

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA

Centro de Ciências Exatas e da Natureza  
Pós-Graduação em Física



Tese de Doutorado

**MÉTODO PARA GERAR SOLUÇÕES DO  
TIPO ONDAS VIAJANTES EM EQUAÇÕES  
DIFERENCIAIS**

Alex da Silva

2008

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA

Centro de Ciências Exatas e da Natureza  
Pós-Graduação em Física

Tese de Doutorado

**MÉTODO PARA GERAR SOLUÇÕES DO  
TIPO ONDAS VIAJANTES EM EQUAÇÕES  
DIFERENCIAIS**

Tese submetida ao programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal da Paraíba, sob orientação do professor Laércio Losano e co-orientação do professor Dionisio Bazeia , como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Física.

João Pessoa, Setembro/2008

---

A *DEUS*, na pessoa do *Senhor JESUS*, meu *Senhor* e meu *Salvador*, por ele ter concedido a graça para que eu pudesse concluir este trabalho. A minha esposa e meus filhos, pelo amor, apoio, carinho e companhia. A meus pais e irmãos por eles terem compreendido a minha ausência.

---

## Agradecimentos

- Ao Prof. Laércio Losano, pela competência, segurança e boa vontade com que conduziu este trabalho.
- Ao Prof. Dionisio Bazeia, pela colaboração e valiosas contribuições na minha formação científica, através de diversas discussões e sugestões.
- A **Universidade Estadual da Paraíba - UEPB** pela confiança depositada na minha pessoa, e o apoio financeiro para que pudéssemos concluir este trabalho.
- Ao Coordenador do curso de Pós-Graduação - UFPB, Prof. Carlos Pires pela sua compreensão e apoio.
- Aos meus colegas do Departamento de Física da UEPB por eles entenderem e incentivarem a minha saída para fazer o curso principalmente os professores Jean, Lourivaldo, Edna, Morgana, Maradona, Ivonete e meu amigo Daniel, João e o Abençoado.
- Aos colegas de sala Eduardo, Josevi, Lincoln, Mauro, Simone e Victor pelas diversas discussões que foram também fundamentais para concretização deste trabalho.
- Aos professores e colegas do departamento de física da UFPB.
- A todos que diretamente ou indiretamente possibilitaram a conclusão deste trabalho.

---

## Resumo

Nesta tese, propomos um método simples e direto, para gerar soluções do tipo ondas viajantes, para equações diferenciais não-lineares. Ilustramos como soluções não triviais para equações do tipo KdV, mKdV e Boussinesq podem ser obtidas a partir de soluções simples de equações lineares. Descrevemos como, usando este método, uma solução tipo sóliton da equação KdV pode gerar solução tipo sóliton para a equação mKdV, como também para a equação Boussinesq. Analogamente começando com a solução *elíptica* da equação da KdV, podemos obter as correspondentes soluções *elíptica*, para equação mKdV como também para a equação Boussinesq. Ainda, mostramos como solução simples de equações lineares podem gerar soluções hiperbólicas de equações não-lineares. Finalmente propomos e resolvemos algumas novas famílias de equações kdV, e mostramos como soluções tipo sólitons também são obtidas a partir de equações de ordem mais altas, na hierarquia da equação KdV usando este método.

---

## Abstract

In this thesis, we propose a simple and direct method for generating travelling wave solutions for nonlinear differential equations. We illustrate how nontrivial solutions for the KdV, the mKdV and the Boussinesq equations can be obtained from simple solutions of linear equations. We describe how using this method, a soliton solution of the KdV equation can yield soliton solutions for the mKdV as well as the Boussinesq equations. Similarly, starting with hiperbolic solutions of the KdV equation, we can obtain the corresponding solutions for the mKdV as well as the Boussinesq equation. And, we show how simple traveling wave solutions of linear equations, can generate hiperbolic solutions of nonlinear equations. Finally, we propose and solve some new families of KdV equations and show how soliton solutions are also obtained for the higher order equations of the KdV hierarchy using this method.

---

## Trabalho Publicado

*A simple and direct method for generating traveling wave solutions for nonlinear equations*

D .Bazeia, Ashok Das, L.Losano, A. Silva

Annals of Physics **323** 1150 (2008)

# Índice

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>8</b>
<b>2</b>	<b>Sólitons</b>	<b>11</b>
2.1	A Descoberta das Ondas Solitárias . . . . .	11
2.2	A Física Não-Linear . . . . .	19
2.3	A Equação KdV . . . . .	27
2.4	A Equação mKdV . . . . .	34
<b>3</b>	<b>O Método</b>	<b>38</b>
3.1	A Essência do Método . . . . .	38
3.2	Soluções de equações Não-Lineares a partir de Lineares . . . . .	43
3.3	Soluções Solitônicas a partir de Sólitons . . . . .	49
3.4	Soluções Elípticas . . . . .	54
<b>4</b>	<b>Novos Sistemas e suas Soluções</b>	<b>62</b>
4.1	A equação pKdV . . . . .	62
4.2	A família KdV(i,a) . . . . .	65
4.3	Família de KdV para $a$ Semi-Inteiro . . . . .	67
4.4	Família de KdV para $a$ Inteiro . . . . .	69
<b>5</b>	<b>Comentários e Conclusões</b>	<b>74</b>

A Transformações de Backlund	77
B Polinômios de Chebyshev	80

# Capítulo 1

## Introdução

Sistemas integráveis não-lineares foram estudados rigorosamente por vários pontos de vista. Desde que a equação KdV foi proposta[1], o assunto referente a modelos integráveis foi desenvolvido em várias direções, entre elas podemos destacar, a *Representação Lax*, *Método do Espalhamento Inverso*, *Transformações de Bäcklund*, *Formulação de Zakharov-Shabat*, *Integrabilidade Quântica*, etc[2],[3]. Cada um destes desenvolvimentos são muito importantes pelo fato deles terem aberto novas áreas de pesquisas[1][4].

A solução de uma equação integrável não-linear, pode ser normalmente obtida pelo método do espalhamento inverso[5],[6],[7]. Em alguns casos, isto pode ser obtido utilizando o método de *Transformadas de Fourier* para sistemas não-lineares. Nesse método, associa-se um dado sistema de equação integrável não-linear a um sistema de equação linear (com variável dinâmica do sistema como um potencial) para que a evolução temporal de várias quantidades de interesses, sejam mais simples. Estudando a evolução temporal do espalhamento dado neste sistema linear, reconstruímos a evolução temporal da variável dinâmica (o potencial) pelo o método do espalhamento inverso.

Isto é um método poderoso, indireto para resolver problemas de sistemas integráveis não-lineares. Existe também um meio mais direto de resolver um sistema integrável não-linear, que possui o nome de Método bilinear de Hirota[8]. Aqui introduzimos uma derivada não convencional, e reescrevemos a equação não-linear como uma equação linear em duas variáveis que leva a uma solução direta do sistema original. Por outro lado, ambos os métodos são muito eficientes mais bastante técnicos.

Neste trabalho, propomos um método alternativo simples e direto[9], para gerar soluções do tipo ondas viajantes, para equações não-lineares. Mostraremos como soluções não triviais para equações do tipo KdV, mKdV e Boussinesq podem ser obtidas a partir de soluções simples de sistemas lineares. Neste método, somos capazes de encontrar uma solução não-trivial de um sistema integrável não-linear, a partir de uma solução conhecida de um sistema linear simples, ou a partir de um sistema não-linear. Então de forma genérica, esse método pode ser comparado como uma transformação de Backlund. Porém, ele é diferente do método de transformação de Backlund convencional, onde temos que lidar com condições de curvatura zero. Neste método, a construção do mapa é muito mais direto, e devido a esse fato acreditamos que seja bastante útil.

Este método de transformação foi estudado em teoria de campo escalar relativístico, para gerar soluções não triviais para uma teoria de campo complicada, a partir de uma teoria conhecida mais simples[10]. Naquele contexto chamava-se de *método de deformação*, e foi aplicado em várias situações. Porém, o poder do método nos levou a propor como um método direto e bastante útil, para obter soluções de sistemas integráveis não-lineares.

Para se ter uma melhor compreensão do nosso trabalho o expomos da seguinte forma. No capítulo 2 iniciamos com uma breve revisão sobre a teoria

dos sólitons, em particular abordaremos como se deu as primeiras observações com relação as ondas solitárias. Neste contexto, falamos um pouco sobre a equação KdV, mKdV, e a equação Boussinesq, como também mostramos suas soluções. Finalizamos este capítulo mostrando diversas aplicações da teoria solitônicas.

No capítulo 3, apresentamos a essência do método de maneira geral, dentro do contexto de uma equação hamiltoniana em terceira ordem nas derivadas espaciais, descrita num espaço de dimensões(1+1). Ilustramos o método através de vários exemplos, pelos quais mostramos como soluções não-triviais tipo *ondas viajantes* para equações não-lineares como KdV, mKdV [11] e também a equação Boussinesq[12] podem ser obtidas de soluções simples de uma equação linear em terceira ordem. Mostramos também como obter as soluções tipo sólitons para equação mKdV e Boussinesq, a partir da solução tipo sóliton da equação KdV. Ainda nesta seção, calculamos as soluções hiperbólicas da equação mKdV e Boussinesq a partir da solução hiperbólica da equação KdV. E para finalizar esta seção mostramos como soluções hiperbólicas de equações não-lineares, podem ser obtidas de soluções simples de um sistema linear.

No capítulo 4, mostramos como utilizando o método podemos escrever novos sistemas não-lineares tais como; equação pKdV e famílias de KdV como também calcular suas respectivas soluções tipo ondas viajantes.

No capítulo 5, apresentamos a conclusão do nosso trabalho e deixamos algumas perguntas abertas como perspectivas de trabalhos futuros.

# Capítulo 2

## Sólitons

### 2.1 A Descoberta das Ondas Solitárias

O primeiro registro de uma onda *solitária* foi feito em agosto de 1834, pelo engenheiro naval Britânico, John Scott Russel[13]. Ele observou um barco sendo puxado por dois cavalos um em cada margem do canal de Edinburgh-Glasgow, que era estreito e pouco profundo. De repente a embarcação parou, fazendo com que a massa de água que estava acumulada na proa do barco criar-se uma elevação bem localizada. A seguir a elevação de água separou-se do barco e começou a propagar-se solitária ao longo do canal com uma velocidade de 14 Km/h sem qualquer alteração visível da forma, e esta foi acompanhada por Russel a galopes de cavalo. A onda solitária percorreu uma distância de cerca de dois quilômetros desaparecendo no fim do caminho em ondulação da água do canal. Russel chamou a onda que observou de *Onda de Translação*.

A partir dessa observação, Russel fez uma série de experimentos envolvendo essas ondas, até que descobriu como a produzir "em série"(ver fig. 2.1); isto era feito, acumulando água em uma extremidade de um canal raso separado por um anteparo e, de repente, retirava-se este anteparo.

A massa d'água excedente se propagava em uma "meia-onda", acima da linha de repouso do canal sem se deformar com velocidade constante  $c$ , ver fig.(2.1) abaixo.

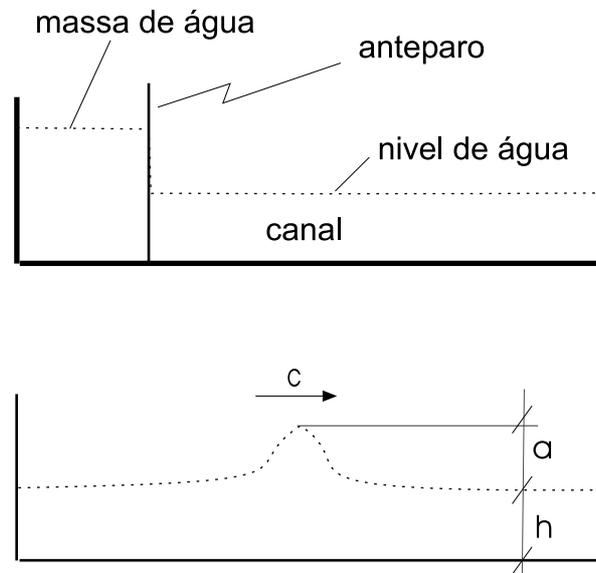


Figura 2.1: Produzindo Ondas Solitárias

A figura (2.1), representa o procedimento usado por Scott Russel para fabricar ondas solitárias em série. Com esses experimentos Russel descobriu empiricamente, uma relação entre a altura da onda  $a$  (amplitude) em relação ao nível de repouso da água, e  $h$  a profundidade do canal não perturbado, com velocidade de propagação da onda  $c$  dada por

$$c^2 = g(h + a)$$

onde  $g$  é a aceleração da gravidade.

Da expressão obtida por Russel, observa-se imediatamente que quanto maior for a amplitude da onda  $a$ , maior será a sua velocidade de translação  $c$ . Esta equação provocou uma certa discórdia na comunidade científica da época, porque estava em contradição a uma encontrada por Airy(1845) por meio de argumento puramente teórico. Assim J. Boussinesq em (1871,1872), e Lord Rayleigh em (1876) tentaram resolver esse problema, o que só veio a ocorrer, em 1895 com o trabalho de Korteweg e de Vries [14].

D.J. Korteweg e G. de Vries em 1895, obtiveram teoricamente a formula de Russel para velocidade da onda sólitaria de translação, e mostraram que neste caso a forma da envoltória da onda era dada por

$$u(x, t) = a \operatorname{sech}^2[k(x - ct)],$$

onde o número de onda  $k$ , a amplitude  $a$ , e a velocidade da onda  $c$  são dados por

$$k^{-2} = \frac{4h^2(h+a)}{3a}, \quad a = 2k^2, \quad c = 4k^2.$$

Outro fato observado por Russel em 1844, que permaneceu sem explicação por mais de um século, é que em colisões *ondas solitárias* preservam suas características. Em uma de suas experiências, Russel criou duas *on-*

*das solitárias* com velocidades diferentes, e observou que a onda mais *veloz* alcançava, a onda mais *lenta*, de modo que após o processo ambas permaneciam intactas e não-distorcidas, exatamente como se ambas satisfizessem o *princípio de superposição linear*.

Era sabido que *efeitos não-lineares* estavam presente pelo fato de que, durante a interação, as ondas sofriam um deslocamento de fase, ou seja, as ondas depois da interação não estavam na posição que deveriam estar se ambas se movessem com velocidade constante. Os fenômenos ondulatórios geralmente apresentam um caráter dispersivo, pelo qual as ondas em propagação decaem e eventualmente desaparecem em um tempo finito.

O professor e matemático da Universidade de Amsterdã, D.J. Korteweg, e o seu aluno, G. de Vries, 50 anos após o trabalho de Russel analisando ondas gravitacionais em águas pouco profundas, deduziram a equação que descreve ondas gravitacionais.

Por outro lado o que a dupla de pesquisadores Holandeses, Korteweg e de Vries fizeram, foi tomar a equação básica de dinâmica de fluídos, a equação de Navier-Stokes (ver abaixo) e considerar uma expansão perturbativa para propagação de uma onda do tipo fabricada por Russel.

A equação de Navier(1827) e Stokes(1945)

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \nabla^2 \vec{v},$$

é utilizada para descrever movimento das substâncias fluidas tais como líquidos e gases. Onde  $\nu$  é a viscosidade do fluído (por unidade de volume),  $\vec{v}(\vec{r}, t)$  é a velocidade do fluído no ponto  $\vec{r}$  e  $t$ ,  $p(\vec{r}, t)$  é a pressão e  $\rho$  é a densidade do fluído. Esta equação estabelece que, mudanças no momento e aceleração de uma partícula fluída, são simplesmente o produto das mudanças na pressão e forças viscosas dissipativas (similar a fricção) atuando dentro do fluído.

Em primeira aproximação encontra-se uma equação de onda unidirecional, onde todas as perturbações se propagam com velocidade constante e igual a

$$c = \sqrt{gh}.$$

Em segunda aproximação, a equação encontrada para a equação da onda com velocidade  $c$  foi

$$\frac{\partial \eta}{\partial \tau} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{g}{h}} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{1}{2} \eta^2 + \frac{2}{3} \alpha \eta + \frac{1}{3} \sigma \frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2} \right),$$

sendo

$$\sigma = \frac{1}{3} h^3 - Th(\rho g),$$

$\eta$  a elevação da água acima do equilíbrio,  $\alpha$  uma constante arbitrária relacionada com o movimento uniforme do líquido,  $g$  aceleração da gravidade,  $T$  tensão superficial e  $\rho$  a densidade.

Fazendo as transformações

$$\begin{aligned} t &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{(h\rho)}} \tau \\ x &= -\sigma^{-1/2} \xi \\ u &= \frac{1}{2} \eta + \frac{1}{3} \alpha, \end{aligned}$$

a equação acima produz

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 6u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0.$$

O termo  $(u \frac{\partial u}{\partial x})$  descreve a *não linearidade*, enquanto  $(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3})$  a *dispersão*, fenômeno pelo qual, produz a *propagação de ondas de frequências distintas com velocidade distintas*.

Esta equação é hoje conhecida como a *Equação Korteweg de Vries*(equação *KdV*). Originalmente a equação KdV foi escrita para modelar propagação de uma *onda longa*(amplitude muito menor que seu comprimento), em um *canal raso*(comprimento muito maior que a profundidade)[15].

