



Raquel Ribeiro Barroso Portela

**Nós Legendreanos em \mathbb{R}^3 e o número máximo
de Thurston-Bennequin para nós de 2 pontes**

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Matemática Pura do Departamento de Matemática da PUC-Rio

Orientador: Prof. Paul Alexander Schweitzer, s.j

Rio de Janeiro
junho de 2007

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.



Raquel Ribeiro Barroso Portela

**Nós Legendreanos em \mathbb{R}^3 e o número máximo
de Thurston-Bennequin para nós de 2 pontes**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Matemática Pura do Departamento de Matemática do Centro Técnico Científico da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

Prof. Paul Alexander Schweitzer, s.j

Orientador

Departamento de Matemática — PUC-Rio

Prof. Derek Douglas Jack Hacon

Departamento de Matemática — PUC-Rio

Prof. Leonardo Navarro de Carvalho

Instituto de Matemática — UFF

Prof. Paulo Henrique Cabido Gusmão

Instituto de Matemática — UFF

Prof. Nicolau Corção Saldanha

Departamento de Matemática — PUC-Rio

Prof. José Eugenio Leal

Coordenador Setorial do Centro

Técnico Científico — PUC-Rio

Rio de Janeiro, 27 de junho de 2007

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

Raquel Ribeiro Barroso Portela

Graduação em Licenciatura Plena em Matemática, Universidade do Estado do Rio de Janeiro (agosto/2000 – dezembro/2004).

Mestrado em Matemática Pura, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (março/2005 – junho/2007).

Ficha Catalográfica

Portela, Raquel Ribeiro Barroso

Nós Legendreanos em \mathbb{R}^3 e o número máximo de Thurston-Bennequin para nós de 2 pontes / Raquel Ribeiro Barroso Portela; orientador: Paul Alexander Schweitzer, s.j. — Rio de Janeiro : PUC-Rio, Departamento de Matemática, 2007.

v., 109 f: il. ; 29,7 cm

1. Dissertação (mestrado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática.

Inclui referências bibliográficas.

1. Matemática – Tese. 2. Nós topológicos. 3. Nós legendreanos. 4. Nós de 2-pontes. 5. Isotopia legendreana. 6. Número de Maslov. 7. Número de Thurston-Bennequin. 8. Polinômio de Kauffman.

I. Schweitzer, s.j., Paul Alexander. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Matemática. III. Título.

CDD: 510

Agradecimentos

Especialmente a Deus, que me dá forças nos momentos difíceis, e me torna vencedora a cada dia.

À minha mãe, Maria da Graça, pela dedicação e carinho em ter me educado e cuidado de mim.

Aos professores de graduação, especialmente ao Luérbio Faria e a Clícia Valladares, por acreditarem em mim e terem me ensinado mais do que matemática, mas a ser um profissional.

Ao meu orientador, Paul Alexander Schweitzer, por ter me encaminhado ao mestrado nesta Instituição.

Ao professor Derek Hacon, por me apresentar a teoria dos nós legendreanos e pelo incentivo dado.

Aos matemáticos, Peter Zvengrowski e Vladimir Chernov, por estarem sempre dispostos a esclarecer dúvidas e dar sugestões.

Ao amigo Ivan Gonzales, pela ajuda em questões matemáticas e pelos conselhos dados neste dois anos de mestrado, os quais me ajudaram a chegar até aqui.

Aos amigos da UFRJ, Leandro Araujo, por fazer as figuras desta dissertação, e Fábio Ramos, por me fornecer os artigos necessários, os quais não tinha acesso.

Aos amigos, Renata Arruda e Guilherme Frederico, que se disponibilizaram a ler esta dissertação.

A todos que me ajudaram direta ou indiretamente durante todo o meu mestrado.

Resumo

Portela, Raquel Ribeiro Barroso; Schweitzer, s.j., Paul Alexander. **Nós Legendreanos em \mathbb{R}^3 e o número máximo de Thurston-Bennequin para nós de 2 pontes**. Rio de Janeiro, 2007. 109p. Dissertação de Mestrado — Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

O propósito deste trabalho é apresentar a teoria dos nós legendreanos, que diz respeito a nós tangentes a uma estrutura de contato, assim como demonstrar o Teorema do Número Máximo de Thurston-Bennequin para nós de 2-pontes em termos do polinômio de Kauffman. Iniciamos este trabalho com uma introdução aos nós topológicos. Apresentamos a teoria de nós legendreanos, dando ênfase aos nós legendreanos em \mathbb{R}^3 tangentes à estrutura de contato canônica neste espaço. Apresentamos dois invariantes clássicos de nós legendreanos: os números de Thurston-Bennequin e Maslov. Finalmente, obtemos o número máximo de Thurston-Bennequin, motivo de estudos nos dias atuais, para todos os nós legendreanos topologicamente isotópicos aos nós de 2-pontes na estrutura de contato canônica em \mathbb{R}^3 .

Palavras-chave

Nós topológicos. Nós legendreanos. Nós de 2-pontes. Isotopia legendreana. Número de Maslov. Número de Thurston-Bennequin. Polinômio de Kauffman.

Abstract

Portela, Raquel Ribeiro Barroso; Schweitzer, s.j., Paul Alexander.
Legendrian Knots and the maximal Thurston-Bennequin number of two-bridge knots . Rio de Janeiro, 2007. 109p.
MsC Thesis — Department of Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

The purpose of this work is to present the Theory of the Legendrian knots, which refers to knots tangent to a contact structure, and also to prove the Theorem of the Maximal Thurston-Bennequin number for 2-bridge knots in terms of the Kauffman polynomial. We begin this study with an introduction to topological knots. We present the theory of the Legendrian knots, we emphasize Legendrian knots in \mathbb{R}^3 , knots tangent to the standard contact structure in this space. We present two classical invariants of Legendrian knots, the Thurston-Bennequin and Maslov numbers. Finally we show the maximal Thurston-Bennequin number for Legendrian two-bridge knots in standard contact structure on \mathbb{R}^3 , an active area of current research.

Keywords

Topological Knots. Legendrian Knots. 2-bridge knots. Legendrian isotopy. Thurston-Bennequin number. Maslov number. Kauffman polynomial.

Sumário

1	Introdução	8
2	Nós Topológicos	11
2.1	Definições básicas	11
2.2	Equivalência de nós	12
2.3	Projeções e diagramas	15
2.4	Invariantes de nós	18
2.5	Movimentos de Reidemeister	19
2.6	Superfície de Seifert	22
2.7	Soma Conexa	27
2.8	Polinômios	29
3	Tangles e nós de 2-pontes	37
3.1	Tangles	37
3.2	Nós de 2-pontes	45
3.3	Polinômio de Kauffman para nós 2-pontes	52
4	Nós legendreanos	61
4.1	Estrutura de contato	61
4.2	Nós legendreanos e transversais	67
4.3	Projeções frontal e lagrangeana	67
4.4	Isotopia legendreana	76
5	Invariantes de nós legendreanos	79
5.1	Números de Bennequin e Maslov	79
5.2	Estabilização	84
5.3	Cotas superiores	86
6	Número Máximo de Thurston-Bennequin para nós de 2-pontes	89
6.1	Forma racional legendreana	90
6.2	Demonstração do Teorema do Número Máximo de Thurston-Bennequin para nós de 2-pontes	93
	Bibliografia	97
	Índice Remissivo	100
A	Apêndice	103
A.1	Independência dos movimentos de Reidemeister	103
A.2	Frações contínuas	106

1

Introdução

Atualmente é conhecido que, como uma teoria matemática, a teoria dos nós apareceu no final do século XVIII. Um primeiro estudo matemático dos nós foi provavelmente realizado por K. F. Gauss (1777 - 1855) em pesquisas em eletrodinâmica, que incluía uma formulação analítica de número de enlaçamento.

Estudos sistemáticos da teoria dos nós começaram no final do século XIX. Contudo, os resultados mais significantes tiveram lugar na segunda metade do século XX. Nas últimas duas décadas do século passado, devido a pesquisas em parte nesta área, Jones, Witten, Drinfeld (1990) e Kontsevich (1998) receberam a medalha Fields.

Novas direções da teoria dos nós surgiram. Uma interessante área é a teoria dos nós legendreanos. Esta teoria relaciona a teoria dos nós, geometria de contato e topologia, e se tornou motivo de estudos desde o trabalho de Bennequin (1) em 1983, porém ganhou destaque em 1997 com o trabalho de Fuchs e Tabachnikov (39). Nós legendreanos em uma variedade, em particular \mathbb{R}^3 , são nós tangentes a uma estrutura de contato.

Com o intuito de classificar os nós legendreanos, Bennequin (1) definiu um invariante, atualmente conhecido como o número de Thurston-Bennequin. Neste artigo, Bennequin mostrou também a primeira cota superior do número de Bennequin. Em 2001, Ng (32), mostrou com exatidão o mais recente resultado sobre cotas superiores do número de Thurston-Bennequin para uma classe de nós legendreanos, o número máximo de Thurston-Bennequin para nós de 2-pontes, que é dado pelo polinômio de Kauffman.

Foi neste contexto que despertei meu interesse pela teoria dos nós legendreanos e pelo invariante de Thurston-Bennequin.

Nesta dissertação, introduzimos, esperando que com justiça, a contribuição de vários matemáticos para a teoria dos nós.

O objetivo deste trabalho é descrever alguns dos principais conceitos da atual teoria dos nós legendreanos e resultados obtidos para seus clássicos invariantes. Damos uma descrição de nós legendreanos em uma variedade e

estudamos o caso em \mathbb{R}^3 . Além disso, incluímos importantes resultados sobre os invariantes clássicos de nós legendreanos, os números de Thurston-Bennequin e Maslov. Como resultado principal, demonstramos de forma clara o importante e recente Teorema do Número Máximo de Bennequin para nós de 2-pontes, em termos do grau do polinômio de Kauffman.

Durante toda a dissertação nos concentramos em lúcidas exposições e fazemos uso extensivo de diagramas para facilitar o entendimento do leitor a partir de dados geométricos. Incluímos textos explicativos e vários exemplos, que tornam mais simples a leitura. Contudo, as provas são feitas com padrão usual de rigor matemático. Em certos casos, por conveniência, fizemos apêndices no final da dissertação.

Essa dissertação é dividida em cinco capítulos.

No capítulo dois, são apresentadas noções básicas da teoria dos nós topológicos, principais definições, conceitos e importantes resultados. A demonstração do teorema de Reidemester, o qual diz que dois nós são equivalentes se um pode ser obtido do outro por três movimentos e isotopia planar, que pode ser encontrada em (30), é feita de forma mais simples que a realizada por Reidemester, a qual utiliza teoria de singularidades. Discutimos também o conceito de invariante de nós topológicos e, como caso particular, os polinômios, enfatizando o polinômio de Kauffman, que é parte do resultado principal desta dissertação.

O terceiro capítulo contém os conceitos dos nós tangles e de duas pontes. O motivo pelo qual é dedicado um capítulo a esses nós é dado claramente pelo título da dissertação, suas propriedades e definições são extremamente importantes para o nosso principal resultado. É também neste capítulo que é determinada a fórmula para o polinômio de Kauffman para nós de 2-pontes em termos do produto de matrizes.

O quarto capítulo é dedicado à interessante teoria dos nós legendreanos. São apresentadas algumas estruturas de contato, entre elas a estrutura de contato canônica no espaço \mathbb{R}^3 , que é trabalhada no restante da dissertação; e então são definidos os nós legendreanos, que são os nós tangentes a estruturas de contato. São discutidas suas propriedades e como recuperar os nós legendreanos através de suas projeções frontal e lagrangeana.

No quinto capítulo são apresentados dois clássicos invariantes de nós legendreanos: o número de Thurston-Bennequin e o número de Maslov. São discutidas propriedades e relações entre estes números. Através da operação de estabilização é observado que é possível diminuir o número de Thurston-Bennequin de um tipo de nó e então introduzir o conceito de cotas superiores do número de Bennequin de um nó. É neste capítulo que é introduzido o

conceito de número máximo de Thurston-Bennequin de nós legendreanos de um determinado tipo topológico.

Finalmente, o sexto capítulo é dedicado à demonstração do Teorema do Número Máximo de Thurston-Bennequin para todos os nós legendreanos topologicamente isotópicos aos nós de 2-pontes em termos do grau do polinômio de Kauffman.

2 Nós Topológicos

Uma área fascinante da matemática é a teoria dos nós, cuja origem remonta ao final do século XIX e modernamente se insere no campo da topologia algébrica. A teoria dos nós estuda as curvas no espaço, sem auto interseções e fechadas. Em outras palavras, as curvas que são imagens (suaves) de um círculo, no espaço tridimensional.

Apresentaremos neste capítulo as noções básicas de nós topológicos necessárias ao entendimento da dissertação. Uma abordagem mais detalhada destes conteúdos pode ser encontrada em livros específicos (35). Suporemos que o leitor já esteja familiarizado com os conceitos fundamentais de topologia.

O capítulo contém uma base elementar da teoria dos nós. Definimos e discutimos nós e suas classes de equivalência, assim como as projeções regulares dos nós e enfatizamos os movimentos de Reidemeister.

2.1 Definições básicas

Definição 2.1.1 *Um nó k é um mergulho suave por partes de um círculo no espaço euclidiano de dimensão 3.*

Equivalentemente, podemos dizer que um nó k , é uma curva $k : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ simples fechada, que é imersão por partes.

Nos referiremos a um nó $k : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $k(t_0) \neq k(t_1)$ se $t_0 \neq t_1$ exceto $k(0) = k(1)$, que é uma imersão de classe C^1 por partes, pela sua imagem $k([0, 1]) = K$. É conveniente assumirmos que k seja suave por partes, ou seja, para uma determinada partição do intervalo $[0, 1]$, $0 < t_0 < t_1 < \dots < t_k = 1$, a restrição $k|_{[t_{i-1}, t_i]} : [t_{i-1}, t_i] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ é suave, pois veremos mais a frente que esta consideração evitará certos tipos de nós (nós selvagens), os quais não estudaremos nesta dissertação.

A definição de nó pode ser generalizada da seguinte maneira. Em vez de apenas uma curva fechada no espaço, podemos considerar uma coleção (finita) de curvas disjuntas no espaço, eventualmente enlaçadas entre si.

Definição 2.1.2 Um enlace é uma coleção finita ordenada de nós L_i , $i \in \mathbb{N}$ que não se intersectam entre si. Cada nó L_i é dito uma componente do enlace.

Note que nos referindo a um nó pela sua imagem, escrevemos um enlace de k componentes $l : \coprod_{i=1}^k [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ pela sua imagem $l(\coprod_{i=1}^k [0, 1]) = L$, o que nos permite escrever $L = L_1 \cup L_2 \cup \dots \cup L_k$, onde cada L_i é um nó.

Nas Figuras 2.1, 2.2 e 2.3 mostramos três desses nós: o *enlace de Hopf*, que são dois círculos enlaçados da maneira mais simples, o *enlace de Whitehead* e o *enlace de Borromean*, sendo os dois primeiros com duas componentes e o terceiro com três. Um outro exemplo é o símbolo das olimpíadas, que é um enlace de 5 componentes.



Figura 2.1: Enlace de Hopf.

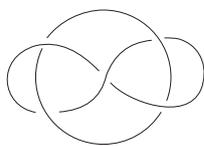


Figura 2.2: Enlace de Whitehead.

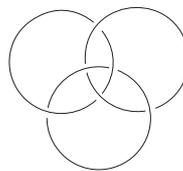


Figura 2.3: Enlace de Borromean.

Note que um nó é um enlace de uma componente. Com o intuito de não haver repetições, nos referiremos a nós durante a dissertação, sabendo-se que os resultados e definições para nós se estendem naturalmente para enlaces.

2.2

Equivalência de nós

O problema central da teoria do nós é classificá-los. Classificar significa saber listá-los todos (mesmo que sejam em número infinito, como é o caso), sem que haja uma isotopia (Definição 2.2.1) entre eles, e saber dizer, para cada curva, qual nó dessa lista ela representa. Isto implica, em particular, ter critérios para dizer se duas curvas são, ou não são, equivalentes (Definição 2.2.3).

A teoria considera como equivalentes, duas curvas tais que uma pode ser deformada continuamente de tal forma a ficar idêntica à outra, sem que no

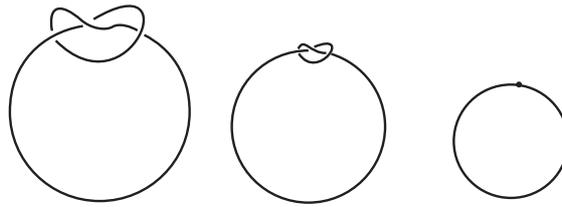


Figura 2.4: Diagrama ilustrando o colapso.

processo de deformação se criem auto-interseções, sem que a curva “se rompa” e sem colapsos (como um nó tão apertado que desaparece, como podemos ver na Figura 2.4). A preocupação não é com a forma exata das curvas, mas sim obter critérios para dizer se duas curvas são ou não são equivalentes.

Um nó não é uma curva em particular, mas todo o conjunto de posições que ela pode assumir se for deformada de acordo com esses critérios. Por exemplo, o nó *trivial* é a classe de curvas que podem se deformar até se tornarem circunferências.

Definição 2.2.1 *Uma isotopia ambiente de \mathbb{R}^3 é uma aplicação C^0 ,*

$$h : \mathbb{R}^3 \times I \longrightarrow \mathbb{R}^3,$$

tal que $h_0 = id$ e $h_t = h(\cdot, t)$ é um difeomorfismo para todo $t \in I = [0, 1]$.

Definição 2.2.2 *Dois nós K_1 e K_2 são isotópicos se existe uma isotopia ambiente h , tal que $h_1(K_1) = K_2$ onde $K_i = k_i(I)$, $I = [0, 1]$. Além disso, se os nós são orientados, h_1 preserva a orientação.*

Em uma *isotopia ambiente*, o espaço inteiro deve ser deformado, arrastando a curva de uma posição a outra. Com isotopias ambientes impede-se que haja o colapso de uma porção não trivial do nó, reduzindo sua complexidade de forma artificial. Nos referiremos a isotopia ambiente, simplesmente por isotopia.

Uma isotopia preserva a orientação, isto é, se dois nós K_0 e K_1 orientados são isotópicos por uma isotopia h , então a isotopia h preserva a orientação.

Definição 2.2.3 *Dois nós K_0 e K_1 são equivalentes se eles são isotópicos, $K_0 \sim K_1$.*

Sem dificuldades, podemos verificar que a relação \sim é uma relação de equivalência. Então podemos falar de classe de equivalência de um nó. Cada classe de equivalência de um nó é dito um *tipo de nó*; então nós equivalentes tem o mesmo tipo de nó. Por exemplo, nós equivalentes a uma circunferência são chamados triviais, e constituem o tipo trivial.

Definição 2.2.4 *Dois enlacs $L = L_1 \cup L_2 \cup \dots \cup L_m$ e $L' = L'_1 \cup L'_2 \cup \dots \cup L'_n$ são equivalentes se satisfazem as seguintes condições:*

- (1) $m = n$, ou seja, os enlacs L e L' tem o mesmo número de componentes;
- (2) existe um difeomorfismo de \mathbb{R}^3 em si mesmo que preserva a orientação e leva a coleção $L_1 \cup L_2 \cup \dots \cup L_m$ na coleção $L'_1 \cup L'_2 \cup \dots \cup L'_m$.

Com o intuito de simplificar certas demonstrações através de determinados movimentos, os quais serão vistos na Seção 2.5, usaremos a definição de nó como se segue.

Definição 2.2.5 *Um nó K chama-se nó poligonal se K é isotópico a uma linha poligonal fechada, sem interseções, em \mathbb{R}^3 .*

Podemos considerar um nó poligonal como um polígono em \mathbb{R}^3 . Um exemplo de nó poligonal se encontra na Figura 2.5.

Definição 2.2.6 *Um enlace poligonal de k -componentes, é uma coleção finita de nós poligonais disjuntos K_i , com $i \in \mathbb{N}$.*

Definição 2.2.7 *Um nó é dito dócil se ele é equivalente a um nó poligonal.*

Se um nó não é dócil, ele é chamado *selvagem*. Nessa dissertação nos concentramos no estudo de nós dóceis, por tal motivo a Definição 2.2.5 dada anteriormente não inclui os nós selvagens. Exemplos de nós selvagens se encontram nas Figuras 2.6 e 2.7. Note também que, para o único ponto limite p , o nó é suave, porém não é imersão. Esta distinção é de fundamental importância, pois toda teoria desenvolvida nessa dissertação é aplicada somente a nós docéis. Em diversos momentos usaremos a definição de nós poligonais em \mathbb{R}^3 .

É natural perguntarmos que tipo de nós são nós dóceis. Uma resposta parcial para isto é dada pelo seguinte teorema.

Teorema 2.2.8 (Ver (7)) *Se um nó parametrizado pelo comprimento de arco é uma imersão de classe C^1 , isto é, continuamente diferenciável com derivada não nula, então ele é dócil.*

Definição 2.2.9 *Dizemos que uma aplicação $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}^3$, é uma reflexão (ou uma simetria) de $X \subseteq \mathbb{R}^3$ com respeito a um plano E , se para todo ponto $p \in X$, $\varphi(p)$ é o ponto simétrico a p com respeito a E . A imagem $\varphi(K)$, obtida pela reflexão φ do nó K , é dita ser uma imagem por reflexão de K .*

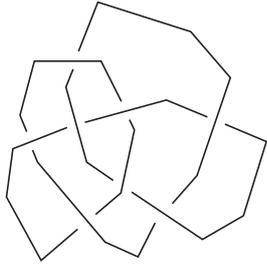


Figura 2.5: Nó poligonal.

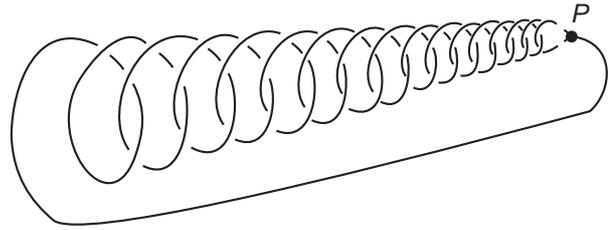


Figura 2.6: Nó selvagem.

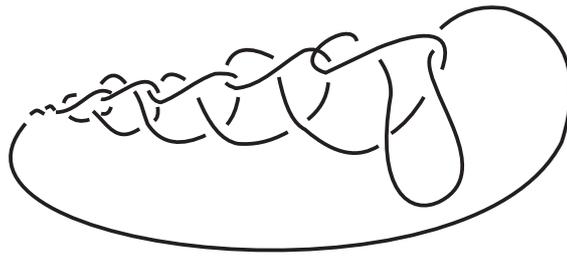


Figura 2.7: Nó selvagem.

A imagem por reflexão de um nó K orientado, inverte a orientação do nó.

Exemplo 2.2.10 *A imagem por reflexão com respeito a um plano, por exemplo, o plano xy , dada por $f(x, y, z) = (x, y, -z)$, não é um homeomorfismo que preserva a orientação, de fato, a orientação é inversa (ver Figura 2.8).*

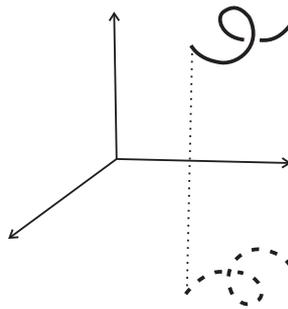


Figura 2.8: Imagem por reflexão.

2.3

Projeções e diagramas

O estudo dos nós é realizado de uma maneira mais simples que o estudo em um mergulho de uma curva em \mathbb{R}^3 . Suas propriedades são obtidas através de seus gráficos em \mathbb{R}^2 , isto é, através de suas projeções.

Definição 2.3.1 A projeção em P , $P \subset \mathbb{R}^3$, de um nó K em \mathbb{R}^3 é a imagem $\pi(K)$ de K por uma aplicação linear sobrejetiva, $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow P$, onde P é um plano.

Se K é um nó, diremos que $\pi(K)$ é a *projeção do nó K* . Um ponto p na imagem $\pi(K)$ é chamado de *ponto múltiplo* se a imagem inversa $\pi^{-1}(p)$ tem mais de um ponto, caso contrário p é dito *ponto regular*.

Se $\pi^{-1}(p)$ possui exatamente dois pontos, então dizemos que p é *ponto duplo*. Um ponto duplo é dito *transversal* se $\pi^{-1}(p) = \{a, b\}$ e $\text{Im } d\pi_a + \text{Im } d\pi_b = T_p\mathbb{R}^2$, ou seja, π é imersão em a e em b e as retas imagens das retas tangentes em a e b não coincidem (Figura 2.9).

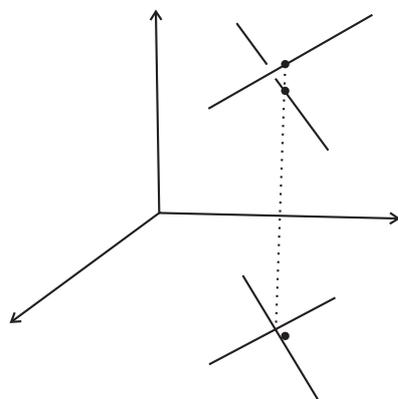


Figura 2.9: Ponto duplo transversal.

Em geral a imagem de $\pi(K)$ pode ser bem complicada em relação ao número e tipo de pontos múltiplos. Contudo, todo nó dócil K é equivalente a outro nó, cuja projeção seja relativamente simples.

Definição 2.3.2 A projeção $\pi(K)$ de um nó K é dita *regular* se,

- (i) π restrita a K é imersão;
- (ii) existe um número finito de pontos múltiplos e todos são pontos duplos transversais.

Numa projeção regular de um nó poligonal, não ocorre pontos múltiplos como na Figura 2.10.

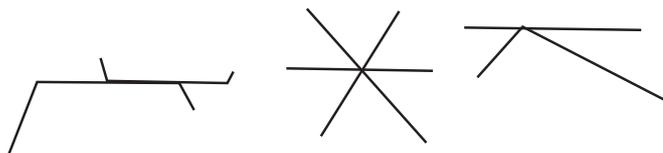


Figura 2.10: Pontos múltiplos não permitidos numa projeção regular.

Uma isotopia se transpõe naturalmente para as projeções. Assim como as curvas, dizemos que duas *projeções* são *equivalentes* se uma isotopia transforma uma na outra.

Sendo K um nó orientado, a projeção de K herda a orientação de maneira natural.

A projeção regular de um nó com suas informações adicionais é chamada de *projeção do nó* ou *diagrama do nó*.

Definição 2.3.3 *Uma isotopia planar de um diagrama do nó é um difeomorfismo do plano em si que não muda a estrutura combinatoria do diagrama.*

Um nó pode ser representado por sua projeção, porém esta projeção somente determina o nó diante algumas informações. Se para todo ponto duplo transversal, chamado *cruzamento*, numa projeção regular for determinado o segmento que passa por baixo (cima), o nó pode ser reconstruído, a menos de isotopia, a partir da projeção, como por exemplo, a projeção da Figura 2.11.

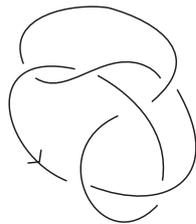


Figura 2.11: Projeção regular de um nó.

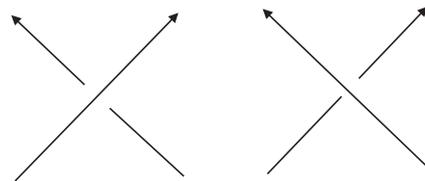


Figura 2.12: Cruzamentos positivo (+) e negativo (-) respectivamente.

Um cruzamento é chamado *positivo* (negativo) se o segmento que passa por cima precisa girar no sentido anti-horário (horário) para chegar à mesma posição do segmento de baixo. Os cruzamentos são ilustrados na figura 2.12.

Um nó então é representado pela sua classe de projeções (regulares) possíveis. Observe que uma isotopia pode desfazer cruzamentos ou mudar sua disposição, mas não pode inverter a posição de dois segmentos em um cruzamento, fazendo quem passa por baixo passar por cima (se isso fosse possível, transformaríamos qualquer curva em uma circunferência). Note também que quando um cruzamento é desfeito pode haver uma posição de transição que não seja regular, mas nós estamos preocupados apenas com as projeções regulares que ocorrem “antes” e “depois” da transição, as quais serão estudadas durante este trabalho.

2.4

Invariantes de nós

Os invariantes são, em geral, calculados sobre projeções (regulares). Um *invariante* é um objeto matemático que pode ser um número, polinômio de uma ou mais variáveis, um grupo, etc, que serve para distinguir projeções que não são equivalentes. Se o resultado for diferente então uma não pode ser deformada na outra. Infelizmente, a recíproca é falsa. Não necessariamente duas projeções com o mesmo objeto matemático representam o mesmo nó. Contudo, nós equivalentes tem os mesmos invariantes.

Reservamos a última seção deste capítulo aos polinômios invariantes de nós, destacando um deles, o qual será de grande importância nesta dissertação.

Não foi encontrado até hoje um invariante finito, de fácil acesso (isto é, calculável em um número finito de passos) que seja completo; dizemos que um invariante é *completo* se é capaz de determinar quando duas projeções determinam o mesmo nó. Porém, para merecer esse nome, é essencial que o invariante não dependa da projeção do nó utilizada para o cálculo.

Nos perguntamos como podemos saber se uma regra que associa a cada projeção um número, polinômio, grupo ou outro objeto matemático é realmente invariante, isto é, independente da projeção utilizada entre todas as projeções equivalentes.

Em geral, não existe problema enquanto a isotopia não mexe com cruzamentos, mas apenas muda o formato da projeção, chamada de *isotopia planar* (Definição 2.3.3), pois os invariantes já costumam ser definidos sem se dar muita importância ao desenho exato das curvas. Mas, quando um cruzamento é alterado e a nova projeção é essencialmente diferente da inicial, será que a regra continua gerando o mesmo polinômio, grupo, ou outro objeto matemático?

Pensamos agora no que ocorre durante uma isotopia. Haverá instantes de transição onde a projeção pode não ser regular, e os demais instantes correspondem a projeções regulares, transformadas apenas por isotopias planares onde essencialmente nada acontece. Durante a isotopia se transita de uma projeção regular a outra.

Concluimos que mostrar que um invariante independe da projeção é mostrar que ele não se altera entre duas projeções regulares separadas por uma transição não regular. O problema é que para ter uma resposta deveríamos, necessariamente, conhecer todos os tipos de transição entre projeções regulares. Essa questão foi estudada por Kurt Reidemeister, o qual nos fornece um importante teorema sobre equivalência de nós. Reservamos a próxima seção

para estes resultados.

2.5

Movimentos de Reidemeister

Pelas considerações feitas na seção anterior, é necessário saber os tipos de transições entre duas projeções regulares para determinar se dois nós são, ou não, equivalentes. Estudos realizados por Kurt Reidemeister em 1920 nos fornecem um teorema que restringe essas transições a três tipos de movimentos, chamados movimentos de Reidemeister, e além disso, garante que estes movimentos são necessários e suficientes para garantir a equivalência de dois nós. Os movimentos de Reidemeister são ilustrados na Figura 2.13, incluindo os movimentos para a imagem por reflexão do nó.

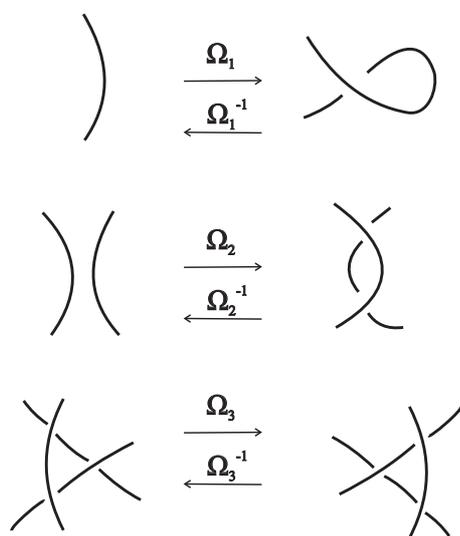


Figura 2.13: Movimentos de Reidemester.

A demonstração do resultado principal desta seção, o Teorema 2.5.3, utiliza-se de teoria de singularidades e é realizada através de complicadas técnicas, porém, uma outra prova feita por Manturov (25), pode ser realizada a partir da definição de nó poligonal, sendo necessário para isso, introduzirmos o conceito de Δ -movimento, o qual veremos a seguir.

Definição 2.5.1 *Seja u um segmento de reta de um nó poligonal K em \mathbb{R}^3 , e T um triângulo em \mathbb{R}^3 , $\partial T = u \cup v \cup w$, u, v, w são as arestas de T . Se $T \cap K = u$, então $K' = (K - u) \cup v \cup w$ define outro nó poligonal. Nós dizemos que K' resulta de K por um Δ -movimento. Se K é orientado, K' herda a orientação de K . O processo inverso é denotado por Δ^{-1} , veja Figura 2.14.*

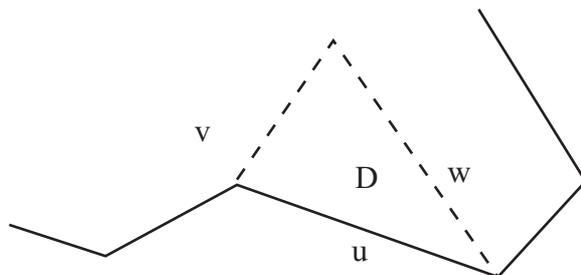


Figura 2.14: Δ -movimento.

Um Δ -movimento também é dito um *movimento elementar*.

Podemos observar que os movimentos de Reidemester não alteram a classe de isotopia do nó. De fato, o primeiro movimento preserva um cruzamento. O segundo perde ou ganha um cruzamento positivo e um negativo. E o terceiro mantém os cruzamentos existentes.

Definição 2.5.2 *Dois nós são equivalentes ou isotópico por movimentos se existe uma sequência finita de Δ - e Δ^{-1} -movimentos que transforma um nó em outro.*

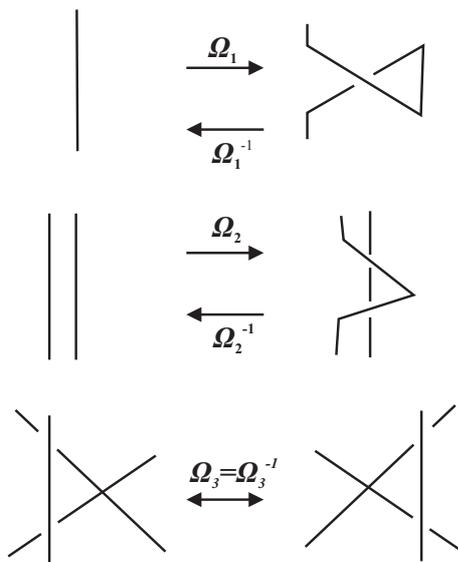


Figura 2.15: Movimentos de Reidemester para nós poligonais.

Teorema 2.5.3 *Dois nós K_1 e K_2 com diagramas regulares D_1 e D_2 , respectivamente, são equivalentes se, e somente se, um diagrama pode ser transformado no outro por uma sequência finita de movimentos de Reidemester $\Omega_i, i = 1, 2, 3$ ou seus inversos Ω_i^{-1} e isotopias planares.*

Prova. Como os movimentos de Reidemester não mudam a classe de isotopia do nó, uma implicação é evidente. Provemos a afirmação inversa do teorema.

Sejam D_1 e D_2 dois diagramas regulares de nós poligonais equivalentes K_1 e K_2 , respectivamente. Então, por definição, existe uma sequência finita de Δ - ou Δ^{-1} - movimentos que transformam K_1 em K_2 . Se observarmos esta sequência de movimentos na projeção (podemos assumir que todos os nós intermediários tem projeções regulares sem muito esforço), vemos uma sequência de diagramas, cada um obtido do anterior por uma substituição de um segmento de reta por outros dois (ou vice-versa), sendo estes os lados do triângulo. Queremos mostrar que esta substituição pode ser feita por uma sequência de movimentos Ω_1 , Ω_2 e Ω_3 e seus inversos e isotopias.

Sejam $\pi(T)$ um triângulo de vértices A,B,C no plano, onde $T \cap K_0$ é um segmento apenas, e D_0 o diagrama regular do nó K_0 inicial, no sentido de ser anterior a um movimento. Consideremos dois pontos D e E no exterior do triângulo ABC, e suporemos que os segmentos \overline{DA} e \overline{BE} não intersectam o interior do triângulo ABC, caso isso ocorra, fazemos o primeiro movimento de Reidemester. Agora separamos a intersecção das componentes de ABC, e D_0 em dois conjuntos: superior e inferior, de acordo com a localização dos segmentos do diagrama D_0 com respeito ao plano ABC. Agora podemos dividir T em pequenos triângulos de quatro tipos, onde os lados de cada pequeno triângulo não contém vértices de D_0 .

