



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA – CCEN  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

## DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

ECONOFÍSICA: DINÂMICA DE AGENTES HETEROGÊNEOS NO  
ESTUDO DA VOLATILIDADE

por

**César Ivan Nunes Sampaio Filho**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação  
em Física do Departamento de Física da Universidade  
Federal de Pernambuco como parte dos requisitos para  
obtenção do título de Mestre em Física.

**Banca Examinadora:**

Prof. Francisco George Brady Moreira (Orientador-UFPE)  
Prof. Giovanni Lopes Vasconcelos (DF - UFPE)  
Prof. Iram Marcelo Gléria (DF - UFAL)

Recife - PE, Brasil  
Julho - 2008

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

Sampaio Filho, César Ivan Nunes  
Econofísica: dinâmica de agentes heterogêneos no  
estudo da volatilidade / César Ivan Nunes Sampaio  
Filho. - Recife : O Autor, 2008.  
xvi, 59 folhas : il., fig., tab.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de  
Pernambuco. CCEN. Física, 2008.

Inclui bibliografia.

1. Mecânica estatística. 2. Econofísica. 3. Volatilidade. 4.  
Agentes de mercado. I. Título.

530.13      CDD (22.ed.)      FQ2008-0028



Universidade Federal de Pernambuco  
Departamento de Física – CCEN  
Programa de Pós-Graduação em Física  
Cidade Universitária - 50670-901 Recife PE Brasil  
Fone (+55 81) 2126-8449/2126-8450 - Fax (+55 81) 3271-0359  
<http://www.df.ufpe.br/pg> e-mail: [posgrad@df.ufpe.br](mailto:posgrad@df.ufpe.br)

---

## Parecer da Banca Examinadora de Defesa de Dissertação de Mestrado

---

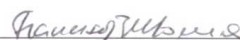
**César Ivan Nunes Sampaio Filho**

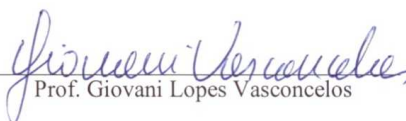
### ECONOFÍSICA: DINÂMICA DE AGENTES HETEROGÊNEOS NO ESTUDO DA VOLATILIDADE

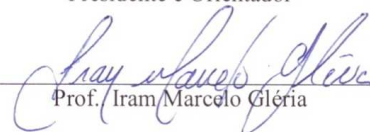
A Banca Examinadora composta pelos Professores Francisco G. Brady Moreira (Presidente e Orientador), Giovani Lopes Vasconcelos, ambos da Universidade Federal de Pernambuco e Iram Marcelo Gléria, do Departamento de Física, da Universidade Federal de Alagoas, consideram o candidato:

Aprovado com distinção     Aprovado     Reprovado

Secretaria do Programa de Pós-Graduação em Física do Departamento de Física do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade Federal de Pernambuco em vinte e quatro de julho de 2008.

  
Prof. Francisco G. Brady Moreira  
Presidente e Orientador

  
Prof. Giovani Lopes Vasconcelos

  
Prof. Iram Marcelo Gléria

*Aos meus pais, Ivan e Vilane, pelo esforço com minha educação e sem exagero, pelo enorme (do tamanho do universo!) carinho e paciência que tiveram comigo.*

# Agradecimentos

A meu pai Ivan e minha mãe Vilane, pelos exemplos de vida que são (tanto no pessoal quanto no profissional!), no esforço com nossa educação, na grandeza com que superaram tantos problemas (quizesa eu um dia tê-la) e por serem um casal tão bonito, pela história de vocês e por se completarem tanto (é arretado mesmo!). Que Deus os abençoe.

A meu irmãozão Felipe por sempre tirar minhas dúvidas com o português, por tomar conta de nossos pais (eles dão muito trabalho às vezes!) e por sempre perder para mim no futebol. Sua companhia é muito positiva e sinto muito a falta dela aqui em Recife.

Ao meu amigo Francisco George Brady Moreira, pela grande orientação neste trabalho e por ter me aceitado como seu aluno, num momento em que alguns fecharam as portas, no Mestrado e pelo convite em continuar sendo seu aluno no Doutorado. Agradeço muito ao senhor e me empenharei para que esta sinergia seja sempre positiva!

Aos companheiros de laboratório (Anexos A e B): Brady, Lidiane, André, Aranildo, Paulo, Aduino e Maurício.

Aos amigos e colegas de moradia: Pablo (é só minha amiga!), Ney, Jefferson(Bisteca), Erneson,Thiago,(BlackHole), Jorlândio, Ricardo, Gustavo, Yaremi, Manoel(Harry Potter) e Augusto.

Ao *Vapor*, pelas festas organizadas e por grandes momentos de descontração movidos a muitos copos de café!

Aos *elementos de Bar*, Vladimir,Eu, Brady, Aduino,Thiago, Lidiane, Aranildo, Paulo(Zé Pequeno), Gerson(Marta), Geovani(Burraxa), Lincooonl, Pablo, Jefferson e Cioba, por razões muito óbvias!

Infinitos agradecimentos a Vladimir, Brady,Thiago e Paulo, pelas discussões sobre meu

trabalho, programação, livros e o futuro (se existe!) aqui na física.

Ao CNPQ, por ter garantido minha sobrevivência durante esses dois anos de Mestrado (né!)

Aos Professores Iram Gléria (DF-UFAL) e Giovani Vanconcelos (DF-UFPE) por terem aceitado o convite para participar da banca de defesa desta dissertação. E também aos professores das disciplinas do Mestrado, Jairo Rolim, Rita Zorzenon, Brady Moreira e Giovani Vaconcelos.

Aos Professores da UFC, em especial Alexandre Diehl (Física), José Ramos (Física) e Joaquim Bento (Computação).

Aos amigos de minha querida Fortaleza, Manoel Filho, Felipe, Marcos (Toin), Valdo, Adolfo, Bete (minha amiga!), Carolina (minha amiga!), Cláudia (minha amiga!), Cacá (minha amiga!). Tenho muita saudade de vocês.

Por último, mas não menos importante, a todos aqueles e aquelas que poderem ler este trabalho.

*Se você vier me perguntar por onde andei  
No tempo em que você sonhava  
De olhos abertos lhe direi  
Amigo, eu me desesperava  
Sei que assim falando pensas  
Que esse desespero é moda em 73 (2006)  
Mas ando mesmo descontente  
Desesperadamente eu grito em português  
Tenho 25 anos de sonho e de sangue  
E de América do Sul  
Por força desse destino  
O tango argentino me vai bem melhor que o blues  
Sei que assim falando pensas  
Que esse desespero é moda em 73 (2006)  
Eu quero que esse canto torto  
Feito faça corte a carne de vocês!  
—BELCHIOR (A Palo Seco)*



# Resumo

A volatilidade representa uma medida genérica da magnitude das flutuações do mercado financeiro. Desta forma ela quantifica o risco relacionado a um ativo financeiro, estando vinculada com a quantidade de informação que chega ao mercado num dado intervalo de tempo. Para realizarmos um estudo econofísico para a volatilidade, considerando a hipótese de agentes heterogêneos e interagentes (HAI), estendemos o modelo USDF para uma rede quadrada e introduzimos o parâmetro  $p_F$ , que reflete a fração de agentes fundamentalistas. Analisamos então a influência destes agentes na volatilidade. Em nossa análise foram reproduzidos fatos estilizados, como o comportamento da distribuição de probabilidade de volatilidade e correlações de longo alcance. Observamos ainda que ao variarmos a concentração de agentes fundamentalistas no intervalo  $[0.10 : 0.90]$ , a volatilidade média apresenta uma dependência linear com este parâmetro dentro da região onde não há clusters percolativos de agentes fundamentalistas, enquanto que na região onde há percolação de agentes fundamentalistas a dependência passa a ser do tipo lei de potência. Através da análise R/S e DFA verificamos que as séries temporais da volatilidade geradas para diferentes valores de  $p_F$  são persistentes (expoente de Hurst  $H > 0.5$ ). Observamos ainda a presença de multifractalidade para as regiões  $p_F < 0.5$  e  $p_F > 0.60$  e um comportamento fractal típico para  $0.50 < p_F < 0.60$ . Estimamos o valor  $D = 1.4$  para a dimensão fractal do mercado financeiro.

**Palavras-chave:** Econofísica; volatilidade; agentes de mercado.

# Abstract

We perform a computer simulation study for the volatility within the context of multi-agent dynamics in financial markets. We consider the USDF model of price formation on square lattices and introduce the parameter  $p_F$  for the fraction of fundamentalist agents present in the system. Then we analysis the influence of these agents on the volatility. The results reproduce some of the main stylized facts of financial time series, such as exponential-law tails of the probability distribution function of volatilities and the presence of long range correlations. By varying the concentration of fundamentalists in the interval  $[0.10 : 0.90]$ , the average volatility shows a linear dependence with this parameter in the region where there is not a percolative cluster of fundamentalist agents, while in the region where the percolative cluster exists one has a power-law dependence on the concentration. We also consider the R/S and DFA statistics to obtain the Hurst exponents of volatility series for different values of  $p_F$  and conclude that they are persistent in all cases ( $H > 0.5$ ). Moreover, the corresponding spectra of  $H$  show multifractality in the regions with  $p_F < 0.5$  and  $p_F > 0.60$ , whereas one has a typical fractal behavior in the regime  $0.50 < p_F < 0.60$ . From the simulation we estimate  $D = 1.4$  for the fractal dimension of the financial market.

**Keywords:** Econophysics; volatility; trading agents.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1	Econofísica	1
1.2	Fatos Estilizados	3
1.3	O que é o preço?	5
1.3.1	Touros e Ursos	6
1.4	O Retorno	7
1.4.1	Fatos Estilizados para o Retorno	8
1.5	Bolhas e Quebras de Bolsas	9
1.5.1	Econofísica e Crashes	11
<b>2</b>	<b>Modelos Baseados em Agentes</b>	<b>14</b>
2.1	A Evolução dos Modelos	14
2.2	Teoria da Percolação aplicada a Finanças : Modelo de Cont-Bouchaud	17
2.2.1	Percolação	17
2.2.2	O Modelo	20
2.2.3	Resultados	21
2.2.4	Aplicação	22
2.3	O modelo USDF na formação do preço	24
2.3.1	O Modelo	24
2.3.2	Resultados	27
2.3.3	Uma nova proposta	29

<b>3</b>	<b>Análise Estatística</b>	<b>32</b>
3.1	Volatilidade	32
3.2	Autocorrelação Temporal	34
3.3	Expoente de Hurst	36
3.3.1	Análise de Intervalo Reescalado - R/S	37
3.3.2	Análise de Flutuação Destendenciada - DFA	39
3.4	Multifractalidade	40
<b>4</b>	<b>Resultados</b>	<b>42</b>
4.1	Distribuição de Probabilidade	43
4.2	Autocorrelação	49
4.3	Expoente de Hurst	50
4.4	Multifractalidade	52
<b>5</b>	<b>Conclusão</b>	<b>54</b>

# Lista de Figuras

- 1.1 Comparação entre a densidade de probabilidade dos retornos diários do índice S&P500 com a distribuição gaussiana (linha pontilhada) e uma distribuição estável de Lévy (linha sólida) com índice  $\alpha = 1.40$  obtido da análise escala e fator de escala  $\gamma=0.00375$  medido a partir de  $P(0)$  com  $\Delta = 1$  min [10]. 5
- 1.2 Distribuição cumulativa normalizada para retornos absolutos das 1000 companhias mais importantes referentes à base de dados “Traders and Quotes” para os anos 1994-1995 [34]. 6
- 1.3 Retornos (log-retornos) diários da taxa de câmbio USD/DEM (dolar/marco alemão) para a década 1990-2001 [27]. 8
- 1.4 À esquerda: função de autocorrelação numa escala semi-log para o retorno. À direita: função de autocorrelação para o valor absoluto do retorno numa escala log-log com intervalo de amostragem  $\Delta t = 1$  min. A função de autocorrelação para o retorno decai exponencialmente para zero 30 min,  $C(t) \sim \exp(-t/\tau)$  com  $\tau \approx 4.0$  min. Uma lei de potência para correlação  $C(t) \sim t^{-\gamma}$  para os valores absolutos dos retornos. Note que ambos os gráficos são truncados no valor zero de  $C(t)$ . A linha sólida para o gráfico da direita representa um ajuste para a função  $1/(1 + t^\gamma)$  para a qual obtem-se  $\gamma = 0.3 \pm 0.08$ . A linha horizontal pontilhada indica o nível de ruído [14]. 12
- 1.5 Dados analisados: Índice S&P 500  $Z(t)$  para o período de 3 de janeiro 1984 a 31 de dezembro 1996 com intervalo de amostragem  $\Delta = 1$  min. Note grandes flutuações tais como as de 19 de outubro de 1987 (Black Monday) [14]. 12

- 1.6 Volatilidade  $V_T(t)$  com  $\Delta t=1$  mês (8190 min) e intervalo amostral  $\Delta t = 30$  min para índice S&P500 compreendendo o período 1984-1996. Em destaque os possíveis “precursores” do crash de 1987 [14]. 13
- 2.1 Exemplos de configurações de sítios de percolação para diferentes valores de  $p$  [41]. 20
- 2.2 Resultado para uma rede 100x100, simulada sobre 10 milhões de passos de Monte Carlo por spin, com análise de cluster a cada 1000 iterações e médias sobre 10000 mercados para cada análise. Atividade  $\kappa = 0.0005$  (+),  $\kappa = 0.005$  (x) e  $\kappa = 0.5$  (\*) [40]. 22
- 2.3 Distribuição de retornos para o modelo Cont-Bouchaud. A figura também compara  $P(x)$  com  $\text{const}/(3 + 0.06x^2)^2$  [8]. 23
- 2.4 Evolução da decisão  $m(t)$  considerando dados empíricos (figura de cima) sobre a questão “Você acredita que o futuro será bom? ” considerando  $N = 1100$  adultos. No gráfico de baixo temos a simulação considerando o estado inicial aleatório para  $N = 1000$  sítios [29]. 26
- 2.5 Séries temporais típicas para os índices simulado e USD/DEM [27]. 28
- 2.6 Painéis de cima: série temporal para os retornos simulados (à esquerda) e gerados a partir do índice USD/DEM para um período de dez anos. Painéis de baixo: distribuição de probabilidade cumulativa de retornos normal (linha contínua), simulado (à esquerda) e do índice USD/DEM (à direita) [27]. 29
- 2.7 Funções de correlação para o retorno simulado (à esquerda) e os retornos obtidos do índice USD/DEM (à direita) [27]. 30

- 2.8 Painel à esquerda: linha sólida representa a função de autocorrelação para o retorno do índice EURO/USD exibido numa escala linear-log. A linha tracejada representa a autocorrelação para a volatilidade do mesmo índice. Painel à direita: resultado da simulação para função de autocorrelação dos retornos (linha sólida) e da volatilidade (linha tracejada) [7]. 30
- 2.9 Painel à esquerda: Função distribuição de probabilidade (PDF) para os retornos normalizados  $G(t)$  do índice EURO/USD com  $\Delta t = 1$  min. Painel à direita: (PDF) para os retornos  $G(t)$  simulados com  $\Delta t = 1$  min. As linhas sólidas representam ajustes exponenciais [7]. 31
- 2.10 Representação esquemática, ilustrando a influência do par de sítios interagentes (círculos) sobre os sítios na sua vizinhança (retângulos) em uma rede quadrada. 31
- 3.1 Painel à esquerda: Distribuição de probabilidade da volatilidade numa escala log-log com diferentes janelas de tempo  $T$  e  $\Delta t = 30$  min. Painel à direita: Parte central da distribuição de volatilidade para diferentes tamanhos de janelas utilizando uma escala log-normal da forma  $\sqrt{v} \exp(a + v/4) P(V_T)$  como função de  $(\ln V_T - a)/\sqrt{\pi v}$ , onde  $a$  e  $v$  são a média e a largura da distribuição na escala logarítmica. Nesta escala, todas as curvas colapsam na forma log-normal com  $a = 0$  e  $v = 1$ ,  $\exp(-\ln x^2)$  (linha sólida) [14]. 34
- 3.2 Comparação entre os ajustes log-normal e gaussiano para a distribuição de volatilidade com  $T = 300$  e  $\Delta t = 30$  min [14]. 35
- 3.3 Função distribuição cumulativa da volatilidade normalizada pelo desvio padrão para as escalas de tempo  $T=32, 64, 128$  min com intervalo de amostragem igual a  $\Delta t=1$  min usando janelas não superpostas para o índice S&P500. Regressão linear estima o expoente  $\mu = 3.10 \pm 0.08$  para  $T=32$ min,  $\mu = 3.19 \pm 0.10$  para  $T=64$ min e  $\mu = 3.30 \pm 0.15$  para  $T=128$ min. Os ajustes foram realizados sobre um intervalo de volatilidade normalizada maior que 1 desvio padrão [14]. 36

- 3.4 Função de autocorrelação  $C(\tau)$  para a volatilidade do índice Nord Pool. Após 100 dias nenhuma correlação significativa é observada exceto para um período que pode ser denominado como ciclo forte semanal. A linha tracejada representa um ajuste tipo lei de potência para os dados:  $y(\tau) \sim \tau^{-\nu}$  com  $\nu = 0.07$ . Para a linha sólida um termo oscilante é adicionado ao ajuste  $y(\tau) \sim \tau^{-\nu}[1 + \cos(2\pi\tau/\tau_o)/4]$  onde a constante temporal  $\tau_o \approx 26$  dias [39]. 37
- 4.1 Séries temporais geradas pelo modelo USDF considerando  $p_F=0.70$ : preço  $p(t)$  (topo), retorno  $r(t, \Delta t)$  com  $\Delta t = 8$  (painel do meio) e a volatilidade  $V_T(t)$  para  $T = 10$  (painel de baixo). 44
- 4.2 Distribuições de probabilidade para a volatilidade em sistemas com  $L = 32$  e  $p_F = 0.10, 0.60$  e  $0.90$  numa escala log-linear. 45
- 4.3 Volatilidade média em função do parâmetro  $p_F$ . Duas regiões são destacadas: a primeira apresenta uma dependência linear (linha contínua) e a segunda região uma dependência tipo lei de potência (linha tracejada). No painel interno temos em escala log-log a região que apresenta um crescimento tipo lei de potência com expoente  $\alpha = 2.28 \pm 0.04$  45
- 4.4 Distribuição de probabilidade para as volatilidades padronizadas. 46
- 4.5 Distribuição de probabilidade para as volatilidades padronizadas numa escala log-linear. A curva contínua representa uma função de distribuição normal  $N(0, 1)$ . 47
- 4.6 Distribuição de probabilidade para a volatilidade na variável  $\bar{V}_S$  para três valores de  $p_F = 0.10, 0.50$  e  $0.90$ . A curva contínua representa um ajuste por uma função distribuição normal  $N(0, 1)$ . 48
- 4.7 Distribuição cumulativa da volatilidade normalizada para diferentes valores de  $p_F$ . No painel interno temos a mesma distribuição para uma escala log-linear. Observamos um decaimento exponencial da forma  $\exp(-b\bar{V})$  com  $b = 1.37 \pm 0.05$ . 49



