



Maria Clara Schuwartz Ferreira

**Hipersuperfícies Equivariantes Mínimas e com
Curvatura Média Constante em S^n e \mathbb{H}^n**

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Matemática Pura do Departamento de Matemática da PUC-Rio

Orientador: Prof. Henri Anciaux

Rio de Janeiro
Dezembro de 2007

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.



Maria Clara Schuwartz Ferreira

**Hipersuperfícies Equivariantes Mínimas e com
Curvatura Média Constante em S^n e \mathbb{H}^n**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Matemática Pura do Departamento de Matemática do Centro Técnico Científico da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

Prof. Henri Anciaux

Orientador

Departamento de Matemática — PUC-Rio

Prof. Maria Fernanda Elbert

Departamento de Matemática — UFRJ

Prof. Ricardo Sá Earp

Departamento de Matemática — PUC-Rio

Prof. Walcy Santos

Departamento de Matemática — UFRJ

Prof. José Eugenio Leal

Coordenador Setorial do Centro Técnico Científico — PUC-Rio

Rio de Janeiro, 6 de Dezembro de 2007

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

Maria Clara Schuwartz Ferreira

Graduação: Bacharelado em Matemática — Universidade Federal do Espírito Santo – UFES (2002–2005).

Ficha Catalográfica

Ferreira, Maria Clara S.

Hipersuperfícies Equivariantes Mínimas e com Curvatura Média Constante em S^n e \mathbb{H}^n / Maria Clara Schuwartz Ferreira; orientador: Henri Anciaux. — Rio de Janeiro : PUC–Rio, Departamento de Matemática, 2007.

v., 69 f: il. ; 29,7 cm

1. Dissertação (mestrado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática.

Inclui referências bibliográficas.

1. Matemática – Tese. 2. Hipersuperfícies Mínimas. 3. Hipersuperfícies com Curvatura Média Constante. 4. Geometria Equivariante. 5. Formas Espaciais. I. Anciaux, Henri. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Matemática. III. Título.

CDD: 510

Agradecimentos

Ao meu orientador Henri, que além de ter sido um excelente orientador, foi também um amigo, sempre me incentivando e acreditando no meu trabalho.

Aos membros da banca, em especial o Prof. Ricardo, que enriqueceu muito a minha dissertação com valiosas sugestões. Obrigada por sua dedicação, apoio e carinho.

Ao Carlos, que com seu conhecimento e paciência, me acompanhou nos momentos mais difíceis.

Ao Eduardo, que além da amizade, me forneceu ajuda preciosa nos problemas computacionais.

Aos funcionários, principalmente Creuza, Kátia, Orlando e Otávio, que com muita boa vontade e simpatia facilitaram o meu cotidiano na PUC.

Aos meus colegas e amigos, que tornaram esses dois anos mais alegres.

Ao Marcelo, pelo seu companheirismo e compreensão.

E especialmente, agradeço com muito carinho aos meus pais e meus irmãos, pelo grande apoio que me deram.

Resumo

Ferreira, Maria Clara S.; Anciaux, Henri. **Hipersuperfícies Equivariantes Mínimas e com Curvatura Média Constante em S^n e \mathbb{H}^n** . Rio de Janeiro, 2007. 69p. Dissertação de Mestrado — Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Neste trabalho estudamos hipersuperfícies equivariantes mínimas ou com curvatura média constante imersas em S^n e \mathbb{H}^n . Tais hipersuperfícies são construídas a partir de uma curva em S^2 e em \mathbb{H}^2 respectivamente, chamada de curva geratriz. A equação da curvatura média constante reduz-se a um sistema de EDO sobre a curva geratriz, e graças à simetria do problema, podemos eliminar uma variável desse sistema. O sistema simplificado, por sua vez, admite uma integral primeira. No caso esférico, encontramos condições para obter curvas soluções fechadas, produzindo assim exemplos de hipersuperfícies compactas mínimas ou com curvatura média constante em S^n . Discutimos também a questão do mergulho dessas hipersuperfícies. No caso hiperbólico, nos limitamos ao caso das hipersuperfícies mínimas; observamos que as curvas soluções não são fechadas e tratamos da questão do mergulho.

Palavras-chave

Hipersuperfícies Mínimas. Hipersuperfícies com Curvatura Média Constante. Geometria Equivariante. Formas Espaciais.

Abstract

Ferreira, Maria Clara S.; Anciaux, Henri. **Minimal and Constant Mean Curvature Equivariant Hypersurfaces in S^n and \mathbb{H}^n** . Rio de Janeiro, 2007. 69p. MsC Thesis — Department of Mathematics, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

In this work we study equivariant hypersurfaces in S^n and \mathbb{H}^n which are minimal or have constant mean curvature. These hypersurfaces are described via a curve in S^2 and \mathbb{H}^2 respectively, called the generating curve. In the equivariant case, the constant mean curvature equation reduces to an ODE on the generating curve, which can be reduced by one variable using the symmetry of the problem. It then turns out that this reduced system admits a first integral. In the spherical case, we find conditions insuring closedness of the integral curves, and we deduce the existence of compact hypersurfaces which are minimal or have constant mean curvature. We also discuss the question of embeddedness of these hypersurfaces. In the hyperbolic case, we limit ourselves to the minimal case. We observe that the curves are no longer closed and again we discuss embeddedness.

Keywords

Minimal Hypersurfaces. Constante Mean Curvature Hypersurfaces. Equivariant Geometry. Space Forms.

Sumário

Lista de figuras	8
1 Preliminares	11
1.1 Variedades Diferenciáveis	11
1.2 Variedades Riemannianas	13
1.3 Conexão Riemanniana	14
1.4 A Segunda Forma Fundamental de uma imersão de codimensão 1	16
1.5 O espaço hiperbólico	20
1.6 As formas espaciais	21
2 Hipersuperfícies Equivariantes Mínimas e com Curvatura Média Constante em \mathbb{S}^{n+1}	23
2.1 Hipersuperfícies Equivariantes em \mathbb{S}^{n+1}	23
2.2 O caso Mínimo	29
2.3 O Caso Curvatura Média Constante	38
3 Hipersuperfícies Equivariantes Mínimas e com Curvatura Média Constante em \mathbb{H}^{n+1}	53
3.1 Hipersuperfícies Equivariantes em \mathbb{H}^{n+1}	53
3.2 O caso Mínimo	62
Referências Bibliográficas	68

Lista de figuras

2.1	Gráfico da função $e(\phi) = \sin \phi \cos^{n-1} \phi$	32
2.2	Diagrama de fase esférico no caso mínimo, $n = 2$	33
2.3	Diagrama de fase esférico no caso CMC, $H = 1, n = 2$	42
3.1	Gráfico da função $e(\phi) = \sinh \phi \cosh^{n-1} \phi$	64
3.2	Diagrama de fase hiperbólico no caso mínimo, $n = 4$	64

Introdução

O estudo das superfícies de revolução de \mathbb{R}^3 soluções de uma equação de curvatura começou em 1776 quando Meusnier encontrou o catenóide, que foi a primeira superfície mínima a ser descoberta, além do plano.

Em 1841, C. Delaunay classificou todas as superfícies de revolução de \mathbb{R}^3 com curvatura média constante. Ele mostrou que a curva geratriz de toda superfície desse tipo é a trajetória do foco de uma cônica que se desloca sem escorregar ao longo de uma reta. W.Y. Hsiang e W.C. Yu fizeram um estudo análogo ao de Delaunay para dimensões superiores, o que deu início à uma teoria que generaliza as superfícies de revolução de \mathbb{R}^3 , chamada de Geometria Equivariante.

Podemos destacar vários nomes que vêm contribuindo nessa área, como por exemplo, T. Otsuki [10], F. Brito & M. L. Leite [4], H. Alencar, A. Barros, O. Palmas, J. G. Reyes, & W. Santos [1], entre outros.

Uma hipersuperfície é equivariante, se ela é invariante pela ação de um certo grupo de isometrias do espaço ambiente. Neste trabalho estudamos hipersuperfícies equivariantes de \mathbb{S}^n e de \mathbb{H}^n , construídas a partir de uma curva em \mathbb{S}^2 e em \mathbb{H}^2 respectivamente, chamada de curva geratriz. Estudamos quando essas hipersuperfícies são mínimas ou têm curvatura média constante e o estudo reduz-se à curva geratriz. As técnicas utilizadas são similares à aquelas usadas em [2] por H. Anciaux. Quando a curva for fechada, a hipersuperfície associada a ela será compacta e quando a curva for mergulhada, a hipersuperfície associada a ela será mergulhada.

Serão demonstrados três teoremas principais. São eles:

Teorema 1 *Existe uma família enumerável \mathcal{F} de hipersuperfícies equivariantes mínimas compactas imersas em \mathbb{S}^{n+1} .*

Teorema 2 *Dado $H > 0$, existe uma família enumerável \mathcal{F}_H de toros equivariantes com curvatura média constante H imersos em \mathbb{S}^3 , e além dos toros planos, existe ao menos um outro toro de \mathcal{F}_H mergulhado em \mathbb{S}^3 .*

Se $H > \frac{\sqrt{3}}{3}$, então existem ao menos dois toros em \mathcal{F}_H mergulhados

além dos toros planos. E quanto maior for o valor de H , mais mergulhos teremos em \mathcal{F}_H .

Teorema 3 *Existe uma família \mathcal{F} , a um parâmetro real, de hipersuperfícies mínimas equivariantes mergulhadas em \mathbb{H}^{n+1} .*

No primeiro capítulo, definimos alguns conceitos básicos de Geometria Riemanniana e enunciamos sem demonstração alguns resultados clássicos que serão necessários ao longo da dissertação. As referências usadas são [6] e [9] o leitor familiar com Geometria Riemanniana, poderá omitir este primeiro capítulo.

No segundo capítulo estudamos as hipersuperfícies equivariantes de \mathbb{S}^{n+1} destacando os casos mínimos e CMC, e demonstrando os Teoremas 1 e 2.

O último capítulo trata das hipersuperfícies equivariantes de \mathbb{H}^{n+1} enfocando-se sobre o caso mínimo, e demonstrando o Teorema 3.

1

Preliminares

1.1

Variedades Diferenciáveis

Definição 1.1 Uma variedade diferenciável de dimensão n é um conjunto M , munido de aplicações injetoras $\Phi_i : U_i \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$, com $i \in I$, e U_i aberto de \mathbb{R}^n que satisfaz as seguintes condições:

$$(i) \bigcup_{i \in I} \Phi_i(U_i) = M$$

(ii) Se $W = \Phi_i(U_i) \cap \Phi_j(U_j) \neq \emptyset$, então $\Phi_i^{-1}(W)$ e $\Phi_j^{-1}(W)$ são abertos e a aplicação $\Phi_j^{-1} \circ \Phi_i : \Phi_i^{-1}(W) \rightarrow \Phi_j^{-1}(W)$ é diferenciável.

Chamamos cada aplicação Φ_i de parametrização local de M . A família $A = (U_i, \Phi_i)_{i \in I}$ é chamada de atlas de M .

A dimensão de M é o número n e indicaremos M por M^n .

Definição 1.2 Uma aplicação entre variedades $F : M^m \rightarrow N^n$ é dita diferenciável em $p \in M$ se dada uma parametrização local (V, Ψ) de $F(p)$ em N , existe uma carta (U, Φ) de p em M tal que $F(\Phi(U)) \subset \Psi(V)$ e a aplicação $\Psi^{-1} \circ F \circ \Phi$ é diferenciável em $\Phi^{-1}(p)$.

F é dita diferenciável se o é para todo $p \in M$. Se F é diferenciável e inversível e sua inversa F^{-1} é diferenciável, dizemos que F é um difeomorfismo.

Definição 1.3 Seja M uma variedade diferenciável. Uma curva diferenciável em M é uma aplicação $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ diferenciável. Suponha que $\alpha(0) = p$. O vetor tangente à α em $t = 0$ é definido como sendo a aplicação

$$\begin{aligned} \alpha'(0): \mathcal{D} &\rightarrow \mathbb{R} \\ f &\mapsto \alpha'(0)f = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (f \circ \alpha)(t) \end{aligned}$$

onde $\mathcal{D} = \{f : M \rightarrow \mathbb{R} / f \text{ é diferenciável em } p\}$.

Um vetor tangente em p é o vetor tangente em $t = 0$ de uma curva $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ tal que $\alpha(0) = p$.

O espaço tangente à M em p é o conjunto de todos os vetores tangentes à M em p . Este espaço é denotado por T_pM .

Teorema 1.4 T_pM é um espaço vetorial de dimensão n .

Dem: Considere uma parametrização local $\Phi : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ em torno de p tal que $\Phi(0) = p$.

Seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável em $\Phi(U)$. Isto é, $f \circ \Phi : U \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável.

Expressando a função f na parametrização Φ , temos:

$$f \circ \Phi(q) = f(x_1, \dots, x_n), \quad \text{onde } q = (x_1, \dots, x_n)$$

Suponha que $\Phi^{-1}(\alpha(t)) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ e que $\alpha(0) = p$.

Portanto, restringindo f a α , obteremos:

$$\begin{aligned} \alpha'(0)f &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (f \circ \alpha)(t) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \left(f \circ \Phi(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \right)(t) = \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (f(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)))(t) = \sum_{i=1}^n x'_i(0) \frac{\partial f}{\partial x_i} = \left(\sum_{i=1}^n x'_i(0) \frac{\partial}{\partial x_i} \right) f \\ &\Rightarrow \alpha'(0) = \sum_{i=1}^n x'_i(0) \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (*) \end{aligned}$$

Observe que $\frac{\partial}{\partial x_i}$ é o vetor tangente em p à curva coordenada

$$x_i \rightarrow \Phi(0, \dots, 0, x_i, 0, \dots, 0)$$

Pela equação (*), notamos que o conjunto T_pM com as operações usuais de funções é um espaço vetorial de dimensão n e o conjunto de vetores $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right\}$ associados à parametrização Φ forma uma base deste espaço.

Definição 1.5 Sejam M e N variedades diferenciáveis e $F : M \rightarrow N$ uma aplicação diferenciável. Dado $p \in M$ e $v \in T_pM$, considere uma curva diferenciável $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$. Seja $\beta = F \circ \alpha$. Então a diferencial de F no ponto p é definida por:

$$\begin{aligned} dF_p: T_pM &\rightarrow T_{F(p)}N \\ v &\mapsto dF_p(v) = \beta'(0) \end{aligned}$$

Observação 1.6 dF_p é uma aplicação linear que não depende da escolha da curva α .

Definição 1.7 Uma aplicação diferenciável entre variedades $F : M^n \rightarrow N^m$ é dita uma imersão se $dF_p : T_pM \rightarrow T_{F(p)}N$ é injetora para todo $p \in M$. A imersão F é um mergulho se $F : M \rightarrow F(M)$ é um homeomorfismo (com $F(M)$ tendo a topologia induzida por N).

Se $F : M^n \rightarrow N^m$ é uma imersão, então $n < m$. A diferença $m - n$ é chamada de codimensão da imersão.

Neste trabalho, estamos interessados no caso em que a codimensão $m - n$ é igual a 1. Isto é, $F : M^n \rightarrow N^{n+1}$.

1.2

Variedades Riemannianas

Definição 1.8 Considere o conjunto $L^2(T_pM, \mathbb{R}) = \{\alpha : T_pM \times T_pM \rightarrow \mathbb{R} / \alpha \text{ é bilinear}\}$.

Seja M^n uma variedade diferenciável. Dado $p \in M$, seja $\Phi : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ uma parametrização local de uma vizinhança de p e $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right\}$ o referencial adaptado associado a Φ .

Uma métrica pseudo-riemanniana g em M é uma correspondência que associa a cada ponto $p \in M$, uma forma bilinear simétrica $g_p \in L^2(T_pM, \mathbb{R})$. Isto é, g_p satisfaz as seguintes condições:

- (i) $g_p(X, Y) = g_p(Y, X)$ para todos $X, Y \in T_pM$
- (ii) As funções $g_{ij}(p) = g_p\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right)$ são funções diferenciáveis em $\Phi(U)$.
- (iii) Se $g_p(X, Y) = 0$ para todo $Y \in T_pM$, então $X = 0$.

Observação 1.9 Se além disso, a forma bilinear simétrica g_p é positiva definida, então dizemos que g é uma métrica.

Isto é, uma métrica riemanniana g em M é uma correspondência que associa a cada ponto $p \in M$, uma forma bilinear $g_p \in L^2(T_pM, \mathbb{R})$ que satisfaz as condições (i) e (ii) e que também satisfaz a seguinte condição:

- (iii') $g_p(X, X) > 0$ para todo $X \in T_pM$, $X \neq 0$.

Note que (iii') \Rightarrow (iii).

Definição 1.10 O par (M, g) é chamado de variedade riemanniana (ou pseudo-riemanniana).

As funções g_{ij} são chamadas expressão da métrica riemanniana (ou pseudo-riemanniana) no sistema de coordenadas (U, Φ) .

Observação 1.11 Também usaremos a notação $\langle X, Y \rangle_p$ para expressar $g_p(X, Y)$.

Definição 1.12 *Sejam M e N variedades riemannianas. Um difeomorfismo $f : M \rightarrow N$ é chamado de isometria se para todo $p \in M$, $u, v \in T_p M$ temos:*

$$\langle u, v \rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v) \rangle_{f(p)}$$

Definição 1.13 *Seja $(\overline{M}^{n+k}, \overline{g})$ uma variedade riemanniana. Suponha que M^n é uma variedade diferenciável e que $f : M \hookrightarrow \overline{M}$ é uma imersão. Então, fica definida uma métrica g em M da seguinte maneira:*

Dados $p \in M$ e $u, v \in T_p M$,

$$\langle u, v \rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v) \rangle_{f(p)}$$

A métrica g de M é dita métrica induzida por f pela variedade riemanniana \overline{M} , e é também chamada de primeira forma fundamental de f .

A aplicação $f : (M, g) \rightarrow (\overline{M}, \overline{g})$ é chamada de imersão isométrica.

Dizemos que M é uma variedade riemanniana imersa em \overline{M} .

Observação 1.14 *Analogamente define-se pseudo-métrica induzida e variedade pseudo-riemanniana imersa em uma variedade ambiente pseudo-riemanniana \overline{M} .*

1.3

Conexão Riemanniana

Definição 1.15 *Um campo de vetores X em uma variedade diferenciável M é uma correspondência que associa a cada ponto $p \in M$, um vetor $X(p) \in T_p M$.*

Sejam $\Phi : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ uma parametrização local de M em torno de um ponto $p \in M$ e $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right\}$ o referencial associado à Φ . Então existem funções $a_i : U \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, tais que:

$$X(p) = \sum_{i=1}^n a_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

Vamos dizer que o campo X é diferenciável se as funções a_i são diferenciáveis e denotar por $\mathfrak{X}(M)$ o conjunto de campos de vetores diferenciáveis em M . Essa definição não depende da parametrização escolhida Φ .