A equação KdV é uma das mais importantes equações da teoria de sistemas integráveis, junto com a equação de Schroedinger não-linear. Além disso, ela é uma equação com grandes características de universalidades ou seja, aparece em muitos contexto distintos. De fato, ela passou muito tempo ignorada, até que Fermi , Pasta e Ulam(1955), estudando o modo de propagação de ondas em redes cristalinas a redescobriram [16]. Ela aparece também em teoria de espalhamento quântico e no estudo de fluxo de Toda[17]. Estas várias aplicações da KdV se deve ao fato, dela ser a equação mais elementar que inclui *efeitos não-lineares e dispersivos*.

Em meados de 1960, os físicos começaram a usar computadores digitais para estudar a propagação de ondas não-lineares, e foi a partir daí que as primeiras idéias de Russel passaram a ser apreciadas. Russel observou as *ondas solitárias*, como entidades dinâmicas auto suficientes que possuíam propriedades de partículas clássicas.

Estes fatos são utilizados como um elemento construtivo para formular comportamentos dinâmicos complexos de sistemas de ondas em toda a ciência: desde *hidrodinâmica*(sólitons em água) e *ótica não-linear*(sistemas óticos), como também em plasma, colisões de ondas, tornados, partículas elementares, redes cristalinas, cadeias atômica e macro moléculas, na teoria de deformações, na condensação de Bose-Einstein(estado quântico macroscópico recentemente descoberto experimentalmente) etc.

Na década dos anos 70 aconteceram três grandes descobertas independentes umas das outras que trouxeram grandes benefícios para a ciência

moderna: um proveniente da *ciência dos materiais*, outro da *matemática* e outro da *física clássica*. Esses três eventos revolucionaram a *tecnologia das telecomunicações* e despertaram grandes interesses dos físicos pelos *fenômenos não-lineares*.

Um desses acontecimentos se deu em 1970 com o surgimento de um novo tipo de *fibras óticas*, capazes de conduzir sinais luminosos ao longo de uma distância muito maior que as fibras anteriores. As primeiras fibras óticas eram fabricadas de vidros em que, o princípio físico utilizado era o da *reflexão interna total*, que foi demonstrado pela primeira vez por John Tyndall em 1870. Como é sabido esse princípio afirma que: quando a luz viaja por diferentes meios com diferentes índices de refração, há um ângulo de incidência crítico abaixo do qual a luz será totalmente refletida para o primeiro meio sem que a luz penetre na interface.

Em 1950 o desempenho das fibras óticas foi notoriamente melhorado, com a introdução de um revestimento. As fibras forradas estavam construídas por um centro de vidro, rodeado por um material com um índice de refração um pouco menor que o do centro. Como as fibras possui uma seção transversal muito pequena, então o ângulo de incidência de qualquer raio de luz que se propague por ela será menor que o ângulo crítico necessário para produzir *reflexão interna total*, em conseqüência, a luz não escaparia do interior da fibra. A principal inconveniência para se usar fibras óticas são as perdas de informações ao longo da fibra, devido as impurezas absorventes, que faz com que a luz se atenua.

Outro acontecimento fantástico foi a aplicação da *teoria solitônica* na construção das fibras; isto fizeram com que as perdas de informações ao longo da fibra, tornaram-se cada vez menores. Isto só foi possível devido o conhecimento da física(*teoria solitônica*) de como superar o problema da

dispersão dos pulsos luminosos, durante a transmissão dos sinais luminosos e suas atenuações. Esses conhecimentos, levaram a construção de fibras de *cilica* (*óxido de silício*), que são 50 vezes melhores (diminuiu consideravelmente as perdas de informações) que as antigas. As novas fibras estão causando grandes revoluções nas telecomunicações e são bastante promissoras para o desenvolvimento das telecomunicações. Esperamos que num futuro bem próximo tenhamos fibras óticas cada vez mais aperfeiçoada com perdas de informações devido emprego da teoria solitônica em sua fabricação.

Outro fator interessante é que, a propagação de pulsos luminosos em fibras óticas são governados por dois processos fundamentais sendo: um processo *dispersivo*, que tende a destruir o pulso, e outro processo *não-linear*, que tende a modificar de maneira contínua a frequência das ondas de acordo com os pulsos. Por si só, cada um destes processos tem o objetivo de destruir a qualidade dos pulsos. Mas por outro lado, esses processos se adequam de maneira satisfatória de tal forma que eles atingem um equilíbrio satisfatório surpreendente.

Os sólitons também são aplicados em *Condensação de Bose Einstein (CBE)* que é o quarto estágio da matéria. Como é sabido a CBE consiste de átomos super frios que estão todos depositados no mesmo estado quântico, exibindo propriedades ondulatórias, e portanto podem ser considerados como uma onda atômica. A aplicação tecnológica dos sólitons em CBE pode ajudar a criar novos *giroscópicos* para navegação super precisa, e *criação de relógios atômicos*.

Assim podemos observar que a teoria solitônica é empregada em várias áreas da ciência, e isto se deve ao fato dos sólitons desenvolverem um papel importante para entendermos o mundo misterioso que estamos imersos. Por outro lado, é possível que existam inúmeras aplicações tecnológicas que

poderá fazer uso dos solitões.

Hoje, sabemos que a diversidade dos sistemas *físicos, matemáticos, biológicos, químicos, etc.* onde existem solitões é tão grande que não resta qualquer dúvidas sobre a universalidade do *fenômeno*.

## 2.2 A Física Não-Linear

O século XX pode ser chamado de era da *física linear*, pois foi dominado por equações lineares (Maxwell, Schroedinger etc), por objetos matemáticos lineares (espaços vetoriais, em particular o espaço de Hilbert), e por métodos lineares (transformada de Fourier, teoria de perturbação etc).

Naturalmente a importância da não-linearidade começa com a equação de Navier-Stokes (como foi visto anteriormente)

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \nabla^2 \vec{v},$$

e passando para as teorias da gravitação e dos campos quantizados, com aplicações em física nuclear e em física de partículas, embora o tratamento destes efeitos fossem muito difíceis, exceto como perturbações da solução básica da teoria linear.

Durante as últimas décadas, tem se tornado cada vez mais evidente que *não-linearidades* podem resultar em novos fenômenos, os quais não podem ser obtidos via teoria de perturbação: este é o caso de *ondas do tipo soliton*.

As *ondas solitárias* são soluções especiais de certas Equações em Derivadas Parciais (EDPs), que surgem de um balanço perfeito entre efeitos *lineares dispersivos*, e efeitos *não-lineares*; o que permite a propagação *não dispersiva* de

perturbações localizadas de energia, através de meios contínuos sem modificar seu perfil. No caso em que essas (EDPs) forem completamente integráveis, estas soluções são conhecidas como *Sólitons*, e apresentam a importante característica de serem soluções não-perturbativa. A figura (2.2) representa a interação de dois sólitons. Note que a esquerda temos os dois sólitons antes

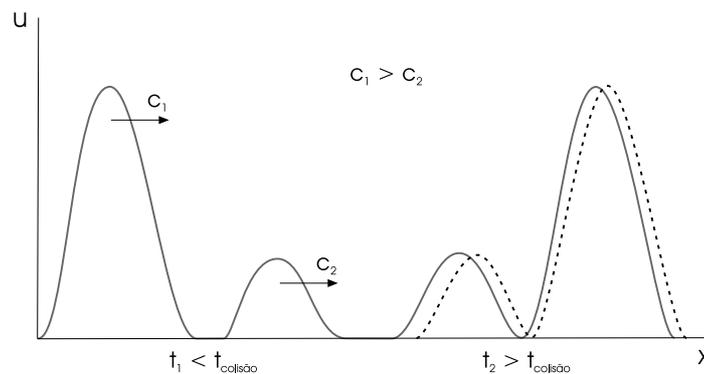


Figura 2.2: Representação da interação de dois sólitons

da interação num instante  $t_1$ . À direita, as linhas cheias representam a localização dos dois sólitons após a interação no instante  $t_2$ . As linhas tracejadas representam as possíveis posições dos dois sólitons no instante  $t_2$  caso a interação fosse linear.

Do ponto de vista físico, *sólitons* representam fenômenos que possuem características de serem não-lineares, localizados e interagem fortemente mantendo sua identidade. Então como já foi mencionado, *sólitons* são *ondas solitárias* em forma de pulsos que se deslocam de um local para outro com velocidade constante sem perder energia, e conserva seu formato quando interagem com outro sóliton, possuindo também comportamento de partícula clássica, ver Fig.(2.2).

Do ponto de vista matemático, *Sólitons* são soluções de uma classe de equações diferenciais não-lineares, cujo interesse se deve ao fato de muitos

sistemas físicos complexos, poderem ser aproximadamente descritos por estas equações, e principalmente pelo fato de, apesar de serem não-lineares, possuírem soluções analíticas. Como exemplos de equações desta classe citamos:

$$\begin{aligned} \text{Equação KdV} &\rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} = 6u \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \\ \text{Equação de Schroedinger Não-linear} &\rightarrow i\hbar \frac{\partial u}{\partial t} = - \left( \frac{\hbar^2}{2m} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \pm g|u|^2 u \\ \text{Equação Boussinesq} &\rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 3 \frac{\partial^2 u^2}{\partial x^2} \end{aligned}$$

Essa classe é formada por equações do tipo,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = F \left( u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \dots \right)$$

ou

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = G \left( u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \dots \right)$$

em que a variável dinâmica  $u = u(x, t)$ , enquanto  $F$  e  $G$  são funções não-lineares de  $u$  e de suas derivadas, como por exemplo:

- i) funções quadráticas:  $u^2, u \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right), \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \dots$
- ii) funções cúbicas:  $|u|^2 u, u^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \dots$

Essas equações são ditas de *evolução* devido ao interesse no desenvolvimento temporal da função  $u$ , para a qual num dado tempo  $t_0$ , as condições iniciais  $u(x, t_0)$  e, se necessário também  $\frac{\partial u}{\partial t}(x, t_0)$ , são satisfeitas. Também se requer que as condições de contorno, em geral dadas por,  $u(\pm\infty, t) = 0$  e  $\frac{\partial u}{\partial x}(\pm\infty, t) = 0$ , sejam satisfeitas.

As soluções para as equações diferenciais parciais desta classe (no caso unidimensional) podem ser obtidas por

$$u(x, t) = f(kx - wt)$$

ou

$$u(x, t) = g(kx + wt).$$

Onde as funções  $f$  e  $g$  descrevem *ondas* que se propagam no sentido dos  $x$  positivos ou no sentido dos  $x$  negativos respectivamente, com *velocidade de fase*

$$v_{fs} = \frac{w}{k},$$

e *velocidade de grupo*

$$v_{gr} = \frac{dw}{dk}.$$

$k$  e  $w$  são respectivamente o *número de onda*, e a *freqüência angular* da onda.

A fim de melhor compreender as propriedades das soluções do tipo sóliton, consideramos alguns exemplos de equações de interesse físico. Inicialmente trabalhamos com a equação da onda unidimensional

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = 0 \quad (2.1)$$

que é uma das equações lineares mais importantes na física. Por substituição verifica-se que a função

$$u(x, t) = e^{i(kx - wt)} \quad (2.2)$$

é solução da equação de onda acima, quando a relação  $w = \pm ck$  for satisfeita, implicando que a *velocidades de fase* ( $v_{fs}$ ) e a *velocidade de grupo* ( $v_{gr}$ ) sejam dadas por

$$\begin{aligned} \text{velocidade de fase} \rightarrow v_{fs} &= \frac{w}{k} = \pm c \\ \text{velocidade de grupo} \rightarrow v_{gr} &= \frac{dw}{dk} = \pm c_g. \end{aligned}$$

O fato do lado direito das equações acima serem constantes significa ausência

de *dispersão*, pois todas as ondas independentemente de seu número de onda  $k$ , ou ainda, de seu comprimento de onda

$$\lambda = \frac{2\pi}{k},$$

se propagam com a mesma velocidade  $c$ , de modo que os pacotes formados por várias ondas não se espalham.

Observe também que as *velocidades de fase* das várias ondas que compõem o pacote são iguais a *velocidade de grupo* do pacote, situação típica de uma onda no vácuo. Finalmente, como para toda equação linear o *princípio da superposição* se aplica, a solução mais geral da equação de onda acima é dada pela *superposição* de duas *ondas*, uma que viaja no sentido dos  $x$  positivos e outra que viaja no sentido dos  $x$  negativos, ambas com velocidade  $c$ , ou seja,

$$u(x, t) = u^+(x + ct) + u^-(x - ct). \quad (2.3)$$

Este é um exemplo de dois pacotes de ondas que não se destroem. A seguir escreveremos a equação da onda que contenha um termo de *dispersão*,

$$\text{Equação de Onda Dispersiva} \rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0.$$

A solução da equação da onda dispersiva acima é

$$u(x, t) = e^{i(kx - wt)}, \quad (2.4)$$

quando a *relação de dispersão*  $w(k)$  for dada por

$$w(k) = k - k^3,$$

onde observamos que *harmônicos* de várias frequências se propagam com velocidades distintas, e isto produz distorção no sinal. Veja que em  $t = 0$  temos  $u(x) = \exp(ikx)$ , isto mostra que a onda é oscilatória.

Note da solução  $u(x, t)$  que

$$(kx - \omega t) = k[x - (1 - k^2)t],$$

de onde observamos imediatamente que a velocidade de propagação da onda é

$$c = \frac{\omega}{k} = 1 - k^2,$$

que é uma função de  $k$ , denominado *velocidade de fase*  $v_{fs}$  (note que o sinal de  $c$  muda de acordo com o sinal de  $k = \pm 1$ ). Temos também que para onda dispersiva a *velocidade de grupo*  $v_{gr} = c_g$  (velocidade de um pacote de onda onde ocorre a propagação da energia) é dada por

$$v_{gr} = \frac{d\omega}{dk} = \pm c_g = 1 - 3k^2,$$

onde  $c_g \leq c$ , (veja figura 2.3).

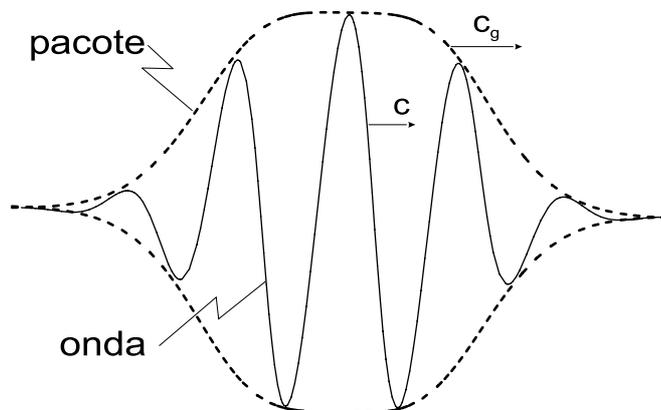


Figura 2.3: Esboço de uma onda com velocidade de fase  $c$ , e pacote de onda com velocidade de grupo  $c_g$

Por outro lado, veja que ondas de diferentes número de onda  $k$ , se propagam com velocidades diferentes: isto é característicos de *ondas dispersiva*

Esboçaremos a seguir um gráfico que mostra a evolução de uma *onda* descrita por uma equação diferencial com o termo de dispersão, veja figura (2.4).

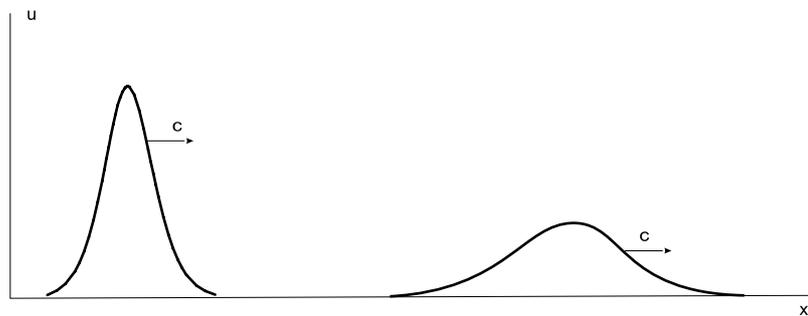


Figura 2.4: Representação da evolução de uma onda dispersiva(sem escala)

Vamos estudar, algumas propriedades das equações não-lineares. Considere a equação não-linear

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (1 - u)\frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (2.5)$$

A solução formal da equação (2.5) é dada por

$$u(x, t) = f[x - (1 - u)t] = f(z), \quad (2.6)$$

onde  $f$  é uma função arbitrária. Podemos facilmente verificar que (2.6) é solução de (2.5) por simples substituição. Para isto definimos a nova variável

$z = x - (1 - u)t$ , e da regra da cadeia obtemos

$$\frac{\partial u(z)}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} = (u - 1) \frac{du}{dz} \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial u(z)}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{du}{dz}. \quad (2.8)$$

Mostraremos a seguir em um gráfico(veja figura (2.5)), o comportamento da solução (2.6). Para mais detalhes veja Ref.[38].

