Pontifícia Universidade Católica
do Rio de Janeiro

Miguel Adriano Koiller Schnoor

Transitividade robusta e ergodicidade de aplicações na reta

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós–graduação em Matemática do Departamento de Matemática da PUC–Rio

Orientador: Prof. Lorenzo J. Díaz

Rio de Janeiro
agosto de 2007

Pontifícia Universidade Católica
do Rio de Janeiro

Miguel Adriano Koiller Schnoor

Transitividade robusta e ergodicidade de aplicações na reta

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós–graduação em Matemática do Departamento de Matemática do Centro Técnico Científico da PUC–Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

Prof. Lorenzo J. Díaz
Orientador
Departamento de Matemática — PUC–Rio

Prof. Enrique Ramiro Pujals
IMPA

Prof. Vanderlei Minori Horita
UNESP

Prof. Flávio Abdenur
PUC-Rio

Prof. Rafael Ruggiero
PUC-Rio

Prof. José Eugênio Leal
Coordenador Setorial do Centro Técnico Científico — PUC–Rio

Rio de Janeiro, 20 de agosto de 2007

Miguel Adriano Koiller Schnoor

Graduação: Matemática-Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (2002-2005).
Mestrado: Matemática-Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (2005-2007).

Ficha Catalográfica

Schnoor, Miguel A. K.

Transitividade robusta e ergodicidade de aplicações na reta / Miguel Adriano Koiller Schnoor; orientador: Lorenzo J. Díaz. — Rio de Janeiro : PUC–Rio, Departamento de Matemática, 2007.

v., 63 f: il. ; 29,7 cm

1. Dissertação (mestrado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática.

Inclui referências bibliográficas.

1. Matemática – Tese. 2. Sistemas alternantes. 3. Transitividade robusta. 4. Ergodicidade. 5. Dinâmica simbólica. 6. Transformação de Boole.
I. Díaz, Lorenzo J.. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Matemática. III. Título.

CDD: 510

A meu pai, que sempre me inspirou.

Agradecimentos

Agradeço, em especial, a meus pais e minhas irmãs, pelo amor e incentivo que sempre me deram.

Ao meu orientador, Lorenzo Díaz, por seu constante apoio.

Ao Pe Paul Schweitzer, que a mim dedicou, em momentos tão difíceis, sua atenção e afeto.

A todos meus professores, por tudo o que aprendi com eles.

Aos meus colegas da PUC, pelo convívio e pela amizade.

A todos os funcionários do Departamento de matemática, especialmente à Creuza, que consegue resolver todos os nossos problemas sem perder o bom humor.

À CAPES e à PUC-Rio, pelos auxílios que tornaram possível a execução desse trabalho.

Resumo

Schnoor, Miguel A. K.; Díaz, Lorenzo J.. **Transitividade robusta e ergodicidade de aplicações na reta**. Rio de Janeiro, 2007. 63p. Dissertação de Mestrado — Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Em meados do século XIX, G. Boole mostrou que a transformação $x \mapsto x - 1/x$, definida em $\mathbb{R} - \{0\}$, preserva a medida de Lebesgue (Ble). Mais de um século depois, R. Adler e B.Weiss mostraram que essa aplicação, chamada de transformação de Boole, é, de fato, ergódica com respeito à medida de Lebesgue (Adl). Nesse trabalho, apresentaremos o conceito de sistemas alternantes, definido recentemente por S. Muñoz (Mun), que consiste numa grande classe de aplicações na reta que generaliza a transformação de Boole e que torna possível uma análise abrangente de propriedades como transitividade robusta e ergodicidade. Para mostrar que, sob certas condições, sistemas alternantes são ergódicos com relação à medida de Lebesgue, mostraremos, usando o Teorema do Folclore, que a transformação induzida do sistema alternante é ergódica.

Palavras–chave

Sistemas alternantes. Transitividade robusta. Ergodicidade. Dinâmica simbólica. Transformação de Boole.

Abstract

Schnoor, Miguel A. K.; Díaz, Lorenzo J.. **Ergodicity and robust transitivity on the real line**. Rio de Janeiro, 2007. 63p. MsC Thesis — Departament of Mathematics, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

In the middle of the 19th century, G. Boole proved that the transformation $x \mapsto x - 1/x$, defined on $\mathbb{R} - \{0\}$, is a Lebesgue measure preserving transformation (Ble). Over one hundred years later, R. Adler and B.Weiss proved that this map, called Boole's map, is, in fact, ergodic with respect to the Lebesgue measure (Adl). In this work, we present the notion of alternating systems, recently introduced by S. Muñoz (Mun), which is a large class of functions on the real line that generalizes the Boole's map and allows us to make a wide analysis on certain properties such as robust transitivity and ergodicity. In order to show that, under certain conditions, alternating systems are ergodic with respect to the Lebesgue measure, we show, using the Folklore Theorem, that the induced transformation of an alternating system is ergodic.

Keywords

Alternating systems. Robust transitivity. Ergodicity. Symbolic dynamics. Boole's map.

Sumário

1
Introdução

A formulação matemática de fenômenos naturais envolve, necessariamente, alguma simplificação das leis que os regem, caso contrário, seria impossível tratá-los analitica ou numericamente. Essas simplificações, entretanto, podem não preservar algumas características intrínsecas ao fenômeno. Assim, as propriedades robustas do modelo também serão válidas para o evento estudado.

Nesta dissertação, estudaremos a transitividade robusta e a ergodicidade de certos sistemas dinâmicos definidos na reta (exceto por um ponto). Transitividade e ergodicidade significam, em aspectos topológicos e mensuráveis respectivamente, que o sistema é formado por uma única peça dinâmica. Isto é, o estudo do sistema não pode ser dividido no estudo de diferentes partes "relevantes", independentes entre si.

Seja (X, d) um espaço métrico completo e $f : X \to X$ uma aplicação contínua. Dizemos que f é transitiva se existir uma órbita densa em X. Veremos, no próximo capítulo (Corolário 2.4), que os abertos invariantes pela ação de uma aplicação transitiva devem ser, necessariamente, densos no espaço ambiente. Assim, o conceito de transitividade mostra-se essencial para a compreensão da dinâmica global de um sistema.

Se $(X, \mathcal{A}, \mu)$ é um espaço de medida (estamos particularmente interessados no caso em que a medida é absolutamente contínua em relação à medida de Lebesgue) e $f : X \to X$ é uma aplicação que preserva a medida μ, então o estudo do comportamento assintótico de f pode ser feito a partir de uma abordagem estatística, restrigindo a análise das órbitas apenas a conjuntos de medida positiva. Dizemos que f é ergódica se todo subconjunto invariante de medida positiva coincidir com X a menos de um conjunto de medida zero.

A diferença entre as abordagens mensurável e topológica de uma dinâmica é que, na primeira, os conjuntos que consideramos irrelevantes são os que têm medida nula, enquanto que, na segunda, conjuntos irrelevantes (magros) são aqueles cujo fecho possui interior vazio (ou, ainda, uma união enumerável de conjuntos deste tipo).

Nosso principal objetivo, nesse texto, é investigar a transitividade robusta e a ergodicidade de aplicações diferenciáveis definidas em um aberto denso da reta. Um importante exemplo de aplicação diferenciável e transitiva na reta - que, inclusive, motivou grande parte da análise feita nesse texto - é a transformação de Boole $\varphi(x) = x - 1/x$, definida em toda a reta, exceto em $x = 0$. O fato do espaço não ser compacto gera certas dificuldades e particularidades no estudo da dinâmica tanto do ponto de vista topológico, quanto do ponto de vista estatístico.

Uma aplicação diferenciável robustamente transitiva não pode, por exemplo, ser definida em toda a reta. Isso é conseqüência do fato de que a existência de pontos críticos impossibilita a robustez da transitividade (podemos criar pontos periódicos atratores com C^1-perturbações). Por outro lado, se a aplicação não possui pontos críticos e está definida em toda a reta, então deve ser monótona (digamos, crescente) e, portanto, qualquer aberto (p, ∞) é invariante e não denso. Isso, por sua vez, contradiz o fato da aplicação ser transitiva (Corolário 2.4). Assim, restringiremos nossos estudos às aplicações transitivas definidas em $\mathbb{R} - \{0\}$ - um passo inicial para a compreensão de todas as dinâmicas transitivas em subconjuntos abertos densos da reta.

No próximo capítulo da dissertação, além de apresentarmos algumas definições e resultados gerais sobre transitividade e ergodicidade, mostraremos dois exemplos de dinâmicas transitivas e ergódicas definidas no círculo $\mathbb{S}^1$: a rotação irracional e a aplicação expansora. A segunda, diferentemente da primeira, é robustamente transitiva, como será mostrado na Proposição 4.14,3.1. Na Seção 2.3, definiremos a dinâmica do shift no espaço de seqüências de dois símbolos, que é comumente usada para provar, por meio de uma conjugação, que uma certa aplicação é transitiva (como faremos na própria Seção 2.3 e na Seção 4.1).

No terceiro capítulo, apresentaremos uma grande classe de funções, introduzida recentemente por S. Muñoz(Mun), que, de certa forma, generaliza a transformação de Boole. Essas funções, que chamaremos de sistemas alternantes, possuem características particularmente úteis no estudo da transitividade robusta e da ergodicidade de aplicações definidas em $\mathbb{R} - \{0\}$. Veremos que a análise de um sistema alternante $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ pode ser entendida através da análise de uma transformação $f_I : I - \{0\} \to I$, onde I é um intervalo compacto tal que

$$\mathbb{R} - \{0\} = \bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-n}(I).$$

Essa transformação, ferramenta clássica de teoria ergódica infinita, é chamada de transformação induzida por f em I, e é definida por $f_I(x) = f^{n(x)}(x)$, onde $n(x)$ é o primeiro iterado positivo de x que está em I.

No quarto capítulo, mostraremos que a transitividade da transformação de Boole não é robusta, mas que existe uma família de transformações $f_a(x) = ax - 1/x$ que são robustamente transitivas (Corolário 4.20). Esse resultado ilustra bem a teoria desenvolvida na dissertação e sua demonstração é um bom exemplo de como a análise da tranformação induzida nos permite estudar a robustez da transitividade na reta.

No último capítulo, mostraremos que sistemas alternantes, sob condições específicas, são ergódicos com respeito à medida de Lebesgue (5.5). Isso será feito aplicando o conhecido Teorema do Folclore (Teorema 5.4) à transformação induzida.

Tendo em vista a nítida similaridade existente entre as noções de transitividade e ergodicidade, poderíamos nos perguntar sob quais condições um sistema alternante é robustamente ergódico. Este problema, que é, de fato, relevante, encontra-se em aberto e ultrapassa o escopo desta dissertação.

2
Transitividade e ergodicidade

Nesse capítulo, definiremos os conceitos de transitividade e ergodicidade, demonstraremos alguns resultados sobre essas propriedades, mostraremos a analogia que existe entre elas e daremos alguns exemplos de transformações transitivas e ergódicas.

Quando não for explicitado em qual espaço estamos trabalhando, X denotará um espaço métrico completo e perfeito (sem pontos isolados) que possui um subconjunto enumerável denso. Nos exemplos fornecidos no final do capítulo, os espaços considerados são o círculo $\mathbb{S}^1$ e o espaço de seqüências infinitas de dois símbolos $\Sigma_2 = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

2.1
Resultados gerais

2.1.1
Transitividade

Um dos principais objetivos nesse trabalho é procurar aplicações diferenciáveis em subconjuntos abertos e densos da reta que sejam transitivas. Nessa subseção, definiremos transitividade e demonstraremos um teorema de equivalência que nos será bastante útil no decorrer do texto.

Antes de definirmos transitividade, precisamos nos familiarizar com alguns termos que aparecem com freqüência no estudo de sistemas dinâmicos.

Definição 2.1 *Seja $f : X \longrightarrow X$ uma função contínua. A órbita positiva de x em relação a f é o conjunto $\mathcal{O}_f^+(x) \equiv \{f^n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$. A órbita negativa de um ponto x é definida de maneira análoga: $\mathcal{O}_f^-(x) \equiv \{f^{-n}(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$. A órbita do ponto x em relação a f é a união desses dois conjuntos, $\mathcal{O}_f(x) \equiv \{f^n(x)\}_{n\in\mathbb{Z}}$.*

Definição 2.2 (transitividade) *Uma função $f : X \longrightarrow X$ é transitiva se existe $x \in X$ tal que sua órbita positiva $\mathcal{O}_f^+(x)$ é densa em X.*

Embora essa seja a definição mais comum de transitividade, usaremos com freqüência uma outra definição que resulta do seguinte teorema de equivalência:

Teorema 2.3 *Seja $f : X \longrightarrow X$ uma função contínua. Então f é transitiva se, e somente se, dados dois abertos não vazios $U, V \subset X$, existe um inteiro $n > 0$ tal que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$.*

Prova: Suponhamos que f é transitiva e $x \in X$ é tal que $\overline{\mathcal{O}_f^+(x)} = X$. Assim, dado um aberto $U \subset X$, existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $f^i(x) \in U$. Como $f^i(x) \in \mathcal{O}_f^+(x)$, que é denso em X, então $\overline{\mathcal{O}_f^+(f^i(x))} = X$, pois X não possui pontos isolados e as órbitas $\mathcal{O}_f^+(f^i(x))$ e $\mathcal{O}_f^+(x)$ diferem de apenas um número finito de pontos.

Assim, dado outro aberto V de X, existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $f^j(f^i(x)) \in V$. Logo, dados dois abertos U e V, podemos construir um inteiro n tal que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$, basta tomarmos $f^i(x) \in U$ e $n = j$.

Vamos agora supor que vale a condição da interseção dos abertos. Pela hipótese, temos que $\bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-n}(V)$ é denso em X para todo aberto V, pois intersecta qualquer aberto U de X. Como X é espaço métrico com subconjunto enumerável denso, então existe uma base enumerável $\{V_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ para a topologia de X. Assim, $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} \bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-n}(V_i)$ é interseção enumerável de abertos densos em X e, portanto, pelo teorema da categoria de Baire(Mnk, Capítulo 8), é denso e, em particular, não vazio. Tomando $x \in \bigcap_{i \in \mathbb{N}} \bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-n}(V_i)$, temos que $\overline{\mathcal{O}_f^+(x)} = X$.
$\square$

Corolário 2.4 *Sejam $f : X \longrightarrow X$ uma função transitiva e A um aberto não vazio de X tais que $f(A) \subseteq A$. Então $\overline{A} = X$.*

Prova: Suponha, por absurdo, que existe um aberto não denso $A \subset X$ tal que $f(A) \subseteq A$. Como A não é denso, podemos tomar um aberto $B \subset X \backslash A$. Daí $f^n(A) \cap B = \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Pelo Teorema 2.3, temos que f não é transitiva, contrariando nossa hipótese. $\square$

Corolário 2.5 *Seja $f : X \longrightarrow X$ uma função transitiva e $A \subset X$ um aberto não vazio tais que $f^{-1}(A) \subseteq A$. Então $\overline{A} = X$.*

Prova: A demonstração é análoga à do corolário anterior. Suponha, por absurdo, que $A \subset X$ é um aberto não denso tal que $f^{-1}(A) \subset A$. Considere um subconjunto aberto $B \subset X \backslash A$ e repare que $f^{-n}(A) \cap B = \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Nesse caso, $A \cap f^n(B) = \emptyset$, contrariando o Teorema 2.3. $\square$

Em alguns casos, pode ser difícil mostrar que uma aplicação $f : X \to X$ possui uma certa propriedade dinâmica, como, por exemplo, transitividade.

Para contornar esta dificuldade, é comum fazermos uso de uma conjugação entre a função que estamos trabalhando e uma aplicação $g : Y \to Y$ em que tal análise seja mais simples. Dizemos que as dinâmicas $f : X \to X$ e $g : Y \to Y$ são conjugadas se existir um homeomorfismo $h : X \to Y$ tal que

$$f = h^{-1} \circ g \circ h.$$

Dizemos que $g : Y \to Y$ é um *fator* de $f : X \to X$ se existir uma aplicação $h : X \to Y$ contínua e sobrejetora tal que

$$h \circ f = g \circ h.$$

Nesse caso, dizemos que h é uma *semiconjugação* e que g é semiconjugada à f. Claramente uma conjugação é uma semiconjugação.

Todas as propriedades dinâmicas de uma aplicação são preservadas por semiconjugação: misturamento, transitividade, periodicidade de órbitas, densidade de pontos periódicos etc. Vamos, entretanto, provar apenas que a transitividade é preservada, pois, além de esta ser a propriedade que estamos interessados em estudar, a idéia da demonstração para os outros casos é, de um modo geral, a mesma.

Lema 2.6 *Se $g : Y \to Y$ é um fator de $f : X \to X$ e $h : X \to Y$ é a semiconjugação entre as dinâmicas, então*

$$h \circ f^n = g^n \circ h$$

para todo inteiro $n > 0$.

