podem ser rapidamente verificadas. Isto pode traduzir-se em uma “simplificação” do ferramental matemático necessário à análise do objeto de estudo além de uma compreensão mais fundamental da física do mesmo (Schutz, 1980).

Além disso, a geometria diferencial consiste em um dos canais possíveis através dos quais essas vantagens acima apresentadas podem ser extrapoladas do espaço físico para o espaço de variáveis. A modelagem do sistema baseia-se, neste contexto, na possibilidade de tradução do comportamento dinâmico dos sistemas físico em modelos matemáticos correspondentes e na análise destes de maneira independente de um sistema de coordenadas (Lanczos, 1977). A formulação conceitual da mecânica analítica é, por exemplo, realizada desta maneira. Neste sentido, a mecânica analítica caracteriza-se por ser mais versátil, permitindo uma generalização das coordenadas em contraste com o espaço de coordenadas físicas da formulação Newtoniana, (Meirovitch, 1970). Ademais, a inclusão da dinâmica de subsistemas adicionais na abordagem analítica é realizada de maneira direta e sistemática. Esta representa uma nítida vantagem de aplicação ao sistema proposto. A teoria geométrica possui difundida aplicação especificamente na teoria de controle. Logo, o emprego da teoria da mecânica geométrica ganha motivação extra com as ferramentas de análise e síntese de sistemas de controle. Como visto a seguir, estas estão fortemente baseadas na teoria geométrica, especialmente no caso de sistemas não-lineares.

A motivação de escolha da mecânica geométrica abrange estas explicações acima juntamente com um interesse pessoal do autor em expandir o conhecimento, mesmo que de maneira introdutória, nas disciplinas da matemática relacionadas aos sistemas dinâmicos.

### 1.3.3 Aplicações

Outras áreas de aplicação do sistema aqui considerado, em adição às aplicações já citadas nas seções anteriores, resumem-se nas seguintes:

**Robótica:** sistemas distribuídos *swarm*; por exemplo, operação de vários robôs móveis atuando em conjunto para a realização de tarefas - <http://www.work.caltech.edu/ling/>, <http://payman.caltech.edu/sis/program.html>;

**Medicina:** modelagem e controle de agulhas utilizadas na instrumentação médica (Kallem e Cowan, 2007) - <http://glacier.me.jhu.edu/vinutha/research.html>;

**Química:** modelagem e análise de reações químicas em sistemas poliatômicos (4 a 7 átomos) - <http://www.cds.caltech.edu/koon/project/>;

**Biologia:** modelagem do movimento de microorganismos (Shapere e Wilczek, 1987).

### 1.3.4 Organização da Tese

O presente trabalho está organizado nos seguintes capítulos:

**Capítulo 2** Uma breve fundamentação teórica dos conceitos relativos à modelagem, análise e controle que são realizados nos capítulos subsequentes são apresentados. Em síntese são revistos os conceitos de grupos, simetria, aplicação momento  $\mathbf{J}$ , conexão principal, decomposição do espaço de fase do sistema no fibrado principal. Em particular, a configuração de um corpo rígido no plano é completamente especificada pelas coordenadas do grupo  $SE(2)$ , que é um grupo definido por um produto semi-direto.

**Capítulo 3** Apresentação do princípio de Lagrange d'Alembert para sistemas não-holonômicos. Descrição e teoria à modelagem Lagrangiana através do relacionamento entre a inércia, a simetria e o momento generalizado do sistema denominado por *conexão mecânica*. Discussão sobre a redução do sistema para obtenção da dinâmica relativa, reconstrução da dinâmica completa do sistema no espaço de fase  $TQ$ .

**Capítulo 4** Modelagens Hamiltoniana e Lagrangiana:

- Descrição e obtenção da matriz de inércia do sistema, determinação da função Hamiltoniano em função da inércia do sistema, modelagem da dinâmica do sistema;
- Equações da dinâmica reduzida e de reconstrução da dinâmica completa do sistema no espaço de fase  $TQ$ , sob o ponto de vista de Lagrange;
- Modelagem da entrada e do sistema de controle com  $N$  corpos sob ambas as abordagens Hamiltoniana e Lagrangiana.

**Capítulo 5** Exposição do equilíbrio dinâmico do sistema. Análise das fases geométricas do sistema multi-articulado. Apresentação da teoria e análise da controlabilidade do sistema.

**Capítulo 6** Apresentação da teoria, análise e discussão do problema de estabilização do sistema multi-corpos através de linearização por realimentação e síntese de controle por realimentação através da teoria de Lyapunov. Apresenta-se um resultado do planejamento de trajetória através do controle ótimo.

**Capítulo 7** Conclusão dos principais resultados e discussões do trabalho. Apresentam-se, também, alguns temas sugestivos para o prosseguimento deste trabalho.

Além destes, três capítulos estão organizados como Apêndice.

O primeiro capítulo do Apêndice apresenta uma breve recapitulação da teoria envolvida. Em particular, as definições de alguns conceitos básicos da geometria diferencial e da mecânica geométrica são revisadas. Estas definições serão utilizadas corriqueiramente no trabalho.

O segundo capítulo do Apêndice contém resultados da mecânica geométrica utilizados no curso do texto principal. Estes resultados podem não ser encontrados na literatura que trata do assunto ou são detalhamentos, de resultados de algumas referências, para o tratamento aqui pretendido.

O terceiro capítulo do Apêndice apresenta um modelo do corpo rígido no plano e modelos do sistema multi-articulado. Em particular, apresentam-se resultados complementares de modelagem dos sistemas de 3 e 5 corpos.

## Capítulo 2

# Elementos da Mecânica Geométrica

Conceitualmente, a mecânica Lagrangiana resume-se na descrição da dinâmica de um sistema em uma variedade diferencial denominada espaço de configuração em conjunto com uma função escalar, o Lagrangiano, definida no espaço tangente ao espaço de configuração. A mecânica Hamiltoniana estende a teoria de Lagrange com a introdução de mais estrutura à geometria do sistema. Esta é definida em uma variedade de dimensão par e caracterizada por uma estrutura simplética não degenerada chamada espaço de fase, que usualmente corresponde ao dual do espaço tangente ao espaço de configuração. Um sistema Hamiltoniano é completamente determinado com a especificação do espaço de fase com uma estrutura simplética e com o Hamiltoniano definido neste espaço de fase. Nos parágrafos a seguir, os elementos essenciais destas duas abordagens serão revistos com ênfase dada à descrição da geometria envolvida.

Vale destacar que os resultados discutidos a seguir valem - mas em geral não são necessariamente exclusivos - ao caso de dimensão finita. E, finalmente, a convenção do somatório de Einstein é subentendida ao longo do texto quando o símbolo do somatório não é explicitamente empregado, como de costume em textos de física ou mecânica.

### 2.1 Geometria Diferencial

Uma variedade  $M$  é um conjunto em que, para cada elemento de  $M$ , existe uma aplicação bijetora e contínua que transforma pontos de um aberto que contém este elemento a um



aberto do  $\mathbb{R}^n$ , para algum natural  $n$ .<sup>1</sup> Mais precisamente, uma variedade é um espaço métrico onde para cada  $p \in M$  com um aberto  $U$  de  $p$  e um inteiro  $n \geq 0$  tal que existe um homeomorfismo  $\varphi$  que parametriza  $U$  a  $\mathbb{R}^n$  (Spivak, 1999). Uma variedade  $n$ -dimensional (finita)  $M$  é denominada uma variedade diferencial quando possui um atlas de cartas  $(\varphi_i, U_i)$ ,  $i \geq 1$ , ao  $\mathbb{R}^n$ , cujos  $\varphi_i$  são aplicações **suaves** ( $\mathcal{C}^\infty$ ) ou de classe  $\mathcal{C}^k$ ,  $k \geq 1$ . A variedade  $M$  é dita suave se os  $\varphi_i$  forem aplicações suaves.

### 2.1.1 Campos vetoriais e Espaços Tangentes

Um campo vetorial  $X$  em  $M$  é uma regra atribuindo um vetor  $v_p$  a cada ponto  $p \in M$ . O conjunto de todos os  $v_p$  define um espaço vetorial de dimensão  $n$  denominado **espaço tangente** a  $M$  em  $p$  e representado por  $T_pM$ . Um vetor  $v_p \in T_pM$  também é representado como  $X_p = X(p)$ . O **fibrado tangente**  $TM$  é uma variedade  $2n$ -dimensional composta pela união dos espaços tangentes  $T_pM$ , para cada ponto  $p \in M$ :

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_pM \quad (2.1.1)$$

com coordenadas  $(p, v_p) = (p, \dot{p})$ . Logo, um campo vetorial  $X$  induz uma aplicação  $X : M \rightarrow TM : p \mapsto (p, v_p)$ . Dada uma parametrização  $(x, U)$  em  $M$ , onde  $x : U \subset M \rightarrow \mathbb{R}^n$ , uma base de  $T_pM$ , em torno de  $p \in U$ , é dada por

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \Big|_p \right\} \quad (2.1.2)$$

e o campo vetorial em  $M$  pode ser escrito nas coordenadas da base dada acima

$$X(p) = \sum_{i=1}^n a^i(p) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \quad (2.1.3)$$

Um campo vetorial completo é aquele cuja curva integral pode ser estendida infinitamente aos tempos futuro e passado.

Similarmente, pode-se definir um espaço dual ao espaço tangente  $T_pM$ , chamado de espaço cotangente  $T^*M$ . Os elementos do espaço  $T_p^*M$  são denominados de covetores, conhecidos também como 1-formas. Definido um ponto  $p \in M$ , o espaço  $T_p^*M$  possui base  $\{dx^1|_p, \dots, dx^n|_p\}$ . O fibrado cotangente  $T^*M$  é definido analogamente a  $TM$ .

<sup>1</sup>A definição de variedade feita aqui possui uma conotação local. Quando de uma definição concernente às propriedades globais, deve-se considerar os axiomas da contabilidade e Hausdorff (Mather, 2005).

Sejam  $M$  e  $N$  duas variedades e um difeomorfismo  $f : M \rightarrow N : m \mapsto f(m) = n$ , para  $m \in M$  e  $n \in N$ . A aplicação tangente correspondente  $T_m f : T_m M \rightarrow T_{f(m)} N$  transforma os vetores  $v \in T_m M$  em  $u \in T_n N$ , Figura 2.1. O levantamento cotangente  $T_m^* f : T_n N \rightarrow T_{f^{-1}(n)} M$ , onde  $f^{-1}(n) = m$ , é definido pelo seguinte pareamento

$$\langle T^* f(u_n), v_m \rangle = \langle u_n, T f \cdot v_m \rangle$$

O conceito relativo ao levantamento cotangente será importante quando da reparametrização das coordenadas da dinâmica do sistema multi-articulado e da descrição das suas forças de entrada no contexto geométrico.

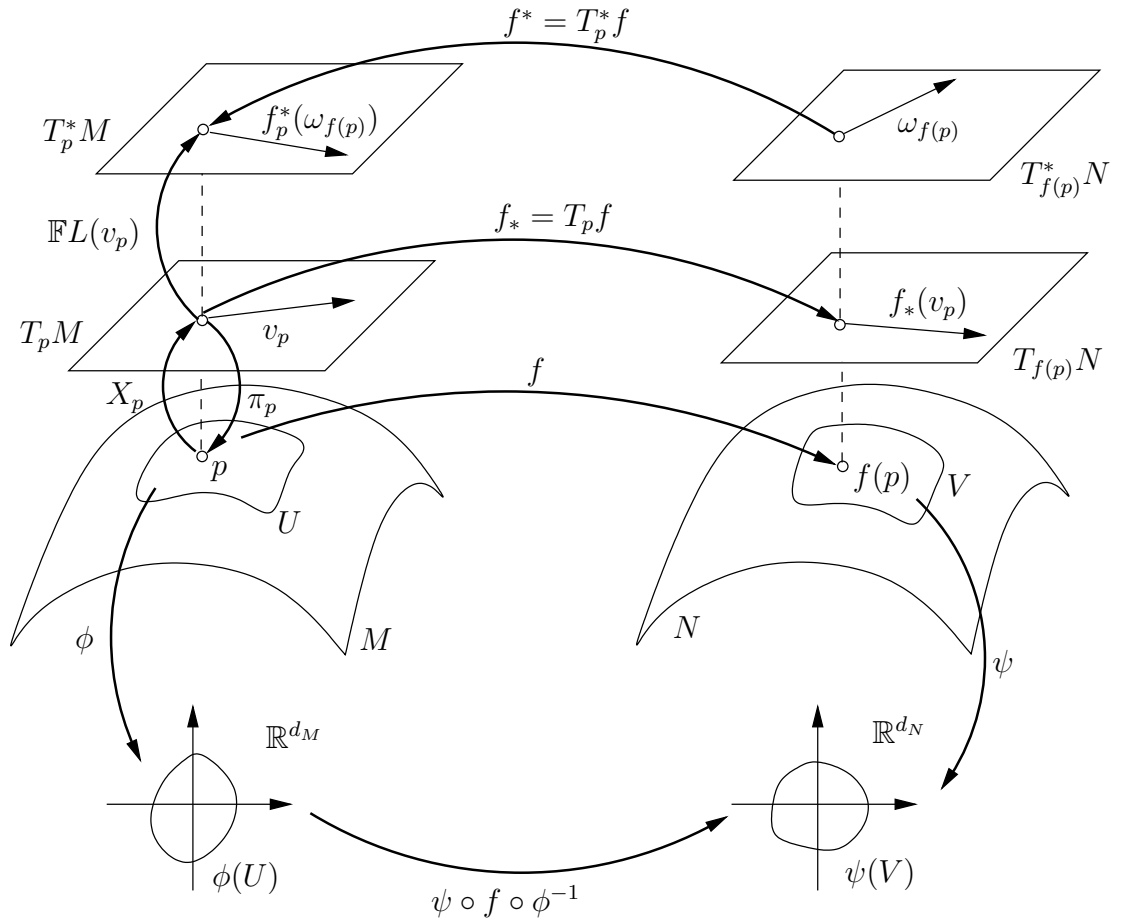


Figura 2.1: Difeomorfismos  $f$  entre variedades, levantamentos tangentes  $T f$  em espaços tangentes  $T_m M$  e levantamentos cotangentes  $T^* f$  em espaços cotangentes  $T_n^* N$ .

### Derivada direcional e Colchete de Lie

Seja uma função  $F : M \rightarrow \mathbb{R}$ . Lembrando que o diferencial de  $F$ , escrito na base  $dx|_p$ , é dado por

$$\mathbf{d}F(p) = \frac{\partial F(p)}{\partial x} dx$$

a derivada direcional de  $F$  ao longo do campo vetorial  $X$  é definida por

$$L_X F = X[F] = \mathbf{d}F \cdot X \quad (2.1.4)$$

Em coordenadas locais, isto é, para a carta  $(x, U \subset M)$  em torno de  $p$ , tem-se que

$$X[F](p) = \mathbf{d}F(p) \cdot X(p) = X^i(x(p)) \frac{\partial F(x(p))}{\partial x^i} \in \mathbb{R} \quad (2.1.5)$$

O colchete de Jacobi-Lie de dois campos vetoriais  $X, Y$  é definido pela operação  $L_X Y$ , ou seja, a diferenciação segundo Lie de um campo vetorial  $Y$  ao longo de  $X$ . Quando aplicado à função  $F$ , o colchete de Jacobi-Lie de  $X, Y$  confere a seguinte expressão

$$[X, Y][F] = X[L_Y F] - Y[L_X F] = X[Y[F]] - Y[X[F]]$$

A representação local, ou seja, em coordenadas, do colchete de Jacobi-Lie

$$[X, Y] = \mathbf{D}Y \cdot X - \mathbf{D}X \cdot Y = (X \cdot \nabla)Y - (Y \cdot \nabla)X \quad (2.1.6)$$

onde o operador  $\mathbf{D}$  simboliza a matriz Jacobiana relativo à diferenciação de um vetor com relação ao estado e  $\nabla$  é o operador divergente de uma função. Denominando por  $\mathfrak{X}(M)$  o espaço de todos os campos vetoriais suaves em  $M$ , o colchete de Jacobi-Lie pode ser visto como uma aplicação  $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ . Como será visto nos próximos capítulos, o colchete de Jacobi-Lie representa uma importante ferramenta na avaliação de controlabilidade de sistemas de controle.

### Álgebras de Lie

Uma álgebra de Lie  $V$  é um espaço vetorial em  $\mathbb{R}$  dotado de uma operação bilinear  $[\cdot, \cdot] : V \times V \rightarrow V$  e satisfazendo, para todo  $\xi, \eta, \zeta \in V$ , as seguintes propriedades

**anti-comutatividade** :  $[\xi, \eta] = -[\eta, \xi]$

**Identidade de Jacobi** :  $[\xi, [\eta, \zeta]] + [\eta, [\zeta, \xi]] + [\zeta, [\xi, \eta]] = 0$

onde  $[\cdot, \cdot]$  é também chamado de colchete ou comutador de Lie. Como será visto a seguir, o espaço tangente na identidade de um grupo de Lie,  $T_e G$ , é um espaço vetorial típico do cenário definido acima. Campos vetoriais em uma variedade munida do colchete de Jacobi-Lie formam uma álgebra de Lie, (Marsden e Ratiu, 1999). Uma álgebra de Lie é dita abeliana se a operação com o colchete de Lie resultar no elemento nulo para quaisquer dois elementos de  $V$ .

### 2.1.2 Distribuições de Campos Vetoriais

Uma distribuição  $d$ -dimensional  $\mathcal{D}_p$  em  $M$  é uma atribuição suave de um subespaço  $m$ -dimensional  $\mathcal{D}_p = \mathcal{D}(p)$  contido em  $T_p M$  a todo  $p \in M$ .

Uma distribuição  $\mathcal{D}$ , definida em um conjunto ou variedade aberta  $M$ , é **não singular** ou **regular** se constituir um subespaço de dimensão constante, ou, alternativamente, se o posto da matriz construída, em coordenadas locais, pelos campos vetoriais da distribuição for constante, para todo  $p \in M$ . Uma distribuição é dita **singular**, caso contrário. Um ponto  $p' \in M$  é denominado um ponto regular da distribuição  $\mathcal{D}$ , se existir uma vizinhança  $U$  de  $p'$  com a propriedade que  $\mathcal{D}_{p'}$  é não singular em  $U$ .

Um campo vetorial  $X$  pertence à distribuição  $\mathcal{D}$  se  $X(p) \in \mathcal{D}(p)$  para todo  $p \in M$ . A distribuição  $\mathcal{D}$  é dita involutiva se  $[X, Y] \in \mathcal{D}$  para todos  $X, Y \in \mathcal{D}$ .

Uma subvariedade  $N \subset M$  é dita uma variedade integrável de  $\mathcal{D}$  se  $\mathcal{D}(p) = T_p N$  para todo  $p \in N$ . Alternativamente, se  $\mathcal{D}(p)$  induzir uma variedade integrável para todo  $p \in M$ , então  $\mathcal{D}$  é dita integrável. Involutividade e integrabilidade estão relacionadas através do Teorema de Frobenius, (Isidori, 1995), no qual se estabelece que uma distribuição regular é integrável se e somente se esta for involutiva. A determinação da involutividade de uma distribuição  $d$ -dimensional  $\mathcal{D}(p) = \text{span}\{X_1(p), \dots, X_d(p)\}$  é equivalente ao problema de verificação da integrabilidade da mesma, segundo o Teorema de Frobenius. Determinar se uma distribuição é integrável significa encontrar  $n - d$  funções  $f^*(p)$  que são diferenciais perfeitas, ou seja, que possuem a seguinte estrutura

$$f_j^*(p) = \frac{\partial \lambda_j}{\partial x}$$

onde  $\lambda : M \rightarrow \mathbb{R}$  são funções suaves e  $j = 1, \dots, n - d$ , tal que seja possível determinar  $n - d$  soluções independentes para as seguintes equações diferenciais

$$\frac{\partial \lambda_j}{\partial x} [X_1(p) \cdots X_d(p)] = 0$$

onde  $j = 1, \dots, n - d$ .

## 2.2 Mecânica Geométrica

Define-se por **configuração** a generalização da posição e atitude de um sistema. Representa-se o espaço ou variedade de configuração por  $Q$ , com elementos  $q$ . Os vetores velocidade do mesmo são representados como elementos do espaço tangente  $T_qQ$ .

A força externa total  $f$  é geralmente definida por uma aplicação  $\mathcal{C}^\infty$  no fibrado tangente e função do tempo  $f : \mathbb{R} \times TQ \rightarrow T^*Q : (t, v_q) \mapsto f(t, v_q)$ , ver Figura 2.2. Uma força  $f$  é denominada **básica** quando existir um campo vetorial dual  $\mathcal{C}^\infty$  representado por  $f'$  em  $Q$  tal que  $f(t, v_q) = f'(q)$ . Uma variedade Riemanniana  $(Q, \langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle)$  consiste de

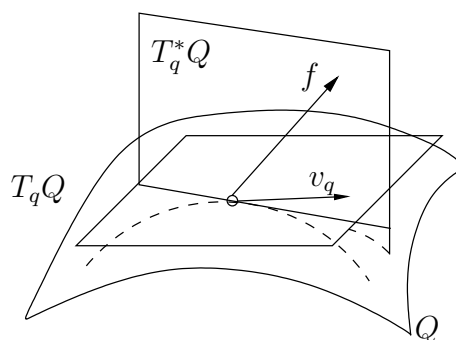


Figura 2.2: O espaço de configuração  $Q$ , o espaço tangente e o seu dual em  $q$ , e a força  $f(v_q)$  em  $T_q^*Q$ .

uma variedade diferenciável  $Q$  e de um campo tensorial  $(0, 2)$  em  $Q$ , ou, simplesmente, uma métrica quadrática, simétrica e definida e positiva,  $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle : TQ \times TQ \rightarrow \mathbb{R}$ . Uma métrica é sempre definível para sistemas mecânicos e será utilizada para definir a energia cinética destes sistemas a seguir. Sejam  $(Q, \langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle_1)$  e  $(\tilde{Q}, \langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle_2)$  duas variedades de Riemann. Uma isometria é um isomorfismo suave  $\varphi : Q \rightarrow \tilde{Q}$  onde  $\varphi^* \langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle_2 = \langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle_1$ .

### 2.2.1 Grupos e Grupos de Lie

Um grupo  $G$  é definido como um conjunto munido de uma operação binária  $(\cdot) : G \times G \ni (a, b) \mapsto a \cdot b \in G$ , para todo  $a, b, c \in G$ , com as seguintes propriedades:

**associatividade:**  $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ ;

**existência do elemento identidade:**  $\exists e \in G$  tal que  $a \cdot e = e \cdot a = a$ ;

**existência do elemento inverso:**  $\exists a^{-1} \in G$  tal que  $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$ .

Um grupo é denominado *abeliano* quando a operação do grupo for comutativa. Em símbolos: o grupo  $G$  é abeliano se  $a \cdot b = b \cdot a$ , para  $a, b \in G$ .

Um **grupo de Lie**  $G$  é um grupo caracterizado por ser também uma variedade diferencial tal que, para todo  $a, b \in G$ , as operações de grupo  $(a, b) \mapsto a \cdot b$  e a operação de inversa  $a \mapsto a^{-1}$  são aplicações suaves. Dado um natural  $n \in \mathbb{N}$ , os seguintes são exemplos de grupos de Lie em que a operação de grupo é a multiplicação usual de matrizes:

- $SO(n)$ : Grupo Ortogonal especial representado por matrizes do tipo:

$$SO(n) = \{\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \mathbf{R}^T \mathbf{R} = I_n, \det(\mathbf{R}) = +1\} \quad (2.2.1)$$

onde  $\mathbf{R}$  são matrizes de rotação. Para  $n = 3$ , as aplicações lineares  $\mathbf{R}$  que preservam a norma Euclideana são utilizadas para descrever rotações de corpos rígidos no espaço. Quando  $n = 2$ , as rotações restringem-se aos movimentos no plano, o grupo Ortogonal Especial no plano. O grupo  $SO(2)$  é abeliano, no qual a operação de grupo comuta para quaisquer  $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2 \in SO(2)$ .

- $SE(n)$ : O grupo Euclideano especial consiste em elementos do tipo

$$SE(n) = \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{r} \\ \mathbf{0}_{1 \times n} & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)} \mid \mathbf{R} \in SO(n), \mathbf{r} \in \mathbb{R}^n \right\} \quad (2.2.2)$$

A operação de grupo entre os elementos de  $SE(n)$  é dado por:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 & \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{0}_{1 \times n} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{R}_2 & \mathbf{r}_2 \\ \mathbf{0}_{1 \times n} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2 & \mathbf{R}_1 \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{0}_{1 \times n} & 1 \end{bmatrix}$$

Logo,  $SE(n)$  é dado por um produto semi-direto<sup>2</sup> entre os elementos do grupo  $SO(n)$  e o espaço vetorial  $\mathbb{R}^n$ . Em símbolos,  $SE(n) = SO(n) \ltimes \mathbb{R}^n$ , Seção B.2. O  $SE(2)$  é denominado grupo Euclideano especial no plano e o grupo  $SE(3)$  corresponde ao conjunto de deslocamentos rígidos no espaço.

<sup>2</sup>Em contraste com o produto cartesiano ou direto.

A **ação** de um grupo de Lie  $G$  em uma variedade  $Q$  é definida pela aplicação  $\Phi : G \times Q \rightarrow Q$

$$\Phi_g(q) = \Phi(g, q) = \Phi^g(q) \quad (2.2.3)$$

Exemplos de ações à esquerda de grupos são a aplicação de translação à esquerda e a conjugação. Uma translação à direita é uma ação à direita de grupo. Um grupo de Lie é denominado abeliano se a operação  $(\cdot)$  envolvendo os seus elementos for comutativa.

Dada uma  $G$ -ação à esquerda  $\Phi$  em  $Q$ , o levantamento à esquerda da ação  $\Phi$  é definida por

$$\langle T_{g^{-1}q}^* \Phi_g(u), v \rangle = \langle u, T_q \Phi_g \cdot v \rangle$$

para  $v \in T_q Q$  e  $u \in T_{\Phi_g(q)}^* Q$ . Alternativamente, o levantamento à direita é dado por

$$\langle T_{gq}^* \Phi_{g^{-1}}(u), v \rangle = \langle u, T_q \Phi_{g^{-1}} \cdot v \rangle$$

Diz-se que  $G$  age em  $T^*Q$  pelo levantamento cotangente, Figura 2.3, quando  $G$  age em  $Q$  por isometrias.

$$\begin{array}{ccccc}
 TQ & \xrightleftharpoons[\text{\scriptsize } X|_Q]{\text{\scriptsize } \pi_Q} & Q & \xleftarrow{\text{\scriptsize } \pi_Q^*} & T^*Q \\
 \downarrow \text{\scriptsize } Tf & & \downarrow \text{\scriptsize } f & & \downarrow \text{\scriptsize } T^*f \\
 TS & \xrightleftharpoons[\text{\scriptsize } \pi_S]{\text{\scriptsize } X|_S} & S & \xleftarrow{\text{\scriptsize } \pi_S^*} & T^*S
 \end{array}$$

Figura 2.3: Levantamento cotangente  $T^*f$  das ações de grupo  $f$ . Os campos vetoriais  $X|_Q$  e  $X|_S$  são definidos, respectivamente, em  $Q$  e  $S$ .

### Álgebras de Grupos de Lie

Sejam  $\xi, \eta$  os elementos de  $T_e G$  para um dado grupo de Lie  $G$ . Os campos vetoriais em  $G$  correspondentes, de maneira que sejam invariantes à esquerda, são  $X_\xi$  e  $X_\eta$ , onde  $X_\xi(g) = T_e L_g \xi$  e  $g \in G$ , para o qual o colchete de Jacobi-Lie é definido. A álgebra

de Lie  $\mathfrak{g}$  do grupo  $G$ , como na Seção 2.1.1, é definida pelo colchete de Jacobi-Lie dos campos vetoriais associados e avaliado na identidade  $e \in G$ , ou seja:

$$[\xi, \eta] := [X_\xi, X_\eta](e) = X_{[\xi, \eta]}(e) \quad (2.2.4)$$

onde a operação  $[\cdot, \cdot]$  representa o colchete da álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ . Note que, como  $T_e G$  possui a estrutura de uma álgebra de Lie, os espaços  $T_e G$  e  $\mathfrak{g}$  são isomórficos. Uma álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  de  $G$  é dita abeliana se  $[\xi, \eta] = 0$ , ou seja, quando o colchete da álgebra de Lie se anula para quaisquer  $\xi, \eta \in \mathfrak{g}$ .

**Proposição 2.2.1** ((Marsden e Ratiu, 1999)). *Se  $G$  é um grupo de Lie abeliano então sua álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  é abeliana. A implicação inversa é verdadeira apenas quando  $G$  é conexo.*

## 2.2.2 Mecânica Lagrangiana

Seja um corpo rígido<sup>3</sup> no espaço  $\mathbb{R}^3$ . Qualquer ponto do corpo, em coordenadas do corpo, pode ser especificado por  $\mathbf{X}$ . Dado a distância  $\mathbf{r}$  do sistema de coordenadas do corpo em relação ao sistema inercial, então a posição inercial de qualquer ponto do corpo é dada por  $\mathbf{x} = \mathbf{r} + \mathbf{R}\mathbf{X}$ . A energia cinética  $K_E$  de um corpo no instante  $t$ , tem a forma

$$K_E(t) = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}} \|\dot{\mathbf{r}}(t) + \dot{\mathbf{R}}(t)\mathbf{X}\|^2 d\mu$$

Avaliada para um corpo no plano, a energia cinética toma a seguinte forma (Sreenath, 1987):

$$K_E = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}} \rho(\mathbf{X}) \|\dot{\mathbf{x}}\|^2 d^2\mathbf{X}$$

O Lagrangiano  $L$  é uma função escalar no fibrado tangente  $L : TQ \rightarrow \mathbb{R}$ , definida pela diferença entre a energia cinética  $K_E$  e a energia potencial.<sup>4</sup> A dinâmica de movimento de um sistema livre de restrições pode ser obtida em função do Lagrangiano através da equação de Euler-Lagrange, por exemplo, como discutido no próximo capítulo. Em termos da métrica de Riemann  $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ , o Lagrangiano de um sistema mecânico pode ser escrito como

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \langle\langle \dot{q}, \dot{q} \rangle\rangle_{\mathbb{G}} = \frac{1}{2} \langle\mathbb{G}\dot{q}, \dot{q}\rangle \quad (2.2.5)$$

<sup>3</sup>Formalmente definido por  $(\mathcal{B}, \mu)$ , onde  $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^3$  é compacto e  $\mu$  é uma medida de Borel finita e equivalente a  $\rho dV$ , sendo  $\rho$  a densidade e  $dV$  uma medida infinitesimal do volume do corpo, (Bullo e Lewis, 2005).

<sup>4</sup>A função Lagrangiano é usualmente definida por  $L = K_E - V_{pot}$ , onde  $V_{pot}$  representa a energia potencial. Similarmente a função Hamiltoniano, quando invariante no tempo, é definida como  $H = K_E + V_{pot}$ . Neste trabalho, no entanto, considerada-se  $V_{pot} = 0$ .



onde  $q \in Q$ ,  $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle_{\mathbb{G}}$  corresponde à métrica induzida pela energia cinética e  $\mathbb{G}$  representa a matriz de inércia generalizada do sistema, definida por

$$\mathbb{G}_{ij} = \frac{\partial^2 K_E}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j}, \quad i, j = 1, \dots, n$$

onde  $\dot{q} \in T_q Q$ . A métrica de Riemann permite que a manipulação dos elementos geométricos, para modelagem, por exemplo, seja realizada de forma independente da parametrização escolhida. A modelagem do sistema multi-articulado, a ser apresentada nos capítulos a seguir, é feita sob este contexto, juntamente com alguns exemplos de parametrizações de  $Q$ .

### 2.2.3 Mecânica Hamiltoniana

O Lagrangiano é dito hiper-regular quando é possível utilizar-se de um difeomorfismo para definir a função escalar Hamiltoniano  $H : T^*Q \rightarrow \mathbb{R}$ . Este difeomorfismo é conhecido como a transformada de Legendre  $\mathbb{F}L : TQ \rightarrow T^*Q$ , onde  $\mathbb{F}L$  indica a operação de diferenciação no espaço tangente sobre  $Q$ . O campo vetorial de um Hamiltoniano  $H$  define a aplicação  $X_H : T^*Q \rightarrow T(T^*Q) : z \mapsto (\dot{z})$ , ou seja,  $X_H(z) \in T_z(T^*Q)$  via Equações de Hamilton.

O espaço cotangente ou dual  $T^*Q$ , também chamado de espaço de fase do momento para sistemas mecânicos, é uma variedade de Poisson, uma vez que possui uma estrutura simplética. Este é, muitas vezes, chamado de espaço de estados de sistemas mecânicos.

#### Variedades de Poisson

O par  $(P, \{\cdot, \cdot\})$ , onde  $P$  é uma variedade e o colchete  $\{\cdot, \cdot\}$  definido pela aplicação

$$\{\cdot, \cdot\} : \mathcal{F}(P) \times \mathcal{F}(P) \rightarrow \mathcal{F}(P), \quad (2.2.6)$$

é denominado de variedade de Poisson se, para as funções  $F, G, H \in \mathcal{F}(P)$ , as seguintes condições são satisfeitas:

**bilinearidade**  $\{F, G\}$  é bilinear em  $F$  e  $G$

**anti-comutatividade**  $\{F, G\} = -\{G, F\}$

**Identidade de Jacobi**  $\{\{F, G\}, H\} + \{\{H, F\}, G\} + \{\{G, H\}, F\} = 0$

**Derivação de Leibniz**  $\{FG, H\} = F\{G, H\} + \{F, H\}G$

Observe que as variedades de Poisson  $(P, \{.,.\})$  possuem a estrutura de uma álgebra de Lie. Localmente, isto é, nas coordenadas de  $z \in P$ , o colchete toma a seguinte forma

$$\{F, G\}(z) = \sum_{i,j=1}^{2n} w_{i,j}(z) \frac{\partial F}{\partial z_i}(z) \frac{\partial G}{\partial z_j}(z) \quad (2.2.7)$$

onde  $[w_{i,j}](z)$  é uma matriz anti-simétrica. O colchete de Poisson é não degenerativo quando  $\text{rank}[w_{i,j}](z) = 2n$  para todo  $z \in P$ .

### Aplicações de Poisson

Seja  $\varphi$  uma aplicação entre duas variedades de Poisson  $(P_1, \{.,.\}_1)$  e  $(P_2, \{.,.\}_2)$  e duas funções reais  $F, H \in \mathcal{F}(P_2)$ . Uma aplicação  $\varphi$  é dita uma aplicação de Poisson se

$$\varphi^*\{F, H\}_2 = \{\varphi^*F, \varphi^*H\}_1 \quad (2.2.8)$$

Para sistemas autônomos, o fluxo  $\varphi_t$  de  $X_H$  é uma aplicação de Poisson e deixa o Hamiltoniano  $H$  invariante:  $H \circ \varphi_t = H$ ; indicando conservação de energia quando as trajetórias do sistema são dadas pelo fluxo de um campo vetorial Hamiltoniano  $X_H$ .

### Variedades Simpléticas

Uma variedade simplética  $(P, \Omega)$  é (sempre) uma variedade de Poisson<sup>5</sup> de dimensão par cuja estrutura  $\Omega$  é uma 2-forma diferencial fechada<sup>6</sup> e não degenerada, ou seja,

$$\Omega(X_H(q), v_q) = 0, \quad \forall H \in \mathcal{F}(P) \Rightarrow v_q = 0 \quad (2.2.9)$$

onde  $v_q \in T_q\tilde{Q}$ , veja (Marsden e Ratiu, 1999) e (Arnold, 1989). O espaço de fase de um sistema mecânico possui naturalmente uma estrutura simplética. Portanto,  $P \equiv T^*Q$  e o levantamento cotangente, visto acima, é sempre uma aplicação simplética. Para as coordenadas  $(q^i, p_i)$  da variedade simplética  $T^*Q$ , onde  $i = 1, \dots, n$ , a 2-forma fica determinada por

$$\Omega = dq^i \wedge dp_i \quad (2.2.10)$$

<sup>5</sup>A implicação inversa não é verdadeira, em geral.

<sup>6</sup>Uma forma diferencial  $\Omega$  é dita fechada quando sua derivada exterior, operação simbolizada por  $\mathbf{d}$ , for nula, ou  $\mathbf{d}\Omega = 0$ .

onde  $\wedge$  representa o produto exterior. O colchete de Poisson, dado por (2.2.7), das funções  $F$  e  $G$ , para  $z = (q, p) \in T_q^*Q$ , fica

$$\begin{aligned} \{F, G\}(z) &= \Omega(X_F(z), X_G(z)) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial q^i} \frac{\partial G}{\partial p_i}(z) - \frac{\partial G}{\partial q^i} \frac{\partial F}{\partial p_i}(z) \\ &= \mathbf{d}F \cdot \mathbb{M}\nabla G \end{aligned}$$

onde  $\mathbb{M}$  corresponde a matriz simplética dada na Seção A.2.2. Uma aplicação suave  $\varphi : P_1 \rightarrow P_2$  é simplética se, dadas duas variedades simpléticas  $(P_1, \Omega_1)$  e  $(P_2, \Omega_2)$ , satisfizer

$$\varphi^* \Omega_2 = \Omega_1$$

Toma-se  $H \in \mathcal{F}(P)$ . Restrito a uma variedade simplética, a dinâmica de movimento é dada pelas equações de Hamilton que, nas variáveis canônicas  $z_i = (q^i, p_i)$ , adquire a forma

$$\begin{aligned} \dot{q}^i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q^i} \Leftrightarrow \dot{z} = \mathbb{M}\nabla H(z) \end{aligned}$$

Um campo vetorial Hamiltoniano  $X_H$  em  $T^*Q$  é aquele dado por  $\dot{z} = X_H(z)$ . Logo, a função suave definida em  $P$ , representada por  $\mathcal{F}(P)$ , que corresponde ao campo vetorial Hamiltoniano é a função  $H$ . Segundo (2.2.11), esta aplicação é um anti-homomorfismo.<sup>7</sup> A definição de um campo vetorial é dependente do contexto; se este é definido em um espaço vetorial simplético, uma variedade simplética ou em uma variedade de Poisson. Dado um Hamiltoniano  $H$  a equação da dinâmica escrita em função do colchete de Poisson é dada por  $\dot{F} = \{F, H\}$ , para  $F \in \mathcal{F}(P)$ .

**Proposição 2.2.2** ((Marsden e Ratiu, 1999)). *O colchete de Poisson de funções suaves definidas em uma variedade, ou espaço vetorial, simplética define uma álgebra de Lie.*

A operação nesta álgebra é denominada de álgebra de Poisson.

**Corolário 2.2.3** ((Marsden e Ratiu, 1999)). *O colchete Jacobi-Lie de campos vetoriais de Hamiltonianos definidos em uma variedade, ou espaço vetorial, simplética define uma sub-álgebra de Lie.*

<sup>7</sup>Dadas duas funções  $F, H \in \mathcal{F}(P)$ , a aplicação  $\mathcal{F}(P) \rightarrow \mathfrak{X}(P) : H \mapsto X_H$  é um anti-homomorfismo da álgebra de Lie, ou

$$[X_H, X_F] = -X_{\{H, F\}} \tag{2.2.11}$$

para  $X_H \in \mathfrak{X}(P)$ .

### Aplicação Momento

Seja a ação de uma álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  em uma variedade de Poisson  $P$ , definida pelo gerador infinitesimal  $\xi_P$ , isto é, um campo vetorial de uma curva definida em  $P$  por indução de um caminho na álgebra  $\mathfrak{g}$  através da aplicação exponencial, refira a Seção A.1 do Apêndice A. A aplicação momento  $\mathbf{J} : P \rightarrow \mathfrak{g}^*$  é uma grandeza que, em geral<sup>8</sup>, permanece constante com a dinâmica de sistemas Hamiltonianos, ou seja, permanece inalterada quando avaliada ao longo do fluxo dos campos vetoriais  $X_H$ , quando  $H$  é invariante a ação de  $G$ .<sup>9</sup> A aplicação  $\mathbf{J}$  caracteriza-se pela propriedade em que a função  $\langle \mathbf{J}, \xi \rangle$ , definida pelo pareamento entre as álgebras de Lie duais, é calculada através da expressão

$$X_{\langle \mathbf{J}, \xi \rangle} = \xi_P, \quad \xi \in \mathfrak{g}$$

onde  $\xi_P$  é o gerador infinitesimal em  $P$ . No lado Hamiltoniano, a aplicação  $\mathbf{J}$  é uma aplicação de Poisson no espaço cotangente  $T^*Q$

$$\mathbf{J} : P = T^*Q \rightarrow \mathfrak{g}^*$$

definida a partir das expressões de levantamento cotangente<sup>10</sup> das ações de grupo, como

$$\langle \mathbf{J}, \xi \rangle(p_q) = \langle p_q, \xi_Q(q) \rangle$$

Uma aplicação momento é denominada equivariante<sup>11</sup> quando satisfaz a relação:

$$\text{Ad}_{g^{-1}}^* \circ \mathbf{J} = \mathbf{J} \circ \Phi_g$$

para  $g \in G$  e onde  $\Phi_g$  é uma ação à esquerda de  $G$  em  $P$ . Aplicações momento equivariantes, Figura 2.4, são aplicações de Poisson e, portanto, homomorfismos de álgebras de Lie, preservando a operação com colchetes de Poisson. Esta propriedade será explorada nas expressões de modelagem geométrica no próximo capítulo. Similarmente, no lado Lagrangiano, a aplicação  $\mathbf{J} : TQ \rightarrow \mathfrak{g}^*$ , definida no fibrado tangente  $TQ$ , é avaliada através de

$$\langle \mathbf{J}(v_q), \xi \rangle = \langle \mathbb{F}L(v_q), \xi_Q(q) \rangle$$

onde  $\mathbb{F}L : TQ \rightarrow T^*Q$  representa a diferenciação no espaço tangente sobre  $Q$ .

<sup>8</sup>Exceção feita quando da presença de restrições não-holonômicas; assunto a ser revisado no próximo capítulo.

<sup>9</sup>Veja a Seção 2.4.

<sup>10</sup>Ver expressão (A.2.7) da Seção A.1 no Apêndice.

<sup>11</sup>Ou, também, Ad-equivariante.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & \mathbf{J} & \\
 & & & \longrightarrow & \\
 Q & & T^*Q & \longrightarrow & \mathfrak{g}^* \\
 \vdots & & \downarrow T^*\Phi_g & & \downarrow \text{Ad}_{g^{-1}}^* \\
 \Phi_g & & & & \\
 \vdots & & T^*Q & \xrightarrow{\mathbf{J}} & \mathfrak{g}^* \\
 & & & & \\
 Q & & & & 
 \end{array}$$

Figura 2.4: Equivariância da aplicação momento  $\mathbf{J}$  equivale a comutação das ações.

### Estratificação Simplética de Variedades de Poisson

Diz-se que uma variedade de Poisson forma uma foliação simplética. Toda folha em  $P$  constitui uma subvariedade injetivamente imersível e regular, ou seja, uma variedade de Poisson corresponde a uma foliação de *folhas* simpléticas, conexas e integráveis<sup>12</sup>. Este resultado é formalizado no seguinte Teorema.

**Teorema 2.2.4** (Estratificação Simplética (Marsden e Ratiu, 1999)). *Seja  $P$  uma variedade de Poisson de dimensão finita. Então  $P$  é a união disjunta de suas folhas simpléticas, onde cada folha é uma subvariedade de Poisson com a propriedade que esta é uma subvariedade definida por uma imersão<sup>13</sup> injetiva e onde a estrutura de Poisson em cada folha é induzida pela estrutura simplética da folha. A dimensão da folha passante pelo ponto  $z \in P$  é determinada pelo posto da estrutura de Poisson neste ponto.*

## 2.3 Sistemas Mecânicos Simples

O termo **Sistema Mecânico Simples** é empregado para designar uma variedade e, no entanto, bem definida classe de sistemas mecânicos. Muitos autores têm-se utilizado desta terminologia (Nijmeijer e van der Shaft, 1990), (Marsden, 2004), (Bullo e Lewis, 2005), entre outros. Na descrição a seguir, tentou-se manter a notação utilizada nesta última referência. Um sistema mecânico simples é uma 7-upla  $(Q, \langle \langle \cdot, \cdot \rangle \rangle_{\mathbb{G}}, V_{pot}, f^{ext}, \mathcal{D}, \mathcal{F}, U)$  onde:

<sup>12</sup>No sentido de Frobenius.

<sup>13</sup>Aplicação cujo posto se iguala, de maneira global, a dimensão do domínio.

- $Q$  é a variedade ou espaço de configuração,
- $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle_{\mathbb{C}}$  é a métrica de Riemann em  $Q$  relativa à energia cinética,
- $V_{pot}$  é a função potencial em  $Q$  utilizada na definição do Lagrangiano - não empregada neste trabalho,
- $f^{ext}$  é uma resultante de força em  $Q$  devido ao distúrbio externo não-controlável,
- $\mathcal{D}$  é uma distribuição correspondente a restrição de velocidades,
- $\mathcal{F} = \{F^1, F^2, \dots, F^m\}$  é uma coleção de campos vetoriais completos em  $Q$  e referentes a entrada do sistema,
- $U \subset \mathbb{R}^m$  é conjunto de controle, muitas vezes próprio<sup>14</sup>.

Um sistema de controle na forma afim  $(Q, \{f, g_1, \dots, g_m\}, U)$ , para o campo vetorial da dinâmica  $f$  e onde  $g_1, \dots, g_m$  são os campos vetoriais de controle em  $Q$ , é dado por

$$\dot{z}(t) = f(z(t)) + \sum_{j=1}^m g_j(z(t))u_j(t) \quad (2.3.1)$$

com  $m$  canais de entrada ou controle.

Um sistema Hamiltoniano simples, (Nijmeijer e van der Shaft, 1990), em uma variedade de Poisson  $P$ , é aquele em que os campos vetoriais são determinados a partir dos Hamiltonianos  $H_0(q, p)$  and  $H_j(q, p)$  do sistema, onde  $H_j(q, p) = H_j(q)$ . Sejam as funções  $H_0, H_1, \dots, H_m \in \mathcal{C}^\infty(P)$  e  $z \in P$ . Para um colchete de Poisson não-degenerado, o **Sistema de controle Hamiltoniano Afim** é definido em  $T(T^*Q)$  como:

$$\dot{z} = X_{H_0}(z) - \sum_{j=1}^m X_{H_j}(z)u_j \quad (2.3.2)$$

$$y_j = H_j(z) \quad (2.3.3)$$

No sistema acima, toma-se  $F^j = X_{H_j}$  e  $y_j$  são os canais de saída do sistema. No caso de colchetes degenerados, o sistema (2.3.2) é chamado de Poisson.

## 2.4 Sistemas com Simetria

Dá-se o nome **simetria** às grandezas de sistemas dinâmicos que são conservadas, isto é, às constantes de movimento que podem ser observadas. A invariância da dinâmica do

<sup>14</sup>O conjunto  $U$  é dito próprio se  $\mathbf{0} \in \text{int}(\text{conv}(U))$ , Seção 5.3.1

movimento associada se traduz em uma invariância do Hamiltoniano, ou Lagrangiano, que modela o sistema.

Revisa-se, primeiramente, o conceito de invariância sob a ação de um grupo. Dada uma ação à esquerda  $\Phi$  de um grupo de Lie  $G$  em  $Q$  e os campos vetoriais  $X, Y \in \mathcal{C}^\infty$  em  $Q$ , valem as seguintes relações, para todo  $g \in G$  e  $q \in Q$ :

- A função  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  é invariante se  $\Phi_g^* f = f$ , ou seja,  $f \circ \Phi_g = f$
- O campo vetorial avaliado em  $q$ :  $X(q)$  é invariante se  $T_q \Phi_g X(q) = X(\Phi_g q)$ ; equivalentemente, uma distribuição  $\mathcal{D}$  em  $M$  é invariante se  $T_q \Phi_g(\mathcal{D}_q) = \mathcal{D}_{\Phi_g(q)}$
- Um aplicação no fibrado  $F : TM \rightarrow T^*M$  sobre  $e_Q$  é equivariante se  $\Phi_g^*(F(X)) = F(\Phi_g^* X)$

Feitas as observações acima, pode-se dizer que simetrias são ações de grupo que deixam invariantes a estrutura do espaço e, portanto, as dinâmicas nela definidas. Dado um sistema dinâmico, os grupos de simetria ou invariância do sistema, correspondem ao conjunto de grupos pelos quais as simetrias observadas podem-se descritas. Formalmente, a ação suave  $\Phi$  de um grupo de Lie  $G$  à esquerda representa uma simetria do sistema  $(Q, \langle \langle \cdot, \cdot \rangle \rangle_{\mathbb{G}}, f^{ext}, \mathcal{D}, \mathcal{F}, U)$  se  $\Phi$  for uma isometria de  $(Q, \langle \langle \cdot, \cdot \rangle \rangle_{\mathbb{G}})$ , se  $\mathcal{D}$  e  $\mathcal{F}$  são invariantes, e se  $F$  é equivariante.

### Teorema de Noether

A aplicação momento  $\mathbf{J}$  é uma grandeza conservada em sistemas com simetria. Sob o ponto de vista Lagrangiano, a aplicação momento  $\mathbf{J}$  é constante no tempo, para soluções das equações de Euler-Lagrange do sistema. Alternativamente, o teorema pode ser enunciado no lado Hamiltoniano:

**Teorema 2.4.1.** *Seja ação de um grupo de Lie  $G$  em uma variedade de Poisson  $P$  através do gerador infinitesimal, Seção A.1. Considere um Hamiltoniano  $H$  que é  $G$ -invariante em  $P$ , onde  $\varphi_t$  é o fluxo do campo vetorial  $X_H$ . Então  $\mathbf{J}$  é uma constante de movimento ao longo das trajetórias de  $X_H$ , isto é,  $\mathbf{J} \circ \varphi_t = \mathbf{J}$ .*

*Demonstração.* Seja  $z \in P$  um ponto da variedade de Poisson  $P$  dado por  $z = (q, p) \in P \equiv T^*Q$ . A invariância da função  $H$ , segundo a translação de  $z$  por  $g$ , traduz-se em

$H(g \cdot z) = H(z)$ . Restringindo o sistema Hamiltoniano ao caso autônomo e diferenciando esta expressão em relação a  $g$  na direção  $\xi$  no ponto  $g = e$ , tem-se que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial g} \Big|_{g=e} H(g \cdot z) \cdot \xi &= \frac{\partial}{\partial g} \Big|_{g=e} H(z) \cdot \xi \\ \frac{\partial H(z)}{\partial z} \cdot \frac{\partial \Phi_g(z)}{\partial g} \Big|_{g=e} \cdot \xi &= 0, \quad (H(g \cdot z) = H(z)) \end{aligned} \quad (2.4.1)$$

Mostra-se que o segundo termo da última linha é dado pelo gerador infinitesimal  $\xi_P$ .

A função exponencial em  $\mathfrak{g}$  dada por  $\exp(t\xi) = \gamma_\xi(t) \in G$  gera um subgrupo uniparametrizado por  $t \in \mathbb{R}$ , para todo  $\xi \in \mathfrak{g}$ . Da definição do gerador infinitesimal da Seção A.1, tem-se, utilizando a regra da cadeia para a diferenciação, que

$$\xi_P(z) := \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \Phi_{\exp(t\xi)}(z) = \frac{\partial \Phi_g(z)}{\partial g} \Big|_{g=e} \cdot \frac{d\Phi_{\exp(t\xi)}(z)}{dt} \Big|_{t=0} = T_z \Phi_g(\gamma'_\xi(0) \cdot z)$$

Observe que  $\gamma_\xi(0) = e$  e que  $\gamma'_\xi(0) = \xi$ . Logo, da última igualdade de (2.4.1), segue que

$$\mathbf{d}H(z) \cdot \xi_P(z) = 0$$

Sabe-se, no entanto, que outra maneira de definir o gerador infinitesimal  $\xi_P(z)$  é através do campo vetorial  $X_{\langle \mathbf{J}, \xi \rangle}(z)$ , onde o pareamento, dado por  $\langle \mathbf{J}, \xi \rangle$ , entre a aplicação momento  $\mathbf{J} : TQ \rightarrow \mathfrak{g}^*$  e elementos da álgebra  $\xi \in \mathfrak{g}$ , representa uma função real em  $z$ . Logo, segue que

$$\begin{aligned} \mathbf{d}H(z) \cdot X_{\langle \mathbf{J}, \xi \rangle}(z) &= 0 \\ \mathbf{d}\langle \mathbf{J}, \xi \rangle(z) \cdot X_H(z) &= 0 \\ \{H, \langle \mathbf{J}, \xi \rangle\} &= 0 \\ \mathbf{d}\langle \mathbf{J}, \xi \rangle(z) \cdot X_H(z) &= 0 \end{aligned}$$

onde  $\{.,.\}$  representa o colchete de Poisson,  $X_H(z) = \mathbb{M}\nabla H(z)$  e o vetor  $\nabla H(z) \in T_z P$  representa o gradiente da função  $H$ , dado por

$$\nabla H(z) = \left[ \frac{\partial H(z)}{\partial q} \quad \frac{\partial H(z)}{\partial p} \right]^T$$

Como, em geral,  $X_H$  representa uma dinâmica não nula, tem-se que  $\mathbf{d}\langle \mathbf{J}, \xi \rangle(z) = 0$ , ou seja,  $\langle \mathbf{J}, \xi \rangle(z)$  se mantém constante ao longo das trajetórias do campo  $X_H(z)$ .  $\square$

O Teorema de Noether, enunciado aqui no contexto geométrico, traduz-se nos Teoremas da conservação de momento linear e da conservação de momento angular da mecânica clássica Newtoniana.



**Exemplo 2.4.2.** Considere um corpo rígido no espaço tridimensional. Suponha que este possa girar livremente em torno dos três eixos do referencial fixo cujo a origem está localizada no seu centro de massa. O espaço de configuração do corpo rígido é dado pelo grupo  $SO(3)$  e seu momento angular  $\boldsymbol{\mu} \in T_q^*SO(3) \approx \mathbb{R}^3$ . Pelo Teorema de Noether, e na ausência de torques, o corpo mantém seu movimento indefinidamente nas trajetórias determinadas pelas curvas integrais do campo vetorial que modela a sua dinâmica. Algumas destas trajetórias são ilustradas na Figura 2.5, (Marsden e Ratiu, 1999).

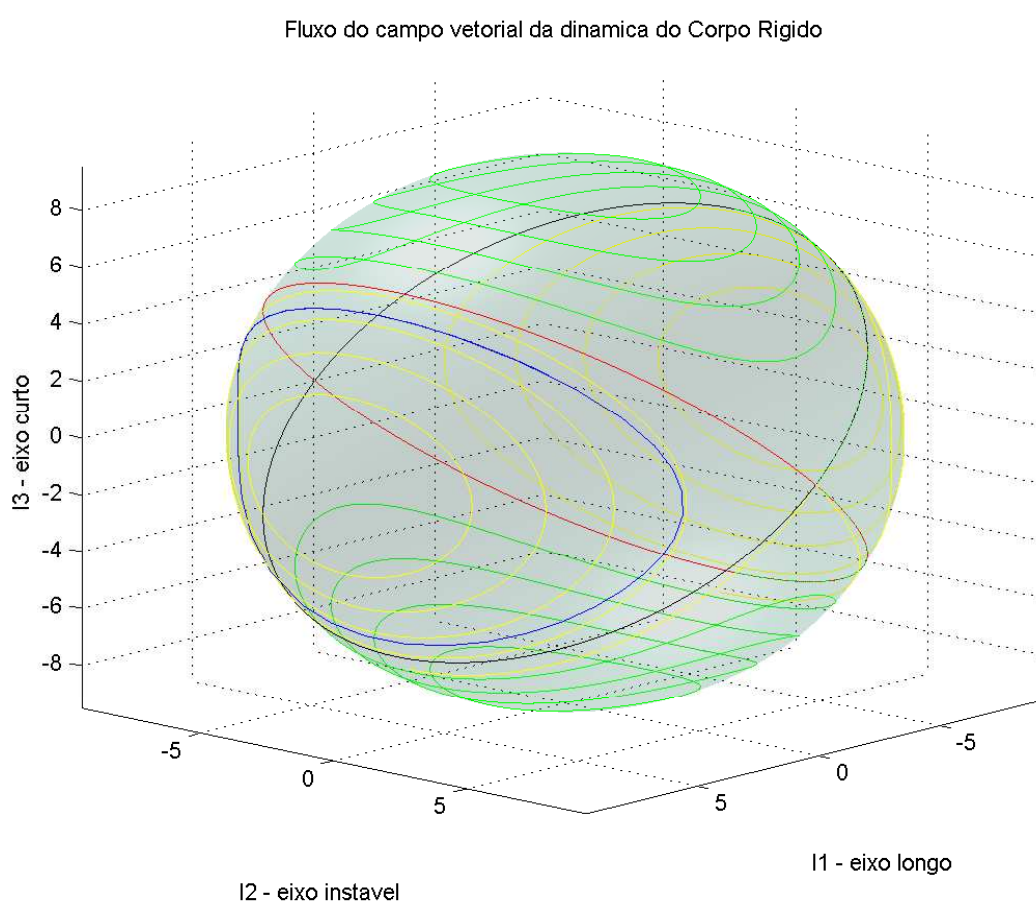


Figura 2.5: Trajetórias da dinâmica de rotação do corpo rígido no espaço tridimensional. A intersecção da superfície de conservação do momento angular, dada por esferas concêntricas ao centro de massa do corpo, com a superfície representativa da conservação de energia, descrita por elipsóides (não ilustrados) fornece as possíveis trajetórias do corpo no espaço de variáveis.

### 2.4.1 Redução de Sistemas com Simetria

Em geral, a simetria do sistema permite uma redução de ordem do seu modelo dinâmico associado. A motivação por trás de uma redução de ordem do sistema muitas vezes recai na necessidade de simplificação das equações diferenciais que modelam a dinâmica, nos procedimentos de análise da dinâmica, ou na aplicação de ferramentas de planejamento de trajetória. Alguns métodos de redução, no contexto geométrico de simetria, são apresentados e discutidos em Marsden e Ratiu (1999) e (Bloch, 2003).

