

---

PROBABILIDADE DA RUÍNA NO MERCADO DE SEGUROS: FUNDAMENTOS  
TEÓRICOS E ALGUNS RESULTADOS DE SIMULAÇÃO

SILVIA REGINA RIBEIRO LEMOS

Orientador: Prof. Dr. Sylvio José Pereira dos Santos

Co-orientadora: Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Maria Cristina Falcão Raposo

Área de Concentração: Probabilidade.

Dissertação submetida como requerimento parcial para obtenção do  
grau de Mestre em Estatística pela Universidade Federal de Pernambuco.

Recife, janeiro de 2008.

---

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

**Lemos, Silvia Regina Ribeiro**

**Probabilidade da ruína no mercado de seguros: fundamentos teóricos e alguns resultados de simulação / Silvia Regina Ribeiro Lemos. – Recife: O Autor, 2008.**

**xiii, 140 folhas : il., fig., tab.**

**Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN. Estatística, 2008.**

**Inclui bibliografia e apêndice.**

**1. Estatística-Probabilidade. 2. Empresa seguradora em ruína - Simulação Monte Carlo. 3. Probabilidade de risco. I. Título.**

Universidade Federal de Pernambuco  
Pós-Graduação em Estatística

28 de janeiro de 2008  
(data)

Nós recomendamos que a dissertação de mestrado de autoria de

**Silvia Regina Ribeiro Lemos**

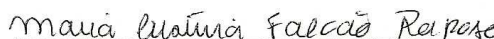
intitulada


**"Probabilidade da ruína no mercado de seguros: fundamentos teóricos e alguns resultados de simulação"**

seja aceita como cumprimento parcial dos requerimentos para o grau de Mestre em Estatística.

  
\_\_\_\_\_  
Coordenador da Pós-Graduação em Estatística

Banca Examinadora:

  
\_\_\_\_\_  
Maria Cristina Falcão Raposo orientadora

  
\_\_\_\_\_  
Viviana Giampaoli (USP)

  
\_\_\_\_\_  
Klaus Leite Pinto Vasconcelos

Este documento será anexado à versão final da dissertação.

*Aos meus pais, Marise e Elizeu,  
dedico com muito amor e carinho*

---

## Agradecimentos

---

Em primeiro lugar, agradeço a Deus por ter me dado a capacidade para alcançar mais uma meta e sempre estar ao meu lado nos momentos mais difíceis.

Aos meus pais, Marise e Eliseu, pelo apoio, carinho, dedicação, confiança, amor e esforço para me educar.

A Zulivar, pelo incentivo, carinho e amor por ele sempre oferecidos. Agradeço também, sua compreensão pelos longos períodos de ausência.

Ao Professor Sylvio José Pereira, pela oportunidade concedida, orientação segura, confiança, apoio, incentivo, competência, paciência e por toda atenção dispensada no desenvolvimento desta dissertação.

À Professora Cristina Raposo, pela orientação segura, atenção, paciência, amizade e confiança.

À minha amiga Andrea e a família Andrade Prudente, por todo carinho, força, ajuda, amizade e por estar do meu lado sempre que precisei.

À minha tia Maria das Graças, minha irmã Silvani, primos, meus eternos amigos Joseval, Lucas, Lázaro, Ivone, Águida, Simone, Paulinho, Edson, Nívea, Marília, Renata, Rinaldo, José Carlos, Relvinha, Cíntia, Lívia, Marise e Feliciano, pelo carinho, apoio e amizade.

Aos professores do Programa de Pós-graduação em Estatística da Universidade Federal de Pernambuco, pela contribuição em minha formação profissional.

Aos meus amigos Edleide e Angelo, pelo companheirismo, amizade, convivência e momentos de descontração.

Aos professores do Departamento de Estatística da Universidade Federal da Bahia, pela amizade, apoio e confiança.

À Valéria Bittencourt, pela competência, carinho e paciência com os alunos do mestrado.

Aos meus amigos do mestrado, pelo companheirismo, atenção e momentos de descontração.

Aos participantes da banca examinadora, pelas sugestões.

Ao CNPq, pelo apoio financeiro.

---

## Resumo

---

Neste trabalho apresentamos um embasamento teórico sobre a probabilidade da ruína de uma seguradora, ou seja, a probabilidade de uma seguradora ficar com uma reserva insuficiente para pagar as indenizações resultantes de um sinistro. Mais especificadamente, estudamos o modelo clássico de risco desenvolvido por Cramér-Lundberg, o qual utiliza um processo de Poisson homogêneo para modelar o número de indenizações que chegam à seguradora até um período de tempo  $t$ . Apresentamos também diferentes distribuições para diversos tipos de indenizações a fim de modelar a probabilidade da ruína eventual de uma seguradora, bem como algumas aproximações para esta probabilidade, a saber: De Vylder, Beekman-Bowers e Cramér-Lundberg. Adicionalmente, descrevemos o modelo de reserva apresentado por Erik Sparre Andersen, o qual estende o modelo clássico de risco de reserva de Cramér-Lundberg, e com este modelo calculamos a probabilidade da ruína em tempo contínuo e horizonte temporal infinito.

Os resultados de simulação levaram a conclusões semelhantes às disponíveis na literatura no sentido de poder afirmar que não existe uma aproximação melhor para estimar a probabilidade da ruína, pois esta depende não só das distribuições de probabilidade como dos valores de seus parâmetros. Os resultados de simulação realizados revelaram também que quando o tempo entre duas ocorrências sucessivas de indenizações tem função de densidade gama, as estimativas simuladas da probabilidade de ruína convergem mais rapidamente para zero quando as indenizações têm função de densidade com caudas leves do que quando as indenizações têm função de densidade com caudas pesadas.

*Palavras-chaves:* Probabilidade da Ruína, Risco de Seguradora, Cramér-Lundberg.

---

## Abstract

---

In this work the theoretical basis for modeling the ruin of an insurance company is presented. We studied the classic Cramér-Lundberg risk model, which uses an homogeneous Poisson process to model the number of claims that arrives to an insurance company during a given period  $t$  of time. Also, different types of probability distributions, that can be used to model an eventual insurance company ruin, and some approximations to the probability of ruin, such as De Vylder, Beekman-Bowers and Cramér-Lundberg, are presented. In addition, we describe the Erik Sparre Andersen classic risk model, which is an extension of the Cramér-Lundberg model, and we use it to calculate the probability of a ruin in continuous time and infinite temporal horizon.

The results of the simulation lead to conclusions which are similar to those found in the literature, in the sense that one can not state that there is the best approximation to the probability of a ruin, as it depends not only on the used probability distributions but also on their parameter values. The simulation results also shown that, when the time between different claims has a gamma density function, the simulated estimates of the probability of ruin converge more quickly to zero when the refunds have a light-tail density function then when refunds have a heavy-tail density function.

*Key-words:* Ruin Probability, Insurance Risk, Cramér-Lundberg.



<b>Lista de Figuras</b>	<b>x</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>xiii</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Considerações Iniciais . . . . .	1
1.2 Organização da Dissertação . . . . .	4
1.3 Suporte Computacional . . . . .	4
1.4 Conceitos Básicos . . . . .	5
<b>2 Modelo Clássico de Cramér-Lundberg</b>	<b>17</b>
2.1 Introdução . . . . .	17
2.2 Noções básicas . . . . .	18
2.2.1 Teoria da Renovação . . . . .	18
2.2.2 Processo de Contagem . . . . .	21
2.2.3 Processo de Poisson . . . . .	22
2.3 Modelo Clássico de Cramér-Lundberg . . . . .	24
<b>3 Teoria da Ruína em Modelo Poissoniano</b>	<b>29</b>
3.1 Introdução . . . . .	29

3.2	Probabilidade da Ruína . . . . .	30
3.3	Equações Diferenciais e Integrais para a Probabilidade da Ruína Eventual . . . . .	36
<b>4</b>	<b>Perda Agregada Máxima</b>	<b>44</b>
4.1	Introdução . . . . .	44
4.2	Perda Agregada Máxima . . . . .	45
<b>5</b>	<b>Gravidade da Ruína e Probabilidades Assintóticas</b>	<b>53</b>
5.1	Introdução . . . . .	53
5.2	Gravidade da Ruína . . . . .	54
5.3	Aproximações para a Probabilidade da Ruína . . . . .	59
5.3.1	Aproximação de De Vylder . . . . .	60
5.3.2	Aproximação de Beekman-Bowers . . . . .	61
5.3.3	Aproximação de Cramér-Lundberg . . . . .	62
<b>6</b>	<b>Teoria da Ruína em Modelo Não Poissoniano</b>	<b>65</b>
6.1	Introdução . . . . .	65
6.2	Equações Funcionais para a Probabilidade da Ruína . . . . .	69
<b>7</b>	<b>Resultados Numéricos</b>	<b>71</b>
<b>8</b>	<b>Conclusões</b>	<b>100</b>
	<b>Apêndice</b>	<b>102</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>137</b>

2.1	Uma trajetória do processo de reserva de risco de uma seguradora quando as indenizações particulares têm distribuição Exponencial(0, 5), para $\lambda = 1$ , $c = 2$ e $u = 10$ . . . . .	25
3.1	Probabilidade da ruína quando as indenizações particulares têm distribuição Exponencial(0, 5), para $\lambda = 1$ , $c = 3$ e diferentes valores da reserva inicial. . . . .	31
3.2	O coeficiente de ajustamento quando o modelo de reserva é poisson. . . . .	33
4.1	Uma trajetória do processo da perda agregada quando as indenizações particulares têm distribuição Exponencial(0, 5), para $\lambda = 1$ , $c = 2$ e $u = 10$ . . . . .	45
5.1	Gravidade da ruína quando as indenizações tem distribuição Gama(2; 2), para $x = 2$ , $\lambda = 1$ , $c = 1, 1$ e diferentes valores da reserva inicial. . . . .	54
6.1	O coeficiente de ajustamento quando o modelo de reserva é não poissoniano. . . . .	67
7.1	Estimativas da probabilidade da ruína para indenizações com distribuição Exponencial(0, 5), aproximação de Beekman-Bowers e o limitante superior de Lundberg. Para $\lambda = 1$ , $\theta = 0, 5$ , $c = 3$ e diversos valores da reserva inicial. . . . .	76

7.2	Estimativas da probabilidade da ruína para indenizações com distribuição Exponencial(0, 5), aproximação de Beekman-Bowers e o limitante superior de Lundberg. Para $\lambda = 1$ , $u = 2$ e diversos valores de $c$ . . . . .	77
7.3	Estimativas da probabilidade da ruína para indenizações com distribuição Exponencial( $\beta$ ), aproximação de Beekman-Bowers e o limitante superior de Lundberg. Para $\lambda = 1$ , $u = 2$ , $c = 3$ e diversos valores de $\beta$ . . . . .	78
7.4	Estimativas da probabilidade da ruína para indenizações com distribuição Exponencial(0, 5), aproximação de Beekman-Bowers e o limitante superior de Lundberg. Para $u = 2$ , $c = 3$ e diversos valores de $\lambda$ . . . . .	79
7.5	Estimativas simuladas da probabilidade da ruína para indenizações com distribuição Gama(2, 5; 2, 2), o limitante superior de Lundberg e as aproximações de Beekman-Bowers, De Vylder e Cramér-Lundberg. Para $\lambda = 1$ , $\theta = 0, 14$ , $c = 1, 3$ e diversos valores de $u$ . . . . .	81
7.6	Estimativas simuladas da probabilidade da ruína para indenização com distribuição Gama(2, 5; 2, 2) o limitante superior de Lundberg e as aproximações de Beekman-Bowers, De Vylder e Cramér-Lundberg. Para $u = 2$ , $\lambda = 1$ e diversos valores de $c$ . . . . .	82
7.7	Estimativas simuladas da probabilidade da ruína para indenização com distribuição Gama(2, 5; 2, 2), o limitante superior de Lundberg e as aproximações de Beekman-Bowers, De Vylder e Cramér-Lundberg. Para $u = 2$ , $c = 1, 3$ e diversos valores de $\lambda$ . . . . .	83
7.8	Estimativas simuladas da probabilidade da ruína para indenização com distribuição Gama(2, 5; $\beta$ ), o limitante superior de Lundberg e as aproximações de Beekman-Bowers, De Vylder e Cramér-Lundberg. Para $u = 2$ , $\lambda = 1$ , $c = 1, 3$ e diversos valores de $\beta$ . . . . .	85

7.9	Estimativas simuladas da probabilidade da ruína para indenização com distribuição Gama( $\alpha; 2, 2$ ), o limitante superior de Lundberg e as aproximações de Beekman-Bowers, De Vylder e Cramér-Lundberg. Para $\lambda = 1$ , $u = 2$ , $c = 1, 3$ e diversos valores de $\alpha$ . . . . .	86
7.10	Estimativas simuladas da probabilidade da ruína para indenização com distribuição Lognormal( $0, 4; 0, 5$ ), aproximações de Beekman-Bowers e De Vylder. Para $\lambda = 1$ , $c = 1, 8$ e diversos valores de $u$ . . . . .	87
7.11	Estimativas simuladas da probabilidade da ruína para indenização com distribuição Lognormal( $0, 4; 0, 5$ ), aproximações de Beekman-Bowers e De Vylder. Para $\lambda = 1$ , $u = 2$ e diversos valores de $c$ . . . . .	88
7.12	Estimativas simuladas da probabilidade da ruína para indenização com distribuição Lognormal( $0, 4; 0, 5$ ), aproximações de Beekman-Bowers e De Vylder. Para $c = 1, 8$ , $u = 2$ e diversos valores de $\lambda$ . . . . .	89
7.13	Estimativas simuladas da probabilidade da ruína para indenização com distribuição Lognormal( $\mu; 0, 5$ ), aproximações de Beekman-Bowers e De Vylder. Para $\lambda = 1$ , $u = 2$ , $c = 1, 8$ e diversos valores de $\mu$ . . . . .	90
7.14	Estimativas simuladas da probabilidade da ruína para indenização com distribuição Lognormal( $0, 4; \sigma^2$ ), aproximações de Beekman-Bowers e De Vylder. Para $\lambda = 1$ , $u = 2$ , $c = 1, 8$ e diversos valores de $\sigma^2$ . . . . .	91
7.15	Estimativas simuladas da probabilidade da ruína para indenização com distribuição Pareto( $3; 4$ ) e aproximações de Beekman-Bowers e De Vylder. Para $\lambda = 1$ , $c = 1, 5$ e diversos valores de $u$ . . . . .	93
7.16	Estimativas simuladas da probabilidade da ruína para indenização com distribuição Pareto( $3; 4$ ), aproximações de Beekman-Bowers e De Vylder. Para $\lambda = 1$ , $u = 2$ e diversos valores de $c$ . . . . .	94
7.17	Estimativas simuladas da probabilidade da ruína para indenização com distribuição Pareto( $3; 4$ ), aproximações de Beekman-Bowers e De Vylder. Para $u = 2$ , $c = 1, 5$ e diversos valores de $\lambda$ . . . . .	95

7.18	Estimativas simuladas da probabilidade da ruína para indenização com distribuição Pareto( $k; 4$ ), aproximações de Beekman-Bowers e De Vylder. Para $u = 2$ , $\lambda = 1$ , $c = 1, 5$ e diversos valores de $k$ . . . . .	96
7.19	Estimativas simuladas da probabilidade da ruína para indenização com distribuição Pareto( $3; \alpha$ ), aproximações de Beekman-Bowers e De Vylder. Para $u = 2$ , $\lambda = 1$ , $c = 1, 5$ e diversos valores de $\alpha$ . . . . .	97
7.20	Estimativas simuladas da probabilidade da ruína para indenizações com distribuição gama, pareto e lognormal para o caso em que o tempo entre as chegadas das indenizações têm distribuição Gama( $1, 5; 1$ ), $c = 1, 3$ e diversos valores de $u$ . . . . .	99

1.1 A transformada de Laplace de algumas funções elementares. . . . . 12

7.1 Estimativas da probabilidade da ruína para indenizações com distribuição Exponencial(0, 5), aproximação de Beekman-Bowers e o limitante superior de Lundberg e, respectivos erros relativos. Para  $\lambda = 1$ ,  $\theta = 0,5$ ,  $c = 3$  e diversos valores de  $u$ . . . . . 75

7.2 Estimativas da probabilidade da ruína para indenizações com distribuição Exponencial(0, 5), aproximação de Beekman-Bowers e o limitante superior de Lundberg e, respectivos erros relativos. Para  $\lambda = 1$ ,  $u = 2$  e diversos valores de  $c$ . . . . . 76

7.3 Estimativas da probabilidade da ruína para indenizações com distribuição Exponencial( $\beta$ ), aproximação de Beekman-Bowers e o limitante superior de Lundberg e, os respectivos erros relativos. Para  $\lambda = 1$ ,  $u = 2$ ,  $c = 3$  e diversos valores de  $\beta$ . . . . . 78

7.4 Estimativas da probabilidade da ruína para indenizações com distribuição Exponencial(0, 5), aproximação de Beekman-Bowers e o limitante superior de Lundberg e, respectivos erros relativos. Para  $u = 2$ ,  $c = 3$  e diversos valores de  $\lambda$ . . . . . 79

7.5 Estimativas simuladas da probabilidade da ruína para indenizações com distribuição Gama(2, 5; 2, 2), o limitante superior de Lundberg, as aproximações de Beekman-Bowers, De Vylder e Cramér-Lundberg e, respectivos erros relativos. Para  $\lambda = 1$ ,  $\theta = 0,14$ ,  $c = 1,3$  e diversos valores de  $u$ . . . . . 80

7.6	Estimativas simuladas da probabilidade da ruína para indenização com distribuição Gama(2, 5; 2, 2), o limitante superior de Lundberg, as aproximações de Beekman-Bowers, De Vylder e Cramér-Lundberg e, os respectivos erros relativos. Para $u = 2$ , $\lambda = 1$ e diversos valores de $c$ . . . . .	82
7.7	Estimativas simuladas da probabilidade da ruína para indenização com distribuição Gama(2, 5; 2, 2), o limitante superior de Lundberg, as aproximações de Beekman-Bowers, De Vylder e Cramér-Lundberg e, os respectivos erros relativos. Para $u = 2$ , $c = 1, 3$ e diversos valores de $\lambda$ . . . . .	83
7.8	Estimativas simuladas da probabilidade da ruína para indenização com distribuição Gama(2, 5; $\beta$ ), o limitante superior de Lundberg, as aproximações de Beekman-Bowers, De Vylder e Cramér-Lundberg e, respectivos erros relativos. Para $u = 2$ , $\lambda = 1$ , $c = 1, 3$ e diversos valores de $\beta$ . . . . .	84
7.9	Estimativas simuladas da probabilidade da ruína para indenização com distribuição Gama( $\alpha$ ; 2, 2), o limitante superior de Lundberg, as aproximações de Beekman-Bowers, De Vylder, Cramér-Lundberg e respectivos erros relativos. Para $\lambda = 1$ , $u = 2$ , $c = 1, 3$ e diversos valores de $\alpha$ . . . . .	85
7.10	Estimativas simuladas da probabilidade da ruína para indenização com distribuição Lognormal(0, 4; 0, 5), aproximações de Beekman-Bowers e De Vylder e, respectivos erros relativos. Para $\lambda = 1$ , $\theta = 0,07$ , $c = 1,8$ e diversos valores de $u$ . . . . .	87
7.11	Estimativas simuladas da probabilidade da ruína para indenização com distribuição Lognormal(0, 4; 0, 5), aproximações de Beekman-Bowers e De Vylder e, respectivos erros relativos. Para $\lambda = 1$ , $u = 2$ e diversos valores de $c$ . . . . .	88
7.12	Estimativas simuladas da probabilidade da ruína para indenização com distribuição Lognormal(0, 4; 0, 5), aproximações de Beekman-Bowers e De Vylder e, respectivos erros relativos. Para $c = 1,8$ , $u = 2$ e diversos valores de $\lambda$ . . . . .	89



7.13	Estimativas simuladas da probabilidade da ruína para indenização com distribuição Lognormal( $\mu; 0, 5$ ), aproximações de Beekman-Bowers e De Vylder e, respectivos erros relativos. Para $\lambda = 1, u = 2, c = 1, 8$ e diversos valores de $\mu$ . . . . .	90
7.14	Estimativas simuladas da probabilidade da ruína para indenização com distribuição Lognormal( $0, 4; \sigma^2$ ), aproximações de Beekman-Bowers e De Vylder e, respectivos erros relativos. Para $\lambda = 1, u = 2, c = 1, 8$ e diversos valores de $\sigma^2$ . . . . .	91
7.15	Estimativas simuladas da probabilidade da ruína para indenização com distribuição Pareto( $3; 4$ ), aproximações de Beekman-Bowers e De Vylder e, respectivos erros relativos. Para $\lambda = 1, \theta = 0, 5, c = 1, 5$ e diversos valores de $u$ . . . . .	92
7.16	Estimativas simuladas da probabilidade da ruína para indenização com distribuição Pareto( $3; 4$ ), aproximações de Beekman-Bowers e De Vylder e, respectivos erros relativos. Para $\lambda = 1, u = 2$ e diversos valores de $c$ . . . . .	93
7.17	Estimativas simuladas da probabilidade da ruína para indenização com distribuição Pareto( $3; 4$ ), aproximações de Beekman-Bowers e De Vylder e, respectivos erros relativos. Para $u = 2, c = 1, 5$ e diversos valores de $\lambda$ . . . . .	95
7.18	Estimativas simuladas da probabilidade da ruína para indenização com distribuição Pareto( $k; 4$ ), aproximações de Beekman-Bowers e De Vylder e, respectivos erros relativos. Para $u = 2, \lambda = 1, c = 1, 5$ e diversos valores de $k$ . . . . .	96
7.19	Estimativas simuladas da probabilidade da ruína para indenização com distribuição Pareto( $3; \alpha$ ), aproximações de Beekman-Bowers e De Vylder e, respectivos erros relativos. Para $u = 2, \lambda = 1, c = 1, 5$ e diversos valores de $\alpha$ . . . . .	97
7.20	Estimativas simuladas da probabilidade da ruína para indenizações com distribuição Gama ( $2, 5; 2, 2$ ), Pareto ( $3; 4$ ) e Lognormal ( $0, 4; 0, 5$ ) para o caso em que o tempo entre as ocorrências sucessivas de indenizações têm distribuição Gama( $1, 5; 1$ ), $c = 1, 3$ e diversos valores de $u$ . . . . .	98

### 1.1 Considerações Iniciais

Desde as antigas civilizações, o ser humano, dominado pelo sentimento de temor, sempre se preocupou com as incertezas do futuro e as impiedosas adversidades da própria vida. Tais sentimentos levaram o homem à necessidade de criar formas de proteção contra os perigos para a sua família e para o seu patrimônio. Um exemplo que se insere nesse contexto são os comerciantes mesopotâmicos e fenícios que, para reduzirem os impactos financeiros e perigos do mar, criaram um sistema de reposição de cargas de navios, no caso de eventuais roubos ou naufrágio em suas viagens pelo Mar Mediterrâneo e Egeu. De outro lado, os hebreus preocupados com a ocorrência de morte ou desaparecimento dos seus rebanhos estabeleceram um acordo: cada membro do grupo de pastores que perdia um animal tinha a garantia de receber um outro animal, pago pelos demais pastores.

Com o crescimento dos aglomerados urbanos, após a idade média, surgem os primeiros contratos de seguro marítimo com emissão de apólice criados pelos italianos e espanhóis, motivados pela grande expansão do comércio marítimo, no ano de 1347, na cidade de Gênova. É nesta época que as atividades de seguros começam a se popularizar dando início aos primeiros estudos de matemática atuarial, principalmente à medida que os pesquisadores se interessavam por este tipo de negócio.

De acordo com Shiryaev (1999), a palavra *actuarius* teve origem no Império Romano; trata-se de um escriba encarregado de realizar os discursos pronunciados no Senado ou de um oficial do exército que contabilizava e supervisionava suprimentos militares ou podia ser também um secretário do governo. Em sua versão em inglês, a palavra *actuarius* sofreu várias mudanças de significados. Inicialmente, era um empregado encarregado de fazer registro; depois um secretário ou um conselheiro do governo. Com o desenvolvimento do mercado segurador e das instituições financeiras, a palavra atuário foi atribuída ao profissional que executava os cálculos matemáticos relacionados à expectativa de vida, que são fundamentais para avaliar o valor dos contratos de seguros de vida, rendas anuais e aposentadorias.

Atualmente, de acordo com a legislação brasileira, o atuário é o profissional que executa os cálculos matemáticos e atua, de modo geral, no mercado econômico e financeiro, realizando pesquisas e estabelecendo planos e políticas de investimentos e amortizações e, em seguro privado e social, calculando probabilidade de eventos, avaliando riscos e fixando prêmios, indenizações, benefícios e reservas. Além disso, o atuário pode ainda fiscalizar e orientar as atividades técnicas de empresas de seguro, capitalização e investimento.

Por outro lado, designa-se por contrato de seguro um documento que estabelece para uma das partes (companhia seguradora), mediante recebimento de um prêmio da outra parte (segurador), a obrigação de pagar a esta, ou à pessoa por ela designada (beneficiário), determinada importância, no caso da ocorrência de um prejuízo (sinistro) resultante de um evento futuro, possível e incerto (risco), estabelecido no contrato. Cabe lembrar que a falta de pagamento do prêmio nas condições estabelecidas no contrato implica na dispensa da obrigação da seguradora de indenizar o segurado ou o seu beneficiário em caso de sinistro. Adicionalmente, o documento onde estão escritas as cláusulas com as descrições dos direitos e das obrigações das partes contratantes bem como as coberturas, garantias contratadas, o prazo do contrato e quaisquer outras estipulações que no contrato se firmarem denomina-se apólice de seguro.

O termo “prêmio”, no contexto do seguro, é a quantia que o assegurado deve pagar à seguradora como compensação das obrigações assumidas pela mesma e que, por sua vez, se constitui na principal receita do segurador. Em geral, o seu valor depende do prazo do seguro, do valor

do objeto assegurado e da exposição ao risco.

Um aspecto importante é que para atuar no mercado brasileiro a seguradora deve obedecer alguns requisitos, como por exemplo, um capital mínimo para operar no mercado e uma margem de solvência (uma relação entre os seguros vendidos e a capacidade de pagar as apólices). Adicionalmente, temos que a avaliação do risco de uma instituição financeira de seguro ficar com reserva insuficiente para pagar as indenizações, ou seja, entrar em ruína, é um grande desafio para os profissionais que atuam neste mercado.

Este trabalho tem o objetivo de apresentar um embasamento teórico sobre a estimativa da probabilidade da ruína de uma seguradora, ou seja, a probabilidade de uma seguradora ficar com reserva insuficiente para pagar as indenizações resultantes de um sinistro. Mais especificadamente, apresentamos o modelo clássico de risco desenvolvido por Cramér-Lundberg, o qual utiliza um processo de Poisson homogêneo para modelar o número de indenizações que chegam à seguradora até um período de tempo  $t$ . Também apresentamos diferentes distribuições para diversos tipos de indenizações a fim de modelar a probabilidade da ruína eventual de uma seguradora, bem como algumas aproximações para esta probabilidade, a saber: De Vylder, Beekman-Bowers e Cramér-Lundberg. Para obtenção das estimativas das probabilidades de ruína utilizamos simulação de Monte Carlo, salvo para o caso em que o valor das indenizações particulares tem distribuição exponencial, pois neste caso obtivemos o valor exato através da solução fechada. Adicionalmente, descrevemos o modelo de reserva apresentado por Erik Sparre Andersen, o qual estende o modelo clássico de risco de reserva de Cramér-Lundberg.

A motivação deste trabalho deve-se à ampliação do mercado segurador no Brasil nas últimas décadas. Além disso, poucos textos em português são encontrados na literatura acerca da teoria do risco aplicada à atividade seguradora, mais precisamente sobre a probabilidade da ruína de uma seguradora. Nosso trabalho visa preencher parcialmente esta lacuna. Aplicações a dados reais não foram possíveis de serem apresentadas devido à indisponibilidade de dados junto às seguradoras.

## 1.2 Organização da Dissertação

A presente dissertação está dividida em oito capítulos. Neste primeiro capítulo além da introdução ao tema de interesse, abordamos alguns conceitos básicos de Estatística. No segundo capítulo apresentamos algumas noções sobre a Teoria da Renovação, Processo de Contagem e Processo de Poisson, culminando com a apresentação do modelo clássico de Cramér-Lundberg para a reserva de uma companhia seguradora em tempo contínuo. No terceiro capítulo definimos a probabilidade da ruína em tempo infinito e horizonte temporal infinito, a partir do modelo proposto por Cramér-Lundberg e os princípios matemáticos para seu cálculo. No quarto capítulo apresentamos uma forma alternativa para o cálculo da probabilidade da ruína. Tal probabilidade é expressa em função da distribuição geométrica composta, conhecida como fórmula de Pollaczek-Khinchine. No quinto capítulo descrevemos o cálculo da gravidade da ruína de uma seguradora. Ao final daquele capítulo mostramos algumas aproximações assintóticas para a probabilidade da ruína, a saber: De Vylder, Beekman-Bowers e Cramér-Lundberg. No sexto capítulo descrevemos um modelo de reserva apresentado por Erik Sparre Andersen, o qual estende o modelo clássico de risco de reserva de Cramér-Lundberg e, a partir deste modelo, calculamos a probabilidade da ruína eventual. No sétimo capítulo apresentamos as estimativas da probabilidade da ruína. Por fim, no oitavo capítulo apresentamos as principais conclusões deste trabalho.

## 1.3 Suporte Computacional

No desenvolvimento deste trabalho todas as simulações apresentadas foram desenvolvidas a partir da linguagem de programação matricial `Ox` em sua versão console 4.02 para o sistema operacional Windows. Esta linguagem de programação, criada por Jungen Doornik em 1994 na Universidade de Oxford (Inglaterra), é muito flexível provando ser bastante útil em computação numérica. Maiores detalhes sobre esta linguagem de programação podem ser encontrados em Doornik (2001) e Cribari-Neto & Zarkos (2003). Além dessa linguagem de programação, foi também utilizado o *software* Maple em sua versão 9.5.

## 1.4 Conceitos Básicos

Nesta seção estão apresentados os conceitos básicos que serão utilizados ao longo do nosso trabalho.

- Esperança

Seja  $X$  uma variável aleatória e  $F_X(x)$  sua função de distribuição. A esperança ou valor esperado de  $X$  é definida por

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x),$$

desde que a integral seja absolutamente convergente. Na literatura estatística, uma forma de representar a esperança de uma variável aleatória é da seguinte forma

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x) = \int_0^{\infty} [1 - F(x)] dx - \int_{-\infty}^0 F(x) dx.$$

Se a variável aleatória  $X$  assumir somente valores não negativos, então  $F_X(x) = 0$  para  $x < 0$ .

Assim, o valor esperado será

$$E(X) = \int_0^{\infty} [1 - F(x)] dx.$$

- Momentos

Sendo  $X$  uma variável aleatória, então o valor  $E(X - k)^j$ , se existe, é denominado  $j$ -ésimo momento de  $X$  em torno de  $k$ , para  $k \in \mathbb{R}$  e  $j = 1, 2, 3, \dots$ . Se  $k = 0$  então o  $j$ -ésimo momento em torno de zero é representado por  $E(X^j)$  e é chamado  $j$ -ésimo momento ordinário de  $X$  ou, simplesmente, momento de ordem  $j$ . Se  $k = E(X) < \infty$ , então o  $j$ -ésimo momento em torno da média, se existir, se chama de  $j$ -ésimo momento central de  $X$ . O primeiro momento ordinário é a esperança da variável aleatória  $X$ , o primeiro momento central é nulo e o segundo momento central é chamado de variância de  $X$ . (ver, Jonhson *et al.*, 1994a)

- Variância

Seja  $X$  uma variável aleatória em que  $E(X) < \infty$ ; definimos a variância de  $X$  como

$$V(X) = E[X - E(X)]^2 = E(X^2) - E^2(X).$$

Seja  $(X, Y)$  um vetor bivariado de variáveis aleatórias contínuas. A esperança condicional de  $X$  dado que  $Y = y$ , se existir, é definida como

$$E(X|Y = y) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y=y}(x) dx,$$

em que  $f_{X|Y=y}(y)$  é a função densidade condicional de  $X$  dado que  $Y = y$ . Além disso, sendo  $(X, Y)$  um vetor bivariado de variáveis aleatórias, temos que

$$E[E(X|Y)] = E(X),$$

desde que as esperanças existam.

Seja  $(X, Y)$  um vetor bivariado de variáveis aleatórias contínuas. Dado um valor específico da variável aleatória  $Y$ , a variância condicional de  $X$  dado que  $Y = y$  é definida por

$$V(X|Y = y) = E\{[X - E(X|Y = y)]^2|Y = y\},$$

ou, mais geralmente

$$V(X|Y = y) = E(X^2|Y = y) - E^2(X|Y = y).$$

Note que a existência da variância  $V(X|Y = y)$  depende da existência das esperanças envolvidas.

Adicionalmente, temos também que

$$V(X) = E[V(X|Y = y)] + V[E(X|Y = y)].$$

Para uma descrição completa e detalhada sobre esperança e variância de variáveis aleatórias, ver James (2002), Shiryaev (1996).

- Função Geradora de Momentos e Função Característica

A função geradora de momentos de uma variável aleatória  $X$  é definida por

$$m_X(r) = E(e^{rX}), \quad |r| < r_0,$$

desde que  $E(e^{r_0|X|}) < \infty$  para algum  $r_0 > 0$ . Se  $m_X(r)$  está definida em uma vizinhança  $\{r : |r| < 0\}$  de zero, então todos os momentos ordinários de  $X$  são finitos e

$$m_X(r) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E[(rX)^n]}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n E(X^n)}{n!}, \quad |r| < r_0,$$

em que  $n \in \mathbb{N}$  e  $m_X(0) = 1$ . Além disso,  $m_X(r)$  tem derivadas de toda ordem em  $r = 0$  e

$$m_X^{(n)}(r) \Big|_{r=0} = \frac{d^n}{dr^n} m_X(r) \Big|_{r=0} = E(X^n).$$

A função geradora de momentos caracteriza a distribuição de  $X$ , no sentido de que se  $m_X(r)$  é finita para  $|r| < r_0$ ,  $r_0 > 0$ , então  $m_X(r)$  identifica, unicamente, a distribuição.

Se  $X_1, X_2, \dots, X_n$  são variáveis aleatórias independentes com função geradora de momentos  $m_{X_1}(r), m_{X_2}(r), \dots, m_{X_n}(r)$ , então  $X_1 + X_2 + \dots + X_n$  tem função geradora de momentos dada por

$$m_{X_1+X_2+\dots+X_n}(r) = \prod_{i=1}^n m_{X_i}(r).$$

A função geradora de momentos é uma ferramenta muito útil na Estatística e na Teoria do Risco. Muitos teoremas importantes na Teoria da Ruína são provados com o auxílio dessa função, como por exemplo, a Desigualdade de Lundberg, que fornece um limitante superior para a probabilidade da ruína. Além disso, em muitos problemas de inferência estatística é mais fácil calcular a função geradora de momentos do que a correspondente função de distribuição.

Por outro lado, existe uma outra função, estreitamente relacionada com a função geradora de momentos, a qual é geralmente empregada em seu lugar. Ela é denominada função característica, denotada por  $\phi_X(r)$ .

A função característica de uma variável aleatória  $X$  é definida por

$$\phi_X(r) = E(e^{irX}) = E[\cos(rX)] + iE[\text{sen}(rX)], \quad r \in \mathbb{R}, \quad (1.1)$$

em que  $i = \sqrt{-1}$  é a unidade imaginária. Existe enorme vantagem em termos estatísticos de se empregar  $\phi_X(r)$  em vez de  $m_X(r)$ , porque nem todas as distribuições possuem função geradora de momentos. No entanto, para todas as distribuições existe a função característica.

Mostramos anteriormente que os momentos ordinários de uma variável aleatória, se existirem, podem ser calculados derivando a função geradora de momentos. Esta propriedade também se aplica à função característica. Deste modo, se  $E(|X|^n) < \infty$ , então para  $r = 0$ , vem

$$\phi_X^{(n)}(r) \Big|_{r=0} = \frac{d^n}{dr^n} \phi_X(r) \Big|_{r=0} = i^n E(X^n),$$



em que  $n \in \mathbb{N}$ . Vale ressaltar que conhecendo a função densidade  $f(x)$ , a função característica pode ser obtida a partir de (1.1). A recíproca também é verdadeira, ou seja, a função característica determina univocamente a função densidade. Assim, dado  $\phi_X(r)$ , a correspondente função de densidade  $f(x)$  é obtida de

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} \phi_X(r) dt. \quad (1.2)$$

A demonstração de (1.2) pode ser encontrada em Lukacs (1960), Wilks (1962) e Rao (1973). Adicionalmente, temos que, para variáveis aleatórias independentes, a função característica de uma soma é, simplesmente, o produto das funções características das variáveis individuais.

Discussões mais detalhadas sobre função geradora de momentos e a função característica podem ser encontradas, respectivamente, em Bickel & Doksum (2001) e Lindgren (1993).

- Convolução

Temos que se  $X$  e  $Y$  são variáveis aleatórias independentes com as respectivas funções de distribuição  $F_X(x)$  e  $F_Y(y)$ , então a função de distribuição de  $S = X + Y$  é dada por

$$F_{X+Y}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} F_Y(s-x) f_X(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} F_X(s-y) f_Y(y) dy. \quad (1.3)$$

*Demonstração.*

$$\begin{aligned} F_{X+Y}(s) = P(X + Y \leq s) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{s-y} f_X(x) f_Y(y) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{s-y} f_X(x) dx \right\} f_Y(y) dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [F_X(s-y) - F_X(-\infty)] f_Y(y) dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} F_X(s-y) f_Y(y) dy. \end{aligned}$$

Ou, de forma equivalente, temos

$$F_{X+Y}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} F_Y(s-x) f_X(x) dx.$$

A expressão (1.3) recebe o nome de convolução das funções acumuladas  $F_X(x)$  e  $F_Y(y)$ , denotada por  $F_Y \star F_X$ . Diferenciando (1.3) em relação a  $s$  obtemos a convolução das funções de densidades

$f_X(x)$  e  $f_Y(y)$ , denotada por  $f_Y * f_X$ , que é dada por

$$f_{X+Y}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(s-x)f_X(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(s-y)f_Y(y)dy, \quad s > 0. \quad (1.4)$$

Se  $X$  e  $Y$  são variáveis aleatórias não negativas, então a expressão (1.4) torna-se

$$f_{X+Y}(s) = \int_0^s f_Y(s-x)f_X(x)dx = \int_0^s f_X(s-y)f_Y(y)dy, \quad s > 0.$$

De acordo com (1.4), temos que  $f_Y * f_X = f_X * f_Y$ . Considere, agora, a soma das variáveis aleatórias independentes  $X + Y + Z$  com funções de densidades de probabilidades dadas, respectivamente, por  $f_X(x)$ ,  $f_Y(y)$  e  $f_Z(z)$ . Então, a convolução das funções de densidades de probabilidades é dada por  $f_S(s) * f_Z(z) = (f_X * f_Y) * f_Z$ . Segundo Feller (1971), o fato da soma de variáveis aleatórias apresentar as propriedades associativa e comutativa, implica que estas mesmas propriedades podem ser aplicadas para a convolução. Portanto, teremos  $f_X * f_Y * f_Z = f_X * f_Z * f_Y = f_Y * f_Z * f_X$  e assim sucessivamente, independentemente das ordens das operações.

Seja  $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$  a soma de  $n$  variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com função de distribuição acumulada  $F_X(x)$ . A função de distribuição acumulada de  $S_n$  é a  $n$ -ésima convolução de  $F_X(x)$ , denotada por  $F^{n*}$ . Logo,

$$F^{0*} = 1, \quad F^{1*} = F, \quad F^{(n+1)*} = F^{n*} \star F.$$

Se  $F$  tem função de densidade de probabilidade  $f$  então  $F^{n*}$  tem função de densidade  $f * f * \dots * f$  ( $n$  vezes) denotado por  $f^{n*}$ . Deste modo, temos que a função densidade de  $S_n$  é dada por

$$f_{S_n}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y_1) \cdots f(y_{n-1}) f(s - y_1 - \dots - y_{n-1}) dy_1 \cdots dy_{n-1}.$$

Uma discussão mais detalhada sobre a teoria da convolução pode ser encontrada em Feller (1971) e Shiryaev (1996).

- Transformada de Laplace

Seja  $f(y)$  uma função definida no intervalo  $(0, \infty)$ . Então, a transformada de Laplace de  $f(y)$ , denotada por  $\bar{f}(s)$ , é definida por

$$\bar{f}(s) = \int_0^{\infty} e^{-sy} f(y) dy,$$

se a integral é convergente para algum valor de  $s \geq 0$ ; caso contrário, ela não existe.

Quando  $f(y)$  é uma função densidade de probabilidade de uma variável aleatória não negativa  $Y$ , a transformada de Laplace de  $f(y)$  corresponde ao valor esperado da variável aleatória  $e^{-sY}$ , ou seja,

$$E[e^{-sY}] = \int_0^{\infty} e^{-sy} f(y) dy.$$

A seguir serão apresentadas algumas propriedades importantes da transformada de Laplace que serão úteis na resolução dos cálculos de probabilidades de ruína e de outras quantidades relacionadas. Para uma descrição mais detalhada sobre a transformada de Laplace, ver Schiff (1999).

Propriedade 1. Sejam  $f(y)$  e  $g(y)$  funções com transformada de Laplace  $\bar{f}(s)$  e  $\bar{g}(s)$ , respectivamente, e sejam  $a$  e  $b$  constantes quaisquer. Então a transformada de Laplace de  $t(y) = af(y) + bg(y)$  é dada por:

$$\bar{t}(s) = \int_0^{\infty} e^{-sy} [af(y) + bg(y)] dy = a\bar{f}(s) + b\bar{g}(s).$$

*Demonstração.*

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-sy} [af(y) + bg(y)] dy &= \int_0^{\infty} e^{-sy} af(y) dy + \int_0^{\infty} e^{-sy} bg(y) dy \\ &= a\bar{f}(s) + b\bar{g}(s). \end{aligned}$$

Propriedade 2. Seja  $f(y)$  uma função com transformada de Laplace  $\bar{f}(s)$  e  $F(x) = \int_0^x f(y) dy$ . Então

$$\bar{F}(s) = \frac{1}{s} \bar{f}(s).$$

*Demonstração.*

$$\begin{aligned} \bar{F}(s) &= \int_0^{\infty} e^{-sx} F(x) dx = \int_0^{\infty} e^{-sx} \int_0^x f(y) dy dx = \int_0^{\infty} f(y) \int_y^{\infty} e^{-sx} dx dy \\ &= \int_0^{\infty} f(y) \left( \frac{e^{-sx}}{-s} \Big|_y^{\infty} \right) dy = \frac{1}{s} \int_0^{\infty} e^{-sy} f(y) dy = \frac{1}{s} \bar{f}(s). \end{aligned}$$

Propriedade 3. Seja  $f(y)$  uma função contínua e limitada com transformada de Laplace  $\bar{f}(s)$  e  $\frac{d}{dy}f(y) = f'(y)$  uma função contínua por partes. Então

$$\bar{f}'(s) = \int_0^{\infty} e^{-sy} \left( \frac{d}{dy} f(y) dy \right) = s\bar{f}(s) - f(0).$$

*Demonstração.* Aplicando a integral por partes considerando  $u = e^{-sy}$  e  $dv = \frac{d}{dy}f(y)dy$ . Então,  $du = -se^{-sy}dy$  e  $v = f(y)$ . Temos que

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-sy} \left( \frac{d}{dy} f(y) dy \right) &= e^{-sy} f(y) \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} se^{-sy} f(y) dy = -f(0) + s \int_0^{\infty} e^{-sy} f(y) dy \\ &= s\bar{f}(s) - f(0). \end{aligned}$$

Propriedade 4. Sejam  $\{f_j(\cdot)\}_{j=1}^n$  funções contínuas cujas transformadas de Laplace existem.

