

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
ESCOLA DE ENGENHARIA CIVIL
MESTRADO EM ENGENHARIA CIVIL

**MODELAGEM NUMÉRICA DE VIGAS DE
CONCRETO REFORÇADO COM FIBRAS DE
AÇO**

Mestrando: Eng° Civil Marcel Bruno Silveira e Souza

Orientador: Prof. Ademir Aparecido do Prado, D.Sc.

Co-orientador: Prof. Daniel de Lima Araújo, D.Sc.

Goiânia
2006

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

MARCEL BRUNO SILVEIRA E SOUZA

**MODELAGEM NUMÉRICA DE VIGAS DE
CONCRETO REFORÇADO COM FIBRAS DE
AÇO**

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado em Engenharia Civil da Universidade Federal de Goiás, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil.

Área de concentração: Estruturas e Materiais de Construção

Orientador: Prof. Ademir Aparecido do Prado, D.Sc.

Co-orientador: Prof. Daniel de Lima Araújo, D.Sc.

Goiânia
2006

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
(GPT/BC/UFG)

Souza, Marcel Bruno Silveira.
S729m Modelagem numérica de vigas de concreto reforçado com fibras de aço [manuscrito] / Marcel Bruno Silveira Souza. – 2008.
183 f.: il., color., figs., tabs., qds.

Orientador: Prof.D.Sc.Ademir Aparecido do Prado; Co- Orientador: Prof. D.Sc.Daniel de Lima Araújo.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Goiás, Escola de Engenharia Civil, 2008.

Bibliografia: f.181-183.
Inclui listas de figuras, tabelas, símbolos e de abreviaturas.

1. Vigas de concreto 2. Mecânica da fratura 3.Fibras metálicas
4. Não linearidade física I. Prado, Ademir Aparecido do. II. Araujo, Daniel de Lima. III. Universidade Federal de Goiás, **Escola de Engenharia Civil** IV. Título.

CDU: 693.554

Referência Bibliográfica

SOUZA, Marcel Bruno Silveira. *Modelagem Numérica de Vigas de Concreto Reforçado com Fibras de Aço*. 2006. 183 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Escola de Engenharia Civil, Universidade Federal de Goiás, Goiânia/GO.

Cessão de Direitos

Nome do Autor: Marcel Bruno Silveira e Souza

Título da Dissertação de Mestrado: Modelagem Numérica de Vigas de Concreto Reforçado com Fibras de Aço

Grau/Ano: Mestre/2006

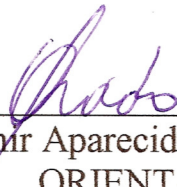
É concedida à Universidade Federal de Goiás permissão para reproduzir cópias desta dissertação de mestrado e para emprestar tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte desta dissertação de mestrado pode ser reproduzida sem a autorização por escrito do autor.

Marcel Bruno Silveira e Souza

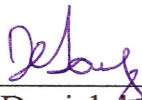
MARCEL BRUNO SILVEIRA E SOUZA

**MODELAGEM NUMÉRICA DE VIGAS DE
CONCRETO REFORÇADO COM FIBRAS DE
AÇO**

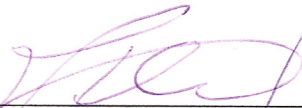
Dissertação defendida e aprovada em 28 de Setembro de 2.006, pela Banca
Examinadora constituída pelos membros:



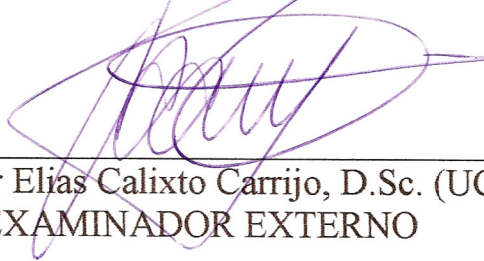
Professor Ademir Aparecido do Prado, D.Sc. (UFG)
ORIENTADOR



Professor Daniel de Lima Araújo, D.Sc. (UFG)
CO-ORIENTADOR



Professora Sylvania Regina Mesquita de Almeida, D.Sc. (UFG)
EXAMINADOR INTERNO



Professor Elias Calixto Carrijo, D.Sc. (UCG)
EXAMINADOR EXTERNO



Marlos José Ribeiro Guimarães, D.Sc. (Furnas)
EXAMINADOR EXTERNO

**Aos meus pais, Antônio João Neto e Maria de Lourdes,
irmãos Saulo e Thiago e minha esposa Danielle,
além de todos parentes e amigos**

pelo apoio, companheirismo e incentivo.

MEUS AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus, pois por várias vezes, em momentos difíceis, foi n'Ele que encontrei força.

À minha querida esposa Danielle de Castro Clemente Souza, pelo companheirismo, paciência e amor demonstrado, compreendendo e me apoiando nos momentos críticos. Palavras não podem descrever tamanha contribuição que ela ofereceu para a conclusão deste trabalho.

Aos meus pais por sempre incentivarem minha educação e minha qualificação profissional, sem medir esforços. Pela importância que possuem em minha vida, são para mim exemplos a serem seguidos.

Aos meus irmãos que, juntamente com meus pais e minha esposa, são meus melhores amigos e incentivadores. Pessoas que ajudaram muito na etapa conclusiva deste trabalho, dando força e ajudando em sua revisão. Pessoas que guardo no coração com muito orgulho.

À minha avó Maria Geralda e aos meus avós Paulo, José e Maria (três últimos in memoriam) pela admiração e carinho que tenho por todos eles. Apesar de não me recordar do meu avô José em vida, sei que foi um guerreiro.

À minha prima Caroline Silveira Damasceno, considerada por mim uma irmã, pela preocupação demonstrada para que eu finalizasse este trabalho.

Aos meus sogros Luiz e Aparecida e cunhados Lucas e Rodrigo pela amizade e apoio.

A todos parentes e amigos não citados diretamente, mas não menos importantes.

Ao Professor da UCG Elias Calixto Carrijo por ter sido meu incentivador e primeiro orientador na área de pesquisa.

Ao meu orientador Ademir Aparecido do Prado pela amizade, tempo dedicado e pelos valiosos ensinamentos.

Ao meu co-orientador Daniel de Lima Araújo pela cooperação e auxílio nos trabalhos realizados.

A todos os professores do CMEC – UFG pelo conhecimento passado para meu aprendizado, em especial a Sylvia R. M. de Almeida, Zenón José D. N. del Prado, além dos já mencionados anteriormente.

À empresa Adubos Araguaia, em especial através da pessoa do Sr. Emival Machado da Silveira pela compreensão e apoio, além de todos meus colegas de trabalho.

Aos meus amigos do mestrado, em especial Luciano Caetano, Fernanda Gabrielle, Paulo Henrique, Mohamad e Francesca pela grande amizade adquirida, auxílio no desenvolvimento das disciplinas e contribuição neste trabalho.

SUMÁRIO

| | |
|---|------------|
| Lista de figuras..... | 10 |
| Lista de tabelas..... | 14 |
| Lista de símbolos..... | 15 |
| Lista de abreviaturas..... | 18 |
| Resumo..... | 19 |
| Abstract..... | 20 |
| | |
| 1. Introdução..... | 21 |
| 1.1 Objetivos..... | 23 |
| 2. Revisão Bibliográfica..... | 25 |
| 1.2 Introdução..... | 25 |
| 1.3 Teoria da plasticidade..... | 28 |
| 1.3.1 Conceituação no contínuo..... | 32 |
| 1.3.2 Convexidade e regra da normalidade..... | 34 |
| 1.3.3 Definição de taxas de tensão e de deformação..... | 36 |
| 1.3.4 Relação constitutiva elastoplástica em termos de taxas..... | 37 |
| 1.4 Invariantes..... | 38 |
| 1.5 Funções de Plastificação..... | 41 |
| 1.5.1 Critério de Tresca..... | 41 |
| 1.5.2 Critério de Von Mises..... | 43 |
| 1.5.3 Critério de Mohr-Coulomb..... | 48 |
| 1.5.4 Critério de Drucker-Prager..... | 50 |
| 1.6 Superfícies de ruptura..... | 53 |
| 1.6.1 Superfícies de ruptura do concreto..... | 54 |
| 1.6.2 Superfície de ruptura de Mohr Coulomb modificada..... | 55 |
| 1.6.3 Superfície de ruptura de Chen-Chen..... | 55 |
| 1.6.4 Superfície de ruptura de William-Warkne..... | 58 |
| 1.6.5 Superfície de ruptura de Figueiras e Owen..... | 62 |
| 1.7 Fratura..... | 63 |
| 1.7.1 Introdução..... | 63 |
| 1.7.2 Razões para utilização da mecânica da fratura..... | 64 |
| 1.7.3 Efeito Escala..... | 65 |
| 1.7.4 Modos geométricos de fratura..... | 67 |
| 1.7.5 Deformação antiplana..... | 68 |
| 1.7.6 Bases da mecânica linear da fratura..... | 69 |
| 1.7.7 Distribuição de tensões em corpo com trinca..... | 71 |
| 1.8 Modelos de fissuração..... | 85 |
| 1.8.1 Modo misto de fratura no concreto..... | 86 |
| 1.8.2 Modelo de Fissuração Distribuída..... | 87 |
| 1.8.3 Aproximação das fissuras discretas..... | 89 |
| 1.8.4 Aproximação da fissuração coberta..... | 90 |
| 1.9 Modelagem do Concreto Simples..... | 90 |
| 1.9.1 Modelo Total Strain..... | 91 |
| 1.9.2 Modelos Incrementais ou Plásticos..... | 93 |
| 1.10 Concreto reforçado com fibras..... | 103 |
| 1.10.1 Fibras..... | 109 |
| 1.10.2 Propriedades mecânicas do concreto..... | 110 |

| | | |
|-------------|---|------------|
| 1.10.3 | Caracterização do comportamento pós-pico segundo a RILEM para o concreto reforçado com fibras | 111 |
| 1.10.4 | Diagrama bilinear $\sigma - w$ para concreto simples do CEB-FIP 1993 | 112 |
| 1.10.5 | Diagrama trilinear $\sigma - w$ para o concreto reforçado com fibras | 114 |
| 1.10.6 | Energia de fratura | 114 |
| 1.10.7 | Análise inversa | 116 |
| 1.10.8 | Influência da tensão correspondente ao início da fissuração σ_1 | 118 |
| 1.10.9 | Influência de σ_2 e w_2 | 118 |
| 1.10.10 | Influência de σ_3 e w_3 | 119 |
| 1.10.11 | Influência de w_4 | 119 |
| 1.10.12 | Relação de σ_i com os parâmetros experimentais obtidos | 120 |
| 1.11 | Modelagem do Concreto Armado | 121 |
| 1.12 | Modelagem das Armaduras | 122 |
| 1.13 | Solução do Sistema de Equações Não-Lineares | 123 |
| 1.13.1 | Métodos de soluções de equações não-lineares | 127 |
| 1.13.2 | Crítério de convergência | 130 |
| 1.13.3 | Aspectos Complementares | 131 |
| 1.14 | Verificação da Segurança Utilizando o MEF | 132 |
| 1.15 | Método dos elementos finitos | 134 |
| 1.15.1 | Breve relato da história do método dos elementos finitos | 134 |
| 1.15.2 | Fundamentos Básicos do MEF | 137 |
| 1.15.3 | Configuração dos principais tipos de elementos | 141 |
| 1.15.4 | Algumas aplicações do método dos elementos finitos | 143 |
| 1.15.5 | O Que Dizem os Códigos Normativos Sobre o MEF? | 146 |
| 1.15.6 | Análise de Estruturas de Concreto Utilizando o MEF | 148 |
| 2 | Metodologia | 151 |
| 2.1 | Vigas relatadas em Lopes (2005) | 151 |
| 2.2 | Análise da sensibilidade do modelo | 153 |
| 2.2.1 | Influência da tensão correspondente ao início da fissuração, σ_1 | 154 |
| 2.2.2 | Influência de σ_2 e ε_2 | 155 |
| 2.2.3 | Influência de ε_3 | 157 |
| 2.3 | Prismas relatados em Nunes (2006) | 158 |
| 3 | Análise de resultados | 161 |
| 3.1 | Modelagem das vigas de Lopes (2005) | 161 |
| 3.2 | Modelagem dos prismas sem fibras de Nunes (2006) | 162 |
| 3.2.1 | Modelo com entalhe no meio do vão | 163 |
| 3.2.2 | Modelo com entalhe próximo ao apoio | 166 |
| 3.3 | Modelagem dos prismas com 1% de fibras de Nunes (2006) | 170 |
| 3.3.1 | Prisma sem entalhe | 170 |
| 3.3.2 | Prisma com entalhe no meio do vão | 171 |
| 3.3.3 | Prisma com entalhe próximo ao apoio | 172 |
| 3.4 | Modelagem dos prismas com 2% de fibras de Nunes (2006) | 173 |
| 3.4.1 | Prisma sem entalhe | 174 |
| 3.4.2 | Prisma com entalhe no meio do vão | 175 |
| 3.4.3 | Prisma com entalhe próximo ao apoio | 176 |
| 4 | Conclusão | 178 |
| 5 | Sugestões para trabalhos futuros | 179 |
| 6 | Referências Bibliográficas | 181 |

LISTA DE FIGURAS

| | |
|---|----|
| Figura 1.2.1 - Obtenção da Energia da Fratura através de gráficos experimentais tensão x deformação. | 22 |
| Figura 1.2.2 - Viga de três pontos com entalhe no meio do vão. | 22 |
| Figura 1.2.3 - Viga de três pontos com entalhe a uma distância x do ponto de aplicação da carga..... | 23 |
| Figura 1.2.4-Mecanismo de falha por esforço combinado de flexo-cisalhamento..... | 23 |
| Figura 2.1 – Comportamento experimental de barras em tração no concreto (Proença 1988)..... | 25 |
| Figura 2.2 – Encaixe dos agregados (Proença 1988)..... | 26 |
| Figura 2.3 – Efeito de pino. | 26 |
| Figura 2.4 – Distribuição de tensões na massa de concreto fissurado (Proença 1988). | 27 |
| Figura 2.5 – Comportamento idealizado do concreto e aço (Proença 1988)..... | 27 |
| Figura 2.6 - Características do modelo elastoplástico perfeito..... | 28 |
| Figura 2.7 - Características do modelo elastoplástico com endurecimento. | 30 |
| Figura 2.8 - Efeito de Bauschinger para materiais isotrópicos (Proença 1988). | 31 |
| Figura 2.9 – Efeito de Bauschinger para materiais que seguem comportamento cinemático. | 31 |
| Figura 2.10 - Evolução da superfície inicial no espaço das tensões (Modelo cinemático) (Proença 1988)..... | 33 |
| Figura 2.11 - Evolução da superfície inicial no espaço das tensões (Modelo isótropo) (Proença 1988)..... | 34 |
| Figura 2.12 – Ciclo de tensões com geração de deformações plásticas (Proença 1988).... | 35 |
| Figura 2.13 – Normalidade e convexidade (Proença 1988). | 36 |
| Figura 2.14 – Tensor de tensão no plano..... | 39 |
| Figura 2.15 – Superfície de Tresca no plano de Nadai..... | 43 |
| Figura 2.16 – Prisma de Tresca com base hexagonal..... | 43 |
| Figura 2.17 – Representação da superfície de Tresca no plano $\sigma_1 - \sigma_2$ | 43 |
| Figura 2.18 - Decomposição do tensor de tensões relacionado ao plano octaédrico. | 45 |
| Figura 2.19 – Superfícies de Von Mises (inscrita e circunscrita à superfície de Tresca).... | 47 |
| Figura 2.20 – Prisma de Von Mises de base circular. | 47 |
| Figura 2.21 - Comparação das superfícies de Von Mises com Tresca no plano $\sigma_1 - \sigma_2$ | 47 |
| Figura 2.22 - Decomposição do tensor de tensões relacionado ao plano octaédrico (Proença 1988)..... | 48 |
| Figura 2.23 – Superfície de Mohr Coulomb no plano Meridiano (Proença 1988)..... | 49 |
| Figura 2.24 – Superfície de Mohr-Culomb no plano de Nadai (Proença 1988)..... | 50 |
| Figura 2.25 – Representação da superfície de Mohr Coulomb no plano $\sigma_1 - \sigma_2$ | 50 |
| Figura 2.26 – Representação da superfície de Drucker-Prager: (a) Plano Meridiano, (b) Plano de Nadai..... | 51 |
| Figura 2.27 – Cone cilíndrico de Drucker-Prager. | 52 |
| Figura 2.28 - Comparação da superfície de Drucker Prager com Mohr Coulomb no plano $\sigma_1 - \sigma_2$ | 52 |
| Figura 2.29 – Comparativo entre as superfícies de escoamento..... | 52 |
| Figura 2.30 – Comportamento uniaxial idealizado (Proença 1988)..... | 53 |
| Figura 2.31 – Aspecto da superfície de ruptura no plano Meridiano (Proença 1988)..... | 56 |
| Figura 2.32 – Representação no sistema $\sigma_1 - \sigma_2$ | 58 |

| | |
|---|-----|
| Figura 2.33 – Representação no plano anti-esférico (Proença 1988)..... | 59 |
| Figura 2.34 – Violação das condições de convexidade da superfície (Proença 1988)..... | 61 |
| Figura 2.35 – Superfície de Owen no plano $\sigma_1 - \sigma_2$ (Proença 1988)..... | 62 |
| Figura 2.36 – a) Trinca do modo I, b) Trinca do modo II, c) Trinca do modo III..... | 68 |
| Figura 2.37 – a) chapa fina com fissura elíptica com tensão uniforme; b) problema de Griffith, com $b \rightarrow 0$ (Karihaloo, 1955)..... | 70 |
| Figura 2.38 – Método do microscópio..... | 72 |
| Figura 2.39 – Coordenadas locais (Pastoucov e Voorwald 1995)..... | 72 |
| Figura 2.40 – Método de superposição para trinca (Pastoucov e Voorwald 1995)..... | 74 |
| Figura 2.41 – Zona plástica na ponta da trinca do modo I (1. deformação plana; 2. tensão plana) (Karihaloo 1995)..... | 78 |
| Figura 2.42 – Deslocamento da abertura na ponta da trinca. | 78 |
| Figura 2.43 – Modelo de fissuração coesiva de Barenblatt para modo I (Karihaloo 1995)..... | 80 |
| Figura 2.44 – Efeito escala no critério de força e na MFLE (mecânica da fratura linear elástico) (Karihaloo 1995)..... | 82 |
| Figura 2.45 – Viga de três pontos..... | 84 |
| Figura 2.46 - Energia de fraturamento à compressão. (Feenstra e Borst, 1993). | 88 |
| Figura 2.47 - Relações disponíveis para tension-softening no programa <i>DIANA</i> (TNO, 2001)..... | 92 |
| Figura 2.48 - Relações constitutivas para compressão no programa <i>DIANA</i> (TNO, 2001)..... | 93 |
| Figura 2.49 - Modelos plásticos disponíveis no programa <i>DIANA</i> (TNO, 2001). | 95 |
| Figura 2.50 - Comparação entre o critério de Rankine-Von Mises com resultados experimentais de Kupfer e Gerstle (1973)..... | 95 |
| Figura 2.51 - Exemplo de decomposição da deformação normal à fissura. | 96 |
| Figura 2.52 - Plano de fissura..... | 97 |
| Figura 2.53 - Módulos secantes em regime de fissuração. | 98 |
| Figura 2.54 - <i>Tension softening</i> multilinear. | 99 |
| Figura 2.55 - Diagrama tensão–abertura de fissura..... | 99 |
| Figura 2.56 - <i>Tension cut-off</i> linear para estado bi-dimensional de tensões principais.... | 101 |
| Figura 2.57 - Modelo de fenda fictícia (MFF)..... | 105 |
| Figura 2.58 - Resposta de um elemento sujeito a uma carga F | 105 |
| Figura 2.59 – Processo de determinação da energia da fratura, G_f . (Barros, 1995). | 106 |
| Figura 2.60 – Curvas de amolecimento de $\sigma - w$ | 107 |
| Figura 2.61- Sistema de ensaio de tração direta (Barros, 1995)..... | 108 |
| Figura 2.62 – Modelo de fenda fictícia. | 108 |
| Figura 2.63 – Fenda em concreto reforçado com fibras..... | 108 |
| Figura 2.64 – Resistência equivalente e residual à tração em flexão: (a) $f_{eq,2}$ e $f_{R,1}$; (b) $f_{eq,3}$ e $f_{R,4}$ | 112 |
| Figura 2.65 – Diagrama $\sigma - w$ bilinear adaptado para o concreto fissurado..... | 113 |
| Figura 2.66 – Diagrama $\sigma - w$ trilinear adotado para concreto fissurado..... | 114 |
| Figura 2.67 – Determinação de G_f com base na lei $\sigma - w$ | 115 |
| Figura 2.68 – Determinação da energia de fratura segundo RILEM (Barros, 1995). | 116 |
| Figura 2.69 – Fluxograma do processo de análise inversa. | 117 |
| Figura 2.70 - Representação das condições adaptadas na determinação de σ_i e w_i por análise inversa..... | 117 |
| Figura 2.71 – Elemento de concreto armado sob tração. (Adaptado de Feenstra e Borst, 1993)..... | 121 |

| | |
|--|-----|
| Figura 2.72 – Comportamentos de “snap-back” e “snap-through” possíveis de serem obtidos no programa DIANA quando utilizado a opção “arc length method” (TNO, 2001). | 126 |
| Figura 2.73 – Representação do método do arco: (a) possível solução sem o método do arco e (b) impossível sem o método do arco – o método iterativo representado é o Newton-Raphson modificado. | 130 |
| Figura 2.74 - Elementos iso-paramétricos utilizados para concreto..... | 138 |
| Figura 2.75 – Elemento de vigamento..... | 141 |
| Figura 2.76 – Tensões nos elementos..... | 142 |
| Figura 2.77 – Elemento para análise de sólidos com eixo de simetria..... | 142 |
| Figura 2.78 – Elementos para placas finas e chatas. | 142 |
| Figura 2.79 – Elemento para estruturas de casca fina. | 143 |
| Figura 2.80 – Elemento de casca curvada. | 143 |
| Figura 2.81 – Análise de elementos finitos de uma porção..... | 144 |
| Figura 2.82 – Estrutura de um reator e sua discretização em elementos..... | 145 |
| Figura 2.83 – Viga de concreto reforçada. | 146 |
| Figura 3.1 – Geometria e esquema de carregamento..... | 151 |
| Figura 3.2 – Detalhe da malha utilizada para vigas com e sem fibras. | 153 |
| Figura 3.3 – Gráfico Tensão x Deformação genérico | 154 |
| Figura 3.4 – Gráficos normalizados força x deslocamento no meio do vão para valores de σ_1 variável. | 155 |
| Figura 3.5 – Gráficos normalizados força x deslocamento no meio do vão para valores de σ_2 variável..... | 156 |
| Figura 3.6 – Gráficos normalizados força x deslocamento no meio do vão para valores de ϵ_2 variável. | 157 |
| Figura 3.7 – Gráficos normalizados força x deslocamento no meio do vão para valores de ϵ_3 variável. | 158 |
| Figura 3.8 – Geometria e esquema de carregamento para prisma usado no ensaio de tenacidade. | 159 |
| Figura 3.9 – Malha utilizada na modelagem do prisma usado no ensaio..... | 159 |
| Figura 3.10 – Geometria e esquema de carregamento para prismas com entalhe no meio do vão. | 160 |
| Figura 3.11 - Geometria e esquema de carregamento para prismas com entalhe próximo ao apoio. | 160 |
| Figura 3.12 – a) Malha utilizada para modelo com entalhe no meio do vão; b) Malha utilizada para modelo com entalhe próximo ao apoio..... | 161 |
| Figura 4.1– Gráfico Força x Deslocamento no meio do vão para: a)Viga sem fibras; b) Viga com fibras. | 162 |
| Figura 4.2 – Gráfico Força x deslocamento experimental e numérico com variação de β | 163 |
| Figura 4.3 – Comparação entre os gráficos força x deslocamento no meio do vão obtidos numericamente com β fixo e variável, juntamente com os experimentais..... | 164 |
| Figura 4.4 – Gráfico tensão x abertura de fissura para concreto sem fibra. | 165 |
| Figura 4.5 – Comparação entre resultados experimentais com numérico utilizando-se o gráfico bilinear..... | 165 |
| Figura 4.6 – Distribuição das trincas no prisma. | 166 |
| Figura 4.7 – Gráfico Força x deslocamento experimental e numérico com variação de β | 167 |

| | |
|---|-----|
| Figura 4.8 – Comparação entre os gráficos força x deslocamento no meio do vão obtidos numericamente com β fixo e variável, juntamente com os experimentais..... | 168 |
| Figura 4.9 – Comparação entre resultados experimentais com numérico utilizando-se o gráfico bilinear..... | 169 |
| Figura 4.10 – Distribuição das trincas no prisma. | 169 |
| Figura 4.11 – Distribuição de tensões σ_{xx} | 170 |
| Figura 4.12 – Diagrama bilinear para concreto com volume de fibras de 1%. | 170 |
| Figura 4.13 – Comparativo gráfico força x deslocamento numérico/experimental | 171 |
| Figura 4.14 – Comparativo dos gráficos para prisma com 1% de fibras com entalhe no meio do vão. | 172 |
| Figura 4.15 – Comparação entre o modo de fratura experimental e numérico. | 172 |
| Figura 4.16 – Comparativo entre resultado experimental e numérico para prisma com entalhe próximo ao apoio com 1% de fibras. | 173 |
| Figura 4.17 - Diagrama bilinear para concreto com volume de fibras de 2%. | 174 |
| Figura 4.18 – Gráficos numéricos e experimental para prismas sem entalhe. | 175 |
| Figura 4.19– Gráficos numérico e experimental para prismas com entalhe no meio do vão. | 176 |
| Figura 4.20 – Curva carga x deslocamento para prisma com entalhe próximo ao apoio com 2% de fibras. | 177 |

LISTA DE TABELAS

| | |
|---|-----|
| Tabela 3.1 – Dados utilizados para modelagem dos prismas..... | 159 |
|---|-----|

LISTA DE SÍMBOLOS

| | |
|------------------------------------|--|
| A_s | Área da seção transversal da armadura longitudinal de tração |
| E | Módulo de Elasticidade do concreto |
| E_c | Módulo de Elasticidade longitudinal do concreto |
| E_s | Módulo de Elasticidade longitudinal do aço |
| F | Força atuante |
| f_c | Resistência a compressão do concreto |
| f_t | Resistência a tração do concreto |
| $f_{eq,2}$, $f_{eq,3}$ | Resistência a tração equivalente a tração |
| $f_{R,1}$, $f_{R,4}$, $f_{Rk,4}$ | Tensão residual de tração na flexão |
| G_c | Energia da fratura a compressão |
| G_c^0 | Energia da fratura a compressão de concreto sem fibras |
| G_f | Energia da fratura a tração |
| I_1 | Primeiro invariante do tensor de tensões |
| J_2 | Segundo invariante do tensor desviatório de tensões |
| J_3 | Terceiro invariante do tensor desviatório de tensões |
| L | Comprimento total da peça |
| T | Tensor de tensões |
| U | Deslocamento na direção y |
| GF | Energia desprendida |
| P | Carga |
| V | Esforço cortante |
| F_t | Esforço de tração no aço |
| F_{comp} | Esforço de compressão |

| | |
|--------------------|---|
| F_c | Força de cisalhamento resistida pelo concreto |
| F_p | Força de pino |
| b | Largura |
| f | Função de plastificação |
| f_{ct} | Resistência à tração do concreto simples |
| f_t | Resistência à tração |
| f_u | Resistência última |
| f_y | Tensão de escoamento do aço |
| f_t | Resistência à tração |
| h | Altura total da peça de concreto armado |
| l | Vão teórico da peça |
| w | Abertura de fissura |
| β_c | Coefficiente de transferência do cortante para fissuras fechadas |
| β_f | Fator que define a altura equivalente do bloco de compressão do concreto reforçado com fibras |
| β_t | Coefficiente de transferência do cortante para fissuras abertas |
| δ | Flecha no meio do vão |
| δ_u | Deslocamento último no meio do vão |
| δ_y | Deslocamento quando inicia o escoamento da armadura longitudinal de tração no meio do vão |
| ε | Deformação específica |
| ε_{cr} | Deformação crítica |
| ε_e | Deformação elástica do concreto |
| ε_p | Deformação plástica do concreto |
| ε_s | Deformação específica do aço da armadura passiva |
| ε_{sf} | Deformação específica total do concreto com fibra |

| | |
|------------------|---|
| ϵ_{ult} | Deformação última |
| ν | Coefficiente de Poisson |
| σ_y | Tensão de escoamento |
| $\sigma_{máx}$ | Tensão máxima |
| σ | Tensão normal |
| σ_1 | Tensão principal na direção 1 |
| σ_2 | Tensão principal na direção 2 |
| σ_3 | Tensão principal na direção 3 |
| σ_{cr} | Tensão crítica |
| σ_{ct} | Tensão de tração |
| τ | Tensão cisalhante |
| τ_{13} | Tensão de cisalhamento |
| τ_m | Tensão cisalhante |
| θ | Invariante |
| ξ | Invariante |
| ϑ_0 | Altura do entalhe |
| γ | Deformação cisalhante |
| ρ | Taxa de armadura longitudinal de tração |
| ρ_f | Taxa de fibra metálica no concreto |

LISTA DE ABREVIATURAS

| | |
|------|---------------------------------------|
| CMEC | Curso de Mestrado em Engenharia Civil |
| NBR | Norma Brasileira |
| CEB | Comité Euro-Internacional do Betão |
| UFG | Universidade Federal de Goiás |
| EEC | Escola de Engenharia Civil |
| UCG | Universidade Católica de Goiás |

RESUMO

Neste trabalho são realizadas modelagens numéricas de vigas de concreto armado, reforçadas ou não com fibras metálicas. Este procedimento possibilita a análise de diversas variáveis em uma estrutura, com relativa economia. O objetivo é a determinação da energia de fratura de vigas de concreto armado empregando programas comerciais de elementos finitos. Tem ainda por escopo analisar o modo de fratura II, ocasionado por tensões cisalhantes. Para tanto foi utilizado o programa comercial DIANA. A validação das modelagens é realizada através da comparação dos resultados numéricos obtidos, com valores experimentais da literatura. Esta validação foi inicialmente realizada com vigas e por fim prismas de concreto com e sem a adição de fibras. A não-linearidade física do material foi levada em consideração. Foram utilizadas na modelagem das vigas as teorias de Rankine e Drucker Prager. No caso dos prismas utilizou-se de teorias da mecânica da fratura, onde ao invés de se utilizar as funções de plastificação do material (ou de ruptura dos mesmos), utilizar-se-ão modelos que retratam o surgimento e propagação das trincas. Os resultados obtidos foram satisfatórios fazendo-se uma comparação com os experimentais, porém a energia da fratura utilizada à tração foi tirada do CEB (1.990) para os casos das vigas de Lopes (2005) e a compressão obtida através do gráfico: tensão x deformação. Será ainda focado neste trabalho a retro-análise, pela combinação de variações no volume de fibras, procurando obter gráficos que retratem o comportamento tensão x volume de fibras para a resistência do concreto.

Nota-se que a utilização de fibras metálicas diminui consideravelmente a armadura longitudinal para combater esforços de flexão. Porém, deve-se proceder outros ensaios de modo a obter o volume de fibra ideal a ser utilizado para diversas resistências do concreto.

Palavras-chave: fratura, funções de plastificação, modelagem numérica, não linearidade.

ABSTRACT

In this healthy work accomplished numeric modellings of beams of armed concrete, reinforced or not with metallic fibers. This procedure makes possible the analysis of several variables in a structure, with relative economy. The objective is the determination of the energy of fracture of beams of armed concrete using commercial programs of finite elements. It still has for mark to analyze the fracture way II, caused by shear tensions. For so much the commercial program was used DIANA. The validation of the modellings is accomplished through the comparison of the obtained numeric results, with experimental values of the literature. This validation was initially accomplished with beams and finally concrete prisms with and without the addition of fibers. The none physical linearity of the material was taken in consideration. They were used in the modelling of the beams the theories of Rankine and Drucker Prager. In the case of the prisms it was used of theories of the mechanics of the fracture, where instead of using the functions of plasticity of the material (or of rupture of the same ones), models will be used that portray the appearance and propagation of the trines. The obtained results were satisfactory being made a comparison with the experimental ones, however the energy of the fracture used to the traction it was removed of CEB (1.990) for the cases of Lopes' beams (2005) and the compression obtained through the graph: tension x deformation. It will still be focused in this work the retro analysis, for the combination of variations in the volume of fibers, trying to obtain graphs that portray the behavior tension x volume of fibers for the resistance of the concrete.

It is noticed that the use of metallic fibers reduces the longitudinal armor considerably to combat flexural efforts. However, it should be proceeded other way rehearsals to obtain the volume of ideal fiber to be used for several resistances of the concrete.

Keywords: Fracture, plasticity, numeric modelling, none linearity.

1. Introdução

Até alguns anos atrás, os cálculos dos esforços em vigas eram feitos analiticamente. Porém, com a crescente utilização dos microcomputadores, o cálculo manual cedeu lugar ao uso de programas automáticos. Hoje, a grande maioria dos escritórios de projetos de estruturas dispõem desse ferramental para efetuar os diversos tipos de análise com as quais o engenheiro estrutural se depara.

Os programas de cálculo, que usavam análise matricial, foram substituídos por outros que se baseiam no método dos elementos finitos permitindo análises muito mais complexas. O MEF consiste na resolução de um sistema estrutural através da divisão do mesmo em um número finito de elementos com propriedades e formas geométricas pré-estabelecidas. Entre as principais características do processo está a utilização de uma função aproximadora de deslocamentos aplicada ao domínio de cada elemento e que pode ser expressa em função das incógnitas nodais.

Para melhor retratar o comportamento das estruturas, surge a necessidade de se realizar um estudo que se aproxime mais de seu comportamento real, utilizando-se para isso o conceito da não linearidade. Neste trabalho, será abordada a não-linearidade física do material concreto armado, que é bastante complexa de ser modelada, já que a fissuração do concreto altera a matriz de rigidez da estrutura analisada. Com efeito, podem existir, na mesma, números muito pequenos, que geram dificuldade de solução do sistema de equações. Além disso, o concreto geralmente está associado ao aço, surgindo a necessidade de se utilizar superfícies de ruptura de modo a retratar o comportamento de ambos os materiais trabalhando em conjunto.

Para retratar a fissuração do material é utilizada a mecânica linear da fratura (MLF), associada ao MEF. A MLF que estuda as falhas estruturais através de hipóteses e métodos da mecânica dos sólidos, além de modelos experimentais. Este fenômeno é levado em consideração nos pontos de Gauss do elementos finitos utilizado, quando a tensão máxima resistente é ultrapassada. O efeito é computado na matriz de rigidez de cada elemento, chegando-se na matriz global da estrutura analisada. A energia dissipada devido à fissuração do concreto é denominada energia da fratura, e pode ser obtida através dos gráficos experimentais de tensão x deformação da estrutura analisada, conforme mostrado na Figura 1.2.1.

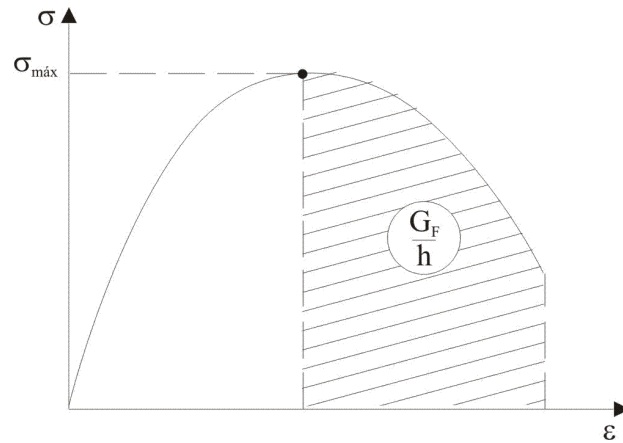


Figura 1.2.1 - Obtenção da Energia da Fratura através de gráficos experimentais tensão x deformação.

Esta energia pode ser dividida em duas partes, G_FI e G_FII, sendo a primeira parcela ocasionada por trincas de tração normal e a segunda por trincas de cisalhamento plano.

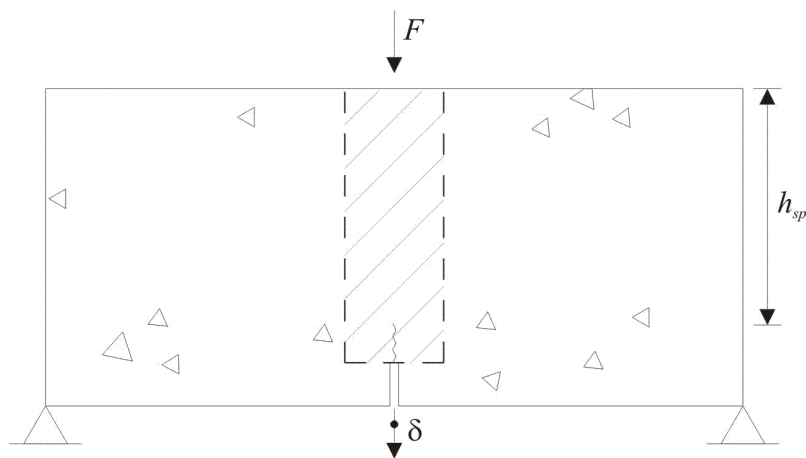


Figura 1.2.2 - Viga de três pontos com entalhe no meio do vão.

Ensaio realizado por Barros (2005), conforme Figura 1.2.2, teoricamente geram apenas a parcela G_FI, enquanto que as vigas ensaiadas por Jenq e Shah (1988) geram a parcela G_FII (Figura 1.2.3).

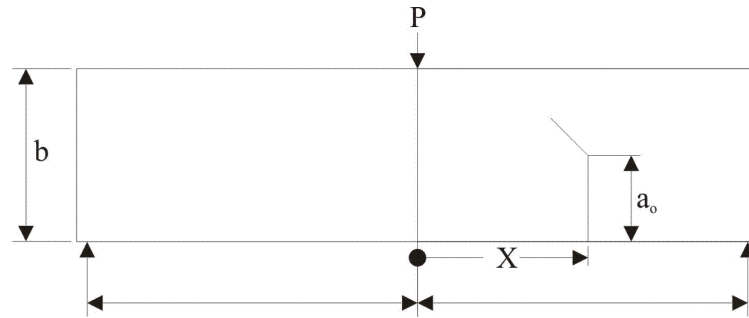


Figura 1.2.3 - Viga de três pontos com entalhe a uma distância x do ponto de aplicação da carga.

Pode ocorrer ainda uma combinação de flexo-cisalhamento no mecanismo de falha, conforme abordado em Gastebled e May (2001). A Figura 1.2.4 mostra esse mecanismo, onde a energia da fratura é dada pela soma de parcelas de G_{FI} e G_{FII} . Portanto é possível obter a energia desprendida devido a esforços cisalhantes, que é um dos objetivos deste trabalho.

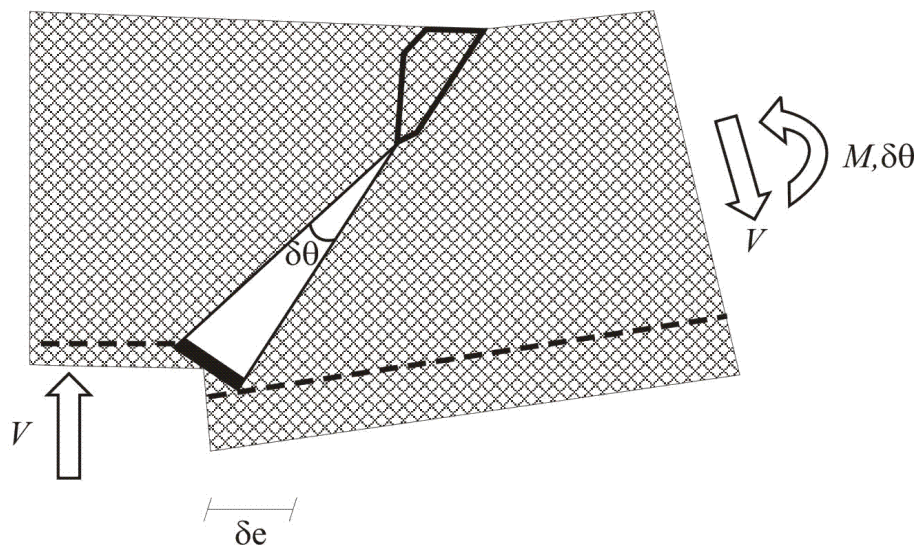


Figura 1.2.4-Mecanismo de falha por esforço combinado de flexo-cisalhamento.

1.1 Objetivos

O presente trabalho tem por escopo partir de resultados experimentais de vigas de concreto armado, com e sem adição de fibras metálicas, encontradas na literatura e

modelá-las, de forma a validar o modelo a ser definido e utilizado. A análise será feita com o uso do programa DIANA, que utiliza o método dos elementos finitos. Posteriormente deverá ser feita, através de retro-análise, várias modelagens variando a resistência do concreto e o volume de fibras, procurando-se chegar a equações que retratem o comportamento tensão x volume de fibras para a resistência do concreto.

2. Revisão Bibliográfica

1.2 Introdução

O concreto é um material muito utilizado na construção civil, principalmente devido a seu baixo custo, em comparação com o de outros materiais, e capacidade de adquirir formas diversas (boa maleabilidade). Com isso, várias pesquisas têm sido desenvolvidas e grandes avanços têm ocorrido.

O material ideal para construção deve ter, além das propriedades descritas acima, boa resistência tanto à tração quanto à compressão e ser dúctil. Contudo este material ainda não existe.

O concreto convencional sofreu grandes avanços no que diz respeito à resistência à compressão, porém o mesmo não tem ocorrido com sua resistência à tração e à ductilidade, necessitando da utilização deste material em conjunto com o aço.

A resistência à tração no concreto armado depende da aderência entre o concreto e o aço, sendo que quanto maior a aderência entre os materiais, maior é a transferência de esforços de tração para o aço, enrijecendo a estrutura analisada. Logo, ao fissurar o concreto, há ainda uma transferência de esforço para o aço através do atrito do mesmo com a pasta, conforme Figura 2.5.

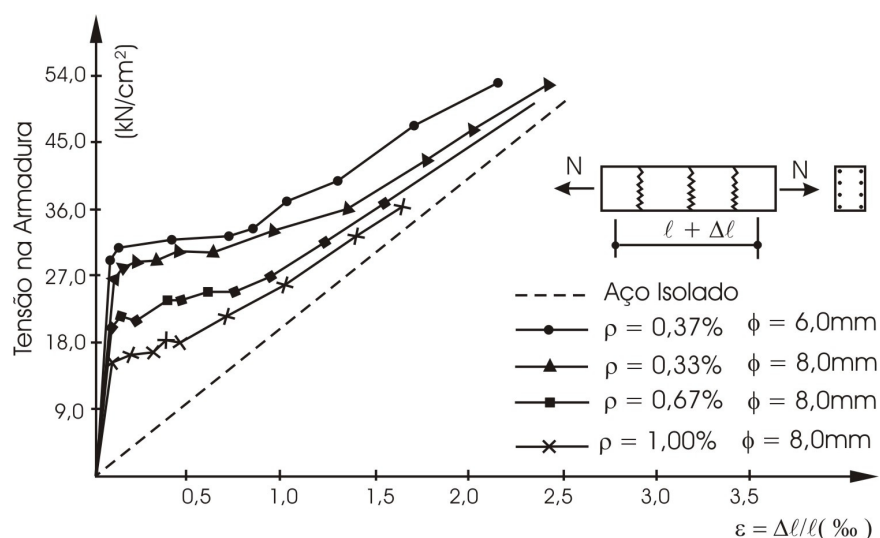


Figura 2.5 – Comportamento experimental de barras em tração no concreto (Proença 1988).

Nota-se que inicialmente há certa proporção entre a tensão e a deformação da armadura, com coeficiente angular maior do que no caso da armadura isolada. Porém isso se altera quando a fissuração do concreto se inicia. Esse efeito se acentua à medida que crescem as fissuras e o aço passa a se comportar de forma semelhante ao que ocorre quando ensaiado isoladamente.

Além deste fenômeno, os agregados utilizados no concreto muito interferem no seu comportamento, como pode ser constatado na Figura 2.6.

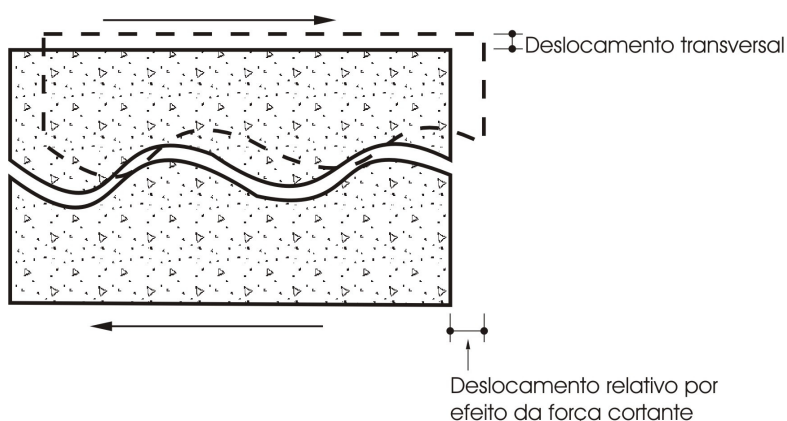
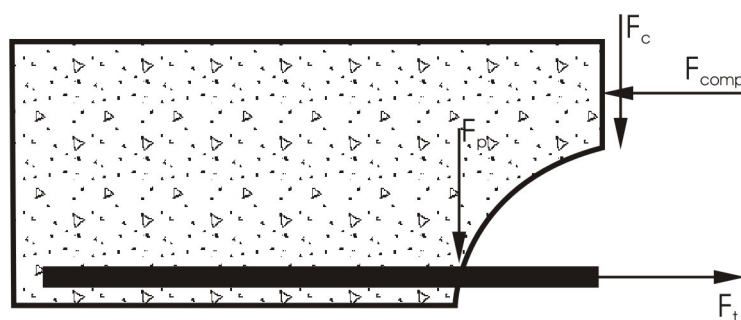


Figura 2.6 – Encaixe dos agregados (Proença 1988).

Nota-se que o esforço cortante é combatido no concreto fissurado pelo encaixe dos agregados graúdos na massa de concreto, devido à irregularidade das superfícies da fissura, e pelo efeito de pino entre armadura e concreto de cobertura, conforme mostra a Figura 2.7.



F_c - Força de cisalhamento resistida pelo concreto

F_{comp} - Força de compressão no concreto

F_p - Força de pino

F_t - Força de tração no aço

Figura 2.7 – Efeito de pino.

Constata-se que a armadura longitudinal, que fundamentalmente deveria resistir, no caso de vigas, a esforços de flexão (tração), passa a resistir também aos esforços cisalhantes nas regiões que atravessam fissuras. A Figura 2.8 mostra a variação da distribuição de tensões ao longo da peça de concreto armado devido à fissuração da mesma.

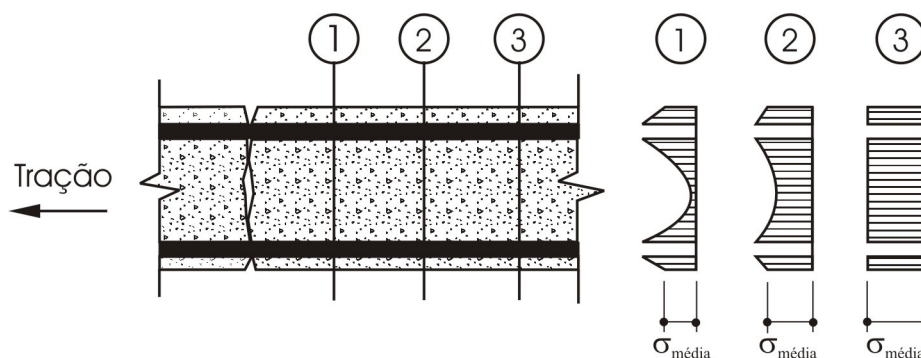


Figura 2.8 – Distribuição de tensões na massa de concreto fissurado (Proença 1988).

Para a modelagem numérica, há a necessidade de se utilizar modelos idealizados que retratam o comportamento do material. Logo, a Figura 2.9 retrata a idealização na distribuição de tensões tanto no aço quanto no concreto.

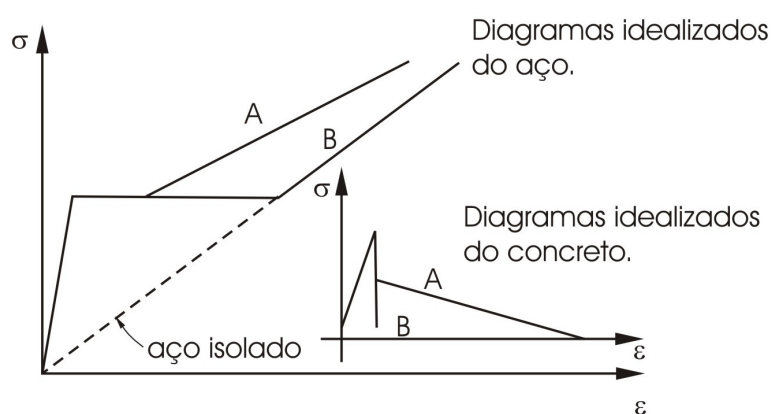


Figura 2.9 – Comportamento idealizado do concreto e aço (Proença 1988).

O concreto é um material composto da mistura de vários elementos, como a areia, o cimento, os agregados e a água, que possuem características diferentes de

resistência, o que favorece a ocorrência de microfissuras. Estas podem ocorrer mesmo com baixos carregamentos, devido aos fenômenos de retração e de liberação de calor.

1.3 Teoria da plasticidade

Um material possui comportamento elastoplástico quando a tensão aplicada no mesmo alcança a tensão de escoamento (σ_y) denominada tensão limite de plastificação e, a partir dela, passam-se a surgir deformações plásticas ou irreversíveis.

