



**Leandro Tavares da Silva**

**Superfícies Mínimas Cíclicas em  $\mathbb{R}^3$ ,  $S^2 \times \mathbb{R}$  e  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$**

**Dissertação de Mestrado**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Matemática Pura do Departamento de Matemática da PUC-Rio

Orientador: Prof. Henri Anciaux

Rio de Janeiro  
Junho de 2007

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.



**Leandro Tavares da Silva**

**Superfícies Mínimas Cíclicas em  $\mathbb{R}^3$ ,  $S^2 \times \mathbb{R}$  e  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Matemática Pura do Departamento de Matemática do Centro Técnico Científico da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

**Prof. Henri Anciaux**

Orientador

Departamento de Matemática — PUC-Rio

**Prof. Henri Nicolas Guillame Anciaux**

Departamento de Matemática — PUC-Rio

**Prof. Ricardo Sá Earp**

Departamento de Matemática — PUC-Rio

**Prof. Celso José da Costa**

Instituto de Matemática — UFF

**Prof. Detang Zhou**

Instituto de Matemática — UFF

**Prof. José Eugenio Leal**

Coordenador Setorial do Centro Técnico Científico — PUC-Rio

Rio de Janeiro, 29 de Junho de 2007

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

### Leandro Tavares da Silva

Mestrado: Matemática Pura — Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro – PUC–Rio (2005–2007).

Graduação: Licenciatura em Matemática — Universidade Federal Fluminense – UFF (2000–2004).

#### Ficha Catalográfica

Tavares, Leandro

Superfícies Mínimas Cíclicas em  $\mathbb{R}^3$ ,  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$  e  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  / Leandro Tavares da Silva; orientador: Henri Anciaux. — Rio de Janeiro : PUC–Rio, Departamento de Matemática, 2007.

v., 71 f: il. ; 29,7 cm

1. Dissertação (mestrado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática.

Inclui referências bibliográficas.

1. Matemática – Tese. 2. Superfícies Mínimas. 3. Geometria Diferencial. I. Anciaux, Henri. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Matemática. III. Título.

CDD: 510

Para minha mãe Ireny

## Agradecimentos

Muito obrigado Deus, por mais uma etapa da minha vida cumprida! Agradeço por me dares força para chegar até aqui! Agradeço a minha mãe a quem dedico essa dissertação, pelo seu empenho na minha educação, sua dedicação e seu amor por mim e pelo resto de nossa família, agradeço a meu pai e meus irmãos (Cesar, Edson, Josiane e Junior) e suas famílias, irmãos esses que não tenho palavras para descrevê-los, afinal se hoje estou aqui, agradeço muito a eles! Agradeço a minha família em geral, que por mais que não soubessem e não sabem direito o que faço me dão muita força!

Aos amigos, são tantos, graças a Deus, muito obrigado por tudo! Amigos esses que são: Fábio Agra, Marcos Marcelo, Rafael Sorrilha, Reile Gomes e Vinicius Ferreira. Vocês são demais! Agora aos amigos da UFF: Betina Vath, Daniele Garcia, João Luiz, Marcelo Oliveira, Wellington Serra e outros. Agradeço muito ao Eduardo Teles pelo incentivo, ajuda (muita) e as horas de estudo juntos! Muito obrigado também as amigos que fiz na PUC-Rio. Agradeço também a algumas pessoas e suas famílias que sempre me incentivaram: Célio Pacheco, Jorge Silveira, Antonio Agra, Alcir Moura, Isabel Cristina e Daniel Ferreira.

Juliana Freitas muito obrigado pelo seu carinho, companheirismo e dedicação, saiba que você me ajudou muito! Arlene Freitas muito obrigado pelas suas sempre bem-vindas orações e palavras amigas!

Aos meus professores-amigos que sempre me incentivaram, meu muito obrigado! Em especial: Eugênia Tavares, Humberto Bortolossi, Jorge Delgado, Maria do Socorro, Pierre Pétin, Tomas Lewiner e Wallace Tavares. Muito obrigado amigos do CEDERJ: Adriana França, Aline, Jefferson, Mirele, Joyce e também Eliane, Marília, Kátia e Regina!

Agradeço muito ao meu Orientador, Henri Auciaux por sua dedicação, sua amizade e por suas “brincas”! Tudo foi bem aproveitado por mim! Agradeço a PUC-Rio, ao Departamento de Matemática, seus professores e funcionários, em especial a Creuza, Otávio, Orlando e Kátia sempre tão solícitos a ajudar! Agradeço aos professores Ricardo Sá Earp, Celso Costa, que sempre me incentivou, e De Tang por aceitarem fazer parte da minha banca de defesa. Agradeço também a CAPES pelos auxílios concedidos.

## Resumo

Tavares, Leandro; Anciaux, Henri. **Superfícies Mínimas Cíclicas em  $\mathbb{R}^3$ ,  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$  e  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$** . Rio de Janeiro, 2007. 71p. Dissertação de Mestrado — Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Nesse trabalho descrevemos superfícies mínimas mergulhadas em espaços produtos  $M \times \mathbb{R}$ , onde  $M = \mathbb{R}^2, \mathbb{S}^2$  e  $\mathbb{H}^2$  que são folheadas por geodésicas (superfícies *regradas*) e curvas de curvatura constante de  $M$  (superfícies *cíclicas*). Em  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ , ou seja, em  $\mathbb{R}^3$  vamos demonstrar que só existem duas superfícies mínimas cíclicas, que são o catenóide e o exemplo de Riemann. Em seguida caracterizamos as superfícies mínimas cíclicas em  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$  que formam uma família a dois parâmetros e por fim exibimos três famílias de dois parâmetros de superfícies mínimas cíclicas em  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ .

## Palavras-chave

Superfícies Mínimas. Geometria Diferencial.

## Abstract

Tavares, Leandro; Anciaux, Henri. **Cyclic Minimal Surfaces in  $\mathbb{R}^3$ ,  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$  and  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$** . Rio de Janeiro, 2007. 71p. MsC Thesis — Department of Mathematics, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

In this work we describe minimal surfaces embedded in product spaces  $M \times \mathbb{R}$ , where  $M = \mathbb{R}^2, \mathbb{S}^2$  and  $\mathbb{H}^2$  which are foliated by geodesics (*ruled surfaces*) and curves of  $M$  with constant curvature (*cyclic surfaces*). In  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ , i.e.  $\mathbb{R}^3$ , we shall prove that there exist only two minimal cyclic surfaces which are the catenoid and the Riemann example. Then we characterize minimal cyclic surfaces in  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ ; they form a two-parameter family. Finally we exhibit three two-parameter families of minimal cyclic surfaces in  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ .

## Keywords

Minimal Surfaces. Differential Geometry.





## Sumário

1	Preliminares	<b>9</b>
1.1	Teoria das Curvas	9
1.2	Teorias das Superfícies	13
2	Caracterização das Superfícies Mínimas Cíclicas em $\mathbb{R}^3$	<b>21</b>
2.1	Superfícies Regradas: O Helicóide	21
2.2	Superfícies Mínimas de Revolução: O Catenóide	22
2.3	Superfícies Cíclicas com Círculos Horizontais: Exemplos de Riemann	24
2.4	Superfícies mínimas cíclicas em $\mathbb{R}^3$ : O caso geral	30
2.5	Conclusão	33
3	Caracterização das Superfícies Mínimas Cíclicas em $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$	<b>35</b>
3.1	Exemplos de superfícies mínimas cíclicas folheadas por grandes círculos	35
3.2	O Catenóide	37
3.3	O caso geral	40
3.4	Conclusão	45
4	Exemplos de Superfícies Mínimas Cíclicas em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$	<b>46</b>
4.1	Exemplos de superfícies mínimas folheadas por geodésicas	46
4.2	O Catenóide	48
4.3	Superfícies Mínimas folheadas por curvas de curvatura constante maior que 1	51
4.4	O Catenóide folheado por curvas de curvatura constante menor que 1	56
4.5	Superfícies Mínimas folheadas por curvas de curvatura constante menor que 1	58
4.6	Conclusão	68
	Referências Bibliográficas	<b>70</b>

# 1 Preliminares

## 1.1 Teoria das Curvas

### 1.1.1 Curvas em $\mathbb{R}^3$

**Definição 1** Uma curva diferenciável parametrizada é uma aplicação diferenciável  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  de um intervalo aberto  $I = (a, b)$  de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}^3$  e seu traço é a imagem dessa aplicação.

**Definição 2** Uma curva diferenciável parametrizada  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  é chamada regular se  $\alpha'(t) \neq 0 \forall t \in I$ .

**Definição 3** O comprimento de arco de uma curva regular  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ , a partir de um dado  $t_0 \in I$ , é:

$$s(t) = \int_{t_0}^t |\alpha'(t)| dt,$$

onde

$$|\alpha'(t)| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}$$

é o comprimento do vetor  $\alpha'(t)$ . Como  $\alpha'(t) \neq 0$ , o comprimento de arco  $s$  é uma função diferenciável de  $t$  e  $\frac{ds}{dt} = |\alpha'(t)|$

**Definição 4** Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma curva diferenciável parametrizada. A curva  $\alpha$  diz-se parametrizada por comprimento de arco se  $|\alpha'(t)| = 1$

**Definição 5** Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma curva parametrizada pelo comprimento de arco  $s \in I$ . O número  $|\alpha''(s)| = k(s)$  chama-se curvatura de  $\alpha$  em  $s$ .

Assim  $k(s) \neq 0$ , fica bem definido pela equação  $\alpha''(s) = k(s)\mathbf{n}(s)$ , um vetor  $\mathbf{n}(s)$  na direção de  $\alpha''(s)$ . Temos também que  $\alpha''(s)$  é normal a  $\alpha'(s)$ , pois derivando  $\langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle = 1$  obtemos  $\langle \alpha''(s), \alpha'(s) \rangle = 0$ . Daí  $\mathbf{n}(s)$  é normal a  $\alpha'(s)$  e é chamado *vetor normal* em  $s$ . Os vetores  $\alpha'(s)$  e  $\mathbf{n}(s)$  determinam um plano chamado *plano osculador* em  $s$ .

Para definirmos completamente o *triedro de Frenet* assumiremos sempre que  $k(s) \neq 0$ . Com isso podemos indicar por  $\mathbf{t}(s) = \alpha'(s)$  o vetor tangente unitário de  $\alpha$  em  $s$ . Portanto,  $\mathbf{t}'(s) = k(s)\mathbf{n}(s)$ .

O vetor unitário  $\mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}(s)$  é normal ao plano osculador e é chamado *vetor binormal* em  $s$ . Para determinar  $\mathbf{b}'(s)$  observamos que  $\mathbf{b}'(s)$  é normal a  $\mathbf{b}(s)$  e

$$\mathbf{b}'(s) = \mathbf{t}'(s) \times \mathbf{n}(s) + \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}'(s),$$

isto é,  $\mathbf{b}'(s)$  é normal a  $\mathbf{t}(s)$ . Concluimos, então, que  $\mathbf{b}'(s)$  é colinear a  $\mathbf{n}(s)$  e, assim, podemos escrever:

$$\mathbf{b}'(s) = \tau(s)\mathbf{n}(s)$$

onde  $\tau(s)$  é alguma função.

Observamos que  $\mathbf{n}$  é normal a  $\mathbf{b}$  e a  $\mathbf{t}$ , ou seja,  $\mathbf{n} = \mathbf{b} \times \mathbf{t}$ , então a derivada  $\mathbf{n}'$  é:

$$\mathbf{n}'(s) = \mathbf{b}'(s) \times \mathbf{t}(s) + \mathbf{b}(s) \times \mathbf{t}'(s) = -\tau \mathbf{b}(s) - k\mathbf{t}(s)$$

Assim podemos destacar as equações de Frenet:

$$\begin{cases} \mathbf{t}' = k\mathbf{n} \\ \mathbf{n}' = -k\mathbf{t} - \tau\mathbf{b} \\ \mathbf{b}' = \tau \mathbf{n} \end{cases}$$

**Definição 6** Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma curva parametrizada pelo comprimento de arco  $s$  tal que  $a''(s) \neq 0$ ,  $s \in I$ . O número  $\tau(s)$  definido por  $\mathbf{b}'(s) = \tau(s)\mathbf{n}(s)$  é chamado *torção* de  $\alpha$  em  $s$ .

### Teorema 1 (Teorema Fundamental da Teoria Local das Curvas)

Dadas as funções diferenciáveis  $k(s) > 0$  e  $\tau(s)$ ,  $s \in I$ , existe uma curva parametrizada regular  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $s$  é o comprimento de arco,  $k(s)$  é a curvatura e  $\tau(s)$  é a torção de  $\alpha$ . Além disso, qualquer outra curva  $\tilde{\alpha}$ , satisfazendo as mesmas condições, difere de  $\alpha$  por um movimento rígido; isto é, existe uma transformação linear ortogonal  $\rho$  de  $\mathbb{R}^3$ , com determinante positivo, e um vetor  $c$  tal que  $\tilde{\alpha} = \rho \circ \alpha + c$

**Observação 1** As considerações anteriores demonstram a primeira parte do teorema, essa que usaremos nos próximos capítulos. O principal ingrediente da recíproca é o teorema de existência e unicidade de soluções de equações diferenciais ordinárias.

## 1.1.2

**Curvas no espaço de Minkowski- $\mathbb{R}_1^3$** 

**Definição 7 (Espaço de Minkowski)** O espaço  $\mathbb{R}_1^3$ , chamado espaço de Minkowski ou espaço de Lorentz, é definido como o espaço  $\mathbb{R}^3$  usual, porém é dotado do produto interno:

$$\langle X, Y \rangle_1 = -x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

onde  $X = (x_1, x_2, x_3)$  e  $Y = (y_1, y_2, y_3)$ .

**Definição 8** Um vetor  $X$  é chamado:

tipo-espaço, se	$\langle X, X \rangle_1 > 0$ ,
tipo-tempo, se	$\langle X, X \rangle_1 < 0$ ,
tipo-luz ou isotrópico ou vetor nulo, se	$\langle X, X \rangle_1 = 0$ mas $X \neq 0$

**Definição 9** Uma curva regular  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}_1^3$  é chamada:

tipo-espaço, se	$\langle \alpha', \alpha' \rangle_1 > 0$ ,
tipo-tempo, se	$\langle \alpha', \alpha' \rangle_1 < 0$ ,
tipo-luz ou isotrópica ou curva nula, se	$\langle \alpha', \alpha' \rangle_1 = 0$

**Definição 10** O comprimento de arco de uma curva regular tipo-tempo  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ , a partir de um dado  $t_0 \in I$ , é:

$$s(t) = - \int_{t_0}^t |\alpha'(t)| dt,$$

onde

$$|\alpha'(t)|_1 = \sqrt{-(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}$$

é o comprimento do vetor  $\alpha'(t)$ . Como  $\alpha'(t) \neq 0$ , o comprimento de arco  $s$  é uma função diferenciável de  $t$  e  $\frac{ds}{dt} = |\alpha'(t)|_1$ .

**Definição 11** Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}_1^3$  uma curva tipo-tempo. Diremos que a curva  $\alpha$  é parametrizada pelo comprimento de arco em  $\mathbb{R}_1^3$  se  $|\alpha'(t)|_1 = -1$ .

**Definição 12** Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}_1^3$  uma curva tipo-espaço. Diremos que a curva  $\alpha$  é parametrizada pelo comprimento de arco em  $\mathbb{R}_1^3$  se  $|\alpha'(t)|_1 = 1$ .

**Definição 13** Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}_1^3$  uma curva tipo-tempo ou tipo-espaço, parametrizada pelo comprimento de arco  $s \in I$ . Chamaremos o número  $|\alpha''(s)|_1 = k(s)$  de curvatura de  $\alpha$  em  $s$ .

**Teorema 2** *Se  $k \equiv 0$  então  $\alpha$  é uma linha reta.*

Nos pontos onde  $k \neq 0$ , fica bem definido pela equação  $\alpha''(s) = k(s)\mathbf{n}(s)$  um vetor unitário  $\mathbf{n}(s)$ ; indicaremos por  $\mathbf{t}(s) = \alpha'$  o vetor tangente unitário de  $\alpha$  em  $s$ .

**Definição 14** *Seja  $e_1, e_2$  e  $e_3$ , três vetores. Para  $e_1$  e  $e_2$  temos  $\langle e_i, e_i \rangle_1 = \pm 1$  e  $\langle e_1, e_2 \rangle_1 = 0$ , o terceiro vetor é definido por  $e_3 := e_1 \times e_2$ , portanto  $\{e_1, e_2, e_3\}$  é uma base ortonormal de  $\mathbb{R}_1^3$ . Definimos  $\epsilon, \eta \in \{1, -1\}$  por  $\langle e_1, e_1 \rangle_1 = \epsilon$ ,  $\langle e_1, e_2 \rangle_1 = \eta$  e  $\langle e_3, e_3 \rangle_1 = -\epsilon\eta$ . Chamamos  $e_1, e_2$  e  $e_3$  de  $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$  respectivamente.*

**Lema 1** *Seja  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}_1^3$ , então*

$$\mathbf{v} = \epsilon \langle \mathbf{v}, \mathbf{t} \rangle_1 \mathbf{t} + \eta \langle \mathbf{v}, \mathbf{n} \rangle_1 \mathbf{n} - \epsilon\eta \langle \mathbf{v}, \mathbf{b} \rangle_1 \mathbf{b},$$

*isto é, cada vetor em  $\mathbb{R}_1^3$  pode ser decomposto de uma única maneira em três componentes.*

**Prova:** Temos que  $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$  é uma base, assim podemos escrever  $\mathbf{v} = v_1\mathbf{t} + v_2\mathbf{n} + v_3\mathbf{b}$

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{t} \rangle_1 = v_1 \langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle_1 + v_2 \langle \mathbf{n}, \mathbf{t} \rangle_1 + v_3 \langle \mathbf{b}, \mathbf{t} \rangle_1$$

Temos que  $\langle \mathbf{n}, \mathbf{t} \rangle = \langle \mathbf{b}, \mathbf{t} \rangle = 0$ , assim:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{v}, \mathbf{t} \rangle_1 &= \epsilon v_1 \\ \langle \mathbf{v}, \mathbf{n} \rangle_1 &= v_1 \langle \mathbf{t}, \mathbf{n} \rangle_1 + v_2 \langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle_1 + v_3 \langle \mathbf{b}, \mathbf{n} \rangle_1 \\ \langle \mathbf{v}, \mathbf{n} \rangle_1 &= \eta v_2 \\ \langle \mathbf{v}, \mathbf{b} \rangle_1 &= v_1 \langle \mathbf{t}, \mathbf{b} \rangle_1 + v_2 \langle \mathbf{n}, \mathbf{b} \rangle_1 + v_3 \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle_1 \\ \langle \mathbf{v}, \mathbf{b} \rangle_1 &= -\epsilon\eta v_3 \end{aligned}$$

concluimos que:

$$\mathbf{v} = \epsilon \langle \mathbf{v}, \mathbf{t} \rangle_1 \mathbf{t} + \eta \langle \mathbf{v}, \mathbf{n} \rangle_1 \mathbf{n} - \epsilon\eta \langle \mathbf{v}, \mathbf{b} \rangle_1 \mathbf{b}$$

■

**Definição 15** *Seja  $\alpha$  uma curva tipo-tempo ou tipo-espaço, parametrizada pelo comprimento de arco que satisfaz  $\langle \alpha'', \alpha'' \rangle_1 \neq 0$ . Assim as equações de*

Frenet são definidas como:

$$\begin{cases} \mathbf{t}' = \eta k \mathbf{n} \\ \mathbf{n}' = -\epsilon k \mathbf{t} + \epsilon \eta \tau \mathbf{b} \\ \mathbf{b}' = \eta \tau \mathbf{n} \end{cases}$$

**Teorema 3 (Teorema Fundamental das Curvas em  $\mathbb{R}_1^3$ )** Dadas as funções diferenciáveis  $k(s) > 0$  e  $\tau(s)$ ,  $s \in I$ , existe uma curva parametrizada regular  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}_1^3$  tal que  $s$  é o comprimento de arco,  $k(s)$  é a curvatura e  $\tau(s)$  é a torção de  $\alpha$ .