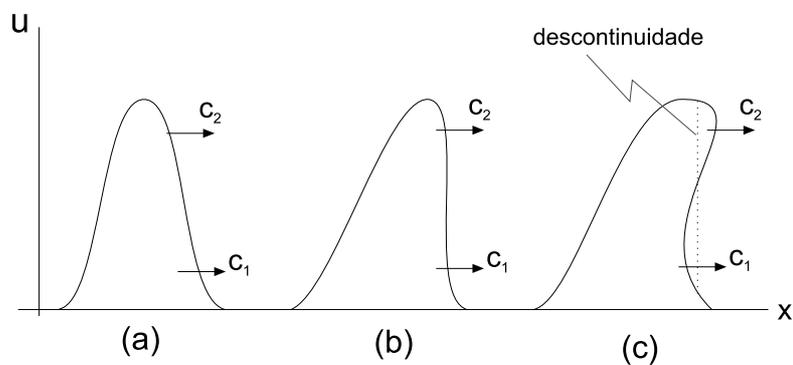


Figura 2.5: Representação da evolução de uma onda descrita por uma equação diferencial não-linear

## 2.3 A Equação KdV

Iniciaremos nosso estudo dos sólitons a partir da equação KdV

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0, \quad (2.9)$$

onde

$$u_t = \frac{\partial u}{\partial t} \quad e \quad u_x = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Note que a equação KdV (2.9) contém um termo *não-linear* ( $6uu_x$ ), e um termo *dispersivo* ( $u_{xxx}$ ).

A equação KdV admite solução do tipo onda viajante na forma

$$u(x, t) = u(z) = u(kx - wt), \quad (2.10)$$

onde  $z = kx - wt$ . Sendo  $\vec{k}$  o vetor que dá a direção da onda, e  $c$  a velocidade da onda. Agora, se escrevermos (2.9) em função da sua solução  $u(x, t) = u(z)$ , temos

$$k^3 u_{zzz} - w u_z + 6k u_z = 0. \quad (2.11)$$

A equação acima pode ser escrita como

$$\frac{d}{dz} \left[ k^2 u_{zz} - \left( \frac{w}{k} u - 3u^2 \right) \right] = 0.$$

Integrando a Equação Diferencial Ordinária (EDO) acima em relação a variável  $z$  obtemos

$$k^2 u_{zz} = \frac{w}{k} u - 3u^2 + A \equiv \frac{dV(u)}{du}, \quad (2.12)$$

onde denominamos por conveniência  $V(u)$  por "*Potencial Associado*", já que não se trata do potencial do sistema no sentido usual, e sim de uma definição

útil como veremos mais adiante. Enquanto,  $A$  é uma constante de integração arbitrária.

Vamos resolver a (EDO) (2.12), para encontrarmos qual é, a forma explícita do sóliton da equação KdV. Então multiplicando a equação (2.12) pelo fator integrante  $(du/dz)$  produz

$$k^2 u_z u_{zz} - \frac{w}{k} u u_z + 3u^2 u_z = A u_z \quad (2.13)$$

então,

$$\frac{d}{dz} \left[ \frac{k^2}{2} (u_z)^2 - \frac{w}{2k} u^2 + u^3 - Au \right] = 0.$$

Integrando novamente obtemos

$$\frac{k^2}{2} (u_z)^2 = \frac{w}{2k} u^2 - u^3 - Au + B = V(u), \quad (2.14)$$

onde  $B$  é uma segunda constante de integração arbitrária. Da equação acima observamos que o *potencial associado*  $V(u)$  possui a seguinte forma

$$V(u) = \frac{c}{2} u^2 - u^3 - Au + B, \quad (2.15)$$

onde  $c = w/k$ .

Analisaremos a seguir as possíveis forma do *Potencial Associado*  $V(u)$  da equação (2.15). A natureza quantitativa da solução  $u(z)$  para valores arbitrários das constantes  $c$ ,  $A$  e  $B$ , são determinadas por análises elementares. O procedimento quantitativo requer o uso de funções elípticas ou computação numérica.

Entretanto, para aplicações prática, estamos interessado somente nas soluções reais de  $u(z)$  em (2.14). Vamos requerer que  $(u_z)^2 \geq 0$ , e com isso a forma de  $V(u)$  mostra que  $u(z)$  varre monotonicamente até colapsar,

ou seja  $V(u)$  possui um zero real. Com um pouco de cuidado podemos ver que os zeros de  $V(u)$  para valores das constantes  $c$ ,  $A$  e  $B$ , podem gerar seis categorias de soluções para serem analisadas.

Para ver isso melhor, pintamos no gráfico com um traço mais grosso (ver figura (2.6)), somente a parte da solução que corresponde ao valor positivo de  $V(u)$ .

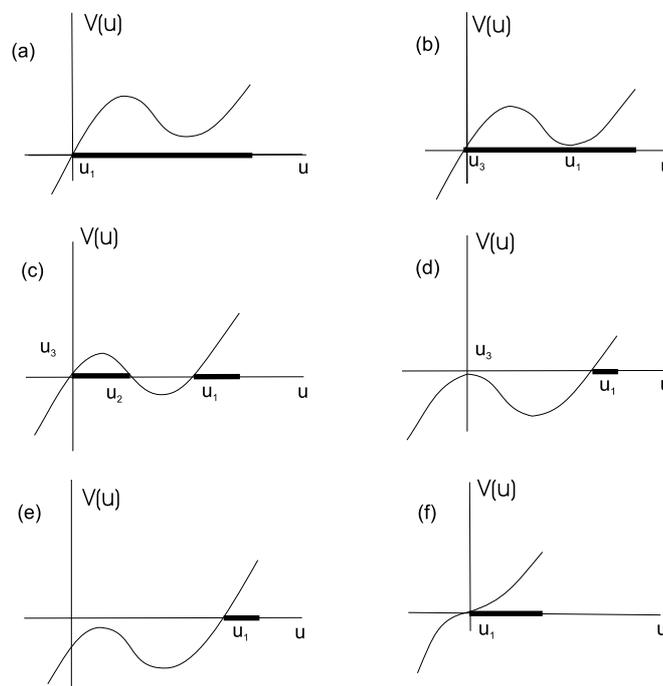


Figura 2.6: Representação das possibilidades do comportamento de  $V(u)$ . Soluções reais para  $V(u) \geq 0$ , que ocorrem somente nas regiões hachurizadas

Por outro lado, como estamos exigindo que  $(V(u) \geq 0)$  ou seja positivo, então focaremos nossa atenção no comportamento de  $(u(z))$  próximo a um

zero de  $V(u)$ ; que nesse caso pode ser analisada através de três casos

- $V(u_1(z)) = 0 \rightarrow$  um zero simples (só uma raiz real)
- $V(u_1(z)) = V_u(u_1) = 0 \rightarrow$  um zero duplo (uma raiz real e outra complexa)
- $V(u_1(z)) = V_u(u_1)$   
 $= V_{uu}(u_1) = 0 \rightarrow$  um zero triplo (uma raiz real e duas complexas).

Expandindo  $V(u)$  em série de Taylor próximo a um ponto  $u = u_1$  para verificarmos se existe alguma solução que conecte dois mínimos do potencial, e verificarmos se esta solução é do tipo *lump* ou *kink*. Então

$$\begin{aligned}
 V(u) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (u - u_1)^n \left. \frac{d^n V(u)}{du^n} \right|_{u=u_1} \\
 &= V(u_1) + V_u(u_1)(u - u_1) + \frac{1}{2} V_{uu}(u_1)(u - u_1)^2 + \\
 &+ \frac{1}{6} V_{uuu}(u_1)(u - u_1)^3 + O.
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

Da equação acima observamos que:

1°) Se  $u_1$  é um *zero simples* (ver figura (a),(b),(c),(d) e (e)) então  $V(u_1) = 0$ , com isso a equação (2.16) resulta

$$V(u) = V_u(u_1)(u - u_1), \tag{2.17}$$

pois os outros termos da expansão são desprezíveis pelo fato da diferença  $(u - u_1)$  ser muito pequena. Substituindo (2.17) em (2.14) produz

$$\frac{k^2}{2} (u_z)^2 = V_u(u_1)(u - u_1), \tag{2.18}$$

que integrando resulta na forma da solução  $u(z)$ , que resolve a equação (2.14).

$$u(z) = u_1(z) + \frac{1}{2}(z - z_0)^2 V_u(u_1) \quad (2.19)$$

onde  $z_0$  é uma constante de integração e ( $z = kx - wt$ ). Note que quando  $z \rightarrow z_0 \Rightarrow u(z) = u_1(z)$ , isso mostra que  $u(z)$  possui um mínimo ou um máximo local para  $z = z_0$ .

2°) Se  $u_1$  é um *zero duplo* (ver figura (b)) então  $V(u_1) = V_u(u_1) = 0$  (que são os pontos de máximo e mínimos) e  $V_{uu}(u_1) > 0$  com isso a equação (2.15) resulta

$$V(u) = \frac{1}{2} V_{uu}(u_1)(u - u_1)^2, \quad (2.20)$$

pois os outros termos da expansão são desprezíveis pelo fato da diferença ( $u - u_1$ ) ser muito pequena. Substituindo (2.20) em (2.14) resulta

$$\frac{k^2}{2} (u_z)^2 = V_{uu}(u_1)(u - u_1)^2,$$

de onde vemos que

$$(u_z) = \pm \sqrt{V_{uu}(u_1)}(u - u_1), \quad (2.21)$$

que integrando (2.21) resulta na forma da solução  $u(z)$ , que resolve a equação (2.14)

$$u(z) = u_1(z) + \alpha e^{\pm z \sqrt{[V_{uu}(u_1)]}}, \quad (2.22)$$

onde  $\alpha$  é uma constante arbitrária.

Note da equação (2.22) que, quando  $z \rightarrow \pm\infty \Rightarrow u(z) \rightarrow u_1(z)$ , isso mostra que  $u(z)$  possui um mínimo ou um máximo local para  $z = z_0$ . Veja que essa solução  $u(z)$  é do tipo *lump*, ou seja ela descreve o movimento de uma partícula que sai do ponto de mínimo  $u_1$ , caminha até o ponto de retorno  $u_3$ , e novamente vem para o ponto  $u_1$ . Veja também que devido a esse *pico*

a onda pode caminhar de  $-\infty$  a  $+\infty$ .

3º) Se  $u_1$  é um *zero triplo* (ponto de inflexão) então nesse caso também só temos uma possibilidade (ver figura (f)) então com isso a equação (2.15) resulta

$$V(u) = \frac{1}{6} V_{uuu}(u_1)(u - u_1)^3. \quad (2.23)$$

Substituindo (2.23) em (2.14) resulta

$$(u_z) = \sqrt{\frac{1}{3} V_{uuu}(u_1) \sqrt{(u - u_1)^3}}, \quad (2.24)$$

que integrando (2.24) resulta na forma da solução  $u(z)$ , que resolve a equação (2.14)

$$u(z) = u_1(z) + \frac{4}{\alpha^2(z - z_0)^2}, \quad (2.25)$$

onde  $u_1(z) = c/6$ ,  $A = 3(c/6)^2$  e  $B = (c/6)3$ . Note da solução (2.25) que ela explode quando  $z = z_0$ , agora quando  $z_0 \rightarrow \infty$  onde vemos que não há propagação de onda.

Então de forma resumida podemos ver que, como interessado em estudar solução tipo *sóliton* então a partir da análise feita observamos que só a solução apresentada no segundo caso é importante.

Portanto impondo as condições de contornos encontramos explicitamente a solução da equação (2.9). Logo

$$u \Big|_{\pm\infty} = \frac{du}{dz} \Big|_{\pm\infty} = \frac{d^2u}{dz^2} \Big|_{\pm\infty} \longrightarrow 0 \quad (2.26)$$

quando ( $z \rightarrow \pm\infty$ ), segue que  $A = 0$  e  $B = 0$ . E assim a equação (2.14) resulta, após efetuarmos algumas álgebras encontramos

$$\left(\frac{du}{dz}\right)^2 = \frac{2}{k^2} u^2 \left(\frac{w}{2k} - u\right) \quad (2.27)$$

assim,

$$\frac{du}{dz} = \pm \frac{u}{k} \sqrt{\frac{w}{k} - 2u}. \quad (2.28)$$

Observe na equação (2.28) acima que existe uma solução real somente se

$$\left(\frac{w}{k} - 2u\right) \geq 0.$$

A EDO (2.28), é separável de modo que integrando-a produz

$$\pm \int dz = \int \frac{du}{\frac{u}{k} \sqrt{\left(\frac{w}{k} - 2u\right)}}. \quad (2.29)$$

Fazendo uma mudança de variável em que

$$u(z) = -\frac{1}{2}c \operatorname{sech}^2\theta \quad (2.30)$$

sendo  $c = \frac{w}{k}$  temos

$$du = c \operatorname{sech}^2\theta \tanh\theta d\theta. \quad (2.31)$$

Substituindo (2.29) e (2.30) em (2.31) resulta

$$\theta = \frac{\sqrt{c}}{2} \left(\frac{z}{k} - x_0\right). \quad (2.32)$$

Agora substituindo (2.32) em (2.30) obtemos

$$u(z) = \frac{c}{2} \operatorname{sech}^2 \left[ \frac{\sqrt{c}}{2} \left(\frac{z}{k} - x_0\right) \right]. \quad (2.33)$$

onde  $x_0$ , é um *deslocamento de fase* que indica a posição da onda no instante  $t = 0$ . Se fizermos  $x = 0$  em  $t = 0$ , tomando as quantidades  $A = c/2$ ,

$k = \sqrt{c}/2$  a solução (2.33) produz

$$u(x, t) = A \operatorname{sech}^2(kx - wt), \quad (2.34)$$

onde  $w = 4k^2$  é a frequência angular. A solução acima do tipo *onda solitária*, é o *sóliton* da equação KdV que só existe se  $c > 0$ .

Para ver isso melhor esboçaremos o gráfico da solução (2.34) a qual mostra o comportamento do *sóliton* da equação KdV.

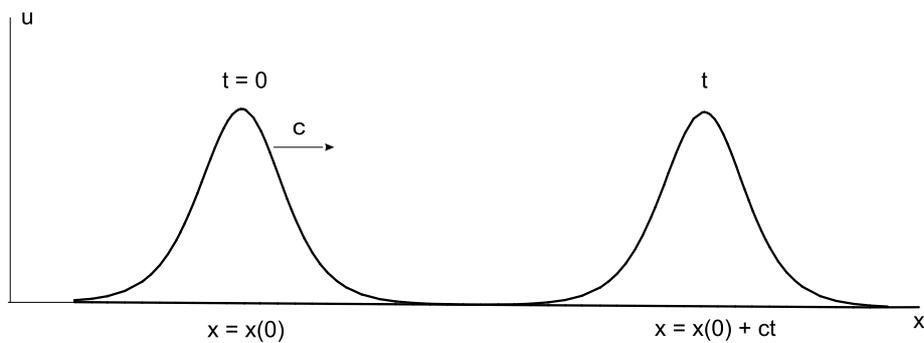


Figura 2.7: Representação do sóliton para equação KdV

## 2.4 A Equação mKdV

Temos também a equação modificada da KdV conhecida como equação mKdV, que é aplicada em diversas áreas da física [18],[19],[20],[21],[22],[23]. Por exemplo, ela aparece no contexto das ondas eletromagnéticas, em filme de tamanho quantizados, em colisões de plasmas[24], em redes de fonons harmônicos[25]. Também encontramos aplicações da mKdV em interfaces de ondas entre dois líquidos com profundidades variando gradualmente[26], em linhas de transmissão, em barreira de Schottky[27], em ion(sóliton) acústicos

[28],[29],[30], média elástica[31] e por fim é aplicada também em problemas de fluxo de tráficos[32][33].

