UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO-UFMT

WILLIAM VIEIRA GONÇALVES

UMA INVESTIGAÇÃO SOBRE A INTRODUÇÃO DO ESTUDO DO CONCEITO DE DERIVADAS ASSOCIADO AO CONCEITO DE VELOCIDADE INSTANTÂNEA PARA O ENSINO MÉDIO

CUIABÁ – MT
NOVEMBRO/2007

WILLIAM VIEIRA GONÇALVES

UMA INVESTIGAÇÃO SOBRE A INTRODUÇÃO DO ESTUDO DE DERIVADAS ASSOCIADO AO CONCEITO DE VELOCIDADE INSTANTÂNEA PARA O ENSINO MÉDIO

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Federal de Mato Grosso, como exigência parcial à obtenção do título de Mestre em Educação, na Área de Concentração: Teorias e Práticas Pedagógicas da Educação Escolar, Linha de Pesquisa: Educação em Ciências, sob orientação do Prof. Dr. Sérgio Roberto de Paulo.

CUIABÁ – MT
NOVEMBRO/2007

WILLIAM VIEIRA GONÇALVES

UMA INVESTIGAÇÃO SOBRE A INTRODUÇÃO DO ESTUDO DE DERIVADAS ASSOCIADO AO CONCEITO DE VELOCIDADE INSTANTÂNEA PARA O ENSINO MÉDIO

Banca examinadora

____
Prof. Dr. Vincenzo Bongiovanni - PUC-SP
Banca Examinadora Externa.

____
Profª. Drª Luzia A. Palaro – UFMT-MT
Banca Examinadora Interna.

____
Prof. Dr. Sérgio R. de Paulo - UFMT-MT
Banca Examinadora, Orientador.

____
Profª. Drª Gladys D. Wielewski - UFMT-MT
Banca Examinadora Interna (suplente)

Cuiabá, 12 de novembro de 2007.

GONÇALVES, William Vieira. Uma investigação sobre a introdução do estudo do conceito de derivadas associado ao conceito de velocidade instantânea para o ensino médio. 2007. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências) – Universidade Federal de Mato Grosso.

Resumo

Este trabalho tem como objetivo investigar de que forma poderíamos introduzir o conceito de diferenciabilidade para estudantes do Ensino Médio e se estes poderiam compreender os modelos matemáticos envolvidos. Elaboramos um estudo sobre as possibilidades do estudo de Taxa de Variação associada à compreensão do conceito de Velocidade Instantânea com os participantes de uma edição do Projeto Canoa, realizado no campus da UFMT de Cuiabá, no período de 12 a 29 de novembro de 2006. Este curso teve duração de 40 horas e foi organizado em dez encontros; a intenção do Projeto Canoa é possibilitar a experimentação de recursos, metodologias e reformulações do currículo de Ensino Médio no tocante a Educação em Ciências. As estratégias de ensino se deram com base na noção intuitiva de Limite, constituindo-se material didático que apresentasse as derivadas como sendo quocientes infinitesimais. Apresentamos textos com informações relativas a gráficos que expressavam o movimento de veículos em situações relacionadas ao cotidiano e exploramos a construção de retas tangentes a pontos das curvas como estratégia para aproximar as velocidades instantâneas. Tal proposta apoiou-se em softwares para compor estruturas visuais, enfocando-se a Geometria Dinâmica pelo CABRI GÉOMÈTRIE II, paralelo a construção e manipulação de gráficos cartesianos através do WINPLOT e composição de Mapas Conceituais utilizando o programa CMAP TOOLS para organização didática e verificação de aprendizagem. Utilizamos como referenciais teóricos o conceito de Matemática Qualitativa e a Teoria da Aprendizagem Significativa iniciada por David Ausubel. O foco da análise da aprendizagem dos estudantes está na construção de Mapas Conceituais construídos por alguns jovens e adolescentes do nível escolar médio acerca dos estudos realizados. Utilizamos tais instrumentos com o intuito de analisar as relações estabelecidas pelos aprendizes quando confrontados com o conceito de Diferenciação de Funções com uma Variável Real, limitando-se as Funções Polinomiais e/ou racionais.

PALAVRAS-CHAVE: Educação em Ciências; Matemática Qualitativa; Ensino de Derivadas; Aprendizagem Significativa; Mapas Conceituais; Informática Educativa.

GONÇALVES, William Vieira. A research on the introduction of the study of the differential concept associate with speed instant teaching concept in the high school. Dissertation (Masters on Education in Sciences) – Federal University of Mato Grosso.

ABSTRACT

This paper has as its goal to investigate how we could introduce the differential equations to high school students and how these students could understand the mathematical models involved. We elaborated an investigation about the possibilities of studying the Variation Rates associated to the comprehension of the concept of Instantaneous velocity with high school students who took part in one the editions of the Canoa Project, which took place at the UFMT campus in Cuiabá-MT, between the 12th and the 25th of November, 2006. This is a 40 hours long course and it was divided into 10 (ten) meeting sessions; the intention of the Canoa Project is to create the opportunity of resources and methodologies experimentations and also the reformulation of the high school curriculum concerning the Education of Sciences. The teaching strategies were based on the intuitive notion of limit, consisting didactical material that presented the derivatives as being infinitesimal quotients. We presented texts with related information and graphics which expressed the movement of vehicles in day-by-day situations and by creating tangent straight lines we determine the instantaneous speeds. Such proposal was based on free software which we have used to compose the visual structures, focusing on the Dynamic Geometry by CABRI GEOMETRIE II, paralleling to the construction and manipulation of Cartesian graphics through WINPLOT and the composition of conceptual maps using the CMAP TOOLS program to provide the didactical organization and learning verification. We have used as theoretical references the concept of Qualitative Mathematics and the Significant Learning Theory started by David Ausubel. The focus of the learning analyzes of the apprentices is placed on the construction of conceptual maps which were built by ten students. We have used those instruments in order to analyze the relations established by the students when we opposed them with the concept of Differentiation of functions with a real variant.

KEYWORDS: Education in Sciences; Qualitative Mathematics; Significative Learning; Conceptual Maps; Technology Information.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

INTRODUÇÃO

Considerando que este trabalho pretende colaborar com a discussão dos processos de aprendizagem de conhecimentos relativos às Ciências Naturais e Matemática, julgamos pertinente registrar as concepções iniciais que motivaram nossas reflexões sobre a educação escolar formal nesta grande Área e algumas de suas relações com a sociedade.

Acreditamos que a educação moderna considera a teoria da experiência como parte da base de sua filosofia, continuando o estudo e a pesquisa de suas formas de aplicação. Acrescentamos a referência à escola progressiva, como registro histórico do período inicial de implantação das novas concepções, que vêm transformando a escola e fazendo da educação, em nosso século, uma educação em mudança permanente, em permanente reconstrução, buscando incessantemente reajustar-se ao meio dinâmico da vida moderna, pelo desenvolvimento interno de suas próprias forças melhor analisadas, bem como pela tendência de acompanhar a vida em todas as suas manifestações.

Entre a medicina de Hipócrates (Cós, 460 a.C. – Tessália, 377 a.C.) e Galeno (Pérgamo, c. 131 - provavelmente Sicília, c. 200) e a medicina moderna, há para quem buscar um ponto de vista bastante elevado, seqüências e harmonias irrefutáveis. Nem por isso, entretanto, buscamos reviver os métodos errôneos ou empíricos daqueles primeiros tempos. Pois existe tanto uma nova educação quanto uma nova medicina ou uma nova engenharia.

Em todos os tempos o homem se esforçou para curar e se esforçou para construir. Mas, dia após dia, transformaram-se os recursos e os instrumentos levando a medicina e a engenharia a se renovarem como se vai renovando a educação. Renovam-se nos seus meios e, por intermédio dos meios, nos próprios fins. Porque de fato, fins e meios não se distinguem senão mentalmente.

Deste modo não são propriamente os fins que se renovam, mas os nossos recursos de conhecê-los, aprofundá-los e esclarecê-los. A engenharia moderna tem fins diferentes da engenharia primitiva. As pontes que se constroem hoje, ou as cidades e os edifícios que se erguem pelo mundo, não podiam sequer ser imaginadas pelos antigos. O desenvolvimento técnico da engenharia permitiu ao homem reconstruir os seus fins e realizar as maravilhas dos nossos tempos.

Na educação, o problema de reconstrução escolar não pode ser visto com essa objetividade, porque o desenvolvimento das ciências que nos vêm emancipando da rotina, do improvisado e do acidental é tão recente e tão incompleto que não pôde, ainda, conciliar todas as inteligências. As divergências são inevitáveis, como as confusões, as expectativas exageradas, os entusiasmos e os desânimos, as audácias e os temores, as alas direita e esquerda de uma transformação inevitável, mas de que não se têm ainda os elementos integrais para definir, em toda a amplitude, o objetivo e o alcance e traçar, com nitidez, os caminhos e os processos.

Transforma-se a sociedade nos seus aspectos econômicos e sociais, graças ao desenvolvimento da ciência, e com ela se transforma a escola, instituição fundamental que lhe serve, ao mesmo tempo, de base para sua estabilidade, como de ponto de apoio para a sua projeção.

A reorganização importa em nada menos do que trazer também, atualizações para a escola e suas propostas curriculares, de forma a considerar as evoluções dos modelos teóricos e instrumentos de pesquisa.

Em relação à Matemática, pode-se dizer que temos uma das ciências que mais auxilia o homem a desenvolver novas formas de saber. Praticamente não existe área do conhecimento humano que deixe de utilizar estruturas matemáticas nas suas concepções. Um dos exemplos mais modernos é o da informática, que por meio da seqüência de números binários apóia todos os campos de atividade humana, dos próprios cálculos matemáticos até aos editores de texto ou digitalizadores de sons. Mas a própria Matemática – ciência que estuda o raciocínio por símbolos, as quantidades, o espaço, e as relações entre as quantidades e espaço – também vem sendo influenciada pelo desenvolvimento da Informática é como esta se consolida cada vez mais como instrumento científico básico em todas as ciências. Pensamos que tal associação deva também progredir no contexto escolar.

Paralelamente, entendemos que a construção do conhecimento científico não se deu linearmente, continuamente e nem isoladamente em compartimentos que denominamos como *áreas;* questões internas da matemática estiveram no bojo das motivações e perspectivas de vários períodos históricos da Ciência, e não raramente, avançaram sua discussão em conjunto com outras questões que atualmente atribuímos a outras áreas do conhecimento. Vemos aqui a possibilidade que investigar o efeito das associações entre conceitos de diferentes disciplinas escolares e levantar discussões que venham a contribuir com a formação dos conhecimentos das Ciências Naturais e Matemática como grande área do saber científico.

Vejamos, uma questão premente do ensino de Física é a possível estagnação escolar nos modelos teóricos da Física Newtoniana, ignorando saltos conceituais como o que ocorre com a teoria da Relatividade Especial. Conjecturamos estabelecer possibilidades de estudo da mecânica Newtoniana até chegarmos a suas fronteiras e justificarmos a introdução de outras perspectivas teóricas. Desta forma, este avanço necessitará que os fenômenos físicos sejam estudados de forma menos idealizada do que eles o são no ensino tradicional. Conseqüentemente a compreensão dos fenômenos naturais através de modelos teóricos mais próximos da realidade, exigirá, por exemplo, a habilidade de lidar com Equações Diferenciais já que estas expressam de uma maneira geral os princípios básicos da natureza. As disciplinas Matemática e Física se apoiariam na estruturação dos conteúdos.

Pode parecer simples, mas não é. Discentes e docentes do Ensino Superior das Ciências Exatas e áreas correlatas, constatam que o estudo de Equações Diferenciais sucede os cursos de Cálculo Infinitesimal, que por si só, abrange um rol de conteúdo programático volumoso e demanda um bom tempo de sala de aula. No Ensino Médio já temos problemas para discutir os tópicos já presentes, portanto, é necessário reconhecer que a transposição didática das Equações Diferenciais para o Ensino Médio requer estratégias que aproveitem a estrutura curricular já existente e aperfeiçoe o tempo disponível, talvez no sentido de considerar as derivadas como Taxas de Variação Infinitesimal entre grandezas físicas, como por exemplo, o espaço e o tempo.

Neste panorama nosso estudo delimita-se a uma investigação sobre a introdução de derivadas no Ensino Médio. Cabe ressaltar que daremos especial atenção à interpretação geométrica da idéia de derivada de funções com uma variável real, limitando-nos às funções polinomiais e racionais haja vista que as mesmas modelam satisfatoriamente o espaço-tempo na perspectiva newtoniana e são mais familiares aos estudantes do nível escolar pretendido.

Para tanto, organizamos este trabalho na seguinte forma:

No primeiro capítulo, estabelecemos a delimitação da questão norteadora de nossa investigação e elencamos as dificuldades comuns sobre o estudo de derivadas de funções com uma variável real, registrando ao final as vias de estruturação da proposta didática pretendida.

No segundo capítulo, inicialmente assumimos a postura do uso metodológico da História da Ciência como fonte de dados e perspectiva didática. Em seguida registramos uma compilação de informações acerca do desenvolvimento histórico e epistemológico do Cálculo Diferencial no período relativo a Newton e Leibniz.

No terceiro capitulo discorremos sobre os referenciais teóricos, partindo das perspectivas político pedagógicas em que acreditamos e percebemos possibilidades. Seqüencialmente abordamos a Teoria da Aprendizagem significativa de David Ausubel, que adotamos e terminamos por registrar os recursos didáticos utilizados e algumas de suas potencialidades pedagógicas.

Para o quarto capitulo deixamos a missão de informar sobre a descrição do contexto onde realizamos a pesquisa, seguindo com seqüência didática constituída e implementada.

O quinto capítulo se encarrega de reunir os resultados, análises e considerações finais.

CAPÍTULO 1 – DESCOBRINDO A MATEMÁTICA QUALITATIVA NO ENSINO MÉDIO

1.1 - Problemática

Precedentes históricos justificam a busca de sistematização da ciência contemporânea nas redes de ensino, e considerando a conjuntura atual onde a produção científica nacional não acompanha o estabelecimento de novas tecnologias (em geral vindas de outros continentes), é compromisso primordial do educador, incitar os estudantes a manter postura de curiosidade para a manutenção da evolução cognitiva social. Este estudo visa exatamente este princípio, todavia, não desconsidera as dificuldades de emancipar a atual educação formal de posições seculares e definições estáticas. Mas, uma concepção assim ambiciosa do aprendizado científico-tecnológico no Ensino Médio, possivelmente diferente daquela hoje praticada na maioria de nossas escolas, não é uma utopia e pode ser efetivamente posta em prática no ensino da Biologia, da Física, da Química e da Matemática, e das tecnologias correlatas a essas ciências. Contudo, toda a escola e sua comunidade, não só o professor e o sistema escolar, precisam se mobilizar e se envolver para produzir as novas condições de trabalho, de modo a promover transformações educacionais.

Na introdução já dissemos que nossa questão de fundo está relacionada à investigação das possibilidades do estudo de conceitos das Ciências Naturais que envolvam modelos teóricos que se expressam com o apoio de Equações Diferenciais. O conceito de Derivada interpretado como Taxa de Variação é importante para que possamos reconhecer os termos das Equações Diferenciais e o conceito de Integral é essencial para que possamos resolver tais equações e analisá-las, como estamos começando nesta linha de investigação, resolvemos manter nosso foco nas derivadas.

Diante disso a questão que se colocou foi: **De que forma, poderíamos introduzir as Derivadas de Funções para os alunos do Ensino Médio; estes poderiam compreender os modelos matemáticos envolvidos?**

De acordo com DE PAULO, S. R.; DE PAULO, I. J.; RINALDI, C. (2002, p. 19-20).

> *Adotar o procedimento de ensinar a calcular derivadas e integrais para depois compreender as equações diferenciais é proceder das partes para o todo, ou seja, ir contra o sentido do vetor epistemológico atualmente adotado. Já, na Matemática Qualitativa, existe a possibilidade concreta de se partir do todo.*
>
> *Mas o que vem a ser a Matemática Qualitativa?*
>
> *Interpretamos como Matemática Qualitativa o procedimento segundo o qual os vários termos de uma equação devem ser interpretados qualitativamente. Com relação aos fenômenos que se processam no espaço-tempo, ela implica na interpretação qualitativa das taxas de variação de uma grandeza com o tempo e dos operadores diferenciais.*
>
> *Por exemplo, a relação entre a aceleração e a velocidade, expressa na forma diferencial* $$a = \frac{\partial v}{\partial t}$$
> *seria interpretada como "o quão intensamente a velocidade está se modificando com o tempo".*
>
> *Dentro da Matemática Qualitativa, a aceleração não seria interpretada com o conceito de derivada baseada num limite:* $$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$$
> *ou seja, o que é importante, na Matemática Qualitativa, é o significado de*
> $$\partial v / \partial t$$

Ao considerarmos a proposta anterior propusemo-nos a reconhecer possibilidades da transposição didática de conhecimentos relacionados à idéia de Taxa de Variação Infinitesimal, inicialmente em um sentido que aproveitasse as atuais estruturas de conteúdo presentes no Ensino Médio e primando pelo significado das notações associando-as a fenômenos naturais.

Cabe lembrar que consideramos somente as funções polinomiais e/ou racionais por motivos associados às estruturas de conteúdos já presentes no Ensino Médio, o processo para derivação que apresentamos não permite tratar de funções transcendentais e por isso tomamos o cuidado de afirmar para os aprendizes, que nossas atividades tinham a intenção de inseri-los no contexto do Cálculo Diferencial e permitir discussões posteriores que aproveitassem a conceituação inicial das derivadas e conseqüentemente oferecer uma espécie de ponte para a definição formal da Diferenciação de uma função qualquer.

1.2 – Sobre o ensino dos operadores diferenciais

Pesquisas realizadas em Educação Matemática sobre o ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial, constataram que os alunos apresentam dificuldades, ao estudar o conceito de derivada definido de maneira formal a partir do conceito de limite. CORNU (1991) realizou investigações a respeito do ensino do conceito de limite, analisando as respostas dos alunos do Ensino Médio submetidos a tarefas e processos de aprendizagem.

Segundo ele:

> *...é grande a dificuldade do ensino e aprendizagem desse conceito, que se radica não somente em sua riqueza e complexidade, mas também no fato de que os aspectos cognitivos implicados, não podem ser gerados simplesmente a partir da definição matemática, que pode ser memorizada. A primeira noção que se tem de limite é uma noção dinâmica de aproximação e a maneira que se utiliza o conceito para resolver problemas está relacionada não somente com a definição, mas com propriedades de um aspecto intuitivo do conceito. Isto explica por que muitos alunos acreditam compreender o conceito de limite sem haver adquirido as implicações do conceito formal (Cornu, 1991}.*

Esses estudos de CORNU (1991) mostraram que os estudantes possuem o que ele denomina de “concepções espontâneas pessoais”, oriundas de suas experiências pessoais. Assim, por exemplo, a expressão “tende a”, pode-se interpretar de várias maneiras, como aproximar mantendo a distância, aproximar sem alcançar, aproximar alcançando, enquanto que a palavra limite tem o sentido de não poder ser ultrapassado, embora possa ser interpretado como alcança, mas não ultrapassa ou não se ultrapassa e nem se alcança.

CORNU (1991) também sinaliza a existência de obstáculos cognitivos no aspecto geométrico do limite, e em particular, no problema de considerar a tangente num ponto de uma curva, como o limite das secantes que passam por esse ponto.

ORTON (1980), em suas investigações sobre a concepção dos alunos a respeito do conceito de derivada, baseada em entrevistas com 110 estudantes do nível superior, classifica os erros dos alunos em três tipos:

a) erros estruturais (relacionados com os conceitos essenciais implicados);

b) erros arbitrários (o aluno se comporta arbitrariamente sem levar em conta os dados do problema);

c) erros executivos (erros na manipulação, apesar dos conceitos implicados terem sido entendidos).

Quanto aos resultados mais relevantes de sua investigação, ele destaca:

- Dificuldades na manipulação de fórmulas para se obter a derivada de uma função.
- Dificuldades significativas dos estudantes na conceituação dos processos de limite que sustentam o conceito de derivada.

- Dificuldades em utilizar apropriadamente as representações gráficas. Estudantes capazes de obter corretamente a função derivada de uma função polinomial e de achar o coeficiente angular da tangente num ponto dado se mostram incapazes de avaliar essa mesma taxa de variação a partir do gráfico correspondente, finalmente registrando a dificuldade dos alunos na compreensão e manejo dos símbolos dx, dy, *dy/dx, Δx e Δy.*

Para corroborar com nossa intenção citamos ÁVILA (2006, pág. 25):

> *Em nosso artigo na RPM [1] 60, insistimos em que a derivada deve ser ensinada na primeira série do ensino médio. Isso tem a virtude de permitir uma saudável interação com o estudo do movimento que se faz na Física.*
>
> *Portanto, é um modo de promover a interdisciplinaridade, tão desejada no ensino.*

Com tais questões em foco, percebemos que deveríamos iniciar nossas reflexões sobre a forma de superação da dificuldade em aprender a definição literal do conceito de derivada.

CASSOL (1998) sugere que poderíamos apresentar as concepções intuitivas e históricas das derivadas, tal quais as perspectivas de Newton e Leibniz, encontradas em obras de História da Matemática como as de BOYER (1997) e EVES (1996).

Elaborando uma investigação sobre as possibilidades do estudo de Taxa de Variação associada à compreensão do conceito de Velocidade Instantânea, poderíamos buscar apresentar o conceito de taxa de variação pautando-se na concepção intuitiva de Limite, seguindo uma possível via de cunho epistemológico da construção do conhecimento cientifico.

---

[1] Revista do Professor de Matemática.

CAPÍTULO 2 – UMA EXPERIÊNCIA COM A MATEMÁTICA QUALITATIVA NO ENSINO MÉDIO

2.1 - O desenvolvimento histórico e epistemológico como fator organizador de nosso trabalho

A reflexão acerca de como poderíamos discutir as equações diferenciais com estudantes do Ensino Médio, nos levou a buscar entender em que medida a introdução do conceito de derivada num ponto, a partir do conceito de velocidade instantânea, isto é, taxa variação instantânea entre espaço e tempo[2], apresenta efeitos na aprendizagem dos operadores diferenciais e suas aplicações.

Segundo DE PAULO, S. R.; DE PAULO, I. J. C.; RINALDI, (2002, p.3), Gil e Solbes (Universidade de Valência – Espanha) defendem uma metodologia que é sustentada pela evolução histórica, de tal modo que a Física Moderna surge para suprir deficiências conceituais da Física Clássica. A proposta metodológica destes autores para a introdução da Física Moderna no ensino médio consiste principalmente em mostrar aos alunos os fenômenos físicos

---

[2] No sentido formal a **Velocidade instantânea** ou simplesmente **velocidade da partícula no instante inicial** é dada por

$$v(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}.$$

Logo, a velocidade instantânea, é o limite, quando, o intervalo das velocidades médias da partícula entre os instantes inicial e final é considerado *infinitesimal;* em outras palavras, *pequeno o suficiente* (entendemos que esta questão é relativa às necessidades do contexto).

que a Física Clássica falha em explicar. Quando os alunos conseguem acompanhar a evolução histórica dos conceitos e chegam a detectar as limitações da Física Clássica para explicar um determinado fenômeno físico, então, sob o ponto de vista desses autores, há um salto conceitual e aprendizagem dentro da Física Moderna, numa tentativa de reproduzir em sala de aula os eventos científicos que levaram ao surgimento da Física Moderna.

Não temos a intenção de abarcar a Física Moderna de modo direto, mas sim, de apoiar a discussão sobre a extensão do currículo e seus conteúdos. Buscamos, portanto, estabelecer um primeiro exercício de verificação sobre como poderíamos trabalhar com a idéia de derivadas subjacente ao estudo do conceito de movimento e especificadamente realizando atividades que levassem os estudantes a perceber as limitações dos estudos realizados sobre velocidade, os quais estão geralmente limitados a idéia de velocidade média em relação ao currículo do Ensino Médio deste país. Comumente os modelos apresentados nas escolas não permitem a discussão de situações mais próximas da realidade, exemplificadamente, não é comum encontramos registros em livros didáticos que busquem interpretar situações de movimento e entender qual seria a velocidade em cada instante. Sendo este o motivo inicial de nossa incursão sobre as limitações dos modelos matemáticos e físicos para compreensão aprofundada das idéias de movimento e velocidade, relacionamos assim o conceito de derivadas e suas interpretações.

2.1 – A construção histórica do conceito matemático de Diferenciação

Registramos a seguir em que sentido o Cálculo Diferencial estruturou-se historicamente até o período de Newton e Leibniz, século XVIII.

São duas as vias de desenvolvimento para o Cálculo, uma justifica a construção do conceito de Integral e a outra que nos interessa no momento é o conceito de retas tangentes a curvas. O conceito de tangência nasceu na Grécia, especificamente nos *Elementos* de Euclides, volume III, que em 300 a.C. construiu uma reta tangente a um círculo. Embora os antigos gregos soubessem construir retas tangentes a curvas como o círculo, a parábola, a elipse e algumas espirais o método genérico de obtenção de tangentes só seria possível após 1637, com a Geometria Analítica de Rene Descartes. No seu *Discours de La Methode* (Discurso do Método), Descartes, utilizando-se da álgebra simbólica de François Vieté (1540-1603) contida em sua obra *In Artem Analyticem Isagoge* de 1591, e se embasando nos textos clássicos de Pappus (c. 290-350) e Diofante (c. 250), entendeu que as curvas[3] podiam ser representadas por equações. Essa descoberta *(curvas que podem ser descritas por equações)* serviu de alicerce para o Cálculo Diferencial e Integral, que se desenvolveria largamente nos dois séculos seguintes.

Foi o francês Pierre de Fermat (1601-1665), por volta de 1637, o primeiro matemático da "modernidade” a aplicar tangentes para localizar

---

[3] Pede-se que o significado da palavra curva esteja relacionado aos traçados que temos nos gráficos cartesianos representando geometricamente as funções que possuem uma expressão analítica através de linguagem algébrica.

pontos de máximos e mínimos de funções. Seu método, apesar do procedimento questionável para a época, e que pode facilmente tornar-se rigoroso com o uso da teoria dos limites, chamou a atenção de Huygens (1629-1695), Wallis (1616-1703), Barrow (1630-1677) e do próprio Descarte (1596-1650), que se propuseram a construir tangentes a curvas através de secantes (reta que corta uma curva em dois pontos). A novidade era o uso do gráfico, ou seja, de uma curva delimitada por dois eixos ordenados x e y. A contribuição do Método da Tangente para o desenvolvimento do Cálculo se explicita no século XVII, o conflito travado entre o pensamento científico e os dogmas eclesiásticos teve como cenário um ambiente intelectual que levou os grandes pensadores à libertação da antiga visão Aristotélica que se tinha da natureza, e a evolução do Cálculo influenciou fortemente em tal mudança conceitual. Costuma-se dizer que o pensamento moderno teve início com Descartes, que viveu nesta época, valorizando o racionalismo e buscando interpretar o mundo de maneira intelectual. Para ele, o Universo era composto de matéria em movimento, portanto os fenômenos deveriam ser explicados mecanicamente. O princípio fundamental da geometria de Descartes era representar figuras geométricas tais como pontos, retas, círculos, por números e equações, de modo que os problemas geométricos pudessem ser resolvidos com o auxílio do Cálculo, e da mesma forma, também pudessem traduzir operações algébricas em linguagem geométrica. Apesar do método não deixar claro a existência de eixos cartesianos, e de se ter a clareza de que os mais antigos construtores egípcios e os astrônomos, geógrafos e topógrafos gregos já faziam uso de um sistema de coordenadas, nada disso tira o mérito de Descartes, no entanto, ele tem que repartir o feito com Fermat. A notação simbólica usada por Descartes em sua

La géométrie estava muito próxima da atual, a diferença está no fato de que atualmente os parâmetros e incógnitas são pensados como números, enquanto que ele os considerava como seguimentos.

Ainda nessa obra, apresenta um método para construir normais e tangentes a curvas. Independentemente ao trabalho que estava sendo desenvolvido por Descartes, seu contemporâneo, Pierre de Fermat, considerado um dos maiores matemáticos franceses no século XVII, também se ocupou com a criação da geometria analítica e com base em uma carta de Fermat para Robeval (1602-1675) em 1636, pode-se afirmar que a criou antes de Descartes. Ambos tiveram a idéia de usar a álgebra como uma linguagem pra tratar problemas geométricos, mas Fermat foi além, introduzindo eixos perpendiculares e chegando à equação geral da reta, da circunferência, da elipse, da hipérbole e outras curvas novas, mas no que se refere a notação simbólica, Descartes parece ter sido mais feliz.

Fermat é considerado o precursor do Cálculo Diferencial, tendo em vista que foi o primeiro a chegar ao conceito moderno de reta tangente a uma curva dada, num determinado ponto da mesma. O próprio Newton (1642-1727) declarou em uma carta descoberta em 1934, que suas primeiras idéias claras em relação ao Cálculo foram influenciadas diretamente pela maneira que Fermat traçava tangentes.

Os problemas relacionados às tangentes levaram muitos matemáticos a se interessarem pela procura de métodos para encontrar a tangente a uma curva dada, num ponto especifico da mesma. E o fascínio dos pensadores da época pelos métodos de determinação de tangentes, acabou ocupando um lugar de destaque em relação aos antigos problemas que envolviam volume e centro de gravidade, e acabaram revelando duas tendências bem definidas, sendo uma geométrica e a outra algébrica.

O nome "Cálculo" é uma abreviação de "Cálculo Diferencial e Integral" que, juntos, formam as duas maiores ramificações desta área (sendo também conhecido como Cálculo Infinitesimal). A palavra *cálculo* em si não tem relação alguma com este ramo particular da matemática. Em seu sentido genérico, significa qualquer manipulação sistemática de objetos matemáticos, sejam números ou símbolos abstratos.

A palavra *calculus* pertence ao latim, significa pedra e sua associação com a matemática vem do uso de pedras para a contagem em uma versão primitiva do ábaco. O significado restrito da palavra *Cálculo*, ou seja, o C*álculo Diferencial e Integral* é devido a Leibniz (1646-1716). Newton nunca usou esta palavra, preferindo chamar sua invenção de "método de fluxões".

O Cálculo Diferencial é o estudo das mudanças ou, mais especificadamente, das *taxas de mudança*[4], de uma quantidade variável. A maioria dos fenômenos físicos ao nosso redor envolve quantidades que mudam com o tempo, tais como a velocidade de um carro em movimento, as leituras de temperatura de um termômetro ou a corrente elétrica fluindo em um circuito. Hoje chamamos tais quantidades de variáveis; Newton usava o termo *fluente*. O Cálculo Diferencial está relacionado à descoberta da taxa de mudança de uma variável, ou, para usar a expressão de Newton, a *fluxão* de um determinado *fluente.* Esta escolha de palavras revela o funcionamento de sua mente. Newton era tanto físico quanto matemático. Sua visão de mundo era dinâmica, onde tudo se encontrava num estado contínuo de movimento,

[4] Geralmente denominada como *taxa de variação* no vocabulário atual e pertinente a área.

causado por forças conhecidas. Esta visão, é claro, não se originou com Newton; tentativas de explicar todo o movimento pela ação de forças recuam até a antiguidade e chegaram ao seu clímax quando Galileu (1564-1643) estabeleceu as fundações da mecânica por volta de 1600 d.C.. Mas foi Newton quem unificou o conjunto de fatos observacionais conhecidos em uma grande teoria, a lei da gravitação, que ele enunciou em sua *Philosophiae naturalis principia mathematica,* publicada pela primeira vez em 1687.