## 1.2

### Teorias das Superfícies

**Definição 16** Um subconjunto  $S \subset \mathbb{R}^3$  é uma superfície regular se, para cada  $p \in S$ , existe uma vizinhança  $V$  de  $p$  em  $\mathbb{R}^3$  e uma aplicação  $X : U \rightarrow V \cap S$  de um aberto  $U$  de  $\mathbb{R}^2$  sobre  $V \cap S \subset \mathbb{R}^3$  tal que:

1.  $X$  é de classe  $C^\infty$ ;
2.  $X$  é um homeomorfismo (ou seja, sua inversa  $X^{-1} : V \cap S \rightarrow U$  é contínua);
3. Para qualquer  $q \in U$ , a diferencial  $dX_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  é injetiva.

**Definição 17** Definimos o espaço tangente a uma superfície  $S$  num ponto  $p$ , que denotamos por  $T_p S$ , como sendo o conjunto dos vetores tangentes, no ponto  $p$ , das curvas cujo traço esteja em  $S$ :

$$T_p S = \{\alpha'(0) | \alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S \text{ é } C^\infty \text{ e } \alpha(0) = p\}$$

**Definição 18** A primeira forma fundamental de  $S$  em  $p \in S$  é a forma quadrática  $I_p : T_p S \rightarrow \mathbb{R}^+$  definida por  $I_p(v) = \langle v, v \rangle_p$ , onde  $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$  é a restrição a  $T_p S$  do produto usual em  $\mathbb{R}^3$ . Se  $X(u, v)$  for uma parametrização de  $S$  e  $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$  uma curva diferenciável, temos

$$\begin{aligned} I_{\alpha(t)}(\alpha'(t)) &= \langle u'(t)X_u + v'(t)X_v, u'(t)X_u + v'(t)X_v \rangle_{\alpha(t)} \\ &= I_{\alpha(t)}(X_u)(u'(t))^2 + 2\langle X_u, X_v \rangle_{\alpha(t)} u'(t)v'(t) + I_{\alpha(t)}(X_v)(v'(t))^2 \\ &= E(u'(t))^2 + 2Fu'(t)v'(t) + G(v'(t))^2, \end{aligned}$$

onde  $E$ ,  $F$  e  $G$  são os coeficientes da primeira forma fundamental para a parametrização  $X(u, v)$ , definidos por:

$$E = \langle X_u, X_u \rangle$$

$$F = \langle X_u, X_v \rangle$$

$$G = \langle X_v, X_v \rangle$$

**Definição 19** Seja  $S \subset \mathbb{R}^3$  uma superfície, diremos que  $S$  é orientável se existir uma aplicação diferenciável  $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$  tal que  $N(p)S$  seja normal unitário a  $S$  em  $p$ ,  $N$  é chamado aplicação de Gauss de  $S$ .

A diferencial  $dN_p$  de  $N$  em  $p \in S$  é uma aplicação linear de  $T_pS$  em  $T_{N(p)}\mathbb{S}^2$ . Temos que  $T_pS$  e  $T_{N(p)}\mathbb{S}^2$  são o mesmo espaço vetorial pois ambos são o complementar ortogonal da reta gerada por  $N$ , assim  $dN_p$  pode ser olhada como uma aplicação linear em  $T_pS$ .

**Proposição 1** A diferencial  $dN_p : T_pS \rightarrow T_pS$  da aplicação de Gauss é uma aplicação linear auto-adjunta.

**Definição 20** O máximo da curvatura normal  $k_1$  e o mínimo da curvatura normal  $k_2$ , são chamados curvaturas principais em  $p$ .

**Definição 21** Seja  $p \in S$  e seja  $dN_p : T_pS \rightarrow T_pS$  a diferencial da aplicação de Gauss. O negativo da metade do traço de  $dN_p$  é chamado a curvatura média  $H$  de  $S$  em  $p$ . Em termos das curvaturas principais  $k_1$  e  $k_2$  temos

$$H := \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$$

**Definição 22** Seja  $c$  uma curva regular em  $S$  que passa por  $p \in S$ ,  $k$  a curvatura de  $c$  em  $p$ , e  $\cos \theta = \langle n, N \rangle$ , onde  $n$  é o vetor normal a  $c$  e  $N$  é o vetor normal a  $S$  em  $p$ . O número  $k_n = k \cos \theta$  é chamado a curvatura normal de  $c$  em  $p$ .

A diferencial  $dN_p : T_pS \rightarrow T_pS$  por ser uma aplicação auto-adjunta nos permite associar  $dN_p$  a uma forma quadrática, assim temos a seguinte definição:

**Definição 23** A forma quadrática  $II_p$ , definida em  $T_pS$  por  $II_p(v) = -\langle dN_p(v), v \rangle$ , é chamada a segunda forma fundamental de  $S$  em  $p$ .

Dada uma parametrização  $X(u, v)$  em um ponto  $p \in S$  de uma superfície  $S$ , seja  $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$  uma curva parametrizada em  $S$ , com  $\alpha(0) = p$ , vamos considerar que todas funções abaixo têm seus valores no ponto  $p$ .

Observamos que  $\alpha' = X_u u' + X_v v'$  e

$$dN(\alpha') = N'(u(t), v(t)) = N_u u' + N_v v'.$$

Como  $N_u$  e  $N_v$  pertencem a  $T_p S$ , escrevemos

$$N_u = a_{11} X_u + a_{21} X_v, \quad (1-1)$$

$$N_v = a_{12} X_u + a_{22} X_v, \quad (1-2)$$

e assim,

$$dN(\alpha') = (a_{11} u' + a_{12} v') X_u + (a_{21} u' + a_{22} v') X_v;$$

logo,

$$dN \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}$$

Portanto na base  $\{X_u, X_v\}$ ,  $dN$  é dada pela matriz  $(a_{ij})$ ,  $i, j = 1, 2$ . Notamos que essa matriz não é necessariamente simétrica, a não ser que  $\{X_u, X_v\}$  seja uma base ortonormal.

Por outro lado, a expressão da segunda forma fundamental na base  $\{X_u, X_v\}$  é dado por

$$\begin{aligned} II_p &= -\langle dN(\alpha'), \alpha' \rangle = -\langle N_u u' + N_v v', X_u u' + X_v v' \rangle \\ &= e(u')^2 + 2f u' v' + g(v')^2, \end{aligned}$$

onde  $e$ ,  $f$  e  $g$  são os *coeficientes da segunda forma fundamental* nas coordenadas  $(u, v)$ ; agora já que  $\langle N, X_u \rangle = \langle N, X_v \rangle = 0$ ,

$$\begin{aligned} e &= -\langle N_u, X_u \rangle = \langle N, X_{uu} \rangle, \\ f &= -\langle N_v, X_u \rangle = \langle N, X_{uv} \rangle = \langle N, X_{vu} \rangle = -\langle N_u, X_v \rangle \\ g &= -\langle N_v, X_v \rangle = \langle N, X_{vv} \rangle. \end{aligned}$$

Vamos agora determinar a matriz  $(a_{ij})$ ,  $i, j = 1, 2$  em termos de  $e, f, g$ . As entradas da matriz são determinadas pelas igualdades (1-1) e (1-2). Formando o produto interno de cada uma dessas igualdades com  $X_u$  e  $X_v$  obtemos:

$$\begin{aligned} f &= -a_{11} F - a_{21} G, \\ f &= -a_{12} E - a_{22} F, \\ e &= -a_{11} E - a_{21} F, \\ g &= -a_{12} F - a_{22} G, \end{aligned}$$



que sob a forma de matricial escrevemos

$$\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

ou seja,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1}$$

donde,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \quad (1-3)$$

Calculando o traço de (1-3) temos:

$$H = \text{Tr} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{EG - F^2} \text{Tr} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \text{Tr} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2},$$

isto é,

$$H = \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2}$$

**Definição 24** Uma superfície parametrizada regular é chamada mínima se a sua curvatura média é identicamente nula.

**Observação 2** Seja  $S$  uma superfície mínima, temos que  $H \equiv 0$ , mas  $H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$ , assim  $k_1 = -k_2$

Vamos entender o emprego da palavra *mínima* para tais superfícies, assim vamos introduzir a noção de variação. Seja  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma superfície parametrizada regular, escolhamos um domínio limitado  $D \subset U$  e uma função diferenciável  $h : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$ , onde  $\bar{D}$  é a união do domínio  $D$  e sua fronteira  $\partial D$ . A *variação normal* de  $X(\bar{D})$ , determinada por  $h$ , é a aplicação dada por:

$$\varphi : \bar{D} \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\varphi(u, v, t) = X(u, v) + th(u, v)N(u, v), (u, v) \in D, t \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$

Para cada  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  fixado, a aplicação  $X^t : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por

$$X(u, v) = \varphi(u, v, t)$$

é uma superfície parametrizada com

$$\frac{\partial x^t}{\partial u} = X_u + thN_u + th_uN,$$

$$\frac{\partial x^t}{\partial v} = X_v + thN_v + th_vN.$$

Assim, denotamos por  $E^t$ ,  $F^t$ ,  $G^t$  os coeficientes da primeira forma fundamental de  $X^t$ , obtemos:

$$E^t = E + th(\langle X_u, N_u \rangle + \langle X_u, N_u \rangle) + t^2h^2\langle N_u, N_u \rangle + t^2h_uh_u$$

$$F^t = F + th(\langle X_u, N_v \rangle + \langle X_v, N_u \rangle) + t^2h^2\langle N_u, N_v \rangle + t^2h_uh_v$$

$$G^t = G + th(\langle X_v, N_v \rangle + \langle X_v, N_v \rangle) + t^2h^2\langle N_v, N_v \rangle + t^2h_vh_v$$

Utilizando o fato de que

$$\langle X_u, N_u \rangle = -e, \langle X_u, N_v \rangle + \langle X_v, N_u \rangle = -2f, \langle X_v, N_v \rangle = -g,$$

e que a curvatura média  $H$  é dada por

$$H = \frac{1}{2} \frac{Eg - 2Ff + Ge}{EG - F^2}$$

obtemos

$$\begin{aligned} E^tG^t - (F^t)^2 &= EG - F^2 - 2th(Eg - 2Ff + Ge) + R \\ &= (EG - F^2)(1 - 4thH) + R \end{aligned}$$

onde  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{R}{t} = 0$

Temos então que  $\varepsilon$  é suficientemente pequeno,  $X^t$  é uma superfície parametrizada regular. Além disso a área  $A(t)$  de  $X^t(\bar{D})$  é

$$\begin{aligned} A(t) &= \int_D \sqrt{E^tG^t - (F^t)^2} dudv \\ &= \int_{\bar{D}} \sqrt{1 - 4thH + \bar{R}\sqrt{EG - F^2}} dudv, \end{aligned}$$

onde  $\bar{R} = R/(EG - F^2)$ . Assim, se  $\varepsilon$  é pequeno,  $A$  é uma função diferenciável e a sua derivada em  $t = 0$  é

$$A'(0) = - \int_{\bar{D}} 2hH\sqrt{EG - F^2} dudv$$

Agora podemos justificar o emprego da palavra mínima para superfícies

com curvatura média nula.

**Proposição 2** *Seja  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma superfície parametrizada regular e seja  $D \subset U$  um domínio limitado em  $U$ . Então  $X$  é mínima se e somente se  $A'(0) = 0$  para todo  $\bar{D}$  e toda variação normal de  $X(\bar{D})$ .*

Assim, qualquer região limitada  $X(\bar{D})$  de uma superfície mínima é um ponto crítico para a função área de qualquer variação normal de  $X(\bar{D})$ . Devemos notar que esse ponto crítico pode não ser um mínimo e que isso faz o uso da palavra mínima um pouco estranha, porém esta terminologia é consagrada pelo uso.

**Definição 25** *Vamos definir em  $\mathbb{R}^3$ :*

$$\begin{aligned}\bar{e} &= \langle X_u \times X_v, X_{uu} \rangle = (X_u, X_v, X_{uu}) \\ \bar{f} &= \langle X_u \times X_v, X_{uv} \rangle = (X_u, X_v, X_{uv}) \\ \bar{g} &= \langle X_u \times X_v, X_{vv} \rangle = (X_u, X_v, X_{vv}) \\ \bar{H} &= \bar{e}G - 2\bar{f}F + \bar{g}E\end{aligned}$$

Onde o vetor normal de uma superfície parametrizada  $X(u, v)$  é  $X_u \times X_v$

**Lema 2**  *$H$  anula-se se e somente se  $\bar{H}$  anula-se.*

**Prova:** Temos que  $H = \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2}$ , como  $e = \frac{(X_u, X_v, X_{uu})}{|X_u \times X_v|}$  e  $\bar{e} = (X_u, X_v, X_{uu})$ , logo  $\bar{e} = |X_u \times X_v|e$  e analogamente  $\bar{f} = |X_u \times X_v|f$  e  $\bar{g} = |X_u \times X_v|g$ . Assim  $H = \frac{1}{2} \frac{\bar{e}G - 2\bar{f}F + \bar{g}E}{EG - F^2}$ , mas  $\bar{H} = \bar{e}G - 2\bar{f}F + \bar{g}E$ , portanto  $H = \frac{\bar{H}}{2(EG - F^2)^{\frac{3}{2}}}$ . ■

**Corolário 1** *A superfície é mínima se e somente se  $\bar{H} \equiv 0$ .*

**Observação 3** *Agora sempre usaremos a notação  $\bar{e}$ ,  $\bar{f}$ ,  $\bar{g}$  e  $\bar{H}$ .*

### 1.2.1

#### Superfícies em uma Variedade Riemaniana

**Definição 26** Uma variedade diferenciável de dimensão  $n$  é o conjunto  $M$  junto com uma família  $(M_i)_{i \in I}$  de subconjuntos tais que:

1.  $M = \bigcup_{i \in I} M_i$
2. Para todo  $i \in I$  existe uma aplicação injetiva  $\varphi_i : M_i \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que  $\varphi_i(M_i)$  é aberto em  $\mathbb{R}^n$
3. Para  $M_i \cap M_j \neq \emptyset$ ,  $\varphi_i(M_i \cap M_j)$  é aberto em  $\mathbb{R}^n$ , e a composição

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(M_i \cap M_j) \rightarrow \varphi_j(M_i \cap M_j)$$

é diferenciável para  $i, j$  arbitrários.

**Observação 4** A partir de agora quando nos referirmos a  $M$ , variedade de dimensão  $n$ , escreveremos apenas  $M^n$ .

**Definição 27** Seja  $M$  uma variedade diferenciável. Uma aplicação diferenciável  $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  é chamada uma curva diferenciável em  $M$ . Suponhamos que  $\alpha(0) = p \in M$ , e seja  $\mathcal{F}$  o conjunto das funções de  $M$  diferenciáveis em  $p$ . A função  $\alpha'(0) : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\alpha'(0)f = \left. \frac{d(f \circ \alpha)}{dt} \right|_{t=0}, \quad f \in \mathcal{F}.$$

é o vetor tangente à curva  $\alpha$  em  $t = 0$ . Um vetor tangente em  $p$  é o vetor tangente em  $t = 0$  de alguma curva  $\alpha(-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  com  $\alpha(0) = p$ . Indicamos o conjunto de vetores tangentes a  $M$  em  $p$  por  $T_p M$ .

**Definição 28** Sejam  $M^n$  e  $N^n$  variedades diferenciáveis. Chamamos de imersão a aplicação diferenciável  $\varphi : M \rightarrow N$  se  $d\varphi_p : T_p M \rightarrow T_{\varphi(p)} N$  é injetiva para todo  $p \in M$ . Além disso se  $\varphi$  é homeomorfismo sobre  $\varphi(M) \subset N$ , onde  $\varphi(M)$  tem a topologia induzida por  $N$ , diz-se que  $\varphi$  é um mergulho. Se  $M \subset N$  é um mergulho, diz-se que  $M$  é uma subvariedade de  $N$ .

**Definição 29** O conjunto

$$\mathbb{S}^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$$

é chamado a esfera em  $\mathbb{R}^3$ .

**Definição 30** *O conjunto*

$$\mathbb{H}^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}_1^3 \mid -x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = -1, x_1 > 0\},$$

*munido da restrição do produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$  é chamado modelo do hiperbolóide do plano hiperbólico.*

**Teorema 4** *A restrição de  $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$  a  $\mathbb{H}^2$  é positiva, isto é,  $(\mathbb{H}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle_1)$  é uma superfície riemanniana.*

### Exemplos de variedades de dimensão 3

- $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$  com métrica induzida de  $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ .
- $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  com métrica induzida de  $\mathbb{R}_1^4 = \mathbb{R}_1^3 \times \mathbb{R}$ .