Prova: Demonstraremos usando indução em n. Pela definição de semiconjugação, o lema é satisfeito para $n = 1$. Suponha, então, que vale para $n = k$. Assim,

$$\begin{aligned} h \circ f^{k+1} &= h \circ (f^k \circ f) = (h \circ f^k) \circ f \\ &= (g^k \circ h) \circ f = g^k \circ (h \circ f) \\ &= g^k \circ (g \circ h) = (g^k \circ g) \circ h \\ &= g^{k+1} \circ h \end{aligned}$$

e a indução está completa. □

Proposição 2.7 *Se $f : X \to X$ é um aplicação transitiva e $g : Y \to Y$ é um fator de f, então g é transitiva.*

Prova: Suponha que g não é transitiva. Então, para todo $y \in Y$, existe um aberto $V \subset Y$ tal que, para todo $n \geq 0$, $g^n(y) \notin V$. Seja $x \in X$ tal que $h(x) = y$ (tal x existe, pois h é sobrejetora). Assim, pelo Lema 2.6,

$$g^n(h(x)) \notin V \Rightarrow h(f^n(x)) \notin V \Rightarrow f^n(x) \notin h^{-1}(V).$$

Pela continuidade de h, sabemos que $h^{-1}(V)$ é aberto. Dessa maneira, a órbita de x não é densa em X e, portanto, f não é transitiva. □

2.1.2
Ergodicidade

Nessa subseção, definiremos o conceito de ergodicidade, que, por possuir muitas analogias com a noção de transitividade, é também chamado de transitividade métrica. Mostraremos também algumas diferenças entre os casos em que o espaço é ou não de medida finita.

Definição 2.8 *Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida. Dizemos que a função $f : X \to X$ preserva a medida μ se, para todo $E \in \mathcal{A}$, temos que $\mu(f^{-1}(E)) = \mu(E)$. Alternativamente, dizemos que μ é uma medida f-invariante.*

Proposição 2.9 *Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida e considere a transformação $f : X \to X$. Então f preserva a medida μ se, e somente se,*

$$\int \phi \, d\mu = \int (\phi \circ f) \, d\mu, \tag{2-1}$$

para toda função integrável $\phi : X \to \mathbb{R}$.

Prova: Antes de começar a demonstração, lembremos que a função característica $\chi_A : X \to \{0, 1\}$ é definida por

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

Lembre também que chamamos uma função $s : X \to \mathbb{R}$ de *função simples* se s for uma combinação linear finita de funções características de espaços mensuráveis, ou seja, se existirem constantes $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ e conjuntos disjuntos $A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{A}$ tais que

$$s = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \chi_{A_j}.$$

Suponha que f preserva a medida μ. Para mostrar que a equação 2-1 é satisfeita, usaremos um argumento clássico de teoria da medida: primeiro mostraremos que vale se $\phi = \chi_A$, em seguida vamos estender o resultado para ϕ simples e, finalmente, concluiremos que vale para ϕ integrável.

Se $\phi = \chi_A$, temos que

$$\phi \circ f = \chi_A \circ f = \chi_{f^{-1}(A)}$$

e, portanto,

$$\int (\phi \circ f)\, d\mu = \int \chi_{f^{-1}(A)}\, d\mu = \mu(f^{-1}(A)) = \mu(A) = \int \phi\, d\mu.$$

Assim, provamos que a equação vale quando ϕ é uma função característica. Como conseqüência da linearidade da integral, a equação ainda vale se ϕ for uma função simples. Se ϕ é uma função integrável qualquer, pela definição de integral, temos que

$$\int \phi\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int \phi_n\, d\mu,$$

onde ϕ_n é uma seqüência de funções simples crescendo para ϕ, ou seja, $\phi_1 \leq \phi_2 \leq \ldots$ e $\lim_{n\to\infty} \phi_n(x) = \phi(x)$ para todo $x \in X$. Por outro lado, $\phi_n \circ f$ é uma seqüência de funções simples crescendo para $\phi \circ f$. Logo,

$$\int (\phi \circ f)\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int (\phi_n \circ f)\, d\mu.$$

Como $\int \phi_n\, d\mu = \int (\phi_n \circ f)\, d\mu$, tomando o limite nos dois lados, temos que

$$\int \phi\, d\mu = \int (\phi \circ f)\, d\mu.$$

A volta é trivial pois, dado um conjunto $A \in \mathcal{A}$, tomamos $\phi = \chi_A$ e temos

$$\mu(A) = \int \chi_A\, d\mu = \int (\chi_A \circ f)\, d\mu = \mu(f^{-1}(A)).$$

Assim, concluímos a prova da proposição. $\square$

Dizemos que um espaço de medida $(X, \mathcal{A}, \mu)$ é σ-finito se

$$X = \bigcup_{i=0}^{\infty} E_i,$$

onde $E_i \in \mathcal{A}$ e $\mu(E_i) < \infty$ para todo i.

Definição 2.10 (ergodicidade) *Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida (σ-finito) e $T : X \to X$ uma transformação que preserva a medida μ. Dizemos que T é ergódica com respeito à medida μ se, para todo conjunto T-invariante $E \in \mathcal{A}$ (ou seja, $T^{-1}(E) = E$), temos que $\mu(E) = 0$ ou $\mu(X - E) = 0$.*

Note que, nessa definição, não estamos supondo que a medida seja de probabilidade, ou sequer finita, pois o nosso principal objetivo é estudar transformações que preservam a medida de Lebesgue na reta. Quando o espaço é de probabilidade, podemos substituir $\mu(X - E) = 0$ por $\mu(E) = 1$ na definição de ergodicidade, obtendo a definição clássica. Claramente, a definição que demos generaliza a definição de ergodicidade em espaços de medida finita.

Dizemos que uma certa propriedade vale para μ-quase todo ponto de X (μ-q.t.p.) se ela vale para todos os pontos do conjunto $X - \mathcal{N}$, onde $\mathcal{N}$ é um conjunto de medida nula. Quando a medida em questão estiver implícita, escreveremos abreviadamente que a propriedade vale q.t.p..

Proposição 2.11 *Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de probabilidade. Então T é ergódica em relação à medida μ se, e somente se, toda função integrável f, tal que $f(T(x)) = f(x)$ q.t.p., for constante q.t.p..*

Prova: Suponha que toda função mensurável T-invariante seja constante q.t.p. e seja $E \in \mathcal{A}$ um subconjunto T-invariante. Assim, χ_E tem de ser constante q.t.p. e, portanto, $\mu(E) = 0$ ou $\mu(E) = 1$. Para mostrar a volta, suponha que T é ergódica e f é uma função tal que $f(T(x)) = f(x)$ q.t.p.. Dessa maneira, o conjunto

$$E_c \equiv \{x \in X : f(x) \leq c\}$$

é mensurável, T-invariante e, portanto, pela hipótese de ergodicidade, deve ter medida 0 ou 1, independente da escolha de $c \in \mathbb{R}$. Repare que deve haver algum $c \in \mathbb{R}$ tal que $\mu(E_c) = 1$, pois, caso contrário, tomando uma seqüência

$$c_1 < c_2 < \ldots < c_n < \ldots$$

tal que $c_n \to \infty$, teríamos que

$$\mu(X) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_{c_i}\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_{c_i}) = 0.$$

Seja $a \equiv \inf\{c \in X : \mu(E_c) = 1\}$ e repare que, para todo $\delta > 0$,

$$\mu(E_{a+\delta}) = \mu(E_{a-\delta}) + \mu(\{x \in X : a - \delta < f(x) \leq a + \delta\}).$$

Como $\mu(E_{a+\delta}) = 1$ e $\mu(E_{a-\delta}) = 0$, temos que

$$\mu(\{x \in X : a - \delta < f(x) \leq a + \delta\}) = 1,$$

independente da escolha de δ. Dessa maneira, concluímos que

$$\mu(\{x \in X : f(x) = a\}) = 1$$

e terminamos a demonstração. $\square$

A seguir, enunciaremos sem demonstrar o principal resultado em teoria ergódica: o Teorema de Birkhoff (veja uma demonstração em (Man, p.115)).

Teorema 2.12 (Birkhoff) *Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida σ-finito, $T : X \to X$ uma transformação que preserva a medida μ e $f \in L^1(\mu)$. Então, existe $g_f \in L^1(\mu)$ tal que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(T^i(x)) = g_f(x) \quad q.t.p..$$

Além disso, $g_f \circ T = g_f$ q.t.p. e, se $E \in \mathcal{A}$ é tal que $\mu(E) < \infty$, então

$$\int_E g_f \, d\mu = \int_E f \, d\mu.$$

Observação 2.13 *Se T é ergódica, então, pela Proposição 2.11, g_f é constante q.t.p. e, portanto, se $\mu(X) < \infty$, temos que*

$$g_f = \frac{1}{\mu(X)} \int_X f d\mu \quad q.t.p..$$

Portanto, se $(X, \mathcal{A}, \mu)$ for espaço de probabilidade e T for ergódica, então, para toda $f \in L^1(\mu)$, vale

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(T^i(x)) = \int_X f(x) d\mu \quad q.t.p..$$

Precisaremos, adiante, fazer uso de um importante teorema em Teoria da Medida - o Teorema da Convergência Dominada - que enunciaremos a seguir sem demonstrá-lo. Para uma prova do teorema veja, por exemplo, (Bar, Teorema 5.6, p.45).

Teorema 2.14 (Teorema da Convergência Dominada) *Sejam* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *um espaço de medida e* (f_n) *uma seqüência de funções integráveis convergindo* μ*-q.t.p. para uma função mensurável* f*. Se existe uma função integrável* g *tal que* $|f_n| \leq g$ *para todo* n*, então* f *é integrável e*

$$\int f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu.$$

Teorema 2.15 *Seja* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *um espaço de probabilidade e* $T : X \to X$ *uma transformação que preserva* μ*. Então são equivalentes:*

1. T *é ergódica;*
2. *para quaisquer* $A, B \in \mathcal{A}$*, vale*
$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \mu(T^{-i}A \cap B) \to \mu(A)\mu(B) \quad q.t.p.,$$
3. *se* $A, B \in \mathcal{A}$ *são conjuntos de medida positiva, então existe um inteiro* n *tal que*
$$\mu(T^{-n}(A) \cap B) > 0.$$

Prova: (1)$\Rightarrow$(2)

Pelo Teorema de Birkhoff,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \chi_A(T^i(x)) = \mu(A) \quad \text{q.t.p.}.$$

Multiplicando os dois lados por $\chi_B(x)$, temos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \chi_A(T^i(x))\chi_B(x) = \mu(A)\chi_B(x) \quad \text{q.t.p.}.$$

Por outro lado, como

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \chi_A(T^i(x))\chi_B(x) \leq 1$$

para todo n, podemos usar o Teorema da Convergência Dominada para obter

$$\lim_{n\to\infty}\int_X \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\chi_A(T^i(x))\chi_B(x)\,d\mu = \int_X \mu(A)\chi_B(x)\,d\mu$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\int_X \chi_A(T^i(x))\chi_B(x)\,d\mu = \mu(A)\int_X \chi_B(x)\,d\mu$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\mu(T^{-i}(A)\cap B) = \mu(A)\mu(B) \quad \text{q.t.p..}$$

(2)⇒(3)

Sejam $A, B \in \mathcal{A}$ conjuntos de medida positiva. Então,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\mu(T^{-i}(A)\cap B) \to \mu(A)\mu(B) > 0.$$

Em particular, uma das parcelas do somatório deve ser positiva, ou seja, existe um inteiro k tal que $\mu(T^{-k}(A)\cap B) > 0$

(3)⇒(1)

Seja $A \in \mathcal{A}$ um conjunto T-invariante de medida positiva. Então, para todo inteiro i,

$$\mu(T^{-i}(A)\cap A^c) = \mu(A\cap A^c) = \mu(\emptyset) = 0.$$

Mas, pela hipótese, A^c não pode ter medida positiva. Assim, $\mu(A^c) = 0$ e, portanto, T é ergódica. □

A estreita relação entre os conceitos de transitividade e ergodicidade pode ser observada se compararmos o Teorema 2.3 com a propriedade (3) do teorema acima. Vemos também, claramente, que uma transformação ergódica com respeito à medida de Lebesgue é sempre transitiva. O inverso, entretanto, nem sempre é verdade (veja um exemplo de uma transformação que preserva medida, é transitiva mas não é ergódica em (Man, Seção 2.7, p.172)).

2.2 Aplicações no círculo

Antes de começarmos a estudar dinâmicas transitivas e ergódicas na reta, é conveniente nos familiarizarmos com o conceito de transitividade e ergodicidade de aplicações no círculo $\mathbb{S}^1$ pois, como $\mathbb{S}^1$ é uma variedade compacta, essa análise se torna um pouco mais simples.

O círculo unitário pode ser representado de duas maneiras distintas:

$$\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} = \{z \in \mathbb{C} : z = e^{2\pi ix}, x \in \mathbb{R}\}$$

ou

$$\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}.$$

Nesse segundo caso, representaremos o círculo como o intervalo unitário, identificando os pontos 0 e 1.

Claramente, existe um isomorfismo entre essas duas notações:

$$x \in [0,1] \quad \mapsto \quad e^{2\pi ix}.$$

2.2.1
Rotações irracionais

Usando a notação do círculo no plano complexo, uma rotação de $z \in \mathbb{C}$ por um ângulo α é

$$R_\alpha(z) = e^{2\pi i\alpha} z$$

e, portanto,

$$R_\alpha^n(z) = (e^{2\pi i\alpha})^n z = e^{2\pi in\alpha} z = R_{n\alpha}(z).$$

Já na representação $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, temos

$$R_\alpha(x) = x + \alpha \ (\text{mod } 1),$$

onde (mod 1) significa que os números reais que distam de um número inteiro estão identificados. Assim,

$$R_\alpha^n(x) = x + n\alpha \ (\text{mod } 1).$$

Há dois tipos muito distintos de rotações no círculo: as racionais e as irracionais.

A órbita de um ponto $x \in \mathbb{S}^1$ por uma rotação $R_\alpha(x) = x + \alpha$ (mod 1) é periódica se $\alpha \in \mathbb{Q}$ e densa se $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

De fato, se $\alpha = p/q$ é uma fração irredutível com $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{N}$, então a órbita de qualquer ponto $x \in \mathbb{S}^1$ será periódica de período q pois

$$R_\alpha^q(x) = x + q\left(\frac{p}{q}\right) \pmod 1 = x + p \pmod 1 = x$$

e, claramente, q é o menor inteiro positivo que satisfaz essa condição.

A seguir, definiremos um conceito mais forte que transitividade.

Definição 2.16 *Seja $f : X \to X$ uma transformação contínua. Dizemos que f é minimal se $\overline{\mathcal{O}_f^+(x)} = X$ para todo $x \in X$.*

Proposição 2.17 *A rotação R_α é minimal (e, em particular, transitiva) se, e somente se, $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.*

Prova: Já vimos que se $\alpha \in \mathbb{Q}$, então a órbita de qualquer ponto é periódica. Assim, precisamos apenas mostrar que se $\alpha \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}$, então a órbita de qualquer ponto é densa em $\mathbb{S}^1$.

Em primeiro lugar, considere uma seqüência de números racionais $\alpha_n = p_n/q_n$ que converge para α, onde p_n e q_n são primos entre si para todo $n \in \mathbb{N}$. Repare que a seqüência $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, induzida por $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, é não limitada e, portanto, para todo $\epsilon > 0$ e todo inteiro $M > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $q_n > M$ e $|\alpha_n - \alpha| < \epsilon$. Além disso, a órbita de um ponto $x \in \mathbb{S}^1$ por R_{α_n} é constituída de q_n pontos periódicos equidistribuídos em $\mathbb{S}^1$:

$$\mathcal{O}_n(x) = \{x + j\frac{p_n}{q_n} \pmod 1 : j \in \{0, \ldots, q_n - 1\}\}.$$

Por outro lado, a seqüência de funções R_{α_n} converge uniformemente para R_α. Assim, para $\epsilon > 0$ e um inteiro $M > 0$, existe um inteiro $n > 0$ tal que $q_n > M$ e

$$|R_\alpha^k(x) - R_{\alpha_n}^k(x)| < \epsilon$$

para todo inteiro $k \leq M$.

Como ϵ é arbitrariamente pequeno e M arbitrariamente grande, temos que a órbita de R_α é densa em $\mathbb{S}^1$, independente da escolha de x. □

É trivial ver que rotações no círculo preservam a medida de Lebesgue, pois o tamanho de qualquer intervalo é preservado pela ação de R_α, ou seja, R_α é uma isometria. Da mesma forma, R_α tem de ser ergódica (com respeito à medida de Lebesgue) se $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, pois os únicos conjuntos invariantes são $\mathbb{S}^1$ e $\emptyset$. Esse fato, entretanto, não é tão óbvio: em princípio, poderia haver um subconjunto de $\mathbb{S}^1$ invariante e de interior vazio, mas com medida positiva.