Vamos definir a  $n$ -ésima convolução  $h(x)$  como sendo:  $h(x) = f_1 * f_2 * \dots * f_n(x)$ , onde

$$f_1 * f_2(x_1) = \int_0^{x_1} f_1(x_1 - x_2) f_2(x_2) dx_2.$$

Então, a Transformada de Laplace de  $h(x)$  é

$$\bar{h}(s) = \prod_{j=1}^n \bar{f}_j(s).$$

*Demonstração.* Por indução temos,  $n = 2$

$$\overline{f_1 * f_2}(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx_1} \int_0^{x_1} f_1(x_1 - x_2) f_2(x_2) dx_2 dx_1.$$

Mudando a ordem de integração, obtemos

$$\begin{aligned} \overline{f_1 * f_2}(s) &= \int_0^{\infty} \int_{x_2}^{\infty} e^{-sx_1} f_1(x_1 - x_2) f_2(x_2) dx_1 dx_2 \\ &= \int_0^{\infty} e^{-sx_2} f_2(x_2) \int_{x_2}^{\infty} e^{-s(x_1 - x_2)} f_1(x_1 - x_2) dx_1 dx_2 \\ &= \int_0^{\infty} e^{-sx_2} f_2(x_2) dx_2 \int_{x_2}^{\infty} e^{-s(x_1 - x_2)} f_1(x_1 - x_2) dx_1. \end{aligned}$$

Fazendo uma mudança de variável da forma  $t = x_1 - x_2$ ,  $dt = dx_1$ , temos que

$$\overline{f_1 * f_2}(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx_2} f_2(x_2) dx_2 \int_0^{\infty} e^{-st} f_1(t) dt = \bar{f}_1(s) \bar{f}_2(s).$$

Agora, admita válido para  $n - 1$ . Neste caso, temos que

$$\overline{f_1 * f_2 * \dots * f_{n-1}}(s) = \prod_{j=1}^{n-1} \bar{f}_j(s).$$

Provando para  $n$ , vem:

$$\begin{aligned} \overline{f_1 * f_2 * \dots * f_{n-1} * f_n}(s) &= \overline{\prod_{j=1}^{n-1} f_j * f_n}(s) = \prod_{j=1}^{n-1} \overline{f_j * f_n}(s) \\ &= \overline{f_1 * f_2 * \dots * f_{n-1}}(s) \overline{f_n}(s) = \prod_{j=1}^n \bar{f}_j(s). \end{aligned}$$

Se a transformada de Laplace de uma função  $f(y)$  é  $\bar{f}(s)$  então  $f(y)$  é denominada de transformada inversa de Laplace de  $\bar{f}(s)$  e é escrita simbolicamente por

$$f(x) = \mathcal{L}^{-1}(\bar{f}(s)),$$

em que  $\mathcal{L}^{-1}$  é denominado operador da transformada inversa de Laplace.

A Tabela 1.1 adiante apresenta algumas funções elementares mais utilizadas na resolução dos problemas relacionados à Teoria da Ruína e suas respectivas transformadas de Laplace.

Tabela 1.1: A transformada de Laplace de algumas funções elementares.

$f(y), y > 0$	$\bar{f}(s)$	restrições
1	$\frac{1}{s}$ ,	$s > 0$
$y$	$\frac{1}{s^2}$ ,	$s > 0$
$y^n$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$ ,	$s > 0, n \in \mathbb{N}$
$y^a$	$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}$ ,	$s > -1$
$e^{ay}$	$\frac{1}{s+a}$ ,	$s > a$
$e^{-ay}$	$\frac{1}{s-a}$ ,	$s > a$

- Funções de Probabilidade e de Densidade

Na literatura existe um grande número de distribuições de probabilidades ou funções de densidades de ampla importância na matemática atuarial. Para o desenvolvimento do nosso trabalho serão usadas algumas dessas funções que se encontram, a seguir, definidas (ver, Jonhson *et al.*, 1994 a,b).

## Distribuição Gama

Uma variável aleatória  $X$  segue a distribuição Gama, com parâmetros  $\alpha > 0$  (parâmetro de forma) e  $\beta > 0$  (parâmetro de escala), denotada por  $X \sim \text{Gama}(\alpha; \beta)$ , se sua função densidade de probabilidade é expressa da seguinte forma

$$f_X(x; \alpha, \beta) = \frac{\beta^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha)}, \quad 0 \leq x < \infty,$$

sendo  $\Gamma(\alpha)$  a função matemática Gama completa, que é definida por:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx, \quad \alpha > 0.$$

A função gama, definida acima, é denominada de função de Euler e a integral converge para  $\alpha > 0$ . Esta função satisfaz as seguintes propriedades:

- i.  $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha)$ , para  $\alpha > 0$ ;
- ii.  $\Gamma(n) = (n - 1)!$ ,  $n$  inteiro positivo;
- iii.  $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ .

O valor esperado, a variância, a função característica e a função geradora de momentos de uma variável aleatória  $X$  com distribuição Gama são dados respectivamente por

$$E(X) = \frac{\alpha}{\beta} \quad \text{e} \quad V(X) = \frac{\alpha}{\beta^2}; \quad \phi_X(r) = \left(\frac{\beta}{\beta - ir}\right)^\alpha \quad \text{e} \quad M_X(r) = \left(\frac{\beta}{\beta - r}\right)^\alpha \quad \text{para } r < \beta.$$

Notemos que a distribuição Gama com parâmetro  $\alpha = 1$  reduz-se a uma distribuição Exponencial com parâmetro  $\beta$ . Quando  $\alpha = \frac{n}{2}$  e  $\beta = \frac{1}{2}$ , reduz-se à distribuição Qui-quadrado com  $n$  graus de liberdade, sendo  $n > 0$  um número inteiro.

Vale ressaltar que a distribuição Gama é utilizada para modelar indenizações de seguros de automóveis.

## Distribuição Exponencial

A distribuição Exponencial é uma das mais importantes funções de distribuição utilizadas na modelagem de dados que representam o tempo até a ocorrência pela primeira vez de algum

evento de interesse, por exemplo, tempo de falha de um componente eletrônico ou tempo de ocorrência de indenização em uma seguradora.

Dizemos que uma variável aleatória  $X$  possui distribuição Exponencial com parâmetro  $\beta$ ,  $\beta > 0$ , se tiver função densidade dada por

$$f_X(x; \beta) = \beta e^{-\beta x}, \quad 0 \leq x < \infty,$$

em que o parâmetro  $\beta$  indica a taxa de ocorrência por unidade de medida. Denotamos por  $X \sim \text{Exponencial}(\beta)$ .

O valor esperado, a variância, a função característica e a função geradora de momentos de uma variável aleatória  $X$  com distribuição Exponencial são dados respectivamente por,

$$E(X) = \frac{1}{\beta} \quad \text{e} \quad V(X) = \frac{1}{\beta^2}; \quad \phi_X(r) = \frac{\beta}{\beta - ir} \quad \text{e} \quad M_X(r) = \frac{\beta}{\beta - r} \quad r < \beta.$$

### Distribuição Lognormal

A distribuição Lognormal algumas vezes é denominada também distribuição Antilognormal. Esta distribuição é utilizada na área de atuária para modelar variáveis aleatórias relacionadas às indenizações de seguros de incêndio.

Uma variável aleatória segue um modelo Lognormal se sua função de densidade é da seguinte forma

$$f_X(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\log x - \mu}{\sigma}\right)^2\right\}, \quad 0 \leq x < \infty,$$

em que os parâmetros  $\mu \in \mathbb{R}$  e  $\sigma > 0$ . Denotamos por  $X \sim \text{Lognormal}(\mu, \sigma^2)$ . A variável aleatória  $X$  com distribuição Lognormal tem valor esperado e variância dados respectivamente por

$$E(X) = e^{\mu + (\sigma^2/2)} \quad \text{e} \quad V(X) = e^{2(\mu + \sigma^2)} - e^{2\mu + \sigma^2}.$$

Vale ainda mencionar que a distribuição Lognormal não possui função geradora de momentos, entretanto, todos os seus momentos existem.

## Distribuição Pareto

A distribuição Pareto, originalmente proposta por Vilfredo Pareto, é uma distribuição de probabilidade contínua usada para várias aplicações; por exemplo, na área de atuária é utilizada para modelar variáveis aleatórias relacionadas às indenizações de seguros de incêndio industrial ou intempéries naturais.

Dizemos que uma variável aleatória  $X$  segue o modelo Pareto de parâmetros  $\alpha, k > 0$ , se sua função densidade é da seguinte forma

$$f_X(x; k, \alpha) = \frac{\alpha k^\alpha}{(k + x)^{\alpha+1}}, \quad 0 < x < \infty,$$

em que  $\alpha > 0$  e  $k > 0$  são os parâmetros de forma e de escala, respectivamente. Denotamos por  $X \sim \text{Pareto}(k; \alpha)$ . O valor esperado e a variância de uma variável aleatória  $X$  com distribuição Pareto são dados respectivamente por

$$E(X) = \frac{k}{\alpha - 1}, \quad \alpha > 1 \quad \text{e} \quad V(X) = \frac{\alpha k^2}{(\alpha - 1)^2(\alpha - 2)} \quad \alpha > 2.$$

É importante comentar que a distribuição Pareto tal como a Lognormal não possui função geradora de momentos.

## Distribuição Poisson

A distribuição Poisson foi estabelecida, ao redor de 1837, pelo engenheiro e matemático Siméon Denis Poisson e, desde então, tem sido amplamente usada para modelar dados de contagem, como por exemplo, o número de indenizações que chegam à seguradora em um determinado intervalo de tempo.

Uma variável aleatória segue o modelo de Poisson de parâmetro  $\lambda > 0$ , se sua função de probabilidade for dada por

$$p_X(x; \lambda) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, \dots,$$

em que o parâmetro  $\lambda$  indica a taxa de ocorrência por unidade de medida. Denotamos por  $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ . O valor esperado, a variância, a função característica e a função geradora de



momentos de uma variável aleatória  $X$  com distribuição Poisson são dados respectivamente por

$$E(X) = \lambda \quad \text{e} \quad V(X) = \lambda; \quad \phi_X(r) = e^{\lambda(e^{ir}-1)} \quad \text{e} \quad M_X(r) = e^{\lambda(e^r-1)}.$$

### Distribuição Geométrica

A variável aleatória Geométrica corresponde ao número de experimentos até a ocorrência do primeiro sucesso em uma seqüência de ensaios Bernoulli( $p$ ) independentes. A variável aleatória  $X$  que segue o modelo Geométrico de parâmetro  $p$ ,  $0 < p < 1$ , tem função de probabilidade dada por:

$$p_X(x; p) = p(1-p)^x, \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

Usaremos a notação  $X \sim \text{Geométrica}(p)$ . O valor esperado, a variância, a função característica e a função geradora de momentos de uma variável aleatória  $X$  com distribuição Geométrica são dados respectivamente por

$$E(X) = \frac{1}{p} \quad \text{e} \quad V(X) = \frac{1-p}{p^2};$$

$$\phi_X(r) = \frac{pe^{ir}}{1-(1-p)e^{ir}} \quad \text{e} \quad M_X(r) = \frac{pe^r}{1-(1-p)e^r}, \quad \text{para } r < -\log(1-p).$$

## 2.1 Introdução

O modelo de Cramér-Lundberg teve a sua origem no artigo *Approximations of the Probability Function Reinsurance of Collective Risks*, de Filip Oskar Lundberg, publicado no ano de 1903. Neste trabalho, Lundberg utilizou o processo de Poisson homogêneo para modelar o número de indenizações que chegavam a uma companhia de seguro até um tempo  $t$ , ficando o trabalho conhecido na literatura como modelo clássico de risco. Entretanto, em seu trabalho, Lundberg utilizou uma terminologia muito difícil, o que impediu vários outros atuários na época de entenderem a sua obra. Além disso, seu trabalho foi escrito no tempo em que ainda não tinham sido desenvolvidas as bases teóricas de processos estocásticos. Em 1930, Harald Cramér retoma e desenvolve as idéias originais de Lundberg e as coloca em um contexto de fácil entendimento. É nesta fase que o modelo ficou conhecido como o modelo clássico de Cramér-Lundberg ou modelo clássico de risco coletivo (Shiryaev (1999)).

Foi, então, através do modelo clássico de risco coletivo que se iniciou os primeiros estudos sobre a probabilidade de uma seguradora ficar com reserva insuficiente para pagar aos segurados pelos prejuízos decorrentes de um sinistro indicado no contrato (ruína). O comportamento desta probabilidade, tanto no tempo infinito como no tempo finito, é amplamente trabalhado na Teoria da Ruína.

Neste capítulo serão apresentados alguns conceitos básicos sobre: a Teoria da Renovação, o Processo de Contagem e Processo de Poisson. Em seguida, apresentaremos o modelo clássico de Cramér-Lundberg para a reserva de uma companhia seguradora em tempo contínuo.

## 2.2 Noções básicas

### 2.2.1 Teoria da Renovação

Nos processos recorrentes, a equação de renovação é expressa da seguinte forma

$$Z(x) = z(x) + \int_0^x Z(x-y)dH(y), \quad x \geq 0, \quad (2.1)$$

em que, normalmente,  $H(x)$  e  $z(x)$  são funções conhecidas e  $Z(x)$  uma quantidade desconhecida. Considere que  $H(x)$  seja uma função de distribuição própria com suporte em  $(0, \infty)$ , ou seja, uma função em que  $\lim_{x \rightarrow 0} H(x) = 0$  e  $\lim_{x \rightarrow \infty} H(x) = 1$ . Suponha também que

$$\mu = \int_0^{\infty} ydH(y) = \int_0^{\infty} [1 - H(y)]dy < \infty.$$

A função  $H(x)$  é uma função de distribuição dos intervalos  $T_k$ , entre as renovações sucessivas, onde admitimos que  $T_k$  sejam variáveis aleatórias não negativas, independentes e identicamente distribuídas e que  $W_n = T_1 + \dots + T_n$  seja o ponto onde a  $n$ -ésima renovação ocorre, tal que  $W_0 = 0$ , ou seja, a contagem da renovação começa na origem. Neste caso,  $\{W_n, n > 0\}$  é denominada processo de renovação.

Considere ainda que a variável aleatória  $N(y)$  seja o número de renovações ocorridas no intervalo  $[0, y]$ ; como a origem conta como uma renovação, temos que  $N(t) \geq 1$ . O evento  $\{N(y) > r\}$  ocorre se somente se a  $r$ -ésima renovação pertencer ao intervalo  $[0, y]$ . Assim,

$$P\{N(y) > r\} = H^{r*}(y).$$

Portanto, o número esperado de renovações, denominado medida de renovação, ocorridas no intervalo de tempo  $[0, y]$  pode ser expresso como

$$V(y) = E(N(y)) = \sum_{r=0}^{\infty} P\{N(y) > r\} = \sum_{n=0}^{\infty} H^{n*}(y).$$

De acordo com Feller (1971), a medida de renovação  $V(y) < \infty, \forall y$ , e se  $z(x)$  for limitada, a função  $Z(x)$  é definida como

$$Z(x) = \int_0^x z(x-y)dV(y), \quad x > 0, \quad (2.2)$$

sendo a única solução da equação de renovação (2.1), além de limitada em intervalos finitos. Sendo  $z(x) = Z(x) = 0$  para  $x < 0$ , podemos reescrever a equação (2.2) da seguinte forma  $Z_X = V_Y \star z_X$ .

Segundo Feller (1971), a medida de renovação é uma equação de renovação com  $z(x) = 1$ . Portanto,

$$V(x) = 1 + \int_0^x V(x-y)dH(y).$$

Por outro lado, uma generalização do processo de renovação é denominada processo de renovação transiente ou extingüível. Este processo transiente ocorre quando  $\lim_{x \rightarrow 0} H(x) = 0$  e  $\lim_{x \rightarrow \infty} H(x) < 1$ . Na literatura, esta função de distribuição é denominada de função de distribuição imprópria por defeito. O defeito  $1 - H(\infty)$  é a probabilidade de extinção do processo. No caso em que  $H(x)$  é uma função de distribuição própria,  $V(y)$  representa o número esperado de renovações ocorridas no intervalo  $[0, y]$ . Assim,

$$V(y) = \sum_{n=0}^{\infty} H^{n*}(y).$$

Contando a origem como a renovação de número zero, a probabilidade de que o processo não seja extinto antes da  $n$ -ésima renovação é dada por  $H^n(\infty)$ , que tende para zero quando  $n \rightarrow \infty$ . Desta forma, temos que o processo se extingue no tempo finito com probabilidade um. A probabilidade da  $n$ -ésima renovação ser a última é dada por  $[1 - H(\infty)]H^n(\infty)$ . Isto prova que o número de renovações no intervalo  $(0, \infty)$  tem distribuição geométrica de média  $H(\infty)/(1 - H(\infty))$ . Portanto, o número esperado de renovações no intervalo  $[0, \infty)$  é dado por

$$V(\infty) = 1 + \frac{H(\infty)}{1 - H(\infty)} = \frac{1}{1 - H(\infty)}.$$

Um processo de renovamento transiente que começa na origem termina com probabilidade um. Na época da extinção  $M$  ( ou seja, o máximo atingido pela seqüência  $0, W_1, W_2, W_3, \dots$ ) tem distribuição própria (Feller (1971, p.374)). Assim,

$$P(M \leq t) = [1 - H(\infty)]V(t) = [1 - H(\infty)] \sum_{n=0}^{\infty} H^{*n}(t).$$

No processo transiente a equação de renovação é dada por

$$Z(x) = z(x) + \int_0^x Z(x-y)dH(y), \quad x \geq 0, \quad (2.3)$$

sendo denominada na literatura de equação de renovação imprópria por defeito, pois  $H(\infty) < 1$ . Com  $z(x)$  limitada e na condição de  $z(x) = 0$  para  $x \leq 0$  e  $V(y) < \infty, \forall y$ , a equação de renovação dada por (2.3) tem uma única solução dada por

$$Z(x) = \int_0^x z(x-y)dV(y), \quad x \geq 0, \quad (2.4)$$

Portanto, calculando o limite da equação (2.4) quando  $x$  tende para o infinito, obtemos

$$Z(x) \rightarrow \frac{z(\infty)}{1 - H(\infty)}, \quad (2.5)$$

sempre que  $z(x) \rightarrow z(\infty)$  quando  $x \rightarrow \infty$ .

Geralmente, nas aplicações  $z(x) \rightarrow z(\infty)$  quando  $x \rightarrow \infty$ ; neste caso  $Z(x) \rightarrow Z(\infty)$  quando  $x \rightarrow \infty$  de acordo com (2.5). Devido a este fato, é importante obter uma estimativa assintótica para a diferença  $Z(\infty) - Z(x)$ . Para tal é necessário que exista um número  $k > 0$ , tal que

$$\int_0^{\infty} e^{ky}dH(y) = 1.$$

A raiz  $k$  existe e é única, e a função de distribuição  $H(y)$  é imprópria por defeito, para  $k > 0$ . Definindo uma função de distribuição própria  $H^*(y)$  dada por

$$dH^*(y) = e^{ky}dH(y),$$

e associando cada função  $f$  a uma outra  $f^*$  definida por

$$f^*(x) = e^{ky}f(x).$$

Assim, temos que (2.3) satisfaz também a equação de renovação

$$Z^*(x) = z^*(x) + \int_0^x Z^*(x-y) dH^*(y), \quad x \geq 0.$$

Se  $Z^*(x) \rightarrow a \neq 0$ , então  $Z(x) \sim ae^{-xk}$  e se  $z^*(x)$  é integrável (caso em que  $z(\infty) = 0$ ) o teorema do renovação implica que

$$e^{kx} Z(x) \rightarrow \frac{1}{\mu^*} \int_0^\infty e^{ky} z(y) dy, \quad (2.6)$$

em que

$$\mu^* = \int_0^\infty ye^{ky} dH(y).$$

A expressão (2.6) fornece uma boa estimativa para  $Z(x)$  quando  $x$  assume valores grandes.

Para maiores detalhes sobre a Teoria da Renovação veja, por exemplo, Tijms (2003), Grimmett & Stirzaker (2001) e Feller (1971).

### 2.2.2 Processo de Contagem

De acordo com Wasan (1975), um processo estocástico  $\{N(t), t > 0\}$  pode ser entendido como um processo de contagem se  $N(t)$  representa o número de eventos que ocorreram num intervalo de tempo  $(0, t]$  e se, para todo  $t, s \geq 0$ :

- i.  $N(0) = 0$ ;
- ii.  $N(t) \in \mathbb{N}$ ;
- iii.  $N(t) \leq N(t + s)$ ;
- iv. para  $s < t$ ,  $N(t) - N(s)$  representa o número de eventos que ocorreram no intervalo de tempo  $(s, t]$ .

Um processo de contagem é dito ter incrementos independentes se os números de eventos durante intervalos disjuntos de tempo são independentes. Por exemplo, o número de eventos

$(N(t))$  que aconteceram no tempo  $t$  deve ser independente do número de eventos  $(N(t+s) - N(t))$  que aconteceram no intervalo de tempo  $(t, t + s]$ .

Um processo de contagem é dito ter incrementos estacionários se a distribuição do número de eventos em um determinado intervalo de tempo depende apenas da amplitude deste intervalo e não de seus pontos extremos. De outra forma, um processo de contagem tem incrementos estacionários se o número de eventos  $N(t_2 + s) - N(t_1 + s)$  tem a mesma distribuição que o número de eventos  $N(t_2) - N(t_1)$  para quaisquer que sejam  $t_1$  e  $t_2$ , com  $t_2 > t_1$ , e para todo o  $s > 0$ .

### 2.2.3 Processo de Poisson

Um exemplo clássico de processo de contagem é o processo de Poisson, que é apresentado de forma detalhada na maioria dos livros de processos estocásticos (ver Wasan, 1975 e Karlin & Taylor, 1975). É dito que um processo de contagem  $\{N(t), t > 0\}$  com  $N(0) = 0$  é um processo de Poisson homogêneo de intensidade  $\lambda > 0$ , se as seguintes hipóteses estiverem satisfeitas:

- i. o processo tem incrementos estacionários e independentes;
- ii. se  $\forall t, P(N(t, t + h) \geq 1) = \lambda h + o(h)$  quando  $h \rightarrow 0$ , com  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{o(h)}{h} = 0$ ;
- iii. se  $\forall t, P(N(t, t + h) \geq 2) = o(h)$  quando  $h \rightarrow 0$ , com  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{o(h)}{h} = 0$ .

Em consequência dessas hipóteses, temos que a variável aleatória  $\{N(t), t > 0\}$  é um processo de Poisson homogêneo com média  $\lambda t$ , para todo  $t > 0$ , com função densidade dada por

$$P_k(t) = P(N(t) = k) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

em que  $\lambda$  é o parâmetro que indica a taxa média ou intensidade do processo e representa o número médio de eventos ocorridos por unidade de tempo. A variável aleatória  $N(t)$  tem valor esperado e variância iguais a  $\lambda t$  e sua função geradora de momentos é dada por

$$m_{N(t)}(r) = e^{\lambda t(e^r - 1)}. \tag{2.7}$$

*Demonstração.*

$$\begin{aligned} m_{N(t)}(r) &= E(e^{rN(t)}) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{rk} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \\ &= e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(e^r \lambda t)^k}{k!} = e^{-\lambda t} e^{\lambda t e^r} = e^{\lambda t(e^r - 1)}. \end{aligned}$$

Calculando as derivadas de (2.7) em relação a  $r$ , no ponto  $r = 0$ , podemos encontrar os momentos ordinários em relação à origem de  $N(t)$ . Desta forma, tomando três sucessivas derivadas de (2.7), obtemos

$$\begin{aligned} m'_{N(t)}(r) &= \lambda t e^r e^{\lambda t(e^r - 1)}; \\ m''_{N(t)}(r) &= \lambda t e^r e^{\lambda t(e^r - 1)} + (\lambda t e^r)^2 e^{\lambda t(e^r - 1)}; \\ m'''_{N(t)}(r) &= \lambda t e^r e^{\lambda t(e^r - 1)} + 3(\lambda t e^r)^2 e^{\lambda t(e^r - 1)} + (\lambda t e^r)^3 e^{\lambda t(e^r - 1)}. \end{aligned}$$

Substituindo  $r = 0$ , obtemos o primeiro, o segundo e o terceiro momentos em relação à origem de  $N(t)$  que são:

$$E[N(t)] = \lambda t;$$

$$E[N^2(t)] = \lambda t + (\lambda t)^2;$$

$$E[N^3(t)] = \lambda t + 3(\lambda t)^2 + (\lambda t)^3.$$

Por outro lado, um processo estocástico  $\{S(t), t > 0\}$  é dito ser um processo de Poisson composto homogêneo se podemos representá-lo da seguinte forma

$$S(t) = \sum_{j=1}^{N(t)} X_j, \quad t \geq 0,$$

em que  $\{N(t), t > 0\}$  é um processo de Poisson homogêneo e  $\{X_n, n > 0\}$  é uma seqüência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas e independente de  $\{N(t), t > 0\}$ .

Na teoria do processo de Poisson, por definição, os tempos decorridos entre eventos consecutivos, num processo de Poisson são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com distribuição exponencial com parâmetro  $\lambda^{-1}$  (ver Beard *et al.*, 1984).



## 2.3 Modelo Clássico de Cramér-Lundberg

O modelo clássico de risco coletivo em tempo contínuo é um processo estocástico definido da seguinte forma

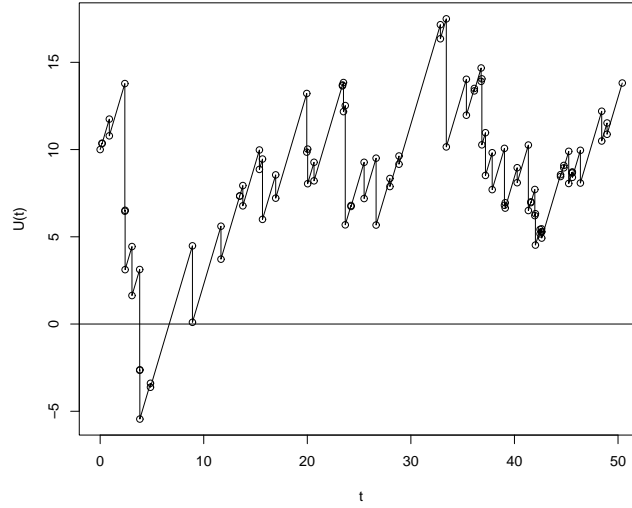
$$U(t) = u + ct - S(t), \quad t \geq 0, \quad (2.8)$$

onde  $U(t)$  é a reserva de risco de uma seguradora até o instante  $t$ . Sejam  $S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$  as indenizações agregadas (montante de pagamentos) relativas ao intervalo  $(0, t]$ ,  $N(t)$  é o número de indenizações ocorridas no mesmo período de tempo e ocorre de acordo com o processo de Poisson( $\lambda t$ ), sendo  $\lambda > 0$ ,  $S(t) = 0$  se  $N(t) = 0$ , e  $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$  são variáveis aleatórias independentes identicamente distribuídas não negativas, com função de distribuição igual a  $P(x) = P(X_i \leq x)$ , e independente de  $N(t)$ . No contexto de seguro,  $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$  representam os valores das indenizações individuais ou particulares. É suposto que a reserva inicial da seguradora seja  $U(0) = u$  e que os pagamentos (prêmios) são recebidos continuamente a uma taxa constante  $c > 0$ , ou seja, os pagamentos recebidos no intervalo de tempo  $(0, t]$  são constantes e iguais a  $ct$ . Além disso, assumimos neste trabalho que  $E(X_i) = p_1 < \infty$ , a função geradora de momentos de  $X_i$  é  $m_{X_i}(r) = E(e^{rX_i})$  e o momento de ordem  $k$  é  $p_k = E(X_i^k)$ . Admitimos também que  $P(X_i \leq 0) = 0$ .

Uma consequência de utilizar o número de indenizações ocorridas no período de tempo  $(0, t]$ , como um processo de Poisson de média  $\lambda t$  é que o tempo entre as chegadas sucessivas das indenizações tem distribuição exponencial de média  $1/\lambda$ .

A Figura 2.1 adiante apresenta uma trajetória de um processo de reserva de risco uma seguradora conforme o modelo proposto por Cramér-Lundberg para o caso em que  $u = 10$ ,  $c = 2$ ,  $\lambda = 1$  e as indenizações particulares têm distribuição exponencial com média igual a dois. Podemos perceber que o processo de reserva atingiu pela primeira vez um valor abaixo de zero no tempo  $t = 3,8$ , ou seja, a companhia seguradora durante o período de tempo  $(3,8; 4,8)$  esteve com reserva insuficiente para pagar as indenizações resultantes dos sinistros. Observamos também que após o período de tempo igual a  $t = 8,9$  a seguradora apresentou uma reserva positiva.

Figura 2.1: Uma trajetória do processo de reserva de risco de uma seguradora quando as indenizações particulares têm distribuição Exponencial(0, 5), para  $\lambda = 1$ ,  $c = 2$  e  $u = 10$ .



O processo das indenizações agregadas  $S(t) = \sum_{j=1}^{N(t)} X_j$  é um processo de Poisson composto homogêneo, dado que o processo relativo ao número de indenizações  $\{N(t), t > 0\}$  é um processo de Poisson homogêneo (Seal (1969) e Beard *et al.* (1984)). Sua função de distribuição é dada por

$$Q_s(x) = P(S(t) \leq x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^k F^{k*}(x)}{k!}, \quad t \geq 0, \quad x \geq 0,$$

em que  $F^{k*}(x) = P(\sum_{i=1}^k X_i \leq x)$  é a  $k$ -ésima convolução de  $F_X(x)$ .

*Demonstração.* De acordo com a definição, temos que:

$$\begin{aligned} Q_s(x) &= P[S(t) \leq x] = P\left[\sum_{i=1}^{N(t)} X_i \leq x\right] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} P[N(t) = k] P[X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_{N(t)} \leq x | N(t) = k] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} P[N(t) = k] P[X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_k \leq x] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^k}{k!} F^{k*}(x). \end{aligned}$$

Sua esperança e variância são dadas respectivamente por:

$$E[S(t)] = \lambda t p_1; \quad V[S(t)] = \lambda t p_2.$$

*Demonstração.* De acordo com a definição, podemos escrever:

$$\begin{aligned}
E[S(t)] &= E[E[X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_{N(t)} | N(t) = k]] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} E[X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_{N(t)} | N(t) = k] P[N(t) = k] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} E[X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_k] P[N(t) = k] = \sum_{k=0}^{\infty} E\left[\sum_{i=1}^k X_i\right] \cdot P[N(t) = k] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} k E[X] \cdot P[N(t) = k] = E[X] \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot P[N(t) = k] = E[X] E[N(t)] \\
&= \lambda t E[X] = \lambda t p_1.
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
V[S(t)] &= E[S(t)^2] - E^2[S(t)] = E\left[\left(\sum_{i=1}^{N(t)} X_i\right)^2\right] - (E[X]E[N(t)])^2 \\
&= E\left[E\left[\left(\sum_{i=1}^{N(t)} X_i\right)^2 | N(t) = k\right] - (E[X]E[N(t)])^2\right] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left[E\left[\left(\sum_{i=1}^{N(t)} X_i\right)^2 | N(t) = k\right] P[N(t) = k] - (E[X]E[N(t)])^2\right] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left[E\left[\left(\sum_{i=1}^k X_i\right)^2\right] P[N(t) = k] - (E[X]E[N(t)])^2\right] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left[V\left(\sum_{i=1}^k X_i\right) + E^2\left(\sum_{i=1}^k X_i\right)\right] P[N(t) = k] - (E[X]E[N(t)])^2 \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} [kV(X) + k^2 E^2(X)] P[N(t) = k] - (E[X]E[N(t)])^2 \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} kV(X) P[N(t) = k] + \sum_{k=0}^{\infty} k^2 E^2(X) P[N(t) = k] - (E[X]E[N(t)])^2 \\
&= V[X]E[N(t)] + E^2(X)E[(N(t))^2] - E^2[X]E^2[N(t)] \\
&= V[X]E[N(t)] + E^2(X)V[(N(t))] \\
&= \lambda t V(X) + E^2(X)\lambda t = \lambda t [V(X) + E^2(X)] = \lambda t E[X^2] = \lambda t p_2.
\end{aligned}$$

Note que  $X_1, X_2, \dots, X_{N(t)}$  são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas e independentes do número de indenizações,  $N(t)$ , no instante de tempo  $t$ .

Se  $S(t)$  é um processo de Poisson composto homogêneo, então sua função geradora de momentos é dada por

$$m_{s(t)}(r) = e^{\lambda t(m_X(r)-1)}. \quad (2.9)$$

*Demonstração.*

$$\begin{aligned} m_{s(t)}(r) &= E(e^{rS(t)}) = \sum_{k=0}^{\infty} E(e^{r \sum_{i=1}^{N(t)} X_i} | N(t) = k) P[N(t) = k] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} E(e^{r \sum_{i=1}^k X_i}) P[N(t) = k] = \sum_{k=0}^{\infty} E(e^{rX_1 + rX_2 + \dots + rX_k}) P[N(t) = k] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} [E(e^{rX_1}) E(e^{rX_2}) \dots E(e^{rX_k})] P[N(t) = k] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \prod_{i=1}^k m_{X_i}(r) \right] P[N(t) = k] = \sum_{k=0}^{\infty} (m_X(r))^k P[N(t) = k] \\ &= E[(m_X(r))^{N(t)}] = E[e^{N(t) \log m_X(r)}] = m_{N(t)}(\log m_X(r)), \end{aligned}$$

substituindo em (2.7), obtemos

$$m_{s(t)}(r) = e^{\lambda t(e^{\log m_X(r)} - 1)} = e^{\lambda t(m_X(r) - 1)}.$$

Portanto, é possível perceber que a função geradora de momentos de  $S(t)$  existe se a função geradora de momentos da variável aleatória  $X$  existe.

Se a função geradora de momentos de  $S(t)$  existe e é conhecida, então podemos obter os momentos ordinários em relação à origem de  $S(t)$  calculando as derivadas de (2.9) em relação a  $r$  no ponto  $r = 0$ . Tomando três sucessivas derivadas de (2.9), obtemos

$$m'_{S(t)}(r) = \lambda t m'_X(r) e^{\lambda t(m_X(r)-1)};$$

$$m''_{S(t)}(r) = \lambda t m''_X(r) e^{\lambda t(m_X(r)-1)} + (\lambda t m'_X(r))^2 e^{\lambda t(m_X(r)-1)};$$

$$m'''_{S(t)}(r) = \lambda t m'''_X(r) e^{\lambda t(m_X(r)-1)} + 3\lambda t m''_X(r) \lambda t m'_X(r) e^{\lambda t(m_X(r)-1)} + (\lambda t m'_X(r))^3 e^{\lambda t(m_X(r)-1)}.$$

Substituindo  $r = 0$ , encontramos o primeiro, o segundo e o terceiro momentos em relação à origem de  $S(t)$  que são:

$$E[S(t)] = \lambda t E(X);$$

$$E[S^2(t)] = \lambda t E(X^2) + (\lambda t)^2 E^2(X);$$

$$E[S^3(t)] = \lambda t E(X^3) + 3(\lambda t)^2 E(X^2)E(X) + (\lambda t)^3 E^3(X).$$

É importante ressaltar que o modelo proposto por Cramér-Lundberg não leva em consideração as despesas associadas com os contratos de seguro, as taxas de juros, os rendimentos provenientes dos investimentos e nem as taxas administrativas, ou seja, o modelo leva em conta apenas as indenizações e os prêmios que geram a reserva da companhia seguradora. Além disso, é importante comentar também que por hipótese  $c > \lambda p_1$ , onde isto significa que o valor pago à seguradora é superior ao valor esperado das indenizações agregadas por unidade de tempo.

A variável aleatória  $U(t)$  que representa o nível de reserva de uma companhia seguradora no tempo  $t$  tem valor esperado e variância dados respectivamente por

$$E(U(t)) = u + tc - E(S(t)) = u + ct - \lambda t p_1 = u + t(c - \lambda p_1) \quad \text{e} \quad V(U(t)) = \lambda t p_2.$$

Utilizando o teorema elementar da renovação (ver Mikosch, 2004), notamos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E(U(t))}{t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{u}{t} + c - \lambda p_1 = c - p_1 \lambda.$$

Portanto, uma condição necessária para que o nível de reserva de uma seguradora seja em média positiva é que  $c - \lambda p_1 > 0$ , quando  $t \rightarrow \infty$ . Assim, existe uma condição básica no modelo de Cramér-Lundberg que  $\exists \theta$ , que é denominado coeficiente de segurança ou carga de segurança, é tal que:

$$\theta = \frac{c}{\lambda p_1} - 1 > 0.$$

Assim, temos que  $c = \lambda p_1(1 + \theta)$  ou  $\frac{1}{1 + \theta} = \frac{\lambda p_1}{c}$ .

A carga de segurança tem o objetivo de compensar os eventuais desvios aleatórios do risco.

### 3.1 Introdução

A lei de mercado exige que a seguradora deva garantir, a todo o tempo, o cumprimento das responsabilidades assumidas perante os seus segurados. A data, a quantidade, a ocorrência e o montante das indenizações são variáveis aleatórias, e, na maior parte dos casos, desconhecidos no início do contrato (apólice). E é desta natureza estocástica que nasce a fonte de risco para o negócio segurador.

Um indicador natural do risco de uma seguradora entrar em uma situação de ruína aparece quando a quantidade de capital que a instituição tem na forma de reserva é incapaz de pagar aos segurados pelos prejuízos (sinistros), resultantes de um evento aleatório, indicados no contrato. Neste caso a seguradora entra em ruína, mas não significa que tenha entrado, necessariamente, em falência. Uma das estratégias que uma seguradora tem é tentar reduzir o risco de reserva negativa, que é o resseguro. Basicamente, o resseguro tem por objetivo diminuir os riscos assumidos pelos seguradores diretos. Esses continuam responsáveis perante o segurado, porém concedem aos resseguradores que assumam uma parte de seus riscos, mediante o pagamento de um prêmio de resseguro. A redução do risco diminui a probabilidade da ruína de uma seguradora.

No contexto do nosso trabalho quando nos referimos a probabilidade da ruína queremos dizer qual a probabilidade da reserva de uma seguradora ficar negativa em algum instante de tempo,

dado o capital inicial  $U(0) = u$ , isto é, dizemos que a ruína de uma companhia seguradora ocorre quando o processo (2.8) atinge valores abaixo de zero. Em uma abordagem mais simples, qual a possibilidade de uma companhia de seguro ficar com reserva insuficiente para pagar as indenizações resultantes de algum sinistro, ou seja, com capital insuficiente para cumprir com as suas obrigações de pagamento que tem perante os seus segurados.

Alguns trabalhos nas últimas décadas sobre a probabilidade da ruína são Seah (1990), Dickson & Waters (1992), Zinchenko (1999) e Asmussen (2000).

## 3.2 Probabilidade da Ruína

Na literatura da Teoria da Ruína é definido que a probabilidade da ruína eventual proveniente da reserva de risco em tempo contínuo com horizonte temporal infinito seja da seguinte forma

$$\begin{aligned}\psi(u) &= P\{T < \infty | U(0) = u\} = P\{U(t) < 0 \text{ para um determinado valor fixo } t > 0 | U(0) = u\} \\ &= P(u + ct - S(t) < 0 | U(0) = u) = P(S(t) > u + ct | U(0) = u) \\ &= P\left(\sum_{i=1}^{N(t)} X_i > u + ct | U(0) = u\right) = \int_{u+ct}^{\infty} p_s(x) dx,\end{aligned}$$

em que  $p_s(x)$  é a função de densidade das indenizações agregadas e  $T = \inf\{t > 0 \text{ e } U(t) < 0\}$  é a variável aleatória que representa o instante de ocorrência da ruína para cada  $U(0) = u$ . Por convenção,  $T = \infty$  é explicitado por  $U(t) \geq 0$ , para todo  $t > 0$  (ver, por exemplo, Asmussen, 2000 e Centeno, 2003).

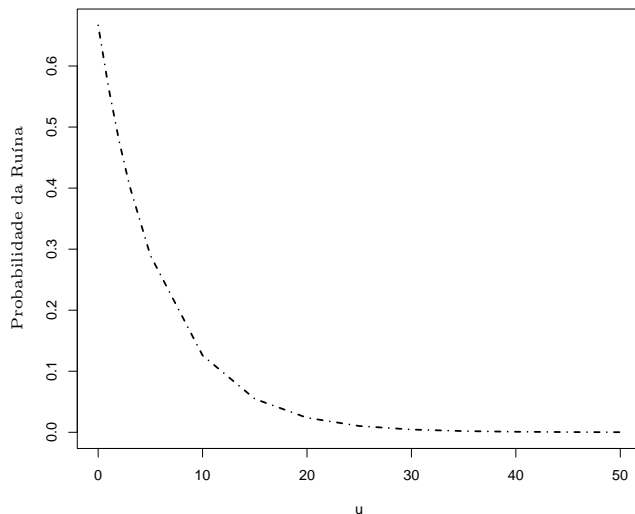
A correspondente probabilidade complementar é denominada de probabilidade de não ruína eventual ou probabilidade de sobrevivência, definida por:

$$\begin{aligned}\delta(u) &= 1 - \psi(u) = P\{T = \infty | U(0) = u\} = P\{U(t) \geq 0, \forall t > 0 | U(0) = u\} \\ &= P(u + ct - S(t) \geq 0 | U(0) = u) = P(S(t) \leq u + ct | U(0) = u) \\ &= P\left(\sum_{i=1}^{N(t)} X_i \leq u + ct | U(0) = u\right) = \int_0^{u+ct} p_s(x) dx.\end{aligned}$$

Uma observação importante é que, sendo  $u$  a reserva inicial, então  $u$  pode ser entendido como o capital inicial para investimento em uma seguradora. Conseqüentemente, a probabilidade da ruína eventual de uma seguradora é alta quando os valores de reserva inicial  $u$  são baixos,

embora  $\psi(u)$  dependa também de outros fatores de risco relacionados aos contratos emitidos pela companhia seguradora. Ver Figura 3.1.

Figura 3.1: Probabilidade da ruína quando as indenizações particulares têm distribuição Exponencial(0, 5), para  $\lambda = 1$ ,  $c = 3$  e diferentes valores da reserva inicial.



Como, por hipótese,  $c > \lambda p_1$ , então  $0 \leq \psi(u) < 1$ , caso contrário  $\psi(u) = 1$ , ou seja, se o valor pago à seguradora for inferior ao valor esperado das indenizações agregadas por unidade de tempo, então a probabilidade da ruína da seguradora é (quase) certa. Mas, se  $\lim_{t \rightarrow \infty} U(t) = \infty$  quase certamente (ver Seah, 1990), a reserva da seguradora poderá passar por um processo, ou não, de valores negativos, isto é, de a seguradora ficar com reserva insuficiente para pagar as indenizações; neste caso dizemos que ocorreu o evento ruína.

É interessante notar que a probabilidade de não ruína eventual,  $\delta(u)$ , é uma função monotônica crescente em  $u$  e que o  $\lim_{u \rightarrow \infty} \delta(u) = 1$ , o que implica que  $\lim_{u \rightarrow \infty} \psi(u) = 0$  (ver Seah, 1990). Observe ainda que  $\psi(u_2) \leq \psi(u_1)$  para  $0 < u_1 \leq u_2 < \infty$ . Além disso, temos que  $\psi(u, t)$  é a probabilidade da ruína eventual proveniente da reserva de risco em tempo contínuo com horizonte temporal finito, ou seja, é a probabilidade da ruína eventual anterior a um determinado valor fixo  $t > 0$ . Adicionalmente, temos também que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \psi(u, t) = \psi(u), t > 0$ .



Na maioria dos casos não é possível conseguir uma expressão fechada para a probabilidade da ruína. Devido a esta dificuldade muitos pesquisadores procuram estimativas precisas para tal probabilidade.

Utilizando o modelo (2.8), Lundberg apresentou uma desigualdade, que ficou conhecida na literatura como desigualdade de Lundberg, a qual fornece um limitante superior para a probabilidade da ruína, assumindo a existência de um certo coeficiente de ajuste. Habitualmente na literatura, este coeficiente de ajustamento é denotado por uma constante  $R$ .

O coeficiente de ajustamento e a desigualdade de Lundberg serão apresentados nesta seção a partir de três teoremas a seguir apresentados ( Shiryayev, 1996 e Ramsay, 1992).

**Teorema 1.** *Considere que  $S(t)$  tenha distribuição Poisson composta  $(\lambda t, P(x))$ . Então existe  $m_X(r) = E(e^{rX})$  para  $-\infty < r < \gamma$ , tal que  $\lim_{r \rightarrow \gamma} m_X(r) = \infty$ , onde  $\gamma$  pode tender para infinito. O coeficiente de ajustamento  $R$  é a menor raiz positiva da equação.*

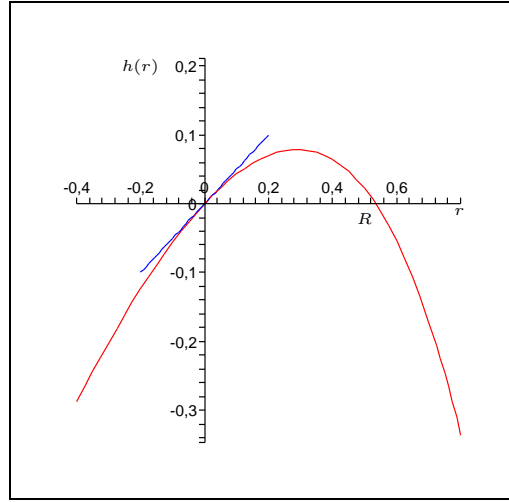
$$\lambda m_X(R) = \lambda + cR. \quad (3.1)$$

*Demonstração.* As razões pelas quais a equação (3.1) tem raiz positiva são as seguintes: admita que  $h(r) = \lambda + cr - \lambda m_X(r) \Rightarrow h(0) = 0$ , pois  $m_X(0) = E(e^{0X}) = 1$ . Seja  $m'_X(r) = E(Xe^{rX})$ , logo  $m'_X(0) = E(Xe^{0X}) = p_1$  então temos que  $h'(r) = c - \lambda m'_X(r)$  e  $h'(0) = c - \lambda p_1 > 0$ , por hipótese. Sabemos que  $h''(r) = -\lambda m''_X(r) = -\lambda E(X^2 e^{rX}) < 0$ . Sabemos também que  $h(r)$  é uma função côncava, por outro lado tem-se que  $\lim_{r \rightarrow \gamma} h(r) = -\infty$ .