#### A Estrutura Principal e Simetria do Sistema

Como será detalhado na Seção a seguir, o espaço de configuração  $Q$  é localmente isomórfico ao produto do espaço de base com espaço de grupo, ou fibra,  $G$ :

$$Q \simeq Q/G \times G \quad (2.4.2)$$

Assume-se, neste trabalho, que o grupo de simetria e a estrutura de grupo do fibrado principal coincidem. O espaço completo  $Q$ , e o fibrado principal são relacionados pela aplicação projeção do fibrado:  $\pi : Q \rightarrow Q/G$ .

## 2.5 Espaços Fibrados e Conexões

Apresenta-se, nesta seção, uma descrição mais detalhada da estrutura geométrica do relacionamento entre variedades e seus espaços tangentes, veja (Bloch, 2003; Bullo e Lewis, 2005).

Um espaço fibrado é uma 4-upla  $(Q, \pi, B, F)$  em que  $Q$ ,  $B$ , e  $F$  são variedades  $C^\infty$  denominadas de espaço total, espaço de base e espaço de fibra, respectivamente, e a aplicação  $\pi : Q \rightarrow B$  projeta pontos  $q \in Q$  a  $r \in B$ . A fibra sobre  $b \in B$  é  $\pi^{-1}(r)$ . Ademais, existe um atlas  $\{(U_a, \phi_a)\}_{a \in \mathcal{A}}$  para  $B$  tal que o fibrado é localmente trivial, ou  $\pi^{-1}(U_a)$  é homeomórfico ao espaço produto  $U_a \times F$ . As coordenadas do elemento  $q$  no fibrado  $Q$  são dadas por  $q^i = (r^\alpha, s^a)$ , onde  $r^\alpha \in B$  e  $s^a$  descrevem a fibra localmente.

O espaço vertical  $V_q \subset T_q Q$  é definido como sendo o núcleo da aplicação  $T_q \pi$  para todo ponto  $q$ . Denomina-se  $T_q \pi$  como a aplicação tangente, corresponde a  $\pi$  em todo

ponto  $q \in Q$ . Faz-se importante especificar uma **conexão** ou um relacionamento entre o fibrado tangente ao espaço de base  $TB$  e um subespaço do  $TQ$  detalhado a seguir.

As conexões são utilizadas para isolar o que se denominam direções horizontais que, para todo  $q \in Q$ , definem um espaço horizontal suave  $H_q \subset T_qQ$  tal que  $T_qQ = H_q \oplus V_q$  e  $H_q$  são  $G$ -invariantes, ou seja,  $T_q\Phi_g H_q = H_{gq}$  para todo  $g \in G$ . Logo, para qualquer vetor  $v_q \in T_qQ$ , pode-se escrever:

$$v_q = \text{hor } v_q + \text{ver } v_q$$

onde a aplicação  $\text{hor} : TQ \rightarrow H$  devolve a componente horizontal do vetor  $v_q$  e corresponde a um elemento do espaço horizontal  $H_q$  em  $q$ ; analogamente,  $\text{ver } v_q \in V_q$ .

### 2.5.1 A Conexão de Ehresmann

Uma conexão de Ehresmann  $A$  corresponde a uma 1-forma no fibrado  $Q$  que retorna um vetor em  $TQ$  tal que, para cada  $q \in Q$ , os seguintes se verificam:

- $A(q) = A_q : T_qQ \rightarrow V_q$  é uma aplicação linear e vertical;
- $A(v_q) = v_q$  é uma projeção, para todo  $v_q \in V_q$ .

Define-se, a partir da conexão  $A$  acima, o espaço horizontal por  $H_q = \ker A_q$ . Seja  $v_q \in T_qQ$ . Na base de  $T_qQ$ ,  $v_q$  é escrito como

$$v_q = \dot{r}^\beta \frac{\partial}{\partial r^\beta} + \dot{s}^b \frac{\partial}{\partial s^b}$$

e  $\omega^a(q)$  a estrutura local da 1-forma da conexão  $A$  em  $q$  dado por

$$\omega^a(q) = ds^a + A_\alpha^a(r, s) dr^\alpha \quad (2.5.1)$$

então a conexão  $A$  em  $v_q$  fornece, em coordenadas, a expressão

$$A(v_q) = (\omega^a(q) \cdot v_q) \frac{\partial}{\partial s^a} = (\dot{s}^a + A_\alpha^a \dot{r}^\alpha) \frac{\partial}{\partial s^a} \quad (2.5.2)$$

O subespaço horizontal definido pela conexão é isomórfico ao espaço tangente do espaço de base:  $H_q \simeq T_rB$ . Para mostrar esta afirmação basta aplicar o levantamento tangente da projeção  $\pi$  a elementos do espaço vertical para determinar o elemento nulo em  $TB$  e vice-versa, aplicar  $T\pi$  a elementos de  $H_q$  para obter  $TB$ . O levantamento tangente

de  $\pi$  é dado por  $T_q\pi : T_qQ \rightarrow T_rB : \dot{q} = (\dot{s}, \dot{r}) \mapsto (0, \dot{r})$ , vide Figura 2.6. A implicação direta fica evidente observando, a partir de (2.5.2), que

$$T_q\pi(V_q) = T_q\pi(A_q) = T_q\pi\left(\left(\dot{s} + A_q\dot{r}\right)\frac{\partial}{\partial s}\right) \equiv 0$$

A implicação contrária deve-se ao fato que  $T_q\pi$  é a aplicação identidade para elementos de  $H_q$ .

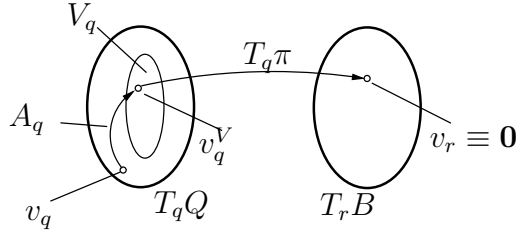


Figura 2.6: Espaço tangente total  $T_qQ$ , espaço tangente sobre  $B$  e o levantamento da projeção  $\pi$ .

Seja um campo vetorial  $X(q(t))$ , onde  $X(q(t_0)) = v_0$ , para uma curva parametrizada pelo tempo  $q(t) \in Q$ . Diz-se que o campo vetorial  $X(q(t))$  é *transportado paralelamente* se este permanecer paralelo a  $v_0$  para todo tempo  $t$  quando a curva  $q(t)$  é percorrida, refira a (Schutz, 1980; Marsden e Ostrowski, 1998; Bloch, 2003) para detalhes.<sup>15</sup> Este deslocamento paralelo de  $X(q)$  recebe o nome de **movimento geodésico** ao longo da curva  $q(t)$  e é descrito pela seguinte dinâmica

$$\ddot{q}^a + \Gamma_{bc}^a \dot{q}^b \dot{q}^c = 0 \quad (2.5.3)$$

onde  $\Gamma_{bc}^a$  representam os **símbolos de Christoffel**. Seja uma métrica de Riemann  $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$  em uma variedade  $Q$ , e seja  $x \in \mathbb{R}^n$  a representação (local) em coordenadas do ponto  $q \in Q$ , então  $\Gamma_{bc}^a$  são determinados por

$$\Gamma_{bc}^a = \frac{1}{2} \langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle^{ad} \left\{ \frac{\partial \langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle_{bd}}{\partial x^c} + \frac{\partial \langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle_{ac}}{\partial x^b} - \frac{\partial \langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle_{bc}}{\partial x^d} \right\} \quad (2.5.4)$$

O movimento de um sistema mecânico simples como definido na Seção 2.3, com ou sem restrições, é descrito por equações de geodésicas.

<sup>15</sup>Um vetor  $v_q$  é horizontal se satisfazer  $A(v_q) = 0$ . Para o fibrado tangente  $(q, v_q) \in TQ$ ,  $v_q$  é *transportado paralelamente* ao longo da curva  $q(t)$  se o vetor  $v_q$  é deslocado ao longo das direções horizontais com relação à conexão.

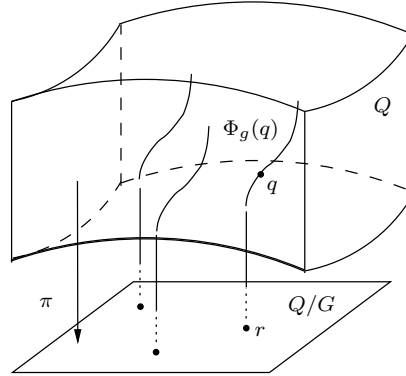


Figura 2.7: O fibrado principal.  $\Phi_g(q)$  corresponde a órbita da ação de  $g \in G$  em  $q$ , Seção A.1.

### 2.5.2 A Conexão Principal

Seja um grupo de Lie  $G$  que age propriamente no espaço de configuração  $Q$ . O espaço  $Q$  é isomórfico ao produto do espaço de quociente  $Q/G$  com o espaço do grupo ou fibra  $G$ :  $Q \simeq G \times Q/G$ . Se o espaço do produto possui esta estrutura globalmente, este é chamado de trivial. Observe que o espaço de base  $B$  é dado pelo espaço quociente  $Q/G$  através de uma relação de equivalência, onde dados  $q_1, q_2 \in Q$  e  $g \in G$ , tem-se que  $q_1 \sim q_2 \Leftrightarrow q_2 = g \cdot q_1$ . O espaço de base  $Q/G$  é também conhecido como o **espaço de formatos** pois define a forma de sistemas multi-corpos, estabelecendo as posições relativa entre os seus componentes. Um elemento do espaço  $Q$ , dado pelo produto com a estrutura acima, tem coordenadas  $(g, r)$ , onde  $r \in Q/G \equiv B$ .

A aplicação  $\pi : Q \rightarrow Q/G$  é uma projeção no segundo componente. Toma-se a ação de  $G$  como uma translação à esquerda do primeiro componente. A estrutura  $(Q, \pi, Q/G, G)$  descrita acima, cuja fibra  $G$  é um grupo de Lie, é chamada de **fibrado principal**, Figura 2.7. Se  $G$  age livre e propriamente, o espaço de forma  $Q/G$  é uma variedade suave e  $T\pi$  é uma aplicação sobrejetora.

Define-se a conexão principal  $\mathcal{A}$  em um fibrado principal  $\pi$  como uma 1-forma com valores na álgebra de Lie, de maneira que, para todo,  $q \in Q$  e  $\xi \in \mathfrak{g}$ ,  $\mathcal{A}(\xi_Q(q)) = \xi$  e  $\mathcal{A}(T_q\Phi_g(v_q)) = \text{Ad}_g\mathcal{A}(v_q)$ , ou seja,  $\mathcal{A}$  é Ad-equivariante, para uma ação  $\Phi_q$  do grupo de Lie  $G$  em  $Q$ .<sup>16</sup>

<sup>16</sup>Note que  $\mathcal{A}$  é equivariante com relação a  $\mathfrak{g}$  ao passo que  $\mathbf{J}$ , em relação a  $\mathfrak{g}^*$ .

### 2.5.3 Curvatura do Fibrado Tangente

A curvatura da conexão principal  $\mathcal{A}$ , representada por  $\mathcal{B}$ , é uma aplicação à álgebra de Lie, determinada por

$$\mathcal{B}(X, Y) = -\mathcal{A}([\text{hor}X, \text{hor}Y])$$

onde  $[\cdot, \cdot]$  são os colchetes de Jacobi-Lie. Para os campos vetoriais invariantes à esquerda  $X, Y$ , pode-se escrever

$$\mathcal{B}(X, Y) = X[\mathcal{A}(Y)] - Y[\mathcal{A}(X)] - [\mathcal{A}(X), \mathcal{A}(Y)] \quad (2.5.5)$$

onde  $[\cdot, \cdot]$  são os colchetes da álgebra de Lie. Nas coordenadas locais  $(s, r)$ , calcula-se a curvatura da conexão através da expressão

$$\mathcal{B}^b(X, Y) = \mathcal{B}_{\alpha\beta}^b X^\alpha Y^\beta \quad (2.5.6)$$

onde

$$\mathcal{B}_{\alpha\beta}^b = \left( \frac{\partial \mathcal{A}_\alpha^b}{\partial r^\beta} - \frac{\partial \mathcal{A}_\beta^b}{\partial r^\alpha} + \mathcal{A}_\alpha^a \frac{\partial \mathcal{A}_\beta^b}{\partial s^a} - \mathcal{A}_\beta^a \frac{\partial \mathcal{A}_\alpha^b}{\partial s^a} \right)$$

## Capítulo 3

# Mecânica não-Holonômica

### 3.1 Mecânica Lagrangiana

A discussão da estrutura do fibrado principal apresentada neste capítulo segue dos resultados provenientes de Ostrowski (1995) além das referências adicionais Bloch et al. (1996) e da referência conjunta Bloch (2003).

Na mecânica não-holonômica aqui considerada atenção é voltada aos sistemas mecânicos sujeitos à restrições na velocidade que não são deriváveis das restrições de posição ou, mais genericamente, da configuração. Nestas condições, a simetria do sistema não mais necessariamente corresponde às grandezas sendo conservadas<sup>1</sup> mas, ao invés, à equação de momento generalizada, (Bloch et al., 1996). Em geral, a não-holonomicidade é encontrada sempre que a forma de Pfaff das restrições de um sistema não puder ser transformada na forma de um diferencial perfeito que, porventura, permite ser integrada. Para uma explanação mais detalhada do assunto, ver (Meirovitch, 1970).

Como mostrado em Bloch et al. (1996), utiliza-se o princípio de Lagrange-d'Alembert como ferramenta para equacionar esta classe de sistemas. Em geral, o princípio de Lagrange-d'Alembert é também aplicável a outros casos, como sistemas sem restrições com forças externas, sistemas holonômicos com ou sem forças externas e, como mencionado acima, a sistemas não-holonômicos com ou sem forças externas.

---

<sup>1</sup>Ou leis de conservação, como o *Teorema da Conservação do Momento Angular* da mecânica clássica, ou a aplicação momento  $\mathbf{J}$ .

### 3.1.1 Princípio de Hamilton

Recorda-se que a variação infinitesimal  $\delta$  de uma curva  $q(t) \in Q$  é dada por

$$\delta q(t) = \left. \frac{\partial}{\partial \epsilon} q(t, \epsilon) \right|_{\epsilon=0}$$

A variação infinitesimal da curva  $\delta q$ , também conhecida como *deslocamento virtual*, pode ser imaginada como uma mudança infinitesimal da coordenadas da curva que são consistentes com as restrições do sistema mas que, em caso contrário, são arbitrárias (Meirovitch, 1970). Seja o Lagrangiano  $L : TQ \rightarrow \mathbb{R}$  com coordenadas  $(q^i, \dot{q}^i)$ , para  $i = 1, \dots, n$ , onde  $\dim Q = n$ . Para sistemas sem restrições, ou seja, livre de vínculos as equações da dinâmica podem ser obtidas a partir do Princípio de Hamilton:

$$\delta \int_a^b L(q^i(t), \dot{q}^i(t)) dt = 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (3.1.1)$$

para variações arbitrárias  $\delta$ . Sabe-se que, na ausência de restrições e de forças externas, as equações de Euler-Lagrange são condições necessária e suficiente para que a dinâmica do sistema atenda ao Princípio de Hamilton.

### 3.1.2 Sistemas com Restrições

Para um sistema  $n$ -dimensional, consideram-se dados  $m$  restrições ( $m < n$ ), ou vínculos, nas velocidades. Estas restrições podem ser classificadas em duas categorias. As restrições holonômicas correspondem a sub-espacos integráveis do fibrado tangente à variedade de configuração do sistema,  $TQ$ . Esta noção de integrabilidade é a mesma presente no contexto do *Teorema de Frobenius* e é avaliada com relação à distribuição associada à restrição do sistema, no fibrado tangente  $TQ$ .

As restrições de juntas rotativas de sistemas interconectados, como as presentes em manipuladores, representam um típico exemplo de vínculos holonômicos. Por exemplo, o movimento de um sistema com  $N$  corpos fica completamente definido com as equações da dinâmica livre juntamente com a descrição de  $m = 2N - 2$  equações de vínculos<sup>2</sup>. Para o caso holonômico, as coordenadas generalizadas  $q^i$  são independentes, porque as restrições são integráveis e, portanto, redutíveis a  $m$  diferenciais perfeitas em  $TQ$ .

A conexão de Ehresmann é, em geral, utilizada para definir as restrições cinemáticas. Nas considerações que se seguem, é conveniente empregar uma distribuição de restrições

<sup>2</sup>Duas equações para cada junta de corpos adjacentes: uma equação de velocidade e outra de posição.



correspondente  $\mathcal{D} \subset T_q Q$  para descrever estes vínculos. Logo, uma distribuição das restrições em  $Q$  é um subconjunto de  $TQ$  das direções admissíveis da dinâmica do sistema, definido para cada  $q \in Q$ .

### Restrições Não-Holonômicas

Quando da existência de restrições não-holonômicas, a distribuição de restrição não é mais integrável. Neste caso, as quantidades conservadas de um sistema dinâmico, relacionadas às simetrias correspondentes, e que podem ser entendidas como a aplicação de uma conexão principal, constituem em um exemplo de restrição não-holonômica. Na teoria não-holonômica, as coordenadas generalizadas  $q^i$  não são mais independentes, mas sujeita a restrições.

Alguns casos usuais em que restrições tomam forma são as lineares e afins. A restrição linear, ou homogênea, nas velocidades do sistema é equivalente a uma restrição horizontal, ou seja,  $A(q)\dot{q} = 0$ . Seja a configuração com estrutura principal  $q = (g, r) \in Q$ , como apresentada na Seção 2.5. Logo, para uma restrição horizontal:

$$\dot{q} \in H_q \Rightarrow \dot{q}^i = (\dot{r}^\alpha, \dot{s}^a) = (\dot{r}^\alpha, -A_\alpha^a \dot{r}^\alpha) \quad (3.1.2)$$

As restrições cinemáticas são geralmente realizadas por restrições lineares. Portanto, a distribuição da restrição  $\mathcal{D}_q$

$$\mathcal{D}_q = \{\dot{q} \in T_q Q \mid A(q) \cdot \dot{q} = 0\} = \ker A_q$$

onde  $A_q \equiv A(q)$  é a conexão de Ehresmann no espaço  $Q$ , em  $q \in Q$ . Logo, a restrição é especificada por um subespaço horizontal associado à conexão  $A$ , (Bloch, 2003). Maiores detalhes a respeito de como as restrições influenciam o movimento do sistema multi-articulado através das *fases geométricas* serão vistos na Seção 5.2.

As equações de Lagrange-d'Alembert representam uma extensão geral das equações de Euler-Lagrange para inclusão de restrições não-holonômicas via o Princípio de Lagrange-d'Alembert <sup>3</sup>.

<sup>3</sup>As equações de Lagrange-d'Alembert simplificam, ou equivalem, às equações de Euler-Lagrange quando da presença de vínculos holonômicos apenas.

### 3.1.3 Princípio de Lagrange-d'Alembert

O Princípio de Lagrange-d'Alembert é empregado para quantificar os efeitos de forças de entradas ou de restrições na dinâmica de um sistema através da modificação das equações de Euler-Lagrange. Faz-se importante mencionar que a mecânica não-holonômica **não** é variacional como observado na teoria de controle ótimo, uma vez que as restrições de movimento não são impostas a velocidade  $\dot{q}$  mas apenas a variação  $\delta q$ , ver (Bloch, 2003) e suas referências. Para um sistema com configuração  $q \in Q$ , as restrições cinemáticas são descritas pela distribuição  $m$ -dimensional  $\mathcal{D}$ , onde  $\mathcal{D}_q \subset T_q Q$  para todo  $q \in Q$ . A dinâmica do sistema é completamente definida através de  $n$  equações diferenciais de segunda ordem - que podem ser reescritas nas Equações de Hamilton como  $2n$  equações de primeira ordem - e com a subvariedade  $\mathcal{D}$ , que define  $m$  equações de vínculos ou restrições na velocidade  $\dot{q}$ .

**Definição 3.1.1.** Para toda curva  $t \in [a, b] \mapsto q(t)$  em  $Q$ , o princípio de Lagrange-d'Alembert estabelece que

$$\delta \int_a^b L(q(t), \dot{q}(t)) dt = 0 \quad (3.1.3)$$

onde a variação  $\delta q(t)$  da curva  $q(t)$  satisfaz  $\delta q(t) \in \mathcal{D}_q(t)$ . Esta variação desaparece nos pontos extremos, ou seja,  $\delta q(a) = \delta q(b) = 0$  e a curva  $q(t)$  preserva as restrições.

Na definição acima, toma-se a variação da curva previamente a imposição das restrições; ou seja, as restrições na família de curvas são impostas apenas após a variação  $\delta q$ . Estas duas operações não comutam em geral mas representam justificativa conceitual à mecânica não-holonômica não constituir em um problema variacional. Conseqüentemente, as variações, ou deslocamentos virtuais, associadas a  $\delta q^i$  não são independentes mas devem satisfazer a distribuição das restrições  $\mathcal{D}_q(t)$ ,<sup>4</sup> ou seja, são horizontais  $\delta q^i = (\delta r^\alpha, -A_\alpha^i \delta r^\alpha)$ .

### 3.1.4 Equações de Lagrange-d'Alembert

As equações da dinâmica de um sistema sujeito a restrições lineares nas velocidades, derivadas a partir do Princípio de Lagrange-d'Alembert, são dadas por:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = \lambda A(q), \quad A(q)\dot{q} = 0$$

<sup>4</sup>Observe que a curva  $q(t) \in Q$  satisfaz as restrições se  $\dot{q}(t) \in \mathcal{D}_{q(t)}$ .

onde  $\lambda$  são os multiplicadores de Lagrange e  $A$ , a conexão que define as restrições de velocidade do sistema. Note que no caso holonômico a curvatura da conexão  $B_{\alpha\beta}^b = 0$ , o que é equivalente a afirmar que a diferenciação externa da 1-forma da conexão  $A(q)$  que define a restrição se anula, ou seja,  $\mathbf{d}\omega^b = 0$ . Isto corresponde a situação em que a distribuição é totalmente integrável no sentido de Frobenius, como esperado quando apenas restrições holonômicas são presentes. No caso geral, o caso não-holonômico, tem-se  $B_{\alpha\beta}^b \neq 0$ ,<sup>5</sup> o que traduz em esforços adicionais a serem considerados nas equações de movimento obtidas a partir do Princípio de Lagrange-d'Alembert.

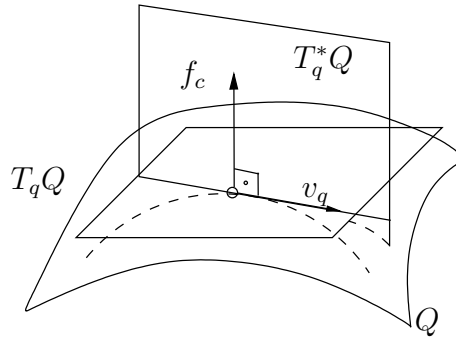


Figura 3.1: Em geral, o pareamento dos elementos duais de  $TQ$  e  $T^*Q$  é não nulo. Na mecânica, no entanto, as forças de restrições  $f_c$  são perpendiculares a velocidade, pois não realizam trabalho.

Quando forças externas  $f^{ext}$  são presentes, como às entradas de um sistema por exemplo, o Princípio de Lagrange-d'Alembert é formulado com a restrição adicional de que as forças não realizam trabalho na direção da variação  $\delta q$ , Figura 3.1. Dada a curva  $t \in [a, b] \mapsto q(t)$  em  $Q$ , tem-se que

$$\delta \int_a^b L(q(t), \dot{q}(t)) dt + \int_a^b f^{ext}(q(t), \dot{q}(t)) \cdot \delta q dt = 0 \quad (3.1.4)$$

para uma dada variação  $\delta q$  que se anula nos pontos extremos. A expressão acima permite obter as equações modificadas de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = \lambda A(q) + f^{ext}$$

onde  $\lambda$  são os multiplicadores de Lagrange e  $A$ , a conexão das restrições.

<sup>5</sup>A curvatura da conexão de uma restrição  $B$  serve como uma medida de falta de integrabilidade.

### 3.1.5 Não-holonomicidade do Sistema

Sabe-se, da mecânica clássica ou pelo Teorema de Noether, que na ausência de torques externos um sistema mantém o seu momento angular conservado. Neste caso, a conservação do momento angular representa uma restrição, ou vínculo, não-holonômica do sistema (Fernandes, Gurdits e Li, 1994). Observe que a conservação do momento é uma restrição dinâmica. Pode-se adiantar que o sistema em estudo é conhecidamente não-holonômico, porque possui uma restrição nas velocidades, dado pelo momento angular, não-integrável no sentido de Frobenius. Um sistema sujeito a restrições cinemáticas, no entanto, representa um caso diferente. Neste caso as equações de Lagrange d'Alembert regem a dinâmica do sistema sob as restrições lineares na velocidade, como apresentado acima. Neste trabalho, o sistema em consideração não sofre ação de restrições cinemáticas.

A seguir, apresentam-se as expressões de um dos casos de reconstrução da dinâmica no espaço de configurações total  $Q$ , a saber, a conexão mecânica<sup>6</sup>.

## 3.2 A Conexão Mecânica

A utilidade da conexão mecânica resume-se na sua aplicação à teoria de redução de sistemas com simetria e sem restrições. No que se segue, descreve-se os principais elementos envolvidos neste contexto.

Seja  $q = (r, g) \in Q$ . O tensor de inércia *travado*<sup>7</sup>  $\mathbb{I}$ , que induz a aplicação equivariante  $\mathbb{I}(q) : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}^*$ , pode ser definido pela expressão que iguala o pareamento entre elementos da álgebra  $\mathfrak{g}$  e sua correspondente dual com a métrica de Riemann, em  $Q$ , dos geradores infinitesimais correspondentes:

$$\langle \mathbb{I}(q)\eta, \zeta \rangle = \langle \langle \eta_Q(q), \zeta_Q(q) \rangle \rangle_{\mathbb{G}}, \quad q \in Q \quad (3.2.1)$$

onde  $\eta, \zeta \in \mathfrak{g}$  e  $\langle \langle \cdot, \cdot \rangle \rangle_{\mathbb{G}}$  é a métrica devido a energia cinética do sistema em  $Q$ . A aplicação induzida pelo tensor de inércia travado  $\mathbb{I}(q)$  possui a propriedade de ser equivariante, ou seja:

$$\mathbb{I}(q) = \text{Ad}_g^* \mathbb{I}(\Phi_g q) \text{Ad}_g$$

<sup>6</sup>Alguns outros casos importantes neste contexto, mas não utilizados no presente estudo, são os relativos às conexões cinemática e não-holonômica.

<sup>7</sup>Traduzido diretamente do inglês: “locked”, (Marsden, Montgomery e Ratiu, 1990).

Utiliza-se esta propriedade para determinar a versão local da inércia  $\mathbb{I}_{loc}$  que é independente da fibra  $G$ :

$$\mathbb{I}_{loc}(r) = \mathbb{I}(r, e) = \text{Ad}_g^* \mathbb{I}(q) \text{Ad}_g \quad (3.2.2)$$

Note que  $\mathbb{I}_{loc}(r)$  é uma trivialização local da expressão para o tensor de inércia travado em  $Q/G$ .

Recorda-se que a aplicação momento  $\mathbf{J} : TQ \rightarrow \mathfrak{g}^*$ , quando definida no fibrado tangente  $TQ$ , é dada por

$$\langle \mathbf{J}(q, v_q), \xi \rangle = \langle \langle \xi_Q(q), v_q \rangle \rangle = \left\langle \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}}, \xi_Q(q) \right\rangle, \quad \xi \in \mathfrak{g} \quad (3.2.3)$$

Note que a aplicação momento  $\mathbf{J}$  fornece valores na álgebra  $\mathfrak{g}^*$  cujos elementos correspondem ao momento do sistema no referencial inercial e simbolizados por  $\mu_S$ , ou seja:  $\mathbf{J}(q, v_q) \mapsto \mu_S \in \mathfrak{g}^*$ , onde  $\mathfrak{g}$  representa a álgebra de Lie dos elementos invariantes à direita. Logo, a versão no referencial móvel da aplicação  $\mathbf{J}$  pode ser obtida pela aplicação coadjunta  $\text{Ad}^*$ , consulte as seções do Apêndice A, através da expressão

$$\mathbf{J}_B = \text{Ad}_g^* \mathbf{J} \quad (3.2.4)$$

Neste caso  $\mathbf{J}_B(q, v_q) \mapsto \mu_B \in \mathfrak{g}^*$ , para a álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  dos elementos invariantes à esquerda.

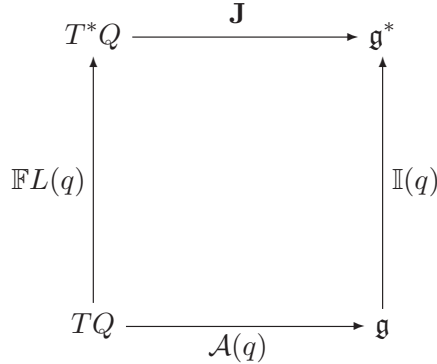


Figura 3.2: Diagrama definindo a conexão mecânica.

**Definição 3.2.1** (Conexão Mecânica). A conexão mecânica no fibrado principal  $Q \rightarrow Q/G$  é definida pela aplicação principal  $\mathcal{A} : TQ \rightarrow \mathfrak{g}$  que atribui, Figura 3.2, para todo  $(q, v_q) \in TQ$ , a velocidade angular correspondente ao sistema “travado” a partir da aplicação momento  $\mathbf{J}$  segundo a expressão:

$$\mathcal{A}(q) \cdot v_q = \mathcal{A}(q, v_q) = \mathbb{I}^{-1}(q) \mathbf{J}(q, v_q) \quad (3.2.5)$$

Observe que o espaço horizontal, como definido na Seção 2.5, determinado pela conexão mecânica  $\mathcal{A}(q)$  é obtido pela subespaço  $\{(q, v_q) \in TQ \mid \mathbf{J}(v_q) = 0\}$ , ou seja, subespaço de  $TQ$  que rende momento nulo. Note também que, por ser uma conexão principal, a conexão mecânica resulta em uma 1-forma, como apresentado em (2.5.1):

$$\mathcal{A}(r, g) = dgg^{-1} + \mathcal{A}_{loc}(r, g)dr$$

Para obter a versão da expressão da conexão  $\mathcal{A}(q)$  no referencial móvel,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(r, g) &= dgg^{-1} + \mathcal{A}_{loc}(r, g)dr \\ &= \text{Ad}_g(g^{-1}dg + \mathcal{A}_{loc}(r)dr) \\ &= \text{Ad}_g\mathcal{A}_B(r, g) \end{aligned} \tag{3.2.6}$$

Observe, no entanto, que a 1-forma  $\mathcal{A}_B(r, g)$  não é uma conexão. Define-se por  $\Omega$  a velocidade no espaço vertical  $V_q$  obtida pela conexão no referencial móvel através da relação

$$\begin{aligned} \Omega &= g^{-1}\dot{g} + \mathcal{A}_{loc}(r)\dot{r} \\ &= \xi_B + \mathcal{A}_{loc}(r)\dot{r} \end{aligned} \tag{3.2.7}$$

onde  $\xi_B$  representa a velocidade devido ao movimento somente na fibra. A partir de (3.2.2), a conexão em  $TQ$  pode ser construída conforme o seguinte

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(q) \cdot \dot{q} &= \mathbb{I}^{-1}(q)\mathbf{J}(v_q) = \mathbb{I}^{-1}(q)\mu_S \\ &= (\text{Ad}_g\mathbb{I}_{loc}^{-1}(r)\text{Ad}_g^*)\mu_S \\ &= \text{Ad}_g(\mathbb{I}_{loc}^{-1}(r)\text{Ad}_g^*\mu_S) \end{aligned}$$

A partir da última linha acima e utilizando a definição da conexão no referencial móvel em (3.2.6), verifica-se que  $\Omega = \mathbb{I}_{loc}^{-1}(r)\text{Ad}_g^*\mu_S$ . A expressão de  $\Omega$ , construída apenas com elementos definidos no referencial móvel, fica determinada por

$$\Omega = \mathbb{I}_{loc}^{-1}(r)\text{Ad}_g^*\mu_S = \mathbb{I}_{loc}^{-1}(r)\mu_B \tag{3.2.8}$$

De (3.2.7) e (3.2.8) segue a expressão do momento do sistema no referencial móvel, dado por

$$\mu_B = \mathbb{I}_{loc}(r)(\xi_B + \mathcal{A}_{loc}(r)\dot{r}) \tag{3.2.9}$$

ou, invertendo a expressão acima, pode-se obter  $\xi_B$  a partir de  $\mu_B$

$$\xi_B = -\mathcal{A}_{loc}(r)\dot{r} + \mathbb{I}_{loc}^{-1}(r)\mu_B \tag{3.2.10}$$

### 3.3 Princípio Variacional Reduzido

Seja  $L$  um Lagrangiano  $G$ -invariante, como definido na Seção 2.4. Pode-se mostrar que o fibrado tangente reduzido  $TQ/G$  é isomórfico ao espaço  $\mathfrak{g} \times TB$  que, por sua vez, induz um Lagrangiano reduzido  $l$  em  $TQ/G$  com coordenadas  $\xi \in \mathfrak{g}$  e  $\dot{r} \in TB$ . Logo, a partir de um Lagrangiano  $L$  invariante à esquerda, o Lagrangiano reduzido  $l$  é obtido segundo

$$l(r, \dot{r}, \xi_B) := L(r, e, \dot{r}, g^{-1}\dot{g}) = L(r, g^{-1}g, \dot{r}, g^{-1}\dot{g}) = L(L_g(r, g), TL_g(\dot{r}, \dot{g}))$$

onde  $\xi_B$  é um elemento da álgebra de Lie correspondente sistema de referência móvel e  $l$  é função da álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  do referencial móvel parametrizada pela velocidade  $\xi_B$ .

As forças e torques correspondem às entradas de um sistema mecânico e, como apresentado na Seção 2.2, são elementos do espaço  $T_q^*Q$  e, portanto, são covetores e sujeitas a estrutura geométrica de  $Q$ . As entradas são representadas por  $\tau$ . O particionamento da entrada  $\tau$  na estrutura do fibrado trivial, segundo os componentes nas direções dos espaços de fibra e base, é realizado de maneira análoga à decomposição da configuração  $q$ . Desta maneira, tem-se

$$\tau = \tau_e dg^e + \tau_i dr^i \in T_q^*Q$$

onde  $\tau_e \in T_g^*G$  corresponde aos componentes da entrada  $\tau$  relativos às direções da fibra  $G$  e  $\tau_i \in T_r^*B$ , os componentes relativos às direções no espaço de base  $B$ . Pode-se levar os covetor  $\tau$  à álgebra dual correspondente a  $\mathfrak{g}$  através da expressão do levantamento cotangente da ação de grupo  $\Phi_g$  aplicado a  $\tau_e \in T_g^*G$ , onde  $\tau_e$  é a restrição de  $\tau$  nas direções da fibra  $G$ , obtendo-se  $\tau_e g \in T_e^*G \equiv \mathfrak{g}^*$ .

Em termos da métrica  $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle_{\mathbb{G}}$ , o Lagrangiano reduzido do sistema  $l : TQ/G \rightarrow \mathbb{R}$  fica

$$l = \frac{1}{2} [\xi^T \quad \dot{r}^T] \begin{bmatrix} \mathbb{G}_{11} & \mathbb{G}_{12} \\ \mathbb{G}_{21} & \mathbb{G}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \dot{r} \end{bmatrix} \quad (3.3.1)$$

Similarmente, um  $L$  invariante à direita confere um Lagrangiano  $l$  função da álgebra de Lie representado por coordenadas inerciais  $\xi_S$ .

Define-se o momento generalizado do sistema no referencial móvel em função do Lagrangiano reduzido  $l$ , a partir de (3.2.9), como

$$\mu_B := \frac{\partial l}{\partial \xi_B} = \mathbb{I}_{loc}(r)(\xi_B + \mathcal{A}_{loc}(r)\dot{r}) \quad (3.3.2)$$

Ao usar (3.3.2) para definir uma restrição da velocidade de um ponto do sistema  $\xi_B$ , induz-se uma função em  $TB \times \mathfrak{g}^*$  denominada Lagrangiano reduzido da restrição  $l_c$ :

$$l_c(r, \dot{r}, \mu_B) = l(r, \dot{r}, \xi_B)|_{\xi_B}$$

No que se segue, reproduz-se as expressões da dinâmica do sistema reduzida do espaço de fase de velocidade  $TQ$  para o espaço quociente  $TQ/G$  segundo a ação de  $G$  em  $Q$ . Para um Lagrangiano  $L$  invariante a ação de  $G$ , a projeção do princípio variacional em  $TQ/G$  induz um Lagrangiano reduzido  $l$  e o **princípio variacional reduzido** correspondente. Este processo de redução, propicia um particionamento da dinâmica no espaço fibrado definido pela álgebra de Lie concatenado ao fibrado tangente da base ( $\mathfrak{g} \times TB$ ) e regida pelas equações de Lagrange-Poincaré, ver (Marsden e Scheurle, 1993) e (Ostrowski, 1995) para detalhes adicionais.

**Proposição 3.3.1** ((Ostrowski, 1995)). *As equações reduzidas definidas em  $\mathfrak{g} \times TB$ , com restrições não-holonômicas, relativas ao princípio variacional são dadas pelas expressões*

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial l}{\partial \xi^a} \right) - ad_{\xi}^* \frac{\partial l}{\partial \xi^a} = \lambda_c \omega_b^c g_a^b + \tau_b g_a^b \quad (3.3.3)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial l}{\partial \dot{r}^i} \right) - \frac{\partial l}{\partial r^i} = \lambda_c \omega_i^c + \tau_i \quad (3.3.4)$$

onde  $a, b = 1, \dots, \dim G$  e  $i = 1, \dots, \dim B$ .

Note que  $\tau_b g^b$ , para  $a, b = 1, \dots, \dim G$ , é dado pela expressão do levantamento cotangente da ação de grupo calculado nos componentes da fibra  $G$  de  $\tau$ .

Note que a primeira equação, definida em  $\mathfrak{g}$ , corresponde à equação de Euler-Poincaré forçada. A partir destas expressões gerais é possível obter as equações diferenciais que regem as dinâmicas do momento generalizado, do espaço de base do sistema e uma expressão da reconstrução da cinemática na fibra. Estas três últimas equações acima serão apresentadas na próxima seção por ocasião da modelagem do sistema.

### 3.4 Reconstrução da Dinâmica

A trajetória no espaço total  $Q$  pode ser recuperada a partir de um caminho percorrido no espaço de base  $Q/G$ , em conjunto com as restrições em  $\mathcal{D}$ , o momento total generalizado



e com a equação de momento do sistema. Este processo, inverso da redução, recebe o nome de **reconstrução**.<sup>8</sup>

O modelo da dinâmica total de um sistema com simetria pode ser apresentado da seguinte maneira (Bloch, 2003):

$$\begin{aligned} g^{-1}\dot{g} &= -A(r)\dot{r} + B(r)p \\ \dot{p} &= \dot{r}^T H(r)\dot{r} + \dot{r}^T K(r)p + p^T D(r)p \\ M(r)\ddot{r} &= \delta(r, \dot{r}, p) + \tau \end{aligned}$$

onde a primeira expressão corresponde à equação de reconstrução que modela a cinemática do sistema em função do elemento de grupo  $g \in G$ , a segunda expressão representa a equação de momento em  $T^*G$ , para o momento  $p \in T_g^*G$  em coordenadas do referencial móvel, e a terceira equação apresenta a dinâmica do sistema no espaço de base  $Q/G$  em função da configuração  $r$ . Em geral, os esforços externos  $\tau$  da representação acima afetam apenas as variáveis de forma em  $B$ ; sendo, portanto,  $G$ -invariantes. No entanto, as entradas do sistema que será definido no capítulo seguinte, possui componentes que afetam, além das variáveis de forma, as variáveis da fibra  $G$ .

Com os elementos acima, tem-se condições de estabelecer as equações de reconstrução no referencial móvel, ver (Ostrowski, 1995; Murray, 1997). Estas são deduzidas a partir do princípio não-holonômico variacional reduzido, resultando nas expressões:

$$\begin{aligned} \dot{g} &= g \left( -\mathcal{A}_{loc}(r)\dot{r} + \mathbb{I}_{loc}^{-1}(r)\mu_B \right) \\ \dot{\mu}_B &= \text{ad}_\xi^* \mu_B + \bar{\tau} \\ M(r)\ddot{r} + \dot{r}^T C(r)\dot{r} + N &= \mathcal{X}(r)\tau \end{aligned} \tag{3.4.1}$$

onde define-se a matriz de inércia reduzida  $M(r)$  como

$$M(r) = \mathbb{G}_{22}(r) - \mathcal{A}_{loc}^T(r)\mathbb{I}_{loc}(r)\mathcal{A}_{loc}(r), \tag{3.4.2}$$

e as forças centrípeta e de Coriolis são determinadas a partir do seguinte tensor da métrica Riemanniana

$$C_{ijk}(r)\dot{r}^j\dot{r}^k = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial M_{ij}}{\partial r^k} + \frac{\partial M_{ik}}{\partial r^j} - \frac{\partial M_{kj}}{\partial r^i} \right) \dot{r}^j\dot{r}^k \tag{3.4.3}$$

Note que os coeficientes  $C_{ijk}$  dos termos acima são dados pelos símbolos de Christoffel, definidos em (2.5.4), avaliados apenas no espaço de base  $B$ . O termo da dinâmica  $N$ ,

<sup>8</sup>No caso não-holonômico mais geral, o processo de reconstrução deve considerar a interação entre as restrições e a simetria do sistema. Neste caso, a dinâmica reduzida do sistema em  $\mathcal{D}/G$  é elevada ao subconjunto do espaço total  $\mathcal{D} \in TQ$ .

responsável pela incorporação da dinâmica do momento do sistema  $\mu_B$  à dinâmica no espaço de base  $B$ , é dado pela expressão

$$N(\cdot) = \text{ad}_{\xi_B}^* \frac{\partial l}{\partial \xi_B} \mathcal{A}_{loc}(\cdot) + \frac{\partial l}{\partial \xi_B} \left( \mathbf{d}\mathcal{A}_{loc}(\dot{r}, \cdot) + \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbb{I}_{loc}^{-1} \mu_B}{\partial r}(\cdot) \right) \quad (3.4.4)$$

onde  $\partial l / \partial \xi_B$  representa o momento no referencial móvel definido em (3.2.9) e  $(\cdot)$  assume valores em  $TB$ .

*Observação 3.4.1.* Observe que um dos termos da expressão da dinâmica  $N(\cdot)$  deve-se à derivada exterior do componente local da 1-forma relativo a conexão principal  $\mathcal{A}$ , e dado por  $\mathbf{d}\mathcal{A}_{loc}(\dot{r}, \cdot)$ , como definida na Seção 2.5.3. Note também que, pelo fato do componente local da conexão  $\mathcal{A}_{loc}$  não ser função das coordenadas da fibra  $G$  mas apenas das coordenadas do espaço de base  $B$ , a derivada exterior implica a seguinte 2-forma em  $B$ :

$$\mathbf{d}\mathcal{A}_{loc}(\dot{r}, \delta r) = \left( \frac{\partial \mathcal{A}_{loc\alpha}}{\partial r^\beta} - \frac{\partial \mathcal{A}_{loc\beta}}{\partial r^\alpha} \right) \dot{r}^\alpha \delta r^\beta$$

uma vez que o termo dependente do colchete de Jacobi-Lie se anula. Vale mencionar que o resultado, avaliado nos vetores  $\dot{r}$  e  $\delta r$ , corresponde a um elemento na álgebra  $\mathfrak{g}$  e, portanto, de dimensão igual à dimensão da fibra  $G$ .

A contribuição das entradas  $\tau = (\tau_e, \tau_i)$  na equação do momento é dada por  $\bar{\tau}_a = \tau_b g_a^b$ , onde  $g_a^b$  representa a ação do grupo  $G$ , no componente da entrada relativa a fibras  $\tau_e \in T_g^*G$ , elevada ao espaço cotangente através da ação de translação dual do levantamento cotangente  $T_e^*L_g$ , veja Seção A.1 para detalhes. Na equação do movimento na base, a parcela da força  $\tau$  é determinada pela aplicação da 1-forma  $\mathcal{X}$ , função da conexão  $\mathcal{A}$ , a  $\tau$ :

$$(\mathcal{X}(r)\tau)_i = \tau_i - \tau_e(\mathcal{A}_{loc}(r))_i^e$$

As equações acima expressas em função das coordenadas do referencial inercial são apresentadas abaixo. Observe que  $\text{Ad}_g \mathcal{A}_{loc}(r) = \mathcal{A}_{loc}(r, g)$ , e que nas coordenadas inerciais, tem-se (Murray, 1997):

$$\begin{aligned} \dot{g} &= g(-\mathcal{A}_{loc}(r, g)\dot{r} + \mathbb{I}^{-1}(r, g)\mu_S) \\ \dot{\mu}_S &= \text{Ad}_g^* \bar{\tau} \\ M(r)\ddot{r} + \dot{r}^T C(r)\dot{r} + N_S &= \mathcal{X}(r)\tau \end{aligned}$$

onde  $M(r)$  e  $C(r)$  são dadas pelas mesmas expressões quando no referencial móvel. A função  $N_S$ , por outro lado, toma a seguinte forma

$$N_S = \left\langle \mu_S; \text{Ad}_g \text{ad}_{\xi_B}^* \mathcal{A}_{loc}(\cdot) + \text{Ad}_g \mathbf{d}\mathcal{A}_{loc}(\dot{r}, \cdot) + \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbb{I}^{-1} \mu_S}{\partial r}(\cdot) \right\rangle \quad (3.4.5)$$

---

Uma evidente vantagem de se escrever a dinâmica do sistema no referencial móvel se revela no desacoplamento na equação de momento das variáveis do grupo  $g \in G$ , facilitando a obtenção do movimento na fibra pela integração da equação de momento, dada uma curva  $r(t)$  no espaço de base. Esta característica não é observada quando função das coordenadas inerciais. Entretanto, a conservação do momento é verificada apenas no referencial inercial.

### 3.5 Conclusão

A modelagem Lagrangiana de um sistema segue das equações de Lagrange, quando livre de restrições ou vínculos de velocidade. Estas equações foram aqui apresentadas sob a mesma decomposição da estrutura principal da Seção 2.5 e serão utilizadas na modelagem do sistema multi-articulado sem restrições no próximo capítulo.

## Capítulo 4

# Modelagem do Sistema

## Multi-Corpo

No presente capítulo apresenta-se a modelagem do sistema multi-articulado no plano. O cenário utilizado para a formulação da modelagem da dinâmica do sistema, segue de Sreenath (1987) e Marsden e Ratiu (1999), para a dinâmica Hamiltoniana, e de Ostrowski (1995), para uma abordagem Lagrangiana.

Como mencionado no capítulo introdutório, a classe de sistemas multi-articulados aqui definida apresenta uma evolução em relação aos sistemas multi-articulados encontrados na literatura. Esta evolução diz respeito à incorporação dos esforços externos, ou entradas às equações de movimento do sistema. Em particular, os sistemas consistem de representações de sistemas veículo-manipulador considerados “ativos” no sentido de usufruírem da capacidade de auto-manobra no espaço de configuração pela ação de propulsores distribuídos pelo sistema. No caso plano, aqui considerado, os veículos são dotados de manipuladores com inércia não desprezível de um grau de liberdade, a saber, a rotação em torno do eixo perpendicular ao plano. Estes sistemas podem ser vistos como uma rede interconectada de corpos rígidos. À medida que o número de corpos e conexões entre estes corpos aumentam, o número de variáveis aumenta, e o modelo da dinâmica do sistema se torna altamente complexo.

Ao longo deste capítulo, e nos que se seguem, assume-se a modelagem do sistema negligenciando-se a existência de forças potenciais, como a gravidade ou magnéticas, e dissipativas, como o atrito ou arrasto de fluidos, por exemplo. Adota-se também,

juntas rotativas ideais quando da conexão dos corpos. Quando presentes, as forças de propulsão são tomadas como agentes nos centros de massa do corpo correspondente. Além disso, não são consideradas forças vetorizadas, o que simplifica as expressões sobremaneira.

## 4.1 Cinemática do Sistema no Espaço Completo

Para um sistema restrito ao plano composto por  $N$  corpos livres, o espaço de configuração é dado por

$$Q_{livre} = SE(2) \times \dots \times SE(2) \quad (N\text{-vezes})$$

onde  $SE(2)$  é o grupo Euclideano especial no plano<sup>1</sup>. Porque o grupos  $SE(n)$  e  $SO(n) \times \mathbb{R}^n$  são isomórficos entre si, para qualquer  $n \in \mathbb{N}$ , a seguinte aplicação é naturalmente definida como

$$SE(n) \ni \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{r} \\ \mathbf{0}_{1 \times n} & 1 \end{bmatrix} \mapsto (\mathbf{R}, \mathbf{r}) \in SO(n) \times \mathbb{R}^n$$

onde  $\mathbf{R}$  representa uma matriz de rotação e  $\mathbf{r}$ , o vetor posição em relação a um referencial, conforme a Fig. 4.1. Portanto, identificam-se os elementos de  $SE(n)$  com os elementos de  $SO(n) \times \mathbb{R}^n$ . Logo:

$$q = (q^i) = ((\mathbf{R}_1, \mathbf{r}_1), (\mathbf{R}_2, \mathbf{r}_2), \dots, (\mathbf{R}_N, \mathbf{r}_N)) \in Q_{livre}$$

onde  $q^i = (\mathbf{R}_i, \mathbf{r}_i)$ , para  $i = 1, \dots, N$ , ou, em forma vetorial,

$$q = \begin{bmatrix} (\mathbf{r}_1, \mathbf{R}_1)^T \\ \vdots \\ (\mathbf{r}_N, \mathbf{R}_N)^T \end{bmatrix} \in Q_{livre}$$

No caso de sistema multi-corpos interconectados, os corpos são fisicamente acoplados dois-a-dois entre si por juntas de rotação. Neste caso define-se uma **restrição de junta**<sup>2</sup> através da relação:

$$\mathbf{r}_{j+1} = \mathbf{r}_j + \mathbf{R}(\theta_j)\mathbf{d}_j^{j+1} - \mathbf{R}(\theta_{j+1})\mathbf{d}_{j+1}^j \quad 1 \leq j < N$$

<sup>1</sup>O grupo  $SE(n)$  é o produto semi-direto  $SO(n) \ltimes \mathbb{R}^n$ , como visto na Seção 2.2.1.

<sup>2</sup>Derivada da premissa que dois corpos articulados por meio de uma junta rotativa sempre mantém contato em um mesmo ponto. Portanto, o ponto onde se localiza a junta rotativa é o mesmo se visto a partir dos referenciais móveis em ambos os corpos.

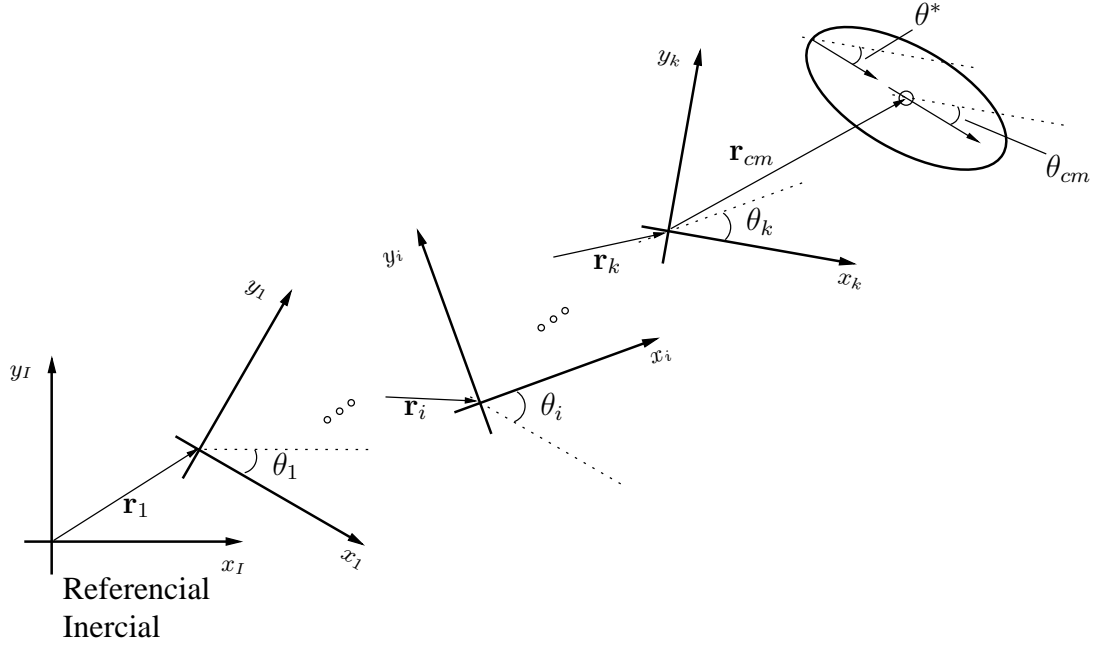


Figura 4.1: O  $i$ -ésimo sistema de coordenadas é especificado, através da posição da sua origem  $\mathbf{r}_i$  e orientação  $\theta_i$ , em relação ao  $i - 1$ -ésimo referencial.

onde  $\mathbf{d}_j^{j+1}$  é a posição da junta entre os  $j$ -ésimo e  $(j + 1)$ -ésimo corpos em relação à origem do sistema referencial do  $j$ -ésimo corpo. Portanto, o espaço de configuração do sistema interconectado  $Q$ , onde  $Q \subset Q_{livre}$ , simplifica a:

$$Q = \mathbb{R}^2 \times SO(2) \times \dots \times SO(2) \quad (N\text{-vezes}) \quad (4.1.1)$$

Ademais, pode-se identificar os grupos  $SO(2)$  e  $\mathbb{S}^1$  devido ao seguinte isomorfismo:

$$SO(2) \ni \mathbf{R} \mapsto (x_1, x_2) \in \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2, \quad \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = 1$$

Adicionalmente, o círculo  $\mathbb{S}^1$  pode ser parametrizado através do difeomorfismo  $f : [0, 2\pi] \cup [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{S}^1 : \theta \mapsto (\cos \theta, \sin \theta)$ .<sup>3</sup> Logo, determina-se um ponto em  $\mathbb{S}^1$  por  $\theta$  podendo-se escrever (4.1.1) como:

$$Q = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1 \times \dots \times \mathbb{S}^1 \quad (N\text{-vezes})$$

e, conseqüentemente

$$q = (\mathbf{r}, (\theta_i)) = (\mathbf{r}, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N) \in Q.$$

<sup>3</sup>O domínio do difeomorfismo em questão é estabelecido pela projeção estereográfica do círculo  $\mathbb{S}^1$  no eixo dos reais, (Spivak, 1999; Mather, 2005).

onde  $\mathbf{r}$  é a posição de um ponto (qualquer) do sistema em relação ao referencial inercial. Do exposto acima, pode-se parametrizar  $\mathbf{R}_i = \mathbf{R}(\theta_i) \in SO(2)$  por  $\theta_i \in \mathbb{S}^1$ . Seja  $q \in Q$ . A ação de translação do sistema por  $\mathbf{r}$  pode ser explicitada como

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \cdot q &= \mathbf{r} \cdot ((\mathbf{R}_1, \mathbf{r}_1), (\mathbf{R}_2, \mathbf{r}_2), \dots, (\mathbf{R}_N, \mathbf{r}_N)) \\ &= ((\mathbf{R}_1, \mathbf{r} + \mathbf{r}_1), (\mathbf{R}_2, \mathbf{r} + \mathbf{r}_2), \dots, (\mathbf{R}_N, \mathbf{r} + \mathbf{r}_N)) \end{aligned}$$

Por outro lado, rotacionando-se o sistema em torno de qualquer ponto pertencente ao sistema por  $\mathbf{R} = \mathbf{R}(\theta) \in SO(2)$ , o seguinte mostra que todos os corpos são rotacionados igualmente:

$$\begin{aligned} \mathbf{R} \cdot q &= \mathbf{R} \cdot ((\mathbf{R}_1, \mathbf{r} + \mathbf{r}_1), (\mathbf{R}_2, \mathbf{r} + \mathbf{r}_2), \dots, (\mathbf{R}_N, \mathbf{r} + \mathbf{r}_N)) \\ &= ((\mathbf{R}\mathbf{R}_1, \mathbf{r} + \mathbf{r}_1), (\mathbf{R}\mathbf{R}_2, \mathbf{r} + \mathbf{r}_2), \dots, (\mathbf{R}\mathbf{R}_N, \mathbf{r} + \mathbf{r}_N)) \\ &= ((\mathbf{R}(\theta + \theta_1), \mathbf{r} + \mathbf{r}_1), (\mathbf{R}(\theta + \theta_2), \mathbf{r} + \mathbf{r}_2), \dots, (\mathbf{R}(\theta + \theta_N), \mathbf{r} + \mathbf{r}_N)) \end{aligned}$$

Observe, pela última igualdade, que os elementos pertencentes a  $SO(2)$  comutam, tornando explícito o homeomorfismo abeliano do grupo.

As equações de movimento da dinâmica do sistema são definidas no espaço de estados. Toma-se o espaço de estados como sendo o fibrado tangente  $TQ$  sobre o espaço de configuração, o espaço de fase de velocidade, ou como o espaço de fase de momento, dado pelo espaço cotangente  $T^*Q$  sobre  $Q$ , dependendo de uma abordagem Lagrangiana ou Hamiltoniana. Para a configuração  $q = (\mathbf{R}_i, \mathbf{r}_i)$ , para  $i = 1, \dots, N$ , o espaço de fase  $TQ$  é dado por

$$(\dot{\mathbf{R}}_i, \dot{\mathbf{r}}_i) \in T_q Q = T_{q_1} SE(2) \times \dots \times T_{q_N} SE(2) \quad (N\text{-vezes})$$

O vetor velocidade angular  $\boldsymbol{\omega}$  fica determinado por

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \vdots \\ \omega_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \vdots \\ \dot{\theta}_N \end{bmatrix} \quad (4.1.2)$$

Pode-se escrever o vetor  $\dot{q} \in T_q Q$ , em  $q$ , em função das coordenadas  $(\dot{\mathbf{r}}, \dot{\boldsymbol{\theta}})$ .

