PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PUC/SP

MARCELO CORDEIRO DA SILVA

RETA GRADUADA: Um registro de representação dos números racionais

MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

São Paulo
2008

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PUC/SP

MARCELO CORDEIRO DA SILVA

RETA GRADUADA: Um registro de representação dos números racionais

*Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de **MESTRE PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA**, sob a orientação da **Professora Doutora Sonia Barbosa Camargo Igliori.***

São Paulo

2008

Banca Examinadora

____

____

____

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta dissertação por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

Assinatura: ______________________________________ **Local e Data:** ______________

DEDICATÓRIA

Aos meus familiares, que souberam me apoiar nesses três anos nos quais o tempo dedicado a eles ficou em segundo plano. Em especial, a minha eterna esposa Bernardete pelo seu companheirismo e dedicação nos momentos de desconforto pelos quais passei. E com carinho a minha filha Bárbara, que soube ser compreensiva e principalmente bárbara, perdoando a "ausência" de seu pai. Sou grato e a eles dedico essa conquista.

AGRADECIMENTOS

A Deus por ter me proporcionado um Pai e uma Mãe, enfim, uma família e por eles terem sabido conduzi-la pelos caminhos da sabedoria.

Às Divindades espirituais que me acompanham no dia-a-dia para que eu possa ser perdoado nas minhas falhas e tolerante com meus semelhantes.

A minha orientadora professora Dra. Sonia Barbosa Camargo Igliori por ter dedicado seu tempo precioso a minha pessoa, sendo paciente e compreensiva nos meus momentos de dificuldade. E o mais importante, agradeço a sua amizade.

Aos professores Dr. Benedito Antonio da Silva e Dra. Cristina Cerri por terem participado da banca examinadora e pelas valiosas contribuições dadas no exame de qualificação.

Aos professores do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC/SP pela amizade, dedicação e orientação prestada durante todo o curso. São professores dessa qualidade que fazem com que nós acreditemos que ainda vale a pena ser professor.

Ao secretário Francisco Olímpio pelo seu profissionalismo, eficiência e amizade.

Aos colegas de mestrado, em especial a Givanildo Farias da Silva, com quem dividi momentos de muito trabalho que resultaram em uma amizade que alcançou também nossas famílias.

Aos colegas de trabalho por terem compreendido minhas angústias e assim reforçarem a amizade ao longo desta caminhada. Em especial, à colega Gemima Perez pelos muitos incentivos e à colega Neide Maria dos Santos pelo apoio dado no término deste trabalho.

À Secretaria da Educação do Estado de São Paulo por ter implantado o Projeto Bolsa Mestrado e me conceder tal auxílio que, somado às informações valiosas dadas pela professora Maria José, da Diretoria Regional de Ensino Sul-2, possibilitou a realização deste trabalho.

Enfim, agradeço a todos aqueles que de forma direta ou indireta contribuíram para a realização e a conclusão deste meu sonho.

“Não é possível refazer este país, democratizá-lo, humanizá-lo, torná-lo sério, com adolescentes brincando de matar gente, ofendendo a vida, destruindo o sonho, inviabilizando o amor. Se a educação sozinha não transformar a sociedade, sem ela tampouco a sociedade muda.”

PAULO FREIRE

RESUMO

O presente trabalho tem por foco a introdução do conceito de número racional no Ensino Fundamental. Trata-se de um estudo sobre uma abordagem semiótica de ensino, fundamentada na teoria dos registros de representação de Raymond Duval (1993, 1995, 2005), apresentada num artigo dos pesquisadores franceses Adjiage e Pluvinage (2000). Nela é proposto que se considere a reta graduada como um registro de representação semiótica dos racionais, indicando ganhos para a aprendizagem comparativamente ao uso de figuras geométricas de dimensão 2, como as barras de chocolate, num papel figurativo. Duas questões nortearam este trabalho: se a introdução da reta graduada como um registro semiótico para os racionais de fato amplia a possibilidade de enfrentamento das dificuldades consagradas da aprendizagem dos racionais e se ela se configura como um elemento de auxílio para o ensino brasileiro. Os dados para a análise foram buscados nos *Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática para o Ensino Fundamental* (PCN) do ciclo II (3ª e 4ª séries) e do ciclo III (5ª e 6ª séries) e nos volumes de duas coleções de livros didáticos referentes a essas séries. Pudemos concluir que o registro da reta graduada ou geométrico de dimensão 1 tem potencialidades que podem favorecer a aprendizagem, pois ela se configura como um verdadeiro registro semiótico rico em signos e mais adaptado ao desenvolvimento de um conjunto de competências. Essa abordagem não é recomendada nos PCN e nem aparece nos livros didáticos, levando-nos a inferir que se introduzida entre nós, pode se configurar como um elemento de auxílio para o ensino brasileiro.

Palavras-chave: número racional, subconstrutos, representações geométricas, reta graduada, registro semiótico.

ABSTRACT

This present study aimed to introduce the rational numbers concept on Elementary School. This study is about semiotic approach education, based on representation's register theory by Raymond Duval (1993, 1995, 2005), found on article by French research Adjiage and Pluvinage (2000). In this article has proposed to consider the graduated straight line as a register of semiotic representation of rationals numbers, it indicates good results to education comparing to use of geometric figures dimension size 2, as chocolate bars, for example. Two questions guided this study: if the introduction of graduated straight line as a semiotic register to rationals numbers extends the possibility in opposition of difficulties to learn rationals numbers, and if it setups as element to help on Brazilian education. The dates for this analyze were *Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental* (PCN) to 2nd cycle (3rd and 4th grades) and 3rd cycle (5th and 6th grades) and the volumes of a didactic books' collection to these grades. We could check that the graduated straight line's or geometric's register has potential that could to promote education because it designs as a true semiotic register with a lot of signs and adaptable to development of a set of skills. This approach isn't recommendation by PCN and it doesn't act in didactics books, in this case, we can infer that if it could be introduced among us it can be a element to help on Brazilian education.

Keywords: rational numbers, subconstrutos, geometric representation, graduated straight line, semiotic register.

LISTA DE QUADROS

LISTA DE FIGURAS

CAPÍTULO 4 **PÁGINA**

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

“Mestre não é quem sempre ensina, mas quem de repente aprende.”

Guimarães Rosa

Introduzimos este trabalho expondo nossa percepção de que o mesmo é resultante das muitas fases de um processo que envolveu dificuldades, incertezas e tomadas de posição, para, ao fim, apresentar este produto que julgamos importante tanto para nossa formação pessoal quanto para nossa prática de sala de aula. Nesse processo, incluímos também o percurso que fizemos para chegar ao mestrado e a compreensão do valor da pesquisa na formação do professor. Podemos citar ainda, como ingrediente fundamental do desenvolvimento desta pesquisa, a definição do tema e o necessário envolvimento com ele. Vale a pena também testemunhar o quanto evoluímos desde a entrada no mestrado até a conclusão deste trabalho, passando do estágio de achar que poderíamos resolver todos os problemas do ensino e aprendizagem da Matemática para a conscientização da complexidade da área de Educação Matemática e para a percepção de que um pesquisador deve se debruçar sobre um tema específico, utilizar referenciais teóricos e métodos científicos de pesquisa e assim poder obter resultados que sejam férteis para a compreensão dos fenômenos que envolvem a área da Educação Matemática e possam contribuir para ampliar as reflexões dos envolvidos com ela.

Nossa carreira profissional como professor de Matemática teve início em 1991 nas redes públicas do Estado e do Município de São Paulo. Ao longo dessa trajetória, atuando tanto no Ensino Fundamental quanto no Ensino Médio, pudemos vivenciar dificuldades dos alunos nas atividades matemáticas. O enfrentamento das mesmas sempre esteve entre nossas preocupações, constituindo mesmo um desafio. É fato que, muitas vezes, o desânimo nos atinge, pois não é fácil tomar decisões sobre qual é o melhor caminho a seguir. Nossa vivência, porém, foi nos possibilitando ver, com mais clareza, que alguns conteúdos matemáticos trazem dificuldades para a aprendizagem, que algumas dificuldades demoram mais a serem suplantadas e que são mais resistentes. Como exemplo, podemos citar o conceito de número fracionário, tema escolhido para o desenvolvimento deste trabalho. Uma hipótese que levantamos é a de que a dificuldade de aprendizagem do número fracionário reside tanto no fato de ele assumir diferentes significados quanto no desenvolvimento dos algoritmos que, para efetuar as operações, são conflitantes com a "generalização de procedimentos" esperada pelo aluno. É o caso, por exemplo, da adição. É freqüente encontrarmos a resolução de uma adição na forma $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{2}{4}$, mesmo por alunos de séries que já passaram pelo ensino dos racionais. O esperado, numa "generalização abusiva" (ARTIGUE *apud* IGLIORI, 2002, p. 103) seria somar "em cima" e "em baixo". E por que não?

Como professor, tentamos várias saídas para encaminhar nossos alunos ao sucesso e fomos percebendo que nem sempre esse sucesso estava atrelado aos esforços que despendíamos e que havia algo a mais a ser observado. Num primeiro momento, o insucesso é atribuído aos alunos, que são fracos, ou às condições de ensino, como a ausência de computador nas escolas, por exemplo. Dificilmente se atribui o insucesso às dificuldades inerentes ao próprio conceito, sua epistemologia ou às inadequações na forma de introduzi-lo. O professor busca abordagens diferentes de ensino realizando cursos de formação continuada, assiste a palestras, vai a congressos. Nesse embate de fazer os alunos entenderem, fomos tendo um indicador, uma vez que pudemos atuar nas diversas séries, de que a dificuldade poderia não ser apenas de nossos alunos ou de uma série específica. Em conversa com colegas, pudemos perceber que essas dificuldades eram freqüentes. Em oficinas e minicursos de formação continuada, o tema do ensino das frações e as dificuldades de aprendizagem eram recorrentes. Com o passar do tempo, convencemo-nos de que, na realidade, encontrar abordagem eficiente para o ensino da Matemática, incluindo aí o ensino das frações, e equacionar as dificuldades dos alunos estava para além de trocas de idéias entre professores e realização de esforços pessoais. Percebemos que seria necessário o envolvimento com a pesquisa e compreendemos que essa é a razão da existência de uma área de investigação sobre os problemas do ensino e aprendizagem da Matemática, que é a Educação Matemática. Com a criação do programa Bolsa Mestrado pela Secretaria de Educação do Estado de São Paulo, surgiu a possibilidade de participarmos de um programa de pós-graduação e de buscarmos, nas pesquisas científicas, os meios de equacionamento dos fenômenos do ensino e aprendizagem da Matemática e de enfrentamento das dificuldades neles envolvidas.

Iniciamos nossa participação no Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP), no grupo de pesquisa Do elementar ao Superior em Matemática, integrando-nos como participante do projeto *A axiomatização da aritmética e o conceito de número*, sob a supervisão de minha orientadora, a Professora Doutora Sonia Barbosa Camargo Igliori. Um dos objetivos desse projeto é "Investigar novos métodos de introduzir o conceito de número e novas maneiras de responder a questão: "O que é um número?"".

Dois elementos foram então determinantes para a escolha do tema e questão desta pesquisa: as dificuldades de aprendizagem atreladas ao conceito de número e a abordagem de análise de dificuldades exploradas na teoria dos registros de representação semiótica de Raymond Duval.

Assim sendo, propusemo-nos a investigar abordagens de ensino para o ensino dos números racionais de modo que a teoria dos registros fosse um recurso.

Deparamo-nos então com um artigo bastante adequado para nosso intento, o artigo *Un registre géométrique unidimensionnel pour l'expression des rationnels* [1], escrito por Robert Adjiage e François Pluvinage (*Recherches em Didactique des Mathématiques,* RDM 20/1, ano 2000, p. 41-88). Esse artigo

[1] *Um registro geométrico unidimensional para a expressão dos racionais* (tradução nossa).

apresenta uma abordagem diferenciada para a introdução aos números racionais na qual a reta graduada[2] é utilizada como registro de representação.

Os dois argumentos seguintes apresentados pelos autores,

> Uma representação é cognitivamente parcial e tem por corolário que uma multiplicação das representações abre perspectivas cognitivas mais amplas. [...] "*um objeto matemático* (por oposição a objetos usuais ou culturais) *deve sua existência às mudanças de registros de expressão*", sugere bem uma abordagem dos objetos matemáticos por seu ambiente semiótico mais que por seu ambiente físico. (ADJIAGE; PLUVINAGE, 2000, p. 45, grifo do autor, tradução nossa)[3]

levaram-nos à elaboração das questões geradoras desta pesquisa:

- ✓ A introdução da reta graduada como um registro semiótico para os racionais de fato amplia a possibilidade de enfrentamento das dificuldades consagradas na aprendizagem dos racionais?
- ✓ Vai se configurar como um elemento de auxílio para o ensino brasileiro?

A proposta é analisarmos, à luz dos argumentos apresentados no artigo, o que se pode observar em livros didáticos e nos *Parâmetros Curriculares Nacionais* (PCN) de 1997 e 1998.

É um pressuposto do estudo que as condições para a utilização do recurso da reta graduada como registro não se apresentam da mesma forma que às da França. Isso porque, no caso da França, havia a possibilidade da utilização de computadores e um *software* específico para as atividades propostas com a reta graduada como um registro semiótico dos racionais. No nosso caso, não

---

[2] Reta graduada: é uma reta em que se toma um ponto como origem, toma-se um segmento por unidade e marcam-se pontos à direita e à esquerda da origem. Cada um desses pontos é considerado como representação de um número inteiro positivo (à direita da origem) e negativo (à esquerda).

[3] Une représentation est cognitivement partielle et a pour corollaire qu´une multiplication des représentations ouvre des perspectives cognitives plus étendues. [...] "*un objet mathématique* (par opposition às des objets usuels ou culturels) *doit son exitence às dês changements de registres d´expression",* sugere bien une approche dês objets mathématiques par leur environnements sémiotique plutôt que par leur environnement physique.

dispomos de computadores e não tivemos a possibilidade de encontrar o software e, portanto, desconhecemos como pode interferir nas atividades junto aos alunos. Temos a expectativa de que, mesmo assim, vale a pena realizar uma atividade empírica sem o comprometimento da qualidade dos dados. O que estará em análise é a introdução de um determinado registro de representação dos números racionais que a pesquisa francesa revelou ter bons resultados para a aprendizagem dos alunos envolvidos e não o uso da tecnologia.

Esta dissertação está organizada em cinco capítulos. De forma sintética, podemos dizer que este trabalho pode ser caracterizado como um estudo comparativo. A comparação, num sentido de análise de reprodutibilidade de resultados, foi realizada com uma pesquisa desenvolvida na França, na qual é investigada uma abordagem de ensino dos números racionais ou mais especificamente das frações. A nosso ver, essa forma de comparação toma um cunho de pesquisa na medida em que a legitimidade de resultados sempre prescinde de estudos de reprodutibilidade.

Os capítulos abordam os seguintes conteúdos: no capítulo 1, apresentamos alguns elementos históricos que deram base ao surgimento das frações assim como a definição de número racional. Descrevemos também a dificuldade da conceituação de número e, do ponto de vista epistemológico em particular, do número racional. Apresentamos ainda as diferentes interpretações que podem ser dadas aos números racionais, segundo os PCN (1997, 1998) e Kieren (1976, 1988, 1993).

O quadro teórico, teoria dos registros de representação de Raymond Duval, está delineado no capítulo 2.

No capítulo 3, apresentamos uma síntese do artigo de Adjiage e Pluvinage (2000), referência desta pesquisa. Ainda, nesse capítulo, estão expostos a problemática e os procedimentos metodológicos.

No capítulo 4, apresentamos as análises feitas sobre os números racionais com relação aos PCN e livros didáticos.

No capítulo 5, apresentamos as conclusões deste estudo tendo por base os questionamentos iniciais e também algumas sugestões para possíveis trabalhos futuros.

CAPÍTULO 1

ASPECTOS HISTÓRICOS E EPISTEMOLÓGICOS DO CONCEITO DE NÚMERO RACIONAL

> *"Mas há uma outra razão que explica a elevada reputação das Matemáticas, é que elas levam às ciências naturais exatas uma certa proporção de segurança que, sem elas, essas ciências não poderiam obter."*
>
> *Albert Einstein*

1.1 Alguns elementos históricos sobre os números racionais

Os elementos históricos que apresentamos a seguir não serão instrumentos para a análise de fenômenos didáticos. Apenas buscamos neles o entendimento da complexidade dos conteúdos matemáticos e a explicação para alguns hábitos no ensino.

1.1.1 Os sistemas de numeração

São as necessidades da vida que levam o homem a fazer descobertas que o ajudam a supri-las e, dessa forma, ele vem participando do processo histórico e construindo a ciência. Sabemos que, em certa época da evolução humana, o homem teve a necessidade de mudar seu estilo de vida, que era totalmente nômade. Por essa razão, passou a criar rebanhos e também a plantar e a colher. Para os historiadores, foi o momento que impulsionou o que podemos chamar de *a arte de contar*, pois os algarismos e os sistemas de numeração não existiam, o que exigia certa criatividade para a contagem. Essa evolução é destacada por Boyer (2001, p. 1):

> É claro que a matemática originalmente surgiu como parte da vida diária do homem, e se há validade no princípio biológico da "sobrevivência dos mais aptos", a persistência da raça humana provavelmente tem relação com o desenvolvimento de conceitos matemáticos.

Está na natureza do ser humano o ato de criar e inventar. A invenção dos algarismos e dos sistemas de numeração é uma das mais antigas e valiosas. Segundo Ifrah (1997), existe um paralelo entre a invenção da escrita e a da numeração escrita, pois, como sabemos, alguns sistemas de numeração usavam letras do respectivo alfabeto. Sendo assim, "[...] ambas permitem chegar diretamente ao mundo das idéias, apreender o pensamento e fazer com que ele atravesse o espaço e o tempo [...]". (IFRAH, 1997, p. 501)

Com o decorrer dos anos, algumas civilizações mais desenvolvidas criaram seu sistema de numeração aditivo ou posicional, tornando mais ágil o seu uso e possibilitando o relacionamento, principalmente mercantil, entre as pessoas. De fato, um sistema de numeração tornou possível a resolução de situações-problema relacionadas às necessidades reais. No entanto sendo a escrita, a leitura e a realização de operações de difícil entendimento, poucas eram as pessoas que tinham acesso a elas e as dominavam.

Podemos citar, nesse contexto, os sistemas de numeração egípcio, babilônio, chinês, maia, grego, romano e indo-arábico como os mais conhecidos e é certo que haveria de prevalecer sobre os demais aquele que fosse o mais simples de ser usado. De acordo com Ifrah (1997), no sistema indo-arábico, desde que foi inventado com os dez símbolos, não houve necessidade de melhoria na notação dos números.

Por outro lado, o conceito de número tem sido uma preocupação constante para matemáticos e filósofos ao longo da história. Segundo Boyer (2001, p. 4),

> O conceito de número inteiro é o mais antigo na matemática e sua origem se perde nas névoas da antiguidade pré-histórica. A noção de fração racional, porém, surgiu relativamente tarde e em geral não estava relacionada de perto com os sistemas para os inteiros. Entre as tribos primitivas parece não ter havido praticamente nenhuma necessidade de usar frações. [...] as frações decimais foram essencialmente um produto da idade moderna da matemática, não do período primitivo.

Há ainda que se dizer que o relacionamento entre homem e número, para algumas pessoas, representava muito mais que ferramenta do dia-a-dia, pois essas enxergavam nos números propriedades que os deixavam com certa mística, aguçando ainda mais a curiosidade sobre eles, como relata Aristóteles em sua *Metafísica*:

> [...] aqueles a quem se chamam pitagóricos foram os primeiros a consagrar-se às Matemáticas e fizeram-nas progredir. Penetrados dessas disciplinas, pensaram que os princípios das Matemáticas eram os princípios de todos os seres. Como, desses princípios, os números são, pela sua natureza, os primeiros, e como, nos números, os pitagóricos pensavam aperceber uma multidão de analogias com as coisas que existem e se transformam, [...] todas as coisas lhes pareciam, na sua inteira natureza, ser formadas à semelhança dos números e que os números pareciam ser as realidades primordiais do Universo, consideraram que os princípios dos números eram os elementos de todos os seres e que o Céu inteiro é harmonia e número. (ARISTÓTELES *apud* CARAÇA, 1951, p. 69)

1.1.2 O aparecimento das frações

A existência de um tipo de número que não fosse inteiro, em particular número natural, remonta às civilizações antigas, tanto aos povos que habitaram a Mesopotâmia, particularmente os babilônios, quanto aos egípcios.

“Os homens da Idade da Pedra não usavam frações, mas com o advento de culturas mais avançadas durante a Idade do Bronze parece ter surgido a necessidade do conceito de fração e de notação para frações.” (BOYER, 2001, p. 9)

Os babilônios criaram um sistema de numeração posicional de base 60 e conheciam as frações sexagesimais, que chegaram até nós por meio dos tabletes de barro com sua escrita cuneiforme.

Com relação aos egípcios, temos os documentos que sobreviveram até os nossos dias: *Papiro de Rhind* ou *Papiro de Ahmes*, copiado por um escriba por volta de 1650 a.C., e *Papiro de Moscou*, escrito por volta de 1890 a.C. Eles mostram como se resolver alguns problemas de Aritmética e Geometria, porém sem justificar as resoluções, usando um sistema próprio de numeração em que as frações, geralmente unitárias, ou seja, frações com numerador igual a 1, faziam-se presentes.

“Os papiros de Ahmes e Moscou, nossas principais fontes de informação podem ter sido apenas manuais destinados a estudantes, mas indicam a direção e as tendências do ensino de matemática no Egito.” (BOYER, 2001, p. 15)

Garbi (2006) nos lembra que a Matemática desenvolvida pelos egípcios tinha finalidade prática e era usada, por exemplo, na agrimensura, na arquitetura e em obras de irrigação. Sabemos que, principalmente no Egito, as terras eram medidas para então serem cedidas ao povo para o cultivo, o que resultava em cobrança de tributos para o faraó pela respectiva colheita. O ato de medir parece simples para os dias de hoje, uma vez que as unidades padrão já foram definidas, porém naquela época...

Para Caraça (1951), o processo de medida exige três fases distintas:

- ✓ A escolha da unidade.
- ✓ A comparação com a unidade.
- ✓ A expressão do resultado dessa comparação por um número.

Como nem sempre a medida da grandeza pode ser expressa por um número inteiro de vezes da unidade, surge a necessidade de se utilizar um número não natural.

Podemos presumir que esse foi o primeiro passo para que as frações surgissem nas civilizações antigas, pois quando se media um comprimento ou uma área, por exemplo, e se confrontava com uma sobra inferior à unidade tomada, via-se a obrigatoriedade de se dividir a unidade em um número de partes iguais, surgindo assim as frações da unidade.

Esse fato histórico liga o uso das frações às questões de medida e ao uso das figuras geométricas planas na introdução do conceito de fração no Ensino Fundamental, pois segundo Lima (1997), existe uma relação histórica entre o tratamento dado à fração hoje e sua utilização no passado. “Daí o fato de o estudo de fração estar quase sempre ligado à área de figuras geométricas”. (LIMA, 1997, p. 82)

1.2 Alguns elementos epistemológicos sobre os números racionais

A epistemologia do conceito de número é suficientemente complexa para que uma criança possa assimilá-la rapidamente. Seu desenvolvimento foi, segundo Boyer (2001), um processo longo e gradual pelo qual algumas civilizações passaram. É certo que, nos dias de hoje, o conceito de número tem grande importância, uma vez que a sociedade moderna é extremamente dependente daquilo que as ciências criam e, com certeza, há necessidade de se usar o número seja para quantificar seja ordenar, quaisquer que sejam as áreas: exatas, humanas ou biológicas.

O objeto matemático número vai tomar uma forma de conceito com a axiomatização da Aritmética, o que vai ocorrer somente por volta do século XIX. Para isso, porém, muitas transformações foram necessárias como, por exemplo, até mesmo uma reinterpretação da noção de axioma diferente daquela dada por Aristóteles e usada por Euclides em *Os Elementos,* passando de verdades objetivas e intuitivamente claras, que nem precisavam nem podiam ser provadas, para premissas hipotéticas do pensamento, ou postulados.

De acordo com Otte (*apud* FONSECA, 2005), a dificuldade de conceituar o número deveu-se a necessidade de se utilizar uma teoria capaz de dar sustentação ao conjunto dos números reais e a todos os seus subconjuntos, o que só foi possível em meados do século XIX. Mesmo assim, o processo ensino-aprendizagem do conceito de número apresenta dificuldades para nossos alunos. Uma pesquisa feita por Igliori e Silva (2001) junto a alunos de ensino superior mostra que a dificuldade com relação ao conceito de número real não é privilégio apenas do Ensino Básico.

Filosoficamente, o conceito de número também não encontra respostas satisfatórias. As correntes estudadas são extremamente conservadoras quanto as suas idéias e “Nenhuma delas consegue responder de modo definitivo à questão: o que é número?”. (FONSECA, 2005, p. 77)

Com relação ao conceito de número racional, as frações, em particular, apresentam certa dificuldade em ganhar o *status* de número. Seu registro, ao ser feito usando-se o traço de fração, traz consigo a interpretação de divisão entre dois números naturais, distanciando-se da interpretação de registro de um único número. Outro ponto de dificuldade é a relação histórica, uma vez que a representação da fração sempre esteve associada à Geometria e conseqüentemente a interpretação de medida, distanciando-se, com isso, do conceito de número.

Gimenez e Bairral (2005) afirmam que a fração é vista pelo aluno como uma parte menor que a unidade e que também, ao funcionar como operador, traz a concepção de que o resultado da multiplicação por fração é sempre menor que o número inicial.

1.2.1 O conceito de racional e seus significados

O objeto matemático número racional é conceituado como segue.

Definição: Um número r é dito racional se existem m, n inteiros, com n não nulo tal que r = $\frac{m}{n}$.