Assim, a equação  $h(r) = 0$  tem duas soluções; uma é a trivial  $r = 0$  e a outra é positiva em  $R$ , já que  $h(r)$  tem primeira derivada positiva em zero, o que implica que sua função é crescente na vizinhança de zero; e além disso  $h(r)$  é uma função côncava.  $\square$

Na Figura 3.2 adiante apresentamos uma ilustração do coeficiente de ajustamento quando  $\lambda = 1$ ,  $c = 1,5$  e as indenizações particulares têm distribuição Gama(3;3).

Figura 3.2: O coeficiente de ajustamento quando o modelo de reserva é poisson.



A fim de ilustrar o Teorema 1 e os conceitos envolvidos vamos considerar, a seguir, um exemplo simples utilizando a distribuição gama.

**Exemplo.** Seja  $X$  uma variável aleatória com função densidade gama de parâmetros  $\lambda, \beta > 0$  e considere a sua correspondente função geradora de momentos dada por  $m_X(r) = (1 - r/\beta)^{-\alpha}$  para  $r < \beta$ .

Substituindo a função geradora de momentos da função densidade gama acima na equação  $\lambda + cR - \lambda m_X(R) = 0$ , após alguma álgebra obtemos

$$\frac{\beta}{\beta - R} = \sqrt[\alpha]{1 + \frac{cR}{\lambda}}. \quad (3.2)$$

Se  $\alpha = 1$ , então  $X$  tem distribuição Exponencial( $\beta$ ) e a equação (3.2) torna-se

$$0 = 1 + \frac{cR}{\lambda} - \frac{\beta}{\beta - R} = \lambda(\beta - R) + cR(\beta - R) - \beta\lambda = -cR^2 + R(c\beta - \lambda).$$

Resolvendo a equação anterior encontramos duas raízes, uma é a trivial  $R = 0$  e a outra é  $R = \beta - \lambda/c$ .

Em particular, se  $\alpha = 1$  e  $\beta = 1/2$ , então  $X$  tem distribuição Qui-quadrado com dois graus de liberdade e a equação (3.2) gera  $R = 0$  e  $R = \frac{1}{2} - \lambda/c$ .

**Teorema 2.** Considere que  $S(t)$  tem distribuição Poisson composta  $(\lambda t, P(x))$ , com  $P(X \leq 0) = P(0) = 0$  e o coeficiente de ajustamento  $R$  existe. Então a Desigualdade de Lundberg é dada por

$$\psi(u) \leq e^{-Ru}. \quad (3.3)$$

*Demonstração.* Seja  $\psi_n(u)$  a probabilidade da ruína antes ou na  $n$ -ésima indenização. Sabemos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n(u) = \psi(u)$ , então basta provar por indução que  $\psi_n(u) \leq e^{-Ru}$ . Para  $n=1$  a ruína só pode acontecer na primeira indenização e por definição temos que o tempo que decorre até à primeira indenização tem distribuição exponencial de média  $1/\lambda$ . Então

$$\begin{aligned} \psi_1(u) &= P([0 < T < \infty] \cap [U(t) < 0]) = P([0 < T < \infty] \cap [u + ct - S(t)] < 0) \\ &= P([0 < T < \infty] \cap [X_1 > u + ct]) = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_{u+ct}^\infty p(x) dx dt. \end{aligned}$$

Como  $R$  é positivo pelo Teorema 1 e  $x > u + ct$ ; logo  $u + ct - x < 0$ , implicando que  $e^{-R(u+ct-x)}$  seja um valor maior que um. Assim,

$$\psi_1(u) \leq \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_{u+ct}^\infty e^{-R(u+ct-x)} p(x) dx dt.$$

Aumentando o limite da integração, obtemos

$$\begin{aligned} \psi_1(u) &\leq \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_0^\infty e^{-R(u+ct-x)} p(x) dx dt = e^{-Ru} \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} e^{-Rct} \int_0^\infty e^{Rx} p(x) dx dt \\ &= e^{-Ru} \int_0^\infty \lambda e^{-t(\lambda+Rc)} \int_0^\infty e^{Rx} p(x) dx dt = e^{-Ru} \int_0^\infty \lambda m_X(R) e^{-t(\lambda+Rc)} dt, \end{aligned}$$

que, após a substituição  $\lambda m_X(R) = \lambda + cR$  de (3.1), resulta em:

$$\begin{aligned} \psi_1(u) &\leq e^{-Ru} \int_0^\infty (\lambda + cR) e^{-t(\lambda+cR)} dt \\ &= e^{-Ru}, \end{aligned}$$

sendo que a última integral é igual a 1, pois corresponde à densidade Exponencial  $(\lambda + cR)$ .

Seguindo o raciocínio análogo para  $n = 1$ ; temos que para  $n = 2$  a ruína só pode acontecer na primeira indenização ou na segunda indenização, então:

$$\begin{aligned} \psi_2(u) &= P([0 < T < \infty] \cap [X_1 > u + ct]) \\ &+ P([0 < T < \infty] \cap [X_1 < u + ct] \cap (X_2 \text{ ocorre ruína})). \end{aligned}$$

Pois, se a ruína ocorreu na primeira indenização, conseqüentemente, a segunda indenização ocorrerá com o sistema em ruína e conseqüentemente com probabilidade um. No caso em que a primeira indenização não leva o sistema a ruína, o sistema fica em ruína na segunda indenização com probabilidade  $\psi(u + ct - x)$ ; onde  $u + ct - x$  é o valor de  $U(t)$  após a primeira indenização, tal que  $x$  representa o valor da primeira indenização. Então

$$\begin{aligned}\psi_2(u) &= \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_{u+ct}^\infty p(x) \cdot 1 dx dt + \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_0^{u+ct} p(x) \psi_1(u + ct - x) dx dt \\ &\leq \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_{u+ct}^\infty e^{-R(u+ct-x)} p(x) dx dt + \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_0^{u+ct} p(x) e^{-R(u+ct-x)} dx dt;\end{aligned}$$

sabemos que, por hipótese  $\psi_1(u + ct - x) \leq e^{-R(u+ct-x)}$ , temos

$$\begin{aligned}\psi_2(u) &\leq \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \left[ \int_{u+ct}^\infty e^{-R(u+ct-x)} p(x) dx dt + \int_0^{u+ct} p(x) e^{-R(u+ct-x)} dx dt \right] \\ &= \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_0^\infty e^{-R(u+ct-x)} p(x) dx dt = e^{-Ru} \int_0^\infty \lambda e^{-(\lambda+cR)t} \int_0^\infty e^{Rx} p(x) dx dt \\ &= e^{-Ru},\end{aligned}$$

como visto em  $\psi_1(u)$ .

Supondo válido para  $n$ , temos que provar para  $n + 1$ . Usando o mesmo raciocínio anterior e considerando, agora, que a ruína acontece na primeira ou nas  $n$  indenizações seguintes, temos

$$\begin{aligned}\psi_{n+1}(u) &= \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_{u+ct}^\infty p(x) dx dt + \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_0^{u+ct} p(x) \psi_n(u + ct - x) dx dt \\ &\leq \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_{u+ct}^\infty p(x) e^{-R(u+ct-x)} dx dt + \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_0^{u+ct} p(x) e^{-R(u+ct-x)} dx dt \\ &= \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \left[ \int_{u+ct}^\infty p(x) e^{-R(u+ct-x)} dx dt + \int_0^{u+ct} p(x) e^{-R(u+ct-x)} dx dt \right] \\ &= \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_0^\infty p(x) e^{-R(u+ct-x)} dx dt = e^{-Ru} \int_0^\infty \lambda e^{-(\lambda+cR)t} \int_0^\infty p(x) e^{Rx} dx dt \\ &= e^{-Ru}.\end{aligned}$$

Portanto,  $\psi_n(u) \leq e^{-Ru}$  e, por conseqüência,  $\delta_n(u) \geq 1 - e^{-Ru}$ .

Por outro lado, sabemos que  $\lim_{u \rightarrow \infty} e^{-Ru} = 0$  e tendo em vista a desigualdade (3.3) concluímos que  $\lim_{u \rightarrow \infty} \psi(u) = 0$ ; logo  $\lim_{u \rightarrow \infty} \delta(u) = 1$ .  $\square$

**Teorema 3.** Utilizando as hipóteses do Teorema 1 e sabendo que  $P(X \leq 0) = 0$ . Então o coeficiente de ajustamento  $R$  é a única raiz positiva de

$$\frac{\lambda}{c} \int_0^{\infty} e^{Rx} [1 - P(x)] dx = 1. \quad (3.4)$$

*Demonstração.*

$$\frac{\lambda}{c} \int_0^{\infty} e^{Rx} [1 - P(x)] dx = \frac{\lambda}{c} \int_0^{\infty} e^{Rx} \int_x^{\infty} p(y) dy dx,$$

mudando a ordem de integração, temos

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{c} \int_0^{\infty} e^{Rx} [1 - P(x)] dx &= \frac{\lambda}{c} \int_0^{\infty} p(y) \int_0^y e^{Rx} dx dy = \frac{\lambda}{c} \int_0^{\infty} p(y) \left( \frac{1}{R} e^{Rx} \Big|_0^y \right) dy \\ &= \frac{\lambda}{cR} \int_0^{\infty} p(y) (e^{Ry} - 1) dy = \frac{\lambda}{cR} \left[ \int_0^{\infty} p(y) e^{Ry} dy - \int_0^{\infty} p(y) dy \right] \\ &= \frac{\lambda}{cR} (m_X(R) - 1) = \frac{\lambda}{cR} \left( 1 + \frac{cR}{\lambda} - 1 \right) = 1. \end{aligned}$$

□

### 3.3 Equações Diferenciais e Integrais para a Probabilidade da Ruína Eventual

Nesta seção, apresentamos uma equação para a probabilidade da ruína eventual. A demonstração do cálculo matemático de tal probabilidade será apresentada nos dois teoremas a seguir. Inicialmente, no primeiro teorema, demonstramos o cálculo matemático da derivada da probabilidade de ruína quando a reserva inicial da instituição financeira de seguro é maior que zero. Já no segundo teorema, demonstramos o cálculo matemático da probabilidade da ruína quando a reserva inicial da seguradora é maior ou igual que zero. A equação para a derivada da probabilidade da ruína obtida a partir do primeiro teorema permite encontrar uma forma fechada para a probabilidade da ruína para o caso em que as indenizações particulares têm função de densidade exponencial.

Vale ressaltar que a equação da probabilidade da ruína eventual, apresentada adiante, não exige a existência do coeficiente de ajustamento e por conseqüência não é necessário saber a função geradora de momentos da função de densidade das indenizações particulares.

**Teorema 4.** Para  $u > 0$ , temos que a equação de  $\psi'(u)$  é dada por

$$\psi'(u) = \frac{\lambda}{c}\psi(u) - \frac{\lambda}{c} \int_0^u p(x)\psi(u-x)dx - \frac{\lambda}{c}[1 - P(u)], \quad (3.5)$$

ou então de forma equivalente em termos da probabilidade de não ruína eventual,  $\delta(u) = 1 - \psi(u)$ ,

$$\delta'(u) = \frac{\lambda}{c}\delta(u) - \frac{\lambda}{c} \int_0^u p(x)\delta(u-x)dx. \quad (3.6)$$

*Demonstração.* Seja  $t$  o tempo em que ocorre a ruína. Além disso, a reserva será de  $u + cdt$  se não ocorrerem indenizações. Entretanto, se uma indenização ocorrer, a reserva que existirá após esta indenização será de  $u + cdt - x$  onde  $x$  representa o montante da indenização. Temos também que se  $x \leq u + cdt$ , a reserva restante em  $dt$  será então não negativa e a probabilidade da ruína para a reserva que restou será  $\psi(u + cdt - x)$ . Se  $x > u + cdt$ , então a primeira indenização causou a ruína. Por outro lado, temos que de acordo com o processo de Poisson o número de indenizações em  $(0, dt]$  tem as seguintes probabilidades:

- i.  $P[(N(t + dt) - N(t)) = 0] = 1 - \lambda dt + o(dt)$ ;
- ii.  $P[(N(t + dt) - N(t)) = 1] = \lambda dt + o(dt)$ ;
- iii.  $P[(N(t + dt) - N(t)) > 1] = o(dt)$ .

Tendo em vista que a ruína pode ou não acontecer na primeira indenização, temos que

$$\begin{aligned} \psi(u) &= P(U(u) < 0 \cap [N(t + dt) - N(t) = 0]) + P(U(u) < 0 \cap [N(t + dt) - N(t) = 1]) \\ &+ P(U(u) < 0 \cap [N(t + dt) - N(t) > 1]) \\ &= P[(N(t + dt) - N(t)) = 0]P(U(u) < 0 | N(t + dt) - N(t) = 0) \\ &+ P[(N(t + dt) - N(t)) = 1]P(U(u) < 0 | N(t + dt) - N(t) = 1) \\ &+ P[(N(t + dt) - N(t)) > 1]P(U(u) < 0 | N(t + dt) - N(t) > 1) \\ &= (1 - \lambda dt + o(dt))\psi(u + cdt) + \lambda dt \left[ \int_0^{u+cdt} p(x)\psi(u + cdt - x)dx \right. \\ &+ \left. \int_{u+cdt}^{\infty} p(x)dx \right] + o(dt) \\ &= (1 - \lambda dt)\psi(u + cdt) + \lambda dt \int_0^{u+cdt} p(x)\psi(u + cdt - x)dx \\ &+ \lambda dt [1 - P(u + cdt)] + o(dt), \end{aligned}$$

que dividindo por  $cdt$ , podemos escrever como

$$\begin{aligned}\frac{\psi(u + cdt) - \psi(u)}{cdt} &= \frac{\lambda}{c}\psi(u + cdt) - \frac{\lambda}{c} \int_0^{u+cdt} p(x)\psi(u + cdt - x)dx \\ &\quad - \frac{\lambda}{c}[1 - P(u + cdt)] + \frac{o(dt)}{cdt},\end{aligned}$$

calculando o limite quando  $cdt \rightarrow 0$ , obtemos

$$\psi'(u) = \frac{\lambda}{c}\psi(u) - \frac{\lambda}{c} \int_0^u p(x)\psi(u - x)dx - \frac{\lambda}{c}[1 - P(u)].$$

Para encontrar a equação (3.6) basta fazer a seguinte relação  $\delta(u) = 1 - \psi(u)$ . Assim, uma vez que  $\psi'(u) = (1 - \delta(u))' = -\delta'(u)$ , fazendo as substituições em (3.5), obtemos

$$\begin{aligned}\delta'(u) &= -\frac{\lambda}{c}(1 - \delta(u)) + \frac{\lambda}{c} \int_0^u p(x)(1 - \delta(u - x))dx + \frac{\lambda}{c}[1 - P(u)] \\ &= -\frac{\lambda}{c} + \frac{\lambda}{c}\delta(u) + \frac{\lambda}{c} \int_0^u p(x)dx - \frac{\lambda}{c} \int_0^u p(x)\delta(u - x)dx + \frac{\lambda}{c} - \frac{\lambda}{c}P(u),\end{aligned}$$

tendo em vista que  $P(0) = 0$ , vem:

$$\begin{aligned}\delta'(u) &= \frac{\lambda}{c}\delta(u) + \frac{\lambda}{c}P(u) - \frac{\lambda}{c} \int_0^u p(x)\delta(u - x)dx - \frac{\lambda}{c}P(u) \\ &= \frac{\lambda}{c}\delta(u) - \frac{\lambda}{c} \int_0^u p(x)\delta(u - x)dx.\end{aligned}$$

□

**Exemplo.** Suponha que as indenizações agregadas do risco da reserva são um processo de Poisson composto homogêneo e que as indenizações particulares são variáveis aleatórias com função de densidade exponencial de parâmetro  $\beta$ ,  $\beta > 0$ . Estamos interessados no cálculo da probabilidade da ruína de uma seguradora.

De acordo com (3.5) e tendo em vista que

$$\int_0^u p(x)\psi(u - x)dx = \int_0^u p(u - v)\psi(v)dv,$$

pois,  $u - x = v$ , implica em  $dx = -dv$ , temos

$$\psi'(u) = \frac{\lambda}{c}\psi(u) - \frac{\lambda}{c} \int_0^u \beta e^{-\beta(u-v)}\psi(v)dv - \frac{\lambda}{c}e^{-\beta u}$$

$$\psi'(u) = \frac{\lambda}{c}\psi(u) - \frac{\lambda\beta}{c}e^{-\beta u} \int_0^u e^{\beta v}\psi(v)dv - \frac{\lambda}{c}e^{-\beta u}; \quad (3.7)$$

derivando em relação a  $u$ , obtemos

$$\begin{aligned} \psi''(u) &= \frac{\lambda}{c}\psi'(u) + \frac{\lambda\beta^2 e^{-\beta u}}{c} \int_0^u e^{\beta v}\psi(v)dv - \frac{\lambda\beta e^{-\beta u}}{c} \left[ e^{\beta u}\psi(u) - e^{\beta 0}\psi(0)\frac{d0}{du} \right] \\ &\quad + \frac{\lambda\beta}{c}e^{-\beta u}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

De (3.7), temos

$$\int_0^u e^{\beta v}\psi(v)dv = -\frac{c}{\lambda\beta e^{-\beta u}} \left[ \psi'(u) - \frac{\lambda}{c}\psi(u) + \frac{\lambda}{c}e^{-\beta u} \right].$$

Substituindo a parcela da integral na expressão (3.8) resulta em:

$$\begin{aligned} \psi''(u) &= \frac{\lambda}{c}\psi'(u) - \beta \left[ \psi'(u) - \frac{\lambda}{c}\psi(u) + \frac{\lambda}{c}e^{-\beta u} \right] - \frac{\lambda\beta}{c}\psi(u) + \frac{\lambda\beta}{c}e^{-\beta u} \\ &= \frac{\lambda}{c}\psi'(u) - \beta\psi'(u) \\ &= -\psi'(u)\left(\beta - \frac{\lambda}{c}\right). \end{aligned}$$

Esta expressão corresponde a uma equação diferencial cuja solução é  $\psi(u) = k_1 + k_2 e^{-(\beta - \frac{\lambda}{c})u}$ .

Utilizando a hipótese de que  $c > \lambda p_1$ , isto é,  $c > \lambda E(X)$ , então  $c > \frac{\lambda}{\beta}$  implicando que  $\beta > \lambda/c$ .

Sabemos que  $\lim_{u \rightarrow \infty} \psi(u) = 0$ , então  $\lim_{u \rightarrow \infty} \psi(u) = \lim_{u \rightarrow \infty} (k_1 + k_2 e^{-(\beta - \frac{\lambda}{c})u}) = k_1 = 0$ . Além disso,  $\psi(0) = k_2$ .

Desta forma, concluímos que  $\psi(u) = k_2 e^{-(\beta - \frac{\lambda}{c})u} = \psi(0)e^{-(\beta - \frac{\lambda}{c})u}$  ou ainda que  $\psi'(u) = (\frac{\lambda}{c} - \beta)\psi(0)e^{-(\beta - \frac{\lambda}{c})u} = -(\beta - \frac{\lambda}{c})\psi(u)$ . Substituindo  $\psi'(u)$  em (3.7) e resolvendo, obtemos

$$\begin{aligned} \psi'(u) &= \frac{\lambda}{c}\psi(u) - \frac{\lambda}{c} \int_0^u \beta e^{-\beta(u-v)}\psi(v)dv - \frac{\lambda}{c}e^{-\beta u} \\ -(\beta - \frac{\lambda}{c})\psi(u) &= \frac{\lambda}{c}\psi(u) - \frac{\lambda\beta}{c}e^{-\beta u} \int_0^u e^{\beta v}\psi(v)dv - \frac{\lambda}{c}e^{-\beta u} \\ \beta\psi(u) &= \frac{\lambda\beta}{c}e^{-\beta u} \int_0^u e^{\beta v}\psi(v)dv + \frac{\lambda}{c}e^{-\beta u} \\ \psi(u) &= \frac{\lambda}{c}e^{-\beta u} \int_0^u e^{\beta v}\psi(v)dv + \frac{\lambda}{c\beta}e^{-\beta u}. \end{aligned}$$

Fazendo  $u = 0$ , temos que  $\psi(0) = \frac{\lambda}{c\beta}$ . Assim,

$$\psi(u) = \psi(0)e^{-(\beta - \frac{\lambda}{c})u} = \frac{\lambda}{c\beta}e^{-(\beta - \frac{\lambda}{c})u}. \quad (3.9)$$



**Teorema 5.** Para  $u \geq 0$ , temos que a equação de  $\psi(u)$  é dada por:

$$\psi(u) = \frac{\lambda}{c} \int_u^\infty [1 - P(x)] dx + \frac{\lambda}{c} \int_0^u \psi(u-x)[1 - P(x)] dx, \quad (3.10)$$

ou então, de forma equivalente, em termos da probabilidade de não ruína eventual,  $\delta(u) = 1 - \psi(u)$ ,

$$\delta(u) = \delta(0) + \frac{\lambda}{c} \int_0^u \delta(u-x)[1 - P(x)] dx. \quad (3.11)$$

*Demonstração.* De (3.6), integrando variável  $u$  em  $(0, t]$  obtemos

$$\int_0^t \delta'(u) du = \frac{\lambda}{c} \int_0^t \delta(u) du - \frac{\lambda}{c} \int_0^t \int_0^u p(x) \delta(u-x) dx du, \quad (3.12)$$

Calculemos apenas a integral dupla do segundo membro da igualdade, aplicando integral por partes da seguinte forma: seja  $w = \delta(u-x)$  e  $dv = d[1 - P(x)]$ . Então,  $\frac{dw}{dx} = \frac{d}{dx} \delta(u-x)$  e  $v = 1 - P(x)$ . Assim,

$$\begin{aligned} \int_0^u p(x) \delta(u-x) dx &= - \int_0^u \delta(u-x) d[1 - P(x)] \\ &= - \left( [\delta(u-x)[1 - P(x)] \Big|_0^u \right] - \int_0^u \frac{d}{dx} \delta(u-x)[1 - P(x)] dx. \end{aligned}$$

Tendo em vista que  $P(0) = 0$ , vem:

$$\begin{aligned} \int_0^u p(x) \delta(u-x) dx &= - \left( [\delta(0)[1 - P(u)] - \delta(u)] - \int_0^u \frac{d}{dx} \delta(u-x)[1 - P(x)] dx \right) \\ &= -\delta(0)[1 - P(u)] + \delta(u) + \int_0^u \frac{d}{dx} \delta(u-x)[1 - P(x)] dx, \end{aligned}$$

substituindo o resultado em (3.12), obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^t \delta'(u) du &= \frac{\lambda}{c} \int_0^t \delta(u) du + \frac{\lambda}{c} \int_0^t \delta(0)[1 - P(u)] du - \frac{\lambda}{c} \int_0^t \delta(u) du \\ &\quad - \frac{\lambda}{c} \int_0^t \int_0^u \frac{d}{dx} \delta(u-x)[1 - P(x)] dx du \\ &= \frac{\lambda}{c} \int_0^t \delta(0)[1 - P(u)] du - \frac{\lambda}{c} \int_0^t \int_0^u \frac{d}{dx} \delta(u-x)[1 - P(x)] dx du. \end{aligned}$$

Sabe-se que  $\frac{d}{dx} \delta(u-x) = -\frac{d}{du} \delta(u-x)$ , então

$$\int_0^t \delta'(u) du = \frac{\lambda}{c} \int_0^t \delta(0)[1 - P(u)] du + \frac{\lambda}{c} \int_0^t \int_0^u \frac{d}{du} \delta(u-x)[1 - P(x)] dx du.$$

Mudando a ordem de integração, temos

$$\begin{aligned}
\int_0^t \delta'(u) du &= \frac{\lambda}{c} \int_0^t \delta(0)[1 - P(u)] du + \frac{\lambda}{c} \int_0^t [1 - P(x)] \int_x^t \frac{d}{du} \delta(u - x) du dx \\
&= \frac{\lambda}{c} \int_0^t \delta(0)[1 - P(u)] du + \frac{\lambda}{c} \int_0^t [1 - P(x)] [\delta(t - x) - \delta(0)] dx. \\
\delta(t) - \delta(0) &= \frac{\lambda}{c} \int_0^t [1 - P(x)] \delta(t - x) dx,
\end{aligned}$$

ou, equivalentemente:

$$\delta(u) = \delta(0) + \frac{\lambda}{c} \int_0^u [1 - P(x)] \delta(u - x) dx.$$

Entretanto, note que  $\delta(0)$  é desconhecido. Então, da equação (3.11) temos

$$\delta(u) - \delta(0) \leq \frac{\lambda}{c} \int_0^u [1 - P(x)] dx,$$

pois,  $\delta(u - x) \in (0, 1)$ . Calculando o limite quando  $u \rightarrow \infty$  temos que  $\lim_{u \rightarrow \infty} \delta(u) = 1$ . Assim,

$$\begin{aligned}
1 - \delta(0) &\leq \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty [1 - P(x)] dx = \frac{\lambda}{c} E(X) = \frac{\lambda}{c} p_1 \\
\delta(0) &\geq 1 - \frac{\lambda}{c} p_1.
\end{aligned}$$

Como  $\frac{1}{1 + \theta} = \frac{\lambda p_1}{c}$ , então

$$\delta(0) \geq 1 - \frac{1}{(1 + \theta)} = \frac{\theta}{(1 + \theta)}.$$

Por outro lado, da Desigualdade de Lundberg temos que  $\psi(u) \leq e^{-Ru}$ , portanto  $\delta(u) \geq 1 - e^{-Ru}$ .

Conseqüentemente,

$$\int_0^u [1 - P(x)] \delta(u - x) dx \geq \int_0^u [1 - P(x)] (1 - e^{-R(u-x)}) dx.$$

Então de (3.11), temos que

$$\begin{aligned}
\delta(u) - \delta(0) &\geq \frac{\lambda}{c} \int_0^u [1 - e^{-R(u-x)}] [1 - P(x)] dx \\
&= \frac{\lambda}{c} \int_0^u [1 - P(x)] dx - \frac{\lambda}{c} e^{-Ru} \int_0^u e^{Rx} [1 - P(x)] dx.
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Calculando a segunda integral quando  $u \rightarrow \infty$ , obtém-se

$$\int_0^\infty e^{Rx} [1 - P(x)] dx = \int_0^\infty e^{Rx} \int_x^\infty p(y) dy dx;$$

mudando a ordem de integração, temos

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{Rx}[1 - P(x)]dx &= \int_0^\infty p(y) \int_0^y e^{Rx} dx dy = \int_0^\infty p(y) \left( \frac{1}{R} e^{Rx} \Big|_0^y \right) dy \\
&= \frac{1}{R} \int_0^\infty p(y) (e^{Ry} - 1) dy = \frac{1}{R} \left[ \int_0^\infty p(y) e^{Ry} dy - \int_0^\infty p(y) dy \right] \\
&= \frac{1}{R} (m(R) - 1) = \frac{1}{R} \left( 1 + \frac{cR}{\lambda} - 1 \right) = \frac{c}{\lambda}.
\end{aligned}$$

Substituindo o resultado acima na equação (3.13) e calculando o limite quando  $u \rightarrow \infty$  temos que  $\lim_{u \rightarrow \infty} e^{-Ru} = 0$  e  $\lim_{u \rightarrow \infty} \delta(u) = 1$ . Logo;

$$\begin{aligned}
1 - \delta(0) &\geq \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty [1 - P(x)] dx = \frac{\lambda}{c} E(X) \\
\delta(0) &\leq 1 - \frac{\lambda}{c} p_1.
\end{aligned}$$

Como  $\frac{1}{1 + \theta} = \frac{\lambda p_1}{c}$ , então

$$\delta(0) \leq 1 - \frac{1}{(1 + \theta)} = \frac{\theta}{(1 + \theta)}.$$

Como consequência, temos

$$\frac{\theta}{(1 + \theta)} \leq \delta(0) \leq \frac{\theta}{(1 + \theta)},$$

o que implica

$$\delta(0) = \frac{\theta}{(1 + \theta)}, \quad \theta > 0.$$

Para encontrar  $\psi(0)$ , basta fazer  $\psi(0) = 1 - \delta(0)$ . Como  $\theta = \frac{c}{\lambda p_1} - 1 = \frac{c - \lambda p_1}{\lambda p_1}$  e  $\delta(0) = 1 - \frac{\lambda p_1}{c}$ , chega-se ao seguinte resultado

$$\psi(0) = \frac{1}{1 + \theta} = \frac{\lambda p_1}{c}.$$

Para encontrar a equação (3.10) basta fazer a seguinte relação  $\psi(u) = 1 - \delta(u)$ . Assim, podemos escrever

$$\begin{aligned}
\psi(u) &= 1 - \delta(u) = 1 - \left( 1 - \frac{\lambda}{c} p_1 + \frac{\lambda}{c} \int_0^u (1 - \psi(u - x)) [1 - P(x)] dx \right) \\
&= \frac{\lambda}{c} p_1 - \frac{\lambda}{c} \left[ \int_0^u [1 - P(x)] dx - \int_0^u \psi(u - x) [1 - P(x)] dx \right] \\
&= \frac{\lambda}{c} E(X) - \frac{\lambda}{c} \int_0^u [1 - P(x)] dx + \frac{\lambda}{c} \int_0^u \psi(u - x) [1 - P(x)] dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\psi(u) &= \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty [1 - P(x)] dx - \frac{\lambda}{c} \int_0^u [1 - P(x)] dx + \frac{\lambda}{c} \int_0^u \psi(u-x)[1 - P(x)] dx \\ &= \frac{\lambda}{c} \int_u^\infty [1 - P(x)] dx + \frac{\lambda}{c} \int_0^u \psi(u-x)[1 - P(x)] dx.\end{aligned}$$

□

## 4.1 Introdução

Uma forma interessante de calcular a probabilidade de não ruína eventual de uma seguradora,  $\delta(u)$ , é através de uma expressão conhecida como fórmula de Pollaczeck-Khinchine. Tal fórmula permite expressar a probabilidade de não ruína eventual como uma função de distribuição geométrica composta.

Alguns autores referem-se à fórmula de Pollaczeck-Khinchine como a fórmula das convoluções de Beekman, visto que foi o pesquisador Beekman quem realizou a sua demonstração.

Segundo, Bowers *et al.* (1986) a fórmula de Pollaczeck-Khinchine pode ser usada para calcular a probabilidade de não ruína quando a distribuição das indenizações é exponencial, uma mistura de exponenciais ou exponencial deslocada, contudo, para a maioria das distribuições, seu cálculo torna-se bastante difícil.

Alguns trabalhos que estudam o comportamento assintótico da probabilidade da ruína e que utilizam a fórmula de Pollaczeck-Khinchine podem ser encontrados, por exemplo em Ramsay (1992), Dufresne & Gerber (1989), Willmot (1988) e Beekman (1985).

## 4.2 Perda Agregada Máxima

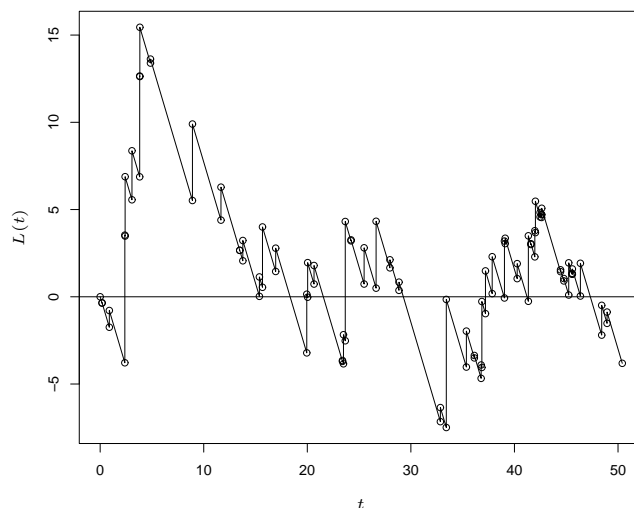
Seja a perda agregada máxima  $L$  uma variável aleatória definida da seguinte forma:

$$L = \max\{L(t), t \geq 0\}, \quad (4.1)$$

em que  $L(t) = \{S(t) - ct, t \geq 0\}$ . Devido ao fato de que  $S(t) = 0$  quando  $N(t) = 0$ , tem-se  $S(t) - ct = 0$  para  $t = 0$ , logo  $L(0) = 0$ , portanto  $L$  é uma variável aleatória não negativa. Além disso,  $L(t)$  pode ser entendido como um processo de perdas agregadas que mede o excesso das indenizações agregadas sobre os prêmios recebidos pela seguradora em algum instante de tempo.

A Figura 4.1 adiante mostra uma trajetória do processo de perda agregada para o caso em que  $\lambda = 1$ ,  $c = 2$ ,  $u = 10$  e as indenizações particulares têm distribuição exponencial de média igual a dois. Observamos que durante o período de tempo  $(0; 50)$ , de forma geral, o valor das indenizações agregadas recebido pela instituição financeira de seguro excedeu o valor dos prêmios acumulados.

Figura 4.1: Uma trajetória do processo da perda agregada quando as indenizações particulares têm distribuição Exponencial(0, 5), para  $\lambda = 1$ ,  $c = 2$  e  $u = 10$ .



A expressão (4.1) significa que  $L$  representa uma particular variável aleatória de  $L(t)$  cujo

valor observado é o maior valor ocorrido pela primeira vez no intervalo de tempo  $t$  especificado pela seguradora. Em outras palavras,  $L$  é o maior valor do montante pelo qual a reserva de uma seguradora desce abaixo do seu nível inicial pela primeira vez no intervalo de tempo  $t$  observado. Assim, a função de distribuição acumulada da perda agregada máxima é dada por

$$\begin{aligned} P(L \leq u) &= P(L(t) \leq u, \forall t \geq 0) = P(S(t) - ct \leq u, \forall t \geq 0) \\ &= P(U(t) \geq 0, \forall t \geq 0) = \delta(u). \end{aligned}$$

Desta forma, não é difícil perceber que a probabilidade de não ruína eventual é idêntica à função distribuição acumulada da variável aleatória  $L$ . Por conseqüência,  $\delta(u)$  é uma função não decrescente de  $u$ . Observamos também que  $\delta(u)$  é uma função de distribuição acumulada mista com uma massa de probabilidade no ponto zero igual a  $\delta(0)$ , visto que  $P(L \leq 0) = P(L = 0) = \delta(0) > 0$ .

É possível encontrar  $\delta(0)$  usando as propriedades da transformada de Laplace. A transformada de Laplace da função acumulada da variável aleatória  $L$  pode ser calculada da seguinte forma

$$\phi(s) = E(e^{-sL}) = e^0 \delta(0) + \int_0^\infty e^{-su} \delta'(u) du.$$

Aplicamos integral por partes da seguinte forma: seja  $x = e^{-su}$  e  $dv = \delta'(u)$ . Então,  $dx = -se^{-su} du$  e  $v = \delta(u)$ . Obtemos,

$$\begin{aligned} \phi(s) &= E(e^{-sL}) = \delta(0) + [e^{-su} \delta(u)]_0^\infty + s \int_0^\infty \delta(u) e^{-su} du \\ &= \delta(0) + [-\delta(0) + s\bar{\delta}(s)] = s\bar{\delta}(s). \end{aligned} \tag{4.2}$$

Entretanto, note que  $\bar{\delta}(s)$  é desconhecido. Então, agora, aplicando a transformada de Laplace na expressão (3.6), vem:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-su} \delta'(u) du &= \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty e^{-su} \delta(u) - \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty e^{-su} \int_0^u p(x) \delta(u-x) dx du \\ s\bar{\delta}(s) - \delta(0) &= \frac{\lambda}{c} \bar{\delta}(s) - \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty e^{-su} \int_0^u p(x) \delta(u-x) dx du. \end{aligned}$$

Mudando a ordem de integração e, em seguida, fazendo a mudança de variável  $t = u - x$ , com  $dt = du$ , temos

$$\begin{aligned}
s\bar{\delta}(s) - \delta(0) &= \frac{\lambda}{c}\bar{\delta}(s) - \frac{\lambda}{c} \int_{0=x}^{\infty} \int_{x=u}^{\infty} e^{-su} p(x) \delta(u-x) dudx \\
&= \frac{\lambda}{c}\bar{\delta}(s) - \frac{\lambda}{c} \int_0^{\infty} \int_x^{\infty} e^{-sx} p(x) e^{-s(u-x)} \delta(u-x) dudx \\
&= \frac{\lambda}{c}\bar{\delta}(s) - \frac{\lambda}{c} \int_0^{\infty} e^{-sx} p(x) dx \int_x^{\infty} e^{-s(u-x)} \delta(u-x) du \\
&= \frac{\lambda}{c}\bar{\delta}(s) - \frac{\lambda}{c} \int_0^{\infty} e^{-sx} p(x) dx \int_0^{\infty} e^{-st} \delta(t) dt.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
s\bar{\delta}(s) - \delta(0) &= \frac{\lambda}{c}\bar{\delta}(s) - \frac{\lambda}{c}\bar{p}(s)\bar{\delta}(s) \\
sc\bar{\delta}(s) - c\delta(0) &= \lambda\bar{\delta}(s) - \lambda\bar{p}(s)\bar{\delta}(s) \\
sc\bar{\delta}(s) - \lambda\bar{\delta}(s) + \lambda\bar{p}(s)\bar{\delta}(s) &= c\delta(0) \\
\bar{\delta}(s)[sc - \lambda + \lambda\bar{p}(s)] &= c\delta(0) \\
\bar{\delta}(s) &= \frac{c\delta(0)}{[sc - \lambda + \lambda\bar{p}(s)]}. \tag{4.3}
\end{aligned}$$

Substituindo a expressão acima em (4.2), obtemos,

$$\phi(s) = \frac{sc\delta(0)}{[sc - \lambda + \lambda\bar{p}(s)]}.$$

Por sua vez, a transformada de Laplace de  $\bar{p}(s)$  é  $\bar{p}(s) = \int_0^{\infty} e^{-sy} p(y) dy$ , logo

$$\bar{p}(0) = \int_0^{\infty} e^0 p(y) dy = \int_0^{\infty} p(y) dy = 1.$$

Por outro lado, derivando a transformada de Laplace,  $\bar{p}(s)$ , em relação a  $s$ , obtemos  $\bar{p}'(s) = -\int_0^{\infty} ye^{-sy} p(y) dy$ . Portanto,

$$\bar{p}'(0) = -\int_0^{\infty} ye^0 p(y) dy = -\int_0^{\infty} yp(y) dy = -E(Y) = -p_1.$$

Aplicando a regra de L'Hospital, vem:

$$\lim_{s \rightarrow 0} \phi(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{c\delta(0)}{c + \lambda\bar{p}'(s)} = \frac{c\delta(0)}{c - \lambda p_1} = \frac{\delta(0)}{1 - \frac{\lambda p_1}{c}} = \frac{\delta(0)}{1 - \psi(0)} = 1.$$



Finalmente, tendo em conta que  $\lim_{s \rightarrow 0} \phi(s) = 1$  e  $c = (\theta + 1)\lambda p_1$ , encontramos o seguinte resultado

$$1 = \frac{c\delta(0)}{c + \lambda\bar{p}'(0)}.$$

De outra forma, considerando os tempos em que os processos de perdas agregadas assumem valores maiores que os anteriores (recordes), então a perda agregada máxima  $L$  pode ser decomposta como:  $L = L_1 + L_2 + \dots + L_M$ , onde  $L_i = L(t_i) - L(t_{i-1})$  e  $L_0 = 0$ . Os valores de  $L_i$  são denominados na literatura como montantes das perdas ou saltos dos recordes. Se  $M$  for igual a zero dizemos que não ocorreu nenhum recorde, logo  $L = 0$ . Além disso,  $M$  representa o número de vezes em que os recordes ocorrem até a perda agregada atingir o seu valor máximo pela primeira vez. Portanto, é fácil vermos que  $M$  segue o modelo geométrico com probabilidade de sucesso  $\delta(0)$  e tem função de probabilidade dada por:

$$P(M = m) = \delta(0)\psi^m(0), \quad m = 0, 1, 2, 3, \dots$$

**Teorema 6.** *A probabilidade de não ruína pode ser expressa como função de distribuição acumulada geométrica composta dada por*

$$\delta(u) = P(L \leq u) = \delta(0) \sum_{m=0}^{\infty} \psi^m(0)H^{m*}(u), \quad u \geq 0 \text{ e } m = 0, 1, 2, 3, \dots,$$

em que  $H^{m*}(u) = P(\sum_{i=1}^m L_i \leq u) = P(L \leq u)$  é a  $m$ -ésima convolução acumulada da função de distribuição da variável aleatória  $L_i$ . Esta expressão é conhecida como fórmula de Pollaczec-Khinchine (Dufresne & Gerber, 1989).

*Demonstração.* De acordo com a definição, podemos escrever:

$$\begin{aligned} \delta(u) = P(L \leq u) &= \sum_{m=0}^{\infty} P(L \leq u \cap M = m) = \sum_{m=0}^{\infty} P(L \leq u | M = m)P(M = m) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} P(L_1 + L_2 + \dots + L_m \leq u | M = m)P(M = m) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} P(L_1 + L_2 + \dots + L_m \leq u)P(M = m) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} P(M = m)P(\sum_{i=1}^m L_i \leq u) = \sum_{m=0}^{\infty} \psi(0)^m \delta(0)H^{m*}(u) \end{aligned}$$

$$\delta(u) = \delta(0) + \sum_{m=1}^{\infty} \psi^m(0)\delta(0)H^{m*}(u); \quad (4.4)$$

pois, o índice de  $L_i$  é  $i = 1, 2, \dots, m$ . □

Derivando a expressão (4.4) em relação a  $u$ , vem

$$\delta'(u) = f_L(u) = \delta(0) \sum_{m=1}^{\infty} \psi^m(0)h^{m*}(u),$$

em que  $h^{m*}(u)$  é a função densidade da convolução da soma de  $L_i$ , para  $i = 1, 2, \dots, m$ .