O triângulo do primeiro tipo possui somente um cruzamento de D_0 , assim lados de D_0 intersectam dois lados do triângulo. O triângulo do segundo tipo contém um único vértice de D_0 e partes dos lados de D_0 . O triângulo do terceiro tipo não contém nenhum vértice, somente partes de lados de D_0 . Finalmente, o triângulo do quarto tipo não contém nem vértices e nem lados, (isto faz corresponder o Δ -movimento como a composição de muitos Δ -movimentos em pequenos triângulos). Todos os triângulos estão ilustrados na Figura 2.16.

Tal triangulação de T pode ser feita da seguinte maneira: primeiro, isole todos os cruzamentos e todos os vértices por triângulos do primeiro e segundo tipo, respectivamente. Então triangularize as partes restantes de T com triângulos do terceiro e quarto tipo.

Agora, ao invés de observar isotopias elementares de T , analisaremos as isotopias elementares para os pequenos triângulos.

Esses movimentos elementares (isotopias) podem ser representados como uma combinação de movimentos de Reidemeister e de isotopias planares. Mais precisamente, o triângulo do primeiro tipo gera uma combinação de Ω_2 e Ω_3 , os triângulos do segundo e do terceiro tipo geram Ω_2 ou isotopia planar e o quarto tipo gera uma isotopia planar.

Assim concluímos que dois diagramas de nós que são equivalentes podem ser transformados um no outro por uma sequência finita de movimentos de

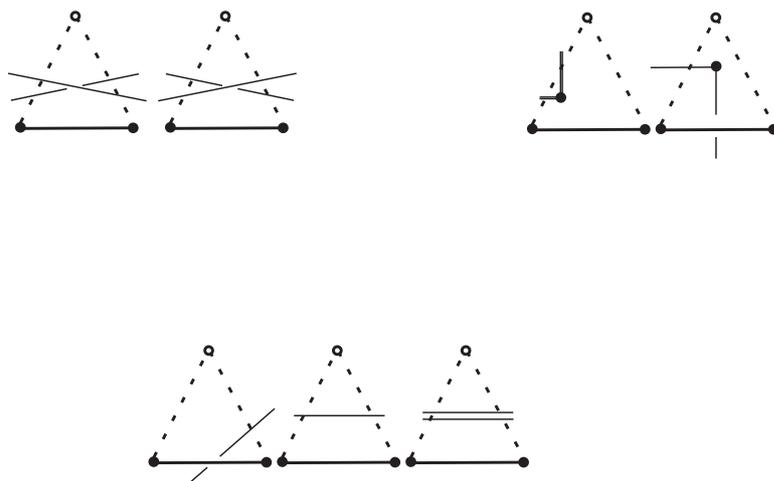


Figura 2.16: Triângulos do primeiro, segundo e terceiro tipo, respectivamente.

Reidemester e de isotopia planares. ■

É importante observar a *independência dos movimentos de Reidemeister*, ou seja, para cada movimento existem dois diagramas de nós equivalentes, que não podem ser transformado um no outro usando apenas os outros dois movimentos. Em outras palavras, um movimento de Reidemeister não pode ser obtido por combinação dos outros dois (Veja Apêndice A.1).

2.6 Superfície de Seifert

Definição 2.6.1 *Seja K um nó orientado. Uma superfície de Seifert do nó K é uma superfície bidimensional, conexa, compacta, orientada em \mathbb{R}^3 , cujo bordo é o nó K , tal que a orientação do nó K induz a orientação da superfície.*

Teorema 2.6.2 *Para cada nó K em \mathbb{R}^3 , existe uma superfície de Seifert de K .*

Prova. Considere um diagrama regular D do nó orientado K . Suavizamos os cruzamentos do nó como mostra a Figura 2.17. Então obtemos um conjunto de curvas fechadas que não se intersectam no plano. Essas curvas são chamadas de *circunferências de Seifert*.

Considere os discos presos às circunferências. Embora o interior dessas circunferências no plano possam conter uma outra circunferência, discos no espaço 3-dimensional podem ser presos sem interseções.

Numa vizinhança de cada cruzamento, dois discos encontram-se cada um com o outro. Escolhamos dois intervalos fechados no bordo desses discos e os

conectemos por uma faixa torcida como na Figura 2.18. Os bordos destas faixas são dois ramos do nó incidentes à escolha dos cruzamentos. As duas posições (superior e inferior) na Figura 2.18 mostram diferentes maneiras de torcer (em um caso a reta vertical esta sobre a horizontal e no outro caso o contrário).

Verifiquemos agora que a superfície obtida é uma superfície orientada. Cada faixa é orientada coerentemente com o nó K e cada disco recebe a orientação do nó. Dessa forma obtemos uma superfície orientada que pode não ser conexa. Então unimos diferentes componentes dessas superfícies por um tubo fino, respeitando a orientação e obtemos uma superfície conexa, com o mesmo bordo. ■

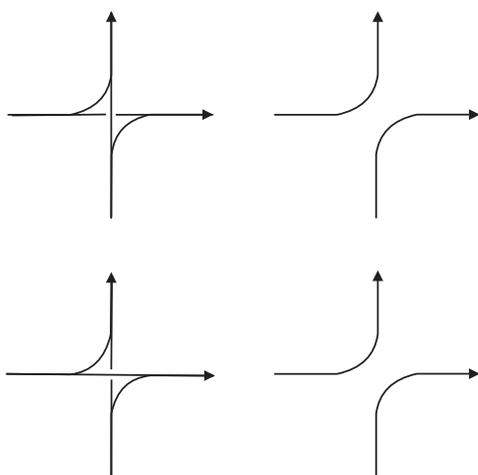


Figura 2.17: Suavizando os cruzamentos no diagrama.

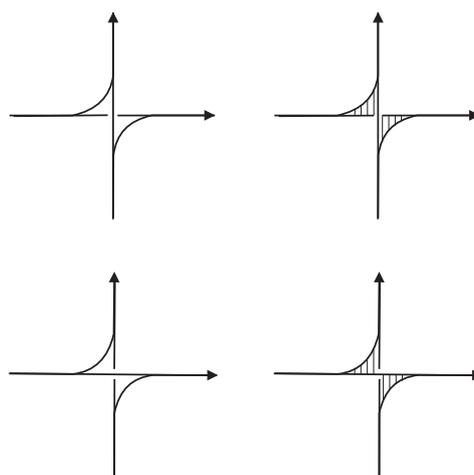


Figura 2.18: Conexão dos discos por faixas torcidas.

Exemplo 2.6.3 A figura 2.19 mostra o processo para obter a superfície de Seifert (c) do nó trevo.

2.6.1

Gênero de um nó

O conceito do gênero de um nó foi introduzido por H. Seifert em (36), o qual ocupou uma posição central na teoria dos nós.

Considere o seguinte teorema:

Teorema 2.6.4 (Massey) *Seja $F_{m,k}$ uma esfera de dimensão 2 com números finitos $m (\geq 0)$ de alças presas e $k (\geq 0)$ de componentes de bordo (Figura 2.20). Então,*

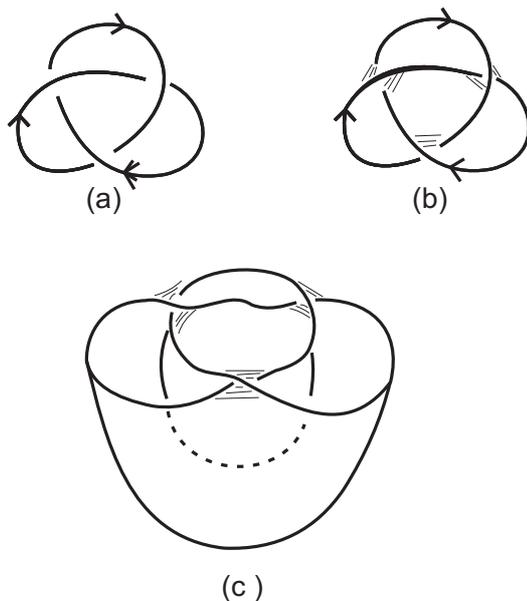


Figura 2.19: Superfície de Seifert do nó trevo.

- (i) uma superfície compacta, conexa e orientável é homeomorfa a $F_{m,k}$ para algum $m \geq 0$ e $k \geq 0$;
- (ii) $F_{m,k}$ e $F_{\tilde{m},\tilde{k}}$ são homeomorfas se, e somente se, $m = \tilde{m}$ e $k = \tilde{k}$.

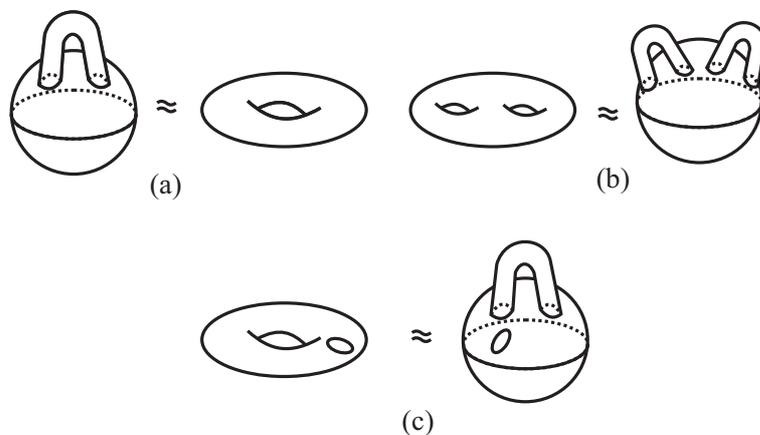


Figura 2.20: Superfícies homeomorfas à esfera com alças.

A teoria para classificação de superfícies fechadas não orientáveis pode ser encontrada em (27).

O Teorema 2.6.4 diz que uma superfície compacta, conexa e orientada M é topologicamente equivalente (isto é, homeomorfa) à esfera com várias alças presas em sua superfície. O número dessas alças, bem definido, é chamado de gênero da superfície F e denotado por $g(F)$.

Exemplo 2.6.5 A Figura 2.20 (a), com $m=1$ e $k=0$, mostra uma superfície de gênero 1, chamada toro, enquanto 2.20 (b), com $m=2$ e $k=0$, é uma superfície de gênero 2. A Figura 2.20 (c) com $m=1$ e $k=1$ mostra uma superfície de gênero 1.

Definição 2.6.6 O gênero mínimo g de todas as superfícies de Seifert do nó K é chamado de gênero do nó K .

Nos perguntamos como calcular o gênero de um nó. Para um nó arbitrário existem algoritmos para calculá-lo, mas tais algoritmos são de difícil implementação. Embora a determinação do gênero de um nó arbitrário seja difícil, determinar o gênero de uma superfície de Seifert “construída” é relativamente fácil.

Teorema 2.6.7 Dada uma superfície F compacta, conexa e orientável, dividimos esta em α_0 pontos, α_1 arestas e α_2 faces.

Seja

$$\chi(F) = \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2,$$

então $\chi(F)$ é um inteiro que é independente de como dividimos F , isto é, $\chi(F)$ depende somente da superfície F . Este inteiro é chamado de característica de Euler de F .

A característica de Euler, $\chi(F)$, e o gênero, $g(F)$, de uma superfície fechada F , , são relacionados pelas equações:

$$\chi(F) = 2 - k(F) - 2g(F)$$

onde $k(F)$ é o número de curvas fechadas que constituem o bordo de F .

Note que, se F não tem bordo, então $k(F)$ é igual a zero e, portanto,

$$g(F) = \frac{2 - \chi(F)}{2}.$$

2.6.2

Número de enlaçamento

Nesta seção definiremos o número de enlaçamento de dois nós orientados disjuntos, um importante invariante de nós orientados, o qual será abordado no capítulo 4.

Sejam K_1, K_2 nós orientados disjuntos com D_1, D_2 seus respectivos diagramas e $P = \{ p ; p \in D_1 \cap D_2 \}$ o conjunto de todos os pontos de cruzamento no diagrama $D_1 \cup D_2$, que supomos ser regular, onde D_1 intersecta D_2 . Atribuimos a cada ponto $p \in P$ o valor ± 1 , conforme segue:

$$s_p = \begin{cases} +1 & \text{se } p \text{ é cruzamento positivo} \\ -1 & \text{se } p \text{ é cruzamento negativo} \end{cases}$$

onde s_p é dito o sinal de p (Figura 2.12).

Definição 2.6.8 *Dados dois nós orientados K_1 e K_2 , então o número*

$$lk(K_1, K_2) = \frac{1}{2} \sum_{p \in P} s_p$$

é chamado número de enlaçamento de K_1 e K_2 .

O número de enlaçamento depende da orientação. Se invertemos a orientação dos dois nós, o sinal do número de enlaçamento é preservado, porém, se invertemos a orientação de apenas um dos nós, o número de enlaçamento muda de sinal.

Note que, o número de enlaçamento entre dois nós é o número de vezes (contados com sinal) que um deles intersecta a superfície de Seifert do outro.

Proposição 2.6.9 *Seja L um enlace orientado de duas componentes, $L = K_1 \cup K_2$. Então o número de enlaçamento $lk(K_1, K_2)$ é um invariante de L (com a sua orientação).*

Prova. Analisemos os movimentos de Reidemester.

O movimento Ω_1 é realizado sobre um dos dois nós, logo não altera $lk(K_1, K_2)$. O movimento Ω_2 cria ou remove um cruzamento positivo e um negativo, logo não altera $lk(K_1, K_2)$. O movimento Ω_3 não altera um cruzamento e portanto não altera $lk(K_1, K_2)$. ■

Definição 2.6.10 *Seja L um enlace orientado e C o conjunto de todos os pontos de cruzamento no diagrama de L . Então o número*

$$w(L) = \sum_{p \in C} s_p$$

é chamado de número de torção de L .

Note que, a torção, $w(L)$, de um enlace L não é invariante pelo movimento de Reidemeister Ω_1 . De fato, o movimento Ω_1 cria ou remove um cruzamento, o que altera $w(L)$ em uma unidade.

Se a torção fosse um invariante de isotopia (isotopia ambiente), então seu cálculo seria um excelente método para distinguir imagens por reflexão. Dizemos, então, que o número de torção de um enlace L é um invariante sob *isotopia regular*, ou seja, dois diagramas são ditos ser isotópicos por isotopia regular se um pode ser obtido do outro por uma sequência de movimentos de Reidemeister Ω_2 e Ω_3 .

2.7

Soma Conexa

Em 1934 idéias geométricas conduziram H. Schubert à soma conexa de nós e posteriormente, em 1954, ele introduziu a noção de número de pontes de um nó.

Definição 2.7.1 *Seja K um nó orientado que intercepta um plano $E \subset \mathbb{R}^3$ em dois pontos P e Q . Em cada semiespaço de E temos os arcos K_1 e K_2 fechados, obtidos de K pelos arcos de P a Q e de Q a P respectivamente, ambos fechados por arcos em E . O nó K é dito uma soma conexa dos nós K_1 e K_2 orientados, denotado por $K = K_1 \# K_2$.*

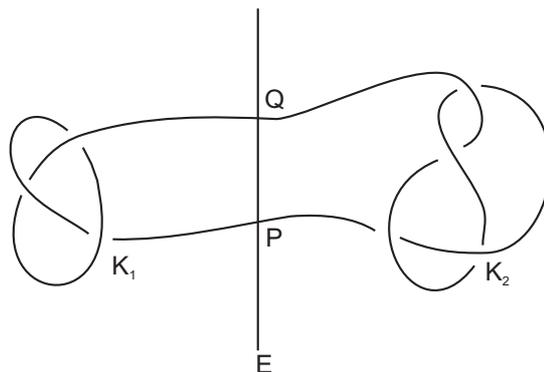


Figura 2.21: Soma conexa de nós K_1 e K_2 .

Uma soma conexa pode ser vista como uma operação entre nós orientados e é também chamada de *composição de nós*. A operação de soma é bem definida, isto é, não depende dos pontos P e Q escolhidos, de modo a compor

o novo nó. Então dizemos que $K_1 \# K_2$ é unicamente determinado por K_1 e K_2 .

Proposição 2.7.2 *Sejam K_1, K_2, K_3 nós orientados e K_0 o nó trivial orientado. Então*

- (1) $K_1 \# K_2 \approx K_2 \# K_1$;
- (2) $K_1 \# (K_2 \# K_3) \approx (K_1 \# K_2) \# K_3$;
- (3) $K_i \# K_0 \approx K_i$;
- (4) se K_1 é um nó não trivial, então $K_1 \# K_2$ é um nó não trivial.

Prova. (1) Facilmente vemos que a soma conexa é comutativa. De fato, considere os diagramas das composição de nós $K_1 \# K_2$ e $K_2 \# K_1$, então através de isotopias planares, concluímos que eles são idênticos.

(2) Considere a soma conexa $K_1 \# (K_2 \# K_3)$. Agora façamos $K_2 \# K_3 = M$ e $K_1 \# M = M'$. Sejam E e E' os planos que interceptam M e M' nos pontos P, Q e P', Q' respectivamente. Agora, façamos a soma conexa de K_1 e K_2 através da união dos arcos de P' a Q' nos dois semi planos de E' ; da mesma forma, fazemos a soma conexa do nó obtido, $(K_1 \# K_2)$, com K_3 através dos arcos de P a Q nos dois semi planos de E e, portanto obtemos a soma conexa de nós $(K_1 \# K_2) \# K_3$, que é isotópica a $K_1 \# (K_2 \# K_3)$.

(3) A verificação é imediata.

(4) Suponhamos que $K_1 \# K_2$ é um nó trivial. Considere a sequência

$$K_1 \# K_2, (K_1 \# K_2) \# (K_1 \# K_2), (K_1 \# K_2) \# (K_1 \# K_2) \# (K_1 \# K_2),$$

onde cada termo M_n da sequência está numa bola de raio $1/2^{n-1}$. Dessa forma, construímos uma série infinita dentro de um compacto, obtendo assim um nó que possivelmente é selvagem. Denotamos esse nó por K' .

Como o nó $K_1 \# K_2$ é trivial, o nó K' é trivial também. Além disso temos a decomposição

$$K' = K_1 \# (K_2 \# K_1) \# (K_2 \# K_1) \dots$$

A soma conexa de nós é comutativa e então $K_2 \# K_1$ é um nó trivial. Logo K' é isotópico a K_1 , pelo item (3). O que é uma contradição, pois K_1 é não trivial. ■

A proposição (item (4)) nos diz que um nó não trivial não possui um simétrico com relação a operação de composição de nós. Daí, concluímos que o conjunto de todos os nós com a operação de soma conexa tem a estrutura de um semigrupo e não de um grupo.



Figura 2.22: Diagramas de dois nós de 2-pontes e um enlace de 2-pontes, respectivamente.

Definição 2.7.3 Um nó K que é a soma conexa de dois nós não triviais é chamado composto. Um nó não trivial que não é composto é dito um nó primo.

Definição 2.7.4 Seja K um nó em \mathbb{R}^3 que intersecta um plano $E \subset \mathbb{R}^3$ em $2m$ pontos, tais que os arcos de K contidos em cada semi espaço (provenientes da intersecção com o plano E) possuem projeção ortogonal em E , as quais são simples e disjuntas. Então o número mínimo m possível para um nó K é chamado de número de pontes de K , e o nó é dito um nó de m -pontes.

Exemplo 2.7.5 A Figura 2.22 mostra diagramas de nós de 2-pontes.

Proposição 2.7.6 Todo nó K de 2-pontes é um nó primo.

A demonstração desta proposição se encontra em (2),7.8.

2.8 Polinômios

Nesta seção faremos uma breve apresentação, baseada nos trabalhos: Nudos e Variedades Tridimensionales por María Teresa Lozano Imízcoz (18), e em (19, 20) por Louis H. Kauffman, dos polinômios para enlaces ou nós. Restringiremos esta seção somente às suas definições, visto que as usaremos raramente nos próximos capítulos, exceto para o polinômio de Kauffman, ao qual daremos uma atenção especial por possuir importante papel nessa dissertação. Com o intuito de não nos estendermos em contas, todos os exemplos aqui apresentados serão para o nó trevo, o qual é o nó não trivial com o menor número de cruzamentos. Para um aprofundamento, ver (19, 20).

Em 1928, o matemático Alexander encontrou um polinômio de Laurent em uma variável t (com potências positivas e negativas), que resultou ser um invariante de nó. Contudo, seu trabalho só utiliza álgebra linear, determinantes e movimentos de Reidemeister. O polinômio é conhecido como *polinômio de Alexander* e denotado por $\Delta_K(t)$. A descoberta deste polinômio foi um importante avanço em teoria dos nós, pois é um polinômio de cálculo acessível.

Observou-se que o polinômio de Alexander do nó trivial é igual a 1, mas para certos outros nós não triviais o polinômio também tem valor igual a 1, como, por exemplo, o nó de Kinoshita-Terasaka (Figura 2.23). Em 1984 Alexander verificou que há infinitos pares de nós distintos cujos polinômios são iguais, logo o polinômio de Alexander não é um invariante completo.

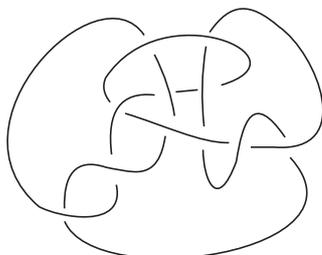


Figura 2.23: Nó de Kinoshita-Terasaka.

No final dos anos 60, matemáticos buscaram novos algoritmos para calcular os invariantes e, em 1970, J.H Conway definiu um novo polinômio de Laurent, $\nabla_L(z)$, para um enlace orientado, conhecido como *polinômio de Conway*, que é definido por um mecanismo indutivo, com uma regra que permite escrever o polinômio de um nó em aplicação das variáveis. Sendo assim, após um número finito de etapas elimina-se completamente os cruzamentos, restando apenas circunferências. O polinômio de Conway é determinado de forma recursiva pelos seguintes axiomas:

- 1 - $\nabla_{\bigcirc}(z)=1$, onde \bigcirc é o nó trivial;
- 2 - $\nabla_{L_+}(z) - \nabla_{L_-}(z) = z\nabla_{L_0}(z)$; onde os diagramas dos enlaces L_+ , L_- e L_0 são como na figura 2.24;
- 3 - Se L é equivalente a L' então, $\nabla_L(z) = \nabla_{L'}(z)$.

O polinômio de Conway é independente da orientação escolhida. Isto significa que o polinômio de Conway é um invariante de nó sem orientação. O polinômio de Conway está relacionado com o polinômio de Alexander por uma mudança de variável,

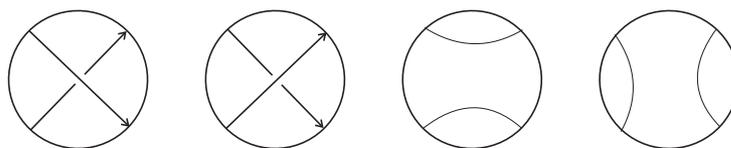


Figura 2.24: Diagramas dos enlaces L_+ , L_- , L_0 e L_∞ , que diferem por um cruzamento.

$$\Delta_k(t) = \nabla_L \left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}} \right).$$

Exemplo 2.8.1 *Polinômio de Conway do nó trevo:*

$$\nabla_K(z) = 1\nabla_{\bigcirc}(z) + z\nabla_{\bigcirc\bigcirc}(z) + z^2\nabla_{\bigcirc}(z) = (1+z^2)\nabla_{\bigcirc}(z) + 1\nabla_{\bigcirc}(z) = (1+z^2)$$

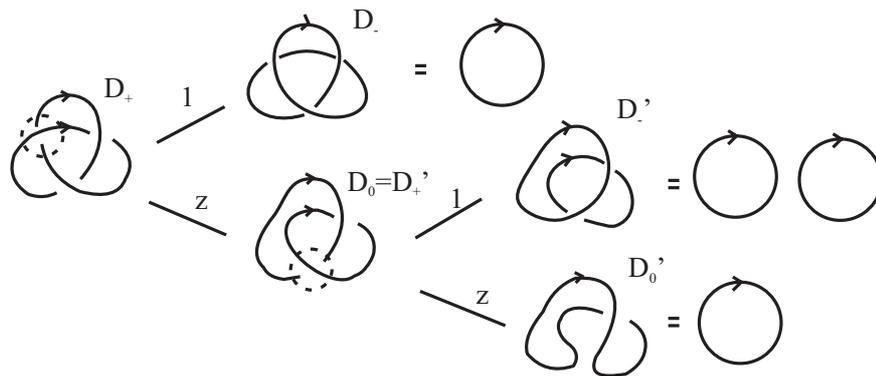


Figura 2.25: Árvore para o cálculo do polinômio de Conway do nó trevo.

Em 1984, V. Jones encontrou um polinômio invariante que depois levaria seu nome. Vários estudos foram realizados com o intuito de encontrar invariantes de nós e enlaces. O trabalho de Jones abriu novas linhas de pesquisa em diversos campos e o tornou merecedor da medalha Fields, no Congresso Internacional de Matemática celebrado em Kyoto em 1990. Jones trabalhou em mecânica estatística e estudou grupo de tranças ¹(Todo nó pode ser construído por uma trança, embora não de maneira única). Jones provou que o polinômio era um invariante para cada trança, logo para cada nó. Imediatamente, ele mostrou que cumpria a propriedade que podemos chamar de axioma (2) para sua definição. Assim, o *polinômio de Jones* de um nó ou enlace orientado, $V_L(t)$, satisfaz os axiomas:

- 1 - $V_{\bigcirc}(z)=1$, onde \bigcirc é o nó trivial;
- 2 - $\frac{1}{t}V_{L_+}(z) - tV_{L_-}(z) = \left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}} \right) V_{L_0}(t)$.

Podemos verificar que o polinômio de um enlace orientado, definido por estes axiomas preserva os movimentos de Reidemeister. Logo, pode ser calculado de forma análoga aos polinômios de Conway e Alexander. Observamos

¹Uma n -trança é um conjunto de n arcos disjuntos que unem n pontos em um plano Ω com suas projeções em outro plano paralelo Ω' .

por simetria do axioma 2, que o polinômio de Jones da reflexão de um nó é o polinômio de Jones inicial por uma mudança de variável t por t^{-1} .

Exemplo 2.8.2 *Polinômio de Jones para o nó trevo:*

$$V_K(t) = t^2 V_{\bigcirc}(t) + t^3 \left(\sqrt{t} + \frac{1}{\sqrt{t}} \right) V_{\bigcirc\bigcirc}(t) + t^2 \left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}} \right)^2 V_{\bigcirc}(t) = t + t^3 - t^4.$$

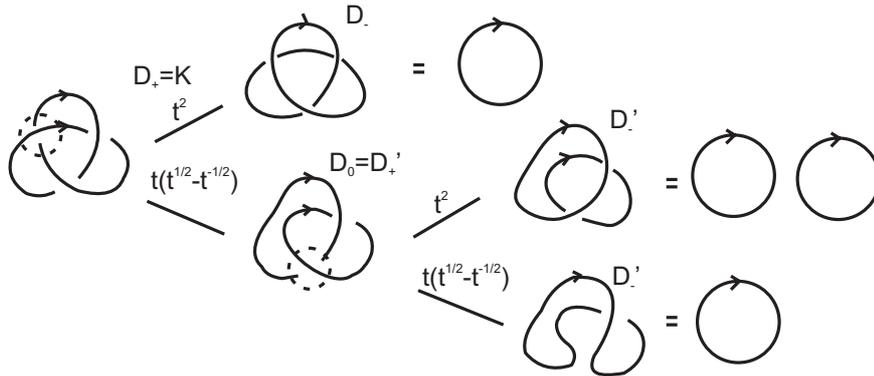


Figura 2.26: Árvore para o cálculo do polinômio de Jones do nó trevo.

Vários especialistas em teoria dos nós descobriram independentemente, mas ao mesmo tempo, que ambos polinômios são casos especiais de um invariante mais geral, definido para enlaces ou nós orientados com os mesmos axiomas, porém introduzidas duas variáveis, v e z . Esse polinômio é chamado *polinômio de HOMFLY*, nome formado pelas letras iniciais dos nomes dos matemáticos que o definiram: Hoste, Ocneanu, Millett, Freyd, Lickorish, and Yetter, e é denotado por $P_K(v, z)$. Os axiomas que o definem são :

- 1- $P_{\bigcirc}(v, z) = 1$;
- 2- $\frac{1}{v} P_{L_+}(v, z) - v P_{L_-}(v, z) = z P_{L_0}(v, z)$.

O polinômio de HOMFLY se relaciona com os anteriores da seguinte forma:

$$V_K(t) = P_K \left(t, \sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}} \right),$$

$$\nabla_K(t) = P_K \left(1, \sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}} \right).$$

Isto implica que ambos os polinômios, o de Alexander e o de Jones são casos particulares do polinômio de HOMFLY. Assim como os demais polinômios, $P_K(v, z)$ também não é um invariante completo de nó.

Exemplo 2.8.3 *Polinômios de HOMFLY para o nó trevo T :*

$$P_T(a, z) = a^{-3} \left(\frac{a - a^{-1}}{z} \right) (2a - a^{-1} + az^2).$$

Grandes avanços na teoria combinatória de nós foram produzidos em velocidade. Os avanços mais significativos são devidos a Louis Kauffman, o qual escreveu vários livros e numerosos artigos sobre estes temas. Realmente, Kauffman trabalhou em teoria dos nós desde os anos 70. No final da década de 80, Kauffman descobriu um polinômio, chamado *polinômio de Kauffman*, que assim como o de HOMFLY, é definido axiomáticamente para duas variáveis.

Os polinômios de HOMFLY e de Kauffman merecem uma atenção especial. Importantes relações entre estes polinômios podem ser vistas em (15). Para os invariantes de nós, estes polinômios contribuíram de forma significativa, como, por exemplo, a contribuição do polinômio de Kauffman para um dos principais resultados dessa dissertação, o número máximo de Thurston-Bennequin para nós de 2-pontes em termos do grau mínimo do polinômio de Kauffman, o qual será visto no capítulo 5.

Antes de definirmos o polinômio de Kauffman para um enlace orientado L , definimos o polinômio de Laurent, $R_L(a, x) \in \mathbb{Z}[a^{\pm 1}, x^{\pm 1}]$ (de Kauffman), do enlace L , desconsiderando a orientação, pelos axiomas:

- 1 - R_L é um invariante de isotopia regular, isto é, se L e L' são isotópicos por isotopia regular então, $R_L = R_{L'}$;
- 2 - $R_{L_+} + R_{L_-} = x(R_{L_0} + R_{L_\infty})$;
- 3 - $R_{L^+} = aR_L$
 $R_{L^-} = a^{-1}R_L$;
- 4 - $R_{\bigcirc} = 1$, onde \bigcirc é o nó trivial.

Os diagramas dos enlaces L_+ , L_- , L_0 , L_∞ e L^+ , L^- , L^0 , L^∞ se encontram nas Figuras 2.24 e 2.27.

O *polinômio de Kauffman* de um enlace orientado L é definido por :

$$F_L = a^{-w(L)} R_L,$$

onde $w(L)$ é o número de torção de L .

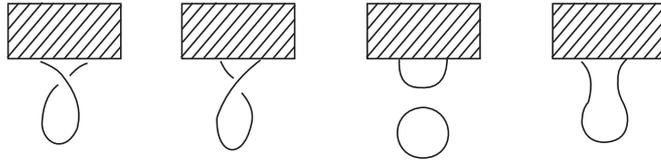


Figura 2.27: Diagramas dos enlacs L^+, L^-, L^0 e L^∞ que diferem por uma torção.



Figura 2.28: Nó M , com torção em “espiral”.

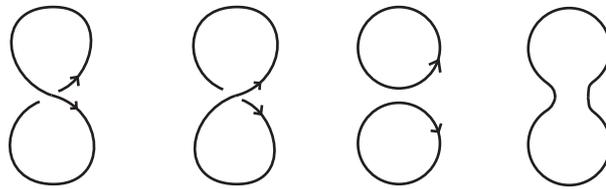


Figura 2.29: Diagramas dos enlacs $\bar{L}_+, \bar{L}_-, \bar{L}_0$ e \bar{L}_∞ .

O polinômio de Kauffman, $F_L = a^{-w(L)}R_L$, de um enlace L é um invariante sob isotopia regular. Basta lembrar que a torção $w(L)$ é um invariante sob isotopia regular.

Observação 2.8.4 *O polinômio de Kauffman aplicado na imagem por reflexão de L é obtido substituindo a por a^{-1} no polinômio de L .*

Vejamos algumas importantes propriedades do polinômio de Kauffman:

Proposição 2.8.5 *Sejam \bar{L} e M enlacs orientados, como nas Figuras 2.29 e 2.28, respectivamente, K e K' nós (ou enlacs) orientados e $-K$ o nó com a orientação contrária de K . Então:*

- (i) $R_{\bar{L}_0} = \frac{a+a^{-1}}{x} - 1$;
- (ii) $F_{K \cup K'} = \delta F_K \cdot F_{K'}$;
- (iii) $F_K = F_{-K}$;
- (iv) $F_{K \# K'} = F_K \cdot F_{K'}$;
- (v) $R_M = a^{w(M)}$.

Prova. (i) Pelos axiomas do polinômio de Laurent, R_L , temos as seguintes relações:

$$-R_{\bar{L}_+} + R_{\bar{L}_-} = x(R_{\bar{L}_0} + R_{\bar{L}_\infty})$$

- $R_{\bar{L}_+} = a$ e $R_{\bar{L}_-} = a^{-1}$
- $R_{\bar{L}_\infty} = R_{\bigcirc} = 1$.

Dessa forma, $a + a^{-1} = x(R_{\bar{L}_0} + 1)$ e portanto $R_{\bar{L}_0} = \frac{a + a^{-1}}{x} - 1$.

(ii) Determinemos o polinômio de Kauffman para o enlace L orientado com torção, como mostra a Figura 2.27.

Pelo axioma do polinômio de Laurent, R_L , temos a seguinte relação:

$$R_{L^+} + R_{L^-} = x(R_{L^0} + R_{L^\infty})$$

e assim,

$$R_{L^0} = \left[\frac{a + a^{-1}}{x} - 1 \right] R_{L^\infty}.$$

Façamos $\delta = \left[\frac{a + a^{-1}}{x} - 1 \right]$, então $R_{L^0} = R_{\bigcirc \cup \bar{K}} = \delta R_{\bar{K}}$, onde \cup denota a união disjunta, o que implica que $F_{\bigcirc \cup \bar{K}} = \delta F_{\bar{K}}$. Mas geralmente para dois nós K e K' , temos a relação:

$$F_{K \cup K'} = \delta F_K \cdot F_{K'}. \quad (2-1)$$

(iii) De fato, pela definição do polinômio de Laurent, $R_K = R_{-K}$

(iv) Sejam K e K' dois nós orientados (ou enlaces) e $K \# K'$ a soma conexa de K e K' . Pela definição do polinômio de Kauffman, temos que:

$$R_{K \# K'_+} + R_{K \# K'_-} = x(R_{K \# K'_0} + R_{K \# K'_\infty}),$$

$$\left(\frac{a + a^{-1}}{x} \right) R_{K \# K'} = (R_{K \# K'_0} + R_{K \# K'_\infty}).$$

Mas $R_{K \# K'_0} = R_{K \# K'}$ e $R_{K \# K'_\infty} = R_{K \cup K'}$, então

$$\left(\frac{a + a^{-1}}{x} - 1 \right) R_{K \# K'} = R_{K \cup K'};$$

pela relação (ii), temos

$$\left(\frac{a + a^{-1}}{x} - 1 \right) R_{K \# K'} = \delta R_K \cdot R'_K$$

$$R_{K \# K'} = R_K \cdot R'_K.$$

Portanto, $F_{K\sharp K'} = F_K \cdot F_{K'}$.

(v) Pelo axioma 3 do polinômio R_L , observamos que para um diagrama de um nó M não trivial, em forma de “espiral” (por exemplo, o diagrama da Figura 2.28) o polinômio de Laurent é dado por $R_M = a^{w(M)}$. ■

Exemplo 2.8.6 *O polinômio de Kauffman para o nó trevo T é dado por:*

$$F_T = a^{-3} \left(1 + \frac{a - a^{-1}}{z} \right) (2a - a^{-1} + z - a^{-2}z + az^2 - a^{-1}z^2)$$

É importante mencionar que os resultados acima são demonstrados de forma análoga para o polinômio de HOMFLY e, portanto, para os demais polinômios, por estes serem casos particulares do polinômio de HOMFLY.

2

Nós Topológicos

Uma área fascinante da matemática é a teoria dos nós, cuja origem remonta ao final do século XIX e modernamente se insere no campo da topologia algébrica. A teoria dos nós estuda as curvas no espaço, sem auto interseções e fechadas. Em outras palavras, as curvas que são imagens (suaves) de um círculo, no espaço tridimensional.