Proposição 2.18 *Rotações irracionais R_α são ergódicas com respeito à medida de Lebesgue.*

Prova: Seja $f \in L^2(\mathbb{S}^1, \mathcal{B}, \lambda)$, onde $\mathcal{B}$ são os borelianos do círculo e λ é a medida de Lebesgue no círculo. Então, f possui expansão de fourier

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{2\pi i n x}$$

em L^2. Se f é R_α-invariante, então

$$f(x+\alpha) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{2\pi i n \alpha} e^{2\pi i n x} = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{2\pi i n x} = f(x)$$

e, portanto, $a_n = a_n e^{2\pi i n \alpha}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Como α é irracional, $e^{2\pi i n \alpha} \neq 1$ se $n \neq 0$. Assim, $a_n = 0$ para todo $n \neq 0$ e temos que $f(x) = a_0$ em L^2. Pela Proposição 2.11, R_α tem de ser ergódica. □

2.2.2
Aplicações expansoras

Apresentaremos, agora, outra aplicação que, embora também seja transitiva e ergódica, é muito diferente da rotação irracional, como veremos adiante.

Considere a função $\phi_k : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ definida por

$$\phi_k(x) = kx \pmod 1,$$

onde $k \in \mathbb{N}$ é maior que 1.

Diferente da rotação, a aplicação expansora ϕ_k não é uma isometria. Assim, pontos em $\mathbb{S}^1$ podem possuir órbitas com comportamentos bem distintos, algo que não acontece para R_α, em que todas as órbitas ou são densas ou são periódicas (e de mesmo período). Existem, por exemplo, pontos periódicos de período arbitrário e pontos cuja órbita é densa.

Vamos, por enquanto, deixar as comparações de lado e provar que

Proposição 2.19 *ϕ_k é transitiva.*

Prova: Basta repararmos que a função ϕ_k dilata o comprimento dos intervalos por um fator $k > 1$ (se eles forem suficientemente pequenos). Denotando o comprimento de um intervalo (a, b) por $|(a, b)| = b - a$, temos que, dado qualquer intervalo aberto $U \subset \mathbb{S}^1$,

$$|\phi_k^n(U)| = \min\{1, k^n|U|\}$$

e, portanto, deve existir um $n \in \mathbb{N}$ tal que $|\phi_k^n(U)| = 1$, ou seja, $\phi_k^n(U) = \mathbb{S}^1$. Em particular, $\phi_k^n(U)$ intersecta qualquer outro aberto de $\mathbb{S}^1$. Pelo Teorema 2.3, ϕ_k é transitiva. $\square$

Observação 2.20 *Na demonstração acima, o que estamos provando, na verdade, é que a aplicação ϕ_k é misturadora, um conceito de recorrência mais forte que transitividade. Dizemos que uma função $f : X \to X$ é misturadora se, para todo par de abertos não vazios $U, V \subset X$, existe um inteiro $N = N(U,V) > 0$ tal que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$ para todo $n \geq N$. Pelo Teorema 2.3, vemos claramente que aplicações misturadoras são transitivas. No caso de ϕ_k, para todo intervalo U, vimos que existe um $N > 0$ tal que $\phi_k^n(U) = \mathbb{S}^1$ para todo $n \geq N$ e, portanto, a aplicação ϕ_k é, de fato, misturadora.*

Vamos, agora, nos concentrar na análise estatística de ϕ_k. Primeiro, repare que ϕ_k preserva a medida de Lebesgue. De fato,

$$\phi_k^{-1}((a,b)) = \left(\frac{a}{k}, \frac{b}{k}\right) \cup \left(\frac{a+1}{k}, \frac{b+1}{k}\right) \cup \ldots \cup \left(\frac{a+k-1}{k}, \frac{b+k-1}{k}\right)$$

e, portanto,

$$\mu(\phi_k^{-1}((a,b))) = \sum_{i=0}^{k-1} \left(\frac{b+i}{k} - \frac{a+i}{k}\right) = b - a = \mu((a,b)).$$

Como intervalos geram a σ-álgebra dos Borelianos, concluímos que ϕ_k preserva a medida de Lebesgue.

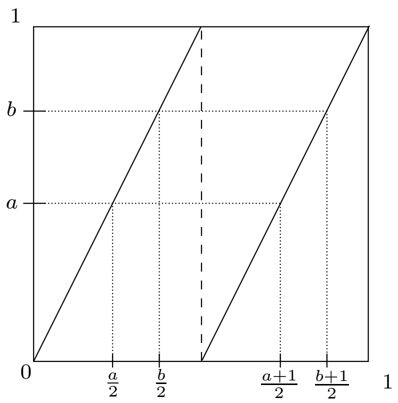


Figura 2.1: A aplicação expansora ϕ_2 preserva a medida de Lebesgue.

Os próximos dois lemas serão necessários para provarmos que a aplicação expansora de grau 2 é ergódica. As demonstrações dos lemas e do teorema podem ser facilmente generalizadas para ϕ_m, escolhemos, entretanto, provar apenas o caso $m = 2$ para não sobrecarregar a notação.

Lema 2.21 *Seja $\mathcal{E}$ a coleção de todos os seguintes intervalos:*

$$E_{n,p} = \left(\frac{p}{2^n}, \frac{p+1}{2^n}\right) \quad n \in \mathbb{N}, p \in \{0, 1, \ldots, 2^n - 1\}.$$

Então a σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}$ (em $\mathbb{S}^1$) é gerada por $\mathcal{E}$, ou seja, $\mathcal{B}$ é a menor σ-álgebra que contém $\mathcal{E}$.

Prova: Denotemos por $\mathcal{A}_{\mathcal{E}}$ a σ-álgebra gerada por $\mathcal{E}$ e $\mathcal{A}_{\mathcal{I}}$ a σ-álgebra gerada pelos intervalos $(a, b) \subset \mathbb{S}^1$. Sabemos que $\mathcal{B} = \mathcal{A}_{\mathcal{I}}$ e, portanto, iremos mostrar que $\mathcal{A}_{\mathcal{I}} = \mathcal{A}_{\mathcal{E}}$. É trivial vermos que $\mathcal{A}_{\mathcal{E}} \subset \mathcal{A}_{\mathcal{I}}$ pois $E_{n,p}$ é um intervalo aberto de $\mathbb{S}^1$. Como $\mathcal{A}_{\mathcal{E}}$ é a menor σ-álgebra que contém $\mathcal{E}$, então $\mathcal{A}_{\mathcal{E}} \subseteq \mathcal{A}_{\mathcal{I}}$.

Vamos, então, provar que $\mathcal{A}_{\mathcal{I}} \subseteq \mathcal{A}_{\mathcal{E}}$. Dado um intervalo real (a, b), defina as seqüências

$$c_n = \frac{[2^n a] + 1}{2^n} \quad \text{e} \quad d_n = \frac{[2^n b] - 1}{2^n},$$

onde $[\cdot]$ denota a parte inteira de um número real. Repare que, para todo $n \geq 1$, $c_n > a$ e $d_n < b$. Além disso,

$$\lim_{n\to\infty} c_n = a \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} d_n = b.$$

Assim, existe $N \geq 1$ tal que $(c_n, d_n) \subset (a, b)$ se $n \geq N$ e, portanto,

$$\bigcup_{i=N}^{\infty} (c_i, d_i) = (a, b).$$

Concluímos, então, que $(a, b) \in \mathcal{A}_{\mathcal{E}}$. Como $\mathcal{A}_{\mathcal{I}}$ é a menor σ-álgebra que contém os intervalos (a, b), temos que $\mathcal{A}_{\mathcal{I}} \subseteq \mathcal{A}_{\mathcal{E}}$ e a prova está terminada. □

Como conseqüência do lema anterior, se quisermos mostrar que uma certa propriedade estatística vale para conjuntos $\mathcal{B}$-mensuráveis, basta mostrarmos que ela vale para os conjuntos $E_{n,p} \in \mathcal{E}$.

Lema 2.22 *Seja $E_{n,p} \in \mathcal{E}$. Então, para todo $B \in \mathcal{B}$,*

$$\mu(\phi_2^{-n}(B) | E_{n,p}) = \mu(B),$$

onde

$$\mu(A|B) = \frac{\mu(A \cap B)}{\mu(B)}$$

é a medida condicional de A com respeito a B.

Prova: Repare que

$$\phi_2^{-n}((a,b)) = \bigcup_{k=0}^{2^n-1} \left(\frac{a+k}{2^n}, \frac{b+k}{2^n} \right),$$

pois

$$\phi_2^n \left(\left(\frac{a+k}{2^n}, \frac{b+k}{2^n} \right) \right) = (a+k \pmod 1, b+k \pmod 1) = (a,b)$$

para todo inteiro $0 \leq k < 2^n$. Além disso, existe um inteiro $k_p \in \{0, 1, \ldots, 2^n - 1\}$ tal que

$$\left(\frac{a+k_p}{2^n}, \frac{b+k_p}{2^n} \right) \subset \left(\frac{p}{2^n}, \frac{p+1}{2^n} \right).$$

Assim,

$$\mu(\phi_2^{-n}((a,b))|E_{n,p}) = \frac{\mu\left(\left(\frac{a+k_p}{2^n}, \frac{b+k_p}{2^n}\right)\right)}{\mu\left(\left(\frac{p}{2^n}, \frac{p+1}{2^n}\right)\right)} = \frac{(b-a)/2^n}{1/2^n} = b-a = \mu((a,b)).$$

A prova do lema está concluída. □

Teorema 2.23 *A aplicação ϕ_2 é ergódica com respeito à medida de Lebesgue.*

Prova: Seja A um conjunto ϕ_2-invariante mensurável tal que $\mu(A) > 0$, mostraremos que $\mu(A^c) = 0$.

Pelo Lema 2.22 e pela invariância de A temos:

$$\mu(\phi_2^{-n}(A)|E_{n,p}) = \mu(A|E_{n,p}) = \mu(A).$$

Como $\mu(A) > 0$, concluímos que

$$\mu(E_{n,p}|A) = \mu(E_{n,p}).$$

Pelo Lema 2.21, os conjuntos $E_{n,p}$ geram os borelianos e, portanto, para todo conjunto mensurável B,

$$\mu(B) = \frac{\mu(A \cap B)}{\mu(A)}.$$

Escolhendo $B = A^c$, temos que

$$\mu(A^c) = \frac{\mu(A \cap A^c)}{\mu(A)} = \frac{\mu(\emptyset)}{\mu(A)} = 0$$

e, portanto, ϕ_2 é ergódica. □

2.3 O shift unilateral

Considere o espaço $\Sigma_2 = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ das seqüências infinitas de dois símbolos. Há muitas maneiras de definirmos uma topologia para esse espaço, uma delas é adotar a seguinte métrica:

$$d(x,y) \equiv \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\bar{d}(x_k,y_k)}{2^k},$$

onde $x = (x_k)_{k\geq 1}$, $y = (y_k)_{k\geq 1}$ e $\bar{d} : \{0,1\} \to \mathbb{R}$ é a métrica discreta.

Definição 2.24 *Seja $x = (x_n)_{n\geq 1} \in \Sigma_2$, definimos o shift como a aplicação*

$$\begin{aligned} \sigma : \ \Sigma_2 &\longrightarrow \Sigma_2 \\ x &\longmapsto w, \end{aligned}$$

onde $w = (w_n = x_{n+1})_{n\geq 1}$.

Teorema 2.25 *O shift σ é uma aplicação Lipschitz (e, em particular contínua).*

Prova: Dados $x = (x_k), y = (y_k) \in \Sigma_2$, temos que

$$\begin{aligned} d(\sigma(x),\sigma(y)) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{d}(x_{n+1},y_{n+1})}{2^n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\bar{d}(x_n,y_n)}{2^{n-1}} \\ &= 2\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\bar{d}(x_n,y_n)}{2^n} \leq 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{d}(x_n,y_n)}{2^n} = 2d(x,y). \end{aligned}$$

Logo σ é Lipschitz com constante de Lipshitz igual a 2. □

Teorema 2.26 *O shift σ é uma aplicação transitiva.*

Prova: A idéia da demonstração é construir uma seqüência de dois símbolos cuja órbita positiva seja densa em Σ_2. Antes, observamos que a distância entre dois pontos $x, y \in \Sigma_2$ cujos primeiros N termos coincidem satisfaz:

$$d(x,y) \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{N+1}}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots\right) = \frac{1}{2^N}.$$

Agora repare que, dado $\epsilon > 0$, podemos tomar o menor inteiro N_ϵ tal que $\frac{1}{2^{N_\epsilon}} < \epsilon$. Assim, fixando $x^* \in \Sigma_2$, temos que, se os primeiros N_ϵ termos de $x \in \Sigma_2$ coincidem com os de x^*, então x pertence à bola $B_\epsilon(x^*)$.

Considere

$$\widetilde{x} = \underline{0}\,\underline{1}\,\underline{00}\,\underline{01}\,\underline{10}\,\underline{11}\,\underline{000}\,\underline{001}\,\underline{010}\,\underline{011}\,\underline{100}\,\underline{101}\,\underline{110}\,\underline{111}\,\underline{0000}\,\ldots$$

a seqüência formada pela concatenação das seqüências finitas de dois símbolos, começando pelas seqüências de comprimento 1, seguidas pelas de comprimento 2 etc.

Para vermos que a órbita do ponto $\widetilde{x}$ é densa em Σ_2, basta observarmos que, pela construção de $\widetilde{x}$, para qualquer $\epsilon > 0$ e para todo $x \in \Sigma_2$, existe um inteiro n tal que os primeiros N_ϵ termos de x coincidem com os de $\sigma^n(\widetilde{x})$ e, portanto, concluímos que $\sigma^n(\widetilde{x}) \in B_\epsilon(x)$. Logo, $\overline{\mathcal{O}_\sigma^+(\widetilde{x})} = \Sigma_2$. □

Vamos, agora, definir um conjunto $\mathcal{N} \subset \Sigma_2$ da seguinte maneira: $(a_j)_{j=1}^\infty \in \mathcal{N}$ se, e somente se, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $a_j = a_{j+1}$ para todo $j \geq k$. Repare que $\mathcal{N}$ é σ-invariante, bem como seu complementar $\widetilde{\Sigma_2} = \Sigma_2 - \mathcal{N}$ e, portanto, faz sentido definirmos uma dinâmica para $\sigma : \widetilde{\Sigma_2} \to \widetilde{\Sigma_2}$.

Corolário 2.27 *O shift $\sigma : \widetilde{\Sigma_2} \to \widetilde{\Sigma_2}$ é uma aplicação transitiva.*

Prova: É suficiente reparar que o elemento $\widetilde{x}$ que construímos na demonstração do Teorema 2.26 pertence a $\widetilde{\Sigma_2}$. □

A seguir, construiremos uma semiconjugação entre a aplicação expansora de grau 2, que definimos em 2.2.2, e o shift, descrito nessa seção.

Considere os intervalos $I_0 = [0, 1/2]$ e $I_1 = [1/2, 1]$. Seja $x = \{a_j\}_{j=1}^\infty$, defina $h : \Sigma_2 \to \mathbb{S}^1$ tal que

$$h(x) = \bigcap_{j=0}^{\infty} \phi_2^{-j}(I_{a_{j+1}}).$$

Primeiro, repare que h está bem definida, pois

$$A_n = \bigcap_{j=0}^{n} \phi_2^{-j}(I_{a_{j+1}})$$

é uma seqüência de intervalos compactos encaixados.

A sobrejetividade de h é garantida pelo fato de que todo número $x \in [0, 1)$ possui uma expansão em base 2, ou seja, para todo $x \in \mathbb{S}^1$, existe uma seqüência $\{a_j(x)\}_{j=1}^\infty \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ tal que

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j(x)}{2^j}.$$

Podemos, por exemplo, definir

$$a_j(x) = [2\phi_2^{j-1}(x)], \tag{2-2}$$

onde $[\cdot]$ representa a parte inteira de um número real.

Repare que se $x \in \phi_2^{-n}(0)$, então $a_j(x) = 0$ para todo $j > n$. Nesse caso, $h^{-1}(x)$ consiste em duas seqüências de Σ_2: a que acabamos de definir (2-2) e uma $\{b_j\}_{j=1}^{\infty}$ tal que

$$b_j = \begin{cases} a_j(x), & j \leq n \\ 1, & j > n. \end{cases}$$

Dessa maneira, vemos que h não é injetiva e, assim, pode ser somente uma semiconjugação, não uma conjugação total.

Para terminarmos de provar que h é uma semicojugação, resta apenas mostrarmos que h é contínua. Se $x, y \in \Sigma_2$ são tais que $d(x, y) < \epsilon$, então os primeiro N_ϵ termos de x e y devem coincidir, onde N_ϵ é o menor inteiro positivo tal que $1/2^{N_\epsilon} < \epsilon$. Pela construção de h,

$$h(x), h(y) \in \bigcap_{j=1}^{N\epsilon} \phi_2^{-j+1}(I_{a_j}) = \overline{E_{N_\epsilon,p}},$$

para algum inteiro $0 \leq p < 2^{N_\epsilon} - 1$. Assim,

$$d(h(x), h(y)) \leq |E_{N_\epsilon,p}| = \left| \left(\frac{p}{2^{N_\epsilon}}, \frac{p+1}{2^{N_\epsilon}} \right) \right| = 1/2^{N_\epsilon} < \epsilon.$$

Logo, h é contínua e ϕ_2 é fator de σ.