A definição de número racional pode ainda ser apresentada como:

> Sejam $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ e u segmentos de reta, e tais que $\overline{AB}$ contém m vezes o segmento u e $\overline{CD}$ contém n vezes (portanto n é não nulo). Diz-se, por definição, que a medida do segmento $\overline{AB}$, tomando $\overline{CD}$ como unidade, é o número $\frac{m}{n}$, e escreve - se; se m for divisível por n, o número $\frac{m}{n}$ coincide com o número inteiro que é quociente da divisão; se m não for divisível por n, o número $\frac{m}{n}$ diz-se fracionário. O número $\frac{m}{n}$ diz-se, em qualquer hipótese, racional, ao número m chama-se numerador e ao número n denominador. (CARAÇA, 1951, p. 35)

Nesse ponto, nossa preocupação é com os diversos significados que o conceito de número racional carrega, os quais devem ser levados em conta no processo de ensino.

Conforme os PCN (1997, 1998), o número racional pode ser interpretado como relação parte-todo, quociente, razão e operador:

> A relação parte-todo se apresenta, portanto, quando um todo se divide em partes (equivalentes em quantidade de superfície ou de elementos). A fração indica a relação que existe entre um número de partes e o total de partes.
> Outro significado das frações é o de quociente; baseia-se na divisão de um natural por outro (a : b = a / b; b ≠ 0). Para o aluno, ela se diferencia da interpretação anterior, pois dividir um chocolate em 3 partes e comer 2 dessas partes é uma situação diferente daquela em que é preciso dividir 2 chocolates para 3 pessoas. No entanto, nos dois casos, o resultado é representado pela mesma notação: 2/3.

> Uma terceira situação, diferente das anteriores, é aquela em que a fração é usada como uma espécie de índice comparativo entre duas quantidades de uma grandeza, ou seja, quando é interpretada como razão. Isso ocorre, por exemplo, quando se lida com informações do tipo “2 de cada 3 habitantes de uma cidade são imigrantes”.
> [...] o significado da fração como operador, ou seja, quando ela desempenha um papel de transformação, algo que atua sobre uma situação e a modifica. Essa idéia está presente, por exemplo, num problema do tipo “que número devo multiplicar por 3 para obter 2”. (PCN, 1997, p. 68)

1.2.2 As visões de Kieren sobre as interpretações do racional

Com relação ao número racional, Kieren (1976) apresenta sete interpretações diferentes. São elas:

> 1. Os números racionais são frações que podem ser comparadas, acrescentadas, subtraídas, etc.
> 2. Os números racionais são frações decimais que formam uma extensão natural (via o nosso sistema de numeração) aos números inteiros.
> 3. Os números racionais são classes de equivalência de frações. Deste modo $\left\{\frac{1}{2},\frac{2}{4},\frac{3}{6},...\right\}$ e $\left\{\frac{2}{3},\frac{4}{6},\frac{6}{9},...\right\}$ são números racionais.
> 4. Os números racionais são números na forma $\frac{p}{q}$, tal que p e q são inteiros e $q \neq 0$. Dessa forma, números racionais são “razões” de números.
> 5. Os números racionais são operadores multiplicativos (por exemplo, alongadores, redutores, etc.).
> 6. Os números racionais são elementos de um campo ordenado de infinitos quocientes. Eles são números na forma $x = \frac{p}{q}$, tal que x satisfaz a equação $qx = p$.
> 7. Números racionais são medidas ou pontos sobre uma reta numerada.[1] (KIEREN, 1976, p. 102, tradução nossa)

---

[1] 1. Rational numbers are fractions which can be compared, added, subtracted, etc; 2. Rational numbers are decimal fractions which form a natural extension (via our numeration system) to the whole numbers; 3. Rational numbers are equivalence classes of fractions. Thus {1/2, 2/4, 3/6, …} and {2/3, 4/6, 6/9, …} are rational numbers; 4. Rational numbers are numbers of the form p/q, where p, q are integers and q ≠ 0. In this form, rational numbers are “ratio” numbers; 5. Rational numbers are multiplicative operators (e. g., stretchers, shrinkers, etc.); 6. Rational numbers are

Para o autor, cada interpretação permite considerar o número racional por uma perspectiva diferente.

Para Ohlsson (1988), Kieren identifica, em um artigo posterior (1980), cinco interpretações básicas para o número racional, que são: parte-todo, quociente, medida, razão e operador. Behr (1983), por sua vez, identifica seu trabalho como uma redefinição do trabalho de Kieren (1976) e classifica as interpretações, chamando-as de subconstrutos[2].

Kieren (1988) revê suas interpretações básicas e apresenta sua proposta de construção do conhecimento matemático baseado em construtos, que, segundo Ferreira (1986), em seu *Novo dicionário da língua portuguesa*, são conceitos elaborados com base em dados simples. Já em seu trabalho de 1993, Kieren classifica o construto do racional como uma coleção de vários elementos do conhecimento, identificando-os como subconstruto. Juntamente com Vergnaud e Freudenthal, o autor (1993) identifica quatro subconstrutos: medida, quociente, razão e operador, e esclarece que "os números racionais são considerados não só como um construto lógico formal, mas como humanamente conhecível".[3] (KIEREN, 1993, p. 53, tradução nossa)

Os subconstrutos dos números racionais estão ligados às outras áreas da Matemática. Sendo assim, Kieren (1993) afirma que o subconstruto medida mantém uma conexão de informações entre o estudo de números fracionários, a Geometria e o espaço. O subconstruto quociente, se aplicado em divisões sucessivas em uma quantidade de variável contínua[4], pode levar a intuição do infinitamente pequeno.

Para ilustrar, o autor cita a seguinte passagem:

---

elements of an infinite ordered quotient field. They are numbers of the form x = p/q where x satisfies the equation qx = p; 7. Rational numbers are measures or points on a number line.

[2] Subconstrutos: elementos do conhecimento, segundo Kieren (1993).

[3] In this way, rational numbers are considered not only as a formal logical construct but as a humanly knowable one.

[4] Quantidade de variável contínua: segundo Magalhães e Lima, seu conjunto de valores é qualquer intervalo dos números reais.

> Um menino de 12 anos respondeu à pergunta, qual é a sua fração favorita e por quê? Sua resposta foi "eu gosto de 1/2... sou fascinado, a propósito posso continuar dividindo em dois e encontrar partes menores, eu posso continuar a dividir e obter pedaços tão pequenos quanto eu queira para sempre".[5] (KIEREN, 1993, p. 59, tradução nossa)

Com relação ao subconstruto razão, esse está interligado aos conceitos de proporção e probabilidade; já o subconstruto operador, segundo o autor, pode fazer a conexão com a Álgebra.

Diferente de outros autores, nesse seu estudo, Kieren (1993) não classifica a relação parte-todo como um subconstruto, pois a idéia vinculada a essa relação está presente, conforme o autor, nos subconstrutos medida, quociente e operador. Nos subconstrutos medida e quociente, por exemplo, percebemos isso ao fazer a comparação de uma quantidade a uma unidade divisível, gerando, por sua vez, números racionais.

Tendo como base a sua proposta, Kieren (1993) apresenta um modelo teórico para a construção do conceito de número racional, composto por quatro níveis pelos quais ela deve passar:

- ✓ Nível I – conhecimento intuitivo.
- ✓ Nível II – conhecimento subconstruto.
- ✓ Nível III – pensamento multiplicativo formal.
- ✓ Nível IV – conhecimento estrutural dos racionais.

Dentro dessa proposta, o conceito de número racional é definido como um quociente, que, segundo Kieren (1993), é formado por um par de números inteiros (a, b) que satisfaz a equação $bx = a$, com $b \neq 0$, em que a sua existência é garantida devido à propriedade da inversão multiplicativa $\frac{1}{b}$ com $b \neq 0$.

---

[5] A 12-year-old boy responded to the questions, what is your favorite fraction and why? With the statement, "I like ½ … I am fascinated by the way I can keep dividing in two and get smaller pieces and if I can magnify it or something I can keep on dividing as small as I want forever."

A ação de repartir traz para o número racional sua existência como um quociente cuja representação é a fração unitária, assim como nas primeiras manifestações de fração no sistema de numeração egípcio. É também a forma com que as crianças produzem melhores resultados, pois podemos considerar esse tipo de fração como uma idéia intuitiva de quociente que deverá ser formalizado no decorrer do processo.

De acordo com Kieren (1993), outro fato que merece destaque é a atuação simultânea do número racional como quociente e razão. Como quociente, os números racionais permitem responder à pergunta “Quanto?”; como razão, eles atuam com relação à igualdade ou equivalência da *parte* com o *todo*.

Se tomássemos, segundo o autor, os números racionais apenas como uma extensão dos números inteiros e levássemos em conta apenas à relação estática parte-todo, estaríamos fadados a ter um currículo em que trabalhar com racional seria o mesmo que trabalhar o número pelo número. Em contrapartida, um currículo baseado em subconstruto permite um estudo com variações de significados dentro da Matemática. Isso facilita, desde as séries iniciais, que haja uma conexão entre os conteúdos, como sugerem os PCN. A proposta de Pluvinage de abordagem semiótica visa exatamente à possibilidade de exploração das diversas interpretações do conceito de número racional.

CAPÍTULO 2

QUADRO TEÓRICO

“Um bom ensino da Matemática forma melhores hábitos de pensamento e habilita o indivíduo a usar melhor a sua inteligência.”
Irene de Albuquerque

No capítulo 2, apresentamos o quadro teórico da pesquisa e os procedimentos metodológicos. Em relação ao quadro teórico, apresentamos, de forma sintética, alguns princípios da teoria dos registros de representação de Raymond Duval.

2.1 Alguns princípios da teoria de Duval

Um primeiro ponto a ser destacado na defesa da utilização, no ensino, de uma abordagem semiótica para a aprendizagem da Matemática é que esta, comparada a outras áreas do conhecimento, apresenta uma peculiaridade no que tange ao conhecimento de seus objetos. Esses não podem ser manuseados, o acesso a eles depende exclusivamente de suas representações semióticas, ou seja, “O acesso aos objetos matemáticos passa necessariamente por representações semióticas” (DUVAL, 2005, p. 21). Ou mais especificamente,

> A especificidade das representações semióticas consiste em que são relativas a um sistema particular de signos, à linguagem, à escrita algébrica ou às representações gráficas cartesianas, que podem ser convertidas em representações “equivalentes" num outro sistema

> semiótico, mas podendo tomar significados diferentes para o sujeito que as utiliza.[1] (DUVAL, 1995, p. 17, tradução nossa)

Um segundo ponto de destaque para uma abordagem semiótica refere-se à importância dos registros de representação para caracterizar a atividade cognitiva do ponto de vista matemático: “a diferença entre a atividade cognitiva requerida na matemática e aquela requerida em outros domínios do conhecimento não deve ser procurada nos conceitos”. (DUVAL, 2005, p. 13)

Na perspectiva do autor,

> Uma análise do conhecimento matemático é, essencialmente, uma análise do sistema de produção das representações semióticas referentes a esse conhecimento. A maneira matemática de raciocinar e de visualizar está intrinsecamente ligada à utilização das representações semióticas, e toda comunicação em matemática se estabelece com base nessas representações. (MACHADO, 2005, p. 8)

Para Duval (*apud* IGLIORI; MARANHÃO, 2005, p. 58), “a ênfase na análise deve ser posta no sujeito que aprende, subordinando o objeto a ser ensinado ao funcionamento cognitivo, estreitamente ligado às questões de representação”.

A definição pela abordagem semiótica de análise da aprendizagem tem por pressuposto que as representações semióticas são, muitas vezes, confundidas com simples meio de comunicação. E, assim sendo, elas são consideradas apenas como uma forma de expor as representações mentais, transformando-as em algo visível e acessível ao outro. O recurso à teoria dos registros de representação revela que esse ponto de vista é enganoso, pois “As representações não são somente necessárias para fins de comunicação, são igualmente essenciais para a atividade cognitiva do pensamento”. (DUVAL, 1993, p. 39)[2]

---

[1] La spécificité des représentations sémiotiques consiste dans ce qu'elles sont relatives à un système particulier de signes, le langage, l' écriture algébrique ou les graphes cartésiens, et qu'elles peuvent être converties en des représentations "équivalentes" dans un autre système sémiotique, mais pouvant prendre des significations différentes pour le sujet qui les utilise.
[2] Les répresentations ne sont pas seulement nécessaires pour des fins de communication, elles sont également essentielles pour l’activité cognitive de la pensée.

A aprendizagem dos conceitos matemáticos, operações, propriedades, estruturas e relações passa necessariamente pelos seus diferentes registros de representações. Esses registros, segundo Duval (2005), são dois relativos à representação discursiva e dois relativos à representação não discursiva.

- ✓ Representação discursiva:

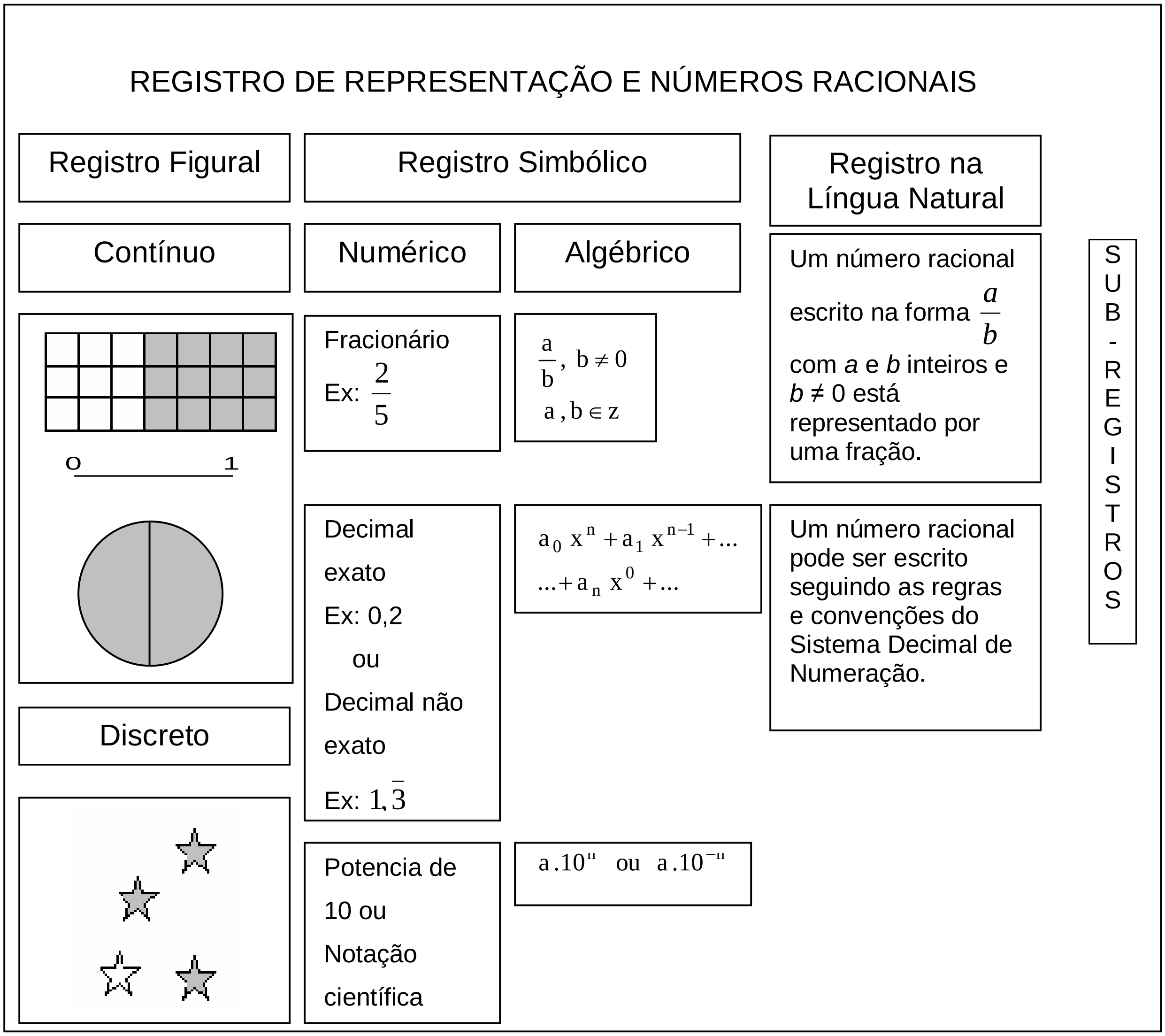
  1. Língua natural.
  2. Sistemas de escrita (registros numéricos, simbólicos e algébricos).

- ✓ Representação não discursiva:

  1. Registro figural (figuras geométricas planas ou em perspectivas).
  2. Registro gráfico.

O registro na língua natural e o registro figural constituem-se em registros multifuncionais para os quais os tratamentos não são algoritmizáveis. Os registros pertencentes aos sistemas de escrita e o registro de representação gráfica são registros monofuncionais e neles os tratamentos são principalmente algorítmicos.

Com relação aos diversos registros de representação utilizados para os números racionais, Igliori e Maranhão (2005, p. 59) os destacam no quadro a seguir:



Quadro 1: REGISTRO DE REPRESENTAÇÃO E NÚMEROS RACIONAIS
Fonte: Igliori; Maranhão, 2005

Conforme Duval (2005), existem dois tipos de transformações de representações semióticas ao qual uma representação pode ser submetida. São elas:

- ✓ Tratamento – é a transformação entre representações que ocorre no mesmo registro no qual foi formada, ou seja, é uma transformação interna, no interior do registro.

Segundo Duval (2005, p. 15),

> Quase sempre, é somente este tipo de transformação que chama a atenção porque ele corresponde a procedimentos de justificação. De um ponto de vista "pedagógico", tenta-se algumas vezes procurar o melhor registro de representação a ser utilizado para que os alunos possam compreender.

Como exemplo de tratamento, podemos citar a adição dos números racionais no registro numérico, em que podem ser dados dois tratamentos diferentes, tratamento decimal e tratamento fracionário, para o mesmo objeto matemático.

Representação simbólica, tratamento decimal: 0,25 + 0,25 = 0,5.

I. Representação simbólica, tratamento fracionário: $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$.

Notamos que, apesar de serem dados tratamentos diferentes, decimal e fracionário, a adição dos números racionais permanece no registro numérico.

- ✓ Conversão – é a transformação de uma representação que ocorre havendo mudança de registro, porém conserva, se não totalmente, pelo menos uma parte do conteúdo estudado na representação inicial.

Duval (2005, p. 15) considera que

> Este tipo de transformação enfrenta os fenômenos de não-congruência. Isso se traduz pelo fato de os alunos não reconhecerem o mesmo objeto através de duas representações diferentes. A capacidade de converter implica a coordenação de registros mobilizados. Os fatores de não-congruência mudam conforme os tipos de registro entre os quais a conversão é, ou deve ser efetuada.

Como exemplo de conversão, podemos citar a transformação do racional que ocorre da sua representação no registro figural, "parte da pizza" ou registro de representação geométrico de dimensão 2, no registro de representação simbólico numérico de escrita fracionária.

II. Representação no registro geométrico:

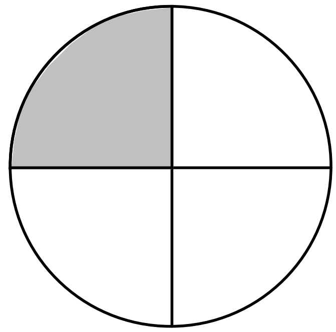


Figura 1: representação de $\frac{1}{4}$ no registro geométrico

III. Representação no registro numérico: $\frac{1}{4}$.

Um registro, a princípio, pode parecer suficiente para expressar o conhecimento de determinado objeto matemático ou mesmo na resolução de um problema, no entanto não podemos nos deixar levar pela facilidade de seu emprego. Devemos sim é insistir na possibilidade de passar de um registro a outro, pois, de acordo com Duval (2005), para que haja uma compreensão em Matemática é necessária a coordenação de pelo menos dois registros de representações semióticas.

Duval (2005) admite dois pontos de vista para a conversão: o matemático e o cognitivo:

1. Matemático – quando a escolha do registro se deve a questões de economia, por ser mais potente ou porque servirá de suporte ou guia aos tratamentos que ocorreram em outro registro.

2. Cognitivo – quando a escolha conduz ao conhecimento matemático que não é perceptível ou acessível na representação anterior.

Para Duval (2005), muitas vezes a conversão é vista como uma associação preestabelecida entre nomes e figuras ou então é reduzida a uma codificação, porém essa é uma visão superficial e enganadora seja do ponto de vista da aprendizagem seja do ponto de vista teórico. Ele acentua que a codificação permite apenas uma leitura pontual das representações gráficas, enquanto a verdadeira conversão permite uma apreensão global e qualitativa necessária ao controle ou exploração das transformações.

"A conversão das representações, quaisquer que sejam os registros considerados, é irredutível a um tratamento [ou seja, se ocorre uma transformação por conversão tem de haver mudança de registro]." (DUVAL, 2005, p. 17)

2.1.1 Fenômenos característicos da conversão das representações

Para que uma atividade de conversão seja analisada, é necessário se comparar os dois tipos de registros, ou seja, a representação do registro inicial ou de partida com a representação do registro final ou de chegada.

Registro de partida	**Registro de chegada**
Registro da língua natural	Registro numérico
Represente a fração dois décimos:	$\frac{2}{10}$

Quadro 2: Registro de partida e chegada

Esta análise pode apresentar as seguintes características:

- ✓ Variação de congruência – quando há uma correspondência termo a termo entre os dois registros.

  Registro de partida – representação no registro figural: registro de representação geométrico.

Registro geométrico de duas dimensões

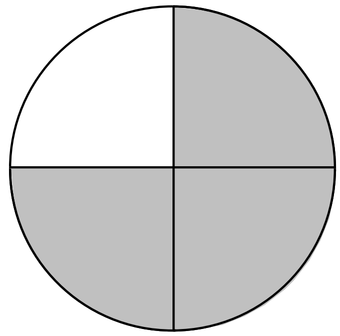


Figura 2: representação de $\frac{3}{4}$ em duas dimensões

Registro geométrico da reta graduada

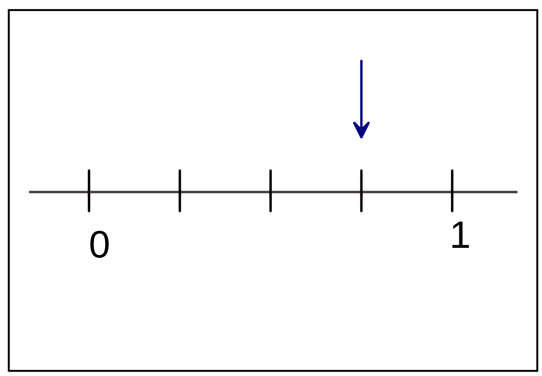


Figura 3: representação de $\frac{3}{4}$ na reta graduada

Registro de chegada – Representação no registro numérico: $\frac{3}{4}$.

- ✓ Não congruência – quando há necessidade de uma reorganização da expressão no registro de partida para se obter a expressão correspondente no registro de chegada.

Vejamos o exemplo da Figura 4, em que se deve representar o número racional $\frac{3}{4}$ no registro da reta graduada. Para isso é necessário fazer uma reorganização das graduações reagrupando-as de dois em dois para então tomarmos três desses reagrupamentos.

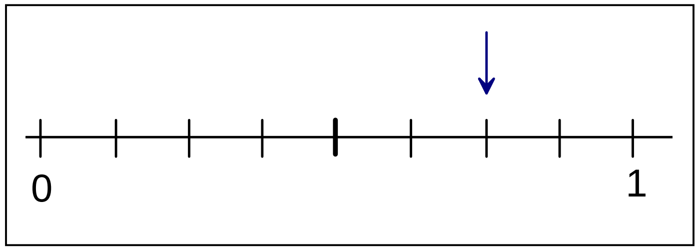


Figura 4: representação de $\frac{3}{4}$ após reagrupamento

- ✓ Heterogeneidade dos dois sentidos de conversão – não se pode afirmar que o simples fato de se trabalhar a conversão em um sentido garantirá que o aluno compreenda o outro sentido.

> Nem sempre a conversão ocorre quando invertemos os registros de partida e de chegada. [...] Geralmente, no ensino, um sentido de conversão é privilegiado, pela idéia de que o treinamento efetuado num sentido estaria automaticamente treinando a conversão no outro sentido. (DUVAL, 2005, p. 20)

Sendo assim, uma seqüência didática deve ser elaborada de modo que suas atividades privilegiem os dois sentidos de conversão e, além disso, que, em cada sentido de conversão, as atividades possuam casos de congruência e de não congruência.

> Descartar a importância da pluralidade dos registros de representação leva a crer que todas as representações de um mesmo objeto matemático têm o mesmo conteúdo ou que seus conteúdos respectivos se deixam perceber uns nos outros como por transparência. (DUVAL, 2005, p. 23)

2.1.2 Dificuldade de mudança de registro

Segundo Duval (2005), o conhecimento matemático e sua compreensão dependem de o aluno conseguir ou não fazer a mudança de registro, porém, em suas observações, o autor afirma que os fracassos ou bloqueios dos alunos aumentam se há necessidade de fazer uma mudança de registro ou então trabalhar com dois registros simultaneamente.