Apresentaremos neste capítulo as noções básicas de nós topológicos necessárias ao entendimento da dissertação. Uma abordagem mais detalhada destes conteúdos pode ser encontrada em livros específicos (35). Suporemos que o leitor já esteja familiarizado com os conceitos fundamentais de topologia.

O capítulo contém uma base elementar da teoria dos nós. Definimos e discutimos nós e suas classes de equivalência, assim como as projeções regulares dos nós e enfatizamos os movimentos de Reidemeister.

2.1

Definições básicas

Definição 2.1.1 *Um nó k é um mergulho suave por partes de um círculo no espaço euclidiano de dimensão 3.*

Equivalentemente, podemos dizer que um nó k , é uma curva $k : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ simples fechada, que é imersão por partes.

Nos referiremos a um nó $k : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $k(t_0) \neq k(t_1)$ se $t_0 \neq t_1$ exceto $k(0) = k(1)$, que é uma imersão de classe C^1 por partes, pela sua imagem $k([0, 1]) = K$. É conveniente assumirmos que k seja suave por partes, ou seja, para uma determinada partição do intervalo $[0, 1]$, $0 < t_0 < t_1 < \dots < t_k = 1$, a restrição $k|_{[t_{i-1}, t_i]} : [t_{i-1}, t_i] \rightarrow \mathbb{R}^3$ é suave, pois veremos mais a frente que esta consideração evitará certos tipos de nós (nós selvagens), os quais não estudaremos nesta dissertação.

A definição de nó pode ser generalizada da seguinte maneira. Em vez de apenas uma curva fechada no espaço, podemos considerar uma coleção (finita) de curvas disjuntas no espaço, eventualmente enlaçadas entre si.

Definição 2.1.2 Um enlace é uma coleção finita ordenada de nós L_i , $i \in \mathbb{N}$ que não se intersectam entre si. Cada nó L_i é dito uma componente do enlace.

Note que nos referindo a um nó pela sua imagem, escrevemos um enlace de k componentes $l : \coprod_{i=1}^k [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ pela sua imagem $l(\coprod_{i=1}^k [0, 1]) = L$, o que nos permite escrever $L = L_1 \cup L_2 \cup \dots \cup L_k$, onde cada L_i é um nó.

Nas Figuras 2.1, 2.2 e 2.3 mostramos três desses nós: o *enlace de Hopf*, que são dois círculos enlaçados da maneira mais simples, o *enlace de Whitehead* e o *enlace de Borromean*, sendo os dois primeiros com duas componentes e o terceiro com três. Um outro exemplo é o símbolo das olimpíadas, que é um enlace de 5 componentes.

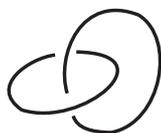


Figura 2.1: Enlace de Hopf.

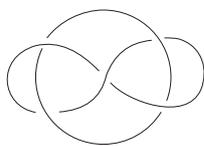


Figura 2.2: Enlace de Whitehead.

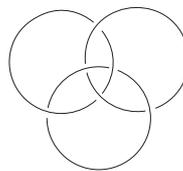


Figura 2.3: Enlace de Borromean.

Note que um nó é um enlace de uma componente. Com o intuito de não haver repetições, nos referiremos a nós durante a dissertação, sabendo-se que os resultados e definições para nós se estendem naturalmente para enlaces.

2.2

Equivalência de nós

O problema central da teoria do nós é classificá-los. Classificar significa saber listá-los todos (mesmo que sejam em número infinito, como é o caso), sem que haja uma isotopia (Definição 2.2.1) entre eles, e saber dizer, para cada curva, qual nó dessa lista ela representa. Isto implica, em particular, ter critérios para dizer se duas curvas são, ou não são, equivalentes (Definição 2.2.3).

A teoria considera como equivalentes, duas curvas tais que uma pode ser deformada continuamente de tal forma a ficar idêntica à outra, sem que no

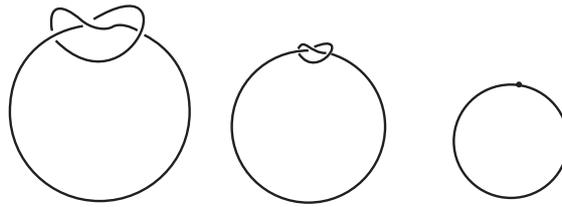


Figura 2.4: Diagrama ilustrando o colapso.

processo de deformação se criem auto-interseções, sem que a curva “se rompa” e sem colapsos (como um nó tão apertado que desaparece, como podemos ver na Figura 2.4). A preocupação não é com a forma exata das curvas, mas sim obter critérios para dizer se duas curvas são ou não são equivalentes.

Um nó não é uma curva em particular, mas todo o conjunto de posições que ela pode assumir se for deformada de acordo com esses critérios. Por exemplo, o nó *trivial* é a classe de curvas que podem se deformar até se tornarem circunferências.

Definição 2.2.1 *Uma isotopia ambiente de \mathbb{R}^3 é uma aplicação C^0 ,*

$$h : \mathbb{R}^3 \times I \longrightarrow \mathbb{R}^3,$$

tal que $h_0 = id$ e $h_t = h(\cdot, t)$ é um difeomorfismo para todo $t \in I = [0, 1]$.

Definição 2.2.2 *Dois nós K_1 e K_2 são isotópicos se existe uma isotopia ambiente h , tal que $h_1(K_1) = K_2$ onde $K_i = k_i(I)$, $I = [0, 1]$. Além disso, se os nós são orientados, h_1 preserva a orientação.*

Em uma *isotopia ambiente*, o espaço inteiro deve ser deformado, arrastando a curva de uma posição a outra. Com isotopias ambientes impede-se que haja o colapso de uma porção não trivial do nó, reduzindo sua complexidade de forma artificial. Nos referiremos a isotopia ambiente, simplesmente por isotopia.

Uma isotopia preserva a orientação, isto é, se dois nós K_0 e K_1 orientados são isotópicos por uma isotopia h , então a isotopia h preserva a orientação.

Definição 2.2.3 *Dois nós K_0 e K_1 são equivalentes se eles são isotópicos, $K_0 \sim K_1$.*

Sem dificuldades, podemos verificar que a relação \sim é uma relação de equivalência. Então podemos falar de classe de equivalência de um nó. Cada classe de equivalência de um nó é dito um *tipo de nó*; então nós equivalentes tem o mesmo tipo de nó. Por exemplo, nós equivalentes a uma circunferência são chamados triviais, e constituem o tipo trivial.

Definição 2.2.4 *Dois enlacs $L = L_1 \cup L_2 \cup \dots \cup L_m$ e $L' = L'_1 \cup L'_2 \cup \dots \cup L'_n$ são equivalentes se satisfazem as seguintes condições:*

- (1) $m = n$, ou seja, os enlacs L e L' tem o mesmo número de componentes;
- (2) existe um difeomorfismo de \mathbb{R}^3 em si mesmo que preserva a orientação e leva a coleção $L_1 \cup L_2 \cup \dots \cup L_m$ na coleção $L'_1 \cup L'_2 \cup \dots \cup L'_m$.

Com o intuito de simplificar certas demonstrações através de determinados movimentos, os quais serão vistos na Seção 2.5, usaremos a definição de nó como se segue.

Definição 2.2.5 *Um nó K chama-se nó poligonal se K é isotópico a uma linha poligonal fechada, sem interseções, em \mathbb{R}^3 .*

Podemos considerar um nó poligonal como um polígono em \mathbb{R}^3 . Um exemplo de nó poligonal se encontra na Figura 2.5.

Definição 2.2.6 *Um enlace poligonal de k -componentes, é uma coleção finita de nós poligonais disjuntos K_i , com $i \in \mathbb{N}$.*

Definição 2.2.7 *Um nó é dito dócil se ele é equivalente a um nó poligonal.*

Se um nó não é dócil, ele é chamado *selvagem*. Nessa dissertação nos concentramos no estudo de nós dóceis, por tal motivo a Definição 2.2.5 dada anteriormente não inclui os nós selvagens. Exemplos de nós selvagens se encontram nas Figuras 2.6 e 2.7. Note também que, para o único ponto limite p , o nó é suave, porém não é imersão. Esta distinção é de fundamental importância, pois toda teoria desenvolvida nessa dissertação é aplicada somente a nós dóceis. Em diversos momentos usaremos a definição de nós poligonais em \mathbb{R}^3 .

É natural perguntarmos que tipo de nós são nós dóceis. Uma resposta parcial para isto é dada pelo seguinte teorema.

Teorema 2.2.8 (Ver (7)) *Se um nó parametrizado pelo comprimento de arco é uma imersão de classe C^1 , isto é, continuamente diferenciável com derivada não nula, então ele é dócil.*

Definição 2.2.9 *Dizemos que uma aplicação $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}^3$, é uma reflexão (ou uma simetria) de $X \subseteq \mathbb{R}^3$ com respeito a um plano E , se para todo ponto $p \in X$, $\varphi(p)$ é o ponto simétrico a p com respeito a E . A imagem $\varphi(K)$, obtida pela reflexão φ do nó K , é dita ser uma imagem por reflexão de K .*

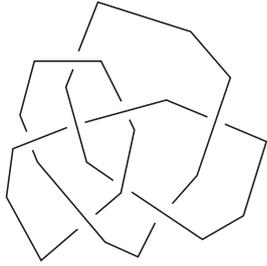


Figura 2.5: Nó poligonal.

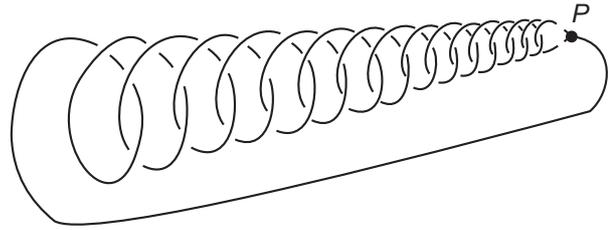


Figura 2.6: Nó selvagem.

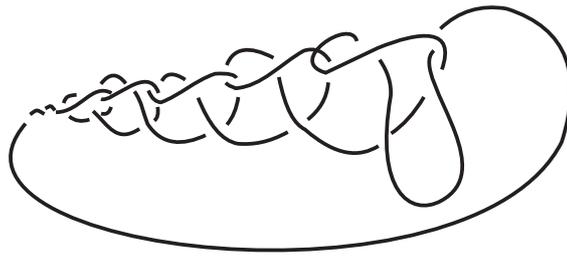


Figura 2.7: Nó selvagem.

A imagem por reflexão de um nó K orientado, inverte a orientação do nó.

Exemplo 2.2.10 *A imagem por reflexão com respeito a um plano, por exemplo, o plano xy , dada por $f(x, y, z) = (x, y, -z)$, não é um homeomorfismo que preserva a orientação, de fato, a orientação é inversa (ver Figura 2.8).*

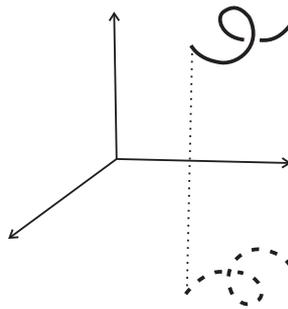


Figura 2.8: Imagem por reflexão.

2.3

Projeções e diagramas

O estudo dos nós é realizado de uma maneira mais simples que o estudo em um mergulho de uma curva em \mathbb{R}^3 . Suas propriedades são obtidas através de seus gráficos em \mathbb{R}^2 , isto é, através de suas projeções.

Definição 2.3.1 A projeção em P , $P \subset \mathbb{R}^3$, de um nó K em \mathbb{R}^3 é a imagem $\pi(K)$ de K por uma aplicação linear sobrejetiva, $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow P$, onde P é um plano.

Se K é um nó, diremos que $\pi(K)$ é a *projeção do nó K* . Um ponto p na imagem $\pi(K)$ é chamado de *ponto múltiplo* se a imagem inversa $\pi^{-1}(p)$ tem mais de um ponto, caso contrário p é dito *ponto regular*.

Se $\pi^{-1}(p)$ possui exatamente dois pontos, então dizemos que p é *ponto duplo*. Um ponto duplo é dito *transversal* se $\pi^{-1}(p) = \{a, b\}$ e $\text{Im } d\pi_a + \text{Im } d\pi_b = T_p\mathbb{R}^2$, ou seja, π é imersão em a e em b e as retas imagens das retas tangentes em a e b não coincidem (Figura 2.9).

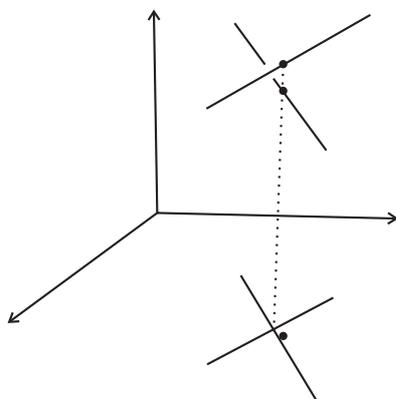


Figura 2.9: Ponto duplo transversal.

Em geral a imagem de $\pi(K)$ pode ser bem complicada em relação ao número e tipo de pontos múltiplos. Contudo, todo nó dócil K é equivalente a outro nó, cuja projeção seja relativamente simples.

Definição 2.3.2 A projeção $\pi(K)$ de um nó K é dita *regular* se,

- (i) π restrita a K é imersão;
- (ii) existe um número finito de pontos múltiplos e todos são pontos duplos transversais.

Numa projeção regular de um nó poligonal, não ocorre pontos múltiplos como na Figura 2.10.

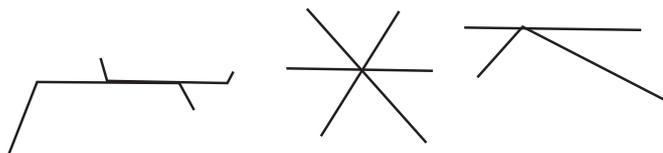


Figura 2.10: Pontos múltiplos não permitidos numa projeção regular.

Uma isotopia se transpõe naturalmente para as projeções. Assim como as curvas, dizemos que duas *projeções* são *equivalentes* se uma isotopia transforma uma na outra.

Sendo K um nó orientado, a projeção de K herda a orientação de maneira natural.

A projeção regular de um nó com suas informações adicionais é chamada de *projeção do nó* ou *diagrama do nó*.

Definição 2.3.3 *Uma isotopia planar de um diagrama do nó é um difeomorfismo do plano em si que não muda a estrutura combinatoria do diagrama.*

Um nó pode ser representado por sua projeção, porém esta projeção somente determina o nó diante algumas informações. Se para todo ponto duplo transversal, chamado *cruzamento*, numa projeção regular for determinado o segmento que passa por baixo (cima), o nó pode ser reconstruído, a menos de isotopia, a partir da projeção, como por exemplo, a projeção da Figura 2.11.

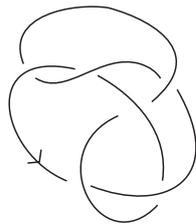


Figura 2.11: Projeção regular de um nó.

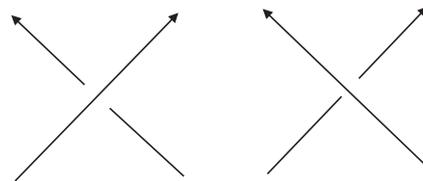


Figura 2.12: Cruzamentos positivo (+) e negativo (-) respectivamente.

Um cruzamento é chamado *positivo* (negativo) se o segmento que passa por cima precisa girar no sentido anti-horário (horário) para chegar à mesma posição do segmento de baixo. Os cruzamentos são ilustrados na figura 2.12.

Um nó então é representado pela sua classe de projeções (regulares) possíveis. Observe que uma isotopia pode desfazer cruzamentos ou mudar sua disposição, mas não pode inverter a posição de dois segmentos em um cruzamento, fazendo quem passa por baixo passar por cima (se isso fosse possível, transformaríamos qualquer curva em uma circunferência). Note também que quando um cruzamento é desfeito pode haver uma posição de transição que não seja regular, mas nós estamos preocupados apenas com as projeções regulares que ocorrem “antes” e “depois” da transição, as quais serão estudadas durante este trabalho.

2.4

Invariantes de nós

Os invariantes são, em geral, calculados sobre projeções (regulares). Um *invariante* é um objeto matemático que pode ser um número, polinômio de uma ou mais variáveis, um grupo, etc, que serve para distinguir projeções que não são equivalentes. Se o resultado for diferente então uma não pode ser deformada na outra. Infelizmente, a recíproca é falsa. Não necessariamente duas projeções com o mesmo objeto matemático representam o mesmo nó. Contudo, nós equivalentes tem os mesmos invariantes.

Reservamos a última seção deste capítulo aos polinômios invariantes de nós, destacando um deles, o qual será de grande importância nesta dissertação.

Não foi encontrado até hoje um invariante finito, de fácil acesso (isto é, calculável em um número finito de passos) que seja completo; dizemos que um invariante é *completo* se é capaz de determinar quando duas projeções determinam o mesmo nó. Porém, para merecer esse nome, é essencial que o invariante não dependa da projeção do nó utilizada para o cálculo.

Nos perguntamos como podemos saber se uma regra que associa a cada projeção um número, polinômio, grupo ou outro objeto matemático é realmente invariante, isto é, independente da projeção utilizada entre todas as projeções equivalentes.

Em geral, não existe problema enquanto a isotopia não mexe com cruzamentos, mas apenas muda o formato da projeção, chamada de *isotopia planar* (Definição 2.3.3), pois os invariantes já costumam ser definidos sem se dar muita importância ao desenho exato das curvas. Mas, quando um cruzamento é alterado e a nova projeção é essencialmente diferente da inicial, será que a regra continua gerando o mesmo polinômio, grupo, ou outro objeto matemático?

Pensamos agora no que ocorre durante uma isotopia. Haverá instantes de transição onde a projeção pode não ser regular, e os demais instantes correspondem a projeções regulares, transformadas apenas por isotopias planares onde essencialmente nada acontece. Durante a isotopia se transita de uma projeção regular a outra.

Concluimos que mostrar que um invariante independe da projeção é mostrar que ele não se altera entre duas projeções regulares separadas por uma transição não regular. O problema é que para ter uma resposta deveríamos, necessariamente, conhecer todos os tipos de transição entre projeções regulares. Essa questão foi estudada por Kurt Reidemeister, o qual nos fornece um importante teorema sobre equivalência de nós. Reservamos a próxima seção

para estes resultados.

2.5

Movimentos de Reidemeister

Pelas considerações feitas na seção anterior, é necessário saber os tipos de transições entre duas projeções regulares para determinar se dois nós são, ou não, equivalentes. Estudos realizados por Kurt Reidemeister em 1920 nos fornecem um teorema que restringe essas transições a três tipos de movimentos, chamados movimentos de Reidemeister, e além disso, garante que estes movimentos são necessários e suficientes para garantir a equivalência de dois nós. Os movimentos de Reidemeister são ilustrados na Figura 2.13, incluindo os movimentos para a imagem por reflexão do nó.

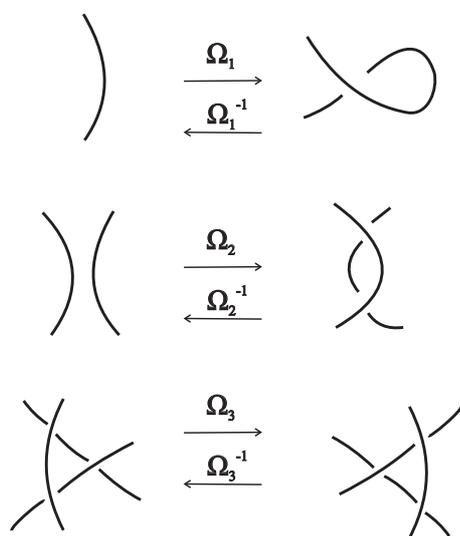


Figura 2.13: Movimentos de Reidemester.

A demonstração do resultado principal desta seção, o Teorema 2.5.3, utiliza-se de teoria de singularidades e é realizada através de complicadas técnicas, porém, uma outra prova feita por Manturov (25), pode ser realizada a partir da definição de nó poligonal, sendo necessário para isso, introduzirmos o conceito de Δ -movimento, o qual veremos a seguir.

Definição 2.5.1 *Seja u um segmento de reta de um nó poligonal K em \mathbb{R}^3 , e T um triângulo em \mathbb{R}^3 , $\partial T = u \cup v \cup w$, u, v, w são as arestas de T . Se $T \cap K = u$, então $K' = (K - u) \cup v \cup w$ define outro nó poligonal. Nós dizemos que K' resulta de K por um Δ -movimento. Se K é orientado, K' herda a orientação de K . O processo inverso é denotado por Δ^{-1} , veja Figura 2.14.*

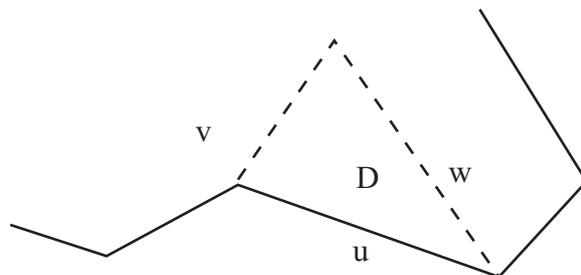


Figura 2.14: Δ -movimento.

Um Δ -movimento também é dito um *movimento elementar*.

Podemos observar que os movimentos de Reidemester não alteram a classe de isotopia do nó. De fato, o primeiro movimento preserva um cruzamento. O segundo perde ou ganha um cruzamento positivo e um negativo. E o terceiro mantém os cruzamentos existentes.

Definição 2.5.2 *Dois nós são equivalentes ou isotópico por movimentos se existe uma sequência finita de Δ - e Δ^{-1} -movimentos que transforma um nó em outro.*

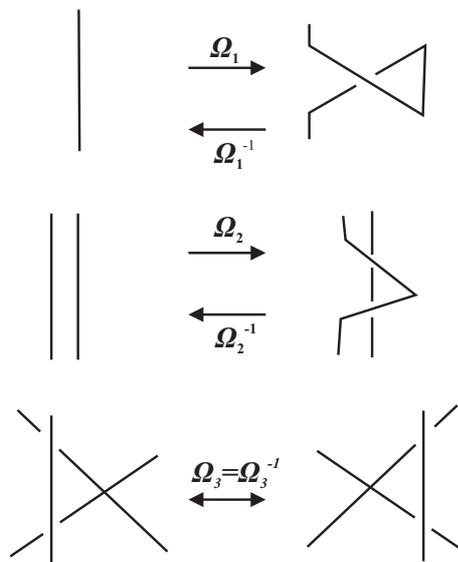


Figura 2.15: Movimentos de Reidemester para nós poligonais.

Teorema 2.5.3 *Dois nós K_1 e K_2 com diagramas regulares D_1 e D_2 , respectivamente, são equivalentes se, e somente se, um diagrama pode ser transformado no outro por uma sequência finita de movimentos de Reidemester $\Omega_i, i = 1, 2, 3$ ou seus inversos Ω_i^{-1} e isotopias planares.*

Prova. Como os movimentos de Reidemester não mudam a classe de isotopia do nó, uma implicação é evidente. Provemos a afirmação inversa do teorema.

Sejam D_1 e D_2 dois diagramas regulares de nós poligonais equivalentes K_1 e K_2 , respectivamente. Então, por definição, existe uma sequência finita de Δ - ou Δ^{-1} - movimentos que transformam K_1 em K_2 . Se observarmos esta sequência de movimentos na projeção (podemos assumir que todos os nós intermediários tem projeções regulares sem muito esforço), vemos uma sequência de diagramas, cada um obtido do anterior por uma substituição de um segmento de reta por outros dois (ou vice-versa), sendo estes os lados do triângulo. Queremos mostrar que esta substituição pode ser feita por uma sequência de movimentos Ω_1 , Ω_2 e Ω_3 e seus inversos e isotopias.

Sejam $\pi(T)$ um triângulo de vértices A, B, C no plano, onde $T \cap K_0$ é um segmento apenas, e D_0 o diagrama regular do nó K_0 inicial, no sentido de ser anterior a um movimento. Consideremos dois pontos D e E no exterior do triângulo ABC , e suporemos que os segmentos \overline{DA} e \overline{BE} não intersectam o interior do triângulo ABC , caso isso ocorra, fazemos o primeiro movimento de Reidemester. Agora separamos a intersecção das componentes de ABC , e D_0 em dois conjuntos: superior e inferior, de acordo com a localização dos segmentos do diagrama D_0 com respeito ao plano ABC . Agora podemos dividir T em pequenos triângulos de quatro tipos, onde os lados de cada pequeno triângulo não contém vértices de D_0 .

O triângulo do primeiro tipo possui somente um cruzamento de D_0 , assim lados de D_0 intersectam dois lados do triângulo. O triângulo do segundo tipo contém um único vértice de D_0 e partes dos lados de D_0 . O triângulo do terceiro tipo não contém nenhum vértice, somente partes de lados de D_0 . Finalmente, o triângulo do quarto tipo não contém nem vértices e nem lados, (isto faz corresponder o Δ -movimento como a composição de muitos Δ -movimentos em pequenos triângulos). Todos os triângulos estão ilustrados na Figura 2.16.

Tal triangulação de T pode ser feita da seguinte maneira: primeiro, isole todos os cruzamentos e todos os vértices por triângulos do primeiro e segundo tipo, respectivamente. Então triangularize as partes restantes de T com triângulos do terceiro e quarto tipo.

Agora, ao invés de observar isotopias elementares de T , analisaremos as isotopias elementares para os pequenos triângulos.

Esses movimentos elementares (isotopias) podem ser representados como uma combinação de movimentos de Reidemeister e de isotopias planares. Mais precisamente, o triângulo do primeiro tipo gera uma combinação de Ω_2 e Ω_3 , os triângulos do segundo e do terceiro tipo geram Ω_2 ou isotopia planar e o quarto tipo gera uma isotopia planar.

Assim concluímos que dois diagramas de nós que são equivalentes podem ser transformados um no outro por uma sequência finita de movimentos de

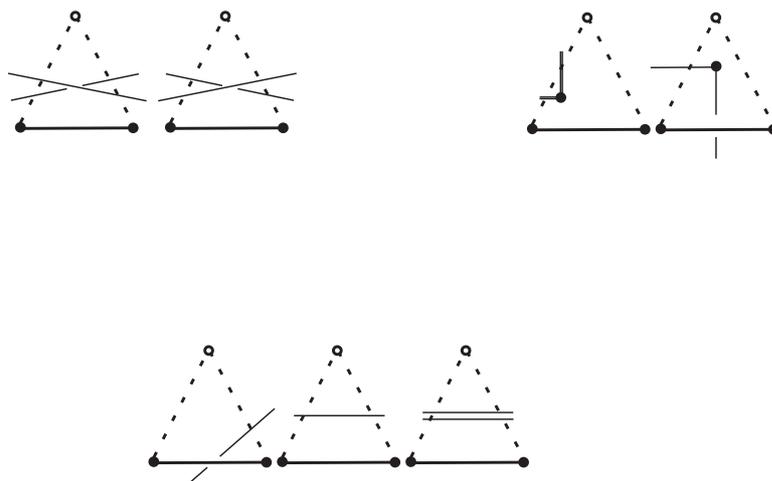


Figura 2.16: Triângulos do primeiro, segundo e terceiro tipo, respectivamente.

Reidemester e de isotopia planares. ■

É importante observar a *independência dos movimentos de Reidemeister*, ou seja, para cada movimento existem dois diagramas de nós equivalentes, que não podem ser transformado um no outro usando apenas os outros dois movimentos. Em outras palavras, um movimento de Reidemeister não pode ser obtido por combinação dos outros dois (Veja Apêndice A.1).

2.6 Superfície de Seifert

Definição 2.6.1 *Seja K um nó orientado. Uma superfície de Seifert do nó K é uma superfície bidimensional, conexa, compacta, orientada em \mathbb{R}^3 , cujo bordo é o nó K , tal que a orientação do nó K induz a orientação da superfície.*

Teorema 2.6.2 *Para cada nó K em \mathbb{R}^3 , existe uma superfície de Seifert de K .*

Prova. Considere um diagrama regular D do nó orientado K . Suavizamos os cruzamentos do nó como mostra a Figura 2.17. Então obtemos um conjunto de curvas fechadas que não se intersectam no plano. Essas curvas são chamadas de *circunferências de Seifert*.

Considere os discos presos às circunferências. Embora o interior dessas circunferências no plano possam conter uma outra circunferência, discos no espaço 3-dimensional podem ser presos sem interseções.

Numa vizinhança de cada cruzamento, dois discos encontram-se cada um com o outro. Escolhamos dois intervalos fechados no bordo desses discos e os

conectemos por uma faixa torcida como na Figura 2.18. Os bordos destas faixas são dois ramos do nó incidentes à escolha dos cruzamentos. As duas posições (superior e inferior) na Figura 2.18 mostram diferentes maneiras de torcer (em um caso a reta vertical esta sobre a horizontal e no outro caso o contrário).

Verifiquemos agora que a superfície obtida é uma superfície orientada. Cada faixa é orientada coerentemente com o nó K e cada disco recebe a orientação do nó. Dessa forma obtemos uma superfície orientada que pode não ser conexa. Então unimos diferentes componentes dessas superfícies por um tubo fino, respeitando a orientação e obtemos uma superfície conexa, com o mesmo bordo. ■

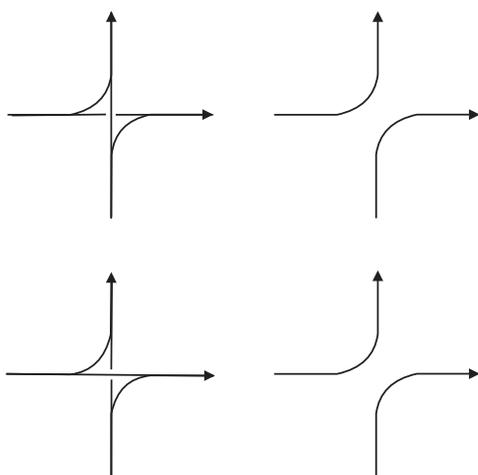


Figura 2.17: Suavizando os cruzamentos no diagrama.

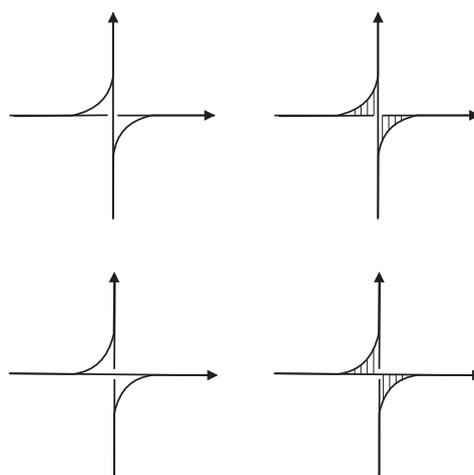


Figura 2.18: Conexão dos discos por faixas torcidas.

Exemplo 2.6.3 A figura 2.19 mostra o processo para obter a superfície de Seifert (c) do nó trevo.

2.6.1 Gênero de um nó

O conceito do gênero de um nó foi introduzido por H. Seifert em (36), o qual ocupou uma posição central na teoria dos nós.

Considere o seguinte teorema:

Teorema 2.6.4 (Massey) *Seja $F_{m,k}$ uma esfera de dimensão 2 com números finitos $m (\geq 0)$ de alças presas e $k (\geq 0)$ de componentes de bordo (Figura 2.20). Então,*

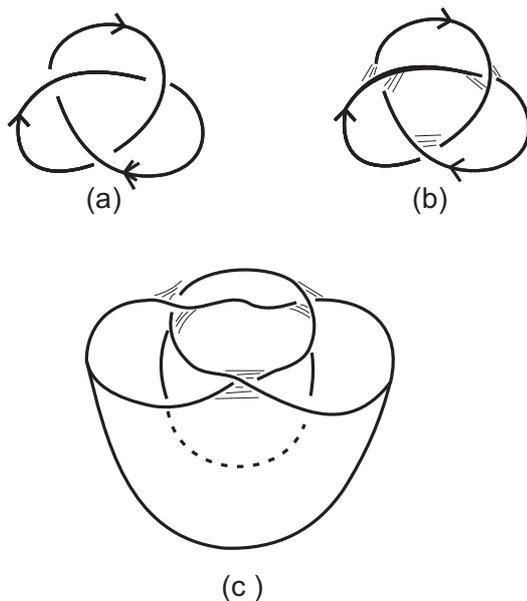


Figura 2.19: Superfície de Seifert do nó trevo.

- (i) uma superfície compacta, conexa e orientável é homeomorfa a $F_{m,k}$ para algum $m \geq 0$ e $k \geq 0$;
- (ii) $F_{m,k}$ e $F_{\tilde{m},\tilde{k}}$ são homeomorfas se, e somente se, $m = \tilde{m}$ e $k = \tilde{k}$.

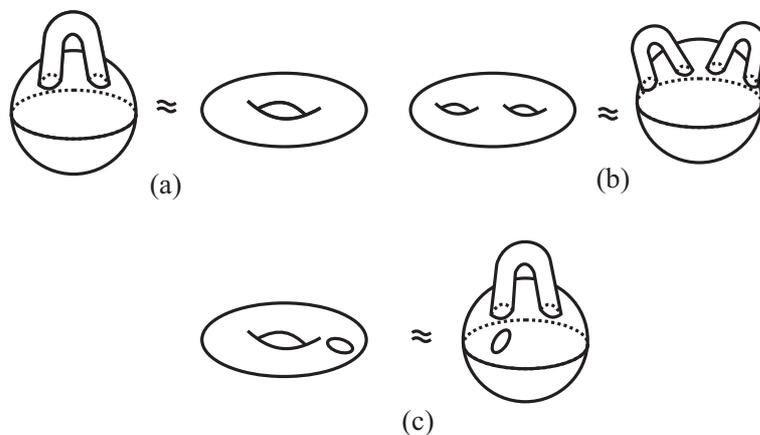


Figura 2.20: Superfícies homeomorfas à esfera com alças.

A teoria para classificação de superfícies fechadas não orientáveis pode ser encontrada em (27).

O Teorema 2.6.4 diz que uma superfície compacta, conexa e orientada M é topologicamente equivalente (isto é, homeomorfa) à esfera com várias alças presas em sua superfície. O número dessas alças, bem definido, é chamado de gênero da superfície F e denotado por $g(F)$.

Exemplo 2.6.5 A Figura 2.20 (a), com $m=1$ e $k=0$, mostra uma superfície de gênero 1, chamada toro, enquanto 2.20 (b), com $m=2$ e $k=0$, é uma superfície de gênero 2. A Figura 2.20 (c) com $m=1$ e $k=1$ mostra uma superfície de gênero 1.

Definição 2.6.6 O gênero mínimo g de todas as superfícies de Seifert do nó K é chamado de gênero do nó K .

Nos perguntamos como calcular o gênero de um nó. Para um nó arbitrário existem algoritmos para calculá-lo, mas tais algoritmos são de difícil implementação. Embora a determinação do gênero de um nó arbitrário seja difícil, determinar o gênero de uma superfície de Seifert “construída” é relativamente fácil.

Teorema 2.6.7 Dada uma superfície F compacta, conexa e orientável, dividimos esta em α_0 pontos, α_1 arestas e α_2 faces.

Seja

$$\chi(F) = \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2,$$

então $\chi(F)$ é um inteiro que é independente de como dividimos F , isto é, $\chi(F)$ depende somente da superfície F . Este inteiro é chamado de característica de Euler de F .

A característica de Euler, $\chi(F)$, e o gênero, $g(F)$, de uma superfície fechada F , , são relacionados pelas equações:

$$\chi(F) = 2 - k(F) - 2g(F)$$

onde $k(F)$ é o número de curvas fechadas que constituem o bordo de F .

Note que, se F não tem bordo, então $k(F)$ é igual a zero e, portanto,

$$g(F) = \frac{2 - \chi(F)}{2}.$$

2.6.2

Número de enlaçamento

Nesta seção definiremos o número de enlaçamento de dois nós orientados disjuntos, um importante invariante de nós orientados, o qual será abordado no capítulo 4.

Sejam K_1, K_2 nós orientados disjuntos com D_1, D_2 seus respectivos diagramas e $P = \{ p ; p \in D_1 \cap D_2 \}$ o conjunto de todos os pontos de cruzamento no diagrama $D_1 \cup D_2$, que supomos ser regular, onde D_1 intersecta D_2 . Atribuimos a cada ponto $p \in P$ o valor ± 1 , conforme segue:

$$s_p = \begin{cases} +1 & \text{se } p \text{ é cruzamento positivo} \\ -1 & \text{se } p \text{ é cruzamento negativo} \end{cases}$$

onde s_p é dito o sinal de p (Figura 2.12).

Definição 2.6.8 *Dados dois nós orientados K_1 e K_2 , então o número*

$$lk(K_1, K_2) = \frac{1}{2} \sum_{p \in P} s_p$$

é chamado número de enlaçamento de K_1 e K_2 .

O número de enlaçamento depende da orientação. Se invertemos a orientação dos dois nós, o sinal do número de enlaçamento é preservado, porém, se invertemos a orientação de apenas um dos nós, o número de enlaçamento muda de sinal.