Assim, as propriedades dinâmicas das órbitas de $\sigma : \Sigma_2 \to \Sigma_2$ são herdadas por $\phi_2 : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$.

3
Sistemas alternantes

Em 1857, George Boole (Ble) provou que, para toda função integrável ϕ, vale a seguinte fórmula:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x - 1/x)dx.$$

Pela Proposição 2.9, sabemos que isso é equivalente a dizer que a transformação $\varphi(x) = x - 1/x$ preserva a medida de Lebesgue na reta. Essa função φ - chamada de *transformação de Boole* - é, na verdade, ergódica com respeito à medida de Lebesgue (Adl).

Nosso objetivo, nesse capítulo, é definir uma classe de funções na reta que abranjam a transformação de Boole e apresentar certas ferramentas que serão necessárias para mostrarmos, nos próximos capítulos, sob que circunstâncias essas funções são transitivas, robustamente transitivas e ergódicas. Chamaremos essa classe de funções que generalizam a transformação de Boole de *sistemas alternantes*.

3.1
Sistemas alternantes: preliminares

Para simplificar a notação da definição de sistemas alternantes, vamos primeiro apresentar algumas definições.

Seja $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ uma coleção de n números reais distintos. Dizemos que B está *entrelaçado* ao conjunto de números reais $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}\}$ se, para todo intervalo aberto E da partição induzida por A em $\mathbb{R}$, existe um único $i \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $b_i \in E$, ou seja, se

$$b_1 < a_1 < b_2 < \ldots < b_{n-1} < a_{n-1} < b_n.$$

Considere uma função *sinal*, definida em $\mathbb{R} - \{0\}$ por

$$sinal(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Dada uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dizemos que a órbita $\mathcal{O}_f^+(x)$ *troca de sinal indefinidamente* se, para todo $N \geq 0$, existe $M > N$ tal que $sinal(f^M(x)) = -sinal(f^N(x))$.

Definição 3.1 *Seja $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ uma transformação contínua. Dizemos que f é um sistema alternante se:*

(A1) Para todo $n \geq 1$, $f^{-n}(0)$ é um conjunto com 2^n elementos distintos e é entrelaçado ao conjunto

$$\bigcup_{i=0}^{n-1} f^{-i}(0);$$

(A2) $\mathcal{O}_f^+(x)$ troca de sinal indefinidamente para todo $x \in \mathbb{R} - \mathcal{N}$, onde $\mathcal{N}$ é um subconjunto enumerável.

Observe que o conjunto $\mathcal{N}$ da Definição 3.1 deve, necessariamente, conter as pré-imagens de zero, ou seja,

$$\bigcup_{i=0}^{\infty} f^{-i}(0) \subset \mathcal{N},$$

pois, como a órbita dos pontos em $\bigcup_{i=0}^{\infty} f^{-i}(0)$ não estão sequer definidas, então, em particular, não podem trocar indefinidamente de sinal.

Observação 3.2 *Seja $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ um sistema alternante e $\mathbb{X} \equiv \mathbb{R} - \{f^{-n}(0) : n \geq 0\}$. Mais que ser f-invariante, $\mathbb{X}$ é o conjunto formado pelos pontos da reta cujas órbitas estão definidas e, assim, não apenas faz sentido definir uma dinâmica restrita a $\mathbb{X}$, como essa dinâmica é essencialmente a mesma. Se quisermos, por exemplo, mostrar que f é transitiva, basta procurarmos por um ponto de $\mathbb{X}$ cuja órbita seja densa.*

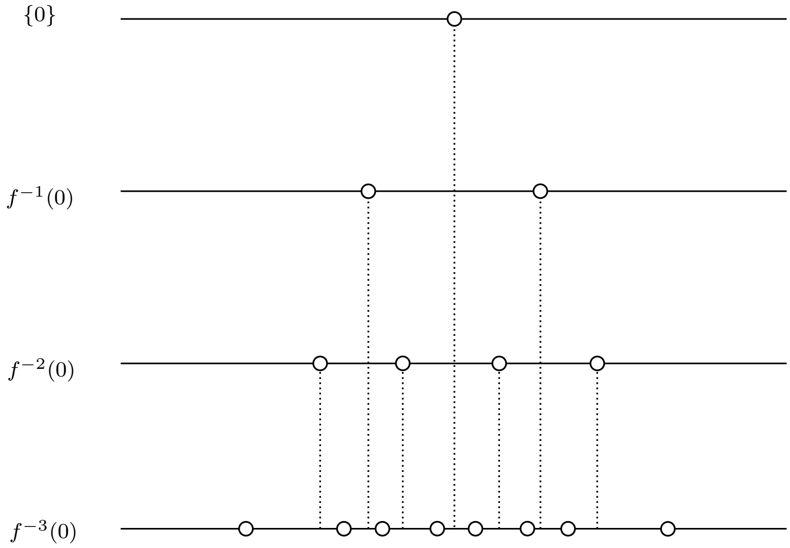


Figura 3.1: Primeira propriedade de um sistema alternante: pré-imagens entrelaçadas e duplicadas.

Lema 3.3 *Seja $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ uma transformação contínua. Se f satisfaz as propriedades abaixo, então é sistema alternante.*

1. *f é crescente em cada componente conexa de $\mathbb{R} - \{0\}$.*
2. *$f(0, +\infty) = f(-\infty, 0) = \mathbb{R}$.*
3. *A reta $\{x = 0\}$ é uma assíntota vertical de f tal que $f(x) \to \infty$, quando $x \to 0^-$ e $f(x) \to -\infty$, quando $x \to 0^+$.*
4. *$f(x) \to -\infty$, quando $x \to -\infty$ e $f(x) \to +\infty$, quando $x \to +\infty$.*
5. *f está acima da diagonal em $(-\infty, 0)$ e abaixo da diagonal em $(0, +\infty)$.*

Observação 3.4 *Repare que uma das hipóteses acima é redundante, mais precisamente, uma dentre as hipóteses (2),(3) e (4) é redundante. De fato, duas dessas hipótese mais a continuidade de f implicam a terceira. Escolhemos, entretanto, enunciar todas no lema, pois se quisermos mostrar que uma determinada função é um sistema alternante usando o Lema 3.3 podemos escolher uma dentre as hipóteses (2),(3) e (4) para não demonstrar.*

Prova da Observação:

$(3), (4) \Rightarrow (2)$

É conseqüência direta do Teorema do Valor Intermediário.

$(2),(3) \Rightarrow (4)$

Considere $f^- = f|_{(-\infty,0)}$ e $f^+ = f|_{(0,\infty)}$. Vamos mostrar que se $\lim\limits_{x\to 0} f^-(x) = \infty$ e $f(-\infty,0) = \mathbb{R}$, então $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$.

Suponha, por absurdo, que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) \neq -\infty$. Nesse caso, teríamos duas possibilidades: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L$ para algum $L \in \mathbb{R}$ ou $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$. Em ambos os casos, existiria um $L \in \mathbb{R}$ tal que $f(-\infty,0) = (L,\infty)$, contradizendo (3) (ver figuras 3.2 e 3.3). A demonstração para f^+ é análoga.

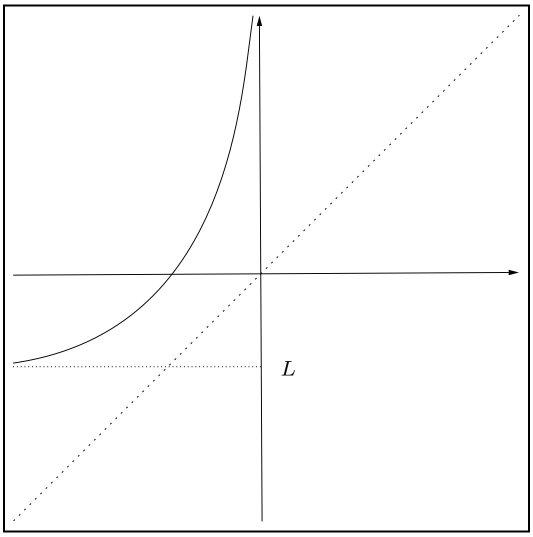


Figura 3.2: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L$

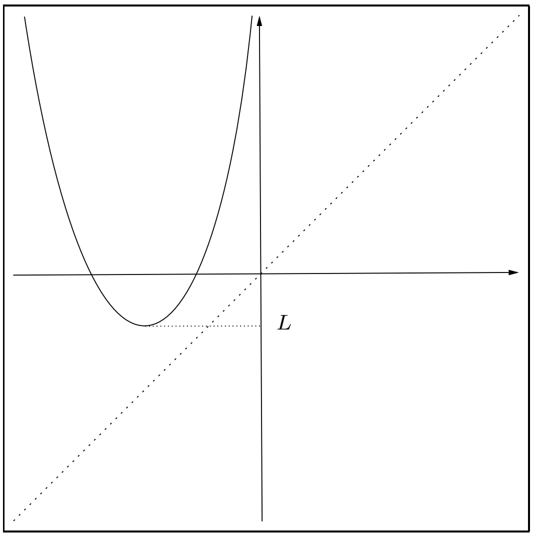


Figura 3.3: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$

$(2),(4) \Rightarrow (3)$

Demonstraremos de maneira semelhante à prova anterior. Vamos mostrar que se $\lim\limits_{x\to-\infty} f^-(x) = -\infty$ e $f(-\infty,0) = \mathbb{R}$, então $\lim\limits_{x\to 0} f^-(x) = \infty$.

Suponha, por absurdo, que $\lim\limits_{x\to 0} f^-(x) \neq \infty$. Nesse caso, teríamos duas possibilidades: $\lim\limits_{x\to 0} f^-(x) = L$ para algum $L \in \mathbb{R}$ ou $\lim\limits_{x\to 0} f^-(x) = -\infty$. Em ambos os casos, existiria um $L \in \mathbb{R}$ tal que $f(-\infty,0) = (-\infty,L)$, contradizendo (2).

$\square$

Prova do Lema: Vamos mostrar que $f^{-n}(0)$ possui 2^n elementos usando indução em n. O caso $n=0$ é trivialmente verificado pois

$$card(f^{-0}(0)) = card(\{0\}) = 1 = 2^0.$$

Suponha que seja verdade para $n=k$. Como f é bijetora em cada componente conexa $(-\infty,0)$ e $(0,\infty)$, então, para cada elemento $x_i \in f^{-k}(0)$, temos que a equação $f(x) = x_i$ possui duas raízes: uma em $(-\infty, 0)$ e a outra em $(0, \infty)$. Assim,

$$card(f^{-k-1}(0)) = 2 \cdot card(f^{-k}(0)) = 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$$

e a indução está completa.

Para terminar de mostrar que a propriedade $(A1)$ é satisfeita, precisamos mostrar que $f^{-n}(0)$ é entrelaçado a $\bigcup_{i=0}^{n-1} f^{-i}(0)$. Como já sabemos que

$$card(f^{-n}(0)) = 2^n = 1 + \sum_{i=0}^{n-1} 2^i = 1 + \sum_{i=0}^{n-1} card(f^{-i}(0)) = 1 + card\left(\bigcup_{i=0}^{n-1} f^{-i}\right),$$

basta mostrarmos que entre dois elementos de $f^{-n}(0)$ sempre há pelo menos um elemento de $\bigcup_{i=0}^{n-1} f^{-i}(0)$. Para isso, considere $x, y \in f^{-n}(0)$ e tome o menor $k < n$ tal que $sinal(f^k(x)) = -sinal(f^k(y))$. Pelo Teorema do Valor Intermediário aplicado a f^k, deve haver um $w \in f^{-k}(0)$ entre x e y. Assim fica provada a propriedade (A1).

Para verificar a propriedade $(A2)$, vamos mostrar que, para todo $x \in \mathbb{X} = \mathbb{R} - \{f^{-n} : n \geq 0\}$, $\mathcal{O}_f^+$ troca indefinidamente de sinal.

Como f é monótona crescente em $(-\infty, 0)$, então, para todo $x \in \mathbb{X} \cap (-\infty, 0)$, deve existir algum inteiro $N = N(x) > 0$, tal que $f^N(x) > 0$. Caso contrário, $\mathcal{O}_f^+(x)$ seria uma seqüência monótona crescente definida em um intervalo limitado e, portanto, deveria convergir para algum real $c < 0$. Mas, nesse caso,

$$f(c) = f(\lim_{n\to\infty} f^n(x^*)) = \lim_{n\to\infty} f^{n+1}(x^*) = c,$$

contradizendo a inexistência de pontos fixos. Com um argumento análogo, podemos mostrar que, para todo $x \in \mathbb{X} \cap (0, \infty)$, existe um inteiro $M = M(x)$ tal que $f^M(x) < 0$. Assim, concluímos que toda órbita de f deve trocar indefinidamente de sinal. $\square$

Repare que a transformação de Boole φ é, de fato, um sistema alternante, pois as hipóteses do Lema 3.3 são facilmente verificadas - basta analisarmos seu gráfico:

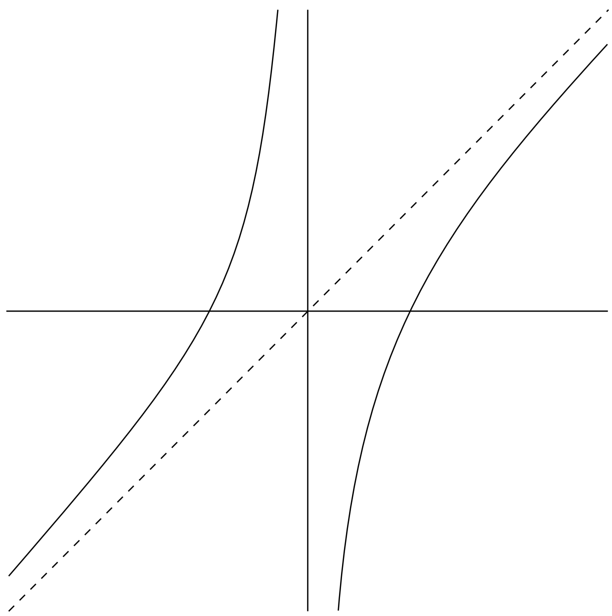


Figura 3.4: O gráfico da transformação de Boole $x \mapsto x - 1/x$.

Nem todo sistema alternante, entretanto, satisfaz o Lema 3.3, como mostraremos a seguir.

Observação 3.5 *A transformação $\psi \equiv 1/x - x = -\varphi$ é um sistema alternante que não satisfaz as hipóteses do Lema 3.3.*

Prova da Observação: Na verdade, é fácil ver que nenhuma das hipóteses do lema são satisfeitas por ψ. Para mostrar que ψ é um sistema alternante, começaremos mostrando a propriedade (A1). Como a transformação de Boole é simétrica, ou seja, $\varphi(-x) = -\varphi(x)$, temos que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\psi^n(x) = (-1)^n \varphi^n(x).$$

Assim, $\psi^n(x) = 0$ se, e somente se, $\varphi^n(x) = 0$ e, dessa maneira, ψ também satisfaz a propriedade (A1) de um sistema alternante.

Para provarmos que ψ satisfaz a propriedade (A2) devemos verificar se o conjunto $\mathcal{N}_\psi$ dos pontos cuja órbita não troca indefinidamente de sinal é enumerável. No caso da transformação de Boole, esse conjunto é exatamente $\mathcal{N}_\varphi \equiv \{\varphi^{-n}(0) : n \in \mathbb{N}\}$. Para ψ, veremos que

$$\mathcal{N}_\psi = \mathcal{N}_\varphi \cup \mathcal{N},$$

onde $\mathcal{N} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \psi^{-n}(\pm\sqrt{2}/2)$.