O comportamento elastoplástico pode ser dividido em dois grupos: o perfeito e com endurecimento. No caso do modelo elastoplástico perfeito, quando a tensão aplicada é menor do que a tensão de plastificação σ_y (trecho OA), o material possui comportamento linear e conseqüentemente apenas deformações elásticas. No caso da tensão aplicada igualar à tensão de plastificação, passa a surgir deformações plásticas caracterizando a plasticidade do material (trecho AB, denominado fluxo plástico), quando o material não é mais capaz de absorver aumentos de tensões. Nesse caso, a tensão máxima resistente é igual à tensão de plastificação. Este efeito está representado na Figura 2.10.

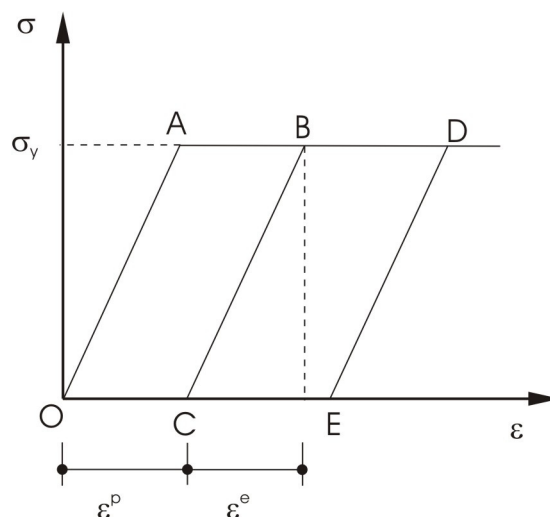


Figura 2.10 - Características do modelo elastoplástico perfeito.

Nota-se ainda que, ao ser atingida a tensão de escoamento σ_y , caso o material ensaiado seja descarregado, a deformação desce seguindo a linha de descarregamento BC. Esta linha é aproximadamente paralela à linha inicial de carga OB. Verifica-se ainda o surgimento de deformação plástica, que é dada pela diferença entre a deformação total e a deformação elástica. Conclui-se que, para se determinar a deformação do material, é necessário conhecer a história do carregamento, através da medida da deformação plástica acumulada (que é o caso descrito acima) ou através do trabalho plástico, que será tratado posteriormente.

A característica do comportamento elastoplástico pode ser obtida matematicamente imaginando-se a resposta do material a acréscimos infinitesimais no estado de tensão. Se a tensão aplicada estiver dentro do intervalo linear tem-se que:

$$d\varepsilon = d\varepsilon^e = \frac{d\sigma}{E} \quad (2.1)$$

Em que: E é o módulo de elasticidade inicial do material.

Caso a tensão esteja na fronteira entre o estado elástico e o estado plástico, tem-se que:

$$\text{Se } d\sigma = 0 \therefore d\varepsilon^p > 0 \quad (2.2)$$

$$\text{Se } d\sigma < 0 \therefore d\varepsilon^p = 0 \quad (2.3)$$

O modelo elastoplástico com endurecimento é assim denominado devido à capacidade do material em adquirir acréscimos de tensão com acréscimos de deformação para além do regime elástico inicial. Caso a tensão aplicada ultrapasse a tensão de plastificação (σ_y), num processo de descarga, fica caracterizada a deformação plástica, assim como no outro modelo, mas também um novo intervalo da região elástica. Constatase, então, que a região elástica é uma função do estado de tensão e da deformação plástica acumulada. Este efeito pode ser observado na Figura 2.11, onde, ao ser ultrapassada a tensão de escoamento σ_y , caso o material ensaiado seja descarregado, a deformação desce seguindo a linha de descarregamento BC. Esta linha é aproximadamente paralela à linha inicial de carga AO. Nota-se o surgimento de uma deformação plástica, dada pelo trecho

OC. A deformação reversível CD é a deformação elástica. Caso se carregue novamente, a curva tensão-deformação segue a linha CB com comportamento elástico até que a tensão σ_y^* seja novamente alcançada. Esta tensão é denominada de tensão de escoamento subsequente, acima da qual surgem novas deformações plásticas.

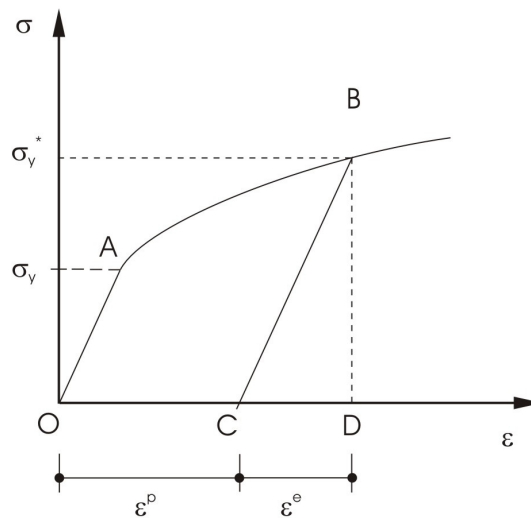


Figura 2.11 - Características do modelo elastoplástico com endurecimento.

Outro fenômeno importante de ser ressaltado é o efeito de Bauschinger. Observe-se que materiais com tensões de escoamento iguais tanto na tração quanto na compressão, quando solicitado por tensões de tração, por exemplo, e esta ultrapassa a tensão de escoamento, ao se descarregar e inverter o sentido do carregamento, ou seja, comprimir o material nota-se que a tensão que determina o final do trecho elástico é inferior à tensão de escoamento original. Tal efeito pode ser observado, para materiais isotrópicos na Figura 2.12.

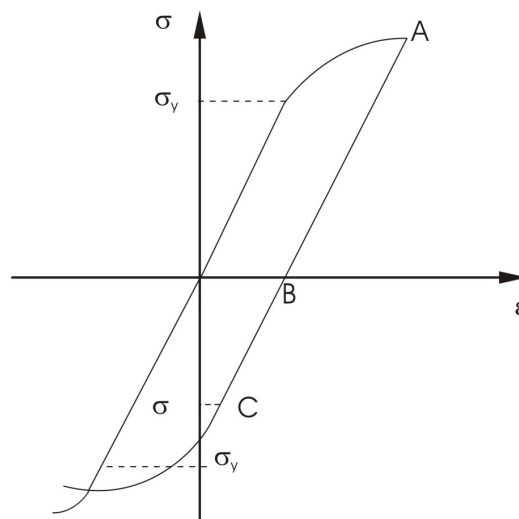


Figura 2.12 - Efeito de Bauschinger para materiais isotrópicos (Proença 1988).

Para materiais com endurecimento cinemático, tal efeito se dá conforme mostra a Figura 2.13.

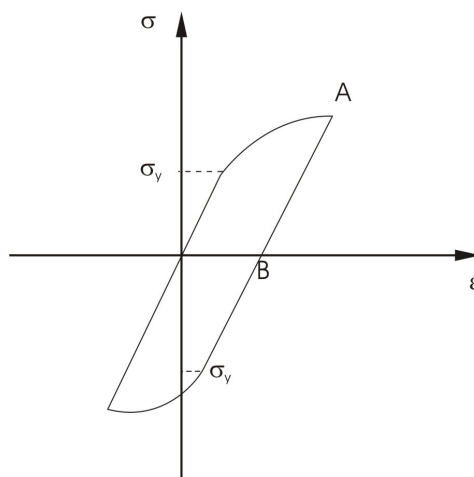


Figura 2.13 – Efeito de Bauschinger para materiais que seguem comportamento cinemático.

A característica do comportamento elastoplástico pode ser obtida matematicamente imaginando-se a resposta do material a acréscimos infinitesimais no estado de tensão. Se a tensão aplicada estiver dentro do intervalo linear, tem-se que:

$$f(\sigma, \varepsilon^p) = \sigma - \sigma_y(\varepsilon^p) \quad c/ \quad \sigma \geq 0 \quad (2.4)$$

Para o caso particular da região elástica inicial, como não existe deformação plástica acumulada, a expressão (2.4) fica reduzida à:

$$f(\sigma) = \sigma - \sigma_y \quad \text{c/} \quad \sigma \geq 0 \quad (2.5)$$

Caso um acréscimo de tensão $d\sigma$, para $\sigma > \sigma_y$, resulte em uma variação ou existência de deformação plástica $d\varepsilon^p$, sabendo-se o limite atual da região plástica e estando o estado de tensão sobre ela, ou seja, um ponto sobre a fronteira, três situações são possíveis: descarga, quando $\sigma < 0$, neutra, caso $\sigma = 0$ e finalmente de carga, se $\sigma > 0$.

Nota-se que ambos os modelos possuem comportamentos compatíveis com os postulados de Drucker, já que as variações de tensão e deformação devem possuir o mesmo sinal e que o trabalho complementar em um ciclo completo de tensão não deve ser positivo. Ou seja, para o caso uniaxial tem-se:

$$d\sigma d\varepsilon \geq 0 \quad (2.6)$$

$$\oint \varepsilon d\sigma \leq 0 \quad (2.7)$$

1.3.1 Conceituação no contínuo

Até o presente momento, a teoria exposta se baseia no estado uniaxial de tensões. Para um estado multiaxial, o limite da região elástica inicial fica definido por uma superfície no espaço das tensões (T), em seis dimensões, sendo T representado por um ponto no interior ou sobre a superfície.

Os eixos coordenados no espaço tridimensional são utilizados para representar as três tensões principais. Com isso, o estado de tensões em um ponto qualquer pode ser expresso em função das mesmas. Isso considerando que o material permanece homogêneo e isotrópico.

A superfície da região elástica inicial é função apenas do estado de tensões T e pode ser representada matematicamente por:

$$f(T) = 0 \quad (2.8)$$

Para um estado de tensões qualquer, deve-se verificar se:

$$f(T) \leq 0 \quad (2.9)$$

Ou seja, acréscimos do estado de tensões que resultam em valores negativos de f indicam a entrada no regime elástico ou descarga. Se for igual a zero, indica carregamento neutro e, se for maior do que zero, indica o surgimento de deformações permanentes. No último caso, a superfície inicial evolui no espaço das deformações, conforme a Figura 2.14, sendo denominada superfície de plastificação.

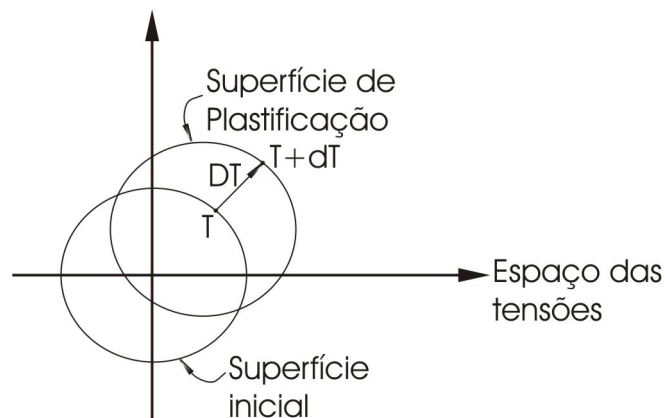


Figura 2.14 - Evolução da superfície inicial no espaço das tensões (Modelo cinemático) (Proença 1988).

Esta nova superfície é função não só apenas do estado de tensão, mas também da deformação plástica acumulada. Pode-se representar matematicamente por:

$$f(T, \varepsilon^p, h) = 0 \quad (2.10)$$

Em um processo de carga, o ponto representativo do novo estado de tensão deve estar sobre a superfície, matematicamente dada por:

$$f(T + dT, \varepsilon^p + d\varepsilon^p, h + dh) = 0 \quad (2.11)$$

Pode-se então igualar as expressões (2.10) e (2.11), já que ambas se encontram sobre a superfície:

$$f(T, \varepsilon^p, h) = f(T + dT, \varepsilon^p + d\varepsilon^p, h + dh) = 0 \quad (2.12)$$

$$df = 0 \quad (2.13)$$

onde df é a condição de consistência.

É importante ressaltar que a evolução da superfície de plastificação pode se dar de duas maneiras: pelo modelo cinemático, onde a superfície sofre translação sem variação de forma, conforme mostrado na Figura 2.14, ou através do modelo de endurecimento isótropo, onde a superfície sofre variação de volume, porém mantendo sua forma inicial, sem translação. Tal efeito pode ser visto na

Figura 2.15. Nela o efeito de Bauschinger não é retratado, sendo interessante para situações onde o carregamento é sempre crescente.

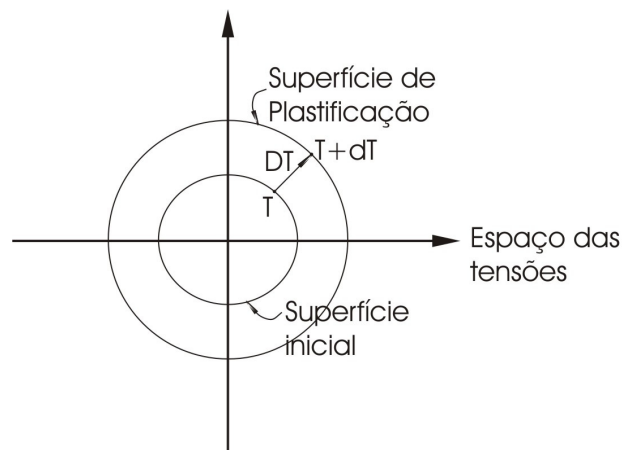


Figura 2.15 - Evolução da superfície inicial no espaço das tensões (Modelo isótropo) (Proença 1988).

Um modelo de maior abrangência seria o misto, ou seja, combinação dos dois anteriores. Porém tal tratamento matemático pode ser de difícil resolução.

1.3.2 Convexidade e regra da normalidade

Partindo-se dos postulados de Drucker para o contínuo, seja uma superfície de plastificação definida no estado de tensões. Toma-se ε^{pa} como o vetor das deformações

plásticas atuais e T^a o estado de tensão atual, representado por um ponto no interior da superfície conforme Figura 2.16.

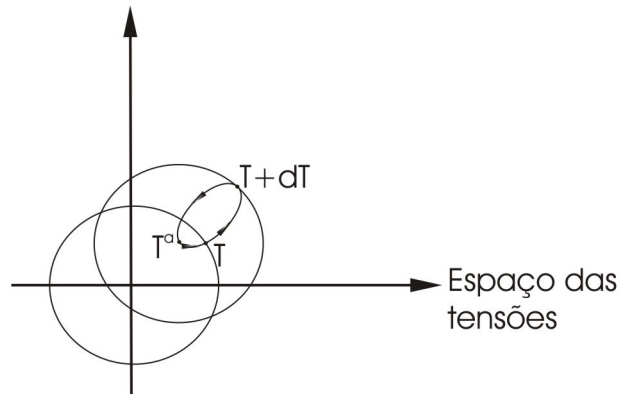


Figura 2.16 – Ciclo de tensões com geração de deformações plásticas (Proença 1988).

Partindo-se deste ponto e efetuando-se um ciclo completo de tensões, de forma a gerar acréscimos de deformações plásticas e utilizando-se o postulado de Drucker, pode-se dizer que:

$$\oint \epsilon dT = \int_{T^a}^T \epsilon dT + \int_T^{T+dT} \epsilon dT + \int_{T+dT}^{T^a} \epsilon dT \quad (2.14)$$

Lembrando que a deformação total é composta por uma parcela de deformação plástica e outra elástica e rearranjando a expressão (2.14) chega-se que:

$$\oint \epsilon dT = \oint \epsilon^e dT + \oint \epsilon^{pa} dT + \int_T^{T+dT} (\epsilon^p - \epsilon^{pa}) dT + \int_{T+dT}^{T^a} d\epsilon^p dT \quad (2.15)$$

A primeira e segunda parcelas da expressão (2.15) são nulas, já que o trabalho elástico em um ciclo fechado é nulo e que ϵ^{pa} é constante. A terceira será desconsiderada por se tratar de valores infinitesimais. Portanto, integrando-se a última parcela, tem-se que:

$$\oint \epsilon dT = (T^a - T) d\epsilon^p \leq 0 \quad (2.16)$$

pode-se ainda:

$$\oint \epsilon dT = (T - T^a) d\epsilon^p \geq 0 \quad (2.17)$$

Tira-se da expressão acima duas conclusões: a normalidade do incremento de deformação plástica com relação à superfície de plastificação e a convexidade desta mesma superfície, conforme mostra a Figura 2.17. Deve-se ressaltar que $d\varepsilon^p$ aponta sempre para fora da superfície de escoamento.

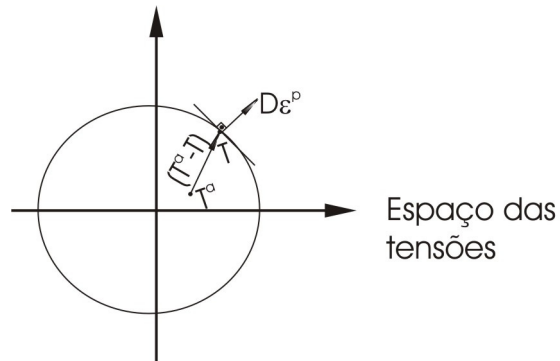


Figura 2.17 – Normalidade e convexidade (Proença 1988).

1.3.3 Definição de taxas de tensão e de deformação

Diferenciando-se $f(T, \varepsilon^p, h)$, pode-se dizer que:

$$df = f_T dT + f_{\varepsilon^p} d\varepsilon^p + f_h dh \quad (2.18)$$

No caso de processos de descarga e neutro, tem-se que ε^p e h são constantes. A expressão acima fica sendo dada por:

$$df = f_T dT \leq 0 \quad (2.19)$$

Para o caso de carga, tem-se que:

$$f_T dT = -(f_{\varepsilon^p} d\varepsilon^p + f_h dh) \quad (2.20)$$

Nota-se que só haverá acréscimo de deformações plásticas no processo de carga. Pode-se, portanto, dizer que $d\varepsilon^p$ é uma função tensorial T, ε^p, h, dT . Porém, com o acréscimo das deformações plásticas, há também um aumento no estado de tensões

(material invíscido) e, portanto a relação constitutiva deve obedecer à condição de homogeneidade:

$$d\varepsilon^p = d\varepsilon^p(T, \varepsilon^p, h, \alpha dT) = \alpha d\varepsilon^p(T, \varepsilon^p, h, dT) \quad (2.21)$$

Como a deformação plástica não depende do tempo na formulação aqui apresentada, pode-se trabalhar com taxas de tensão e deformação plástica, dada por:

$$\dot{\varepsilon}^p = \lim \frac{1}{dT} d\varepsilon^p(T, \varepsilon^p, h, dT) = \dot{\varepsilon}^p(T, \varepsilon^p, h, \dot{T}) \quad (2.22)$$

1.3.4 Relação constitutiva elastoplástica em termos de taxas

De posse da expressão da taxa de tensão e deformação plástica, pode-se escrever a relação constitutiva em termo da mesma. Pode-se dizer que:

Caso $\dot{\varepsilon}^p = 0$ se $f(T, \varepsilon^p, h) < 0$ ∴ processo elástico.

Se $f(T, \varepsilon^p, h) = 0$ ∴ processo neutro ou de descarga.

Caso $\dot{\varepsilon}^p = \dot{\varepsilon}^p(T, \varepsilon^p, h, \dot{T})$ se $f(T, \varepsilon^p, h) = 0$ e $f_T \dot{T} > 0$ ∴ processo de carga.

Pode-se neste último caso associar velocidades de deformação e de tensão por:

$$\dot{\varepsilon}^p = K^p \dot{T} \quad (2.23)$$

onde K^p é um tensor de quarta ordem expresso em função de T , ε^p e h e que depende apenas do estado atual de tensão e da história do carregamento.

No caso do processo neutro, este tensor de quarta ordem é dado por:

$$K^p = \frac{1}{G} (f_T \otimes f_T), \text{ pois } \dot{\varepsilon}^p = \frac{1}{G} (f_T \otimes f_T) \dot{T} = \frac{1}{G} (f_T \dot{T}) f_T \quad (2.24)$$

onde G é uma função escalar associada ao endurecimento por deformação.

Esta expressão expressa a situação de carregamento neutro. Nota-se que a taxa de deformação plástica tem a direção da normal à superfície de plastificação (denominada regra da normalidade). Tem-se que a relação constitutiva para materiais com endurecimento é dada por:

$$\dot{\varepsilon}^p = 0 \begin{cases} \text{se } f(T, \varepsilon^p, h) < 0 \\ \text{se } f(T, \varepsilon^p, h) = 0 \text{ e } f_T \dot{T} < 0 \end{cases} \quad (2.25)$$

$$\dot{\varepsilon}^p = \frac{1}{G} (f_T \dot{T}) f_T \text{ se } f(T, \varepsilon^p, h) = 0 \text{ e } f_T \dot{T} > 0 \quad (2.26)$$

Conforme Proença (1988), é necessário definir expressões para f e determinar G , de forma a tornar a relação constitutiva utilizável.

1.4 Invariantes

Seja um plano qualquer no espaço, se o tensor de tensão T for perpendicular a ele em um ponto P qualquer, ou seja, $T = \sigma_n$, conforme Figura 2.18, tem-se que:

$$\sigma_{ij} n_j = \sigma n_i = \sigma \delta_{ij} n_j \quad (2.27)$$

Simplificando chega-se:

$$(\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}) n_j = 0 \quad (2.28)$$

Como os invariantes são dados por:

$$I_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} \quad (2.29)$$

$$I_2 = (\sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{11}\sigma_{33} + \sigma_{22}\sigma_{33}) - (\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2) \quad (2.30)$$

$$I_3 = (\sigma_{11}\sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{12}\sigma_{23}\sigma_{31} + \sigma_{21}\sigma_{32}\sigma_{13}) - (\sigma_{13}\sigma_{22}\sigma_{31} + \sigma_{12}\sigma_{21}\sigma_{33} + \sigma_{11}\sigma_{23}\sigma_{32}) \quad (2.31)$$

A Equação (2.28) simplifica para:

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0 \quad (2.32)$$

De posse dos invariantes, chega-se nas equações abaixo (2.33) e (2.34):

$$I_2 = \frac{I_1^2}{2} - \frac{1}{2}\sigma_{ij}\sigma_{ji} \quad (2.33)$$

$$I_3 = \frac{I_1^3}{6} - \frac{1}{2}I_1\sigma_{ij}\sigma_{ij} + \frac{1}{3}\sigma_{ij}\sigma_{jk}\sigma_{ki} \quad (2.34)$$

È importante ressaltar que os valores dos invariantes não se alteram devido a uma rotação do sistema coordenado. Sendo o sistema coordenado coincidente com os eixos principais de tensão, os invariantes ficam sendo dados por:

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \quad (2.35)$$

$$I_2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3 \quad (2.36)$$

$$I_3 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3 \quad (2.37)$$

Caso o tensor T não coincida com σ_n , surge-se uma parcela deviatórica S , conforme pode ser constatado na Figura 2.18, além da parcela hidrostática.

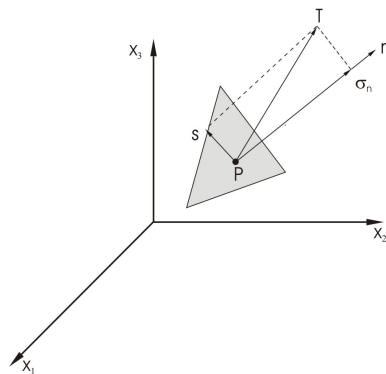


Figura 2.18 – Tensor de tensão no plano.

Logo, o tensor de tensões pode ser decomposto em duas parcelas, conforme mostra a equação (2.38).

$$\sigma_{ij} = \sigma_m \delta_{ij} + S_{ij} \quad (2.38)$$

onde $\sigma_m = \frac{1}{3} I_1$

Procedendo-se de modo análogo ao que foi feito anteriormente para tensões, chega-se a:

$$S^3 - J_1 S^2 - J_2 S - J_3 = 0 \quad (2.39)$$

Sabe-se, da identidade trigonométrica, que:

$$\cos^3 \theta - \frac{3}{4} \cos \theta - \frac{1}{4} \cos 3\theta = 0 \quad (2.40)$$

Correlacionando-se as equações (2.39) e (2.40), conclui-se que:

$$\rho = \frac{2\sqrt{J_2}}{\sqrt{3}} \quad (2.41)$$

$$\cos 3\theta = \frac{4J_3}{\rho^3} \quad (2.42)$$

Sendo o sistema coordenado coincidente com os eixos principais de tensão, os invariantes do tensor deviatórico de tensão ficam sendo dados por:

$$J_1 = 0 \quad (2.43)$$

$$J_2 = \frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] = \frac{1}{2} (S_1^2 + S_2^2 + S_3^2) \quad (2.44)$$

$$J_3 = S_1 S_2 S_3 \quad (2.45)$$

Nota-se que através dos invariantes de tensão I_1, J_2 e J_3 pode-se correlacioná-los com o restante, o que os torna especiais. O invariante I_1 representa um estado puramente hidrostático, enquanto que J_2 e J_3 representam um estado de cisalhamento puro. Posteriormente será abordada a utilização destes invariantes nos critérios de plastificação.

1.5 Funções de Plastificação

Inicialmente o material encontra-se descarregado e sem deformações, o que possibilita escrever a função de plastificação de acordo com as tensões. Admitindo-se o material como sendo isótropo, pode-se descrever o estado de tensão num ponto em função dos eixos principais, o que já foi dito anteriormente. A função de plastificação deve ser escrita em função dos invariantes, pois seu valor independe do sistema adotado para exprimir o estado de tensões. Logo, a função de plastificação fica sendo função de I_1, J_2 e J_3 , já que o restante pode ser expresso em função desses.

1.5.1 Critério de Tresca

O critério de Tresca foi apresentado pela primeira vez em 1864 e diz que a ocorrência do escoamento ocorre quando a metade da maior diferença entre as tensões alcança ou ultrapassa um dado valor k que depende da natureza do material. Tem-se então que:

$$K = \frac{1}{2}(\sigma_{\max} - \sigma_{\min}) \quad (2.46)$$

No caso de tração simples, tem-se que $\sigma_1 = \sigma$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$. Portanto, através de um ensaio simples de tração, pode-se obter o valor de k . No escoamento, a tensão máxima é σ e a mínima nula. A equação anterior pode então ser expressa por:

$$K = \frac{1}{2}(\sigma_{\max} - 0) \therefore \sigma = 2K \quad (2.47)$$

Portanto, enquanto K for menor do que a metade de σ não ocorre escoamento do material. O material entrará em escoamento quando K for maior ou igual a este valor.

Já para o caso de cisalhamento puro, tem-se que $\sigma_1 = -\sigma_3$, $\sigma_2 = 0$. Logo:

$$K = \frac{1}{2}(\sigma_1 - 0) = \sigma_{12} \quad (2.48)$$

Portanto, enquanto K for menor do que σ_{12} não ocorre escoamento do material. O material entrará em escoamento quando K for maior ou igual a este valor.

Pode-se exprimir a função de Tresca em função do invariante J_2 e do ângulo θ .

Logo:

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{J_2} \cos \theta - \cos \left(\theta + \frac{2}{3} \pi \right) = K \quad (2.49)$$

Simplificando-se a equação anterior:

$$f(J_2, \theta) = \sqrt{J_2} \operatorname{sen} \left(\theta + \frac{1}{3} \pi \right) - K = 0 \quad (2.50)$$

Porém, conforme Proença (1988) $r = \sqrt{2J_2}$. A equação anterior passa a ser escrita como:

$$f(r, \theta) = r \operatorname{sen} \left(\theta + \frac{1}{3} \pi \right) - 2K = 0 \quad (2.51)$$

Segundo Proença (1988) Interpretando-se a equação acima, concluiu-se que a superfície de Tresca é representada no plano de Nadai por um hexágono regular, conforme Figura 2.19, e no espaço tridimensional por um prisma de base hexagonal como ilustrado na Figura 2.20.

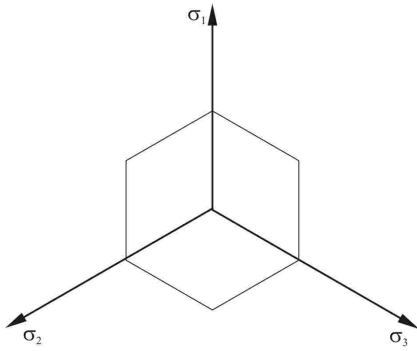


Figura 2.19 – Superfície de Tresca no plano de Nadai.

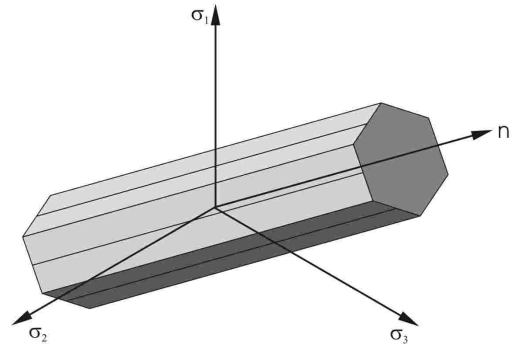


Figura 2.20 – Prisma de Tresca com base hexagonal.

Outro plano importante é o das tensões $\sigma_1 - \sigma_2$, que é dado pela Figura 2.21.

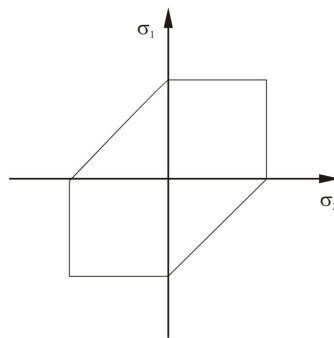


Figura 2.21 – Representação da superfície de Tresca no plano $\sigma_1 - \sigma_2$.

Portanto, por possuir pontos de descontinuidade em primeira derivada, outra superfície foi proposta por Von Mises de forma a eliminar estas descontinuidades.

1.5.2 Critério de Von Mises

O critério de Von Mises foi apresentado pela primeira vez em 1913 e diz que a ocorrência do escoamento ocorre quando o segundo invariante da tensão deviatórica atinge um valor crítico.

De acordo com a teoria da energia da máxima distorção, que é dada pela diferença entre a densidade de energia de deformação em um ponto e a devida a um estado hidrostático de tensão, tem-se que a energia de deformação linear é dada por:

$$U_{dist} = U_{total} - U_{hidro} \quad (2.52)$$

Segundo Proença (1988) a expressão acima é dada por:

$$U_{dist} = \frac{1}{6E}(1+\nu)[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2] \quad (2.53)$$

No caso de tração simples, tem-se que $\sigma_1 = \sigma$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$. Portanto, através de um ensaio simples de tração, pode-se obter o valor de K que é dada conforme abaixo:

$$K = \frac{1}{3E}(1+\nu)\sigma^2 \quad (2.54)$$

Caso U_{dist} seja maior ou igual a K, a teoria em questão prevê ocorrência de escoamento no ponto em estudo.

Igualando-se as duas expressões e simplificando-se, chega que:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2] = \sigma \quad (2.55)$$

Porém é interessante abordar o critério de forma a ficar em função das tensões octaédricas. Em 1913 Von Mises admitiu que a plastificação ocorreria quando a tensão octaédrica de cisalhamento fosse alcançada no ponto em estudo. Desta forma, considerando-se um ponto no interior de um corpo e que por ele passem os eixos principais, utilizando um plano octaédrico, cuja normal faça ângulos iguais com cada um dos eixos principais, tem-se que o versor é dado por:

$$n_i = \frac{1}{\sqrt{3}}e_i \text{ com } i=1..3 \quad (2.56)$$

Da teoria da elasticidade, pode-se dizer na forma de notação indicial que:

$$\sigma_{oct} = \sigma_{ij} n_i n_j \quad (2.57)$$

Logo, como o produto escalar entre os versores são nulos, lançando-se a Equação (2.56) na (2.57), pode-se reescrevê-la da seguinte forma:

$$\sigma_{oct} = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{I_1}{3} \quad (2.58)$$

A Figura 2.22 mostra o tensor de tensões decomposto em relação ao plano octaédrico.

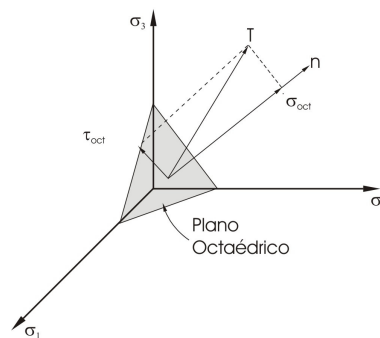


Figura 2.22 - Decomposição do tensor de tensões relacionado ao plano octaédrico.

De acordo com a Figura 2.22, chega-se à:

$$\tau_{oct}^2 = T_i T_i - \sigma_{oct}^2 \quad (2.59)$$

Logo, manipulando a expressão acima:

$$\tau_{oct} = \frac{1}{3} \sqrt{[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2]} \quad (2.60)$$

Reescrevendo a expressão anterior em função do invariante J_2 , chega-se:

$$\tau_{oct} = \sqrt{\frac{2}{3} J_2} \quad (2.61)$$

Lançando-se as Equações (2.41) e (2.61) na (2.42), têm-se:

$$\cos 3\theta = \frac{\sqrt{2}J_3}{\tau_{oct}^3} \quad (2.62)$$

No caso de tração simples, tem-se que $\sigma_1 = \sigma$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$. Portanto, através de um ensaio simples de tração, pode-se obter o valor de K, dado por:

$$K = \frac{\sqrt{2}}{3} \sigma \quad (2.63)$$

Caso τ_{oct} seja maior ou igual a K, a teoria em questão prevê ocorrência de escoamento no ponto em estudo. Igualando-se as duas expressões e simplificando-se, chega-se também na Equação (2.55).

Sabe-se conforme Proença (1988) que a expressão da superfície é dada por:

$$f(j_2) = \sqrt{j_2} - K = 0 \quad (2.64)$$

Chega-se, portanto que para o caso de tração simples a tensão é dada por:

$$\sigma = \sqrt{3}K \quad (2.65)$$

No caso de cisalhamento puro, tem-se que $\sigma_1 = -\sigma_3$ e $\sigma_2 = 0$. Portanto, através de um ensaio simples de tração, pode-se obter o valor de K, dado por:

$$K = \frac{\sqrt{15}}{3\sqrt{2}} \sigma \quad (2.66)$$

A superfície de Von Mises representa um cilindro de projeção circular no plano deviatórico. Ele é circunscrito ou inscrito à superfície de Tresca, dependendo do valor adotado para K. A Figura 2.23 ilustra as duas superfícies juntamente com a de Tresca.

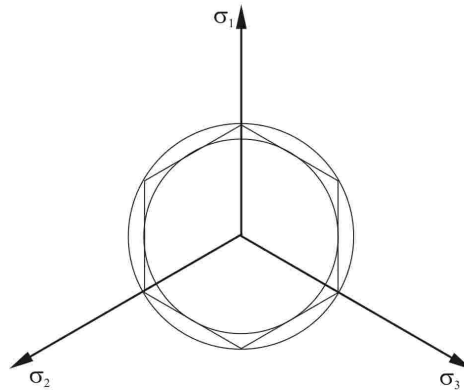


Figura 2.23 – Superfícies de Von Mises (inscrita e circunscrita à superfície de Tresca).

No espaço, a superfície de Von Mises é dada conforme Figura 2.24.

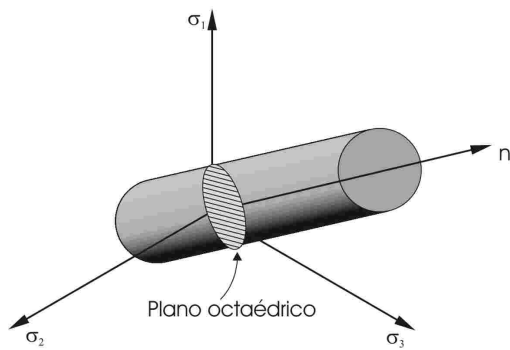


Figura 2.24 – Prisma de Von Mises de base circular.

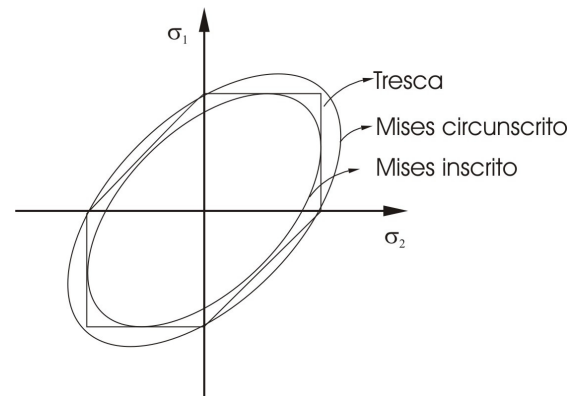


Figura 2.25 - Comparação das superfícies de Von Mises com Tresca no plano $\sigma_1 - \sigma_2$.

Outro plano importante é o das tensões $\sigma_1 - \sigma_2$. A Figura 2.25 compara a superfície de Tresca com as de Von Mises.

1.5.3 Critério de Mohr-Coulomb

Os critérios descritos acima procuram levar em consideração o efeito do invariante J_2 , sendo aplicados a materiais que não sofrem alteração de volume, produzindo apenas mudança da forma, como é o caso dos metais. No caso do concreto e dos solos coesivos, deve-se levar em consideração o primeiro invariante.

Mohr-Coulomb em 1900 imaginou que houvesse uma relação de dependência entre a tensão de cisalhamento e a tensão normal, ou seja, a tensão de cisalhamento era dependente da normal. Admitindo-se que esta relação fosse linear, a função em questão era determinada experimentalmente e se constituía na envoltória de vários círculos de Mohr para diferentes estados de tensão. Conforme Proença (1988) a expressão é dada por:

$$|\tau| = c - \sigma \tan \phi \quad (2.67)$$

onde c é a coesão e ϕ o ângulo interno do material.

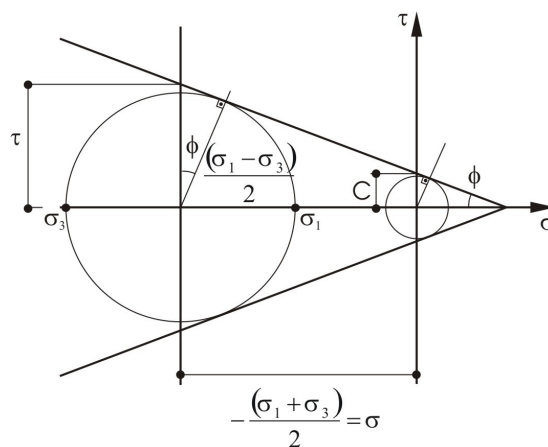


Figura 2.26 - Decomposição do tensor de tensões relacionado ao plano octaédrico (Proença 1988).

Analisando-se a Figura 2.26, podem-se obter algumas informações, tais como:

$$\sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \quad (2.68)$$

$$\tau = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2 \cos \phi} \quad (2.69)$$

Lançando-se as Equações (2.68) e (2.69) na (2.67) e rearranjando os termos obtém-se:

$$\frac{\sigma_1}{f_t'} - \frac{\sigma_3}{f_c'} = 1 \quad (2.70)$$

$$\text{onde } f_t' = \frac{(1 + \sin \phi)}{2c \cos \phi} \text{ e } f_c' = \frac{(1 - \sin \phi)}{2c \cos \phi}$$

Porém, conforme Proença (1988), a expressão acima pode ser expressa através dos invariantes I_1 , J_2 e θ em função das tensões principais:

$$\frac{1}{3} I_1 \sin \phi + \sqrt{J_2} \sin \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right) + \frac{\sqrt{J_2}}{\sqrt{3}} \cos \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right) \sin \phi = c \cos \phi \quad (2.71)$$

Pode-se também expressá-la em função de r , ξ e θ :

$$\sqrt{2} \xi \sin \phi + \sqrt{3} r \sin \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right) + r \cos \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right) \sin \phi = \sqrt{6} c \cos \phi \quad (2.72)$$

Segundo Proença (1988), a expressão acima plotada no plano meridiano fica sendo dada pela Figura 2.27.

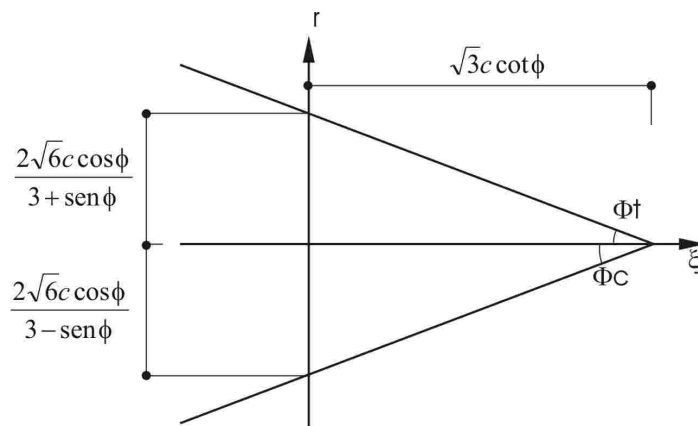


Figura 2.27 – Superfície de Mohr-Coulomb no plano Meridiano (Proença 1988).

Já no plano de Nadai, fica sendo dado pelo hexágono irregular conforme Figura 2.28. Lançando-se para ϕ o valor zero, a superfície de Mohr-Coulomb passa a coincidir com a de Tresca.

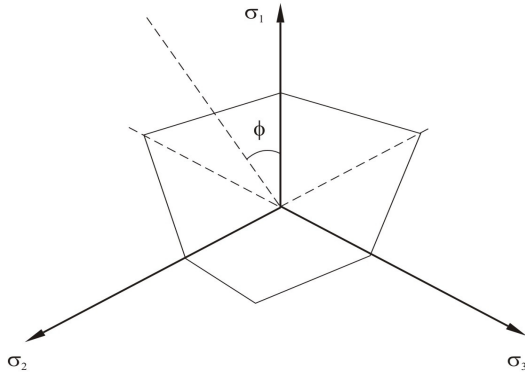


Figura 2.28 – Superfície de Mohr-Coulomb no plano de Nadai (Proença 1988).

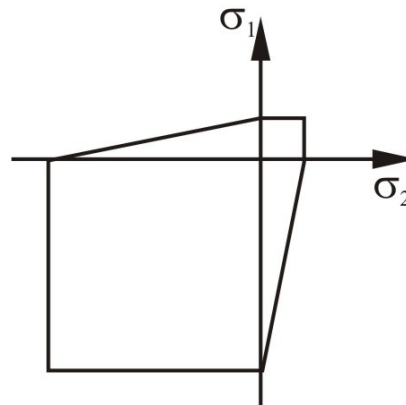


Figura 2.29 – Representação da superfície de Mohr-Coulomb no plano $\sigma_1 - \sigma_2$.

Outro plano importante é o das tensões $\sigma_1 - \sigma_2$. Lançando-se $\phi = 45^\circ$ obtém-se a superfície da Figura 2.29.

Nota-se que a superfície de plastificação na zona de compressão é bem maior do que na zona de tração, chegando próximo ao comportamento do concreto. Porém, assim como o critério de Tresca, o critério de Mohr-Coulomb possui pontos de descontinuidade em primeira derivada, sendo que outra superfície foi proposta por Drucker-Prager de forma a eliminar estas descontinuidades.

1.5.4 Critério de Drucker-Prager

A superfície de Drucker-Prager consiste em um cone que pode estar inscrito ou circunscrito à pirâmide de Mohr-Coulomb. A função de plastificação é dada pela mesma utilizada por Mohr, porém acrescida de um termo em função do primeiro invariante. Segundo Proença (1988) esta equação é dada por:

$$\alpha I_1 + \sqrt{J_2} = K \quad (2.73)$$

Deixando-se a equação em função de r e ξ , tem-se:

$$\sqrt{6}\alpha\xi + r = \sqrt{2}K \quad (2.74)$$

Assim, plotando-se a Equação (2.74) nos planos meridiano e de Nadai, tem-se a Figura 2.30.

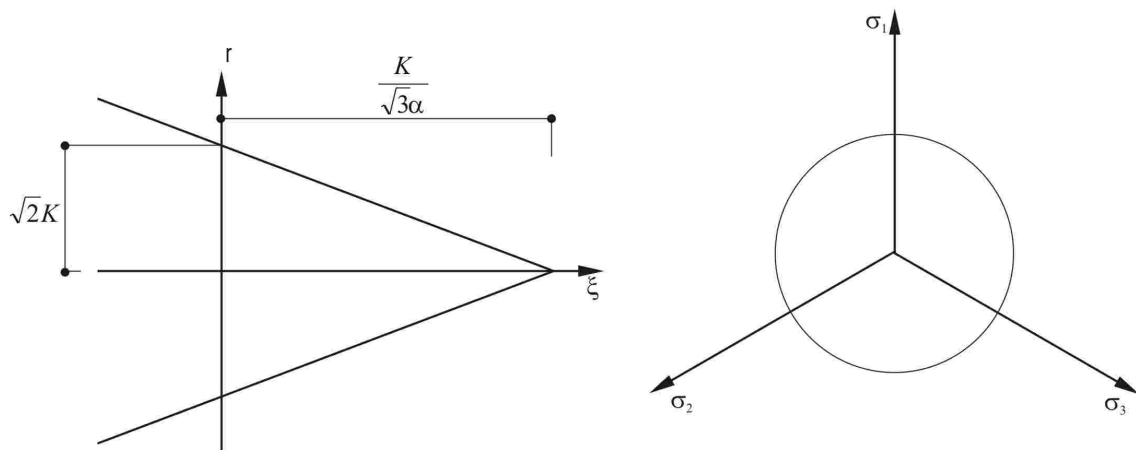


Figura 2.30 – Representação da superfície de Drucker-Prager: (a) Plano Meridiano, (b) Plano de Nadai.

Segundo Proença (1988), os valores de α e K são dados respectivamente por:

$$\alpha = \frac{2 \operatorname{sen} \phi}{\sqrt{3}(3 \pm \operatorname{sen} \phi)} \quad (2.75)$$

$$K = \frac{6c \cos \phi}{\sqrt{3}(3 \pm \operatorname{sen} \phi)} \quad (2.76)$$

O sinal positivo no denominador indica que o cone está inscrito à pirâmide de Mohr e o negativo que está circunscrito. No plano tridimensional, tem-se um cone conforme Figura 2.31.

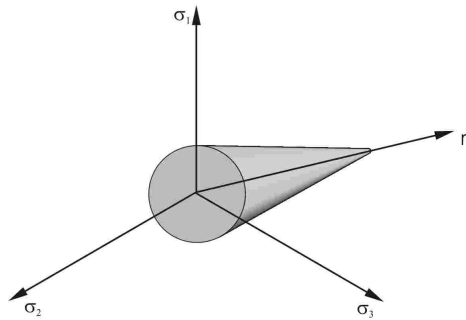


Figura 2.31 – Cone cilíndrico de Drucker-Prager.

Outro plano importante é o das tensões $\sigma_1 - \sigma_2$. Lançando-se às curvas de Mohr e Drucker, chega-se na superfície da Figura 2.32.

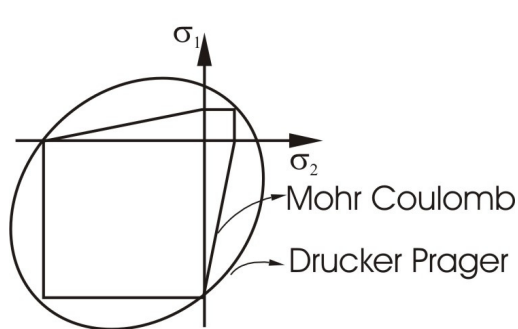


Figura 2.32 - Comparação da superfície de Drucker Prager com Mohr Coulomb no plano $\sigma_1 - \sigma_2$.

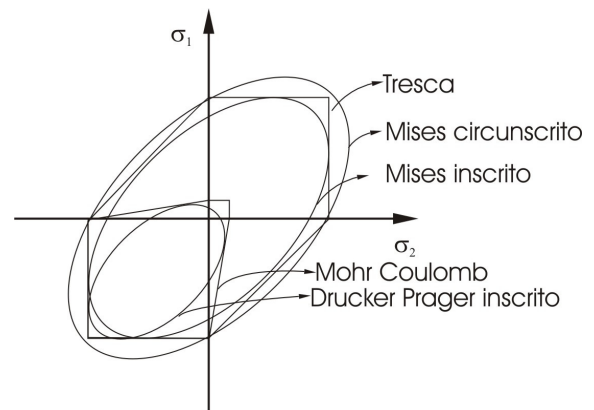


Figura 2.33 – Comparativo entre as superfícies de escoamento.

A Figura 2.33 traz as várias superfícies aqui abordadas em um mesmo gráfico, de forma a dar uma visão gráfica da diferença entre as teorias.

Fica claro na figura acima que as superfícies de Tresca e Von Mises possuem o mesmo comportamento tanto para tração quanto à compressão, sendo que Mises eliminou pontos de inflexão existentes na teoria de Tresca. A diferença máxima entre os dois critérios é de 15%, porém análises experimentais têm demonstrado uma maior concordância de resultados com a superfície de Mises. Estes dois critérios são bastante empregados para descrever o comportamento do aço.

Da mesma forma, a superfície de Drucker Prager eliminou pontos de inflexão existentes na superfície de Mohr Coulomb. Nota-se que o comportamento na tração é diferente da compressão, sendo estes modelos utilizados na modelagem de concreto. Porém este material não se plastifica infinitamente, necessitando de modelos numéricos que simulem a fissuração do mesmo.

1.6 Superfícies de ruptura

A não-linearidade física do material é bastante complexa de ser modelada, já que a fissuração do material altera a matriz de rigidez da estrutura analisada podendo existir, na mesma, números muito pequenos que geram dificuldade de solução.

Além deste fator, o concreto geralmente se encontra associado com o aço, sendo que possuem comportamentos diferentes. Logo há a necessidade de se considerar na modelagem os fenômenos característicos dessa associação.

As hipóteses utilizadas na modelagem são simplificadoras, sem a necessidade de definição de novos parâmetros, porém de forma a proporcionar resultados satisfatórios. Isso pode ser constatado na Figura 2.34, já que o efeito de amolecimento que ocorre na realidade é desprezado para modelos numéricos.