Note que, o número de enlaçamento entre dois nós é o número de vezes (contados com sinal) que um deles intersecta a superfície de Seifert do outro.

Proposição 2.6.9 *Seja L um enlace orientado de duas componentes, $L = K_1 \cup K_2$. Então o número de enlaçamento $lk(K_1, K_2)$ é um invariante de L (com a sua orientação).*

Prova. Analisemos os movimentos de Reidemester.

O movimento Ω_1 é realizado sobre um dos dois nós, logo não altera $lk(K_1, K_2)$. O movimento Ω_2 cria ou remove um cruzamento positivo e um negativo, logo não altera $lk(K_1, K_2)$. O movimento Ω_3 não altera um cruzamento e portanto não altera $lk(K_1, K_2)$. ■

Definição 2.6.10 *Seja L um enlace orientado e C o conjunto de todos os pontos de cruzamento no diagrama de L . Então o número*

$$w(L) = \sum_{p \in C} s_p$$

é chamado de número de torção de L .

Note que, a torção, $w(L)$, de um enlace L não é invariante pelo movimento de Reidemeister Ω_1 . De fato, o movimento Ω_1 cria ou remove um cruzamento, o que altera $w(L)$ em uma unidade.

Se a torção fosse um invariante de isotopia (isotopia ambiente), então seu cálculo seria um excelente método para distinguir imagens por reflexão. Dizemos, então, que o número de torção de um enlace L é um invariante sob *isotopia regular*, ou seja, dois diagramas são ditos ser isotópicos por isotopia regular se um pode ser obtido do outro por uma sequência de movimentos de Reidemeister Ω_2 e Ω_3 .

2.7

Soma Conexa

Em 1934 idéias geométricas conduziram H. Schubert à soma conexa de nós e posteriormente, em 1954, ele introduziu a noção de número de pontes de um nó.

Definição 2.7.1 *Seja K um nó orientado que intercepta um plano $E \subset \mathbb{R}^3$ em dois pontos P e Q . Em cada semiespaço de E temos os arcos K_1 e K_2 fechados, obtidos de K pelos arcos de P a Q e de Q a P respectivamente, ambos fechados por arcos em E . O nó K é dito uma soma conexa dos nós K_1 e K_2 orientados, denotado por $K = K_1 \# K_2$.*

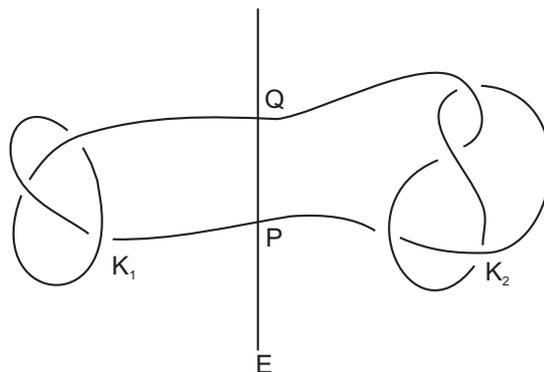


Figura 2.21: Soma conexa de nós K_1 e K_2 .

Uma soma conexa pode ser vista como uma operação entre nós orientados e é também chamada de *composição de nós*. A operação de soma é bem definida, isto é, não depende dos pontos P e Q escolhidos, de modo a compor

o novo nó. Então dizemos que $K_1 \# K_2$ é unicamente determinado por K_1 e K_2 .

Proposição 2.7.2 *Sejam K_1, K_2, K_3 nós orientados e K_0 o nó trivial orientado. Então*

- (1) $K_1 \# K_2 \approx K_2 \# K_1$;
- (2) $K_1 \# (K_2 \# K_3) \approx (K_1 \# K_2) \# K_3$;
- (3) $K_i \# K_0 \approx K_i$;
- (4) se K_1 é um nó não trivial, então $K_1 \# K_2$ é um nó não trivial.

Prova. (1) Facilmente vemos que a soma conexa é comutativa. De fato, considere os diagramas das composição de nós $K_1 \# K_2$ e $K_2 \# K_1$, então através de isotopias planares, concluímos que eles são idênticos.

(2) Considere a soma conexa $K_1 \# (K_2 \# K_3)$. Agora façamos $K_2 \# K_3 = M$ e $K_1 \# M = M'$. Sejam E e E' os planos que interceptam M e M' nos pontos P, Q e P', Q' respectivamente. Agora, façamos a soma conexa de K_1 e K_2 através da união dos arcos de P' a Q' nos dois semi planos de E' ; da mesma forma, fazemos a soma conexa do nó obtido, $(K_1 \# K_2)$, com K_3 através dos arcos de P a Q nos dois semi planos de E e, portanto obtemos a soma conexa de nós $(K_1 \# K_2) \# K_3$, que é isotópica a $K_1 \# (K_2 \# K_3)$.

(3) A verificação é imediata.

(4) Suponhamos que $K_1 \# K_2$ é um nó trivial. Considere a sequência

$$K_1 \# K_2, (K_1 \# K_2) \# (K_1 \# K_2), (K_1 \# K_2) \# (K_1 \# K_2) \# (K_1 \# K_2),$$

onde cada termo M_n da sequência está numa bola de raio $1/2^{n-1}$. Dessa forma, construímos uma série infinita dentro de um compacto, obtendo assim um nó que possivelmente é selvagem. Denotamos esse nó por K' .

Como o nó $K_1 \# K_2$ é trivial, o nó K' é trivial também. Além disso temos a decomposição

$$K' = K_1 \# (K_2 \# K_1) \# (K_2 \# K_1) \dots$$

A soma conexa de nós é comutativa e então $K_2 \# K_1$ é um nó trivial. Logo K' é isotópico a K_1 , pelo item (3). O que é uma contradição, pois K_1 é não trivial. ■

A proposição (item (4)) nos diz que um nó não trivial não possui um simétrico com relação a operação de composição de nós. Daí, concluímos que o conjunto de todos os nós com a operação de soma conexa tem a estrutura de um semigrupo e não de um grupo.



Figura 2.22: Diagramas de dois nós de 2-pontes e um enlace de 2-pontes, respectivamente.

Definição 2.7.3 Um nó K que é a soma conexa de dois nós não triviais é chamado composto. Um nó não trivial que não é composto é dito um nó primo.

Definição 2.7.4 Seja K um nó em \mathbb{R}^3 que intersecta um plano $E \subset \mathbb{R}^3$ em $2m$ pontos, tais que os arcos de K contidos em cada semi espaço (provenientes da intersecção com o plano E) possuem projeção ortogonal em E , as quais são simples e disjuntas. Então o número mínimo m possível para um nó K é chamado de número de pontes de K , e o nó é dito um nó de m -pontes.

Exemplo 2.7.5 A Figura 2.22 mostra diagramas de nós de 2-pontes.

Proposição 2.7.6 Todo nó K de 2-pontes é um nó primo.

A demonstração desta proposição se encontra em (2),7.8.

2.8 Polinômios

Nesta seção faremos uma breve apresentação, baseada nos trabalhos: Nudos e Variedades Tridimensionales por María Teresa Lozano Imízcoz (18), e em (19, 20) por Louis H. Kauffman, dos polinômios para enlases ou nós. Restringiremos esta seção somente às suas definições, visto que as usaremos raramente nos próximos capítulos, exceto para o polinômio de Kauffman, ao qual daremos uma atenção especial por possuir importante papel nessa dissertação. Com o intuito de não nos estendermos em contas, todos os exemplos aqui apresentados serão para o nó trevo, o qual é o nó não trivial com o menor número de cruzamentos. Para um aprofundamento, ver (19, 20).

Em 1928, o matemático Alexander encontrou um polinômio de Laurent em uma variável t (com potências positivas e negativas), que resultou ser um invariante de nó. Contudo, seu trabalho só utiliza álgebra linear, determinantes e movimentos de Reidemeister. O polinômio é conhecido como *polinômio de Alexander* e denotado por $\Delta_K(t)$. A descoberta deste polinômio foi um importante avanço em teoria dos nós, pois é um polinômio de cálculo acessível.

Observou-se que o polinômio de Alexander do nó trivial é igual a 1, mas para certos outros nós não triviais o polinômio também tem valor igual a 1, como, por exemplo, o nó de Kinoshita-Terasaka (Figura 2.23). Em 1984 Alexander verificou que há infinitos pares de nós distintos cujos polinômios são iguais, logo o polinômio de Alexander não é um invariante completo.

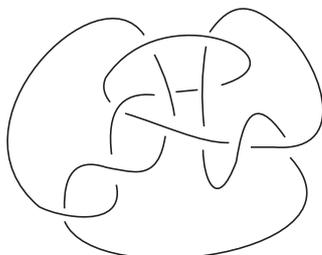


Figura 2.23: Nó de Kinoshita-Terasaka.

No final dos anos 60, matemáticos buscaram novos algoritmos para calcular os invariantes e, em 1970, J.H Conway definiu um novo polinômio de Laurent, $\nabla_L(z)$, para um enlace orientado, conhecido como *polinômio de Conway*, que é definido por um mecanismo indutivo, com uma regra que permite escrever o polinômio de um nó em aplicação das variáveis. Sendo assim, após um número finito de etapas elimina-se completamente os cruzamentos, restando apenas circunferências. O polinômio de Conway é determinado de forma recursiva pelos seguintes axiomas:

- 1 - $\nabla_{\bigcirc}(z)=1$, onde \bigcirc é o nó trivial;
- 2 - $\nabla_{L_+}(z) - \nabla_{L_-}(z) = z\nabla_{L_0}(z)$; onde os diagramas dos enlaces L_+ , L_- e L_0 são como na figura 2.24;
- 3 - Se L é equivalente a L' então, $\nabla_L(z) = \nabla_{L'}(z)$.

O polinômio de Conway é independente da orientação escolhida. Isto significa que o polinômio de Conway é um invariante de nó sem orientação. O polinômio de Conway está relacionado com o polinômio de Alexander por uma mudança de variável,

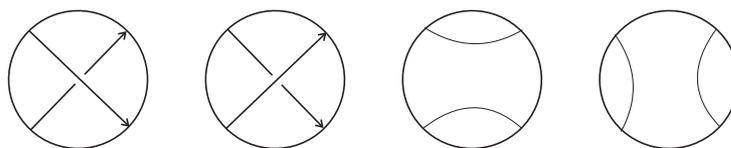


Figura 2.24: Diagramas dos enlaces L_+ , L_- , L_0 e L_∞ , que diferem por um cruzamento.

$$\Delta_k(t) = \nabla_L \left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}} \right).$$

Exemplo 2.8.1 Polinômio de Conway do nó trevo:

$$\nabla_K(z) = 1\nabla_{\bigcirc}(z) + z\nabla_{\bigcirc\bigcirc}(z) + z^2\nabla_{\bigcirc}(z) = (1+z^2)\nabla_{\bigcirc}(z) + 1\nabla_{\bigcirc}(z) = (1+z^2)$$

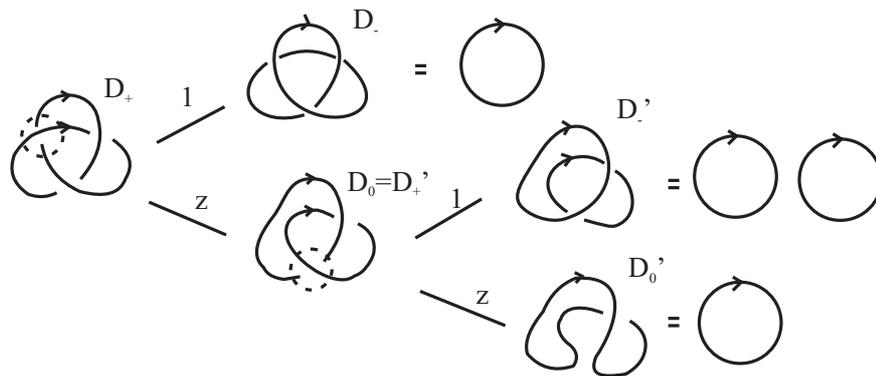


Figura 2.25: Árvore para o cálculo do polinômio de Conway do nó trevo.

Em 1984, V. Jones encontrou um polinômio invariante que depois levaria seu nome. Vários estudos foram realizados com o intuito de encontrar invariantes de nós e enlaces. O trabalho de Jones abriu novas linhas de pesquisa em diversos campos e o tornou merecedor da medalha Fields, no Congresso Internacional de Matemática celebrado em Kyoto em 1990. Jones trabalhou em mecânica estatística e estudou grupo de tranças ¹(Todo nó pode ser construído por uma trança, embora não de maneira única). Jones provou que o polinômio era um invariante para cada trança, logo para cada nó. Imediatamente, ele mostrou que cumpria a propriedade que podemos chamar de axioma (2) para sua definição. Assim, o *polinômio de Jones* de um nó ou enlace orientado, $V_L(t)$, satisfaz os axiomas:

- 1 - $V_{\bigcirc}(z)=1$, onde \bigcirc é o nó trivial;
- 2 - $\frac{1}{t}V_{L_+}(z) - tV_{L_-}(z) = \left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}} \right) V_{L_0}(t)$.

Podemos verificar que o polinômio de um enlace orientado, definido por estes axiomas preserva os movimentos de Reidemeister. Logo, pode ser calculado de forma análoga aos polinômios de Conway e Alexander. Observamos

¹Uma n -trança é um conjunto de n arcos disjuntos que unem n pontos em um plano Ω com suas projeções em outro plano paralelo Ω' .

por simetria do axioma 2, que o polinômio de Jones da reflexão de um nó é o polinômio de Jones inicial por uma mudança de variável t por t^{-1} .

Exemplo 2.8.2 *Polinômio de Jones para o nó trevo:*

$$V_K(t) = t^2 V_{\circlearrowleft}(t) + t^3 \left(\sqrt{t} + \frac{1}{\sqrt{t}} \right) V_{\circlearrowright}(t) + t^2 \left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}} \right)^2 V_{\circlearrowleft}(t) = t + t^3 - t^4.$$

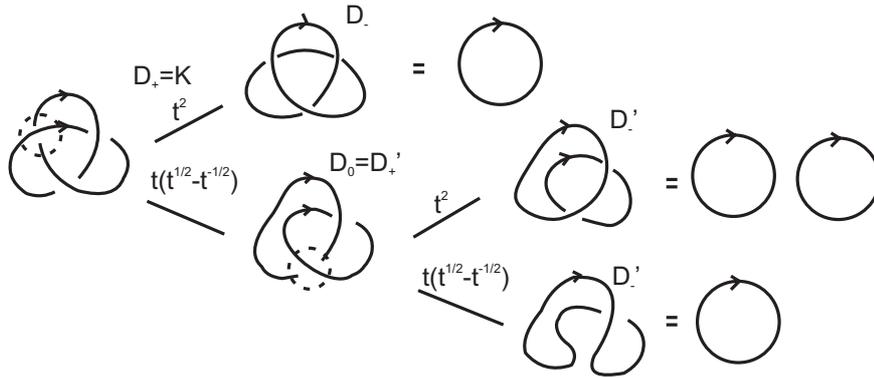


Figura 2.26: Árvore para o cálculo do polinômio de Jones do nó trevo.

Vários especialistas em teoria dos nós descobriram independentemente, mas ao mesmo tempo, que ambos polinômios são casos especiais de um invariante mais geral, definido para enlaces ou nós orientados com os mesmos axiomas, porém introduzidas duas variáveis, v e z . Esse polinômio é chamado *polinômio de HOMFLY*, nome formado pelas letras iniciais dos nomes dos matemáticos que o definiram: Hoste, Ocneanu, Millett, Freyd, Lickorish, and Yetter, e é denotado por $P_K(v, z)$. Os axiomas que o definem são :

- 1- $P_{\circlearrowleft}(v, z) = 1$;
- 2- $\frac{1}{v} P_{L_+}(v, z) - v P_{L_-}(v, z) = z P_{L_0}(v, z)$.

O polinômio de HOMFLY se relaciona com os anteriores da seguinte forma:

$$V_K(t) = P_K \left(t, \sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}} \right),$$

$$\nabla_K(t) = P_K \left(1, \sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}} \right).$$

Isto implica que ambos os polinômios, o de Alexander e o de Jones são casos particulares do polinômio de HOMFLY. Assim como os demais polinômios, $P_K(v, z)$ também não é um invariante completo de nó.

Exemplo 2.8.3 *Polinômios de HOMFLY para o nó trevo T :*

$$P_T(a, z) = a^{-3} \left(\frac{a - a^{-1}}{z} \right) (2a - a^{-1} + az^2).$$

Grandes avanços na teoria combinatória de nós foram produzidos em velocidade. Os avanços mais significativos são devidos a Louis Kauffman, o qual escreveu vários livros e numerosos artigos sobre estes temas. Realmente, Kauffman trabalhou em teoria dos nós desde os anos 70. No final da década de 80, Kauffman descobriu um polinômio, chamado *polinômio de Kauffman*, que assim como o de HOMFLY, é definido axiomáticamente para duas variáveis.

Os polinômios de HOMFLY e de Kauffman merecem uma atenção especial. Importantes relações entre estes polinômios podem ser vistas em (15). Para os invariantes de nós, estes polinômios contribuíram de forma significativa, como, por exemplo, a contribuição do polinômio de Kauffman para um dos principais resultados dessa dissertação, o número máximo de Thurston-Bennequin para nós de 2-pontes em termos do grau mínimo do polinômio de Kauffman, o qual será visto no capítulo 5.

Antes de definirmos o polinômio de Kauffman para um enlace orientado L , definimos o polinômio de Laurent, $R_L(a, x) \in \mathbb{Z}[a^{\pm 1}, x^{\pm 1}]$ (de Kauffman), do enlace L , desconsiderando a orientação, pelos axiomas:

- 1 - R_L é um invariante de isotopia regular, isto é, se L e L' são isotópicos por isotopia regular então, $R_L = R_{L'}$;
- 2 - $R_{L_+} + R_{L_-} = x(R_{L_0} + R_{L_\infty})$;
- 3 - $R_{L^+} = aR_L$
 $R_{L^-} = a^{-1}R_L$;
- 4 - $R_{\bigcirc} = 1$, onde \bigcirc é o nó trivial.

Os diagramas dos enlaces L_+ , L_- , L_0 , L_∞ e L^+ , L^- , L^0 , L^∞ se encontram nas Figuras 2.24 e 2.27.

O *polinômio de Kauffman* de um enlace orientado L é definido por :

$$F_L = a^{-w(L)} R_L,$$

onde $w(L)$ é o número de torção de L .

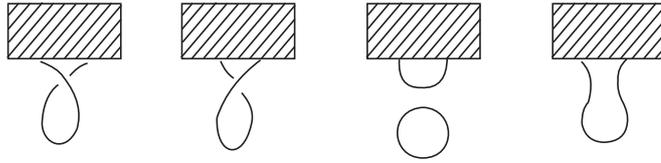


Figura 2.27: Diagramas dos enlacs L^+, L^-, L^0 e L^∞ que diferem por uma torção.



Figura 2.28: Nó M , com torção em “espiral”.

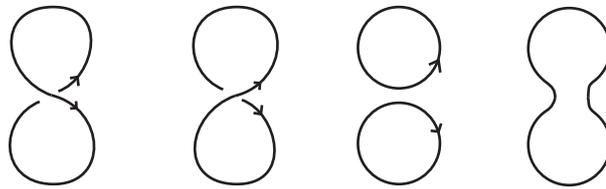


Figura 2.29: Diagramas dos enlacs $\bar{L}_+, \bar{L}_-, \bar{L}_0$ e \bar{L}_∞ .

O polinômio de Kauffman, $F_L = a^{-w(L)}R_L$, de um enlace L é um invariante sob isotopia regular. Basta lembrar que a torção $w(L)$ é um invariante sob isotopia regular.

Observação 2.8.4 *O polinômio de Kauffman aplicado na imagem por reflexão de L é obtido substituindo a por a^{-1} no polinômio de L .*

Vejamos algumas importantes propriedades do polinômio de Kauffman:

Proposição 2.8.5 *Sejam \bar{L} e M enlacs orientados, como nas Figuras 2.29 e 2.28, respectivamente, K e K' nós (ou enlacs) orientados e $-K$ o nó com a orientação contrária de K . Então:*

- (i) $R_{\bar{L}_0} = \frac{a+a^{-1}}{x} - 1$;
- (ii) $F_{K \cup K'} = \delta F_K \cdot F_{K'}$;
- (iii) $F_K = F_{-K}$;
- (iv) $F_{K \sharp K'} = F_K \cdot F_{K'}$;
- (v) $R_M = a^{w(M)}$.

Prova. (i) Pelos axiomas do polinômio de Laurent, R_L , temos as seguintes relações:

$$-R_{\bar{L}_+} + R_{\bar{L}_-} = x(R_{\bar{L}_0} + R_{\bar{L}_\infty})$$

- $R_{\bar{L}_+} = a$ e $R_{\bar{L}_-} = a^{-1}$
- $R_{\bar{L}_\infty} = R_{\bigcirc} = 1$.

Dessa forma, $a + a^{-1} = x(R_{\bar{L}_0} + 1)$ e portanto $R_{\bar{L}_0} = \frac{a + a^{-1}}{x} - 1$.

(ii) Determinemos o polinômio de Kauffman para o enlace L orientado com torção, como mostra a Figura 2.27.

Pelo axioma do polinômio de Laurent, R_L , temos a seguinte relação:

$$R_{L^+} + R_{L^-} = x(R_{L^0} + R_{L^\infty})$$

e assim,

$$R_{L^0} = \left[\frac{a + a^{-1}}{x} - 1 \right] R_{L^\infty}.$$

Façamos $\delta = \left[\frac{a + a^{-1}}{x} - 1 \right]$, então $R_{L^0} = R_{\bigcirc \cup \bar{K}} = \delta R_{\bar{K}}$, onde \cup denota a união disjunta, o que implica que $F_{\bigcirc \cup \bar{K}} = \delta F_{\bar{K}}$. Mas geralmente para dois nós K e K' , temos a relação:

$$F_{K \cup K'} = \delta F_K \cdot F_{K'}. \quad (2-1)$$

(iii) De fato, pela definição do polinômio de Laurent, $R_K = R_{-K}$

(iv) Sejam K e K' dois nós orientados (ou enlaces) e $K \# K'$ a soma conexa de K e K' . Pela definição do polinômio de Kauffman, temos que:

$$R_{K \# K'_+} + R_{K \# K'_-} = x(R_{K \# K'_0} + R_{K \# K'_\infty}),$$

$$\left(\frac{a + a^{-1}}{x} \right) R_{K \# K'} = (R_{K \# K'_0} + R_{K \# K'_\infty}).$$

Mas $R_{K \# K'_0} = R_{K \# K'}$ e $R_{K \# K'_\infty} = R_{K \cup K'}$, então

$$\left(\frac{a + a^{-1}}{x} - 1 \right) R_{K \# K'} = R_{K \cup K'};$$

pela relação (ii), temos

$$\left(\frac{a + a^{-1}}{x} - 1 \right) R_{K \# K'} = \delta R_K \cdot R'_K$$

$$R_{K \# K'} = R_K \cdot R'_K.$$

Portanto, $F_{K\sharp K'} = F_K \cdot F_{K'}$.

(v) Pelo axioma 3 do polinômio R_L , observamos que para um diagrama de um nó M não trivial, em forma de “espiral” (por exemplo, o diagrama da Figura 2.28) o polinômio de Laurent é dado por $R_M = a^{w(M)}$. ■

Exemplo 2.8.6 *O polinômio de Kauffman para o nó trevo T é dado por:*

$$F_T = a^{-3} \left(1 + \frac{a - a^{-1}}{z} \right) (2a - a^{-1} + z - a^{-2}z + az^2 - a^{-1}z^2)$$

É importante mencionar que os resultados acima são demonstrados de forma análoga para o polinômio de HOMFLY e, portanto, para os demais polinômios, por estes serem casos particulares do polinômio de HOMFLY.

3

Tangles e nós de 2-pontes

Durante o final dos anos 60 e começo dos anos 70, o objetivo da teoria dos nós era formar uma tábua ¹ completa de nós até um certo número de cruzamentos maior do que a tábua conhecida. Contudo, os invariantes de nós descobertos não foram suficientes para tal objetivo. Portanto, Conway introduziu o conceito de tangle. Usando esta variação em nós, novas classes de nós foram definidas: os nós racionais. Através desta classe de nós, vários problemas locais foram resolvidos, os quais conduziram a um avanço no nível de problemas da teoria de nós. Contudo, desde que existem nós que não são racionais, a classificação completa de nós não pode ser realizada. A introdução destas novas pesquisas teve um significativo impacto na teoria dos nós. Neste capítulo, estudaremos os nós de 2-pontes, que são um tipo especial de nó racional obtido de nós tangles. Para um aprofundamento em teoria dos tangles, sugerimos (21, 6).

3.1

Tangles

Considere a esfera S^2 em \mathbb{R}^3 e a bola limitada por S^2 , B^3 , isto é, a bola de dimensão 3, cuja fronteira é S^2 . Em B^3 considere 2 curvas simples α_i , $i=1,2$, cujos 4 pontos extremos estão na superfície S^2 . Se estas curvas, α_i , intersectam S^2 somente nos 4 pontos extremos, obtemos um tangle.

Definição 3.1.1 *Um tangle é um mergulho próprio de dois arcos não orientados em B^3 , tal que os 4 pontos extremos dos arcos estão no bordo de B^3 .*

Se projetarmos este tangle no plano, por exemplo yz , como no caso de um nó, podemos obter uma projeção regular do tangle, ou *diagrama regular* do tangle, Figura 3.4.

Neste capítulo representaremos um tangle T , por seu diagrama regular.

A definição de tangle pode ser generalizada a m curvas, contudo, nosso interesse está no caso $m = 2$. Alguns exemplos de tangles são dados na Figura 3.2. O caso em que existe uma curva fechada no interior de B^3 , Figura 3.2 (c), não será considerado nessa dissertação.

¹Tábua é uma lista de todos os nós, com seus tipos identificados e sem repetições.

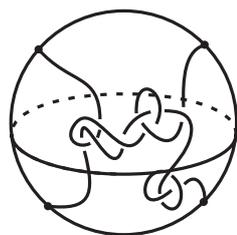


Figura 3.1: Tangle

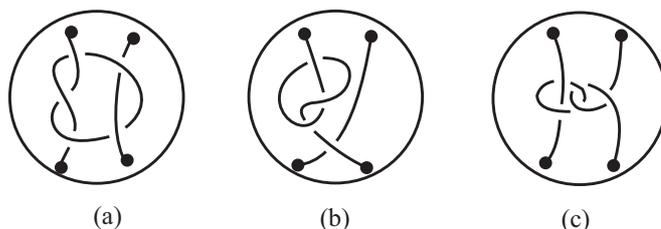


Figura 3.2: Diagramas de tangles.

Agora, fixemos 4 pontos na esfera S^2 , NE, NO, SE, SO, conforme Figura 3.3. Esses pontos podem ser descritos em \mathbb{R}^3 pelas coordenadas:

$$NE = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad NO = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

$$SE = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad SO = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

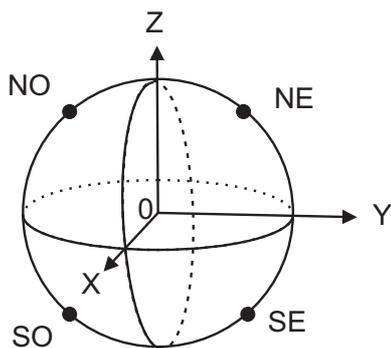


Figura 3.3: Esfera com 4 pontos fixos.

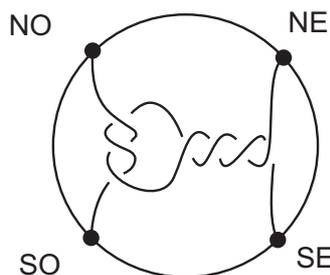


Figura 3.4: Projeção de um tangle.

O nó obtido pela conexão dos pontos NO e NE, SO e SE por curvas simples no complemento de B^3 é chamado de *numerador* e denotado por $N(T)$. Similarmente, o nó obtido da conexão dos pontos NO e SO, NE e SE por curvas simples no complemento de B^3 é chamado de *denominador* e é denotado por $D(T)$, veja a Figura 3.5. A razão para esta terminologia pode

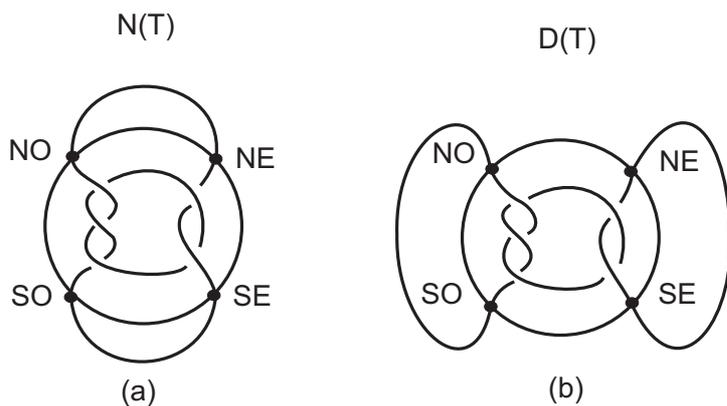


Figura 3.5: Numerador (a) e denominador (b) do tangle T.

ser encontrada em (30) e está relacionada com o conceito de determinante de nós, o qual não abordaremos aqui.

Definição 3.1.2 *Sejam T_1 e T_2 dois tangles em B^3 . Se podemos transformar T_1 em T_2 através dos movimentos de Reidemeister em B^3 , mantendo os pontos (NE, NO, SE, SO) fixos, então T_1 e T_2 são ditos equivalentes.*

3.1.1 Tangles racionais

Considere os tangles mostrados na Figura 3.6; estes tangles são chamados $T(0)$, $T(\infty)$, $T(-1)$ e $T(1)$ respectivamente. Os tangles $T(0)$ e $T(\infty)$ são chamados *tangles triviais*.

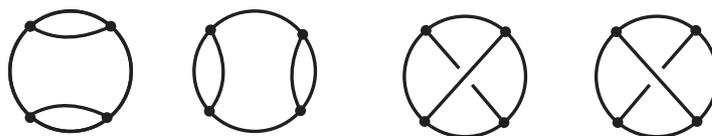


Figura 3.6: Tangles: $T(0)$, $T(\infty)$, $T(-1)$ e $T(1)$, respectivamente.

Definição 3.1.3 *Um tangle racional é um tangle que é a imagem do tangle $T(\infty)$ (ou $T(0)$) por um homeomorfismo que leva B^3 em B^3 e o conjunto $\{NO, NE, SO, SE\}$ no mesmo conjunto.*

Exemplo 3.1.4 *Uma rotação de \mathbb{R}^3 sobre o eixo x de um ângulo de $\frac{\pi}{2}$, envia o tangle $T(\infty)$, no tangle $T(0)$. Além disso, $T(0)$ é um tangle trivial. Veja Figura 3.7.*

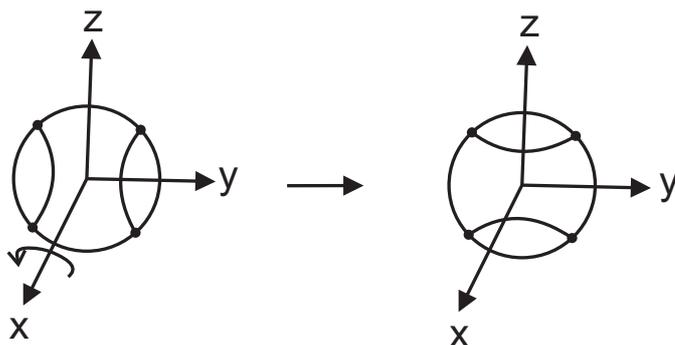


Figura 3.7: Rotação do tangle $T(\infty)$.

Considere a rotação da esfera sobre o eixo z de um ângulo π , mantendo o hemisfério norte e o polo sul fixos. Então, é realizada uma torção tal que SE e SO trocam de posição (Figura 3.8). Tal torção é dita uma *torção vertical*.

Considere a rotação da esfera sobre o eixo y de um ângulo de π , mantendo o hemisfério oeste e ponto $L(0,1,0)$ no equador fixos. Então, é realizada uma torção tal que NE e SE trocam de posição (Figura 3.8). Tal torção é dita uma *torção horizontal*.

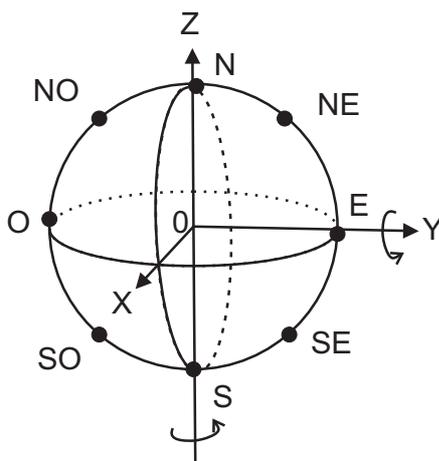


Figura 3.8: Rotação da esfera sobre os eixos z e y .

Atribuímos uma orientação às torções descritas. Os sinais das torções se encontram nas Figuras 3.9 e 3.10.



Figura 3.9: Torção horizontal positiva e negativa, respectivamente.

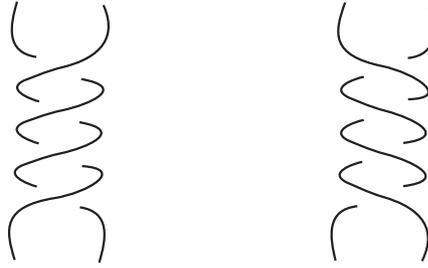


Figura 3.10: Torção vertical negativa e positiva, respectivamente.

Proposição 3.1.5 *Um tangle racional pode ser obtido por uma sequência de torções verticais e horizontais em $T(0)$ ou $T(\infty)$.*

Segue desta proposição que tangles racionais podem ser completamente determinados por movimentos que alternam em torções horizontais e verticais. Expressaremos o nó racional obtido por esta sequência de torções por $T(a_1, a_2, \dots, a_n)$, onde a_i é torção do tangle; e seu *diagrama* é dito estar *em forma racional*. Explicaremos com poucos detalhes como ocorre esta sequência.

Se n é ímpar, obtemos a expressão $T(a_1, a_2, \dots, a_n)$, onde a_1 é torção horizontal em $T(0)$, a_2 é torção vertical, a_3 é torção horizontal e assim alternadamente até a_n torção horizontal.

Se n é par, obtemos a expressão $T(a_1, a_2, \dots, a_n)$ onde a_1 é torção vertical em $T(\infty)$, a_2 é torção horizontal, a_3 é torção vertical e assim alternadamente até a_n torção horizontal.

Se um tangle $T(a_1, a_2, \dots, a_n)$ tem todos os a_i 's com o mesmo sinal, então dizemos que o *tangle* T é *alternado* e o diagrama regular obtido é um *diagrama alternado*.

Exemplo 3.1.6 *Considere o tangle $T(\infty)$. Fazendo 3 torções verticais e depois -4 torções horizontais, obtemos o tangle $T(3, -4)$ (Figura 3.4) . Note que n é par e, portanto, a primeira torção é vertical.*

Exemplo 3.1.7 *O nó racional $T(-2, -3, -2)$ é obtido do tangle $T(0)$ pela sequência de -2 torções horizontais, -3 torções verticais e -2 torções horizontais, como mostra a Figura 3.11.*

Exemplo 3.1.8 *Um outro exemplo pode ser visto na Figura 3.12, onde temos dois tangles racionais com n par e n ímpar respectivamente.*

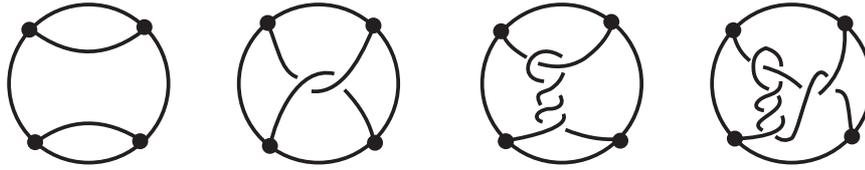


Figura 3.11: Construção do tangle $T(-2, -3, -2)$.

Proposição 3.1.9 *A fração contínua*

$$[a_1, a_2, a_3, \dots, a_n] = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{a_4 + \dots + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}}}$$

com os a_i 's $\neq 0$, determina um tangle racional $T(a_1, a_2, \dots, a_n)$ e um número racional $\frac{p}{q}$, chamado fração do tangle.