### Lagrangiano do Sistema

O Lagrangiano do sistema  $L$  é determinado apenas pela energia cinética do sistema, devido à ausência, aqui considerada, de forças potenciais ou dissipativas. Logo, as

equações da movimento são governadas somente por dinâmicas inerciais. A energia cinética total  $K_E$  do sistema plano, composto por  $N$  corpos, é obtida pela soma das energias cinéticas individuais, (Bullo e Lewis, 2005). Conforme notação apresentada na Seção 2.2, segue de (2.2.2) que

$$L = K_{E_k} = \frac{1}{2} \int_{B_k} \rho(\mathbf{X}_k) \|\dot{\mathbf{r}}_{cm_k}\|^2 d^2 \mathbf{X}_k, \quad k = 1, \dots, N$$

No contexto de Riemann, com estrutura definida por  $(Q, \langle \langle \cdot, \cdot \rangle \rangle)$ , a métrica da energia cinética pode ser definida através da métrica  $\langle \langle \cdot, \cdot \rangle \rangle_{\mathbb{G}}$ , onde  $\mathbb{G}$  é a matriz de inércia generalizada, definida a seguir. Denominando-se por  $\mathbf{r}_{cm} \in \mathbb{R}^2$  o centro de massa do sistema, tem-se, no referencial inercial, que:

$$L(q, \dot{q}) = \langle \langle \dot{q}, \dot{q} \rangle \rangle_{\mathbb{G}} = \frac{1}{2} \langle \mathbb{G} \dot{q}, \dot{q} \rangle = \frac{1}{2} \dot{q}^T \mathbb{G} \dot{q} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T \mathbb{J} \boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2} m^* \|\dot{\mathbf{r}}_{cm}\|^2 \quad (4.1.3)$$

onde  $\dot{q} \in T_q Q$ ,  $m^*$  é a massa total do sistema e  $\boldsymbol{\omega}$  foi definido em (4.1.2) e

$$\mathbb{G} = \begin{bmatrix} m^* I_2 & \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbb{J} \end{bmatrix}$$

A matriz de inércia  $\mathbb{J}$  é simétrica e definida e positiva e dada por, Seção C.2.1:

$$\mathbb{J} = \mathbb{J}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} \tilde{I}_1 & \lambda_{12} & \cdots & \lambda_{1N} \\ \lambda_{12} & \tilde{I}_2 & \cdots & \lambda_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{1N} & \lambda_{2N} & \cdots & \tilde{I}_N \end{bmatrix} \quad (4.1.4)$$

onde o momento de inércia expandido do  $k$ -ésimo corpo  $\tilde{I}_k$  pode ser calculado como

$$\tilde{I}_k = I_k + \sum_{j=1}^N m_j \|\mathbf{b}_{jk}\|^2, \quad (4.1.5)$$

o momento de inércia relativo entre os  $k$ -ésimo e o  $j$ -ésimo corpos  $\lambda_{lj}$  é dado por

$$\lambda_{lj}(\theta_{lj}) = \left[ \sum_{k=1}^N m_k \langle \mathbf{b}_{kj}, \mathbf{b}_{kl} \rangle \right] \cos(\theta_{lj}) + \left[ \sum_{k=1}^N m_k |\mathbf{b}_{kj} \times \mathbf{b}_{kl}| \right] \sin(\theta_{lj}) \quad (4.1.6)$$

e onde o ângulo relativo entre os  $k$ -ésimo e o  $j$ -ésimo corpos é

$$\theta_{lj} = \theta_l - \theta_j$$

Quando  $l = j - 1$ , diz-se que  $\theta_{lj}$  representam os ângulos de junta. Nas expressões (4.1.5) e (4.1.6),  $\mathbf{b}_{(\cdot, \cdot)} \in \mathbb{R}^2$  representa o equivalente da distância “linear” entre quaisquer dois corpos do sistema e as operações do produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , produto vetorial  $\times$  e norma de um vetor  $|\cdot|$  são tomadas como usuais em  $\mathbb{R}^2$ .



### Hamiltoniano do Sistema

Aplicando-se a transformada de Legendre  $\mathbb{F}L : TQ \rightarrow T^*Q$ , ao vetor  $\dot{q}$ , obtém-se  $p \in T^*Q$ . Fixadas as coordenadas de configuração  $q$ , o espaço cotangente tem coordenadas canônicas  $(q^i, p_i)$ , para  $i = 1, \dots, N$ , onde o momento conjugado  $p$  fica determinado por:

$$\mathbb{F}L(\dot{q}) = \mathbb{F}L \left( \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{r}}_{cm} \\ \dot{\theta}_1 \\ \vdots \\ \dot{\theta}_N \end{bmatrix} \right) \mapsto \begin{bmatrix} \mathbf{p}_{cm} \\ \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_N \end{bmatrix} = p \quad (4.1.7)$$

onde  $p$  é definido por

$$p := \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}}$$

A partir da transformação no espaço tangente acima, especificam-se os elementos do espaço cotangente: o momento angular  $\boldsymbol{\mu}$  é definido por  $\boldsymbol{\mu} = \mathbb{J}\boldsymbol{\omega}$  e o momento linear do centro de massa  $\mathbf{p}_{cm} \in \mathbb{R}^2$  é obtido por  $\mathbf{p}_{cm} = m^* \dot{\mathbf{r}}_{cm}$ , onde  $m^*$  é a massa total do sistema.

Como visto na Seção (4.1), o elemento do espaço tangente  $T_q Q$  fica determinado por  $(\dot{\mathbf{R}}_i, \dot{\mathbf{r}}_i) \in T_q Q$ . Por outro lado, um ponto no espaço de fase de momento  $T^*Q$  é dado por

$$(\mu_i, \mathbf{p}_{cm}) \in T_q^* Q = T_{q_1}^* SE(2) \times \dots \times T_{q_N}^* SE(2) \quad (N\text{-vezes})$$

Como a matriz de inércia do sistema  $\mathbb{J}$  é definida e positiva,  $\mathbb{J}$  é invertível e o Hamiltoniano do sistema  $H : T^*Q \rightarrow \mathbb{R}$  fica definido por

$$H(q, p) = H(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{r}_{cm}, \boldsymbol{\mu}, \mathbf{p}_{cm}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\mu}^T \mathbb{J}^{-1} \boldsymbol{\mu} + \frac{\|\mathbf{p}_{cm}\|^2}{2m^*} \quad (4.1.8)$$

Como  $H$  independe de  $\mathbf{r}_{cm}$ , o Hamiltoniano pode ser escrito como  $H(q, p) = H(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\mu}, \mathbf{p}_{cm})$ .

#### 4.1.1 Simetria do Sistema e Redução

Pode-se mostrar que a classe de sistemas aqui considerada possui grupo de simetria  $G = SE(2)$ , o que traduz em invariância da dinâmica, como discutido na Seção 2.4. Para a ação de levantamento à esquerda  $T\Phi_g$ , a invariância da função Lagrangiano pode ser verificada através da relação

$$\Phi_g^* L(q, v_q) = L(\Phi_g(q), T_q \Phi_g(v_q)) = L(q, v_q) \quad (4.1.9)$$

No que se segue, descreve-se brevemente a redução da dinâmica do sistema que resulta na dinâmica relativa do sistema. Primeiramente, devido a estrutura do produto semi-direto do grupo  $S = SE(2)$ , a redução de  $Q$  por  $S$  pode ser realizada em etapas, como elucidado a seguir. A redução ao centro de massa do sistema é realizada primeiro, através da redução do movimento de translação pelo espaço vetorial  $V = \mathbb{R}^2$ , obtendo-se  $Q/V$ . O espaço de fase de momento parcialmente reduzido em  $Q/\mathbb{R}^2$  rende  $P_V = P/\mathbb{R}^2 \simeq T^*(\mathbb{S}^1 \times \dots \times \mathbb{S}^1)$ . Em seguida, prossegue-se com a redução da orientação inercial devido ao grupo  $G = SO(2)$ , que corresponde a redução ao referencial do corpo. O espaço de fase resultante em  $(Q/V)/G = Q/SE(2)$ , obtido pela redução de  $P_V$  por  $SO(2)$ , fica  $P_S = P_V/\mathbb{S}^1 = T^*(\mathbb{S}^1 \times \dots \times \mathbb{S}^1)/\mathbb{S}^1$ . Maiores detalhes são discutidos em Marsden e Ratiu (1999) e suas nas referências.

Logo, a invariância translacional e rotacional é observada e a dinâmica relativa entre os corpos fica inalterada quando o sistema como um todo é deslocado no plano, na ausência de esforços externos. Como comentado anteriormente, esta invariância corresponde a conservação do momento. Mesmo sob a ação de torques devido aos atuadores localizados nas juntas rotativas entre os corpos que compõe o sistema, o momento angular não sofre alteração<sup>4</sup>. A atuação destes torques são internos ao sistema e contribuem apenas para a variação de energia do sistema. Sob o enfoque geométrico, esta variação corresponde à mudança de trajetória pertencente ao elipsóide de energia inicial para o elipsóide de energia correspondente a variação. Um comportamento dinâmico distinto aparece nos casos em que as juntas são rotacionadas devido aos esforços de propulsão. Neste caso, pelo fato dos esforços de propulsão atuarem externamente ao sistema, não há necessariamente conservação do momento angular. A modelagem das entradas de torque e propulsão é realizada na Seção 4.2.1.

A função Hamiltoniano reduzida  $\bar{H}$  do sistema é

$$\bar{H}(q, p) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\mu}^T \mathbb{J}^{-1} \boldsymbol{\mu} + \frac{\|\mathbf{p}_{cm}|_B\|^2}{2m^*} \quad (4.1.10)$$

onde  $\mathbf{p}_{cm}|_B$  representa o momento linear do centro de massa do sistema em coordenadas do referencial móvel (Manikonda, 1998) e  $m^*$  é a massa total do sistema. O campo vetorial Hamiltoniano associado é  $X_{\bar{H}}$ .

Analogamente, o espaço da dinâmica reduzida do sistema pode ser decomposta em

---

<sup>4</sup>Os torques nas juntas rotativas alteram os momentos angulares dos corpos individualmente; o momento angular total do sistema se mantém constante uma vez que os incrementos de momentos dos corpos devido aos torques internos se cancelam.

folhas simpléticas. Conforme a expressão dada acima, a dinâmica reduzida é invariante a ação do grupo  $SE(2)$ . O espaço reduzido é um espaço de Poisson de três dimensões, parametrizado por  $(\phi, \mu_1, \mu_2)$ . A especificação de cada folha simplética é feita fixando um valor do momento angular total  $\mu = \mu_1 + \mu_2$ . A dinâmica em cada folha pode ser parametrizada pelas variáveis  $(\phi, \nu)$ , onde  $\nu = \mu_2 - \mu_1$ . A Figura 4.2 ilustra as trajetórias da dinâmica do sistema de 2-corpos no plano restrita às folhas simpléticas cilíndricas. Refira à Seção 4.2 e (Sreenath, 1987) para detalhes da construção das folhas simpléticas e à Seção B.1 para detalhes da construção da superfície de energia constante do sistema de dois corpos no plano.

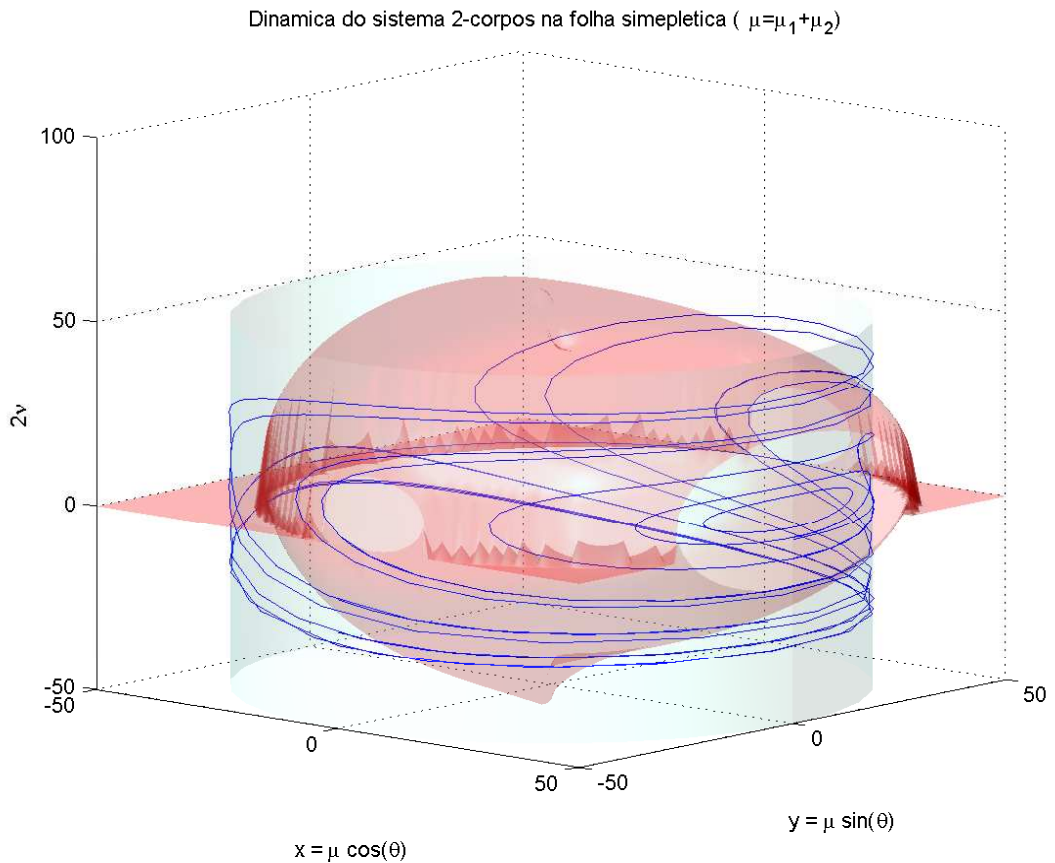


Figura 4.2: Trajetórias da dinâmica de rotação do sistema de dois corpos no plano. As trajetórias são determinadas pela intersecção da superfície cilíndrica, devida à conservação do momento angular do sistema  $\mu_1 + \mu_2$ , com o elipsóide, representativo da conservação de energia  $H$ . Ver Seção B.1.

### Decomposição da Configuração na Estrutura Principal

Os ângulos de junta  $\phi_i$ , ou a orientação relativa entre dois corpos consecutivos, são dados por

$$\phi_i = \theta_{i+1,i}, \quad i = 1, \dots, N - 1$$

e definem as coordenadas  $r$  do espaço de base  $B$  tomado como o espaço quociente  $Q/G$ . Por determinarem a “forma” do sistema, fixando a orientação relativa entre os corpos, os  $\phi_i$  são também denominados variáveis de forma do sistema, e o espaço  $B$ , similarmente, é chamado de espaço de forma do sistema. Devido à invariância da matriz de inércia  $\mathbb{J}$  em relação à orientação absoluta dos corpos,  $\mathbb{J}$  é função apenas das coordenadas do espaço de base. Conseqüentemente, os termos de  $\mathbb{J}$  podem ser escritos como função apenas das  $\phi_i$ . Logo, agrupando todos os  $\phi_i$  em um único vetor  $\phi$ , segue de (4.1.4) que

$$\mathbb{J} = \mathbb{J}(\phi)$$

## 4.2 Modelo do Sistema no Espaço Cotangente

A determinação das equações de movimento do sistema livre (sem entradas) com  $N$ -corpos, no espaço cotangente sobre o espaço de configuração  $Q$ , é realizada em função do Hamiltoniano  $H$  dado em (4.1.8).

Em se tratando de um sistema de Poisson, pode-se utilizar de uma particularização do colchete de Poisson para o sistema e chegar a estrutura simplética. O colchete de Poisson levanta a trajetória ao espaço dual sobre a configuração do sistema  $Q$  e que corresponde ao espaço cotangente  $T^*Q$ . Logo, para as coordenadas  $z = (q, p) = (\mathbf{r}_{cm}, \boldsymbol{\theta}, \mathbf{p}_{cm}, \boldsymbol{\mu}) \in T^*Q$  e  $H(z) = H(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{p}_{cm}, \boldsymbol{\mu})$ , as equações de movimento do sistema ficam determinadas por:

$$\dot{z} = \{z, H\} = X_H(z) \Rightarrow \begin{cases} \dot{\mathbf{r}}_{cm} = \{\mathbf{r}_{cm}, H\} \\ \dot{\mathbf{p}}_{cm} = \{\mathbf{p}_{cm}, H\} \\ \dot{\boldsymbol{\theta}}_i = \{\boldsymbol{\theta}_i, H\} \\ \dot{\boldsymbol{\mu}}_i = \{\boldsymbol{\mu}_i, H\} \end{cases}$$

Avaliando-se, primeiramente, o colchete de Poisson das duas primeiras equações, a di-

nâmica de translação do centro de massa do sistema é obtida por:

$$\dot{r}_{cm_x} = \frac{\partial H}{\partial p_{cm_x}} \quad (4.2.1)$$

$$\dot{r}_{cm_y} = \frac{\partial H}{\partial p_{cm_y}} \quad (4.2.2)$$

$$\dot{p}_{cm_x} = -\frac{\partial H}{\partial r_{cm_x}} = 0 \quad (4.2.3)$$

$$\dot{p}_{cm_y} = -\frac{\partial H}{\partial r_{cm_y}} = 0 \quad (4.2.4)$$

onde  $\mathbf{r}_{cm} = (r_x, r_y)$  e  $\mathbf{p}_{cm} = (p_x, p_y)$ . As duas últimas expressões se anulam devido a invariância de  $H$  em relação às coordenadas de posição  $\mathbf{r}_{cm}$ , confirmando, segundo Noether, a conservação do momento linear. A dinâmica rotacional do sistema segue das seguintes equações

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_i &= \frac{\partial H}{\partial \mu_i} \\ \dot{\mu}_i &= -\frac{\partial H}{\partial \theta_i}, \quad i = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

A dinâmica acima é definida em uma variedade de Poisson, como pode-se atestar pelo colchete de Poisson não-degenerado<sup>5</sup>. Apesar disto, como pode ser observado, a estrutura das equações de movimento do sistema multi-articulado de  $N$  corpos é simplética e o espaço de fase  $T^*Q$  da sua dinâmica tem dimensão par, dada por  $n = 2(N+2) = 2N+4$ . A estrutura simplética também pode ser observada na subvariedade de  $Q$  relativo à dinâmica no espaço de base  $B$ .

*Observação 4.2.1.* Como introduzido na Seção 2.2.3, uma variedade de Poisson é dada pela união disjunta de folhas simpléticas. Logo, a dinâmica do sistema pode ser parametrizada em cada elemento da foliação da estrutura principal. Cada folha do fibrado principal é especificada pelos momentos linear e angular do sistema, que são correspondentes às direções da fibra  $SE(2)$ . Como a dinâmica do sistema multi-articulado é simplética, as equações de movimento acima descrevem a dinâmica de cada folha como exemplificado a seguir. A dinâmica de movimento fica totalmente especificada na folha fixados valores dos momentos linear  $\mathbf{p}_{cm}$  e angular total  $\mu$  do sistema. Fixado valores do momento de translação e rotação do sistema  $\mu_S$ , sua dinâmica permanece invariante a uma folha da variedade de Poisson, dado que, na ausência de esforços externos, o momento não tem o seu valor alterado como enunciado pelo Teorema de Noether. Note que a estrutura simplética do movimento de translação é degenerada pois  $\dot{\mathbf{p}}_{cm} = 0$  e, portanto, trivial, como apresentado em (4.2.1). Para o sistema de 2-corpos, a dinâmica

<sup>5</sup>Ou, não identicamente nulo.

rotacional em cada folha simplética é uma subvariedade de Poisson de três dimensões (4.2.1).

*Observação 4.2.2.* Note que a dinâmica da classe de sistemas em consideração, salvo os sistemas de um único corpo rígido, não representa uma dinâmica de Lie-Poisson, veja (Marsden e Ratiu, 1999), uma vez que o espaço de configuração  $Q$  não se resume simplesmente ao grupo de simetria  $G$  e, portanto, o espaço reduzido não pode ser reduzido simplesmente a álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  correspondente.

Reparametrizando as equações (4.2.5) em função de ângulos relativos  $\theta_{i,i-1}$ , onde  $i = 1, \dots, N$ , pode-se mostrar utilizando o colchete de Poisson, (Sreenath, 1987), que a dinâmica de rotação do sistema segue conforme

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_{i,i-1} &= \frac{\partial H}{\partial \mu_i} - \frac{\partial H}{\partial \mu_{i-1}}, & i = 2, \dots, N \\ \dot{\mu}_1 &= \frac{\partial H}{\partial \theta_{2,1}} \\ &\vdots \\ \dot{\mu}_i &= \frac{\partial H}{\partial \theta_{i+1,i}} - \frac{\partial H}{\partial \theta_{i,i-1}}, & i = 2, \dots, N-1 \\ &\vdots \\ \dot{\mu}_N &= -\frac{\partial H}{\partial \theta_{N,N-1}} \end{aligned} \quad (4.2.6)$$

As equações acima correspondem a dinâmica **reduzida** do sistema multi-articulado, como pode-se perceber pela ausência de uma variável que caracterize a orientação do sistema em relação ao referencial inercial, além da dinâmica de translação. Esta ausência de variáveis de deslocamento e orientação é conseqüência da invariância do sistema em relação ao grupo de simetria  $SE(2)$ . As equações de movimento do sistema reduzido, provém da expressão do Hamiltoniano (4.1.10). Observe, também, que embora a dinâmica ainda permaneça em um espaço de Poisson, as equações do sistema reduzido possuem a estrutura simplética no espaço de variáveis presente em (4.2.5). É possível, no entanto, recuperar a informação adicional da orientação do sistema em relação ao referencial inercial e determinar a atitude do sistema, bastando apenas adicionar à (4.2.6) uma expressão da forma

$$\dot{\theta}_i = \frac{\partial H}{\partial \mu_i}$$

Incorporando-se a configuração do estado  $\theta_1$ , por exemplo, à dinâmica no espaço de base acima, em função das coordenadas  $\phi$ , é possível descrever a dinâmica completa no fibrado principal. Logo, o espaço de estados do sistema compreende uma espaço

$2N$ -dimensional, composto por  $N$  cópias de  $(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R})$  com a seguinte dinâmica:

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\phi}_1 \\ \vdots \\ \dot{\phi}_{i-1} \\ \vdots \\ \dot{\phi}_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial \mu_1} \\ \frac{\partial H}{\partial \mu_2} - \frac{\partial H}{\partial \mu_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial H}{\partial \mu_i} - \frac{\partial H}{\partial \mu_{i-1}} \\ \vdots \\ \frac{\partial H}{\partial \mu_N} - \frac{\partial H}{\partial \mu_{N-1}} \end{bmatrix} \quad (4.2.7)$$

acrescida da dinâmica dos momentos  $\mu_i$ .

### 4.2.1 Modelagem da Entrada do Sistema

As entradas físicas, consideradas atuantes no modelo do sistema plano de  $N$ -corpos, compreendem as forças de propulsão  $f_i$ , para  $i = 1, \dots, m_p$ , onde  $m_p \leq N$ . O ponto de aplicação de cada  $f_i$  dá-se no centro de massa do  $i$ -ésimo corpo. Adicionalmente as juntas rotativas planas são consideradas ativas. Os torques que atuam nas juntas são simbolizados por  $T_j$ , para  $j = 1, \dots, m_t$ , onde  $m_t \leq N - 1$ . Portanto, o número máximo de entradas do sistema corresponde a  $N + (N - 1) = 2N - 1$ .

Como discutido na Seção 2.2 e no Capítulo 3, a entrada do modelo do sistema  $\tau$  pode ser identificada geometricamente como um elemento do espaço tangente dual  $T_q^*Q$ . Na forma afim, como apresentado na Seção 2.3, a expressão da entrada  $\tau$  é escrita como

$$\tau = g_1(z)u_1 + g_2(z)u_2 + \dots + g_m(z)u_m, \quad i = 1, \dots, m$$

onde  $g_i(z)$  são os campos vetoriais da entrada do sistema e  $u = (u_1, \dots, u_m) \in U \subset \mathbb{R}^m$  são funções parametrizadas pelas forças  $f_i$  e torques  $T_j$ . A função  $u$  é detalhada nas próximas seções através de exemplos.

A modelagem da entrada do sistema é feita em duas etapas. Primeiramente, determina-se a influência das forças externas  $f_i$  por todo sistema multi-articulado através dos **diagramas de corpo livre** de cada um dos corpo componentes. A modelagem dos torques  $T_j$  é considerada posteriormente. A justificativa desta modelagem por etapas deve-se ao princípio da superposição, isto é, escolhido um ponto do sistema, somam-se as forças e torques com origens distintas.

Os componentes da entrada  $\tau$  responsáveis pela translação do centro de massa do sistema, em relação ao referencial inercial, são representados por  $\tau_x$  e  $\tau_y$ , nas direções dos

eixos das abscissas e ordenadas, respectivamente, como indicam os subscritos. Neste caso, dadas  $N$  forças  $f_i$ , os componentes  $\tau_x$  e  $\tau_y$  são obtidos projetando as  $f_i$  nos eixos do sistema inercial através das matrizes de rotação  $\mathbf{R}_i = \mathbf{R}_{\theta_i}$  de cada um dos corpos, conforme a expressão:

$$\begin{bmatrix} \tau_x \\ \tau_y \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^N \mathbf{R}_i \begin{bmatrix} 0 \\ f_i \end{bmatrix} \quad (4.2.8)$$

Nesta etapa de modelagem, os componentes de rotação da entrada  $\tau$  correspondem aos torques que derivam de forças  $f_i$  e que atuam rotacionando os corpos do sistema. Como os corpos estão conectados através de articulações, ou juntas rotativas, ideais, estas não transmitem torque, mas apenas força. Logo, o torque no  $i$ -ésimo corpo,  $i = 1, \dots, N-1$ , correspondente a uma força  $f_k$  atuante no  $k$ -ésimo corpo,  $i \leq k$ , de um sistema de  $N$  corpos, é dado por<sup>6</sup>

$$\begin{aligned} T_i^{ext} &= - \sum_i^k \left( \frac{(k-i)}{N} \mathbf{d}_{i+1}^i \times \mathbf{R}_{\theta_{k,i}} \begin{bmatrix} 0 \\ f_k \end{bmatrix} + \frac{(k-i+1)}{N} \mathbf{d}_i^{i+1} \times \mathbf{R}_{\theta_{k,i}} \begin{bmatrix} 0 \\ f_k \end{bmatrix} \right) \\ &= - \sum_i^k \left( \frac{(k-i)}{N} d_{i+1}^i \cos(\theta_{k,i}) f_k + \frac{(k-i+1)}{N} d_i^{i+1} \cos(\theta_{k,i}) f_k \right) \end{aligned} \quad (4.2.9)$$

onde  $\mathbf{d}_i^{i+1}$  é o vetor do baricentro do  $i$ -ésimo corpo à junta entre os corpos  $i$  e  $i+1$ , dado no referencial do  $i$ -ésimo corpo, conforme indica a Figura 4.3, e  $\|\mathbf{d}\|^2 = d$ .

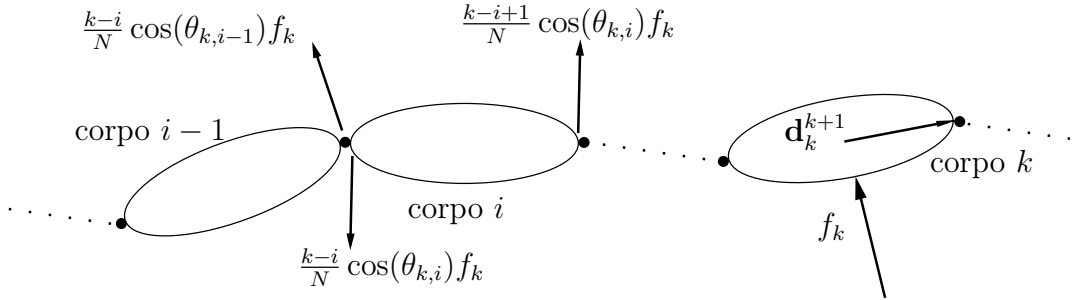


Figura 4.3: Efeito das forças de propulsão nas juntas de rotação.

**Exemplo 4.2.1.** Para um sistema em que os dois corpos são idênticos, com comprimento  $2l$ , os torques nos corpos 1 e 2 são obtidos por

$$\begin{bmatrix} \tau_{\mu_1} \\ \tau_{\mu_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l/2 & l \cos(\theta_{21})/2 \\ -l \cos(\theta_{21})/2 & l/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}$$

<sup>6</sup>Os passos intermediários do desenvolvimento da expressão do torque devido a força de propulsão serão aqui omitidos. Apresenta-se aqui apenas o resultado final.



*Observação 4.2.3.* Note que quando o sistema está totalmente estendido  $\theta_{21} = 0$  e  $f_1 = f_2$ , o sistema apenas translada, não havendo rotação inercial do sistema ou rotação relativa entre os corpos.

**Exemplo 4.2.2.** Analogamente, para um sistema com 5 com corpos idênticos, os torques obtidos são

$$\begin{bmatrix} \tau_{\mu_1} \\ \tau_{\mu_2} \\ \tau_{\mu_3} \\ \tau_{\mu_4} \\ \tau_{\mu_5} \end{bmatrix} = l \begin{bmatrix} -\frac{4}{5} & \frac{2}{5} \cos(\theta_{21}) & \frac{1}{5} \cos(\theta_{21} + \theta_{32}) \\ -\frac{7}{5} \cos(\theta_{21}) & -\frac{1}{5} & \cos(\theta_{32}) \\ -\cos(\theta_{21} + \theta_{32}) & -\cos(\theta_{32}) & 0 \\ -\frac{3}{5} \cos(\theta_{21} + \theta_{32} + \theta_{43}) & -\frac{3}{5} \cos(\theta_{32} + \theta_{43}) & -\cos(\theta_{43}) \\ -\frac{1}{5} \cos(\theta_{21} + \theta_{32} + \theta_{43} + \theta_{54}) & -\frac{1}{5} \cos(\theta_{32} + \theta_{43} + \theta_{54}) & -\frac{1}{5} \cos(\theta_{43} + \theta_{54}) \\ \frac{1}{5} \cos(\theta_{21} + \theta_{32} + \theta_{43}) & \frac{1}{5} \cos(\theta_{21} + \theta_{32} + \theta_{43} + \theta_{54}) \\ \frac{3}{5} \cos(\theta_{32} + \theta_{43}) & \frac{3}{5} \cos(\theta_{32} + \theta_{43} + \theta_{54}) \\ \cos(\theta_{43}) & \cos(\theta_{43} + \theta_{54}) \\ \frac{1}{5} & \frac{7}{5} \cos(\theta_{54}) \\ -\frac{2}{5} \cos(\theta_{54}) & \frac{4}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \end{bmatrix}$$

*Observação 4.2.4.* Note que quando o sistema acima é acionado apenas por  $f_3$ , ou de forma simétrica  $f_1 = f_5$  e  $f_2 = f_4$ , o corpo do meio não sofre rotação.

A modelagem do acionamento dos ângulos de junta pelos torques  $T_i$  pode ser realizada de duas maneiras. A primeira considera o efeito das forças de propulsão  $f_i$  no ângulo de junta no modelo do sistema em conjunto com os  $T_j$ . A entrada de rotação  $\tau_{\mu_i}$  do  $i$ -ésimo corpo, para  $i = 1, \dots, N$ , é:

$$\tau_{\mu_i} = T_{i-1} - T_i + T_i^{ext}, \quad (T_0, T_N = 0)$$

Na segunda, os torques  $T_i$  representam valores líquidos de acionamento das juntas. Neste segundo caso, os  $T_i$  neutralizam os efeitos das forças de propulsão e são responsáveis pelo acionamento direto das juntas. Isto pode ser justificado fisicamente, quando deseja-se manter um ângulo de junta  $\phi$  constante mesmo quando a junta está submetida a ação de forças que tendem a variar o ângulo de junta. Considere o acionamento da junta rotativa por meio de um motor elétrico de corrente contínua (CC). Acionando-se, por exemplo, o motor com uma tensão de armadura a 50% do *duty-cycle*, a junta mantém o seu ângulo inalterado. O cancelamento do efeito das forças  $f_i$  é obtido escolhendo-se um motor projetado para conduzir uma corrente elétrica no campo de modo a gerar um torque maior que o torque produzido pelas  $f_i$ . Esta idealização permite a modelagem sem a consideração explícita dos efeitos das forças  $f_i$ . Conseqüentemente, trabalha-se

com uma nova parametrização dos torques  $T_i$  segundo:

$$T'_j = T_j + T_j^{ext}(f_k)$$

onde a função  $T_j^{ext}$  contabiliza os efeitos de propulsão de todas as forças  $f_k$  na  $j$ -ésima junta, para  $1 \leq k \leq N$ .

Observe que, por causa da entrada  $\tau$ , a simetria do sistema é quebrada em geral, ou seja, a aplicação momento  $\mathbf{J}$  não mais permanece invariante à ação do grupo. Logo, para entradas não nulas, os momentos lineares e angulares não permanecem necessariamente constantes com o movimento do sistema. Faz-se importante observar, entretanto, que os toques  $T_j$ , por serem internos ao sistema, deixam a aplicação momento  $\mathbf{J}$  invariante, não contribuindo para a alteração dos momentos linear ou angular, como estabelecido pelo Teorema de Noether. Estes contribuem apenas na variação da energia do sistema.

Fixados valores de magnitude arbitrários em malha aberta para as forças de propulsão, as direções de  $f_i$  são tomadas como básicas, como definido na Seção 2.2. Ou seja, a direção das entradas de propulsão só dependem da configuração  $q \in Q$  do sistema e não são funções da velocidade  $v_q \in T_qQ$  do mesmo. Em malha fechada, e diferentemente da descrição acima, as forças de propulsão obtidas através da lei de controle de realimentação podem ser funções da velocidade  $v_q$  do sistema. Similarmente, para entradas de torque arbitrários, que atuam diretamente no espaço de base  $B$ , os  $T_j$  não dependem da configuração  $Q$ , uma vez que sempre atuam nas juntas de rotação entre os corpos componentes do sistema. Em malha fechada, os torques  $T_j$  podem ser funções da velocidade  $v_q$ , assim como ocorre com as forças  $f_i$ .

### 4.2.2 Sistema de Controle Multi-Corpos

Renomeando o Hamiltoniano  $H$  relativo à dinâmica livre para  $H_0(q, p)$ , o Hamiltoniano do sistema de controle fica determinado por:

$$H(q, p, u) = H_0(q, p) - \sum_{j=1}^m H_j(q, p)u_j \quad (4.2.10)$$

onde  $u_j$  são as entradas generalizadas e  $H_j$  são funções usualmente chamadas de Hamiltonianos de acoplamento ou de interação (Nijmeijer e van der Shaft, 1990). Como o sistema multi-articulado proposto é um sistema mecânico simples, Seção 2.3, sabe-se que  $H_j(q, p) = H_j(\theta)$ . Para  $i = \{x, y\}$ , a expressão geral do movimento do centro de

massa do sistema fica

$$\dot{r}_{cm_i} = \frac{\partial H_0}{\partial p_{cm_i}} - \sum_{j=1}^m \frac{\partial H_j}{\partial p_{cm_i}} u_j = \frac{\partial H_0}{\partial p_{cm_i}} \quad (4.2.11)$$

$$\dot{p}_{cm_i} = -\frac{\partial H_0}{\partial r_{cm_i}} + \sum_{j=1}^m \frac{\partial H_j}{\partial r_{cm_i}} u_j = \sum_{j=1}^m \frac{\partial H_j}{\partial r_{cm_i}} u_j \quad (4.2.12)$$

uma vez que

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial H_1}{\partial r_{cm_x}} & \frac{\partial H_2}{\partial r_{cm_x}} \\ \frac{\partial H_1}{\partial r_{cm_y}} & \frac{\partial H_2}{\partial r_{cm_y}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1) & \cos(\theta_N) \\ \sin(\theta_1) & \sin(\theta_N) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \frac{\partial H_j}{\partial p_{cm_i}} \end{bmatrix} = \mathbf{0}_{2 \times m}$$

e onde os componentes de entrada  $u_j$  correspondem a forças  $f$  e torques  $T$  externos, conforme discutido na Seção 4.2.1. Entretanto apenas as forças contribuem na translação, como dado em (4.2.8), portanto:

$$\tau_{trans} = \begin{bmatrix} \tau_x \\ \tau_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial H_1}{\partial r_{cm_x}} & \dots & \frac{\partial H_N}{\partial r_{cm_x}} \\ \frac{\partial H_1}{\partial r_{cm_y}} & \dots & \frac{\partial H_N}{\partial r_{cm_y}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_N \end{bmatrix}$$

Observe que o ângulo absoluto  $\theta_N$  pode ser determinado fazendo-se

$$\theta_N = \theta_1 + \sum_{j=1}^{N-1} \phi_j \quad (4.2.13)$$

A dinâmica rotacional (4.2.5) não reduzida é escrita como

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_i &= \frac{\partial H_0}{\partial \mu_i} \\ \dot{\mu}_i &= -\frac{\partial H_0}{\partial \theta_i} + T_i + T_i^{ext}, \quad i = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (4.2.14)$$

Considerando entradas externas e internas atuando nas dinâmicas de rotação, tem-se

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_{i,i-1} &= \frac{\partial H_0}{\partial \mu_i} - \frac{\partial H_0}{\partial \mu_{i-1}}, \quad i = 2, \dots, N \\ \dot{\mu}_1 &= \frac{\partial H_0}{\partial \theta_{2,1}} - T_1 + T_1^{ext} \\ &\vdots \\ \dot{\mu}_i &= \frac{\partial H_0}{\partial \theta_{i+1,i}} - \frac{\partial H_0}{\partial \theta_{i,i-1}} - T_i + T_{i-1} + T_i^{ext}, \quad i = 2, \dots, N-1 \\ &\vdots \\ \dot{\mu}_N &= -\frac{\partial H_0}{\partial \theta_{N,N-1}} + T_{N-1} + T_N^{ext} \end{aligned} \quad (4.2.15)$$

Observe que (4.2.15) representa a dinâmica rotacional reduzida forçada. O vetor de entradas que acionam a dinâmica de rotação  $\tau_{rot}$  é dado por

$$\tau_{rot} = \begin{bmatrix} \tau_{\mu_1} \\ \tau_{\mu_2} \\ \tau_{\mu_3} \\ \vdots \\ \tau_{\mu_i} \\ \vdots \\ \tau_{\mu_{N-1}} \\ \tau_{\mu_N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \mathbf{0} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & \mathbf{0} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \dots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ \vdots \\ T_i \\ \vdots \\ T_{N-2} \\ T_{N-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_1^{ext} \\ T_2^{ext} \\ T_3^{ext} \\ \vdots \\ T_i^{ext} \\ \vdots \\ T_{N-1}^{ext} \\ T_N^{ext} \end{bmatrix} \quad (4.2.16)$$

para  $i = 1, \dots, N$  e que  $\tau = [\mathbf{0}_{N+2}, \tau_{trans}, \tau_{rot}]^T$ , onde  $\tau$  é dado pelos campos vetoriais de entrada  $g_j$  e pelas funções  $u \in U \subset \mathbb{R}^m$ , de acordo com a Seção 4.2.1.

### 4.2.3 Exemplo: o sistema de 2-corpos

A função Hamiltoniano para o sistema de 2-corpos é dada por

$$H_0 = \frac{1}{2} \boldsymbol{\mu}^T \mathbb{J}^{-1}(\phi) \boldsymbol{\mu} \quad (4.2.17)$$

onde a matriz de inércia  $\mathbb{J}$  é dada em (4.4.2) e o ângulo relativo entre os corpos é  $\phi = \theta_2 - \theta_1$ . Tomando a definição para o determinante de  $\mathbb{J}$

$$\Delta = \det \mathbb{J} = \tilde{I}_1 \tilde{I}_2 - (\epsilon \lambda)^2$$

a função  $H$  acima toma a seguinte expressão

$$\begin{aligned} H_0 &= \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} \mu_1 & \mu_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{I}_2 & -\epsilon \lambda \\ -\epsilon \lambda & \tilde{I}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2\Delta} [\tilde{I}_2 \mu_1^2 - 2\epsilon \lambda \mu_1 \mu_2 + \tilde{I}_1 \mu_2^2] \end{aligned} \quad (4.2.18)$$

As equações de movimento são dadas abaixo em função das entradas obtidas no parágrafo acima; as expressões da dinâmica linear são

$$\begin{aligned} \dot{r}_x &= \frac{p_x}{m_1 + m_2} = \frac{p_x}{2m} & (m_1 = m_2 = m) \\ \dot{r}_y &= \frac{p_y}{m_1 + m_2} = \frac{p_y}{2m} & (m_1 = m_2 = m) \\ \dot{p}_x &= -\sin(\theta_1) f_1 + \sin(\theta_1 + \phi) f_2 \\ \dot{p}_y &= \cos(\theta_1) f_1 + \cos(\theta_1 + \phi) f_2 \end{aligned}$$

ao passo que, a dinâmica rotacional do sistema na fibra fica definida por

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H_0}{\partial \mu_1} = \frac{\mu_1 \tilde{I}_2 - \mu_2 \epsilon \lambda}{\Delta} \quad (4.2.19)$$

e pela dinâmica rotacional reduzida, nas coordenadas  $\theta_{2,1} = \phi$  do espaço de base  $B$ , através de

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= \frac{\partial H_0}{\partial \mu_2} - \frac{\partial H_0}{\partial \mu_1} = \frac{\mu_1(\epsilon \lambda + \tilde{I}_2) - \mu_2(\epsilon \lambda + \tilde{I}_1)}{\Delta} \\ \dot{\mu}_1 &= \frac{\partial H_0}{\partial \phi} - T + T_1^{ext} \\ &= \epsilon d_1 d_2 \sin(\phi) \frac{(\mu_2 \epsilon \lambda - \mu_1 \tilde{I}_2)(\mu_1 \epsilon \lambda - \mu_2 \tilde{I}_1)}{\Delta^2} - T + T_1^{ext} \\ \dot{\mu}_2 &= -\frac{\partial H_0}{\partial \phi} + T + T_2^{ext} \\ &= -\epsilon d_1 d_2 \sin(\phi) \frac{(\mu_2 \epsilon \lambda - \mu_1 \tilde{I}_2)(\mu_1 \epsilon \lambda - \mu_2 \tilde{I}_1)}{\Delta^2} + T + T_2^{ext} \end{aligned}$$

Os torques externos  $T_1^{ext}$  e  $T_2^{ext}$  são funções da força de propulsão  $f_i$  de cada corpo e da distância do centro de massa do sistema ao centro de massa do respectivo corpo, onde localiza-se o ponto de atuação do efeito de propulsão. Logo, usando a notação e análise do diagrama de corpo livre da Seção 4.2.1 e  $d_1^2 = d_2^1 = l$ , tem-se:

$$\begin{cases} T_1^{ext} = -\frac{l}{2} f_1 + \frac{l}{2} \cos(\theta_{2,1}) f_2 \\ T_2^{ext} = -\frac{l}{2} \cos(\theta_{2,1}) f_1 + \frac{l}{2} f_2 \end{cases}$$

*Observação 4.2.5.* A dinâmica do sistema de  $N$ -corpos degenera-se ao do corpo rígido, cujo modelo é apresentado no Apêndice C, quando os ângulos de junta  $\phi$  são mantidos constantes. Isto será detalhado a seguir.

As equações da dinâmica do sistema de dois corpos idênticos, para  $f = (\dot{r}_x, \dot{r}_y, \dot{\theta}, \dot{\phi}, \dot{p}_x, \dot{p}_y, \dot{\mu}_1, \dot{\mu}_2)^T$ , ou seja, no referencial inercial, são dadas a seguir:

$$f = \begin{bmatrix} p_x/m \\ p_y/m \\ (\mu_1 \tilde{I} - \mu_2 K \cos(\phi))/(\tilde{I}^2 - K^2 \cos^2(\phi)) \\ (\mu_2 - \mu_1)/(\tilde{I} - K \cos(\phi)) \\ 0 \\ 0 \\ K \sin(\phi)(\mu_1 \tilde{I} - \mu_2 K \cos(\phi))(\mu_2 \tilde{I} - \mu_1 K \cos(\phi))/(\tilde{I}^2 - K^2 \cos^2(\phi))^2 \\ -K \sin(\phi)(\mu_1 \tilde{I} - \mu_2 K \cos(\phi))(\mu_2 \tilde{I} - \mu_1 K \cos(\phi))/(\tilde{I}^2 - K^2 \cos^2(\phi))^2 \end{bmatrix} \quad (4.2.20)$$

onde  $K = \epsilon d_1^2 d_2^1$  e os campos vetoriais relativos às entradas  $(f_1, f_2, T)$

$$g_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \\ -l/2 \\ -(l/2) \cos(\theta_{2,1}) \end{bmatrix}, \quad g_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\sin(\theta + \phi) \\ \cos(\theta + \phi) \\ l/2 \cos(\theta_{2,1}) \\ l/2 \end{bmatrix}, \quad g_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.2.21)$$

As últimas duas linhas do campo vetorial referente à dinâmica livre  $f$  correspondem às taxas dos momentos angulares  $\mu_1, \mu_2$ . Observe que a taxa de variação temporal do momento angular total, dado por  $\dot{\mu}_1 + \dot{\mu}_2$ , é nulo, como previsto pelo Teorema de Noether. Note, também, que, apesar das dinâmicas livres de  $\dot{\mu}_1$  e  $\dot{\mu}_2$  serem linearmente dependentes, é possível controlá-las de modo independente devido à estrutura dos campos vetoriais de entrada  $g_1, g_2$ .

Considerando fixa a posição relativa dos dois corpos ( $\dot{\phi} = 0$ ), na posição totalmente estendida ( $\phi = 0$ ), tem-se que  $\mu_1 = \mu_2$ . Nesta condição, é possível mostrar que as equações da dinâmica do sistema multi-corpos (4.2.20) degeneram-se às equações do corpo rígido (C.1.1). Tomando-se a equação de movimento da orientação em relação ao referencial inercial tem-se:

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= (\mu_1 \tilde{I} - \mu_2 K \cos(\phi)) / (\tilde{I}^2 - K^2 \cos^2(\phi)) \\ &= (\mu_1 \tilde{I} - \mu_2 K) / (\tilde{I}^2 - K^2) \\ &= \mu_1 / (I + 2K) = \mu_1 / (I + 2\epsilon L^2) \end{aligned}$$

Note que a última expressão acima corresponde à divisão do momento angular total do sistema  $\mu_1 + \mu_2 = 2\mu_1$  pelo momento de inércia total do sistema  $2(I + 2\epsilon L^2)$ .

## 4.3 Modelagem da Dinâmica no Fibrado Principal

### 4.3.1 O Fibrado Principal

Por causa da restrição da dinâmica do sistema ao plano, o grupo de simetria  $G$  é, para a classe de sistemas aqui considerada, o grupo Euclidiano especial no plano  $SE(2)$ .

Como comentado previamente, este é o produto semi-direto  $G^*\mathbb{S}V = SO(2)\mathbb{S}\mathbb{R}^2$ . O espaço de coordenadas gerado pelo  $SE(2)$  é tridimensional e, portanto,  $\dim Q = n$  e  $\dim(Q/G) = n - 3$ .

Na estrutura do fibrado principal (2.4.2), o espaço  $(N + 2)$ -dimensional  $Q$  possui coordenadas

$$q = (s, r) = (g, \phi), \quad \phi \in Q/G, \quad g \in G, \quad (4.3.1)$$

onde  $\phi$  é o vetor, com  $(N - 1)$  elementos, relativo a orientação entre os corpos consecutivos do sistema. O vetor  $\dot{q} \in T_qQ$ , dado na estrutura acima, fica  $(\dot{r}, \dot{g}) = (\dot{\phi}, \dot{g})$ . Logo,  $(\phi, g, \dot{\phi}, \dot{g}) \in TQ$ .

O fibrado tangente sobre o espaço reduzido  $T(Q/G)$ , que corresponde a  $N - 1$  cópias do  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ , possui coordenadas  $(r, \dot{r}) = (\phi, \dot{\phi}) \in T(Q/G)$ . O fibrado tangente reduzido  $(TQ)/G$  é um espaço vetorial sobre o fibrado tangente do espaço de base  $T(Q/G)$  cuja fibra é isomórfica a álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  e, portanto,  $T(Q/G) \times \mathfrak{g}$ .

O espaço  $(TQ)/G$  possui coordenadas  $(r, \dot{r}, g^{-1}\dot{g}) = (\phi, \dot{\phi}, \xi_B) \in (TQ)/G$ , onde  $\xi_B \in \mathfrak{g}$ . Este compreende, no caso sistemas invariantes a esquerda, por exemplo, as velocidades lineares e angulares em coordenadas do referencial móvel.

O espaço de fase de velocidade, com esta estrutura principal, no ponto  $q = (g, r) = ((\mathbf{r}_{cm}, \theta), \phi)$  é dado por

$$(\dot{\mathbf{r}}_{cm}, \dot{\theta}^*, \dot{\phi}) \in T_qQ \simeq T(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1 \times \dots \times \mathbb{S}^1),$$

onde  $\theta^*$  é a orientação de um ponto arbitrário do sistema, e o espaço de fase de momento, por

$$(\mathbf{p}_{cm}, p_{\theta^*}, p_{\phi}) \in T_q^*Q \simeq T^*(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1 \times \dots \times \mathbb{S}^1)$$

### 4.3.2 Exemplos de Parametrizações da Configuração

#### Dinâmica com nova definição para $\theta_{cm}$

**Definição 4.3.1.** A orientação do referencial fixo ao centro de massa do sistema em relação ao sistema de coordenadas inercial é definida pela expressão

$$\theta_{cm} = (\theta_1 + \theta_N)/2 \quad (4.3.2)$$

A expressão para  $\theta_{cm}$  acima juntamente com o vetor dos ângulos relativos entre os corpos  $\phi$  estabelece o seguinte difeomorfismo entre as diferentes parametrizações de  $Q$

$$\begin{bmatrix} \theta_{cm} \\ \phi \end{bmatrix} = P(\theta), \quad \Rightarrow \quad [P] = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & \cdots & 1/2 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & -1 & 1 & \cdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.3.3)$$

*Observação 4.3.1.* A definição da orientação  $\theta_{cm}$  acima é satisfatória pois é canônica, ver (Lanczos, 1977) para detalhes, e independente das variáveis de forma  $\phi$  e, por esta razão, não incorpora o movimento exclusivamente realizado no espaço  $B$ . A matriz que define a mudança de coordenadas  $P$  é definida e positiva e, portanto, invertível. Adicionalmente, note que por ser uma transformação linear,  $P$  é, conseqüentemente, um difeomorfismo global. Observe, também, que o determinante de  $[P]$  é unitário, permitindo preservar o volume entre os elementos das duas parametrizações. Pode-se mencionar ainda que  $P$  diagonaliza a matriz de inércia do sistema  $\mathbb{J}$ .

*Observação 4.3.2.* Uma definição igualmente possível para a orientação do referencial móvel pode ser dada por

$$\theta_{cm} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \theta_i \quad (4.3.4)$$

A transformação  $P$  deve ser utilizada para gerar a transformação equivalente entre as coordenadas de momento do sistema e, desta maneira, definir o levantamento cotangente sob as novas coordenadas do espaço cotangente sobre o espaço principal. Desta maneira, e utilizando a transformada de Legendre e a igualdade dos Hamiltonianos sob ambas as parametrizações, tem-se que o momento angular, obtido para  $Q$  com  $(\theta_{cm}, \phi)$ , fica

$$\mu_{(\theta_{cm}, \phi)} = (P^T)^{-1} \mu_{\theta} \quad (4.3.5)$$

e a matriz de inércia  $\mathbb{J}$  escrita sob a nova parametrização de  $Q$  fica

$$\mathbb{J}_{(\theta_{cm}, \phi)} = (P^T)^{-1} \mathbb{J}_{\theta} P^{-1} \quad (4.3.6)$$

Observe que, como esperado a partir de (A.2.7) no Apêndice A, a matriz que traduz o levantamento cotangente da transformação  $P$ , em função da matriz correspondente  $[P]$ , é a matriz transposta ou  $[P]^T$ .



**Exemplo: o sistema de 2-corpos**

Para um sistema composto por dois corpos interconectados, o espaço completo 4-dimensional  $Q$  iguala-se a  $\mathbb{R}^2 \times SO(2) \times SO(2)$ . Um elemento genérico do fibrado tangente é  $(q, \dot{q}) = ((\mathbf{r}_{cm}, \theta_1, \theta_2), (\dot{\mathbf{r}}_{cm}, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2)) \in TQ$ . Utilizando a decomposição provida pela estrutura do fibrado principal, as coordenadas são  $q = (g, r) = (g, \phi)$ , onde a coordenada no espaço de base  $\phi \in Q/G$  é a orientação relativa entre os corpos. As coordenadas no espaço tangente reduzido são  $(r, \dot{r}, g^{-1}\dot{g}) = (\phi, \dot{\phi}, \xi_B) \in (TQ)/G$ , e  $\xi_B \in \mathfrak{g}$ . O fibrado tangente sobre  $Q/G$  possui coordenadas  $(r, \dot{r}) = (\phi, \dot{\phi}) \in T(Q/G) = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ .

O difeomorfismo entre os sistemas de coordenadas de variáveis canônicas apresentado acima, neste caso, é dado por

$$[P] = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.3.7)$$

*Observação 4.3.3.* Pode-se verificar que, como mencionado anteriormente,  $P$  diagonaliza a matriz de inércia  $\mathbb{J}$ , a despeito das propriedades físicas dos dois corpos. Para corpos com características inerciais distintas,  $\mathbb{J}$  pode ser diagonalizada tomando-se

$$[P] = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.3.8)$$

onde  $h_1 = (\tilde{I}_2 + K \cos(\phi))^{-1}$  e  $h_2 = (\tilde{I}_1 + K \cos(\phi))^{-1}$ . Neste caso, entretanto, os elementos na diagonal principal de  $\mathbb{J}$  são dados por funções racionais.

A matriz de inércia generalizada  $\mathbb{G}$  é definida por

$$\mathbb{G} = \begin{bmatrix} m^* I_2 & \mathbf{0}_{2 \times 1} & \mathbf{0}_{2 \times 1} \\ \mathbf{0}_{1 \times 2} & \mathbf{1}_N^T \mathbb{J} \mathbf{1}_N & \mathbb{J}^\dagger \\ \mathbf{0}_{1 \times 2} & \mathbb{J}^\dagger & \mathbb{J}^\ddagger \end{bmatrix}$$

onde  $\mathbb{J}^\dagger = (\tilde{I}_2 - \tilde{I}_1)/2$  e  $\mathbb{J}^\ddagger = (\tilde{I}_1 + \tilde{I}_2 - 2\epsilon\lambda)/4$ .

Pode-se obter  $\dot{\phi}$  pelas equações de Hamilton

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= \frac{\partial H(\phi, g, p_\phi, \mu_S)}{\partial p_\phi} \\ &= \frac{1}{2} \frac{(p_{\theta_{cm}}(\tilde{I}_1 - \tilde{I}_2) + 2p_\phi(\tilde{I}_1 + 2K \cos(\phi) + \tilde{I}_2))}{(\tilde{I}_1 \tilde{I}_2 - K^2 \cos(\phi)^2)} \\ &= \frac{2p_\phi}{(\tilde{I} - K \cos(\phi))}, \quad (\tilde{I}_1 = \tilde{I}_2 = \tilde{I}) \end{aligned} \quad (4.3.9)$$

Alternativamente, a equação do momento  $p_\phi$  segue de

$$\begin{aligned}\dot{p}_\phi &= -\frac{\partial H(\phi, g, p_\phi, \mu_S)}{\partial \phi} \\ &= -K \sin(\phi) \left( \frac{1}{4} \frac{p_{\theta_{cm}}^2}{(\tilde{I} + K \cos(\phi))^2} - \frac{p_\phi^2}{(\tilde{I} - K \cos(\phi))^2} \right)\end{aligned}\quad (4.3.10)$$

A orientação do referencial móvel, localizado no centro de massa, é dada por

$$\begin{aligned}\dot{\theta}_{cm} &= \frac{\partial H(\phi, g, p_\phi, \mu_S)}{\partial p_\phi} \\ &= \frac{1}{4} \frac{(p_{\theta_{cm}}(\tilde{I}_1 - 2K \cos(\phi) + \tilde{I}_2) + 2p_\phi(\tilde{I}_1 - \tilde{I}_2))}{(\tilde{I}_1 \tilde{I}_2 - K^2 \cos(\phi)^2)} \\ &= \frac{1}{2} \frac{p_{\theta_{cm}}}{(\tilde{I} + K \cos(\phi))}, \quad (\tilde{I}_1 = \tilde{I}_2 = \tilde{I})\end{aligned}\quad (4.3.11)$$

Partindo da parcela relativo a dinâmica rotacional do sistema na expressão do Lagrangiano e tomando iguais as velocidades de rotação dos corpos  $\omega_1 = \dots = \omega_N = \omega$ , tem-se:

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T \mathbb{J} \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \mathbf{1}_N^T \mathbb{J} \boldsymbol{\omega} \mathbf{1}_N = \frac{1}{2} I_t \omega^2$$

onde  $I_t = I_t(\phi)$  é definido por  $\mathbf{1}_N^T \mathbb{J} \boldsymbol{\omega} \mathbf{1}_N$ , ou seja, a soma de todos os elementos da matriz de inércia  $\mathbb{J}$  e corresponde à inércia total em relação ao centro de massa do sistema. Observe que  $I_t$  corresponde ao elemento (3, 3) do tensor de inércia travado  $\mathbb{I}_{loc}$  em (4.4.4). Para o sistema de dois corpos idênticos,  $I_t$  é dado por:

$$\begin{aligned}I_t(\phi) &= \mathbf{1}_N^T \mathbb{J} \mathbf{1}_N \\ &= J_{11} + 2J_{12} + J_{22}, \quad (\mathbb{J} \text{ simétrica}) \\ &= \tilde{I}_1 + \tilde{I}_2 + 2\epsilon\lambda(\phi) \\ &= 2(\tilde{I} + \epsilon\lambda(\phi)), \quad (\tilde{I}_1 = \tilde{I}_2 = \tilde{I})\end{aligned}$$

### Modelo do referencial no centro de massa

Neste caso, o campo vetorial da dinâmica livre, pode ser escrito tanto em função da velocidade do ângulo de junta  $\phi$  como em função do momento angular relativo ao mesmo ângulo. As variáveis de momento no referencial móvel são definidas por  $(p_u, p_v, p_{\theta_{cm}}) = (\mu_{B_1}, \mu_{B_2}, \mu_{B_3})$ . No primeiro caso, o campo vetorial  $f$  escrito em coordenadas do referencial móvel localizado no centro de massa do sistema, é dado por  $(\dot{r}_x, \dot{r}_y, \dot{\theta}_{cm}, \dot{\phi}, \dot{\mu}_{B_1}, \dot{\mu}_{B_2}, \dot{\mu}_{B_3}, \dot{v}_\phi)^T$ , onde  $v_\phi = \dot{\phi}$  e  $\dot{v}_\phi$  é dado por

$$\dot{v}_\phi = \frac{K \sin(\phi)}{((\epsilon\lambda(\phi))^2 - \tilde{I}_2 \tilde{I}_1)} \frac{1}{(\tilde{I}_1 + 2\epsilon\lambda(\phi) + \tilde{I}_2)} \left( (\epsilon\lambda(\phi) + \tilde{I}_1)(\epsilon\lambda(\phi) + \tilde{I}_2) v_\phi^2 + \mu_{B_3}^2 \right)\quad (4.3.12)$$

No segundo caso, escrito no mesmo referencial, o campo vetorial  $\dot{z} = (\dot{r}_x, \dot{r}_y, \dot{\theta}_{cm}, \dot{\phi}, \dot{p}_u, \dot{p}_v, \dot{p}_{\theta_{cm}}, \dot{p}_{\phi})^T$ , onde  $z \in T_q^*Q$ , fica

$$f = \begin{bmatrix} \frac{1}{m^*}(\mu_{B_1} \cos(\theta) - \mu_{B_2} \sin(\theta)) \\ \frac{1}{m^*}(\mu_{B_1} \sin(\theta) + \mu_{B_2} \cos(\theta)) \\ (4.3.11) \\ (4.3.9) \\ \frac{\mu_{B_2}(2\mu_{B_3} - \mathbb{J}^\dagger \dot{\phi})}{2m^* \mathbf{1}_N^T \mathbb{J} \mathbf{1}_N} \\ - \frac{\mu_{B_1}(2\mu_{B_3} - \mathbb{J}^\dagger \dot{\phi})}{2m^* \mathbf{1}_N^T \mathbb{J} \mathbf{1}_N} \\ 0 \\ (4.3.10) \end{bmatrix} \quad (4.3.13)$$

Consultar Souza e Maruyama (2007), no Apêndice C, para detalhes da obtenção das expressões escritas com coordenadas do referencial móvel.