Então podemos associar a cada função $f \in \mathcal{D}$, a derivada direcional de f na direção do vetor $X(p)$, que é dada pela função:

$$\begin{aligned} Xf: \quad M &\rightarrow \mathbb{R} \\ p &\mapsto Xf(p) = \sum_{i=1}^n a_i(p) \frac{\partial f}{\partial x_i} \end{aligned}$$

O campo X é diferenciável se e só se $Xf \in \mathcal{D}$.

Logo, podemos pensar em um campo de vetores diferenciável como um operador:

$$\begin{aligned} X: \mathcal{D} &\rightarrow \mathcal{D} \\ f &\mapsto Xf \end{aligned}$$

Definição 1.16 *Seja M uma variedade diferenciável. Dados dois campos de vetores X e Y em M , existe um único campo de vetores de M , denotado por $[X, Y]$ e chamado colchete de Lie, tal que para todo $f \in \mathcal{D}$ temos $[X, Y](f) = X(Yf) - Y(Xf)$.*

Observação 1.17 *O colchete de Lie tem as seguintes propriedades: ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$)*

- (i) $[\alpha X + \beta Y, Z] = [\alpha X, Z] + [\beta Y, Z]$;
- (ii) $[X, Y] = -[Y, X]$;
- (iii) $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$

Está última é chamada de Identidade de Jacobi.

Definição 1.18 *Uma conexão afim, é uma aplicação*

$$\begin{aligned} \nabla: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\rightarrow \mathfrak{X}(M) \\ (X, Y) &\mapsto \nabla_X Y \end{aligned}$$

que satisfaz as propriedades:

- (i) $\nabla_X(Y_1 + Y_2) = \nabla_X Y_1 + \nabla_X Y_2$
- (ii) $\nabla_{fX_1 + gX_2} Y = f\nabla_{X_1} Y + g\nabla_{X_2} Y$
- (iii) $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$

Definição 1.19 *Uma conexão afim ∇ em uma variedade riemanniana (ou pseudo-riemanniana) (M, g) é dita uma conexão de Levi-Civita se satisfaz as seguintes propriedades:*

- (i) *compatibilidade com a métrica (ou pseudo-métrica):*

$$X(g(Y, Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$$

- (ii) *simetria:*

$$[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$$

Teorema 1.20 *Dada uma variedade riemanniana (ou pseudo-riemanniana) (M, g) , existe uma única conexão de Levi-Civita em (M, g) (associada a métrica g).*

Teorema 1.21 *Seja $f : M \rightarrow \overline{M}$ uma imersão de uma variedade diferenciável M em uma variedade riemanniana $(\overline{M}, \overline{\nabla})$. Suponha que M tem métrica induzida g pela imersão. Seja ∇ a conexão de (M, g) . Dados X, Y campos locais de vetores em $f(M)$, podemos estender esses campos a \overline{M} .*

Então:

$$(\overline{\nabla}_Y X)^T = \nabla_Y X$$

onde $(\overline{\nabla}_Y X)^T$ é a parte tangente de $\overline{\nabla}_Y X$.

Logo:

$$\overline{\nabla}_Y X = \nabla_Y X + (\overline{\nabla}_Y X)^\perp \quad (\text{Fórmula de Gauss})$$

onde $(\overline{\nabla}_Y X)^\perp$ é a parte normal de $\overline{\nabla}_Y X$.

1.4

A Segunda Forma Fundamental de uma imersão de codimensão 1

Definição 1.22 *Seja $f : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+1}$ uma imersão de codimensão 1.*

Dado $p \in M$, considere um vetor unitário $N(p)$ normal à p .

Temos $N(p) \in T_p \overline{M}$, e $T_p \overline{M} = T_p M + N(p)\mathbb{R}$.

Dado $X \in T_p M$ podemos estendê-lo a $\overline{X} \in T_p \overline{M}$.

O operador de Weingarten é definido por:

$$\begin{aligned} A = -\overline{\nabla}N: \quad T_p M &\rightarrow T_p M \\ X &\mapsto A(X) = -\overline{\nabla}_X N \end{aligned}$$

Para todos $X, Y \in T_p M$ temos $\langle AX, Y \rangle = \langle AY, X \rangle$, isto é, o operador de Weingarten é auto-adjunto. Logo, é possível determinar uma base ortonormal e_1, \dots, e_n de $T_p M$ tal que $A(e_i) = k_i e_i$. Os números k_1, \dots, k_n são chamados curvaturas principais da imersão no ponto p .

A segunda forma fundamental da imersão (de codimensão 1) é dada por:

$$\begin{aligned} II: \quad \mathfrak{X}(\overline{M}) \times \mathfrak{X}(\overline{M}) &\rightarrow \mathfrak{X}(\overline{M}) \\ (X, Y) &\mapsto II(X, Y) = \langle \overline{\nabla}_X Y, N \rangle = \langle -\overline{\nabla}_X N, Y \rangle = \langle AX, Y \rangle \end{aligned}$$

Definição 1.23 *Uma imersão isométrica $f : M \rightarrow \overline{M}$ é dita totalmente geodésica se $II = 0$. Nesse caso, dizemos que M é totalmente geodésica.*

Definição 1.24 *Uma imersão isométrica $f : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+1}$ é dita totalmente umbílica se as curvaturas principais são iguais em todos os pontos.*

Definição 1.25 Considere novamente a imersão $f : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+1}$. A curvatura média de M em \overline{M} no ponto p é $H(p) = \frac{1}{n}(k_1 + \dots + k_n)$, onde k_1, \dots, k_n são as curvaturas principais de M em p .

Observação 1.26 Em coordenadas locais, a curvatura média é expressa da seguinte maneira:

$$H = \frac{1}{n} \text{traço}(II \cdot I^{-1})$$

onde I e II são as matrizes da primeira e da segunda forma fundamental respectivamente.

De fato:

Considere a imersão $f : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+1}$ entre as variedades Riemannianas (M, g) e $(\overline{M}, \overline{g})$ onde g é a métrica induzida por f . Seja Σ a hipersuperfície $f(M) \subset \overline{M}$. Sejam $\overline{\nabla}$ e ∇ as conexões riemannianas de M e Σ respectivamente.

Dada uma parametrização $\Phi : U \rightarrow \Sigma$ em torno de um ponto $p \in \Sigma$, seja $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right\}$ a base de $T_p \Sigma$ associada a Φ . Podemos estender localmente os vetores $\frac{\partial}{\partial x_i}$ à M .

Seja $N(p)$ um vetor normal unitário a p . $N(p) \in T_p M$.

Temos então a matriz da primeira forma fundamental, que é uma matriz simétrica positiva definida cujas entradas são $(g_{ij}) = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle$.

Temos também a matriz da segunda forma fundamental, que é uma matriz simétrica cujas entradas são $(b_{ij}) = \left\langle A \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right), \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle$.

Como o vetor $A \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right) = -\overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x_j}} N$ está em $T_p M$, temos

$$A \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right) = \sum_{i=1}^n a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \tag{1-1}$$

A matriz cujas entradas são (a_{ij}) é a matriz do operador A relativamente à base $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right\}$ que denotaremos por $[A]$.

Então:

$$H = \frac{1}{n} \text{traço}[A] = \frac{1}{n} \text{traço}[a_{ij}]$$

Fazendo o produto interno com $\frac{\partial}{\partial x_i}$ na equação (1-1), temos:

$$b_{ij} = \sum_{i=1}^n a_{ij} g_{ij}$$

que na forma matricial fica:

$$II = [A].I$$

$$\Rightarrow [A] = II.I^{-1}$$

Portanto,

$$H = \frac{1}{n} \text{traço}([A]) = \frac{1}{n} \text{traço}(II.I^{-1})$$

Definição 1.27 Considere uma imersão $f : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+1}$. A hipersuperfície $f(M)$ de \overline{M} é chamada mínima se a curvatura média de M em \overline{M} é identicamente nula.

A hipersuperfície $f(M)$ é chamada hipersuperfície de curvatura média constante e denotada por hipersuperfície CMC se a curvatura média de M em \overline{M} é constante. Em geral, dizemos que uma hipersuperfície é CMC se a curvatura média é constante e diferente de 0.

Exemplo 1 Uma hipersuperfície totalmente geodésica é mínima.

Exemplo 2 Chamamos de superfície de revolução a superfície obtida quando giramos uma curva regular plana α em torno do eixo L ortogonal ao plano da curva. Tal curva é chamada de curva geratriz e L é o eixo de rotação.

Seja α uma curva contida no plano xz que é localmente um gráfico de uma função diferenciável na forma $z \mapsto F(z)$. Uma parametrização local para α é:

$$\begin{aligned} \alpha: (a, b) &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ u &\mapsto \alpha(u) = (F(u), 0, u) \end{aligned} \quad \text{com } F(u) > 0$$

E uma parametrização local para a superfície de revolução S gerada por α é dada por:

$$\begin{aligned} X: (a, b) \times (0, 2\pi) &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto (F(u) \cos v, F(u) \sin v, u) \end{aligned}$$

Vamos calcular a curvatura média de S :

Calculando as derivadas parciais:

$$X_u = (F' \cos v, F' \sin v, 1)$$

$$X_v = (-F \sin v, F \cos v, 0)$$

Logo, a matriz I da primeira forma fundamental é:

$$\begin{bmatrix} F'^2 + 1 & 0 \\ 0 & F^2 \end{bmatrix}$$

Calculando as segundas derivadas parciais:

$$X_{uu} = (F'' \cos v, F'' \sin v, 0)$$

$$X_{uv} = (-F' \sin v, F' \cos v, 0)$$

$$X_{vv} = (-F \cos v, -F \sin v, 0)$$

Um vetor normal a imersão em \mathbb{R}^3 é dado por:

$$N = \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|} = \frac{(-\cos v, -\sin v, F')}{\sqrt{1 + F'^2}}$$

Logo, a matriz II da segunda forma fundamental é:

$$\begin{bmatrix} \frac{-F''}{\sqrt{1+F'^2}} & 0 \\ 0 & \frac{F}{\sqrt{1+F'^2}} \end{bmatrix}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \text{traço}(II \cdot I^{-1}) = \frac{1}{2} \text{traço} \begin{bmatrix} \frac{-F''}{\sqrt{1+(F')^2}} & 0 \\ 0 & \frac{F}{\sqrt{1+(F')^2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{(F')^2+1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{F^2} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \text{traço} \begin{bmatrix} \frac{-F''F}{F^2(1+(F')^2)^{\frac{3}{2}}} & 0 \\ 0 & \frac{1+(F')^2}{F^2(1+(F')^2)^{\frac{3}{2}}} \end{bmatrix} = \frac{-F''F + 1 + (F')^2}{2F^2(1 + (F')^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

Se $H = 0$, temos:

$$\begin{aligned} FF'' &= 1 + (F')^2 \\ \Rightarrow \frac{F'F''}{1 + (F')^2} &= \frac{F'}{F} \end{aligned}$$

Então:

$$\begin{aligned} \int \frac{F'F''}{1 + (F')^2} &= \int \frac{F'}{F} \\ \Rightarrow \frac{1}{2} \ln(1 + (F')^2) &= \ln(F) + c \\ \Rightarrow \sqrt{1 + (F')^2} &= e^c F = c'F \\ \Rightarrow (F')^2 &= (c'F)^2 - 1 \\ \Rightarrow F(u) &= \frac{1}{c'} \cosh(c'u) \end{aligned}$$

Assim,

$$X(u, v) = \left(\frac{1}{c'} \cosh(c'u) \cos v, \frac{1}{c'} \cosh(c'u) \sin v, u \right)$$

Essa superfície é chamada de catenóide. Ela foi descoberta em 1776 por Meusnier. A curva geratriz do catenóide chama-se catenária.

O catenóide é a única superfície de revolução que é mínima.

Exemplo 3 *O matemático C. Delaunay classificou as superfícies de revolução CMC. Ele demonstrou que existem apenas três tipos de superfícies CMC ou mínimas de revolução em \mathbb{R}^3 . São elas: o catenóide, o ondulóide e o nodóide.*

A curva geratriz do catenóide (que é mínima) é a trajetória do foco de uma parábola que se desloca sem escorregar ao longo de uma reta.

A curva geratriz do ondulóide é a trajetória do foco de uma elipse que se desloca sem escorregar ao longo de uma reta.

A curva geratriz do nodóide é a trajetória do foco de uma hipérbole que se desloca sem escorregar ao longo de uma reta.

Tais superfícies são chamadas superfícies de Delaunay.

1.5

O espaço hiperbólico

Definição 1.28 *Definimos o espaço de Minkowski ou espaço de Lorentz \mathbb{R}_1^n , como o espaço \mathbb{R}^n com a pseudo-métrica $g_1 = \langle \cdot, \cdot \rangle_1$, onde g_1 é definida da seguinte maneira:*

$$\langle X, Y \rangle_1 = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_{n-1}y_{n-1} - x_ny_n$$

onde $X = (x_1, \dots, x_n)$, $Y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.

Teorema 1.29 *A conexão de Levi-Civita de \mathbb{R}_1^n é a mesma que a de \mathbb{R}^n (a conexão plana).*

Definição 1.30 *Um vetor X é chamado:*

- (i) tipo-espaço, se $\langle X, X \rangle_1 > 0$*
- (ii) tipo-tempo, se $\langle X, X \rangle_1 < 0$*
- (iii) tipo-luz, se $\langle X, X \rangle_1 = 0$ com $X \neq 0$*

Definição 1.31 *O espaço hiperbólico \mathbb{H}^n é definido como:*

$$\mathbb{H}^n = \{X \in \mathbb{R}_1^{n+1} / \langle X, X \rangle_1 = -1\}$$

Em particular, fazendo $n = 2$, temos o plano hiperbólico

$$\mathbb{H}^2 = \{X \in \mathbb{R}_1^3 / \langle X, X \rangle_1 = -1\}$$

Teorema 1.32 *A pseudo-métrica induzida por $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ no espaço hiperbólico \mathbb{H}^n é positiva definida.*

Portanto, $(\mathbb{H}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_1)$ é uma variedade Riemanniana.

1.6

As formas espaciais

Definição 1.33 *A curvatura R de uma variedade Riemanniana M é uma correspondência que associa a cada par $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, uma aplicação $R(X, Y)$ definida da seguinte maneira:*

$$\begin{aligned} R(X, Y): \mathfrak{X}(M) &\rightarrow \mathfrak{X}(M) \\ Z &\mapsto R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z \end{aligned}$$

Observação 1.34 *Usaremos a notação $R(X, Y, Z, T)$ para designar o número real $\langle R(X, Y)Z, T \rangle$.*

E indicaremos por $\|X \wedge Y\|$ a expressão $\sqrt{\|X\|^2 \|Y\|^2 - \langle X, Y \rangle^2}$.

Definição 1.35 *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana. Dados $p \in M$ e $\sigma \subset T_p M$ um subespaço de dimensão 2 de $T_p M$ gerado pelos vetores linearmente independentes $X, Y \in T_p M$, definimos a curvatura seccional de σ em p , como sendo o número real*

$$\frac{R(X, Y, X, Y)}{\|X \wedge Y\|^2}$$

Observação 1.36 *A curvatura seccional de σ não depende dos vetores X e Y .*

Definição 1.37 *Considere uma variedade Riemanniana M e seja $p \in M$. Dizemos que M é completa se uma das seguintes afirmações equivalentes é satisfeita:*

- (i) *M é completa como espaço métrico.*
- (ii) *Os limitados e fechados de M são compactos.*
- (iii) *Existe uma sucessão de compactos de $K_n \subset M, K_n \subset K_{n+1}$ e $\cup K_n = M$, tais que se $q_n \notin K_n$, então a distância entre p e q_n tende a infinito.*
- (iv) *O comprimento de uma curva divergente é infinito.*

Teorema 1.38 *Seja M^n uma variedade Riemanniana completa e simplesmente conexa de curvatura seccional constante c . Então M é isométrica a:*

- (i) \mathbb{R}^n se $c = 0$.
- (ii) \mathbb{S}^n se $c = 1$.

(iii) \mathbb{H}^n se $c = -1$.

A seguir, introduzimos alguns fatos sobre hipersuperfícies nas formas espaciais.

Teorema 1.39 *Uma hipersuperfície totalmente umbílica de um espaço com curvatura seccional constante tem curvatura média constante.*

Teorema 1.40 *Seja $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão totalmente geodésica. Então, $f(M)$ é um aberto contido em um hiperplano de \mathbb{R}^{n+1} . Se f é totalmente umbílica, mas não totalmente geodésica, então $f(M)$ é um aberto contido em uma hiperesfera de \mathbb{R}^{n+1} .*

Teorema 1.41 *Seja $f : M^n \rightarrow \mathbb{S}^{n+1}$ uma imersão totalmente geodésica. Então, $f(M)$ é um aberto contido em $\mathbb{S}^{n+1} \cap F$, onde F é um hiperplano de \mathbb{R}^{n+2} passando pela origem. Se f é totalmente umbílica, mas não totalmente geodésica, então $f(M)$ é um aberto contido em $\mathbb{S}^{n+1} \cap F$, onde F é um hiperplano afim de \mathbb{R}^{n+2} .*

2

Hipersuperfícies Equivariantes Mínimas e com Curvatura Média Constante em \mathbb{S}^{n+1}

2.1

Hipersuperfícies Equivariantes em \mathbb{S}^{n+1}

Seja $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco no hemisfério superior de \mathbb{S}^2 e k_ξ a sua curvatura. Considere a seguinte imersão:

$$\begin{aligned} X: I \times \mathbb{S}^{n-1} &\rightarrow \mathbb{S}^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+2} \\ (s, x) &\mapsto X(s, x) = (\xi_1(s), \xi_2(s), \xi_3(s)x) \end{aligned}$$

Vamos chamar de Σ a hipersuperfície $X(I \times \mathbb{S}^{n-1})$ imersa em \mathbb{S}^{n+1} .

De fato temos $\Sigma \subset \mathbb{S}^{n+1}$:

$$\langle X(s, x), X(s, x) \rangle = \xi_1^2(s) + \xi_2^2(s) + \xi_3^2(s)\|x\|^2 = 1$$

pois $x \in \mathbb{S}^{n-1}$ e $\xi \in \mathbb{S}^2$.

Chamamos de $Gl(n, \mathbb{R})$ o grupo das matrizes reais $n \times n$ inversíveis. O grupo ortogonal $O(n)$ de \mathbb{R}^n é definido por:

$$O(n) = \{A \in Gl(n, \mathbb{R}) / A \text{ é uma matriz ortogonal}\}$$

O grupo $O(n)$ é o grupo de simetria de \mathbb{S}^{n-1} , isto é, \mathbb{S}^{n-1} é invariante pela ação do grupo $O(n)$.

Seja $A \in O(n)$ e considere a matriz:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & A & \\ 0 & 0 & & & \end{bmatrix}$$

Considere o grupo G formado pelas matrizes do tipo \bar{A} .

$$G = \{\bar{A}, \text{onde } A \in O(n)\}$$

Então G é um subgrupo de $O(n+2)$. E dado $X(s, x) \in \Sigma$ arbitrário, temos que:

$$\bar{A}(X(s, x)) = \bar{A}(\xi_1, \xi_2, \xi_3 x) = (\xi_1, \xi_2, \xi_3 A(x)) = X(s, A(x))$$

Logo $\bar{A}(\Sigma) = \Sigma$, isto é, Σ é invariante pela ação do grupo G . Por esta razão, dizemos que Σ é uma hipersuperfície equivariante em \mathbb{S}^{n+1} .

