

**Raimundo Gomes de Amorim Neto**

**SOBRE FORMULAÇÕES NÃO-CONVENCIONAIS DE ELEMENTOS  
FINITOS: REVISÃO E ANÁLISE NUMÉRICA**

Dissertação apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Engenharia de Estruturas.

Orientador: Sergio Persival Baroncini Proença

SÃO CARLOS

2008

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Ficha catalográfica preparada pela Seção de Tratamento  
da Informação do Serviço de Biblioteca – EESC/USP

A524s

Amorim Neto, Raimundo Gomes de  
Sobre formulações não-convencionais de elementos finitos : revisão e análise numérica / Raimundo Gomes de Amorim Neto ; orientador Sérgio Persival Baroncini Proença. -- São Carlos, 2008.

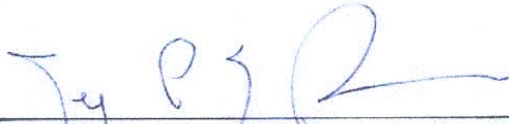
Dissertação (Mestrado-Programa de Pós-Graduação e Área de Concentração em Engenharia de Estruturas) -- Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, 2008.

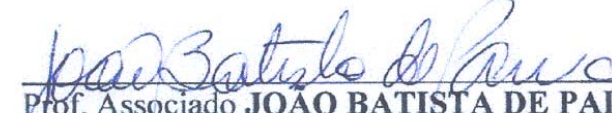
1. Elementos finitos não-convencionais. 2. Travamento da resposta numérica. 3. Método elementos finitos generalizados. I.Título.


**FOLHA DE JULGAMENTO**


Candidato: Engenheiro **RAIMUNDO GOMES DE AMORIM NETO**

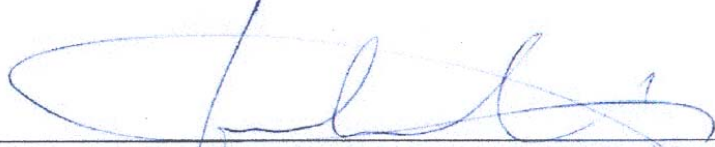
Dissertação defendida e julgada em 21/10/2008 perante a Comissão Julgadora:

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Titular **SERGIO PERSIVAL BARONCINI PROENÇA (Orientador)**  
(Escola de Engenharia de São Carlos/USP) APROVADO

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Associado **JOÃO BATISTA DE PAIVA**  
(Escola de Engenharia de São Carlos/USP) APROVADO

  
\_\_\_\_\_  
Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> **LARISSA DRIEMEIER**  
(Escola Politécnica/USP) APROVADO

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Associado **MARCIO ANTONIO RAMALHO**  
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em  
Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas)

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Associado **GERALDO ROBERTO MARTINS DA COSTA**  
Presidente da Comissão de Pós-Graduação



## Dedicatória

A Deus, Flaviana, Adalberto,  
Nenzinha e Chiquinho que foram  
os pilares desta edificação.



## **Agradecimentos**

A Deus, responsável direto por todas as bênçãos que acompanham a minha vida, por acreditar em mim, até mesmo nos momentos em que eu não acredito.

A Flaviana, minha amada namorada, noiva e esposa, que esteve ao meu lado na distância por um período quase interminável, e que foi minha fortaleza ao meu lado nos últimos meses.

Aos meus pais, Nenzinha e Chiquinho, por me fazerem acreditar que a educação é o maior e mais democrático caminho para o desenvolvimento pessoal.

Aos meus irmãos: o de sangue Adalberto, que sempre foi a maior referência que eu tive na vida, pelo seu caráter, amizade e honestidade ímpares, e ao meu irmãozinho de coração, Hugo, pelos loucos conselhos e por estar ao meu lado em alguns dos momentos mais importantes de minha vida.

Ao Professor Sérgio Proença, pela orientação impecável e criteriosa ao longo de todo o mestrado, além da paciência com os meus defeitos, e pela forma única de transmitir conhecimento, com lógica e precisão.

Aos meus amigos que deixei ao longo dos muitos anos de estudo (e de vida) desde Umarizal, passando por Mossoró e por fim em Natal. Aos meus familiares, que foram refúgio nos momentos de descontração, ao longo das várias 'férias'. Em especial a família que me acolheu pelos dois anos em Mossoró, tio Amorim e Tia Lúcia e suas filhas. Em especial também a 'Toinho do Miragem' e filhos, além de 'Maêa', por terem me adotado como um filho, ao longo de quatro anos em Natal.

A todos os Irmãos da Igreja de Cristo de Umarizal, em especial a Kaká, Eliz e o Pr. Aluízio, por terem me acolhido tão calorosamente nos poucos momentos que tivemos a oportunidade de estar próximos e pelas orações incessantes.



Aos meus professores de Umarizal, do Diocesano de Mossoró, e da UFRN, pelos ensinamentos passados e encorajamento mesmo frente às dificuldades desta tão nobre profissão. Em especial ao professor Roberto José de Medeiros, principal incentivador a carreira acadêmica.

Aos professores e funcionários do departamento de estruturas por todo apoio dado direta ou indiretamente e CAPES pela bolsa concedida.

Aos grandes amigos do departamento de estruturas: Camila, João César, Antônio Carlos, Luiz Aquino, Jesus Sanches, Rafael Pedrini, Luiz Carlos, Rodrigo Tadeu, Rodrigo Couto, Rodrigo Vieira, Rodrigo Barros, Charlton, Ana Paula Ferreira, Karla, Fernanda Madrona, Gláucia, Socorro, Marcela, Aref, Jesus Daniel, Fábio Carlos, Dorival e Walter. Em especial a Jônatas e Vinícius César por compartilharem o desafio sair de Natal e vir para o desconhecido e formarmos a nossa república Natalense, e ao Wanderson 'mineiro' que se agregou a nossa morada. Em especial também aos grandes, mas grandes mesmos, amigos de todos os momentos: Marlos, Érica Kimura, Filipe Ramos, Jônatas Barreto e Manoel Dênis.

E por fim aos membros da banca: Professor João Batista de Paiva (EESC/USP) e a Professora Larissa Driemeier (EP/USP), pelas valiosas contribuições a este trabalho.

*"Seja você quem for, seja qual for a posição social que você tenha na vida, a mais alta ou a mais baixa, tenha sempre como meta muita força, muita determinação e sempre faça tudo com muito amor e com muita fé em Deus, que um dia você chega lá. De alguma maneira você chega lá."*

*Ayrton Senna*



## Resumo

AMORIM NETO, R. G. (2008). *Sobre Formulações Não-Convencionais de Elementos Finitos: Revisão e Análise Numérica*. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2008.

Este trabalho faz uma análise da resposta numérica fornecida por diferentes formulações não-convencionais de elementos finitos propostos para a solução com menor custo computacional de problemas planos e axissimétricos. Três dos métodos não-convencionais aqui estudados objetivam formular elementos quadrilaterais de baixa ordem, mas que tenham uma melhor capacidade de representar problemas que envolvam distorção de forma dos elementos e/ou travamento da resposta numérica. Ao todo, quatro alternativas são avaliadas: a primeira fundamenta-se na utilização de campo adicional de deformação ('incompatível'), para enriquecimento das aproximações dos elementos. A segunda baseia-se nos conceitos de integração numérica reduzida e estabilização da matriz de rigidez, objetivando obter um elemento quadrangular livre de travamento. A terceira estratégia configura-se como uma extensão da primeira, e emprega uma expansão em série de Taylor truncada para descrever um campo adicional de deformações compatíveis. A quarta formulação não-convencional consiste no método dos elementos finitos generalizados (MEFG). Além disso, é apresentada uma formulação de elemento finito axissimétrico, que faz uso dos conceitos apresentados pelas duas primeiras metodologias de enriquecimento. Os experimentos numéricos mostram que as diferentes formulações são eficientes para superar algumas dificuldades numéricas evidenciadas pelas formulações convencionais do MEF em deslocamentos. As três primeiras estratégias têm seu bom desempenho associado ao tipo de problema, isto é, envolvendo distorção dos elementos ou travamento numérico. Já o MEFG apresentou bons resultados em todas as situações estudadas, com a vantagem adicional de dispensar excessivos refinamentos da rede de elementos.

Palavras-chave: Elementos Finitos não-convencionais, Travamento da Resposta Numérica, Método dos Elementos Finitos Generalizados.



## Abstract

AMORIM NETO, R. G. (2008). *On Non-Conventional Finite Elements Formulation: Revision and Numerical Analysis*. M.Sc. Dissertation – Sao Carlos School of Engineering, University of Sao Paulo, Sao Carlos, 2008.

This work presents a numerical analysis provided by the use of different non-conventional finite elements formulations, and intends to reduce the computational work in axis-symmetric and plane elasticity problems. Three of the non-conventional methods studied here aim to formulate quadrilateral low-order finite elements which have a better capacity to represent problems involving shape distortion and inducing numerical locking. Four alternatives are evaluated. The first is based on the use of an additional field of deformation ('incompatible'), improving the capacity of the elements used and their approximations. The second is based on the concept of reduced numerical integration and stabilization of the stiffness matrix, resulting in a square element free of locking. The third strategy sets itself as an extension of the first one, and employs an expansion based on a truncated Taylor series that describes an additional field of compatible deformations. The fourth non-conventional formulation is the generalized finite element method (GFEM). Moreover, an axis-symmetric finite element formulation is shown, which uses the concepts presented in the first two methodologies of enrichment. The numerical models show that different formulations are efficient in overcoming difficulties often encountered by the use of conventional numerical formulations FEM in displacements. The three initial strategies have their better performance associated with the type of problem, i.e., involving elements distortion or numeric locking. The GFEM shows better results in all cases studied, with the additional advantage of precluding the excessive refinements in the finite element mesh.

Key-Words: Non-conventional finite elements, Numerical locking, Generalized Finite Element Method.



## Lista de Figuras

Figura 2.1 – Elemento finito quadrilateral sob flexão pura.....	41
Figura 2.2 – Modos incompatíveis. ....	42
Figura 2.3 – Partição da Unidade $\mathfrak{R}^1$ , retirado de (MANGINI, 2006). ....	48
Figura 2.4 – Enriquecimento da PU em $\mathfrak{R}^2$ , retirado de (BARROS, 2002).....	49
Figura 3.1 – Sólido elástico (domínio tridimensional).....	52
Figura 3.2 – Representação do deslocamento.....	53
Figura 3.3 – Caracterização da deformação linear. ....	54
Figura 3.4 – Caracterização da deformação angular. ....	54
Figura 3.5 – Visualização de esforço interno.....	55
Figura 3.6 – Componentes de tensões segundo os eixos cartesianos.....	56
Figura 3.7 – Elemento infinitesimal em equilíbrio. ....	57
Figura 3.8 – Representação da deformação no plano x-y.....	58
Figura 3.9 – Estrutura (Chapa) em EPT. ....	61
Figura 3.10 – Estrutura (Barragem) em EPD. ....	62
Figura 3.11 – Estrutura axissimétrica (Cilindro).....	64
Figura 4.1 – Elemento finito quadrilateral segundo referenciais local e global.....	76
Figura 4.2 – Mapeamento do elemento finito quadrilateral isoparamétrico. ....	76
Figura 4.3 – Elemento finito quadrilateral ‘mestre’. ....	79
Figura 4.4 – Funções de forma clássicas do elemento quadrilateral ‘mestre’.....	80
Figura 4.5 – Funções enriquecedoras (modos incompatíveis).....	81
Figura 4.6 – Representação gráfica de $\psi$ . ....	94
Figura 4.7 – Domínio global e paramétrico.....	102
Figura 4.8 – Coordenadas locais x-y . ....	109
Figura 5.1 – Fluxograma. ....	114
Figura 5.2 – Quadratura bidimensional. ....	118
Figura 5.3 – Modelo de estrutura discretizada.....	119
Figura 5.4 – Modelo de arquivo de entrada. ....	120
Figura 6.1 – Viga em flexão pura – Geometria, carregamento e discretização.....	124
Figura 6.2 – Discretizações adotadas no segundo problema.....	126
Figura 6.3 – Geometria e discretização de chapa submetida ao cisalhamento. ....	127



Figura 6.4 – Resultados da energia de deformação para a chapa sob cisalhamento, para $\nu$ igual 0,3. ....	128
Figura 6.5 – Resultados da energia de deformação para a chapa sob cisalhamento, para $\nu$ igual 0,4999. ....	129
Figura 6.6 – Chapa tracionada simetricamente – Geometria e carregamento. ....	129
Figura 6.7 – Chapa tracionada simetricamente – Redes de elementos finitos adotadas. ....	130
Figura 6.8 – Chapa tracionada simetricamente – Deslocamento de referência. ....	131
Figura 6.9 – Chapa tracionada simetricamente – Energia de deformação de acordo com a rede. ....	132
Figura 6.10 – Chapa tracionada simetricamente – Energia de deformação em função do NGL. ....	132
Figura 6.11 – Tempo de processamento em função do da rede. ....	133
Figura 6.12 – Tempo de processamento em função do número de GL's. ....	133
Figura 6.13 – Tensão $\sigma_x$ para rede 06. ....	134
Figura 6.14 – Tensão $\sigma_x$ para rede 12. ....	135
Figura 6.15 – Chapa com fenda – Geometria e carregamento. ....	136
Figura 6.16 – Chapa com fenda – Considerando as condições de Simetria. ....	137
Figura 6.17 – Chapa com fenda – Redes de elementos finitos adotadas. ....	137
Figura 6.18 – Chapa com fenda – Tensão $\sigma_x$ para as quatro redes. ....	141
Figura 6.19 – Chapa com fenda – Tensão $\sigma_y$ para as quatro redes. ....	141
Figura 6.20 – Chapa com fenda – Tensão $\tau_{xy}$ para as quatro redes. ....	142
Figura 6.21 – Chapa com fenda – Deslocamento segundo a direção $x$ para as quatro redes. ....	143
Figura 6.22 – Chapa com fenda – Deslocamento segundo a direção $y$ para as quatro redes. ....	143
Figura 6.23 – Geometria e carregamento do painel de Cook. ....	144
Figura 6.24 – Resultados (em deslocamento) do painel de Cook. ....	145
Figura 6.25 – Resultados (em tensão) do painel de Cook. ....	145
Figura 6.26 – Placa circular submetida ao seu peso próprio. ....	146
Figura 6.27 – Geometria, condições de contorno e discretização adotada para a placa circular. ....	147
Figura 6.28 – Deslocamento máximo segundo a direção $z$ da placa circular. ....	148
Figura 6.29 – Cilindro longo submetida à carga de punção. ....	149
Figura 6.30 – Geometria, condições de contorno e força aplicada no cilindro. ....	150

Figura 6.31 – Deslocamento no ponto de aplicação da punção (Rede uniforme). .... 151

Figura 6.32 – Deslocamento no ponto de aplicação da punção (Rede refinada)..... 151



## Lista de Tabelas

Tabela 4.1 – Constantes dos elementos com estabilização.....	95
Tabela 5.1 – Quadratura Gauss-Legendre: Pontos e Pesos.....	118
Tabela 6.1 – Resultados da viga em flexão pura.....	125
Tabela 6.2 – Resultados obtidos no segundo problema.....	127
Tabela 6.3 – Resultados da chapa com fenda para rede 01 (3x3 elementos).....	138
Tabela 6.4 – Resultados da chapa com fenda para rede 02 (12x9 elementos).....	138
Tabela 6.5 – Resultados da chapa com fenda para rede 03 (24x20 elementos).....	139
Tabela 6.6 – Resultados da chapa com fenda para rede 04.....	140



## **Lista de Siglas e Abreviaturas**

CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
EESC	Escola de Engenharia de São Carlos
EPD	Estado Plano de Deformações
EPT	Estado Plano de Tensões
GL	Grau(s) de liberdade
MDF	Método das Diferenças Finitas
MEC	Método dos Elementos de Contorno
MEF	Método dos Elementos Finitos
MEFG	Método dos Elementos Finitos Generalizados
NGL	Número de Graus de liberdade
PU	Partição da Unidade
PVC	Problema de Valor de Contorno
SET	Departamento de Estruturas da EESC



## Lista de Símbolos

$V$	Domínio de um corpo elástico
$\Gamma$	Contorno regular que limita o domínio de um corpo elástico
$\Gamma_t$	Parte do contorno (de Neumann) onde são prescritas as forças de superfície
$\Gamma_u$	Parte do contorno (de Dirichlet) onde são prescritos os deslocamentos
$\vec{u}$	Vetor deslocamento
$u, v, w$	Componentes de deslocamento segundo três eixos cartesianos
$x, y, z$	Coordenadas cartesianas
$\varepsilon$	Tensor das deformações de segunda ordem
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$	Componentes normais do tensor de deformações
$\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$	Componentes cisalhantes do tensor de deformações
$\sigma$	Tensor das tensões de segunda ordem
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	Componentes normais do tensor de tensões
$\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}$	Componentes cisalhantes do tensor de tensões
$b$	Vetor de forças volúmicas
$b_x, b_y, b_z$	Componentes das forças volúmicas segundo as direções cartesianas
$L$	Operador diferencial divergente
$A, B, C, D$	Pontos do quadrilátero na posição inicial (na Figura 3.8)
$A_d, B_d, C_d, D_d$	Pontos do quadrilátero na posição deslocada (na Figura 3.8)
$\alpha, \beta$	Ângulos auxiliares (na Figura 3.8)
$C$	Tensor constitutivo de rigidez de quarta ordem
$C^{-1}$	Tensor constitutivo de flexibilidade de quarta ordem
$\lambda, \mu$	Constantes de Lamè
$E$	Módulo de Young (Módulo de Elasticidade Longitudinal)
$\nu$	Coefficiente de Poisson
$\underline{C}$	Matriz (tensor) que relaciona tensões e deformações (caso axissimétrico)
$\Pi_{ME}(u)$	Funcional de mínima energia potencial
$\bar{b}$	Vetor de forças volúmicas prescritas
$\bar{t}$	Vetor de forças de superfície prescritas
$\bar{u}$	Vetor de deslocamentos prescritos no contorno



$N$	Matriz que reúne as componentes do vetor normal ao contorno de Neumann
$p_1, p_2, p_3$	Campos incógnitos aproximados
$P_1, P_2, P_3$	Funções de ponderação dos campos aproximados
$\left. \begin{array}{l} \delta p_1 \\ \delta p_2 \\ \delta p_3 \end{array} \right\}$	Valores pontuais conhecidos
$S_V$	Funções de aproximação das tensões no domínio
$U_V$	Funções de aproximação dos deslocamentos no domínio
$U_{\Gamma_i}$	Funções de aproximação dos deslocamentos no contorno
$u_{\Gamma}$	Vetor de deslocamento no contorno
$q_u^V$	Deslocamentos discretos conhecidos no domínio
$s_{\sigma}^V$	Tensões discretas conhecidas no domínio
$q_u^{\Gamma}$	Deslocamentos discretos conhecidos no contorno
$\left. \begin{array}{l} \tilde{F}, R_{\Gamma_u} \\ A_V, A_{\Gamma_i} \\ Q_V, Q_{\Gamma_i} \end{array} \right\}$	Submatrizes e subvetores auxiliares na formulação híbrido-mista
$\left. \begin{array}{l} A_{\Gamma_i}^A, A_{\Gamma_i}^B \\ B_{\Gamma_i}^A, B_{\Gamma_i}^B \end{array} \right\}$	Submatrizes auxiliares na formulação híbrido-mista
$\Pi_{HR}(u, \sigma)$	Funcional de Hellinger–Reissner (dois campos)
$U^*(\sigma)$	Energia complementar de deformação
$\Pi_{HW}(u, \sigma, \varepsilon)$	Funcional de Hu-Washizu (três campos)
$\nabla^S u$	Gradiente simétrico do campo de deslocamentos
$\tilde{\varepsilon}$	Campo de deformações assumidas
$q$	Vetor dos parâmetros (deslocamentos) nodais
$\alpha$	Vetor dos parâmetros de deformação
$\beta$	Vetor dos parâmetros tensão
$\lambda$	Vetor dos parâmetros de deformação assumida
$\delta u$	Campo de deslocamentos virtuais
$\delta \varepsilon$	Campo de deformações virtuais
$\delta \sigma$	Campo de tensões virtuais
$\delta \tilde{\varepsilon}$	Campo de deformações assumidas virtuais
$N$	Matriz que reúne as funções de forma clássicas

$S$	Funções de aproximação para as tensões e para os deslocamentos
$B$	Matriz do operador diferencial
$B^i$	Matriz que reúne as funções de aproximação das deformações assumidas
$\delta q$	Vetor dos parâmetros (deslocamentos) nodais virtuais
$\delta \alpha$	Vetor dos parâmetros de deformação virtuais
$\delta \beta$	Vetor dos parâmetros tensão virtuais
$\delta \lambda$	Vetor dos parâmetros de deformação assumida virtuais
$H$	Submatriz contida no sistema de equações resolvente do modelo de deformações assumidas
$H_T$	Submatriz contida no sistema de equações resolvente do modelo de deformações assumidas
$L$	Submatriz contida no sistema de equações resolvente do modelo de deformações assumidas
$L^i$	Submatriz contida no sistema de equações resolvente do modelo de deformações assumidas
$f_{ext}$	Vetor do carregamento externo
$K$	Submatriz contida no sistema de equações resolvente final do modelo de deformações assumidas na equação (4.10)
$Q$	Submatriz contida no sistema de equações resolvente final do modelo de deformações assumidas na equação (4.10)
$\Gamma$	Submatriz contida no sistema de equações resolvente final do modelo de deformações assumidas na equação (4.10)
$S_j$	Componentes não-nulas da matriz que contém as funções de aproximação de deformações e tensões do modelo de deformações assumidas
$\hat{H}$	Submatriz de $H$
$\bar{x}$ e $\bar{y}$	Sistema de coordenadas locais do elemento finito
$\xi, \eta$	Sistema de coordenadas paramétricos do elemento finito
$f_1(\xi, \eta)$	Função de mapeamento entre domínios real e paramétrico
$f_2(\xi, \eta)$	Função de mapeamento entre domínios real e paramétrico
$a_0, a_1, a_2, a_3$	Constantes que relacionam o domínio paramétrico e a coordenada $x$
$b_0, b_1, b_2, b_3$	Constantes que relacionam o domínio paramétrico e a coordenada $y$
$x_1, x_2, x_3, x_4$	Valores da coordenada $x$ nos nós do elemento finito quadrilateral
$y_1, y_2, y_3, y_4$	Valores da coordenada $y$ nos nós do elemento finito quadrilateral