A seguir calcularemos a solução tipo sóliton da equação mKdV. Considere a equação mKdV

$$u_t - 6u^2u_x + u_{xxx} = 0. \quad (2.35)$$

Admitindo que a mesma possui solução do tipo ondas viajantes temos

$$k^3 \frac{d^3u}{dz^3} - w \frac{du}{dz} - 6k u^2 \frac{du}{dz} = 0. \quad (2.36)$$

A equação acima ainda pode ser escrita

$$\frac{d}{dz} \left[ k^2 \frac{d^2u}{dz^2} - \frac{w}{k}u - 2u^3 \right] = 0. \quad (2.37)$$

Integrando resulta

$$k^2 \frac{d^2u}{dz^2} - \frac{w}{k}u - 2u^3 - A = 0 \quad (2.38)$$

onde A é uma constante de integração. Multiplicando a equação acima por um fator integrante  $\frac{du}{dz}$  produz

$$k^2 \frac{du}{dz} \frac{d^2u}{dz^2} - \frac{w}{k}u \frac{du}{dz} - 2u^3 \frac{du}{dz} - A \frac{du}{dz} = 0. \quad (2.39)$$

que ainda pode ser escrita

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dz} \left[ k^2 \left( \frac{du}{dz} \right)^2 - \frac{w}{k}u^2 - u^4 - 2Au \right] = 0. \quad (2.40)$$

Integrando obtemos

$$k^2 \left( \frac{du}{dz} \right)^2 = \frac{w}{k}u^2 + u^4 + 2Au + B = V(u), \quad (2.41)$$

onde  $B$  é outra constante de integração. Para essa equação o potencial associado possui a seguinte forma

$$V(u) = \frac{w}{k}u^2 + u^4 + 2Au + B. \quad (2.42)$$

Observe que plotando o gráfico do potencial temos Como o potencial

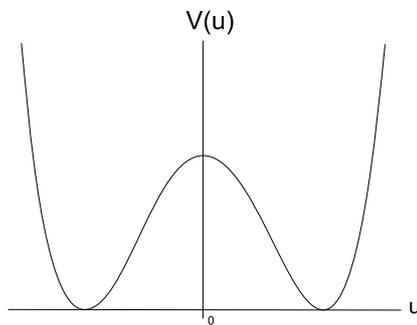


Figura 2.8: Representação esquemática do potencial associado descrito pela equação mKdV

apresenta dois estados de mínimo então a solução da equação mKdV é do tipo *kink*; que conecta dois mínimos adjacente

Vamos determinar explicitamente a solução aplicando as condições de contorno

$$u \Big|_{\pm\infty} = \frac{du}{dz} \Big|_{\pm\infty} = \frac{d^2u}{dz^2} \Big|_{\pm\infty} \longrightarrow 0 \quad (2.43)$$

quando ( $z \rightarrow \pm\infty$ ), segue que  $A = 0$  e  $B = 0$ . E assim a equação (2.41) resulta após efetuarmos algumas álgebras

$$\frac{du}{dz} = \pm \frac{u}{k} \sqrt{\frac{w}{k} + u^2}. \quad (2.44)$$

A equação (2.44) mostra que existe uma solução real somente se

$$\left(\frac{w}{k} + u^2\right) \geq 0. \quad (2.45)$$

A EDO (2.41) é separável de modo que integrando-a produz

$$\pm \int dz = \int \frac{du}{\frac{u}{k} \sqrt{\left(\frac{w}{k} + u^2\right)}}. \quad (2.46)$$

Fazendo uma mudança de variável e resolvendo a integral obtemos

$$u(x, t) = \pm k \tanh(kx - wt), \quad (2.47)$$

onde a frequência angular né dada por  $w = -2k^3$ . Note que a solução tipo sóliton da mKdV possui os dois sinais ( $\pm$ ). Isto significa que ela é invariante frente a transformação  $v \rightarrow -v$  (no capítulo 3, especialmente nas equações (3.36) e (3.43), mostraremos isto explicitamente). No caso da mKdV isso é possível devido a forma do potencial associado (ver equação (2.42)) ser do tipo  $v^2, v^4$  ou seja potenciais com potências pares de  $v$ . Esboçaremos em um gráfico o comportamento da solução (2.47).

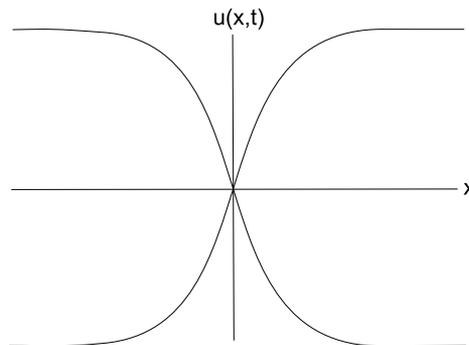


Figura 2.9: Representação esquemática do Sóliton da equação mKdV

# Capítulo 3

## O Método

### 3.1 A Essência do Método

Considere a equação hamiltoniana em terceira ordem nas derivadas espaciais, descrita num espaço de dimensões(1+1) na seguinte forma

$$u_t + (f(u))_x + \alpha u_{xxx} = 0, \quad (3.1)$$

onde  $\alpha$  é uma constante e função  $f(u)$  é um monômio da variável dinâmica  $u(x, t)$  que dependendo de sua forma a equação é linear ou não-linear.

Assumindo que a equação acima admite solução tipo ondas viajantes na forma

$$u(x, t) = u(kx - wt), \quad (3.2)$$

onde em geral,  $w = w(k)$  com a forma explícita da a partir da relação de dispersão determinada a partir da estrutura da equação e, no caso de equações

não-lineares, a amplitude da solução também é uma função de  $k$ , portanto de  $w$ . No caso da equação KdV, a função  $f(u)$  em (3.1) é dada por  $f(u) = 3u^2$ , e  $\alpha = 1$  (os coeficientes na equação KdV podem ser redefinidos para alguns valores por transformações apropriadas) e com isso obtemos

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0. \quad (3.3)$$

Para ondas tipo sólitons a solução da equação acima (ver equação (2.34)) resulta

$$u(x, t) = A \operatorname{sech}^2(kx - wt) \quad (3.4)$$

com  $w = 4k^3$  e  $A = 2k^2$ . Podemos ainda escrever a solução na forma familiar

$$u(x, t) = 2k^2 \operatorname{sech}^2[k(x - 4k^2t)] = \frac{c}{2} \operatorname{sech}^2[k(x - ct)], \quad (3.5)$$

onde identificamos a velocidade da onda viajante como  $c = 4k^2$ .

Observe que fazendo a transformação ( $u \rightarrow -u$ ) na equação KdV (3.3) obtemos

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0, \quad (3.6)$$

cuja solução possui forma invertida

$$u(x, t) = -2k^2 \operatorname{sech}^2[k(x - 4k^2t)]. \quad (3.7)$$

Solução tipo ondas viajantes (3.2), satisfaz a equação (3.1)

$$\alpha u_{xxx} + [f(u)]_x - \frac{w}{k} u_x = 0, \quad (3.8)$$

que integrando resulta

$$u_{xx} = V'(u) = \frac{w}{\alpha k}u - \frac{1}{\alpha}f(u) + \beta, \quad (3.9)$$

onde  $\beta$  é uma constante de integração cujo valor é determinado a partir das condições assintóticas, satisfeita pela solução.  $V'(u)$  é dado por

$$V'(u) = \frac{dV(u)}{du}. \quad (3.10)$$

Aqui a constante de integração pode ser incluída na definição de  $V(u)$ , que é denominado em teoria de campos como *Potencial*[10].

Supomos a seguir que exista outro sistema dinâmico em terceira ordem na variável dinâmica  $v$  em (1+1) dimensão, e que nosso interesse é determinar sua solução tipo ondas viajantes na forma

$$v(x, t) = v(kx - \tilde{w}t). \quad (3.11)$$

Como no caso anterior(ver equação (3.9) e (3.10)), consideramos que o novo sistema dinâmico admita solução tipo ondas viajantes, então sua equação em segunda produz

$$v_{xx} = \tilde{V}(v) = \frac{d\tilde{V}(v)}{dv}. \quad (3.12)$$

Fazemos agora uma importante observação: se existir um mapa inversível[10] tal que

$$u = g(v), \quad (3.13)$$

então o potencial associado para o novo modelo será

$$\tilde{V}(v) = \frac{V[g(v)]}{[g'(v)]^2} \quad (3.14)$$

onde

$$g'(v) = \frac{\partial g(v)}{\partial v}. \quad (3.15)$$

Explicitamente a relação (3.14) é obtida da seguinte forma: tomando a equação em segunda ordem (3.9) do modelo original e, multiplicando pelo fator integrante  $(du/dx)$  produz

$$\frac{du}{dx} \frac{d^2u}{dx^2} = \frac{dV}{du} \frac{du}{dx} \Rightarrow \frac{d}{dx} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{du}{dx} \right)^2 \right] = \frac{dV}{dx}, \quad (3.16)$$

o que imediatamente resulta

$$\frac{du}{dx} = \pm \sqrt{2V(u)}. \quad (3.17)$$

Note que a equação em primeira ordem (3.17) é solução da equação em segunda ordem (3.9). Agora de maneira análoga tomando a equação em segunda ordem (3.12) para o segundo modelo, e multiplicando pelo fator integrante  $(dv/dx)$  resulta

$$\frac{dv}{dx} = \pm \sqrt{2\tilde{V}(v)}. \quad (3.18)$$

A equação de primeira ordem acima resolve a equação de segunda (3.12). Agora derivando a relação (3.13) encontramos

$$\frac{du}{dx} = \frac{dg}{dv} \frac{dv}{dx}. \quad (3.19)$$

Substituindo (3.12) e (3.17) em (3.19) temos

$$\pm \sqrt{2V(u)} = \pm \sqrt{2\tilde{V}(v)} \frac{dg}{dv}. \quad (3.20)$$

E finalmente, tomando o quadrado de ambos os lados da equação (3.20) obtemos a relação (3.14).

Então comparando o primeiro sistema dinâmico definido a partir da equação (3.9), com o segundo sistema dinâmico definido em (3.12) observamos que, se existir uma solução tipo onda viajante para o primeiro sistema dinâmico definido em (3.9), então também haverá uma solução tipo ondas viajantes para o segundo

$$v(x, t) = v(kx - \tilde{w}t) = g^{-1}[u(kx - \tilde{w}t)]. \quad (3.21)$$

É importante notar que a relação (3.13), não é exigida para o mapa do primeiro sistema dinâmico (ver equação (3.9)), e sim para o segundo (ver equação (3.12)), cuja solução estamos interessados em construir. E neste caso basta relacionar a derivada do potencial dos dois sistemas. Neste sentido o mapa é diferente de uma transformação do tipo Miura.

Mostraremos através de vários exemplos que esse *método* é muito poderoso e útil para construir solução tipo ondas viajantes, para sistemas não-lineares. Como nossa discussão mostra, o sistema dinâmico não precisa ser integrável para o método funcionar. Entretanto, a utilidade do método é mais significativa para obter soluções tipo ondas viajantes para sistemas integráveis.

Nas próximas seções discutiremos como obter tais soluções para uma variedade de sistema dinâmicos.

## 3.2 Soluções de equações Não-Lineares a partir de Lineares

Nesta seção ilustraremos como gerar soluções não triviais para equações não-lineares a partir de sistema lineares. Assumimos que  $f(u) = 0$  e  $\alpha = 1$  e com isso a equação (3.1) produz

$$u_t + u_{xxx} = 0, \quad (3.22)$$

a qual é uma equação linear em terceira ordem, possuindo uma solução simples tipo ondas viajantes na forma

$$u(x, t) = A \cos(kx - wt), \quad (3.23)$$

com  $w = k^3$ , e amplitude  $A$  sendo uma constante arbitrária. Neste caso a equação (3.9) produz

$$u_{xx} = -\frac{w}{k}u + \beta = -k^2u + \beta = V'(u). \quad (3.24)$$

Comparando com a solução (3.23) notamos que  $\beta = 0$ . Integrando a equação (3.24) temos

$$V(u) = -\frac{k^2}{2}u^2 + \gamma, \quad (3.25)$$

onde  $\gamma$  é uma constante de integração no potencial.

Entretanto queremos obter solução não-trivial da equação KdV (3.3)

$$v_t + 6vv_x + v_{xxx} = 0 \quad (3.26)$$

cuja forma é dada por

$$v(x, t) = v(kx - \tilde{w}t). \quad (3.27)$$

Podemos seguir o procedimento realizado em (3.9) e (3.10) para construir

$$\tilde{V}(v) = \frac{\tilde{w}}{2k}v^2 - v^3 + \tilde{\beta}v + \tilde{\gamma} \quad (3.28)$$

onde  $\tilde{\gamma}$  é uma constante de integração no potencial.

A seguir notamos que se escolhermos a constante de integração  $\tilde{\gamma} = A^2 k^2/2$ , então com o mapa

$$u(kx - \tilde{w}t) = g[v(kx - \tilde{w}t)] = A \cos \left[ \operatorname{arc} \operatorname{sech} \left( \sqrt{\frac{v}{2k^2}} \right) \right], \quad (3.29)$$

transformamos o potencial associado (3.20) na seguinte forma

$$\tilde{V}(v) = \frac{V(g(v))}{g'(v)^2} = \frac{\left\{ \gamma - \frac{k^2 A^2}{2} \cos^2 \left[ \operatorname{sech}^{-1} \left( \sqrt{\frac{v}{2k^2}} \right) \right] \right\} (2k^2 v^2 - v^3)}{\frac{k^2 A^2}{2} \sin^2 \left[ \operatorname{sech}^{-1} \left( \sqrt{\frac{v}{2k^2}} \right) \right]}, \quad (3.30)$$

o que produz

$$\tilde{V}(v) = 2k^2 v^2 - v^3. \quad (3.31)$$

Comparando (3.31) com (3.28) notamos que se

$$\tilde{\gamma} = \tilde{\beta} = 0, \quad \tilde{w} = 4k^3, \quad (3.32)$$

reproduzimos a forma do potencial associado em (3.28) como prevista por (3.14). A solução da equação KdV (3.26) é obtido tomando a inversa do mapa em (3.29), de acordo com procedimento estabelecido (ver equação(3.16)).

Assim

$$v(x, t) = g^{-1}[u(kx - \tilde{w}t)] = 2k^2 \operatorname{sech}^2[k(x - 4k^2t)], \quad (3.33)$$

reconhecemos como uma solução tipo sólton da equação KdV. Notamos também que, a eliminação das constantes de integração em (3.32) é uma reflexão pelo fato que, a solução tipo sólton e sua derivada desaparecem assintoticamente. Então neste caso construímos esta solução não trivial da equação KdV, a partir de uma simples solução trigonométrica de um sistema linear (ver equação(3.22)).

Por outro lado, se quisermos construir uma solução da equação mKdV com o sinal negativo

$$v_t - 6v^2v_x + v_{xxx} = 0, \quad (3.34)$$

na forma

$$v(x, t) = v(kx - \tilde{w}t) \quad (3.35)$$

procedemos como mostra em (3.9) e (3.10). Assim

$$\tilde{V}(v) = \frac{\tilde{w}}{2k}v^2 + \frac{v^4}{2} + \tilde{\beta}v + \tilde{\gamma}, \quad (3.36)$$

onde  $\tilde{\beta}$  e  $\tilde{\gamma}$  são duas constantes de integrações no potencial.

Portanto se escolhermos  $\gamma = A^2k^2/2$ , então com o mapa

$$u(kx - \tilde{w}t) = g[v(kx - \tilde{w}t)] = \pm A \cos \left[ \operatorname{arc} \tanh \left( \frac{v}{k} \right) \right], \quad (3.37)$$

obtemos após algumas manipulações algébricas

$$\tilde{V}(v) = \frac{V(g(v))}{g'(v)^2} = k^2 \left( 1 - \frac{v^2}{k^2} \right)^2 \left\{ \frac{-\frac{k^2}{2}A^2 \cos^2 \left[ \operatorname{arc} \tanh \left( \frac{v}{k} \right) \right] + \gamma}{A^2 \sin^2 \left[ \operatorname{arc} \tanh \left( \frac{v}{k} \right) \right]} \right\}, \quad (3.38)$$

que resulta

$$\tilde{V}(v) = \frac{k^4}{2} - k^2v^2 + \frac{v^4}{2}, \quad (3.39)$$

o qual pode ser comparado com a equação (3.36). E obviamente observamos

que elas serão iguais quando em (3.36) tivermos

$$\tilde{\gamma} = \frac{k^4}{2}, \quad \tilde{\beta} = 0, \quad \tilde{w} = -2k^3. \quad (3.40)$$

Tomando a inversa do mapa em (3.37) obtemos a solução tipo ondas viajantes para equação mKdV negativa na forma

$$v(x, t) = g^{-1}[u(kx - \tilde{w}t)] = \pm k \tanh[k(x + k^2t)]. \quad (3.41)$$

É bem sabido que a solução tipo sóliton da equação mKdV negativa não é localizada, porém ela foi obtida de uma solução trigonométrica simples de uma equação linear. Por outro lado, notamos que  $\tilde{\gamma}$  é uma constante de integração não trivial que sinaliza o fato de que, assintoticamente a solução não desaparece (mesmo sendo não localizada), porém a derivada faz.

Para equação mKdV positiva

$$v_t + 6v^2v_x + v_{xxx} = 0, \quad (3.42)$$

sua solução tipo ondas viajantes também pode ser construída de maneira idêntica ao que já foi feito, sendo assim para solução tipo ondas viajantes

$$v = v(kx - \tilde{w}t),$$

e seguindo o procedimento usado em (3.9) e (3.10) obtemos a partir da solução acima, a forma do potencial associado dado por

$$\tilde{V}(v) = \frac{\tilde{w}}{2k}v^2 - \frac{v^4}{2} + \tilde{\beta}v + \tilde{\gamma}. \quad (3.43)$$

Onde  $\tilde{\beta}$  e  $\tilde{\gamma}$  são duas constantes de integrações no potencial que pode ser

comparada com a equação (3.36). Notamos que, como no último caso se escolhermos  $\gamma = A^2 k^2 / 2$ , então com o mapa

$$u(kx - \tilde{w}t) = g[v(kx - \tilde{w}t)] = \pm A \cos \left[ \operatorname{arc} \operatorname{sech} \left( \frac{v}{k} \right) \right]. \quad (3.44)$$

obtemos após efetuarmos algumas manipulações algébricas

$$\tilde{V}(v) = \frac{V(g(v))}{g'(v)^2} = v^4 \left( \frac{v^2}{k^2} - 1 \right) \left\{ \frac{-\frac{k^2}{2} A^2 \cos^2 \left[ \operatorname{arc} \operatorname{sech} \left( \frac{v}{k} \right) \right] + \gamma}{k^2 A^2 \sin^2 \left[ \operatorname{arc} \operatorname{sech} \left( \frac{v}{k} \right) \right]} \right\}, \quad (3.45)$$

e finalmente obtemos a forma do potencial associado

$$\tilde{V}(v) = \frac{k^2}{2} v^2 - \frac{v^4}{2}. \quad (3.46)$$

Comparando (3.46) com (3.43) observamos que elas serão iguais quando

$$\tilde{\beta} = \tilde{\gamma} = 0, \quad \tilde{w} = k^3. \quad (3.47)$$

Neste caso a solução tipo ondas viajante da equação mKdV positiva produz

$$v(x, t) = g^{-1}[u(kx - \tilde{w}t)] = \pm k \operatorname{sech}[k(x - k^2 t)], \quad (3.48)$$

que representa uma solução tipo sóliton. Notamos aqui que as duas equações mKdV (3.34) e (3.45), são invariantes frente a transformação  $v \rightarrow -v$ , que é a razão pela qual ambas soluções (3.41) e (3.48) possuírem os dois sinais ( $\pm$ ).

