

THIAGO ALVES DE QUEIROZ

**PROJETO ÓTIMO DE COLUNAS SEMI-
ENTERRADAS**



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA**

2008

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

THIAGO ALVES DE QUEIROZ

PROJETO ÓTIMO DE COLUNAS SEMI-ENTERRADAS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para obtenção do título de **MESTRE EM ENGENHARIA MECÂNICA**.

Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos e Vibrações.

Orientador: Prof.^a Dra. Sezimária de Fátima Pereira Saramago

UBERLÂNDIA – MG

2008

Aos meus pais, Orlando e Charlene,
às minhas irmãs, Joyce e Monique
e, o grande amor da minha vida, Layane.

AGRADECIMENTOS

Ao pai celestial, *nosso* senhor *Deus*, por tudo o que tem me dado, tanto coisas boas como as ruins. Tudo é uma lição. “...o choro pode durar uma noite, mas a alegria vem pela manhã.”

A meus pais, Orlando e Charlene, que mesmo longe, sempre estão por perto, dando conselhos e cuidados, que só os pais podem fornecer.

Às minhas irmãs, Joyce e Monique, pelo apoio dado para que eu sempre siga a frente com meus sonhos.

À minha namorada Layane, pelo constante amor, companheirismo e afeto em todas as horas. “*A promessa vai ser realizada*”.

A minha Orientadora, querida Prof.^a Sezimária F. P. Saramago, por todos os seus ensinamentos, conselhos, apoio, dedicação e principalmente pela amizade demonstrada.

Ao meu amigo, Donald Santee, que acreditou na continuidade do trabalho e, que de alguma forma participou na elaboração deste, seja com idéias, ou até mesmo, nas horas de *conversas paralelas*.

A todos os meus familiares que, de certo modo, acreditam na minha vitória.

À Universidade Federal de Uberlândia e à Faculdade de Engenharia Mecânica, mais especificadamente, o Programa de Pós-Graduação, pela oportunidade de participar deste renomado curso.

Aos amigos (alunos, professores e técnicos) da FEMEC que me ajudaram nesta jornada.

A todos aqueles que de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho.

Ao CNPq – Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, pelo apoio financeiro oferecido.

QUEIROZ, T. A. Projeto Ótimo de Colunas Semi-Enterradas. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia – MG, 2008.

Resumo

Colunas semi-enterradas são elementos estruturais com grande aplicação no dia-a-dia, principalmente na fundação/estrutura de plataformas, pontes, construções civis, torres, etc. Estes elementos possuem comportamento instável, exigindo o desenvolvimento de modelos teóricos confiáveis para o seu projeto estrutural. O objetivo deste trabalho é o projeto ótimo de colunas semi-enterradas, cujas variáveis de decisão são os parâmetros dimensionais da coluna. Com esta finalidade é escrito um problema de otimização multi-objetivo que busca maximizar a distâncias entre as três primeiras frequências naturais, ao mesmo tempo que considera outra função objetivo, conflitante, relacionada com a minimização do volume da coluna. Este problema de otimização é sujeito a restrições que limitam a altura da fundação e verificam se a carga crítica de Euler foi obedecida. O modelo dinâmico desenvolvido para a coluna utiliza a formulação de Lagrange, para descrever o comportamento em um solo não-linear. Para resolver o problema de otimização, são aplicados dois métodos numéricos que trabalham com populações de indivíduos e baseiam-se no processo de evolução natural: o método da Evolução Diferencial e o Algoritmo Genético. Os resultados obtidos são comparados e a performance dos métodos analisada através dos seguintes critérios: esforço computacional, esforço algorítmico e tempo de execução. Várias simulações numéricas são apresentadas, comprovando a eficácia da metodologia desenvolvida. O projeto ótimo da coluna semi-enterrada é calculado, resultando em uma solução segura em termos de prevenção das oscilações dinâmicas e econômica em termos de custo material, obedecendo às condições estabelecidas pelo projetista.

Palavras chave: Colunas Semi-Enterradas, Frequências Naturais, Otimização, Evolução Diferencial, Algoritmo Genético.

QUEIROZ, T. A. Optimal Project of Semi-Embedded Columns. Master's Dissertation, Federal University of Uberlândia, Uberlândia – MG, 2008.

Abstract

Semi-embedded columns are structural elements with many day-a-day practical applications, mainly in foundation/structures of platforms, bridges, civil constructions, towers, etc. These elements have unstable behavior, requiring the development of reliable theoretical models for its structural project. The objective of this work is the optimal project of semi-embedded columns, whose decision variables are the dimensional parameters of the column. For this purpose is writing a multi-objective optimization problem that seeks to maximize the distance among the first three natural frequencies, at the same time is considering other conflicting objective function, related to minimize the volume of the column. This optimization problem is subject to the constraints that limit the height of the foundation and verify if the critical load of Euler was obeyed. The dynamic model developed for the column uses the formulation of Lagrange to describe the behavior in a nonlinear soil. To solve the optimization problem two numerical methods are applied. These methods work with populations and are based on the natural process of evolution: the Differential Evolution method and Genetic Algorithm. The obtained results are compared and the methods performance analyzed by the following criteria: computational effort, algorithmic effort and execution time. Several numerical simulations checking the effectiveness of the developed methodology are presented. The optimal project of semi-embedded columns is calculated, resulting in a safe solution in terms of prevention of the dynamic oscillations and economic in terms of material cost, according to the conditions set by the designer.

Keywords: Semi-Embedded Columns, Natural Frequencies, Optimization, Genetic Algorithm, Differential Evolution.

LISTA DE FIGURAS

Figura	Descrição	Página
Figura 2.1.	Modelo da coluna semi-enterrada.	8
Figura 2.2.	Linha neutra da coluna como sendo uma linha reta após deformação.	10
Figura 2.3.	Representação esquemática da interação solo-coluna.	15
Figura 2.4.	Resultado da curva carga-deflexão lateral para diferentes parâmetros de forma no modelo modificado de Ramberg-Osgood.	16
Figura 3.1.	Condições de contorno para diferentes tipos de apoio na coluna.	22
Figura 4.1.	Problema de otimização bidimensional e restrito.	42
Figura 4.2.	Exemplo de mínimo local e global.	43
Figura 4.3.	Classificação dos principais métodos de otimização (OLIVEIRA, 2006).	44
Figura 4.4.	Exemplo de cruzamento por um único ponto.	52
Figura 4.5.	Exemplo de cruzamento uniforme.	53
Figura 4.6.	Exemplo de mutação de ponto único.	54
Figura 4.7.	Funcionamento iterativo do Algoritmo Genético.	55
Figura 4.8.	Criação do vetor doador $V^{(q+1)}$.	56
Figura 4.9.	Operação de cruzamento binomial.	57
Figura 4.10.	Operação de cruzamento exponencial.	57
Figura 5.1.	Representação em Ansys® da coluna semi-enterrada sem carga aplicada.	62
Figura 5.2.	Diferentes tipos de secção transversal: (a) circular cheia, (b) tubular, (c) retangular, (d) hexagonal e (e) perfil em I.	68

LISTA DE TABELAS

Figura	Descrição	Página
Tabela 5.1.	Freqüências resultantes do modelo analítico e numérico para o primeiro caso.	63
Tabela 5.2.	Freqüências resultantes do modelo analítico e numérico para o segundo caso.	64
Tabela 5.3.	Solução ideal para a coluna cilíndrica circular cheia.	69
Tabela 5.4.	Resultados obtidos para a coluna cilíndrica circular cheia.	69
Tabela 5.5.	Valores das freqüências e funções objetivo para a coluna cilíndrica circular cheia.	69
Tabela 5.6.	Solução ideal para a coluna cilíndrica tubular.	70
Tabela 5.7.	Resultados obtidos para a coluna cilíndrica tubular.	70
Tabela 5.8.	Valores das freqüências e funções objetivos para a coluna cilíndrica tubular.	71
Tabela 5.9.	Solução ideal para a coluna retangular.	71
Tabela 5.10.	Resultados obtidos para a coluna retangular.	72
Tabela 5.11.	Valores das freqüências e funções objetivo para a coluna retangular.	72
Tabela 5.12.	Solução ideal para a coluna hexagonal.	73
Tabela 5.13.	Resultados obtidos para a coluna hexagonal.	73
Tabela 5.14.	Valores das freqüências e funções objetivo para a coluna hexagonal.	73
Tabela 5.15.	Solução ideal para a coluna perfil em I.	74
Tabela 5.16.	Resultados obtidos para a coluna perfil em I.	74
Tabela 5.17.	Valores das freqüências e funções objetivo para a coluna perfil em I.	75
Tabela 5.18.	Solução ideal para a coluna com comprimento variável.	76
Tabela 5.19.	Resultados obtidos para a coluna com comprimento variável.	76
Tabela 5.20.	Valores das freqüências e funções objetivo para a coluna com comprimento variável.	77
Tabela 5.21.	Solução ideal para a coluna com comprimento e secção variável.	77
Tabela 5.22.	Resultados obtidos para a coluna com comprimento e secção	78

	variável.	
Tabela 5.23.	Valores das freqüências e funções objetivo para a coluna com comprimento e secção variável.	78
Tabela 5.24.	Solução ideal para a coluna com variação na altura da fundação elástica.	79
Tabela 5.25.	Resultados obtidos para a coluna com altura da fundação elástica variável.	79
Tabela 5.26.	Valores das freqüências e funções objetivo para a coluna com altura da fundação elástica variável.	79
Tabela 5.27.	Solução ideal para o problema definido na Eq. (5.13), para $Eti=3,6 MPa$.	80
Tabela 5.28.	Resultados obtidos para o problema definido na Eq. (5.13), para $Eti=3,6 MPa$.	81
Tabela 5.29.	Valores das freqüências e funções objetivo para o problema definido em Eq. (5.13), para $Eti=3,6 MPa$.	81
Tabela 5.30.	Solução ideal para o problema definido na Eq. (5.13), para $Eti=6,3 MPa$.	81
Tabela 5.31.	Resultados obtidos para o problema definido na Eq. (5.13), para $Eti=6,3 MPa$.	82
Tabela 5.32.	Valores das freqüências e funções objetivo para o problema definido em Eq. (5.14).	82
Tabela 5.33.	Solução ideal para o problema definido na Eq. (5.19), para $Eti=3,6 MPa$ e $P=250 KN$.	85
Tabela 5.34.	Resultados obtidos para o problema definido na Eq. (5.19), para $Eti=3,6 MPa$ e $P=250 KN$.	86
Tabela 5.35.	Valores das freqüências e funções objetivo para o problema da Eq. (5.19), para $Eti=3,6 MPa$ e $P=250 KN$.	86
Tabela 5.36.	Restrições obtidas para o problema da Eq. (5.19), para $Eti=3,6 MPa$ e $P=250 KN$.	87
Tabela 5.37.	Solução ideal para o problema definido na Eq. (5.19), para $Eti=6,3 MPa$ e $P=500 KN$.	87
Tabela 5.38.	Resultados obtidos para o problema da Eq. (5.19), para $Eti=6,3 MPa$ e $P=500 KN$.	88
Tabela 5.39.	Valores das freqüências e funções objetivo para o problema da Eq. (5.19), para $Eti=6,3 MPa$ e $P=500 KN$.	88
Tabela 5.40.	Restrições obtidas para o problema da Eq. (5.19), para $Eti=6,3$	89

MPa e $P=500\text{ KN}$.

LISTA DE SÍMBOLOS

Letras Latinas

a_j	j-ésima constante multiplicativa do método de Rayleigh-Ritz.
a_h	Lado de um hexágono.
a_r, b_r	Lados de um retângulo.
A_0	Amplitude do carregamento harmônico.
A_d	Função de amortecimento para a parte desenterrada da coluna.
A_e	Função de amortecimento para a parte enterrada da coluna.
B_p	Comprimento do perfil I.
ds	Comprimento infinitesimal do elemento curvo.
d_t	Diâmetro interno de um tubo.
dx	Elemento linear na direção do eixo axial.
D_c	Diâmetro de um círculo.
D_t	Diâmetro externo de um tubo.
E	Módulo da elasticidade ou módulo de Young.
E_{ti}	Módulo de elasticidade tangente inicial.
E_{tf}	Módulo de elasticidade tangente final.
$f(X)$	Função objetivo do problema de otimização.
$f_j(X)$	j-ésima função objetivo de um problema multi-objetivo.
$fn_t(x)$	Função de aproximação do método de Rayleigh.
$f'_{n_t}(x)$	Derivada primeira de $fn_t(x)$ em relação a x , isto é, $\frac{d}{dx}(f_{n_t}(x))$.
F	Força aplicada transversalmente na coluna.
F_d	Função de dissipação de Rayleigh.
F_{fr}	Força restauradora da fundação elástica.
F_p	Fator de perturbação dos indivíduos da população.
F_{wp}	Trabalho realizado por uma força externa periódica.
f_j^0	j-ésima solução ideal.
$g_i(X)$	i-ésima restrição de desigualdade do problema de otimização.

$h_j(X)$	j-ésima restrição de igualdade do problema de otimização.
h_p	distância interna entre as abas do perfil I
H	Altura da fundação.
H_p	Largura do perfil I.
I	Momento de inércia da secção transversal.
k_{ij}	Termo da i-ésima linha e j-ésima coluna da matriz de rigidez.
k_j	Parâmetro que define a j-ésima forma dos modos de vibração.
k_p	Fator de penalidade na função pseudo-objetivo.
[K]	Matriz de rigidez.
L	Comprimento total da coluna.
L_g	Lagrangeano.
L_y	Largura ou diâmetro da coluna (depende do tipo de secção transversal).
m	Massa por unidade de comprimento da coluna.
m_i	Tamanho do i-ésimo gene do Algoritmo Genético.
[M]	Matriz de massa por unidade de comprimento da coluna.
n_c	Número total de coordenadas generalizadas.
n_p	Parâmetro que define o tipo de solo.
n_t	Número de termos da série de Rayleigh.
p_c	Posição de cruzamento na cadeia de bits de cada cromossomo.
p_j	j-ésimo coeficiente de ponderação da função multi-objetivo.
P	Carga axial aplicada na extremidade desenterrada da coluna.
P_c	Probabilidade de cruzamento.
P^c_1	Primeira carga crítica de Euler.
$Pf(X)$	Função de penalidade na função pseudo-objetivo.
P_u	Resistência última do solo.
prec _s	Precisão requerida pelo Algoritmo Genético.
q_k	Coordenadas generalizadas.
\dot{q}_k	Derivada primeira das coordenadas generalizadas em relação ao tempo.
Q_k	Forças generalizadas.
$rand_i$	i-ésimo número gerado aleatoriamente.

$r_j=r_j(t)$	j-ésima função r em relação ao tempo.
\bar{r}_j	j-ésima constante da solução de $r_j(t)$.
$\{\bar{r}_j\}$	Vetor com as constantes \bar{r}_j da solução de $r_j(t)$.
\bar{r}_j^{norm}	j-ésimo elemento do vetor $\{\bar{r}_j\}$ normalizado.
R^*	Conjunto que define o espaço de busca do problema de otimização.
$\frac{1}{R_0}$	Curvatura do eixo da coluna indeformada.
$\frac{1}{R_f}$	Curvatura do eixo da coluna deformada.
S	Resistência generalizada do solo.
t	Tempo.
T	Energia cinética.
u	Deslocamento axial da coluna.
U	Energia interna de deformação.
U_{fd}	Energia interna de deformação da fundação elástica.
U_{pt}	Energia potencial total.
$U^{(q+1)}$	Vetor resultante ou vetor experimental da Evolução Diferencial.
V	Energia potencial.
V_p	Potencial das cargas externas.
$V^{(q+1)}$	Vetor modificado ou vetor doador da Evolução Diferencial.
x	Coordenada axial.
x_j	j-ésima variável de projeto.
$x_{n_v}^{inf}$	Limite inferior das variáveis de projeto.
$x_{n_v}^{sup}$	Limite superior das variáveis de projeto.
X	Vetor das variáveis de projeto.
X_{best}	Melhor indivíduo da população da Evolução Diferencial.
$X_{s,\alpha,\beta,\gamma,p,\delta}$	Vetores escolhidos aleatoriamente na população para gerar um novo indivíduo da Evolução Diferencial.
w =	Deslocamento lateral ou deflexão lateral da coluna em função de x e t.
$w(x, t)$	
$\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)$	Velocidade das deflexões laterais da coluna em função do tempo.

y_g Deslocamento generalizado da coluna.

Letras Gregas

β_d Parâmetro de amortecimento da parte desenterrada da coluna.
 β_e Parâmetro de amortecimento da parte enterrada da coluna.
 Δ Encurtamento total da coluna.
 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ Valores admissíveis para a convergência dos métodos de otimização.
 θ Ângulo entre o eixo da coluna deformada e o eixo x .
 λ Freqüência natural ao quadrado, i.e., ω^2 .
 λ_j j -ésima raiz da equação de freqüência.
 μ_j j -ésimo coeficiente da equação de freqüência.
 ξ Parâmetro adimensional da coordenada axial.
 $\varphi(X)$ Função pseudo-objetivo.
 χ Variação da curvatura do eixo da coluna.
 Φ_j j -ésima função constituinte da função de aproximação do método de Rayleigh-Ritz.
 ω Freqüência natural da coluna.
 ω_j j -ésima freqüência natural da coluna.
 Ω Freqüência da excitação externa.

Abreviaturas

ED Evolução Diferencial.
 AG Algoritmo Genético.

SUMÁRIO

Resumo	ix
Abstract	xi
LISTA DE FIGURAS	xiii
LISTA DE TABELAS	xv
LISTA DE SÍMBOLOS	xix
CAPÍTULO I – INTRODUÇÃO	1
1.1. Organização do Texto	4
CAPÍTULO II – MODELAGEM MATEMÁTICA DA COLUNA SEMI-ENTERRADA.	7
2.1. Apresentação do Modelo	8
2.2. Energia Potencial Total (U_{pt})	10
2.3. Energia Cinética (T)	13
2.4. Modelo do Solo e a Fundação Elástica (U_{fd})	14
2.5. Forças Não-Conservativas	17
2.6. Função Lagrangeana para a Coluna	18
CAPÍTULO III – MODELO DINÂMICO DA COLUNA SEMI-ENTERRADA	20
3.1. Obtenção da Função de Deflexão Lateral	20
3.2. Frequências Naturais e Modos de Vibração	25
3.3. Equação de Movimento da Coluna	35
CAPÍTULO IV – PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO – CONCEITOS IMPORTANTES .	40
4.1. Formulação Geral do Problema de Otimização	40
4.1.1. Classificação dos métodos de otimização	44

4.1.2. Critérios de convergência	46
4.1.3. Funções de penalidade para problemas restritos	47
4.2. Algoritmo Genético	48
4.2.1. Codificação das variáveis do problema.....	49
4.2.2. Criação dos indivíduos iniciais: População inicial	50
4.2.3. Seleção	50
4.2.4. Cruzamento	52
4.2.5. Mutação	53
4.3. Evolução Diferencial	55
4.3.1. Mutação	55
4.3.2. Cruzamento	56
4.3.3. Seleção	58
4.3.4. Estratégias da Evolução Diferencial	58
 CAPÍTULO V – SIMULAÇÕES NUMÉRICAS – APLICAÇÕES	61
5.1. Comparação do Modelo Analítico com um Modelo Numérico	61
5.2. Considerações Gerais	65
5.3. Problema de Otimização Irrestrito	66
5.3.1. Influência do tipo de secção transversal no momento de inércia de área (I)	67
5.3.2. Influência do comprimento da coluna (L).....	76
5.3.3. Influência do comprimento da coluna e do parâmetro da secção transversal (L, a_n)	77
5.3.4. Influência da altura da fundação (H)	78
5.3.5. Influência da altura da fundação, do comprimento total e da secção transversal da coluna (H, L, a_n)	80
5.4 Problema de Otimização com Restrições	83

CAPÍTULO VI – CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS	91
---	-----------

CAPÍTULO VII – REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	95
--	-----------

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

Equações diferenciais vêm sendo utilizadas, ao longo dos anos, para representar a modelagem de diversos problemas do mundo real. Estes modelos podem descrever uma dinâmica populacional, reações químicas, disseminação de uma doença, circuitos elétricos, movimento de veículos, etc.

Uma importante classe de problemas está relacionada com a teoria de oscilações, isto é, a solução de um dado sistema possui característica oscilatória e descreve seu comportamento dinâmico. Além do caráter oscilatório, pode ser influenciado por fenômenos não-lineares, como forças externas que atuam diretamente no modelo.

Um problema que tem merecido atenção envolve o projeto ótimo de colunas semi-enterradas. Colunas semi-enterradas aparecem em diversas aplicações práticas, como na fundação/estrutura de plataformas de petróleo “off-shore”, pontes, torres, chaminés e várias construções civis.

Ao tratar de estudos e modelos matemáticos para colunas semi-enterradas, Andrade (1993) estudou a estabilidade de colunas em contato com uma base elástica utilizando o método de Ritz junto com elementos finitos.

Sampaio (2004) desenvolveu o equacionamento para um modelo linear e não-linear de coluna semi-enterrada. Assim, fez uma análise do comportamento dinâmico mediante fórmulas exatas para as frequências naturais e modos de vibração, caso linear, estendendo a análise para o modelo não-linear, baseado na não-linearidade presente na geometria da coluna. Ambas as análises são feitas para vibrações livres e forçadas. A interação solo-coluna seguiu o modelo proposto por Winkler que considera o solo linear e inclui dentro do equacionamento da coluna a interação solo-coluna.

Serebrenick (2004) seguiu a mesma formulação de Sampaio (2004), porém com o intuito de estudar colunas semi-enterradas esbeltas e submetidas a esforços axiais de compressão. Em sua análise linear, verificou a influência dos diferentes tipos de apoio e

fundação nas cargas críticas e modos críticos. Na análise do modelo não-linear, obteve o caminho pós-crítico da coluna mediante o método de Rayleigh-Ritz, comparando os resultados com um modelo de elementos finitos. O solo foi modelado, respectivamente, pelo modelo de Winkler linear e não-linear.

Cabral, Sieira e Silva (2006), também fizeram um estudo paramétrico da resposta dinâmica de colunas semi-enterradas, porém utilizando um modelo de elementos finitos. Para o solo adotou o modelo linear de Winkler e, os resultados, comparados com Sampaio (2004), mostram a precisão obtida através do modelo numérico.

O modelo de Winkler é, geralmente, utilizado para representar o solo, mais precisamente, a interação solo-coluna. Como descrito em Pyke (1979), Sampaio (2004), Serebrenick (2004), Jaradat (2005), Thanasattayawibul (2006), este é um modelo simples, que pode ser integrado diretamente na equação diferencial da coluna, capaz de fornecer bons resultados.

Por outro lado, através de resultados experimentais, Greiman et al., (1987) diz que grande parte dos solos apresenta uma não linearidade do tipo *softening* (com enfraquecimento) e podem ser modelados através de parábolas, hipérbolas ou o modelo de Ramberg-Osgood, ou, mais precisamente, modelo modificado de Ramberg-Osgood. Em linhas gerais, este modelo representa a interação solo-coluna como não-linear, dada por curva carga-deflexão, que simula um conjunto de molas paralelas, isto é, não conectadas, que são não-lineares (JARADAT, 2005).

Jaradat (2005) e Thanasattayawibul (2006) estudaram a interação, através de um modelo de elementos finitos, de colunas de pontes com o solo, representado pelo modelo Modificado de Ramberg-Osgood.

Santee e Gonçalves (2006) trataram de uma viga submetida a carregamento harmônico e sobre uma base elástica não-linear, no caso, o solo dado pelo modelo modificado de Ramberg-Osgood. Fez-se um estudo paramétrico do carregamento harmônico suportado mediante a interação solo-coluna, onde os resultados mostraram que a viga passa a ter sua capacidade de carga afetada, tornando-se sensível a imperfeições.

Queiroz e Santee (2006) iniciaram um estudo sobre colunas semi-enterradas para um modelo de solo do tipo com enfraquecimento, dado pelo modelo modificado de Ramberg-Osgood. A modelagem matemática seguiu o princípio de Hamilton, assim como em Sampaio (2004) e Serebrenick (2004), diferenciando-se por considerar apenas o primeiro modo de vibração. Ao obter uma equação de movimento não-linear do elemento, foram apresentadas soluções no tempo através de métodos numéricos e de perturbação.

Apesar dos trabalhos já desenvolvidos com respeito a colunas semi-enterradas, ainda não existe uma base de dados contundente sobre o assunto, principalmente em se tratando

de modelos analíticos, devido à alta complexidade envolvida na formulação. Como exposto anteriormente, um uso constante deste elemento no dia a dia, justifica a continuidade de estudos sobre o tema, permitindo obter um projeto de acordo com as reais necessidades do usuário.

O objetivo desta pesquisa é desenvolver uma metodologia para o projeto de ótimo de colunas semi-enterradas. Com esta finalidade, escreve-se uma função multi-objetivo visando maximizar a primeira frequência natural, bem como distanciar entre si as três primeiras frequências naturais. Além disso, restrições foram consideradas visando obter um projeto seguro e economicamente viável.

A partir disto, inicialmente, formulou-se a modelagem matemática de uma coluna semi-enterrada considerando o solo dado pelo modelo modificado de Ramberg-Osgood. Assim, busca-se, além de uma abordagem totalmente analítica, do ponto de vista de formulação do problema, otimizar o elemento, tanto em termos de segurança, quanto em custo material.

Diferentemente dos trabalhos discutidos, a modelagem foi desenvolvida baseada nas equações de Lagrange e, então, obtidos os funcionais de energia e as equações de movimento. Neste estudo, o objetivo não foi a obtenção da equação diferencial parcial que descreve a deflexão do elemento, para depois resolvê-la e escrever as expressões para as frequências naturais e modos de vibração. Até porque, na metodologia acima, a equação deve ser linearizada, para permitir a aplicação do método de separação de variáveis e a obtenção da solução do problema.

Considerando que o problema é não-linear em sua formulação e o fato de que foi estabelecido considerar apenas com as três primeiras frequências naturais no projeto ótimo, adotou-se a utilização de uma aproximação dada pelo método de Rayleigh-Ritz em substituição a função de deflexão lateral. Por conseguinte, o modelo resulta em um problema de autovalores e autovetores cujos autovalores são as frequências de interesse.

No trabalho proposto por Sampaio (2004) e Serebrenick (2004), é sugerido modelar o problema de forma individual, ou seja, considerar a parte enterrada e a parte desenterrada de forma separada. Porém, esta técnica exige que, além das condições de contorno, sejam consideradas condições de continuidade que devem ser satisfeitas. Nesta pesquisa, de forma diferente, considera-se uma única função contínua para representar a parte enterrada e desenterrada da coluna, ou seja, já satisfazendo as condições de continuidade. Vale ressaltar que, o modelo analítico desenvolvido é comparado a um modelo de elementos finitos com o intuito de validar a metodologia desenvolvida.

Ao obter a formulação para as frequências naturais do modelo em estudo, torna-se possível escrever o problema de otimização. No projeto ótimo da coluna, torna-se

imprescindível que a coluna tenha o menor volume possível e respeite as restrições relacionadas ao projeto. Ao mesmo tempo em que, o distanciamento das frequências naturais fornece uma estrutura segura e estável, a minimização do seu volume garante menor custo material. Além do que, a coluna deve satisfazer critérios relacionados à prevenção de oscilações que surgem tanto na fundação quanto na própria coluna que interage com a fundação.

Nos dias atuais, evidencia-se a escassez de recursos bem como o encarecimento dos mesmos, o que justifica a necessidade de projetar/desenvolver de maneira otimizada. Deste modo, existem técnicas de otimização que, selecionadas de acordo com o problema, ajudam na resolução destes buscando obter o ótimo do projeto do sistema em desenvolvimento.

A otimização pode ser aplicada em várias áreas do conhecimento e sua utilização nas últimas décadas tem crescido consideravelmente. Existem muitos métodos de otimização, sendo que a escolha de qual método utilizar depende de uma série de características do problema a ser otimizado, principalmente do comportamento da função que o representa.

Neste estudo, dois métodos naturais de otimização, baseados em população, são apresentados e discutidos, a saber: Algoritmo Genético e a Evolução Diferencial.

Como o próprio nome sugere, o Algoritmo Genético (HOLLAND, 1975) é um método baseado no princípio de seleção natural proposto por Charles Darwin em 1859. Em linhas gerais, os indivíduos mais aptos irão se propagar nas gerações subseqüentes por meios de operações de seleção, cruzamentos e mutação, enquanto os mais fracos tendem a desaparecer. O método da Evolução Diferencial, criado por Storn & Price (1995), baseia-se em gerar novos indivíduos, denotados vetores, baseado na diferença vetorial ponderada entre dois indivíduos aleatórios da população. Assim como no Algoritmo Genético, também utiliza os operadores de mutação, cruzamento e seleção para gerar novas populações.

Várias simulações numéricas foram executadas, permitindo verificar que a metodologia desenvolvida permite obter um elemento estrutural que respeite as condições de projeto, sendo seguro, estável, barato, e ao mesmo tempo “ótimo” sob o ponto de vista da engenharia. Isto significa que muitas vezes não será possível garantir que a solução represente o ótimo global da função objetivo, mas representará uma solução melhor para o projetista.