O ponto de partida de Newton foi considerar duas variáveis que se relacionavam através de uma equação, digamos $y = x^2$ (hoje chamamos esse tipo de relacionamento de *função*, e para indicar que *y* é uma função de *x* escrevemos $y = f(x)$). Tal relação é representada por um gráfico no plano *xy*, em nosso exemplo uma parábola. Newton imaginou o gráfico de uma função como uma curva gerada por um ponto móvel *P(x, y).* À medida que *P* traça a curva, ambas as coordenadas, *x* e *y*, variam continuamente com o tempo; imaginava-se o próprio tempo como “fluindo” a uma taxa uniforme – daí a palavra *fluente*. Newton então partiu para encontrar as taxas de mudança de *x* e *y* em relação ao tempo, isto é, suas *fluxões.* Ele conseguiu isso considerando a diferença, ou a mudança, nos valores de *x* e *y* entre duas ocasiões “adjacentes”, então, dividindo essa diferença pelo intervalo de tempo transcorrido igual a zero, ou, mais precisamente, pensar nele como tão pequeno a ponto de ser desprezível.

Vejamos agora como isso funciona para a função $y = x^2$. Vamos considerar o pequeno intervalo de tempo ε (Newton na verdade usou a letra *O*, mas como ela é muito parecida como zero fizemos esta mudança). Durante esse intervalo de tempo a coordenada *x* muda na quantidade $\dot{x}\varepsilon$, onde $\dot{x}$ é a notação de Newton para a taxa de mudança, ou *fluxão,* de *x* (esta ficou sendo conhecida como a "notação do ponto"). De modo semelhante, a mudança no *y* é $\dot{y}\varepsilon$. Substituindo *x* por $x+\dot{x}\varepsilon$, e *y* por $y+\dot{y}\varepsilon$ na equação $y=x^2$, teremos $y+\dot{y}\varepsilon=(x+\dot{x}\varepsilon)^2=x^2+2x(\dot{x}\varepsilon)+(\dot{x}\varepsilon)^2$. Mas, como $y=x^2$, podemos cancelar o *y* no lado esquerdo da equação com o x^2 no lado direito e obteremos $\dot{y}\varepsilon=2x(\dot{x}\varepsilon)+(\dot{x}\varepsilon)^2$. Dividindo ambos os membros da última equação por ε, teremos $\dot{y}=2x\dot{x}+\dot{x}^2\varepsilon$.

O passo final é fazer ε igual a zero, o que nos deixa com $\dot{y}=2x\dot{x}$. Esta é a relação entre as *fluxões* dos dois *fluentes*, ou em linguagem moderna, entre as taxas de mudança das variáveis envolvidas, cada uma destas, considerada como uma função do tempo. Newton deu vários exemplos de como funciona este *"método das fluxões"*. O método é totalmente generalizado: pode ser aplicado a quaisquer dois *fluentes* que se relacionem um com o outro, através de uma equação. Seguindo um procedimento como o que foi mostrado anteriormente, obtemos uma relação entre as *fluxões,* ou, as taxas de mudança das variáveis originais. No entanto, existe mais no método das fluxões do que apenas encontrar as taxas de variação das variáveis em relação ao tempo, se dividirmos a *fluxão* de *y* pela de *x*, isto é, se calcularmos a relação $\dot{y}/\dot{x}$, teremos a taxa de variação de *y* em relação à *x*. Esta última quantidade possui um significado geométrico; ela mede a inclinação da curva em cada um dos seus pontos. Mais precisamente, a taxa $\dot{y}/\dot{x}$ é a *inclinação da linha tangente para a curva no ponto P(x, y)*, onde por *inclinação* queremos mencionar a proporção em que a linha se eleva naquele ponto.

Por exemplo, para a parábola $y = x^2$, encontramos que a relação entre as duas *fluxões* é $\dot{y} = 2x\dot{x}$, de modo que $\dot{y}/\dot{x} = 2x$. Isto significa que, para cada ponto *P(x, y),* na parábola, a linha tangente tem uma inclinação igual a duas vezes o valor da coordenada *x* naquele ponto. Se *x=3*, a inclinação, ou proporção elevação-comprimento, é *6*, se $x = -3$, a inclinação é -6, neste caso entende-se que uma inclinação negativa significa que a curva está descendo à medida que nos movemos da esquerda para a direita. Se $x = 0$, a inclinação é 0, o que significa dizer que a parábola tem uma linha tangente horizontal em $x = 0$ (ver Figura 1).

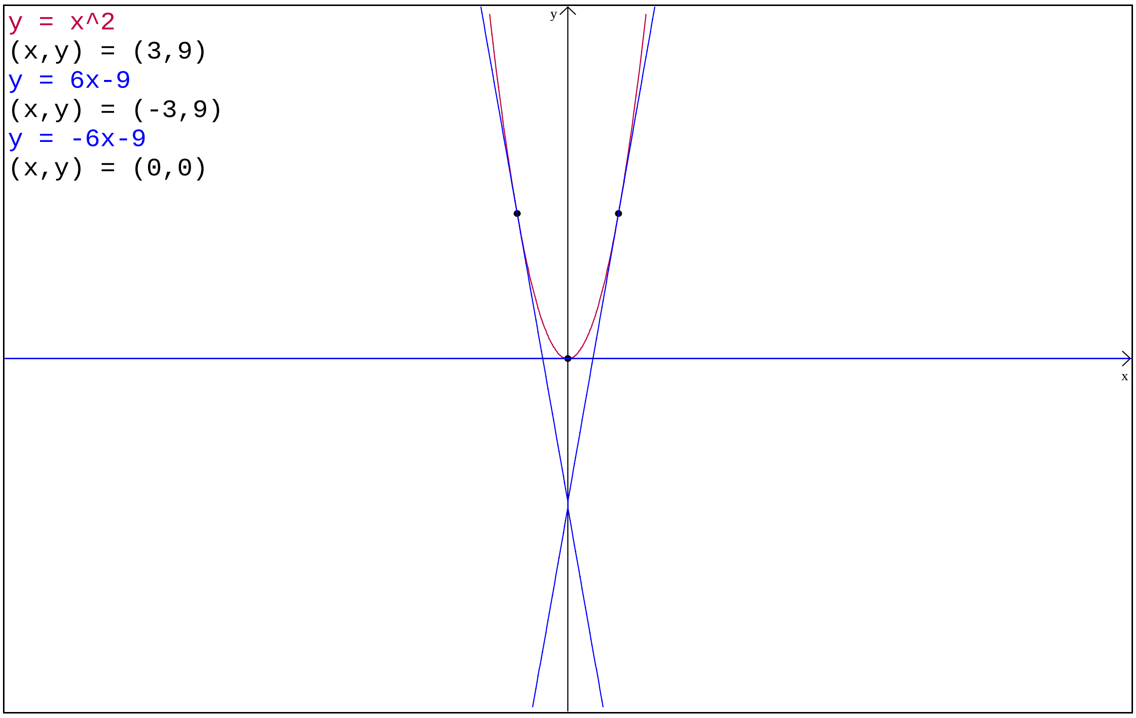

Figura 1: Exemplos de retas tangentes a diferentes pontos de uma parábola

Embora Newton pensasse que *x* e *y* variavam com o tempo, ele terminou com uma interpretação puramente geométrica das *fluxões*, a qual não depende do tempo. Ele precisava da noção de tempo apenas como uma ajuda mental para cristalizar suas idéias. Newton então aplicou seu método a numerosas curvas encontrando suas inclinações, seus pontos mais altos ou mais baixos (pontos de máximos e mínimos), suas curvaturas (a taxa pela qual a curva muda de direção) e seus pontos de inflexão (onde a curva muda de côncava para convexa e vice-versa), todas estas, propriedades geométricas relacionadas com a reta tangente.

Devido a esta associação com a tangente, o processo de encontrar a *fluxão* de um determinado *fluente* era conhecido, na época de Newton, como o "*problema da tangente"*. Hoje chamamos esse processo de "*diferenciação"* e a *fluxão* de uma função chamamos de "*derivada"*. A notação do ponto de Newton também não se tornou única, e atualmente é muito mais usual a notação diferencial de Leibniz.

Leibniz concebeu seu Cálculo Diferencial e Integral por volta de 1675 e em 1677 já tinha um sistema plenamente desenvolvido e funcional. Desde o começo sua abordagem era diferente da de Newton. Como vimos, as idéias de Newton eram baseadas na física; ele considerava a *fluxão* como uma taxa de mudança, ou velocidade, de um ponto cujo movimento contínuo gerava a curva $y = f(x)$. Leibniz, que estava mais próximo da filosofia do que da física, moldou suas idéias de um modo muito mais abstrato. Ele pensava em termos de diferenciais, pequenos acréscimos nos valores das variáveis x e y.

A Figura 2 mostra o gráfico de uma função $y = f(x)$ e um ponto $P(x, y)$ sobre ele. Traçamos a linha tangente ao gráfico em P e nesta linha tangente consideramos um ponto T vizinho a P. Isto nos dá o pequeno triângulo PRT que Leibniz chamou de triângulo característico.

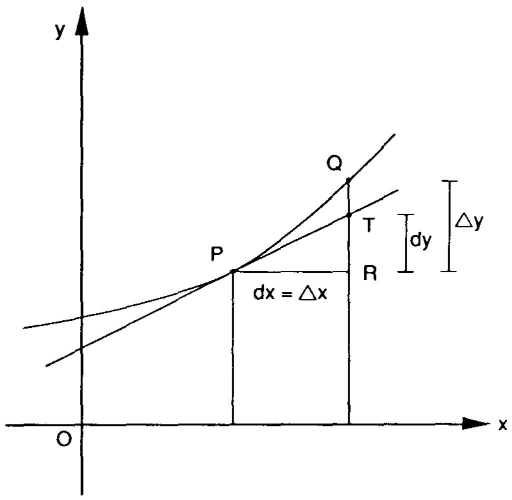

Figura 2: Interpretação gráfica de Leibniz para determinação de retas tangentes.

Seus lados PR e RT são os aumentos nas coordenadas *x* e *y* quando nos deslocamos de P para T. Leibniz chamou esses aumentos de *dx* e *dy* respectivamente ele então argumentou que se *dx* e *dy* fossem suficientemente pequenos, a reta tangente ao gráfico em P seria quase idêntica ao próprio gráfico na vizinhança de P. Mais precisamente, o segmento de linha PT vai quase coincidir exatamente com o segmento curvo PQ, onde Q é um ponto no gráfico diretamente acima ou abaixo de T. Para encontrarmos a inclinação da linha tangente em P, só precisamos achar a proporção altura-largura do triângulo característico, isto é, a taxa *dy/dx*. Leibniz então raciocinou que, como *dx* e *dy* são quantidades pequenas, às vezes pensava nelas como infinitamente pequenas, sua relação representa não apenas a inclinação da linha tangente em P, mas também a inclinação do gráfico em P. A proporção *dy/dx* é, portanto, o equivalente de Leibniz para a fluxão de Newton ou a taxa de mudança da curva.

Existe uma falha fundamental neste argumento. A linha tangente, embora quase idêntica a curva, perto de P não coincide com ela. As duas só coincidiriam se os pontos P e T coincidissem, isto é, quando o triângulo característico encolhesse até se tornar um ponto. Mas então ambos os lados, *dx* e *dy* se tornariam iguais a zero e sua proporção seria a expressão indeterminada *0/0* (lê-se *zero dividido por zero*). Hoje nós contornamos esta dificuldade definindo a inclinação como um *limite*. Voltando a Figura 2, escolhemos dois pontos vizinhos P e Q, ambos pertencentes ao gráfico e chamamos os lados PR e RQ, da forma PRQ, semelhante a um triângulo (na verdade uma forma curva), de Δx e Δy, respectivamente. Note que Δx é igual a *dx*, mas Δy é ligeiramente diferente de *dy*. Na Figura 2, Δy é maior do que *dy* porque Q está acima de T. Agora, a proporção altura-comprimento no gráfico entre P e Q é $\Delta x / \Delta y$. Se permitirmos que ambos, Δx e Δy, se aproximem de 0, sua relação se aproximará de certo valor limite, e é este limite que chamamos hoje de *dy/dx*. Ou em símbolos, $dy/dx = \lim_{\Delta x \to 0} (\Delta y / \Delta x)$.

Vamos resumir. O que Leibniz chamou de *dy/dx* e pensou como uma proporção entre dois pequenos acréscimos escreve-se hoje em dia como $\Delta x / \Delta y$. Geometricamente, a proporção $\Delta x / \Delta y$ chamada de quociente diferencial, é a inclinação da linha secante entre P e Q (ver a Figura 3). À medida que Δx se aproxima de zero, o ponto Q se move ao longo do gráfico em direção a P, fazendo com que a linha secante gire levemente até que, no limite, ela coincidirá com a linha tangente.[5] E é a inclinação desta última que nós representamos por *dy/dx* e chamamos de derivada *de y em* relação *a x.*

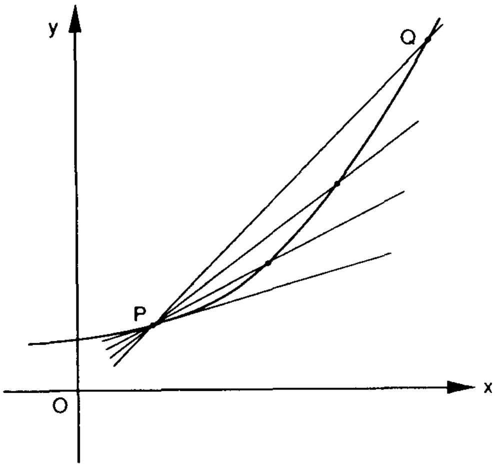

Figura 3: Alusão a dinâmica de uma reta secante tornando-se tangente a um ponto da curva.

Como vimos, o conceito de limite é indispensável para definir a inclinação, ou a taxa de variação, de uma função. Mas na época de Leibniz o conceito de limite ainda não era conhecido; a distinção entre uma proporção de duas quantidades finitas, ainda que pequenas, e o limite dessa proporção quando as duas quantidades tendem a zero, causou muita confusão e levantou sérias dúvidas sobre as bases do Cálculo Diferencial. Essas questões só foram completamente resolvidas no século XIX, quando o conceito de limite foi estabelecido em bases sólidas.

[5] Este argumento supõe que a função é *contínua* em P, ou seja, que o gráfico não sofre, ali, "um tipo de quebra" ou "falha". Em pontos de *descontinuidade* uma função não tem derivada.

Resgatando nossa intenção de realizar um paralelo a estratégia registrada no inicio deste capítulo, e considerando a dificuldade comum de compreender a definição do conceito de *diferenciação* através da completa compreensão do conceito de *limite*, buscamos apresentar simulações que permitam visualizar a dinâmica do processo de retas secantes se tornando tangentes. Concomitantemente, apresentamos as perspectivas de Newton e Leibniz através de textos e atividades escritas, para assim, realizando discussões verbais, buscarmos criar as condições voltadas à interpretação de *taxas de variação* a partir do conceito correlato de *velocidade instantânea*.

Pautando-se em noções intuitivas da idéia de *limite* cogitamos a possibilidade didática de formalizar os *operadores diferenciais* sem necessariamente definí-los como limites.

Na citação a seguir percebemos que a experiência é viável no sentido em que não prejudicaria posteriores aprofundamentos e colaboraria com a consecução das investigações educacionais sobre a transposição didática das idéias relativas às *equações diferenciais* ainda no Ensino Médio.

> *Encontrar a reta tangente a uma curva é um problema fundamental do Cálculo. Durante o século XVII, diversos geômetras planejaram esquemas algébricos complicados para encontrar retas tangentes a determinadas curvas.*
>
> *Descartes desenvolveu um processo que usava dobro-raiz de uma equação auxiliar; essa técnica foi melhorada pelo matemático Johan Hudde,1628-1704, que era, na época, o maior matemático de Amsterdã. René de Sluse, 1622-1685, inventou um outro método mais sofisticado para obter retas tangentes a curvas.*
>
> *Em cada um desses métodos, o limite deve ter sido usado numa etapa crítica. Mas nenhum deles percebeu a necessidade da idéia de limite, e assim cada um encontrou uma maneira inteligente para conseguir os próprios resultados, que estavam corretos, embora sem o rigor possibilitado pelo limite.*
>
> Trecho extraído do site http://www.cepa.if.usp.br/e-calculo/

acessado em 15 de março de 2006.

Acrescentamos o argumento sugerido em discussões com o orientador de nosso estudo de que as noções espontâneas acerca dos fenômenos de movimento e velocidade são em si, tão potencialmente didáticas e relacionáveis a motivação inicial dos estudantes, quanto à noção intuitiva de limite.

CAPÍTULO 3 – REFERENCIAIS TEÓRICOS

3.1 – O Ensino Médio e a postura político-pedagógica considerada

A priori nosso trabalho pode aparentar interesses unicamente relativos à discussão de conteúdos específicos, no entanto, apresentamos as idéias que estabelecem nossas perspectivas da prática docente e reflexão sobre a mesma.

Acreditamos que as relações entre o estudo dos operadores diferenciais e o uso de aspectos históricos em sua transposição didática estejam de acordo com nossos objetivos de atualização de conhecimento escolar no sentido científico. Porém, também concordamos que com certa dose de simplificação, pode-se afirmar que o paradigma educacional dominante durante os anos setenta, no Brasil e no mundo, era essencialmente voltado a conteúdos escolares, deslocados de contextos sociais e baseados no treinamento, sem reflexão por parte do educando. Certamente esse modelo sempre foi contestado com propostas de modificações no ensino das várias disciplinas, mas, ao menos em nosso país, o quadro geral pouco se alterou até os anos noventa, quando, de certa forma, a contestação ganhou apoio oficial concretizado nos Parâmetros Curriculares Nacionais. Estes pertencem a um conjunto de iniciativas do Ministério da Educação, algumas bastante controvertidas, que incluem também a avaliação de livros didáticos, o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), o Exame Nacional de Cursos (Provão, atualmente denominado de ENADE, Exame Nacional de Desempenho de Estudantes), o Fundo de Valorização do Magistério, etc. e pretendem transformar os vários níveis de ensino.

Fora do âmbito do executivo, o Congresso Nacional promulgou em 1996 a Lei 9394, das Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB/96), ela mesma um fator de mudança. Em conseqüência, em 1998, o Conselho Nacional de Educação institui as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (DCNEM) e, no segundo semestre de 1999, a Secretaria da Educação divulgou os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM).

As medidas governamentais já repercutem no ensino médio e no universitário, embora nem sempre de maneira positiva. Na escola fundamental, porém o progresso parece-nos claro. Grupos de educadores que desejam substituir o paradigma educacional meramente informativo vêem obtendo sucesso razoável. Em particular no ensino de Matemática, os novos parâmetros podem se amparar numa comunidade de educadores matemáticos muito atuantes, consolidada desde os anos oitenta, e que se constitui ela própria em elemento transformador não oficial. Foram as práticas, os estudos e as pesquisas dessa comunidade que pautaram os Parâmetros Curriculares na disciplina.

Os PCNEM, porém, são ainda muito recentes para que possamos vislumbrar mudanças no ensino médio e, em relação à Matemática, o debate entre os educadores matemáticos mal começou. Esta, aliás, é uma das motivações deste estudo. Comecemos pelo mais geral. As DCNEM interpretam e especificam a LDB/96, sendo o referencial para o restante do documento que apresenta os parâmetros para as três áreas do Ensino Médio (Linguagens, Códigos e suas Tecnologias; Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias; Ciências Humanas suas Tecnologias) Estes devem ser tomados como continuação dos parâmetros para o Ensino Fundamental.

O Ensino Médio é definido como etapa final da formação básica do educando, necessária para todo cidadão educado e visa "introduzir o jovem no mundo como um todo", porque depois vem uma etapa especializada (no trabalho ou na universidade, etc.). Afirma-se reiteradamente que o nível médio de ensino não deve ter como objetivo principal a preparação para exames vestibulares. O ensino proposto tem como fundamentos filosóficos:

- A estética da sensibilidade (que valoriza o criativo, o curioso e favorece o trabalho autônomo, não padronizado);
- A política da igualdade (que busca a solidariedade e respeita a diversidade, sendo base da cidadania);
- A ética da identidade (que promove a autonomia do educando, da escola, das propostas pedagógicas, etc.).

Sensibilidade, igualdade e identidade, caracterizadas da maneira que vimos, jamais se harmonizam com um ensino que se limitasse a transmitir informações e a treinar procedimentos, no qual a aprendizagem fosse reduzida à memorização do que foi apresentado. Por isso, as DCNEM concebem o conhecimento como construção coletiva (o que é bem mais que informação) e a aprendizagem como construção de competências em torno do conhecimento (competências de representação e comunicação, de investigação e compreensão, de contextualização sócio-cultural).

Essas concepções praticamente exigem uma ação pedagógica que favoreça o "aprender a aprender" e o desenvolvimento de competências por meio de estratégias que mobilizem mais o raciocínio do que a memória. Em tal processo, é condição necessária que os conteúdos sejam significativos do ponto de vista do educando e, portanto que sejam contextualizados e tratados de forma interdisciplinar. Muitas vezes, a simples contextualização já acarreta a interdisciplinaridade, porque entender um contexto real e agir sobre ele depende dos diversos pontos de vista das diferentes disciplinas.

As DCNEM consideram o Ensino Médio composto por três áreas de conhecimento:

(i) Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias,

(ii) Linguagens, Códigos e suas tecnologias,

(iii) Ciências Humanas e suas tecnologias.

A concretização das idéias contidas nos PCNEM deverá ocorrer com base na proposta pedagógica de cada escola que, a partir de uma base comum para todo país (75% da carga horária), propiciará "uma diversificação de tipos de estudos, dos mais humanísticos aos mais científicos ou artísticos".

Na parte do PCNEM relativa à matemática apresentam-se as finalidades do ensino da disciplina. Leva-se em conta seu caráter formativo (desenvolve capacidades específicas), seu aspecto instrumental (aplicações na realidade e nas ciências) e seu status como ciência (métodos próprios de pesquisa e validação bem como sua organização). Assinalam-se ainda as relações de dupla mão entre Matemática e tecnologia: a primeira como instrumento para ingresso no universo tecnológico e este como fonte de transformações na educação matemática.

Os princípios contidos nas DCNEM e os parâmetros relativos à matemática relacionam-se harmonicamente, embora os textos tenham autores diferentes. Os parâmetros têm como objetivo que os educandos percebam as aplicações da Matemática em variadas situações, o que ecoa a idéia de um ensino contextualizado; os parâmetros propõem que os educandos desenvolvam análise e julgamento, de resolução de problemas, de comunicação e representação o que corresponde a uma visão de aprendizagem como "construção de competências"; os parâmetros apresentam como finalidade do ensino a compreensão da Matemática, a confiança no seu uso e certa satisfação pessoal com ela, o que reflete, entre outras idéias, a ética da identidade e a promoção da autonomia.

3.2 – A Teoria da Aprendizagem Significativa e sua relação como nosso trabalho

Considerando a associação entre discutir conhecimentos científicos e sua transposição didática para conteúdos escolares no currículo do Ensino Médio em Ciências Naturais e Matemática, conjuntamente a necessidade de estudos sobre variadas posturas pedagógicas em sala de aula e o interesse de que tais possibilidades sejam viáveis para a educação pública, apoiamo-nos na Teoria da Aprendizagem Significativa iniciada por David Ausubel na década de 60 do séc. XX. Para ele, aprendizagem significa organização e integração do material na estrutura cognitiva. Como outros teóricos do cognitivismo, ele se baseia na premissa de que existe uma estrutura na qual essa organização e integração se processam. É a estrutura cognitiva, entendida como conteúdo total de idéias de certo indivíduo e sua organização, ou, conteúdo e organização de suas idéias em uma área particular de conhecimentos. É o complexo resultante dos processos cognitivos, ou seja, dos processos através dos quais se adquire e utiliza o conhecimento.

A atenção de Ausubel está constantemente voltada para aprendizagem tal como ela ocorre na sala de aula, no dia-a-dia da grande maioria das escolas MOREIRA & MASINI (1982). Para ele, o fator isolado mais importante influenciando a aprendizagem é aquilo que o aluno já sabe (cabe ao professor determinar isso e ensinar de acordo). Novas idéias e informações podem ser aprendidas e retidas na medida em que conceitos relevantes e inclusivos estejam adequadamente claros e disponíveis na estrutura cognitiva do indivíduo e funcione, dessa forma, como ponto de ancoragem a novas idéias e conceitos. Entretanto, a experiência cognitiva não se restringe a influência direta dos conceitos já aprendidos sobre componentes da nova aprendizagem, mas abrange também modificações relevantes nos atributos da estrutura cognitiva pela influência do novo material. Há, pois, uns processos de interação através do quais, conceitos mais relevantes e inclusivos interagem com o novo material funcionando como ancoradouro, isto é, abrangendo e integrando este material e, ao mesmo tempo, modificando em função dessa ancoragem.

Segundo Ausubel (1968, 1978), aprendizagem significativa é um processo por meio do qual, uma nova informação (um novo conhecimento) se relaciona de *maneira substantiva* (não literal) e *não arbitrária*, a um aspecto relevante da estrutura cognitiva do indivíduo, isto é, nesse processo, a nova informação interage com uma estrutura de conhecimento específica, chamada por ele de “conceito subsunçor”, existente na estrutura cognitiva do aprendiz, capaz de servir de “ancoradouro” à nova informação, de modo que esta adquira, assim, significado para o sujeito. Pode-se dizer então, que para ocorrer a aprendizagem significativa; aquilo que se ensina deve se relacionar aos conhecimentos prévios do aluno. Não arbitrariedade e substantividade são, para ele, as características básicas da aprendizagem significativa. *Não arbitrariedade* quer dizer que a nova informação não se relaciona com qualquer aspecto da estrutura cognitiva, mas sim com conhecimentos relevantes (subsunçores), nos quais se “ancora” e, *substantividade* significa que o que é incorporado à estrutura cognitiva, é a substância do novo conhecimento, não as palavras precisas usadas para expressá-lo.

As relações que estes estudantes poderiam estabelecer a partir dos novos conceitos são possíveis, desde que se possa estabelecer a organização do ensino de conceitos introdutórios ao Cálculo Diferencial em um sentido de se superar a simples associação e propiciar a interação entre os aspectos específicos e relevantes da estrutura cognitiva e as novas informações. Aqui, percebemos a importância entre as distinções de *aprendizagem significativa* e *aprendizagem mecânica*, onde a segunda é definida por Ausubel como contraposta a primeira e vem a ser aquela em que novas informações são aprendidas praticamente sem interagir com conceitos relevantes existentes na estrutura cognitiva, sem se ligar a conceitos subsunçores específicos. No entanto, a aprendizagem mecânica não se dá em um vazio cognitivo, é possível que haja algum tipo de associação e, além disso, a mesma se presta às fases iniciais da aquisição de um novo corpo de conhecimento. Decidimos então pela aprendizagem significativa, dado o fato que esta, facilita a aquisição de significados, a retenção e a transferência de aprendizagem.

Além da distinção anterior, pautamo-nos nas definições de *aprendizagem por descoberta* e *aprendizagem por recepção*; de acordo com Ausubel, na aprendizagem receptiva o que deve ser aprendido deve ser apresentado ao aprendiz em sua forma final e a aprendizagem por descoberta exige que o conteúdo principal a ser aprendido deva ser descoberto pelo aprendiz. Cabe ressaltar que ambas só se tornarão significativas, se o novo conteúdo incorporar-se à estrutura cognitiva, de forma não arbitrária e não literal. Acreditamos que, na prática, a maior parte da instrução em sala de aula está voltada para a aprendizagem receptiva. Esta situação levanta certa polêmica entre os defensores da aprendizagem por descoberta, entretanto, segundo Ausubel, em nenhum estágio do desenvolvimento cognitivo dos aprendizes das escolas em geral, têm-se necessariamente que descobrir conteúdos a fim de tornarem-se aptos a compreendê-los e usá-los significativamente. Ausubel ainda afirma que pela descoberta, temos uma aprendizagem adequada de procedimentos científicos em determinadas disciplinas, porém, para a aquisição de grandes volumes de conhecimento, é extremamente contraproducente e desnecessário. Assim segundo Moreira, não há problema em instruções organizadas pelas noções da aprendizagem receptiva, haja vista que podem ser mais eficientes do que qualquer outro método ou abordagem instrucional, no que se refere à aquisição de conteúdo cognitivo (MOREIRA, 2001, pag.17).

Estabelecidas as vias da organização pedagógica, buscamos reconhecer as condições para ocorrência da aprendizagem significativa. Segundo Ausubel (1978, pág. 41),

> *A essência do processo de aprendizagem significativa é que idéias simbolicamente expressas sejam relacionadas, de maneira substantiva (não literal) e não arbitrária, ao que o aprendiz já sabe, ou seja, a algum aspecto de sua estrutura cognitiva especificamente relevante (i.e., um subsunçor) que pode ser, por exemplo, uma imagem, um símbolo, um conceito ou uma proposição já significativos.*

Do trecho citado anteriormente concluímos que o material a ser aprendido deve ser relacionável à estrutura cognitiva do aprendiz de forma não arbitrária e não literal e assim estabelecer um das condições para ocorrência da aprendizagem significativa.

O material com tal propriedade é denominado como sendo um *material potencialmente significativo* e demanda duas condições subjacentes. A primeira trata da *natureza do material* e a importância de seu *significado lógico*, definindo que este seja suficientemente não arbitrário e não aleatório, podendo ser relacionado de forma substantiva às idéias correspondentemente relevantes e passíveis de aprendizado por seres humanos. A segunda refere-se à *natureza da estrutura cognitiva do aprendiz*, e exige a ocorrência de conceitos subsunçores específicos e reconhecidamente presentes nos currículos escolares, com os quais o material poderá se relacionar.

Em relação à primeira condição, vemos em MOREIRA (2001, pág. 23), que "*O conteúdo das disciplinas ensinadas na escola é, quase por definição, logicamente significativo, assim sendo, raramente as tarefas de aprendizagem escolares se ressentem de significado lógico.",* confirmando assim, a natureza dos conceitos que pretendemos elencar.

Da mesma forma, ressaltamos neste momento que os estudantes de Ensino Médio têm em seu currículo, os conceitos de Movimento, Velocidade, Plano Cartesiano, Função com uma Variável Real, Funções Polinomiais e Equação da Reta; apontando os possíveis conhecimentos prévios que apoiaram nosso estudo.

Outra condição para ocorrência da aprendizagem significativa seria o fato de que o aprendiz deve, também, manifestar uma disposição para relacionar o novo material, de modo substantivo e não arbitrário, à sua estrutura de conhecimento. Em outras palavras, deve existir a intenção (por parte do aprendiz) de aprender o que se busca ensinar.

Ainda de acordo com esta teoria, a aprendizagem pode ser facilitada através dos seguintes princípios: *diferenciação progressiva* e *reconciliação integrativa* MOREIRA & MASINI (1982, p.21 - 22). A diferenciação progressiva é o princípio segundo o qual o conteúdo a ser apresentado aos alunos deve ser programado de maneira que os conceitos mais gerais da disciplina ou conteúdo sejam apresentados em primeiro lugar e, pouco a pouco, introduzidos os conceitos mais específicos. O princípio da reconciliação integrativa postula que a programação do material a ser apresentado ao aluno deve ser feita de maneira que haja exploração de relações entre idéias, apontando semelhanças e diferenças entre conceitos relacionados.