> O sucesso, para grande parte dos alunos em matemática, ocorre no caso dos monorregistros[3]. Existe como que um "enclausuramento" de registro que impede o aluno de reconhecer o mesmo objeto matemático em duas de suas representações bem diferentes. (DUVAL, 2005, p. 21)

O problema em se trabalhar com monorregistros é que geralmente a compreensão não permite que haja uma transferência de conhecimento. De acordo com Duval (1995, p. 75, tradução nossa), "esta compreensão monorregistro apresenta uma deficiência essencial: logo que se sai do contexto no qual se fez a aprendizagem, a maior parte revela-se incapaz de mobilizar os conhecimentos adquiridos e que, no entanto, sabem".[4]

Na Matemática, a compreensão depende da capacidade de mudar de registro e não se pode confundir o objeto com a sua representação, pois, diferente de outros domínios científicos, os objetos matemáticos não são acessíveis a não ser por suas representações. Sendo assim, Duval (1993, p. 40, tradução nossa) explica que

> A coordenação de vários registros de representação semiótica é fundamental para uma apreensão conceitual dos objetos: é necessário que o objeto não seja confundido com as suas representações e que seja reconhecido em cada uma das suas representações possíveis. São com estas duas condições que uma representação funciona verdadeiramente como representação, ou seja, que dá acessos ao objeto representado.[5]

Podemos concluir, portanto, que mudar de um registro de representação a outro é possibilitar uma leitura de novas informações do mesmo objeto matemático e assim esse objeto representado em dois ou mais registros diferentes

---

[3] Monorregistros: registro único, registros monofuncionais.

[4] ... cette compréhension monoregistre presente un handicap majeur: dès que l'on sort du contexte dans lequel s'est fait l'apprentissage, la plupart se révèlent incapables de mobiliser lês connaissances acquises et que, pourtant, "ils savent".

[5] La coordination de plusieurs registres de répresentation sémiotique apparaît fondamentale pour une appréhension conceptuelle des objets: il faut que l'objet ne soit pas confondu avec ses représentations et qu'il soit reconnu dans chacune de ses représentations possibles. C'est à ces deux conditions qu'une représentations fonctionne véritablement comme representation c'est-à-dire qu'elle donne accès à l'objet représenté.

proporciona conteúdos diferentes. Logo a compreensão matemática está diretamente ligada à articulação de pelo menos dois registros de representação semiótica e somente desta maneira é possível não confundir o conteúdo de uma representação com o objeto representado.

O reconhecimento de um mesmo objeto matemático pelo aluno em diferentes representações lhe dá condições de transferir ou modificar formulações ou representações de informações em uma resolução de problema e, segundo Duval (2005), quando o aluno atinge esse estágio, ele passa a não identificar mais os objetos matemáticos com os conteúdos oriundos das representações.

2.1.3 Processos de aprendizagem matemática

Para analisarmos a aprendizagem matemática, devemos levar em consideração os conceitos científicos pertinentes ao conteúdo e também o funcionamento cognitivo do pensamento humano. Não basta analisarmos as produções dos alunos com o olhar voltado apenas para a Matemática, devemos também considerar o funcionamento cognitivo usado na atividade, portanto "para a efetivação de uma análise de acessibilidade a um conceito, análise cognitiva, deve-se contemplar a distinção, numa conversão, das unidades que sejam significativas próprias de cada registro". (IGLIORI; MARANHÃO, 2005, p. 65)

Sendo assim, nas produções dos alunos, devemos analisar se ocorre apenas tratamento, mantendo o mesmo tipo de registro ou se ainda temos uma conversão, sendo que esse tipo de análise dificilmente é feito. Devemos levar em conta também qual a natureza dos registros apresentados, pois o grau de dificuldade varia de acordo com o tipo de registro utilizado pelo aluno.

> No que se refere aos tratamentos, as dificuldades mais sérias concernem aos registros plurifuncionais[6], como se pode ver em geometria com as

[6] Plurifuncionais: o mesmo que multifuncionais.

> demonstrações feitas em língua natural e com a utilização heurística das figuras. O mesmo ocorre para a atividade de conversão: ela pode ser mais complexa se houver a necessidade ou não de passagens entre registro monofuncional e registro plurifuncional. (DUVAL, 2005, p. 25)

Para analisarmos uma atividade matemática utilizando a conversão como instrumento, devemos ter para o objeto em estudo uma representação, que deverá ser a “mais elementar possível” (DUVAL, 2005, p.25), em um registro de partida e a sua representação convertida em um registro de chegada e proceder assim com todas as variações possíveis.

Quanto a esse procedimento, Igliori e Maranhão (2005, p. 66) destacam que

> É norteado pelos princípios: experimental de variação semiótica, isto é, modificação sistemática da representação de chegada; princípio experimental das variações concomitantes, isto é, se a modificação interna a um registro provoca, ou não, a modificação interna ao outro. As variações cognitivas são somente aquelas pelas quais uma modificação, no registro de partida, provoca uma modificação no registro de chegada.

Dessa forma, é possível analisarmos quais variações estruturais são mais importantes do ponto de vista cognitivo, pois a conversão poderá não apresentar variação concomitante no registro de chegada, chamada de variação concomitante neutra, ou apresentar uma ou mais variações concomitantes no registro de chegada.

“As únicas variações de representação que são cognitivamente importantes no registro de partida são aquelas que provocam uma modificação da representação concomitante no registro de chegada, porque isso implica um novo objeto denotado.” (DUVAL, 2005, p. 26)

Nessa análise, o que é considerado certo ou errado do ponto de vista matemático difere do ponto de vista cognitivo:

> Um aluno pode dar uma resposta matematicamente certa, mas não mobilizar, de modo coerente, consistente, as unidades cognitivas específicas do funcionamento de um, entre dois, dos registros que se representam. Essas unidades são as variáveis que permitem determinar as unidades pertinentes de significado, que devem ser levadas em conta

> em cada um dos dois registros, para a análise de sua coordenação, na realização de uma tarefa. (IGLIORI; MARANHÃO, 2005, p. 61)

É evidente que deverá haver uma separação entre as respostas corretas ou aceitáveis do ponto de vista matemático daquelas que não o são, mediante uma justificação matemática, porém, segundo Duval (2005), a análise cognitiva do que pode ser considerado acerto ou erro difere do ponto de vista matemático. Para o autor, a análise cognitiva deve ser feita levando-se em conta o sucesso em toda uma seqüência de itens.

Para Duval (2005), um conteúdo matemático pode ser trabalhado por meio de uma seqüência de itens, porém devemos antes analisar a natureza dos fenômenos que se deseja estudar e, sendo assim, a seqüência poderá ter os seguintes objetivos:

- ✓ Tratar da articulação entre dois registros em relação à representação de um objeto matemático – nesse caso, a seqüência deverá ter uma série de atividades que privilegiem os dois sentidos da conversão e as atividades de cada sentido deverão ter casos de congruência e casos mais ou menos complexos de não congruência.

- ✓ Acentuar a compreensão de uma noção matemática – nesse caso, as seqüências deverão ter dois ou três pares de registros de modo que um par seja formado por registro multifuncional e monofuncional e o outro par seja formado por dois registros monofuncionais.

- ✓ Identificação dos objetos por suas múltiplas ocorrências representacionais – nesse caso, a atividade, para ser útil, deve propiciar rapidez no seu reconhecimento. O sucesso do aluno, nesse tipo de atividade, não depende apenas das respostas, mas do tempo necessário para obtê-las.

2.1.4 Variedade de registros de representação

Duval (1993) justifica a necessidade da variedade de registros de representação por meio de três motivos:

1. A economia de tratamento.

   A pluralidade de registros possibilita que haja a troca dos mesmos, permitindo assim que se escolham registros que representem maior economia.

   Ele explica que

   > A existência de vários registros permite mudar de registro, e esta mudança de registro tem por objetivo permitir o uso de tratamentos de uma maneira mais econômica e mais poderosa. [...] as relações entre os objetos podem ser representadas de maneira mais rápida, e mais simples para a compreensão [...].[7] (DUVAL, 1993, p. 49, tradução nossa)

   Ele cita, como exemplo, as escritas literais que se sobressaem às frases em língua natural.

2. A complementaridade de registro.

   Neste caso, há a possibilidade de um registro complementar as informações que outro registro não tenha dado conta por completo e assim proporcionar a aprendizagem. O professor, portanto, tem a incumbência de trabalhar com mais de um registro a fim de que o aluno possa ter um melhor aprendizado do objeto matemático. Segundo Bresson apud Duval (1993, p. 49, tradução nossa), na complementaridade temos que

[7] L'existence de plusieurs registres permet de changer de registre, et ce changement de registre a pour but de permettre d'effectuer des traitements d'une façon plus économique et plus puissant. [...] Les relations entre des objets peuvent être représentés de façon plus rapide , et plus simple à comprendre [...].

> [...] a natureza do registro semiótico que é escolhido para representar um conteúdo (objeto, conceito ou situação) impõe uma seleção dos elementos significativos ou informações do conteúdo que se representa. Esta seleção faz-se em função das possibilidades e das limitações semióticas do registro escolhido. Uma linguagem não oferece as mesmas possibilidades de representações que uma figura ou que um diagrama. Isso quer dizer que qualquer representação é cognitivamente parcial em relação ao que representa e que um registro em outra representação não tem os mesmos aspectos do conteúdo da situação em que estava representado.[8]

3. A conceitualização implica uma coordenação de registros de representação.

De acordo com Duval (1993), há uma falsa idéia de que um único registro, e preferencialmente aquele que o aluno usa no momento, é suficiente para conceitualizar o conhecimento que envolve um objeto matemático. Ele afirma que

> Naturalmente, a ausência de coordenação não impede qualquer compreensão. Mas esta compreensão, limitada ao contexto semiótico de um só registro, não favorece as transferências e as aprendizagens ulteriores. Torna os conhecimentos adquiridos pouco ou não mobilizáveis em todas as situações em que deveriam realmente ser utilizada. Finalmente, esta compreensão mono-registro conduz a um trabalho cego, sem possibilidade de controle do "sentido" do que é feito.[9] (DUVAL, 1993, p. 52, tradução nossa)

Após o estudo dos princípios da teoria de Duval, ficamos alertados de que para obtermos melhores resultados em uma seqüência de atividades, a mesma deverá tratar da transição em pelo menos dois registros de representação. Essa

---

[8] [...] la nature du registre sémiotique qui est choisi pour représenter un contenu (objet, concept ou situation) impose une sélection des éléments significatifs ou informationnels du contenu que l'on représente. Cette sélection se fait en fonction des possibilites et des contraintes sémiotiques du registre choisi. Un langage n'offre pas les mêmes possibilités de représentation qu'une figure ou qu'une diagramme. Cela veut dire que toute représentation est cognitiviment partielle par rapport à ce qu'elle représente et que d'un registre à un autre ce ne sont pas les mêmes aspects du contenu d'une situation qui sont représentés.

[9] Naturellement, l'absence de coordination n'empêche pas toute compréhension. Mais cette comprehension, limitée au contexte sémiotique d'un seul registre, ne favorise guère les transferts et les apprentissages ultérieurs: elle rend les connaissances acquises peu ou pas mobilisables dans toutes les situations où elles devraient reellement être utilisées. En définitive, cette comprehension mono-registre conduit à un travail à l'aveugle, sans possibilité de contrôle du sens de ce qui est fait.

forma de organizar uma atividade didática possibilita ao aluno realizar tratamentos, mas também a conversão.

CAPÍTULO 3

REGISTRO GEOMÉTRICO

“Feliz aquele que transfere o que sabe e aprende o que ensina.”

Cora Coralina

Neste capítulo, apresentamos uma síntese do artigo *Un registre géométrique unidimensionnel pour l’expression des rationnels*, de Adjiage e Pluvinage (2000), com as idéias principais de uma abordagem semiótica para o estudo do conceito de número racional. E, também descrevemos a problemática e a metodologia de pesquisa.

3.1 Um registro geométrico unidimensional para a expressão dos racionais

No artigo de Adjiage e Pluvinage, é descrita uma pesquisa desenvolvida e validada por uma experiência em sala de aula ao longo de dois anos escolares junto a duas turmas de escolas diferentes: 7ª e 8ª séries do Ensino Fundamental[1] na França. A pesquisa abordou três sistemas de representação dos racionais – as escritas fracionárias, as decimais e a representação geométrica por meio da reta graduada –, em contraposição à representação geométrica bidimensional. Na pesquisa são abordados os dois tipos de transformações de representações semióticas da teoria de Raymond Duval, tratamento e conversão.

[1] Collége.

As duas formas geométricas de representar as frações foram classificadas no referido artigo segundo a dimensão das mesmas, sendo então a reta graduada chamada de representação geométrica de dimensão 1, e as figuras geométricas como "partes da torta" (ou pizzas) são as representações de dimensão 2.

> Na prática usual as representações geométricas dos números racionais, são nada mais que ilustrações ajudando a compreender o que se toma como os verdadeiros objetos de aprendizagem: o sentido das escritas fracionárias e decimais, construídos a partir de suas ações sobre as grandezas familiares aos alunos, e o seu tratamento pelas operações elementares.[2] (ibidem, pg. 42)

Os autores lembram que uma aprendizagem conduzida dessa forma se bate com obstáculos resistentes, e indicam ser oportuna a proposta de introduzir os números racionais apoiando-se sobre outro registro de representação:

> Com esse objetivo, escolhemos um modo de representação geométrica constituindo-se em um verdadeiro registro. [...] Se a dimensão 1 apresenta um custo didático não desprezível, permite em contrapartida a expressão dos números racionais de forma mais adaptada ao desenvolvimento de um conjunto de competências necessárias para poder lidar com esse conhecimento.[3] (Adjiage; Pluvinage, 2000, p. 42).

Pensando no uso de outro registro de representação para os números racionais, os autores verificaram que o sistema de ensino francês da época possuía cerca de vinte *softwares*, dentre os quais estava contemplado o uso das retas graduadas.

O que se via, até então, era um tratamento dado a esse recurso aquém das suas possibilidades, ou seja, estava sendo usado apenas como suporte e/ou ferramenta para se trabalhar os números racionais de uma forma convencional, por exemplo, usando-o apenas na relação parte-todo.

---

[2] Dans la pratique usuelle, on considère que les représentations géométriques des nombres rationnels ne sont que des illustrations aindant à comprendre ce que l´on envisage comme les véritables objets d´apprentissage : le sens des écritures fractionnaires et décimales, construit à partir de leur aciont sur les grandeurs familières aux élèves, et leur traitement par les opérations élémentaires.

[3] Dans ce but, nous avons choisi un mode de représentation géométrique et l'avons constitué en veritable registre […]. Si la dimension 1 présente un coût didactique non négligeable, elle permet en revanche l'expression des nombres rationnels la plus adaptée au développement de l'ensemble de compétences nécessaires à leur maîtrise.

Os autores, ao perceberem que as representações geométricas dos racionais, em particular as retas graduadas, não atuavam como registro de representação ou pelo menos não estavam sendo exploradas em todo seu potencial, capaz de conduzir o aluno de modo a representar o número racional na sua forma fracionária e/ou decimal, propuseram equipar as retas graduadas, transformando-as em um verdadeiro registro semiótico por meio de poucas modificações, de modo que a aprendizagem estivesse pautada em signos e legendas da reta.

O modo como os números racionais são abordados nas pesquisas e nos livros didáticos, em que as frações são representadas por figuras geométricas, em geral dimensão 2, circular ou retangular, fazendo uma analogia com a pizza ou com a barra de chocolate respectivamente, difere totalmente do modo de representar a fração por meio de reta numérica ou graduada, que, por sua vez, é pouco explorado nas pesquisas, nos livros didáticos e por nós, os professores.

Os autores justificam que a escolha de um sistema geométrico é interessante, porque ele permite:

- ✓ Tratar as operações de base com os racionais, como comparar e encontrar escritas equivalentes.
- ✓ Uma maximização dos efeitos com relação a outros registros, visto que possibilita a produção de mais significados.
- ✓ A possibilidade de apreender um racional como uma ação, uma dilatação, antes de vinculá-lo a uma medida (ter a idéia do que é $\frac{3}{4}$ sem antes saber de que, como na Figura 5).

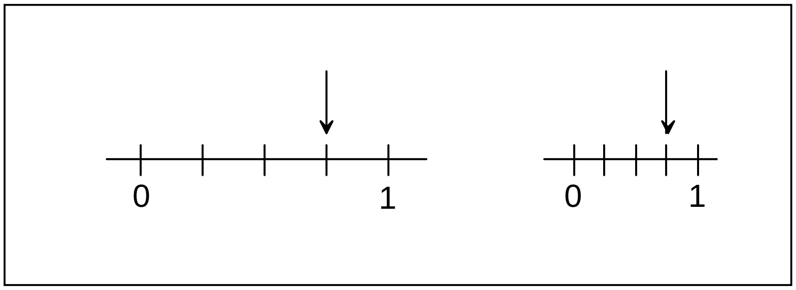


Figura 5: Representação de $\frac{3}{4}$

O artigo apresenta algumas questões de pesquisa das quais três serão destacadas por nós.

A seguir, vamos caracterizar as duas formas de representação geométrica, respondendo assim a primeira questão.

Questão 1: Na representação de um racional, em que se distinguem as dimensões 1 e 2?

3.1.1 Dimensão 1

A dimensão 1, registro da reta graduada, apresenta, num primeiro momento, um conjunto de características favoráveis a sua utilização, entre elas a semelhança ao objeto régua, com o qual os alunos estão familiarizados. Há uma flexibilidade na sua utilização, por exemplo, quanto à mudança de unidades e maior facilidade nas percepções da soma ou de relações como, por exemplo, a equivalência e a duplicação de um segmento.

“O uso da representação na reta numérica é muito poderoso para o reconhecimento da equivalência e contribui para melhorar o conhecimento formal de fração.” (GIMENEZ; BAIRRAL, 2005, p. 15)

Para Gimenez e Bairral (2005), o aluno que utiliza a reta graduada como modelo de representação para os números racionais consegue perceber que $\frac{1}{2}$ não é um ponto qualquer entre 0 e 1 e sim o ponto médio (Fig. 6). Prolongando a reta, ele reconhece a existência dos demais meios e também estabelece relações do tipo $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ (Fig. 7), permitindo que haja um raciocínio expandido para as demais frações (terços, quintos etc.).

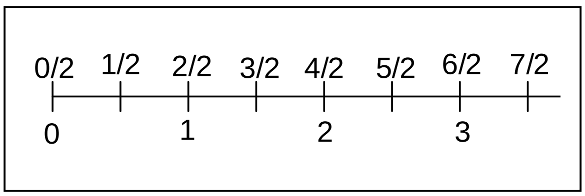


Figura 6: Divisão da reta em meios

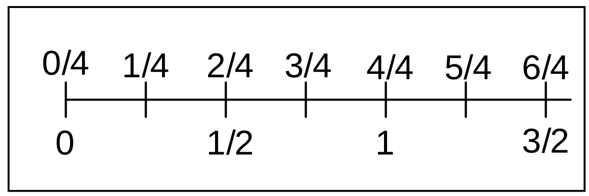


Figura 7: Divisão da reta em quartos

Nesse sistema o número racional menor ou maior que 1 é representado por um ponto na reta, entre dois outros que estejam representando números inteiros (o ponto da reta resultante da marcação de um número inteiro de vezes o segmento unidade a partir do ponto da reta tomado como origem). Trata-se de um ponto não necessariamente entre 0 e 1, o que acarreta o seguinte: para a representação de uma fração imprópria[4], não há a necessidade do uso de duas figuras, como no caso do registro geométrico bidimensional. Usando como exemplo a representação de 5/4 (Fig. 8), basta dar continuidade às divisões da reta, atingindo a sua quinta marcação. Sendo assim, os autores consideram que esse sistema se encontra em um universo aberto, ou seja, além do 1.

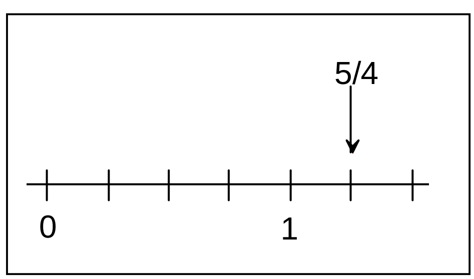


Figura 8: Representação de $\mathbf{\frac{5}{4}}$

[4] Fração imprópria: aquela em que o numerador é maior que o denominador em valores absolutos.

Uma fração deve possibilitar a quem a lê a interpretação voltada para a relação entre numerador e denominador. Quanto a essa relação, Adjiage e Pluvinage (2000) colocam como hipótese que as retas graduadas são mais aptas para criar um elo entre números e grandezas relativas. Justificam afirmando que uma vez que o número racional está representado por um ponto na reta localizado entre dois outros que representam números inteiros, a reta lhe confere, desde a origem, um *status* de número.

Para que a compreensão da fração como uma grandeza relativa entre numerador e denominador possa ser assimilada, é necessário que a interpretação parte-todo não seja a única desenvolvida no contexto dos números racionais. Assim se uma pessoa gasta 1/4 de seu salário com o aluguel, não podemos supor que ela ganhe quatro reais dos quais um real é destinado ao aluguel.

Segundo os autores, existem dois tipos de tratamento que se podem aplicar na relatividade expressa pela fração:

> ...para calcular $\frac{3}{4}$ de 1000 pode-se encontrar uma fração equivalente a $\frac{3}{4}$ de denominador 1000 (por linearidade: “se 3 está para 4, quanto está para 1000?”); seja fracionar 1000 em 4 partes das quais retemos 3 (ação do operador linear definida pelo número $\frac{3}{4}$).[5] (ADJIAGE; PLUVINAGE, 2000, p. 49, tradução nossa)

Em ambos os casos, há a necessidade de um sistema que proporcione a ação de um racional sobre uma unidade, permitindo assim a criação de frações equivalentes. Sabemos que os sistemas geométricos proporcionam essa criação, porém os autores citam que em uma experiência relatada por K. Hart e A. Sinkinson (1989), apenas dois alunos em cada 17 utilizaram a dimensão 2 para esse fim.

---

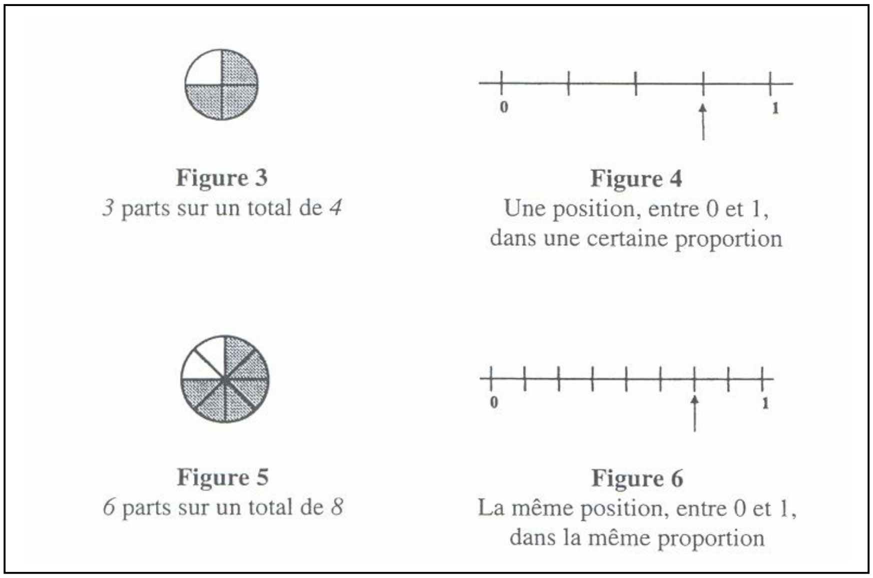
[5] ...pour calculer $\frac{3}{4}$ de 1000 on peut soit chercher une fraction équivalente à 3/4 de dénominateur 1000 (par linéarité: “si c’est 3 pour 4, c’est combien pour 1000?”); soit fractionner 1000 en 4 parts dont on en reticent 3 (action de l’opérateur linéaire définie par le nombre $\frac{3}{4}$).

"Esses mesmos alunos tinham sido iniciados com seu uso e encorajados a utilizá-la no momento do teste".[6] (ADJIAGE; PLUVINAGE, 2000, p. 50, tradução nossa)

Segundo Adjiage e Pluvinage (2000), a relação entre as representações das frações $\frac{3}{4}$ e $\frac{6}{8}$ (Fig. 9) apresentadas nas duas dimensões mostra que:

A representação na dimensão 2 traz intuitivamente a interpretação parte-todo, 3 partes sobre um total de 4 e 6 partes sobre um total de 8; já a representação na dimensão 1 é designada por uma posição que exprime o futuro número racional. Além disso, a comparação entre as duas retas graduadas pode proporcionar a observação sobre a semelhança das posições dos números e "levada pela semelhança das posições, pode ser fonte de interrogação sobre a origem dessa semelhança, e então levar ainda a numerização do tipo: '3 está para 4 assim como 6 está para 8'".[7] (ADJIAGE; PLUVINAGE, 2000, p. 50, tradução nossa)

[6] Ces mêmes élèves avaient été initiés à son usage et encouragés à l'utiliser lors du test.
[7] ... portée par la similitude des positions, peut être source d'interrogation sur l'origine de cette similitude, et donc déboucher quand même sur une numérisation du problème du type: "3 par rapport à 4, c'est comme 6 par rapport à 8".



Tradução nossa[8]

Figura 9: Grandeza relativa expressa nas duas dimensões

Podemos afirmar também, uma vez que o número racional é representado por um ponto na reta entre dois outros que representam números inteiros, que esse sistema faz parte de um universo ordenado, pois, ao localizarmos, por exemplo, $\frac{3}{7}$, temos condições de perceber que esse número racional encontra-se entre o $\frac{2}{7}$ e o $\frac{4}{7}$. Sendo assim, podemos considerar o universo ordenado como sendo a ordem crescente em que os números estão representados.

A informação de que o registro da reta graduada dispõe tem origem nos signos ou então nas convenções semióticas. Vejamos um exemplo descrito no artigo. Esse exemplo mostra que alguns erros foram cometidos em produções de alunos e que o acerto depende de interpretações semióticas. Para os alunos realizarem a atividade, foi dada a eles uma reta graduada como a da Figura 10 e os mesmos deveriam localizar a fração $\frac{3}{5}$.

---

[8] Tradução nossa: Figura 3: 3 partes sobre um total de 4. Figura 4: uma posição, entre 0 e 1, numa certa proporção. Figura 5: 6 partes sobre um total de 8. Figura 6: a mesma posição, entre 0 e 1, na mesma proporção.