### Modelagem das Entradas

Utiliza-se aqui a decomposição da entrada  $\tau$  na estrutura principal<sup>7</sup>  $\tau = [\tau|_G, \tau|_B]$ , onde  $\tau_G$  e  $\tau_B$  representam as entradas que atuam exclusivamente no espaço de grupo  $G$  e no espaço de base  $B$ , respectivamente.

*Observação 4.3.4.* Observe que a parametrização das entradas físicas  $(f_i, T_j)$  é realizada de maneira a verificar  $\dim G = \dim \tau_G$ .

Obtém-se, primeiramente, a entrada no referencial móvel, fixo ao centro de massa do sistema, Fig. 4.4; em seguida, escreve-se a entrada em relação ao referencial inercial. As entradas no referencial móvel são  $G$ -invariantes à esquerda com relação ao referencial móvel localizado no centro de massa do sistema. A entrada  $\tau \in \mathfrak{g}^*$  dada nas coordenadas do espaço cotangente fica  $\tau = (\tau_u, \tau_v, \tau_{\theta_{cm}}, \tau_\phi) \in T^*Q$ . Os componentes que afetam o momento linear são

$$\begin{bmatrix} \tau_u \\ \tau_v \end{bmatrix} = \mathbf{R}(-\phi/2) \begin{bmatrix} 0 \\ f_1 \end{bmatrix} + \mathbf{R}(\phi/2) \begin{bmatrix} 0 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin(\phi/2)(f_2 - f_1) \\ \cos(\phi/2)(f_2 + f_1) \end{bmatrix}$$

Observe que, quando  $\phi = 0$ , o sistema possui a mesma estrutura de entradas do corpo rígido com dois propulsores localizados simetricamente em relação ao centro de massa e, portanto:

$$\begin{bmatrix} \tau_u \\ \tau_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ (f_1 + f_2) \end{bmatrix}$$

<sup>7</sup>Discutida no Capítulo 3.

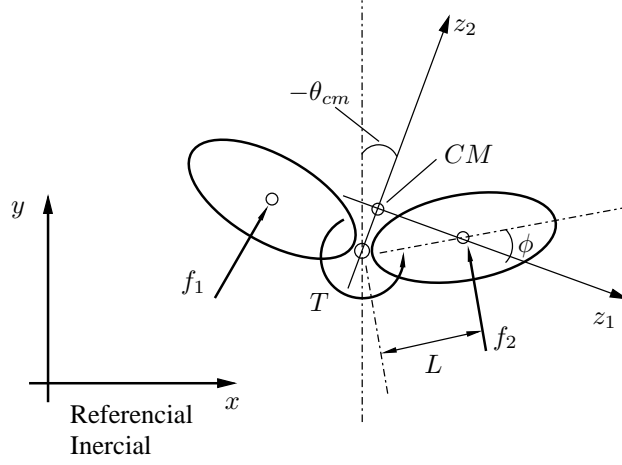


Figura 4.4: Entradas relativas aos propulsores no referencial móvel do sistema de 2-corpos.

A entrada na direção rotacional da fibra  $G$ , para corpos idênticos, fica

$$\tau_{\theta_{cm}} = L \cos^2(\phi/2)(f_2 - f_1)$$

Observe que, evitando termos que combinam funções trigonométricas e quadráticos pode-se aliviar a carga computacional quando do cálculo de distribuições, realizado no próximo capítulo. Utilizando a relação trigonométrica fundamental  $\sin^2(\cdot) + \cos^2(\cdot) = 1$  em conjunto com a expressão  $\cos(\phi) = \cos^2(\phi/2) - \sin^2(\phi/2)$ , mostra-se que

$$\cos^2(\phi/2) = \frac{1}{2}(\cos(\phi) + 1)$$

Utilizando o lado direito da igualdade acima, na expressão do campo vetorial para a entrada  $\tau_{\theta_{cm}}$ , permite simplificar o cálculo das distribuições do sistema de controle, reduzindo a carga computacional e, conseqüentemente, o tempo de cálculo.

A passagem da entrada  $\tau$  acima para o referencial inercial, assim como com qualquer elemento pertencente ao dual da álgebra de Lie  $\mathfrak{g}^*$ , segue pela aplicação coadjunta

$$\tau_S = \tau_{Inercial} = \text{Ad}_{g^{-1}}^* \tau$$

Escrevendo os componentes de translação acima  $(\tau_u, \tau_v)$  no referencial inercial, segue:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \tau_x \\ \tau_y \end{bmatrix}_S &= \begin{bmatrix} \tau_x \\ \tau_y \end{bmatrix}_{Inercial} = \mathbf{R}(\theta_{cm}) \begin{bmatrix} \tau_u \\ \tau_v \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\sin(\theta_{cm}) \cos(\phi/2) & -\cos(\theta_{cm}) \sin(\phi/2) \\ \cos(\theta_{cm}) \cos(\phi/2) & -\sin(\theta_{cm}) \sin(\phi/2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 + f_2 \\ f_2 - f_1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

O resultado acima pode ser confirmado quando a entrada  $\tau_{\theta_{cm}}$  é obtida através do levantamento cotangente da aplicação  $P$  das expressões da Seção 4.2.1, como mostram os exemplos abaixo.

**Exemplo 4.3.1.** *Retomando o exemplo do sistema de 2-corpos, da Seção 4.2.1, a entrada  $\tau$  obtida sob a estrutura principal adquire a seguinte forma:*

$$\begin{bmatrix} \tau_{\theta_{cm}} \\ \tau_{\phi} \end{bmatrix} = ([P]^{(-1)})^T \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} = \frac{l}{4} \begin{bmatrix} 2(1 + \cos(\phi))(f_2 - f_1) \\ (1 - \cos(\phi))(f_1 + f_2) \end{bmatrix}$$

A partir das considerações acima tem-se que  $\tau_{\theta_{cm}}$  é obtido pela soma dos momentos das forças  $f_i$  em relação ao centro de massa do sistema, ou seja

$$\tau_{\theta_{cm}} = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i^0 \times \mathbf{R}_i \begin{bmatrix} 0 \\ f_i \end{bmatrix} \quad (4.3.14)$$

No presente trabalho, tem-se o interesse no caso em que as forças de propulsão estão localizadas nos corpos extremos do sistema, isto é, apenas as forças de propulsão  $f_1$ , aplicada no centro de massa do corpo 1, e  $f_N$ , que atua no centro de massa do  $N$ -ésimo corpo. Logo, de (4.2.8) e (4.3.14), segue que

$$\begin{bmatrix} \tau_x \\ \tau_y \\ \tau_{\theta_{cm}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 \begin{bmatrix} 0 \\ f_1 \end{bmatrix} + \mathbf{R}_N \begin{bmatrix} 0 \\ f_N \end{bmatrix} \\ \mathbf{r}_1^0 \times \mathbf{R}_1 \begin{bmatrix} 0 \\ f_1 \end{bmatrix} + \mathbf{r}_N^0 \times \mathbf{R}_N \begin{bmatrix} 0 \\ f_N \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (4.3.15)$$

Escrito com coordenadas no referencial inercial, a dinâmica livre  $f = (\dot{r}_x, \dot{r}_y, \dot{\theta}_{cm}, \dot{\phi}, \dot{p}_x, \dot{p}_y, \dot{p}_{\theta_{cm}}, \dot{p}_{\phi})^T$ , é dada por

$$f = \begin{bmatrix} p_x/m^* \\ p_y/m^* \\ (4.3.11) \\ (4.3.9) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ (4.3.10) \end{bmatrix} \quad (4.3.16)$$

Os valores nulos das três primeiras linhas da dinâmica livre, devem-se à aplicação direta do Teorema de Noether. Pode-se, alternativamente, mostrar que  $\dot{p}_{\theta_{cm}} \equiv 0$ : sabe-se que o momento angular  $\mu_1 + \mu_2$  do sistema se conserva. Logo, escrito sob a nova

parametrização, tem-se a seguinte condição de conservação do momento angular

$$\mu_1 + \mu_2 = \mathbf{1}_N^T P^T \begin{bmatrix} p_{\theta_{cm}} \\ p_\phi \end{bmatrix} = p_{\theta_{cm}} = cte \quad (4.3.17)$$

No referencial inercial, os campos vetoriais relativos às entradas  $(u_1, u_2) = (f_1 + f_2, f_2 - f_1)$  e  $T'$  são

$$g_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\sin(\theta_{cm}) \cos(\phi/2) \\ \cos(\theta_{cm}) \cos(\phi/2) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad g_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\cos(\theta_{cm}) \sin(\phi/2) \\ -\sin(\theta_{cm}) \sin(\phi/2) \\ L/2(\cos(\phi) + 1) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad g_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

**Dinâmica com  $\theta_{cm} = \theta_1$**

**Proposição 4.3.2.** *No espaço de configuração  $Q$ , onde  $q = (\mathbf{r}_{cm}, \boldsymbol{\theta})$ , o Lagrangiano do sistema pode ser escrito em função da métrica de Riemann  $\langle \langle \cdot, \cdot \rangle \rangle_{\mathbb{G}'}$ , induzida pela energia cinética do sistema  $K_E$ , definida pela seguinte expressão*

$$L = \frac{1}{2} \dot{q}^T \mathbb{G}' \dot{q} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{r}}_{cm}^T & \dot{\boldsymbol{\theta}}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{G}'_{11} & \mathbb{G}'_{12} \\ \mathbb{G}'_{21} & \mathbb{G}'_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{r}}_{cm} \\ \dot{\boldsymbol{\theta}} \end{bmatrix} \quad (4.3.18)$$

*Demonstração.* Segundo (4.1.3), basta tomar  $\mathbb{G}'_{11} = m^* I_2$ ,  $\mathbb{G}'_{12} = \mathbb{G}'_{21} = \mathbf{0}_{2,N}$  e  $\mathbb{G}'_{22} = \mathbb{J}$ , onde  $m^*$  é massa do sistema,  $I_2$  é a matriz identidade de dimensão 2 e  $\mathbb{J}$  é a matriz de inércia do sistema multi-córcos.  $\square$

**Proposição 4.3.3.** *No fibrado principal  $(Q, \pi, B \equiv Q/G, G)$ , onde  $q = (g, r) = (g, \phi)$  e  $g = (\mathbf{r}_{cm}, \theta_1)$ , o Lagrangiano do sistema pode ser escrito como*

$$L = \frac{1}{2} \dot{q}^T \mathbb{G} \dot{q} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{g}^T & \dot{r}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{G}_{11} & \mathbb{G}_{12} \\ \mathbb{G}_{21} & \mathbb{G}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{g} \\ \dot{r} \end{bmatrix} \quad (4.3.19)$$

*Demonstração.* A prova abaixo seguirá um desenvolvimento algébrico, através da decomposição de (4.1.3). Expandindo o vetor  $\boldsymbol{\theta}$ , em função das coordenadas de base  $\phi$ , e

utilizando um formato matricial segue que

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\theta} &= \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_1 - (\theta_1 - \theta_2) \\ \vdots \\ \theta_1 - (\theta_1 - \theta_2) \cdots - (\theta_{N-1} - \theta_N) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -(\theta_1 - \theta_2) \\ \vdots \\ -(\theta_1 - \theta_2) \cdots - (\theta_{N-1} - \theta_N) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \theta_1 + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\theta_2 - \theta_1) \\ (\theta_3 - \theta_2) \\ \vdots \\ (\theta_N - \theta_{N-1}) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \theta_1 + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_N \end{bmatrix} \\
&= \mathbf{1}_N \theta_1 + \mathbf{M} \boldsymbol{\phi} \tag{4.3.20}
\end{aligned}$$

onde  $\mathbf{1}_N$  é o  $N$ -vetor de 1s,  $\phi_i$  são os ângulos de junta e  $\mathbf{M}$  é uma matriz  $N \times (N - 1)$  definida por

$$M_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{se } i = 1 \\ 1, & \text{se } 1 \leq j < i \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \Rightarrow \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \tag{4.3.21}$$

Aplicando-se a expressão acima para determinar a decomposição da orientação dos corpos em relação ao referencial inercial em função dos ângulos de junta  $\phi_i$ , segue

$$\begin{bmatrix} \mathbf{r}_{cm} \\ \boldsymbol{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{cm} \\ \mathbf{1}_N \theta_1 + \mathbf{M} \boldsymbol{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_2 & \mathbf{0}_{2,1} & \mathbf{0}_{2,N-1} \\ \mathbf{0}_{N,2} & \mathbf{1}_N & \mathbf{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{cm} \\ \theta_1 \\ \boldsymbol{\phi} \end{bmatrix}$$

onde  $I_2$  é a matriz identidade de dimensão 2. Derivando-se a expressão acima, resulta

em

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{r}}_{cm} \\ \dot{\boldsymbol{\theta}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_2 & \mathbf{0}_{2,1} & \mathbf{0}_{2,N-1} \\ \mathbf{0}_{N,2} & \mathbf{1}_N & \mathbf{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{r}}_{cm} \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\boldsymbol{\phi}} \end{bmatrix}$$

Transpondo-se esta última expressão, segue que

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{r}}_{cm} \\ \dot{\boldsymbol{\theta}} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{r}}_{cm}^T & \dot{\theta}_1 & \dot{\boldsymbol{\phi}}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_2 & \mathbf{0}_{2,N} \\ \mathbf{0}_{1,2} & \mathbf{1}_N^T \\ \mathbf{0}_{N-1,2} & \mathbf{M}^T \end{bmatrix}$$

Fazendo uso das duas últimas expressões obtidas acima e de (4.1.3) e lembrando que  $\dot{\theta}_i = \omega_i$ , pode-se determinar a métrica  $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle_{\mathbb{G}}$  no fibrado principal:

$$\begin{aligned} \mathbb{G} &= \begin{bmatrix} I_2 & \mathbf{0}_{2,N} \\ \mathbf{0}_{1,2} & \mathbf{1}_N^T \\ \mathbf{0}_{N-1,2} & \mathbf{M}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m^* I_2 & \mathbf{0}_{2,N} \\ \mathbf{0}_{N,2} & \mathbb{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_2 & \mathbf{0}_{2,1} & \mathbf{0}_{2,N-1} \\ \mathbf{0}_{N,2} & \mathbf{1}_N & \mathbf{M} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} m^* I_2 & \mathbf{0}_{2,1} & \mathbf{0}_{2,N-1} \\ \mathbf{0}_{1,2} & \mathbf{1}_N^T \mathbb{J} \mathbf{1}_N & \mathbf{1}_N^T \mathbb{J} \mathbf{M} \\ \mathbf{0}_{N-1,2} & \mathbf{M}^T \mathbb{J} \mathbf{1}_N & \mathbf{M}^T \mathbb{J} \mathbf{M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{G}_{11} & \mathbb{G}_{12} \\ \mathbb{G}_{21} & \mathbb{G}_{22} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.3.22)$$

□

*Observação 4.3.5.* Observe que  $\mathbb{G}_{12} = \mathbb{G}_{21}^T$  e a independência da  $\mathbb{G}_{22}(r) = \mathbb{G}_{22}(r, e)$  com relação às coordenadas das direções da fibra  $G$ .

*Observação 4.3.6.* Note que o momento do sistema  $\boldsymbol{\mu}$  pode ser obtido por ambas as métricas em função de  $\mathbb{G}'$  e  $\mathbb{G}$  utilizadas acima, assim como por qualquer outra métrica definida em  $Q$  e parametrizada por coordenadas diferentes das utilizadas acima, como sugere a geometria Riemanniana. Neste caso, recordando que  $\mathbf{p}_{cm}$  é o momento linear e  $\boldsymbol{\mu}$  o momento angular do sistema, tem-se que

$$\begin{bmatrix} \mathbf{p}_{cm} \\ p_{\theta_1} \\ \boldsymbol{\mu} \end{bmatrix} = \mathbb{G} \begin{bmatrix} \dot{g} \\ \dot{r} \end{bmatrix} \quad (4.3.23)$$

O espaço  $T^*Q$  definido pelas coordenadas de configuração com estrutura principal acima é difeomórfico ao espaço parametrizado pelas coordenadas original,<sup>8</sup> dadas por

$$\begin{bmatrix} \mathbf{p}_{cm} \\ \boldsymbol{\mu} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m^* I_2 & \mathbf{0}_{2,N} \\ \mathbf{0}_{N,2} & \mathbb{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{r}}_{cm} \\ \dot{\boldsymbol{\theta}} \end{bmatrix}$$

<sup>8</sup>Note que isto é possível apenas quando ambas as parametrizações são realizadas com coordenadas canônicas, (Lanczos, 1977).



**Exemplo: o sistema de 2-corpos**

Como alternativa, uma das equações do momento angular do sistema pode ser escrita como a taxa de variação do elemento do espaço  $T^*(Q/G)$ , dado por  $p_\phi$ . Primeiramente, procede-se com o cálculo do momento angular do corpo 1 ( $p_{\theta_1}$ ) através do Lagrangiano

$$L = \frac{1}{2} [\dot{g}^T \dot{r}^T] \begin{bmatrix} \mathbb{G}_{11} & \mathbb{G}_{12} \\ \mathbb{G}_{21} & \mathbb{G}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{g} \\ \dot{r} \end{bmatrix}, \quad \mathbb{G} = \left[ \begin{array}{cc|c} m^* I_2 & \mathbf{0}_{2,1} & \mathbf{0}_{2,N-1} \\ \mathbf{0}_{1,2} & \mathbf{1}_N^T \mathbb{J} \mathbf{1}_N & \mathbf{1}_N^T \mathbb{J} \mathbf{M} \\ \hline \mathbf{0}_{N-1,2} & \mathbf{M}^T \mathbb{J} \mathbf{1}_N & \mathbf{M}^T \mathbb{J} \mathbf{M} \end{array} \right]$$

$$= \frac{1}{2} (\dot{g}^T (\mathbb{G}_{11} \dot{g} + \mathbb{G}_{12} \dot{r}) + \dot{r}^T (\mathbb{G}_{21} \dot{g} + \mathbb{G}_{22} \dot{r}))$$

Pela definição da transformada de Legendre, tem-se

$$\begin{aligned} p_{\theta_1} &= \frac{\partial L(\phi, g, \dot{\phi}, \dot{g})}{\partial \dot{\theta}_1} \\ &= \mathbb{G}_{11} \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{1,2} & \dot{\theta}_1 \end{bmatrix}^T + \mathbb{G}_{12}^T \dot{\phi} \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{1,2} & 1 \end{bmatrix}^T, \quad (\mathbb{G}_{12} = \mathbb{G}_{21}^T) \\ &= \mathbf{1}_2^T \mathbb{J} \mathbf{1}_2 \dot{\theta}_1 + \mathbf{M}^T \mathbb{J} \mathbf{1}_2 \dot{\phi} \\ &= (\mathbb{J}_{11} + 2\mathbb{J}_{12} + \mathbb{J}_{22}) \dot{\theta}_1 + (\mathbb{J}_{12} + \mathbb{J}_{22}) \dot{\phi} \\ &= (\tilde{I}_1 + 2\epsilon\lambda(\phi) + \tilde{I}_2) \dot{\theta}_1 + (\epsilon\lambda(\phi) + \tilde{I}_2) \dot{\phi} \end{aligned} \quad (4.3.24)$$

Tomando-se  $p_\phi \in T_\phi^*(Q/G)$  em conjunto com a dinâmica referente a  $\mu_1$ , ou  $\mu_2$ , o movimento do sistema fica completamente determinado em  $T^*Q$ . Portanto, para as coordenadas do espaço de base  $r \in B$ , segue que

$$p_r = \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{r}}$$

onde  $q = (r, g)$  e  $g$  é o elemento do grupo  $G$ . Para o sistema de dois corpos, onde  $N = 2$  e  $r = \phi$ , segue que

$$\begin{aligned} p_\phi &= \frac{\partial L(\phi, g, \dot{\phi}, \dot{g})}{\partial \dot{\phi}} \\ &= \frac{1}{2} \dot{g}^T \mathbb{G}_{12} + \frac{1}{2} \mathbb{G}_{21} \dot{g} + \mathbb{G}_{22} \dot{\phi}, \quad (\mathbb{G}_{12} = \mathbb{G}_{21}^T) \\ &= \mathbb{G}_{12}^T \dot{g} + \mathbb{G}_{22} \dot{\phi} \\ &= \mathbf{0}_{1,2} \dot{r}_{cm} + \mathbf{M}^T \mathbb{J} \mathbf{1}_2 \dot{\theta}_1 + \mathbf{M}^T \mathbb{J} \mathbf{M} \dot{\phi} \\ &= (\mathbb{J}_{21} + \mathbb{J}_{22}) \dot{\theta}_1 + \mathbb{J}_{22} \dot{\phi} \\ &= (\epsilon\lambda(\phi) + \tilde{I}_2) \dot{\theta}_1 + \tilde{I}_2 \dot{\phi} \end{aligned} \quad (4.3.25)$$

Por outro lado, obtém-se  $\dot{\phi}$  pelas equações de Hamilton

$$\begin{aligned}\dot{\phi} &= \frac{\partial H(\phi, g, p_\phi, \mu_S)}{\partial p_\phi} \\ &= -\frac{(\tilde{I}_2 + K \cos(\phi))p_{\theta_1} - (\tilde{I}_1 + 2K \cos(\phi) + \tilde{I}_2)p_\phi}{(\tilde{I}_1\tilde{I}_2 - K^2 \cos(\phi)^2)} \\ &= -\frac{(p_{\theta_1} - 2p_\phi)}{(\tilde{I} - K \cos(\phi))}, \quad (\tilde{I}_1 = \tilde{I}_2 = \tilde{I})\end{aligned}$$

Isolando-se  $p_\phi$  e usando (4.3.23), lembrando que  $\boldsymbol{\omega} = \dot{\boldsymbol{\theta}}$ , na expressão acima, tem-se que

$$\begin{aligned}p_\phi &= \frac{(\tilde{I}_2 + K \cos(\phi))\mu_1 + (\tilde{I}_1\tilde{I}_2 - K^2 \cos(\phi)^2)\dot{\phi}}{(\tilde{I}_1 + 2K \cos(\phi) + \tilde{I}_2)} \\ &= (\tilde{I}_2 + K \cos(\phi))\omega_1 + \tilde{I}_2\dot{\phi}\end{aligned}$$

O resultado obtido pelo caminho acima confere com o obtido em (4.3.25), como esperado.

Obtém-se agora a taxa de variação temporal do momento  $p_\phi$ . Pode-se, primeiramente, diferenciar a última expressão acima, obtendo-se

$$\dot{p}_\phi = (\epsilon\lambda(\phi) + \tilde{I}_2)\ddot{\theta} - K \sin(\phi)\dot{\phi}\dot{\theta} + \tilde{I}_2\ddot{\phi}$$

Alternativamente, a partir do Hamiltoniano, tem-se

$$\begin{aligned}\dot{p}_\phi &= -\frac{\partial H(\phi, g, p_\phi, \mu_S)}{\partial \phi} \\ &= -K \sin(\phi) \frac{(\tilde{I}_2\mu_1 - (\tilde{I}_2 + K \cos(\phi))p_\phi)((\tilde{I}_1 + K \cos(\phi))p_\phi - K \cos(\phi)\mu_1)}{(\tilde{I}_1\tilde{I}_2 - K^2 \cos^2(\phi))^2}\end{aligned}\tag{4.3.26}$$

Substituindo as definições para  $\mu_1$  e  $p_\phi$ , em termos de  $\dot{\boldsymbol{\theta}}$  e  $\dot{\phi}$ , no resultado acima, segue que

$$\dot{p}_\phi = -K \sin(\phi)\dot{\boldsymbol{\theta}}(\dot{\boldsymbol{\theta}} + \dot{\phi})$$

As três expressões do momento  $\dot{p}_\phi$  acima são equivalentes.

Observe que as expressões (4.3.24) e (4.3.25), parametrizadas por  $(\theta_1, \phi)$ , onde  $\dot{\phi} = \dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1$ , são equivalentes às realizadas por  $\boldsymbol{\mu} = \mathbb{J}\boldsymbol{\omega}$ , quando a parametrização  $(\theta_1, \theta_2)$  é utilizada. Esta equivalência pode ser observada pela conservação do momento angular  $\mu_1 + \mu_2 = p_\theta$ . O campo vetorial da dinâmica livre  $f = (\dot{r}_x, \dot{r}_y, \dot{\theta}_1, \dot{\phi}, \dot{p}_x, \dot{p}_y, \dot{p}_{\theta_1}, \dot{p}_\phi)^T$  com

a presente parametrização fica

$$f = \begin{bmatrix} p_x/m^* \\ p_y/m^* \\ (\tilde{I}_2\mu_1 - (\tilde{I}_2 + K \cos(\phi))p_\phi)/(\tilde{I}_1\tilde{I}_2 - K^2 \cos(\phi)^2) \\ -((\tilde{I}_2 + K \cos(\phi))\mu_1 - (\tilde{I}_1 + 2K \cos(\phi) + \tilde{I}_2)p_\phi)/(\tilde{I}_1\tilde{I}_2 - K^2 \cos(\phi)^2) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ (4.3.26) \end{bmatrix}$$

e os campos vetoriais relativos às entradas  $(f_1, f_2, T)$  são obtidos de maneira análoga aos do modelo obtido anteriormente, respeitando a estrutura do espaço de configuração.

## 4.4 Modelagem Lagrangiana

A modelagem do sistema realizada a seguir, aplica as expressões da conexão mecânica, do princípio variacional reduzido e da reconstrução da dinâmica discutidos no Capítulo 3.

### 4.4.1 Exemplo: o sistema de 2-corpos ( $\theta_{cm} = \theta_1$ )

Para determinar a conexão mecânica do sistema, precisa-se, primeiramente, obter o tensor de inércia travado. A partir das expressões de construção dos geradores infinitesimais, detalhadas na Seção B.6.1, de (3.2.1)

$$\langle \mathbb{I}(q)\eta, \zeta \rangle = \langle \langle \eta_Q(q), \zeta_Q(q) \rangle \rangle \Rightarrow \eta^T \mathbb{I}^T \zeta = \eta_Q^T \mathbb{G} \zeta_Q$$

e a partir da métrica induzida pela energia cinética  $\mathbb{G}$ , obtida em (4.3.22),

$$\mathbb{G} = \begin{bmatrix} \mathbb{G}_{11} & \mathbb{G}_{12} \\ \mathbb{G}_{21} & \mathbb{G}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_{11} + J_{12} + J_{21} + J_{22} & J_{12} + J_{22} \\ 0 & 0 & J_{21} + J_{22} & J_{22} \end{bmatrix}$$

obtém-se a expressão para a matriz de inércia travado

$$\mathbb{I} = \begin{bmatrix} m^* I_2 & -m^* \mathbb{M} \mathbf{r}_{cm} \\ -m^* (\mathbb{M} \mathbf{r})^T & m^* \|\mathbf{r}\|^2 + \mathbf{1}_N^T \mathbb{J} \mathbf{1}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m^* & 0 & -m^* r_y \\ 0 & m^* & m^* r_x \\ -m^* r_y & m^* r_x & m^* (r_x^2 + r_y^2) + \mathbf{1}_N^T \mathbb{J} \mathbf{1}_N \end{bmatrix} \quad (4.4.1)$$

onde  $\mathbb{M}$  é a matriz simplética de dimensão 2, veja Seção A.2.2. A matriz de inércia  $\mathbb{J}$  do sistema de 2-corpos é dada por

$$\mathbb{J} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{I}_1 & \epsilon \lambda \\ \epsilon \lambda & \tilde{I}_2 \end{bmatrix} \quad (4.4.2)$$

onde

$$\tilde{I}_i = I_i + \epsilon d_i^2, \quad \epsilon = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \quad \lambda(\phi) = d_1 d_2 \cos(\phi)$$

A seguir, obtém-se a aplicação momento  $\mathbf{J}$  do sistema. Seja  $v_q = (\dot{r}_x, \dot{r}_y, \omega_1, \dot{\phi})$  e a partir de (3.2.3)

$$\langle \mathbf{J}(q, v), \xi \rangle = \langle \langle \xi_Q(q), v_q \rangle \rangle \Rightarrow J_i \xi^i = [\dot{r}_x \ \dot{r}_y \ \omega_1 \ \dot{\phi}] \mathbb{G} \xi_Q$$

e, portanto,

$$\langle \mathbf{J}(v_q), \xi \rangle = (m \dot{r}_x) \xi_1 + (m \dot{r}_y) \xi_2 + (m r_x \dot{r}_y - m r_y \dot{r}_x + \mathbf{1}_N^T \mathbb{J} \mathbf{1}_N \omega_1 + \mathbf{1}_N^T \mathbb{J} \mathbf{M} \dot{\phi}) \xi_3 \quad (4.4.3)$$

Os momentos lineares nas duas direções são conservados independentemente um do outro. O momento angular, escrito em relação ao referencial inercial, apresenta uma parcela devido ao movimento linear do centro de massa do sistema, em adição ao componente devido ao movimento angular do mesmo. No entanto, como os movimentos linear e angular são independentes quando parametrizados em relação ao centro de massa, as parcelas dos movimentos linear e angular do momento angular mantêm-se constantes de forma independente.

A matriz auxiliar  $\mathbf{M}$  é definida em (4.3.21). Para computar a conexão, segundo (3.2.5), faz-se

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(v_q) &= \mathbb{I}^{-1} \mathbf{J}(v_q) \\ &= \frac{1}{\mathbf{1}_N^T \mathbb{J} \mathbf{1}_N} \begin{bmatrix} (\dot{r}_x + r_y \omega_1) \mathbf{1}_N^T \mathbb{J} \mathbf{1}_N + r_y \mathbf{1}_N^T \mathbb{J} \mathbf{M} \dot{\phi} \\ (\dot{r}_y - r_x \omega_1) \mathbf{1}_N^T \mathbb{J} \mathbf{1}_N - r_x \mathbf{1}_N^T \mathbb{J} \mathbf{M} \dot{\phi} \\ \mathbf{1}_N^T \mathbb{J} \mathbf{1}_N \omega_1 + \mathbf{1}_N^T \mathbb{J} \mathbf{M} \dot{\phi} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Da Seção A.2.2, a expressão da ação adjunta  $\text{Ad}_g$  em  $\mathfrak{se}(2)$ , escrita na forma matricial, é obtida pela expressão

$$\text{Ad}_{(\mathbf{R}, \mathbf{r})} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}_{1,2} \\ \mathbb{M} \mathbf{r} & \mathbf{R} \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Ad}_{(\mathbf{r}, \mathbf{R})} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbb{M} \mathbf{r} \\ \mathbf{0}_{1,2} & 1 \end{bmatrix}$$

A conexão em coordenadas do referencial móvel segue diretamente de (3.2.5), e para  $\text{Ad}_{(\mathbf{r}, \mathbf{R})}^{-1}$

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_B(v_q) &= \text{Ad}_{g^{-1}}\mathcal{A}(v_q) \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{R}^T \dot{\mathbf{r}}_{cm} \\ \mathbf{1}_N^T \mathbb{J}^T \boldsymbol{\omega} (\mathbf{1}_N^T \mathbb{J} \mathbf{1}_N)^{-1} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Devido a matriz  $\mathbb{J}$  ser simétrica, observe, pelas expressões (4.3.20) que  $\mathbf{1}_N^T \mathbb{J}^T \boldsymbol{\omega} = \mathbf{1}_N^T \mathbb{J} \mathbf{1}_N \omega_1 + \mathbf{1}_N^T \mathbb{J} \mathbf{M} \dot{\phi}$ , e, logo

$$\mathcal{A}_B(v_q) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}^T \dot{\mathbf{r}}_{cm} \\ \omega_1 \end{bmatrix} + \frac{1}{\mathbf{1}_N^T \mathbb{J} \mathbf{1}_N} \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{2 \times 1} \\ \mathbf{1}_N^T \mathbb{J} \mathbf{M} \end{bmatrix} \dot{\phi} = T_g L_{g^{-1}} \dot{g} + \mathcal{A}_{loc}(\phi) \dot{\phi}$$

Observe, da expressão acima, que  $T_g L_{g^{-1}} \dot{g} = g^{-1} \dot{g} = \xi_B$ . A expressão local do tensor de inércia travado é obtida através de (3.2.2)

$$\mathbb{I}_{loc}(\phi) = \text{Ad}_g^* \mathbb{I}(q) \text{Ad}_g \quad (4.4.4)$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \text{M} \mathbf{r}_{cm} \\ \mathbf{0}_{1,2} & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} m^* I_2 & -m^* \text{M} \mathbf{r}_{cm} \\ -m^* (\text{M} \mathbf{r}_{cm})^T & m \|\mathbf{r}_{cm}\|^2 + \mathbf{1}_N^T \mathbb{J} \mathbf{1}_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \text{M} \mathbf{r}_{cm} \\ \mathbf{0}_{1,2} & 1 \end{bmatrix} \quad (4.4.5)$$

$$= \begin{bmatrix} m^* & 0 & 0 \\ 0 & m^* & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1}_N^T \mathbb{J} \mathbf{1}_N \end{bmatrix} \quad (4.4.6)$$

Para a obtenção da equação cinemática de reconstrução, faz-se necessária a determinação da velocidade  $\xi_B$  na álgebra de Lie  $\mathfrak{se}(2)$ . Fazendo  $\mu_B = (\mu_{B_1}, \mu_{B_2}, \mu_{B_3})$  e a partir de (3.2.10), segue que

$$\begin{aligned}\xi_B &= -\mathcal{A}_{loc}(\phi) \dot{r} + \mathbb{I}_{loc}^{-1}(r) \mu_B \\ &= -\frac{1}{\mathbf{1}_N^T \mathbb{J} \mathbf{1}_N} \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{2 \times 1} \\ \mathbf{1}_N^T \mathbb{J} \mathbf{M} \end{bmatrix} \dot{\phi} + \begin{bmatrix} m^* & 0 & 0 \\ 0 & m^* & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1}_N^T \mathbb{J} \mathbf{1}_N \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mu_{B_1} \\ \mu_{B_2} \\ \mu_{B_3} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mu_{B_1}/m^* \\ \mu_{B_2}/m^* \\ \frac{\mu_{B_3} - (\epsilon \lambda(\phi) + \tilde{I}_2) \dot{\phi}}{I_1 + 2\epsilon \lambda(\phi) + I_2} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Escreve-se a equação de reconstrução  $\dot{g}$  em função da expressão  $\xi_B = (\xi_{B_1}, \xi_{B_2}, \xi_{B_3})$  acima, obtendo-se

$$\dot{g} = g \xi_B = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & r_x \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & r_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\xi_{B_3} & \xi_{B_1} \\ \xi_{B_3} & 0 & \xi_{B_2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.4.7)$$

No cálculo da reconstrução da cinemática na fibra, e diferentemente quando da obtenção da conexão  $\mathcal{A}_B$  realizada acima, utiliza-se elementos da álgebra no referencial móvel  $\xi_B$  escritos em função do momento correspondente  $\mu_B$ . Observe, também, que os componentes do momento linear no referencial móvel são transformados ao referencial inercial via matriz de rotação  $\mathbf{R}$ . O termo rotational do sistema, função do momento angular  $\mu_B$  e que simplifica a  $\dot{\theta}$ , por sua vez, possui mesma representação em ambos os sistemas de coordenadas. A equação do momento, determinada a partir de (3.4.1), toma a seguinte forma

$$(\dot{\mu}_B)_c = c_{ac}^b (\mu_B)_b \xi_B^a$$

onde  $a, b, c = 1, 2, 3$  e  $c_{ac}^b$  são as constantes estruturais da álgebra  $\mathfrak{se}(2)$ , refira à Seção B.5. Para um elemento do grupo  $SE(2)$  na forma  $g = (\mathbf{r}_{cm}, \mathbf{R})$ , são as constantes não nulas  $c_{23}^1 = -c_{32}^1 = 1$  e  $c_{31}^2 = -c_{13}^2 = 1$ , o que resulta no momento:

$$\dot{\mu}_B = \begin{bmatrix} \mu_{B_2} \xi_B^3 \\ -\mu_{B_1} \xi_B^3 \\ \mu_{B_1} \xi_B^2 - \mu_{B_2} \xi_B^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_{B_2} \frac{\mu_{B_3} - (\epsilon\lambda(\phi) + \tilde{I}_2)\dot{\phi}}{\tilde{I}_1 + 2\epsilon\lambda(\phi) + \tilde{I}_2} \\ -\mu_{B_1} \frac{\mu_{B_3} - (\epsilon\lambda(\phi) + \tilde{I}_2)\dot{\phi}}{\tilde{I}_1 + 2\epsilon\lambda(\phi) + \tilde{I}_2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.4.8)$$

Note que, no referencial móvel, os componentes do momento linear não se conservam. Proceda-se, agora, com a determinação da matriz de inércia para a dinâmica do sistema no espaço de base  $B$ . Para  $r = \phi$ , tem-se, de (3.4.2):

$$\begin{aligned} M(\phi) &= \mathbb{G}_{22}(\phi) - \mathcal{A}_{loc}^T(\phi) \mathbb{I}_{loc}(\phi) \mathcal{A}_{loc}(\phi) \\ &= \mathbf{M}^T \mathbb{J} \mathbf{M} - \frac{(\mathbf{1}_N^T \mathbb{J} \mathbf{M})^2}{(\mathbf{1}_N^T \mathbb{J} \mathbf{1}_N)} \\ &= \frac{\tilde{I}_2 \tilde{I}_1 - (\epsilon\lambda(\phi))^2}{(\tilde{I}_1 + 2\epsilon\lambda(\phi) + \tilde{I}_2)} \end{aligned} \quad (4.4.9)$$

O termo relativo à dinâmica centrípeta e de Coriolis é obtida avaliando-se (3.4.3) com a expressão da matriz de inércia  $M$  acima:

$$C(\phi) = (\epsilon d_1 d_2 \sin(\phi)) \frac{(\epsilon\lambda(\phi) + \tilde{I}_1)(\epsilon\lambda(\phi) + \tilde{I}_2)}{(\tilde{I}_1 + 2\epsilon\lambda(\phi) + \tilde{I}_2)^2} \quad (4.4.10)$$

Como, para o sistema de dois corpos

$$\begin{cases} \mathbf{d} \mathcal{A}_{loc}(\phi) \equiv 0 & (4.4.11a) \\ \text{ad}_{\xi}^* \mu_B \mathcal{A}_{loc}(\phi) = \dot{\mu}_B \mathcal{A}_{loc}(\phi) \equiv 0 & (4.4.11b) \end{cases}$$

em (3.4.4), o termo da dinâmica  $N$ , escrito em função do momento no referencial móvel  $\mu_B$ , simplifica a:

$$N = \frac{\epsilon d_1 d_2 \sin(\phi)}{(\tilde{I}_1 + 2\epsilon\lambda(\phi) + \tilde{I}_2)^2} \mu_{B_3}^2 \quad (4.4.12)$$

Finalmente, pela função de entrada  $\tau$ , calcula-se a entrada na dinâmica de base segundo a expressão

$$\begin{aligned}\mathcal{X}(\phi)\tau &= \tau_\phi - [\tau_x, \tau_y, \tau_\theta]\mathcal{A}_{loc}(\phi) \\ &= T - [\tau_x, \tau_y, \tau_\theta] \frac{1}{\mathbf{1}_N^T \mathbb{J} \mathbf{1}_N} \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{2 \times 1} \\ \mathbf{1}_N^T \mathbb{J} \mathbf{M} \end{bmatrix} \\ &= T - \frac{(\epsilon\lambda(\phi) + \tilde{I}_2)}{(\tilde{I}_1 + 2\epsilon\lambda(\phi) + \tilde{I}_2)} \tau_\theta\end{aligned}\tag{4.4.13}$$

A equação de movimento do sistema no espaço de base  $B$ , dada por  $M(\phi)\ddot{\phi} + C(\phi)\dot{\phi}^2 + N = \mathcal{X}\tau$ , fica

$$\begin{aligned}\frac{\tilde{I}_2\tilde{I}_1 - (\epsilon\lambda(\phi))^2}{(\tilde{I}_1 + 2\epsilon\lambda(\phi) + \tilde{I}_2)}\ddot{\phi} + (\epsilon d_1 d_2 \sin(\phi)) \frac{(\epsilon\lambda(\phi) + \tilde{I}_1)(\epsilon\lambda(\phi) + \tilde{I}_2)}{(\tilde{I}_1 + 2\epsilon\lambda(\phi) + \tilde{I}_2)^2} \dot{\phi}^2 + \\ \frac{\epsilon d_1 d_2 \sin(\phi)}{(\tilde{I}_1 + 2\epsilon\lambda(\phi) + \tilde{I}_2)^2} \mu_{B_3}^2 = T - \frac{(\epsilon\lambda(\phi) + \tilde{I}_2)}{(\tilde{I}_1 + 2\epsilon\lambda(\phi) + \tilde{I}_2)} \tau_\theta\end{aligned}$$

Observe que a solução da dinâmica no espaço de base é dependente das equações de momento (4.4.8), mais especificamente, da dinâmica do momento angular  $\mu_{B_3}$ .

Para corpos iguais e  $\tilde{I}_1 = \tilde{I}_2 = \tilde{I}$ , a equação de movimento acima fica

$$\frac{(\tilde{I} - \epsilon\lambda(\phi))}{2} \ddot{\phi} + K \sin(\phi) \frac{1}{4} \dot{\phi}^2 + \frac{K \sin(\phi)}{2(\tilde{I} + \epsilon\lambda(\phi))^2} \mu_{B_3}^2 = T + \frac{1}{2} \tau_\theta$$

Quando o momento é escrito no referencial inercial, o único termo da dinâmica de junta  $\phi$  que sofre modificação é  $N$  enquanto que os termos  $M(r)$  e  $C(r)$  permanecem inalterados em relação às expressões obtidas no referencial móvel. Avaliando-se (3.4.5), o termo  $N_S$  fica

$$N_S = (\epsilon d_1 d_2 \sin(\phi)) \frac{(x\mu_{S_2} - y\mu_{S_1} - \mu_{S_3})^2}{(\tilde{I}_1 + 2\epsilon\lambda(\phi) + \tilde{I}_2)^2}\tag{4.4.14}$$

A aplicação momento  $\mathbf{J}$  obtida no espaço de configuração  $Q$ , parametrizado através variáveis  $(\theta_i, \mu_i)$ , fornece a expressão do momento total. Neste caso, fica evidente a verificação da conservação dos momentos lineares e angulares em relação ao referencial inercial, como previsto pelo Teorema de Noether.

Uma modelagem Lagrangiana do sistema de 2-corpos, em que  $\theta_{cm}$  é definida de forma similar a  $(\theta_1 + \theta_2)/2$ , é apresentada resumidamente em Souza e Maruyama (2007). Resultados complementares da modelagem dos sistemas de 3 e 5 corpos são apresentados no Apêndice C.

---

## 4.5 Conclusão

Em vista das definições da Seção 2.3 e do que foi discutido no Capítulo 3, apresentou-se neste capítulo as equações de movimento do sistema multi-articulado, conforme a estrutura de um sistema mecânico simples. Utilizando diferentes parametrizações do espaço de configuração  $Q$ , quatro modelos da dinâmica do sistema foram obtidos sob o formalismo Hamiltoniano, um deles escrito nas coordenadas do referencial móvel. Alternativamente, um modelo do sistema foi obtido através da abordagem Lagrangiana. A determinação dos modelos a partir do Hamiltoniano, através da estrutura simplética, é relativamente mais simples; ao passo que o estabelecimento dos modelos pela abordagem Lagrangiana é notadamente mais complexo, exigindo um conhecimento mais abrangente dos elementos geométricos da mecânica envolvidos. Como o procedimento de modelagem segundo os métodos Hamiltoniano e Lagrangiano são equivalentes, os modelos obtidos através destes dois métodos são equivalentes. A equivalência dos modelos do sistema de 2-corpos obtidos pelas duas abordagens acima foi comprovada por simulação.



## Capítulo 5

# Análise do Sistema e Controlabilidade

O presente capítulo apresenta uma introdução a análise da dinâmica do sistema multi-articulado. Na primeira seção abaixo apresenta-se a análise para determinação dos pontos de equilíbrio dinâmico do sistema através de alguns exemplos. Em seguida, discute-se um fenômeno frequentemente utilizado no planejamento da locomoção de sistemas multi-articulados, denominado de fases geométricas, e que representa um fenômeno exclusivamente devido a uma restrição cinemática<sup>1</sup> e, portanto, independente da velocidade de movimento.

Finalmente, atenção será voltada à análise de controlabilidade do sistema utilizando os resultados apresentados em (Sussmann, 1987) e (Nijmeijer e van der Shaft, 1990). Pode-se adiantar que, em geral, verificar as características de controlabilidade de sistemas não lineares constitui uma tarefa de relativa dificuldade, em comparação com análises similares realizadas com as suas aproximações lineares correspondentes. Esta relativa dificuldade deve-se à notável complexidade intrínseca da dinâmica não-linear, como a presença de equilíbrios múltiplos ou por fenômenos de ciclo limite e oscilações, que não estão presentes no âmbito linear. Portanto, observa-se que quanto mais geral o modelo do sistema sendo analisado, mais difícil é estabelecer a estrutura do espaço de evolução da dinâmica do mesmo. Além disso, a análise de controlabilidade para sistemas lineares é local, em torno de um ponto determinado<sup>2</sup> do espaço de estados, ao passo

---

<sup>1</sup>Definida nos pontos em que a conexão mecânica se nula.

<sup>2</sup>Em torno do qual a linearização é válida.

que a verificação das características de controlabilidade dos sistemas não-lineares não necessariamente se limita a um ponto, mas abrange um sub-conjunto do espaço de fase.

## 5.1 Equilíbrio e Estabilidade

O equilíbrio de um sistema dinâmico  $\dot{z} = f(z, u)$  é definido pelo conjunto dos pontos  $z$  em  $T^*Q$  os quais  $\dot{z} = 0$  se verifica. Ou, equivalentemente, para o componente da dinâmica livre, dado pelo campo vetorial  $f(\cdot)$ , de um sistema afim nas entradas, o equilíbrio é verificado quando  $f(z) = 0$ .

### 5.1.1 Equilíbrio do Sistema Multi-corpos

O *equilíbrio relativo* é obtido pelo equilíbrio do sistema reduzido. Logo, das equações do sistema reduzido em (4.2.15), segue que

$$\begin{aligned}\dot{\phi}_j = \dot{\theta}_{j+1,j} &= 0, & 1 \leq j \leq N-1 \\ \dot{\mu}_i &= 0, & 1 \leq i \leq N\end{aligned}$$

A primeira condição acima estabelece que as velocidades angulares de todos os corpos sejam iguais, ou seja,  $\omega_i = \omega_0$ , para  $i = 1, \dots, N$ , onde  $\omega_0$  é uma função do tempo, por exemplo. Isto equivale a restringir o estado relativo do sistema à origem do espaço de base  $B$ . A segunda condição resulta em

$$\frac{\partial H}{\partial \theta_{j+1,j}} = 0, \quad 1 \leq j \leq N-1$$

que estabelece condições para determinação do equilíbrio em relação aos  $\phi$ . Note que, **todas as configurações**  $q$  são equilíbrio do sistema quando o vetor  $v_q \in T_qQ$  é nulo, ou, em particular quando  $\omega_0 \equiv 0$  que representa pontos de equilíbrio triviais.

Os pontos de equilíbrio relativo para sistemas de dois e três corpos foram obtidos em Sreenath (1987); por exemplo, para o sistema de 2-corpos, o equilíbrio relativo é dado por  $\dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_2 = \dot{\theta}$  e

- Para  $\dot{\theta} > 0$  e  $\phi = 0$  equilíbrio estável;
- Para  $\dot{\theta} > 0$  e  $\phi = \pi$  equilíbrio instável;

- Para  $\dot{\theta} = 0$  infinitos pontos de equilíbrio.

Note que a existência de mais de um ponto de equilíbrio elimina a possibilidade do sistema possuir apenas um ponto de equilíbrio global. Logo, os equilíbrios desta classe de sistemas são locais.

O equilíbrio relativo para um sistema de  $N$  corpos pode ser determinado pela solução do seguinte sistema de  $N - 1$  equações algébricas:

$$\mathbf{K}X = \mathbf{0}$$

onde o vetor de estados  $X$  é função das  $N - 1$  coordenadas do espaço de base  $B$ , dadas pelo vetor  $\phi$ . Note que a matriz  $\mathbf{K}$  possui dimensão  $(N - 1) \times N(N - 1)/2$ , onde o número de colunas é igual a  $C_{N,2}$ , isto é, ao número de combinações de  $N$  números tomados 2 a 2 ou, ainda, determinado pela somatória de uma progressão aritmética unitária até o número  $N - 1$ . A título de exemplificação do procedimento acima, toma-se  $N = 5$ . Denominando por  $m^*$  a massa total do sistema, segue que:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial H}{\partial \phi_1} \right|_{equil} &= \frac{\omega_0^2}{m^*} [A_1 \sin(\phi_1) + E_1 \sin(\phi_1 + \phi_2) + \\ &\quad H_1 \sin(\phi_1 + \phi_2 + \phi_3) + J_1 \sin(\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4)] = 0 \\ \left. \frac{\partial H}{\partial \phi_2} \right|_{equil} &= \frac{\omega_0^2}{m^*} [B_2 \sin(\phi_2) + E_2 \sin(\phi_1 + \phi_2) + F_2 \sin(\phi_2 + \phi_3) + \\ &\quad H_2 \sin(\phi_1 + \phi_2 + \phi_3) + I_2 \sin(\phi_2 + \phi_3 + \phi_4) + \\ &\quad J_2 \sin(\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4)] = 0 \\ \left. \frac{\partial H}{\partial \phi_3} \right|_{equil} &= \frac{\omega_0^2}{m^*} [C_3 \sin(\phi_3) + F_3 \sin(\phi_2 + \phi_3) + G_3 \sin(\phi_3 + \phi_4) + \\ &\quad H_3 \sin(\phi_1 + \phi_2 + \phi_3) + I_3 \sin(\phi_2 + \phi_3 + \phi_4) + \\ &\quad J_3 \sin(\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4)] = 0 \\ \left. \frac{\partial H}{\partial \phi_4} \right|_{equil} &= \frac{\omega_0^2}{m^*} [D_4 \sin(\phi_4) + G_4 \sin(\phi_3 + \phi_4) + \\ &\quad I_4 \sin(\phi_2 + \phi_3 + \phi_4) + J_4 \sin(\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4)] = 0 \end{aligned} \quad (5.1.1)$$

A partir das expressões acima, obtém-se o seguinte equilíbrio relativo trivial do sistema:

$$\begin{aligned} (\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4)|_{equil} &= \pm(n_1\pi, n_2\pi, n_3\pi, n_4\pi) \\ n_i &= 0, 1, 2, \dots \\ i &= 1, 2, 3, 4. \end{aligned}$$

Em alguns casos práticos, no entanto, devido às restrições dimensionais, os corpos do sistema não se sobrepõe, ou seja, não realizam uma rotação relativa completa entre si. Conseqüentemente, nestes casos os inteiros  $n_i$  restringem-se somente a 0.

Como exemplo, adota-se um sistema simétrico, em relação aos parâmetros de massa e dimensões: os corpos extremos 1, 5 são idênticos com massa  $m_1$  e dimensão longitudinal  $2a$ , os corpos 2, 4 são idênticos com massa  $m_2$  e dimensão longitudinal  $2b$  e diferentes do corpo central que possui massa  $m_3$  e comprimento  $2c$ . Neste caso, tem-se que:

$$\left\{ \begin{array}{l} K_1 = A_1 = D_4 \\ K_2 = B_2 = C_3 \\ K_3 = E_1 = E_2 = G_3 = G_3 \\ K_4 = F_2 = F_3 \\ K_5 = H_1 = H_2 = H_3 = I_2 = I_3 = I_4 \\ K_6 = J_1 = J_2 = J_3 = J_4 \end{array} \right.$$

onde

$$\left\{ \begin{array}{l} K_1 = abm_1(2m_1 + 3m_2 + 2m_3) \\ K_2 = bc(2m_1 + m_2)m^* \\ K_3 = acm_1m^* \\ K_4 = [b(2m_1 + m_2)]^2 \\ K_5 = abm_1(2m_1 + m_2) \\ K_6 = a^2m_1^2 \end{array} \right.$$

e  $m^* = 2m_1 + 2m_2 + m_3$  é a massa total do sistema. Note que não é possível reduzir o número de constantes  $K_i$  acima mesmo adotando um sistema cujos corpos são todos iguais entre si. As quatro expressões (5.1.1) podem ser apresentadas de maneira mais compacta em forma matricial, como se segue

$$\begin{bmatrix} K_1 & 0 & 0 & 0 & K_3 & 0 & 0 & K_5 & 0 & K_6 \\ 0 & K_2 & 0 & 0 & K_3 & K_4 & 0 & K_5 & K_5 & K_6 \\ 0 & 0 & K_2 & 0 & 0 & K_4 & K_3 & K_5 & K_5 & K_6 \\ 0 & 0 & 0 & K_1 & 0 & 0 & K_3 & 0 & K_5 & K_6 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.1.2)$$

e o vetor  $X$ , função das coordenadas  $\phi$ , é dado por

$$\begin{aligned} X(\phi) = & [\sin(\phi_1), \sin(\phi_2), \sin(\phi_3), \sin(\phi_4), \sin(\phi_1 + \phi_2), \sin(\phi_2 + \phi_3), \\ & \sin(\phi_3 + \phi_4), \sin(\phi_1 + \phi_2 + \phi_3), \sin(\phi_2 + \phi_3 + \phi_4), \\ & \sin(\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4)]^T \end{aligned}$$

Até o momento de conclusão deste trabalho, não se teve conhecimento, por parte do autor, de um método de resolução geral da equação acima. Uma alternativa é obter famílias de solução como procede-se abaixo.

**Exemplo 5.1.1.** *Considerando  $\omega_0 \neq 0$ , determina-se a seguir as soluções para três casos:*

$\phi_1 = \phi_3$  e  $\phi_2 = \phi_4$  *Torna o sistema de equações acima simétrico de maneira que apenas o primeiro par de equações seja necessário resolver. Obtém-se a seguinte solução em  $[0, 2\pi[$ :  $\phi_1 = (0, 0, \pi, \pi)$ ,  $\phi_2 = (0, \pi, 0, \pi)$ .*

$\phi_1, \phi_3 = \phi$  e  $\phi_2, \phi_4 = -\phi$  *Possui uma única solução  $\phi = 0$ .*

$\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4 = \phi$  *As quatro equações de equilíbrio simplificam em uma única expressão, dada por*

$$(K_2 - K_1) \sin(\phi) + K_4 \sin(2\phi) + K_5 \sin(3\phi) = 0$$

*através da qual obtém-se a seguinte solução*

$$\phi = \begin{bmatrix} 0 \\ \pi \\ \arctan\left(\frac{\sqrt{Z_1+2K_4\sqrt{Z_2}}}{K_5}, -\frac{K_4-\sqrt{Z_2}}{K_5}\right) \\ \arctan\left(-1/2\frac{\sqrt{Z_1+2K_4\sqrt{Z_2}}}{K_5}, -1/2\frac{K_4-\sqrt{Z_2}}{K_5}\right) \\ \arctan\left(\frac{\sqrt{Z_1-2K_4\sqrt{Z_2}}}{K_5}, -\frac{K_4+\sqrt{Z_2}}{K_5}\right) \\ \arctan\left(-1/2\frac{\sqrt{Z_1-2K_4\sqrt{Z_2}}}{K_5}, -1/2\frac{K_4+\sqrt{Z_2}}{K_5}\right) \end{bmatrix}$$

*onde*

$$Z_1 = -2K_4^2 + 12K_5^2 + 4K_5K_2 - 4K_5K_1$$

$$Z_2 = K_4^2 - 4K_5K_2 + 4K_5K_1 + 4K_5^2$$

*Note que, em geral, quanto mais estrutura é dada às coordenadas  $\phi$  maior é o conjunto solução. Especula-se que não exista solução diferente da trivial para o caso geral do equilíbrio relativo do sistema acima.*

## 5.2 Fases Geométricas: Análise

Como comentado no Capítulo 3, as conexões podem ser vistas como descrições da influência do movimento horizontal, ou seja, movimento descrito no espaço  $H_q$ , no movimento do sistema no espaço vertical. Em geral, esta influência não é constante mas regida por um comportamento não linear e, em alguns casos, esta conexão pode determinar uma curvatura no espaço de configuração do sistema, sendo esta descrita pelos símbolos de Christoffel.