$J$	Matriz jacobiana
$J(\xi, \eta)$	Determinante da matriz jacobiana
$S_j^{Ort}$	Componentes não-nulas (e ortogonalizadas via processo de Gram-Schmidt) da matriz que contém as funções de aproximação de deformações e tensões do modelo de deformações assumidas
$\hat{h}_{11}, \hat{h}_{22}, \hat{h}_{33}$	Componentes não-nulas da matriz $\hat{H}$
$N_1, N_2, N_3, N_4$	Funções clássicas de forma do elemento finito quadrilateral bilinear
$N_1^{enriq}, N_2^{enriq}$	Modos incompatíveis (Funções de enriquecimento)
$\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$	Valores da coordenada $\xi$ nos nós do elemento finito quadrilateral
$\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$	Valores da coordenada $\eta$ nos nós do elemento finito quadrilateral
$V_e$	Domínio do elemento finito
$\bar{N}_{j,x}, \bar{N}_{j,y}$	Componentes não-nulas da matriz $\bar{B}$
$\bar{N}_{k,x}^{enriq}, \bar{N}_{k,y}^{enriq}$	Componentes não-nulas da matriz $\bar{B}^i$
$f_x^{ij}, f_y^{ij}$	Componentes não-nulas da matriz $\bar{L}$
$f_{x,enriq}^{ij}, f_{y,enriq}^{ij}$	Componentes não-nulas da matriz $\bar{L}^i$
$K$	Matriz de rigidez
$K_1$	Parcela da matriz de rigidez calculada com apenas um ponto de integração numérica
$K_{Estab.}$	Parcela da matriz de rigidez adicionada para garantir estabilidade ao sistema devido integração de baixa ordem
$B_0$	Matriz dos operadores diferenciais das funções de forma comum ponto de integração numérica
$b_x, b_y$	Componentes não-nulas de $B_0$
$A$	Área do elemento finito
$\gamma$	Operador de projeção
$q_x, q_y$	Componentes segundo as direções $x$ e $y$ do vetor de deslocamentos nodais
$t$	Vetor auxiliar a formulação de integração reduzida com estabilização
$h$	Vetor auxiliar a formulação de integração reduzida com estabilização
$\mathbf{x}$	Vetor que contém as coordenadas $x$ nodais
$\mathbf{y}$	Vetor que contém as coordenadas $y$ nodais
$\tilde{\nabla}^s u$	Operador gradiente discreto dos deslocamentos
$k_j$	Constantes auxiliares a formulação de integração reduzida com estabilização

$\psi(\xi, \eta)$	Função de ‘Hourglass’
$B_{0,\xi}$	Derivada de $B_0$ em relação à coordenada paramétrica $\xi$
$B_{0,\eta}$	Derivada de $B_0$ em relação à coordenada paramétrica $\eta$
$B_0^{desv}$	Parcela desviadora de $B_0$
$B_{0,\xi}^{desv}$	Derivada de $B_0^{desv}$ em relação à coordenada paramétrica $\xi$
$B_{0,\eta}^{desv}$	Derivada de $B_0^{desv}$ em relação à coordenada paramétrica $\eta$
$\hat{k}_{ab}$	Constantes auxiliares a formulação integração reduzida com estabilização, dependentes dos parâmetros elásticos e das coordenadas nodais
$\bar{\xi}$	Vetor que contem as coordenadas paramétricas $\xi$ nodais
$\bar{\eta}$	Vetor que contem as coordenadas paramétricas $\eta$ nodais
$\hat{k}_1, \hat{k}_2, \hat{k}_3, \hat{k}_4$	Constantes auxiliares a formulação integração reduzida com estabilização
$\Psi_{ab}$	Integral das derivadas parciais das funções de ‘Hourglass’
$c_1, c_2$ e $c_3$	Constantes auxiliares a formulação integração reduzida com estabilização, dependente dos parâmetros elásticos e do tipo de elemento utilizado
$e_1, e_2$ e $e_3$	Constantes auxiliares a formulação integração reduzida com estabilização, dependente do tipo de elemento
$\tilde{\varepsilon}^{SU}$	Campo de deformação enriquecido relativo ao campo de deslocamento clássico
$\varepsilon^C$	Campo de deformação enriquecido relativo ao campo de deslocamento clássico, parcela compatível local
$\varepsilon^{SU}$	Campo de deformação enriquecido relativo ao campo de deslocamento clássico, parcela estabilizante
$G^C$	Matriz das funções aproximadoras da deformação compatível local
$G^{SU}$	Matriz das funções aproximadoras da deformação estabilizante
$\tilde{G}$	Matriz das funções aproximadoras da deformação assumida
$\Sigma$	Matriz que reúne as funções de aproximação das tensões no domínio
$T_2(f)$	Expansão em série de Taylor de uma função $f$ na ordem dois
$\bar{T}_2(f)$	Expansão em série de Taylor modificada, dispensando os termos de ordem par e constante, de uma função $f$ na ordem dois
$\mathbf{N}$	Vetor que reúne as funções de forma
$\mathbf{r}$	Vetor que reúne as coordenadas $r$ nodais

$\mathbf{z}$	Vetor que reúne as coordenadas $z$ nodais
$q_r$	Vetor que contém os deslocamentos nodais na direção radial
$q_z$	Vetor que contém os deslocamentos nodais na direção axial
$\bar{\mathbf{N}}$	Matriz que reúne as funções de forma
$b_r$	Parcelas não-nulas da matriz $\mathbf{B}$ caso axissimétrico
$b_z$	Parcelas não-nulas da matriz $\mathbf{B}$ caso axissimétrico
$\chi$	Vetor auxiliar na formulação do elemento axissimétrico
$\varepsilon_u$	Parcela compatível do tensor de deformação
$B_\circ$	Parcela de $\mathbf{B}$ dependente de derivadas parciais
$f$	Vetor do carregamento externo
$\rho$	Massa específica do material
$\hat{\mathbf{B}}$	Média a nível de elemento da matriz $\mathbf{B}$
$\beta_1, \beta_2, \beta_3$	Auxiliares no cálculo de $\hat{\mathbf{B}}$
$\hat{b}_1^T, \hat{b}_2^T$	Componentes não-nulas de $\hat{\mathbf{B}}$
$B_h^\circ$	Parcela da Matriz $\mathbf{B}$ complementar a $\hat{\mathbf{B}}$
$\omega_1, \omega_2$	Auxiliares no cálculo de $B_h^\circ$
$K_b$	Parcela base da matriz de rigidez
$K_h$	Parcela de alta ordem da matriz de rigidez
$\bar{\mathbf{B}}$	Matriz $\mathbf{B}$ modificada
$B_h$	Parcela de alta ordem de $\mathbf{B}$
$E_h$	Matriz que forma $B_h$
$\Lambda$	Matriz que forma $B_h$
$\varphi$	Ângulo entre eixos $r$ e eixo local do elemento axissimétrico $x$
$r_0$	Coordenada radial do centróide
$z_0$	Coordenada axial do centróide
$V_z$	Valor análogo ao volume calculado segundo a direção $z$
$\mathbf{R}$	Matriz de rotação (transformação entre sistemas) das coordenadas
$\mathbf{I}_{4 \times 4}$	Matriz identidade de ordem 4
$\mathbf{S}$	Matriz de rotação dos parâmetros nodais
$l$	Vetor que contém operações sobre as coordenadas locais $x$ e $y$
$m$	Vetor que contém operações sobre as coordenadas locais $x$ e $y$
$n$	Vetor que contém operações sobre as coordenadas locais $x$ e $y$
$\theta_1, \theta_2, \theta_3$	Ângulo resultante do produto entre o vetor de projeção e $l, m, n$ respectivamente

$L_{11}, L_{12}, L_{21}, L_{22}$	Valores escalares que relacionam o quão distorcido apresenta-se o elemento finito
$\tilde{\varepsilon}_{EPD}^{(x,y)}$	Deformações assumidas para o caso EPD nas coordenadas $x$ e $y$
$E_{EPD}^{(x,y)}$	Matriz que forma $B_h$ para o caso EPD nas coordenadas $x$ e $y$
$\Lambda_{EPD}^{(x,y)}$	Matriz que forma $B_h$ para o caso EPD nas coordenadas $x$ e $y$
$q^{(x,y)}$	Deslocamentos nodais nas coordenadas $x$ e $y$
$\gamma_{(x,y)}^T$	Vetor projeção nas coordenadas $x$ e $y$
$T$	Matriz de transformação entre coordenadas $r$ e $z$ e as coordenadas locais $x$ e $y$
$\tilde{\varepsilon}_{EPD}^{(r,z)}$	Deformações assumidas para o caso EPD nas coordenadas $r$ e $z$
$E_{EPD}^{(r,z)}$	Matriz que forma $B_h$ para o caso EPD nas coordenadas $r$ e $z$
$Q_1$ e $Q_2$	Matrizes que reúnem os valores escalares $L_{11}, L_{12}, L_{21}, L_{22}$
$\underline{E}_h$	Submatriz que forma $E_h$



## Sumário

<b>Resumo.....</b>	<b>11</b>
<b>Abstract .....</b>	<b>13</b>
<b>Lista de Figuras.....</b>	<b>15</b>
<b>Lista de Tabelas .....</b>	<b>19</b>
<b>Lista de Siglas e Abreviaturas .....</b>	<b>21</b>
<b>Lista de Símbolos.....</b>	<b>23</b>
<b>1 Introdução .....</b>	<b>35</b>
1.1 Considerações Iniciais.....	35
1.2 Justificativas .....	37
1.3 Objetivos.....	37
1.4 Organização do Texto .....	38
<b>2 Revisão Bibliográfica .....</b>	<b>41</b>
2.1 Modos incompatíveis.....	41
2.1.1 Conceituação e trabalhos pioneiros.....	41
2.1.2 Outros trabalhos significativos .....	43
2.2 Campo de deformações enriquecido.....	43
2.2.1 Deformações assumidas e método do operador $\bar{B}$ .....	43
2.2.2 Histórico de trabalhos sobre deformações assumidas .....	44
2.3 Deformação assumida com integração reduzida e estabilização.....	46
2.4 Método dos elementos finitos generalizados .....	48
<b>3 Tópicos da Teoria da Elasticidade e a Formulação Híbrido-Mista Geral.....</b>	<b>51</b>
3.1 Definições gerais da Elasticidade.....	51
3.2 Equacionamento.....	56
3.2.1 Equações de equilíbrio.....	56
3.2.2 Relações deformação-deslocamento.....	57
3.2.3 Modelo constitutivo.....	59
3.3 Problemas elásticos planos .....	60
3.3.1 Estado plano de tensão (EPT) .....	61
3.3.2 Estado plano de deformação (EPD) .....	61
3.4 Problemas axissimétricos.....	62
3.5 Formulação variacional em resíduos ponderados (Híbrido-Mista).....	64
<b>4 Estratégias de Enriquecimento .....</b>	<b>71</b>



4.1	Modelos para chapas.....	71
4.1.1	Enriquecimento por deformações assumidas .....	71
4.1.2	Integração reduzida com estabilização da rigidez.....	85
4.1.3	Estabilização com uso de séries de Taylor .....	95
4.2	Modelo axissimétrico .....	101
4.2.1	Considerações iniciais.....	101
4.2.2	Elemento axissimétrico clássico.....	102
4.2.3	Representação modificada da matriz dos operadores de derivadas .....	105
4.2.4	Formulação do elemento enriquecido .....	106
4.2.5	A matriz $B_h$ .....	108
<b>5</b>	<b>Implementação Computacional .....</b>	<b>113</b>
5.1	Descrição geral.....	113
5.2	Recursos numéricos e ferramentas matemáticas .....	116
5.2.1	Mapeamento dos elementos.....	117
5.2.2	Integração numérica de domínios bidimensionais.....	117
5.2.3	Biblioteca matemática .....	118
5.3	Funcionamento do programa .....	119
5.3.1	Entrada de dados.....	119
5.3.2	Opções do usuário.....	121
5.3.3	Arquivo de saída.....	121
5.4	Programas Auxiliares à Pesquisa .....	122
<b>6</b>	<b>Exemplos Numéricos .....</b>	<b>123</b>
6.1	Exemplos de chapas.....	123
6.1.1	Viga em flexão pura.....	124
6.1.2	Sensibilidade dos elementos a redes distorcidas .....	125
6.1.3	Travamento de Poisson.....	127
6.1.4	Chapa tracionada simetricamente.....	129
6.1.5	Chapa com fenda .....	136
6.1.6	Painel de Cook.....	144
6.2	Exemplos com axissimetria.....	146
6.2.1	Placa circular sob ação do peso próprio .....	146
6.2.2	Cilindro submetido a carregamento de punção .....	148
<b>7</b>	<b>Conclusão e Considerações Finais .....</b>	<b>153</b>

7.1	Conclusões.....	153
7.2	Propostas para trabalhos futuros .....	154
	<b>Referências Bibliográficas.....</b>	<b>155</b>
	<b>Apêndice A – Derivadas de <math>B_0^{\text{desv}}</math> em relação às coordenadas <math>\xi</math> e <math>\eta</math>.....</b>	<b>163</b>
	<b>Anexo A – Ortogonalização de Gram-Schmidt.....</b>	<b>165</b>
	<b>Anexo B – Forma fechada da expansão de 1ª ordem em série de Taylor.....</b>	<b>167</b>



## Introdução

Esta dissertação de mestrado insere-se na linha de pesquisa de Métodos Numéricos da pós-graduação do departamento de Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, tendo o apoio financeiro da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES).

### 1.1 Considerações Iniciais

Historicamente e segundo uma seqüência cronológica, pode-se afirmar que os principais métodos desenvolvidos e utilizados na resolução de problemas estruturais foram: o método das diferenças finitas (MDF), o método dos elementos finitos (MEF) e por último o método dos elementos de contorno (MEC). Os elementos finitos tornaram-se ao longo das últimas décadas a principal entre as ferramentas de análise estrutural, em virtude de sua simplicidade, eficiência e boa precisão.

A formulação clássica do MEF é baseada na determinação de deslocamentos nodais, com posterior estimativa de tensões e deformações no domínio e contorno da estrutura. Tal formulação, dita em deslocamentos, é bastante adequada para a solução de uma vasta gama de problemas de engenharia de estruturas, todavia, em termos gerais, porque as tensões e deformações decorrem de derivadas sobre o campo de deslocamentos, a obtenção de resultados mais precisos para essas grandezas é condicionada a um elevado grau de refino da rede. O emprego de redes refinadas, ou de estratégias de refinamento, traz como conseqüências imediatas um maior custo computacional, bem como um maior tempo de processamento e pós-processamento dos dados obtidos.

Buscando contornar essas limitações têm sido desenvolvidas inúmeras estratégias alternativas à metodologia convencional do MEF. Uma delas consiste no

*refino p*, tendo por base a utilização de funções aproximadoras de maior grau. Outra estratégia interessante consiste em empregar formulações variacionais não-convencionais, que além dos deslocamentos introduzem e aproximam campos extras como os de tensões e deslocamento no contorno. Nesse padrão se encaixam os modelos mistos, híbridos, bem como modelos com campos de deformações intrínsecas ou assumidas (*assumed strain*).

Estes últimos modelos, em particular caracterizam-se pela inclusão de campos de deformação no domínio do elemento sem recorrer a um acréscimo de graus de liberdade nodais e preservando, nos elementos simples, suas funções aproximadoras clássicas. Obtêm-se, como resultado, elementos mais ‘flexíveis’ que apresentam um alto grau de precisão em redes de elementos pouco refinadas (e em redes distorcidas). Além disso, devido à sua maior ‘flexibilidade’ esses elementos têm a característica de serem menos sensíveis a problemas que induzam travamento da resposta numérica.

Em relação ao travamento, cabe, neste ponto, um breve comentário. Em determinadas condições, as respostas dos materiais podem estar restringidas por condição de incompressibilidade. Essa condição se manifesta já no regime elástico em materiais com coeficiente de Poisson próximo de 0,5 ou no regime elasto-plástico, em materiais que seguem o critério de *von Mises*, como os metais, nos quais o desenvolvimento de deformações plásticas se dá com volume constante. A aplicação da formulação convencional em deslocamentos a problemas dessa natureza tem por conseqüência o aparecimento do fenômeno de travamento numérico, que se caracteriza pela convergência a uma resposta mais rígida. Entre as técnicas e métodos empregados em maior escala para contornar esse problema destacam-se as técnicas de integração reduzida e as formulações variacionais mistas. Entretanto, neste trabalho é o método de enriquecimento em deformações assumidas, que pode ser inserido no âmbito de uma formulação variacional mista, uma das alternativas estudadas para contornar o problema do travamento.

Essencialmente a metodologia das deformações assumidas é inicialmente

revista e posteriormente avaliada mediante implementação computacional de um elemento quadrilateral parametrizado. Tal elemento se mostra como uma opção bastante eficiente na discretização de problemas elásticos em virtude de sua geometria simples, podendo ser usado em redes regulares, bem como em redes arbitrárias.

## 1.2 Justificativas

No âmbito do MEF, o aperfeiçoamento de sua aproximação pode se dá, seja pelo aumento do grau do polinômio interpolador, ou pelo refinamento da rede. Em ambos os casos induzem-se como consequência, um aumento do número de graus de liberdade envolvidos na discretização da estrutura, com reflexos diretos sobre o custo computacional em termos de tempo de processamento.

Deste modo, o estudo de alternativas que diminuam ou mesmo evitem essas dificuldades é perfeitamente justificável e importante para o aprimoramento do MEF. Assim sendo, buscam-se elementos que proporcionem resultados precisos mesmo com uma grosseira discretização dos problemas, envolvendo uma formulação que não comprometa a simplicidade do MEF e nem implique em incremento significativo no custo computacional.

Neste contexto os métodos e formulações aqui abordados atendem a estes requisitos e dão subsídios para que se consiga obter resultados satisfatórios.

## 1.3 Objetivos

O objetivo principal deste trabalho é fornecer uma contribuição ao estudo de formulações não-convencionais de elementos finitos. Uma extensa pesquisa bibliográfica abordando diversas alternativas desenvolvidas nos últimos anos foi realizada, assim como uma série de experimentos numéricos com intuito de fornecer subsídios para o conhecimento das particularidades dos métodos estudados.

Além da revisão e análise crítica realizada, como produto desta pesquisa

tem-se o desenvolvimento de uma ferramenta numérica (programa em linguagem FORTRAN 90), incluindo os métodos estudados, para a análise de estruturas nas quais se aplicam as idealizações por estados planos ou axissimetria de forma e carregamento.

## 1.4 Organização do Texto

Este trabalho está dividido em 7 capítulos, sendo este, o primeiro, destinado à introdução ao assunto, bem como à apresentação das justificativas e dos objetivos da pesquisa.

No capítulo 2 é apresentada uma revisão bibliográfica relativa às principais estratégias de aperfeiçoamento do MEF abordadas no trabalho, que se constituem em contribuições propostas ao longo dos anos por diversos pesquisadores do método dos elementos finitos. Ainda, em particular, inclui-se uma breve exposição do Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG).

No capítulo 3 é feita uma sucinta revisão dos conceitos de teoria de elasticidade linear, tendo em vista sua aplicação à luz dos princípios variacionais mistos. O enfoque é sobre os casos de elasticidade plana (EPT e EPD) e também de axissimetria.

Já o capítulo 4 reúne uma detalhada apresentação dos métodos implementados, com a descrição das matrizes envolvidas nos sistemas de equações lineares de cada formulação em particular. Neste capítulo são mostrados os três modelos desenvolvidos para os estados planos e um modelo para o caso de axissimetria. Cabe adiantar que em todos os casos os elementos finitos implementados são quadriláteros e parametrizados

O programa computacional, fruto da pesquisa, é apresentado no capítulo 5, dando ênfase ao arranjo de rotinas, aos seus recursos numéricos, aplicações, bem como suas limitações.

O capítulo 6 é reservado para a apresentação de diversos exemplos numéricos para avaliação das capacidades (e limitações) dos modelos e do programa, assim como o confronto dos resultados numéricos das formulações em destaque nesse trabalho.

Por fim, o capítulo 7 é composto pelas conclusões e propostas de trabalhos futuros relacionados ao tema desta dissertação.





## Revisão Bibliográfica

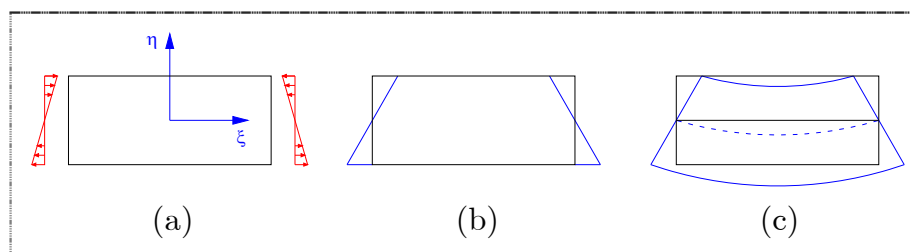
Este capítulo se propõe a fazer uma revisão de algumas pesquisas relevantes relativas às formulações aqui denominadas de não-convencionais, bem como apresentar os conceitos pertinentes a este tema. Inclui-se, em particular, uma breve apresentação do método dos elementos finitos generalizados.

Em razão dos aspectos conceituais envolvidos, a revisão é apresentada separadamente em itens relativos aos modos incompatíveis e deformações assumidas.

### 2.1 Modos incompatíveis

#### 2.1.1 Conceituação e trabalhos pioneiros

Essencialmente os modos incompatíveis são funções extras de interpolação de deslocamento que violam a compatibilidade interelementos. Estas funções adicionais são escolhidas de modo a melhorar a representatividade das aproximações em vista das características da resposta exata em deslocamentos do problema. Claramente uma das principais causas das imprecisões nos elementos quadrilaterais de baixa ordem é a sua incapacidade de representar modos de deslocamento decorrente de simples gradientes de tensões, como no caso da flexão pura ilustrada na Figura 2.1.

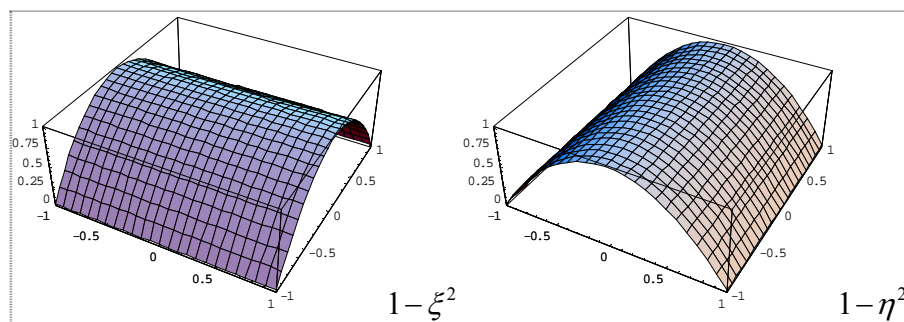


**Figura 2.1 – Elemento finito quadrilateral sob flexão pura.**

A Figura 2.1 (a) apresenta o elemento finito quadrilateral bilinear submetido a um carregamento de flexão pura. Por sua vez a Figura 2.1 (b) mostra a

resposta fornecida pelo elemento finito, notando-se no confronto com a Figura 2.1 (c), que mostra a resposta exata em deslocamentos do problema, a incapacidade do elemento de baixa ordem para representar a deformação por flexão.

Procurando superar essa limitação do elemento, o método dos modos incompatíveis foi introduzido originalmente por (WILSON *et al*, 1973). Nesse trabalho, os pesquisadores adicionaram duas funções interpoladoras incompatíveis (ver Figura 2.2), às quatro funções de forma nodais do elemento isoparamétrico de baixa ordem Q4. Com isto melhorou-se sua capacidade de representação de gradientes simples de tensão, originando o elemento Q6. Tratou-se, portanto, de um aperfeiçoamento dos elementos de baixa ordem, com ganho de desempenho em aplicações relativas a estados planos associados à flexão.