- 4.8 Função de Autocorrelação para o retorno e volatilidade considerando  $p_F = 0.30$ . O gráfico interno, numa escala log-log, realça as correlações de longo alcance na volatilidade. 50
- 4.9 Função de autocorrelação para três valores de  $p_F = 0.10, 0.50$  e  $0.90$ . No painel menor temos um comportamento tipo lei de potência para a correlação da forma  $acf(\tau) \sim \tau^{-\beta}$  com  $\beta = 3.15 \pm 0.33$ . 51
- 4.10 Comportamento da função de flutuação  $F(\tau)$  para análise DFA com vários valores de  $p_F$ . 51
- 4.11 Espectro multifractal  $H(q)$  para as séries de volatilidade. Nas regiões onde  $p_F < 0.5$  e  $p_F > 0.6$  o espectro é não linear. Para  $0.5 < p_F < 0.6$  temos um comportamento fractal típico. 52
- 4.12 Espectro de multifractalidade para  $p_F = 0.10, 0.40, 0.70$  e  $0.90$  (curvas de cima para baixo). No gráfico interno enfatizamos o comportamento tipo lei de potência apresentando os dados numa escala log-log. 53

# Lista de Tabelas

2.1	Alguns resultados para a percolação crítica em redes d-dimensional com coordenação $q$ [41].	19
2.2	Expoentes críticos associados com a transição de percolação [41] .	20
4.1	Valores de assimetria e curtose para diferentes valores de $p_F$	46
4.2	Expoentes de Hurst determinados a partir das análises R/S e DFA, para todos os valores de $p_F$ .	52

## CAPÍTULO 1

# Introdução

### 1.1 Econofísica

Nas últimas décadas do século XX, parte das pesquisas em física estava voltada ao estudo da dinâmica de sistemas ditos complexos, cujos constituintes interagem de forma não-linear. Uma das principais propriedades de tais sistemas é a presença de leis de potência. Estas são observadas em diversos contextos, de biologia até o comportamento de bolsa de valores. A tentativa de se construir um esquema teórico geral para esses fenômenos deu origem a novos ramos da física, como a teoria do caos e a física de sistemas complexos [1]. Conceitos como criticalidade auto-organizada, multifractalidade, e leis de potência passaram a fazer parte da física de vanguarda. Um ramo da teoria de sistemas complexos que vem recebendo cada vez mais importância é a *Econofísica* que, como o nome sugere, procura compreender o comportamento dos mercados financeiros, descritos pelos fatos estilizados, e de outros aspectos da economia.

A palavra *Econofísica* foi pela primeira vez citada em 1995 numa conferência de sistemas complexos realizada em Calcutá, Índia. Mas somente em 1997 o vocábulo foi adotado oficialmente dando título a um encontro realizado em Budapeste, Hungria. Entretanto a atuação de físicos e matemáticos no mercado de finanças é observada já a partir do século XVIII. No trabalho [2] encontramos alguns exemplos:

- fracasso nas previsões de preços das ações por Isaac Newton, que resultou numa perda de 20.000 libras na bolha de especulação de South Sea em 1720.

- trabalho de administração bem sucedido de um Fundo para viúvas de professores de Göttingen, realizado por Carl Friedrich Gauss;
- aplicação do movimento browniano no comportamento dos preços por Louis Bachelier [3], em sua tese de doutorado sobre teoria da especulação.

Um modelo clássico em economia considera que as variações do preço teriam que se comportar de acordo com uma distribuição gaussiana. Seriam um *random walk*, na linguagem da física estatística. Essa hipótese de que os preços seguem uma caminhada aleatória é a essência da chamada Hipótese do Mercado Eficiente (HME) [4, 5]. Isto é, a HME afirma que:

- Movimentos sucessivos de preços são estatisticamente independentes;
- Toda informação disponível do passado ao presente está completamente refletida no preço atual.

Ou seja, a HME se refere a noção de que ninguém pode superar o desempenho do mercado, pois qualquer preço, a qualquer momento, incorpora todas as informações disponíveis.

Entretanto esta teoria não é muito aceita no universo dos investidores e trabalhos em economia não são conclusivos com relação a validade deste paradigma. Warren Buffet, um dos investidores que obteve grande sucesso no século XX comenta que: “*Acho fascinante como a ortodoxia reinante pode levar a muita gente pensar que a Terra é plana. Investir no mercado no qual as pessoas acreditam em eficiência é como jogar bridge com alguém a quem disseram que não é bom olhar as cartas.*”. Alexander Elder, psicólogo e um respeitado analista de mercado de ações conclui em seu livro [6], que a falha lógica para a teoria dos mercados eficientes é equiparar conhecimento e ação. Algumas pessoas podem até possuir algum conhecimento, mas as pressões emocionais da multidão geralmente as induzem a operar no mercado de maneira irracional. Newton ao perceber o erro em suas previsões acionárias exclamou: “*Consiigo calcular o movimento das estrelas, mas não a loucura dos homens*”. Além disso, investidores

têm memória, lembram-se dos preços passados e essas lembranças influenciam suas decisões de compra e venda.

Em trabalhos acadêmicos também se conclui que o mercado financeiro não pode ser adequadamente descrito através de séries temporais de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas [7]. As séries temporais no sistema de finanças dependem de uma forte interação dos constituintes desse sistema. Esta é mais uma característica pela qual os fatos estilizados podem ser muito bem descritos a partir dos conceitos de mecânica estatística voltado para a economia.

Uma teoria proposta como alternativa à HME é a Hipótese de Agentes Interagentes (HAI), que modelam as atividades do mercado a partir de interações em um grande ensemble de agentes heterogêneos. Vários modelos propostos mostram que características como correlações de longo alcance e um comportamento de escala nas flutuações dos preços, que são observados em dados empíricos dos mercados, são devidos as interações dos constituintes deste sistema. Neste trabalho, modelos baseados em agentes estarão em destaque e serão descritos no próximo capítulo.

## 1.2 Fatos Estilizados

Em Economia denominamos como *fatos estilizados* as propriedades gerais que são observadas em todos os mercados financeiros. Essas características são comuns tanto nos mercados de São Paulo, Tóquio ou Frankfurt, ou mesmo se estamos falando do mercado de comércio exterior ou de derivativos. Listamos abaixo fatos estilizados que são agora quase universalmente aceitos tanto por físicos quanto por economistas [8].

1. Existe um consenso de que não podemos prever o comportamento futuro do preço a partir da análise de tendência de seu valor no passado ou através de outras informações

correntes;

2. Se hoje o mercado apresenta elevada volatilidade, então a probabilidade de observarmos uma grande mudança (positiva ou negativa) amanhã é maior que a média (cluster de volatilidade).
3. A probabilidade de observarmos uma grande mudança no mercado, por no mínimo de  $x\%$ , decai com uma lei de potência do tipo  $x^{-\alpha}$ .
4. Os  $q$ -ésimos momentos da distribuição das flutuações dos preços (retornos) são multifractais, pois seus expoentes não são uma função linear do índice  $q$ .

Os fatos (1) e (2) são frequentemente encontrados em trabalhos sobre econometria.

A característica (3) foi primeiro proposta por Mandelbrot [9] assumindo que os retornos logarítmicos dos preços poderiam ser modelados a partir de uma distribuição estável de Lévy não gaussiana. Uma distribuição de Lévy simétrica e de média zero é escrita como:

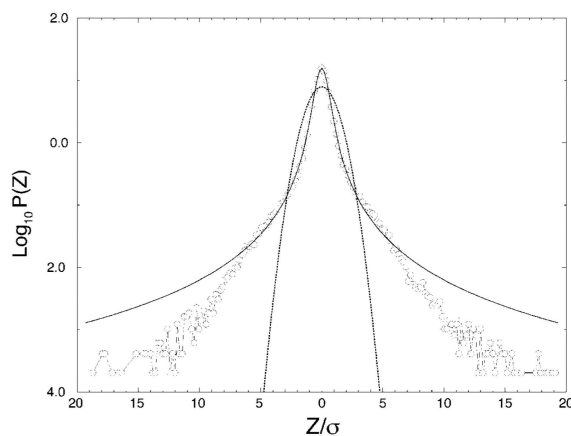
$$P_L(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\gamma q^\alpha} \cos(qx) dq \quad (1.1)$$

e possui a propriedade de que, para valores grandes de  $|x|$ ,

$$P_L(|x|) \approx |x|^{-\alpha} \quad (1.2)$$

Entretanto o trabalho de Mandelbrot sofreu severas críticas pois as distribuições de Lévy possuem desvio padrão infinito. Mais precisamente,  $\langle x^\mu \rangle$  diverge para  $\mu \geq \alpha$ , quando  $\alpha < 2$ . E no que se refere aos dados empíricos, todos são finitos. Analisando as distribuições dos retornos do índice S&P500 (Standard and Poor), Stanley e Mantegna [10] também utilizaram distribuições de Lévy, fornecendo um bom ajuste para a região central da distribuição, mas superestimando os valores extremos, como podemos ver na figura 1.1. Em trabalhos posteriores estabeleceu-se que as caudas para as distribuições do retorno são governadas por leis de

potência. Nos trabalhos [11, 12], os autores encontraram uma lei de potência assintótica para a distribuição cumulativa com um expoente  $\alpha \approx 3$ . (Figura 1.2)



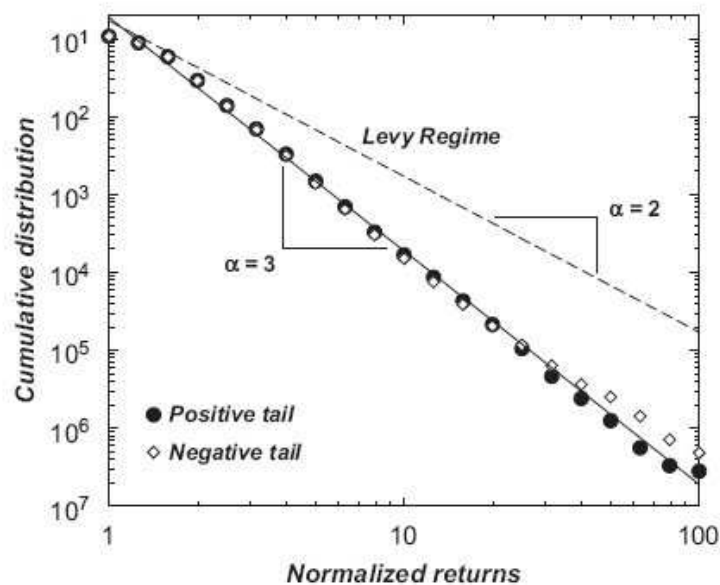
**Figura 1.1** Comparação entre a densidade de probabilidade dos retornos diários do índice S&P500 com a distribuição gaussiana (linha pontilhada) e uma distribuição estável de Lévy (linha sólida) com índice  $\alpha = 1.40$  obtido da análise escala e fator de escala  $\gamma = 0.00375$  medido a partir de  $P(0)$  com  $\Delta = 1$  min [10].

A propriedade (4) foi primeiro documentada por Ding et al [13] e tem por isso adquirido o status de propriedade universal dos mercados na literatura empírica sobre finanças. Pesquisas similares sobre multifractalidade utilizando diferentes ferramentas analíticas têm produzido numerosos trabalhos em econofísica.

Embora os trabalhos iniciais em modelos baseados em agentes foram motivados por uma variedade de objetivos, muito da literatura que foi inspirada em física considera como principal objetivo as explicações comportamentais dos fatos estilizados.

### 1.3 O que é o preço?

Preço é o consenso momentâneo entre os participantes do mercado sobre o valor de deter-



**Figura 1.2** Distribuição cumulativa normalizada para retornos absolutos das 1000 companhias mais importantes referentes à base de dados “Traders and Quotes” para os anos 1994-1995 [34].

minado ativo. Ele revela a decisão mais recente a respeito do valor de determinado objeto de negociação. Um exemplo histórico para a definição do preço reside no crash de 1929, em que as ações da Singer estavam sendo vendidas por US\$ 100, mas de repente cessaram as propostas de compra e venda e ao final do dia a ação estava cotada a US\$ 1.

### 1.3.1 Touros e Ursos

Wall Street, a bolsa de valores de Nova York, recebe esse nome por causa de um muro (wall) que impedia os animais domésticos de se afastarem demais do assentamento existente na ponte de Manhattan. O fato é que o legado rural perdura na linguagem dos investidores. Quatro animais são mencionados com muita frequência em Wall Street: os touros (bulls), ursos (bears), porcos (hogs) e carneiros (sheeps). Os operadores de mercado dizem que touros e ursos ganham dinheiro, mas os porcos e carneiros são abatidos. O touro luta arremessando os adversários



para cima com os chifres. Dizemos então que o touro é comprador, indivíduo que aposta na alta do mercado e lucra com o aumento dos preços. O urso luta derrubando o adversário com as patas. O urso é vendedor, alguém que aposta na baixa do mercado e lucra com a queda dos preços. Por serem gulosos, os porcos são abatidos quando operam no mercado para satisfazer sua intemperança. Alguns porcos compram ou vendem posições grandes demais para eles e são massacrados por uma pequena mudança adversa. Outros mantêm durante muito tempo suas posições, esperam que o lucro aumente, mesmo depois da reversão da tendência. Os carneiros são seguidores passivos e medrosos de tendências, de dicas e gurus. Às vezes usam chifres ou peles e se exibem como touros ou ursos, mas quando o mercado se torna volátil reconhecem-se os disfarces [6].

## 1.4 O Retorno

Um dos objetivos em finanças é a avaliação de riscos de uma carteira de ativos financeiros. O risco é frequentemente medido em termos de variações de preços dos ativos.

Denotemos por  $P_t$  o preço de um ativo no instante  $t$ , normalmente um dia de negócio. A variação de preços entre os instantes  $t$  e  $t + \Delta t$  é dada por  $\Delta P_t = P_{t+\Delta t} - P_t$  e a variação relativa de preços ou retorno líquido simples deste ativo, entre os mesmos instantes é definido por:

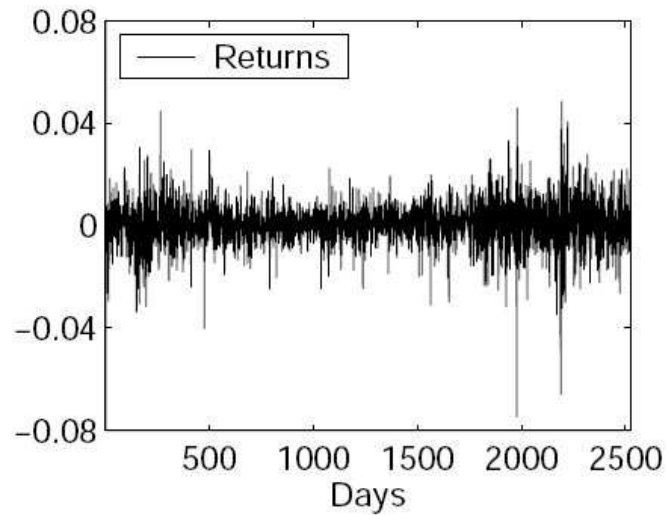
$$R_t = \frac{P_{t+\Delta t} - P_t}{P_t} = \frac{\Delta P}{P_t} \quad (1.3)$$

Denotando  $p_t = \ln P_t$  definimos o retorno composto continuamente ou simplesmente log-retorno como:

$$r(t, \Delta t) = \ln(P_{t+\Delta t}) - \ln(P_t) \quad (1.4)$$

Esta definição é mais usual, pois ao contrário dos retornos simples, os log-retornos são aditivos

e suavizam possíveis flutuações presentes em dados de baixa frequência. Iremos considerar os log-retornos ao longo deste trabalho.



**Figura 1.3** Retornos (log-retornos) diários da taxa de câmbio USD/DEM (dólar/marco alemão) para a década 1990-2001 [27].

#### 1.4.1 Fatos Estilizados para o Retorno

Séries econômicas e financeiras apresentam algumas características que são comuns a outras séries temporais, como:

- tendências;
- sazonalidade;
- heterocedasticidade condicional;
- não-linearidade.

De maneira geral, podemos dizer que uma série econômica ou financeira é não-linear quando responde de maneira diferente a choques grandes e pequenos, ou ainda, a choques

negativos ou positivos. Por exemplo, uma queda de um índice da Bolsa de Valores de São Paulo pode causar maior volatilidade no mercado do que uma alta.

Os retornos financeiros apresentam características próprias, que muitas séries não apresentam. Retornos raramente apresentam tendências ou sazonalidades, com exceção eventualmente de retornos intra-diários. Séries de preços, de taxas de câmbio e séries de taxas de juros podem apresentar tendências que variam no tempo.

Os principais fatos estilizados relativos a retornos financeiros podem ser resumidos como segue:

1. Retornos em geral não apresentam correlação.
2. A distribuição dos retornos apresenta caudas mais pesadas do que uma distribuição normal; além disso, a distribuição, embora aproximadamente simétrica, é em geral leptocúrtica.
3. Séries de retornos tendem a ser não lineares, no sentido explicado acima.