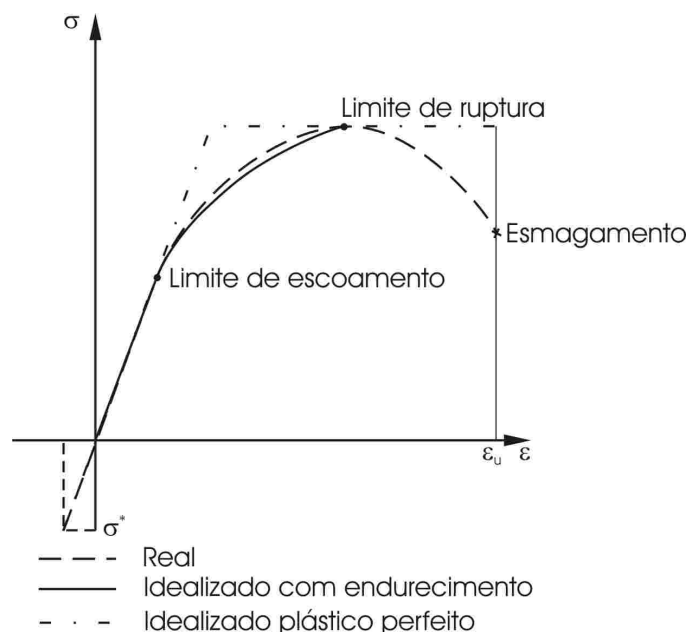


Figura 2.34 – Comportamento uniaxial idealizado (Proença 1988).

O concreto a compressão é imaginado como tendo comportamento elastoplástico perfeito ou com endurecimento, limitando-se a ductilidade do mesmo através de uma deformação máxima, enquanto que na tração é imaginado com comportamento elástico-linear limitado por uma tensão máxima.

Logo, um ponto qualquer dentro do material é dito fissurado quando um estado de tensão ou deformação ultrapassa as fronteiras da superfície de ruptura. No caso do critério da máxima tensão a ruptura se dá de acordo com um plano cujo maior tensão principal é normal a ele. No critério da máxima deformação por compressão ocorre o esmagamento e o material perde suas características de resistência, passando a não contribuir para absorção de esforços. Portanto há a necessidade de se estudar superfícies que levem em consideração estes efeitos.

1.6.1 Superfícies de ruptura do concreto

As superfícies de ruptura do concreto devem levar em conta aspectos de fragilidade do material, no caso de predominância de esforços de tração, e de ductilidade no caso de esforços de compressão dominantes. Logo, no caso de compressão as superfícies de ruptura são associadas com critérios de deformação máxima, representado pela superfície de esmagamento.

Generalizando a Figura 2.34 para o caso tridimensional, no caso de materiais com endurecimento, há uma superfície que limita a região elástica e outra plástica. Para materiais com comportamento elastoplástico perfeito as superfícies são coincidentes.

Considerando-se o concreto com comportamento isótropo, a superfície inicial de plastificação terá a mesma forma da superfície de ruptura, porém de menor tamanho.

As superfícies de ruptura abordadas neste trabalho admitem o concreto como material isótropo, sendo apresentadas abaixo.

1.6.2 Superfície de ruptura de Mohr Coulomb modificada

Baseia-se na combinação dos critérios de Rankine e de Mohr Coulomb. Os resultados são bons quando pelo menos uma das tensões principais for de tração, ou no caso de compressão, quando a tensão principal de maior valor absoluto não ultrapassar 2,0 a 2,5 vezes a resistência à compressão simples. Isto se deve ao fato de que os meridianos são representados no modelo por retas, sendo que experimentalmente demonstrou-se que são curvas assintóticas ao eixo hidrostático.

Logo, devido à restrição do modelo, ele se torna inviável para análise numérica, já que existem outros na literatura que melhor retratam o fenômeno da ruptura.

1.6.3 Superfície de ruptura de Chen-Chen

O critério de Chen-Chen, ao contrário do de Mohr Coulomb modificado, é preciso quando comparado com resultados experimentais. Conforme Proença (1988), sua superfície no plano deviatórico é circular, já que é escrita em função dos invariantes I_1 e J_2 .

No espaço das tensões principais são identificadas duas regiões, denominadas zona de compressão, formada apenas por tensões de compressão, e zona de tração-compressão, que possui no seu estado de tensão pelo menos uma tensão de tração.

Para cada região existe uma função que simula a superfície de ruptura. Na zona de compressão, a expressão é dada por:

$$J_2 + \frac{1}{3}I_1 A = k^2 \quad (2.77)$$

Já para a zona de tração-compressão:

$$J_2 - \frac{1}{6}I_1^2 + \frac{1}{3}I_1 A = k^2 \quad (2.78)$$

As constantes A e k são obtidas pela imposição de que os estados últimos de compressão uni e biaxial e os estados de tração e compressão uniaxial verifiquem, respectivamente, as Equações (2.77) e (2.78). Nota-se que a compatibilidade entre as duas expressões se dá através da tensão de compressão uniaxial.

Deixando-se as Equações (2.77) e (2.78) em função de ξ , conclui-se que na zona de compressão, a superfície no plano meridiano é dada por uma reta, enquanto que na zona de tração é dada por uma parábola do segundo grau, conforme Figura 2.35.

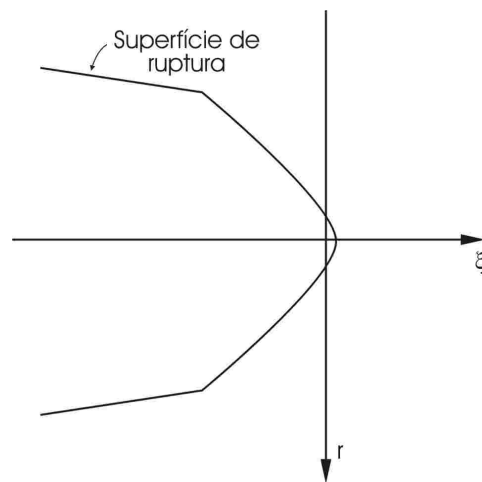


Figura 2.35 – Aspecto da superfície de ruptura no plano Meridiano (Proença 1988).

Sendo f_c a resistência última do concreto à compressão uniaxial, f_t tração uniaxial e f_{bc} compressão biaxial, pode-se obter as constantes A e k.

- Para zona de compressão:

$$\sigma_3 = -f_c \rightarrow J_2 = \frac{f_c^2}{3} e I_1 = -f_c \quad (2.79)$$

$$\sigma_2 = \sigma_3 = -f_{bc} \rightarrow J_2 = \frac{f_{bc}^2}{3} e I_1 = -2f_{bc} \quad (2.80)$$

Lançando-se as Equações (2.79) e (2.80) na (2.77), obtém-se respectivamente:

$$k^2 + \frac{1}{3} f_c A - \frac{f_c^2}{3} = 0 \quad (2.81)$$

$$k^2 + \frac{2}{3} f_{bc} A - \frac{f_{bc}^2}{3} = 0 \quad (2.82)$$

Têm-se, portanto, duas equações e duas incógnitas. Portanto, os valores de k e A são dados respectivamente por:

$$k = \sqrt{-\frac{1}{3} \frac{f_c f_{bc} (f_{bc} - 2f_c)}{(2f_{bc} - f_c)}} \quad (2.83)$$

$$A = \frac{(f_{bc}^2 - f_c^2)}{(2f_{bc} - f_c)} \quad (2.84)$$

- Para Zona de tração-compressão:

$$\sigma_1 = f_t \rightarrow J_2 = \frac{f_t^2}{3} e I_1 = f_t \quad (2.85)$$

$$\sigma_3 = -f_c \rightarrow J_2 = \frac{f_c^2}{3} e I_1 = -f_c \quad (2.86)$$

De forma semelhante ao que foi feito para o caso na zona de compressão, chega-se:

$$k = \sqrt{\frac{1}{6} f_t f_c} \quad (2.87)$$

$$A = \frac{1}{2} (f_c - f_t) \quad (2.88)$$

Adimensionalizando as Equações (2.83), (2.84), (2.87) e (2.88) em função de f_c , chega-se na superfície de Chen-Chen no espaço biaxial de tensões principais, dada pela Figura 2.36.

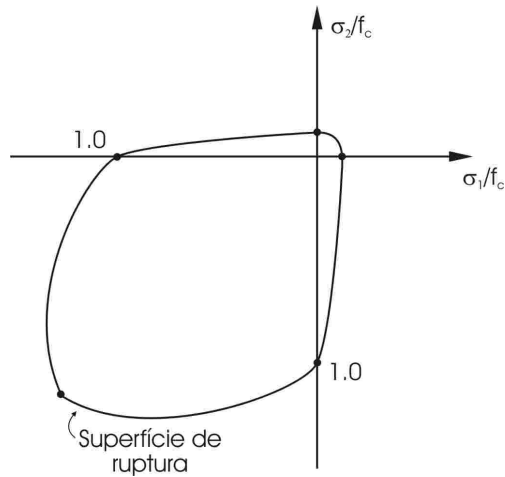


Figura 2.36 – Representação no sistema $\sigma_1 - \sigma_2$.

1.6.4 Superfície de ruptura de William-Warkne

A superfície de William-Warkne aqui descrita será função de três variáveis: os invariantes σ_m, τ_m e θ . A expressão é dada por:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\sigma_m}{f_c} + \frac{1}{r(\theta)} \frac{\tau_m}{f_c} - 1 = 0 \quad (2.89)$$

Onde σ_m e τ_m são as componentes médias de tensão, e podem ser expressas respectivamente por:

$$\sigma_m = \frac{I_1}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}} \xi \quad (2.90)$$

$$\tau_m = \sqrt{\frac{2}{5} J_2} = \frac{\sqrt{5}}{5} r \quad (2.91)$$

No plano meridiano, a superfície é caracterizada por ter uma forma linear e no plano anti-esférico não-linear, devido à função $r(\theta)$.

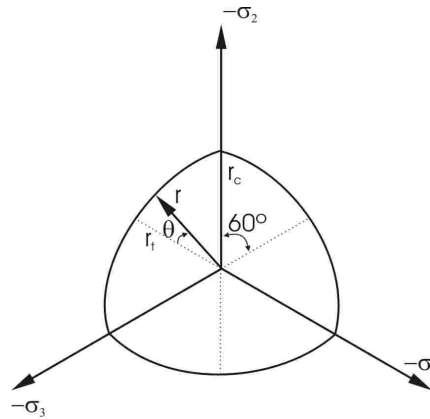


Figura 2.37 – Representação no plano anti-esférico (Proença 1988).

Para satisfazer as condições de simetria segundo setores de 60° no plano anti-esférico (ou deviatórico), conforme Figura 2.37, para cada setor a forma elíptica (regular e convexa) é dada por:

$$r(\theta) = \frac{2r_c(r_c^2 - r_t^2)\cos\theta + r_c(2r_t - r_c)[4(r_c^2 - r_t^2)\cos^2\theta + 5r_t^2 - 4r_t r_c]^{1/2}}{4(r_c^2 - r_t^2)\cos^2\theta + (r_c - 2r_t)^2} \quad (2.92)$$

O ângulo de similaridade:

$$\cos\theta = \frac{2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3}{\sqrt{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \quad (2.93)$$

Portanto, ao se determinar os parâmetros r_c, r_t e ρ , a Equação (2.89) fica totalmente definida. Para se determinar os coeficientes, utiliza-se a Equação (2.92) para tração uniaxial, compressão uniaxial e biaxial.

- Tração uniaxial:

$$\sigma_1 = f_t \rightarrow \sigma_m = \frac{f_t}{3}; \tau_m = \sqrt{\frac{2}{15}} f_t; \theta = 0^\circ; r(\theta) = r_t \quad (2.94)$$

Lançando-se a Equação (2.94) na (2.92), chega-se:

$$r(0^\circ) = \frac{2r_c(r_c^2 - r_t^2) + r_c(2r_t - r_c)[4(r_c^2 - r_t^2) + 5r_t^2 - 4r_t r_c]^{1/2}}{4(r_c^2 - r_t^2) + (r_c - 2r_t)^2} = r_t \quad (2.95)$$

- Compressão uniaxial:

$$\sigma_3 = -f_c \rightarrow \sigma_m = -\frac{f_c}{3}; \tau_m = \sqrt{\frac{2}{15}} f_c; \theta = 60^\circ; r(\theta) = r_c \quad (2.96)$$

Lançando-se a Equação (2.96) na (2.92), chega-se:

$$r(60^\circ) = \frac{r_c(r_c^2 - r_t^2) + r_c(2r_t - r_c)[(r_c^2 - r_t^2) + 5r_t^2 - 4r_t r_c]^{1/2}}{(r_c^2 - r_t^2) + (r_c - 2r_t)^2} = r_c \quad (2.97)$$

- Compressão biaxial:

$$\sigma_2 = \sigma_3 = -f_{bc} \rightarrow \sigma_m = -\frac{2f_{bc}}{3}; \tau_m = \sqrt{\frac{2}{15}} f_{bc}; \theta = 0^\circ; r(\theta) = r_t \quad (2.98)$$

Aplicando-se a Equação (2.98) na (2.92), chega-se:

$$r(0^\circ) = \frac{2r_c(r_c^2 - r_t^2) + r_c(2r_t - r_c)[4(r_c^2 - r_t^2) + 5r_t^2 - 4r_t r_c]^{1/2}}{4(r_c^2 - r_t^2) + (r_c - 2r_t)^2} = r_t \quad (2.99)$$

Lançando-se as Equações (2.94) a (2.99) na (2.89), chega-se em um sistema de três equações e três incógnitas. Resolvendo-se o sistema, os parâmetros ficam sendo dados por:

$$r_c = \frac{\sqrt{30} f_{bc} f_t}{5(f_c f_t - 3f_{bc} f_t - f_{bc} f_c)} \quad (2.100)$$

$$r_t = \frac{\sqrt{30} f_{bc} f_t}{5f_c(2f_{bc} - f_t)} \quad (2.101)$$

$$\rho = \frac{f_{bc} f_t}{f_c(f_t - f_{bc})} \quad (2.102)$$

Fazendo-se $\tau_m = 0$ na Equação (2.89), chega-se na relação:

$$\frac{\sigma_m}{f_c} = \rho \quad (2.103)$$

Portanto o vértice do cone formado pela superfície encontra-se sobre o eixo hidrostático a uma distância ρ da origem.

Para garantir a convexidade, r deve satisfazer as seguintes condições:

$$\frac{1}{2} \leq \frac{r_t}{r_c} \leq 1 \quad (2.104)$$

A Figura 2.38 ilustra a violação das condições dadas pela Equação (2.104) no plano deviatórico. É importante lembrar que a superfície deve ser normal aos eixos σ_1 e $-\sigma_2$.

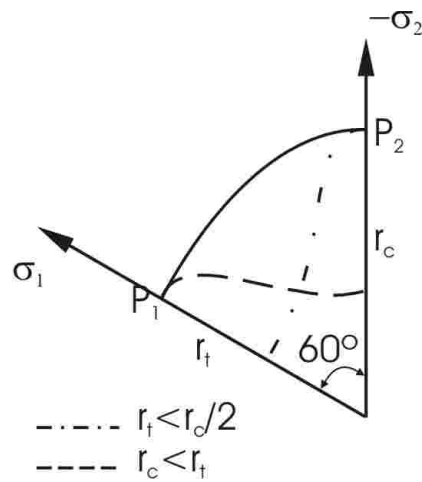


Figura 2.38 – Violação das condições de convexidade da superfície (Proença 1988).

1.6.5 Superfície de ruptura de Figueiras e Owen

A superfície de Figueiras e Owen é apresentada em função dos invariantes I_1 e J_2 , conforme Equação (2.105).

$$[3J_2\beta + \alpha I_1]^{1/2} = f_c \quad (2.105)$$

Onde α e β são parâmetros do material.

Entretanto a Equação (2.105) representa apenas a região de compressão, sendo o restante definido pelo critério da máxima tração principal de tração.

A superfície obtida no espaço das tensões é dita como “cut-off”, já que é dada por uma superfície limitada por outra. Plotando-se a superfície adimensionalizada por f_c no plano $\sigma_1 - \sigma_2$, chega-se na Figura 2.39.

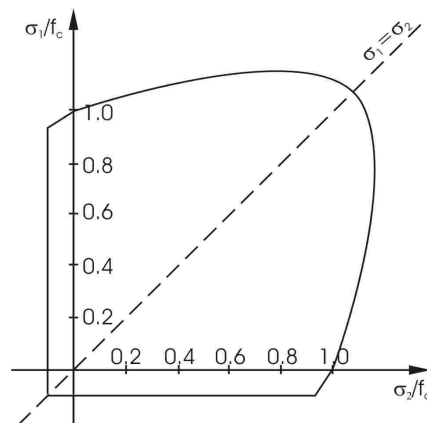


Figura 2.39 – Superfície de Owen no plano $\sigma_1 - \sigma_2$ (Proença 1988).

Fazendo-se a imposição da Equação (1.29) para os casos de compressão uni e biaxial, resolvendo-se o sistema de equações, chega-se que:

$$\alpha = -\frac{f_c(f_c^2 - f_{bc}^2)}{f_{bc}(2f_c - f_{bc})} \quad (2.106)$$

$$\beta = \frac{f_c(2f_{bc} - f_c)}{f_{bc}(2f_c - f_{bc})} \quad (2.107)$$

Owen sugere que sejam utilizados resultados experimentais proposta por Proença (1988), com o valor de resistência a compressão biaxial sendo dado por:

$$f_{bc} = 1.16f_c \quad (2.108)$$

Com isso, os valores de α e β ficam sendo dados respectivamente por:

$$\alpha = 0.355f_c \quad (2.109)$$

$$\beta = 1.355 \quad (2.110)$$

1.7 Fratura

Uma estrutura perde sua função estrutural quando existem deformações excessivas, ruptura parcial ou total, desgaste, perda da estabilidade, etc. decorridos da ação isolada ou combinada de carregamento, temperatura e influência do meio ambiente. Surge-se, portanto a necessidade de se preverem falhas estruturais para o não comprometimento das estruturas.

Logo os projetistas devem desenvolver projetos adequados, sendo necessário o conhecimento de condições e propriedades dos processos para que não haja falha do elemento estrutural. Surge-se a necessidade de analisar o comportamento mecânico das estruturas e sua integridade estrutural.

1.7.1 Introdução

Muitas pesquisas foram desenvolvidas relacionadas à mecânica da fratura, que estuda e utiliza hipóteses e métodos da mecânica dos sólidos, além de métodos experimentais, para validar modelos computacionais baseados na fratura dos sólidos.

A mecânica da fratura é fundamentalmente a mecânica das trincas, que no sentido amplo estuda as falhas estruturais através da perda de estabilidade, da integridade estrutural sem surgimento de microtrincas, propagação de macrotrincas, deformação

excessiva, etc. Porém, será objeto de estudo deste trabalho somente problemas básicos da mecânica das trincas.

Estudos recentes relacionados à mecânica da integridade estrutural dedicam grande atenção ao processo da fratura e o tempo para que a mesma ocorra. A resolução computacional desta natureza de problema substitui o fenômeno estudado por uma análise matemática, que se baseia no modelo do meio contínuo e utiliza, com algumas restrições, o princípio da superposição dos efeitos.

Considerando-se corpos com trincas e supondo que não haja oscilação do carregamento aplicado, a principal questão fica sendo dada pela distribuição de forças internas. Outro fator importante está relacionado com a geometria dos defeitos e das trincas, sendo a forma da superfície um corte infinitamente fino ou uma elipse. A superfície entre a zona da fratura e o material contínuo é designada por superfície de trinca, e a linha que une as superfícies da trinca chama-se frente de trinca.

A propagação das trincas no elemento estrutural é crescente, sendo um processo irreversível. O material em estudo pode sofrer fratura frágil ou dúctil, podendo ter sentido global ou local e está diretamente ligado à estrutura granular do material.

1.7.2 Razões para utilização da mecânica da fratura

Conforme norma publicada pelo comitê do ACI (ACI 446.1R-91), existe cinco argumentos fortes para se incluir a teoria da mecânica da fratura nas normas de prática:

1. **Energia necessária para abertura da fissura**, pois ao ser ultrapassada a tensão resistente do material, há dissipação de energia. Apenas através de critério energético pode-se avaliar a integridade e como as fissuras irão se propagar a baixos carregamentos;
 2. **Objetividade de carga e resposta de cálculos**, através da utilização de elementos finitos, modelando tanto por distribuição da fissuração em todo elemento ou concentrando-a entre os elementos de vizinhança não fissurados, através de elementos discretos especiais. Para os dois modelos, a fissuração ocorre quando a tensão resistente do concreto é alcançada,
-

passando, portanto a não resistir carga (caindo a resistência do material para zero instantaneamente). Conforme Karihaloo (1995), a carga última calculada é próxima da experimental, porém a deflexão depende fortemente do tamanho do elementos finitos.

3. **Falta de patamar de escoamento.** Na análise de estruturas plásticas a falha se dá em várias partes, simultaneamente na proporção de um parâmetro de carga simples, formando rotulas plásticas e um patamar de escoamento no diagrama carga deformação. Caso este não exista, a falha não é plástica, sendo que há um amolecimento do material.
4. **Capacidade de absorção de energia e ductilidade,** onde a energia absorvida pela estrutura durante o processo de fissuração é dada pela área abaixo do diagrama carga – deslocamento (caso a energia dissipada, no incremento de cargas e apoios, seja ignorada). Somente a energia na parte elástica é recuperável, sendo que a energia da parte plástica no amolecimento é absorvida, podendo-se determinar a ductilidade da estrutura. Quanto mais energia a estrutura absorve, maior é a ductilidade. Análise limite não retrata o amolecimento, e conseqüentemente a energia absorvida pela estrutura.
5. **Efeito escala,** onde o fator de escala das estruturas interfere no seu comportamento. Este efeito é desprezado pelas normas, mas é utilizado pela mecânica da fratura. Estudos comprovam que estruturas reduzidas falham na ductilidade, enquanto as estruturas em tamanho real exibem um modelo de falha frágil. Devido à importância deste efeito, ele será abordado mais detalhadamente.

1.7.3 Efeito Escala

Segundo Shah (1995), resultados experimentais têm indicado que a resistência nominal do concreto geralmente diminui com o acréscimo do tamanho da estrutura e posteriormente se torna praticamente constante. Tradicionalmente, o efeito escala para resistência do concreto era explicada por Weibull (teoria estatística). Ele determinava a

resistência das estruturas baseando-se na probabilidade de ruptura associada ao maior defeito do material utilizado, o que é válido para estruturas de uma dimensão.

Quando a estrutura de concreto é carregada, a energia de deformação produzida pela carga aplicada é convertida para energia consumida para criar novas superfícies de fratura e na energia absorvida no processo da zona de fratura. Para grandes estruturas, esta última é desconsiderada. Portanto, quanto maior o tamanho da estrutura, menor a resistência nominal, sendo que a resistência do concreto se aproxima de uma constante à medida que a estrutura se torna maior.

Foi provado que o efeito escala na resistência do concreto pode ser predita pelo uso da aproximação da mecânica da fratura. Baseado no critério da MFEL ($K=K_{Ic}$), a resistência nominal da estrutura pode ser dada por:

$$\sigma_{Nc} = \frac{K_{Ic}}{g_1(a_c/D)\sqrt{\pi a_c}} = \frac{K_{Ic}}{g_1(a_c/D)\sqrt{\Delta a_c(1+a_0/\Delta a_c)}\pi} \quad (2.111)$$

onde K_{Ic} é o fator de intensidade de tensão crítica do material utilizado, $a_c=a_0+\Delta a_c$ é o comprimento de fissura crítica, a_0 é o comprimento inicial da fissura, Δa_c é a extensão crítica da fissura, D é característica do tamanho da estrutura e $g_1(a/D)$ é a função geométrica da estrutura.

Expandindo a função geométrica em série de Taylor e considerando apenas os termos lineares, a Equação (2.111) pode ser dada, conforme Shah (1995) por:

$$\sigma_{Nc} = \frac{Bf_t}{\sqrt{1+D/D_0}} \quad (2.112)$$

onde

$$Bf_t = \frac{K_{Ic}}{(g_{10} + g'_{10}\Delta a_c/D)\sqrt{\pi\Delta a_c}} \quad (2.113)$$

sendo g_{10} função da série de Taylor.

O efeito escala na resistência do concreto é um fenômeno experimental, onde resultados preliminares para presença de fissuras com a zona no processo de fratura.

Equação (2.113) descreve o efeito escala baseado em séries de estruturas geometricamente similares com valor constante a_0/D . Para materiais reais, o valor da falha inicial a_0 depende da microestrutura do material e não pode incrementar linearmente com o incremento da dimensão da estrutura.

1.7.4 Modos geométricos de fratura

Conhecendo-se as relações físicas do material em estudo, através da mecânica dos sólidos, pode-se investigar o estado de tensões e deformações. O problema possui 15 variáveis independentes, sendo seis componentes do tensor de tensões, seis do tensor de deformações e três do vetor de deslocamentos. Para resolução, utilizam-se da teoria da elasticidade seis equações físicas, seis de Cauchy e três de equilíbrio.

A solução do sistema de equações da mecânica dos sólidos geralmente é apresentada na forma de fatores indeterminados, cujos valores reais são obtidos utilizando as condições de contorno.

Os três principais pontos de problemas de contorno são:

1. As tensões aplicadas na superfície do corpo são conhecidas;
2. Os deslocamentos na superfície do corpo são conhecidos;
3. Em partes do corpo se conhece os deslocamentos e em outras as tensões.

Os problemas de fratura geralmente se enquadram nos pontos 1 ou 3.

Casos importantes referem-se a problemas planos, cuja solução pode ser obtida em coordenadas bidimensionais. Destacam-se neste contexto os casos de tensão plana, deformação plana, que não serão abordados neste trabalho. A deformação antiplana é objeto de estudo de parte deste trabalho (relacionada à mecânica da fratura).

1.7.5 Deformação antiplana

Para o caso em questão, há apenas uma componente de deslocamento não-nula distribuída uniformemente ao longo de seu eixo e as componentes de tensão não nula são determinadas pelas relações físicas. Um exemplo do estado tensão-deformação antiplana será abordado a seguir, relacionando-o à mecânica da fratura.

Da mecânica dos sólidos, supondo ser a carga estática, têm-se que os campos de tensão e deformação são função linear dos campos, correspondentes aos modos básicos da carga. Aplicando-se este princípio em problemas da mecânica da fratura, pode-se reduzi-lo à solução de três problemas básicos, que se diferenciam conforme orientação da carga externa em relação à trinca. Pode-se, portanto orientar os eixos ao longo da frente da trinca, ao longo da normal à frente no plano da trinca e ao longo da normal ao plano da trinca e considerar separadamente a ação das componentes da força externa, conforme Figura 2.40.

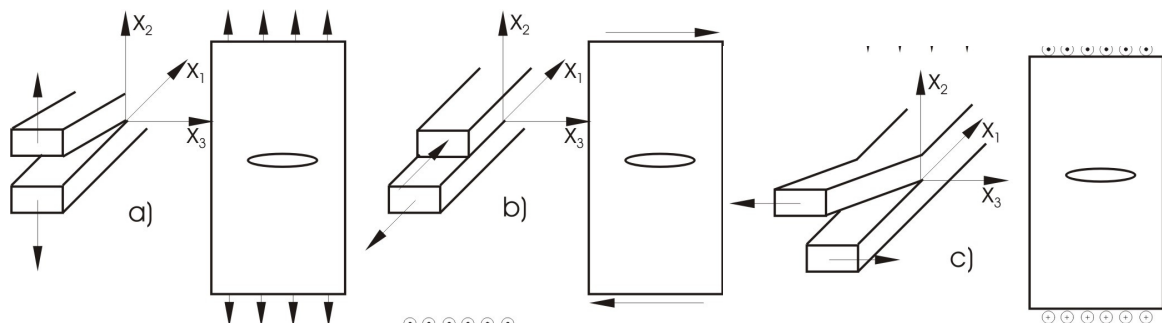


Figura 2.40 – a) Trinca do modo I, b) Trinca do modo II, c) Trinca do modo III.

A Figura 2.40 a retrata a trinca de tração normal, onde as superfícies da trinca são separadas por forças normais ao seu plano. A Figura 2.40 b retrata a trinca de cisalhamento plano, onde ocorre um deslizamento das superfícies da mesma devido às forças normais em sua parte frontal e por fim a Figura 2.40 c, trinca de cisalhamento antiplano, onde ocorre deslizamento das superfícies sob forças paralelas à sua frente.

1.7.6 Bases da mecânica linear da fratura

Neste trabalho será abordada somente a teoria da mecânica linear da fratura, em virtude da complexidade do assunto. Geralmente, este termo evidencia tal fenômeno em materiais elástico-lineares, sendo denotado como mecânica da fratura frágil, devido à característica da fratura, ou mecânica clássica, em virtude da grande investigação de pesquisadores e conseqüentemente desenvolvimento da teoria.

A capacidade deformacional e de carga de estruturas de materiais de matriz cimentícia são geralmente condicionadas pela resistência ao início de fissuração e de retenção de tensões de tração após fissuração destes materiais. Os modelos clássicos baseados no comportamento elástico dos materiais não traduzem os fenômenos associados ao processo, negligenciando uma descrição detalhada dos mecanismos na formação e propagação da fenda.

Os problemas derivados da formação de fendas e da ruptura frágil dos materiais conduziram ao desenvolvimento da disciplina da mecânica da fratura linear elástica, MFLE, sendo os primeiros trabalhos nesta área atribuídos a Griffith (1920) e a Irwin (1957).

Dentre os pontos positivos, destaca-se a solução analítica, devido à formulação comparativamente simples, sendo que muitos problemas da mecânica linear da fratura torna posteriormente generalizados para relações físicas mais complexas. Deste modo, a mecânica linear da fratura tem grande importância no desenvolvimento da mecânica da fratura como uma parte específica da mecânica dos sólidos.

Dentre os pontos negativos, deve-se citar a relação de linearidade entre deformação e deslocamento, que na realidade só se enquadra a situações de pequenos deslocamentos.

1.7.6.1 Conceito de Griffith

Em 1920, o engenheiro inglês A Griffith formulou o primeiro modelo de fratura de um corpo com trinca, baseado em critério energético. Considerava-se que a superfície da trinca se encontrava livre de tensões sendo estas distribuídas uniformemente no restante do corpo. Logo, a propagação da trinca era dita como função da energia e a propagação instável da trinca ocorria se a intensidade da energia elástica acumulada fosse maior do que a necessária para criação de uma nova superfície livre, conforme equação abaixo:

$$G = \frac{dU(q, S)}{dS} \geq 2\gamma_s \quad (2.114)$$

onde G é a intensidade de liberação de energia, U é função da carga externa e área da superfície da trinca e γ_s uma constante que varia de um material para outro.

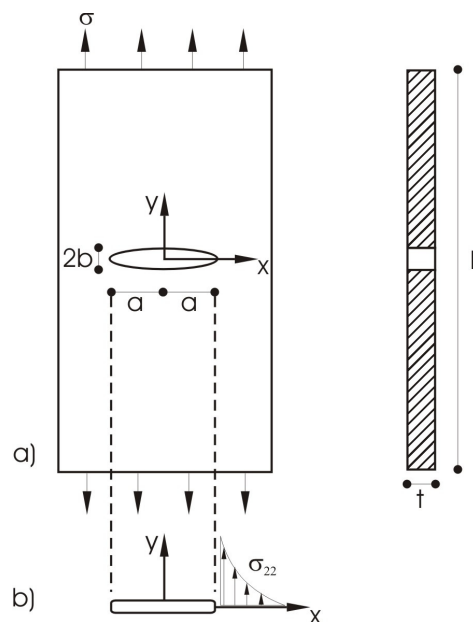


Figura 2.41 – a) chapa fina com fissura elíptica com tensão uniforme; b) problema de Griffith, com $b \rightarrow 0$ (Karihaloo, 1955).

Griffith utilizou a teoria de Inglis para buracos elípticos em um painel cujas dimensões (comprimento e largura) são muito maiores do que a espessura fazendo-se

$b \rightarrow 0$, conforme Figura 2.41 encontrando tensões próximas da ponta de trinca fina de comprimento $2a$, dadas por:

$$\sigma_{22} = \sigma_{11} + \sigma = \frac{\sigma}{\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}} \left(2 \frac{x}{a} + \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} \right)^{-1} + \sigma \quad (2.115)$$

$$\sigma_{12} = 0 \quad (2.116)$$

De acordo com a Lei de Hooke, podia-se estimar o deslocamento crítico. É importante ressaltar que estes resultados eram bastante restritos, já que não levavam em consideração a influência do comprimento da trinca no deslocamento crítico, além de não descreverem o comportamento real da distribuição de tensões, já que trincas são grandes concentradoras de tensão. O modelo se restringe à aplicação em estruturas formadas por materiais elásticos, frágeis e homogêneas, como o vidro, que não ilustram o comportamento dos materiais largamente utilizados na construção civil.

Esta teoria foi posteriormente modificada por Orowan (1949) e Irwin (1957), podendo ser utilizada de forma satisfatória em estruturas de materiais homogêneos elasto-plásticos, como metais de ductilidade limitada.

Nota-se que a investigação da distribuição das tensões e deformações é um fator importante e matematicamente complexo, sendo objetivos fundamentais da mecânica da fratura. A solução mais exata dos problemas de fratura está associada às complicadas pesquisas teóricas e experimentais.

1.7.7 Distribuição de tensões em corpo com trinca

A aplicação de fratura está diretamente ligada com a obtenção do estado de tensão e deformação, o que torna os problemas de contorno bastante importantes. A complicada geometria de elementos estruturais com trincas implica em dificuldades para a solução completa de tais problemas que é pouco influenciado pelo estado de tensão e deformação nas regiões distantes da região concentradora de tensões. Logo, utiliza-se o

método do microscópio, conforme Figura 2.42, que considera exclusivamente uma pequena área próxima à ponta da trinca.

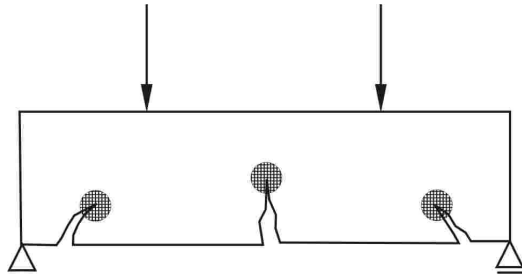


Figura 2.42 – Método do microscópio.

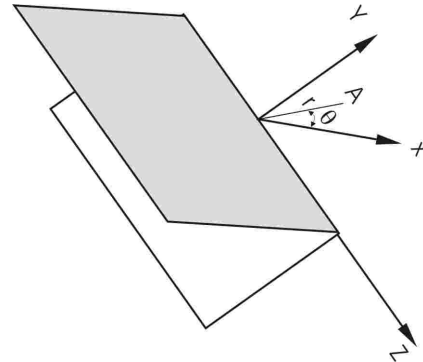


Figura 2.43 – Coordenadas locais (Pastoucov e Voorwald 1995).

A geometria do corpo distante da região de concentração de tensões não é levada em consideração na formulação, mas o modo com que as trincas surgem, conforme Figura 2.42, sim.

Para o caso do modo I, tem-se a Figura 2.43.

Nota-se que a origem se encontra na frente da trinca, o eixo x é normal à frente da trinca, y é normal ao plano da trinca e z é paralelo à frente da trinca. Para a formulação também se utiliza coordenadas polares. Logo, as tensões são dadas por:

$$\sigma_{ij}(r, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \sum_{\alpha} K_{\alpha} \sigma_{ij}^{\alpha}(\theta) \pm O(1) \quad (2.117)$$

onde α indica o modo de fratura, K_{α} é o fator de intensidade de tensão e depende da carga externa, geometria do corpo e trinca, $\sigma_{ij}^{\alpha}(\theta)$ são funções adimensionais de ângulo polar e $O(1)$ um valor finito quando r tende a zero.

Os deslocamentos por sua vez são dados conforme equação abaixo:

$$u_i = \frac{\sqrt{r}}{\mu\sqrt{2\pi}} \sum_{\alpha} K_{\alpha} \tilde{u}_i^{(\alpha)}(\theta) + O(r^{2/3}) \quad (2.118)$$

Porém, analisando a Equação (2.117) chega-se à conclusão de que existe uma singularidade do campo de tensão na ponta da trinca para cada carga não nula, e que conseqüentemente gera tensões infinitas, sendo esta uma das causas da fratura. Na realidade a fratura ocorre sob uma carga finita maior do que o valor crítico considerado. Isto se deve ao fato da idealização física e geométrica, além da característica discreta da microestrutura do material.

Analisando o cisalhamento anti-plano (modo III), por se tratar de ser o que possui menor quantidade de variáveis independentes, tem-se que o deslocamento e deformações não-nulos são dados respectivamente por:

$$u_3 = u_3(x_1, x_2) \quad (2.119)$$

$$\varepsilon_{13} = \frac{1}{2} \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \quad (2.120)$$

$$\varepsilon_{23} = \frac{1}{2} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \quad (2.121)$$

Onde as deformações seguem as equações de Cauchy.

Da lei de Hooke, tem-se:

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} \quad (2.122)$$

Lançando-se as deformações dadas pelas Equações (2.120) e (2.121) em (2.122) e posteriormente na única equação de equilíbrio, obtém-se a característica harmônica de deslocamento:

$$\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} = \Delta u_3 = 0 \quad (2.123)$$

Com as Equações (2.119) a (2.123), o problema de contorno fica com duas condições de contorno:

1. Superfície livre da trinca: $\sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$ para $x_2 = 0, |x_1| < l$;
2. Condições no infinito: $\sigma_{13} = 0, \sigma_{23} = -\tau(x_1)$ para $|x_2| \rightarrow \infty$.

Conforme Figura 2.44 A, faz-se a superposição de efeitos do cisalhamento uniforme do corpo infinito sem trinca e o cisalhamento pelas tensões aplicadas na superfície da trinca.

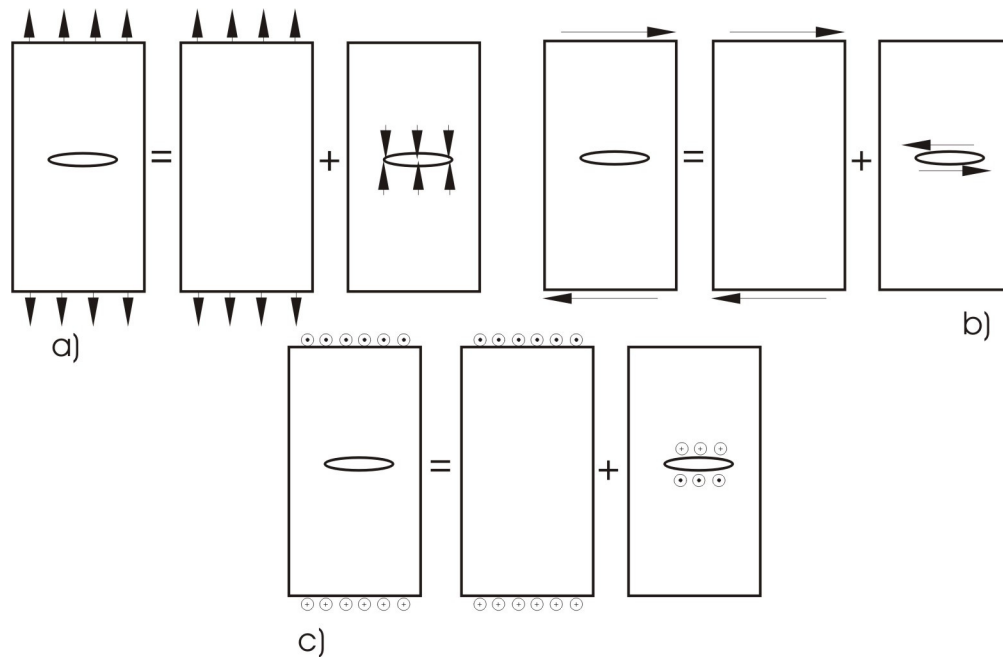


Figura 2.44 – Método de superposição para trinca (Pastoucov e Voorwald 1995).

Da teoria da elasticidade, utilizando-se a técnica de variável complexa, o valor do fator K_{III} , conforme Pastoucov e Voorwald (1995), é dado por:

$$K_{III} = \frac{1}{\sqrt{\pi a}} \int_{-l}^l \tau(x_1) \frac{\sqrt{a+x_1}}{a-x_1} dx_1 \quad (2.124)$$

Para tensão de cisalhamento constante, a equação acima se reduz a:

$$K_{III} = \tau \sqrt{\pi a} \quad (2.125)$$

As tensões e deformação, desprezando as parcelas regulares, ficam sendo dadas respectivamente por:

$$\sigma_{13} = -\frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \quad (2.126)$$

$$\sigma_{23} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \quad (2.127)$$

$$u_3 = \frac{K_{III} \sqrt{2r}}{\mu\pi} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \quad (2.128)$$

Para o modo I, o principal para a mecânica linear da fratura, tem-se apenas uma componente de deslocamento, três de tensão e três de deformação iguais à zero ou linearmente dependentes. Conforme Figura 2.44 B, faz-se a superposição de efeitos, chegando-se para carga constante, conforme Pastoucov e Voorwald (1995), no fator K_I :

$$K_I = p\sqrt{\pi a} \quad (2.129)$$

As tensões e deslocamentos ficam sendo dados respectivamente por:

$$\sigma_{11} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \operatorname{sen} \frac{3\theta}{2} \right) \quad (2.130)$$

$$\sigma_{22} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \operatorname{sen} \frac{3\theta}{2} \right) \quad (2.131)$$

$$\sigma_{12} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \quad (2.132)$$

$$u_1 = \frac{K_I}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left(\frac{k-1}{2} + \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2} \right) \quad (2.133)$$

$$u_2 = \frac{K_I}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \left(\frac{k-1}{2} - \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \quad (2.134)$$

Para o modo II, conforme Figura 2.44 B, faz-se a superposição de efeitos, chegando-se para carregamento uniforme, conforme Pastoucov e Voorwald (1995), no fator K_{II} :

$$K_{II} = \sqrt{\pi a} \quad (2.135)$$

As tensões e deslocamentos ficam sendo dados respectivamente por:

$$\sigma_{11} = -\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \left(2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right) \quad (2.136)$$

$$\sigma_{22} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \operatorname{sen} \frac{3\theta}{2} \right) \quad (2.137)$$

$$\sigma_{12} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \quad (2.138)$$

$$u_1 = \frac{K_{II}}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \left(\frac{k+1}{2} + \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \quad (2.139)$$

$$u_2 = \frac{K_{II}}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left(-\frac{k-1}{2} + \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2} \right) \quad (2.140)$$

Nota-se que em todos os modos, o estado tensão-deformação é caracterizado pelo fator de intensidade de tensão. Sendo este estado conhecido, pode-se tratar as trincas como não somente um corte, e sim um entalhe que pode se propagar. Para isso há a necessidade de se ter uma relação entre o comprimento da trinca e o valor da carga crítica externa, passando-se de um problema da teoria da elasticidade para um da mecânica da fratura.

1.7.7.1 Critério de Irwin

Em 1957, Irwin propôs um critério em termo da força, onde haveria propagação da trinca quando o fator de intensidade de tensão ultrapassasse um valor crítico, conforme Equação (2.141):

$$K_{\alpha} = K_{\alpha c} \quad (2.141)$$

Onde α são os modos I, II e III e a equação é válida para estado puro de tração, de cisalhamento plano ou antiplano.

Sendo $K_{\alpha c}$ o fator crítico, denominado tenacidade à fratura quando a temperatura e velocidade de carregamento forem fixas. De posse deste valor, sendo conhecido a condição de carregamento, pode-se resolver dois problemas básicos:

1. Da integridade estrutural, determinar o valor crítico da carga para corpo com trinca de comprimento conhecido;
2. Determinação do máximo comprimento permitido da trinca para carregamento conhecido.

Porém a resolução destes problemas se torna complexo, já que o parâmetro K_{α} varia de acordo com a espessura do corpo, temperatura, velocidade de carregamento, etc. sendo aplicado somente para as mesmas condições em que o ensaio foi realizado. Além disso, deve-se avaliar a estabilidade do estado crítico. A fratura é instável quando as condições de carregamento determinam um aumento de intensidade de tensão ao incremento do comprimento, enquanto que o decréscimo do fator de intensidade de tensão diminui leva a uma configuração estável.

Como o problema da moderna mecânica da fratura é bastante complexo, utiliza-se a mecânica linear da fratura e a partir dela se avalia aproximadamente a extensão da zona plástica. Caso esta zona seja pequena e não tenha influência na distribuição de tensão na zona elástica, a fratura passa a ser caracterizada por fratura quase-frágil.

Utilizando a condição de escoamento formulada por Mises e usando as equações das tensões para o modo I, II e III, chega-se nas relações entre raio-vetor da zona plástica e o ângulo polar para estado de tensão e deformação plana. Para o modo I, plotando-se as equações adimensionais, obtém-se a Figura 2.45.

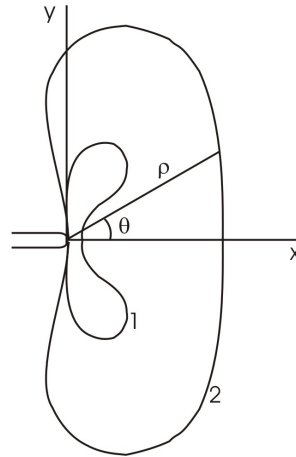


Figura 2.45 – Zona plástica na ponta da trinca do modo I (1. deformação plana; 2. tensão plana) (Karihaloo 1995).

Fazendo-se uma combinação dos modos I e II, tem-se que a energia potencial é dada conforme Karihaloo (1995) por:

$$\Delta\pi = -2 \int_0^{\Delta l} (\sigma_{12} u^+ + \sigma_{22} v^+) dx \quad (2.142)$$

Onde u^+ e v^+ são os deslocamentos na face de cima da fissura e são dados por:

$$v^+ = \frac{K_I}{E} (1+\nu)(k+1) \sqrt{\frac{\Delta a - x}{2\pi}} \quad (2.143)$$

$$u^+ = \frac{K_{II}}{E} (1+\nu)(k+1) \sqrt{\frac{\Delta a - x}{2\pi}} \quad (2.144)$$

A Figura 2.46 demonstra os deslocamentos na ponta da trinca.

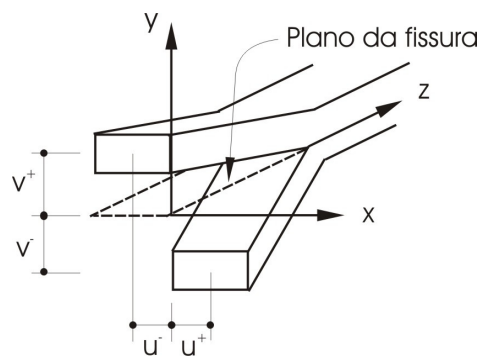


Figura 2.46 – Deslocamento da abertura na ponta da trinca.

Utilizando-se as Equações (2.130) a (2.132), (2.136) a (2.138) em (2.142), chega-se:

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi x}} \quad (2.145)$$

$$\sigma_{12} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi x}} \quad (2.146)$$

Utilizando-se as Equações de (2.143) a (2.146) em (2.142), além de uma expressão dada para energia necessária para abertura de fissura:

$$\Delta\pi = -4\gamma\Delta l \quad (2.147)$$

Para o modo I, a relação entre o fator de intensidade de tensão e γ é dada por:

$$\frac{(1+\nu)(k+1)}{2E} K_I^2 \equiv \frac{2K_I^2}{E'} = 4\gamma \quad (2.148)$$

Para o modo II:

$$\frac{(1+\nu)(k+1)}{2E} K_{II}^2 \equiv \frac{2K_{II}^2}{E'} = 4\gamma \quad (2.149)$$

Para o modo III:

$$\frac{2(1+\nu)}{E} K_{III}^2 \equiv \frac{K_{III}^2}{\mu} = 4\gamma \quad (2.150)$$

Chega-se, portanto em uma relação dada por:

$$-\frac{d\Pi}{dl} = G = \frac{K_I^2}{E'} + \frac{K_{II}^2}{E'} + \frac{K_{III}^2}{2\mu} \quad (2.151)$$

1.7.7.2 Modelo de fissuração coesiva de Barenblatt

Barenblatt (1959) e Dugdale (1960) fizeram a primeira tentativa de simulação dos processos não lineares localizados nas extremidades de uma fenda pré-existente. Para tal, consideraram forças coesivas nas extremidades da fenda. Originalmente, o modelo coesivo ou de fenda coesiva, não era nada mais que uma fenda fictícia capaz de transferir tensões de uma face para a outra. Este modelo tem sido usado por muitos investigadores para simular a zona não linear verificada na extremidade da fenda para os materiais mais comuns (metais, polímeros, cerâmica, e geomateriais).

Em 1959, Barenblatt adicionou aos modelos já existentes as forças coesivas na região das fissuras dentro dos limites da teoria da elasticidade. Assume-se que há concentração de forças coesivas atuando em uma pequena zona de comprimento c , próxima da ponta da trinca, conforme ilustrado na Figura 2.47.

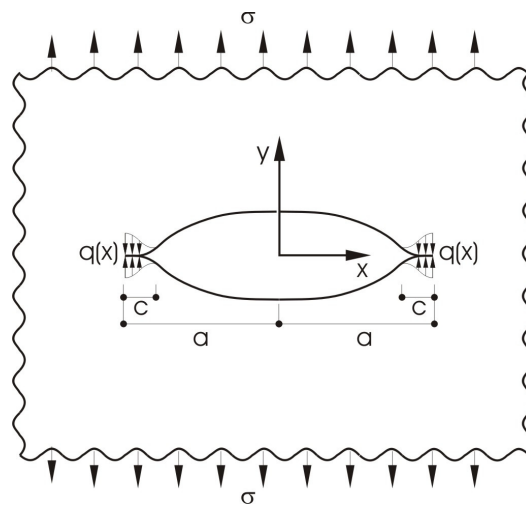


Figura 2.47 – Modelo de fissuração coesiva de Barenblatt para modo I (Karihaloo 1995).