Agora, vamos calcular a primeira e a segunda formas fundamentais de X .

Podemos escolher uma parametrização $\Phi : U \subset \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ em torno de x tal que o referencial adaptado $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right\}$ seja uma base ortonormal de $T_x \mathbb{S}^{n-1}$.

Sabemos que $T_{(s,x)}(I \times \mathbb{S}^{n-1}) = \mathbb{R} \times T_x \mathbb{S}^{n-1}$.

Então, identificando $\frac{\partial}{\partial x_i} \simeq (0, \frac{\partial}{\partial x_i})$ e colocando $\frac{\partial}{\partial s} = (1, 0)$, temos que $\left\{ \frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right\}$ é base ortonormal de $T_{(s,x)}(I \times \mathbb{S}^{n-1})$.

Lembramos que

$$\mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n / \|x\|^2 = 1\}$$

Então

$$T_x \mathbb{S}^{n-1} = \{v \in \mathbb{R}^n / \langle v, x \rangle = 0\} = x^\perp$$

Vamos calcular as derivadas parciais:

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial s} &= (\xi'_1, \xi'_2, \xi'_3 x) \\ \frac{\partial X}{\partial x_i} &= (0, 0, \xi_3 \frac{\partial}{\partial x_i}) \end{aligned}$$

Então:

$$\begin{aligned} g_{11} &= \left\langle \frac{\partial X}{\partial s}, \frac{\partial X}{\partial s} \right\rangle = \xi_1'^2 + \xi_2'^2 + \xi_3'^2 \|x\|^2 = \|\xi'\|^2 = 1 \\ g_{1i} &= \left\langle \frac{\partial X}{\partial s}, \frac{\partial X}{\partial x_i} \right\rangle = \xi_3' \xi_3 \left\langle x, \frac{\partial}{\partial x_i} \right\rangle = 0 \end{aligned}$$

$$g_{ij} = \left\langle \frac{\partial X}{\partial x_i}, \frac{\partial X}{\partial x_j} \right\rangle = \xi_3^2 \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle = \xi_3^2 \delta_{ij}$$

Logo, a matriz da primeira forma fundamental é dada por $I = [g_{ij}]$, onde

$$\begin{aligned} g_{11} &= 1 \\ g_{1i} &= 0 \\ g_{ij} &= \xi_3^2 \delta_{ij} \end{aligned}$$

Um vetor normal unitário à imersão em \mathbb{S}^{n+1} é

$\vec{N}(s, x) = (n_1(s), n_2(s), n_3(s)x)$, onde $\vec{n}(s) = (n_1(s), n_2(s), n_3(s))$ é um vetor normal unitário a ξ em \mathbb{S}^2 .

Seja D a conexão de \mathbb{R}^{n+2} com a métrica canônica, isto é D é a conexão plana, e sejam $\bar{\nabla}$ e ∇ as conexões de S^{n+1} e Σ respectivamente com as métricas induzidas.

Seja $p \in \Sigma$. Dados $X, Y \in T_p \Sigma$, podemos estendê-los à $T_p \mathbb{S}^{n+1}$ e à $T_p \mathbb{R}^{n+2}$. Logo pela fórmula de Gauss temos que:

$$\begin{aligned} D_X Y &= \bar{\nabla}_X Y + (D_X Y)^\perp = \bar{\nabla}_X Y + \langle D_X Y, p \rangle p = \\ &\Rightarrow D_X Y = \nabla_X Y + \langle \bar{\nabla}_X Y, N \rangle N + \langle D_X Y, p \rangle p \end{aligned}$$

Fazendo o produto interno da expressão acima com N , temos:

$$\begin{aligned} \langle D_X Y, N \rangle &= \langle \nabla_X Y, N \rangle + \langle \bar{\nabla}_X Y, N \rangle \langle N, N \rangle + \langle D_X Y, p \rangle \langle p, N \rangle \\ &\Rightarrow \langle D_X Y, N \rangle = \langle \bar{\nabla}_X Y, N \rangle \end{aligned}$$

Temos que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N}{\partial x_i} &= (0, 0, n_3 \frac{\partial}{\partial x_i}) \\ \frac{\partial^2 X}{\partial s^2} &= (\xi_1'', \xi_2'', \xi_3'' x) \end{aligned}$$

Portanto:

$$\begin{aligned} h_{11} &= -\left\langle \bar{\nabla}_{\frac{\partial X}{\partial s}} N, \frac{\partial X}{\partial s} \right\rangle = \left\langle N, D_{\frac{\partial X}{\partial s}} \frac{\partial X}{\partial s} \right\rangle = \left\langle N, \frac{\partial^2 X}{\partial s^2} \right\rangle = \langle n, \xi'' \rangle = k_\xi \\ h_{1i} &= \left\langle \bar{\nabla}_{\frac{\partial X}{\partial x_i}} N, \frac{\partial X}{\partial s} \right\rangle = -\left\langle \frac{\partial N}{\partial x_i}, \frac{\partial X}{\partial s} \right\rangle = -n_3 \xi_3' \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, x \right\rangle = 0 \\ h_{ij} &= \left\langle \bar{\nabla}_{\frac{\partial X}{\partial x_i}} N, \frac{\partial X}{\partial x_j} \right\rangle = -\left\langle \frac{\partial N}{\partial x_i}, \frac{\partial X}{\partial x_j} \right\rangle = -n_3 \xi_3 \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle = -n_3 \xi_3 \delta_{ij} \end{aligned}$$

Logo, a matriz da segunda forma fundamental é dada por $II = [h_{ij}]$,

onde

$$\begin{aligned} h_{11} &= k_\xi \\ h_{1i} &= 0 \\ h_{ij} &= -\xi_3 n_3 \delta_{ij} \end{aligned}$$

A curvatura média de Σ é X é:

$$H = \frac{1}{n} \text{traço}(II.I^{-1}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{h_{ii}}{g_{ii}} = \frac{1}{n} \left(k_\xi - (n-1) \frac{n_3}{\xi_3} \right)$$

E a imersão X tem duas curvaturas principais diferentes, que são:

$$k_1 = k_\xi \text{ com multiplicidade } 1$$

$$k_2 = -\frac{n_3}{\xi_3} \text{ com multiplicidade } (n-1)$$

Vamos introduzir coordenadas esféricas em \mathbb{S}^2 :

Sejam $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ e $\phi \in (0, \frac{\pi}{2})$ tais que

$$\xi(s) = (e^{i\theta(s)} \text{sen } \phi(s), \cos \phi(s))$$

$$\xi' = (i\theta' e^{i\theta} \text{sen } \phi + \phi' e^{i\theta} \cos \phi, -\phi' \text{sen } \phi) = \phi' (e^{i\theta} \cos \phi, -\text{sen } \phi) + \theta' \text{sen } \phi (ie^{i\theta}, 0)$$

Definindo $e_1 = \xi$, $e_2 = (e^{i\theta} \cos \phi, -\text{sen } \phi)$ e $e_3 = (ie^{i\theta}, 0)$, notamos que $\{e_1, e_2, e_3\}$ forma um referencial ortonormal. Isto é, a matriz

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \cos \theta \text{sen } \phi & \cos \theta \cos \phi & -\text{sen } \theta \\ \text{sen } \theta \text{sen } \phi & \text{sen } \theta \cos \phi & \cos \theta \\ \cos \phi & -\text{sen } \phi & 0 \end{bmatrix}$$

pertence a $SO(3)$.

Como ξ é parametrizada pelo comprimento de arco, temos $\|\xi'\| = 1$.

Logo, existe uma função $\alpha(s)$ tal que

$$\begin{cases} \phi' = \cos \alpha \\ \theta' \text{sen } \phi = \text{sen } \alpha \end{cases}$$

$$\Rightarrow \xi' = \cos \alpha e_2 + \text{sen } \alpha e_3$$

Então

$$\vec{n} = -\text{sen } \alpha e_2 + \cos \alpha e_3$$

é um vetor normal unitário a ξ em S^2 .

Observamos que $n_3 = \text{sen } \alpha \text{ sen } \phi$.

Vamos mostrar que a curvatura de ξ é:

$$k_\xi = \langle \xi'', \vec{n} \rangle = \alpha' + \theta' \cos \phi$$

$$\xi' = \cos \alpha e_2 + \text{sen } \alpha e_3$$

$$\xi'' = -\alpha' \text{sen } \alpha e_2 + \cos \alpha e_2' + \alpha' \cos \alpha e_3 + \text{sen } \alpha e_3'$$

$$\vec{n} = -\text{sen } \alpha e_2 + \cos \alpha e_3$$

$$\langle \xi'', \vec{n} \rangle = \alpha' \text{sen}^2 \alpha - \cos \alpha \text{sen } \alpha \langle e_2', e_2 \rangle + \cos^2 \alpha \langle e_2', e_3 \rangle + \alpha' \cos^2 \alpha - \text{sen}^2 \alpha \langle e_3', e_2 \rangle + \text{sen } \alpha \cos \alpha \langle e_3', e_3 \rangle$$

A matriz de Maurer-Cartan de M é a matriz antissimétrica:

$$\mathbf{M}^{-1}\mathbf{M}' = [\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j' \rangle]_{1 \leq i, j \leq 3} = \begin{bmatrix} 0 & -\phi' & -\theta' \text{sen } \phi \\ \phi' & 0 & -\theta' \cos \phi \\ \theta' \text{sen } \phi & \theta' \cos \phi & 0 \end{bmatrix}$$

Portanto,

$$k_\xi = \alpha' + \cos^2 \alpha (\theta' \cos \phi) + \text{sen}^2 \alpha (-\theta' \text{sen } \phi) = \alpha' + \theta' \cos \phi$$

Então, a curvatura média de Σ fica:

$$H = \frac{1}{n} \left(k_\xi - (n-1) \frac{n_3}{\xi_3} \right) = \frac{1}{n} (\alpha' + \theta' \cos \phi - (n-1) \text{sen } \alpha \tan \phi)$$

A curvatura de Gauss-Kronecker de Σ é:

$$K = k_1 \cdot k_2^{n-1} = k_\xi \left(\frac{-n_3}{\xi_3} \right)^{n-1} = (\alpha' + \theta' \cos \phi) (-\text{sen } \alpha \tan \phi)^{n-1}$$

No caso em que a curvatura de Gauss K é constante, temos o sistema:

$$\begin{cases} \alpha' = -\theta' \cos \phi + \frac{K}{(-\sin \alpha \tan \phi)^{n-1}} \\ \phi' = \cos \alpha \\ \theta' = \frac{\sin \alpha}{\sin \phi} \end{cases}$$

Eliminando a variável θ , o sistema pode ser reduzido ao seguinte:

$$\begin{cases} \alpha' = -\sin \alpha \cot \phi + \frac{K}{(-\sin \alpha \tan \phi)^{n-1}} \\ \phi' = \cos \alpha \end{cases}$$

Neste trabalho, vamos estudar apenas as hipersuperfícies que têm curvatura média constante.

Portanto, temos que estudar o sistema:

$$\begin{cases} \alpha' = nH - \theta' \cos \phi + (n-1) \sin \alpha \tan \phi \\ \phi' = \cos \alpha \\ \theta' = \frac{\sin \alpha}{\sin \phi} \end{cases}$$

Eliminando a variável θ , o sistema pode ser reduzido ao seguinte:

$$\begin{cases} \alpha' = nH + \sin \alpha ((n-1) \tan \phi - \cot \phi) \\ \phi' = \cos \alpha \end{cases}$$

Acharemos uma integral primeira deste sistema, isto é, uma função $E(\alpha, \phi)$ que é constante sobre as curvas integrais. Mais precisamente, se $C(s) = (\alpha(s), \phi(s))$ é uma curva integral do sistema, teremos $E(C(s)) = \text{constante} = E_0$.

Devido à forma particular do sistema, procuraremos a integral primeira sob a forma $E(\alpha, \phi) = \sin \alpha f(\phi) + g(\phi)$. Então:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} E(C(s)) &= \alpha' \frac{\partial E}{\partial \alpha} + \phi' \frac{\partial E}{\partial \phi} = \\ &= \left(nH + \sin \alpha ((n-1) \tan \phi - \cot \phi) \right) (\cos \alpha f(\phi)) + \cos \alpha (\sin \alpha f'(\phi) + g'(\phi)) = \\ &= \sin \alpha \cos \alpha \left(f'(\phi) + ((n-1) \tan \phi - \cot \phi) f(\phi) \right) + \cos \alpha (g'(\phi) + nH f(\phi)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}E(C(s)) = 0 &\Rightarrow \begin{cases} f'(\phi) = (\cot \phi - (n-1)\tan \phi)f(\phi) \\ g'(\phi) = -nHf(\phi) \end{cases} \\ &\Rightarrow \int \frac{f'(\phi)}{f(\phi)}d\phi = \int (\cot \phi - (n-1)\tan \phi)d\phi \\ &\Rightarrow f(\phi) = c \operatorname{sen} \phi \cos^{n-1} \phi \end{aligned}$$

Para $c = 1$, temos:

$$\begin{aligned} g'(\phi) &= -nH \operatorname{sen} \phi \cos^{n-1} \phi \\ g(\phi) &= H \cos^n \phi + c' \end{aligned}$$

Verifica-se então, que a seguinte função é uma integral primeira do sistema:

$$E(\alpha, \phi) = \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \phi \cos^{n-1} \phi + H \cos^n \phi$$

2.2

O caso Mínimo

No caso mínimo, o sistema a ser estudado é:

$$\begin{cases} \alpha' = \operatorname{sen} \alpha ((n-1)\tan \phi - \cot \phi) \\ \phi' = \cos \alpha \end{cases}$$

Este sistema tem, a menos de translações de vetores $v_k = (k\pi, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$, um único ponto de equilíbrio:

$$\begin{aligned} (\alpha_0, \phi_0) &= \left(\frac{\pi}{2}, \operatorname{arccot} \sqrt{n-1} \right) \\ \Rightarrow \theta' &= \frac{\operatorname{sen} \alpha_0}{\operatorname{sen} \phi_0} = \frac{1}{\operatorname{sen} \phi_0} \end{aligned}$$

Mas

$$\operatorname{sen} \phi_0 = \operatorname{sen} \operatorname{arccot} \sqrt{n-1} = \frac{1}{\sqrt{(\sqrt{n-1})^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Então temos

$$\begin{aligned} \theta' &= \sqrt{n} \\ \Rightarrow \theta(s) &= \sqrt{n}s + c \end{aligned}$$

Sem perda de generalidade podemos supor $c = 0$.

Portanto, a curva esférica correspondente ao ponto de equilíbrio é um círculo

horizontal de raio $\text{sen } \phi_0$ e altura $\text{cos } \phi_0$:

$$\xi(s) = (e^{i\sqrt{n}s} \text{sen } \phi_0, \text{cos } \phi_0)$$

E a hipersuperfície associada é o mergulho do produto $\mathbb{S}^1(\text{sen } \phi_0) \times \mathbb{S}^{n-1}(\text{cos } \phi_0)$ em \mathbb{S}^{n+1} :

$$X(s, x) = (e^{i\sqrt{n}s} \text{sen } \phi_0, x \text{cos } \phi_0)$$

Como $\text{sen } \phi_0 = \frac{1}{\sqrt{n}}$ e $\text{cos } \phi_0 = \sqrt{\frac{n-1}{n}}$, a hipersuperfície é o mergulho do produto $\mathbb{S}^1\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \times \mathbb{S}^{n-1}\left(\sqrt{\frac{n-1}{n}}\right)$ em \mathbb{S}^{n+1} :

$$X(s, x) = \left(e^{i\sqrt{n}s} \frac{1}{\sqrt{n}}, x \sqrt{\frac{n-1}{n}} \right)$$

Se $n = 2$, a superfície é um mergulho do toro $\mathbb{S}^1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \times \mathbb{S}^1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, chamado Toro de Clifford.

Uma conjectura famosa, conhecida como conjectura de Lawson, afirma que o Toro de Clifford é a única hipersuperfície mínima em \mathbb{S}^3 . Este é um problema em aberto há muitos anos.

Seja E_0 o nível de energia associado a esse ponto de equilíbrio.

A integral primeira no caso mínimo, fica:

$$E(\alpha, \phi) = \text{sen } \alpha \text{sen } \phi \text{cos}^{n-1} \phi$$

Se $E = 0$, então $\alpha \equiv 0 [\pi]$ ou $\phi \equiv 0 \left[\frac{\pi}{2}\right]$.

Se $\alpha \equiv 0 [\pi]$, temos $\theta' = 0$, logo, $\theta = \text{constante} = \theta_0$.

A curva esférica correspondente a $E = 0$ é

$$\xi(s) = (e^{i\theta_0} \text{sen } \phi, \text{cos } \phi)$$

e a hipersuperfície é o mergulho em \mathbb{S}^{n+1} da hiperesfera:

$$X(s, x) = (e^{i\theta_0} \text{sen } \phi, x \text{cos } \phi)$$

A hiperesfera é totalmente geodésica pois:

$$k_1 = k_\xi = \alpha' + \theta' \text{cos } \phi = \text{sen } \alpha ((n-1) \tan \phi - \cot \phi) + 0 = 0$$

$$k_2 = -\operatorname{sen} \alpha \tan \phi = 0$$

Vamos analisar a integral primeira para ilustrar o diagrama de fase.

$$E(\alpha, \phi) = \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \phi \cos^{n-1} \phi$$

Observação 1 As retas $\alpha = 0$ e $\alpha = \pi$ são as curvas integrais correspondentes ao nível de energia $E = 0$.

Observação 2 As curvas integrais são simétricas em relação a reta $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Basta notar que $E(\pi - \alpha, \phi) = E(\alpha, \phi)$.

Fixado \bar{E} , $0 < \bar{E} < E_0$, seja $C(\bar{E}) = (\alpha(s), \phi(s))$ a curva integral com nível de energia \bar{E} . Como a curva é simétrica em relação a reta $\alpha = \frac{\pi}{2}$, precisamos analisar o comportamento da curva $C(\bar{E})$ apenas para $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Observação 3 Considere a equação algébrica

$$\frac{\bar{E}}{\operatorname{sen} \alpha} = \operatorname{sen} \phi \cos^{n-1} \phi$$

Existem valores de α , que denotaremos por $\alpha_-(\bar{E})$ e $\alpha_+(\bar{E})$, tais que para $\alpha \in [0, \alpha_-) \cup (\alpha_+, \pi]$, a equação algébrica não tem solução, para $\alpha \in (\alpha_-, \alpha_+)$, a equação algébrica tem duas soluções, e se $\alpha = \alpha_-$ ou $\alpha = \alpha_+$, então a equação tem exatamente uma solução.