1.1. Organização do Texto

Esta dissertação está dividida em 6 capítulos descritos brevemente adiante.

Neste primeiro capítulo é exposta uma introdução a respeito do trabalho desenvolvido, abordando fatores de motivação e relevância para estudo do tema abordado.

No capítulo 2 é descrito o modelo matemático de uma coluna semi-enterrada em um solo não-linear do tipo com enfraquecimento. Partir-se-á da representação do modelo físico para a determinação do Lagrangeano.

No capítulo 3 determinam-se as frequências naturais e os respectivos modos de vibração associadas a elas e, em seguida, desenvolve-se parte da equação que descreve o movimento da coluna semi-enterrada.

O capítulo 4 aborda a formulação geral do problema de otimização, considerando conceitos importantes sobre o tema. Destaca-se estratégias utilizadas para resolver problemas multi-objetivos e tratar de problemas restritos, além de apresentar uma revisão sobre dois métodos naturais, baseados em população, mais precisamente, o Algoritmo Genético e a Evolução Diferencial.

No capítulo 5, utiliza-se o modelo de elementos finitos para validar o modelo dinâmico formulado por meio da comparação de alguns resultados. Além disso, realizam-se as simulações envolvendo a aplicação dos métodos de otimização para a obtenção do projeto ótimo da coluna semi-enterrada. Diversos testes são executados para diferentes parâmetros da coluna. As soluções são apresentadas e discutidas.

Finalmente, o capítulo 6 apresenta as principais conclusões obtidas a partir do trabalho efetuado e sugere alguns estudos para a continuidade desta pesquisa.

CAPÍTULO II

MODELAGEM MATEMÁTICA DA COLUNA SEMI-ENTERRADA

Colunas são elementos críticos em construções civis, seu estudo merece de minuciosa atenção e os critérios para o seu dimensionamento devem ser bem estabelecidos para garantir a segurança da estrutura, evitando o comprometimento da mesma.

O estudo da vibração de tal elemento relaciona os movimentos oscilatórios dos corpos e as forças que estão associadas aos componentes. Considerando que grande parte das estruturas se encontram sujeitas a certo grau de vibração, torna-se imprescindível, deste modo, a determinação do seu comportamento oscilatório, bem como das frequências naturais relacionadas a tal comportamento.

E, então, dependendo do seu uso, uma coluna pode aparecer totalmente enterrada, desenterrada ou semi-enterrada nos mais diferenciados tipos de solos. Existem modelos e soluções propostas para o caso totalmente enterrado e totalmente desenterrado, como o que se encontra em Chajes (1974), Shaker (1975), Warburton (1976), Bazant & Cedolin (1991). Já para o caso da coluna semi-enterrada, poucas são as referências na literatura, sendo alguns modelos conhecidos, como os propostos por Sampaio (2004) e Serebrenick (2004).

Neste capítulo será proposto um modelo matemático que descreve o comportamento de uma coluna semi-enterrada em um solo não-linear do tipo “com enfraquecimento”, pois os resultados mostram que essa é uma configuração estrutural potencialmente perigosa em termos de estabilidade da coluna.

Como o interesse está na obtenção das frequências naturais da coluna modelada, tal estudo será apresentado detalhadamente no capítulo 3, porém seguindo os equacionamentos proposto neste capítulo. Também, será fornecida parte da equação de movimento para coluna de acordo com a equação de Lagrange.

2.1. Apresentação do Modelo

Considere a coluna apresentada na Fig. 2.1 como esbelta tendo comprimento total L e rigidez flexional EI , enterrada a certa altura H , carregada por uma força axial P que mantém a mesma intensidade e direção à medida que a coluna se deforma, sendo F a força aplicada transversalmente, além de desconsiderar todo e qualquer atrito lateral que a coluna venha a sofrer. Também, considera-se que P é menor que a carga crítica de Euler, isto é, supõe-se que a coluna não flambou.

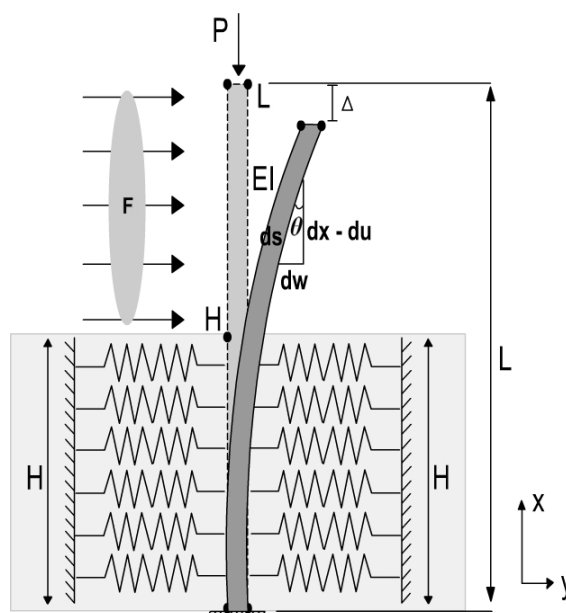


Figura 2.1 - Modelo da coluna semi-enterrada.

A análise da coluna semi-enterrada será feita mediante a aplicação da teoria de Euler-Bernoulli, a qual considera que a força de cisalhamento e a inércia de rotação são desprezados, ou seja, as seções se mantêm planas e normais ao eixo da coluna após a deformação (HAN et al., 1999). A seguir, para a obtenção da equação de movimento da mesma, será utilizada as Equações de Lagrange (HURTY & RUBINSTEIN, 1964; MEIROVITCH, 1990).

Segundo Hurty & Rubinstein (1964) a formulação de Lagrange é composta por equações diferenciais que consideram a energia do sistema instantaneamente no tempo. É, pois, diferente do Princípio de Hamilton que é expresso como uma equação integral que considera a energia total integrada sobre um intervalo de tempo.

Outro motivo, segundo Meirovitch (1990), para o uso das Equações de Lagrange, decorre do trabalho repetitivo de certas operações que devem ser feitas ao utilizar o Princípio de Hamilton. Assim, o custo destas operações pode ser minimizado pelo uso das Equações de Lagrange. Considerando o sistema considerado holonômico, considera-se:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_g}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L_g}{\partial q_k} = Q_k \quad (2.1)$$

sendo que o ponto sobre o símbolo (letra) representa a derivada em relação ao tempo t , q_k representa as coordenadas generalizadas, L_g é o Lagrangeano e Q_k , ($k=1, 2, \dots, n_c$), são as forças generalizadas, com n_c representando o número total de coordenadas generalizadas. Sabe-se que o Lagrangeano é definido como:

$$L_g = T - V \quad (2.2)$$

em que T é a Energia Cinética e V é a Energia Potencial oriunda de qualquer fonte potencial. Assim, considerando o problema da coluna apresentado, tem-se a energia potencial V descrita como:

$$V = U_{pt} + U_{fd} \quad (2.3)$$

onde U_{pt} é a Energia Potencial Total e U_{fd} é a energia interna de deformação da fundação elástica.

Já para o caso das forças generalizadas Q_k , tendo em vista forças não-conservativas atuando no sistema, considera-se a função de dissipação de Rayleigh (F_d) e o trabalho realizado por uma força externa periódica (F_{wp}) que excita o sistema. Logo, chega-se na seguinte Equação de Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_g}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L_g}{\partial q_k} + \frac{\partial F_d}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial F_{wp}}{\partial q_k} \quad (2.4)$$

A seguir serão apresentadas as formulações de cada parcela que compõe a Eq. (2.4) até chegar à equação diferencial ordinária que descreve o movimento da coluna semi-enterrada.

2.2. Energia Potencial Total (U_{pt})

Para a obtenção da energia potencial total da estrutura foram considerados os estudos desenvolvidos por Sampaio (2004), Serebrenick (2004) e Orlando (2006). Seja,

$$U_{pt} = U + V_p \quad (2.5)$$

sendo que U representa a energia interna de deformação e V_p o potencial das cargas externas conservativas.

Com isso, mediante a Fig. 2.1, à medida que a coluna se deforma, cada ponto do seu eixo central move-se para uma posição vertical (deslocamento axial u) e uma posição horizontal (deslocamento lateral w). Será considerada, também, a hipótese da linha neutra da coluna ser inextensível, isto é, o comprimento L da coluna permanece o mesmo após esta sofrer qualquer deformação. Seja a deflexão lateral da coluna descrita pela função $w=w(x,t)$, onde x varia de 0 a L e t representa o tempo.

Ao fato da coluna ser considerada inextensível, permite supor que o elemento linear dx seja igual ao elemento curvo ds , conforme se ilustra na Fig. 2.2.

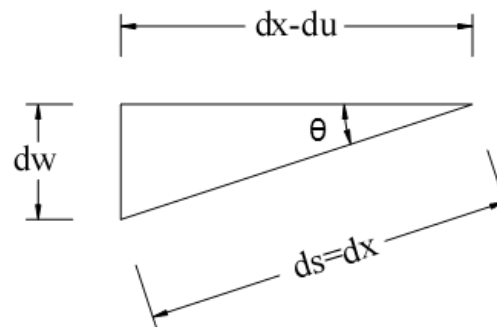


Figura 2.2 - Linha neutra da coluna como sendo uma linha reta após deformação.

Assim, da Fig. 2.2 obtém-se a seguinte relação:

$$\sin(\theta) = \frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x} = w' \rightarrow \theta = \arcsin(w') \quad (2.6)$$

em que θ é o ângulo entre o eixo da coluna deformada e o eixo x , w' denota a derivada primeira de w em relação a x .

Então, tem-se que a variação da curvatura, χ , é dada pela diferença da curvatura do eixo da coluna deformada ($1/R_f$) em relação a curvatura do eixo da coluna indeformada ($1/R_0$). Ou seja, é definida pela taxa de variação do ângulo θ em relação ao comprimento do arco para cada configuração da coluna, deformada e indeformada. Observe que a curvatura do eixo da coluna indeformada é nula, dado que neste caso não existe variação do ângulo θ . Logo:

$$\chi = \frac{1}{R_f} - \frac{1}{R_0} = \frac{1}{R_f} = \frac{d\theta}{dx} = \frac{w''}{\sqrt{1-w'^2}} \quad (2.7)$$

Sendo assim, tem-se que a energia interna de deformação U é definida apenas para a energia de flexão (DYM & SHAMES, 1973) a qual resulta do alongamento das fibras tracionadas e do encurtamento das fibras comprimidas. O fato de ser desprezada a parcela referente à deformação axial na energia interna de deformação decorre de que, nesta análise, considera-se o elemento estrutural esbelto (TIMOSHENKO & GERE, 1961). Ou seja, a altura da coluna é muito pequena quando comparada com o seu comprimento total L . Assim, obtém-se:

$$U = \int_0^L \frac{1}{2} EI \chi^2 dx \quad (2.8)$$

sendo E o módulo de elasticidade ou módulo de Young, I o momento de inércia da secção transversal, resultando em EI como a rigidez à flexão da coluna.

A partir de χ definido na Eq. (2.7), obtém-se χ^2 como:

$$\chi^2 = w''^2 (1 - w'^2)^{-1} \quad (2.9)$$

Expandindo $f(w') = (1 - w'^2)^{-1}$ em série de Taylor até segunda ordem, em torno do ponto $w'=0$, obtém-se:

$$f(w') = (1 + w'^2) \quad (2.10)$$

Substituindo Eq. (2.10) na Eq. (2.9), resulta:

$$\chi^2 \cong w'^2 (1 + w'^2) \quad (2.11)$$

Logo, chega-se a:

$$U = \frac{1}{2} EI \int_0^L w'^2 (1 + w'^2) dx \quad (2.12)$$

Por outro lado, define-se o potencial das cargas externas conservativas como sendo o produto entre a carga aplicada P e o encurtamento total da coluna Δ . Assim:

$$V_p = P\Delta \quad (2.13)$$

O valor de Δ é obtido considerando a seguinte relação, conforme observado na Fig. 2.2:

$$(ds)^2 = (dx - du)^2 + (dw)^2 \quad (2.14)$$

Então, dividindo a Eq. (2.13) por $(dx)^2$, admitindo que a coluna é considerada inextensível, logo $dx=ds$, obtém-se:

$$1 = \left(1 - \frac{du}{dx}\right)^2 + w'^2 \quad (2.15)$$

A Eq. (2.15) pode ser reescrita como:

$$\frac{du}{dx} = 1 - \sqrt{1 - w'^2} \quad (2.16)$$

Assim, partindo da relação:

$$\Delta = \int_0^L du \quad (2.17)$$

chega-se a:

$$\Delta = \int_0^L \left[1 - \sqrt{1 - w'^2} \right] dx \quad (2.18)$$

Seja $f(w') = 1 - \sqrt{1 - w'^2}$, expandindo esta função em série de Taylor até a quarta, em torno do ponto $w'=0$, obtém-se:

$$\Delta = - \int_0^L \left[\frac{1}{2} w'^2 + \frac{1}{8} w'^4 \right] dx \quad (2.19)$$

Com isso, obtém-se a expressão para o potencial da carga axial como:

$$V_p = - \int_0^L P \left(\frac{1}{2} w'^2 + \frac{1}{8} w'^4 \right) dx \quad (2.20)$$

Finalmente, substituindo as Eqs. (2.12) e (2.20) na Eq. (2.5) a energia potencial total é escrita da seguinte forma:

$$U_{pt} = \frac{1}{2} EI \int_0^L w''^2 (1 + w'^2) dx - P \int_0^L \left(\frac{1}{2} w'^2 + \frac{1}{8} w'^4 \right) dx \quad (2.21)$$

2.3. Energia Cinética (T)

A energia cinética T é definida, segundo Meirovitch (1990), da seguinte maneira:

$$T = \int_0^L \frac{1}{2} m \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx \quad (2.22)$$

sendo m é a massa por unidade de comprimento da coluna e $\left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)$ representa a velocidade da deflexão lateral da coluna em função do tempo.

2.4. Modelo do Solo e a Fundação Elástica (U_{fd})

Solos, geralmente, são formados por materiais não-homogêneos, partículas sólidas, cujo tamanho variam de micron (equivalente a um milionésimo do metro) a alguns milímetros. Muitos solos resultam dos sedimentos das rochas que formam a crosta da terra. Além disso, entre tais partículas existem espaços preenchidos parcialmente por água ou ar.

O solo está dividido em camadas, sendo que cada camada pode possuir propriedades diferentes da camada seguinte, com isso a interação coluna-solo não possui o mesmo comportamento sobre toda a parte enterrada da coluna. Assim, torna-se importante que tal variação das propriedades do solo seja levada em consideração durante sua modelagem, sendo fundamental conhecer o tipo de solo onde a estrutura estará enterrada, de modo que sua representação seja a mais precisa possível (JARADAT, 2005; THANASATTAYAWIBUL, 2006).

Assumindo que a resposta da interação coluna-solo é não-linear e considerando que a maioria dos solos apresenta uma não-linearidade como sendo do tipo “com enfraquecimento”, do inglês “*softening*” (PYKE, 1979; GREIMANN et al., 1987), tem-se que o solo será representado por uma série de molas não-lineares, não conectadas entre si. Este modelo representa o comportamento solo-coluna (ou coluna-solo) na forma de uma curva carga-deflexão lateral, ou seja, a coluna está sujeita a uma resistência lateral do solo quando for excitada ou tiver submetida a algum carregamento lateral.

Em outras palavras, tal curva carga-deflexão lateral representa a relação entre a resistência lateral do solo contra a coluna (em unidade de força por unidade de comprimento da coluna) e o correspondente deslocamento lateral da coluna (ou deflexão lateral), conforme representado na Fig. 2.3. Uma característica importante desta curva é a independência em relação à forma e a rigidez da coluna, sendo que em Greimann et. al (1987) e Kumar & Lalvani (2004) encontra-se tal curva denominada curva p - y , onde p é a resistência generalizada do solo e y é o deslocamento generalizado da coluna.

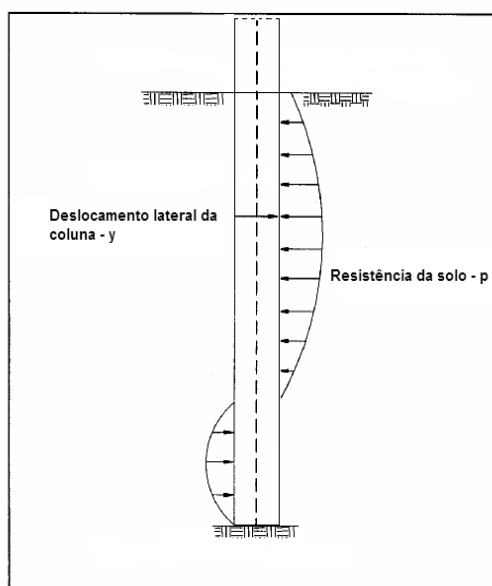


Figura 2.3 - Representação esquemática da interação solo-coluna.

De acordo com Greimann et al. (1987) e San et al. (2001) este tipo de comportamento coluna-solo é usualmente representado pelo modelo modificado de Ramberg-Osgood. Tal modelo recebe a denominação de modificado, pois é obtido a partir de uma suave modificação da relação empírica definida por Ramberg & Osgood (1943) que representa o comportamento elástico-plástico de diversos materiais. A função do modelo de Ramberg-Osgood Modificado que descreve o comportamento do solo é dada por:

$$S = \frac{(E_{ti} - E_{tf})y_g}{\sqrt[n_p]{1 + \left| \frac{(E_{ti} - E_{tf})y_g}{P_u} \right|^{n_p}}} + E_{tf}y_g \quad (2.23)$$

sendo E_{ti} o módulo de elasticidade tangente inicial, E_{tf} o módulo de elasticidade tangente final, S a resistência generalizada do solo, P_u a resistência última do solo, n_p o parâmetro de forma que determina o tipo do solo e y_g o deslocamento generalizado da coluna.

A força restauradora da fundação elástica F_r é dada por uma expansão em série de Taylor até segunda ordem da função S , em torno do ponto $y_g=0$ considerando $(E_{ti} - E_{tf}) > 0$, $P_u > 0$ e que o parâmetro de forma seja $n_p=1$, sendo que este valor do parâmetro de forma representa um solo de argila mole (JARADAT, 2005). Logo:

$$F_{fr} = -\frac{(E_{ti} - E_{tf})^2 y_g |y_g|}{P_u} + E_{ti} y_g \quad (2.24)$$

A parcela $y_g |y_g|$ na Eq. (2.24) aparece devido à simetria da força em relação ao deslocamento lateral, isto é, com a inversão do deslocamento lateral, a direção da força de resistência do solo também se inverte.

A energia interna de deformação armazenada na fundação elástica é calculada integrando a força restauradora F_{fr} ao longo de y_g e x . Assim, resulta:

$$U_{fd} = \int_0^H \int_0^w (F_{fr}) dy_g dx = \int_0^H \left(-\frac{(E_{ti} - E_{tf})^2 |w|^3}{3P_u} + \frac{E_{ti} w^2}{2} \right) dx \quad (2.25)$$

Note que a integral ao longo do comprimento varia até H , uma vez que essa parcela só existe na região enterrada da coluna.

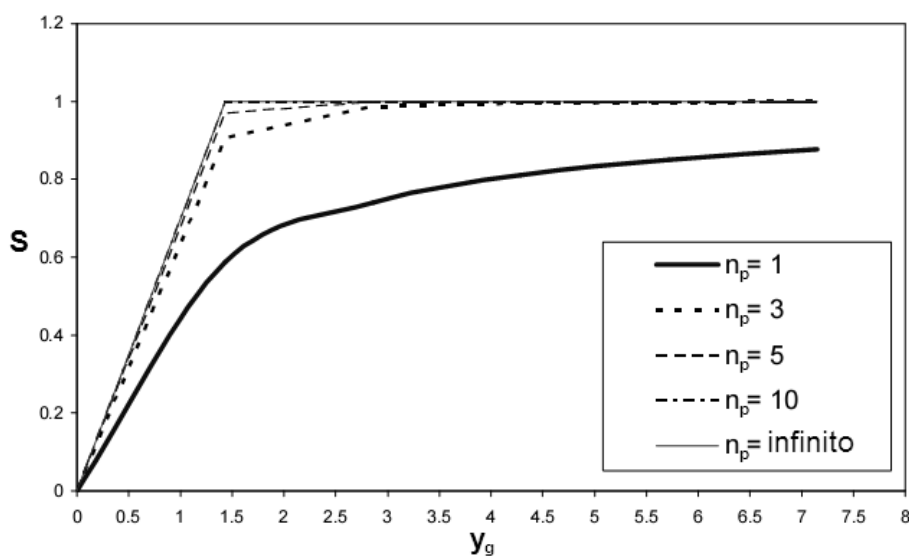


Figura 2.4 - Resultado da curva carga-deflexão lateral para diferentes parâmetros de forma no modelo modificado de Ramberg-Osgood.

A Fig. 2.4 mostra a influência do parâmetro de forma no modelo modificado de Ramberg-Osgood, Eq. (2.23), sendo que para outros tipos de solo como argila muito rijas tem-se $n_p=2$, já para areia tem-se $n_p=3$ (JARADAT, 2005).

Os valores utilizados para as constantes que determinam o solo de argila mole são (JARADAT, 2005):

- $3,219 \leq E_{ti} \leq 6,4638 \text{ MPa}$;
- $E_{tr}=0 \text{ Pa}$;
- $161595L_y \leq P_u \leq 323190L_y \text{ N/m}$, onde L_y é a largura ou diâmetro da coluna, em metros (eixo de referência y , vide Fig. 2.1), e depende do tipo de secção transversal.

Valores para outros tipos de solo podem ser obtidos de Greimnan et al. (1987), Kumar & Lalvani (2004) ou Jaradat (2005).

2.5. Forças Não-Conservativas

Por se tratar de um problema que sofrerá a influência de uma força externa de excitação que varia no tempo. Além do fato que o amortecimento está presente em todos os sistemas oscilatórios, deve-se escrever um funcional para as forças não-conservativas que atuam no modelo.

Segundo Thomson (1978) a parcela referente ao amortecimento tem o objetivo de simular a dissipação de energia que os sistemas reais exibem. A parcela de amortecimento ocasiona mudanças características no movimento da coluna, sendo que esta pode chegar a perder seu caráter oscilatório.

A força de amortecimento, no modelo desenvolvido, é caracterizada de forma diferenciada na parte enterrada e na parte desenterrada da coluna. Na parte enterrada, além da influência das características geométricas da própria coluna, ocorre a influência direta do solo, enquanto que na parte desenterrada esta última influência não ocorre. Assim, escreve-se as forças de amortecimento segundo a função de dissipação de Rayleigh (HURT & RUBINSTEIN, 1964), sendo formuladas como:

- Parte enterrada da coluna:

$$A_e = \int_0^H \frac{1}{2} \beta_e \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx \quad (2.26)$$

- Parte desenterrada da coluna:

$$A_d = \int_H^L \frac{1}{2} \beta_d \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx \quad (2.27)$$

onde β_e representa o parâmetro de amortecimento para a parte enterrada e β_d o parâmetro de amortecimento para a parte desenterrada da coluna.

Com isso, a função de dissipação (F_d) é escrita da seguinte maneira:

$$F_d = A_e + A_d = \int_0^H \frac{1}{2} \beta_e \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx + \int_H^L \frac{1}{2} \beta_d \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx \quad (2.28)$$

Com a introdução de um carregamento externo transversal na parte desenterrada da coluna, considerado uniformemente distribuído e periodicamente dependente do tempo, serão geradas respostas transientes e estacionárias no sistema. Assim, com a atuação do amortecimento, tem-se que a parte transiente da resposta desaparece ficando apenas a resposta permanente.

Mediante isto, define-se o trabalho realizado por esta força externa como:

$$F_{wp} = \int_H^L A_0 \cos(\Omega t) w dx \quad (2.29)$$

em que A_0 é a amplitude do carregamento harmônico e Ω é a frequência da excitação externa.

2.6. Função Lagrangeana para a Coluna

Com base nas Eqs. (2.21), (2.22) e (2.25), escreve-se a função de Lagrange ou Lagrangeano para a coluna apresentada, a saber:

$$\begin{aligned} L_g = T - U_{pt} - U_{fd} = & \int_0^L \frac{1}{2} m \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx - \frac{1}{2} EI \int_0^L w''^2 (1 + w'^2) dx + \\ & + P \int_0^L \left(\frac{1}{2} w'^2 + \frac{1}{8} w'^4 \right) dx - \int_0^H \left(- \frac{(E_{ti} - E_{tf})^2 |w|^3}{3P_u} + \frac{E_{ti} w^2}{2} \right) dx \end{aligned} \quad (2.30)$$

A partir desta função, no capítulo seguinte será apresentada à obtenção das frequências naturais e dos correspondentes modos de vibração, também será formulada a equação de movimento da coluna.

CAPÍTULO III

MODELO DINÂMICO DA COLUNA SEMI-ENTERRADA

Conhecendo-se as equações apresentadas no capítulo anterior, busca-se determinar as frequências naturais e os respectivos modos de vibração associadas a elas e, em seguida, obter a equação que descreve o movimento da coluna semi-enterrada.

Segundo Hurty & Rubinstein (1964) quando um sistema, após um distúrbio inicial, é deixado para vibrar por si próprio, a frequência com a qual ele oscila sem a presença de forças externas é conhecida como sua frequência natural e, a cada frequência natural está associado um modo de vibração ou modo natural. Tal modo é dado por uma configuração de deflexão do elemento estrutural no qual o movimento de cada ponto do elemento é harmônico, sendo que uma estrutura pode possuir diversos modos de vibração.

O objetivo deste trabalho é obter as frequências naturais e, então, através da aplicação de métodos evolutivos de otimização, distanciá-las de modo a obter um projeto ótimo da coluna. Desta forma, será aplicado ao problema o método de Ritz (ou Rayleigh-Ritz), que consiste em substituir a função de deflexão da coluna, $w(x,t)$, por uma função aproximada desenvolvida em séries (REZENDE, 2005). No decorrer deste capítulo será descrito cada passo necessário para a obtenção das frequências naturais, dos modos de vibração e da equação de movimento.

3.1. Obtenção da Função de Deflexão Lateral

Com o intuito de reduzir a complexidade do problema utiliza-se o método de Rayleigh-Ritz, dado que este se apresenta como uma boa ferramenta para realizar uma análise linear e não-linear do problema. A partir deste método, será calculada a função de deflexão lateral da coluna e, então, os modos de vibração com as respectivas frequências naturais. Tal método geralmente é descrito em séries da seguinte maneira (REZENDE, 2005):

$$f = \sum_{j=1}^{n_t} a_j \Phi_j \quad (3.1)$$

sendo a_j as constantes multiplicadoras das funções Φ_j , previamente estabelecidas; n_t corresponde ao número de termos da série necessários para descrever a deflexão, ou campo de deslocamentos, do elemento.

Diante do exposto, considere a seguinte expansão da Eq. (3.1) sugerida por Eisenberg (1980):

$$f(x) = a_1 \sin(k_j x) + a_2 \cos(k_j x) + a_3 x + a_4 \quad (3.2)$$

sendo k_j o parâmetro que irá definir a j -ésima forma do modo de vibração da coluna em função da deflexão lateral. As constantes a_1 , a_2 , a_3 e a_4 são definidas a partir das condições de contorno as quais estão relacionadas ao tipo de apoio onde a coluna se encontra. A Eq. (3.2) foi adotada considerando que representa a solução geral da Equação de Euler que descreve o movimento de uma viga-coluna possuindo condições de contorno gerais (Eisenberg, 1980).

Quando é mencionada a forma do modo de vibração, deve-se entender que se trata de uma representação aproximada. Isto é, o correspondente modo de vibração da coluna é semelhante à forma do modo, não exatamente igual, pois o modo de vibração do elemento é descrito em função de seus parâmetros, como rigidez, massa, momento de inércia, etc, portanto existe uma variação em relação à forma.

A Fig. 3.1 apresenta alguns dos diversos tipos de apoio que podem ser adotados para a coluna, sendo que cada tipo de apoio define as condições de contorno para o problema.

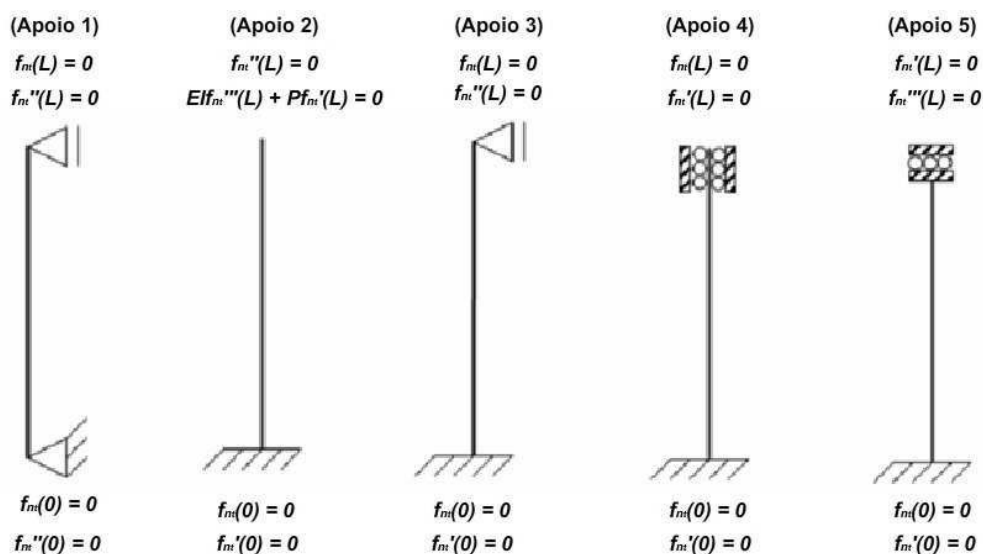


Figura 3.1 - Condições de contorno para diferentes tipos de apoio da coluna.