A questão que buscamos referenciar a partir de então, diz respeito aos *Mapas Conceituais*. Estes são propostos e exemplificados como meios instrucionais que podem ser usados tanto na análise e organização do conteúdo, como no ensino e na avaliação da aprendizagem. Os mapas conceituais, desenvolvidos por Joseph Novak, são uma ferramenta para organizar e representar conhecimento (NOVAK, 1977). Eles são utilizados como uma linguagem para descrição e comunicação de conceitos e seus relacionamentos, e foram originalmente desenvolvidos para o suporte à Aprendizagem Significativa (AUSUBEL, 1968, 1978).

Os mapas conceituais são vistos como recursos flexíveis, dinâmicos, utilizáveis em qualquer sala de aula, cuja maior vantagem pode estar exatamente no fato de enfatizarem o ensino e a aprendizagem de conceitos, algo que muitas vezes fica perdido em meio a uma grande quantidade de informações e fórmulas. Sem concepções claras, precisas e diferenciadas, as informações e fórmulas não têm significado algum.

No ensino, mapas conceituais podem ser usados para mostrar relações hierárquicas entre concepções que estão sendo ensinadas. São representações concisas das estruturas conceituais e procuram facilitar a aprendizagem significativa em contraposição à aprendizagem mecânica dessas estruturas.

Segundo MOREIRA (1979, p.80-81):

> *É possível traçar-se um mapa conceitual para uma única aula, para uma unidade de estudo, para um curso ou, até mesmo, para um programa educacional completo. A diferença está no grau de generalidade e inclusividade dos conceitos colocados no mapa. Um mapa envolvendo apenas conceitos gerais, inclusivos e organizacionais pode ser usado como referencial para o planejamento de um curso inteiro, enquanto que um mapa incluindo somente conceitos específicos, pouco inclusivos, pode auxiliar na seleção de determinados materiais instrucionais. Isso quer dizer que mapas conceituais podem ser importantes mecanismos para focalizar a atenção do planejador de currículo na distinção entre o conteúdo curricular e conteúdo instrumental, ou seja, entre o conteúdo que se espera que seja aprendido e aquele que serve de veículo para a aprendizagem.*

Também encontramos em MOREIRA e ROSA (1986, p.18) que:

> *Como instrumentos de avaliação, também, podem ser utilizados para se ter uma imagem da organização conceitual - relações hierárquicas entre conceitos - que o aluno estabelece para um dado conteúdo. Naturalmente, essa é uma visão não tradicional de avaliação que é essencialmente qualitativa, mas que pode ser muito valiosa para o professor no sentido de guiar sua prática pedagógica.*
>
> *É claro que o mesmo mapa usado na análise da estrutura conceitual do conteúdo pode também ser usado como recurso didático ou como um referencial para a elaboração de verificações de aproveitamento, mas nem sempre isso é possível. Além disso, a distinção entre os diferentes usos dos mapas conceituais é conveniente porque destaca a versatilidade da técnica do mapeamento conceitual.*

Entendemos a avaliação não com o objetivo de testar conhecimento e dar uma nota ao aluno, a fim de classificá-lo de alguma maneira, mas no sentido de obter informações sobre o tipo de estrutura que o aluno vê para um dado conjunto de conceitos. Para isso, se pode solicitar ao aluno que construa o mapa ou este pode ser obtido indiretamente através de suas respostas a testes escritos e entrevistas orais.

Portanto, o uso de mapas conceituais como instrumentos de avaliação implica uma postura que, para muitos, difere da usual. Na avaliação através de mapas conceituais a principal idéia é a de avaliar o que o aluno sabe em termos conceituais, isto é, como ele estrutura, hierarquiza, diferencia, relaciona, discrimina e integra conceitos de uma determinada unidade de estudo, tópico ou disciplina.

Aquilo que o aluno já sabe, isto é, seu conhecimento prévio, parece ser o fator isolado que mais influencia a aprendizagem subseqüente Ausubel (1978). Se assim for, torna-se extremamente importante para a instrução, avaliar da melhor maneira possível, esse conhecimento. Os mapas conceituais se constituem em uma visualização de conceitos e relações hierárquicas entre conceitos que pode ser muito útil, para o professor e para o aluno, como uma maneira de exteriorizar o que o aluno já sabe. Obviamente, não se trata de uma representação precisa e completa do conhecimento prévio do aluno, mas sim, provavelmente, de uma boa aproximação.

Se entendermos a estrutura cognitiva de um indivíduo, em certa área de conhecimento, como o conteúdo e organização conceitual de suas idéias nessa área, mapas conceituais podem ser usados como instrumentos para representar a estrutura cognitiva do aprendiz. Assim sendo, os mapas conceituais são úteis não só como auxiliares na determinação do conhecimento prévio do aluno (ou seja, antes da instrução), mas também para investigar mudanças em sua estrutura cognitiva durante a instrução, a aprendizagem do aluno, o alcance dos objetivos, a compreensão dos conceitos e suas interligações. Dessa forma se obtém, inclusive, informações que podem servir de realimentação para a instrução e para o currículo.

Acerca da construção destes mapas conceituais adotamos as indicações encontradas em MOREIRA e ROSA (1986, p.18-19):

> *Não há regras fixas ou modelos rígidos para traçar um mapa conceitual. O importante é que ele evidencie as relações e as hierarquias entre os conceitos. As relações podem ser, por exemplo, de inclusão (incluir ou estar incluído), de definição, de similaridade, de atributo (a fragrância é um atributo da rosa) ou ser parte de (a flor é parte de uma planta). As hierarquias podem ser estabelecidas em termos de importância, de generalidade, de abrangência.*
>
> *Um possível modelo para mapeamento conceitual seria aquele no qual os conceitos mais gerais, mais inclusivos, estivessem no topo da hierarquia e os mais específicos, menos inclusivos estivessem na base; os que não fossem nem muito gerais, ou inclusivos, nem muito específicos, naturalmente, ficariam na parte intermediária do mapa.*
>
> *Mais importante do que modelos ou regras, é evitar que este fique muito complexo (pela inclusão de muitos conceitos e muitas ligações entre eles) ou que pareça algo definitivo que o aluno deva memorizar. Mapas conceituais não são auto-suficientes; é sempre necessário que sejam explicados por quem os faz, seja o professor ou o estudante. Uma maneira de diminuir um pouco a necessidade de explicações é escrever sobre as linhas que unem os conceitos uma ou duas palavras chave que explicitem a relação simbolizada por elas.*

Propomos a seguinte estruturação para a construção de um mapa conceitual seguindo o princípio de diferenciação progressiva, adaptado de KAWASAKI (1996):

- Escrever dentro de um retângulo o conceito principal do conteúdo a ser apresentado em forma de hiperdocumento;
- Ao redor do primeiro retângulo, dispor outros retângulos contendo nomes de outros assuntos diretamente relacionados ao conceito principal;

- Ligar cada retângulo ao primeiro por meio de setas direcionais ou bidirecionais e escrever junto a cada seta uma palavra de ligação que sugira a relação entre os dois conceitos;

- Se houver dois conceitos ou mais, ligados ao conceito principal e que possuam alguma relação entre si, ligá-los entre si através de setas direcionais ou bidirecionais e escrever a relação existente entre os conceitos;

- Repetir o procedimento até que todos os conceitos relevantes para o objetivo proposto tenham sido representados.

Os recursos esquemáticos dos mapas conceituais, que representam um conjunto de conceitos inter-relacionados numa estrutura hierárquica proposicional, servem para tornar claro para professores e alunos as relações entre conceitos de um conteúdo aos quais deve ser dada maior ênfase (NOVAK, 1996, p.33).

Segundo GAINES e SHAW (1995), os mapas conceituais podem ser descritos sob diversas formas, conforme o nível de análise considerado:

- Sob uma perspectiva *abstrata*, os mapas conceituais constituídos por conceitos ligados por arcos. Cada conceito tem um identificador único e um conteúdo, enquanto as ligações entre nodos podem ser direcionadas ou não direcionadas, representados visualmente por linhas entre os nós, com ou sem flechas nas extremidades.
- Da perspectiva de *visualização*, os mapas conceituais podem ser vistos como *diagramas*, construídos através do uso de signos. Cada tipo de

conceito pode determinar (ou ser determinado) pela forma, cor externa ou de preenchimento, enquanto as ligações podem ser identificadas pela espessura da linha, cor ou outras formas de representação.

- Sob a perspectiva da *conversação*, os mapas conceituais podem ser considerados como uma forma de representação e comunicação do conhecimento através de *linguagens visuais*, porque estão sujeitos à interpretação por alguma comunidade de referência. Esta interpretação permite o estabelecimento de um paralelo entre a linguagem natural e a linguagem visual - as estruturas gramaticais e suas estruturas adquirem significado conforme são utilizadas em uma determinada comunidade.

Neste contexto, visualizamos o uso de mapas para representação de conhecimento. No papel de organizadores de conhecimento, os mapas são representados por conceitos identificados sobre um assunto qualquer e as relações entre esses conceitos. Entendemos que a construção de um mapa conceitual exige um esforço cognitivo menor do que a construção de um texto linear exigiria. Isso acontece porque quando construímos um mapa conceitual, primeiramente identificamos os conceitos que consideramos importantes, independente da ordem de estudo em que aparecem, possibilitando um processo mais natural do que se pensar em um texto que exige um formalismo e uma expressão seqüencial de idéias. Após essa reflexão sobre os conceitos, basta materializar as ligações que enxergamos entre eles. Após isso, deve-se estar constantemente observando este mapa e fazendo as devidas modificações, que refletem as constantes mudanças que ocorrem em nossa estrutura cognitiva, de acordo com a evolução de nosso conhecimento.

3.3 – Sobre os recursos didáticos utilizados

A princípio nossa investigação elenca situações que envolvem abstrações geométricas e de gráficos cartesianos de várias funções bidimensionais, considerando-as também como motivações iniciais sobre a discussão do conceito de derivadas de funções a partir da interpretação do conceito de velocidade instantânea. Atentamos para a necessidade de propostas que apresentam condições de visualização de tais situações para os aprendizes.

Começamos por relacionar as possibilidades tecnológicas. No que concerne à aprendizagem de matemática e física, as simulações e animações oferecem um potencial sem limites para permitir que os estudantes entendam os princípios teóricos das Ciências Naturais, a ponto de serem chamados de Laboratórios Virtuais. Esta ferramenta pedagógica é de grande valia para o aumento da percepção do aluno, pois pode incorporar a um só momento diversas mídias: escrita, visual e sonora. E desse modo potencializa as possibilidades pedagógicas da interação professor-aluno.

Os movimentos visíveis ou não, fazem parte da nossa realidade, a natureza está em constante atividade, há em todos os corpos dinamismo. Vejamos os movimentos dos astros, rios, mares, ventos, vulcões e inúmeros outros exemplos que poderiam ser citados. Mesmo quando o senso comum não é capaz de aceitar as vibrações atômicas que compõem todas as partículas, a mecânica quântica encarrega-se de nos mostrar um conhecimento mais realista, de tal forma que não poderíamos ser indiferentes e ficarmos confinados apenas aos recursos mais comuns à sala de aula. Desejamos com a animação, apresentado um problema, primar pela observação, entendendo a lógica do fenômeno físico e a partir dessa construção se conseguir a condição determinante para a aplicação, no nosso caso, do Cálculo, conectando assim, o domínio da lógica com a seqüência na resolução numérica.

Logo, a proposta de buscarmos trabalhar com apoio computacional colocou-nos em posição de decidir qual a perspectiva pedagógica relativa à informática educativa que adotaríamos, e de acordo com VALENTE (1991, p.33):

> *... o computador pode ser usado também como ferramenta educacional. Segundo esta modalidade o computador não é mais o instrumento que ensina o aprendiz, mas a ferramenta com a qual o aluno desenvolve algo, e, portanto, o aprendizado ocorre pelo fato de estar executando uma tarefa por intermédio do computador.*

Consideramos ainda que os softwares mais proveitosos fossem aqueles que permitem uma grande interação do aluno com os conceitos ou idéias matemáticas, propiciando a descoberta, inferir resultados, levantar e testar hipóteses e criar situações-problema (Misukami, 1986, apud Gladcheff, Zuffi & Silva, 2001).

Enfim nossa proposta apoiou-se também em softwares computacionais para compor estruturas visuais, enfocando-se primeiramente na Geometria Dinâmica pelo CABRI GÉOMÈTRE II, este é um software de construção em geometria desenvolvido pelo Institut d'Informatique ET de Mathematiques

Appliquees em Grenoble (IMAG) e é o resultado da colaboração constante de cientistas da informática, especialistas em educação e professores. É um software de construção que nos oferece "régua e compasso eletrônicos", sendo a interface de menus de construção em linguagem clássica da Geometria. Os desenhos de objetos geométricos são feitos a partir das propriedades que os definem. Mas não é só isto que ele nos oferece, e aqui está a riqueza do software. Através de deslocamentos aplicados aos elementos que compõem o desenho, este se transforma, mantendo as relações geométricas que caracterizam a situação. Assim, para um dado objeto temos associada uma coleção de "desenhos em movimento", e as características invariantes que aí aparecem correspondem às propriedades geométricas do objeto.

Do ponto de vista de construção de conhecimento o que significa este recurso?

Se, sob ação de movimento o desenho não corresponde ao pretendido, duas são as possibilidades; ou o objeto foi mal construído, isto é, as propriedades que caracterizam o objeto não foram bem utilizadas, ou nossa imagem visual do objeto não é adequada. Em qualquer um dos casos, o recurso do "desenho em movimento" leva ao ajuste entre componente conceitual e componente visual do objeto. Configurações clássicas passam a ter múltiplos aspectos visuais, e com isto passam a ser identificadas em situações não prototípicas. Os "desenhos em movimento" criam naturalmente um ambiente de investigação; os invariantes se destacam e isto nos intriga. Apresentam interface dinâmica e interativa; múltiplas representações trabalhando com geométrica sintética e analítica; captação de procedimentos com um comando que permite ter acesso à história da construção e comandos para criação de macros.

Quanto às possibilidades didáticas:

- Permite modelagem: os alunos constroem os desenhos de objetos ou configurações, quando o objetivo é o domínio de determinados conceitos através da construção. Nesse tipo de utilização os alunos usam os recursos de construção oferecidos no programa.

- Permite a simulação: os alunos recebem desenhos prontos, projetados pelo professor, sendo o objetivo a descoberta de invariantes através da experimentação sobre desenhos em movimento. São feitas conjeturas, são estabelecidas propriedades, e dependendo do nível de escolaridade, num segundo momento, trabalham as demonstrações dos resultados obtidos experimentalmente.

Para a construção e manipulação de gráficos cartesianos utilizamos o WINPLOT. O Winplot é um dos melhores softwares free que existem, e foi desenvolvido pelo professor Richard Parris, da Philips Exeter Academy.

Classificado como um plotador gráfico dinâmico, capaz de representar diversos tipos de gráficos, sendo que com ele é possível representar vários tipos de equação, desde pontos, funções, curvas paramétricas, construções de geometria analítica, bem como o desenvolvimento de Cálculo Diferencial e Integral, representando gráficos em 2D e 3D. Ressaltamos que todas as construções associadas a parâmetros livres, podem ser animadas, sendo afinal um plotador gráfico ideal para todos os níveis educacionais. A intenção principal de nossa experiência ao usar o WINPLOT foi colaborar com a conceituação do Cálculo Diferencial, desenvolvendo arquivos digitais que simulassem representações da interpretação geométrica de Derivadas de Funções com uma Variável Real concomitantemente acrescentando orientações acerca de como verificar a resolução de exercícios algébricos através de representações gráficas.

Para a composição de Mapas Conceituais utilizamos o software free CMAP TOOLS para organização didática dos conceitos e verificação de aprendizagem. Como em um Documento Hipermídia, a cada nó (conceito) de um mapa podemos associar várias mídias, relacionadas ao conceito em questão, desde que se usem ferramentas adequadas para a confecção dos mapas. A ferramentas denominada como CMap Tool (http://www.coginst.uwf.edu), é uma ferramenta para edição de mapas, desenvolvida pelo Institute for Human and Machine Cognition, e que permite a associação de nós de um mapa a outros mapas, a arquivos de áudio e vídeo, figuras, páginas de texto e páginas Web.

Retomando a idéia de tornar o material *potencialmente significativo*, buscamos elencar também, textos e atividades que apresentassem as situações pertinentes às nossas intenções. Assim, adaptamos algumas atividades apresentadas por Tânia Cristina Baptista Cabral no Mini-curso: Velocidade e Aceleração que foi ministrado no III EGEM - *III Encontro Gaúcho de Educação Matemática*, promovido pela SBEM/RS na UNIJUÍ - na Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul de 11 a 12 de novembro de 1994. Utilizamos também de textos e atividades que foram adaptadas da obra *Desenvolvimento de Essências de Cálculo Infinitesimal* de autoria do Professor Roberto Ribeiro Baldino, publicada pela Universidade de Santa Úrsula – RJ, em 1998.

Cabe ressaltar que disponibilizamos aos aprendizes, o texto referente ao capítulo 2.1 desta dissertação de modo a constituir a fundamentação conceitual e o tratamento das atividades apresentadas aos mesmos.

CAPÍTULO 4 – A PESQUISA

4.1 – A seqüência didática

4.1.1 – Apresentando a proposta

O primeiro momento se deu pela apresentação e discussão das intenções gerais do estudo a partir das propostas dos mapas conceituais (ver Figuras 4 e 5) adotados para orientar-nos e que representou a introdução de nossas intenções junto aos aprendizes. Lembramos que consideramos os conceitos de *Plano Cartesiano, Equações de Reta e Funções de uma Variável Real, Movimento e Velocidade* já presentes no cotidiano do ensino médio, como conceitos prévios e mais inclusivos.

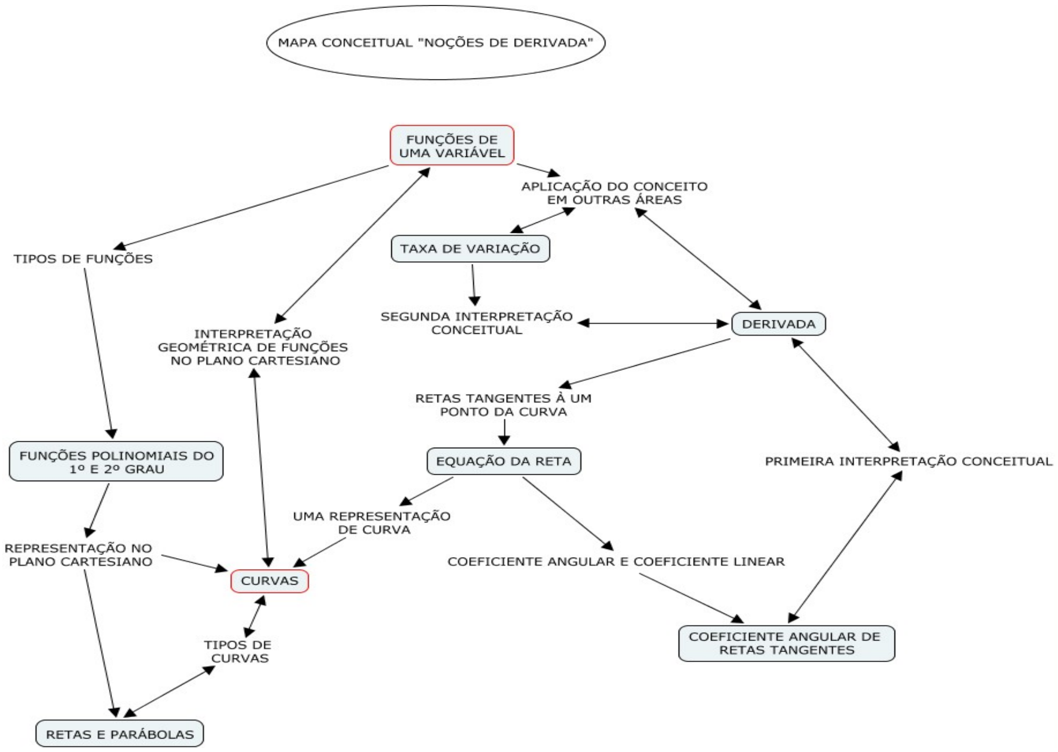

Figura 4: Mapa Conceitual construído por GONÇALVES, William Vieira; usado para organizar a introdução ao conceito de derivadas.

Figura 5: Mapa conceitual usado para introduzir a discussão sobre o conceito de velocidade, extraído de "Mapas Conceituais: Uma ferramenta pedagógica na consecução do currículo"; TAVARES, Romero e LUNA, Gil.

4.1.2 – Rediscussões sobre o conceito de Funções com uma variável real

Começamos pela exploração de um reconhecido jogo matemático chamado *Torre de Hannói*, a intenção inicial foi possibilitar o início de uma relação pedagógica com respeito, afetividade e diversão dada a natureza lúdica da atividade.

A Torre de Hannói é um quebra-cabeça que tem sido tradicionalmente considerada como um procedimento para avaliação da capacidade de memória de trabalho, e principalmente de planejamento e solução de problemas. Foi apresentada pelo matemático francês Edouard Lucas em 1883, como um desafio matemático.

Descrevendo a atividade com a Torre de Hannói

Peças

A Torre de Hannói conforme figura 6, é composta por uma placa com três pinos fixos e discos de tamanhos diferentes, todos com um furo no centro, dispostos em ordem decrescente de tamanho em um dos pinos. Certamente podem ser encontrados em lojas de brinquedos. Denominamos a quantidade variável de discos pela letra *n.*

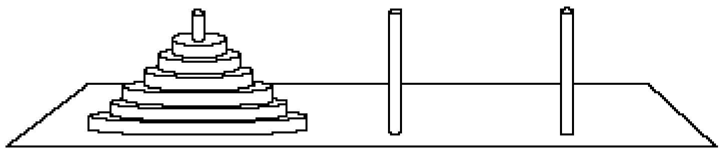

Figura 6: Visualização do jogo

Regras e objetivos do jogo

Inicialmente os discos formam uma torre.

Devemos transferir toda a torre de discos para um dos outros dois pinos, escolhidos previamente, de modo que cada movimento é feito com um unico disco e nunca havendo um disco maior sobre um disco menor.

Problematização

Queremos saber qual é o menor número de movimentos necessários para resolver uma torre de Hanói com *n* discos.

Há uma história (imaginada pelo próprio Edouard Lucas) sobre a torre de Hanói:

No começo dos tempos, Deus criou a Torre de Brahma, que contém três pinos de diamante e colocou no primeiro pino 64 discos de ouro maciço. Deus então chamou seus sacerdotes e ordenou-lhes que transferissem todos os discos para o terceiro pino com o menor numero de movimentos, seguindo as regras acima.

Os sacerdotes então obedeceram e começaram o seu trabalho, dia e noite. Quando eles terminarem, a Torre de Brahma irá ruir e o mundo acabará.

Assim, precisamos de $2^{n}-1$ movimentos para resolver o problema da torre de Hanói com *n* discos. Ou seja, os sacerdotes precisarão de $2^{64}-1$ movimentos para transportarem a pilha de 64 discos do 1º pino para o 3º. Mesmo se eles fizessem um movimento por segundo, eles precisariam de mais de 500 bilhões de anos!! Podemos ficar tranqüilos por enquanto.[6]

Esboçando o gráfico cartesiano de $f(n)=2^{n}-1$ temos:

[6] Para uma discussão mais aprofundada pesquisar Revista do Professor de Matemática n° 9.

Tabela 1: Organizando os dados relativos ao jogo da Torre de Hannói.

n	$\mathbf{f(n) = 2^n - 1}$	**Qtd. de movimentos**
0	$f(0) = 2^0 - 1 = 1 - 1$	0
1	$f(1) = 2^1 - 1 = 2 - 1$	1
2	$f(2) = 2^2 - 1 = 4 - 1$	3
3	$f(3) = 2^3 - 1 = 8 - 1$	7
4	$f(4) = 2^4 - 1 = 16 - 1$	15
5	$f(5) = 2^5 - 1 = 32 - 1$	31
6	$f(6) = 2^6 - 1 = 64 - 1$	63
7	$f(7) = 2^7 - 1 = 128 - 1$	127
⋮	⋮	⋮
n	$f(n) = 2^n - 1$	f(n)

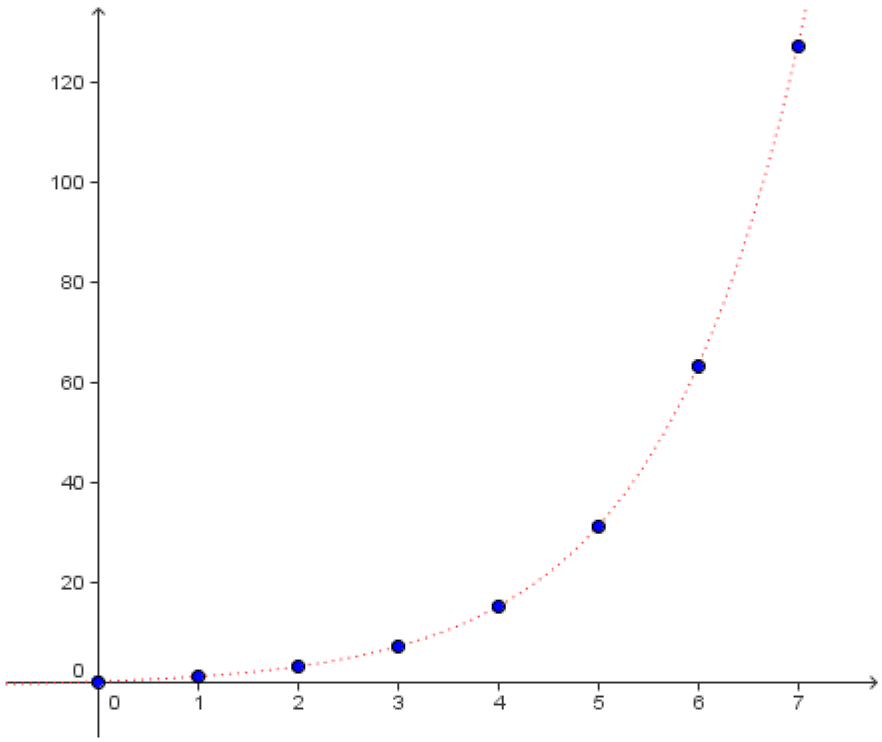

Figura 7: Gráfico da função $f(n) = 2^n - 1$, para valores inteiros de n entre 0 e 7.

Como podemos notar neste jogo, a composição de uma expressão matemática que relaciona duas quantidades variáveis possibilita e permite associar o conceito de Funções Matemáticas como sendo uma relação cartesiana unívoca entre duas grandezas. Além de também contribuir para o desenvolvimento de outros conhecimentos e outras habilidades importantes, tais como a generalização ou abstração de comportamentos que podem ser modelados por expressões algébricas.

4.1.3 – Discutindo a idéia de Coeficiente Angular

A continuidade do trabalho se deu com a aplicação de uma atividade onde através de um teodolito artesanal, trena e com o apoio da razão trigonométrica da tangente de ângulos, buscávamos determinar alturas aproximadas de objetos com tamanhos variados, como por exemplo, árvores.

Nesta indicação, pretendemos problematizar a aplicação da razão trigonométrica denominada como *TANGENTE DE UM ÂNGULO,* a intenção é possibilitar uma experiência de baixo custo e que estimule atividades experimentais e coletivas, de forma a inserir os estudantes em contextos de modelagem matemática, portanto, iniciá-los em habilidades de aplicação do conhecimento matemático.

O objeto que denominamos como Teodolito Artesanal, não foi originalmente concebido por nós, e sim pelos navegadores da Idade Antiga, estes o denominavam como *SEXTANTE* (ver Figura 8), o mesmo servia para ajudá-los a determinar suas posições em alto mar a partir da inclinação de astros em relação a linha do horizonte.

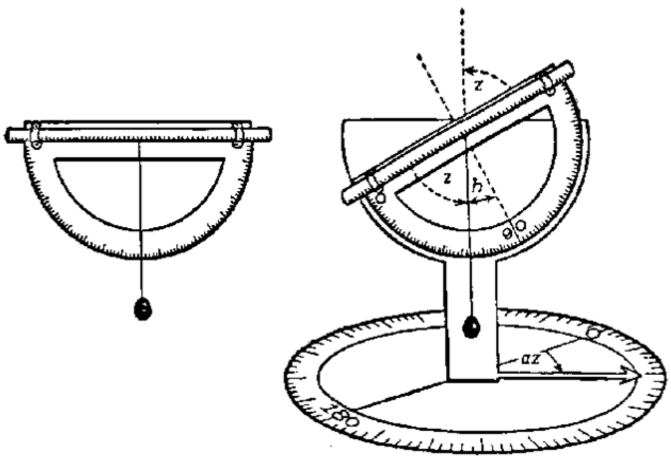

Figura 8: À esquerda temos um exemplo visual do Teodolito Artesanal e a direita um exemplo visual do Sextante, extraído de "MARAVILHAS DA MATEMÁTICA: Influência e Função da Matemática nos conhecimentos Humanos". p.61. HOGBEN, Sir Lancelot.

Apresentamos um roteiro para organização dos estudantes e de associação de tal experiência com a obtenção das razões trigonométricas a partir da construção de triângulos retos que sejam semelhantes ao da situação concreta; esta foi uma forma de reforçar os aspectos teóricos das razões trigonométricas, ou seja, justificar que tais números são obtidos pela propriedade de proporcionalidade entre os triângulos semelhantes.

ROTEIRO

1- Dividam em até três estudantes por aparelho;
2- Explorarem o aparelho ainda em sala, isto irá possibilitar o questionamento de suas utilidades e limitações;
3- Realize uma simulação ainda em sala, notando que é necessário tomar um afastamento do objeto e olhar diretamente para o topo do objeto que se deseja estimar a altura, além de indicar as circunstâncias adequadas (ver Figura 9);

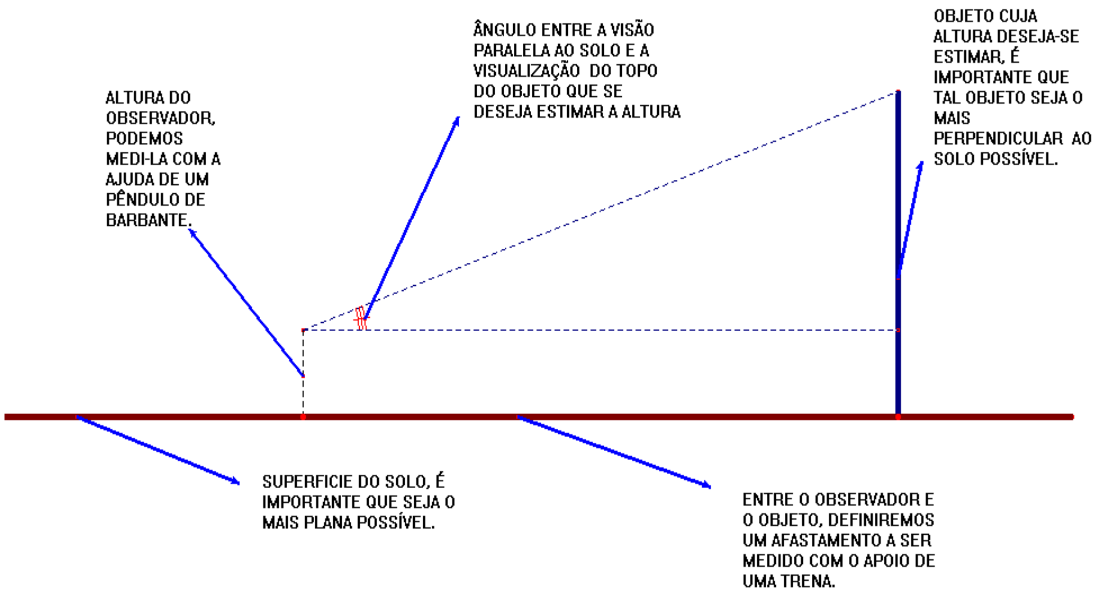

Figura 9: Circunstâncias minimamente adequadas para realização da experiência.