**Definição 31** *Seja  $X : U \rightarrow \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$  uma parametrização local de uma superfície  $S$  de  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ , e  $\mathbf{N}$  um vetor normal não nulo à superfície. Vamos definir:*

$$\begin{aligned}\bar{e} &= \langle \mathbf{N}, X_{uu} \rangle \\ \bar{f} &= \langle \mathbf{N}, X_{uv} \rangle \\ \bar{g} &= \langle \mathbf{N}, X_{vv} \rangle \\ \bar{H} &= \bar{e}G - 2\bar{f}F + \bar{g}E\end{aligned}$$

**Definição 32** *Seja  $X : U \rightarrow \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  uma parametrização local de uma superfície  $S$  de  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ , e  $\mathbf{N}$  um vetor normal não nulo à superfície. Vamos definir:*

$$\begin{aligned}\bar{e} &= \langle \mathbf{N}, X_{uu} \rangle_1 \\ \bar{f} &= \langle \mathbf{N}, X_{uv} \rangle_1 \\ \bar{g} &= \langle \mathbf{N}, X_{vv} \rangle_1 \\ \bar{H} &= \bar{e}G - 2\bar{f}F + \bar{g}E\end{aligned}$$

**Proposição 3**  *$S$  é mínima se e somente se  $\bar{H} = 0$ .*

## 2

### Caracterização das Superfícies Mínimas Cíclicas em $\mathbb{R}^3$

Nesse capítulo estamos interessados nas superfícies folheadas por curvas de curvatura constante, ou seja, retas e círculos. Inicialmente apresentaremos as superfícies mínimas regradas que podem ser vistas como um caso limite de cíclicas no sentido que uma linha reta tem  $k = 0$ , ou seja, “raio infinito” em seguida daremos uma caracterização das superfícies mínimas cíclicas. Parte desses resultados encontra-se em [NI1].

#### 2.1

##### Superfícies Regradas: O Helicóide

Em  $\mathbb{R}^3$  pode-se demonstrar que as únicas superfícies regradas que também são mínimas são o plano e o helicóide, confira [DC1].

O helicóide é uma superfície gerada por uma reta que gira em um plano horizontal que esta subindo; localmente ela pode ser parametrizada por:

$$\begin{aligned} X_{ab} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\longmapsto (v \cos au, v \sin au, bu) \end{aligned}$$

onde  $a \neq 0$  e  $b \neq 0$ .

O plano por sua vez aparece como dois casos limites do helicóide:

- a)  $X_{a0}$  - Reta girando sem subir, onde  $a \neq 0$ : plano horizontal
- b)  $X_{0b}$  - Reta subindo sem girar, onde  $b \neq 0$ : plano vertical

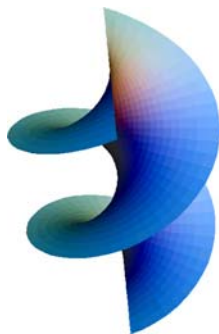


Figura 2.1: O Helicóide

## 2.2

### Superfícies Mínimas de Revolução: O Catenóide

Seja uma superfície de revolução, localmente ela pode ser parametrizada por:

$$\begin{aligned} X : I \times (0, 2\pi) &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\longmapsto (R(u) \cos v, R(u) \sin v, u) \end{aligned}$$

onde  $I$  é um intervalo e  $R : I \longrightarrow \mathbb{R}$ , assim temos as primeiras derivadas de  $X$ :

$$\begin{aligned} X_u &= (R' \cos v, R' \sin v, 1), \\ X_v &= (-R \sin v, R \cos v, 0), \end{aligned}$$

E a primeira forma fundamental:

$$\begin{aligned} E &= (R')^2 + 1 \\ F &= 0 \\ G &= R^2 \end{aligned}$$

Agora calcularemos as segundas derivadas parciais de  $X$ :

$$\begin{aligned} X_{uu} &= (R'' \cos v, R'' \sin v, 0) \\ X_{uv} &= (-R' \sin v, R' \cos v, 0) \\ X_{vv} &= (-R \cos v, -R \sin v, 0) \end{aligned}$$

Precisamos calcular o vetor normal:

$$\begin{aligned} X_u \times X_v &= (-R \cos v, -R \sin v, RR'), \\ |X_u \times X_v| &= \sqrt{R^2(1 + (R')^2)} = R\sqrt{1 + (R')^2}, \end{aligned}$$

e finalmente temos então  $\mathbf{N}$ :

$$\mathbf{N} = \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|} = \frac{(-\cos v, -\sin v, R')}{\sqrt{1 + (R')^2}}$$

Com as segundas derivadas parciais de  $X$  e seu vetor normal obtemos a segunda forma fundamental:

$$\begin{aligned} e &= \langle X_{uu}, \mathbf{N} \rangle = \frac{-R''}{\sqrt{1 + (R')^2}} \\ f &= \langle X_{uv}, \mathbf{N} \rangle = 0 \\ g &= \langle X_{vv}, \mathbf{N} \rangle = \frac{R}{\sqrt{1 + (R')^2}} \end{aligned}$$

Como estamos interessados nas superfícies mínimas,

$$H = \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + Eg}{EG - F^2} = 0 \iff eG + Eg = 0$$

pois  $f = 0$ , assim

$$\begin{aligned} eG + Eg &= -R''R^2 + R((R')^2 + 1) = 0 \\ -R''R^2 + R(R')^2 + R &= 0 \end{aligned}$$

Dividindo por  $R$ , temos:

$$-R''R + (R')^2 + 1 = 0$$

que reescrevemos fica:

$$RR'' = 1 + (R')^2$$

para resolver essa equação vamos multiplica-lá por  $R'$ , assim

$$\frac{R'R''}{1 + (R')^2} = \frac{R'}{R} \implies \int \frac{R'dR'}{1 + (R')^2} = \int \frac{dR}{R}$$

resolvendo essas integrais temos

$$\frac{1}{2} \ln(1 + (R')^2) = \ln(R) + c'$$

e portanto,

$$\sqrt{1 + (R')^2} = cR \quad c = e^{c'} \text{ é positivo e } c' \text{ é qualquer,}$$

logo,

$$\begin{aligned} 1 + (R')^2 &= c^2 R^2 \\ (R')^2 &= c^2 R^2 - 1 \end{aligned}$$



agora podemos ter a expressão de  $R$  explicitamente:

$$R' = \sqrt{c^2 R^2 - 1} \implies R(u) = \frac{1}{c} \cosh cu$$

Assim temos  $X(u, v) = (\frac{1}{c} \cosh cu \cos v, \frac{1}{c} \cosh cu \sin v, u)$ . Vários valores do parâmetro  $c$  correspondem a dilatações da mesma superfície, portanto existe uma única superfície de revolução mínima, o *catenóide*.

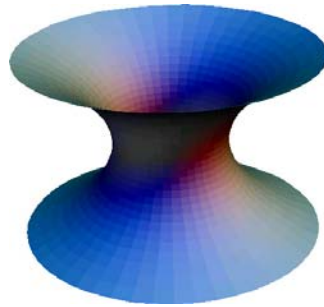


Figura 2.2: O Catenóide

## 2.3

### Superfícies Cíclicas com Círculos Horizontais: Exemplos de Riemann

Seja agora uma superfície folheada por círculos, todos paralelos. Sem perda de generalidade podemos assumir que todos os planos são horizontais. Portanto essa superfície pode ser parametrizada localmente por:

$$\begin{aligned} X : I \times \mathbb{S}^1 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\longmapsto (a(u) + R(u) \cos v, b(u) + R(u) \sin v, u), \end{aligned}$$

onde  $(a(u), b(u))$  é a projeção dos centros dos círculos que geram a superfície e  $R(u)$  é o raio de um círculo, para cada  $u$ . Vamos provar que a curva determinada pelos centros dos círculos é uma reta.

Determinaremos a primeira e a segunda forma fundamental de  $X(u, v)$ .

Vamos determinar as primeiras derivadas de  $X$ , para podermos calcular a primeira forma fundamental:

$$\begin{aligned} X_u(u, v) &= (a' + R' \cos v, b' + R' \sin v, 1) \\ X_v(u, v) &= (-R \sin v, R \cos v, 0) \end{aligned}$$

Agora podemos determinar a primeira forma fundamental:

$$\begin{aligned} E &= \langle X_u, X_u \rangle = (a')^2 + (b')^2 + (R')^2 + 2R'(a' \cos v + b' \sin v) + 1 \\ F &= \langle X_u, X_v \rangle = R(b' \cos v - a' \sin v) \\ G &= \langle X_v, X_v \rangle = R^2 \end{aligned}$$

A seguir temos as derivadas segundas:

$$\begin{aligned} X_{uu}(u, v) &= (a'' + R'' \cos v, b'' + R'' \sin v, 0) \\ X_{vv}(u, v) &= (-R \cos v, -R \sin v, 0) \\ X_{uv}(u, v) &= (-R' \sin v, R' \cos v, 0) \end{aligned}$$

Então podemos encontrar os coeficientes  $\bar{e}$ ,  $\bar{f}$ ,  $\bar{g}$  da segunda forma fundamental de  $X$ :

$$\begin{aligned} \bar{e} &= -R(b'' \sin v + a'' \cos v) - RR'' \\ \bar{f} &= 0 \\ \bar{g} &= R^2 \end{aligned}$$

Agora calcularemos  $\bar{H}$ , temos então:

$$\begin{aligned} \bar{H} &= -R^3(b'' \sin v + a'' \cos v) - R^3R'' + \\ &R^2[(a')^2 + (b')^2 + (R')^2 + 2R'(a' \cos v + b' \sin v) + 1] \end{aligned}$$

Dividindo por  $R^2$ , pois  $R \neq 0$ , temos:

$$\begin{aligned} \bar{H} &= -R(b'' \sin v + a'' \cos v) - RR'' + (a')^2 + (b')^2 + (R')^2 + \\ &2R'(a' \cos v + b' \sin v) + 1 \end{aligned}$$

Colocando o cosseno e seno em evidência teremos:

$$\bar{H} = (-Rb'' + 2R'b') \sin v + (-Ra'' + 2R'a') \cos v + (a')^2 + (b')^2 + (R')^2 - RR'' + 1$$

Como  $\bar{H} = 0$  e chamando  $b_1 = -Rb'' + 2R'b'$  e  $a_1 = -Ra'' + 2R'a'$ , fazemos:

$$b_1 = 0 \Rightarrow -Rb'' + 2R'b' = 0 \Rightarrow b'' = \frac{2R'b'}{R}$$

$$a_1 = 0 \Rightarrow -Ra'' + 2R'a' = 0 \Rightarrow a'' = \frac{2R'a'}{R}$$

Seja a curva plana  $\gamma(u) = (a(u), b(u))$ ,  $\gamma'(u) = (a'(u), b'(u))$  e  $\gamma''(u) = (a'', b'')$ .

Logo:

$$\gamma'' \times \gamma' = a''b' - a'b'' = \frac{2R'a'b'}{R} - \frac{2R'b'a'}{R} = 0$$

Então a curvatura  $k(s) = \frac{\gamma'' \times \gamma'}{|\gamma'|^3} = 0$  de  $\gamma$  é zero e portanto  $\gamma$  é uma linha reta, podemos então supor que  $\gamma$  percorre o eixo  $x$ , ou seja,  $b \equiv 0$ . Assim temos:

$$\begin{cases} -Ra'' + 2R'a' = 0 \\ -RR'' + (R')^2 + (a')^2 + 1 = 0 \end{cases} \quad (2-1)$$

e da primeira equação de (2-1):

$$\frac{a''}{a'} = 2\frac{R'}{R}$$

integramos ambos os lados:

$$\int \frac{da'}{a'} = 2 \int \frac{dR}{R}$$

assim

$$a' = \lambda R^2$$

onde  $\lambda$  é uma constante real positiva, agora podemos reescrever a segunda equação de (2-1) da seguinte maneira:

$$-RR'' + (R')^2 + 1 + \lambda^2 R^4 = 0$$

que dividindo por  $-R$  pode ser reescrita assim:

$$R'' - \frac{(R')^2 + 1}{R} - \lambda^2 R^3 = 0 \quad (2-2)$$

**Observação 5** Se  $\lambda = 0$  a função  $a$  é constante, ou seja, os centros se projetam num único ponto, a superfície sendo de revolução, reencontramos o caso do catenóide. Se  $\lambda \neq 0$  as superfícies são chamadas exemplos de Riemann.

Considere agora a seguinte expressão:

$$E(R(u), R'(u)) = ((R')^2 + 1)A(R) + B(R)$$

derivando  $E$  obtemos:

$$\frac{dE}{du}(R(u), R'(u)) = 2R''R'A + \frac{dA}{dR}R'((R')^2 + 1) + R'\frac{dB}{dR}$$

dividindo por  $2AR'$  temos

$$\frac{dE}{du} = R'' + \frac{A_R((R')^2 + 1)}{2A} + \frac{B_R}{2A}$$

onde  $A_R = \frac{dA}{dR}$  e  $B_R = \frac{dB}{dR}$ , vamos escolher  $A$  e  $B$  de forma que  $\frac{dE}{du} = 0$ , ou seja,  $E$  é uma integral primeira de (2-2):

$$\frac{A_R}{2A} = -\frac{1}{R} \implies A_R = -\frac{2A}{R}$$

logo,

$$A = \frac{1}{R^2}$$

e

$$B_R = -\lambda^2 R^3 2A$$

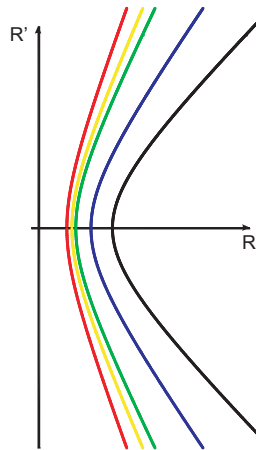
como  $A = -\frac{1}{R^2}$  temos:

$$B_R = -2\lambda^2 R$$

Assim  $B = -R^2$ . Com isso podemos reescrever  $E$ :

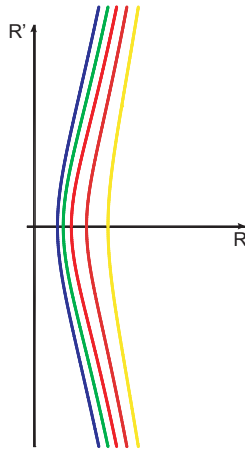
$$E = \frac{(R')^2 + 1}{R^2} - \lambda^2 R^2$$

Agora para uma análise dessa expressão fazemos  $E$  igual a uma constante e traçamos o gráfico dessas curva para diferentes valores de  $E$  e para  $\lambda = 0$ , que é o caso do catenóide, como podemos ver na figura abaixo:



Abaixo fazemos a mesma análise, mas para  $\lambda \neq 0$ , caso dos exemplos de

Riemann.



Agora vamos mostrar que se  $R(u)$  é uma solução da equação  $(2-2)_\lambda$ , para  $\lambda > 0$ , uma dilatação conveniente de  $R(u)$  é solução da equação  $(2-2)_1$ . Com efeito seja  $R_1(u)$  uma solução de  $(2-2)_1$  e  $R_\mu = \frac{1}{\mu}R_1(\frac{1}{\mu})$ . Temos então:

$$\begin{aligned} R_\mu'' - \frac{(R_\mu')^2 + 1}{R_\mu} - \lambda^2 R_\mu^3 &= \frac{1}{\mu}R_1'' - \frac{(R_1')^2 + 1}{\mu R_1} - \lambda^2 \mu^3 R_1^3 \\ &= \frac{1}{\mu} \left[ R_1'' - \frac{(R_1')^2 + 1}{R_1} - \lambda^2 \mu^4 R_1^3 \right]. \end{aligned}$$

Portanto escolhendo  $\mu = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$  deduzimos que  $R_{1/\sqrt{\lambda}}$  é solução  $(2-2)_\lambda$  se e somente se  $R_1$  é solução de  $(2-2)_1$ . Em conclusão os exemplos de Riemann formam uma família a um parâmetro (módulo dilatações). Assim em seguida fixaremos  $\lambda = 1$ .

Observamos que sobre toda curva integral,  $R$  admite um mínimo que denotaremos por  $R_0$  e que cada curva tem dois fins, onde  $R$  tende ao infinito. Sem perda de generalidade suponhamos que  $R(0) = R_0$ . Vamos mostrar que  $R$  tende a infinito em tempo finito. Considerando a parte da curva integral em que  $R'$  é positiva, temos que  $R(u)$  é crescente, então existe a função inversa, que denotamos por  $u(R)$ , definida sobre o intervalo  $[R_0, \infty)$ . Antes vamos ver o comportamento de  $u(R)$  quando  $R \rightarrow R_0$ :

$$u(R) = \int_{R_0}^R \frac{du}{dR} dR = \int_{R_0}^R \frac{dR}{\sqrt{R^4 + ER^2 - 1}}$$

observamos que essa última integral é imprópria em  $R_0$ , uma vez que  $\sqrt{R_0^4 + ER_0^2 - 1} = 0$ , mas é bem definida, pois

$$\sqrt{R^4 + ER^2 - 1} \sim \sqrt{R - R_0} \text{ com } R \rightarrow R_0$$

e a integral imprópria  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$  converge, com efeito, seja  $f(R) = \sqrt{R_0^4 + ER^2 - 1}$ , isto é,  $f(R) = (R^2 - X_1)(R^2 - R_0^2)$  onde  $R_0^2$  e  $X_1$  são as raízes distintas do polinômio quadrático  $P(X) = X^2 + EX - 1$ .

Calculamos  $f'(R_0) = 2R_0(R_0^2 - X) \neq 0$ , então pela fórmula de Taylor:

$$f(R) = f(R_0) + (R - R_0)f'(R_0) + o(R - R_0),$$

mas  $f(R_0) = 0$ , logo podemos reescrever  $u(R)$ :

$$\int_{R_0}^R \frac{dR}{\sqrt{f(R)}} = \int_{R_0}^R \frac{dR}{\sqrt{(R - R_0)f'(R_0) + o(R - R_0)}}$$

assim,

$$\int_{R_0}^R \frac{dR}{\sqrt{f(R)}} \sim \frac{1}{\sqrt{f'(R_0)}} \int_{R_0}^R \frac{dR}{\sqrt{R - R_0}} < \infty$$

Agora podemos calcular  $\lim_{R \rightarrow \infty} u(R)$ .

Tome

$$u(R) = \int_{R_0}^R \frac{du}{dR} dR = \int_{R_0}^R \frac{dR}{\sqrt{R^4 + ER^2 - 1}} \quad (2-3)$$

$$\text{Como } \frac{1}{\sqrt{R^4 + ER^2 - 1}} < \frac{1}{R^2} \text{ e } \lim_{R \rightarrow \infty} \int \frac{1}{R^2} < \infty,$$

concluimos que a integral (2-3) converge, isto é, existe  $u_\infty < \infty$  tal que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} u(R) = u_\infty.$$

Para  $R' < 0$ , a situação é simétrica com respeito ao plano horizontal  $u = 0$ .

assim a superfície está limitada por dois planos horizontais.

Agora temos que  $a'(u) = R^2(u)$ , logo

$$a(u) = \int_0^u R^2(u) du$$

mas  $du = \frac{dR}{\frac{dR}{du}}$ , assim

$$a(R) = \int_{R_0}^R \frac{dR}{\sqrt{1 + \frac{E}{R^2} - \frac{1}{R^4}}}$$

com isso obtemos que  $\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{a(R)}{R} = 1$ , então  $\lim_{R \rightarrow \infty} a(R) - R < \infty$ .