Para entender a observação 3, faremos o estudo da seguinte função:

$$\begin{aligned} e: \quad (0, \frac{\pi}{2}) &\rightarrow \mathbb{R} \\ \phi &\mapsto e(\phi) = \operatorname{sen} \phi \cos^{n-1} \phi \end{aligned}$$

$$e'(\phi) = \cos^n \phi - (n-1) \operatorname{sen}^2 \phi \cos^{n-2} \phi = 0 \iff \cot \phi = \sqrt{n-1}$$

Portanto $\phi = \operatorname{arccot} \sqrt{n-1} = \phi_0$ é um ponto crítico.

Se $e'(\phi) < 0$, então $\cos^{n-2} \phi (\cos^2 \phi - (n-1) \operatorname{sen}^2 \phi) < 0$.

$$\Rightarrow \cot \phi < \sqrt{n-1}$$

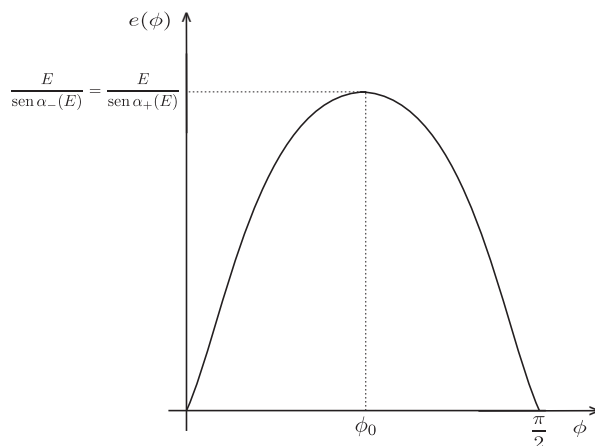


Figura 2.1: Gráfico da função $e(\phi) = \text{sen } \phi \cos^{n-1} \phi$

Como a função $\cot \phi$ é decrescente, temos:

$$\phi > \text{arccot } \sqrt{n-1} = \phi_0$$

Portanto a função e é decrescente para $\phi > \phi_0$.

Analogamente a função e é crescente para $\phi < \phi_0$.

Observe então, o esboço gráfico da função e na figura 2.1.

Consideremos apenas $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$, pois $C(\bar{E})$ é simétrica em relação a reta $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Quando α tende a 0, temos $\frac{\bar{E}}{\text{sen } \alpha}$ tendendo a infinito. Portanto, existirá exatamente um valor de α , $\alpha_-(\bar{E})$, tal que $\frac{\bar{E}}{\text{sen } \alpha_-} = e(\phi_0)$. Além disso, para $\bar{\alpha} \in (\alpha_-, \frac{\pi}{2}]$, existirão dois valores de ϕ , ϕ_1 e ϕ_2 , tais que $e(\phi_1) = e(\phi_2) = \frac{\bar{E}}{\text{sen } \bar{\alpha}}$.

Definimos $\alpha_+(E)$ de maneira que $\frac{\bar{E}}{\text{sen } \alpha_+} = e(\phi_0)$, $\alpha_+ \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$

Observação 4 A derivada parcial $\frac{\partial E}{\partial \alpha}$ anula-se para $\alpha = \frac{\pi}{2}$, e a derivada parcial $\frac{\partial E}{\partial \phi}$ anula-se em ϕ_0 .

Portanto, utilizando as observações 1, 2, 3 e 4, concluímos que o diagrama de fase é análogo ao da figura 2.2, para qualquer valor de n .

Estamos interessados no caso em que ξ é fechada. Pois assim, a hipersuperfície associada a ξ será compacta.

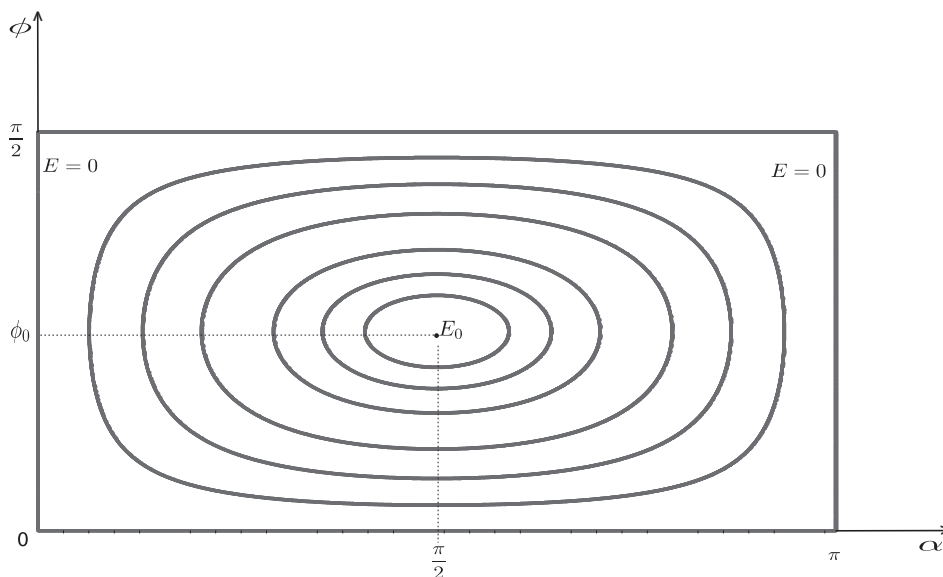


Figura 2.2: Diagrama de fase esférico no caso mínimo, $n = 2$

Lembramos que

$$\xi(s) = (e^{i\theta(s)} \text{sen } \phi(s), \cos \phi(s))$$

A função $s \mapsto \phi(s)$ é periódica. Isto é, existe T tal que $\phi(s + T) = \phi(s)$ para todo $s \in \mathbb{R}$. Então, para a curva ξ ser fechada, temos que analisar se existe T' , com $\frac{T'}{T} \in \mathbb{Q}$ tal que $\theta(s + T') \equiv \theta(s) [2\pi]$ para todo $s \in \mathbb{R}$.

Considere a curva integral do sistema $C(E) = (\alpha(s), \phi(s))$ com nível de energia E .

Seja

$$\Theta(E) = \int_{C(E)} \theta' ds = \int_s^{s+T} \theta'(t) dt$$

Isto é, $\Theta(E)$ é a variação da função $s \mapsto \theta(s)$ ao longo da curva $C(E)$.

Basta então que $\Theta(E) = 2\pi \frac{p}{q}$, onde $p, q \in \mathbb{Z}^*$. Pois assim, dando q voltas em torno da curva integral $C(E)$, a curva ξ dará p voltas em \mathbb{S}^2 , ou seja, existirá $T' = qT$ tal que $\theta(s + T') \equiv \theta(s) [2\pi]$ para todo $s \in \mathbb{R}$.

Portanto, a curva ξ é fechada, se e somente se o número $\Theta(E) \in 2\pi\mathbb{Q}$.

Se $\Theta(E) = \frac{2\pi}{q}$, onde $q \in \mathbb{Z}^*$, isto é, se $p = 1$, então a curva ξ dará apenas uma volta em torno da esfera, sem auto-interseção. E portanto, caso isso ocorra, Σ será mergulhada.

Logo, temos o seguinte lema:

Lema 2.1 *Seja $C(s) = (\alpha(s), \phi(s))$ uma curva plana fechada no plano $\alpha\phi$, com $\phi \in (0, \frac{\pi}{2})$. Considere as seguintes funções:*

$$f(s) = \theta'_C(s) = \frac{\text{sen}(\alpha(s))}{\text{sen}(\phi(s))}$$

$$\Theta_C = \int_C f(s) ds$$

Considere a curva $\xi_C(s) = (e^{i\theta_C(s)} \text{sen} \phi(s), \cos \phi(s))$.

Então ξ_C é fechada se e somente se $\Theta_C \in 2\pi\mathbb{Q}$. Além disso, ξ_C é mergulhada se e somente se existe $q \in \mathbb{Z}$ tal que $\Theta_C = \frac{2\pi}{q}$.

Demonstraremos o:

Lema 2.2

$$(i) \lim_{E \rightarrow E_0} \Theta(E) = \sqrt{2}\pi$$

$$(ii) \lim_{E \rightarrow 0} \Theta(E) = \pi$$

Observação 2.3 *Como a função $s \mapsto \Theta(s)$ é contínua, podemos aplicar o Teorema do Valor Intermediário. Assim, para qualquer $\frac{p}{q} \in (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$, $p, q \in \mathbb{Z}$, como $2\pi\frac{p}{q} \in (\pi, \sqrt{2}\pi)$, existirá E tal que $\Theta(E) = 2\pi\frac{p}{q}$.*

Logo, teremos uma quantidade infinita e enumerável de valores de E tais que $\Theta(E) \in 2\pi\mathbb{Q}$.

Portanto, como corolário do lema, temos o seguinte teorema:

Teorema 1 *Existe uma família enumerável \mathcal{F} de hipersuperfícies equivariantes mínimas compactas imersas em \mathbb{S}^{n+1} .*

Observação 2.4 *Não conseguimos demonstrar que a função $E \mapsto \Theta(E)$ é monótona. Isso implicaria a não existência de curvas esféricas mergulhadas a não ser nos casos extremos, onde as curvas integrais são $C(0)$ e $C(E_0)$. As hipersuperfícies associadas à essas curvas são respectivamente uma hiperesfera*

totalmente geodésica de \mathbb{S}^{n+1} e o produto $\mathbb{S}^1\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \times \mathbb{S}^{n-1}\left(\sqrt{\frac{n-1}{n}}\right)$ (toro de Clifford quando $n = 2$).

Em [4], Fabiano Brito e Maria Luiza Leite demonstraram que as únicas hipersuperfícies compactas de \mathcal{F} mergulhadas em \mathbb{S}^{n+1} realmente são as hipersferas totalmente geodésicas e o produto $\mathbb{S}^1\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \times \mathbb{S}^{n-1}\left(\sqrt{\frac{n-1}{n}}\right)$.

Demonstração do Lema 2.1:

Sejam ϕ_- e ϕ_+ os valores mínimo e máximo respectivamente de $\phi(s)$ que a curva $C(E)$ assume.

Considere a função

$$e(\phi) = \text{sen } \phi \cos^{n-1} \phi$$

Então, $E = \text{sen } \alpha e(\phi)$

Logo, como a curva é simétrica em relação a reta $\alpha = \pi/2$, temos

$$E = e(\phi_-) = e(\phi_+)$$

Portanto:

$$\begin{aligned} \Theta(E) &= \int_{C(E)} \theta' ds = \int_{C(E)} \frac{\text{sen } \alpha}{\text{sen } \phi} ds = 2 \int_{\phi_-}^{\phi_+} \frac{\text{sen } \alpha}{\text{sen } \phi \cos \alpha} d\phi = \\ &= 2 \int_{\phi_-}^{\phi_0} \frac{d\phi}{\text{sen } \phi \sqrt{\left(\frac{e(\phi)}{e(\phi_-)}\right)^2 - 1}} + 2 \int_{\phi_0}^{\phi_+} \frac{d\phi}{\text{sen } \phi \sqrt{\left(\frac{e(\phi)}{e(\phi_+)}\right)^2 - 1}} := 2\Theta_-(E) + 2\Theta_+(E) \end{aligned}$$

Demonstração do Lema 2.1 parte (i):

Fazendo a troca de variáveis $\phi = \phi_0 + \varepsilon x$, onde $\varepsilon = \phi_0 - \phi_-$, temos:

$$\Theta_-(E) = \int_{\phi_-}^{\phi_0} \frac{d\phi}{\text{sen } \phi \sqrt{\left(\frac{e(\phi)}{e(\phi_-)}\right)^2 - 1}} = \int_{-1}^0 \frac{\varepsilon}{\text{sen}(\phi_0 + \varepsilon x) \sqrt{\left(\frac{e(\phi_0 + \varepsilon x)}{e(\phi_0 - \varepsilon)}\right)^2 - 1}} dx$$

Pela fórmula de Taylor:

$$e(\phi) = e(\phi_0 + \varepsilon x) = e(\phi_0) + \varepsilon x e'(\phi_0) + \frac{(\varepsilon x)^2}{2} e''(\phi_0) + o(\varepsilon^2)$$

Temos que:

$$e(\phi) = \text{sen } \phi \cos^{n-1} \phi$$

$$e'(\phi) = \cos^n \phi - (n-1) \text{sen}^2 \phi \cos^{n-2} \phi = [\cot \phi - (n-1) \tan \phi] e(\phi)$$

$$\begin{aligned} e''(\phi) &= [\cot \phi - (n-1) \tan \phi]' e(\phi) + [\cot \phi - (n-1) \tan \phi]^2 e(\phi) \\ &= [-\text{csc}^2 \phi - (n-1) \text{sec}^2 \phi + \cot^2 \phi + (n-1)^2 \tan^2 \phi - 2(n-1)] e(\phi) \end{aligned}$$

Lembrando que

$$\cot \phi_0 = \sqrt{n-1}$$

$$\tan \phi_0 = \frac{1}{\sqrt{n-1}}$$

$$\text{sen } \phi_0 = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\cos \phi_0 = \sqrt{\frac{n-1}{n}}$$

temos

$$e'(\phi_0) = \left(\sqrt{n-1} - (n-1) \frac{1}{\sqrt{n-1}} \right) e(\phi_0) = 0$$

$$\begin{aligned} e''(\phi_0) &= \left(-n - (n-1) \frac{n}{n-1} + n-1 + (n-1)^2 \frac{1}{n-1} - 2(n-1) \right) e(\phi) \\ &= -2ne(\phi_0) \end{aligned}$$

Então

$$e(\phi_0 + \varepsilon x) = e(\phi_0) + \varepsilon x e'(\phi_0) + \frac{(\varepsilon x)^2}{2} e''(\phi_0) + o(\varepsilon^2) = e(\phi_0)(1 - n(\varepsilon x)^2) + o(\varepsilon^2)$$

$$e(\phi_-) = e(\phi_0 - \varepsilon) = e(\phi_0) - \varepsilon e'(\phi_0) + \varepsilon^2 e''(\phi_0) + o(\varepsilon^2) = e(\phi_0)(1 - n\varepsilon^2) + o(\varepsilon^2)$$

$$\Rightarrow \frac{e(\phi)}{e(\phi_-)} = \frac{e(\phi_0)(1 - n(\varepsilon x)^2) + o(\varepsilon^2)}{e(\phi_0)(1 - n\varepsilon^2) + o(\varepsilon^2)} = 1 + n\varepsilon^2(1 - x^2) + o(\varepsilon^2)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{e(\phi)}{e(\phi_-)} \right)^2 - 1 = 2n\varepsilon^2(1 - x^2) + o(\varepsilon^2)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \Theta_-(E) &= \int_{-1}^0 \frac{\varepsilon}{\operatorname{sen}(\phi_0 + \varepsilon x) \sqrt{\left(\frac{e(\phi)}{e(\phi_-)}\right)^2 - 1}} dx = \\ &= \int_{-1}^0 \frac{\varepsilon}{(\operatorname{sen} \phi_0 + o(1)) \sqrt{2n\varepsilon^2(1-x^2) + o(\varepsilon^2)}} dx \\ \Rightarrow \lim_{E \rightarrow E_0} \Theta_-(E) &= \int_{-1}^0 \frac{dx}{\operatorname{sen} \phi_0 \sqrt{2n(1-x^2)}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{E \rightarrow E_0} \Theta_-(E) &= \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ \Rightarrow \lim_{E \rightarrow E_0} \Theta_-(E) &= \frac{\sqrt{2}\pi}{4} \end{aligned}$$

Analogamente, fazendo a troca de variáveis $\phi = \phi_0 + \varepsilon x$, onde $\varepsilon = \phi_+ - \phi_0$, temos:

$$\begin{aligned} \Theta_+(E) &= \int_{\phi_0}^{\phi_+} \frac{d\phi}{\operatorname{sen} \phi \sqrt{\left(\frac{e(\phi)}{e(\phi_-)}\right)^2 - 1}} = \int_0^1 \frac{\varepsilon}{\operatorname{sen}(\phi_0 + \varepsilon x) \sqrt{\left(\frac{e(\phi_0 + \varepsilon x)}{e(\phi_0 + \varepsilon)}\right)^2 - 1}} dx \\ \Rightarrow \lim_{E \rightarrow E_0} \Theta_+(E) &= \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\sqrt{2}\pi}{4} \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\lim_{E \rightarrow E_0} \Theta(E) = 2 \lim_{E \rightarrow E_0} \Theta_-(E) + 2 \lim_{E \rightarrow E_0} \Theta_+(E) = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}\pi}{4} + 2 \cdot \frac{\sqrt{2}\pi}{4} = \sqrt{2}\pi$$

Demonstração do Lema 2.1 parte (ii):

Lembramos que

$$\alpha' = \operatorname{sen} \alpha ((n-1) \tan \phi - \cot \phi)$$

Sejam $\alpha_-(E)$ e $\alpha_+(E)$ os valores mínimo e máximo respectivamente de $\alpha(s)$ que a curva $C(E)$ assume.

Lembramos que para $\alpha \in (\alpha_-(s), \alpha_+(s))$, a equação $e(\phi) = \frac{E}{\sin \alpha}$ tem exatamente duas raízes. Denotaremos elas por $\phi_1(\alpha, E)$ e $\phi_2(\alpha, E)$

Temos:

$$\begin{aligned} \Theta(E) &= \int_{C(E) \cap \{\phi > \phi_0\}} \frac{\sin \alpha}{\sin \phi} ds + \int_{C(E) \cap \{\phi < \phi_0\}} \frac{\sin \alpha}{\sin \phi} ds = \\ &= \int_{\alpha_-}^{\alpha_+} \frac{\sin \alpha}{\sin \phi_1} \frac{d\alpha}{ds} + \int_{\alpha_+}^{\alpha_-} \frac{\sin \alpha}{\sin \phi_2} \frac{d\alpha}{ds} \end{aligned}$$

Mas

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \phi_i} \frac{1}{ds} = \frac{1}{(n-1) \frac{\sin^2 \phi_i}{\cos \phi_i} - \cos \phi_i} = f_i(\alpha, E)$$

$$\Rightarrow \Theta(E) = \int_{\alpha_-}^{\alpha_+} f_1(\alpha, E) d\alpha - \int_{\alpha_-}^{\alpha_+} f_2(\alpha, E) d\alpha$$

$$= \int_0^\pi \bar{f}_1(\alpha, \phi) d\alpha - \int_0^\pi \bar{f}_2(\alpha, \phi) d\alpha$$

onde

$$\bar{f}_i(\alpha, \phi) = \begin{cases} f_i(\alpha, E) & \text{se } \alpha \in (\alpha_-(E), \alpha_+(E)) \\ 0 & \text{se } \alpha \notin (\alpha_-(E), \alpha_+(E)) \end{cases}$$

Para cada intervalo $[a, b] \subset (0, \pi)$, existe E_1 tal que para todo $E < E_1$, $[a, b] \subset (\alpha_-(E), \alpha_+(E))$.

Então, quando E tende a 0, ϕ_1 converge uniformemente em $[a, b]$ a $\frac{\pi}{2}$ e ϕ_2 converge uniformemente em $[a, b]$ a 0. Portanto, $f_1(\alpha, E)$ e $f_2(\alpha, E)$ convergem uniformemente em $[a, b]$ a 0 e a -1 respectivamente.