4- Cada um dos integrantes do grupo deve realizar uma observação; sendo que cada um deles irá possivelmente possuir uma altura diferente, irá assim, obter uma inclinação diferente;

5- Determine três afastamentos a serem tomados, sugerimos 4, 7 e 10 metros, assim o instrumento que possui baixa sensibilidade, irá obter diferentes inclinações;

6- Cada integrante irá coletar o ângulo, o afastamento e sua altura, teremos assim nove estimativas para o caso de três integrantes, isto será importante para realizarmos o tratamento estatístico;

7- Depois de coletados os dados, todos retornam a sala e devem construir os triângulos retos respectivamente semelhantes aos encontrados na situação concreta, assim será possível ver que ao medir os catetos e realizar a razão dos mesmos, obteremos as tangentes dos ângulos que nos ajudarão nos cálculos;

8- Apresentamos então o modelo matemático a ser usado:

$$Tg(\alpha) = \frac{c.o.}{c.a.}$$

Equação 1

- $Tg\ (\alpha)$ representa a constante de proporcionalidade entre os triângulos retângulos que possuem o ângulo alfa e que obtemos a partir do triângulo desenhado em sala.

- $c.o.$ é a sigla para o que comumente chamamos de medida do cateto (lado) oposto ao ângulo considerado, tal lado na situação concreta é parte da medida da altura do objeto que desejamos estimar e não podemos fazê-lo diretamente com a trena.

- $c.a.$ é a sigla para o que comumente chamamos de medida do cateto (lado) adjacente ao ângulo considerado, tal lado na situação concreta é a medida do afastamento que tomamos do objeto e que medimos com o apoio da trena.

9- Frisamos então que o único valor desconhecido na Equação 1 será o do cateto oposto, e assim, multiplicando ambos os membros da equação, pelo valor do cateto adjacente, obtemos

$$c.o. = Tg(\alpha) x c.a.$$

Equação 2

10- Evidencia-se então que obtemos uma parte da altura do objeto que desejamos estimar e que será dada em metros, agora somamos o valor da altura respectiva ao observador que gerou o ângulo e finalmente possuímos uma estimativa da altura total do objeto;

11- Para realizarmos uma avaliação dos erros percentuais de excesso ou falta da experiência, sugerimos que se encontre o valor médio (ver equação 3) de todas as medidas e se faça a comparação com cada medida encontrada individualmente (ver equação 4), deve-se considerar a altura média como sendo a estimativa ótima da altura real do objeto.

$$A_M = \frac{A_1 + ... + A_n}{n}$$

Equação 3

$$E_{p_n} = \frac{100 \bullet A_n}{A_M}$$

Equação 4

Onde A_M é a altura média, $A_1+.....+A_n$ é soma de todas as alturas obtidas e n é a quantidade de alturas encontradas. E_{p_n} é o erro percentual relativo a altura designada por *n.*

Esta atividade possibilitou a relação entre a determinação de coeficientes angulares de retas com a razão trigonométrica citada anteriormente. Partimos de atividades que possibilitassem visualizações da determinação de coeficientes angulares de retas, permitindo a mudança dos pontos a considerar sobre a reta e que determinam a variação das abscissas e das ordenadas, além de permitir variar as inclinações e as posições relativas aos eixos ordenados diretamente sobre a reta. Para tal intento construímos um arquivo junto do CABRI GÉOMÈTRE II, em tal proposta podem-se visualizar as mudanças no sentido geométrico e também discutir as relações algébricas através das verificações numéricas.

Na Figura 10 exibimos a interface com o arquivo, a representação da reta R (em vermelho) e dos pontos P1 e P2 (sobre R), são manipuláveis de forma direta (através do mouse) e todas as expressões numéricas variam automaticamente, conforme se movimentam os pontos ou reta.

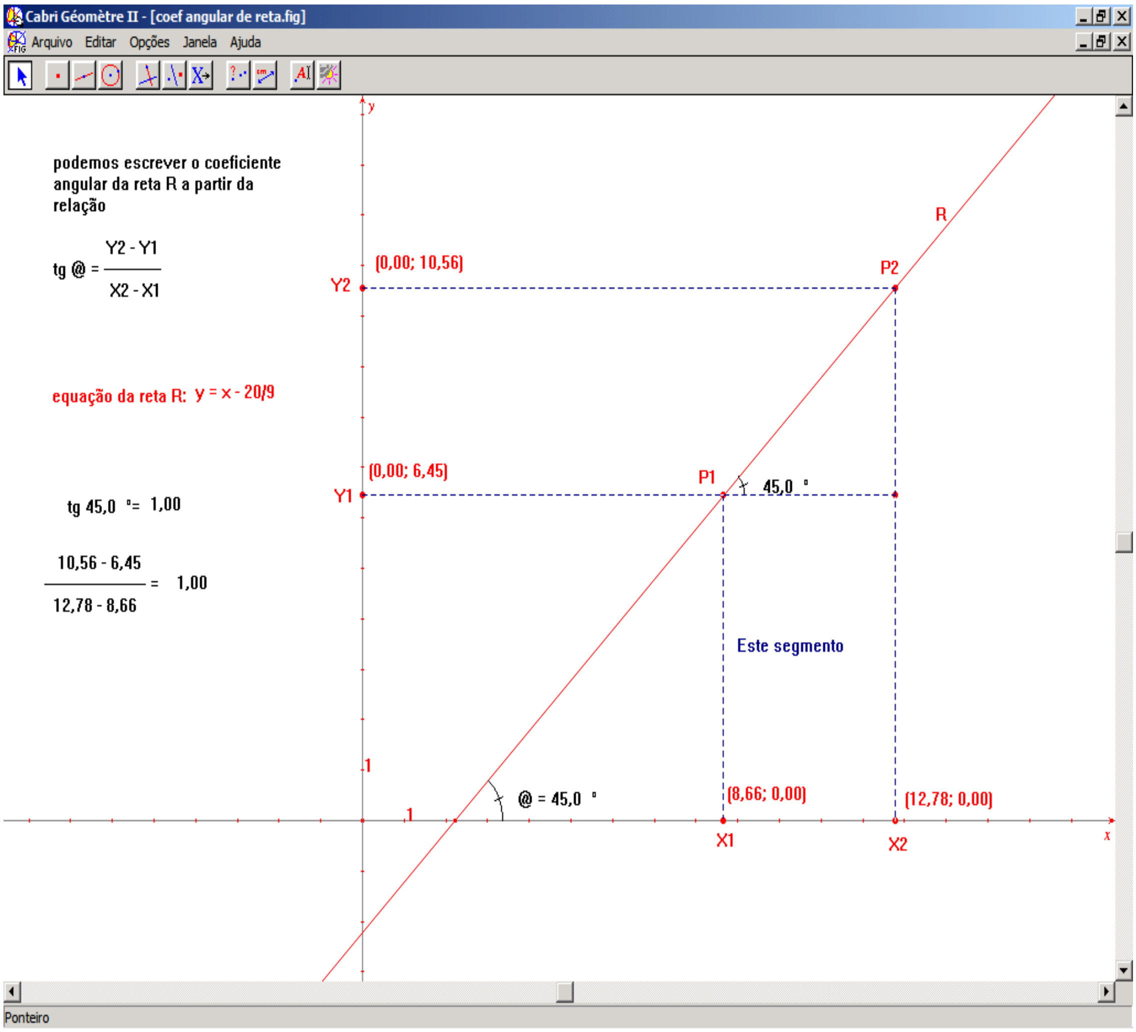

Figura 10: Visualização do arquivo do *CABRI GEOMETRIE II,* simulando a interpretação geométrica de uma reta e as respectivas expressões algébricas de sua equação e a determinação do coeficiente angular.

Em seguida propomos a experimentação de tais noções com o WINPLOT, inicialmente construímos a representação gráfica da equação geral da reta no $\mathbb{R}^2$, tal software permite a variação dos parâmetros *a* e *b* de modo que imediatamente ocorre a animação do desenho; além disso, apontamos para a sobreposição de gráficos como exercício de verificação da equação de reta. Utilizamos a idéia da *Equação de Reta na forma reduzida,* $y = ax + b$ (onde o parâmetro real *a* representa o coeficiente angular[7] e o parâmetro real *b* representa o coeficiente linear[8]), dada sua associação direta com a Função Polinomial de 1° grau $f(x) = y = ax + b$ facilmente representada pelo software. Na Figura 11 exemplificamos a interação com o software através do gráfico de $y = ax + b$, onde $a = 0,4$ e $b = 1$; pela pequena janela à esquerda e um pouco abaixo da representação da reta, é possível variar os valores de tais parâmetros e a visualização da expressão geométrica ocorre imediatamente.

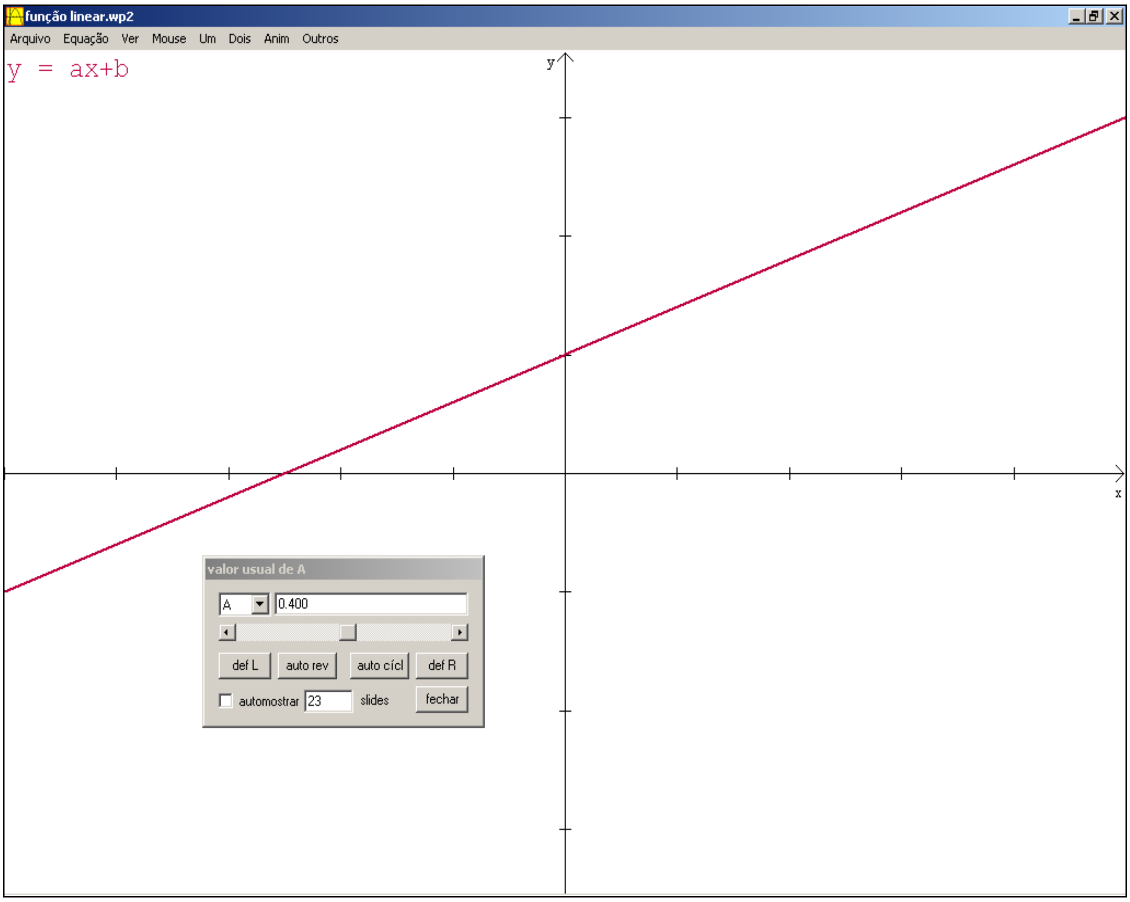

Figura 11: Visualização do arquivo do *WINPLOT,* nele, é possível animar o gráfico a partir da variação do valor de *a*.

[7] Refere-se à inclinação da reta em relação ao eixo das abscissas Ox no sentido anti-horário.

[8] Refere-se ao ponto onde a reta cortou o eixo das ordenadas Oy.

4.1.4 – Discutindo o conceito de *Diferenciação de Funções com uma Variável Real* a partir das idéias de *Velocidade instantânea*

As noções de derivada foram introduzidas através de dois problemas acerca de uma viagem de automóvel entre duas cidades. O objetivo era apontar para o fato de que, quem diz que a velocidade de um automóvel que percorre 2 quilômetros em um minuto é de 120 quilômetros por hora, está calculando uma derivada. Este objetivo se desenvolveu em duas direções, a primeira é a construção de um gráfico relacionando o espaço e o tempo, a segunda se dá pela passagem dos movimentos com velocidade constante aos movimentos variados, tais passagens foram expressas segundo a transição de gráficos cartesianos. Na etapa de visualização de retas tangentes a pontos de variadas curvas, apoiamo-nos em animações feitas com o software WINPLOT, tal iniciativa gerou interpretações positivas sobre como a variação da velocidade instantânea estava adequadamente representada pelas derivadas, dado o fato de que a animação se estabelecia pela variação do coeficiente angular das equações de reta.

A seguir registramos o material organizado para direcionarmos nossos intentos em relação às concepções de *diferenciabilidade*.

Descrevendo os problemas relativos a situações que envolvem o conceito de Velocidade

Problemas sobre Espaço, tempo e velocidade

Procure colocar-se no contexto de uma viagem de automóvel (lembre ou imagine). Você notou as pequenas placas ao lado da estrada? Elas indicam as distâncias ao ponto em que a estrada começa. Placas maiores indicam as distâncias às cidades mais próximas. Essas distâncias são dadas em quilômetros. Que imagem você faz de 1 km? Vai de onde você está até onde, mais ou menos? Você também deve ter notado que no painel do automóvel há um ponteiro que marca a velocidade. Esse instrumento é chamado velocímetro. A velocidade é ali dada em quilômetros por hora. Que imagem você faz, por exemplo, de 40 quilômetros por hora? É mais que a velocidade de um homem correndo? De uma bicicleta na descida? Quantos quilômetros por hora faz uma pessoa correndo? Em geral, abaixo do ponteiro do velocímetro há um instrumento que marca a distância que o automóvel já percorreu desde que saiu da fábrica ou desde que esse instrumento, chamado hodômetro, foi 'zerado'. No problema seguinte relatam-se os episódios de uma viagem de automóvel. Você deverá fazer o gráfico espaço- tempo do movimento, pondo os tempos no eixo das abscissas e as distâncias medidas da estrada, sobre o eixo das ordenadas. Faça o gráfico da velocidade - tempo. Suponha que, em cada trecho da viagem, a velocidade foi constante.

Problema 1: Uma viagem.

Uma família viaja de automóvel pela estrada cujo mapa está na figura 12, saindo da cidade A e chegando à cidade B, percorrendo os 300 quilômetros da estrada em 6 horas. No começo da viagem o automóvel andou devagar, levando 1 hora e 45 minutos no trajeto que vai da cidade A, passa pela estrada de ferro e vai até o camping. Entre o camping e o posto do km 200 foi preciso ir mais ligeiro, de modo que esse trajeto durou 45 minutos: No posto eles pararam para lanchar durante uma hora. Daí por diante deram prosseguimento à viagem, com velocidade praticamente constante, de 100 km/h. Quando chegaram ao moinho no km 250, o garoto lembrou-se de que esquecera o casaco no restaurante e eles tiveram de voltar, o que fizeram com velocidade média de 120 km/h. O frentista já tinha o casaco do garoto na mão, de modo que eles o apanharam, agradeceram e, imediatamente, prosseguiram a viagem para a cidade B, aonde chegaram às 9 horas da noite. Represente essa história em gráficos espaço-tempo e velocidade-tempo.

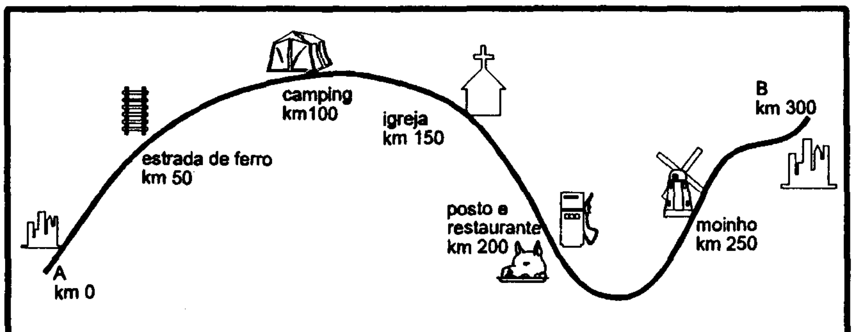

Figura 12: Mapa do trajeto da viagem citada no problema 1.

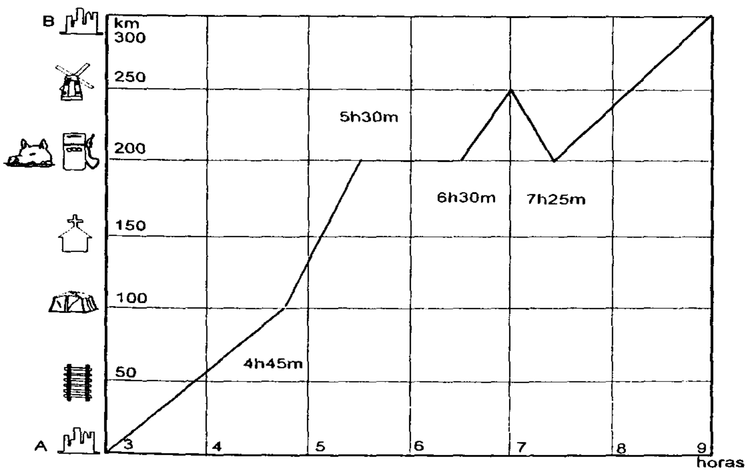

Figura 13: Gráfico preenchido manualmente pelos aprendizes e que relaciona o espaço-tempo da situação descrita no problema 1.

Nesta construção chamamos a atenção dos aprendizes para o fato de que a inclinação de cada segmento de reta que compõe o gráfico corresponde numericamente às velocidades médias nos diferentes trechos da viagem.

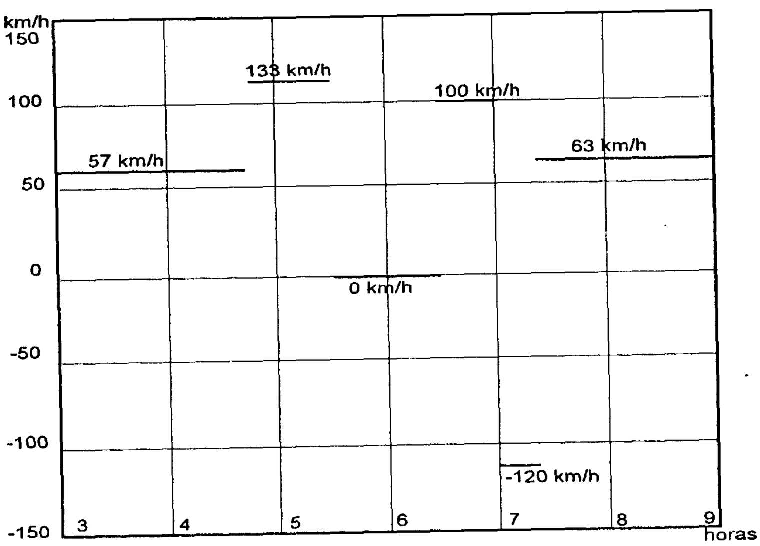

Figura 14: Gráfico preenchido manualmente pelos aprendizes e que relaciona a velocidade-tempo da situação descrita no problema 1.

Formalizando as idéias, até quando o gráfico é de espaço-tempo a velocidade média entre dois instantes t e $t+\Delta t$, será representada por:

$$V_m\,(t,\ t+\Delta t\,).$$

Esta se define como a variação do espaço dividida pela variação do tempo, e representamos:

$$V_m(t,t+\Delta t)=\frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}$$

A velocidade média entre os instantes t e $t+\Delta t$ é o coeficiente angular da reta secante ao gráfico espaço-tempo que passa pelos pontos $P(t,s(t))$ e $Q(t+\Delta t,s(t+\Delta t))$. Essa reta é chamada secante porque corta (secciona) o gráfico em dois pontos pelo menos (ver Figura 15).

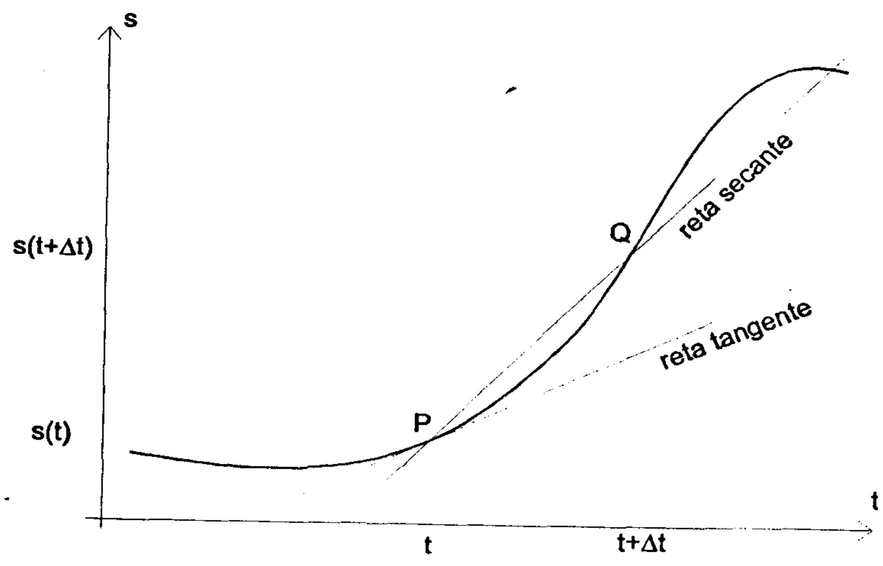

Figura 15: Gráfico que busca expressar a interpretação geométrica de velocidade média e instantânea.

O problema a seguir diz respeito diretamente à associação entre velocidade instantânea e a derivada de uma função.

Problema 2: Do espaço à velocidade instantânea

Na Figura 16 relacionamos o espaço-tempo de um automóvel que percorre os 120 km de uma estrada em 6 horas. Suponha que um caminhão viaja sobre a mesma estrada e tem gráfico espaço-tempo mostrado em tracejado. O que ocorreu às 10h? Houve ultrapassagem aí? O que o motorista do caminhão falou? (Você pode brincar com essa pergunta, mas, se estiver entendendo a situação, notará que ela é séria.) Qual a velocidade do caminhão e qual a velocidade do automóvel nesse momento? Pede-se o traçado do gráfico de velocidade - tempo.

Figura 16: Gráfico relacionando o espaço – tempo da situação descrita no problema 2.

Saltamos para a discussão aprofundada das perspectivas de Newton e Leibniz (referenciadas pelo texto do capitulo 2 deste trabalho) a fim de justificar a associação da idéia de retas secantes (e que definiam a velocidade média nos trechos) tornando-se tangentes a pontos da curva e assim possibilitando estimar as velocidades em cada instante do trajeto (ver Figura 17).

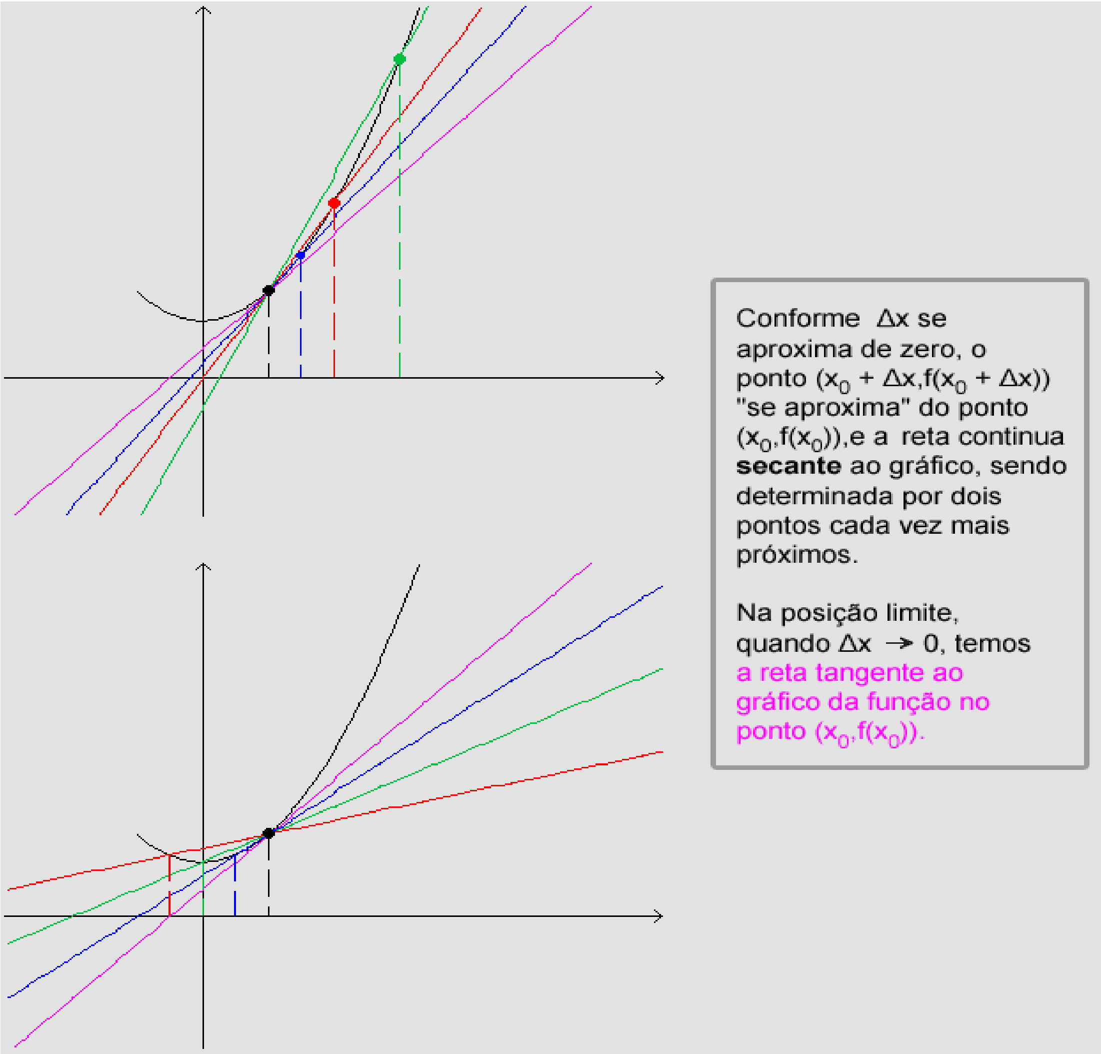

Figura 17: Figura utilizada para associar a idéia de derivada com o coeficiente angular das retas tangentes a pontos de uma curva.

Em seguida formalizamos a idéia de velocidade instantânea.

No instante *t*, a velocidade instantânea expressa por *v(t)* é o *coeficiente angular da reta tangente ao gráfico espaço-tempo no instante t*, isto é, é o coeficiente angular da reta que tangencia o gráfico no ponto *(t, s(t))*. Para obter esse valor, traça-se a tangente no ponto *(t, s(t))* e procura-se o valor do coeficiente angular pelo seguinte método:

- Escolha um ponto arbitrário na curva do gráfico (ver Figura 31);
- Trace a partir do ponto escolhido um segmento de reta que o tangencie, quanto maior esse segmento, maior será a precisão do cálculo;
- Utilize a própria malha do gráfico para delimitar um triângulo reto e meça os catetos;
- Encontre o valor do coeficiente angular.

A seguir exemplificamos como os aprendizes realizaram a atividade, e construíram a transição do gráfico espaço – tempo para o gráfico da velocidade – tempo (ver Figura 18 e Figura 19).

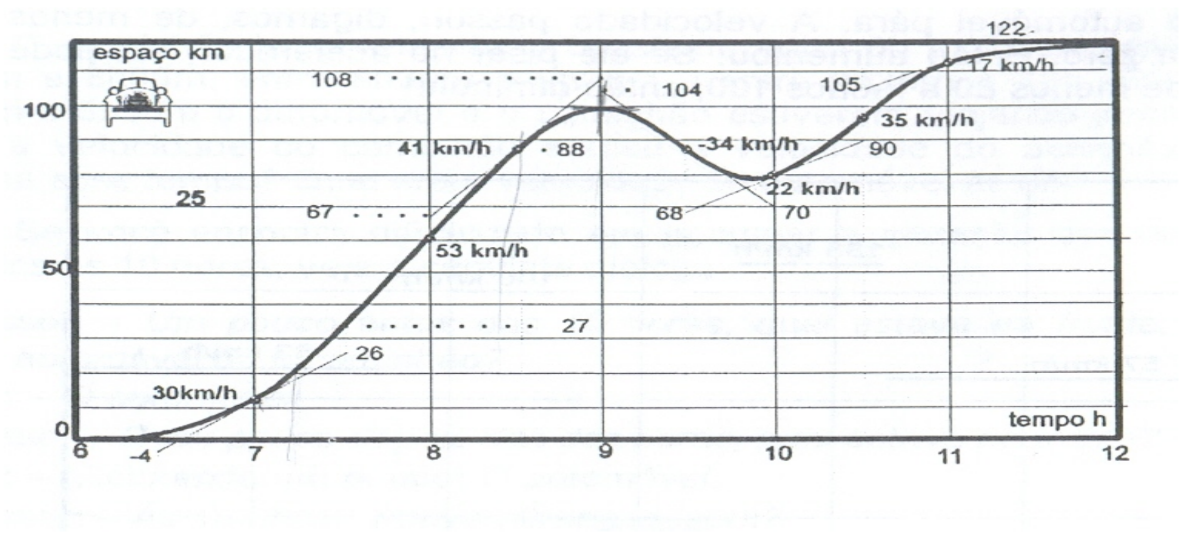

Figura 18: Gráfico espaço – tempo relativo à situação descrita no problema 2, neste caso exibe-se somente a curva referente ao movimento variado.