**Figura 2.2 – Modos incompatíveis.**

A limitação apresentada pelo elemento Q6 é que o mesmo só passa no teste do mosaico<sup>1</sup> (“Patch-test”) quando preservada a sua forma de paralelogramo. Devido a essa limitação (TAYLOR; BERESFORD; WILSON, 1976) propuseram uma nova modificação, dando origem ao elemento Qm6, passando atender ao referido teste para qualquer forma distorcida que venha a apresentar. Tal elemento proporcionou um alto grau de precisão para redes pouco refinadas, assim como em redes intensamente distorcidas.

---

<sup>1</sup> Teste do mosaico é a tradução adotada para o português de Patch-test.

### 2.1.2 Outros trabalhos significativos

(WACHSPRESS, 1978) propôs um elemento também incompatível, tendo como base o elemento quadrilateral de oito nós, porém com a substituição das funções de forma compatíveis atreladas aos nós internos dos lados pelos modos incompatíveis de (WILSON *et al*, 1973). O novo elemento foi denominado QP6 e apresentou resultados similares aos do Qm6. Uma vantagem desta formulação em relação à anterior seria o potencial ganho computacional quando da extensão dos mesmos conceitos à formulação do elemento de volume.

Em (LESAINT; ZLÁMAL, 1980) desenvolve-se uma detalhada investigação matemática no tocante à convergência das soluções apresentadas pelo elemento não-conforme Q6 de (WILSON *et al*, 1973), bem como a sua extensão Qm6, para redes quadrilaterais arbitrárias.

No trabalho de (PIAN; CHEN, 1982) o conceito de modos incompatíveis é usado juntamente com os princípios variacionais de Hellinger-Reissner e de Hu-Washizu, envolvendo três campos de aproximação (deslocamento, tensão e deformação), gerando uma formulação equivalente ao modelo Híbrido de Tensão. A comparação entre o modelo convencional Híbrido de Tensão e o modelo baseado no emprego de modos incompatíveis de deslocamentos, considerando-se elementos planos de quatro nós e tridimensionais de oito nós é apresentada em (PIAN; TONG, 1986).

## 2.2 Campo de deformações enriquecido

O conjunto de trabalhos que emprega um enriquecimento direto do campo de deformações tem relação direta com as propostas que introduziram o chamado método B-barras ( $\bar{B}$ ) e os campos de deformações assumidas.

### 2.2.1 Deformações assumidas e método do operador $\bar{B}$

As bases para o método do operador  $\bar{B}$  foram apresentadas pioneiramente em (HUGHES, 1980). Nesse trabalho, para tratar dos casos de quase-incompressibilidade, o autor propõe uma divisão das matrizes dos operadores de

compatibilidade deformação-deslocamento em duas parcelas: uma desviadora (“deviatoric part”) e outra hidrostática (“mean-dilatational”). A parte hidrostática é então substituída por uma relação deformação-deslocamento definida por um apropriado operador  $\bar{B}$  de modo a evitar o travamento da resposta numérica.

Por outro lado a definição de “deformação assumida” é apresentada originalmente no trabalho de (SIMO; RIFAI, 1990) como um caso particular do método dos modos incompatíveis desenvolvido a partir do princípio variacional de três campos de Hu-Washizu. Fundamentalmente as deformações são definidas como a soma de duas parcelas: uma primeira, compatível, determinada pelo gradiente simétrico do campo de deslocamentos e a segunda denominada parte enriquecida não-compatível. Tal definição é expressa pela relação (2.1).

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla^s \boldsymbol{u} + \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (2.1)$$

### 2.2.2 Histórico de trabalhos sobre deformações assumidas

Um conjunto de elementos finitos baseados no chamado método misto com deformações assumidas foi desenvolvido por (SIMO; RIFAI, 1990) para o caso linear. Em (SIMO; ARMERO, 1992) apresentam-se satisfatórios resultados em problemas bidimensionais com concentrações de tensões e redes distorcidas, bem como em problemas tridimensionais com singularidades e incompressibilidade. Posteriormente, em (SIMO; ARMERO; TAYLOR, 1993) a formulação é estendida para o caso não-linear. Os elementos foram estruturados à luz do princípio variacional de Hu-Washizu e apresentaram um bom comportamento em redes distorcidas, assim como nos casos de incompressibilidade.

Nota-se que no trabalho de (SIMO; ARMERO; TAYLOR, 1993) a formulação do método dos modos incompatíveis baseada no princípio variacional de Hu-Washizu em três campos foi re-elaborada, abandonando-se o conceito original de modo incompatível, passando a introduzir o campo enriquecido de deformação diretamente por substituição. Além disso, o campo de tensão foi construído de tal

forma a atender uma condição de complementaridade ortogonal em relação ao campo de deformação enriquecido, deste modo não aparecendo na formulação variacional final do método.

Já (HUECK; REDDY; WRIGGERS, 1994) e (HUECK; WRIGGERS, 1995) formularam um novo elemento quadrilateral empregando a expansão das funções de forma em série de Taylor, e considerando coordenadas físicas do elemento. Posteriormente (WRIGGERS; HUECK, 1996) estenderam a formulação desse elemento para a consideração de deformações elásticas finitas.

Um novo avanço visando o enriquecimento do campo das deformações do elemento de quatro nós foi proposto por (KORELC; WRIGGERS, 1997), sempre fazendo uso de expansão em série de Taylor para geração das funções de forma e obtenção das matrizes de interpolação de deformações. Mostrou-se nas simulações numéricas que o elemento apresentou bons resultados, destacadamente em regimes de redes excessivamente distorcidas.

No seu trabalho (GLASER; ARMERO, 1997) propõem duas modificações sobre os elementos planos de (SIMO; ARMERO, 1992): uma simetrização completa das interpolações de enriquecimento gerando o elemento Q1/ES4 e uma utilização de transposta de alguns termos que formam as interpolações de enriquecimento gerando o elemento Q1/ET4.

Em (PILTNER; TAYLOR, 1995) formulou-se um elemento quadrilateral bilinear baseado no funcional de Hu-Washizu (QE2) introduzindo dois enriquecimentos em deformações, com seus graus de liberdade posteriormente eliminados via condensação estática. Já (PILTNER; TAYLOR, 1999) descrevem uma metodologia para a construção das matrizes dos operadores de compatibilidade deformação-deslocamento, fundamentando-se no método do operador  $\bar{B}$  proposto por (HUGHES, 1980), com vistas ao desenvolvimento de elementos de formulação mista com enriquecimento em deformações. Em seguida (PILTNER; TAYLOR, 2000)

propõe a utilização do enriquecimento em deformações para aperfeiçoamento do elemento triangular de deformação constante (CST).

Dois novos elementos são propostos por (CÉSAR DE SÁ; NATAL, 1999). O primeiro, Qi5, envolve a adição de dois novos modos de deslocamento compatíveis no domínio do elemento; o segundo, Qi6, faz uso do mesmo conceito de deformações assumidas de (SIMO; RIFAI, 1990). Em (CÉSAR DE SÁ *et al*, 2002) é desenvolvido um elemento quadrilateral para cascas usando o conceito de enriquecimento em deformações assumidas, obtendo resultados satisfatórios. O mesmo grupo de pesquisadores em (SOUSA *et al*, 2005) desenvolve um novo elemento sólido para cascas em análises lineares, empregando o método das deformações assumidas para viabilizar integrações numéricas envolvendo um ponto de quadratura na superfície média e múltiplos pontos ao longo da espessura. Em (SOUSA *et al*, 2006) a metodologia é estendida para aplicações não lineares.

Em seu artigo (FERREIRA; ROEHL, 2001) fazem o uso de elementos enriquecidos em deformações assumidas, em aplicações envolvendo regimes de grandes deformações e contato elasto-plástico tridimensional. Em (CHAVAN; LAMICHHANE; WOHLMUTH, 2007) apresenta-se uma extensão da formulação mista derivada do princípio variacional de Hu-Washizu a modelos não-lineares gerais da hiperelasticidade.

Em trabalhos recentes como de (ZHOU; CHOW; LEUNG, 2007) e (ZHOU; CHOW; LEUNG, 2007-b) mostra-se o quanto é aplicável o método das deformações assumidas no aperfeiçoamento dos elementos finitos. Em particular sua eficácia é comprovada em problemas geotécnicos, como por exemplo, a determinação de cargas de colapso de solos não-drenados e em problemas de consolidação de solos.

### 2.3 Deformação assumida com integração reduzida e estabilização

A integração reduzida consiste na utilização de um pequeno número de pontos para o cálculo numérico de integrais como forma de superar imprecisões

decorrentes do emprego de elevada quantidade de pontos de integração, que paradoxalmente podem ocorrer em certas categorias de problemas. Como exemplos podem-se citar o caso de quase-incompressibilidade (travamento volumétrico) e também os casos das placas e cascas finas onde a rigidez ao cisalhamento não tende a zero com a mesma velocidade com que tende a rigidez à flexão quando a espessura diminui, causando o chamado travamento por cisalhamento. As razões para a eficiência desta técnica são discutidas em (ZIENKIEWICZ; HINTON, 1976).

A integração reduzida, entretanto, apresenta o grande inconveniente de introduzir modos espúrios de deformação, que podem levar, em alguns casos, a matrizes singulares. Esse efeito fica bem evidenciado quando a integração se dá por uma regra de quadratura com apenas um ponto em elementos quadrilaterais planos ou hexaedros (no caso tridimensional). No intuito de superar esse drástico “efeito colateral”, várias técnicas foram desenvolvidas por pesquisadores de métodos numéricos, com destaque para o método de estabilização proposto por (BELYTSCHKO *et al*, 1984).

Tendo por base o princípio variacional de Hu-Washizu, em (BELYTSCHKO; BACHRACH, 1986) apresenta-se a técnica da integração reduzida para o desenvolvimento de elementos finitos quadrilaterais e sua aplicação na resolução de problemas de flexão e materiais incompressíveis. A extensão da formulação (metodologia) para problemas não-lineares coube a (BELYTSCHKO; BINDEMAN, 1991).

Em (CARDOSO *et al*, 2002) desenvolve-se um elemento finito de casca para aplicações não-lineares e para casos de anisotropia. O elemento proposto é do tipo quadrilateral com cinco graus de liberdade nodais e integração reduzida com apenas um ponto de quadratura.

Baseado nos trabalhos de Belytschko e co-autores, (FREDRIKSSON; OTTOSEN, 2004) propuseram um aperfeiçoamento do elemento de quatro nós para



problemas planos, ainda empregando-se a técnica de estabilização (“hourglass stabilization”). Segundo esta técnica, à matriz de rigidez obtida com um ponto de quadratura é adicionada uma matriz estabilizante, por sua vez construída em sintonia com modos de deformação de flexão pura.

Com base no método das deformações assumidas (SIMO; RIFAI, 1990) e na metodologia desenvolvida no trabalho citado anteriormente, (FREDRIKSSON; OTTOSEN, 2007) propuseram um elemento axissimétrico de quatro nós com as características de evitar o travamento volumétrico e proporcionar bons resultados em redes pouco refinadas. O elemento proposto possui a mesma simplicidade conceitual do modelo clássico em deslocamentos, sem comprometer o custo computacional, porém se mostra mais preciso. Ademais, quando comparado a outros elementos mistos bem conceituados, o elemento proposto se mostra significativamente mais simples, sem requerer inversões de matrizes e gerando resultados similares ou melhores.

## 2.4 Método dos elementos finitos generalizados

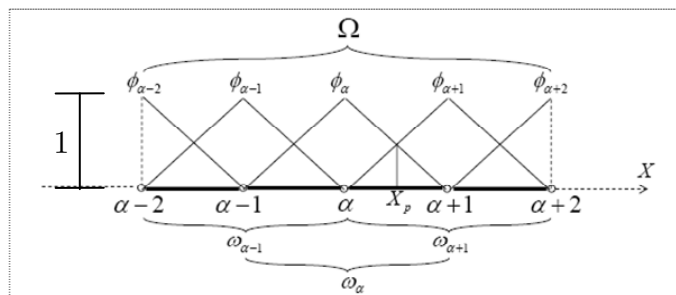


Figura 2.3 – Partição da Unidade  $\mathfrak{R}^1$ , retirado de (MANGINI, 2006).

Objetivando melhorar a capacidade de aproximação dos elementos finitos, dispensando o emprego de redes excessivamente refinadas, o MEFG surgiu como uma combinação entre o MEF clássico e técnicas empregadas para o enriquecimento de aproximações, típicas dos métodos sem malha. O MEFG se diferencia dos métodos sem malha por construir o enriquecimento a partir da multiplicação de funções partição da unidade por funções especiais. As funções partição da unidade (PU) se

caracterizam por apresentar soma unitária dos seus valores em pontos do domínio, ver Figura 2.3.

Outra propriedade importante do MEEG decorrente do uso da PU é que o enriquecimento se dá sem comprometer a continuidade entre os elementos. A PU além de garantir a conformidade (continuidade) permite que o enriquecimento seja seletivo, de tal modo, que apenas certas áreas do domínio sejam convenientemente aprimoradas. A Figura 2.4 apresenta a ilustração desse enriquecimento no caso bidimensional, mostrando, em particular, a função enriquecida resultante do produto entre a partição da unidade e uma aproximação local de interesse.

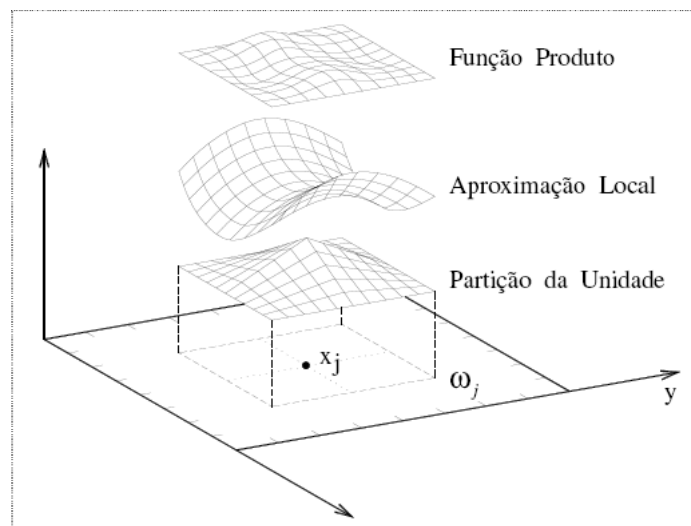


Figura 2.4 – Enriquecimento da PU em  $\mathbb{R}^2$ , retirado de (BARROS, 2002).

O Método dos Elementos Finitos Generalizados, segundo (BARROS, 2002 *apud* DUARTE; BABUŠKA; ODEN, 2000), foi proposto de forma independente por diversos pesquisadores sob as seguintes denominações:

- Método dos Elementos Finitos Especiais em (BABUŠKA; CARLOZ; OSBORN, 1994);
- Método da Partição da Unidade em (MELENK; BABUŠKA, 1996);
- Método das Nuvens por (DUARTE, 1996);
- Uma formulação Híbrida entre o MEF clássico e o Método das nuvens por

(ODEN; DUARTE; ZIENKIEWICZ, 1998).

Segundo (TORRES, 2003), o MEFG faz uso dos seguintes pontos positivos do MEF: emprego das funções de forma convencionais na geração da PU; uso da própria malha do MEF para a definição de domínios de integração e enriquecimento; robustez do MEF (um método bastante testado e com grande quantidade de pacotes já implementados) e facilidade na imposição das condições de contorno essenciais.

Ainda segundo (TORRES, 2003), aliado às anteriormente mencionadas, somam-se as seguintes vantagens do MEFG: possibilidade de modelar regiões com singularidades ou concentrações de tensão; facilidade no refino p (acrescentam-se parâmetros aos nós já existentes e não novos nós como no MEF) e por último enriquecimento apenas em área de interesse.

O MEFG tem sido uma importante ferramenta de pesquisa no âmbito do departamento de Engenharia de Estruturas (SET). Nos últimos anos se destacam os trabalhos dos seguintes pesquisadores:

- (BARROS, 2002) emprega o MEFG e métodos sem malha, na mecânica do dano;
- (TORRES, 2003) desenvolve análises tridimensionais não-lineares de sólidos via MEFG;
- (GÓIS, 2004) combina a Formulação Híbrido-Mista de Tensão com o MEFG, no estudo de problemas em elasticidade plana;
- (NIRSCHL, 2005) analisa tubos cilíndricos e cascas esféricas com uso de técnicas de enriquecimento;
- (MANGINI, 2006) usa o MEFG para análise de cascas axissimétricas em regime linear.

## Tópicos da Teoria da Elasticidade e a Formulação Híbrido-Mista Geral

Este capítulo visa apresentar um resumo geral dos conceitos e notações de teoria da elasticidade linear em consonância com as formulações mistas de problemas elásticos. Sendo assim, não é o objetivo deste capítulo explicar todas as particularidades da teoria da elasticidade, tendo-se em vista que as mesmas já estão suficientemente caracterizadas em obras como (TIMOSHENKO; GOODIER, 1983), (VALLIAPPAN, 1981) e (VILLAÇA; GARCIA, 2000), além de outras que não foram aqui listadas.

### 3.1 Definições gerais da Elasticidade

Entende-se por elasticidade a capacidade apresentada por um meio material deformado de recuperar a posição inicial quando as cargas que provocaram a deformação são totalmente retiradas. Quando o corpo retorna totalmente ao seu estágio inicial depois de cessada as ações que o deformaram, o material do referido corpo é dito perfeitamente elástico; se ao retirado o carregamento, ainda são mantidas algumas deformações residuais, o material é chamado parcialmente elástico.

São admitidas previamente algumas hipóteses com relação aos materiais que formam as estruturas estudadas neste trabalho:

- Materiais se comportando de modo perfeitamente elástico, de forma a não haver deformações residuais;
- Homogeneidade, ou seja, o material possui as mesmas características em todos os seus pontos;
- Isotropia: num ponto as propriedades são as mesmas, independente das direções que se considerem;
- Continuidade, não há falha (vazios) no domínio do sólido ou estrutura;

Embora os materiais estruturais não satisfaçam completamente todas essas hipóteses, tais simplificações se mostram bastante coerentes, uma vez que fornecem resultados significativamente precisos, para grande parte das aplicações práticas.

A Figura 3.1 apresenta um sólido elástico, o qual ocupa um domínio aberto representado por  $V$  e de contorno  $\Gamma$ , sendo que estas regiões verificam a seguinte propriedade:

$$V \cap \Gamma = \emptyset \quad (3.1)$$

Tal propriedade garante que a superfície de contorno não faça parte do domínio. Por sua vez, o contorno é formado por duas partes bem definidas: a primeira representada na Figura 3.1 na cor azul, possui condições de contorno prescritas em forças, sendo chamada contorno de Neumann e representada por  $\Gamma_t$ . Já a segunda parte se apresenta na cor preta e é chamada contorno de Dirichlet, onde são prescritos os deslocamentos, sendo representada por  $\Gamma_u$ . Estas duas partes verificam as seguintes condições:

$$\begin{aligned} \Gamma_t \cap \Gamma_u &= \emptyset \\ \Gamma_t \cup \Gamma_u &= \Gamma \end{aligned} \quad (3.2)$$

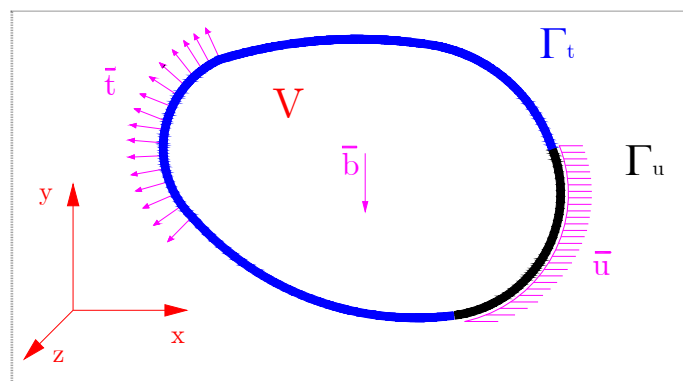


Figura 3.1 – Sólido elástico (domínio tridimensional).

Sobre o sólido da Figura 3.1 atuam dois tipos de forças: o primeiro,  $\bar{b}$ , é distribuído por unidade de volume, e o segundo tipo,  $\bar{t}$ , é de forças distribuídas por unidade de superfície, no contorno de Neumann. Além das forças apresenta-se na

referida figura, sob o contorno de Dirichlet, vetores  $\bar{u}$  que reúnem as componentes de deslocamento prescritas.

O arranjo ilustrado na Figura 3.1 é utilizado para auxiliar na apresentação de mais alguns conceitos importantes da teoria da elasticidade, que são fundamentais para este trabalho de pesquisa como um todo.

O deslocamento de um ponto do sólido é uma grandeza geométrica vetorial definida pela diferença entre os vetores posição inicial e final, estes caracterizados quando da atuação de cargas no corpo (ver Figura 3.2).

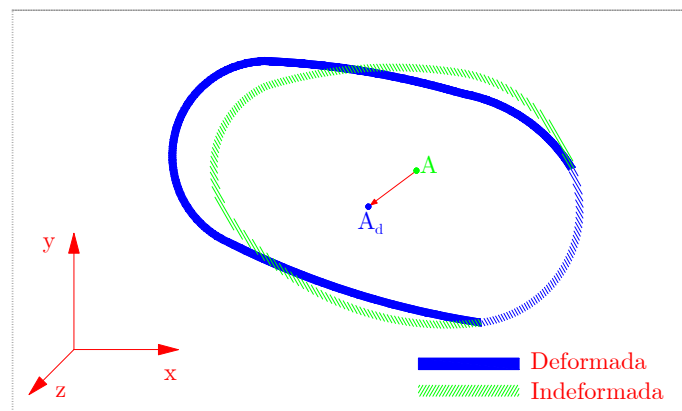


Figura 3.2 – Representação do deslocamento.

O vetor deslocamento  $\bar{u}$  é formado por três componentes, cada qual associada a uma direção de referência, e representa-se de acordo com a relação (3.3):

$$\bar{u} = \begin{Bmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{Bmatrix} \quad (3.3)$$

Já a deformação é uma grandeza tensorial que reúne medidas das mudanças de forma e volume do corpo. Apenas pequenas deformações são aqui admitidas, e podem ser caracterizadas mediante duas classes de medidas: a deformação linear (alongamento) e a deformação angular (distorção).

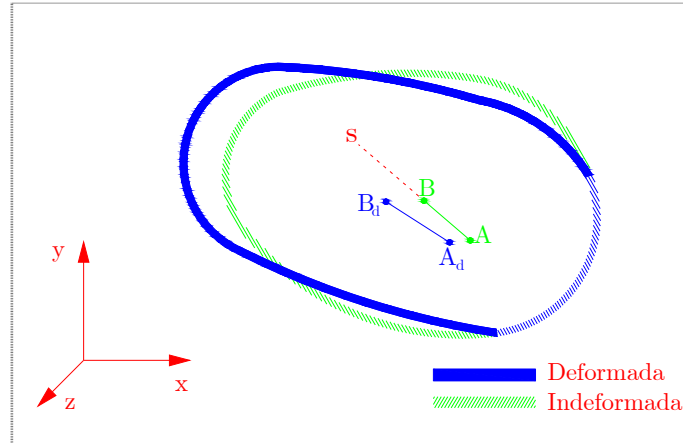


Figura 3.3 – Caracterização da deformação linear.