Aplicando a transformada de Laplace na função densidade da convolução da soma, chegamos ao seguinte resultado

$$\bar{h}^{m*}(s) = \int_0^{\infty} e^{-su} h^{m*}(u) du = [\bar{h}(s)]^m.$$

Além disso, sabemos que

$$\begin{aligned} \bar{\delta}'(s) &= \int_0^{\infty} e^{-su} \delta'(u) du = s\bar{\delta}(s) - \delta(0) = \sum_{m=1}^{\infty} \psi^m(0)\delta(0)\bar{h}^{m*}(s) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \psi^m(0)\delta(0)[\bar{h}(s)]^m = \frac{\delta(0)\psi(0)\bar{h}(s)}{1 - \psi(0)\bar{h}(s)}, \end{aligned}$$

devido ao fato de termos uma soma de uma série geométrica infinita de razão  $\psi(0)\bar{h}(s)$ , desde que  $|\psi(0)\bar{h}(s)| < 1$ . Portanto,

$$\begin{aligned} s\bar{\delta}(s) - \delta(0) &= \frac{\delta(0)\psi(0)\bar{h}(s)}{1 - \psi(0)\bar{h}(s)} \\ s\bar{\delta}(s) &= \delta(0) + \frac{\delta(0)\psi(0)\bar{h}(s)}{1 - \psi(0)\bar{h}(s)} = \frac{\delta(0)}{1 - \psi(0)\bar{h}(s)}. \end{aligned}$$

Substituindo  $\bar{\delta}(s)$  pela expressão obtida em (4.3), vem:

$$\begin{aligned} \frac{sc\delta(0)}{[cs - \lambda + \lambda\bar{p}(s)]} &= \frac{\delta(0)}{1 - \psi(0)\bar{h}(s)} \\ sc[1 - \psi(0)\bar{h}(s)] &= [cs - \lambda + \lambda\bar{p}(s)] \\ sc\psi(0)\bar{h}(s) &= \lambda[1 - \bar{p}(s)] \\ \bar{h}(s) &= \frac{\lambda[1 - \bar{p}(s)]}{\psi(0)sc} = \frac{1}{p_1 s} [1 - \bar{p}(s)] = \frac{1}{p_1} \left[ \frac{1}{s} - \frac{\bar{p}(s)}{s} \right]; \end{aligned}$$

aplicando a transformada inversa de Laplace, chegamos ao seguinte resultado

$$h(x) = \frac{1}{p_1}[1 - P(x)], \quad x > 0.$$

Usando o fato de que o processo  $L(t)$  segue as propriedades de estacionariedade e independência, temos que  $L_1, L_2, \dots, L_M$  são variáveis aleatórias independentes identicamente distribuídas e independentes de  $M$ . A função de distribuição acumulada de  $L_i$  pode ser calculada como:

$$H(y) = P(L_i \leq y) = \frac{1}{p_1} \int_0^y [1 - P(x)] dx, \quad y > 0.$$

O momento de ordem  $k$  é dado por:

$$E[L_i^k] = \frac{1}{p_1} \int_0^\infty x^k [1 - P(x)] dx = \frac{1}{p_1} \int_0^\infty x^k \int_x^\infty p(y) dy dx,$$

mudando a ordem de integração, temos

$$\begin{aligned} E[L_i^k] &= \frac{1}{p_1} \int_0^\infty p(y) \int_{0=y}^y x^k dx dy = \frac{1}{p_1} \int_0^\infty p(y) \left[ \frac{x^{k+1}}{k+1} \Big|_0^y \right] dy \\ &= \frac{1}{p_1} \int_0^\infty \frac{y^{k+1}}{k+1} p(y) dy = \frac{1}{p_1} \frac{p_{k+1}}{(k+1)}. \end{aligned}$$

O resultado da expressão acima é muito útil devido à possibilidade de calcular o valor esperado e a variância, os quais poderão ser escritos, respectivamente, como:

$$E(L_i) = \frac{p_2}{2p_1} \quad \text{e} \quad V(L_i) = E(L_i^2) - E^2(L_i) = \frac{p_3}{3p_1} - \left( \frac{p_2}{2p_1} \right)^2 = \frac{4p_3p_1 - 3p_2^2}{12p_1^2}.$$

É importante ressaltar que se existir o  $(k+1)$ -ésimo momento de  $P(x)$ , então existe o  $k$ -ésimo momento de  $L_i$ . A função geradora de momentos de  $L_i$  é dada por

$$\begin{aligned} M_{L_i}(r) &= \frac{1}{p_1} \int_0^\infty e^{rx} [1 - P(x)] dx = \frac{1}{p_1} \int_0^\infty e^{rx} \int_x^\infty p(y) dy dx \\ &= \frac{1}{p_1} \int_0^\infty p(y) \int_0^y e^{rx} dx dy = \frac{1}{p_1} \int_0^\infty p(y) \left[ \frac{e^{rx}}{r} \Big|_0^y \right] dy \\ &= \frac{1}{p_1 r} \int_0^\infty p(y) [e^{ry} - 1] dy = \frac{1}{p_1 r} \left[ \int_0^\infty p(y) e^{ry} - \int_0^\infty p(y) \right] dy \\ &= \frac{1}{p_1 r} [m_Y(r) - 1]. \end{aligned}$$

Tendo em vista que  $L = \sum_{i=1}^M L_i$  tem distribuição geométrica composta, como demonstrado anteriormente, o seu valor esperado e a sua variância são dados, respectivamente por

$$\begin{aligned}
E[L] &= E[E[L_1 + L_2 + L_3 + \dots + L_M | M = m]] \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} E[L_1 + L_2 + L_3 + \dots + L_M | M = m] P[M = m] \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} E[L_1 + L_2 + L_3 + \dots + L_m] P[M = m] = \sum_{m=0}^{\infty} E\left[\sum_{i=1}^m L_i\right] \cdot P[M = m] \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} m E[L_i] \cdot P[M = m] = E[L_i] \sum_{m=0}^{\infty} m \cdot P[M = m] = E[L_i] E[M] \\
&= \frac{\psi(0)p_2}{\delta(0)2p_1} = \frac{\frac{\lambda p_1}{c} p_2}{\left(1 - \frac{\lambda p_1}{c}\right) 2p_1} = \frac{\frac{\lambda p_2}{c}}{2\left(\frac{c - \lambda p_1}{c}\right)} = \frac{\lambda p_2}{2(c - \lambda p_1)}.
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
V[L] &= E[L^2] - E^2[L] = E\left[\left(\sum_{i=1}^M L_i\right)^2\right] - (E[L_i]E[M])^2 \\
&= E\left[E\left[\left(\sum_{i=1}^M L_i\right)^2 | M = m\right]\right] - (E[L_i]E[M])^2 \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \left[E\left[\left(\sum_{i=1}^m L_i\right)^2 | M = m\right]\right] P[M = m] - (E[L_i]E[M])^2 \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} E\left[\left(\sum_{i=1}^m L_i\right)^2\right] P[M = m] - (E[L_i]E[M])^2 \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \left[V\left(\sum_{i=1}^m L_i\right) + E^2\left(\sum_{i=1}^m L_i\right)\right] P[M = m] - (E[L_i]E[M])^2 \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} [mV(L_i) + m^2 E^2(L_i)] P[M = m] - (E[L_i]E[M])^2 \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} mV(L_i) P[M = m] + \sum_{m=0}^{\infty} m^2 E^2(L_i) P[M = m] - (E[L_i]E[M])^2 \\
&= V[L_i]E[M] + [E^2(L_i)]E[M^2] - E^2[L_i]E^2[M] = V[L_i]E[M] + [E^2(L_i)]V[M] \\
&= \left[\frac{p_3}{3p_1} - \left(\frac{p_2^2}{4p_1^2}\right)\right] \frac{\psi(0)}{\delta(0)} + \left(\frac{p_2}{2p_1}\right)^2 \left(\frac{\psi(0)}{\delta^2(0)}\right) = \frac{p_3}{3p_1} \frac{\psi(0)}{\delta(0)} - \frac{p_2^2}{4p_1^2} \frac{\psi(0)}{\delta(0)} + \frac{p_2^2 \psi(0)}{4p_1^2 \delta^2(0)} \\
&= \frac{\frac{\lambda p_1 p_3}{c}}{3p_1 \left(1 - \frac{\lambda p_1}{c}\right)} - \frac{\frac{\lambda p_1 p_2^2}{c}}{4p_1^2 \left(\frac{c - \lambda p_1}{c}\right)} + \frac{\frac{\lambda p_1 p_2^2}{c}}{4p_1^2 \left(1 - \frac{\lambda p_1}{c}\right)^2} \\
&= \frac{\lambda p_3}{3(c - \lambda p_1)} - \frac{\lambda p_2^2}{4p_1(c - \lambda p_1)} + \frac{c \lambda p_2^2}{4p_1(c - \lambda p_1)^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V[L] &= \frac{\lambda p_3}{3(c - \lambda p_1)} - \frac{c\lambda p_2^2 + \lambda^2 p_1 p_2^2 - \lambda c p_2^2}{4p_1(c - \lambda p_1)^2} = \frac{\lambda p_3}{3(c - \lambda p_1)} + \frac{(\lambda p_2)^2}{4(c - \lambda p_1)^2} \\
&= \frac{\lambda[4p_3(c - \lambda p_1) + 3\lambda p_2^2]}{12(c - \lambda p_1)^2}.
\end{aligned}$$

Uma outra forma interessante de expressar  $\delta(u)$  é da seguinte forma: admita a expressão dada por (4.4) e leve em conta que

$$H(u)^{m*} = H(u)^{(m-1)*} \star H(u) = \int_0^u H(u-y)^{(m-1)*} h(y) dy.$$

Fazendo uma mudança de variável na integral da forma  $z = u - y$ ,  $dz = -dy$ , temos

$$H(u)^{m*} = \int_0^u H(z)^{(m-1)*} h(u-z) dz.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\delta(u) = P(L \leq u) &= \delta(0) + \sum_{m=1}^{\infty} \psi^m(0) \delta(0) \int_0^u H^{(m-1)*}(z) h(u-z) dz \\
&= \delta(0) + \psi(0) \int_0^u h(u-z) \sum_{m=1}^{\infty} \psi(0)^{(m-1)} \delta(0) H^{(m-1)*}(z) dz \\
&= \delta(0) + \psi(0) \int_0^u h(u-z) \delta(z) dz.
\end{aligned}$$

Novamente, fazendo a mudança de variável na integral anterior da forma  $w = u - z$ ,  $dw = -dz$ , obtemos

$$\begin{aligned}
\delta(u) = P(L \leq u) &= \delta(0) + \psi(0) \int_0^u h(w) \delta(u-w) dw \\
&= \delta(0) + \frac{\lambda}{c} \int_0^u [1 - P(w)] \delta(u-w) dw.
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Vale salientar que a expressão (4.5) é equivalente a expressão dada em (3.11).

## 5.1 Introdução

Neste capítulo, apresentamos o processo do cálculo da probabilidade da ruína, dado que a reserva inicial da seguradora seja  $U(0) = u$  e que a reserva (*déficit*) da companhia seguradora no instante da ruína seja menor que  $x$ , denotada por  $G(u; x)$ .

O artigo pioneiro sobre a gravidade da ruína para o modelo clássico de risco coletivo em tempo contínuo é devido a Gerber *et al.* (1987). Neste artigo, eles encontraram uma expressão para  $G(u; x)$  quando a distribuição dos montantes individuais das indenizações é uma combinação de exponenciais ou gama. Este trabalho foi estendido por Dufresne & Gerber (1988), supondo que a distribuição dos montantes individuais das indenizações é uma combinação de exponenciais deslocadas. Posteriormente, Dickson & Waters (1992) desenvolveram um algoritmo para calcular o valor aproximado de  $G(u; x)$  no modelo clássico de risco em tempo discreto e horizonte temporal finito e infinito.

Ao final deste capítulo, apresentaremos três aproximações assintóticas para a probabilidade de ruína eventual, a saber: aproximações De Vylder, Beekman-Bowers e Cramér-Lundberg. Tais aproximações foram desenvolvidas pelos pesquisadores da área atuarial com o propósito de encontrar boas aproximações para a probabilidade da ruína eventual, porque apenas em poucos casos específicos é possível obter uma expressão fechada para tal probabilidade.

## 5.2 Gravidade da Ruína

A probabilidade da ruína, dado que a reserva inicial da seguradora seja  $U(0) = u$  e que o *déficit* da companhia seguradora no instante da ruína seja menor que  $x$ , é definido da seguinte forma

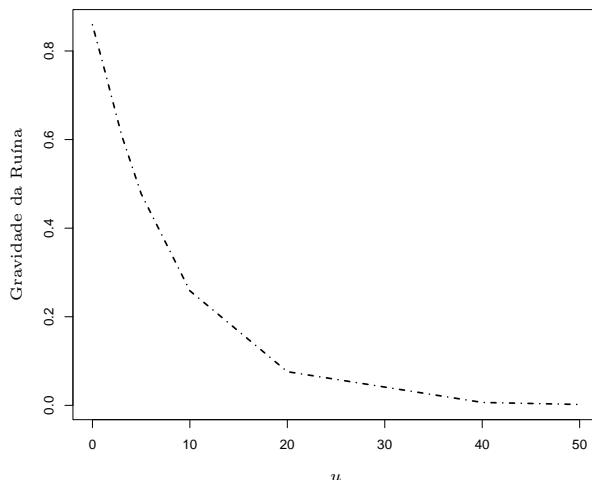
$$\begin{aligned}
 G(u; x) &= P\{T < \infty \text{ e } U(t) > -x | U(0) = u\} \\
 &= P\{-x < U(t) < 0 \text{ para um determinado valor fixo } t > 0 | U(0) = u\} \\
 &= P\{-x < u + ct - S(t) < 0 | U(0) = u\} = P\{-x < u - L(t) < 0 | U(0) = u\} \\
 &= P\{u < L(t) < u + x | U(0) = u\} = \int_u^{u+x} p_{L(t)}(y) dy.
 \end{aligned}$$

A correspondente função densidade de probabilidade é

$$g(u, x) = \frac{d}{dx} G(u, x).$$

A Figura 5.1 adiante apresenta a gravidade da ruína para indenizações com distribuição Gama(2;2), para  $x = 2$ ,  $\lambda = 1$ ,  $c = 1,1$  e diversos valores da reserva inicial. Observamos que a gravidade da ruína diminui conforme os valores da reserva inicial aumentam.

Figura 5.1: Gravidade da ruína quando as indenizações tem distribuição Gama(2;2), para  $x = 2$ ,  $\lambda = 1$ ,  $c = 1,1$  e diferentes valores da reserva inicial.



Considere que a probabilidade da perda agregada máxima seja positiva, porém com o primeiro montante máximo com perda inferior a  $x$ . Então, temos que

$$\begin{aligned} P(L > 0 \text{ e } L_1 < x) &= P(L_1 < x | L > 0)P(L > 0) = H(x)[1 - P(L \leq 0)] \\ &= H(x)[1 - \delta(0)] = H(x)\psi(0) = \frac{\lambda}{c} \int_0^x [1 - P(y)]dy. \end{aligned}$$

Esta probabilidade corresponde a probabilidade de que a ruína ocorra, dado que a reserva inicial da seguradora seja  $u = 0$  e que o *déficit* no instante da ruína seja menor que  $x$ , ou seja,

$$G(0, x) = \frac{\lambda}{c} \int_0^x [1 - P(y)]dy.$$

Observemos também que,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} G(0, x) = G(0; \infty) = \frac{\lambda}{c} \int_0^{\infty} [1 - P(y)]dy = \frac{\lambda}{c} E(X) = \psi(0),$$

correspondendo à probabilidade de que a ruína ocorra, dado que a reserva inicial  $u = 0$  e que a reserva da seguradora no instante da ruína seja qualquer valor.

**Teorema 7.** *Temos que a expressão de  $G(u; x)$  é dada por*

$$G(u; x) = \int_0^u g(0; y)G(u - y; x)dy + \int_u^{u+x} g(0; y)dy.$$

*Demonstração.* Procedendo analogamente ao mesmo raciocínio desenvolvido na Seção 3.3 e tendo em vista que o evento ruína ocorre no determinado tempo  $t$ . Além disso, quando o evento ruína ocorre a reserva esteja abaixo de zero e acima de  $-x$ , sendo  $x$  um valor positivo e  $u$  é a reserva inicial da seguradora, temos:

$$\begin{aligned} G(u, x) &= P([-x < U(t) < 0] \cap [N(t + dt) - N(t) = 0]) \\ &+ P([-x < U(t) < 0] \cap [N(t + dt) - N(t) = 1]) \\ &+ P([-x < U(t) < 0] \cap [N(t + dt) - N(t) > 1]) \\ &= P[(N(t + dt) - N(t)) = 0]P(-x < U(t) < 0 | N(t + dt) - N(t) = 0) \\ &+ P[(N(t + dt) - N(t)) = 1]P(-x < U(t) < 0 | N(t + dt) - N(t) = 1) \\ &+ P[(N(t + dt) - N(t)) > 1]P(-x < U(t) < 0 | N(t + dt) - N(t) > 1) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
G(u, x) &= (1 - \lambda dt + o(dt))G(u + cdt, x) + \lambda dt \left[ \int_0^{u+cdt} p(y)G(u + cdt - y, x)dy \right. \\
&\quad \left. + \int_{u+cdt}^{u+cdt+x} p(y)dy \right] + o(dt) \\
&= (1 - \lambda dt)G(u + cdt, x) + \lambda dt \int_0^{u+cdt} p(y)G(u + cdt - y, x)dy \\
&\quad + \lambda dt \int_{u+cdt}^{u+cdt+x} p(y)dy + o(dt),
\end{aligned}$$

que dividindo por  $cdt$ , podemos escrever como

$$\begin{aligned}
\frac{G(u + cdt, x) - G(u, x)}{cdt} &= \frac{\lambda}{c}G(u + cdt, x) - \frac{\lambda}{c} \int_0^{u+cdt} p(y)G(u + cdt - y, x)dy \\
&\quad - \frac{\lambda}{c} \int_{u+cdt}^{u+cdt+x} p(y)dy + \frac{o(dt)}{cdt},
\end{aligned}$$

calculando o limite quando  $cdt \rightarrow 0$ , resulta em

$$G'(u, x) = \frac{\lambda}{c}G(u, x) - \frac{\lambda}{c} \int_0^u p(y)G(u - y, x)dy - \frac{\lambda}{c} \int_u^{u+x} p(y)dy,$$

em que  $\frac{dG(u, x)}{du} = G'(u, x)$ . Agora, integrando a variável  $u$  em  $(0; t)$ , obtemos

$$\int_0^t G'(u; x)du = \frac{\lambda}{c} \int_0^t G(u, x)du - \frac{\lambda}{c} \int_0^t \int_0^u G(u - y; x)p(y)dydu - \frac{\lambda}{c} \int_0^t \int_u^{u+x} p(y)dydu. \quad (5.1)$$

Fazendo uma mudança de variável na primeira integral dupla do segundo membro da igualdade na forma  $u - y = z, dz = -dy$  e depois trocando a ordem de integração, obtemos:

$$\begin{aligned}
\int_0^t \int_0^u G(u - y; x)p(y)dydu &= \int_0^t \int_0^u G(z; x)p(u - z)dzdu \\
&= \int_0^t G(z; x) \int_z^t p(u - z)dudz \\
&= \int_0^t G(z; x)[P(u - z)]_z^t dz \\
&= \int_0^t G(z; x)[P(t - z) - P(0)]dz \\
&= \int_0^t G(z; x)P(t - z)dz,
\end{aligned} \quad (5.2)$$

pois,  $P(0) = P(X \leq 0) = 0$ . Agora, desenvolvendo a segunda integral dupla do segundo membro de (5.1), vem

$$\int_0^t \int_u^{u+x} p(y)dydu = \int_0^t [P(u + x) - P(u)]du. \quad (5.3)$$

Substituindo (5.2) e (5.3) em (5.1), temos

$$\begin{aligned}
\int_0^t G'(u; x) du &= \frac{\lambda}{c} \int_0^t G(u, x) du - \frac{\lambda}{c} \int_0^t P(t-z)G(z, x) dz \\
&\quad - \frac{\lambda}{c} \int_0^t P(u+x) du + \frac{\lambda}{c} \int_0^t P(u) du \\
G(t; x) - G(0; x) &= \frac{\lambda}{c} \int_0^t G(u, x) du - \frac{\lambda}{c} \int_0^t P(t-z)G(z, x) dz \\
&\quad - \frac{\lambda}{c} \int_0^t P(u+x) du + \frac{\lambda}{c} \int_0^t P(u) du.
\end{aligned}$$

Sabemos que

$$\begin{aligned}
G(0; x) &= \frac{\lambda}{c} \int_0^x [1 - P(y)] dy = \frac{\lambda}{c} \int_0^x dy - \frac{\lambda}{c} \int_0^x P(y) dy = \frac{\lambda}{c} x - \frac{\lambda}{c} \int_0^x P(y) dy \\
&= \frac{\lambda}{c} \int_t^{t+x} dy - \frac{\lambda}{c} \int_0^x P(y) dy.
\end{aligned}$$

Então, podemos escrever que

$$\begin{aligned}
G(t; x) &= \frac{\lambda}{c} \int_t^{t+x} dy - \frac{\lambda}{c} \int_0^x P(y) dy + \frac{\lambda}{c} \int_0^t G(u, x) du - \frac{\lambda}{c} \int_0^t P(t-z)G(z, x) dz \\
&\quad - \frac{\lambda}{c} \int_0^t P(u+x) du + \frac{\lambda}{c} \int_0^t P(u) du.
\end{aligned}$$

Fazendo uma mudança de variável na penúltima integral anterior do segundo membro da forma

$w = u + x$ ,  $dw = du$ , obtemos

$$\begin{aligned}
G(t; x) &= \frac{\lambda}{c} \int_t^{t+x} dy - \frac{\lambda}{c} \int_0^x P(y) dy - \frac{\lambda}{c} \int_x^{t+x} P(w) dw \\
&\quad + \frac{\lambda}{c} \int_0^t P(u) du + \frac{\lambda}{c} \int_0^t G(u, x) du - \frac{\lambda}{c} \int_0^t P(t-z)G(z, x) dz \\
&= \frac{\lambda}{c} \int_t^{t+x} dy - \frac{\lambda}{c} \int_t^{t+x} P(y) dy + \frac{\lambda}{c} \int_0^t G(u, x) du - \frac{\lambda}{c} \int_0^t P(t-z)G(z, x) dz \\
&= \frac{\lambda}{c} \int_t^{t+x} [1 - P(y)] dy + \frac{\lambda}{c} \int_0^t [1 - P(t-z)]G(z, x) dz.
\end{aligned}$$

Levando em conta que  $g(0, y) = \frac{dG(0, y)}{dy} = \frac{\lambda}{c}[1 - P(y)]$ , note que  $\frac{dg(0, y)}{dy} = g'(0, y) = -\frac{\lambda}{c}p(y)$ .

Desta maneira, obtemos

$$G(t; x) = \int_t^{t+x} g(0, y) dy + \int_0^t g(0, t-z)G(z, x) dz.$$

Com a substituição  $v = t - z$ ,  $dv = -dz$ , segue então, que

$$G(t; x) = \int_t^{t+x} g(0, y)dy + \int_0^t g(0, v)G(t - v, x)dv.$$

Ou, equivalentemente,

$$\begin{aligned} G(u; x) &= \int_u^{u+x} g(0, y)dy + \int_0^u g(0, y)G(u - y, x)dy \\ &= G(0; u + x) - G(0, u) + \int_0^u g(0, y)G(u - y, x)dy. \end{aligned}$$

Fazendo  $u = 0$ , obtemos

$$G(0; x) = \int_0^x g(0, y)dy = \frac{\lambda}{c} \int_0^x [1 - P(y)]dy.$$

Para encontrar  $g(u, x)$  basta diferenciar  $G(u, x)$  em relação a  $x$ . Assim,

$$g(u; x) = \int_0^u g(u - y; x)g(0; y)dy + g(0; u + x). \quad (5.4)$$

□

De acordo com Dickson *et al.* (1995), uma outra forma de representar  $g(u, x)$  é:

$$g(u, x) = \delta(0)^{-1} \left[ \frac{\lambda}{c} \int_0^u p(x + y)\psi(u - y)dy + g(0, u + x) - \psi(u)g(0, x) \right].$$

De outra forma, apresentamos, a seguir, um procedimento alternativo sugerido por Gerber *et al.* (1987) para calcular  $g(u; x)$  através da transformada de Laplace. Calculando a transformada de Laplace da expressão (5.4), obtemos

$$\bar{g}(s; x) = \int_0^\infty e^{su} g(u; x)du = \int_0^\infty \int_0^u e^{su} g(u - y; x)g(0; y)dydu + \int_0^\infty e^{su} g(0; u + x)du,$$

ou ainda,

$$\int_0^\infty e^{su} g(u; x)du = \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty \int_0^u e^{su} g(u - y; x)[1 - P(y)]dydu + \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty e^{su}[1 - P(u + x)]du. \quad (5.5)$$

Mudando a ordem da integral dupla do segundo membro da igualdade de (5.5) e depois desenvolvendo, temos que

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty \int_0^u e^{su} g(u - y; x)[1 - P(y)]dydu &= \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty \int_y^\infty e^{su} g(u - y; x)[1 - P(y)]dudy \\ &= \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty \int_y^\infty e^{s(u-y)} g(u - y; x)e^{sy}[1 - P(y)]dudy, \end{aligned}$$

que, após a substituição  $t = u - y$ ,  $dt = du$ , resulta em:

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{st} g(t; x) e^{sy} [1 - P(y)] dt dy &= \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty e^{st} g(t; x) dt \int_0^\infty e^{sy} [1 - P(y)] dy \\ &= \frac{\lambda}{c} \bar{g}(s, x) \int_0^\infty e^{sy} [1 - P(y)] dy. \end{aligned}$$

Substituindo  $u + x = y$ ,  $du = dy$ , na segunda integral do segundo membro da igualdade de (5.5) e depois resolvendo, vem

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty e^{su} [1 - P(u + x)] du &= \frac{\lambda}{c} e^{-sx} \int_0^\infty e^{s(u+x)} [1 - P(u + x)] du \\ &= \frac{\lambda}{c} e^{-sx} \int_x^\infty e^{sy} [1 - P(y)] dy. \end{aligned}$$

Substituindo, agora, o resultado das duas últimas expressões acima em (5.5), temos:

$$\begin{aligned} \bar{g}(s, x) &= \frac{\lambda}{c} \bar{g}(s, x) \int_0^\infty e^{sy} [1 - P(y)] dy + \frac{\lambda}{c} e^{-sx} \int_x^\infty e^{sy} [1 - P(y)] dy \\ &= \bar{g}(s, x) \int_0^\infty e^{sy} g(0, y) dy + \frac{\lambda}{c} e^{-sx} \int_x^\infty e^{sy} [1 - P(y)] dy \\ &= \bar{g}(s, x) \bar{g}(0, s) + \frac{\lambda}{c} e^{-sx} \int_x^\infty e^{sy} [1 - P(y)] dy \\ &= \frac{\frac{\lambda}{c} e^{-sx} \int_x^\infty e^{sy} [1 - P(y)] dy}{1 - \bar{g}(0, s)} = \frac{\frac{\lambda}{c} e^{-sx} \int_x^\infty e^{sy} [1 - P(y)] dy}{1 - \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty e^{sy} [1 - P(y)] dy}. \end{aligned}$$

De acordo com Gerber *et al.* (1987), para encontrar  $g(u, x)$  basta inverter a transformada de Laplace da expressão  $\bar{g}(s, x)$ . Entretanto, quando a distribuição das indenizações agregadas é uma combinação de exponenciais ou Gamas  $(n, \beta)$ , com parâmetro de forma  $n$  inteiro, uma solução alternativa para encontrar a inversa da transformada de Laplace seria através da aplicação do método dos coeficientes indeterminados. Para aplicar o método dos coeficientes indeterminados, primeiro temos que encontrar os zeros do denominador de  $\bar{g}(s, x)$  e, depois, verificar, recorrendo a (3.4), que um dos zeros do denominador é simétrico do coeficiente de ajustamento  $R$ .

### 5.3 Aproximações para a Probabilidade da Ruína

Apenas em poucos casos específicos é possível encontrar uma expressão fechada para a probabilidade de ruína eventual. Devido a esta dificuldade muitos pesquisadores da área de atuária

têm se dedicado a investigar boas aproximações para tal probabilidade. Nesta seção, apresentamos três aproximações para a probabilidade da ruína eventual que são amplamente discutidas na literatura, a saber: aproximações De Vylder, Beekman-Bowers e Cramér-Lundberg.

### 5.3.1 Aproximação de De Vylder

Em 1978, De Vylder propôs uma aproximação para probabilidade da ruína eventual que consiste em aproximar o modelo de reserva de risco (2.8) por meio de um processo definido como

$$\tilde{U}(t) = u + \tilde{c}t - \tilde{S}(t), \quad t \geq 0,$$

em que  $\tilde{\lambda} > 0$  é o novo parâmetro da distribuição Poisson,  $\tilde{S}(t)$  são as indenizações agregadas relativas ao intervalo  $(0, t]$  e ocorrem de acordo com um processo Poisson composto homogêneo de parâmetro  $\tilde{\lambda}$ . Os valores das indenizações ocorridas no intervalo  $(0, t]$  têm distribuição exponencial com média  $\tilde{\beta}^{-1} > 0$  e os pagamentos (prêmios) são recebidos continuamente a uma nova taxa constante  $\tilde{c} > 0$ .

Os novos parâmetros para a função  $\psi(u)$ , quando as indenizações tem distribuição exponencial, são obtidos igualando os três primeiros momentos. Portanto, temos:

Primeiro momento:

$$\begin{aligned} E(U(t)) &= E(\tilde{U}(t)) \\ u + ct - E(S(t)) &= u + \tilde{c}t - E(\tilde{S}(t)) \\ c - \lambda p_1 &= \tilde{c} - \tilde{\lambda} \frac{1}{\tilde{\beta}}. \end{aligned}$$

Segundo momento:

$$\begin{aligned} E[(U(t) - E[U(t)])^2] &= E[(\tilde{U}(t) - E[\tilde{U}(t)])^2] \\ V(S(t)) &= V(\tilde{S}(t)) \\ \lambda t p_2 &= \frac{2\tilde{\lambda}t}{\tilde{\beta}^2}. \end{aligned}$$

Terceiro momento:

$$\begin{aligned} E[(U(t) - E[U(t)])^3] &= E[(\tilde{U}(t) - E[\tilde{U}(t)])^3] \\ -E[(S(t) - E[S(t)])^3] &= -E[(\tilde{S}(t) - E[\tilde{S}(t)])^3] \\ \lambda p_3 t &= \frac{6\tilde{\lambda}t}{\tilde{\beta}^3}, \end{aligned}$$

o que conduz ao sistema

$$\begin{cases} \lambda p_3 = 6\tilde{\lambda}/\tilde{\beta}^3, \\ \lambda p_2 = 2\tilde{\lambda}/\tilde{\beta}^2, \\ c - \lambda p_1 = \tilde{c} - \tilde{\lambda}\frac{1}{\tilde{\beta}}. \end{cases}$$

Ao resolvermos o sistema acima encontramos, facilmente, os seguintes resultados:

$$\tilde{\beta} = \frac{3p_2}{p_3}; \quad \tilde{\lambda} = \frac{9p_2^3}{2p_3^2}\lambda; \quad \tilde{c} = c - \lambda p_1 + \frac{3p_2^2\lambda}{2p_3}.$$

Dessa forma, temos que a aproximação de De Vylder para a probabilidade da ruína é dada por

$$\psi_{DV}(u) \approx \frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{\beta}\tilde{c}} \exp\{-(\tilde{\beta} - \tilde{\lambda}/\tilde{c})u\}.$$

É esperado que no caso exponencial o método de aproximação de De Vylder apresente resultado exato. Entretanto, quando as indenizações ocorrem de acordo com outra distribuição que não seja exponencial, para aplicar este método de aproximação, é necessário que os primeiros três momentos existam.

De acordo com De Vylder (1978), a aproximação funciona bem quando a função geradora de momentos da distribuição das indenizações existe, caso contrário, esta aproximação não apresenta resultados satisfatórios. Grandell (2000) analisou através de resultados numéricos alguns métodos simples de aproximações para a probabilidade de ruína eventual e verificou que, de forma geral, a aproximação de De Vylder foi a que apresentou melhor resultado.

### 5.3.2 Aproximação de Beekman-Bowers

John A. Beekman, em seu artigo publicado em 1969, desenvolveu uma aproximação para a probabilidade de ruína eventual, motivado pela dificuldade de calcular, na maioria dos casos, a sua forma exata. Entretanto, Newton L. Bowers sugeriu uma modificação desta aproximação

a partir de uma discussão sobre o artigo de Beekman (1969) que ficou conhecida na literatura atuarial como aproximação de Beekman-Bowers.

Considere  $L$  a perda agregada máxima como definida na Seção 4.2. Sabemos que a probabilidade de não ruína eventual pode ser calculada a partir da distribuição acumulada geométrica composta. A idéia da aproximação de Beekman-Bowers consiste em utilizar a expressão (4.5) e substituir a integral pela distribuição gama, ou seja,

$$\delta(u) \approx G(u) = \delta(0) + \psi(0)G(u),$$

ou, equivalentemente

$$\psi_{BB}(u) \approx \psi(0)[1 - G(u)],$$

em que  $G(u) = \int_0^u \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} dx$ , com parâmetros de forma e de escala dados respectivamente por:

$$\alpha = \frac{E^2(L)}{V(L)\psi(0)}; \quad \beta = \frac{E(L)}{V(L)}.$$

É importante ressaltar que a existência desta aproximação depende da existência dos três primeiros momentos da distribuição da indenização. Adicionalmente, temos que as distribuições de  $\delta(u)$  e  $G(u)$  tem alguns aspectos em comum, a saber: o mesmo valor para  $u = 0$ , o mesmo valor esperado e a mesma variância.

Uma boa referência sobre a aproximação de Beekman-Bowers pode ser encontrada, por exemplo, em Gerber (1979) ou Asmussen (2000).

### 5.3.3 Aproximação de Cramér-Lundberg

Aproximação de Cramér-Lundberg é a mais conhecida na literatura da teoria do risco coletivo e foi desenvolvida por Harald Cramér e Filip Oskar Lundberg no início do século XX. Esta aproximação fornece uma estimativa assintótica para a probabilidade da ruína eventual, a qual é definida da seguinte forma: supondo a existência de  $R$  e  $\int_0^\infty x e^{Rx} [1 - P(x)] dx < \infty$ , então

$$\psi(u) \sim C e^{-Ru}, \quad u \rightarrow \infty,$$

em que  $C = \delta(0) \left( \frac{\lambda}{c} m'_X(R) - 1 \right)^{-1}$ . Definimos  $\psi_{CL}(u) = C e^{-Ru}$ .

*Demonstração.* Centeno (2003), mostra que a expressão de  $\psi(u)$ , para  $u > 0$  dada por (3.10) corresponde a uma equação de renovação. Entretanto, sendo

$$\frac{\lambda}{c} \int_0^\infty [1 - P(x)] dx = \frac{\lambda p_1}{c} = \frac{1}{1 + \theta} < 1,$$

a equação (3.10) denomina-se, segundo a autora, equação de renovação imprópria por defeito.

Por outro lado, multiplicando ambos os lados da equação (3.10) por  $e^{Ru}$ , obtemos

$$\psi(u)e^{Ru} = \int_u^\infty e^{Ru} \frac{\lambda}{c} [1 - P(x)] dx + \int_0^u \psi(u-x) e^{R(u-x)} \frac{\lambda}{c} e^{Rx} [1 - P(x)] dx. \quad (5.6)$$

Supondo a existência do coeficiente de ajustamento  $R$ , por conseqüência, pelo Teorema 3, temos que  $1 = \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty e^{Rx} (1 - P(x)) dx$ . Além disso,  $\frac{\lambda}{c} \int_0^\infty x e^{Rx} (1 - P(x)) < \infty$ , o que é equivalente a dizer que  $m'_X(R) < \infty$ . Adicionalmente, temos também que  $e^{Ru} \frac{\lambda}{c} \int_u^\infty [1 - P(x)] dx$  é integrável. Desta forma, a equação (5.6) corresponde a uma equação de renovação (ver Feller, 1971). Aplicando o teorema da renovação temos que

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \psi(u) e^{Ru} = \frac{\frac{\lambda}{c} \int_0^\infty \int_u^\infty e^{Ru} [1 - P(x)] dx du}{\frac{\lambda}{c} \int_0^\infty x e^{Rx} [1 - P(x)] dx}.$$

Desenvolvendo o numerador, trocando a ordem de integração, temos

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty \int_u^\infty e^{Ru} [1 - P(x)] dx du &= \frac{\lambda}{c} \int_{0=x}^\infty \int_{0=u}^x [1 - P(x)] e^{Ru} du dx \\ &= \frac{\lambda}{cR} \int_{0=x}^\infty [1 - P(x)] [e^{Rx} - 1] dx \\ &= \frac{\lambda}{cR} \int_0^\infty [1 - P(x)] [e^{Rx} - 1] dx \\ &= \frac{\lambda}{cR} \int_0^\infty e^{Rx} [1 - P(x)] dx - \frac{\lambda}{cR} \int_0^\infty [1 - P(x)] dx \\ &= \frac{\lambda}{cR} \int_0^\infty e^{Rx} [1 - P(x)] dx - \frac{\lambda p_1}{cR} \\ &= \frac{\lambda}{cR} \int_0^\infty e^{Rx} \int_x^\infty p(y) dy dx - \frac{\lambda p_1}{cR} \\ &= \frac{\lambda}{cR} \int_{0=y}^\infty \int_{0=x}^y p(y) e^{Rx} dx dy - \frac{\lambda p_1}{cR} \\ &= \frac{\lambda}{cR^2} \int_{0=y}^\infty p(y) [e^{Ry} - 1] dy - \frac{\lambda p_1}{cR} \\ &= \frac{\lambda}{cR^2} (m_Y(R) - 1) - \frac{\lambda p_1}{cR}, \end{aligned}$$



substituindo  $m_Y(R) = 1 + \frac{cR}{\lambda}$ , resulta em:

$$\frac{\lambda}{c} \int_0^\infty \int_u^\infty e^{Ru} [1 - P(x)] dx du = \frac{\lambda}{cR^2} (1 + \frac{cR}{\lambda} - 1) - \frac{\lambda p_1}{cR} = \frac{(c - \lambda p_1)}{cR}.$$

Agora, desenvolvendo o denominador, temos que

$$\frac{\lambda}{c} \int_0^\infty x e^{Rx} [1 - P(x)] dx = \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty x e^{Rx} \int_y^\infty p(y) dy dx.$$

Trocamos a ordem de integração e depois aplicamos a integral por partes da seguinte forma: seja  $w = x$  e  $dv = e^{Rx}$ . Então,  $dw = dx$  e  $v = \frac{1}{R} e^{Rx}$ . Assim,

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty x e^{Rx} [1 - P(x)] dx &= \frac{\lambda}{c} \int_{0=y}^\infty p(y) \left( \frac{x}{R} e^{Rx} \Big|_0^y - \int_0^y \frac{1}{R} e^{Rx} dx \right) dy \\ &= \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty p(y) \left( \frac{y}{R} e^{Ry} - \frac{1}{R^2} (e^{Ry} - 1) \right) dy \\ &= \frac{\lambda}{cR} \left[ \int_0^\infty p(y) \left( y e^{Ry} - \frac{1}{R} (e^{Ry} - 1) \right) dy \right] \\ &= \frac{\lambda}{cR} \left[ \int_0^\infty y e^{Ry} p(y) dy - \frac{1}{R} \int_0^\infty e^{Ry} p(y) dy + \frac{1}{R} \int_0^\infty p(y) dy \right] \\ &= \frac{\lambda}{cR} \left[ m'_Y(R) - \frac{1}{R} m_Y(R) + \frac{1}{R} \right] = \frac{\lambda m'_Y(R) - c}{cR}. \end{aligned}$$

Dessa forma, temos que

$$\psi(u) \sim \frac{(c - \lambda p_1)}{\lambda m'_Y(R) - c} e^{-Ru} = \delta(0) \left( \frac{\lambda}{c} m'_X(R) - 1 \right)^{-1} e^{-Ru}, \quad u \rightarrow \infty.$$

□

Asmussen (2000) afirma que esta aproximação, geralmente, apresenta resultados bastante precisos para a probabilidade da ruína eventual, para  $u \geq 0$  e não apenas para valores grandes da reserva inicial da seguradora. Entretanto, de acordo com Bulhmann (1970), a dificuldade de aplicar, na prática, a aproximação de Cramér-Lundberg é devido a necessidade de conhecer a função geradora de momentos das indenizações e, conseqüentemente, a sua função densidade.

Grandell & Segerdahl (1971) concluíram, através de estudos numéricos, que a aproximação de Cramér-Lundberg apresentou uma qualidade de convergência para a probabilidade da ruína eventual melhor, quando comparado com a aproximação de Beekman-Bowers.

Para saber mais detalhes sobre a aproximação de Cramér-Lundberg algumas referências recomendadas são: Asmussen (2000), Bühlmann (1970) e Bowers *et al.* (1986).

## 6.1 Introdução

Neste capítulo, descrevemos o modelo de reserva de risco de uma companhia seguradora apresentado por Sparre Andersen (1957), o qual estende o modelo clássico de risco de reserva de Cramér-Lundberg apresentado na Seção 2.3. Em vez de supor que os tempos entre as ocorrências sucessivas das indenizações têm função de distribuição exponencial, Erik Sparre Andersen introduziu uma função de distribuição mais geral, porém manteve a suposição dos tempos serem independentes e identicamente distribuídos. Assim, seu modelo pode, conseqüentemente, ser caracterizado da seguinte maneira: o processo de ocorrência de indenizações  $\{N(t), t \geq 0\}$  é um processo de renovação e  $T_1, T_2, \dots$  são os tempos entre as ocorrências sucessivas das indenizações. Então,  $T_n$  é o tempo que decorre entre a ocorrência da  $(n - 1)$  e  $n$ -ésima indenização, para  $(n = 2, 3, \dots)$  e  $T_1$  é o tempo que decorre até a ocorrência da primeira indenização. Dessa forma, o modelo de risco de reserva de uma seguradora imediatamente após a  $n$ -ésima indenização é dado por

$$\begin{aligned} U\left(\sum_{i=1}^n T_i\right) &= u + \sum_{i=1}^n cT_i - \sum_{i=1}^n X_i \\ &= u + \sum_{i=1}^n (cT_i - X_i), \end{aligned} \tag{6.1}$$

em que  $u$  é uma constante que representa a reserva inicial de uma seguradora,  $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$  uma seqüência de variáveis aleatórias independentes identicamente distribuídas e não negativas, com funções de distribuição acumulada  $P(x)$ ,  $P(X \leq 0) = 0$  e com respectiva função densidade  $p(x)$ . No contexto de seguro  $X_i$  significa os valores das indenizações individuais ou particulares  $i$ . Além disso,  $\{T_j\}_{j=1,2,\dots}$  é uma variável aleatória contínua, sendo  $K(t)$  e  $k(t)$  as suas funções de distribuição acumulada e densidade, respectivamente. É suposto que  $T_i$  seja independente de  $X_i$  ( $\forall i, j = 1, 2, \dots$ ) e que os pagamentos (prêmios) são recebidos continuamente a uma taxa constante  $c > 0$ . Adicionalmente, por hipótese, consideramos que

$$E[cT_i] - E[X_i] > 0, \quad \forall i = 1, 2, \dots,$$

por conseqüência, temos que

$$E\left[\sum_{i=1}^n (cT_i - X_i)\right] > 0,$$

O interesse é calcular a probabilidade da ruína que ocorre quando a reserva de uma seguradora dada por (6.1) fica negativa em algum instante de tempo  $t$ . Esta probabilidade é definida por

$$\begin{aligned} \psi(u) &= P\left(U\left(\sum_{i=1}^n T_i\right) < 0, \text{ para algum } n > 0\right) \\ &= P\left(u + \sum_{i=1}^n (cT_i - X_i) < 0, \text{ para algum } n > 0\right) \\ &= P\left(\sum_{i=1}^n X_i > u + c \sum_{i=1}^n T_i, \text{ para algum } n > 0\right). \end{aligned}$$

A correspondente probabilidade complementar é denominada de probabilidade de não ruína, sendo definida por

$$\begin{aligned} \delta(u) &= P\left(U\left(\sum_{i=1}^n T_i\right) > 0, \forall n > 0\right) \\ &= P\left(u + \sum_{i=1}^n (cT_i - X_i) > 0, \forall n > 0\right) \\ &= P\left(\sum_{i=1}^n X_i < u + c \sum_{i=1}^n T_i, \forall n > 0\right). \end{aligned}$$

Generalizando o conceito do coeficiente de ajustamento dado na Seção 3.2, será apresentado, a seguir, o seguinte teorema.

**Teorema 8.** Considere que exista  $E(e^{rX_i})$  para  $-\infty < r < \gamma$  e que o  $\lim_{r \rightarrow \gamma} E(e^{rX_i}) = \infty$ . Então existe um Coeficiente de Ajustamento  $R$ , que é o único número positivo satisfazendo

$$E[e^{-R(cT_i - X_i)}] = E[e^{-cRT_i}]E[e^{RX_i}] = 1.$$

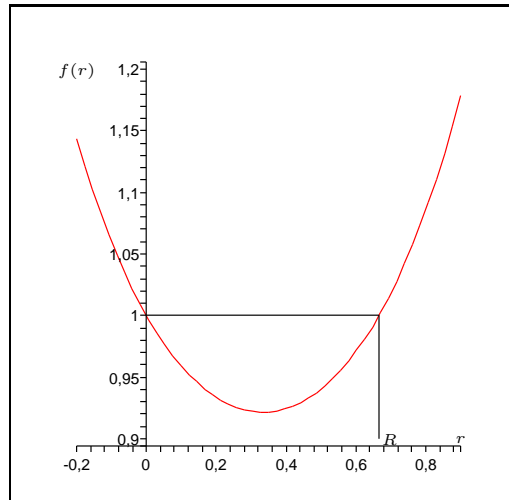
*Demonstração.* Seja  $f(r) = E[e^{-r(cT_i - X_i)}] = E[e^{r(X_i - cT_i)}]$ . Então,  $f(r) > 0$  e  $f(0) = E(e^0) = 1$ . Seja  $f'(r) = \frac{df(r)}{dr} = E[(X_i - cT_i)e^{r(X_i - cT_i)}]$ , logo  $f'(0) = E[(X_i - cT_i)e^0] = E[X_i] - E[cT_i] < 0$ , por hipótese. Sabemos que  $f''(r) = E[(X_i - cT_i)^2 e^{r(X_i - cT_i)}] > 0$ . Portanto,  $f''(r)$  é uma função convexa e tendo a possibilidade de existir um mínimo em  $f(r)$ . Admita que  $E[e^{X_i r}]$  existe para  $r < \gamma$  e suponha que  $\gamma < \infty$ . Assim,

$$\lim_{r \rightarrow \gamma^-} f(r) = \lim_{r \rightarrow \gamma^-} E[e^{r(X_i - cT_i)}] = \lim_{r \rightarrow \gamma^-} E[e^{-c\gamma T_i}] \lim_{r \rightarrow \gamma^-} E[e^{rX_i}] \rightarrow \infty.$$

Portanto,  $f(r)$  é decrescente na vizinhança de zero e depois cresce, tendo um ponto mínimo no valor anterior a  $r = R$  e  $f(R) = E[e^{R(X_i - cT_i)}] = 1$ .  $\square$

Na Figura 6.1 adiante apresentamos uma ilustração do coeficiente de ajustamento quando  $c = 1,5$ , o tempo entre as ocorrências sucessivas das indenizações têm distribuição Gama(2; 2) e as indenizações particulares têm distribuição Gama(2; 2).

Figura 6.1: O coeficiente de ajustamento quando o modelo de reserva é não poissoniano.