Seja o número racional $\frac{p}{q}$. Fazamos $r_0 = p$, $r_1 = q$ e consideremos:

$$\begin{aligned} r_0 &= a_1 r_1 + r_2 \\ r_1 &= a_2 r_2 + r_3 \\ &\vdots \\ r_{n-1} &= a_n r_n + 0, \quad |r_n| = 1. \end{aligned} \tag{3-1}$$

Sendo $0 \leq r_i < r_{i-1}$, a equação 3-1 descreve um algoritmo euclidiano que é unicamente definido por $p = r_0$ e $q = r_1$. Tal algoritmo pode ser expressado por uma fração contínua, descrita na Proposição 3.1.9.

Os inteiros a_i são chamados de quocientes da fração contínua. Da desigualdade $0 < |r_n| < |r_{n-1}|$, segue que $|a_n| \geq 2$. Além disso, para a fração contínua $[a_1, a_2, \dots, a_n]$ podemos sempre considerar n ímpar. De fato, se n é par e $a_n > 1$ então escrevemos

$$[a_1, a_2, \dots, a_n] = [a_1, a_2, \dots, a_n - 1, 1],$$

se $a_n = 1$, escrevemos

$$[a_1, a_2, \dots, a_n] = [a_1, a_2, \dots, a_{n-1} + 1],$$

pois $a_n \pm 1 + \frac{1}{\mp 1} = a_n$.

Proposição 3.1.10 *Seja $\frac{p}{q}$ um número racional. Então*

- (i) *existem $a_1 \in \mathbb{Z}, a_2, a_3, \dots, a_n \in \mathbb{Z} - \{0\}$ tais que $\frac{p}{q} = [a_1, a_2, \dots, a_n]$.*
- (i) *$\frac{p}{q} \pm 1 = [a_1 \pm 1, a_2, \dots, a_n]$,*
- (ii) *$\frac{q}{p} = [0, a_1, a_2, \dots, a_n]$.*
- (iii) *$-\frac{p}{q} = [-a_1, -a_2, \dots, -a_n]$.*

Para mais informações sobre frações contínuas, ver Apêndice A.2.

Observação 3.1.11 *O tangle racional $T^*(-a_1, -a_2, \dots, -a_n)$ é imagem por reflexão do nó $T(a_1, a_2, \dots, a_n)$.*

Podemos observar que na imagem por reflexão de um nó (em relação a um plano) a torção muda, e, portanto, verificamos a Observação 3.1.11.

O próximo teorema, enunciado em (6) e demonstrado em detalhes em (21), mostra que existe uma boa correspondência entre números racionais e tangles racionais (incluindo ∞).

Teorema 3.1.12 *Existe uma correspondência bijetora entre o conjunto de todos os números racionais (incluindo ∞) e a classe de tangles racionais. Em outras palavras, se os tangles racionais $T(a_1, a_2, \dots, a_n)$ e $T(b_1, b_2, \dots, b_n)$ têm suas frações contínuas $[a_1, a_2, \dots, a_n]$ e $[b_1, b_2, \dots, b_n]$ representando o mesmo número racional, então os tangles são equivalentes. A afirmação inversa também é verdadeira.*

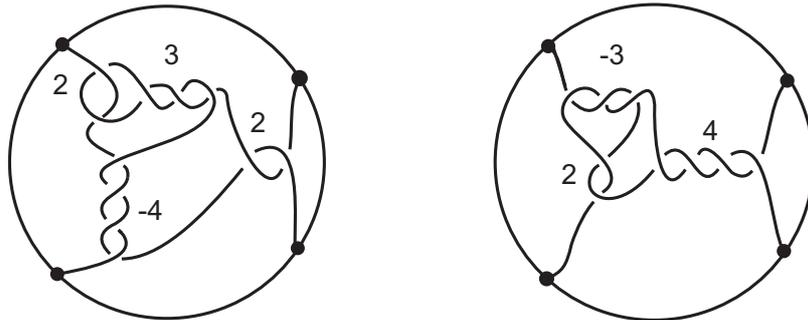


Figura 3.12: Tangles $T(2,3,-4,2)$ e $T(-3,2,4)$ respectivamente.

Em particular a fração do tangle $T(0)$ é $[0]$, e a fração do tangle $T(\infty)$ é $[0,1] = 0 + \frac{1}{0}$, que é denotada por ∞ .

Definição 3.1.13 *Uma fração contínua $[a_1, a_2, \dots, a_n]$ e um tangle racional $T(a_1, a_2, \dots, a_n)$ são ditos estar em forma canônica se todos os a_i 's tem o mesmo sinal (isto é, T é alternado) e n é ímpar.*

Exemplo 3.1.14 *Seja o tangle racional $T(2,-3,5)$. Sua fração contínua determina o número racional $\frac{23}{14} = [2,-3,5]$. Mas $\frac{23}{14} = [1,1,1,1,4]$, assim T é isotópico ao tangle cuja fração contínua é $[1,1,1,1,4]$, tal tangle é a forma canônica de T . Dizemos ainda que $[1,1,1,1,4]$ é a fração contínua em forma canônica de T .*

Lema 3.1.15 (Ver (22)) *Todo tangle racional é isotópico a um tangle em forma canônica.*

Lema 3.1.16 *Dada uma fração contínua $[a_1, a_2, \dots, a_n]$ existe uma única fração contínua $[b_1, b_2, \dots, b_m]$ em forma canônica com o mesmo número racional.*

A demonstração em detalhes do Teorema 3.1.12 se encontra em (22). Contudo, daremos aqui uma breve idéia da mesma.

Prova. Primeiramente demonstremos que se dois nós são isotópicos então eles têm as frações contínuas representando o mesmo número racional. Sejam T e S dois tangles racionais isotópicos, e T' e S' sua respectivas formas canônicas, que garantimos existir pelo lema 3.1.15. Isso corresponde a levar as frações contínuas de T e S nas frações contínuas de T' e S' . Agora os tangles T' e S' são alternados e isotópicos, e como demonstrado em (22), eles diferem apenas por rotações horizontais e verticais de um ângulo π . Então se dois nós diferem por rotação, eles têm a mesma fração contínua, portanto a mesma fração. Assim, os nós T e S tem a mesma fração contínua.

Inversamente, mostremos que se dois tangles racionais possuem suas frações contínuas representando números racionais iguais, então eles são isotópicos. De fato, sejam $T(a_1, a_2, \dots, a_n)$ e $S(b_1, b_2, \dots, b_m)$ dois tangles racionais com frações $[a_1, a_2, \dots, a_n] = \frac{p}{q} = [b_1, b_2, \dots, b_m]$ e $T'(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$ e $S'(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t)$ suas formas canônicas. Da implicação anterior deste teorema, temos a igualdade das frações contínuas $[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k] = [a_1, a_2, \dots, a_n] = [b_1, b_2, \dots, b_m] = [\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t] = \frac{p}{q}$. Pelo Lema 3.1.16, a fração $\frac{p}{q}$ tem uma única expansão em fração contínua em forma canônica $[\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_r]$. Isto nos dá um tangle racional Q , que é unicamente determinado pelos inteiros $\{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_r\}$. Afirmamos que $Q = T'$ (similarmente $Q = S'$). De fato, se Q é diferente de T' temos duas diferentes expansões em frações contínuas em forma canônica dada pelo mesmo número racional, $[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k] = \frac{p}{q} = [\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_r]$. Mas isso contradiz a unicidade da forma canônica de frações contínuas, Lema 3.1.16. ■

Façamos alguns comentários sobre o Teorema 3.1.12. O Teorema 3.1.12 nos diz que números racionais são representados bijetivamente por tangles

racionais; seus negativos são representados pelas imagens por reflexão dos tangles racionais. O teorema diz também que a forma canônica de um tangle racional é única, desde que a correspondente forma canônica de sua fração contínua seja única. Outra observação, é que levar um tangle racional em sua forma canônica é o mesmo que calcular sua fração contínua e expressar em forma canônica. Essa forma canônica nos dá o tangle em forma canônica, que, pelo Teorema 3.1.12 é isotópico ao inicial.

3.2

Nós de 2-pontes

O conjunto de nós (ou enlaces) de 2-pontes, introduzido por Schubert em 1954, é uma família de nós que tem íntima relação com tangles racionais, e como o próprio nome implica, possuem 2 pontes. O conjunto dos nós de 2-pontes tem sido completamente classificado, mas a característica local desses nós é ainda uma importante área de pesquisa.

Nessa dissertação, consideraremos somente nós de 2-pontes com o número de torções ímpar, salvo em caso mencionado.

Entendemos por *nó de 2-pontes*, um nó não trivial que admite um diagrama com quatro tangentes verticais: duas a esquerda e duas a direita (Figura 3.13). Observe que pelo fato de um nó de 2-pontes possuir somente quatro tangentes verticais, o diagrama regular do nó pode ser considerado como o diagrama regular reduzido, como na Figura 3.13 (a). A definição precisa de nós de m -pontes é dada em 2.7.

Nosso objetivo nesta seção é mostrar a relação entre nós de 2-pontes e tangles racionais. Nesta seção consideraremos somente nós não orientados.

Teorema 3.2.1 (1) *Um nó (ou enlace) de 2-pontes é o denominador de algum tangle racional.*

(2) *O denominador de um tangle racional é um nó (ou enlace) 2-pontes.*

Prova. (1) Considere um diagrama regular D , de um nó (ou enlace) de 2-pontes. Sendo D um diagrama regular de 2-pontes, o seu diagrama é equivalente a Figura 3.13 (a).

Nossa intenção é mover os pontos de cruzamento da parte inferior do diagrama (Figura 3.13(a)) para a parte superior ou centro do diagrama. Do fato de que a prova do teorema não depende da orientação, então não nos importaremos com os cruzamentos positivos e negativos, e denotaremos o

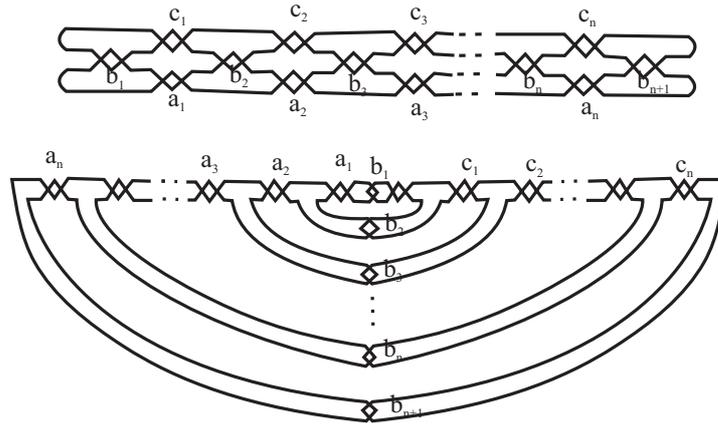


Figura 3.13: (a) - Diagrama regular de um nó de 2-pontes. (figura superior) (b) - Diagrama obtido de (a) por isotopia. (figura inferior)

número de pontos de cruzamentos por a_i, b_j, c_k , incluindo a possibilidade de que algum dos a_i, b_j, c_k seja igual a zero.

Agora fazemos uma modificação no Diagrama 3.13 (a) para que ele se torne o diagrama da Figura 3.13 (b). Por conveniência, denotemos o diagrama D da Figura 3.13 (b) pela seguinte notação:

$$D = (a_1, a_2, \dots, a_n | b_1, b_2, \dots, b_n, b_{n+1} | c_1, c_2, \dots, c_n).$$

Queremos agora mover os pontos de cruzamento a_1, a_2, \dots, a_n da esquerda para a direita. Em outras palavras, queremos mostrar que o diagrama D pode ser transformado no diagrama

$$(0, 0, \dots, 0 | b_1, b_2, \dots, b_n, b_{n+1} | a_1 + c_1, a_2 + c_2, \dots, a_n + c_n).$$

Por simplicidade, façamos $d_i = a_i + c_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) e chamemos os ramos meio-circular com b_i pontos de cruzamentos de i -ésimo braço de D.

Primeiro movemos os a_n pontos de cruzamento à esquerda para a direita por torções, ou positivas, ou negativas, do $(n+1)^o$ braço, um número apropriado de vezes. Assim, D é transformado em

$$D_1 = (a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, 0 | b_1, b_2, \dots, b_n, b_{n+1} | c_1, c_2, \dots, d_n)$$

Agora, rotacionamos a_{n-1} vezes (em cada direção) a parte interior da linha pontilhada ao redor do eixo horizontal A, mantendo a parte exterior da linha pontilhada fixa (Figura 3.14). Assim, a_{n-1} pontos de cruzamento tem sido movido para a direita. Tal rotação será chamada de *rotação horizontal*.

Há dois casos a considerar:

- (i) Se a_{n-1} é par, então o diagrama resultante é

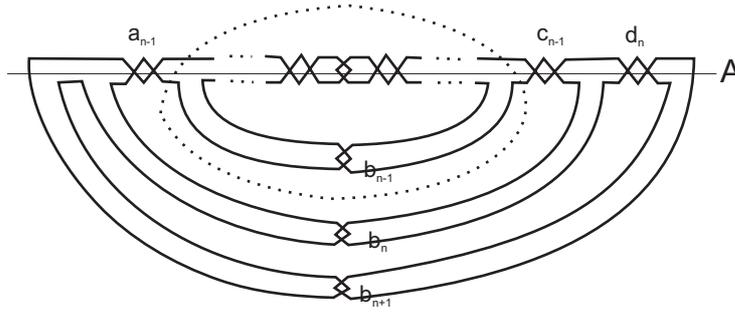


Figura 3.14: Diagrama ilustrando a parte interior da linha pontilhada que será rotacionada ao redor do eixo horizontal A.

$$D_2 = (a_1, a_2, \dots, a_{n-2}, 0, 0 | b_1, b_2, \dots, b_n, b_{n+1} | c_1, c_2, \dots, d_{n-1}, d_n)$$

(ii) Se a_{n-1} é ímpar, então

$$D_2 = (a_1, a_2, \dots, a_{n-2}, 0, 0 | \overline{b_1}, \overline{b_2}, \dots, \overline{b_{n-1}}, b_n, b_{n+1} | c_1, c_2, \dots, c_{n-2}, d_{n-1}, d_n),$$

onde $\overline{b_i}$ significa que o i -ésimo braço com b_i pontos de cruzamentos está acima do eixo horizontal A, como na Figura 3.15.

Agora, para a parte inferior do $(n - 1)^{\text{a}}$ braço, formamos um novo braço $(n - 1)^{\text{a}}$ horizontal (sem pontos cruzamentos) abaixo de A, veja Figura 3.16.

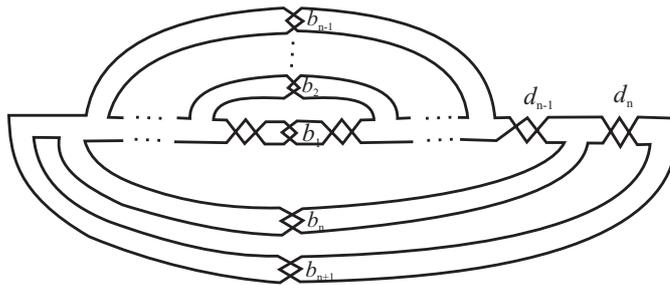


Figura 3.15: Diagrama após rotação horizontal da parte interior da linha pontilhada, Figura 3.14, neste caso a_{n-1} é ímpar.

Rotacionamos b_{n-1} vezes o interior da linha pontilhada, na Figura 3.16, em torno do eixo vertical B, de modo que b_{n-1} cruzamentos acima de A desaparecem, mas b_{n-1} pontos de cruzamentos são criados no braço inferior. Tal rotação será chamada de *rotação vertical*. O diagrama resultante, D_3 é da

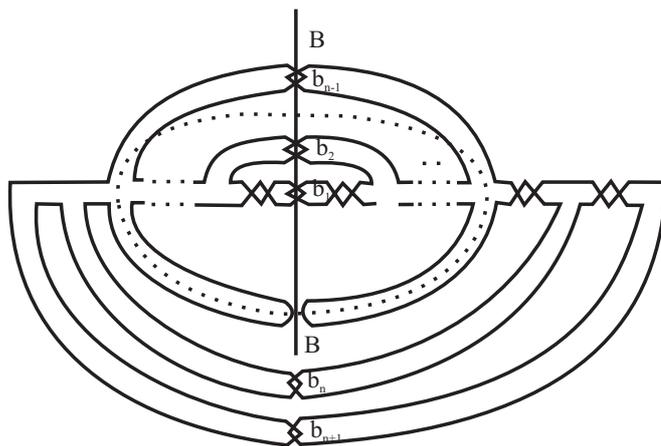


Figura 3.16: Diagrama ilustrando a parte interior da linha pontilhada que será rotacionada ao redor do eixo vertical B.

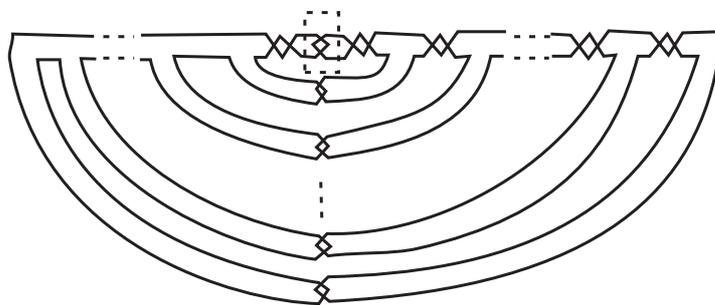


Figura 3.17: Diagrama D_n .

forma:

(i) $D_3 = (a_1, a_2, \dots, a_{n-2}, 0, 0 | b_1, \overline{b_2}, \dots, \overline{b_{n-2}}, b_{n-1}, b_n, b_{n+1} | c_1, c_2, \dots, c_{n-2}, d_{n-1}, d_n)$,
se b_{n-1} é par.

(ii) $D_3 = (c_1, c_2, \dots, c_{n-2}, 0, 0 | b_1, \overline{b_2}, \dots, \overline{b_{n-2}}, b_{n-1}, b_n, b_{n+1} | a_1, a_2, \dots, a_{n-2}, d_{n-1}, d_n)$,
se b_{n-1} é ímpar.

Através de repetidas aplicações de rotações horizontais e verticais um número apropriado de vezes, eventualmente obtemos um novo diagrama (Figura 3.17),

$$D_n = (a_1, 0, \dots, 0 | b_1, b_2, \dots, b_{n+1} | c_1, d_2, \dots, d_n)$$

ou

$$D_n = (c_1, 0, \dots, 0 | b_1, b_2, \dots, b_{n+1} | a_1, d_2, \dots, d_n).$$

É fácil mover os pontos de cruzamento a_1 ou c_1 da esquerda para a direita por uma rotação horizontal no interior do quadrado pontilhado. Assim, o Teorema 3.2, item (1) está provado.

Inversamente, podemos facilmente ver que o denominador de um tangle

racional tem um diagrama regular que é o diagrama regular padrão de um nó 2-pontes, tal como no exemplo, figura 3.18. ■

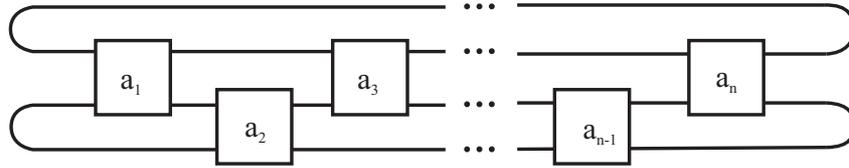


Figura 3.18: n ímpar

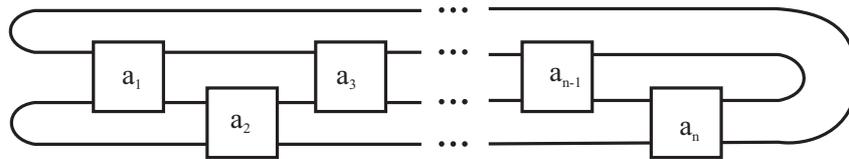


Figura 3.19: n par

De acordo com este teorema, os nós 2-pontes são frequentemente chamados *nós racionais*.

Dizemos que um nó 2-pontes que tem um diagrama regular na forma da Figura 3.18 está em sua *forma racional* e denotaremos este nó por $C(a_1, a_2, \dots, a_n)$. Convencionaremos o diagrama regular, Figura 3.18, como o *diagrama regular padrão* para um nó de 2-pontes.

Um diagrama em forma racional corresponde ou a um nó trivial ou a um nó de 2-pontes. Pela classificação de nós de 2-pontes (37), qualquer enlace de 2-pontes tem um diagrama em forma racional.

Consideremos o diagrama de um nó de 2-pontes e o diagrama equivalente em forma regular padrão, como mostra a Figura 3.20. Observemos que no diagrama regular padrão do nó de 2-pontes, as torções a_k com k ímpar correspondem às torções horizontais e as torções a_k com k par correspondem às torções verticais no diagrama original. Lembremos que estamos considerando n ímpar. Notemos também que no diagrama padrão do nó de 2-pontes obtemos as torções a'_i s com i par, com os sinais de torção opostos ao do diagrama regular inicial; pois para obter o diagrama padrão do nó de 2-pontes rotacionamos as torções verticais para se tornarem horizontais e portanto obtemos sinais opostos. No entanto, faremos a seguinte convenção. Para nós de 2-pontes com diagrama em forma regular padrão, identificaremos os sinais das torções

horizontais (todas são horizontais) e definiremos a fração contínua associada ao nó de 2-pontes como na proposição abaixo.

Proposição 3.2.2 *O nó de 2-pontes $C(a_1, a_2, \dots, a_n)$, com n ímpar, os a_i 's $\neq 0$, e diagrama em forma padrão (Figura 3.18), corresponde a um número racional $\frac{p}{q}$, que tem uma expansão em fração contínua dada por*

$$[a_1, a_2, \dots, a_n] = a_1 + \frac{1}{-a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{-a_4 + \dots + \frac{1}{\dots + \frac{1}{(-1)^{n-1}a_n}}}}}$$

onde $\text{mdc}(p, q) = 1$.

Observe que a alternância de sinais é devido a discussão anterior a Proposição 3.2.2.

Se a_i é um inteiro positivo para todo $i=1\dots n$, então $0 < q < p$. Contudo, se a_i é negativo para todo $i=1 \dots n$, sendo a fração $\frac{p}{q} < -1$, nós podemos assumir que $p > 0$ e $q < 0$. Além disso qualquer nó 2-pontes $C(a_1, a_2, \dots, a_{2k+1})$ corresponde a um número racional $\frac{p}{q}$, onde $-p < q < p$ e $q > 0$.

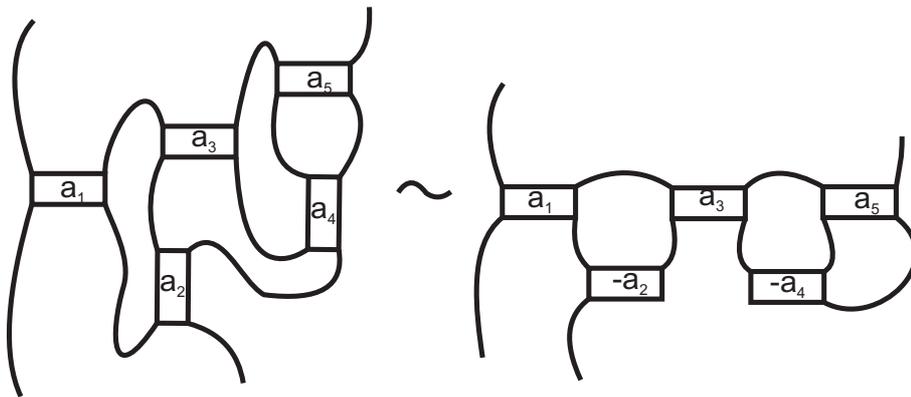


Figura 3.20: Diagrama regular e diagrama regular padrão de um nó de 2-pontes.

Exemplo 3.2.3 *O nó de 2-pontes $C(-2, 3, -2)$, obtido do tangle racional $S(-2, 3, -2)$ (Figura 3.21), possui expansão em fração contínua,*

$$[-2, 3, -2] = -2 + \frac{1}{-3 + \frac{1}{-2}} = -\frac{16}{7},$$

que corresponde a fração racional do tangle racional $T(-2, -3, -2)$, Figura 3.11.



Figura 3.21: Tangle $S(-2,3,-2)$

Se, de duas diferentes expansões de frações contínuas de $\frac{p}{q}$, nós obtemos diagramas regulares de dois nós de 2-pontes, então eles são diagramas regulares do mesmo nó. Em resumo, dois nós de 2-pontes são completamente classificados por seus números racionais associados, como o seguinte teorema :

Teorema 3.2.4 (Ver (37)) *Sejam K e K' nós de 2-pontes associados aos números racionais $\frac{p}{q}$ e $\frac{p'}{q'}$ respectivamente; então K e K' são equivalentes se, e somente se,*

$$(i) \quad p = p', \quad q \equiv q' \pmod{p}$$

ou

$$(ii) \quad p = p', \quad qq' \equiv 1 \pmod{p}.$$

Além disso, a imagem por reflexão K^* de K é um nó 2-pontes associado ao número racional $\frac{p}{-q}$.

A prova deste teorema depende da teoria de espaço de lente, a qual não será abordada nesta dissertação. Para o leitor interessado em teoria de espaço de lente, ver (3). Através deste teorema, Schubert determinou a classificação de nós de 2-pontes, que será de grande importância na demonstração do teorema, capítulo 7.

Teorema 3.2.5 (Ver (37)) (1) *Suponha que invertamos a orientação de uma componente de um enlace de 2-pontes orientado, associado ao número racional $\frac{p}{q}$. Então o enlace 2-pontes orientado resultante está associado aos números racionais:*

$$(i) \quad \frac{p}{q-p}, \quad \text{se } q > 0,$$

$$(ii) \quad \frac{p}{q+p}, \quad \text{se } q < 0.$$

(2) *Dois enlaces de 2-pontes orientados associados aos números racionais $\frac{p}{q}$ e $\frac{p'}{q'}$ são equivalentes com orientação se um dos seguintes caso ocorre.*

- (i) $p = p', q \equiv q' \pmod{2p}$,
- (ii) $p = p', qq' \equiv 1 \pmod{2p}$.

Além disso, essas são condições suficientes para que os nós sejam equivalentes.

3.3 Polinômio de Kauffman para nós 2-pontes

Nosso objetivo nesta seção é encontrar o polinômio de Kauffman para nós de 2-pontes em termos do produto de matrizes. Baseado no trabalho de Lickorish (23), o qual utiliza técnicas elementares de álgebra linear, demonstraremos o seguinte teorema.

Teorema 3.3.1 *Para um nó de 2-pontes, $C(a_1, a_2, \dots, a_n)$, o polinômio R_C de Kauffman é definido por*

$$R_{C(a_1, a_2, \dots, a_n)}(a, x) = av^t M^{a_1-1} S M^{a_2-1} S \dots M^{a_n-1} S w,$$

onde t denota transposta e

$$M = \begin{pmatrix} x & -1 & x \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ e } \omega = \begin{pmatrix} a^{-1} \\ a^{-2} \\ \frac{a^{-2}+1}{x} - a^{-1} \end{pmatrix}.$$

Assim como nas seções anteriores representaremos tangles e nós de 2-pontes por seus diagramas regulares, salvo em caso mencionado. Além disso, consideraremos somente tangles em forma canônica (Definição 3.1.13).

Lembremos que o polinômio de Kauffman de um nó orientado K é definido por $F_K(a, x) = a^{-w(K)} R_K(a, x)$, onde $w(K)$ é o número torção de K e $R_K(a, x)$ é o polinômio de Laurent definido pelas relações dadas na seção 2.8.

Sejam B a bola em \mathbb{R}^3 e s tangles com os 4 pontos extremos no bordo, ∂B . Considere $\mathcal{L}(B)$ o módulo livre sobre o anel $\mathbb{Z}[a^{\pm 1}, x^{\pm 1}]$, gerado pelas classes de isotopia regular de tangles racionais não orientados, s , com as condições:

- (i) $s_+ + s_- = x(s_0 + s_\infty)$,
- (ii) $s^+ = as$ e $s^- = a^{-1}s$,

onde s_i e s^i , com $i = +, -, 0, \infty$, tem a projeção idêntica a do tangle original, exceto numa pequena vizinhança do cruzamento do tangle, onde o diagrama

é modificado segundo as Figuras 2.24 e 2.27.

Antes de enunciarmos a próxima proposição, convém lembrar que um nó de 2-pontes é o denominador de algum tangle racional. Esse resultado é importante, pois daqui em diante trabalharemos com o tangle racional, do qual o nó de 2-pontes é obtido.

Proposição 3.3.2 *Seja K um nó de 2-pontes, obtido do tangle racional T . O polinômio, R_K , de Kauffman é invariante pelas relações de $\mathcal{L}(\mathbb{B})$. Portanto, induz uma aplicação $\mathcal{L}(\mathbb{B}) \rightarrow \mathbb{Z}(a^{\pm 1}, x^{\pm 1})$, que leva o tangle não orientado T no polinômio, R_K , de Kauffman, definido em 2.8.*

A demonstração dessa proposição pode ser encontrada em (23).

Denotemos por A_m , $m \in \mathbb{Z}$, o elemento de $\mathcal{L}(\mathbb{B})$ representado pelo tangle não orientado, como mostra a Figura 3.22, com m cruzamentos se m é positivo e com $|m|$ cruzamentos se m é negativo; A_∞ também é mostrado na Figura 3.22. Seja $T(a_1, a_2, \dots, a_n)$ o elemento de $\mathcal{L}(\mathbb{B})$ representado pelo tangle racional, como na Figura 3.22, com n tangles iguais a A_{a_i} , $i=1, \dots, n$, onde a_i é o número de torção contando seus sinais.

Inserindo o tangle T numa bola, como mostra a Figura 3.23, produzimos um nó de 2-pontes, $C(a_1, a_2, \dots, a_n)$, associado ao número racional $\frac{p}{q}$, com expansão em fração contínua

$$[a_1, a_2, \dots, a_n] = a_1 + \frac{1}{-a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{-a_4 + \dots + \frac{1}{\dots + \frac{1}{(-1)^{n-1}a_n}}}}}$$

onde $\text{mdc}(p, q) = 1$.

Demonstração do Teorema 3.3.1

Prova. Considere um nó de 2-pontes em forma racional, obtido do tangle racional $T(a_1, a_2, \dots, a_n)$, com n tangles iguais a A_{a_i} , $i=1, \dots, n$, veja Figura 3.22. Aplicando as relações de $\mathcal{L}(\mathbb{B})$ para um dos cruzamentos de A_m com $a_i = m$, fazemos a seguinte afirmação:

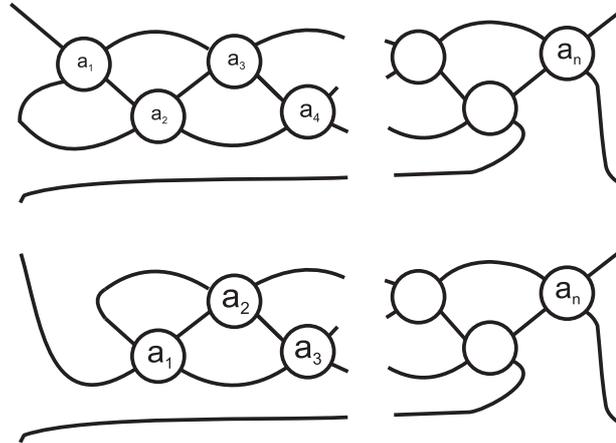
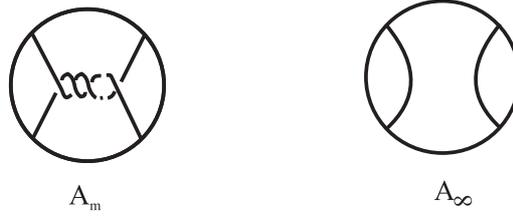


Figura 3.22: Diagramas de tangles A_m , A_∞ e $T(a_1, a_2, \dots, a_n)$ com n ímpar e n par respectivamente.

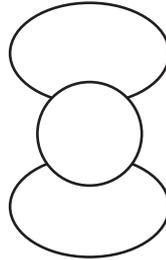


Figura 3.23: Nó racional obtido do tangle T inserido na bola (denominador do T).

Afirmção 3.3.3 *Considere o tangle de A_m (Figura 3.22). Então aplicando as relações de $\mathcal{L}(B)$ para um dos cruzamentos do diagrama de A_m , temos*

$$A_m + A_{m-2} = x(A_{m-1} + a^{m-1}A_\infty) \tag{3-2}$$

para todo $m \in \mathbb{Z}$.

Prova. Suponha $m > 0$ e p o cruzamento do diagrama de A_m a ser aplicado as relações de $\mathcal{L}(B)$. Suponha p o primeiro cruzamento. Pelas relações de $\mathcal{L}(B)$, temos a relação $(A_m)_+ + (A_m)_- = x((A_m)_0 + (A_m)_\infty)$.

Observe que o diagrama $(A_m)_-$ inverte a posição dos fios do cruzamento p em A_m , assim A_m perde dois cruzamentos e portanto, obtemos A_{m-2} . Agora, note que, $(A_m)_0$ elimina o cruzamento em A_m e portanto, obtemos A_{m-1} . Além disso, para eliminar a torção resultante de $(A_m)_\infty$ produzimos $(m-1)$ torções e,

obtemos $a^{m-1}A_\infty$ (Proposição 2.8.5 (v)). Os diagramas podem ser vistos nas Figuras 3.24, 3.25 e 3.26. Assim, concluímos a relação

$$A_m + A_{m-2} = x(A_{m-1} + a^{m-1}A_\infty).$$

Analogamente verificamos para $m < 0$ e para o caso $m=0$ é imediato. ■

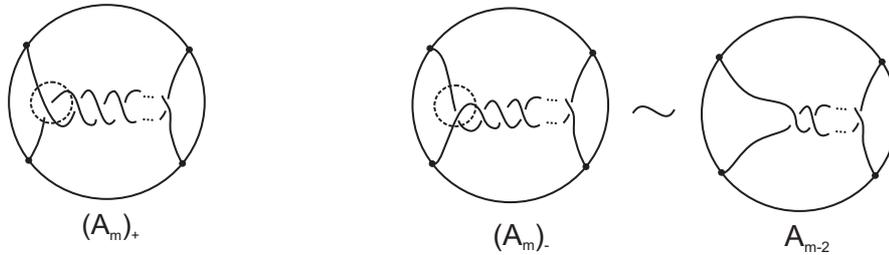


Figura 3.24:

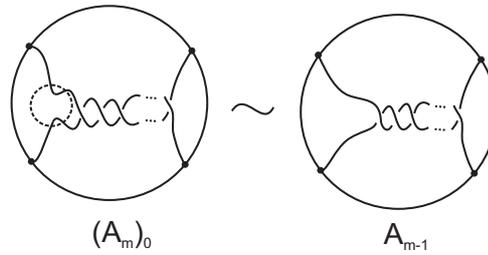


Figura 3.25:

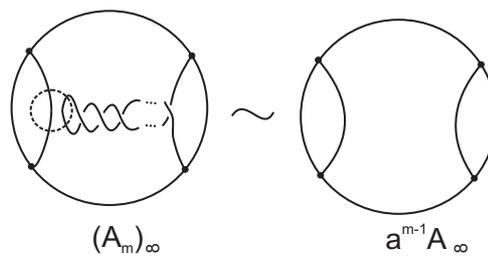


Figura 3.26:

Colocando a Equação 3-2 em forma de matrizes, obtemos:

$$\begin{pmatrix} A_m \\ A_{m-1} \\ a^m A_\infty \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} A_{m-1} \\ A_{m-2} \\ a^{m-1} A_\infty \end{pmatrix}, \tag{3-3}$$

com M definida no Teorema 3.3.1. Façamos,

$$M \begin{pmatrix} A_1 \\ A_0 \\ aA_\infty \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xA_1 - A_0 + axA_\infty \\ A_1 \\ a^2A_\infty \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_2 \\ A_1 \\ a^2A_\infty \end{pmatrix}$$

$$M.M \begin{pmatrix} A_1 \\ A_0 \\ aA_\infty \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} A_2 \\ A_1 \\ a^2A_\infty \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xA_2 - A_1 + a^2xA_\infty \\ A_2 \\ a^3A_\infty \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_3 \\ A_2 \\ a^3A_\infty \end{pmatrix}$$

$$M.M.M \begin{pmatrix} A_1 \\ A_0 \\ aA_\infty \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} A_3 \\ A_2 \\ a^3A_\infty \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xA_3 - A_2 + a^3xA_\infty \\ A_3 \\ a^4A_\infty \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_4 \\ A_3 \\ a^4A_\infty \end{pmatrix}.$$

Procedendo $(m-1)$ vezes, obtemos.:

$$\begin{pmatrix} A_m \\ A_{m-1} \\ a^m A_\infty \end{pmatrix} = M^{m-1} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_0 \\ aA_\infty \end{pmatrix} \quad (3-4)$$

$$\begin{pmatrix} A_m \\ A_{m-1} \\ a^m A_\infty \end{pmatrix} = M^{m-1} S \begin{pmatrix} A_\infty \\ A_1 \\ A_0 \end{pmatrix} \quad (3-5)$$

Agora, nosso intuito é estender a Equação 3-5 para o tangle racional $T(a_1, a_2, \dots, a_n)$.