## 1.5 Bolhas e Quebras de Bolsas

Outra justificativa para o modelo de random walk não ser um modelo satisfatório para a descrição das flutuações dos preços de ativos é que neste paradigma os eventos raros, porém de grande amplitude, como crashes não podem ser explicados. De fato, numa caminhada aleatória não visualizamos grandes flutuações pois a probabilidade de obtermos  $n$  passos na mesma direção é  $(1/2)^n$  - diminui exponencialmente com  $n$ .

Uma bolha especulativa é um tipo de fenômeno de investimento que demonstra a fragilidade de alguns aspectos da emoção humana. A bolha ocorre quando as atitudes especulativas dos investidores provocam elevada demanda sobrecarregando o mercado. Os preços reagem

tomando valores bastante distantes dos valores reais, que são determinados pela performance das companhias as quais está associado.

O crash ocorre quando esta bolha especulativa literalmente estoura, provocando a situação em que todos querem vender afim de eliminarem maiores perdas. Este tipo de procedimento favorece o declínio do mercado.

Em 1925 a economia norte-americana estava com problemas, pois estava sem mercado consumidor. As empresas estavam em um ritmo acelerado de produção, mas a população local possuía um baixo poder aquisitivo e a comunidade européia, que se recuperava da primeira grande guerra, diminuiria o volume de importações com os EUA. Em resumo, as empresas não tinham para quem vender apesar de estarem com uma superprodução. Indiferente a esta situação, os investidores mantiveram suas especulações com ações. Comercializavam esses papéis por valores que não condiziam com a real situação das empresas. Entretanto a crise vivida pelas empresas norte-americanas atingiu a Bolsa de Valores de Nova York. Os valores das ações começaram a cair e os acionistas entraram na corrida para tentar vendê-las, porém não havia pessoas interessadas em comprá-las. Em 29 de outubro de 1929, cerca de 13 milhões de ações estavam à venda e como não existiam compradores, ocorreu a quebra (crash) da Bolsa de Valores. A falta de mercado consumidor foi a principal causa para a crise de 1929.

Entretanto não havia nenhuma grande crise ocorrendo em 19 de outubro de 1987, que justificasse uma queda de quase 30% (cerca de 500 bilhões de dolares em um único dia) no índice Dow Jones. Este foi um crash duas vezes maior do que o colapso de 1929. Este dia ficou conhecido como *Segunda-Feira Negra* (Black Monday). Posteriormente se associou este acontecimento à ocorrência de sistemas de comercialização que, devido a uma pequena queda do preço das ações abaixo dos valores técnicos, iniciaram vendas automáticas de grandes lotes levando pânico ao mercado e vendas em cadeia [8].

Apesar de causas diferentes, em ambos acontecimentos, o *efeito manada* (herding effect) esteve presente. Esta característica se relaciona à ação individual de diversos agentes pondo em

prática, de forma quase simultânea, a mesma decisão.

Em economia considera-se duas justificativas para o comportamento de manada:

- Novos acontecimentos que venham a público fazem os agentes de mercado reagirem de forma semelhante ao se ajustarem a nova situação;
- Comportamento irracional dos agentes ao simplesmente copiarem uns aos outros, à revelia dos fundamentos das teorias econômicas que permitem uma análise racional para tomada de decisão.

### 1.5.1 Econofísica e Crashes

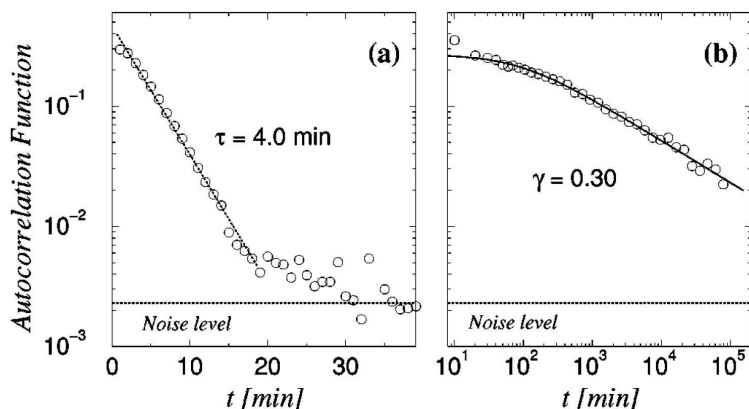
Além da análise comportamental para os fatos estilizados, alguns trabalhos em econofísica têm-se voltado para o estudo de bolhas especulativas e quebras de bolsas de valores.

Em [11] encontramos um estudo sobre a volatilidade (ver capítulo 3), observando correlações de longo alcance com decaimento tipo lei de potência (Figura 1.4).

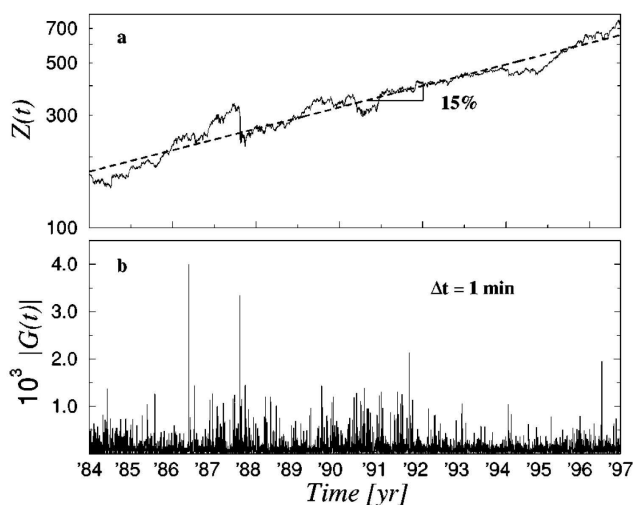
Este fenômeno é conhecido como aglomerado (clustering) de volatilidade. Analisando dados empíricos próximos ao crash de 1987 (Figura 1.5), Stanley et al [14], conjecturaram que elevados índices de volatilidade seriam uma assinatura destes aglomerados, resultando em eventos catastróficos (Figura 1.6).

Esta hipótese foi testada e analisada utilizando 59 índices do mercado de ações [15]. Concluiu-se que os grandes eventos nos mercados são causados de fato por este efeito de memória para a série de volatilidade. Por quantificar o risco em carteiras de investimentos, a volatilidade é tratada com ênfase tanto na literatura econômica quanto nos estudos econofísicos.

Em outras perspectivas [1], considera-se que se o mercado financeiro for criticamente organizado, crashes em bolsas de valores não seriam anomalias, mas eventos ordinários, porém raros. Como exemplo proeminente, os mercados internacionais estão entre aqueles mais próximos de



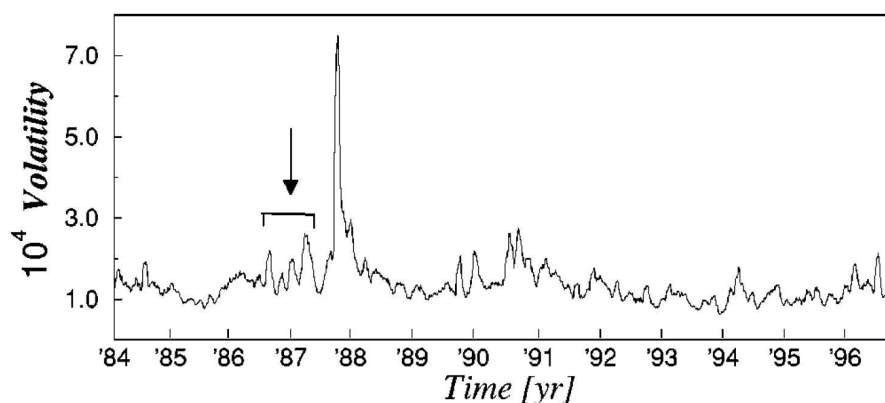
**Figura 1.4** À esquerda: função de autocorrelação numa escala semi-log para o retorno. À direita: função de autocorrelação para o valor absoluto do retorno numa escala log-log com intervalo de amostragem  $\Delta t = 1$  min. A função de autocorrelação para o retorno decai exponencialmente para zero 30 min,  $C(t) \sim \exp(-t/\tau)$  com  $\tau \approx 4.0$  min. Uma lei de potência para correlação  $C(t) \sim t^{-\gamma}$  para os valores absolutos dos retornos. Note que ambos os gráficos são truncados no valor zero de  $C(t)$ . A linha sólida para o gráfico da direita representa um ajuste para a função  $1/(1+t^\gamma)$  para a qual obtém-se  $\gamma = 0.3 \pm 0.08$ . A linha horizontal pontilhada indica o nível de ruído [14].



**Figura 1.5** Dados analisados: Índice S&P 500  $Z(t)$  para o período de 3 de janeiro 1984 a 31 de dezembro 1996 com intervalo de amostragem  $\Delta = 1$  min. Note grandes flutuações tais como as de 19 de outubro de 1987 (Black Monday) [14].

serem modelados como sistemas críticos. Ainda segundo a referência [1], este comportamento seria uma consequência da irracionalidade e instabilidade presente neste mercado. Também foi

observado que se a macroeconomia for um sistema criticamente organizado, um certo choque não poderia ser culpado por desestabilizá-la. A maneira como a economia e suas instituições estão desenhadas para responder aos choques seria o fator mais importante.



**Figura 1.6** Volatilidade  $V_T(t)$  com  $\Delta t=1$  mês (8190 min) e intervalo amostral  $\Delta t = 30$  min para índice S&P500 compreendendo o período 1984-1996. Em destaque os possíveis “precursors” do crash de 1987 [14].

No Capítulo 2 apresentamos uma revisão histórica sobre modelos baseados em agentes, descrevendo tanto seus objetivos quanto a evolução em sofisticação desses modelos. Em especial, descreveremos dois modelos que consideram a hipótese de agentes interagentes, o modelo de percolação de Cont e Bouchaud e o modelo USDF. Este modelo foi estudado em maior detalhe nesta dissertação.

No capítulo 3 descrevemos as propriedades estatísticas da evolução temporal de um ativo financeiro. Entre elas citamos a distribuição de probabilidade, volatilidade, função de autocorrelação, expoente de Hurst e análise de multifractalidade.

No Capítulo 4 realizamos o estudo econofísico da volatilidade no modelo USDF considerando a influência dos agentes fundamentalistas, apresentando resultados e discursões.

Finalmente no Capítulo 5 apresentamos as conclusões e perspectivas de nosso trabalho.

## Modelos Baseados em Agentes

Considerar o sistema financeiro composto apenas por investidores racionais, como propõe a hipótese de eficiência nos mercados, não permite que os fatos estilizados sejam descritos. Como proposta alternativa, a análise é feita a partir de um ponto de vista de microestrutura, isto é, levando em consideração os participantes individuais (agentes) e as formas como se relacionam. Este é um procedimento análogo ao utilizado em sistemas de spins em mecânica estatística, no qual a partir das características desses elementos básicos (definição de seus estados) e de suas regras de interação, fenômenos em escala macroscópica, como o ferromagnetismo, podem ser explicados.

Em resumo, a partir de um estudo “*bottom-up*” [16], a descrição microscópica dos mercados financeiros tenta reproduzir e explicar os principais fatos estilizados em economia. Esta é a proposta dos modelos baseados na *Hipótese dos Agentes Interagentes* (HAI). A seguir descreveremos a evolução, tanto de objetivos quanto em sofisticação, destes modelos.

### 2.1 A Evolução dos Modelos

O estudo de processos econômicos a partir de simulação não é recente. De fato, já no início da década de 1950 o economista A. W. Philips (quem primeiro mostrou a relação entre inflação e desemprego) utilizou máquinas hidráulicas para simular processos macroeconômicos [17].

Entretanto a primeira simulação de Monte Carlo para análise do mercado financeiro foi



desenvolvida por Stigler [18] em 1964, gerando as atividades dos agentes de mercado como variáveis aleatórias. A partir deste trabalho, simulações que utilizaram diferentes mecanismos de interação entre os agentes alcançou grande destaque na literatura de microestrutura de mercado financeiro, cujo enfoque estava na eficiência e estabilidade em diferentes formas de organização do mercado. Com o intuito de reproduzirem várias propriedades do mercado real, os modelos foram aperfeiçoados e como consequência houve uma crescente demanda de simulações numéricas.

Além da análise de estabilidade dos mercados, os modelos baseados em agentes tenderam também para o estudo do que os economistas chamam de *assimetria de informação*, e utilizaram diferentes mecanismos de aprendizagem adaptativa [19]. O interesse nesses trabalhos residia em saber como os agentes, a partir dos modelos aprendizes, adquiriam conhecimento e realizavam previsões considerando as séries dos preços futuros. Além disso desejava-se uma conclusão sobre a convergência dessa dinâmica de aprendizado para um estado de equilíbrio estacionário, no qual se obteria especulações corretas (racionais). Ou seja, à medida que aprendiam, o processo de decisão adotado pelos agentes seria cada vez mais racional.

Um modelo em que todos os investidores são racionais, negligencia muitas propriedades observadas nos mercados financeiros reais. Nos modelos de aprendizagem, não há nenhuma propriedade que simule o comportamento *grafista*<sup>1</sup> ou o efeito manada entre os agentes, ou seja, nesses modelos os agentes se comportam como fundamentalistas e tentam inferir o valor fundamental de um produto a partir de uma quantidade limitada de informação que possuem. Portanto um modelo mais realista deveria também incorporar essas características ditas não racionais.

Trabalhos em economia anteriores à década de 1950 já analisavam como o comportamento dos investidores grafistas influenciam a estabilidade do mercado financeiro [8]. Entretanto acreditava-se que agentes irracionais teriam pouca influência sobre o mercado pois rapida-

---

<sup>1</sup>O tipo de investidor que procura por padrões nos gráficos de séries para os preços passados para determinar suas atividades.

mente seriam eliminados em decorrência de suas sucessivas perdas, por isso o estudo do comportamento grafista versus fundamentalista foi pouco desenvolvido até o final dos anos oitenta. Somente no início da década de 1990, a partir dos trabalhos de Day e Huang [20], a interação grafista-fundamentalista tornou-se um importante tópico de pesquisa. De fato, a literatura deste período apresenta uma variedade de modelos que exploram essas características entre os agentes.

Como uma das primeiras aplicações temos os trabalhos de Frankel e Froot [21], que combinaram o modelo monetário padrão macroeconômico com o comportamento grafista-fundamentalista na formação de atividades de especulação (modificando a análise inicial que considerava especulações racionais). Tinham como principal objetivo obter uma explicação plausível para o episódio da bolha especulativa do dólar americano ocorrido na primeira metade da década de 1980. Concluíram então que o início de um desvio entre o preço atual e seu valor fundamental seria o catalisador para eventuais mudanças de comportamento entre as estratégias grafista e fundamentalista. Além disso, a maioria das mudanças tenderiam para o comportamento grafista. Uma variação deste modelo, desenvolvida por DeGrauwe et al [22] mostrou que esta dinâmica pode levar a um comportamento caótico das taxas de câmbio. Este foi um dos primeiros modelos a explicar alguns fatos estilizados. Em particular, a dinâmica caótica derivada a partir das interações entre agentes com diferentes funções de predição, mostra que a coexistência de diferentes atratores, caracterizados por diferentes graus de volatilidade, em uma dinâmica determinística leva a repetidas trocas entre esses atratores quando pequenas quantidades de ruído são introduzidas, explicando assim as mudanças entre fases de calma e voláteis nas séries temporais financeiras.

O comportamento de manada entre os agentes foi primeiramente analisado, através de simulações numéricas, no final da década de oitenta. Como um exemplo proeminente temos o modelo de Kim-Markovitz [23], que usa simulações Monte Carlo na análise da estabilidade da dinâmica de manada no mercado, para explicarem o crash de 87 através de um modelo um

pouco complicado para a formação de preço. Quando a econofísica foi estabelecida no final da década de 1990, os físicos introduziram conceitos como teoria de campo médio e sistemas de spins de Ising na análise de mercados e modelos mais simples foram propostos. Apesar das dinâmicas mais simplificadas, muitos desses trabalhos que utilizavam ferramentas oriundas de trabalhos em física, foram capazes de descrever a influência de comportamentos como o efeito de manada, análise grafista-fundamentalista, eventos raros como quebras de bolsas e uma melhor descrição para os fatos estilizados. Como exemplo temos os trabalhos de Lux-Marchersi [24], que através do formalismo da equação Mestra, foram capazes de descrever bolhas especulativas. Bornhold [25], utilizando uma dinâmica de Ising e redes hierárquicas (árvores de Cayley) estudaram a formação do preço através de interação entre agentes. Cross et al [16] considerou a influência psicológica para as atividades dos agentes de mercado, descritos como spins tipo Ising. Utilizando teoria de percolação, um assunto já bastante estudado por toda área da ciência, J.P. Bouchaud e R. Cont [26] desenvolveram um modelo para analisar a tendência dos agentes de tomarem atitudes em bando, ou seja, atuarem como uma manada. Considerando uma análise de campo médio e dinâmicas de spins, K. Sznajd [27] aplicou seu modelo de formação de opinião no mercado financeiro e analisou o comportamento entre agentes fundamentalistas e seguidores de tendência.

## **2.2 Teoria da Percolação aplicada a Finanças : Modelo de Cont-Bouchaud**

### **2.2.1 Percolação**

A Teoria de Percolação foi desenvolvida pelo químico Paul Flory, laureado com o Prémio Nobel de Química em 1941 para explicar a formação de gels a partir da solidificação de polí-

meros. Posteriormente foi aplicada pelos matemáticos Broadbent e Hammersley em 1957 para estudar a propagação de fluidos em meios desordenados. Nestes meios a propagação dos fluidos é não linear. A seguir descreveremos este modelo do ponto de vista de transição de fase geométrica em redes regulares.

Considere uma grande rede em que os sítios podem estar em dois estados, ativo<sup>2</sup> e não ativos. Cada sítio pode estar ativo independente de seus vizinhos com probabilidade  $p$ . A natureza do problema de percolação está relacionada com as propriedades de conectividade da rede.