Finalmente, podemos construir a solução tipo onda viajante para equação Boussinesq, de uma maneira muito simples a partir (3.18) como segue. Em primeiro lugar notamos que a equação Boussinesq, é uma equação em alta

ordem nas derivadas espaciais na seguinte forma

$$v_{tt} - v_{xx} - (v^2)_{xx} - v_{xxxx} = 0. \quad (3.49)$$

Todavia assumindo que sua solução tipo onda viajante é

$$v = v(kx - \tilde{w}t), \quad (3.50)$$

então, seguindo o procedimento apresentado nas equações (3.9) e (3.10), escrevemos o potencial associado como

$$V(v) = \frac{1}{2} \left( \left( \frac{\tilde{w}}{k} \right)^2 - 1 \right) v^2 - v^3 + \tilde{\beta}v + \tilde{\gamma}. \quad (3.51)$$

Portanto a partir do mapa (3.9) ou seja

$$u(kx - \tilde{w}t) = g[v(kx - \tilde{w}t)] = A \cos \left[ \operatorname{arc} \operatorname{sech} \left( \sqrt{\frac{v}{2k^2}} \right) \right], \quad (3.52)$$

obtemos

$$\tilde{V}(v) = \frac{V(g(v))}{g'(v)^2} = \frac{\left\{ \gamma - \frac{k^2 A^2}{2} \cos^2 \left[ \operatorname{sech}^{-1} \left( \sqrt{\frac{v}{2k^2}} \right) \right] \right\} (2k^2 v^2 - v^3)}{\frac{k^2 A^2}{2} \sin^2 \left[ \operatorname{sech}^{-1} \left( \sqrt{\frac{v}{2k^2}} \right) \right]} \quad (3.53)$$

e por fim, quando a constante de integração  $\gamma$  for

$$\gamma = \frac{k^2 A^2}{2}, \quad (3.54)$$

o potencial associado acima resulta

$$\tilde{V}(v) = 2k^2 v^2 - v^3. \quad (3.55)$$

Comparando (3.55) com (3.51) observamos que essas equações serão iguais quando

$$\tilde{\beta} = \tilde{\gamma} = 0, \quad \tilde{w} = \pm k\sqrt{4k^2 + 1}. \quad (3.56)$$

A solução tipo ondas viajantes não-trivial par equação Boussinesq, é obtida a partir da inversa da equação (3.52)

$$v(x, t) = g^{-1}[u(kx - \tilde{w}t)] = 2k^2 \operatorname{sech}^2[k(x \mp \sqrt{4k^2 + 1}t)]. \quad (3.57)$$

Esta é realmente a única solução tipo sóliton da equação Boussinesque e notamos que ela é diferente da solução tipo sóliton da equação KdV (ou equação mKdV), o qual mostra que a equação Boussinesque é bi-direcional.

### 3.3 Soluções Solitônicas a partir de Sólitons

Nesta seção ilustraremos com detalhes através de diversos exemplos a eficácia do nosso método, para construir soluções tipo sólitons de sistemas integráveis, a partir de soluções trigonométrica simples de um sistema linear. Continuaremos a exposição do nosso método por mostrar como podemos construir solução tipo sólitons, para outros sistemas integráveis, iniciando com uma solução tipo sóliton de um dado sistema integrável. Por simplicidade, iniciaremos com a solução tipo sóliton (3.33) ou (3.5)

$$u(x, t) = 2k^2 \operatorname{sech}^2[k(x - 4k^2t)], \quad (3.58)$$

da equação KdV (3.3)

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0. \quad (3.59)$$

O potencial para equação KdV adotando o procedimento em (3.9) e (3.10), já foi construído em (3.28). Porém, para a solução tipo sóliton em (3.58), notamos que ambas as soluções como também suas derivadas desaparecem assintoticamente que determina a constante de integração ser trivial (que já tínhamos notado na última seção). Como um resultado desse caso temos

$$\tilde{V}(u) = 2k^2 u^2 - u^3. \quad (3.60)$$

Construiremos a solução tipo ondas viajante da equação mKdV negativa (3.34) a partir da solução (3.58). Já foi visto em (3.36) que para solução tipo ondas viajante a equação (3.34) produz

$$\tilde{V}(v) = \frac{\tilde{w}}{2k} v^2 + \frac{v^4}{2} + \tilde{\beta}v + \tilde{\gamma}. \quad (3.61)$$

É claro que a partir do mapa

$$u(kx - \tilde{w}t) = g[v(kx - \tilde{w}t)] = 2(k^2 - v^2), \quad (3.62)$$

identificamos

$$\tilde{V}(v) = \frac{V(g(v))}{g'(v)^2} = \frac{1}{2}k^4 - k^2v^2 + \frac{1}{2}v^4, \quad (3.63)$$

desde que tenhamos

$$\tilde{\gamma} = \frac{k^4}{2}, \quad \tilde{\beta} = 0, \quad \tilde{w} = -2k^3. \quad (3.64)$$

O inverso do mapa (3.62) resulta na solução

$$v(x, t) = g^{-1}[u(kx - \tilde{w}t)] = \pm k \tanh[k(x + k^2t)], \quad (3.65)$$

que já tínhamos visto em (3.36).

Para a equação mKdV positiva (3.42) já vimos que a forma do potencial associado é (ver equação (3.42))

$$V(v) = \frac{\tilde{w}}{2k}v^2 - \frac{v^4}{2} + \tilde{\beta}v + \tilde{\gamma}. \quad (3.66)$$

Notamos que a partir do mapa

$$u(kx - \tilde{w}t) = g[v(kx - \tilde{w}t)] = 2v^2, \quad (3.67)$$

identificamos

$$\tilde{V}(v) = \frac{V(g(v))}{g'(v)^2} = \frac{k^2}{2}v^2 - \frac{v^4}{2}, \quad (3.68)$$

desde que

$$\tilde{\gamma} = \tilde{\beta} = 0, \quad \tilde{w} = k^3. \quad (3.69)$$

O inverso do mapa (3.67) nos dá a solução

$$v(x, t) = g^{-1}[u(kx - \tilde{w}t)] = \pm k \operatorname{sech}[k(x - k^2t)], \quad (3.70)$$

que já tínhamos visto em (3.48).

Neste momento vale apenas compararmos nossa construção com a transformação convencional de Bäcklund para equação KdV. Notamos que a transformação de Miura

$$u = \beta v^2 \pm \sqrt{-\beta v_x}, \quad (3.71)$$

transforma a equação KdV (3.3) na equação mKdV positiva ou negativa para  $\beta = 1$ , e  $\beta = -1$  respectivamente. Para  $\beta = 1$  a transformação é claramente complexa, e isto vale a pena notar que, a transformação de Miura só não pode determinar a dependência temporal da solução (dispersão). Para poder combinar a transformação de Miura (3.71) com a equação de evolução da

equação mKdV para equação KdV precisamos obter as transformações de Bäcklund, que possui a seguinte forma

$$v_x = \mp \frac{1}{\beta}(u - \beta v^2), \quad (3.72)$$

e

$$v_x = \pm \frac{1}{\beta}(u_{xx} \pm 2\sqrt{-\beta}u_x v + 2u^2 - 2\beta uv^2), \quad \beta = \pm 1. \quad (3.73)$$

A compatibilidade das duas equações acima, leva a equação KdV em um mapeamento de suas soluções entre os dois sistemas, que corresponde a trabalhar com o conjunto acima de equações que não é bastante trivial comparado com o nosso método proposto. Além disso, parece razoável que as transformações de Bäcklund possa mapear em uma classe de soluções correspondentes de dois sistemas um no outro (isto é sóliton para sóliton), mas não é apriori obvio se ela pode mapear entre classes de soluções (ainda que possa, parece ser não trivial). Aqui nosso método proposto parece ser mais versátil visto que, ele pode mapear entre diferentes classes de soluções.

Nesta seção mostramos como soluções tipo sóliton da equação KdV pode também gerar solução para equação mKdV. Na seção seguinte, indicaremos como soluções tipo sólitons pode gerar solução elíptica para equação mKdV.

Vamos concluir esta seção mostrando como a solução tipo sóliton para equação Boussinesq (3.49) pode ser obtida de (3.58). Já foi visto na equação (3.51) que a solução tipo ondas viajantes para equação Boussinesq é

$$V(v) = \frac{1}{2} \left( \frac{w'^2}{k^2} - 1 \right) v^2 - v^3 + \tilde{\beta}v + \tilde{\gamma}. \quad (3.74)$$

Portanto a partir do mapa

$$u(kx - \tilde{w}t) = g[v(kx - \tilde{w}t)] = v, \quad (3.75)$$

podemos identificar

$$\tilde{V}(v) = \frac{V(g(v))}{g'(v)^2} = 2k^2 v^2 - v^3, \quad (3.76)$$

desde que tenhamos

$$\tilde{\beta} = \tilde{\gamma} = 0, \quad \tilde{w} = \pm k\sqrt{4k^2 + 1}. \quad (3.77)$$

Neste caso a inversa do mapa (3.75), resulta na solução tipo sóliton para equação Boussinesq na forma

$$v(x, t) = g^{-1}[u(kx - \tilde{w}t)] = 2k^2 \operatorname{sech}^2[k(x \mp \sqrt{4k^2 + 1} t)], \quad (3.78)$$

que já tínhamos encontrado (ver equação(3.57)).

### 3.4 Soluções Elípticas

Sistemas integráveis não-lineares, possuem uma rica variedades de soluções não triviais tipo ondas viajantes. Na última seção foi discutido as soluções tipo sólitons. Existe também as *soluções elíptica*, que são mais gerais que as soluções solitónicas. Isto por que, num limite particular as *soluções elípticas* se reduzem as soluções solitónicas.

Então por exemplo, para equação KdV (3.3)

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0 \quad (3.79)$$

já é sabido que a sua *solução elíptica* possui a seguinte forma

$$u(x, t) = 2mk^2 \operatorname{cn}^2(kx - wt, m) + B \quad (3.80)$$

sendo

$$w = k[6B + 4(2m - 1)k^2] \quad (3.81)$$

e  $B$  uma constante arbitrária.  $m$  é outra constante cujo valor varia entre,  $0 \leq m \leq 1$ . Os  $\operatorname{cn}$  são as funções elípticas de Jacobi. Estamos utilizando a notação em que, as funções elípticas de Jacobi são dadas por(ver apêndice)

- Seno Elíptico  $\operatorname{sn} = \operatorname{sn}(z, m)$ ,
- cosseno Elíptico  $\operatorname{cn} = \operatorname{cn}(z, m)$ ,

e

$$\begin{aligned} 1 &= \operatorname{sn}^2 + \operatorname{cn}^2 \\ \operatorname{cn}^2 &= 1 - m^2 \operatorname{sn}^2 \\ dn &= \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sn}^2}. \end{aligned} \quad (3.82)$$

Agora também são válidas as relações para derivadas

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \operatorname{sn} &= \operatorname{cn} dn \\ \frac{d}{dz} dn &= -k^2 \operatorname{cn} \operatorname{sn} \\ \frac{d}{dz} \operatorname{cn} &= -\operatorname{sn} dn, \end{aligned} \quad (3.83)$$

em que  $z = kx - wt$ . Por outro lado, as funções elípticas de Jacobi  $\operatorname{cn}$ ,  $\operatorname{sn}$  e  $dn$  possuem propriedades interessantes sendo que uma delas é que, quando  $m = 1$  a função  $\operatorname{cn}$  e  $dn$  se reduzem a "sech" e a função  $\operatorname{sn}$  a "tanh". Portanto se escolhermos  $m = 1$  e  $B = 0$  na *solução elíptica* (3.80), obtemos a solução da equação KdV (3.5) na forma

$$u(x, t) = 2k^2 \operatorname{sech}^2 k(x - 4k^2 t) = \frac{c}{2} \operatorname{sech}^2 k(x - ct). \quad (3.84)$$

Diferentemente das soluções tipo sólitons da equação KdV, as soluções elípticas nem suas derivadas desaparecem assintoticamente. Portanto para solução tipo ondas viajantes seguindo o procedimento estabelecido em (3.9) e (3.10), determinaremos a forma do potencial associado para equação mKdV como (ver equação (3.28)),

$$\tilde{V}(u) = \frac{\tilde{w}}{2k} \frac{u^2}{2} - u^3 + \tilde{\beta}u + \tilde{\gamma} \quad (3.85)$$

onde  $w$  é definido em (3.81).  $\beta$  e  $\gamma$  são duas constantes de integrações cujo valor pode ser determinado a partir das propriedades das soluções elípticas. Em particular é sabido que o potencial em (3.85) pode ser fatorado a partir das três raízes da equação na seguinte forma

$$V(u) = [B + 2(m - 1)k^2 - u](B - u)[B + 2mk^2 - u], \quad (3.86)$$

quando substituirmos (3.81) em (3.86) com  $\tilde{\beta} = \tilde{\gamma} = 0$ .

Então dado a solução elíptica da equação KdV (3.80) construiremos a solução elíptica da equação mKdV seguindo nosso procedimento. Em primeiro lugar recordamos da equação (3.43) que para solução tipo ondas viajantes podemos escrever

$$\tilde{V}(v) = \frac{\tilde{w}}{2k}v^2 - \frac{v^4}{2} + \tilde{\beta}v + \tilde{\gamma}. \quad (3.87)$$

Portanto a partir do mapa

$$u(kx - \tilde{w}t) = g[v(kx - \tilde{w}t)] = 2v^2 + B, \quad (3.88)$$

temos

$$\begin{aligned} V(\tilde{v}) &= \frac{V(g(v))}{g'(v)^2} \\ &= \frac{[2(m - 1)k^2 - 2v^2](B - 2v^2 - B)[B + 2mk^2 - 2v^2 - B]}{4v^2} \end{aligned} \quad (3.89)$$

e assim podemos identificar

$$\tilde{V}(v) = -\frac{1}{2}m(m - 1)k^4 + \frac{1}{2}(2m - 1)k^2v^2 - \frac{1}{2}v^4, \quad (3.90)$$

quando

$$\tilde{w} = (2m - 1)k^3, \quad \tilde{\beta} = 0, \quad \tilde{\gamma} = -\frac{1}{2}m(m - 1)k^4. \quad (3.91)$$

A solução elíptica para mKdV pode agora ser obtida tomando a inversa do mapa (3.88)

$$v(x, t) = g^{-1}[u(kx - \tilde{w}t)] = \pm \sqrt{m} k \operatorname{cn}(kx - \tilde{w}t, m) \quad (3.92)$$

onde  $\tilde{w}$  é dado em (3.91).

Para  $m = 1$  a solução acima se reduz a solução tipo sóliton da equação mKdV positiva (3.48) ou seja,

$$v(x, t) = g^{-1}[u(kx - \tilde{w}t)] = \pm k \operatorname{sech}[k(x - k^2t)]. \quad (3.93)$$

Note também que a constante  $B$  introduzida no mapa (3.88), corresponde a uma das raízes do "potencial" em (3.90). Podíamos ter definido o mapa com qualquer outra raiz do potencial, e com isso obteríamos diferentes soluções elípticas para equação mKdV. Em particular as outras raízes em (3.88), levará a solução a se reduzir a solução tipo sóliton para equação mKdV negativa (3.34) quando  $m = 1$ .

Como temos notado nas seções anteriores, nosso método pode levar facilmente de uma classe de soluções em outras. Então por exemplo, de acordo com a solução tipo sóliton da equação KdV (3.79) e sua solução (3.80), observamos que a partir do mapa

$$u(kx - \tilde{w}t) = g[v(kx - \tilde{w}t)] = 2k^2 \operatorname{sech}^2 \left[ \operatorname{cn}^{-1} \left( \pm \frac{v}{\sqrt{m} k}, m \right) \right] \quad (3.94)$$

reproduzimos também o potencial associado da equação mKdV (3.90). A inversa do mapa (3.94) reproduz a mesma solução dada em (3.92) iniciando com a solução tipo sóliton da equação KdV. Isto mostra a versatilidade do nosso método.

A solução elíptica para equação Boussinesq (3.49) também pode ser construída seguindo nosso procedimento. Para solução tipo ondas viajantes a equação Boussinesq, produz

$$V(v) = \frac{1}{2} \left( \left( \frac{\tilde{w}}{k} \right)^2 - 1 \right) v^2 - v^3 + \tilde{\beta}v + \tilde{\gamma}. \quad (3.95)$$

Porém vimos também que definindo o mapa

$$u(kx - \tilde{w}t) = g[v(kx - \tilde{w}t)] = v, \quad (3.96)$$

podemos identificar

$$V(\tilde{v}) = \frac{V(g(v))}{g'(v)^2} = \frac{[B + 2(m-1)k^2 - v](B-v)[B + 2mk^2 - v]}{1}, \quad (3.97)$$

desde que

$$\tilde{w} = \pm k\sqrt{1 + 6B + 4(2m-1)k^2}, \quad (3.98)$$

$$\tilde{\beta} = 4m(1-m)k^4 + 4B(1-2m)k^2 - 3B^2, \quad (3.99)$$

e

$$\tilde{\gamma} = 4Bm(m-1)k^4 + 2B^2(2m-1)k^2 - B^3 \quad (3.100)$$

Tomando a inversa do mapa (3.96) produzimos a solução elíptica da equação Boussinesq

$$v(x, t) = g^{-1}[u(kx - \tilde{w}t)] = 2m k^2 \operatorname{cn}^2(kx - \tilde{w}t, m) + B \quad (3.101)$$

onde  $\tilde{w}$  é dado em (3.98).