Em geral, pode-se esperar que um movimento cíclico descrito no espaço de base  $B$ , que corresponde a um movimento horizontal conforme ao comentários da Seção 2.5, não corresponda a um movimento cíclico no espaço de configuração total  $Q$ . Apesar disso, o movimento da configuração do sistema percorrerá uma curva aberta, que descreve a curva cíclica ou fechada quando projetada no espaço de base  $B$ , mas que sofrerá um deslocamento equivalente em  $Q$  e correspondente aos pontos de partida e chegada do percurso fechado em  $B$ . Este deslocamento sofrido pela configuração do sistema é um movimento vertical, geralmente definido por um elemento da fibra  $G$ , e é denominado de *mudança de fase* ou *fase geométrica*, como comentado na Seção B.3. Quando  $\mu_S = 0$ , a magnitude da mudança de fase é dependente da área interna ao percurso fechado em  $B$  e da geometria da conexão envolvida, (Bloch, 2003; Marsden, 2004).

A importância do mecanismo que define as fases geométricas deve-se, sobretudo, à sua aplicação no projeto de movimentos de locomoção em sistemas robóticos multiarticulados. Um exemplo trivial, embora interessante, é dado em (Littlejohn e Reinsch, 1997). Como será mostrado a seguir, o cálculo da mudança de fase reflete a alteração do tensor travado de inércia com relação à mudança de forma do sistema.

O momento angular do sistema  $\boldsymbol{\mu}$ , dado no referencial inercial, pode ser obtido a partir da matriz de inércia  $\mathbb{J}$  e da velocidade angular  $\boldsymbol{\omega}$  através da seguinte expressão:

$$\boldsymbol{\mu} = \mathbb{J}\boldsymbol{\omega} \quad (5.2.1)$$

O momento angular total é obtido pela expressão

$$\bar{\boldsymbol{\mu}} = \sum_{k=1}^N \mu_k = \mathbf{1}_N^T \mathbb{J} \boldsymbol{\omega} \quad (5.2.2)$$

onde  $\mathbf{1}_N$  é um vetor coluna com  $N$  uns. Assume-se, na análise realizada a seguir, que o

sistema possui momento angular total nulo. Então

$$\mathbf{1}_N^T \mathbb{J} \boldsymbol{\omega} = \bar{\boldsymbol{\mu}} = 0, \quad \Rightarrow \quad \mathbf{1}_N^T \mathbb{J} d\boldsymbol{\theta} = 0 \quad (5.2.3)$$

onde  $d\boldsymbol{\theta} = [d\theta_1, \dots, d\theta_N]^T$ . Expandindo o vetor  $d\boldsymbol{\theta}$  de maneira análoga ao realizado em (4.3.20), segue que

$$d\boldsymbol{\theta} = \mathbf{1}_N d\theta_1 + \mathbf{M} d\boldsymbol{\phi}$$

onde  $\mathbf{M}$  é uma matriz  $N \times (N-1)$  definida em (4.3.21). Neste caso o espaço de grupo é o grupo de Lie  $SO(2)$  e parametrizado pela coordenada  $\theta_1$ . Logo, considerando momento angular nulo e a partir da Eq. (5.2.3) tem-se que

$$\begin{aligned} \mathbf{1}_N^T \mathbb{J} \mathbf{1}_N d\theta_1 &= -\mathbf{1}_N^T \mathbb{J} \mathbf{M} d\boldsymbol{\phi} \\ d\theta_1 &= -\frac{\mathbf{1}_N^T \mathbb{J} \mathbf{M}}{\mathbf{1}_N^T \mathbb{J} \mathbf{1}_N} d\boldsymbol{\phi} \end{aligned} \quad (5.2.4)$$

Como pode-se observar, o momento de inércia instantâneo  $\mathbf{1}_N^T \mathbb{J} \mathbf{1}_N$  é dependente da forma do sistema e corresponde ao elemento (3,3) do tensor travado de inércia em (4.4.4). De (5.2.4), segue que

$$\Delta\theta_1 = -\int_{\Gamma} \mathcal{A}(\boldsymbol{\phi}) d\boldsymbol{\phi} \quad (5.2.5)$$

onde  $\Gamma$  é um caminho fechado no espaço de base  $B$ , que corresponde a um movimento horizontal em função da conexão  $\mathcal{A}(\boldsymbol{\phi})$ . O escalar  $\mathbf{1}_N^T \mathbb{J} \mathbf{1}_N$  corresponde à inércia travada do sistema, cuja forma é determinada por  $\boldsymbol{\phi}$ . Em geral, a integral de linha acima avaliada em um caminho fechado em  $B$  fornece um valor não nulo  $\Delta\theta_1$ , que corresponde a um deslocamento ou uma mudança de fase no espaço de grupo  $G$ . Esta mudança de fase determina uma restrição linear nas velocidades angulares relativas  $\boldsymbol{\phi}$ . Esta restrição é não-integrável, ou não-holonômica, no sentido de Frobenius, conforme a introdução da Seção 2.1.2.

*Observação 5.2.1.* Uma dada conexão é dita **plana** ou **chata**<sup>3</sup> se for desprovida de curvatura. Neste caso, a conexão representa uma aplicação constante e a mudança de fase, correspondente a um percurso fechado no espaço  $B$ , é dada simplesmente por um valor proporcional à área definida pelo interior do percurso fechado em  $B$ , ou seja, proporcional a uma métrica Euclidiana. Observe que, à princípio, nada pode ser concluído com relação às fases geométricas de sistemas com conexões de curvaturas planas.

No caso  $G = SE(2)$ , o componente da dinâmica rotacional da aplicação momento  $\mathbf{J}$  em

<sup>3</sup>Do inglês *flat connections*.

$T^*Q$ , em coordenadas inerciais, é:

$$\mathbf{J}(3) = (\mathbf{r}_{cm} \times \mathbf{p}_{cm}) + \bar{\boldsymbol{\mu}} = r_x p_y - r_y p_x + \sum_{i=1}^N \mu_i = 0 \quad (5.2.6)$$

onde a operação  $\times$  corresponde ao produto vetorial no plano,  $\mathbf{r}_{cm} = (r_x, r_y)^T$  e  $\mathbf{p}_{cm} = (p_x, p_y)^T$  são a posição e o momento linear do centro de massa do sistema, dados em relação ao referencial inercial. Observe que a primeira parcela da expressão do momento angular acima, dado por  $\mathbf{r}_{cm} \times \mathbf{p}_{cm}$ , deve-se à translação do sistema com relação à origem do referencial inercial. Neste caso, observa-se, também, componentes da mudança de fase nos componentes de translação do sistema, (Melli et al., 2006).

### 5.2.1 O Contexto Geométrico

Recorda-se que o grupo de Lie  $SE(2)$  não é abeliano e que, por sua vez, rende uma álgebra  $\mathfrak{se}(2)$  não abeliana, refira a Seção A.2.2 para detalhes adicionais. Pode-se mostrar que a dinâmica no subespaço abeliano  $SO(2)$  é desacoplada do movimento no espaço vetorial  $\mathbb{R}^2$ , sendo este último o subespaço não compacto do grupo  $SE(2)$ . Um breve detalhamento disto é feito na Seção B.2.

*Observação 5.2.2.* O desacoplamento ocorre apenas em um sentido, ou seja, o componente de translação **depende** da parte abeliana do grupo.

*Observação 5.2.3.* A holonomia não nula para o componente de translação da conexão será possível apenas quando os pontos da parametrização, do deslocamento linear do sistema, forem escolhidos diferentes do centro de massa do mesmo. Ou seja, a mudança de fase não será observada se o centro de massa do sistema for o ponto escolhido para parametrizar o componente de movimento linear do mesmo. Isto está em acordo com a conservação da quantidade de movimento linear enunciado pelo Teorema de Noether.

Parametrizando-se o componente de translação do espaço do grupo  $SE(2)$  pela distância do centro de massa do sistema  $\mathbf{r}_{cm}$ , a holonomia da conexão mecânica deve-se apenas à parte abeliana de  $SE(2)$ . Logo, para  $s(0) = e$ , a holonomia da parte abeliana do grupo pode ser obtida por, (Marsden et al., 1990):

$$s(1) = \exp\left(-\int_0^1 \mathcal{A}_{\mathfrak{g}}(r)\dot{r}(t)dt\right) = \exp\left(-\int_{\partial\Omega} \mathcal{A}_{\mathfrak{g}}(r)dr\right) = \exp\left(-\iint_{\Omega} \mathbf{D}\mathcal{A}_{\mathfrak{g}}(r)dA\right) \quad (5.2.7)$$

onde  $\mathcal{A}_{\mathfrak{g}} : TQ \rightarrow \mathfrak{g}$  é o componente abeliano da conexão e  $\mathbf{D}$  representa a derivada covariante exterior. A última igualdade em (5.2.7) deve-se a generalização do Teorema



de Stokes e à aplicação  $\exp : \mathfrak{se}(2) \rightarrow SE(2)$ , dada por:

$$\exp(\omega, v_x, v_y) = (\theta, r_x, r_y)$$

onde  $(\omega, v_x, v_y) \in \mathbb{R}^3 \simeq \mathfrak{se}(2)$  e  $\exp$  é a aplicação exponencial, detalhada para o grupo  $SE(2)$  na Seção A.2.2. Note que a expressão (5.2.7) não envolve uma parametrização do caminho fechado no espaço de base  $B$ . Por outro lado, a holonomia do componente de translação de fato depende dos pontos inicial e final da parametrização escolhida.

Nos casos em que  $G$  é um grupo de simetria abeliano, a mudança de fase também pode ser calculada através da curvatura  $\mathcal{B}$  da conexão principal que, a partir de (5.2.7) fornece:

$$\text{holonomia} := \theta(1) = - \int_{\Gamma} \mathcal{A}(\phi) d\phi = - \iint_{\Omega} \mathcal{B} d\Omega \quad (5.2.8)$$

onde  $\Gamma = \partial\Omega$ . A magnitude da mudança de fase é função da curvatura da conexão e da área definida pelo caminho percorrido no espaço de base.

**Exemplo 5.2.1.** Para o sistema de 3-corpos, em que  $(\phi_1, \phi_2)$  parametrizam o espaço de base  $B$ , as fases geométricas podem ser calculadas segundo a expressão dada a seguir:

$$\begin{aligned} \Delta\theta_1 &= - \int_{\Gamma} \mathcal{A}(\phi) d\phi = \\ &= - \left[ \int_{(0,0)}^{(\alpha,0)} f_1(\phi_1) d\phi_1 + \int_{(\alpha,0)}^{(\alpha,\beta)} f_2(\phi_2) d\phi_2 + \int_{(\alpha,\beta)}^{(0,\beta)} f_1(\phi_1) d\phi_1 + \int_{(0,\beta)}^{(0,0)} f_2(\phi_2) d\phi_2 \right] \end{aligned} \quad (5.2.9)$$

onde  $\Gamma$  é o caminho fechado no espaço  $(\phi_1, \phi_2)$  dado por  $\Gamma = [(0, 0), (\alpha, 0), (\alpha, \beta), (0, \beta), (0, 0)]$ . Alternativamente, a curvatura da conexão neste caso é obtida através, refira à Seção B.4 para detalhes:

$$\mathcal{B} = \mathbf{d}\mathcal{A} = \left( \frac{\partial f_2}{\partial \phi_1} - \frac{\partial f_1}{\partial \phi_2} \right) d\phi^1 \wedge d\phi^2 \quad (5.2.10)$$

As Figuras 5.1 e 5.2 ilustram a mudança de fase e a curvatura da conexão, respectivamente. A Seção B.4 do Apêndice B apresenta algumas expressões para o cálculo das fases geométricas do sistema com 5-corpos.

### 5.3 Análise de Controlabilidade

Seja  $V$  uma vizinhança de um ponto  $z \in M$ , onde  $M$  representa o espaço de fase de velocidade  $TQ$  ou de momento  $P = T^*Q$  do sistema, e seja dado o conjunto de controle  $U \subset \mathbb{R}^m$  tal que  $u : [0, T] \mapsto U$ , para todo  $T > 0$ .

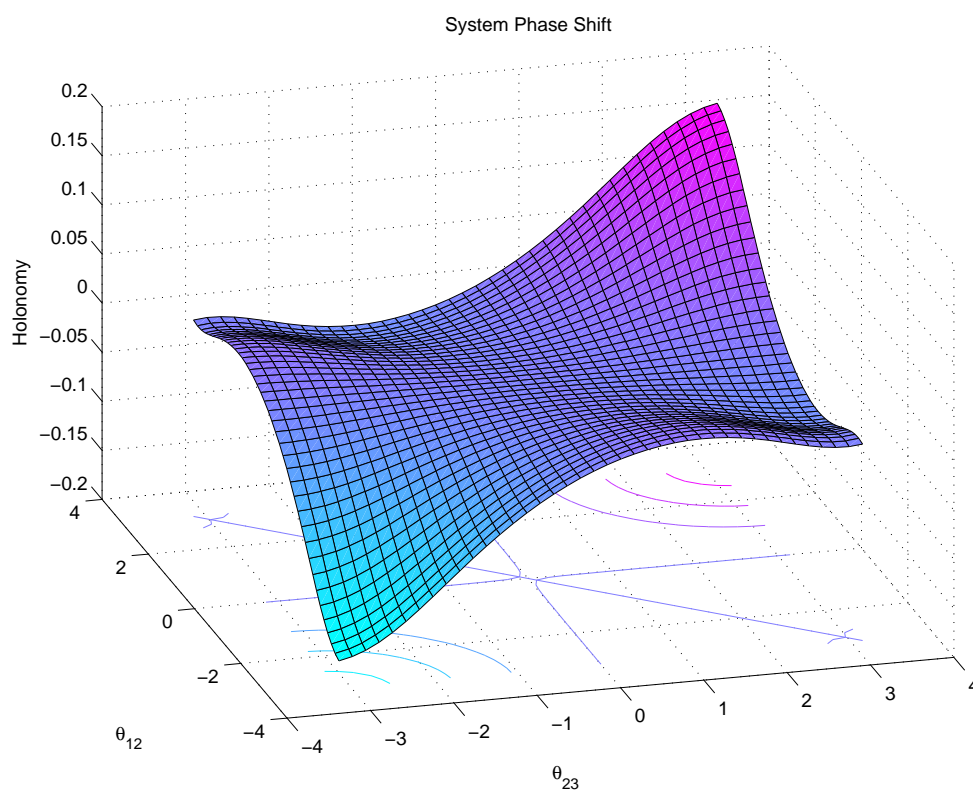


Figura 5.1: Mudança de fase do sistema de três corpos. A mudança de fase foi calculada a partir de (5.2.9), para um caminho fechado no espaço de base  $B$  parametrizado por  $\alpha, \beta = 3$ . As coordenadas do espaço de base são dadas por  $(\phi_1, \phi_2) = (\theta_{12}, \theta_{23})$ .

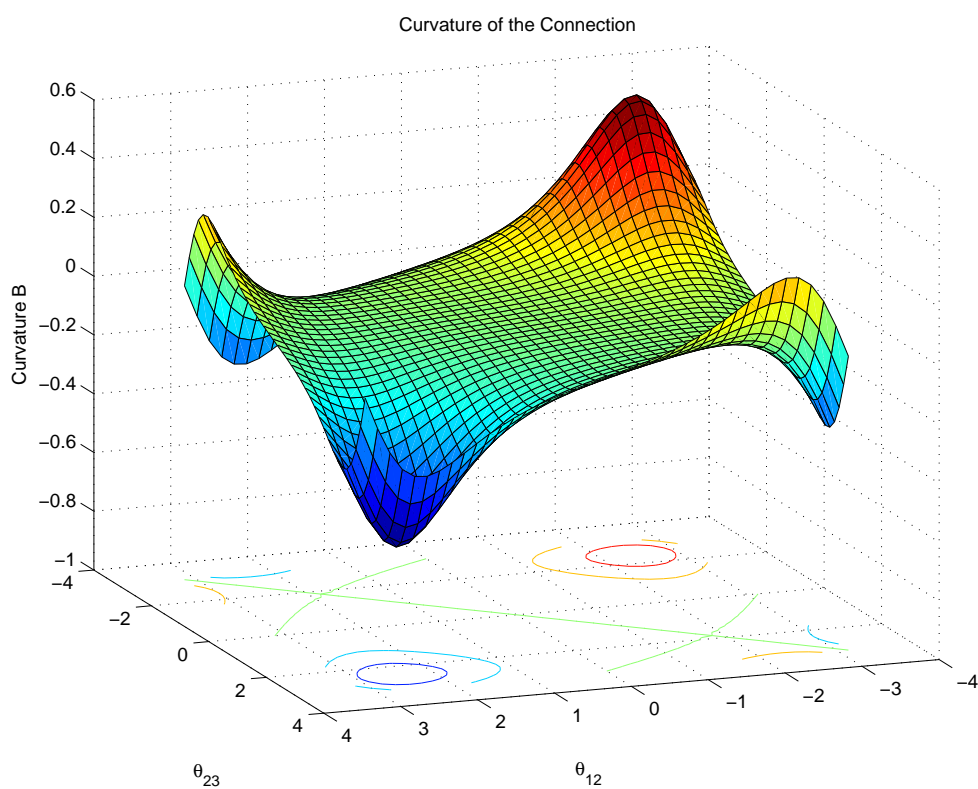


Figura 5.2: Curvatura  $\mathcal{B}$  relativa à conexão principal do sistema de três corpos. A curvatura da conexão  $\mathcal{A}$  dada em (5.2.9) foi obtida a partir de (5.2.10).

**Definição 5.3.1** (Conjunto Alcançável). O conjunto alcançável a partir de  $z_0$  em tempo  $T$ , definido por  $R_V(z_0, T) \subset M$ , é o conjunto de pontos  $z(t) \in V$  para os quais existem entradas  $u(t) \in U$  que conduzem o estado do sistema do ponto  $z(0) = z_0 \in V$  ao ponto  $z(T)$ , onde  $0 \leq t \leq T$ , ou seja:

$$R_V(z_0, T) = \{z \in M \mid \exists u(t) \in U, z(0) = z_0, z(t) \in V, \forall t \in [0, T]\}$$

Observe, pela notação  $R_V(\cdot)$ , que os critérios de acessibilidade e controlabilidade, apresentados a seguir, são definidos para todas as possíveis vizinhanças do ponto  $z_0$ , representadas genericamente por  $V$ . O conjunto alcançável em até o tempo  $T$  é definido por:

$$R_V(z_0, \leq T) = \bigcup_{0 \leq t \leq T} R_V(z_0, t). \quad (5.3.1)$$

Como visto previamente no Capítulo 4, o sistema multi-articulado é um sistema mecânico simples. O modelo dinâmico de um sistema de controle na forma afim  $(Q, \{f, g_1, \dots, g_m\}, U)$ , onde  $\dim Q = n$ , é tal que

$$\dot{z}(t) = f(z) + \sum_{i=1}^m g_i(z)u_i, \quad m < n \quad (5.3.2)$$

onde  $z \in P$ ,  $f$  é o campo vetorial da dinâmica livre e os  $g_i$  são os campos vetoriais de entrada. As funções de controle são dadas por  $u \in U$ .

### 5.3.1 Álgebra e Distribuição de Acessibilidade de Sistemas Afim

**Definição 5.3.2** (Acessibilidade<sup>4</sup> Local). O sistema (5.3.2) é dito acessível a partir de  $z_0 \in T^*Q$  se  $R_V(z_0, \leq T)$  contém um aberto não vazio em  $T^*Q$ , para todo  $V$  de  $z_0$  e  $T > 0$ .

A álgebra de acessibilidade  $\mathcal{C}$  é a menor álgebra fechada em relação ao colchete de Jacobi-Lie que contém os campos vetoriais  $\{f, g_1, \dots, g_m\}$ . O próximo resultado simplifica a obtenção desta álgebra.

**Proposição 5.3.1.** *Qualquer iteração do colchete de Jacobi-Lie dos campos vetoriais  $\{f, g_1, \dots, g_m\}$  é uma combinação linear das iterações à esquerda do colchete de Jacobi-Lie de  $\{f, g_1, \dots, g_m\}$ .*

<sup>4</sup>Ou alcançabilidade, em algumas referências.

*Demonstração.* Este resultado segue das propriedades das álgebras de Lie, uma vez que um conjunto de campos vetoriais em  $Q$  munido do colchete de Lie forma uma álgebra de Lie.

Seja  $L^j$  uma álgebra de grau  $j$  e definida pelo colchete de Lie  $[\cdot, \cdot]$ . Por definição, qualquer colchete de grau  $j + 1$  pode ser escrito pelo colchete de elementos de graus  $j$  e 1, ou seja,  $[L^j, L^1] = L^{j+1}$ . Generalizando, mostra-se que qualquer colchete de grau  $j + l$  pode ser escrito pelo colchete de elementos de graus  $j$  e  $l$ , isto é

$$[L^l, L^j] \subseteq L^{l+j}$$

Assume-se que  $[L^l, L^j] \subseteq L^{l+j}$  para todo  $j$ . Então, por indução, segue que

$$\begin{aligned} [L^l, L^{j+1}] &= [L^l, [L^j, L^1]] \subseteq [[L^l, L^1], L^j] + [[L^l, L^j], L^1] \\ &\subseteq [L^{l+1}, L^j] + [L^{l+j}, L^1] \\ &\subseteq L^{l+j+1} \end{aligned}$$

Para mostrar a implicação inversa, ou seja, qualquer colchete de grau  $j$  é dado pelos colchetes de  $j$  elementos de grau 1, basta mostrar que o sub-espaço de um produto de colchetes iterados à esquerda é uma sub-álgebra da álgebra de qualquer combinação dos colchetes. Sejam dois colchetes com graus  $l$  e  $j$  dados por

$$\begin{aligned} X &= [X_j, \dots, [[X_3, X_2], X_1], \dots,] \\ Y &= [Y_l, \dots, [[Y_3, Y_2], Y_1], \dots,] \end{aligned}$$

Por indução, pode-se mostrar que  $[X, Y]$  faz parte desta sub-álgebra para quaisquer  $l$  e  $j$ . Para todo  $Y$ , fixado  $l$ , verificar a tese nos casos  $j = 1, 2$  segue diretamente das propriedades de anti-simetria e identidade de Jacobi da álgebra de Lie. Supondo que a mesma vale para  $j = k$ , verifica-se a condição para  $j = k + 1$  através na expressão:

$$[X, Y] = [[X_j, X'], Y] = -[Y, [X_j, X']]$$

onde  $X' = [X_{j-1}, \dots, [X_3, [X_2, X_1]] \dots]$ . Pela identidade de Jacobi, segue que

$$[Y, [X_j, X']] + [X', [Y, X_j]] + [X_j, [X', Y]] = 0$$

Das duas últimas expressões tem-se

$$\begin{aligned} [X, Y] &= -[X', [Y, X_j]] - [X_j, [X', Y]] \\ &= [X', [X_j, Y]] - [X_j, [X', Y]] \end{aligned}$$

O primeiro termo  $[X', [X_j, Y]]$  pertence a sub-álgebra uma vez que, pela hipótese, um elemento de grau  $j = k$  pertence a mesma sub-álgebra e o grau de  $X'$  é  $k$ . Como  $[X', Y]$  pertence a sub-álgebra, o segundo termo também pertence a sub-álgebra. Logo, um elemento genérico da álgebra pode ser reescrito na forma de produtos sucessivos à esquerda com o colchete de Lie (sub-álgebra).  $\square$

Aplicando o resultado acima à definição da álgebra de acessibilidade acima tem-se que, para o campo vetorial  $X_{i_k} \in \{f, g_1, \dots, g_m\}$ ,  $0 \leq i_k \leq m$ , a álgebra de acessibilidade do sistema  $\mathcal{C}$ , ou álgebra de Lie de controle, é obtida pela seguinte definição, empregando-se a notação de índices múltiplos:

$$\mathcal{C}(\{f, g_1, \dots, g_m\}) := [X_{i_1}, [X_{i_2}, \dots, [X_{i_{k-1}}, X_{i_k}] \dots]], \quad k \geq 1, \quad 0 \leq i_1, \dots, i_k \leq m \quad (5.3.3)$$

Esta álgebra é também representada pela seguinte notação  $\mathcal{C}(\{f, g_1, \dots, g_m\}) = \text{Lie}(\{f, g_1, \dots, g_m\})$ . A distribuição associada a acessibilidade  $\mathcal{C}$  é involutiva e determinada por

$$\mathcal{C}(z) = \text{span}\{X(z) \mid X \in \mathcal{C}\}, \quad z \in T^*Q \quad (5.3.4)$$

**Teorema 5.3.2** (Acessibilidade Local: Suficiência, (Bloch, 2003)). *Assume-se que o sistema de controle afim (5.3.2) seja suave. Se o critério de posto pleno para acessibilidade  $\dim \mathcal{C}(z_0) = n$ , conhecido como a condição de posto da álgebra de Lie (LARC)<sup>5</sup>, é verificado, então o conjunto  $R_V(z_0, \leq T)$  possui interior não vazio para todo  $T > 0$  e o sistema é acessível a partir de  $z_0 \in T^*Q$ .*

A condição acima pode ser observada quando:

$$\dim \mathcal{C} = \dim(\text{span}\{c_i\}) = \dim(\text{Im}[c_i]) = \text{rank}[\mathcal{C}] = n \quad (5.3.5)$$

**Definição 5.3.3.** O sistema (5.3.2) é dito acessível se a condição LARC for satisfeita para todo  $z \in T^*Q$ .

**Definição 5.3.4.** Um conjunto  $U$  é denominado próprio se  $\mathbf{0} \in \text{int}(\text{conv})(U)$ , onde  $\text{int}$  é interior do menor conjunto convexo, representado por  $\text{conv}$ , contendo  $U$ . O conjunto convexo de  $U$  é definido por

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i u_i, \quad k \in \mathbb{N} : \lambda_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$$

<sup>5</sup>Do inglês *Lie Algebra Rank Condition*.

Ademais, para sistemas definidos em uma variedade analítica e quando  $U$  é próprio, a condição de acessibilidade implica na verificação do critério de posto para acessibilidade (LARC), ou seja, o LARC é uma condição necessária e suficiente para a acessibilidade do sistema.

### 5.3.2 Controlabilidade

O conceito de controlabilidade de um sistema pode ser definido como:

**Definição 5.3.5** (Controlabilidade). O sistema (5.3.2) é dito controlável de  $z_0 \in T^*Q$  se, para todo  $z \in T^*Q$ , existir um  $T > 0$  tal que  $z \in R_V(z_0, T)$ , para  $z \in V$ .

**Definição 5.3.6** (Controlabilidade em Tempo Pequeno<sup>6</sup>: (Bullo e Lewis, 2005)). O sistema (5.3.2) é dito controlável em tempo pequeno de  $z_0 \in T^*Q$  se existir um  $T > 0$  tal que  $R_V(z_0, \leq T)$  contém uma vizinhança  $V$  de  $z_0$ .

Note que a condição acima  $V \subset R_V(z_0, \leq T)$  é equivalente à condição de  $z_0$  estar no interior de  $R_V(z_0, \leq T)$ , ou seja  $z_0$  não pode ser um ponto limite de  $R_V(z_0, \leq T)$ . Esta condição permite que a trajetória do sistema possa convergir a  $z_0$  de todas as direções; fato que não é verificado se  $z_0$  pertence a fronteira da região  $R_V(z_0, \leq T)$ . Isto permite que o estado do sistema possa ser levado ao ponto  $z_0$  em tempo suficientemente pequeno. Seguem abaixo algumas definições necessárias a um resultado para o STLC.

Define-se por  $\delta^a(B)$  como o número de vezes que o campo vetorial  $X_a$ , para  $a = 0, \dots, m$ , é utilizado em  $B$ . O grau de um colchete de Lie  $B$ , simbolizado por  $\delta(B)$ , é obtido fazendo-se

$$\delta(B) = \sum_0^m \delta^a(B)$$

Um elemento  $B \in Br(\mathbf{X})$  é dito *ruim* se  $\delta^0(B)$  for ímpar e  $\delta^i(B)$ ,  $i = 1, \dots, m$ , par (incluindo o zero). Se um elemento  $B \in Br(\mathbf{X})$  não é *ruim*, ele é dito *bom*.

**Teorema 5.3.3** (Controlabilidade em Tempo Pequeno: (Sussmann, 1987)). *Seja o sistema (5.3.2) com ponto de equilíbrio em  $z_0 \in T_q^*Q$ , ou seja,  $f(z_0) = 0$ , e assume-se que (5.3.2) satisfaça a condição LARC em  $z_0$ . Se  $X \in Br(\mathbf{X})$  for ruim, então existem  $Y_1, \dots, Y_k$  tais que*

$$X = a^i Y_i,$$

<sup>6</sup>Do original *Small-time local controllability* - (STLC).

para  $a^1, \dots, a^k \in \mathbb{R}$ , e, para  $i = 1, \dots, m$

$$\delta(Y_i) < \delta(X)$$

Então o sistema (5.3.2) é STLC de  $z_0$ .

Ou seja, se todo  $B \in Br(\mathbf{X})$  ruim puder ser escrito como uma combinação linear de componentes bons de grau menor, e o sistema for acessível de  $z_0$ , então o sistema é STLC de  $z_0$ . Um corolário do teorema acima estabelece que um sistema na forma afim é STLC a partir de  $z_0$  se  $z_0$  for um ponto de equilíbrio e se o critério de acessibilidade for verificado em  $z_0$ .

**Teorema 5.3.4** (Controlabilidade Especial: (Bloch, 2003)). *Um sistema de controle na forma afim cujos, campos vetoriais são analíticos, é controlável se  $\dim C(q) = n$ , para todo  $q \in Q$ , e se uma das seguintes condições se verificar:*

- $f = 0$ , ou
- $f$  possui divergente nulo e  $Q$  é compacto e Riemanniano.

Observe que apenas os modelos cinemáticos do sistema multi-corpos se enquadrariam no primeiro caso acima, Seção C.2.4. Uma particularização da segunda condição acima diz respeito aos casos que o campo vetorial  $f$  é Hamiltoniano<sup>7</sup>. Note que, embora o sistema mecânico em estudo seja Hamiltoniano, como observado através da dinâmica livre dada pelo campo vetorial  $f$  em (4.2.1) e (4.2.5), o espaço de fase do mesmo não é compacto, apesar de Riemanniano. A qualidade de não compacidade do espaço de fase  $T^*Q$  deve-se ao fato do mesmo conter o espaço vetorial  $\mathbb{R}^2$ , um espaço não limitado.

### Controlabilidade com o Modelo Cinemático do Sistema

Os modelos cinemáticos são, em determinadas situações,<sup>8</sup> livres da presença do campo vetorial relativo à dinâmica livre  $f$  e conseqüentemente são empregados na geração de trajetórias para os modelos dinâmicos correspondentes em razão de preservarem a estrutura dos canais de entrada  $\tau$  do sistema. Um modelo cinemático, no espaço de

<sup>7</sup>Consultar a Seção 2.2.

<sup>8</sup>Quando tem-se momento nulo, ver Seção C.2.4.



configuração  $Q$  de dimensão  $n$ , pode ser escrito como:

$$\dot{q} = \sum_{i=1}^m u_i X^i(q), \quad m < n \quad (5.3.6)$$

onde  $q \in Q$  é a configuração,  $u \in U \subset \mathbb{R}^m$  são as funções de entrada e  $\mathcal{F} = \{X^1, X^2, \dots, X^m\}$  é um conjunto de campos vetoriais completos em  $Q$ . Por causa da reversibilidade de sistemas sem dinâmica livre (Sontag, 1998), a acessibilidade implica em controlabilidade para este caso, ou seja, a controlabilidade pode ser verificada através do critério de posto para acessibilidade.

### 5.3.3 Controlabilidade do Sistema de Dois Corpos

#### Controlabilidade com Modelo Cinemático do Sistema

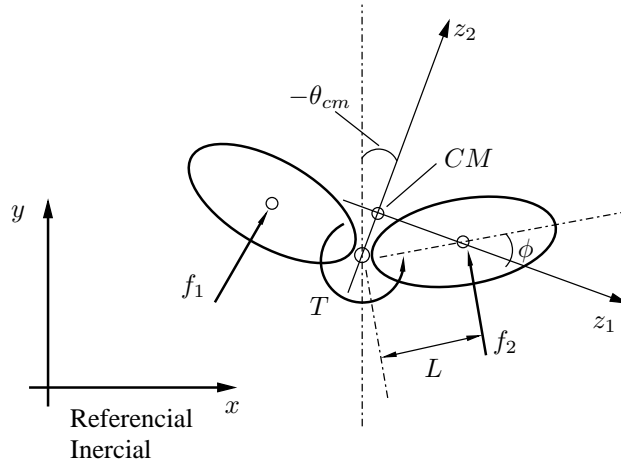


Figura 5.3: Cinemática do sistema de dois corpos.

A seguir procede-se com a análise de controlabilidade para o sistema de dois corpos articulados. O modelo cinemático do sistema de dois corpos da Figura 5.3 é dado por

$$\dot{x} = (f_1 - f_2) \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \cos(\theta) - (f_1 + f_2) \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \sin(\theta) \quad (5.3.7)$$

$$\dot{y} = (f_1 - f_2) \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \sin(\theta) + (f_1 + f_2) \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \cos(\theta) \quad (5.3.8)$$

$$\dot{\theta} = -(f_1 - f_2)L \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \quad (5.3.9)$$

$$\dot{\phi} = T \quad (5.3.10)$$

que corresponde aos campos vetoriais de controle

$$g_1 = \begin{bmatrix} \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \cos(\theta) - \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \sin(\theta) \\ \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \sin(\theta) + \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \cos(\theta) \\ -L \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad g_2 = \begin{bmatrix} -\sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \cos(\theta) - \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \sin(\theta) \\ -\sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \sin(\theta) + \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \cos(\theta) \\ L \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$g_3 = [0, 0, 0, 1]^T$$

Observe que o sistema é composto por um atuador rotativo interno  $T$  além de duas forças propulsores  $f_1$  e  $f_2$ , um em cada corpo, e responsáveis pela condução do sistema ao longo da fibra  $G = SE(2)$ .

A distribuição gerada pelos campos vetoriais é regular, ou seja, a dimensão da distribuição é mantida constante para todo  $q = (r_x, r_y, \theta, \phi) \in Q$ . Logo, a condição de LARC é satisfeita com colchetes de grau dois ou maior, pois

$$\text{rank}[g_1, g_2, g_3, [g_1, g_2], [g_1, g_3], [g_2, g_3]] = 4 = \dim T_q Q$$

A combinação linear de colchetes até o segundo grau é suficiente para gerar as direções do espaço tangente à variedade de configuração  $Q$ , indicando a existência de um conjunto de acessibilidade aberto e não vazio  $R_V(q_0, \dot{q}_0, T) = T_{q_0} Q$ .

Tomando-se, por exemplo, o conjunto de campos vetoriais  $g_3, [g_1, g_2], [g_1, g_3]$ , e  $[g_1, [g_1, g_2]]$  pode-se facilmente verificar que estes geram um subespaço 4-dimensional de  $T_q Q$  apenas se  $\phi$  não for múltiplos de  $\pi$ , como mostra a solução de:

$$\det([g_3, [g_1, g_2], [g_1, g_3], [g_1, [g_1, g_2]]) = 2L^4 \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \cos^5\left(\frac{\phi}{2}\right) = 0$$

Uma rápida análise das equações do modelo cinemático do sistema reafirma este resultado, uma vez que, em  $\phi = \pi$  os corpos estão sobrepostos e o movimento do sistema na fibra se restringe aos dois sentidos da linha reta, que é um espaço unidimensional. Por outro lado, quando  $\phi = 0$ , o sistema se degenera ao corpo rígido com dois propulsores, cuja acessibilidade é verificada no subespaço 3-dimensional  $T_g SE(2) \subset T_q Q$ , onde  $g \in SE(2)$ .

### Controlabilidade com Modelo Dinâmico do Sistema

A análise com o modelo dinâmico do sistema de dois corpos mostrou resultado semelhante ao do modelo cinemático acima. Em geral, no entanto, é necessário obter colchetes de Jacobi-Lie de grau maior que dois de modo a gerar o espaço de fase.

O modelo dinâmico do sistema de 2-corpos simétrico, ou seja, em que os corpos são idênticos com relação aos parâmetros  $m_i, I_i, d_i$ , para  $i = 1, 2$ , mostrou-se acessível para qualquer  $z = (r_x, r_y, \theta_{cm}, \phi, p_{cm}, p_\phi)$ . Para um estado diferente do nulo, são necessários apenas colchetes de segunda e terceira ordens. Ou seja, seja a matriz  $C_3$  composta pelos oito primeiros campos vetoriais em ordem crescente de grau, dados por  $f, g1, g2, g3, [f, g1], [f, g2], [f, g3]$  e  $[f, [f, g1]]$ . A matriz  $C_3$  permite verificar o critério de posto pleno verificando a condição

$$\det(C_3(z)) \neq 0, \quad z \neq 0$$

Calculada para um ponto do estado na origem  $z = 0$ , a acessibilidade é alcançada somente com a avaliação dos colchetes de grau 4, em conjunto com alguns colchetes de menor grau obtidos acima. Com isso, obtêm-se a seguinte matriz construída pelos campos vetoriais que primeiro fornecem, na ordem de grau crescente, uma distribuição de dimensão igual ao espaço de momento  $T_q^*Q$ :

$$C_4(\mathbf{0}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{l}{2m^*(K+I)} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{m^*} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-l}{2(K+I)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{(K-I)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{l}{2(K+I)} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & l & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

cujas colunas correspondem aos campos vetoriais de entrada  $g1, g2, g3$  e aos  $[f, g1], [f, g2], [f, g3], [g1, [f, g2]]$  e  $[f, [g1, [f, g2]]]$  calculados na origem. Na matriz acima, tem-se que  $K = \epsilon d_1 d_2$ , como definido na Seção 4.2, e  $I = \tilde{I}_1 = \tilde{I}_2$ . Logo,  $rank(C_4(\mathbf{0})) = n = 8$ . Este resultado foi obtido com o modelo, cujo a dinâmica da fibra  $SE(2)$  é dada em função do centro de massa do sistema, apresentado em (4.3.16), e com campos vetoriais de entrada parametrizados por  $(u_1, u_2) = (f_1 + f_2, f_2 - f_1)$ .

*Observação 5.3.1.* O critério para verificar a acessibilidade localmente na origem equivale ao critério para acessibilidade forte, uma vez que o campo vetorial relativo a dinâmica livre nunca contribui com informação sobre o sistema, ou seja,  $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ .

Analogamente, a análise do modelo do sistema de 2-corpos, em que os corpos possuem propriedades físicas distintas, mostrou mesmo resultado ao apresentado acima. Isto vale tanto no caso em que este é modelado sob a abordagem Hamiltoniana quanto

Lagrangiana, independentemente da parametrização dos campos vetoriais relativos às entradas.

Resultados com sistemas de três ou mais corpos cujo as juntas rotativas são todas atuadas apresentam o mesmo resultado; como enunciado na seguinte proposição:

**Proposição 5.3.5** (Controlabilidade: Sistema de  $N$ -corpos). *Todo sistema multi-articulado de  $N$  corpos, totalmente atuado no espaço de base  $B$  e com, ao menos, duas forças de propulsão linearmente independentes e necessariamente aplicadas em corpos distintos, é acessível e controlável dos pontos de equilíbrio.*

Para um sistema multi-articulado de  $N$  corpos, cuja massa total é  $m^*$ , os campos vetoriais da dinâmica livre e das entradas, são dados genericamente por

$$f = \begin{bmatrix} p_x/m^* \\ p_y/m^* \\ X_\theta(\phi, p_\theta, p_\phi) \\ X_{\phi_1}(\phi, p_\theta, p_\phi) \\ \vdots \\ X_{\phi_{N-1}}(\phi, p_\theta, p_\phi) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ X_{p_{\phi_1}}(\phi, p_\theta, p_\phi) \\ \vdots \\ X_{p_{\phi_{N-1}}}(\phi, p_\theta, p_\phi) \end{bmatrix}, \quad g_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ X_{v_x}(\theta_{cm}, \phi) \\ X_{v_y}(\theta_{cm}, \phi) \\ X_{p_\theta}(\phi) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, m_p \quad (5.3.11)$$

Faz-se importante notar que os  $X_\theta$ ,  $X_{p_{(\cdot)}}$  e  $X_{\phi_{(\cdot)}}$  são funções de primeira, de segunda e de primeira ordem, respectivamente, das variáveis dos momentos  $p_\theta$  e  $p_\phi$ . Este fato servirá, a seguir, para estabelecer limitações da iteração dos colchetes de Lie para a construção de novas direções de movimento. Estas novas direções são representadas por componentes não nulos dos campos vetoriais obtidos pelo colchete de Lie. Os demais campos vetoriais, relativos aos torques nas juntas rotativas, são constantes e podem ser parametrizados simplesmente pela base canônica de  $T_\phi^*B$ , quando  $Q$  possui estrutura

principal, ou seja

$$g_{m_p+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{N+5} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, g_j = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{N+5} \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}, \dots, g_m = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{N+5} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \left. \vphantom{\begin{bmatrix} \mathbf{0}_{N+5} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}} \right\} (N-1) \quad (5.3.12)$$

Por serem constantes, tem-se que  $Dg_j \equiv \mathbf{0}$ , rendendo o vetor nulo como único elemento da álgebra com o colchete de Jacobi-Lie de grau maior ou igual a dois dos  $g_j$ :  $\text{ad}_{g_j}^k g_l \equiv \mathbf{0}$ , como definido na Seção A.1, para  $j, l = m_p + 1, \dots, m$  e  $\forall k > 0$ . Pode-se estender este resultado aos campos vetoriais dos propulsores.

**Lema 5.3.6.** *Todo colchete de Jacobi-Lie dos campos vetoriais de entrada do sistema multi-articulado é sempre nulo, ou seja,  $[g_i, g_k] = 0$ , para  $i, k = 1, \dots, m$ .*

Note que esta afirmação decorre independentemente dos campos vetoriais serem linearmente independentes ou não, mas é consequência do fato de que um componente não-nulo dos  $g_i$ , e que atua em uma determinada direção, não é uma função da variável correspondente a esta mesma direção. Por exemplo, os componentes não nulos dos  $g_i$  sempre atuam nas direções que correspondem aos momentos lineares e angulares. No entanto, estes não são funções das variáveis  $p_x, p_y, p_\theta, p_\phi$  que modelam as direções pois os campos vetoriais são funções apenas da configuração  $g = g(q)$ ,  $q \in Q$ .

Explorando a estrutura dos campos vetoriais que modelam o sistema, as propriedades de anti-simetria e da identidade de Jacobi do colchete de Lie-Jacobi podem ser utilizadas para obtenção de expressões que auxiliam na análise da álgebra de controlabilidade para colchetes de grau maiores ou iguais a três.

**Lema 5.3.7.** *Para colchetes de grau três  $[g_i, [f, g_k]] = [g_k, [f, g_i]]$ ,  $i, k = 1, \dots, m$ .*

*Demonstração.* Para  $i, k, l = 1, \dots, m$  e lembrando, do Lema 5.3.6, que  $[g_i, g_k] = 0$  tem-se, da identidade de Jacobi, que

$$\begin{aligned} [g_i, [f, g_k]] + [g_k, [g_i, f]] + [f, [g_k, g_i]] &= 0 \\ [g_i, [f, g_k]] + [g_k, [g_i, f]] + 0 &= 0 \\ [g_i, [f, g_k]] - [g_k, [f, g_i]] &= 0 \quad (\text{anti-simetria}) \\ [g_i, [f, g_k]] &= [g_k, [f, g_i]] \end{aligned}$$

□

**Lema 5.3.8.** Para colchetes de grau quatro, valem os seguintes:

1.  $[f, [g_i, [f, g_i]]] = [g_i, [f, [f, g_i]]]$ ,  $i = 1, \dots, m$
2.  $[g_i, [g_k, [f, g_l]]] = [g_k, [g_i, [f, g_l]]] = [g_l, [g_i, [f, g_k]]]$ ,  $i, k, l = 1, \dots, m$
3.  $[g_i, [f, [f, g_k]]] + [g_k, [f, [f, g_i]]] = 2[f, [g_i, [f, g_k]]]$ ,  $i, k = 1, \dots, m$

*Demonstração.* Para  $i, k, l = 1, \dots, m$ , segue que:

1. Tomando  $[f, g_i] = X$ , segue que

$$\begin{aligned} [f, [g_i, X]] + [X, [f, g_i]] + [g_i, [X, f]] &= 0 \\ [f, [g_i, X]] + 0 + [g_i, [X, f]] &= 0 \\ [f, [g_i, X]] - [g_i, [f, X]] &= 0 \quad (\text{anti-simetria}) \\ [f, [g_i, [f, g_i]]] &= [g_i, [f, [f, g_i]]] \end{aligned}$$

2. Mostra-se primeiro a igualdade  $[g_i, [g_k, [f, g_l]]] = [g_k, [g_i, [f, g_l]]]$ . Fazendo  $X = [f, g_l]$ , tem-se:

$$\begin{aligned} [g_k, [g_i, X]] + [X, [g_k, g_i]] + [g_i, [X, g_k]] &= 0 \\ [g_k, [g_i, X]] + 0 + [g_i, [X, g_k]] &= 0 \\ [g_k, [g_i, X]] - [g_i, [g_k, X]] &= 0 \quad (\text{anti-simetria}) \\ [g_k, [g_i, [f, g_l]]] &= [g_i, [g_k, [f, g_l]]] \end{aligned}$$

A segunda igualdade pode ser mostrada de maneira análoga a primeira, fazendo  $X = [f, g_k]$ , obtendo-se  $[g_i, [g_k, [f, g_l]]] = [g_l, [g_i, [f, g_k]]]$ .

3. Tomando  $X = [f, g_i]$ , tem-se:

$$\begin{aligned} [g_k, [f, X]] + [X, [g_k, f]] + [f, [X, g_k]] &= 0 \\ [g_k, [f, X]] - [X, [f, g_k]] - [f, [g_k, X]] &= 0 \quad (\text{anti-simetria}) \end{aligned} \tag{5.3.13}$$

A partir do colchete do meio da última expressão, segue:

$$[[f, g_i], [f, g_k]] = [[f, g_i], Y] = -[Y, [f, g_i]] \tag{5.3.14}$$

onde  $Y = [f, g_k]$ . Utilizando a identidade de Jacobi no colchete obtido, segue que

$$\begin{aligned} [Y, [f, g_i]] + [g_i, [Y, f]] + [f, [g_i, Y]] &= 0 \\ [Y, [f, g_i]] - [g_i, [f, Y]] + [f, [g_i, Y]] &= 0 \quad (\text{anti-simetria}) \\ [Y, [f, g_i]] &= [g_i, [f, Y]] - [f, [g_i, Y]] = A - B \end{aligned} \quad (5.3.15)$$

Substituindo-se (5.3.14) e (5.3.14) em (5.3.13) mostra-se o resultado que

$$[g_i, [f, [f, g_k]]] + [g_k, [f, [f, g_i]]] = 2[f, [g_i, [f, g_k]]].$$

□

Fazendo uso dos resultados dos Lemas acima, apresenta-se, a seguir, uma esboço da demonstração da Proposição 5.3.5.

*Demonstração.* Para que o sistema seja acessível ou controlável, a álgebra obtida a partir dos campos vetoriais do sistema de controle, segundo o colchete de Jacobi-Lie, deve gerar um espaço  $\dim Q = 2(3 + (N - 1)) = (2N + 4)$ -dimensional. Logo, basta avaliar os primeiros  $2N + 4$  elementos da álgebra que são linearmente independentes (L.I.) entre si. Como discutido na Seção 4.2.1, o número máximo de entradas  $m$  do sistema de  $N$ -corpos é  $m \leq N + (N - 1) = 2N - 1$ . Por exemplo, o sistema de 2-corpos pode ser concebido com duas entradas de propulsão e uma relativo ao torque de junta. Neste caso sistema de controle é parametrizado por 3 elementos de entrada. Um sistema com  $N$  corpos tem a entrada parametrizada por  $N + 1$  elementos.

O jacobiano do campo vetorial  $f$  em (5.3.11) é dado por

$$Df = \left[ \begin{array}{cccccc} \mathbf{0}_{1 \times 3} & \cdots & 0 & \cdots & 1/m^* & 0 \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 1/m^* \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & \cdots & X_\theta & \cdots & 0 & 0 \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & \cdots & X_{\phi_1} & \cdots & 0 & 0 \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & \cdots & \vdots & \cdots & 0 & 0 \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & \cdots & X_{\phi_{N-1}} & \cdots & 0 & 0 \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times (i-1)} & \mathbf{0}_{3 \times 1} & \mathbf{0}_{3 \times (N-1-i)} & \mathbf{0}_{3 \times 1} & \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & \cdots & X_{p_{\phi_1}} & \cdots & 0 & 0 \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & \cdots & \vdots & \cdots & 0 & 0 \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & \cdots & X_{p_{\phi_{N-1}}} & \cdots & 0 & 0 \\ & & & & & \\ & & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ & & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ & & X_\theta(p_\phi) & \cdots & X_\theta(p_\theta, p_{\phi_j}) & \cdots \\ & & X_{\phi_1}(p_\phi) & \cdots & X_{\phi_1}(p_\theta, p_{\phi_j}) & \cdots \\ & & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ & & X_{\phi_{N-1}}(p_\phi) & \cdots & X_{\phi_{N-1}}(p_\theta, p_{\phi_j}) & \cdots \\ & & \mathbf{0}_{3 \times 1} & \mathbf{0}_{3 \times (i-1)} & \mathbf{0}_{3 \times 1} & \mathbf{0}_{3 \times (N-1-i)} \\ & & X_{p_{\phi_1}}(p_\theta, p_\phi^2) & \cdots & X_{p_{\phi_1}}(p_\theta^2, p_{\phi_j}^2, p_{\phi_i}) & \cdots \\ & & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ & & X_{p_{\phi_{N-1}}}(p_\theta, p_\phi^2) & \cdots & X_{p_{\phi_{N-1}}}(p_\theta^2, p_{\phi_j}^2, p_{\phi_i}) & \cdots \end{array} \right] \quad (5.3.16)$$

para  $1 \leq i, j \leq N-1$  e  $j \neq i$ . Na matriz acima os componentes representados por  $X_{(\cdot)}$  correspondem a derivada parcial dos elementos do campo  $f$ , tomados na mesma direção ou linha, em relação a variável  $(\cdot)$ . Com o fim de não carregar excessivamente a notação das expressões, observe que embora todas sejam funções dos ângulos de junta  $\phi$ , apenas os momentos  $p_{(\cdot)}$  são representados como parâmetros dos elementos  $X$  na matriz acima. Isto se justifica uma vez que os  $X$  são dependentes das variáveis  $\phi$  através de funções trigonométricas e, portanto, as derivadas parciais dos  $X$  sempre rendem funções dos mesmos  $\phi$ . Alternativamente, os  $X$  são funções lineares ou, no máximo, funções de segunda ordem dos momentos  $p_{(\cdot)}$ . Esta constatação é importante na análise para determinação do limite de construção de elementos da álgebra com novas direções, ou componentes não nulos, através do colchete de Jacobi-Lie. Em símbolos e generalizando a situação acima para colchetes de qualquer grau, tem-se:

$$(\text{ad}_{g_i}^{k_i} f)(z) = D_{p_{\phi_j}}^{k_i} X_{p_{\phi_j}}(\phi, \dots) \quad (5.3.17)$$



$k_i = 0, 1, 2, \dots, i = m_p, \dots, m, j = i - m_p = 1, \dots, N - 1$ . Se  $k_i > 2$ , para  $\forall i$ , então  $(\text{ad}_{g_i}^{k_i} f)(z) = 0$ .<sup>9</sup>

A demonstração esboçada a seguir é construtiva: a estrutura dos colchetes dos campos vetoriais de graus crescentes da álgebra de acessibilidade são analisados de maneira que os elementos linearmente dependentes sejam identificados e eliminados da contagem até que a dimensão do espaço de momento, dado pelo número  $2N + 4$ , seja atingido.

Considere a álgebra dada através do colchete de Jacobi-Lie dos campos vetoriais do sistema. Observe, a partir da expressão do campo vetorial  $f$  dado em (5.3.11), de (5.3.12), e de (5.3.16), que é possível gerar campos vetoriais com componentes não nulos em todas as linhas do vetor que representa o campo vetorial obtido pelo colchete de Jacobi-Lie. Faz-se necessário identificar os colchetes que são linearmente dependentes e eliminá-los da contagem dos elementos da álgebra que geram o espaço  $Q$ . Logo, para o modelo de um sistema com  $N$  corpos valem os seguintes, independente da parametrização do espaço  $Q$  escolhida:

Os colchetes de primeiro grau totalizam  $m + 1$  elementos da álgebra. Se todas as juntas são atuadas,  $m_t = N - 1$ , e  $q \neq 0$ , a álgebra de grau um fornece, ao máximo,  $N + 2$  elementos L.I.:  $N + 1$  devido às entradas se dois propulsores forem utilizados mais 1 relativo a dinâmica livre  $f$ ; e  $N + 3$  elementos L.I.:  $N + 2$  devido às entradas com três ou mais propulsores mais 1 da dinâmica livre  $f$ . Quando  $z = 0$ ,  $f$  se anula e o número máximo de elementos L.I. é sempre  $N + 1$ , para dois ou mais propulsores.

O número total de colchetes de segundo grau totalizam um arranjo de  $m + 1$  elementos tomados dois a dois, ou seja,  $A_{(m+1),2} = m(m + 1)$ . No entanto, da propriedade de anti-simetria do colchete de Jacobi-Lie e utilizando o Lemma 5.3.6, apenas  $m$  elementos, seriam L.I.. Como alguns destes  $m$  elementos são colchetes de campos vetoriais que foram eliminados na análise de colchetes de grau um, por serem linearmente dependentes, a análise prossegue. Quando  $B$  é totalmente atuado e  $q \neq 0$ , a álgebra de grau dois fornece, ao máximo,  $N + 1$  elementos L.I., devido às entradas se dois propulsores forem utilizados, e  $N + 2$  elementos L.I., devido às entradas com três ou mais propulsores. Quando  $q = 0$ , o número máximo de elementos L.I. é sempre  $N + 1$ , para dois ou mais

<sup>9</sup>Utilizando índices múltiplos, para agrupar derivadas em relação a mesma variável, tem-se a seguinte expressão geral

$$(\text{ad}_{g_i}^{k_i} f)(z) = \prod_{l=1}^{\sum_{j_l} k_{i_l}} D_{p\phi_{j_l}}^{\sum_{i_l} k_{i_l}} X_{p\phi_{j_l}}(\phi, \dots) \quad (5.3.18)$$

propulsores.

Os colchetes de terceiro grau contam com um total de  $(m - 1)m(m + 1)$  elementos, o que corresponde a um arranjo de  $m + 1$  tomados três a três. Entretanto, utilizando a identidade de Jacobi e o Lema 5.3.7, apenas  $m + S_m$  ou  $2m + C_{m,2}$  colchetes seriam L.I., onde  $C_{m,2} = m(m + 1)/2$  é uma combinação de  $m$  elementos tomados dois a dois. Observe que elementos da forma  $[g_k, [f, g_j]]$ , onde  $j, k = 1, \dots, m_t$ , apenas contribuem com elementos L.I. para a álgebra quando  $j \neq k$ . Com isto,  $m_t$  elementos devem ser desconsiderados acima pois são L.D.. Portanto, tem-se que  $m + S_m - m_t$  elementos de grau três são candidatas a completarem a distribuição da álgebra de forma que a sua dimensão seja  $\dim T^*Q = 2N + 4$ . Para  $q^i, p_i \neq 0$ , os colchetes obtidos até grau três são suficientes para gerarem o fibrado cotangente  $T^*Q$ .

Os colchetes de grau quatro são necessários à análise apenas para sistemas com dois propulsores e quando  $z = 0$ . Este fato foi confirmado através de avaliações simbólicas com modelos dos sistemas de 2 e 3 corpos. Os colchetes de grau quatro são  $A_{(m+1),4} = (m + 1)m(m - 1)(m - 2)$  no total. Utilizando o Lema 5.3.8 pode-se separar os elementos em grupos:

- $m$ : com estrutura  $[f, [f, [f, g_j]]]$
- $m$ : dados por  $[f, [g_j, [f, g_j]]]$ , que são iguais aos  $[g_j, [f, [f, g_j]]]$
- $A_{m,2}$ : com a forma  $[g_j, [f, [f, g_k]]]$  e  $[g_k, [f, [f, g_j]]]$
- $C_{m,3}$ : com estrutura  $[g_j, [g_l, [f, g_k]]]$
- $A_{m,2}$ : com estrutura  $[g_j, [g_j, [f, g_k]]]$  e  $[g_j, [g_k, [f, g_k]]]$
- $m_p$ : com estrutura  $[g_j, [g_j, [f, g_j]]]$

No ponto  $z = 0$ , o campo vetorial da dinâmica livre  $f$  se anula ( $f(0) \equiv 0$ ), assim como todos os elementos com estrutura  $[f, \dots, [f, g_i]]$ , com grau maior ou igual que três, pois todos os componentes não nulos do campo vetorial são lineares nos momentos. Para  $z = 0$  apenas um determinado grupo de elemento contribui para a álgebra. Este grupo é caracterizado por campos vetoriais em que alguns componentes são funções afim nos momentos. Como comentado no início da demonstração, as dinâmicas dos momentos angulares, presente em  $f$ , são polinômios de segundo grau das coordenadas que representam os momentos angulares. Após um número sucessivo de diferenciações parciais,

determinado pelos jacobianos da iteração com colchete de Jacobi-Lie dos elementos de álgebra, o grau dos polinômios decresce até o zero e, finalmente, o polinômio se anula. Quando o polinômio possui grau zero, este é dado apenas por um valor independente da coordenada do momento angular que corresponde a aquela direção. Logo, este valor nunca se anula em  $z = 0$ . Sob uma determinada combinação iterativa dos elementos da álgebra de acessibilidade, pode-se obter campos vetoriais com elementos não nulos nas direções, ou componentes, que faltam para completar o número de geradores do espaço fibrado  $T^*Q$  e, desta forma, atingir a dimensão  $\dim T^*Q$  desejada.  $\square$

Resultados em que uma ou mais juntas não são atuadas, ou seja, são deixadas passivas, devem ser consideradas com maior atenção. Neste caso, devido a ausência do torque de junta, não existe o cancelamento do efeito das forças de propulsão nas juntas passivas, como considerado no segundo caso de parametrização dos torques de juntas adotada na Seção 4.2.1. Logo, a modelagem do efeito das forças de propulsão nas juntas passivas deve ser considerada na análise de controlabilidade do sistema multi-articulado. É possível verificar que o sistema de 2-corpos é acessível, a partir de todo  $z \neq 0$ , através da análise da sub-álgebra obtida pelos colchetes, a partir dos dois campos vetoriais de propulsão, com até grau três; semelhantemente ao caso acima em que todas as juntas do sistema são atuadas.