Neste trabalho será considerado a coluna com apoio do tipo 5, conforme apresentado na Fig. 3.1. Deve-se ressaltar que, qualquer um dos tipos de apoios listados na Fig. 3.1 ou que se encontram na literatura (HURTY & RUBINSTEIN, 1964; SHAKER, 1975), podem ser utilizados para a modelagem do problema. Um exemplo prático do tipo de apoio adotado é encontrado em estruturas como pontes, docas, plataformas, etc., sendo este um dos motivos para a sua escolha em relação aos demais.

Para cada tipo de apoio devem ser definidas as condições de contorno às quais o problema está sujeito, ou seja, a função que representará a deflexão lateral da coluna será descrita, em partes, em termos destas condições de contorno. Então, para a coluna semi-enterrada e com o apoio tipo 5 as condições de contorno são:

- i. $f(x)|_{x=0} = 0$, refere-se à coluna não sofrer deslocamentos transversais no ponto $x=0$;
- ii. $\frac{d}{dx}(f(x))|_{x=0} = f'(0) = 0$, refere-se à coluna não sofrer rotação no ponto $x=0$;
- iii. $\frac{d}{dx}(f(x))|_{x=L} = f'(L) = 0$, refere-se à coluna não sofrer rotação no ponto $x=L$;
- iv. $\frac{d^3}{dx^3}(f_4(x))|_{x=L} = f'''(L) = 0$, refere-se à coluna não sofrer cisalhamento no ponto $x=L$.

Assim, aplicando cada uma das condições de contorno na Eq. (3.2), obtém-se o seguinte sistema de equações algébricas:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ k_j & 0 & 1 & 0 \\ k_j \cos(k_j L) & -k_j \sin(k_j L) & 1 & 0 \\ -k_j^3 \cos(k_j L) & k_j^3 \sin(k_j L) & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

A Eq. (3.3) representa um problema de autovalor que admite a solução trivial $a_1=a_2=a_3=a_4=0$, sendo que fisicamente tal solução representa a coluna em sua posição vertical inicial. Com o intuito de obter uma solução não trivial, ou seja, que caracterize a deflexão lateral da coluna de acordo com os parâmetros que a descrevem, torna-se necessário que o determinante da matriz dos coeficientes a_j seja igual à zero, isto é,

$$\det \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ k_j & 0 & 1 & 0 \\ k_j \cos(k_j L) & -k_j \sin(k_j L) & 1 & 0 \\ -k_j^3 \cos(k_j L) & k_j^3 \sin(k_j L) & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = 0 \quad (3.4)$$

Sendo o resultado da Eq. (3.4) igual a:

$$k_j^4 \sin(k_j L) = 0 \quad (3.5)$$

Considerando $k_j \neq 0$, a Eq. (3.5) é satisfeita para:

$$k_j = \frac{j\pi}{L}, \text{ com } j=1, 2, 3, \dots, \infty \quad (3.6)$$

em que cada valor associado a k_j , como dito, servirá para determinar a forma do j -ésimo modo de vibração da coluna na função de deflexão lateral. Assim, para determinar o valor das constantes multiplicadoras (a_1 , a_2 , a_3 e a_4), toma-se $j=1$ na Eq. (3.6) e, então, substitui o valor encontrado na Eq. (3.3), resultando em:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ \frac{\pi}{L} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{\pi}{L} & 0 & 1 & 0 \\ -\left(\frac{\pi}{L}\right)^3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Da Eq. (3.7) vem:

$$\begin{aligned} a_1 &= a_3 = 0; \\ a_2 &= -a_4; \end{aligned} \quad (3.8)$$

Portanto, substituindo na Eq. (3.2), obtém-se:

$$f(x) = a_4 - a_4 \cos(k_j x) \quad (3.9)$$

A Eq. (3.9) fornece as formas dos modos de vibração da coluna, sendo que k_j é dado pela Eq. (3.6). Para obter o valor de a_4 normaliza-se a Eq. (3.9) de modo a tornar seu máximo valor unitário, ou seja:

$$\int_0^L (f(x))^2 dx = 1 \quad (3.10)$$

resultando em:

$$a_4 = \pm \frac{\sqrt{6}}{3\sqrt{L}} \quad (3.11)$$

A partir da Eq. (3.9), escreve-se a função de deflexão lateral da coluna $w(x,t)$ que, neste trabalho, conterà somente os três primeiros modos de vibração. Obviamente, isto não impede que tal função seja reescrita incluindo outros modos de vibração. Assim, tem-se:

$$w(x,t) = \frac{\sqrt{6}}{3\sqrt{L}} \left[r_1(t) \left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{L} x\right) \right) + r_2(t) \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi}{L} x\right) \right) + r_3(t) \left(1 - \cos\left(\frac{3\pi}{L} x\right) \right) \right] \quad (3.12)$$

sendo que $r_1(t)=r_1$, $r_2(t)=r_2$ e $r_3(t)=r_3$ são funções dependente do tempo. Para obter a forma do primeiro modo de vibração da coluna, faz-se $r_1(t)=1$ e $r_2(t)=r_3(t)=0$, e para os outros modos de vibração o procedimento é similar. Observa-se que a Eq. (3.12) é uma expansão da Eq. (3.1), a qual define o método de Rayleigh-Ritz, onde todos os $r_j(t)$ equivalem ao a_j e os termos entre parênteses na Eq. (3.12) são os Φ_j , para $j=1, 2$ e 3 .

A seguir, com a determinação da função que descreve a deflexão da coluna, serão obtidas as freqüências naturais e os correspondentes modos de vibração.

3.2. Freqüências Naturais e Modos de Vibração

Como mencionado anteriormente, o interesse geral do trabalho está nas freqüências naturais para cada modo de vibração da coluna, considerando apenas os três primeiros modos, conforme a função de deflexão representada pela Eq. (3.12).

Com isso, faz-se a substituição da Eq. (3.12) no Lagrangeano, Eq. (2.30), e resolvem-se as integrais presentes. Na equação de Lagrange serão desprezadas as forças generalizadas Q_k , no caso, o amortecimento e a força de excitação externa.

Esta simplificação justifica-se pelo fato de que as freqüências naturais e os modos de vibração serem características exclusivas da estrutura, não dependendo das forças externas aplicadas, nem do amortecimento. Deve-se ressaltar que, nesta modelagem, foi considerado o amortecimento viscoso, porém, caso fosse adotado a existência de um amortecimento estrutural no problema, o mesmo deveria estar presente no Lagrangeano (MEIROVITCH, 1986). Logo, o Lagrangeano é escrito conforme descrito acima, obtendo-se a Eq. (3.13).

Segundo Eisenberg (1980), em sistemas como o considerado para a coluna, sendo a deflexão lateral do elemento escrita por uma função da forma dos modos de vibração e de funções em relação ao tempo, como as $r_j(t)$, tem-se que cada função do tempo representa as coordenadas generalizadas do sistema para as equações de Lagrange.

Diante disto, aplicando a equação de Lagrange na Eq. (3.13), desconsiderando as forças generalizadas, obtêm-se três equações de movimento para a coluna semi-enterrada, apresentadas nas Eqs. (3.14a) até (3.14c)

$$\begin{aligned}
L_g = & \frac{m(3\dot{r}_1^2 + 4\dot{r}_1(\dot{r}_2 + \dot{r}_3) + 3\dot{r}_3^2 + 4\dot{r}_2\dot{r}_3 + 3\dot{r}_2^2)}{6} - \frac{E_{ii}r_3^2 \sin\left(\frac{6\pi H}{L}\right)}{36\pi} - \frac{E_{ii}r_2r_3 \sin\left(\frac{5\pi H}{L}\right)}{15\pi} + \\
& - \frac{E_{ii}(2r_1r_3 + r_2^2) \sin\left(\frac{4\pi H}{L}\right)}{24\pi} - \frac{E_{ii}(r_1(r_2 - 2r_3) - 2r_3(r_2 + r_3)) \sin\left(\frac{3\pi H}{L}\right)}{9\pi} + \\
& - \frac{E_{ii}(r_1^2 + 2r_1(r_3 - 2r_2) - 4r_2^2 - 4r_2r_3) \sin\left(\frac{2\pi H}{L}\right)}{12\pi} + \frac{E_{ii}(2r_1^2 + r_1(2r_3 + r_2) - r_2r_3) \sin\left(\frac{\pi H}{L}\right)}{3\pi} + \\
& - \frac{E_{ii}H(3r_1^2 + 4r_1(r_3 + r_2) + 3r_2^2 + 4r_2r_3 + 3r_3^2)}{6L} \\
& - \frac{\pi^2 \left(4\pi^2 E I \left(6L^3(r_1^2 + 16r_2^2 + 81r_3^2) + \pi^2 \left(r_1^4 - 12r_1^3r_3 + 20r_1^2(2r_2^2 + 9r_3^2) + \right. \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. \left. + 216r_1r_2^2r_3 + 64r_2^4 + 936r_2^2r_3^2 + 729r_3^4 \right) \right) \right) + \left(-3L^2P \left(8L^3(r_1^2 + 4r_2^2 + 9r_3^2) + \pi^2 \left(r_1^4 - 4r_1^3r_3 + 4r_1^2(2r_2^2 + 9r_3^2) + 48r_1r_2^2r_3 + \right. \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. \left. + 16r_2^4 + 144r_2^2r_3^2 + 81r_3^4 \right) \right) \right) \right)}{144L^7} + \\
& + \left(\text{sign}\left(r_3 \cos\left(\frac{3\pi H}{L}\right) + r_2 \cos\left(\frac{2\pi H}{L}\right) + r_1 \cos\left(\frac{\pi H}{L}\right) - r_1 - r_2 - r_3\right) \right) x \\
& \left(\frac{\sqrt{6}(E_{ii} - E_{if})^2 r_3^3 \sin\left(\frac{9\pi H}{L}\right)}{486\pi P_u \sqrt{L}} + \frac{\sqrt{6}(E_{ii} - E_{if})^2 r_2 r_3^2 \sin\left(\frac{8\pi H}{L}\right)}{144\pi P_u \sqrt{L}} + \right. \\
& + \frac{\sqrt{6}(E_{ii} - E_{if})^2 r_3(r_1 r_3 + r_2^2) \sin\left(\frac{7\pi H}{L}\right)}{126\pi P_u \sqrt{L}} + \frac{2\sqrt{6}(E_{ii} - E_{if})^2 r_1^3 \sin\left(\frac{\pi H}{L}\right) \cos^2\left(\frac{\pi H}{L}\right)}{81\pi P_u \sqrt{L}} + \\
& + \frac{\sqrt{6}(E_{ii} - E_{if})^2 (6r_1 r_3(r_2 - r_3) + r_2^3 - 6r_2 r_3^2 - 6r_3^3) \sin\left(\frac{6\pi H}{L}\right)}{324\pi P_u \sqrt{L}} + \\
& + \frac{\sqrt{6}(E_{ii} - E_{if})^2 (r_1^2 r_3 + r_1(r_2^2 - 4r_2 r_3 + r_3^2) - 4r_2 r_3(r_2 + r_3)) \sin\left(\frac{5\pi H}{L}\right)}{90\pi P_u \sqrt{L}} + \\
& + \frac{\sqrt{6}(E_{ii} - E_{if})^2 (r_1^2(r_2 - 4r_3) - 2r_1(r_2^2 + r_2 r_3 + 2r_3^2) - r_2(2r_2^2 + 2r_2 r_3 - r_3^2)) \sin\left(\frac{4\pi H}{L}\right)}{72\pi P_u \sqrt{L}} + \\
& - \frac{\sqrt{6}(E_{ii} - E_{if})^2 (2r_1^2(2r_2 - 3r_3) + r_1(3r_2^2 - 4r_2 r_3 - 8r_3^2) - r_3(6r_2^2 + 8r_2 r_3 + 5r_3^2)) \sin\left(\frac{3\pi H}{L}\right)}{54\pi P_u \sqrt{L}} + \\
& - \frac{\sqrt{6}(E_{ii} - E_{if})^2 (2r_1^3 + 2r_1^2(3r_3 - 2r_2) - 2r_1(4r_2^2 + 3r_2 r_3 - 2r_3^2) - r_2(5r_2^2 + 8r_2 r_3 + 6r_3^2)) \sin\left(\frac{2\pi H}{L}\right)}{36\pi P_u \sqrt{L}} + \\
& + \frac{\sqrt{6}(E_{ii} - E_{if})^2 (44r_1^3 + 9r_1^2(4r_2 + 9r_3) + 18r_1(r_2^2 + 3r_3^2) - 9r_2 r_3(3r_2 + 4r_3)) \sin\left(\frac{\pi H}{L}\right)}{162\pi P_u \sqrt{L}} + \\
& - \frac{\sqrt{6}(E_{ii} - E_{if})^2 H(10r_1^3 + 3r_1^2(5r_2 + 6r_3) + 18r_1(r_2^2 + r_2 r_3 + r_3^2) + 2(5r_2^3 + 9r_2^2 r_3 + 9r_2 r_3^2 + 5r_3^3))}{54\pi P_u \sqrt{L^3}} \left. \right)
\end{aligned} \tag{3.13}$$

$$\begin{aligned}
& m\ddot{r}_1 + \frac{2m\ddot{r}_2}{3} + \frac{2m\ddot{r}_3}{3} + \frac{E_{ii}r_3 \sin\left(\frac{4\pi H}{L}\right)}{12\pi} - \frac{2E_{ii}r_3 \sin\left(\frac{3\pi H}{L}\right)}{9\pi} + \frac{E_{ii}r_2 \sin\left(\frac{3\pi H}{L}\right)}{9\pi} + \\
& + \frac{E_{ii}r_1 \sin\left(\frac{2\pi H}{L}\right)}{6\pi} - \frac{E_{ii}r_2 \sin\left(\frac{2\pi H}{L}\right)}{3\pi} + \frac{E_{ii}r_3 \sin\left(\frac{2\pi H}{L}\right)}{6\pi} - \frac{4E_{ii}r_1 \sin\left(\frac{\pi H}{L}\right)}{3\pi} + \\
& - \frac{E_{ii}r_2 \sin\left(\frac{\pi H}{L}\right)}{3\pi} - \frac{2E_{ii}r_3 \sin\left(\frac{\pi H}{L}\right)}{3\pi} + \frac{\pi^6 E I r_1^3}{9L^7} - \frac{\pi^4 P r_1^3}{12L^5} - \frac{\pi^6 E I r_3 r_1^2}{L^7} + \\
& + \frac{\pi^4 P r_3 r_1^2}{4L^5} + \frac{2E_{ii}Hr_2}{3L} + \frac{2E_{ii}Hr_3}{3L} + \frac{6\pi^6 E I r_3 r_2^2}{L^7} - \frac{\pi^4 P r_3 r_2^2}{L^5} + \frac{E_{ii}Hr_1}{L} + \frac{\pi^4 E I r_1}{3L^4} + \\
& - \frac{\pi^2 P r_1}{3L^2} + \frac{20\pi^6 E I r_1 r_2^2}{9L^7} - \frac{2\pi^4 P r_1 r_2^2}{3L^5} + \frac{10\pi^6 E I r_1 r_3^2}{L^7} - \frac{3\pi^4 P r_1 r_3^2}{2L^5} + \\
& - \left(\text{sign}\left(r_3 \cos\left(\frac{3\pi H}{L}\right) + r_2 \cos\left(\frac{2\pi H}{L}\right) + r_1 \cos\left(\frac{\pi H}{L}\right) - r_1 - r_2 - r_3\right) \right) * \\
& \left(\frac{\sqrt{6}(E_{ii} - E_{if})^2 r_3^2 \sin\left(\frac{7\pi H}{L}\right)}{126\pi P_u \sqrt{L}} + \frac{\sqrt{6}(E_{ii} - E_{if})^2 r_3 (r_2 - r_3) \sin\left(\frac{6\pi H}{L}\right)}{54\pi P_u \sqrt{L}} + \right. \\
& + \frac{\sqrt{6}(E_{ii} - E_{if})^2 (2r_1 r_3 + r_2^2 - 4r_2 r_3 + r_3^2) \sin\left(\frac{5\pi H}{L}\right)}{90\pi P_u \sqrt{L}} + \\
& + \frac{\sqrt{6}(E_{ii} - E_{if})^2 (r_1 (r_2 - 4r_3) - r_2^2 - r_2 r_3 - 2r_3^2) \sin\left(\frac{4\pi H}{L}\right)}{36\pi P_u \sqrt{L}} + \\
& - \frac{\sqrt{6}(E_{ii} - E_{if})^2 (4r_1 (2r_2 - 3r_3) + 3r_2^2 - 4r_2 r_3 - 8r_3^2) \sin\left(\frac{3\pi H}{L}\right)}{54\pi P_u \sqrt{L}} + \\
& - \frac{\sqrt{6}(E_{ii} - E_{if})^2 (3r_1^2 + 2r_1 (3r_3 - 2r_2) - 4r_2^2 - 3r_2 r_3 + 2r_3^2) \sin\left(\frac{2\pi H}{L}\right)}{18\pi P_u \sqrt{L}} + \\
& + \frac{2\sqrt{6}(E_{ii} - E_{if})^2 r_1^2 \sin\left(\frac{\pi H}{L}\right) \cos^2\left(\frac{\pi H}{L}\right)}{27\pi P_u \sqrt{L}} + \\
& + \frac{\sqrt{6}(E_{ii} - E_{if})^2 (22r_1^2 + 3r_1 (4r_2 + 9r_3) + 3r_2^2 + 9r_3^2) \sin\left(\frac{\pi H}{L}\right)}{162\pi P_u \sqrt{L}} + \\
& \left. - \frac{\sqrt{6}(E_{ii} - E_{if})^2 H (5r_1^2 + r_1 (5r_2 + 6r_3) + 3r_2^2 + 3r_2 r_3 + 3r_3^2)}{9\pi P_u \sqrt{L^3}} \right) = 0
\end{aligned} \tag{3.14a}$$

$$\begin{aligned}
& m\ddot{r}_2 + \frac{2m\ddot{r}_1}{3} + \frac{2m\ddot{r}_3}{3} + \frac{20\pi^6 Elr_2 r_1^2}{9L^7} - \frac{2\pi^4 Pr_2 r_1^2}{3L^5} + \frac{12\pi^6 Elr_1 r_2 r_3}{L^7} + \\
& - \frac{2\pi^4 Pr_1 r_2 r_3}{L^5} + \frac{2E_{ii} Hr_1}{3L} + \frac{64\pi^6 Elr_2^3}{9L^7} - \frac{4\pi^4 Pr_2^3}{3L^5} + \frac{52\pi^6 Elr_2 r_3^2}{L^7} + \\
& - \frac{6\pi^4 Pr_2 r_3^2}{L^5} + \frac{E_{ii} Hr_2}{L} + \frac{16\pi^4 Elr_2}{3L^4} - \frac{4\pi^4 Pr_2}{3L^2} + \frac{2E_{ii} Hr_3}{3L} + \\
& + \frac{E_{ii} r_3 \sin\left(\frac{5\pi H}{L}\right)}{15\pi} + \frac{E_{ii} r_2 \sin\left(\frac{4\pi H}{L}\right)}{12\pi} + \frac{E_{ii} r_1 \sin\left(\frac{3\pi H}{L}\right)}{9\pi} + \\
& - \frac{2E_{ii} r_3 \sin\left(\frac{3\pi H}{L}\right)}{9\pi} - \frac{E_{ii} (r_1 + 2r_2 + r_3) \sin\left(\frac{2\pi H}{L}\right)}{3\pi} + \frac{E_{ii} (r_3 - r_1) \sin\left(\frac{\pi H}{L}\right)}{3\pi} + \\
& - \left(\text{sign}\left(r_3 \cos\left(\frac{3\pi H}{L}\right) + r_2 \cos\left(\frac{2\pi H}{L}\right) + r_1 \cos\left(\frac{\pi H}{L}\right) - r_1 - r_2 - r_3\right) \right) * \\
& \left(\frac{\sqrt{6}(E_{ii} - E_{if})^2 r_3^2 \sin\left(\frac{8\pi H}{L}\right)}{144\pi P_u \sqrt{L}} + \frac{\sqrt{6}(E_{ii} - E_{if})^2 r_2 r_3 \sin\left(\frac{7\pi H}{L}\right)}{63\pi P_u \sqrt{L}} + \right. \\
& + \frac{\sqrt{6}(E_{ii} - E_{if})^2 (2r_1 r_3 + r_2^2 - 2r_3^2) \sin\left(\frac{6\pi H}{L}\right)}{108\pi P_u \sqrt{L}} + \\
& + \frac{\sqrt{6}(E_{ii} - E_{if})^2 (r_1 (r_2 - 2r_3) - 2r_3 (2r_2 + r_3)) \sin\left(\frac{5\pi H}{L}\right)}{45\pi P_u \sqrt{L}} + \\
& + \frac{\sqrt{6}(E_{ii} - E_{if})^2 (r_1^2 - 2r_1 (2r_2 + r_3) - 6r_2^2 - 4r_2 r_3 + r_3^2) \sin\left(\frac{4\pi H}{L}\right)}{72\pi P_u \sqrt{L}} + \\
& + \frac{\sqrt{6}(E_{ii} - E_{if})^2 (2r_1^2 + r_1 (3r_2 - 2r_3) - 6r_2 r_3 - 4r_3^2) \sin\left(\frac{3\pi H}{L}\right)}{27\pi P_u \sqrt{L}} + \\
& + \frac{\sqrt{6}(E_{ii} - E_{if})^2 (4r_1^2 + 2r_1 (8r_2 + 3r_3) + 15r_2^2 + 16r_2 r_3 + 6r_3^2) \sin\left(\frac{2\pi H}{L}\right)}{36\pi P_u \sqrt{L}} + \\
& + \frac{\sqrt{6}(E_{ii} - E_{if})^2 (2r_1^2 + 2r_1 r_2 - r_3 (3r_2 + 2r_3)) \sin\left(\frac{\pi H}{L}\right)}{9\pi P_u \sqrt{L}} + \\
& \left. - \frac{\sqrt{6}(E_{ii} - E_{if})^2 H (5r_1^2 + 6r_1 (2r_2 + r_3) + 10r_2^2 + 12r_2 r_3 + 6r_3^2)}{18\pi P_u \sqrt{L^3}} \right) = 0
\end{aligned} \tag{3.14b}$$

$$\begin{aligned}
& m\ddot{r}_3 + \frac{2m\ddot{r}_1}{3} + \frac{2m\ddot{r}_2}{3} - \frac{\pi^6 E l r_1^3}{3L^7} + \frac{\pi^4 P r_1^3}{12L^5} + \frac{10\pi^6 E l r_3 r_1^2}{L^7} - \frac{3\pi^4 P r_3 r_1^2}{2L^5} + \\
& + \frac{6\pi^6 E l r_1 r_2^2}{L^7} - \frac{\pi^4 P r_1 r_2^2}{L^5} + \frac{2E_{ii} H r_1}{3L} + \frac{52\pi^6 E l r_3 r_2^2}{L^7} - \frac{6\pi^4 P r_3 r_2^2}{L^5} + \\
& + \frac{2E_{ii} H r_2}{3L} + \frac{81\pi^6 E l r_3^3}{L^7} - \frac{27\pi^4 P r_3^3}{4L^5} + \frac{E_{ii} H r_3}{L} + \frac{27\pi^4 E l r_3}{L^4} - \frac{3\pi^2 P r_3}{L^2} + \\
& - \frac{E_{ii} (2r_1 - r_2) \sin\left(\frac{\pi H}{L}\right)}{3\pi} + \sin\left(\frac{2\pi H}{L}\right) \left(\frac{E_{ii} r_1}{6\pi} - \frac{E_{ii} r_2}{3\pi} \right) + \frac{E_{ii} r_1 \sin\left(\frac{4\pi H}{L}\right)}{12\pi} + \\
& - \frac{2E_{ii} (r_1 + r_2 + 2r_3) \sin\left(\frac{3\pi H}{L}\right)}{9\pi} + \frac{E_{ii} r_2 \sin\left(\frac{5\pi H}{L}\right)}{15\pi} + \frac{E_{ii} r_3 \sin\left(\frac{6\pi H}{L}\right)}{18\pi} + \\
& - \left(\text{sign}\left(r_3 \cos\left(\frac{3\pi H}{L}\right) + r_2 \cos\left(\frac{2\pi H}{L}\right) + r_1 \cos\left(\frac{\pi H}{L}\right) - r_1 - r_2 - r_3\right) \right)^* \\
& \left(\frac{\sqrt{6}(E_{ii} - E_{if})^2 r_3^2 \sin\left(\frac{9\pi H}{L}\right)}{162 \pi P_u \sqrt{L}} + \frac{\sqrt{6}(E_{ii} - E_{if})^2 r_2 r_3 \sin\left(\frac{8\pi H}{L}\right)}{72 \pi P_u \sqrt{L}} + \right. \\
& + \frac{\sqrt{6}(E_{ii} - E_{if})^2 (2r_1 r_3 + r_2^2) \sin\left(\frac{7\pi H}{L}\right)}{126 \pi P_u \sqrt{L}} + \\
& + \frac{\sqrt{6}(E_{ii} - E_{if})^2 (r_1 (r_2 - 2r_3) - 2r_2 r_3 - 3r_3^2) \sin\left(\frac{6\pi H}{L}\right)}{54 \pi P_u \sqrt{L}} + \\
& + \frac{\sqrt{6}(E_{ii} - E_{if})^2 (r_1^2 + 2r_1 (r_3 - 2r_2) - 4r_2 (r_2 + 2r_3)) \sin\left(\frac{5\pi H}{L}\right)}{90 \pi P_u \sqrt{L}} + \\
& + \frac{\sqrt{6}(E_{ii} - E_{if})^2 (2r_1^2 + r_1 (r_2 + 4r_3) + r_2^2 - r_2 r_3) \sin\left(\frac{4\pi H}{L}\right)}{36 \pi P_u \sqrt{L}} + \\
& + \frac{\sqrt{6}(E_{ii} - E_{if})^2 (6r_1^2 + 4r_1 (r_2 + 4r_3) + 6r_2^2 + 16r_2 r_3 + 15r_3^2) \sin\left(\frac{3\pi H}{L}\right)}{54 \pi P_u \sqrt{L}} + \\
& - \frac{\sqrt{6}(E_{ii} - E_{if})^2 (3r_1^2 + r_1 (4r_3 - 3r_2) - 4r_2^2 - 6r_2 r_3) \sin\left(\frac{2\pi H}{L}\right)}{18 \pi P_u \sqrt{L}} + \\
& + \frac{\sqrt{6}(E_{ii} - E_{if})^2 (9r_1^2 + 12r_1 r_3 - r_2 (3r_2 + 8r_3)) \sin\left(\frac{\pi H}{L}\right)}{18 \pi P_u \sqrt{L}} + \\
& \left. - \frac{\sqrt{6}(E_{ii} - E_{if})^2 H (3r_1^2 + 3r_1 (r_2 + 2r_3) + 3r_2^2 + 6r_2 r_3 + 5r_3^2)}{9 \pi P_u \sqrt{L^3}} \right) = 0
\end{aligned} \tag{3.14c}$$

Para obter as freqüências naturais e os respectivos modos de vibração é preciso que as equações de movimento, Eqs. (3.14), sejam linearizadas. Assim, para realizar tal linearização, dado que r_1 , r_2 e r_3 são as coordenadas do problema, desprezam-se os termos em que a potência de qualquer destas variáveis seja maior que um e/ou exista a multiplicação entre qualquer uma delas. Além disso, serão admitidas as soluções $r_j(t) = \bar{r}_j e^{i\omega t}$, sendo \bar{r}_j constantes que irão definir os modos de vibração e ω a freqüência natural da coluna.