Logo,

$$\lim_{E \rightarrow 0} \Theta(E) = \int_0^\pi 0 d\alpha - \int_0^\pi (-1) d\alpha = \pi$$

2.3

O Caso Curvatura Média Constante

Nesta seção estudaremos o caso em que a curvatura média H é constante.

Vamos supor, sem perda de generalidade, que $H > 0$.

O sistema a ser estudado é:

$$\begin{cases} \alpha' = nH + \operatorname{sen} \alpha ((n-1) \tan \phi - \cot \phi) \\ \phi' = \cos \alpha \end{cases}$$

Lembramos que uma integral primeira desse sistema é:

$$E(\alpha, \phi) = \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \phi \cos^{n-1} \phi + H \cos^n \phi$$

Este sistema tem, a menos de translações de vetores $v_k = (k2\pi, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$, dois pontos de equilíbrio: $p_0 = (\frac{\pi}{2}, \phi_0)$ e $p'_0 = (\frac{3\pi}{2}, \phi'_0)$ onde ϕ_0 e ϕ'_0 são respectivamente soluções das equações:

$$(n-1) \tan \phi - \cot \phi = -nH$$

$$(n-1) \tan \phi - \cot \phi = nH$$

Sejam E_0 e E'_0 os níveis de energia associados a p_0 e p'_0 respectivamente.

A curva esférica correspondente ao ponto de equilíbrio p_0 é um círculo horizontal e a hipersuperfície associada é o mergulho do produto $\mathbb{S}^1(\operatorname{sen} \phi_0) \times \mathbb{S}^{n-1}(\cos \phi_0)$ em \mathbb{S}^{n+1} :

$$X(s, x) = (e^{i\theta(s)} \operatorname{sen} \phi_0, x \cos \phi_0)$$

Por outro lado, a curva esférica correspondente ao ponto de equilíbrio p'_0 é também um círculo horizontal. A hipersuperfície associada é o mergulho do produto $\mathbb{S}^1(\operatorname{sen} \phi'_0) \times \mathbb{S}^{n-1}(\cos \phi'_0)$ em \mathbb{S}^{n+1} :

$$X(s, x) = (e^{i\theta(s)} \operatorname{sen} \phi'_0, x \cos \phi'_0)$$

Se $E = 0$ temos:

$$\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \phi \cos^{n-1} \phi + H \cos^n \phi = 0$$

$$\Rightarrow H = -\operatorname{sen} \alpha \tan \phi$$

Lembramos que as curvaturas principais de Σ são dadas por:

$$k_1 = k_\xi$$

$$k_2 = \frac{-n_3}{\xi_3} = -\operatorname{sen} \alpha \tan \phi$$

Além disso,

$$nH = k_1 + (n-1)k_2 = k_\xi - (n-1)\operatorname{sen} \alpha \tan \phi$$

Logo, se $E = 0$ temos:

$$\begin{aligned} k_\xi &= nH + (n-1)\operatorname{sen} \alpha \tan \phi = -n\operatorname{sen} \alpha \tan \phi + (n-1)\operatorname{sen} \alpha \tan \phi = \\ &= -\operatorname{sen} \alpha \tan \phi = H \\ &\Rightarrow k_\xi = k_2 = H \end{aligned}$$

Nesse caso então, como as curvaturas principais são iguais, a hipersuperfície é totalmente umbílica. Logo, ela está contida em uma hiperesfera de \mathbb{S}^{n+1} .

Para $n = 2$, temos:

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \left(k_\xi - \frac{n_3}{\xi_3} \right) = \frac{1}{2} (k_\xi - \operatorname{sen} \alpha \tan \phi) = \frac{1}{2} \left(k_\xi - \frac{E - H \cos^2 \phi}{\operatorname{sen} \phi \cos \phi} \tan \phi \right) \\ &\Rightarrow k_\xi = H + \frac{E}{\cos^2 \phi} \end{aligned}$$

Portanto, k_ξ é constante se e somente se $E = 0$ ou ϕ é constante. As superfícies associadas são respectivamente os mergulhos da esfera $\mathbb{S}^2(\frac{1}{H})$ e dos toros $\mathbb{S}^1(a) \times \mathbb{S}^1(\sqrt{1-a^2})$, onde a é uma solução da equação algébrica $2H = \frac{1}{a} + \frac{1}{\sqrt{1-a^2}}$. Esses dois exemplos serão chamados de triviais em seguida.

Vamos agora usar a notação $\Theta(E, H)$ para designar a integral

$$\Theta(E, H) = \int_{C(E, H)} \theta' ds$$

associada ao nível E de energia e com curvatura média constante H .

Analisando a integral primeira $E(\alpha, \phi) = \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \phi \cos^{n-1} \phi + H \cos^n \phi$, percebemos que agora temos dois tipos de curvas integrais $C(E, H) = (\alpha(s), \phi(s))$, que iremos denominar de tipo *I* e tipo *II*.

As curvas integrais do tipo I são fechadas e têm $\alpha(s) \neq 0 \pmod{\pi}$ para todo s . Elas correspondem aos níveis de energia $E < 0$ e $E > H$.

Já as curvas integrais do tipo II têm $\alpha'(s) > 0$. Isto é, a função α é crescente. São curvas periódicas. Elas correspondem aos níveis de energia entre 0 e H .

Veja o diagrama de fase do caso CMC na figura 2.3.

Vamos analisar apenas as curvas do tipo I .

Demonstraremos o:

Lema 2.5

$$\lim_{E \rightarrow E_0} \Theta(E, H) = \frac{\pi \sqrt{2(n-1)}}{\sqrt{(nH)^2 + 4(n-1) - nH\sqrt{(nH)^2 + 4(n-1)}}} = - \lim_{E \rightarrow E'_0} \Theta(E, H)$$

Se $n = 2$, então:

$$\lim_{E \rightarrow E_0} \Theta(E, H) = - \lim_{E \rightarrow E'_0} \Theta(E, H) = \frac{\sqrt{2}\pi}{2\sqrt{H^2 + 1} - H\sqrt{H^2 + 1}} = M(H)$$

Demonstração do Lema 2.4:

Demonstração do Lema 2.4 parte (i):

Seja $C(E, H) = (\alpha(s), \phi(s))$ uma curva integral do tipo I tal que $\alpha(s) \in (0, \pi)$. Sejam ϕ_- e ϕ_+ os valores mínimo e máximo respectivamente que a curva $C(E, H)$ assume.

Considere novamente a função

$$e(\phi) = \sin \phi \cos^{n-1} \phi$$

Então, $E = \sin \alpha e(\phi) + H \cos^n \phi$

Como a curva $C(E, H)$ é simétrica em relação a reta $\alpha = \frac{\pi}{2}$, temos

$$E = \sin \alpha \sin \phi \cos^{n-1} \phi + H \cos^n \phi = e(\phi_-) + H \cos^n \phi_- = e(\phi_+) + H \cos^n \phi_+$$

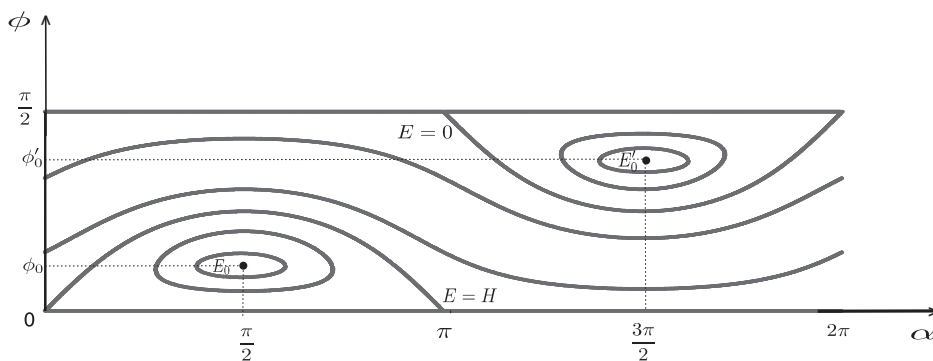


Figura 2.3: Diagrama de fase esférico no caso CMC, $H = 1$, $n = 2$

Portanto:

$$\begin{aligned} \Theta(E, H) &= \int_{C(E,H)} \frac{\text{sen } \alpha}{\text{sen } \phi} ds = 2 \int_{\phi_-}^{\phi_+} \frac{\text{sen } \alpha}{\text{sen } \phi \cos \alpha} d\phi = 2 \int_{\phi_-}^{\phi_+} \frac{d\phi}{\text{sen } \phi \sqrt{\left(\frac{e(\phi)}{E-H \cos^n \phi}\right)^2 - 1}} = \\ &= 2 \int_{\phi_-}^{\phi_0} \frac{d\phi}{\text{sen } \phi \sqrt{\left(\frac{e(\phi)}{E-H \cos^n \phi}\right)^2 - 1}} + 2 \int_{\phi_0}^{\phi_+} \frac{d\phi}{\text{sen } \phi \sqrt{\left(\frac{e(\phi)}{E-H \cos^n \phi}\right)^2 - 1}} = \\ &= 2\Theta_-(E, H) + 2\Theta_+(E, H) \end{aligned}$$

Fazendo a troca de variáveis $\phi = \phi_0 + \varepsilon x$, onde $\varepsilon = \phi_0 - \phi_-$, temos:

$$\begin{aligned} \Theta_-(E, H) &= \int_{\phi_-}^{\phi_0} \frac{d\phi}{\text{sen } \phi \sqrt{\left(\frac{e(\phi)}{e(\phi_-)+H \cos^n \phi_- - H \cos^n \phi}\right)^2 - 1}} = \\ &= \int_{-1}^0 \frac{\varepsilon}{\text{sen}(\phi_0 + \varepsilon x) \sqrt{\left(\frac{e(\phi_0 + \varepsilon x)}{e(\phi_0 - \varepsilon) + H(\cos^n(\phi_0 - \varepsilon) - \cos^n(\phi_0 + \varepsilon x))}\right)^2 - 1}} dx \end{aligned}$$

Temos:

$$e(\phi) = e(\phi_0 + \varepsilon x) = e(\phi_0) + \varepsilon x e'(\phi_0) + \frac{(\varepsilon x)^2}{2} e''(\phi_0) + o(\varepsilon^2)$$

$$e(\phi) = \text{sen } \phi \cos^{n-1} \phi$$

$$e'(\phi) = \cos^n \phi - (n-1) \text{sen}^2 \phi \cos^{n-2} \phi = (\cot \phi - (n-1) \tan \phi) e(\phi)$$

$$\begin{aligned} e''(\phi) &= -n \text{sen } \phi \cos^{n-1} \phi - 2(n-1) \text{sen } \phi \cos^{n-1} \phi + (n-1)(n-2) \text{sen}^3 \phi \cos^{n-3} \phi = \\ &= (-3n + 2 + (n-1)(n-2) \tan^2(\phi)) e(\phi) \end{aligned}$$

Lembrando que

$$(n - 1) \tan \phi_0 - \cot \phi_0 = -nH$$

temos

$$e'(\phi_0) = nHe(\phi_0)$$

$$e''(\phi_0) = (-3n + 2 + (n - 1)(n - 2) \tan^2(\phi_0))e(\phi_0)$$

Logo:

$$e(\phi) = e(\phi_0) \left(1 + H\varepsilon xn + \frac{(\varepsilon x)^2}{2} ((n - 1)(n - 2) \tan^2 \phi_0 - (3n - 2)) \right) + o(\varepsilon)^2$$

E temos:

$$e(\phi_-) = e(\phi_0 - \varepsilon) = e(\phi_0) - \varepsilon x e'(\phi_0) + \frac{(\varepsilon x)^2}{2} e''(\phi_0) + o(\varepsilon^2)$$

$$e(\phi_-) = e(\phi_0) \left(1 - H\varepsilon n + \frac{\varepsilon^2}{2} ((n - 1)(n - 2) \tan^2 \phi_0 - (3n - 2)) \right) + o(\varepsilon)^2$$

Pela fórmula de Taylor:

$$\begin{aligned} \cos^n(\phi_0 - \varepsilon) &= \cos^n \phi_0 + \varepsilon n \sin \phi_0 \cos^{n-1} \phi_0 + \\ &+ \frac{\varepsilon^2}{2} (n(n - 1) \sin^2 \phi_0 \cos^{n-2} \phi_0 - n \cos^n \phi_0) + o(\varepsilon^2) = \\ &= e(\phi_0) \left(\cot \phi_0 + \varepsilon n + \frac{\varepsilon^2}{2} (n(n - 1) \tan \phi_0 - n \cot \phi_0) \right) + o(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos^n(\phi_0 + \varepsilon x) &= \cos^n \phi_0 - \varepsilon x n \sin \phi_0 \cos^{n-1} \phi_0 + \\ &+ \frac{(\varepsilon x)^2}{2} (n(n - 1) \sin^2 \phi_0 \cos^{n-2} \phi_0 - n \cos^n \phi_0) + o(\varepsilon x)^2 = \\ &= e(\phi_0) \left(\cot \phi_0 - \varepsilon x n + \frac{(\varepsilon x)^2}{2} (n(n - 1) \tan \phi_0 - n \cot \phi_0) \right) + o(\varepsilon x)^2 \end{aligned}$$

Mas

$$(n - 1) \tan \phi_0 - \cot \phi_0 = -nH$$

Logo:

$$\cos^n(\phi_0 - \varepsilon) = e(\phi_0) (\cot \phi_0 + \varepsilon n - H \frac{\varepsilon^2}{2} n^2) + o(\varepsilon^2)$$

$$\cos^n(\phi_0 + \varepsilon x) = e(\phi_0) (\cot \phi_0 - \varepsilon x n - H \frac{(\varepsilon x)^2}{2} n^2) + o(\varepsilon x)^2$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow E - H \cos^n \phi &= e(\phi_-) + H (\cos^n \phi_- - \cos^n \phi) = \\ &= e(\phi_0) \left(1 - H\varepsilon n + \frac{\varepsilon^2}{2} ((n - 1)(n - 2) \tan^2 \phi_0 - (3n - 2)) + H ((\cot \phi_0 + \varepsilon n - \right. \\ &\quad \left. - H \frac{\varepsilon^2}{2} n^2 - \cot \phi_0 + \varepsilon x n + H \frac{(\varepsilon x)^2}{2} n^2) \right) + o(\varepsilon)^2 = \\ &= e(\phi_0) \left(1 + H\varepsilon xn + \frac{\varepsilon^2}{2} ((n - 1)(n - 2) \tan^2 \phi_0 - (3n - 2) + (Hn)^2 (x^2 - 1)) \right) + \\ &+ o(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{e(\phi)}{E - H \cos^n \phi} &= \frac{1 + H\varepsilon xn + \frac{(\varepsilon x)^2}{2}((n-1)(n-2)\tan^2 \phi_0 - (3n-2)) + o(\varepsilon)^2}{1 + H\varepsilon xn + \frac{\varepsilon^2}{2}((n-1)(n-2)\tan^2 \phi_0 - (3n-2) + (nH)^2(x^2-1)) + o(\varepsilon^2)} \\ &= 1 + \frac{\varepsilon^2}{2}(x^2-1)((n-1)(n-2)\tan^2 \phi_0 - (3n-2) - (nH)^2) + o(\varepsilon^2) \\ \Rightarrow \left(\frac{e(\phi)}{E - H \cos^n \phi} \right)^2 - 1 &= \varepsilon^2(x^2-1)((n-1)(n-2)\tan^2 \phi_0 - (3n-2) - (nH)^2) + o(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \Theta_-(E) = \int_{-1}^0 \frac{\varepsilon}{(\sin(\phi_0) + o(1)) \sqrt{\left(\frac{e(\phi)}{e(\phi_-) - H \cos^n \phi} \right)^2 - 1}} dx =$$

$$\Rightarrow \lim_{E \rightarrow E_0} \Theta_-(E, H) = \frac{1}{\sin \phi_0 \sqrt{(3n-2) + (nH)^2 - (n-1)(n-2)\tan^2 \phi_0}} \int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{1}{\sin \phi_0 \sqrt{(3n-2) + (\cot \phi - (n-1)\tan \phi)^2 - (n-1)(n-2)\tan^2 \phi_0}} \int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{1}{\sin \phi_0 \sqrt{n + (n-1)\tan^2 \phi_0 + \cot^2 \phi_0}} \int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n \sin^2 \phi_0 + (n-1)\sin^2 \phi_0 \tan^2 \phi_0 + \cos^2 \phi_0}} \int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\lim_{E \rightarrow E_0} \Theta_-(E, H) = \frac{\pi}{2\sqrt{(n-1)\tan^2 \phi_0 + 1}}$$

Analogamente, fazendo a troca de variáveis $\phi = \phi_0 + \varepsilon x$, onde $\varepsilon = \phi_+ - \phi_0$:

$$\begin{aligned} \Theta_+(E, H) &= \int_{\phi_0}^{\phi_+} \frac{d\phi}{\sin \phi \sqrt{\left(\frac{e(\phi)}{e(\phi_+) + H(\cos^n \phi_+ - \cos^n \phi)} \right)^2 - 1}} = \\ &= \int_0^1 \frac{d\phi}{\sin(\phi_0 + \varepsilon x) \sqrt{\left(\frac{e(\phi_0 + \varepsilon x)}{e(\phi_0 + \varepsilon) + H(\cos^n(\phi_0 + \varepsilon) - \cos^n(\phi_0 + \varepsilon x))} \right)^2 - 1}} \end{aligned}$$

Temos:

$$e(\phi) = e(\phi_0) \left(1 + H\varepsilon xn + \frac{(\varepsilon x)^2}{2}((n-1)(n-2)\tan^2 \phi_0 - (3n-2)) \right) + o(\varepsilon)^2$$

E:

$$e(\phi_+) = e(\phi_0) \left(1 + H\varepsilon n + \frac{\varepsilon^2}{2} ((n-1)(n-2) \tan^2 \phi_0 - (3n-2)) \right) + o(\varepsilon)^2$$

$$\cos^n(\phi_0 + \varepsilon) = e(\phi_0)(\cot \phi_0 - \varepsilon n - H \frac{\varepsilon^2}{2} n^2) + o(\varepsilon^2)$$

$$\cos^n(\phi_0 + \varepsilon x) = e(\phi_0)(\cot \phi_0 - \varepsilon x n - H \frac{(\varepsilon x)^2}{2} n^2) + o(\varepsilon x)^2$$

$$\begin{aligned} E - H \cos^n \phi &= e(\phi_+) + H \cos^n \phi_+ - H \cos^n \phi = \\ &= e(\phi_0) \left(1 + H\varepsilon n + \frac{\varepsilon^2}{2} ((n-1)(n-2) \tan^2 \phi_0 - (3n-2)) + H(\cot \phi_0 - \varepsilon n - \right. \\ &\quad \left. - H \frac{\varepsilon^2}{2} n^2 - \cot \phi_0 + \varepsilon x n + H \frac{(\varepsilon x)^2}{2} n^2) \right) + o(\varepsilon)^2 = \\ &= e(\phi_0) \left(1 + H\varepsilon x n + \frac{\varepsilon^2}{2} ((n-1)(n-2) \tan^2 \phi_0 - (3n-2) + (Hn)^2(x^2 - 1)) \right) + \\ &\quad + o(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{e(\phi)}{E - H \cos^n \phi} = 1 + \frac{\varepsilon^2}{2} (x^2 - 1) ((n-1)(n-2) \tan^2 \phi_0 - (3n-2) - (nH)^2) + o(\varepsilon^2)$$

$$\Rightarrow \lim_{E \rightarrow E_0} \Theta_+(E, H) = \frac{\pi}{2\sqrt{(n-1) \tan^2 \phi_0 + 1}}$$