Definimos “*cluster*” ou aglomerado como um conjunto de sítios ativos vizinhos. Um cluster é dito infinito se sua massa  $s$  (número de sítios que pertencem ao cluster) cresce com uma potência positiva do tamanho da rede. Quando a concentração de sítios ativos  $p$  aumenta de zero até a unidade, um cluster infinito aparece pela primeira vez para um valor bem definido  $p_c$ . Para  $p > p_c$  temos exatamente um cluster infinito para grandes redes. No regime de  $p < p_c$  estes clusters não existem. Na concentração de percolação  $p_c$  temos clusters infinitos incipientes que são fractais.

As propriedades de conectividade estão fortemente relacionadas com percolação. Como esta exibe uma mudança qualitativa em um bem definido valor de  $p$ , a alteração de um estado em que não há cluster infinito para um estado em que ele surge, caracteriza-se como um exemplo de transição de fase, cujo parâmetro de ordem é  $P_\infty$ , definido como a probabilidade que um sítio ativo faça parte de um aglomerado infinito. Estimamos  $P_\infty$  para uma dada configuração a partir da definição:

$$P_\infty = \frac{\text{Numero de sitios do cluster infinito}}{\text{Numero total de sitios da rede}} \quad (2.1)$$

O valor final corresponde a médias sobre várias configurações.

Próximo da região crítica e acima da concentração de percolação  $p_c$ , temos o seguinte comportamento do tipo lei de potência:

---

<sup>2</sup>Um procedimento mais canônico é considerar a nomenclatura de sítios ocupados e vazios, mas nossa denominação determina um caráter mais geral

Rede	d	q	$p_c$ (sítio)	$p_c$ (ligação)
linear	1	2	1	1
quadrada	2	4	0.59275	0.5
triangular	2	6	0.5	0.3473
diamante	3	4	0.4299	0.3886
bcc	3	8	0.24674	0.1795
fcc	3	12	0.1998	0.1198

**Tabela 2.1** Alguns resultados para a percolação crítica em redes d-dimensional com coordenação q [41].

$$P_\infty \sim (p - p_c)^\beta \quad (2.2)$$

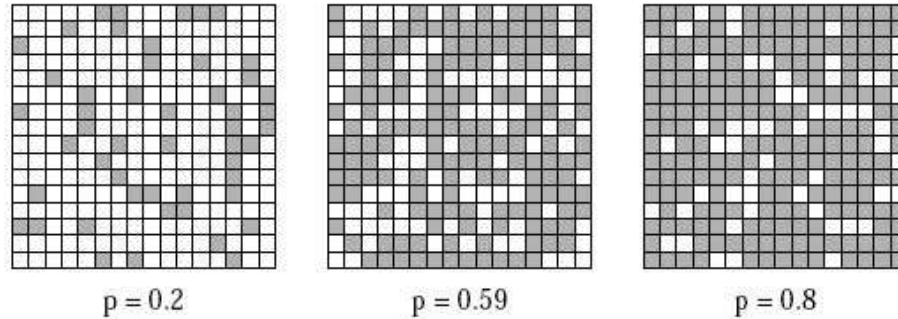
com o expoente  $\beta$  variando entre zero e a unidade quando  $1 \leq d \leq \infty$  sendo d a dimensão espacial do sistema. Numa região próxima da criticalidade o número médio  $n_s$  de clusters contendo s sítios também segue uma lei de potência para grandes valores de s:

$$n_s = s^{-\tau} f((p - p_c)s^\sigma), \quad (2.3)$$

onde o expoente  $\tau$  varia de 2 até 2.5 com  $1 < d < \infty$ ; o expoente  $\sigma$  permanece próximo de 0.5, independente da dimensão espacial do sistema. Os expoentes de percolação  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  estão relacionados por:

$$\beta = \frac{\tau - 2}{\sigma}. \quad (2.4)$$

O modelo descrito acima é conhecido como percolação de sítio. No entanto podemos manter todos os sítios ativos e, com probabilidade  $(1 - p)$ , eliminamos as ligações entre sítios vizinhos. Este caso é conhecido como percolação de ligação e tem os mesmo expoentes que a percolação de sítio.



**Figura 2.1** Exemplos de configurações de sítios de percolação para diferentes valores de  $p$  [41].

Quantidade	Forma Funcional	Expoente	d = 2	d = 3
Parâmetro de Ordem	$P_\infty \sim (p - p_c)^\beta$	$\beta$	5/36	0.403
Tamanho médio de cluster finito	$S(p) \sim  p - p_c ^{-\gamma}$	$\gamma$	43/18	1.73
Comprimento de conectividade	$\xi(p) \sim  p - p_c ^\nu$	$\nu$	4/3	0.89
Distribuição Cluster	$n_s \sim s^{-\tau}(p = p_c)$	$\tau$	187/91	2.2

**Tabela 2.2** Expoentes críticos associados com a transição de percolação [41].

### 2.2.2 O Modelo

O objetivo de modelo de Cont e Bouchaud [26] é estudar o impacto do comportamento de manada entre os especuladores na dinâmica de preço para um dado ativo. Os agentes estão dispostos aleatoriamente numa rede quadrada regular com probabilidade  $p$ . Considerando um mercado financeiro com  $N$  agentes, que a cada instante de tempo podem tomar as seguintes decisões: compra, vende ou permanece inativo. A demanda de um dado agente  $i$  no instante  $t$

é especificada pela variável  $D_i(t)$  definida por :

$$D_i(t) = \left\{ \begin{array}{ll} +1 & \text{com prob } \kappa \\ -1 & \text{com prob } \kappa \\ 0 & \text{com prob } 1 - 2\kappa \end{array} \right\} \quad (2.5)$$

onde o parâmetro  $0 \leq \kappa \leq 0.5$  determina a atividade dos agentes. Um valor  $\kappa < 0.5$  permite que uma fração de agentes não comercialize, durante um dado instante de tempo. A dinâmica de preço neste modelo é influenciada pela demanda, que é a soma das ordens dos agentes. Excesso de compra induz o preço para cima e um maior domínio de venda força a queda do preço.

Representando  $\xi(t)$  como o preço para um dado instante, a equação de evolução do preço é dada por:

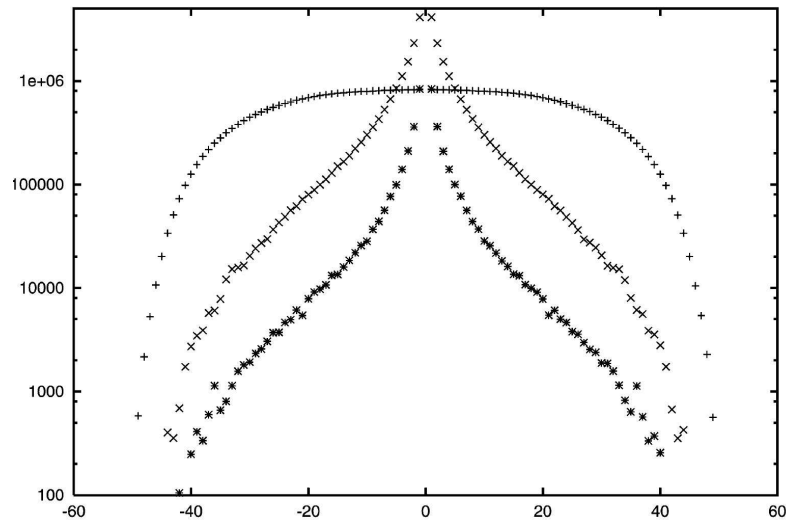
$$P(t+1) = P(t) + \frac{1}{b} \sum_{i=1}^N D_i(t), \quad (2.6)$$

onde  $P(t) = \ln(\xi(t))$  e  $b$  é o parâmetro de liquidez que determina a quantidade de demanda necessária para que o preço varie em uma unidade. Observe que para este modelo a variação logarítmica dos preços é proporcional à demanda. Cont e Bouchaud consideraram  $b = 1$  [26].

Nos mercados reais, os agentes podem formar grupos de vários tamanhos, trocando informações e atuando em coordenação. Todos os agentes que estão na mesma direção que seus vizinhos formam um aglomerado (cluster) que adota a mesma estratégia, seja de compra ou de venda.

### 2.2.3 Resultados

Se a atividade  $\kappa$  de nosso mercado varia de valores diminutos até para regimes próximos do seu patamar máximo (0.5), o histograma das flutuações das mudanças dos preços varia de



**Figura 2.2** Resultado para uma rede 100x100, simulada sobre 10 milhões de passos de Monte Carlo por spin, com análise de cluster a cada 1000 iterações e médias sobre 10000 mercados para cada análise. Atividade  $\kappa = 0.0005$  (+),  $\kappa = 0.005$  (x) e  $\kappa = 0.5$  (\*) [40].

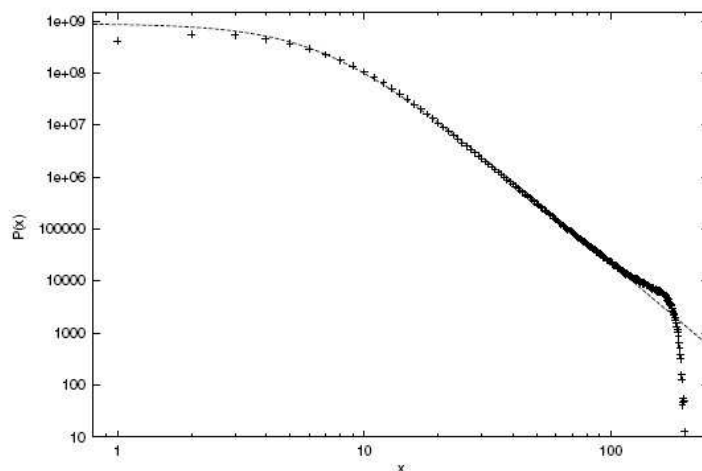
uma lei de potência assintótica para uma forma mais próxima de uma gaussiana (Figura 2.2). Esta evolução é similar à que é observada nos mercados reais quando o tempo de observação é aumentado.

Para regimes de pequena atividade, a probabilidade cumulativa para uma mudança de  $x\%$  varia com  $1/x^\mu$  onde  $\mu = 2(\tau + \sigma - 1)$ , se tomarmos médias sobre todas as probabilidades de ocupação  $0 \leq p \leq p_c$ . O expoente  $\mu$  assume os valores 2.9, 3.3 e 4 para  $d = 2, 3$ , e  $\infty$ . Então para dimensões realistas, com  $d = 2$  ou 3, obtemos o esperado expoente  $\mu \sim 3$  [8]. Na Figura 2.3 as simulações mostram uma lei de potência, exceto para os valores extremos de  $x$ .

Clustering de volatilidade e correlações positivas entre volume e flutuações dos preços são observados à medida que a atividade  $\kappa$  tende para seu valor máximo. Este modelo também apresenta uma importante aplicação para o mercado de comércio exterior. [28]

#### 2.2.4 Aplicação





**Figura 2.3** Distribuição de retornos para o modelo Cont-Bouchaud. A figura também compara  $P(x)$  com  $\text{const}/(3 + 0.06x^2)^2$  [8].

O imposto de Tobin (Tobin tax), uma espécie de CPMF planetária, é uma taxa sobre todas as operações de câmbio realizadas em virtude de transações financeiras internacionais. Ao migrarem de uma economia para outra os capitais são convertidos para a moeda local. O imposto incidiria sobre as operações de conversão de moedas. Recursos gerados com esta taxação destinaram-se-ia, na proposta original, a construir um Fundo para erradicação da miséria no planeta. Inicialmente a valor da taxa seria de 1%, mas foi reduzida para um valor entre 0.1% e 0.25%.

Trabalhos realizados por Stauffer e Westerhoff [28] simularam o efeito de como uma pequena taxa de Tobin influenciaria os mercados, considerando o modelo aqui descrito e uma correlação tripla entre os mercados de Tóquio, Frankfurt e Nova York. Concluíram que a inserção deste imposto promove uma diminuição nas flutuações das taxas de câmbio, determinando um menor efeito das atividades especulativas. Mesmo para pequenas taxas, este imposto consegue gerar grandes rendimentos. Entretanto os autores alertam que sob certas circunstâncias, a taxa Tobin pode desestabilizar o mercado no sentido de promover um aumento na volatilidade.

## 2.3 O modelo USDF na formação do preço

Considere uma comunidade em que a cada período os indivíduos devem realizar uma escolha entre duas opções. Como em um plebiscito, onde se pode escolher entre as opções sim ou não para um determinado fato. Sendo o nível de consenso medido pela diferença entre as opiniões favoráveis e contra, queremos saber como se dá a evolução deste consenso à medida que as pessoas interagem. Fazendo um paralelo entre essa comunidade hipotética e o mercado financeiro, podemos considerar as pessoas da comunidade como os agentes de mercado cujas opções de escolha são compra ou venda. Como a diferença entre essas duas atitudes representa a demanda deste sistema financeiro, podemos fazer o mesmo questionamento de como se desenvolve a demanda à medida que esses agentes trocam informações .

Este tipo de análise é importante no contexto econômico pois é através do embate entre compra e venda que o preço é formado. De fato, como vimos no Capítulo 1, o preço reflete a votação momentânea entre os participantes da negociação. Modelos que explorem este tipo de análise são relevantes e auxiliam numa melhor compreensão da dinâmica do mercado.

O modelo USDF <sup>3</sup>, proposto por Sznajd J e Szajd-Weron K [29], trabalha exatamente esta idéia de como a evolução de opinião se desenvolve em uma dada comunidade.

### 2.3.1 O Modelo

Na versão inicial do modelo USDF a comunidade é representada por uma cadeia de spins de Ising, em que o  $i$ -ésimo sítio, representado por  $\sigma_i$ , possui dois estados: +1 ou -1, que determinam as ações dos indivíduos. A dinâmica evolui a partir das seguintes regras:

1. Se  $\sigma_i \sigma_{i+1} = 1$ , então  $\sigma_{i-1}$  e  $\sigma_{i+2}$  tomam a mesma decisão que os sítios  $(\sigma_i, \sigma_{i+1})$

---

<sup>3</sup>sigla em inglês para a expressão **United we Stand Divided we Fall**

2. Se  $\sigma_i \sigma_{i+1} = -1$ , então  $\sigma_{i-1}$  toma a mesma opinião que  $\sigma_{i+1}$  e  $\sigma_{i+2}$  a decisão de  $\sigma_i$

Essas regras demonstram a influência do par de sítios sobre seus vizinhos. Quando há consenso entre os membros do par, então seus vizinhos concordam com a decisão destes sítios. Do contrário, quando os membros do par não estão em acordo, os vizinhos de um sítio tendem a tomar uma atitude contrária à deste sítio. Observe que diferentemente da regra usual do voto da maioria, a informação no modelo USDF flui do par central para seus vizinhos (de dentro para fora). A dinâmica do modelo conduz a três estados estacionários:

- todos os spins estão no estado +1;
- todos os spins estão no estado -1;
- 50% dos spins estão no estado +1 e 50% estão no estado -1;

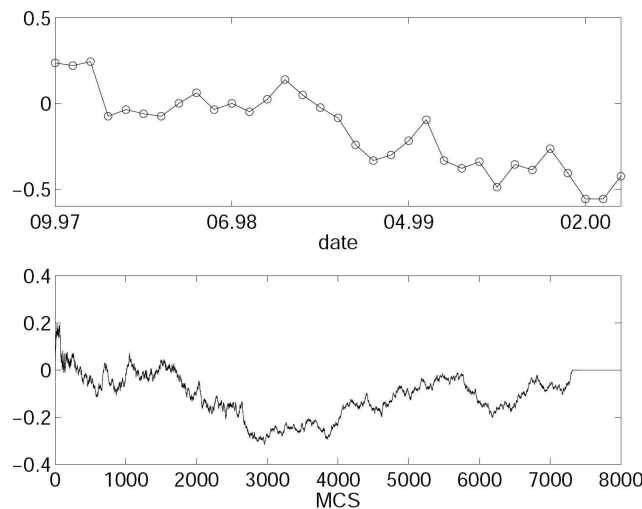
Define-se a decisão global, num instante  $t$ , como a magnetização da rede:

$$m(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sigma_i(t), \quad (2.7)$$

Na Figura 2.4 apresentamos a evolução temporal da magnetização e uma comparação com dados empíricos [29].

Sznajd-Weron K e Weron R [27] aplicaram este modelo, considerando algumas modificações, para o processo de formação do preço no mercado financeiro. Os spins são interpretados como as atividades dos participantes do mercado. Desta forma o estado  $\sigma_i=1$  representa um agente que realiza uma ordem de compra, enquanto que  $\sigma_i=-1$  representa uma ordem de venda. A primeira regra na dinâmica do modelo USDF permanece a mesma, isto é: se  $\sigma_i \sigma_{i+1} = 1$ , então  $\sigma_{i-1}$  e  $\sigma_{i+2}$  tomam a mesma decisão do par  $(i, i+1)$ . Esta regra se justifica pois muitos participantes de mercado se comportam como seguidores de tendências e baseiam suas atividades em função de algum guru local.

Entretanto a segunda regra do modelo inicial deve ser modificada para incorporar o fato que na ausência de um guru local, situação em que o par de sítios  $\sigma_i$  e  $\sigma_{i+1}$  não estão na mesma



**Figura 2.4** Evolução da decisão  $m(t)$  considerando dados empíricos (figura de cima) sobre a questão “Você acredita que o futuro será bom?” considerando  $N = 1100$  adultos. No gráfico de baixo temos a simulação considerando o estado inicial aleatório para  $N = 1000$  sítios [29].

direção, faz com que os participantes do mercado tomem suas decisões aleatoriamente ao invés de cada um se opor ao seu vizinho. Ou seja, se  $\sigma_i \sigma_{i+1} = -1$  então  $\sigma_{i-1}$  e  $\sigma_{i+2}$  tomam uma das opções (compra ou venda) ao acaso.