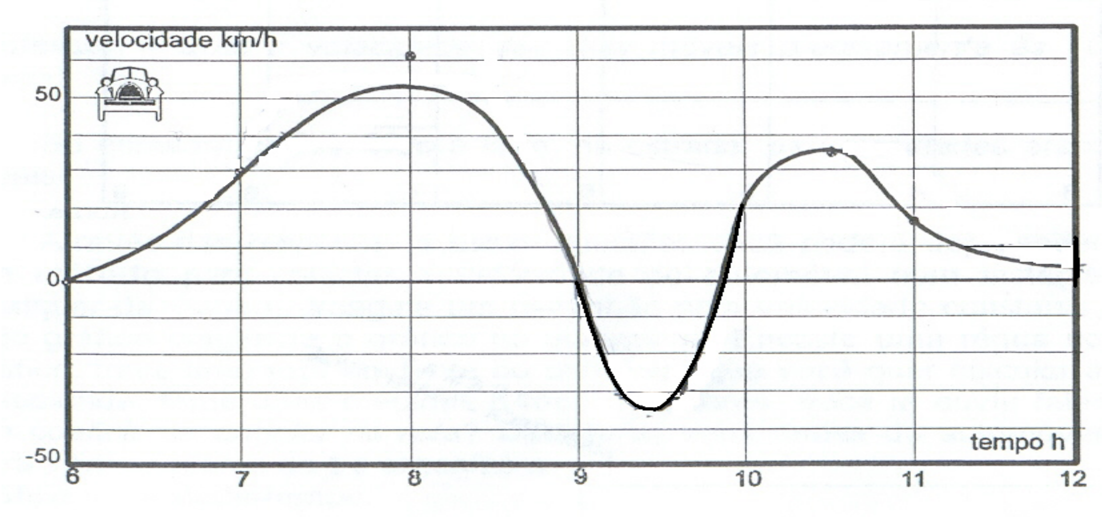

Figura 19: Gráfico que relaciona a velocidade – tempo da viagem do carro menor relativo a situação descrita no Problema 2, este é um exemplo construído manualmente por um dos aprendizes.

Finalmente, formalizamos o conceito de *Diferenciação.*

Daqui por diante, quando o gráfico não é, nem de espaço-tempo, nem de velocidade-tempo, mas é um gráfico matemático abstrato de uma função *y = f(x)*, o coeficiente angular da reta secante que passa pelos pontos *(x, f(x)) e (t, f(t))* não será chamado velocidade média, será chamado quociente de Newton de *f* entre os pontos *x* e *t* e será anotado $Qf(x,t) = \dfrac{f(t) - f(x)}{t - x}$. Assim, fazendo $\Delta x = t - x$, tem-se:

$$Qf(x, x + \Delta x) = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

O coeficiente angular da reta tangente em um ponto *(x, f(x))* do gráfico não será chamado velocidade instantânea, será chamado *derivada de f no ponto x* e será anotado como $f'(x), Df(x)$ ou $\dfrac{dy}{dx}$.

Na tabela a seguir buscamos sintetizar nossas discussões até momento.

Tabela 2: Breve resumo de nossos estudos até o momento.

Cinemática	Matemática	Conceitos:
$s = s(t)$, $v = v(t)$	$y = f(x)$	Funções
$v_m(t_1, t_2)$	$Qf(x, t)$	Coeficiente angular da reta secante ao gráfico de f entre x e t. Quociente de Newton.
$v(t)$	$f'(x)=Df(x)=\frac{dy}{dx}$	Coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f no ponto x. Derivada.

Quando os gráficos são dados por desenhos, a derivada é calculada aproximadamente, quando é dada a expressão analítica da função, a derivada deve ser calculada sem auxílio do gráfico, usando apenas a expressão analítica dada para $y = f(x)$.

Nas próximas atividades esperamos mostrar quais são as idéias necessárias para se conseguir a *derivada* de funções polinomiais e/ou racionais a partir da expressão analítica.

ATIVIDADES

Na figura a seguir (ver Figura 20) temos um gráfico com a forma de uma parábola de equação $s(t) = t^2$. No que se segue, por favor, distinga bem quando se pede para resolver uma questão “pelo gráfico” e quando se pede “pela expressão analítica”. São métodos diferentes de resolver os problemas e ambos têm de ser aprendidos.

1. Tome as medidas no gráfico para determinar aproximadamente a velocidade média entre os instantes t= 1 e t= 1,73.

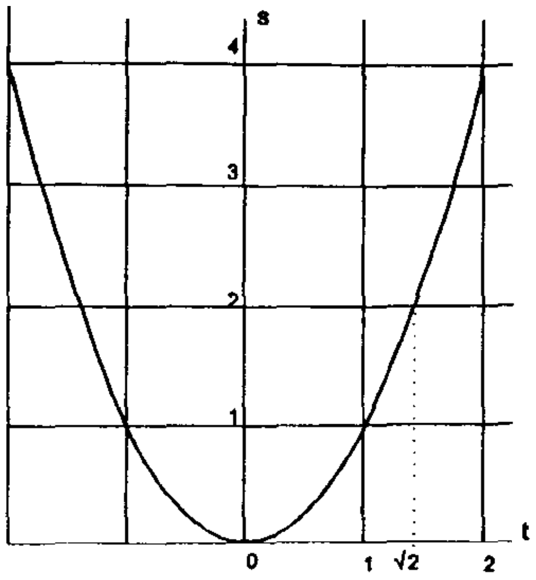

Figura 20: Parábola a ser explorada.

2.Confira o resultado usando a fórmula da parábola.

3.Tome as medidas no gráfico para determinar aproximadamente a velocidade média entre os instantes *t=1*e $t = \sqrt{2}.$.

4.Confira o resultado usando a fórmula da parábola.

5.Pelo gráfico, determine aproximadamente a velocidade instantânea no instante $t = 1.$

6.Qual a precisão do valor achado no item anterior? Quais as fontes de erro? Como se pode calcular esta velocidade instantânea com 5 casas decimais?

7.Usando a equação da parábola, ache a fórmula da velocidade média entre o instante fixo, *t = 1*, e outro instante variável qualquer *t*. Ou seja, ache a fórmula da velocidade média função de *t*. Simplifique a fórmula usando fatoração.

8.Substitua *t* por 1,73 na fórmula para conferir a resposta do item 2; substitua *t* por $\sqrt{2}$ para conferir a resposta do item 4.

9.Que valor de *t* deve ser substituído na fórmula para conferir a resposta do item 5?

10. Daqui por diante, esqueça que o gráfico da parábola é de espaço-tempo e passe a considerá-lo apenas como uma função matemática $y = x^2$. Calcule o quociente de Newton entre os pontos $x = 2$ e $x = 5$; faça também entre os pontos $x = 2$ e $x = 1$ e simplifique esta resposta.

11 .Qual deve ser o valor de t no item anterior para se obter o valor da derivada no ponto 2, isto é, o valor do coeficiente angular da reta tangente no ponto (2, 4)?

l2. Pelo processo desenvolvido até aqui, calcule a derivada da parábola $y = x^2$ no ponto $x = 3$. Calcule a derivada da parábola no ponto $x = -3$.

13.Qual a fórmula da derivada em um ponto x, qualquer?

Neste ponto intervimos com outro arquivo do <u>CABRI GÉOMÈTRE II</u> para apoiar a discussão da noção de limite, a noção de infinitésimo, a idéia de reta secante e a idéia de reta tangente (ver Figura 21). Este arquivo colaborou com a visualização das retas secantes “tornando-se tangentes” a pontos da parábola; as simulações e as verificações de ordem numérica acabaram por colaborar com a associação entre o coeficiente angular das retas tangentes à idéia de velocidade instantânea.

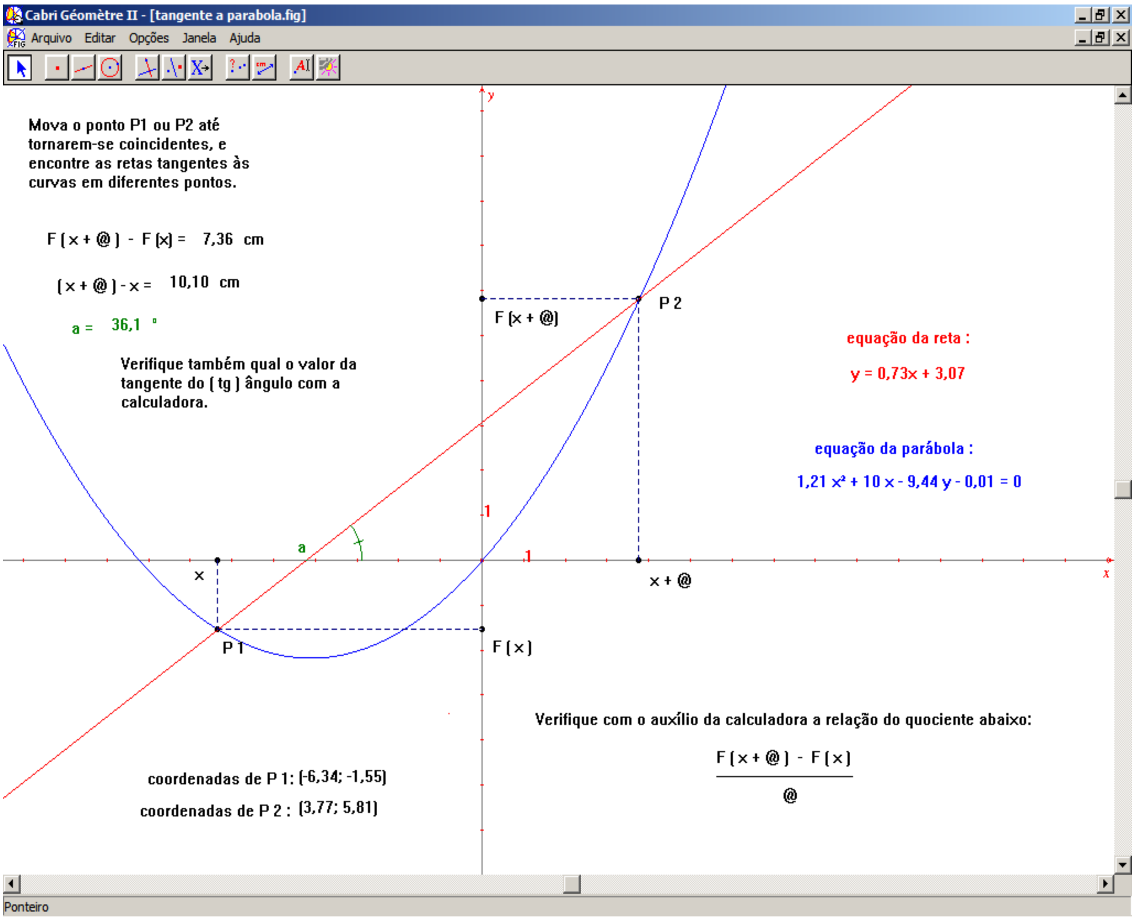

Figura 21: Visualização do arquivo do *CABRI GÉOMÉTRE II,* simulando as retas secantes tornando-se tangentes.

Na Figura 21 exibimos a interface com o arquivo, a representação da reta R (em vermelho) e dos pontos P1 e P2 (sobre R e a parábola), são manipuláveis de forma direta (através do mouse) e todas as expressões numéricas variam automaticamente, conforme se movimentam os pontos ou a reta.

Retomamos a seqüência das atividades.

14.Usando a equação da parábola, ache a fórmula do quociente de Newton entre o ponto *x = 2* e outro ponto, variável, *t= 2+h.* Simplifique a fórmula.

15.Qual deve ser o valor de *h* para esta fórmula fornecer o valor da derivada no ponto 2, como no item 11?

16.Para cada uma das funções *f*, abaixo, calcule *Qf(x, t)*, simplifique a resposta e calcule *f'(x)*. Calcule $Qf(x, x+\Delta x)$, simplifique a resposta e calcule *f'(x)*.

a) $f(x)=x^3$

b) $f(x)=\sqrt{x}$

c) $f(x)=\frac{1}{x}$

d) $f(x)=\frac{1}{x^2}$

e) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$

f) $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

g) $f(x)=3x^2+5x+4$

h) $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$

i) $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$

j) $f(x)=3x^2-x^3$

k) $f(x)=5+x+\sqrt{x+1}$

l) $f(x)=\sqrt{x^2+1}$

Encaminhamentos sugeridos para estas atividades[9]

1. Não use a formula da parábola. Ponha a régua sobre o gráfico, trace a reta secante e calcule o coeficiente angular como no problema 2. O resultado será aproximado.

2. Calcule o quociente de Newton substituindo os valores 1 e 1,73 na fórmula da parábola.

3. Repita o procedimento do item 1.

[9] Comentários apresentados aos participantes do curso.

4. Repita o procedimento do item 2.

5. Encoste a régua no gráfico, trace a reta tangente e calcule o coeficiente angular pelo processo do problema 2.

6. Você consegue distinguir t=1.73 de t=1, 732 no desenho? Certamente não. A maior precisão dos desenhos, com papel vegetal e lápis bem fino, é 1/4 de milímetro. Então, quando você marcou 1,73 no item 1, alguém poderia ler 1,74. Quantos algarismos significativos exatos têm as medidas neste gráfico? Enumere as fontes de erro.

7. Escreva o quociente de Newton para os instantes 1 e t. Aqui, t é uma letra que representa uma variável, isto é, t pode ser qualquer número. Portanto não use um valor numérico fixo para t. Trabalhe com a letra, como se faz em álgebra. Ache a fórmula de uma função envolvendo a letra t.

8. A fórmula é $Qs(1, t) = t + 1$. Note que t aparece em dois lugares desta fórmula. É preciso substituir o valor de t nos dois lugares. É um erro grave substituir o valor de t em um lugar só. Escrever $Qs(1, t) = 2 + 1$, por exemplo, indica que você não entende a notação de função.

9. A fórmula encontrada no item anterior fornece o coeficiente angular de qualquer reta secante à parábola passando pelo ponto (1, 1) e por outro ponto qualquer, (t, t^2) em função de t. Se o Sílvio Santos lhe oferecer mil reais para você dizer qual é o valor exato do coeficiente angular da reta tangente no ponto (1, 1), o que você responde? Qual deve ser o valor de t, nesta fórmula $Qs(1, 1) = t + 1$ para que ela forneça o valor do coeficiente angular da tangente?

10. Escreva o quociente de Newton. Na primeira etapa, obtenha um número, na segunda, obtenha uma fórmula.

11. É a mesma discussão do item 9, agora no ponto $x = 2$. A fórmula é $Qs(t, 2)$ $t + 2$.

12. Escreva o quociente de Newton $Qs(3, t)$, simplifique a resposta e faça $t = 3$. Escreva o quociente de Newton $Qs(-3, t)$, simplifique a resposta e faça $t = -3$.

13. Escreva o quociente de Newton $Qs(x, t)$, simplifique a resposta e faça $t = x$.

14. Substitua t por $2 + h$ no quociente de Newton, ponha h em evidência e simplifique h. Nessa maneira de calcular o quociente de Newton, o segundo ponto é obtido dando um acréscimo h ao primeiro; algumas contas ficam mais fáceis.

15. Quando $t = 2+h$ vale 2, quanto vale h?

Com esses exercícios espera-se que você tenha aprendido:

a) que a derivada de uma função f no ponto x é o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(x, f(x))$ ou, abreviadamente, que a derivada é o coeficiente angular da reta tangente;

b) que a derivada representa a velocidade instantânea, quando a função dada representa espaço em função do tempo;

c) que o cálculo da derivada de funções polinomiais se faz por simplificação do quociente de Newton e substituição da abscissa do ponto de secância pela abscissa do ponto de tangência.

Por fim, buscamos exercitar as construções geométricas com os recursos de software.

Para a obtenção das equações das retas tangentes, utilizamos a idéia da *Equação Fundamental da Reta,* $(y - y_0) = a(x- x_0)$, onde *a* representa o coeficiente angular da reta tangente, ou seja, a derivada da função e (x_0 , y_0) é o ponto onde se deseja constituir a reta tangente.

Partimos para a construção de retas tangentes a pontos de variadas curvas junto ao software WINPLOT, construíram-se gráficos de diferentes tipos de funções polinomiais buscando-se representar diversos pontos de seus gráficos e suas respectivas retas tangentes (ver Figura 22).

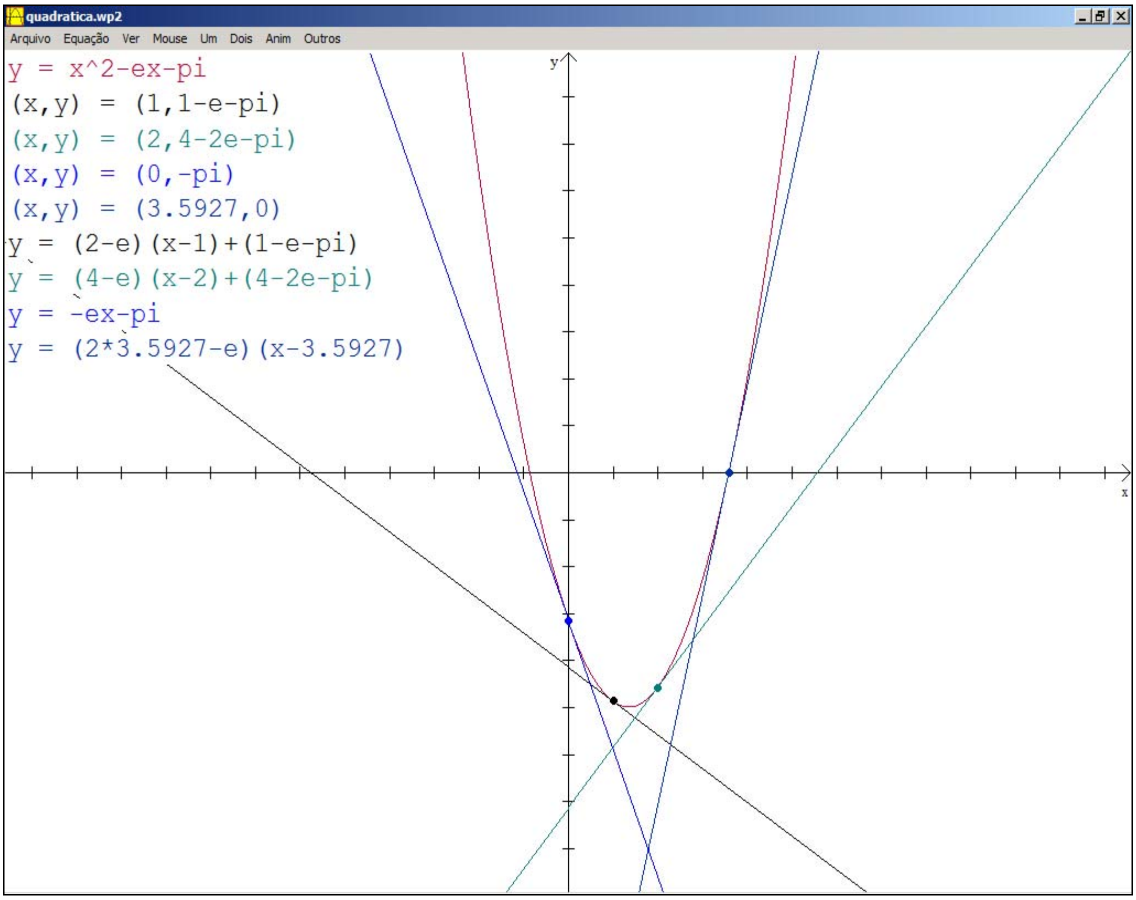

Figura 22: Exemplo de arquivo do WINPLOT construído pelos aprendizes.

A conclusão de nossas atividades se deu na construção de arquivos que simulassem a reta tangente respectiva a cada ponto de diferentes funções; na Figura 23, expomos um arquivo que exemplifica um caso onde a variação de um único parâmetro é capaz de representar a animação de um ponto que percorre o gráfico da função e simultaneamente mostrar a reta acompanhando este ponto, sempre a tangenciar a curva.

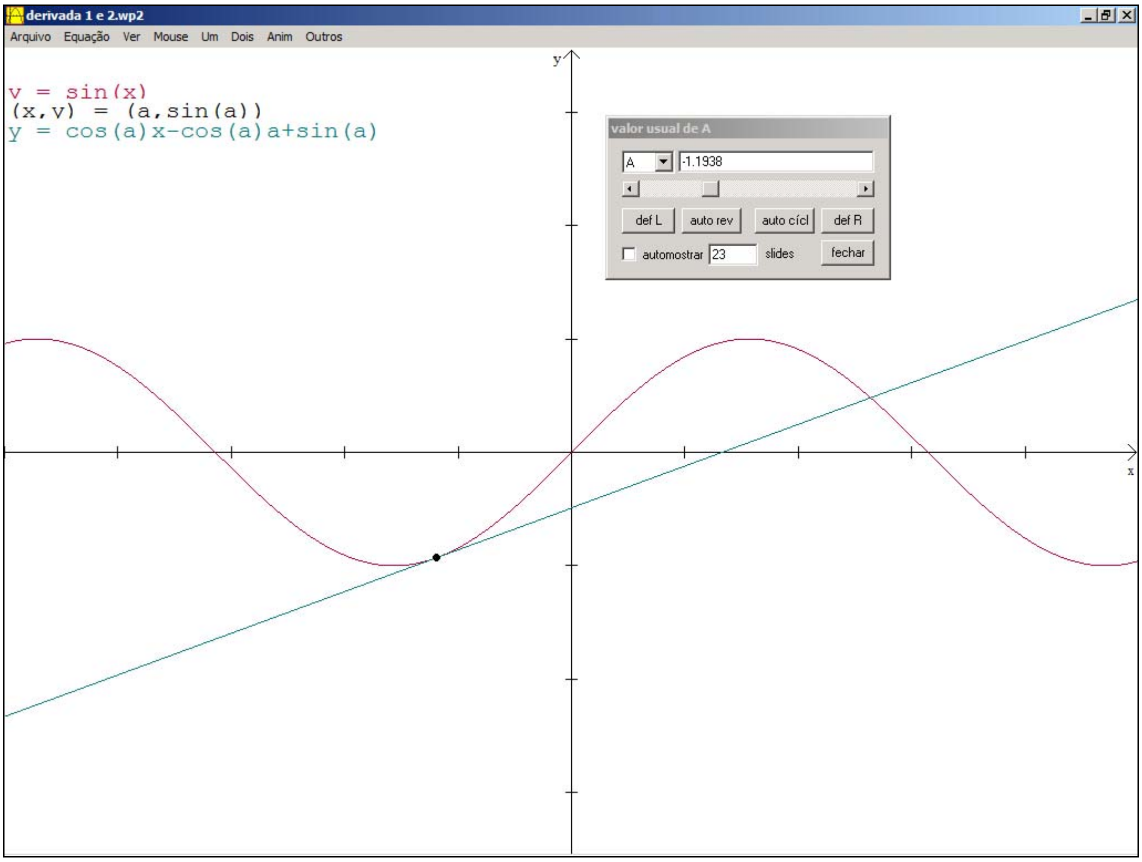

Figura 23: Exemplo de arquivo do WINPLOT apresentado aos aprendizes.

4.2 – Sobre o desenvolvimento da pesquisa

O espaço para execução da proposta e coleta de dados foi disponibilizado pelo Departamento de Física da UFMT em Cuiabá, vinculando-se ao projeto CANOA. Este projeto associa-se ao Programa de Pós-Graduação em Educação da UFMT na Área de Concentração: TEORIAS E PRÁTICAS PEDAGÓGICAS DA EDUCAÇÃO ESCOLAR.

Sob a responsabilidade do Prof. Dr. Sérgio Roberto de Paulo, temos um projeto de pesquisa em Educação, na linha de Educação em Ciências, denominado: *"Projeto Canoa: Inclusão Social por meio da Prática de Ensino e Formação de Professores de Ciências."*

> *O objetivo principal deste projeto é investigar a efetividade de se promover inclusão social de alunos da escola pública no que diz respeito a sua inserção na universidade pública e melhoria da qualidade de aprendizagem, possibilitando melhores chances a esses alunos de aprovação no vestibular, oferecendo-lhes gratuitamente aulas por meio de metodologias de ensino diferenciadas (com especial ênfase na execução e montagem de experimentos) envolvendo a prática de ensino de licenciandos dos cursos de Licenciatura Plena em Física, Biologia, Química e Ciências Naturais da UFMT, bem como envolvendo professores que ministram aulas de Ciências em Mato Grosso, num processo de formação continuada e aprimoramento de conhecimentos e práticas de professores não licenciados.*

Extraído do site *http://64.233.169.104/search?q=cache:PQc2KkxGXO0J:servicos.capes.gov.br/arquivos/avaliacao/estudos/dados1/2006/50001019/038/2006_038_50001019001P8_ProjPesq.pdf+%22william+vieira+gon%C3%A7alves%22&hl=pt-BR&ct=clnk&cd=7&gl=br&client=firefox-a*. acessado em 07 agosto de 2006.

Desde 2004 a cada semestre letivo, a Área de Ensino em Física do curso de Licenciatura Plena, tem oportunizado mini-cursos com temas relacionados à Física para estudantes da rede de Ensino Médio nos municípios de Cuiabá e Várzea-Grande. Os estudantes são convidados a virem ao campus da UFMT-CBÁ e participar de diferentes propostas de estudo.

A princípio nossa participação seria a instrumentação de alguns licenciandos sobre a seqüência didática que apresentamos neste trabalho, e assim realizaríamos a coleta dos dados como observadores dos mini-cursos. No entanto, fomos orientados a ministrar diretamente o curso em colaboração com o discente Gustavo José Farias.

A fim de testar o planejamento didático e verificar a organização do tempo, realizamos no fim do primeiro semestre de 2006 uma edição do curso com duração de vinte horas, nesta edição a carga horária foi insuficiente e trabalhamos com uma turma de sessenta inscritos e outra com quarenta inscritos; além de não conseguirmos dispor material escrito e computadores a todos também não foi possível trabalhar até a generalização do conceito de *Derivadas*.

Com a proposta refeita para um curso com dez encontros de quatro horas, reapresentamos o mini-curso "*Concepções iniciais das Derivadas"* no fim do segundo semestre de 2006, com limite de vinte e cinco inscritos por turma. Ressalta-se que em 2006 todos os inscritos podiam participar de pelo menos duas propostas de mini-curso, conseqüentemente trabalhamos com duas turmas de diferentes classes sociais e séries do nível médio, geralmente, oriundos de escolas públicas.

Inicialmente apresentamos os Mapas Conceituais registrados no *capítulo 4.1.1 – Apresentando a proposta* e os objetivos do curso para os participantes, neste momento propúnhamos o contrato didático apontando a condição para ocorrência da aprendizagem significativa, esta seria o fato de que o aprendiz deve, também, manifestar uma disposição para relacionar o novo material, de modo substantivo e não arbitrário, à sua estrutura de conhecimento. Em outras palavras, deveria existir a intenção por parte do estudante em aprender o que se busca ensinar. Todos resolveram participar dos dez encontros que ocorreriam no período vespertino e que se limitavam à seqüência didática descrita.

Nos dois primeiros encontros realizamos a etapa descrita no *capítulo 4.1.2 – Rediscussões sobre o conceito de Funções com uma variável Real*, disponibilizando fotocópias do texto que descreve as atividades com a Torre de Hannói.

Para os próximos três encontros reservamos as atividades e discussões elencadas no *capítulo 4.1.3 – Discutindo a idéia de Coeficiente Angular*. Também disponibilizamos material fotocopiado para orientar a experiência com

As indicações e atividades contidas no *capítulo 4.1.4 – Discutindo o conceito de Diferenciação de Funções com uma Variável Real a partir das idéias de Velocidade instantânea e Aceleração,* ocuparam os cinco encontros restantes. Nesta última etapa forma disponibilizadas fotocópias de textos contendo o desenvolvimento do Cálculo Diferencial no período de Newton e Leibniz, as conceituações, orientações e atividades do capítulo 4.1.4.

Nestes dez encontros conseguimos efetivar a execução da proposta de estudo do conceito de *Diferenciação de Funções com uma Variável Real.* Dentre suas atividades e discussões em sala, vislumbramos questões sobre a aprendizagem das habilidades de manipulações algébricas e aprendizagem com o apoio de softwares educativos, portanto, faremos algumas considerações no próximo capítulo desta dissertação; entretanto, resgatamos o enfoque da Aprendizagem Significativa pelos Mapas Conceituais registrando agora o processo da constituição de tão importantes documentos.

Em apenas uma das duas turmas, dez aprendizes se dispuseram a participar das etapas de instrumentação sobre a construção dos Mapas Conceituais e uso do software Cmap Tools. Para esta etapa foram necessários outros encontros após a realização do mini-curso. Durante duas semanas conseguintes às discussões das derivadas, nos encontramos pelo período matutino e construímos os Mapas Conceituais. Para os aprendizes que continuaram[10] a participar de nossa pesquisa apresentamos um breve resumo escrito sobre a fundamentação teórica dos Mapas Conceituais e as estratégias para sua construção que estão anotadas ao final do *capítulo 3.2 – A Teoria da Aprendizagem Significativa e sua relação como nosso trabalho.* Concomitantemente, ensinamos estes aprendizes a trabalhar com o editor de Mapas Conceituais, denominado Cmap Tools.

[10] Alegando dificuldades com as avaliações escolares de fim de ano, três dos aprendizes desistiram no segundo encontro.

CAPÍTULO 5 – RESULTADOS E ANÁLISES

5.1 – Reflexões sobre os recursos utilizados

No transcorrer deste trabalho sempre estivemos buscando estabelecer argumentos sobre as justificativas dos materiais e métodos didáticos que reconhecemos, estudamos e experimentamos.

Em MISKULIN (1999, p. 09), encontramos:

> *...estratégias objetivam enriquecer o aprendizado dos estudantes em Matemática, e são apoiadas em pesquisas sobre como os estudantes aprendem com mais efetividade. Dividem-se em três categorias: aprendizagem dos estudantes, aplicações de conteúdos e abordagens instrucionais. Essas estratégias visam, de forma específica, uma melhoria nas abordagens dos estudantes em lidar com alguns itens, relacionados abaixo, tais como:*
> - *Relacionar a Matemática às experiências do mundo real;*
> - *Escrever e conversar sobre Matemática;*
> - *Trabalhar cooperativamente para solucionar problemas;*
> - *Explorar conceitos matemáticos com material manipulativo;*
> - *Usar calculadoras e computadores;*
> - *Construir os seus próprios conceitos matemáticos.*

Pretendemos acrescentar com tal recorte que estivemos sob estas influências quando decidimo-nos pelos recursos didáticos.

O uso do jogo da Torre de Hannói prestou-se verdadeiramente para as intenções iniciais de buscar introduzir relações pedagógicas de respeito, afetividade, diversão e possibilitou associar os quatro primeiros itens do final da citação anterior.

Das dificuldades a primeira foi administrar a excitação das turmas e procurar dirigir a atenção para a discussão sistematizada pelo material escrito.

A dificuldade seguinte se deu no processo de dedução da expressão algébrica que relaciona a quantidade de discos e de movimentos. Os estudantes, em sua maioria, apontaram que o processo apresentado era longo e complexo. Eles sugeriram que a verificação numérica da fórmula 2^n-1 por cálculos já era suficiente para exemplificar a idéia de função. Também afirmaram que deduções e demonstrações algébricas quase não ocorrem em seu cotidiano escolar, o que resulta em desinteresse em tais propostas. Acreditamos que este seria um resultado que aponta a necessidade de profunda reflexão por parte dos professores de matemática, tal reflexão deve procurar tratar do questionamento sobre a exacerbação dos cálculos numéricos em detrimento do estímulo à construção do pensamento matemático dedutivo e generalizações algébricas.