Concluimos que quando  $u \rightarrow u_\infty$ , o raio dos círculos tende ao infinito enquanto um dos dois pontos de interseção dos círculos com o eixo  $x$  converge. Portanto a posição limite dos círculos quando  $z = u \rightarrow u_\infty$  é uma reta horizontal

perpendicular ao eixo  $x$ . Por simetria, a posição limite quando  $z = u \rightarrow -u_\infty$  é também uma reta horizontal perpendicular ao eixo  $x$ . Aplicando o princípio de reflexão de Schwarz, cf. em [NI1], podemos refletir a superfície com respeito a estas duas retas; iterando o processo obtemos uma superfície periódica, invariante por um grupo de translações.

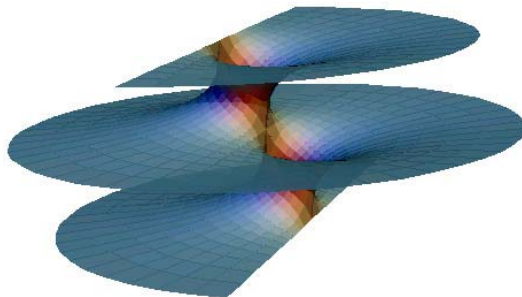


Figura 2.3: O Exemplo de Riemann

## 2.4

### Superfícies mínimas cíclicas em $\mathbb{R}^3$ : O caso geral

Seja uma superfície cíclica  $S$ , denotaremos por  $R(u)$  o raio de cada círculo e por  $z(u)$  a posição de cada círculo e seja  $\{y_1, y_2\}$  uma base ortonormal do plano, seja agora  $\mathbf{N}$  o vetor normal aos planos que contém cada círculo, tal que,  $\{y_1, y_2, \mathbf{N}\}$  é uma base ortonormal de  $\mathbb{R}^3$ . Portanto  $S$  pode ser parametrizada por:

$$X : I \times \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(u, v) \longmapsto z(u) + R(u) \cos vy_1(u) + R(u) \operatorname{sen} vy_2(u)$$

Queremos provar que se a superfície é mínima, então esses círculos são todos horizontais, para isso enunciamos o teorema:

**Teorema 5** *Seja uma superfície mínima folheada por círculos, então todos os círculos são paralelos.*

**Prova:** A prova que se encontra em [NI1] será feita por contradição, então agora assumamos  $\mathbf{N}$  não constante, isto é,  $\mathbf{N}' \neq 0$ . Então o vetor  $\mathbf{N}$  é paralelo ao vetor  $\mathbf{t}$ , tangente a alguma curva parametrizada pelo comprimento de arco e temos  $\mathbf{n}$  vetor normal e  $\mathbf{b}$  binormal a essa curva. Vamos assumir os vetores  $\mathbf{y}_1$  e  $\mathbf{y}_2$  como os vetores  $\mathbf{n}$  e  $\mathbf{b}$ . Seja a curvatura e a torção da curva:  $k > 0$  e  $\tau$ , respectivamente, e seja  $\mathbf{z}' = \alpha \mathbf{t} + \beta \mathbf{n} + \gamma \mathbf{b}$ . Então:

$$X(u, v) = z(u) + R(u) \cos v \mathbf{n}(u) + R(u) \operatorname{sen} v \mathbf{b}(u)$$

A seguir determinamos as derivadas primeiras de  $X$  usando as equações de Frenet.

$$\begin{aligned} X_u(u, v) &= z' + R \cos v \mathbf{n} + R \cos v \mathbf{n}' + R' \sin v \mathbf{b} + R \sin v \mathbf{b}' \\ X_u(u, v) &= \alpha \mathbf{t} + \beta \mathbf{n} + \gamma \mathbf{b} + R' \cos v \mathbf{n} - Rk \cos v \mathbf{t} \\ &\quad - R\tau \cos v \mathbf{b} + R' \sin v \mathbf{b} + R\tau \sin v \mathbf{n} \end{aligned}$$

Assim temos,

$$\begin{aligned} X_u(u, v) &= (\alpha - kR \cos v) \mathbf{t} + (\beta + R' \cos v + \tau R \sin v) \mathbf{n} \\ &\quad + (\gamma - \tau R \cos v + R' \sin v) \mathbf{b} \end{aligned}$$

e também

$$X_v(u, v) = -(R \sin v) \mathbf{n} + (R \cos v) \mathbf{b},$$

com isso podemos calcular a primeira forma fundamental:

$$\begin{aligned} E &= \alpha^2 - 2R\alpha k \cos v + R^2 k^2 \cos^2 v + \beta^2 + 2R'\beta \cos v + \\ &\quad 2R\beta\tau \sin v + R^2\tau^2 + \gamma^2 + 2R'\gamma \sin v - 2R\gamma\tau \cos v + (R'')^2 \\ F &= -R(\beta \sin v + R\tau - \gamma \cos v) \\ G &= R^2 \end{aligned}$$

Agora para calcular a segunda forma fundamental vamos precisar das segundas derivadas de  $X$ :

$$\begin{aligned} X_{uu}(u, v) &= (\alpha' - 2R'k \cos v - Rk' \cos v - \beta k - kR\tau \sin v) \mathbf{t} + \\ &\quad (\beta' + \alpha k R k^2 \cos v + R'' \cos v + 2R'\tau \sin v + R\tau' \sin v + \gamma\tau - R\tau^2 \cos v) \mathbf{n} + \\ &\quad (\gamma' - \beta\tau - 2R'\tau \cos v - R\tau^2 \sin v + R'' \sin v - R\tau' \cos v) \mathbf{b} \\ X_{uv}(u, v) &= (Rk \sin v) \mathbf{t} + (-R' \sin v + R\tau \cos v) \mathbf{n} + (R' \cos v + R\tau \sin v) \mathbf{b} \\ X_{vv}(u, v) &= (-R \cos v) \mathbf{n} + (-R \sin v) \mathbf{b} \end{aligned}$$



Então determinamos a segunda forma fundamental:

$$\begin{aligned}\bar{e} &= -R(2kR\tau\beta \sin v \cos v + Rk'\gamma \cos v \sin v - 2Rk\gamma\tau \cos^2 v + 2R'k\gamma \cos v \sin v \\ &\quad - \alpha R\tau^2 - RkR'' \cos v + R^2k\tau^2 \cos v + kR\tau\gamma + Rk'R' \cos v - \alpha'R' + \alpha R'' + \\ &\quad \beta kR' + 2(R')^2k \cos v + kR\tau R' \sin v - Rk\gamma' \cos v \sin v - Rk\beta' \cos^2 v + \\ &\quad 2R'k\beta \cos^2 v + \beta k\gamma \sin v + \alpha\gamma\tau \cos v - \alpha\beta\tau \sin v + R\beta k' \cos^2 v \\ &\quad - 2\alpha Rk^2 \cos^2 v + \alpha\beta' \cos v + \alpha^2k \cos v - \alpha'\gamma \sin v - \alpha'\beta \cos v + \\ &\quad \beta^2k \cos v + \alpha\gamma' \sin v + R^2k^3 \cos^3 v) \\ \bar{f} &= R^2(k\beta \sin v \cos v + k\gamma - k\gamma \cos^2 v + kR' \sin v - \alpha\tau + Rk\tau \cos v) \\ \bar{g} &= -R^2(-\alpha + Rk \cos v)\end{aligned}$$

Temos  $\bar{H} = E\bar{g} - 2F\bar{f} + G\bar{e} = 0$ , então:

$$\begin{aligned}\bar{H} &= \frac{R^3}{2}[5\alpha k^2 R + \beta'kR - \beta k'R - 6\beta kR'] \cos 2v - \frac{1}{2}kR^3[k^2 R^2 + \beta^2 - \gamma^2] \cos 3v \\ &\quad - \frac{R^2}{2}[3R^3k^3 + 3R\beta^2k + 8R\alpha^2k - 2R\alpha'\beta + 6(R')^2Rk + 2R\alpha\beta' + 2R^2k'R' + 2R\gamma\tau\alpha \\ &\quad - 4R'\beta\alpha - 2R^2kR'' + 3R\gamma^2k] \cos v - \beta\gamma kR^3 \sin 3v \\ &\quad - \frac{R^2}{2}[-2R\beta\tau\alpha - 2R\alpha'\gamma - 4R'\gamma\alpha - 2R^2k\tau R' + 2R\alpha\gamma'] \sin v + \\ &\quad \frac{R^3}{3}[\gamma'kR - \gamma k'R - 6\gamma kR'] \sin 2v - \frac{R^2}{2}[-5R^2\alpha k^2 + R^2k'\beta \\ &\quad - 2\beta^2\alpha - 2(R')^2\alpha + 2R\alpha R'' - 2R\alpha'R' - 2R^2k\tau\gamma - 2\alpha^3 + 4R\beta kR' - 2\gamma^2\alpha - R^2k\beta'] \\ \bar{H} &= a_3 \cos 3v + b_3 \sin 3v + a_2 \cos 2v + \\ &\quad b_2 \sin 2v + a_1 \cos v + b_1 \sin v + a_0\end{aligned}\tag{2-4}$$

Onde:

$$\begin{aligned}a_3 &= -\frac{kR^3}{2}[k^2 R^2 + \beta^2 - \gamma^2] \\ b_3 &= -\beta\gamma kR^3 \\ a_2 &= \frac{R^3}{2}[5\alpha k^2 R + \beta'kR - \beta k'R - 6\beta kR'] \\ b_2 &= \frac{R^3}{3}[\gamma'kR - \gamma k'R - 6\gamma kR'] \\ a_1 &= -\frac{R^2}{2}[3R^3k^3 + 3R\beta^2k + 8R\alpha^2k - 2R\alpha'\beta + 6(R')^2Rk + 2R\alpha\beta' + \\ &\quad 2R^2k'R' + 2R\gamma\tau\alpha - 4R'\beta\alpha - 2R^2kR'' + 3R\gamma^2k] \\ b_1 &= -\frac{R^2}{2}[-2R\beta\tau\alpha - 2R\alpha'\gamma - 4R'\gamma\alpha - 2R^2k\tau R' + 2R\alpha\gamma'] \\ a_0 &= -\frac{R^2}{2}[-5R^2\alpha k^2 + R^2k'\beta - 2\beta^2\alpha - 2(R')^2\alpha + 2R\alpha R'' - 2R\alpha'R' \\ &\quad - 2R^2k\tau\gamma - 2\alpha^3 + 4R\beta kR' - 2\gamma^2\alpha - R^2k\beta']\end{aligned}$$

Temos que  $R > 0$  e  $k > 0$ , logo:

$$b_3 = 0 \implies \beta\gamma = 0, \text{ então } \beta = 0 \text{ ou } \gamma = 0$$

$a_3 = 0$ , vamos considerar  $\beta = 0$ , pois se  $\gamma = 0$  teríamos  $k^2R^2 + \beta > 0$  o que é absurdo, uma vez que  $a_3 = 0$ , logo  $-\gamma^2 + k^2R^2 = 0 \implies \gamma^2 = k^2R^2$

$$a_2 = 0 \implies 5\alpha k^2R = 0, \text{ pois } \beta = 0, R > 0, k > 0; \text{ logo } \alpha = 0.$$

Temos agora:

$$b_2 = 0 \implies 6\gamma kR' = \gamma'kR - \gamma k'R \implies \gamma(6kR' + k'R) = \gamma'kR \quad (2-5)$$

mas

$$\gamma^2 = k^2R^2 \implies \gamma = \pm kR \quad (2-6)$$

que derivando obtém-se:

$$\gamma' = \pm(k'R + kR'), \quad (2-7)$$

e substituindo (2-6) e (2-7) em (2-5) temos:

$$\pm kR(6kR' + k'R) = \pm(k'R + kR')kR,$$

podemos simplificar  $R$  e  $k$  portanto

$$6kR' + k'R = k'R + kR' \quad (2-8)$$

temos que  $6kR' = kR'$  e como  $k \neq 0 \implies R' = 0$ . Substituindo  $R > 0$ ,  $R' = 0$ ,  $k > 0$ ,  $\alpha = \beta = 0$  e  $\gamma^2 = k^2R^2$  em (2-4) temos que:

$$a_3 = 0, b_3 = 0, a_2 = 0, b_2 = 0, b_1 = 0.$$

Atribuindo em  $a_1$  os valores  $R' = 0$ ,  $\alpha = \beta = 0$ , obtemos:

$$a_1 = -\frac{3}{2}R^5k^3 - \frac{3}{2}R^3\gamma^2k = 0$$

Como  $\gamma^2 = k^2R^2$ , podemos escrever  $a_1$  desta maneira:

$$-3R^5k^3 - 3R^3k^2R^2k = 0 \implies -3R^5k^3 - 3R^5k^3 = 0 \implies -6R^5k^3 = 0$$

Sabemos que  $R \neq 0$ , então  $k = 0$  o que é uma contradição.

Logo  $\mathbf{N}$  é constante. ■

## 2.5

### Conclusão

Após toda essa discussão podemos enunciar o seguinte teorema:

**Teorema 6** *As únicas superfícies mínimas cíclicas em  $\mathbb{R}^3$  são o catenóide e os exemplos de Riemann.*

**Observação 6** *Os exemplos de Riemann admitem uma outra descrição, mais clássica, em termos da representação de Weierstrass e de funções elípticas. Com essas ferramentas pode-se mostrar que os exemplos de Riemann são superfícies completas, com curvatura total finita e de tipo conforme retangular. Confira em [HM] e [EN].*

### 3

## Caracterização das Superfícies Mínimas Cíclicas em $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$

### 3.1

#### Exemplos de superfícies mínimas cíclicas folheadas por grandes círculos

Em  $\mathbb{R}^3$  tínhamos as retas como geodésicas, mas em  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$  as geodésicas são os grandes círculos de uma esfera, com isso apresentaremos a seguir uma série de exemplos de superfícies mínimas folheadas por grandes círculos.

#### 3.1.1

##### A Esfera

Seja  $S$  a esfera em  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$  parametrizada localmente por:

$$X : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$$

$$(u, v) \longmapsto \left( \begin{pmatrix} \cos v \\ \sin v \cos u \\ \sin v \sin u \end{pmatrix}, 0 \right)$$

$S$  é totalmente geodésica (isto é, a segunda forma fundamental anula-se) portanto ela é mínima.

#### 3.1.2

##### O Cilindro

Seja o produto de um grande círculo por  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ , ele é parametrizado por:

$$X : \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$$

$$(u, v) \longmapsto \left( \begin{pmatrix} \cos v \\ \sin v \\ 0 \end{pmatrix}, u \right)$$

$S$  é o produto de uma curva geodésica por  $\mathbb{R}$ , então ela é totalmente geodésica, logo  $S$  é mínima.

### 3.1.3

#### O Helicóide

Seja  $S$ , o helicóide em  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$  parametrizado localmente por:

$$X_{ab} : \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$$

$$(u, v) \longmapsto \left( \begin{pmatrix} \cos v \\ \sin v \cos au \\ \sin v \sin au \end{pmatrix}, bu \right)$$

Apresentaremos agora dois casos limites do helicóide:

- a)  $X_{a0}$  - círculo gira e não sobe, obtemos assim a esfera  $\mathbb{S}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ . (cf. seção 3.1.1)
- b)  $X_{0b}$  - círculo sobe e não gira, obtemos o cilindro. (cf. seção 3.1.2)

Vamos provar que essa superfície é mínima em  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ , para isso temos a seguir as derivadas primeiras de  $X_{ab}(u, v)$ , que para simplificar vamos chamar apenas de  $X(u, v)$

$$X_u = (0, -a \sin v \sin au, a \sin v \cos au, b)$$

$$X_v = (-\sin v, \cos v \cos au, \cos v \sin au, 0)$$

temos assim a primeira forma fundamental:

$$E = a^2 \sin^2 v + b^2$$

$$F = 0$$

$$G = 1$$

Abaixo temos as derivadas segundas de  $X$ :

$$X_{uu} = (0, -a^2 \sin v \cos au, -a^2 \sin v \sin au, 0)$$

$$X_{uv} = (0, -a \cos v \sin au, a \cos v \cos au, 0)$$

$$X_{vv} = (-\cos v, -\sin v \cos au, -\sin v \sin au, 0)$$

Seja o vetor

$$\mathbf{N} = (0, -a \sin v \sin au, a \sin v \cos au, t)$$

onde  $t$  é escolhido de maneira que  $\mathbf{N}$  seja normal a superfície, então os coeficientes em relação a  $\mathbf{N}$  da segunda forma fundamental são:

$$\begin{aligned}\bar{e} &= 0 \\ \bar{f} &= a^2 \operatorname{sen} v \cos v \\ \bar{g} &= 0\end{aligned}$$

Portanto temos que  $\bar{H} = 0$ , logo pela proposição 3 temos que essa superfície é mínima.

### 3.2 O Catenóide

Seja uma superfície de  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$  folheada por círculos paralelos de  $\mathbb{S}^2$ , podemos considera-los horizontais, portanto podemos parametriza-lá localmente como:

$$\begin{aligned}X : \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1 &\longrightarrow \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R} \\ (u, v) &\longmapsto \left( \begin{pmatrix} \cos \theta(u) \\ \operatorname{sen} \theta(u) \cos v \\ \operatorname{sen} \theta(u) \operatorname{sen} v \end{pmatrix}, u \right)\end{aligned}$$

Novamente vamos definir:

$$Y(u, v) = (\cos \theta(u), \operatorname{sen} \theta(u) \cos v, \operatorname{sen} \theta(u) \operatorname{sen} v)$$

Assim temos:

$$X(u, v) = (Y(u, v), u)$$

Com isso calculamos as derivadas primeiras de  $Y(u, v)$ :

$$\begin{aligned}Y_u &= (-\theta' \operatorname{sen} \theta, \theta' \cos \theta \cos v, \theta' \cos \theta \operatorname{sen} v) \\ Y_v &= (0, -\operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} v, \operatorname{sen} \theta \cos v)\end{aligned}$$

Primeira Forma Fundamental:

$$\begin{aligned}E &= 1 + (\theta')^2 \\ F &= 0 \\ G &= \operatorname{sen}^2 \theta\end{aligned}$$

Agora determinamos as derivadas segundas de  $Y$ :

$$Y_{uu} = (-\theta'' \operatorname{sen} \theta - (\theta')^2 \cos \theta, \theta'' \cos \theta \cos v - (\theta')^2 \operatorname{sen} \theta \cos v, \theta'' \cos \theta \operatorname{sen} v - (\theta')^2 \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} v)$$

$$Y_{uv} = (0, -\theta' \cos \theta \operatorname{sen} v, \theta' \cos \theta \cos v)$$

$$Y_{vv} = (0, -\operatorname{sen} \theta \cos v, -\operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} v)$$

Agora precisamos, para calcular a Segunda Forma Fundamental, de algum vetor  $\mathbf{N}$  normal a superfície, uma vez que não precisamos de um vetor normal unitário por causa da proposição 3. Sabemos que  $X_u$  e  $X_v$  são tangentes a superfície, logo:

$$\langle \mathbf{N}, X_u \rangle = 0$$

$$\langle \mathbf{N}, X_v \rangle = 0$$

Isso significa que  $X_u$  e  $X_v$  pertencem a  $T_x(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}) = T_y \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ , tal que  $x \in \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$  sendo  $x = (y, t)$ , assim temos:

$$Y(u, v) \in \mathbb{S}^2$$

e que  $X(u, v) = (Y(u, v), u)$ , assim  $\mathbf{N} = (M, t)$ , tal que  $M = (a, b, c)$ , agora vamos determinar  $M$ , mas não o calcularemos explicitamente  $t$ , uma vez que todas segundas derivadas de  $X$  tem como última coordenada o zero.