Devido a diversas características que as estruturas de concreto possuem, como a porosidade, a distribuição das forças coesivas geralmente é desconhecida. Barenblatt propôs que o estado crítico da configuração na zona de coesão independe da carga aplicada, do material e das condições ambientais.

Além do fator K_I , para o modo I, surge-se um fator de intensidade de tensão K_I' . Segundo Karihallo (1995), o módulo de coesão para o modo I é dado pela expressão abaixo.

$$Q = \sqrt{\frac{\pi}{2}} K_I \quad (2.152)$$

Nota-se que o módulo de coesão é proporcional com o fator de intensidade de tensão para fissuras sem zona de coesão. Portanto, para materiais frágeis é preferível utilizar a teoria de Irwin, já que nesta não há necessidade de se introduzir as forças coesivas, que são difíceis de serem obtidas.

1.7.7.3 Cálculo de K_{Ic} para carga de ruptura

Nota-se que todas as teorias expostas são para materiais frágeis, o que não retrata o comportamento do concreto. Quase todas tentativas de aplicação da mecânica da fratura linear elástico para concreto usa um parâmetro crítico de fratura K_{Ic} . A princípio, achava-se que este valor era constante, mas investigações nas décadas de 70 e 80 concluíram que é variável, devido à variação do comprimento inicial do entalhe e tamanho e forma da amostra de teste. O efeito da largura da amostra e da largura do entalhe era apenas fraco. A variação de K_{Ic} também é refletido no correspondente valor de enrijecimento G_c .

Foi observado que a falha no comportamento do concreto com uma fina microestrutura, para um exemplo de pasta de cimento dura, é mais resistente aos efeitos da mecânica da fratura do que concreto com uma microestrutura mais grossa, para exemplo de argamassa. O desvio do comportamento é maior para a mecânica da fratura linear quando mais grosso ou mais heterogêneo é a microestrutura.

Nallathambi et al. (1984) constatou que, para vigas com tamanho variando entre 4x5x20 cm e 8x30x180 cm contendo agregados com tamanho variando entre 2 e 20 mm, K_{Ic} aumentava de valor à medida em que se havia um acréscimo da altura do entalhe até um certo valor, e posteriormente diminuía com um incremento da profundidade do

entalhe. A razão do decréscimo era particularmente severa em concretos com granulometria grossa.

Tian et al. (1986) notou que o valor de K tendia para um valor constante à medida que o tamanho da amostra se torna muito grande. Em outras palavras, a mecânica da fratura linear elástica parece mostrar o comportamento da fratura no concreto quando o tamanho da amostra é muito maior do que o tamanho da microestrutura do mesmo. Estudos mostram que k_{Ic} é praticamente constante e independente da profundidade das fissuras para grandes amostras de pasta de cimento dura, argamassa e concreto.

O fator de intensidade crítica de tensão K_{Ic} para diferentes geometrias e configuração de carregamento é proporcional à carga de falha aplicada $P_{máx}$. Conforme Karihaloo (1995), o fator de intensidade crítica de tensão pode ser expresso de forma genérica por:

$$K_{Ic} = \frac{P_u}{BW} \sqrt{a} f\left(\frac{a}{W}\right) = (\sigma_N)_u \sqrt{W} f'\left(\frac{a}{W}\right) \quad (2.153)$$

Onde $f\left(\frac{a}{W}\right)$ e $f'\left(\frac{a}{W}\right)$ são funções não-dimensionais do entalhe para taxa de escala e W é característica do tamanho da amostra.

Para testes em vigas de concreto entalhadas, Walsh (1972, 1976) foi o primeiro a reconhecer que somente grandes vigas seguiam o forte efeito do tamanho implícito na mecânica da fratura linear elástico. Para vigas pequenas, a tensão nominal de falha era praticamente independente do tamanho da viga (linha horizontal na Figura 2.48), como na teoria da força de ruptura clássica.

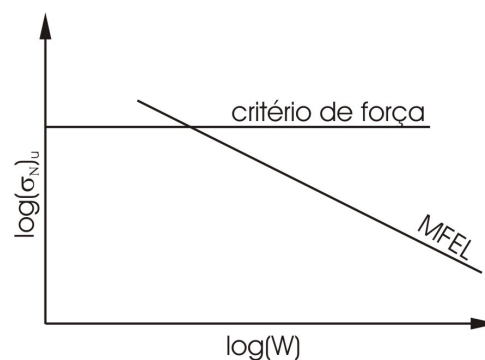


Figura 2.48 – Efeito escala no critério de força e na MFLE (mecânica da fratura linear elástico) (Karihaloo 1995).

Sugeriu-se que vigas entalhadas deveriam ter no mínimo 23 cm de altura para que a mecânica da fratura linear elástico seja aplicável. Estudos mais recentes mostram que este tamanho é totalmente subestimado.

1.7.7.4 Cálculo da energia de fratura G_F

Supondo-se uma amostra de concreto entalhado de forma que o crescimento da fissura seja estável (isto pode ocorrer caso se assegure que a taxa de crescimento de um parâmetro de resposta não exceder o presente valor) e assumindo que todo trabalho feito pelas cargas externas vão para a extensão da fissura e que a energia necessária posteriormente seja independente da geometria da amostra. O trabalho exercido pela carga, o qual pela primeira suposição iguala à redução em sua energia potencial, que pode ter sido consumido no fraturação da parte não entalhada da seção transversal da amostra e da frente de ligação da fissura pré-existente.

A energia necessária para criar uma fissura de área unitária (energia da fratura) é dada por:

$$G_F = \frac{W_F}{A_{lig}} \quad (2.154)$$

Onde W_F é o trabalho da fratura e A_{lig} é a área de ligação que estava intacta antes do teste iniciar.

O trabalho da fratura pode ser obtido calculando-se a área abaixo da curva carga – deformação e a área de ligação A_{lig} através da formula:

$$A_{lig} = B(W - a) \quad (2.155)$$

Está claro das duas suposições anteriores que para materiais frágeis elásticos a energia da fratura G_F deve ser igual à G_c , assim não importa se utiliza o procedimento do

trabalho de fratura ou o previamente descrito procedimento de falha de carga para se determinar a resistência à fratura.

Nallathambi et al. (1984) estudou diversas séries de vigas de três pontos e mostrou que a consideração acima é ruim para concreto, como era esperado. Dentre as conclusões obtidas por ele, comprovou-se que G_F é consideravelmente maior do que G_c . Ambos os fatores não são constantes e aumentam com o acréscimo de altura da viga e decrescem com o aumento da profundidade do entalhe (para os casos de tamanho máximo dos agregados e fator água cimento estudados por ele).

Hillerborg (1985) fez um estudo extenso de testes em vigas de três pontos, conforme Figura 2.49, em quatorze laboratórios no mundo, concluindo que G_F aumentava com o acréscimo do tamanho da amostra. Se todas as vigas da série fossem entalhadas acima da metade da altura, nenhuma informação poderia ser obtida na variação de G_F com a razão da profundidade do entalhe.

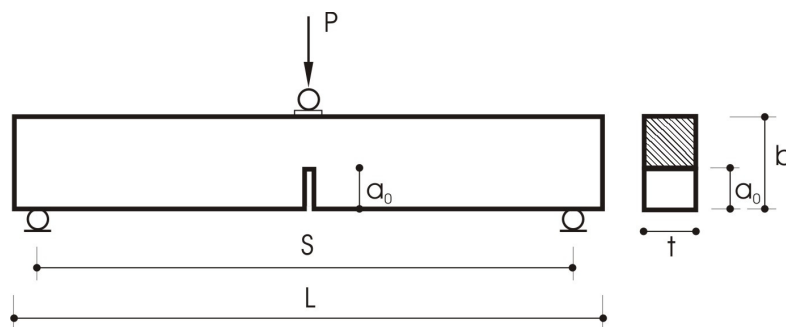


Figura 2.49 – Viga de três pontos.

A variação de G_c era esperada, pois isto varia de acordo com K_{Ic} . Como se sabe, o concreto não é um material frágil ideal. Hillerborg (1985) percebeu que há diversas possíveis razões para a discrepância e variação de G_F .

As razões da variação de G_F com o tamanho da amostra e para diferença significativa com relação a G_c tem que ser feita com a violação de dois aspectos básicos que foram feitos para chegar à relação (2.154).

1. Foi assumido que o trabalho realizado pelas forças externas vai somente para extensão de fissuras estáveis, o que é impossível de satisfazer na prática, como foi comprovado por Planas & Elices (1989). Eles identificaram que há perda de energia na extensão da fissura estável.

2. A energia necessária posteriormente é independente da geometria da amostra e da configuração de carregamento, porém só é válido para mecânica da fratura linear elástico restrita.

1.8 Modelos de fissuração

Os modos de fissura na realidade ocorrem simultaneamente. Sendo assim, uma combinação entre eles deve ser utilizada para se obter o comportamento das estruturas de forma mais próxima da realidade. Surge-se então a necessidade de um modo misto de fratura para retratar o comportamento das estruturas de concreto. Portanto, faz-se necessário entender os mecanismos de colapso do concreto.

A propagação das fissuras é dificultada por diversos mecanismos envolvidos no processo de colapso (início, curva, propagação e controle de fissuras). Este mecanismo pode ser ilustrado pela curva carga-abertura de fissura de um ensaio de viga entalhada. Conforme estudos de Jenq e Shah (1987), nota-se que num primeiro estágio de carregamento não há um crescimento significativo da fissura. Caso se incremente a carga, a estrutura passa a se comportar de forma não linear, surgindo e propagando as microfissuras, ocorrendo a não-linearidade do material. Segundo Jenq e Shah (1987), a determinação da não-linearidade para este estágio é muito difícil. Quando as microfissuras passam a se transformar em macrofissuras, a propagação das mesmas será impedida pelos agregados, a não ser que haja um incremento da carga. Com isso, há um desvio da propagação da fissura e uma carga adicional é necessária para que tal processo não seja interrompido. Conforme Shah (1982), com isso há um incremento de fator de intensidade de tensão que resulta num mecanismo de endurecimento. Quando a carga alcança a máxima resistência, a fissura começará a se propagar de maneira instável no ensaio de controle de carga. Todavia, se é realizado um monitoramento de abertura de fissuras, um comportamento pós-pico estável pode ser observado.

1.8.1 Modo misto de fratura no concreto

Conforme alguns pesquisadores, como Arrea e Ingraffea (I), Rots e Blauwendraad (1989) dentre outros, na realidade, as fissuras em estruturas de concreto surgem da combinação das tensões de tração e de cisalhamento. Segundo Ingraffea and Gerstle (13) a carga de colapso é muito sensível às constantes do material usados no modelo de fissuras fictícias proposto por Hillerborg et al (11), porém estas propriedades do material são de difícil obtenção em ensaios de laboratórios. Assim, surge a necessidade de um método numérico para obtenção das mesmas, conforme será descrito posteriormente. De acordo com Rots e Blauwendraad (1989), a utilização da teoria de fissura de banda pode não reproduzir satisfatoriamente o comportamento, pois há uma dependência da malha do elementos finitos utilizada.

Para o modo misto de fratura do concreto, como há mudança na trajetória da fissura, este método se torna bem mais complexo do que o modo I. Diversos critérios têm sido propostos para determinar a direção da abertura da fissura. Os mais comuns são o critério da máxima tensão tangencial, o de densidade de energia de mínima deformação e o da taxa da máxima energia liberada. Conforme Jenq e Shah (1987), a energia desprendida pode ser expressa por:

$$G = \frac{K_I^2}{E'} + \frac{K_{II}^2}{E'} \quad (2.156)$$

Para o caso de uma direção arbitrária, a energia pode ser dada, sugere Hussain (12):

$$G(\theta) = \frac{4}{E'} \left(\frac{1}{3 + \cos^2 \theta} \right)^2 \left(\frac{1 - \frac{\theta}{\pi}}{1 + \frac{\theta}{\pi}} \right)^{\theta/\pi} \left\{ (1 + 3\cos^2 \theta) K_I^2 + 8\cos \theta \sin \theta K_I K_{II} + (9 - 5\cos^2 \theta) K_{II}^2 \right\} \quad (2.157)$$

A fissura inicia sua propagação, conforme o critério aqui mencionado, na direção em que a energia é máxima. Baseado neste critério, o ângulo inicial pode ser determinado pelas equações:

$$\frac{\partial G}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial^2 G}{\partial \theta^2} < 0 \quad (2.158)$$

$$K_I(\theta) > 0 \quad (2.159)$$

1.8.2 Modelo de Fissuração Distribuída

O comportamento das estruturas de concreto é caracterizado por uma redução na capacidade de carregamento com acréscimo de deformações depois de atingido um certo limite de carga. Esse comportamento global é causado por um comportamento do material denominado “strain softening”, que ocorre tanto para esforços de tração quanto para esforços de compressão.

Devido a esse efeito de amolecimento, as deformações tendem a se manifestar em uma região localizada da estrutura e, dessa maneira, os resultados obtidos utilizando o Método dos Elementos Finitos podem ser dependentes da discretização adotada para a malha nessa região.

Para a simulação do processo de fraturamento no concreto, o programa DIANA conta com o modelo de fissuração discreta (“discrete crack model”) e com o modelo de fissuração distribuída (“smeared crack model”). No modelo de fissuração discreta, a fissura é tratada de maneira real, de modo que uma nova malha é gerada conforme a fissura se propaga (Diana, 2003).

No modelo de fissuração distribuída o material danificado ainda é considerado como um meio contínuo e as notações de tensão e deformação ainda podem ser aplicadas sem a necessidade de se construir uma nova malha enquanto as fissuras se propagam.

Com essa hipótese, o dano pode ser representado por um parâmetro k , que está relacionado com um comprimento equivalente da energia dissipada por unidade de área fissurada, G_f .

Dessa maneira, os parâmetros relacionados com a Mecânica da Fratura introduzidos no modelo de fissuração distribuída são: a energia de fraturamento, o comprimento equivalente (“equivalent length”) e a banda de fissuras (“crack band”). A

relação tensão-deformação, tanto na compressão como na tração, também pode ser descrita em termos energéticos.

De acordo com Feenstra e Borst (1993), a energia de fraturamento à compressão G_c em ensaios experimentais tem variado de 10 a 25 Nmm/mm², o que corresponde a mais ou menos 50 a 100 vezes a energia de fraturamento na tração, G_f . A energia de fraturamento à compressão é obtida do diagrama tensão-deslocamento, conforme ilustra a Figura 2.50.

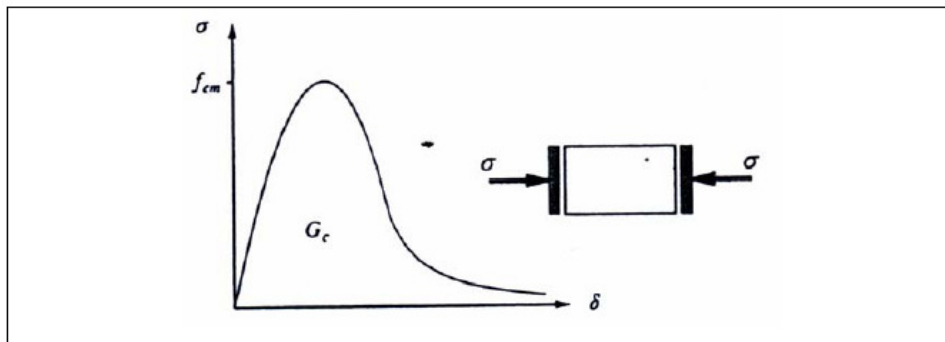


Figura 2.50 - Energia de fraturamento à compressão. (Feenstra e Borst, 1993).

Além da representação da relação constitutiva em termos energéticos, o programa DIANA permite utilizar o modelo do CEB-FIP Model Code 1990 (1993) e curvas definidas pelo próprio usuário. Evidentemente, a formulação em termos energéticos é muito mais interessante do ponto de vista computacional, tendo em vista a independência da malha adotada.

A G_f , representa a quantidade de energia liberada por unidade de área fissurada, ou melhor, a energia que é necessária para uma fissura se propagar. O valor de G_f pode ser obtido de um teste de tração com deformação controlada, calculando-se a área do diagrama tensão versus abertura de fissura.

A energia de fraturamento é assumida como sendo um parâmetro do material que está relacionado com a resistência à compressão e com o tamanho máximo do agregado. De acordo com o CEB-FIP Model Code 1990 (1993) pode-se determinar G_f através da Equação (2.160).

$$G_f = G_{F0} (f_{cm} / f_{cm0})^{0,7} [\text{Nmm} / \text{mm}^2] \quad (2.160)$$

O comprimento equivalente, expresso por h , deve corresponder a uma dimensão representativa dos elementos da malha, sendo dependente do tipo do elemento e de sua forma. De acordo com Feenstra e Borst (1993), o comprimento equivalente pode ser relacionado com a área do elemento, através da Equação (2.161).

$$h = \alpha_h \sqrt{A_e} \quad (2.161)$$

O fator α_h é um fator de modificação que assume o valor 1,0 para elementos quadráticos e 1,41 para elementos lineares. O comprimento equivalente calculado pela Equação (2.161) é adequado quando a malha não é muito distorcida e a maioria das fissuras está alinhada com a tipologia da malha. Trata-se de uma equação que fornece boas aproximações para a maioria das situações práticas.

Com base nos parâmetros anteriores, pode-se definir um parâmetro g_f que representa o trabalho inelástico, conforme a Equação (2.162). Esse parâmetro representa a quantidade de energia que deve ser dissipada em um elemento da malha para que ocorra um dano irreversível ao material. Essa idéia é utilizada tanto em tração como em compressão, podendo capturar o “softening” do material.

$$g_f = \frac{G_f}{h} \quad (2.162)$$

1.8.3 Aproximação das fissuras discretas

Para este método, o caminho da fissura é assumido a priori e a malha é feita de forma a coincidir com os limites entre os elementos. Existem basicamente três problemas a serem resolvidos: determinar a localização e direção inicial da fissura, como ela se estenderá e de sua dimensão. O primeiro problema é geralmente resolvido com base na máxima tensão. Uma vez identificada a localização da fissura, pode ser necessário redefinir a malha. Ao longo da linha da fissura é necessário eliminar completamente as forças nodais ou utilizar uma regra de amolecimento.

Caso a mecânica da fratura linear elástico seja assumida, é necessário um elemento singular que inclui a função de tensão ponta da fissura. A direção do início da fissura pode ser encontrada avaliando o estado de tensão no elemento da ponta do entalhe para determinar a máxima tensão. A extensão da fissura é determinada pela mecânica da fratura considerando o fator de intensidade de tensão e seu estado na ponta do entalhe do elemento e comparado à dureza de fratura do material.

Os pontos positivos de se utilizar o modelo de fissuração discreta são que os elementos de interface descrevem naturalmente o fenômeno, além de ser necessário um menor número de graus de liberdade para modelar a fissura.

1.8.4 Aproximação da fissuração coberta

Baseada na concepção de substituir a fissura por um meio contínuo com alteração das propriedades físicas. Dentre suas vantagens, destaca-se a não necessidade de se redefinir a malha. A distribuição de dano e fissuras tem sido observada em estruturas de concreto armado, esta distribuição geralmente não é linear, mas tortuosa, além de que nos casos de fissuras paralelas uniformemente distribuídas a aproximação da fissuração coberta é mais aconselhável.

A maior desvantagem deste modelo é a sensibilidade da malha, sendo que isto pode ser evitado pelo uso do limite de localização. Portanto, a convergência da solução para malhas refinadas não pode ser aferida, pois o tamanho mínimo deve superar o valor de w_c .

1.9 Modelagem do Concreto Simples

Um dos métodos implementado no programa DIANA é o modelo de fissuração distribuída. Esse modelo, por sua vez, determina a abertura e a orientação das fissuras em um determinado ponto através dos modelos descritos a seguir.

1.9.1 Modelo Total Strain

Na formulação do “Modelo Total Strain” recorre-se unicamente a uma relação constitutiva dependente das deformações em um dado instante, o que fornece facilidades de implementação numérica. Dessa maneira, o grande atrativo dessa formulação é a sua simplicidade conceitual, sendo essa vertente representada no programa pelo “Rotating Crack Model” e pelo “Fixed Crack Model”.

O “Rotating Crack Model” permite que a fissura mude de direção enquanto se propaga. Por sua vez, o “Fixed Crack Model” armazena o ângulo de abertura da primeira fissura e faz com que a propagação mantenha esse parâmetro, mudando de direção somente quando for registrada uma variação de 90° em relação ao ângulo gravado no início do processo.

De acordo Feenstra e Borst (1993), Rots et al. (1985) e Rots e Blaauwendraad (1989) o “Rotating Crack Model” tende a apresentar cargas de ruína inferiores àquelas obtidas com o “Fixed Crack Model”. Os pesquisadores também relatam que o “Rotating Crack Model” tende a apresentar uma estabilidade maior entre todos os modelos disponíveis no programa DIANA.

A inserção de dados no “Modelo Total Strain”, compreende duas partes:

(a) entrada de propriedades básicas tais como o módulo de elasticidade, coeficiente de Poisson, resistência à tração e compressão; e, (b) definição do comportamento do material à tração, compressão e cisalhamento.

O programa DIANA possibilita a descrição das propriedades a partir de relações estabelecidas pelo CEB-FIP Model Code 1990 (1993) e por outros códigos, como também permite entrada de dados definidos pelo próprio usuário.

Para o comportamento do material à tração existem relações pré-definidas baseadas na energia de fraturamento e na banda de fissuras do elemento, que é estimada automaticamente em função da área ou do volume do elemento. A Figura 2.51 apresenta algumas relações de “tension softening” disponíveis no programa DIANA.

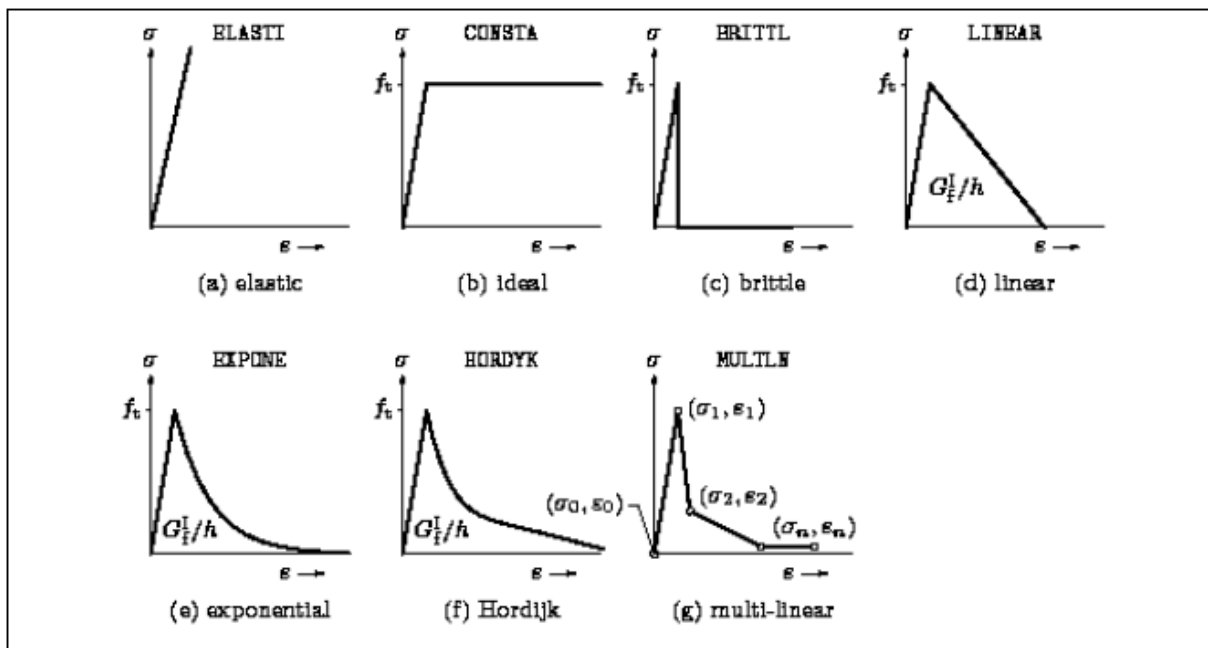


Figura 2.51 - Relações disponíveis para tension-softening no programa *DIANA* (TNO, 2001)

De acordo com Gomes (2001), devido à fissuração do material a rigidez ao cisalhamento é normalmente reduzida. Essa redução é normalmente conhecida, no meio técnico, como retenção ou conservação do cisalhamento. O programa *DIANA* oferece três relações para tratar esse efeito: retenção completa do cisalhamento, retenção constante do cisalhamento e retenção variável do cisalhamento.

No caso de uma retenção completa do cisalhamento o módulo de elasticidade transversal G não é reduzido, o que implica que a rigidez ao cisalhamento secante da fissura é infinita. No caso da redução da rigidez de cisalhamento, o fator de retenção do cisalhamento β é menor do que um, mas maior do que zero, sendo normalmente tomado igual a 0,2.

A rigidez de cisalhamento de um material fissurado depende geralmente da abertura da fissura. Este fenômeno pode ser levado em consideração através da retenção variável de cisalhamento, por meio um fator de retenção de cisalhamento que é função da deformação da fissura. A Equação (1.163) apresenta o parâmetro β para o caso de retenção variável do cisalhamento.

$$\beta = \frac{1}{1 + 4447 \cdot \varepsilon} \quad (2.163)$$

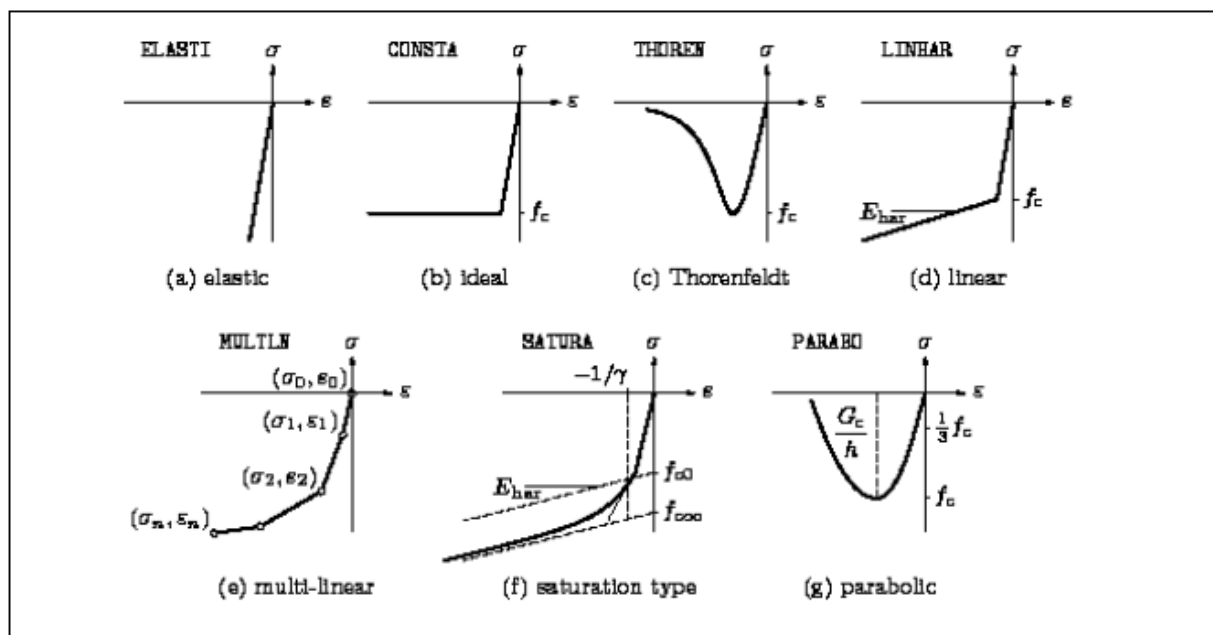


Figura 2.52 - Relações constitutivas para compressão no programa *DIANA* (TNO, 2001).

O comportamento à compressão normalmente é descrito como uma função não linear entre tensões e deformações em uma determinada direção. O programa *DIANA* possibilita a entrada de dados do usuário como também possibilita escolher funções previamente definidas, tal como as ilustradas na Figura 2.52.

1.9.2 Modelos Incrementais ou Plásticos

Na formulação dos “Modelos Incrementais” costuma-se recorrer aos conceitos da “Teoria da Plasticidade”, preferindo-se dividir as deformações em duas parcelas: elásticas (reversíveis) e plásticas (irreversíveis). Dessa maneira, pode-se fazer uma combinação transparente com outros fenômenos não-lineares, tais como a fluência, retração e carregamentos não-proporcionais.

O “Multi-Directional Crack Model”, que é o representante desse grupo no programa *DIANA*, apresenta grandes vantagens para os problemas bidimensionais. No entanto, não pode ser aplicado em casos tridimensionais, pois sua formulação atual só está concebida para elementos axissimétricos ou em estado plano de tensão/deformação.

Os modelos incrementais são caracterizados por modelar o material combinando um modelo especial de fissuração distribuída (“Smearred Crack Model”) para

tração com um modelo plástico para compressão. A ruptura por tração é identificada quando em algum ponto a tensão principal de tração ultrapassa a resistência do material.

O “Total Strain Non-orthogonal Cr” constitui-se, na verdade, em um modelo de fissuração distribuída com um comportamento intermediário entre o “Fixed Crack Model” e o “Rotating Crack Model”. Esse modelo permite abrir várias fissuras em um mesmo ponto e dependendo do valor da definição de um dos seus parâmetros (“treshold angle”) pode-se chegar nos dois modelos apresentados anteriormente.

O parâmetro denominado de “treshold angle” constitui-se no ângulo existente entre uma fissura e outra formada num mesmo ponto e é por padrão igual a 60°. Se este parâmetro for modificado para 90° obtém-se o “Fixed Crack Model” e se for mudado para 0° obtém-se o “Rotating Crack Model”.

Os “Modelos Incrementais” são normalmente acoplados à Teoria da Plasticidade visando capturar o comportamento à compressão do concreto. Para o tratamento da compressão podem ser utilizados os modelos clássicos de ruptura de Tresca, VonMises, Mohr-Coulomb e Drucker-Prager.

Para concreto, o modelo plástico de Mohr-Coulomb é frequentemente utilizado quando o material se encontra no regime de compressão.

Se o modelo plástico de Drucker-Prager é utilizado para modelar a ruína de superfícies em estados planos de tensão, o ângulo de atrito a ser utilizado deve ser igual a 10° e, com isso, a coesão passa a ser dada pela Equação (2.164). Se essa modificação não for feita, podem-se obter resultados irreais com as análises numéricas.

$$c = f_c (1 - \sin \phi) / 2 \cos \phi = 0,42.f_c \quad (2.164)$$

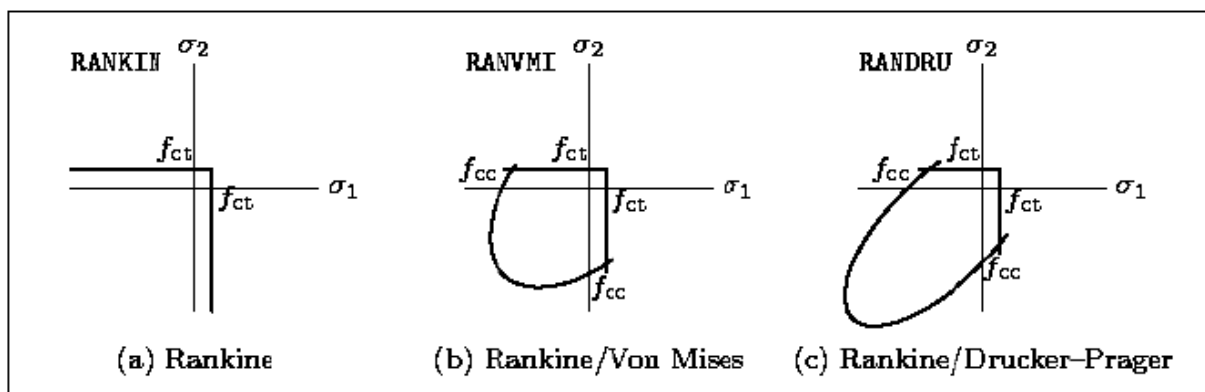


Figura 2.53 - Modelos plásticos disponíveis no programa *DIANA* (TNO, 2001).

De maneira a combinar os esforços de tração e de compressão que podem agir simultaneamente no concreto, o programa acopla o “Multi-Directional Crack Model” com o modelo de Rankine, que pode atuar isoladamente ou em conjunto com o modelo de VonMises ou Drucker-Prager, conforme ilustra a Figura 2.53.

O comportamento biaxial do concreto disponível no programa *DIANA* foi elaborado tomando por base os resultados clássicos de Kupfer; Gerstle (1973). Na Figura 2.54 apresenta-se uma comparação entre os critérios combinados de Rankine-VonMises com os dados experimentais de Kupfer; Gerstle (1973).

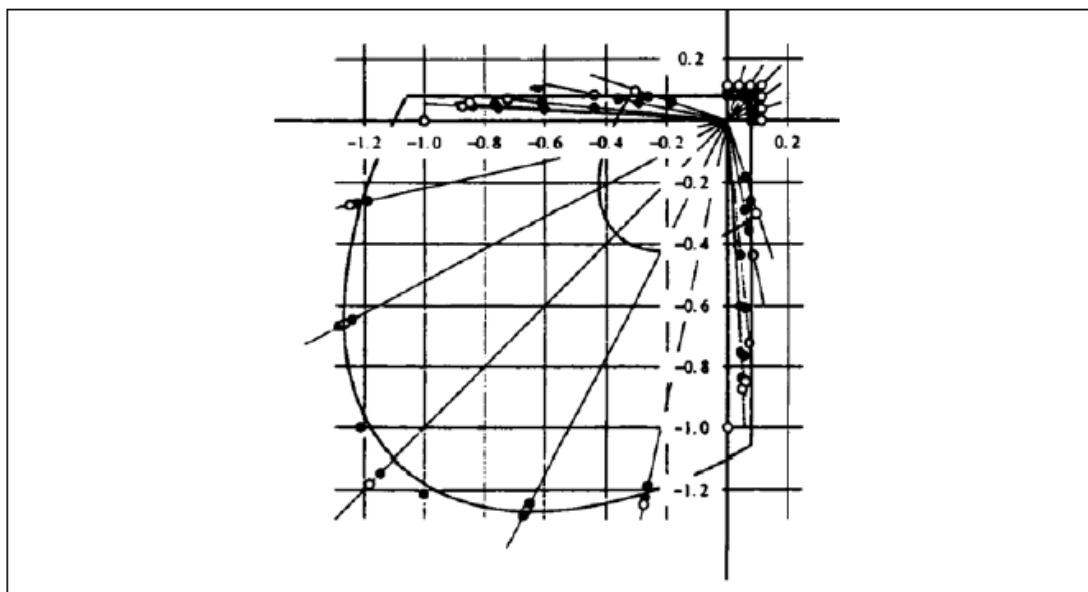


Figura 2.54 - Comparação entre o critério de Rankine-Von Mises com resultados experimentais de Kupfer e Gerstle (1973).

(Fonte: Feenstra e Borst, 1993).

O modelo de fissuração repartida fixa multi-direcional com decomposição de deformações pode ser vista nas referências Rots e Blaauwendraad (1989) e Lopes (2004) e um resumo pode ser encontrado em DIANA (2003). A seguir, indicaremos os conceitos básicos deste modelo.

As suposições básicas do modelo utilizado são: a decomposição do campo de deformação total ε do material fissurado em uma deformação de fissura ε^{cr} e uma deformação do material sólido ε^{co} entre as fissuras, e a suposição de que a deformação ε^{cr} é o resultado da divisão da deformação de fissura ω^{cr} (concentrada em uma região muito estreita) por uma largura de banda (fictícia) denominada h (Bazant, 1983):

$$\varepsilon = \varepsilon^{co} + \varepsilon^{cr} \quad (2.165)$$

$$\varepsilon^{cr} = \omega^{cr} / h \quad (2.166)$$

A principal vantagem desta concepção é que permite tratar o comportamento da fissura separadamente do comportamento do concreto existente entre as fissuras e também modelar um dado número de fissuras que ocorrem simultaneamente. A Figura 2.55 mostra a decomposição da deformação na direção normal à fissura.

Uma consequência desta formulação é que a fissuração pode ser combinada com outros componentes não-lineares do material. Por exemplo, além da parcela elástica, sempre presente, parcelas plásticas, viscoelásticas, térmicas ou de fluência podem ser consideradas.

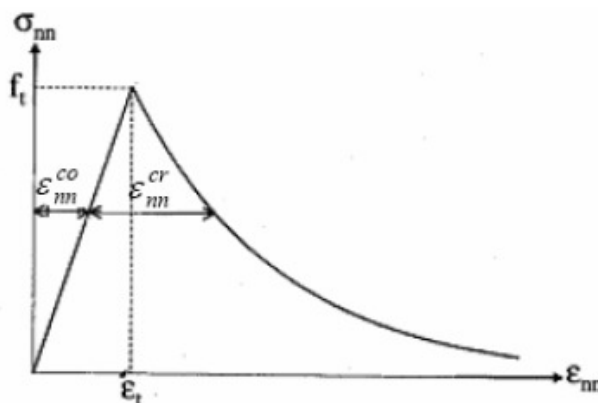


Figura 2.55 - Exemplo de decomposição da deformação normal à fissura.

As deformações da fissura, referenciadas ao eixo global de coordenadas x , y e z , são representadas por um vetor de seis componentes:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{cr} = \{ \varepsilon_{xx}^{cr} \varepsilon_{yy}^{cr} \varepsilon_{zz}^{cr} \varepsilon_{xy}^{cr} \varepsilon_{yz}^{cr} \varepsilon_{xz}^{cr} \}^T \quad (2.167)$$

Para a representação local das deformações adota-se o eixo local de coordenadas n , s e t da fissura, como mostra a Figura 2.56. Desta forma, as deformações locais da fissura e^{cr} são dadas por:

$$e^{cr} = \{ \varepsilon_{nn}^{cr} \gamma_{ns}^{cr} \gamma_{nt}^{cr} \}^T \quad (2.168)$$

Onde ε_{nn}^{cr} é a deformação normal referente ao modo I de fissuração, que representa a abertura de fissura, e os componentes γ_{ns}^{cr} e γ_{nt}^{cr} são as deformações cisalhantes do modo II e do modo III, respectivamente. As três outras deformações de fissura no eixo local não têm significado físico e podem ser omitidas.

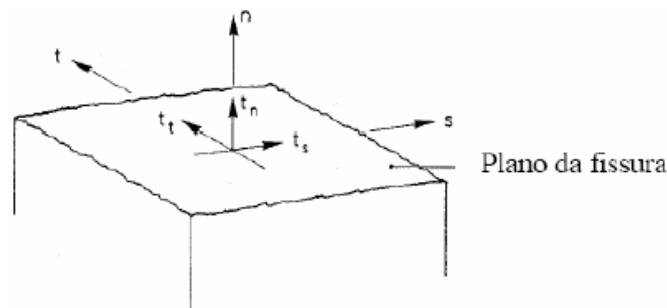


Figura 2.56 - Plano de fissura.

A relação entre as deformações locais e globais da fissura é dada por:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{cr} = \mathbf{N} \cdot e^{cr} \quad (2.169)$$

Onde \mathbf{N} é a matriz de transformação refletindo a orientação da fissura.

Da mesma forma, as tensões globais $\boldsymbol{\sigma}$ e as tensões locais no plano da fissura \mathbf{s}^{cr} são representadas pelos vetores:

$$\boldsymbol{\sigma} = \{ \sigma_{xx} \sigma_{yy} \sigma_{zz} \sigma_{xy} \sigma_{yz} \sigma_{xz} \}^T \quad (2.170)$$

$$s^{cr} = \{\sigma_m^{cr} \tau_{ns}^{cr} \tau_{nt}^{cr}\}^T \quad (2.171)$$

A relação entre as tensões globais e locais é dada pela matriz N^T .

$$s^{cr} = N^T . e^{cr} \quad (2.172)$$

A relação constitutiva para o concreto íntegro é dada por:

$$\sigma = D^{co} . \varepsilon^{co} \quad (2.173)$$

A matriz D^{co} traduz a lei de comportamento do material não fissurado. Quando o concreto íntegro é considerado como linear elástico, a matriz D^{co} é a matriz elástica usual obtida a partir da lei de Hooke.

A relação constitutiva para o concreto fissurado é dada pela relação:

$$s^{cr} = D^{cr} . e^{cr} \quad (2.174)$$

A matriz D^{cr} relaciona as tensões às deformações da fissura, incluindo as propriedades da fissura nos modos I, II e III. A matriz D^{cr} possui a seguinte forma:

$$D^{cr} = \begin{bmatrix} D^I & 0 & 0 \\ 0 & D^{II} & 0 \\ 0 & 0 & D^{III} \end{bmatrix} \quad (2.175)$$

onde D^I , D^{II} e D^{III} são módulos de deformação secantes em regime de fissuração conforme ilustrado pela Figura 2.57:

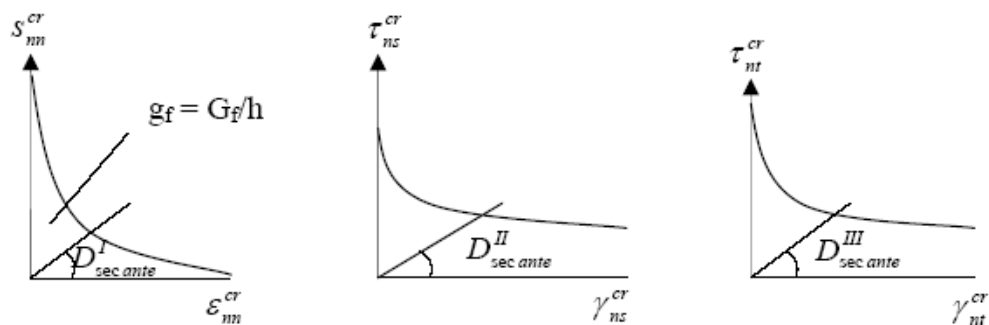


Figura 2.57 - Módulos secantes em regime de fissuração.

O módulo D^I que relaciona σ_{nn}^{cr} a ε_{nn}^{cr} é derivado da relação constitutiva com abrandamento de tensões multilinear (multilinear tension softening), ilustrado na Figura 2.58.

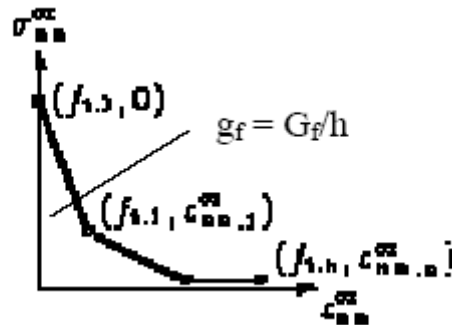


Figura 2.58 - *Tension softening* multilinear.

A deformação ε_{nn}^{cr} é o resultado da divisão da abertura de fissura ω^{cr} localizada em uma estreita região por um comprimento de banda fictícia h . Levando em consideração que o parâmetro intrínseco ao material é a energia específica de fissuração G_f (Nm/m²) necessária para abrir uma fissura, deve-se levar este fato em consideração para a manutenção da objetividade da malha de elementos finitos, mantendo o valor de G_f constante para qualquer tamanho de elementos finitos utilizado. Assim sendo, sabendo-se que o valor de G_f é dado pela área sob o diagrama $\sigma_{nn}^{cr} - \omega^{cr}$, conforme mostrado na Figura 2.59:

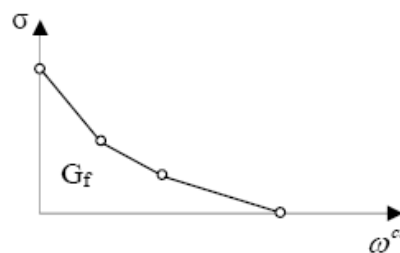


Figura 2.59 - Diagrama tensão–abertura de fissura.

Sabendo-se que o diagrama $\sigma_{nn}^{cr} - \varepsilon_{nn}^{cr}$ é obtido dividindo-se ω^{cr} por uma largura de banda h que depende do tamanho do elementos finitos, é importante que se tenha em mente que o diagrama $\sigma_{nn}^{cr} - \varepsilon_{nn}^{cr}$ deverá variar de elemento para elemento para que o valor

de G_f seja constante para todos os elementos. Tal consideração implica em que a área sob o diagrama $\sigma_{mn}^{cr} - \varepsilon_{mn}^{cr}$ deve ser igual a $g_f = \frac{G_f}{h}$, conforme indicado nas Figura 2.57 e 2.54.

É importante ressaltar que apenas algumas equações constitutivas implementadas no código DIANA ajustam automaticamente os diagramas para que se tenha constância de G_f para todos os tamanhos de elementos. Tal não é o caso do modelo *tension softening* multilinear ficando este trabalho aos cuidados do analista ao determinar os diagramas multilineares que serão utilizados na análise.

O modelo constitutivo de fissura necessita também da determinação dos módulos D^{II} e D^{III} que são definidos conforme se segue:

$$D^{II} = D^{III} = \infty, \text{ no caso de retenção total} \quad (2.176)$$

$$D^{II} = D^{III} = \frac{\beta}{1-\beta} \overline{G^s}; 0 < \beta < 1, \text{ para o caso de retenção parcial} \quad (2.177)$$

$$D^{II} = D^{III} = 0, \text{ para o caso de retenção nula} \quad (2.178)$$

A retenção ao cisalhamento expressa pelas Equações (2.176) a (2.178) corresponde ao fenômeno chamado de engrenamento que é originado pela rugosidade que existe nas fissuras de elementos estruturais de concreto.

O modelo constitutivo fica completamente definido se o critério para início da fissuração e a relação entre a tensão e a deformação de fissuração forem conhecidos. O início da fissuração é regido pela *tension cut-off* e um ângulo inicial entre duas fissuras sucessivas. Para início da fissuração o código DIANA aplica os seguintes critérios, os quais devem ser simultaneamente satisfeitos:

- As tensões principais de tração violam a condição de tensão máxima.
- O ângulo entre a fissura existente e a tensão principal à tração excede o valor do ângulo inicial de fissuração.

Dentre os modelos de *tension cut-off* disponíveis foi utilizado o modelo linear correspondente à Figura 2.60.

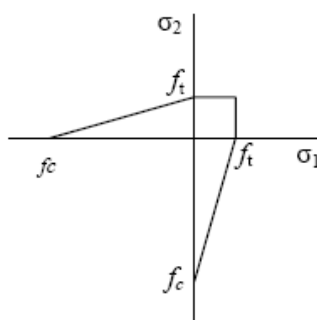


Figura 2.60 - *Tension cut-off* linear para estado bi-dimensional de tensões principais.

A relação entre as tensões e as deformações no sistema de coordenadas globais pode ser deduzida a partir da decomposição da deformação 3.6, resultando em:

$$\sigma = D\{\varepsilon - \varepsilon^{cr}\} \quad (2.179)$$

Substituindo-se (2.169) na equação acima obtém-se:

$$\sigma = D\{\varepsilon - N.e^{cr}\} \quad (2.180)$$

Pré-multiplicando por N^T e introduzindo (2.169) e (2.167) obtém-se a relação entre as deformações locais da fissura e as deformações globais:

$$e^{cr} = [D^{cr} + N^{-1}D^{co}N]^{-1}N^{-1}D^{co}\varepsilon \quad (2.181)$$

A relação entre as tensões e deformações globais é obtida substituindo-se (2.176) em (2.175).

$$\sigma = [D^{co} - D^{co}N[D^{cr} + N^{-1}D^{co}N]^{-1}N^{-1}D^{co}]\varepsilon \quad (2.182)$$

De forma compacta,

$$\sigma = [D^{co.cr}]\varepsilon \quad (2.183)$$

Uma outra vantagem da decomposição da deformação total em uma parcela relativa ao concreto e outra relativa à fissura é que ela permite uma sub-decomposição da

deformação da fissura em contribuições separadas de fissuras individuais que aparecem simultaneamente em um ponto de integração:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{cr} = \boldsymbol{\varepsilon}_1^{cr} + \boldsymbol{\varepsilon}_2^{cr} + \dots \quad (2.184)$$

Em que $\boldsymbol{\varepsilon}_1^{cr}$ é a deformação global da primeira fissura, $\boldsymbol{\varepsilon}_2^{cr}$ a deformação da segunda fissura e assim sucessivamente. Nesta aproximação, desenvolvida inicialmente por de Borst e Nauta (1985), cada fissura fixa possui seu próprio vetor de deformações locais e_i^{cr} , seu próprio vetor de tensões locais s_i^{cr} e sua própria matriz de deformação N_i . Estes vetores e matrizes correspondentes a uma fissura podem ser agrupados sob a forma:

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{e}}^{cr} &= \{e_1^{cr} e_2^{cr} \dots\}^T \\ \hat{\boldsymbol{s}}^{cr} &= \{s_1 s_2 \dots\}^T \\ \hat{\boldsymbol{N}} &= [N_1 N_2 \dots]^T \end{aligned} \quad (2.185)$$

no qual $\hat{}$ representa a reunião das múltiplas fissuras fixas. Repetindo a substituição de (2.169) em (2.184), tem-se:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{cr} = \hat{\boldsymbol{N}} \hat{\boldsymbol{e}}^{cr} \quad (2.186)$$

ou de forma mais elaborada,

$$\begin{Bmatrix} s_1^{cr} \\ s_2^{cr} \\ \dots \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11}^{cr} & D_{12}^{cr} & \dots \\ D_{21}^{cr} & D_{22}^{cr} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_1^{cr} \\ e_2^{cr} \\ \dots \end{Bmatrix} \quad (2.187)$$

Repetindo o procedimento da seção anterior, tem-se para o concreto fissurado com múltiplas fissuras:

$$\boldsymbol{\sigma} = [D^{co} - D^{co} \hat{\boldsymbol{N}} [\hat{\boldsymbol{D}}^{cr} + \hat{\boldsymbol{N}}^T D^{co} \hat{\boldsymbol{N}}]^{-1} \hat{\boldsymbol{N}}^T D^{co}] \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.188)$$

1.10 Concreto reforçado com fibras

O concreto é um material muito utilizado na construção civil, principalmente devido a seu baixo custo, se comparado com outros materiais, e capacidade de adquirir formas diversas (boa maleabilidade). Com isso, várias pesquisas têm sido desenvolvidas e grandes avanços têm ocorrido.