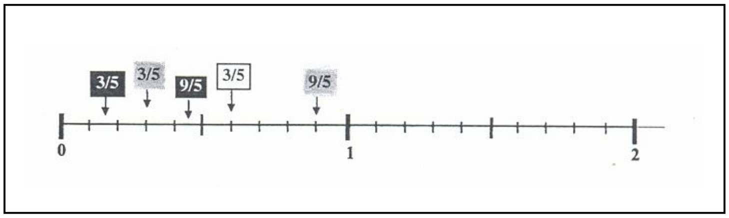


Figura 10: Um universo rico em signos

Sobre fundo preto, um aluno para quem $\frac{1}{5}$ é a metade de $\frac{1}{10}$, sobre fundo cinza, outro aluno para quem a unidade é o segmento limitado pelas duas primeiras graduações espessas (densas), ou quem conta o quinto na ordem em que se apresentam os primeiros intervalos. Sinalizemos que esses dois alunos colocaram corretamente $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{8}{10}$. Assim, se deixaram cair pelos enganos semióticos nos casos não congruentes, mas souberam restaurar as significações nos casos mais congruentes.

De fato, para colocar corretamente $\frac{3}{5}$, convém:

- ✓ Observar as unidades significantes 0, 1, 2.
- ✓ O número de intervalos – e não de graduações – entre 0 e 1, – e não como o fez um dos alunos entre 0 e a primeira graduação espessa.
- ✓ Reagrupá-los de 2 em 2.
- ✓ Reter 3 desses reagrupamentos.[9] (ADJIAGE; PLUVINAGE, 2000, p. 51, tradução nossa)

É certo que para se ter sucesso nessa atividade, é necessário analisar todas as informações cujos signos da figura proporcionam, sejam eles congruentes ou não. Não basta, portanto, uma análise visual.

[9] Sur fond noir, un élève pour qui 1/5 est la moitié de 1/10, sur fond gris, un autre élève pour qui l'unité est le segment limité par les deux premières graduations épaisses, ou qui compte les cinquièmes dans l'ondre où se présentent les premiers intervalles. Signalons que ces deux élèves ont correctement placé 1/2, 3/2, 8/10. Ainsi se sont ils laissé piéger par des leurres sémiotiques dans les cas non congruents, mais ont su restaurer les significations dans les cas plus congruents.
En fait, pour placer correctement 3/5, il convient de: prendre en compte les unités signifiantes 0, 1, 2; le nombre d'intervalles – et pas de graduations – entre 0 et 1, – et pas comme l'a fait un élève entre 0 et la première graduations épaisse; les regrouper 2 par 2; retenir 3 de ces regroupements.

3.1.2 Por que usar a reta como registro geométrico

O sistema é isento de ambigüidades que podem ocorrer em um sistema geométrico em que a função de ilustração é predominante, pois a reta permite que se comparem números racionais de valores próximos que por meio de uma ilustração deixaria margem à dúvida. Segundo os autores, "O fracionador[10] evita, por exemplo, que as superposições visuais sejam tomadas abusivamente como critério de decisão quanto à igualdade de dois números racionais. Em sua falta, a experiência mostra que mesmo coincidências imperfeitas, como a que aparece no caso de $\frac{5}{3}$ e $\frac{12}{7}$ (Fig. 11), podem levar a confusão no espírito de certos alunos".[11] (ADJIAGE; PLUVINAGE, 2000, p. 53, tradução nossa)

Esse fato pode ser analisado mais de perto como segue: as frações $\frac{5}{3}$ e $\frac{12}{7}$ são representadas na reta pelos pontos *x* e *y*. A posição dos pontos x e y na reta pode ser atestada visualmente na falta de um fracionador. Uma subdivisão de 3 atinge x, mas nada impede que uma subdivisão em 7 possa também alcançar x. A exigência de um fracionador faz com que se formule o problema em bases numéricas: se x e y são iguais é necessário encontrar um fracionador que alcance os dois números simultaneamente. Esse fracionador correspondente a um múltiplo comum de 3 e de 7, no caso 21. Porém ao caminhar de 7 em 7 o *x* assume o valor 35 enquanto que ao caminhar de 3 em 3 o *y* assume o valor 36, logo $x \neq y$. "O fracionador é o signo que permite uma primeira numerização do problema, mas

---

[10] Fracionador: é o signo que expressa o número de divisões entre dois números inteiros.

[11] Le fractionneur évite par exemple que des superpositions visuelles soient prises abusivement comme critère de décision quant à l'égalité de deux nombres rationnels. En son absence, l´expérience avait montré que même des coïncidences imparfaites, comme celle qui apparaît dans le cas de $\frac{5}{3}$ e $\frac{12}{7}$, peuvent amener la confusion dans l´esprit de certains élèves.

também que leva a constituir a informação visual em hipótese [...]."[12] (ADJIAGE; PLUVINAGE, 2000, p. 54, tradução nossa)

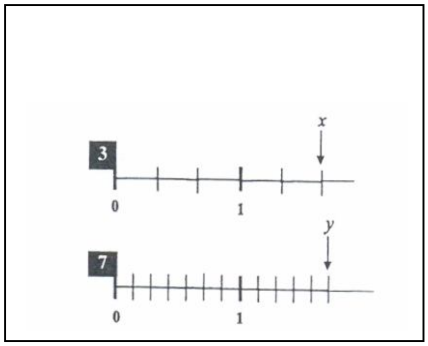


Figura 11: Distinção entre $\frac{5}{3}$ e $\frac{12}{7}$

Vejamos, por exemplo, a Figura 12, que representa as frações $\frac{5}{3}$ e $\frac{12}{7}$ o registro de duas dimensões. O apelo às ilustrações é maior em relação aos signos que a representação possa ter, podendo, portanto, levar ao erro. Cabe lembrar que os autores colocam que as retas graduadas são mais adequadas para criar um elo entre números e grandezas relativas, logo as escritas equivalentes necessárias para essa resolução teriam um custo maior.

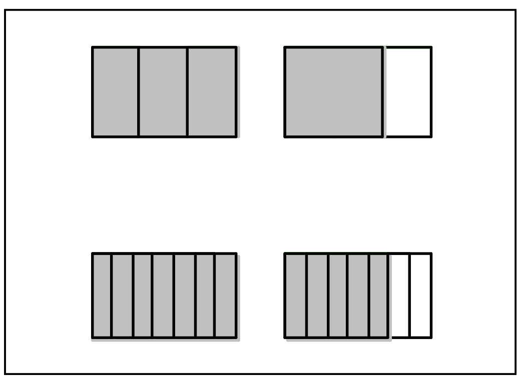


Figura 12: Representação de $\frac{5}{3}$ e $\frac{12}{7}$ em dimensão 2

A reta graduada permite que utilizemos tratamentos diferentes para concluir a igualdade de duas frações, como na Figura 13. Para se fazer o mesmo

---

[12] Le fractionneur est le signe qui permet une première numérisation du problème, mais aussi qui conduit à constituer l'information visuelle en hypothèse [...].

tipo de comparação utilizando a dimensão 2, haveria um custo didático elevado, pois é necessário que as figuras tenham a mesma superfície, enquanto que, na figura abaixo, as unidades possuem tamanhos diferentes.

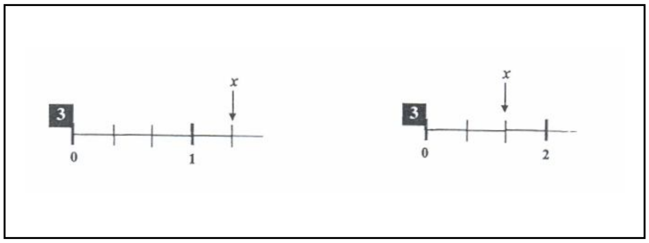


Figura 13: Duas representações de $\frac{4}{3}$

Com a primeira representação, conclui-se que cada parte representa um terço, logo $x = \frac{4}{3}$; já na segunda representação, cada parte representa dois terços, logo $x = \frac{4}{3}$ também. Esse registro permite que o número racional seja construído desvinculado de medida. Apesar das graduações terem tamanhos diferentes, o número representado por *x* é o mesmo.

Vejamos outro exemplo considerado no artigo (Fig. 14). Nesse exemplo, são propostas duas representações diferentes para um número racional.

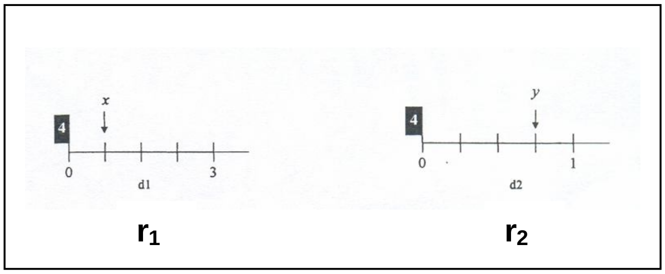


Figura 14: $\frac{1}{4}$ de 3 e 3 vezes $\frac{1}{4}$

A solução do problema consiste em fazer $\mathbf{r_1}$ ter uma nova divisão em 3 x 4 = 12 divisões na marcação [0; 3], passando a ter um fracionador igual a 12 e então recolocar $\mathbf{r_1}$ e $\mathbf{r_2}$ entre [0, 12]. Assim teremos o mesmo posicionamento de x e y, como mostra a Figura 15.

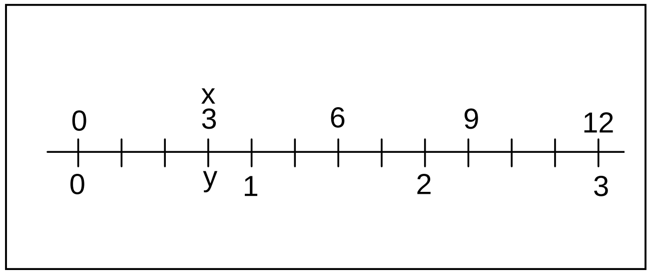


Figura 15: x = y

A reta graduada usada para medir e também para comparar número racional segue a mesma lógica de se encontrar um novo fracionador, ou seja, um múltiplo comum dos fracionadores das retas dadas, e se inscrever os dois racionais sobre a mesma reta.

Na figura abaixo, temos a comparação entre as representações dos números mistos[13] $7\frac{2}{3}$ e $7\frac{3}{5}$ representados por x e y respectivamente. Sabemos que para fazer a comparação, basta trabalharmos com a parte fracionária do número misto, porém podemos imaginar a dificuldade em fazer a representação do número misto em dimensão 2.

Para resolver esse problema, devemos encontrar o fracionador comum, que é o 15, fazer uma nova divisão de 3 em 3 e localizar y. Depois de 5 em 5, localizar x e então compará-los, como mostra a Figura 16.

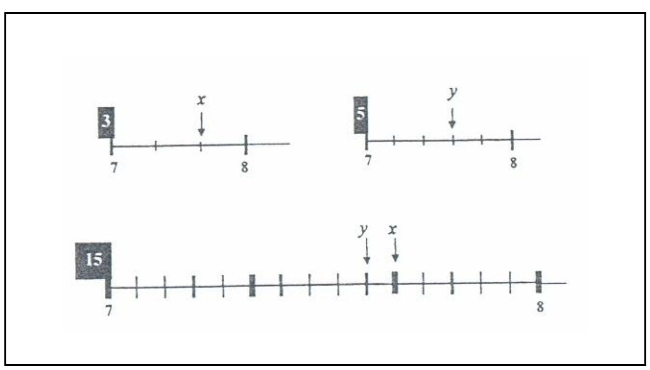


Figura 16: Comparação entre x e y

[13] Número misto: é aquele formado por parte inteira e parte fracionária.

Pode-se afirmar que a dimensão 2 dá conta de fazer essa comparação, porém se temos de medir para então fazermos a nova divisão da barra em 15 partes, seria muito mais rápido medir na reta, ou seja, desenhar a reta tem um custo menor do que utilizar a barra. Não é apenas o fato de representar $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{5}$, mas, nesse caso, o fato de termos a possibilidade de representação para o número misto.

Esse sistema de representação apresenta um obstáculo a ser ultrapassado relacionado ao ato de medir. "[...] é tentador ligar a numeração a 1, e colocar em coincidência a origem do segmento para medir com o 1 e não o 0 [...]".[14] (ADJIAGE; PLUVINAGE, 2000 p. 57, tradução nossa)

Para medir um segmento qualquer, é necessária uma tomada de consciência que pode ser alcançada pela bijeção entre os intervalos e seus pontos extremos e, ao mesmo tempo, permite que se faça a soma de partes sobre a reta. Sendo assim, a reta fornece meios para que esse obstáculo seja ultrapassado. "Ela pode de fato ser às vezes tratada no universo físico, fracionável em partes enumeráveis por reunião, e às vezes em sistema semiótico mobilizando signos que podem indiferentemente referir aos segmentos ou às suas extremidades [...]".[15] (ADJIAGE; PLUVINAGE, 2000, p. 57, tradução nossa)

3.1.3 Dimensão 2

Na dimensão 2, a representação dos números que dão origem ao numerador e denominador é congruente e extremamente dependente da figura,

[14] [...] il est tentant de démarrer la numérotation à 1, et donc de mettre en coïncidence l'origine du segment à mesurer avec le 1 et pas le 0 [...].
[15] Elle peut en effet être à la fois traitée en univers physique, fractionnable en parties dénombrables par réunion, et à la fois en système sémiotique mobilisant des signes qui peuvent indifféremment référer aux segments ou à leurs extrémités [...].

pois as interpretações materiais estão sujeitas às evidências visuais a fim de se realizar uma dupla contagem.

Essa dimensão apresenta maior trabalho de representação e dificuldade de compreensão para as frações impróprias, uma vez que para representá-las é preciso mais de uma figura e sempre trará certo constrangimento, porque “acrescentar uma segunda parte não mudará grande coisa, pois falaremos sempre dos $\frac{4}{3}$ de um todo no singular!”.[16] (ADJIAGE; PLUVINAGE, 2000, p. 48, tradução nossa)

Para os autores, essa dimensão não é tão apropriada para uma relação de grandeza relativa, pois é “muito próxima de um recorte concreto e fechado em um universo unitário e absoluto, poderia consagrar uma percepção absoluta das quantidades”.[17] (ADJIAGE; PLUVINAGE, 2000, p. 50, tradução nossa)

Apesar de os autores defenderem a dimensão 1, eles não rejeitam a dimensão 2. Acrescentam que, em suas experiências, os alunos tiveram bons resultados ao compararem duas frações de numerador 1 ou então de mesmo numerador e justificam afirmando que “a regra: “quanto maior o divisor, menor a parte” se explica tanto melhor é o referente quanto melhor for materializado”.[18] (ADJIAGE; PLUVINAGE, 2000, p. 52, tradução nossa)

Além disso, o artigo coloca frente a frente às duas dimensões afirmando que a oposição entre o sistema de parte da torta e o das retas graduadas possui a dualidade perceptivo/semiótico e que nas figuras em duas dimensões, a percepção constitui um atrativo muito poderoso e, portanto exibem três argumentos que apóiam essa afirmação:

---

[16] ... ajouter une deuxième tarte ne change pas grand chose car on parlera toujours des 4/3 d’une tarte au singulier!

[17] ... trop proches d’un découpage concret et refermées sur un univers unitaire donc absolu, pourraient bien consacrer une perception absolue des quantités.

[18] ... car la règle: “plus grand le diviseur, plus petite la part” s’explique d’autant mieux que le référent est mieux matérialisé.

- ✓ A dimensão 2 é aquela do espaço de trabalho (folha de papel, lousa...) – a figura é dona da situação e não libera espaço para construir outra informação em signo.

- ✓ A dimensão 2 permite uma grande diversificação de signos – a diversificação das formas planas permite que haja várias representações para a mesma superfície e isso provoca dispersão na representação de um racional. “Esta tão grande diversidade torna delicada a circunscrição de um conjunto limitado de signos – e, portanto de tratamentos – elementares do que poderia ser um registro bidimensional”.[19] (ADJIAGE; PLUVINAGE, 2000, p. 77, tradução nossa)

- ✓ A dimensão 2 induz evocações materiais – sua interpretação fica reduzida a uma simples descrição de uma quantificação material.

Em síntese, os autores fazem a seguinte colocação:

> É possível olhar um segmento de reta subdividido em intervalos de duas maneiras diferentes: seja como uma grandeza fracionada seja como um conjunto de pontos cuja posição é determinada pelo dado de um marcador e de um fracionário. A primeira opção não distingue sem dúvida fundamentalmente o sistema das retas graduadas do sistema partes da torta [dimensão 1 da dimensão 2]. A segunda, ao contrário, permite dotar as retas graduadas das características de um registro, o que otimiza o potencial de significados e de tratamentos mantendo ao mesmo tempo em limites razoáveis a diversidade e a disponibilidade dos signos mobilizados.[20] (ADJIAGE; PLUVINAGE, 2000, p. 61, tradução nossa)

Os autores fazem uma síntese dos sistemas geométricos de representação, discriminando as seguintes diferenças:

---

[19] Cette trop grande diversité rend délicate la circonscription d’un ensemble limité de signes – et donc de traitements – élémentaires de ce qui pourrait être un registre bidimensionnel.

[20] Il est possible de regarder un segment de droite subdivisé en intervalles de deux façons différentes: soit comme une grandeur fractionnée, soit comme un ensemble de points dont la position est déterminée par la donnée d’un repère et d’un fractionneur. La primière option ne distingue sans doute pás fondamentalement le système des droites graduées du système des parts de tarte. La deuxième em revanche permet de doter les droites graduées des caractéristiques d’un registre, ce qui en optimise le potentiel de significations et de traitements tout en maintenant dans des limites raisonnables la diversité et la disponibilité des signes mobilisés.

> Assim pudemos qualificar o sistema das retas graduadas de universo aberto, relativo e ordenado; e o sistema das partes da torta de universo fechado, absoluto e não ordenado. [...] o primeiro permitirá representar os números, prolongando os inteiros e podendo exprimir sejam das relações entre esses, seja entre as grandezas associadas a esses números; que o segundo exprimirá, sobretudo grandezas, apoiadas sob a unidade, cuja retomada ressalta mais a uma dupla contagem do que a expressão de grandezas relativas. A formação de um racional no primeiro encontra um obstáculo de tamanho, já que está ligado à bijeção entre segmentos e pontos, o que evita o segundo. Esse último, quanto a ele, permanece muito eficaz para comparar um tipo de racional, a saber, aqueles representados por frações com numerador constante. [...] o primeiro oferece, além disso, pela riqueza de suas significações, a possibilidade de uma diversificação dos procedimentos visualizáveis.[21] (ADJIAGE; PLUVINAGE, 2000, p. 61, tradução nossa)

Questão 2: Este custo é justificado pelos benefícios que se pode esperar dele?

De acordo com Adjiage e Pluvinage (2000), a dimensão 1 apresenta um custo didático maior, porém permite a representação dos números racionais de forma mais adaptada ao desenvolvimento de um conjunto de competências necessárias ao seu controle; já a dimensão 2, de custo didático bem menor, apresenta sucessos rápidos, mas são limitados a um número de competências, geralmente aquelas que envolvem a dupla contagem da relação parte-todo, o que não garante necessariamente a aprendizagem e compreensão de uma proporção.

Os autores chegaram a essa consideração por meio de uma análise *a priori* das duas dimensões, a qual foi amplamente comprovada por uma experiência em sala de aula ao longo de dois anos escolares e deu origem ao artigo.

[21] Nous avons ainsi pu qualifier le système des droites graduées d'univers ouvert, relatif, ordonné; et le système des parts de tarte d'univers fermé, absolu, non ordonné. [...] le premier permettra de représenter des nombres, prolongeant les entiers, et pouvant exprimer soit des rapports entre ces derniers, soit entre les grandeurs associées à ces nombres; que le deuxième exprimera avant tout des grandeurs, contraintes sous l'unité, et dont la mise en rapport releve plus d'un double comptage que de l'expression de grandeurs relatives. La formation d'un rationnel dans le premier rencontre un obstacle de taille, puisque lié à la bijection entre des segments et des points, ce qu'évite le deuxième. Ce dernier quant à lui reste três efficace pour comparer un type de rationnels, à savoir ceux représentables par des fractions à numérateur constant. [...] le premier qui offre en outre, par la richesse de sés significations, la possibilité d'une diversification des procédures envisageables.

A fim de justificar o maior custo da dimensão 1, Adjiage e Pluvinage (2000) criaram um conjunto de competências relativas à representação dos racionais. As mesmas foram criadas com base na análise *a priori* e mediante os resultados de um questionário. Dessa forma, avaliou-se até que ponto a dimensão 1 favoreceu o desenvolvimento das competências. São elas:

1. Dobrar a informação – ser capaz de fazer a relação de um dado numérico explicitamente com uma unidade (compará-lo à unidade).

2. Dividir a atividade – trata-se de descobrir qual função cabe ao numerador e qual está destinada ao denominador. Sabe-se que essa descoberta pode ser desenvolvida em outros registros geométricos para frações inferiores a 1, “mas as retas graduadas evitam essa discriminação posicionando num primeiro momento os racionais em relação a todos os inteiros”. (ADJIAGE; PLUVINAGE, 2000, p. 73)

3. Discriminar as ações que, sobre uma reta, operam sobre os segmentos daquelas que operam sobre as extremidades – o aluno deverá ser capaz de identificar numerador e denominador.

4. Localizar as designações – o aluno deverá ser capaz de localizar as escritas fracionárias na reta graduada e para isso não poderá confundir distância com coordenada horizontal.

5. Tomar 0 e 1 (ou toda outra marcação) como inteiros, permitindo iniciar um processo de formação de um racional – o aluno deverá ser capaz de identificar a marcação na reta graduada, seja entre 0 e 1 ou outra qualquer.

6. Mergulhar os inteiros nos racionais – a reta é um instrumento repleto de graduações de coordenadas horizontais inteiras, entre as quais os racionais serão inscritos. Desse modo, as competências se desenvolvem naturalmente.

7. Produzir escrita equivalente – essa competência está ligada às grandezas relativas, ou seja, à proporcionalidade e já foi esclarecido na dimensão 1 como ela atua nesse caso.

De acordo com os autores, o registro das retas graduadas apresenta potencial diversificado de recursos e é, portanto, bem mais rico que o sistema “partes da torta”. Esse, por sua vez, possui um aspecto simples e evita obstáculos, porém não assegura certos questionamentos devido a sua simplicidade de signos. Sendo assim, justificam a escolha das retas graduadas como registro de representação geométrica dos números racionais.

> Nós concluímos que nos parece difícil desenvolver na dimensão 2 um verdadeiro registro geométrico de representação dos racionais. Em nossa opinião é o que constitui a fraqueza estrutural desse modo de representação e que restringe seu potencial didático. Nós provamos em contrapartida que era possível trabalhar com as retas graduadas no nível de um registro. É a razão pela qual o sistema se revelou ser um espaço de trabalho adaptado à introdução da noção de racional e com suas primeiras conseqüências.[22] (ADJIAGE; PLUVINAGE, 2000, p. 78, tradução nossa)

Podemos concluir que a relação semiótica existente na reta graduada favorece o desenvolvimento do conceito de número racional e ao se fazer a conversão para o registro numérico, o racional adquire *status* de número.

Questão 3: Ele (registro geométrico da reta graduada) está adaptado para desenvolvimentos posteriores, notadamente no que se refere às operações aritméticas elementares que não foram abordadas neste artigo?

Em conseqüência da análise *a priori* das potencialidades e dos limites do registro estudado relativo a essa questão, os autores concluem que “a soma – e

[22] Nous en concluons qu’il nous semble difficile de développer en dimension 2 un véritable registre géométrique de représentation des rationnels. C’est à notre sens ce qui constitue la faiblesse strcturelle de ce mode de représentation, et qui restreint son potentiel didactique. Nous avons en revanche prouve qu’il était possible de travailler avec les droites graduées au niveau d’un registre. C’est la raison pour laquelle ce système s’est révélé étre un espace de travail adapté à introduction de la notion de rationnel et à ses premières conséquences.

em menor escala o produto – apresentam um custo de utilização elevado nessa relação semiótica”.[23] (ADJIAGE; PLUVINAGE, 2000, p. 81, tradução nossa)

Cabe aqui lembrarmos que com o artigo pudemos agregar mais um tipo de registro que possibilita a representação do número racional. Quanto a realização de operações elementares o que se apresentou é mais uma alternativa e no caso, por terem um custo elevado, os autores esclarecem que devemos dispor de outros tipos de registros que propiciam tais operações caso esse se revele pouco adaptado.

3.2 A problemática

3.2.1 Introdução

As várias situações em que os significados de fração estão presentes aparentemente são responsáveis pela dificuldade que as crianças encontram para assimilar o conceito de fração. Lins e Gimenez (1997) afirmam que os vários significados de frações e decimais é que geram diversos sentidos à Aritmética fracionária e que essa diversidade é um dos princípios norteadores para um currículo que contemple os números racionais.

Quanto ao conceito de fração, Lima (1997, p. 85) afirma que

> O conceito de fração exige que alguma coisa seja tomada como unidade, ou seja, pressupõe a existência de uma totalidade divisível. Esta unidade deverá ser dividida em um número determinado de partes iguais, de modo que esgote completamente o todo considerado.

[23] ... la somme – et dans une moindre mesure le produit – présente un coût d’utilisation élevé dans cet environnement sémiotique.

Geralmente o conceito de número racional é introduzido utilizando-se registros de representação geométrica em duas dimensões, ou seja, geralmente a unidade tomada é representada por figura circular ou retangular.

A relação parte-todo é marcante nos materiais didáticos. Sendo essa interpretação a que mais se trabalha, prevalecerá apenas o procedimento de dupla contagem. Vimos, no capítulo 1, que Kieren (1976) a considerou como um subconstruto, mas, em seu trabalho de 1988, passou a considerá-la inclusa nos demais subconstrutos, ou seja, ao se trabalhar as demais relações, essa também será incorporada.