Então para calcular  $M$  temos:

$$\langle \mathbf{N}, X_u \rangle = \langle M, Y_u \rangle + t.1 = 0 \Rightarrow t = -\langle M, Y_u \rangle$$

$$\langle \mathbf{N}, X_v \rangle = \langle M, Y_v \rangle + t.0 = 0$$

Agora determinaremos  $a$ ,  $b$  e  $c$  de  $M = (a, b, c)$ , então:

$$\langle M, Y_v \rangle = 0 \Rightarrow -b \cos \theta \operatorname{sen} v + c \cos \theta \cos v = 0$$

Como  $\cos \theta \neq 0$ , portanto podemos simplificar:

$$-b \operatorname{sen} v + c \cos v = 0$$

Determinamos agora:

$$b = \cos v$$

$$c = \operatorname{sen} v$$

e  $M = (a, \cos v, \sin v)$ , para encontrar  $a$ , fazemos:

$$\langle Y, M \rangle = 0$$

Como  $Y(u, v) = (\cos \theta, \sin \theta \cos v, \sin \theta \sin v)$ , temos:

$$\begin{aligned} \langle Y, M \rangle &= a \cos \theta + \cos^2 v \sin \theta + \sin^2 v \sin \theta \\ &= a \cos \theta + \sin \theta = 0 \end{aligned}$$

Assim teríamos  $a = -\tan \theta$ , mas para simplificar vamos definir  $b = \cos v \cos \theta$  e  $c = \sin v \cos \theta$ , então:

$$\langle Y, M \rangle = a \cos \theta + \cos \theta \sin \theta = 0$$

Todavia sabemos que  $\cos \theta \neq 0$ , logo  $a = -\sin \theta$ .

Com isso encontramos  $M$ :

$$M = (-\sin \theta, \cos v \cos \theta, \sin v \cos \theta)$$

e como  $\mathbf{N} = (M, t)$ , temos

$$\mathbf{N} = (-\sin \theta, \cos v \cos \theta, \sin v \cos \theta, t) \quad (3-1)$$

Segunda Forma Fundamental

$$\begin{aligned} \bar{e} &= -\theta'' \\ \bar{f} &= 0 \\ \bar{g} &= -\cos \theta \sin \theta \end{aligned}$$

Portanto temos que a curvatura média é:

$$\bar{H} = \theta'' \sin^2 \theta - (\theta')^2 \cos \theta \sin \theta - \cos \theta \sin \theta$$

No caso das superfícies mínimas temos  $\bar{H} = 0$ , assim:

$$\theta'' \sin \theta - (\theta')^2 \cos \theta - \cos \theta = 0 \quad (3-2)$$

Uma solução trivial dessa equação é  $\theta \equiv 0$ , o caso do cilindro, já estudado na seção 3.1.2. Veremos que a equação (3-2) é um caso particular de uma equação que resolveremos na seção seguinte.



### 3.3

#### O caso geral

Nessa seção vamos estudar as superfícies mínimas cíclicas em  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ . Daremos uma parametrização de uma superfície cíclica qualquer e iremos estudar quando ela é mínima.

Seja então um círculo  $\mathcal{C}$  em  $\mathbb{S}^2$ . O círculo  $\mathcal{C}$  tem raio  $R \leq 1$ . Seja então  $\theta \in (0, \frac{\pi}{2}]$  de tal maneira que o raio de  $\mathcal{C}$  seja  $\text{sen } \theta$ , isto é,  $R = \text{sen } \theta$ . Isto implica que o centro  $c$  de  $\mathcal{C}$  em  $\mathbb{R}^3$  está a uma distância  $\text{cos } \theta$  da origem, então seja  $c = \mathbf{t} \text{cos } \theta$ , o centro de  $\mathcal{C}$ , com  $|\mathbf{t}| = 1$ . Como foi feito no capítulo anterior, vamos considerar a curva parametrizada  $\gamma$  tal que  $\gamma' = \mathbf{t}$ , isto é:

$$\gamma(s) = \int_{s_0}^s \mathbf{t}(\sigma) d\sigma$$

e agora vamos assumir que  $k \neq 0$ , pois já tratamos o caso contrário, assim seja  $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$  o triedo de Frenet, associada a  $\gamma$ , então  $C$  esta no plano  $\Pi$  formado pelos vetores  $\mathbf{n}$  e  $\mathbf{b}$ , então  $C$  é parametrizado por:

$$C(v) = \text{sen } \theta(u)(\mathbf{n} \cos v + \mathbf{b} \text{sen } v) + \mathbf{t} \text{cos } \theta(u) \in \mathbb{S}^2$$

para alguma função  $\theta = \theta(u)$ . Assim podemos parametrizar localmente qualquer superfície cíclica por:

$$\begin{aligned} X : I \times \mathbb{S}^1 &\longrightarrow \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R} \\ (u, v) &\longmapsto (\text{sen } \theta(u)[\cos v \mathbf{n}(u) + \text{sen } v \mathbf{b}(u)] + \text{cos } \theta(u) \mathbf{t}(u), u), \end{aligned}$$

ou seja,

$$X(u, v) = (\text{cos } \theta(u)) \mathbf{t}(u) + (\text{sen } \theta(u) \cos v) \mathbf{n}(u) + (\text{sen } \theta(u) \text{sen } v) \mathbf{b}(u) + u$$

Definiremos agora

$$Y(u, v) = (\text{cos } \theta(u)) \mathbf{t}(u) + (\text{sen } \theta(u) \cos v) \mathbf{n}(u) + (\text{sen } \theta(u) \text{sen } v) \mathbf{b}(u),$$

para facilitar os cálculos, uma vez que:

$$\begin{aligned}
X(u, v) &= (Y(u, v), u) \\
X_u(u, v) &= (Y_u(u, v), 1) \\
X_v(u, v) &= (Y_v(u, v), 0) \\
X_{uu}(u, v) &= (Y_{uu}, 0) \\
X_{uv}(u, v) &= (Y_{uv}, 0) \\
X_{vv}(u, v) &= (Y_{vv}, 0)
\end{aligned}$$

Agora vamos determinar as derivadas primeiras de  $Y(u, v)$ , todas na base  $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$

$$\begin{aligned}
Y_u(u, v) &= (-k \operatorname{sen} \theta \cos v - \theta' \operatorname{sen} \theta, \theta' \cos \theta \cos v + \tau \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} v + k \cos \theta, \\
&\quad \theta' \cos \theta \operatorname{sen} v - \tau \operatorname{sen} \theta \cos v) \\
Y_v(u, v) &= (0, -\operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} v, \operatorname{sen} \theta \cos v)
\end{aligned}$$

Primeira Forma Fundamental:

Antes de apresentar os coeficientes da primeira forma fundamental de  $X(u, v)$ , vale observar o seguinte:

$$\begin{aligned}
E &= \bar{E} + 1 \\
F &= \bar{F} \\
G &= \bar{G}
\end{aligned}$$

Onde  $\bar{E}$ ,  $\bar{F}$  e  $\bar{G}$  são os coeficientes da primeira forma fundamental de  $Y(u, v)$ . Abaixo são apresentados os coeficientes da primeira forma fundamental de  $X(u, v)$

$$\begin{aligned}
E &= 1 + (\theta')^2 + \tau^2 \operatorname{sen}^2 \theta + k^2 \cos^2 \theta + 2\theta'k \cos v + \\
&\quad 2\tau k \cos \theta \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} v + k^2 \operatorname{sen}^2 \theta \cos^2 v \\
F &= -k \operatorname{sen} \theta \cos \theta \operatorname{sen} v - \tau \operatorname{sen}^2 \theta \\
G &= \operatorname{sen}^2 \theta
\end{aligned}$$

Abaixo as derivadas segundas de  $Y(u, v)$ :

$$\begin{aligned}
 Y_{uu}(u, v) &= \left( -k' \operatorname{sen} \theta \cos v - 2k\theta' \cos \theta \cos v - \theta'' \operatorname{sen} \theta - (\theta')^2 \cos \theta \right. \\
 &\quad \left. - k\tau \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} v - k^2 \cos \theta, \right. \\
 &\quad \left. -k^2 \operatorname{sen} \theta \cos v - 2k\theta' \operatorname{sen} \theta + \theta'' \cos \theta \cos v - (\theta')^2 \operatorname{sen} \theta \cos v + \right. \\
 &\quad \left. \tau' \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} v + 2\tau\theta' \cos \theta \operatorname{sen} v + k' \cos \theta - \tau^2 \operatorname{sen} \theta \cos v, \right. \\
 &\quad \left. -2\tau\theta' \cos \theta \cos v - \tau^2 \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} v - \tau k \cos \theta - \theta'' \cos \theta \operatorname{sen} v - \right. \\
 &\quad \left. (\theta')^2 \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} v - \tau' \operatorname{sen} \theta \cos v \right) \\
 Y_{uv}(u, v) &= \left( k \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} v, -\theta' \cos \theta \operatorname{sen} v + \tau \operatorname{sen} \theta \cos v, \theta' \cos \theta \cos v + \right. \\
 &\quad \left. \tau \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} v \right) \\
 Y_{vv}(u, v) &= \left( 0, -\operatorname{sen} \theta \cos v, -\operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} v \right)
 \end{aligned}$$

Para calcular a segunda forma fundamental usaremos o vetor normal  $\mathbf{N}$ (cf.3-1) que encontramos na seção 3.2 desse capítulo, pois o espaço normal a uma superfície não depende da base usada.

Segunda Forma Fundamental.

Agora podemos determinar  $\bar{e}$ ,  $\bar{f}$  e  $\bar{g}$ :

$$\begin{aligned}
 \bar{e} &= \theta'' - \tau^2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta + (-2k\tau \cos^2 \theta + k\tau) \operatorname{sen} v + \\
 &\quad k' \cos v + k^2 \cos \theta \operatorname{sen} \theta \sin^2 v \\
 \bar{f} &= \tau \cos \theta \operatorname{sen} \theta - k \operatorname{sen}^2 \theta \operatorname{sen} v \\
 \bar{g} &= -\cos \theta \operatorname{sen} \theta
 \end{aligned}$$

Temos  $\bar{H} = E\bar{g} - 2F\bar{f} + G\bar{e} = 0$ , então:

$$\begin{aligned}
 \bar{H} &= (\theta'' \operatorname{sen} \theta - (\theta')^2 \cos \theta - \cos \theta - k^2 \cos \theta) \operatorname{sen} \theta - k\tau \operatorname{sen}^2 \theta \operatorname{sen} v + \\
 &\quad (k' \operatorname{sen}^2 \theta - 2\theta' k \cos \theta \operatorname{sen} \theta) \cos v
 \end{aligned}$$

Se a superfície é mínima, temos:

$$H = 0 \implies \begin{cases} \theta'' \operatorname{sen} \theta - ((\theta')^2 + 1) \cos \theta - k^2 \cos \theta = 0 \\ -k\tau \operatorname{sen}^2 \theta = 0 \\ k' \operatorname{sen}^2 \theta - 2\theta' k \cos \theta \operatorname{sen} \theta = 0 \end{cases}$$

Vamos analisar a segunda equação do sistema. Sabemos que  $\operatorname{sen}^2 \theta \neq 0$  e  $k \neq 0$ , logo  $\tau = 0$ , significando que a curva  $\gamma$  é plana, o plano no qual

$\gamma$  pertence é paralelo ao plano gerado por  $\mathbf{t}$  e  $\mathbf{n}$  e observamos que o fato de termos  $\tau = 0$  também significa  $\mathbf{b}$  constante. Já vimos que o círculo  $\mathcal{C}$  tem centro  $c = \mathbf{t} \cos \theta$  e temos que o centro em  $\mathbb{S}^2$  é  $\mathbf{t}$ , temos então que  $\mathbf{t}$  pertence a um grande círculo.

Analisando agora a equação  $k' \sin \theta = 2\theta' k \cos \theta$ , ou seja,

$$\frac{k'}{k} = 2\theta' \cotan \theta$$

Agora integramos os dois termos:

$$\int \frac{1}{k} dk = 2 \int \cotan \theta d\theta$$

obtemos,

$$\ln k = 2 \ln |\sin \theta| + c$$

Que simplificando fica  $k = \lambda \sin^2 \theta$ , onde  $\lambda$  é uma constante positiva. Observamos que  $k$  é sempre positivo, o que implica que  $\mathbf{t}'$  nunca se anula logo  $\mathbf{t}$  percorre um grande círculo sempre no mesmo sentido.

Resolveremos agora a equação:

$$\theta'' \sin \theta - ((\theta')^2 + 1) \cos \theta - k^2 \cos \theta = 0$$

na qual reescrevemos dessa maneira:

$$\theta'' \sin \theta - ((\theta')^2 + 1) \cos \theta - \lambda^2 \sin^4 \theta \cos \theta = 0 \quad (3-3)$$

Uma solução simples dessa equação é  $\theta = \frac{\pi}{2}$  que corresponde uma superfície folheada por grandes círculos, nesse caso temos  $k = \lambda$ , o que implica que o vetor  $\mathbf{t}(u)$  (normal aos grandes círculos) percorre um círculo à velocidade constante, portanto a superfície é um helicóide.

Agora para auxiliar nos cálculos multiplicamos a equação acima por  $2\theta' \sin \theta$ , obtendo assim:

$$2\theta''\theta' \sin^2 \theta - 2\theta' \cos \theta \sin \theta ((\theta')^2 + 1) - 2\lambda^2 \theta' \sin^5 \theta \cos \theta = 0$$

agora dividindo por  $\sin^4 \theta$  temos:

$$\frac{2\theta''\theta' \sin^2 \theta - 2\theta' \cos \theta \sin \theta ((\theta')^2 + 1)}{\sin^4 \theta} - 2\lambda^2 \theta' \sin \theta \cos \theta = 0$$

Como  $\left(\frac{(\theta')^2 + 1}{\text{sen}^2 \theta}\right)' = \frac{2\theta''\theta' \text{sen}^2 \theta - 2\theta' \cos \theta \text{sen} \theta ((\theta')^2 + 1)}{\text{sen}^4 \theta}$  temos:

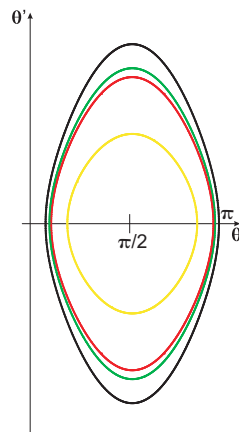
$$\left(\frac{(\theta')^2 + 1}{\text{sen}^2 \theta}\right)' - 2\lambda^2 \theta' \text{sen} \theta \cos \theta = 0$$

ou seja,

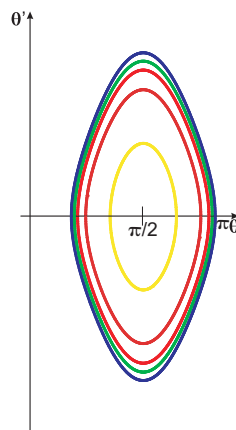
$$\left(\frac{(\theta')^2 + 1}{\text{sen}^2 \theta} - \lambda^2 \text{sen}^2 \theta\right)' = 0$$

então a função  $E(\theta, \theta') = \frac{(\theta')^2 + 1}{\text{sen}^2 \theta} - \lambda^2 \text{sen}^2 \theta$  é uma integral primeira de (3-3). Se  $\lambda = 0$  reencontramos o caso do catenóide.

Agora para uma análise dessa expressão fazemos  $E$  igual a uma constante e traçamos o gráfico dessa curva para diferentes valores de  $E$  e para  $\lambda = 0$ , que é o caso do catenóide, como podemos ver na figura abaixo:



e para  $\lambda \neq 0$  temos:



Vemos com esses gráficos que o raio dos círculos não tende para infinito como

em  $\mathbb{R}^3$  e  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ , que veremos no próximo capítulo, mas é periódico com respeito à variável  $u$ .

Observamos pelo gráfico que  $\theta' = 0$  para dois valores de  $\theta$ , que chamaremos de  $\theta_0$  e  $\theta_1$ , considerando a parte da curva integral onde  $\theta'$  é positivo, temos que  $\theta(u)$  é crescente, então existe a função inversa que denotaremos por  $u(\theta)$ , definida sobre o intervalo  $[\theta_0, \theta_1]$ , que estudaremos quando  $\theta \rightarrow \theta_0$ , assim:

$$u(\theta) = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{d\theta}{\sqrt{f(\theta)}},$$

onde  $f(\theta) = \lambda^2 \sin^4 \theta + E \sin^2 \theta - 1$ , que é convergente pelo mesmo raciocínio do capítulo 2. Para a parte da curva integral onde  $\theta'$  é negativa, o raciocínio é análogo por simetria e concluimos que a superfície é periódica na direção vertical.

### 3.4

#### Conclusão

Demonstramos então que as superfícies mínimas cíclicas e regradas de  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$  são:

- A esfera  $\mathbb{S}^2 \times \{0\}$  (cf. seção 3.1.1)
- O cilindro  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$  (cf. seção 3.1.2)
- O helicóide (cf. seção 3.1.3)
- O catenóide (cf. seção 3.2) descoberto por Pedrosa, Ritoré.
- Uma família a dois parâmetros  $E, \lambda$  de superfícies folheadas por pequenos círculos, periódicas na direção vertical. A trajetória dos centros dos círculos percorre uma “hélice” em  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ , no sentido que ela “sobe” (a última coordenada é crescente) e se projeta sobre uma geodésica de  $\mathbb{S}^2$ ; além disso o raio de um círculo da superfície é relacionado com a posição do seu centro sobre a “hélice”.