Em relação às atividades decorridas do Teodolito Artesanal obtivemos o envolvimento de todos nas experiências, os aprendizes trabalharam cooperativamente durante a coleta de dados e ao retornar para sala ajudavam-se na obtenção das aproximações das razões trigonométricas e subseqüente aplicação das mesmas. Todos alegaram gostar destas atividades, pois assim compreenderam outras questões da trigonometria; não coletamos sistematicamente quais seriam estas questões melhor compreendidas, no entanto, muitos disseram que a idéia de semelhança entre triângulos e a propriedade da proporcionalidade entre as medidas de seus lados lhes mostrava porque a trigonometria era útil. A crítica negativa que os estudantes apresentaram diz respeito ao tratamento estatístico proposto, ressaltaram que em sua opinião não havia necessidade deste processo. Quando questionamos sobre a credibilidade do processo e dos resultados, os mesmos afirmaram que por ser um estudo apresentado em nosso curso, não havia dúvida de sua validade. Suspeitamos neste ponto de certo positivismo que hora se instaura nos estudantes quando condicionados a acreditar que a escola e professores são detentores de conhecimentos perfeitos e imutáveis; acreditamos que na contemporaneidade seja muito importante apresentar a perspectiva de que o conhecimento científico constitui-se de modelos teóricos passíveis de aperfeiçoamento.

Como citamos no final do capítulo 4.1.3 começamos por utilizar arquivos digitais para compor estruturas visuais que possibilitassem discussões para conceituação da idéia de coeficiente angular de retas. O primeiro arquivo (ver Figura 10) não apresentou dificuldades de manipulação por parte dos aprendizes, nossa intenção em sintetizar a relação da tangente de um ângulo com a determinação da inclinação de retas, foi alcançada. Tal arquivo estrutura-se em uma proposta de manipulação direta, onde a simulação está de certa forma pronta, de modo que os aprendizes não evidenciaram dificuldades em explorá-lo e compor comentários orais e escritos acerca do conceito de coeficiente angular de retas. A segunda proposta de arquivo (ver Figura 11) explicitou situações problemas para a interpretação da expressão geral da equação de reta (na forma reduzida) em notação algébrica generalizada; a superação ocorreu com a exploração da variação numérica de parâmetros reais através da ferramenta de animação que o aplicativo oferece. Além de confirmar a relação da inclinação da reta com o coeficiente da variável de expoente não-nulo, também definimos o outro termo da equação de reta, denominado como coeficiente linear da reta. Em relação ao domínio da linguagem do aplicativo e da interatividade com o mesmo, detectamos que ao invés de sugerir dificuldades, estabelecemos elementos motivadores de envolvimento nas discussões verbais em sala de aula.

Seguindo a seqüência didática partimos para o conceito de Diferenciabilidade, como registramos ao final do capítulo 3.3 as atividades elencadas foram adaptadas de outras referências bibliográficas; tais atividades evidenciaram dificuldades de manipulação algébrica em fatoração de polinômios, as quais foram superadas pelos estudantes com contínua exemplificação dos facilitadores do curso.

Em BALDINO (1998, p. 64), encontramos:

> *"...não confirmamos que o contexto cinemático constituiu uma via ideal para todos os objetivos pretendidos. As dificuldades se mostraram constantemente presentes, a começar pela confusão entre espaço e velocidade (em uma atividade, há um momento em que um automóvel é ultrapassado e alguns alunos disseram acreditar que as velocidades eram iguais). Outra confusão presente foi evidenciar a diferença entre velocidade média e velocidade instantânea, em geral a discussão se dava na passagem do coeficiente angular da reta tangente à informação que ele fornece sobre a curva no ponto. Muitos alunos relutaram em aceitar as conseqüências da adoção do referencial inercial, considerando que nas situações problemas, em relação a estrada, muitos não concordavam com o fato de que a velocidade pode aumentar quando o motorista está a frear."*

Confirmamos que as mesmas dificuldades se mostraram presentes na nossa experiência, e também percebemos que os aprendizes sentiam-se inquietos de como proceder para construir o gráfico que relacionasse a velocidade pelo tempo. Afirmavam que para tanto precisavam considerar a velocidade como sendo constante, pelo menos em alguns trechos. No entanto, com discussões verbais concomitantes às resoluções dos exercícios, conseguimos alcançar a consecução de toda a lista de exercícios.

Com grata surpresa, de cunho positivo, estabeleceu-se uma discussão sobre a aceleração haja vista a curiosidade que se fez presente em vários dos estudantes ao buscarem compreender os possíveis significados da determinação de retas tangentes a pontos do gráfico velocidade-tempo, alguns conjecturaram se as funções sempre são deriváveis e se sempre expressam algum fenômeno correlacionado. Considerando as resoluções das atividades propostas foi possível identificar o desenvolvimento de habilidades de manipulação algébrica, pertinentes a determinação de Taxa de Variação de funções polinomiais.

No tocante ao uso dos arquivos que colaboraram com a visualização das retas secantes tornando-se tangentes, todos afirmaram compreender o contexto proposto e conseguiram realizar os exercícios de composição de retas tangentes a algumas curvas polinomiais.

Na Figura 22 preferimos registrar o interesse de todos os aprendizes em números menos usuais ao cotidiano popular; a segurança individual em relação ao trato com notações e fórmulas direcionou-se em geral para generalizações sobre a equação da reta tangente a um ponto qualquer de um gráfico de função qualquer.

Na Figura 23 mostramos uma proposta de construção das retas tangentes a variados pontos de uma curva. Nosso exemplo utiliza como função a ser derivada a função trigonométrica *sen(x)*; evidenciaram-se certas questões por dos aprendizes sobre como realizar a derivada de tal função, oportunamente explicamos que dependendo do tipo de função o processo algébrico deve buscar avançar e utilizar outros conceitos, neste caso, é necessário compreender melhor a idéia do produto dos limites:

$$\lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{2sen\dfrac{\Delta x}{2}}{2\dfrac{\Delta x}{2}}\right).\lim_{\Delta x \to 0}\cos\left(\frac{2x+\Delta x}{2}\right)$$

O comentário geral foi: *"Ainda bem que não vamos ter de estudar isto aqui."*

Concluímos que as nossas estratégias caminharam no sentido de colaborar com a relativa superação das dificuldades de aprendizagem que estão registradas em CORNU (1991).

5.2 – Avaliando a aprendizagem significativa do conceito de Diferenciabilidade pelos mapas conceituais apresentados pelos aprendizes

Apresentamos a seguir os mapas conceituais construídos por sete aprendizes que finalizaram sua participação em nossa pesquisa em uma etapa posterior ao curso. Note que apresentaremos o primeiro mapa conceitual construído e a visualização das relações entre os conceitos através de uma ferramenta oferecida pelo aplicativo CMAP TOOLS, a qual busca mostrar a relações entre os conceitos através das frases de ligação ou proposições.

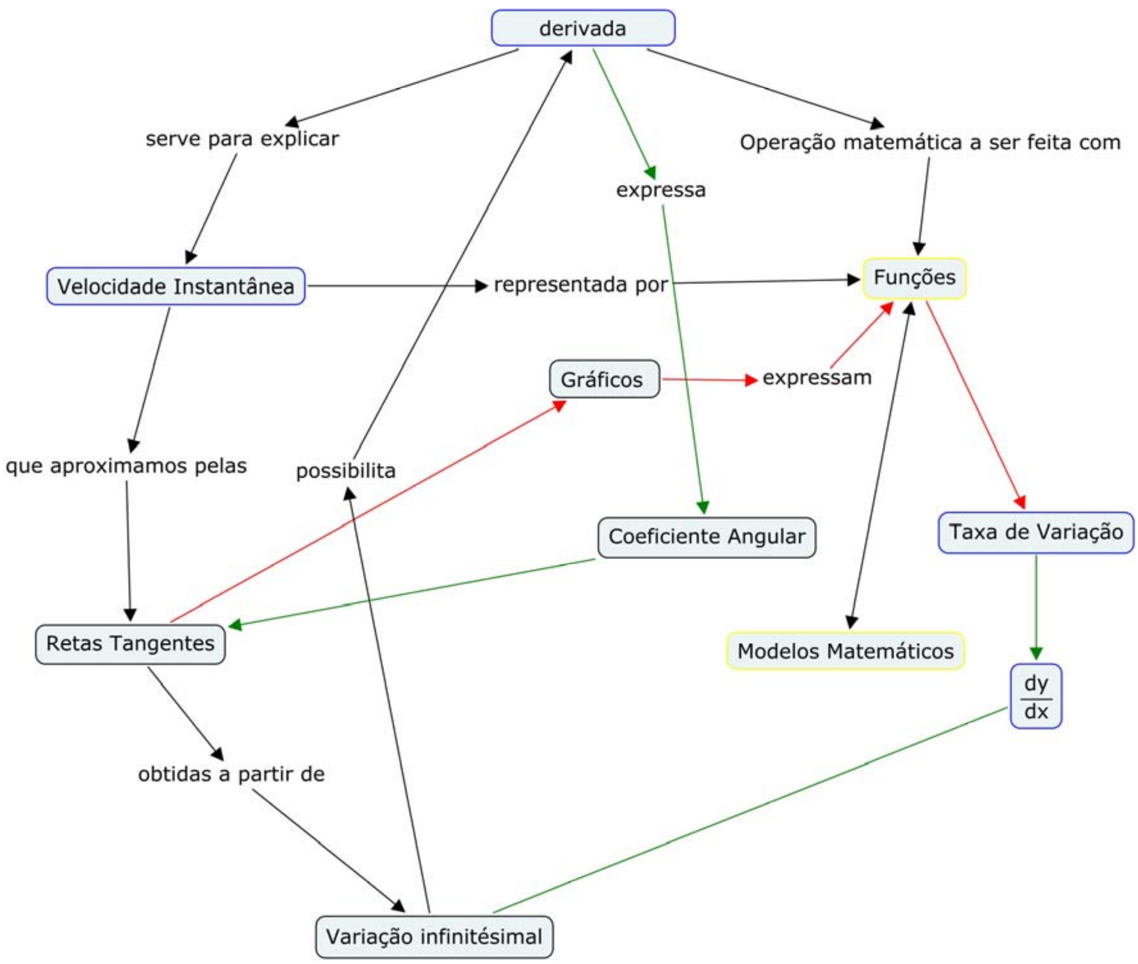

Figura 24: Primeiro mapa conceitual do aprendiz 1

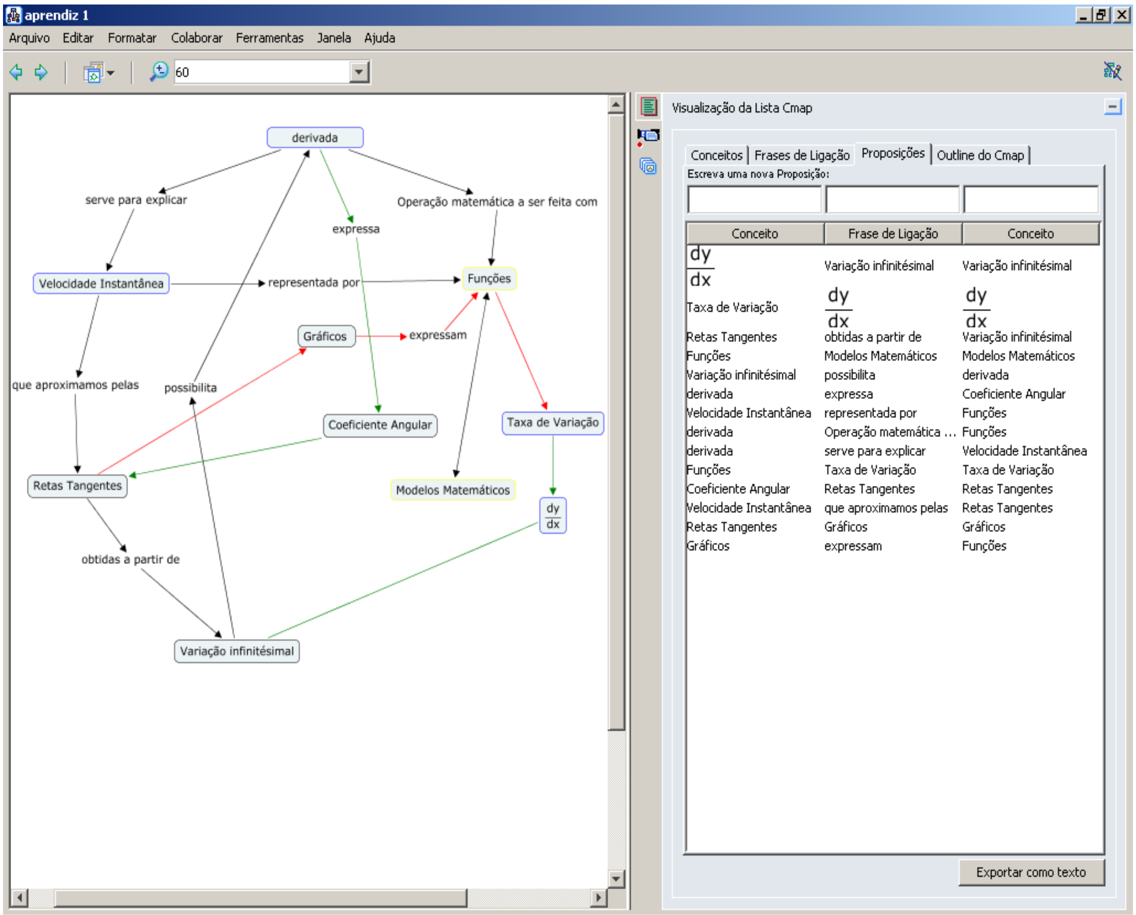

Figura 25: Visualização das relações entre os conceitos do mapa conceitual do aprendiz 1

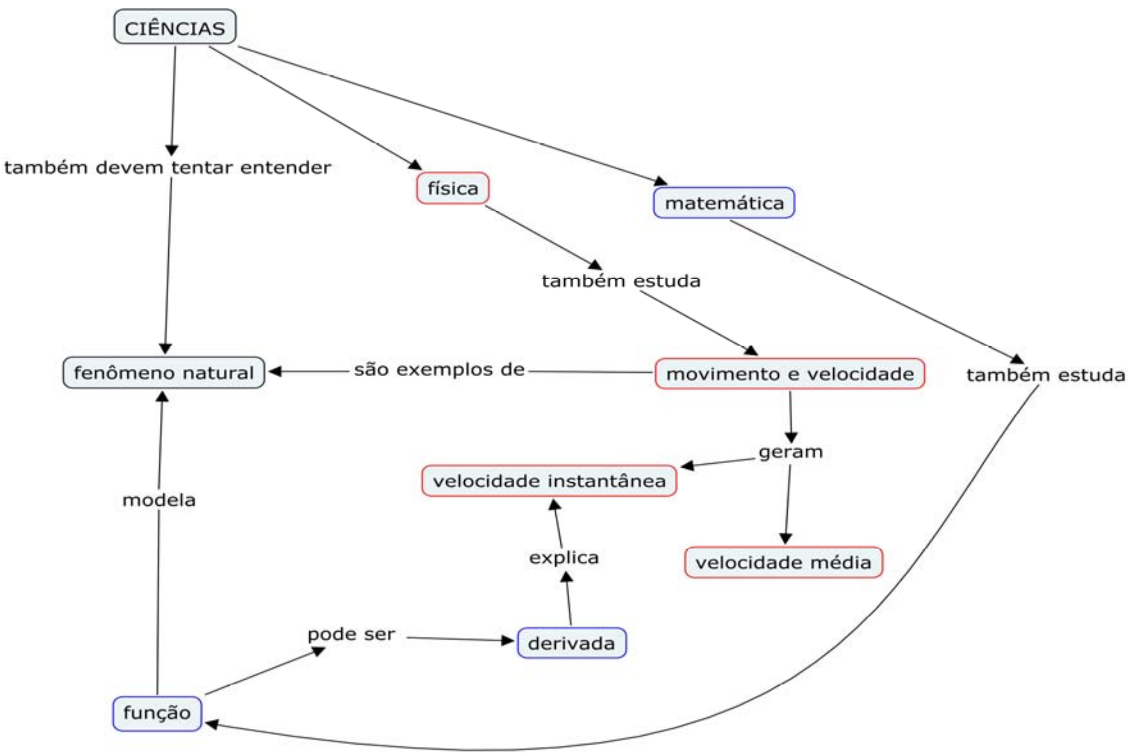

Figura 26: Primeiro mapa conceitual do aprendiz 2

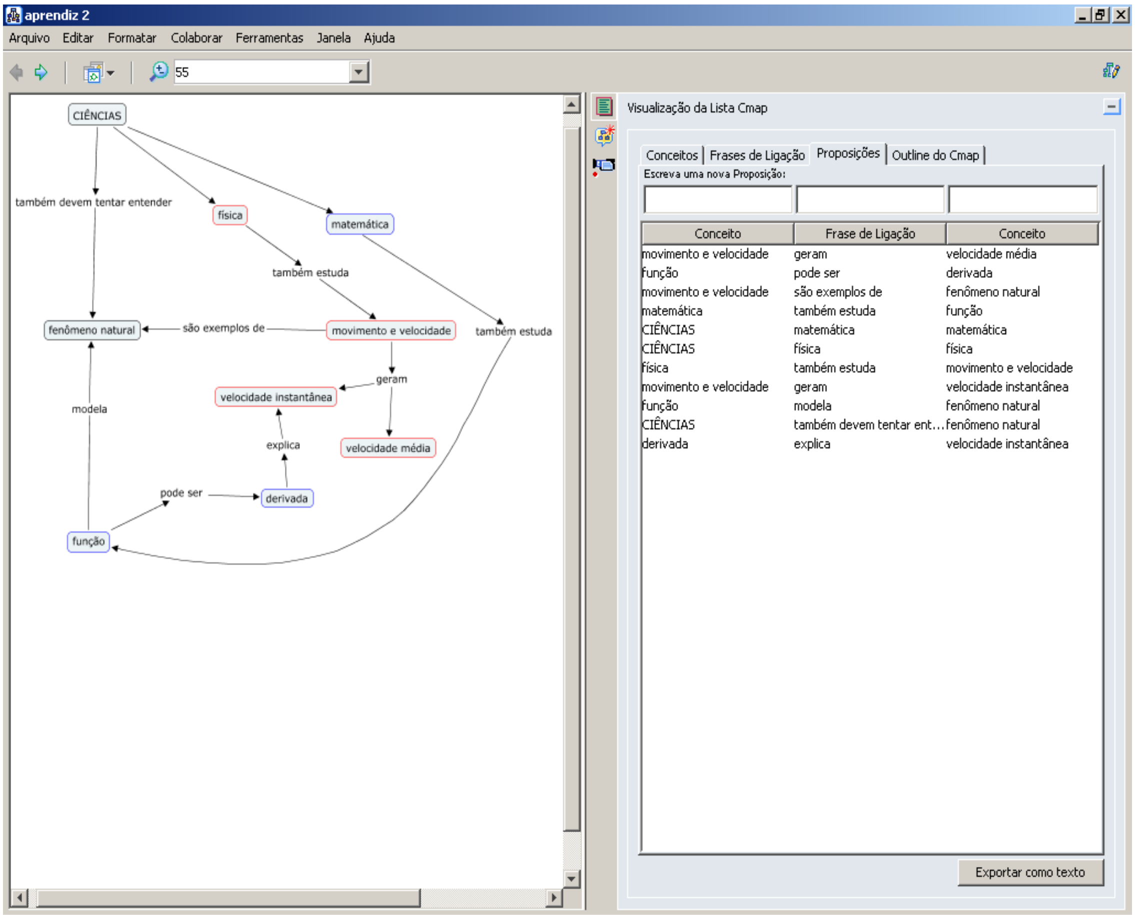

Figura 27: Visualização das relações entre os conceitos do mapa conceitual do aprendiz 2

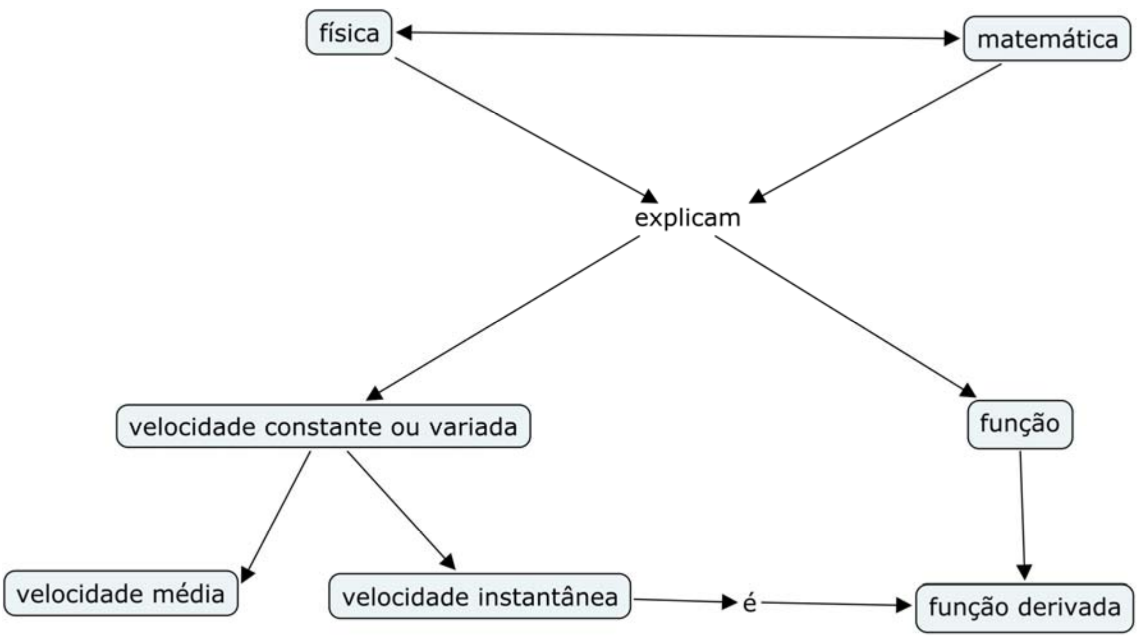

Figura 28: Primeiro mapa conceitual do aprendiz 3

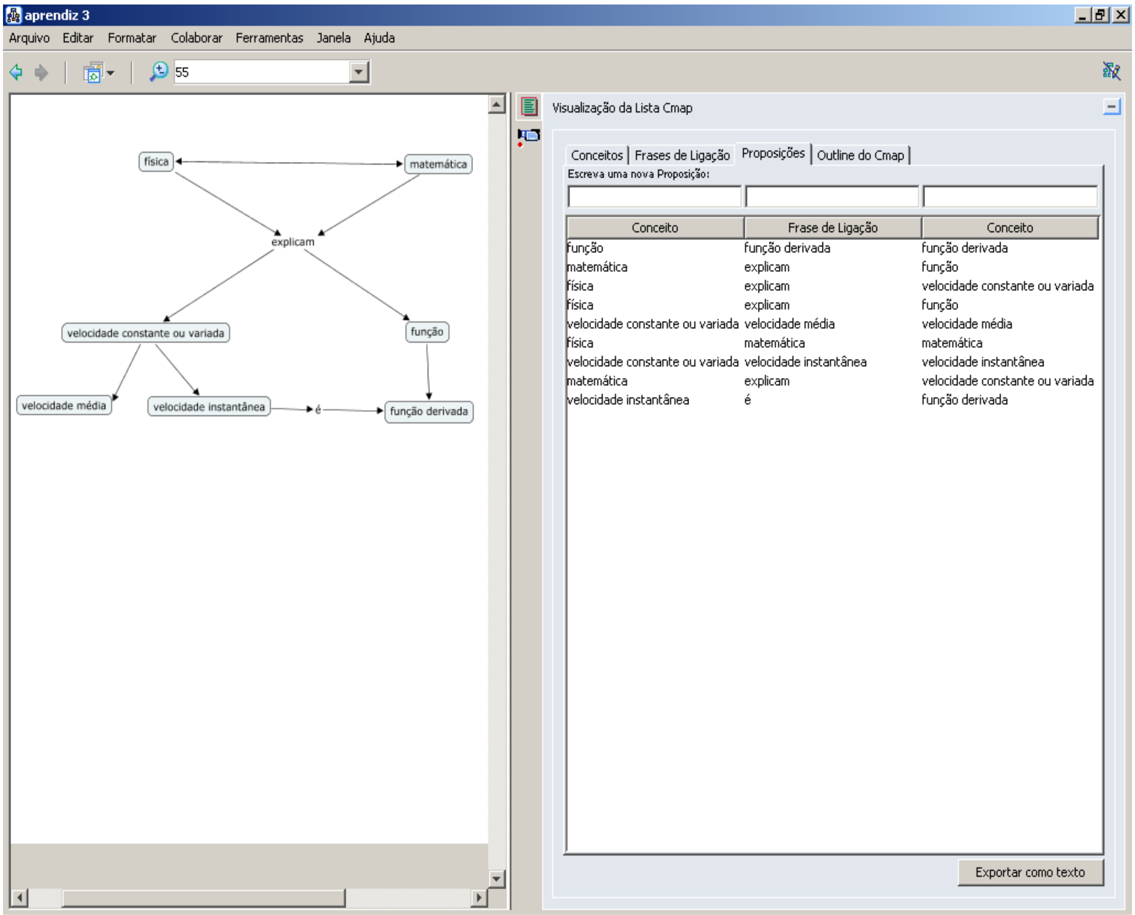

Figura 29: Visualização das relações entre os conceitos do mapa conceitual do aprendiz 3

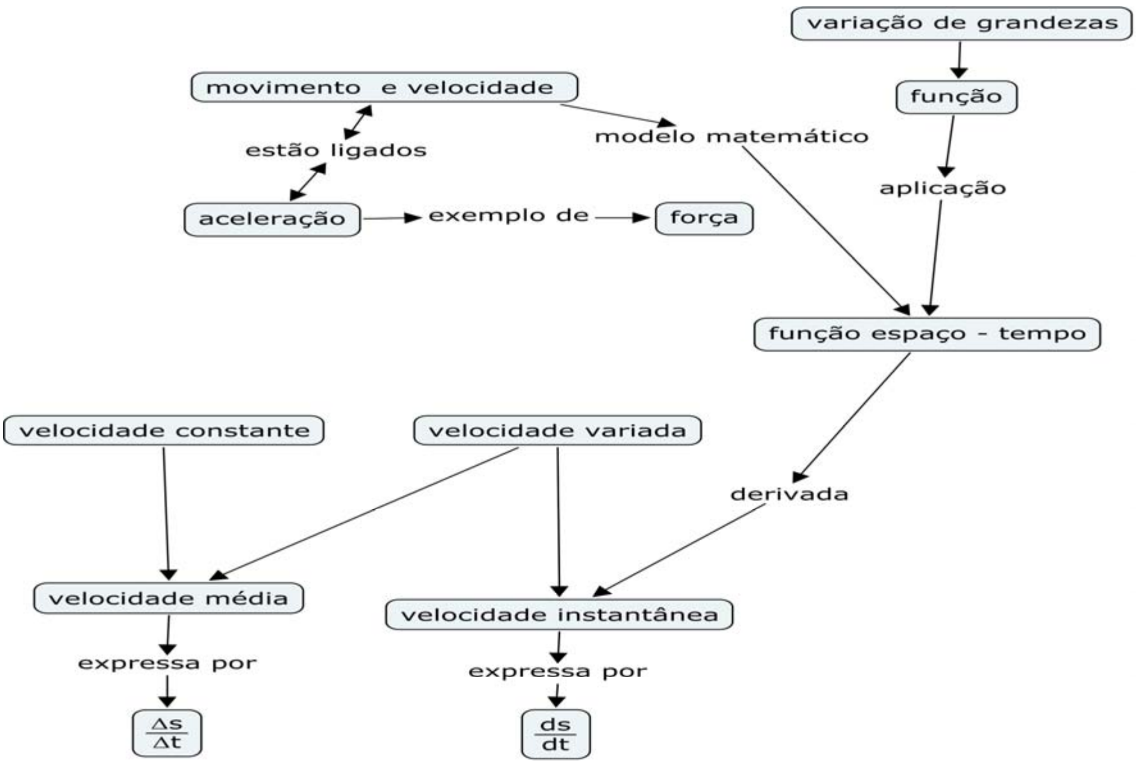

Figura 30: Primeiro mapa conceitual do aprendiz 4

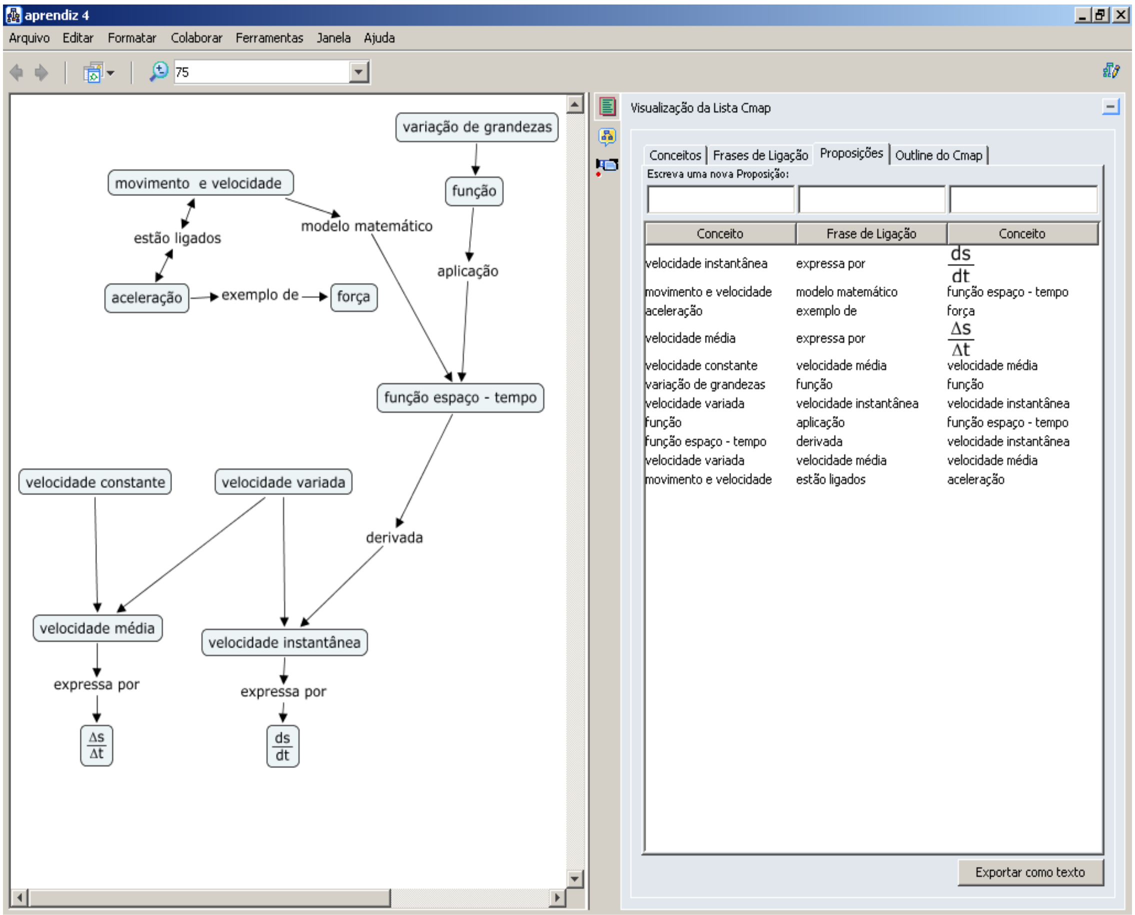

Figura 31: Visualização das relações entre os conceitos do mapa conceitual do aprendiz 4