Juntando-se a isso, Lins e Gimenez (1997, p. 47) afirmam que

> A simbolização prematura de frações e decimais e a pouca insistência no valor variável da unidade em contextos diferentes, e o próprio fato de não se insistir em diversas situações possíveis, nas que se desenvolvem frações e decimais, são os fatores mais importantes de fracasso ou erro.

Além disso, não podemos nos esquecer da forte influência a que os professores são submetidos, até inconscientemente, em reproduzir o processo de ensino-aprendizagem a que foram submetidos na Escola Básica, não aplicando possíveis conhecimentos adquiridos na universidade.

A problemática desta pesquisa é essa das dificuldades relativas ao ensino das frações, conseqüência da existência de diversos significados para esse conceito, o do número racional. As dificuldades de aprendizagem geradas por esses diversos significados e as abordagens de ensino que permitem o enfrentamento das mesmas compõem temas de investigação por muito tempo.

O problema que nos propusemos a enfrentar é o da abordagem semiótica e suas potencialidades para o ensino de frações. Nosso procedimento de pesquisa foi o de realização de um estudo comparativo. Comparativo entre os resultados da pesquisa francesa e nosso ambiente educacional.

A pesquisa que tomamos por referência desenvolve uma proposta semiótica para a introdução dos números racionais, mais especificamente introduzindo a reta graduada como um registro geométrico de representação de *uma* dimensão diferentemente dos usuais da dimensão 2. Este estudo de cunho comparativo objetiva identificar as vantagens para a aprendizagem com a inclusão desse novo registro.

Assumimos como pressuposto a importância da reprodutibilidade dos resultados de pesquisa na Educação Matemática para sua validação. A reprodutibilidade significou primeiro avaliar se nos diversos documentos didáticos a reta graduada era utilizada apenas com sentido ilustrativo ou se, de alguma maneira, ela possuía uma conotação de registro de representação e ainda identificar se a introdução desse novo registro traz, de fato, melhores condições para explorar os diversos significados do número racional.

3.3 Procedimentos metodológicos

Nossa pesquisa tem um aspecto analítico relativo ao modo como os números racionais, em especial sua representação como fração, estão sendo abordados. O foco da análise está voltado ao registro de representação geométrico, em especial a reta graduada.

Destacamos, a seguir, a abordagem metodológica deste nosso trabalho segundo a qual desenvolvemos a análise de documentos. Os documentos analisados foram os PCN e livros didáticos. Foram selecionados, para a análise, os livros didáticos de 1ª e 2ª série do ciclo II (3ª e 4ª séries) e 1ª e 2ª série do ciclo III (5ª e 6ª séries), utilizados na escola em que atuamos como professor. Essa opção foi definida após termos contato com outras coleções e também com as análises feitas por Catto (2000) e Teixeira (2008) e constatarmos que não há grandes diferenças de uma coleção para outra quanto ao tratamento dado ao tema em questão.

Optamos por analisar os PCN por se tratar de um documento nacional que serve de parâmetro tanto para a elaboração dos livros didáticos quanto para a elaboração dos planos de aula dos professores.

Ainda do ponto de vista analítico, estamos nos apoiando nos estudos feitos por Kieren, nas interpretações dadas por ele ao conceito de número racional e nos subconstrutos.

Para nossa análise, vamos fazer uso da pesquisa descritiva que segundo Cervo (2007, p. 61), possui as seguintes características: “A pesquisa descritiva observa, registra, analisa e correlaciona fatos ou fenômenos (variáveis) sem manipulá-los”.

CAPÍTULO 4

O ENSINO DOS NÚMEROS RACIONAIS

> *"Na maioria das vezes, subestimam-se os conceitos desenvolvidos no decorrer das vivências práticas dos alunos, de suas interações sociais imediatas, e parte-se para um tratamento escolar, de forma esquemática, privando os alunos da riqueza de conteúdos proveniente da experiência pessoal."*
>
> *PCN, 1998*

4.1 Introdução

Neste capítulo, apresentamos os dados obtidos na análise dos *Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática para o Ensino Fundamental* (PCN) (ciclo II, 1997 e ciclo III, 1998), para o bloco que contempla os conceitos relacionados a Números e Operações. Compõe também este capítulo a análise de uma coleção de livros didáticos, com exemplares do ciclo II (3ª e 4ª séries) e outra com exemplares do ciclo III (5ª e 6ª séries).

O objetivo da análise desses documentos é o de realizar um estudo comparativo com a proposta do artigo de Robert Adjiage e François Pluvinage (2000), tendo como foco o tratamento dado aos números racionais. Ou seja, pretendemos avaliar como o tema Números Racionais é tratado, como são abordados – se forem – os registros de representação geométricos e qual deles é privilegiado quanto ao uso, se a dimensão 1 ou a dimensão 2. Procuraremos também verificar quais subconstrutos do conceito de número racional são explorados nesses materiais.

4.2 Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (PCN)

Entendemos que os *Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática* (PCN) configuram-se para nós, professores, em nível nacional, como um parâmetro de orientação em relação a várias questões do processo ensino-aprendizagem, tais como a indicação de recursos que podemos utilizar e o que são caminhos para "fazer Matemática" na sala de aula.

O documento apresenta os conteúdos para o Ensino Fundamental, sugerindo o que deve ser trabalhado em cada ciclo e o tratamento dos conteúdos em relação aos conceitos, procedimentos e atitudes. Também orienta quanto à participação da Matemática no currículo do Ensino Fundamental, alertando que

> Para dimensionar a Matemática no currículo do Ensino Fundamental é importante que se discuta sobre a natureza desse conhecimento e que se identifiquem suas características principais e seus métodos particulares como base para a reflexão sobre o papel que essa área desempenha no currículo, a fim de contribuir para a formação da cidadania. (PCN, 1998, p. 24)

Os PCN (1998) trazem inovações no tratamento da Matemática. Sugerem que a linearidade dos conteúdos não seja tão rigorosa, isto é, que a idéia de pré-requisito para se aprender certo conteúdo que vai sucedê-lo seja repensada, pois essa forma de organização segue um único preceito que é o da estrutura lógica da Matemática. É sabido que essa estrutura é organizada de modo a seguir certo percurso, mas, ao mesmo tempo, o documento sugere que esse percurso não seja tão rígido a ponto de impedir o avanço sobre determinado conteúdo.

O documento esclarece também que, por vezes, certos conteúdos matemáticos são trabalhados de modo isolado, esgotando-se por completo, não havendo assim, num outro momento, a possibilidade de o aluno consolidar e ampliar tal conceito, pois para que isso ocorra, é necessário que o aluno veja o conteúdo em novas aplicações, fazendo a sua conexão com outros conteúdos.

Outro ponto relevante quanto à conexão entre os conteúdos é a apresentação de sugestão a nós, professores, para que não fiquemos restritos ao contexto do dia-a-dia do aluno. Tal postura nos levaria ao risco de excluir certos conteúdos importantes, julgando-os desinteressantes ao aluno por não fazerem parte da sua realidade. Nesse ponto, os significados para ele podem vir por meio de uma conexão dos conteúdos, seguindo o critério interdisciplinar ou por meio da própria lógica interna da Matemática ou mesmo devido a problemas históricos.

Quanto à resolução de problemas, é apresentada como uma estratégia de trabalho diferente daquela usada tradicionalmente pelos professores. Ao invés de se utilizar o problema como uma ferramenta para verificar se os conhecimentos foram adquiridos pelos alunos, fazendo sua resolução de forma mecânica por meio de cálculos e aplicação de fórmulas, o documento sugere que o problema seja o ponto de partida para envolver o aluno em uma situação desafiadora que o leve a criar estratégias de resolução e as mesmas deverão ser validadas. Esse modo de utilizar a resolução de problemas é salientado no seguinte parágrafo:

> A resolução de problemas, na perspectiva indicada pelos educadores matemáticos, possibilita aos alunos mobilizar conhecimentos e desenvolver a capacidade para gerenciar as informações que estão a seu alcance. Assim, os alunos terão oportunidade de ampliar seus conhecimentos acerca de conceitos e procedimentos matemáticos bem como de ampliar a visão que têm dos problemas, da Matemática, do mundo em geral e desenvolver a sua autoconfiança. (SCHOENFELD *apud* PCN, 1998, p. 40)

Sobre os conteúdos a serem trabalhados, os PCN (1998) apontam que os mesmos devem possuir formas e saberes culturais cuja assimilação implique na produção de novos conhecimentos. Para isso, os conteúdos devem envolver explicações, formas de raciocínio, linguagens, valores, sentimentos, interesses e condutas. Nessa perspectiva, devemos identificar, nos conteúdos, quais conceitos, procedimentos e atitudes são socialmente relevantes.

O bloco Números e Operações é aquele que contempla, ao longo do Ensino Fundamental, a construção do conhecimento voltada para os vários tipos de números, suas propriedades e relações, como foram constituídos historicamente, além do seu uso como instrumento na resolução de determinados problemas.

4.2.1 Os números racionais no ciclo II (3ª e 4ª séries)

Nesse ciclo, os alunos se deparam, geralmente pela primeira vez, com situações-problema cujas soluções não se encontram no campo numérico do conjunto dos números naturais. Nesse caso, o aluno deverá perceber que os números até então conhecidos são insuficientes para resolver determinados problemas, seja por não conseguir representar a medida de uma grandeza seja por não encontrar o resultado de uma divisão.

Esse momento rico de significados abre caminho para a construção de um novo tipo de número que possibilitará a resposta dessas situações. É nesse instante que o aluno começa a tomar ciência da noção de número racional e a compreender alguns de seus significados (quociente, parte-todo, razão) e de suas representações fracionária e decimal.

Segundo os PCN (1997, p. 67),

> A construção da idéia de número racional é relacionada à divisão entre dois números inteiros, excluindo-se o caso em que o divisor é zero. Ou seja, desde que um número represente o quociente entre dois inteiros quaisquer (o segundo não nulo), ele é um número racional. Como neste ciclo trabalha-se apenas com os naturais e ainda não com os inteiros negativos, os números racionais a serem tratados são quocientes de números naturais.

No documento, há a referência de que a aprendizagem dos racionais demanda tempo e uma abordagem adequada, pois o conhecimento adquirido com os números naturais implicará em alguns obstáculos para os racionais. Para esses obstáculos serem superados, deverá haver uma ruptura na relação entre números naturais e racionais.

Aqui há que se destacar que, no artigo norteador desta pesquisa, são exatamente o tempo de aprendizagem e os obstáculos pertinentes aos números racionais que foram questionados e serviram de motivação para a elaboração do mesmo: “[...] as aquisições referentes aos números racionais colocam em evidência as dificuldades que levam muito tempo para serem superadas”[1]. (ADJIAGE; PLUVINAGE, 2000, p. 43)

São considerados como obstáculos a existência de mais de uma representação para um mesmo número racional – é o caso das frações equivalentes e também das representações numéricas decimal e fracionária – e a comparação entre os naturais, por exemplo, a comparação entre os naturais 4 > 2 leva a uma generalização abusiva na comparação dos racionais ao comparar $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{2}$. Outros obstáculos são a não existência de sucessor e antecessor no conjunto dos racionais e também a surpresa quando se multiplica um natural por um racional positivo menor que um e se vê o resultado diminuir. Esses são alguns dos obstáculos para os quais o professor terá de encontrar caminhos que levem o aluno a superá-los.

Esses obstáculos resultam da ruptura entre os conceitos dos números naturais e racionais e persistem durante toda a trajetória escolar de alguns alunos a ponto de interferirem na distinção entre racional e irracional, como constatou a pesquisa feita por Igliori e Silva (2001) junto a alunos iniciantes do curso de Ciências da Computação e concluintes do curso de Licenciatura em Matemática. Temos como resultado que 10 iniciantes consideraram 1/3 e 0,333... (o número 3 repetido trinta vezes na dízima periódica) números irracionais, sendo que “19% dos iniciantes definem número racional como sendo um número ‘exato’, conseqüentemente, consideram um irracional como sendo um número ‘não exato’” (IGLIORI; SILVA, 2001, p. 53) e “para os nossos alunos, exatidão poderia ser:

---

[1] [...] les acquisitions concernant les nombres rationnels mettent en évidence des dificultes qui prennent beaucoup de temps à être surmontées.

número não-inteiro, número negativo, número cuja representação decimal possuía pontos de suspensão, em número infinito ou não". (IGLIORI; SILVA, 2001, p. 65)

De modo geral, a presença dos racionais, no dia-a-dia, se faz por meio das representações numéricas decimais e se tornou mais freqüente devido à facilidade de se adquirir uma calculadora; já as representações numéricas fracionárias têm sua presença no cotidiano restrita a algumas frações mais comuns como metades, terços e quartos, sendo usada mais a representação da língua natural que as representações simbólicas.

Além da idéia de um número racional significando quociente de dois inteiros, os PCN fazem ainda as seguintes sugestões para o ensino do conceito de fração:

- ✓ Explorar situações em que está implícita a relação parte-todo, como as tradicionais divisões de um chocolate ou de uma pizza em partes iguais.
- ✓ Explorar situações em que a fração é usada para comparar duas quantidades de uma grandeza, ou seja, quando é interpretada como razão.

4.2.2 Os números racionais no ciclo III (5ª e 6ª séries)

Neste ciclo, o estudo dos números racionais, nas suas representações fracionária e decimal, busca explorar os vários significados, dando continuidade ao que foi iniciado no ciclo anterior. Desse modo, é feito um aprofundamento na relação parte-todo, quociente e razão e, além desses, é introduzido o significado da fração como operador, ou seja, quando ela atua sobre uma situação e a transforma, por exemplo, em problemas do tipo: que número se deve multiplicar por 5 para obter-se 3? Apesar de o significado operador ser recomendado no ciclo

III, o mesmo já aparece com significado de fração no ciclo II, tal como exposto por nós no capítulo 1.

Os PCN recomendam a resolução de situações-problema, afirmando que, desse modo, ocorrerá a ampliação do sentido operacional simultaneamente à compreensão dos significados dos números e ainda fazem a seguinte observação:

> A resolução de situações-problema com diferentes tipos de números é pouco trabalhada neste ciclo (e menos ainda no quarto ciclo), não possibilitando aos alunos ampliar ou construir novos significados, seja para a adição/subtração, multiplicação/divisão ou para a potenciação/radiciação. (PCN, 1998, p. 67)

Segundo os PCN (1998, p. 100), infelizmente constata-se que, apesar de os números racionais serem iniciados no ciclo anterior com suas representações fracionárias e decimais, existem obstáculos citados anteriormente que fazem com que "os alunos cheguem ao terceiro ciclo sem compreender os diferentes significados associados a esse tipo de número e tampouco os procedimentos de cálculo, em especial os que envolvem os racionais na forma decimal".

4.2.3 Conclusão

De modo geral, os PCN de Matemática são uma ferramenta importante em nosso sistema de educação, apresentando orientação e, como o próprio nome diz, servindo de parâmetro para que nós, professores, tenhamos uma base comum mínima a ser trabalhada em todo o território nacional.

Constatamos que as orientações são dadas no sentido de aprofundar os conhecimentos adquiridos no ciclo anterior, seguindo a mesma linha de trabalho, e é de se esperar que os livros didáticos, seguindo tais orientações, desenvolvam atividades que caminhem na direção da construção dos vários significados: parte-todo, quociente, razão e operador.

Percebemos que o significado do número racional como medida, apontado por Kieren (1993), não é recomendado nos PCN no bloco Números e Operações. Talvez isso se deva ao fato de que o documento possui um bloco dirigido para as Grandezas e Medidas. O documento também orienta para o uso de figuras em duas dimensões, dando como exemplos ilustrativos a pizza e a barra de chocolate.

O fato de os PCN não fazerem menção ao uso da reta graduada para a incorporação dos vários significados de número racional nos leva a acreditar que os livros didáticos, ao se adequarem a esses documentos, dificilmente acrescentarão esse tipo de registro e mesmo que o façam, não acreditamos que sua incorporação seja realmente assumida com um estatuto de registro de representação. É de se esperar que sua presença nos livros didáticos tenha apenas uma função ilustrativa, portanto é possível que tal abordagem diferenciada do ensino dos números racionais, como a explorada no artigo, seja novidade tanto para o aluno quanto para o professor. Tais afirmações serão comprovadas ou não com a análise dos livros didáticos a seguir.

4.3 Livros didáticos

Os livros didáticos selecionados para a análise foram aqueles adotados na unidade escolar em que atuamos como professor, entretanto consultamos também livros do ciclo II de quatro editoras e livros do ciclo III de seis editoras. Pudemos constatar que o tratamento dado aos números racionais é semelhante entre eles, podendo concluir que não será relevante para a representatividade dos resultados o fato de analisarmos apenas os livros do ciclo II de uma coleção e do ciclo III de outra.

Os livros analisados estiveram presentes no Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) de 2008 e foram os seguintes:

- ✓ *Projeto Pitanguá: Matemática*, 2005, Editora Moderna, 1ª e 2ª séries do ciclo II (3ª e 4ª séries), da autora Juliane Matsubara Barroso.
- ✓ Matemática em movimento, 2006, Editora do Brasil, 1ª e 2ª séries do ciclo III (5ª e 6ª séries) do autor Adilson Longen.

O tema Números Racionais é tratado no livro de 1ª série do ciclo II (3ª série), separando os conteúdos em *fração* e *números com vírgula*; o livro de 2ª série do ciclo II (4ª série) continua separando os conteúdos, porém modifica a nomenclatura dos números com vírgula, chamando-os de *número na forma decimal*. Essa nomenclatura talvez se deva à faixa etária na qual se encontram os alunos dessas séries.

O livro de 1ª série do ciclo III (5ª série) tem, em seu capítulo IV, o título "Os Números Racionais Absolutos" e, no capítulo V, o título "A Representação Decimal dos Racionais"; já o livro da 2ª série do ciclo III (6ª série) tem, em seu capítulo III, o título "Os Números Racionais".

4.3.1 Livros da 1ª e 2ª séries do ciclo II (3ª e 4ª séries)

Podemos perceber, em nossa análise, que os livros procuram introduzir o aluno no mundo das frações e também dos decimais, mostrando a ele, por meio de figuras, que esses novos números estão sendo usados em seu cotidiano, principalmente no que se refere à medida e, no caso particular da representação decimal, para o dinheiro, como mostram a Figura 17 e a Figura 18.

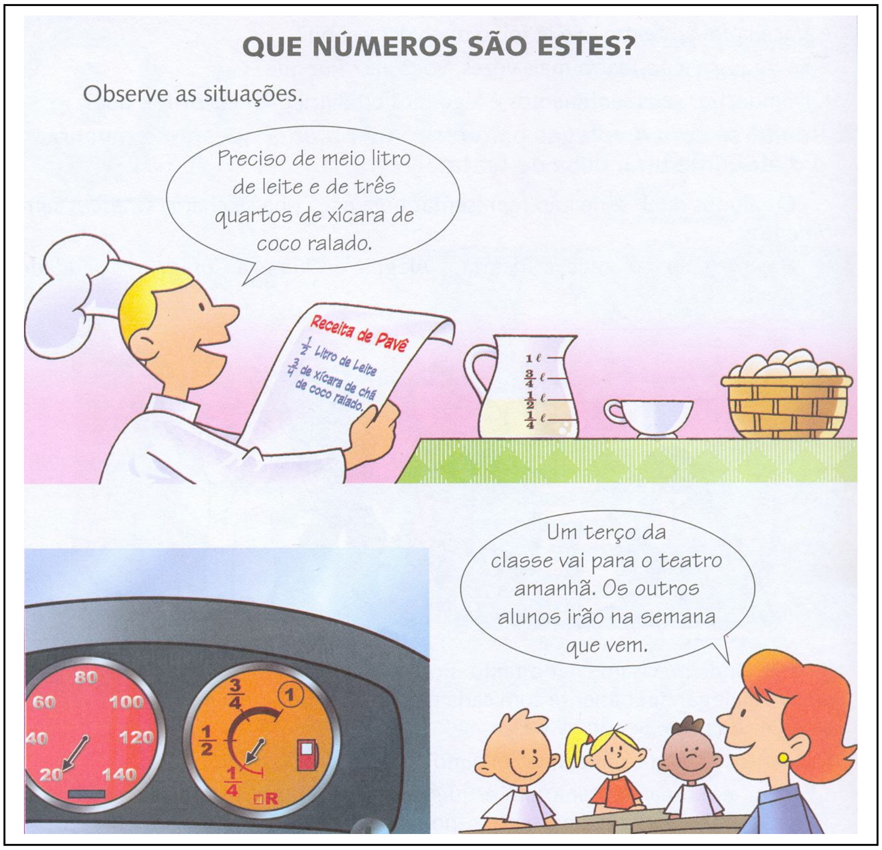


Figura 17: Que números são estes?

Figura 18: Números com vírgula

O primeiro contato com número racional é feito por meio de figuras ilustrativas que procuram mostrar o seu uso no cotidiano tanto no registro de representação numérico fracionário quanto decimal.

A interpretação de fração tem início com o significado parte-todo, usando-se, para isso, figuras geométricas, o popular desenho da pizza. As frações de uma coleção ou de uma quantidade também se fazem presentes como mostram a Figura 19 e a Figura 20.

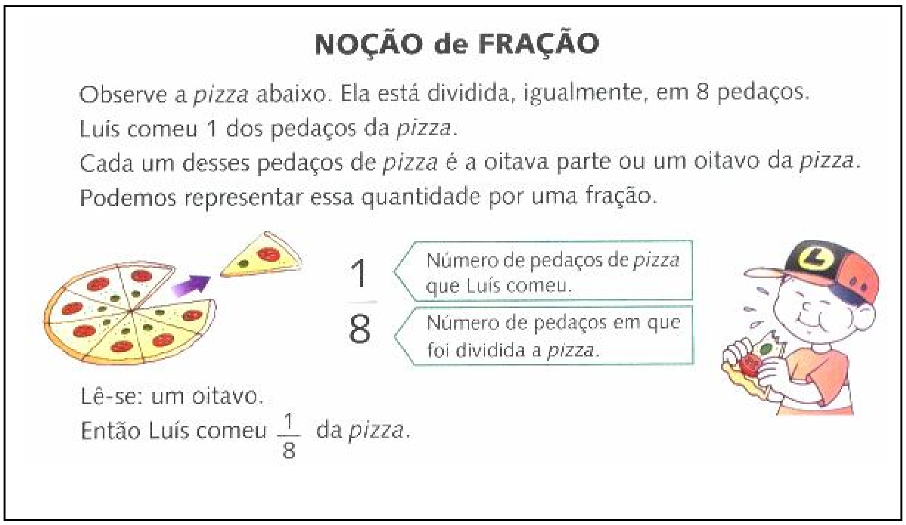


Figura 19: Noção de fração

Figura 20: Fração de uma figura

Fica claro que em função da faixa etária a que se dirige, o livro se preocupa em apresentar o conteúdo com figuras ilustrativas, atraindo assim a atenção do aluno. Usa os mais variados desenhos, tendo como base a dimensão

2, introduzindo a fração no mundo da escrita por meio da dupla contagem e sua apresentação usual com o traço de fração horizontal, como mostra a Figura 21. Além disso, procura introduzir a fração com o significado de razão.

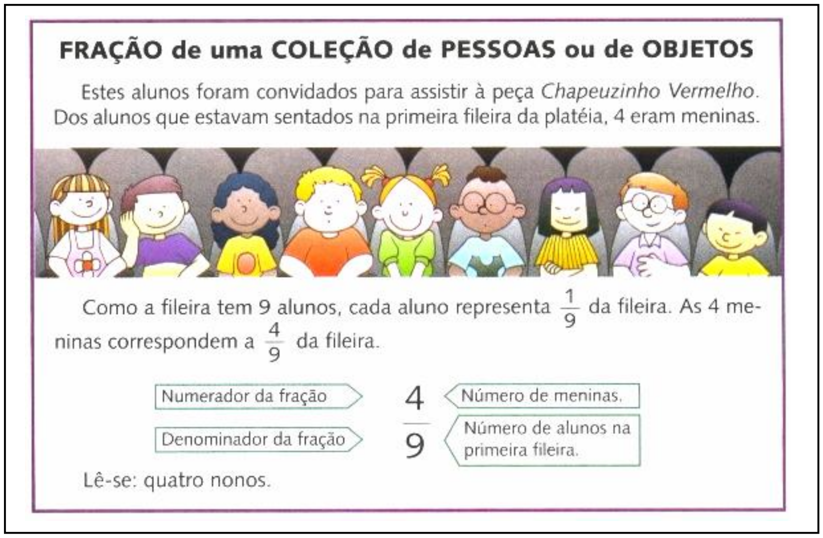


Figura 21: Fração de uma coleção de pessoas ou de objetos

A fração com significado de quociente é introduzida também com a dimensão 2, como mostra a Figura 22.