Repare que, como $\psi((-\infty,-1)) = \mathbb{R}_+ - \{0\}$ e $\psi((1,\infty)) = \mathbb{R}_- - \{0\}$, então basta mostrarmos que se $x \in I_+ \equiv (0,1) - \mathcal{N}$, então deve existir um inteiro $N > 0$ tal que $\psi^N(x) \notin I_+$. Para isso, fixe $x \in I_+$ tal que $\psi(x) \in I_+$ e considere o intervalo A cujos extremos são x e $\psi(x)$, ou seja, $A = (x, \psi(x))$ ou $A = (\psi(x), x)$. Como

$$\psi'(x) = -\left(1 + \frac{1}{x^2}\right),$$

então $\inf\{|\psi'(x)| : x \in I_+\} = 2$. Pelo Teorema do Valor Médio,

$$|\psi^n(A)| > 2^n|A|$$

e, portanto, deve haver um inteiro $N > 0$ tal que $|\psi^N(A)| > 1 > |I_+|$. Assim, $|\psi^N(x) - \psi^{N+1}(x)| > |I_+|$ e, portanto, ou $\psi^N(x) \notin I_+$ ou $\psi^{N+1}(x) \notin I_+$. O caso $x \in I_- \equiv (-1,0) - \mathcal{N}$ é análogo. $\square$

Chamaremos uma transformação que satisfaz as hipóteses do Lema 3.3 de *sistema alternante crescente.*

Teorema 3.6 *Seja* $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ *uma função diferenciável tal que:*

1. f *é transitiva.*
2. *Existe* $a > 0$ *tal que* $f'(x) \geq a$*, para todo* x*.*

Então f *é um sistema alternante crescente.*

Prova: Vamos mostrar que f satisfaz as hipóteses (1),(3),(4) e (5) do Lema 3.3. A hipótese (2), como vimos na Observação 3.4, não precisa ser demonstrada. A hipótese (1) - que f é monótona crescente - é conseqüência imediata de $f'(x) > a > 0$. Vamos mostrar agora que a hipótese (4) é satisfeita, isto é, que $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$. Suponha, por absurdo, que $\lim_{x\to\infty} f(x) = c \in \mathbb{R}^+$, ou seja, que para todo $\epsilon > 0$, existe $x_\epsilon \in \mathbb{R}$ tal que $c - f(x) < \epsilon$, se $x \geq x_\epsilon$. Tomando $x, y > x_\epsilon$ tais que $y - x \geq \epsilon/a$, temos, pelo Teorema do Valor Médio, que existe $z \in (x,y)$ tal que

$$f'(z) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x} < \frac{c - f(x)}{y - x} < \frac{\epsilon}{(\epsilon/a)} = a,$$

mas isso contradiz a segunda hipótese do teorema. Assim, provamos que $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$. Com um argumento idêntico, podemos mostrar que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

Para provar (5) - que f está acima da diagonal em $\mathbb{R}_-$ e abaixo em $\mathbb{R}_+$, precisamos, primeiro, mostrar que f não possui pontos fixos. Suponha, por absurdo, que p é ponto fixo de f, ou seja, que $f(p) = p$. Nesse caso, temos que $f((p,\infty)) = (p,\infty)$, se $p > 0$ ou $f((-\infty,p)) = (-\infty,p)$, se $p < 0$. Sendo assim, pelo Corolário 2.4, f não é transitiva, contrariando a primeira hipótese do teorema.

Bom, sabemos que f não tem pontos fixos, se f não satisfizesse a hipótese (5) teríamos que $f(x) > x$ para todo $x > 0$ ou que $f(x) < x$ para todo $x < 0$. Em qualquer um dos casos, como f é crescente em cada componente conexa, teríamos $f(0,\infty) \subset (0,\infty)$ ou $f(-\infty,0) \subset (-\infty,0)$ e, portanto, novamente pelo Corolário 2.4, f não seria transitiva.

Finalmente, suponha que a hipótese (3) não é satisfeita, ou seja, que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \to c$, quando $x \to 0^-$, ou tal que $f(x) \to c$, quando $x \to 0^+$. Como f está abaixo da diagonal em $\mathbb{R}_+$ e acima, em $\mathbb{R}_-$, teríamos que $f^{-1}(c,\infty) \subset (c,\infty)$ ou que $f^{-1}(-\infty,c) \subset (-\infty,c)$, contrariando a transitividade de f (Corolário 2.5). Com isso a prova está completa. □

3.2
A transformação induzida

Considere um sistema alternante crescente $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$. Sejam x_0^- e x_0^+ as raízes negativa e positiva, respectivamente, da equação $f(x) = 0$ e defina $f_- = f|_{(-\infty,0)}$ e $f_+ = f|_{(0,\infty)}$. Chamamos de *seqüências induzidas por* f, as seqüências que definidas recursivamente a seguir:

$$\begin{cases} x_n^+ = f_+^{-1}(x_{n-1}^+), \\ x_1^+ = f_+^{-1}(x_0^+), \end{cases} \qquad \begin{cases} x_n^- = f_-^{-1}(x_{n-1}^-), \\ x_1^- = f_-^{-1}(x_0^-), \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_n^- = f_-^{-1}(x_{n-1}^+), \\ u_1^- = f_-^{-1}(x_0^+), \end{cases} \qquad \begin{cases} u_n^+ = f_+^{-1}(x_{n-1}^-), \\ u_1^+ = f_+^{-1}(x_0^-). \end{cases}$$

Repare que x_n^- e u_n^- são os pontos mínimo e máximo, respectivamente, de $f^{-n}(0) \cap (-\infty,0)$, assim como u_n^+ e x_n^+ são o mínimo e o máximo, respectivamente, de $f^{-n}(0) \cap (0,\infty)$. Pelas hipóteses do Lema 3.3, vemos claramente que $x_n^+ \to \infty$, $x_n^- \to -\infty$ e $u_n^\pm \to 0^\pm$. Além disso, vemos que, por definição, os pontos dessas seqüências possuem a seguinte dinâmica:

$$u_{n+1}^- \longrightarrow x_n^+ \longrightarrow x_{n-1}^+ \longrightarrow \ldots \longrightarrow x_1^+ \longrightarrow x_0^+ \longrightarrow 0,$$
$$u_{n+1}^+ \longrightarrow x_n^- \longrightarrow x_{n-1}^- \longrightarrow \ldots \longrightarrow x_1^- \longrightarrow x_0^- \longrightarrow 0.$$

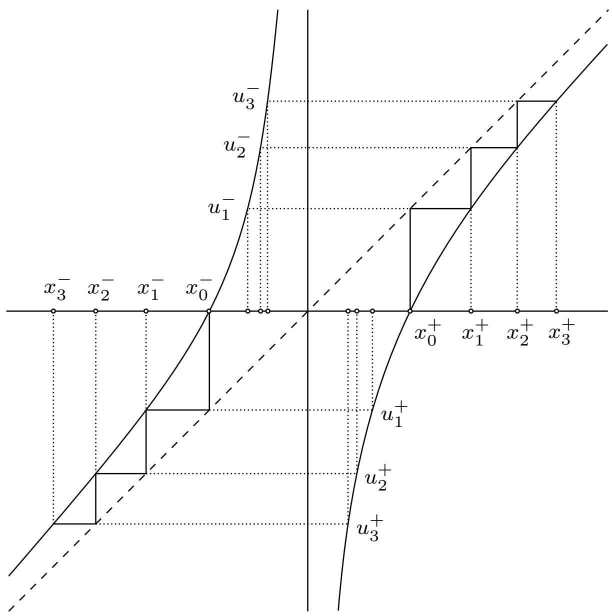


Figura 3.5: Os primeiros quatro termos das seqüências induzidas pela transformação de Boole $x \mapsto x - 1/x$.

Chamaremos de *partição induzida por* f *em* $\mathbb{R}$ a partição disjunta $\mathbb{P}_f$ induzida pelas seqüências definidas anteriormente. Os átomos dessa partição são descritos por

$$\{B_{n+1}^- = (x_{n+1}^-, x_n^-)\}_{n\geq 0}, \{B_{n+1}^+ = (x_n^+, x_{n+1}^+)\}_{n\geq 0},$$
$$\{I_{n+1}^- = (u_{n+1}^-, u_n^-)\}_{n\geq 0}, \{I_{n+1}^+ = (u_n^+, u_{n+1}^+)\}_{n\geq 0},$$

onde $u_0^- = x_0^-$ e $u_0^+ = x_0^+$.

Pela continuidade de f, temos que a dinâmica dos átomos acompanha a dinâmica das seqüências, ou seja,

$$I_{n+1}^- \longrightarrow B_n^+ \longrightarrow B_{n-1}^+ \longrightarrow \ldots \longrightarrow B_1^+ \longrightarrow (0, x_0^+), \qquad (3\text{-}1)$$
$$I_{n+1}^+ \longrightarrow B_n^- \longrightarrow B_{n-1}^- \longrightarrow \ldots \longrightarrow B_1^- \longrightarrow (x_0^-, 0). \qquad (3\text{-}2)$$

Dessa forma, se $[x,y] \subset I^-_{n+1}$, então

$$\begin{aligned}
[f(x),f(y)] &\subset B^+_n,\\
[f^2(x),f^2(y)] &\subset B^+_{n-1},\\
&\vdots\\
[f^m(x),f^m(y)] &\subset B^+_{n-m+1},\\
&\vdots\\
[f^n(x),f^n(y)] &\subset I^+.
\end{aligned}$$

Para podermos mostrar uma série de propriedades de um sistema alternante f, usaremos uma transformação definida no conjunto $I = [x_0^-, x_0^+]$. Chamaremos tal conjunto de *intervalo distribuidor*.

Lema 3.7

$$\mathbb{R} - \{0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(I),$$

Prova: Conseqüência das dinâmicas dos átomos descritas em (3-1) e (3-2). □

Como $\mathbb{X} \equiv \mathbb{R} - \{f^{-n}(0) : n \geq 0\}$ é um conjunto f-invariante, temos também que

$$\mathbb{X} = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(I \cap \mathbb{X}).$$

Definição 3.8 (transformação induzida) *Sejam $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ um sistema alternante crescente e $I = [x_0^-, x_0^+]$ seu intervalo distribuidor. Definimos a transformação $f_I : I - \{0\} \to I$ por*

$$f_I(x) = f^{n(x)}(x),$$

onde

$$n(x) \equiv \min\{n \geq 1 : f^n(x) \in I\}.$$

Chamaremos f_I de transformação induzida por f no intervalo distribuidor I.

A seguinte observação implica que f_I está bem definida.

Observação 3.9 *Note que $I = \bigcup_n \overline{I^{\pm}_n}$ e que se $x \in I^-_n \cup I^+_n$, então $f_I(x) = f^n(x)$. Esse fato é conseqüência direta da dinâmica dos átomos descrita em (3-1) e (3-2) e será utilizado com freqüência no decorrer do texto.*

Lema 3.10 *Seja $E \subset I$ um conjunto na σ-álgebra de Borel. Então*

$$f_I^{-1}(E) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (I_n \cap f^{-n}(E)) \quad \textit{(disjunta)},$$

onde $I_n = I_n^- \cup I_n^+$.

Prova: Usaremos o símbolo $\bigsqcup$ para denotar a união de conjuntos disjuntos.

Como $\{I_n^-\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{I_n^+\}_{n\in\mathbb{N}}$ são famílias de intervalos disjuntos, temos que

$$E = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} (E \cap I_n).$$

Além disso, $f_I^{-1}(I_n) = f^{-n}(I_n)$. Assim,

$$f_I^{-1}(E) = f_I^{-1}\left(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} (E \cap I_n)\right) = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} f_I^{-1}(E \cap I_n) = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(E) \cap I_n,$$

e a prova está completa. □

Teorema 3.11 *Seja $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ um sistema alternante que preserva a medida de Lebesgue e f_I sua transformação induzida. Então f é ergódica (com respeito à medida de Lebesgue na reta) se f_I for ergódica (com respeito à medida de Lebesgue em I).*

Prova: Seja $E \subset \mathbb{R}$ um conjunto mensurável e invariante com medida positiva. Assim, pelo menos um dos conjuntos $(I \cap E)$ e $(I \cap E^c)$ possui medida positiva. Suponha, sem perda, que $\mu(I \cap E) > 0$. Pelo Lema 3.10, temos que

$$\begin{aligned} f_I^{-1}(E \cap I) &= \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \cap f^{-n}(I \cap E) = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \cap f^{-n}(I) \cap E \\ &= \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \cap E = E \cap I. \end{aligned}$$

Como f_I^{-1} é ergódica, temos $E \cap I = I$ módulo um conjunto de medida zero. Assim,

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(E \cap I) = \bigcup_{n=1}^{\infty} E \cap f^{-n}(I) = E,$$

módulo um conjunto de medida zero. □

4
Transitividade de Sistemas Alternantes

Existem sistemas alternantes que não são transitivos. De fato, considere uma função $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ diferenciável que satisfaz as hipóteses do Lema 3.3 e um ponto $x_0 \in \mathbb{R} - \{0\}$ tais que x_0 é periódico de período 2, $f'(x_0) < 1$ e $f'(f(x_0)) < 1$ (veja Figura 4.1). Nesse caso, x_0 é um ponto periódico atrator com respeito à f e, portanto, existe um subconjunto $A = A_- \cup A_+$ (Figura 4.1) - que chamamos de *bacia de atração* da órbita periódica - tal que $int(A) \neq \emptyset$ e $f(A) \subset A$. Pelo Corolário 2.4, uma função desse tipo não pode ser transitiva.

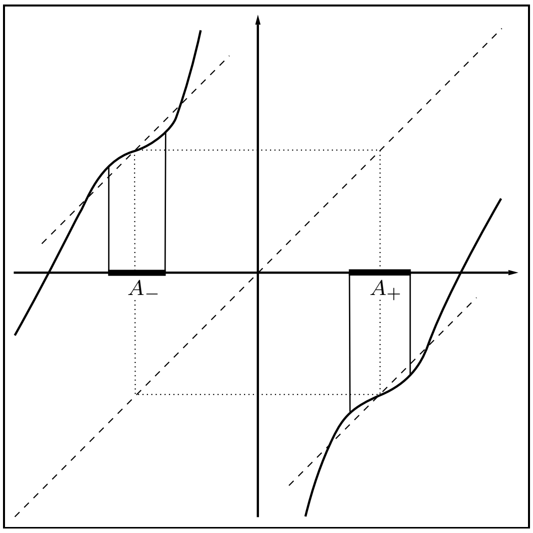


Figura 4.1: Um sistema alternante com órbita periódica atratora de período dois.

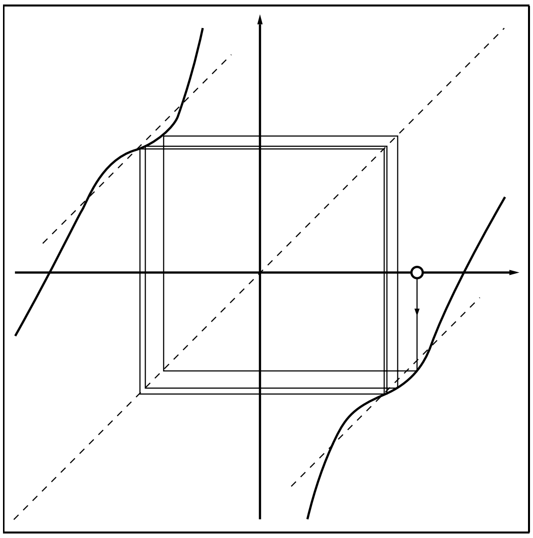


Figura 4.2: A órbita de um ponto $p \in A$ sendo atraída para a órbita de x_0 .

4.1
Átomo-expansividade

Nessa seção, definiremos o que é um sistema alternante A-expansivo e provaremos que esta propriedade é, de fato, equivalente à transitividade de sistemas alternante. Com isso, seremos capazes de mostrar que dois exemplos simples de sistemas alternantes crescentes, apresentados ao final da seção, são transitivos.

Definição 4.1 *Seja f um sistema alternante crescente. Dizemos que a função f é átomo-expansiva (ou, simplesmente, A-expansiva) se dados $x, y \in \mathbb{X} \equiv \mathbb{R} - \{f^{-n}(0) : n \geq 0\}$, existem átomos $A_1 \neq A_2$ da partição $\mathbb{P}_f$ induzida por f e um inteiro $N \geq 1$ tais que $f^N(x) \in A_1$ e $f^N(y) \in A_2$.*

Como $\mathbb{P}_f \cap I$ é uma partição de I, podemos estender a noção de átomo-expansividade para a tranformação induzida f_I de forma natural: f_I é A-expansiva se, para todo par $x, y \in I \cap \mathbb{X}$, existe um inteiro $N > 0$ tal que $f_I^N(x)$ e $f_I^N(y)$ estão em átomos diferentes da partição $I \cap \mathbb{P}_f$.

Proposição 4.2 *Seja $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ um sistema alternante crescente. Então a função f é A-expansiva se, e somente se, a transformação f_I induzida por f no intervalo distribuidor I é A-expansiva.*

Prova: Suponha a átomo-expansividade de f_I e considere, sem perda, $x, y \in \mathbb{X} \cap B_k^+$. Como, pela definição de B_k, $f^k(x), f^k(y) \in I$, podemos tomar o menor inteiro $N > 0$ tal que $f_I^N(f^k(x))$ e $f_I^N(f^k(y))$ estão em átomos diferentes da partição $I \cap \mathbb{P}_f$. Para todo $x \in I$, defina a seqüência $\{n_j\}_{j=1}^{\infty}$ da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} n_1(x) &= n(x); \\ n_j(x) &= n(f^{n_{j-1}}(x)), \end{aligned}$$

onde $n(x)$ é o tempo de primeiro retorno (ver Definição 3.8). Repare que, plea minimalidade de N, $n_j(f^k(x)) = n_j(f^k(y))$ para todo $j \in \{1, \ldots, N\}$.

Vamos, então, denotar $n_j(f^k(x))$ por n_j com $j \in \{1, \ldots, N\}$. Assim, $f_I^N(f^k(x)) = f^{\sum_{j=1}^N n_j}(f^k(x))$ e, portanto, existe um inteiro $K = (k + \sum_{j=1}^N n_j)$ tal que $f^K(x)$ e $f^K(y)$ estão em átomos distintos da partição $\mathbb{P}_f$. Logo, f é átomo-expansiva.