O concreto, além da necessária estabilidade estrutural, deve atender aos novos requisitos, como durabilidade, sustentação ambiental, economia e ductilidade. Estas novas exigências têm despertado pesquisas na área, abrangendo desde novos constituintes até novas técnicas de preparo e aplicação.

Dado o caráter frágil do concreto simples e os elevados custos associados à aplicação de armaduras convencionais no reforço do concreto, novos mecanismos têm sido criados e aperfeiçoados para diminuir a fragilidade deste material, seja por intermédio da utilização de fibras discretas. Assim, estudos mais recentes têm demonstrado que a adição de fibras metálicas no concreto eleva sua ductilidade e resistência, permitindo que as estruturas fiquem cada vez mais esbeltas, diminuindo os efeitos do peso próprio e conseqüentemente o preço das mesmas.

O comportamento do concreto reforçado com fibras depende das propriedades do concreto simples, das fibras e do processo de fabricação do composto. A propriedade geométrica da fibra, a esbelteza, é dada pela razão entre o comprimento e o diâmetro da mesma (caso a fibra não seja circular, por meio da área transversal da mesma e acha-se um diâmetro equivalente), enquanto que a resistência e rigidez são propriedades mecânicas. A fibra pode apresentar ruptura por deslizamento ou por plastificação. Logo, para se aumentar a resistência do composto, deve-se utilizar fibras de alta resistência com esbelteza relativamente elevada, para que a ruptura se dê por deslizamento. Com isso consegue-se que o material absorva uma maior quantidade de energia e se torne mais dúctil.

Conforme Barros (1995), a esbeltez da fibra não deve ultrapassar o valor de 100 e a percentagem de fibras de aço não deve exceder 3%. Isso se deve ao fato de que a utilização excessiva de fibras dificulta a trabalhabilidade do material, além de poder gerar ninhos de concentração de fibras. Tal situação está relacionada com a esbelteza e quantidade de fibra, tamanho e quantidade de agregados graúdos, composição

granulométrica da mistura, relação água-cimento e técnicas de amassamento, onde a aderência com a matriz envolvente é prejudicada. Para que isso não ocorra, devem-se utilizar quantidades de fibras e técnicas de amassamento adequadas.

A metodologia de fabricação e lançamento de concreto reforçado com fibras pouco se difere do concreto convencional, porém, algumas adaptações são necessárias. Caso a quantidade de concreto com fibras a amassar for pequena, deve-se rodar o concreto normalmente e posteriormente lançar as fibras de forma lenta. Outra forma é lançar os agregados graúdos e uma quantidade de água juntamente com a fibra, para promover o choque mecânico, e assim distribuir de forma mais satisfatória as fibras. Posteriormente lança-se o restante dos materiais. Para o caso de grandes quantidades, deve-se amassar o concreto convencional e pouco antes da aplicação, lançar as fibras dentro do caminhão usinado, de preferência por intermédio de pontes rolantes, estando o tambor girando em velocidade máxima. Após o fim da adição, o tambor deve rodar mais 50 vezes em velocidade normal, conforme Barros (1995).

Dos vários tipos de fibras existentes no mercado, as fibras de aço são as mais utilizadas em aplicações estruturais, e têm sido empregadas desde meados dos anos setenta. Entretanto, a ausência de ferramentas de dimensionamento apropriadas tem impedido que as fibras sejam usadas em aplicações estruturais com maiores benefícios. Isso porque, de modo geral, não se considera a resistência residual proporcionada pelo reforço das fibras.

Assim, uma vez que a fissuração condiciona o comportamento da estrutura para o estado limite de utilização, os mecanismos de reforço proporcionados pela presença das fibras devem ser contabilizados no dimensionamento.

A necessidade de soluções para esta problemática resultou na elaboração, por parte de algumas organizações, em particular da RILEM, a publicação de documentos no âmbito do dimensionamento de elementos constituídos por concreto reforçado com fibras, com base em leis constitutivas de tensão-extensão ou tensão-abertura de fenda (RILEM, 2002a; RILEM, 2003). Estas recomendações baseiam-se em resultados obtidos em ensaios experimentais (RILEM, 2002b; RILEM, 2001).

Conforme Ribeiro (2004), Barenblatt (1959) e Dugdale (1960) realizaram a primeira tentativa de simulação dos processos não lineares localizados nas extremidades de uma fenda pré-existente. Para tal, consideraram forças coesivas nas extremidades da fenda. Originalmente, o modelo coesivo ou de fenda coesiva não era nada mais que uma fenda

fictícia capaz de transferir tensões de uma face para a outra. Este modelo tem sido usado por muitos investigadores para simular a zona não linear na extremidade da fenda para os materiais mais comuns (metais, polímeros, cerâmica, e geomateriais).

Hillerborg *et al* (1976) estendeu o conceito da fenda coesiva ao concreto. A extensão do modelo de fenda coesiva incidiu na possibilidade da formação da fenda em qualquer ponto, mesmo não existindo um defeito pré-localizado no material.

A zona de pré-fissura (ZPF) em conjunto com a abertura de fenda sujeita a imbricação dos agregados (IA) é referida como fenda fictícia (FF) (Figura 2.61). O comportamento mecânico da fenda fictícia é caracterizado por uma relação de tensão - abertura de fenda, $\sigma - w$, onde se consideram as tensões normais ao plano de fenda. A fenda fictícia é iniciada quando a tensão principal máxima de tração atinge o valor da resistência à tração do material.

O modelo de fenda fictícia (MFF) é aplicável a materiais que, após a sua máxima resistência, desenvolvam um aumento de deformação sob diminuição de capacidade de carga (Figura 2.62).

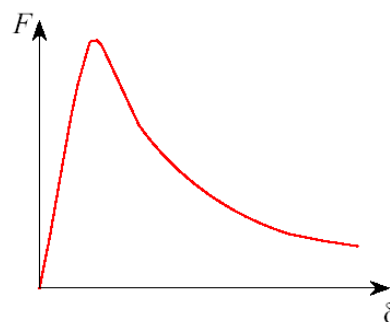
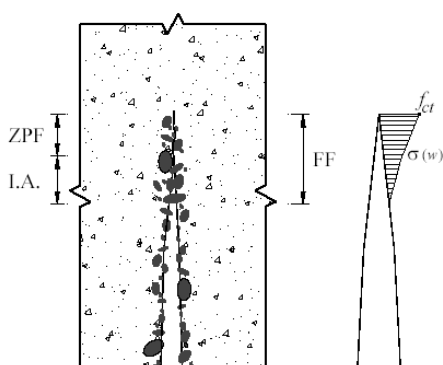


Figura 2.61 - Modelo de fenda fictícia (MFF).

Figura 2.62 - Resposta de um elemento sujeito a uma carga F .

Até ao pico, a carga aumenta enquanto as extensões no corpo de prova permanecem distribuídas uniformemente ao longo do mesmo. No pico, a fenda coesiva normal ao eixo do corpo de prova aparece na zona de maior fragilidade. Após o pico, a abertura de fenda, w , aumenta enquanto a tensão entre as faces diminui. Ao mesmo tempo, o material envolvente entra em descarga e a extensão reduz-se continuamente até a carga se anular (Figura 2.63).

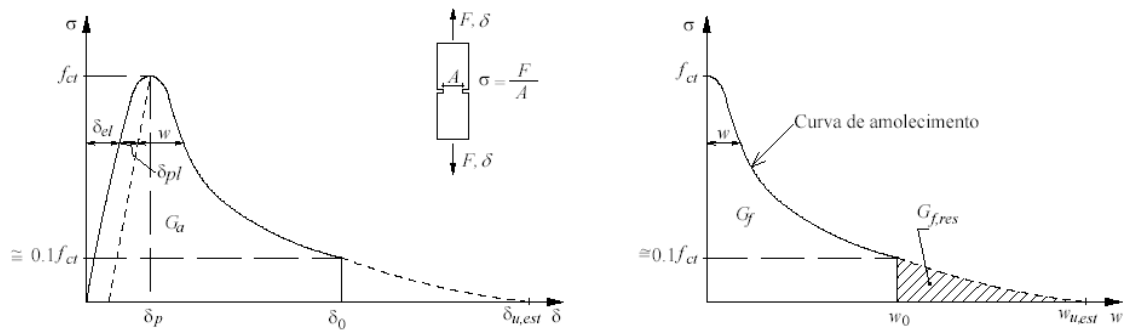


Figura 2.63 – Processo de determinação da energia da fratura, G_f . (Barros, 1995).

A deformação total registrada no elemento é a adição da deformação elástica, δ_{el} , plástica, δ_{pl} , e abertura de fenda,

$$\delta = \delta_{el} + \delta_{pl} + w \quad (2.189)$$

Segundo Hillerborg et al (1976), o comportamento plástico do material envolvente é desprezível, resultando,

$$\delta = \delta_{el} + w \quad (2.190)$$

com

$$\delta_{el} = L \frac{\sigma}{E} \quad (2.191)$$

em que L , σ e E correspondem, respectivamente, ao comprimento da zona deformada, à tensão instalada na fenda e ao módulo de elasticidade do material.

A função $\sigma - w$ que simula o amolecimento é a componente básica do MFF. Os diagramas de amolecimento mais empregados estão representados na Figura 2.64:

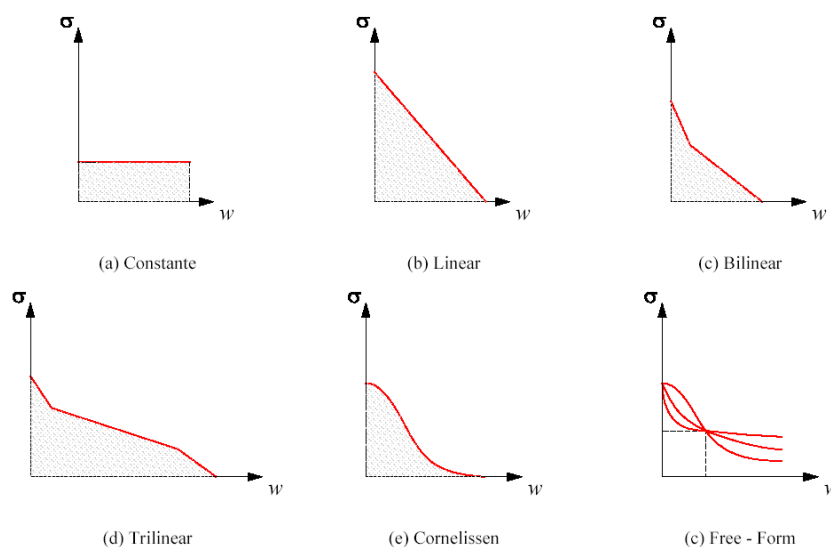


Figura 2.64 – Curvas de amolecimento de $\sigma - w$.

Os parâmetros que definem o comportamento de um material em fase de amolecimento designam-se por parâmetros de fratura, destacando-se a tensão de início da fissuração, f_{ct} , a energia despendida na formação de uma fenda de área unitária (energia de fratura, G_f) e a forma da relação $\sigma - w$. Segundo Hillerborg *et al* (1976) a energia de fratura pode ser obtida de

$$G_f = \int_0^{w_c} \sigma dw \quad (2.192)$$

em que w_c é a abertura de fenda para $\sigma = 0$. A energia despendida até à formação da zona de fratura não deve ser incluída na quantificação da energia de fratura, pois trata-se de energia dissipada na deformação elástica (ou elasto-plástica) de todo o corpo de prova.

Na Figura 2.65 pode-se observar a complexidade do sistema necessário à realização estável de um ensaio de tração direta. De fato, é necessário uma estrutura de rigidez muito elevada, e os ensaios devem ser realizados sob sofisticado sistema de controle de deslocamento. Petersson (1980b) mostrou que, para assegurar a estabilidade do ensaio, a rigidez do equipamento deve ser superior ao maior declive da curva de amolecimento.

Devido a estas dificuldades, Peterson propôs, em 1980, um método de quantificação da energia de fratura baseado num ensaio de flexão em viga com entalhe a meio vão, submetida a três pontos de carga. Mais tarde, a RILEM (1985) também propôs, sob a forma de recomendação, o mesmo tipo de ensaio para determinação daquela energia.

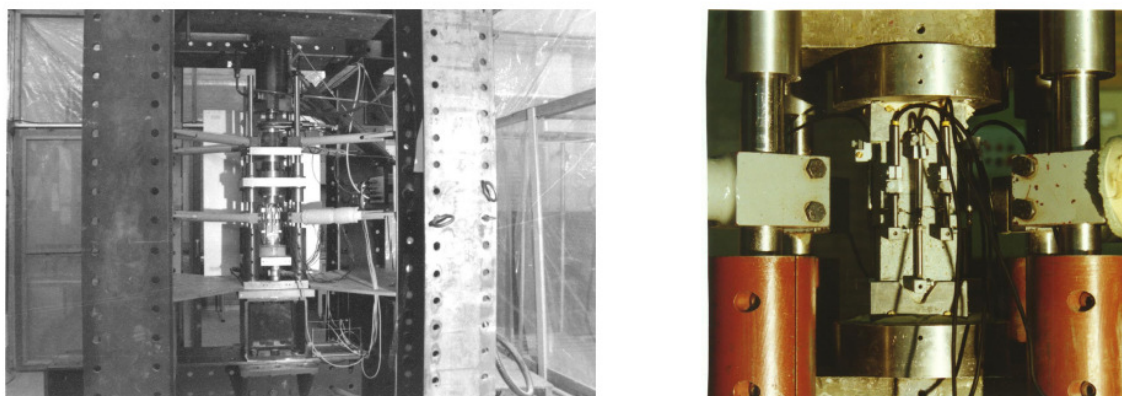


Figura 2.65- Sistema de ensaio de tração direta (Barros, 1995).

Posteriormente, os princípios da mecânica da fratura estenderam-se ao concreto reforçado com fibras (Figura 2.66). Os mecanismos de reforço proporcionados pelas fibras passam a ser relevantes no processo de transferência de tensões entre as faces das fendas (Figura 2.67). Acima de determinada percentagem de fibras, o comportamento geral da estrutura fendilhada é bastante afetado pela presença das fibras, sendo significativo o aumento da capacidade de absorção de energia durante o processo de fissuração.

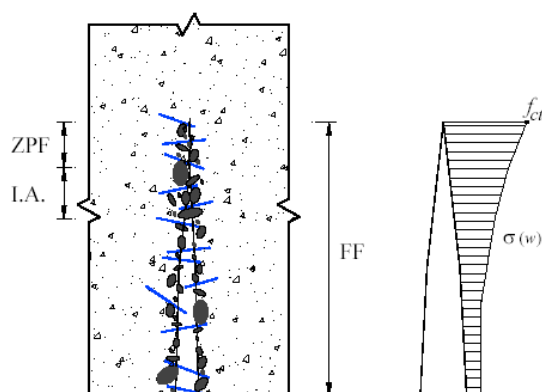


Figura 2.66 – Modelo de fenda fictícia.

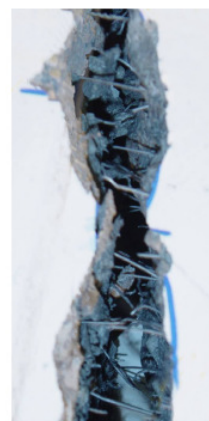


Figura 2.67 – Fenda em concreto reforçado com fibras.

1.10.1 Fibras

Caso as fibras de aço se encontrassem na mesma direção do esforço atuante, de forma que estivessem perfeitamente aderidas à matriz envolvente, poder-se-ia utilizar a lei das misturas da mecânica dos materiais compósitos. Neste caso, estaria admitindo-se comportamento linear de seus elementos, que diz que a propriedade do material composto, no caso o concreto com fibras, é função da propriedade dos materiais do composto na proporção da quantidade dos mesmos na mistura.

Na realidade, as fibras se encontram distribuídas aleatoriamente e não estão perfeitamente aderidas. Com isto, utilizam-se coeficientes de compatibilização. Segundo Barros (1995), O módulo de elasticidade do composto é dado por:

$$E_{cp} = \eta_l \eta_\theta V_f E_f + E_m (1 - V_f) \quad (2.193)$$

Sua resistência é dada por:

$$\sigma_{cu} = \eta_l \eta_\theta V_f \sigma_{fu} + \sigma_{mu} (1 - V_f) \quad (2.194)$$

O volume crítico de fibras é:

$$V_f^{crit} = \frac{\sigma_{mu}}{\sigma_{mu} + \eta_l \eta_\theta (\sigma_{fu} - \sigma'_{fu})} \quad (2.195)$$

Onde η_l é o fator de comprimento da fibra

η_θ e η_θ' são fatores de orientação das fibras

V_f é o volume de fibras

E_f é o módulo de elasticidade da fibra

E_m é o módulo de elasticidade da matriz

σ_{mu} é a tensão resistente da matriz

σ_{fu} é a tensão nas fibras

σ'_{fu} é a tensão nas fibras no início da fissuração

1.10.2 Propriedades mecânicas do concreto

A qualidade da simulação numérica depende consideravelmente do rigor das leis constitutivas adaptadas na modelação do comportamento dos materiais intervenientes. Como no presente trabalho se pretende simular o comportamento de elementos de concreto e de concreto reforçado com fibras, é importante caracterizar devidamente o comportamento à compressão, à tração até a fissuração e, fundamentalmente, após a fissuração.

Para o Método dos Elementos Finitos (MEF), os elementos utilizados no presente trabalho, à exceção dos elementos de interface, é suposto um comportamento linear-elástico. Assim, na matriz constitutiva dos elementos, para as simulações realizadas, é empregue o módulo de elasticidade determinado pelas expressões a seguir, admitindo-se ainda, um coeficiente de Poisson, ν , de 0,20.

Para o concreto reforçado com fibras a determinação da resistência média à tração uniaxial, $f_{cm, ax}$, e o módulo de elasticidade, E_c , foi feito com base nos resultados obtidos experimentalmente e utilizando relações propostas por RILEM TC 162-TDF, nomeadamente (RILEM, 2003 ; Barros, 2003):

$$f_{cm, ax} = 0,3(f_{ck})^{2/3} \quad (N.mm^2) \quad (2.196)$$

$$E_c = 9500(f_{cm})^{2/3} \quad (N.mm^2) \quad (2.1977)$$

em que f_{cm} e f_{ck} representam a resistência média, dada pela análise experimental, e característica do betão à compressão. Esta última é determinada por:

$$f_{ck} = f_{cm} - \Delta f \quad (2.198)$$

em que

$$\Delta f = 8 MPa \quad (2.199)$$

segundo as recomendações do CEB-FIP (1993).

Da mesma forma, CEB-FIP (1993) propõe para determinação do módulo de elasticidade a seguinte expressão:

$$E_c = 21,5 \left(\frac{f_{cm}}{10} \right) \quad (GPa) \quad (2.200)$$

1.10.3 Caracterização do comportamento pós-pico segundo a RILEM para o concreto reforçado com fibras

A Figura 2.68 representa relações típicas $F - \delta$ que se obtêm no ensaio de flexão segundo as recomendações da RILEM TC 162-TDF (2002b). Da curva de resposta apresentada é possível retirar os parâmetros expressos nas Equações (2.201) e (2.202). As primeiras expressões permitem determinar as tensões equivalente à tração por flexão, $f_{eq,2}$ e $f_{eq,3}$, as quais foram propostas nos primeiros trabalhos publicados pela RILEM TC 162-TDF para caracterizar o comportamento à tração do concreto reforçado com fibras (RILEM, 2000). O conceito de $f_{eq,i}$ traduz a resistência que um material com comportamento rígido - plástico teria para dissipar uma energia $D_{BZ,i}^f$ até à flecha δ_i ($\delta_2 = 0.65$ mm e $\delta_3 = 2.65$ mm). $D_{BZ,i}^f$ é a área sob a curva $F - \delta$ até a flecha δ_i , deduzida da parcela da contribuição do concreto, D_{BZ}^b , de modo a representar a energia devida aos mecanismos de reforço das fibras.

$$f_{eq,2} = \frac{3}{2} \frac{D_{BZ,2}^f}{0,50} \frac{L}{bh_{sp}^2}; \quad f_{eq,3} = \frac{3}{2} \frac{D_{BZ,3}^f}{2,50} \frac{L}{bh_{sp}^2} \quad (2.201)$$

$$f_{R,1} = \frac{3}{2} F_{R,1} \frac{L}{bh_{sp}^2}; \quad f_{R,4} = \frac{3}{2} F_{R,4} \frac{L}{bh_{sp}^2} \quad (2.202)$$

Mais recentemente este grupo de trabalho propôs a substituição de $f_{eq,i}$ pelo conceito de tensão residual à tração por flexão, $f_{R,i}$, que se determina segundo a Equação (2.202). Este conceito corresponde à tensão obtida por intermédio da relação $F - \delta$, para a flecha $\delta_{R,i}$ ($\delta_{R,1} = 0.46$ mm e $\delta_{R,4} = 3.0$ mm).

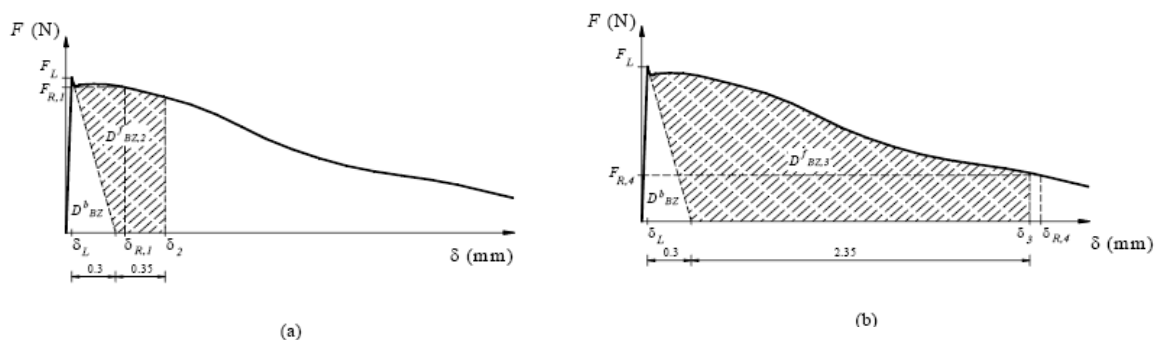


Figura 2.68 – Resistência equivalente e residual à tração em flexão: (a) $f_{eq,2}$ e $f_{R,1}$; (b) $f_{eq,3}$ e $f_{R,4}$.

1.10.4 Diagrama bilinear $\sigma - w$ para concreto simples do CEB-FIP 1993

O comportamento do concreto simples fissurado pode ser traduzido por diversos diagramas de amolecimento com vários níveis de complexidade dependendo da precisão da resposta pretendida (Figura 2.64).

O diagrama retangular, captura a tendência do processo de fratura, mas usualmente superestima a resistência. O diagrama de amolecimento linear, a segunda forma mais simples de relacionar a tensão com a abertura de fenda, traduz-se numa solução válida quando se desconhece informações do material a modelar, utilizado inicialmente por Hillerborg *et al* (1976) no trabalho pioneiro sobre a aplicação do MFF para concreto. Todavia, verificou-se posteriormente que para o concreto fissurado, este diagrama não era de todo realista, pois também conferia uma resistência superior ao concreto. Assim, Petersson (1981) propôs uma curva bilinear. Desde então, diagramas com este formato têm sido introduzidos, sendo aceitáveis para uma tradução razoável do efetivo comportamento do concreto simples fissurado. A questão fundamental relaciona-se com a definição do ponto que define a abertura da fenda no fim do primeiro tramo. Neste sentido, existem hoje em dia métodos, alguns até bem simples, para identificação dos valores a usar nos pontos que definem o diagrama $\sigma - w$. Nestes inclui-se o previsto no código modelo CEB-FIP (1993). Este diagrama, segundo o modelo referido, tem como variáveis, para a determinação dos parâmetros que definem o diagrama bilinear, a dimensão máxima do agregado e a resistência à compressão.

Mesmo sabendo que o diagrama bilinear é suficiente para a generalidade das aplicações, há outros diagramas de diferentes formatos, como o diagrama $\sigma - w$ de formato exponencial.

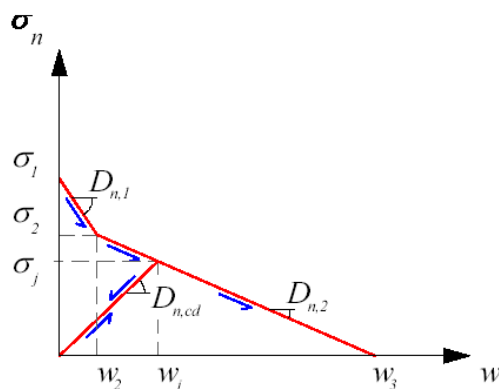


Figura 2.69 – Diagrama $\sigma - w$ bilinear adaptado para o concreto fissurado.

Segundo a proposta do código modelo CEB-FIP (1993), os parâmetros de tensão do diagrama $\sigma - w$, apresentado na Figura 2.69, podem ser determinados segundo as seguintes expressões:

$$\sigma_1 = f_{ctm} \quad (N/mm^2) \quad (2.203)$$

em que

$$f_{ctm} = 1,4 \left(\frac{f_{ck}}{10} \right)^{2/3} \quad (N/mm^2) \quad (2.204)$$

e

$$\sigma_2 = 0,15 \sigma_1 \quad (N/mm^2) \quad (2.205)$$

Para os valores de w_i o modelo indicado recomenda que

$$w_2 = 2 \frac{G_f}{f_{ctm}} - 0,15 w_3 \quad (mm) \quad (2.206)$$

com

$$w_3 = \alpha_F \frac{G_f}{f_{cmt}} \quad (mm) \quad (2.207)$$

em que o valor do coeficiente F_α é determinado em função da máxima dimensão do agregado, $d_{máx}$, com F_α igual a 8, 7 e 5 para $d_{máx}$ igual a 8, 16 e 32 mm, respectivamente. Nas equações (2.206) e (2.207) G_f representa a energia de fratura.

1.10.5 Diagrama trilinear $\sigma - w$ para o concreto reforçado com fibras

Na caracterização do concreto reforçado com fibras fissurado é utilizado um diagrama $\sigma - w$ de configuração trilinear (Figura 2.70). A existência de três tramos garante flexibilidade suficiente para simular a maior parte dos materiais de matriz cimentícia.

Para valores de deformação a meio vão iguais ou inferiores a 1 mm, Barragán et al (2002) verificaram que a aplicação de uma lei bilinear permitia simular, com rigor suficiente, a curva $F - \delta$ registrada experimentalmente.

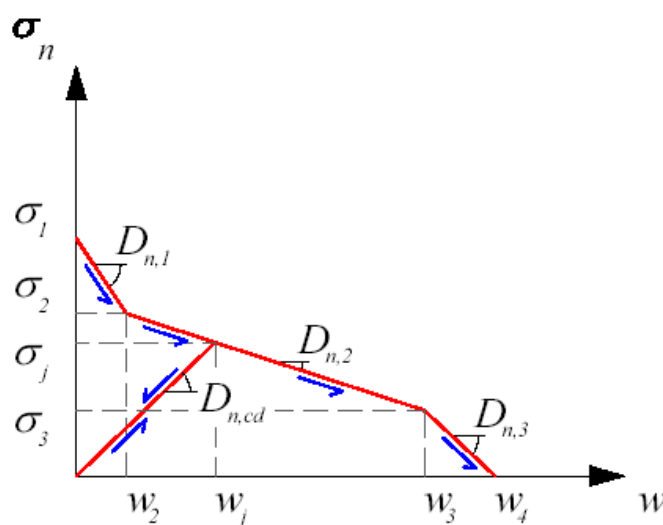


Figura 2.70 – Diagrama $\sigma - w$ trilinear adotado para concreto fissurado.

1.10.6 Energia de fratura

A energia de fratura (G_f), como já foi referida, é determinada com base no diagrama $\sigma - w$ de amolecimento obtido na análise inversa (Figura 2.71).

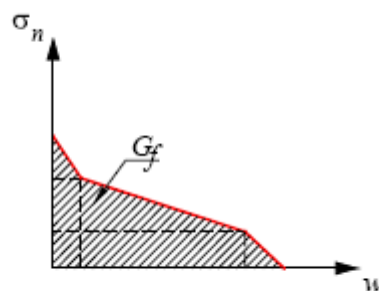


Figura 2.71 – Determinação de G_f com base na lei $\sigma - w$.

Ainda, segundo o CEB-FIP (1993), é possível estimar a energia de fratura para o concreto simples por intermédio da seguinte expressão:

$$G_f = G_{f0} \left(\frac{f_{cm}}{10} \right)^{0,7} \quad \left(\frac{N}{mm} \right) \quad (2.208)$$

em que, G_{f0} toma o valor 0,025, 0,030 e 0,058 N/mm para $d_{máx}$ igual a 8, 16 e 32 mm, respectivamente.

A avaliação da energia de fratura pode ser determinada por intermédio da resposta experimental $F - \delta$ (Figura 2.72). Segundo Barros (1995), além do trabalho induzido pelo equipamento, W_0 , deve-se considerar o trabalho desenvolvido pelo efeito da massa do corpo de prova, m_1 , e ainda o trabalho associado a outras eventuais massas, m_2 . É tida em conta a distância do corpo de prova em relação aos apoios, contudo, despreza-se a parcela W_3 . Assim, G_f é determinado por:

$$G_f = \frac{w_0 + [m_1(1 - \alpha^2) + 2m_2]g\delta_u}{b(d - a)} \quad (2.209)$$

em que W_0 é o trabalho produzido pela carga F exercida pelo equipamento durante a deformação do corpo de prova (área sob a curva $F - \delta$), m_1 é a massa do corpo de prova entre apoios, m_2 é a massa do equipamento que acompanha a deformação do corpo de prova durante o ensaio e que não está acoplada ao equipamento principal, α é o parâmetro que corrige o trabalho produzido pelo peso próprio do corpo de prova, tendo em conta o fato de L poder ser diferente de l , ($\alpha = L/l - 1$), g é a aceleração da gravidade, δ_u é a flecha última, isto é, o deslocamento registrado no fim do ensaio, quando F toma um valor nulo, e

b (d-a) é a área da superfície de fratura projetada para o plano acima do entalhe e na ortogonal ao eixo do corpo de prova.

Ao valor de energia de fratura obtido pela Equação (2.209) denomina-se, neste trabalho, por $G_{f, exp}$.

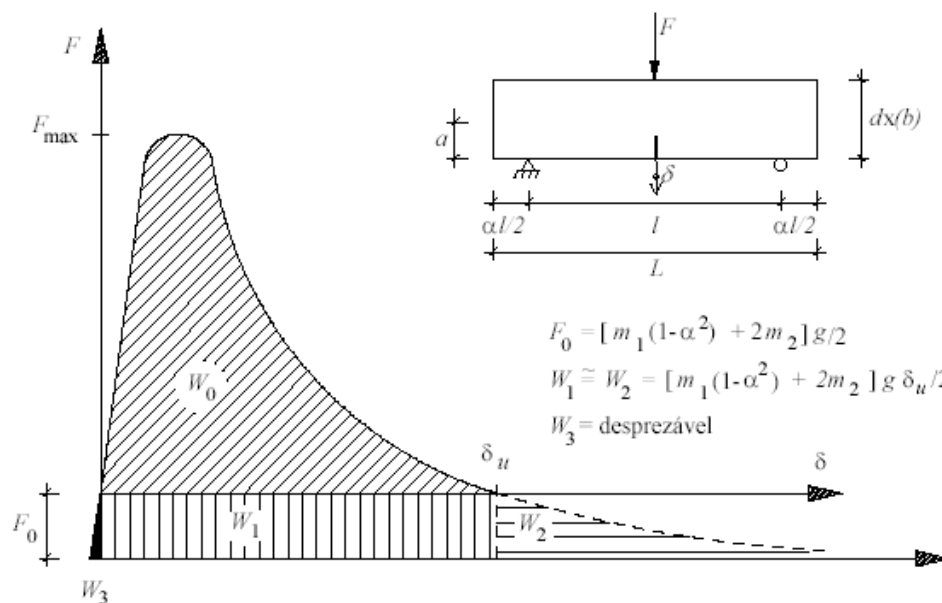


Figura 2.72 – Determinação da energia de fratura segundo RILEM (Barros, 1995).

Por forma distinguir o parâmetro de energia de fratura designa-se por $G_{f, num}$ aos valores de G_f obtidos por análise inversa e segundo o diagrama proposto pelo código modelo CEB-FIP (1993).

1.10.7 Análise inversa

Os valores dos parâmetros σ_i e w_i que definem o diagrama bilinear e trilinear, $\sigma - w$, utilizado na simulação da capacidade resistente do concreto fissurado, são determinados de modo que a relação $F - \delta$, obtida numericamente, se aproxime com o menor erro possível, de respostas registradas em ensaios experimentais.

O processo de análise inversa pode ser realizado de acordo com o algoritmo disposto na Figura 2.73 conforme Ribeiro (2004). Este envolve duas condições de forma a obter os parâmetros representativos. A primeira condição impõe que o desvio entre a força

de pico obtida numericamente, $F_{num,max}$, e a registada experimentalmente, $F_{ex,máx}$ (Figura 2.74), se enquadre no seguinte intervalo $0,95 F_{ex, máx} \leq F_{num, máx} \leq 1,05 F_{ex, máx}$.

A segunda condição pretende minimizar o *erro*, onde $erro = \frac{|\Delta A|}{A_{ex}}$, em que ΔA é

a diferença entre as áreas sob as curvas $F - \delta$ experimental e numérica, e A_{ex} é a área sob a curva experimental (Figura 2.74).

Assim, os valores finais dos parâmetros σ_i e w_i são os que conduzem ao menor erro e, simultaneamente, respeitem a primeira condição.

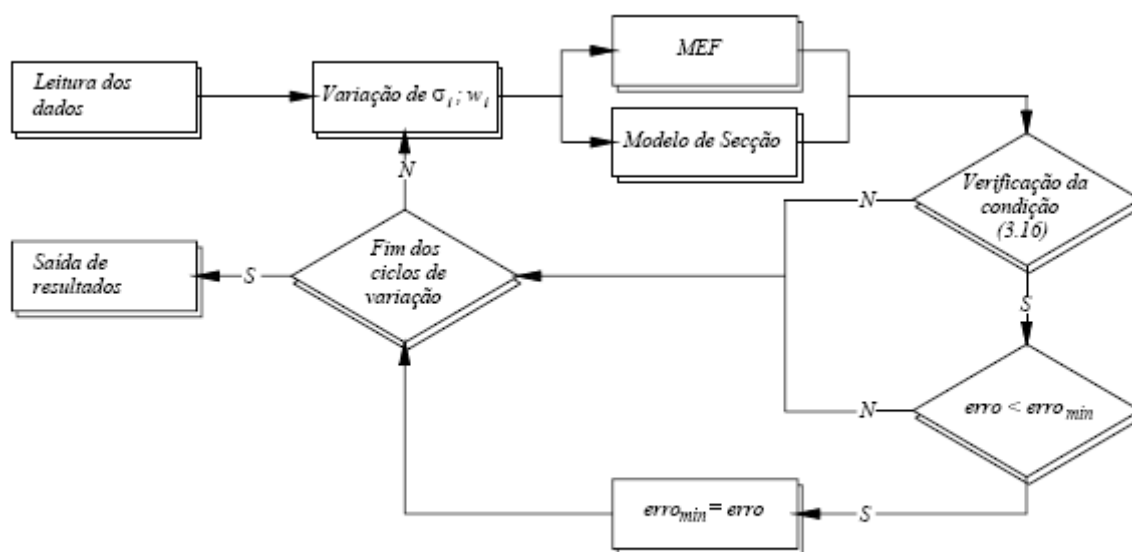


Figura 2.73 – Fluxograma do processo de análise inversa.

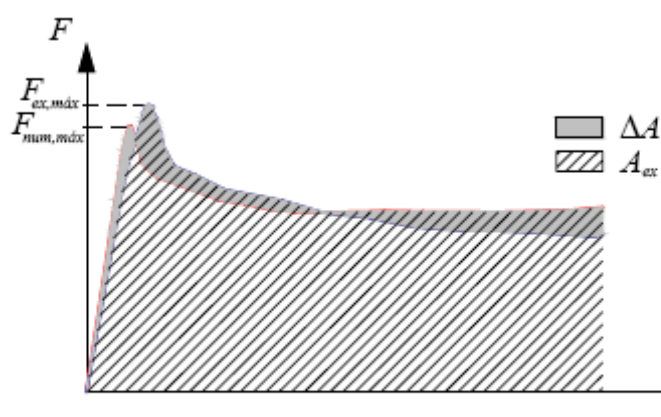


Figura 2.74 - Representação das condições adaptadas na determinação de σ_i e w_i por análise inversa.

1.10.8 Influência da tensão correspondente ao início da fissuração σ_1

Geralmente, para tensão de início de fissuração atribui-se o valor de resistência média à tração uniaxial, $f_{ctm,ax}$, a qual pode ser determinada segundo a expressão (3.1). Por sua vez, a RILEM (2003) propôs para determinação de σ_1 :

$$\sigma_1 = 0,7 f_{ctm,fl} \quad (2.210)$$

Em que

$$f_{ctm,fl} = \frac{f_{ctm,ax}}{0,6} \quad (2.211)$$

No entanto, conforme investigação prévia feita por Barros *et al* (2004) revelou que σ_1 , obtida segundo Equação (2.210) conduz a simulações numéricas deficientes, devendo-se adotar, na generalidade, valores inferiores aos obtidos pela equação, variando no seguinte intervalo:

$$0,3 f_{ctm,fl} < \sigma_1 < f_{ctm,fl} \quad (2.212)$$

Para os parâmetros restantes que representam o diagrama $\sigma - w$ são considerados os valores médios dos intervalos usados na análise inversa.

1.10.9 Influência de σ_2 e w_2

Os parâmetros σ_2 e w_2 definem o segundo ponto da lei trilinear. A investigação feita por Cunha *et al* (2003) indicou que os valores de σ_2 e w_2 se enquadram nos seguintes intervalos:

$$0,2 \sigma_1 \leq \sigma_2 \leq 0,8 \sigma_1 \quad (2.213)$$

$$0,02 \leq w_2 \leq 0,12 \quad (mm) \quad (2.214)$$

Ribeiro (2004) estudou a influência dos valores dos parâmetros σ_2 e w_2 na curva $F - \delta$. No que concerne à capacidade máxima de carga da secção, verifica-se que, o aumento σ_2 de $0,2 \sigma_I$ para $0,8 \sigma_I$, implicou um aumento de 17% na carga de pico. Tendência similar verifica-se na variação de w_2 , tendo-se registrado um acréscimo de 20% na carga de pico quando w_2 passa de 0,02 para 0,12 mm.

No estudo observa-se ainda que, à exceção da fase inicial elástica, a influência de σ_2 faz-se sentir até à flecha máxima. Para além da variação quantitativa da carga de pico já referido, observa-se ainda que, aumentado σ_2 , a amplitude não linear pré-pico aumenta. Para σ_2 igual a $0,8 \sigma_I$, observa-se um comportamento quase plástico da secção, entrando em fase de ligeiro amolecimento somente após uma flecha da ordem dos 0,5 mm. Da mesma forma, é importante salientar o comportamento de endurecimento observado na simulação para σ_2 igual a $0,2 \sigma_I$. Isto é explicado dado que, nas análises, σ_2 é inferior a σ_3 .

1.10.10 Influência de σ_3 e w_3

Conforme estudos realizados por Ribeiro (2004), os valores dos parâmetros σ_3 e w_3 , que definem o terceiro ponto da lei de $\sigma - w$, na curva $F - \delta$ encontram-se nos seguintes intervalos:

$$0,15 \sigma_1 \leq \sigma_3 \leq 0,875 \sigma_1 \quad (2.215)$$

$$0,5 \leq w_3 \leq 5 \quad (mm) \quad (2.2166)$$

Por fim, constatou-se que a carga de pico não é modificada pela variação destes parâmetros. Contudo, os valores de σ_3 e w_3 afetam de modo marcante a forma da curva de resposta $F - \delta$ durante a fase de propagação da fenda. A influência acentua-se para flechas mais elevadas.

1.10.11 Influência de w_4

O parâmetro w_4 define o último ponto da lei trilinear. Uma vez excedido este valor de abertura de fenda deixa de ser possível transferir tensões entre as faces da fenda, pelo que é nula a tensão de tração na zona onde se regista essa abertura.

Para avaliar a influência dos valores de w_4 na resposta $F - \delta$, Ribeiro (2004) considerou o seguinte intervalo de variação:

$$5 \leq w_4 \leq 10 \quad (mm) \quad (2.217)$$

Em seu estudo Ribeiro (2004) concluiu que a influência dos valores do parâmetro w_4 na curva $F - \delta$ é semelhante ao de w_3 , mas, de menor amplitude. Diminuindo o valor de w_4 antecipa-se a entrada na fase de amolecimento estrutural, mas a alteração na forma da curva com o aumento de w_4 é menos significativa que o verificado com o aumento de w_3 .

1.10.12 Relação de σ com os parâmetros experimentais obtidos

Ribeiro (2004) correlacionou a tensão de compressão com o parâmetro σ_1 , obtendo a Equação (2.218), para um desvio padrão de 0,03:

$$\sigma_1 = 0,253(f_{ck})^{2/3} \quad \left(\frac{N}{mm^2} \right) \quad (2.218)$$

Para simular o comportamento pós-pico do concreto reforçado com fibras, o comitê RILEM TC 162-TDF propôs uma lei $\sigma - \varepsilon$ (RILEM, 2003), em que os valores de σ_2 e σ_3 desta lei são dependentes de $f_{R,1}$ e $f_{R,4}$ (nos primeiros trabalhos eram dependentes de $f_{eq,2}$ e $f_{eq,3}$ (RILEM, 2000)). Seguindo estratégia semelhante, Ribeiro (2004) correlacionou os valores de σ_2 e σ_3 com os valores de f_R e f_{eq} obtidos nos ensaios experimentais. Destas relações resultam nas Equações (2.219) e (2.220), cujo parâmetro de relação, de aproximadamente 0,36, é significativamente inferior ao proposto pela RILEM ($\sigma_2 = 0,45 f_{R,1}$).

$$\sigma_2 = 0,3667 f_{eq,2} \quad \left(\frac{N}{mm^2} \right) \quad (2.219)$$

$$\sigma_2 = 0,3637 f_{R,1} \quad \left(\frac{N}{mm^2} \right) \quad (2.220)$$

Para a relação entre σ_3 e $f_{eq,3}$, e entre σ_3 e $f_{R,4}$, Ribeiro (2004) obteve as equações 3.29 e 3.30, que não são significativamente distintas da proposta pela RILEM ($\sigma_3 = 0.37 f_{R,4}$).

$$\sigma_3 = 0,3246 f_{eq,3} \quad \left(\frac{N}{mm^2} \right) \quad (2.221)$$

$$\sigma_3 = 0,3495 f_{R,4} \quad \left(\frac{N}{mm^2} \right) \quad (2.222)$$

1.11 Modelagem do Concreto Armado

De acordo com Feenstra e Borst (1993), o concreto armado em tração no DIANA é tratado através de uma superposição do modelo para concreto simples com “tension softening”, com o modelo elasto-plástico para o aço dotado de uma rigidez adicional devido ao efeito de “tension stiffening”.

No concreto armado, devido à aderência entre o concreto e as armaduras, um grande número de fissuras tende a se desenvolver. Com o desenvolvimento contínuo dessas fissuras o concreto perde a sua capacidade de suportar tensões de tração e acaba transferindo essas tensões para as armaduras. Esse efeito é denominado de “tension stiffening” e está profundamente relacionado com o efeito de “tension softening”, conforme ilustra a Figura 2.75.

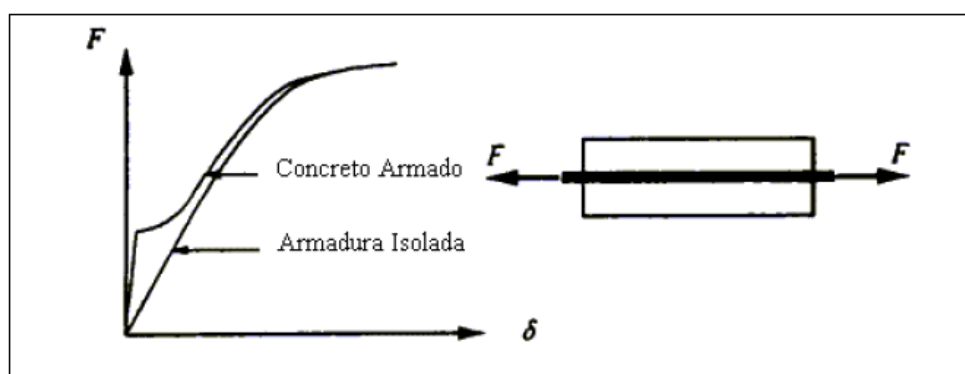


Figura 2.75 – Elemento de concreto armado sob tração. (Adaptado de Feenstra e Borst, 1993).

Deve-se observar que o efeito “tension stiffening” só tem validade se a armadura incorporada à estrutura for superior à mínima necessária. Caso contrário, quando surgir a primeira fissura a estrutura chegará ao colapso de maneira frágil, sem apresentar “tension stiffening”.

Segundo Feenstra e Borst (1993) a energia de fraturamento que representa a transição de comportamento do concreto simples para o concreto armado pode ser tomada como uma parcela referente ao fraturamento do concreto simples e do espaçamento médio entre fissuras (“crack band”), conforme a equação (3.9).

$$G_f^{RC} = \min \left\{ G_f, G_f \cdot \frac{h}{l_s} \right\} \quad (2.223)$$

A distância média entre fissuras pode ser estimada de acordo com o CEB-FIP Model Code 1990 (1993) através da Equação (2.224).

$$l_s = \frac{2}{3} \left(50 + \frac{\phi_s}{\alpha \cdot \rho_s} \right) \quad (2.224)$$

Onde ϕ_s é o diâmetro da armadura, $\alpha = 4,0$ para barras corrugadas, o qual é igual a 2,0 para barras lisas, sendo a taxa de ferragem dada por: $\rho_s = \frac{A_s}{A_c}$.

Para elementos de placa, chapa e casca, Feenstra e Borst (1993) apresentam as recomendações para a definição do espaçamento médio entre fissuras.

1.12 Modelagem das Armaduras

Uma característica especial que o programa DIANA possui é a capacidade de modelar as armaduras por meio de elementos especiais denominados “embedded reinforcement”. Esses elementos possibilitam definir armaduras discretas (barras ativas ou passivas) e distribuídas (malhas) em estruturas bi e tridimensionais.

De acordo com Feenstra e Borst (1993) a modelagem das armaduras no meio computacional tem sido feita de três maneiras distintas de representação: distribuída, incorporada (“embedded”) e discreta.

Na representação distribuída a armadura é assumida como sendo distribuída no elemento de concreto seguindo uma determinada orientação. Na representação incorporada são introduzidas barras cujos deslocamentos são os mesmos do elemento “parente”. Finalmente, na representação discreta, elementos uniaxiais são introduzidos nas interfaces dos elementos de concreto com conexões rígidas ou com elementos de interface, capazes de modelar a aderência.

Nas duas primeiras maneiras descritas anteriormente, isto é, na representação distribuída e na representação incorporada, normalmente considera-se uma aderência perfeita entre o concreto e as armaduras, ou seja, elimina-se a possibilidade de ruptura por escorregamento das armaduras. Essas duas maneiras de representar as armaduras são as disponíveis atualmente no programa DIANA.

Para o aço normalmente adota-se o modelo de ruptura de VonMises, com a equação constitutiva do material seguindo um modelo elasto-plástico perfeito ou elastoplástico com endurecimento. As curvas são normalmente obtidas de ensaios uniaxiais e são iguais tanto na tração quanto na compressão.

1.13 Solução do Sistema de Equações Não-Lineares

Há alguns anos atrás foi reconhecido pelos pesquisadores da área que o colapso numérico, no qual um procedimento de iteração numérica não consegue convergir, não tem nenhuma relação com o colapso real da estrutura. Estas deficiências podem ser superadas usando técnicas especiais que assegurem um comportamento global convergente. A convergência do método de Newton-Raphson pode ser acelerada usando a técnica da pesquisa de linha (line-search), que calcula um multiplicador ótimo dos campos de deslocamentos incrementais do processo iterativo.

Um aperfeiçoamento importante do método de Newton-Raphson é a restrição ao campo de incrementos de deslocamentos que resulta em um método de Newton-Raphson restringido. Com este método é possível superar pontos notáveis na resposta carga-deslocamento da estrutura. É raro encontrar na literatura que o procedimento para

calcular os incrementos de carga possa ser a parte mais importante na estratégia de solução incremental-iterativa.

De acordo com Gomes (2001) a resposta completa da estrutura é calculada utilizando-se uma análise incremental na qual a carga total é aplicada em um certo número de etapas e, uma variável de tempo t é introduzida para descrever convenientemente o regime de cargas e deslocamentos na estrutura.

De maneira geral, as equações de equilíbrio são não-lineares e um processo incremental iterativo deve ser empregado como estratégia de solução para resolver o equilíbrio em toda história de cargas da estrutura. Normalmente utiliza-se o Método de Newton-Raphson para esta atividade, que lineariza as condições de equilíbrio não lineares em cada iteração.

No entanto, este método apresenta uma grande deficiência, pois não permite um comportamento global convergente e não consegue superar pontos limites na curva carga-deslocamento.

De acordo com a TNO (2001), o programa DIANA dispõe para a resolução do sistema de equações não-lineares os seguintes métodos: Newton-Raphson Regular, Newton-Raphson Modificado, Quasi-Newton (“Método Secante”), Método da Rigidez Constante e Método da Rigidez Linear.