A deformação linear específica é definida em função das diferenças dos comprimentos finais e iniciais, medidos entre dois pontos do sólido. Já deformação angular específica (distorção, ou também deformação por cisalhamento), é definida pela variação do ângulo inicial formado pelos segmentos inseridos inicialmente nas semi-retas  $s$  e  $t$ , sendo estas definidas entre três pontos não-colineares do sólido (usualmente tomam-se semi-retas ortogonais entre si). As Figuras 3.3 e 3.4 ilustram esses conceitos.

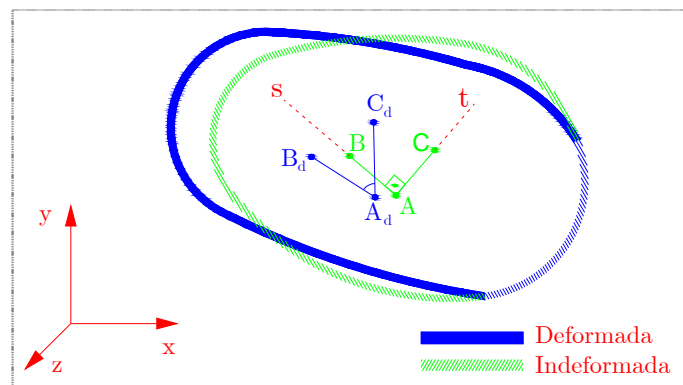


Figura 3.4 – Caracterização da deformação angular.

O estado de deformação local, em um ponto qualquer do sólido tridimensional, pode ser completamente caracterizado pelas medidas lineares e angulares segundo três direções ortogonais entre si. Dessa forma, o estado de deformação configura-se como uma grandeza tensorial de segunda ordem, simétrica e em notação matricial é apresentada na relação (3.4).

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

As componentes de deformação são todas funções das posições do ponto em que se determinam, sendo assim elas são caracterizadas individualmente pelas relações (3.5):

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \varepsilon_x(x, y, z) \\ \varepsilon_y &= \varepsilon_y(x, y, z) \\ \varepsilon_z &= \varepsilon_z(x, y, z) \\ \gamma_{xy} &= \gamma_{xy}(x, y, z) \\ \gamma_{xz} &= \gamma_{xz}(x, y, z) \\ \gamma_{yz} &= \gamma_{yz}(x, y, z) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Por último, a tensão é relacionada à medida local da intensidade de ligação entre partes do meio segundo diferentes direções; os valores pontuais de tensão possuem dimensão de força por unidade de área. A Figura 3.5 ilustra esse conceito.

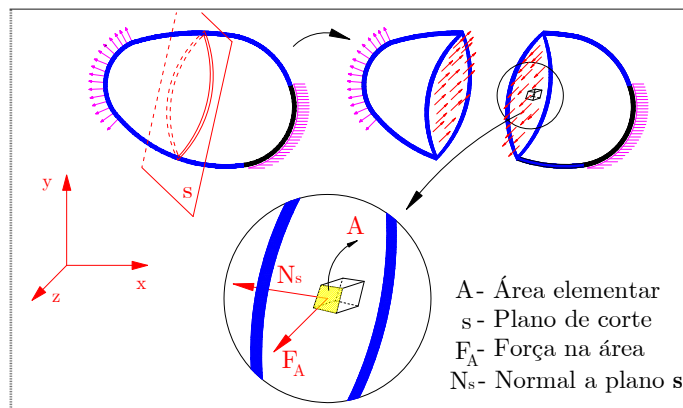


Figura 3.5 – Visualização de esforço interno.

O estado de tensão num ponto pode ser caracterizado pelas componentes de tensão segundo três planos ortogonais entre si. A representação gráfica desse conceito encontra-se na Figura 3.6, destacando-se as componentes de tensão normal  $\sigma$  e de cisalhamento  $\tau$  em cada plano.



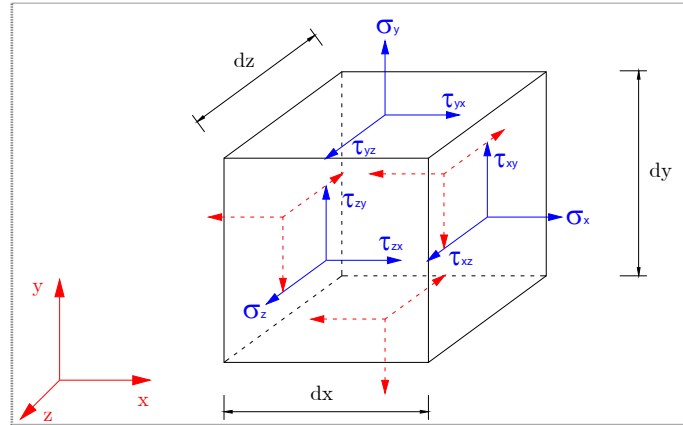


Figura 3.6 – Componentes de tensões segundo os eixos cartesianos.

As componentes indicadas compõem o tensor de tensões, simétrico e que pode ser representado matricialmente conforme a relação (3.6).

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

## 3.2 Equacionamento

### 3.2.1 Equações de equilíbrio

Considerando-se um paralelepípedo de dimensões infinitesimais do sólido, conforme a Figura 3.7, num estado de equilíbrio atuam, nas suas faces, esforços internos na forma de tensões normais e cisalhantes, e no seu interior um carregamento externo representado pela força de volume  $b$ .

Como hipótese básica as tensões são contínuas ao longo do domínio da estrutura, de modo que em faces paralelas pode-se admitir que as tensões difiram de valores infinitesimais; por exemplo, na face aposta à qual se tem uma tensão normal  $\sigma_x$  atua uma tensão de valor  $\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx$ . De forma análoga, as demais tensões possuem variações infinitesimais, conforme se observa na Figura 3.7.

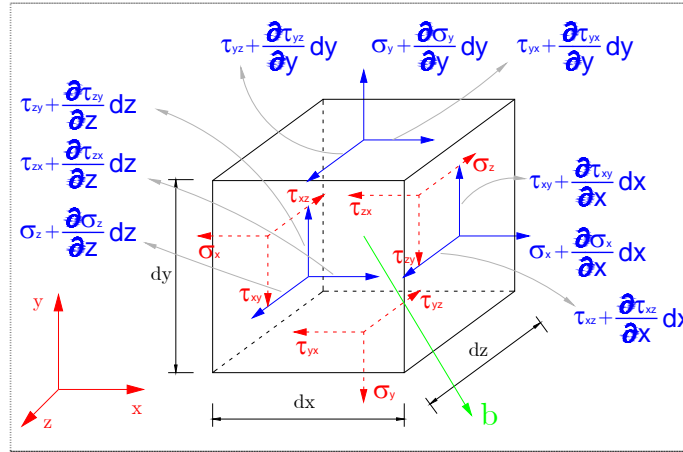


Figura 3.7 – Elemento infinitesimal em equilíbrio.

Fazendo o equilíbrio de momentos segundo as três direções, recai-se nas relações (3.7), que corroboram a condição de simetria do tensor de tensões:

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= \tau_{yx} \\ \tau_{yz} &= \tau_{zy} \\ \tau_{zx} &= \tau_{xz} \end{aligned} \tag{3.7}$$

Ao realizar a soma das contribuições das forças segundo cada direção, obtêm-se as três equações de equilíbrio (3.8), onde  $b_x$ ,  $b_y$  e  $b_z$  são as parcelas da força volumétrica segundo cada direção:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + b_x &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + b_y &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + b_z &= 0 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Podem-se representar as equações (3.8) de forma compacta, onde  $L$  representa o operador de diferenciais sobre o tensor de tensão:

$$L\sigma + \bar{b} = 0 \tag{3.9}$$

### 3.2.2 Relações deformação-deslocamento

Com o auxílio da representação geométrica num plano, conforme a Figura

3.8, por exemplo para o plano x-y, pode-se obter com relativa simplicidade todas as relações entre deslocamento e deformações, sejam estas lineares ou angulares.

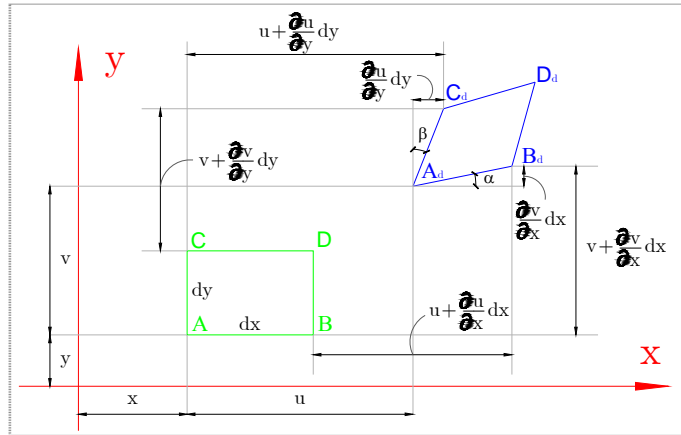


Figura 3.8 – Representação da deformação no plano x-y.

A deformação linear na direção  $x$  nada mais é do que uma medida relativa do alongamento sofrido pelas fibras, podendo ser interpretado com a ajuda da Figura 3.8, e apresenta a seguinte relação:

$$\varepsilon_x = \frac{A_d B_d - AB}{AB} = \frac{(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx + dx - u) - dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (3.10)$$

De modo análogo à equação (3.10), obtêm-se as demais deformações lineares:

$$\begin{aligned} \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned} \quad (3.11)$$

Já a deformação angular refere-se à mudança de direção relativa entre os lados do paralelogramo da Figura 3.8, dessa forma:

$$\begin{aligned} \tan \alpha &= \frac{(v + \frac{\partial v}{\partial x} dx) - v}{(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx + dx) - u} = \frac{\frac{\partial v}{\partial x}}{1 + \frac{\partial u}{\partial x}} \\ \tan \beta &= \frac{(u + \frac{\partial u}{\partial y} dy) - u}{(v + \frac{\partial v}{\partial y} dy + dy) - v} = \frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{1 + \frac{\partial v}{\partial y}} \end{aligned} \quad (3.12)$$

Como na hipótese inicial básica é admitido que o regime de deformações se dá por pequenos deslocamentos, permite que se considere que  $1 \gg \frac{\partial u}{\partial x}$  e  $1 \gg \frac{\partial v}{\partial y}$ , ficando as equações (3.12) reescritas da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\tan \alpha &= \frac{\partial v}{\partial x} \cong \alpha \\ \tan \beta &= \frac{\partial u}{\partial y} \cong \beta\end{aligned}\tag{3.13}$$

Finalmente se chega que a distorção angular no plano x-y apresenta-se do seguinte modo:

$$\gamma_{xy} = \beta + \alpha = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\tag{3.14}$$

Generalizando-se para o caso tridimensional as demais componentes são dadas por:

$$\begin{aligned}\gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \gamma_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\end{aligned}\tag{3.15}$$

De forma geral pode-se escrever a relação entre deformações e deslocamentos da seguinte forma:

$$L^T \vec{u} = \varepsilon\tag{3.16}$$

### 3.2.3 Modelo constitutivo

O modelo constitutivo rege a relação entre tensões e deformações, de modo a descrever o comportamento do material. No regime elástico linear a esta relação é dado o nome de *Lei de Hooke Generalizada*, representada pela relação (3.17) que segue. Nessa relação  $C$  representa o tensor de quarta ordem que contem as constantes elásticas do material da estrutura.

$$\sigma = C \varepsilon\tag{3.17}$$

Pode-se facilmente, a depender da conveniência, escrever a relação inversa da (3.17):

$$\varepsilon = C^{-1}\sigma \quad (3.18)$$

No início deste capítulo foram relacionadas algumas hipóteses simplificadoras (homogeneidade, isotropia e linearidade elástica), tais hipóteses fazem com que o número de constantes necessárias para a caracterização do modelo constitutivo seja reduzido a apenas duas: o Módulo de Elasticidade Longitudinal ( $E$ , Módulo de Young) e o Coeficiente de Poisson ( $\nu$ ). Comumente, usam-se também as constantes de Lamè, que se relacionam com  $E$  e  $\nu$  da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ \mu &= \frac{E}{2(1+\nu)} \end{aligned} \quad (3.19)$$

A relação (3.17) pode ser agora reescrita de forma aberta, fazendo uso das constantes de Lamè, para o caso geral de Elasticidade Linear, resultando na seguinte representação:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda+2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda+2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda+2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

### 3.3 Problemas elásticos planos

Problemas elásticos planos ocorrem quando, por razões de geometria e de carregamento, uma dimensão pode ser adequadamente desconsiderada. Estes problemas se dividem em duas classes: Estado Plano de Tensão (EPT) e Estado Plano de Deformação, que serão brevemente discutidos a seguir.

### 3.3.1 Estado plano de tensão (EPT)

O exemplo clássico de uma estrutura que trabalha eminentemente em EPT é a chapa, uma vez que ela tem por definição uma dimensão muito menor que as duas principais, e as cargas que nela atuam são paralelas ao seu plano de definição. Dessa forma, a chapa disposta conforme a Figura 3.9, terá todas as tensões ligadas à direção  $z$  nulas; portanto, caracteriza-se um estado de tensões planas ( $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  e  $\tau_{xy}$ ). Embora não haja tensões na direção  $z$ , a sua correspondente deformação  $\varepsilon_z$  não é necessariamente nula.

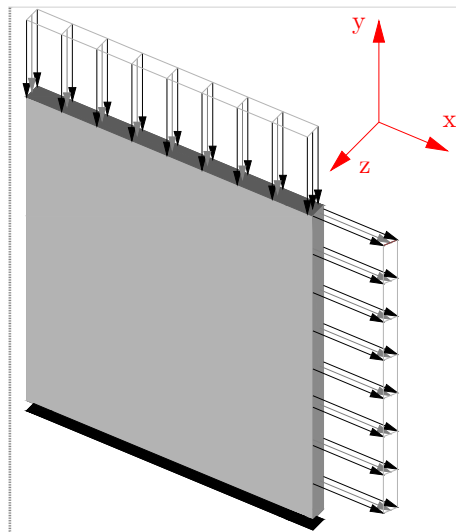
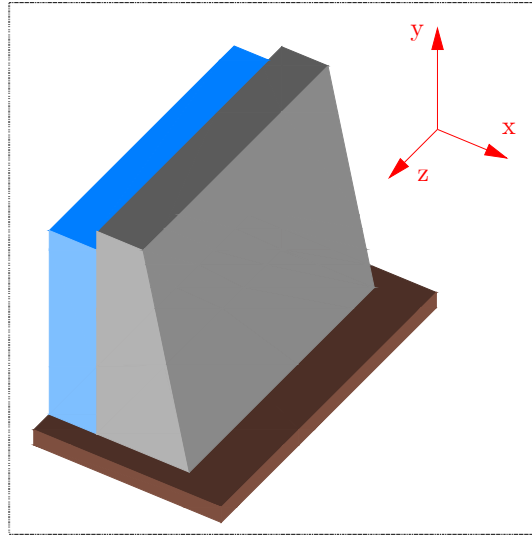


Figura 3.9 – Estrutura (Chapa) em EPT.

### 3.3.2 Estado plano de deformação (EPD)

As barragens estão entre as grandes estruturas da Engenharia Civil e se mostram, na maior parte dos casos, como um exemplo bastante adequado do EPD, pois, em geral, apresentam uma dimensão significativamente maior que as duas outras, de tal modo que as deformações ocorridas na direção de maior dimensão são em geral nulas. Além disso, as seções transversais apresentam as mesmas condições de deslocamento e de deformação, independente da escolha da posição ao longo da direção principal (direção  $z$ ) da barragem, conforme ilustra a Figura 3.10.



**Figura 3.10 – Estrutura (Barragem) em EPD.**

As deformações neste caso caracterizam-se por três componentes (duas lineares e uma angular) contidas no plano da seção.

### 3.4 Problemas axissimétricos

Os sólidos axissimétricos são aqueles cuja superfície média pode ser gerada a partir da rotação de uma curva geratriz em torno de um eixo de referência. A análise desses sólidos se simplifica quando também o carregamento aplicado atende ao requisito de axissimetria em relação ao eixo de referência. A Figura 3.11 mostra uma visão geral de uma estrutura axissimétrica com sua nomenclatura e sua simplificação geométrica.

Devido à axissimetria, duas componentes de deslocamento que passem por qualquer plano, desde que esse plano contenha o eixo de simetria, definem completamente o estado deformado da estrutura. Desse modo, o problema axissimétrico é bastante similar aos problemas planos vistos anteriormente. Para tanto é selecionado um plano meridiano  $r-z$ , cujas componentes de deslocamento são respectivamente  $u$  e  $v$ .

Segundo um sistema de coordenadas cilíndricas, convenientemente adotado, o tensor de deformações fica reescrito para o caso axissimétrico dependendo

agora de quatro componentes, conforme se segue:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{rz} \\ \varepsilon_\theta \end{Bmatrix} \quad (3.21)$$

É possível mostrar que a relação entre as deformações e os deslocamentos assume agora a seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{rz} \\ \varepsilon_\theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{u}{r} \end{Bmatrix} \quad (3.22)$$

Conseqüentemente o estado de tensões fica, então, reduzido a quatro componentes, e se relaciona com as deformações do seguinte modo:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_z \\ \tau_{rz} \\ \sigma_\theta \end{Bmatrix} = \underline{\underline{C}} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.23)$$

A matriz  $\underline{\underline{C}}$  é tal que:

$$\underline{\underline{C}} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} (1-\nu) & \nu & 0 & \nu \\ \nu & (1-\nu) & 0 & \nu \\ 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} & 0 \\ \nu & \nu & 0 & (1-\nu) \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

O presente trabalho considera aplicações destas estruturas em regime elástico linear, atendendo a um conjunto de outras hipóteses simplificadoras, além das que já foram anteriormente citadas neste capítulo: espessura pequena em relação às outras dimensões; regime de pequenos deslocamentos em vista da espessura; tensões



normais à superfície são desprezíveis em relação às demais e pontos pertencentes à retas perpendiculares à superfície média se mantêm em retas perpendiculares a superfície média deformada (pequenos giros).

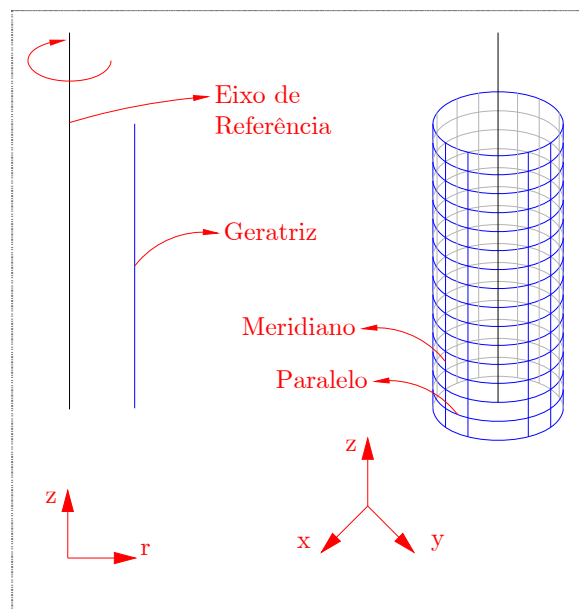


Figura 3.11 – Estrutura axissimétrica (Cilindro).

### 3.5 Formulação variacional em resíduos ponderados (Híbrido-Mista)

O conjunto de relações de equilíbrio, compatibilidade, constitutiva e condições de contorno, problema de valor de contorno (PVC), pode ser expresso em forma ponderada, isto é na forma de integrais sobre o domínio do sólido, do produto de cada uma daquelas relações por uma função ponderadora (peso).

Este tipo de metodologia forma os Métodos de Resíduos Ponderados. A distinção entre os métodos de Resíduos Ponderados se dá principalmente pela escolha das funções-peso empregadas nas integrais.

A chamada forma forte do problema de valor de contorno (PVC) relativo ao sólido mostrado na Figura 3.1, para o caso de elasticidade linear plana, fica apresentada a seguir, pela reunião das equações anteriormente desenvolvidas:

- Equação de equilíbrio no domínio  $V$  do corpo bidimensional:

$$L\sigma + b = 0 \quad (3.25)$$

onde  $L$  é o operador diferencial (divergente) e  $b$  o vetor de forças volumétricas.

- Equação de compatibilidade:

$$\varepsilon - L^T u = 0 \quad (3.26)$$

- Lei constitutiva:

A relação (3.17) apresenta a ligação entre os tensores de tensão e deformação, mas a mesma pode também ser escrita como se segue:

$$\varepsilon = C^{-1}\sigma \quad (3.27)$$

onde  $C^{-1}$  é o tensor constitutivo de flexibilidade.

- Condições de contorno:

Por último apresentam-se, as condições de contorno:  $\Gamma_u$  (de Dirichlet) em deslocamento e  $\Gamma_t$  (de Neumann) de forças prescritas, respectivamente:

$$u = \bar{u} \quad (3.28)$$

$$\bar{t} - N\sigma = 0 \quad (3.29)$$

onde  $N$  é a matriz que reúne as componentes do vetor normal ao contorno de Neumann,  $\bar{t}$  é o vetor das forças de superfície em  $\Gamma_t$  e  $\bar{u}$  o vetor de deslocamentos impostos no contorno de Dirichlet.