No entanto este modelo modificado produz dois estados estáveis (ambos ferromagnéticos), não sendo muito realista para o mercado financeiro tendo em vista que a série temporal para o preço é conhecida ser não estacionária. Além disso os agentes seguidores de tendência não são os únicos a participarem do mercado. Existem investidores que se comportam como fundamentalistas, que tendem a ser mais racionais por possuírem um melhor estudo sobre o mercado e aplicam este conhecimento em suas atividades. Então outra modificação ao modelo original considera a presença deste agente fundamentalista. Resta-nos definir que tipo de informação este agente utiliza, a qual determina sua atividade. Considerando que o valor de um dado ativo se define a partir do conflito entre compradores e vendedores, podemos estipular que o preço deve ser proporcional à demanda do mercado. Esta demanda em um dado tempo  $t$  é representada pela magnetização  $m(t)$  da rede, expressa pela equação (2.7).

A partir deste conhecimento que o agente fundamentalista possui da demanda do mercado, ele define sua estratégia num dado tempo  $t$ , descrita como:

- $\sigma_F = 1$  (compra) com probabilidade  $|m(t)|$ , se  $m(t) < 0$ ;
- $\sigma_F = -1$  (vende) com probabilidade  $|m(t)|$ , se  $m(t) > 0$ ;

Com a inserção deste agente os pontos fixos ferromagnéticos não são mais alcançados. Ou seja, a presença do agente fundamentalista evita a saturação do sistema. Além disso este agente introduz um acoplamento com a magnetização global, em adição ao acoplamento local conectando cada spin (agente) da rede aos seus primeiros vizinhos. No trabalho desenvolvido por Sznajd-Weron et al [27], considerou-se apenas um único agente fundamentalista, num mercado composto de  $N = 1000$  agentes dispostos ao longo de uma cadeia de Ising livre de condições de contorno. A seguir iremos exibir os principais resultados deste trabalho.

### 2.3.2 Resultados

Sznajd-Weron simularam o modelo USDF em uma cadeia com  $N = 1000$  sítios e 20000 passos de Monte Carlo (*MCS*). Considerando que cada *MCS* representa uma hora de comercialização e oito *MCS* representam um dia útil de mercado, tem-se um total de 2500 dias ou 10 anos de atividade de mercado. Este período foi escolhido para que fosse possível fazer a comparação com bases históricas de dados da atividade do mercado com igual intervalo de tempo: 2254 cotações diárias do índice (USD/DEM)(Figura 2.5) <sup>4</sup> para o período entre 9 de agosto de 1990 a 20 de agosto de 1999; 2809 cotações diárias para o índice (JPY/USD)<sup>5</sup> no período entre 02 de janeiro de 1990 a 28 de fevereiro de 2001; 2527 cotações diárias para o índice DJIA <sup>6</sup> no

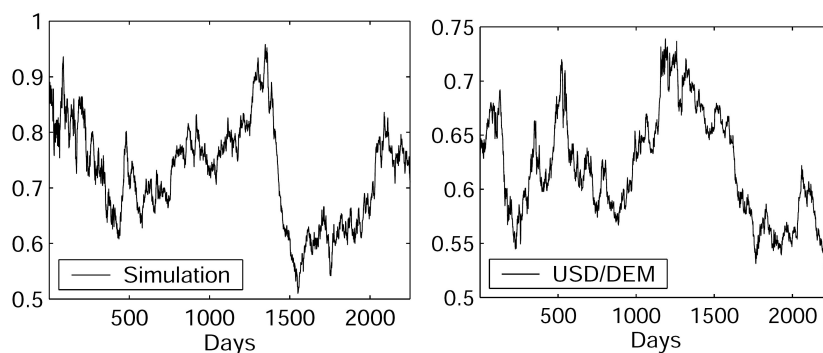
---

<sup>4</sup>Entre dollar americano e marco alemão

<sup>5</sup>yen-dollar

<sup>6</sup>Dow Jones Industrial Average

período de 02 de janeiro de 1990 a 30 de dezembro de 1999 e 1561 cotações diárias do índice WIG20<sup>7</sup> para o período de 02 de janeiro de 1995 a 30 de março de 2001.



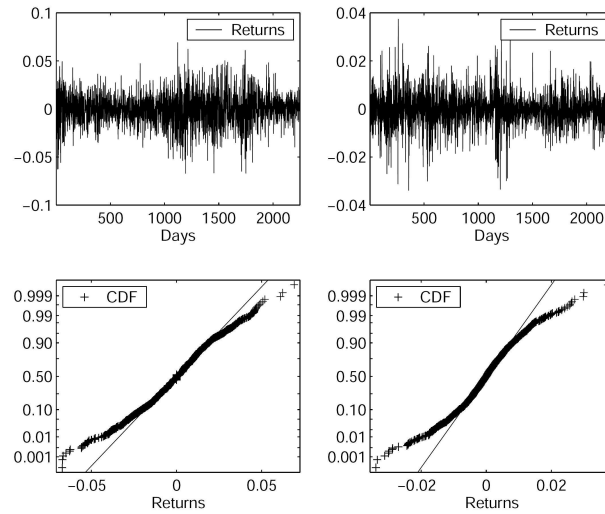
**Figura 2.5** Séries temporais típicas para os índices simulado e USD/DEM [27].

Na Figura 2.6 temos as séries temporais para os retornos simulados (painéis à esquerda) e do índice USD/DEM (painéis à direita) e suas respectivas distribuições de probabilidade cumulativa. Para as distribuições cumulativas observa-se caudas mais pesadas relativas à distribuição normal (linha contínua).

Na Figura 2.7 apresentamos as funções de autocorrelação para os dados simulados (painéis a esquerda) e dados do índice USD/DEM. Novamente as propriedades dos dados simulados são equivalentes ao que é observado nos dados reais. Tanto o índice USD/DEM quanto os dados simulados estão dentro do intervalo de correlação de um caminhante aleatório gaussiano, expressando o fato estilizado que as séries temporais para o retorno não apresentam memória, ou seja, elas têm correlação nula.

Utilizando este mesmo modelo, mas introduzindo uma dependência do preço com a demanda na forma  $P(t) = e^{m(t)}$ , os autores [7] reproduziram o comportamento das correlações do retorno e da volatilidade (Figura 2.8) e as distribuições diárias dos retornos com caudas pesadas utilizando um ajuste exponencial (Figura 2.9).

<sup>7</sup>Warsaw Stock Exchange



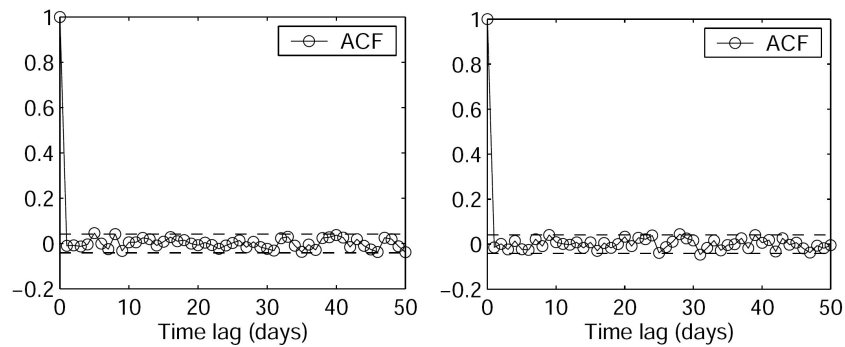
**Figura 2.6** Painéis de cima: série temporal para os retornos simulados (à esquerda) e gerados a partir do índice USD/DEM para um período de dez anos. Painéis de baixo: distribuição de probabilidade cumulativa de retornos normal (linha contínua), simulado (à esquerda) e do índice USD/DEM (à direita) [27].

### 2.3.3 Uma nova proposta

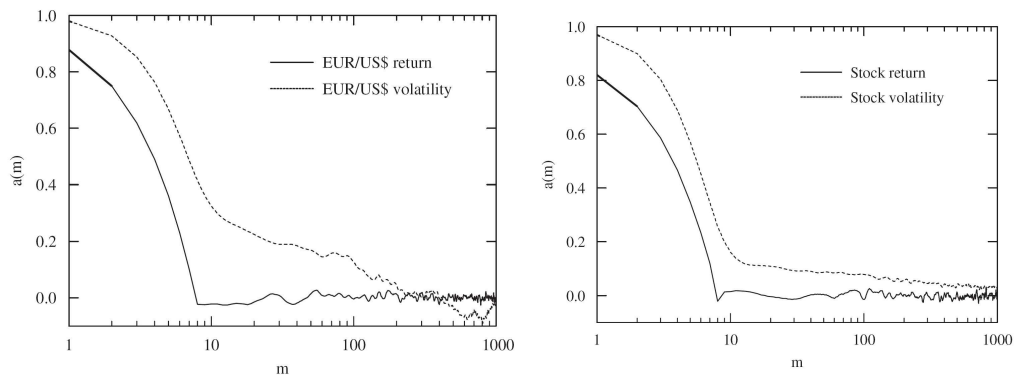
Neste trabalho realizamos um estudo econofísico utilizando o modelo USDF aplicado ao mercado financeiro, com especial interesse na observação da volatilidade. As regras que determinam a dinâmica deste modelo não foram modificadas,

1. Se  $\sigma_i \sigma_{i+1} = 1$ , então  $\sigma_{i-1}$  e  $\sigma_{i+2}$  tomam a mesma decisão que os sítios  $(\sigma_i, \sigma_{i+1})$ ;
2. Se  $\sigma_i \sigma_{i+1} = -1$ , então  $\sigma_{i-1}$  e  $\sigma_{i+2}$  adotam uma das opções (compra ou venda) ao acaso;
3.
  - $\sigma_F = 1$  (compra) com probabilidade  $|m(t)|$ , se  $m(t) < 0$ ;
  - $\sigma_F = -1$  (vende) com probabilidade  $|m(t)|$ , se  $m(t) > 0$ ;

onde  $m(t)$  é a magnetização (demanda) da rede e expressa pela equação 2.7. Consideramos



**Figura 2.7** Funções de correlação para o retorno simulado (à esquerda) e os retornos obtidos do índice USD/DEM (à direita) [27].



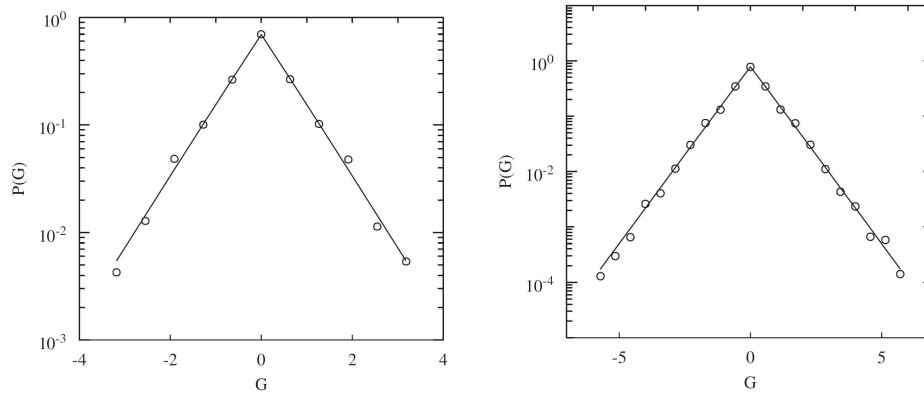
**Figura 2.8** Painel à esquerda: linha sólida representa a função de autocorrelação para o retorno do índice EURO/USD exibido numa escala linear-log. A linha tracejada representa a autocorrelação para a volatilidade do mesmo índice. Painel à direita: resultado da simulação para função de autocorrelação dos retornos (linha sólida) e da volatilidade (linha tracejada) [7].

ainda uma dependência exponencial do preço com a magnetização da forma:

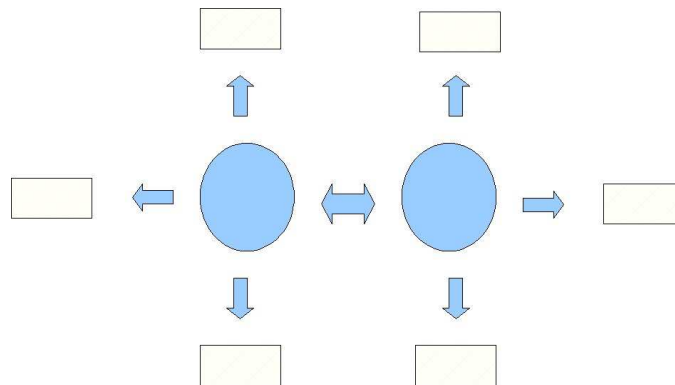
$$P(t) = e^{m(t)}. \quad (2.8)$$

Entretanto ao invés de utilizarmos uma cadeia de spins de Ising, trabalhamos com uma rede quadrada com  $N = L \times L$  sítios e condições de contorno periódicas. Como consequência desta topologia aumentamos a influência do par de sítios interagentes sobre sua vizinhança, como ilustrada na Figura 2.10





**Figura 2.9** Painel à esquerda: Função distribuição de probabilidade (PDF) para os retornos normalizados  $G(t)$  do índice EURO/USD com  $\Delta t = 1$  min. Painel à direita: (PDF) para os retornos  $G(t)$  simulados com  $\Delta t = 1$  min. As linhas sólidas representam ajustes exponenciais [7].



**Figura 2.10** Representação esquemática, ilustrando a influência do par de sítios interagentes (círculos) sobre os sítios na sua vizinhança (retângulos) em uma rede quadrada.

Com o objetivo de melhor analisarmos o comportamento fundamentalista sobre o mercado, consideramos  $N_F$  agentes fundamentalistas distribuídos aleatoriamente na rede com probabilidade  $p_F$ . Desta forma, introduzimos o parâmetro  $p_F$ , definido como a razão entre o número de agentes fundamentalistas e o número total de agentes. Isto nos permite fazer uma análise, em função da fração de agentes fundamentalistas ( $p_F$ ), de um possível comportamento de manada decorrente das características destes agentes. No Capítulo 4 apresentaremos os resultados deste estudo.

## CAPÍTULO 3

# Análise Estatística

### 3.1 Volatilidade

A evolução do preço de um ativo financeiro não pode ser considerada estacionária, pois sua variância depende do tempo. Esta é uma característica da heterocedasticidade <sup>1</sup> na evolução temporal do preço determinando assim a presença de volatilidade.

A volatilidade é uma medida da flutuação média do mercado dentro de um dado intervalo de tempo. Desta forma representa uma variável importante para análise econômica, pois quantifica o risco de um artigo financeiro e está relacionada com a quantidade de informação disponível no mercado num dado intervalo de tempo. Além disso, modelos de precificação de opções, como os modelos clássicos de Black e Scholes [30] e os modelos binômiais RRC [31], são baseados na avaliação da volatilidade para determinar o tempo de vida da opção [14]. Sem uma correta estimativa da volatilidade seria difícil para os investidores identificarem situações em que as opções estariam valorizadas ou não.

O primeiro passo para esta análise é a determinação de um estimador. Existem várias definições de volatilidade na literatura financeira. A volatilidade pode ser determinada a partir do cálculo de desvio padrão dos preços em uma janela temporal  $T$ , ou então calculando-se o módulo da variação dos preços.

Em nosso trabalho usamos como estimador da volatilidade a média local dos valores absolutos dos retornos. Estes são medidos a partir da série temporal dos preços e definidos pela

---

<sup>1</sup>hetero(diferente), scedasticidade(dispersão)

relação

$$r(t, \Delta t) = \ln(P(t + \Delta t)) - \ln(P(t)). \quad (3.1)$$

Os valores absolutos dos retornos,  $|r(t)|$ , descrevem a amplitude das flutuações. A ocorrência de grandes valores de  $|r(t)|$  é a assinatura para quebras de bolsas de valores. Definimos a volatilidade como a média de  $|r(t)|$  sobre uma janela de tempo  $T = n\Delta t$ , ou seja

$$V_T(t) = \frac{1}{n} \sum_{t'=t}^{t+n-1} |r(t')|. \quad (3.2)$$

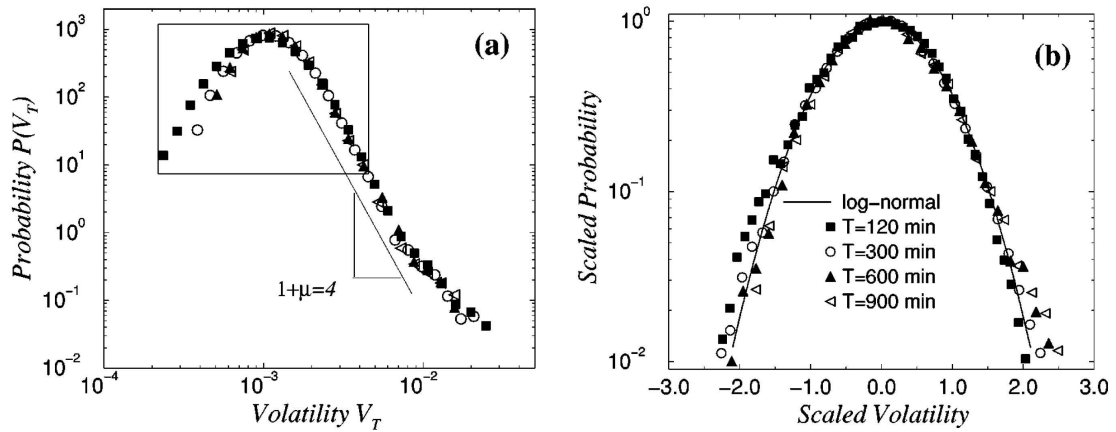
A definição acima pode ainda ser generalizada substituindo-se  $|r(t)|$  por  $|r(t)|^\gamma$ , onde  $\gamma > 1$  quando se deseja dar maior peso aos grandes valores de  $r(t)$  e  $0 < \gamma < 1$ , quando se quer priorizar os pequenos valores de  $r(t)$ .

Temos dois parâmetros nesta definição de volatilidade,  $T$  e  $n$ . O valor de  $T$  determina o tamanho da janela temporal e o de  $n$  especifica o movimento desta janela ao longo da série temporal. Entretanto segundo a referência [14], esta definição apresenta um erro intrínseco pois enquanto que grandes valores de  $T$  implica em uma estimativa mais precisa para a volatilidade, entretanto temos uma menor resolução no tempo.