Afirmção 3.3.4 *Considere o tangle racional, $T(a_1, a_2, \dots, a_n)$. Aplicando as relações de $\mathcal{L}(B)$ nos cruzamentos do diagrama do tangle T obtemos:*

$$\begin{pmatrix} T(a_1, a_2, \dots, a_n) \\ T(a_1 - 1, a_2, \dots, a_n) \\ a^{a_1} T(a_2, a_3, \dots, a_n) \end{pmatrix} = M^{a_1-1} S M^{a_2-1} S \dots M^{a_n-1} S M^{a_n-1} S \begin{pmatrix} A_\infty \\ A_1 \\ A_0 \end{pmatrix}$$

Prova. Considere o tangle racional $T(a_1, a_2, \dots, a_n)$ (Figura 3.22). Aplicando as relações de $\mathcal{L}(B)$ em um dos cruzamentos do diagrama de A_{a_1} , obtemos a Equação 3-4, com $m=a_1$. Agora, relacionamos o tangle $T(a_1, a_2, \dots, a_n)$, após as modificações em A_{a_1} , com a Equação 3-4, para $m=a_1$

Observe que, se não alterarmos A_{a_1} , mantemos o tangle $T(a_1, a_2, \dots, a_n)$; e para o tangle A_{a_1} menos um cruzamento, A_{a_1-1} , temos o tangle $T(a_1 - 1, a_2, \dots, a_n)$. Agora, note que, para $a^{a_1} A_\infty$, obtemos o tangle $a^{a_1} T(a_2, \dots, a_n)$.

Para o caso em que $a_1 = 1$, eliminamos o único cruzamento (positivo) em A_{a_1} por uma torção negativa em a_2 , o que diminui a_2 em uma unidade, e assim obtemos $T(a_2 - 1, \dots, a_n)$, veja Figura 3.27. Se $a_1 = \infty$ temos o tangle $T(a_2, \dots, a_n)$, conforme Figura 3.29. Agora, se $a_1 = 0$, eliminamos A_{a_2} desfazendo a torção a_2 e obtemos o tangle $a^{a_2} T(a_3, \dots, a_n)$, como na Figura 3.28.

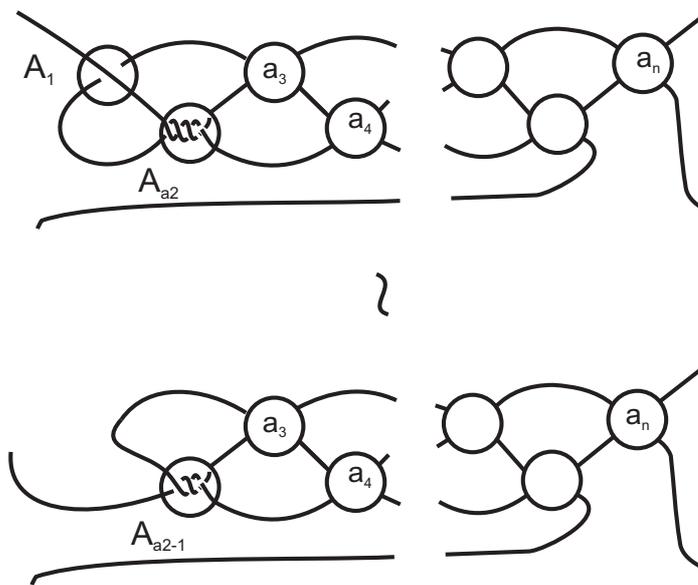


Figura 3.27: Tangle $T(a_2 - 1, \dots, a_n)$.

Agora podemos escrever a Equação 3-4 da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} T(a_1, a_2, \dots, a_n) \\ T(a_1 - 1, a_2, \dots, a_n) \\ a^{a_1} T(a_2, a_3, \dots, a_n) \end{pmatrix} &= M^{a_1-1} \begin{pmatrix} T(a_2 - 1, a_3, \dots, a_n) \\ a^{a_2} T(a_3, a_4, \dots, a_n) \\ a T(a_2, a_3, \dots, a_n) \end{pmatrix} \\ &= M^{a_1-1} S \begin{pmatrix} T(a_2, a_3, \dots, a_n) \\ T(a_2 - 1, a_3, \dots, a_n) \\ a^{a_2} T(a_3, a_4, \dots, a_n) \end{pmatrix} \quad (3-6) \end{aligned}$$

Usando a Equação 3-6, fazemos o (n-1) iterado.

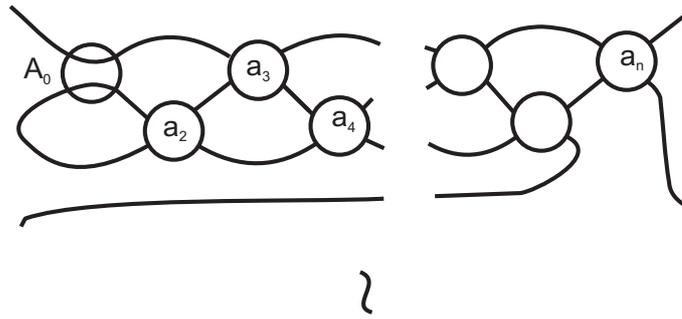


Figura 3.28: Tangle $a^{a_2}T(a_3, \dots, a_n)$.

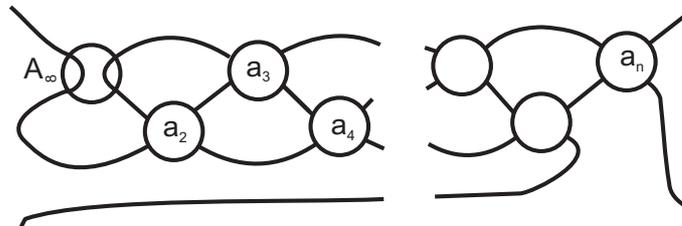
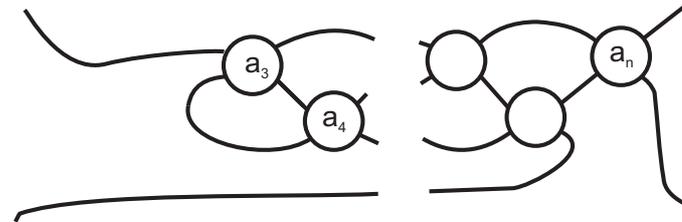


Figura 3.29: Tangle $T(a_2, \dots, a_n)$.

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} T(a_1, a_2, \dots, a_n) \\ T(a_1 - 1, a_2, \dots, a_n) \\ a^{a_1}T(a_2, a_3, \dots, a_n) \end{pmatrix} &= M^{a_1-1} S \begin{pmatrix} T(a_2, a_3, \dots, a_n) \\ T(a_2 - 1, a_3, \dots, a_n) \\ a^{a_2}T(a_3, a_4, \dots, a_n) \end{pmatrix} \\
 &= M^{a_1-1} S M^{a_2-1} S \begin{pmatrix} T(a_3, \dots, a_n) \\ T(a_3 - 1, \dots, a_n) \\ a^{a_3}T(a_4, a_5, \dots, a_n) \end{pmatrix} \\
 &\quad \vdots \\
 &= M^{a_1-1} S M^{a_2-1} S \dots M^{a_{n-2}-1} S \begin{pmatrix} T(a_{n-1}, a_n) \\ T(a_{n-1} - 1, a_n) \\ a^{a_{n-1}}T(a_n) \end{pmatrix} \quad (3-7)
 \end{aligned}$$

$$= M^{a_1-1} S M^{a_2-1} S \dots M^{a_{n-2}-1} S M^{a_{n-1}-1} S \begin{pmatrix} T(a_n) \\ T(a_n - 1) \\ a^{a_n} \end{pmatrix} \quad (3-8)$$

Observe que,

$$\begin{pmatrix} T(a_n) \\ T(a_n - 1) \\ a^{a_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{a_n} \\ A_{a_n-1} \\ a^{a_n} A_\infty \end{pmatrix},$$

então pela Equação 3-5 temos,

$$\begin{pmatrix} T(a_n) \\ T(a_n - 1) \\ a^{a_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{a_n} \\ A_{a_n-1} \\ a^{a_n} A_\infty \end{pmatrix} = M^{a_n-1} S \begin{pmatrix} A_\infty \\ A_1 \\ A_0 \end{pmatrix},$$

o que implica que

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} T(a_1, a_2, \dots, a_n) \\ T(a_1 - 1, a_2, \dots, a_n) \\ a^{a_1} T(a_2, a_3, \dots, a_n) \end{pmatrix} &= M^{a_1-1} \begin{pmatrix} T(a_2 - 1, a_3, \dots, a_n) \\ a^{a_2} T(a_3, a_4, \dots, a_n) \\ a T(a_2, a_3, \dots, a_n) \end{pmatrix} \\ &= M^{a_1-1} S M^{a_2-1} S \dots M^{a_{n-1}-1} S M^{a_n-1} S \begin{pmatrix} A_\infty \\ A_1 \\ A_0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Assim, demonstramos a Afirmação 3.3.4. ■

Agora, inserimos o tangle $T(a_1, a_2, \dots, a_n)$ na bola B e obtemos o nó de 2-pontes $C(a_1, a_2, \dots, a_n)$ e uma aplicação $\mathcal{L}(B) \rightarrow \mathbb{Z}[a^{\pm 1}, x^{\pm 1}]$, que leva o tangle $T(a_1, a_2, \dots, a_n)$ no polinômio de Laurent, $R_{C(a_1, a_2, \dots, a_n)}$, de Kauffman.

Verificamos através da Proposição 2.8.5, que os polinômios, R_A , de Kauffman, para A_∞, A_1, A_0 são iguais a $1, a^{-1}$ e $\left(\frac{a+a^{-1}}{x} - 1\right)$ respectivamente. Assim, o resultado desejado é dado pela primeira linha do produto de matrizes da Afirmação 3.3.4.

Concluimos, então, que

$$R_{C(a_1, a_2, \dots, a_n)}(a, x) = av^t M^{a_1-1} S M^{a_2-1} S \dots M^{a_n-1} S w,$$

■

Observação 3.3.5 *Observe que para a imagem por reflexão do nó C , o sinal da torção muda e portanto o polinômio de Kauffman é dado por $F_C = \frac{1}{a} w^{(C)} R_C$.*

Dessa forma, segue a fórmula para nós de 2-pontes C^* , que é imagem por reflexão do nó 2-pontes C .

$$R_{C^*(-a_1, -a_2, \dots, -a_n)}(a, x) = \frac{1}{a} v^t M^{-a_1-1} S M^{-a_2-1} S \dots M^{-a_n-1} S w,$$

$$M = \begin{pmatrix} x & -1 & x \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{a} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e \quad \omega = \begin{pmatrix} a \\ a^2 \\ \frac{a^2+1}{x} - a \end{pmatrix}.$$

4

Nós legendreanos

Nós legendreanos em estrutura de contato são objetos naturais, nascidos há dois séculos atrás no trabalho de Huygens, Hamilton e Jacobi em óptica geométrica e no trabalho de Lie em equações diferenciais parciais. Os nós legendreanos foram aplicados em diversas áreas da Matemática e da Física e têm profunda ligação com topologia e dinâmica em baixa dimensão. O estudo dos nós legendreanos tem se tornado popular em geometria de contato desde o trabalho de Bennequin (1), publicado em 1983. Atualmente o estudo de nós legendreanos é uma bonita e rica teoria com muitas aplicações.

Essa dissertação se concentra em nós legendreanos no espaço \mathbb{R}^3 com a estrutura de contato canônica deste espaço, onde sua teoria é mais fortemente desenvolvida e intimamente ligada a topologia.

Com o objetivo de apresentarmos a teoria de nós legendreanos, omitimos alguns conceitos de topologia diferencial utilizados durante o capítulo.

4.1

Estrutura de contato

Em 1971, Martinet (26) mostrou que toda variedade orientável de dimensão 3 admite uma estrutura de contato. Como consequência, Bennequin (1) e Eliashberg (10) mostraram a existência de dois tipos de estrutura de contato em \mathbb{R}^3 , são elas classificadas em estruturas tensas e super torcidas.

Definição 4.1.1 *Uma estrutura de contato em uma variedade M , de dimensão 3, é um campo de 2-planos tangentes completamente não integrável.*

Considerando ξ um campo de planos, para cada $x \in M$, ξ_x é um subespaço 2-dimensional de $T_x M$. Para cada ponto x de M podemos considerar localmente o campo de planos ξ_x como o núcleo de uma 1-forma (localmente definida), isto é, existe uma 1-forma α tal que $\xi_x = \text{Ker}(\alpha_x)$, α é dito uma *forma de contato* e (M, ξ) é uma *variedade de contato*. O campo de planos ξ é completamente não integrável se a forma de contato α satisfaz $\alpha \wedge d\alpha \neq 0$ em todo ponto.

A condição $\alpha \wedge d\alpha \neq 0$, implica que a estrutura de contato não é, nem mesmo localmente, tangente a nenhuma superfície na variedade. Podemos ver isso na Figura 4.1, onde o campo de planos rotaciona ao longo da direção do eixo y . Essa rotação impede que os planos de contato sejam tangentes a uma superfície.

Teorema 4.1.2 *Uma variedade de dimensão 3 admite uma estrutura de contato se, e somente se, é orientável.*

Uma implicação é evidente, desde que dada uma variedade M e uma 1-forma α , o produto exterior $\alpha \wedge d\alpha$ (observe que $-\alpha \wedge d(-\alpha) = \alpha \wedge d\alpha$) define uma orientação em M , ou seja, uma estrutura de contato em uma variedade M determina uma orientação em M . A implicação inversa é um dos primeiros teoremas de estrutura de contato, demonstrado por Martinet, e sua demonstração não é de fácil entendimento, e não sendo relevante nesta dissertação, a omitiremos.

Vejamos alguns exemplos de estruturas de contato.

Exemplo 4.1.3 *Estrutura de contato canônica em \mathbb{R}^3 , denotada por ξ_{can} .*

Considere a variedade \mathbb{R}^3 com coordenadas cartesianas (x, y, z) e a 1-forma $\alpha = dz - ydx$. Note que,

$$\alpha \wedge d\alpha = (dz - ydx) \wedge (dx \wedge dy) = dz \wedge dx \wedge dy \neq 0.$$

Assim $\xi_{can} = \text{Ker } \alpha$ é uma estrutura de contato.

Para um ponto (x, y, z) o plano de contato ξ_{can} é gerado por $\left\{ \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial z} \right\}$. O campo de planos está indicado na figura 4.1.

Observe que, para qualquer ponto no plano xz , o campo de planos ξ é horizontal, isto é, paralelo ao plano xy e observe também que, ao longo do eixo y positivo, da origem para o infinito, os planos começam horizontais e rotacionam no sentido anti-horário em torno deste eixo. Nesta direção, e, em qualquer reta paralela ao eixo y , os planos rotacionam 90° .

Exemplo 4.1.4 *Versão simétrica da estrutura de contato ξ_{can} em \mathbb{R}^3 , denotada por ξ_{sim} .*

Considere a variedade \mathbb{R}^3 e a forma diferencial $\alpha = dz + xdy - ydx$ ou em coordenadas cilíndricas (r, θ, z) , $\alpha = dz + r^2 d\theta$. Note que, para $r \neq 0$,

$$\alpha \wedge d\alpha = 2rdz \wedge (dr \wedge d\theta) \neq 0.$$

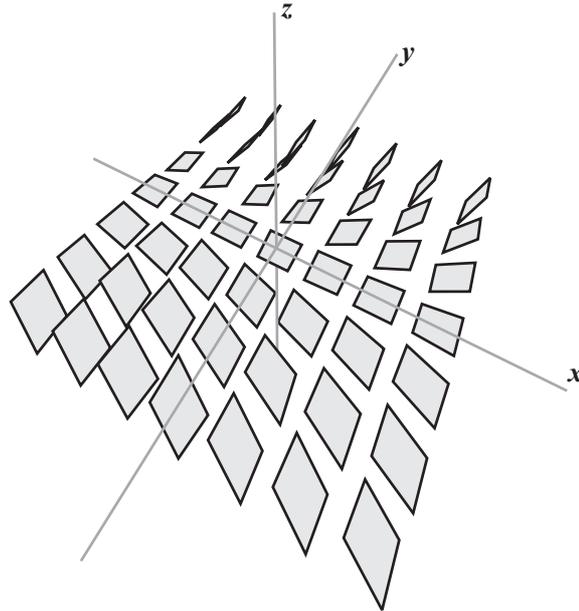


Figura 4.1: Estrutura de contato canônica - ξ_{can}

Assim, $\xi_{sim} = \text{Ker } \alpha$ é uma estrutura de contato.

Para um ponto (r, θ, z) o plano de contato ξ_{sim} é gerado por $\left\{ \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \theta} - r^2 \frac{\partial}{\partial z} \right\}$. O campo de planos está indicado na Figura 4.2.

Considere o difeomorfismo $(x, y, z) \mapsto (x, 2y, z + xy)$. Vemos que $d(z + xy) - (2y)dx = dz + xdy - ydx = dz + r^2 d\theta$. Assim a estrutura de contato canônica em \mathbb{R}^3 , ξ_{can} , é isomorfa a sua versão simétrica ξ_{sim} .

Exemplo 4.1.5 *Estrutura de contato super torcida em \mathbb{R}^3 , denotada por ξ_{stor} .*

Considere a variedade \mathbb{R}^3 com coordenadas cilíndricas e a 1-forma $\alpha = \cos r dz + r \sin r d\theta$. Note que para $r \neq 0$

$$\alpha \wedge d\alpha = \left(1 + \frac{\sin r \cos r}{r} \right) dr \wedge d\theta \wedge dz.$$

Com um pequeno cálculo, verificamos que

$$\left(1 + \frac{\sin r \cos r}{r} \right) > 0.$$

Assim, $\xi_{stor} = \text{Ker } \alpha$ é uma estrutura de contato. A estrutura de contato ξ_{stor} é mostrada na Figura 4.3.

Observe que os campos de planos de contato de ξ_{stor} são similares aos da estrutura de contato ξ_{sim} , mas percorrendo um raio perpendicular ao eixo z , os planos rotacionam muitas vezes (infinitas vezes), enquanto na estrutura de contato ξ_{sim} , eles rotacionam somente 90° . Note também que o disco $D = \{(r, \theta, z) / z = 0, r \leq \pi\}$ é tangente aos planos de contato ao longo de sua borda. Esse disco é chamado *disco torcido*.

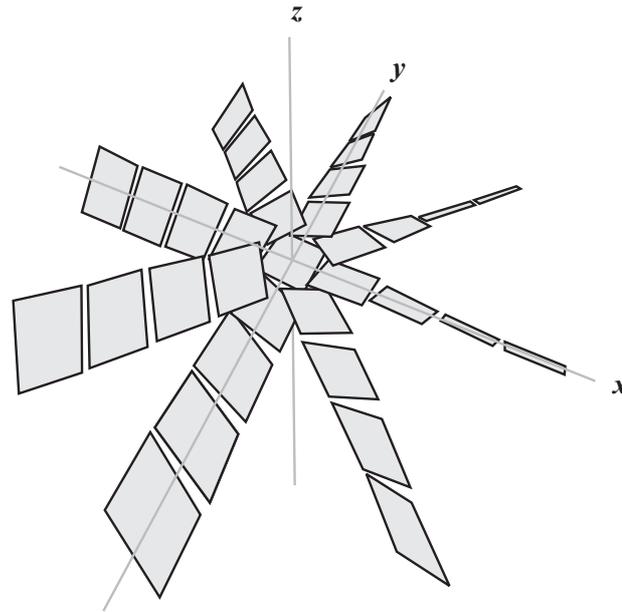


Figura 4.2: Estrutura de contato simétrica - ξ_{sim}

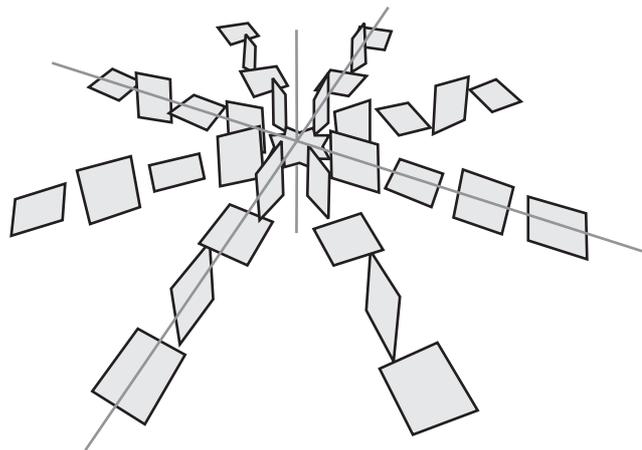


Figura 4.3: Estrutura de contato super torcida - ξ_{stor} .

Uma estrutura de contato é chamada *super torcida* se existe um mergulho de um disco torcido em \mathbb{R}^3 ; caso contrário, as estruturas de contato são ditas *tensas*.

Para um campo de planos ser uma estrutura de contato, deve rotacionar, evitando assim a tangência a uma variedade, mas ξ_{stor} rotaciona muito mais do que o necessário, então o nome “super torcida”. Vemos claramente na Figura 4.3, que ξ_{stor} é super torcida.

Veremos na próxima seção que as estruturas de contato tensas nos fornecem interessantes informações quando estudadas juntamente com os nós. Para uma maior abordagem sobre as estruturas de contato super torcidas e tensas, ver (9, 11).

Definição 4.1.6 *Duas variedades de contato (M_1, ξ_1) e (M_2, ξ_2) são ditas contactomorfas se existe um difeomorfismo $f : M_1 \rightarrow M_2$ com $Tf(\xi_1) = (\xi_2)$ onde $Tf : TM_1 \rightarrow TM_2$ denota a aplicação derivada de f . Neste caso f é chamado um contactomorfismo.*

Se existem formas de contato $\alpha_i, i = 1, 2$ tais que $\xi_i = \text{Ker}\alpha_i$, equivalentemente dizemos que duas variedades (M_1, ξ_1) e (M_2, ξ_2) são contactomorfas se existe um difeomorfismo $f : M_1 \rightarrow M_2$ e uma aplicação não nula $g : M_1 \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $f^\alpha_2 = g\alpha_1$.*

Exemplo 4.1.7 *As estruturas ξ_{can} e ξ_{sim} são contactomorfas, como pode ser visto no Exemplo 4.1.4, ou seja, o difeomorfismo $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definido por $\phi(x, y, z) = (x, 2y, x + yz)$ é um contactomorfismo entre ξ_{can} e ξ_{sim} .*

Teorema 4.1.8 (Darboux) *Seja α uma forma de contato em uma variedade M de dimensão $(2n + 1)$ e p um ponto em M . Então existem coordenadas $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, z$ em uma vizinhança $U \subset M$ de p tal que*

$$\alpha|_U = dz + \sum_{j=1}^n x_j dy_j.$$

Este teorema nos diz que todo ponto em uma variedade tem uma vizinhança contactomorfa a ξ_{can} em \mathbb{R}^3 . A demonstração deste teorema pode ser encontrada em (16).

Definição 4.1.9 *Dizemos que duas estruturas de contato ξ_0 e ξ_1 são isotópicas se existe uma família suave de estruturas de contato $\{\xi_t, t \in [0, 1]\}$.*

Daremos uma breve idéia de como mostrar que em \mathbb{R}^3 todas as estruturas de contato são isotópicas.

Considere ζ uma estrutura de contato em \mathbb{R}^3 . Pelo teorema de Darboux e uma isotopia apropriada, existe $B = B_\epsilon(0)$, bola de centro em 0 e raio $\epsilon > 0$, tal que $\zeta|_B$ é isomorfa a estrutura de contato canônica em \mathbb{R}^3 , ξ_{can} . Então a família de pull-backs de ζ por funções f_t , que levam \mathbb{R}^3 na bola B nos dá uma isotopia entre ζ e ξ_{can} , definida por:

$$f_t : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$x \mapsto \left(\frac{\epsilon}{t\|x\| + \epsilon} \right) x$$

e $\zeta_t = f_t^*(\zeta)$ com $f_0 = id$, tal que $\zeta_0 = \zeta$ e $f_1(\mathbb{R}^3) = B$. Além disso ζ_1 é isomorfa a ξ_{can} .

Teorema 4.1.10 (Gray) *Dada uma família a um parâmetro $\{\xi_t, t \in [0, 1]\}$ de estruturas de contato em uma variedade fechada M e um ponto $t_0 \in [0, 1]$, então existe uma família a um parâmetro $\{\phi_t, t \in [0, 1]\}$ de difeomorfismos $\phi_t : M \rightarrow M$ tal que para todo t , $\phi_t^*(\xi_t) = \xi_{t_0}$.*

Proposição 4.1.11 *Dado $p \in S^3$ a variedade de contato $(S^3 \setminus \{p\}, \xi_{can})$ é contactomorfa à $(\mathbb{R}^3, \xi_{can})$.*

A demonstração desta proposição pode ser encontrada em (16), 2.20 .

Teorema 4.1.12 (Bennequin) *A estrutura de contato canônica em S^3 é tensa.*

Do Teorema 4.1.12 e da Proposição 4.1.11 segue que a estrutura de contato canônica em \mathbb{R}^3 é tensa.

Teorema 4.1.13 (Eliashberg (10)) *Toda estrutura de contato tensa em S^3 é contactomorfa a ξ_{can} .*

O Teorema 4.1.13 nos diz que a menos de contactomorfismo, existe uma única estrutura de contato tensa em S^3 .

Nos preocupamos com o estudo de nós em estruturas de contato tensas. Para o restante desse capítulo nos restringiremos a estrutura de contato canônica, ξ_{can} , em \mathbb{R}^3 , salvo em caso mencionado, pois de acordo com o teorema de Darboux, estamos estudando a “teoria local” de nós legendreanos em qualquer variedade de contato. Além disso, essa estrutura de contato facilita o estudo dos nós legendreanos através de suas projeções.

4.2

Nós legendreanos e transversais

Uma estrutura de contato de dimensão 3 admite duas classes de nós, os legendreanos e os transversais. Embora nosso interesse seja em nós legendreanos definiremos também nesta seção nós transversais, uma vez que usaremos sua definição no próximo capítulo.

Definição 4.2.1 *Seja K um nó em M^3 . Dizemos que K é um nó legendreano na variedade de contato (M^3, ξ_{can}) se ele é tangente aos planos da estrutura de contato, isto é,*

$$T_x K \subset \xi_x, \forall x \in K.$$

Definição 4.2.2 *Seja T um nó em \mathbb{R}^3 . Dizemos que T é um nó transversal na variedade de contato (M^3, ξ_{can}) se ele é transversal aos planos da estrutura de contato, isto é,*

$$T_x T \oplus \xi_x = T_x M, \forall x \in T.$$

A partir de agora trabalharemos com a estrutura de contato canônica, ξ_{can} , em \mathbb{R}^3 . Quando não houver ambiguidade denotaremos ξ_{can} simplesmente por ξ .

Lembremos que K é imagem do nó k . Considere a parametrização do nó legendreano K , $k : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$, definida por $k(t) = (x(t), y(t), z(t))$, que é uma imersão de classe C^1 . Por definição, o nó legendreano K é tangente aos planos da estrutura de contato ξ . Assim, $k'(t) \in \xi_{k(t)}$ ou ainda $\xi = \text{Ker}(dz - ydx)$, e portanto,

$$z'(t) - y(t)x'(t) = 0. \quad (4-1)$$

4.3

Projeções frontal e lagrangeana

A seção anterior nos diz que um nó legendreano é um nó topológico tangente a uma estrutura de contato. Então, é natural perguntarmos se todo nó topológico é isotópico a um nó legendreano, e quais são as propriedades que caracterizam esta rica classe de nós.

Assim como os nós topológicos, o estudo dos nós legendreanos é realizado através de sua projeção em um plano. Porém, para este último, a projeção frontal é a mais indicada, como veremos no decorrer desta seção. Através de propriedades em uma projeção seremos capazes de analisar se tal projeção corresponde, ou não, a de um nó legendreano e ainda recuperar o nó a partir desta projeção.

4.3.1 Projeção frontal

Seja K um nó legendreano na variedade de contato $(\mathbb{R}^3, \xi_{can})$. Considere a aplicação

$$\begin{aligned} \pi_F : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\longmapsto (x, z). \end{aligned}$$

A imagem $\pi_F(K)$, é a projeção frontal de K . A projeção frontal de um nó é também dito um *diagrama frontal*. Considere $k_{\pi_F} = \pi_F \circ k$ definida por

$$\begin{aligned} k_{\pi_F} : [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (x(t), z(t)), \end{aligned}$$

então k_{π_F} parametriza $\pi_F(K)$.

Temos que k é imersão (de fato, um mergulho), porém não podemos garantir que k_{π_F} seja, e de fato não será. Note que a Equação 4-1 implica que $z'(t) = y(t)x'(t)$; então se $x'(t_0) = 0$ para algum $t_0 \in [0, 1]$, tem-se $z'(t_0) = 0$, o que não é permitido numa imersão no plano xz . Note ainda que se k_{π_F} é uma imersão então $x'(t) \neq 0$ para todo $t \in [0, 1]$. Então, se k_{π_F} é uma imersão, implica que $\pi_F(K)$ não possui tangentes verticais. Assim obtemos a primeira propriedade:

P1-*Projeções frontais não possuem tangentes verticais.*

Definição 4.3.1 *Um nó legendreano K , $K \subset \mathbb{R}^3$, é dito ser genérico se todas as autointerseções da curva na projeção frontal, $\pi_F(K)$, são pontos duplos transversais.*

Veremos que, por uma pequena perturbação C^0 de um nó topológico k , podemos obter um nó legendreano \tilde{k} isotópico a k e, por uma pequena perturbação C^2 , podemos fazer com que a projeção frontal de k tenha somente cúspides semicúbicas singulares, isto é, ao redor de um ponto cúspide para $t = 0$ a curva é vista como

$$\tilde{k}(t) = (\lambda t^2 + b, t + a, -\lambda(2t^3 + at^2) + c) \text{ com } \lambda \neq 0,$$

como na Figura 4.4.



Figura 4.4: Cúspide

Genericamente, as cúspides têm forma de uma parábola semicúbica, por exemplo, a curva $(t^2, \frac{3t}{2}, t^3)$ tem cúspide em $(0,0,0)$ e a curva $t \mapsto (0, t, 0)$ é um exemplo de uma curva legendreana cuja projeção frontal é um único ponto.

Estudamos as propriedades de um nó legendreano através de sua projeção frontal, facilmente obtida pela aplicação π_F . Agora o que queremos é recuperar o nó legendreano a partir dessa projeção, ou seja, recuperar a coordenada y de k através de k_{π_F} . A partir da projeção frontal de um nó suave genérico (exceto nos pontos cúspides) podemos recuperar o nó legendreano em \mathbb{R}^3 através de $y = \frac{dz}{dx}$. Utilizando as equações,

$$y(t) = \frac{z'(t)}{x'(t)} \text{ se } x'(t) \neq 0$$

e

$$y(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{z'(t)}{x'(t)} \text{ se } x'(t_0) = 0 \text{ para algum } t_0,$$

obtemos o valor de y .

Concluimos que a partir de qualquer curva regular no plano xz com cúspides semicúbica e sem tangentes verticais podemos obter um único nó legendreano em \mathbb{R}^3 .

Vale a pena mencionar que as interseções transversais definem unicamente a estrutura de um cruzamento do nó e ainda que, em um cruzamento na projeção, o segmento de menor inclinação “passa por cima” do de maior inclinação e portanto, em \mathbb{R}^3 o segmento está a frente do de maior inclinação. Assim, o nó é bem determinado. Sem perda de formalidade matemática, podemos imaginar que o eixo y entra na página.

É importante observar que em uma projeção frontal de um nó genérico, o conjunto $\{t \in [0, 1]; x'(t) = 0\}$ é discreto. Vejamos: existem nós legendreanos tais que $x'(t) = 0$ em intervalos abertos. Podemos então, de acordo com o intervalo, criar cúspides mais pontiagudas (Figura 4.6). Isso pode ser feito através de uma isotopia legendreana (Definição 4.4.1) em apenas um ponto no arco do nó onde $x'(t) = 0$.

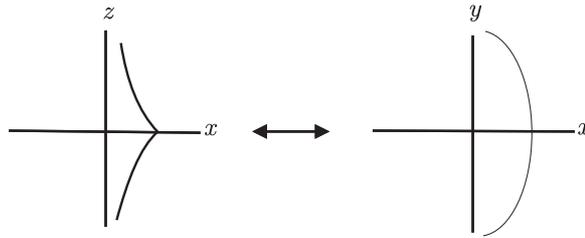


Figura 4.5: Projeção com $x'(t)=0$ em um ponto.

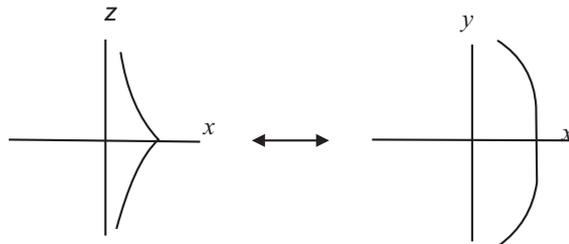


Figura 4.6: Projeção com $x'(t)=0$ em um intervalo.

Assim, em um mergulho suave em \mathbb{R}^3 , que é uma imersão genérica de classe C^1 , $x'(t)$ anula-se somente em pontos isolados. Desse fato, concluímos que pontos cúspides são pontos isolados. Além disso, para estes pontos isolados existe uma reta tangente bem definida na projeção frontal. O que nos dá uma nova propriedade:

P2 - *Projeções frontais de nós legendreanos genéricos podem ser parametrizadas por uma aplicação, que é uma imersão exceto em um número finito de pontos bem definidos por retas tangentes. Tais pontos são ditos cúspides generalizadas.*

Da discussão anterior concluímos que P1 e P2 caracterizam projeções frontais de um nó legendreano genérico. Em particular, qualquer aplicação

$$f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$t \longmapsto (x_f(t), y_f(t), z_f(t)),$$

tal que

$$f_{\pi_F} : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \longmapsto (x_f(t), z_f(t))$$

satisfaz P1 e P2, e não possui pontos duplos com tangência, representa um nó legendreano, desde que estas condições definam $y_f(t)$ pela Equação 4-1. As-

sim a imagem da aplicação $f(t) = (x_f(t), y_f(t), z_f(t))$ será um nó legendreano .

Resumindo as propriedades P1 e P2 em termos de diagramas de nós, dizemos que um diagrama de nó que:

- (1) não tem tangentes verticais,
- (2) os únicos pontos não suaves são cúspides generalizadas,
- (3) só possui pontos duplos transversais,

representa a projeção frontal de um nó legendreano.

Para que a condição (3) se torne clara, lembremos que assumimos anteriormente que o eixo y positivo “entra” na página.

Exemplo 4.3.2 *Nas Figuras 4.7, 4.8 e 4.9, mostramos diagramas frontais de nós legendreanos.*

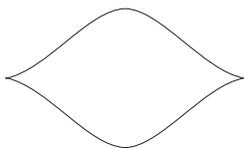


Figura 4.7: Nó trivial



Figura 4.8: Nó trevo

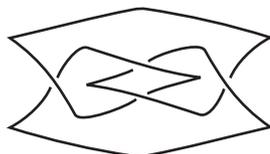


Figura 4.9: Nó figura oito

As informações obtidas até o momento são suficientes para responder algumas das indagações do início do capítulo. Somos capazes agora de fazer a seguinte afirmação.

Proposição 4.3.3 *Para todo nó topológico existe um nó legendreano C^0 próximo a ele. Em particular, existem nós legendreanos representando qualquer tipo de nó topológico.*

Antes de provarmos esta proposição, esclarecemos que, dizer que um nó L é C^0 próximo a um nó M significa dizer que o nó L pode ser aproximado de forma contínua ao nó M , de forma que, dado $\epsilon > 0$, tem-se que

$\sup|L(t) - M(t)| < \epsilon$, para todo $t \in [0, 1]$.

Provemos agora a Proposição 4.3.3.

Prova. Considere a estrutura de contato canônica em \mathbb{R}^3 . Seja K um nó topológico orientado em \mathbb{R}^3 e $\pi_F(K)$ sua projeção frontal. Agora considere $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ a curva que descreve $\pi_F(K)$ e P partição de $[a, b]$. Para cada arco, $\gamma([a_i, b_i])$, da curva γ , identificamos os cruzamentos e as tangentes verticais, e então, fazemos as modificações conforme as Figuras 4.11, 4.12 e 4.13.

Com o intuito de evitar grande variação na coordenada y dos nós, determinada pelas projeções, a aproximação em cada arco pode ser feita de tal forma que o coeficiente angular seja próximo a $y(t) = \frac{z'(t)}{x'(t)}$, $t \in [a_i, b_i]$ do nó K . Para isso basta procedermos conforme a Figura 4.14, e pela discussão anterior recuperamos o nó legendreano através da sua projeção frontal.