Desta forma, obtém-se o seguinte sistema de equações algébricas:

$$\begin{aligned}
& -m\omega^2 \bar{r}_1 - \frac{2m\omega^2 \bar{r}_2}{3} - \frac{2m\omega^2 \bar{r}_3}{3} + \frac{E_{ii} \bar{r}_3 \sin\left(\frac{4\pi H}{L}\right)}{12\pi} + \frac{E_{ii} \bar{r}_2 \sin\left(\frac{3\pi H}{L}\right)}{9\pi} + \\
& - \frac{2E_{ii} \bar{r}_3 \sin\left(\frac{3\pi H}{L}\right)}{9\pi} + \frac{E_{ii} \bar{r}_1 \sin\left(\frac{2\pi H}{L}\right)}{6\pi} + \frac{E_{ii} \bar{r}_3 \sin\left(\frac{2\pi H}{L}\right)}{6\pi} + \\
& - \frac{E_{ii} \bar{r}_2 \sin\left(\frac{2\pi H}{L}\right)}{3\pi} - \frac{4E_{ii} \bar{r}_1 \sin\left(\frac{\pi H}{L}\right)}{3\pi} - \frac{2E_{ii} \bar{r}_3 \sin\left(\frac{\pi H}{L}\right)}{3\pi} + \\
& - \frac{E_{ii} \bar{r}_2 \sin\left(\frac{\pi H}{L}\right)}{3\pi} + \frac{2E_{ii} H \bar{r}_3}{3L} + \frac{E_{ii} H \bar{r}_1}{L} + \frac{\pi^4 E I \bar{r}_1}{3L^4} - \frac{\pi^2 P \bar{r}_1}{3L^2} + \frac{2E_{ii} H \bar{r}_2}{3L} = 0
\end{aligned} \tag{3.15a}$$

$$\begin{aligned}
& -m\omega^2 \bar{r}_2 - \frac{2m\omega^2 \bar{r}_1}{3} - \frac{2m\omega^2 \bar{r}_3}{3} + \frac{E_{ii} \bar{r}_3 \sin\left(\frac{5\pi H}{L}\right)}{15\pi} + \frac{E_{ii} \bar{r}_2 \sin\left(\frac{4\pi H}{L}\right)}{12\pi} + \\
& + \frac{E_{ii} \bar{r}_1 \sin\left(\frac{3\pi H}{L}\right)}{9\pi} - \frac{2E_{ii} \bar{r}_3 \sin\left(\frac{3\pi H}{L}\right)}{9\pi} - \frac{2E_{ii} \bar{r}_2 \sin\left(\frac{2\pi H}{L}\right)}{3\pi} + \\
& - \frac{E_{ii} \bar{r}_1 \sin\left(\frac{2\pi H}{L}\right)}{3\pi} - \frac{E_{ii} \bar{r}_3 \sin\left(\frac{2\pi H}{L}\right)}{3\pi} - \frac{E_{ii} \bar{r}_1 \sin\left(\frac{\pi H}{L}\right)}{3\pi} + \frac{E_{ii} \bar{r}_3 \sin\left(\frac{\pi H}{L}\right)}{3\pi} + \\
& + \frac{E_{ii} H \bar{r}_2}{L} + \frac{16\pi^4 E I \bar{r}_2}{3L^4} - \frac{4\pi^4 P \bar{r}_2}{3L^2} + \frac{2E_{ii} H \bar{r}_1}{3L} + \frac{2E_{ii} H \bar{r}_3}{3L} = 0
\end{aligned} \tag{3.15b}$$

$$\begin{aligned}
& -m\omega^2\bar{r}_3 - \frac{2m\omega^2\bar{r}_1}{3} - \frac{2m\omega^2\bar{r}_2}{3} + \frac{E_{\bar{u}}\bar{r}_3 \sin\left(\frac{6\pi H}{L}\right)}{18\pi} + \frac{E_{\bar{u}}\bar{r}_2 \sin\left(\frac{5\pi H}{L}\right)}{15\pi} + \\
& + \frac{E_{\bar{u}}\bar{r}_1 \sin\left(\frac{4\pi H}{L}\right)}{12\pi} - \frac{2E_{\bar{u}}\bar{r}_2 \sin\left(\frac{3\pi H}{L}\right)}{9\pi} - \frac{2E_{\bar{u}}\bar{r}_1 \sin\left(\frac{3\pi H}{L}\right)}{9\pi} + \\
& - \frac{4E_{\bar{u}}\bar{r}_3 \sin\left(\frac{3\pi H}{L}\right)}{9\pi} - \frac{E_{\bar{u}}\bar{r}_2 \sin\left(\frac{2\pi H}{L}\right)}{3\pi} + \frac{E_{\bar{u}}\bar{r}_1 \sin\left(\frac{2\pi H}{L}\right)}{6\pi} + \frac{E_{\bar{u}}\bar{r}_2 \sin\left(\frac{\pi H}{L}\right)}{3\pi} + \\
& - \frac{2E_{\bar{u}}\bar{r}_1 \sin\left(\frac{\pi H}{L}\right)}{3\pi} + \frac{2E_{\bar{u}}H\bar{r}_2}{3L} + \frac{2E_{\bar{u}}H\bar{r}_1}{3L} + \frac{E_{\bar{u}}H\bar{r}_3}{L} + \frac{27\pi^4 E I \bar{r}_3}{L^4} - \frac{3\pi^2 P \bar{r}_3}{L^2} = 0
\end{aligned} \tag{3.15c}$$

As equações algébricas, Eq. (3.15), serão reescritas na forma matricial da seguinte maneira:

$$[K - \omega^2 M] \begin{bmatrix} \bar{r}_1 \\ \bar{r}_2 \\ \bar{r}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.16}$$

sendo $[M]$ a matriz de massa e $[K]$ a matriz de rigidez, dadas por:

$$[M] = \begin{bmatrix} m & \frac{2m}{3} & \frac{2m}{3} \\ \frac{2m}{3} & m & \frac{2m}{3} \\ \frac{2m}{3} & \frac{2m}{3} & m \end{bmatrix} \tag{3.17}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \tag{3.18}$$

em que,

$$k_{11} = \frac{E_{\bar{u}} \sin\left(\frac{2\pi H}{L}\right)}{6\pi} - \frac{4E_{\bar{u}} \sin\left(\frac{\pi H}{L}\right)}{3\pi} + \frac{3E_{\bar{u}}HL^3 + \pi^2(\pi^2 EI - L^2 P)}{3L^4} \tag{3.18a}$$

$$k_{12} = \frac{E_{\bar{i}} \sin\left(\frac{3\pi H}{L}\right)}{9\pi} - \frac{E_{\bar{i}} \sin\left(\frac{2\pi H}{L}\right)}{3\pi} - \frac{E_{\bar{i}} \sin\left(\frac{\pi H}{L}\right)}{3\pi} + \frac{2E_{\bar{i}}H}{3L} \quad (3.18b)$$

$$k_{13} = \frac{E_{\bar{i}} \sin\left(\frac{4\pi H}{L}\right)}{12\pi} - \frac{2E_{\bar{i}} \sin\left(\frac{3\pi H}{L}\right)}{9\pi} + \frac{E_{\bar{i}} \sin\left(\frac{2\pi H}{L}\right)}{6\pi} - \frac{2E_{\bar{i}} \sin\left(\frac{\pi H}{L}\right)}{3\pi} + \frac{2E_{\bar{i}}H}{3L} \quad (3.18c)$$

$$k_{21} = \frac{E_{\bar{i}} \sin\left(\frac{3\pi H}{L}\right)}{9\pi} - \frac{E_{\bar{i}} \sin\left(\frac{2\pi H}{L}\right)}{3\pi} - \frac{E_{\bar{i}} \sin\left(\frac{\pi H}{L}\right)}{3\pi} + \frac{2E_{\bar{i}}H}{3L} \quad (3.18d)$$

$$k_{22} = \frac{E_{\bar{i}} \sin\left(\frac{4\pi H}{L}\right)}{12\pi} - \frac{2E_{\bar{i}} \sin\left(\frac{2\pi H}{L}\right)}{3\pi} + \frac{2E_{\bar{i}}HL^3 + 4\pi^2(4\pi^2EI + L^2P)}{3L^4} \quad (3.18e)$$

$$k_{23} = \frac{E_{\bar{i}} \sin\left(\frac{5\pi H}{L}\right)}{15\pi} - \frac{2E_{\bar{i}} \sin\left(\frac{3\pi H}{L}\right)}{9\pi} - \frac{E_{\bar{i}} \sin\left(\frac{2\pi H}{L}\right)}{3\pi} + \frac{E_{\bar{i}} \sin\left(\frac{\pi H}{L}\right)}{3\pi} + \frac{2E_{\bar{i}}H}{3L} \quad (3.19f)$$

$$k_{31} = \frac{E_{\bar{i}} \sin\left(\frac{4\pi H}{L}\right)}{12\pi} - \frac{2E_{\bar{i}} \sin\left(\frac{3\pi H}{L}\right)}{9\pi} + \frac{E_{\bar{i}} \sin\left(\frac{2\pi H}{L}\right)}{6\pi} - \frac{2E_{\bar{i}} \sin\left(\frac{\pi H}{L}\right)}{3\pi} + \frac{2E_{\bar{i}}H}{3L} \quad (3.18g)$$

$$k_{32} = \frac{E_{\bar{i}} \sin\left(\frac{5\pi H}{L}\right)}{15\pi} - \frac{2E_{\bar{i}} \sin\left(\frac{3\pi H}{L}\right)}{9\pi} - \frac{E_{\bar{i}} \sin\left(\frac{2\pi H}{L}\right)}{3\pi} + \frac{E_{\bar{i}} \sin\left(\frac{\pi H}{L}\right)}{3\pi} + \frac{2E_{\bar{i}}H}{3L} \quad (3.18h)$$

$$k_{33} = \frac{E_{\bar{i}} \sin\left(\frac{6\pi H}{L}\right)}{18\pi} - \frac{4E_{\bar{i}} \sin\left(\frac{3\pi H}{L}\right)}{9\pi} + \frac{E_{\bar{i}}HL^3 + 3\pi^2(9\pi^2EI - L^2P)}{L^4} \quad (3.18i)$$

Observe que as matrizes $[K]$ e $[M]$ são simétricas, o que será bem útil para os cálculos adiantes. Para obter as frequências naturais e os respectivos modos de vibração da coluna, deve-se considerar que o determinante da matriz que pré-multiplica o vetor $\{\bar{r}_j\}$ na Eq.

(3.18) seja nulo. Então, através deste procedimento, é possível obter as soluções não-triviais da Eq. (3.16). Assim,

$$\det(K - \omega^2 M) = 0 \quad (3.19)$$

Note, na Eq. (3.19), que se trata de um problema de autovalor em que ω^2 representa os autovalores, isto é, as freqüências naturais da coluna e o vetor $\{\bar{r}_j\}$ representa os autovetores para cada autovalor, ou seja, os parâmetros para as autofunções que definirão os modos de vibração.

A resolução da Eq. (3.19) resulta na equação de freqüência (ou equação característica) do problema. Para efeito de simplificação dos cálculos, reescreve-se $\omega^2 = \lambda$, resultando em:

$$\begin{aligned} & 7m^3 \lambda^3 - 3m^2 \lambda^2 (5k_{11} + 5k_{22} + 5k_{33} - 4k_{12} - 4(k_{13} + k_{23})) + \\ & + 9m \lambda \left(k_{11}(3k_{22} + 3k_{33} - 4k_{23}) + k_{22}(3k_{33} - 4k_{13}) - 4k_{33}k_{12} + \right. \\ & \left. - 3k_{12}^2 + 4k_{12}(k_{13} + k_{23}) - 3k_{13}^2 + 4k_{13}k_{23} - 3k_{23}^2 \right) + \\ & - 27(k_{11}(k_{22}k_{33} - k_{23}^2) - k_{22}k_{13}^2 - k_{33}k_{12}^2 + 2k_{12}k_{13}k_{23}) = 0 \end{aligned} \quad (3.20)$$

Após algumas operações algébricas, reescreve-se a equação característica, Eq. (3.20), de modo a obter uma melhor representação da mesma, isto é:

$$\lambda^3 + \mu_1 \lambda^2 + \mu_2 \lambda + \mu_3 = 0 \quad (3.21)$$

em que:

$$\mu_1 = -\frac{3(5k_{11} + 5k_{22} + 5k_{33} - 4k_{12} - 4(k_{13} + k_{23}))}{7m} \quad (3.21a)$$

$$\mu_2 = \frac{9m \left(k_{11}(3k_{22} + 3k_{33} - 4k_{23}) + k_{22}(3k_{33} - 4k_{13}) - 4k_{33}k_{12} + \right.}{7m^2} \left. - 3k_{12}^2 + 4k_{12}(k_{13} + k_{23}) - 3k_{13}^2 + 4k_{13}k_{23} - 3k_{23}^2 \right) \quad (3.21b)$$

$$\mu_3 = -\frac{27(k_{11}(k_{22}k_{33} - k_{23}^2) - k_{22}k_{13}^2 - k_{33}k_{12}^2 + 2k_{12}k_{13}k_{23})}{7m^3} \quad (3.21c)$$

Resolvendo a Eq. (3.21), que é um polinômio de terceiro grau em λ , obtêm-se suas raízes, a saber:

$$\lambda_1 = -\frac{2\sqrt{(\mu_1^2 - 3\mu_2)} \cos\left(\frac{1}{3} \cos^{-1}\left(\frac{2\mu_1^3 - 9\mu_1\mu_2 + 27\mu_3}{\sqrt{(2(\mu_1^2 - 3\mu_2))^3}}\right)\right)}{3} - \frac{\mu_1}{3} \quad (3.22a)$$

$$\lambda_2 = -\frac{2\sqrt{(\mu_1^2 - 3\mu_2)} \sin\left(-\frac{1}{3} \sin^{-1}\left(\frac{2\mu_1^3 - 9\mu_1\mu_2 + 27\mu_3}{\sqrt{(2(\mu_1^2 - 3\mu_2))^3}}\right)\right)}{3} - \frac{\mu_1}{3} \quad (3.22b)$$

$$\lambda_3 = -\frac{2\sqrt{(\mu_1^2 - 3\mu_2)} \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{1}{3} \sin^{-1}\left(\frac{2\mu_1^3 - 9\mu_1\mu_2 + 27\mu_3}{\sqrt{(2(\mu_1^2 - 3\mu_2))^3}}\right)\right)}{3} - \frac{\mu_1}{3} \quad (3.22c)$$

Finalmente para obter as freqüências naturais da coluna, faz-se:

$$\omega_j = \sqrt{\lambda_j} \quad ; (j=1, 2 \text{ e } 3) \quad (3.23)$$

sendo o menor valor de ω_j corresponde a primeira freqüência natural e, assim, sucessivamente. Para obter os autovetores substitui-se a respectiva ω_j da Eq. (3.23) na Eq. (3.16). A seguir, adota-se um valor arbitrário para qualquer um dos \bar{r}_j , por exemplo, $\bar{r}_1 = 1$, do vetor $\{\bar{r}_j\}$, visando obter o valor dos outros \bar{r}_{j-1} . De modo geral, faz-se:

$$[K - \omega_j^2 M] \begin{bmatrix} 1 \\ \bar{r}_2 \\ \bar{r}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ; (j=1, 2 \text{ e } 3) \quad (3.24)$$

Os valores de \bar{r}_j obtidos utilizando a Eq. (3.24) para cada freqüência natural ω_j , são substituídos na solução admitida, isto é, $r_j(t) = \bar{r}_j e^{i\omega_j t}$. A seguir, a expressão resultante será

substituída na função de deflexão lateral $w(x,t=0)$, Eq. (3.12), de onde, finalmente, calcula-se as autofunções $w(x)$ que definem os modos de vibração da coluna, a saber:

$$w(x) = \frac{\sqrt{6}}{3\sqrt{L}} \left[\bar{r}_1 \left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{L} x\right) \right) + \bar{r}_2 \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi}{L} x\right) \right) + \bar{r}_3 \left(1 - \cos\left(\frac{3\pi}{L} x\right) \right) \right] \quad (3.25)$$

Com o intuito de tornar o comprimento da coluna unitário, toma-se o parâmetro adimensional ξ , tal que, $\xi=x/L$ e normalizam-se as autofunções, Eq. (3.25), para que a amplitude máxima de cada modo seja sempre unitária, isto é:

$$\bar{r}_j^{norm} = \frac{\bar{r}_j}{\sqrt{\sum \bar{r}_j^2}}; (j=1, 2 \text{ e } 3) \quad (3.26)$$

onde \bar{r}_j^{norm} representa os elementos do vetor $\{\bar{r}_j\}$ normalizados. Resultando em:

$$w(\xi) = \frac{\sqrt{6}}{3\sqrt{L}} \left[\bar{r}_1^{norm} \left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{L} x\right) \right) + \bar{r}_2^{norm} \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi}{L} x\right) \right) + \bar{r}_3^{norm} \left(1 - \cos\left(\frac{3\pi}{L} x\right) \right) \right] \quad (3.27)$$

Em relação à estabilidade do problema, tem-se que a estrutura analisada possui diversas cargas críticas as quais estão associadas com os autovalores obtidos, sendo que a cada carga crítica está relacionado um modo crítico da coluna ou modo de flambagem dado pelas autofunções. Em outras palavras, a carga crítica representa o valor para o qual a estrutura, a partir dele, perde sua estabilidade.

Na seção seguinte será apresentada a equação de movimento completa para a coluna.

3.3. Equação de Movimento da Coluna

Na seção anterior obteve-se parte da equação de movimento para a coluna, representada pelas Eqs. (3.14). Nesta seção será feito o desenvolvimento das outras parcelas da equação de Lagrange, Eq. (2.4), visando obter a equação de movimento completa para a coluna abordada neste trabalho.

Em relação à parcela de amortecimento, substituindo a função de deflexão lateral, Eq. (3.12) na Eq. (2.27) e resolvendo as integrais presentes, obtém-se:

$$\begin{aligned}
F_d = & \frac{(\beta_e - \beta_d)\dot{r}_3 \sin\left(\frac{6\pi H}{L}\right)}{36\pi} + \frac{(\beta_e - \beta_d)\dot{r}_2\dot{r}_3 \sin\left(\frac{5\pi H}{L}\right)}{15\pi} + \\
& + \frac{(\beta_e - \beta_d)\sin\left(\frac{4\pi H}{L}\right)(2\dot{r}_3\dot{r}_1 + \dot{r}_2^2)}{24\pi} + \\
& + \frac{(\beta_d - \beta_e)\sin\left(\frac{3\pi H}{L}\right)(\dot{r}_1(2\dot{r}_3 - \dot{r}_2) + 2\dot{r}_3(\dot{r}_3 + \dot{r}_2))}{9\pi} + \\
& + \frac{(\beta_e - \beta_d)\sin\left(\frac{2\pi H}{L}\right)(\dot{r}_1^2 + 2\dot{r}_1(\dot{r}_3 - 2\dot{r}_2) - 4\dot{r}_2(\dot{r}_3 + \dot{r}_2))}{12\pi} + \\
& + \frac{(\beta_d - \beta_e)\sin\left(\frac{\pi H}{L}\right)(2\dot{r}_1^2 + \dot{r}_1(2\dot{r}_3 + \dot{r}_2) - \dot{r}_2\dot{r}_3)}{3\pi} + \\
& + \frac{(3\dot{r}_1^2 + 4\dot{r}_1(\dot{r}_3 + \dot{r}_2) + 3\dot{r}_3^2 + 4\dot{r}_2\dot{r}_3 + 3\dot{r}_2^2)(H(\beta_e - \beta_d) + L\beta_d)}{6L} \quad (3.28)
\end{aligned}$$

A seguir, aplicando na equação de Lagrange, Eq. (2.4), resulta em:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_d}{\partial \dot{r}_1} = & \frac{(\beta_e - \beta_d)\dot{r}_3 \sin\left(\frac{4\pi H}{L}\right)}{12\pi} + \frac{(\beta_d - \beta_e)\sin\left(\frac{3\pi H}{L}\right)(2\dot{r}_3 - \dot{r}_2)}{9\pi} + \\
& + \frac{(\beta_e - \beta_d)\sin\left(\frac{2\pi H}{L}\right)(\dot{r}_1 + \dot{r}_3 - 2\dot{r}_2)}{6\pi} + \frac{(\beta_d - \beta_e)\sin\left(\frac{\pi H}{L}\right)(4\dot{r}_1 + 2\dot{r}_3 + \dot{r}_2)}{3\pi} + \quad (3.29a) \\
& + \frac{(3\dot{r}_1 + 2(\dot{r}_3 + \dot{r}_2))(H(\beta_e - \beta_d) + L\beta_d)}{3L}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_d}{\partial \dot{r}_2} = & \frac{(\beta_e - \beta_d) \dot{r}_3 \sin\left(\frac{5\pi H}{L}\right)}{15\pi} + \frac{(\beta_e - \beta_d) \dot{r}_2 \sin\left(\frac{4\pi H}{L}\right)}{12\pi} + \\
& + \frac{(\beta_e - \beta_d) \sin\left(\frac{3\pi H}{L}\right) (\dot{r}_1 + 2\dot{r}_3)}{9\pi} + \frac{(\beta_d - \beta_e) \sin\left(\frac{2\pi H}{L}\right) (\dot{r}_1 + \dot{r}_3 + 2\dot{r}_2)}{3\pi} + \quad (3.29b) \\
& + \frac{(\beta_d - \beta_e) \sin\left(\frac{\pi H}{L}\right) (\dot{r}_1 - \dot{r}_3)}{3\pi} + \frac{(2\dot{r}_1 + 3\dot{r}_2 + 2\dot{r}_3)(H(\beta_e - \beta_d) + L\beta_d)}{3L}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_d}{\partial \dot{r}_3} = & \frac{(\beta_e - \beta_d) \dot{r}_3 \sin\left(\frac{6\pi H}{L}\right)}{18\pi} + \frac{(\beta_e - \beta_d) \dot{r}_2 \sin\left(\frac{5\pi H}{L}\right)}{15\pi} + \\
& + \frac{(\beta_e - \beta_d) \dot{r}_1 \sin\left(\frac{4\pi H}{L}\right)}{12\pi} + \frac{2(\beta_d - \beta_e) \sin\left(\frac{3\pi H}{L}\right) (\dot{r}_1 + 2\dot{r}_3 + \dot{r}_2)}{9\pi} + \quad (3.29c) \\
& + \frac{(\beta_e - \beta_d) \sin\left(\frac{2\pi H}{L}\right) (\dot{r}_1 - 2\dot{r}_2)}{6\pi} + \frac{(\beta_d - \beta_e) \sin\left(\frac{\pi H}{L}\right) (2\dot{r}_1 - \dot{r}_2)}{3\pi} + \\
& + \frac{(2\dot{r}_1 + 2\dot{r}_2 + 3\dot{r}_3)(H(\beta_e - \beta_d) + L\beta_d)}{3L}
\end{aligned}$$

A contribuição da força de excitação externa atuando na coluna, Eq. (2.28), é obtida substituindo a função de deflexão lateral, Eq. (3.12), nesta e resolvendo as integrais presentes, resultando em:

$$\begin{aligned}
F_{wp} = & \frac{A_0 \sqrt{6L} \cos(\Omega t) \sin\left(\frac{3\pi H}{L}\right) r_3}{9\pi} + \frac{A_0 \sqrt{6L} \cos(\Omega t) \sin\left(\frac{2\pi H}{L}\right) r_2}{6\pi} + \\
& \frac{A_0 \sqrt{6L} \cos(\Omega t) \sin\left(\frac{\pi H}{L}\right) r_1}{3\pi} + \frac{A_0 \sqrt{6}(L-H)(r_1 + r_2 + r_3) \cos(\Omega t)}{3\sqrt{L}} \quad (3.30)
\end{aligned}$$

Finalmente, substituindo a Eq. (3.30) na Equação de Lagrange, Eq. (2.4), obtêm-se:

$$\frac{\partial F_{wp}}{\partial r_1} = \frac{A_0 \sqrt{6L} \cos(\Omega t) \sin\left(\frac{\pi H}{L}\right)}{3\pi} + \frac{A_0 \sqrt{6}(L-H) \cos(\Omega t)}{3\sqrt{L}} \quad (3.31a)$$

$$\frac{\partial F_{wp}}{\partial r_2} = \frac{A_0 \sqrt{6L} \cos(\Omega t) \sin\left(\frac{2\pi H}{L}\right)}{6\pi} + \frac{A_0 \sqrt{6}(L-H) \cos(\Omega t)}{3\sqrt{L}} \quad (3.31b)$$

$$\frac{\partial F_{wp}}{\partial r_3} = \frac{A_0 \sqrt{6L} \cos(\Omega t) \sin\left(\frac{3\pi H}{L}\right)}{9\pi} + \frac{A_0 \sqrt{6}(L-H) \cos(\Omega t)}{3\sqrt{L}} \quad (3.31c)$$

Para escrever a equação geral do movimento, ou equação de Euler-Lagrange para a coluna semi-enterrada, considera-se a soma da Eq. (3.14) com Eq. (3.29) igualando-as a Eq. (3.31). Com isso, chega-se a um sistema composto por três equações diferenciais ordinárias acopladas não-lineares.

As equações de movimento só poderão ser resolvidas de maneira numérica ou utilizando algum método de perturbação, dado que, até o momento, estas equações não possuem solução analítica exata.

Para os casos onde seja necessária a solução destas equações, pode-se aplicar o método de Runge-Kutta de quarta ordem, que traz resultados bem significativos para resolver tal tipo de problema (QUEIROZ & SANTEE, 2006), além de ser de fácil codificação.

Desta forma, torna-se necessário reescrever o conjunto de equações em um sistema de equações de primeira ordem, sendo que ao todo são obtidas seis equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, onde se aplica o método sugerido e obtém-se a solução desejada.

CAPÍTULO IV

PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO – CONCEITOS IMPORTANTES

A idéia fundamental da otimização é melhorar um processo sem ter que testar todas as possibilidades possíveis. Seja uma função de n variáveis que representa o problema, o objetivo é determinar quais os parâmetros ou variáveis de projeto, que tornam tal processo ótimo, respeitando as restrições impostas ao problema. Portanto, esta metodologia apresenta vantagens como diminuir o tempo destinado ao projeto e permitir o tratamento de uma grande quantidade de variáveis e restrições.

Assim, os métodos de otimização procuram dentro de um espaço de busca, que é limitado pelas restrições, qual valor torna a função objetivo ótima. Nem sempre é garantido encontrar o melhor valor da função, visto que isto depende, entre outras coisas, da função tratada. Também, o método escolhido para realizar a tarefa de otimização traz forte influência sob esta característica.

Adiante será feita uma revisão sobre otimização, discutindo a formulação geral do problema, a metodologia adotada para resolver problemas multi-objetivos e o tratamento de problemas restritos. Dois métodos naturais serão estudados, baseados em população, a saber: Algoritmo Genético e a Evolução Diferencial.

4.1. Formulação Geral do Problema de Otimização

Antes de apresentar a forma geral de um problema de otimização, serão definidos os diversos conceitos relacionados à otimização (DEB, 1995). Em outras palavras:

- Variáveis de projeto ou de decisão: São os parâmetros do problema que podem ser alterados de forma a melhorar o sistema durante o processo de otimização. Tais variáveis podem ser discretas ou contínuas;

- Função objetivo: Esta função deve quantificar o que se procura otimizar, depende das variáveis de projeto escolhidas, devendo ser usada como uma medida de eficiência do projeto. Assim a escolha de tal função deve ser feita com total empenho e cuidado, podendo ser unidimensional (apenas uma variável de projeto) ou multidimensional (mais de uma variável de projeto), também se classifica em simples (quando apresenta apenas um objetivo) ou multi-objetivo (quando se têm mais de um objetivo).
- Espaço de busca: Região onde se encontram as possíveis soluções do problema;
- Restrições: São as limitações impostas ao problema (igualdades ou desigualdades) e que delimitam o espaço de busca;
- Restrições laterais: Delimitam as variáveis de projeto e definem, junto com as restrições, o espaço de busca;
- Domínio de otimização: A parte do domínio do problema em que as restrições são respeitadas é denominada domínio viável, enquanto que a parte do domínio em que alguma restrição não é respeitada é denominada domínio inviável;
- Solução ótima: Conjunto formado pelo ponto ótimo (vetor das variáveis de projeto que caracterizam a melhor solução, ou solução ótima) e pelo correspondente valor da função objetivo.

Sejam as funções: $f: R^n \rightarrow R$, $g: R^n \rightarrow R$, $h: R^n \rightarrow R$. O problema geral de otimização é descrito como segue:

$$\text{Minimizar } f(X), \text{ com } X = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \text{ e } X \in R^n \quad (4.1)$$

sujeito a:

$$\begin{cases} g_i(X) \leq 0, & i = 1, 2, \dots, k_g \\ h_j(X) = 0, & j = 1, 2, \dots, k_h \\ x_{n_v}^{\text{inf}} \leq x_{n_v} \leq x_{n_v}^{\text{sup}}, & n_v = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (4.2)$$

sendo $f(X)$ a função objetivo; X é o vetor de variáveis de projeto; R^n define o espaço de busca; $g_i(X)$ são as restrições de desigualdade; $h_j(X)$ são as restrições de igualdade; $x_{n_v}^{\text{inf}}$ e $x_{n_v}^{\text{sup}}$ representam, respectivamente, o limite lateral inferior e superior para cada uma das variáveis de projeto.

Para transformar o problema de minimização em maximização, basta multiplicar $f(X)$ por -1 , pois a solução para um problema de minimização é a mesma para um problema de maximização, apenas com sinal trocado (IZMAILOV & SOLODOV, 2005).

As funções (objetivo, de restrições) que fazem parte do problema de otimização podem ser lineares ou não-lineares, convexas, contínuas no intervalo definido, descontínuas em tal intervalo, apresentar ruídos, serem diferenciáveis, não-diferenciáveis, implícitas, explícitas, unimodais, multimodais, etc.