Stanley et al [14] desenvolveram uma análise estatística para a volatilidade considerando o índice S&P500 do New York Stock Exchange (NYSE), no período de janeiro de 1984 a dezembro de 1996. A partir de vários tamanhos  $T$  de janelas, concluíram que a parte central das distribuições de probabilidade para a volatilidade apresentava um comportamento tipo log-normal (figura 3.1). De fato, considerando toda a distribuição de probabilidade, o ajuste log-normal apresenta um melhor resultado que um ajuste gaussiano, como mostrado na Figura 3.2.

Considerando a distribuição cumulativa da volatilidade em diferentes escalas de tempo (Figura 3.3), obtiveram um comportamento assintótico tipo lei de potência, na forma

$$P(V_T > x) \approx \frac{1}{x^\mu}. \quad (3.3)$$



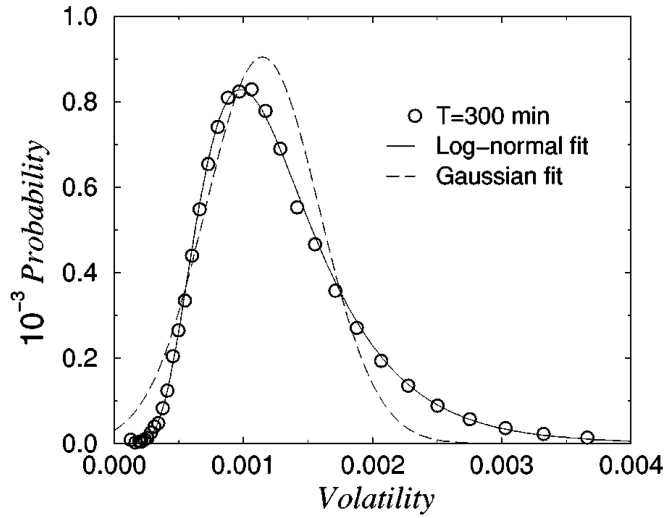
**Figura 3.1** Painel à esquerda: Distribuição de probabilidade da volatilidade numa escala log-log com diferentes janelas de tempo  $T$  e  $\Delta t = 30$  min. Painel à direita: Parte central da distribuição de volatilidade para diferentes tamanhos de janelas utilizando uma escala log-normal da forma  $\sqrt{v} \exp(a + v/4) P(V_T)$  como função de  $(\ln V_T - a)/\sqrt{\pi v}$ , onde  $a$  e  $v$  são a média e a largura da distribuição na escala logarítmica. Nesta escala, todas as curvas colapsam na forma log-normal com  $a = 0$  e  $v = 1$ ,  $\exp(-\ln x^2)$  (linha sólida) [14].

Através da análise de regressão linear estimaram o expoente  $\mu \sim 3.10$ .

Além das densidades de probabilidade, outras grandezas relevantes para um processo estocástico são a função de autocorrelação, o expoente de Hurst (que fornece uma medida do tipo de correlação presente na série temporal) e análise de multifractalidade. Todas estas características são consideradas no presente trabalho.

## 3.2 Autocorrelação Temporal

Denomina-se um processo estocástico assintoticamente estacionário quando as propriedades de suas variáveis aleatórias  $x(t_1 + \zeta)$ , ...,  $x(t_n + \zeta)$  não dependem de  $\zeta$ , para  $\zeta$  grande. No



**Figura 3.2** Comparação entre os ajustes log-normal e gaussiano para a distribuição de volatilidade com  $T = 300$  e  $\Delta t = 30$  min [14].

regime estacionário, a função de autocorrelação temporal é definida como

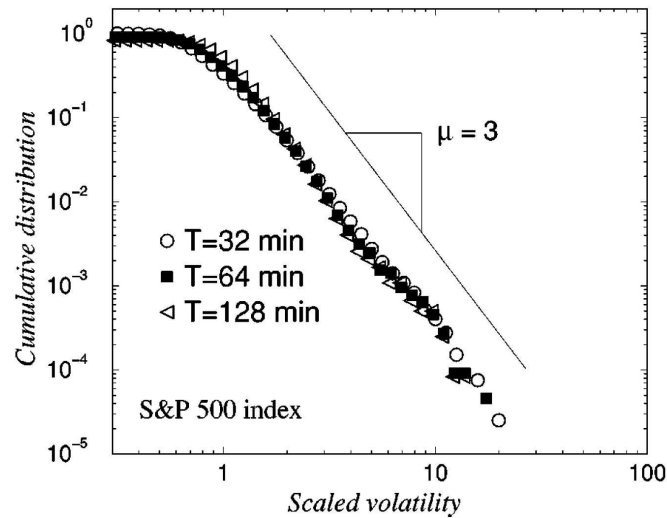
$$acf(x, \tau) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N x(t)x(t + \tau). \quad (3.4)$$

O tempo de correlação determina a escala de tempo típica de um processo estocástico. Este tempo característico pode ser obtido a partir do cálculo da área sob a curva da autocorrelação temporal, ou determinando o instante de tempo  $\tau$  no qual a função de autocorrelação se anula pela primeira vez. Se a área sob a curva for infinita, o processo possui correlação de longo alcance. Caso contrário, a correlação é de curto alcance.

A função de autocorrelação normalizada é definida como

$$acf(x, \tau) = \frac{\sum_{t=\tau+1}^N (x - \bar{x})(x_{t-\tau} - \bar{x})}{\sum_{t=1}^N (x_t - \bar{x})^2} \quad (3.5)$$

Como um dos fatos estilizados temos que os retornos apresentam correlação de curto alcance, entretanto a volatilidade possui correlação de longo alcance, fato que é denominado



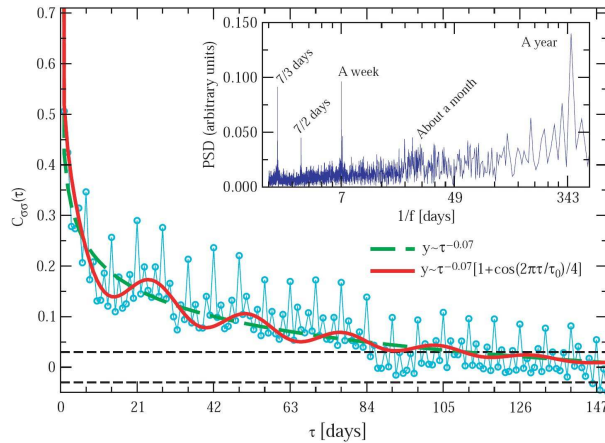
**Figura 3.3** Função distribuição cumulativa da volatilidade normalizada pelo desvio padrão para as escalas de tempo  $T=32$ , 64, 128 min com intervalo de amostragem igual a  $\Delta t=1$  min usando janelas não superpostas para o índice S&P500. Regressão linear estima o expoente  $\mu = 3.10 \pm 0.08$  para  $T=32$ min,  $\mu = 3.19 \pm 0.10$  para  $T=64$ min e  $\mu = 3.30 \pm 0.15$  para  $T=128$ min. Os ajustes foram realizados sobre um intervalo de volatilidade normalizada maior que 1 desvio padrão [14].

como agregação de volatilidade<sup>2</sup>.

### 3.3 Expoente de Hurst

Harold E. Hurst (1880 - 1978) foi um hidrólogo inglês que trabalhou no projeto de construção de uma represa para o rio Nilo, chegando à região por volta de 1907 e permanecendo lá durante 40 anos. Seu objetivo era construir um reservatório ideal, o qual nunca transbordaria ou secaria. Na construção deste tipo de modelo era comum assumir que o fluxo de águas da chuva seguia uma dinâmica de caminhante aleatório, na medida que a ecologia da região do Nilo era um sistema com muitos graus de liberdade. Para resolver o problema, Hurst estudou os mais de 800 anos de registros das cheias anuais do rio Nilo e, a partir deles, propôs um modelo para

<sup>2</sup>clustering volatility



**Figura 3.4** Função de autocorrelação  $C(\tau)$  para a volatilidade do índice Nord Pool. Após 100 dias nenhuma correlação significativa é observada exceto para um período que pode ser denominado como ciclo forte semanal. A linha tracejada representa um ajuste tipo lei de potência para os dados:  $y(\tau) \sim \tau^{-\nu}$  com  $\nu = 0.07$ . Para a linha sólida um termo oscilante é adicionado ao ajuste  $y(\tau) \sim \tau^{-\nu} [1 + \cos(2\pi\tau/\tau_0)/4]$  onde a constante temporal  $\tau_0 \approx 26$  dias [39].

a política de controle da vazão do reservatório.

A seguir descreveremos os métodos R/S e DFA, seguindo um procedimento análogo ao encontrado na referência [2].

### 3.3.1 Análise de Intervalo Reescalado - R/S

Hurst desenvolveu um novo método estatístico para analisar os dados de entrada e saída de água do reservatório em função do tempo, denominando-o Análise de Intervalo Reescalado R/S.<sup>3</sup>

Considerando que em um determinado ano  $t$ , o reservatório recebe uma quantidade de água  $\zeta(t)$ . A entrada de água média durante  $n$  anos é

$$\langle \zeta(t) \rangle_n = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \zeta(t), \quad (3.6)$$

<sup>3</sup>Rescaled Range Analysis

quantidade média esta que deve ser liberada anualmente, de modo a manter o nível do reservatório. Seja  $X(t, n)$  a quantidade de água acumulada, em  $t$  anos, para uma entrada média anual no período de  $n$  anos. Temos

$$X(t, n) = \sum_{m=1}^t [\zeta(m) - \langle \zeta \rangle_n]. \quad (3.7)$$

Chamando de amplitude a diferença entre os valores acumulados máximos e mínimos, ela representa a capacidade do reservatório necessária para manter uma saída média  $\langle \zeta \rangle_n$  em função da entrada anual  $\zeta(t)$ . Então, para que um reservatório nunca transborde ou seque, a amplitude  $R(n)$  é dada por

$$R(n) = X_{max}(t, n) - X_{min}(t, n). \quad (3.8)$$

Hurst tornou esta relação adimensional, dividindo-a pelo desvio padrão  $S(n)$  definido por

$$S(n) = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n [\zeta(t) - \langle \zeta \rangle_n]^2}. \quad (3.9)$$

Aplicando este método estatístico a diversas grandezas naturais, como vazão dos rios e tamanho de anéis em troncos de árvores, Hurst encontrou empiricamente que a razão  $R/S$  era proporcional ao tempo de observação elevado a um expoente  $k$ . Posteriormente, B. Mandelbrot deu ao expoente  $k$  a denominação expoente de Hurst, denotado pela letra  $H$ . Assim temos:

$$\frac{R}{S} = Cn^H, \quad (3.10)$$

onde  $C$  é uma constante. Hurst concluiu que existia um efeito de memória nas séries temporais estudadas. A cheia do ano  $x_{n+1}$  dependia da cheia do ano anterior  $x_n$ . Aplicando o método  $R/S$  para as cheias do rio Nilo, Hurst encontrou o valor  $H \approx 0.7$ .

O expoente de Hurst  $H$  se encontra no intervalo  $[0; 1]$ . Para  $H = 0.5$ , os valores da série temporal são independentes e não há correlação, como por exemplo, para um processo de



Wiener. Para  $H > 0.5$ , a série é chamada persistente, ou seja, seus incrementos futuros são similares aos incrementos passados. Para  $H < 0.5$  a série é denominada anti-persistente, com incrementos positivos no passado, implicando incrementos negativos no futuro.

Associando-se o expoente de Hurst  $H$  ao risco de um determinado ativo financeiro, temos que séries persistentes ( $H > 0.5$ ) são consideradas mais seguras, uma vez que apresentam uma tendência bem definida na evolução temporal de seus incrementos. Já os ativos caracterizados como anti-persistentes ( $H < 0.5$ ) possuem incrementos oscilantes e imprevisíveis, portanto apresentando maior risco para o investidor.

Mandelbrot e Wallis [32] notaram que a análise  $R/S$  possui a tendência de superestimar o expoente de Hurst, para  $H < 0.72$ , e subestimá-lo para  $H > 0.72$ . Desde então várias modificações foram propostas. Uma técnica muito eficiente foi proposta por Peng et al [33], chamada Análise de Flutuação Destendenciada (*DFA*).<sup>4</sup>

### 3.3.2 Análise de Flutuação Destendenciada - DFA

A Análise de Flutuação sem Tendência (*DFA*), proposta originalmente em 1994 [33], possui a capacidade de detectar correlações de longo alcance nas séries temporais não estacionárias. A idéia do método consiste em subtrair possíveis tendências determinísticas da série temporal original e então analisar a flutuação na série “destendenciada”.

O primeiro passo na implementação do método DFA é integrar a série temporal original  $x(t)$ , para obter a série temporal cumulativa  $X(t)$ :

$$X(t) = \sum_{t'=1}^t (x_{t'} - \bar{x}) \quad (3.11)$$

---

<sup>4</sup>Detrend Fluctuation Analysis

com  $t = 1, \dots, T$  e  $\bar{x}$  definido como

$$\bar{x} = \frac{1}{T} \sum_{t'=1}^T x_{t'}. \quad (3.12)$$

A segunda etapa consiste em dividir a série  $X(t)$  em  $N$  intervalos temporais não superpostos  $I_n$ , de tamanho  $\tau$  ( $N$  é a parte inteira de  $T/\tau$ ). Introduzimos então a função de tendência local  $Y_\tau$ , definida no  $n$ -ésimo intervalo  $I_n$  ( $n = 1, \dots, N$ )

$$Y_\tau(t) = a_n + b_n t, \quad (3.13)$$

com os coeficientes  $a_n$  e  $b_n$  representando o ajuste de mínimos quadrados de  $X(t)$  no intervalo  $I_n$ .

Como último procedimento, calculamos a função de flutuação  $F(\tau)$ , definida como o desvio médio quadrático de  $X(t)$  com respeito a função de tendência  $Y_\tau(t)$ , ou seja

$$F(\tau) = \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T [X(t) - Y_\tau(t)]^2}. \quad (3.14)$$

O expoente de Hurst é obtido diretamente das propriedades de escala da função de flutuação uma vez que

$$F(\tau) \approx \tau^H. \quad (3.15)$$

### 3.4 Multifractalidade

A partir dos trabalhos iniciais realizados por Stanley e Mantegna [34, 35] na década de 1990, observamos um gradativo aumento nas investigações que relacionam fluxos turbulentos e o mercado financeiro. A análise multifractal, que originalmente foi introduzida para investigar a natureza intermitente referente à turbulência, também tem sido extensivamente aplicada

ao estudo de séries temporais financeiras [36]. A presença de multifractalidade tem sido considerada como um dos principais fatos estilizados do mercado.

Muitos métodos têm sido utilizados para caracterizar o comportamento multifractal em economia, tais como análise de escala de flutuações, método da função de estrutura, DFA multifractal e método da função de partição. Neste trabalho consideramos a análise da função de estrutura para o estudo da multifractalidade.

Para estudarmos as propriedades de multifractalidade em nosso modelo, utilizamos os expoentes de Hurst generalizados  $H(q)$ , derivados a partir da função de estrutura de ordem  $q$ , definida por

$$S_q(\tau) = \langle |x(t + \tau) - x(t)|^q \rangle_T, \quad (3.16)$$

onde  $q > 0$ ,  $\tau$  representa um deslocamento temporal e  $T (T \gg \tau)$  é o tamanho da janela temporal. Esta função  $S_q(\tau)$  apresenta um comportamento tipo lei de potência na forma:

$$S_q \approx \tau^{H_q}. \quad (3.17)$$

A relação acima define a hierarquia dos expoentes de Hurst generalizados. Além disso, segundo a referência [37], a função de estrutura  $S_q(\tau)$  contém a informação sobre as volatilidades generalizadas médias na escala de tempo  $\tau$ . Se  $H(q)$  não depende de  $q$ , o processo é dito ser monofractal e  $H$  é equivalente à definição original do expoente de Hurst. Caso contrário o processo é dito ser multifractal [38].

A presença de multifractalidade representa mais um motivo pelo qual as flutuações do preço não podem ser descritas como um processo de caminhante aleatório, como é sugerido pelo modelo clássico de mercado eficiente.

## CAPÍTULO 4

# Resultados

Com o objetivo de verificarmos a influência dos agentes fundamentalistas no mercado financeiro, introduzimos o parâmetro  $p_F$  no modelo USDF. Variamos a concentração de agentes fundamentalistas,  $p_F$  dentro do intervalo [0.10:0.90]. Realizamos este estudo a partir de simulações de Monte Carlo em redes quadradas de  $N$  spins tipo Ising, que representam os agentes de mercado, com condições de contorno periódicas. As simulações foram desenvolvidas em sistemas com  $N = L \times L$ , considerando  $L = 32, 48, 64$  e  $80$ . Para cada valor de  $L$  e  $p_F$ , os estados iniciais dos spins são completamente aleatórios de modo que em média 50% dos agentes estão no estado +1 (compra) e 50% no estado -1 (venda).

Em nossas simulações definimos um passo de Monte Carlo (MCS)<sup>1</sup> como  $N$  tentativas de alterarmos os estados dos agentes. Em cada tentativa de mudança de estado, sorteamos um agente, que pode ser ou fundamentalista ou seguidor de tendência, e aplicamos a regra apropriada de acordo com a dinâmica definida no Capítulo 2. Dessa forma, em um MCS cada agente é atualizado uma vez, em média. Após cada MCS, o tempo é incrementado em uma unidade.

Além disso, para efeito de comparação com a referência [27], associamos um MCS a uma hora do mercado financeiro, de modo que oito MCS representam um dia útil. Geramos então séries temporais para o preço, o retorno e volatilidade considerando 20000 MCS que correspondem 2500 dias úteis do mercado financeiro ou aproximadamente 10 anos de observação.

Nas simulações, o preço é definido considerando uma dependência exponencial com a de-

---

<sup>1</sup>Monte Carlo Step

manda  $m(t)$  da forma:

$$P(t) = e^{m(t)}, \quad (4.1)$$

onde

$$m(t) = \sum_{i=1}^N \sigma_i(t) \quad (4.2)$$

é a magnetização do sistema no instante considerado.