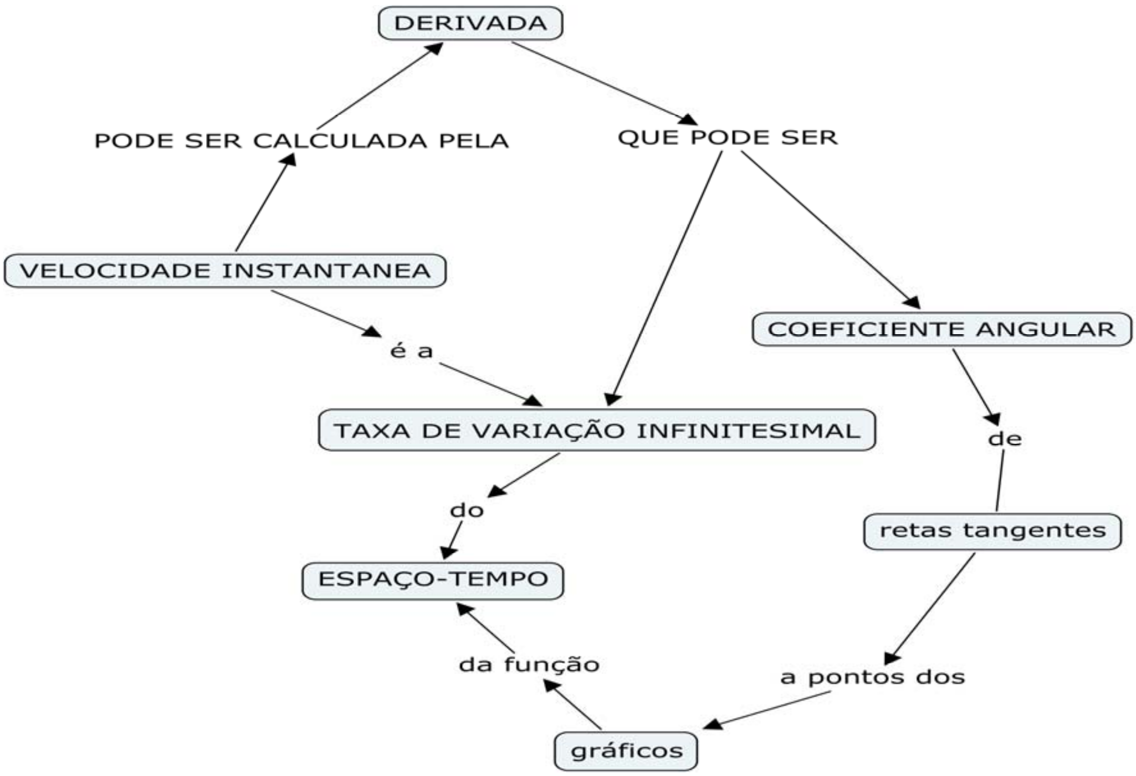

Figura 32: Primeiro mapa conceitual do aprendiz 5

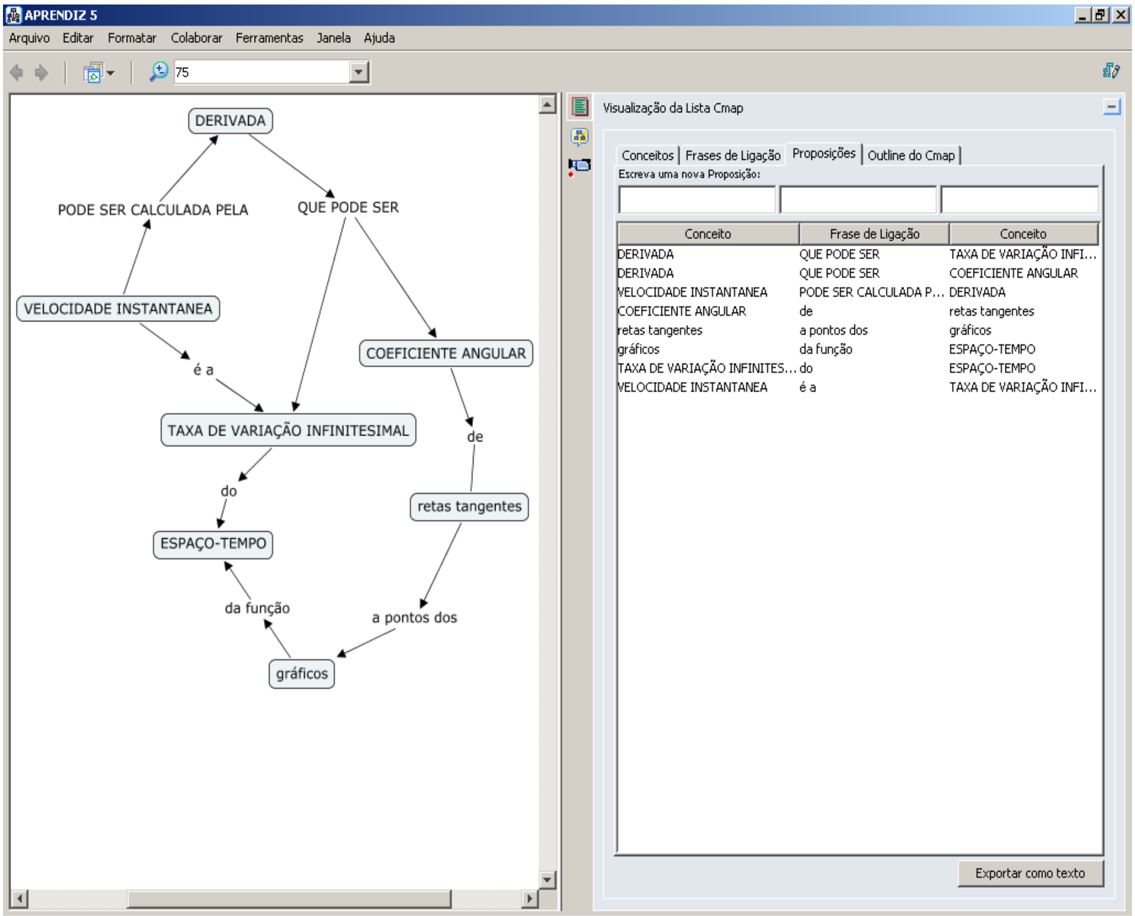

Figura 33: Visualização das relações entre os conceitos do mapa conceitual do aprendiz 5

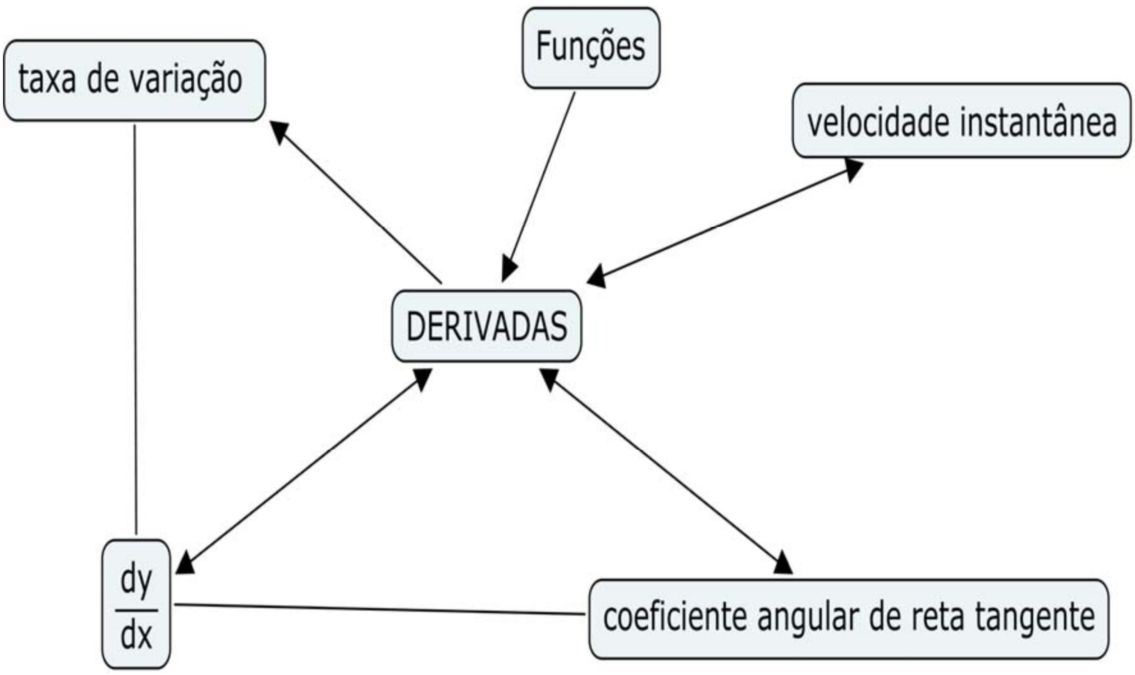

Figura 34: Primeiro mapa conceitual do aprendiz 6

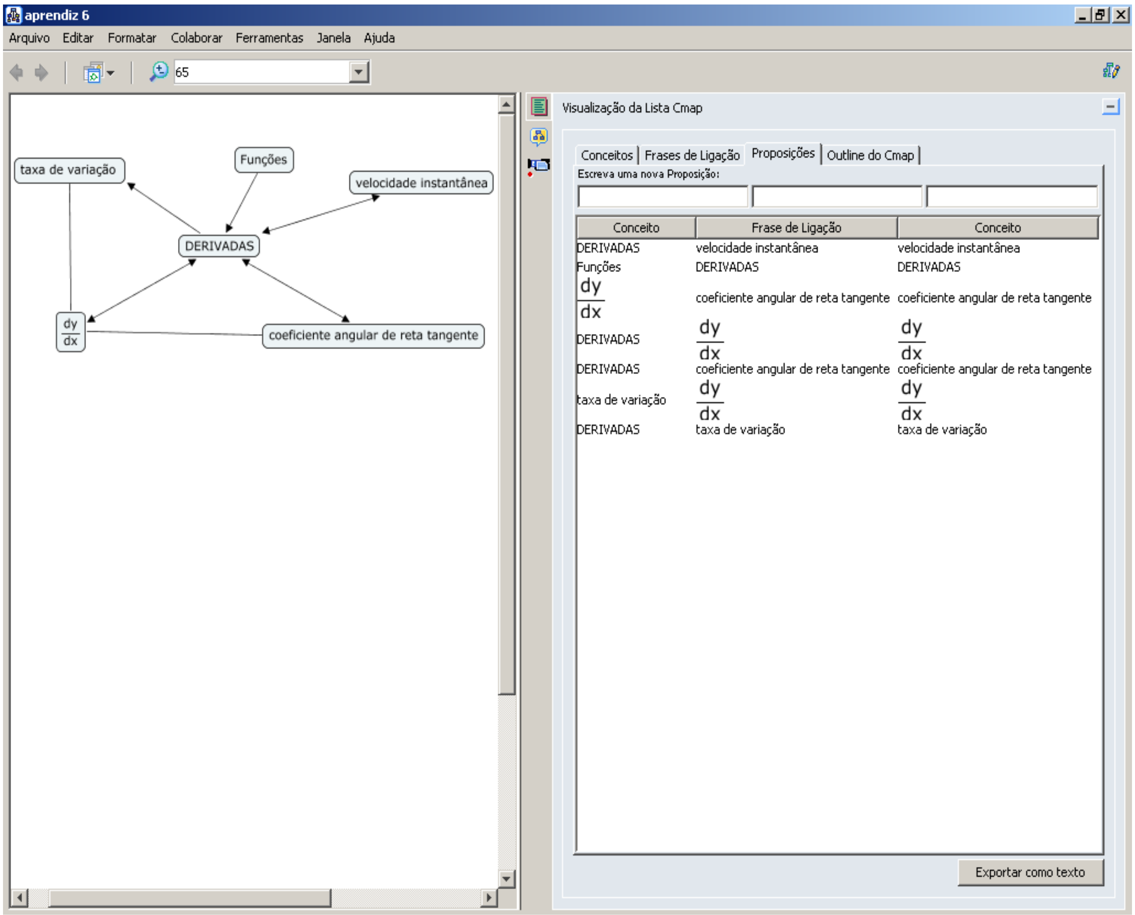

Figura 35: Visualização das relações entre os conceitos do mapa conceitual do aprendiz 6

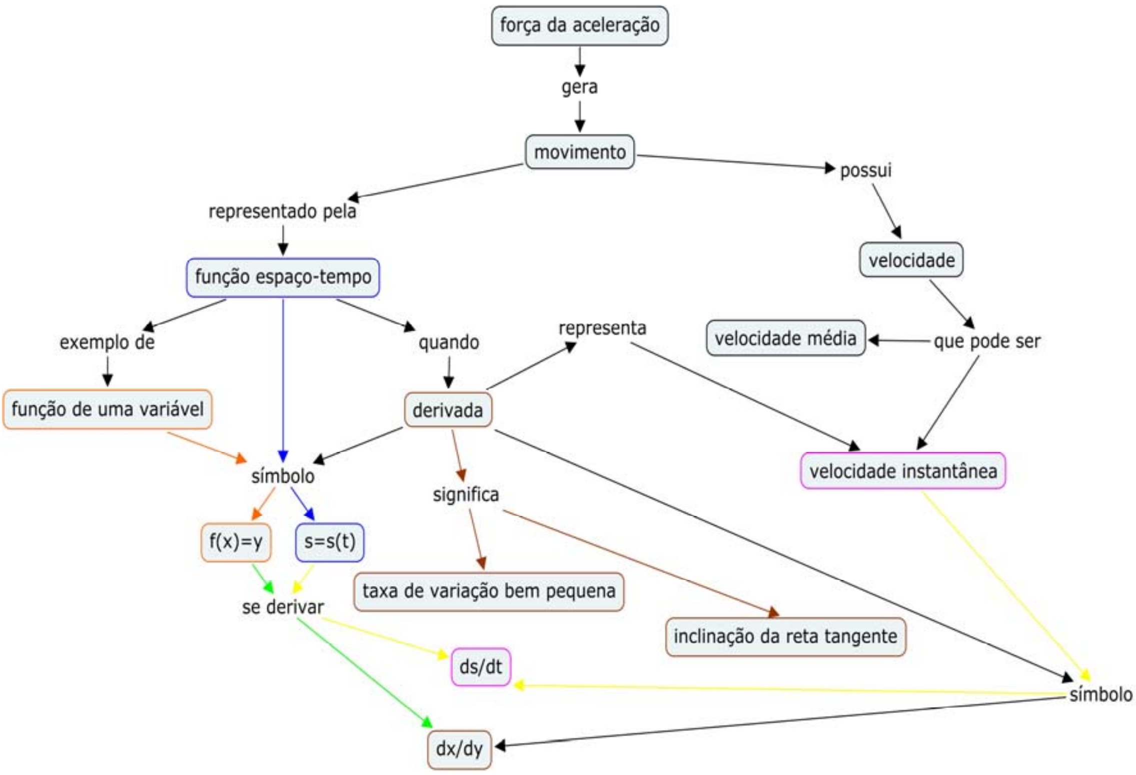

Figura 36: Primeiro mapa conceitual do aprendiz 7

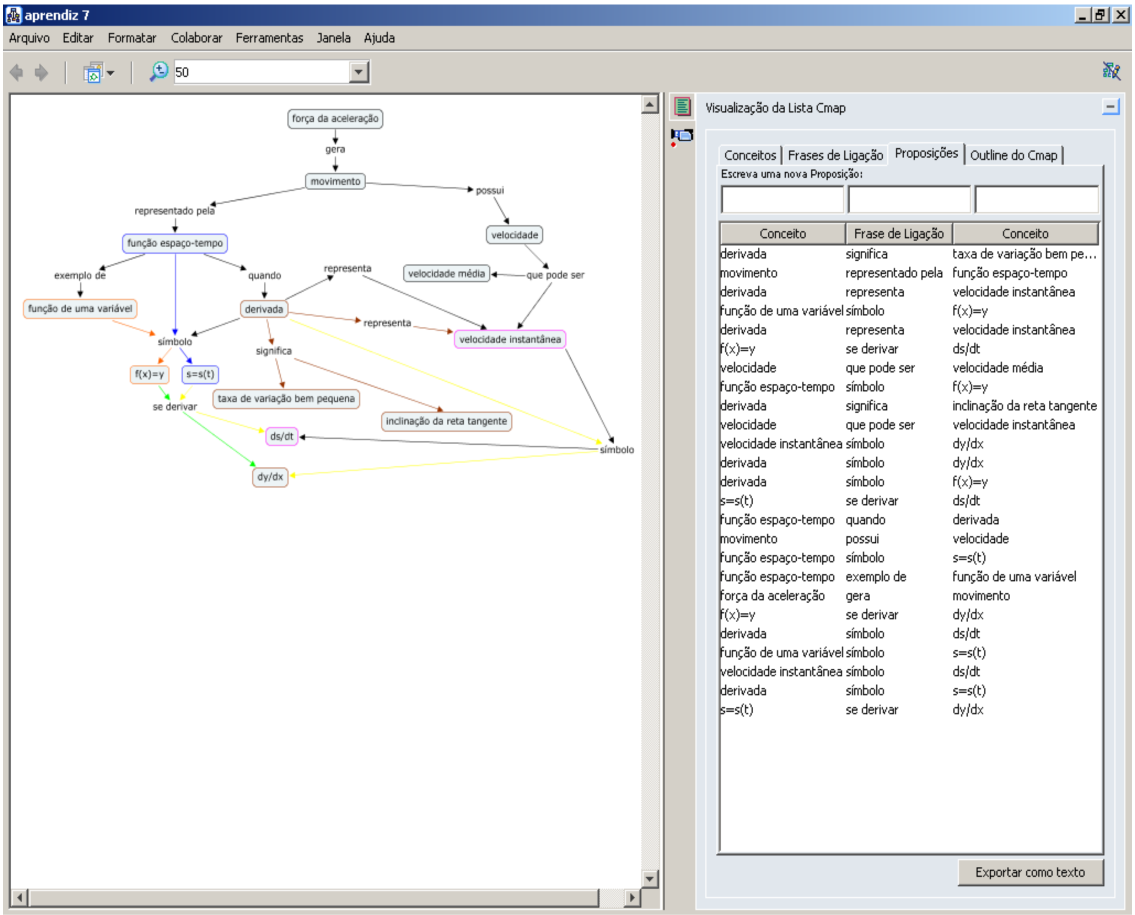

Figura 37: Visualização das relações entre os conceitos do mapa conceitual do aprendiz 7

Nestes mapas conceituais percebemos que as estruturas são não-literais, o que indica que a aprendizagem foi substantiva, temos elementos de imagens, símbolos e conceitos que estão presentes nas estruturas cognitivas dos aprendizes. No entanto, em relação à hierarquia dos conceitos, podemos notar que algumas proposições estão organizadas em estruturas arbitrárias.

Segundo nossa fundamentação teórica acerca da construção de mapas conceituais, é necessária a reconstrução destes mapas conceituais após a verbalização dos aprendizes sobre como compreendem e esperam que seus mapas sejam interpretados. A seguir apresentamos os mapas reconstruídos e a organização das frases de ligação. após rediscutirmos seus significados. Note que somente seis dos aprendizes realizaram tal reconstrução, sendo que o aprendiz 5 afirmou não sentir necessidade de tal processo.

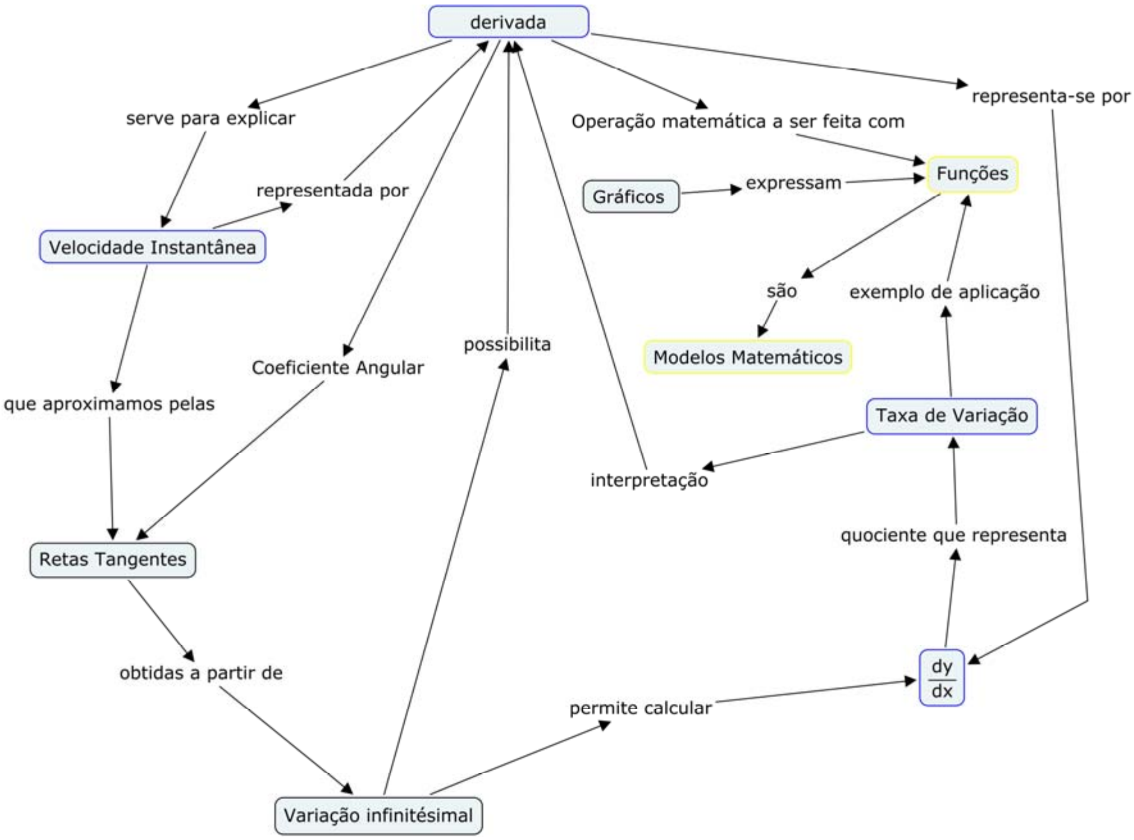

Figura 38: Mapa conceitual reconstruído pelo aprendiz 1

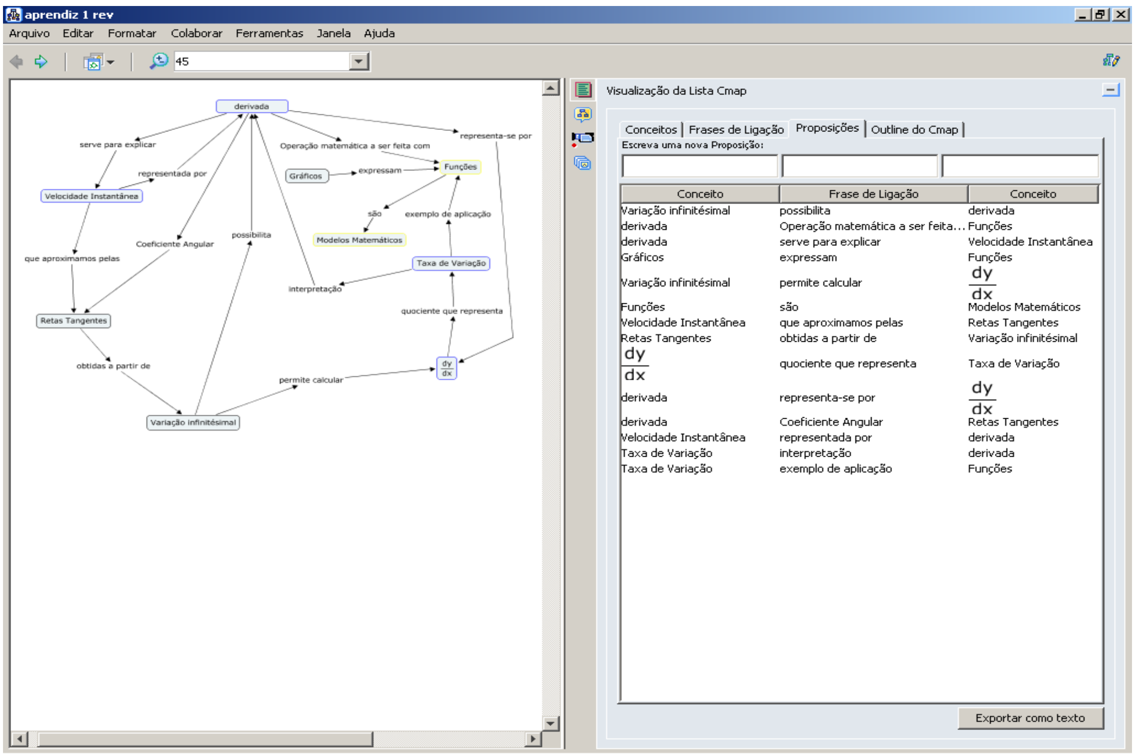

Figura 39: Visualização das relações entre os conceitos do mapa conceitual reconstruído pelo aprendiz 1

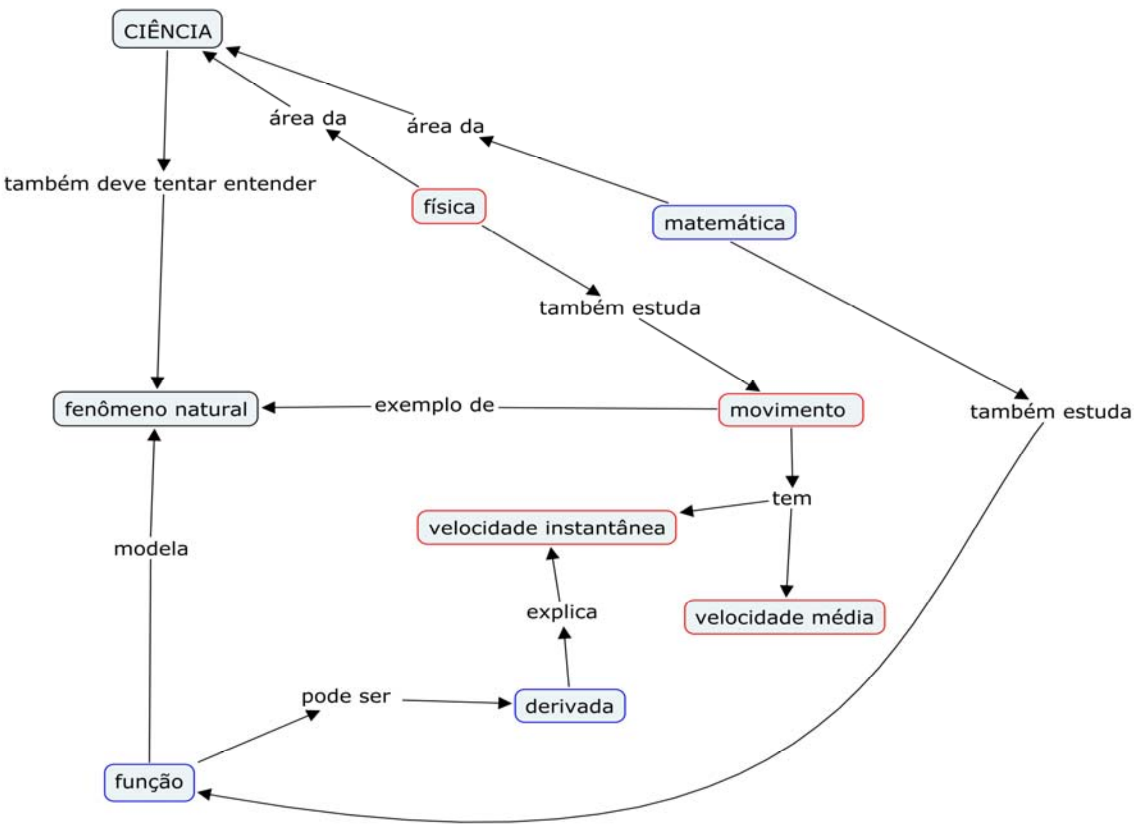

Figura 40: Mapa conceitual reconstruído pelo aprendiz 2

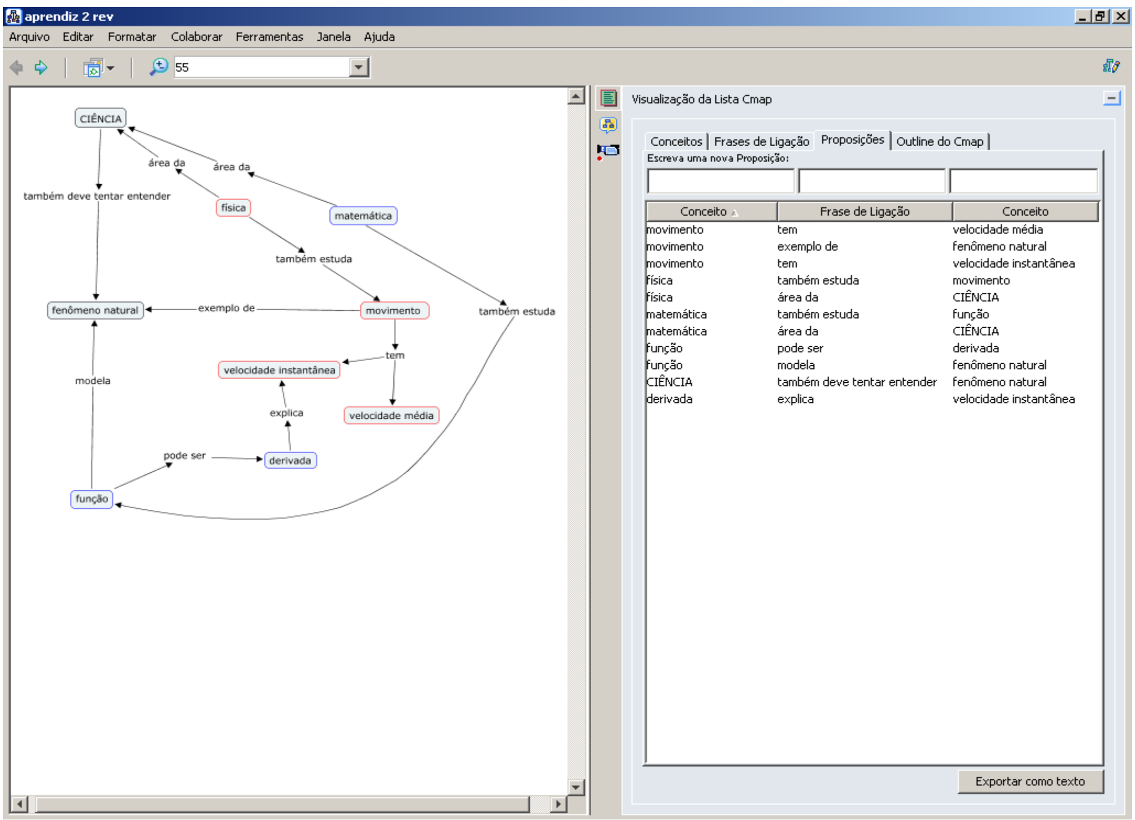

Figura 41: Visualização das relações entre os conceitos do mapa conceitual reconstruído pelo aprendiz 2