Finalmente para fechar esta seção mostramos como justamente, as soluções

tipo sólitons de sistemas não-lineares, podem ser construídas a partir de soluções tipo ondas viajantes de um sistema linear (ver equação (3.17)), como também as soluções elípticas.

Iniciaremos mostrando como construir a solução elíptica da equação KdV, iniciando com uma solução trigonométrica simples do sistema linear definido em (3.17), isto é

$$u_t + u_{xxx} = 0, \quad (3.102)$$

cuja solução é,

$$u(x, t) = A \cos(kx + wt). \quad (3.103)$$

A partir do mapa

$$u(kx - \tilde{w}t) = g[v(kx - \tilde{w}t)] = A \cos \left[ \text{cn}^{-1} \left( \sqrt{\frac{v-B}{2mk^2}}, m \right) \right], \quad (3.104)$$

obtemos

$$\tilde{V}(v) = \frac{V(g(v))}{g'(v)^2} = \frac{-\frac{k^2 A^2}{2} \cos^2 \left[ \text{cn}^{-1} \left( \sqrt{\frac{v-B}{2mk^2}}, m \right) \right] + \gamma}{\frac{-\frac{k^2 A^2}{2} \sin^2 \left[ \text{cn}^{-1} \left( \sqrt{\frac{v-B}{2mk^2}}, m \right) \right]}{2(v-B)(-2mk^2+v-B)(2k^2-2m^2k^2+m(v-B))}}. \quad (3.105)$$

Quando a constante  $\gamma$  for  $\gamma = k^2 A^2 / 2$  obtemos da equação acima

$$\begin{aligned} \tilde{V}(v) &= (4m^2k^2 + 3mB - 2k^2)v^2 - mv^3 \\ &+ (4mk^4 - 4m^3k^4 - 8m^2k^2B - 3B^2m + 4Bk^2)v \\ &+ (B^3m - 4Bmk^4 + 4Bm^3k^4 + 4B^2m^2k^2 - 2B^2k^2). \end{aligned} \quad (3.106)$$

Mas da equação (3.28) temos

$$\tilde{V}(v) = \frac{\tilde{w}}{2k} \frac{v^2}{2} - v^3 + \tilde{\beta}v + \tilde{\gamma}, \quad (3.107)$$

onde notamos que as equações (3.106) e (3.107) serão iguais quando

$$\tilde{w} = \pm k(6B + 4(2m - 1)k^2), \quad (3.108)$$

$$\tilde{\beta} = 4m(1 - m)k^4 + 4B(1 - 2m)k^2 - 3B^2, \quad (3.109)$$

e

$$\tilde{\gamma} = 4Bm(m - 1)k^4 + 2B^2(2m - 1)k^2 - B^3. \quad (3.110)$$

Tomando a inversa do mapa (3.104) obtemos a solução elíptica da equação KdV

$$v(x, t) = g^{-1}[u(kx - \tilde{w}t)] = 2m k^2 \operatorname{cn}^2(kx - \tilde{w}t, m) + B \quad (3.111)$$

com  $\tilde{w}$  é dado em (3.108).

Similarmente para finalizar construiremos a solução elíptica da equação mKdV positiva

$$v_t + 6v^2v_x + v_{xxx} = 0, \quad (3.112)$$

a partir do mapa

$$u(kx - \tilde{w}t) = g[v(kx - \tilde{w}t)] = A \cos \left[ \operatorname{cn}^{-1} \left( \frac{v}{\sqrt{mk}}, m \right) \right]. \quad (3.113)$$

Com o procedimento tomado em (3.9) e (3.10) obtemos

$$\tilde{V}(v) = \frac{V(g(v))}{g'(v)^2} = \frac{-\frac{k^2 A^2}{2} \cos^2 \left[ \operatorname{cn}^{-1} \left( \frac{v}{\sqrt{mk}}, m \right) \right] + \gamma}{\left\{ \frac{A^2 \sin^2 \left[ \operatorname{cn}^{-1} \left( \frac{v}{\sqrt{mk}}, m \right) \right]}{mk^2 \left( 1 - \frac{v^2}{mk^2} \right) \left[ 1 - m^2 \left( 1 - \frac{v^2}{mk^2} \right) \right]} \right\}}. \quad (3.114)$$

E assim quando a constante  $\gamma$  for  $\gamma = k^2 A^2/2$  obtemos

$$\tilde{V}(v) = -\frac{m}{2}v^4 + (m^2k^2 - \frac{k^2}{2})v^2 + \frac{mk^4}{2}(1 - m^2). \quad (3.115)$$

Onde observamos que comparando a equação (3.115) com o potencial da equação mKdV positiva (3.114)

$$V(v) = \frac{\tilde{w}}{2k}v^2 - \frac{v^4}{2} + \tilde{\beta}v + \tilde{\gamma}, \quad (3.116)$$

observamos que eles serão iguais quando identificamos

$$\begin{aligned} w' &= (2m^2 - 1)k^3, \\ \tilde{\beta} &= 0, \\ \tilde{\gamma} &= \frac{k^4m}{2}(1 - m^2), \\ m &= 1. \end{aligned} \quad (3.117)$$

Tomando a inversa do mapa

$$v(x, t) = g^{-1}[u(kx - \tilde{w}t)] = 2m k^2 \operatorname{cn}^2(kx - \tilde{w}t, m) + B \quad (3.118)$$

reproduzimos a solução da equação mKdV

$$v(x, t) = \sqrt{mk} \operatorname{cn}(kx - wt, m), \quad (3.119)$$

que já tínhamos encontrada diversas vezes. Isto demonstra que solução elíptica como também as soluções tipo sólitons, podem ser obtidas a partir da solução de um sistema linear simples, usando nosso método.

# Capítulo 4

## Novos Sistemas e suas Soluções

### 4.1 A equação pKdV

Até agora, usamos nosso método para construir soluções de equações conhecidas. A partir desse instante, aplicamos o método para encontrar soluções de algumas novas equações não-lineares.

Considere o sistema dinâmico

$$v_t + a(1+p)(1+2p)v^{\frac{1}{p}}v_x + v_{xxx} = 0, \quad (4.1)$$

onde  $a$  e  $p$  são constantes reais arbitrárias. Nomeamos esta equação como pKdV e notamos que:

- quando  $a = p = 1$ , reproduzimos a KdV;
- Para  $a = \pm 2$  e  $p = \frac{1}{2}$ ,

reproduzimos as duas equações mKdV.

Analisaremos esta nova equação, com o método discutido na seção (3.1), e construiremos sua solução tipo onda viajante a partir da equação KdV.

Vamos admitir que a equação pKdV possui solução tipo ondas viajantes na forma

$$v = v(kx - \tilde{w}t). \quad (4.2)$$

Então seguindo o procedimento das equações (3.9) e (3.10), podemos escrever a equação em segunda ordem como

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{dV}{dv} = \frac{w'}{k}v - ap(1+2p)v^{\frac{1+p}{p}} + \tilde{\beta}. \quad (4.3)$$

Para esse modelo o potencial associado toma a seguinte forma

$$\tilde{V}(v) = \frac{\tilde{w}}{2k}v^3 - ap^2v^{\frac{1+2p}{p}} + \tilde{\beta}v + \gamma, \quad (4.4)$$

onde  $\beta$  e  $\gamma$  são duas constantes de integrações no potencial.

Por outro lado, já vimos que a equação KdV

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0, \quad (4.5)$$

cujos potencial associado é

$$V(u) = 2k^2u^2 - u^3, \quad (4.6)$$

possui solução dada por

$$u(x, t) = 2k^2 \operatorname{sech}^2(kx - 4k^3t). \quad (4.7)$$

Então a partir do mapa

$$u(kx - \tilde{w}t) = g[v(kx - \tilde{w}t)] = a v^{\frac{1}{p}}, \quad (4.8)$$

podemos escrever o novo modelo após algumas manipulações algébricas como,

$$\tilde{V}(v) = \frac{V(g(v))}{g'(v)^2} = \frac{2k^2(av^{\frac{1}{p}})^2 - (av^{\frac{1}{p}})^3}{\left[\frac{d}{dv}(av^{\frac{1}{p}})\right]^2} = 2p^2k^2v^2 - ap^2v^{\frac{1+2p}{p}}. \quad (4.9)$$

Observe da equação (4.9) e (4.4) que, para elas serem iguais é preciso que na equação (4.4) identifiquemos

$$\tilde{\beta} = \tilde{\gamma} = 0, \quad \tilde{w} = 4p^2k^3. \quad (4.10)$$

Note que a partir da inversa do mapa (4.8) podemos escrever a solução da equação pKdV como

$$v(x, t) = g^{-1}[u(kx - \tilde{w}t)] \left(\frac{2k^2}{a}\right)^p \operatorname{sech}^{2p}(kx - w't). \quad (4.11)$$

Notamos que a solução real só existe para alguns valores restritos de  $p$  e  $a$ , por exemplo;

1. quando  $a > 0$ ,  $p$  pode ter qualquer valor real,
2. para  $a < 0$ , os valores de  $p$  para que a solução real exista são restritos,
3. quando  $a = p = 1$ , reproduzimos a solução da KdV,
4. quando  $a = 2$  e  $p = \frac{1}{2}$ , reproduzimos a solução da mKdV.

## 4.2 A família KdV(i,a)

A seguir mostraremos outras ilustrações, construindo uma família de diferentes equações não-lineares e suas soluções. Faremos isto inicialmente, a partir da equação mKdV negativa

$$u_t - 6 u^2 u_x + u_{xxx} = 0, \quad (4.12)$$

cuja solução solitônica tipo kink possui é

$$u(x, t) = \pm k \tanh[k(x + 2k^2 t)]. \quad (4.13)$$

O potencial associado para equação mKdV (ver equação(3.44)) produz

$$V(u) = \frac{\tilde{w}}{2k} u^2 + \frac{u^4}{2} + \tilde{\beta} u + \tilde{\gamma}, \quad (4.14)$$

onde  $\tilde{\beta}$  e  $\tilde{\gamma}$  são duas constantes de integrações no potencial. Quando  $\tilde{\beta} = 0$ ,  $\tilde{\gamma} = \frac{k^4}{2}$  e  $w = -2k^3$ , a equação (4.14) produz

$$V(u) = \frac{1}{2}(u^2 - k^2)^2. \quad (4.15)$$

Portanto a partir do mapa

$$u(kx - \tilde{w}_{m,a} t) = g[v(kx - \tilde{w}_{m,a} t)] = \pm k \cos[a \arccos(v) - m\pi], \quad (4.16)$$

onde  $a$  é um parâmetro real, e  $m$  pode assumir valores inteiros e semi-inteiros. Para  $m$  semi-inteiro, o potencial associado para o novo modelo possui a

seguinte forma

$$\tilde{V}_{1,a}(v) = \frac{(g(v)^2 - k^2)^2}{g'(v)} = \frac{1}{2} \frac{k^2}{a^2} (1 - v^2) T_a^2(v). \quad (4.17)$$

Semelhantemente para  $m$  inteiro resulta

$$\tilde{V}_{2,a}(v) = \frac{(g(v)^2 - k^2)^2}{g'(v)} = \frac{1}{2} \frac{k^2}{a^2} (1 - v^2) U_a^2(v), \quad (4.18)$$

onde chamamos por simplicidade

$$T_a(v) = \cos[a \arccos(v)], \quad (4.19)$$

e

$$U_a(v) = \sin[a \arccos(v)]. \quad (4.20)$$

Observe que para  $a$  inteiro,  $T_a(v)$  e  $U_{1+a}(v)$  são os polinômios de Chebyshev de primeiro e segundo tipo respectivamente.

Aplicando nosso método, podemos construir as duas famílias de equações

$$v_t + (f_{i,a}(v))' v_x + v_{xxx} = 0, \quad (4.21)$$

onde  $f_{i,a}(v)$  é uma função de  $v$ , e  $i = 1$  ou  $2$ , correspondem as duas possibilidades fornecidas pelas equações (4.17) e (4.18).

Vamos chamar a equação (4.21) de equação KdV(i,a), pelo fato dela representar uma família de KdV. Note que para solução tipo ondas viajantes a equação (4.21) produz

$$(\tilde{V}_{1,a}(v))' = \frac{d\tilde{V}_{1,a}(v)}{dv} = \frac{\tilde{w}_{i,a}}{k} v - f_{i,a}(v) + \tilde{\beta}_{i,a}. \quad (4.22)$$

A solução da equação (4.22) é

$$v(x, t) = g^{-1}[u(kx - \tilde{w}_{i,at})] = \cos\left(\frac{1}{a}[\theta(kx - \tilde{w}_{i,at}) + m\pi]\right), \quad (4.23)$$

onde a velocidade  $\tilde{w}_{i,a}$  depende de  $m$  inteiro ( $i = 1$ ) e  $m$  semi-inteiro ( $i = 2$ ).

Por outro lado observe que  $\theta(y)$  é o fator principal para determinar quem é  $[\arccos(\tanh(y))]$ , e  $m$  identifica uma entre várias soluções que a equação pode possuir. Para  $m$  semi-inteiro temos  $m = \frac{1}{2}, \dots, 2a - \frac{1}{2}$ , e para  $m$  inteiro temos,  $m = 0, 1, \dots, 2a - 1$ , para  $a$  inteiro ou semi-inteiro. Nas figuras seguintes podemos identificar estas possibilidades explicitamente. Examinaremos com detalhes a seguir, as diferentes famílias de KdV que nós temos com  $a$  inteiro e semi-inteiro.

### 4.3 Família de KdV para $a$ Semi-Inteiro

Afim de obter a forma explícita de  $(f_{i,a}(v))'$  com suas relações específicas com  $\tilde{w}_{m,a}$ , vamos escrever  $(\tilde{V}_{1,a}(v))'$  como função de seus zeros. Para  $a$  semi-inteiro temos

$$\tilde{V}_{1,a}(v) = \frac{2^{2a-3}}{a^2} k^2 (1-v)(1-v^2) \prod_{j=1}^{a-\frac{1}{2}} (v + z_{1,a}^j)^2, \quad (4.24)$$

sendo  $\tilde{V}_{2,a}(v) = \tilde{V}_{1,a}(-v)$ . Na expressão acima temos

$$z_{1,a}^j = \cos\left(\frac{2j-1}{2a}\pi\right). \quad (4.25)$$

Observe que usando as equações (4.22) e (4.23) obtemos

$$[f_{1,a}(v)]' = -\frac{k^2}{2a^2} - (\tilde{V}_{1,a}(v))'', \quad (4.26)$$

onde temos usado  $\tilde{w}_{1,a} = \frac{-k^3}{2a^2}$ .

A função polinomial (4.24) prever uma família de equações KdV que apresentam: uma *solução solitônica* tipo sech, e  $N = a - \frac{1}{2}$  diferentes pares de soluções solitônicas tipo tanh, para cada membro da família de equações. Ilustramos abaixo, algumas das diversas possibilidades para o caso  $a = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$ , e  $\frac{5}{2}$ . Veja

$$[f_{1,1/2}(v)]' = 6k^2v, \quad \tilde{w}_{1,1/2} = -2k^3, \quad (4.27)$$

$$[f_{1,3/2}(v)]' = -\frac{14}{3}k^2v + \frac{80}{3}k^2v^3, \quad \tilde{w}_{1,3/2} = -\frac{2}{9}k^3, \quad (4.28)$$

$$[f_{1,5/2}(v)]' = 6k^2v - \frac{114}{5}k^2v^3 + \frac{672}{25}k^2v^5, \quad \tilde{w}_{1,5/2} = -\frac{2}{25}k^3. \quad (4.29)$$

Temos também que

$$\begin{aligned} f_{2,a}(v)' &= -[f_{1,a}(v)]' \\ \tilde{w}_{1,a} &= \tilde{w}_{2,a}. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Na figura (4.1), esboçamos o gráfico de  $\tilde{V}_{1,a}(v)$  e suas soluções relacionadas, para alguns valores de  $a$  semi-inteiro.