Faz-se importante observar que controlabilidade linear implica na controlabilidade não linear avaliado através do colchete de Jacobi-Lie. A implicação inversa, em geral, não é satisfeita. Embora o critério de controlabilidade “não-linear”, verificado pelo cálculo das distribuições sucessivas em função dos campos vetoriais, seja atendido, o sistema *não* é controlável, como mostra a análise de posto pleno, segundo o critério de Kalman<sup>10</sup>, da aproximação linear da dinâmica do sistema, provida pelo truncamento da expansão em série de Taylor das equações de movimento do sistema na primeira parcela (linear). Esta aparente contradição dos resultados de análise pode ser facilmente desfeita se considerado que a análise de controlabilidade não linear estabelece “novas” direções possíveis de movimento construídas através de deslocamentos sucessivos - e infinitesimais se necessário - nas direções que são diretamente atuadas. Ou seja, avalia o movimento nas direções que não são atuadas em função do movimento nas direções que são diretamente controladas. Como comentado anteriormente, esta avaliação é realizada em função da comutação de curvas integrais dos campos vetoriais do sistema.

<sup>10</sup>Verificado nos pontos  $z$  do espaço de fase que não tornam a aproximação linear do sistema degenerada, ou seja, quando a matriz  $Df(z)$  perde estrutura devido ao ponto  $z$  escolhido.

Em contraste, o critério de controlabilidade linear fornece um resultado instantâneo, independente do movimento; podendo-se associar a idéia de controlabilidade estática.

Como será discutido no próximo capítulo, são necessárias três ou mais entradas de propulsão de modo a tornar o sistema linearmente controlável na origem do espaço de fase  $T^*Q$ .

## 5.4 Conclusão

Nos parágrafos acima, foram revisados alguns critérios de controlabilidade para a análise de sistemas não-lineares. Alguns destes foram aplicados aos modelos cinemático e dinâmico do sistema de 2 e 3 corpos. Apresentou-se uma generalização do critério de acessibilidade para um sistema de  $N$  corpos da classe considerada.

## Capítulo 6

# Estabilização e Planejamento de Trajetórias

Avalia-se, a seguir, as condições e os métodos em que o sistema multi-articulado permite ser estabilizado. Assim como para a discussão de controlabilidade no capítulo anterior, a análise das distribuições geradas pelos campos vetoriais do sistema, em especial das características dos campos vetoriais relativos às entradas, é decisiva na determinação destas condições e métodos.

Uma estratégia possível para a estabilização do sistema, em torno dos pontos de equilíbrio, consiste em aplicar técnicas de estabilização clássicas ao modelo linearizado do sistema. Neste caso, o projeto do controlador consiste simplesmente em projetar uma matriz de ganhos<sup>1</sup>, alocando os pólos do sistema linear em malha fechada, de modo a tornar o sistema estável e com propriedades dinâmicas bem determinadas.

Com vista à estabilização de versões lineares do modelo do sistema, emprega-se um método de linearização por realimentação, (Hunt, Su e Meyer, 1983; Isidori, 1995), a alguns casos do modelo não linear do sistema, como apresentado no Capítulo 4. Nos casos em que o sistema não é totalmente controlável no espaço de fase, no entanto, outras técnicas são empregadas para compensar o baixo número de entradas do sistema. Neste caso, considerou-se a seguir a teoria de análise da estabilidade de Lyapunov para o projeto do controle de estabilização do sistema (Khalil, 2002).

---

<sup>1</sup>Várias técnicas são disponíveis para a determinação do ganho de realimentação, como técnica de controle linear robusto  $H_\infty$ , por exemplo.

## 6.1 Estabilização

A estabilização<sup>2</sup> do sistema a um ponto do espaço de fase é desejado em muitas situações práticas, como o posicionamento do sistema em relação a um referencial inercial, por exemplo. A definição de estabilização para o corpo rígido, cujo modelo é apresentado no Apêndice C, é feita abaixo.

**Definição 6.1.1** (Estabilização Assintótica do Corpo Rígido). Sejam dados os campos vetoriais da dinâmica livre  $f(q, p)$  e de entrada  $g_1(q)$  e  $g_2(q)$  que definem um corpo rígido com dois propulsores. O ponto  $(q, p) = (q_0, 0)$  é equilíbrio do sistema, para qualquer  $q_0 \in Q$ . Estabilizar o sistema  $f$  no equilíbrio consiste em regular o sistema em  $(q_0, 0)$  utilizando uma lei de realimentação  $\tau = g_1 u_1 + g_2 u_2$ , para as funções de controle  $u_i = u_i(q, p)$ .

Quando o ponto final  $z_0$  corresponde a um ponto de equilíbrio estável, isto é  $f(q) = 0$ , e na ausência de distúrbios externos, então pode-se tomar  $u(\cdot) \equiv 0$  após a estabilização em  $z_0$ . Isto pode não ser verdade para um ponto final  $z_0$  que não seja um ponto de equilíbrio ou quando este é um ponto de equilíbrio instável, uma vez que qualquer perturbação, não modelada na dinâmica nominal  $f$ , leva o sistema a deixar a condição de estabilidade. A definição do problema de estabilização para um sistema de  $N$  corpos é feita a seguir.

**Definição 6.1.2** (Estabilização Sistema Multi-Articulado). Sejam dados os campos vetoriais da dinâmica livre  $f(q, p)$  e de entrada  $g_1(q), \dots, g_m(q)$  que definem o modelo dinâmico do sistema multi-articulado. Seja  $z_0$  um ponto no espaço de fase de equilíbrio do sistema multi-articulado obtido a partir do modelo do sistema. A estabilização assintótica da dinâmica do sistema consiste em determinar funções de controle  $u(q, p) \in U$ , onde  $u = (u_1, \dots, u_m)$  e

$$\tau = g_1(q)u_1 + \dots + g_m(q)u_m$$

de maneira que o estado do sistema no espaço de fase seja levado um ponto de equilíbrio  $z_0$  em tempo finito e partindo de um ponto inicial pertencente a uma vizinhança suficientemente pequena de  $z_0$ .

---

<sup>2</sup>Observe que a estabilização é um realizada mediante funções de controle em malha fechada, ao passo que o procedimento denominado “Planejamento de trajetórias”, discutido posteriormente, é realizado em malha aberta.

Os resultados de estudo e implementação de estratégias de realimentação visando a estabilização do sistema são apresentados.

## 6.2 Linearização por Realimentação

A linearização por realimentação representa um método de linearização exata, em contraste com a linearização por truncamento da série de Taylor, relativo às equações dinâmicas do sistema. Quanto a linearização por Taylor, faz-se necessária a realização de simulações com fim na validação do modelo linear em relação ao não-linear original.

Seja o sistema dinâmico afim nas entradas dado por

$$\begin{aligned} \dot{z} &= f(z) + \sum_{i=1}^m g_i(z)u_i = f(z) + G(z)u \\ y &= h(z) \end{aligned} \quad (6.2.1)$$

A linearização por realimentação consiste da determinação de uma lei de realimentação do estado da forma

$$u(z) = \alpha(z) + \beta(z)v,$$

onde  $\alpha$  e  $\beta$  são operadores obtidos em relação aos campos vetoriais do sistema e  $v$  representa a nova entrada do sistema composto, aliado a uma transformação de coordenadas  $\Phi(z)$  de maneira a obter uma versão linear do sistema. Como ambas as operações não são válidas globalmente, isto é, para todo  $z \in P$ , a linearização por realimentação é um procedimento geralmente com validade local, ou seja, válida em uma vizinhança de um ponto  $z_0$ . Os operadores  $\alpha$  e  $\beta$  são obtidos por, (Isidori, 1995):

$$\begin{aligned} \alpha(z) &= -A^{-1}(z)b(z) \\ \beta(z) &= A^{-1}(z) \end{aligned}$$

onde, para o grau de relatividade do sistema  $\{r_1, \dots, r_m\}$ , a matriz  $A$  é obtida, em função da derivada direcional  $L$  dos campos  $f$  e  $g$  e da função  $h$ , pela expressão

$$A(z) = \begin{bmatrix} L_{g_1} L_f^{r_1-1} h_1(z) & \cdots & L_{g_m} L_f^{r_1-1} h_1(z) \\ L_{g_1} L_f^{r_2-1} h_1(z) & \cdots & L_{g_m} L_f^{r_2-1} h_2(z) \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ L_{g_1} L_f^{r_m-1} h_m(z) & \cdots & L_{g_m} L_f^{r_m-1} h_m(z) \end{bmatrix}, \quad (6.2.2)$$

de maneira que esta seja não singular em uma vizinhança de  $z_0$ ; e o vetor coluna  $b$  é dado por

$$b(z) = \begin{bmatrix} L_f^{r_1} h_1(z) \\ L_f^{r_2} h_2(z) \\ \vdots \\ L_f^{r_m} h_m(z) \end{bmatrix} \quad (6.2.3)$$

A transformação de coordenadas  $\xi = \Phi(z)$  é dada pelo seguinte difeomorfismo

$$\Phi(z) = \begin{bmatrix} L_f^0 h_1(z) \\ L_f^{k-1} h_1(z) \\ \vdots \\ L_f^{k-1} h_i(z) \\ \vdots \\ L_f^{r_m} h_m(z) \end{bmatrix}, \quad 1 \leq k \leq r_i, \quad 1 \leq i \leq m$$

obtendo-se uma dinâmica linear do sistema

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1^i &= \xi_2^i \\ &\vdots \\ \dot{\xi}_{r_i-1}^i &= \xi_{r_i}^i \\ \dot{\xi}_{r_i}^i &= b_i(\xi) + A(\xi)_i u \end{aligned}$$

onde  $A_i$  é a  $i$ -ésima linha da matriz  $A$ .

Em geral o sistema na forma linear, escrito nas novas coordenadas, fornece uma decomposição da dinâmica controlável e da dinâmica zero, usualmente representada por  $\dot{\eta} = \text{fcn}(\xi, \eta)$ , (Isidori, 1995). A dinâmica zero está relacionada com os zeros de transmissão da aproximação linear do modelo não-linear do sistema. Entretanto, esta não será importante para a análise de estabilização do sistema em consideração.

Observe que, aplicando (6.2.2) e (6.2.3) nas equações acima sob as novas coordenadas,



obtém-se o sistema linear e controlável  $\dot{\xi} = A_\xi \xi + B_\xi v$ , onde, para  $j = 1, \dots, m$ , tem-se

$$A_\xi = \text{diag}(A_j), \quad A_j = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

e

$$B_\xi = \text{diag}(b_j), \quad b_j = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Para estabilizar o sistema linearizado, pode-se impor uma realimentação do estado  $\xi$ , segundo  $v = K\xi$ , onde  $K$  é uma matriz de ganhos, através de métodos de controle lineares como  $H_\infty$  ou Linear Quadrático (LQ), por exemplo, ou ainda por técnicas de controle clássicas.

**Definição 6.2.1.** Sejam as distribuições  $G_i$  determinadas pelos campos vetoriais do sistema através da expressão

$$G_i = \text{span}\{g_j, \dots, \text{ad}_f^l g_j, j = 1, \dots, m\}, \quad 0 \leq l \leq i$$

onde o operador  $ad$  é definido na Seção A.1.

**Teorema 6.2.1** (Linearização por Realimentação: (Isidori, 1995)). *Seja o sistema dinâmico (6.2.1), onde  $\dim z = n$  e  $\dim h(z) = \dim g(z)$ , ou seja, os espaços de entradas  $u$  e saídas  $y$  do sistema possuem mesma dimensão<sup>3</sup>. (6.2.1) é linearizável por realimentação em uma vizinhança do ponto  $z_0$  se e somente se*

- as distribuições  $G_i$ , para  $0 \leq i \leq n - 1$ , possuem dimensão constante em uma vizinhança de  $z_0$ ;
- a distribuição  $G_{n-1}$  tiver dimensão  $n$ ;
- as distribuições  $G_i$ , para  $0 \leq i \leq n - 2$ , forem involutivas.

---

<sup>3</sup>Sistemas quadrados.

Note que este corresponde a um resultado local, ou seja, válido apenas em uma vizinhança de um ponto  $z_0$  do espaço de estados.

Outros resultados prevêem a linearização entrada-estado do sistema, ver as referências (Charlet, Lévine e Marino, 1989), (Charlet, Lévine e Marino, 1991) e (Krener, 1999), de certa forma abrangendo a limitação de considerar sistemas quadrados para sistemas com número de entradas e saídas diferentes, se tomadas as saídas equivalentes ao estado.

Determinou-se, entretanto, que as distribuições  $G_1$  dos campos vetoriais dos sistemas de 2 e 3 corpos, com apenas duas entradas de propulsão, não são involutivos. Conseqüentemente, nestes casos, não é possível verificar as condições que tornam o sistema linearizável por realimentação. Em geral, é possível mostrar que todo sistema multi-articulado da classe considerada e com apenas duas entradas de propulsão possui distribuições não involutivas.

**Proposição 6.2.2.** *Seja o sistema multi-articulado dado, na forma afim, por (5.3.2) com duas entradas de propulsão. Então existe pelo menos uma distribuição  $G_i$  não involutiva.*

*Demonstração.* Apresenta-se primeiramente um resultado que será útil na seqüência. Uma distribuição  $\mathcal{D}(q) \subset T_q Q$  é involutiva, para todo  $q \in Q$ , se seguinte igualdade for verdadeira

$$\dim(\text{span}\{X_1(q), \dots, X_d(q)\}) = \dim(\text{span}\{X_1(q), \dots, X_d(q), [X_i, X_j](q)\}) \quad (6.2.4)$$

para  $1 \leq i, j \leq d$  e onde  $X_1, \dots, X_d \in \mathcal{D}$  e  $\dim \mathcal{D} = d$ .

Para provar a proposição faz-se importante observar que ela é conseqüência direta da Proposição 5.3.5, uma vez que a acessibilidade do sistema nunca é alcançada apenas com os colchetes de primeiro ou segundo grau.

A distribuição  $G_0$  sempre será involutiva uma vez que contém apenas os campos vetoriais da entrada  $g_j$  e, do Lema 5.3.6, os colchetes de Jacobi-Lie dos  $g_j$  sempre são nulos, ou seja, não contribuem com novas direções.

Os elementos que compõe a álgebra  $G_1$  são da forma  $[f, g_j]$ . Para  $q \neq 0$ , por exemplo, a distribuição  $G_1$  possui dimensão máxima igual a  $2m < n$ , ou seja, os colchetes de grau dois de  $G_1$  não possui a mesma dimensão do espaço de fase do sistema. No entanto, a partir da análise da álgebra de acessibilidade da Proposição 5.3.5, apenas com a álgebra

2-corpos ( $n = 8$ )	$m_p = 2$ ( $m = 3$ ): sub-atuado	$\dim G_0 = 3, \dim G_1 = 6$
3-corpos ( $n = 12$ )	$m_p = 2$ ( $m = 4$ ): sub-atuado	$\dim G_0 = 4, \dim G_1 = 8$
	$m_p = 3$ ( $m = 5$ ): atuado	$\dim G_0 = 5, \dim G_1 = 10$
4-corpos ( $n = 12$ )	$m_p = 2$ ( $m = 5$ ): sub-atuado	$\dim G_0 = 5, \dim G_1 = 10$
	$m_p = 3$ ( $m = 6$ ): atuado	$\dim G_0 = 6, \dim G_1 = 12$
	$m_p = 4$ ( $m = 7$ ): sobre-atuado	$\dim G_0 = 6, \dim G_1 = 12$
5-corpos ( $n = 14$ )	$m_p = 2$ ( $m = 6$ ): sub-atuado	$\dim G_0 = 6, \dim G_1 = 12$
	$m_p = 3$ ( $m = 7$ ): atuado	$\dim G_0 = 7, \dim G_1 = 14$
	$m_p = 4$ ( $m = 8$ ): sobre-atuado	$\dim G_0 = 7, \dim G_1 = 14$
	$m_p = 5$ ( $m = 9$ ): sobre-atuado	$\dim G_0 = 7, \dim G_1 = 14$

Tabela 6.1: Dimensão das primeiras distribuições  $G_i$  dos sistemas com  $N \leq 5$ , para  $z \neq 0$ . As atribuições *sub-atuado*, *atuado* e *sobre-atuado* designam, respectivamente, sistemas com número menor, igual e maior de entradas que a dimensão do espaço de configuração  $Q$  correspondente.

dos colchetes de grau menor e igual a três é possível verificar esta condição. Logo, é possível gerar as direções restantes do espaço de fase com os elementos de  $G_1$ , gerando produtos da forma  $[g_k, [f, g_j]]$ ,  $k \neq j$ . Logo, de (6.2.4), a distribuição  $G_1$  não é involutiva. Para  $z = 0$ , a argumentação para a não involutividade de  $G_2$  é análoga a acima.  $\square$

Logo, o sistema multi-articulado proposto com apenas duas entradas de propulsão nunca é linearizável por realimentação.

**Exemplo 6.2.3.** *Resume-se na tabela abaixo as distribuições  $G_0$  e  $G_1$  para alguns sistemas e casos de entradas de propulsão. O espaço de base  $B$  é totalmente atuado por torques nas juntas.*

Os sistemas com  $N \geq 3$  com três ou mais entradas de propulsão, entretanto, são sempre linearizáveis por realimentação estática, pois  $G_0$ ,  $\dim G_0 < n$ , é sempre involutiva e  $G_i$   $i \geq 1$  são sempre involutivas, dado que  $\dim G_i = n$ .

**Exemplo 6.2.4.** *Apresenta-se a seguir um resultado de estabilização do sistema de 3-corpos com três entradas de propulsão. O sistema possui  $m = 5$  entradas e  $n = 10$  estados.*

A função de saída escolhida é dada apenas pela configuração  $q \in Q$  por  $h(z) = q$ , ou seja,  $h(q) = (r_x, r_y, \theta_{cm}, \phi_1, \phi_2)$ . Com isto, o sistema possui grau de relatividade  $r_i = 2$ ,

para  $i = 1, \dots, 5$ . A transformação de coordenadas para obter  $\xi$  através de  $\Phi$  é realizada segundo

$$\Phi(z) = \begin{bmatrix} h_1(q) \\ L_f h_1(q) \\ h_2(q) \\ L_f h_2(q) \\ h_3(q) \\ L_f h_3(q) \\ h_4(q) \\ L_f h_4(q) \\ h_5(q) \\ L_f h_5(q) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_x \\ v_x/m^* \\ r_y \\ v_x/m^* \\ \theta_{cm} \\ L_f h_3(q) \\ \phi_1 \\ L_f h_4(q) \\ \phi_2 \\ L_f h_5(q) \end{bmatrix}$$

Empregando-se uma realimentação do estado  $\xi$ , projetou-se uma matriz de ganhos  $K$  de maneira que os pólos do sistema  $(A_\xi, B_\xi)$  em malha fechada sejam estáveis e localizados no plano complexo em

$$\begin{aligned} & -1.0 \pm 1.0i \\ & -1.0 \pm 1.0i \\ & -1.4 \pm 1.0i \\ & -1.5 \pm 1.0i \\ & -1.5 \pm 1.0i \end{aligned}$$

As Figuras 6.1 e 6.2 mostram os resultados de estabilização do sistema de 3-corpos.

Uma possível solução para estabilizar sistemas com menos de três entradas de propulsão consiste em adicionar integradores ao sistema, obtendo-se um sistema estendido de maneira que as distribuições  $G_i$  geradas, a partir deste sistema estendido, sejam involutivas. O procedimento que lineariza de forma exata o sistema, empregando este método acima, é conhecido como linearização por realimentação dinâmica, em contraste com o método anterior utilizado acima, em que a linearização por realimentação é estática. A designação dos termos “estática” e “dinâmica”, para os métodos de linearização por realimentação, referem-se ao fato dos compensadores obtidos pelo método dinâmico possuírem uma dinâmica interna e regida por equações diferenciais de estados internos. Em contraste, nos compensadores obtidos pelo método estático, a realimentação é realizada por uma equação algébrica, sem dinâmica interna.

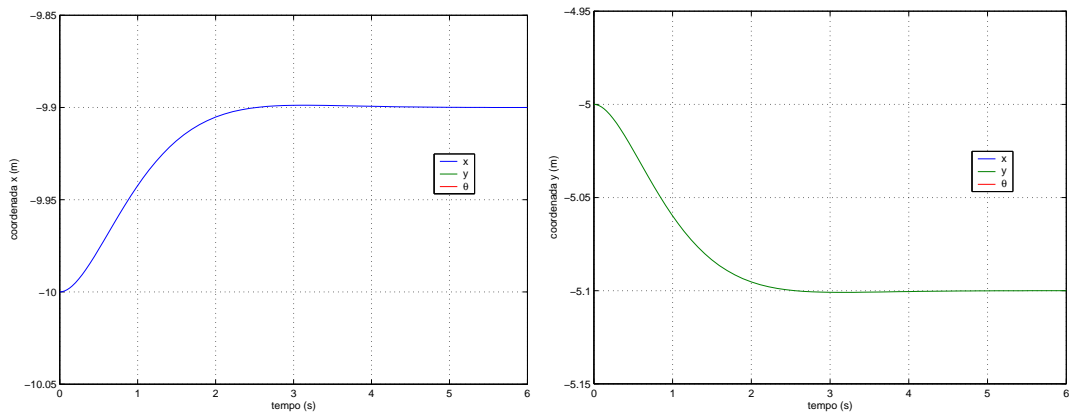
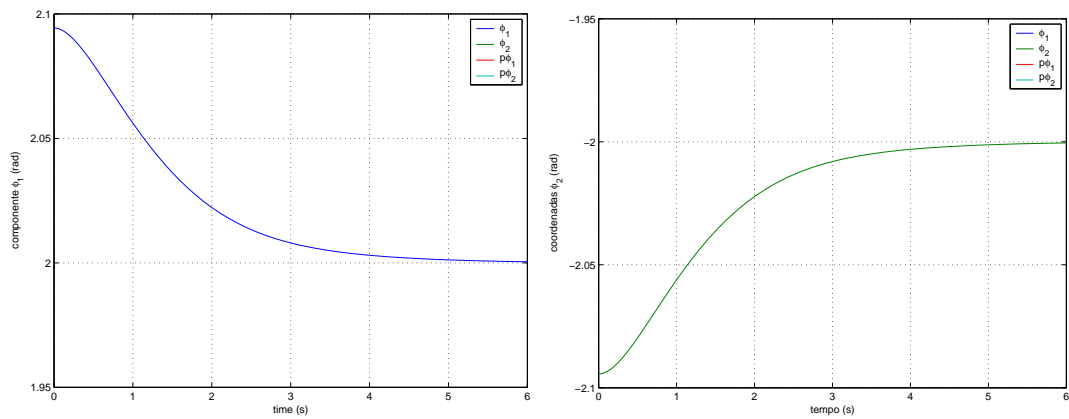
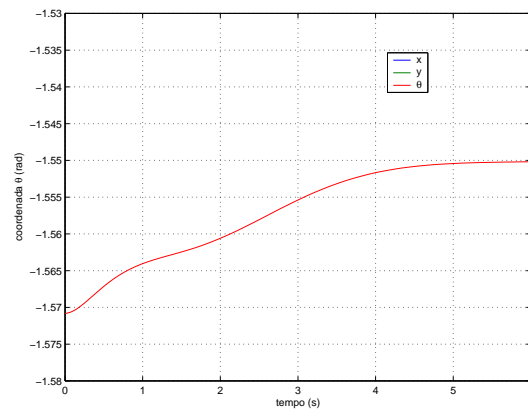
(a) Deslocamento do centro do massa  $r_x$ .(b) Deslocamento do centro do  $r_y$ .(c) Trajetória do ângulo de junta  $\phi_1$ .(d) Trajetória do ângulo de junta  $\phi_2$ .(e) Trajetória da orientação  $\theta_{cm}$ .

Figura 6.1: Resultados da estabilização da configuração no ponto  $(-9.90, -5.10, -1.55, 2.00, -2.00)$  do sistema de 3-corpos, através de linearização por realimentação.

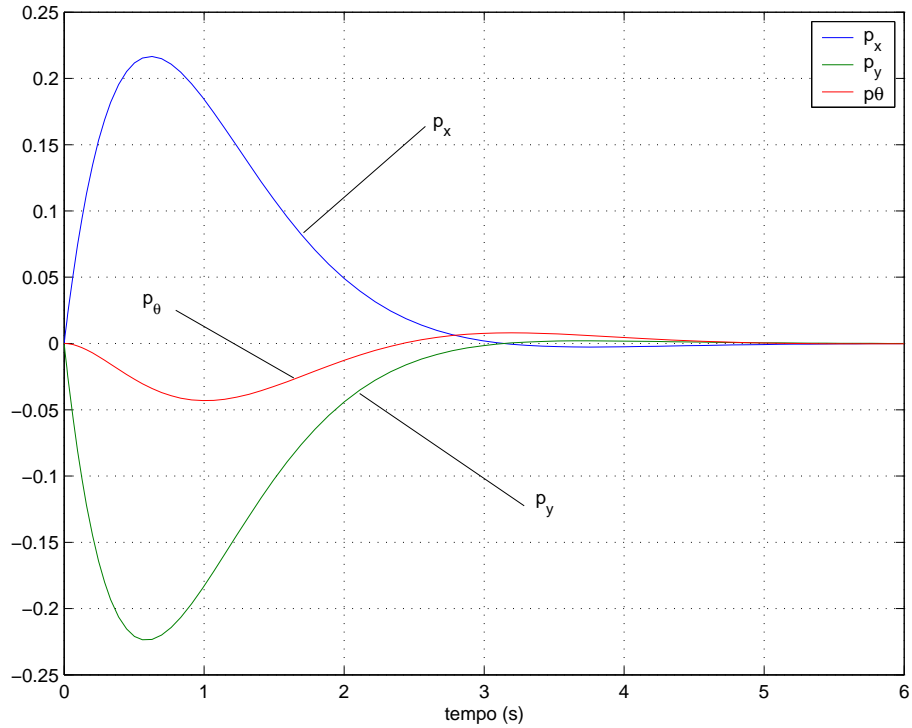
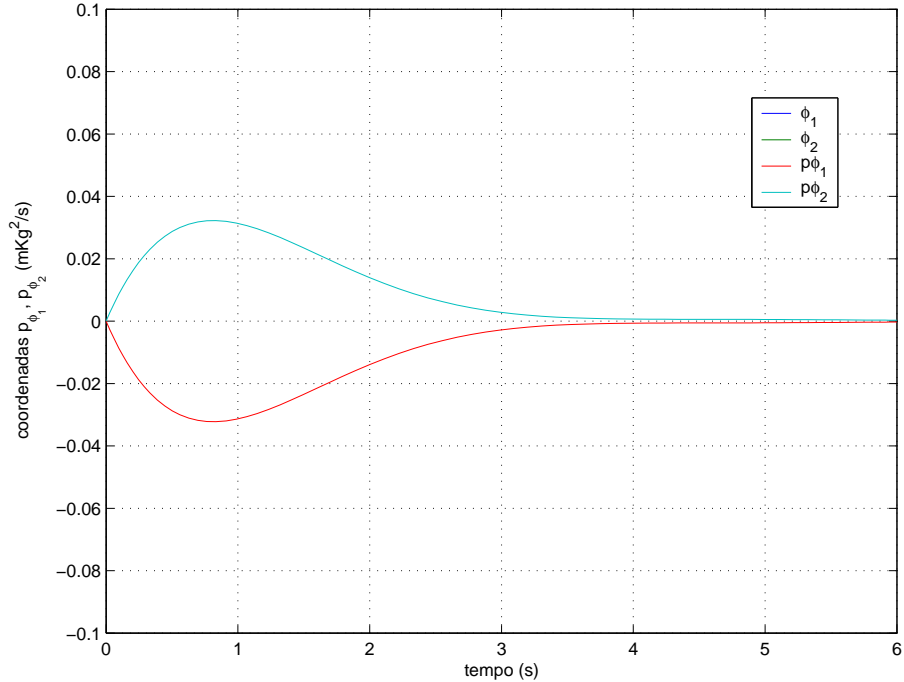
(a) Trajetórias dos momentos da fibra  $p_x, p_y, p_{\theta}$ .(b) Trajetórias dos momentos do espaço de base  $p_{\phi_1}, p_{\phi_2}$ .

Figura 6.2: Resultados da estabilização do momento do sistema de 3-corpos, através de linearização por realimentação.

### 6.2.1 Linearização por Realimentação Dinâmica

Sabe-se, como comentado em Charlet et al. (1991), que o corpo rígido **não** é linearizável por realimentação estática. Isto se deve à qualidade das distribuições geradas pelos campos vetoriais do sistema de controle do corpo rígido não serem involutivas. A versão plana do mesmo sistema, assim como o modelo do unicycle no plano (Respondek, 2002), igualmente não pode ser linearizado por uma lei de realimentação estática. Uma maneira de contornar esta limitação destes sistemas, de maneira a permitir a estabilização do sistema via linearização por realimentação, constitui na adição de integradores à função de realimentação (Charlet et al., 1989; Krener, 1999).

Em (Battilotti e Califano, 2004) encontra-se um algoritmo para determinar os índices  $\mu$  tais que o sistema seja linearizável por prolongamentos. A aplicação do mesmo mostrou-se, no entanto, demasiadamente complexa com a classe de sistemas em estudo; inclusive com o exemplo de sistema mais simples com apenas 2-corpos.

Considere um sistema controlável na forma afim

$$\dot{z} = f(z) + \sum_{i=1}^m g_i(z)u_i = f(z) + G(z)u \quad (6.2.5)$$

Definem-se as distribuições em relação ao sistema afim acima

$$\begin{aligned} \Delta_0 &= \text{span}\{g_k : \mu_k = 0\} \\ \Delta_i + 1 &= \Delta_i + \text{ad}_f \Delta_i + \text{span}\{g_k : \mu_k = i + 1\}, \quad i \geq 0 \end{aligned}$$

Note, pela definição, que valem as relações  $\Delta_0 \subset \Delta_1 \subset \dots \subset \Delta_i \dots$ .

Usando a notação de diferenciação de ordem genérica, em que  $u^{(\mu)}$  corresponde a derivada da função  $d^\mu u / dt^\mu$ , o compensador com realimentação dinâmica aqui considerado é da forma, (Charlet et al., 1991):

$$\begin{pmatrix} u_1^{(\mu_1)} \\ \vdots \\ u_m^{(\mu_m)} \end{pmatrix} = \alpha(z, \zeta) + \beta(z, \zeta) \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v'_m \end{pmatrix}$$

onde  $\zeta$  representa um estado interno ao compensador e  $v_{(\cdot)}$ , as novas entradas do sistema em malha fechada. O sistema em malha fechada fica, então, definido pela dinâmica

$$\dot{z} = f(z) + G(z, \zeta)\alpha(z, \zeta) + G(z, \zeta)\beta(z, \zeta)v$$

onde a nova entrada é dada por  $v \in \mathbb{R}^{m'}$ . O compensador acima pode ser realizado pela integração “pura” do sinal de entrada  $v$ , conforme (Battilotti e Califano, 2004):

$$u_j = \zeta_j(1), \quad (6.2.6)$$

$$\dot{\zeta}_j = A_j \zeta_j + B_j v_j, \quad j = 1, \dots, m \quad (6.2.7)$$

onde

$$A_j = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(\mu_j-1) \times 1} & I_{(\mu_j-1)} \\ 0 & \mathbf{0}_{1 \times (\mu_j-1)} \end{bmatrix}_{\mu_j \times \mu_j} \quad B_j = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(\mu_j-1) \times 1} \\ 1 \end{bmatrix}_{\mu_j \times 1}$$

onde  $\zeta_j \in \mathbb{R}^{\mu_j}$ . Em (6.2.6), faz-se  $u_j = v_j$  quando  $\mu_j = 0$ .<sup>4</sup> O sistema em malha fechada fica, então, definido pela seguinte dinâmica

$$\dot{z} = f(z) + G(z, \zeta)\alpha(z, \zeta) + G(z, \zeta)\beta(z, \zeta)v \quad (6.2.8)$$

$$\dot{\zeta} = A\zeta + Bv \quad (6.2.9)$$

com entrada  $v \in \mathbb{R}^{m'}$ . Quando  $m' = m$ , pode-se escolher a saída do sistema como  $u$ . As condições suficientes para linearização local por realimentação dinâmica devem-se do seguinte resultado.

**Teorema 6.2.5** (Linearização por Realimentação Dinâmica - Suficiência (Charlet et al., 1991)). *Se existirem inteiros  $0 \leq \mu_1 \leq \dots \leq \mu_m$ , tais que, em uma vizinhança de  $x_0$ ,*

- $\Delta_i$  sejam involutivos e dimensão constante para  $0 \leq i \leq n + \mu_m - 1$
- $\dim(\Delta_{n+\mu_m-1}) = n$
- $[g_s, \Delta_i] \subset \Delta_{i+1}$ ,  $\forall s$  tal que  $\mu_s \geq 1$  e  $\forall i$ ,  $0 \leq i \leq n + \mu_m - 1$ ,

então (6.2.5) é localmente linearizável por realimentação dinâmica com índices de prolongamento  $\mu_1, \dots, \mu_m$ .

*Observação 6.2.1.* O Teorema acima diz que se o sistema é acessível, se as distribuições  $\Delta_s$  são involutivas - que também representam as condições necessárias - e se  $[g_s, \Delta_i] \subset \Delta_{i+1}$ , então o sistema é dinamicamente linearizável por realimentação.

<sup>4</sup>Em um sistema linearizável por realimentação dinâmica pelo método de linearização por realimentação com prolongamentos, pelo menos um dos índices de prolongamentos deve ser nulo, ou seja,  $0 = \mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_m$ .



### 6.2.2 O Sistema Multi-Articulado

Considere um exemplo de aplicação do método acima ao sistema de 2-corpos.

**Exemplo 6.2.6.** *Considere o sistema de 2-corpos onde o número de estados é dado por  $n = 8$  e o número de entradas  $m = 3$ . Aplica-se o Teorema 6.2.5 acima ao modelo do sistema de 2-corpos.*

*Após algumas iterações de tentativa e erro, obteve-se os seguintes índices de prolongamento  $\mu = [\mu_1, \mu_2, \mu_3] = [0, 4, 4]$  para o sistema de 2-corpos. Observe que, para  $\mu$  dado acima, e de acordo com o Teorema (6.2.5), é necessário verificar as distribuições  $\Delta_i$ , para  $0 \leq i \leq n + \mu_m - 1 = 11$ . Vale mencionar que os sistemas multi-corpos em geral, do qual a classe de sistemas aqui proposta faz parte, são caracterizados por equações de movimento racionais, isto é, por funções das variáveis de estado no denominador de frações, originários do acoplamento do tensor de inércia. Isto representa um entrave de considerável dificuldade no cálculo iterativo dos colchetes de Lie, uma vez que podem resultar no aumento progressivo da complexidade das funções componentes dos campos vetoriais. Logo, calcular distribuições de colchetes de Lie de ordem elevadas de certos sistemas, pode representar uma tarefa quase impraticável.*

*No entanto, no decurso das primeiras iterações, pôde-se observar que nem todas as distribuições precisaram ser verificadas. No que diz respeito às duas primeiras condições suficientes do Teorema (6.2.5), observou-se que foi necessária a verificação das distribuições até, e incluindo,  $\Delta_5$ , uma vez que  $\dim \Delta_i = n = 8$ , para  $i \geq 5$ , sendo involutivas<sup>5</sup>. Isto permite evitar o cálculo de colchetes de Lie com campos vetoriais de ordem elevada, isto é, maiores que os contidos em  $\Delta_5$ , pois não agregam direções alcançáveis adicionais no espaço cotangente  $T_q^*Q$ , sendo, portanto, desnecessárias.*

*Para atender a terceira condição suficiente do Teorema (6.2.5), assim como nos dois primeiros, não se faz necessário calcular todas as relações  $[g_s, \Delta_i] \subset \Delta_{i+1}$ , para  $0 \leq i \leq n + \mu_m - 1$ . Pode-se observar, como comentado em (Charlet et al., 1991), que as primeira e terceira condições são parcialmente redundantes.*

*Logo, é suficiente verificar apenas as condições  $[g_j, \Delta_i] \subset \Delta_{i+1}$ , tal que  $\mu_j > i + 1$  e*

<sup>5</sup>Uma distribuição regular  $D \subset TQ \sim \mathbb{R}^n$  tal que  $\dim D = n$  é sempre involutiva, pois o colchete de Lie dos campos vetoriais que a geram nunca contribuirão para alterar a dimensão de  $D$ .

$i \geq 0$ . Ou seja,

$$[g_j, \Delta_0] \subset \Delta_1$$

$$[g_j, \Delta_1] \subset \Delta_2$$

$$[g_j, \Delta_2] \subset \Delta_3$$

para  $j = 2, 3$  apenas, uma vez que  $\mu_1 = 0$ . Utilizando os índices de prolongamentos dados por  $\mu = [0, 4, 4]$ , a lei de realimentação dinâmica é dada por

$$u_1 = v_1, \quad \begin{pmatrix} u_2 \\ \dot{\zeta}_2(2) \\ \dot{\zeta}_2(3) \\ \dot{\zeta}_2(4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \zeta_2(1) \\ \zeta_2(3) \\ \zeta_2(4) \\ v_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} u_3 \\ \dot{\zeta}_3(2) \\ \dot{\zeta}_3(3) \\ \dot{\zeta}_3(4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \zeta_3(1) \\ \zeta_3(3) \\ \zeta_3(4) \\ v_3 \end{pmatrix}$$

Neste caso a saída do sistema é dada por  $u = (v_1, \zeta_2(1), \zeta_3(1))^T$ .

Note que neste caso, o difeomorfismo  $\varphi$ , relativo a transformação de coordenadas de  $z$  para  $z'$ , é constante e dado pela matriz identidade.

Não obstante a verificação de atendimento do sistemas multi-corpos para com todos os itens do Teorema 6.2.5, uma condição necessária para a linearização por realimentação dinâmica consiste da controlabilidade linear, na origem, ou seja, a aproximação linear (por Taylor) do sistema afim deve ser controlável na origem. As versões lineares dos modelos do corpo rígido e do sistema multi-corpos com duas entradas de propulsão não são controláveis em  $z \neq 0$ , como pode-se facilmente mostrar pelo critério de Kalman, e na origem, pois rende um jacobiano degenerado, o que qualifica-os como sub-atuados. Logo, apesar de ser possível obter modelos lineares dos sistema por realimentação dinâmica, estes modelos lineares não são linearmente controláveis e, conseqüentemente, não estabilizáveis a um ponto de equilíbrio por uma realimentação suave.

Embora seja possível mostrar que o sistema multi-corpos é controlável, criando-se “novas” direções - através dos colchetes dos campos vetoriais do sistema segundo o critério STLC - até gerar todo o espaço de fase em um ponto de equilíbrio do sistema, a controlabilidade<sup>6</sup> determinada pelas parcelas da dinâmica do sistema até a primeira ordem (linear) ditam até que ponto as entradas podem influenciar a dinâmica do mesmo. Portanto, sistemas não (linearmente) controláveis não podem ser assintoticamente (ou suavemente) estabilizados.

<sup>6</sup>Realizada nos pontos  $z$  do espaço de fase que não tornam a aproximação linear do sistema degenerada.

A estabilização por realimentação não-contínua ou adição de mais uma entrada ao sistema, que não gere componentes no espaço de fase que são linearmente dependentes em relação as outras entradas, são possíveis soluções.

Pode-se mostrar que o sistema multi-corpos é controlável em um sub-espaço do espaço de fase que não contém a origem; pois a origem implica na origem do espaço de base  $B$  e das coordenadas  $\phi = 0$ . Estas representam, como definido acima, um sistema na forma de uma linha reta. Em princípio seria possível linearizar o sistema por realimentação em vizinhanças dos pontos deste sub-espaço. Observe, no entanto, que não seria possível estabilizá-lo em torno da origem, ou seja, partindo ou chegando ao repouso uma vez que as distribuições se anulam com momentos e configuração nulos. Propõe-se, uma transformação de variáveis para contornar o problema.

**Exemplo 6.2.7.** *Considere o sistema de 3-corpos com três entradas de propulsão e com as duas juntas ativas e cujos corpos estão disposto na forma de um triângulo. Quando todos os corpos são iguais o sistema é simétrico e nesta disposição forma um triângulo equilátero. Neste caso, o sistema **não** é linearmente controlável pois, apesar dos dois torques de junta, as três entradas de propulsão não produzem torque em relação ao centro de massa, dado que as direções de ação das mesmas passam pelo centro de massa. Note que isto ocorre porque, neste caso, as três forças linearmente dependentes entre si. Entretanto, o sistema nesta disposição é linearmente controlável nas direções lineares, o que permite linearizá-lo dinamicamente, pelo método discutido acima por exemplo, e estabilizá-lo na origem se o mesmo for operado como corpo rígido. Como os ângulos de junta não são nulos nesta configuração, recorre-se a uma transformação de coordenadas. Definindo-se esta formação como a nova “origem” do espaço de base  $B$  por uma transformação de coordenadas estática que consiste apenas em reposicionar a origem no espaço de base  $B$ , é possível estabilizar o sistema na origem de  $Q$ . A transformação proposta é dada por*

$$\phi' = \phi + 2\pi/3$$

*Note que, por ser estática, e exceto pela modificação das coordenadas originais  $\phi$  do espaço de base  $B$ , esta transformação mantém inalteradas as expressões para  $\dot{\phi}$  e  $p_\phi$ .*

**Exemplo 6.2.8.** *Para um sistema de  $N$ -corpos, é sempre possível arranjá-lo na forma de um polígono convexo de  $N$  lados; que se torna regular quando o mesmo for composto por corpos idênticos. Neste caso particular, as direções das forças de propulsão passam pelo centro de massa do sistema, ou polígono. Se o número de entradas de propulsão for  $m_p \geq 3$ , ou seja, se o sistema conta com ao menos três entradas de propulsão cujos*

*campos vetoriais correspondentes são linearmente independentes, o sistema é controlável na origem a menos de uma transformação das coordenadas do espaço de base. Excluem-se do conjunto de campos vetoriais da entrada L.I. os campos vetoriais dados quando o sistema forma um polígono convexo regular, por exemplo.*

### 6.3 Controle de Sistemas Sub-atuados

Byrnes e Isidori (1991) mostraram que veículos sub-atuados e na ausência de campos restaurativos, gravitacional e empuxo, por exemplo, não podem ser assintoticamente estabilizados por uma lei de realimentação do estado de classe  $\mathcal{C}^1$ . Mostrou-se em (Pettersen e Egeland, 1996) que para campos restaurativos, como os devidos à gravidade e ao empuxo hidrostático, em geral não é possível estabilizar sistema sub-atuados com realimentações contínuas ou descontínuas. Nestes casos, a estabilização assintótica é possível através de uma realimentação do estado cujos termos, da lei de realimentação, são funções explícitas do tempo.

Como mencionado anteriormente, o presente estudo considera um sistema livre da ação de campos restaurativos. Por este motivo, uma realimentação contínua ou descontínua é suficiente para a estabilização assintótica do sistema, como em (Fantoni et al., 1999). Neste caso, a análise de convergência das leis de controle obtidas seguem da teoria de estabilidade de Lyapunov (Khalil, 2002). Semelhantemente não é possível estabilizar suavemente sistemas não-holonômicos a um ponto de equilíbrio através uma realimentação suave (Bloch, Reyhanoglu e McClamroch, 1992).

Faz-se necessário a apresentação de alguns resultados para a discussão que segue.

**Teorema 6.3.1** (Método direto de Lyapunov (Khalil, 2002)). *Seja  $z = 0$  um ponto de equilíbrio do sistema (6.2.5). Seja  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $\mathcal{C}^1$  tal que*

**Definida positiva:**  $V(z) > 0, \quad \forall z \neq \mathbf{0} \quad e \quad V(\mathbf{0}) = 0$

**Radialmente não-limitada:**  $\|z\| \rightarrow \infty \Rightarrow V(z) \rightarrow \infty$

**Definida negativa:**  $\dot{V}(z) < 0, \quad \forall z \neq \mathbf{0}$

*então  $z = 0$  é global e assintoticamente estável.*

A função  $V$ , como definida acima, é denominada função de Lyapunov. Quando não é possível determinar se  $\dot{V}$  é definida e negativa, faz-se uso do Princípio de Invariância de LaSalle:

**Teorema 6.3.2** (Princípio de Invariância de LaSalle). *Seja  $z = 0$  um ponto de equilíbrio do sistema (6.2.5) e  $D \subset \mathbb{R}^n$  um domínio contendo  $z = 0$ . Seja  $V : [0, \infty[ \times D \rightarrow \mathbb{R}$  uma função  $\mathcal{C}^1$ , definida e positiva em  $D$ . Seja  $S = \{z \in D \mid \dot{V}(z) = 0\}$  e suponha que apenas a solução trivial  $z(t) \equiv 0$  esteja contida em  $S$ . Então, a origem é assintoticamente estável.*

Para sistemas não autônomos, ou seja, variantes no tempo, tem-se o seguinte resultado.

**Teorema 6.3.3** (Método direto: sistemas não autônomos (Khalil, 2002)). *Seja  $z = 0$  um ponto de equilíbrio do sistema (6.2.5) e  $D \subset \mathbb{R}^n$  um domínio contendo  $z = 0$ . Seja  $V : [0, \infty[ \times D \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $\mathcal{C}^1$  tal que*

$$k_1 \|z\|^a \leq V(t, z) \leq k_2 \|z\|^a \quad (6.3.1)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial z} f(t, z) \leq -k_3 \|z\|^a \quad (6.3.2)$$

para  $\forall t \geq 0$  e  $\forall z \in D$ , onde  $k_1, k_2, k_3$  e  $a$  são constantes positivas. Então,  $z = 0$  é exponencialmente estável. Se as hipóteses são verificadas globalmente, então  $z = 0$  é global e exponencialmente estável.

A utilidade do Teorema 6.3.3, devido a estabilidade de Lyapunov para sistemas não-autônomos, será justificada quando a função de Lyapunov for variante no tempo, por ocasião dos sinais de referência das equações cinemáticas do sistema, como mostrado no final desta seção.

**Exemplo 6.3.4** ((Fantoni et al., 1999)). *Seja um hovercraft definido por corpo rígido no plano sob ação de uma entrada de propulsão e um torque no centro de massa. A transformação de coordenadas de velocidade entre os referenciais móvel e inercial segue da expressão*

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}_{cm} = \mathbf{R}_{\theta_{cm}} \mathbf{v}_B &\Rightarrow \dot{r}_x = \cos(\theta_{cm})u - \sin(\theta_{cm})v \\ \dot{r}_y &= \sin(\theta_{cm})u + \cos(\theta_{cm})v \end{aligned}$$

onde  $\mathbf{v}_B = (u, v)$  é a velocidade no referencial móvel e  $r = \dot{\theta}_{cm}$ . Define-se um difeomorfismo global determinando por coordenadas fictícias da posição do sistema em relação

ao referencial móvel:

$$\begin{aligned}\mathbf{z} = \mathbf{R}_{\theta_{cm}}^T \mathbf{r}_{cm} &\Rightarrow z_1 = \cos(\theta_{cm})r_x + \sin(\theta_{cm})r_y \\ z_2 &= -\sin(\theta_{cm})r_x + \cos(\theta_{cm})r_y\end{aligned}$$

Diferenciando-se no tempo as duas coordenadas  $z_1, z_2$  acima, obtém-se

$$\dot{z}_1 = u + z_2 r$$

$$\dot{z}_2 = v - z_1 r$$

O modelo de velocidade do hovercraft, dado por um corpo rígido, é dado por

$$\dot{u} = vr + \tau_u \quad (6.3.3)$$

$$\dot{v} = -ur \quad (6.3.4)$$

$$\dot{r} = \tau_r \quad (6.3.5)$$

O componente da velocidade  $v$  do corpo rígido não é diretamente controlado. Deseja-se estabilizar a posição do sistema  $\mathbf{r}_{cm}$  em relação ao referencial inercial. A orientação do sistema  $\theta_{cm}$  será deixada “livre” e sua evolução no tempo será determinada pela lei de controle. Como proposto em (Fantoni et al., 1999), é possível mostrar a estabilização do sistema acima mediante a função de Lyapunov

$$V = \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + (r - v)^2) \quad (6.3.6)$$

e as funções de controle que estabilizam o sistema na origem são dadas por

$$\tau_u = -k_u u$$

$$\tau_r = -ur - k_r(r - v)$$

A variação temporal de (6.3.6) fornece

$$\dot{V} = u\dot{u} + v\dot{v} + (r - v)(\dot{r} - \dot{v}) \quad (6.3.7)$$

### 6.3.1 O Sistema de 2-Corpos

Sem perda de generalidade, considere o sistema de equações, com massa e inércia unitários, que modelam a dinâmica do sistema de 2-corpos em relação ao referencial móvel:

$$\dot{u} = vr + \tau_u \quad (6.3.8)$$

$$\dot{v} = -ur - \tau_v \quad (6.3.9)$$

$$\dot{r} = \tau_r \quad (6.3.10)$$

onde as entradas  $\tau_u, \tau_v, \tau_r$  para cada uma das três direções acima são dadas por

$$\begin{aligned}\tau_u &= \cos(\phi/2)(f_1 + f_2) \\ \tau_v &= 2 \sin(\phi/2)/(L(\cos(\phi) + 1))\tau_r \\ \tau_r &= L(\cos(\phi) + 1)/2(f_2 - f_1)\end{aligned}$$

onde o ângulo de junta é representado por  $\phi$ . Note que  $r$  é acionado diretamente e que  $\tau_r$  possui influência direta na dinâmica  $v$  apenas quando  $\phi \neq 0$ , ou seja, quando o sistema degenera-se no corpo rígido em (Fantoni et al., 1999). Observe que é possível estabilizar a origem de ambas as direções  $u$  e  $v$  através de  $\tau_u$  e todas as direções  $(u, v, r)$  com  $\tau_r$ , como indicam análises segundo o critério de controlabilidade de Kalman.

Note também que é possível estabilizar (6.3.8)-(6.3.10) na origem através de uma lei de realimentação linear simples, sem, no entanto, a convergência de  $r$  a zero.

Objetiva-se estender o resultado de estabilização do corpo rígido acima para o sistema de 2-corpos de maneira que o primeiro represente um caso particular do segundo. Para este propósito, entretanto, as tentativas de manter a estrutura da função em (6.3.6) para análise de Lyapunov, da Proposição 6.3.1, não foram válidas.<sup>7</sup> O projeto de estabilização do modelo pode partir da adição de um integrador com a função de desacoplamento entre  $\tau_r$  e a dinâmica  $\dot{v}$ . Neste caso, adotando-se uma variável auxiliar  $s$  cuja taxa temporal será usada para designar a entrada  $\tau_r$ , assim como  $\dot{r}$ .<sup>8</sup> O sistema dinâmico passa a ter a seguinte forma:

$$\begin{aligned}\dot{u} &= vr + \tau_u \\ \dot{v} &= -ur - C(\phi)s \\ \dot{s} &= \tau_r \\ \dot{r} &= \tau_r\end{aligned}$$

<sup>7</sup>Observe que, embora seja possível mostrar que a velocidade sistema é estabilizável através da função dada em (6.3.6) e das leis de controle

$$\begin{aligned}\tau_u &= -k_u u - C(\phi)r[(2v - r) - k_r/u] \\ \tau_r &= -ur - k_r(r - v)\end{aligned}$$

estas não correspondem a uma solução cabível uma vez que  $\tau_u$  é racional em  $u$  e representa uma divisão por 0 quando  $u \ll 0$  e este converge mais rapidamente para 0 do que  $v$  ou  $r$ . Ademais, a lei de controle  $\tau_r = -ur - k_r(r - v)u^2$  fornece  $\dot{V}$  com uma estrutura da forma  $-fcnu^2$ . Esta estrutura não é desejável uma vez que  $u = 0$  pode render uma estabilização de  $v$  e  $r$  em pontos diferentes da origem.

<sup>8</sup>Embora  $s$  e  $r$  representem a mesma grandeza, adota-se variáveis distintas apenas com a finalidade de facilitar os cálculos intermediários. Ao final destes, toma-se  $s \equiv r$ .

onde  $C(\phi) = 2 \sin(\phi/2)/(L(\cos(\phi) + 1))$ . Adotando-se uma função de Lyapunov, modificada em relação ao caso anterior, e igual a

$$V = \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + (r - v)^2 + (s - v)^2),$$

tem-se, para as funções de entrada

$$\begin{aligned}\tau_u &= -k_u u \\ \tau_r &= -ur - k_r(r - v) - \frac{3}{2}C(\phi)s\end{aligned}$$

que a taxa temporal de  $V$  é definida negativa e, fazendo a substituição  $s \equiv r$ , dada por

$$\dot{V} = -k_u u^2 - k_r(r - v) - C(\phi)r^2$$

Logo, pela Proposição 6.3.1 e pelo Princípio de LaSalle, o único ponto possível para  $\dot{V}(z) = 0$  é  $z = 0$  e as leis de controle obtidas estabilizam global e assintoticamente o subsistema de velocidade do sistema de 2-corpos. A validade global do controle deve-se a característica de  $V$  ser radialmente não-limitada (Khalil, 2002). As leis de controle acima são válidas apenas nos intervalos em que  $f$  não muda de sinal, como pode-se observar a partir da última expressão. Note que o resultado, para o sistema de dois corpos, obtido acima generaliza o obtido para o corpo rígido em (Fantoni et al., 1999). A Figura 6.3 mostra a convergência do sistema para a origem sob ação das leis de controle obtidas. O projeto acima é válido quando a forma do sistema é mantida fixa; ou seja, para o ângulo  $\phi$  estático. Pode-se, no entanto, obter uma realimentação em que  $\phi$  é dinamicamente alterado para melhorar o desempenho de estabilização do sistema. Considerando a dinâmica da junta, tem-se

$$\begin{aligned}\dot{u} &= vr + \tau_u \\ \dot{v} &= -ur - C(\phi)r \\ \dot{r} &= \tau_r \\ \dot{p}_\phi &= X_{p_\phi} + T\end{aligned}$$

onde  $X_{p_\phi}$  é a dinâmica do momento de junta e a entrada  $T$  corresponde ao torque da junta que atua diretamente na variação do ângulo  $\phi$ . Note que, de acordo com a hipótese de parametrização adotada na Seção 4.2.1,  $T$  atua exclusivamente na dinâmica de  $\phi$ . Deseja-se avaliar a possibilidade de se variar  $\phi$  de forma a melhorar o desempenho do sistema. Adotando-se, portanto, uma curva de referência  $\phi_{ref}$  ao qual  $\phi$  deve rastrear, define-se a seguinte função de Lyapunov

$$V_\phi(\phi, p_\phi) = \frac{1}{2}(\phi - \phi_{ref})^2 + \frac{1}{2}(p_\phi - p_{\phi_{ref}})^2$$



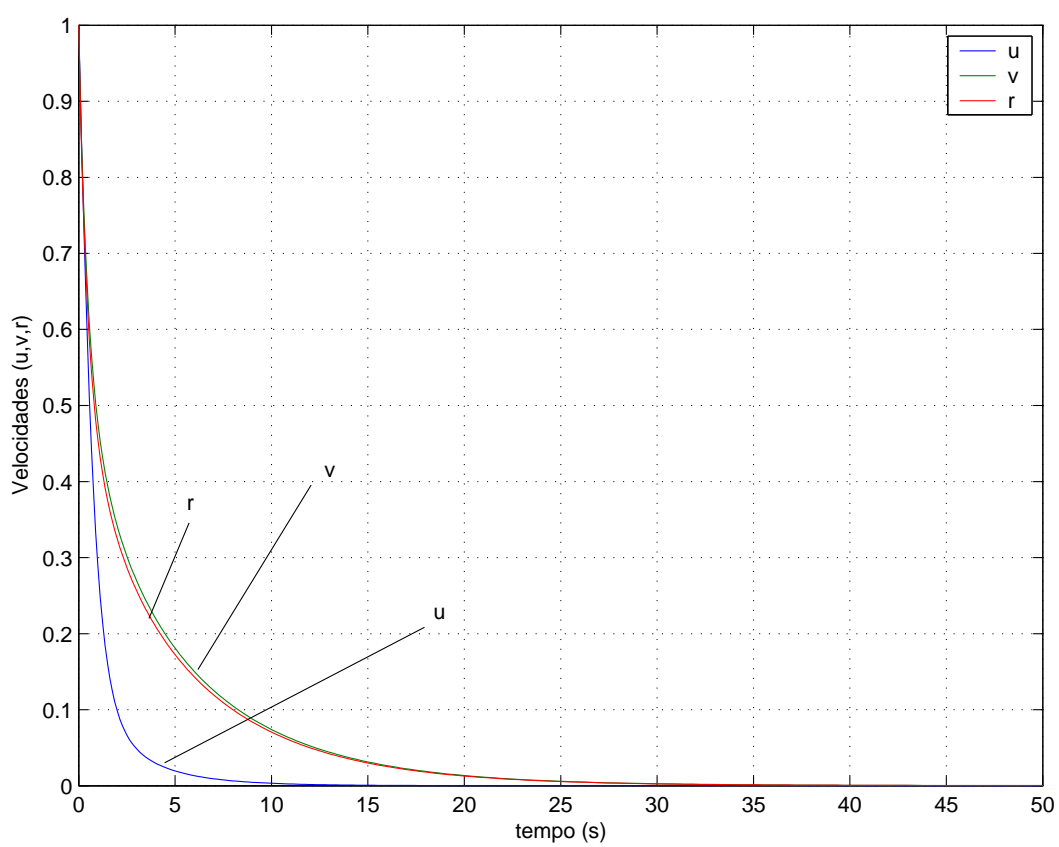


Figura 6.3: Estabilização da velocidade do sistema de 2-corpos.

Escolhe-se a entrada  $T$  de maneira a cancelar a dinâmica de junta  $X_{p_\phi}$ :

$$T = -X_{p_\phi} - K_\phi(\phi - \phi_{ref}) - K_{p_\phi}(p_\phi - p_{\phi_{ref}}) + \dot{p}_{\phi_{ref}}$$

Tomando  $e_\phi = \phi - \phi_{ref}$  e  $e_{p_\phi} = p_\phi - p_{\phi_{ref}}$ , a dinâmica de junta em malha fechada é equivalente a

$$\begin{aligned}\dot{e}_\phi &= \text{fcn}(e_{p_\phi}) \\ \dot{e}_{p_\phi} &= -K_\phi e_\phi - K_{p_\phi} e_{p_\phi}\end{aligned}$$

Sem maiores detalhes aqui, mostra-se que a dinâmica do erro acima converge para zero pelos argumentos de passivação por realimentação, (Khalil, 2002). Apresenta-se abaixo um exemplo de como  $\phi_{ref}$  pode ser escolhido para melhorar o desempenho do sistema.