A resposta completa da estrutura é calculada usando uma análise incremental na qual a carga total é aplicada em um certo número de etapas e uma variável tempo t é introduzida para descrever convenientemente o regime de cargas e deslocamentos na estrutura. O conceito de tempo é usado para ordenar a seqüência de eventos.

Admite-se que na etapa n o equilíbrio da estrutura é satisfeito e que um novo incremento de carga seja aplicado na etapa $n + 1$. As equações de equilíbrio precisam ser resolvidas na etapa $n + 1$. De maneira geral, as equações de equilíbrio são não-lineares e um processo iterativo tem que ser empregado para resolver este problema. Desta forma, um processo incremental-iterativo é empregado como uma estratégia de solução para resolver o equilíbrio em toda a história de cargas da estrutura.

No método Newton-Raphson Regular a rigidez é atualizada a cada iteração, o que quer dizer que o método consome grande trabalho computacional a cada iteração.

Normalmente o método requer um número pequeno de iterações e se a estimativa inicial estiver longe da solução final o método pode facilmente falhar devido à divergência.

No método Newton-Raphson Modificado a rigidez é determinada apenas no começo de cada incremento. Este método costuma convergir mais lentamente que o método Newton-Raphson Regular, no entanto, para cada iteração apenas a estimativa incremental dos deslocamentos e das forças precisam ser calculados, sem a necessidade de recalculá-la a matriz de rigidez.

De acordo com a TNO (2001), em situações em que o método de Newton-Raphson Regular não consegue convergir o método de Newton-Raphson Modificado pode ter sucesso.

O Método de Quasi-Newton, também chamado de “Método Secante”, usa essencialmente a informação da solução prévia dos vetores de força não balanceados para conseguir uma melhor aproximação durante a aplicação dos incrementos. O método também não requer uma atualização completa da matriz de rigidez a cada iteração, sendo que no programa DIANA estão implementados os métodos de Broyden, Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (BFGS) e de Crisfield.

De acordo com a TNO (2001) os métodos da Rigidez Constante e da Rigidez Linear podem ser usados se os métodos descritos anteriormente se tornarem instáveis. No método da Rigidez Linear a matriz de rigidez linear é utilizada durante todo o tempo, o que implica numa baixa taxa de convergência. O método da Rigidez Constante pode ser usado quando o método de Newton-Raphson ou Quasi-Newton falhar após um número satisfatório de incrementos.

Para superar alguns problemas que normalmente surgem em análises não-lineares o programa DIANA dispõe de recursos adicionais tais como o método de procura de linhas (“line search”) e o método de comprimento de arco (“arc length control”).

O método de procura de linhas acelera a convergência do processo iterativo através do cálculo de um multiplicador ótimo para o campo dos deslocamentos incrementais e é extremamente útil quando os processos ordinários de iteração não são suficientes.

O método de comprimento de arco resolve as deficiências do processo incremental e iterativo, possibilitando capturar o comportamento pós-pico da estrutura,

uma vez que possibilita a introdução de incrementos decrescentes no processo iterativo. Com a ativação desse controle, é possível capturar os efeitos de “snap-back” e “snapthrough”, conforme ilustra a Figura 2.76.

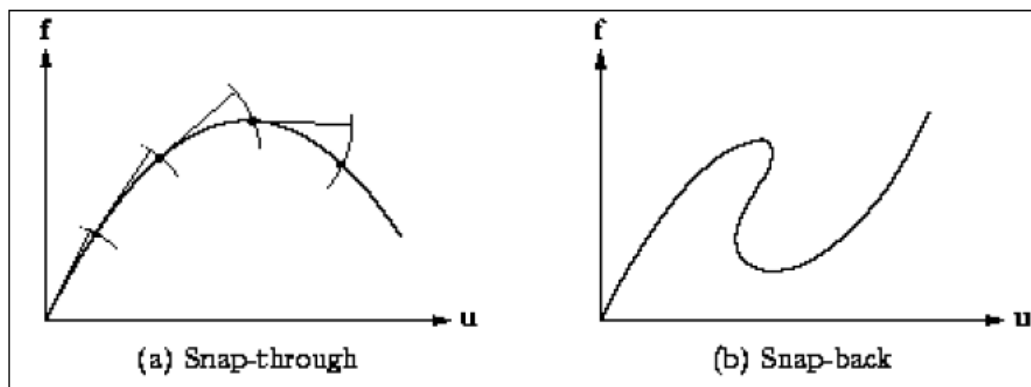


Figura 2.76 – Comportamentos de “snap-back” e “snap-through” possíveis de serem obtidos no programa DIANA quando utilizado a opção “arc length method” (TNO, 2001).

Na condução de análises utilizando DIANA também é necessário estabelecer critérios de convergência que permitam obter a solução com uma precisão julgada adequada ao problema proposto. O programa disponibiliza basicamente três opções de critério de convergência, formulados em termos de:

- deslocamentos;
- forças; e,
- energéticos.

De acordo com Gomes (2001), o critério em termos energéticos é sem dúvida alguma o mais atrativo entre as três opções, pois leva em conta simultaneamente o efeito das forças e dos deslocamentos. Geralmente, em problemas estruturais, uma tolerância (ou erro máximo cometido) igual a 10^{-4} , em termos energéticos, conduz a soluções confiáveis.

Um detalhe que se faz muito importante na utilização e na interpretação dos resultados obtidos pelo processamento do programa DIANA se refere à maneira como o sistema de equações não-lineares é paralisado durante a análise. O programa costuma indicar que a solução convergiu ou divergiu.

Deve-se observar que o colapso numérico, no qual um procedimento de iteração numérica não consegue convergir, não tem nenhuma relação com o colapso real da

estrutura. Por isso, recomenda-se muita atenção na interpretação dos resultados obtidos utilizando DIANA ou qualquer outro programa baseado no MEF.

A melhor maneira de se interpretar a resposta obtida é através do diagrama carga versus deslocamento de algum ponto notável da estrutura. A partir do momento em que a estrutura atinge o seu pico de resistência pode-se introduzir decréscimos de carregamento, de maneira a se obter o trecho descendente desta curva.

Um diagrama carga-deslocamento que apresenta o amolecimento da estrutura indica de maneira bastante clara a carga de colapso da estrutura. Se o trecho descendente do diagrama carga-deslocamento não é obtido, o sistema pode ter divergido antes de se atingir a carga máxima e o usuário pode erroneamente ser conduzido a uma dedução precipitada da carga de colapso.

1.13.1 Métodos de soluções de equações não-lineares

1.13.1.1 Método de Newton-Raphson

O problema é formulado em termos de um conjunto discreto \mathbf{u} , sendo \mathbf{u} o vetor com todos os deslocamentos nodais. Numa etapa $n + 1$, o sistema de equações pode ser resolvido, ver Zienkiewicz e Taylor (1991), como:

$$\phi_{n+1} = \phi(u_{n+1}) = p(u_{n+1}) - f_{n+1} \quad (2.225)$$

onde ϕ é o vetor de resíduos (ou forças não-equilibradas), \mathbf{p} é o vetor de forças internas e \mathbf{f} é o vetor de forças externas. A solução próxima do equilíbrio na etapa de carga anterior n é escrita como:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_n \quad \phi = 0 \quad \mathbf{f} = \mathbf{f}_n \quad (2.226)$$

Esta solução é alterada quando o próximo vetor de incremento de carga é aplicado.

$$\mathbf{f}_{n+1} = \mathbf{f}_n + \Delta \mathbf{f}_{n+1} \quad (2.227)$$

A determinação da variação do vetor de deslocamentos nodais $\Delta \mathbf{u}_{n+1}$, tal que:

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \Delta \mathbf{u}_{n+1} \quad (2.228)$$

Será o objetivo e, de maneira geral, o vetor incremento $\Delta \mathbf{f}_{n+1}$ será mantido razoavelmente pequeno para que o caminho de dependência possa ser seguido. Este procedimento é também útil para evitar um número excessivo de iterações, caindo fora do raio de convergência do processo iterativo falhando em seguir o caminho fisicamente correto.

O problema não-linear é resolvido com o método de Newton-Raphson, que é deduzido quando se procura as raízes da Equação (2.225) na etapa atual.

$$\phi(\mathbf{u}_{n+1}^{i+1}) \approx \phi(\mathbf{u}_{n+1}^i) + \left(\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{u}} \right)_{n+1}^i \delta \mathbf{u}_{n+1}^{i+1} = 0 \quad (2.229)$$

onde i é o contador de iteração começando com $\mathbf{u}_{n+1}^0 = \mathbf{u}_n$

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{u}} \right)_{n+1}^i = \left(\frac{\partial p}{\partial \mathbf{u}} \right)_{n+1}^i = (\mathbf{K}_t)_i \quad (2.230)$$

onde \mathbf{K}_t é matriz de rigidez tangente. A Equação (2.229) dá imediatamente a correção do processo iterativo do incremento do deslocamento nodal por

$$\delta \mathbf{u}_{n+1}^{i+1} = -(\mathbf{K}_t^{-1})_{n+1}^i \phi_{n+1}^i \quad (2.231)$$

Uma série de sucessivas aproximações resulta em

$$\mathbf{u}_{n+1}^{i+1} = \mathbf{u}_n + \Delta \mathbf{u}_{n+1}^{i+1} = \mathbf{u}_{n+1}^i + \delta \mathbf{u}_{n+1}^{i+1} \quad (2.232)$$

com

$$\Delta \mathbf{u}_{n+1}^{i+1} = \sum_{k=1}^{i+1} \delta \mathbf{u}_{n+1}^k \quad (2.233)$$

até que é obtida uma convergência dentro de uma determinada tolerância.

Uma severa limitação do método de Newton-Raphson é o fato de não ser globalmente convergente, isto é, converge para alguma solução de um sistema de equações não-lineares a partir de qualquer ponto inicial. Em problemas estruturais, a estratégia mais utilizada para estimar uma solução fora do raio de convergência do método de Newton-Raphson é a técnica de pesquisa de linha ou método da secante.

1.13.1.2 Método do arco

A forma mais natural de controlar o processo de carga em análises não-lineares é admitir que se introduzam incrementos positivos no vetor de cargas externas f . (Crisfield, 1991 e 1997). Em problemas estruturais, este vetor é um conjunto de forças externas que pode ser admitido proporcional a um vetor de forças normalizado f_0 , que pode ser escrito como:

$$\Delta f_{n+1} = \Delta \lambda_{n+1} f_0 \quad (2.234)$$

onde λ é o fator de carga. Na maior parte dos problemas estruturais é habitual que não exista uma solução acima de um determinado valor máximo, ver figura 3.8. Obviamente, o controle de força típico em que o fator de carga é mantido constante não é aplicável a pontos limites, quando é necessário que o incremento de carga se torne negativo. (Lourenço, 1999).

O método do arco resolve estas deficiências inerentes ao processo incremental e iterativo. Reescrevendo a Equação geral (2.225) do problema não-linear como

$$\phi_{n+1} = p(u_{n+1}) - \Delta \lambda_{n+1} f_0 = 0 \quad (2.235)$$

e lembrando da Equação (2.228) de incremento de deslocamentos e considerando $\Delta \lambda_{n+1}$ tal que

$$\lambda_{n+1} = \lambda_n + \Delta \lambda_{n+1} \quad (2.236)$$

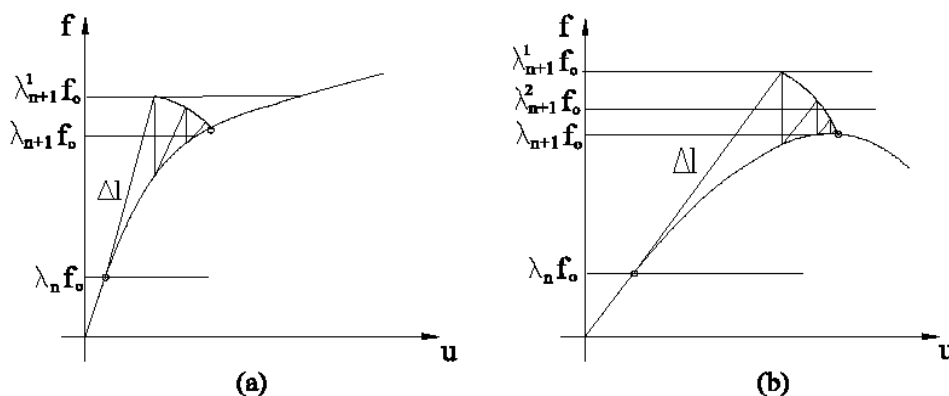


Figura 2.77 – Representação do método do arco: (a) possível solução sem o método do arco e (b) impossível sem o método do arco – o método iterativo representado é o Newton-Raphson modificado.

É evidente que é necessária uma nova equação para a variável adicional $\Delta\lambda_{n+1}$. Esta equação pode tomar várias formas, sendo no caso do método do arco esférico igual a:

$$(\Delta u_{n+1}^T) \Delta u_{n+1} + \Delta\lambda_{n+1}^2 f_0^T f_0 = \Delta l^2 \quad (2.237)$$

Normalmente, o método do arco é associado ao método de Newton-Raphson convencional ou modificado, conforme Figura 2.77.

1.13.2 Critério de convergência

O critério de convergência formulado em termos energéticos é considerado o mais atrativo dos três, pois leva em conta, simultaneamente, o efeito das forças e deslocamentos. Um critério óbvio em termos energéticos é dado por

$$\|u\phi\| < \beta \|\delta u^T f\| \quad (2.238)$$

onde u são os deslocamentos totais, ϕ são os resíduos do problema não-linear (as forças não-equilibradas), δu são as correções iterativas dos deslocamentos e f é o vetor de forças externas aplicadas, incluindo as reações, β é a tolerância (ou erro) máxima admitida.

Geralmente, em problemas estruturais, uma tolerância igual a 10^{-4} , em termos energéticos, conduz a soluções confiáveis. É necessário testar a sensibilidade da solução ao critério de convergência adotado, sendo o número 10^{-4} apenas uma referência inicial. Na opinião dos pesquisadores da área, é sempre preferível adotar tolerâncias relativamente pequenas, desde que o processo iterativo e o condicionamento do problema não-linear o permitam.

1.13.3 Aspectos Complementares

De acordo com Rots et al. (1985), em problemas de fraturamento por cisalhamento utilizando o DIANA ou qualquer outro programa de elementos finitos, o estabelecimento de uma carga limite genuína é complicado e problemas de convergência são muito freqüentes tendo em vista a complexidade do problema.

Rots et al. (1985) observaram que tal problema poderia ser decorrência da utilização de um processo de solução pouco eficiente. Os pesquisadores acreditam que para um carregamento além de uma dada carga tida como crítica, a análise numérica acaba encontrando um novo estado de equilíbrio que não é propriamente o real.

Esse fato pode ser atribuído à falta de um modelo eficiente para resolução do sistema de equações não-lineares, aliado a falta de modelos eficazes para representar a aderência e o efeito-pino das armaduras.

Adicionalmente Rots et al. (1985) comentam que para problemas em que as fissuras provocadas por cisalhamento são críticas, o fator de retenção ao cisalhamento (β) deve ser cuidadosamente escolhido, uma vez que parece influenciar decisivamente o problema.

Em pesquisas variando esse parâmetro os pesquisadores concluíram que altos valores ($\beta=0,99$, simulando superfícies de fissuras totalmente intertravadas) levam a fissuras de cisalhamento mais distintas e localizadas em faixas mais estreitas.

Para baixos valores ($\beta = 0,001$), simulando superfícies de fissuras praticamente sem fricção os pesquisadores concluíram que não é possível chegar totalmente a uma fissuração diagonal, e além de tudo obtém-se uma resposta carga-deslocamento muito pobre, caracterizada por diversas irregularidades.

De maneira geral, observa-se que para o Modo de Fraturamento I, os modelos de fissuração distribuída têm apresentado um desempenho altamente satisfatório, gerando resultados de acordo com os resultados experimentais, não só nas situações de pré-pico como também nas situações de pós-pico.

De acordo Rots e Blaauwendraad (1989) para problemas no Modo de Fraturamento II, as linhas de fraturamento se desviam demasiadamente das linhas da malha, de maneira que a fratura se propaga em zigzag.

Esse desalinhamento acaba complicando o cálculo das tensões na ponta da fissura e pode levar a um travamento total das tensões (“stress-lock”), produzindo uma solução inadequada para o problema investigado.

Dessa maneira, após a leitura dos trabalhos de Rots et al. (1985) e Rots e Blaauwendraad (1989), chega-se a conclusão que nas simulações numéricas utilizando DIANA, devem ser investigados com cuidado as tolerâncias do critério de convergência, o valor da retenção ao cisalhamento e o método de solução do sistema não-linear.

1.14 Verificação da Segurança Utilizando o MEF

O problema da verificação da segurança de estruturas utilizando o Método dos Elementos Finitos acoplado à análise não-linear ainda é pouco documentado na literatura e completamente ausente na maioria dos códigos de concreto estrutural.

Esta tarefa é da maior responsabilidade e não deve ser deixada unicamente sob a responsabilidade dos desenvolvedores de softwares de elementos finitos.

Atualmente, a base de qualquer formato de segurança está elaborada em termos probabilísticos. A maioria dos códigos tem preconizado o formato semiprobabilístico, que corresponde a algoritmos simplificados de dimensionamento baseados em fatores parciais de segurança que afetam os valores característicos e de cálculo.

Esse formato de segurança consiste na utilização da análise elástica para a determinação dos esforços internos e de leis constitutivas não-lineares para o aço e para o concreto, visando o dimensionamento das seções transversais. Os coeficientes de segurança parciais são aplicados de maneira a majorar as ações solicitantes e minorar a

resistência dos materiais. A segurança é considerada adequada se a capacidade resistente da seção transversal for superior ao esforço solicitante.

Dessa maneira, observa-se que o formato de segurança proposto pela maioria dos códigos é, de certa maneira, inconsistente. Essa inconsistência se deve ao fato de que as deformações resultantes da análise elástica não têm nenhuma relação com as deformações das leis constitutivas. No entanto, o bom desempenho desse modelo simplificado de segurança tem sido comprovado por anos de prática.

De acordo com Lourenço (1992), o simples fato de se considerar os materiais com as propriedades de cálculo ou características em análises não-lineares pode conduzir com frequência a resultados inesperados. De acordo com o pesquisador, a análise não-linear deve incluir um componente probabilístico, de modo a permitir um formato de segurança consistente.

Ainda de acordo com Lourenço (1992), o formato de segurança atual e os respectivos fatores de segurança resultam de décadas de experiência, observação e dimensionamento de acordo com o cálculo elástico e, por isso, não faz sentido transpor a filosofia existente para a análise não-linear. Figueiras et al. (1990, 2002) têm preconizado a utilização de um formato de segurança simplificado para a verificação de segurança no estado limite último utilizando a análise não-linear, e esta filosofia também tem sido adotada por Lourenço (1992). A rotina dessa verificação é apresentada a seguir:

- A estrutura é dimensionada utilizando os processos correntes, ou seja, utiliza-se uma análise linear para a obtenção dos esforços e em seguida dimensionam-se as seções transversais através de equações constitutivas não-lineares para o aço e para o concreto;

- A estrutura dimensionada é analisada de maneira não-linear, sendo que as relações constitutivas são definidas com base nos valores médios das propriedades dos materiais que determinam a sua flexibilidade e com base nos valores característicos para as propriedades que determinam a capacidade de resistência última da estrutura;

- As cargas são definidas pelos valores característicos F_k , sendo incrementadas até que se atinja o estado de colapso da estrutura F_u . Dessa maneira, pode-se determinar um valor para o fator de carga último dado por $\lambda_u = F_u / F_k$;

- A segurança da estrutura é considerada satisfeita desde que $\lambda_u \geq \lambda_c = \gamma_f * \gamma_m$, sendo γ_m ditado pelo aço ou pelo concreto, conforme o tipo de ruína esperado.

Souza (2004) acredita ser adequada tal metodologia e, na falta de recomendações mais eficientes na literatura técnica, irá adotar o formato de segurança proposto por Figueiras et al. (1990, 2002) para a verificação de estruturas complexas utilizando recursos de análise não-linear.

Dessa maneira, para que uma estrutura investigada utilizando a análise não-linear seja considerada segura, os limites das equações (3.11) e (3.12) devem ser verificados, tomando por base os coeficientes de ponderação propostos pela NBR 6118 (2003):

$$\lambda_u \geq \lambda_c = \gamma_f * \gamma_m = 1,4.1,4 = 1,96, \text{ se o colapso for atribuído ao concreto}$$

(2.239)

$$\lambda_u \geq \lambda_c = \gamma_f * \gamma_m = 1,4.1,15 = 1,61, \text{ se o colapso for atribuído ao aço (2.240)}$$

1.15 Método dos elementos finitos

1.15.1 Breve relato da história do método dos elementos finitos

Embora fora precedido imediatamente pelas grandes realizações da escola francesa de elasticidade, como Navier e St. Venant, o período de 1850 a 1875 é um ponto de partida lógico para nossa revisão. Os conceitos de análise de vigamento emergiram durante este período, devido aos esforços de Maxwell, Castigliano e Mohr, entre outros. Os conceitos representam a base da metodologia de matriz análise estrutural que só vieram a ser explicados e utilizados após 80 anos.

O Progresso do desenvolvimento de teoria e a subsidiária de técnicas analíticas de elementos finitos estavam particularmente lentos de 1875 a 1920. Isto era devido, em

grande escala, às limitações práticas na resolução de equações algébricas com mais de uma incógnita. Nós poderíamos notar que para as estruturas de interesse primário naquele período - estruturas e armações - uma aproximação de análise fundada em distribuições de tensão assumidas com parâmetros de força como desconhecidos quase foi empregada universalmente.

Devido aos esforços de Maney nos Estados Unidos e Ostenfeld na Dinamarca, as idéias básicas de estrutura e aproximação de análise de vigamento baseado em parâmetros de deslocamento tomaram forma em aproximadamente 1920. Estas idéias representam os precursores da matriz de análise estrutural. Limitações severas na dimensão dos problemas que poderiam ser controlados por força ou por deslocamento desconhecidos continuaram prevalecendo até 1932 não obstante, quando Hardy Cross introduziu o método de distribuição de momento. Este método tornou possível a solução de problemas de análises estruturais que possuíam uma ordem de magnitude mais complexa que os problemas mais sofisticados tratados pelas aproximações anteriores. Este método se tornou de extrema praticidade para a análise estrutural durante os próximos 25 anos.

Computadores digitais apareceram primeiramente nos anos 50, mas seu significado real para a teoria e a prática não ficaram aparentes de imediato. Certos indivíduos previram este impacto e empreenderam a codificação dos procedimentos de análise de vigamento estabelecendo um formato que seria usado em computadores, o formato de matriz. Tais contribuições, que são muito numerosas, foram inspecionadas por Argyris e Patton. Dois desenvolvimentos notáveis foram alcançados com as publicações de Argyris e Kelsey (1960) e Torneiro, Clough, Martin e Topp (1980). Estas publicações aliaram aos conceitos de análise de vigamento e análise de quantidade contínua e lançaram os procedimentos resultantes em um formato de matriz. Eles representam a influência predominante no desenvolvimento do método de elementos finitos nos anos subseqüentes. Seria inexato designar a introdução de todo o aspecto básico do método de elementos finitos a estes trabalhos, porém, porque características fundamentais do método tinham aparecido até mesmo antes das 1950 em documentos por Courant, McHenry, e Hrenidoff. O trabalho de Courant é particularmente significativo por causa de sua preocupação com problemas governados por equações aplicáveis para diferentes situações da mecânica estrutural.

A tecnologia de análise de elementos finitos avançou por várias fases não distintas no período desde 1950. Uma revisão detalhada deste progresso é determinada por Zienkiewicz. Motivado pela formulação específica de elementos para tensão em planos, os pesquisadores estabeleceram relações de elemento para sólidos, chapas, cascas delgadas, e outras formas estruturais. Uma vez estes haviam sido estabelecidas com a finalidade de análise linear, estática, elásticas, a atenção voltou-se a fenômenos especiais como resposta dinâmica (linearidade geométrica). Era necessário não só estender as formulações de elemento, mas também o vigamento geral de análise. Estes desenvolvimentos foram seguidos por um período de desenvolvimento bastante intensivo de “programas de computação de geral-propósito”.

Existem atualmente diversos programas de propósitos gerais para análise de elementos finitos na prática. É abundante a disponibilidade de programas a um custo modesto para as aplicações práticas do método de elementos finitos. Mas ainda, muitos pesquisadores continuam ocupados com a formulação de elementos novos e o desenvolvimento adicional de formulação melhorada e algoritmos para fenômenos especiais e na construção de programas novos. O estabelecimento de representações de elementos finitos de fenômenos interdisciplinares é de interesse primordial. Exemplos familiares estão relacionados com análises termo-estruturais onde o cálculo de tensão térmica é mais bem integrado com o cálculo de distribuição de temperatura passageira, interação de fluido e resposta estrutural em casos de hidro-elasticidade.

Embora se tenha dado ênfase a certas distinções e vantagens especiais do método de elementos finitos em mecânicas estruturais, o método em sua forma presente é improvável ser a última palavra em procedimentos de análise. Deveria ser visto como mais uma fase no desenvolvimento contínuo de ferramentas de análise de desígnio estrutural. Tal reserva como a de Timoshenko, História da Força de Materiais, é um componente inestimável da educação de estudantes de engenharia estrutural.

1.15.2 Fundamentos Básicos do MEF

De acordo com Rao (1999), a idéia básica do Método dos Elementos Finitos é encontrar a solução de um problema complicado através da substituição do problema inicial por vários outros problemas de simples resolução. A solução obtida não é exata, mas a falta de um recurso mais poderoso para a análise do problema faz com que o método passe a ser um procedimento bastante eficaz.

Inicialmente, o problema é discretizado em vários elementos de menores dimensões, denominados de elementos finitos. Os elementos finitos são interconectados através dos nós, que são pontos onde uma solução aproximada pode ser adotada e onde equações de equilíbrio podem ser estabelecidas.

Uma vez que os valores dos campos desejados (deslocamentos e tensões) não são conhecidos no interior do meio contínuo, assume-se que a variação destes campos variáveis dentro dos elementos finitos possa ser aproximada por funções simples, chamadas de funções de interpolação, que são definidas em termos dos valores dos campos variáveis nos nós.

Quando as equações de equilíbrio para o meio contínuo são definidas e resolvidas, normalmente através de equações matriciais, os valores nodais dos campos variáveis passam a ser conhecidos. As funções de interpolação são então utilizadas para descrever o comportamento de todos os nós da estrutura, obtendo assim uma solução aproximada para o meio contínuo.

De acordo com Rao (1999), a solução geral de um problema estático da área de engenharia de estruturas, utilizando o Método dos Elementos Finitos pode ser obtida através dos seguintes passos:

. Passo 1 – Divisão em elementos

Primeiramente divide-se a estrutura em vários elementos, sendo que nesta etapa deve-se decidir sobre o número, o tipo, o tamanho e o arranjo de cada um deles, os quais podem ser unidimensionais, bidimensionais ou tridimensionais. Os elementos normalmente utilizados para concreto são do tipo iso-paramétricos, isto é, com três nós ao longo dos vários eixos do elemento, conforme ilustra a Figura 2.78.

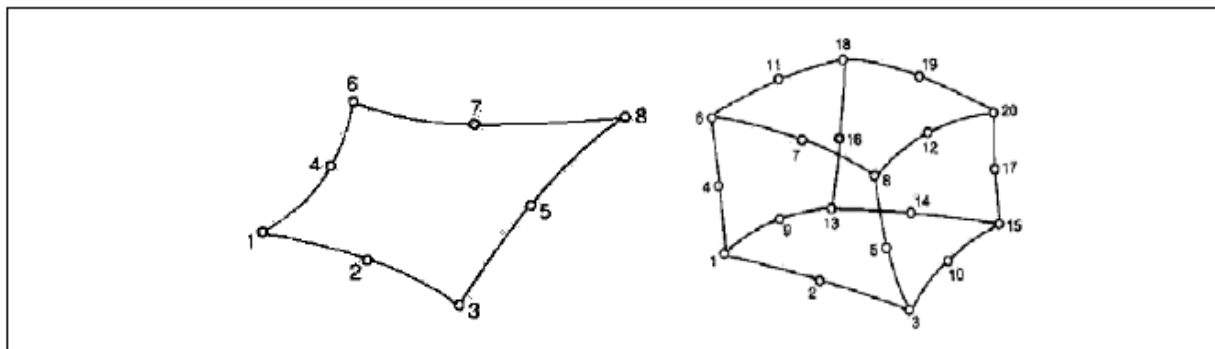


Figura 2.78 - Elementos iso-paramétricos utilizados para concreto

(Fonte: Kotsovos; Pavlovic (1995))

O tamanho dos elementos tem influência significativa na convergência da solução e, por isso, deve ser escolhido com bastante cuidado. De maneira geral, recomenda-se para elementos bidimensionais e tridimensionais uma razão unitária entre a maior e a menor dimensão do elemento.

Deve-se observar que se o tamanho dos elementos é pequeno, a solução esperada tende a ser mais precisa. No entanto, deve-se atentar para o fato de que o uso deste tipo de elemento pode gerar trabalhos computacionais significativos, devido ao grande número de elementos necessários para descrever o contorno. O número de elementos a ser escolhido geralmente está relacionado com a precisão desejada. Um acréscimo no número de elementos normalmente conduz a uma melhoria na solução do problema, no entanto, existe um certo limite para o qual a resposta não pode ser mais melhorada.

Para regiões com tensões significativamente maiores do que a tensão média verificada para o meio em análise, tais como cantos e reentrâncias, recomenda-se a utilização de malhas refinadas.

. Passo 2 – Seleção de um modelo adequado de deslocamento ou interpolação:

Uma vez que a solução dos deslocamentos de uma estrutura complexa sob a ação de forças atuando em seu contorno não pode ser obtida com precisão, deve-se assumir uma hipótese adequada para os elementos, de maneira a aproximar razoavelmente a solução.

A solução assumida para os elementos deve ser simples do ponto de vista computacional e satisfazer a certos requisitos de convergência. Em geral, tal procedimento ou modelo de interpolação é expresso na forma de uma equação polinomial.

. Passo 3 – Obtenção das matrizes de rigidez dos elementos e dos vetores de carga:

A partir do modelo de deslocamento assumido, a matriz de rigidez $[K(e)]$ e o vetor de cargas $[P(e)]$ do elemento “e” são obtidos utilizando equações de equilíbrio ou princípios variacionais.

. Passo 4 – Reunião dos elementos para obtenção das equações de equilíbrio:

Uma vez que a estrutura é composta de vários elementos finitos, as matrizes individuais de rigidez de cada elemento são reunidas em uma única, que descreverá o comportamento global da estrutura. Assim, a equação de equilíbrio da estrutura pode ser descrita de acordo com (2.246):

$$[K]\underline{\varphi} = \underline{P} \quad (2.241)$$

Onde:

$[K]$ = Matriz de rigidez da estrutura;

$\underline{\varphi}$ = Vetor dos deslocamentos atuantes na estrutura;

\underline{P} = Vetor das forças nodais atuantes na estrutura.

. Passo 5 – Solução dos deslocamentos desconhecidos:

As equações de equilíbrio devem ser modificadas para considerar as condições de contorno do problema. Depois da incorporação das referidas condições as equações de equilíbrio passam a ser expressas de acordo com (2.247):

$$[K]\underline{\varphi} = \underline{P} \quad (2.242)$$

Para problemas lineares, o vetor φ pode ser obtido através de dois métodos disponíveis para a resolução: os métodos diretos e os iterativos.

Os métodos diretos são aqueles que utilizam um número finito de operações aritméticas para encontrar a solução do problema. Devido a erros de truncamento, o método às vezes não fornece bons resultados. Os mais utilizados são: “Método de Eliminação Gaussiana” e o “Método de Cholesky”.

Os métodos iterativos são aqueles que começam com uma aproximação inicial e após sucessivas iterações convergem para soluções cada vez mais refinadas. São representantes desta classe o “Método de Gauss-Seidel” e o de “Newton”.

De acordo com Kotsovos; Pavlovic (1995), em análises não-lineares o sistema não pode ser resolvido diretamente, e assim, torna-se necessário o emprego de técnicas iterativas baseadas em soluções sucessivas de sistemas lineares, até que a convergência seja alcançada.

Os tipos mais frequentes de solução para sistemas de equações não-lineares são obtidos através da utilização do “Método Direto” (“Módulo Secante” ou “Rigidez Variável”) e do “Método de Newton-Raphson” (“Método da Rigidez Tangencial”).

O “Método Direto” tende a ser mais trabalhoso, uma vez que a matriz [K] deve ser remontada e um novo conjunto de equações ser resolvido a cada iteração. Em geral, o “Método da Rigidez Tangencial” converge mais rapidamente e exibe maior estabilidade que o “Método Direto”, no entanto, também é necessário montar a matriz [K] a cada nova iteração.

. Passo 6 – Cálculo das tensões e deformações nos elementos:

A partir dos deslocamentos nodais obtidos do vetor φ , as deformações e tensões nos elementos podem ser calculadas a partir das equações clássicas da Mecânica dos Materiais.

Para a aproximação utilizando o MEF, que é desenvolvida utilizando computadores, um grande número de programas está disponível no mercado. Estes são capazes de gerar malhas automaticamente e também fornecer resultados gráficos significativos, comportando-se como um verdadeiro laboratório virtual.

Dentre os programas computacionais baseados no MEF podem ser citados os seguintes “softwares”: ADINA, DIANA, NASTRAN, PASTRAN, ANSYS, ROBOT MILLENIUM e SAP2000, entre tantos outros milhares de programas existentes.

1.15.3 Configuração dos principais tipos de elementos

Os elementos que são empregados comumente estão explicitados a seguir. O de vigamento simples, Figura 2.79, quando usado em combinação com elementos de mesmo tipo, descreve estruturas de armação de espaço. Quando em combinação com elementos de diferentes tipos, especialmente aqueles que formam um plano, normalmente pretende-se enrijecer a estrutura.

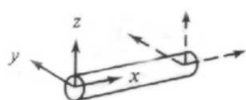


Figura 2.79 – Elemento de vigamento.

Os elementos básicos em análise são os planos delgados carregados por forças no próprio plano. São ilustrados elementos de tensões planas triangulares e quadriláteras na Figura 2.80 b. Várias outras formas geométricas geralmente são possíveis nesta classe de elemento, mas tais variantes servem para propósitos muito especializados. Estes elementos não são apenas extremamente básicos, como possui utilidade em uma gama extensiva de situações de análise de cunho prático, mas também por causa de prioridade na história de desenvolvimento de análise de elementos finitos. Trabalhos teóricos efetuados no início do desenvolvimento do método visaram quase exclusivamente a este tipo de elemento.

Os elementos sólidos, Figura 2.80 c, apresentam tensões tridimensionais. O tetraedro e hexaedro são as formas mais comuns e são essenciais em: modelos analíticos de terra, problemas de mecânicas de pedra e de estruturas para poder nuclear. É pertinente observar que virtualmente nenhuma outra aproximação para análise estrutural ainda pôde lidar com problemas práticos de três dimensões com análise mais acentuada.

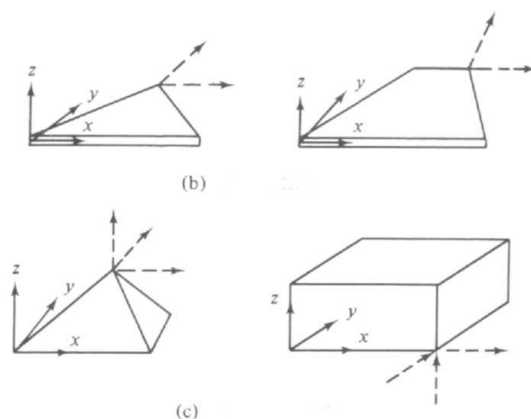


Figura 2.80 – Tensões nos elementos.

Um dos campos mais importantes da aplicação do método de elementos finitos está na análise de sólidos com um eixo de simetria, Figura 2.81. Este elemento engloba uma grande variedade de problemas existentes, tais como: concreto e tanques de aço, recipientes de retenção nuclear, rotores, pistões e cabos. Detalhou-se somente o elemento triangular embora a forma quadrilátera geral, semelhante Figura 2.80 b, também seja útil.

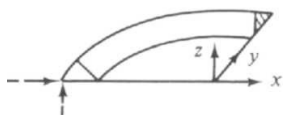


Figura 2.81 – Elemento para análise de sólidos com eixo de simetria.

Placas finas e chatas com torção são empregadas não só na concepção do comportamento das placas finas por si, mas também em representações de partes de cascas e para membranas finas. As dimensões das formas geométricas do elemento se combinam a elementos tensionados no plano, com ênfase nas formas triangulares e quadriláteras, Figura 2.82.

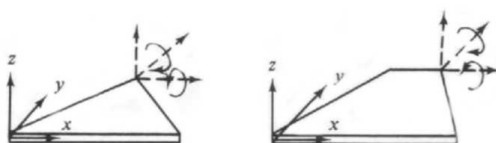


Figura 2.82 – Elementos para placas finas e chatas.

Estruturas de casca fina com eixo simétrico, Figura 2.83, têm a mesma gama de significação em aplicações práticas como os sólidos de com eixo de simetria, embora as relações de definição derivem das suposições simplificadas da teoria casca. Formulações de cascas finas com eixo de simetria atravessam um intervalo entre placa fina submetidos a torção e tração e elementos gerais de cascas.

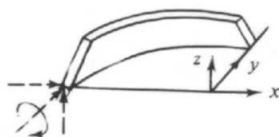


Figura 2.83 – Elemento para estruturas de casca fina.

Quando uma estrutura de casca fina estiver de fato curvada, seria aparentemente preferível empregar elementos de casca fina curvada para o modelo analítico. As vantagens incluem a habilidade para descrever a geometria da superfície de casca atual e uma própria representação da junção de tração e torção dentro de cada elemento com mais precisão. São esboçados elementos de cascas finas duplamente encurvadas, Figura 2.84. Um número grande de formulações alternativas para este tipo de elemento está em existência.

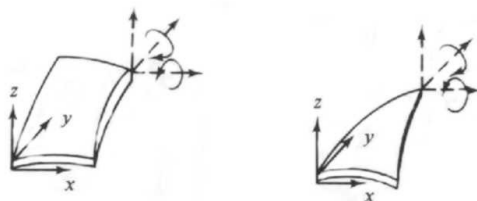


Figura 2.84 – Elemento de casca curvada.

1.15.4 Algumas aplicações do método dos elementos finitos

Pesquisou-se algumas aplicações representativas de caráter estrutural do método de elementos finitos para ilustrar o modo que os elementos descrevem na seção prévia, visualizando a escala e a complexidade dos problemas de análise de desígnio para os quais eles são submetidos.

O desenvolvimento do Método dos Elementos Finitos deve muito ao trabalho de pesquisadores envolvidos com análise estrutural aeroespacial, e não é surpreendente que

este campo continue conduzindo na aplicação prática do método. A Figura 2.85 mostra a análise de elementos finitos de uma porção da aeronave Boeing 747. Estruturas de fuselagem de aeronave consistem em metal de placa delgada embrulhada ao redor de um vigamento que consiste em armações de metais leves e resistentes.

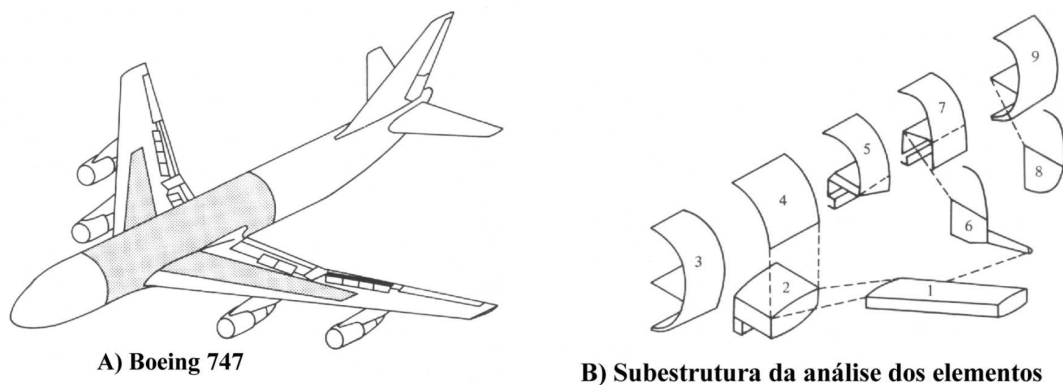


Figura 2.85 – Análise de elementos finitos de uma porção.

Os estudos têm mostrado que quando se determina campo de tensões globais os efeitos de torção local na descrição analítica da placa delgada que reveste a aeronave podem ser negligenciados. Assim, assumimos que a placa circular consiste em elementos de tensão planos como os triângulos e quadriláteros, enquanto o vigamento é idealizado com uso de elementos do tipo mostrado em Figura 2.79. A análise dos elementos finitos da região da asa do 747 mostradas na Figura 2.85 B requer um total de mais de 7.000 elementos desconhecidos. Muitos destes elementos são de difícil controle do ponto de vista de dados e com respeito à identificação de fontes de erro na análise.

Como é habitual na fase de aprovação da aeronave principal, foram administrados testes nos Boeing 747, que foram comparados com a solução dos elementos finitos. É justo dizer que nenhuma solução baseada em conceitos simplificados de engenharia estrutural poderia ter fornecido estes resultados com precisão, como pelo método dos elementos finitos.

Deveria ser somada a resposta dinâmica da aeronave visto que é extremamente importante do ponto de vista de integridade estrutural, onde a instabilidade elástica é um ponto de fracasso. Nenhum destes fenômenos pode ser tratado usando-se conceitos de

análise simplificados, mas a análise deles adequadamente por uso do método de elementos finitos é possível.

Um problema de fim prático semelhante é encontrado em arquitetura naval. A concepção de navios tanque para transporte de carga pesada produziu muita preocupação que considera sua integridade estrutural e eficiência para qual fora projetado. Na realidade, os grandes navios-tanques solicitam bastante a estrutura enquanto em serviço.

A idealização de elementos finitos de navios de carga possui muitas semelhanças com as representações das estruturas aeroespaciais. As placas são representadas através de elementos em tensão plana. São empregados elementos de viga em estruturas internas. O número total de elementos desconhecidos a serem determinados para uma área importante de um navio pode variar até 50.000 e novamente é habitual subdividir o problema em porções ou subestruturas.

Exigências de segurança estrutural em reator nuclear implicaram em um estudo sistemático dos elementos finitos por parte das autoridades responsáveis. A Figura 2.86 A mostra o recipiente de um reator de concreto protendido. Devido à simetria é possível analisar somente uma parte da estrutura, conforme Figura 2.86 B. O estudo é efetuado através de uma análise de elementos quadriláteros e hexágonos, Figura 2.86 C. Em problemas deste tipo o número de incógnitas ultrapassa 20.000 e é comum para que a análise se estenda ao tratamento de fenômenos não-elásticos.

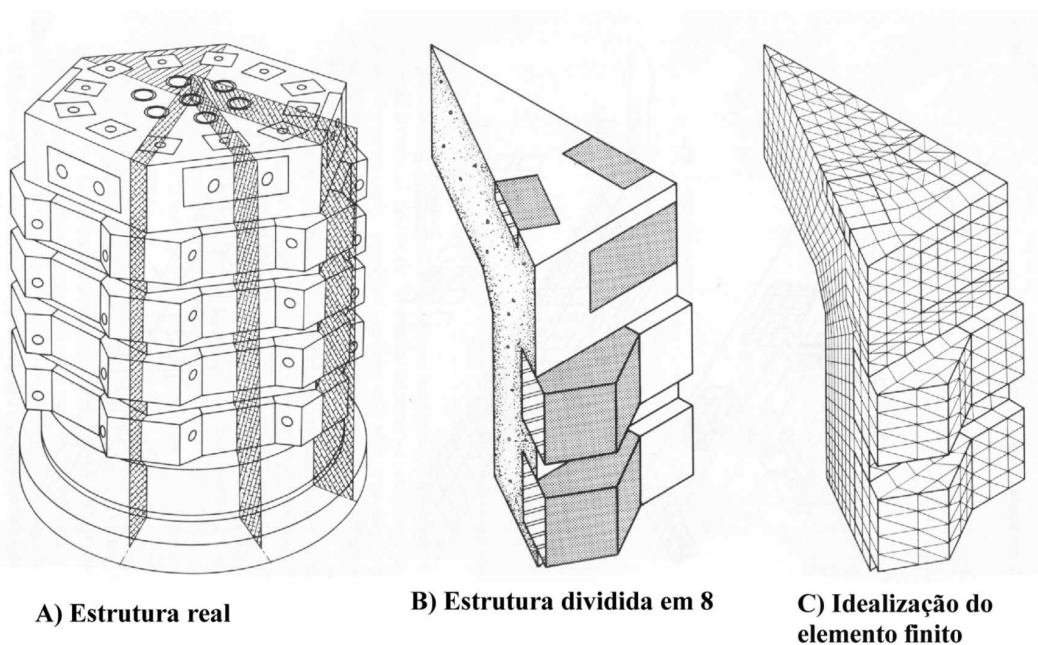
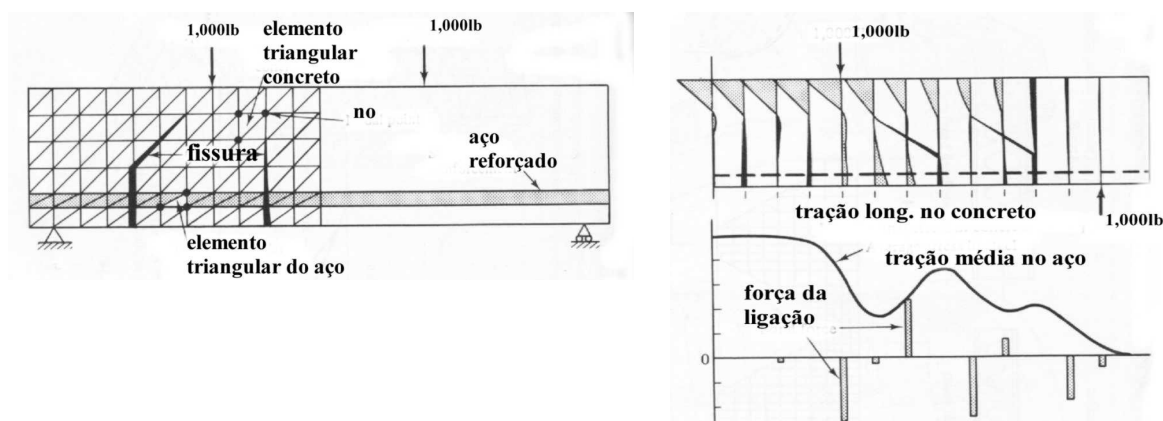


Figura 2.86 – Estrutura de um reator e sua discretização em elementos.

Um problema mais comum é o caso de viga de concreto reforçada, Figura 2.87, pelo qual há pesquisas detalhando a natureza da superfície de contato entre o aço e o concreto e do crescimento de trincas no concreto com carregamento progressivo. A Figura 2.87 A retrata a representação dos elementos finitos e as trajetórias das trincas analiticamente descritas em um estudo de Ngo e Scordelis. São mostrados perfis de tensão em Figura 2.87 B.



A) Representação dos elementos finitos.

B) Cálculo da distribuição da tração.

Figura 2.87 – Viga de concreto reforçada.

Portanto é possível demonstrar através de poucos exemplos que o método dos elementos finitos pode ser usado com vantagem em qualquer situação que requer a predição de tensões internas, deslocamentos, vibração, além de outros parâmetros de solução. Estas situações surgem em vários campos que são considerados tradicionalmente como disciplinas de engenharia distintas, tais como, civil, mecânico, engenheiro aeroespacial e arquitetura naval. O método dos elementos finitos fornece uma tecnologia de análise unificada para estes e outros campos.

1.15.5 O Que Dizem os Códigos Normativos Sobre o MEF?

O CEB-FIP Model Code 1990 (1993), nos seus itens 5.5, 5.6 e 5.7, recomenda o uso do MEF, assim como de outros métodos numéricos, tais como o “Método dos Elementos de Contorno” e “Método das Diferenças Finitas”.

O MEF pode ser aplicado para a análise de elementos como lajes, vigas-parede, paredes estruturais, cascas e placas, sendo que as análises são válidas tanto para o estado limite de utilização quanto para o estado limite último.

A norma canadense CSA (1994), em seu item 9.5, indica a utilização do MEF, ou de outra técnica numérica, como um método alternativo para a análise de estruturas. A utilização do método visa obter as diferenças entre o comportamento real da estrutura e o comportamento utilizado na análise para dimensionamento.

A norma canadense cita que os efeitos de fissuração devem ser levados em conta na análise e que os padrões de malha e as condições de contorno devem ser consistentes com a geometria, com o carregamento e com as restrições de apoio da estrutura.

Ainda em relação à norma canadense, existe a recomendação de que a armadura a ser utilizada, obtida de uma análise utilizando o MEF, deva estar concentrada em bandas ou em tirantes alinhados em mais ou menos 15° em relação à direção das tensões principais de tração.

O projeto de revisão do EUROCODE 2 (1999) recomenda a utilização do MEF para a análise de lajes planas e para casos de geometria de ordem complexa, conforme relata o parágrafo a seguir, extraído na íntegra da referida norma:

A norma espanhola EHE (1999) recomenda implicitamente a utilização do MEF - principalmente para as “Regiões D” - ao sugerir um “método numérico adequado”, em seu item 24.2.3. De acordo com a norma espanhola, as análises podem ser lineares e não-lineares e, para ambos os casos, devem ser satisfeitas as condições referentes ao estado limite de utilização e ao estado limite último do elemento estrutural.

A NBR 6118 (2003) recomenda explicitamente a utilização do MEF para a análise de elementos especiais, principalmente para elementos do tipo parede com furos na alma.

Para elementos como consolos, dentes Gerber e vigas-parede, a norma brasileira recomenda a utilização de “modelos planos elásticos ou não-lineares”, ou seja, uma recomendação implícita do MEF.