Admitindo que o campo de deslocamentos no contorno de Dirichlet (3.28) seja atendido *a priori*, considerando a combinação das condições de compatibilidade (3.26) e constitutiva (3.27), o conjunto de equações do PVC pode ser convenientemente atendido em forma fraca, mediante as ponderações seguintes:

$$\begin{aligned}
\int_V (P_1)(L^T u - C^{-1} \sigma) dV &= 0 \\
\int_V (P_2)(L\sigma + b) dV &= 0 \\
\int_{\Gamma_t} (P_3)(\bar{t} - N\sigma) d\Gamma &= 0
\end{aligned} \tag{3.30}$$

Os vetores  $P_1$ ,  $P_2$  e  $P_3$  reúnem as funções-base de aproximação empregadas nas definições das ponderações:

$$p_1 = (P_1) \delta p_1 \quad p_2 = (P_2) \delta p_2 \quad p_3 = (P_3) \delta p_3 \tag{3.31}$$

Considerando a integração por partes da primeira equação de (3.30), aquele conjunto de relações resulta:

$$\begin{aligned}
\int_V (LP_1)^T u dV + \int_V (P_1)^T F \sigma dV - \int_{\Gamma_t} (NP_1) u_{\Gamma} d\Gamma - \int_{\Gamma_u} (NP_1)^T \bar{u} d\Gamma &= 0 \\
\int_V (P_2)(L\sigma) dV + \int_V (P_2)^T b dV &= 0 \\
-\int_{\Gamma_t} (P_3)(N\sigma) d\Gamma + \int_{\Gamma_t} (P_3)^T \bar{t} d\Gamma &= 0
\end{aligned} \tag{3.32}$$

A formulação dita geral híbrido-mista caracteriza-se por campos independentes de tensão no domínio, deslocamento no contorno e deslocamento no domínio. De acordo com esta formulação os campos de deslocamento no domínio e no contorno são diferentes, e as tensões e deslocamentos no domínio não apresentam compatibilidade entre si. Os mesmos podem ser aproximados conforme o que se segue:

$$u = U_V q_u^V \quad \sigma = S_V s_\sigma \quad u_{\Gamma} = U_{\Gamma_t} q_u^{\Gamma} \tag{3.33}$$

Substituindo (3.33) em (3.32) e rearranjando as equações (3.32) em forma matricial, tem-se:

$$\begin{bmatrix}
\int_V (P_1)^T F S_V dV & \int_V (LP_1)^T U_V dV & -\int_{\Gamma_t} (NP_1) U_{\Gamma_t} d\Gamma \\
\int_V (P_2)(L S_V) dV & 0 & 0 \\
-\int_{\Gamma_t} (P_3)(N S_V) d\Gamma & 0 & 0
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix}
s_\sigma \\
q_u^V \\
q_u^{\Gamma}
\end{Bmatrix}
=
\begin{Bmatrix}
\int_{\Gamma_u} (NP_1)^T \bar{u} d\Gamma \\
-\int_V (P_2)^T b dV \\
-\int_{\Gamma_t} (P_3)^T \bar{t} d\Gamma
\end{Bmatrix} \tag{3.34}$$

Para se garantir que o sistema (3.34) apresente simetria, as funções de ponderação têm que ser escolhidas em consonância com aproximações dos campos incógnitos. Uma opção, neste sentido, é que tais funções sejam as mesmas das funções solução, de modo semelhante ao Método de Galerkin. Assim sendo, passa-se a adotar:

$$P_1 = S_V \quad P_2 = U_V \quad P_3 = U_{\Gamma_t} \quad (3.35)$$

Substituindo as relações (3.35) no sistema (3.34), resulta um novo sistema, agora simétrico, conforme aparece na equação (3.36), a seguir:

$$\begin{bmatrix} \tilde{F} & A_V & -A_{\Gamma_t} \\ A_V^T & 0 & 0 \\ -A_{\Gamma_t}^T & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} s_\sigma \\ q_u^V \\ q_u^\Gamma \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_{\Gamma_u} \\ -Q_V \\ -Q_{\Gamma_t} \end{Bmatrix} \quad (3.36)$$

onde:

$$\begin{aligned} \tilde{F} &= \int_V S_V^T F S_V dV \quad ; \quad R_{\Gamma_u} = \int_{\Gamma_u} (N S_V)^T \bar{u} d\Gamma \quad ; \\ A_V &= \int_V (L S_V)^T U_V dV \quad ; \quad A_{\Gamma_t} = - \int_{\Gamma_t} (N S_V)^T U_{\Gamma_t} d\Gamma \quad ; \quad (3.37) \\ Q_V &= \int_V U_V^T b dV \quad e \quad Q_{\Gamma_t} = \int_{\Gamma_t} U_{\Gamma_t}^T \bar{t} d\Gamma \end{aligned}$$

A partir do momento em que se discretiza o domínio do sólido em elementos, o problema anterior, válido em cada elemento, passa a exigir novas condições a serem impostas nos contornos entre os elementos: são necessárias equações que garantam a compatibilidade dos deslocamentos (chamada hipótese de continuidade) e o equilíbrio das forças (chamada hipótese de reciprocidade). Como forma de reduzir o número de incógnitas adicionais, em geral uma destas condições (força ou deslocamento) é admitida em forma forte, enquanto que a segunda é atendida em forma fraca, isto é, via ponderação.

A primeira possibilidade reside na adoção em forma forte da reciprocidade das forças no contorno entre elementos, impondo-se a continuidade dos deslocamentos em forma ponderada. Nesse caso haverá o acréscimo de uma equação para garantir a

continuidade dos deslocamentos, razão pela qual tal formulação é chamada de Híbrido-Mista de Deslocamento (FHMD). O sistema resultante da contribuição de dois elementos, por exemplo, tem a seguinte representação esquemática:

$$\begin{bmatrix}
 \tilde{F}^A & A_V^A & -A_{\Gamma_i}^A & -A_{\Gamma_i}^A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 (A_V^A)^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 (-A_{\Gamma_i}^A)^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 (-A_{\Gamma_i}^A)^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (-B_{\Gamma_i}^A)^T \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{F}^B & A_V^B & -A_{\Gamma_i}^B & -A_{\Gamma_i}^B & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & (A_V^B)^T & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & (-A_{\Gamma_i}^B)^T & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & (-A_{\Gamma_i}^B)^T & 0 & 0 & 0 & (-B_{\Gamma_i}^B)^T \\
 0 & 0 & 0 & B_{\Gamma_i}^A & 0 & 0 & 0 & -B_{\Gamma_i}^B & 0
 \end{bmatrix}
 \begin{Bmatrix}
 s_\sigma^A \\
 q_u^{VA} \\
 q_u^{\Gamma A} \\
 q_u^{\Gamma_i A} \\
 s_\sigma^B \\
 q_u^{VB} \\
 q_u^{\Gamma B} \\
 q_u^{\Gamma_i B} \\
 p_{\Gamma_i}
 \end{Bmatrix}
 =
 \begin{Bmatrix}
 R_{\Gamma_u}^A \\
 -Q_V^A \\
 -Q_{\Gamma_i}^A \\
 0 \\
 R_{\Gamma_u}^B \\
 -Q_V^B \\
 -Q_{\Gamma_i}^B \\
 0 \\
 0
 \end{Bmatrix}
 \quad (3.38)$$

Já a segunda possibilidade consiste em admitir que haja continuidade nos deslocamentos no contorno comum, impondo-se a reciprocidade de forças via forma fraca. A equação adicional será de reciprocidade de forças e a formulação denomina-se então de Híbrido-Mista de Tensão (FHMT). O sistema resultante da contribuição de dois elementos tem a seguinte representação esquemática:

$$\begin{bmatrix}
 \tilde{F}^A & A_V^A & -A_{\Gamma_i}^A & 0 & 0 & 0 & -A_{\Gamma_i}^A \\
 (A_V^A)^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 (-A_{\Gamma_i}^A)^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \tilde{F}^B & A_V^B & -A_{\Gamma_i}^B & -A_{\Gamma_i}^B \\
 0 & 0 & 0 & (A_V^B)^T & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & (-A_{\Gamma_i}^B)^T & 0 & 0 & 0 \\
 (-A_{\Gamma_i}^A)^T & 0 & 0 & (-A_{\Gamma_i}^B)^T & 0 & 0 & 0
 \end{bmatrix}
 \begin{Bmatrix}
 s_\sigma^{VA} \\
 q_u^{VA} \\
 q_u^{\Gamma A} \\
 s_\sigma^{VB} \\
 q_u^{VB} \\
 q_u^{\Gamma B} \\
 q_u^{\Gamma_i}
 \end{Bmatrix}
 =
 \begin{Bmatrix}
 R_{\Gamma_u}^A \\
 -Q_V^A \\
 -Q_{\Gamma_i}^A \\
 R_{\Gamma_u}^B \\
 -Q_V^B \\
 -Q_{\Gamma_i}^B \\
 0
 \end{Bmatrix}
 \quad (3.39)$$

As submatrizes que aparecem a mais nos sistemas (3.38) e (3.39), em

relação ao sistema inicial (3.36), apresentam as seguintes expressões:

$$\begin{aligned} A_{\Gamma_i}^A &= \int_{\Gamma_i} (N^A S_V)^T U_{\Gamma_i}^A d\Gamma \quad ; \quad A_{\Gamma_i}^B = \int_{\Gamma_i} (N^B S_V)^T U_{\Gamma_i}^B d\Gamma \quad ; \\ B_{\Gamma_i}^A &= \int_{\Gamma_i} (U_{\Gamma_i}^A)^T W_{\Gamma_i} d\Gamma \quad e \quad B_{\Gamma_i}^B = \int_{\Gamma_i} (U_{\Gamma_i}^B)^T W_{\Gamma_i} d\Gamma \end{aligned} \quad (3.40)$$



## Estratégias de Enriquecimento

O objetivo deste capítulo é apresentar a formulação matemática das estratégias estudadas e implementadas pelo autor, com o intuito de aperfeiçoar o desempenho dos elementos finitos convencionais. Para tanto, o conteúdo do capítulo foi convenientemente dividido em duas partes: a primeira reúne os modelos para a solução do problema clássico de chapas carregadas em seu próprio plano, e a segunda, não menos importante parte, apresenta a formulação para problemas axissimétricos simples.

### 4.1 Modelos para chapas

Neste item são devidamente expostas três alternativas de formulações estudadas e implementadas computacionalmente para problemas estruturais que envolvam análise de chapas.

#### 4.1.1 Enriquecimento por deformações assumidas

##### 4.1.1.1 Introdução e considerações iniciais

É claramente justificável a busca por elementos finitos de baixa ordem para a análise plana que permitam superar, com eficiência, o problema do travamento e que possam apresentar boa precisão, mesmo quando as discretizações adotadas fizerem uso de redes pouco refinadas e de redes com elementos distorcidos.

Existem diferentes alternativas propostas na literatura para a obtenção de tais elementos. Aquela que será colocada em destaque neste item recai no método das deformações assumidas (*“assumed strain”*), no qual se enquadram tanto o método do operador  $\bar{B}$  (HUGHES, 1980 *apud* SIMO; RIFAI, 1990) quanto o Método Misto, que emprega a formulação variacional sobre três campos de Hu-Washizu (BELYTSCKO, 1986 *apud* SIMO; RIFAI, 1990).



Nos métodos  $\bar{B}$ , essencialmente, substitui-se a matriz  $B$  dos operadores de derivadas parciais (que relaciona deformações com deslocamentos) por uma matriz  $\bar{B}$  (com a qual se obtém as deformações assumidas).

No caso dos métodos mistos o ganho em desempenho resulta da adição de modos de deformação, consistindo em enriquecimentos da aproximação e que podem ser chamados de deformações assumidas. Os elementos gerados com as alternativas descritas são denominados elementos EAS (“Enhanced Assumed Strain”), que numa tradução livre pode ser designado de elementos com Enriquecimento por Deformações Assumidas.

A formulação mista em deformações assumidas é descrita em detalhes no que segue.

#### 4.1.1.2 Formulação

Nesta formulação o campo de deformações elásticas é composto por duas parcelas: uma compatível e outra incompatível, conforme indica a relação (4.1).

$$\varepsilon = \nabla^S u + \tilde{\varepsilon} \quad (4.1)$$

Desse modo, o gradiente simétrico de  $u$  representa a parte compatível da deformação, que é a mesma da formulação clássica em deslocamentos, e  $\tilde{\varepsilon}$  o enriquecimento que se configura como uma parcela incompatível. Essa última parcela é escolhida de modo que o enriquecimento assumido seja ortogonal ao campo de tensões, conforme a equação (4.2), conseqüentemente não há um acréscimo de energia interna com a adição de uma parcela não-convencional ao tensor de deformações:

$$\int_V \frac{1}{2} (\sigma \cdot \tilde{\varepsilon}) dV = 0 \quad (4.2)$$

Observa-se, também, que esta restrição imposta ao campo de deformações adicionado garante que seja satisfeito o *Teste do Mosaico* (‘Patch-Test’).

A formulação mista decorre da forma em resíduos ponderados das equações

de compatibilidade, constitutiva, de equilíbrio e por último a ortogonalidade entre  $\tilde{\varepsilon}$  e  $\sigma$  (toma-se neste caso a variação primeira da relação (4.2)), Respectivamente tem-se as seguintes equações:

$$\begin{aligned}
 \int_V \delta\sigma^T (\varepsilon - \nabla^S u - \tilde{\varepsilon}) dV &= 0 \\
 \int_V \delta\varepsilon^T (C\varepsilon - \sigma) dV &= 0 \\
 \int_V \nabla^S \delta u^T \sigma dV &= \int_V \delta u^T \bar{b} dV + \int_S \delta u^T \bar{t} dV \\
 \int_V \delta\tilde{\varepsilon}^T \sigma dV &= 0
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

Por sua vez os deslocamentos prescritos no contorno (equação (3.28)), são atendidos *a priori*.

Sejam, então, as seguintes aproximações para os campos de o deslocamento, deformações, tensões e deformações assumidas:

$$\begin{aligned}
 u &= Nq \quad \text{em } V \\
 u &= \bar{u} \quad \text{em } \Gamma_u \\
 \varepsilon &= S\alpha \\
 \sigma &= S\beta \\
 \tilde{\varepsilon} &= B^i \lambda
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

Nas relações anteriores  $N$  é a matriz das funções de forma compatíveis,  $q$  é o vetor dos parâmetros de deslocamentos, e  $(\alpha, \beta, \lambda)$  são respectivamente os vetores dos parâmetros de deformação, tensão e deformação assumida. Analogamente, os campos ‘virtuais’ também podem ser escritos como:

$$\begin{aligned}
 \delta u &= N\delta q \\
 \delta\varepsilon &= S\delta\alpha \\
 \delta\sigma &= S\delta\beta \\
 \delta\tilde{\varepsilon} &= B^i \delta\lambda
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

Com estas formas, as equações (4.3) podem ser reunidas na seguinte representação matricial:

$$\begin{bmatrix} 0 & -H & L & L^i \\ -H & H_T & 0 & 0 \\ L^T & 0 & 0 & 0 \\ L^{iT} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ \alpha \\ q \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ f_{ext} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

onde:

$$\begin{aligned} H &= \int_V S^T S dV \\ H_T &= \int_V S^T C^{-1} S dV \\ L &= \int_V S^T B dV \\ L^i &= \int_V S^T B^i dV \\ f_{ext} &= \int_V N^T \bar{b} dV + \int_S N^T \bar{t} dS \end{aligned} \quad (4.7)$$

Note-se que o operador  $B$  é tal que  $\nabla^S u = Bq$ .

Das duas primeiras equações de (4.6), pode-se isolar os parâmetros de tensão e deformação:

$$\begin{aligned} \alpha &= H^{-1} L q + H^{-1} L^i \lambda \\ \beta &= H^{-1} H_T \alpha = H^{-1} H_T H^{-1} L q + H^{-1} H_T H^{-1} L^i \lambda \end{aligned} \quad (4.8)$$

Substituindo as relações (4.8) no sistema (4.6) se obtém, finalmente, o seguinte sistema reduzido de equações:

$$\begin{bmatrix} L^T H^{-1} H_T H^{-1} L & L^T H^{-1} H_T H^{-1} L^i \\ L^{iT} H^{-1} H_T H^{-1} L & L^{iT} H^{-1} H_T H^{-1} L^i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{ext} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

O sistema anterior pode ser reescrito convenientemente de forma compacta (4.10), como se segue:

$$\begin{bmatrix} K & \Gamma^T \\ \Gamma & Q \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{ext} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

onde:

$$\begin{aligned} K &= L^T H^{-1} H_T H^{-1} L \\ \Gamma &= L^{iT} H^{-1} H_T H^{-1} L \\ Q &= L^{iT} H^{-1} H_T H^{-1} L^i \end{aligned} \quad (4.11)$$

As matrizes  $H$ ,  $L$  e  $L^i$ , estão diretamente relacionadas à matriz  $S$  que reúne as aproximações para os campos de tensão e deformação. Num elemento misto bidimensional o campo de tensões apresenta-se da forma seguinte, onde  $S_j$  representam as funções de aproximação para um sistema cartesiano:

$$\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1 & S_2 & S_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_1 & S_2 & S_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_1 & S_2 & S_3 \end{bmatrix} \{\beta\} = S\beta \quad (4.12)$$

Nestas condições a matriz  $H$  resultará em uma banda, conforme relação (4.13):

$$H = \begin{bmatrix} \hat{H} & 0 & 0 \\ 0 & \hat{H} & 0 \\ 0 & 0 & \hat{H} \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

onde:

$$\hat{H} = \begin{bmatrix} \int_V S_1 S_1 dV & \int_V S_1 S_2 dV & \int_V S_1 S_3 dV \\ \int_V S_2 S_1 dV & \int_V S_2 S_2 dV & \int_V S_2 S_3 dV \\ \int_V S_3 S_1 dV & \int_V S_3 S_2 dV & \int_V S_3 S_3 dV \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

Além disso, se as funções  $S_j$  forem adequadamente escolhidas, por exemplo, forem linearmente independentes, a matriz  $H$  resultará diagonal, que simplifica a sua inversão, reduzindo o custo computacional.

#### 4.1.1.3 Elemento finito quadrilateral

No que segue, ilustra-se a geração do sistema (4.10) para um elemento finito quadrilateral de quatro nós, mostrado na Figura 4.1. Em relação a um sistema

cartesiano local  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$  com origem no centro do elemento quadrilateral, determinado conforme indicado na Figura 4.1, podem ser adotadas as seguintes funções que aproximam linearmente as componentes do campo de tensões.

$$S_1 = 1, S_2 = \bar{x} \text{ e } S_3 = \bar{y} \quad (4.15)$$

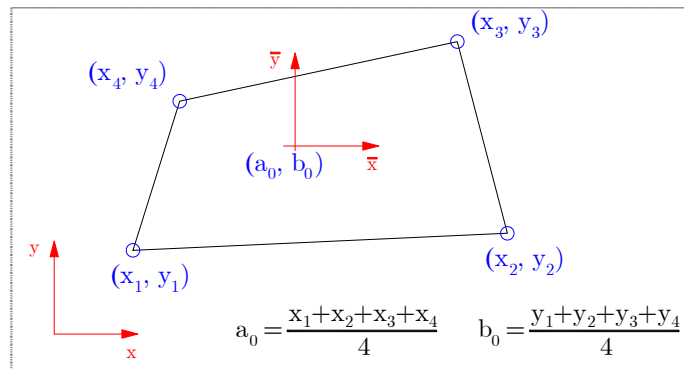


Figura 4.1 – Elemento finito quadrilateral segundo referenciais local e global.

A conversão entre o sistema cartesiano local e o global, é dada pela seguinte relação:

$$\begin{cases} \bar{x} \\ \bar{y} \end{cases} = \begin{cases} x - a_0 \\ y - b_0 \end{cases} \quad (4.16)$$

Por outro lado, o elemento finito pode ser construído por mapeamento a partir do elemento ‘mestre’ definido no espaço paramétrico, como indica a Figura 4.2.

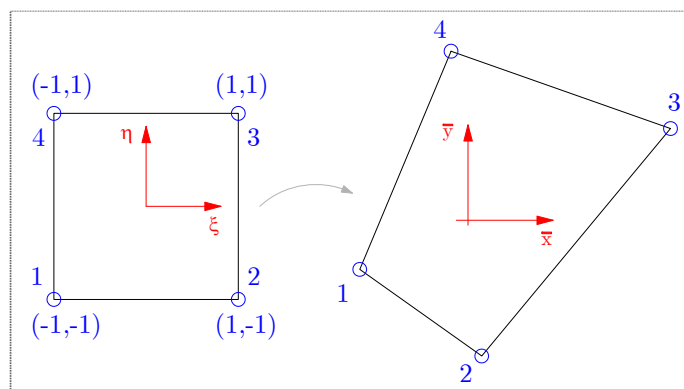


Figura 4.2 – Mapeamento do elemento finito quadrilateral isoparamétrico.

Em relação ao elemento mestre, as funções de aproximação são:

$$S_1 = 1, S_2 = \xi \text{ e } S_3 = \eta \quad (4.17)$$

Com  $(-1 \leq \xi, \eta \leq 1)$ .

O mapeamento é obtido mediante a aproximação entre os domínios global e o paramétrico. Sejam  $x = f_1(\xi, \eta)$  e  $y = f_2(\xi, \eta)$ , portanto, podem ser escritas da seguinte forma aberta:

$$\begin{aligned} x &= f_1(\xi, \eta) = a_0 + a_1\xi + a_2\eta + a_3\xi\eta \\ y &= f_2(\xi, \eta) = b_0 + b_1\xi + b_2\eta + b_3\xi\eta \end{aligned} \quad (4.18)$$

Fazendo-se então a correspondência entre os domínios, tem-se:

$$\begin{aligned} x_1 &= f_1(-1, -1) = a_0 - a_1 - a_2 + a_3 \\ x_2 &= f_1(1, -1) = a_0 + a_1 - a_2 - a_3 \\ x_3 &= f_1(1, 1) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 \\ x_4 &= f_1(-1, 1) = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 \\ y_1 &= f_2(-1, -1) = b_0 - b_1 - b_2 + b_3 \\ y_2 &= f_2(1, -1) = b_0 + b_1 - b_2 - b_3 \\ y_3 &= f_2(1, 1) = b_0 + b_1 + b_2 + b_3 \\ y_4 &= f_2(-1, 1) = b_0 - b_1 + b_2 - b_3 \end{aligned} \quad (4.19)$$

As constantes que aparecem na relação de mapeamento (4.18) são obtidas mediante a imposição da correspondência (4.19) entre coordenadas paramétricas e globais dos nós do elemento, obtendo-se:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{4}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \\ a_1 &= \frac{1}{4}(-x_1 + x_2 + x_3 - x_4) \\ a_2 &= \frac{1}{4}(-x_1 - x_2 + x_3 + x_4) \\ a_3 &= \frac{1}{4}(x_1 - x_2 + x_3 - x_4) \end{aligned} \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned}
b_0 &= \frac{1}{4}(y_1 + y_2 + y_3 + y_4) \\
b_1 &= \frac{1}{4}(-y_1 + y_2 + y_3 - y_4) \\
b_2 &= \frac{1}{4}(-y_1 - y_2 + y_3 + y_4) \\
b_3 &= \frac{1}{4}(y_1 - y_2 + y_3 - y_4)
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Destaca-se também que a matriz Jacobiana apresenta-se da seguinte forma:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \tag{4.22}$$

E o seu determinante por sua vez, é tal que:

$$J(\xi, \eta) = |\mathbf{J}| = J_0 + J_1\xi + J_2\eta \tag{4.23}$$

onde:

$$\begin{aligned}
J_0 &= a_1b_2 - a_2b_1 \\
J_1 &= a_1b_3 - a_3b_1 \\
J_2 &= a_3b_2 - a_2b_3
\end{aligned} \tag{4.24}$$

*A priori* as funções de aproximação (4.17) não são ortogonais, mas podem ser convenientemente ortogonalizadas.