Reencontramos então um resultado de Laurent Hauswirth cf. [HA]

## 4

### Exemplos de Superfícies Mínimas Cíclicas em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$

No modelo do hiperbolóide de  $\mathbb{H}^2$ , as geodésicas são curvas obtidas pela intersecção de planos vetoriais de  $\mathbb{R}_1^3$  com o hiperbolóide, confira em [KU], e as curvas de curvatura constantes são intersecção de planos afins com o hiperbolóide. Nesse capítulo descreveremos várias famílias de exemplos de superfícies mínimas cíclicas em  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ , essas famílias foram descobertas e classificadas por Laurent Hauswirth em [HA].

#### 4.1

##### Exemplos de superfícies mínimas folheadas por geodésicas

##### 4.1.1

###### Plano Hiperbólico horizontal

Seja  $\mathbb{H}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  parametrizada localmente por:

$$X : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$$

$$(u, v) \longmapsto \left( \begin{pmatrix} \cosh v \\ \sinh v \cos u \\ \sinh v \sin u \end{pmatrix}, 0 \right)$$

$S$  é totalmente geodésica (isto é, a segunda forma fundamental anula-se) portanto ela é mínima.

##### 4.1.2

###### O Cilindro

Seja o produto de uma geodésica de  $\mathbb{H}^1$  por  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ , é parametrizado localmente por:

$$X : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$$

$$(u, v) \longmapsto \left( \begin{pmatrix} \sinh v \\ \cosh v \\ 0 \end{pmatrix}, u \right)$$

ela é totalmente geodésica, logo é mínima.

### 4.1.3

#### O Helicóide

Seja  $S$ , o helicóide em  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  parametrizado localmente por:

$$X_{ab} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$$

$$(u, v) \longmapsto \left( \begin{pmatrix} \cosh v \\ \sinh v \cos au \\ \sinh v \sin au \end{pmatrix}, bu \right)$$

Apresentaremos agora dois casos limites do helicóide em  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$

- a)  $X_{a0}$  - gira e não sobe, obtemos assim o hiperbolóide  $\mathbb{H}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ . (cf. seção 4.1.1)
- b)  $X_{0b}$  - sobe e não gira, obtemos o cilindro. (cf. seção 4.1.2)

Agora iremos provar que essa superfície é mínima em  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ , para isso calculamos abaixo as derivadas primeiras de  $S$ :

$$X_u = \left( \begin{pmatrix} 0 \\ -a \sinh v \sin au \\ \sinh v \cos au \end{pmatrix}, b \right)$$

$$X_v = \left( \begin{pmatrix} \sinh v \\ \cosh v \cos au \\ \cosh v \sin au \end{pmatrix}, 0 \right)$$

com isso obtemos a primeira forma fundamental:

$$E = a^2 \sinh^2 v + b$$

$$F = 0$$

$$G = 1$$

Em seguida temos as derivadas segundas:

$$X_{uu} = (0, -a^2 \sinh v \cos au, -a^2 \sinh v \sin au, 0)$$

$$X_{uv} = (0, -a \cosh v \sin au, a \cosh v \cos au, 0)$$

$$X_{vv} = (\cosh v, \sinh v \cos au, \sinh v \sin au, 0)$$

Seja o vetor

$$N = (0, -a \sinh v \sin au, a \sinh v \cos au, t),$$



onde  $t$  é escolhido de maneira que  $\mathbf{N}$  seja normal a superfície, então os coeficientes em relação  $\mathbf{N}$  da segunda forma fundamental são:

$$\begin{aligned}\bar{e} &= 0 \\ \bar{f} &= a^2 \cosh v \sinh v \\ \bar{g} &= 0\end{aligned}$$

Portanto temos que  $\bar{H} = 0$ , logo pela proposição 3 temos que essa superfície é mínima.

## 4.2

### O Catenóide

Vamos procurar uma superfície mínima na forma de uma superfície folheada por círculos paralelos no modelo do hiperbolóide, que são curvas com curvatura constante maior que 1. Tal superfície é parametrizada por:

$$\begin{aligned}X : \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1 &\longrightarrow \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R} \\ (u, v) &\longmapsto (\cosh \theta(u), \sinh \theta(u) \cos v, \sinh \theta(u) \sin v, u)\end{aligned}$$

Agora vamos definir:

$$Y(u, v) = (\cosh \theta(u), \sinh \theta(u) \cos v, \sinh \theta(u) \sin v)$$

Assim temos:

$$X(u, v) = (Y(u, v), u)$$

Vamos então calcular as derivadas de  $Y(u, v)$  para obtermos a curvatura média de  $X(u, v)$ :

$$\begin{aligned}Y_u &= (\theta' \sinh \theta, \theta' \cosh \theta \cos v, \theta' \cosh \theta \sin v) \\ Y_v &= (0, -\sinh \theta \sin v, \sinh \theta \cos v) \\ Y_{uu} &= (\theta'' \sinh \theta + (\theta')^2 \cosh \theta, \theta'' \cosh \theta \cos v + (\theta')^2 \sinh \theta \cos v, \\ &\quad \theta'' \cosh \theta \sin v + (\theta')^2 \sinh \theta \sin v) \\ Y_{uv} &= (0, -\theta' \cosh \theta \sin v, \theta' \cosh \theta \cos v) \\ Y_{vv} &= (0, -\sinh \theta \cos v, -\sinh \theta \sin v)\end{aligned}$$

Primeira Forma Fundamental:

$$\begin{aligned} E &= (\theta')^2 + 1 \\ F &= 0 \\ G &= \sinh^2 \theta \end{aligned}$$

Agora precisamos, para calcular a Segunda Forma Fundamental, de algum vetor  $\mathbf{N}$  normal a superfície, uma vez que não precisamos de um vetor normal unitário por causa da proposição 3. Sabemos que  $X_u$  e  $X_v$  são tangentes a superfície, logo:

$$\langle \mathbf{N}, X_u \rangle_1 = 0$$

$$\langle \mathbf{N}, X_v \rangle_1 = 0$$

Isso significa que  $X_u$  e  $X_v$  pertencem a  $T_x(\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}) = T_y \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ , tal que  $x \in \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  sendo  $x = (y, t)$ , assim temos:

$$Y(u, v) \in \mathbb{H}^2$$

e que  $X(u, v) = (Y(u, v), u)$ , assim  $\mathbf{N} = (M, t)$ , tal que  $M = (a, b, c)$  onde vamos determinar  $M$ , mas não calcularemos explicitamente  $t$ , já que não aparece nas expressões da segunda forma fundamental.

Para isso temos:

$$\langle \mathbf{N}, X_u \rangle_1 = \langle M, Y_u \rangle_1 + t \cdot 1 = 0 \Rightarrow t = -\langle M, Y_u \rangle$$

$$\langle \mathbf{N}, X_v \rangle_1 = \langle M, Y_v \rangle_1 + t \cdot 0 = 0$$

Agora determinaremos  $a$ ,  $b$  e  $c$  de  $M = (a, b, c)$ , então:

$$\langle M, Y_v \rangle = 0 \Rightarrow -b \sinh \theta \sin v + c \sinh \theta \cos v = 0$$

Como  $\sinh \theta \neq 0$ , portanto podemos simplificar:

$$-b \sin v + c \cos v = 0$$

Determinamos agora:

$$b = \cos v$$

$$c = \sin v$$

e  $M = (a, \cos v, \sin v)$ , para encontrar  $a$ , fazemos:

$$\langle Y, M \rangle_1 = 0$$

Uma vez que  $Y(u, v) = (\cosh \theta, \sinh \theta \cos v, \sinh \theta \sin v)$ , temos:

$$\begin{aligned} \langle Y, M \rangle_1 &= -a \cosh \theta + \sinh \theta \cos^2 v + \sinh \theta \sin^2 v \\ &= -a \cosh \theta + \sinh \theta = 0 \end{aligned}$$

Simplificando, podemos definir  $b = \cosh \theta \cos v$  e  $c = \cosh \theta \sin v$ , então:

$$\langle Y, M \rangle_1 = -a \cosh \theta + \cosh \theta \sinh \theta = 0$$

Como sabemos que  $\cosh \theta \neq 0$ , então:  $a = \sinh \theta$

Com isso encontramos  $M$ :

$$M = (\sinh \theta, \cosh \theta \cos v, \cosh \theta \sin v)$$

e como  $\mathbf{N} = (M, t)$ , temos

$$\mathbf{N} = (\sinh \theta, \cosh \theta \cos v, \cosh \theta \sin v, t) \quad (4-1)$$

Segunda Forma Fundamental:

$$\begin{aligned} \bar{e} &= \theta'' \\ \bar{f} &= 0 \\ \bar{g} &= -\sinh \theta \cosh \theta \end{aligned}$$

Com isso temos que a curvatura média é:

$$\bar{H} = \theta'' \sinh^2 \theta - (\theta')^2 \sinh \theta \cosh \theta - \sinh \theta \cosh \theta$$

E com  $\bar{H} = 0$ , temos:

$$\theta'' \sinh \theta - (\theta')^2 \cosh \theta - \cosh \theta = 0 \quad (4-2)$$

Veremos que a equação (4-2) é um caso particular de uma equação que resolveremos na seção seguinte.

### 4.3

#### Superfícies Mínimas folheadas por curvas de curvatura constante maior que 1

Nessa seção vamos estudar as superfícies mínimas folheadas por curvas de curvatura constante  $k > 1$  em  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ . Seja  $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$  uma base ortonormal tal que:

$$\begin{cases} \langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle_1 = -1 \\ \langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle_1 = 1 \\ \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle_1 = 1 \end{cases}$$

e algum número real  $\theta$ . Vamos provar que  $C$  parametrizada por:

$$C(v) = \sinh \theta (\mathbf{n} \cos v + \mathbf{b} \sin v) + \mathbf{t} \cosh \theta \in \mathbb{H}^2$$

tem curvatura constante maior que 1. Por isso reparametrizamos a curva pelo comprimento de arco  $w = v \sinh \theta$ :

$$\begin{aligned} C(w) &= \cosh \theta \mathbf{t} + \sinh \theta \left( \cos \left( \frac{w}{\sinh \theta} \right) \mathbf{n} + \sin \left( \frac{w}{\sinh \theta} \right) \mathbf{b} \right) \\ C'(w) &= -\sin \left( \frac{w}{\sinh \theta} \right) \mathbf{n} + \cos \left( \frac{w}{\sinh \theta} \right) \mathbf{b} \\ C''(w) &= \frac{1}{\sinh \theta} \left( -\cos \left( \frac{w}{\sinh \theta} \right) \mathbf{n} - \sin \left( \frac{w}{\sinh \theta} \right) \mathbf{b} \right) \end{aligned}$$

logo  $\langle C, C'' \rangle_1 = -1$ . Seja  $\{e_1, e_2\}$  base ortonormal de  $T_{C(w)}\mathbb{H}^2$  então  $\{c, e_1, e_2\}$  é base ortonormal de  $\mathbb{R}_1^3$  e podemos escrever:

$$C'''(w) = -\langle C, C'' \rangle_1 C + \langle C'', e_1 \rangle e_1 + \langle C'', e_2 \rangle e_2$$

ou seja,

$$(C'')^T = C'' + \langle C, C'' \rangle_1 C = C'' - C$$

portanto

$$(C'')^T = -\cosh \theta \mathbf{t} - \left( \frac{1}{\sinh \theta} + \sinh \theta \right) \cos \left( \frac{w}{\sinh \theta} \right) \mathbf{n} - \left( \frac{1}{\sinh \theta} + \sinh \theta \right) \sin \left( \frac{w}{\sinh \theta} \right) \mathbf{b}$$

logo

$$|(C'')^T|_1^2 = 1 + \frac{1}{\sinh^2 \theta} > 1$$

Concluimos que a curvatura da curva  $C$  é constante e maior que 1. Assim podemos parametrizar localmente uma superfície folheada por curvas de

curvatura constante maior que 1 em  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  por:

$$\begin{aligned} X : I \times \mathbb{S}^1 &\longrightarrow \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R} \\ (u, v) &\longmapsto (\sinh \theta(u)(\cos v \mathbf{n} + \sin v \mathbf{b}) + \cosh \theta(u) \mathbf{t}, u) \end{aligned}$$

onde  $\theta(u)$  é uma função real e  $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$  é o triedo de Frenet de alguma curva de tipo-espaço de  $\mathbb{R}_1^3$ , portanto nas equações de Frenet (cf. definição 15), temos  $\epsilon = -1$  e  $\eta = 1$  e logo:

$$\begin{cases} \mathbf{t}' = k\mathbf{n} \\ \mathbf{n}' = k\mathbf{t} - \tau\mathbf{b} \\ \mathbf{b}' = \tau\mathbf{n}, \end{cases}$$

Definiremos também para simplificar os cálculos:

$$Y(u, v) = \sinh \theta(u)(\cos v \mathbf{n} + \sin v \mathbf{b}) + \cosh \theta(u) \mathbf{t}$$

Assim temos:

$$\begin{aligned} X(u, v) &= (Y(u, v), u) \\ X_u(u, v) &= (Y_u(u, v), 1) \\ X_v(u, v) &= (Y_v(u, v), 0) \\ X_{uu}(u, v) &= (Y_{uu}, 0) \\ X_{uv}(u, v) &= (Y_{uv}, 0) \\ X_{vv}(u, v) &= (Y_{vv}, 0) \end{aligned}$$

Usando as equações de Frenet calculamos:

$$\begin{aligned} Y_u(u, v) &= (k \sinh \theta \cos v + \theta' \sinh \theta, \theta' \cosh \theta \cos v - \tau \sinh \theta \sin v + k \cosh \theta, \\ &\quad \theta' \cosh \theta \sin v + \tau \sinh \theta \cos v) \\ Y_v(u, v) &= (0, -\sinh \theta \sin v, \sinh \theta \cos v) \end{aligned}$$

Antes de apresentar os coeficientes da primeira forma fundamental de  $X(u, v)$ , vamos fazer a seguinte observação:

$$\begin{aligned} E &= \bar{E} + 1 \\ F &= \bar{F} \\ G &= \bar{G} \end{aligned}$$

Onde  $\bar{E}$ ,  $\bar{F}$  e  $\bar{G}$  são os coeficientes da primeira forma fundamental de  $Y(u, v)$ . Abaixo são apresentados os coeficientes da primeira forma fundamental de

$X(u, v)$ .

$$\begin{aligned} E &= 1 + (\theta')^2 + \tau^2 \sinh^2 \theta + k^2 \cosh^2 \theta + 2\theta'k \cos v + \\ &\quad 2\tau k \sinh \theta \cosh \theta \sin v - k^2 \sinh^2 \theta \cos^2 v \\ F &= -\tau \sinh^2 \theta - k \sinh \theta \cosh \theta \sin v \\ G &= \sinh^2 \theta \end{aligned}$$

Abaixo as derivadas segundas de  $Y(u, v)$ :

$$\begin{aligned} Y_{uu}(u, v) &= (k' \sinh \theta \cos v + 2\theta'k \cosh \theta \cos v + \theta'' \sinh \theta + (\theta')^2 \cosh \theta \\ &\quad - k\tau \sinh \theta \sin v + k^2 \cosh \theta, \\ &\quad k^2 \sinh \theta \cos v + 2k\theta' \sinh \theta + \theta'' \cosh \theta \cos v + (\theta')^2 \sinh \theta \cos v \\ &\quad - \tau' \sinh \theta \cos v - 2\tau\theta' \cosh \theta \sin v + k' \cosh \theta - \tau^2 \sinh \theta \cos v, \\ &\quad 2\tau\theta' \cosh \theta \cos v - \tau^2 \sinh \theta \sin v + k\tau \cosh \theta + \theta'' \cosh \theta \sin v + \\ &\quad (\theta')^2 \sinh \theta \sin v + \tau' \sinh \theta \cos v) \\ Y_{uv}(u, v) &= (-k \sinh \theta \sin v, -\theta' \cosh \theta \sin v - \tau \sinh \theta \cos v, \theta' \cosh \theta \cos v \\ &\quad - \tau \sinh \theta \sin v) \\ Y_{vv}(u, v) &= (0, -\sinh \theta \cos v, -\sinh \theta \sin v) \end{aligned}$$

Para calcular a segunda forma fundamental usaremos o vetor normal  $\mathbf{N}$ (cf. 4-1) que encontramos na seção 4.2 desse capítulo, pois o espaço normal a uma superfície não depende da base usada.

Segunda Forma Fundamental.

Agora podemos determinar  $\bar{e}$ ,  $\bar{f}$  e  $\bar{g}$ :

$$\begin{aligned} \bar{e} &= \theta'' - \tau^2 \sinh \theta \cosh \theta + k' \cos v + (k\tau - 2k\tau \cosh^2 \theta) \sin v \\ &\quad - k^2 \cosh \theta \sinh \theta \sin^2 v \\ \bar{f} &= \tau \cosh \theta \sinh \theta + k \sinh^2 \theta \sin v \\ \bar{g} &= -\sinh \theta \cosh \theta \end{aligned}$$

Temos  $\bar{H} = E\bar{g} - 2F\bar{f} + G\bar{e} = 0$ , então:

$$\begin{aligned} \bar{H} &= -(k^2 \cosh \theta + (\theta')^2 \cosh \theta - \theta'' \sinh \theta + \cosh \theta) \sinh \theta - k\tau \sinh^2 \theta \sin v + \\ &\quad (k' \sinh^2 \theta - 2\theta'k \sinh \theta \cosh \theta) \cos v \end{aligned}$$

Se a superfície é mínima:

$$H = 0 \implies \begin{cases} -k^2 \cosh \theta - (\theta')^2 \cosh \theta + \theta'' \sinh \theta - \cosh \theta = 0 \\ -k\tau \sinh^2 \theta = 0 \\ k' \sinh^2 \theta - 2\theta'k \sinh \theta \cosh \theta = 0 \end{cases}$$

Vamos analisar a segunda equação do sistema. Sabemos que  $\sinh^2 \theta \neq 0$  e  $k \neq 0$ , logo  $\tau = 0$ , significando que a curva  $\gamma$  é plana e pertence ao plano paralelo ao plano gerado por  $\mathbf{t}$  e  $\mathbf{n}$  e observamos que o fato de termos  $\tau = 0$  também significa  $\mathbf{b}$  constante.

Vamos analisar agora a equação  $k' \sinh \theta = 2\theta'k \cosh \theta$ , ou seja,

$$\frac{k'}{k} = 2\theta' \coth \theta$$

Agora podemos integrar os dois termos:

$$\int \frac{1}{k} dk = 2 \int \coth \theta d\theta$$

obtemos,

$$\ln k = 2 \ln |\sinh \theta| + c$$

Que simplificando fica  $k = \lambda \sinh^2 \theta$ , onde é uma constante positiva.