Então:

$$\begin{aligned} \lim_{E \rightarrow E_0} \Theta(E, H) &= 2 \lim_{E \rightarrow E_0} \Theta_-(E, H) + 2 \lim_{E \rightarrow E_0} \Theta_+(E, H) = \\ &= 2 \cdot \frac{\pi}{2\sqrt{(n-1) \tan^2 \phi_0 + 1}} + 2 \cdot \frac{\pi}{2\sqrt{(n-1) \tan^2 \phi_0 + 1}} = \frac{2\pi}{\sqrt{(n-1) \tan^2 \phi_0 + 1}} \end{aligned}$$

Sabemos que

$$(n-1) \tan \phi_0 - \cot \phi_0 = -nH$$

Logo,

$$(n-1) \tan \phi_0 + nH - \frac{1}{\tan \phi_0} = 0$$

$$\Rightarrow (n-1) \tan^2 \phi_0 + nH \tan \phi_0 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \tan \phi_0 = \frac{-nH \pm \sqrt{(nH)^2 + 4(n-1)}}{2(n-1)}$$

Mas $0 < \phi_0 < \pi/2$, logo, $\tan \phi_0 > 0$.

$$\Rightarrow \tan \phi_0 = \frac{-nH + \sqrt{(nH)^2 + 4(n-1)}}{2(n-1)}$$

$$\Rightarrow \tan^2 \phi_0 = \frac{2(nH)^2 + 4(n-1) - 2nH\sqrt{(nH)^2 + 4(n-1)}}{4(n-1)^2}$$

$$\Rightarrow (n-1)\tan^2 \phi_0 + 1 = \frac{(nH)^2 + 4(n-1) - nH\sqrt{(nH)^2 + 4(n-1)}}{2(n-1)}$$

Finalmente,

$$\lim_{E \rightarrow E_0} \Theta(E, H) = \sqrt{2\pi} \frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{(nH)^2 + 4(n-1) - nH\sqrt{(nH)^2 + 4(n-1)}}}$$

Demonstração do Lema 2.4 parte (ii):

Consideramos agora $C(E, H) = (\alpha(s), \phi(s))$ uma curva do tipo I tal que $\alpha(s) \in (\pi, 2\pi)$. A demonstração é análoga à demonstração de (i). Basta apenas observar que nesse caso temos $\sin \alpha < 0$ e temos que a curva $C(E, H)$ é simétrica em relação a reta $\alpha = \frac{3\pi}{2}$. Logo:

$$E = \sin \alpha \sin \phi \cos^{n-1} \phi + H \cos^n \phi = -e(\phi_-) + H \cos^n \phi_- = -e(\phi_+) + H \cos^n \phi_+$$

A partir de agora, vamos nos restringir ao estudo para $n = 2$.

Novamente estamos interessados no caso em que ξ é fechada para conseguirmos toros equivariantes CMC de \mathbb{S}^3 .

Então, vamos analisar a função $\Theta(E, H)$. Queremos que $\Theta(E, H) \in 2\pi\mathbb{Q}$.

Se $\Theta(E, H) = \frac{2\pi}{q}$, com $q \in \mathbb{Z}^*$, então ξ será mergulhada e portanto, Σ será mergulhada.

Demonstraremos o:

Lema 2.6

$$(i) \lim_{E \rightarrow H_+} \Theta(E, H) = \pi + 2 \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2} \sqrt{1 + \frac{t^2}{H^2}}} = F(H)$$

$$(ii) \lim_{E \rightarrow 0_-} \Theta(E, H) = \arctan\left(\frac{H^2 - 1}{2H}\right) - \frac{\pi}{2} = G(H)$$

O integrando aparecendo na fórmula de $F(H)$ é uma função elíptica completa de primeiro tipo.

Lembramos que os limites da função $\Theta(E, H)$ com E tendendo aos níveis E_0 e E'_0 associados aos pontos de equilíbrios são dados por $M(H)$ e $-M(H)$ respectivamente, onde

$$M(H) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2\sqrt{H^2 + 1} - H\sqrt{H^2 + 1}}$$

Fazendo um estudo das funções $F(H)$ e $M(H)$ concluímos que as funções $F(H)$ e $M(H)$ são crescentes. Temos que:

$$\lim_{H \rightarrow \infty} M(H) = \pi$$

$$\lim_{H \rightarrow 0} F(H) = \pi$$

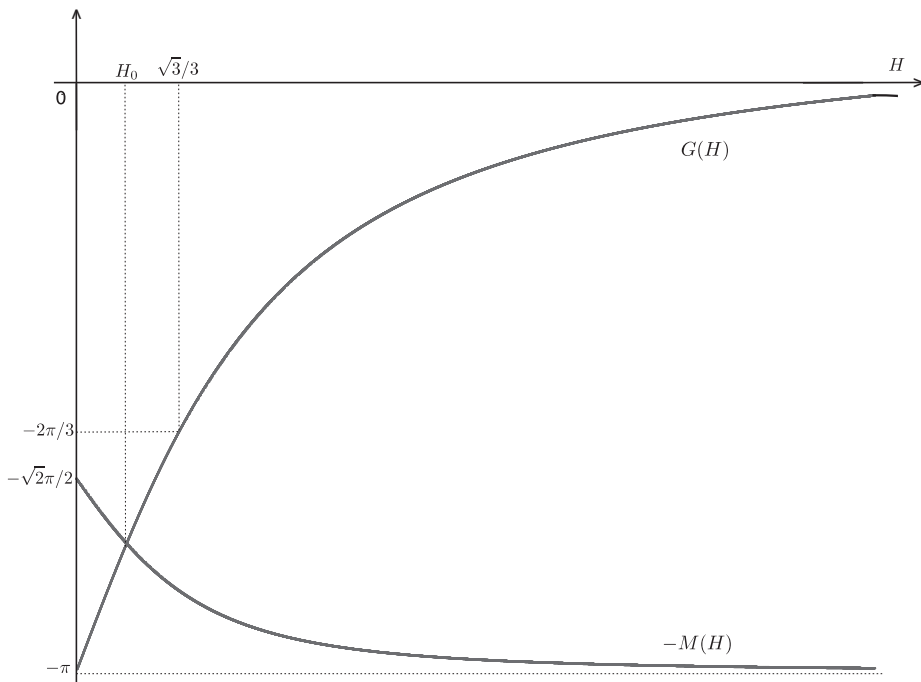
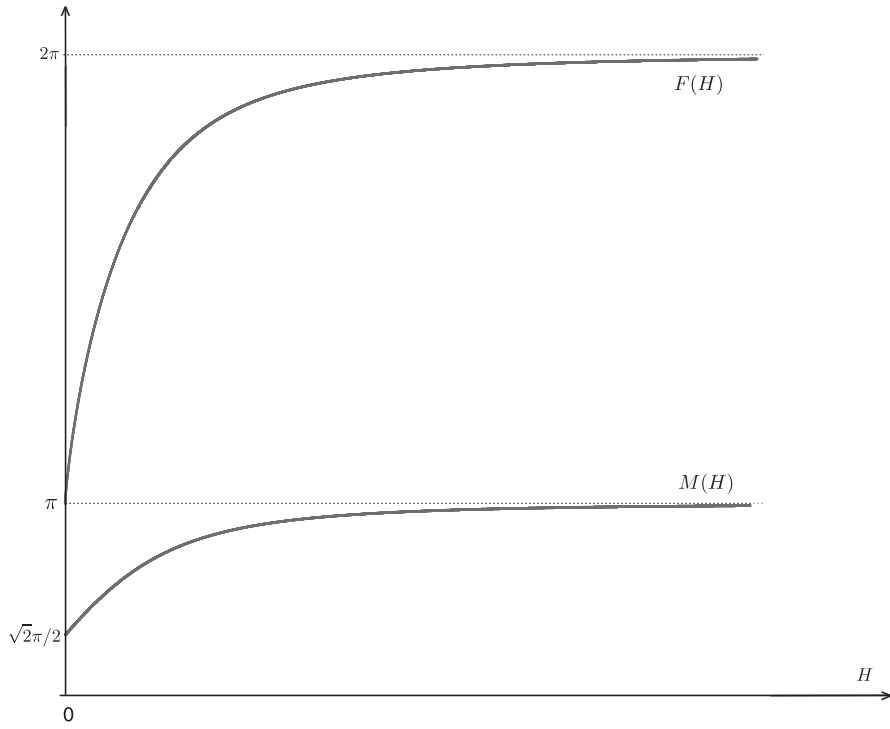
Veja a figura na página seguinte.

Fixando um valor de H , notamos que $M(H) \neq F(H)$. Logo, aplicando o teorema do valor intermediário, podemos concluir que existirá uma quantidade infinita e enumerável de valores de E tais que $\Theta(E, H) \in 2\pi\mathbb{Q}$. Isto é, pelo lema 2.1, existirá uma quantidade infinita e enumerável de curvas ξ fechadas, logo, de toros com curvatura média constante H .

Além disso, como $\pi \in (M(H), F(H))$, existirá E tal que $\Theta(E, H) = \pi = \frac{2\pi}{2}$. Ou seja, para cada $H > 0$, temos um toro não trivial equivariante com curvatura média constante H mergulhado em \mathbb{S}^3 .

Analogamente estudando a função $G(H)$, concluímos que a função é crescente e que:

$$\lim_{H \rightarrow 0} G(H) = -\pi$$



$$\lim_{H \rightarrow \infty} G(H) = 0$$

Observamos que existe apenas um valor de H , H_0 , tal que $M(H_0) = G(H_0)$. Portanto, para qualquer $H \neq H_0$, existirá uma quantidade infinita e enumerável de valores de E tais que $\Theta(E, H) \in 2\pi\mathbb{Q}$.

Iremos agora discutir a questão do mergulho.

Observe que para cada H tal que $G(H) > \frac{-2\pi}{3}$, temos $\frac{-2\pi}{3} \in (-M(H), G(H))$. Então nesse caso, existirá E tal que $\Theta(E, H) = \frac{-2\pi}{3}$, isto é, pelo lema 2.1, teremos um mergulho compacto não trivial.

Mas

$$G(H) > \frac{-2\pi}{3} \iff H > \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Além disso, como $\lim_{H \rightarrow \infty} G(H) = 0$, para cada $N \in \mathbb{N}$, $N > 3$, existe H_N tal que para todo $H > H_N$, temos $\{\frac{-2\pi}{3}, \frac{-2\pi}{4}, \dots, \frac{-2\pi}{N}\} \subset (-M(H), G(H))$. Portanto, para todo $H > H_N$ temos ao menos $N - 2$ toros mergulhados todos distintos com curvatura média constante H .

Portanto, como corolário dos lemas 2.5 e 2.6, temos o seguinte teorema:

Teorema 2 *Dado $H > 0$, existe uma família enumerável \mathcal{F}_H de toros equivariantes com curvatura média constante H imersos em \mathbb{S}^3 , e além dos toros planos, existe ao menos um outro toro de \mathcal{F}_H mergulhado em \mathbb{S}^3 .*

Se $H > \frac{\sqrt{3}}{3}$, então existem ao menos dois toros em \mathcal{F}_H mergulhados além dos toros planos. E quanto maior for o valor de H , mais mergulhos teremos em \mathcal{F}_H .

Demonstração do Lema 2.5:

Demonstração de (i):

Como E está tendendo a H com $E > H$, as curvas $C(E)$ são nesse caso curvas do tipo I e temos $0 < \alpha < \pi$.

Quando E tende a H , com $E > H$, uma parte da curva $C(E)$ tende à curva especial $C(H, H)$ e na outra parte, temos ϕ convergindo uniformemente para 0 (com $\alpha \in (0, \pi)$). Então:

$$\lim_{E \rightarrow H^+} \Theta(E, H) = \Theta(H, H) + \lim_{\phi \rightarrow 0} \Theta(E, H)$$

Se $\alpha \in (0, \pi)$, temos:

$$\begin{aligned} \Theta(E, H) &= \int_{C(E, H)} \frac{\text{sen } \alpha}{\text{sen } \phi} ds = \int_{\pi}^0 \frac{\text{sen } \alpha}{\text{sen } \phi} \frac{d\alpha}{\alpha'} = \\ &= \int_0^{\pi} \frac{-\text{sen } \alpha}{nH \text{sen } \phi + \text{sen } \alpha \left((n-1) \frac{\text{sen}^2 \phi}{\cos \phi} - \cos \phi \right)} d\alpha \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lim_{\phi \rightarrow 0} \Theta(E, H) = \int_0^{\pi} d\alpha = \pi$$

Agora, vamos calcular $\Theta(H, H)$:

$$E = H \Rightarrow \text{sen } \alpha \text{sen } \phi \cos \phi + H \cos^2 \phi = H$$

$$\Rightarrow \text{sen } \alpha = H \tan \phi$$

Seja ϕ_1 o valor máximo de $\phi(s)$ que a curva $C(H, H)$ assume.

$$\begin{aligned} \Theta(H, H) &= \int_{C(E, H)} \frac{\text{sen } \alpha}{\text{sen } \phi} ds = 2 \int_0^{\phi_1} \frac{\text{sen } \alpha}{\text{sen } \phi \cos \alpha} d\phi = \\ &= 2 \int_0^{\phi_1} \frac{d\phi}{\text{sen } \phi \sqrt{\frac{1}{\text{sen}^2 \alpha} - 1}} = 2 \int_0^{\phi_1} \frac{d\phi}{\text{sen } \phi \sqrt{\frac{\cot^2 \phi}{H^2} - 1}} \end{aligned}$$

Fazendo a troca de variáveis $\tan \phi = \frac{x}{H}$, temos:

$$\Theta(H, H) = 2 \int_0^1 \frac{\frac{1}{H} \cos^2 \phi}{\text{sen } \phi \sqrt{\frac{\cot^2 \phi}{H^2} - 1}} dx = 2 \int_0^1 \frac{\cot \phi \cos \phi}{\sqrt{\cot^2 \phi - H^2}} dx$$

Mas

$$\tan \phi = \frac{x}{H} \Rightarrow \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \phi}}{\cos \phi} = \frac{x}{H}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \cos \phi &= \frac{H}{\sqrt{x^2 + H^2}} \\ \Rightarrow \Theta(H, H) &= 2 \int_0^1 \frac{\frac{H^2}{x\sqrt{x^2+H^2}}}{\sqrt{\frac{H^2}{x^2} - H^2}} dx = 2 \int_0^1 \frac{H^2}{(\sqrt{x^2 + H^2})(\sqrt{H^2 - x^2 H^2})} dx = \\ &= 2 \int_0^1 \frac{dx}{\left(\sqrt{\frac{x^2}{H^2} + 1}\right)(\sqrt{1 - x^2})} = 2Z\left(\frac{1}{H}\right) \end{aligned}$$

Finalmente, temos:

$$\lim_{E \rightarrow H_+} \Theta(E, H) = \pi + 2Z\left(\frac{1}{H}\right) = F(H)$$

Demonstração de (ii):

Como E está tendendo a 0 com $E < 0$, as curvas $C(E)$ são nesse caso curvas do tipo I e temos $\pi < \alpha < 2\pi$.

Quando E tende a 0, com $E < 0$, uma parte da curva $C(E)$ tende à curva especial $C(0, H)$ e na outra parte, temos ϕ convergindo uniformemente para $\frac{\pi}{2}$ (com $\alpha \in (\pi, 2\pi)$). Então:

$$\lim_{E \rightarrow 0_-} \Theta(E, H) = \Theta(0, H) + \lim_{\phi \rightarrow \frac{\pi}{2}} \Theta(E, H)$$

Se $\alpha \in (\pi, 2\pi)$, temos:

$$\Theta(E, H) = \int_{2\pi}^{\pi} \frac{\sin \alpha \, d\alpha}{nH \sin \phi + \sin \alpha \left((n-1) \frac{\sin^2 \phi}{\cos \phi} - \cos \phi \right)}$$

$$\Rightarrow \lim_{\phi \rightarrow \frac{\pi}{2}} \Theta(E, H) = 0$$

Agora, vamos calcular $\Theta(0, H)$:

$$E = 0 \Rightarrow \sin \alpha \sin \phi \cos \phi + H \cos^2 \phi = 0$$

$$\Rightarrow \sin \alpha = -H \cot \phi$$

Seja ϕ'_1 o valor mínimo de $\phi(s)$ que a curva $C(0, H)$ assume.

Observe que $\sin \alpha < 0$. Então:

$$\begin{aligned} \Theta(H, H) &= 2 \int_{\phi'_1}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \alpha}{\sin \phi \cos \alpha} d\phi = \\ &= 2 \int_{\phi'_1}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{\sin \phi \left(-\sqrt{\frac{1}{\sin^2 \alpha} - 1} \right)} = -2 \int_{\phi'_1}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{\sin \phi \sqrt{\frac{\tan^2 \phi}{H^2} - 1}} \end{aligned}$$

Fazendo a troca de variáveis $\cot \phi = \frac{x}{H}$, temos:

$$\Theta(0, H) = -2 \int_{-1}^0 \frac{\frac{-1}{H} \sin^2 \phi}{\sin \phi \sqrt{\frac{\tan^2 \phi - H^2}{H^2}}} dx = -2 \int_0^1 \frac{\sin \phi}{\sqrt{\tan^2 \phi - H^2}} dx$$

Mas

$$\begin{aligned} \cot \phi &= \frac{x}{H} \Rightarrow \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \phi}}{\sin \phi} = \frac{x}{H} \\ &\Rightarrow \sin \phi = \frac{H}{\sqrt{x^2 + H^2}} \\ \Rightarrow \Theta(0, H) &= -2 \int_0^1 \frac{\frac{H}{\sqrt{x^2 + H^2}}}{\sqrt{\frac{H^2}{x^2} - H^2}} dx = -2 \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2 + H^2} \sqrt{1 - x^2}} dx = \\ &= \arctan \left(\frac{H^2 - 1}{2H} \right) - \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Finalmente, temos:

$$\lim_{E \rightarrow 0^-} \Theta(E, H) = \arctan \left(\frac{-1 + H^2}{2H} \right) - \frac{\pi}{2} = G(H)$$

3

Hipersuperfícies Equivariantes Mínimas e com Curvatura Média Constante em \mathbb{H}^{n+1}

3.1

Hipersuperfícies Equivariantes em \mathbb{H}^{n+1}

Lembramos que o espaço de Minkowski \mathbb{R}_1^n é definido por:

$$\mathbb{R}_1^n = (\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_1)$$

onde

$$\langle X, Y \rangle_1 = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_{n-1}y_{n-1} - x_ny_n$$

$X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.