Para elementos como sapatas e blocos de fundação sobre estacas, a NBR 6118 (2003) recomenda a utilização de “modelos tridimensionais elásticos ou não”. De maneira

geral, apesar de indicar o MEF, a norma brasileira não fornece subsídios para o desenvolvimento de projetos utilizando tal metodologia.

1.15.6 Análise de Estruturas de Concreto Utilizando o MEF

Análises não-lineares que considerem a fissuração no concreto constituem uma excelente alternativa para o engenheiro de estruturas, podendo indicar as melhores posições para as armaduras. Normalmente, as armaduras têm sentido ortogonal àquele apresentado pelas fissuras, de maneira a costurar as mesmas.

De acordo com Figueiras (1999), a análise não-linear é um instrumento poderoso que satisfaz, para qualquer nível de carregamento, as condições de equilíbrio e de compatibilidade de deformações. Partindo de relações constitutivas realistas para o concreto e para o aço, o comportamento completo da estrutura, desde o início do carregamento até o colapso pode ser traçado, permitindo a verificação da segurança em serviço e no estado limite último.

No MEF o projetista é duramente forçado a desenvolver uma sensibilidade crítica para a resolução de problemas estruturais. Somente através de muito treinamento e do aguçamento deste senso crítico é possível obter bons resultados utilizando tal metodologia.

A afirmação anterior decorre do fato do método conter alguns perigos implícitos, tais como considerações insuficientes por parte do calculista na construção do seu modelo de elementos finitos e até mesmo em possíveis deficiências existentes nos programas disponíveis no mercado. É preciso antes de tudo certificar-se da qualidade do programa a ser utilizado em uma análise de grandes responsabilidades.

Existem questões sutis que influenciam decisivamente nos resultados finais, tais como: escolha adequada do melhor elementos finitos, domínio sobre as relações constitutivas dos materiais, discretização da malha, número de elementos, entre tantas outras questões que surgem no meio do processo e que só podem ser respondidas por um usuário experiente.

Como conseqüência das deficiências, relatadas anteriormente, podem surgir detalhamentos inadequados de algumas partes da estrutura, sendo que estes detalhamentos podem ser até mesmo desastrosos, conforme comprova o colapso da plataforma norueguesa Sleipner em 1991.

Nesta estrutura “off-shore”, constituída por 24 células cilíndricas de concreto armado, acredita-se que a ruína ocorreu pela escolha indevida de armadura transversal na região de junção entre as paredes da estrutura. A determinação da armadura transversal foi baseada numa análise elástica incorreta gerada por um renomado programa de elementos finitos, o NASTRAN (National Aeronautics and Space Administration Structural Analysis).

De acordo Collins et al. (1997), as tensões de cisalhamento encontradas no projeto estrutural estavam subestimadas em 47% com relação às tensões reais, levando assim a um detalhamento inadequado das células cilíndricas de concreto.

Outra dúvida na utilização do MEF refere-se à economia, pois os processadores disponíveis determinam a armadura necessária pelo chamado “ponto de integração” de um elemento, a partir das tensões elásticas de tração resultantes nesta posição. Isto pode levar a adoção de uma armadura antieconômica.

Por exemplo, no caso de uma viga esbelta fletida, a distribuição de tensões elásticas é linear ao longo de sua altura e o braço de alavanca entre a resultante das tensões de tração e a resultante das tensões de compressão é aproximadamente igual a dois terços da sua altura. Um pós-processador padrão baseará a disposição das armaduras nesta posição.

Na realidade, um calculista posicionaria toda a armadura tracionada tão distante quanto possível, empregando um grande braço-de-alavanca interno. Isto resulta em uma redução de aproximadamente 25% da ferragem e, partindo deste princípio, os pós-processadores nem sempre darão os melhores resultados.

O MEF ganha potencialidade quando o comportamento de uma estrutura é complexo, ou seja, quando ela apresenta uma distribuição não-linear de deformações ao longo da seção transversal. Nestes elementos, não se pode desprezar as deformações provocadas pela força cortante e, conseqüentemente, a “Hipótese de Bernoulli” não pode ser aplicada.

Nesse caso, a hipótese anterior, de posicionar os elementos principais no centro de gravidade dos diagramas de tensão é bastante razoável, fornecendo um critério racional para o calculista. No entanto, a experiência do engenheiro de estruturas com o método é fator fundamental para o sucesso em projetos que envolvam o dimensionamento de geometrias complexas.

Figueiras (1999), por exemplo, apresenta algumas aplicações práticas utilizando os recursos de análise não-linear disponíveis no MEF. De acordo com o pesquisador, este tipo de análise é bastante justificável em casos onde não exista ainda experiência suficiente adquirida ou quando a importância da obra justificar.

Ainda de acordo com o pesquisador, o estudo das causas de deterioração e a verificação de segurança de estruturas reforçadas são outros dos campos de aplicação prática do Método dos Elementos Finitos e da análise não-linear.

Foster (1998) recomenda que os resultados numéricos sejam analisados com extremo cuidado e sugere também que quase sempre tais resultados devem ser vistos com ceticismo, principalmente quando detalhando estruturas com comportamento complexo, tais como as especiais de concreto.

No presente trabalho, procurou-se utilizar o programa comercial DIANA, que é baseado no Método dos Elementos Finitos, sendo um dos mais completos em termos de modelos constitutivos, critérios de ruptura e recursos para disposição das armaduras.

2 Metodologia

Para as modelagens foi utilizado o programa computacional DIANA 8.1. Como outros programas comerciais, um grande número de tipos de elementos está disponível para o usuário. O programa oferece uma grande variedade de elementos, tais como: vigas, sólidos, membranas, placas, cascas, etc., sendo que o usuário escolhe aquele que é mais adequado ao seu problema.

2.1 Vigas relatadas em Lopes (2005)

As vigas relatadas em Lopes (2005) foram modeladas com elementos finitos bidimensionais, simulando o estado plano de tensão. O elemento finito isoparamétrico CQ16M de 8 nós foi utilizado na representação do concreto que pode estar ou não reforçado com fibras metálicas. Este elemento é baseado na interpolação quadrática nas direções x e y e do 3º grau nas direções inclinadas e integração numérica de Gauss.

As vigas modeladas apresentam geometria e esquema de carregamento conforme Figura 2.1.

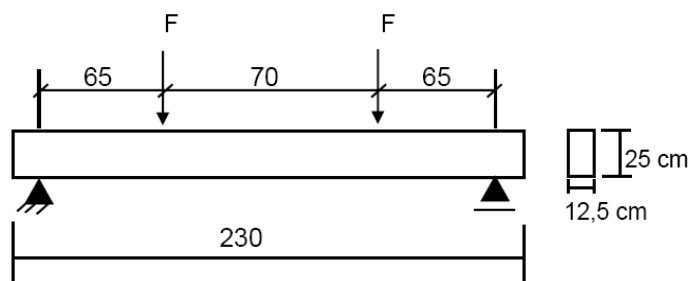


Figura 2.1 – Geometria e esquema de carregamento

Para a viga sem fibras, foi utilizada armadura longitudinal de 4 Φ 16 mm, enquanto que para a viga com fibras utilizou-se metade desta armadura, porém com acréscimo de 2% de fibras metálicas com fator de forma (l/d) igual a 64. Conforme Lopes (2005), a resistência à compressão do concreto com e sem fibras foi de 41,42 MPa e 64,22 MPa respectivamente. Para retratar o comportamento do concreto, foram utilizados os gráficos de Tensão x Deformação apresentados em Lopes (2005) para obtenção da energia

de fratura à compressão. Para a tração, a energia de fratura foi calculada segundo a recomendação do CEB (1990):

$$G_F^0 = 0,025 \left(\frac{f_c}{10} \right)^{0.7} \quad (2.1)$$

para viga sem fibra e com $f_c < 80$ MPa.

Para vigas com fibras, a energia de fratura foi calculada conforme relatado em Barros (1995):

$$G_F = [19,953 + 10,506V_f] G_F^0 \quad (2.2)$$

A coesão do modelo de Drucker Prager foi calculada como:

$$c = \frac{f_{ct} \left(1 - \frac{f_{ct} - f_c}{f_{ct} + f_c} \right)}{2 \sqrt{1 - \left(\frac{f_{ct} - f_c}{f_{ct} + f_c} \right)^2}} \quad (2.3)$$

O seno do ângulo de dilatância e de fricção é dado pela expressão:

$$\text{sen} \phi = - \left(\frac{f_{ct} - f_c}{f_{ct} + f_c} \right) \quad (2.4)$$

Onde V_f é o volume de fibras, f_c é a resistência de compressão e f_{ct} a resistência de tração.

O coeficiente de Poisson para o concreto foi tomado igual a 0,15. O modelo reológico, utilizado para representar o aço apresenta comportamento elastoplástico perfeito com tensão de escoamento de 600 MPa, módulo de elasticidade de 200 GPa e coeficiente de poisson de 0,2. A aderência entre a armadura longitudinal de tração e o concreto é considerada perfeita. A malha utilizada para ambas as vigas é mostrada na Figura 2.2.

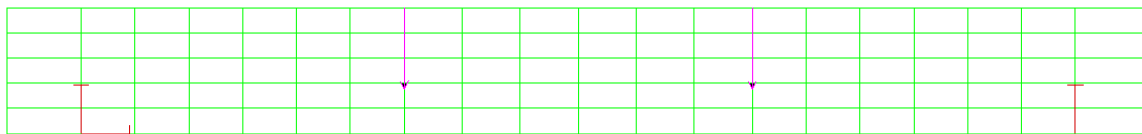


Figura 2.2 – Detalhe da malha utilizada para vigas com e sem fibras.

Para retratar o comportamento do concreto foi utilizado o conceito de materiais frágeis, com a utilização de tensões principais de Rankine e superfície de plastificação de Drucker-Prager.

2.2 Análise da sensibilidade do modelo

Para modelagem de prismas ensaiados por Nunes (2006), houve a necessidade de retro análise para se encontrar um diagrama bilinear que retratasse o comportamento a tração do concreto. Para o presente trabalho, verificou-se a necessidade de se avaliar a influência de cada variável no comportamento do gráfico $F - \epsilon$. Para tanto, foi feita uma análise da sensibilidade do modelo, variando uma variável por vez e deixando todas as outras fixas. Nota-se que, com isto, haverá alteração também da energia da fratura.

O valor de σ_1 foi tomado como:

$$\sigma_1 = 0.7 f_{ctm} \quad (2.5)$$

De acordo com este valor, calcularam os demais valores conforme expressões:

$$\sigma_2 = 0.15 \sigma_1 \quad (2.6)$$

$$\epsilon_3 = \frac{\alpha_f G_f}{\sigma_1 h} \quad (2.7)$$

$$\epsilon_2 = \frac{(2G_f - 0.15\alpha_f G_f)}{\sigma_1 h} \quad (2.8)$$

O gráfico genérico é mostrado conforme Figura 2.3

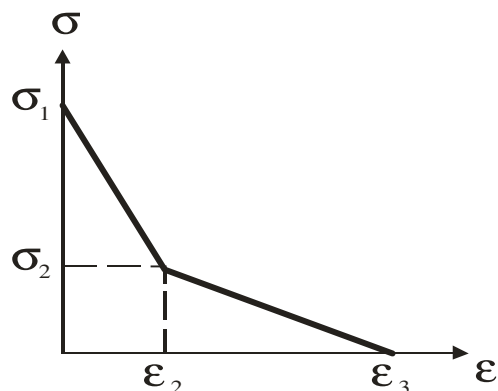


Figura 2.3 – Gráfico Tensão x Deformação genérico

2.2.1 Influência da tensão correspondente ao início da fissuração, σ_1

Geralmente, para a tensão de início de fissuração atribui-se o valor de resistência média à tração uniaxial, $f_{ctm,ax}$. Por sua vez, a RILEM (2003) propôs para determinação de σ_1 o valor obtido por intermédio da seguinte expressão:

$$\sigma_1 = 0.7 f_{ctm,fl} \quad (2.9)$$

Em que

$$f_{ctm,fl} = \frac{f_{ctm,ax}}{0.6} \quad (2.10)$$

No entanto, investigação prévia (Barros *et al*, 2004) revelou que σ_1 , obtido segundo (3.5), conduz a deficientes simulações numéricas, devendo-se adaptar, na generalidade, valores inferiores aos obtidos em (3.6). A análise de sensibilidade à influência de σ_1 na resposta $F - \delta$ efetuou-se variando-se este no seguinte intervalo:

$$0.3 f_{ctm,fl} < \sigma_1 < f_{ctm,fl} \quad (2.11)$$

Para os parâmetros restantes que representam o diagrama $\sigma - \epsilon$ são considerados os valores obtidos através de equações dadas pelo CEB.

A Figura 2.4 demonstra a influência de σ_1 na curva $F - \delta$. No eixo das ordenadas representa-se a força normalizada, isto é, dividida pela força máxima de pico atingida nas simulações apresentadas, que no caso é de 50,38 kN. Tal como esperado, aumentando-se o valor de σ_1 , aumenta-se a carga de pico. A capacidade de carga aumenta de forma mais significativa no trecho linear antes do pico.

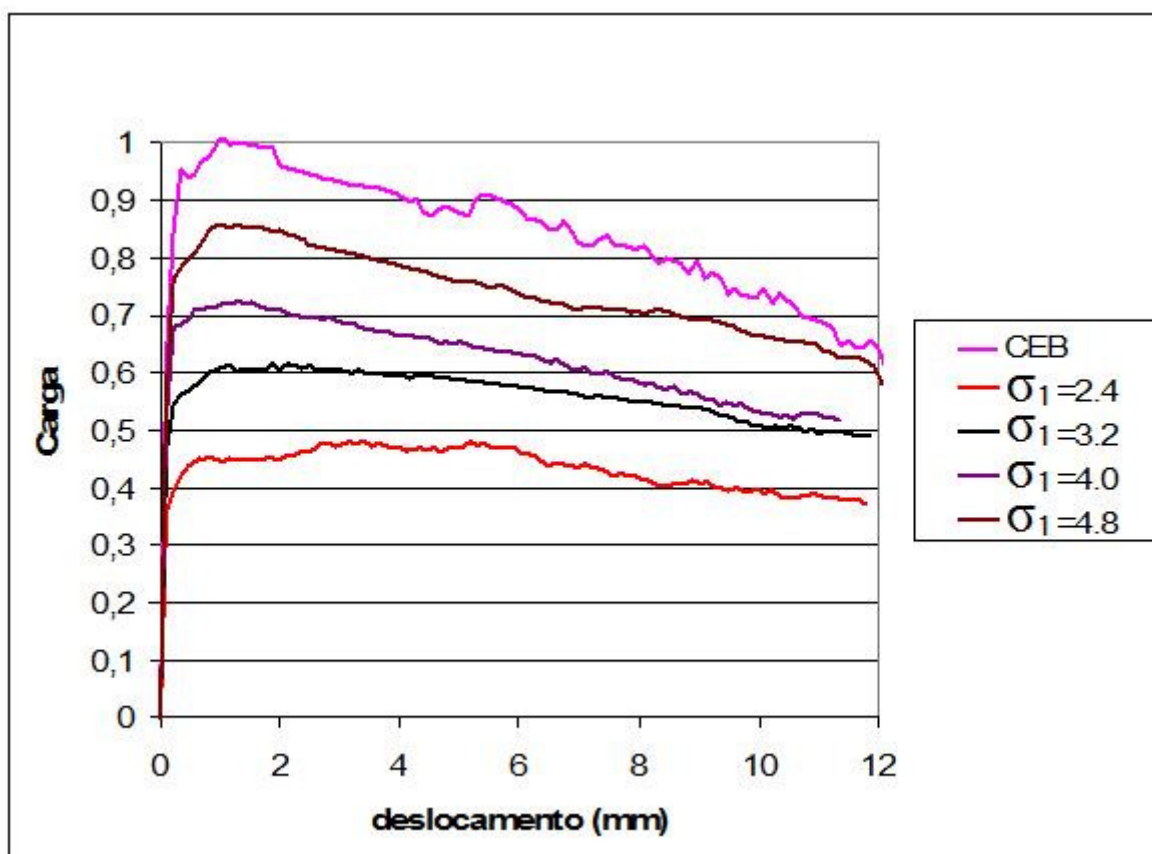


Figura 2.4 – Gráficos normalizados força x deslocamento no meio do vão para valores de σ_1 variável.

2.2.2 Influência de σ_2 e ϵ_2

Os parâmetros σ_2 e ϵ_2 definem o segundo ponto da lei bilinear. Os valores de σ_2 e ϵ_2 utilizados foram, respectivamente, dados pelos intervalos:

$$0,1\sigma_1 \leq \sigma_2 \leq 0,5\sigma_1 \quad (2.12)$$

$$0,1\epsilon_{2,CEB} \leq \epsilon_2 \leq 0,4\epsilon_{2,CEB}, \quad \epsilon_2 = 0,8\epsilon_{2,CEB} \text{ e } \epsilon_2 = 2\epsilon_{2,CEB} \quad (2.13)$$

onde $\epsilon_{2,CEB}$ é dada conforme expressão (3.8).

A influência dos valores dos parâmetros σ_2 e ε_2 na curva $F - \delta$ é representada na Figura 2.5 e na Figura 2.6, respectivamente. No que concerne à capacidade máxima de carga, verifica-se que, aumentando σ_2 de $0,1 \sigma_1$ para $0,5 \sigma_1$, pouco altera a carga de pico. Porém, na carga referente à flecha de 12mm há um aumento de 60%. Para a variável ε_2 , registrou-se um aumento de 10% na carga de pico quando ε_2 passa de $0,1 \varepsilon_{2,CEB}$ para $2\varepsilon_{2,CEB}$.

Da análise da Figura 2.5 observa-se que, à exceção da fase inicial elástica, a influência de σ_2 faz-se sentir até à flecha máxima considerada na presente análise. Para σ_2 igual a $0,5 \sigma_1$, observa-se um comportamento quase plástico, entrando em fase de ligeiro amolecimento somente após uma flecha da ordem de 2 mm.

Da análise da Figura 2.6 constata-se que aumentando ε_2 , a carga de pico, bem com a amplitude da fase não linear pré-pico aumentam. Além disto, verifica-se que logo após a carga de pico a redução da carga é tão mais acentuada quanto menor é o valor de ε_2 .

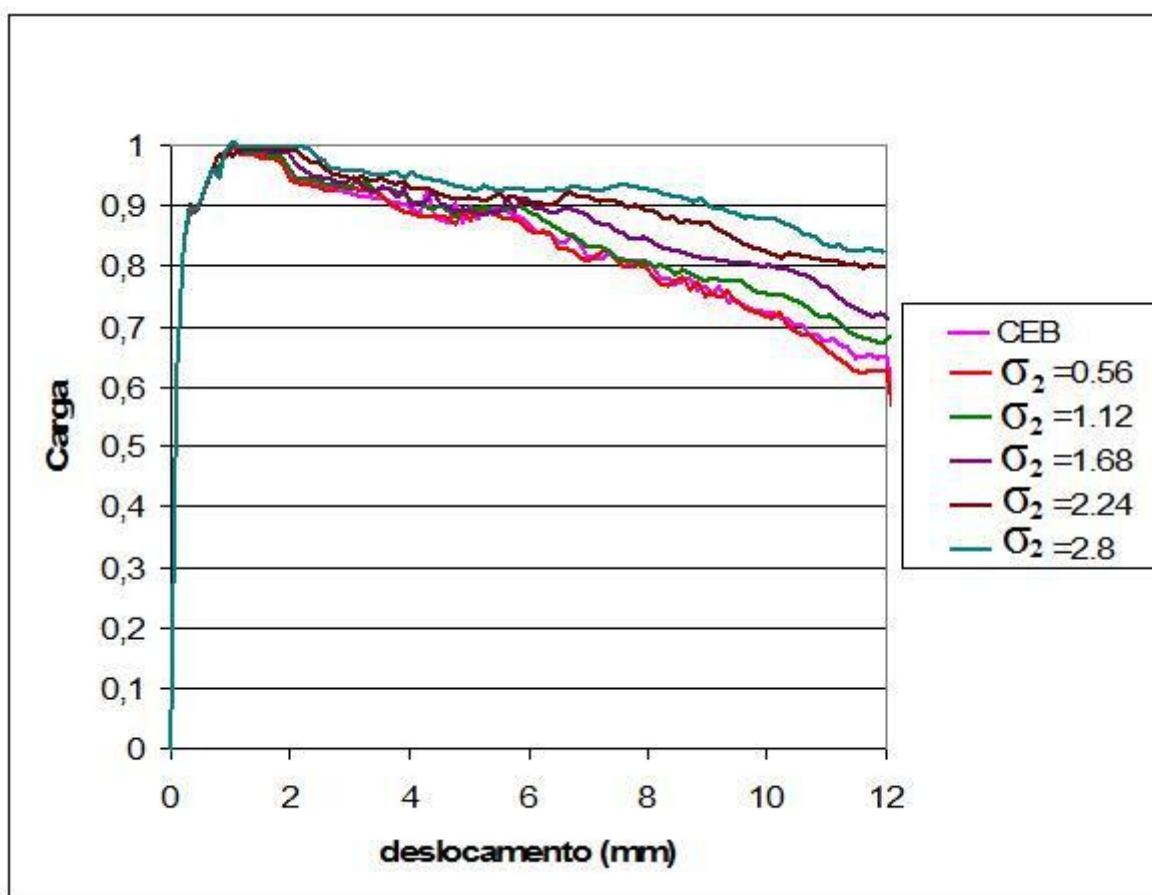


Figura 2.5 – Gráficos normalizados força x deslocamento no meio do vão para valores de σ_2 variável.

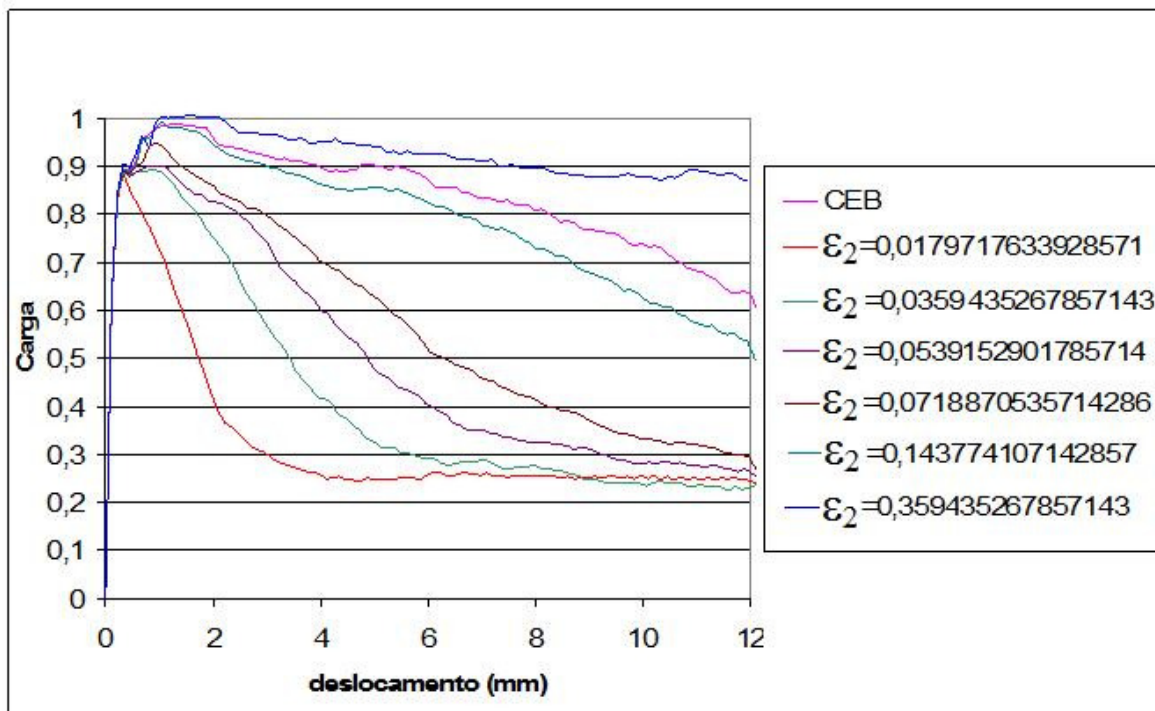


Figura 2.6 – Gráficos normalizados força x deslocamento no meio do vão para valores de ε_2 variável.

2.2.3 Influência de ε_3

O parâmetro ε_3 define o último ponto da lei bilinear. Uma vez excedido este valor de abertura de fenda, deixa de ser possível transferir tensões entre as faces da fenda, pelo que é nula a tensão de tração na zona onde se regista essa abertura.

Para avaliar a influência dos valores de ε_3 na reposta $F - \delta$, considera-se o seguinte intervalo de variação:

$$0.1\varepsilon_{3,CEB} \leq \varepsilon_3 \leq 0.4\varepsilon_{3,CEB}, \quad \varepsilon_3 = 0.8\varepsilon_{3,CEB} \quad \text{e} \quad \varepsilon_3 = 2\varepsilon_{3,CEB} \quad (2.14)$$

onde $\varepsilon_{2,CEB}$ é dada conforme expressão (3.7).

A Figura 2.7 representa a influência dos valores do parâmetro ε_3 na curva $F - \delta$. De fato, o valor de ε_3 pouco interferiu no caso analisado.

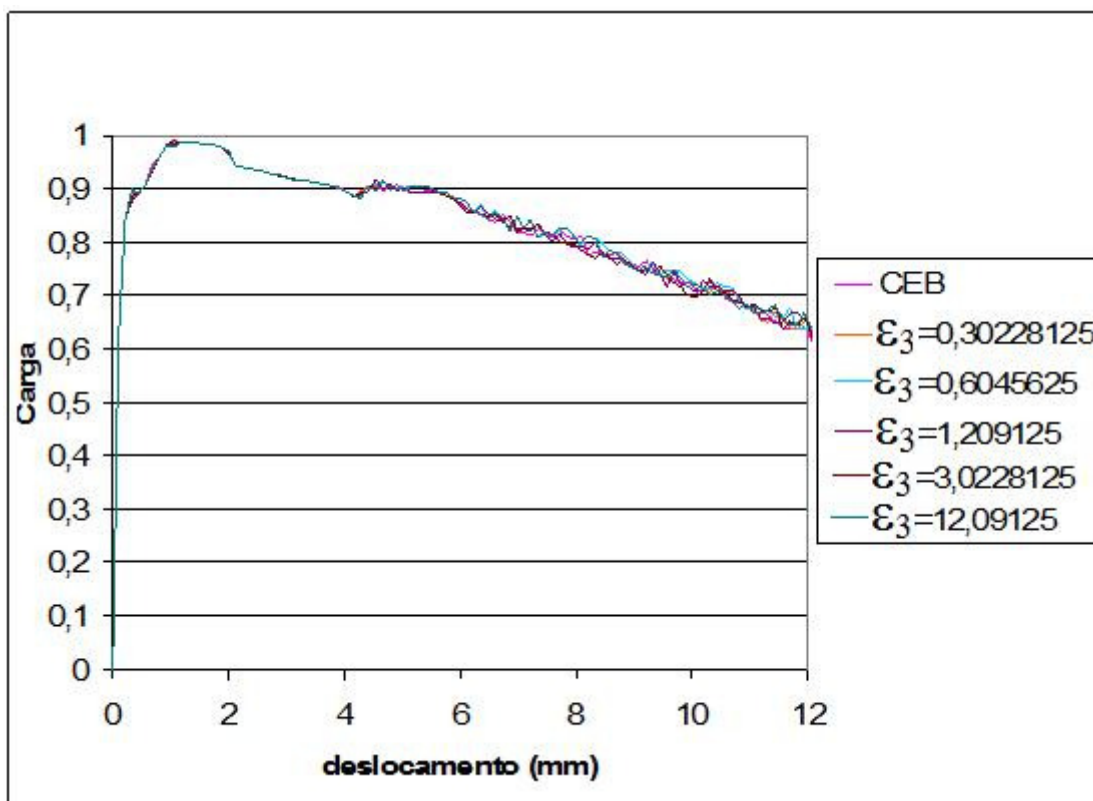


Figura 2.7 – Gráficos normalizados força x deslocamento no meio do vão para valores de ϵ_3 variável.

2.3 Prismas relatados em Nunes (2006)

Os prismas relatados em Nunes (2006) foram modelados com elementos finitos bidimensionais, simulando o estado plano de tensão, sendo que o material concreto pode estar ou não reforçado com fibras metálicas. Foi utilizado o elementos finitos isoparamétrico CQ16M de 8 nós.

Primeiramente, modelou-se o prisma utilizado no ensaio de tenacidade, comparando-se os resultados obtidos experimentalmente com os extraídos do programa computacional.

Foram modelados prismas sem armadura, com volume de 1% e 2% de fibras. A Figura 2.8 retrata a geometria e o carregamento utilizado na modelagem dos prismas.

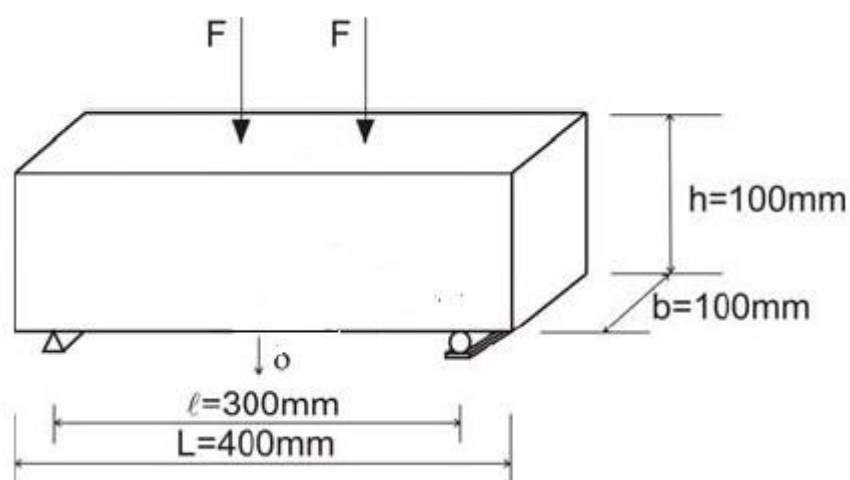


Figura 2.8 – Geometria e esquema de carregamento para prisma usado no ensaio de tenacidade.

A malha utilizada é retratada na Figura 2.9, onde foi modelada metade do prisma, devido a sua simetria.

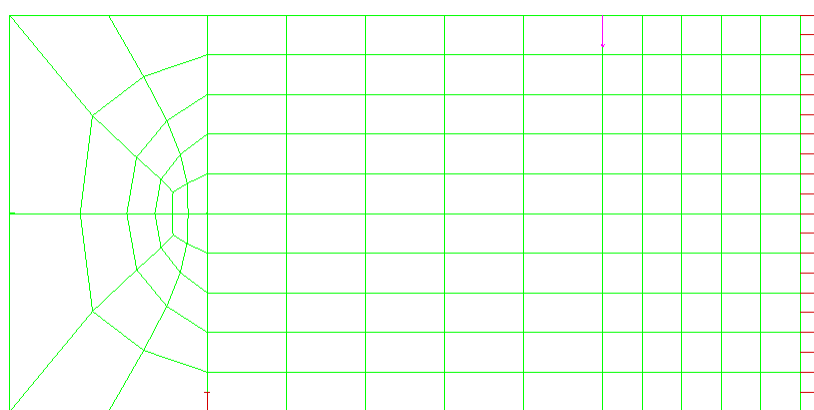


Figura 2.9 – Malha utilizada na modelagem do prisma usado no ensaio.

Alguns dados utilizados para modelagem foram extraídos do trabalho de Nunes (2006), sendo mostrados na Tabela 3.1.

Tabela 2.1 – Dados utilizados para modelagem dos prismas.

| % fibras | F_c (MPa) | F_{ctm} (MPa) | E_c (GPa) | G_f (N.m/m ²) | G_c (N.m/m ²) | ν |
|----------|----------------|--------------------|----------------|--------------------------------|--------------------------------|-------|
| 0 | 43,13 | 4,3 | 25,78 | 71 | 97 | 0,194 |
| 1 | 53,43 | 3,2 | 30,5 | 11380 | 334,5 | 0,2 |
| 2 | 56 | 4,5 | 33,75 | 13755 | 344,3 | 0,2 |

Este prisma foi modelado através de retro-análise por processo de tentativa e erro para obtenção da curva tensão x abertura de fissura à tração. Compararam-se os resultados obtidos com os experimentais através de uma aproximação. Utilizou-se este mesmo gráfico, que retrata o comportamento do concreto à tração para prismas com entalhe no meio do vão, como mostrado na Figura 2.10, e próximo ao apoio, conforme Figura 2.11.

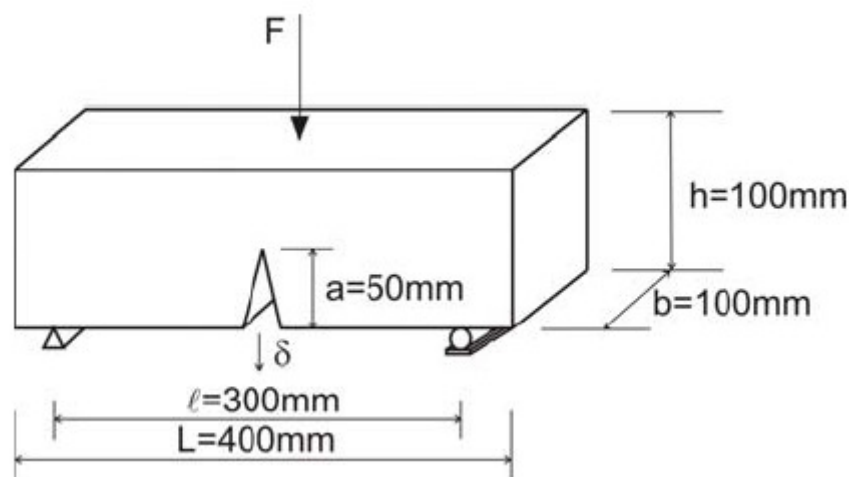


Figura 2.10 – Geometria e esquema de carregamento para prismas com entalhe no meio do vão.

No caso destes dois prismas, foram modelados sem fibras e posteriormente com volumes de 1% e 2% de fibras.

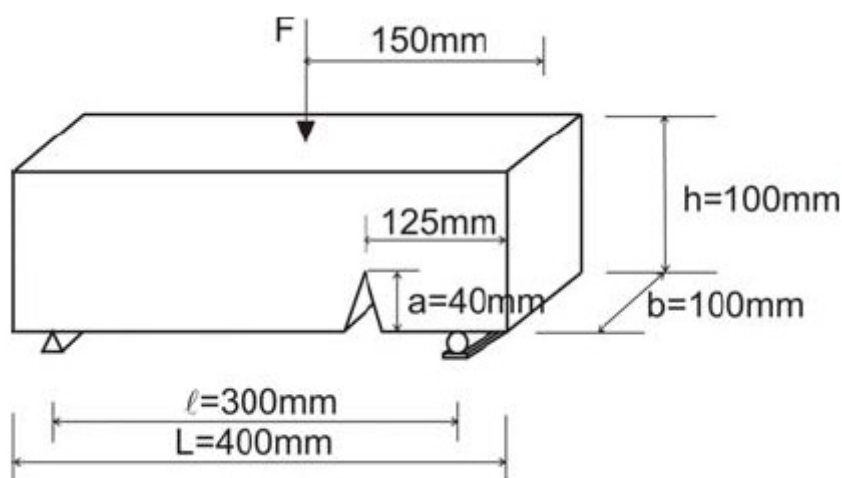
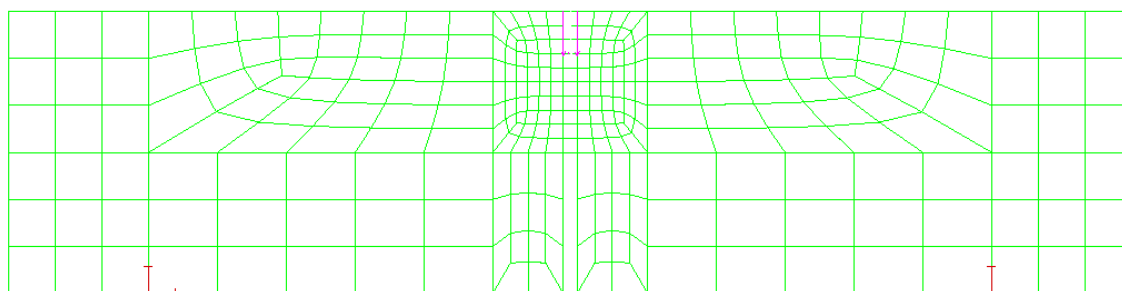
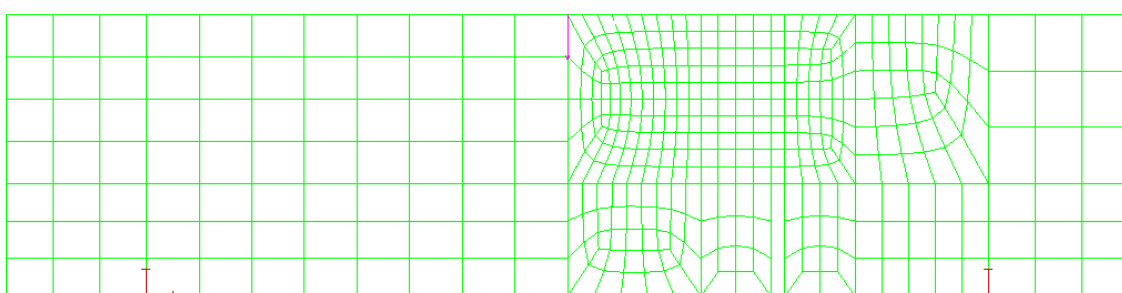


Figura 2.11 - Geometria e esquema de carregamento para prismas com entalhe próximo ao apoio.

As malhas utilizadas foram mais refinadas na região próxima ao entalhe, devido à concentração de tensões nesta região, mostrada na Figura 2.12.



a)



b)

Figura 2.12 – a) Malha utilizada para modelo com entalhe no meio do vão; b) Malha utilizada para modelo com entalhe próximo ao apoio.

Por fim, de posse dos gráficos bilineares tensão x deformação obtidos, esses foram comparados com os obtidos por equações exponenciais (Hordijk).

3 Análise de resultados

Os resultados das modelagens descritas no capítulo anterior serão discutidos aqui, onde se comparam os resultados experimentais obtidos por Lopes (2005) e Nunes (2006) com os numéricos respectivamente.

3.1 Modelagem das vigas de Lopes (2005)

A calibração do modelo numérico foi realizada comparando os resultados obtidos na modelagem com valores obtidos de ensaios. Segue na Figura 3.1 os gráficos Força x Deslocamento no meio do vão para as vigas analisadas.

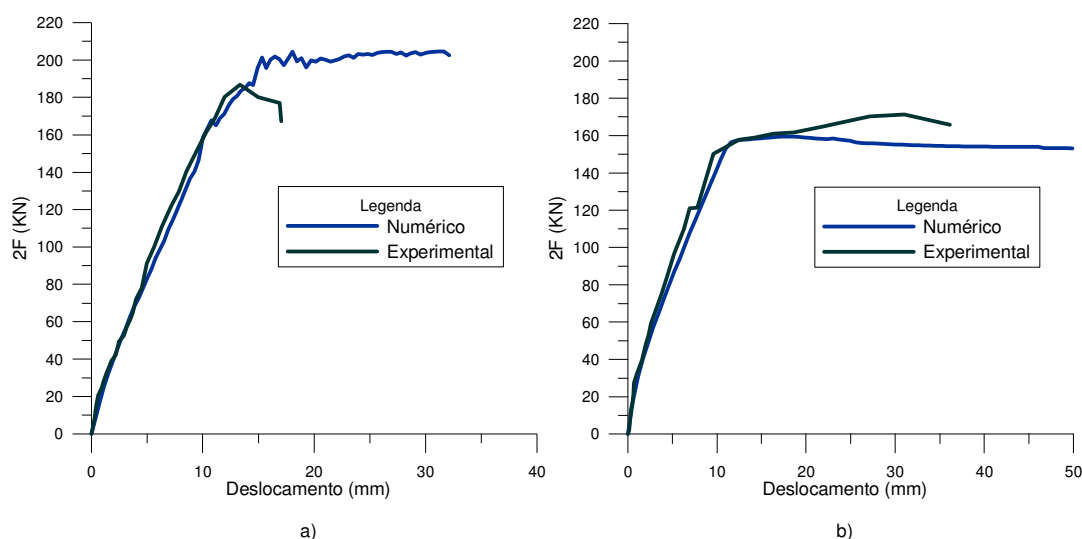


Figura 3.1– Gráfico Força x Deslocamento no meio do vão para: a) Viga sem fibras; b) Viga com fibras.

Nota-se que houve boa concordância entre os valores numéricos da curva força-deslocamento com os obtidos em Lopes (2005). Porém, no caso da viga sem fibras houve uma ruptura brusca, enquanto que na modelagem se formou um patamar sendo o deslocamento no momento da ruptura maior do que o experimental. Para o caso da viga com fibras, como com adição deste material se torna mais dúctil, houve uma melhor concordância dos resultados.

Pode-se constatar que em ambos os casos as cargas máximas obtidas numericamente foram próximas das experimentais.

Para se modelar o comportamento mais próximo do que ocorre com o material concreto, deve-se partir para análises utilizando as teorias de fissuração do mesmo, que serão abordadas nos itens abaixo.

3.2 Modelagem dos prismas sem fibras de Nunes (2006)

Primeiramente serão apresentados os resultados obtidos para prismas sem acréscimo de fibras, tanto com entalhe no meio do vão quanto para próximo ao apoio, para posteriormente apresentar os dados para volume de fibras igual a 1% e, por fim, 2%.

3.2.1 Modelo com entalhe no meio do vão

Modelou-se a princípio o prisma com entalhe no meio do vão, onde foi feita uma comparação dos resultados obtidos para o gráfico força x deslocamento. Utilizou-se equação exponencial para retratar o comportamento do concreto à tração e variou-se o parâmetro β , verificando a influência do mesmo no resultado. Ambos os resultados foram comparados com os obtidos experimentalmente, conforme mostrado na Figura 3.2.

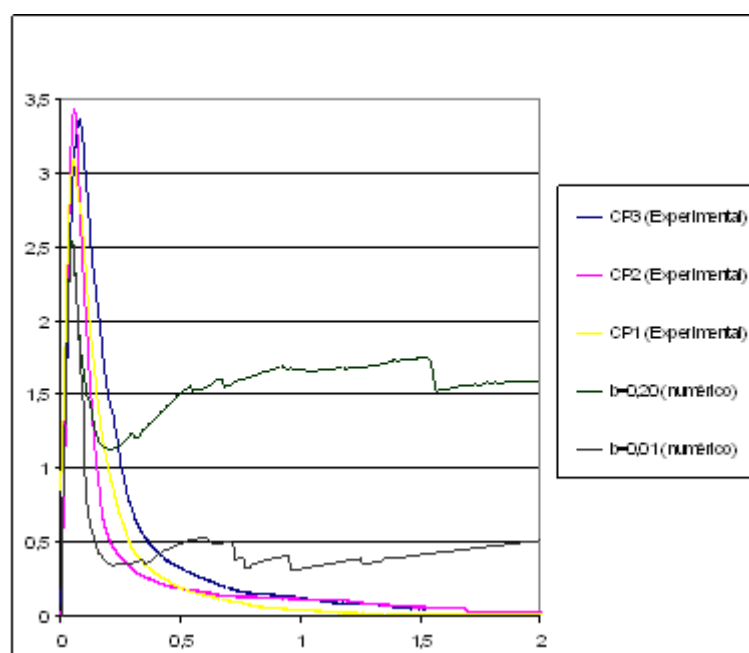


Figura 3.2 – Gráfico Força x deslocamento experimental e numérico com variação de β .

Nota-se que o resultado obtido com $\beta=0,01$ foi mais próximo dos experimentais, porém a força máxima resistente de ambas modelagens foram menores do que as experimentais. Portanto, o ideal seria aumentar a resistência do concreto à tração para verificar o valor de F_t que estaria retratando o comportamento do concreto. Porém esta modelagem teve o intuito apenas de se verificar a influência de β .

Posteriormente modelou-se o mesmo prisma com β variável. Nota-se que o resultado ficou mais próximo do comportamento experimental. Esse resultado era

esperado, já que, à medida que a fissura aumenta, o valor desta variável diminui, não sendo portanto um valor fixo. Pode-se constatar tal fato na Figura 3.3.

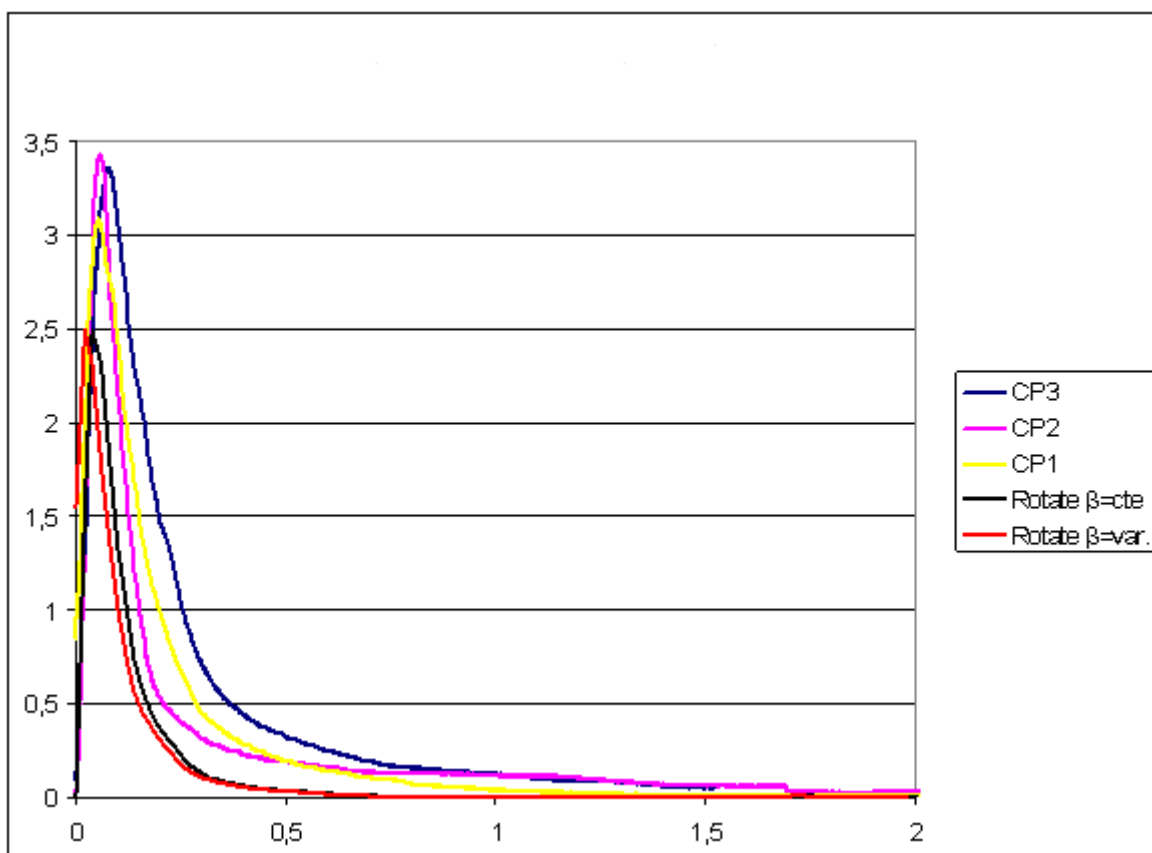


Figura 3.3 – Comparação entre os gráficos força x deslocamento no meio do vão obtidos numericamente com β fixo e variável, juntamente com os experimentais.

Através das equações dadas pelo CEB, chegou-se nos valores das tensões e aberturas de fissuras iniciais, que por retro-análise, através do método de tentativa e erro, chegou-se no gráfico tensão x abertura de fissura dado pela Figura 3.4.

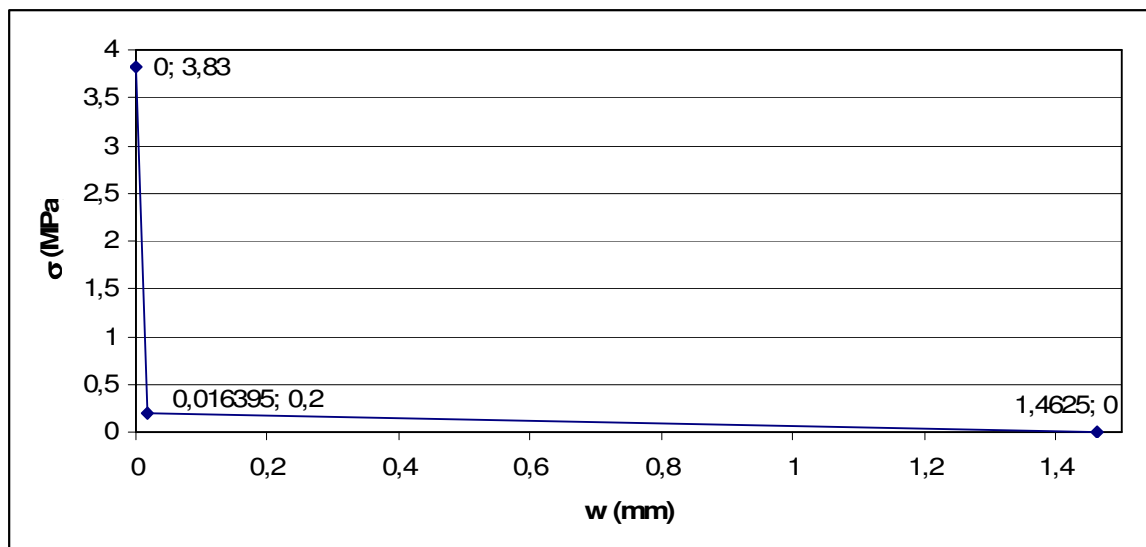


Figura 3.4 – Gráfico tensão x abertura de fissura para concreto sem fibra.