Agora, suponha a átomo-expansividade de f e considere $x, y \in I \cap \mathbb{X}$ no mesmo átomo da partição $\mathbb{P}_f$. Seja $N > 0$ o menor inteiro tal que $f^N(x)$ e $f^N(y)$ estão em átomos diferentes. Pela dinâmica dos átomos, descrita em 3-1, $f^N(x)$ e $f^N(y)$ devem, necessariamente, estar em I. Assim, deve existir um inteiro $k \leq N$ tal que $f_I^k(x) = f^N(x)$ e $f_I^k(y) = f^N(y)$ e concluímos que f_I é átomo-expansiva. $\square$

Lema 4.3 *Seja $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ um sistema alternante crescente. Se o conjunto $\{f^{-n}(0)\}_{n \geq 1}$ for denso em $\mathbb{R}$, então f é A-expansiva.*

Prova: Considere dois pontos $x < y$ de um mesmo átomo $A \in \mathbb{P}_f$. Se $\{f^{-n}(0)\}_{n\geq 1}$ é denso em $\mathbb{R}$, então existe $x < w < y$ tal que $f^n(w) = 0$. Mais ainda, pela propriedade de entrelaçamento de sistemas alternantes, para um inteiro $n > 0$ mínimo, existe um único $w \in (x, y)$ tal que $f^n(w) = 0$. Assim, pela continuidade de f, temos que $sinal(f^n(x)) = -sinal(f^n(y))$ e, em particular, $f^n(x)$ e $f^n(y)$ estão em átomos distintos. $\square$

Lema 4.4 *Seja $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ um sistema alternante crescente. Se f é uma aplicação átomo-expansiva, então $f : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ é conjugado a $\sigma : \widetilde{\Sigma_2} \to \widetilde{\Sigma_2}$.*

Prova: Obviamente, a escolha dos símbolos de uma dinâmica simbólica é totalmente irrelevante, o que importa é a cardinalidade do conjunto de símbolos. Na Seção 2.3, a escolha dos símbolos 0 e 1 era conveniente por causa da analogia entre as seqüências simbólicas e a expansão binária de um número real em $[0, 1)$. Agora, consideraremos $\widetilde{\Sigma_2} \subset \Sigma_2 = \{-1, 1\}^{\mathbb{N}}$ em analogia à troca de sinais dos sistemas alternantes.

Supondo a átomo-expansividade da f, construiremos um homeomorfismo $h : \mathbb{X} \longrightarrow \widetilde{\Sigma_2}$ tal que $h \circ f = \sigma \circ h$.

Defina $h : \mathbb{X} \longrightarrow \widetilde{\Sigma_2}$ por

$$h(x) = (a_1 a_2 \ldots a_n \ldots),$$

onde $a_n = sinal(f^{n-1}(x))$.

Como, para todo $x \in \mathbb{X}$, $\mathcal{O}_f^+(x)$ troca de sinal indefinidamente (propriedade (A2) da Definição 3.1), então existe $a \in \widetilde{\Sigma_2}$ tal que $h(x) = a$. A átomo-expansividade da f implica que se $x \neq y$, então existe um iterado positivo n tal que $f^n(x) < 0 < f^n(y)$. Em outras palavras, se $x \neq y$, então $h(x) \neq h(y)$. Sendo assim, h está bem definida e é injetora.

Para mostrar que h é sobrejetora, tome $a = (a_1 a_2 \ldots) \in \widetilde{\Sigma_2}$ e considere os conjuntos

$$Q_+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\} \quad \text{e} \quad Q_- = \{x \in \mathbb{R} : x < 0\}.$$

Afirmação 1 *Para todo inteiro $n \geq 1$,*

$$f^{-n}(Q_+) = \mathbb{L} \cup (x_{n-1}^+, \infty) \quad e \quad f^{-n}(Q_-) = \mathbb{L} \cup (-\infty, x_{n-1}^-),$$

onde $\mathbb{L}$ é um conjunto limitado.

Prova da Afirmação: Mostraremos que $f^{-n}(Q_+) = \mathbb{L} \cup (x_{n-1}^+, \infty)$ usando indução em n (o caso para Q_- é análogo). Note que para $n = 1$, a afirmação vale pois

$$f^{-1}(Q_+) = (x_0^-, 0) \cup (x_0^+, \infty).$$

Neste caso, $\mathbb{L} = (x_0^-, 0)$. Suponha, então, que a afirmação vale para $n = k$. Assim,

$$\begin{aligned} f^{-k-1}(Q_+) &= f^{-1}(f^{-k}(Q_+)) = f^{-1}(\mathbb{L}) \cup f_-^{-1}((x_{k-1}^+, \infty)) \cup f_+^{-1}((x_{k-1}^+, \infty)) \\ &= f^{-1}(\mathbb{L}) \cup (u_k^-, 0) \cup (x_k^+, \infty). \end{aligned}$$

Para terminar a prova da afirmação, basta mostrarmos que $f^{-1}(\mathbb{L})$ é um conjunto limitado. De fato, como f é monótona e crescente em cada componente conexa de seu domínio e $\mathbb{L}$ é limitado, então

$$\inf f^{-1}(\mathbb{L}) = f_-^{-1}(\inf \mathbb{L}) \quad \text{e} \quad \sup f^{-1}(\mathbb{L}) = f_+^{-1}(\sup \mathbb{L}).$$

A prova da afirmação está concluída. □

Queremos mostrar que, dado $a = \{a_j\}_{k=0}^{\infty}$, existe $x \in \mathbb{X}$ tal que $h(x) = a$. Para isso, defina

$$\begin{aligned} A_1 &= \overline{f^{-1}(Q_{a_1}) \cap Q_{a_0}} \\ &\vdots \\ A_n &= \overline{f^{-n}(Q_{a_n}) \cap f^{-n+1}(Q_{a_{n-1}}) \cap \ldots \cap Q_{a_0}}, \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

Queremos mostrar que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \neq \emptyset.$$

Por construção, os conjuntos A_n são fechados e encaixados. Seja $k \in \mathbb{N}$ o menor inteiro tal que $a_{k+1} = -a_k$. Então, pela afirmação 1, $\overline{f^{-k-1}(Q_{a_{k+1}}) \cap Q_{a_0}}$ é compacto. Como, para todo inteiro $n > k$, $A_n \subset \overline{f^{-k-1}(Q_{a_{k+1}}) \cap Q_{a_0}}$, então, $\{A_n\}_{n>k}$ é uma seqüência de compactos encaixados e, portanto, a interseção é não-vazia.

Afirmação 2 *Se*

$$x \in \bigcap_{n \geq 1} A_n,$$

então $h(x) = a$.

Prova da Afirmação: Repare que

$$\begin{aligned} A_n &= \overline{f^{-n}(Q_{a_n}) \cap f^{-n+1}(Q_{a_{n-1}}) \cap \ldots \cap Q_{a_0}} \\ &= \overline{Q_{a_0} \cap f_{a_0}^{-1}(Q_{a_1}) \cap \ldots \cap f_{a_{n-1}}^{-1}(Q_{a_n})}, \end{aligned}$$

onde f_-^{-1} e f_+^{-1} são as inversas de $f_- = f|_{Q^-}$ e $f_+ = f|_{Q^+}$. Então, para um n suficientemente grande, $A_n = [c, d]$ é um intervalo (interseção de conexos) tal que $c, d \in f^{-n}(0)$. Além disso,

$$c = \bigcap_{i=0}^{\infty} f_-^{-i}(A_n) \quad e \quad d = \bigcap_{i=0}^{\infty} f_+^{-i}(A_n).$$

Como $a \in \widetilde{\Sigma_2}$, então $x \in \mathbb{X}$ e, por construção, $sinal(f^{j-1}(x)) = a_j$. □

A continuidade de h é conseqüência da continuidade de f e concluímos a demonstração do lema. □

O próximo teorema relaciona átomo-expansividade com transitividade.

Teorema 4.5 *Seja f um sistema alternante crescente. Então f é A-expansiva se, e somente se, é transitiva.*

Prova: Se f for A-expansiva, então, pelo lema anterior, $f|_{\mathbb{X}}$ é conjugada à $\sigma|_{\widetilde{\Sigma_2}}$. Como $\sigma|_{\widetilde{\Sigma_2}}$ é transitiva (Corolário 2.27), então f é transitiva (Proposição 2.7).

Agora, vamos mostrar o outro sentido. Provaremos que se f não é A-expansiva, então não é transitiva. Se f não é A-expansiva, então, pelo Lema 4.3, o conjunto $\{f^{-n}(0)\}_{n \geq 1}$ não é denso em $\mathbb{R}$. Logo, existe um intervalo aberto $U = (a, b)$ tal que U não contém pré-imagens de zero e, devido ao fato de que f é crescente (em cada componente conexa de seu domínio), temos que $f^n(U) = (f^n(a), f^n(b))$ para todo $n \geq 0$. Assim,

1. para qualquer $n \geq 0$, $f^n(U)$ não contém pré-imagens de zero,
2. para qualquer $n \geq 0$, $f^n(U)$ está em algum átomo da partição $\mathbb{P}_f$ induzida por f em $\mathbb{R}$.

Agora suponha, por absurdo, que f é transitiva. Então existe K_0 tal que $U \cap f^{K_0}(U) \neq \emptyset$. Repare também que, como, para todo $K \in \mathbb{N}$, U e $f^K(U)$ são intervalos, então $U \cap f^{K_0}(U)$ é um intervalo e, por (1), temos que

$$f^{mK_0}(U \cap f^{K_0}(U)) = f^{mK_0}(U) \cap f^{(m+1)K_0}(U)$$

também é um intervalo, qualquer que seja $m \in \mathbb{N}$. Dessa maneira, o conjunto

$$J = \bigcup_{n \geq 0} f^{nK_0} U$$

é um intervalo limitado (pois J está em algum átomo da partição $\mathbb{P}_f$) com interior não vazio que verifica $f^{K_0}(J) \subset J$. Pelo Corolário 2.4, f não pode ser transitiva. □

Corolário 4.6 *Se f_I é átomo-expansiva, então f é transitiva.*

Prova: Segue diretamente do Teorema 4.5 e da Proposição 4.2. □

Proposição 4.7 *Se $f_I'(x) \geq M > 1$ para todo $x \in I$, então f é A-expansiva (e, portanto, transitiva).*

Prova: Suponha, por absurdo, que $f_I'(x) \geq M > 1$ e que f não é A-expansiva. Pela Proposição 4.2, f_I é não A-expansiva. Considere, então, pontos $x, y \in I$ tais que, para todo inteiro n, $f_I^n(x)$ e $f_I^n(y)$ nunca estão em átomos distintos. Pelo Teorema do Valor Médio, temos que

$$|f_I(x) - f_I(y)| > M|x - y| \Rightarrow |f_I^k(x) - f_I^k(y)| \geq \min\{M^k|x - y|, |I|\}.$$

Em particular, existe inteiro $k > 0$ tal que $|f_I^k(x) - f_I^k(y)| > \max\{|I_n| : n \in \mathbb{N}\}$, donde concluímos que $f_I^k(x)$ e $f_I^k(y)$ devem estar em átomos distintos, um absurdo. Logo, f é A-expansiva. □

Definição 4.8 *Seja $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ um sistema alternante crescente. Dizemos que f é afim se f for uma função afim em cada intervalo da partição $\mathbb{P}_f$ induzida em $\mathbb{R}$.*

Proposição 4.9 *Seja $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ um sistema alternante afim. Se f for simétrico (ou seja, $f(-x) = -f(x)$), então f é transitiva.*

Prova: Sejam $\{x_n^\pm\}_{n\geq 0}$ e $\{u_n^\pm\}_{n\geq 0}$ as seqüências induzidas por f, seja $I = (-x_0, x_0)$ o intervalo distribuidor e $\{I_{n+1}^-\}_{n\geq 0}$,$\{I_{n+1}^+\}_{n\geq 0}$, os átomos da partição induzida por f em I. No caso linear, é fácil entender como é a transformação

$f_I : I \to I$. Devido à linearidade e à simetria, f_I é uma transformação afim em cada átomo do intervalo distribuidor. Assim, temos que

$$\inf_{x \in I^-} \{f_I'(x)\} = \frac{|I^-|}{\max\{|I_j^+| : j \in \mathbb{N}\}} = \frac{|I^+|}{\max\{|I_j^-| : j \in \mathbb{N}\}} = \inf_{x \in I^+} \{f_I'(x)\}.$$

Como $\frac{|I^-|}{|I_n^+|} > 1$ para todo n, concluímos, pela Proposição 4.7, que f é transitiva.
□

Observação 4.10 *A proposição anterior está enunciada como em (Mun, Corolário 1.2.1) e demonstrada de uma forma diferente. Repare que seguindo a demonstração que apresentamos, percebe-se que a hipótese de simetria pode ser substituída por* $\frac{|I_n^-|}{|I^+|} > 1$ *e* $\frac{|I_n^+|}{|I^-|} > 1$ *para todo* n.

Defina $f_a : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ da seguinte maneira: tome $x_0, a \in \mathbb{R}$ tais que $x_0 > 1$ e $1 - \epsilon < a < 1$ (considere $\epsilon > 0$ pequeno). Defina $u = 1/x_0$ e $x_1 = x_0/a$.

$$f_a(x) = \begin{cases} ax, & x \in (-\infty, -x_1] \cup (x_1, \infty), \\ (\frac{x_0}{x_1 - x_0})(x + x_0), & -x_1 < x \leq -x_0, \\ (\frac{x_0}{x_0 - u})(x + x_0), & -x_0 < x \leq -u, \\ -1/x, & x \in (-u, 0) \cup (0, u], \\ (\frac{x_0}{x_0 - u})(x - x_0), & u < x \leq x_0, \\ (\frac{x_0}{x_1 - x_0})(x - x_0) & x_0 < x \leq x_1, \end{cases}$$

Repare que essa função é um sistema alternante crescente simétrico e que ela é afim fora do intervalo distribuidor $I = [-x_0, x_0]$.

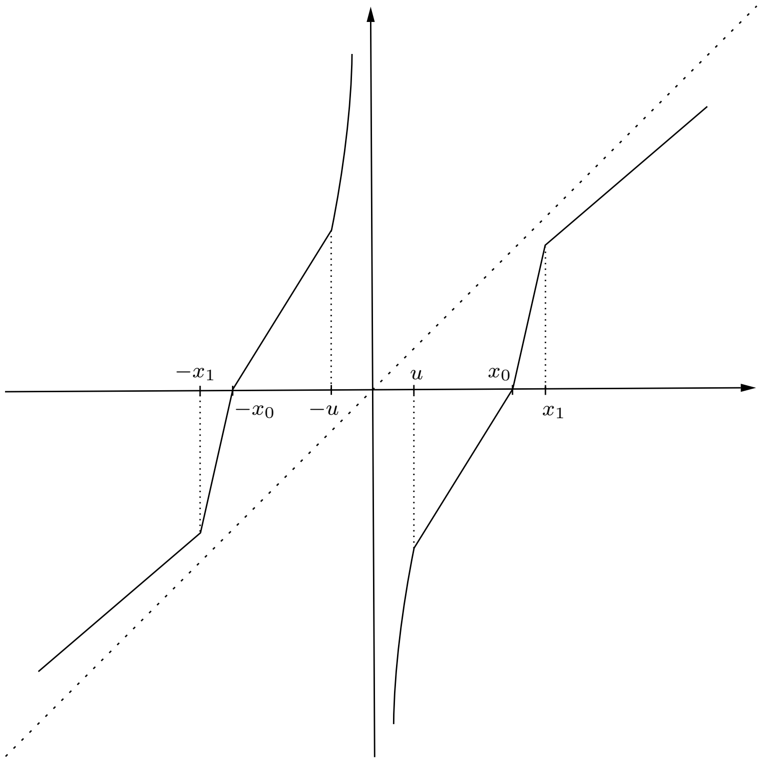


Figura 4.3: O gráfico da função f_a com $a = 0.95$ e $x_0 = 1.75$.

Proposição 4.11 *f_a é um sistema alternante transitivo.*

Prova: Mais uma vez, a idéia é mostrar que f_a é A-expansiva. Primeiro, observe que

$$\{x_n^{\pm}\} = \left\{\pm\frac{x_0}{a^n}\right\} \quad \text{e} \quad \{u_n^{\pm}\} = \left\{\pm\frac{a^n}{x_0}\right\}.$$

Assim, fixando $n \geq 2$ e tomando $x \in I_n^-$, temos que $x \in \left(\frac{-a^{n-1}}{x_0}, \frac{-a^n}{x_0}\right)$ e, dessa forma,

$$\begin{aligned}(f_a)_I'(x) &= f_a'(x)f_a'(f_a(x))\cdots f_a'(f_a^{n(x)-1}(x)) \\ &= \frac{a^{n-1}}{x^2} > \frac{x_0^2 a^{n-1}}{a^{2n-2}} = \frac{x_0^2}{a^{n-1}} > 1,\end{aligned}$$

onde $(f_a)_I$ é a transformação induzida por f_a no intervalo distribuidor I. Pela Proposição 4.7, f é transitiva. $\square$

4.2 Transitividade robusta

Nessa seção, além definir C^1-perturbações e transitividade robusta, provaremos que a rotação irracional no círculo e a transformação de Boole não são robustamente transitivas, diferentemente da aplicação expansora no círculo. Provaremos que sistemas alternantes que satisfazem certas condições de distorção são robustamente transitivos e, por fim, provaremos que a aplicação $f_a(x) = ax - a/x$ é robustamente transitiva se $a \in (0,1)$ é suficientemente próximo de 1.