Desta forma, para garantir que as funções de aproximação do campo de tensões sejam linearmente independentes, pode-se aplicar o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt (ver **Anexo A**), por meio da seguinte fórmula:

$$S_j^{Ort} = S_j - \sum_{k=1}^{j-1} \frac{\int_V S_j S_k^{Ort} dV}{\int_V S_k^{Ort} S_k^{Ort} dV} S_k^{Ort} \tag{4.25}$$

Aplicando-se o processo considerando-se as funções adotadas em (4.15) resulta no seguinte conjunto de funções linearmente independentes:

$$\begin{aligned}
 S_1^{Ort} &= 1 \\
 S_2^{Ort} &= \xi + \frac{J_2}{J_0} \xi \eta - \frac{J_1}{3J_0} \\
 S_3^{Ort} &= \eta + \frac{J_1}{J_0} \xi \eta - \frac{J_2}{3J_0} - \frac{2J_1J_2}{3J_2^2 - J_1^2 + 3J_0^2} S_2^{Ort}
 \end{aligned}
 \tag{4.26}$$

Com as funções  $S_j^{Ort}$  definidas podem-se determinar as submatrizes  $\hat{H}$  da matriz  $H$  mediante a integração dos termos no domínio paramétrico, conforme a equação (4.14). Tal integração originou os seguintes valores:

$$\begin{aligned}
 \hat{h}_{11} &= 4J_0 \\
 \hat{h}_{22} &= \frac{4}{9} J_0 \left[ 3 \left( \frac{J_2}{J_0} \right)^2 - \left( \frac{J_1}{J_0} \right)^2 + 3 \right] \\
 \hat{h}_{33} &= \frac{4 \left[ 3 + 2 \left( \frac{J_1}{J_0} \right)^2 - \left( \frac{J_1}{J_0} \right)^4 + 2 \left( \frac{J_2}{J_0} \right)^2 + 2 \left( \frac{J_1}{J_0} \right) \left( \frac{J_2}{J_0} \right)^2 - \left( \frac{J_2}{J_0} \right)^4 \right]}{3 \left[ 3 \left( \frac{J_2}{J_0} \right)^2 - \left( \frac{J_1}{J_0} \right)^2 + 3 \right]} J_0
 \end{aligned}
 \tag{4.27}$$

Conhecida a matriz  $H$ , um passo seguinte é a determinação das matrizes  $B$  e  $B^i$ , que aparecem nas definições de  $L$  e  $L^i$ . Tais matrizes,  $B$  e  $B^i$ , decorrem diretamente às funções de aproximação adotadas para os deslocamentos e deformações assumidas respectivamente. Para o elemento finito quadrilateral mestre de quatro nós, as funções bilineares convencionais de aproximação são obtidas a partir da seguinte relação:

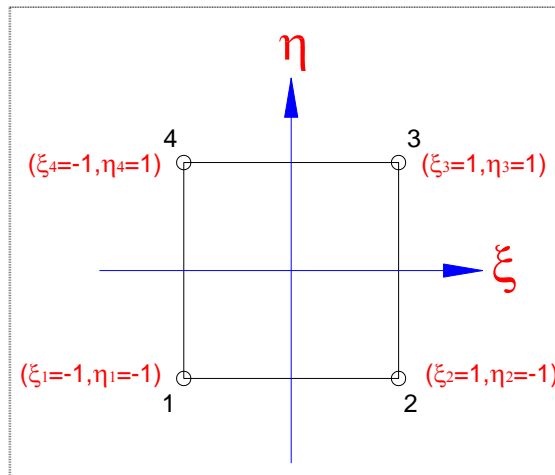


Figura 4.3 – Elemento finito quadrilateral ‘mestre’.



$$N_i = \frac{1}{4}(1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta) \quad (4.28)$$

Onde o índice  $i$  indica o nó do elemento quadrilateral ‘mestre’, conforme representa Figura 4.3:

Expandindo a relação para cada um dos nós, as funções clássicas de forma resultam nas equações (4.29), ilustradas na Figura 4.4:

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi - \eta + \xi\eta) \\ N_2 &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi - \eta - \xi\eta) \\ N_3 &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi + \eta + \xi\eta) \\ N_4 &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi + \eta - \xi\eta) \end{aligned} \quad (4.29)$$

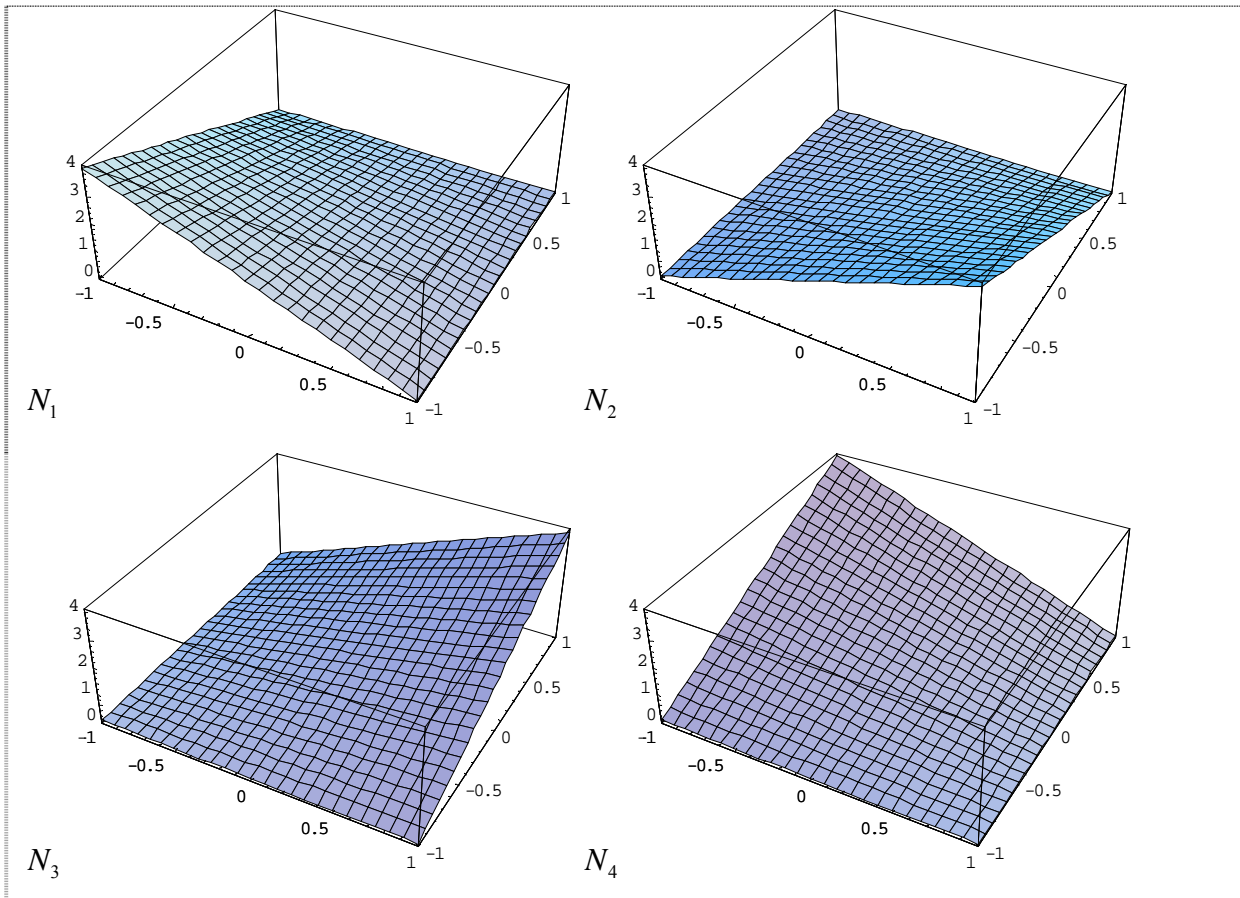


Figura 4.4 – Funções de forma clássicas do elemento quadrilateral ‘mestre’.

Já as funções de enriquecimento, que geram os modos incompatíveis de

deformação, foram apresentadas originalmente por (Wilson *et al*, 1973) e apresentam as seguintes expressões, ilustradas na Figura 4.5:

$$\begin{aligned} N_1^{enriq} &= 1 - \xi^2 \\ N_2^{enriq} &= 1 - \eta^2 \end{aligned} \quad (4.30)$$

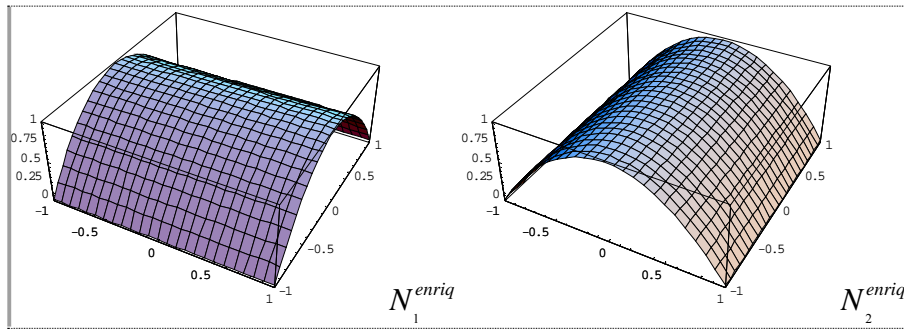


Figura 4.5 – Funções enriquecedoras (modos incompatíveis).

A matriz  $B$ , assim como a  $B^i$  são então estruturadas conforme indicam as expressões (4.31) e (4.32), que seguem:

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} N_1 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} N_2 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} N_3 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} N_4 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} N_1 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} N_2 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} N_3 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} N_4 \\ \frac{\partial}{\partial y} N_1 & \frac{\partial}{\partial x} N_1 & \frac{\partial}{\partial y} N_2 & \frac{\partial}{\partial x} N_2 & \frac{\partial}{\partial y} N_3 & \frac{\partial}{\partial x} N_3 & \frac{\partial}{\partial y} N_4 & \frac{\partial}{\partial x} N_4 \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

$$B^i = \begin{bmatrix} \frac{\partial^0}{\partial x} N_1^{enriq} & 0 & \frac{\partial^0}{\partial x} N_2^{enriq} & 0 \\ 0 & \frac{\partial^0}{\partial y} N_1^{enriq} & 0 & \frac{\partial^0}{\partial y} N_2^{enriq} \\ \frac{\partial^0}{\partial y} N_1^{enriq} & \frac{\partial^0}{\partial x} N_1^{enriq} & \frac{\partial^0}{\partial y} N_2^{enriq} & \frac{\partial^0}{\partial x} N_2^{enriq} \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

Conhecidas as matrizes  $B$ ,  $B^i$  e  $S$ , podem-se determinar por completo as matrizes  $L$  e  $L^i$ , que apresentam as seguintes formações (4.33) e (4.34):

$$L = \int_{V_e} \begin{bmatrix} S_1^{Ort} N_{1,x} & 0 & S_1^{Ort} N_{2,x} & 0 & S_1^{Ort} N_{3,x} & 0 & S_1^{Ort} N_{4,x} & 0 \\ S_2^{Ort} N_{1,x} & 0 & S_2^{Ort} N_{2,x} & 0 & S_2^{Ort} N_{3,x} & 0 & S_2^{Ort} N_{4,x} & 0 \\ S_3^{Ort} N_{1,x} & 0 & S_3^{Ort} N_{2,x} & 0 & S_3^{Ort} N_{3,x} & 0 & S_3^{Ort} N_{4,x} & 0 \\ 0 & S_1^{Ort} N_{1,y} & 0 & S_1^{Ort} N_{2,y} & 0 & S_1^{Ort} N_{3,y} & 0 & S_1^{Ort} N_{4,y} \\ 0 & S_2^{Ort} N_{1,y} & 0 & S_2^{Ort} N_{2,y} & 0 & S_2^{Ort} N_{3,y} & 0 & S_2^{Ort} N_{4,y} \\ 0 & S_3^{Ort} N_{1,y} & 0 & S_3^{Ort} N_{2,y} & 0 & S_3^{Ort} N_{3,y} & 0 & S_3^{Ort} N_{4,y} \\ S_1^{Ort} N_{1,y} & S_1^{Ort} N_{1,x} & S_1^{Ort} N_{2,y} & S_1^{Ort} N_{2,x} & S_1^{Ort} N_{3,y} & S_1^{Ort} N_{3,x} & S_1^{Ort} N_{4,y} & S_1^{Ort} N_{4,x} \\ S_2^{Ort} N_{1,y} & S_2^{Ort} N_{1,x} & S_2^{Ort} N_{2,y} & S_2^{Ort} N_{2,x} & S_2^{Ort} N_{3,y} & S_2^{Ort} N_{3,x} & S_2^{Ort} N_{4,y} & S_2^{Ort} N_{4,x} \\ S_3^{Ort} N_{1,y} & S_3^{Ort} N_{1,x} & S_3^{Ort} N_{2,y} & S_3^{Ort} N_{2,x} & S_3^{Ort} N_{3,y} & S_3^{Ort} N_{3,x} & S_3^{Ort} N_{4,y} & S_3^{Ort} N_{4,x} \end{bmatrix} dV \quad (4.33)$$

$$L^i = \int_{V_e} \begin{bmatrix} S_1^{Ort} \frac{\partial^0}{\partial x} N_1^{enriq} & 0 & S_1^{Ort} \frac{\partial^0}{\partial x} N_2^{enriq} & 0 \\ S_2^{Ort} \frac{\partial^0}{\partial x} N_1^{enriq} & 0 & S_2^{Ort} \frac{\partial^0}{\partial x} N_2^{enriq} & 0 \\ S_3^{Ort} \frac{\partial^0}{\partial x} N_1^{enriq} & 0 & S_3^{Ort} \frac{\partial^0}{\partial x} N_2^{enriq} & 0 \\ 0 & S_1^{Ort} \frac{\partial^0}{\partial y} N_1^{enriq} & 0 & S_1^{Ort} \frac{\partial^0}{\partial y} N_2^{enriq} \\ 0 & S_2^{Ort} \frac{\partial^0}{\partial y} N_1^{enriq} & 0 & S_2^{Ort} \frac{\partial^0}{\partial y} N_2^{enriq} \\ 0 & S_3^{Ort} \frac{\partial^0}{\partial y} N_1^{enriq} & 0 & S_3^{Ort} \frac{\partial^0}{\partial y} N_2^{enriq} \\ S_1^{Ort} \frac{\partial^0}{\partial y} N_1^{enriq} & S_1^{Ort} \frac{\partial^0}{\partial x} N_1^{enriq} & S_1^{Ort} \frac{\partial^0}{\partial y} N_2^{enriq} & S_1^{Ort} \frac{\partial^0}{\partial x} N_2^{enriq} \\ S_2^{Ort} \frac{\partial^0}{\partial y} N_1^{enriq} & S_2^{Ort} \frac{\partial^0}{\partial x} N_1^{enriq} & S_2^{Ort} \frac{\partial^0}{\partial y} N_2^{enriq} & S_2^{Ort} \frac{\partial^0}{\partial x} N_2^{enriq} \\ S_3^{Ort} \frac{\partial^0}{\partial y} N_1^{enriq} & S_3^{Ort} \frac{\partial^0}{\partial x} N_1^{enriq} & S_3^{Ort} \frac{\partial^0}{\partial y} N_2^{enriq} & S_3^{Ort} \frac{\partial^0}{\partial x} N_2^{enriq} \end{bmatrix} dV \quad (4.34)$$

As relações de derivações das funções de forma, bem como das funções enriquecedoras são obtidas de modo bastante simples conforme se exemplifica nas relações (4.35) a seguir:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial x} N_1 = N_{1,x} &= \frac{\partial N_1(\xi, \eta)}{\partial x} = \frac{1}{J(\xi, \eta)} \left[ \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial N_1(\xi, \eta)}{\partial \xi} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial N_1(\xi, \eta)}{\partial \eta} \right] \\
 \frac{\partial}{\partial y} N_1 = N_{1,y} &= \frac{\partial N_1(\xi, \eta)}{\partial y} = \frac{1}{J(\xi, \eta)} \left[ -\frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial N_1(\xi, \eta)}{\partial \xi} + \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial N_1(\xi, \eta)}{\partial \eta} \right] \\
 \frac{\partial^0}{\partial x} N_1^{enriq} &= \frac{\partial N_1^{enriq}(0,0)}{\partial x} = \frac{1}{J(0,0)} \left[ \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial N_1^{enriq}(0,0)}{\partial \xi} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial N_1^{enriq}(0,0)}{\partial \eta} \right] \\
 \frac{\partial^0}{\partial x} N_1^{enriq} &= \frac{\partial N_1^{enriq}(0,0)}{\partial y} = \frac{1}{J(0,0)} \left[ -\frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial N_1^{enriq}(0,0)}{\partial \xi} + \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial N_1^{enriq}(0,0)}{\partial \eta} \right]
 \end{aligned} \tag{4.35}$$

Agora, voltando a analisar a estrutura das equações (4.11), substituindo-se diretamente nas mesmas as equações (4.7), obtém-se as definições (4.36):

$$\begin{aligned}
 K &= \int_{V_e} B^T S(S^T S)^{-1} S^T E S(S^T S)^{-1} S^T B dV \\
 \Gamma &= \int_{V_e} B^{iT} S(S^T S)^{-1} S^T E S(S^T S)^{-1} S^T B dV \\
 Q &= \int_{V_e} B^{iT} S(S^T S)^{-1} S^T E S(S^T S)^{-1} S^T B^i dV
 \end{aligned} \tag{4.36}$$

Pode-se introduzir uma representação mais condensada para as equações (4.36) da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 K &= \int_V \bar{B}^T E \bar{B} dV \\
 \Gamma &= \int_V \bar{B}^{iT} E \bar{B} dV \\
 Q &= \int_V \bar{B}^{iT} E \bar{B}^i dV
 \end{aligned} \tag{4.37}$$

e,

$$\begin{aligned}
 \bar{B} &= S(S^T S)^{-1} S^T B \\
 \bar{B}^i &= S(S^T S)^{-1} S^T B^i
 \end{aligned} \tag{4.38}$$

Realizando-se as operações indicadas, as matrizes  $\bar{B}$  e  $\bar{B}^i$  podem ser representadas como:

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} \bar{N}_{1,x} & 0 & \bar{N}_{2,x} & 0 & \bar{N}_{3,x} & 0 & \bar{N}_{4,x} & 0 \\ 0 & \bar{N}_{1,y} & 0 & \bar{N}_{2,y} & 0 & \bar{N}_{3,y} & 0 & \bar{N}_{4,y} \\ \bar{N}_{1,y} & \bar{N}_{1,x} & \bar{N}_{2,y} & \bar{N}_{2,x} & \bar{N}_{3,y} & \bar{N}_{3,x} & \bar{N}_{4,y} & \bar{N}_{4,x} \end{bmatrix} \tag{4.39}$$

$$\bar{B}^i = \begin{bmatrix} \bar{N}_{1,x}^{enriq} & 0 & \bar{N}_{2,x}^{enriq} & 0 \\ 0 & \bar{N}_{1,y}^{enriq} & 0 & \bar{N}_{2,y}^{enriq} \\ \bar{N}_{1,y}^{enriq} & \bar{N}_{1,x}^{enriq} & \bar{N}_{2,y}^{enriq} & \bar{N}_{2,x}^{enriq} \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

Com o auxílio das definições, que decorrem essencialmente dos termos não nulos das matrizes  $L$  e  $L^i$  :

$$\begin{aligned} f_x^{ij} &= \int_V S_i^{Ort}(\xi, \eta) \frac{\partial}{\partial x} N_j(\xi, \eta) dV \\ f_y^{ij} &= \int_V S_i^{Ort}(\xi, \eta) \frac{\partial}{\partial y} N_j(\xi, \eta) dV \\ f_{x,enriq}^{ij} &= \int_V S_i^{Ort}(\xi, \eta) \frac{\partial^0}{\partial x} N_k^{enriq}(\xi, \eta) dV \\ f_{y,enriq}^{ij} &= \int_V S_i^{Ort}(\xi, \eta) \frac{\partial^0}{\partial y} N_k^{enriq}(\xi, \eta) dV \end{aligned} \quad (4.41)$$

As componentes que aparecem nas equações (4.39) e (4.40) calculam-se a partir de:

$$\begin{aligned} \bar{N}_{j,x}(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^3 \frac{f_x^{ij}}{\hat{h}_{ii}} S_i^{Ort}(\xi, \eta) \\ \bar{N}_{j,y}(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^3 \frac{f_y^{ij}}{\hat{h}_{ii}} S_i^{Ort}(\xi, \eta) \\ \bar{N}_{k,x}^{enriq}(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^3 \frac{f_{x,enriq}^{ik}}{\hat{h}_{ii}} S_i^{Ort}(\xi, \eta) \\ \bar{N}_{k,y}^{enriq}(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^3 \frac{f_{y,enriq}^{ik}}{\hat{h}_{ii}} S_i^{Ort}(\xi, \eta) \end{aligned} \quad (4.42)$$

Finalmente, o vetor de esforços nodais pode ser obtido de modo semelhante à formulação clássica em deslocamento, via integração do carregamento fazendo uso das funções de forma que aproxima o campo de deslocamentos virtuais (com conveniente transformação de coordenadas), conforme a relação (4.43):

$$f_{ext} = \int_V N^T \bar{b} dV + \int_S N^T \bar{t} dV \quad (4.43)$$

Mantendo-se o sistema (4.10), mediante as equações (4.37), (4.38) e (4.43), sua solução fornece os deslocamentos nodais bem como o vetor dos parâmetros

de deformações assumidas.

#### 4.1.2 Integração reduzida com estabilização da rigidez

A formulação de elementos quadrilaterais de quatro nós que apresentem grande precisão mesmo empregando redes pouco refinadas em análises de estruturas bidimensionais em regime de deformações planas e/ou tensões planas, é uma das principais propostas dos pesquisadores de elementos finitos. Dentro desse contexto, diversos trabalhos desenvolvidos por Belytschko e co-autores (1986, 1991, 1992 e 2000) buscam alternativas que caminhem para obtenção de tais elementos.

Esses autores trabalharam fundamentalmente em elementos de baixa ordem, objetivando alcançar satisfatórios resultados para problemas de flexão e materiais incompressíveis. Tais elementos têm por base o princípio variacional de Hu-Washizu, que faz o uso de aproximações independentes para os campos de tensões, deformações e deslocamentos.

Como resultado, formula-se elementos que apresentam respostas comparáveis com os elementos não-conformes oriundos do método dos modos incompatíveis, com a vantagem de não haver a necessidade de condensação estática nem ampliação das ordens da matriz do sistema. Estas, por sua vez, podem ser calculadas com recurso à integração reduzida, implicando num menor custo computacional e menor tempo de processamento.