**Teorema 9.** *Considere que o coeficiente de ajustamento  $R$  existe. Então, a desigualdade de Lundberg é dada por*

$$\psi(u) \leq e^{-Ru}.$$

*Demonstração.* Utilizamos o mesmo raciocínio desenvolvido no Teorema 2 da Seção 3.2. Considerando que a ruína ocorre na primeira indenização, por definição temos que o tempo que decorre até a primeira indenização tem função de densidade  $k(t)$ . Então

$$\begin{aligned} \psi_1(u) &= P([0 < T < \infty] \cap [U(t) < 0]) = P([0 < T < \infty] \cap [u + ct - S(t) < 0]) \\ &= P([0 < T < \infty] \cap [X_1 > u + ct]) = \int_0^\infty k(t) \int_{u+ct}^\infty p(x) dx dt. \end{aligned}$$

Como  $R$  é positivo pelo Teorema 8 e  $x > u + ct$ ; logo  $u + ct - x < 0$ , implicando que  $e^{-R(u+ct-x)}$  seja um valor maior que um. Assim,

$$\psi_1(u) \leq \int_0^\infty k(t) \int_{u+ct}^\infty e^{-R(u+ct-x)} p(x) dx dt.$$

Aumentando o limite da integração, obtemos

$$\begin{aligned} \psi_1(u) &\leq \int_0^\infty k(t) \int_0^\infty e^{-R(u+ct-x)} p(x) dx dt = e^{-Ru} \int_0^\infty k(t) e^{-Rct} \int_0^\infty e^{Rx} p(x) dx dt \\ &= e^{-Ru} E(e^{-cRT_i}) E(e^{RX_i}) = e^{-Ru}; \end{aligned}$$

pois o produto destes dois valores esperados é igual a 1, de acordo com o Teorema 8.

Para  $n=2$ . Seguindo o raciocínio análogo ao anterior, sendo que a ruína só pode acontecer na primeira indenização ou na segunda indenização, então:

$$\psi_2(u) = P([0 < T < \infty] \cap [X_1 > u + ct]) + P([0 < T < \infty] \cap [X_1 < u + ct] \cap (X_2 \text{ ocorre ruína})).$$

Pois, se a ruína ocorreu na primeira indenização, conseqüentemente, a segunda indenização ocorrerá com o sistema em ruína com probabilidade um.

$$\psi_2(u) = \int_0^\infty k(t) \int_{u+ct}^\infty p(x) \cdot 1 dx dt + \int_0^\infty k(t) \int_0^{u+ct} p(x) \psi_1(u + ct - x) dx dt$$

$$\begin{aligned}
\psi_2(u) &\leq \int_0^\infty k(t) \int_{u+ct}^\infty e^{-R(u+ct-x)} p(x) dx dt + \int_0^\infty k(t) \int_0^{u+ct} e^{-R(u+ct-x)} p(x) dx dt \\
&= \int_0^\infty k(t) \left[ \int_{u+ct}^\infty e^{-R(u+ct-x)} p(x) dx dt + \int_0^{u+ct} e^{-R(u+ct-x)} p(x) dx dt \right] \\
&= \int_0^\infty k(t) \int_0^\infty e^{-R(u+ct-x)} p(x) dx dt = e^{-Ru} \int_0^\infty e^{-Rct} k(t) dt \int_0^\infty e^{Rx} p(x) dx \\
&= e^{-Ru} E(e^{-cRT_i}) E(e^{RX_i}) = e^{-Ru},
\end{aligned}$$

como visto em  $\psi_1(u)$ . Supondo válido para  $n$ , temos que provar para  $n+1$ . De forma semelhante ao raciocínio desenvolvido acima e, considerando agora que a ruína acontece na primeira ou nas  $n$  indenizações seguintes, temos

$$\begin{aligned}
\psi_{n+1}(u) &= \int_0^\infty k(t) \int_{u+ct}^\infty p(x) dx dt + \int_0^\infty k(t) \int_0^{u+ct} p(x) \psi_n(u+ct-x) dx dt \\
&\leq \int_0^\infty k(t) \int_{u+ct}^\infty e^{-R(u+ct-x)} p(x) dx dt + \int_0^\infty k(t) \int_0^{u+ct} e^{-R(u+ct-x)} p(x) dx dt \\
&= \int_0^\infty k(t) \left[ \int_{u+ct}^\infty e^{-R(u+ct-x)} p(x) dx dt + \int_0^{u+ct} e^{-R(u+ct-x)} p(x) dx dt \right] \\
&= \int_0^\infty k(t) \int_0^\infty e^{-R(u+ct-x)} p(x) dx dt = e^{-Ru} \int_0^\infty k(t) e^{-Rct} dt \int_0^\infty e^{Rx} p(x) dx \\
&= e^{-Ru} E(e^{-cRT_i}) E(e^{RX_i}) = e^{-Ru}.
\end{aligned}$$

Portanto,  $\psi_n(u) \leq e^{-Ru}$  e, por conseqüência,  $\delta_n(u) \geq 1 - e^{-Ru}$ .  $\square$

## 6.2 Equações Funcionais para a Probabilidade da Ruína

**Teorema 10.** Para  $u \geq 0$ , a equação de  $\psi(u)$  é dada por

$$\psi(u) = \int_0^\infty k(t)(1 - P(u+ct))dt + \int_0^\infty k(t) \int_0^{u+ct} p(x)\psi(u+ct-x)dxdt,$$

ou, de forma equivalente em termos da probabilidade de não ruína eventual,  $\delta(u) = 1 - \psi(u)$ ,

$$\delta(u) = \int_0^\infty k(t) \int_0^\infty \int_0^{u+ct} p(x)\delta(u+ct-x)dxdt. \quad (6.2)$$

Uma outra forma equivalente, para  $\delta(u)$ , é dada por

$$c\delta(u) = \int_0^\infty k\left(\frac{v-u}{c}\right) \int_0^v p(x)\delta(v-x)dx dv.$$

*Demonstração.* Seguimos o mesmo raciocínio desenvolvido na Seção 3.3, neste caso com  $X$  representando a soma dos valores de todas indenizações particulares. Além disso, as indenizações ocorrem de acordo com um processo de renovação e o tempo entre as chegadas sucessivas do montante das indenizações tem função densidade  $k(t)$ . Deste modo, temos que

$$\begin{aligned}\psi(u) &= P(0 < T < \infty \cap U(t) < 0 | U(0) = u) = P(0 < T < \infty \cap \sum_{i=1}^n X_i > u + c \sum_{i=1}^n T_i) \\ &= \int_0^\infty k(t) \int_{u+ct}^\infty p(x) dx dt + \int_0^\infty k(t) \int_0^{u+ct} p(x) \psi(u + ct - x) dx dt \\ &= \int_0^\infty k(t) (1 - P(u + ct)) dt + \int_0^\infty k(t) \int_0^{u+ct} p(x) \psi(u + ct - x) dx dt.\end{aligned}$$

E, para encontrar a equação (6.2) é necessário fazer a seguinte relação  $\delta(u) = 1 - \psi(u)$ . Assim, podemos escrever

$$\begin{aligned}\delta(u) &= 1 - \psi(u) \\ &= 1 - \left[ \int_0^\infty k(t) (1 - P(u + ct)) dt + \int_0^\infty k(t) \int_0^{u+ct} p(x) (1 - \delta(u + ct - x)) dx dt \right] \\ &= 1 - \int_0^\infty k(t) dt + \int_0^\infty k(t) P(u + ct) dt - \int_0^\infty k(t) \int_0^{u+ct} p(x) dx dt \\ &\quad + \int_0^\infty k(t) \int_0^{u+ct} p(x) \delta(u + ct - x) dx dt,\end{aligned}$$

sendo que a primeira integral do segundo membro da igualdade é igual a 1, pois corresponde à função de distribuição de densidade de probabilidade do tempo entre chegadas sucessivas de indenizações na seguradora. Então,

$$\begin{aligned}\delta(u) &= \int_0^\infty k(t) P(u + ct) dt - \int_0^\infty k(t) \int_0^{u+ct} p(x) dx dt + \int_0^\infty k(t) \int_0^{u+ct} p(x) \delta(u + ct - x) dx dt \\ &= \int_0^\infty k(t) P(u + ct) dt - \int_0^\infty k(t) [P(u + ct) - P(0)] dt + \int_0^\infty k(t) \int_0^{u+ct} p(x) \delta(u + ct - x) dx dt.\end{aligned}$$

Como  $P(0) = 0$ , temos:

$$\delta(u) = \int_0^\infty k(t) \int_0^{u+ct} p(x) \delta(u + ct - x) dx dt.$$

Fazendo uma mudança de variável da forma  $u + ct = v$ , logo  $t = \frac{v-u}{c}$  e  $dt = \frac{1}{c} dv$ . Obtemos,

$$c\delta(u) = \int_u^\infty k\left(\frac{v-u}{c}\right) \int_0^v p(x) \delta(v-x) dx dv.$$

□

Neste capítulo, temos inicialmente como objetivo comparar algumas aproximações existentes na literatura para a probabilidade da ruína eventual. Algumas dessas aproximações já foram comparadas por alguns pesquisadores como Colin M. Ramsay e Jan Grandell.

Ramsay (1992) mostrou através de resultados numéricos que quando a reserva inicial variaram entre 0,10 e 10,  $\theta = 0,25$  e as indenizações particulares tinham função de densidade Gama ( $\alpha = 0,5; \beta = 0,5$ ), as estimativas de De Vylder apresentaram, de forma geral, menores erros relativos quando comparadas com as aproximações de Beekman-Bowers e Cramér-Lundberg. Por outro lado, quando as indenizações particulares têm função de densidade Gama ( $\alpha = 2; \beta = 2$ ), Gama ( $\alpha = 2,75; \beta = 2,75$ ) ou Gama ( $\alpha = 10; \beta = 10$ ), as estimativas de Cramér-Lundberg apresentaram, de forma geral, menores erros relativos quando comparadas com as aproximações de Beekman-Bowers e De Vylder. Ele mostrou também que quando  $u$  variou entre 300 a 3000,  $\theta = 0,1$  e as indenizações particulares tinham função de densidade Gama ( $\alpha = 0,01; \beta = 0,01$ ), a aproximação de Cramér-Lundberg apresentou sempre menor erro relativo quando comparada com as aproximações de Beekman-Bowers e De Vylder.

O mesmo autor mostrou ainda que quando  $\theta$  variou entre 0,05 a 1,  $u = 100$  e as indenizações particulares tinham função de densidade lognormal com os primeiros quatro momentos dados por  $p_1 = 1$ ,  $p_2 = 25,53372$ ,  $p_3 = 16647,24$  e  $p_4 = e^{19,44}$ , as estimativas de Beekman-Bowers apre-



sentavam, de forma geral, menor erro relativo do que a aproximação de De Vylder. Entretanto, quando fixou-se  $u = 1000$  e variou-se  $\theta$  entre 0,05 e 0,3, as estimativas De Vylder apresentaram menores erros relativos quando comparadas com as estimativas de Beekman-Bowers, exceto quando  $\theta$  foi igual a 0,05.

Grandell (2000) mostrou através de resultados numéricos que quando  $u$  variou entre 0 a 3000,  $\theta = 0,10$  e as indenizações particulares tinham função de densidade gama com os primeiros quatro momentos dados por  $p_1 = 1$ ,  $p_2 = 101$ ,  $p_3 = 20301$  e  $p_4 = 6110602$ , as estimativas de Cramér-Lundberg apresentaram resultados exatos para a probabilidade da ruína. Entretanto, ao comparar as aproximações de De Vylder e Beekman-Bowers com outras aproximações, as estimativas de De Vylder apresentaram, em termos do erro relativo, melhores estimativas para a probabilidade da ruína, salvo para os casos em que a reserva inicial foi igual a 0 ou 300. O mesmo autor mostrou também que para o caso em que  $u$  é fixado em 100,  $\theta$  variando entre 0,05 a 0,3 e as indenizações tendo distribuição lognormal com os primeiros três momentos dados por  $p_1 = 1$ ,  $p_2 = 25,53372$  e  $p_3 = 16647,24$ , as estimativas de De Vylder apresentaram erros relativos menores quando comparadas com as aproximações de Beekman-Bowers e outras aproximações.

Nesta dissertação, iremos comparar as aproximações de De Vylder, Beekman-Bowers, Cramér-Lundberg e o limitante superior de Lundberg para o caso em que as indenizações particulares têm função densidade de probabilidade exponencial, gama, lognormal e pareto. As duas primeiras e as duas últimas representam um exemplo de distribuições com caudas leves e caudas pesadas, respectivamente. Além disso, vamos variar os parâmetros das funções densidade de probabilidade das indenizações, a taxa do número de ocorrências das indenizações ( $\lambda$ ), bem como as constantes relacionadas com o valor do prêmio ( $c$ ) e o valor da reserva inicial ( $u$ ). O objetivo de variar tais parâmetros e constantes presentes no modelo de Cramér-Lundberg é para avaliar a qualidade das estimativas das aproximações com a probabilidade exata ou simulada da probabilidade da ruína eventual.

Para avaliar a qualidade das aproximações de De Vylder, Beekman-Bowers e Cramér-Lundberg e o limitante superior de Lundberg foram calculados os erros relativos  $\varepsilon_{DL}$ ,  $\varepsilon_{BB}$ ,  $\varepsilon_{CL}$  e  $\varepsilon_L$  para

cada aproximação, definido como:

$$\varepsilon_A = \left| \frac{\psi(u) - \psi_A(u)}{\psi(u)} \right|,$$

em que  $\psi(u)$  e  $\psi_A(u)$  são as probabilidades de ruína exata ou simulada e aproximada, respectivamente.

Quando as indenizações particulares têm distribuição exponencial, o valor exato da probabilidade da ruína foi obtido através da sua solução fechada dada em (3.9). Entretanto, quando as indenizações têm distribuição gama, lognormal e pareto, utilizamos simulação de Monte Carlo para obter o seu valor exato.

Primeiramente, os resultados das simulações foram baseados no modelo de reserva de Cramér-Lundberg dado em (2.8). As variáveis aleatórias correspondentes às indenizações particulares foram geradas de forma que o tempo entre chegadas das indenizações fosse exponencialmente distribuídos; desta forma criamos uma trajetória ao longo de um período de tempo definido. Todas as características dos sinistros ocorridos no período de tempo são conhecidas.

Para estimar a probabilidade da ruína utilizamos 50000 iterações. Além disso, consideramos um período de tempo  $t = 500$ ; com este valor se tem um intervalo suficientemente razoável para observar o que ocorre com a trajetória do processo de reserva. Para o cálculo da probabilidade da ruína com os dados gerados aleatoriamente se levou em conta, para cada iteração do processo de risco, a ocorrência de pelo menos um valor negativo para  $U(t)$  durante o período de tempo analisado.

As simulações de Monte Carlo foram realizadas para diferentes valores da reserva inicial, do prêmio, da taxa de ocorrência de indenização e dos parâmetros das funções de densidade das indenizações. Os valores da reserva inicial considerados foram  $u = 0, 1, 2, 3, 5, 10, 15, 20, 30, 50$ .

Posteriormente, foi realizada uma simulação de Monte Carlo baseada no modelo dado por (6.1). Esta simulação foi realizada de forma semelhante às descritas anteriormente sendo que o tempo entre as chegadas das variáveis aleatórias das indenizações particulares foi modelada pela função de densidade gama. As distribuições consideradas para as indenizações foram: gama, lognormal e pareto. Além disso, os valores da reserva inicial utilizados foram

$u = 0, 1, 2, 3, 5, 10, 15, 20, 30, 50$ .

As simulações foram realizadas utilizando 100 mil réplicas de Monte Carlo. Todos os experimentos foram programados utilizando a linguagem de programação matricial `0x` (Doornik, 2001) em sua versão console 4.02 para o sistema operacional Windows. Para o cálculo do coeficiente de ajustamento foi utilizado o *software* Maple em sua versão 9.5.

Vale ressaltar que mesmo utilizando um período de tempo finito  $t = 500$ , as estimativas da probabilidade da ruína simuladas foram muito próximas das probabilidades exatas. Além disso, tem-se a vantagem de ser mais simples do ponto de vista computacional estimar a referida probabilidade usando o tempo finito do que com o tempo infinito.

Nas Tabelas 7.1 a 7.19 e Figuras 7.1 a 7.19 são apresentados os resultados numéricos das estimativas da probabilidade da ruína exata ou simulada, das estimativas do limitante superior de Lundberg ( $\psi_L(u)$ ) e das estimativas das aproximações de De Vylder ( $\psi_{DL}(u)$ ), Beekman-Bowers ( $\psi_{BB}(u)$ ) e Cramér-Lundberg ( $\psi_{CL}(u)$ ) e os erros relativos  $\varepsilon_L$ ,  $\varepsilon_{DL}$ ,  $\varepsilon_{BB}$  e  $\varepsilon_{CL}$  para cada aproximação considerada. Estas tabelas e figuras referem-se aos resultados da simulação baseados no modelo de reserva de Cramér-Lundberg e foram agrupadas para cada distribuição das indenizações particulares.

A Tabela 7.20 e a Figura 7.20 apresentam os resultados numéricos das estimativas simuladas da probabilidade da ruína para indenizações com distribuição gama, pareto e lognormal, para o caso em que o tempo entre ocorrências sucessivas de indenizações têm função densidade gama e diferentes valores da reserva inicial.

#### 1. Indenizações com Distribuição Exponencial

As Tabelas 7.1 e 7.2 apresentam os resultados numéricos das estimativas exatas da probabilidade da ruína, as estimativas da aproximação de Beekman-Bowers e o limitante superior de Lundberg e os respectivos erros relativos, para o caso em que as indenizações particulares são variáveis aleatórias com função de densidade exponencial de parâmetro  $\beta = 0,5$ , a taxa do número de ocorrência de indenizações por unidade de tempo é igual a um e  $\theta = 0,5$ . Na Tabela 7.1 e Figura 7.1 fixamos  $c = 3$  e variamos a reserva inicial e, na Tabela 7.2 e Figura 7.2 fixamos

$u = 2$  e variamos o valor do prêmio. Observamos que, em termos do erro relativo, a aproximação de Beekman-Bowers apresentou menor erro relativo quando comparado com o limitante superior de Lundberg, exceto quando o valor da reserva inicial foi maior que 20. Notamos também que os erros relativos das estimativas de  $\psi_L(u)$  e  $\psi_{BB}(u)$  aumentam conforme o valor de  $c$  aumenta.

Observamos ainda, como esperado, que a probabilidade de ruína diminui quando fixamos  $c = 3$  e aumentamos a reserva inicial; o mesmo comportamento foi verificado quando aumentamos o valor do prêmio e fixamos o valor da reserva inicial em dois.

Vale ressaltar que, para todos os valores de  $c$ , a aproximação de Beekman-Bowers apresentou estimativas sempre menores que as estimativas exatas da probabilidade da ruína, ao contrário do que ocorreu com o limitante superior de Lundberg, ou seja, esta aproximação, como esperado, apresentou estimativas sempre acima das estimativas exatas da probabilidade de ruína, como mostra a Figura 7.2.

Tabela 7.1: Estimativas da probabilidade da ruína para indenizações com distribuição Exponencial(0, 5), aproximação de Beekman-Bowers e o limitante superior de Lundberg e, respectivos erros relativos. Para  $\lambda = 1$ ,  $\theta = 0,5$ ,  $c = 3$  e diversos valores de  $u$ .

$u$	$\psi(u)$	$\psi_{BB}(u)$	$\psi_L(u)$	$\varepsilon_{BB}$	$\varepsilon_L$
0	0,66667	0,66667	1,00000	0,00000	0,49999
1	0,56432	0,52203	0,84648	0,07494	0,50000
2	0,47769	0,43563	0,71653	0,08805	0,49999
3	0,40435	0,36883	0,60653	0,08784	0,50001
5	0,28973	0,26988	0,43460	0,06851	0,50002
10	0,12592	0,13028	0,18888	0,03463	0,50000
15	0,05472	0,06502	0,08209	0,18807	0,50001
20	0,02378	0,03298	0,03567	0,38670	0,49998
30	0,00449	0,00872	0,00674	0,94032	0,49998
50	0,00016	0,00064	0,00024	3,00418	0,49997

Figura 7.1: Estimativas da probabilidade da ruína para indenizações com distribuição Exponencial(0, 5), aproximação de Beekman-Bowers e o limitante superior de Lundberg. Para  $\lambda = 1$ ,  $\theta = 0,5$ ,  $c = 3$  e diversos valores da reserva inicial.

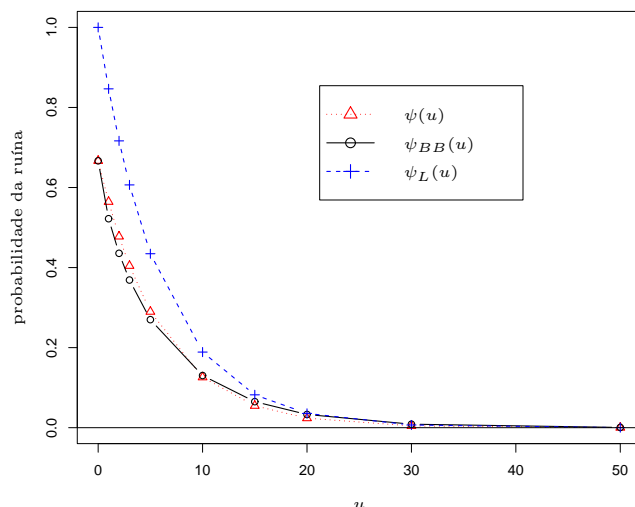
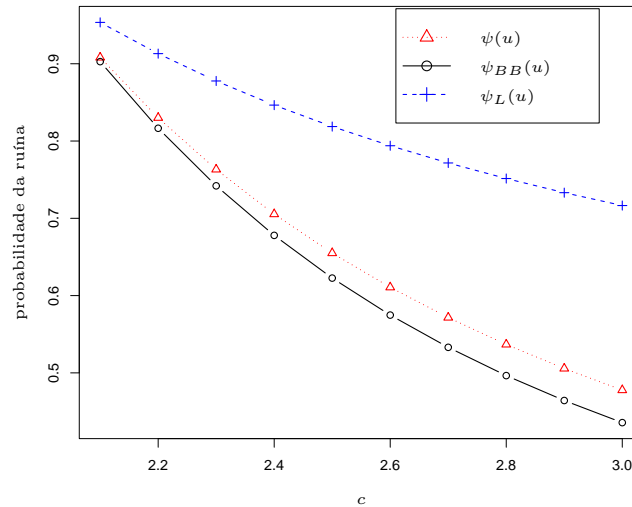


Tabela 7.2: Estimativas da probabilidade da ruína para indenizações com distribuição Exponencial(0, 5), aproximação de Beekman-Bowers e o limitante superior de Lundberg e, respectivos erros relativos. Para  $\lambda = 1$ ,  $u = 2$  e diversos valores de  $c$ .

$c$	$\psi(u)$	$\psi_{BB}(u)$	$\psi_L(u)$	$\theta$	$\varepsilon_{BB}$	$\varepsilon_L$
2,1	0,90809	0,90274	0,95350	0,05	0,00589	0,05001
2,2	0,83009	0,81652	0,91310	0,10	0,01635	0,10000
2,3	0,76323	0,74202	0,87771	0,15	0,02779	0,14999
2,4	0,70540	0,67792	0,84648	0,20	0,03896	0,20000
2,5	0,65498	0,62265	0,81873	0,25	0,04936	0,25001
2,6	0,61071	0,57477	0,79392	0,30	0,05885	0,30000
2,7	0,57157	0,53305	0,77162	0,35	0,06739	0,35000
2,8	0,53677	0,49647	0,75148	0,40	0,07508	0,40000
2,9	0,50565	0,46423	0,73319	0,45	0,08191	0,45000
3,0	0,47769	0,43563	0,71653	0,50	0,08805	0,49999

Figura 7.2: Estimativas da probabilidade da ruína para indenizações com distribuição Exponencial(0, 5), aproximação de Beekman-Bowers e o limitante superior de Lundberg. Para  $\lambda = 1$ ,  $u = 2$  e diversos valores de  $c$ .



As Tabelas 7.3 e 7.4 adiante apresentam os resultados numéricos das estimativas exatas da probabilidade da ruína, as estimativas do limitante superior de Lundberg, as estimativas da aproximação de Beekman-Bowers e os respectivos erros relativos, para o caso em que a reserva inicial é igual a dois, o prêmio igual a três e as indenizações particulares são variáveis aleatórias com função de densidade exponencial. Sendo que na Tabela 7.3 e Figura 7.3 fixamos  $\lambda = 1$  e variamos o valor médio das indenizações particulares que chegam na seguradora e, na Tabela 7.4 e Figura 7.4, fixamos  $\beta = 0,5$  e variamos a taxa do número de ocorrência de indenizações por unidade de tempo. Mais uma vez, em termos do erro relativo, a aproximação de Beekman-Bowers apresentou resultados melhores quando comparado com as estimativas de Lundberg com valores sempre superiores às estimativas exatas. Verificamos também que os erros relativos das estimativas de  $\psi_L(u)$  e  $\psi_{BB}(u)$  aumentam conforme cresce o valor de  $\beta$ . Entretanto, quando diminuimos o valor de  $\lambda$  os erros relativos das estimativas de  $\psi_{BB}(u)$  e  $\psi_{DV}(u)$  crescem. É interessante notar que quando o valor da estimativa da probabilidade da ruína cresce tanto os erros relativos de  $\psi_{BB}(u)$  quanto de  $\psi_L(u)$  tendem a diminuir.

Notamos ainda, como esperado, que a probabilidade de ruína diminui quando fixamos  $\lambda = 1$  e aumentamos o valor de  $\beta$ . Por outro lado, quando fixamos  $\beta$  em 0,5 e aumentamos  $\lambda$ , a probabilidade da ruína aumenta, como esperado.

Tabela 7.3: Estimativas da probabilidade da ruína para indenizações com distribuição Exponencial( $\beta$ ), aproximação de Beekman-Bowers e o limitante superior de Lundberg e, os respectivos erros relativos. Para  $\lambda = 1$ ,  $u = 2$ ,  $c = 3$  e diversos valores de  $\beta$ .

$\beta$	$\psi(u)$	$\psi_{BB}(u)$	$\psi_L(u)$	$\theta$	$\varepsilon_{BB}$	$\varepsilon_L$
0,40	0,72931	0,70331	0,87517	0,20	0,03565	0,20000
0,41	0,69743	0,66803	0,85784	0,23	0,04215	0,23000
0,42	0,66735	0,63500	0,84086	0,26	0,04848	0,26000
0,43	0,63892	0,60409	0,82421	0,29	0,05451	0,29001
0,45	0,58658	0,54804	0,79189	0,35	0,06570	0,35001
0,46	0,56247	0,52263	0,77621	0,38	0,07083	0,38000
0,47	0,53960	0,49879	0,76084	0,41	0,07563	0,41001
0,48	0,51790	0,47642	0,74577	0,44	0,08009	0,43999
0,49	0,49728	0,45540	0,73101	0,47	0,08422	0,47002
0,50	0,47769	0,43563	0,71653	0,50	0,08805	0,49999

Figura 7.3: Estimativas da probabilidade da ruína para indenizações com distribuição Exponencial( $\beta$ ), aproximação de Beekman-Bowers e o limitante superior de Lundberg. Para  $\lambda = 1$ ,  $u = 2$ ,  $c = 3$  e diversos valores de  $\beta$ .

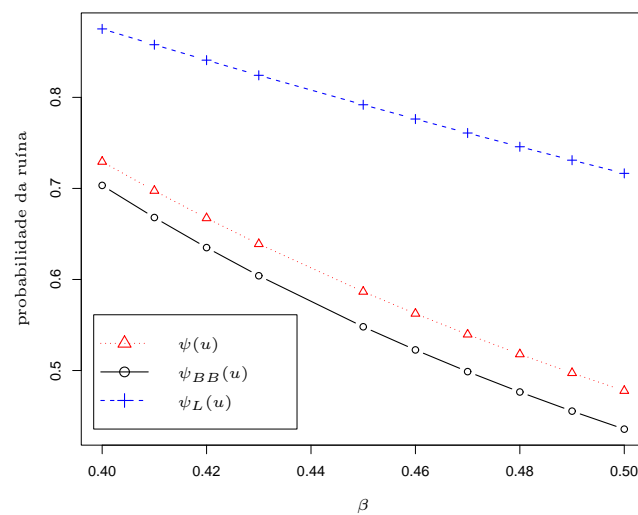
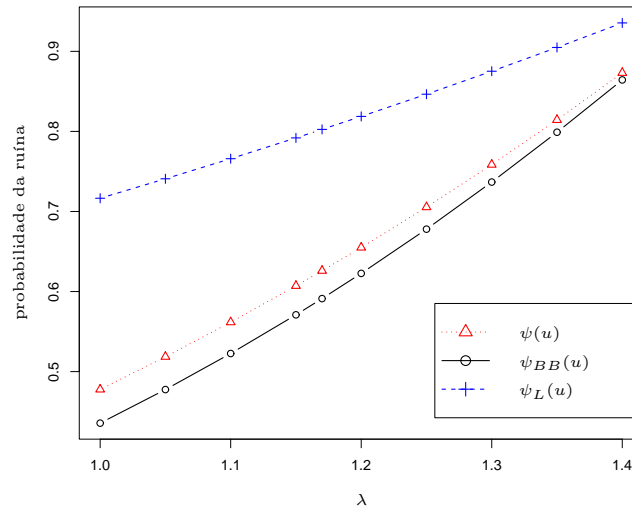


Tabela 7.4: Estimativas da probabilidade da ruína para indenizações com distribuição Exponencial(0, 5), aproximação de Beekman-Bowers e o limitante superior de Lundberg e, respectivos erros relativos. Para  $u = 2$ ,  $c = 3$  e diversos valores de  $\lambda$ .

$\lambda$	$\psi(u)$	$\psi_{BB}(u)$	$\psi_L(u)$	$\theta$	$\varepsilon_{BB}$	$\varepsilon_L$
1,00	0,47769	0,43563	0,71653	0,50	0,08805	0,49999
1,05	0,51857	0,47756	0,74082	0,43	0,07908	0,42858
1,10	0,56168	0,52260	0,76593	0,36	0,06958	0,36364
1,15	0,60712	0,57091	0,79189	0,30	0,05964	0,30434
1,17	0,62596	0,59119	0,80252	0,28	0,05555	0,28206
1,20	0,65498	0,62265	0,81873	0,25	0,04936	0,25001
1,25	0,70540	0,67792	0,84648	0,20	0,03896	0,20000
1,30	0,75848	0,73674	0,87517	0,15	0,02866	0,15385
1,35	0,81435	0,79898	0,90484	0,11	0,01887	0,11112
1,40	0,87314	0,86430	0,93551	0,07	0,01012	0,07143

Figura 7.4: Estimativas da probabilidade da ruína para indenizações com distribuição Exponencial(0, 5), aproximação de Beekman-Bowers e o limitante superior de Lundberg. Para  $u = 2$ ,  $c = 3$  e diversos valores de  $\lambda$ .





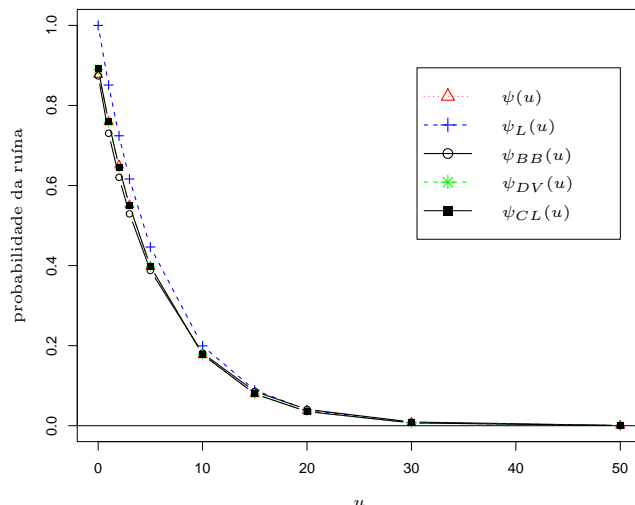
## 2. Indenizações com Distribuição Gama

Na Tabela 7.5 e Figura 7.5 encontram-se os resultados numéricos das estimativas simuladas da probabilidade da ruína para indenizações com distribuição Gama(2, 5; 2, 2), as estimativas do limitante superior de Lundberg, as estimativas das aproximações de De Vylder, Beekman-Bowers e Cramér-Lundberg e, os respectivos erros relativos, para  $\lambda = 1$ ,  $\theta = 0,14$ ,  $c = 1,3$  e diversos valores da reserva inicial. Notamos que a aproximação de Cramér-Lundberg apresentou, de forma geral, menor erro relativo quando comparado com as aproximações de  $\psi_{DV}(u)$ ,  $\psi_{BB}(u)$  e  $\psi_L(u)$ . Observamos também, como esperado, que o limitante superior de Lundberg apresentou estimativas sempre superiores às estimativas simuladas para a probabilidade da ruína. Além disto, como esperado, verificamos que a probabilidade de ruína diminui conforme aumentamos o valor da reserva inicial.

Tabela 7.5: Estimativas simuladas da probabilidade da ruína para indenizações com distribuição Gama(2, 5; 2, 2), o limitante superior de Lundberg, as aproximações de Beekman-Bowers, De Vylder e Cramér-Lundberg e, respectivos erros relativos. Para  $\lambda = 1$ ,  $\theta = 0,14$ ,  $c = 1,3$  e diversos valores de  $u$ .

$u$	$\psi(u)$	$\psi_L(u)$	$\psi_{BB}(u)$	$\psi_{DV}(u)$	$\psi_{CL}(u)$	$\varepsilon_L$	$\varepsilon_{BB}$	$\varepsilon_{DV}$	$\varepsilon_{CL}$
0	0,87662	1,00000	0,87413	0,89013	0,89208	0,14075	0,00284	0,01541	0,01764
1	0,75909	0,85103	0,73056	0,75766	0,75918	0,12112	0,03758	0,00188	0,00012
2	0,65045	0,72425	0,62048	0,64490	0,64608	0,11346	0,04608	0,00853	0,00672
3	0,55081	0,61636	0,52932	0,54892	0,54984	0,11901	0,03902	0,00343	0,00176
5	0,39710	0,44639	0,38776	0,39769	0,39822	0,12412	0,02352	0,00149	0,00282
10	0,17636	0,19927	0,18121	0,17768	0,17776	0,12990	0,02750	0,00748	0,00794
15	0,07901	0,08895	0,08563	0,07938	0,07935	0,12583	0,08384	0,00472	0,00433
20	0,03631	0,03971	0,04069	0,03547	0,03542	0,09358	0,12068	0,02324	0,02446
30	0,00696	0,00791	0,00927	0,00708	0,00706	0,13685	0,33220	0,01716	0,01415
50	0,00021	0,00031	0,00049	0,00028	0,00028	0,49614	1,33362	0,34319	0,33467

Figura 7.5: Estimativas simuladas da probabilidade da ruína para indenizações com distribuição Gama(2, 5; 2, 2), o limitante superior de Lundberg e as aproximações de Beekman-Bowers, De Vylder e Cramér-Lundberg. Para  $\lambda = 1$ ,  $\theta = 0, 14$ ,  $c = 1, 3$  e diversos valores de  $u$ .



Nas Tabelas 7.6 e 7.7 estão apresentados os resultados numéricos das estimativas simuladas da probabilidade da ruína para indenização com distribuição Gama(2, 5; 2, 2), o limitante superior de Lundberg, as aproximações de De Vylder, Beekman-Bowers e Cramér-Lundberg e, os respectivos erros relativos quando  $u = 2$ . Na Tabela 7.6 e Figura 7.6 fixamos  $\lambda = 1$  e variamos o valor do prêmio  $e$ , na Tabela 7.7 e Figura 7.7, fixamos  $c = 1, 3$  e variamos a taxa do número de ocorrência de indenizações por unidade de tempo. Novamente, verificamos que a aproximação de Cramér-Lundberg apresentou menor erro relativo do que as aproximações de  $\psi_{DV}(u)$ ,  $\psi_{BB}(u)$  e  $\psi_L(u)$ , para todos os valores de  $c$  e de  $\lambda$ . Mais uma vez, como esperado, a probabilidade da ruína diminui com aumento do valor do prêmio; por outro lado, quando aumentamos o valor da taxa de ocorrência de indenizações a probabilidade da ruína aumenta.

Observamos também que quando variamos o valor  $c$  e fixamos  $\lambda = 1$  ou variamos o valor de  $\lambda$  e fixamos  $c = 1, 3$ , o limitante superior de Lundberg apresenta estimativas bem acima das estimativas simuladas da probabilidade da ruína, como esperado. Por outro lado, quando variamos  $\lambda$  e fixamos  $c = 1, 3$  as aproximações  $\psi_{DV}(u)$  e  $\psi_{BB}(u)$  apresentam estimativas sempre

abaixo das estimativas simuladas da probabilidade da ruína.

Tabela 7.6: Estimativas simuladas da probabilidade da ruína para indenização com distribuição Gama(2, 5; 2, 2), o limitante superior de Lundberg, as aproximações de Beekman-Bowers, De Vylder e Cramér-Lundberg e, os respectivos erros relativos. Para  $u = 2$ ,  $\lambda = 1$  e diversos valores de  $c$ .

$c$	$\psi(u)$	$\psi_L(u)$	$\psi_{BB}(u)$	$\psi_{DV}(u)$	$\psi_{CL}(u)$	$\theta$	$\varepsilon_L$	$\varepsilon_{BB}$	$\varepsilon_{DV}$	$\varepsilon_{CL}$
1,25	0,73314	0,79318	0,71074	0,73065	0,73137	0,10	0,08189	0,03055	0,00340	0,00241
1,30	0,64814	0,72425	0,62048	0,64490	0,64608	0,14	0,11743	0,04268	0,00500	0,00318
1,35	0,57711	0,66512	0,54671	0,57322	0,57486	0,19	0,15250	0,05268	0,00674	0,00390
1,40	0,5156	0,61399	0,48588	0,51277	0,51482	0,23	0,19083	0,05764	0,00549	0,00151
1,45	0,46428	0,56946	0,43523	0,46138	0,46378	0,28	0,22654	0,06257	0,00625	0,00108
1,50	0,42177	0,53040	0,39265	0,41737	0,42005	0,32	0,25756	0,06904	0,01043	0,00408
1,55	0,38359	0,49594	0,35652	0,37942	0,38233	0,36	0,29289	0,07057	0,01087	0,00328
1,60	0,35000	0,46537	0,32560	0,34648	0,34957	0,41	0,32963	0,06971	0,01006	0,00123
1,65	0,32187	0,43809	0,29895	0,31773	0,32095	0,45	0,36108	0,07121	0,01286	0,00286
1,70	0,29508	0,41365	0,27579	0,29249	0,29581	0,50	0,40182	0,06537	0,00878	0,00247

Figura 7.6: Estimativas simuladas da probabilidade da ruína para indenização com distribuição Gama(2, 5; 2, 2) o limitante superior de Lundberg e as aproximações de Beekman-Bowers, De Vylder e Cramér-Lundberg. Para  $u = 2$ ,  $\lambda = 1$  e diversos valores de  $c$ .

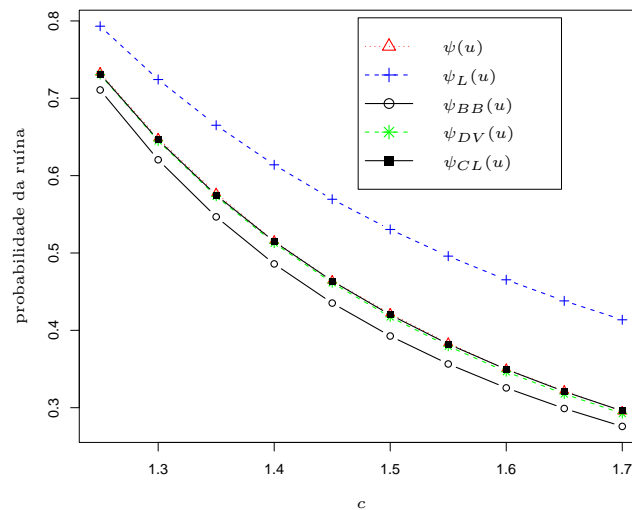
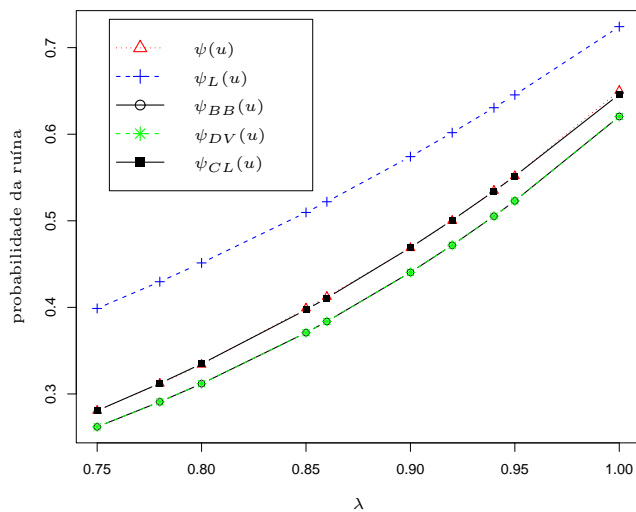


Tabela 7.7: Estimativas simuladas da probabilidade da ruína para indenização com distribuição Gama(2, 5; 2, 2), o limitante superior de Lundberg, as aproximações de Beekman-Bowers, De Vylder e Cramér-Lundberg e, os respectivos erros relativos. Para  $u = 2$ ,  $c = 1, 3$  e diversos valores de  $\lambda$ .

$\lambda$	$\psi(u)$	$\psi_L(u)$	$\psi_{BB}(u)$	$\psi_{DV}(u)$	$\psi_{CL}(u)$	$\theta$	$\varepsilon_L$	$\varepsilon_{BB}$	$\varepsilon_{DV}$	$\varepsilon_{CL}$
0,75	0,28056	0,39873	0,26199	0,27734	0,28070	0,53	0,42119	0,06619	0,01148	0,00050
0,78	0,31194	0,42965	0,29087	0,30895	0,31221	0,47	0,37735	0,06755	0,00959	0,00087
0,80	0,33387	0,45135	0,31180	0,33163	0,33479	0,43	0,35187	0,06610	0,00671	0,00276
0,85	0,39885	0,50962	0,37070	0,39439	0,39721	0,35	0,27772	0,07058	0,01118	0,00411
0,86	0,41218	0,52201	0,38372	0,40805	0,41079	0,33	0,26646	0,06905	0,01002	0,00337
0,90	0,46853	0,57412	0,44043	0,46670	0,46906	0,27	0,22536	0,05997	0,00391	0,00113
0,92	0,49997	0,60179	0,47179	0,49857	0,50071	0,24	0,20365	0,05636	0,00280	0,00148
0,94	0,53470	0,63059	0,50533	0,53223	0,53415	0,22	0,17933	0,05493	0,00462	0,00103
0,95	0,55165	0,64543	0,52296	0,54977	0,55157	0,20	0,17000	0,05201	0,00341	0,00015
1,00	0,65018	0,72425	0,62048	0,64490	0,64608	0,14	0,11392	0,04568	0,00812	0,00631

Figura 7.7: Estimativas simuladas da probabilidade da ruína para indenização com distribuição Gama(2, 5; 2, 2), o limitante superior de Lundberg e as aproximações de Beekman-Bowers, De Vylder e Cramér-Lundberg. Para  $u = 2$ ,  $c = 1, 3$  e diversos valores de  $\lambda$ .



Nas Tabelas 7.8 e 7.9 e, Figuras 7.8 e 7.9 estão apresentadas as estimativas simuladas da probabilidade da ruína, o limitante superior de Lundberg e as aproximações de De Vylder, Beekman-Bowers e Cramér-Lundberg e, os respectivos erros relativos, para o caso em que  $u = 2$ ,  $c = 1, 3$ ,  $\lambda = 1$  e as indenizações particulares têm função de densidade Gama  $(\alpha; \beta)$ . Na Tabela 7.8 fixamos o valor de  $\alpha$  em 2,5 variamos o valor de  $\beta$  e, na Tabela 7.9 fixamos o valor de  $\beta$  em 2,2 e variamos o valor de  $\alpha$ . Observamos que as estimativas de Cramér-Lundberg apresentaram menor erro relativo quando comparadas com as estimativas de  $\psi_{DV}(u)$ ,  $\psi_{BB}(u)$  e  $\psi_L(u)$ , para todos os valores de  $\beta$ . Notamos ainda que conforme cresce o valor de  $\alpha$  a probabilidade da ruína também cresce. Entretanto, quando o valor de  $\beta$  aumenta a probabilidade de ruína diminui.

Por outro lado, quando variamos  $\beta$  e fixamos  $\alpha = 2,5$  ou variamos  $\alpha$  e fixamos  $\beta = 2,2$  a aproximação de  $\psi_{BB}(u)$  apresentou estimativas sempre abaixo das estimativas simuladas da probabilidade da ruína. Além disso, as estimativas de  $\psi_{DV}(u)$  e de  $\psi_{CL}(u)$  estiveram muito próximas das estimativas simuladas da probabilidade da ruína.

Tabela 7.8: Estimativas simuladas da probabilidade da ruína para indenização com distribuição Gama(2, 5;  $\beta$ ), o limitante superior de Lundberg, as aproximações de Beekman-Bowers, De Vylder e Cramér-Lundberg e, respectivos erros relativos. Para  $u = 2$ ,  $\lambda = 1$ ,  $c = 1, 3$  e diversos valores de  $\beta$ .