Pelo teorema de Darboux a proposição se estende a qualquer variedade M^3 . ■

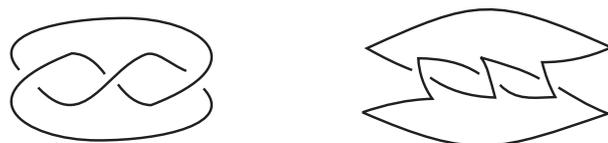


Figura 4.10: Conversão de um diagrama de nó topológico (esquerda) em diagrama frontal de nó legendreano (direita).



Figura 4.11: Conversão em nó legendreano.

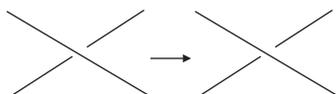


Figura 4.12: Conversão em nó legendreano.

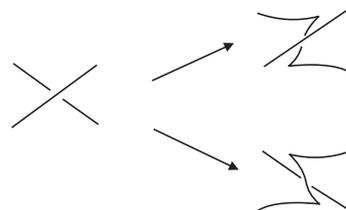


Figura 4.13: Conversão em nó legendreano.

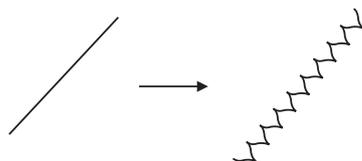


Figura 4.14: Aproximação a um arco legendreano em uma projeção frontal.

Diante da necessidade de deformações contínuas entre nós legendreanos, podemos pensar sobre os movimentos em sua projeção frontal. Para isso, temos um conjunto de movimentos. Assim como os movimentos de Reidemester para nós topológicos, existe um conjunto de movimentos de Reidemester para nós legendreanos. Os movimentos se encontram na Figura 4.15, e incluem os movimentos obtidos pela imagem por reflexão.

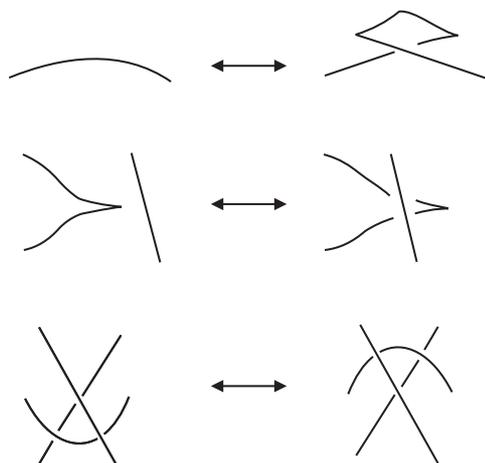


Figura 4.15: Movimentos de Reidemester para projeções frontais de nós legendreanos (incluem as imagens por reflexão).



Figura 4.16: Várias projeções frontal do mesmo nó legendreano.

Uma outra forma de estudar um nó legendreano é através de sua projeção lagrangeana, ou seja, no plano xy . O estudo através dessa projeção nem sempre é o mais indicado, pois na maioria dos casos as propriedades de um nó legendreano são mais facilmente identificadas em projeções frontais. Contudo sua definição e propriedades seguem na próxima subseção.

4.3.2

Projeção lagrangeana

Seja K um nó legendreano na variedade de contato $(\mathbb{R}^3, \xi_{can})$. Considere a aplicação

$$\begin{aligned} \pi_L : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\longmapsto (x, y). \end{aligned}$$

A imagem $\pi_L(K)$ é a projeção lagrangeana de K . A projeção lagrangeana de um nó é também dito um *diagrama lagrangeano*. Considere $k_{\pi_L} = \pi_L \circ k$ definida por

$$\begin{aligned} k_{\pi_L} : [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (x(t), y(t)), \end{aligned}$$

então k_{π_L} parametriza $\pi(K)$.

Ao contrário da projeção frontal, a projeção lagrangeana é sempre parametrizada por uma imersão. De fato, se $x'(t_0) = y'(t_0) = 0$ para algum $t_0 \in [0, 1]$ então $z'(t_0) \neq 0$, pois o vetor tangente a K está na direção $\frac{\partial}{\partial z}$, o qual não pode pertencer aos planos da estrutura de contato. Assim qualquer parametrização de K é uma imersão.

No caso normal, a projeção lagrangeana é suave (não tem cúspides ou outras singularidades diferentes da projeção frontal).

Definição 4.3.4 *Um nó legendreano K , $K \subset \mathbb{R}^3$, é dito ser genérico se todas as auto interseções da imersão da curva $\pi_L(K)$ são pontos duplos transversais.*

Como na projeção frontal, a projeção lagrangeana permite-nos recuperar a estrutura do cruzamento, isto é, recuperar a coordenada z de k . Com este objetivo procedemos da seguinte forma.

- 1) Escolha um número z_0 e faça $z(0) = z_0$. Então defina:

$$z(t) = z_0 + \int_0^t y(t)x'(t)dt. \tag{4-2}$$

Como o nó legendreano satisfaz a equação 4-1, obtemos

$$z(t) = z_0 + \int_0^t z'(t)dt,$$

o que é uma tautologia. Assim, a única ambiguidade em recuperar o nó K é a escolha de z_0 .

2) Considere o nó G dado por

$$g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$t \mapsto (x(t), y(t), z(t)),$$

e a imersão

$$g_{\pi_L} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$g_{\pi_L} = \pi_L \circ g.$$

Devemos fazer algumas observações para que a imersão g_{π_L} seja projeção lagrangeana de um nó legendreano. Se tentarmos definir $z(t)$ pela Equação 4-2 teremos um problema, pois para $t \in [0, 1]$, $z(t)$ será uma aplicação bem definida em $[0, 1]$ somente se, $z(0) = z(1)$. Assim, podemos escrever,

$$\int_0^1 y(t)x'(t)dt = 0,$$

e é claro que esta condição não é satisfeita para toda imersão g . Este é o único impedimento para “levantar”¹ a curva g_{π_L} ao nó g , cuja imagem G , é tangente a ξ .

A condição de integração significa dizer que, se G é um nó legendreano, g_{π_L} é uma curva fechada no plano xy e a integral $\oint_{g_{\pi_L}} ydx$ é a área da curva orientada dada por g_{π_L} . Então, pelo teorema de Stokes, a área deve ser nula, ou ainda, significa dizer que ao “levantar” a curva, ela tem que se fechar.

Afirmamos que a imagem G será um nó legendreano se g é um mergulho, e ainda, a única forma desta afirmação não ser válida (e então o mergulho não ser um nó legendreano) é se pontos duplos transversais na imagem de g_{π_L} tiverem a mesma coordenada z em \mathbb{R}^3 .

Resumindo as conclusões obtidas, fazemos a seguinte afirmação. Recuperamos o nó legendreano G (bem definido por uma isotopia), a partir da imersão g_{π_L} se,

$$(1) \int_0^1 y(t)x'(t)dt = 0,$$

¹Entende-se por levantar uma curva no plano xy a um nó em \mathbb{R}^3 , por obter coordenadas do nó em \mathbb{R}^3 , a partir das coordenadas da curva no plano xy .

$$(2) \int_{t_0}^{t_1} y(t)x'(t)dt \neq 0, \text{ para todo } t_0 \neq t_1 \text{ tal que } g(t_0) = g(t_1).$$

Infelizmente, essas condições não são fáceis de se interpretar diagramaticamente. Esse é um dos motivos de se trabalhar com projeções frontais ao se estudar nós legendreanos.

A Figura 4.17 mostra os movimentos de Reidemeister para projeção lagrangeana.

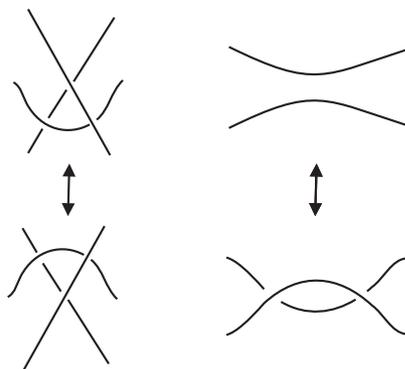


Figura 4.17: Movimentos de Reidemeister para projeções lagrangeanas de nós legendreanos (incluem as imagens por reflexão).

Observação 4.3.5 *O Proposição 4.3.3 pode ser demonstrado através da projeção lagrangeana. Consideremos $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ a curva que descreve $\pi_L(K)$, K nó topológico orientado em \mathbb{R}^3 e P partição de $[a, b]$. A aproximação em cada arco, $\gamma([a_i, b_i])$, pode ser feita conforme Figura 4.18 e pela discussão anterior recuperamos o nó legendreano através da sua projeção lagrangeana.*



Figura 4.18: Aproximação de um arco topológico a um legendreano pela projeção lagrangeana.

4.4 Isotopia legendreana

Ao considerarmos as seções anteriores, somos levados a pensar sobre isotopias entre diagramas de nós legendreanos e, conseqüentemente, entre nós legendreanos.

Na tentativa de classificar nós legendreanos isotópicos podemos fazer diferentes afirmações, as quais serão vistas nesta seção. Apresentamos

aqui duas classificações para nós legendreanos isotópicos e mostramos sua equivalência. No entanto, para um melhor entendimento e facilidade de nosso estudo trabalharemos apenas com uma delas.

Por diferir da isotopia de nós topológicos nos referimos a uma isotopia entre nós legendreanos por *isotopia legendreana* e ainda, por dois nós legendreanos isotópicos por esta isotopia, dizemos que os mesmos são *isotópicos por isotopia legendreana*. Essas definições assim como outros resultados são o motivo de estudo desta seção.

Definição 4.4.1 *Dois nós legendreanos K_0 e K_1 são isotópicos por isotopia legendreana se existe uma família $\{K_t, t \in [0, 1]\}$ de nós legendreanos, cujo campo de vetores varia continuamente e nunca se anula, com K_0 sendo o nó inicial e K_1 o nó final.*

Podemos também classificar nós legendreanos isotópicos por isotopia de contato, como na definição seguinte.

Definição 4.4.2 *Dois nós legendreanos K_0 e K_1 em (M, ξ) são isotópicos por isotopia de contato se existe uma família a um parâmetro $\phi_t : M \rightarrow M, t \in [0, 1]$, de contactomorfismos de M tal que $\phi_0 = id$ e $\phi_1(K_0) = K_1$.*

Teorema 4.4.3 *A classificação de nós legendreanos isotópicos por isotopia legendreana é equivalente a classificação por isotopia de contato.*

Prova. É clara a implicação que isotopia de contato leva a uma isotopia legendreana. Provemos a outra implicação. Seja $K_t, t \in [0, 1]$ uma isotopia entre nós legendreanos na variedade de contato (M, ξ) . Existe uma família de difeomorfismos $\phi_t : M \rightarrow M, t \in [0, 1]$, tal que $\phi_t(K_0) = K_t$. Além disso, é fácil ver que $\phi_t^*(\xi|_{K_t}) = \xi|_{K_0}$. Seja $\xi_t = \phi_t^*(\xi)$. Esta é uma família a um parâmetro de estruturas de contato com $\xi_t = \xi_0$ ao longo de K_0 . Pelo teorema de Gray (4.1), segue que existe uma família de difeomorfismos ψ_t tal que $\psi_t^*(\xi_t) = \xi_0$ e ψ_t é identidade em K_0 . Considere $f_t = \phi_t \circ \psi_t$. Notemos que

$$f_t^*(\xi_0) = \psi_t^*(\xi_t) = \xi_0.$$

Assim, f_t para todo $t \in [0, 1]$ é um contactomorfismo de $\xi_0 = \xi$. Além disso, $f_t(K_0) = \phi_t(K_0) = K_t$. ■

De acordo com a Definição 4.4.1, uma isotopia legendreana é uma isotopia através de nós legendreanos. Assim, dois nós legendreanos são ditos isotópicos por esta isotopia se eles são isotópicos através de nós legendreanos.

Podemos ainda dizer que, durante a isotopia quaisquer diagramas do nó (genérico) será um diagrama de um nó legendreano .

A partir deste momento trabalharemos somente com a Definição 4.4.1.

Teorema 4.4.4 *Dois diagramas frontais representam nós legendreanos isotópicos por isotopia legendreana se, e somente se, eles são relacionados pela sequência de movimentos de Reidemester (Figura 4.15) e isotopia planar.*

Para demonstração ver (38).

Teorema 4.4.5 *Dois diagramas lagrangeanos representam nós legendreanos isotópicos por isotopia legendreana se seus diagramas são relacionados pela sequência de movimentos de Reidemester (Figura 4.17) e isotopia planar.*

Infelizmente esses movimentos não são suficientes para garantir uma isotopia legendreana, devido a condição da integração discutida na Seção 4.3.2. Então, não basta que a isotopia seja realizada através dos dois movimentos de Reidemester, é necessário que as condições 1) e 2) da Subseção 4.3.2 sejam satisfeitas.

Para estudos de isotopia legendreana, a projeção frontal é mais conveniente, porque nós sabemos precisamente quais diagramas representam projeções frontais de nós legendreanos.

5 Invariantes de nós legendreanos

Vimos nos primeiros capítulos, os conceitos de invariante e de isotopia legendreana. Nosso objetivo neste, é apresentar invariantes de isotopia legendreana que distinguem estas classes. Então, para nós legendreanos introduzimos dois clássicos invariantes de isotopia legendreana. São eles o número de Bennequin e o número de Maslov, que podem ser usados para distinguir classes de isotopia de nós legendreanos na mesma classe de isotopia topológica.

Embora não seja sempre essencial, consideraremos nesta seção nós legendreanos orientados.

5.1 Números de Bennequin e Maslov

5.1.1 Número de Thurston-Bennequin

Para facilidade de expressão nos referiremos ao invariante de Thurston-Bennequin simplesmente por invariante de Bennequin.

Dado um nó legendreano K , o invariante de Bennequin mede intuitivamente o número de rotações dos planos de contato ξ em torno de K .

Mais rigorosamente, este invariante é definido por uma trivialização de um fibrado normal ν de K . Uma identificação fixa de ν com $K \times \mathbb{R}^2$ é chamada uma *trivialização* de ν ou um *referencial* de K . Um nó legendreano tem um referencial canônico, desde que ξ_x e ν_x intersectam-se transversalmente ($T_x K \subset \xi_x$) gerando um fibrado em linha, $l_x = \xi_x \cap \nu_x$. O fibrado em linha dá um referencial de ν sobre K . Este referencial é o *referencial de Thurston-Bennequin* de K .

Se o fibrado normal tem um outro referencial \mathcal{F} então nós podemos determinar um número para o referencial de Thurston-Bennequin de K . Este número $t\omega(K, \mathcal{F})$ é justamente a rotação de l com respeito a \mathcal{F} e é chamado de rotação de K com respeito a \mathcal{F} . Se K é homólogo a zero, então K tem um referencial dado por uma superfície de Seifert, ou seja, o referencial que é dado pelo campo vetorial que aponta para dentro da superfície de Seifert. A

rotação de K com respeito a este referencial será chamada de *invariante de Thurston-Bennequin* de K e será denotada por $\beta(K)$.

Definição 5.1.1 *Seja v um campo de vetores não nulo ao longo de K em $\nu \cap \xi$ e seja K' uma cópia de K obtida por um movimento de K na direção de v . O número de Thurston-Bennequin, $\beta(K)$, é o número de enlaçamento entre K e K' , isto é, $\beta(K) = lk(K, K')$.*

Observação 5.1.2 *Se v' é um campo de vetores não nulo ao longo de K transversal a ξ e K'' é obtido de K por um movimento de K na direção de v' então $\beta(K) = lk(K, K'')$.*

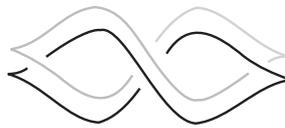


Figura 5.1: Nó K (preto) e nó K' (cinza) obtido de K por um movimento na direção de v .

Seja K um nó legendreano na variedade de contato (M, ξ) , onde ξ tem orientação transversal. Sendo K orientado, cada curva transversal possui orientação canônica. Se movimentarmos o nó K na direção positiva ou negativa do campo de vetores normais v de K , de modo que v é um referencial de K , obteremos dois novos nós K_+ e K_- , respectivamente. Note que os nós K_+ e K_- são transversais a ξ e, conseqüentemente, K_+ possui a orientação de K e K_- a orientação oposta de K .

Considere agora nós legendreanos em $(\mathbb{R}^3, \xi_{can})$. Interpretemos o invariante de Thurston-Bennequin em termos das projeções frontal e lagrangeana.

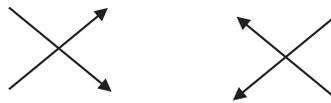


Figura 5.2: Cruzamento positivo (+), na projeção frontal.



Figura 5.3: Cruzamento negativo(-), na projeção frontal.

Proposição 5.1.3 *Seja K um nó legendreano orientado em $(\mathbb{R}^3, \xi_{can})$. Na projeção frontal tem-se*

$$\beta(K) = Cr_+(K) - Cr_-(K) - \frac{1}{2}C(K), \quad (5-1)$$

onde $Cr_+(K)$ ($Cr_-(K)$) é o número de cruzamentos positivos (negativos) da projeção $\pi_F(K)$, $C(K)$ é o número de cúspides.

Prova. Seja $v = \frac{\partial}{\partial z}$, para qualquer nó legendreano K , v então v é um campo de vetores transversais a ξ ao longo de K (como na observação 5.1.2). Assim $\beta(K)$ é o número de enlaçamento de K com uma cópia K' de K obtida por um ligeiro movimento na direção z . Então, as projeções frontais de K e K' são como na Figura 5.1. Agora, o número de enlaçamento de K e K' é a metade do número (contados os sinais) de interseções entre eles. Lembremos que K e K' são orientados. Observe que para cada cruzamento positivo (negativo) da projeção de K existirá dois cruzamentos positivos (negativos) de K e K' e para cada cúspide positiva ou negativa de K existirá um cruzamento negativo de K e K' . Assim, na projeção frontal temos, $\beta(K) = Cr_+(K) - Cr_-(K) - \frac{1}{2}C(K)$.

■

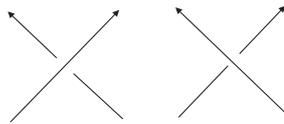


Figura 5.4: Cruzamento positivo (+) e negativo (-) respectivamente.

Proposição 5.1.4 *Seja K um nó legendreano em \mathbb{R}^3 . Na projeção lagrangeana tem-se*

$$\beta(K) = Cr_+ - Cr_-$$

Prova. Na projeção lagrangeana K e K' projetam o mesmo diagrama. De fato, $\beta(K)$ é o número de enlaçamento de K e K' . Na projeção lagrangeana se ao fazer o ligeiro movimento para obter K' , e este não intersectar K , então o número de enlaçamento é zero. Além disso, cada cruzamento no diagrama de K contribui (± 1) para o número de enlaçamento. Daí segue o resultado. ■

Corolário 5.1.5 *O número de Thurston-Bennequin independe da orientação do nó K .*

Exemplo 5.1.6 *A Figura 5.5 mostra as projeções lagrangeana e frontal de um nó trevo. A projeção lagrangeana possui 3 cruzamentos positivos e 2 negativos, logo o número de Bennequin do nó trevo T , é $\beta(K) = 3 - 2 = 1$. A projeção frontal possui 4 cúspides e 3 cruzamentos positivos, logo $\beta(T) = 3 - \frac{4}{2} = 1$.*

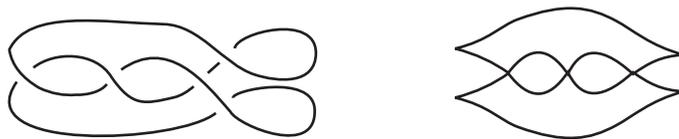


Figura 5.5: Projeção lagrangeana e frontal do nó trevo T.

Teorema 5.1.7 *O número de Bennequin β é um invariante de isotopia legendreana.*

Prova. Analisaremos a veracidade deste teorema examinando os três movimentos de Reidemeister.

Se o primeiro movimento é realizado, ou duas cúspides e um cruzamento positivo são perdidos, produzindo uma mudança de zero, ou duas cúspides e um cruzamento positivo são acrescentados, produzindo uma mudança de zero. Assim, o primeiro movimento de Reidemeister não altera o número de Bennequin.

Se o segundo movimento de Reidemeister é realizado, um cruzamento positivo e um negativo são perdidos, produzindo uma mudança de zero.

Se o terceiro movimento de Reidemeister é realizado, um cruzamento positivo e um negativo são perdidos, e um cruzamento positivo e um negativo são acrescentados também produzindo uma mudança de zero. ■

5.1.2 Número de Maslov

O segundo e último invariante clássico de nós legendreanos K é o número de Maslov. Este invariante é bem definido para nós homólogos a zero, assim assumimos que $K = \partial\Sigma$ onde Σ é um mergulho de uma superfície orientável. Os planos de contato, quando restrito a Σ ($\xi|_{\Sigma}$), formam um fibrado trivial bidimensional (qualquer fibrado dois planos orientável é trivial sobre uma superfície com bordo). Esta trivialização de $\xi|_{\Sigma}$ induz uma trivialização $\xi|_K = K \times \mathbb{R}^2$. Lembremos que K tem uma orientação, então seja v um campo de vetores não nulo tangentes a K apontando na direção da orientação de K . O campo de vetores v está em $\xi|_K = K \times \mathbb{R}^2$ e usando esta trivialização, nós podemos pensar em v como uma trajetória de vetores não nulos em \mathbb{R}^2 , tal que ela tem um número de rotação. Este número de rotação é o número de Maslov de K . Note que o número de rotação depende da orientação de K e muda de sinal se a orientação é trocada.

Considere agora nós legendreanos em $(\mathbb{R}^3, \xi_{can})$. Interpretemos o invariante de Maslov em termos das projeções frontal e lagrangeana.

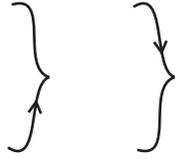


Figura 5.6: Cúspides positivas e negativas, respectivamente.

Proposição 5.1.8 *Seja K um nó legendreano em \mathbb{R}^3 . Na projeção frontal tem-se*

$$\mu(K) = \frac{1}{2}(C_+ - C_-),$$

onde $C_+(C_-)$ é o número de cúspides positivas (negativas).

Prova. Seja $\omega = \frac{\partial}{\partial y}$. Esta é uma parte não nula de ξ e assim pode ser usada para trivializar $\xi|_K$ independente da superfície de Seifert de K . Agora, para calcular o número de rotações de K , precisamos saber quantas vezes o campo de vetores (não nulo) ν tangente a K , pensando em \mathbb{R}^2 pela trivialização dada por ω , rotaciona em torno da origem de \mathbb{R}^2 . Isto é equivalente a contar quantas vezes ν e ω apontam na mesma direção, chamaremos isto de interseção de ν e ω . O sinal da interseção é determinado como anteriormente (+1 e -1), veja as Figuras 5.2 e 5.3. Nas cúspides na projeção frontal, ν aponta na direção de $\pm\omega = \frac{\partial}{\partial y}$. Pode-se facilmente verificar que a interseção será positiva quando a cúspide é positiva e negativa quando a cúspide é negativa. Além disso, o processo acima conta o número de vezes que ν intersecta $\pm\omega$, então dividimos por dois e obtemos o número de Maslov. ■

Exemplo 5.1.9 *O número de Maslov do nó trevo T (Figura 5.5) é $\mu(T) = \frac{1}{2}(2 - 2) = 0$.*

Proposição 5.1.10 *Seja K um nó legendreano em \mathbb{R}^3 . Na projeção lagrangeana tem-se*

$$\mu(K) = \text{número de rotações de } \pi_L(K).$$

Prova. Seja $\omega = \frac{\partial}{\partial y}$. Na projeção lagrangeana ω projeta $\frac{\partial}{\partial y}$ e assim o número de rotação é facilmente visto como o número de rotação do vetor tangente a $\pi_L(K)$. ■

Proposição 5.1.11 *O número de Maslov de um nó K , $\mu(K)$, é um invariante de isotopia legendreana.*

Prova. Desde que o segundo e o terceiro movimento de Reidemeister não alteram o número de cúspides positivas ou negativas, precisamos checar a

invariância do primeiro movimento. Considerando a orientação, o primeiro movimento de Reidemeister ou remove ou adiciona uma cúspide positiva e uma cúspide negativa. Nem a adição nem a remoção muda o número de Maslov. Portanto o número de Maslov é um invariante de isotopia legendreana. ■

Exemplo 5.1.12 *Seja K um nó legendreano com número de Maslov igual a zero e seja K' sua imagem pelo difeomorfismo $f(x, y, z) = (x, -y, -z)$. Sendo f uma rotação do espaço, K' é topologicamente isotópico a K , além disso $\mu(K') = -\mu(K) = 0$ e $\beta(K') = \beta(K)$. Pergunta-se K e K' são isotópicos por isotopia legendreana ?.*

Definição 5.1.13 *A reflexão legendreana $R(K)$ é a imagem de um nó legendreano K pelo difeomorfismo $(x, y, z) \mapsto (x, -y, -z)$.*

Desde que a reflexão legendreana é somente uma rotação de um nó no espaço, ela tem o mesmo tipo de isotopia topológica que a do próprio nó.

Proposição 5.1.14 *A reflexão legendreana $R(K)$ e K não são isotopia legendreana.*

Para a prova deste teorema ver (4), em que Chekanov mostrou este resultado usando outro tipo de invariante legendreano, as álgebras graduadas diferenciais ou DGAs.

Desde que os cruzamentos de um nó legendreano são determinados pelas inclinações dos segmentos em cada cruzamento, a imagem refletida de um nó legendreano troca essas inclinações. Isto pode ser realizado pela rotação do diagrama frontal por um ângulo de $\frac{\pi}{2}$, e então, substituindo os pontos de tangência vertical por cúspides e vice-versa.

5.2 Estabilização

Dado um nó legendreano K , existe um modo simples de se obter outro nó legendreano com o mesmo tipo de nó topológico; através da estabilização. Nosso principal objetivo é mostrar que, através da estabilização, é possível diminuir o número de Bennequin de um nó legendreano e assim introduziremos o conceito de cota superior e portanto o número máximo de Bennequin. Descrevemos a estabilização na estrutura de contato canônica em \mathbb{R}^3 , ou seja, em $(\mathbb{R}^3, \xi_{can})$.

A estabilização de um nó pela projeção frontal é realizada da seguinte maneira: Se um segmento do nó K na projeção frontal de K está em linha reta, então a estabilização de K é obtida acrescentando zig-zags como mostra a figura 5.7. Deve-se notar que o coeficiente angular aproximado dos zig-zags é próximo ao valor de y . A essa operação chamamos de estabilização. Se as cúspides a serem acrescentadas são positivas (negativas), a *estabilização* é dita *positiva* (negativa) e denotada por $S_+(S_-)$. Note que, se um zig-zag com duas cúspides é inserido, então

$$\beta(S_{\pm}(K)) = \beta(K) - 1$$

$$\mu(S_{\pm}(K)) = \mu(K) \pm 1.$$

É importante observar que a operação de estabilização é bem definida, ou seja, não depende do ponto em que a estabilização é feita. Em \mathbb{R}^3 , observe que os zig-zags podem ser feitos passando por cúspides e cruzamentos na projeção frontal. Além disso, pelo teorema de Darboux, a operação de estabilização pode ser estendida a qualquer variedade de contato de dimensão 3.

Analogamente, temos a estabilização de um nó pela projeção lagrangeana. Um importante resultado segue abaixo.

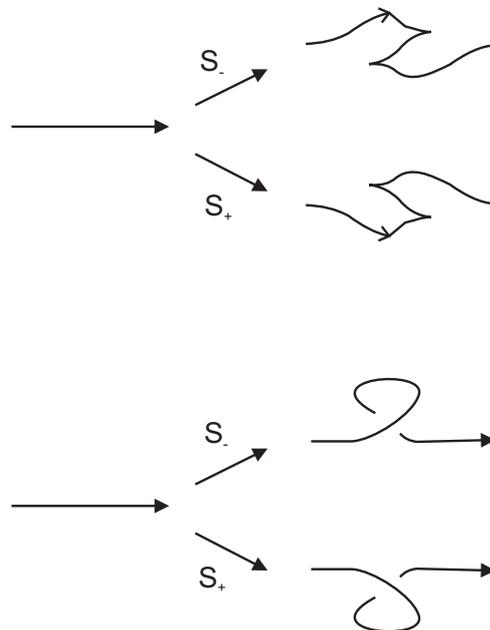


Figura 5.7: Estabilizações nas projeções frontal (superior) e lagrangeana (inferior).

Teorema 5.2.1 (Ver (39) 2.7) *Dado dois nós legendreanos K_1 e K_2 em $(\mathbb{R}^3, \xi_{can})$ isotópicos topologicamente, então depois de cada um ser estabilizado um certo número de vezes, eles serão isotópicos por isotopia legendreana.*

Assim, a classificação topológica de nós é equivalente a classificação estável legendreana de nós. Verificamos que os movimentos de Reidemester para nós topológicos podem ser alterados por movimentos de Reidemester para nós legendreanos após um número suficiente de estabilizações e assim constatamos o teorema.

Note que, usando a estabilização fazemos com que nós legendreanos tenham o número de Bennequin negativo. Basta observar que o número de Bennequin dado pela Equação 5-1 diminui a medida que o número de cúspides aumenta, então basta fazer a estabilização acrescentando um número suficiente de cúspides.

Veremos que, em estruturas de contato tensas, existem cotas superiores do número de Bennequin para nós legendreanos com o mesmo tipo de nó topológico subjacente.

Enquanto estabilizar um nó é relativamente simples, não é necessariamente fácil desestabilizar um nó.

Definição 5.2.2 *Seja K um nó legendreano. Dizemos que K é desestabilizável se existe um nó legendreano K' tal que $K = \pm S(K')$.*

5.3

Cotas superiores

Na estrutura de contato canônica em \mathbb{R}^3 , ou mais geralmente em uma estrutura de contato tensa, existem muitas cotas superiores de invariantes clássicos de nós legendreanos e transversais. A busca pela menor cota superior, ou seja, o número máximo, do invariante de Bennequin, resultou em interessantes desigualdades.

Como nosso interesse são os nós legendreanos, nossa abordagem se resume a cotas superiores de invariantes de nós legendreanos.

Proposição 5.3.1 (Ver (24)) *Seja T um nó transversal em $(\mathbb{R}^3, \xi_{can})$, então $\beta(T) \leq -\chi(\Sigma_T)$, onde $\chi(\Sigma_T)$ é a característica de Euler da superfície de Seifert do nó T .*

Teorema 5.3.2 *Sejam K nó legendreano em $(\mathbb{R}^3, \xi_{can})$, K_+ e K_- como acima. Então*

$$\beta(K_+) = \beta(K) + \mu(K)$$

$$\beta(K_-) = \beta(K) - \mu(K).$$

Prova. Sejam X um campo de vetores não nulo. O número $\beta(K_+)$ é o número de enlaçamento de $K_+ = K + \epsilon v$ e $K_+ + \epsilon' X = K + \epsilon v + \epsilon' X$, para $\epsilon' > 0$ pequeno. Note que desde que v é perpendicular a K , o número $\beta(K)$ é o número de enlaçamento de K e $K + \epsilon v$, e além disso é também o número de enlaçamento de $K + \epsilon' X$ e $K + \epsilon v + \epsilon' X$. Assim, $\beta(K_+) - \beta(K)$ é o número de rotação de v com respeito a X , que é igual a $\mu(K)$. Isto prova a igualdade $\beta(K_+) = \beta(K) + \mu(K)$. A prova da segunda igualdade é análoga. ■

Corolário 5.3.3 *Seja K nó legendreano em $(\mathbb{R}^3, \xi_{can})$ com superfície de Seifert Σ_K . Então*

$$\beta(K) + |\mu(K)| \leq -\chi(\Sigma_K) \quad (5-2)$$

Prova. Do fato de K_+ e K_- serem nós transversais a ξ_{can} e isotópicos a K , temos que

$$\beta(K) = \beta(K_+) + \mu(K) \quad \text{e} \quad \beta(K) = \beta(K_-) - \mu(K).$$

Pelo teorema 5.3.2, e pela proposição 5.3.1 segue que

$$\beta(K) \leq -\chi(K) - \mu(K) \quad \text{e} \quad \beta(K) \leq -\chi(K) + \mu(K)$$

logo,

$$\beta(K) \leq -\chi(\Sigma_K) - |\mu(K)|$$

■

Corolário 5.3.4 *Seja K um nó legendreano topologicamente trivial em $(\mathbb{R}^3, \xi_{can})$, então $\beta(K) < 0$.*

Prova. Como K é nó trivial, temos que $\chi(\Sigma_K) = 1$. Pelo Corolário 5.3.3 $\beta(K) \leq -1 - |\mu(K)| < 0$. ■

Teorema 5.3.5 (Ver (13)) *Dada uma estrutura de contato ξ , são equivalentes:*

(i) ξ é supertorcida.

(ii) Existe um nó legendreano não trivial com invariante de Thurston-Bennequin igual a zero.

(iii) Existe um nó transversal não trivial com número de enlaçamento igual a zero.

Definição 5.3.6 *Seja \mathcal{K} um tipo de nó topológico em \mathbb{R}^3 e $\mathcal{L}(\mathcal{K})$ classe de nós legendreanos isotópicos ao tipo de nó \mathcal{K} . Definimos o número máximo de Thurston-Bennequin por:*

$$\max\beta(K) = \max\{\beta(K); K \in \mathcal{L}(\mathcal{K})\}$$

Teorema 5.3.7 *Seja K um nó legendreano, então:*

- 1) $\beta(K) + |\mu(K)| \leq 2g(K)$;
- 2) $\beta(K) + |\mu(K)| \leq \text{graumin}_a P_K$;
- 3) $\beta(K) \leq \text{graumin}_a F_K$,

onde $g(K)$ denota o gênero de K e $\text{graumin}_a P_K$ ($\text{graumin}_a F_K$) denota o grau mínimo da variável a do polinômio P_K de HOMFLY (F_K de Kauffman).

As demonstrações das desigualdades deste teorema encontram-se em (1) e (39), Teorema 2.3.

6

Número Máximo de Thurston-Bennequin para nós de 2-pontes

Pelas considerações feitas no capítulo anterior, sabemos que para um tipo de nó, somos capazes, através da estabilização, de diminuir sem limites o número de Thurston-Bennequin sem mudar a classe de isotopia ambiente. Contudo, o conjunto dos possíveis números de Thurston-Bennequin dos nós legendreanos isotópicos a um nó subjacente é limitado superiormente. Então, é natural tentar encontrar o número máximo de Bennequin, $\max\beta$, para uma classe de nós legendreanos.

Vários estudos com a finalidade de estabelecer este número foram realizados. A primeira cota superior foi provada por Bennequin (1) em termos do gênero do nó K . Desde então, outras cotas superiores tem sido encontradas, em particular em termos dos polinômios de HOMFLY e Kauffman.

O objetivo de encontrar um número mais próximo do número máximo de Thurston-Bennequin de uma classe de nós legendreanos isotópicos a um nó topológico levaram matemáticos como Ng, Ferrand, Rudolph, Bennequin, entre outros, a nos fornecerem diversas desigualdades, ver (15).

Veremos neste capítulo um importante e recente resultado obtido por Ng, para nós de 2-pontes, que inclui todos os nós primos com até 9 e 10 cruzamentos, resultado este para nós primos com maior número de cruzamentos até então obtido.

Embora o título deste capítulo se refira a nós, nos referiremos a nós ou enlaces apenas por nós, e ainda ao número de Thurston-Bennequin simplesmente por número de Bennequin. É importante mencionar que consideraremos os nós de 2-pontes em forma canônica, e mantendo a notação do capítulo 3, nos referiremos aos nós de 2-pontes em forma canônica por C . Lembremos ainda que os nós serão representados por seus diagramas. Nosso objetivo neste capítulo é provar o teorema do número máximo de Bennequin para nós de 2-pontes.

Teorema 6.0.8 Teorema do Número Máximo de Thurston-Bennequin para nós de 2-pontes

Se K é um nó de 2-pontes orientado, então

$$\max \beta(K) = \text{graumin}_a F_K(a, x) - 1$$

Antes de iniciarmos a demonstração do teorema 6.0.8, apresentaremos os resultados utilizados na demonstração.

6.1 Forma racional legendreana

Seja $C(a_1, a_2, \dots, a_n)$ um nó de 2-pontes em forma racional, com todos os a_i 's > 0 , o qual corresponde a um número racional $\frac{p}{q}$, que tem expansão em fração contínua dada por

$$[a_1, a_2, \dots, a_n] = a_1 + \frac{1}{-a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{-a_4 + \dots + \frac{1}{\dots + \frac{1}{(-1)^{n-1}a_n}}}}}$$

onde $\text{mdc}(p, q) = 1$.