E o plano hiperbólico é:

$$\mathbb{H}^2 = \{X \in \mathbb{R}_1^3 / \langle X, X \rangle_1 = -1\}$$

Seja $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco de \mathbb{H}^2 e k_η a sua curvatura. Considere a seguinte imersão:

$$\begin{aligned} Y: I \times \mathbb{S}^{n-1} &\rightarrow \mathbb{H}^{n+1} \subset \mathbb{R}_1^{n+2} \\ (s, x) &\mapsto Y(s, x) = (\eta_1(s)x, \eta_2(s), \eta_3(s)) \end{aligned}$$

Vamos chamar de Σ a hipersuperfície $Y(I \times \mathbb{S}^{n-1})$ imersa em \mathbb{H}^{n+1} .

De fato temos $\Sigma \subset \mathbb{H}^{n+1}$:

$$\langle Y(s, x), Y(s, x) \rangle_1 = \eta_1^2(s)\|x\|^2 + \eta_2^2(s) - \eta_3^2(s) = -1$$

pois $x \in \mathbb{S}^{n-1}$ e $\eta \in \mathbb{H}^2$.

O grupo $O(n, 1)$ é definido por:

$$O(n, 1) = \{A \in Gl(n, \mathbb{R}) / \langle a_i, a_i \rangle_1 = 1, i = 1, \dots, n; \quad \langle a_n, a_n \rangle_1 = -1; \\ \langle a_i, a_j \rangle_1 = 0, i \neq j, \text{ onde } a_i, i = 1..n, \text{ são as colunas de } A\}$$

O grupo $O(n, 1)$ é o grupo de simetria de \mathbb{H}^{n-1} , isto é, \mathbb{H}^{n-1} é invariante pela ação do grupo $O(n, 1)$.

Seja $A \in O(n)$ e considere a matriz:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} & & & 0 & 0 \\ & & & \vdots & \vdots \\ & A & & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Considere o grupo G formado pelas matrizes do tipo \bar{A} .

$$G = \{\bar{A}, \text{ onde } A \in SO(n)\}$$

Então G é um subgrupo de $SO(n + 2, 1)$. E dado $Y(s, x) \in \Sigma$ arbitrário, temos que:

$$\bar{A}(Y(s, x)) = \bar{A}(\eta_1 x, \eta_2, \eta_3) = (\eta_1 A(x), \eta_2, \eta_3) = Y(A(x), s)$$

Logo $\bar{A}(\Sigma) = \Sigma$, isto é, Σ é invariante pela ação do grupo G . Por esta razão, dizemos que Σ é uma hipersuperfície equivariante em \mathbb{H}^{n+1} .

Agora, vamos calcular a primeira e a segunda formas fundamentais de Y .

Podemos escolher uma parametrização $\Phi : U \subset \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ em torno de x tal que o referencial adaptado $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right\}$ seja uma base ortonormal de $T_x \mathbb{S}^{n-1}$.

Sabemos que $T_{(s,x)}(I \times \mathbb{S}^{n-1}) = \mathbb{R} \times T_x \mathbb{S}^{n-1}$.

Então, identificando $\frac{\partial}{\partial x_i} \simeq (0, \frac{\partial}{\partial x_i})$ e colocando $\frac{\partial}{\partial s} = (1, 0)$, temos que $\left\{ \frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right\}$ é base ortonormal de $T_{(s,x)}(I \times \mathbb{S}^{n-1})$.

Lembramos que

$$\mathbb{H}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}_1^n / \|x\|_1^2 = -1\}$$

Então

$$T_x \mathbb{H}^{n-1} = \{v \in \mathbb{R}_1^n / \langle v, x \rangle_1 = 0\} = x^\perp$$

Vamos calcular as derivadas parciais:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Y}{\partial s} &= (\eta'_1 x, \eta'_2, \eta'_3) \\ \frac{\partial Y}{\partial y_i} &= (\eta_1 \frac{\partial}{\partial x_i}, 0, 0) \end{aligned}$$

Então:

$$\begin{aligned} g_{11} &= \langle \frac{\partial Y}{\partial y_s}, \frac{\partial Y}{\partial y_s} \rangle_1 = \eta_1'^2 \|x\|^2 + \eta_2'^2 - \eta_3'^2 = \|\eta'\|_1^2 = 1 \\ g_{1i} &= \langle \frac{\partial Y}{\partial y_s}, \frac{\partial Y}{\partial y_i} \rangle_1 = \eta_1' \eta_1 \langle x, \frac{\partial}{\partial y_i} \rangle = 0 \\ g_{ij} &= \langle \frac{\partial Y}{\partial y_i}, \frac{\partial Y}{\partial y_j} \rangle_1 = \eta_1^2 \langle \frac{\partial}{\partial y_i}, \frac{\partial}{\partial y_j} \rangle = \eta_1^2 \delta_{ij} \end{aligned}$$

Logo, a matriz da primeira forma fundamental é dada por $I = [g_{ij}]$, onde

$$\begin{aligned} g_{00} &= 1 \\ g_{1i} &= 0 \\ g_{ij} &= \eta_1^2 \delta_{ij} \end{aligned}$$

Um vetor normal unitário à imersão em \mathbb{H}^{n+1} é $\vec{N}(s, x) = (n_1(s)x, n_2(s), n_3(s))$, onde $\vec{n}(s) = (n_1(s), n_2(s), n_3(s))$ é um vetor normal unitário a η em \mathbb{H}^2 .

Seja D a conexão de \mathbb{R}_1^{n+2} com a métrica canônica, e sejam $\bar{\nabla}$ e ∇ as conexões de S^{n+1} e Σ respectivamente com as métricas induzidas.

Seja $p \in \Sigma$. Dados $X, Y \in T_p \Sigma$, podemos estendê-los à $T_p \mathbb{S}^{n+1}$ e à $T_p \mathbb{R}_1^{n+2}$. Logo:

$$D_X Y = \bar{\nabla}_X Y + (D_X Y)^\perp = \nabla_X Y + \langle \bar{\nabla}_X Y, N \rangle N + \langle D_X Y, p \rangle p$$

Fazendo o produto interno da expressão acima com N , temos:

$$\langle D_X Y, N \rangle = \langle \bar{\nabla}_X Y, N \rangle$$

Temos que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N}{\partial x_i} &= (n_1 \frac{\partial}{\partial x_i}, 0, 0) \\ \frac{\partial Y}{\partial s \partial s} &= (\eta_1'' x, \eta_2'', \eta_3'') \end{aligned}$$

Então:

$$\begin{aligned} h_{11} &= -\langle \bar{\nabla}_{\frac{\partial Y}{\partial s}} N, \frac{\partial Y}{\partial s} \rangle = \langle N, D_{\frac{\partial Y}{\partial s}} \frac{\partial Y}{\partial s} \rangle = \langle N, \frac{\partial^2 Y}{\partial s^2} \rangle = \langle n, \eta'' \rangle_1 = k_\eta \\ h_{1i} &= -\langle \bar{\nabla}_{\frac{\partial Y}{\partial x_i}} N, \frac{\partial Y}{\partial s} \rangle = -\langle \frac{\partial N}{\partial x_i}, \frac{\partial Y}{\partial s} \rangle = -n_1 \eta_1' \langle \frac{\partial}{\partial x_i}, x \rangle = 0 \\ h_{ij} &= -\langle \bar{\nabla}_{\frac{\partial Y}{\partial x_i}} N, \frac{\partial Y}{\partial x_j} \rangle = -\langle \frac{\partial N}{\partial x_i}, \frac{\partial Y}{\partial x_j} \rangle = -n_1 \eta_1 \langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \rangle = -n_1 \eta_1 \delta_{ij} \end{aligned}$$

Logo, a matriz da segunda forma fundamental é dada por $II = [h_{ij}]$, onde

$$\begin{aligned} h_{00} &= k_\eta \\ h_{0i} &= 0 \\ h_{ij} &= -\eta_1 n_1 \delta_{ij} \end{aligned}$$

A curvatura média da imersão Y é:

$$H = \frac{1}{n} \text{traço}(II.I^{-1}) = \frac{1}{n} \left[k_\eta - (n-1) \frac{n_1}{\eta_1} \right]$$

E a imersão Y tem duas curvaturas principais diferentes, que são:

$$k_1 = k_\eta \text{ com multiplicidade } 1$$

$$k_2 = -\frac{n_1}{\xi_1} \text{ com multiplicidade } (n-1)$$

Vamos introduzir coordenadas hiperbólicas em \mathbb{H}^2 :

Sejam $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ e $\phi \in (0, \infty)$ tais que

$$\eta(s) = (e^{i\theta(s)} \sinh \phi(s), \cosh \phi(s))$$

$$\eta' = (i\theta' e^{i\theta} \sinh \phi + \phi' e^{i\theta} \cosh \phi, \phi' \sinh \phi) = \phi' (e^{i\theta} \cosh \phi, \sinh \phi) + \theta' \sinh \phi (ie^{i\theta}, 0)$$

Definindo $e_1 = \eta$, $e_2 = (e^{i\theta} \cosh \phi, \sinh \phi)$ e $e_3 = (ie^{i\theta}, 0)$, notamos que $\{e_1, e_2, e_3\}$ forma um referencial ortogonal tal que

$$\langle e_1, e_1 \rangle_1 = -1$$

$$\langle e_2, e_2 \rangle_1 = \langle e_3, e_3 \rangle_1 = 1$$

$$\langle e_i, e_j \rangle_1 = 0 \quad \text{para } i \neq j$$

Isto é, a matriz

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \cos \theta \sinh \phi & \cos \theta \cosh \phi & -\sin \theta \\ \sin \theta \sinh \phi & \sin \theta \cosh \phi & \cos \theta \\ \cosh \phi & -\sin \phi & 0 \end{bmatrix}$$

pertence a $SO(2, 1)$.

Como η é parametrizada pelo comprimento de arco, temos $\|\eta'\| = 1$. Logo, existe uma função $\alpha(s)$ tal que

$$\begin{cases} \phi' = \cos \alpha \\ \theta' \sinh \phi = \sin \alpha \end{cases}$$

$$\Rightarrow \eta' = \cos \alpha e_2 + \sin \alpha e_3$$

Então

$$\vec{n} = -\sin \alpha e_2 + \cos \alpha e_3$$

é um vetor normal unitário a ξ em \mathbb{H}^2 .

Observamos que $n_1 = -\sin \alpha \cos \theta \cosh \phi - \cos \alpha \sin \theta$.

A curvatura de η é:

$$k_\eta = \langle \eta'', \vec{n} \rangle_1 = \alpha' + \theta' \cosh \phi$$

Então, a curvatura média da hipersuperfície fica:

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{n} \left[k_\eta - (n-1) \frac{n_1}{\eta_1} \right] = \\ &= \frac{1}{n} \left[\alpha' + \theta' \cosh \phi - (n-1) \left(\frac{-\sin \alpha \cos \theta \cosh \phi - \cos \alpha \sin \theta}{\cos \theta \sinh \phi} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{n} [\alpha' + \theta' \cosh \phi + (n-1)(\sin \alpha \coth \phi + \cos \alpha \tan \theta \operatorname{csch} \phi)] \end{aligned}$$

Portanto, temos que estudar o sistema:

$$\begin{cases} \alpha' = nH - \theta' \cosh \phi - (n-1) \sin \alpha \coth \phi + \cos \alpha \tan \theta \operatorname{csch} \phi \\ \phi' = \cos \alpha \\ \theta' = \frac{\sin \alpha}{\sinh \phi} \end{cases}$$

Vamos tentar simplificar esse sistema:

$$\begin{cases} \alpha' = nH - n \sin \alpha \coth \phi - (n-1) \cos \alpha \tan \theta \operatorname{csch} \phi \\ \phi' = \cos \alpha \\ \theta' = \frac{\sin \alpha}{\sinh \phi} \end{cases}$$

Não foi possível eliminar a variável θ . Logo, esse sistema não pode ser simplificado como foi feito anteriormente no caso de \mathbb{S}^n . Vamos apenas achar um exemplo simples de hipersuperfície de curvatura média constante para essa imersão.

Se $\alpha' = \phi' = 0$, então $\cos \alpha = 0$. Logo $\alpha \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$.

Então $H \pm \coth \phi = 0$.

$$\Rightarrow \phi = \operatorname{arccoth} H = \phi_0$$

$$\Rightarrow \theta' = -\frac{1}{\sinh \phi_0}$$

Mas $\sinh \phi_0 = \sinh(\operatorname{arccoth} H) = \frac{1}{\sqrt{H^2-1}}$. Logo, temos que ter $H > 1$ e:

$$\theta(s) = -\sqrt{H^2-1}s + c$$

Assim, a curva η será um círculo horizontal

$$\eta(s) = (e^{i(-\sqrt{H^2-1}s+c)} \sinh \phi_0, \cosh \phi_0)$$

E a hipersuperfície associada é $\Sigma = Y(I \times \mathbb{S}^{n-1})$ onde:

$$Y(s, x) = (x \cos(-\sqrt{H^2-1}s+c) \sinh \phi_0, \sin(-\sqrt{H^2-1}s+c) \sinh \phi_0, \cosh \phi_0)$$

Observe que Σ é a interseção de \mathbb{H}^{n+1} com um hiperplano horizontal de \mathbb{R}_1^{n+2} , portanto é uma esfera totalmente umbílica de \mathbb{H}^{n+1} .

Considere agora a imersão:

$$\begin{aligned} X: I \times \mathbb{H}^{n-1} &\rightarrow \mathbb{H}^{n+1} \subset \mathbb{R}_1^{n+2} \\ (s, x) &\mapsto X(s, x) = (\eta_1(s), \eta_2(s), \eta_3(s)x) \end{aligned}$$

Temos $X(s, x) \in \mathbb{H}^{n+1}$:

$$\langle X(s, x), X(s, x) \rangle_1 = \eta_1^2(s) + \eta_2^2(s) + \eta_3^2(s) \|x\|_1^2 = -1$$

pois $x \in \mathbb{H}^{n-1}$ e $\eta \in \mathbb{H}^2$.

Vamos chamar de Σ a hipersuperfície $X(I \times \mathbb{H}^{n-1})$.

Seja $A \in SO(n, 1)$ e considere a matriz:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & A & \\ 0 & 0 & & & \end{bmatrix}$$

Considere o grupo G formado pelas matrizes do tipo \bar{A} .

$$G = \{\bar{A}, \text{ onde } A \in SO(n, 1)\}$$

Então G é um subgrupo de $SO(n+2, 1)$. E dado $X(s, x) \in \Sigma$ arbitrário, temos que:

$$\bar{A}(X(s, x)) = \bar{A}(\eta_1, \eta_2, \eta_3 x) = (\eta_1, \eta_2, \eta_3 A(x)) = X(s, A(x))$$

Logo $\bar{A}(\Sigma) = \Sigma$, isto é, Σ é invariante pela ação do grupo G . Por esta razão, dizemos que Σ é uma hipersuperfície equivariante em \mathbb{H}^{n+1} .

Vamos calcular as derivadas parciais:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Y}{\partial s} &= (\eta'_1, \eta'_2, \eta'_3 x) \\ \frac{\partial Y}{\partial y_i} &= (0, 0, \eta_3 \frac{\partial}{\partial y_i}) \end{aligned}$$

Então temos:

$$\begin{aligned} \langle \frac{\partial Y}{\partial y_s}, \frac{\partial Y}{\partial y_s} \rangle_1 &= \eta_1'^2 + \eta_2'^2 - \eta_3'^2 \|x\|^2 = \|\eta'\|_1^2 = 1 \\ \langle \frac{\partial Y}{\partial y_s}, \frac{\partial Y}{\partial y_i} \rangle_1 &= \eta_3' \eta_3 \langle x, \frac{\partial}{\partial y_i} \rangle_1 = 0 \\ \langle \frac{\partial Y}{\partial y_i}, \frac{\partial Y}{\partial y_j} \rangle_1 &= \eta_3^2 \left\| \frac{\partial}{\partial y} \right\|_1 = \eta_3^2 \end{aligned}$$

Logo, a matriz da primeira forma fundamental é dada por $I = [g_{ij}]$, onde

$$\begin{aligned} g_{00} &= 1 \\ g_{ij} &= \eta_3^2 \delta_{ij} \end{aligned}$$

Um vetor normal unitário à imersão em \mathbb{H}^{n+1} é $\vec{N}(s, x) = (n_1(s), n_2(s), n_3(s)x)$, onde $\vec{n}(s) = (n_1(s), n_2(s), n_3(s))$ é um vetor normal unitário a η em \mathbb{H}^2 .

Seja D a conexão de \mathbb{R}_1^{n+2} com a métrica canônica, e sejam $\bar{\nabla}$ e ∇ as conexões de \mathbb{H}^{n+1} e Σ respectivamente com as métricas induzidas.

Seja $p \in \Sigma$. Dados $X, Y \in T_p\Sigma$, podemos estende-los à $T_p\mathbb{H}^{n+1}$ e à $T_p\mathbb{R}_1^{n+2}$.

Logo:

$$D_X Y = \bar{\nabla}_X Y + (D_X Y)^\perp = \nabla_X Y + \langle \bar{\nabla}_X Y, N \rangle N + \langle D_X Y, p \rangle p$$

Fazendo o produto interno da expressão acima com N , temos:

$$\langle D_X Y, N \rangle = \langle \bar{\nabla}_X Y, N \rangle$$

Temos que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N}{\partial x_i} &= (0, 0, n_3 \frac{\partial}{\partial x_i}) \\ \frac{\partial X}{\partial s \partial s} &= (\eta_1'', \eta_2'', \eta_3'' x) \end{aligned}$$

Então:

$$\begin{aligned} h_{11} &= -\langle \bar{\nabla}_{\frac{\partial X}{\partial s}} N, \frac{\partial X}{\partial s} \rangle = \langle N, D_{\frac{\partial X}{\partial s}} \frac{\partial X}{\partial s} \rangle = \langle N, \frac{\partial^2 X}{\partial s^2} \rangle = \langle n, \eta'' \rangle_1 = k_\eta \\ h_{1i} &= -\langle \bar{\nabla}_{\frac{\partial X}{\partial x_i}} N, \frac{\partial X}{\partial s} \rangle = -\langle \frac{\partial N}{\partial x_i}, \frac{\partial X}{\partial s} \rangle = -n_1 \eta_1' \langle \frac{\partial}{\partial x_i}, x \rangle = 0 \\ h_{ij} &= -\langle \bar{\nabla}_{\frac{\partial X}{\partial x_i}} N, \frac{\partial X}{\partial x_j} \rangle = -\langle \frac{\partial N}{\partial x_i}, \frac{\partial X}{\partial x_j} \rangle = -n_1 \eta_1 \langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \rangle = -n_3 \eta_3 \delta_{ij} \end{aligned}$$

Logo, a matriz da segunda forma fundamental é dada por $II = [h_{ij}]$, onde

$$\begin{aligned} h_{00} &= k_\eta \\ h_{0i} &= 0 \\ h_{ij} &= -\eta_3 n_3 \delta_{ij} \end{aligned}$$

A curvatura média da superfície é:

$$H = \frac{1}{n} \text{traço}(II.I^{-1}) = \frac{1}{n} \left[k_\eta - (n-1) \frac{n_3}{\eta_3} \right]$$

Lembrando que:

$$\eta(s) = (e^{i\theta(s)} \sinh \phi(s), \cosh \phi(s))$$

$$\begin{cases} e_2 = (e^{i\theta} \cosh \phi, \sinh \phi) \\ e_3 = (ie^{i\theta}, 0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \phi' = \cos \alpha \\ \theta' = \frac{\sin \alpha}{\sinh \phi} \end{cases}$$

$$\eta' = \cos \alpha e_2 + \sin \alpha e_3$$

$$\vec{n} = -\sin \alpha e_2 + \cos \alpha e_3$$

$$k_\eta = \langle \eta'', \vec{n} \rangle = \alpha' + \theta' \cosh \phi$$

Temos que $n_3 = -\sin \alpha \sinh \phi$.