$\beta$	$\psi(u)$	$\psi_L(u)$	$\psi_{BB}(u)$	$\psi_{DV}(u)$	$\psi_{CL}(u)$	$\theta$	$\varepsilon_L$	$\varepsilon_{BB}$	$\varepsilon_{DV}$	$\varepsilon_{CL}$
2,10	0,75667	0,81485	0,73650	0,75536	0,75600	0,09	0,07689	0,02666	0,00173	0,00089
2,20	0,64814	0,72425	0,62048	0,64490	0,64608	0,14	0,11743	0,04268	0,00500	0,00318
2,30	0,55412	0,64280	0,52486	0,55080	0,55247	0,20	0,16004	0,05280	0,00599	0,00298
2,35	0,51200	0,60528	0,48354	0,50910	0,51096	0,22	0,18219	0,05559	0,00566	0,00203
2,40	0,47484	0,56975	0,44599	0,47061	0,47263	0,25	0,19988	0,06076	0,00891	0,00465
2,50	0,40516	0,50436	0,38072	0,40226	0,40449	0,30	0,24484	0,06032	0,00716	0,00165
2,60	0,34606	0,44593	0,32644	0,34397	0,34628	0,35	0,28859	0,05670	0,00604	0,00064
2,70	0,29606	0,39382	0,28107	0,29425	0,29652	0,40	0,33020	0,05063	0,00611	0,00155
2,80	0,25406	0,34743	0,24295	0,25182	0,25396	0,46	0,36751	0,04373	0,00882	0,00039
2,90	0,21677	0,30617	0,21076	0,21559	0,21754	0,51	0,41242	0,02773	0,00544	0,00355

Figura 7.8: Estimativas simuladas da probabilidade da ruína para indenização com distribuição Gama(2, 5;  $\beta$ ), o limitante superior de Lundberg e as aproximações de Beekman-Bowers, De Vylder e Cramér-Lundberg. Para  $u = 2$ ,  $\lambda = 1$ ,  $c = 1, 3$  e diversos valores de  $\beta$ .

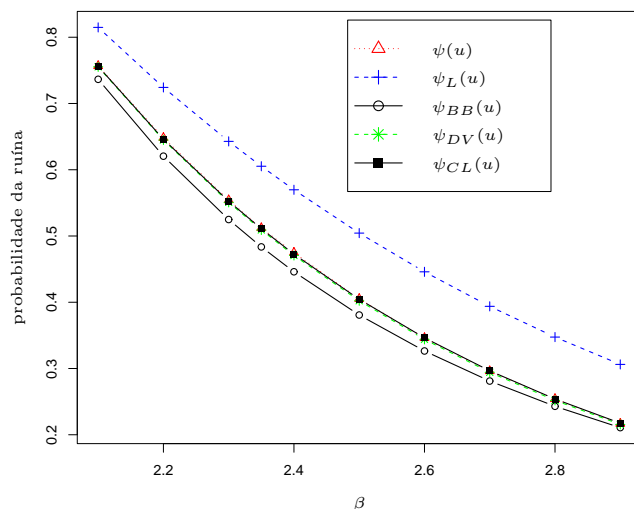
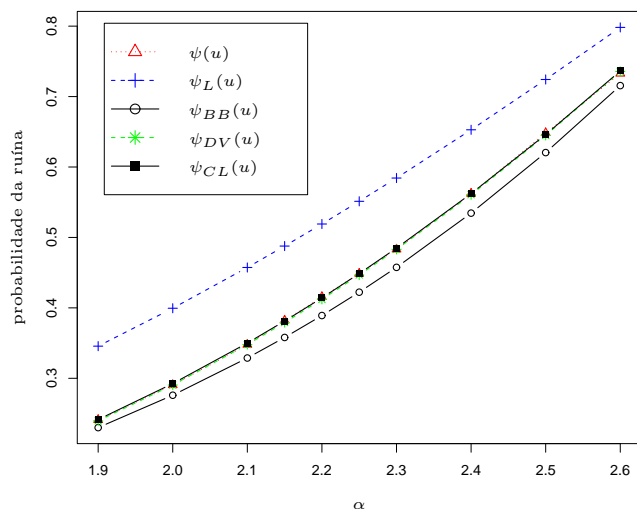


Tabela 7.9: Estimativas simuladas da probabilidade da ruína para indenização com distribuição Gama( $\alpha$ ; 2, 2), o limitante superior de Lundberg, as aproximações de Beekman-Bowers, De Vylder, Cramér-Lundberg e respectivos erros relativos. Para  $\lambda = 1$ ,  $u = 2$ ,  $c = 1, 3$  e diversos valores de  $\alpha$ .

$\alpha$	$\psi(u)$	$\psi_L(u)$	$\psi_{BB}(u)$	$\psi_{DV}(u)$	$\psi_{CL}(u)$	$\theta$	$\varepsilon_L$	$\varepsilon_{BB}$	$\varepsilon_{DV}$	$\varepsilon_{CL}$
1,90	0,24092	0,34564	0,22997	0,23959	0,24144	0,51	0,43467	0,04545	0,00552	0,00216
2,00	0,29040	0,39945	0,27596	0,29048	0,29252	0,43	0,37552	0,04972	0,00028	0,00730
2,10	0,34775	0,45734	0,32880	0,34792	0,35006	0,36	0,31514	0,05449	0,00049	0,00664
2,15	0,38211	0,48774	0,35798	0,37915	0,38128	0,33	0,27644	0,06315	0,00775	0,00217
2,20	0,41542	0,51907	0,38912	0,41207	0,41416	0,30	0,24951	0,06331	0,00806	0,00303
2,25	0,44855	0,55128	0,42227	0,44668	0,44869	0,27	0,22903	0,05859	0,00417	0,00031
2,30	0,48302	0,58434	0,45751	0,48298	0,48488	0,24	0,20976	0,05281	0,00008	0,00385
2,40	0,56210	0,65284	0,53451	0,56062	0,56221	0,19	0,16143	0,04908	0,00263	0,00020
2,50	0,64822	0,72425	0,62048	0,64490	0,64608	0,14	0,11729	0,04279	0,00512	0,00330
2,60	0,73270	0,79821	0,71556	0,73565	0,73639	0,10	0,08941	0,02339	0,00403	0,00504

Figura 7.9: Estimativas simuladas da probabilidade da ruína para indenização com distribuição Gama( $\alpha; 2, 2$ ), o limitante superior de Lundberg e as aproximações de Beekman-Bowers, De Vylder e Cramér-Lundberg. Para  $\lambda = 1$ ,  $u = 2$ ,  $c = 1, 3$  e diversos valores de  $\alpha$ .



### 3. Indenizações com Distribuição Lognormal

As Tabelas 7.10 e 7.11 e, as Figuras 7.10 e 7.11 adiante apresentam os resultados numéricos das estimativas simuladas da probabilidade da ruína, as estimativas das aproximações de De Vylder e Beekman-Bowers e os respectivos erros relativos, para o caso em que  $\lambda = 1$ ,  $\theta = 0,07$  e as indenizações particulares têm função de densidade lognormal com parâmetros  $\mu = 0,4$  e  $\sigma^2 = 0,5$ . Na Tabela 7.10 fixamos  $c$  em 1,8 e variamos os valores da reserva inicial e, na Tabela 7.11, fixamos  $u$  em 2 e variamos os valores dos prêmios. No que diz respeito aos erros relativos, os resultados apresentados levam as seguintes conclusões: em primeiro lugar, observamos que quando variamos os valores de  $u$  as estimativas de Beekman-Bowers apresentaram, de forma geral, menores erros relativos quando comparadas com as estimativas de De Vylder, entretanto, quando  $c$  toma valores maiores que 1,7 as estimativas de De Vylder apresentaram melhores resultados; em segundo lugar, verificamos que os erros relativos das estimativas de  $\psi_{BB}(u)$  aumentam conforme aumentamos o valor de  $c$ .

Tabela 7.10: Estimativas simuladas da probabilidade da ruína para indenização com distribuição Lognormal(0, 4; 0, 5), aproximações de Beekman-Bowers e De Vylder e, respectivos erros relativos. Para  $\lambda = 1$ ,  $\theta = 0,07$ ,  $c = 1,8$  e diversos valores de  $u$ .

$u$	$\psi(u)$	$\psi_{BB}(u)$	$\psi_{DV}(u)$	$\varepsilon_{BB}$	$\varepsilon_{DV}$
0	0,93732	0,93914	0,94745	0,00194	0,01081
1	0,89407	0,88267	0,89534	0,01275	0,00142
2	0,84065	0,83222	0,84609	0,01003	0,00647
3	0,79159	0,78544	0,79956	0,00777	0,01007
5	0,70273	0,70073	0,71403	0,00285	0,01608
10	0,52118	0,52923	0,53812	0,01545	0,03250
15	0,38536	0,40099	0,40555	0,04056	0,05239
20	0,28128	0,30436	0,30563	0,08205	0,08657
30	0,14618	0,17588	0,17359	0,20317	0,18751
50	0,03738	0,05911	0,05600	0,58135	0,49807

Figura 7.10: Estimativas simuladas da probabilidade da ruína para indenização com distribuição Lognormal(0, 4; 0, 5), aproximações de Beekman-Bowers e De Vylder. Para  $\lambda = 1$ ,  $c = 1,8$  e diversos valores de  $u$ .

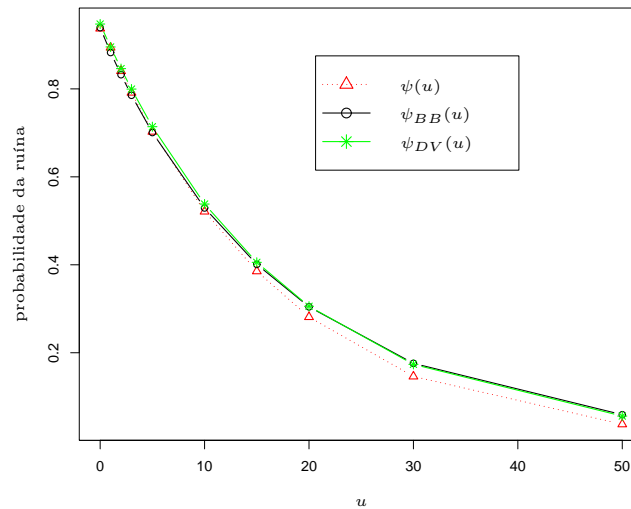
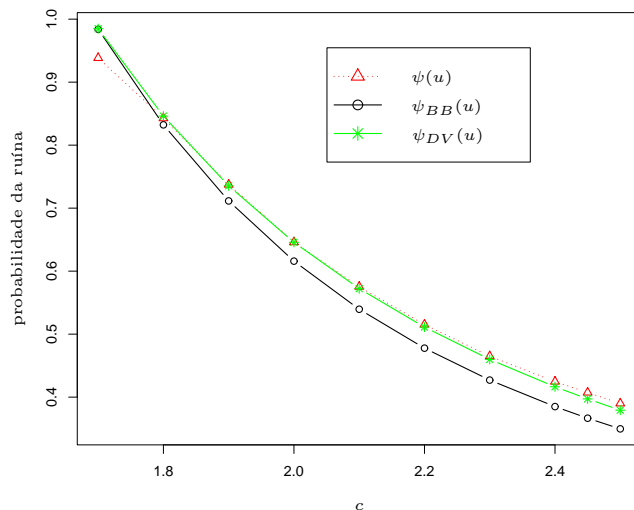




Tabela 7.11: Estimativas simuladas da probabilidade da ruína para indenização com distribuição Lognormal(0, 4; 0, 5), aproximações de Beekman-Bowers e De Vylder e, respectivos erros relativos. Para  $\lambda = 1$ ,  $u = 2$  e diversos valores de  $c$ .

$c$	$\psi(u)$	$\psi_{BB}(u)$	$\psi_{DV}(u)$	$\theta$	$\varepsilon_{BB}$	$\varepsilon_{DV}$
1,70	0,93841	0,98399	0,98494	0,01	0,04857	0,04958
1,80	0,84276	0,83222	0,84609	0,06	0,01251	0,00395
1,90	0,73738	0,71144	0,73538	0,12	0,03518	0,00271
2,00	0,64594	0,61588	0,64576	0,18	0,04654	0,00028
2,10	0,57529	0,53953	0,57222	0,24	0,06216	0,00534
2,20	0,51528	0,47774	0,51116	0,30	0,07285	0,00800
2,30	0,46501	0,42706	0,45989	0,36	0,08161	0,01101
2,40	0,42469	0,38499	0,41644	0,42	0,09348	0,01943
2,45	0,40729	0,36657	0,39716	0,45	0,09998	0,02487
2,50	0,39004	0,34964	0,37929	0,48	0,10358	0,02756

Figura 7.11: Estimativas simuladas da probabilidade da ruína para indenização com distribuição Lognormal(0, 4; 0, 5), aproximações de Beekman-Bowers e De Vylder. Para  $\lambda = 1$ ,  $u = 2$  e diversos valores de  $c$ .



Os dados contidos nas Tabelas 7.12 a 7.14 revelam que a aproximação de De Vylder apresenta menores erros relativos quando comparado com a aproximação de Beekman-Bowers, salvo para o caso em fixamos  $\lambda = 1$ ,  $u = 2$ ,  $c = 1,8$  e  $\sigma^2$  é maior ou igual que 0,55. Verificamos também, como esperado, que quando fixamos  $u = 2$ ,  $\sigma^2 = 0,5$ ,  $c = 1,8$  e aumentamos o valor de  $\lambda$  a

probabilidade da ruína aumenta; o mesmo comportamento foi observado quando fixamos  $u = 2$ ,  $c = 1,8$ ,  $\lambda = 1$ ,  $\sigma^2 = 0,5$  e aumentamos o valor de  $\mu$  ou fixamos  $u = 2$ ,  $c = 1,8$ ,  $\lambda = 1$ ,  $\mu = 0,4$  e aumentamos o valor  $\sigma^2$ .

Tabela 7.12: Estimativas simuladas da probabilidade da ruína para indenização com distribuição Lognormal(0, 4; 0, 5), aproximações de Beekman-Bowers e De Vylder e, respectivos erros relativos. Para  $c = 1,8$ ,  $u = 2$  e diversos valores de  $\lambda$ .

$\lambda$	$\psi(u)$	$\psi_{BB}(u)$	$\psi_{DV}(u)$	$\theta$	$\varepsilon_{BB}$	$\varepsilon_{DV}$
0,75	0,41732	0,29672	0,31332	0,42	0,28899	0,24921
0,80	0,48782	0,36083	0,38197	0,33	0,26032	0,21699
0,85	0,56363	0,43867	0,46295	0,25	0,22171	0,17863
0,88	0,61363	0,49317	0,51822	0,21	0,19631	0,15548
0,90	0,64854	0,53319	0,55812	0,18	0,17786	0,13942
0,94	0,72204	0,62304	0,64585	0,13	0,13711	0,10552
0,95	0,74048	0,6477	0,66955	0,12	0,12530	0,09579
0,98	0,80223	0,72738	0,74516	0,09	0,09330	0,07114
1,00	0,84138	0,78544	0,79956	0,06	0,06649	0,04970
1,05	0,92854	0,94793	0,95076	0,01	0,02088	0,02393

Figura 7.12: Estimativas simuladas da probabilidade da ruína para indenização com distribuição Lognormal(0, 4; 0, 5), aproximações de Beekman-Bowers e De Vylder. Para  $c = 1,8$ ,  $u = 2$  e diversos valores de  $\lambda$ .

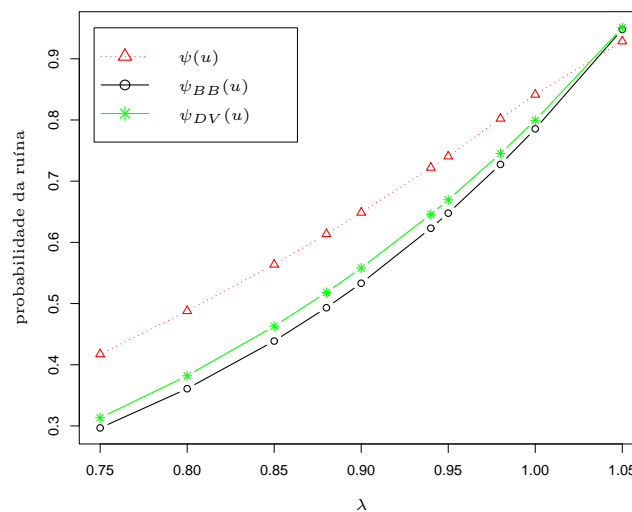


Tabela 7.13: Estimativas simuladas da probabilidade da ruína para indenização com distribuição Lognormal( $\mu; 0, 5$ ), aproximações de Beekman-Bowers e De Vylder e, respectivos erros relativos. Para  $\lambda = 1$ ,  $u = 2$ ,  $c = 1,8$  e diversos valores de  $\mu$ .

$\mu$	$\psi(u)$	$\psi_{BB}(u)$	$\psi_{DV}(u)$	$\theta$	$\varepsilon_{BB}$	$\varepsilon_{DV}$
0,10	0,33173	0,30983	0,32971	0,44	0,06602	0,00609
0,15	0,40011	0,36795	0,39280	0,37	0,08038	0,01827
0,20	0,46697	0,43587	0,46440	0,30	0,06660	0,00550
0,25	0,54601	0,51501	0,54508	0,24	0,05678	0,00170
0,28	0,59892	0,56845	0,59804	0,20	0,05087	0,00147
0,30	0,63613	0,60675	0,63531	0,18	0,04619	0,00129
0,34	0,71570	0,69005	0,71467	0,13	0,03584	0,00144
0,35	0,73753	0,71231	0,73553	0,12	0,03420	0,00271
0,38	0,80190	0,78256	0,80061	0,09	0,02412	0,00161
0,40	0,84327	0,83222	0,84609	0,06	0,01310	0,00334

Figura 7.13: Estimativas simuladas da probabilidade da ruína para indenização com distribuição Lognormal( $\mu; 0, 5$ ), aproximações de Beekman-Bowers e De Vylder. Para  $\lambda = 1$ ,  $u = 2$ ,  $c = 1,8$  e diversos valores de  $\mu$ .

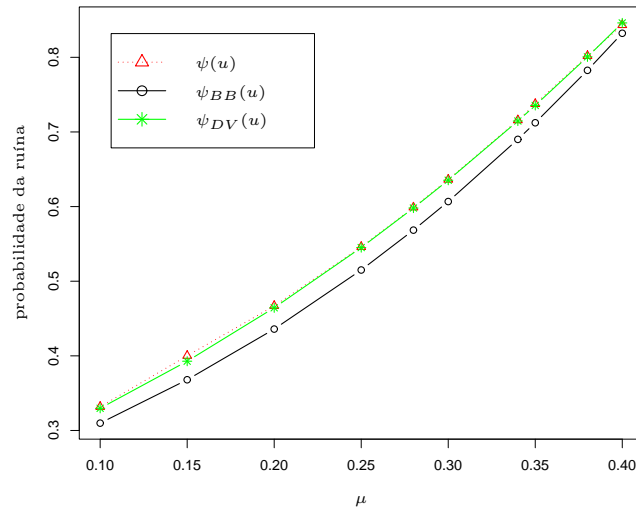
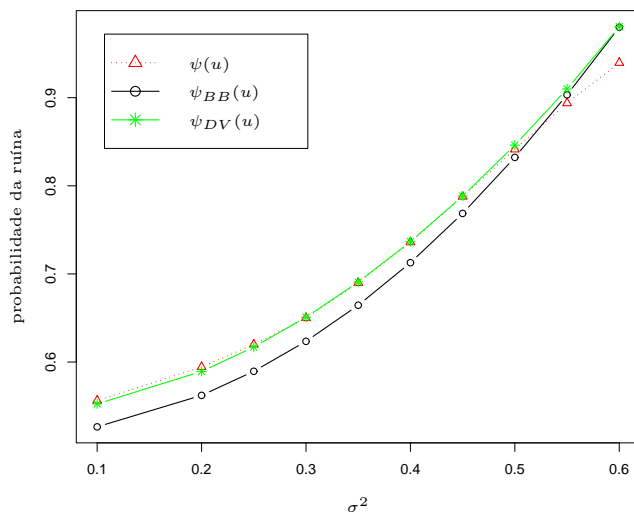


Tabela 7.14: Estimativas simuladas da probabilidade da ruína para indenização com distribuição Lognormal( $0, 4; \sigma^2$ ), aproximações de Beekman-Bowers e De Vylder e, respectivos erros relativos. Para  $\lambda = 1$ ,  $u = 2$ ,  $c = 1,8$  e diversos valores de  $\sigma^2$ .

$\sigma^2$	$\psi(u)$	$\psi_{BB}(u)$	$\psi_{DV}(u)$	$\theta$	$\varepsilon_{BB}$	$\varepsilon_{DV}$
0,10	0,55624	0,52644	0,55245	0,20	0,05357	0,00681
0,20	0,59438	0,56217	0,58934	0,18	0,05419	0,00848
0,25	0,61991	0,5895	0,61703	0,17	0,04906	0,00465
0,30	0,64995	0,62349	0,65085	0,15	0,04071	0,00138
0,35	0,68981	0,66446	0,69073	0,13	0,03675	0,00133
0,40	0,73597	0,71274	0,73660	0,11	0,03156	0,00086
0,45	0,78775	0,76862	0,78838	0,09	0,02428	0,00080
0,50	0,84129	0,83222	0,84609	0,06	0,01078	0,00571
0,55	0,89378	0,90322	0,90997	0,04	0,01056	0,01811
0,60	0,93957	0,97996	0,98062	0,01	0,04299	0,04369

Figura 7.14: Estimativas simuladas da probabilidade da ruína para indenização com distribuição Lognormal( $0, 4; \sigma^2$ ), aproximações de Beekman-Bowers e De Vylder. Para  $\lambda = 1$ ,  $u = 2$ ,  $c = 1,8$  e diversos valores de  $\sigma^2$ .



### 3. Indenizações com Distribuição Pareto

Nas Tabelas 7.15 e 7.16 e, nas Figuras 7.15 e 7.16 estão contidos os resultados numéricos das estimativas simuladas da probabilidade da ruína, aproximações de Beekman-Bowers e De Vylder e respectivos erros relativos, para o caso em que  $\lambda = 1$ ,  $\theta = 0,5$  e as indenizações particulares têm

função de densidade pareto com parâmetros  $k = 3$  e  $\alpha = 4$ . Na Tabela 7.15 e Figura 7.15 fixamos  $c$  em 1,5 e variamos os valores da reserva inicial e na Tabela 7.16 e Figura 7.16 fixamos  $u$  em 2 e variamos os valores dos prêmios. Observamos que quando  $u$  está entre 15 e 30 as estimativas de De Vylder apresentam menores erros relativos que as estimativas de Beekman-Bowers. Do mesmo modo, para todos os valores de  $c$  as estimativas de De Vylder apresentam erros relativos menores que as estimativas de Beekman-Bowers, salvo quando o valor  $c$  foi menor que 1,15.

Analisando a Figura 7.16, percebemos claramente que, para todos os valores de  $c$ , as aproximações de De Vylder e de Beekman-Bowers apresentaram estimativas sempre abaixo das estimativas simuladas da probabilidade da ruína.

Tabela 7.15: Estimativas simuladas da probabilidade da ruína para indenização com distribuição Pareto(3; 4), aproximações de Beekman-Bowers e De Vylder e, respectivos erros relativos. Para  $\lambda = 1$ ,  $\theta = 0,5$ ,  $c = 1,5$  e diversos valores de  $u$ .

$u$	$\psi(u)$	$\psi_{BB}(u)$	$\psi_{DV}(u)$	$\varepsilon_{BB}$	$\varepsilon_{DV}$
0	0,66763	0,66667	0,50000	0,00144	0,25108
1	0,49492	0,42490	0,42324	0,14148	0,14483
2	0,38376	0,33666	0,35827	0,12273	0,06642
3	0,30541	0,27614	0,30327	0,09584	0,00701
5	0,19861	0,19456	0,21730	0,02039	0,09410
10	0,07679	0,09069	0,09444	0,18103	0,22982
15	0,03228	0,04526	0,04104	0,40208	0,27144
20	0,01476	0,02334	0,01784	0,58150	0,20847
30	0,00398	0,00655	0,00337	0,64543	0,15352
50	0,00097	0,00057	0,00012	0,41023	0,87610

Figura 7.15: Estimativas simuladas da probabilidade da ruína para indenização com distribuição Pareto(3;4) e aproximações de Beekman-Bowers e De Vylder. Para  $\lambda = 1$ ,  $c = 1,5$  e diversos valores de  $u$ .

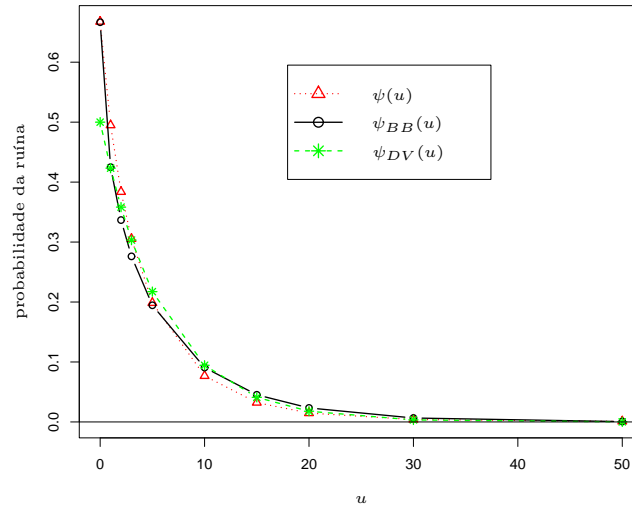
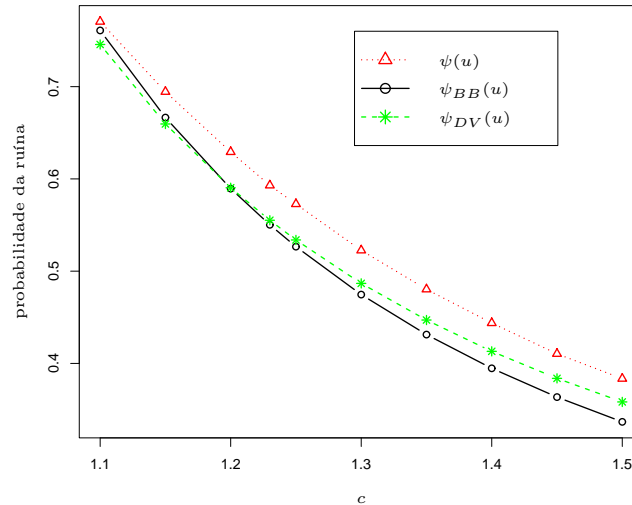


Tabela 7.16: Estimativas simuladas da probabilidade da ruína para indenização com distribuição Pareto(3;4), aproximações de Beekman-Bowers e De Vylder e, respectivos erros relativos. Para  $\lambda = 1$ ,  $u = 2$  e diversos valores de  $c$ .

$c$	$\psi(u)$	$\psi_{BB}(u)$	$\psi_{DV}(u)$	$\theta$	$\varepsilon_{BB}$	$\varepsilon_{DV}$
1,10	0,77046	0,76090	0,74570	0,10	0,01241	0,03214
1,15	0,69446	0,66649	0,65954	0,15	0,04028	0,05028
1,20	0,62923	0,58951	0,59040	0,20	0,06312	0,06171
1,23	0,59299	0,55027	0,55517	0,23	0,07204	0,06378
1,25	0,57277	0,52656	0,53382	0,25	0,08068	0,06800
1,30	0,52257	0,47461	0,48675	0,30	0,09178	0,06855
1,35	0,48032	0,43126	0,44703	0,35	0,10214	0,06931
1,40	0,44378	0,39469	0,41309	0,40	0,11062	0,06916
1,45	0,41044	0,36351	0,38380	0,45	0,11434	0,06491
1,50	0,38348	0,33666	0,35827	0,50	0,12209	0,06574

Figura 7.16: Estimativas simuladas da probabilidade da ruína para indenização com distribuição Pareto(3;4), aproximações de Beekman-Bowers e De Vylder. Para  $\lambda = 1$ ,  $u = 2$  e diversos valores de  $c$ .



Nas Tabelas 7.17 e 7.18 e Figuras 7.17 e 7.18 estão apresentados os resultados numéricos das estimativas simuladas da probabilidade da ruína e as estimativas das aproximações de De Vylder e Beekman-Bowers e os respectivos erros relativos, para o caso em que  $u = 2$ ,  $c = 1,5$  e as indenizações particulares têm função de densidade pareto com parâmetro  $\alpha = 4$ . Sendo que na Tabela 7.17 fixamos o parâmetro  $k = 3$  e variamos a taxa do número de ocorrência de indenizações por unidade de tempo e na Tabela 7.18 fixamos  $\lambda = 1$  e variamos os valores de  $k$ . Verificamos que quando  $\lambda$  apresentou valores menores ou iguais que 1,25 ou igual a 1,45 as estimativas de De Vylder apresentam menores erros relativos que as estimativas de Beekman-Bowers. No entanto, quando  $k$  assumiu valores entre 3,8 e 4,2 as estimativas Beekman-Bowers apresentam erros relativos menores que as estimativas de De Vylder. Vale ressaltar que a aproximação de De Vylder e Beekman-Bowers apresentaram, de forma geral, estimativas abaixo das estimativas simuladas da probabilidade da ruína.

Tabela 7.17: Estimativas simuladas da probabilidade da ruína para indenização com distribuição Pareto(3;4), aproximações de Beekman-Bowers e De Vylder e, respectivos erros relativos. Para  $u = 2$ ,  $c = 1,5$  e diversos valores de  $\lambda$ .

$\lambda$	$\psi(u)$	$\psi_{BB}(u)$	$\psi_{DV}(u)$	$\theta$	$\varepsilon_{BB}$	$\varepsilon_{DV}$
1,00	0,38437	0,33666	0,35827	0,50	0,12413	0,06790
1,10	0,47471	0,42068	0,43725	0,36	0,11382	0,07891
1,15	0,52295	0,47053	0,48303	0,30	0,10024	0,07634
1,20	0,57575	0,52656	0,53382	0,25	0,08544	0,07283
1,25	0,62904	0,58951	0,59040	0,20	0,06284	0,06143
1,30	0,69198	0,65999	0,65369	0,15	0,04623	0,05533
1,35	0,76061	0,73825	0,72478	0,11	0,02940	0,04711
1,40	0,82474	0,82365	0,80504	0,07	0,00132	0,02389
1,43	0,85965	0,87735	0,85826	0,05	0,02058	0,00162
1,45	0,88417	0,91351	0,89610	0,03	0,03318	0,01349

Figura 7.17: Estimativas simuladas da probabilidade da ruína para indenização com distribuição Pareto(3;4), aproximações de Beekman-Bowers e De Vylder. Para  $u = 2$ ,  $c = 1,5$  e diversos valores de  $\lambda$ .

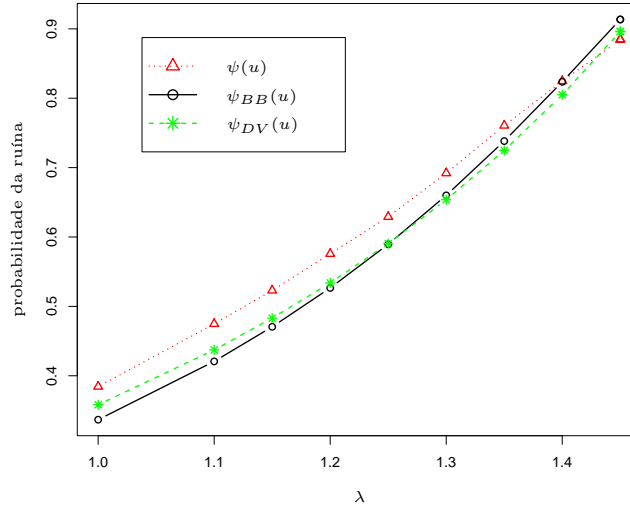
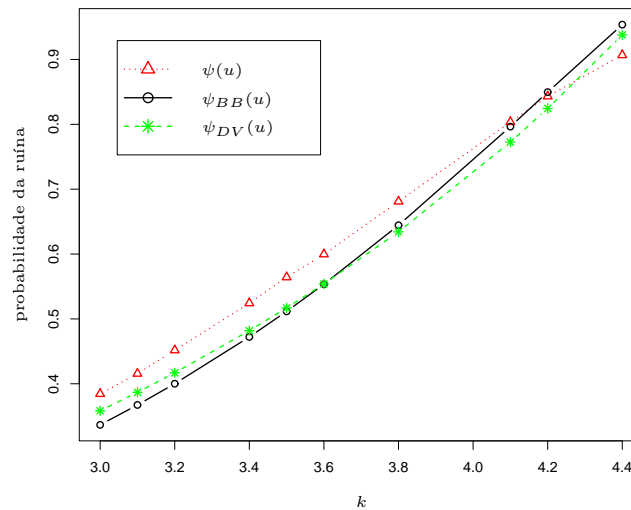




Tabela 7.18: Estimativas simuladas da probabilidade da ruína para indenização com distribuição Pareto( $k; 4$ ), aproximações de Beekman-Bowers e De Vylder e, respectivos erros relativos. Para  $u = 2$ ,  $\lambda = 1$ ,  $c = 1, 5$  e diversos valores de  $k$ .

$k$	$\psi(u)$	$\psi_{BB}(u)$	$\psi_{DV}(u)$	$\theta$	$\varepsilon_{BB}$	$\varepsilon_{DV}$
3,00	0,38437	0,33666	0,35827	0,50	0,12413	0,06790
3,10	0,41561	0,36735	0,38685	0,45	0,11612	0,06920
3,20	0,45167	0,40009	0,41691	0,41	0,11420	0,07696
3,40	0,52426	0,47214	0,48187	0,32	0,09942	0,08086
3,50	0,56426	0,51162	0,51697	0,29	0,09329	0,08381
3,60	0,5996	0,55348	0,55397	0,25	0,07692	0,07610
3,80	0,68109	0,64439	0,63422	0,18	0,05388	0,06882
4,10	0,80355	0,79647	0,77268	0,10	0,00881	0,03842
4,20	0,84312	0,84968	0,82444	0,07	0,00778	0,02216
4,40	0,90669	0,95367	0,93780	0,02	0,05181	0,03431

Figura 7.18: Estimativas simuladas da probabilidade da ruína para indenização com distribuição Pareto( $k; 4$ ), aproximações de Beekman-Bowers e De Vylder. Para  $u = 2$ ,  $\lambda = 1$ ,  $c = 1, 5$  e diversos valores de  $k$ .



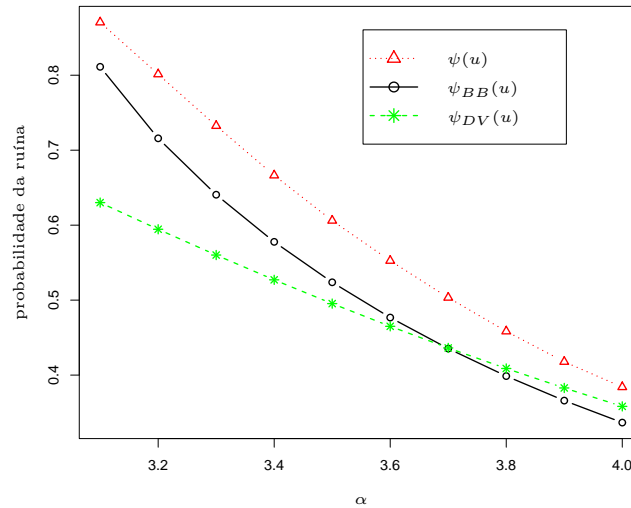
A Tabela 7.19 e a Figura 7.19 apresentam os resultados numéricos das estimativas simuladas da probabilidade da ruína e as estimativas das aproximações de Beekman-Bowers e De Vylder e os respectivos erros relativos, para o caso em que  $u = 2$ ,  $\lambda = 1$ ,  $c = 1, 5$  e as indenizações particulares têm função de densidade pareto com parâmetros  $k = 3$  e  $\alpha$  variando. Verificamos que, em termos do erro relativo, quando  $\alpha$  assumiu valores iguais ou menores que 3,6 a aproximação de Beekman-

Bowers apresentou melhor aproximação que a aproximação de De Vylder; por outro lado, quando  $\alpha$  é maior que 3,6 a aproximação De Vylder foi que apresentou melhor aproximação. Destacamos que as aproximações de De Vylder e Beekman-Bowers apresentaram estimativas sempre abaixo das estimativas simuladas da probabilidade da ruína, conforme mostra a Figura 7.19.

Tabela 7.19: Estimativas simuladas da probabilidade da ruína para indenização com distribuição Pareto(3;  $\alpha$ ), aproximações de Beekman-Bowers e De Vylder e, respectivos erros relativos. Para  $u = 2$ ,  $\lambda = 1$ ,  $c = 1, 5$  e diversos valores de  $\alpha$ .

$\alpha$	$\psi(u)$	$\psi_{BB}(u)$	$\psi_{DV}(u)$	$\theta$	$\varepsilon_{BB}$	$\varepsilon_{DV}$
3,10	0,87051	0,81120	0,63008	0,05	0,06813	0,27619
3,20	0,80131	0,71582	0,59452	0,10	0,10669	0,25806
3,30	0,73248	0,64061	0,56014	0,15	0,12542	0,23528
3,40	0,66641	0,57773	0,52706	0,20	0,13307	0,20911
3,50	0,60607	0,52378	0,49536	0,25	0,13578	0,18267
3,60	0,55256	0,47677	0,46507	0,30	0,13716	0,15834
3,70	0,50333	0,43539	0,43622	0,35	0,13498	0,13333
3,80	0,45839	0,39870	0,40882	0,40	0,13022	0,10814
3,90	0,41779	0,36598	0,38284	0,45	0,12401	0,08365
4,00	0,38403	0,33666	0,35827	0,50	0,12335	0,06708

Figura 7.19: Estimativas simuladas da probabilidade da ruína para indenização com distribuição Pareto(3;  $\alpha$ ), aproximações de Beekman-Bowers e De Vylder. Para  $u = 2$ ,  $\lambda = 1$ ,  $c = 1, 5$  e diversos valores de  $\alpha$ .



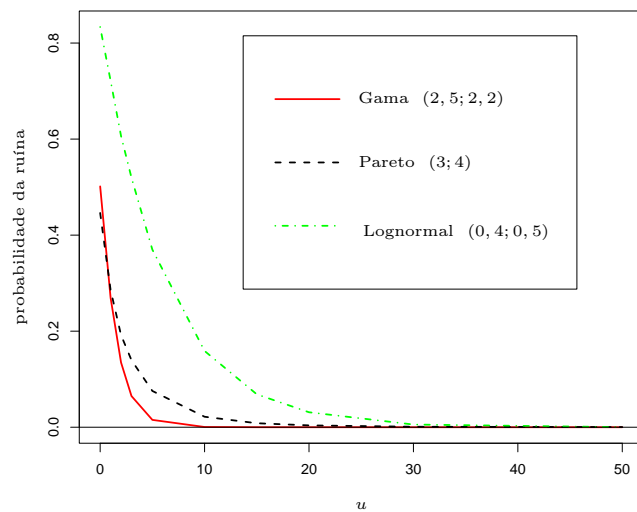
A Tabela 7.20 e a Figura 7.20 apresentam os resultados numéricos das estimativas simuladas da probabilidade da ruína para indenizações com distribuição Gama  $(2, 5; 2, 2)$ , Pareto  $(3; 4)$  e Lognormal  $(0, 4; 0, 5)$  para o caso em que o tempo entre duas ocorrências sucessivas de indenizações têm função densidade Gama $(1, 5; 1)$ ,  $c = 1, 3$  e diferentes valores de  $u$ . Observamos que conforme cresce o valor da reserva inicial as estimativas simuladas da probabilidade da ruína convergem mais rapidamente para zero quando as indenizações têm função densidade gama do que quando as indenizações têm função de densidade pareto ou lognormal.

Por outro lado, comparando os resultados numéricos das Tabelas 7.5 e 7.20, verificamos que quando as indenizações têm função densidade Gama  $(2, 5; 2, 2)$ , as estimativas simuladas da probabilidade da ruína são menores quando o tempo entre as ocorrências sucessivas das indenizações tem função de densidade Gama  $(1, 5; 1)$  do que quando o tempo entre ocorrências sucessivas das indenizações tem função de densidade Exponencial  $(1)$ .

Tabela 7.20: Estimativas simuladas da probabilidade da ruína para indenizações com distribuição Gama  $(2, 5; 2, 2)$ , Pareto  $(3; 4)$  e Lognormal  $(0, 4; 0, 5)$  para o caso em que o tempo entre as ocorrências sucessivas de indenizações têm distribuição Gama $(1, 5; 1)$ ,  $c = 1, 3$  e diversos valores de  $u$ .

$u$	$\psi_{Gama}(u)$	$\psi_{Pareto}(u)$	$\psi_{Lognormal}(u)$
0	0,50155	0,44623	0,83341
1	0,26940	0,28569	0,72149
2	0,13482	0,19190	0,60656
3	0,06490	0,13960	0,51956
5	0,01529	0,07552	0,36973
10	0,00046	0,02181	0,15880
15	0,00002	0,00832	0,06856
20	0,00000	0,00384	0,03116
30	0,00000	0,00100	0,00560
50	0,00000	0,00025	0,00012

Figura 7.20: Estimativas simuladas da probabilidade da ruína para indenizações com distribuição gama, pareto e lognormal para o caso em que o tempo entre as chegadas das indenizações têm distribuição  $\text{Gama}(1, 5; 1)$ ,  $c = 1, 3$  e diversos valores de  $u$ .



No desenvolvimento deste trabalho, foi apresentado o embasamento teórico sobre a probabilidade da ruína eventual de uma seguradora, bem como seu cálculo matemático. Adicionalmente, para o modelo de Cramér-Lundberg, apresentamos o limitante superior de Lundberg e algumas aproximações assintóticas para probabilidade da ruína eventual, que são: De Vylder, Beekman-Bowers e Cramér-Lundberg. Investigamos também a qualidade destas aproximações quando as indenizações têm funções de densidades exponencial, gama, lognormal e pareto. Por fim, descrevemos o modelo de reserva que generaliza o modelo clássico de risco de reserva de Cramér-Lundberg e, com este modelo, simulamos a probabilidade da ruína para o caso em que o tempo entre duas ocorrências sucessivas de indenizações tem função de densidade gama e as indenizações têm função de densidade gama, pareto e lognormal.

Os resultados numéricos revelam que a aproximação de Beekman-Bowers apresentou, de forma geral, estimativas inferiores às estimativas exatas ou simuladas da probabilidade de ruína para indenizações particulares com distribuições exponencial, gama, lognormal ou pareto. Por outro lado, quando as indenizações têm função de densidade gama os resultados mostram que a aproximação de Cramér-Lundberg é a mais apropriada, pois esta aproximação apresentou estimativas muito próximas das estimativas simuladas da probabilidade da ruína.

Vale notar que, em termos do erro relativo, os resultados mostram que as estimativas De

Vylder apresentaram, de forma geral, melhor aproximação que a aproximação de Beekman-Bowers quando as indenizações têm função de densidade lognormal ou pareto.

Dessa forma, a partir dos resultados numéricos é possível afirmar que não existe uma aproximação destacadamente melhor que as demais, pois estas dependem não só das distribuições de probabilidade como dos valores de seus parâmetros.

Em relação aos estudos de simulação realizados quando o tempo entre duas ocorrências sucessivas de indenizações tem função de densidade gama, concluímos que as estimativas simuladas da probabilidade de ruína convergiram mais rapidamente para zero quando indenizações têm função de densidade com caudas leves (gama) do que quando as indenizações têm função de densidade com caudas pesadas (pareto e lognormal).

Neste apêndice são apresentados os programas escritos na linguagem de programação `Ox` em sua versão 4.02 para a geração dos resultados de simulação obtidos neste trabalho. Estes programas permitem calcular a probabilidade da ruína para cada situação estudada. No primeiro programa, encontra-se o programa de simulação de Monte Carlo quando o tempo entre chegadas das indenizações é exponencialmente distribuído; no segundo, contém o programa para o caso em que o tempo entre duas ocorrências sucessivas de indenizações tem função de densidade gama. Em todas as simulações foram utilizados os mesmos programas trocando apenas os valores do parâmetro  $\lambda$ , os valores dos parâmetros das funções de densidade das indenizações e os valores das constantes  $u$  e  $c$  para cada situação específica considerada no trabalho.