Definição 4.12 *Seja $f : X \to X$ uma tranformação C^k, $k \geq 1$. Dizemos que $g : X \to X$ está ϵ-C^1 próxima de f se $d(f(x), g(x)) < \epsilon$ e $d(f'(x), g'(x)) < \epsilon$ para todo $x \in X$. Alternativamente, dizemos que g é uma ϵ-C^1 perturbação de f.*

Definição 4.13 *Seja $f : X \to X$ uma transformação C^k, $k \geq 1$. Dizemos que f é uma função C^1 robustamente transitiva se existe $\epsilon > 0$ tal que, para toda $g : X \to X$ ϵ-C^1 próxima de f, temos que g é transitiva.*

Vimos, na Seção 2.2, duas aplicações transitivas definidas em $\mathbb{S}^1$: a rotação irracional R_α e a aplicação expansora ϕ_k. Vamos mostrar, agora, que a transitividade de ϕ_k é robusta, mas a de R_α não.

É fácil ver que existe uma ϵ-C^1 perturbação de R_α, com ϵ arbitrariamente pequeno, que não é transitiva. Para todo $\epsilon > 0$, podemos tomar uma rotação R_β com $\beta \in \mathbb{Q}$ e $|\alpha - \beta| < \epsilon$. Assim, obtemos transformações arbitrariamente C^1 próximas de R_α tal que todos os pontos de $\mathbb{S}^1$ são periódicos e, portanto, não possuem órbita densa.

Proposição 4.14 *A aplicação expansora de grau k, $\phi_k(x) = kx \ (mod\ 1)$, é robustamente transitiva.*

Prova: Seja ψ uma ϵ-C^1 perturbação de ϕ_k ($\epsilon < 1$). Como $|\psi'(x) - \phi_k'(x)| < \epsilon$ para todo $x \in \mathbb{S}^1$, então $\psi'(x) \in (k-\epsilon, k+\epsilon)$ e, em particular, $\psi'(x) > k-\epsilon > 1$. Assim, como conseqüência direta do Teorema do Valor Médio, temos que o comprimento de um intervalo $I \subset \mathbb{S}^1$ (suficientemente pequeno) é dilatado por um fator maior que $k - \epsilon > 1$ pela ação de ψ e, portanto, para todo $i \in \mathbb{N}$, temos que

$$(k - \epsilon)^i < |\psi^i(I)| \leq 1.$$

Assim, deve existir um $n \in \mathbb{N}$ tal que $\psi^n(I) = \mathbb{S}^1$. Em particular, $\psi^n(I)$ intersecta qualquer outro aberto de $\mathbb{S}^1$. Isso implica que ψ é misturadora e, em particular, transitiva. $\square$

Escólio 4.15 *Seja $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ uma aplicação diferenciável. Se*

$$\inf_{x \in \mathbb{S}^1} |f'(x)| > 1,$$

então f é C^1 robustamente transitiva.

Observação 4.16 *Pela Proposição 4.7, a transformação de Boole $\varphi(x) = x - 1/x$ é um sistema alternante transitivo, pois $\varphi'(x) > 1$ para todo $x \in \mathbb{R} - \{0\}$. Entretanto, a transitividade não é robusta. De fato, a função $\varphi_\epsilon = \varphi + \epsilon$ é uma ϵ-C^1 perturbação de φ (na verdade, uma ϵ-C^∞ perturbação), mas não é transitiva pois*

$$x - \frac{1}{x} + \epsilon = x \Rightarrow x = \frac{1}{\epsilon}.$$

Assim, independente da escolha de $\epsilon > 0$, a função φ_ϵ possui um ponto fixo $p = 1/\epsilon$. Como já vimos, a existência de tal ponto fixo $p > 0$ implica na existência de um aberto f-invariante (p, ∞). Pelo Corolário 2.5, f não pode ser transitiva.

Definição 4.17 *Seja f um sistema alternante crescente C^1. Dizemos que f é uma aplicação expansora com respeito à transformação f_I se existe $\sigma > 1$ e $C > 0$ tal que*

$$f_I'(x) \geq C\sigma^{n(x)} > 1,$$

para todo $x \in I \cap \mathbb{X}$, onde $n(x) = \min\{n \geq 1 : f^n(x) \in I\}$.

Lema 4.18 *Seja f um sistema alternante crescente C^1. Suponha que :*

1. *existe $\delta > 0$ tal que $f(x) < x - \delta$ se $x > 0$ e $f(x) > x + \delta$ se $x < 0$;*

2. *existe $a > 0$ tal que $f'(x) > a$ para todo $x \neq 0$ e*

3. *existe $L > 0$ suficientemente grande tal que $M \equiv \sup\{f'(x) : |x| > L\} < 1$.*

Então existe $\epsilon > 0$ com a seguinte propriedade: para toda g ϵ-C^1 próxima de f, temos que g ainda é um sistema alternante crescente e existe $K \geq 1$ tal que

$$n_f(x) - K < n_g(x) < n_f(x) + K$$

para todo $x \in I_g$, onde I_g é o intervalo distribuidor de g e n_f,n_g são as funções de retorno de f e g, respectivamente.

Prova: Repare que as hipóteses (1) e (2) nos permitem tomar funções suficientemente próximas de f que ainda satisfaçam as condições do Lema 3.3 e, portanto, que ainda sejam sistemas alternantes crescentes. Fixemos, então, uma ϵ-C^1 perturbação g de f que seja um sistema alternante crescente.

Vamos denotar por $\{x_n^{\pm}\}_{n\geq 0}$,$\{u_n^{\pm}\}_{n\geq 0}$ as seqüências induzidas por f e $\{z_n^{\pm}\}_{n\geq 0}$,$\{w_n^{\pm}\}_{n\geq 0}$ as seqüências induzidas por g. Faremos a prova considerando apenas a perturbação de f em $[x_0^-,0)\cup[x_0^+,\infty)$, pois a demonstração para uma perturbação em $(-\infty,x_0^-]\cup(0,x_0^+]$ é totalmente idêntica. Assim, só precisamos considerar as seqüências $\{x_n^+\}$,$\{u_n^-\}$ e $\{z_n^+\}$,$\{w_n^-\}$ e, por conta disso, iremos omitir os sinais.

Como as seqüências x_n e z_n divergem, podemos tomar $N,P\in\mathbb{Z}^+$ tais que $x_N>L$ e $x_N\geq z_P\geq x_{N+1}$. Repare que se $z_{P+n}=x_{N+n}$ para todo $n\geq 0$, então o lema segue trivialmente, pois, nesse caso, $K=|N-P|$. Suponha, então, que $x_N\geq z_P>x_{N+1}$ e tome $K\in\mathbb{Z}^+$ tal que

$$n_f(x)-K<n_g(x)<n_f(x)+K$$

para todo $x\in[z_0^-,w_{P+1}]$ tal que $g^n(x)\neq 0$ e $f^n(x)\neq 0$ para todo $n\geq 0$ (isso é possível pois, em um intervalo é compacto, só pode haver um número finito de átomos).

Seja N_0 o menor natural tal que $x_j>L$ para todo $j\geq N_0$. Pelo Teorema do Valor Médio e do fato que $M<1$, temos que, para todo $n>0$, vale

$$x_{N_0+n+1}-x_{N_0+n}=f^{-1}(x_{N_0+n})-f^{-1}(x_{N_0+n-1})>\frac{1}{M}(x_{N_0+n}-x_{N_0+n-1}),$$

onde f^{-1} denota a inversa de f_+. Usando o mesmo argumento repetidas vezes, obtemos que

$$x_{N_0+n+1}-x_{N_0+n}>\left(\frac{1}{M}\right)^n(x_{N_0+1}-x_{N_0}).$$

Assim, para todo $C>0$, podemos tomar N suficientemente grande tal que

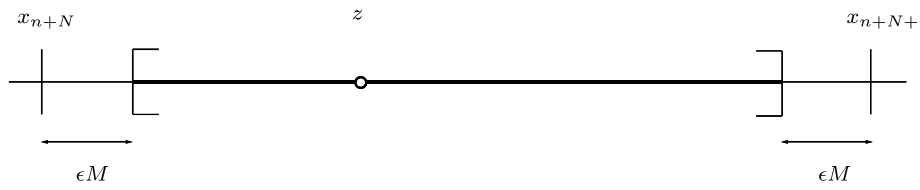
$$x_{N+n+1}-x_{N+n}>C\epsilon M \tag{4-1}$$

para todo $n\geq 0$.

Afirmação 1 *Se $z\in[x_{N+n}+\epsilon M,x_{N+n+1}-\epsilon M]$ para algum $n\geq 0$, então:*

$$x_{N+n+1}<g^{-1}(z)<x_{N+n+2}.$$

Prova da Afirmação: Fixe $z\in[x_{N+n}+\epsilon M,x_{N+n+1}-\epsilon M]$.



Se f_+ e g_+ são, respectivamente, as componentes de f e g em $(0,\infty)$, denotemos por f^{-1} e g^{-1} suas inversas. Sabemos que:

1. $\frac{1}{f'(y)} > \frac{1}{M}$ se $|y| > L$,

2. $f^{-1}(y) - \epsilon < g^{-1}(y) < f^{-1}(y) + \epsilon$ para todo y.

Usando (1), o Teorema do Valor Médio e que f é crescente, temos:

$$f^{-1}(z) - x_{N+1+n} = |f^{-1}(z) - f^{-1}(x_{N+n})| \geq \frac{1}{M}(z - x_{N+n}) > \frac{M\epsilon}{M} = \epsilon. \quad (4\text{-}2)$$

Por (2), concluímos que $x_{N+n+1} < g^{-1}(z)$. Analogamente, $g^{-1}(z) < x_{N+n+2}$ e, assim, provamos a afirmação. □

Afirmação 2 *Se* $0 < x_{N+n+1} - z < M\epsilon$ *para algum* $n \geq 1$, *então* $g^{-1}(z) - x_{N+n+1} > M\epsilon$.

Prova da Afirmação: Se N é suficientemente grande então, usando que f é crescente, temos que $x_{N+n+1} < f^{-1}(z) - \epsilon$ (veja 4-2). Por (2), temos que também que $x_{N+n+1} < g^{-1}(z)$.

Seja N suficientemente grande para que também satisfaça:

$$(x_{N+1} - M\epsilon - x_N) > \epsilon(M^2 + 1).$$

Assim, pelas nossas hipóteses e do fato que $\{x_{N+n}\}_n$ é monótona crescente, temos:

$$(z - x_{N+n}) > (x_{N+n+1} - M\epsilon - x_{N+n}) > \epsilon(M^2 + 1) \quad (4\text{-}3)$$

para todo $n \geq 0$.

Faremos a prova por contradição. Suponha, por absurdo, que:

$$g^{-1}(z) - x_{N+n+1} \leq M\epsilon. \quad (4\text{-}4)$$

Seja

$$A \equiv |g(g^{-1}(z)) - f(g^{-1}(z))| = |z - f(x_{N+n+1}) - (f(g^{-1}(z)) - f(x_{N+n+1}))|.$$

Assim, por (4-1), (4-3), (4-4), da definição de M e do fato que $x_{N+n} = f(x_{N+n+1})$, obtemos

$$\begin{aligned} A &\geq |z - x_{N+n}| - |f(g^{-1}(z)) - f(x_{N+n+1})| \\ &> |z - x_{N+n}| - M|g^{-1}(z) - x_{N+n+1}| > \epsilon(M^2+1) - M^2\epsilon = \epsilon. \end{aligned}$$

Mas isso contradiz o fato de g ser uma ϵ-perturbação de f e a prova da afirmação está completa. $\square$

Fixe uma constante positiva d (por exemplo $d = 1/2$) e tome $\epsilon > 0$ tal que:

$$\epsilon < d(\frac{1}{M} - 1) \text{ e } M\epsilon < d. \tag{4-5}$$

Seja N tal que $x_{N+1} - x_N$ é arbitrariamente grande e considere a seguinte afirmação:

Afirmação 3 *Se $z \in (x_M, x_{M+1})$ e $z - x_M > d$, então $g^{-1}(z) - x_{(M+1)} > d$ para todo $M \geq N$.*

Prova da Afirmação: Sabemos que $x_{(M+1)} = f^{-1}(x_M)$. Então, usando (1),(2), (4-5) e o Teorema do Valor Médio, obtemos:

$$\begin{aligned} g^{-1}(z) - x_{(M+1)} &> f^{-1}(z) - f^{-1}(x_M) - \epsilon > \frac{1}{M}(z - x_M - \epsilon) \\ &> \frac{1}{M}d - d(\frac{1}{M} - 1) = d. \end{aligned}$$

E, assim, terminamos de provar a afirmação. $\square$

As afirmações que acabamos de provar nos dizem que o tempo de retorno da função g é limitado à direita com respeito ao tempo de retorno de f, ou seja, existe $\tilde{K}$ tal que $n_g < n_f + \tilde{K}$ (de fato $\tilde{K} = K \pm 1$, onde K é o possível crescimento de n_g em uma parte compacta da reta).

Se g é uma ϵ-C^1 perturbação de f tal que, para algum $a > 0$

$$a < \tilde{m} < g' < \tilde{M} < 1,$$

onde $\tilde{m} = \inf\{g'(x) : x \neq 0\}$ e $\tilde{M} = \sup\{g'(x) : |x| > \tilde{L}\}$ para algum $\tilde{L} > 0$ suficientemente grande, então a mesma prova funciona considerando f uma ϵ-C^1 perturbação de g. Isso termina a demonstração do Lema 4.18. $\square$

Teorema 4.19 *Seja f um sistema alternante crescente. Suponha que:*

1. *f é expansora com respeito à transformação induzida (ver Definição 4.17);*

2. *existe $\delta > 0$ tal que $f(x) < x - \delta$ se $x > 0$ e $f(x) > x + \delta$ se $x < 0$;*

3. *existe $a > 0$ tal que $f'(x) \geq a$ para todo $x \neq 0$;*

4. *existe $L > 0$ tal que $\sigma \frac{m}{M} > 1$, onde σ é a constante de expansão de f (ver Definição 4.17), $m = \min\{f'(x) : |x| \geq L\}$ e $M = \max\{f'(x) : |x| \geq L\}$;*

5. *$M < 1$.*

Então f é C^1 robustamente transitiva.

Prova: Vamos provar que qualquer perturbação C^1 suficientemente próxima de f é um sistema alternante crescente A-expansivo. Daí, a prova segue imediatamente do Teorema 4.5. Isso será feito mostrando que as transformações induzidas por perturbações C^1 de f (em seus respectivos intervalos distribuidores) são átomo-expansivas. Com isso, teremos que a perturbação em questão também será átomo-expansiva.

Repare que podemos tomar $\epsilon_1 > 0$ suficientemente pequeno tal que $\delta - \epsilon_1 > 0$ e $a - \epsilon_1 > 0$. Dessa maneira, concluímos que toda ϵ_1-C^1 perturbação de f satisfaz as hipóteses do Lema 3.3 e, portanto, ainda é um sistema alternante crescente.

Pela hipótese (4), podemos exigir ainda que ϵ_1 satisfaça:

$$\sigma \frac{(m - \epsilon_1)}{M} > 1.$$

Podemos também supor, pela hipótese (5), que ϵ_1 seja pequeno suficiente de tal modo que uma ϵ_1-C^1 perturbação de f satisfaça o Lema 4.18. Assim, se g é uma ϵ_1-C^1 perturbação de f temos que

$$n_f - K < n_g < n_f + K$$

para algum inteiro $K \geq 1$.