Na Fig. 4.1 é apresentado um exemplo de problema de otimização bidimensional e restrito, isto é, composto de duas variáveis de projeto (x_1 e x_2) e quatro restrições de desigualdade (g_1, g_2, g_3, g_4).

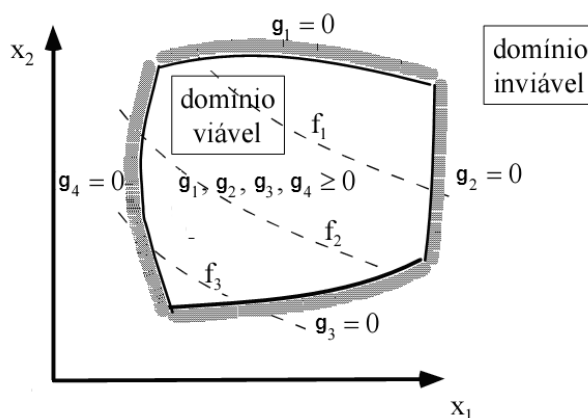


Figura 4.1 - Problema de otimização bidimensional e restrito.

Na grande maioria dos problemas não é possível determinar, com exatidão, se o mínimo encontrado é global, apenas quando se trabalha com funções convexas, pode-se ter uma garantia de tal mínimo. Para exemplificar com maior clareza a diferença entre os mínimos de uma função considere a Fig. 4.2. Nesta figura, o ponto marcado como “mínimo global” é o ponto em que a função objetivo assume seu menor valor dentro do espaço de busca. Porém, geralmente, existe uma grande dificuldade em encontrar tal ponto pela complexidade envolvida na tarefa de otimização.

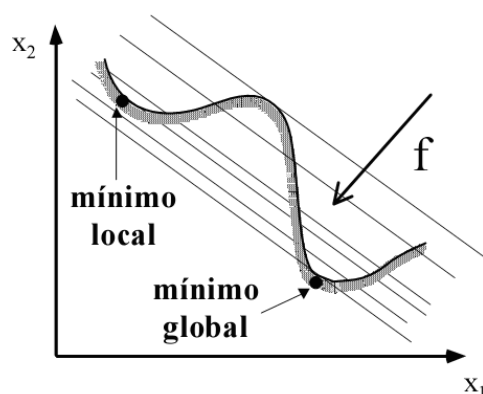


Figura 4.2 - Exemplo de mínimo local e global.

Quando o ponto de mínimo faz com que a restrição se anule, tem-se restrições ativas no final do processo de otimização. Caso contrário tem-se que tais restrições são inativas e poderão ser eliminadas da tarefa de otimização sem interferir na solução final. Entretanto, como é desconhecida a solução final do problema no início do processo, não é tão óbvio assimilar quais restrições, realmente, irão ou não interferir no problema.

Dado a complexidade existente em muitos problemas, vários deles apresentam mais de um objetivo a ser otimizado simultaneamente, sendo que, na maioria das vezes, estes objetivos são conflitantes entre si. Assim, a melhora de um ocasiona a piora em outro, gerando uma *otimização de compromisso* ou *ótimo de Pareto* (KOSKI, 1981; HALEJA & LIN, 1992), representado por conjunto de soluções não inferiores, isto é, soluções para as quais não existem maneiras de melhorar uma das funções sem piorar pelo menos alguma outra.

A formulação de uma função multi-objetivo deve ser feita com cuidado de modo a encontrar as variáveis de projeto que satisfaçam as restrições, otimizando um vetor de funções objetivo cujos elementos são representados por:

$$\text{Minimizar } f(X) = [f_1(X), f_2(X), \dots, f_j(X)] \quad (4.3)$$

Dentre as técnicas existentes para lidar com problemas multi-objetivos, aborda-se, neste trabalho, o Método da Ponderação dos Objetivos (OLIVEIRA, 2005). Neste método, os objetivos são ponderados através de pesos, obtendo-se uma função objetivo escalar.

Seria muito interessante que cada peso indicasse a importância do objetivo que o acompanha, porém, esta não é uma tarefa elementar. Também, faz-se necessário normalizar cada componente da função objetivo de modo a se ter as variáveis dentro da mesma ordem de grandeza. Portanto, define-se a função objetivo escalar como:

$$f(X) = \sum_{j=1}^J p_j \frac{f_j(X)}{f_j^0} \quad (4.4)$$

Sendo que a soma de todos os pesos (p_j) deve ser igual a 1. A solução ideal f_j^0 é obtida otimizando cada função objetivo $f_j(X)$ separadamente de acordo com as restrições do problema original, isto é, Eq. (4.2).

4.1.1. Classificação dos métodos de otimização

Existem diversos métodos de otimização sendo, a grande maioria, organizados em dois grandes grupos: métodos determinísticos e métodos baseados em processos naturais (estocásticos). A Fig. 4.3 exemplifica com clareza boa parte destes métodos, apontando o grupo a que cada pertence.

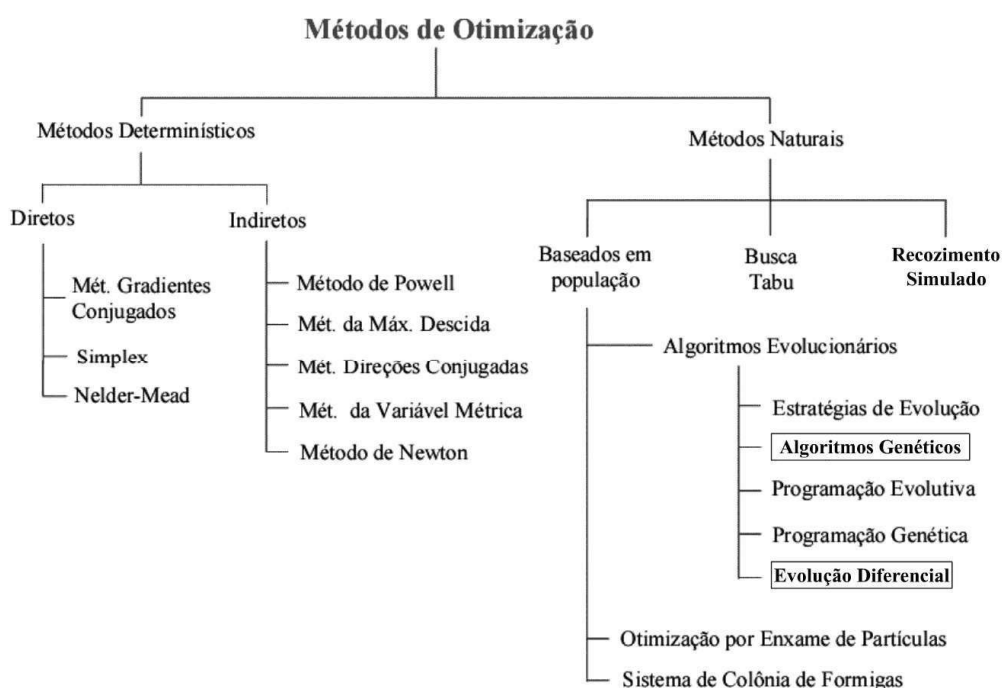


Figura 4.3 - Classificação dos principais métodos de otimização (OLIVEIRA, 2006).

Os métodos determinísticos utilizam-se de informações relacionadas ao cálculo de derivadas da função objetivo, assim, dependem de características de tal função para obter bons resultados, como a função ser contínua, convexa e com um único ponto de mínimo ou máximo (unimodal). (FOX, 1971; VANDERPLAATS, 1999).

Uma característica dos métodos de otimização é que alguns métodos obtêm melhores resultados quando aplicados a um problema do que outros, o que torna imprescindível testar diferentes métodos para resolver distintos problemas.

Dentre os métodos determinísticos, existem dois subgrupos principais (vide Fig. 4.3) que são:

- a) Métodos Diretos: Utilizam somente os valores da função objetivo e das restrições com o intuito de conduzir a estratégia de otimização. Porém, são métodos lentos, dado que fazem muitas avaliações da função objetivo;
- b) Métodos Indiretos: Tais métodos utilizam informações da primeira e/ou a segunda derivada da função objetivo e/ou restrições com o intuito de conduzir o processo de otimização. Assim, o processo tende a convergir mais rapidamente, porém depende das derivadas que nem sempre são fáceis de serem obtidas.

Os métodos naturais baseiam-se em regras de probabilidade para obter a melhor solução de maneira “aleatória orientada”, utilizando apenas informações da função a ser otimizada. Assim, não dependem das características citadas pelos métodos determinísticos, então possuem, em linhas gerais, uma gama maior de problemas que podem solucionar (HAUPT & HAUPT, 1998; DEB, 2001; SARAMAGO & FARIA, 2001). Porém, deve-se ressaltar que necessitam de várias avaliações da função objetivo, aumentando o custo computacional.

Segundo a Fig. 4.3, dentro dos métodos naturais, têm-se três subgrupos, ou seja:

- a) Métodos Baseados em População: Como o próprio nome indica, tais métodos baseiam-se em população de indivíduos, sendo que cada indivíduo representa um ponto de busca no espaço das soluções viáveis. Assim, após a definição das variáveis de projeto e da função objetivo, faz-se uma codificação de tais variáveis e, então, realiza-se uma seqüência repetitiva de passos que consistem em avaliar, selecionar, recombinar e modificar os indivíduos, gerando, assim, novas populações;
- b) Busca Tabu: É uma metaheurística de melhoramento local que utiliza uma lista de movimentos proibidos para avançar em direção ao ótimo. Assim, Busca Tabu baseia-se em uma função de avaliação (objetivo) que escolhe, a cada iteração, o movimento com maior valor de função na vizinhança e que respeite as restrições (restrições tabu) da solução corrente. Portanto, a busca é restringida por uma estratégia de proibição, cuja função é controlar e atualizar uma lista (lista tabu), com o objetivo de evitar que seqüências de soluções sejam repetidas, até um número pré-determinado de iterações e, com isto induzir a exploração de novas regiões no espaço de busca;

- c) Recozimento Simulado: Faz uma analogia com o processo de recozimento (*annealing*) da metalurgia, ou seja, o metal é aquecido a altas temperaturas com o intuito de causar um choque violento em seus átomos. Se o metal for resfriado de forma brusca, tem-se que sua microestrutura tenderá a um estado aleatoriamente instável, porém, se o metal for resfriado de forma suficientemente lenta, o sistema procurará um ponto de equilíbrio caracterizado por uma microestrutura ordenada e estável. O processo computacional começa gerando um conjunto de números aleatórios para as variáveis de projeto, que dependem dos valores das temperaturas. A seguir, verificam-se os respectivos valores da função custo (nível de energia), sendo que os melhores valores definem o centro das iterações para a próxima temperatura. Após este passo, reduz-se a temperatura e repete-se o processo até que o critério de parada ou de convergência seja satisfeito.

Grande parte dos sistemas atuais é complexa, representados por funções altamente não-lineares, dificilmente diferenciáveis, apresentando descontinuidades e diversos pontos de mínimo ou máximo (entre outras problemas). Devido a estes fatores, os métodos determinísticos apresentam dificuldades em resolvê-los.

Diante disto e do grande avanço computacional que vem ocorrendo, as estratégias baseadas em métodos naturais ganham espaço de utilização devido à praticidade, simplicidade e bons resultados fornecidos. Apesar de que estes métodos exigem alto esforço computacional, devido ao elevado número de avaliações da função objetivo, possuem a capacidade de serem utilizados em processamento paralelo.

4.1.2. Critérios de convergência

É necessário definir critério(s) de parada ou de convergência para os métodos de otimização, visto decorrerem, geralmente, de um processo iterativo. Assim, definem-se os seguintes critérios, os quais podem ser utilizados separadamente ou em conjuntos (VANDERPLAATS, 1999):

- Número máximo de iterações;
- Número de iterações sem melhorar o processo de otimização;
- Variação absoluta da função objetivo, ou seja,

$$|f(X^j) - f(X^{j-1})| \leq \varepsilon_1 \quad (4.5)$$

- Variação relativa da função objetivo, ou seja,

$$\frac{|f(X^j) - f(X^{j-1})|}{\max[f(X^j), 10^{-10}]} \leq \varepsilon_2 \quad (4.6)$$

4.1.3. Funções de penalidade para problemas restritos

Diversos processos reais apresentam restrições de igualdade e/ou desigualdade e, como muitos métodos de otimização foram desenvolvidos para problemas irrestritos, torna-se necessário reescrever a função objetivo, trabalhando com um problema equivalente a um sem restrições.

Uma forma bastante usual é introduzir uma função de penalidade na função objetivo original com o intuito de limitar a violação das restrições presentes. Esta nova função objetivo passa a ser denominada função pseudo-objetivo e, toda vez que existir uma restrição ativa tal função é penalizada (MARTINEZ & SANTOS, 1995).

Várias são as técnicas existentes para inserir uma função de penalidade na função objetivo e, transformar o problema com restrição em um problema sem restrição. Uma das estratégias utilizadas consiste em criar a função pseudo-objetivo da seguinte maneira:

$$\varphi(X) = f(X) + k_p Pf(X) \quad (4.7)$$

$$Pf(X) = \left[\sum_{i=1}^I \{ \max[0, g_i(X)] \}^2 + \sum_{j=1}^J [h_j(X)]^2 \right] \quad (4.8)$$

sendo $f(X)$ a função objetivo original; k_p um escalar que determina a influência da penalidade; $Pf(X)$ a função de penalidade descrita de acordo com a Eq. (4.8); $g_i(X)$ e $h_j(X)$ são, respectivamente, as restrições de desigualdade e igualdade.

As Eqs. (4.7) e (4.8) determinam o método conhecido como método da função de Penalidade Exterior. Este método penaliza a função objetivo somente quando as restrições são violadas.

Em relação ao escalar k_p , tem que se adotado um valor pequeno para o mesmo faz com que a função pseudo-objetivo seja facilmente otimizada, porém podem ocorrer violações das restrições. Caso seja escolhido um valor grande para k_p , as restrições serão respeitadas, porém traz mal condicionamento, pois a função pseudo-objetivo torna-se altamente não-linear, o que causa, por exemplo: taxa de convergência muito lenta. Com isso, a escolha deste fator de penalidade deve ser efetuada com cuidado.

4.2. Algoritmo Genético

Como o próprio nome sugere, este é um método baseado no princípio de seleção natural proposto por Charles Darwin (1859). Este princípio menciona que os indivíduos, ou características, mais aptos irão se propagar nas gerações subseqüentes por meio de cruzamentos e mutação, enquanto os mais fracos tendem a desaparecer.

Diante disto, John Holland (1975) criou um método de busca e otimização, baseado nos princípios desta teoria, que se resume em uma população de indivíduos onde, dados os mecanismos de sobrevivência e reprodução, os mais aptos, terão maior chance de serem selecionados e, então, pelas operações de cruzamento e mutação, formarão novas populações. Também, é dado mérito a David Goldberg (1989), aluno de John Holland, que difundiu o método do Algoritmo Genético.

Para uma melhor abordagem sobre Algoritmo Genético é apresentada uma breve descrição dos termos utilizados por este método para descrever problemas de otimização, a saber:

- Cromossomo (genótipo): Estrutura que representa as variáveis do problema e são chamados de indivíduos, os quais compõem a população. Cada cromossomo corresponde a uma solução do problema representada pelo seu espaço de busca;
- Gene (gen): São os constituintes dos cromossomos, ou seja, cada cromossomo é formado por um conjunto de genes, em que cada gene representa uma variável do problema;
- Alelos: São as unidades presentes nos genes;
- Fenótipo: Representa um cromossomo decifrado;
- Operações Genéticas: Operações realizadas sobre os cromossomos que formam a população através de sucessivas iterações. Estas incluem seleção, cruzamento e mutação;
- Geração: Corresponde a iteração atual do Algoritmo Genético;

Para realizar o processo de otimização via Algoritmo Genético é necessário seguir seis operações básicas que compreendem: codificação das variáveis do problema; criação dos indivíduos iniciais, ou seja, formar a população inicial; avaliar os indivíduos da população; selecionar tais indivíduos, de acordo com critérios estabelecidos; realizar o cruzamento entre os indivíduos e; aplicar mutação nestes indivíduos. Estes processos de selecionar, cruzar e mutação são repetidos até atingir algum critério de convergência como estabelecido na *subseção 4.1.3*. Ao final, o melhor indivíduo é apresentado como a solução do problema.

4.2.1. Codificação das variáveis do projeto

Para trabalhar com Algoritmo Genético é preciso codificar as informações, variáveis de projeto, do seu problema em uma estrutura denominada cromossomo, de modo que o método consiga trabalhar com os dados que lhe são fornecidos.

O processo de codificação das variáveis pode ser realizado por meio de uma representação binária, de ponto flutuante ou inteira. Geralmente, trabalha-se com a representação binária em que cada valor associado representa a presença (valor 1) ou não (valor 0) de certa característica no indivíduo.

A representação de ponto flutuante é muito utilizada para tratar de problemas com variáveis reais, além de resultar em maior velocidade de processamento, boa consistência nos resultados obtidos em cada iteração e precisão melhor nos resultados quando se compara com a representação binária (MICHALEWICZ, 1996). Já a representação por inteiros é bem adequada para problemas que envolvem variáveis inteiras, tais como em arranjos ou combinatória (SOARES, 1997).

Na representação binária, uma variável de projeto, x_i , é descrita por um vetor de m_i bits (*zeros* ou *uns*). De modo equivalente, faz-se para as outras representações, sendo as variáveis de projeto números reais ou inteiros e, então, estes são convertidos para binários. Um cromossomo binário, de modo geral, é formado por:

$$\text{cromossomo} = [x_1 x_2 \dots x_n] = [010101011001\dots 101010] \quad (4.9)$$

sendo, para este exemplo:

$$\begin{aligned} x_1 &= 010101 \\ x_2 &= 011001 \\ &\vdots \\ x_i &= \dots \\ &\vdots \\ x_n &= 101010 \end{aligned} \quad (4.10)$$

Na Eq. (4.9), cada x_i equivale a um gene e os alelos são representados por cada um de seus bits. O processo de decodificação dos cromossomos é realizado pela seguinte função matemática (OLIVEIRA, 2006):

$$x_i = x_i^{\text{inf}} + \left(\sum_{j=0}^{m_i-1} (x_i(j)) 2^j \right) \left(\frac{x_i^{\text{sup}} - x_i^{\text{inf}}}{2^{m_i} - 1} \right) \quad (4.11)$$

em que:

$$m_i = \log_2 \left(\frac{x_i^{\text{sup}} - x_i^{\text{inf}}}{\text{prec}s} \right) \quad (4.12)$$

sendo *prec*s a precisão requerida para a solução do problema e m_i o tamanho do i -ésimo gene.

Com isso, ressalta-se que Algoritmo Genético trabalha com a codificação de um conjunto de parâmetros, não com os próprios parâmetros, assim como é feito por uma grande parte dos métodos determinísticos.

4.2.2. Criação dos indivíduos iniciais: População inicial

Definido o processo de codificação das variáveis do problema, torna-se necessário criar os indivíduos que irão formar a população inicial. Como dito, cada indivíduo é formado por um cromossomo, então, geralmente os indivíduos iniciais da população são criados de maneira totalmente aleatória e/ou com uma distribuição uniforme pelo espaço de busca. Também, heurísticas podem ser utilizadas para criar tal população inicial.

Entende-se que o tamanho da população é importante para o método, pois populações pequenas reduzem o espaço de busca e antecipam a solução para um ótimo local, já populações muito grande acarretam em lentidão operacional. Assim, a escolha do tamanho da população deve ser feito com cautela e pré-simulações.

Destaca-se que no Algoritmo Genético o trabalho é realizado sobre uma população de pontos e não sobre um único ponto do espaço de busca.

4.2.3. Seleção

Com a população definida na etapa anterior, precisa-se avaliar o desempenho de cada indivíduo desta população. Este processo é feito simplesmente pelo cálculo da função objetivo, também chamada, função custo ou função de avaliação, que pode ser complexa quando há restrições e/ou um conjunto de funções objetivo no problema. Vale destacar que, para este cálculo, não existe dependência das derivadas da função objetivo nem qualquer outra informação secundária.

Tal função deve ser calculada rapidamente e de maneira eficiente, pois determinará o esforço computacional do método durante a tarefa de otimização, além de medir a proximidade que um indivíduo se encontra da solução desejada. Desta forma, esta deve diferenciar indivíduos bons dos ruins de maneira significativa.

Com o desempenho de cada indivíduo, o operador de seleção irá determinar quais indivíduos estão aptos para realizar o cruzamento. Sendo assim, existem algumas técnicas para realizar a escolha dos indivíduos. Aqui se apresenta as principais técnicas baseando em DeJong (1975), Goldberg, (1989) e Haupt & Haupt (1998).

A seleção Elitista consiste em substituir os piores indivíduos da próxima geração pelos melhores indivíduos da geração atual. Em outras palavras, fazem-se a cópia dos k melhores indivíduos da população atual na população subsequente, ou seja, garante-se que estes permaneçam nas gerações futuras não sendo afetados pelas etapas de cruzamento e mutação.

Esta estratégia possui como vantagem principal manter o melhor indivíduo na população, desta forma, fornece uma seqüência onde o resultado permanece o mesmo ou é melhorado. A desvantagem está em cair prematuramente em um ótimo local, mesmo que método consiga escapar de tais armadilhas. Assim, a melhor metodologia seria utilizar este método em conjunto com outros métodos de seleção, na tentativa de se aumentar a velocidade de convergência do Algoritmo Genético.

A seleção Aleatória consiste em selecionar os indivíduos de maneira totalmente aleatória sem levar em consideração sua aptidão na população. Segundo Soares (1997) fazer a escolha desta maneira não trará resultados satisfatórios para boa parte das aplicações.

Outra estratégia é a seleção por Torneio, na qual grupos de dois indivíduos são formados pela escolha aleatória de indivíduos da população. O melhor indivíduo de cada grupo é selecionado baseando-se em uma probabilidade previamente definida. Então, a partir de um número randômico entre $[0, 1]$, se este número for menor que a probabilidade, significa que o melhor indivíduo será o escolhido, caso contrário, o outro sobreviverá.

A seleção por torneio é muito utilizada, pois a comparação para a seleção entre os indivíduos não é realizada entre todos os indivíduos da população.

Por fim, cita-se a método de seleção pela Roleta, no qual a chance de um indivíduo ser selecionado está proporcionalmente ligada a sua aptidão dada pela função objetivo. Em linhas gerais, cada indivíduo da população é representado em uma roleta de acordo com a relação entre o seu valor de aptidão e o soma total das aptidões dos indivíduos, gerando, então, uma porcentagem da roleta que o indivíduo ocupa.

Para selecionar um indivíduo, geram-se uma quantidade de números aleatórios entre $[0, 1]$ igual à quantidade de indivíduos na população. Assim, para cada indivíduo na roleta, faz-se a comparação entre o valor de sua porcentagem com o número aleatório gerado. Caso, a porcentagem na roleta seja maior que o número gerado, este indivíduo será selecionado, senão passa para o próximo indivíduo até que todos os números aleatórios tenham sido todos comparados. Note que a seleção por Roleta privilegia os indivíduos mais aptos, dado que estes podem ser selecionados mais de uma vez, ao passo que os piores indivíduos são descartados.

Definido o método de seleção utilizado, obtêm-se, então, os indivíduos que irão participar da próxima etapa do Algoritmo Genético, denominada cruzamento.

4.2.4. Cruzamento

O cruzamento é um procedimento no qual indivíduos trocam material genético formando seus descendentes, ou seja, novos indivíduos. Geralmente, este processo ocasiona a propagação das características dos indivíduos mais aptos da população, além de fazer o método buscar soluções em regiões não conhecidas do espaço de projeto. Além disso, o processo de cruzamento é uma condição necessária para que a convergência do método seja alcançada ao longo das gerações (RODRIGUES, 2000).

A forma tradicional de realizar o cruzamento envolve dois indivíduos, caracterizados como pais, escolhidos através de uma probabilidade de cruzamento P_c . Desta forma, estes indivíduos irão, através de alguma estratégia de cruzamento, trocar seu material genético. Geralmente P_c está definida entre 60% e 80%.

Uma das estratégias de cruzamento mais utilizadas é a de estabelecer um ponto de cruzamento (*single-point crossover*). Assim, a partir deste ponto é realizada a troca de dados entre os cromossomos dos pais, conforme pode ser observado na Fig. 4.4.

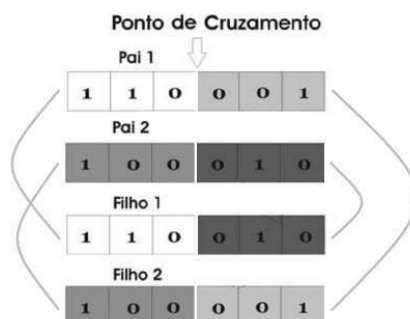


Figura 4.4 - Exemplo de cruzamento por um único ponto.

A escolha do ponto de cruzamento é feita de forma aleatória conforme a seguinte equação (OLIVEIRA, 2006):

$$p_c = 1 + rand[(\sum m_i - 1) - 1] \quad (4.13)$$

sendo *rand* um número aleatório entre [0, 1] e m_i representa o tamanho do *i*-ésimo cromossomo. Outras possibilidades para este tipo de cruzamento é, ao invés de, fazer o cruzamento escolhendo um único ponto, efetuar a escolha de mais pontos e, então, seguir a mesma metodologia.

Uma segunda estratégia é denominada cruzamento uniforme (*uniform crossover*) que se baseia em uma máscara de cruzamento gerada aleatoriamente e de tamanho igual aos do cromossomo pai. Deste modo, para criar os filhos, faz-se uma análise bit-a-bit da máscara em que o valor 1 corresponde ao alelo ser copiado do primeiro pai e o valor 0 corresponde ao alelo ser copiado do segundo pai. A Fig. 4.5 exemplifica o cruzamento uniforme.

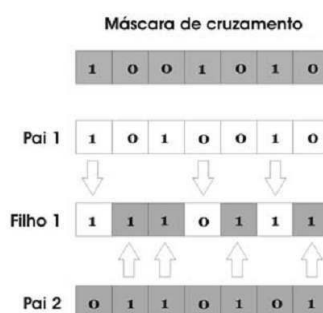


Figura 4.5 - Exemplo de cruzamento uniforme.

Existem diversas outras técnicas para realizar a operação de cruzamento no Algoritmo Genético, bastando para isto, consultar a bibliografia especializada (ESHelman & SHAFER, 1993; MICHALEWICZ, 1996; HAUPT & HAUPT, 1998).

4.2.5. Mutação

O operador mutação é necessário para a introdução e manutenção da diversidade genética da população, alterando arbitrariamente um ou mais componentes de um indivíduo escolhido, fornecendo assim, meios para introdução de novos elementos na população.

Desta forma, a mutação assegura que a probabilidade de se chegar a qualquer ponto do espaço de busca nunca seja zero, além de ajudar a contornar o problema de ótimos locais, pois com este mecanismo, altera-se levemente a direção da busca.

O operador de mutação é aplicado aos indivíduos com uma probabilidade dada pela taxa de mutação Pm . Segundo Hesser & Manner (1990) a probabilidade de mutação pode ser calculada pela seguinte fórmula:

$$Pm = \frac{1}{N_p \sqrt{\sum m_i}} \quad (4.14)$$

sendo N_p o número total de indivíduos na população. Porém, geralmente, adota-se este valor entre 0,1% e 5%.

Uma das estratégias utilizadas pelo operador mutação, considerando a representação binária, corresponde a uma mutação pontual, ou mutação de ponto único. A partir de um conjunto de números aleatórios entre [0, 1] correspondendo ao total de bits da população, tem-se que caso o número gerado seja menor que a taxa de mutação Pm , o gene é invertido, isto é, se for zero vira um, vice-versa.

Segue-se este princípio para todos os bits da população, sendo que se omitem os melhores indivíduos. A Fig. 4.6 mostra em detalhes a operação de mutação sendo realizada.

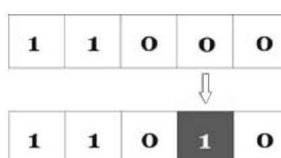


Figura 4.6 - Exemplo de mutação de ponto único.

Ao realizar todos estes passos, completa-se uma iteração do Algoritmo Genético ou uma geração é passada. Desta forma, este processo é repetido até atingir algum critério de parada. No fim, o indivíduo com melhor aptidão será selecionado como sendo a solução para o problema. A Fig. 4.7 mostra um fluxograma que detalha o funcionamento do Algoritmo Genético.