Considere as torções horizontais (figura 6.1), como no capítulo 3.



Figura 6.1: Torção horizontal positiva e negativa respectivamente.

Para mais detalhes sobre nós de 2-pontes e nós racionais, ver capítulo 3.

Nosso objetivo é encontrar adequadamente um mergulho legendreano de um nó de 2-pontes, tal que seu diagrama esteja na forma racional.

Proposição 6.1.1 Se $\frac{1}{[a_1, a_2, \dots, a_n]} - \frac{1}{[b_1, b_2, \dots, b_n]} \in \mathbb{Z}$, então os nós de 2-pontes $C_1(a_1, a_2, \dots, a_n)$ e $C_2(b_1, b_2, \dots, b_n)$ são isotópicos.

Prova. Sejam $C_1(a_1, a_2, \dots, a_n)$ e $C_2(b_1, b_2, \dots, b_n)$ nós de 2-pontes associados aos números racionais $\frac{p}{q}$ e $\frac{p'}{q'}$ respectivamente, tais que $\frac{p}{q} = [a_1, a_2, \dots, a_n]$ e

$\frac{p'}{q'} = [b_1, b_2, \dots, b_n]$. Suponha que,

$$\frac{q}{p} - \frac{q'}{p'} = \frac{1}{[a_1, a_2, \dots, a_n]} - \frac{1}{[b_1, b_2, \dots, b_n]} = k \in \mathbb{Z}.$$

Do fato das frações serem frações reduzidas e a diferença entre as frações ser um inteiro, segue que $p = p'$. Assim $\frac{q - q'}{p} = k \in \mathbb{Z}$, o que implica que $q - q' = pk$. Portanto, $q \equiv q' \pmod{p}$. Concluimos então pelo teorema 3.2.4 que os nós $C_1(a_1, a_2, \dots, a_n)$ e $C_2(b_1, b_2, \dots, b_n)$ são isotópicos. ■

Ressaltamos que esta proposição garante somente a condição suficiente para equivalência de nós, porém a condição necessária para que dois tais nós sejam isotópicos é mais complicado e não nos interessa aqui.

Definição 6.1.2 Dizemos que um nó de 2-pontes $C(a_1, a_2, \dots, a_n)$ está em forma racional legendreana, se $a_i \geq 2$ para todo i .

Embora $C(a_1, a_2, \dots, a_n)$ corresponda a um nó legendreano, sempre que $a_i \geq 1$ para todo i , consideraremos somente os casos em que $a_i \geq 2$. De fato, se um dos $a_i = 1$, então sem dificuldades vemos pela projeção frontal, que o nó legendreano não maximiza o número de Bennequin, o que não nos interessa.

Qualquer diagrama de nó legendreano na forma racional é facilmente convertido em um diagrama frontal (isto é, projeção no plano xz) de um nó legendreano, através da substituição das quatro tangentes verticais por cúspides, como podemos observar na Figura 6.2. Desde que os cruzamentos na projeção frontal são determinados localmente, sendo os segmentos com menor inclinação o segmento que passa por cima dos de maior inclinação, um diagrama de nó em forma racional legendreana é a projeção frontal de um único nó legendreano. Podemos observar na Figura 6.2 a correspondência entre forma racional legendreana (neste caso, $T(2,2,3)$) e a projeção frontal do nó de mesmo tipo ambiente.

Lema 6.1.3 Qualquer nó de 2-pontes pode ser expressado como um diagrama em forma racional legendreana.

Prova. Seja $C(a_1, a_2, \dots, a_n)$ um nó de 2-pontes em forma racional associado ao número racional $\frac{p}{q}$; escrevemos $[a_1, a_2, \dots, a_n] = \frac{p}{q}$, com $p, q \in \mathbb{Z}$. Temos então que $\left[\frac{q}{p} \right] \in \mathbb{Z}$. Além disso,

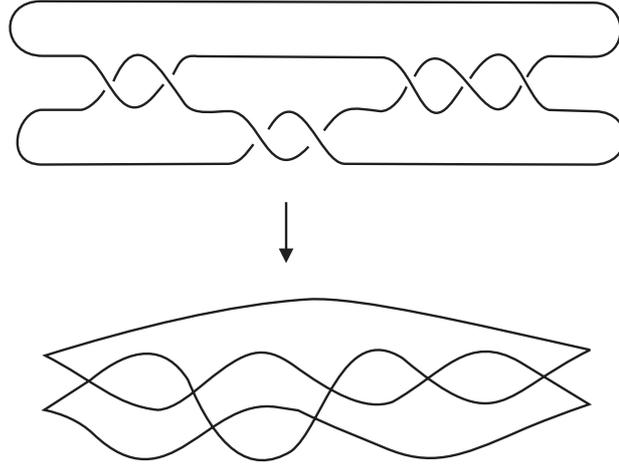


Figura 6.2: Correspondência entre um diagrama em forma racional legendreana e a projeção frontal de um nó legendreano do mesmo tipo topológico.

$$\frac{1}{\frac{p}{q}} - \frac{1}{\frac{p}{q - \lfloor \frac{q}{p} \rfloor p}} = \frac{q}{p} - \frac{q - \lfloor \frac{q}{p} \rfloor}{p} = \frac{q - (q - \lfloor \frac{q}{p} \rfloor p)}{p} = \frac{\lfloor \frac{q}{p} \rfloor p}{p} = \lfloor \frac{q}{p} \rfloor \in \mathbb{Z}$$

e

$$0 < \frac{q}{p} - \lfloor \frac{q}{p} \rfloor < 1 \implies \frac{p}{\frac{q}{p} - \lfloor \frac{q}{p} \rfloor} > 1. \tag{6-1}$$

Portanto, pela proposição 6.1.1, $C(a_1, a_2, \dots, a_n)$ é isotópico a qualquer nó de 2-pontes com diagrama na forma racional associado a fração $r = \frac{p}{q - \lfloor \frac{q}{p} \rfloor p} > 1$. Observe que, se $\frac{q}{p}$ é um inteiro então C é o nó trivial e não é nó de 2-pontes.

Agora defina a sequência x_1, x_2, \dots de número racionais por $x_1 = r, \dots, x_{i+1} = \frac{1}{\lceil x_i \rceil - x_i}$. A sequência termina em x_m , quando x_m é um inteiro, pois x_m é uma fração contínua. Faça $b_i = \lceil x_i \rceil$ e observe que $r = [b_1, b_2, \dots, b_m]$. Suponha agora que $b_i < 2$ para algum i , e $r > 0$. Assim,

$$b_i = \left\lceil \frac{1}{\lceil x_{i-1} \rceil - x_{i-1}} \right\rceil < 2 \implies \left\lceil \frac{1}{\lceil x_{i-1} \rceil - x_{i-1}} \right\rceil = 1 \implies \lceil x_{i-1} \rceil - x_{i-1} \geq 1$$

o que é uma contradição. Logo $b_i \geq 2$ para todo i .

Concluimos que $C(a_1, a_2, \dots, a_n)$ é isotópico a $S(b_1, b_2, \dots, b_m)$, que está em forma racional legendreana. ■

6.2

Demonstração do Teorema do Número Máximo de Thurston-Bennequin para nós de 2-pontes

Teorema 6.2.1 (Ver (39)) *Seja $F_K(a, x)$ o polinômio de Kauffman de um nó K orientado, então*

$$\beta(K) \leq \text{graumin}_a F_K(a, x) - 1.$$

O teorema foi demonstrado por Fuchs e Tabachnikov em (39), utilizando um invariante para nós legendreanos em termos do polinômio de Kauffman, definido por Rudolph (34) em 1990. Este teorema nos dá uma cota superior para o número de Bennequin, a qual mostraremos ser o número máximo de Bennequin para nós legendreanos isotópicos ao nó de 2-pontes.

Lema 6.2.2 *Seja $C(a_1, a_2, \dots, a_n)$ um nó de 2-pontes, onde $a_1, a_n \geq 1$ e $a_i \geq 2$ para $2 \leq i \leq n - 1$, então $\text{graumin}_a R_{C(a_1, a_2, \dots, a_n)}(a, x) = -1$.*

Prova. Lembremos que o polinômio de Kauffman de um nó de 2-pontes em forma racional C (abreviamos $C(a_1, a_2, \dots, a_n)$) é definido por $F_C(a, x) = a^{w(t)} R_C(a, x)$ (aqui substituímos a por $\frac{1}{a}$), onde $R_C(a, x)$ é definido como no teorema 3.3.1, ou seja,

$$R_{C(a_1, a_2, \dots, a_n)}(a, x) = \frac{1}{a} v^t M^{-a_1-1} S M^{-a_2-1} S \dots M^{-a_n-1} S w,$$

onde t denota transposta e

$$M = \begin{pmatrix} x & -1 & x \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix} \quad S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{a} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \omega = \begin{pmatrix} a \\ a^2 \\ \frac{a^2+1}{x} - a \end{pmatrix}.$$

Note que, da forma que $R_C(a, x)$ é definido, nenhum dos termos M^{-1} , $M^{-1}S$ e w contém potências negativas de a . Assim, o lema ficará provado se $f(x) \neq 0$, onde

$$f(x) = (v^t M^{-a_1} (M^{-1}S) M^{-a_2} (M^{-1}S) \dots M^{-a_n} (M^{-1}S) w)|_{a=0}.$$

Após um pequeno cálculo obtemos as matrizes:

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & x & ax \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \quad (M^{-2}SM^{-1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & ax & -ax^2 - a + ax^2 \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix}.$$

Defina as matrizes auxiliares:

$$A = M^{-1}|_{a=0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = (M^{-2}SM^{-1})|_{a=0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

A partir das matrizes definidas acima, obtemos:

$$(ASw)|_{a=0} = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} \\ x \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{x}Au = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} \\ x \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (Auv^t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Portanto,

$$(ASw)|_{a=0} = \frac{1}{x}Au \quad e \quad B = Auv^t$$

Nosso objetivo agora é escrever $f(x)$ em termos das matrizes obtidas. Vejamos:

$$\begin{aligned} f(x) &= (v^t M^{-a_1} (M^{-1}S) M^{-a_2} (M^{-1}S) \dots M^{-a_n} (M^{-1}S) \omega)|_{a=0} \\ &= (v^t (M^{-1})^{a_1-1} M^{-2} S M^{-1} (M^{-1})^{a_2-2} M^{-2} S \dots M^{-a_n} (ASw))|_{a=0} \\ &= (v^t A^{a_1-1} B A^{a_2-2} B A^{a_3-2} \dots (ASw))|_{a=0} \\ &= (v^t A^{a_1-1} (Auv^t) A^{a_2-2} (Auv^t) A^{a_3-2} \dots (\frac{1}{x}Au))|_{a=0} \\ &= (v^t (A^{a_1} u v^t) (A^{a_2-1} u v^t) (A^{a_3-1} u v^t) \dots (\frac{1}{x}Au))|_{a=0} \\ &= \frac{1}{x} (v^t A^{a_1} u) (v^t A^{a_2-1} u) (v^t A^{a_3-1} u) \dots (v^t A^{a_{n-1}-1} u) (v^t A^{a_n} u). \end{aligned}$$

Por hipótese $a_i \geq 2$ para $2 \leq i \leq n-1$, o que garante que $(v^t A^{a_k-1} u)$ é não nulo para $2 \leq k \leq (n-1)$; dessa forma precisamos somente verificar que os termos $(v^t A^{a_1} u)$ e $(v^t A^{a_n} u)$ são não nulos.

Considere a sequência $f_k(x) = v^t A^k u$. Afirmamos que para todo $k \geq 1$, $f_k(x)$ tem grau $(k-1)$ e, portanto, é não nulo.

Considere $f_1(x) = v^t A u$ e $f_2(x) = v^t A^2 u$, então

$$f_1(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$$

$$f_2(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x & 0 \\ -x & x^2 - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = x.$$

Portanto, $f_1(x) = 1$ tem grau 0 e $f_2(x) = x$ tem grau 1. Agora basta mostrar que $f_k(x)$ tem grau $(k-1)$ para $k \geq 3$. Considere a função

$$x f_{k+1}(x) - f_k(x) = x v^t A^{k+1} u - v^t A^k u = (x v^t A - v^t) A^k u.$$

Temos que,

$$(x v^t A - v^t) = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & x & 0 \end{pmatrix}$$

e

$$(v^t A^2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & x & 0 \\ -x & x^2 - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & x & 0 \end{pmatrix}.$$

Assim, $(x v^t A - v^t) A^k u = (v^t A^2) A^k u$ e, portanto, $f_{k+2}(x) = x f_{k+1}(x) - f_k(x)$. Então, mostrar que $f_k(x)$ tem grau $(k-1)$ para todo $k \geq 3$ é o mesmo que mostrar que $f_{k+2}(x)$ tem grau $(k+1)$ para todo $k \geq 1$.

Primeiramente, se $k=1$ temos que $f_3(x) = x f_2(x) - f_1(x) = x^2 - 1$ e, portanto, $f_3(x)$ tem grau $(1+1)$. Suponha que $f_{k+2}(x) = x f_{k+1}(x) - f_k(x)$ tem grau $(k+1)$, para algum $1 \leq k \leq l$. Seja $f_{l+3}(x) = x f_{l+2}(x) - f_{l+1}(x)$; por hipótese de indução $f_{l+2}(x)$ tem grau $(l+1)$, e portanto, $x f_{l+2}(x)$ tem grau $(l+2)$. Como o grau $f_{l+1}(x)$ é menor que o grau de $f_{l+2}(x)$, segue que $f_{l+3}(x)$

tem grau $l+2$. Assim, para todo $k > 1$, $f_{k+2}(x)$ tem grau $(k+1)$.

Concluimos que $f(x)$ é não nulo e, portanto, o

$$\text{graumin}_a R_{C(a_1, a_2, \dots, a_n)}(a, x) = -1.$$

■

Prova do teorema 6.0.8:

Prova. Seja K um nó de 2-pontes e $C(a_1, a_2, \dots, a_n)$ uma forma racional legendreana associada ao nó K , que chamaremos de K' . Como K' é nó de 2-pontes, o seu diagrama possui 4 cúspides, e portanto, podemos escrever a equação do número de Bennequin da seguinte forma: $\beta(K') = (C_+ - C_-) - 2$. Assim,

$$\begin{aligned} \beta(K') &= (C_+ - C_-) - 2 \\ &= w(K') - 2 \\ &= (\text{graumin}_a F_{K'}(a, x) - \text{graumin}_a L_{K'}(a, x)) - 2 \\ &= \text{graumin}_a F_{K'}(a, x) - 1, \end{aligned}$$

pelo Lema 6.2.2.

Sendo K' isotópico topologicamente a K , então pelo Teorema 6.2.1, concluimos que $\max\beta(K) = \text{graumin}_a F_K(a, x) - 1$. ■

Referências Bibliográficas

- [1] D. Bennequin, *Entrelacements et equations de Pfaff*, Asterisque 107-108 (1983), 87-161. 1, 4, 4.1, 5.3, 6
- [2] G. Burde, H. Zieschang, *Knots*, Walter de Gruyter (1985). 2.7
- [3] E. J. Brody, *The topological Classification of the Lens Spaces*, Ann. of Math. vol.71 (1960), 163-184, $\langle K21, M \rangle$. 3.2
- [4] Yu. Chekanov, *New invariants of Legendrian Knots*, European Congress of Mathematics, vol. 2, Barcelona (2000), 525-534. 5.1.2
- [5] L. Conlon, *Differentiable Manifolds, a first course*, Birkhäuser, Boston, Berlin (1993).
- [6] J. H. Conway, *An enumeration of knots and links and some of their related properties*, 1970, 1967, 329-358, proc. conf. oxford. 3, 3.1.1
- [7] R. H. Cromwell, R. H. Fox, *Introduction to Knot Theory*, Graduate Texts in Mathematics, 57 Springer Verlag (1963). 2.2.8
- [8] K. Dymara, *Legendrian knots in Overtwisted Contact Structures*, arXiv:math.GT/0410122, vol.2, 18 Jan. 2005.
- [9] Y. Eliashberg, *Classification of overtwisted contact structures on 3-manifolds*, Invent. Math. 98 (1989), 623-637. 4.1
- [10] Y. Eliashberg, *Contact 3-manifolds twenty years since J. Martinet's work*, Ann. Inst. Fourier 42 (1992), 165-192. 4.1, 4.1.13
- [11] J. B. Etnyre, *Introductory Lectures on Contact Geometry*, arXiv:math.SG/0111118, vol.2, 11 Nov. 2002. 4.1
- [12] J. B. Etnyre, *Lectures on open book decompositions and contact Structures*, arXiv:math.SG/0409402, vol.3, 2 May. 2005.
- [13] J. B. Etnyre, *Legendrian and transversal knots*, arXiv:math.SG/0306256, vol.2, 22 Nov. 2004. 5.3.5

- [14] J. B. Etnyre, K. Honda, *Knots and contact Geometry*, arXiv:math.GT/0006112, vol.1, 15 Jun. 2000.
- [15] E. Ferrand, *On Legendrian Knots and polynomial invariants*, arXiv:math.GT/0002250, vol.3, 21 Jul.2000. 2.8, 6
- [16] H. Geiges, *Contact Geometry*, arXiv:math.SG/0307242, vol.2, 24 Jan. 2004. 4.1, 4.1
- [17] D. Hacon, *Introdução à teoria dos nós em \mathbb{R}^3* , 15º colóquio Brasileiro de Matemática, 1995.
- [18] M. T. Imízcoz, *Nudos y Variedades Tridimensionais*, Academia de ciencias exacts de Zaragoza (1998). 2.8
- [19] L. H. Kauffman, *New Invariants in the Theory on Knots*, American Mathematical Monthly. vol. 95, Issue 3 Mar., (1988), 195-242. 2.8
- [20] L. H. Kauffman, *On Knots*, Princeton University Press (1987). 2.8
- [21] L. H. Kauffman, J. R. Goldman, *Rational Tangles*, Princeton University Press (1987). 3, 3.1.1
- [22] L. H. Kauffman e S. Lambropoulou, *On the classification of rational tangles* arXiv:math.GT0311499, 57M25, Nov.2003. 3.1.15, 3.1.1
- [23] W. B. R. Lickorish, *Linear skein theory and link polynomials*, Topology Appl. 27 (1987) 265-274. 3.3, 3.3
- [24] X. S. Lin, *An Introduction to 3-dimensional contact topology*, paper. 5.3.1
- [25] V. Manturov, *Knot Theory*, Chapman & Hall/CRC (2004). 2.5
- [26] J. Martinet, *Formes de contact sur les variétés de dimension 3*, Springer Lecture Notes in Math 209, 142-163. 4.1
- [27] W. S. Massey, *Algebraic Topology: an Introduction*, Graduate Texts, Math. 5c, Springer - Verlag (1977). 2.6.1
- [28] J. Milnor, *Differential Topology*, Princeton University, (notes by J. Munkres), 1958 .
- [29] J. L. C Molina, *Introducción a la Teoria de Nudos*, Instituto de Matemáticas, Unidade Cuernavaca (2000).
- [30] K. Murasugi, *Knot Theory and its applications*, Birkhäuser (1996). 1, 3.1

- [31] L. Ng, *Legendrian Mirrors and Legendrian Isotopy*, arXiv:math.GT/0008210, vol.1, 28 Aug. 2000.
- [32] L. Ng, *Maximal Thurston-Bennequin number of two-bridge links*. *Algebr. Geom. Topol.* vol.1 (2001), 427-434. 1
- [33] A. M. Rockett, P. Szűsz, *Continued Fractions*, World Scientific, 1992. A.2, A.2.3
- [34] L. Rudolph, *A congruence between link polynomials*, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* 107 (1990) 319-327. 6.2
- [35] D. Rolfsen, *Knot and Links*, Mathematics Lecture series 7 (1976), Publish or Perish Inc. 2
- [36] H. Seifert, *Über das Geschlecht von Knoten*, *Math. Ann*, 110 (1934), 571-592, $\langle K_{15}, K_{25} \rangle$. 2.6.1
- [37] H. Schubert, *Knoten mit zwei Brücken*, *Math. Zeit.* 65 (1956), 133-170. 3.2, 3.2.4, 3.2.5
- [38] J. Swiatkowski, *On the isotopy of Legendrian knots*, *Ann. Glob. Geom.* 10 (1992), 195-207. 4.4
- [39] D. Fuchs, S. Tabachnikov, *Invariants of Legendrian and transverse knots in the standard contact space*, *Topology* vol.36 (1997), 1025-1054. 1, 5.2.1, 5.3, 6.2.1, 6.2
- [40] S. Tabachnikov, *Estimates for the Bennequin number of Legendrian links from state models for knot polynomials*, *Math. Res. Lett* 4 (1997), 143-156.
- [41] T. Tanaka, *Maximal Bennequin numbers and Kauffman polynomials of positive links*, *Proc. Amer. Math. Soc.* 127(1999) 3427-3432.

Índice Remissivo

- Δ -movimento, 20
- Cúspide, 67
 - generalizada, 69
- Circunferência de Seifert, 22
- Composição de nós, 27
- Contactomorfismo, 64
- Convergentes, 99
- Cruzamento, 17
 - negativo, 17
 - positivo, 17
- Denominador, 37
- Desestabilização, 85
- Diagrama
 - alternado, 40
 - do nó, 17
 - em forma racional, 40
 - frontal, 67
 - lagrangeano, 73
- Diagrama regular
 - do tangle, 36
- Disco
 - torcido, 62
- Enlace, 12
 - poligonal, 14
- Enlaces
 - equivalentes, 14
- Estabilização, 84
 - negativa, 84
 - positiva, 84
- Estrutura de contato, 60
 - canônica, 61
 - simétrica, 61
 - super torcida, 62
 - tensa, 63
- Estruturas de contato
 - contactomorfas, 64
 - isotópicas, 64
- Forma
 - de contato, 60
 - racional legendreana, 90
- Fração
 - contínua, 99
 - contínua simples, 99
- Fração contínua
 - em forma canônica, 42
- Gênero
 - de uma superfície , 24
 - do nó, 25
- Imagem por reflexão, 14
- Independência dos movimentos
 - de Reidemeister, 22
- Invariante, 18
 - completo, 18
 - de Maslov, 81
 - de Thurston-Bennequin, 79
- Isotopia
 - ambiente, 13
 - de contato, 76
 - legendreana, 76
 - planar, 17, 18
 - regular, 26
- Movimento

- elementar, 20
- Movimentos
 - de Reidemeister, 19
- Nó, 11
 - composto, 28
 - dócil, 14
 - de m -pontes, 28
 - de 2-pontes, 44
 - genérico, 67, 73
 - legendreano, 66
 - poligonal, 14
 - primo, 28
 - racional, 48
 - selvagem, 14
 - transversal, 66
 - trivial, 13
- Nós
 - equivalentes, 13
 - isotópicos, 13
- Nós isotópicos
 - por isotopia de contato, 76
 - por isotopia legendreana, 76
- Número
 - de enlaçamento, 26
 - de m pontes, 28
 - de Maslov, 82
 - de Thurston-Bennequin, 79, 80
 - de torção, 26
 - máximo de Thurston-Bennequin, 87
- Numerador, 37
- Polinômio
 - de Alexander, 29
 - de Conway, 30
 - de HOMFLY, 32
 - de Jones, 31
 - de Kauffman, 32, 33
- Ponto
 - duplo, 16
 - múltiplo, 16
 - regular, 16
 - transversal, 16
- Projeção, 16, 17
 - frontal, 67
 - Lagrangeana, 73
 - regular, 16
- Projeções
 - equivalentes, 17
- Quocientes parciais, 99
- Referencial, 78
 - de Thurston Bennequin, 78
- Reflexão, 14
 - legendreana, 83
- Rotação
 - horizontal, 45
 - vertical, 47
- Soma conexa de nós, 27
- Superfície de Seifert, 22
- Tangle, 36
 - alternado, 40
 - em forma canônica, 42
 - equivalentes, 38
 - racional, 38
 - trivial, 38
- Teorema
 - de Darboux, 64
 - de Eliashberg, 65
 - de Gray, 65
- Tipo de nó, 13
- Torção
 - horizontal, 39
 - negativa, 39
 - positiva, 39
 - vertical, 39

Trivialização, 78

Variedade

de contato, 60

Variedades

contactomorfas, 64

A Apêndice

A.1 Independência dos movimentos de Reidemeister

Verificaremos, através de contra exemplos, a independência dos movimentos de Reidemeister, ou seja, para cada movimento mostraremos a existência de dois diagramas de nós, da mesma classe de isotopia, que não pode ser transformado um no outro usando apenas os outros dois movimentos.

Analisaremos cada movimento separadamente.

Movimento Ω_1 - Considere dois diagramas isotópicos ao nó trivial.

O primeiro movimento de Reidemeister é o único movimento que altera a paridade do número de cruzamentos. Assim, cada diagrama de nó da mesma classe de isotopia dos nós triviais com um número ímpar de cruzamentos não pode ser transformado num diagrama sem cruzamentos usando apenas os movimentos Ω_2 e Ω_3 .

Considerando a definição de nó primo, analisamos o segundo movimento.

Movimento Ω_2 - Sejam D_1, D_2, D_3, D_4 diagramas de diferentes nós primos (não triviais) K_1, K_2, K_3, K_4 . Considere os diagramas $L = D_1 \# D_2 \# D_3 \# D_4$, e $M = D_1 \# D_3 \# D_2 \# D_4$, conforme figura A.1.

Cada subdiagrama dos nós $K_i, i = 1, 2, 3, 4$ é representado pelas respectivas “caixas”. Podemos observar que os diagramas L e M são equivalentes. De fato, K_3 e K_2 podem trocar de posição e assim os diagramas L e M tornam-se iguais. Para ver isto, note que K_3 , por exemplo, pode se tornar tão pequeno (mas nunca desaparecer), de modo a passar por entre K_2 e tomar sua posição.

Mostraremos que não existe uma isotopia que transforma L em M , envolvendo apenas os movimentos de Reidemeister, Ω_1 e Ω_3 .

Considere os subdiagramas D_i , $i=1,2,3,4$ em L . Esta ordem é tal que entre os nós K_1 e K_3 não existem nós triviais em ambos os lados.

Os movimentos realizados nos subdiagramas ocorrem em suas “caixas”, assim durante a isotopia suas ordens permanecem a mesma, desse modo diferentes D_i não se encontram. Contudo, D_1 e D_3 são adjacentes em M , o que nos dá que L não pode ser transformado em M usando apenas os movimentos Ω_1 e Ω_3 e isotopia planar.

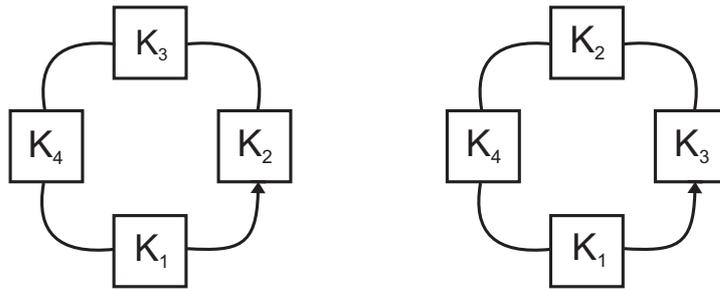


Figura A.1: Contra exemplo para $\Omega_1, \Omega_3 \implies \Omega_2$.

Movimento Ω_3 - Considere o diagrama do anel de Borromean e construa um enlace como mostra a Figura A.2(a), denotamos o diagrama por L_1 .

As componentes do enlace L_1 , são nós triviais, então L_1 é isotópico ao diagrama L_2 , como mostra a Figura A.2 (b).

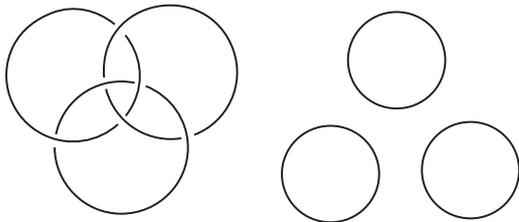


Figura A.2: Contra exemplo para $\Omega_1, \Omega_2 \implies \Omega_3$.

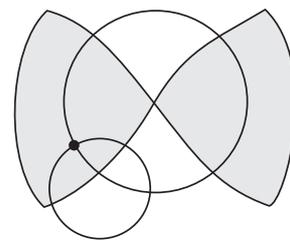


Figura A.3:

Mostraremos que o diagrama L_1 , não pode ser transformado no diagrama L_2 , usando apenas as sequências de movimentos Ω_1 e Ω_2 .

Considere um diagrama planar arbitrário de três componentes triviais, tal que, para cada componente, associamos um elemento de \mathbb{Z}_2 , da seguinte maneira. Fixe uma componente l do diagrama L_1 . No interior desta componente considere os cruzamentos provenientes das outras duas componentes, como por exemplo na Figura A.3, e então calculamos sua paridade.

Procedemos da mesma forma para as outras duas componentes, e assim temos três elementos de \mathbb{Z}_2 .

Facilmente vemos que para o diagrama L_1 , todos esses três números são iguais a um e para L_2 todos são iguais a zero. Então, essa 3-upla de números é um invariante para Ω_1 e Ω_2 .

Note que, para o movimento Ω_1 esta afirmação é evidente. E o movimento Ω_2 é aplicado a arcos de diferentes circunferências. Basta então, observar que ambos os cruzamentos estão dentro ou fora da componente l .

Mas L_1 e L_2 são isotópicos e, no entanto, possuem elementos de \mathbb{Z}_2 diferentes. Assim L_1 não pode ser transformado em L_2 usando apenas Ω_1 e Ω_2 .

Verificamos, a partir dos três exemplos acima, a independência dos movimentos de Reidemeister.

A.2
Frações contínuas

As frações contínuas foram estudadas por grandes matemáticos dos séculos XVII e XVIII e, até hoje, são objeto de estudos em várias áreas da matemática, principalmente em teoria dos números.

A aproximação de números reais por racionais é uma questão de grande importância em diversas situações. No entanto, a aproximação que se obtém simplesmente ao truncar o real em um número finito de casas decimais, por exemplo, $\pi \approx 3,141 = \frac{3141}{1000}$, nem sempre é a mais adequada pois, em certas situações, pode ser necessário limitar os valores do numerador e do denominador da aproximação racional.

Definição A.2.1 *Uma expressão da forma*

$$x = a_0 + \frac{b_1}{a_1 + \frac{b_2}{a_2 + \frac{b_3}{a_3 + \frac{b_4}{\ddots}}}} \tag{A-1}$$

é dita a expansão em frações contínuas do número x , onde, para todo número i natural, os números a_i e b_i são reais ou complexos, e o número de termos pode ser finito ou infinito. Representamos uma fração contínua por $[a_1, a_2, \dots, a_n, \dots]$.

Se os termos b_i são iguais a 1, para todo número i natural, a fração é dita *fração contínua simples*, onde a_i é sempre positivo para $i > 1$.

Os termos $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ são chamados *quocientes parciais* da fração contínua.

A expansão em frações contínuas do número x significa que ele é o limite da sequência

$$\frac{p_k}{q_k} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \ddots + \frac{1}{a_{k-1} + \frac{1}{a_k}}}}}$$

onde as frações p_k/q_k são os *convergentes*.

Não abordaremos aqui a expansão de frações contínuas de números irracionais, a qual pode ser obtida a partir da transformação de Gauss, ou seja, as imagens de um número irracional x pela transformação de Gauss determinam os quocientes de x . Para o leitor interessado sugerimos (33).

Teorema A.2.2 (Algoritmo da divisão) *Dados dois inteiros a e b , $b > 0$, existe um único par de inteiros q e r tais que*

$$a = qb + r, \text{ com } 0 \leq r < b,$$

onde q é chamado o quociente e r de resto da divisão de a por b .

Teorema A.2.3 (Ver (33)) *Um número $x \in \mathbb{R}$ é racional se, e somente se, sua expansão em frações contínuas é finita.*

Exemplo A.2.4 *Vamos expressar o número $-37/5$ como uma fração contínua. É fácil verificar que,*

$$-37 = -8 \times 5 + 3$$

$$5 = 1 \times 3 + 2$$

$$3 = 1 \times 2 + 1$$

$$2 = 2 \times 1 + 0$$

$$\frac{-37}{5} = -8 + \frac{1}{1 + \frac{2}{3}} = -8 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = -8 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}.$$

Como se pode ver, no processo de divisões sucessivas, somente o primeiro quociente pode ser negativo. Disto concluímos que na fração contínua simples $[a_1, a_2, a_3, \dots]$, todos os a_i 's são inteiros positivos, com a possível exceção de a_1 .

Exemplo A.2.5 *Considere o número $\pi = 3,141592654\dots$*

$$\begin{aligned} \pi &\approx 3 + 0,141592654 \approx 3 + \frac{1}{7,062513285} \approx 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15,99659976}} \\ &\approx 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1,003411841}}} \approx 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1 + \frac{1}{293,096894}}}} \end{aligned}$$

$$\pi \approx [3, 7, 15, 1, 293]$$

Qualquer fração racional p/q pode ser expandida em uma fração contínua simples finita

$$\frac{p}{q} = [a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n].$$

Chamamos a atenção do leitor para o fato de que a unicidade da representação de um número racional em fração contínua simples (a menos da modificação do último termo a_n) é garantida pelo Teorema A.2.2. Na realidade temos em geral, que se a representação em fração contínua do racional $\frac{p}{q}$ ($p > q$) é dada por $[a_1, a_2, \dots, a_n]$, então a representação de $\frac{q}{p}$ é dada por $[0, a_1, a_2, \dots, a_n]$. Isto é consequência imediata do fato de

$$\frac{q}{p} = 0 + \frac{1}{\frac{p}{q}}$$

Considere os convergentes

$$\frac{p_1}{q_1} = \frac{a_1}{1}, \frac{p_2}{q_2} = a_1 + \frac{1}{a_2}, \frac{p_3}{q_3} = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3}}, \dots$$

obtidos pelas expansões das frações contínuas

$$[a_1], [a_1, a_2], [a_1, a_2, a_3], \dots$$

Então temos $p_1 = a_1$, $p_2 = a_1 a_2 + 1$ e $q_2 = a_2$, calculando os demais convergentes, obtemos,

$$\begin{aligned} \frac{p_3}{q_3} &= \frac{a_3 p_2 + p_1}{a_3 q_2 + q_1} \\ \frac{p_4}{q_4} &= \frac{a_4 p_3 + p_2}{a_4 q_3 + q_2} \\ \frac{p_5}{q_5} &= \frac{a_5 p_4 + p_3}{a_5 q_4 + q_3} \end{aligned}$$

Observando estes resultados podemos conjecturar que os numeradores e os denominadores dos convergentes $\frac{p_k}{q_k}$ satisfazem as seguintes relações:

$$\begin{aligned} p_i &= a_i p_{i-1} + p_{i-2} \\ q_i &= a_i q_{i-1} + q_{i-2}. \end{aligned} \tag{A-2}$$

Por indução podemos verificar que as igualdades são válidas para $i = 3, 4, 5, \dots, n$, porém não faremos a verificação aqui.

Teorema A.2.6 *A relação*

$$p_i q_{i-1} - p_{i-1} q_i = (-1)^i \tag{A-3}$$

se verifica para todo $i \geq 0$, onde p_i e q_i são, respectivamente, o numerador, e o denominador do i -ésimo convergente.

Prova. Para $i=0$ temos $p_0q_{-1} - p_{-1}q_0 = 1 = (-1)^0$ uma vez que $p_0 = q_{-1} = 1$ e $p_{-1} = q_0 = 0$.

Vamos assumir, como hipótese de indução, a validade de A-3 e mostrar que a mesma relação também se verifica quando substituímos i por $i+1$. Sabemos, da Equação A-2, que

$$p_{i+1} = a_{i+1}p_i + p_{i-1} \text{ e } q_{i+1} = a_{i+1}q_i + q_{i-1}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} p_{i+1}q_i - p_iq_{i+1} &= (a_{i+1}p_i + p_{i-1})q_i - p_i(a_{i+1}q_i + q_{i-1}) \\ &= a_{i+1}p_iq_i + p_{i-1}q_i - a_{i+1}p_iq_i - p_iq_i - p_iq_{i-1} \\ &= (-1)(p_iq_{i-1} - p_{i-1}q_i). \end{aligned}$$

Utilizando, a hipótese de indução, obtemos

$$p_{i+1}q_i - p_iq_{i+1} = (-1)(-1)^i = (-1)^{i+1},$$

o que conclui a demonstração. ■

Corolário A.2.7 Para todo convergente $\frac{p_k}{q_k}$ temos que $\text{mdc}(p_k, q_k) = 1$.

Prova. Pelo Teorema A.2.6 temos que $p_iq_{i-1} - p_{i-1}q_i = (-1)^i$. Isto nos diz que qualquer divisor comum de p_i e q_i deve ser um divisor de 1 ou -1. Logo o máximo divisor comum de p_i e q_i deve ser igual a 1. ■

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)