O método propõe a geração da matriz de rigidez empregando-se apenas um ponto de integração numérica, como forma de contornar o travamento volumétrico e cisalhante, todavia esse procedimento acaba por exigir uma estabilização devido ao surgimento de modos espúrios de deformação. Dessa forma a matriz de rigidez pode ser escrita por meio da seguinte expressão.

$$K = K_1 + K_{Estab}. \quad (4.44)$$

## 4.1.2.1 Matriz de rigidez base

Uma vez que as funções de forma são as mesmas apresentadas em (4.29), isto é, as clássicas funções paramétricas do elemento bilinear mestre, o primeiro termo do lado direito da equação (4.44) é obtido diretamente com a ajuda do produto da matriz dos operadores de derivadas parciais  $B_0$  calculada com apenas um ponto de quadratura, ou seja:

$$B_0 = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1(0,0)}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_4(0,0)}{\partial x} & & & \mathbf{0}_{1 \times 4} \\ & & & \mathbf{0}_{1 \times 4} & & \\ & & & \frac{\partial N_1(0,0)}{\partial y} & \dots & \frac{\partial N_4(0,0)}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1(0,0)}{\partial y} & \dots & \frac{\partial N_4(0,0)}{\partial y} & \frac{\partial N_1(0,0)}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_4(0,0)}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (4.45)$$

Em particular, empregando-se as funções de forma do elemento mestre isoparamétrico, as derivadas são obtidas conforme abaixo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_1(0,0)}{\partial x} &= \frac{1}{J(0,0)} \left[ \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial N_1(0,0)}{\partial \xi} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial N_1(0,0)}{\partial \eta} \right] \\ \frac{\partial N_1(0,0)}{\partial y} &= \frac{1}{J(0,0)} \left[ -\frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial N_1(0,0)}{\partial \xi} + \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial N_1(0,0)}{\partial \eta} \right] \end{aligned} \quad (4.46)$$

Realizando-se o calculo das expressões (4.46) para todas as quatro funções de forma, tem-se, portanto:

$$B_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_x^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{b}_y^T \\ \mathbf{b}_y^T & \mathbf{b}_x^T \end{bmatrix} \quad (4.47)$$

Onde  $\mathbf{b}_x$  e  $\mathbf{b}_y$  são vetores expressos conforme se mostra abaixo:

$$\mathbf{b}_x = \frac{1}{2A} \begin{Bmatrix} y_2 - y_4 \\ y_3 - y_1 \\ y_4 - y_2 \\ y_1 - y_3 \end{Bmatrix} \quad \mathbf{b}_y = \frac{1}{2A} \begin{Bmatrix} x_4 - x_2 \\ x_1 - x_3 \\ x_2 - x_4 \\ x_3 - x_1 \end{Bmatrix} \quad (4.48)$$

Nas relações anteriores  $A$  representa a área do elemento, e pode ser

calculada da seguinte forma:

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_2 \\ x_4 & y_4 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \left[ (x_1 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_4 + x_4 y_1) - (y_1 x_2 + y_2 x_3 + y_3 x_4 + y_4 x_1) \right] \quad (4.49)$$

Obtém-se, finalmente, a seguinte expressão para a matriz de rigidez base considerando-se apenas um ponto de integração numérica:

$$K_1 = AB_0^T CB_0 \quad (4.50)$$

sendo  $C$  a matriz que contém os parâmetros elásticos. Tal matriz apareceu anteriormente na relação (3.20), para estados planos de tensão e deformação, e genericamente apresenta a forma a seguir:

$$C = \begin{bmatrix} \bar{\lambda} + 2\mu & \bar{\lambda} & 0 \\ \bar{\lambda} & \bar{\lambda} + 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \quad (4.51)$$

Na qual,  $\bar{\lambda} = \lambda$  para EPD e  $\bar{\lambda} = \frac{E\nu}{(1-\nu^2)}$  para EPT.

#### 4.1.2.2 Vetor de projeção $\gamma$

Uma definição que pode ser adotada para o gradiente dos deslocamentos é a seguinte:

$$\nabla^s u = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \end{array} \right\} = B_0 q \quad (4.52)$$

Sendo  $q$  o vetor que contém as componentes dos deslocamentos nodais do elemento, sendo formada com a seguinte apresentação:



$$q = \begin{Bmatrix} q_x \\ q_y \end{Bmatrix} \quad \text{onde} \quad q_x = \begin{Bmatrix} q_{x1} \\ q_{x2} \\ q_{x3} \\ q_{x4} \end{Bmatrix} \quad q_y = \begin{Bmatrix} q_{y1} \\ q_{y2} \\ q_{y3} \\ q_{y4} \end{Bmatrix} \quad (4.53)$$

Sejam agora os seguintes vetores coluna:

$$t = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad h = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{Bmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} \quad \mathbf{y} = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{Bmatrix} \quad (4.54)$$

Onde  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  são os vetores de coordenadas nodais. O conjunto de vetores (4.54) juntamente com os (4.48) apresentam as seguintes propriedades, facilmente demonstráveis:

$$\begin{aligned} b_x^T \mathbf{x} &= 1; & b_y^T \mathbf{y} &= 1; \\ b_x^T \mathbf{y} &= 0; & b_y^T \mathbf{x} &= 0; \\ b_x^T t &= 0; & b_y^T t &= 0; \\ b_x^T h &= 0; & b_y^T h &= 0; \\ t^T h &= 0 \end{aligned} \quad (4.55)$$

Considerando-se, então, algumas soluções possíveis para o campo de deslocamentos e as deformações dele resultantes calculadas com a ajuda de  $B_0$ .

Voltando a analisar a relação (4.52) e substituindo o vetor de deslocamentos nodais por formas particulares para  $q_x$  e  $q_y$  definidas pelo vetor  $t$ , ter-se-á:

$$\begin{aligned} \nabla^s u &= B_0 q = B_0 \begin{Bmatrix} t \\ 0 \end{Bmatrix} = 0 & q_x &= t \\ \nabla^s u &= B_0 q = B_0 \begin{Bmatrix} 0 \\ t \end{Bmatrix} = 0 & q_y &= t \\ \nabla^s u &= B_0 q = B_0 \begin{Bmatrix} \mathbf{y} \\ -\mathbf{x} \end{Bmatrix} = 0 & q_x &= \mathbf{y} \\ & & q_y &= -\mathbf{x} \end{aligned} \quad (4.56)$$

Os dois primeiros vetores que multiplicam  $B_0$  representam movimentos de

corpo rígido de translação, segundo cada uma das direções coordenadas. Por sua vez o terceiro representa a rotação de corpo rígido. Pelas nulidades resultantes na relação anterior, conclui-se que os três vetores de deslocamentos são autovetores próprios de  $B_0$ .

Se o mesmo conceito for aplicado substituindo-se  $q_x$  e  $q_y$ , pelo vetor  $h$  na relação (4.52), ter-se-á:

$$\begin{aligned} \nabla^s u = B_0 q = B_0 \begin{Bmatrix} h \\ 0 \end{Bmatrix} &= 0 & q_x = h \\ \nabla^s u = B_0 q = B_0 \begin{Bmatrix} 0 \\ h \end{Bmatrix} &= 0 & q_y = h \end{aligned} \quad (4.57)$$

Então os dois vetores gerados com a ajuda de  $h$  também são autovetores de  $B_0$ . Entretanto, os mesmos não representam um movimento de corpo rígido, e sim autovetores impróprios, que se constituem em modos de deformação nula, e que não afetam a energia de deformação. Tal tipo de solução para os deslocamentos pode ser gerada justamente pela utilização de uma regra de integração de baixa ordem sobre a matriz  $B_0$ , com a forma indicada por (4.47). Esta solução imprópria não existe quando se considera o operador completo.

Matematicamente o espaço nulo do operador gradiente discreto  $B_0$  não coincide com o espaço nulo do gradiente contínuo, e, portanto, as matrizes de rigidez obtidas com ambos os operadores possuem ‘rank’ distintos. Uma vez que a matriz de rigidez do elemento quadrangular plano (dimensão 8x8) determinada com o operador contínuo tem ‘rank’ 5 (cinco), faz-se necessário que o ‘rank’ da matriz gerada com  $B_0$  seja também ‘rank’ 5 (cinco). Neste sentido, pode-se pensar em introduzir uma alteração em  $B_0$  de modo a eliminar o espaço nulo correspondente aos autovetores impróprios.

Uma forma consistente em impor que  $B_0$  seja também dependente de um vetor  $\gamma$ , de modo que o vetor acrescentado garanta o seu ‘rank’ adequado:

$$B_0^* = \{b_x, b_y, \gamma\} \quad (4.58)$$

Tendo-se em vista as relações (4.48), conclui-se que  $\gamma \in \mathfrak{R}^4$ .

Essencialmente o vetor  $\gamma$  gera uma nova parcela para o gradiente dos deslocamentos:

$$\tilde{\nabla}^s u = \gamma^T q_x \quad (4.59)$$

O vetor  $\gamma$  é escolhido de modo a atender duas condições: a primeira que o operador  $\tilde{\nabla}^s u$  resulte nulo para qualquer deslocamento nodal associado a movimentos de corpo rígido; a segunda é que se  $q_x$  for parte do espaço nulo impróprio, então  $\tilde{\nabla}^s u \neq 0$ . Assim sendo,  $\gamma$  pode ser entendido matematicamente como um complemento que proporciona um espaço nulo próprio.

Escolhendo o conjunto de vetores linearmente independentes que podem ser usados como base para o  $\mathfrak{R}^4$   $(t, h, b_x, b_y)$ , o que se justifica pela ortogonalidade entre eles mostrada nas equações (4.55), o vetor  $\gamma$  pode então ser representado da seguinte forma:

$$\gamma = k_1 t + k_2 h + k_3 b_x + k_4 b_y \quad (4.60)$$

Seja também o campo linear  $q_x$  de deslocamentos nodais, gerado pelos modos de corpo rígido, escrito da seguinte forma:

$$q_x = k_5 t + k_6 \mathbf{x} + k_7 \mathbf{y} \quad (4.61)$$

Aplicando (4.60) e (4.61) na equação (4.59), a primeira condição resulta:

$$k_5 (4k_1) + k_6 \left[ k_1 (t^T \mathbf{x}) + k_2 (h^T \mathbf{x}) + k_3 \right] + k_7 \left[ k_1 (t^T \mathbf{y}) + k_2 (h^T \mathbf{y}) + k_4 \right] = 0 \quad (4.62)$$

Para qualquer que sejam as constantes  $k_5$ ,  $k_6$  e  $k_7$ , a igualdade (4.62) só se confirma se:

$$k_1 = 0 \quad k_3 = -k_2 (h^T \mathbf{x}) \quad k_4 = -k_2 (h^T \mathbf{y}) \quad (4.63)$$

Substituindo estes valores em (4.60), resulta finalmente no vetor de projeção  $\gamma$ :

$$\gamma = k_2 \{h - (h^T \mathbf{x})\mathbf{b}_x - (h^T \mathbf{y})\mathbf{b}_y\} \quad (4.64)$$

Onde  $k_2$  é uma constante arbitrária qualquer, tomada aqui, por conveniência, como sendo  $\frac{1}{4}$ . Não é difícil mostrar que a segunda condição fica também satisfeita.

#### 4.1.2.3 Construção matriz de estabilização

No seu trabalho (LIU; ONG; URAS, 1985) propõe que a matriz estabilizante seja obtida a partir de uma expansão envolvendo termos de derivadas parciais sobre a matriz dos operadores  $B_0$ , sendo calculados em apenas um ponto de integração e assumindo que o Jacobiano seja constante. A expansão proposta é a seguinte:

$$K_{Estab.} = \frac{1}{3} AB_{0,\xi}^T CB_{0,\xi} + \frac{1}{3} AB_{0,\eta}^T CB_{0,\eta} \quad (4.65)$$

Segundo (LIU; ONG; URAS, 1985), embora os resultados para essa estabilização sejam bons para a maioria dos problemas, eles não são satisfatórios nos casos de flexão pura. Com o intuito de contornar este inconveniente os autores propõem que se utilize o conceito de integração seletiva/reduzida originalmente mostrada em (HUGHES, 1980), que consiste em fazer uso da parte desviadora dos vetores que definem a parcela de estabilização. Assim sendo, a equação (4.65) fica reescrita como se segue:

$$K_{Estab.} = \frac{1}{3} A(B_{0,\xi}^{desv})^T C(B_{0,\xi}^{desv}) + \frac{1}{3} A(B_{0,\eta}^{desv})^T C(B_{0,\eta}^{desv}) \quad (4.66)$$

A parte desviadora (“deviatoric part”) de  $B_0$  é dada pela seguinte expressão:

$$B_0^{desv} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \frac{\partial N_1(0,0)}{\partial x} & \dots & \frac{2}{3} \frac{\partial N_4(0,0)}{\partial x} & -\frac{1}{3} \frac{\partial N_1(0,0)}{\partial x} & \dots & -\frac{1}{3} \frac{\partial N_4(0,0)}{\partial x} \\ -\frac{1}{3} \frac{\partial N_1(0,0)}{\partial x} & \dots & -\frac{1}{3} \frac{\partial N_4(0,0)}{\partial x} & \frac{2}{3} \frac{\partial N_1(0,0)}{\partial y} & \dots & \frac{2}{3} \frac{\partial N_4(0,0)}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1(0,0)}{\partial y} & \dots & \frac{\partial N_4(0,0)}{\partial y} & \frac{\partial N_1(0,0)}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_4(0,0)}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (4.67)$$

Por sua vez, as suas derivadas são tais que:

$$B_{0,\xi}^{desv} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} b_{x,\xi} & -\frac{1}{3} b_{y,\xi} \\ -\frac{1}{3} b_{y,\xi} & \frac{2}{3} b_{x,\xi} \\ b_{y,\xi} & b_{x,\xi} \end{bmatrix} \quad (4.68)$$

$$B_{0,\eta}^{desv} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} b_{x,\eta} & -\frac{1}{3} b_{y,\eta} \\ -\frac{1}{3} b_{y,\eta} & \frac{2}{3} b_{x,\eta} \\ b_{y,\eta} & b_{x,\eta} \end{bmatrix} \quad (4.69)$$

As parcelas  $b_{x,\xi}$ ,  $b_{x,\xi}$ ,  $b_{x,\xi}$  e  $b_{x,\xi}$  são vetores linha (4x1) e o seu cálculo está detalhado no **Apêndice A**. Com base nas matrizes de derivadas parciais acima e de acordo com a equação (4.66) chega-se à seguinte matriz estabilizante:

$$K_{Estab.} = \frac{1}{48A} \begin{bmatrix} \hat{k}_{11}\gamma\gamma^T & \hat{k}_{12}\gamma\gamma^T \\ \hat{k}_{21}\gamma\gamma^T & \hat{k}_{22}\gamma\gamma^T \end{bmatrix} \quad (4.70)$$

Onde as constantes  $\hat{k}_{ab}$  dependem dos parâmetros elásticos do material ('Lamè') e das coordenadas dos nós nos domínios paramétrico e físico, da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \hat{k}_{11} &= \frac{1}{9}(\lambda + 10\mu)(\hat{k}_2^2 + \hat{k}_4^2) + \mu(\hat{k}_1^2 + \hat{k}_3^2) \\ \hat{k}_{12} = \hat{k}_{21} &= -\frac{1}{9}(\lambda + \mu)(\hat{k}_1\hat{k}_2 + \hat{k}_3\hat{k}_4) \\ \hat{k}_{11} &= \frac{1}{9}(\lambda + 10\mu)(\hat{k}_1^2 + \hat{k}_3^2) + \mu(\hat{k}_2^2 + \hat{k}_4^2) \end{aligned} \quad (4.71)$$

Na relação anterior se empregam vetores de coordenadas paramétricas dadas por:

$$\bar{\xi} = \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{Bmatrix} \quad \bar{\eta} = \begin{Bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (4.72)$$

de tal modo que as constantes  $\hat{k}$  são definidas como:

$$\begin{aligned} \hat{k}_1 &= \bar{\xi}^T \mathbf{x} & \hat{k}_2 &= \bar{\xi}^T \mathbf{y} \\ \hat{k}_3 &= \bar{\eta}^T \mathbf{x} & \hat{k}_4 &= \bar{\eta}^T \mathbf{y} \end{aligned} \quad (4.73)$$

#### 4.1.2.4 Matriz de rigidez de estabilização implementada

A matriz estabilizante implementada no programa desenvolvido neste trabalho segue a forma descrita pela (4.70) e foi proposta nos trabalhos (BELYTSCHKO; BACHRACH, 1986) e (BELYTSCHKO; BINDEMAN, 1991). A expressão da matriz é a seguinte:

$$K_{Estab.} = \begin{bmatrix} (c_1 \Psi_{xx} + c_2 \Psi_{yy}) \gamma \gamma^T & c_3 \Psi_{xy} \gamma \gamma^T \\ c_3 \Psi_{xy} \gamma \gamma^T & (c_1 \Psi_{yy} + c_2 \Psi_{xx}) \gamma \gamma^T \end{bmatrix} \quad (4.74)$$

O operador de projeção  $\gamma$  é o mesmo dado na equação (4.64) e, portanto, só depende das características geométricas do elemento. As constantes  $c_1$ ,  $c_2$  e  $c_3$  envolvem as constantes elásticas ('Lamè') e variam de acordo com o tipo de elemento que se deseja utilizar. As relações (4.75) governam  $c_1$ ,  $c_2$  e  $c_3$ , e são as seguintes:

$$\begin{aligned} c_1 &= \bar{\lambda} (e_1 + e_2)^2 + 2\mu (e_1^2 + e_2^2) \\ c_2 &= \mu e_3^2 \\ c_3 &= \bar{\lambda} (e_1 + e_2)^2 + \mu (4e_1 e_2 + e_3^2) \end{aligned} \quad (4.75)$$

A Tabela 4.1, apresenta os valores das constantes  $e_1$ ,  $e_2$  e  $e_3$  para cada tipo de elemento, conforme proposto em (BELYTSCHKO; BINDEMAN, 1991).

Na relação (4.76) aparece a função de ampulheta (BELYTSCHKO *et al*, 1984), definida conforme a expressão a seguir:

$$\psi(\xi, \eta) = \xi \eta \quad (4.76)$$

A Figura 4.6 apresenta a representação da função acima, no domínio paramétrico.

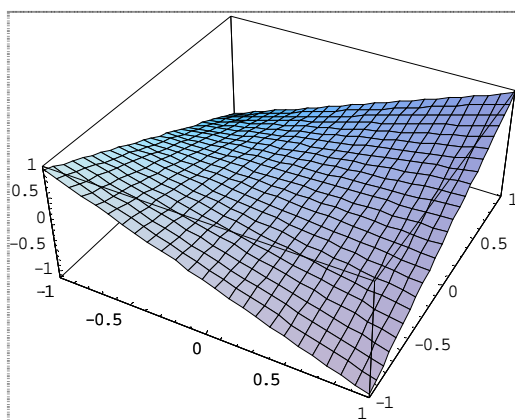


Figura 4.6 – Representação gráfica de  $\psi$ .

Com tal função determinam-se  $\Psi_{ab}$ , integrais do produto das derivadas parciais da função  $\psi$  calculadas com uma quadratura de Gauss  $2 \times 2$  sob o domínio paramétrico do elemento finito.

$$\Psi_{ij} = \int_V \psi_{,i} \psi_{,j} dV \quad (4.77)$$

#### 4.1.2.5 Elementos implementados

Diferentes elementos foram implementados, de modo a obter soluções aprimoradas fazendo uso de apenas um ponto de integração numérica. Em geral, os elementos são eficientes mesmo para redes pouco refinadas, o que confere a eles uma grande vantagem quando se comparados a elementos que fazem o uso de formulações clássicas em deslocamentos.

A nomenclatura adotada para os elementos obedece as suas próprias características e habilidades de contornar dificuldades relacionadas à incompressibilidade ou descrição da flexão. Os elementos e suas constantes  $e_1$ ,  $e_2$  e  $e_3$  apresentam-se na Tabela 4.1, a seguir:

Tabela 4.1 – Constantes dos elementos com estabilização.

Elemento	$e_1$	$e_2$	$e_3$
Q4	1	0	1
ASOB	1	0	0
ASMD	1/2	-1/2	1
ASQBI	1	$-\bar{\nu}$	0
ASOI	1	-1	0
ASOI(1/2)	1/2	-1/2	0

Os elementos são os seguintes:

- Q4 – Clássico elemento quadrilateral de 4 nós;
- ASMD – Assumed Strain Mean Dilatation;
- ASQBI – Assumed Strain Quintessential Bending /Incompressible. É um elemento bastante preciso tanto para materiais compressíveis como incompressíveis, o ASQBI apresenta resultados semelhantes ao elemento Q6 (WILSON *et al*, 1973), em malhas retangulares;
- ASOI e ASOI(1/2) – Assumed Strain Optimal Incompressible. Apresentam ótimos resultados em problemas que envolvam materiais incompressíveis.
- ASOB – Assumed Strain Optimal Bending. Elemento que apresenta resultados adequados em problemas que envolvam flexão, desde que o material não apresente incompressibilidade;

#### 4.1.3 Estabilização com uso de séries de Taylor

Esta formulação tem também como base o princípio variacional misto de Hu-Washizu, e objetiva formular elementos quadrilaterais eficientes, com integração reduzida e que apresentam uma parcela de rigidez estabilizante associada. Entretanto, devido aos conceitos adicionais que introduz, a formulação representa uma variação do EAS, visto no item 4.1.1.



#### 4.1.3.1 Considerações iniciais

Como visto o enriquecimento por deformações assumidas (EAS) propõe a sobreposição de deformações compatíveis com um campo de deformações incompatíveis (equação (4.1)), já a presente formulação adiciona um novo conceito, ao propor que a parte compatível da deformação seja formada por duas partes: a primeira constante e a segunda expressa mediante o uso de expansão de Taylor nas derivadas das funções de forma. Esta parcela adicional, a exemplo da referente ao campo de deformações incompatíveis, que se mantém igual ao proposto na EAS, também verifica o critério de ortogonalidade em relação ao campo de tensões.

#### 4.1.3.2 Campo de deformações e condição de ortogonalidade

As deformações deste método são obtidas conforme a seguinte expressão:

$$\varepsilon = \varepsilon^C + \varepsilon^{SU} + \tilde{\varepsilon} \quad (4.78)$$

A primeira parcela,  $\varepsilon^C$ , refere-se parte *compatível* local do campo de deformações, pois, como se verá, é calculada no ponto central do elemento. A segunda parcela tem a característica de, em conjunto com a primeira, desempenhar o mesmo papel de um campo de deformação *estabilizante* que as derivadas parciais de  $B_0$  desempenham ao gerar a matriz estabilizante em (4.66). Por sua vez a última parcela é o já conhecido enriquecimento em deformações assumidas, conforme foi detalhadamente estudado no item 4.1.1 do presente trabalho.

As condições de ortogonalidade dos enriquecimentos em relação ao tensor de tensões, agora se apresentam do seguinte modo:

$$\begin{aligned} \int_V \frac{1}{2} \sigma^T \cdot \varepsilon^{SU} dV &= 0 \\ \int_V \frac{1}{2} \sigma^T \cdot (\varepsilon^C - \nabla^S u) dV &= 0 \\ \int_V \frac{1}{2} \sigma^T \cdot \tilde{\varepsilon} dV &= 0 \end{aligned} \quad (4.79)$$

Com as condições anteriores, o funcional de Hu-Washizu, base da

formulação, fica reescrito na forma:

$$\Pi_{HW} = \int_V \frac{1}{2} (\varepsilon^C + \varepsilon^{SU} + \tilde{\varepsilon})^T C (\varepsilon^C + \varepsilon^{SU} + \tilde{\varepsilon}) dV - \int_V u^T \bar{b} dV - \int_S u^T \bar{t} dS \quad (4.80)$$

#### 4.1.3.3 Interpolações no elemento finito

Para certo elemento finito quadrilateral, os campos de deslocamento e de deformações podem ser interpolados da seguinte forma:

$$\begin{aligned} u &= N(\xi)q \\ \varepsilon^C &= G^C(\xi)q \\ \varepsilon^{SU} &= G^{SU}(\xi)q \\ \tilde{\varepsilon} &= \tilde{G}(\xi)\lambda \end{aligned} \quad (4.81)$$

Onde  $q$  é o vetor dos deslocamentos nodais,  $N(\xi)$  é a matriz que contém as funções de forma clássicas no domínio isoparamétrico, as matrizes indicadas por  $G$  reúnem as funções interpoladoras para cada campo de deformação individualmente. Já  $\lambda$  é o vetor que contém os parâmetros de deformações assumidas de cada elemento.