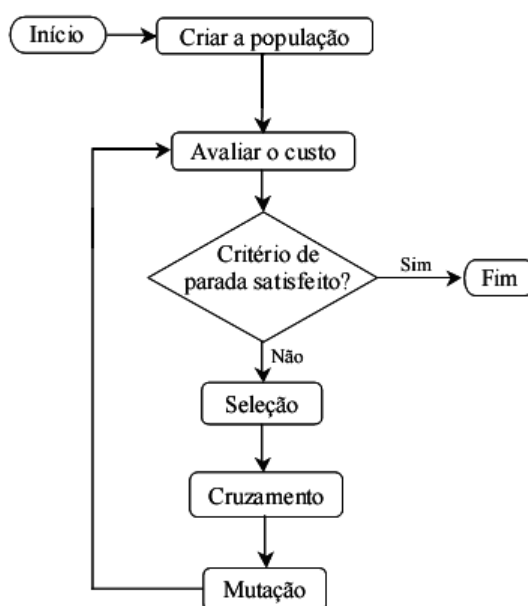


Figura 4.7 - Funcionamento iterativo do Algoritmo Genético.

4.3. Evolução Diferencial

Este método surgiu quando Storn & Price (1995) tentavam solucionar o problema de ajuste polinomial de Chebychev e, então, utilizaram uma abordagem diferente das encontradas nas estratégias de evolução que tratam de problemas de otimização.

O método inicia com uma população de N_p indivíduos gerada de maneira aleatória, ou por uma distribuição de probabilidade uniforme, obedecendo aos limites laterais estabelecidos para as variáveis de projeto.

Cada indivíduo é chamado de vetor e possuem n componentes representadas por valores reais, sendo n o número de variáveis de projeto. Assim, a população segue uma evolução natural, onde o número de indivíduos é constante durante todas as gerações.

Assim como o Algoritmo Genético, a Evolução Diferencial apresenta algumas operações a serem seguidas durante cada geração para manter a convergência não-prematura do método, garantindo, então, a diversidade da população e a obtenção da solução ótima, ou próxima desta.

4.3.1. Mutação

Após a criação da população inicial, realiza-se a operação de mutação que consiste em criar novos indivíduos pela adição da diferença vetorial ponderada entre dois indivíduos

aleatórios da população, $F_p(\vec{X}_\beta^{(q)} - \vec{X}_\gamma^{(q)})$, a um terceiro indivíduo, $\vec{X}_\alpha^{(q)}$, (vetor a ser perturbado), gerando os chamados vetores modificados ou doadores, $\vec{V}^{(q+1)}$, conforme mostrado na Fig. 4.8.

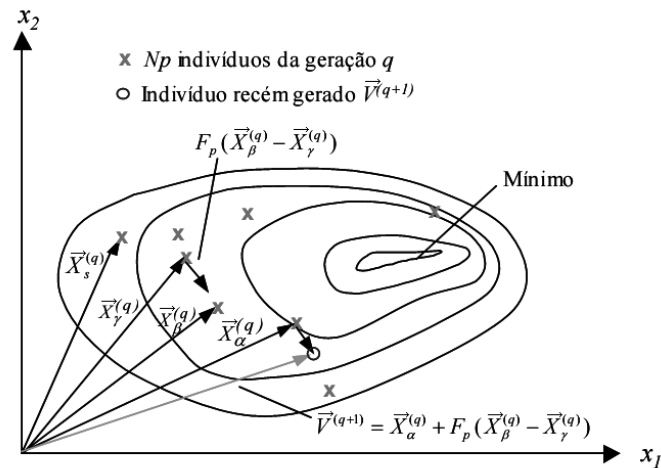


Figura 4.8 - Criação do vetor doador $\vec{V}^{(q+1)}$.

De acordo com a Fig. 4.8, tem-se que o vetor doador da iteração seguinte, $(q+1)$, é representado por $\vec{V}^{(q+1)}$ e os vetores $\vec{X}_s^{(q)}$, $\vec{X}_\alpha^{(q)}$, $\vec{X}_\beta^{(q)}$ e $\vec{X}_\gamma^{(q)}$ representam indivíduos que são diferentes entre si e fazem parte da população na iteração atual, q . O fator de perturbação, F_p , encontra-se no intervalo $[0, 2]$ e controla a amplitude do vetor diferença. Assim, o processo de mutação, dado na Fig. 4.8, é escrito da seguinte maneira:

$$\vec{V}^{(q+1)} = \vec{X}_\alpha^{(q)} + F_p(\vec{X}_\beta^{(q)} - \vec{X}_\gamma^{(q)}) \quad (4.15)$$

Existem outras maneiras, que serão apresentadas adiante, de realizar a operação de mutação, o que diferencia as diversas estratégias que podem ser utilizadas na Evolução Diferencial.

4.3.2. Cruzamento

Em seguida, na operação cruzamento, as componentes do vetor doador, $\vec{V}^{(q+1)}$, são misturadas com as componentes de outro indivíduo, escolhido aleatoriamente e diferente dos anteriores, $\vec{X}_s^{(q)}$ (vetor alvo), segundo uma probabilidade de cruzamento P_c entre $[0, 1]$.

Desta forma, obtém-se o vetor tentativa ou experimental, $\vec{U}^{(q+1)}$, definido como:

$$U_i^{(q+1)} = \begin{cases} v(i)^{(q+1)}, & \text{se } rand_i \leq Pc. \\ x_s(i)^{(q)}, & \text{se } rand_i > Pc, \quad i = 1, \dots, n. \end{cases} \quad (4.16)$$

sendo $v(i)^{(q+1)}$ a i -ésima componente do vetor doador $\vec{v}^{(q+1)}$, $x_s(i)^{(q)}$ a do vetor alvo $\vec{X}_s^{(q)}$ e $rand_i$ um número gerado aleatoriamente no intervalo $[0, 1]$. O cruzamento dado pela Eq. (4.16) é denominado de cruzamento binomial e pode ser observado na Fig. 4.9.

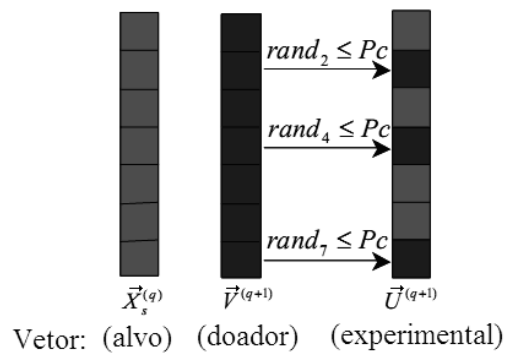


Figura 4.9 - Operação de cruzamento binomial.

Outra forma de realizar o cruzamento, denominado cruzamento exponencial, é definida segundo a Fig. 4.10. As componentes do vetor experimental são dadas pelo vetor doador enquanto o número gerado aleatoriamente for inferior à probabilidade de cruzamento.

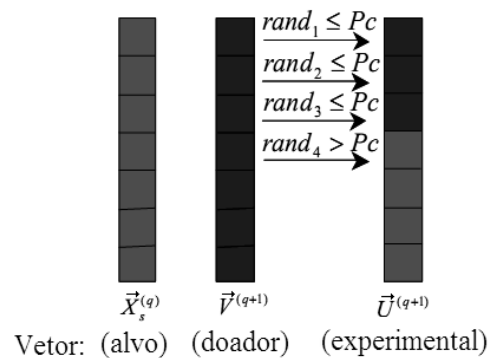


Figura 4.10 - Operação de cruzamento exponencial.

Ao término do cruzamento, se houver algum componente do vetor experimental (variável de projeto) fora dos limites laterais definidos, estes são ajustados por:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Se } U_i^{(q+1)} < x_i^{\text{inf}} \text{ então} \\ \quad U_i^{(q+1)} = x_i^{\text{inf}} \\ \\ \text{Se } U_i^{(q+1)} > x_i^{\text{sup}} \text{ então} \\ \quad U_i^{(q+1)} = x_i^{\text{sup}} \end{array} \right. , \text{ com } i = 1, \dots, n_v \quad (4.17)$$

4.3.3. Seleção

O processo de seleção realizado pela Evolução Diferencial é bem simples e consiste em comparar, utilizando a função objetivo, o custo do vetor experimental, $\bar{U}^{(q+1)}$, com o custo do vetor alvo, $\bar{X}_s^{(q)}$. Logo, faz-se:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Se } f(\bar{U}^{(q+1)}) \leq f(\bar{X}_s^{(q)}) \text{ então} \\ \quad \bar{X}_s^{(q+1)} = \bar{U}^{(q+1)} \\ \\ \text{Senão} \\ \quad \bar{X}_s^{(q+1)} = \bar{X}_s^{(q)} \end{array} \right. \quad (4.18)$$

O processo iterativo continua até que seja obedecido algum critério de parada e a tarefa de otimização finaliza, senão, repetem-se os passos anteriores até atingir algum destes critérios.

4.3.4. Estratégias da Evolução Diferencial

Vale ressaltar que a Evolução Diferencial apresenta diferentes estratégias obtidas a partir da forma com que os operadores de mutação e cruzamento trabalham.

Em outras palavras, as estratégias, vide Tab. 4.1, diferenciam-se pelo tipo de indivíduo a ser modificado na formação do vetor doador, quantos vetores diferenciais (diferenças ponderadas) serão considerados e o tipo de cruzamento a ser utilizado (STORN & PRICE, 1995). Deste modo, utiliza-se a notação “ED/a/b/c”, em que:

- *a* – representa o vetor a ser perturbado, ou seja, caso este vetor seja escolhido aleatoriamente entre os indivíduos da população, tem-se “*a = rand*”. Caso, este vetor seja adotado como o vetor de menor/maior custo da população, tem-se “*a = best*”;

- b – especifica o número de vetores diferença utilizados na operação de mutação para obter o vetor doador, ou seja, para utilizar apenas um vetor diferença, tem-se “ $b = 1$ ”;
- c – determina o tipo de cruzamento utilizado, ou seja, caso seja utilizado o cruzamento binomial, usa-se “ $c = bin$ ”. Caso seja o cruzamento exponencial, usa-se “ $c = exp$ ”.

Tabela 4.1 - Estratégias do método da Evolução Diferencial

Estratégia	Operador <i>mutação</i>	Notação
1	$\vec{V}^{(q+1)} = \vec{X}_\alpha^{(q)} + F_p (\vec{X}_\beta^{(q)} - \vec{X}_\gamma^{(q)})$	ED/rand/1/bin
2	$\vec{V}^{(q+1)} = \vec{X}_{best}^{(q)} + F_p (\vec{X}_\beta^{(q)} - \vec{X}_\gamma^{(q)})$	ED/best/1/bin
3	$\vec{V}^{(q+1)} = \vec{X}_\alpha^{(q)} + F_p (\vec{X}_\rho^{(q)} - \vec{X}_\beta^{(q)}) + F_p (\vec{X}_\gamma^{(q)} - \vec{X}_\delta^{(q)})$	ED/rand/2/bin
4	$\vec{V}^{(q+1)} = \vec{X}_{best}^{(q)} + F_p (\vec{X}_\alpha^{(q)} - \vec{X}_\beta^{(q)}) + F_p (\vec{X}_\gamma^{(q)} - \vec{X}_\delta^{(q)})$	ED/best/2/bin
5	$\vec{V}^{(q+1)} = \vec{X}_{old}^{(q)} + F_p (\vec{X}_{best}^{(q)} - \vec{X}_{old}^{(q)}) + F_p (\vec{X}_\gamma^{(q)} - \vec{X}_\delta^{(q)})$	ED/rand-to-best/2/bin
6	$\vec{V}^{(q+1)} = \vec{X}_\alpha^{(q)} + F_p (\vec{X}_\beta^{(q)} - \vec{X}_\gamma^{(q)})$	ED/rand/1/exp
7	$\vec{V}^{(q+1)} = \vec{X}_{best}^{(q)} + F_p (\vec{X}_\beta^{(q)} - \vec{X}_\gamma^{(q)})$	ED/best/1/exp
8	$\vec{V}^{(q+1)} = \vec{X}_\alpha^{(q)} + F_p (\vec{X}_\rho^{(q)} - \vec{X}_\beta^{(q)}) + F_p (\vec{X}_\gamma^{(q)} - \vec{X}_\delta^{(q)})$	ED/rand/2/exp
9	$\vec{V}^{(q+1)} = \vec{X}_{best}^{(q)} + F_p (\vec{X}_\alpha^{(q)} - \vec{X}_\beta^{(q)}) + F_p (\vec{X}_\gamma^{(q)} - \vec{X}_\delta^{(q)})$	ED/best/2/exp
10	$\vec{V}^{(q+1)} = \vec{X}_{old}^{(q)} + F_p (\vec{X}_{best}^{(q)} - \vec{X}_{old}^{(q)}) + F_p (\vec{X}_\gamma^{(q)} - \vec{X}_\delta^{(q)})$	ED/rand-to-best/2/exp

Neste trabalho, utiliza-se a estratégia 7, em que o vetor a ser perturbado é escolhido como sendo o indivíduo de custo ótimo na população; utiliza-se apenas um vetor diferença na operação de mutação para obter o vetor doador, conforme Fig. 4.8 e; o tipo de cruzamento utilizado corresponde ao cruzamento exponencial, conforme apresentando na Fig. 4.10.

Vale ressaltar que, durante as simulações numéricas, as outras estratégias foram testadas. Analisando os resultados obtidos, observou-se que foram independentes das estratégias utilizadas, uma vez que, todas conseguiram, praticamente, a mesma solução, com uma pequena variação do esforço computacional entre elas.

CAPÍTULO V

SIMULAÇÕES NUMÉRICAS – APLICAÇÕES

Os capítulos anteriores apresentaram o embasamento teórico necessário para a obtenção do projeto ótimo de uma coluna semi-enterrada. Em linhas gerais, o objetivo é maximizar a primeira frequência natural e distanciar as três primeiras frequências naturais entre si. Para os casos mais críticos, considera-se a minimização do volume da coluna e restrições quanto à profundidade de enterramento e a carga crítica suportada.

Com isso, as simulações baseiam-se em aplicar dois métodos estocásticos de otimização na função objetivo de interesse variando os parâmetros que definem a coluna. Com esta finalidade foram utilizadas como variáveis de projeto os parâmetros que definem a área da secção transversal e influenciam no momento de inércia de área I , o comprimento total L e a altura da fundação H . Outro resultado interessante foi a comparação das soluções obtidas pelos dois métodos utilizados, assim, como o desempenho destes métodos.

Todas as simulações visam obter um elemento estrutural que respeite as condições de projeto, sendo seguro, estável, barato, e ao mesmo tempo “ótimo” sob o ponto de vista da engenharia. Isto significa que muitas vezes não será possível garantir que a solução represente o ótimo global da função objetivo.

5.1. Comparação do Modelo Analítico com um Modelo Numérico

Com a finalidade de validar o modelo desenvolvido analiticamente, construiu-se um modelo de elementos finitos equivalente utilizando o software Ansys®. O valor das frequências obtidas por ambas as metodologias foram comparadas de acordo com a variação dos parâmetros a serem utilizados no processo de otimização.

O modelo de elementos finitos é relativamente simples, conforme mostra a Fig. 5.1, sendo a representação 2D, com a coluna dada por um elemento do tipo BEAM3 e o solo, representado por um conjunto de molas não-lineares não-conectadas, sendo do tipo

COMBIN39, em que os dados usados para representar o movimento não-linear das molas foram obtidos da Eq. (2.23) e Fig. 2.4.

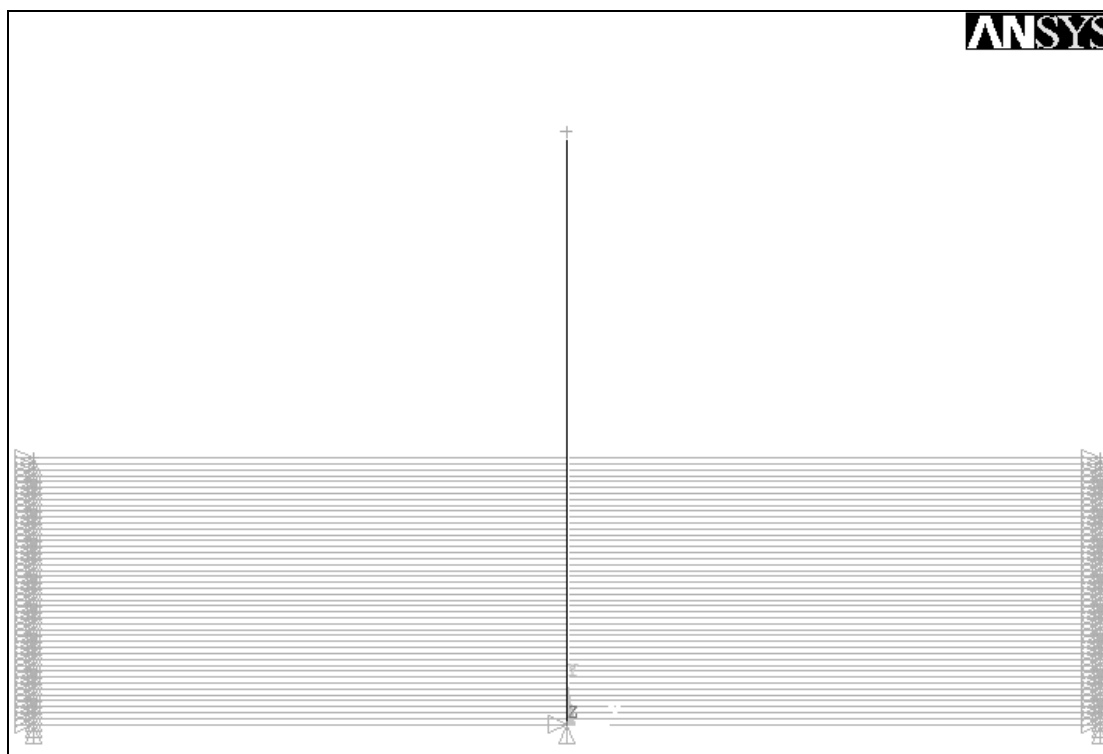


Figura 5.1 - Representação em Ansys® da coluna semi-enterrada sem carga aplicada.

Para a comparação entre os modelos, será adotada uma coluna de aço fundido, $E=206 \text{ GPa}$, com comprimento total $L=50 \text{ m}$, densidade do elemento, $\rho=7.860 \text{ kg/m}^3$, área da seção transversal hexagonal regular de lado $0,3 \leq a_h \leq 0,6 \text{ m}$, sem carga aplicada, $P=0 \text{ N}$. A coluna enterrada $0,3L \leq H \leq 0,6L \text{ m}$ no solo de argila mole em que a rigidez $Eti=3,6 \text{ MPa}$. Um segundo caso foi estudado, considerando os mesmos parâmetros, porém a carga aplicada é de $P=140 \text{ KN}$ e o solo de argila mole tem rigidez $Eti=6,3 \text{ MPa}$.

A Tab. 5.1 apresenta os resultados para o primeiro caso, sem carga e rigidez do solo $Eti=3,6 \text{ MPa}$, já a Tab. 5.2, apresenta para o segundo caso, com carga aplicada e a rigidez do solo $Eti=6,3 \text{ MPa}$. Para auxiliar a comparação foram calculadas as seguintes grandezas estatísticas:

$$\text{desvio} = \frac{\sum \left(\frac{\omega_{anal} - \omega_{num}}{\omega_{anal}} \right)}{n_{testes}} \quad (5.1)$$

$$\text{Coef. Correlação} = \frac{\sum (\omega_{anal} - \bar{\omega}_{anal})(\omega_{num} - \bar{\omega}_{num})}{\sqrt{\sum (\omega_{anal} - \bar{\omega}_{anal})^2} \sqrt{\sum (\omega_{num} - \bar{\omega}_{num})^2}} \quad (5.2)$$

para,

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_{anal} &= \frac{\sum \omega_{anal}}{n_{testes}} \\ \bar{\omega}_{num} &= \frac{\sum \omega_{num}}{n_{testes}} \end{aligned} \quad (5.3)$$

sendo que n_{testes} representa o número de testes executados; w_{anal} e w_{num} os valores das freqüências naturais obtidas pelo modelo analítico e pelo método de elementos finitos, respectivamente. A Eq. (5.1) permite calcular o desvio médio entre estas duas grandezas, enquanto que a Eq. (5.2) calcula o coeficiente de correlação entre as freqüências obtidas por dois métodos distintos, em que Eq. (5.3) representa a obtenção da média destas freqüências.

Tabela 5.1 - Freqüências resultantes do modelo analítico e numérico para o primeiro caso.

H (m)	a_h (m)	ω_1 (Hz)			ω_2 (Hz)			ω_3 (Hz)			
		Analítico	Numérico	Desvio (%)	Analítico	Numérico	Desvio (%)	Analítico	Numérico	Desvio (%)	
15	0,3	0,391	0,367	6,138	2,088	1,902	8,908	5,230	4,320	17,4	
22,5	0,3	0,581	0,541	6,885	2,992	2,726	8,890	7,015	5,34	23,877	
30	0,3	0,957	0,876	8,464	5,207	4,040	22,412	7,349	5,554	24,425	
15	0,45	0,505	0,486	3,762	2,528	2,442	3,402	5,677	5,520	2,766	
22,5	0,45	0,717	0,697	2,789	3,400	3,205	5,735	6,215	5,856	5,776	
30	0,45	1,119	1,069	4,468	4,518	4,052	10,314	6,285	5,920	5,807	
15	0,6	0,588	0,586	0,340	2,981	2,974	0,235	7,075	6,961	1,611	
22,5	0,6	0,807	0,805	0,248	3,557	3,518	1,096	7,255	7,102	2,109	
30	0,6	1,192	1,185	0,587	4,113	4,013	2,431	7,314	7,170	1,969	
Desvio Médio (%)				3,742					7,047	9,527	
Coeficiente de Correlação (%)				99,50					94,59	71,36	

Tabela 5.2 - Freqüências resultantes do modelo analítico e numérico para o segundo caso.

H (m)	a _n (m)	ω_1 (Hz)			ω_2 (Hz)			ω_3 (Hz)			
		Analítico	Numérico	Desvio (%)	Analítico	Numérico	Desvio (%)	Analítico	Numérico	Desvio (%)	
15	0,3	0,399	0,383	4,010	2,191	2,011	8,215	6,364	4,684	26,398	
22,5	0,3	0,622	0,571	8,199	3,306	2,941	11,041	8,986	6,309	29,791	
30	0,3	1,025	0,944	7,902	6,436	4,571	28,978	9,529	7,021	26,320	
15	0,45	0,536	0,516	3,731	2,739	2,615	4,527	6,093	5,851	3,972	
22,5	0,45	0,766	0,748	2,350	3,789	3,607	4,803	7,119	6,533	8,231	
30	0,45	1,230	1,177	4,309	5,478	4,916	10,259	7,240	6,608	8,729	
15	0,6	0,626	0,623	0,479	3,136	3,128	0,255	7,243	7,163	1,105	
22,5	0,6	0,882	0,882	0,000	3,988	3,944	1,103	7,593	7,443	1,976	
30	0,6	1,337	1,332	0,374	4,901	4,769	2,693	7,670	7,528	1,851	
Desvio Médio (%)				3,484				7,986			
Coeficiente de Correlação (%)				99,63				92,41			

Ao analisar os dados das Tabs. 5.1 e 5.2, nota-se que as primeiras e a segundas freqüências, obtidas pelo modelo analítico e pelo método de elementos finitos, resultam em valores muito similares. Observe que o desvio relativo é pequeno, na média, não ultrapassa 3,8%, e que o coeficiente de correlação comprova que os valores estão altamente relacionados, com valores superiores a 99,5%. Em relação à terceira freqüência natural, os resultados não foram tão significativos. Para esta freqüência, fazendo a média dos dois casos apresentados, obtém-se o desvio médio de 10,78% e um coeficiente de correlação baixo, dado por 59,44%.

Deve-se considerar que uma melhora significativa no modelo numérico pode ser obtida, como, por exemplo, refinando a malha, o que pode aproximar ainda mais as freqüências numéricas das obtidas analiticamente.

Deste modo, tem-se que o modelo analítico desenvolvido possui uma precisão significativa, além da correta utilização das técnicas de modelagem apresentadas. Este pode ser utilizado para o estudo da coluna semi-enterrada, aplicando os métodos de otimização e qualquer outra análise que venha a ser realizada.

Ainda, para tais resultados, vale lembrar que diversas simplificações foram feitas durante o processo analítico de modelagem, vide capítulo II e III, para tentar diminuir a

complexidade envolvida no problema e, mesmo assim, o modelo resultante foi validado com segurança. Uma das vantagens em utilizar o modelo analítico está na rapidez e no pequeno esforço computacional necessário ao avaliar, várias vezes, a função objetivo, como é exigido pelos métodos evolutivos.

5.2. Considerações Gerais

Os métodos de otimização foram executados utilizando códigos computacionais contidos no *Simple Optimization Toolbox* de autoria de Viana (2008) e implementados em Matlab7[®]. O computador utilizado nas simulações possui as seguintes configurações: processador Intel[®] Core[™] 2 Duo 1.66 GHz com 2 GB de memória RAM.

Em relação ao código computacional usado, tem-se que cada método de otimização executa os processos iterativos até alcançar qualquer um dos critérios de convergência definidos a seguir:

- Número máximo de iterações (número de gerações adotadas nos métodos);
- Número de iterações sucessivas sem melhorar a tarefa de otimização, padrão de 15 iterações sucessivas.

Em relação os algoritmos utilizados, baseando em testes preliminares e dados da literatura (Oliveira, 2006), foram adotados:

- **Algoritmos Genéticos:**
 - Número de indivíduos = 100;
 - Número de gerações = 200;
 - Seleção do tipo Torneio com 5 rodadas;
 - Cruzamento do tipo uniforme;
 - Probabilidade de Mutação $P_m = 1\%$.
- **Evolução Diferencial:**
 - Número de indivíduos = 100;
 - Número de gerações = 200;
 - Fator de perturbação $F_p = 0,8$;
 - Probabilidade de Cruzamento $P_c = 0,7$.

Com o interesse em comparar a eficiência dos métodos evolutivos utilizados, consideram-se, ainda, os seguintes critérios:

- **Esforço computacional:** Número de avaliações da função objetivo efetuadas ao total;

- **Esforço algorítmico:** Número de iterações gastas no processo de otimização até atingir qualquer critério de convergência;
- **Tempo de execução:** Tempo gasto na execução de cada método. Este tempo é obtido em relação ao tempo de execução do método da Evolução Diferencial para evitar certa dependência da máquina utilizada nos testes.

É importante destacar que ao executar cada simulação (teste), repetiu-se o mesmo processo diversas vezes, com a intenção de obter a resposta média e dar uma garantia mínima de que o método de otimização não convergia prematuramente para um ótimo local. Além disso, o código computacional para o modelo dinâmico da coluna semi-enterrada foi desenvolvido pelo autor, implementado em Matlab7[®] e acoplado aos programas de otimização.

5.3. Problema de Otimização Irrestrito

Trata-se, nesta seção, de um problema de otimização multi-objetivo irrestrito, composto por três objetivos:

- maximizar a primeira freqüência natural da coluna;
- maximizar a distância entre a primeira e a segunda freqüência natural;
- maximizar a distância entre a segunda e a terceira freqüência natural.

$$\begin{cases} f(X) = [f_1(X) \ f_2(X) \ f_3(X)]^T \\ f_1(X) = \max \ \omega_1 \\ f_2(X) = \max (\omega_2 - \omega_1) \\ f_3(X) = \max (\omega_3 - \omega_2) \end{cases} \quad (5.4)$$

em que a função objetivo escalar, escrita utilizando o método dos objetivos ponderados (Oliveira, 2005), é dada como:

$$\text{Maximizar } f(X) = p_1 \frac{f_1(X)}{f_1^o} + p_2 \frac{f_2(X)}{f_2^o} + p_3 \frac{f_3(X)}{f_3^o} \quad (5.5)$$

sendo que o vetor de variáveis de projeto, X , foi definido em cada teste e o problema de otimização consiste em maximizar a função objetivo definida na Eq. (5.5).

Assumiu-se, para análise, que os fatores de ponderação possuíam o mesmo grau de importância ($p_1=p_2=p_3=0,3334$) de tal forma que a somatória deles seja igual a 1 e, as soluções ideais foram determinadas como segue:

$$\begin{cases} f_1^o(X) = \max f_1(X) \\ f_2^o(X) = \max f_2(X) \\ f_3^o(X) = \max f_3(X) \end{cases} \quad (5.6)$$

Para realizar os testes, considerou-se a coluna de aço fundido com módulo de elasticidade $E = 206 \text{ GPa}$ e densidade $\rho=7.860 \text{ kg/m}^3$, sendo os demais parâmetros definidos em cada um das simulações a serem realizados.

5.3.1. Influência do tipo de secção transversal no momento de inércia de área (I)

Entre os diversos parâmetros da coluna semi-enterrada, a primeira variável estudada nas simulações foram os parâmetros dos diferentes tipos de secções transversais. Estes parâmetros dependem do tipo de secção e influenciam o momento de inércia de área, I , o qual mede rigidez, ou seja, a resistência à flexão da coluna em relação ao eixo que passa pelo seu centro de gravidade.