Agora devemos resolver a seguinte equação:

$$\theta'' \sinh \theta - (\theta')^2 \cosh \theta - \cosh \theta - k^2 \cosh \theta = 0$$

Que reescreveremos dessa maneira:

$$\theta'' \sinh \theta - ((\theta')^2 + 1) \cosh \theta - \lambda^2 \cosh \theta \sinh^4 \theta = 0 \quad (4-3)$$

agora multiplicamos por  $2\theta' \sinh \theta$ , teremos:

$$2\theta'\theta'' \sinh^2 \theta - ((\theta')^2 + 1)2\theta' \cosh \theta \sinh \theta - 2\lambda^2\theta' \cosh \theta \sinh^5 \theta = 0$$

Agora dividindo por  $\sinh^4 \theta$  temos:

$$\frac{2\theta'\theta'' \sinh^2 \theta - ((\theta')^2 + 1)2\theta' \cosh \theta \sinh \theta}{\sinh^4 \theta} - 2\lambda^2\theta' \cosh \theta \sinh \theta = 0$$

logo,

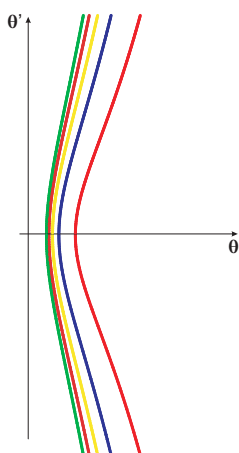
$$\left( \frac{(\theta')^2 + 1}{\sinh^2 \theta} - \lambda^2 \sinh^2 \theta \right)' = 0$$

e a função

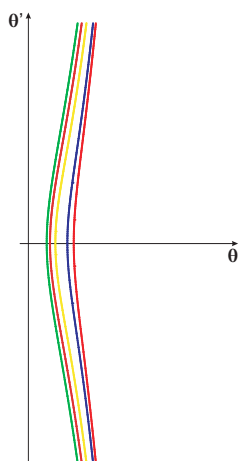
$$E(\theta, \theta') = \frac{(\theta')^2 + 1}{\sinh^2 \theta} - \lambda^2 \sinh^2 \theta, \quad (4-4)$$

é uma integral primeira de (4-3).

Agora para uma análise dessa expressão fazemos  $E$  igual a uma constante e traçamos o gráfico dessas curva para diferentes valores de  $E$  e para  $\lambda = 0$ , caso do catenóide, como podemos ver na figura abaixo:



Abaixo fazemos a mesma análise, mas para  $\lambda \neq 0$ :



Observamos que sobre toda curva integral,  $\theta$  admite um mínimo que denotaremos por  $\theta_0$  e que cada curva tem dois fins, onde  $\theta$  tende ao infinito. Sem perda de generalidade suponhamos que  $\theta(0) = \theta_0$ . No caso  $\lambda \neq 0$ , vamos mostrar que  $\sinh \theta$  tende a infinito em tempo finito. Considerando a parte da curva integral em que  $\theta'$  é positiva, temos que  $\theta(u)$  é crescente, então existe a função inversa, que denotamos por  $u(\theta)$ , definida sobre o intervalo  $[\theta_0, \infty)$ , que estudaremos quando  $\theta \rightarrow \theta_0$ , observamos que temos uma situação análoga



ao Capítulo 2, assim podemos concluir que

$$u(\theta) = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{\lambda^2 \sinh^4 \theta + E \sinh^2 \theta - 1}},$$

é uma integral convergente.

Agora iremos calcular  $\lim_{\theta \rightarrow \infty} u(\theta)$ , para mostrar que  $\sinh \theta$  tende para o infinito em tempo finito.

Tome

$$u(\theta) = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{du}{d\theta} d\theta = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{\lambda^2 \sinh^4 \theta + E \sinh^2 \theta - 1}} \quad (4-5)$$

$$\text{Como } \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 \sinh^4 \theta + E \sinh^2 \theta - 1}} < \frac{1}{\lambda \sinh^2 \theta} < \frac{1}{\theta^2},$$

concluimos que a integral (4-5) converge, isto é, existe  $u_{\infty} < \infty$  tal que  $\lim_{\theta \rightarrow \infty} u(\theta) = u_{\infty}$ . Concluimos assim que  $\sinh \theta$  tende para o infinito em tempo finito, pois  $\theta$  tende para o infinito e a curva limite tem curvatura igual a 1, isto é, um horociclo. A situação é simétrica no caso  $\theta' < 0$  logo a superfície é limitada por duas folhas  $\mathbb{H}^2$  horizontais. Assim a situação é muito parecida com o caso do exemplo de Riemann de  $\mathbb{R}^3$ .

#### 4.4

##### O Catenóide folheado por curvas de curvatura constante menor que 1

Agora vamos procurar uma superfície mínima na forma de uma superfície folheada por curvas de curvatura constante menor que 1, que no modelo do hiperbolóide, são hipérboles.

$$\begin{aligned} X : \mathbb{R} \times \mathbb{H}^1 &\longrightarrow \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R} \\ (u, v) &\longmapsto (\cosh \theta(u) \cosh v, \cosh \theta(u) \sinh v, \sinh \theta(u), u) \end{aligned}$$

Agora vamos definir:

$$Y(u, v) = (\cosh \theta(u) \cosh v, \cosh \theta(u) \sinh v, \sinh \theta(u))$$

Assim temos:

$$X(u, v) = (Y(u, v), u)$$

Vamos então calcular as derivadas de  $Y(u, v)$  para obtermos a curvatura média de  $X(u, v)$ :

$$Y_u = (\theta' \sinh \theta \cosh v, \theta' \sinh \theta \sinh v, \theta' \cosh \theta)$$

$$Y_v = (\cosh \theta \sinh v, \cosh \theta \cosh v, 0)$$

$$Y_{uu} = (\theta'' \sinh \theta \cosh v + (\theta')^2 \cosh \theta \cosh v, \theta'' \cosh \theta \sinh v + (\theta')^2 \cosh \theta \sinh v, \theta'' \cosh \theta + (\theta')^2 \sinh \theta)$$

$$Y_{uv} = (\theta' \sinh \theta \sinh v, \theta' \sinh \theta \cosh v, 0)$$

$$Y_{vv} = (\cosh \theta \cosh v, \cosh \theta \sinh v, 0)$$

Primeira Forma Fundamental:

$$E = (\theta')^2 + 1$$

$$F = 0$$

$$G = \cosh^2 \theta$$

Agora precisamos, para calcular a Segunda Forma Fundamental, de algum vetor  $\mathbf{N}$  normal a superfície, uma vez que não precisamos de um vetor normal unitário por causa da proposição 3. Sabemos que  $X_u$  e  $X_v$  são tangentes a superfície, logo:

$$\langle \mathbf{N}, X_u \rangle_1 = 0$$

$$\langle \mathbf{N}, X_v \rangle_1 = 0$$

Isso significa que  $X_u$  e  $X_v$  pertencem a  $T_x(\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}) = T_y \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ , tal que  $x \in \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  sendo  $x = (y, t)$ , assim temos:

$$Y(u, v) \in \mathbb{H}^2$$

e que  $X(u, v) = (Y(u, v), u)$ , assim  $\mathbf{N} = (M, t)$ , fazendo cálculos análogos aos que foram feitos na seção 4.2 temos que:

$$M = (\sinh \theta \cosh v, \sinh \theta \sinh v, \cosh \theta)$$

e como  $\mathbf{N} = (M, t)$ , temos

$$\mathbf{N} = (\sinh \theta, \cosh \theta \cos v, \cos \theta \sin v, t) \quad (4-6)$$

Segunda Forma Fundamental:

$$\begin{aligned}\bar{e} &= \theta'' \\ \bar{f} &= 0 \\ \bar{g} &= -\sinh \theta \cosh \theta\end{aligned}$$

Com isso temos que a curvatura média é:

$$\bar{H} = \theta'' \cosh^2 \theta - (\theta')^2 \cosh \theta \sinh \theta - \cosh \theta \sinh \theta$$

E com  $\bar{H} = 0$ , temos:

$$\theta'' \cosh^2 \theta - ((\theta')^2 + 1) \cosh \theta \sinh \theta - \cosh \theta \sinh \theta = 0$$

logo

$$\theta'' \cosh \theta - (\theta')^2 \sinh \theta - \sinh \theta = 0 \quad (4-7)$$

Veremos que a equação (4-7) é um caso particular de uma equação que resolveremos na seção seguinte.

#### 4.5

#### Superfícies Mínimas folheadas por curvas de curvatura constante menor que 1

Nessa seção vamos estudar superfícies mínimas folheadas por curvas de curvatura constante  $k < 1$  em  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ . Inicialmente ver como parametrizar tais curvas: Seja  $\{e_1, e_2, e_3\}$  base ortonormal de  $\mathbb{R}_1^3$  tal que

$$\begin{cases} \langle e_1, e_1 \rangle_1 = -1 \\ \langle e_2, e_2 \rangle_1 = 1 \\ \langle e_3, e_3 \rangle_1 = 1 \end{cases}$$

e algum número real  $\theta$ . Vamos provar que a curva  $C$  parametrizada por:

$$C(v) = \sinh \theta e_2 + \cosh \theta \cosh v e_1 + \cosh \theta \sinh v e_3 \in \mathbb{H}^2$$

tem curvatura constante menor que 1. Antes vamos fazer uma mudança de variável  $w = \cosh \theta v$  e escreveremos:

$$C(w) = \sinh \theta e_2 + \cosh \theta \cosh\left(\frac{w}{\cosh \theta}\right) e_1 + \cosh \theta \sinh\left(\frac{w}{\cosh \theta}\right) e_3$$

Calculamos inicialmente  $C'(v) = \sinh\left(\frac{w}{\cosh \theta}\right)e_1 + \cosh\left(\frac{w}{\cosh \theta}\right)e_3$ , portanto

$$C''(w) = \frac{1}{\cosh \theta} \left( \cosh\left(\frac{w}{\cosh \theta}\right)e_1 + \sinh\left(\frac{w}{\cosh \theta}\right)e_3 \right)$$

logo  $\langle C, C'' \rangle_1 = -1$ . Seja  $\{v_1, v_2\}$  base ortonormal de  $T_{C(w)}\mathbb{H}^2$  então  $\{C, v_1, v_2\}$  é base ortonormal de  $\mathbb{R}_1^3$  e podemos escrever:

$$C''(w) = -\langle C, C'' \rangle_1 C + \langle C'', v_1 \rangle_1 v_1 + \langle C'', v_2 \rangle_1 v_2$$

ou seja,

$$(C'')^T = C'' + \langle C, C'' \rangle_1 C = C'' - C$$

portanto

$$(C'')^T = -\sinh \theta e_2 + \left( \frac{1}{\cosh \theta} + \cosh \theta \right) \cosh\left(\frac{w}{\cosh \theta}\right)e_1 + \left( \frac{1}{\cosh \theta} + \cosh \theta \right) \sinh\left(\frac{w}{\cosh \theta}\right)e_3$$

logo

$$|(C'')^T|_1^2 = 1 - \frac{1}{\cosh^2 \theta}$$

e obtemos

$$0 < 1 - \frac{1}{\cosh^2 \theta} < 1$$

#### 4.5.1

##### 1º Caso, onde o vetor normal à curva é de tipo-tempo

Seja a superfície em  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  parametrizada localmente por:

$$X : I \times \mathbb{H}^1 \longrightarrow \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$$

$$(u, v) \longmapsto (\cosh \theta(u)(\cosh v \mathbf{n} + \sinh v \mathbf{b}) + \sinh \theta(u) \mathbf{t}, u)$$

onde  $\theta(u)$  é uma função real e  $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$  é o triedo de Frenet de alguma curva de tipo-espaço de  $\mathbb{R}_1^3$ , tal que o vetor normal seja de tipo-tempo, portanto nas equações de Frenet (cf. definição 15), temos  $\epsilon = 1$  e  $\eta = -1$  e logo:

$$\begin{cases} \mathbf{t}' = -k \mathbf{n} \\ \mathbf{n}' = -k \mathbf{t} - \tau \mathbf{b} \\ \mathbf{b}' = -\tau \mathbf{n}, \end{cases}$$

Definiremos também para simplificar os cálculos:

$$Y(u, v) = \cosh \theta(u)(\cosh v \mathbf{n} + \sinh v \mathbf{b}) + \sinh \theta(u) \mathbf{t}$$

Assim temos:

$$\begin{aligned} X(u, v) &= (Y(u, v), u) \\ X_u(u, v) &= (Y_u(u, v), 1) \\ X_v(u, v) &= (Y_v(u, v), 0) \\ X_{uu}(u, v) &= (Y_{uu}, 0) \\ X_{uv}(u, v) &= (Y_{uv}, 0) \\ X_{vv}(u, v) &= (Y_{vv}, 0) \end{aligned}$$

Usando as equações de Frenet calculamos:

$$Y_u(u, v) = (\theta' \cosh \theta - k \cosh \theta \cosh v, -k \sinh \theta + \theta' \sinh \theta \cosh v - \tau \cosh \theta \sinh v, -\tau \cosh \theta \cosh v + \theta' \sinh \theta \sinh v)$$

$$Y_v(u, v) = (0, \cosh \theta \sinh v, \cosh \theta \cosh v)$$

Antes de apresentar os coeficientes da primeira forma fundamental de  $X(u, v)$  vamos fazer a seguinte observação:

$$\begin{aligned} E &= \bar{E} + 1 \\ F &= \bar{F} \\ G &= \bar{G} \end{aligned}$$

Onde  $\bar{E}$ ,  $\bar{F}$  e  $\bar{G}$  são os coeficientes da primeira forma fundamental de  $Y(u, v)$ . Abaixo são apresentados os coeficientes da primeira forma fundamental de  $X(u, v)$ .

$$\begin{aligned} E &= 1 + (\theta')^2 + \tau^2 \cosh^2 \theta - k^2 \sinh^2 \theta + 2\theta' k \cosh v \\ &\quad - 2\tau k \sinh \theta \cosh \theta \sinh v + k^2 \cosh^2 \theta \cosh^2 v \\ F &= -\tau \cosh^2 \theta + k \sinh \theta \cosh \theta \sinh v \\ G &= \cosh^2 \theta \end{aligned}$$

Abaixo as derivadas segundas de  $Y(u, v)$ :

$$\begin{aligned}
Y_{uu}(u, v) &= (-k' \cosh \theta \cosh v + (\theta')^2 \sinh \theta + \theta'' \cosh \theta - 2\theta' k \sinh \theta \cosh v + \\
&\quad k^2 \sinh \theta + k\tau \cosh \theta \sinh v, \\
&\quad -2\theta' k \cosh \theta - k' \sinh \theta + (\theta')^2 \cosh \theta \cosh v + \theta'' \sinh \theta \cosh v + \\
&\quad k^2 \cosh \theta \cosh v - 2\theta' \tau \sinh \theta \sinh v - \tau' \cosh \theta \sinh v + \tau^2 \cosh \theta \cosh v, \\
&\quad \tau^2 \cosh \theta \sinh v + (\theta')^2 \cosh \theta \sinh v - \tau' \cosh \theta \cosh v + k\tau \sinh \theta + \\
&\quad \theta'' \sinh \theta \sinh v - 2\theta' \tau \sinh \theta \cosh v) \\
Y_{uv}(u, v) &= (-k \cosh \theta \sinh v, -\tau \cosh \theta \cosh v + \theta' \sinh \theta \sinh v, -\tau \cosh \theta \sinh v + \\
&\quad \theta' \sinh \theta \cosh v) \\
Y_{vv}(u, v) &= (0, \cosh \theta \cosh v, \cosh \theta \sinh v)
\end{aligned}$$

Para calcular a segunda forma fundamental precisamos de um vetor normal, que determinaremos a seguir:

Sabemos que  $X_u$  e  $X_v$  são tangentes a superfície, logo:

$$\langle \mathbf{N}, X_u \rangle_1 = 0$$

$$\langle \mathbf{N}, X_v \rangle_1 = 0$$

Isso significa que  $X_u$  e  $X_v$  pertencem a  $T_x(\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}) = T_y \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ , tal que  $x \in \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  sendo  $x = (y, t)$ , assim temos:

$$Y(u, v) \in \mathbb{H}^2$$

e que  $X(u, v) = (Y(u, v), u)$ , assim  $\mathbf{N} = (M, t)$ , fazendo cálculos análogos aos que foram feitos na seção 4.2 temos que:

$$M = (\cosh \theta, \sinh \theta \cosh v, \sinh \theta \sinh v)$$

e como  $\mathbf{N} = (M, t)$ , temos

$$\mathbf{N} = (\cosh \theta, \sinh \theta \cosh v, \sinh \theta \sinh v, t) \quad (4-8)$$

Segunda Forma Fundamental.

Agora podemos determinar  $\bar{e}$ ,  $\bar{f}$  e  $\bar{g}$ :

$$\begin{aligned}
\bar{e} &= +\theta'' - \tau^2 \cosh \theta \sinh \theta - k' \cosh v + (-k\tau + 2k\tau \cosh^2 \theta) \sinh v \\
&\quad - k^2 \cosh \theta \sinh \theta \cosh v^2 v \\
\bar{f} &= \tau \cosh \theta \sinh \theta - k \cosh^2 \theta \sinh v \\
\bar{g} &= -\sinh \theta \cosh \theta
\end{aligned}$$

Temos  $\bar{H} = E\bar{g} - 2F\bar{f} + G\bar{e} = 0$ , então:

$$\begin{aligned} \bar{H} = & (-k^2 \sinh \theta - (\theta')^2 \sinh \theta + \theta'' \cosh \theta - \sinh \theta) \cosh \theta - k\tau \cosh^2 \theta \sinh v + \\ & (-k' \cosh^2 \theta + 2\theta' k \sinh \theta \cosh \theta) \cosh v \end{aligned}$$

Se a superfície é mínima:

$$H = 0 \implies \begin{cases} \theta'' \cosh \theta - (\theta')^2 \sinh \theta - k^2 \sinh \theta - \sinh \theta = 0 \\ -k\tau \cosh^2 \theta = 0 \\ -k' \cosh^2 \theta + 2\theta' k \sinh \theta \cosh \theta = 0 \end{cases}$$

Vamos analisar a segunda equação do sistema. Sabemos que  $\cosh^2 \theta \neq 0$  e  $k \neq 0$ , logo  $\tau = 0$ , significando que a curva  $\gamma$  é plana e pertence ao plano paralelo ao plano gerado por  $\mathbf{t}$  e  $\mathbf{n}$  e observamos que o fato de termos  $\tau = 0$  também significa  $\mathbf{b}$  constante.