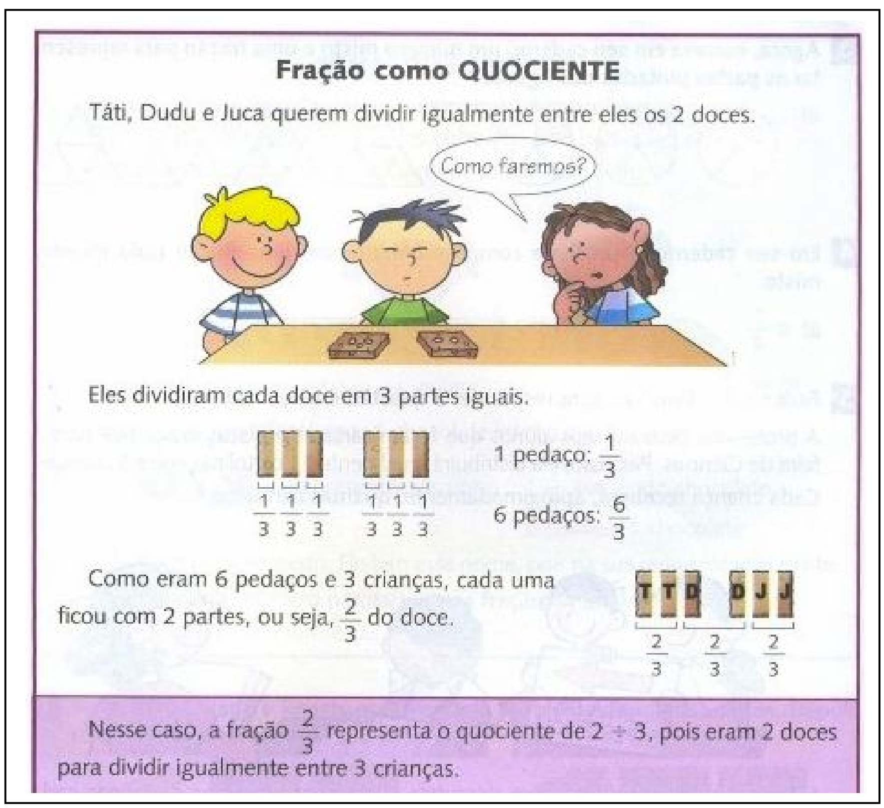
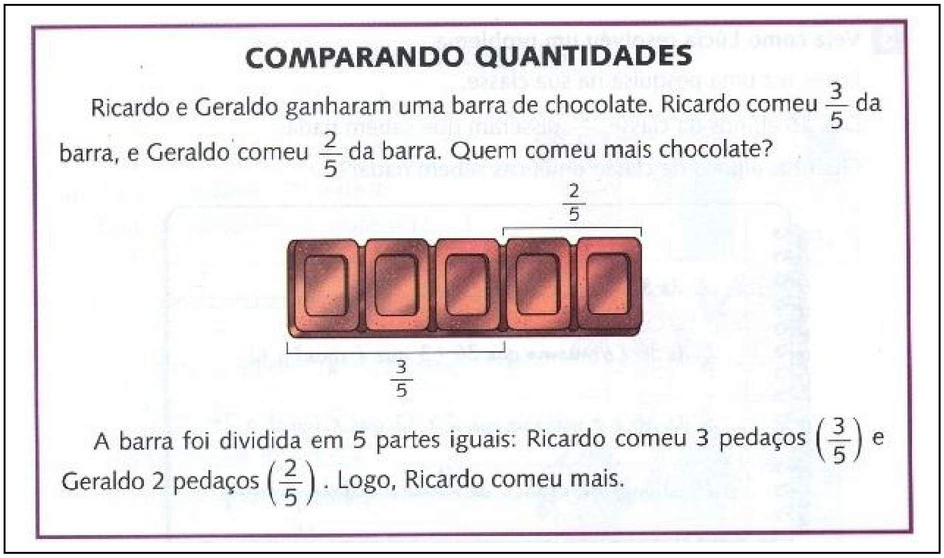


Figura 22: Fração como quociente

As comparações entre as frações são feitas com o uso da dimensão 2 ilustrada na barra de chocolate, como mostra a Figura 23.



COMPARANDO QUANTIDADES

Ricardo e Geraldo ganharam uma barra de chocolate. Ricardo comeu $\frac{3}{5}$ da barra, e Geraldo comeu $\frac{2}{5}$ da barra. Quem comeu mais chocolate?

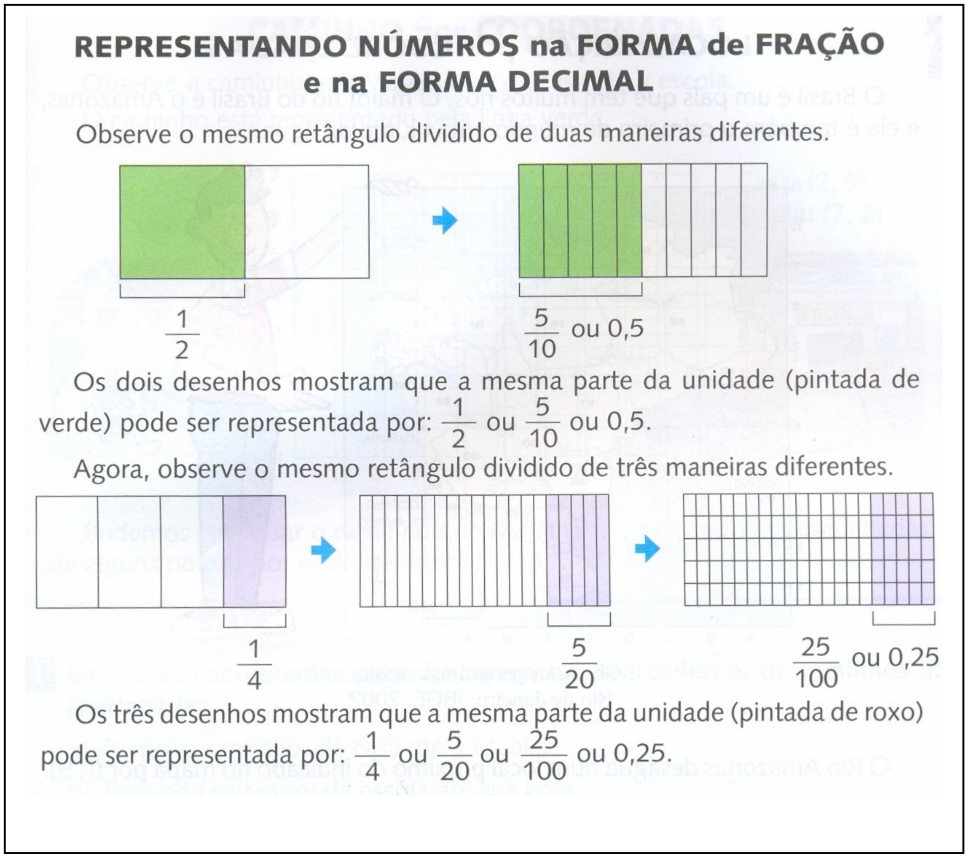
$\frac{2}{5}$

$\frac{3}{5}$

A barra foi dividida em 5 partes iguais: Ricardo comeu 3 pedaços $\left(\frac{3}{5}\right)$ e Geraldo 2 pedaços $\left(\frac{2}{5}\right)$. Logo, Ricardo comeu mais.

Figura 23: Comparando quantidades

Os números racionais estão apresentados na representação numérica decimal e estão associados a figuras de dimensão 2, assim como é feita a conversão do registro de representação numérico fracionário para o decimal, como mostra a Figura 24.



REPRESENTANDO NÚMEROS na FORMA de FRAÇÃO e na FORMA DECIMAL

Observe o mesmo retângulo dividido de duas maneiras diferentes.

$\frac{1}{2}$ $\frac{5}{10}$ ou 0,5

Os dois desenhos mostram que a mesma parte da unidade (pintada de verde) pode ser representada por: $\frac{1}{2}$ ou $\frac{5}{10}$ ou 0,5.

Agora, observe o mesmo retângulo dividido de três maneiras diferentes.

$\frac{1}{4}$ $\frac{5}{20}$ $\frac{25}{100}$ ou 0,25

Os três desenhos mostram que a mesma parte da unidade (pintada de roxo) pode ser representada por: $\frac{1}{4}$ ou $\frac{5}{20}$ ou $\frac{25}{100}$ ou 0,25.

Figura 24: Representando números na forma de fração e na forma decimal

Aqui poderia ser utilizada também a representação geométrica na dimensão 1, a passagem da representação fracionária $\frac{1}{2}$ para a decimal 0,5. Nessa dimensão, pode-se dar maior significado para a igualdade e melhor justificativa para o zero e para a vírgula, pois o zero está presente na reta graduada e uma marcação entre 0 e 1 indica que o número ali representado é menor que 1, logo o seu registro de representação numérico decimal terá parte inteira igual a 0 e separado da parte decimal pela vírgula, como mostra a Figura 25. Acreditamos ser uma vantagem da dimensão 1 sobre a dimensão 2 para esse caso de conversão. Os diferentes tratamentos dados ao registro geométrico da reta graduada propiciam uma melhor justificativa para a igualdade.

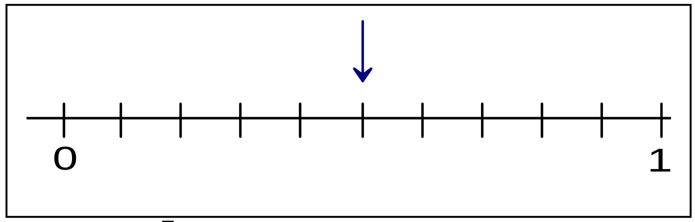


Figura 25: $\frac{5}{10} = 0,5$ **representado na reta graduada**

Na Figura 26, pode-se observar a utilização da régua auxiliando a introdução da representação decimal de um número racional. Dessa fora, é atribuído ao número o significado de medida, o comprimento de um objeto. Não há, no entanto, nada que nos leve a pensar que seja atribuído à reta graduada o estatuto de registro de representação.

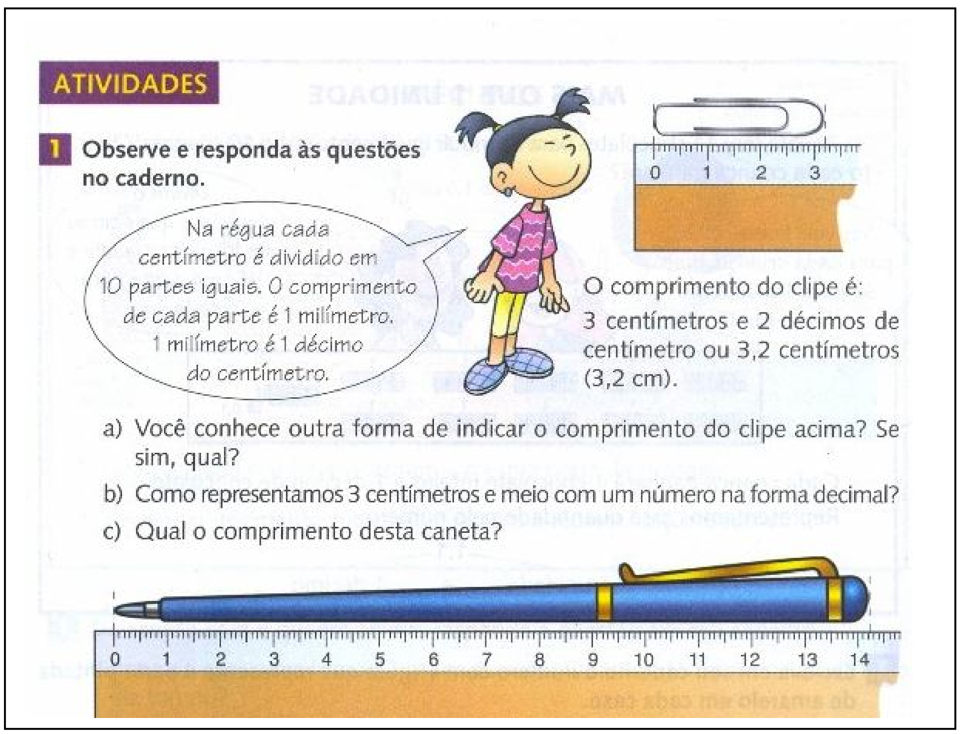


Figura 26: Associação do número decimal à medida

4.3.2 Conclusão

Constatamos que os livros de 1ª e 2ª séries do ciclo II (3ª e 4ª séries) seguem as orientações dos PCN, utilizando figuras ilustrativas e figuras em duas dimensões para a construção dos significados dos números racionais. Os significados apresentados foram a relação parte-todo, razão, quociente e medida, quando se utiliza o registro de representação decimal.

Percebemos que a dimensão 1 não foi utilizada como registro de representação geométrica, sendo usada apenas para associar o número decimal a uma medida. Portanto, de acordo com o artigo de referência, os livros apresentam as representações geométricas dos números racionais como simples ilustrações e não fazem uso do registro de representação geométrica em dimensão 1 como um instrumental de conceitualização dos números racionais.

4.3.3 Livros da 1ª e 2ª séries do ciclo III (5ª e 6ª séries)

O livro da 1ª série do ciclo III faz a apresentação dos racionais positivos utilizando o sistema de reta graduada. Nesse caso, porém, a reta não assume o estatuto de registro de representação, ou seja, não há necessidade de criar a fração, o aluno deverá apenas representá-la na reta ou localizá-la. Cabe ressaltar que apesar de ser uma utilização limitada, a reta extrapola o universo unitário, dando um significado melhor às frações maiores que 1, como ilustrado na Figura 28.

Na Figura 27, o número racional assume o significado da relação parte-todo. No enunciado, é sugerida a divisão em seis partes e a marcação de uma utilizando assim a estratégia de dupla contagem.

Exemplo 1: Represente o número $\frac{1}{6}$.

Dividimos o segmento entre 0 e 1 em 6 partes iguais e marcamos $\frac{1}{6}$ no primeiro ponto depois do zero.

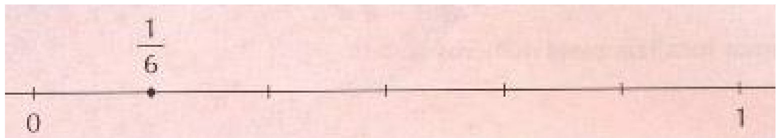


Figura 27: Representação de $\frac{1}{6}$ na reta graduada

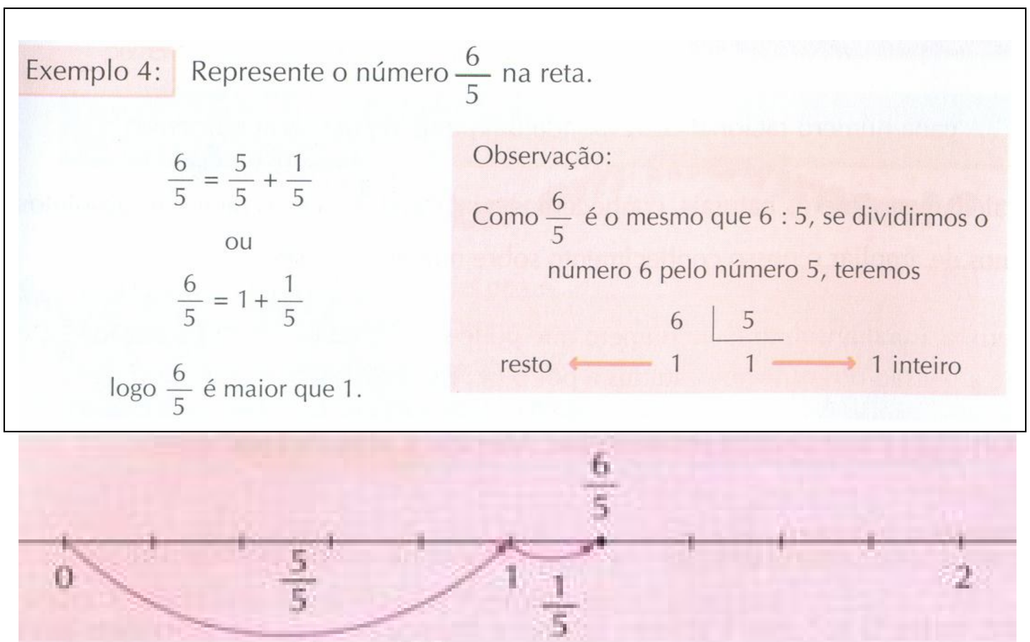


Figura 28: Representação de $\frac{6}{5}$ na reta graduada

A Figura 29 utiliza a reta graduada na descoberta de frações equivalentes enquanto que a Figura 30 a utiliza na comparação de duas frações, porém as frações já são dadas e posteriormente localizadas na reta. Podemos admitir que esteja ocorrendo uma conversão do registro de representação numérico fracionário para o registro de representação geométrico, contudo a reta graduada é tratada como na dimensão 2, ou seja, o aluno conclui com uma análise visual de uma figura meramente ilustrativa.

Observação: As frações equivalentes representam um único número racional.

Exemplo: $\frac{2}{3}$ e $\frac{4}{6}$ são frações equivalentes. Logo elas são representadas por um mesmo ponto na reta numérica.

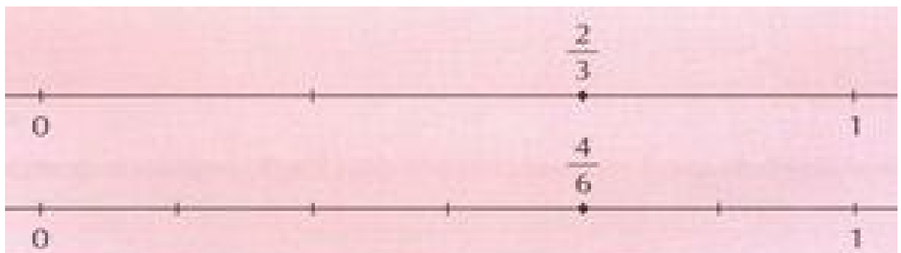
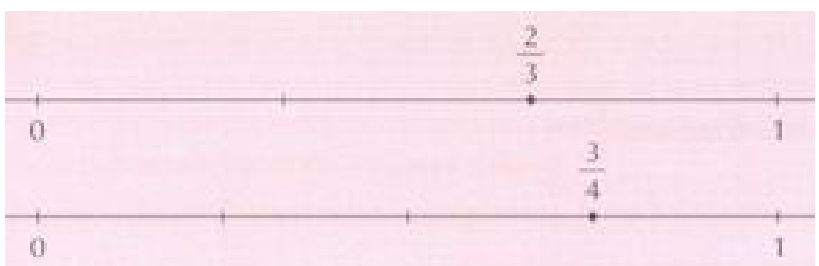


Figura 29: Frações equivalentes

Qual dos números racionais $\frac{2}{3}$ ou $\frac{3}{4}$ é maior?

Vamos localizar esses números na reta.



Comparando as localizações dos números na reta, observamos que $\frac{3}{4}$ é maior que $\frac{2}{3}$.

Figura 30: Comparação de números racionais

Podemos concluir, quanto ao significado de número racional, que esses exemplos procuram trabalhar o significado de medida, uma vez que a distância entre o zero e o ponto que representa o número racional na reta é que irá mostrar se as frações são iguais ou diferentes e, nesse caso, qual é a maior.

Ressaltamos que manipular a reta dessa forma poderá implicar em ambigüidade para o aluno, caso as frações sejam constituídas de valores muito próximos e a precisão no uso da régua não seja satisfatória. Analisemos, por exemplo, as frações $\frac{4}{3}$ e $\frac{11}{8}$ na Figura 31.

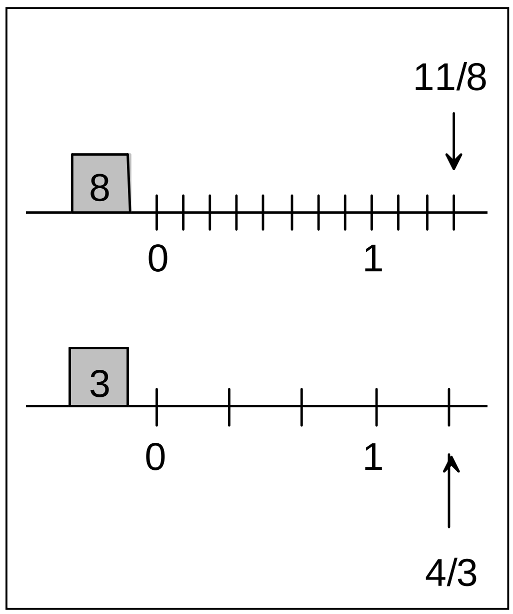


Figura 31: Comparação visual ambígua

Para fazermos a comparação e descobrirmos qual das duas frações é a maior, devemos encontrar uma graduação que ligue simultaneamente os dois números e que permita uma subdivisão de 3 em 3 e de 8 em 8 ao mesmo tempo, ou seja, um múltiplo comum de 3 e 8, por exemplo, um fracionador 24. Esse modo de trabalhar a reta graduada está exemplificado na Figura 32.

Subdividindo o intervalo entre 0 e 1 em 24 partes iguais e continuando com essa subdivisão, vamos encontrar as frações equivalentes a $\frac{11}{8}$ e $\frac{4}{3}$ que são

$\frac{33}{24}$ e $\frac{32}{24}$ respectivamente e então concluir que $\frac{11}{8} > \frac{4}{3}$, pois $\frac{33}{24} > \frac{32}{24}$ com base nos numeradores, uma vez que os denominadores são iguais, e não com uma conclusão visual.

Toda essa construção e análise são feitas com o uso dos signos proporcionados pela reta e resultam em vantagens sobre a dimensão 2, tais como: a não necessidade de mais que uma figura, pois sendo as frações maiores que a unidade, precisariam de mais de uma figura para representá-las em dimensão 2; economia de tempo, pois trabalhar com a linha é mais rápido do que com o plano; pensar na fração como número, pois a reta está toda envolvida com números.

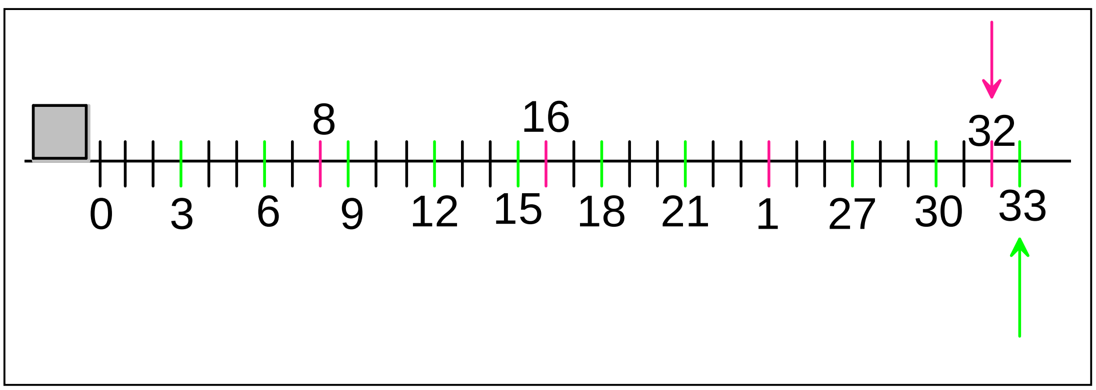


Figura 32: Comparação em única reta

A Figura 33 faz parte de uma situação-problema em que o aluno poderá perceber a utilidade de comparar fração e a necessidade de encontrar frações equivalentes para a solução do problema.

Imagine a seguinte situação:

João e Daniel são centroavantes de seus times. Num campeonato de futebol, João jogou 6 partidas e marcou 4 gols, enquanto Daniel jogou 8 partidas e marcou 6 gols.

Qual dos dois teve o melhor aproveitamento por partida?

Esse problema pode ser solucionado pela comparação de frações.

João		Daniel
4 gols em 6 partidas		6 gols em 8 partidas
$\frac{4}{6}$	Fração Correspondente	$\frac{6}{8}$
Em quatro das seis partidas marca gol.		Em seis das oito partidas marca gol.

Para sabermos qual dos dois tem o melhor desempenho, precisamos comparar as frações. Para isso, é necessário encontrar uma fração que seja equivalente a $\frac{4}{6}$ e também a $\frac{6}{8}$.

Vamos obter frações equivalentes a cada uma delas.

$$\frac{2}{3} = \mathbf{\frac{4}{6}} = \frac{6}{9} = \frac{8}{12} = \frac{10}{15} = \frac{12}{18} = \frac{14}{21} = \frac{16}{24} = \frac{18}{27} = \ldots$$

$$\frac{3}{4} = \mathbf{\frac{6}{8}} = \frac{9}{12} = \frac{12}{16} = \frac{15}{20} = \frac{18}{24} = \frac{21}{28} = \frac{24}{32} = \frac{27}{36} = \ldots$$

As frações destacadas possuem o mesmo número de partes em que o todo foi dividido. Vamos compará-las:

$\frac{2}{3}$ é equivalente a $\frac{8}{12}$ $\qquad$ $\frac{3}{4}$ é equivalente a $\frac{9}{12}$

Vamos representar, agora, as frações $\frac{8}{12}$ e $\frac{9}{12}$ que correspondem ao desempenho dos jogadores:

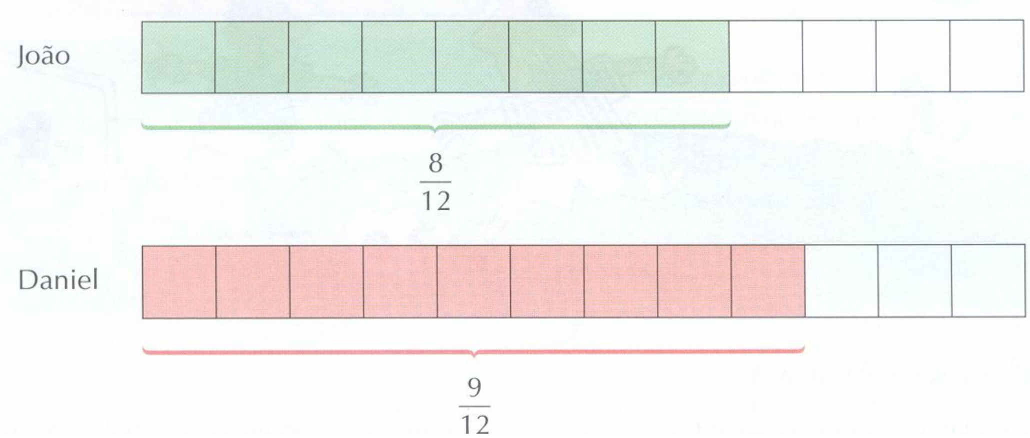


FIGURA 33: comparação de números racionais

Podemos ver que, nessa situação, o livro abandona a reta graduada e utiliza uma figura em duas dimensões para resolver um problema em que o número racional tem o significado de razão.