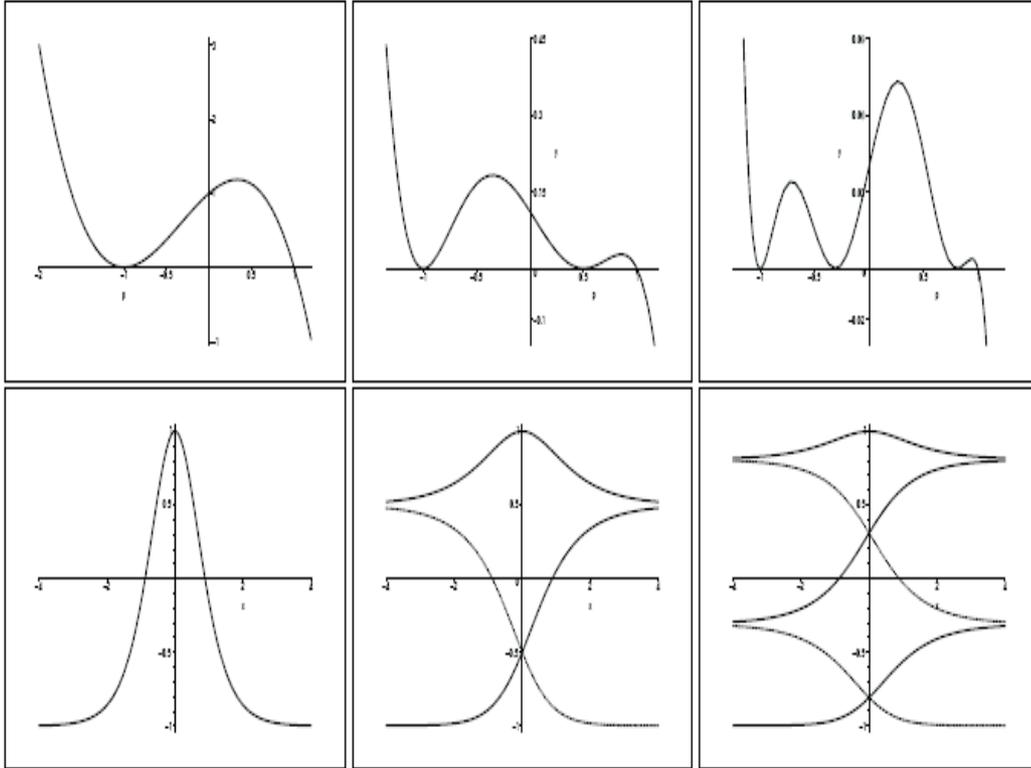


Figura 4.1: Representa o gráfico de  $\tilde{V}_{1,a}(v)$  para  $k = 1$  (painel de cima), para os valores de  $a = 1/2$  (painel da esquerda),  $a = 3/2$  (painel do meio),  $a = 5/2$  (painel da direita) e nos painéis de baixos as correspondentes soluções tipo sech e tipo tanh para  $t = 0$ .

#### 4.4 Família de KdV para $a$ Inteiro

No caso de  $a$  inteiro temos famílias distintas de equações KdV, uma para  $i = 1$  e outra para  $i = 2$ . Por esta razão a seguir, consideraremos as duas possibilidades separadamente.

##### 1. O caso de $i=1$

Para obter a forma explicita de  $[f_{1,a}(v)]'$ , com suas relações específicas para  $\tilde{w}_{1,a}$  e  $a$  inteiro, vamos escrever  $\tilde{V}_{1,a}(v)$  em função de seus zeros, o que

resulta em duas possibilidades:

(i)  $a$  par

$$\tilde{V}_{1,a}(v) = \frac{2^{2a-3}}{a^2} k^2 (1-v^2) \prod_{j=1}^{a/2} (v^2 - (z_{1,a}^j)^2)^2, \quad (4.31)$$

(ii)  $a$  ímpar

$$\tilde{V}_{1,a}(v) = \frac{2^{2a-3}}{a^2} k^2 (1-v^2) \prod_{j=1}^{(a-1)/2} (v^2 - (z_{1,a}^j)^2)^2, \quad (4.32)$$

onde

$$z_{1,a}^j = \cos\left(\frac{2j-1}{2a}\pi\right). \quad (4.33)$$

Agora utilizando (4.22), (4.31) e (4.32) obtemos

$$[f_{1,a}(v)]' = \frac{\tilde{w}_{1,a}}{k} - (\tilde{V}_{1,a}(v))'', \quad (4.34)$$

com  $\tilde{w}_{1,a} = k^3$  para  $a$  ímpar, e  $\tilde{w}_{1,a} \cong -k^3$  para  $a > 2$  par, sendo  $|\tilde{w}_{1,a+2}| < |\tilde{w}_{1,a}|$ . Observe que a função polinomial (4.31) e (4.32) prever uma família de equações KdV que apresentam duas *soluções solitônica* tipo sech, e  $N = a - 1$  diferentes pares de soluções solitônicas tipo tanh, para cada membro desta família de equações. Nós ilustramos abaixo, algumas das diversas possibilidades para o caso  $a = 1, 2, 3$ . Veja;

$$[f_{1,1}(v)]' = 6k^2v^2, \quad \tilde{w}_{1,1} = k^3, \quad (4.35)$$

$$[f_{1,2}(v)]' = -12k^2v^2 + 15k^2v^4, \quad \tilde{w}_{1,2} = -1.25k^3, \quad (4.36)$$

$$[f_{1,3}(v)]' = 22 k^2 v^2 - \frac{200}{3} k^2 v^4 + \frac{448}{3} k^2 v^6, \quad \tilde{w}_{1,3} = k^3. \quad (4.37)$$

Na figura 4.2 esboçamos o gráfico de  $\tilde{V}_{1,a}(v)$ , e suas soluções relacionadas para alguns valores de  $a$  inteiro.

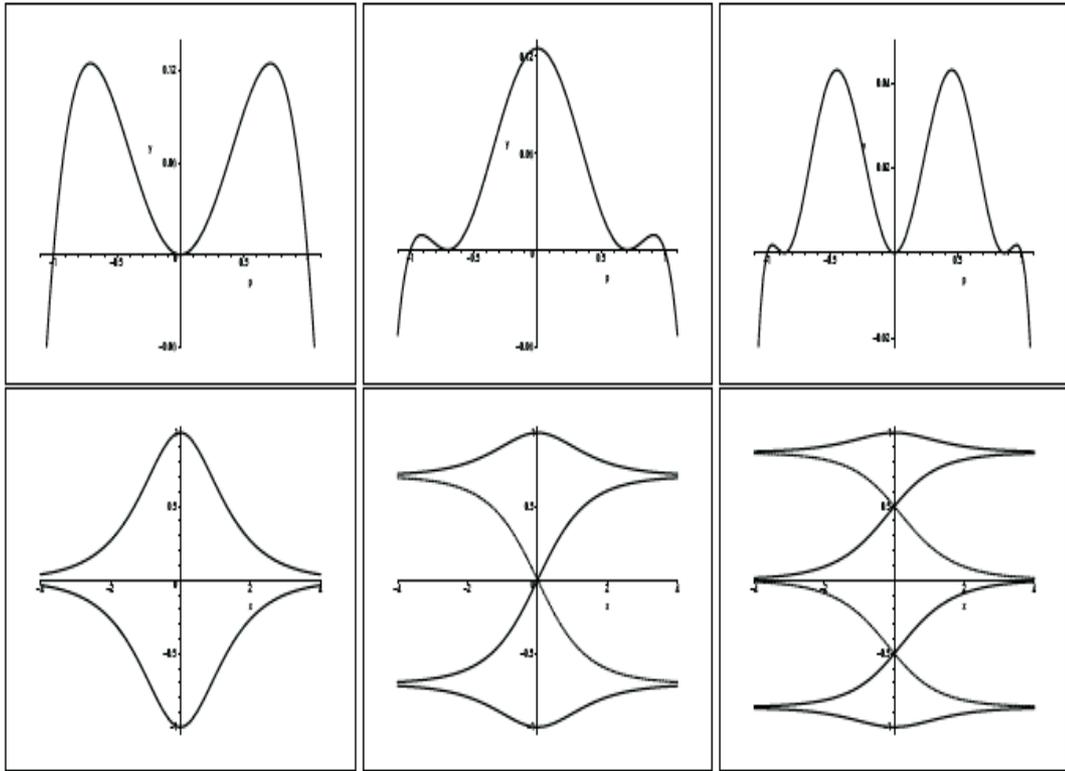


Figura 4.2: Representa o gráfico de  $\tilde{V}_{1,a}(v)$  para  $k = 1$  (painel de cima), para os valores de  $a = 1$  (painel da esquerda),  $a = 2$  (painel do meio),  $a = 3$  (painel da direita) e nos painéis de baixos as correspondentes soluções tipo sech e tipo tanh para  $t = 0$ .

### 1. O caso de $i=2$

Para obter a forma explícita de  $[f_{2,a}(v)]'$ , com suas relações específicas para  $\tilde{w}_{2,a}$ , vamos escrever  $\tilde{V}_{2,a}(v)$  em função de seus zeros, o que também

produz duas possibilidades:

(i)  $a$  par

$$\tilde{V}_{2,a}(v) = \frac{2^{2a-3}}{a^2} k^2 v^2 \prod_{j=1}^{a/2} (v^2 - (z_{2,a}^j)^2)^2, \quad (4.38)$$

(ii)  $a$  ímpar

$$\tilde{V}_{2,a}(v) = \frac{2^{2a-3}}{a^2} k^2 \prod_{j=1}^{(a+1)/2} (v^2 - (z_{2,a}^j)^2)^2, \quad (4.39)$$

onde

$$z_{2,a}^j = \cos\left(\frac{j-1}{a}\pi\right). \quad (4.40)$$

Agora utilizando (4.22), (4.38) e (4.39) resulta

$$[f_{2,a}(v)]' = -[f_{1,a}(v)]', \quad (4.41)$$

com  $\tilde{w}_{2,a} = k^3$  para  $a$  par;  $\tilde{w}_{2,1} = -2k^3$ , e  $\tilde{w}_{2,a} \cong -k^3$  para  $a > 1$ ; e  $a$  ímpar, com  $|\tilde{w}_{2,a+2}| < |\tilde{w}_{2,a}|$ . Observe que a função polinomial (4.38) e (4.39) fornecem uma família de equações KdV que apresentam  $N = a$  diferentes pares de soluções solitônicas tipo tanh, para cada membro desta família de equações.

Ilustramos na Fig.(6.3) algumas das muitas possibilidades para o caso  $a = 1, 2, 3$ , para  $\tilde{w}_{2,a} = -2k^3, k^3, -1.11k^3$ .

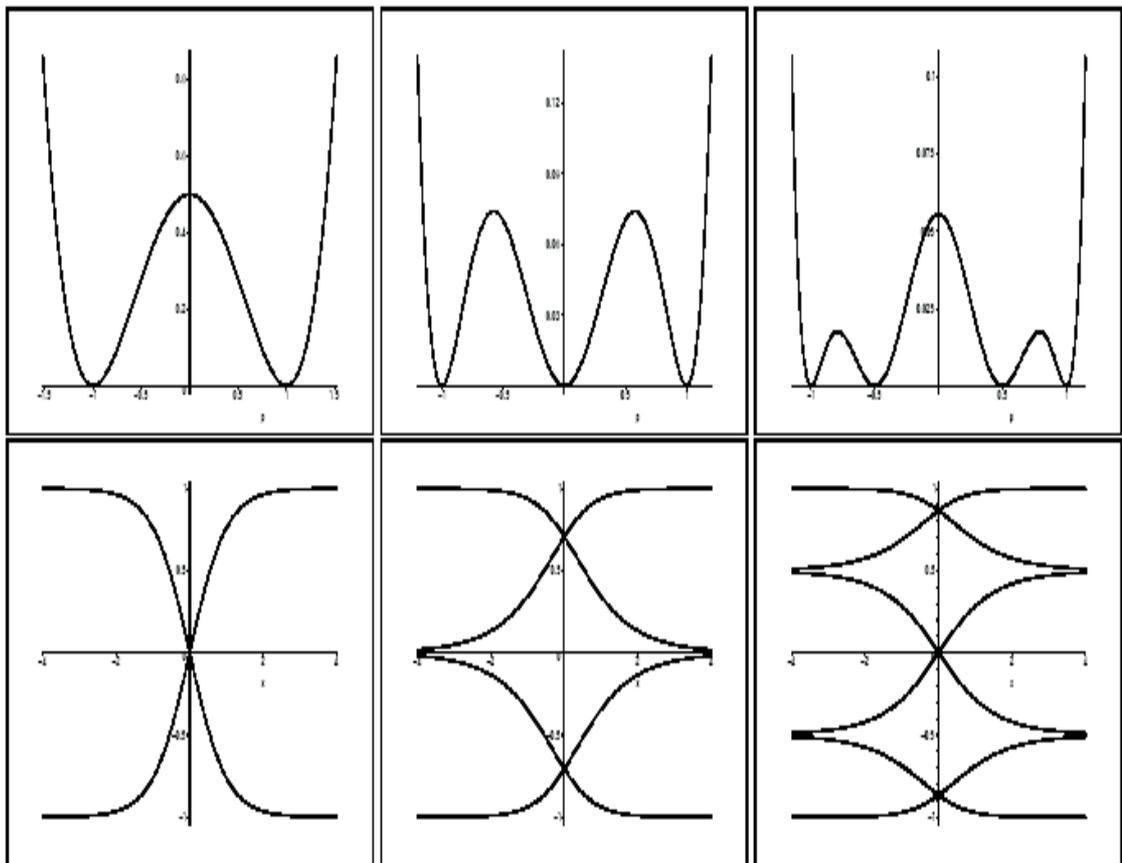


Figura 4.3: Representa o gráfico de  $\tilde{V}_{2,a}(v)$  para  $k = 1$  (painel de cima), para os valores de  $a = 1$  (painel da esquerda),  $a = 2$  (painel do meio),  $a = 3$  (painel da direita) e nos painéis de baixos as correspondentes soluções tipo sech e tipo tanh para  $t = 0$ .

# Capítulo 5

## Comentários e Conclusões

Neste trabalho, propomos um método simples e direto para encontrar soluções tipo ondas viajantes, para sistemas integráveis não-lineares. Ilustramos nosso método, construindo explicitamente solução tipo sóliton da equação KdV, mKdV e Boussinesq, a partir de uma solução trigonométrica simples de uma equação linear. Mostramos também como o método pode ser usado proveitosamente para construir soluções tipo sólitons para uma dada equação integrável. Nesta conexão, temos construído a solução tipo sóliton da equação mKdV e Boussinesq, começando com uma solução tipo sóliton da KdV, e comparamos nosso método com o convencional método de Miura, e o método de transformação de Bäcklund.

O método também é aplicado a outros tipos de soluções tipo ondas viajantes, como temos enfatizado isto construindo as soluções elípticas das equações mKdV e Boussinesq iniciando com a equação da KdV. Mostramos ainda, como as soluções elípticas podem ser obtidas, a partir de uma solução simples de um sistema linear. Evidentemente escolhemos estes exemplos, principalmente de soluções conhecidas para enfatizar claramente na prática

como o nosso método é simples e útil. Constatamos isto, com os detalhes técnicos que foram utilizados para construção de cada solução conhecida.

O procedimento é muito poderoso e útil, como foi explicitamente mostrado nesse trabalho, por construir e resolver família distintas de uma dada equação. Em particular construímos soluções tipo sólitons para equação pKdV. Mostramos como construir equações que suportam soluções tipo *sech* e *tanh*. Isto é constatado com a situação padrão, onde a equação KdV admite sóliton tipo *sech* e a equação mKdV, sóliton tipo *tanh*.

Os resultados apresentados no capítulo 4 mostrarão, que podemos encontrar solução tipo *sech* ou tipo *tanh* para a mesma equação dependendo das condições de limites aplicadas para obter estas soluções. Também verificamos que, para a hierarquia na equação KdV (nós simplesmente citamos aqui os resultados sem entrar em detalhes), a solução tipo sóliton para a  $n$ -ésima equação pode ser construída usando nosso método, e nesse caso ter a seguinte forma

$$u^{2n+1}(x, t) = 2k^2 \operatorname{sech}^2[k(x - (2k)^n t)], \quad (5.1)$$

onde para  $n = 1$  reproduzimos a equação (3.3) e sua solução correspondente (3.5).

Os resultados obtido no presente trabalho nos impulsiona a perguntar se podemos estudar soluções tipo multi-sólitons de sistemas integráveis e resolver equações de ordem mais alta de uma maneira sistemática.

Estaríamos interessados por exemplo, se nosso método pode elucidar se existe uma solução tipo sóliton para uma equação da seguinte forma

$$u_t + \alpha uu_x + \delta u_{xxxx} = 0. \quad (5.2)$$

Estas são algumas das perguntas que queremos responder num futuro bem próximo utilizando nosso método.

# Apêndice A

## Transformações de Backlund

Historicamente, as transformações de Backlund foram desenvolvidas em 1880 com o objetivo de estudar, as relações envolvidas entre Geometria Diferencial e Equações Diferenciais.

Uma transformação de Backlund é definida essencialmente como sendo, um sistema de equações que relaciona a solução de uma dada equação qualquer com outra solução da mesma equação, ou com uma solução de uma outra equação.

Em geral, uma transformação de Backlund para uma equação diferencial parcial para variável dependente  $u(x, t)$ , é definida a partir de um par de equações dada por

$$w_x = P(w, u, u_x, u_t, x, t) \quad (\text{A.1})$$

$$w_t = Q(w, u, u_x, u_t, x, t). \quad (\text{A.2})$$

Onde  $P$  e  $Q$  são funções das variáveis indicadas, porém não são de suas derivadas ou seja de  $w$ .