Com isso, foram adotadas as seguintes secções transversais, conforme se mostra na Fig. 5.2 (a) até (e), em vista superior:

- Secção circular cheia, Fig. 5.2 (a):

$$I = \frac{\pi D_c^4}{64}, \text{ sendo que } D_c \text{ é o diâmetro do círculo;} \quad (5.7a)$$

- Secção tubular, Fig. 5.2 (b):

$$I = \frac{\pi(D_t^4 - d_t^4)}{64}, \text{ sendo } D_t \text{ o diâmetro externo e } d_t \text{ o diâmetro interno do tubo;} \quad (5.7b)$$

- Secção retangular, Fig. 5.2 (c):

$$I = \frac{b_r a_r^3}{12}, \text{ sendo } a_r \text{ e } b_r \text{ os lados do retângulo;} \quad (5.7c)$$

- Secção hexagonal, Fig. 5.2 (d):

$$I \cong 0,5413 a_h^4, \text{ sendo } a_h \text{ correspondendo ao lado do hexágono;} \quad (5.7d)$$

- Perfil em I, Fig. 5.2 (e):

$$I = \frac{(B_p H_p^3 - b_p h_p^3)}{12}, \text{ sendo } H_p \text{ a largura do perfil, } B_p \text{ o comprimento do perfil, } h_p \text{ a distância interna entre as abas do perfil.} \quad (5.7e)$$

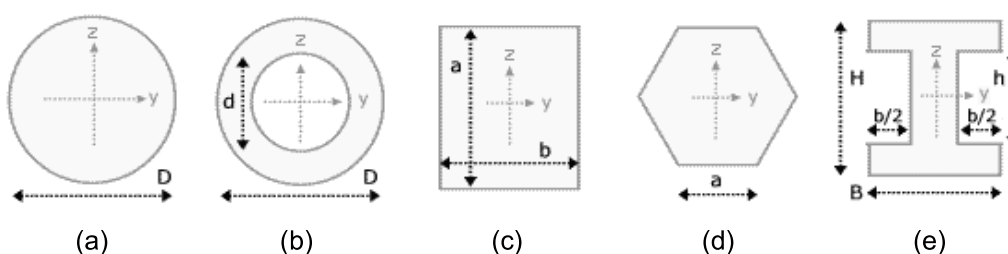


Figura 5.2 - Diferentes tipos de secção transversal: (a) circular cheia, (b) tubular, (c) retangular, (d) hexagonal e (e) perfil em I.

Nesta primeira simulação, adotou-se uma coluna de aço fundido com comprimento total $L=50 \text{ m}$, densidade linear de massa m em $[\text{kg/m}]$ obtida pelo produto entre a densidade do elemento pela área da secção transversal considerada; com uma carga aplicada $P=140 \text{ KN}$ e enterrada 50% no solo ($H=0,5L$) de argila mole, em que a rigidez $Eti=3,6 \text{ MPa}$.

a) Caso 1: Coluna cilíndrica circular cheia

Ao considerar a coluna com uma secção circular cheia, tem-se o momento de inércia de área calculado pela Eq. (5.7a), sendo o diâmetro do círculo, o único parâmetro a ser definido como variável de projeto no problema de otimização. Assim,

$$\begin{aligned} & \text{Maximizar } f(X), \text{ com } X=[D_c]^T \\ & \text{Sujeito a: } 0,3 \leq D_c \leq 0,6 \text{ [m]} \end{aligned} \quad (5.8)$$

Inicialmente, obteve-se a solução ideal, calculada conforme a Eq. (5.6), sendo os resultados mostrados na Tab. 5.3.

Tabela 5.3 - Solução ideal para a coluna cilíndrica circular cheia.

	$f_1^o(X)$	$f_2^o(X)$	$f_3^o(X)$
ED	0,355	2,012	3,959
AG	0,355	1,998	3,922

Pelos dados da Tab. 5.3, nota-se que os métodos utilizados alcançaram, praticamente, a mesma solução no processo de otimização, mostrando boa eficácia. Assim, apresenta-se na Tab. 5.4 o valor ótimo para a variável de projeto, além dos resultados obtidos em relação aos critérios de comparação dos métodos utilizados.

Tabela 5.4 - Resultados obtidos para a coluna cilíndrica circular cheia.

	D_c (m)	Esforço Computacional	Esforço Algorítmico	Tempo
ED	0,300	2000 avaliações	19 iterações	1 (padrão)
AG	0,303	1700 avaliações	16 iterações	0,843

Em relação aos resultados da Tab. 5.4, os métodos, apesar de alcançarem soluções praticamente iguais, tiveram comportamentos diferentes, ou seja, gastaram diferentes esforços computacionais e número de iterações para alcançá-la, sendo o Algoritmo Genético mais rápido que a Evolução Diferencial.

A solução encontrada para a variável de projeto mostra que quanto menor o diâmetro do círculo da secção transversal, mais distante estarão as frequências naturais. A Tab. 5.5 apresenta o resultado das frequências e funções objetivo, sendo a melhor solução encontrada pelo método da Evolução Diferencial.

Tabela 5.5 - Valores das frequências e funções objetivo para a coluna cilíndrica circular cheia.

	ω_1 (Hz)	ω_2 (Hz)	ω_3 (Hz)	$f_1(X)$	$f_2(X)$	$f_3(X)$
ED	0,236	2,248	6,2069	0,236	2,012	3,959
AG	0,237	2,232	6,152	0,237	1,994	3,920

Ao final do processo, o valor encontrado para a densidade linear de massa foi $m=2340$ kg/m, que é um valor elevado e resulta em uma estrutura realmente pesada, dado o comprimento total de 50 metros.

b) Caso 2: Coluna cilíndrica tubular

Nesta simulação, o momento de inércia de área é calculado pela Eq. (5.7b) e, os parâmetros definidos como variáveis de projeto foram: o diâmetro interno e externo do tubo.

O problema de otimização foi definido por:

$$\begin{aligned} & \text{Maximizar } f(X), \text{ com } X=[D_t, d_t]^T & (5.9) \\ & \text{Sujeito a: } 0,45 \leq D_t \leq 0,6 \text{ [m]} \\ & \quad \quad \quad 0,2 \leq d_t \leq 0,4 \text{ [m]} \end{aligned}$$

A solução ideal para o problema é mostrada na Tab. 5.6, sendo os resultados obtidos com pequena diferença entre a Evolução Diferencial e o Algoritmo Genético.

Tabela 5.6 - Solução ideal para a coluna cilíndrica tubular.

	$f_1^o(X)$	$f_2^o(X)$	$f_3^o(X)$
ED	0,452	2,981	5,642
AG	0,443	2,888	5,482

A Tab. 5.7 apresenta os valores ótimos das variáveis de projeto e o resultado dos critérios de comparação. Observa-se que os métodos encontraram alguma dificuldade em solucionar o problema com relação ao caso anterior, apesar de todos alcançarem, praticamente, o mesmo valor para as variáveis de projeto. Novamente, o Algoritmo Genético foi mais rápido, com menor custo computacional, que a Evolução Diferencial.

Tabela 5.7 - Resultados obtidos para a coluna cilíndrica tubular.

	D_t (m)	d_t (m)	Esforço Computacional	Esforço Algorítmico	Tempo
ED	0,450	0,400	13000 avaliações	129 iterações	1 (padrão)
AG	0,462	0,399	3900 avaliações	38 iterações	0,269

A Tab. 5.8 exibe o valor das frequências naturais e das funções objetivos. Percebe-se que, para este caso, a solução obtida pela Evolução Diferencial é melhor que a do Algoritmo Genético.

Tabela 5.8 - Valores das frequências e funções objetivos para a coluna cilíndrica tubular.

	ω_1 (Hz)	ω_2 (Hz)	ω_3 (Hz)	$f_1(X)$	$f_2(X)$	$f_3(X)$
ED	0,452	3,433	9,075	0,452	2,981	5,642
AG	0,449	3,146	8,11	0,449	2,696	4,964

O valor da densidade linear de massa resultante foi $m=1049,4$ kg/m, que é bem menor comparado ao da simulação anterior, caso 1.

c) Caso 3: Coluna retangular

Considerou-se nesta simulação a secção transversal do tipo retangular, caso comum em muitas construções civis, sendo o momento de inércia de área calculado pela Eq. (5.7c). Ao adotar este tipo de secção transversal, os parâmetros foram os lados que definem um retângulo e, passam a ser as variáveis de projeto do problema, definido como:

$$\begin{aligned} & \text{Maximizar } f(X), \text{ com } X=[a_r, b_r]^T & (5.10) \\ & \text{Sujeito a: } 0,4 \leq a_r \leq 0,6 \text{ [m]} \\ & \quad \quad \quad 0,45 \leq b_r \leq 0,55 \text{ [m]} \end{aligned}$$

O processo inicia-se com a obtenção da solução ideal cujos resultados são apresentados na Tab. 5.9.

Tabela 5.9 - Solução ideal para a coluna retangular.

	$f_1^o(X)$	$f_2^o(X)$	$f_3^o(X)$
ED	0,794	3,155	4,474
AG	0,789	3,147	4,376

Os resultados, apresentados na Tab. 5.9, são bem similares. A partir destes dados, mostra-se na Tab. 5.10 os valores encontrados para as variáveis de projeto, além dos valores relacionados aos critérios de comparação dos métodos.

Tabela 5.10 - Resultados obtidos para a coluna retangular.

	a_r (m)	b_r (m)	Esforço Computacional	Esforço Algorítmico	Tempo
ED	0,600	0,450	10400 avaliações	103 iterações	1 (padrão)
AG	0,599	0,454	6700 avaliações	66 iterações	0,593

Com os resultados da Tab. 5.10, verifica-se que todos os métodos conseguiram alcançar, praticamente, a mesma solução para o problema, porém exigindo diferentes esforços computacionais, em que o Algoritmo Genético levou vantagem mais uma vez.

Na Tab. 5.11 é exibido o valor das frequências naturais encontradas para cada método utilizado, bem como o valor de cada função objetivo. Os resultados são similares, uma vez que os valores obtidos para as variáveis de projeto são quase iguais.

Tabela 5.11 - Valores das frequências e funções objetivo para a coluna retangular.

	ω_1 (Hz)	ω_2 (Hz)	ω_3 (Hz)	$f_1(X)$	$f_2(X)$	$f_3(X)$
ED	0,794	3,949	7,08	0,794	3,155	3,131
AG	0,793	3,942	7,058	0,793	3,149	3,116

O valor da densidade linear de massa é $m=2122,2 \text{ kg/m}$, que é bem maior que o do caso anterior, caso 2, e tão elevado quanto o do caso 1.

d) Caso 4: Coluna hexagonal

Uma coluna com seção hexagonal foi considerada. O valor do momento de inércia de área foi calculado pela Eq. (5.7d). Neste caso, tem-se uma única variável que é o lado do hexágono, dado que este é regular. Assim, o problema de otimização é descrito como:

$$\begin{aligned} & \text{Maximizar } f(X), \text{ com } X=[a_h]^T & (5.11) \\ & \text{Sujeito a: } 0,3 \leq a_h \leq 0,6 \text{ [m]} \end{aligned}$$

Obtém-se a solução ideal, conforme a Eq. (5.6), sendo os resultados apresentados em detalhes na Tab. 5.12.

Tabela 5.12 - Solução ideal para a coluna hexagonal.

	$f_1^o(X)$	$f_2^o(X)$	$f_3^o(X)$
ED	0,909	2,946	3,643
AG	0,909	2,946	3,473

Na Tab. 5.13 tem-se o valor da variável de projeto alcançado, sendo este igual para ambos os métodos utilizados. É possível observar que, ao contrário das simulações anteriores, a Evolução Diferencial mostrou ser mais eficiente, exigindo tempo computacional e número de iterações inferiores para resolver o problema.

Tabela 5.13 - Resultados obtidos para a coluna hexagonal.

	a_h (m)	Esforço Computacional	Esforço Algorítmico	Tempo
ED	0,6	7000 avaliações	69 iterações	1 (padrão)
AG	0,6	9700 avaliações	96 iterações	1,361

Com o valor final para a variável de projeto, obtiveram-se as frequências naturais e valor das funções objetivo. De forma similar, os resultados foram iguais, conforme mostra a Tab. 5.14, donde se obteve $m=7351,5 \text{ kg/m}$.

Tabela 5.14 - Valores das frequências e funções objetivo para a coluna hexagonal.

	ω_1 (Hz)	ω_2 (Hz)	ω_3 (Hz)	$f_1(X)$	$f_2(X)$	$f_3(X)$
ED	0,908	3,757	7,229	0,908	2,848	3,473
AG	0,908	3,757	7,229	0,908	2,848	3,473

Vale destacar que a densidade linear de massa resultante torna impraticável construir tal coluna, pois, mesmo que o elemento seja estável e seguro, o custo é muito elevado, além do enorme peso da estrutura.

e) Caso 5: Coluna perfil em I

O momento de inércia de área para a coluna que possui secção na forma de perfil I foi calculado pela Eq. (5.7e). A equação que define o momento de inércia depende de quatro variáveis relacionadas à dimensão do perfil, vide Fig. 5.1(e). Logo, o problema de otimização é caracterizado da seguinte maneira:

$$\text{Maximizar } f(X), \text{ com } X=[B_p, b_p, H_p, h_p]^T \quad (5.12)$$

$$\text{Sujeito a: } 0,4 \leq B_p \leq 0,6 \text{ [m]}$$

$$0,2 \leq b_p \leq 0,3 \text{ [m]}$$

$$0,4 \leq H_p \leq 0,6 \text{ [m]}$$

$$0,1 \leq h_p \leq 0,3 \text{ [m]}$$

Como feito nas outras simulações, apresenta-se na Tab. 5.15 a solução ideal para o problema. Nota-se que a Evolução Diferencial e o Algoritmo Genético obtiveram resultados ligeiramente diferentes.

Tabela 5.15 - Solução ideal para a coluna perfil em I.

	$f_1^o(X)$	$f_2^o(X)$	$f_3^o(X)$
ED	0,985	4,329	7,502
AG	0,959	3,838	6,6

Na Tab. 5.16 têm-se o resultado do processo de otimização, apresentando os valores alcançados para as variáveis de projeto. Através de uma simples análise, é possível verificar que o Algoritmo Genético exigiu um número inferior de iterações e de tempo, conseqüentemente, menor número de avaliações da função objetivo, do que a Evolução Diferencial.

Tabela 5.16 - Resultados obtidos para a coluna perfil em I.

	B_p (m)	b_p (m)	H_p (m)	h_p (m)	Esforço Computacional	Esforço Algorítmico	Tempo
ED	0,400	0,300	0,400	0,300	17100 avaliações	170 iterações	1 (padrão)
AG	0,425	0,294	0,469	0,297	3500 avaliações	34 iterações	0,159

Os resultados atribuídos as variáveis de projeto revelam que o perfil em I deve ter abas grossas com uma alma fina, propiciando uma maior área de secção transversal, logo maior momento de inércia de área e, assim, como nos resultados anteriores, dando maior estabilidade à coluna. A densidade linear de massa obtida foi $m=550,2 \text{ kg/m}$ e seu baixo valor representam um dos motivos deste ser o tipo de secção mais comum para colunas.

As variáveis de projeto foram utilizados para calcular as freqüências naturais e o valor de cada função objetivo, sendo estes apresentados na Tab. 5.17. Neste caso, o resultado alcançado para as funções objetivo, dado a Evolução Diferencial, foi melhor do que o alcançado pelo Algoritmo Genético.

Tabela 5.17 - Valores das freqüências e funções objetivo para a coluna perfil em I.

	ω_1 (Hz)	ω_2 (Hz)	ω_3 (Hz)	$f_1(X)$	$f_2(X)$	$f_3(X)$
ED	0,819	5,148	12,651	0,819	4,329	7,502
AG	0,857	4,684	10,212	0,858	3,827	5,528

Através das simulações anteriores, que consideraram diferentes tipos de secção transversal para a coluna, os resultados encontrados mostraram uma forte tendência em buscar os valores limites das restrições laterais de cada variável de projeto. Deste modo, obtém-se o maior valor possível para as freqüências naturais e para as suas distâncias, traduzindo em estabilidade para a coluna.

Nas próximas seções, serão apresentados estudos sobre a influência de outras variáveis de projeto no projeto ótimo da coluna semi-enterrada. Para isto, foi assumido nos casos estudados que a coluna possui uma secção hexagonal, pois, torna-se interessante verificar o comportamento da densidade linear de massa que, na primeira simulação, resultou em um valor bem alto, tornando impraticável tal elemento.

5.3.2. Influência do comprimento da coluna (L)

Esta simulação verificou a influência do comprimento total da coluna. Ao realizar tal análise, assumiu-se a coluna com uma carga aplicada $P=140\text{ KN}$, enterrada 50% no solo ($H=0,5L$) de argila mole em que a rigidez $E_t=3,6\text{ MPa}$. Como mencionado, adotou-se a secção do tipo hexagonal em que $a_n=0,6\text{ m}$.

Então, o seguinte problema de otimização foi definido:

$$\begin{aligned} & \text{Maximizar } f(X), \text{ com } X=[L]^T & (5.13) \\ & \text{Sujeito a: } 30 \leq L \leq 50 \text{ [m]} \end{aligned}$$

Apresentam-se os valores das soluções ideais na Tab. 5.18. Verificou-se uma pequena diferença entre os resultados obtidos por cada método.

Tabela 5.18 - Solução ideal para a coluna com comprimento variável.

	$f_1^o(X)$	$f_2^o(X)$	$f_3^o(X)$
ED	1,710	6,294	11,102
AG	1,676	6,251	10,296

Nota-se, na Tab. 5.19, que ambos os métodos alcançaram, praticamente, a mesma solução, ou seja, a coluna com o menor comprimento total possível, porém gastando diferentes esforços computacionais e algorítmicos, sendo o Algoritmo Genético bem mais rápido.

Tabela 5.19 - Resultados obtidos para a coluna com comprimento variável.

	L (m)	Esforço Computacional	Esforço Algorítmico	Tempo
ED	30,0	6500 avaliações	64 iterações	1 (padrão)
AG	30,103	1700 avaliações	16 iterações	0,221

Já a Tab. 5.20 apresenta o valor das frequências naturais e das funções objetivo para o valor da variável de projeto na Tab. 5.19. O resultado encontrado pela Evolução Diferencial é um pouco melhor que o do Algoritmo Genético.

Tabela 5.20 - Valores das frequências e funções objetivo para a coluna com comprimento variável.

	ω_1 (Hz)	ω_2 (Hz)	ω_3 (Hz)	$f_1(X)$	$f_2(X)$	$f_3(X)$
ED	1,710	8,004	19,106	1,710	6,294	11,102
AG	1,702	7,957	18,978	1,702	6,253	11,022

Através desta simulação, conclui-se que, para distanciar as frequências é preciso uma coluna com o menor comprimento total. Desta forma, tornando a estrutura rígida e fazendo com que as oscilações sejam as mínimas possíveis.

5.3.3. Influência do comprimento da coluna e do parâmetro da secção transversal (L , a_h)

Este estudo visou examinar a influência do comprimento total da coluna juntamente com o parâmetro que define a secção transversal hexagonal. Mediante a isso, escreveu-se o problema de otimização como:

$$\begin{aligned} & \text{Maximizar } f(X), \text{ com } X=[L, a_h]^T & (5.14) \\ & \text{Sujeito a: } 30 \leq L \leq 50 \text{ [m]} \\ & \quad \quad \quad 0,3 \leq a_h \leq 0,6 \text{ [m]} \end{aligned}$$

Seguindo o padrão das simulações anteriores, mostram-se as soluções ideais na Tab. 5.21.

Tabela 5.21 - Solução ideal para a coluna com comprimento e secção variável.

	$f_1^o(X)$	$f_2^o(X)$	$f_3^o(X)$
ED	1,710	6,294	11,102
AG	1,662	5,739	10,671

Os métodos retornaram, basicamente, a mesma solução para o problema, porém gastando diferentes iterações e avaliações da função objetivo, logo, diferentes tempos computacionais, conforme apresentado na Tab. 5.22.

Tabela 5.22 - Resultados obtidos para a coluna com comprimento e secção variável.

	L (m)	a_r (m)	Esforço Computacional	Esforço Algorítmico	Tempo
ED	30	0,6	12300 avaliações	122 iterações	1 (padrão)
AG	30,954	0,597	4100 avaliações	40 iterações	0,275

O valor final alcançado para a densidade linear de massa foi $m=7351,5 \text{ kg/m}$, que representa uma coluna bastante pesada e, em termos materiais, bastante cara.

Tabela 5.23 - Valores das freqüências e funções objetivo para a coluna com comprimento e secção variável.

	ω_1 (Hz)	ω_2 (Hz)	ω_3 (Hz)	$f_1(X)$	$f_2(X)$	$f_3(X)$
ED	1,710	8,004	19,106	1,710	6,294	11,102
AG	1,636	7,546	17,883	1,636	5,91	10,337

Estas simulações tendem a encontrar uma coluna realmente robusta, isto é, rígida ao ponto de ter o menor comprimento total possível e a maior área de secção transversal, então, com o maior momento de inércia de área e grande densidade linear de massa. As funções objetivo calculadas usando a Evolução Diferencial foram melhores do que as obtidas com o Algoritmo Genético.

5.3.4. Influência da altura da fundação (H)

Com o intuito de verificar a importância da fundação no projeto da coluna, assumiu-se que a profundidade da coluna enterrada no solo seja variável. Assim, dada a coluna hexagonal com $a_r=0,6 \text{ m}$, comprimento total $L=50 \text{ m}$, com uma carga aplicada $P=140 \text{ KN}$, enterrada em um solo de argila mole onde a rigidez $Eti=3,6 \text{ MPa}$, tem-se:

$$\begin{aligned} & \text{Maximizar } f(X), \text{ com } X=[H]^T & (5.15) \\ & \text{Sujeito a: } 20 \leq H \leq 30 \text{ [m]} \end{aligned}$$

Mostram-se, na Tab. 5.24, as soluções para as funções objetivo ideais.

Tabela 5.24 - Solução ideal para a coluna com altura da fundação elástica variável.

	$f_1^o(X)$	$f_2^o(X)$	$f_3^o(X)$
ED	1,187	2,922	3,87
AG	1,187	2,922	3,87

As soluções mostradas na Tab. 5.24 são iguais, o que leva a suposição de ambos os métodos terem encontrado a mesma solução para o problema. Isto é verificado nos resultados expostos na Tab. 5.25, em que o valor encontrado, no final do processo de otimização, para a variável de projeto é o seu limite inferior.

Tabela 5.25 - Resultados obtidos para a coluna com altura da fundação elástica variável.

	H (m)	Esforço Computacional	Esforço Algorítmico	Tempo
ED	30	6800 avaliações	67 iterações	1 (padrão)
AG	30	11400 avaliações	113 iterações	1,399

Os métodos tiveram diferentes esforços computacionais e algorítmicos para alcançar à mesma solução, tendo destaque, desta vez, a Evolução Diferencial. Na Tab. 5.26, os valores das freqüências naturais e das funções objetivo são apresentados, sendo que ambos os métodos calcularam valores iguais para as funções objetivos.

Tabela 5.26 - Valores das freqüências e funções objetivo para a coluna com altura da fundação elástica variável.

	ω_1 (Hz)	ω_2 (Hz)	ω_3 (Hz)	$f_1(X)$	$f_2(X)$	$f_3(X)$
ED	1,187	4,098	7,285	1,187	2,911	3,188
AG	1,187	4,098	7,285	1,187	2,911	3,188

Pela análise desta simulação e das anteriores, observou-se que para obter o ótimo da função objetivo definida pela Eq. (5.2), é preciso que a coluna torne-se rígida. O solo, então, passa a ter grande importância, pois bons resultados para a função objetivo são encontrados no caso em que a coluna encontra-se enterrada até o limite superior definido para a variável de projeto.

5.3.5. Influência da altura da fundação, do comprimento total e da secção transversal da coluna (H, L, a_h)

Todos os parâmetros já utilizados nas simulações anteriores foram considerados como variáveis de projeto. Com isso, buscou-se analisar o comportamento destas variáveis no projeto ótimo da coluna semi-enterrada, variando os valores de rigidez para o solo.

a) Caso 1: Solo com rigidez $Eti=3,6 \text{ MPa}$

Ao realizar a simulação numérica, assume-se a coluna hexagonal com uma carga aplicada $P=140 \text{ KN}$. Logo:

$$\text{Maximizar } f(X), \text{ com } X=[H, L, a_h]^T \quad (5.16)$$

$$\text{Sujeito a: } 20 \leq H \leq 30 \text{ [m]}$$

$$40 \leq L \leq 50 \text{ [m]}$$

$$0,3 \leq a_h \leq 0,6 \text{ [m]}$$

As soluções ideais, calculadas por ambos os métodos, são apresentadas na Tab. 5.27.

Tabela 5.27 - Solução ideal para o problema definido na Eq. (5.16), para $Eti=3,6 \text{ MPa}$.

	$f_1^o(X)$	$f_2^o(X)$	$f_3^o(X)$
ED	2,399	5,178	5,918
AG	2,291	4,877	5,682

Os resultados obtidos, conforme a Tab. 5.28, mostram que o Algoritmo Genético obteve maior rapidez em resolver a tarefa de otimização, gastando menor tempo, número de iterações e, conseqüentemente, menor esforço computacional.

Tabela 5.28 - Resultados obtidos para o problema definido na Eq. (5.16), para $Eti=3,6 MPa$.

	H (m)	L (m)	a_h (m)	Esforço Computacional	Esforço Algorítmico	Tempo
ED	30	40	0,6	10400 avaliações	103 iterações	1 (padrão)
AG	29,983	41,393	0,6	3700 avaliações	36 iterações	0,279

A Tab. 5.29 mostra os respectivos valores das freqüências naturais e das funções objetivo, tornando possível verificar que a Evolução Diferencial obteve uma resposta mais eficiente do que o Algoritmo Genético.

Tabela 5.29 - Valores das freqüências e funções objetivo para o problema definido em Eq. (5.16), para $Eti=3,6 MPa$.

	ω_1 (Hz)	ω_2 (Hz)	ω_3 (Hz)	$f_1(X)$	$f_2(X)$	$f_3(X)$
ED	2,173	5,295	11,115	2,173	3,123	5,820
AG	1,988	5,081	10,418	1,988	3,092	5,337

Além disso, o valor da densidade linear de massa manteve-se igual ao encontrado nas simulações que consideravam a coluna hexagonal, ou seja, $m=7351,5 kg/m$, sendo o volume resultante é igual a $37,412 m^3$.

b) Caso 2: Solo com rigidez $Eti=6,3 MPa$

O problema de otimização é o mesmo definido da Eq. (5.16) para uma coluna com secção hexagonal e carga aplicada $P=140 KN$, porém variando, agora, a rigidez do solo, isto é, $Eti=6,3 MPa$.

Ao iniciar a simulação, obtiveram-se as soluções ideais, as quais são apresentadas na Tab. 5.30, sendo que os métodos obtiveram soluções um pouco diferentes.

Tabela 5.30 - Solução ideal para o problema definido na Eq. (5.16), para $Eti=6,3 MPa$.

	$f_1^o(X)$	$f_2^o(X)$	$f_3^o(X)$
ED	2,763	6,896	5,704
AG	2,608	6,38	5,302

A solução encontrada para as variáveis de projeto estão na Tab. 5.31 e são bastante similares. Novamente, o Algoritmo Genético gastou menos tempo para alcançá-la.

Tabela 5.31 - Resultados obtidos para o problema definido na Eq. (5.16), para $Eti=6,3$ MPa.

	H (m)	L (m)	a_h (m)	Esforço Computacional	Esforço Algorítmico	Tempo
ED	30	40	0,6	18400 avaliações	183 iterações	1 (padrão)
AG	29,977	40,504	0,5995	7200 avaliações	71 iterações	0,31

Apesar de o Algoritmo Genético ter sido mais rápido na execução, a solução apresentada pela Evolução Diferencial traz um resultado melhor para o problema de otimização, conforme pode ser visto na Tab 5.32. O valor da densidade linear de massa é igual a $m=7351,5$ kg/m e volume, a $37,412$ m³.

Tabela 5.32 - Valores das frequências e funções objetivo para o problema definido em Eq. (5.16), para $Eti=6,3$ MPa.

	ω_1 (Hz)	ω_2 (Hz)	ω_3 (Hz)	$f_1(X)$	$f_2(X)$	$f_3(X)$
ED	2,616	6,025	11,443	2,616	3,409	5,418
AG	2,518	5,957	11,181	2,518	3,439	5,224

Ao comparar os resultados do caso 1 com os do caso 2, tanto a Evolução Diferencial como o Algoritmo Genético chegaram praticamente nos mesmos valores para as variáveis de projeto, vide Tab. 5.28 e 5.31. Então, a rigidez do solo, dado o mesmo tipo de solo, isto é, de argila mole, manteve influência proporcional no cálculo das frequências naturais, conforme Tab. 5.29 e 5.32.

Ao analisar os resultados das simulações apresentadas na seção 5.3, verificou-se a tendência em manter a coluna semi-enterrada a mais rígida possível. Em outras palavras, tais resultados mostraram que a coluna deve ter a maior área de seção transversal, conseqüentemente, gerando o maior momento de inércia de área e densidade linear de massa, o menor comprimento total e estar enterrada o mais profundo possível.

Portanto, traduz em maior estabilidade a coluna, pois suas frequências tendem a se maximizar garantindo a segurança necessária do projeto. Por outro lado, o peso calculado

torna o projeto impraticável. Desta forma, é dada continuidade ao trabalho, de modo a estabelecer um novo objetivo que considera a minimização do volume.