**Exemplo 6.3.5.** *Deseja-se levar o sistema de 2-corpos em repouso de uma configuração inicial, no instante  $t_0$ , à origem do referencial inercial em tempo  $t_1 - t_0$ .*

*Relembrando as equações de movimento do centro de massa do sistema, tem-se*

$$\dot{p}_x = -\sin(\theta_{cm} - \phi/2)f_1 - \sin(\theta_{cm} + \phi/2)f_2 \quad (6.3.11)$$

$$\dot{p}_y = \cos(\theta_{cm} - \phi/2)f_1 + \cos(\theta_{cm} + \phi/2)f_2 \quad (6.3.12)$$

*Para descrever um movimento horizontal, implica-se ter  $p_y = 0$  e  $p_x > 0$ , se o mesmo ocorre para a direita, ou  $p_x < 0$ , para um movimento à esquerda.*

*Especificando-se  $t_0$  e  $t_1$ , construiu-se curvas para as coordenadas  $\theta_{cm}$ ,  $\phi$  através de equações algébricas de segundo grau. Das equações acima, observa-se que, para uma orientação inicial  $\theta_{cm}(t_0)$  qualquer, o sistema é igualmente controlável em ambas as direções de translação com  $\phi = \pi/2$ . Tomando-se a derivada da equação do momento  $p_{\theta_{cm}} = 2\dot{\theta}_{cm}(I + K \cos(\phi))$ , com relação ao tempo, tem-se que*

$$\dot{p}_{\theta_{cm}} = \frac{2L}{(1 + \cos(\phi))} (f_2 - f_1) \quad (6.3.13)$$

*Resolvendo a expressão acima para  $f_2$ , substitui-se o resultado em (6.3.12) para  $\dot{p}_y = 0$  obtendo-se*

$$f_1 = \frac{-2 \cos(\theta_{cm} + \phi/2)}{L(1 + \cos(\phi))(\cos(\theta_{cm} - \phi/2) + \cos(\theta_{cm} + \phi/2))} \dot{p}_{\theta_{cm}}$$

*A entrada  $f_2$  pode ser determinada substituindo-se a curva encontrada para  $f_1$  acima na equação do momento (6.3.13). Como as curvas  $\theta_{cm}(t)$  e  $\phi(t)$  foram construídas*

de maneira que o sistema se desloque para a direita, pode-se verificar que a expressão (6.3.11) é sempre positiva. As Figuras 6.4 e 6.5 ilustra o movimento do sistema obtido. Note, portanto, que é possível planejar uma trajetória em função de  $\phi$  de forma a melhorar o desempenho de estabilização: neste caso um funcional é otimizado para menor trajetória.

O projeto da estabilização cinemática segue igualmente de (Fantoni et al., 1999). A síntese do controle de estabilização da posição do centro de massa do sistema é feita com base nas expressões da cinemática

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= u + z_2 r \\ \dot{z}_2 &= v - z_1 r \\ \dot{\phi} &= p_\phi / I_\phi\end{aligned}$$

para entradas  $u$ ,  $r$  e  $p_\phi$ , onde  $I_\phi$  é uma constante para cada  $\phi$ . Pelo fato da controlabilidade na direção  $v$  ser deficitária, impõe-se a convergência do movimento vertical para a origem, equilíbrio do sistema cinemático, segundo a expressão

$$\dot{v} + \dot{z}_2 := -(v + z_2)$$

A expressão acima estabelece que a composição da velocidade  $v$  e a coordenada de deslocamento correspondente  $z_2$ , definidas no referencial móvel, possuem variação com taxa negativa. A partir da expressão acima e das equações cinemáticas, obtêm-se as seguintes leis de controle para as velocidades de translação  $u$  e rotação  $r$

$$u = -z_1 + \frac{1}{2}\sqrt{v^2 + z_2^2} \quad (6.3.14)$$

$$r = \frac{4v + 2z_2}{\sqrt{v^2 + z_2^2} + 2C} \quad (6.3.15)$$

As expressões acima são variantes no tempo e representam sinais de referência para a malha de controle da dinâmica da velocidade do sistema. Ou seja, a malha de controle do sub-sistema cinemático fornece os sinais de referência do sub-sistema dinâmico.

Emprega-se a função de Lyapunov para o sub-sistema cinemático  $V_c$

$$V_c(z) = \frac{1}{2}(z_1^2 + z_2^2) + \frac{1}{4}(v + z_2)^2 \quad \Rightarrow \quad \dot{V}_c(z) = z_1 u - \frac{1}{2}(v^2 + z_2^2)$$

Substituindo as leis de controle (6.3.14) e (6.3.15) em  $V$  e  $\dot{V}$ , segue que

$$\dot{V}_c(z) = -z_1^2 - \frac{1}{2}(v^2 + z_2^2) + \frac{1}{2}z_1\sqrt{v^2 + z_2^2}$$

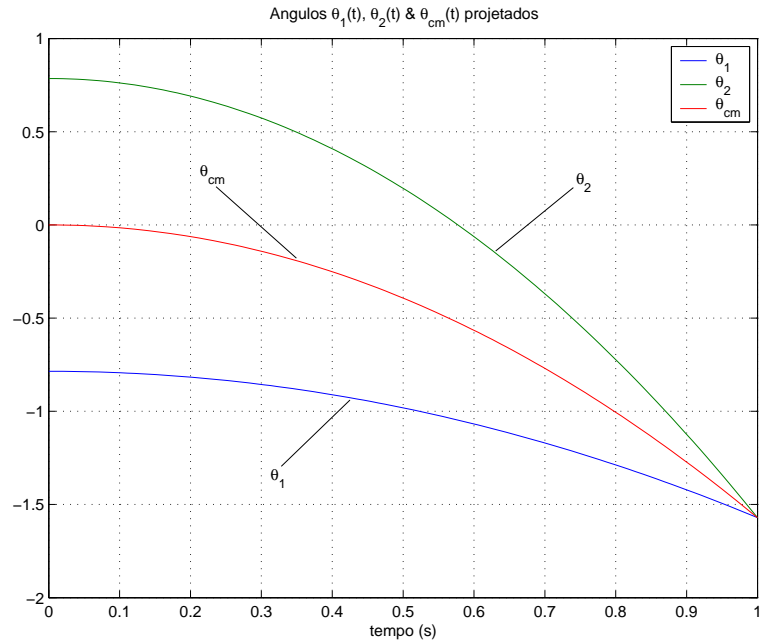
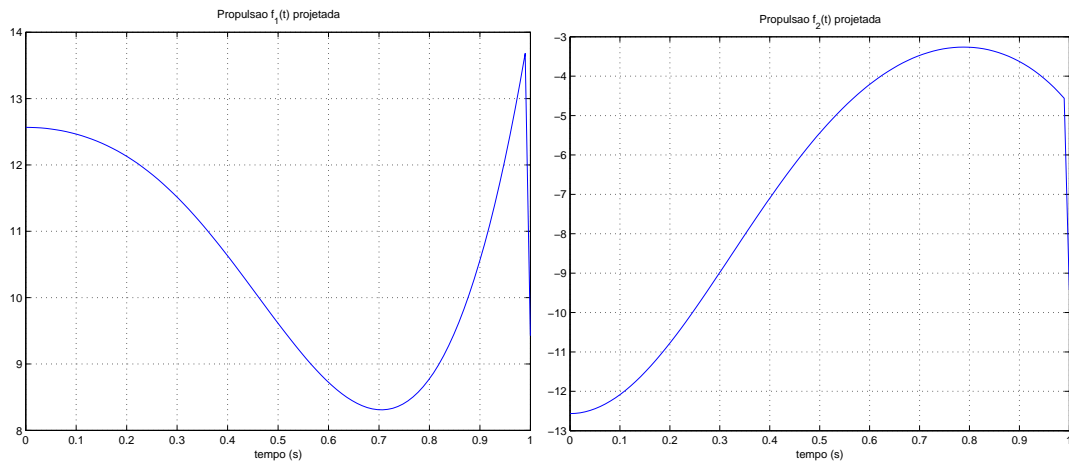
(a) Projeto das curvas de orientação  $\theta_{cm}(t)$  e  $(\theta_1(t), \theta_2(t))$ .(b) Forças de propulsão  $(f_1, f_2)(t)$  projetadas.

Figura 6.4: Planejamento de trajetória do sistema de 2-corpos.

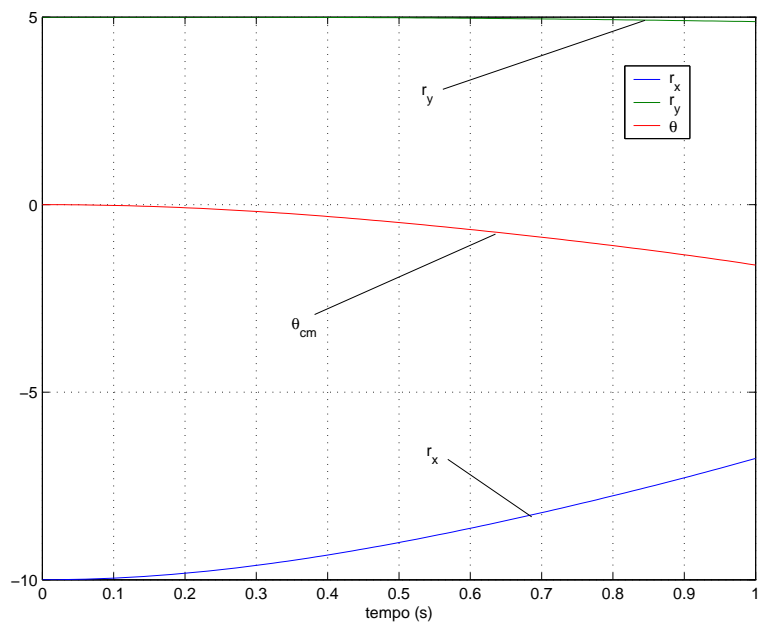
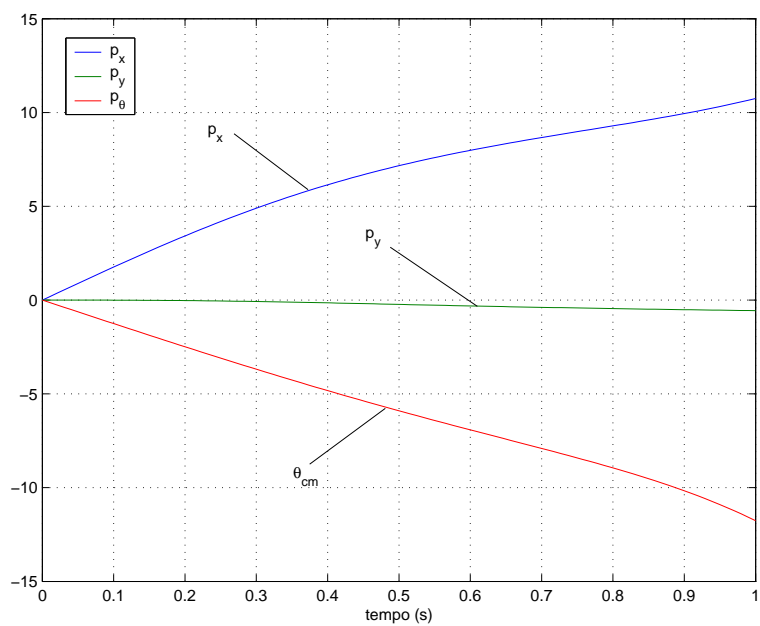
(a) Deslocamento do centro de massa no plano  $r_x - r_y$ .(b) Trajetórias das coordenadas de momento ( $p_x, p_y, p_{\theta_{cm}}$ ).

Figura 6.5: Resultados de simulação em malha aberta do planejamento de trajetória do sistema de 2-corpos.

Completando as expressões de  $V_c$  e  $\dot{V}_c$  de maneira a obter-se o quadrado perfeito, tem-se que

$$\frac{1}{8}(z_1^2 + z_1^2 + v^2) \leq V_c(z) \leq (z_1^2 + z_1^2 + v^2)$$

$$\dot{V}_c(z) \leq -\frac{1}{4}(z_1^2 + z_1^2 + v^2)$$

Logo, pela Proposição 6.3.3, o sistema é global e exponencialmente estável. Além disso, pode-se mostrar que a velocidade de rotação  $r$  tende a zero para alguns casos.

**Proposição 6.3.6.** *Seja o sistema de 2-corpos com o controle de realimentação cinemático dados por (6.3.14) e (6.3.15). Se  $\phi \neq 0$  então  $r$  tende a zero quando  $z_2, v \rightarrow 0$ .*

*Demonstração.* Este resultado é uma extensão em relação ao caso do corpo rígido, uma vez que, para a função de Lyapunov e as leis de controle para este sistema,  $r$  é apenas limitado.

Tomando o limite em (6.3.15) quando  $z_2, v \rightarrow 0$ , observe que (6.3.15) pode ser reescrita por uma função que tende a zero multiplicada por outra que é limitada se  $0 < \phi_{min} < \phi$ . Logo, pelo resultado do Cálculo Diferencial, o limite de  $r$  quando  $z_2, v \rightarrow 0$  é zero.  $\square$

A Figura 6.6 ilustra o resultado de estabilização pela composição das leis de controle cinemática e de velocidade obtidas acima.

## 6.4 Planejamento de Trajetórias e Controle Ótimo

**Definição 6.4.1** (Planejamento de Trajetória do Sistema de 2-corpos). Dados dois pontos de configuração  $q_i, q_f \in Q$ , determinar uma função  $u = [u_1, u_2, u_3]$  tal que o sistema

$$\dot{z}(t) = f(z(t)) + g_1(q(t))u_1(t) + g_2(q(t))u_2(t) + g_3(q(t))u_3(t)$$

parametrizado pela curva  $z(t) = [q(t), p(t)] : [0, t_f] \rightarrow T_{q(t)}^*Q$  e partindo do ponto  $(q(0), p(0)) = (q_i, 0)$ , seja conduzido ao ponto  $(q(t_f), p(t_f)) = (q_f, 0)$  em tempo  $t_f$ .

Pode-se, adicionalmente, estabelecer penalidades sobre um ou todos a função  $u$ , os estados  $q$  ou o tempo  $t_f$  a serem minimizados quando da determinação do planejamento da trajetória. Este procedimento é conhecido como controle ótimo e será comentado mais detalhadamente a seguir.

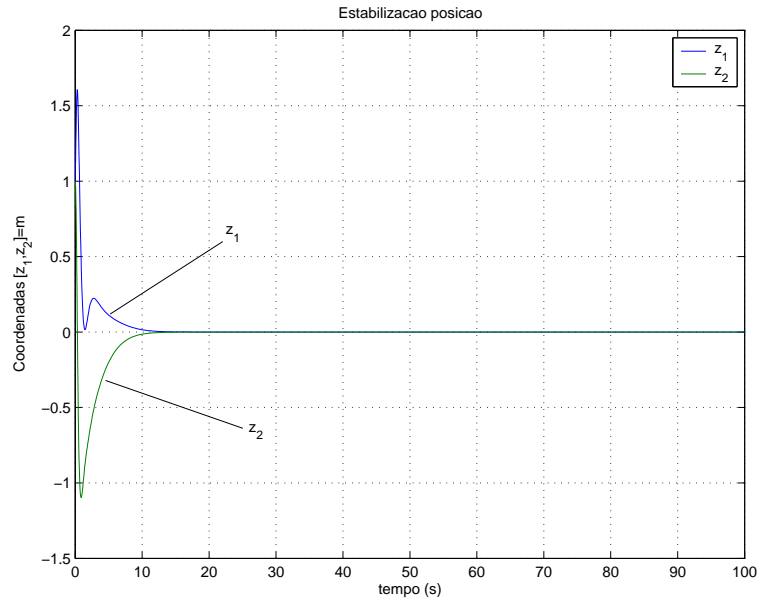
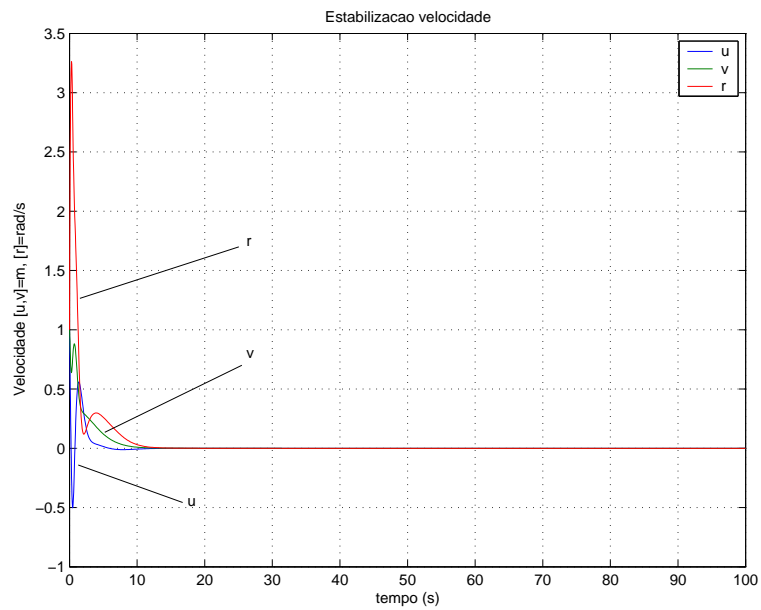
(a) Estabilização da posição ( $z_1, z_2$ ).(b) Estabilização da velocidade ( $u, v, r$ ).

Figura 6.6: Resultados de estabilização de posição e velocidade pela composição das leis de controle.

### 6.4.1 Controle Ótimo do Modelo Cinemático

O planejamento de trajetórias para o sistema multi-articulado pretendido neste trabalho é tratado como um projeto de determinação da solução de um problema de controle ótimo. Para este fim, utiliza-se o modelo cinemático associado do sistema. Logo, para as considerações a seguir considera-se o modelo cinemático do sistema controlável, como mostrado anteriormente na Seção 5.3.3.

Diferentemente da formulação da mecânica não-holonômica, o problema de controle ótimo é um problema variacional. Considere, primeiramente, uma subvariedade  $\mathcal{D} \subset TQ$  do espaço tangente de uma variedade suave  $Q$ . Seja uma função escalar  $F = F(\dot{q}(t))$ . Percorrida a curva  $q(t) : [0, t_f] \rightarrow Q$ , entre os dois pontos distintos  $q_i, q_f \in Q$ , avalia-se o valor da integral de linha

$$IP = \int_0^{t_f} F(\dot{q}(t)) dt$$

que corresponde ao *custo* do percurso  $q(t)$  em  $Q$ . A trajetória em  $\mathcal{D}$  que liga  $q_i$  a  $q_f$  e cujo resultado minimiza  $IP$  dentre todas as possíveis trajetórias em  $\mathcal{D}$  é denominada de ótima. Uma condição necessária para a obtenção do mínimo, ou extremo, do custo  $IP$  é que a integral de  $F$ , avaliada nas variações de  $\dot{q}(t)$ , possua deslocamento infinitesimal nulo<sup>9</sup>, ou seja

$$\delta IP = 0$$

**Definição 6.4.2** (Controle Ótimo). Admite-se que  $\mathcal{D}$  possua pontos, ou seções de  $q \in Q$ , com a seguinte parametrização  $\xi = G(\pi(\xi), u_1, \dots, u_m) \in \mathcal{D}$ , onde  $G \in \mathcal{C}^\infty$  e onde  $u = (u_1, \dots, u_m) \in U \subset \mathbb{R}^m$  e  $\pi$  é a projeção de  $TQ$  em  $Q$ . Logo, as trajetórias, em  $\mathcal{D}$ , que ligam os pontos  $q_i$  e  $q_f$  são dadas por

$$\dot{q}(t) = G(q(t), u(t))$$

Então o custo do percurso partindo de  $q_i$  até  $q_f$  é obtido pela expressão

$$IP = \int_0^{t_f} F \circ G(\dot{q}(t)) dt$$

Neste caso, a tarefa de determinar as trajetórias ótimas é reinterpretada naquela em que se deseja determinar o controle ótimo  $u_1, \dots, u_m$ , ou seja, a parametrização das trajetórias em  $\mathcal{D}$ .

<sup>9</sup>Demonstra-se, que este resultado generaliza às equações de Euler-Lagrange para a função  $F$  em  $\dot{x}(t)$ .



O controle ótimo tem sido aplicado para resolver problemas de minimização da energia quando o controle age apenas no espaço de base, refira a (Yang, 1992). Estes problemas de controle ótimo são definidos conforme o seguinte: Dados os pontos de configuração inicial  $q_i$  e final  $q_f$  em  $(B \times G, B, \pi, G)$ , ambos na mesma fibra, determinar o controle  $u(t)$  que conduz o sistema  $(Q, \mathcal{D}, \langle \langle \cdot, \cdot \rangle \rangle, G, H)$  de  $q_i$  a  $q_f$  minimizando

$$IP = \int_{t_i}^{t_f} C(r) + \langle u, u \rangle_B dt$$

para a métrica Riemanniana  $\langle \cdot, \cdot \rangle_B$  em  $B$  e sujeito às equações da cinemática do sistema. Entretanto, tem-se o interesse em minimizar funcionais, não apenas das trajetórias no espaço de base  $B$ , mas também, das trajetórias na fibra.

Nos parágrafos a seguir, realiza-se um exemplo numérico com o modelo cinemático do sistema de 2-corpos apresentado na Seção 5.3.3. Para o sistema de dois corpos em questão (5.3.7), o vetor de configuração é  $q(t) = (x, y, \theta, \phi)(t)$ , as condições terminais ( $dq_i = dq_f = 0$ ) de posição e atitude

$$\begin{aligned} x(t_i) = x_i & & x(t_f) = x_f \\ y(t_i) = y_i & & y(t_f) = y_f \\ \theta(t_i) = \theta_i & & \theta(t_f) = \theta_f \\ \phi(t_i) = \phi_i & & \phi(t_f) = \phi_f \end{aligned}$$

e de velocidade  $\dot{q}(t) \in TQ$

$$\begin{aligned} \dot{x}(t_i) = \dot{x}_i = 0 & & \dot{x}(t_f) = \dot{x}_f = 0 \\ \dot{y}(t_i) = \dot{y}_i = 0 & & \dot{y}(t_f) = \dot{y}_f = 0 \\ \dot{\theta}(t_i) = \dot{\theta}_i = 0 & & \dot{\theta}(t_f) = \dot{\theta}_f = 0 \\ \dot{\phi}(t_i) = \dot{\phi}_i = 0 & & \dot{\phi}(t_f) = \dot{\phi}_f = 0 \end{aligned}$$

Vínculos de controle nas variáveis  $f_1, f_2, T$

$$\begin{aligned} 0 = f_{min} & \leq f_1, f_2 \\ & f_1, f_2 \leq f_{max} \\ T_{min} & \leq T \leq T_{max} \end{aligned}$$

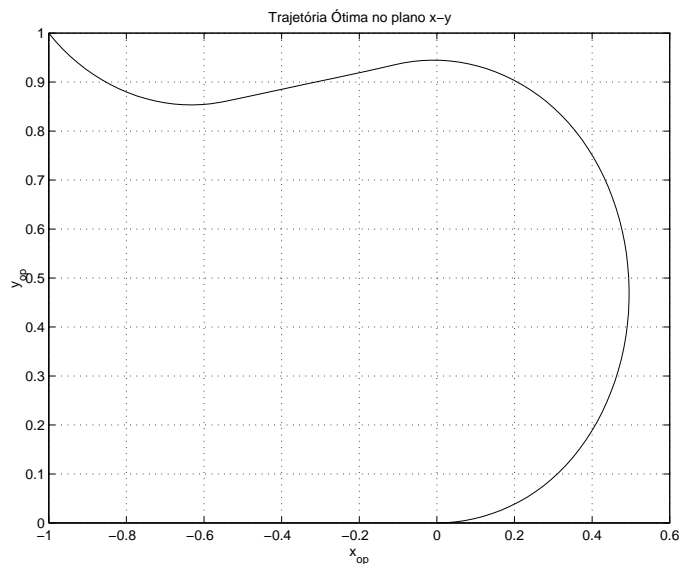
Alguns índices de desempenho de interesse estão sendo utilizados. Entre estes:

$$\begin{aligned}
 IP_1 &= \int_{t_i}^{t_f} 1 dt = t_f \quad (\exists u \leq u_{max}) \\
 IP_2 &= \int_{t_i}^{t_f} x^2(t) + y^2(t) + \theta^2(t) + \phi^2(t) dt \\
 IP_3 &= IP_2 + \int_{t_i}^{t_f} f_1^2(t) + f_2^2(t) + T^2(t) dt
 \end{aligned}$$

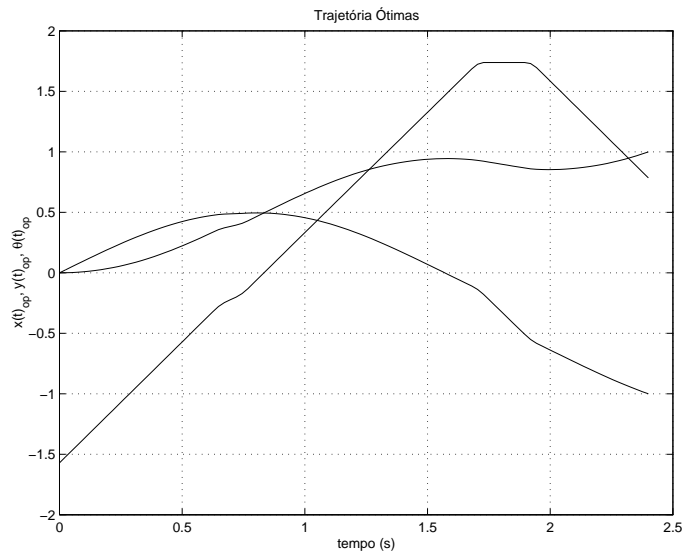
Devido à existência do número relativamente elevado de restrições ou vínculos nas variáveis de controle e de estado, optou-se por uma investigação numérica, como alternativa de se evitar a complexidade inerente à obtenção da solução por métodos analíticos nestes casos.

Para tanto, fez-se uso do *toolbox* de controle ótimo para MatLab denominado RIOTS - *Recursive Integration Optimal Trajectory Solver*, (Schwartz, Polak e Yangquan, 1997) e as suas referências. Maiores detalhes a respeito da implementação do *RIOTS* não serão aqui considerados. Uma recente e detalhada descrição da teoria do funcionamento do *RIOTS* pode ser encontrada em (Menegaldo, 2000).

As Figuras 6.7 e 6.8 mostram os resultados da sintonização do controle ótimo aplicado ao modelo cinemático do sistema de dois corpos (5.3.7) utilizando o RIOTS. O referencial móvel é localizado na junta rotativa do sistema, com eixo horizontal direcionado ao corpo direito e eixo vertical, restrito ao plano, é perpendicular ao horizontal, conforme a Fig. 5.3. O procedimento numérico considerou tempo fixo de 2.4s e otimização o índice de desempenho  $IP_3$  dado acima. O controle  $u$  é restrito aos valores  $-1 \leq f_1, f_2 \leq 1$  e  $-0.2 \leq T \leq 0.2$ . O sistema parte da origem no plano  $x - y$  inercial, totalmente estendido  $\phi_i = 0$  e com orientação inicial  $\theta_i = -\pi/2$ , isto é, eixo vertical alinhado com o eixo  $x$  inercial. O sistema é levado ao ponto  $(-1, 1)$  do plano,  $\phi_f = 0$  e com orientação final  $\theta_f = \pi/4$ .



(a) Deslocamento ótimo do centro do referencial móvel no plano  $x - y$ .



(b) Trajetórias ótimas das coordenadas de fibra  $(r_x, r_y, \theta_{cm})$ .

Figura 6.7: Resultados do controle ótimo aplicado ao modelo cinemático do sistema de dois corpos.

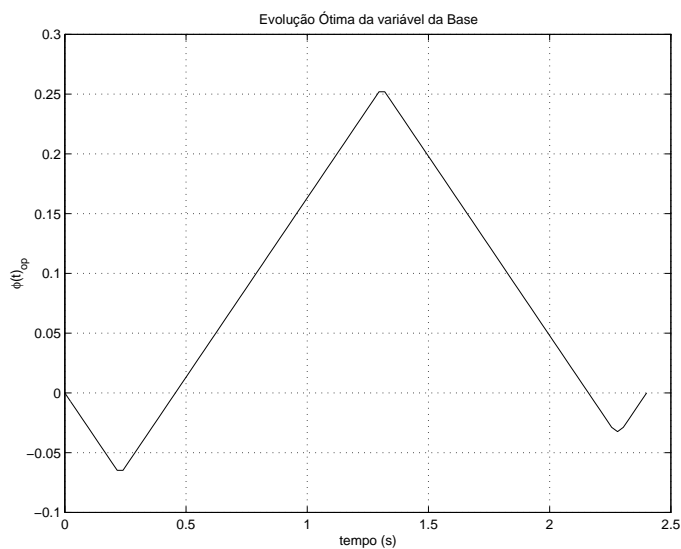
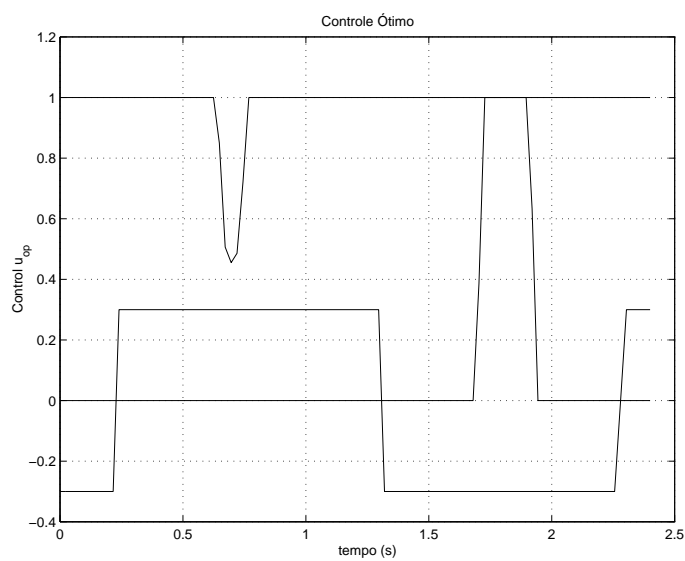
(a) Trajetória ótima das coordenadas da base  $\phi(t)$ .(b) Controle ótimo  $u(t) = (f_1, f_2, T)(t)$ .

Figura 6.8: Resultados do controle ótimo aplicado ao modelo cinemático do sistema de dois corpos.

---

## 6.5 Conclusão

A partir das considerações acima, determinou-se algumas condições, e os respectivos métodos, em que o sistema é estabilizável.

Os sistemas com apenas duas entradas de propulsão não são linearizáveis por realimentação estática uma vez que os seus campos vetoriais geram distribuições não involutivas. Além disso, estes sistemas não são linearizáveis por realimentação dinâmica, pois as suas aproximações lineares não são controláveis, ou seja, são sistemas sub-atuados. Neste caso, recorre-se a técnicas de estabilização não suaves ou variantes no tempo. Para este propósito, considerou-se aqui uma extensão de um resultado obtido para a estabilização no plano do corpo rígido sub-atuado através do procedimento de análise e síntese do controlador segundo a teoria de estabilidade de Lyapunov.

Os sistemas com três ou mais entradas de propulsão, que geram direções de propulsão linearmente independentes, são linearizáveis por realimentação e, portanto, estabilizáveis por uma realimentação do estado obtida através de técnicas de controle lineares, por exemplo.

Apresentou-se, ainda, exemplos analítico e numérico do planeamento de trajetória do sistema de 2-corpos.

## Capítulo 7

# Conclusões

### Modelagem

Apresentou-se, neste trabalho, as equações de movimento dinâmico de uma classe de sistemas multi-corpos em que os corpos componentes são fisicamente acoplados por articulações rotativas. Além das articulações, ou juntas, ativas, o sistema é dotado de propulsores que atuam na variação da posição do centro de massa do sistema.

Como mencionado no Capítulo 3, a dinâmica de sistema em geral associada às restrições de movimento implicam em uma dinâmica não-holonômica. A dinâmica do sistema multi-articulado, apesar de caracterizada por medidas não integráveis no sentido de Frobenius, dado pelo momento angular, foi aqui considerado livre de restrições cinemáticas no espaço bidimensional. Logo, as equações de Euler-Lagrange foram utilizadas para a modelagem Lagrangiana do sistema.

Na presença de restrições não-holonômicas de velocidade, no entanto, a modelagem do sistema deve seguir pela formulação do Princípio de Lagrange d'Alembert, como discutido no Capítulo 3. Neste caso, a dinâmica não é obtida por um procedimento variacional, que caracteriza os problemas de controle ótimo, uma vez que a variação das curvas é tomada sem as restrições.

Além desta, a modelagem Hamiltoniana do sistema foi apresentada segundo duas parametrizações da orientação do centro de massa do sistema.

### Controlabilidade

A importância da análise de acessibilidade não-linear de sistemas dinâmicos reside na análise com vista a obtenção de controle e da síntese de algoritmos de planejamento de trajetória, atividade não realizada neste trabalho mas reservada como um dos temas de trabalhos futuros.

O sistema proposto, com pelo menos duas entradas de propulsão e com o espaço de base totalmente atuado, sempre é acessível em todo espaço de configuração  $Q$ , independente do número de corpos. Isto decorre do fato de que, para um conjunto de sistemas com  $N$  crescente, o número de direções de movimento possíveis, e construídas pelos colchetes de Jacobi-Lie, cresce mais rapidamente que o número de estados ou dimensão do espaço de fase para o qual a dimensão da álgebra de acessibilidade deve alcançar.

### Estabilização

O método utilizado para a estabilização do sistema no plano é dependente do número de entradas; em particular, do número de entradas de propulsão. Pode-se enfatizar que, em geral, este número de entradas é também função da quantidade de direções linearmente independentes que os campos vetoriais correspondentes podem gerar.

Para sistemas da classe, em que o espaço de base é totalmente controlado, com três ou mais entradas de propulsão é possível estabilizar o sistema a um ponto de equilíbrio empregando-se técnicas lineares de controle ao modelo linear do mesmo. O procedimento considerado para a linearização do modelo do sistema é exato e realizado por um método de linearização por realimentação. Note que, pela definição da classe de sistemas no primeiro capítulo, não é possível utilizar esta solução de estabilização para o sistema com apenas dois corpos, uma vez que possui apenas duas entradas de propulsão. Neste caso, assim como para sistemas de  $N$  corpos mas com apenas dois propulsores, utilizou-se uma técnica derivada da teoria de estabilidade de Lyapunov para estabilização da dinâmica do sistema.

## 7.1 Sugestões para Trabalhos Futuros

Algumas possíveis contribuições futuras são resumidas a seguir:

- 
- Modelagem tridimensional do sistema. A extensão dos modelos obtidos no plano ao espaço de três dimensões não é trivial e requer atenção com relação ao aparecimento de singularidades;
  - Análise da dinâmica: estabilidade, bifurcações e caos;
  - Modelagem do sistema sob ação de forças dissipativas ou potenciais: como no caso de robôs submarinos e terrestres;
  - Planejamento de trajetórias construtiva, com embasamento nos resultados de acessibilidade do sistema;
  - Planejamento de trajetórias através de uma abordagem analítico-numérica do controle ótimo. Otimização da configuração de entradas, isto é, determinar uma combinação ótima de entradas, propulsores e atuadores rotativos, para uma determinada trajetória dada;
  - Investigação de outras técnicas não-lineares de estabilização. Considerar técnicas de rastreamento.



## Referências Bibliográficas

- Arnold, V. I. (1989). *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Vol. 60 of *Graduate Texts in Mathematics*, 2 edn, Springer-Verlag.
- Battilotti, S. e Califano, C. (2004). A constructive condition for dynamic feedback linearization, *System Control & Letters* **52**: 329–338.
- Bloch, A. M. (2003). *Nonholonomic Mechanics and Control*, Vol. 24 of *Interdisciplinary Applied Mathematics*, 1 edn, Springer.
- Bloch, A. M., Krishnaprasad, P. S., Marsden, J. E. e Murray, R. M. (1996). Nonholonomic mechanical systems with symmetry, *Archive for Rational Mechanics and Analysis* **136**: 21–99.
- Bloch, A. M., Reyhanoglu, M. e McClamroch, N. H. (1992). Control and stabilization of nonholonomic dynamic systems, *IEEE Transactions on Automatic Control* **37**(11): 1746–1757.
- Bullo, F. e Lewis, A. D. (2005). *Geometric Control of Mechanical Systems: Modeling, Analysis, and Design for Simple Mechanical Systems*, Vol. 49 of *Texts in Applied Mathematics*, Springer.
- Byrnes, C. I. e Isidori, A. (1991). On the attitude stabilization of rigid spacecraft, *Automatica* **27**: 87–95.
- Charlet, B., Lévine, J. e Marino, R. (1989). On dynamic feedback linearization, *System Control & Letters* **13**: 143–151.
- Charlet, B., Lévine, J. e Marino, R. (1991). Sufficient conditions for dynamic state feedback linearization, *SIAM Journal of Control and Optimization* **29**(1): 38–57.

- Dubowsky, S. e Papadopoulos, E. (1993). The kinematics, dynamics, and control of free-flying and free-floating space robotic systems, *IEEE Transactions on Robotics and Automation* **9**(5): 531–543.
- Fantoni, I., Lozano, R., Mazenc, F. e Pettersen, K. Y. (1999). Stabilization of a Non-linear Underactuated Hovercraft, **Proc. 38<sup>th</sup> IEEE Conference on Decision and Control**, *Phoenix, USA* pp. 2533–2538.
- Fernandes, C., Gurfits, L. e Li, Z. (1994). Near-optimal nonholonomic motion planning for a system of coupled rigid bodies, *IEEE Transactions of Automatic Control* **39**(3): 450–463.
- Hunt, L. R., Su, R. e Meyer, G. (1983). Design for multi-input nonlinear systems, in R. Brockett e R. S. M. H. J. Sussmann (eds), *Differential Geometric Control Theory*, Vol. 27 of *Progress in Mathematics*, Birkhäuser, chapter 9, pp. 268–298.
- Isidori, A. (1995). **Nonlinear Control Systems**, Communication and Control Engineering Series, 3 edn, Springer-Verlag.
- Kallem, V. e Cowan, N. J. (2007). Image-guided control of flexible beveltíp needles, *IEEE International Conference on Robotics and Automation, Rome, Italy* p. 3015–3020.
- Khalil, H. K. (2002). **Nonlinear Systems**, 3 edn, Prentice Hall.
- Koningstein, R. e Cannon Jr., R. H. (1995). Experiments with model-simplified computed-torque manipulator controllers for free-flying robots, *AIAA Journal of Guidance, Control and Dynamics* **18**(6): 1386–1390.
- Krener, A. J. (1999). *Mathematical control theory*, Springer, chapter Feedback Linearization, p. 360.
- Lanczos, C. (1977). **The Variational Principles of Mechanics**, 4 edn, Dover Publications, Inc.
- Littlejohn, R. e Reinsch, M. (1997). Gauge fields in the separation of rotation and internal motions in the n-body problem, *Reviews of Modern Physics* **69**(1): 213–275.
- Manikonda, V. (1998). Control and stabilization of a class of nonlinear system with symmetry, *Ph.D. Report TR 98-2*, University of Maryland, College Park.

- Marsden, J. E. (2004). *Lectures on Mechanics*, Vol. 174 of *Lecture notes series*, sept04 draft version edn, Cambridge University Press.
- Marsden, J. E., Montgomery, R. e Ratiu, T. S. (1990). Reduction, symmetry, and phases in mechanics, *Memoirs American Mathematical Society* **436**.
- Marsden, J. E. e Ostrowski, J. (1998). Symmetries in motion: Geometric foundations of motion control, *Nonlinear Science Today* pp. 1–21.
- Marsden, J. E. e Ratiu, T. S. (1999). *Introduction to Mechanics and Symmetry*, Vol. 17 of *Texts in Applied Mathematics*, 2 edn, Springer. 3rd printing.
- Marsden, J. E. e Scheurle, J. (1993). The reduced euler-lagrange equations, *Fields Institute Communications* (1): 139–164.
- Marsden, J., Ratiu, T. e Weinstein, A. (1984). Semidirect products and reduction in mechanics, *Transactions on the AMS* **281**(1): 147–177.
- Mather, J. (2005). Mat-327: Differential geometry, *Undergraduate class notes*, Dept. of Mathematics, Princeton University.
- McLain, T. W., Rock, S. M. e Lee, M. J. (1995). Experiments in the Coordination of Underwater Manipulator and Vehicle Control, *Proceedings of the MTS/IEEE OCEANS '95* **2**: 1208–1215.
- Meirovitch, L. (1970). **Methods of Analytical Dynamics**, McGraw-Hill, NY.
- Melli, J. B., Rowley, C. W. e Rufat, D. S. (2006). Motion planning for an articulated body in a perfect fluid, *Submitted to SIADS* .
- Menegaldo, L. L. (2000). *Modelagem Biomecânica e Controle Ótimo da Postura Humana Através de Algoritmos Baseados na Teoria das Aproximações Consistentes*, Tese de doutoramento, EPUSP.
- Murray, R. M. (1997). Nonlinear control of mechanical systems: A lagrangian perspective, *Annual Reviews in Control* **21**: 31–45.
- Nijmeijer, H. e van der Shaft, A. (1990). *Nonlinear Dynamical Control Systems*, Springer-Verlag.
- Ostrowski, J. P. (1995). *The Mechanics and Control of Undulatory Robotic Locomotion*, Ph.d. thesis, California Institute of Technology.

- Ostrowski, J. P. (1999). Computing reduced equations for robotic systems with constraints and symmetries, *IEEE Transactions on Robotics and Automation* **15**(1): 111–123.
- Pettersen, K. Y. e Egeland, O. (1996). Exponential Stabilization of an Underactuated Surface Vessel, **Proc. 35<sup>th</sup> IEEE Conference on Decision and Control, Kobe, Japan** pp. 967–971.
- Respondek, W. (2002). Geometry of static and dynamic feedback, Warsaw-Poland Summer School on Mathematical Control Theory Lecture Notes.
- Reyhanoglu, M. e McClamroch, N. H. (1991). Controllability and stabilizability of planar multibody systems with angular momentum preserving control torques, *Proc. 1991 American Control Conference, Boston* pp. 1102–1107.
- Rui, C., Kolmanovsky, I. V. e McClamroch, N. H. (2000). Nonlinear attitude and shape control of spacecraft with articulated appendages and reaction wheels, *IEEE Transactions on Automatic Control* **45**(8): 1455–1469.
- Schutz, B. (1980). *Geometrical Methods of Mathematical Physics*, Cambridge University Press.
- Schwartz, A., Polak, E. e Yangquan, C. (1997). *RIOTS 95<sup>TM</sup>: A MatLab Toolbox for Solving Optimal Control Problems*, windows version 1.0 edn, Dept. of Electrical Engineering, Stanford University.
- Shapere, A. e Wilczek, F. (1987). Self-propulsion at low reynolds number, *Physics Review and Letters* **58**: 2051–2054.
- Shen, J. (2002). *Nonlinear Control of Multibody Systems with Symmetries via Shape Change*, Ph.d. report, University of Michigan.
- Sontag, E. D. (1998). *Mathematical Control Theory: Deterministic Finite-Dimensional Systems*, Vol. 6 of *Texts in Applied Mathematics*, 2 edn, Springer-Verlag.
- Souza, E. C. e Maruyama, N. (2007). Lagrangian modeling for a class of mobile multibody systems, *3rd IFAC Symposium on Systems, Structures and Control, Foz do Iguaçu, Brasil*.
- Spivak, M. (1999). *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, Vol. I, 3 edn, Publish or Perish, Inc.

- Sreenath, N. (1987). *Modeling and Control of Multibody Systems*, Ph.d. thesis report, University of Maryland.
- Sussmann, H. J. (1987). A general theorem on local controllability, *SIAM Journal of Control and Optimization* **25**(1): 158–194.
- UUVMP Committee (2004). The navy unmanned undersea vehicle (uuv) master plan, *Master plan*, Department of the Navy, United States of America.
- Walsh, G. C. e Sastry, S. S. (1995). On reorienting linked rigid bodies using internal motions, *IEEE Transactions on Robotics and Automation* **11**(1): 139–146.
- Wittenburg, J. (1977). *Dynamics of Systems of Rigid Bodies*, Teubner, Stuttgart.
- Yang, R. (1992). *Nonholonomic Geometry, Mechanics and Control*, Ph.d. thesis, Systems Research Institute, Univ. of Maryland.
- Yuh, J. e West, M. (2001). Underwater robotics, *Advanced Robotics* **15**(5): 609–639. Review paper.

## Apêndice A

# Fundamentos Gerais

### A.1 Aplicações e Conjuntos Usuais na Mecânica Geométrica

Seja um grupo de Lie  $G$  agindo em uma variedade  $M$  e  $\mathfrak{g}$  a álgebra de Lie correspondente ao grupo  $G$ . Para  $x \in M$ ,  $g \in G$ , e  $\xi, \eta \in \mathfrak{g}$ , definem-se os seguintes.

Para uma curva,  $t$ -parametrizada,  $t\xi$  em  $\mathfrak{g}$  e  $t \in \mathbb{R}$ , a aplicação exponencial é dada pelo subgrupo de um parâmetro  $\gamma_\xi(t)$  tal que

$$\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G : t\xi \mapsto \exp(t\xi) = \gamma_t^{\xi L}(e)$$

A órbita da ação  $\Phi$  de  $G$  em  $M$  corresponde a uma variedade imersa de  $M$

$$\text{Orb}(x) = \{\Phi_g(x) \mid g \in G\} \subset M \tag{A.1.1}$$

A aplicação de projeção  $\pi$  e o espaço quociente estão relacionados pelas seguintes expressões

$$\begin{aligned} \pi : M &\rightarrow M/G \\ x &\mapsto \text{Orb}(x) \end{aligned}$$

Seja  $\xi \in \mathfrak{g}$ . A  $\mathbb{R}$ -ação em  $M$  segue da relação

$$\Phi^\xi(t, x) = \Phi_t^\xi(x) = \Phi(\exp(t\xi), x) = \Phi_{\exp(t\xi)}(x) \tag{A.1.2}$$

Seja  $\Phi : G \times M \rightarrow M$  uma ação de grupo suave à esquerda. O gerador infinitesimal de  $\Phi$  é definido como o campo vetorial relativo a ação de grupo  $\Phi$  dada pela aplicação exponencial de uma trajetória na álgebra  $\mathfrak{g}$  parametrizada por  $t$ , ou seja

$$\xi_M(x) := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \Phi_{\exp(t\xi)}(x)$$

Automorfismo interno, ou aplicação conjugação, é definida por

$$I_g : G \rightarrow G \tag{A.1.3}$$

$$h \mapsto I_g(h) = R_{g^{-1}} \circ L_g(h) = ghg^{-1} \tag{A.1.4}$$

A ação adjunta de  $g \in G$  em  $\xi \in \mathfrak{g}$  corresponde a aplicação  $\text{Ad} : G \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ . Esta representa uma transformação de similaridade para Lie álgebras de matrizes. Sob o contexto da cinemática do corpo rígido, a aplicação adjunta representa uma transformação do sistema de coordenadas de referência

$$\text{Ad}_g = T_e I_g : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g} \tag{A.1.5}$$

$$\xi \mapsto T_e(R_{g^{-1}} \circ L_g)(\xi) = \left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} gh(\epsilon)g^{-1} = g\xi g^{-1} \tag{A.1.6}$$

onde  $\xi$  é a tangente da curva  $h(\epsilon)$  em  $\epsilon = 0$ . A ação coadjunta de  $g \in G$  em  $\mu \in \mathfrak{g}^*$  é a aplicação  $\text{Ad}^* : G \times \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{g}^*$  ou

$$\text{Ad}_{g^{-1}}^* : \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{g}^* \tag{A.1.7}$$

onde

$$\langle \text{Ad}_{g^{-1}}^*(\mu), \xi \rangle = \langle \mu, \text{Ad}_{g^{-1}}(\xi) \rangle \tag{A.1.8}$$

observe que  $\text{Ad}_g^*$  não é definida como a aplicação coadjunta, mas simplesmente a aplicação dual de  $\text{Ad}_g$  e que  $\text{Ad}_g^* = \text{Ad}_g^T$  para grupos de matrizes. O operador adjunto ou, simplesmente,  $\text{ad}$ , é definido por

$$\text{ad}_\xi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g} \tag{A.1.9}$$

$$\eta \mapsto \xi_{\mathfrak{g}}(\eta) = [\xi, \eta] \tag{A.1.10}$$

onde o gerador infinitesimal  $\xi_{\mathfrak{g}}$  para a **ação adjunta** é dado por

$$\xi_{\mathfrak{g}}(\eta) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \text{Ad}_{\exp(t\xi)}(\eta)$$

Sejam  $X$  e  $Y$  dois campos vetoriais e a álgebra definida pelo operador adjunto  $\text{ad}_X Y = [X, Y]$ . A iteração do colchete de Jacobi-Lie por  $l$  vezes é dada por  $\text{ad}_X^l Y = [X, \dots, [X, Y] \dots]$ . Define-se  $\text{ad}_X^0 Y = Y$ .

O operador coadjunto

$$\text{ad}_\xi^* : \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{g}^* \quad (\text{A.1.11})$$

onde

$$\langle \text{ad}_\xi^*(\alpha), \eta \rangle = \langle \alpha, \text{ad}_\xi(\eta) \rangle \quad (\text{A.1.12})$$

Assim como no caso da aplicação adjunta, vale a relação  $\text{ad}^* = \text{ad}^T$  para grupos de matrizes.

## A.2 Representações Espaciais com a Álgebra do Grupo

### A.2.1 Representações entre Referenciais

Para  $\dot{g} = \xi \in T_g G$  a representação inercial, respectivamente de corpo, é dada pela translação à direita, respectivamente esquerda, em  $TG$  ou, para grupos de matrizes,

$$\xi_S = T_g R_{g^{-1}}(\xi) = \dot{g} g^{-1} \quad \text{e} \quad \xi_B = T_g L_{g^{-1}}(\xi) = g^{-1} \dot{g}. \quad (\text{A.2.1})$$

onde  $\xi_{(\cdot)}$  pertence a Lie álgebra de  $G$ , isto é,  $\xi_{(\cdot)} \in T_e G \equiv \mathfrak{g}$ .

Para  $\dot{g}^* = \mu \in T_g^* G$  a *representação inercial* de  $\mu$  é dada por sua translação à direita em  $T^*G$  ou

$$\mu_S = T_e^* R_g(\mu). \quad (\text{A.2.2})$$

Analogamente, a *representação de corpo* de  $\mu$  é dada pela translação à esquerda em  $T^*G$  ou

$$\mu_B = T_e^* L_g(\mu). \quad (\text{A.2.3})$$

onde  $\mu_{(\cdot)}$  pertence a Lie álgebra de  $G^*$ , ou seja,  $\mu_{(\cdot)} \in T_e^* G \equiv \mathfrak{g}^*$ .

Para grupos de matrizes, tem-se

$$\xi_S = \text{Ad}_g \xi_B = g \xi_B g^{-1} \quad (\text{A.2.4})$$

Logo, a relação entre as representações nos referenciais inercial e móvel em  $TG$ , respectivamente  $T^*G$ , são dadas pela aplicação adjunta

$$\xi_S = \text{Ad}_g \xi_B \Leftrightarrow \xi_B = \text{Ad}_{g^{-1}} \xi_S \quad \text{e} \quad (\text{A.2.5})$$

$$\mu_S = \text{Ad}_{g^{-1}}^* \mu_B \Leftrightarrow \mu_B = \text{Ad}_g^* \mu_S \quad (\text{A.2.6})$$



A ponte entre a álgebra de Lie e a sua representação dual é feita pelo levantamento cotangente da ação de grupo  $\Phi_g$ , ( $g \in G$ ) e dada pelo pareamento da álgebra

$$\langle T_e^* \Phi_g \pi, \xi \rangle = \langle \pi, T_e \Phi_g \xi \rangle \quad (\text{A.2.7})$$

onde  $\xi \in \mathfrak{g}$  e  $\pi \in T_g^* G$ . Logo, para manipulações com matrizes, onde o elemento identidade  $e$  é dado pela matriz identidade ( $e = I$ ), e para uma ação de grupo à esquerda  $\Phi_g = L_g$ , (A.2.7) é definida por

$$\begin{aligned} \langle T_I^* L_g \pi, \xi_B \rangle &= \langle \pi, T_I L_g \xi_B \rangle = \text{tr}(\pi^T g \xi_B) = \text{tr}(\xi_B^T g^T \pi) \\ &= \langle \xi_B, g^T \pi \rangle = \langle \xi_B, T_I^* L_g \pi \rangle \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

onde  $\text{tr}$  é a operação *traço*, definida no espaço matrizes quadradas. Portanto

$$\mu_B = T_I^* L_g \pi = g^T \pi \in \mathfrak{g}^* \quad (\text{A.2.8})$$

### A.2.2 O Grupo $SE(2)$

Para  $\mathbf{R} = \mathbf{R}(\theta) \in SO(2)$ , onde  $\theta$  é a parametrização de um elemento do círculo  $\mathbb{S}^1$  e  $\mathbf{r} = (x, y)^T \in \mathbb{R}^2$ , tem-se que

$$g = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{r} \\ \mathbf{0}_{1 \times 2} & 1 \end{bmatrix} \in SE(2) \quad (\text{A.2.9})$$

O elemento inverso correspondente

$$g^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}^{-1}(\theta) & -\mathbf{R}^{-1}(\theta)\mathbf{r} \\ \mathbf{0}_{1 \times 2} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}^T(\theta) & -\mathbf{R}^T(\theta)\mathbf{r} \\ \mathbf{0}_{1 \times 2} & 1 \end{bmatrix} \in SE(2) \quad (\text{A.2.10})$$

pois  $\mathbf{R}^{-1}(\theta) = \mathbf{R}^T(\theta) = \mathbf{R}(-\theta)$ . Como mencionado anteriormente, qualquer elemento  $g$  de  $SE(2)$  pode ser parametrizado pela tripla  $(x, y, \theta)$  e

$$\dot{g} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{R}} & \dot{\mathbf{r}} \\ \mathbf{0}_{1 \times 2} & 0 \end{bmatrix} \in T_g SE(2) = T_{(\mathbf{R}, \mathbf{r})} SE(2) = T_{(\theta, x, y)} SE(2) \quad (\text{A.2.11})$$

Os elementos da Lie álgebra para  $SE(2)$  podem ser obtidos pela translação dos pontos do espaço tangente  $T_g SE(2)$  aos pontos do espaço tangente na origem  $T_e SE(2)$ . As translações à esquerda fornecem representações do espaço de fase do sistema no referencial móvel; alternativamente, as translações à direita fornecem representações do espaço de fase do sistema no referencial inercial. Uma translação à direita de  $\dot{g}$  por  $g^{-1}$  fornece

$$\xi_S = \dot{g} g^{-1} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{R}} \mathbf{R}^T & -\dot{\mathbf{R}} \mathbf{R}^T \mathbf{r} + \dot{\mathbf{r}} \\ \mathbf{0}_{1 \times 2} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\omega \mathbf{M} & \mathbf{v} \\ \mathbf{0}_{1 \times 2} & 0 \end{bmatrix} \in T_{I_3} SE(2) \equiv \mathfrak{se}(2) \quad (\text{A.2.12})$$

onde  $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} + \omega \mathbb{M} \mathbf{r}$ ,  $\omega = \dot{\theta} \in \mathbb{R}$ , o elemento identidade  $e$  do grupo  $SE(2)$  é a matriz identidade  $I_3$  e  $\mathbb{M}$  é a matriz (quadrada) simplética de dimensão 2 dada por

$$\mathbb{M} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Note que é possível tomar  $\mathfrak{se}(2) \simeq \mathbb{R}^3$  e os elementos  $\xi_S$  podem ser definidos pela parametrização  $\xi_S = (\omega, \mathbf{v})$ .

Ademais, para  $\mu_S = T_e^* R_g \pi$  e utilizando o pareamento entre os elementos dos espaços duais, tem-se

$$\langle T_e^* R_g \pi, \xi_S \rangle = \langle \pi, T_e R_g \xi_S \rangle = \text{tr}(\mu_S \xi_S) = \varphi \omega + \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{v} = \langle (\varphi, \boldsymbol{\alpha}), (\omega, \mathbf{v}) \rangle$$

Portanto, os elementos da Lie álgebra dual  $\mathfrak{se}^*(2)$  possuem a seguinte estrutura

$$\mu_S = \begin{bmatrix} \frac{\varphi}{2} \mathbb{M} & \mathbf{0}_{2 \times 1} \\ \boldsymbol{\alpha} & 0 \end{bmatrix} \in T_{I_3}^* SE(2) \equiv \mathfrak{se}^*(2) \simeq \mathbb{R}^3$$

onde  $\varphi \in \mathbb{R}$  e  $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^2$ . Identificando  $\mathfrak{se}(2) \simeq \mathbb{R}^3 \simeq \mathfrak{se}^*(2)$  o pareamento entre  $\mathfrak{se}(2)$  e  $\mathfrak{se}^*(2)$  corresponde ao produto interno usual em  $\mathbb{R}^3$ , como mostrado acima.