Vamos analisar agora a equação  $k' \cosh \theta = 2\theta' k \sinh \theta$ , ou seja,

$$\frac{k'}{k} = 2\theta' \tanh \theta$$

Agora podemos integrar os dois termos:

$$\int \frac{1}{k} dk = 2 \int \tanh \theta d\theta$$

obtemos,

$$\ln k = 2 \ln |\cosh \theta| + c$$

Que simplificando fica  $k = \lambda \cosh^2 \theta$ , onde  $\lambda$  é um número real positivo. Assim podemos resolver a seguinte equação:

$$\theta'' \cosh \theta - (\theta')^2 \sinh \theta - k^2 \sinh \theta - \sinh \theta = 0$$

na qual reescrevemos dessa maneira:

$$\theta'' \cosh \theta - ((\theta')^2 + 1) \sinh \theta - \lambda^2 \cosh^4 \theta \sinh \theta = 0 \quad (4-9)$$

multiplicando por  $2\theta' \cosh \theta$ , teremos:

$$2\theta'\theta'' \cosh^2 \theta - 2((\theta')^2 + 1)\theta' \cosh \theta \sinh \theta - 2\theta'\lambda^2 \cosh^5 \theta \sinh \theta = 0$$

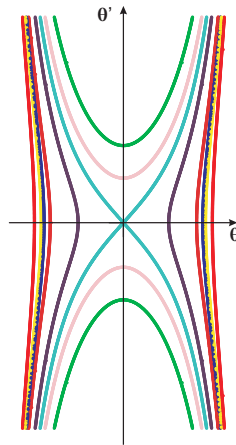
que dividindo por  $\cosh^4 \theta$  fica:

$$\frac{2\theta'\theta'' \cosh^2 \theta - 2\theta'((\theta')^2 + 1) \sinh \theta \cosh \theta}{\cosh^4 \theta} - 2\lambda^2 \theta' \cosh \theta \sinh \theta = 0$$

logo,

$$\left( \frac{(\theta')^2 + 1}{\cosh^2 \theta} - \lambda^2 \cosh^2 \theta \right)' = 0$$

temos que a função  $E(\theta, \theta') = \frac{(\theta')^2 + 1}{\cosh^2 \theta} - \lambda^2 \cosh^2 \theta$  é uma integral primeira de (4-9). Agora para uma análise dessa expressão fazemos  $E$  igual a uma constante e traçamos o gráfico dessas curva para diferentes valores de  $E$  e para  $\lambda = 0$ , que é o caso do catenóide, como podemos ver na figura abaixo:



Observamos pela figura acima que obtivemos três tipos de curvas integrais, sendo um deles muito semelhante ao caso anterior, no qual  $\theta' = 0$  e portanto  $\theta$  admite um mínimo que novamente suporemos que  $\theta(0) = \theta_0$ . No caso  $\lambda \neq 0$ , vamos mostrar que  $\cosh \theta$  tende a infinito em tempo finito. Considerando a parte desse tipo de curva em que  $\theta'$  é positiva, temos que  $\theta(u)$  é crescente, então existe a função inversa, que denotamos por  $u(\theta)$ , definida sobre o intervalo  $[\theta_0, \infty)$  e expressada por:

$$u(\theta) = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{\lambda^2 \cosh^4 \theta + E \cosh^2 \theta - 1}}, \tag{4-10}$$

que é uma integral convergente pelo mesmo argumento feito no capítulo 2 seção 2.3.

Vamos calcular  $\lim_{\theta \rightarrow \infty} u(\theta)$ .

Tome

$$u(\theta) = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{du}{d\theta} d\theta = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{\lambda^2 \cosh^4 \theta + E \cosh^2 \theta - 1}} \tag{4-11}$$

Como  $\frac{1}{\sqrt{\lambda^2 \cosh^4 \theta + E \cosh^2 \theta - 1}} < \frac{1}{\lambda \cosh^2 \theta} < \frac{1}{\theta^2}$ ,

concluimos que a integral (4-11) converge, isto é, existe  $u_{\infty} < \infty$  tal que  $\lim_{\theta \rightarrow \infty} u(\theta) = u_{\infty}$ . Concluimos assim que  $\cosh \theta$  tende para o infinito em tempo



finito, pois  $\theta$  tende para o infinito. Aqui novamente a curva limite tem curvatura 1, isto é, um horociclo. Esse caso é parecido ao da seção anterior.

Para o outro tipo de curva onde temos que  $\theta' \neq 0$  e positiva para todo  $\theta$ , daí  $\theta(u)$  é crescente, então existe uma função inversa  $u(\theta)$  definida da mesma maneira que em (4-10) e portanto têm as mesmas características.

O terceiro tipo de curva que obtivemos é a curva que passa pela origem no plano de fase  $(\theta, \theta')$ , assim analisando novamente a função inversa  $u(\theta)$  onde  $\theta_0 = 0$  para  $\theta \rightarrow 0$  observamos que ela é convergente e novamente que  $\theta \rightarrow \infty$  e então  $\cosh \theta$  tende para o infinito em tempo finito.

#### 4.5.2

##### 2º Caso, quando o vetor binormal é de tipo-tempo

Seja a superfície em  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  parametrizada por:

$$X : I \times \mathbb{H}^1 \longrightarrow \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$$

$$(u, v) \longmapsto (\cosh \theta(u)(\sinh v \mathbf{n} + \cosh v \mathbf{b}) + \sinh \theta(u) \mathbf{t}, u)$$

onde  $\theta(u)$  é uma função real e  $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$  é o triedo de Frenet de alguma curva de tipo-espaco de  $\mathbb{R}_1^3$ , tal que o vetor binormal seja de tipo-tempo, portanto nas equações de Frenet (cf. definição 15), temos  $\epsilon = 1$  e  $\eta = 1$  e logo:

$$\begin{cases} \mathbf{t}' = k\mathbf{n} \\ \mathbf{n}' = -k\mathbf{t} + \tau\mathbf{b} \\ \mathbf{b}' = \tau\mathbf{n}, \end{cases}$$

Definiremos também para simplificar os cálculos:

$$Y(u, v) = \cosh \theta(\sinh v \mathbf{n} + \cosh v \mathbf{b}) + \sinh \theta \mathbf{t}$$

Assim temos:

$$\begin{aligned} X(u, v) &= (Y(u, v), u) \\ X_u(u, v) &= (Y_u(u, v), 1) \\ X_v(u, v) &= (Y_v(u, v), 0) \\ X_{uu}(u, v) &= (Y_{uu}, 0) \\ X_{uv}(u, v) &= (Y_{uv}, 0) \\ X_{vv}(u, v) &= (Y_{vv}, 0) \end{aligned}$$

Usando as equações de Frenet calculamos:

$$Y_u(u, v) = (\theta' \cosh \theta - k \cosh \theta \sinh v, k \sinh \theta + \theta' \sinh \theta \sinh v + \tau \cosh \theta \cosh v, \tau \cosh \theta \sinh v + \theta' \sinh \theta \cosh v)$$

$$Y_v(u, v) = (0, \cosh \theta \cosh v, \cosh \theta \sinh v)$$

Antes de apresentar os coeficientes da primeira forma fundamental de  $X(u, v)$  vamos fazer a seguinte observação:

$$E = \bar{E} + 1$$

$$F = \bar{F}$$

$$G = \bar{G}$$

Onde  $\bar{E}$ ,  $\bar{F}$  e  $\bar{G}$  são os coeficientes da primeira forma fundamental de  $Y(u, v)$ . Abaixo são apresentados os coeficientes da primeira forma fundamental de  $X(u, v)$ .

$$E = 1 + (\theta')^2 + \tau^2 \cosh^2 \theta + k^2 \sinh^2 \theta + 2\theta' k \sinh v$$

$$+ 2\tau k \sinh \theta \cosh \theta \cosh v + k^2 \cosh^2 \theta \sinh^2 v$$

$$F = \tau \cosh^2 \theta + k \sinh \theta \cosh \theta \cosh v$$

$$G = \cosh^2 \theta$$

Abaixo as derivadas segundas de  $Y(u, v)$ :

$$Y_{uu}(u, v) = (-k' \cosh \theta \sinh v + (\theta')^2 \sinh \theta + \theta'' \cosh \theta - 2\theta' k \sinh \theta \sinh v - k^2 \sinh \theta - k\tau \cosh \theta \cosh v, 2\theta' k \cosh \theta + k' \sinh \theta + (\theta')^2 \cosh \theta \sinh v + \theta'' \sinh \theta \sinh v + -k^2 \cosh \theta \sinh v - 2\theta' \tau \sinh \theta \cosh v + \tau' \cosh \theta \cosh v + \tau^2 \cosh \theta \sinh v, \tau^2 \cosh \theta \cosh v + (\theta')^2 \cosh \theta \cosh v + \tau' \cosh \theta \sinh v + k\tau \sinh \theta + \theta'' \sinh \theta \cosh v + 2\theta' \tau \sinh \theta \sinh v)$$

$$Y_{uv}(u, v) = (-k \cosh \theta \cosh v, \tau \cosh \theta \sinh v + \theta' \sinh \theta \cosh v, \tau \cosh \theta \cosh v + \theta' \sinh \theta \sinh v)$$

$$Y_{vv}(u, v) = (0, \cosh \theta \sinh v, \cosh \theta \cosh v)$$

Para calcular a segunda forma fundamental precisamos de um vetor normal, que determinaremos a seguir:

Sabemos que  $X_u$  e  $X_v$  são tangentes a superfície, logo:

$$\langle \mathbf{N}, X_u \rangle_1 = 0$$

$$\langle \mathbf{N}, X_v \rangle_1 = 0$$

Isso significa que  $X_u$  e  $X_v$  pertencem a  $T_x(\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}) = T_y\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ , tal que  $x \in \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  sendo  $x = (y, t)$ , assim temos:

$$Y(u, v) \in \mathbb{H}^2$$

e que  $X(u, v) = (Y(u, v), u)$ , assim  $\mathbf{N} = (M, t)$ , fazendo cálculos análogos aos que foram feitos na seção 4.2 temos:

$$M = (\cosh \theta, \sinh \theta \sinh v, \sinh \theta \cosh v)$$

e como  $\mathbf{N} = (M, t)$ , temos

$$\mathbf{N} = (\cosh \theta, \sinh \theta \sinh v, \sinh \theta \cosh v, t) \quad (4-12)$$

Segunda Forma Fundamental.

Agora podemos determinar  $\bar{e}$ ,  $\bar{f}$  e  $\bar{g}$ :

$$\begin{aligned} \bar{e} &= \theta'' - \tau^2 \cosh \theta \sinh \theta - k' \sinh v + (k\tau - 2k\tau \cosh^2 \theta) \cosh v \\ &\quad - k^2 \cosh \theta \sinh \theta \cosh^2 v \\ \bar{f} &= -\tau \cosh \theta \sinh \theta - k \cosh^2 \theta \cosh v \\ \bar{g} &= -\sinh \theta \cosh \theta \end{aligned}$$

Temos  $\bar{H} = E\bar{g} - 2F\bar{f} + G\bar{e} = 0$ , então:

$$\begin{aligned} \bar{H} &= (k^2 \sinh \theta - (\theta')^2 \sinh \theta + \theta'' \cosh \theta - \sinh \theta) \cosh \theta + k\tau \cosh^2 \theta \cosh v + \\ &\quad (-k' \cosh^2 \theta + 2\theta'k \sinh \theta \cosh \theta) \sinh v \end{aligned}$$

Se a superfície é mínima:

$$H = 0 \implies \begin{cases} \theta'' \cosh \theta - (\theta')^2 \sinh \theta + k^2 \sinh \theta - \sinh \theta = 0 \\ k\tau \cosh^2 \theta = 0 \\ -k' \cosh^2 \theta + 2\theta'k \sinh \theta \cosh \theta = 0 \end{cases}$$

Vamos analisar a segunda equação do sistema. Sabemos que  $\cosh^2 \theta \neq 0$  e  $k \neq 0$ , logo  $\tau = 0$ , o que significa que  $\mathbf{b}$  constante.

Vamos analisar agora a equação  $k' \cosh \theta = 2\theta' k \sinh \theta$ , ou seja,

$$\frac{k'}{k} = 2\theta' \tanh \theta$$

Agora podemos integrar os dois termos:

$$\int \frac{1}{k} dk = 2 \int \tanh \theta d\theta$$

obtemos,

$$\ln k = 2 \ln |\cosh \theta| + c$$

Que simplificando fica  $k = \lambda \cosh^2 \theta$ , onde  $\lambda$  é uma constante real positiva.

Assim podemos resolver a seguinte equação:

$$\theta'' \cosh \theta - (\theta')^2 \sinh \theta + k^2 \sinh \theta - \sinh \theta = 0$$

na qual reescrevemos dessa maneira:

$$\theta'' \cosh \theta - ((\theta')^2 + 1) \sinh \theta + \lambda^2 \cosh^4 \theta \sinh \theta = 0 \quad (4-13)$$

multiplicando por  $2\theta' \cosh \theta$ , teremos:

$$2\theta'\theta'' \cosh^2 \theta - 2((\theta')^2 + 1)\theta' \cosh \theta \sinh \theta + 2\theta'\lambda^2 \cosh^5 \theta \sinh \theta = 0$$

que dividindo por  $\cosh^4 \theta$  fica:

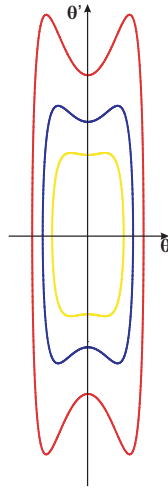
$$\frac{2\theta'\theta'' \cosh^2 \theta - 2\theta'((\theta')^2 + 1) \sinh \theta \cosh \theta}{\cosh^4 \theta} + 2\lambda^2\theta' \cosh \theta \sinh \theta = 0$$

logo,

$$\left( \frac{(\theta')^2 + 1}{\cosh^2 \theta} + \lambda^2 \cosh^2 \theta \right)' = 0$$

e a função  $E(\theta, \theta') = \frac{(\theta')^2 + 1}{\cosh^2 \theta} + \lambda^2 \cosh^2 \theta$  é uma integral primeira de (4-13).

Para uma análise dessa expressão fazemos  $E$  igual a uma constante e traçamos o gráfico dessas curva para diferentes valores de  $E$  e para  $\lambda = 0$ , que é o caso do catenóide, como podemos ver na figura abaixo:



Observamos que para  $\theta' = 0$ ,  $\theta$  admite um máximo que denotaremos  $\theta_0$ . Sem perda de generalidade suponhamos  $\theta(0) = \theta_0$ . Considerando a parte da curva integral em que  $\theta'$  é positiva, temos que  $\theta(u)$  é crescente, então existe a função inversa, que denotamos por  $u(\theta)$ , definida sobre o intervalo  $(0, \theta_0)$ . Observamos que como nos casos anteriores, podemos concluir que

$$u(\theta) = \int_{\theta}^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{f(\theta)}},$$

tal que

$$f(\theta) = -\lambda^2 \cosh^4 \theta + E \cosh^2 \theta - 1 \sim_{\theta \rightarrow \theta_0} f'(\theta_0)(\theta - \theta_0)$$

então portanto  $\lim_{\theta \rightarrow \theta_0} u < \infty$ .

Como no caso de  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$  as curvas integrais são periódicas então as superfícies que encontramos são muito parecidas com a família de superfícies mínimas em  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$  encontrada no Capítulo 3.

#### 4.6 Conclusão

Encontramos os seguintes exemplos de superfícies mínimas de  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  folheadas por curvas horizontais de curvatura constante:

- Um plano hiperbólico horizontal  $\mathbb{H}^2 \times \{0\}$  (cf. seção 4.1.1);
- O cilindro  $\mathbb{H}^1 \times \mathbb{R}$  (cf. seção 4.1.2);

- O helicóide (cf. seção 4.1.3);
- Duas superfícies de tipo catenóide (cf. seção 4.2 e 4.4);
- Uma família a dois parâmetros de superfícies folheadas por curvas de curvatura constante maior que 1, parecidos com os exemplos de Riemann de  $\mathbb{R}^3$ , já que são contidos entre dois planos horizontais (cf. seção 4.3);
- Uma família a dois parâmetros de superfícies folheadas por curvas de curvatura constante menor que 1, de tipo exemplo de Riemann (cf. seção 4.5.1);
- Uma família a dois parâmetros de superfícies folheadas por curvas de curvatura constante menor que 1, periódicas na direção vertical (cf. seção 4.5.2).

Assim apenas faltou analisarmos o caso onde as superfícies são folheadas por curvas de curvatura igual a 1, isto é, os horociclos.

Em conclusão, observamos que o método usado nessa dissertação poderia ser aplicado para o estudo das Superfícies Cíclicas satisfazendo outras equações de curvatura, tais como superfícies de curvatura média constante ou de curvatura Gaussiana constante.

## Referências Bibliográficas

- [DC1] DO CARMO, M., *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*, Textos Universitários, SBM, 1ª edição, 2005.
- [DC2] DO CARMO, M., *Geometria Riemanniana*, projeto Euclides, IMPA, 3ª edição, 2005.
- [EN] ENNEPER, A. *Die cyklischen flächen*. Z. Math. und Phys., 14(1869)393-421.
- [KU] KÜHNEL, Wolfgang *Differential Geometry*, American Mathematical Society, Student mathematical Library, V. 16.
- [HA] HAUSWIRTH, Laurent *Minimal Surfaces of Riemann type in three-dimensional product manifolds*. Pacific J. Math. 224(2006), nº1, 91–117.
- [HM] HOFFMAN, David; MEEKS, William H. *Minimal Surfaces Based on the Catenoid*. The American Mathematical Monthly, V. 97, nº 8, (1990), 702-730.
- [WJ] JAGY, W. *On Enneper's cyclic minimal superface in higher dimensions* Ph.D. thesis, University of California, Berkeley, 1988.
- [NI1] NITSCHKE, Johannes C. *Lectures on Minimal Surfaces*. Vol.1.
- [NI2] NITSCHKE, Johannes C. C. *Cyclic Surface of Constant Mean Curvature*. Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math.-Phys.Kl. II 1989, nº 1.
- [PR] PEDROSA, R e RITORÉ M. *Isoperimetric domains in the Riemannian products of circle with a simply connected space form and applications to free boundary value problem*, Indiana Univ. Math. J., 48(99), 1357-1394.
- [BR] RIEMANN, B. *Oeuvres Mathématiques de Riemann*, Gauthiers-Villars, Paris, 1898.
- [RO] ROSENBERG, Harold *Minimal surfaces in  $M^2 \times \mathbb{R}$* . (English Summary) Illinois J. Math. 224 (2006), nº 4, 1177–1195.

- [SE] SA EARP, Ricardo; TOUBIANA, Eric *Screw motion surfaces in  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  and  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$* . Illinois J. Math. 49 (2005), n° 4, 1323-1362



# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)