Como quantificadores para os retornos e a volatilidade usamos as seguintes expressões:

$$r(t, \Delta t) = \ln(P(t + \Delta t)) - \ln(P(t)), \quad (4.3)$$

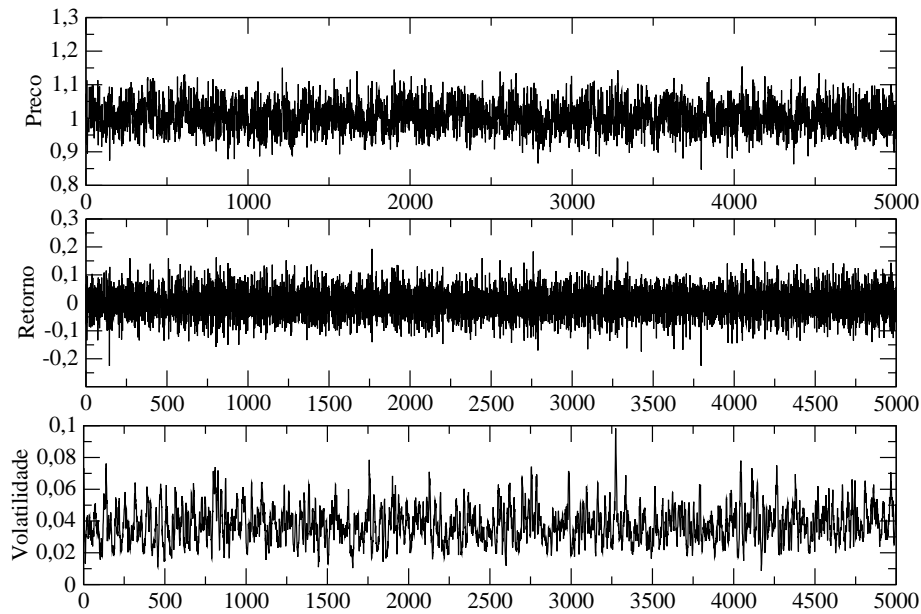
$$V_T(t) = \frac{1}{n} \sum_{t'=t}^{t+n-1} |r(t')|, \quad (4.4)$$

onde  $T = n\Delta t$ . Utilizando procedimento análogo ao trabalho realizado por Greco et al [7], fixamos  $\Delta t = 8$  e  $T = 10$ . As séries típicas geradas em nossas simulações são mostradas na Figura 4.1.

A seguir vamos considerar a análise que determina o comportamento da volatilidade para diferentes densidades  $p_F$  de agentes fundamentalistas. Apenas os resultados para uma rede com  $L = 32$  serão apresentados, tendo em vista que em nossas simulações para valores maiores de  $L$  não foram observadas mudanças significativas.

## 4.1 Distribuição de Probabilidade

No Capítulo 3 vimos que a volatilidade quantifica as flutuações do mercado. Nossas simulações do modelo USDF indicam que a volatilidade sofre forte influência dos agentes fundamentalistas. Na figura 4.2 mostramos as distribuições de probabilidade para a volatilidade

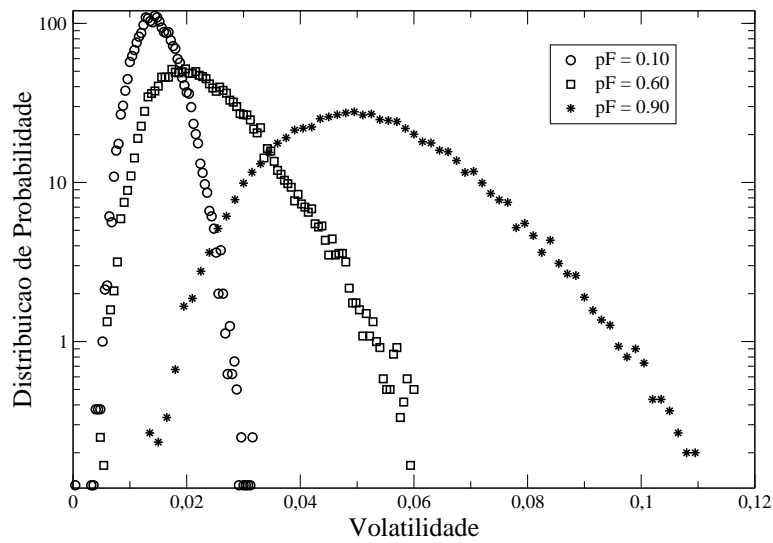


**Figura 4.1** Séries temporais geradas pelo modelo USDF considerando  $p_F=0.70$ : preço  $p(t)$  (topo), retorno  $r(t, \Delta t)$  com  $\Delta t = 8$  (painel do meio) e a volatilidade  $V_T(t)$  para  $T = 10$  (painel de baixo).

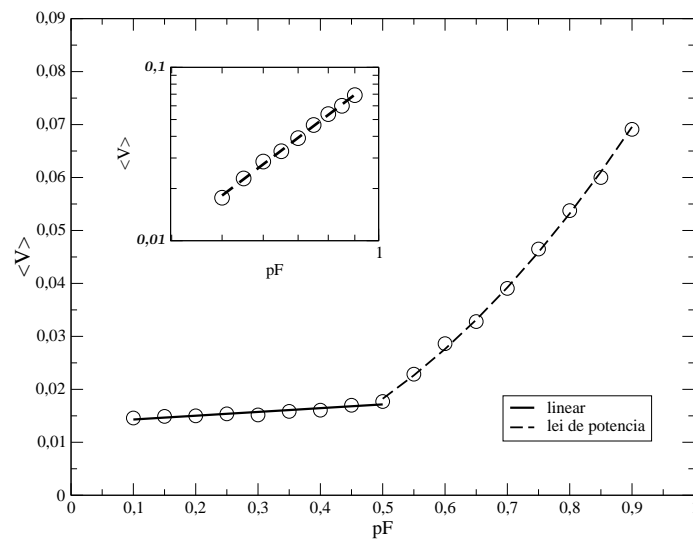
considerando três valores para o parâmetro  $p_F$ .

Observamos que tanto as volatilidades médias quanto as larguras das distribuições crescem com o aumento da densidade de agentes fundamentalistas  $p_F$ . Para o gráfico das volatilidades médias (Figura 4.3) esta dependência é melhor caracterizada, pois podemos distinguir claramente duas regiões para o comportamento da volatilidade. Vemos que para  $p_F \leq 0.50$  a volatilidade média apresenta uma dependência linear, enquanto para maiores concentrações de agentes fundamentalistas observamos uma dependência da forma  $\langle V \rangle \sim p_F^\alpha$ , com  $\alpha=2.28 \pm 0.04$ .

Deve ser notado que a mudança no comportamento da distribuição de volatilidade, observada tanto na volatilidade média quanto na largura da distribuição, ocorre para  $p \approx p_c$ , onde  $p_c$  é a concentração de percolação em redes quadradas. Ou seja, na região de percolação de agentes fundamentalistas, o efeito de manada torna-se mais acentuado tendo em vista que os agentes adotam a mesma decisão com maior probabilidade, justificando os níveis elevados de volatilidade de nosso sistema.



**Figura 4.2** Distribuições de probabilidade para a volatilidade em sistemas com  $L = 32$  e  $p_F = 0.10$ ,  $0.60$  e  $0.90$  numa escala log-linear.



**Figura 4.3** Volatilidade média em função do parâmetro  $p_F$ . Duas regiões são destacadas: a primeira apresenta uma dependência linear (linha contínua) e a segunda região apresenta uma dependência tipo lei de potência (linha tracejada). No painel interno temos em escala log-log a região que apresenta um crescimento tipo lei de potência com expoente  $\alpha = 2.28 \pm 0.04$

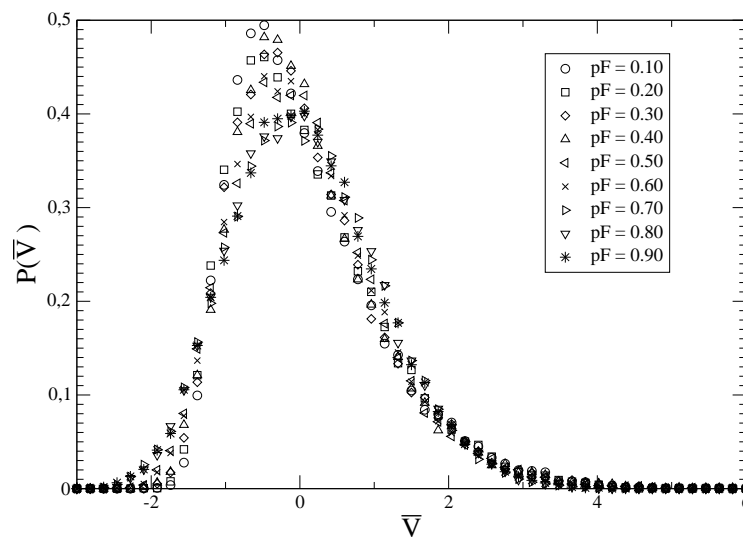
Consideremos agora as volatilidades padronizadas, definidas da seguinte forma

$$\bar{V} = \frac{V - \langle V \rangle}{\sigma_V}, \quad (4.5)$$

$p_F$	Assimetria	Curtose
0.10	1.0719	1.3218
0.20	0.9471	0.9933
0.30	1.043	1.5782
0.40	1.1029	2.1173
0.50	0.8398	1.2464
0.60	0.9510	1.603
0.70	0.4533	0.3445
0.80	0.3814	0.1646
0.90	0.4664	0.2707

**Tabela 4.1** Valores de assimetria e curtose para diferentes valores de  $p_F$

onde  $\sigma_V$  representa a largura para as distribuições e  $\langle \bar{V} \rangle = 0$ .



**Figura 4.4** Distribuição de probabilidade para as volatilidades padronizadas.

As distribuições de volatilidade padronizadas para todos os valores de  $p_F$  são mostradas na Figura 4.4. Nesta nova variável, retiramos a dependência com o parâmetro  $p_F$ , pois as distribuições colapsam em uma única curva. Para uma melhor descrição desta curva, calculamos o terceiro e quarto momentos da distribuição.

O terceiro momento determina o grau de assimetria da distribuição em torno de sua média

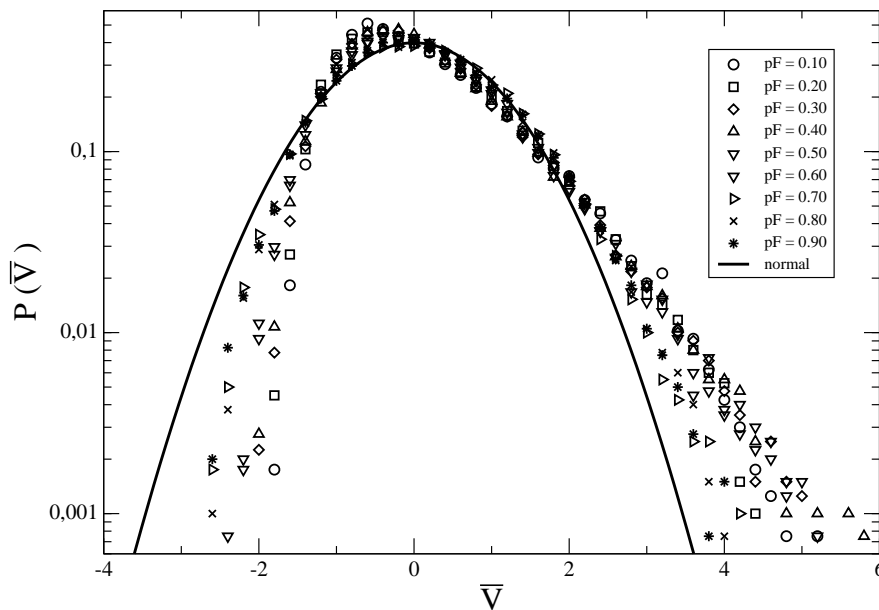


e é calculado por

$$A(V) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \left[ \frac{[V_i - \langle V \rangle]}{\sigma_V} \right]^3. \quad (4.6)$$

Para a distribuição gaussiana o terceiro momento é nulo. A partir do quarto momento determinamos a curtose da distribuição, que mede o grau de achatamento desta em relação a distribuição gaussiana. A curtose  $C(V)$  é definida pela razão do quarto momento pelo quadrado da variância, subtraindo esta razão por três, ou seja

$$C(V) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \left[ \frac{[V_i - \langle V \rangle]}{\sigma_V} \right]^4 - 3. \quad (4.7)$$



**Figura 4.5** Distribuição de probabilidade para as volatilidades padronizadas numa escala log-linear. A curva contínua representa uma função de distribuição normal  $N(0,1)$ .

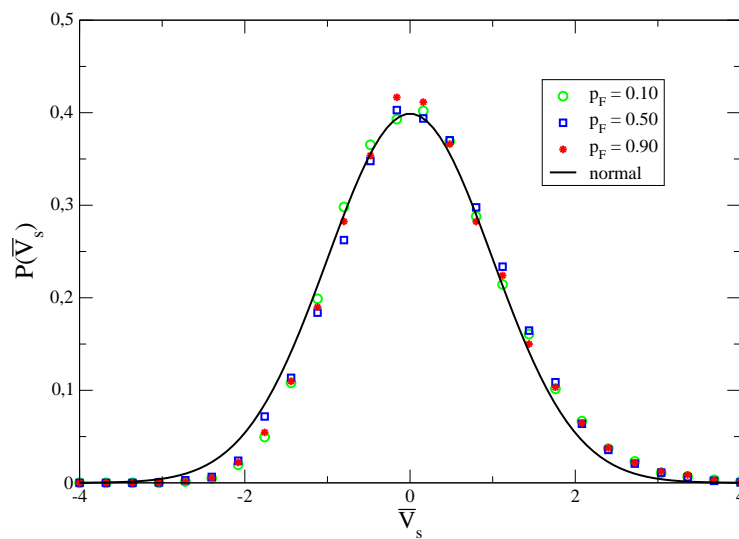
Nesta definição, a distribuição gaussiana possui curtose igual a 0, denominada mesocúrtica. Se  $C(V) > 0$  a distribuição é chamada de leptocúrtica. Se  $C(V) < 0$  a distribuição é platicúrtica. Analisando os dados da Tabela 4.1, concluímos que as distribuições de volatilidade são assimétricas e apresentam excesso de curtose, ou seja, são leptocúrticas. De fato, vemos na Figura

4.5 que um ajuste gaussiano não corresponde à uma boa aproximação para as distribuições de volatilidade.

No Capítulo 3 também destacamos o trabalho realizado por Stanley et al [14], na caracterização das funções de distribuição para a volatilidade. Vimos que estas comportam-se como log-normais. Para uma análise semelhante, neste trabalho consideramos as séries do logaritmo da volatilidade, a partir das quais definimos uma nova variável de escala

$$\bar{V}_S = \frac{\ln(V) - \langle \ln(V) \rangle}{\sigma_{\ln(V)}}. \quad (4.8)$$

Em termos de  $\bar{V}_S$  obtemos para a região central da distribuição  $P(\bar{V}_S)$ , o comportamento gaussiano mostrado na Figura 4.6. Desta forma concluímos que a distribuição dos eventos de maior frequência é log-normal.



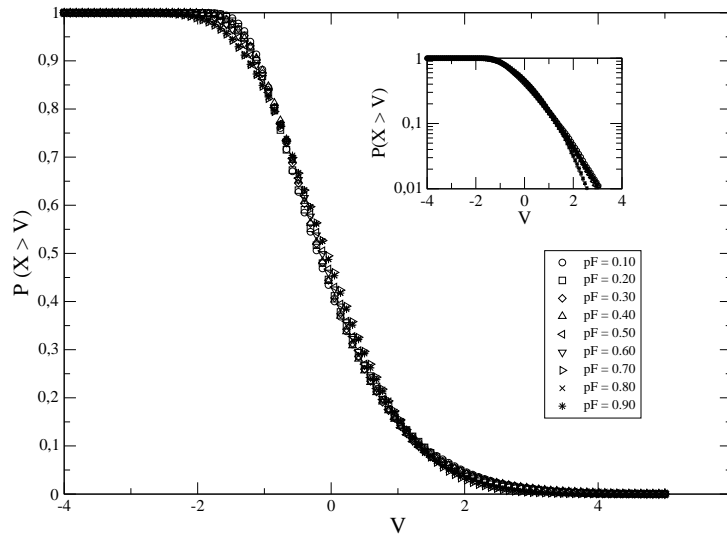
**Figura 4.6** Distribuição de probabilidade para a volatilidade na variável  $\bar{V}_S$  para três valores de  $p_F = 0.10, 0.50$  e  $0.90$ . A curva contínua representa um ajuste por uma função distribuição normal  $N(0, 1)$ .

Para analisarmos as caudas das distribuições de volatilidade  $P(\bar{V})$  calculamos as distribuições cumulativas para a variável  $\bar{V}$ . Determinamos que as caudas apresentam o comportamento

exponencial, mostrado na Figura 4.7, na forma

$$P(X > \bar{V}) \sim \exp(-b\bar{V}), \quad (4.9)$$

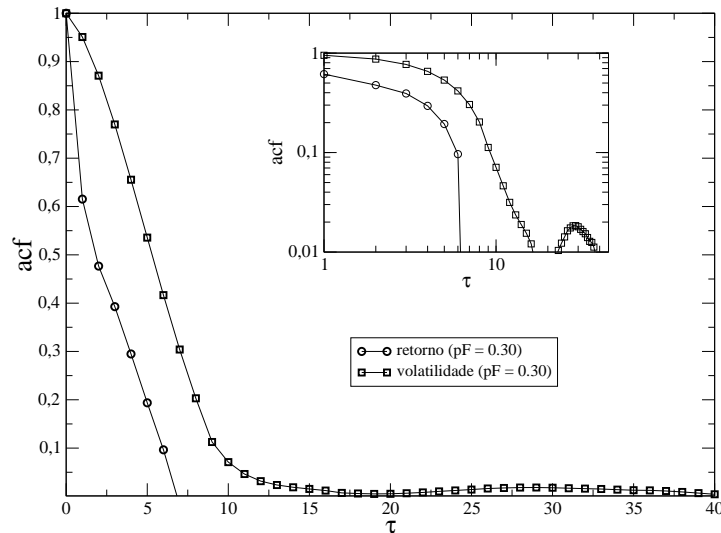
com  $b = 1.37 \pm 0.05$ .