A fim de explicitar a Transformação de Backlund para a equação KdV, primeiro fazemos a mudança de variável  $u = w_x$ , com  $w$  satisfazendo a equação do potencial da KdV

$$w_t + 3w_x^2 + w_{xxx} = 0, \quad (\text{A.3})$$

onde a constante de integração foi tomada sendo zero sem perda de generalidade. Então a transformação de Backlund para a equação (A.3) é dada por

$$w_x + \tilde{w}_x + 2k^2 + \frac{1}{2}(w - \tilde{w})^2 = 0, \quad (\text{A.4})$$

e

$$w_t - \tilde{w}_t + 3(w_x - \tilde{w}_x)(w_x + \tilde{w}_x) + w_{xxx} - \tilde{w}_{xxx} = 0, \quad (\text{A.5})$$

onde  $k$  é um parâmetro de espalhamento. É fácil verificar que se  $w$  é uma solução do potencial da equação KdV, então  $\tilde{w} = \tilde{w}_x$  é a solução da equação KdV.

Vamos supor que  $w = 0$  na equação do potencial da KdV, então a correspondente solução trivial da equação KdV é  $u = 0$ . Então resolvendo as equações (A.4) e (A.5) para para  $\tilde{w}(x, t)$

$$\tilde{w}(x, t) = 2k \tanh k(x - 4k^2t - x_0). \quad (\text{A.6})$$

Quando  $|\tilde{w}| < 2k$  produz a solução tipo sóliton dada por

$$\tilde{w}(x, t) = 2k^2 \operatorname{sech}^2 k(x - 4k^2t - x_0). \quad (\text{A.7})$$

Se  $|\tilde{w}| > 2k$  então

$$\tilde{w}(x, t) = 2k \coth k(x - 4k^2t - x_0), \quad (\text{A.8})$$

que produz a solução singular da KdV.

$$\tilde{w}(x, t) = 2k^2 \operatorname{cosech}^2 k(x - 4k^2 t - x_0), \quad (\text{A.9})$$

# Apêndice B

## Polinômios de Chebyshev

Nesta seção desenvolveremos dois tipos de polinômios de Chebyshev um com  $\alpha = 1$ , e outro com  $\alpha = 0$ . Primeiro consideramos  $\alpha = 1$  que são conhecidos como polinômios de Chebyshev do **Tipo II**, e em seguida consideremos  $\alpha = 0$  que são os polinômios de Chebyshev do **Tipo I**.

### Polinômios de Chebyshev do Tipo II

A função geradora dos polinômios possui a seguinte forma

$$\frac{1}{(1 - 2xt + t^2)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(\alpha)}(x)t^n, \quad |x| < 1, \quad |t| < 1, \quad (\text{B.1})$$

onde  $\alpha = 1$  resulta que  $C_n^1(x) = U_n(x)$ , e com isso a equação (B.1) produz

$$\frac{1}{(1 - 2xt + t^2)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(x)t^n, \quad |x| < 1, \quad |t| < 1. \quad (\text{B.2})$$

Essas funções  $U_n(x)$  geradas por  $(1 - 2xt + t^2)^{-1}$  são denominadas *Polinômios*

de *Chebyshev* tipo **II**. Esses polinômios possuem várias aplicações em Física, como por exemplo no desenvolvimento de harmônicos esféricos quadridimensionais usados na teoria do momento angular.

### Polinômios de Chebyshev do Tipo I

Com  $\alpha = 0$  há uma dificuldade. De fato, nossa função geradora se reduz á constante 1. Podemos evitar esse problema primeiro diferenciando a equação (B.1) em função de  $t$ , no que resulta

$$\frac{-\alpha(-2x + 2t)}{(1 - 2xt + t^2)^{\alpha+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} n C_n^{(\alpha)}(x) t^{n-1}, \quad (\text{B.3})$$

ou

$$\frac{x - t}{(1 - 2xt + t^2)^{\alpha+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2} \left[ \frac{C_n^{(\alpha)}(x)}{\alpha} \right] t^{n-1}. \quad (\text{B.4})$$

Onde definimos  $C_n^0(x)$  por

$$C_n^0(x) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{C_n^\alpha(x)}{\alpha}. \quad (\text{B.5})$$

A finalidade de diferenciar em relação a  $t$  era obter  $\alpha$  no denominador e criar uma forma indeterminada. Agora, multiplicando a equação (B.4) por  $2t$  e adicionando  $1 = (1 - 2xt + t^2)/(1 - 2xt + t^2)$ , obtemos

$$\frac{1 - t^2}{(1 - 2xt + t^2)} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2} C_n^{(0)}(x) t^n. \quad (\text{B.6})$$

Definimos  $T_n(x)$  por  $T_n(x) = 1$ , se  $n = 0$  e  $T_n(x) = (n/2)C_n^0(x)$  se  $n > 0$ .

Note que  $C_n^0(x)$  é o limite indicado na equação (B.5) e não uma substituição literal de  $\alpha = 0$  na série da função geradora. Então com isso podemos

escrever a função geradora como

$$\frac{(1-t^2)}{(1-2xt+t^2)} = T_0(x) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2} T_n(x) t^n, \quad |x| \leq 1, \quad |t| < 1. \quad (\text{B.7})$$

Denominamos  $T_n(x)$  como sendo os *polinômios de Chebyshev tipo I*.

Diferenciando a função geradora (B.7) em relação a  $t$  e multiplicando pelo denominador,  $(1-2xt+t^2)$  obtemos

$$\begin{aligned} -t - (t-x) \left[ T_0(x) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} T_n(x) t^n \right] &= (1-2xt+t^2) \sum_{n=1}^{\infty} n T_n(x) t^{n-1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} [n T_n(x) t^{n-1} - 2xn T_n t^n + n T_n t^{n+1}], \end{aligned}$$

da qual resulta na relação de recorrência

$$T_{n+1}(x) - 2xT_n(x) + T_{(n-1)}(x) = 0. \quad (\text{B.8})$$

Deslocando o índice do somatório, de modo a obter a mesma potência,  $t^n$ , em cada termo e então comparando coeficientes de  $t^n$ .

Tratando a equação (B.2) de modo semelhante, encontramos

$$-\frac{2(t-x)}{(1-2xt+t^2)} = (1-2xt+t^2) \sum_{n=1}^{\infty} n U_n(x) t^{n-1}, \quad (\text{B.9})$$

da qual resulta na relação de recorrência

$$U_{n+1}(x) - 2xU_n(x) + U_{(n-1)}(x) = 0. \quad (\text{B.10})$$

A partir da comparação de coeficientes da mesma potência em  $t$  podemos escrever alguns valores para os polinômios a seguir

**Polinômio de Chebyshev - Tipo I**

$$\begin{aligned}T_0 &= 1 \\T_1 &= x \\T_2 &= 2x^2 - 1 \\T_3 &= 4x^3 - 3x \\T_4 &= 8x^4 - 8x^2 + 1 \\T_5 &= 16x^5 - 20x^3 + 5x \\T_6 &= 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1\end{aligned}\tag{B.11}$$

**Polinômio de Chebyshev - Tipo II**

$$\begin{aligned}U_0 &= 1 \\U_1 &= 2x \\U_2 &= 4x^2 - 1 \\U_3 &= 8x^3 - 4x \\U_4 &= 16x^4 - 12x^2 + 1 \\U_5 &= 32x^5 - 32x^3 + 6x \\U_6 &= 64x^6 - 80x^4 + 24x^2 - 1\end{aligned}\tag{B.12}$$

As relações de paridade para  $T_n(x)$  e  $U_n(x)$  resultam de suas funções geradoras com as substituições  $t \rightarrow -t, x \rightarrow -x$ , que as deixam invariadas; elas são

$$T_n(x) = (-1)^n T_n(-x), \quad U_n(x) = (-1)^n U_n(-x).\tag{B.13}$$

### Relações de Recorrência - Derivadas

As relações de recorrência que envolvem as derivadas são obtidas diferenciando as funções geradoras para  $T_n(x)$  e  $U_n(x)$  em relação à variável  $x$ . Então da equação (B.7) obtemos

$$2(1 - 2xt + t^2) \sum_{n=1}^{\infty} T'_n(x)t^n = 2t \left[ T_0(x) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} T_n(x)t^n \right], \quad (\text{B.14})$$

da qual extraímos a relação de recorrência

$$2T_{(n-1)}(x) = T'_n(x) - 2xT'_{(n-1)}(x) + T'_{(n-2)}(x), \quad (\text{B.15})$$

que é a derivada da equação (B.8) para  $n \rightarrow n - 1$ . Entre as recursões mais úteis que obtemos desse modo estão

$$(1 - x^2)T'_n(x) = -nxT_n(x) + nT_{(n-1)}(x), \quad (\text{B.16})$$

e

$$(1 - x^2)U'_n(x) = -nxU_n(x) + (n + 1)U_{(n-1)}(x). \quad (\text{B.17})$$

Manipulando várias dessas relações, podemos eliminar o índice  $(n - 1)$  em favor de  $T''_n(x)$  e estabelecer que  $T_n(x)$ , o **polinômio de Chebyshev tipo I**, satisfaz a **EDO**

$$(1 - x^2)T''_n(x) - xT'_n(x) + n^2T_n(x) = 0. \quad (\text{B.18})$$

O **polinômio de Chebyshev tipo II**,  $U_n(x)$ , satisfaz

$$(1 - x^2)U''_n(x) - 3xU'_n(x) + n(n + 2)U_n(x) = 0. \quad (\text{B.19})$$

### Forma Trigonométrica

Neste ponto do desenvolvimento das propriedades das soluções de Chebyshev é interessante trocar de variáveis, substituindo  $x$  por  $\cos \theta$ . Com  $x = \cos \theta$  e  $d/dx = (-1/\sin \theta)(d/d\theta)$ , verificamos que

$$(1 - x^2) \frac{d^2 T_n}{dx^2} = \frac{d^2 T_n}{d\theta^2} - \cot \theta \frac{dT_n}{d\theta}, \quad x T_n' = -\cot \theta \frac{dT_n}{d\theta} \quad (\text{B.20})$$

Somando esses termos, a equação (B.18) resulta

$$\frac{d^2 T_n}{d\theta^2} + n^2 T_n = 0, \quad (\text{B.21})$$

a equação do oscilador harmônico simples com soluções  $\cos n\theta$  e  $\sin n\theta$ . As condições de contorno em  $x = 0$  e  $x = 1$  identificam

$$T_n = \cos n\theta = \cos n(\arccos x). \quad (\text{B.22})$$

Uma segunda solução linearmente independente das equações (B.18) e (B.21) é rotulada por

$$V_n = \sin n\theta = \sin n(\arccos x). \quad (\text{B.23})$$

As soluções correspondentes da equação de **Chebyshev tipo II**, ver equação (B.19) produz

$$U_n(x) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta}, \quad W_n(x) = \frac{\cos(n+1)\theta}{\sin \theta}. \quad (\text{B.24})$$

Os dois conjuntos de soluções, **tipo I** e **tipo II**, são relacionados por

$$V_n(x) = (1 - x^2)^{1/2}U_{n-1}(x), \quad W_n(x) = (1 - x^2)^{-1/2}T_{n+1}(x). \quad (\text{B.25})$$

Como já vimos pelas funções geradoras,  $T_n(x)$  e  $U_n(x)$  são polinômios. Claramente observamos também que  $V_n(x)$  e  $W_n(x)$  são polinômios.

# Referências Bibliográficas

- [1] D.J. Korteweg, G. de Vries, *Phil. Mag*, **39**, 422 (1895).
- [2] G.B. Whitham “ *Linear and Nonlinear Waves*” (Wiley, New York, 1974).
- [3] L.A Dickey, “*Soliton Equation and Hamiltonian System*” (World Scientific, Singapore, 1993) .
- [4] P. Mathieu, *J. Math.* **29**, 2499 (1988) .
- [5] P.D. Lax, *Commun. Pure Appl.Math.* **21**, 467 (1968).
- [6] V.E. Zakharov, L.D. Faddev, *Funct. Anal. Appl.* **5**, 280 (1971).
- [7] M. J. Ablowitz, D.J.Kaup, A.C. Newell, H.Segur, *Stud. Appl. Math.* **53**, 249 (1974).
- [8] R. Hirota, *Phys. Rev. Lett.* **27**, 1192 (1971).
- [9] D. Bazeia, A. Das, L.Losano, A. Silva, *Annal. of Phys.* **323**, 1150 (2008).
- [10] D. Bazeia, L.Losano, J.M.C. Malbouisson, *Phys. Rev. D* **66**, 101701(R) (2002).
- [11] R.M Miura, *J. Math.* **9**, 1202 (1968) .
- [12] J. Boussinesq, *J. Math. Pure Appl.* **7**, 55 (1872).

- 
- [13] J.S. Russel, “*Report of the fourteenth meeting of the British Association for the Advancement of Science*” (Sept. 1844, Plates XLVII-LVII:311, York 1845).
- [14] D.J. Korteweg, G. de Vries, *Phil. Mag*, **39**, 422 (1895).
- [15] M. Toda “*Whitham, Linear and Nonlinear Waves*” (Wiley, New York, 1974).
- [16] E. Fermi, J.R. Pasta, S.M. Ulam, “*Studies on Nonlinear Problems*” (Los Alamos, Sci. Lab, 1955).
- [17] H. Flaschka “*On the Toda Lattice II. Inverse Scattering Solution*” (Progress, Theoret physics, 1974).
- [18] R.M Miura, C.S. Gardner, M.D. Kruskal, *J. Math. Phys.* **9**, 1204 (1968).
- [19] M. Wadati, *J. Phys. Soc. Jpn.* **32**, 1681 (1972).
- [20] M. Wadati, *J. Phys. Soc. Jpn.* **34**, 1289 (1973).
- [21] R. Hirota, *J. Phys. Soc. Jpn.* **33**, 1456 (1972).
- [22] Z. Fu, S. Liu, S. Liu, *Phys. Lett. A* **326**, 364 (2004).
- [23] S. Matsutani, *J. Phys. A* **35**, 4321 (2002).
- [24] A.H. Khater, O.H. El-Kakaawy, D.K. Callebaut, *Phys. Scr.* **58**, 545 (1968).
- [25] H. Ono, *J. Phys. Soc. Jpn.* **61**, 4336 (1962).
- [26] K.R. Helfrich, W.K. Melville, J.W. Miles, *J. Fluid Mech.* **149**, 305 (1984).

- [27] V. Ziegler, J. Dinkel, C. Setzer, K.E. Lonngren, Chaos, Solitons Fractals. **12**, 1719 (2001).
- [28] K.E. Lonngren, Opt. Quantum Electron. **30**, 615 (1998).
- [29] S. Watanabe, J. Phys. Soc. Jpn. **53**, 950 (1984).
- [30] M. Tajiri, k. Nishihara, J. phys. Soc. Jpn. **54**, 572 (2001).
- [31] S. Matsutani, H. Tsuru J. phys. Soc. Jpn. **60**, 3640 (1991).
- [32] T. Nagatani, Physica A **264**, 581 (1999).
- [33] T.S. Komatsu, S.I. Sasa, Phys. Rev. E **52**, 5574 (1995); T. Nagatani, Physica A **265**, 297 (1999).
- [34] C.A. Almeida, D. Bazeia, L.Losano, J.M.C. Malbouisson, Phys. Rev. D**69**, 067702 (2004); D. Bazeia, L.Losano, Phys. Rev. D **673**, 025016 (2006); D. Bazeia, M.A Gonzalez Leon, L.Losano, J.Mateos Guilarte, Phys. Rev. D**73**, 105008 (2006).
- [35] L.D. Faddeev, L.A. Takhtajan, Hamiltonian “*Hamiltonian Methods in the Theory of Solitons*”(Springer, New York, 1987).
- [36] P.D. Lax, Commun. Pure Appl.Math. **28**, 467 (1975)141. bibitemMG  
M. Gomes, “*Teoria Quânticas do Campos*” (Edusp, São Paulo, 1985).
- [37] A. Das, “*Integrable Models*” (World Scientific, Singapore, 1989).
- [38] M.J. Ablowitz, P.A. Clarkson, “*Solitons, Nonlinear Evolution Equation and Inverse Scattering*” (Cambridge, Cambridge, 1991).
- [39] P.J Olver, “*Applications of Lie Groups to Differential Equations*” (Springer, New York, 1993) .

- 
- [40] P.G.Drazin, R.S. Johnson, “*Solitons: An Introduction*” (Cambridge, Cambridge, 1993).
- [41] V.E.Zakharov, A.B. Shabat, Soviet Phys.JETP **34**, 62 (1972).
- [42] V.E.Zakharov, A.B. Shabat, Funct. Anal. Appl. **8**, 226 (1974).
- [43] C.S. Gardner, J.M Greene, M.D. Kruskal, R.M. Miura, Commun. Pure Appl. Math. **27**, 97 (1974)
- [44] M. J. Ablowitz, D.J.Kaup, A.C. Newell, H.Segur, Phys. Rev. Lett. **31**, 125 (1973).
- [45] S.Coleman, “*Aspecto of Symmetry*” (Cambridge, Cambridge, 1985).
- [46] C. Rebbi, G.Soliani, “*solitons and Particles*” (World Scietific, Singapore, 1984).
- [47] A.Vilenkin, E. P. S. Sllard, “*Cosmic Strings and other Topological Defectos*” (Cambridge, Cambridge, 1994).
- [48] D. Bazeia, “*Topological Solitons. In Concise Encyclopedia of Supersymmetry*”. S.Duply, W. Siegel, J. Bagger (Keuver, Dordrecht, 2004).

# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)