Sejam $J = [y_0^-, y_0^+]$ e $I = [x_0^-, x_0^+]$ os intervalos distribuidores de g e f, respectivamente. Considere $x \in J$ e defina

$$p_1 \equiv \max_{x \in J} \#\{g^j(x) \in [-L, y_0^-] \cup [y_0^+, L] : j = 1, \dots, n_g(x) - 1\};$$
$$p_2 \equiv \max_{x \in I} \#\{f^j(x) \in [-L, x_0^-] \cup [x_0^+, L] : j = 1, \dots, n_f(x) - 1\};$$
$$\tilde{m} = \min\{f'(z) : z \in [-L, y_0^-] \cup [y_0^+, L]\} \text{ e}$$
$$\tilde{M} \equiv \max\{f'(z) : z \in [-L, x_0^-] \cup [x_0^+, L]\}.$$

Pela definição de J, do fato que $|g' - f'| < \epsilon_1$, da hipótese (1) e dos argumentos anteriores, temos:

$$\begin{aligned}
g'_J(x) &= g'(x)g'(g(x)) \cdots g'(g^{n_g(x)-1}(x)) \\
&> (f'(x) - \epsilon_1)(f'(g(x)) - \epsilon_1) \cdots (f'(g^{n_g(x)-1}(x)) - \epsilon_1) \\
&= f'(x) \cdots f'(f^{n_f(x)-1}(x)) \left(1 - \frac{\epsilon_1}{f'(x)}\right) \frac{(f'(g(x)) - \epsilon_1) \cdots (f'(g^{n_g(x)-1}(x)) - \epsilon_1)}{f'(f(x)) \cdots f'(f^{n_f(x)-1}(x))} \\
&> C\sigma^{n_f(x)} \left(1 - \frac{\epsilon_1}{f'(x)}\right) \frac{(\tilde{m} - \epsilon_1)^{p_1}}{\tilde{M}^{p_2}} \left(\frac{(m - \epsilon_1)^{n_g(x)-1-p_1}}{M^{n_f(x)-1-p_2}}\right) \\
&> \tilde{C} \left(\sigma \frac{(m - \epsilon_1)}{M}\right)^{n_f(x)},
\end{aligned}$$

onde

$$\tilde{C} = C \frac{(\tilde{m} - \epsilon_1)^{p_1}}{\tilde{M}^{p_2}} \frac{M^{p_2+1}}{(m - \epsilon_1)^{p_1+1-K}} \inf\{1 - \frac{\epsilon_1}{f'(x)} : x \neq 0\}.$$

Repare que

$$\tilde{C} = \tilde{C}(\epsilon_1) > C \frac{\tilde{m}^{p_1}}{\tilde{M}^{p_2}} \frac{M^{p_2+1}}{m^{p_1+1-K}} > 0.$$

Assim, se $\{x_n^\pm\}$ e $\{u_n^\pm\}$ são as seqüências induzidas por f, deve existir um inteiro $N \geq 1$ mínimo tal que $g'_J(x) > 1$ para todo $x \in (u_N^-, 0) \cup (0, u_N^+)$.

Como f é expansora com respeito à f_I, podemos tomar $\epsilon_2 > 0$ tal que se g é uma ϵ_2-C^1 perturbação de f no conjunto compacto $[x_{N-1}^-, u_N^-] \cup [u_N^+, x_{N-1}^+]$ então:

$$g'_J(x) > 1$$

para todo $x \in (y_0^-, u_N^-) \cup (u_N^+, y_0^+)$.

Dessa maneira, escolhendo $\epsilon = \min\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$, temos que, se g está ϵ-C^1 próxima de f, então

$$g'_J(x) > 1,$$

para todo $x \in J$. Pela Proposição 4.7, g_J é átomo-expansiva e, portanto, transitiva. □

Repare que, para a transitividade ser robusta, não podemos exigir apenas que exista $\sigma > 1$ tal que $f'_I(x) > \sigma$. Para ver isso, considere um sistema alternante crescente que satisfaz as hipóteses (2) e (3) do teorema acima e suponha que existe $\sigma > 1$ tal que $\sigma < f'_I(x) < 2\sigma$. Dado um $\epsilon > 0$ arbitrariamente pequeno, tome um inteiro $N > 0$ tal que

$$\sqrt[N]{\frac{1}{2\sigma}} > 1 - \epsilon.$$

Se $x^* \in I_N$, podemos construir uma ϵ-C^1 perturbação g de f (com o mesmo intervalo distribuidor) tal que $g^k(x^*) = f^k(x^*)$ e

$$g'(g^k(x^*)) = f'(f^k(x^*)) \sqrt[N]{1/2\sigma}$$

para todo $k \in \{0, \ldots, N-1\}$. Assim,

$$\begin{aligned} g'_I(x^*) &= \prod_{k=0}^{N-1} g'(g^k(x^*)) \\ &= \prod_{k=0}^{N-1} (f'(f^k(x^*))) \sqrt[N]{1/(2\sigma)} \\ &= (\sqrt[N]{1/(2\sigma)})^N \prod_{k=0}^{N-1} (f'(f^k(x^*))) \\ &= \frac{f'_I(x^*)}{2\sigma} < \frac{2\sigma}{2\sigma} = 1. \end{aligned}$$

Corolário 4.20 *Dado $a \in (0,1)$, defina $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ por $f(x) = ax - 1/x$. Então f é robustamente transitiva se a for suficientemente próximo de um.*

Prova: Vamos mostrar que a função f satisfaz as hipóteses do Teorema 4.19. Claramente, f satisfaz as hipóteses do Lema 3.3 e, portanto, é um sistema alternante crescente C^∞. A hipótese (3) é satisfeita, pois

$$f'(x) = a + \frac{1}{x^2}.$$

Precisamos, agora, mostrar que f é expansora com relação a transformação induzida no intervalo distribuidor $I = [-\frac{1}{\sqrt{a}}, \frac{1}{\sqrt{a}}]$.

Afirmamos que se $x < 0$ (o caso $x > 0$ é análogo, pois f é simétrica), então:

$$f^n(x) < -\frac{a^{n-1}}{x} \tag{4-6}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Primeiro repare que a inequação vale se $n = 1$:

$$f(x) = ax - \frac{1}{x} < -\frac{1}{x}.$$

Suponha, então, que a inequação (4-6) vale para $n = k$. Como f é crescente, temos que

$$f^{k+1}(x) = f(f^k(x)) < f\left(-\frac{a^{k-1}}{x}\right) = -\frac{a^k}{x} + \frac{x}{a^{k-1}} < -\frac{a^k}{x}.$$

Donde concluímos que a inequação (4-6) ainda vale para $n = k + 1$.

Desta maneira, como

$$f^{n(x)-1}(x) \in (x_0^+, x_1^+) = \left(\frac{1}{\sqrt{a}}, x_1^+\right),$$

então

$$\frac{1}{\sqrt{a}} < f^{n(x)-1}(x) < -\frac{a^{n(x)-2}}{x}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{a} < \frac{a^{2n(x)-4}}{x^2}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{x^2} > \frac{1}{a^{2n(x)-3}}.$$

Assim, temos que

$$
\begin{aligned}
f_I'(x) &= f'(x)f'(f(x))\cdots f'(f^{n(x)-1}(x)) \\
&> f'(x)a^{n(x)-1} = \left(a + \frac{1}{x^2}\right) a^{n(x)-1} \\
&> \frac{a^{n(x)-1}}{x^2} > \frac{a^{n(x)-1}}{a^{2n(x)-3}} \\
&= a^2 \left(\frac{1}{a}\right)^{n(x)}.
\end{aligned}
$$

donde concluímos que f é expansora em relação à transformação induzida e com constantes $C = a^2 < 1$ e $\sigma = 1/a$. Assim, as hipóteses (4) e (5) são satisfeitas tomando $L > \frac{1}{\sqrt{1-a}}$, independente da escolha de $a \in (0,1)$. Pois, nesse caso, $m = a$, $M = a + 1/L^2 < 1$ e, portanto,

$$\sigma \frac{m}{M} > \left(\frac{1}{a}\right) \frac{a}{a + 1/L^2} > 1.$$

Como $f_I'(x) > 1$ se $n(x) \geq 2$, então precisamos mostrar que $f_I'(x) > 1$ se $x \in I_1^-$ para qualquer valor de a suficiente próximo de 1. Como $f_I'(x) = f'(x)$ se $x \in [x_0^-, u_1^-]$ e $f'(x)$ é uma função crescente em $\mathbb{R}_-$, então

$$\inf_{x \in I_1^-} \{f'(x)\} = f'(-1/\sqrt{a}) = 2a.$$

Logo se $a > 1/2$, então f é robustamente transitiva. $\square$

5
Ergodicidade de Sistemas Alternantes

Queremos procurar condições que garantam a ergodicidade de um sistema alternante com respeito a uma medida absolutamente contínua em relação à medida de Lebesgue. Apresentaremos, nesse capítulo, uma versão de um teorema que fornece condições para que exista uma medida absolutamente contínua em relação à medida de Lebesgue que seja preservada por uma aplicação definida no intervalo. Esse teorema garante, ainda, que a aplicação seja ergódica.

Primeiro, vamos dar algumas definições:

Definição 5.1 *Sejam $I = [a, b]$ e $f : I \to I$ uma aplicação diferenciável por partes. Dizemos que f é expansora se, existe um inteiro $n \geq 0$ tal que*

$$|\inf(f^n)'(x)| > 1$$

para todo $x \in I$

Definição 5.2 *Dizemos que uma transformação $f : I \to I$ do intervalo $I = [a, b]$ é Markov se existe uma coleção enumerável $\{I_k\}_{k\geq 1}$ de intervalos abertos e disjuntos tal que:*

1. *f está definida em $\bigcup I_k$ e $I - \bigcup I_k$ tem medida nula;*
2. *$f|_{I_k}$ é monótona e é estendida a uma função C^2 em $\overline{I_k}$ para todo k;*
3. *se $f(I_k) \cap I_j \neq \emptyset$, então $I_j \subset f(I_k)$;*
4. *para cada par k, j, existe um inteiro $R > 0$ tal que*

$$I_j \subset \bigcup_{n=1}^{R} f^n(I_k).$$

Observação 5.3 *A transformação f_I, induzida por um sistema alternante crescente, é uma aplicação de Markov. De fato,*

$$I - \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k^{\pm} = \bigcup_{k=0}^{\infty} f_I^{-k}(0)$$

é um conjunto enumerável e, portanto, tem medida nula. A monotonicidade de f_I é conseqüência da monotonicidade de sistemas alternantes e as hipóteses (3) e (4) da Definição 5.2 são trivialmente satisfeitas pois $f(I_k^{\pm}) = I^{\mp}$ para todo k.

Seja ξ a partição de uma aplicação de Markov $f : I \to I$. Denotaremos por $\xi^{(n)}$ a partição formada pelos intervalos

$$I_1 \cap f^{-1}(I_2) \cap \ldots \cap f^{-(n+1)}(I_n),$$

onde $I_1, \ldots, I_n \in \xi$.

Apresentaremos, agora, um conhecido teorema (ou uma de suas muitas versões). Veja uma demonstração em (Ren, Teorema 1, p.483) e mais explicações em (Bow).

Teorema 5.4 (Folclore) *Seja $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ um sistema alternante e $f_I : I \to I$ sua transformação induzida. Se f_I for uma aplicação de Markov expansora e existir $M > 0$ tal que*

$$\left|\frac{(f^n)'(x)}{(f^n)'(y)}\right| < M, \tag{5-1}$$

onde n é arbitrário e x, y são pontos do mesmo átomo da partição $\xi^{(n)}$, então f admite uma medida invariante, absolutamente contínua em relação à medida de Lebesgue. Além disso, f é ergódica com respeito a essa medida.

Se uma função de Markov satisfaz a hipótese (5-1) (chamada de condição de Rényi), então dizemos que f possui *distorção limitada.*

Teorema 5.5 *Seja f um sistema alternante crescente C^2. Suponha que valem as seguintes hipóteses:*

1. *f é expansora com respeito à transformação f_I induzida por f no intervalo distribuidor I.*

2. *Seja ξ a partição induzida por f em I. Então, existe $C > 0$ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$ e para quaisquer $x_0, y_0 \in \xi^{(n)}$,*

$$C > \frac{f'(x_0)}{f'(y_0)} \frac{f'(x_1)}{f'(y_1)} \cdots \frac{f'(x_n)}{f'(y_n)},$$

onde

$$x_j = f^{n(x_{j-1})}(x_{j-1}),$$
$$y_j = f^{n(y_{j-1})}(y_{j-1}) \quad j \geq 1.$$

3. *As seqüências*

$$M_n = \max\{f'(x) : x \in B_n^- \cup B_n^+\} \quad e \quad m_n = \min\{f'(y) : y \in B_n^- \cup B_n^+\}$$

satisfazem $\frac{M_n}{m_n} < 1 + \epsilon_n$, onde $\{\epsilon_n\}$ é uma seqüência de números positivos tal que, para todo x_0,

$$\sum_{j=0}^{\infty} (\epsilon_1 + \ldots + \epsilon_{n(x_j)-1}) < \infty.$$

Então f é ergódica com respeito à medida de Lebesgue.

Prova: Pela Observação 5.3 e pelo Teorema 5.4, precisamos apenas mostrar que f_I possui distorção limitada com respeito à partição $\xi = \{I_n^-, I_n^+ : n \geq 1\}$ induzida por f em I. Fixe $m \geq 1$ e considere $x_0, y_0 \in \xi^{(m)}$. Pela definição de f_I, temos:

$$\frac{(f_I^m)'(x_0)}{(f_I^m)'(y_0)} = \prod_{i=0}^{m-1} \prod_{j=0}^{n(x_i)-1} \frac{f'(f^j(x_i))}{f'(f^j(y_i))} = \left(\prod_{i=0}^{m-1} \frac{f(x_i)}{f(y_i)} \right) \left(\prod_{i=0}^{m-1} \prod_{j=1}^{n(x_i)-1} \frac{f'(f^j(x_i))}{f'(f^j(y_i))} \right).$$

Pela hipótese (2), existe $C > 0$ tal que

$$\frac{(f_I^m)'(x_0)}{(f_I^m)'(y_0)} < C \prod_{i=0}^{m-1} \prod_{j=1}^{n(x_i)-1} \frac{f'(f^j(x_i))}{f'(f^j(y_i))}$$

Repare que $f^j(x) \in B^{\pm}_{n(x)-j}$ para todo $x \in I^{\mp} - I_1^{\mp}$ e $j = 1, \ldots, n(x) - 1$. Logo,

$$\frac{(f_I^m)'(x_0)}{(f_I^m)'(y_0)} < C \prod_{i=0}^{m-1} \prod_{j=1}^{n(x_i)-1} \frac{M_j}{m_j}.$$

Tomando o logaritmo nos dois lados,

$$\log\left(\frac{(f_I^m)'(x_0)}{(f_I^m)'(y_0)}\right) < \log C + \sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=1}^{n(x_i)-1} \log\left(\frac{M_j}{m_j}\right)$$

$$< \log C + \sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=1}^{n(x_i)-1} \log(\epsilon_j + 1).$$

Como $\log(1+\epsilon) < \epsilon$ para todo $\epsilon > 0$, temos que

$$\log\left(\frac{(f_I^m)'(x_0)}{(f_I^m)'(y_0)}\right) < \log C + \sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=1}^{n(x_i)-1} \epsilon_j.$$

Assim,

$$\frac{(f_I^m)'(x_0)}{(f_I^m)'(y_0)} < C\exp\left(\sum_{i=0}^{m-1}(\epsilon_1 + \ldots + \epsilon_{n(x_i)-1})\right)$$

$$< C\exp\left(\sum_{j=1}^{\infty}(\epsilon_1 + \ldots + \epsilon_{n(x_j)-1})\right).$$

Isso termina a prova. □

Corolário 5.6 *Se f é um sistema alternante afim e simétrico, então f é ergódica com respeito à medida de Lebesgue.*

Prova: O Corolário segue pois as hipóteses do Teorema 5.5 são satisfeitas com $C = 1$ e com a seqüência constante $\epsilon_n = 0$. □

Referências Bibliográficas

[Adl] Adler, R., Weiss, B., *The ergodic infinite measure preserving transformation of Boole*. Israel Journal of Math 16. 1973. (document), 3

[Bar] Bartle, R., *The elements of integration and Lebesgue measure*, John Wiley & Sons, 1995. 2.1.2

[Ble] Boole, G., *On the comparison of transcendents with certain applications to the theory of definite integrals*, Philos. Trans. Roy. Soc. London, 147 Part III 1857, 745-803. (document), 3

[Bow] Bowen, R., *Invariant measure for the Markov maps on the interval*, Commun. Math. Phys. 69, 1-77. 1979. 5

[Kat] Katok, A., Hasselblatt, B., *Introduction to the modern theory of dynamical systems*, Cambridge University, 1995.

[Man] Mañé, R., *Introdução à teoria ergódica*. Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1983. (Projeto Euclides) 2.1.2, 2.1.2

[Mnk] Munkres, J., *Topology*, Prentice Hall, 2000. 2.1.1

[Mun] Muñoz, S., *Robust transitivity and ergodicity of transformations on the real line and the real plane*. IMPA, 2005. (document), 1, 4.10

[Kre] Oliveira, K., *Um Primeiro Curso em Teoria Ergódica com Aplicações*. Publicações Matemáticas, IMPA. 2005.

[Pet] Petersen, K., *Ergodic theory*, Cambridge University Press, 1983.

[Ren] Rényi, A., *Representation for real numbers and their ergodic properties*, Acta Math. Akad. Sci. Hungar. 8, 477-493. 1957. 5

[Wal] Walters, P., *An introduction to ergodic theory*, New York: Springer-Verlag, 2000.