Para elementos de grupo parametrizados por  $g = (\mathbf{R}, \mathbf{r})$ , a ação adjunta  $\text{Ad}_g$  na álgebra  $\mathfrak{se}(2)$ , relativa ao referencial móvel, fica

$$\text{Ad}_{(\mathbf{R}, \mathbf{r})} \xi_B = g \xi_B g^{-1} = \begin{bmatrix} -\omega \mathbb{M} & \dot{\mathbf{r}} + \omega \mathbb{M} \mathbf{r} \\ \mathbf{0}_{1 \times 2} & 0 \end{bmatrix} = \xi_S \quad (\text{A.2.13})$$

que recupera (A.2.12), ao passo que a ação adjunta inversa  $\text{Ad}_g^{-1}$  em  $\xi_S$  fornece

$$\text{Ad}_{(\mathbf{R}, \mathbf{r})^{-1}} \xi_S = g^{-1} \xi_S g = \begin{bmatrix} -\omega \mathbb{M} & \mathbf{R}^T \dot{\mathbf{r}} \\ \mathbf{0}_{1 \times 2} & 0 \end{bmatrix} = \xi_B \quad (\text{A.2.14})$$

o que recupera o elemento correspondente no referencial móvel  $\xi_B$ . Sob o contexto em que operações são realizadas com vetores, ao contrário de quando com matrizes, pode-se obter a representação matricial da ação adjunta aplicada a  $\xi_S = (\omega, \mathbf{v})$  através da expressão

$$\text{Ad}_{(\mathbf{R}, \mathbf{r})} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}_{1,2} \\ \mathbb{M} \mathbf{r} & \mathbf{R} \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Ad}_{(\mathbf{R}, \mathbf{r})} (\omega, \mathbf{v}) = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}_{1,2} \\ \mathbb{M} \mathbf{r} & \mathbf{R} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \omega \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega \\ \omega \mathbb{M} \mathbf{r} + \mathbf{R} \mathbf{v} \end{pmatrix} \quad (\text{A.2.15})$$

que parametriza o resultado em (A.2.13). Analogamente, a representação matricial da ação adjunta inversa  $\text{Ad}_{g^{-1}}$  fica

$$\text{Ad}_{(\mathbf{R}, \mathbf{r})^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}_{1 \times 2} \\ -\mathbf{R}^T \mathbb{M} \mathbf{r} & \mathbf{R}^T \end{bmatrix}$$

que fornece  $\text{Ad}_{g^{-1}} \xi_S = g^{-1} \xi_S g = \xi_B$  quando aplicado em  $\xi_S$ , ou seja:

$$\text{Ad}_{(\mathbf{R}, \mathbf{r})^{-1}}(\omega, \mathbf{v}) = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}_{1 \times 2} \\ -\mathbf{R}^T \mathbb{M} \mathbf{r} & \mathbf{R}^T \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \omega \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega \\ \mathbf{R}^T \dot{\mathbf{r}} \end{pmatrix} \quad (\text{A.2.16})$$

No resultado acima utilizou-se (A.2.12). Observe, também, que este condiz com a expressão obtida em (A.2.14). Alternativamente, é possível obter expressões da ação adjunta para elementos de grupo dados por  $g = (\mathbf{r}, \mathbf{R})$ , como apresenta a seguinte expressão

$$\text{Ad}_{(\mathbf{R}, \mathbf{r})} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}_{1,2} \\ \mathbb{M} \mathbf{r} & \mathbf{R} \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Ad}_{(\mathbf{r}, \mathbf{R})} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbb{M} \mathbf{r} \\ \mathbf{0}_{1,2} & 1 \end{bmatrix}$$

Neste caso, a representação matricial da ação adjunta de  $\xi_S = (\mathbf{v}, \omega)$  é obtida pela expressão

$$\text{Ad}_{(\mathbf{r}, \mathbf{R})}(\mathbf{v}, \omega) = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbb{M} \mathbf{r} \\ \mathbf{0}_{1,2} & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega \mathbb{M} \mathbf{r} + \mathbf{R} \mathbf{v} \\ \omega \end{pmatrix} \quad (\text{A.2.17})$$

que corresponde ao resultado de (A.2.15), como esperado. A aplicação adjunta inversa correspondente, equivalente ao resultado em (A.2.16), é dada por

$$\text{Ad}_{(\mathbf{r}, \mathbf{R})^{-1}}(\mathbf{v}, \omega) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}^T & -\mathbf{R}^T \mathbb{M} \mathbf{r} \\ \mathbf{0}_{1,2} & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}^T \dot{\mathbf{r}} \\ \omega \end{pmatrix} \quad (\text{A.2.18})$$

Note que  $[\text{Ad}_{g^{-1}}] = [\text{Ad}_g]^{-1}$ . Observe, também, que a ação adjunta inversa  $\text{Ad}_{g^{-1}}$ , anula a ação da ação adjunta direta, como esperado; ou seja,  $\text{Ad}_g \text{Ad}_{g^{-1}} = I_3$  para um sistema plano. O mesmo vale para a ação coadjunta  $\text{Ad}_g^*$ . A velocidade do corpo rígido no referencial móvel  $\xi_B \in \mathfrak{se}(2)$  é obtida segundo a expressão

$$\xi_B = g^{-1} \dot{g} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}^T \dot{\mathbf{R}} & \mathbf{R}^T \dot{\mathbf{r}} \\ \mathbf{0}_{1 \times 2} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\omega \mathbb{M} & \mathbf{R}^T \dot{\mathbf{r}} \\ \mathbf{0}_{1 \times 2} & 0 \end{bmatrix}$$

Mostrar que a álgebra  $\mathfrak{se}(2)$  não é abeliana é trivial. Sejam dois os elementos da álgebra  $\mathfrak{se}(2)$  dados por  $\xi_1 = (\omega_1, u_1, v_1)$  e  $\xi_2 = (\omega_2, u_2, v_2)$ . Calcula-se, então

$$\xi_1 \xi_2 = \begin{bmatrix} -\omega_1 \omega_2 & 0 & -\omega_1 v_2 \\ 0 & -\omega_1 \omega_2 & \omega_1 u_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e

$$\xi_2 \xi_1 = \begin{bmatrix} -\omega_1 \omega_2 & 0 & -\omega_2 v_1 \\ 0 & -\omega_1 \omega_2 & \omega_2 u_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Logo,  $\xi_1$  e  $\xi_2$  não comutam. Observe, no entanto, que, assim como ocorre com o grupo  $SO(2)$ , os elementos da álgebra  $\mathfrak{so}(2)$  comutam.

A aplicação exponencial  $\exp : \mathfrak{se}(2) \rightarrow SE(2) : (\omega, v_x, v_y) \mapsto (\theta, r_x, r_y)$ , também conhecida por hélice, provem da fórmula de Rodrigues, veja (Bullo e Lewis, 2005):

$$\theta = \omega \tag{A.2.19}$$

$$\begin{bmatrix} r_x \\ r_y \end{bmatrix} = \begin{cases} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix}, & \text{para } \omega = 0 \\ \begin{bmatrix} \frac{\sin \omega}{\omega} & \frac{(1-\cos \omega)}{\omega} \\ -\frac{(1-\cos \omega)}{\omega} & \frac{\sin \omega}{\omega} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix}, & \text{para } \omega \neq 0 \end{cases} \tag{A.2.20a}$$

$$\tag{A.2.20b}$$

## Apêndice B

# Resultados Auxiliares

Resultados auxiliares para mecânica geométrica são detalhados a seguir.

### B.1 Superfície de Energia Constante para o Sistema de 2-corpos

No que segue, apresenta-se o cálculo das superfícies iso-energia (energia constante) para a dinâmica rotacional do sistema de dois corpos interconectados. Para isto, deseja-se reduzir o Hamiltoniano do sistema (4.2.18) a  $T^*\mathbb{S}^1$ . Definem-se os parâmetros  $\mu$  e  $\nu$  como

$$\bar{\mu} = \mu_1 + \mu_2 = \mu \quad \nu = \frac{\mu_2 - \mu_1}{2}$$

Parametriza-se o momento angular como

$$\begin{cases} \mu_1 = -\nu + \frac{1}{2}\mu \\ \mu_2 = \nu + \frac{1}{2}\mu \end{cases}$$

Substituindo estas definições em (4.2.18), tem-se:

$$\begin{aligned} 2\Delta H &= \left[ \tilde{I}_2 \left( -\nu + \frac{1}{2}\mu \right)^2 - 2\epsilon\lambda \left( -\nu + \frac{1}{2}\mu \right) \left( \nu + \frac{1}{2}\mu \right) + \tilde{I}_1 \left( \nu + \frac{1}{2}\mu \right)^2 \right] \\ &= \left[ (\tilde{I}_1 + \tilde{I}_2 + 2\epsilon\lambda)\nu^2 + (\tilde{I}_1 - \tilde{I}_2)\mu\nu + \frac{1}{4}\mu^2(\tilde{I}_1 + \tilde{I}_2 - 2\epsilon\lambda) \right] \end{aligned} \quad (\text{B.1.1})$$

A parametrização para a plotagem no espaço 3D é feita através de coordenadas cilíndricas:

$$\begin{cases} x = \mu \cos(\phi) \\ y = \mu \sin(\phi) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \phi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases} \quad (\text{B.1.2})$$

Substituindo  $\mu$  e  $\phi$  em (B.1.1) e resolvendo a equação algébrica de segunda ordem para a componente vertical  $\nu$ , para um dado valor de  $H$ , determina a superfície iso-bárica.

## B.2 Desacoplamento dos Componentes da $\mathfrak{se}(2)$

Tem-se o interesse de mostrar aqui a estrutura desacoplada dos componentes da álgebra de Lie de grupos com produto semi-direto. Uma abordagem similar a encontrada em Marsden, Ratiu e Weinstein (1984) será tomada a seguir. Como caso especial, pode-se mostrar o desacoplamento dos componentes de  $\mathfrak{se}(2)$ , que resulta do fato da estrutura do grupo  $SO(2)$  de  $SE(2)$  estar desacoplada da estrutura do espaço vetorial  $\mathbb{R}^2$ .<sup>1</sup>

Seja a ação de um grupo de Lie  $G$  no espaço vetorial  $V$ . Para  $g_1, g_2 \in G$  e  $v_1, v_2 \in V$ , a estrutura de grupo  $G \circledast V$  é definida por

$$(g_1, v_1) \cdot (g_2, v_2) = (g_1 g_2, g_1 v_2 + v_1) \quad (\text{B.2.1})$$

onde  $\circledast$  determina o produto semi-direto. Denomina-se por  $S$  o grupo dado pelo produto semi-direto do grupo de Lie  $G$  com o espaço vetorial  $V$ ,

$$S = G \circledast V = G \times_{\rho} V$$

O símbolo  $\times_{\rho}$  é empregado em Marsden et al. (1984) para representar a mesma estrutura de produto dada por  $\circledast$ . Logo, para  $g \in G$  e  $\mathbf{u} \in V$ , tem-se  $(g, \mathbf{u}) \in S$ . A álgebra de Lie associada é

$$\mathfrak{s} = \mathfrak{g} \circledast V = \mathfrak{g} \times_{\rho'} V$$

onde  $V \simeq T_{e_V} V$  e  $e_V$  é o elemento identidade do espaço vetorial  $V$ . Isto pode ser explicitado pela seguinte identidade:  $(\mathbf{0}, \mathbf{v}) = (e_V, \mathbf{v}) \in T_{e_V} V \simeq V$ . Logo, os elementos da álgebra Lie e da sua dual são

$$\xi \in \mathfrak{g}, \quad \mathbf{v} \in V \Rightarrow (\xi, \mathbf{v}) \in \mathfrak{s} \quad (\text{B.2.2})$$

$$\mu \in \mathfrak{g}^*, \quad \mathbf{a} \in V^* \Rightarrow (\mu, \mathbf{a}) \in \mathfrak{s}^* \quad (\text{B.2.3})$$

<sup>1</sup>Observe que, apesar de ambos  $SO(2)$  e  $\mathbb{R}^2$  serem abelianos, a estrutura do produto semi-direto de  $SE(2)$  não é abeliana.

Ademais, o fibrado tangente possui a seguinte estrutura

$$v_h \in T_h G, \quad \mathbf{w} \in T_{\mathbf{v}} V \simeq V \Rightarrow (v_h, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \in T_{(h, \mathbf{v})}(G \times V) \quad (\text{B.2.4})$$

$$\alpha_h \in T_h^* G, \quad \mathbf{a} \in T_{\mathbf{v}}^* V \simeq V \Rightarrow (\alpha_h, \mathbf{v}, \mathbf{a}) \in T_{(h, \mathbf{v})}^*(G \times V) \quad (\text{B.2.5})$$

A ação à esquerda  $L$  de  $(g, \mathbf{u})$  em  $(h, \mathbf{v})$  é

$$L_{(g, \mathbf{u})}(h, \mathbf{v}) = (gh, \mathbf{u} + \rho(g)\mathbf{v}) \quad (\text{B.2.6})$$

Por causa da estrutura de um produto semi-direto de  $S$ , o elemento inverso de  $S$  é  $(g, \mathbf{v})^{-1} = (g^{-1}, -\rho(g^{-1})\mathbf{v})$ ,<sup>2</sup> onde  $\rho$  é um automorfismo de  $G$  em  $V$ . Segue que

$$L_{(g, \mathbf{u})^{-1}}(h, \mathbf{v}) = (g^{-1}h, g^{-1}\mathbf{v} - \rho(g^{-1})\mathbf{u})$$

Uma translação genérica, no fibrado tangente, de  $(h, \mathbf{v})$  no ponto  $(g, \mathbf{u})$  é dada por

$$T_{(h, \mathbf{v})}L_{(g, \mathbf{u})}(v_h, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = (T_h L_g v_h, \mathbf{u} + \rho(g)\mathbf{v}, \rho(g)\mathbf{w})$$

A translação à esquerda para a álgebra de Lie  $\mathfrak{s}$  fica

$$\begin{aligned} T_{(h, \mathbf{v})}L_{(h, \mathbf{v})^{-1}}(v_h, \mathbf{v}, \mathbf{w}) &= (T_h L_{h^{-1}} v_h, -\rho(h^{-1})\mathbf{v} + \rho(h^{-1})\mathbf{v}, \rho(h^{-1})\mathbf{w}) \\ &= (h^{-1}v_h, \mathbf{0}, \rho(h^{-1})\mathbf{w}) \\ &= (h^{-1}\dot{h}, \mathbf{0}, \rho(h^{-1})\mathbf{w}) \\ &= (\xi_G, e_V, \xi_V) \in \mathfrak{s} \end{aligned}$$

Observe, da última igualdade, que a álgebra do espaço vetorial é dependente do elemento de grupo  $h$ . Alternativamente, a álgebra de grupo é independente do espaço vetorial  $V$ .

Pode-se também verificar o desacoplamento da álgebra abeliana de grupo  $\mathfrak{g}$  da álgebra do espaço vetorial  $V$  através da obtenção das constantes estruturais  $c_{ac}^b$  da álgebra  $\mathfrak{s}$ . Refira a Seção B.5.

### B.3 Equação da Conexão Horizontal e Holonomia

Seja  $Q$  dado por uma estrutura principal  $(s, r) \in G \times B$ . A solução da equação diferencial relativa ao componente horizontal de uma conexão de Ehresman  $\mathcal{A}$  é dada por:

$$\dot{s}(t) = -s(t)\mathcal{A}(r(t))\dot{r}(t) = -T_e L_{g(t)}\xi(t), \quad s(0) = e. \quad (\text{B.3.1})$$

<sup>2</sup>Isto pode ser mostrado fazendo

$$(g, \mathbf{v}) \cdot (g, \mathbf{v})^{-1} = (g, \mathbf{v}) \cdot (g^{-1}, -\rho(g^{-1})\mathbf{v}) = (gg^{-1}, \mathbf{v} - \rho(g)\rho(g^{-1})\mathbf{v}) = (e, \mathbf{0})$$

Pela natureza comutativa da ação de grupo, o elemento identidade pode ser obtido quando o elemento inverso age à esquerda de  $(g, \mathbf{v})$ .

Denominando-se  $s(t)^{-1}\dot{s}(t) = \dot{\eta}(t) \in \mathfrak{g}$ , onde  $\eta(0) = 0$ , pode-se proceder segundo

$$\int_0^t \dot{\eta} dt = \eta(t) - \eta(0) = \eta(t) = \left( - \int_0^t \mathcal{A}(r)\dot{r} dt \right) = \left( - \int_0^t \xi(t) dt \right) \quad (\text{B.3.2})$$

A solução da equação diferencial (B.3.1), como discutido em Marsden et al. (1990), é da forma

$$s(t) = \exp(\eta(t)) \quad (\text{B.3.3})$$

e

$$\dot{s}(t) = \dot{\eta}(t) \exp(\eta(t)) \quad (\text{B.3.4})$$

Substituindo (B.3.3) e (B.3.4) em (B.3.1), segue que

$$\dot{\eta} \exp(\eta(t)) = - \exp(\eta(t)) \mathcal{A}(r)\dot{r} \Rightarrow \quad (\text{B.3.5})$$

$$- \mathcal{A}(r)\dot{r} \exp\left(- \int_0^t \mathcal{A}(r)\dot{r} dt\right) = - \exp\left(- \int_0^t \mathcal{A}(r)\dot{r} dt\right) \mathcal{A}(r)\dot{r} \quad (\text{B.3.6})$$

Ambos os lados da última expressão são iguais somente se seus fatores comutarem, ou seja, se (condição suficiente) o grupo de Lie  $G$  for abeliano.

## B.4 Curvatura da Conexão

A finalidade desta seção é mostrar como obter as expressões para o cálculo das fases geométricas de um sistema de corpos articulados. Algumas definições que serão utilizadas abaixo podem ser encontradas no Capítulo 4 de (Marsden e Ratiu, 1999). As expressões serão escritas para um sistema de ( $N = 5$ )-corpos. O vetor orientação  $\theta$  e de formato do sistema  $\phi$  são dados por:

$$\theta = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \\ \theta_5 \end{bmatrix}, \quad \phi = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_{21} \\ \theta_{32} \\ \theta_{43} \\ \theta_{54} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_2 - \theta_1 \\ \theta_3 - \theta_2 \\ \theta_4 - \theta_3 \\ \theta_5 - \theta_4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Seja  $dx^i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , a base dual para um dado sistema de coordenadas de uma variedade genérica. Para uma função real  $f$  arbitrária, tem-se

$$\mathbf{d}(f) = \text{grad} f \cdot d\mathbf{x} = (\text{grad} f)^b = \frac{\partial f}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial f}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial f}{\partial x^3} dx^3 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x^n} dx^n \quad (\text{B.4.1})$$

Seja  $d\phi^i$ ,  $i = 1, \dots, N - 1$ , a base dual de um sistema de coordenadas para um espaço de base.



Partindo de (5.2.4), define-se a função vetorial  $F$  como

$$F(\phi) = -\frac{\mathbf{1}_N^T \mathbb{J}(\phi) \mathbf{M}}{\mathbf{1}_N^T \mathbb{J}(\phi) \mathbf{1}_N} = (f_1, f_2, f_3, f_4)(\phi) : \mathbb{R}^{(N-1)} \rightarrow \mathbb{R}^{(N-1)}$$

onde as funções reais  $f_i$ , ou também 0-formas, são dadas por

$$f_i = f_i(\phi) : \mathbb{R}^{(N-1)} \rightarrow \mathbb{R}^{(N-1)}, \quad i = 1, \dots, N-1$$

Transformando o vetor  $F$  em uma 1-forma por meio de um operador bemol  $\flat$ , segue que

$$F^\flat = f_1 d\phi^1 + f_2 d\phi^2 + f_3 d\phi^3 + f_4 d\phi^4 = \mathcal{A}_i^1(\phi) d\phi^i$$

Observe que  $F^\flat$  corresponde à 1-forma da conexão  $\mathcal{A}(\phi)d\phi$  no espaço de base. A derivada exterior de  $F^\flat$ , simbolizada por  $\mathbf{d}(F^\flat)$ , é obtida segundo a expressão

$$\begin{aligned} \mathbf{d}(F^\flat) &= \mathbf{d}f_1 \wedge d\phi^1 - f_1 \wedge \mathbf{d}(d\phi^1) + \mathbf{d}f_2 \wedge d\phi^2 - f_2 \wedge \mathbf{d}(d\phi^2) \\ &\quad + \mathbf{d}f_3 \wedge d\phi^3 - f_3 \wedge \mathbf{d}(d\phi^3) + \mathbf{d}f_4 \wedge d\phi^4 - f_4 \wedge \mathbf{d}(d\phi^4) \end{aligned}$$

Note o uso do operador produto exterior  $\wedge$ , agora que  $\mathbf{d}f_i$  é composta por 1-formas. Sabe-se também, das propriedades gerais de diferenciação externa das formas, que  $\mathbf{d}d\phi^i = 0$ . Utilizando (B.4.1), tem-se

$$\begin{aligned} \mathbf{d}(F^\flat) &= \mathbf{d}f_1 \wedge d\phi^1 + \mathbf{d}f_2 \wedge d\phi^2 + \mathbf{d}f_3 \wedge d\phi^3 + \mathbf{d}f_4 \wedge d\phi^4 \\ &= \left( \frac{\partial f_1}{\partial \phi^1} d\phi^1 + \frac{\partial f_1}{\partial \phi^2} d\phi^2 + \frac{\partial f_1}{\partial \phi^3} d\phi^3 + \frac{\partial f_1}{\partial \phi^4} d\phi^4 \right) \wedge d\phi^1 \\ &\quad + \left( \frac{\partial f_2}{\partial \phi^1} d\phi^1 + \frac{\partial f_2}{\partial \phi^2} d\phi^2 + \frac{\partial f_2}{\partial \phi^3} d\phi^3 + \frac{\partial f_2}{\partial \phi^4} d\phi^4 \right) \wedge d\phi^2 \\ &\quad + \left( \frac{\partial f_3}{\partial \phi^1} d\phi^1 + \frac{\partial f_3}{\partial \phi^2} d\phi^2 + \frac{\partial f_3}{\partial \phi^3} d\phi^3 + \frac{\partial f_3}{\partial \phi^4} d\phi^4 \right) \wedge d\phi^3 \\ &\quad + \left( \frac{\partial f_4}{\partial \phi^1} d\phi^1 + \frac{\partial f_4}{\partial \phi^2} d\phi^2 + \frac{\partial f_4}{\partial \phi^3} d\phi^3 + \frac{\partial f_4}{\partial \phi^4} d\phi^4 \right) \wedge d\phi^4 \end{aligned}$$

Utilizando a propriedade de anti-comutatividade do produto exterior para 1-formas, obtém-se  $dx \wedge dy = -dy \wedge dx$  e  $dx \wedge dx = 0$ . Agrupando os termos com fatores comuns, chega-se a expressão

$$\begin{aligned} \mathbf{d}(F^\flat) &= \left( \frac{\partial f_2}{\partial \phi^1} - \frac{\partial f_1}{\partial \phi^2} \right) d\phi^1 \wedge d\phi^2 + \left( \frac{\partial f_3}{\partial \phi^2} - \frac{\partial f_2}{\partial \phi^3} \right) d\phi^2 \wedge d\phi^3 \\ &\quad + \left( \frac{\partial f_4}{\partial \phi^3} - \frac{\partial f_3}{\partial \phi^4} \right) d\phi^3 \wedge d\phi^4 + \left( \frac{\partial f_4}{\partial \phi^1} - \frac{\partial f_1}{\partial \phi^4} \right) d\phi^1 \wedge d\phi^4 \\ &\quad + \left( \frac{\partial f_3}{\partial \phi^1} - \frac{\partial f_1}{\partial \phi^3} \right) d\phi^1 \wedge d\phi^3 + \left( \frac{\partial f_4}{\partial \phi^2} - \frac{\partial f_2}{\partial \phi^4} \right) d\phi^2 \wedge d\phi^4 \end{aligned} \quad (\text{B.4.2})$$

Para o espaço  $\mathbb{R}^3$ , a expressão geral do equacionamento acima segue da seguinte equação

$$\mathbf{d}(F^b) = \mathbf{n} \cdot \text{curl}F \, d\Omega$$

onde a função curl de  $F$  é  $(*\mathbf{d}(F^b))^{\sharp}$  e  $d\Omega$  é o elemento infinitesimal da área sobre o qual a integração da forma da curvatura é realizada, (Spivak, 1999).

Para uma  $k$ -forma genérica no espaço vetorial dual  $n$ -dimensional  $T_q^*Q$  ( $k < n$ ) e com a base  $\{dx^1, \dots, dx^k\}$ , tem-se que

$$\omega = \sum_I \omega_I dx^I = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \omega_{i_1, \dots, i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \quad (\text{B.4.3})$$

onde a notação multi-índice  $I = (i_1, \dots, i_k)$  é definida acima. Observe que uma seqüência de produtos exteriores dos elementos da base acima define a função determinante usual no espaço de matrizes  $GL(k, \mathbb{R})$ .<sup>3</sup> O diferencial da forma  $\omega$  é

$$d\omega = \sum_I d\omega_I dx^I = \sum_I \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial \omega}{\partial x^\alpha} dx^\alpha \wedge dx^I \quad (\text{B.4.4})$$

Especializa-se, agora, as expressões acima para a conexão principal ( $k = 1$ ) e para a curvatura de formas ( $k = 2$ ). A holonomia para o sistema pode ser computada através de

$$\text{holonomia} := \iint_{\Omega} \mathbf{d}(F^b) = \iint_{\Omega} \mathcal{B} d\Omega$$

onde  $\mathbf{d}(F^b)$ , para o sistema de 5-corpos, é dada por (B.4.2). Para um sistema de 3-corpos, uma holonomia não nula pode ser obtida variando-se as duas variáveis do espaço de base. Dada a conexão  $\mathcal{A} : TSO^3(2) \rightarrow \mathfrak{so}(2)$  em  $SO^3(2)/SO(2)$  segue que, para um movimento horizontal, o movimento na direção da fibra é obtida através da integração de

$$\mathcal{A}_{loc}(\phi) = \sum_{i_k} a_{i_k} d\phi^{i_k} = a_1 d\phi^1 + a_2 d\phi^2 \quad (\text{B.4.5})$$

O sinal negativo é omitido na expressão acima. Por outro lado, para a curvatura  $\mathcal{B}$

$$\mathcal{B} = b_{12} d\phi^1 \wedge d\phi^2 \quad (\text{B.4.6})$$

onde  $b_{12}$  pode ser escrita como uma função de  $a_I$ , usando (B.4.4), como

$$b_{12} = \frac{\partial a_2}{\partial \phi^1} - \frac{\partial a_1}{\partial \phi^2} \quad (\text{B.4.7})$$

<sup>3</sup>O operador determinante de matrizes é um exemplo de um tensor alternante.

Note que, por  $\mathfrak{so}(2)$  ser abeliana, o termo restante do colchete de Lie não entra nas fórmulas de curvatura. Isto pode ser facilmente verificado observando que a única constante estrutural nula é  $c_{11}^1 = 0$ , uma vez que a álgebra é uni-dimensional.

No fibrado principal, a expressão para os componentes da curvatura da conexão é  $\mathcal{B}_{loc}(r) \cdot (\dot{r}_1, \dot{r}_2) = \mathcal{B}_{\alpha\beta}^b \dot{r}_1 \dot{r}_2 e_b$ , onde

$$\mathcal{B}_{\alpha\beta}^b = \left( \frac{\partial \mathcal{A}_\beta^b}{\partial r^\alpha} - \frac{\partial \mathcal{A}_\alpha^b}{\partial r^\beta} - c_{ac}^b \mathcal{A}_\alpha^a \mathcal{A}_\beta^c \right)$$

e onde as  $c_{ac}^b$  são as constantes estruturais detalhadas na Seção B.5.

## B.5 Constantes estruturais da álgebra $\mathfrak{se}(2)$

Seja  $\mathfrak{g}$  a álgebra de Lie algebra do grupo de Lie  $G$ . As constantes estruturais da álgebra  $\mathfrak{g}$  são os escalares  $c_{ac}^b$ , para  $a, b, c = 1, \dots, n$ , onde  $n$  é a dimensão da álgebra  $\mathfrak{g}$ . Dada uma base da álgebra  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ , as constantes estruturais são determinadas através de

$$[e_a, e_c] = c_{ac}^b e_b$$

onde  $[\cdot, \cdot]$  representa a operação dada pelos colchetes de Lie. Para o grupo  $SE(2)$ , parametrizado pelos elementos com a estrutura  $g = (r_x, r_y, \theta)$ , tem-se os seguintes componentes da base para a álgebra correspondente  $\mathfrak{se}(2)$

$$e_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad e_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

pois  $\dim \mathfrak{se}(2) = 3$ . Utilizando esta base no cálculo das constantes estruturais através dos colchetes de Lie, obtém-se

$$c_{ac}^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad c_{ac}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad c_{ac}^3 = \mathbf{0}_{3 \times 3} \quad (\text{B.5.1})$$

## B.6 Espaço Tangente à Órbita do Grupo

O espaço tangente à órbita do grupo pelo ponto  $q \in Q$  é definido pela expressão

$$T_q \text{Orb}(q) = \{\xi_Q(q) \mid \xi \in \mathfrak{g}\} \subset T_q Q$$

Para  $G = SO(2)$  e um elemento  $\omega \in \mathfrak{so}(2)$ , o espaço  $T_q\text{Orb}(q)$  fica

$$\begin{aligned} T_q\text{Orb}_{SO(2)}(q) &= \omega \left( \frac{\partial}{\partial\theta_1} + \frac{\partial}{\partial\theta_2} + \cdots + \frac{\partial}{\partial\theta_N} \right) \\ &= \text{span} \left\{ \frac{\partial}{\partial\theta_1} + \frac{\partial}{\partial\theta_2} + \cdots + \frac{\partial}{\partial\theta_N} \right\} \end{aligned}$$

pois  $SO(2)$  age igualmente em todos os corpos e  $\omega = \dot{\theta} = \dot{\theta}_1 = \cdots = \dot{\theta}_N$ . Quando  $G = SE(2)$  e para um elemento da álgebra  $\xi \in \mathfrak{se}(2)$ , em função das coordenadas  $(\omega, v_x, v_y)$ , tem-se que o espaço  $T_q\text{Orb}_G(q)$  toma a seguinte forma

$$\begin{aligned} T_q\text{Orb}_{SE(2)}(q) &= v_x \frac{\partial}{\partial r_x} + v_y \frac{\partial}{\partial r_y} + \omega \left( -r_y \frac{\partial}{\partial r_x} + r_x \frac{\partial}{\partial r_y} + \frac{\partial}{\partial\theta_1} + \frac{\partial}{\partial\theta_2} + \cdots + \frac{\partial}{\partial\theta_N} \right) \\ &= \text{span} \left\{ \frac{\partial}{\partial r_x}, \frac{\partial}{\partial r_y}, -r_y \frac{\partial}{\partial r_x} + r_x \frac{\partial}{\partial r_y} + \frac{\partial}{\partial\theta_1} + \frac{\partial}{\partial\theta_2} + \cdots + \frac{\partial}{\partial\theta_N} \right\} \end{aligned}$$

Observe que  $T_q\text{Orb}_G(q)$  é um espaço tridimensional, ou seja,  $\dim T_q\text{Orb}_G(q) = 3$ , mergulhado no espaço tangente  $T_qQ$ , cuja dimensão, em função do número de corpos componentes do sistema, é  $2(N+2)$ .

### B.6.1 Gerador Infinitesimal de $SE(2)$

O objetivo desta seção consiste em obter o gerador infinitesimal da álgebra do grupo  $SE(2)$  no espaço de configuração  $Q$ . A título de exemplificação, utilizar-se-á o espaço de configuração do sistema de dois corpos ( $N = 2$ ). Revisa-se, primeiramente, a ação do grupo  $G$  na variedade  $Q$ . Seja  $G = SE(2)$  o grupo de Lie, dado por  $g = (\mathbf{R}, \mathbf{r}) \in G$ , agindo nele mesmo, ou seja em  $Q = SE(2)$ , onde  $q = (\mathbf{R}_1, \mathbf{r}_{cm}) = (\theta_1, r_x, r_y) \in Q$ . Este é o típico caso de transformações da configuração do corpo rígido no plano. Portanto, a ação à esquerda  $\Phi_g$  do grupo  $SE(2)$  em  $Q$  fica

$$\Phi_g(q) = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{r} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 & \mathbf{r}_{cm} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}\mathbf{R}_1 & \mathbf{R}\mathbf{r}_{cm} + \mathbf{r} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.6.1})$$

Seja agora a ação de  $SE(2)$ , com a mesma parametrização acima, em  $Q = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^2$ , onde  $q = (\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{r}_{cm}) = (\theta_1, \theta_2, r_x, r_y) \in Q$ . Logo, a ação à esquerda  $\Phi_g$  é

$$\Phi_g(q) = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{r} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 & \mathbf{R}_2 & \mathbf{r}_{cm} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}\mathbf{R}_1 & \mathbf{R}\mathbf{R}_2 & \mathbf{R}\mathbf{r}_{cm} + \mathbf{r} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.6.2})$$

Observe que a orientação relativa entre os corpos 1 e 2, dada pela coordenada  $\phi$  do espaço de base  $B$ , não é alterada com a ação de grupo. Isto equivale a dizer que a

ação de grupo se aplica somente à componente da fibra  $G$  do espaço de configuração  $Q$ , permanecendo inalteradas as coordenadas do espaço de base  $B$ .

Seja o elemento da álgebra de Lie  $\mathfrak{se}(2)$  dado por  $\xi = (\omega, \mathbf{v}) = (\omega, v_x, v_y)$ , onde  $\omega$  define a matriz anti-simétrica  $\widehat{\Omega}$  como

$$\widehat{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{bmatrix} = \omega \mathbb{M} \in \mathfrak{so}(2)$$

onde  $\mathbb{M}$  é a matriz simplética definida na Seção A.2.2. Seja uma curva na álgebra  $\mathfrak{se}(2)$  parametrizada por  $t$  e dada por  $t\xi = t(\omega, v_x, v_y) \in \mathfrak{se}(2)$ . Para computar a  $\exp$  de  $t\xi$  observe que, para  $t\omega \neq 0$ , tem-se

$$\exp(t\xi) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}(t\omega) & \mathbf{p}(t) \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \in SE(2) \quad (\text{B.6.3})$$

onde

$$\mathbf{p}(t) = \frac{1}{t\omega} \begin{bmatrix} \sin(t\omega) & -(1 - \cos(t\omega)) \\ 1 - \cos(t\omega) & \sin(t\omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} tv_x \\ tv_y \end{bmatrix} \quad (\text{B.6.4})$$

Quando  $t\omega = 0$ , segue, da regra de diferenciação de l'Hospital, que  $\exp(t\xi)$  é simplesmente  $t\xi$ . Portanto

$$\Phi_{\exp(t\xi)}(q) = \begin{cases} (\mathbf{R}(t\omega)\mathbf{R}_1, \mathbf{R}(t\omega)\mathbf{R}_2, \mathbf{R}(t\omega)\mathbf{r} + \mathbf{p}(t)), & \text{para } \omega \neq 0 \quad (\text{B.6.5a}) \\ (\mathbf{R}(t\omega)\mathbf{R}_1, \mathbf{R}(t\omega)\mathbf{R}_2, \mathbf{R}(t\omega)\mathbf{r} + t\mathbf{v}), & \text{para } \omega = 0 \quad (\text{B.6.5b}) \end{cases}$$

Logo, o gerador infinitesimal é dado por

$$\xi_Q(q) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \Phi_{\exp(t\xi)}(q) \quad (\text{B.6.6})$$

$$= \boxed{(\widehat{\Omega}\mathbf{R}_1, \widehat{\Omega}\mathbf{R}_2, \widehat{\Omega}\mathbf{r} + \mathbf{v})} \quad (\text{B.6.7})$$

pois

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \mathbf{R}(t\omega) = \begin{cases} \mathbf{R}(t\omega)\widehat{\Omega} \Big|_{t=0} = \widehat{\Omega}, & \text{ou} \quad (\text{B.6.8a}) \\ \widehat{\Omega}\mathbf{R}(t\omega) \Big|_{t=0} = \widehat{\Omega} \quad (\text{B.6.8b}) \end{cases}$$

e

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \mathbf{p}(t) = \frac{1}{\omega} \omega \mathbf{R}(t\omega) \Big|_{t=0} \mathbf{v} = I_2 \mathbf{v} = \mathbf{v} \quad (\text{B.6.9})$$

Procura-se, agora, obter uma base para o espaço gerado pela Álgebra de Lie, parametrizado por  $\xi$ , na variedade de quatro dimensões  $Q$ . Qualquer elemento do espaço tangente

sobre  $Q$  tem coordenadas dadas por  $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2)$ . De (B.6.7), segue que

$$\begin{aligned}\dot{q} &= \dot{x} \frac{\partial}{\partial x} + \dot{y} \frac{\partial}{\partial y} + \dot{\theta}_1 \frac{\partial}{\partial \theta_1} + \dot{\theta}_2 \frac{\partial}{\partial \theta_2} \\ &= (-y\omega + v_x) \frac{\partial}{\partial x} + (x\omega + v_y) \frac{\partial}{\partial y} + \omega \frac{\partial}{\partial \theta_1} + \omega \frac{\partial}{\partial \theta_2} \quad (\dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_2 = \dot{\theta} = \omega) \\ &= v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + \omega \left( -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \theta_1} + \frac{\partial}{\partial \theta_2} \right) = \xi_Q(q)\end{aligned}$$

Ou, equivalentemente

$$\xi_Q(q) = (v_x - r_y\omega) \frac{\partial}{\partial x} + (v_y + r_x\omega) \frac{\partial}{\partial y} + \omega \frac{\partial}{\partial \theta_1} + \omega \frac{\partial}{\partial \theta_2}$$

O espaço gerado pela Álgebra de Lie, através de  $\xi$ , em  $Q$  é denominada espaço tangente à órbita do grupo em  $q$  e representado por  $T_q\text{Orb}(q)$ . Segundo a descrição do caso acima, este espaço é construído da seguinte maneira

$$T_q\text{Orb}(q) = \text{span} \left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \theta_1} + \frac{\partial}{\partial \theta_2} \right\} \subset T_qQ$$

e, portanto,  $\dim T_q\text{Orb}(q) = 3$ . Logo, uma base natural para o gerador de  $\mathfrak{se}(2)$  em  $Q$  é

$$\begin{aligned}(1, 0, 0)_Q &= \frac{\partial}{\partial x} \\ (0, 1, 0)_Q &= \frac{\partial}{\partial y} \\ (0, 0, 1)_Q &= -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \theta_1} + \frac{\partial}{\partial \theta_2}\end{aligned}$$

Observe que o quando espaço de configuração  $Q$  é dado por uma estrutura principal  $G \times B$ , o gerador infinitesimal em  $Q$  não apresenta influência da ação de grupo nas direções do espaço de base  $B$ . No caso estudado acima, o gerador infinitesimal adquire a seguinte forma:

$$\begin{aligned}(1, 0, 0)_Q &= \frac{\partial}{\partial x} \\ (0, 1, 0)_Q &= \frac{\partial}{\partial y} \\ (0, 0, 1)_Q &= -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \theta_1} + 0 \frac{\partial}{\partial \phi}\end{aligned}$$

## Apêndice C

# Modelagem Complementar

### C.1 O Corpo Rígido

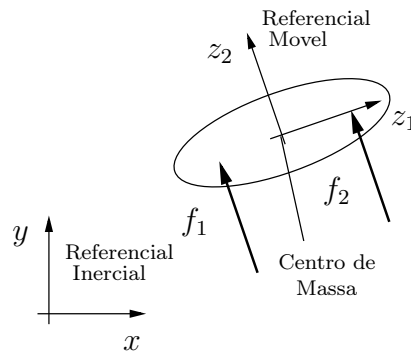


Figura C.1: O corpo rígido com dois propulsores no  $SE(2)$ .

Considere um corpo rígido no plano com dois propulsores  $f_1, f_2$  alinhados na direção longitudinal do corpo e localizados simetricamente em ambos os lados do centro de massa. Note, pela Fig. C.1, que os propulsores atuam na direção  $v$  do referencial do móvel do corpo.

As coordenadas inerciais são determinadas por  $(r_x, r_y, \theta)$  e por  $\mu_S = (p_x, p_y, p_\theta)$ , onde  $r_x, r_y, \theta$  são as coordenadas de grupo  $SE(2)$  do centro de massa do corpo. O movimento no referencial do corpo é parametrizado por  $\mu_B = (P_x, P_y, P_\theta)$ . As equações de

movimento, no referencial inercial, são dadas por:

$$\dot{r}_x = p_x/m \quad (\text{C.1.1})$$

$$\dot{r}_y = p_y/m \quad (\text{C.1.2})$$

$$\dot{\theta} = p_\theta/I \quad (\text{C.1.3})$$

$$\dot{p}_x = -(f_1 + f_2) \sin(\theta) \quad (\text{C.1.4})$$

$$\dot{p}_y = (f_1 + f_2) \cos(\theta) \quad (\text{C.1.5})$$

$$\dot{p}_\theta = (f_2 - f_1)L \quad (\text{C.1.6})$$

Note que a aplicação momento fornece o momento total do sistema com relação à origem do referencial inercial:

$$\mathbf{J}(v_q) = \mu_S = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ r_x p_y - r_y p_x + p_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m r_x \\ m r_y \\ m(r_x \dot{r}_y - r_y \dot{r}_x) + I \dot{\theta} \end{bmatrix}$$

Na ausência de esforços externos, a taxa de variação temporal do momento total  $\dot{\mu}_S \equiv 0$ , como previsto pelo Teorema de Noether.

Observe que a estrutura das equações acima em muito se assemelha à estrutura das equações cinemáticas do uniciclo, dadas por

$$\dot{r}_x = u_1 \cos(\theta)$$

$$\dot{r}_y = u_1 \sin(\theta)$$

$$\dot{\theta} = u_2$$

e parametrizadas pela entrada  $(u_1, u_2)$ . Sabe-se que estas equações não são linearizáveis por realimentação estática (Respondek, 2002), pela falta de involutividade de determinadas distribuições geradas pelos campos vetoriais do modelo. As equações de movimento (dinâmica) do uniciclo são dadas por

$$\dot{r}_x = p_x/m \quad (\text{C.1.7})$$

$$\dot{r}_y = p_y/m \quad (\text{C.1.8})$$

$$\dot{\theta} = p_\theta/I \quad (\text{C.1.9})$$

$$\dot{p}_x = u_1 \cos(\theta) \quad (\text{C.1.10})$$

$$\dot{p}_y = u_1 \sin(\theta) \quad (\text{C.1.11})$$

$$\dot{p}_\theta = u_2 \quad (\text{C.1.12})$$



Observe a semelhança das equações acima com as equações de movimento do corpo rígido (C.1.1). Isto pode ser verificado por uma reparametrização das variáveis de entrada, em relação aos parâmetros de entrada originais  $(f_1, f_2)$ , definida por

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 + f_2 \\ f_2 - f_1 \end{bmatrix}$$

O corpo rígido com dois propulsores possui todos os seus autovalores nulos, quando o modelo dinâmico correspondente é expresso nas coordenadas do referencial inercial  $(r_x, r_y, \theta, p_x, p_y, \Pi)$ . Neste referencial o sistema é controlável na fibra, ou na álgebra  $\mathfrak{se}(2)^*$ , uma vez que o critério de posto pleno (LARC) é satisfeito para um sistema com campo vetorial  $f(z)$  identicamente nulo. O equilíbrio do corpo rígido dado no referencial inercial é dado por  $(q, p) = (q_0, 0)$ , fixada uma configuração  $q_0$  qualquer.

Obtendo-se o momento correspondente no referencial móvel, através de  $\mu_B = \text{Ad}_{g^{-1}}^* \mu_S$ , tem-se

$$\mu_B = \begin{bmatrix} \cos(\theta)p_x + \sin(\theta)p_y \\ -\sin(\theta)p_x + \cos(\theta)p_y \\ I\dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_\theta \end{bmatrix}$$

Como, no caso plano, um dos eixos está sempre alinhado, tem-se que  $P_\theta = p_\theta = I\dot{\theta}$  e, portanto, quando da conservação do momento angular  $\dot{p}_\theta = \dot{P}_\theta = 0$ . As equações de movimento escritas no referencial móvel, utilizando o momento linear acima, são dadas por:

$$\dot{r}_x = \frac{1}{m}(P_x \cos(\theta) - P_y \sin(\theta)) \quad (\text{C.1.13})$$

$$\dot{r}_y = \frac{1}{m}(P_x \sin(\theta) + P_y \cos(\theta)) \quad (\text{C.1.14})$$

$$\dot{\theta} = P_\theta/I \quad (\text{C.1.15})$$

$$\dot{P}_x = P_\theta/IP_y \quad (\text{C.1.16})$$

$$\dot{P}_y = -P_\theta/IP_x + (f_1 + f_2) \quad (\text{C.1.17})$$

$$\dot{P}_\theta = (f_2 - f_1)L \quad (\text{C.1.18})$$

Quando expresso nas coordenadas do referencial móvel  $(r_x, r_y, \theta, P_x, P_y, \Pi)$ , entretanto, pode-se verificar a existência de dois autovalores no eixo imaginário  $(\pm i\Pi/I)$  e os quatro autovalores restantes são nulos. Neste caso, o campo vetorial das variáveis em  $\mathfrak{se}(2)^*$  é não-nulo.

## C.2 Sistema Multi-Corpos

### C.2.1 Matriz de Inércia do Sistema

Detalha-se nesta seção o algoritmo iterativo para determinação da matriz de inércia  $\mathbb{J}$  originalmente apresentado em Sreenath (1987), mas mostrado corretamente a seguir. A matriz de inércia é utilizada no modelo analítico apresentado na Seção 4.1.

Considera-se o referencial móvel localizado no centro de massa do sistema. A posição do centro de massa do sistema, em relação ao referencial inercial Figura C.2, é dado por

$$\mathbf{r} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i \quad (\text{C.2.1})$$

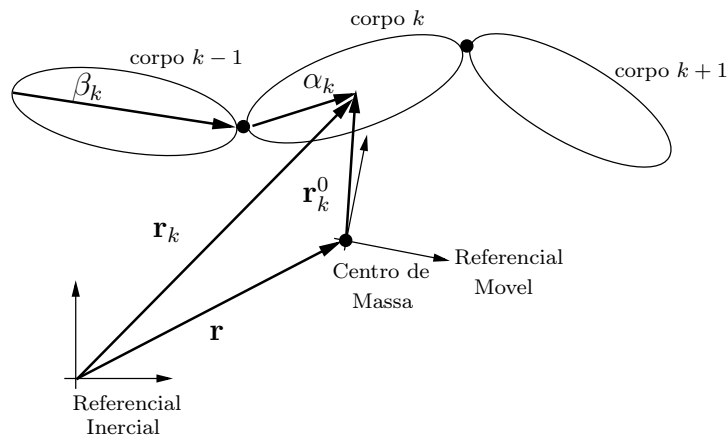


Figura C.2: Esquema para a modelagem da matriz de inércia do sistema multi-articulado  $\mathbb{J}$ .

Para um sistema de  $N$  corpos interconectados note que  $\alpha_1, \beta_1 \neq \mathbf{0}$ . Adicionalmente,  $\beta_2$  é o vetor do centro de massa do corpo 1 a junta com o corpo 2.

A posição do  $k$ -ésimo corpo em relação ao baricentro do sistema, é dado, em coordenadas

inerciais, por

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_k^0 &= - \sum_{l=2}^N \epsilon_l \left[ \begin{array}{c} \sum_{\substack{i \in S_{0,l} \\ i \neq 1}} \beta_i \end{array} \right] + \left[ - \sum_{l=2}^N \epsilon_l \alpha_l \right] + \sum_{\substack{j \in S_{0,k} \\ j \neq 1}} \beta_j + \alpha_k \\
&= - \sum_{l=2}^N \epsilon_l \left[ \sum_{i=1}^N I_{l,i} \beta_i \right] + \sum_{i=1}^N I_{k,i} \beta_i - \sum_{l=2}^N \epsilon_l \alpha_l + \alpha_k \\
&= - \sum_{i=1}^N \left[ \sum_{l=2}^N \epsilon_l \right] I_{l,i} \beta_i + \sum_{i=1}^N I_{k,i} \beta_i - \sum_{i=2}^N \epsilon_i \alpha_i + \alpha_k \\
&= \sum_{i=1}^N \left[ I_{k,i} - \sum_{l=2}^N I_{l,i} \epsilon_l \right] \beta_i + \sum_{i=1}^N b_{k,i} \alpha_i \\
&= \sum_{i=1}^N [a_{k,i} \beta_i + b_{k,i} \alpha_i]
\end{aligned}$$

Os vetores  $\mathbf{r}_k$  e  $\mathbf{r}_k^0$  são dados no referencial inercial. A inércia expandida é obtida fazendo-se

$$\tilde{I}_k = I_k + \sum_{j=1}^N m_j \|\tilde{\delta}_{kj}\|^2 \quad (\text{C.2.2})$$

onde

$$\tilde{\delta}_{kj} = b_{kj} \tilde{\alpha}_j + \sum_{\substack{\forall i \text{ tal que} \\ J(i) = j}} a_{ki} \tilde{\beta}_i \quad (\text{C.2.3})$$

onde os coeficientes acima são definidos por

$$a_{ki} = I_{ki} - \sum_{l=2}^N I_{li} \epsilon_l, \quad (\text{C.2.4})$$

$$b_{ki} = \begin{cases} 1 - \epsilon_i, & \text{para } k = i \text{ e } i \neq 1 \\ 0, & \text{para } k = i = 1 \\ -\epsilon_i, & \text{para } k \neq i \text{ e } i \neq 1, \end{cases} \quad (\text{C.2.5a})$$

$$b_{ki} = \begin{cases} 0, & \text{para } k = i = 1 \\ -\epsilon_i, & \text{para } k \neq i \text{ e } i \neq 1, \end{cases} \quad (\text{C.2.5b})$$

$$b_{ki} = -\epsilon_i, \quad \text{para } k \neq i \text{ e } i \neq 1, \quad (\text{C.2.5c})$$

e

$$I_{li} = \begin{cases} 1, & \text{se } i \in S_{0,l} \text{ e } i \neq 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (\text{C.2.6a})$$

$$I_{li} = \begin{cases} 1, & \text{se } i \in S_{0,l} \text{ e } i \neq 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (\text{C.2.6b})$$

O processo iterativo inicia-se no corpo denominado *corpo 1*. Note que, ao começar a iteração do corpo 1,  $\alpha_1$  and  $\beta_1$  não são definidos.

*Observação C.2.1.* A matriz de inércia  $\mathbb{J}$  é invariante a ação da fibra  $SE(2)$ , como pode ser observado pela ausência de coordenadas do grupo, mas função apenas das coordenadas  $\phi$  do espaço de base  $B$ . Além disso, a matriz de inércia determinada pelo algoritmo acima é definida positiva e simétrica e, portanto, invertível e diagonalizável, respectivamente, como esperado.

### C.2.2 Modelo do sistema de 3-corpos

A matriz de inércia do sistema é dada por

$$\mathbb{J} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{C.2.7})$$

onde, lembrando que  $\mathbb{J} = \mathbb{J}^T$ , e

$$\begin{aligned} J_{11} &= I_1 + [m_1(-e_2 - e_3)^2 + (m_2 + m_3)(1 - e_2 - e_3)^2]d_1^2 \\ J_{22} &= I_2 + [m_1(-e_2 - 2e_3)^2 + m_2(1 - e_2 - 2e_3)^2 + m_3(2 - e_2 - 2e_3)^2]d_2^2 \\ J_{33} &= I_3 + [(m_1 + m_2)e_3^2 + m_3(1 - e_3)^2]d_3^2 \\ J_{12} = J_{21} &= [m_1(e_2 + e_3)(e_2 + 2e_3) + (m_2(1 - e_2 - 2e_3) + m_3(2 - e_2 - 2e_3)) \\ &\quad (1 - e_2 - e_3)]d_1d_2 \cos(\phi_1) \\ J_{13} = J_{31} &= [m_1e_3(e_2 + e_3) - (m_2e_3 - m_3(1 - e_3))(1 - e_2 - e_3)]d_1d_3 \cos(\phi_1 + \phi_2) \\ J_{23} = J_{32} &= [(m_1(e_2 + 2e_3) - m_2(1 - e_2 - 2e_3))e_3 + m_3(2 - e_2 - 2e_3)(1 - e_3)] \\ &\quad d_2d_3 \cos(\phi_2) \end{aligned}$$

Adotando  $m_1 = m_2 = m_3 = m$ ,  $I_1 = I_2 = I_3 = I$ , e  $d_1 = d_2 = d_3 = d$ ,  $\mathbb{J}$  simplifica na

$$\mathbb{J} = \begin{bmatrix} I + \frac{2}{3}md^2 & md^2 \cos(\phi_1) & \frac{1}{3}md^2 \cos(\phi_1 + \phi_2) \\ md^2 \cos(\phi_1) & I + 2md^2 & md^2 \cos(\phi_2) \\ \frac{1}{3}md^2 \cos(\phi_1 + \phi_2) & md^2 \cos(\phi_2) & I + \frac{2}{3}md^2 \end{bmatrix} \quad (\text{C.2.8})$$

As equações do movimento de translação, quando apenas as forças de propulsão  $f_1$  e  $f_3$  estão presentes, são dadas por

$$\begin{aligned} \dot{r}_x &= \frac{p_x}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{p_x}{3m} \\ \dot{r}_y &= \frac{p_y}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{p_y}{3m} \\ \dot{p}_x &= -\sin(\theta_1)f_1 - \sin(\theta_1 + \phi_1 + \phi_2)f_3 \\ \dot{p}_y &= \cos(\theta_1)f_1 + \cos(\theta_1 + \phi_1 + \phi_2)f_3 \end{aligned}$$

A dinâmica da orientação do sistema  $\theta_1$  segue da expressão

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= \frac{\partial H}{\partial \mu_1} \\ &= 3 \frac{\mu_1(5m^2d^4 + 16Imd^2 + 6I^2) + md^2(2I + md^2)(3\mu_2 \cos(\phi_1) + \mu_3 \cos(\phi_1 + \phi_2))}{18\Delta} + \\ &\quad + 3 \frac{m^2d^4(3\mu_3 \cos(\phi_1 - \phi_2) + \mu_2 \cos(\phi_1 + 2\phi_2) - 3\mu_1 \cos(2\phi_2))}{18\Delta}\end{aligned}$$

onde  $\Delta = \det(\mathbb{J})$  e

$$\begin{aligned}\Delta &= I^3 + md^2\left(\frac{10}{3}I^2 + \frac{37}{18}Imd^2 + \frac{5}{18}m^2d^4\right) + \frac{1}{18}m^2d^4(md^2 - I) \cos(2\phi_2 + 2\phi_1) - \\ &\quad - \frac{1}{6}m^2d^4(md^2 + 3I)(\cos(2\phi_1) + \cos(2\phi_2))\end{aligned}$$

Utilizando a parametrização  $\theta_{cm} = (\theta_1 + \theta_3)/2$ , os campos vetoriais relativos às entradas  $(f_1, f_2)$ ,  $T_1$  e  $T_2$  são os seguintes

$$g_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sin(-\theta_{cm} + (\phi_1 + \phi_2)/2) \\ \cos(-\theta_{cm} + (\phi_1 + \phi_2)/2) \\ d(-2/3 - \cos(\phi_1) - \cos(\phi_1 + \phi_2)/3) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad g_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\sin(\theta_{cm} + (\phi_1 + \phi_2)/2) \\ \cos(\theta_{cm} + (\phi_1 + \phi_2)/2) \\ d(\cos(\phi_1 + \phi_2)/3 + \cos(\phi_2) + 2/3) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Os campos vetoriais dos torques são dados por  $g_3 = [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0]$  e  $g_4 = [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1]$ .

### C.2.3 Modelo do sistema de 5-corpos

Para  $N = 5$  onde tomam-se  $m_i = m$ ,  $I_i = I$ , e  $d_i = d$ ,  $i = 1, \dots, 5$ , a matriz de inércia  $\mathbb{J}$  simplifica a

$$\mathbb{J} = \begin{bmatrix} I + 4/5md^2 & 7/5md^2 \cos(\theta_{21}) & md^2 \cos(\theta_{31}) & 3/5md^2 \cos(\theta_{41}) & 1/5md^2 \cos(\theta_{51}) \\ 7/5md^2 \cos(\theta_{21}) & I + 16/5md^2 & 3md^2 \cos(\theta_{32}) & 9/5md^2 \cos(\theta_{42}) & 3/5md^2 \cos(\theta_{52}) \\ md^2 \cos(\theta_{31}) & 3md^2 \cos(\theta_{32}) & I + 4md^2 & 3md^2 \cos(\theta_{43}) & md^2 \cos(\theta_{53}) \\ 3/5md^2 \cos(\theta_{41}) & 9/5md^2 \cos(\theta_{42}) & 3md^2 \cos(\theta_{43}) & I + 16/5md^2 & 7/5md^2 \cos(\theta_{54}) \\ 1/5md^2 \cos(\theta_{51}) & 3/5md^2 \cos(\theta_{52}) & md^2 \cos(\theta_{53}) & 7/5md^2 \cos(\theta_{54}) & I + 4/5md^2 \end{bmatrix}$$

As equações do movimento de translação são dadas por

$$\begin{aligned}\dot{r}_x &= \frac{p_x}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5} = \frac{p_x}{5m} \\ \dot{r}_y &= \frac{p_y}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5} = \frac{p_y}{5m} \\ \dot{p}_x &= -\sin(\theta_1)f_1 - \sin(\theta_1 + \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4)f_5 \\ \dot{p}_y &= \cos(\theta_1)f_1 + \cos(\theta_1 + \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4)f_5\end{aligned}$$

A dinâmica rotacional do sistema é determinada por

$$\begin{aligned}\dot{\theta}_{i,i-1} &= \frac{\partial H_0}{\partial \mu_i} - \frac{\partial H_0}{\partial \mu_{i-1}}, \quad i = 2, \dots, N \\ \dot{\mu}_1 &= \frac{\partial H_0}{\partial \theta_{2,1}} - T_1 + T_1^{ext} \\ \dot{\mu}_2 &= \frac{\partial H_0}{\partial \theta_{3,2}} - \frac{\partial H_0}{\partial \theta_{2,1}} - T_2 + T_1 \\ \dot{\mu}_3 &= \frac{\partial H_0}{\partial \theta_{4,3}} - \frac{\partial H_0}{\partial \theta_{3,2}} - T_3 + T_2 \\ \dot{\mu}_4 &= \frac{\partial H_0}{\partial \theta_{5,4}} - \frac{\partial H_0}{\partial \theta_{4,3}} - T_4 + T_3 \\ \dot{\mu}_5 &= -\frac{\partial H_0}{\partial \theta_{5,4}} + T_4 + T_5^{ext}\end{aligned}$$

onde  $T_1^{ext}$  e  $T_5^{ext}$  são determinadas em (4.2.9), para  $k = 1, 5$ . As demais equações da dinâmica serão omitidas por serem demasiadamente extensas.

#### C.2.4 Modelo Cinemático do Sistema

O modelo cinemático para o sistema multi-corpos é composto pelo componente cinemático em (3.4.1), descrevendo o movimento do sistema na fibra  $G$ , cujas entradas são dadas pelas coordenadas de velocidades que parametrizam o momento do sistema. Além da expressão acima, a cinemática do sistema é definida pelas equações em  $B$

$$\dot{\phi}_i = \dot{\theta}_{i+1} - \dot{\theta}_i, \quad i = 1, \dots, N - 1$$

Observe que, quando o momento do sistema não representa uma entrada mas apenas um parâmetro não-nulo do movimento, o sistema cinemático é caracterizado por um componente de dinâmica livre.

---

**C.2.5 Modelagem Lagrangiana**

Reproduz-se nas próximas páginas o artigo Souza e Maruyama (2007), publicado no *3rd IFAC Symposium on Systems, Structures and Control - SSSC*, realizado em Fóz do Iguaçu em Outubro de 2007.