**Figura 4.7** Distribuição cumulativa da volatilidade normalizada para diferentes valores de  $p_F$ . No painel interno temos a mesma distribuição para um escala log-linear. Observamos um decaimento exponencial da forma  $\exp(-b\bar{V})$  com  $b = 1.37 \pm 0.05$ .

## 4.2 Autocorrelação

A função de autocorrelação para os retornos apresenta como principal característica uma dependência de curto alcance. De acordo com [2] o tempo de correlação para os retornos é menor do que um dia de mercado. Entretanto a volatilidade apresenta uma dependência de longo alcance, fato este conhecido como clustering de volatilidade. Estes diferentes comportamentos para as funções de autocorrelação podem ser observados na figura 4.8, onde mostramos

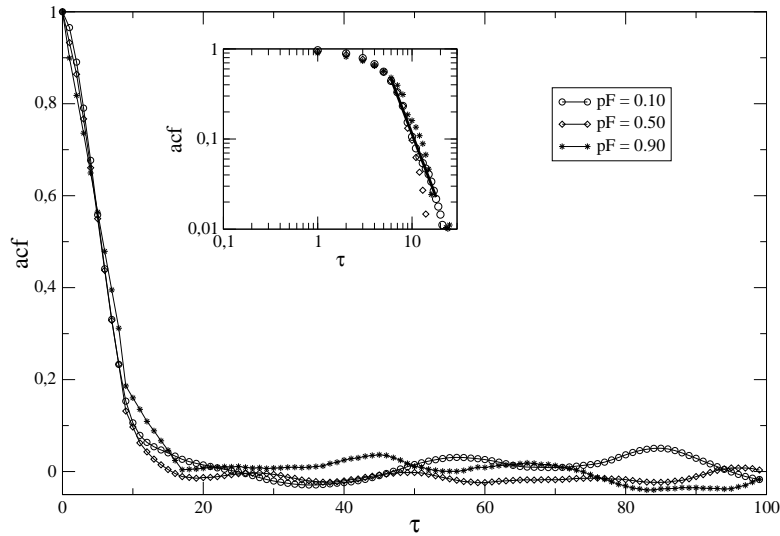


**Figura 4.8** Função de Autocorrelação para o retorno e volatilidade considerando  $p_F = 0.30$ . O gráfico interno, numa escala log-log, realça as correlações de longo alcance na volatilidade.

a autocorrelação normalizada (Equação 3.5) para as séries dos retornos e para a volatilidade. Determinamos um tempo de correlação para o retorno em torno de  $\tau=6$ . Para a volatilidade temos uma dependência de longo alcance. Observamos que o aumento da densidade de agentes fundamentalistas não modifica esta característica, pois as séries de volatilidade apresentam memória de longo alcance mesmo para grandes valores de  $p_F$  (Figura 4.9). Percebemos ainda um decaimento para esta função tipo lei de potência com um expoente  $\beta = 3.15 \pm 0.33$ .

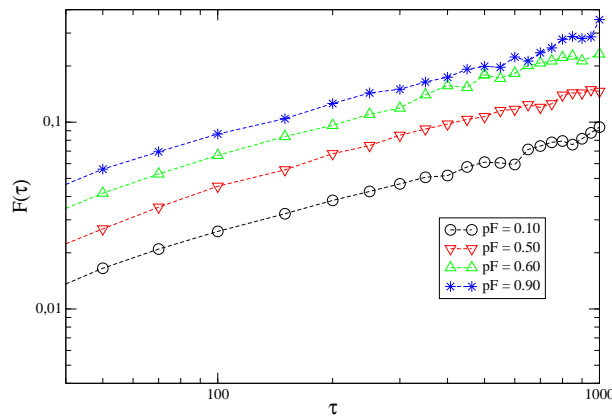
### 4.3 Expoente de Hurst

A correlação temporal para série da volatilidade pode ser melhor caracterizada através da análise do expoente de Hurst. Podemos ainda determinar se a série é persistente ou não persistente. Calculamos o expoente de Hurst através de duas técnicas: análise R/S e DFA (Capítulo 3). Nossos resultados são mostrados na Tabela 4.2, onde observamos que a volatilidade apresenta um comportamento persistente e os agentes fundamentalistas não afetam esta caracterís-



**Figura 4.9** Função de autocorrelação para três valores de  $p_F = 0.10, 0.50$  e  $0.90$ . No painel menor temos um comportamento tipo lei de potência para a correlação da forma  $\text{acf}(\tau) \sim \tau^{-\beta}$  com  $\beta = 3.15 \pm 0.33$ .

tica. Na Figura 4.10 temos o comportamento da função de flutuação  $F(\tau)$  (equação 3.14) que determina o expoente de Hurst na análise DFA.

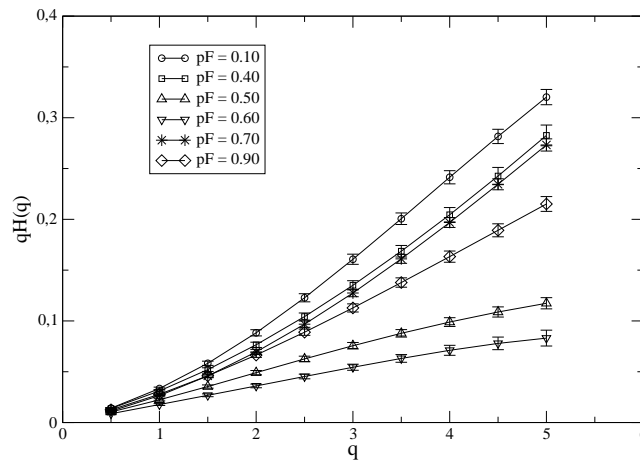


**Figura 4.10** Comportamento da função de flutuação  $F(\tau)$  para análise DFA com vários valores de  $p_F$ .

$p_F$	R/S	DFA
0.10	$0.79 \pm 0.04$	$0.54 \pm 0.02$
0.20	$0.64 \pm 0.09$	$0.62 \pm 0.02$
0.30	$0.76 \pm 0.09$	$0.61 \pm 0.01$
0.40	$0.63 \pm 0.03$	$0.60 \pm 0.02$
0.50	$0.61 \pm 0.06$	$0.59 \pm 0.01$
0.60	$0.69 \pm 0.05$	$0.60 \pm 0.02$
0.70	$0.48 \pm 0.05$	$0.58 \pm 0.01$
0.80	$0.69 \pm 0.08$	$0.54 \pm 0.01$
0.90	$0.43 \pm 0.05$	$0.62 \pm 0.01$

**Tabela 4.2** Expoentes de Hurst determinados a partir das análises R/S e DFA, para todos os valores de  $p_F$ .

#### 4.4 Multifractalidade

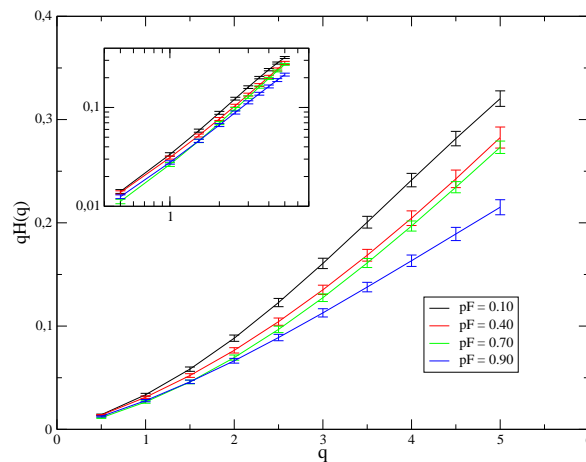


**Figura 4.11** Espectro multifractal  $H(q)$  para as séries de volatilidade. Nas regiões onde  $p_F < 0.5$  e  $p_F > 0.6$  o espectro é não linear. Para  $0.5 < p_F < 0.6$  temos um comportamento fractal típico.

Investigamos a presença de multifractalidade para a série da volatilidade considerando todo o intervalo do parâmetro  $p_F$ . Nossos resultados para o espectro de  $H(q)$  são apresentados na Figura 4.11. Observamos um comportamento não linear nas regiões com  $p_F < 0.5$  e  $p_F > 0.6$ , que indica a presença de multifractalidade. Nesta região as curvas representam leis de potência,

com expoentes  $1.38 \pm 0.01$ ,  $1.30 \pm 0.02$ ,  $1.38 \pm 0.01$  e  $1.24 \pm 0.01$ , para concentrações  $p_F = 0.10, 0.40, 0.70$  e  $0.90$  respectivamente (Figura 4.12). Na região  $0.50 < p_F < 0.60$  a série para a volatilidade apresenta um comportamento fractal típico (Figura 4.11).

Considerando que a dimensão fractal pode ser obtida a partir do expoente de Hurst, através da relação  $D = 2 - H$ , podemos estimar para o mercado financeiro a dimensão fractal  $D = 1.4 \pm 0.01$ , onde usamos os resultados da Tabela 4.2 para o expoente de Hurst  $H = 0.6 \pm 0.01$ , calculado com o método DFA para  $0.5 < p_F < 0.6$ . O trabalho [2] estima um expoente  $H = 0.54 \pm 0.01$  para o índice *NYSE*, determinando assim uma dimensão fractal da ordem de  $D = 1.46 \pm 0.01$ . Para o índice *BOVESPA*, a referência [5] estimou o expoente de Hurst em  $H \approx 0.5$ , caracterizando a dimensão fractal para este índice em  $D \approx 1.5$ .



**Figura 4.12** Espectro de multifractalidade para  $p_F = 0.10, 0.40, 0.70$  e  $0.90$  (curvas de cima para baixo). No gráfico interno enfatizamos o comportamento tipo lei de potência apresentando os dados numa escala log-log.

## CAPÍTULO 5

# Conclusão

Neste trabalho, estudamos a influência dos agentes fundamentalistas no mercado financeiro a partir do modelo USDF em redes quadradas, considerando diferentes concentrações ( $p_F$ ) desses agentes e analisando a dependência da volatilidade com este parâmetro.

Como principal fato observamos que a volatilidade sofre forte influência dos agentes fundamentalistas. Para regiões abaixo da percolação crítica ( $0.50 < p_F < 0.60$ ) destes agentes, a dependência da volatilidade média com a densidade  $p_F$  é linear. Entretanto para  $p_F > 0.5$  obtemos um crescimento tipo lei de potência para a volatilidade média. Esta mudança de comportamento da volatilidade média reflete o efeito de manada, que predomina acima da região crítica de percolação de agentes fundamentalistas. Determinamos também que as séries de volatilidade apresentam multifractalidade exceto na região  $0.5 < p_F < 0.6$ . Nesta região determinamos a dimensão fractal para o mercado financeiro, estimada em  $D=1.4$ .

A partir do cálculo das funções de autocorrelação para as séries de retorno verificamos uma dependência de curto alcance, enquanto que a volatilidade apresenta uma correlação de longo alcance que é a assinatura da presença do agregado de volatilidade. Estes fatos estilizados não são modificados com a variação da densidade de agentes fundamentalistas. Através das análises R/S e DFA determinamos que as séries para a volatilidade além de possuírem longa memória também são persistentes.

Verificamos que as distribuições de probabilidade para a volatilidade se comportam como log-normais para a região central da distribuição, apresentando assimetria e excesso de curtose, enquanto que as caudas da distribuição apresentam um decaimento tipo exponencial.



Como perspectivas, através de análises baseadas em função de partição utilizando DFA-Multifractal, pretendemos caracterizar melhor o comportamento multifractal observado. A partir de todos esses dados, estenderemos este estudo para outras topologias, talvez mais realistas, como redes Small-World e redes livres de escala.

## Referências Bibliográficas

- [1] I. Gleria, R. Matsushita, and S. da Silva. Sistemas complexos, criticalidade e leis de potência. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 26:99–108, 2004.
- [2] Guilherme Martinatti Favaro. Dinâmicas Autoregressivas em Econofísica. Dissertação de mestrado, Universidade de São Paulo, São Carlos, Instituto de Física, 2007.
- [3] L. Bachelier. Theorie de la spéculation. *Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure*, III-17:21–26, 1900.
- [4] Eugene F. Fama. Market efficiency, long-term return and behavioral finance. *Journal of Financial Economics*, 49(340):299, 1970.
- [5] José Augusto Carvalho Filho. Modelo exponencial para distribuição dos retornos do Ibovespa. Dissertação de mestrado, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, Departamento de Física, 2004.
- [6] Alexander Elder. *Como se transformar em um operador e investidor de sucesso*. Campus, 2004.
- [7] A. Greco, V. Carbone, and L. Sorriso-Valvo. Non-Poisson intermittent events in price formation in a ising spin model of market. *Physica A*, 376:480–486, 2007.
- [8] E. Samanidou, E. Zschichang, D. Stauffer, and T. Lux. Agent-based models of financial markets. *Reports on Progress in Physics*, 70:409–450, 2007.
- [9] B. B. Mandelbrot. The variation of certain speculative prices. *Journal of Business*, 36(4):394–419, 1963.

- [10] R. N. Mantegna and H. E. Stanley. *An Introduction to Econophysics: Correlations and Complexity in Finance*. Cambridge University Press, 1999.
- [11] V. Plerou, P. Gopikrishnan, L. A. Nunes Amaral, M. Meyer, and H. E. Stanley. Scaling of the distribution of price fluctuations of individual companies. *Phys. Rev. E*, 60(6):6519–6529, Dec 1999.
- [12] V. Plerou and H. E. Stanley. Tests of scaling and universality of the distributions of trade size and share volume: Evidence from three distinct markets. *Physical Review E (Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics)*, 76(4):046109, 2007.
- [13] Z. Ding, R. Engle, and C. Granger. A long memory property of stock market returns and a new model. *Journal Empirical Finance*, 1:83–106, 1993.
- [14] Y. Liu, P. Gopikrishnan, P. Cizeau, M. Meyer, C.-K. Peng, and H. E. Stanley. Statistical properties of the volatility of price fluctuations. *Phys. Rev. E*, 60(2):1390–1400, 1999.
- [15] H. B. do Nascimento Jr, U. L. Fulco, M. L. Lyra, M. Serva, and G. M. Viswanathan. Porque as bolsas de valores quebram: a origem das caudas grossas nas distribuições de retornos. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 29:341–346, 2007.
- [16] R. Cross, M. Grinfeld, H. Lamba, and T. Seaman. A threshold model of investor psychology. *Physica A*, 354:463–478, 2005.
- [17] A. W. Phillips. Mechanical models in economic dynamics. *Economica*, 17:283–305, 1950.
- [18] G. J. Stigler. Public regulation of the securities market. *Journal of Business*, 37(2):117–142, 1964.
- [19] O’ Hara M. *Market Microstructure Theory*. Cambridge Univ. Express: Blackwell, 1995.

- [20] R. H. Day and W. Huang. Bulls,bears and market sheep. *J. Econ. Behav. Organ.*, 14:299–329, 1990.
- [21] J. Frankel and K. A. Froot. Understanding the Us dollar in the eighties: the expectations of chartists and fundamentalists. *Econ. Rec.*, pages 24–38, 1986.
- [22] P. DeGrauwe, H. Dewachter, and M. J. Embrechts. *Exchange Rate Theory: Chaotic Models of Foreign Exchange Market*. Oxford: Blackwell, 1993.
- [23] G. W. Kim and H. M. Markowitz. Investment rules, margin, market volatility. *Journal Portfolio Manage*, 16:45–52, 1989.
- [24] T. Lux and M. Marchesi. Scaling and criticality in an stochastic multi-agent model of financial market. *Nature*, 397:498–500, 1999.
- [25] S. Bornholdt and F. Wagner. Stability of money: phase transition in an ising economy. *Physica A*, 316:453–468, 2002.
- [26] R. Cont and J. P. Bouchaud. *Macroeconomic Dynamics*, 4:170, 2000.
- [27] K. Sznajd-Weron and R. Weron. A simple model of price formation. *International Journal of Modern Physics C*, 13:115, 2002.
- [28] G. Ehrenstein, F. Westerhoff, and D. Stauffer. Tobin tax and market depth. *Quant. Finance*, 5:213–218, 2005.
- [29] K. Sznajd-Weron and J. Weron. Opinion evolution in closed community. *International Journal of Modern Physics C*, 11:1157, 2000.
- [30] F. Black and M. Scholes. The pricing of Options and Corporate liabilities. *J. Political Economy*, 81:637–654, 1973.
- [31] J. Cox, S. Ross, and M. Rubinstein. Option pricing: A Simplified Approach. *J. Political Economy*, 7:229–263, 1979.

- [32] B. Mandelbrot and J. Wallis. Robustness of the rescaled range R/S in the measurement of noncyclic long run statistical dependence. *Water Resources Research*, 5:967–988, 1969.
- [33] C. K. Peng, S. V. Buldyrev, S. Havlin, M. Simon, H. E. Stanley, and A. L. Goldberger. Mosaic organization of dna nucleotides. *Phys. Rev. E*, 49:1685–1689, 1994.
- [34] R. N. Mantegna and H. E. Stanley. Scaling behaviour in the dynamics of an index economic. *Nature*, 376:46–49, 1995.
- [35] R. N. Mantegna and H. E. Stanley. Turbulence and financial markets. *Nature*, 383:587–588, 1996.
- [36] W. X. Zhou. *A Guide to Econophysics*. Shangay University of Finance and Economics Press, 2007.
- [37] Shijun Wang and Changshui Zhang. Price formation based particle-cluster aggregation. *Int. Journal of Modern Physics C*, 16:1803–1810, 2005.
- [38] B. B. Mandelbrot. *Fractals and Scaling in Finance: Discontinuity, Concentration, Risk*. Springer, 1997.
- [39] Ingve Simonsen. Volatility of power markets. *Physica A*, 355:10–20, 2005.
- [40] L. R. da Silva and D. Stauffer. Ising-correlated clusters in the Cont-Bouchaud stock market model. *Physica A*, 294:235 – 238, 2001.
- [41] H. Gould and J. Tobochnik. *Thermal and Statistical Physics*. Open Source Physics, 2008.

# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)