Se fosse utilizada a reta graduada (Fig. 34), o aluno poderia obter o fracionador comum, no caso, 48. A partir de divisões em 8, na primeira, obteria 32, e em 6, na segunda, obteria 36, chegando à comparação desejada. O aluno encontraria qual jogador teve melhor aproveitamento por partida, descobrindo as frações equivalentes, utilizando as representações das frações em uma reta graduada, porém essa descoberta é toda ela feita apoiando-se nos signos de que a reta dispõe e manipulando suas subdivisões. Dessa forma, a fração equivalente e o próprio problema passam a ter mais significado para o aluno com uma possível diminuição do tempo gasto para solucioná-lo.

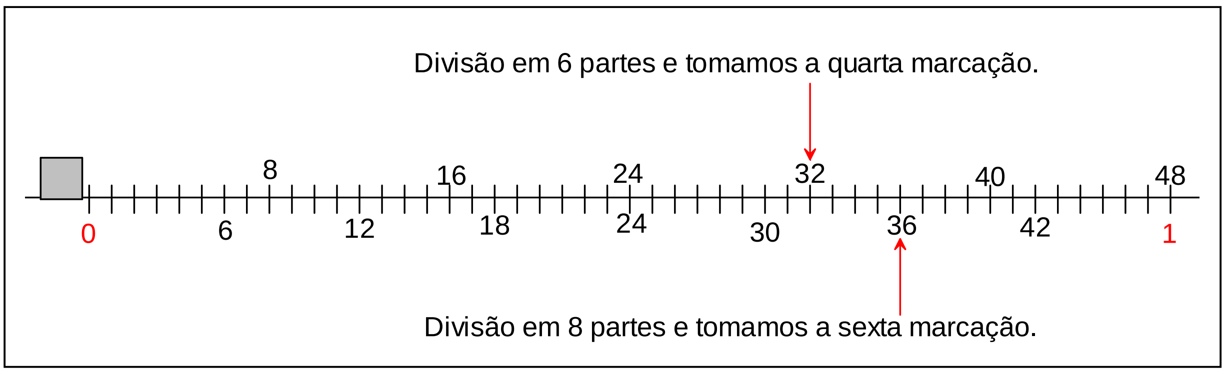


Figura 34: Resolução do problema por meio da reta graduada

Subdividindo o intervalo entre 0 e 1 em 48 partes iguais, vamos encontrar as frações equivalentes a $\frac{6}{8}$ e $\frac{4}{6}$, que são $\frac{36}{48}$ e $\frac{32}{48}$ respectivamente e então concluir que $\frac{6}{8} > \frac{4}{6}$, pois $\frac{36}{48} > \frac{32}{48}$, com base nos numeradores, uma vez que os denominadores são iguais, e não com uma conclusão visual. Podemos assim responder que o desempenho de Daniel foi melhor.

As frações equivalentes, no registro geométrico da reta graduada, são obtidas sem a necessidade de algoritmos ou técnicas pré-estabelecidas. Para isso, é preciso extrair do registro tais informações que dependem da interpretação de seus signos. Por exemplo, para concluirmos que a fração $\frac{6}{48}$ é equivalente a $\frac{1}{8}$, basta observarmos que a primeira leva em conta o fracionador 48, enquanto a segunda representa as 8 partes resultantes quando o fracionador 48 foi dividido.

É feita uma introdução para os racionais na representação decimal por meio de figuras em duas dimensões, na Figura 35, e, em seguida, relacionada com a reta graduada, como podemos observar na Figura 36. No entanto essa relação tem um papel ilustrativo, aparecendo inclusive a indicação de várias estratégias de resolução. E, por fim, a transformação entre os dois registros é resumida na divisão do numerador pelo denominador. A propósito, na Figura 36, o número racional é interpretado com o significado de quociente.

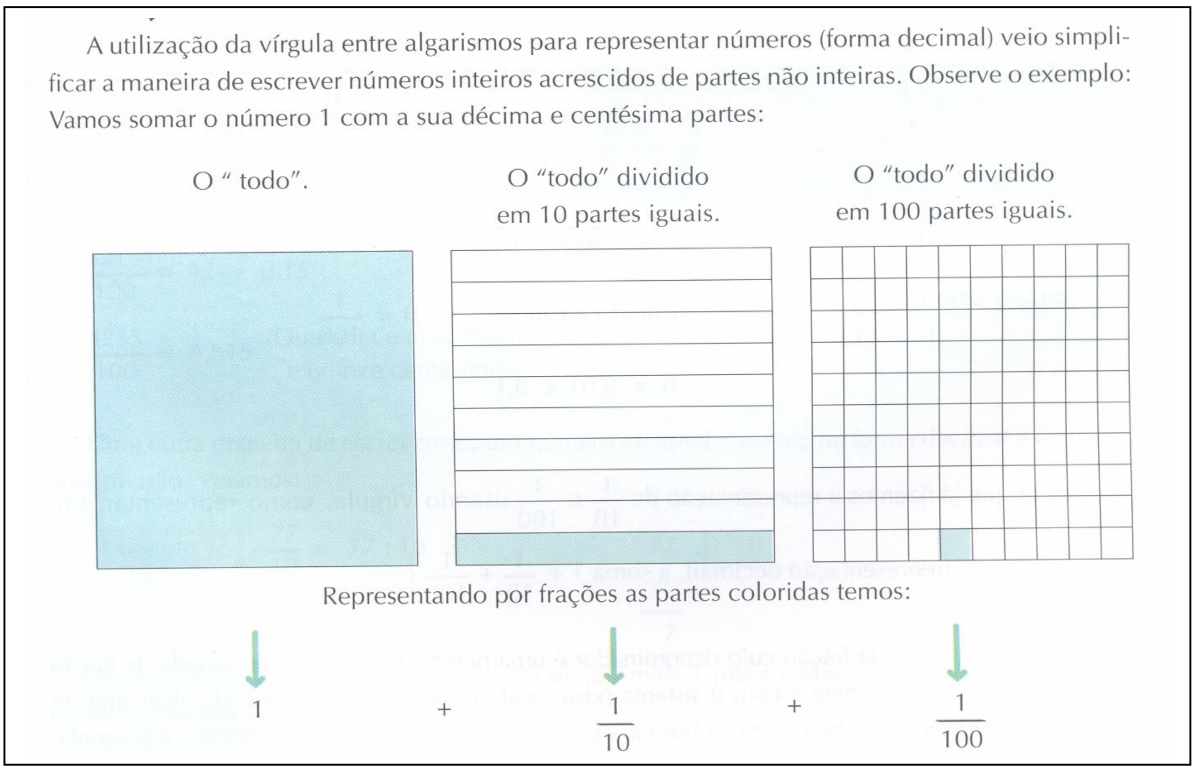


Figura 35: Dividindo o todo

Exemplo 1: Considere a fração decimal $\frac{77}{10}$

Escrevendo o número 77 como adição de seus valores relativos, podemos expressar a fração decimal como:

$$\frac{77}{10} = \frac{70 + 7}{10}$$

$$\frac{77}{10} = \frac{70}{10} + \frac{7}{10}$$

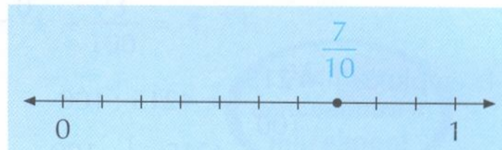
$$\frac{77}{10} = 7 + \frac{7}{10}$$

$$\frac{77}{10} = 7 + 0{,}7$$

$$\frac{77}{10} = 7{,}7$$ (Sete inteiros e sete décimos)

Vamos localizar $\frac{7}{10}$ na reta numerada

$\frac{7}{10}$ é um número menor que 1 inteiro e corresponde ao sétimo ponto dos 10 com que dividimos o segmento entre 0 e 1.



$$0 < \frac{7}{10} < 1$$

⇕ usando a vírgula

$$0 < 0{,}7 < 1$$

Uma outra maneira de escrevermos um número racional absoluto na forma decimal é efetuando a divisão. Vejamos:

Exemplo 1: $\frac{77}{10} = 77 : 10$

$$\begin{array}{r|l} 77 & 10 \\ \hline -70 & 7 \\ \hline 7 & \end{array}$$

Temos o resto 7, o que não nos permite dividir mais 1 inteiro para cada um dos 10. Porém, podemos repartir uma fração:

7 para 10, ou seja, $\frac{7}{10}$.

Na forma decimal essa fração (parte do inteiro) é separada por uma vírgula. Observe:

$$\begin{array}{r|l} 77 & 10 \\ \hline -70 & 7, \\ \hline 70 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 77 & 10 \\ \hline -70 & 7{,}7 \\ \hline 70 & \\ -70 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

logo, $\frac{77}{10} = 77 : 10 = 7{,}7$

Figura 36: transformação: tratamento fracionário em decimal

A introdução dos racionais, na 2ª série do ciclo III, passa primeiro pela revisão dos racionais positivos, como podemos ver na Figura 37, em que é utilizada uma reta graduada e o significado dado para o número racional é o de quociente.

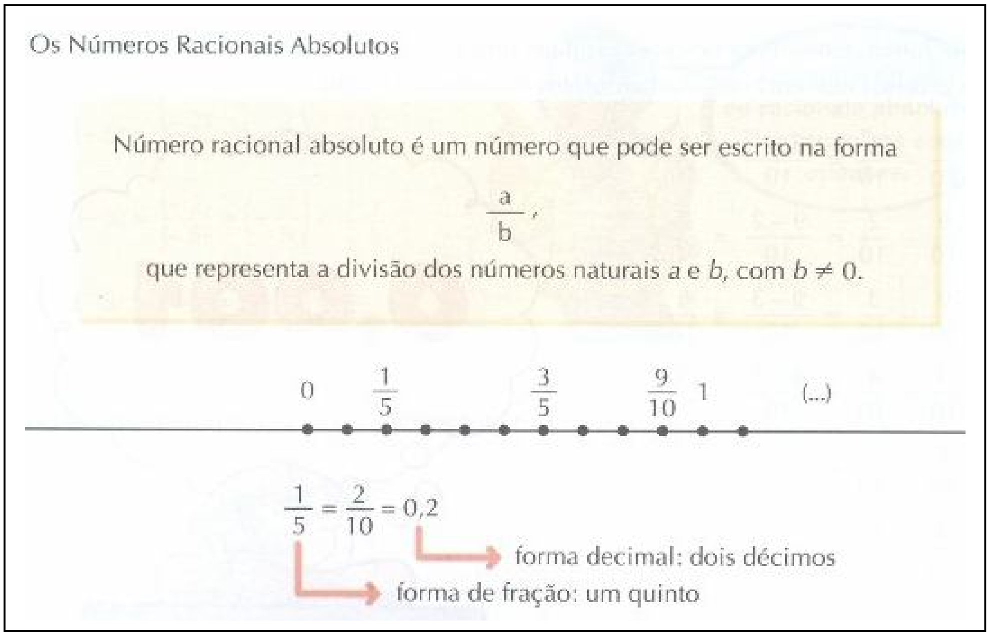


Figura 37: Números racionais positivos

A ampliação do conjunto dos números racionais, de modo a aceitar não só os números positivos como também os negativos, é explicada por meio da reta numérica dos inteiros, partindo dos números opostos, portanto se conclui que os racionais positivos admitem opostos, resultando na Figura 38.

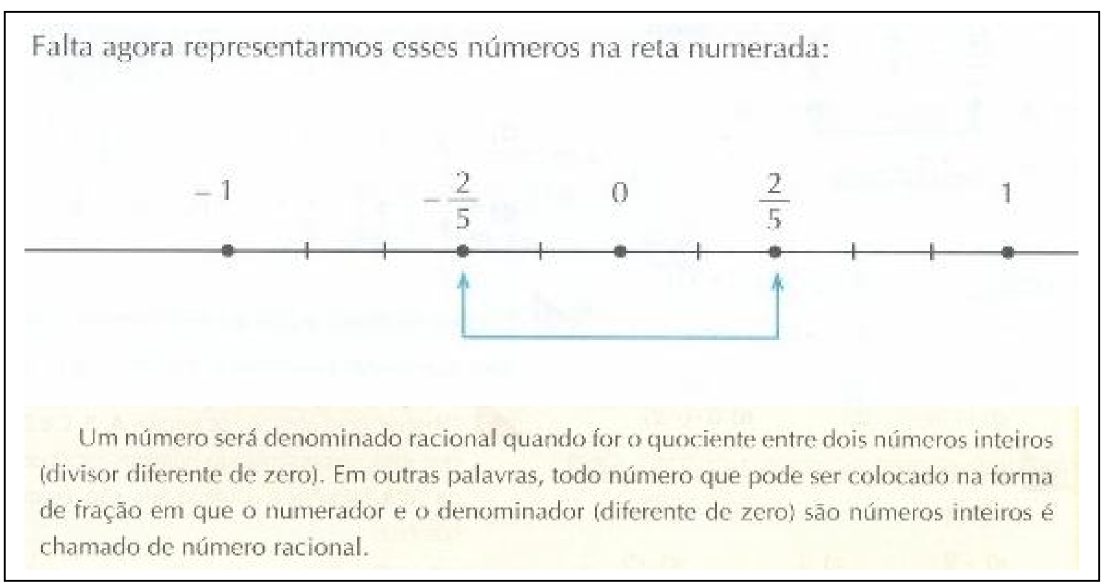


Figura 38: Reta numerada com números racionais positivos e negativos

A Figura 39 é uma atividade em que haverá a conversão do registro geométrico da reta graduada ou numérica para o registro numérico, podendo ser fracionário ou decimal.

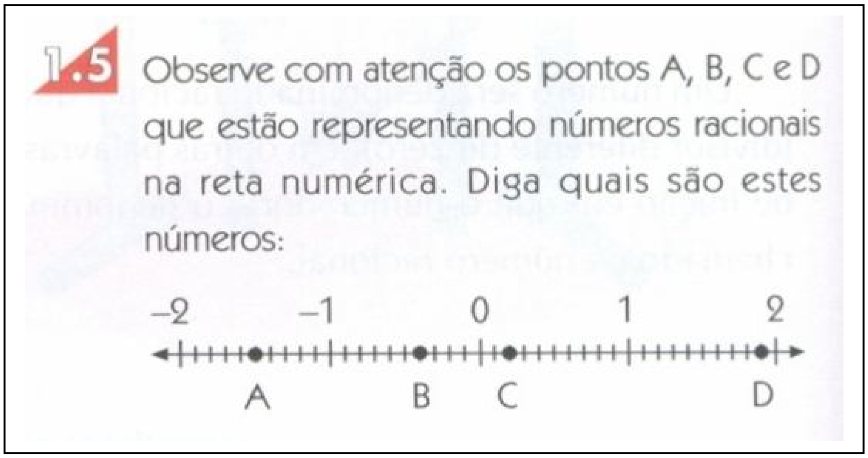


Figura 39: Atividade 1.5

4.3.4 Conclusão

Constatamos que os livros de 1ª e 2ª séries do ciclo III seguem as orientações dos PCN quanto aos significados, porém podemos perceber que há um abandono razoável da representação geométrica de dimensão 2 em prol da dimensão 1. Apesar disso, a reta graduada tem seu uso limitado a interpretações materiais que ficam sujeitas a evidências visuais, ou seja, ela é usada como simples figura ilustrativa na tentativa de facilitar o entendimento do aluno.

Percebemos também que não há situações-problema no uso dessa dimensão fazendo com que a mesma atue como registro de representação capaz de conduzir o aluno à construção do número racional e a sua representação numérica fracionária e/ou decimal e seus significados. Destacamos ainda que situações-problemas são propostas apenas com o uso de figuras de dimensão 2.

Vindo ao encontro de nossa análise, temos a pesquisa de Catto (2000), na qual foi feita a análise de livros didáticos com o olhar voltado para os registros de representação dos números racionais. Segundo essa autora, o conceito de fração é introduzido mediante a subdivisão de figuras discretas ou contínuas, fazendo-se uso de figuras geométricas de duas dimensões já prontas para serem usadas pelo aluno, havendo a coordenação entre o registro figural, geométrico dimensão 2, e o simbólico numérico fracionário.

O uso da dimensão 1 é feito não se considerando a questão da comensurabilidade[2], com o objetivo de se repartir o segmento em partes iguais e possíveis de acordo com a figura. Além disso, podemos observar que o uso da reta numérica é feito por meio de uma analogia com a régua escolar. Nada contra, entretanto as atividades são apenas para enquadrar o número decimal e medir distâncias.

Segundo a autora,

> Ao longo das coleções, são observadas poucas atividades de ordenação de número no registro fracionário na reta numérica, exercícios como estes que poderiam contribuir para a concepção do número racional no registro fracionário. (CATTO, 2000, p. 136)

A análise desse texto nos mostra que, da mesma forma que na França em 2000 e atualmente em nosso país, o ensino dos números racionais está pautado no uso de figuras ilustrativas. Quando a reta graduada é utilizada, não é explorada sua condição de registro de representação e, portanto, toda sua potencialidade para auxiliar a compreensão do conceito de número racional e seus diversos significados. Sendo assim, “Na prática usual, considera-se que as representações geométricas dos números racionais são apenas ilustrações que ajudam a compreender o que desejamos como os verdadeiros objetos de aprendizagem [...]”.[3] (ADJIAGE; PLUVINAGE, 2000, p. 41, tradução nossa)

Quanto aos subconstrutos definidos por Kieren (1988), utilizamos também para esta análise os dados da pesquisa de Teixeira (2008). Nela é apresentada a

---

[2] Comensurabilidade: originada da palavra comensurável: diz-se que dois segmentos são comensuráveis se são múltiplos de um segmento comum.

[3] Dans la pratique usuelle, on considère que les représentations géométriques des nombres rationnels ne sont que des illustrations aidant à comprendre ce que l’on envisage comme les véritables objets d’apprentissage [...].

análise de três coleções de livros didáticos com o foco em diversos significados de frações. São analisadas 169 questões assim distribuídas:

- ✓ 112 questões com significado parte-todo.
- ✓ 43 questões com significado operador multiplicativo.
- ✓ 11 questões com significado quociente.
- ✓ 3 questões com significado medida.
- ✓ Nenhuma questão com significado de número.

Desse quadro, podemos concluir que os livros estão dando maior ênfase aos subconstrutos parte-todo e operador multiplicativo e, portanto, a construção dos demais subconstrutos termina sendo superficial. Já com relação ao significado de número, caberá ao professor se encarregar dessa tarefa ou então o aluno poderá pensar que as frações são apenas representações utilizadas na resolução de problemas e muitos continuarão olhando para ela como dois números separados por um traço.

Nossa conjectura feita neste trabalho, ao final da conclusão da análise dos PCN, veio a se comprovar após a análise dos livros didáticos, pois, com os exemplos extraídos dos livros e aqui analisados por nós, realmente vimos que a dimensão 2 é privilegiada no seu uso, principalmente nas 3ªs e 4ªs séries. Já o aparecimento da dimensão 1 ocorre com maior ênfase nos livros de 5ª e 6ª séries, porém seu uso é praticamente restrito a dupla contagem ou enquadramento.

Quanto às transformações de representações semióticas definidas por Duval (2005), pouco se explora, sejam tratamentos ou conversões de registros. Quanto aos significados definidos pelos PCN (1997, 1998) ou os subconstrutos definidos por Kieren (1993), constatamos aqui que a relação parte-todo é a mais presente, havendo um equilíbrio entre as demais, contudo o significado operador não esteve presente nas atividades por nós analisadas.

CAPÍTULO 5

CONSIDERAÇÕES FINAIS

> *"Como professor não me é possível ajudar o educando a superar sua ignorância se não supero permanentemente a minha."*
>
> *Paulo Freire*

Nossa pesquisa, em um primeiro momento, toma por hipótese que a forma como está sendo abordado o conceito de número racional no Ensino Fundamental pode interferir nos resultados insatisfatórios que nos defrontamos sob o ponto de vista do aprendizado dos alunos. Para tal nos apoiamos em nossa prática, pois nos defrontamos com dificuldades entre alunos das mais variadas séries ao longo de nossa carreira profissional, e principalmente reafirmamos nossa suposição ao fazermos uma leitura dos resultados do Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo (Saresp) de 2007 (Anexo A) com relação aos porcentuais de acerto das questões pertinentes.

Apresentamos mais elementos nos subsídios da pesquisa de Teixeira (2008) em que foram analisadas algumas questões das provas do Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica (SAEB) de 2001 e Saresp (2005), nas quais os resultados obtidos por alunos de 4ª e 5ª séries com relação à resolução de problemas envolvendo fração apresentaram baixos índices de acerto.

Ao compararmos, portanto, os resultados das duas edições do Saresp, 2005 e 2007, concluímos que não houve melhora significativa nos resultados obtidos pelos alunos.

Tomando essa hipótese, e levando-se em conta que a introdução dos números racionais como vem sendo abordada pelos livros didáticos pode contribuir com os resultados, investigamos a proposta de utilizar a reta graduada como um registro semiótico para a introdução dos racionais. Nesse momento respondemos à luz dos argumentos apresentados no artigo que foi exposto no capítulo 3, nossa primeira questão de pesquisa:

- ✓ A introdução da reta graduada como um registro semiótico para os racionais de fato amplia a possibilidade de enfrentamento das dificuldades consagradas na aprendizagem dos racionais?

Os porcentuais de acerto de algumas questões do Saresp 2007 são indicadores de algumas das dificuldades de aprendizagem dos racionais. Verificamos que a questão que envolve a relação parte-todo apresenta um bom porcentual de acerto, 62%. Como já relatamos, na análise dos livros feita por Teixeira (2008), esse significado de fração é o que apresenta maior quantidade de atividades.

A questão que envolve a colocação de ordem crescente de números racionais, na representação numérica decimal, apresenta acerto de 49%; já a questão em que é necessária conversão do registro numérico decimal para o registro numérico fracionário apresentou apenas 40% de acerto.

As questões cuja habilidade de resolver situação-problema compreende diferentes significados das operações envolvendo números racionais tiveram acerto de 63% e 10% na 6ª série, de acordo com o nível da escala de proficiência[1], 200 e 325 respectivamente. Na 8ª série, a questão que envolvia essa habilidade tinha seu nível em 350 e atingiu 39% de acerto. Tais questões envolvem os significados de fração como razão e operador multiplicativo.

---

[1] Escala de proficiência: representa um conjunto de proficiências demonstradas pelos alunos por meio de ações e tarefas de matemática (conteúdos, competências e habilidades).

Mesmo a questão de 8ª série que envolvia a conversão do registro da reta graduada para o registro numérico decimal teve apenas 57% de acerto, levando-se em conta que a questão apresentava um exemplo como facilitador.

Com esses resultados, podemos observar que o conceito de número racional, as conversões e tratamentos; os significados de razão e operador representaram grau de dificuldade que prejudicou o bom desempenho dos alunos.

Em contraposição a esses resultados, concluímos, em nossa análise que o registro da reta graduada é capaz de dar ao racional o imperativo de número, desvinculando-o de medida, sem ter que depender única e exclusivamente de uma dupla contagem ou de informações visuais adquiridas de uma figura meramente ilustrativa. As ambigüidades provenientes de informações visuais não são base de sustentação desse registro.

Acrescentamos que as questões do Anexo A não dependiam única e exclusivamente de interpretações visuais, daí mais um motivo para o baixo rendimento dos alunos.

O registro da reta graduada é mais apto a criar um elo entre números e grandezas relativas, pois a reta se encontra envolvida em meio a números que a atribuem uma ordem crescente dos mesmos e, sendo assim, as frações equivalentes são criadas em condições mais favoráveis.

Podemos admitir que a conversão desse registro e o registro numérico decimal, seja qual for o sentido, seria feito com desvantagens em figuras de dimensão 2. Tal atividade, que implica ordem crescente dos números, teve acerto abaixo do esperado no Saresp 2007. Por fim, temos um registro apto a trabalhar a conversão e o tratamento, lembrando que o número racional pode ser apresentado sob a forma de registro numérico fracionário ou decimal, não importando se está enquadrado entre 0 e 1. Mesmo uma fração imprópria e um número misto têm a mesma facilidade de representação.

Acrescentamos que o registro de representação das retas graduadas apresenta-se munido de informações, signos ou convenções semióticas, que até podem não ser tão evidentes de inicio, porém uma vez interpretadas, trazem uma melhor compreensão do número racional e de seus vários significados.

Foi constatado, em nossa análise, que os autores Adjiage e Pluvinage (2000) admitem que, apesar da dimensão 1 ser rica em signos, apresenta um custo didático que deve ser levado em conta, porém os mesmos concluem que os resultados obtidos com um trabalho feito na dimensão 1 são satisfatórios a ponto de tal custo ser um preço baixo na comparação com os benefícios adquiridos.

Na nossa realidade, trabalhar a reta sem acesso ao *software* gasta-se um tempo ainda maior, porém usar a régua e fazer divisões e subdivisões é mais fácil e rápido na dimensão 1 do que utilizar as figuras geométricas na dimensão 2, principalmente a forma de pizza. Com relação ao custo didático, acreditamos que seja diminuto, pois, tomando como base os subconstrutos de Kieren (1993) – medida, quociente, razão e operador –, e traçando um paralelo com as competências citadas por Adjiage e Pluvinage (2000), podemos concluir que há uma estreita relação entre ambos e que, portanto, valem a pena serem trabalhados na reta graduada, uma vez que a dimensão 1 é capaz de garantir o desenvolvimento do conceito de número racional e também dos subconstrutos, reforçando a possibilidade de enfrentamento das dificuldades consagradas na aprendizagem.

A seguir, traçamos um paralelo entre os subconstrutos de Kieren (1993) e o conjunto de competências relativas à representação dos racionais criadas por Adjiage e Pluvinage (2000) e apresentadas no capítulo 3, justificando ainda mais o uso da dimensão 1.

Podemos enquadrar o subconstruto medida nas competências 1 e 4, comparar um dado numérico a unidade e localizar as escritas fracionárias na reta graduada sem confundir distância com coordenada horizontal. Apresentamos, no

Anexo B, algumas atividades desenvolvidas na pesquisa de Silva (2003) em que é trabalhado esse subconstruto no registro da reta graduada.