Os resultados obtidos se encontram na Figura 3.5, onde se pode comparar com os resultados experimentais.

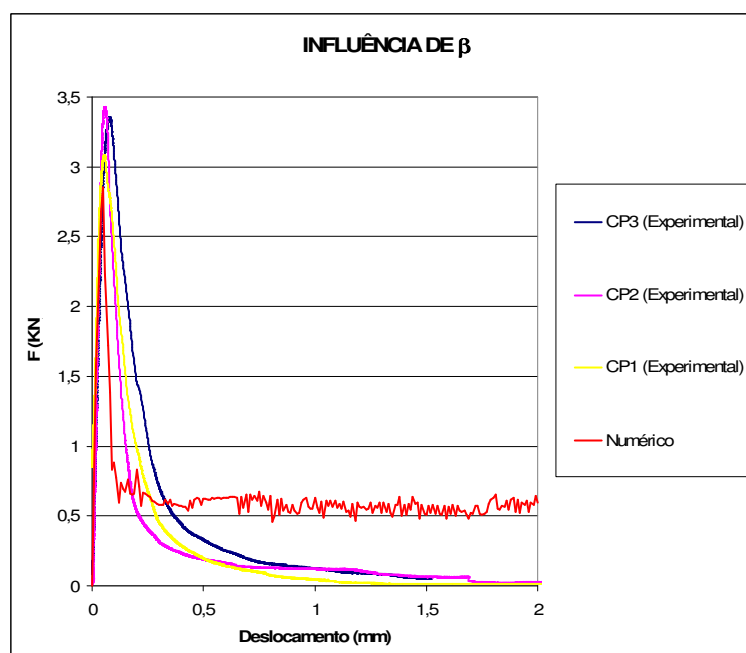


Figura 3.5 – Comparação entre resultados experimentais com numérico utilizando-se o gráfico bilinear.

Através deste modelo, numericamente obteve-se que a fissuração ocorrida no prisma se deu conforme a Figura 3.6 para o passo de carga de 50 de 200, ou seja, com aplicação de 25% do deslocamento máximo.

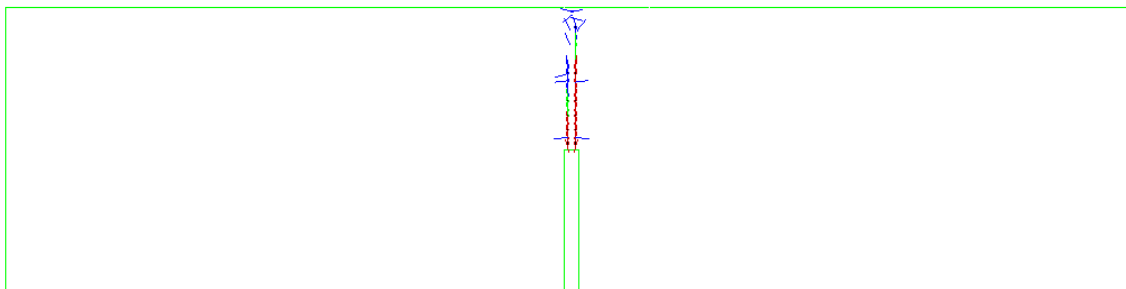


Figura 3.6 – Distribuição das trincas no prisma.

Nota-se que como previsto, a fissuração se deu na parte central do prisma, se dando em direção ao ponto de aplicação da carga. Isto se deve ao fato da concentração de tensões na ponta da trinca inicial, que na verdade nada mais é do que um entalhe proposital.

3.2.2 Modelo com entalhe próximo ao apoio.

No caso do prisma com entalhe próximo ao apoio, onde foi feita uma comparação dos resultados obtidos para o gráfico força x deslocamento, há uma mistura de modo I e II de fratura. Utilizando-se equação exponencial para retratar o comportamento do concreto à tração, variou-se o parâmetro β , verificando a influência do mesmo no resultado e comparando ambos com os obtidos experimentalmente, conforme demonstrado na Figura 3.7.

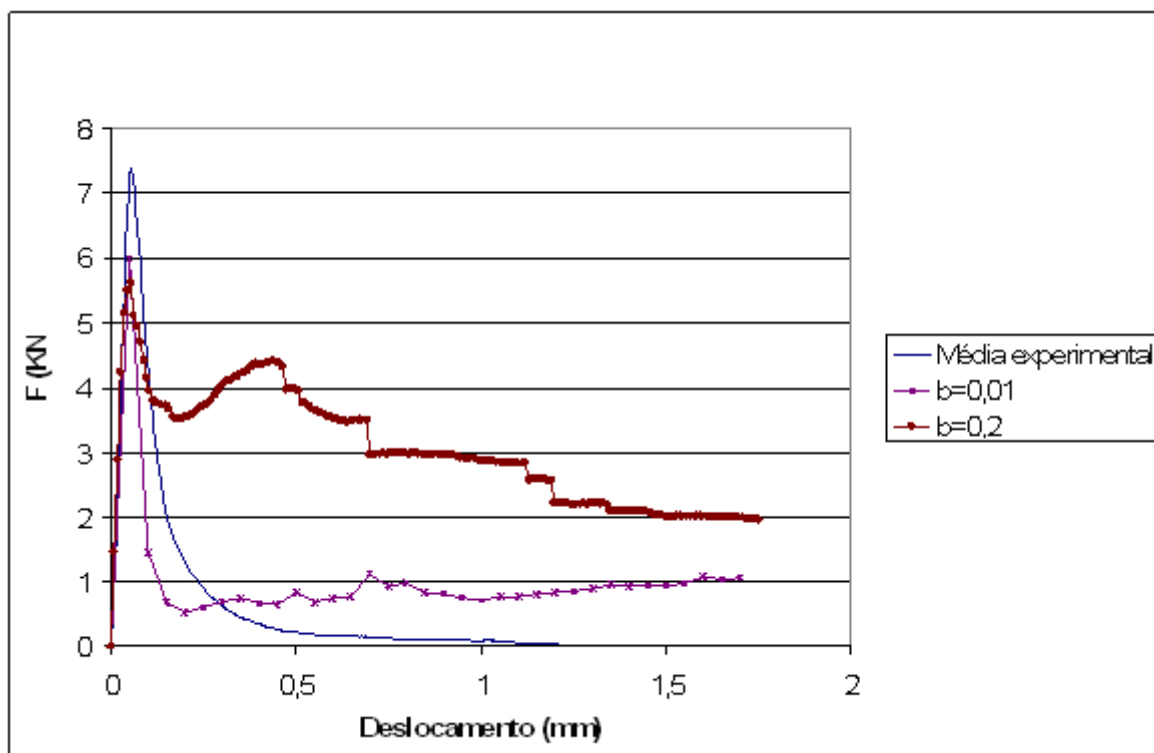


Figura 3.7 – Gráfico Força x deslocamento experimental e numérico com variação de β .

Nota-se que o resultado obtido com $\beta=0,01$ foi mais próximo dos experimentais. Porém, a força máxima resistente de ambas as modelagens foram menores do que as experimentais, assim como as obtidas para modelagem do prisma com entalhe no meio do vão. Portanto, o ideal seria aumentar a resistência do concreto à tração, como já dito anteriormente.

Posteriormente modelou-se o mesmo prisma com β variável acoplado à teoria Total Strain Rotating Crack. Nota-se que o resultado ficou mais próximo do comportamento experimental, como se esperava, e é demonstrado na Figura 3.8.

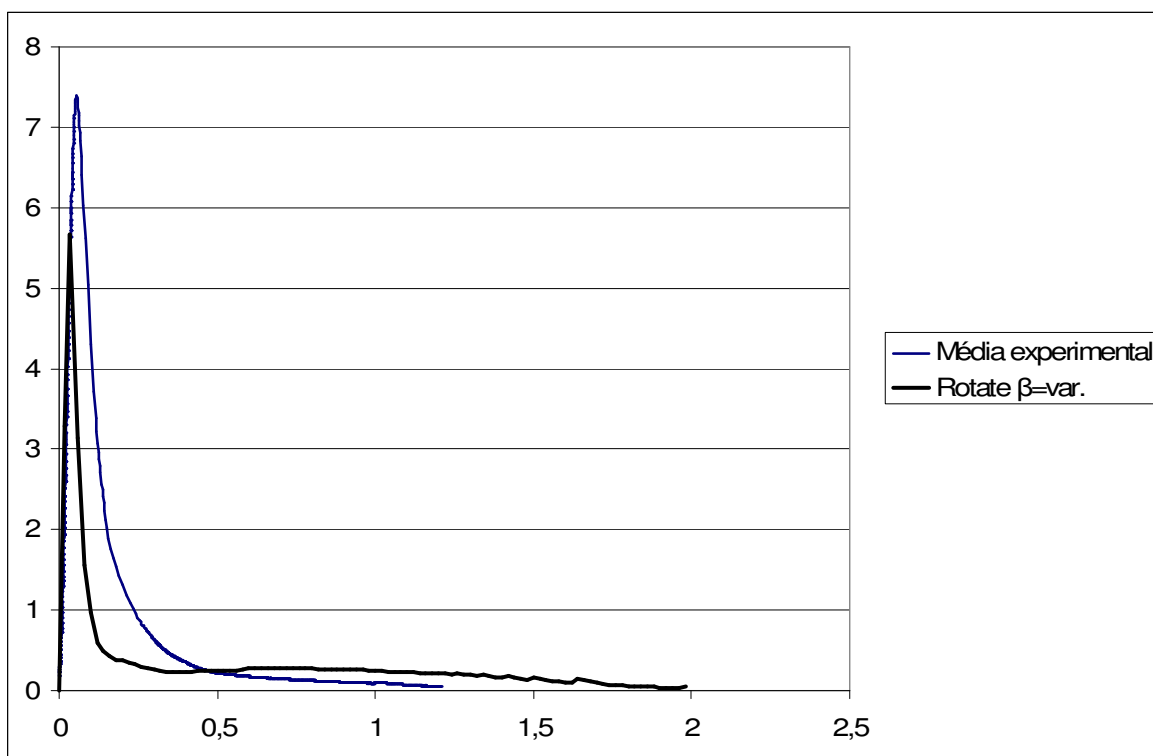


Figura 3.8 – Comparação entre os gráficos força x deslocamento no meio do vão obtidos numericamente com β fixo e variável, juntamente com os experimentais.

Da mesma forma feita para o prisma com entalhe no meio do vão, utilizou-se um valor para $\beta=0,001$ e gráfico bilinear da Figura 3.4 para representar o comportamento à tração do material. Os resultados obtidos se encontram na Figura 3.9, onde se pode comparar com os resultados experimentais.

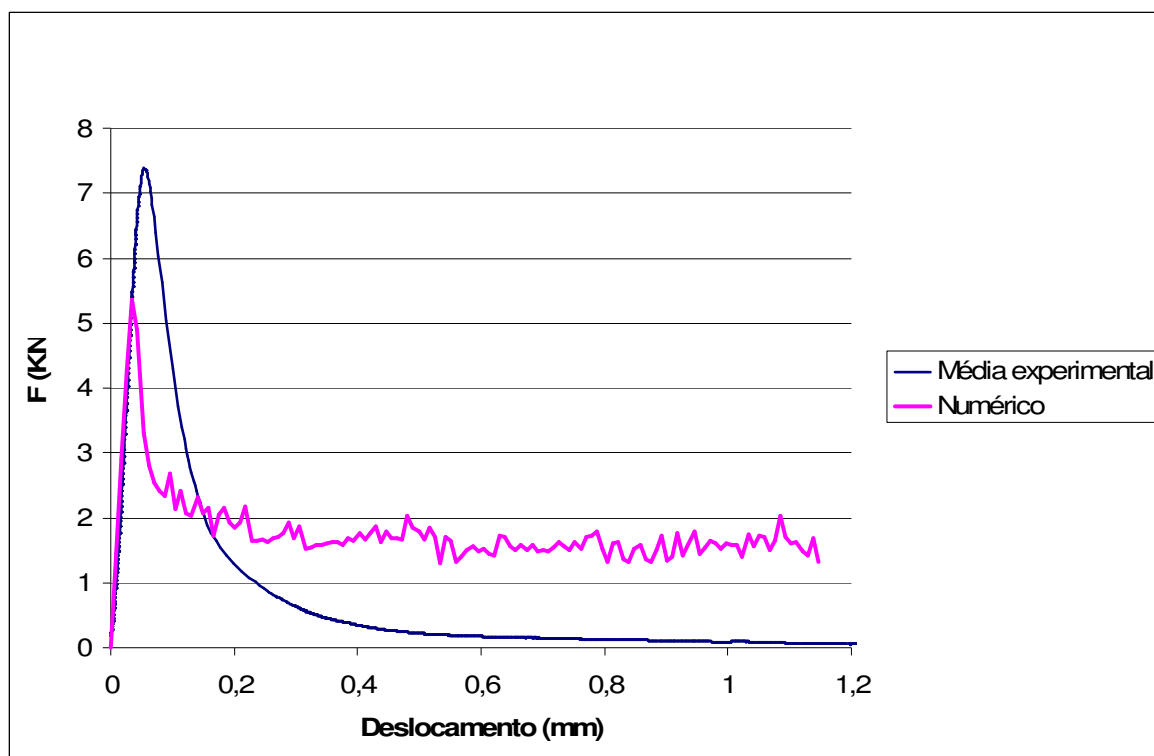


Figura 3.9 – Comparação entre resultados experimentais com numérico utilizando-se o gráfico bilinear.

Nota-se que não houve uma boa convergência, necessitando-se utilizar um maior número de passos de carga. Porém, como o processo de convergência se tornou mais difícil, necessitando aumentar a tolerância, optou-se por retratar este resultado. Através deste modelo, numericamente obteve-se que a fissuração ocorrida no prisma se deu conforme a Figura 3.10 para 50 passos de deslocamento, em um total de 200.

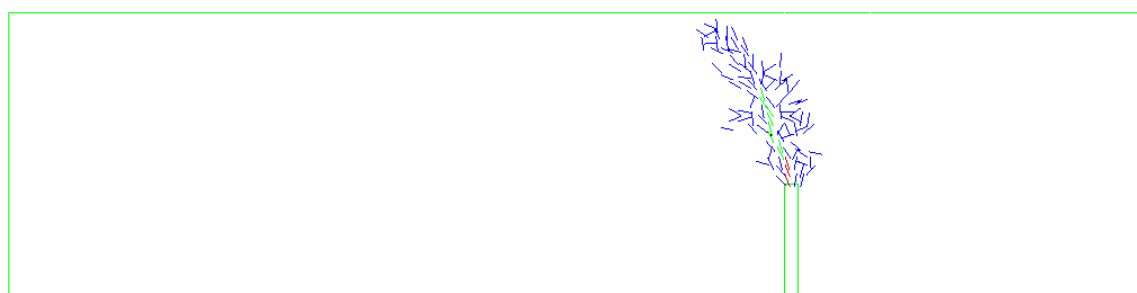


Figura 3.10 – Distribuição das trincas no prisma.

Nota-se que as fissuras ocorreram na diagonal, como se esperava, demonstrando o esforço cisalhante atuante. *Analizando a Figura 3.11*, em que é demonstrado por níveis de tensão σ_{xx} no mesmo passo de carga utilizado na obtenção do

mapeamento de fissuração, nota-se que o bloco de compressão é maior na região para a qual as fissuras estão se encaminhando, e não na região de aplicação da carga.



Figura 3.11 – Distribuição de tensões σ_{xx} .

3.3 Modelagem dos prismas com 1% de fibras de Nunes (2006)

Seguem são mostrados os resultados para prismas sem entalhe, com entalhe no meio do vão e próximo ao apoio respectivamente.

3.3.1 Prisma sem entalhe

Utilizou-se a princípio nesta modelagem o valor de β fixo e o gráfico bilinear que descreve a tensão x abertura de fissura do material (Figura 3.12). Este foi obtido através de retro-análise partindo-se dos valores obtidos através de expressões do CEB.

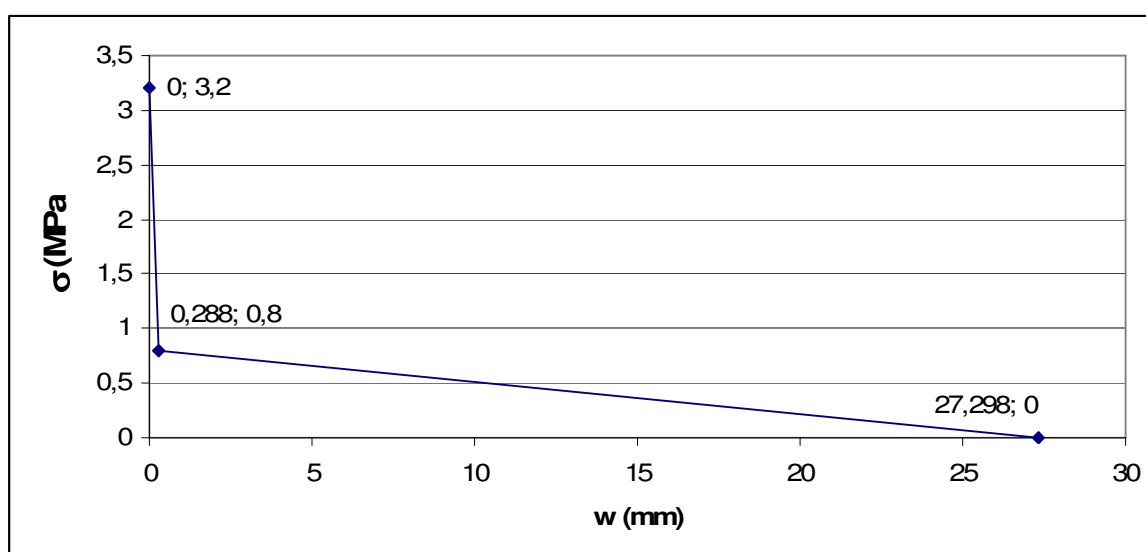


Figura 3.12 – Diagrama bilinear para concreto com volume de fibras de 1%.

Modelou-se para diversos valores de β , notando-se que seu valor pouco interferiu no resultado final. Na Figura 3.13 tem-se os gráficos experimental e numéricos obtido com β fixo combinado com o diagrama bilinear e β variável com diagrama exponencial de Hordijk.

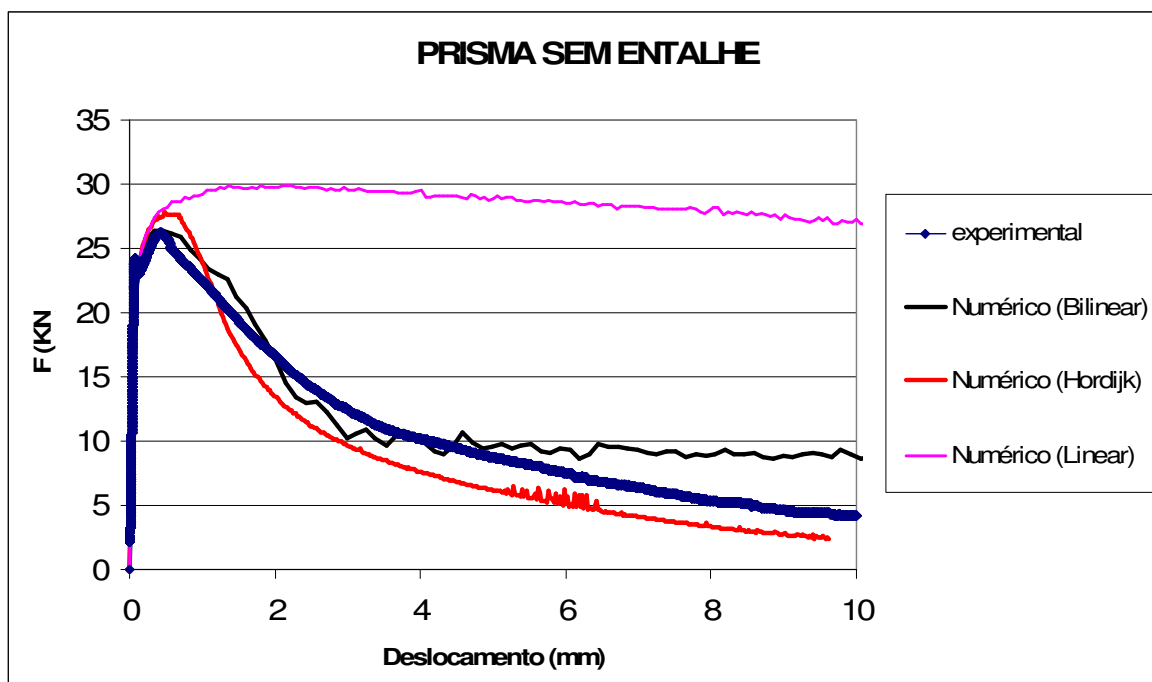


Figura 3.13 – Comparativo gráfico força x deslocamento numérico/experimental

Observa-se que as cargas máximas dos gráficos encontram-se próximas, sendo a maior obtida utilizando-se o gráfico linear, onde não se obteve um amolecimento que aproximasse o resultado numérico do experimental. No caso de se utilizar um valor fixo para β e diagrama bilinear para retratar o comportamento do concreto, o gráfico numérico passa a se distanciar do experimental à medida em que se crescem os deslocamentos. No caso da utilização de β variável combinado com o gráfico exponencial, o comportamento é mais próximo do experimental.

3.3.2 Prisma com entalhe no meio do vão

De posse do gráfico tensão x abertura de fissura obtido anteriormente para o prisma sem entalhe, utilizou-o para retratar o comportamento do concreto à tração para o modelo do prisma com entalhe no meio do vão. A Figura 3.14 retrata o resultado obtido.

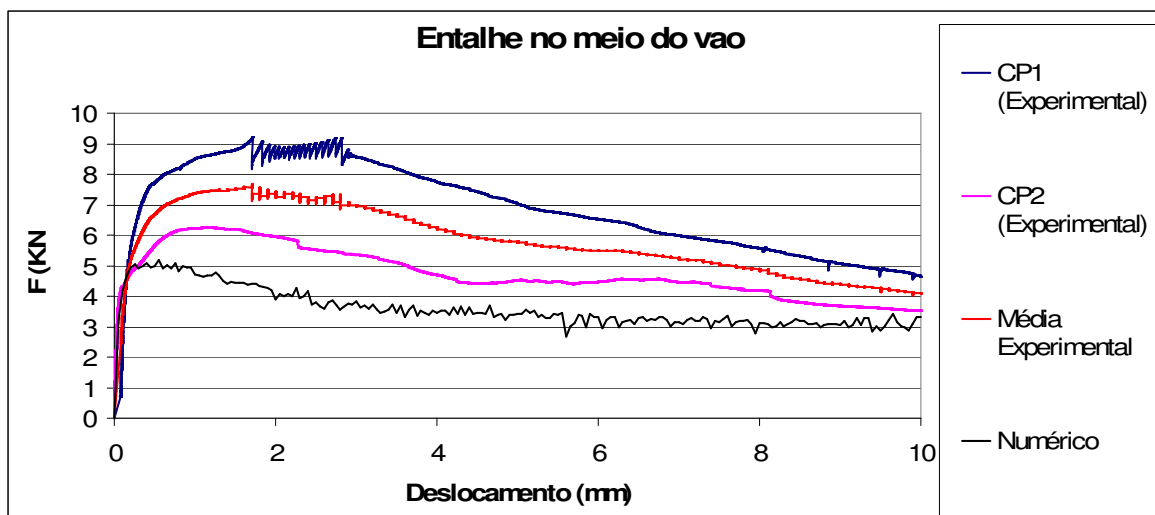


Figura 3.14 – Comparativo dos gráficos para prisma com 1% de fibras com entalhe no meio do vão.

Nota-se que o resultado numérico se encontra abaixo dos gráficos experimentais, porém com comportamento semelhante.

Na Figura 3.15 faz-se um comparativo do modo com que a fissuração ocorre experimentalmente e numericamente.



Figura 3.15 – Comparação entre o modo de fratura experimental e numérico.

Nota-se que a dispersão das fissuras é bem maior do que o demonstrado na Figura 3.6, com era esperado, já que as fibras costuram as fissuras. Portanto, neste caso as fissuras ocorrem em uma certa região e não somente sobre o entalhe.

3.3.3 Prisma com entalhe próximo ao apoio

Para este caso, os resultados obtidos utilizando-se o gráfico bilinear foi de difícil convergência, necessitando-se aumentar a tolerância, o que levou a resultados considerados ruins. Mesmo no caso de se utilizar o diagrama exponencial juntamente com

um β variável, como se mostra na Figura 3.16, nota-se que não houve boa convergência para uma tolerância no critério de deslocamento de 0,01. Porém, para tolerância de 0,0001, o resultado aproxima-se do experimental.

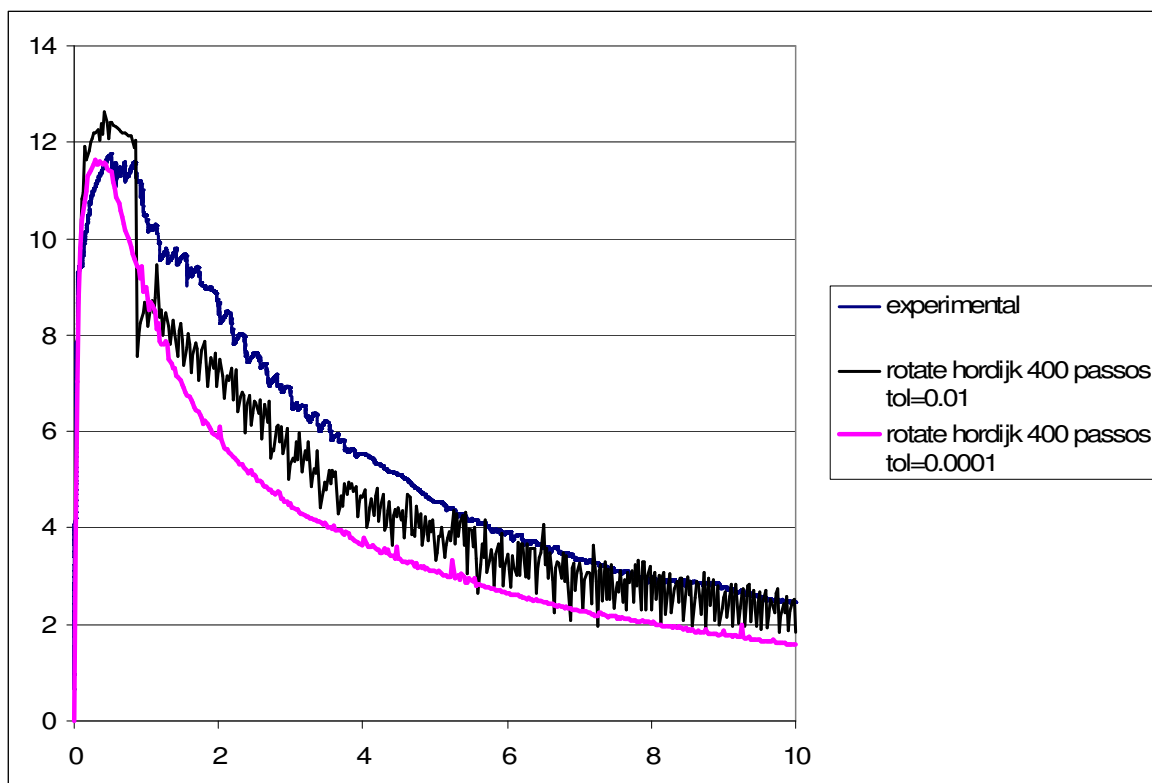


Figura 3.16 – Comparativo entre resultado experimental e numérico para prisma com entalhe próximo ao apoio com 1% de fibras.

Nota-se a importância da utilização de uma tolerância adequada para obtenção de melhores resultados. No caso acima, utilizou-se controle de deformações.

3.4 Modelagem dos prismas com 2% de fibras de Nunes (2006)

Por fim, modelaram-se os mesmos prismas já mencionados anteriormente, porém com 2% de volume de fibras. O gráfico bilinear utilizado é o mostrado na Figura 3.17.

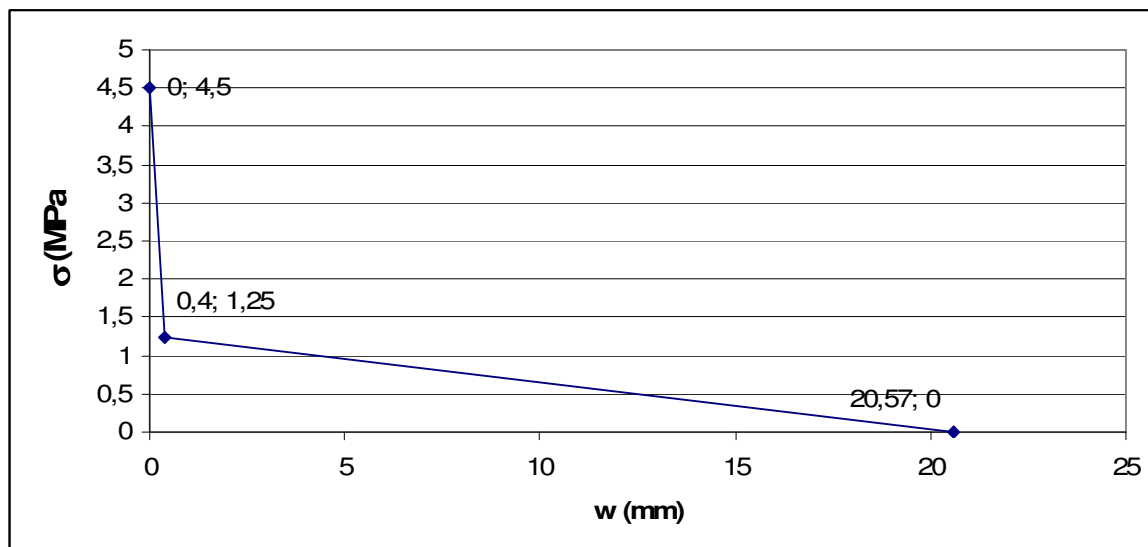


Figura 3.17 - Diagrama bilinear para concreto com volume de fibras de 2%.

3.4.1 Prisma sem entalhe

Do mesmo modo que aconteceu com o prisma com volume de fibras de 1 %, o gráfico numérico obtido com a utilização do diagrama bilinear passou a divergir dos resultados a partir de um deslocamento em torno de 5mm. Nota-se (Figura 3.18) que o resultado obtido com a utilização de equação exponencial teve um amolecimento maior para valores maiores de deformação do que o dado utilizando-se o diagrama bilinear.

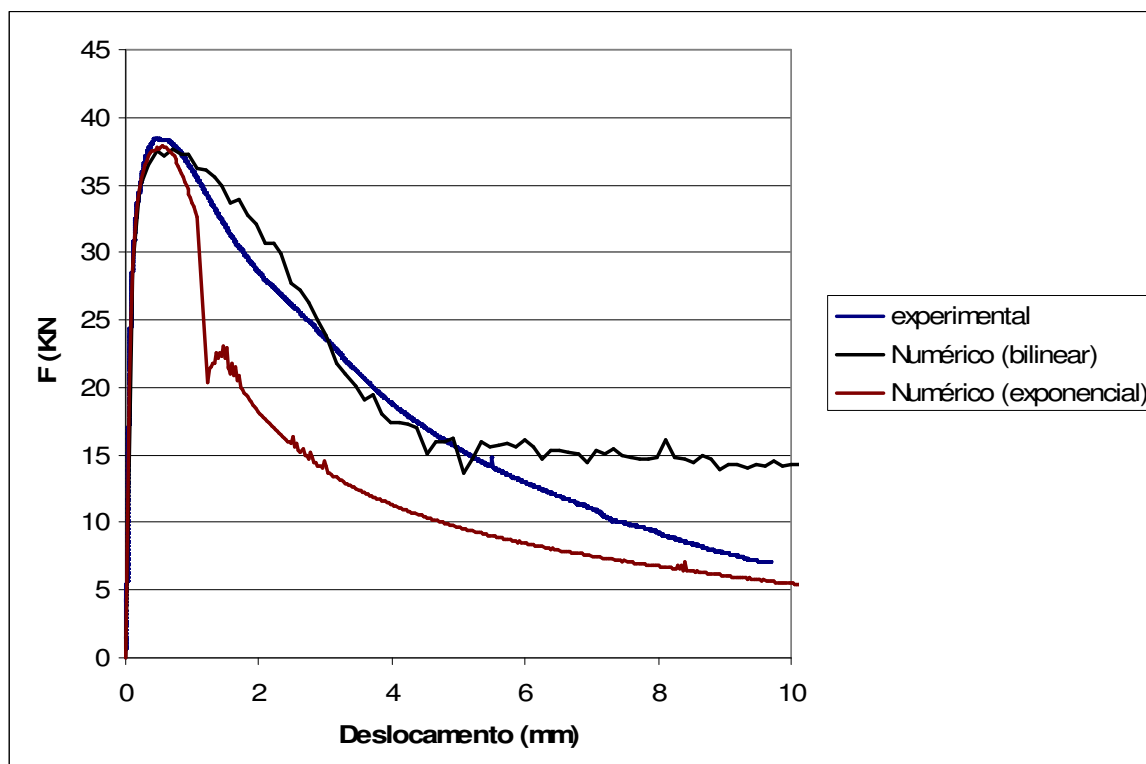


Figura 3.18 – Gráficos numéricos e experimental para prismas sem entalhe.

3.4.2 Prisma com entalhe no meio do vão

Conforme Figura 3.19, diferente do que ocorreu no caso deste mesmo prisma com volume de fibras de 1%, o diagrama numérico encontra-se entre o intervalo dos experimentais.

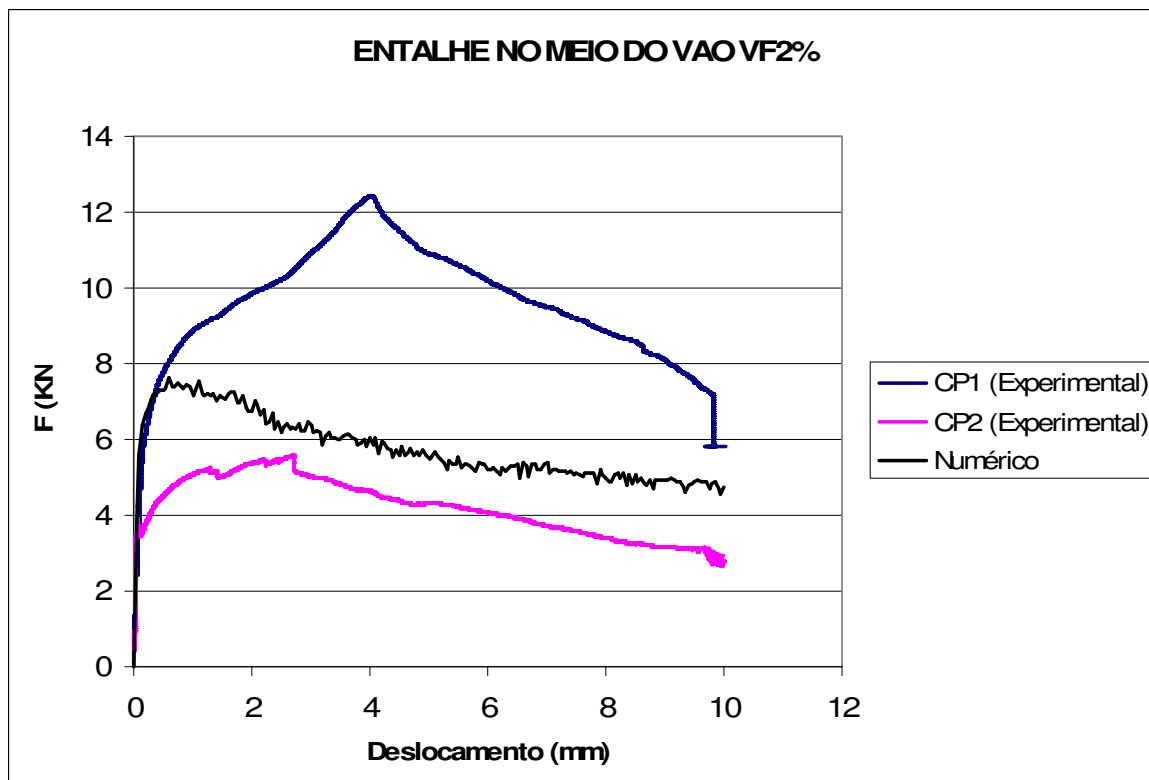


Figura 3.19– Gráficos numérico e experimental para prismas com entalhe no meio do vão.

Portanto, utilizando-se o mesmo diagrama bilinear usado para o prisma sem entalhe, já que o mesmo representa o comportamento do concreto à tração é influenciado pelo modelo, neste caso o resultado localizou-se dentro de uma envoltória de resultados obtidos experimentalmente, o que não ocorreu para o caso do volume de fibras de 1%.

3.4.3 Prisma com entalhe próximo ao apoio

Conforme pode ser constatado na Figura 3.20, houve grande dificuldade de convergência dos resultados. Tanto é verdade que não houve uma convergência na modelagem utilizando-se o diagrama bilinear, onde o processo foi interrompido no passo 39 de 200.

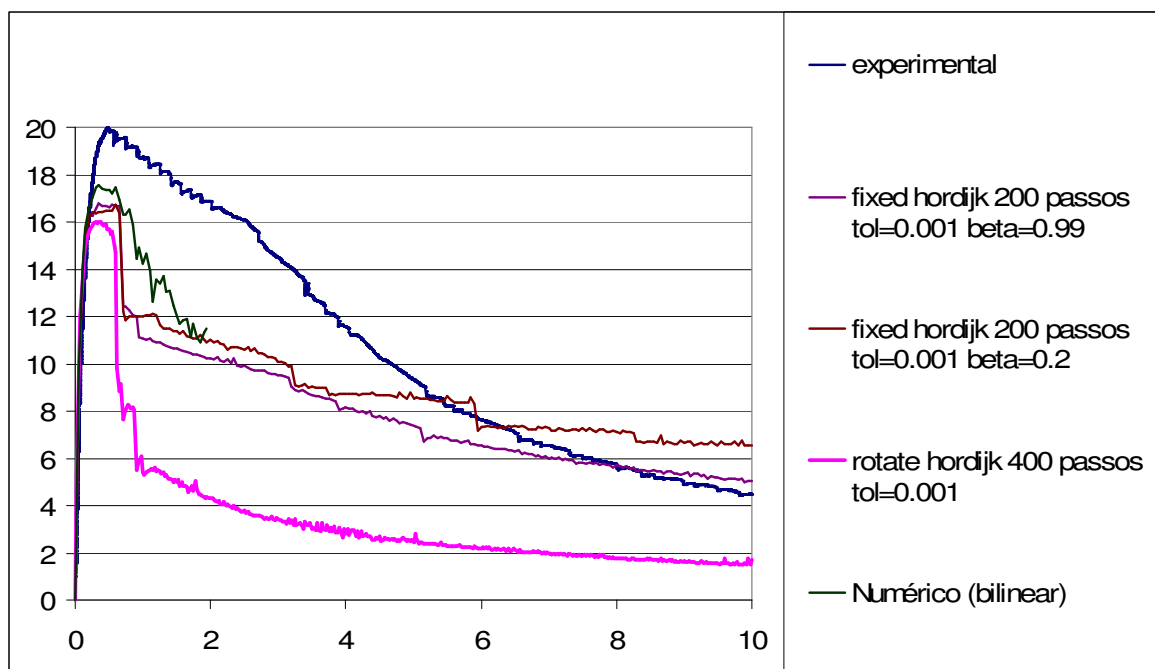


Figura 3.20 – Curva carga x deslocamento para prisma com entalhe próximo ao apoio com 2% de fibras.

Observa-se que os resultados obtidos numericamente possuem cargas máximas próximas entre eles, porém mais distante do experimental. Constatando-se, portanto, que o problema não é do diagrama bilinear.

Novamente variou-se o β e notou-se uma pequena mudança entre o comportamento destas curvas, o que ocorre de forma mais acentuada nos casos sem fibras, como já mencionado.

4 Conclusão

Foram utilizadas equações fornecidas na literatura para determinação da energia da fratura do concreto com fibras para as modelagens de Lopes (2005). Foram obtidas curvas força x deslocamento que se aproximaram de modo satisfatório das experimentais, validando a modelagem desenvolvida sem a necessidade de retro-análise.

No caso das modelagens dos prismas de Nunes (2006), como o ensaio experimental para obtenção do comportamento do concreto à tração é de difícil execução, é de suma importância que os mesmos sejam obtidos numericamente. Logo, optou-se por utilizar os diagramas bilineares, pois, segundo Bolzon et. al (2004), este diagrama é flexível o bastante para retratar os resultados experimentais de modo satisfatório. Houve, portanto a necessidade de se utilizar a retro-análise, de forma a se obter o diagrama bilinear que retrate o comportamento do concreto a tração.

No caso dos prismas sem adição de fibras, notou-se que utilizando-se o diagrama exponencial Hordijk para retratar o comportamento do concreto à tração, a carga máxima resistente obtida numericamente foi menor do que a obtida por Nunes (2006). No caso da variação do parâmetro β , notou-se que ele possui influência considerável no comportamento do gráfico força x deslocamento no meio do vão a partir de um certo ponto pós pico, e que a carga máxima resistente mantém-se praticamente constante para aumentos de deformações, formando-se um “patamar de escoamento”. Notou-se ainda que a influência do parâmetro β era maior para entalhes próximos ao apoio, como era de se esperar. Isto porque, nestes casos, há uma combinação dos modos I e II de fratura, onde o efeito de deslizamento entre as superfícies se tornam mais significativos.

Nos casos de prismas com fibras, a influência deste parâmetro é bem menor. Isto se deve ao fato de se ter elevadas energias. Com isso, o efeito de β tornou-se quase desprezível, influenciando muito pouco as respostas obtidas.

Ainda referente aos prismas com fibras, notou-se que utilizando-se o diagrama bilinear simulando comportamento de tração com o parâmetro β , constante ou variável, não se conseguiu valores próximos aos experimentais na parte final dos gráficos força x deslocamento. Porém, os resultados obtidos foram satisfatórios para valores de flechas até o valor em torno de 5mm. De acordo com as dimensões do prisma, esta deformação é

elevada. Portanto, entende-se que o diagrama bilinear pode ser utilizado futuramente para estruturas de concreto, pois grandes valores de deslocamentos inviabilizam a funcionalidade de estruturas.

No caso da utilização de diagramas exponenciais, a carga continuou diminuindo com o acréscimo de deformações, como nos resultados experimentais.

Porém constatou-se que estes diagramas divergiram dos valores experimentais para deslocamentos crescentes. Dessa forma, foram utilizadas as equações exponenciais para retratar tal comportamento.

As cargas máximas obtidas por ambos os diagramas têm valores próximos. Nos casos com entalhe, isto se deve à utilização de um mesmo valor para resistência à tração do concreto, já que o bloco de compressão é pequeno e o esforço predominante são tensões próximas à ponta da trinca, onde ocorre a fissuração do material, que portanto está sendo tracionado. Nos casos de prismas sem entalhe, deve-se também ao fato de se utilizar a mesma resistência à tração e os mesmos dados para retratar o comportamento a compressão.

Constatou-se que, para se definir um diagrama bilinear que represente o comportamento pós-pico de prismas de concreto com fibras, a resistência máxima à tração utilizada foi menor que a estabelecida pelas normas da ABNT e CEB, como constatado anteriormente por alguns pesquisadores, tal como Barros et al. (2004).

5 Sugestões para trabalhos futuros

Constatou-se neste trabalho que, para se encontrar valores mais próximos do comportamento real do concreto, deve-se utilizar um processo de otimização, dentre eles podendo-se citar o método dos mínimos quadrados, além de outros.

Sugere-se utilizar diagramas trilineares nas modelagens para comparar os resultados dados por estes com os obtidos através da utilização de diagramas lineares, bilineares, exponenciais, etc. Verificar como os resultados se comportam de um para o outro.

Outro aspecto seria aprofundar no estudo da convergência, principalmente dos resultados de prismas com entalhe, onde há grande concentração de tensões que dificultam

o processo de convergência. Seria interessante utilizar, portanto vários critérios e métodos de convergência, dos quais alguns foram citados neste trabalho, e comparar os resultados obtidos para um mesmo modelo, verificando qual o mais adequado para cada situação.

No caso de vigas, sugere-se estudar a influência do efeito escala, já que os corpos de prova utilizados para obtenção de fatores que retratam o comportamento do concreto são bem menores que as peças estruturais supracitadas. Como no presente trabalho constatou-se que os resultados obtidos para vigas não retrataram a realidade obtida experimentalmente, optou-se por estudar a influência do parâmetro β para os prismas modelados, além de alguns outros aspectos mencionados anteriormente.

6 Referências Bibliográficas

1. Aveston, J., Cooper, G. A. & Kelly, A. “Single and multiple fracture”. In Proceedings of NPL Conf. on the Properties of Fiber Composites, National Physical Laboratory, pp.15-26. London. 1971.
 2. BARROS, J. A. O. et al. Post cracking behaviour of steel fibre reinforced concrete. Rilem, 2004.
 3. BARROS, Joaquim Antonio Oliveira de. Comportamento do Betão Reforçado com fibras. 1995. 481 fl. Tese em Engenharia Civil - Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Portugal, 1995.
 4. Bazant, Z. P. and Oh, B. H., Crack Band. Theory Fracture of Concrete, Materials and Structures, (RILEM, Paris), v.16, pp.155 – 177,1983.
 5. CARMO, Luciano Caetano do. Ductilidade de vigas de concreto armado convencional e de alta resistência reforçadas com fibras metálicas: Análise via Método dos Elementos Finitos. 2005. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Universidade Federal de Goiás, UFG, Goiânia, 2005.
 6. COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BÉTON. CEB-FIP Model Code 1990. Bulletin d’information, n. 203. 1991.
 7. CRISFIELD, M. A. Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures, volume 2: Advanced Topics. John Wiley and Sons, 1997.
 8. CRISFIELD, M. A. Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures, volume 2: Advanced Topics. John Wiley and Sons, 1997.
 9. CRISFIELD, M.A. Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures, volume 1: Essentials. John Wiley and Sons, 1991.
 10. CRISFIELD, M.A. Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures, volume 1: Essentials. John Wiley and Sons, 1991.
-

11. de Borst, R, Nauta, P. (1985), “Non-orthogonal cracks in a smeared finite element model”, Engng. Computations. 2, 35-46.
 12. DIANA USER’S MANUAL Release 8.1. The Netherlands.: TNO Building and Construction Research, 2002.
 13. DIANA. 2003 User’s Manual, TNO Build and Construction Research, Delft, Nertherlands.
 14. GASTEBLED, Oliver J. e MAY, Ian M. Fracture Mechanics Model Applied to Shear Failure of Reinforced Concrete Beams without Stirrups. ACI Structural Journal, 2001.
 15. IRWIN, G. R. (1957) “Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate.” J. Appl. Mech-T. ASME, 24, 361-364.
 16. JENQ, Y. S. e SHAH S. P. Mixed-mode fracture of concrete. International Journal of fracture, 1988.
 17. KARIHALOO, Bhushan. Fracture Mechanics & Structural Concrete. New York, USA. 1995.Longman Scientific & Technical.
 18. LANDIS, E.N.; SHAH, S.P. 1995. "The Influence of Microcracking on the Mechanical Behavior of Cement Based Materials." Advanced Cement Based Materials. 2(3):105-118.
 19. LI, V. C. “Post crack scaling relations for fiber reinforced cementitious Composites”, ASCE Journal of Materials in Civil Engineering, v. 4, n.1, pp. 41-57, 1992.
 20. LOPES, L. E., Modelagem Mecânica e Numérica da Reação Álcali-Agregado com Aplicação a Barragens de Concreto, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, 2004.
 21. LOPES, Maira Moraes. Substituição parcial de armaduras de flexão em vigas de concreto. 2005. 130 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Rio de Janeiro, 2005.
 22. LOURENÇO, P. B. Métodos Computacionais Na Mecânica Dos Sólidos Não-Linear. Rel. Téc. Relatório 99-DEC/E-1, Universidade do Minho, Departamento de Engenharia Civil, Fevereiro, 1999.
-

23. LOURENÇO, P. B. Métodos Computacionais Na Mecânica Dos Sólidos Não-Linear. Rel. Téc. Relatório 99-DEC/E-1, Universidade do Minho, Departamento de Engenharia Civil, Fevereiro, 1999.
 24. NUNES, Fernanda Gabrielle Tibúrcio. Análise experimental de vigas de concreto reforçado com fibras de aço submetido a esforços de cisalhamento. 2006. 217 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Universidade Federal de Goiás, UFG.
 25. PLANAS, J. e ELICES, M. Size-Effect in Concrete Structures: Mathematical Approximations and experimental validation. Cracking and Damage: Strain Localization and Size-Effect. Ed, By J. Mazars e Z.P. Bazant, Elsevier, London. UK. Rots, J. G., and J. Blaauwendraad, “Crack Models for Concrete: Discrete or Smeared? Fixed, Multi-directional or Rotating?,” HERON, vol. 34, no.1, pp. 1–59, 1989.
 26. PROENÇA, Sergio Persival Baroncini. *Notas sobre análise não-linear física de estruturas*: Parte I: Teoria da plasticidade e técnicas numéricas. São Carlos, março de 1989. 136 p. Notas de aula.
 27. Rots, J. G., Blaauwendraad, J. (1989), Crack models for concrete: discrete or smeared? fixed, multi-directional or rotating?, Heron, 34 (1).
 28. VIKTOR, A. Pastoukhov; HERMAN, J. C. Voorwald. Introdução à Mecânica da Integridade Estrutural. São Paulo. Editora Unesp, 1995, 76 f.
 29. Wecharatana, M., Shah, S.P. “A Model for Predicting Fracture Resistance of Fiber Reinforced Concrete”, Cement and Concrete Research, v. 13, pp. 819-829, New Jersey, 1983.
-

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)