### Simulação para o Modelo Poisson

```
/******  
* Indenização com distriduição Gama *  
* Com diversos valores da Reserva Inicial *  
*****/  
/* Bibliotecas principais*/  
#include <oxstd.h>  
#include <oxfloat.h>  
#import <maximize>  
#include <oxprob.h>  
/******  
Início do corpo principal do programa  
*****/  
/*Constantes fixas*/  
const decl u=<0;1;2;3;5;10;15;20;30;50>;  
const decl c=1.3;  
const decl lambda=1;  
const decl alphadistgama=2.5;
```





```

        else
        if(w[k]<0)
        {
        cont=cont+1;
        break;
        }
    }
}
contrep[r]=cont;
}
//Fim do Loop de Monte Carlo
p1=alphadistgama/betadistgama;
p2=(alphadistgama+ alphadistgama^2)/(betadistgama^2);
p3=(2*alphadistgama +3*alphadistgama^2 + alphadistgama^3)/(betadistgama^3);
pzero=(lambda*p1)/c;
deltazero=1-(lambda*p1)/c;
betavylder=(3*p2)/p3;
lambdavylder=((9*p2^3)/(2*p3^2))*lambda;
cvylder=c-lambda*p1 + ((3*p2^2)/(2*p3))*lambda;
EL=(lambda*p2)/(2*(c-lambda*p1));
VL=(lambda*p3)/(3*(c-lambda*p1)) + ((lambda*p2)^2)/(4*(c -lambda*p1)^2);
mr=(alphadistgama*(betadistgama/(betadistgama-R))^alphadistgama)/(betadistgama-R);
alphagamabeekman=EL^2/(VL*pzero);
betagamabeekman=EL/VL;
CL=deltazero*((lambda/c)*mr-1)^(-1);
theta=(c/(lambda*p1)) -1;
prludberg[l]=exp(-R*u[l]);
pruinaBeekman[l]=pzero-pzero*(gammafunc(betagamabeekman*u[l], alphagamabeekman));
prvylder[l]=(lambdavylder/(betavylder*cvylder))*exp(-(betavylder- (lambdavylder/cvylder))*u[l]);
prassint[l]=CL*exp(-R*u[l]);
media[l]=meanc(contrep);
erroprludberg[l]=fabs(media[l]-prludberg[l])/media[l];
erroprBeekman[l]=fabs(media[l]-pruinaBeekman[l])/media[l];
erroprvylder[l]=fabs(media[l]-prvylder[l])/media[l];
erroprassint[l]=fabs(media[l]-prassint[l])/media[l];
println("\n Exata", "\t \t PrLudberg", "\t \t PrBeekman");
println( "%6.5f",media[l], "\t \t", "%6.5f", prludberg[l], "\t \t \t", "%6.5f", pruinaBeekman[l]);
println( "\n PrVylder", "\t \t prCL");
println( "%6.5f", prvylder[l], "\t \t \t", "%6.5f", prassint[l]);
println("\n erro_prLudberg", "\t erro_prBeekman");
println( "%6.5f", erroprludberg[l], "\t \t \t ", "%6.5f", erroprBeekman[l]);
println(" \n erro_prvylder", "\t \t erro_prassint");
println( "%6.5f", erroprvylder[l], "\t \t \t \t", "%6.5f", erroprassint[l]);
println("- - - - -");
}
//Fim do Loop para os valores de u
println("Valor de theta: ", theta);
}
/*****
* Indenização com distriduição Gama *
* Com diversos valores do Prêmio *
*****/
/* Bibliotecas principais*/
#include <oxstd.h>
#include <oxfloat.h>
#import <maximize>
#include <oxprob.h>
/*****
Início do corpo principal do programa
*****/
/*Constantes fixas*/
const decl c=<1.25; 1.30; 1.35; 1.4; 1.45; 1.5; 1.55; 1.6; 1.65; 1.7>;
const decl u=2;
const decl lambda=1;
const decl alphadistgama=2.5;

```

```

const decl betadistgama=2.2;
const decl R=<0.115852,0.161311,0.203894,0.243887,0.281537,0.317062, 0.350649,0.382466,0.412661,0.441366>;
const decl a=50000;
const decl t=500;
const decl nrep=10;
decl contrep, y, T;
main()
{
ranseed("GM");
decl i, j, k, n, w, X, cont, r, l, p1, p2, p3, betavylder, lambdavylder;
decl deltazero=zeros(sizerc(c), 1);
decl pzero=zeros(sizerc(c), 1);
decl cvylder=zeros(sizerc(c), 1);
decl EL=zeros(sizerc(c), 1);
decl VL=zeros(sizerc(c), 1);
decl mr=zeros(sizerc(c), 1);
decl alphagamabeekman=zeros(sizerc(c), 1);
decl betagamabeekman=zeros(sizerc(c), 1);
decl CL=zeros(sizerc(c), 1);
decl theta=zeros(sizerc(c), 1);
decl prassint=zeros(sizerc(c), 1);
decl prvylder=zeros(sizerc(c), 1);
decl pruinaBeekman=zeros(sizerc(c), 1);
decl prludberg=zeros(sizerc(c), 1);
decl erroprludberg=zeros(sizerc(c), 1);
decl erroprBeekman=zeros(sizerc(c), 1);
decl erroprvylder=zeros(sizerc(c), 1);
decl erroprassint=zeros(sizerc(c), 1);
decl media=zeros(sizerc(c), 1);
println("RESULTADOS");
println("Valor de u: ", u);
println("Valor de lambda: ", lambda);
println("Valor de alphadistgama: ", alphadistgama);
println("Valor de betadistgama: ", betadistgama);
println("-----");
//Início do Loop para os valores de c
for(l=0;l<rows(c);++l)
{
println("Valor de c: ", "%3.2f", c[l]);
contrep=zeros(nrep,1);
y=zeros(sizerc(a), 1);
T=zeros(sizerc(a), 1);
//Início do Loop de Monte Carlo
for(r=0;r<nrep;++r)
{
cont=0;
y=ranexp(a, 1, lambda);
T=cumulate(y);
for(i=0, n=0; i<a; ++i)
{
if(T[i]<=t)
{
n =n +1;
}
}
if(n==0)
{
w=u +c[l]*t;
}
else
{
X=rangamma(n, 1, alphadistgama, betadistgama);
w=zeros(2*n+1, 1);
w[0]=u;
for(j=0; j<n; ++j)

```

```

    {
    w[2*j+1]=w[2*j]+c[1]*y[j];
    w[2*j+2]=w[2*j+1]-X[j];
    }
    for(k=0;k<rows(w);++k)
    {
    if(w[k]>=0)
    cont=cont;
    else
    if(w[k]<0)
    {
    cont=cont+1;
    break;
    }
    }
}
contrep[r]=cont;
}
//Fim do Loop de Monte Carlo
p1=alphadistgama/betadistgama;
p2=(alphadistgama+ alphadistgama^2)/(betadistgama^2);
p3=(2*alphadistgama +3*alphadistgama^2 + alphadistgama^3)/(betadistgama^3);
pzero[1]=(lambda*p1)/c[1];
deltazero[1]=1-(lambda*p1)/c[1];
betavylder=(3*p2)/p3;
lambdavylder=((9*p2^3)/(2*p3^2))*lambda;
cvylder[1]=c[1]-lambda*p1 + ((3*p2^2)/(2*p3))*lambda;
EL[1]=(lambda*p2)/(2*(c[1]-lambda*p1));
VL[1]=(lambda*p3)/(3*(c[1]-lambda*p1)) + ((lambda*p2^2)/(4*(c[1] -lambda*p1)^2));
mr[1]=(alphadistgama*(betadistgama/(betadistgama-R[1]))^alphadistgama)/(betadistgama-R[1]);
alphagamabeekman[1]=EL[1]^2/(VL[1]*pzero[1]);
betagamabeekman[1]=EL[1]/VL[1];
CL[1]=deltazero[1]*(lambda/c[1])*mr[1]-1;
theta[1]=(c[1]/(lambda*p1)) -1;
prludberg[1]=exp(-R[1]*u);
pruinaBeekman[1]=pzero[1]-pzero[1]*(gammafunc(betagamabeekman[1]*u, alphagamabeekman[1]));
prvylder[1]=(lambdavylder/(betavylder*cvylder[1]))*exp(-(betavylder- (lambdavylder/cvylder[1]))*u);
prassint[1]=CL[1]*exp(-R[1]*u);
media[1]=meanc(contrep);
erroprludberg[1]=fabs((media[1]-prludberg[1])/media[1]);
erroprBeekman[1]=fabs((media[1]-pruinaBeekman[1])/media[1]);
erroprvylder[1]=fabs((media[1]-prvylder[1])/media[1]);
erroprassint[1]=fabs((media[1]-prassint[1])/media[1]);
println("\n Exata", "\t \t PrLudberg", "\t \t PrBeekman");
println( "%6.5f",media[1], "\t \t", "%6.5f", prludberg[1], "\t \t \t", "%6.5f", pruinaBeekman[1]);
println("\n PrVylder", "\t \t prCL", "\t \t \t theta");
printlnb("%6.5f", prvylder[1], "\t \t \t", "%6.5f", prassint[1], "\t \t \t", "%6.2f", theta[1]);
println("\n erro_prLudberg", "\t erro_prBeekman");
println( "%6.5f", erroprludberg[1], "\t \t \t ", "%6.5f", erroprBeekman[1]);
println("\n erro_prVylder", "\t \t erro_prassint");
println("%6.5f", erroprvylder[1], "\t \t \t \t", "%6.5f", erroprassint[1]);
println("-----");
}
//Fim do Loop para os valores de c
}

/*****
* Indenização com distriduição Gama *
* Com diversos valores de Lambda *
*****/
/* Bibliotecas principais*/
#include <oxstd.h>
#include <oxfloat.h>
#import <maximize>
#include <oxprob.h>

```

```

/*****
Início do corpo principal do programa
*****/
/*Constantes fixas*/
const decl lambda=<0.75; 0.78; 0.8; 0.85; 0.86; 0.9; 0.92; 0.94; 0.95; 1>;
const decl u=2;
const decl c=1.3;
const decl alphadistgama=2.5;
const decl betadistgama=2.2;
const decl R=<0.459732, 0.422389, 0.397758, 0.337042, 0.325039, 0.277463, 0.253925, 0.230547, 0.218916, 0.161311>;
const decl a=50000;
const decl t=500;
const decl nrep=10;
decl contrep, y, T;
main()
{
ranseed("GM");
decl i, j, k, n, w, X, cont, r, l, p1, p2, p3, betavylder;
decl deltazero=zeros(sizerc(lambda), 1);
decl pzero=zeros(sizerc(lambda), 1);
decl cvylder=zeros(sizerc(lambda), 1);
decl EL=zeros(sizerc(lambda), 1);
decl VL=zeros(sizerc(lambda), 1);
decl mr=zeros(sizerc(lambda), 1);
decl alphagamabeekman=zeros(sizerc(lambda), 1);
decl betagamabeekman=zeros(sizerc(lambda), 1);
decl CL=zeros(sizerc(lambda), 1);
decl theta=zeros(sizerc(lambda), 1);
decl lambdavylder=zeros(sizerc(lambda), 1);
decl prassint=zeros(sizerc(lambda), 1);
decl prvylder=zeros(sizerc(lambda), 1);
decl pruinaBeekman=zeros(sizerc(lambda), 1);
decl prludberg=zeros(sizerc(lambda), 1);
decl erroprludberg=zeros(sizerc(lambda), 1);
decl erroprBeekman=zeros(sizerc(lambda), 1);
decl erroprvylder=zeros(sizerc(lambda), 1);
decl erroprassint=zeros(sizerc(lambda), 1);
decl media=zeros(sizerc(lambda), 1);
println("RESULTADOS");
println("Valor de u: ", u);
println("Valor de c: ", c);
println("Valor de alphadistgama: ", alphadistgama);
println("Valor de betadistgama: ", betadistgama);
println("-----");
//Início do Loop para os valores de lambda
for(l=0;l<rows(lambda);++l)
{
println("Valor de lambda: ", "%3.2f", lambda[l]);
contrep=zeros(nrep,1);
y=zeros(sizerc(a), 1);
T=zeros(sizerc(a), 1);
//Início do Loop de Monte Carlo
for(r=0;r<nrep;++r)
{
cont=0;
y=ranexp(a, 1, lambda[l]);
T=cumulate(y);
for(i=0, n=0; i<a; ++i)
{
if(T[i]<=t)
{
n =n +1;
}
}
}
if(n==0)

```

```

{
w=u +c*t;
}
else
{
X=rangamma(n, 1, alphadistgama, betadistgama);
w=zeros(2*n+1, 1);
w[0]=u;
for(j=0; j<n; ++j)
{
w[2*j+1]=w[2*j]+c*y[j];
w[2*j+2]=w[2*j+1]-X[j];
}
for(k=0;k<rows(w);++k)
{
if(w[k]>=0)
cont=cont;
else
if(w[k]<0)
{
cont=cont+1;
break;
}
}
}
contrep[r]=cont;
}
//Fim do Loop de Monte Carlo
p1=alphadistgama/betadistgama;
p2=(alphadistgama+ alphadistgama^2)/(betadistgama^2);
p3=(2*alphadistgama +3*alphadistgama^2 + alphadistgama^3)/(betadistgama^3);
pzero[1]=(lambda[1]*p1)/c;
deltazero[1]=1-(lambda[1]*p1)/c;
betavylder=(3*p2)/p3;
lambdavylder[1]=((9*p2^3)/(2*p3^2))*lambda[1];
cvylder[1]=c-lambda[1]*p1 + ((3*p2^2)/(2*p3))*lambda[1];
EL[1]=(lambda[1]*p2)/(2*(c-lambda[1]*p1));
VL[1]=(lambda[1]*p3)/(3*(c-lambda[1]*p1) + ((lambda[1]*p2)^2)/(4*(c -lambda[1]*p1)^2));
mr[1]=(alphadistgama*(betadistgama/(betadistgama-R[1]))^alphadistgama)/(betadistgama-R[1]);
alphagamabeekman[1]=EL[1]^2/(VL[1]*pzero[1]);
betagamabeekman[1]=EL[1]/VL[1];
CL[1]=deltazero[1]*((lambda[1]/c)*mr[1]-1)^(-1);
theta[1]=(c/(lambda[1]*p1) -1;
prludberg[1]=exp(-R[1]*u);
pruinaBeekman[1]=pzero[1]-pzero[1]*(gammafunc(betagamabeekman[1]*u, alphagamabeekman[1]));
prvylder[1]=(lambdavylder[1]/(betavylder*cvylder[1]))*exp(-(betavylder- lambdavylder[1]/cvylder[1])*u);
prassint[1]=CL[1]*exp(-R[1]*u);
media[1]=meanc(contrep);
erroprludberg[1]=fabs((media[1]-prludberg[1])/media[1]);
erroprBeekman[1]=fabs((media[1]-pruinaBeekman[1])/media[1]);
erroprvylder[1]=fabs((media[1]-prvylder[1])/media[1]);
erroprassint[1]=fabs((media[1]-prassint[1])/media[1]);
println("\n Exata", "\t \t PrLudberg", "\t \t PrBeekman");
println( "%6.5f",media[1], "\t \t", "%6.5f", prludberg[1], "\t \t \t", "%6.5f", pruinaBeekman[1]);
println("\n PrVylder", "\t \t prCL", "\t \t \t theta");
printlnb("%6.5f", prvylder[1], "\t \t \t", "%6.5f", prassint[1], "\t \t \t", "%6.2f", theta[1]);
println("\n erro_prLudberg", "\t erro_prBeekman");
println( "%6.5f", erroprludberg[1], "\t \t \t ", "%6.5f", erroprBeekman[1]);
println("\n erro_prvylder", "\t \t erro_prassint");
println("%6.5f", erroprvylder[1], "\t \t \t \t", "%6.5f", erroprassint[1]);
println("- - - - -");
}
//Fim do Loop para os valores de lambda
}

```

```

/*****
* Indenização com distribuição Gama *
* Com diversos valores de Beta *
*****/
/* Bibliotecas principais*/
#include <oxstd.h>
#include <oxfloat.h>
#import <maximize>
#include <oxprob.h>
/*****
Início do corpo principal do programa
*****/
/*Constantes fixas*/
const decl betadistgama=<2.1; 2.2; 2.3; 2.35; 2.4; 2.5; 2.6; 2.7; 2.8; 2.9>;
const decl u=2;
const decl lambda=1;
const decl c=1.3;
const decl alphadistgama=2.5;
const decl R=<0.102378, 0.161311, 0.220957, 0.251035, 0.281277, 0.342233, 0.403793, 0.465925, 0.528603, 0.591799>;
const decl a=50000;
const decl t=500;
const decl nrep=10;
decl contrep, y, T;

main()
{
ranseed("GM");
decl i, j, k, n, w, X, cont, r, l;
decl deltazero=zeros(sizerc(betadistgama), 1);
decl pzero=zeros(sizerc(betadistgama), 1);
decl cvylder=zeros(sizerc(betadistgama), 1);
decl EL=zeros(sizerc(betadistgama), 1);
decl VL=zeros(sizerc(betadistgama), 1);
decl mr=zeros(sizerc(betadistgama), 1);
decl alphagamabeekman=zeros(sizerc(betadistgama), 1);
decl betagamabeekman=zeros(sizerc(betadistgama), 1);
decl CL=zeros(sizerc(betadistgama), 1);
decl theta=zeros(sizerc(betadistgama), 1);
decl p1=zeros(sizerc(betadistgama), 1);
decl p2=zeros(sizerc(betadistgama), 1);
decl p3=zeros(sizerc(betadistgama), 1);
decl betavylder=zeros(sizerc(betadistgama), 1);
decl lambdavylder=zeros(sizerc(betadistgama), 1);
decl prassint=zeros(sizerc(betadistgama), 1);
decl prvylder=zeros(sizerc(betadistgama), 1);
decl pruinaBeekman=zeros(sizerc(betadistgama), 1);
decl prludberg=zeros(sizerc(betadistgama), 1);
decl erroprludberg=zeros(sizerc(betadistgama), 1);
decl erroprBeekman=zeros(sizerc(betadistgama), 1);
decl erroprvylder=zeros(sizerc(betadistgama), 1);
decl erroprassint=zeros(sizerc(betadistgama), 1);
decl media=zeros(sizerc(betadistgama), 1);
println("RESULTADOS");
println("Valor de u: ", u);
println("Valor de lambda: ", lambda);
println("Valor de c: ", c);
println("Valor de alphadistgama: ", alphadistgama);
println("-----");
//Início do Loop para os valores de beta
for(l=0;l<rows(betadistgama);+1)
{
println("Valor de betadistgama: ", "%3.2f", betadistgama[l]);
contrep=zeros(nrep,1);
y=zeros(sizerc(a), 1);
T=zeros(sizerc(a), 1);

```

```

//Início do Loop de Monte Carlo
for(r=0;r<nrep;++r)
{
cont=0;
y=ranexp(a, 1, lambda);
T=cumulate(y);
  for(i=0, n=0; i<a; ++i)
  {
    if(T[i]<=t)
    {
      n =n +1;
    }
  }
  if(n==0)
  {
    w=u +c*t;
  }
  else
  {
    X=rangamma(n, 1, alphadistgama, betadistgama[1]);
    w=zeros(2*n+1, 1);
    w[0]=u;
    for(j=0; j<n; ++j)
    {
      w[2*j+1]=w[2*j]+c*y[j];
      w[2*j+2]=w[2*j+1]-X[j];
    }
    for(k=0;k<rows(w);++k)
    {
      if(w[k]>=0)
      cont=cont;
      else
      if(w[k]<0)
      {
        cont=cont+1;
        break;
      }
    }
  }
contrep[r]=cont;
}
//Fim do Loop de Monte Carlo
p1[1]=alphadistgama/betadistgama[1];
p2[1]=(alphadistgama+ alphadistgama^2)/(betadistgama[1]^2);
p3[1]=(2*alphadistgama +3*alphadistgama^2 + alphadistgama^3)/(betadistgama[1]^3);
pzero[1]=(lambda*p1[1])/c;
deltazero[1]=1-(lambda*p1[1])/c;
betavylder[1]=(3*p2[1])/p3[1];
lambdavylder[1]=((9*p2[1]^3)/(2*p3[1]^2))*lambda;
cvylder[1]=c-lambda*p1[1] + ((3*p2[1]^2)/(2*p3[1]))*lambda;
EL[1]=(lambda*p2[1])/2*(c-lambda*p1[1]);
VL[1]=(lambda*p3[1])/3*(c-lambda*p1[1]) + ((lambda*p2[1]^2)/(4*(c -lambda*p1[1])^2));
mr[1]=(alphadistgama*(betadistgama[1]/(betadistgama[1]-R[1]))^alphadistgama)/(betadistgama[1]-R[1]);
alphagamabeekman[1]=EL[1]^2/(VL[1]*pzero[1]);
betagamabeekman[1]=EL[1]/VL[1];
CL[1]=deltazero[1]*((lambda/c)*mr[1]-1)^(-1);
theta[1]=(c/(lambda*p1[1])) -1;
prludberg[1]=exp(-R[1]*u);
pruinaBeekman[1]=pzero[1]-pzero[1]*(gammafunc(betagamabeekman[1]*u, alphagamabeekman[1]));
prvylder[1]=(lambdavylder[1]/(betavylder[1]*cvylder[1]))*exp(-(betavylder[1]- lambdavylder[1]/cvylder[1])*u);
prassint[1]=CL[1]*exp(-R[1]*u);
media[1]=meanc(contrep);
erroprludberg[1]=fabs((media[1]-prludberg[1])/media[1]);
erroprBeekman[1]=fabs((media[1]-pruinaBeekman[1])/media[1]);
erroprvylder[1]=fabs((media[1]-prvylder[1])/media[1]);

```

```

erroprassint[1]=fabs((media[1]-prassint[1])/media[1]);
println("\n Exata", "\t \t PrLudberg", "\t \t PrBeekman");
println( "%6.5f",media[1], "\t \t", "%6.5f", prludberg[1], "\t \t \t", "%6.5f", pruínaBeekman[1]);
println("\n PrVylde", "\t \t prCL", "\t \t \t theta");
printlnb("%6.5f", prvylder[1], "\t \t \t", "%6.5f", prassint[1], "\t \t \t", "%6.2f", theta[1]);
println("\n erro_prludberg", "\t \t erro_prBeekman");
println( "%6.5f", erroprludberg[1], "\t \t \t ", "%6.5f", erroprBeekman[1]);
println("\n erro_prvylder", "\t \t erro_prassint");
println("%6.5f", erroprvylder[1], "\t \t \t \t", "%6.5f", erroprassint[1]);
println("- - - - -");
}
//Fim do Loop para os valores de beta
//*****
* Indenização com distriduição Gama *
* Com diversos valores de Alpha *
*****/
/* Bibliotecas principais*/
#include <oxstd.h>
#include <oxfloat.h>
#import <maximize>
#include <oxprob.h>
/*****
Início do corpo principal do programa
*****/
/*Constantes fixas*/
const decl alphadistgama=<1.9; 2; 2.1; 2.15; 2.2; 2.25; 2.3; 2.4; 2.5; 2.6>;
const decl u=2;
const decl lambda=1;
const decl c=1.3;
const decl betadistgama=2.2;
const decl R=<0.5311729,0.4588314,0.3911624,0.3589851,0.3278628,0.2977593,0.2686390,0.2132101,0.1613106,0.1126907>;
const decl a=50000;
const decl t=500;
const decl nrep=10;
decl contrep, y, T;
main()
{
ranseed("GM");
decl i, j, k, n, w, X, cont, r, l, p1, p2, p3, betavylder, lambdavylder;
decl deltazero=zeros(sizerc(alphadistgama), 1);
decl pzero=zeros(sizerc(alphadistgama), 1);
decl cvylde=zeros(sizerc(alphadistgama), 1);
decl EL=zeros(sizerc(alphadistgama), 1);
decl VL=zeros(sizerc(alphadistgama), 1);
decl mr=zeros(sizerc(alphadistgama), 1);
decl alphasgama=zeros(sizerc(alphadistgama), 1);
decl betasgama=zeros(sizerc(alphadistgama), 1);
decl CL=zeros(sizerc(alphadistgama), 1);
decl theta=zeros(sizerc(alphadistgama), 1);
decl prassint=zeros(sizerc(alphadistgama), 1);
decl prvylder=zeros(sizerc(alphadistgama), 1);
decl pruínaBeekman=zeros(sizerc(alphadistgama), 1);
decl prludberg=zeros(sizerc(alphadistgama), 1);
decl erroprludberg=zeros(sizerc(alphadistgama), 1);
decl erroprBeekman=zeros(sizerc(alphadistgama), 1);
decl erroprvylder=zeros(sizerc(alphadistgama), 1);
decl erroprassint=zeros(sizerc(alphadistgama), 1);
decl media=zeros(sizerc(alphadistgama), 1);
println("RESULTADOS");
println("\n Valor de u: ", u);
println("Valor de lambda: ", lambda);
println("Valor de c: ", c);
println("Valor de betadistgama: ", betadistgama);
println("-----");
//Início do Loop para os valores de alpha

```



```

for(l=0;l<rows(alphadistgama);++l)
{
println("Valor de alphadistgama: ", "%3.2f", alphadistgama[l]);
contrep=zeros(nrep,1);
y=zeros(sizerc(a), 1);
T=zeros(sizerc(a), 1);
//Inicio do Loop de Monte Carlo
for(r=0;r<nrep;++r)
{
cont=0;
y=ranexp(a, 1, lambda);
T=cumulate(y);
for(i=0, n=0; i<a; ++i)
{
if(T[i]<=t)
{
n =n +1;
}
}
if(n==0)
{
w=u +c*t;
}
else
{
X=rangamma(n, 1, alphadistgama[l], betadistgama);
w=zeros(2*n+1, 1);
w[0]=u;
for(j=0; j<n; ++j)
{
w[2*j+1]=w[2*j]+c*y[j];
w[2*j+2]=w[2*j+1]-X[j];
}
for(k=0;k<rows(w);++k)
{
if(w[k]>=0)
cont=cont;
else
if(w[k]<0)
{
cont=cont+1;
break;
}
}
}
contrep[r]=cont;
}
//Fim do Loop de Monte Carlo
p1=alphadistgama[l]/betadistgama;
p2=(alphadistgama[l]+ alphadistgama[l]^2)/(betadistgama^2);
p3=(2*alphadistgama[l] +3*alphadistgama[l]^2 + alphadistgama[l]^3)/(betadistgama^3);
pzero[l]=(lambda*p1)/c;
deltazero[l]=1-(lambda*p1)/c;
betavylder=(3*p2)/p3;
lambdavylder=((9*p2^3)/(2*p3^2))*lambda;
cvylder[l]=c-lambda*p1 + ((3*p2^2)/(2*p3))*lambda;
EL[l]=(lambda*p2)/(2*(c-lambda*p1));
VL[l]=(lambda*p3)/(3*(c-lambda*p1)) + ((lambda*p2)^2)/(4*(c-lambda*p1)^2);
mr[l]=(alphadistgama[l]*(betadistgama/(betadistgama-R[l]))^alphadistgama[l])/(betadistgama-R[l]);
alphagamabeekman[l]=EL[l]^2/(VL[l]*pzero[l]);
betagamabeekman[l]=EL[l]/VL[l];
CL[l]=deltazero[l]*((lambda/c)*mr[l]-1)^(-1);
theta[l]=(c/(lambda*p1)) -1;
prludberg[l]=exp(-R[l]*u);
pruinaBeekman[l]=pzero[l]-pzero[l]*(gammafunc(betagamabeekman[l]*u, alphagamabeekman[l]));

```

```

prvylder[l]=(lambdavylder/(betavylder*cvylder[l]))*exp(-(betavylder- (lambdavylder/cvylder[l]))*u);
prassint[l]=CL[l]*exp(-R[l]*u);
media[l]=meanc(contrep);
erroprludberg[l]=fabs((media[l]-prludberg[l])/media[l]);
erroprBeekman[l]=fabs((media[l]-pruinaBeekman[l])/media[l]);
erroprvylder[l]=fabs((media[l]-prvylder[l])/media[l]);
erroprassint[l]=fabs((media[l]-prassint[l])/media[l]);
println("\n Exata", "\t \t PrLudberg", "\t \t PrBeekman");
println( "%6.5f",media[l], "\t \t", "%6.5f", prludberg[l], "\t \t \t", "%6.5f", pruinaBeekman[l]);
println("\n PrVylder", "\t \t prCL", "\t \t \t theta");
printlnb("%6.5f", prvylder[l], "\t \t \t", "%6.5f", prassint[l], "\t \t \t", "%6.2f", theta[l]);
println("\n erro_prLudberg", "\t erro_prBeekman");
println( "%6.5f", erroprludberg[l], "\t \t \t ", "%6.5f", erroprBeekman[l]);
println("\n erro_prvylder", "\t \t erro_prassint");
println("%6.5f", erroprvylder[l], "\t \t \t \t", "%6.5f", erroprassint[l]);
println("- - - - -");
}
//Fim do Loop para os valores de alpha
}
/*****
* Indenização com distriduição Lognormal *
* Com diversos valores da Reserva *
*****/
/* Bibliotecas principais*/
#include <oxstd.h>
#include <oxfloat.h>
#import <maximize>
#include <oxprob.h>
/*****
Início do corpo principal do programa
*****/
/*Constantes fixas*/
const decl u=<0; 1; 2; 3; 5; 10; 15; 20; 30; 50>;
const decl lambda=1;
const decl c=1.8;
const decl sigma2=0.5;
const decl mu=0.4;
const decl a=50000;
const decl t=500;
const decl nrep=10;
decl contrep, y, T;
main()
{
ranseed("GM");
decl i, j, k, n, w, X, cont, lognor, l, nor, r, p1,p2,p3, betavylder, lambdavylder, EL, VL, deltazero, pzero;
decl alphaBeek, theta, betaBeek, cvylder;
decl prBeekman=zeros(sizerc(u), 1);
decl prvylder=zeros(sizerc(u), 1);
decl media=zeros(sizerc(u), 1);
decl erroprBeekman=zeros(sizerc(u), 1);
decl erroprvylder=zeros(sizerc(u), 1);
println("RESULTADOS");
println("Valor de c: ", c);
println("Valor de lambda: ", lambda);
println("Valor de sigma2: ", sigma2);
println("Valor de mu: ", mu);
println("-----");
//Início do Loop para os valores de u
for(l=0;l<rows(u);++l)
{
println("Valor de u: ", u[l]);
contrep=zeros(nrep,1);
y=zeros(sizerc(a), 1);
T=zeros(sizerc(a), 1);
//Início do Loop de Monte Carlo

```

```

for(r=0;r<nrep;++r)
{
cont=0;
y=ranexp(a, 1, lambda);
T=cumulate(y);
for(i=0, n=0; i<a; ++i)
{
if(T[i]<=t)
{
n =n +1;
}
}
if(n==0)
{
w=u[1] +c*t;
}
else
{
nor=rann(n, 1);
X=sigma2*nor + mu;
lognor=exp(X);
w=zeros(2*n+1, 1);
w[0]=u[1];
for(j=0; j<n; ++j)
{
w[2*j+1]=w[2*j]+c*y[j];
w[2*j+2]=w[2*j+1]-lognor[j];
}
for(k=0;k<rows(w);++k)
{
if(w[k]>=0)
cont=cont;
else
if(w[k]<0)
{
cont=cont+1;
break;
}
}
}
contrep[r]=cont;
}
//Fim do Loop de Monte Carlo
p1=exp(mu + (sigma2^2)/2);
p2=exp(2*mu +4*(sigma2^2)/2);
p3=exp(3*mu +9*(sigma2^2)/2);
betavylder=(3*p2)/p3;
lambdavylder=((9*p2^3)/(2*p3^2))*lambda;
EL=(lambda*p2)/(2*(c-lambda*p1));
VL=(lambda*p3)/(3*(c-lambda*p1)) + ((lambda*p2)^2)/(4*(c -lambda*p1)^2);
deltazero=1-(lambda*p1)/c;
cvlylder=c-lambda*p1 + ((3*p2^2)/(2*p3))*lambda;
pzero=(lambda*p1)/c;
alphaBeek=EL^2/(VL*pzero);
betaBeek=EL/VL;
theta=(c/(lambda*p1))-1;
prvylder[1]=(lambdavylder/(betavylder*cvlylder))*exp(-(betavylder- (lambdavylder/cvlylder))*u[1]);
prBeekman[1]=pzero-pzero*(gammafunc(betaBeek*u[1], alphaBeek));
media[1]=meanc(contrep);
erroprBeekman[1]=fabs((media[1]-prBeekman[1])/media[1]);
erroprvylder[1]=fabs((media[1]-prvylder[1])/media[1]);
println("\n Exata", "\t \t PrBeekman", "\t \t PrVlyder");
println( "%6.5f", media[1], "\t \t \t", "%6.5f", prBeekman[1], "\t \t \t", "%6.5f", prvylder[1]);
println("\n erro_prBeekman", "\t \t erro_prvylder");
println( "%6.5f", erroprBeekman[1], "\t \t \t \t \t", "%6.5f", erroprvylder[1]);

```

```

println("- - - - -");
}
//Fim do Loop para os valores de u
println("Valor de theta: ", "%3.2f", theta);
}
/*****
* Indenização com distriduição Lognormal
* Com diversos valores da do Prêmio
*****/
/* Bibliotecas principais*/
#include <oxstd.h>
#include <oxfloat.h>
#import <maximize>
#include <oxprob.h>
/*****
Início do corpo principal do programa
*****/
/*Constantes fixas*/
const decl c=<1.7; 1.8; 1.9; 2; 2.1; 2.2; 2.3; 2.4; 2.45; 2.5>;
const decl lambda=1;
const decl u=2;
const decl sigma2=0.5;
const decl mu=0.4;
const decl a=50000;
const decl t=500;
const decl nrep=100000;
decl contrep, y, T;
main()
{
ranseed("GM");
decl i, j, k, n, w, X, cont, lognor, l, nor, r, p1,p2,p3, betavylder, lambdavylder;
decl theta=zeros(sizerc(c), 1);
decl alphaBeek=zeros(sizerc(c), 1);
decl betaBeek=zeros(sizerc(c), 1);
decl pzero=zeros(sizerc(c), 1);
decl cvylder=zeros(sizerc(c), 1);
decl EL=zeros(sizerc(c), 1);
decl VL=zeros(sizerc(c), 1);
decl deltazero=zeros(sizerc(c), 1);
decl prBeekman=zeros(sizerc(c), 1);
decl prvylder=zeros(sizerc(c), 1);
decl media=zeros(sizerc(c), 1);
decl erroprBeekman=zeros(sizerc(c), 1);
decl erroprvylder=zeros(sizerc(c), 1);
println("RESULTADOS");
println("Valor de u: ", u);
println("Valor de lambda: ", lambda);
println("Valor de sigma2: ", sigma2);
println("Valor de mu: ", mu);
println("-----");
//Início do Loop para os valores do prêmio
for(l=0;l<rows(c);++l)
{
println("Valor de c: ", c[l]);
contrep=zeros(nrep,1);
y=zeros(sizerc(a), 1);
T=zeros(sizerc(a), 1);
//Início do Loop de Monte Carlo
for(r=0;r<nrep;++r)
{
cont=0;
y=ranexp(a, 1, lambda);
T=cumulate(y);
for(i=0, n=0; i<a; ++i)
{

```

```

        if(T[i]<=t)
        {
            n =n +1;
        }
    }
    if(n==0)
    {
        w=u +c[1]*t;
    }
    else
    {
        nor=rann(n, 1);
        X=sigma2*nor + mu;
        lognor=exp(X);
        w=zeros(2*n+1, 1);
        w[0]=u;
        for(j=0; j<n; ++j)
        {
            w[2*j+1]=w[2*j]+c[1]*y[j];
            w[2*j+2]=w[2*j+1]-lognor[j];
        }
        for(k=0;k<rows(w);++k)
        {
            if(w[k]>=0)
                cont=cont;
            else
                if(w[k]<0)
                {
                    cont=cont+1;
                    break;
                }
        }
    }
    contrep[r]=cont;
}
//Fim do Loop de Monte Carlo
p1=exp(mu + (sigma2^2)/2);
p2=exp(2*mu +4*(sigma2^2)/2);
p3=exp(3*mu +9*(sigma2^2)/2);
betavylder=(3*p2)/p3;
lambdavylder=((9*p2^3)/(2*p3^2))*lambda;
EL[1]=(lambda*p2)/(2*(c[1]-lambda*p1));
VL[1]=(lambda*p3)/(3*(c[1]-lambda*p1)) + ((lambda*p2)^2)/(4*(c[1] -lambda*p1)^2);
deltazero[1]=1-(lambda*p1)/c[1];
cvylder[1]=c[1]-lambda*p1 + ((3*p2^2)/(2*p3))*lambda;
pzero[1]=(lambda*p1)/c[1];
alphaBeek[1]=EL[1]^2/(VL[1]*pzero[1]);
betaBeek[1]=EL[1]/VL[1];
theta[1]=(c[1]/(lambda*p1))-1;
prvylder[1]=(lambdavylder/(betavylder*cvylder[1]))*exp(-(betavylder- (lambdavylder/cvylder[1]))*u);
prBeekman[1]=pzero[1]-pzero[1]*(gammafunc(betaBeek[1]*u, alphaBeek[1]));
media[1]=meanc(contrep);
erroprBeekman[1]=fabs((media[1]-prBeekman[1])/media[1]);
erroprvylder[1]=fabs((media[1]-prvylder[1])/media[1]);
println("\n Exata", "\t \t PrBeekman", "\t \t PrVylder", "\t \t theta");
println("%6.5f",media[1],"\t\t\t", "%6.5f",prBeekman[1],"\t\t\t", "%6.5f",prvylder[1],"\t\t\t", "%3.2f",theta[1]);
println("\n erro_prBeekman", "\t \t erro_prvylder");
println( "%6.5f", erroprBeekman[1], "\t \t \t \t \t", "%6.5f", erroprvylder[1]);
println("- - - - -");
}
}
//Fim do Loop para os valores do prêmio
/*****
* Indenização com distribuição Lognormal          *
* Com diversos valores de Lambda                  *
*****/

```

```

/* Bibliotecas principais*/
#include <oxstd.h>
#include <oxfloat.h>
#import <maximize>
#include <oxprob.h>
/*****
Início do corpo principal do programa
*****/
/*Constantes fixas*/
const decl lambda=<0.75; 0.8; 0.85; 0.88; 0.9; 0.94; 0.95; 0.98; 1; 1.05>;
const decl c=1.8;
const decl u=2;
const decl sigma2=0.5;
const decl mu=0.4;
const decl a=50000;
const decl t=500;
const decl nrep=10;
decl contrep, y, T;
main()
{
ranseed("GM");
decl i, j, k, n, w, X, cont, lognor, l, nor, r, p1,p2,p3, betavylder;
decl lambdavylder=zeros(sizerc(lambda), 1);
decl theta=zeros(sizerc(lambda), 1);
decl alphaBeek=zeros(sizerc(lambda), 1);
decl betaBeek=zeros(sizerc(lambda), 1);
decl pzero=zeros(sizerc(lambda), 1);
decl cvylder=zeros(sizerc(lambda), 1);
decl EL=zeros(sizerc(lambda), 1);
decl VL=zeros(sizerc(lambda), 1);
decl deltazero=zeros(sizerc(lambda), 1);
decl prBeekman=zeros(sizerc(lambda), 1);
decl prvylder=zeros(sizerc(lambda), 1);
decl media=zeros(sizerc(lambda), 1);
decl erroprBeekman=zeros(sizerc(lambda), 1);
decl erroprvylder=zeros(sizerc(lambda), 1);
println("RESULTADOS");
println("Valor de u: ", u);
println("Valor de c: ", c);
println("Valor de sigma2: ", sigma2);
println("Valor de mu: ", mu);
println("-----");
//Início do Loop para os valores de lambda
for(l=0;l<rows(lambda);++l)
{
println("Valor de lambda: ", "%3.2f", lambda[l]);
contrep=zeros(nrep,1);
y=zeros(sizerc(a), 1);
T=zeros(sizerc(a), 1);
//Início do Loop de Monte Carlo
for(r=0;r<nrep;++r)
{
cont=0;
y=ranexp(a, 1, lambda[l]);
T=cumulate(y);
for(i=0, n=0; i<a; ++i)
{
if(T[i]<=t)
{
n =n +1;
}
}
if(n==0)
{
w=u +c*t;
}
}
}
}

```

```

    }
    else
    {
        nor=rann(n, 1);
        X=sigma2*nor + mu;
        lognor=exp(X);
        w=zeros(2*n+1, 1);
        w[0]=u;
        for(j=0; j<n; ++j)
        {
            w[2*j+1]=w[2*j]+c*y[j];
            w[2*j+2]=w[2*j+1]-lognor[j];
        }
        for(k=0;k<rows(w);++k)
        {
            if(w[k]>=0)
            cont=cont;
            else
            if(w[k]<0)
            {
                cont=cont+1;
                break;
            }
        }
    }
    contrep[r]=cont;
}
//Fim do Loop de Monte Carlo
p1=exp(mu + (sigma2^2)/2);
p2=exp(2*mu +4*(sigma2^2)/2);
p3=exp(3*mu +9*(sigma2^2)/2);
betavylder=(3*p2)/p3;
lambdavylder[1]=((9*p2^3)/(2*p3^2))*lambda[1];
EL[1]=(lambda[1]*p2)/(2*(c-lambda[1]*p1));
VL[1]=(lambda[1]*p3)/(3*(c-lambda[1]*p1)) + ((lambda[1]*p2)^2)/(4*(c -lambda[1]*p1)^2);
deltazero[1]=1-(lambda[1]*p1)/c;
cvlylder[1]=c-lambda[1]*p1 + ((3*p2^2)/(2*p3))*lambda[1];
pzero[1]=(lambda[1]*p1)/c;
alphaBeek[1]=EL[1]^2/(VL[1]*pzero[1]);
betaBeek[1]=EL[1]/VL[1];
theta[1]=(c/(lambda[1]*p1))-1;
prvylder[1]=(lambdavylder[1]/(betavylder*cvlylder[1]))*exp(-(betavylder- (lambdavylder[1]/cvlylder[1]))*u);
prBeekman[1]=pzero[1]-pzero[1]*(gammafunc(betaBeek[1]*u, alphaBeek[1]));
media[1]=meanc(contrep);
erroprBeekman[1]=fabs((media[1]-prBeekman[1])/media[1]);
erroprvylder[1]=fabs((media[1]-prvylder[1])/media[1]);
println("\n Exata", "\t \t PrBeekman", "\t \t PrVylder", "\t \t theta");
println("%6.5f",media[1], "\t\t\t", "%6.5f",prBeekman[1], "\t\t\t", "%6.5f",prvylder[1], "\t\t\t", "%3.2f",theta[1]);
println("\n erro_prBeekman", "\t \t erro_prvylder");
println( "%6.5f", erroprBeekman[1], "\t \t \t \t \t \t", "%6.5f", erroprvylder[1]);
println("- - - - -");
}
//Fim do Loop para os valores de lambda
}
/*****
* Indenização com distriduição Lognormal *
* Com diversos valores de mu *
*****/
/* Bibliotecas principais*/
#include <oxstd.h>
#include <oxfloat.h>
#import <maximize>
#include <oxprob.h>
/*****
Início do corpo principal do programa

```

```

*****
/*Constantes fixas*/
const decl mu=< 0.1; 0.15; 0.20; 0.25; 0.28; 0.3; 0.34; 0.35; 0.38; 0.4>;
const decl c=1.8;
const decl u=2;
const decl sigma2=0.5;
const decl lambda=1;
const decl a=50000;
const decl t=500;
const decl nrep=10;
decl contrep, y, T;
main()
{
ranseed("GM");
decl i, j, k, n, w, X, cont, lognor, l, nor, r;
decl betavylder=zeros(sizerc(mu), 1);
decl p1=zeros(sizerc(mu), 1);
decl p2=zeros(sizerc(mu), 1);
decl p3=zeros(sizerc(mu), 1);
decl lambdavylder=zeros(sizerc(mu), 1);
decl theta=zeros(sizerc(mu), 1);
decl alphaBeek=zeros(sizerc(mu), 1);
decl betaBeek=zeros(sizerc(mu), 1);
decl pzero=zeros(sizerc(mu), 1);
decl cvylder=zeros(sizerc(mu), 1);
decl EL=zeros(sizerc(mu), 1);
decl VL=zeros(sizerc(mu), 1);
decl deltazero=zeros(sizerc(mu), 1);
decl prBeekman=zeros(sizerc(mu), 1);
decl prvylder=zeros(sizerc(mu), 1);
decl media=zeros(sizerc(mu), 1);
decl erroprBeekman=zeros(sizerc(mu), 1);
decl erroprvylder=zeros(sizerc(mu), 1);
println("RESULTADOS");
println("Valor de u: ", u);
println("Valor de c: ", c);
println("Valor de sigma2: ", sigma2);
println("Valor de lambda: ", lambda);
println("-----");
//Inicio do Loop para os valores de mu
for(l=0;l<rows(mu);++l)
{
println("Valor de mu: ", "%3.2f", mu[l]);
contrep=zeros(nrep,1);
y=zeros(sizerc(a), 1);
T=zeros(sizerc(a), 1);
//Inicio do Loop de Monte Carlo
for(r=0;r<nrep;++r)
{
cont=0;
y=ranexp(a, 1, lambda);
T=cumulate(y);
for(i=0, n=0; i<a; ++i)
{
if(T[i]<=t)
{
n =n +1;
}
}
if(n==0)
{
w=u +c*t;
}
else
{