Então, a curvatura média da hipersuperfície fica:

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{n} \left[k_\eta - (n-1) \frac{n_3}{\eta_3} \right] = \frac{1}{n} \left[\alpha' + \theta' \cosh \phi - (n-1) \left(\frac{-\sin \alpha \sinh \phi}{\cosh \phi} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{n} [\alpha' + \theta' \cosh \phi + (n-1)(\sin \alpha \tanh \phi)] \end{aligned}$$

Portanto, temos que estudar o sistema:

$$\begin{cases} \alpha' = nH - \theta' \cosh \phi - (n-1) \sin \alpha \tanh \phi \\ \phi' = \cos \alpha \\ \theta' = \frac{\sin \alpha}{\sinh \phi} \end{cases}$$

que pode ser reduzido ao seguinte sistema:

$$\begin{cases} \alpha' = nH - \sin \alpha (\coth \phi + (n-1) \tanh \phi) \\ \phi' = \cos \alpha \end{cases}$$

Para achar uma integral primeira deste sistema, basta supor que $E(\alpha, \phi) = \sin \alpha f(\phi) + g(\phi)$. E como foi feito no caso esférico, encontraremos a seguinte integral primeira:

$$E(\alpha, \phi) = \sin \alpha \sinh \phi \cosh^{n-1} \phi - H \cosh^n \phi$$

3.2

O caso Mínimo

No caso mínimo, o sistema a ser estudado é:

$$\begin{cases} \alpha' = -\operatorname{sen} \alpha (\coth \phi + (n-1) \tanh \phi) \\ \phi' = \cos \alpha \end{cases}$$

A integral primeira no caso mínimo, fica:

$$E(\alpha, \phi) = \operatorname{sen} \alpha \operatorname{senh} \phi \cosh^{n-1} \phi$$

Vamos estudar a existência de pontos de equilíbrio desse sistema.

$$\begin{aligned} \phi' = 0 &\Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} \\ &\Rightarrow \coth \phi = -(n-1) \tanh \phi \\ &\Rightarrow (e^\phi + e^{-\phi})^2 + (n-1)(e^\phi - e^{-\phi})^2 = 0 \\ &\Rightarrow 2 \frac{(e^{2\phi} + e^{-2\phi})}{2} = \frac{2n-4}{n} \\ &\Rightarrow \cosh 2\phi = \frac{n-2}{n} \end{aligned}$$

Logo, como $\cosh 2\phi \in [1, \infty)$ e $\frac{n-2}{n} < 1$, o sistema não tem pontos de equilíbrio.

Vamos analisar a integral primeira para ilustrar o diagrama de fase.

$$E(\alpha, \phi) = \operatorname{sen} \alpha \operatorname{senh} \phi \cosh^{n-1} \phi$$

Observação 1 As retas $\alpha = 0$ e $\alpha = \pi$ são as curvas integrais correspondentes ao nível de energia $E = 0$.

Se $E = 0$, temos $\operatorname{sen} \alpha = 0$, $\operatorname{senh} \phi = 0$ ou $\cosh \phi = 0$. Como $\cosh \phi \geq 1$, e $\phi > 0$, temos apenas $\alpha = 0$ $[\pi]$.

Observação 2 As curvas integrais são simétricas em relação a reta $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Basta notar que $E(\pi - \alpha, \phi) = E(\alpha, \phi)$.

Fixado \bar{E} , seja $C(\bar{E}) = (\alpha(s), \phi(s))$ a curva integral com nível de energia \bar{E} . Como a curva é simétrica em relação a reta $\alpha = \frac{\pi}{2}$, precisamos analisar o comportamento da curva $C(\bar{E})$ apenas para $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Observação 3 A curva $C(\bar{E}) = (\alpha(s), \phi(s))$ é um gráfico diferenciável da forma $(\alpha, \phi(\alpha))$.

Para entender a observação 3, vamos estudar a equação algébrica

$$\frac{\bar{E}}{\text{sen } \alpha} = \sinh \phi \cosh^{n-1} \phi$$

Logo, faremos o estudo da seguinte função:

$$\begin{aligned} e: (0, \infty) &\rightarrow (0, \infty) \\ \phi &\mapsto e(\phi) = \sinh \phi \cosh^{n-1} \phi \end{aligned}$$

Temos que:

$$e'(\phi) = \cosh^n \phi + (n-1) \sinh^2 \phi \cosh^{n-2} \phi > 0$$

Como $e'(\phi) > 0$ para todo $\phi \in (0, \infty)$, a função é crescente em $(0, \infty)$.

Além disso:

$$\lim_{\phi \rightarrow 0} e(\phi) = 0$$

$$\lim_{\phi \rightarrow \infty} e(\phi) = \infty$$

Concluimos então que a função e é uma bijeção, portanto, possui inversa.

Observe o esboço do gráfico da função e na figura 3.1.

Como e é uma bijeção, temos:

$$e(\phi) = \frac{\bar{E}}{\text{sen } \alpha} \Rightarrow \phi = e^{-1} \left(\frac{\bar{E}}{\text{sen } \alpha} \right)$$

Consideremos apenas $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$, pois $C(\bar{E})$ é simétrica em relação a reta $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Quando α tende a 0, temos $\frac{\bar{E}}{\text{sen } \alpha}$ tendendo a ∞ e quando α tende a $\frac{\pi}{2}$, temos $\frac{\bar{E}}{\text{sen } \alpha}$ tendendo a \bar{E} .

Portanto, a curva $C(\bar{E})$ representa um gráfico diferenciável da forma $(\alpha, \phi(\alpha))$ onde o ponto de mínimo é em $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Utilizando as observações 1, 2 e 3, concluímos que o diagrama de fase é análogo ao da figura 3.2, para qualquer valor de n .

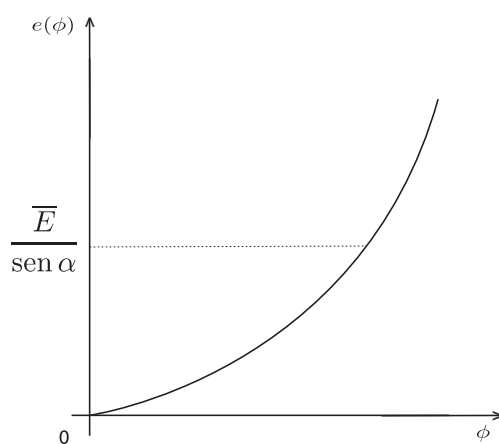


Figura 3.1: Gráfico da função $e(\phi) = \sinh \phi \cosh^{n-1} \phi$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0610737/CA

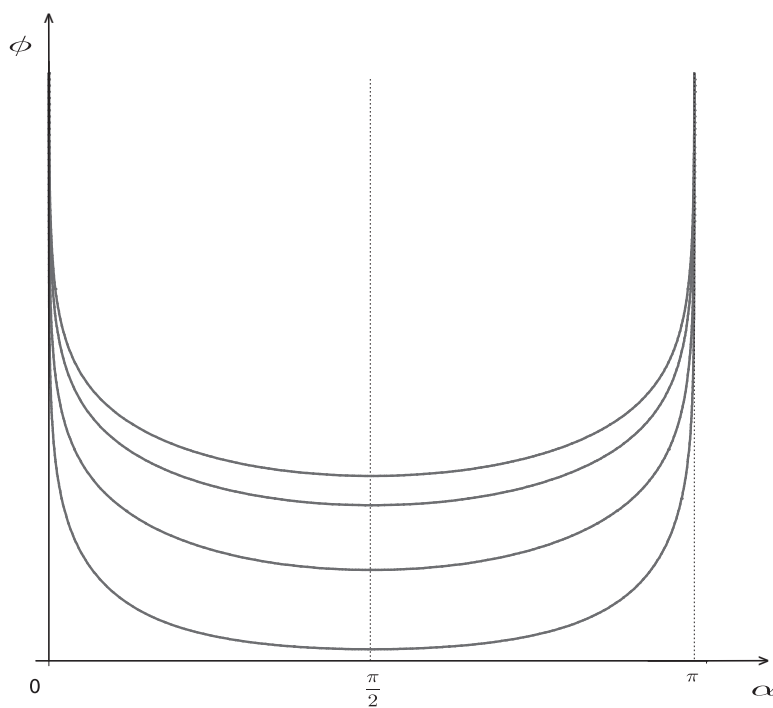


Figura 3.2: Diagrama de fase hiperbólico no caso mínimo, $n = 4$

No caso hiperbólico, as curvas integrais não são limitadas, portanto estamos interessados apenas em saber quando a curva η é mergulhada. Pois se η for mergulhada, a imersão X será um mergulho.

Seja $\phi_0 = \phi_0(E)$ o valor mínimo de $\phi(s)$ que a curva $C(E) = (\alpha(s), \phi(s))$ assume.

Podemos supor sem perda de generalidade que $\phi(0) = \phi_0$. Como a curva $C(E)$ é simétrica em relação a reta $\alpha = \pi/2$, temos

$$\phi(s) = \phi(-s)$$

para todo $s \in I$.

Logo, a questão é saber, se existe $s \in I$ tal que $\theta(s) = \theta(-s) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Se existir tal s , então a curva η não será mergulhada.

Analisaremos então a função:

$$\Theta(\phi_0, s) = \int_{-s}^s \theta'(t) dt = \theta(s) - \theta(-s)$$

Se para todo $s \in I$, tivermos $\Theta(\phi_0, s) \leq 2\pi$, então a curva será mergulhada.

Como $\theta' = \frac{\sin \alpha}{\sinh \phi}$ e $0 < \alpha < \pi$, $0 < \phi < \pi/2$, temos que $\theta' > 0$.

Logo a função $s \mapsto \Theta(\phi_0, s)$ é crescente.

Portanto, basta verificar se

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \Theta(\phi_0, s) = \int_{-\infty}^{\infty} \theta'(s) ds := \Theta(\phi_0) < 2\pi$$

Vamos demonstrar o:

Lema 3.1

$$(i) \lim_{\phi_0 \rightarrow 0} \Theta(\phi_0) = \pi$$

Portanto do lema deduzimos o seguinte teorema:

Teorema 3 *Existe uma família \mathcal{F} , a um parâmetro real, de hipersuperfícies mínimas equivariantes mergulhadas em \mathbb{H}^{n+1} .*

Demonstração de Lema 3.1:

Considere a função

$$e(\phi) = \sinh \phi \cosh^{n-1} \phi$$

Então, $E = \sin \alpha e(\phi)$

Logo, como a curva é simétrica em relação a reta $\alpha = \frac{\pi}{2}$, temos

$$E = e(\phi_0)$$

Portanto:

$$\begin{aligned} \Theta(\phi_0) &= \int_{-\infty}^{\infty} \theta'(s) ds = 2 \int_{\phi_0}^{\infty} \frac{\sin \alpha}{\sinh \phi} ds = 2 \int_{\phi_0}^{\infty} \frac{\sin \alpha}{\sinh \phi \cos \alpha} d\phi \\ &= 2 \int_{\phi_0}^{\infty} \frac{d\phi}{\sinh \phi \sqrt{\left(\frac{e(\phi)}{E}\right)^2 - 1}} = 2 \int_{\phi_0}^{\infty} \frac{d\phi}{\sinh \phi \sqrt{\left(\frac{e(\phi)}{e(\phi_0)}\right)^2 - 1}} \end{aligned}$$

Fazendo a troca de variáveis $\phi = \phi_0 x$, temos:

$$\Theta(\phi_0) = 2 \int_1^{\infty} \frac{\phi_0}{\sinh(\phi_0 x) \sqrt{\left(\frac{e(\phi_0 x)}{e(\phi_0)}\right)^2 - 1}} dx$$

Pela fórmula de Taylor:

$$e(\phi_0 x) = e(0) + \phi_0 x e'(0) + \frac{(\phi_0 x)^2}{2} e''(0) + \frac{(\phi_0 x)^3}{6} e'''(0) + o(\phi_0^3)$$

$$e(\phi_0) = e(0) + \phi_0 e'(0) + \frac{\phi_0^2}{2} e''(0) + \frac{\phi_0^3}{6} e'''(0) + o(\phi_0^3)$$

Temos que:

$$e(\phi) = \sinh \phi \cosh^{n-1} \phi$$

$$e'(\phi) = \cosh^n \phi + (n-1) \sinh^2 \phi \cosh^{n-2} \phi$$

$$e''(\phi) = n \sinh \phi \cosh^{n-1} \phi + 2(n-1) \sinh \phi \cosh^{n-1} \phi + (n-1)(n-2) \sinh^3 \phi \cosh^{n-3} \phi$$

$$e'''(\phi) = (3n-2)[\cosh^n \phi + (n-1) \sinh^2 \phi \cosh^{n-2} \phi] + 3(n-1)(n-2) \sinh^2 \phi \cosh^{n-2} \phi +$$

$$+(n-1)(n-2)(n-3) \sinh^4 \phi \cosh^{n-4} \phi$$

Como $\sinh 0 = 0$ e $\cosh 0 = 1$, temos:

$$e(0) = 0$$

$$e'(0) = 1$$

$$e''(0) = 0$$

$$e'''(0) = 3n - 2$$

Logo:

$$e(\phi_0 x) = \phi_0 x + (3n-2) \frac{(\phi_0 x)^3}{6} + o(\phi_0^3)$$

$$e(\phi_0) = \phi_0 + (3n-2) \frac{\phi_0^3}{6} + o(\phi_0^3)$$

$$\Rightarrow \frac{e(\phi)}{e(\phi_0)} = \frac{\phi_0 x + (3n-2) \frac{(\phi_0 x)^3}{6} + o(\phi_0^3)}{\phi_0 + (3n-2) \frac{\phi_0^3}{6} + o(\phi_0^3)} = x + \frac{\phi_0^2 x}{6} (x^2 - 1)(3n-2) + o(\phi_0^2)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{e(\phi)}{e(\phi_0)} \right)^2 - 1 = x^2 - 1 + \frac{\phi_0^2 x}{3} (x^2 - 1)(3n-2) + o(\phi_0^2)$$

Também pela fórmula de Taylor:

$$\sinh(\phi_0 x) = \phi_0 x + \frac{(\phi_0 x)^3}{6} + o(\phi_0^3)$$

$$\Rightarrow \Theta(\phi_0) = 2 \int_1^\infty \frac{\phi_0}{\sinh(\phi_0 x) \sqrt{\left(\frac{e(\phi_0 x)}{e(\phi_0)} \right)^2 - 1}} dx =$$

$$= 2 \int_1^\infty \frac{\phi_0}{(\phi_0 x - \frac{(\phi_0 x)^3}{6} + o(\phi_0^3)) \sqrt{x^2 - 1 + \frac{\phi_0^2 x}{3} (x^2 - 1)(3n-2) + o(\phi_0^2)}} dx$$

$$\Rightarrow \lim_{\phi_0 \rightarrow 0} \Theta(\phi_0) = \int_1^\infty \frac{dx}{x \sqrt{x^2 - 1}} = \pi$$

Conclusão

Nesta dissertação conseguimos uma descrição das hipersuperfícies equivariantes mínimas e CMC em \mathbb{S}^n e que fica de acordo com os trabalhos anteriores (veja [4],[10]). Para essa descrição ser totalmente completa, gostaríamos de ter demonstrado a monotonicidade da função Θ , o que parece uma tarefa difícil com as técnicas aqui usadas.

No caso esférico com curvatura média constante, para simplificar o trabalho, reduzimos boa parte do estudo à dimensão 2, isto é, as superfícies em \mathbb{S}^3 .

No caso das hipersuperfícies equivariantes em \mathbb{H}^n , fomos capazes de mostrar a existência de exemplos mergulhados mínimos mas não descrevemos as hipersuperfícies CMC pois a situação se divide em muitos casos dependendo da dimensão e do valor de H .

Em ambos os casos esférico e hiperbólico, a técnica aqui desenvolvida poderia certamente estender-se à situações que não foram tratadas aqui e que poderiam ser o tema de um futuro trabalho.

Referências Bibliográficas

- [1] Alencar, H.; Barros, A.; Palmas, O.; Reyes, J.G.; Santos, W. *$O(m) \times O(n)$ -invariant minimal hypersurfaces in \mathbb{R}^{m+n}* . Annals of Global Analysis and Geometry, Alemanha, v. 27, p. 179 – 199, 2005.
- [2] Anciaux, H. *Legendrian submanifolds foliated by $(n - 1)$ -spheres in \mathbb{S}^{2n+1}* . Matemática Contemporânea, v. 30, p.41 – 61, 2006.
- [3] Barrientos, J. *Superfícies Helicoidais com Curvatura Constante no Espaço de Formas Tridimensional*. Rio de Janeiro, 1995. Tese de Doutorado - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.
- [4] Brito, F.; Leite, M. L. *A Remark on rotational hypersurfaces of \mathbb{S}^n* . Bulletin de La Societe Mathematique de Belgique, Bélgica, v. 42, p. 303 – 318, 1990.
- [5] Carmo, M. do. *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*. Textos Universitários, SBM, 1ª edição, 2005.
- [6] Carmo, M. do. *Geometria Riemanniana*. Projeto Euclides, IMPA, 3ª edição, 2005.
- [7] Hsiang, Wu-Yi, *On generalization of theorems of A.D. Alexandrov and C. Delaunay on hypersurfaces of constant mean curvature*. Duke Math, Journal 49(3) – 1982, 485 – 496.
- [8] Hsiang, Wu-Yi, Huynh, Hsueh-Ling, *Generalized Rotational Hypersurfaces of Constant Mean Curvature in the Euclidean Spaces*. Pacific Journal of Mathematics, v. 130, No 1, 1987.
- [9] Kuhnel, W. *Differential Geometry: Curves - Surfaces - Manifolds*. Student Mathematical Library, American Mathematical Society, 2ª edição, 2005.
- [10] Otsuki, T. *Minimal hypersurface in a Riemannian manifold of constant curvature*. Amer J Math v. 92, p. 145 – 173, 1970.

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)