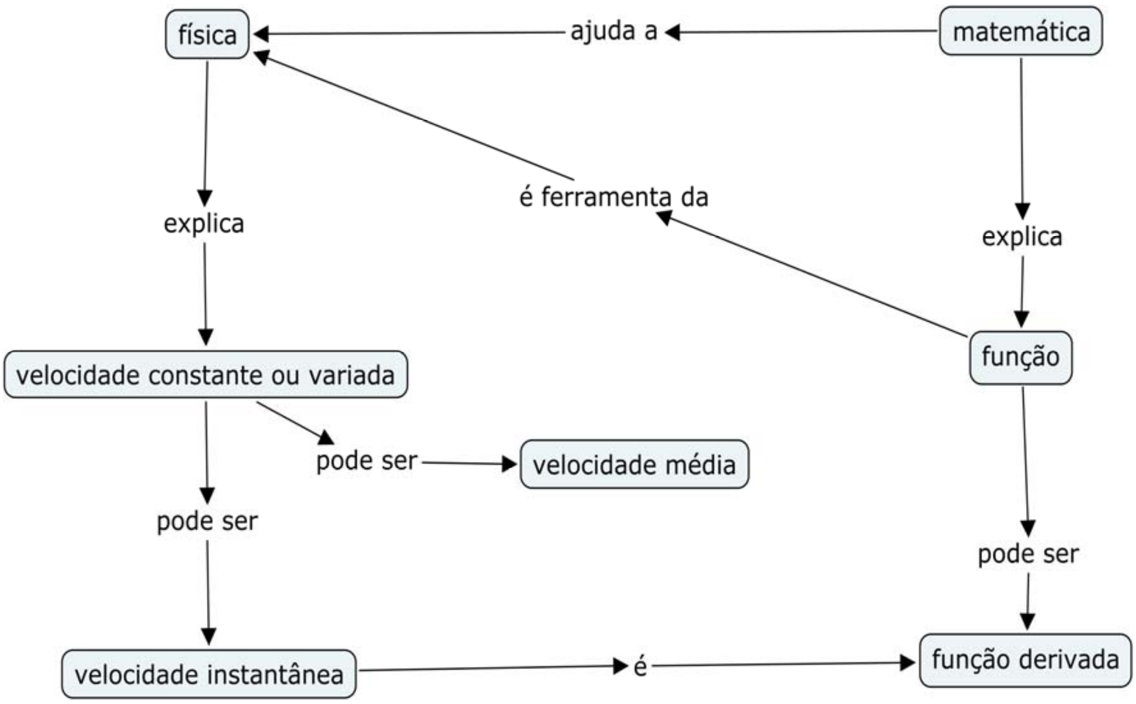

Figura 42: Mapa conceitual reconstruído pelo aprendiz 3

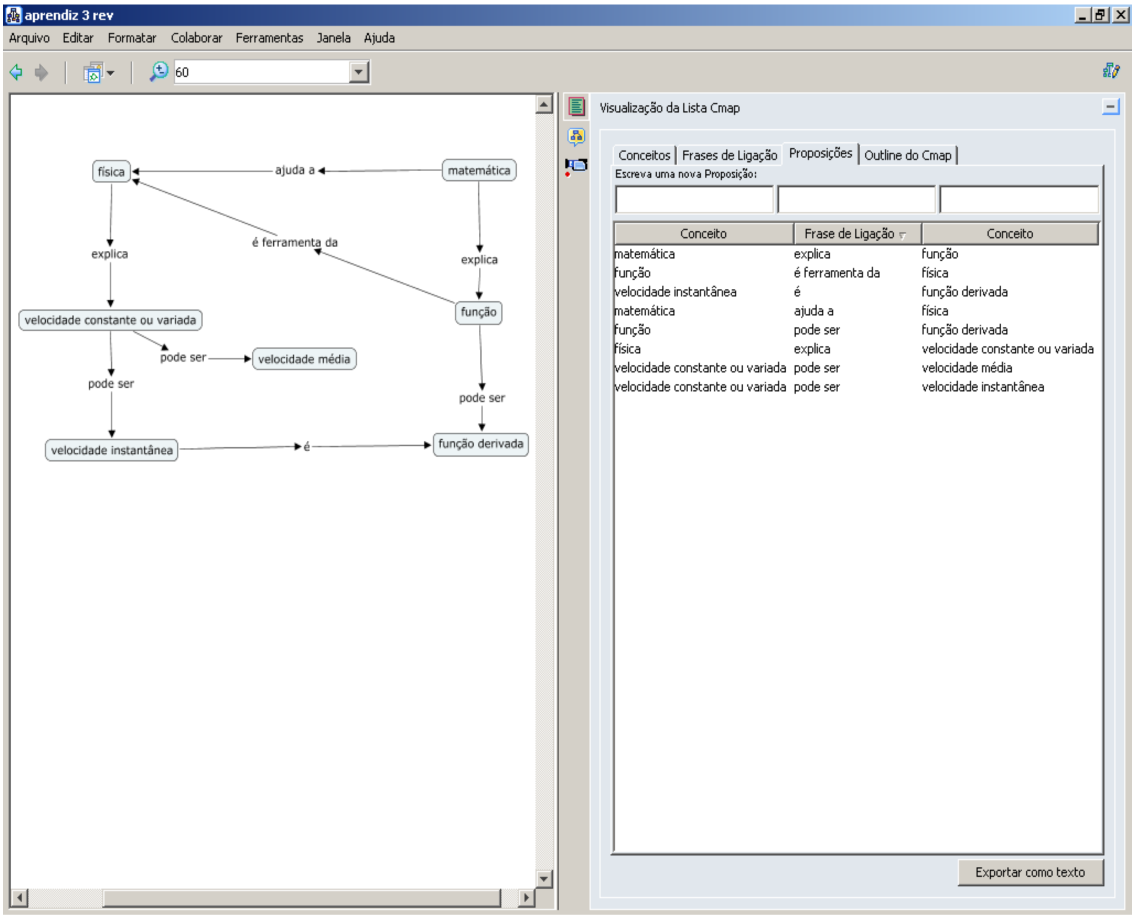

Figura 43: Visualização das relações entre os conceitos do mapa conceitual reconstruído pelo aprendiz 3

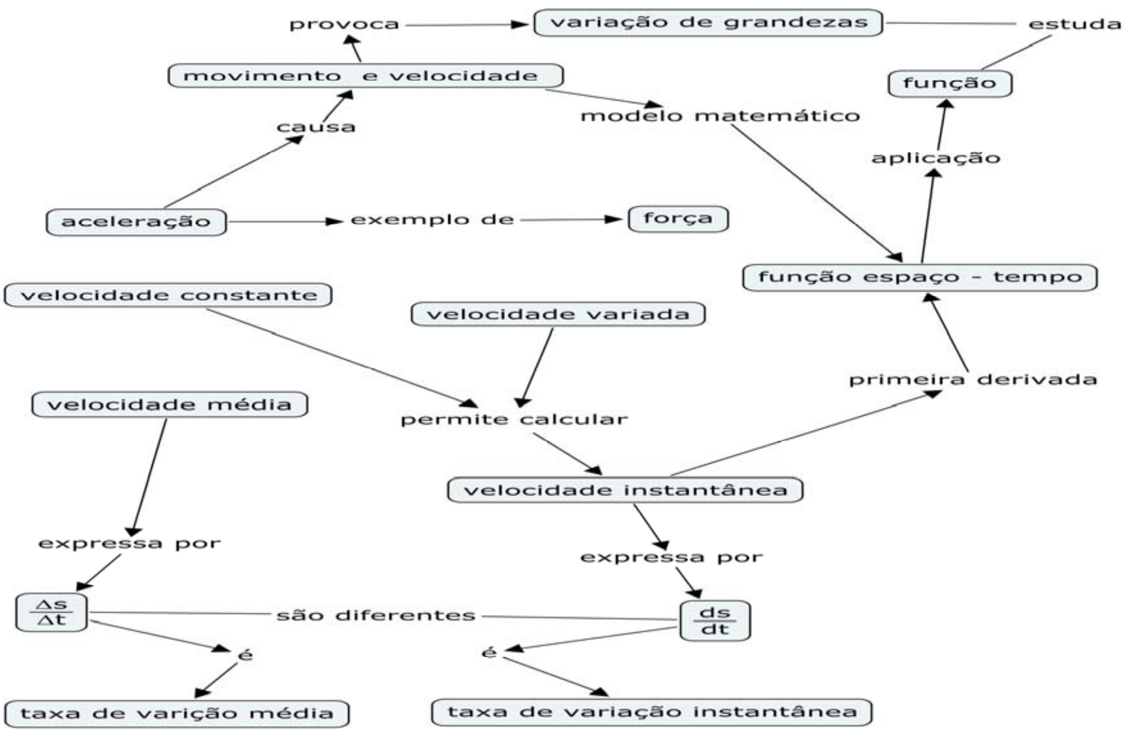

Figura 44: Mapa conceitual reconstruído pelo aprendiz 4

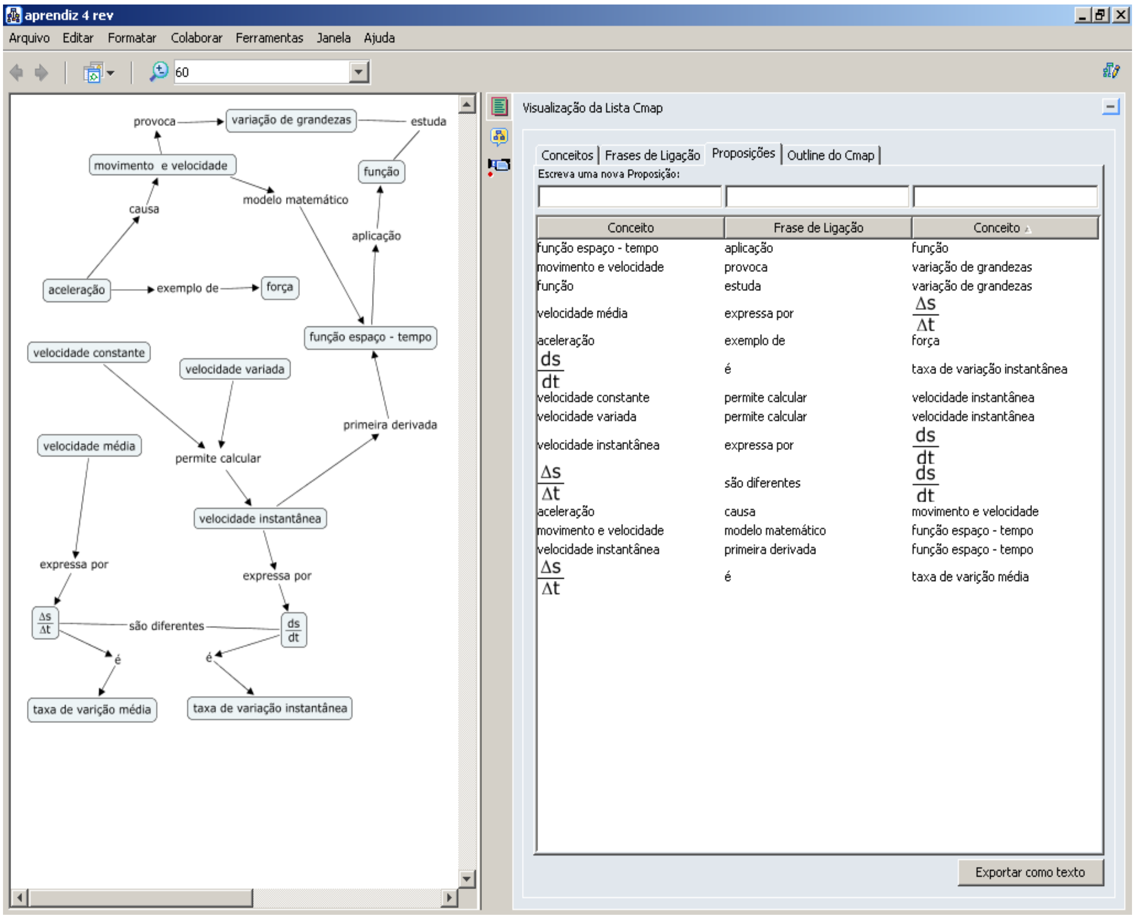

Figura 45: Visualização das relações entre os conceitos do mapa conceitual reconstruído pelo aprendiz 4

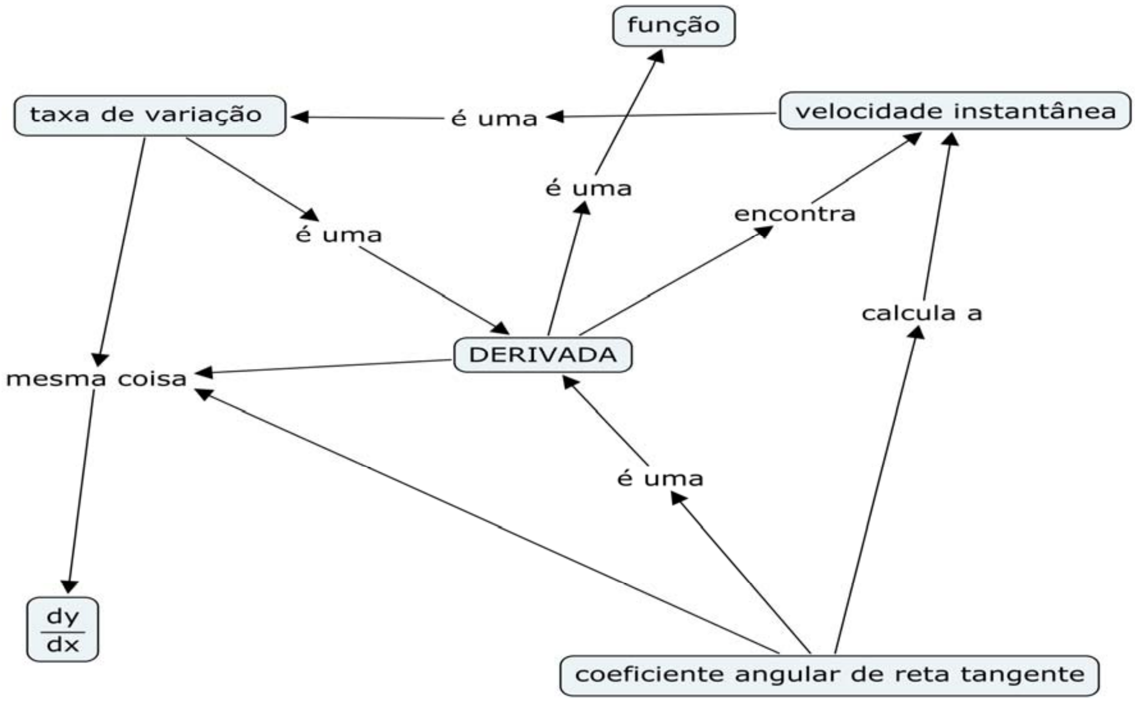

Figura 46: Mapa conceitual reconstruído pelo aprendiz 6

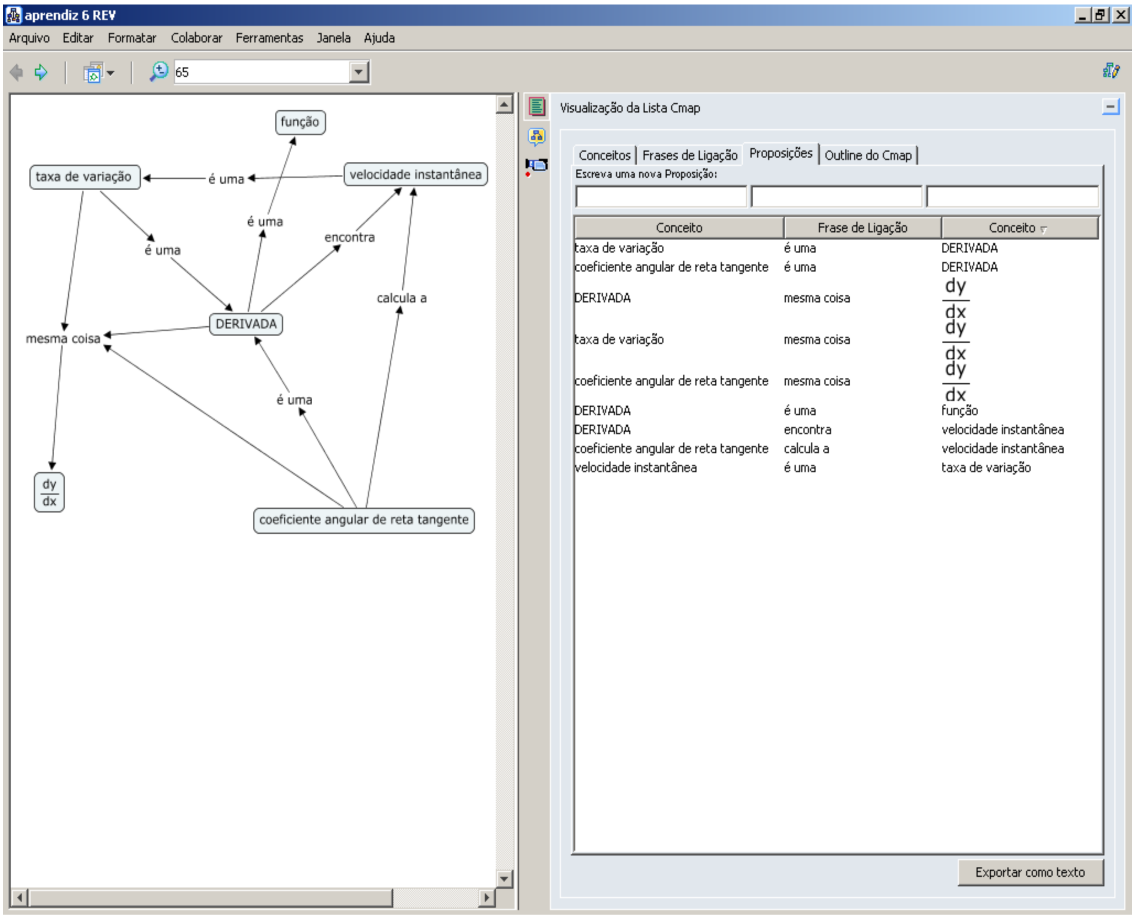

Figura 47: Visualização das relações entre os conceitos do mapa conceitual reconstruído pelo aprendiz 6

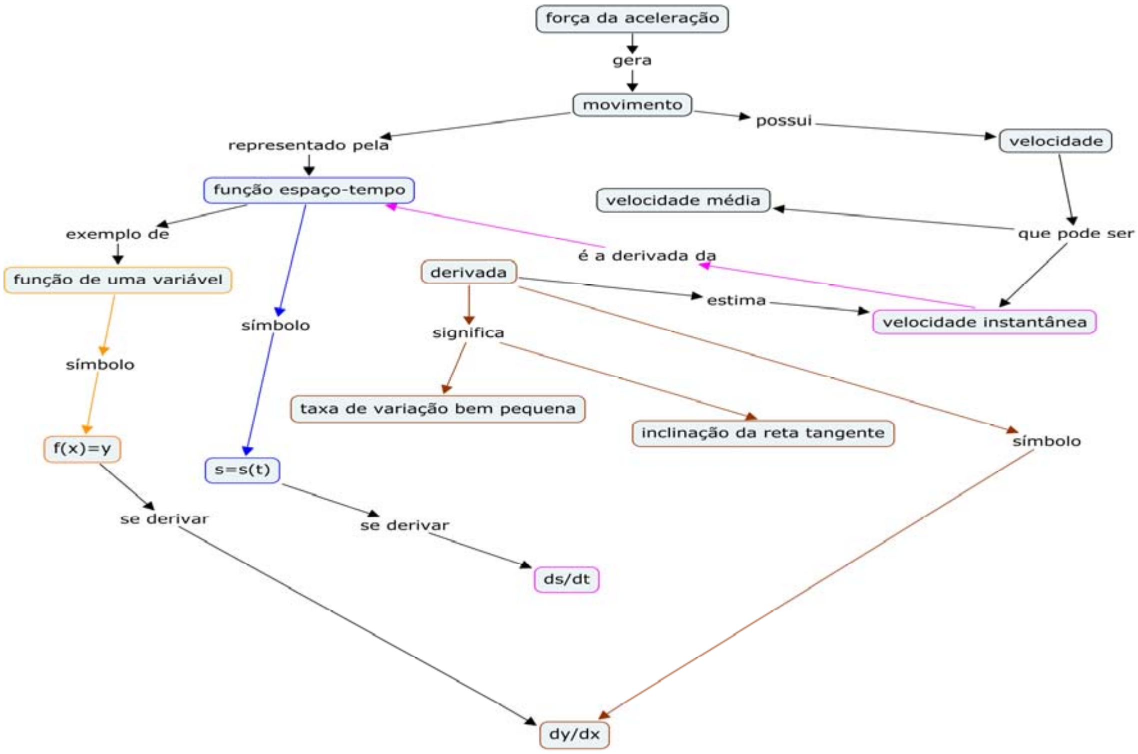

Figura 48: Mapa conceitual reconstruído pelo aprendiz 7

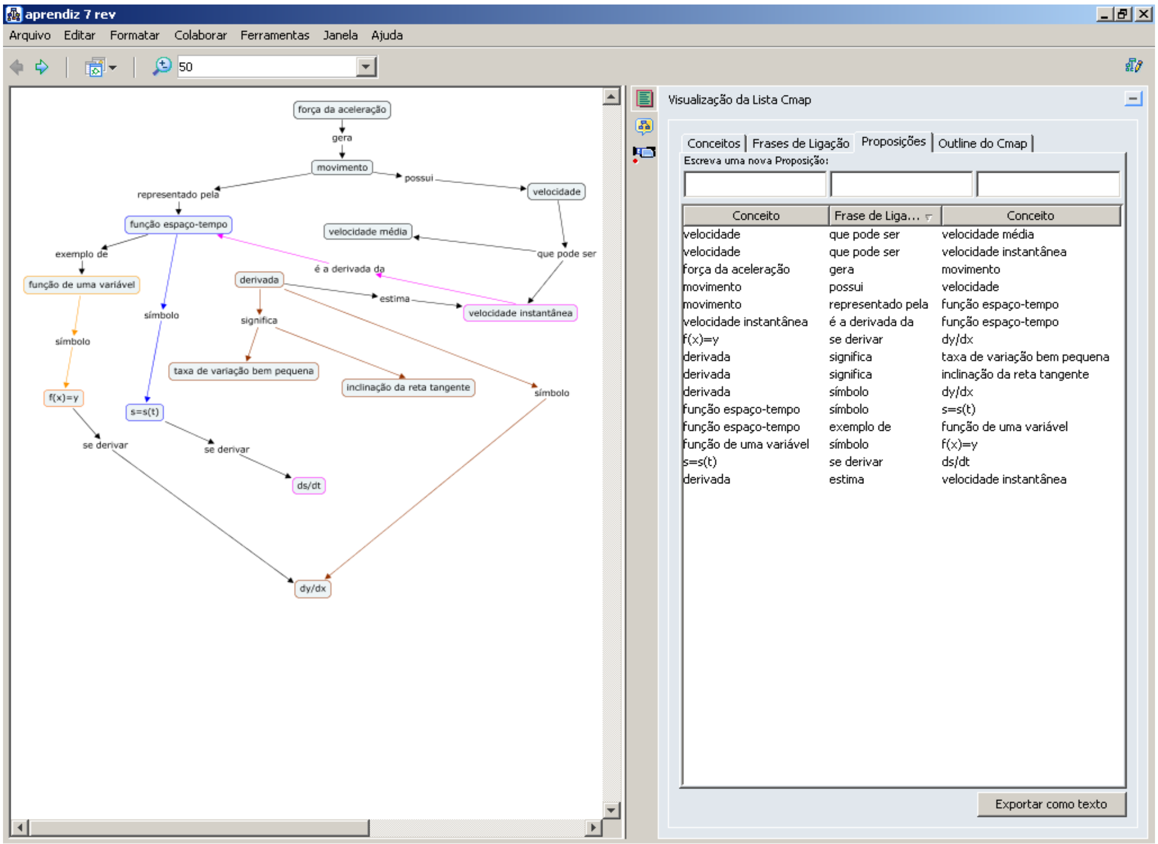

Figura 49: Visualização das relações entre os conceitos do mapa conceitual reconstruído pelo aprendiz 7

Dentre as relações escritas que os mapas conceituais apresentam esperamos comprovar a existência de aprendizagem significativa, porém, também devemos acrescentar que as correlações entre as idéias foram expressas pelas estruturas de cores e leitura dos mapas de cima para baixo e da direita para esquerda; estas seriam indicações de todos os aprendizes.

Os mapas conceituais construídos pelos estudantes evidenciaram noções relativas à idéia de derivada e sua interpretação como sendo o coeficiente angular de retas tangentes a pontos do gráfico da função; quando associadas a funções que relacionavam grandezas físicas indicavam a interpretação de Taxa de Variação Instantânea.

Pela produção dos mapas conceituais, foi possível perceber, que eles entenderam que a derivada de uma função espaço-tempo num ponto é uma generalização da velocidade instantânea.

Esses resultados nos fazem acreditar, que a opção de introduzir o conceito de derivada de uma função num ponto, a partir do conceito de velocidade, familiar aos alunos e fazendo parte de seus conhecimentos prévios, contribuiu para a sua aprendizagem.

5.3 – Considerações finais

Uma das dificuldades ou limitação dos Mapas Conceituais refere-se ao fato de que eles reapresentam de forma gráfica o tipo de processo de conhecimento que os estudantes recorrem para resolver novos problemas. Eles apenas sondam organizações cognitivas individuais ou de grupos e por isso mesmo apresentam idiossincrasias e dificuldades de estabelecimento de comparações também entre indivíduos ou grupos, ou de seus particulares tempos e estilos de aprendizagem.

Gostaríamos que esta pesquisa pudesse colaborar com professores no sentido de modificarem suas aulas, propondo atividades envolvendo questões relacionadas com os conhecimentos prévios dos alunos, para que eles possam participar ativamente da construção de seus novos conhecimentos, vendo sentido na sua aprendizagem.

Podemos perceber vários equívocos a cada dia de leitura desta dissertação, porém, estivemos trabalhando como pesquisadores em formação e, sobretudo como professores que convivem em espaços escolares com deficiências de recursos materiais; mesmo assim, não perdemos a intenção de manter a formação continuada.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRAFICAS

AUSUBEL, David. P. *Educational psychology: a cognitive view.* New York, Holt, Rinehart and Winston, 1968.

AUSUBEL, David. P. *Psicologia educacional: uma visão cognitiva* (tradução). Rio de Janeiro, Interamericana, 1978.

ÁVILA, Geraldo, *Derivadas e Cinemática*. Revista do Professor de Matemática 61, 2006.

BALDINO, Roberto Ribeiro. *Desenvolvimento de Essências de Cálculo Infinitesimal*. Universidade de Santa Úrsula – RJ, 1998.

BOYER, Carl. B. *História da Matemática*, Edgard Blucher, 1996.

CABRAL, Tânia Cristina Baptista. *Velocidade e Aceleração.* III EGEM - III Encontro Gaúcho de Educação Matemática. SBEM/RS. UIJUÍ - Universidade Regional do Noroeste do Estado do RS.1994. Mini-curso.

CASSOL, A. *Produção de significados para a derivada: taxa de variação*. Rio Claro, 1998. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista.

CORNU, B. Limits. En Tall, D. (ed). *Advanced mathematical thinking*. Dordrecht / Boston / London. Kluwer Academic Publisher, 1991.

DE PAULO, Sérgio Roberto, DE PAULO, Iramaia Jorge Cabral, RINALDI, Carlos.. *Bases Conceituais e Filosóficas para uma proposta de Reestruturação Curricular da Educação em Ciências no Ensino Médio*. GRUPO DE PESQUISA EM ENSINO DE FÍSICA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO – DEPTO. DE FÍSICA – UFMT. 2002.

EVES, Howard. *Introdução a História da Matemática*. São Paulo, Editora da UNICAMP, 1996.

GAINES, Brian e SHAW, Mildred. *Collaboration through Concept Maps*. 1995. Disponível na internet: http://ksi.cpsc.ucalgary.ca/articles/CSCL95CM/ . Consultado em julho 2006.

GLADCHEFF, Ana Paula. SILVA, Dilma M. da. ZUFFI, Edna Maura. *Um Instrumento para Avaliação da Qualidade de Softwares Educacionais de Matemática para o Ensino Fundamental.* VII WORKSHOP DE INFORMÁTICA NA ESCOLA, Fortaleza, CE, Brasil, 2001. Anais.

GRUPO DE REELABORAÇÃO DO ENSINO DE FÍSICA. *Física 1.* São Paulo: Universidade de S. Paulo, 1991.

_____________ *Física 2.* São Paulo: Universidade de S. Paulo, 1992.

_____________*Física 3.* São Paulo: Universidade de S. Paulo, 1993.

KAWASAKI, Evelise I. FERNANDES, Clóvis T. *Modelos para Projeto de Cursos Hipermídia.* Dissertação de Mestrado, Divisão de Ciência da Computação, Instituto Tecnológico da Aeronáutica. São José dos Campos, 1996.

MISKULIN, Rosana Giaretta Sguerra. Reflexões Sobre as Tendências Atuais da Educação Matemática e da Informática. Tese de Doutorado. 1999.

MISUKAMI, M.G.N., *Ensino: As Abordagens do Processo.* São Paulo: E.P.U., 1986.

MOREIRA, Marco Antônio. ROSA, Paulo. *Mapas Conceituais.* Cad. Cat. Ens. Fis., Florianópolis, 3(1): 17-25 1986.

MOREIRA, Marco. A., MASINI, E. A. F. S. *Aprendizagem significativa: a teoria de David Ausubel.* São Paulo, Moraes, 1982.

MOREIRA, Marco. A. *O mapa conceitual como recurso didático*. *Melhoria do Ensino,* nº 2. Porto Alegre, PADES/UFGRS, 1979.

____________In *"Organizadores prévios como recursos instrucionais"*. *Melhoria do Ensino,* nº 7. Porto Alegre, PADES/UFGRS, 1980.

____________In "*Ação docente na universidade: textos relativos a componentes básicos do ensino".*Porto Alegre, Ed. da Universidade, 1983.

MOREIRA, Marco. A.*Aprendizagem significativa e sua Avaliação.* Conferência de abertura do 1º Encontro de Estudos sobre Avaliação da Aprendizagem Significativa. CESPE/PAS/UnB. 2001.

NOVAK, Joseph D., GOWIN Bob. *Aprender a Aprender.* Lisboa: Plátano, 212 p. 1996.

ORTON, A. *A cross-sectional study of the understanding of elementary calculus in adolescents and yong adults*. Tesis Doctoral. University of Leeds, 1980.

VALENTE, J. A. *Diferentes usos do computador na Educação,* Editora da UNICAMP, Campinas, São Paulo, 1991.

BRASIL. MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E DO DESPORTO. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais.* Brasília: MEC/SEF, 1997.