Podemos enquadrar o subconstruto quociente nas competências 2 e 3, identificar numerador e denominador e descobrir quais as funções dos mesmos. Acreditamos que uma seqüência de ensino apoiada sobre a reta graduada seja capaz de conduzir o aluno a desenvolver tais competências. Vimos, por exemplo, que o fracionador é um signo com alto valor de interpretação nesse subconstruto.

O subconstruto razão e operador estão presentes na competência 7, produzir escrita equivalente. Em nossa análise, vimos que as representações geométricas são aptas a criarem frações equivalentes, porém, no exemplo abaixo, em que é necessário encontrar a escrita equivalente a $\frac{3}{4}$ de 7, o um custo didático seria elevado em dimensão 2; já operar $\frac{3}{4}$ de 7 na dimensão 1 passa pela representação como a da Figura 40:

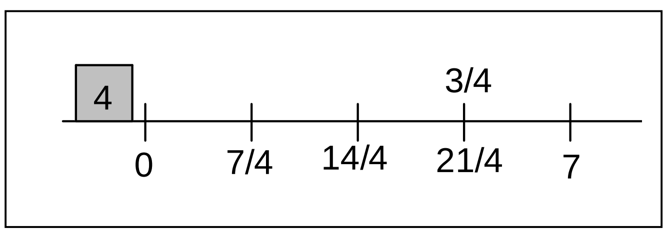


Figura 40: $\frac{3}{4}$ de 7 = $\frac{21}{4}$

Temos uma reta graduada com quatro divisões (fracionador 4) na marcação [0; 7] em que o $\frac{3}{4}$ é localizado, restando descobrir quanto representa cada divisão. Como a marcação [0; 7] está dividida em 4 partes, pode-se concluir que a primeira parte corresponde a $\frac{7}{4}$. Através da soma das partes, chega-se ao resultado $\frac{3}{4}$ de 7 = $\frac{21}{4}$.

Temos consciência de que o aluno não conseguirá de imediato trabalhar esse subconstruto da forma como propomos, porém o exemplo está colocado para que o leitor possa perceber que a dimensão 1 tem potencial para resolver esse tipo de questão sem a necessidade de se apegar aos algoritmos, que são facilmente esquecidos e geralmente não produzem significados convincentes para o aluno. Também acreditamos que tudo depende de como o mesmo será iniciado no mundo dos números racionais

Quanto ao uso excessivo de algoritmo por parte dos alunos, é notório nas pesquisas de Santos (2005) e Damico (2007) que tal fato ocorre por conseqüência da formação dos professores tanto no Ensino Básico quanto na universidade e que, portanto, repetem o que aprenderam, transformando essa prática em um círculo vicioso.

Apesar da relação histórica entre o tratamento dado à fração hoje e sua utilização no passado, e que segundo Lima (1997), implica em um trabalho com figuras geométricas que possuem superfície, precisamos nos libertar desse conceito se quisermos romper, de uma vez por todas, com os resultados pouco expressivos apontados pelos exames anuais a que nossos alunos são submetidos.

Com base no exposto até o momento, estamos convictos de que a introdução da reta graduada como um registro semiótico para os racionais realmente amplia a possibilidade de enfrentamento das dificuldades consagradas na aprendizagem dos mesmos, logo não deve ser desprezada ao se iniciar um trabalho que vise à compreensão do conceito de número racional e seus vários significados. Sabemos que deve ser um trabalho longo, desenvolvido nas várias séries como sugerem os PCN, porém deparamos com a falta dessa representação e de seu caráter semiótico nos livros didáticos, principalmente os de ciclo II (3ª e 4ª séries).

Essa ausência, porém, não pode inibir o professor quanto ao seu uso. Será necessário, então, que o mesmo crie sua seqüência de ensino, dando a reta graduada um caráter semiótico, visando à conversão dos registros, que, de acordo com Duval (2005), é fundamental para que haja a compreensão em Matemática. Apesar do que foi exposto, acreditamos que não se deve abandonar por completo a dimensão 2, pois ela tem seu valor na comparação de determinados tipos de fração e será mais uma representação pela qual o aluno poderá trabalhar a conversão, tendo condições de ver nas mais variadas formas de registro o número racional.

Acreditamos que outros trabalhos possam ser feitos, tomando como ponto de partida a atividade junto aos alunos, assumindo assim que o uso da reta graduada como um registro semiótico para os racionais desenvolve a possibilidade de enfrentamento das dificuldades consagradas na sua aprendizagem. Tais trabalhos poderão, do ponto de vista prático, comprovar o mesmo que o artigo francês e quem sabe, num futuro não tão distante, o livro didático apresente maior diversidade de representação dos números racionais, incorporando a dimensão 1 com seu amplo recurso semiótico.

A seguir vamos responder nossa segunda questão de pesquisa descrita abaixo à luz do que foi apresentado nos PCN e nos livros didáticos. O registro da reta graduada:

- ✓ Esse registro se configura como um elemento de auxílio para o ensino brasileiro?

A análise dos PCN mostrou que o documento está preocupado com os significados que o número racional pode assumir e também com os registros numéricos fracionário e decimal e orienta quanto ao uso das tradicionais figuras no formato de pizza e barra de chocolate, não fazendo nenhuma alusão ao registro da reta graduada.

Apesar das orientações dos PCN para que os vários significados ou subconstrutos do número racional sejam explorados – parte-todo, quociente, razão e operador –, as pesquisas de Santos (2005) e Damico (2007) apontam para os subconstrutos parte-todo e operador multiplicativo como aqueles mais desenvolvidos por professores ou futuros professores.

Quanto aos alunos, a relação parte-todo acaba sendo a única bem fixada, entretanto não proporciona inspiração para os demais significados, como relata Nunes (1997). Para Kieren (1993), porém, são os demais significados que garantem a compreensão da relação parte-todo. Já pesquisa de Teixeira (2008) destaca que os significados parte-todo e operador multiplicativo estão presentes nos livros didáticos por ele analisado com uma maior quantidade de exercícios.

Apesar dos documentos afirmarem que a idéia do número racional está relacionada à divisão entre dois números inteiros, com o segundo não nulo, acreditamos que o aluno terá dificuldades de assimilar o conceito de número racional partindo dessa idéia, pois o mesmo poderá pensar na fração apenas como uma divisão e não como um número pertencente a um conjunto numérico com suas propriedades e as operações.

Dependendo da leitura que faça dos PCN (1998), o professor pode ter a impressão de que o número racional é apenas uma representação a ser utilizada na resolução de problemas que envolvam os significados já citados.

O professor de 5ª a 8ª séries um pouco menos atento poderá se deixar levar por essa impressão ao ler apenas os PCN do terceiro e quarto ciclos nas “Orientações Didáticas” e constatar que:

> Na perspectiva do ensino não é desejável tratar isoladamente cada uma dessas interpretações. A consolidação desses significados pelos alunos pressupõe um trabalho sistemático, ao longo do terceiro e quarto ciclos, que possibilite análise e comparação de variadas situações-problema. (PCN, 1998, p. 103).

Tal afirmação é pertinente, porém, como nem todos os significados estão sendo realmente trabalhados, segundo resultados por nós levantados, poderá então não ocorrer necessariamente a construção do conceito de número racional, pois os PCN do primeiro e segundo ciclos (1ª a 4ª séries), que geralmente não são lidos pelos professores de 5ª a 8ª séries, também nas “Orientações Didáticas” afirmam que:

> ... a construção do conceito de número racional pressupõe uma organização de ensino que possibilite experiências com diferentes significados e representações, o que demanda razoável espaço de tempo; trata-se de um trabalho que apenas será iniciado no segundo ciclo do ensino fundamental e consolidado nos dois ciclos finais. (PCN, 1997, p. 69).

Portanto o número racional não deve ser tratado apenas como uma representação usada na resolução de problemas dos mais variados significados. O que deve ocorrer é a ordem inversa, isto é, os problemas é que deverão possibilitar a construção do conceito de número racional. Não foi isso, porém, que constatou Teixeira (2008) em sua pesquisa, na qual, depois de analisar 169 questões de três coleções de livros didáticos, verificou que o significado de número não esteve presente.

Uma vez que os livros didáticos atendem as orientações dos PCN (1997, 1998), foi possível constatar que tanto os PCN quanto os livros analisados por nós e também por Catto (2000) e Teixeira (2008) seguem uma linha de trabalho voltada para a compreensão das várias interpretações dadas ao número racional e, no caso dos livros, com maior ênfase para a relação parte-todo.

Quanto às representações geométricas apresentadas nos livros didáticos, as de duas dimensões são as mais presentes, agindo muito mais como figuras ilustrativas. Nos livros didáticos, é explícita a falta da dimensão 1 como registro de representação de número racional, seu uso fica condicionado ao enquadramento do número na reta, à dupla contagem para uma relação parte-todo ou, o que é também comum, ao trabalho de medida, o que a nosso ver é muito pouco.

Sendo assim, podemos concluir que os livros didáticos não apresentam uma abordagem semiótica para o registro geométrico da reta graduada de modo a ser suficientemente capaz de encaminhar a construção do conceito de número racional. E quanto a ele se configurar como um elemento de auxílio para o ensino brasileiro, dependerá de nós, professores, irmos além das orientações e criarmos instrumentos para isso, uma vez que os livros possuem outra abordagem apoiada nos PCN.

Finalizamos este trabalho sugerindo aos professores e autores de livros didáticos que avaliem a incorporação da reta graduada como um registro de representação, no ensino dos racionais no Ensino Fundamental. Para convencê-los, destacamos as principais qualidades dessa representação. Essas qualidades se configuram como vantajosas comparativamente à utilização de figuras de dimensão 2, na introdução do conceito de número racional. Nessa nova representação, temos: um universo aberto (para além do 1) contra um universo enclausurado em sua própria unidade; um universo relativo contra um universo absoluto; um universo semiótico contra um universo material; um universo ordenado contra um universo não ordenado.

REFERÊNCIAS

ADJIAGE, Robert; PLUVINAGE, François. Un registre géométrique unidimensionnel pour l'expression des rationnels. *Recherches em Didactique des Mathématiques*, França, v. 20, n.1, p. 41-88, 2000.

ALMEIDA, Arthur C.; CORREIA, Francisco J. S. de A. Papiro de Rhind e as frações unitárias. *Revista do Professor de Matemática (RPM),* Rio de Janeiro, n. 35, p. 2-8, 3º quadrimestre, 1997.

ÁVILA, Geraldo. Eudoxo, Dedekind, números reais e ensino de Matemática. R*evista do Professor de Matemática (RPM),* Rio de Janeiro, n. 7, p. 5-10, 2º semestre, 1985.

BARROSO, Juliane Matsubara. *Projeto Pitanguá: Matemática.* São Paulo: Moderna, 2005. 3ª série. Ensino Fundamental.

______. *Projeto Pitanguá: Matemática.* São Paulo: Moderna, 2005. 4ª série. Ensino Fundamental.

BEHR, M. *et al*. Rational Number Concepts. In: LESH, Richard; LANDAU, M. (Ed.). *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes.* New York: Academic Press, 1983. p. 91-125. Disponível em: <http://cehd.umn.edu/rationalnumberproject/83_1.html#end1#end1>. Acesso em: 10 jul. 2008.

BOYER, Carl B. *História da Matemática.* Tradução por Elza F. Gomide. 2. ed. São Paulo: Edgard Blücher Ltda, 2001.

BRASIL. Secretária de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais:* Matemática. Primeiro e Segundo Ciclos do Ensino Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1997.

______. *Parâmetros Curriculares Nacionais:* Matemática. Terceiro e Quarto Ciclos do Ensino Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998.

CARAÇA, Bento de Jesus. *Conceitos fundamentais da matemática*. Lisboa: Sá da Costa, 1951.

CATTO, Gloria Garrido. *Registro de representação e o número racional:* Uma abordagem em livros didáticos. 2000. 152 f. Dissertação (mestrado em Educação Matemática) Pontifícia Universidade Católica, PUC, São Paulo.

CERVO, A. Luiz; BERVIAN, P. Alcino; SILVA, Roberto da. *Metodologia científica.* 6. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2007.

DAMICO, Alecio. *Uma investigação sobre a formação inicial de professores de matemática para o ensino de números racionais no ensino fundamental.* 2007. 313 f. Tese (doutorado em Educação Matemática) Pontifícia Universidade Católica, PUC, São Paulo.

DAMM, Regina Flemming. Registros de representação. In: MACHADO, Silvia D.A. (Org.). *Educação Matemática*: uma introdução. 2. ed. São Paulo: EDUC, 2002, v. 1. p. 135-153.

DUVAL, Raymond. Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. In : *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives.* IREM de Strasbourg, 1993, v. 5. p. 37-65.

______. *Semiosis et pensee humaine* : registres semiotiques et apprentissages intellectuels. Bern: Peter Lang, 1995.

______. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, Silvia D. A. (Org.). *Aprendizagem em Matemática:* Registros de representação semiótica. 2. ed. Campinas, SP: Papirus, 2005. p. 11-33.

FERREIRA, Aurélio B. de H. *Novo dicionário da língua portuguesa.* 2. ed. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1986.

FONSECA, Rogério F. da. *Número:* o conceito a partir de jogos. 2005. 87 f. Dissertação (mestrado em Educação Matemática) Pontifícia Universidade Católica, PUC, São Paulo.

GARBI, Gilberto Geraldo. *A Rainha das Ciências:* um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da matemática. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2006.

GIMENEZ, Joaquim; BAIRRAL, Marcelo. *Frações no currículo do ensino fundamental:* conceituação, jogos e atividades lúdicas. Seropédica, RJ: GEPEM/EDUR, 2005. v. 2.

IFRAH, Georges. *História universal dos algarismos.* Tradução por Alberto Muños e Na B. Katinsky. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1997. v 2.

IGLIORI, Sonia Barbosa Camargo. A noção de “obstáculo epistemológico” e a Educação Matemática. In: MACHADO, Silvia D. A. (Org.). *Educação Matemática*: uma introdução. 2. ed. São Paulo: EDUC, 2002, v. 1. p. 89-113.

______; MARANHÃO, M. Cristina S. A. Registros de representação e números racionais. In: MACHADO, Silvia D. A. (Org.). *Aprendizagem em Matemática*: Registros de representação semiótica. 2. ed. Campinas, SP: Papirus, 2005. p. 57-70.

______; SILVA, Benedito Antônio da. Concepções dos alunos sobre os números reais. In: LACHINI, Jonas; LAUDARES, João Bosco. (Org.). *Educação matemática:* a prática educativa sob o olhar de professores de Cálculo. Belo Horizonte: FUMARC, 2001. p. 39-67.

KIEREN, Thomas E. On the mathematical, cognitive, and instructional foundations of rational numbers. In: LESH, Richard A.; BRADBARD, David A. (Ed.). *Number and measurement:* papers from a research workshop. Columbus, OH: ERIC/SMEAC, 1976. p. 101-144. Disponível em: <http://www.eric.ed.gov/ERICDocs/data/ericdocs2sql/content_storage_01/0000019b/80/32/d8/c9.pdf>. Acesso em: 10 jul. 2008.

______. Personal knowledge of rational numbers: its intuitive and formal development. In: HIEBERT, James; BEHR, Merlyn. *Number concepts and operations in the middle grades.* New Jersey: Erlbaum, 1988. p. 162-181.

______. Rational and fractional numbers: from quotient fields to recursive understanding. In: CARPENTER, T. P.; FENNEMA, E.; ROMBERG, T. A. *Rational numbers:* an integration of research. New Jersey: Erlbaum, 1993. p. 49-81.

LIMA, José M. de Figueiredo. Iniciação ao conceito de fração e o desenvolvimento da conservação de quantidade. In: CARRAHER, Terezinha Nunes. (Org). *Aprender pensando contribuições da psicologia cognitiva para a educação.* 11 ed. Petrópolis: Vozes, 1997. p. 81-126.

LINS, R. Campos; GIMENEZ, Joaquim. *Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI.* 4. ed. Campinas, SP: Papirus, 1997.

LONGEN, Adilson. *Matemática em Movimento.* São Paulo: Editora do Brasil, 1999. 5ª série. Ensino Fundamental.

______. *Matemática em Movimento.* São Paulo: Editora do Brasil, 1999. 6ª série. Ensino Fundamental.

MAGALHÃES, Marcos N; LIMA, Antonio C. de. *Noções de Probabilidade e Estatística.* 6 ed. rev. São Paulo: Edusp, 2005.

NUNES, Terezinha *et al*. *Educação Matemática 1:* números e operações numéricas. São Paulo: Cortez, 2005.

______; BRYANT, Peter. *Crianças fazendo matemática*. Tradução por Sandra Costa. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

______; SCHLIEMANN, Analúcia; CARRAHER, David. *Na vida dez, na escola zero.* 12. ed. São Paulo: Cortez, 2001.

OHLSSON, Stellan. Mathematical meaning and applicational meaning in the semantics of fractions and related concepts. In: HIEBERT, James; BEHR, Merlyn. *Number concepts and operations in the middle grades.* New Jersey: Erlbaum, 1988. p. 53-91.

ROMANATO, Mauro Carlos. *Número Racional:* relações necessárias à sua compreensão. 1997. 158 f. Tese (doutorado em Educação) Faculdade de Educação da Universidade de Campinas, UNICAMP, São Paulo.

SANTOS, Aparecido dos. *O conceito de fração e seus diferentes significados:* um estudo diagnóstico junto a professores que atuam no Ensino Fundamental. 2005. 196 f. Dissertação (mestrado em Educação Matemática) Pontifícia Universidade Católica, PUC, São Paulo.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria de Estado da Educação. *Saresp 2007*: Sistema de Avaliação do Rendimento Escolar do Estado de São Paulo. Disponível em: <http://saresp.edunet.sp.gov.br/2007/>. Acesso em: 11 abr. 2008.

SILVA, Maria J. Ferreira da. *A medida de comprimento e os números fracionários sob o ponto de vista da TAD na formação de professores do Ensino Fundamental.* In: ANPEd, 29, 2006, Caxambu. Disponível em: <http://www.anped.org.br/reunioes/29ra/trabalhos/trabalho/GT19-2390--Int.pdf>. Acesso em: 10 jul. 2008.

TEIXEIRA, Aléxis M. *O professor, o ensino de fração e o livro didático:* um estudo investigativo. 2008. 194 f. Dissertação (mestrado profissional em Ensino de Matemática) Pontifícia Universidade Católica, PUC, São Paulo.

ANEXO A

SARESP 2007

Descrição do sistema

O Saresp, Sistema de Avaliação do Rendimento Escolar do Estado de São Paulo, é uma avaliação externa que ocorre ao final do ano letivo e completou, em 2007, a sua 10ª edição. É promovido pela Secretaria de Estado da Educação de São Paulo - SEE/SP -, com a finalidade de avaliar as competências e habilidades desenvolvidas pelos alunos ao longo do Ensino Fundamental (2ª, 4ª, 6ª e 8ª séries) e ao final do Ensino Médio (3ª série).

Apresentamos, a seguir, algumas questões do Saresp 2007 pertinentes ao nosso tema bem como o porcentual de acerto das mesmas.

Prova da 4ª série

[1] Rafa tem 1,25 metros de altura e Carol 1,43 metros. A diferença entre as alturas é de:

(A) 0,28 m **(B) 0,18 m** (C) 0,15 m (D) 0,12 m

O Saresp classifica essa questão como verificadora da habilidade de resolver situação-problema que envolva a adição e/ou subtração de números racionais na forma decimal. O acerto foi de 66%.

[2] Em um concurso o melhor goleiro foi eleito com 34 de um total de 85 votos. A fração que representa esta votação é:

(A) $\frac{34}{119}$ (B) $\frac{85}{119}$ **(C)** $\boldsymbol{\frac{34}{85}}$ (D) $\frac{85}{34}$

O Saresp classifica essa questão como verificadora da habilidade de utilizar representações fracionárias em situações que envolvam a relação parte-todo. O acerto foi de 62%.

[3] Compare os valores:

12,31 11,89 12,32 12,21

Escrevendo-os na ordem crescente, temos:

(A) 11,89 12,31 12,32 12,21

(B) 11,89 12,21 12,31 12,32

(C) 12,21 12,31 12,32 11,89

(D) 12,32 12,31 12,21 11,89

O Saresp classifica essa questão como verificadora da habilidade de comparar e ordenar escritas decimais de números racionais. O acerto foi de 49%.

[4] O número 0,27 corresponde à fração:

(A) $\frac{2}{7}$ (B) $\frac{20}{100}$ (C) $\frac{7}{2}$ **(D)** $\boldsymbol{\frac{27}{100}}$

O Saresp classifica essa questão como verificadora da habilidade de relacionar representações fracionárias e decimais de um mesmo número racional. O acerto foi de 40%.

[5] Caio gastou cinco reais e quatro centavos em uma loja. Esse valor é representado por:

(A) R$ 5,40 **(B) R$ 5,04** (C) R$ 5,004 D)R$ 504,00

O Saresp classifica essa questão como verificadora da habilidade de resolver situação-problema utilizando a escrita decimal de células e moedas do sistema monetário brasileiro. O acerto foi de 80%.

Prova da 6ª série

[6] Robson utilizou 3/4 de 1 litro de tinta para pintar a sala de sua casa. Sabendo que o restante da casa equivale a 3 vezes a área pintada da sala, quantos litros de tinta ele precisará para pintar os outros cômodos?

(A) 2 e $\frac{1}{4}$ litros. (B) 3 e $\frac{3}{4}$ litros. (C) $\frac{9}{12}$ litros. (D) $\frac{12}{4}$ litros.

O Saresp classifica essa questão como verificadora da habilidade de resolver situação-problema, compreendendo diferentes significados das operações, envolvendo números racionais. O acerto foi de 10%.

[7] Na feira, um queijo foi dividido em 4 partes iguais. A quarta parte do queijo custa R$ 2,00. Quanto se pagaria por metade desse queijo?

(A) R4 3,00 **(B) R$ 4,00** (C) R$ 6,00 (D) R4 8,00

O Saresp classifica essa questão como verificadora da habilidade de resolver situação-problema, compreendendo diferentes significados das operações, envolvendo números inteiros. O acerto foi de 63%.

Prova da 8ª série

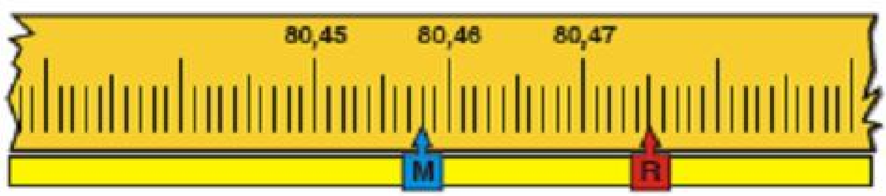
[8] Antonio gasta do seu salário:

1/5 para pagar a mensalidade da sua escola, 1/10 para condução e 1/2 para despesas de casa. A porcentagem que sobra do seu salário é

(A) 8% (B) 10% **(C) 20%** (D) 22%

O Saresp classifica essa questão como verificadora da habilidade de resolver situação-problema, compreendendo diferentes significados das operações, envolvendo números racionais. O acerto foi de 39%.

[9] Observe a reta numérica



A letra M está assinalando o número 80,458. Qual é o número que a letra R está marcando?

(A) 80,469

(B) 80,466

(C) **80,475**

(D) 80,476

O Saresp classifica essa questão como verificadora da habilidade de Identificar a localização de números racionais na reta numérica. O acerto foi de 57%.

[10] Após corrigir as provas de 30 alunos da mesma classe de 8º série, a professora de Matemática anotou, em ordem crescente, as notas a eles atribuídas:

1,0 -	2,0 -	2,5 -	3,0 -	3,0 -	4,0 -	4,0 -	4,0 -	4,0 -	5,0
5,0 -	5,0 -	5,5 -	5,5 -	6,0 -	6,0 -	6,0 -	6,0 -	6,0 -	6,5
6,5 -	7,0 -	7,5 -	7,5 -	7,5 -	8,0 -	8,0 -	8,5 -	9,0 -	9,0

Se a professora sortear uma dessas 30 notas, a probabilidade de que a nota a ela atribuída seja maior do que 6,5 é

(A) 3/30 **(B) 9/30** (C) 18/30 (D) 24/30

O Saresp classifica essa questão como verificadora da habilidade de Indicar a probabilidade de um evento equiprovável de uma razão. O acerto foi de 48%.

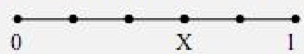
ANEXOS B

A RETA GRADUADA E O SUBCONSTRUTO MEDIDA

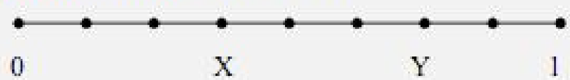
A medida de comprimento e os números fracionários sob o ponto de vista da Teoria Antropológica do Didático na formação de professores do Ensino Fundamental.

2º tipo: determinar medidas em segmentos divididos em partes iguais.

Tarefa 1: *Qual a distância entre o zero e o X?*



Tarefa 2: *Qual a distância entre X e Y?*



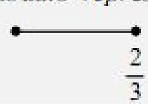
3º tipo: Determinar medidas em segmentos não divididos em partes de mesma medida.

Tarefa 1: *Qual a distância entre 0 e X?*

Tarefa 2: *Qual a distância entre X e Y?*

4º tipo: reconstituição da unidade

Tarefa: *Se o desenho abaixo representa 2/3 da unidade, qual é a unidade?*



Baixar livros de Literatura
Baixar livros de Literatura de Cordel
Baixar livros de Literatura Infantil
Baixar livros de Matemática
Baixar livros de Medicina
Baixar livros de Medicina Veterinária
Baixar livros de Meio Ambiente
Baixar livros de Meteorologia
Baixar Monografias e TCC
Baixar livros Multidisciplinar
Baixar livros de Música
Baixar livros de Psicologia
Baixar livros de Química
Baixar livros de Saúde Coletiva
Baixar livros de Serviço Social
Baixar livros de Sociologia
Baixar livros de Teologia
Baixar livros de Trabalho
Baixar livros de Turismo