```



```

nor=rann(n, 1);
X=sigma2*nor + mu[1];
lognor=exp(X);
w=zeros(2*n+1, 1);
w[0]=u;
    for(j=0; j<n; ++j)
    {
        w[2*j+1]=w[2*j]+c*y[j];
        w[2*j+2]=w[2*j+1]-lognor[j];
    }
    for(k=0;k<rows(w);++k)
    {
        if(w[k]>=0)
            cont=cont;
        else
            if(w[k]<0)
            {
                cont=cont+1;
                break;
            }
    }
contrep[r]=cont;
}
//Fim do Loop de Monte Carlo
p1[1]=exp(mu[1] + (sigma2^2)/2);
p2[1]=exp(2*mu[1] +4*(sigma2^2)/2);
p3[1]=exp(3*mu[1] +9*(sigma2^2)/2);
betavylder[1]=(3*p2[1])/p3[1];
lambdavylder[1]=((9*p2[1]^3)/(2*p3[1]^2))*lambda;
EL[1]=(lambda*p2[1])/(2*(c-lambda*p1[1]));
VL[1]=(lambda*p3[1])/(3*(c-lambda*p1[1])) + ((lambda*p2[1])^2)/(4*(c -lambda*p1[1])^2);
deltazero[1]=1-(lambda*p1[1])/c;
cvylder[1]=c-lambda*p1[1] + ((3*p2[1]^2)/(2*p3[1]))*lambda;
pzero[1]=(lambda*p1[1])/c;
alphaBeek[1]=EL[1]^2/(VL[1]*pzero[1]);
betaBeek[1]=EL[1]/VL[1];
theta[1]=(c/(lambda*p1[1]))-1;
prvylder[1]=(lambdavylder[1]/(betavylder[1]*cvylder[1]))*exp(-(betavylder[1]- (lambdavylder[1]/cvylder[1]))*u);
prBeekman[1]=pzero[1]-pzero[1]*(gammafunc(betaBeek[1]*u, alphaBeek[1]));
media[1]=meanc(contrep);
erroprBeekman[1]=fabs((media[1]-prBeekman[1])/media[1]);
erroprvylder[1]=fabs((media[1]-prvylder[1])/media[1]);
println("\n Exata", "\t \t PrBeekman", "\t \t PrVlylder", "\t \t theta");
println("%6.5f",media[1],"\t\t\t", "%6.5f",prBeekman[1],"\t\t\t", "%6.5f",prvylder[1],"\t\t\t", "%3.2f",theta[1]);
println("\n erro_prBeekman", "\t \t erro_prvylder");
println( "%6.5f", erroprBeekman[1], "\t \t \t \t \t \t", "%6.5f", erroprvylder[1]);
println("- - - - -");
}
//Fim do Loop para os valores de mu
}
/*****
* Indenização com distriduição Lognormal *
* Com diversos valores de Sigma *
*****/
/* Bibliotecas principais*/
#include <oxstd.h>
#include <oxfloat.h>
#include <maximize>
#include <oxprob.h>
/*****
Início do corpo principal do programa
*****/
/*Constantes fixas*/
const decl sigma2=<0.1; 0.20; 0.25; 0.3; 0.35; 0.4; 0.45; 0.5; 0.55; 0.6>;

```

```

const decl c=1.8;
const decl u=2;
const decl mu=0.4;
const decl lambda=1;
const decl a=50000;
const decl t=500;
const decl nrep=10;
decl contrep, y, T;
main()
{
ranseed("GM");
decl i, j, k, n, w, X, cont, lognor, l, nor, r;
decl betavylder=zeros(sizerc(sigma2), 1);
decl p1=zeros(sizerc(sigma2), 1);
decl p2=zeros(sizerc(sigma2), 1);
decl p3=zeros(sizerc(sigma2), 1);
decl lambdavyllder=zeros(sizerc(sigma2), 1);
decl theta=zeros(sizerc(sigma2), 1);
decl alphaBeek=zeros(sizerc(sigma2), 1);
decl betaBeek=zeros(sizerc(sigma2), 1);
decl pzero=zeros(sizerc(sigma2), 1);
decl cvyllder=zeros(sizerc(sigma2), 1);
decl EL=zeros(sizerc(sigma2), 1);
decl VL=zeros(sizerc(sigma2), 1);
decl deltazero=zeros(sizerc(sigma2), 1);
decl prBeekman=zeros(sizerc(sigma2), 1);
decl prvyllder=zeros(sizerc(sigma2), 1);
decl media=zeros(sizerc(sigma2), 1);
decl erroprBeekman=zeros(sizerc(sigma2), 1);
decl erroprvyllder=zeros(sizerc(sigma2), 1);
println("RESULTADOS");
println("Valor de u: ", u);
println("Valor de c: ", c);
println("Valor de mu: ", mu);
println("Valor de lambda: ", lambda);
println("-----");
//Início do Loop para os valores de sigma
for(l=0;l<rows(sigma2);++l)
{
println("Valor de sigma2: ", "%3.2f", sigma2[l]);
contrep=zeros(nrep,1);
y=zeros(sizerc(a), 1);
T=zeros(sizerc(a), 1);
//Início do Loop de Monte Carlo
for(r=0;r<nrep;++r)
{
cont=0;
y=ranexp(a, 1, lambda);
T=cumulate(y);
for(i=0, n=0; i<a; ++i)
{
if(T[i]<=t)
{
n =n +1;
}
}
if(n==0)
{
w=u +c*t;
}
else
{
nor=rann(n, 1);
X=sigma2[l]*nor + mu;
lognor=exp(X);
}
}
}
}
}

```

```

w=zeros(2*n+1, 1);
w[0]=u;
for(j=0; j<n; ++j)
{
w[2*j+1]=w[2*j]+c*y[j];
w[2*j+2]=w[2*j+1]-lognor[j];
}
for(k=0;k<rows(w);++k)
{
if(w[k]>=0)
cont=cont;
else
if(w[k]<0)
{
cont=cont+1;
break;
}
}
}
contrep[r]=cont;
}
//Fim do Loop de Monte Carlo
p1[l]=exp(mu + (sigma2[l]^2)/2);
p2[l]=exp(2*mu +4*(sigma2[l]^2)/2);
p3[l]=exp(3*mu +9*(sigma2[l]^2)/2);
betavylder[l]=(3*p2[l])/p3[l];
lambdavylder[l]=((9*p2[l]^3)/(2*p3[l]^2))*lambda;
EL[l]=(lambda*p2[l])/(2*(c-lambda*p1[l]));
VL[l]=(lambda*p3[l])/(3*(c-lambda*p1[l])) + ((lambda*p2[l]^2)/(4*(c -lambda*p1[l]^2));
deltazero[l]=1-(lambda*p1[l])/c;
cvylder[l]=c-lambda*p1[l] + ((3*p2[l]^2)/(2*p3[l]))*lambda;
pzero[l]=(lambda*p1[l])/c;
alphaBeek[l]=EL[l]^2/(VL[l]*pzero[l]);
betaBeek[l]=EL[l]/VL[l];
theta[l]=(c/(lambda*p1[l]))-1;
prvylder[l]=(lambdavylder[l]/(betavylder[l]*cvylder[l]))*exp(-(betavylder[l]- (lambdavylder[l]/cvylder[l]))*u);
prBeekman[l]=pzero[l]-pzero[l]*(gammafunc(betaBeek[l]*u, alphaBeek[l]));
media[l]=meanc(contrep);
erroprBeekman[l]=fabs((media[l]-prBeekman[l])/media[l]);
erroprvylder[l]=fabs((media[l]-prvylder[l])/media[l]);
println("\n Exata", "\t \t PrBeekman", "\t \t PrVylder", "\t \t theta");
println("%6.5f",media[l], "\t\t\t", "%6.5f",prBeekman[l], "\t\t\t", "%6.5f",prvylder[l], "\t\t\t", "%3.2f",theta[l]);
println("\n erro_prBeekman", "\t \t erro_prvylder");
println( "%6.5f", erroprBeekman[l], "\t \t \t \t \t", "%6.5f", erroprvylder[l]);
println("- - - - -");
}
//Fim do Loop para os valores de sigma
}
/*****
* Indenização com distriduição Pareto *
* Com diversos valores da Reserva *
*****/
/* Bibliotecas principais*/
#include <oxstd.h>
#include <oxfloat.h>
#import <maximize>
#include <oxprob.h>
/*****
Início do corpo principal do programa
*****/
/*Constantes fixas*/
const decl u=<0; 1; 2; 3; 5; 10; 15; 20; 30; 50>;
const decl c=1.5;
const decl kp=3;
const decl lambda=1;

```

```

const decl alphapareto=4;
const decl a=50000;
const decl t=500;
const decl nrep=10;
decl contrep, y, T;
main()
{
ranseed("GM");
decl i, j, k, n, w, X, cont, r, l, un, p1, p2, p3, pzero;
decl deltazero, theta, betavylder, lambdavylder, cvylder, EL, VL, alphagamabeekman, betagamabeekman;
decl prvylder=zeros(sizerc(u), 1);
decl prBeekman=zeros(sizerc(u), 1);
decl media=zeros(sizerc(u), 1);
decl erroprBeekman=zeros(sizerc(u), 1);
decl erroprvylder=zeros(sizerc(u), 1);
println("RESULTADOS");
println("Valor de c: ", c);
println("Valor de lambda: ", lambda);
println("Valor de kp: ", kp);
println("Valor de alphapareto: ", alphapareto);
println("-----");
//Início do Loop para os valores de u
for(l=0;l<rows(u);++l)
{
println("Valor de u: ", u[l]);
contrep=zeros(nrep,1);
y=zeros(sizerc(a), 1);
T=zeros(sizerc(a), 1);
//Início do Loop de Monte Carlo
for(r=0;r<nrep;++r)
{
cont=0;
y=ranexp(a, 1, lambda);
T=cumulate(y);
for(i=0, n=0; i<a; ++i)
{
if(T[i]<=t)
{
n =n +1;
}
}
if(n==0)
{
w=u[l] + c*t;
}
else
{
un=ranu(n,1);
X=(kp*((1-un).^(-1/alphapareto)))-kp;
w=zeros(2*n+1, 1);
w[0]=u[l];
for(j=0; j<n; ++j)
{
w[2*j+1]=w[2*j]+c*y[j];
w[2*j+2]=w[2*j+1]-X[j];
}
for(k=0;k<rows(w);++k)
{
if(w[k]>=0)
cont=cont;
else
if(w[k]<0)
{
cont=cont+1;
break;
}
}
}
}
}

```

```

    }
    }
}
contrep[r]=cont;
}
//Fim do Loop de Monte Carlo
p1=(kp)/(alphapareto-1);
p2=(2*(kp^(2))*gammafact(alphapareto-2))/gammafact(alphapareto);
p3=(6*(kp^(3))*gammafact(alphapareto-3))/gammafact(alphapareto);
pzero=(lambda*p1)/c;
deltazero=1-(lambda*p1)/c;
betavylder=(3*p2)/p3;
lambdavylder=((9*p2^3)/(2*p3^2))*lambda;
cvylder=c-lambda*p1 + ((3*(p2^2))/(2*p3))*lambda;
EL=(lambda*p2)/(2*(c-lambda*p1));
VL=(lambda*p3)/(3*(c-lambda*p1)) + ((lambda*p2)^2)/(4*(c-lambda*p1)^2);
alphagamabeekman=EL^2/(VL*pzero);
betagamabeekman=EL/VL;
theta=(c/(lambda*p1))-1;
prvylder[l]=(lambdavylder/(betavylder*cvylder))*exp(-(betavylder- (lambdavylder/cvylder))*u[l]);
prBeekman[l]=pzero-pzero*(gammafunc(betagamabeekman*u[l], alphagamabeekman));
media[l]=meanc(contrep);
erroprBeekman[l]=fabs((media[l]-prBeekman[l])/media[l]);
erroprvylder[l]=fabs((media[l]-prvylder[l])/media[l]);
println("\n Exata", "\t \t PrBeekman", "\t \t PrVlylder");
println( "%6.5f", media[l], "\t \t \t", "%6.5f", prBeekman[l], "\t \t \t", "%6.5f", prvylder[l]);
println("\n erro_prBeekman", "\t \t erro_prvylder");
println( "%6.5f", erroprBeekman[l], "\t \t \t \t \t", "%6.5f", erroprvylder[l]);
println("- - - - -");
}
//Fim do Loop para os valores de u
println("Valor de theta: ", "%3.2f", theta);
}
/*****
* Indenização com distriduição Pareto *
* Com diversos valores do Prêmio *
*****/
/* Bibliotecas principais*/
#include <oxstd.h>
#include <oxfloat.h>
#import <maximize>
#include <oxprob.h>
/*****
Início do corpo principal do programa
*****/
/*Constantes fixas*/
const decl c=<1.1; 1.15; 1.2; 1.23; 1.25; 1.3; 1.35; 1.4; 1.45; 1.5>;
const decl u=2;
const decl kp=3;
const decl lambda=1;
const decl alphapareto=4;
const decl a=50000;
const decl t=500;
const decl nrep=10;
decl contrep, y, T;
main()
{
ranseed("GM");
decl i, j, k, n, w, X, cont, r, l, un, p1, p2, p3, betavylder, lambdavylder;
decl betagamabeekman=zeros(sizerc(c), 1);
decl alphagamabeekman=zeros(sizerc(c), 1);
decl theta=zeros(sizerc(c), 1);
decl VL=zeros(sizerc(c), 1);
decl EL=zeros(sizerc(c), 1);
decl cvylder=zeros(sizerc(c), 1);

```

```

decl pzero=zeros(sizerc(c), 1);
decl deltazero=zeros(sizerc(c), 1);
decl prvyllder=zeros(sizerc(c), 1);
decl prBeekman=zeros(sizerc(c), 1);
decl media=zeros(sizerc(c), 1);
decl erroprBeekman=zeros(sizerc(c), 1);
decl erroprvyllder=zeros(sizerc(c), 1);
println("RESULTADOS");
println("Valor de u: ", u);
println("Valor de lambda: ", lambda);
println("Valor de kp: ", kp);
println("Valor de alphapareto: ", alphapareto);
println("-----");
//Inicio do Loop para os valores do prêmio
for(l=0;l<rows(c);++l)
{
println("Valor de c: ", "%3.2f", c[l]);
contrep=zeros(nrep,1);
y=zeros(sizerc(a), 1);
T=zeros(sizerc(a), 1);
//Inicio do Loop de Monte Carlo
for(r=0;r<nrep;++r)
{
cont=0;
y=ranexp(a, 1, lambda);
T=cumulate(y);
for(i=0, n=0; i<a; ++i)
{
if(T[i]<=t)
{
n =n +1;
}
}
if(n==0)
{
w=u + c[l]*t;
}
else
{
un=ranu(n,1);
X=(kp*((1-un).^(-1/alphapareto))-kp;
w=zeros(2*n+1, 1);
w[0]=u;
for(j=0; j<n; ++j)
{
w[2*j+1]=w[2*j]+c[l]*y[j];
w[2*j+2]=w[2*j+1]-X[j];
}
for(k=0;k<rows(w);++k)
{
if(w[k]>=0)
cont=cont;
else
if(w[k]<0)
{
cont=cont+1;
break;
}
}
}
contrep[r]=cont;
}
//Fim do Loop de Monte Carlo
p1=(kp)/(alphapareto-1);
p2=(2*(kp^(2))*gammafact(alphapareto-2))/gammafact(alphapareto);

```

```

p3=(6*(kp^(3))*gammafact(alphapareto-3))/gammafact(alphapareto);
pzero[1]=(lambda*p1)/c[1];
deltazero[1]=1-(lambda*p1)/c[1];
betavylder=(3*p2)/p3;
lambdavylder=((9*p2^3)/(2*p3^2))*lambda;
cvylder[1]=c[1]-lambda*p1 + ((3*(p2^2))/(2*p3))*lambda;
EL[1]=(lambda*p2)/(2*(c[1]-lambda*p1));
VL[1]=(lambda*p3)/(3*(c[1]-lambda*p1)) + ((lambda*p2)^2)/(4*(c[1]-lambda*p1)^2);
alphagamabeekman[1]=EL[1]^2/(VL[1]*pzero[1]);
betagamabeekman[1]=EL[1]/VL[1];
theta[1]=(c[1]/(lambda*p1))-1;
prvylder[1]=(lambdavylder/(betavylder*cvylder[1]))*exp(-(betavylder- (lambdavylder/cvylder[1]))*u);
prBeekman[1]=pzero[1]-pzero[1]*(gammafunc(betagamabeekman[1]*u, alphagamabeekman[1]));
media[1]=meanc(contrep);
erroprBeekman[1]=fabs((media[1]-prBeekman[1])/media[1]);
erroprvylder[1]=fabs((media[1]-prvylder[1])/media[1]);
println("\n Exata", "\t \t PrBeekman", "\t \t PrVylder", "\t \t theta");
println("%6.5f",media[1], "\t\t\t", "%6.5f",prBeekman[1], "\t\t\t", "%6.5f",prvylder[1], "\t\t\t", "%3.2f",theta[1]);
println("\n erro_prBeekman", "\t \t erro_prvylder");
println( "%6.5f", erroprBeekman[1], "\t \t \t \t \t", "%6.5f", erroprvylder[1]);
println("- - - - -");
}
//Fim do Loop para os valores do prêmio
}
/*****
* Indenização com distriduição Pareto *
* Com diversos valores de Lambda *
*****/
/* Bibliotecas principais*/
#include <oxstd.h>
#include <oxfloat.h>
#import <maximize>
#include <oxprob.h>
/*****
Início do corpo principal do programa
*****/
/*Constantes fixas*/
const decl lambda=<1; 1.1; 1.15; 1.2; 1.25; 1.3; 1.35; 1.4; 1.45; 1.45>;
const decl u=2;
const decl kp=3;
const decl c=1.5;
const decl alphapareto=4;
const decl a=50000;
const decl t=500;
const decl nrep=10;
decl contrep, y, T;
main()
{
ranseed("GM");
decl i, j, k, n, w, X, cont, r, l, un, p1, p2, p3, betavylder;
decl lambdavylder=zeros(sizerc(lambda), 1);
decl betagamabeekman=zeros(sizerc(lambda), 1);
decl alphagamabeekman=zeros(sizerc(lambda), 1);
decl theta=zeros(sizerc(lambda), 1);
decl VL=zeros(sizerc(lambda), 1);
decl EL=zeros(sizerc(lambda), 1);
decl cvylder=zeros(sizerc(lambda), 1);
decl pzero=zeros(sizerc(lambda), 1);
decl deltazero=zeros(sizerc(lambda), 1);
decl prvylder=zeros(sizerc(lambda), 1);
decl prBeekman=zeros(sizerc(lambda), 1);
decl media=zeros(sizerc(lambda), 1);
decl erroprBeekman=zeros(sizerc(lambda), 1);
decl erroprvylder=zeros(sizerc(lambda), 1);
println("RESULTADOS");
}

```

```

println("Valor de u: ", u);
println("Valor de c: ", c);
println("Valor de kp: ", kp);
println("Valor de alphapareto: ", alphapareto);
println("-----");
//Início do Loop para os valores de lambda
for(l=0;l<rows(lambda);++l)
{
println("Valor de lambda: ", "%3.2f", lambda[l]);
contrep=zeros(nrep,1);
y=zeros(sizerc(a), 1);
T=zeros(sizerc(a), 1);
//Início do Loop de Monte Carlo
for(r=0;r<nrep;++r)
{
cont=0;
y=ranexp(a, 1, lambda[l]);
T=cumulate(y);
for(i=0, n=0; i<a; ++i)
{
if(T[i]<=t)
{
n =n +1;
}
}
if(n==0)
{
w=u + c*t;
}
else
{
un=ranu(n,1);
X=(kp*((1-un).^(-1/alphapareto)))-kp;
w=zeros(2*n+1, 1);
w[0]=u;
for(j=0; j<n; ++j)
{
w[2*j+1]=w[2*j]+c*y[j];
w[2*j+2]=w[2*j+1]-X[j];
}
for(k=0;k<rows(w);++k)
{
if(w[k]>=0)
cont=cont;
else
if(w[k]<0)
{
cont=cont+1;
break;
}
}
}
contrep[r]=cont;
}
//Fim do Loop de Monte Carlo
p1=(kp)/(alphapareto-1);
p2=(2*(kp^(2))*gammafact(alphapareto-2))/gammafact(alphapareto);
p3=(6*(kp^(3))*gammafact(alphapareto-3))/gammafact(alphapareto);
pzero[l]=(lambda[l]*p1)/c;
deltazero[l]=1-(lambda[l]*p1)/c;
betavylder=(3*p2)/p3;
lambdavylder[l]=((9*p2^3)/(2*p3^2))*lambda[l];
cvylder[l]=c-lambda[l]*p1 + ((3*(p2^2))/(2*p3))*lambda[l];
EL[l]=(lambda[l]*p2)/(2*(c-lambda[l]*p1));
VL[l]=(lambda[l]*p3)/(3*(c-lambda[l]*p1) + ((lambda[l]*p2)^2)/(4*(c -lambda[l]*p1)^2));

```



```

alphagamabeekman[1]=EL[1]^2/(VL[1]*pzero[1]);
betagamabeekman[1]=EL[1]/VL[1];
theta[1]=(c/(lambda[1]*p1))-1;
prvylde[1]=(lambdavylder[1]/(betavylder*cvylde[1]))*exp(-(betavylder- (lambdavylder[1]/cvylde[1]))*u);
prBeekman[1]=pzero[1]-pzero[1]*(gammafunc(betagamabeekman[1]*u, alphagamabeekman[1]));
media[1]=meanc(contrep);
erroprBeekman[1]=fabs((media[1]-prBeekman[1])/media[1]);
erroprvylde[1]=fabs((media[1]-prvylde[1])/media[1]);
println("\n Exata", "\t \t PrBeekman", "\t \t PrVylde", "\t \t theta");
println( "%6.5f",media[1],"\t\t\t", "%6.5f",prBeekman[1],"\t\t\t", "%6.5f",prvylde[1],"\t\t\t", "%3.2f",theta[1]);
println("\n erro_prBeekman", "\t \t erro_prvylde");
println( "%6.5f", erroprBeekman[1], "\t \t \t \t \t", "%6.5f", erroprvylde[1]);
println("- - - - -");
}
//Fim do Loop para os valores de lambda
}
/*****
* Indenização com distriduição Pareto *
* Com diversos valores do K *
*****/
/* Bibliotecas principais*/
#include <oxstd.h>
#include <oxfloat.h>
#import <maximize>
#include <oxprob.h>
/*****
Início do corpo principal do programa
*****/
/*Constantes fixas*/
const decl kp=<3; 3.1; 3.2; 3.4; 3.5; 3.6; 3.8; 4.1; 4.2; 4.4>;
const decl u=2;
const decl lambda=1;
const decl c=1.5;
const decl alphapareto=4;
const decl a=50000;
const decl t=500;
const decl nrep=10;
decl contrep, y, T;
main()
{
ranseed("GM");
decl i, j, k, n, w, X, cont, r, l, un;
decl betavylder=zeros(sizerc(kp), 1);
decl p1=zeros(sizerc(kp), 1);
decl p2=zeros(sizerc(kp), 1);
decl p3=zeros(sizerc(kp), 1);
decl lambdavylder=zeros(sizerc(kp), 1);
decl betagamabeekman=zeros(sizerc(kp), 1);
decl alphagamabeekman=zeros(sizerc(kp), 1);
decl theta=zeros(sizerc(kp), 1);
decl VL=zeros(sizerc(kp), 1);
decl EL=zeros(sizerc(kp), 1);
decl cvylde=zeros(sizerc(kp), 1);
decl pzero=zeros(sizerc(kp), 1);
decl deltazero=zeros(sizerc(kp), 1);
decl prvylde=zeros(sizerc(kp), 1);
decl prBeekman=zeros(sizerc(kp), 1);
decl media=zeros(sizerc(kp), 1);
decl erroprBeekman=zeros(sizerc(kp), 1);
decl erroprvylde=zeros(sizerc(kp), 1);
println("RESULTADOS");
println("Valor de u: ", u);
println("Valor de c: ", c);
println("Valor de lambda: ", lambda);
println("Valor de alphapareto: ", alphapareto);

```

```

println("-----");
//Inicio do Loop para os valores de kp
for(l=0;l<rows(kp);++l)
{
println("Valor de kp: ", "%3.2f", kp[l]);
contrep=zeros(nrep,1);
y=zeros(sizerc(a), 1);
T=zeros(sizerc(a), 1);
//Inicio do Loop de Monte Carlo
for(r=0;r<nrep;++r)
{
cont=0;
y=ranexp(a, 1, lambda);
T=cumulate(y);
for(i=0, n=0; i<a; ++i)
{
if(T[i]<=t)
{
n =n +1;
}
}
if(n==0)
{
w=u + c*t;
}
else
{
un=ranu(n,1);
X=(kp[l]*((1-un).^(-1/alphapareto)))-kp[l];
w=zeros(2*n+1, 1);
w[0]=u;
for(j=0; j<n; ++j)
{
w[2*j+1]=w[2*j]+c*y[j];
w[2*j+2]=w[2*j+1]-X[j];
}
for(k=0;k<rows(w);++k)
{
if(w[k]>=0)
cont=cont;
else
if(w[k]<0)
{
cont=cont+1;
break;
}
}
}
contrep[r]=cont;
}
//Fim do Loop de Monte Carlo
p1[l]=(kp[l])/(alphapareto-1);
p2[l]=(2*(kp[l]^2))*gammafact(alphapareto-2)/gammafact(alphapareto);
p3[l]=(6*(kp[l]^3))*gammafact(alphapareto-3)/gammafact(alphapareto);
pzero[l]=(lambda*p1[l])/c;
deltazero[l]=1-(lambda*p1[l])/c;
betavylder[l]=(3*p2[l])/p3[l];
lambdavylder[l]=((9*p2[l]^3)/(2*p3[l]^2))*lambda;
cvyllder[l]=c-lambda*p1[l] + ((3*(p2[l]^2))/(2*p3[l]))*lambda;
EL[l]=(lambda*p2[l])/(2*(c-lambda*p1[l]));
VL[l]=(lambda*p3[l])/(3*(c-lambda*p1[l])) + ((lambda*p2[l]^2)/(4*(c-lambda*p1[l]^2)));
alphagamabeekman[l]=EL[l]^2/(VL[l]*pzero[l]);
betagamabeekman[l]=EL[l]/VL[l];
theta[l]=(c/(lambda*p1[l]))-1;
prvylder[l]=(lambdavylder[l]/(betavylder[l]*cvyllder[l]))*exp(-(betavylder[l]- (lambdavylder[l]/cvyllder[l]))*u);

```

```

prBeekman[l]=pzero[l]-pzero[l]*(gammafunc(betagamabeekman[l]*u, alphagamabeekman[l]));
media[l]=meanc(contrep);
erroprBeekman[l]=fabs((media[l]-prvylde[r]/media[l]));
erroprvylde[r]=fabs((media[l]-prvylde[r]/media[l]));
println("\n Exata", "\t \t PrBeekman", "\t \t PrVylde[r]", "\t \t theta");
println("%6.5f",media[l], "\t\t\t", "%6.5f",prBeekman[l], "\t\t\t", "%6.5f",prvylde[r], "\t\t\t", "%3.2f",theta[l]);
println("\n erro_prBeekman", "\t \t erro_prvylde[r]");
println( "%6.5f", erroprBeekman[l], "\t \t \t \t \t", "%6.5f", erroprvylde[r]);
println("- - - - -");
}
//Início do Loop para os valores de kp
}
/*****
* Indenização com distriduição Pareto *
* Com diversos valores de Alpha *
*****/
/* Bibliotecas principais*/
#include <oxstd.h>
#include <oxfloat.h>
#import <maximize>
#include <oxprob.h>
/*****
Início do corpo principal do programa
*****/
/*Constantes fixas*/
const decl alphapareto=<3.1;3.2;3.3;3.4;3.5;3.6;3.7;3.8;3.9;4>;
const decl u=2;
const decl lambda=1;
const decl c=1.5;
const decl kp=3;
const decl a=50000;
const decl t=500;
const decl nrep=10;
decl contrep, y, T;
main()
{
ranseed("GM");
decl i, j, k, n, w, X, cont, r, l, un;
decl betavylde[r]=zeros(sizerc(alphapareto), 1);
decl p1=zeros(sizerc(alphapareto), 1);
decl p2=zeros(sizerc(alphapareto), 1);
decl p3=zeros(sizerc(alphapareto), 1);
decl lambdavylde[r]=zeros(sizerc(alphapareto), 1);
decl betagamabeekman=zeros(sizerc(alphapareto), 1);
decl alphagamabeekman=zeros(sizerc(alphapareto), 1);
decl theta=zeros(sizerc(alphapareto), 1);
decl VL=zeros(sizerc(alphapareto), 1);
decl EL=zeros(sizerc(alphapareto), 1);
decl cvylde[r]=zeros(sizerc(alphapareto), 1);
decl pzero=zeros(sizerc(alphapareto), 1);
decl deltazero=zeros(sizerc(alphapareto), 1);
decl prvylde[r]=zeros(sizerc(alphapareto), 1);
decl prBeekman=zeros(sizerc(alphapareto), 1);
decl media=zeros(sizerc(alphapareto), 1);
decl erroprBeekman=zeros(sizerc(alphapareto), 1);
decl erroprvylde[r]=zeros(sizerc(alphapareto), 1);
println("RESULTADOS");
println("Valor de u: ", u);
println("Valor de c: ", c);
println("Valor de lambda: ", lambda);
println("Valor de kp: ", kp);
println("-----");
//Início do Loop para os valores de alpha
for(l=0;l<rows(alphapareto);++l)
{

```

```

println("Valor de alphapareto: ", "%3.2f", alphapareto[1]);
contrep=zeros(nrep,1);
y=zeros(sizerc(a), 1);
T=zeros(sizerc(a), 1);
//Início do Loop de Monte Carlo
for(r=0;r<nrep;++r)
{
cont=0;
y=ranexp(a, 1, lambda);
T=cumulate(y);
for(i=0, n=0; i<a; ++i)
{
if(T[i]<=t)
{
n =n +1;
}
}
if(n==0)
{
w=u + c*t;
}
else
{
un=ranu(n,1);
X=(kp*((1-un).^(-1/alphapareto[1])))-kp;
w=zeros(2*n+1, 1);
w[0]=u;
for(j=0; j<n; ++j)
{
w[2*j+1]=w[2*j]+c*y[j];
w[2*j+2]=w[2*j+1]-X[j];
}
for(k=0;k<rows(w);++k)
{
if(w[k]>=0)
cont=cont;
else
if(w[k]<0)
{
cont=cont+1;
break;
}
}
}
contrep[r]=cont;
}
//Fim do Loop de Monte Carlo
p1[1]=(kp)/(alphapareto[1]-1);
p2[1]=(2*(kp^(2))*gammafact(alphapareto[1]-2))/gammafact(alphapareto[1]);
p3[1]=(6*(kp^(3))*gammafact(alphapareto[1]-3))/gammafact(alphapareto[1]);
pzero[1]=(lambda*p1[1])/c;
deltazero[1]=1-(lambda*p1[1])/c;
betavylder[1]=(3*p2[1])/p3[1];
lambdavylder[1]=((9*p2[1]^3)/(2*p3[1]^2))*lambda;
cvyllder[1]=c-lambda*p1[1] + ((3*(p2[1]^2))/(2*p3[1]))*lambda;
EL[1]=(lambda*p2[1])/((2*(c-lambda*p1[1])));
VL[1]=(lambda*p3[1])/((3*(c-lambda*p1[1])) + ((lambda*p2[1]^2)/(4*(c-lambda*p1[1]^2)));
alphagamabeekman[1]=EL[1]^2/(VL[1]*pzero[1]);
betagamabeekman[1]=EL[1]/VL[1];
theta[1]=(c/(lambda*p1[1]))-1;
prvylder[1]=(lambdavylder[1]/(betavylder[1]*cvyllder[1]))*exp(-(betavylder[1]- (lambdavylder[1]/cvyllder[1]))*u);
prBeekman[1]=pzero[1]-pzero[1]*(gammafunc(betagamabeekman[1]*u, alphagamabeekman[1]));
media[1]=meanc(contrep);
erroprBeekman[1]=fabs((media[1]-prBeekman[1])/media[1]);
erroprvylder[1]=fabs((media[1]-prvylder[1])/media[1]);

```

```

println("\n Exata", "\t \t PrBeekman", "\t \t PrVylder", "\t \t theta");
println("%6.5f",media[1],"\t\t\t","%6.5f",prBeekman[1],"\t\t\t","%6.5f",prvylder[1],"\t\t\t","%3.2f",theta[1]);
println("\n erro_prBeekman", "\t \t erro_prvylder");
println( "%6.5f", erroprBeekman[1], "\t \t \t \t \t \t", "%6.5f", erroprvylder[1]);
println("- - - - -");
}
//Fim do Loop para os valores de alpha
}

```

## Simulação para o Modelo Não Poissoniano

```

*****
* Indenizações tem distribuição Pareto *
* 0 tempo entre chegadas das indenizações Gama *
*****/
/* Bibliotecas principais*/
#include <oxstd.h>
#include <oxfloat.h>
#import <maximize>
#include <oxprob.h>
/*****
Início do corpo principal do programa
*****/
/*Constantes fixas*/
const decl u=<0; 1; 2; 3; 5; 10; 15; 20; 30; 50>; //Reserva Inicial
const decl c=1.3;
const decl alphagama=1.5;
const decl betagama=1;
const decl alphapareto=4;
const decl kp=3;
const decl a=50000;
const decl t=500;
const decl nrep=100000;
decl contrep, y, T;
main()
{
ranseed("GM");
decl i, j, k, n, w, X, cont, r, l, un;
//Início do Loop para os valores de u
println("RESULTADOS");
println("Valor de c: ", c);
println("-----");
println("Tempo entre ocorrencia de indenizacoes Gama(alphagama,betagama)");
println("Valor de alphagama: ", alphagama);
println("Valor de betagama: ", betagama);
println("-----");
println("Indenizacoes Pareto(kp,alphapareto)");
println("Valor de kp: ", kp);
println("Valor de alphapareto: ", alphapareto);
println("-----");
for(l=0;l<rows(u);++l)
{
println("Valor de u: ", u[l]);
contrep=zeros(nrep,1);
y=zeros(sizerc(a), 1);
T=zeros(sizerc(a), 1);
//Início do Loop de Monte Carlo
for(r=0;r<nrep;++r)
{
cont=0;
y=rangamma(a, 1, alphagama, betagama);
T=cumulate(y);
for(i=0, n=0; i<a; ++i)
{
if(T[i]<=t)

```

```

    {
    n =n +1;
    }
}
if(n==0)
{
w=u[1] +c*t;
}
else
{
un=ranu(n,1);
X=(kp*((1-un).^(-1/alphapareto))-kp;
w=zeros(2*n+1, 1);
w[0]=u[1];
    for(j=0; j<n; ++j)
    {
w[2*j+1]=w[2*j]+c*y[j];
w[2*j+2]=w[2*j+1]-X[j];
    }
    for(k=0;k<rows(w);++k)
    {
if(w[k]>=0)
cont=cont;
else
if(w[k]<0)
{
cont=cont+1;
break;
}
}
}
contrep[r]=cont;
}
//Fim do Loop de Monte Carlo
print("Media do Contador ",meanc(contrep));
println("-----");
}
//Fim do Loop para os valores de u
}
/*****
* Indenizações tem distribuição Gama
* 0 tempo entre chegadas das indenizações Gama
*****/
/* Bibliotecas principais*/
#include <oxstd.h>
#include <oxfloat.h>
#import <maximize>
#include <oxprob.h>
/*****
Início do corpo principal do programa
*****/
/*Constantes fixas*/
const decl u=<0;1;2;3;5;10;15;20;30;50>;
const decl c=1.3;
const decl alphas=1.5;
const decl betas=1;
const decl alphagama=2.5;
const decl betagama=2.2;
const decl a=50000;
const decl t=500;
const decl nrep=100000;
decl contrep, y, T;
main()
{
ranseed("GM");

```

```

decl i, j, k, n, w, X, cont, r, l;
println("RESULTADOS");
println("Valor de c: ", c);
println("-----");
println("Tempo entre ocorrencia de indenizacoes Gama(alphat,betat)");
println("Valor de alphas: ", alphas);
println("Valor de betas: ", betas);
println("-----");
println("Indenizacoes Gama(alphagama,betagama)");
println("Valor de alphagama: ", alphagama);
println("Valor de betagama: ", betagama);
println("-----");
//Início do Loop para os valores de u
for(l=0;l<rows(u);++l)
{
println("Valor de u: ", u[l]);
contrep=zeros(nrep,1);
y=zeros(sizerc(a), 1);
T=zeros(sizerc(a), 1);
//Início do Loop de Monte Carlo
for(r=0;r<nrep;++r)
{
cont=0;
y=rangamma(a, 1, alphas, betas);
T=cumulate(y);
for(i=0, n=0; i<a; ++i)
{
if(T[i]<=t)
{
n =n +1;
}
}
if(n==0)
{
w=u[l] +c*t;
}
else
{
X=rangamma(n, 1, alphagama, betagama);
w=zeros(2*n+1, 1);
w[0]=u[l];
for(j=0; j<n; ++j)
{
w[2*j+1]=w[2*j]+c*y[j];
w[2*j+2]=w[2*j+1]-X[j];
}
for(k=0;k<rows(w);++k)
{
if(w[k]>=0)
cont=cont;
else
if(w[k]<0)
{
cont=cont+1;
break;
}
}
}
contrep[r]=cont;
}
//Fim do Loop de Monte Carlo
print("Media do Contador ",meanc(contrep));
println("-----");
}
//Fim do Loop para os valores de u

```

```

}
/*****
* Indenizações tem distribuição Lognormal
* 0 tempo entre chegadas das indenizações Gama
*****/
/* Bibliotecas principais*/
#include <oxstd.h>
#include <oxfloat.h>
#import <maximize>
#include <oxprob.h>
/*****
Início do corpo principal do programa
*****/
/*Constantes fixas*/
const decl u=<0; 1; 2; 3; 5; 10; 15; 20; 30; 50>; //Reserva Inicial
const decl c=1.3;
const decl alphagama=1.5;
const decl betagama=1;
const decl sigma=0.5;
const decl mu=0.4;
const decl a=50000;
const decl t=500;
const decl nrep=100000;
decl contrep, y, T;
/*Função para gerar variáveis aleatórias exponenciais*/

main()
{
ranseed("GM");
decl i, j, k, n, w, X, cont, r, l, nor, lognor;
//Início do Loop para os valores de u
println("RESULTADOS");
println("Valor de c: ", c);
println("-----");
println("Tempo entre ocorrencia de indenizacoes Gama(alphagama,betagama)");
println("Valor de alphagama: ", alphagama);
println("Valor de betagama: ", betagama);
println("-----");
println("Indenizacoes Lognormal(mu,sigma2)");
println("Valor de sigma2: ", sigma);
println("Valor de mu: ", mu);
println("-----");
for(l=0;l<rows(u);++l)
{
println("Valor de u: ", u[l]);
contrep=zeros(nrep,1);
y=zeros(sizerc(a), 1);
T=zeros(sizerc(a), 1);
//Início do Loop de Monte Carlo
for(r=0;r<nrep;++r)
{
cont=0;
y=rangamma(a, 1, alphagama, betagama);
T=cumulate(y);
for(i=0, n=0; i<a; ++i)
{
if(T[i]<=t)
{
n =n +1;
}
}
if(n==0)
{
w=u[l] +c*t;
}
}
}
}

```



```

    }
    else
    {
        nor=rann(n, 1);
        X=sigma*nor + mu;
        lognor=exp(X);
        w=zeros(2*n+1, 1);
        w[0]=u[1];
        for(j=0; j<n; ++j)
        {
            w[2*j+1]=w[2*j]+c*y[j];
            w[2*j+2]=w[2*j+1]-lognor[j];
        }
        for(k=0;k<rows(w);++k)
        {
            if(w[k]>=0)
            cont=cont;
            else
            if(w[k]<0)
            {
                cont=cont+1;
                break;
            }
        }
    }
    contrep[r]=cont;
}
//Fim do Loop de Monte Carlo
print("Media do Contador ",meanc(contrep));
println("-----");
}
//Fim do Loop para os valores de u
}

```

- [1] Asmussen, S. (2000). *Ruin Probabilities*. World Scientific, Singapore.
- [2] Beard, R. E., Pentikainen, T. & Pesonen, E. (1984). *Risk theory the stochastic basis of insurance*. 3rd ed. New York: Champman and Hall, Inc.
- [3] Beekman, J. A. (1969). A Ruin Function Approximation. *Transactions of the Society of Actuaries* **21**, 41–48.
- [4] Beekman, J. A. (1985). A Series for Infinite Time Ruin Probabilities. *Insurance: Mathematics and Economics*, **4**, 129–134.
- [5] Bickel, P. J. & Doksum, K. A. (2001). *Mathematical Statistics: Basic Ideas and Selected Topics, Volume I*, 2nd ed. Prentice Hall, London.
- [6] Bowers, N.L. JR., Gerber, H.U., Hickman, J.C., Jones, D.A., & Nesbit, C.J. (1986). *Actuarial Mathematics*. 1nd ed. Society of Actuaries, Itasca, Illinois, USA.
- [7] Bühlmann, H. (1970). *Mathematical Methods in Risk Theory*. New York, N.Y.: Springer-Verlag.
- [8] Centeno, M. L. (2003). *Teoria do Risco na Actividade Seguradora*, Celta Editora, Oeiras.
- [9] Cribari-Neto, F. & Zarkos, S. G. (2003). *Econometric and Statistical Computing Using Ox*. *Computational Economics*, **21**, 277–295.

- [10] De Vylder, F. (1978). A Practical Solution to the Problem of Ultimate Ruin Probability. *Scandinavian Actuarial Journal*, 114–119.
- [11] Dickson, D.C.M., Egídio dos Reis, A. D. & Waters, H.R. (1995). Some Stable Algorithms in Ruin Theory and Their Applications. *ASTIN Bulletin*, **25**, 153–175.
- [12] Dickson, D. C. M. & Waters, H. R. (1992). The Probability and Severity of Ruin in Finite and in Infinite Time. *ASTIN Bulletin*, **22**, 177–190.
- [13] Doornik, J. A. (2001). *Ox: An Object-Oriented Matrix Language*. 4th ed. Timberlake Consultants Press, London; Oxford, <http://www.doornik.com>.
- [14] Dufresne, F., Gerber, H. U.(1988). The Probability and Severity of Ruin for. Combinations of Exponential Claim Amount Distributions and Their Translation *Insurance: Mathematics and Economics*, **7**, 75–80.
- [15] Dufresne, F., Gerber, H. U.(1989). Three Methods to Calculate the Probability of Ruin. *ASTIN Bulletin*, **19**, 71–91.
- [16] Feller. W. (1971). *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*. Vol. II, 3rd ed. New York: Wiley.
- [17] Gerber, H. U. (1979). *An Introduction to Mathematical Risk Theory*. S. S. Huebner Foundation Monograph N. 8. University of Pennsylvania, Philadelphia.
- [18] Gerber, H.U., Goovaerts, M.J. & Kaas, R. (1987). On the Probability and Severity of Ruin. *ASTIN Bulletin* **17**, 151–163.
- [19] Grandell, J. (2000). Simple Approximations of Ruin Probability. *Insurance: Mathematics and Economics*, **26**, 157–173.
- [20] Grandell, J., & Segerdahl, C., O. (1971). A Comparison of Some Approximations of Ruin Probabilities. *Scandinavian Actuarial Journal*, 143–158.

- [21] Grimmett, G., Stirzaker, D. (2001). *Probability and Random Processes*. New York: Oxford University Press, Broch.
- [22] James, Barry R. (2002). *Probabilidade: um curso em nível intermediário*. 3. ed. Rio de Janeiro: IMPA.
- [23] Johnson, N. L., Kotz, S. & Balakrishnan, N. (1994a). *Continuous Univariate Distributions - Volume 1*, 2nd ed. John Wiley and Sons, New York.
- [24] Johnson, N. L., Kotz, S. & Balakrishnan, N. (1994b). *Continuous Univariate Distributions - Volume 2*, 2nd ed. John Wiley and Sons, New York.
- [25] Karlin, S. & Taylor, H. M. (1975). *A first course in stochastic processes*, 2nd ed. New York: Academic, Inc.
- [26] Lindgren, B. W. (1993). *Statistical Theory*. 4nd ed. New York: Champman and Hall, Inc.
- [27] Lukacs, Eugene (1960). *Characteristic Functions*. London: C. Griffin.
- [28] Mikosch (2004). *Non-life Insurance Matematics*. Springer-Verlang, Berlin Heidelberg.
- [29] Ramsay, C. M. (1992). A Practical Algorithm for Aproximating the Probability of Ruin. *Transactions of the Society of Actuaries*, **44**, 443–461.
- [30] Rao, C.R. (1973). *Linear Statistical Inference and Its Applications*. Nova York: John Wiley.
- [31] Schiff, J. L. (1999). *The Laplace Transform: Theory and Applications*. New York: Springer.
- [32] Seal, H. (1969). *Stochastic Theory of a Risk Business*. John Wile & Sons, New York.
- [33] Seah, E. S. (1990). Computing the Probability of Eventual Ruin. *Transactions of the Society of Actuaries*, **42**, 421–466.
- [34] Shiryayev, A., N. (1996). *Probability*, 2nd ed. New York: Springer.
- [35] Shiryayev, A., N. (1999). *Essentials of stochastic finance*, Advanced Series on Statistical Science Applied Probability 3nd ed. Singapore: World Scientific.

- [36] Sparre Andersen, Erik (1957). On the collective theory of risk in case of contagion between the claims. *Transactions X Vth International Congress of Actuaries, New York*, **2**, 219–229.
- [37] Tijms, H., C. (2003). *A First Course in Stochastic Models*. 1st ed. New York : Wiley
- [38] Wasan, M. T. (1975). *An Introduction to Stochastic Processes*. Kingston: Queen’s University, SBN, Broch.
- [39] Wilks, S. S. (1962). *Mathematical Statistics*. Nova York: John Wiley.
- [40] Willmot, G.E. (1988). Further Use of Shiu’s Approach to the Evaluation of Ultimate Ruin Probabilitie. *Insurance: Mathematics and Economics*, **7**, 275–281.
- [41] Zinchenko, N. M. (1999). Risk Processes in the Presence of Large Claims. *Theory of Stochastic Processes*, **5**, 200–211.

# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)