Na prática este resultado é comprovado e pode ser verificado em construções feitas sem o devido projeto de engenharia que apesar de oferecem certa segurança, traz conseqüências em relação ao elevado custo do material e desperdício do mesmo, além do enorme peso da estrutura.

Em relação aos métodos utilizados, diante das simulações realizadas e dos problemas considerados, verificou-se que todos obtiveram resultados muito similares, mas a Evolução Diferencial obteve resultados melhores em termos de solução do problema e o Algoritmo Genético em termos computacionais.

5.4. Problema de Otimização com Restrições

Na seção anterior, abordou-se um problema de otimização que tratava das freqüências naturais da coluna. O principal problema com os resultados obtidos foram a elevada densidade linear de massa e o volume da estrutura, tornando inviável, na prática, construir tal elemento, além do desperdício que possa estar sendo gerado. Desta forma, procurou-se obter resultados bons para as freqüências, contornando as dificuldades apresentadas.

Diante disto, abordou-se a mesma idéia de trabalhar com as freqüências naturais da coluna, porém inserindo um objetivo conflitante que visa minimizar o volume da coluna, conseqüentemente, sua densidade linear e peso, além de inserir restrições reais relacionadas à altura da fundação e a carga externa suportada pelo elemento.

O projeto ótimo da coluna semi-enterrada, então, foi obtido considerando as seguintes funções objetivo:

- (i) maximizar a primeira freqüência natural;
- (ii) maximizar a distância entre a primeira e a segunda freqüência natural;
- (iii) maximizar a distância entre a segunda e a terceira freqüência natural;
- (iv) minimizar o volume da coluna semi-enterrada.

Sujeito as seguintes restrições:

- a) A coluna deve ficar enterrada entre 30% e 60% de seu comprimento total;
- b) A carga aplicada deve ser estritamente menor que a primeira carga crítica de Euler.

De forma matemática, as funções objetivo foram definidas como:

$$\begin{cases} f(X) = [f_1(X) \ f_2(X) \ f_3(X) \ f_4(X)]^T \\ f_1(X) = \max \ \omega_1 \\ f_2(X) = \max (\omega_2 - \omega_1) \\ f_3(X) = \max (\omega_3 - \omega_2) \\ f_4(X) = \min \ \text{volume} \end{cases} \quad (5.17)$$

sendo o *volume* expresso pelo produto entre o comprimento total e a área da secção transversal, que depende, explicitamente, do tipo de secção transversal da coluna. Em relação às restrições do problema, tem-se:

$$\begin{cases} g(X) = [g_1(X) \ g_2(X) \ g_3(X)]^T \\ g_1(X) = 0,3L - H \leq 0 \\ g_2(X) = H - 0,6L \leq 0 \\ g_3(X) = P - P_1^c \leq 0, \text{ onde } P_1^c = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \end{cases} \quad (5.18)$$

A primeira carga crítica de Euler, segundo a Eq. (5.18), é proporcional ao módulo de elasticidade do material, ou seja, depende do tipo de material, além do tipo de secção transversal ou, mais precisamente, do momento de inércia de área. Porém, é inversamente proporcional ao quadrado do comprimento total da coluna. Além do mais, tal carga crítica fornece o limite crítico, a partir do qual a coluna sai da sua condição de equilíbrio e passa a oscilar.

Por outro lado, os métodos utilizados foram desenvolvidos para resolver problemas irrestritos. Como mencionado no capítulo 4, deve-se reescrever o problema, adicionando a função objetivo original uma nova função, denominada função de penalidade, $Pf(X)$.

Esta tem o objetivo de dificultar a violação das restrições, além de transformar o problema com restrições em um problema sem restrições. Assim, ao realizar tal procedimento, obteve-se a função pseudo-objetivo a ser maximizada, ou seja:

$$\text{Maximizar } \varphi(X) = f(X) - k_p Pf(X) \quad (5.19)$$

onde,

$$f(X) = p_1 \frac{f_1(X)}{f_1^o} + p_2 \frac{f_2(X)}{f_2^o} + p_3 \frac{f_3(X)}{f_3^o} - p_4 \frac{f_4(X)}{f_4^o} \quad (5.20)$$

$$Pf(X) = (\max [0, g_1(X)])^2 + (\max [0, g_2(X)])^2 + (\max [0, g_3(X)])^2 \quad (5.21)$$

em que k_p é o fator de penalidade escolhido de forma adequada para que as restrições não sejam violadas. Baseando-se em algumas simulações realizadas e dados da literatura (Oliveira, 2006), adotou-se o valor $k_p=1000$ para as simulações a serem realizadas. Também, neste estudo, os fatores de ponderação presentes na Eq. (5.20) tiveram valores iguais, isto é, $p_1=p_2=p_3=p_4=0,25$.

a) Caso 1: Solo com rigidez $Eti=3,6 \text{ MPa}$

Busca-se verificar a influência da altura da fundação, H , do comprimento total, L , e do parâmetro da secção transversal da coluna, a_h , para o problema restrito. Assim, considerou-se que a coluna possui secção hexagonal com uma carga aplicada $P=250 \text{ KN}$, enterrada em um solo de argila mole cuja rigidez é $Eti=3,6 \text{ MPa}$. Logo:

$$\text{Maximizar } \varphi(X), \text{ com } X=[H, L, a_h]^T \quad (5.22)$$

Sujeito a: Eq. (5.18)

$$20 \leq H \leq 30 \text{ [m]}$$

$$40 \leq L \leq 50 \text{ [m]}$$

$$0,3 \leq a_h \leq 0,6 \text{ [m]}$$

Inicialmente, calcularam-se as soluções ideais que são apresentadas na Tab. 5.33.

Tabela 5.33 - Solução ideal para o problema definido na Eq. (5.22), para $Eti=3,6 \text{ MPa}$ e $P=250 \text{ KN}$.

	$f_1^o(X)$	$f_2^o(X)$	$f_3^o(X)$	$f_4^o(X)$
ED	1,498	4,701	5,917	9,353
AG	1,408	4,314	5,7312	11,019

A Tab. 5.34 apresenta os valores alcançados para as variáveis de projeto e o resultado dos critérios de comparação. Nota-se que o Algoritmo Genético foi mais eficaz para encontrar a solução, ou seja, exigiu menor esforço computacional, menor número de iterações e do tempo.

Tabela 5.34 - Resultados obtidos para o problema definido na Eq. (5.22), para $E_t i=3,6 \text{ MPa}$ e $P=250 \text{ KN}$.

	H (m)	L (m)	a_h (m)	Esforço Computacional	Esforço Algorítmico	Tempo
ED	24	40	0,3	14800 avaliações	147 iterações	1 (padrão)
AG	24,24	40,578	0,316	1700 avaliações	16 iterações	0,093

O Algoritmo Genético foi, computacionalmente, mais eficaz para encontrar a solução, porém, a solução dada pela Evolução Diferencial trouxe resultados melhores, tanto para as freqüências, que foram maximizadas, como para o volume da estrutura, que foi minimizada, conforme a Tab. 5.35.

Tabela 5.35 - Valores das freqüências e funções objetivo para o problema da Eq. (5.22), para $E_t i=3,6 \text{ MPa}$ e $P=250 \text{ KN}$.

	ω_1 (Hz)	ω_2 (Hz)	ω_3 (Hz)	$f_1(X)$	$f_2(X)$	$f_3(X)$	$f_4(X)$
ED	1,311	6,012	7,94	1,311	4,701	1,928	9,353
AG	1,298	5,825	7,732	1,298	4,527	1,907	10,507

A densidade linear de massa reduziu-se bastante em comparação com as obtidas anteriormente e, principalmente, a da seção 4.3.5, isto é, decresceu de $m=7351,5 \text{ kg/m}$ para $m=1837,9 \text{ kg/m}$, mesmo para carga externa, P , maior que as anteriores. O volume, também, reduziu bastante, variando de $37,412 \text{ m}^3$ para $9,353 \text{ m}^3$.

Em relação às freqüências naturais, tanto a primeira como a segunda ficaram próximas das obtidas nas simulações anteriores, vide Tab. 5.39 e 5.35, somente para a terceira que a diferença é considerável, porém é compensada pela redução do volume.

O valor das restrições e da primeira carga crítica de Euler, obtidas mediante as variáveis de projeto da Tab. 5.34, são apresentadas na Tab. (5.36), donde se percebe que as mesmas são satisfeitas para os dois métodos estudados.

Tabela 5.36 - Restrições obtidas para o problema da Eq. (5.22), para $Eti=3,6 \text{ MPa}$ e $P=250 \text{ KN}$.

Restrições	Evolução Diferencial	Algoritmo Genético
$g_1(x)$	-12,0 [m]	-12,0 [m]
$g_1(x)$	0,0 [m]	0,0 [m]
$g_1(x)$	$-5,072 \times 10^6$ [N]	$-5,072 \times 10^6$ [N]
P_1^c	$5,572 \times 10^6$ [N]	$5,572 \times 10^6$ [N]

O valor resultante da primeira carga crítica de Euler, P_1^c , é bastante alto em comparação a carga que foi aplicada, P , demonstrando que coluna precisa sofrer uma carga axial muito maior para entrar em uma configuração crítica, e, então, começar a oscilar. Também, é importante ver que, não somente a secção transversal teve sua área diminuída, mas também o comprimento total da coluna, mantendo uma relação de proporcionalidade para com a carga crítica resultante.

b) Caso 1: Solo com rigidez $Eti = 6,3 \text{ MPa}$

Esta simulação é semelhante ao caso 1 desta seção, porém considerou a coluna com uma carga aplicada $P=500 \text{ KN}$ e rigidez do solo $Eti=6,3 \text{ MPa}$. Deste modo, o problema de otimização é dado pela Eq. (5.22).

De maneira similar, calcularam-se as soluções ideais, vide Tab. 5.37, as quais são utilizadas durante o processo de otimização conforme definido na Eq. (5.20).

Tabela 5.37 - Solução ideal para o problema definido na Eq. (5.22), para $Eti=6,3 \text{ MPa}$ e $P=500 \text{ KN}$.

	$f_1^o(X)$	$f_2^o(X)$	$f_3^o(X)$	$f_4^o(X)$
ED	1,718	5,794	5,699	9,353
AG	1,598	5,408	5,056	10,69

Os resultados obtidos para as variáveis de projeto são mostrados na Tab. 5.38. Nota-se que, para a Evolução Diferencial, têm-se os mesmos resultados do caso 1, vide comparação com a Tab. 5.34, porém os valores dos critérios computacionais são de ordens diferentes. O Algoritmo Genético obteve uma solução bem similar quando comparado com o

caso 1, Tab. 5.34, e com a própria Evolução Diferencial, porém mostrou-se muito mais rápido que a Evolução Diferencial.

Tabela 5.38 - Resultados obtidos para o problema da Eq. (5.22), para $Eti=6,3 MPa$ e $P=500 KN$.

	H (m)	L (m)	a_h (m)	Esforço Computacional	Esforço Algorítmico	Tempo
ED	24	40	0,3	17800 avaliações	177 iterações	1 (padrão)
AG	23,899	41,14	0,345	2900 avaliações	28 iterações	0,137

A solução dada pelo Algoritmo Genético é inferior, em termos quantitativos, em relação à solução dada pela Evolução Diferencial, conforme a Tab. 5.39, que apresenta o valor final das freqüências e das funções objetivo.

Tabela 5.39 - Valores das freqüências e funções objetivo para o problema da Eq. (5.22), para $Eti=6,3 MPa$ e $P=500 KN$.

	ω_1 (Hz)	ω_2 (Hz)	ω_3 (Hz)	$f_1(X)$	$f_2(X)$	$f_3(X)$	$f_4(X)$
ED	1,425	7,218	9,877	1,425	5,794	2,658	9,353
AG	1,360	6,451	8,981	1,360	5,091	2,530	12,743

As freqüências não permaneceram iguais, dado que pela formulação do problema, capítulo 3, são afetadas diretamente pela carga axial P . Por outro lado, obteve-se o mesmo grau de redução da densidade linear de massa e do volume que no caso 1, ou seja, $m=1837,9 kg/m$ e o volume igual a $9,353 m^3$, pois as variáveis de projeto, em ambos os casos, para a Evolução Diferencial, são as mesmas.

O valor das restrições e da primeira carga crítica de Euler são apresentados na Tab. 5.40.

Tabela 5.40 - Restrições obtidas para o problema da Eq. (5.22), para $E_t=6,3 \text{ MPa}$ e $P=500 \text{ KN}$.

Restrições	Evolução Diferencial	Algoritmo Genético
$g_1(x)$	-12,0 [m]	-12,0 [m]
$g_1(x)$	0,0 [m]	0,0 [m]
$g_1(x)$	$-5,072 \times 10^6$ [N]	$-5,072 \times 10^6$ [N]
P_1^c	$5,572 \times 10^6$ [N]	$5,572 \times 10^6$ [N]

Percebeu-se, então, que o aumento da carga externa aplicada, que é o dobro do valor do caso 1, não trouxe influência significativa na determinação das variáveis de projeto, conforme comparando as Tab. 5.36 e 5.40, pois a restrição $g_3(X)$ não é violada.

Analisando os resultados das simulações numéricas, verificou-se que o projeto ótimo da coluna semi-enterrada resultou em um elemento com as seguintes características:

- Menor comprimento total possível;
- Limite máximo de enterramento da coluna;
- Área de secção transversal minimizada.

Assim, os resultados são satisfatórios tanto em termos de segurança estrutural quanto em relação ao custo do material necessário.

Comparando a performance dos métodos evolutivos empregados, observou-se que, de forma geral, o Algoritmo Genético exigiu menor esforço computacional, sendo mais rápido. A Evolução Diferencial, porém, obteve um projeto ótimo melhor, com valores um pouco mais elevado para as frequências naturais e um pouco menores para o volume da coluna.

CAPÍTULO VI

CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

Neste trabalho foi apresentado o estudo de um problema da teoria de oscilações não-lineares, formulando um modelo matemático para uma coluna semi-enterrada em um solo do tipo “com enfraquecimento”. O conjunto de equações diferenciais ordinárias não-lineares que descrevem o comportamento deste elemento foram fornecidas.

Os passos necessários para obter a modelagem do problema físico foram apresentados, utilizando as equações de Lagrange, sendo os graus de liberdade do problema determinados a partir da aplicação do método de Rayleigh-Ritz, que busca diminuir a complexidade envolvida. A função Lagrangeana foi escrita permitindo obter a equação de movimento e visando determinar analiticamente as três primeiras frequências naturais. O modelo dinâmico desenvolvido foi validado através da comparação com os resultados obtidos usando um modelo de elementos finitos.

Para o projeto ótimo da coluna de semi-enterrada, foi escrito uma função multi-objetivo mediante a maximização da primeira frequência natural e o distanciamento das três primeiras frequências naturais. Em projetos de engenharia envolvendo colunas é muito importante maximizar estas frequências, pois, a partir do momento, que a coluna começa a oscilar na primeira frequência natural, sua estabilidade é rompida e afeta diretamente a segurança da estrutura.

Para a solução do problema de otimização foram considerados os métodos da Evolução Diferencial e o Algoritmo Genético. Deste modo os resultados foram validados e, além disso, estudou-se a eficácia destes métodos durante a resolução do problema.

Nas simulações iniciais, verificou-se a influência dos parâmetros que definiam a secção transversal, mais diretamente, o momento de inércia de área. Os resultados alcançados, para os diferentes tipos de secção, permitiram concluir que a coluna com um perfil I fornece, ao mesmo tempo, estabilidade, frequências bem altas e distantes, e baixo custo material, dado a menor densidade linear de massa. Por outro lado, uma coluna com

secção hexagonal, sujeita as mesmas configurações, resulta em um elemento altamente pesado e com baixas frequências naturais, necessitando de maior atenção.

Assim, na continuidade das simulações, considerou-se a coluna com secção hexagonal, inserindo outras variáveis de projeto no problema, por exemplo, o comprimento total e a altura da fundação. Com isto, a coluna obtida sempre mantinha a característica de apresentar elevados valores para o volume e a densidade linear de massa, apesar de maximizar as frequências. Resultando em uma coluna com o menor comprimento total possível, maior área de secção transversal, logo, maior momento de inércia de área e enterrada o mais profundo possível, mesmo para diferentes valores de rigidez do solo.

Como a densidade linear de massa e o volume da coluna tornaram o projeto impraticável, definiu-se um novo problema de otimização com as mesmas variáveis de projeto e que visava, além dos objetivos anteriores relacionados às frequências naturais, minimizar o volume da coluna. Além disso, buscou-se saber o quanto a profundidade de enterramento e a carga externa aplicada influenciavam no projeto ótimo.

Com isso, a partir deste novo problema, diversas simulações e análises foram efetuadas, permitindo concluir que o projeto ótimo da coluna semi-enterrada resulta em um elemento com: o menor comprimento total; maior profundidade de enterramento no solo (mesmo considerando diferentes rigidezes para o mesmo solo); e, contrariamente aos outros resultados, com uma área de secção transversal pequena. De forma geral, as frequências resultantes foram levemente modificadas em comparação com as do problema anterior, apresentando somente para a terceira frequência natural uma notável diferença, porém, isto era esperado, pois as funções objetivo são conflitantes entre si.

O fato da coluna estar enterrada trouxe resultados interessantes, pois o solo passa a atuar como um obstáculo de sustentação que restringe as oscilações laterais do elemento, dando maior rigidez à coluna, conseqüentemente, maior estabilidade. Em relação à carga aplicada no eixo axial, pouca diferença foi observada nas frequências resultantes, quando seu valor foi aumentado, uma vez que ela está relacionada diretamente com a carga crítica de Euler e possuiu seu valor sempre abaixo desta.

Analisando os métodos de otimização, pode-se concluir que o método da Evolução Diferencial apresentou-se mais adequado que o Algoritmo Genético, pois resultou, em quase todas as simulações, um projeto ótimo melhor para os problemas. Porém, a diferença dos resultados não era grande e o mérito do Algoritmo Genético se deve ao fato de apresentar maior rapidez em computar as soluções.

A principal contribuição deste trabalho, além de obter o projeto ótimo da coluna utilizando as técnicas de otimização, foi desenvolvimento de um modelo analítico adequado para a coluna semi-enterrada. Este problema não é trivial, resultando em equações

extensas, de difícil manipulação. A formulação analítica para o modelo dinâmico da coluna semi-enterrada permitiu uma melhor performance dos métodos de otimização, obtendo resultados precisos, com menor esforço computacional. A partir dos resultados obtidos neste estudo, alguns trabalhos futuros podem ser desenvolvidos, a saber:

- Aumentar o número de graus de liberdade do problema e verificar o quanto de precisão consegue-se alcançar;
- Refazer a modelagem para outras condições de apoio da coluna e analisar a influência de cada uma na solução final;
- O solo tem grande importância, então, seria interessante verificar como se comporta a coluna para diferentes tipos de solo. Outros modelos de solo, também, poderiam ser utilizados para a devida comparação dos resultados;
- Resolver o conjunto de equações de movimento utilizando técnicas numéricas e analíticas aproximadas, isto é, métodos de perturbação, de modo a fornecer uma solução no tempo, além de comparar cada metodologia;
- Fazer uma análise da estabilidade da coluna proposta utilizando, por exemplo, os critérios da Teoria de Bifurcações, estabilidade local, o método de Melnikov, estabilidade global, de modo a fornecer expressões que determinam a carga máxima suportada pela coluna em função dos outros parâmetros que a descrevem.
- Utilizar outros métodos de otimização estocásticos, como Enxame de Partículas, Colônia de Formigas e/ou Ciclo de Vida, de modo a compará-los na resolução do problema.

CAPÍTULO VII

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Bazant, Z. P.; Cedolin, L. **Stability of Structures. Elastic-Inelastic Fracture and Damage Theories**. New York: Oxford University Press, 1991.
- CABRAL, V. D.; SIEIRA, A. C. C. F.; SILVA, J. G. S. Estudo da Resposta Dinâmica de Colunas Semi-Enterradas. **Proceedings of XXVII Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering – CILAMCE**, Belém (Brasil), 2006.
- CHAJES, A. **Principles of Structural Stability Theory**. New Jersey: Prentice-Hall, 1974.
- CHENG, S.L.; HWANG, C. Optimal Approximation of Linear Systems by a Differential Evolution Algorithm. **IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics - Part A: Systems and Humans**. Vol. 31, n. 6, p. 698-707, 2001.
- DARWIN, C. **On the Origin of Species by Means of Natural Selection, or the Preservation of Favored Races in the Struggle for Life**. London: John Murray, 1859.
- DEB, K. **Multi-objective optimization using Evolutionary Algorithms**. John Wiley & Sons, 2001.
- DEB, K. **Optimization for Engineering Design: Algorithms and Examples**. New Delhi: Prentice-Hall, 1995.
- DEJONG, K. A. **An Analysis of the Behavior of a Class of Genetic Adaptive Systems**. 1975. PhD Dissertation – University of Michigan, USA.

- DYM, C. L.; SHAMES, L. H. **Solid Mechanics: A Variational Approach**. Tokyo: McGraw-Hill Kogakusha LTD., 1973.
- EISENBERG, M. A. **Introduction to the Mechanics of Solids**. California: Addison-Wesley, 1980.
- ESHELMAN, L.; SHAFFER. **Real Coded Genetic Algorithms and Interval-Schemata**. In San Mateo, CA: Morgan Kaufman, pp. 187-2002, 1993.
- FOX, R. L. **Optimization Methods for Engineering Design**. Reading, MA: Addison-Wesley, 1971.
- GREIMANN, L. F.; WOLDE-TINSAE, A. M.; YANG, P. S. Finite Element Model for Soil-Pile Interaction in Integral Abutment Bridges. **Computers and Geotechnics** 4. pp. 127-149, 1987.
- GOLDBERG, D. E. **Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning**. Reading, MA: Addison-Wesley, 1989.
- HALEJA, P.; LIN, C. Y. Genetic Search Strategies in Multicriterion Optimal Design. **Structural Optimization**. Vol. 4, pp. 99-107, 1992.
- HAN, S. M.; BANAROYA, H.; WEI, I. Dynamics of Transversely Vibrating Beams Using Four Engineering Theories. **Journal of Sound and Vibration**. Vol. 225(5), pp 935-988, 1999.
- HAUPT, R. L.; HAUPT, S. E. **Practical Genetic Algorithms**. New York: John Wiley & Sons, 1998.
- HELWANY, S. M. B.; BUDHU, M.; MCCALLEN, D. Seismic Analysis of Segmental Retaining Walls. I: Model verification. **Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering**. Vol. 127, No. 9, 2001.
- HESSEN, J.; MANNER, R. Towards an Optimal Mutation Probability for Genetic Algorithms. **Proceedings of the 1st Workshop on Parallel Problem Solving from Nature**, London (England), pp. 23-32, 1990.

- HOLLAND, J. H. **Adaptation in Natural and Artificial Systems**. MIT Press, Illinois Genetic Algorithm Laboratory. IlliGAL, University of Illinois at Urbana-Champaign, pp. 11-147, 1975.
- HURTY, W. C.; RUBINSTEIN, M. F. **Dynamics of Structures**. New Jersey: Prentice-Hall, 1964.
- IZMAILOV, A.; SOLODOV, M. **Otimização** – Volume 1: Condições de Otimalidade, Elementos de Análise Convexa e de Dualidade. Rio de Janeiro: IMPA, 2005.
- JARADAT, Y. M. M. **Soil-Structure Interaction of FRP Piles in Integral Abutment Bridges**. 2005. PhD Thesis – University of Maryland, Maryland, USA.
- KOSKI, J. 1981, Multicriterion Optimization in Structural Design. **Proceedings of International Symposium on Optimum Structural Design**, Tucson (Arizona), 1981.
- KUMAR, S.; LAVALNI, L. Lateral Load-Deflection Response of Drilled Shafts in Sand. **IE(I) Journal-CV**. Vol. 84, pp. 282-286, 2004.
- MARTINEZ, J. M.; SANTOS, S. A. Métodos computacionais de otimização. **XX COLÓQUIO BRASILEIRO DE MATEMÁTICA**, IMPA, 1995, Rio de Janeiro (ISBN 85-244-0092-7, 256p).
- MEIROVITCH, L. **Elements of Vibration Analysis**. New York: McGraw-Hill International Editions, 1986.
- MEIROVITCH, L. **Dynamics and Control of Structures**. New York: John Wiley & Sons, 1990.
- MICHALEWICZ, Z. **Genetic Algorithms + Data Structures = Evolution Programs**. 3.ed. New York: Springer-Verlag, 1996.
- OLIVEIRA, G. T. S. **Estudo e Aplicações da Evolução Diferencial**. 2006. Dissertação de Mestrado – Universidade Federal de Uberlândia, Minas Gerais, Brasil.

- OLIVEIRA, L. S. **Uma Contribuição ao Estudo dos Métodos de Otimização Multi-Objetivo**. 2005. Dissertação de Mestrado – Universidade Federal de Uberlândia, Minas Gerais, Brasil.
- ORLANDO, D. **Absorção Pendular para Controle de Vibrações de Torres Esbeltas**. 2006. Dissertação de Mestrado – PUC-Rio, Rio de Janeiro, Brasil.
- PYKE, R. Nonlinear Soil Models for Irregular Cyclic Loadings, **Journal of the Geotechnical Engineering Division**, ASCE, Vol. 105, No. GT6, 1979.
- QUEIROZ, T. A.; SANTEE, D. M. Modelagem Matemática e Comparação dos Métodos de Perturbação e Numéricos Aplicados a Vibração de Colunas Semi-Enterradas em um Solo Não-Linear. **Mecânica Computacional**, Vol. XXV, p. 1013-1032, 2006.
- RAMBERG, W.; OSGOOD, W. R. **Description of stress-strain curves by three parameters**. National Advisory Committee for Aeronautics, Technical Note No. 902, Washington DC, USA, 1943.
- REZENDE, V. **O Método de Galerkin**. 2005. Dissertação de Mestrado – Universidade Estadual de Maringá, Paraná, Brasil.
- RODRIGUES, L. F. **Meta-Heurísticas Evolutivas para Dimensionamento de Lotes com Restrições de Capacidade em Sistemas Multiestágios**. 2000. Monografia de Curso de Especialização – Universidade de São Paulo, São Carlos, Brasil.
- SAMPAIO, A. E. G. **Análise do Comportamento Dinâmico de Colunas Semi-Enterradas**. 2004. Dissertação de Mestrado – PUC-Rio, Rio de Janeiro, Brasil.
- SANTEE, D. M.; GONÇALVES, P. B. Oscillations of a Beam on a Non-Linear Elastic Foundation under Periodic Loads. **Shock and Vibration**, Vol. 13, Number 4-5/2006, pp. 273-284, 2006.
- SARAMAGO, S. F. P.; FARIA, E. D. Constraint Optimization Problems Using Simulated Annealing. **Ciência & Engenharia**, Vol. 10, n. 1, p. 69-75, 2001.

- SEREBRENICK, G. **Análise da Estabilidade de Colunas Parcialmente Enterradas em uma Fundação Elástica Não-Linear**. 2004. Dissertação de Mestrado – PUC-Rio, Rio de Janeiro, Brasil.
- SHAKER, F. J. **Effect of Axial Load on Mode Shapes and Frequencies of Beams**. Lewis Research Center Report NASA-TN-8109, Washington D. C, USA, 1975.
- SOARES, G. L. **Algoritmos Genéticos: Estudo, Novas Técnicas e Aplicações**. 1997. Monografia de Curso de Especialização – Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, Brasil.
- STORN, R.; PRICE, K. **Differential Evolution: A Simple and Efficient Adaptive Scheme for Global Optimization over Continuous Spaces**. International Computer Science Institute, Technical Report TR-95-012, Berkeley, USA, 1995.
- STORN, R.; PRICE, K. Differential Evolution – A Simple and Efficient Heuristic for Global Optimization over Continuous Spaces. **Journal of Global Optimization**, Vol. 11, pp. 341-359, 1997.
- THANASATTAYAWIBUL, N. **Curved Integral Abutment Bridges**. 2006. Doctorate's Thesis – Department of Civil and Environmental Engineering, Maryland, USA.
- TIMOSHENKO, S. P.; GERE, J. M. **Theory of Elastic Stability**. New York: Mc-Graw-Hill, 1961.
- THOMSON, W. T. **Teoria da Vibração com Aplicações**. Rio de Janeiro: Interciência, 1978.
- VANDERPLAATS, G. N. **Numerical Optimization Techniques for Engineering Design**. 3th ed. Colorado: Colorado Springs, 1999.
- VIANA, F. A. C. **Surrogate Modeling Techniques and Heuristic Optimization Methods Applied to Design and Identification Problems**. 2008. Tese de Doutorado – Universidade Federal de Uberlândia, Minas Gerais, Brasil.
- WARBURTON, G. B. **The Dynamical Behaviour of Structures**. 2nd ed. Oxford: Pergamon Press, 1976.

WIERZBICHI, A. P. On the Use of Penalty Functions in Multiobjective Optimization.
Proceedings of the International Symposium on Operations Research, Mannheim
(Germany), 1978.

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)