Sendo  $\Sigma$  o campo de tensões admissíveis em no domínio  $V$ , as condições de ortogonalidade escrevem-se:

$$\begin{aligned} \int_{V_e} \Sigma^T \cdot \varepsilon^{SU} dV_e &= 0 \\ \int_{V_e} \Sigma^T \cdot (\varepsilon^C - \nabla^S u) dV_e &= 0 \\ \int_{V_e} \Sigma^T \cdot \tilde{\varepsilon} dV_e &= 0 \end{aligned} \quad (4.82)$$

De acordo com (SIMO, RIFAI, 1990) para assegurar a convergência e a aprovação no Teste do Mosaico, é suficiente verificar as condições de ortogonalidade apresentadas para um campo de tensões constante por parte. Levando-se em conta esta condição e substituindo as relações (4.81) em (4.82), chegam-se às seguintes condicionantes para garantir a ortogonalidade entre os enriquecimentos e as tensões:

$$\begin{aligned}
\int_{V_e} G^{SU} dV_e &= 0 \\
\int_{V_e} (G^C - B) dV_e &= 0 \\
\int_{V_e} \tilde{G} dV_e &= 0
\end{aligned} \tag{4.83}$$

Considerando-se, em particular, a segunda condição, observa-se que dada a continuidade assumida para os campos envolvidos, pode-se garantir, conforme prescreve o teorema do valor médio, que em pelo menos um ponto do elemento  $G^C$  coincide com  $B$ . Este fato é explorado no desenvolvimento do elemento ao se empregar apenas um ponto de quadratura na integração numérica das condições anteriores.

Como já foi citado anteriormente  $G^C$  é uma matriz compatível local do elemento e por conta do atendimento à (4.78) é obtida diretamente a partir das funções de forma do elemento, conforme expressão (4.84):

$$G_i^C = B_i \Big|_{\xi=0, \eta=0} \tag{4.84}$$

Na relação anterior o índice  $i$  varia de 1 a 4, e  $B_i$  é dependente apenas das derivadas das funções de forma clássicas, conforme a expressão a seguir:

$$B_i = \begin{bmatrix} N_{i,x} & 0 \\ 0 & N_{i,y} \\ N_{i,y} & N_{i,x} \end{bmatrix} \tag{4.85}$$

#### 4.1.3.4 Expansão em série de Taylor para obtenção das matrizes de interpolação

Baseado em (LIU; ONG; URAS, 1985), que utiliza expansão de Taylor sobre as matrizes do operador diferencial  $B$  (que aparece na (4.66), neste trabalho), (KORELC; WRIGGERS, 1997) propõem, como forma de gerar uma parcela estabilizante de rigidez, a utilização da expansão em série de Taylor na definição das duas outras matrizes  $G$ .

A expansão em série de Taylor sobre uma função contínua qualquer em duas variáveis,  $f(\xi, \eta)$ , apresenta-se na forma a seguir:

$$f(\xi_0 + \Delta\xi, \eta_0 + \Delta\eta) = f(\xi_0, \eta_0) + \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{i!} \left( \Delta\xi \frac{\partial}{\partial\xi} + \Delta\eta \frac{\partial}{\partial\eta} \right)^i f \right) \Big|_0 + R_n \quad (4.86)$$

tomando-se por referencia o ponto central do elemento, coincidente com a origem do sistema local e desenvolvendo a expansão até o grau  $n = 2$ , tem-se:

$$T_2(f) = f|_0 + f_{,\xi}|_0 \xi + f_{,\eta}|_0 \eta + \frac{1}{2} \left( f_{,\xi\xi}|_0 \xi^2 + f_{,\eta\eta}|_0 \eta^2 + 2f_{,\xi\eta}|_0 \xi\eta \right) + R_2 \quad (4.87)$$

Pensando-se em particular na condição de ortogonalidade em relação ao campo de tensões, os termos de ordem  $\xi^2$ ,  $\eta^2$  e o termo constante do desenvolvimento anterior não atendem àquela condição. Portanto, para que se garanta o atendimento às (4.83), a expansão a ser usada para determinação das matrizes  $G$ , apresenta uma pequena adaptação, mediante a eliminação dos referidos termos, ficando com a seguinte expressão:

$$\bar{T}(f) = f_{,\xi}|_0 \xi + f_{,\eta}|_0 \eta + f_{,\xi\eta}|_0 \xi\eta \quad (4.88)$$

A matriz de estabilização  $G^{SU}$  é então obtida por meio da aplicação da expansão modificada de Taylor sobre as derivadas das funções de forma clássicas dos elementos quadrilaterais (funções (4.29)), com  $i$  variando de 1 a 4:

$$G_i^{SU} = \bar{T}(B_i) \quad (4.89)$$

Estende-se este procedimento para a matriz  $\tilde{G}$ . Mais especificamente, a matriz de enriquecimento é obtida a partir da expansão de Taylor sobre as derivadas das funções de forma enriquecedoras (funções (4.30)) com  $i$  variando de 5 e 6, de modo que  $B_i$  seja formada pelas derivadas parciais das funções dos modos incompatíveis 1 e 2 (equações (4.30)).

$$\tilde{G}_i = \bar{T}(B_i) \quad (4.90)$$

Tendo-se em vista a aplicação do desenvolvimento em série, pode-se genericamente escrever que  $G_i^C = \bar{T}_0(B_i)$ , onde  $\bar{T}_0$  é o termo constante do

desenvolvimento.

Desse modo, todos os coeficientes ficam assim determinados e, portanto, a matriz de rigidez pode ser facilmente obtida, bastando que seja determinada a ordem da expansão em série de Taylor.

$$\begin{aligned} N_{i,x} &\approx \bar{N}_{i,x} = T_0(N_{i,x}) + \bar{T}_n(N_{i,x}) \\ N_{i,y} &\approx \bar{N}_{i,y} = T_0(N_{i,y}) + \bar{T}_n(N_{i,y}) \end{aligned} \quad (4.91)$$

Como observação final, a construção anterior gera matrizes que verificam a seguinte condição de complementaridade:

$$(G^C \cup G^{SU}) \cap \tilde{G} = \emptyset \quad (4.92)$$

a qual garante estabilidade ao elemento finito.

Uma grande vantagem dessa formulação, quando comparada a anterior, reside na possibilidade de implementação da forma fechada dessas expressões mediante, uma ordem de expansão estabelecida, no programa implementado usou-se uma expansão de primeira ordem, conforme a equação(4.88).

No **Anexo B** apresentam-se as expressões implementas no programa, em outras palavras, as equações que formam a matriz de rigidez e conseqüentemente o sistema de equações da presente formulação.

#### 4.1.3.5 Considerações finais

O fato de poder utilizar formas fechadas simplifica significativamente a implementação do elemento, além de conferir ao programa um menor custo computacional, e conseqüentemente um menor tempo de processamento.

O elemento ora implementado apresenta como característica importante a aprovação no teste de Mosaico (*Patch Test*) o que pode lhe conferir convergência, além de apresentar satisfatórios resultados em redes distorcidas e extremamente distorcidas, apresentando resultados equivalentes aos obtidos na formulação EAS.

## 4.2 Modelo axissimétrico

As estruturas axissimétricas são tridimensionais, porém as suas condições de simetria permitem uma representação bi ou unidimensional, dependendo das características geométricas da estrutura, bem como do interesse e ferramentas matemáticas disponíveis. A alternativa de modelagem destas estruturas adotada neste trabalho faz uso de elementos finitos planos.

Sob o ponto de vista numérico, em particular do emprego de elementos finitos, uma redução na dimensão, implica em considerável redução do número de variáveis (graus de liberdade) da estrutura. Tal redução então tem óbvios efeitos positivos, como um menor tempo de processamento e maior facilidade na manipulação dos dados tanto na etapa de pré quanto de pós-processamento.

### 4.2.1 Considerações iniciais

Como já comentado anteriormente, na busca por soluções aproximadas é justificável empregar elementos que sejam o mais simples possível, desde que se preserve a precisão dos resultados.

Nos itens seguintes apresenta-se uma metodologia para a formulação de elementos finitos modificados de baixa ordem para aplicação em problemas axissimétricos, tendo por base as alternativas estudadas neste trabalho. Com mais ênfase, aplica-se o método das deformações assumidas, introduzido por (SIMO, RIFAI, 1990).

O elemento apresentado faz, portanto, uso do princípio variacional de Hu-Washizu, introduzindo-se, também, a ortogonalidade do campo de tensões em relação aos campos de deformações assumidas. Apesar de não ser objeto deste trabalho, a escolha por aquele método justifica-se também pela possibilidade de expansão da formulação a regimes não-lineares.

### 4.2.2 Elemento axissimétrico clássico

Inicialmente, alguns aspectos da formulação de um elemento finito clássico para axissimetria (de geometria e de carregamento) são previstos, servindo como forma de reforçar os conceitos e porque são comuns ao desenvolvimento do elemento axissimétrico não-convencional. O elemento utilizado guarda muitas características de elementos planos anteriormente estudados, possuindo apenas quatro nós e com aproximação construída por base de funções de forma bilineares (equações (4.29)).

O elemento apresenta-se descrito num plano formado pelo par de direções  $r$ - $z$ , sendo a primeira radial e a segunda, direção  $z$ , coincidente com a do eixo de axissimetria da estrutura. A terceira dimensão é a tangencial  $\theta$ , perpendicular ao plano de definição do elemento em relação à qual as propriedades da estrutura não se alteram.

Como recurso para ampliar as possibilidades de aplicação do elemento finito considera-se também um domínio parametrizado, seguindo procedimento semelhante àquele feito nos problemas planos, anteriormente estudados. A Figura 4.7 ilustra a correlação entre os domínios considerados, mediante indicação do mapeamento do elemento.

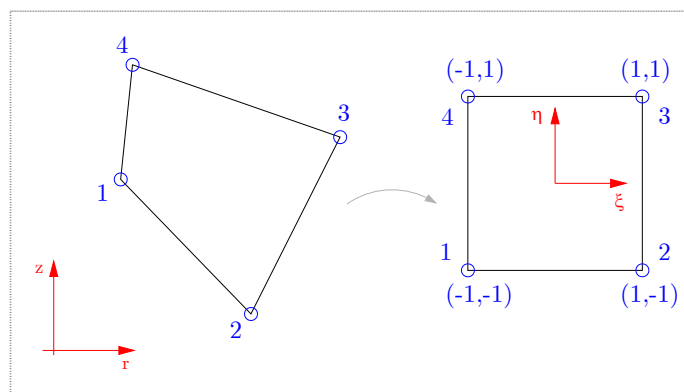


Figura 4.7 – Domínio global e paramétrico.

As funções de forma são as mesmas do elemento plano desenvolvido na seção 4.1.1 (equações (4.29)), e com referencia ao domínio paramétrico  $(\xi-\eta)$  e estão convenientemente reunidas no seguinte vetor:

$$\mathbf{N} = \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{Bmatrix} \quad (4.93)$$

No sistema de referencia global, as coordenadas  $r$ - $z$  nodais ficam reunidas em dois vetores distintos, conforme as equações (4.94):

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} \quad (4.94)$$

Com as equações (4.93) e (4.94), o mapeamento do quadrilátero pode, portanto, ser expresso da seguinte forma:

$$\begin{aligned} r &= \mathbf{N}^T \mathbf{r} \\ z &= \mathbf{N}^T \mathbf{z} \end{aligned} \quad (4.95)$$

Analogamente, o campo de deslocamento de um ponto qualquer do elemento, com componentes radial  $u$  e axial  $v$ , fica definido conforme indica a (4.96):

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}^T & 0 \\ 0 & \mathbf{N}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_r \\ q_z \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{N}} \mathbf{q} \quad (4.96)$$

Na relação anterior,  $q_r$  indica deslocamento nodal radial e  $q_z$  o deslocamento nodal axial.

Analogamente à equação (4.48) no item 4.1.2, também aqui se definem vetores  $b_r$  e  $b_z$ , recebendo as formas indicadas a seguir:

$$b_r = \frac{\partial \mathbf{N}(0,0)}{\partial r} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} z_2 - z_4 \\ z_3 - z_1 \\ z_4 - z_2 \\ z_1 - z_3 \end{bmatrix} \quad b_z = \frac{\partial \mathbf{N}(0,0)}{\partial z} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} r_4 - r_2 \\ r_1 - r_3 \\ r_2 - r_4 \\ r_3 - r_1 \end{bmatrix} \quad (4.97)$$

De forma análoga ao apresentado no item 4.1.2, com o propósito de criar uma nova apresentação para as funções de forma, considere-se os vetores



$h = \{1 \ 1 \ 1 \ 1\}^T$  e  $t = \{1 \ -1 \ 1 \ -1\}^T$ , e o vetor de projeção  $\gamma$ . Com base nas propriedades de ortogonalidade entre esses e os vetores  $b_r$  e  $b_z$ , pode-se se dar às funções de forma (4.93), a seguinte representação:

$$\mathbf{N} = \chi + rb_r + zb_z + \frac{A}{4}\psi\gamma \quad (4.98)$$

Na relação anterior aparecem o vetor projeção de projeção  $\gamma$  e um vetor  $\chi$ , ambos constante no elemento, os quais são definidos por:

$$\begin{aligned} \chi &= \frac{1}{4} \left[ t - (t^T \mathbf{r})b_r - (t^T \mathbf{z})b_z \right] \\ \gamma &= \frac{1}{A} \left[ h - (h^T \mathbf{r})b_r - (h^T \mathbf{z})b_z \right] \end{aligned} \quad (4.99)$$

As componentes de deformações podem ser obtidas mediante as equações (4.96) e (4.98), operando-se o gradiente simétrico dos deslocamentos, conforme indica a equação (4.100).

$$\varepsilon_u = \nabla^s u = \begin{bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{rz} \\ \varepsilon_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left( b_r^T + \frac{A}{4} \frac{\partial \psi}{\partial r} \gamma^T \right) q_r \\ \left( b_z^T + \frac{A}{4} \frac{\partial \psi}{\partial z} \gamma^T \right) q_z \\ \left( b_z^T + \frac{A}{4} \frac{\partial \psi}{\partial z} \gamma^T \right) q_r + \left( b_r^T + \frac{A}{4} \frac{\partial \psi}{\partial r} \gamma^T \right) q_z \\ \frac{1}{r} \mathbf{N}^T q_r \end{bmatrix} \quad (4.100)$$

Ao tensor de deformações pode-se dar uma representação típica da formulação clássica:

$$\varepsilon_u = Bq \quad \text{onde} \quad B = B_0 + B_\phi \quad (4.101)$$

onde as partes constante,  $B_0$ , e oriunda das derivadas parciais,  $B_\phi$ , apresentam as seguintes expressões:

$$B_0 = \begin{bmatrix} b_r^T & 0^T \\ 0^T & b_z^T \\ b_z^T & b_{r1}^T \\ 0^T & 0^T \end{bmatrix} ; \quad B_\delta = \begin{bmatrix} \frac{A}{4} \frac{\partial \psi}{\partial r} \gamma^T & 0^T \\ 0^T & \frac{A}{4} \frac{\partial \psi}{\partial z} \gamma^T \\ \frac{A}{4} \frac{\partial \psi}{\partial z} \gamma^T & \frac{A}{4} \frac{\partial \psi}{\partial r} \gamma^T \\ \frac{1}{r} \mathbf{N}^T & 0^T \end{bmatrix} \quad (4.102)$$

### 4.2.3 Representação modificada da matriz dos operadores de derivadas

Mas, ao campo de deformações do elemento é possível dar outra representação de interesse, mediante a introdução do conceito de deformação média.

Seja, então, a definição da matriz média dos operadores diferenciais dada pela seguinte forma:

$$\hat{B} = \frac{1}{V} \int_A B r dA \quad (4.103)$$

Na relação anterior,  $V$  representa o momento estático da área do elemento em relação ao eixo  $z$  de referência, ou axissimetria, obtido pela expressão:

$$V = \int_A r dA \quad (4.104)$$

Nota-se que a matriz média operando sobre o campo de deslocamentos determina um campo constante de deformações médias no elemento.

Realizando-se a substituição das expressões (4.102) em (4.103), e fazendo algumas simples operações, obtêm-se:

$$\hat{B} = B_0 + \frac{1}{V} \begin{bmatrix} \frac{A}{4} \beta_1 \gamma^T & 0^T \\ 0^T & \frac{A}{4} \beta_2 \gamma^T \\ \frac{A}{4} \beta_2 \gamma^T & \frac{A}{4} \beta_1 \gamma^T \\ \beta_3^T & 0^T \end{bmatrix} \quad \text{onde} \quad \begin{aligned} \beta_1 &= \int_A \frac{\partial \psi}{\partial r} r dA \\ \beta_2 &= \int_A \frac{\partial \psi}{\partial z} r dA \\ \beta_3^T &= \int_A \mathbf{N} dA \end{aligned} \quad (4.105)$$

Pode-se, ainda, reescreve-se  $\hat{B}$  de forma mais compacta, conforme se

mostra abaixo:

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} \hat{b}_1^T & 0^T \\ 0^T & \hat{b}_2^T \\ \hat{b}_2^T & \hat{b}_1^T \\ \frac{1}{V}\beta_3^T & 0^T \end{bmatrix} \quad \text{onde} \quad \begin{aligned} \hat{b}_1^T &= b_1^T + \frac{A}{4V}\beta_1\gamma^T \\ \hat{b}_2^T &= b_2^T + \frac{A}{4V}\beta_2\gamma^T \end{aligned} \quad (4.106)$$

Portanto,  $B$  pode assumir uma nova representação, agora em função de  $\hat{B}$  e de uma parcela  $B_h^\partial$ :

$$B = \hat{B} + B_h^\partial \quad \text{ou} \quad B_h^\partial = B - \hat{B} \quad (4.107)$$

A parcela  $B_h^\partial$ , determinada de acordo com (4.107)-b, fica dada por:

$$B_h^\partial = \begin{bmatrix} \frac{A}{4}\omega_1\gamma^T & 0^T \\ 0^T & \frac{A}{4}\omega_2\gamma^T \\ \frac{A}{4}\omega_2\gamma^T & \frac{A}{4}\omega_1\gamma^T \\ \frac{1}{r}\mathbf{N} - \frac{1}{V}\beta_3^T & 0^T \end{bmatrix} \quad \text{onde} \quad \begin{aligned} \omega_1 &= \frac{\partial\psi}{\partial r} - \frac{1}{V}\beta_1 \\ \omega_2 &= \frac{\partial\psi}{\partial z} - \frac{1}{V}\beta_2 \end{aligned} \quad (4.108)$$

#### 4.2.4 Formulação do elemento enriquecido

Aplicando-se o método das deformações assumidas de (SIMO; RIFAI, 1990), o campo das deformações passa a ser formado por duas parcelas: uma compatível ( $\varepsilon_u$ ), e oriunda da relação deformação-deslocamento convencional, e outra relacionada ao enriquecimento ( $\tilde{\varepsilon}$ ), parcela da deformação assumida:

$$\varepsilon = \varepsilon_u + \tilde{\varepsilon} \quad (4.109)$$

Como condicionante básica do método, o campo de tensões deve ser ortogonal ao campo de enriquecimento, de modo a não haver acréscimo de energia de interna. Sendo assim a condição apresentada na relação (4.2) fica reescrita, neste caso de axissimetria, da seguinte forma:

$$\int_A \sigma^T \tilde{\varepsilon} r dA = 0 \quad \therefore \int_A \sigma^T (\varepsilon_u - \varepsilon) r dA = 0 \quad (4.110)$$

Em razão do enriquecimento, a matriz dos operadores de derivadas tem sua representação em forma aditiva modificada, mas ainda admitindo a matriz média entre suas componentes. Assim sendo a nova matriz  $\bar{B}$ , fica formada por duas parcelas: a primeira, já conhecida,  $\hat{B}$  e uma segunda  $B_h$ , a ser determinada. Vale, portanto, escrever:

$$\varepsilon = \bar{B}q \quad \text{onde} \quad \bar{B} = \hat{B} + B_h \quad (4.111)$$

Voltando à equação (4.110) e levando-se em conta as (4.111) e (4.107), obtém-se a seguinte forma:

$$\int_A \sigma^T (B_h^\partial - B_h) r dA = 0 \quad (4.112)$$

A condição de ortogonalidade deve valer para um campo qualquer de tensão e, em particular, para um campo de tensões constante. Por outro lado, é possível mostrar, usando a definição dada, que  $\int_A B_h^\partial r dA = 0$ . Assim sendo, a condição de ortogonalidade (4.110) acaba dependente exclusivamente de uma escolha adequada para a matriz  $B_h$  e, portanto, fica resumida a forma:

$$\int_A B_h r dA = 0 \quad (4.113)$$

Finalmente, considerando-se que a primeira variação do funcional de Hu-Washizu, para o problema axissimétrico, tem a seguinte apresentação:

$$\delta \left( \frac{1}{2} \int_A \varepsilon^T C \varepsilon r dA \right) + \delta \left( \int_A \sigma^T (\varepsilon_u - \varepsilon) r dA \right) = \int_\Gamma \delta u^T t r d\Gamma + \int_A \delta u^T \rho b r dA \quad (4.114)$$

É possível construir o sistema resolvente do elemento por substituição dos campos de aproximação e matriz dos operadores de derivadas deduzidos. Tal sistema pode ser resumido pela equação a seguir, onde  $q$  representa o vetor de deslocamentos nodais:

$$Kq = f \quad (4.115)$$

A matriz de rigidez  $K$  acaba por apresentar as seguintes parcelas:

$$K = K_b + K_h \quad \text{onde} \quad \begin{aligned} K_b &= VB^T \underline{C} \hat{B} \\ K_h &= \int_A B_h^T \underline{C} B_h r dA \end{aligned} \quad (4.116)$$

A matriz constitutiva  $\underline{C}$  relaciona tensões e deformações e apresenta-se no caso axissimétrico conforme (3.24).

A  $K_b$  representa, de modo análogo ao que se apresentou no item 4.1.2.1, uma matriz base. Tendo-se em vista que a matriz base possui modos espúrios de deformação, a matriz  $K_h$  é de dita de alta ordem e tem a finalidade de garantir um correto ‘rank’ a matriz de rigidez.

Desde que, devido a axissimetria, há somente um movimento de corpo rígido livre, sendo este relativo à translação na direção axial (direção  $z$ ), e considerando-se que o elemento possui oito graus de liberdade, a matriz de rigidez  $K$ , possui apenas sete auto-vetores não-nulos, isto é, a sua ordem (‘rank’) é sete. Como a matriz dos coeficientes elásticos é positiva definida, e pode-se mostrar que  $\hat{B}$  possui ordem quatro, devendo, portanto, para a matriz  $K_h$  apresentar ordem três.

O vetor de forças nodais equivalente, mostrado a seguir, é composto por duas parcelas, sendo a primeira oriunda das contribuições de forças eventualmente aplicadas no contorno do elemento e a segunda formada pela ação das forças volúmicas.

$$f = \int_{\Gamma} \bar{N} t r d\Gamma + \int_A \bar{N} \rho b r dA \quad (4.117)$$

Resta que a formulação do elemento finito fica dependente de uma adequada escolha da matriz  $B_h$ , de modo que garanta boas características de aproximação e atenda a condição pética (equação (4.113)).

#### 4.2.5 A matriz $B_h$

A escolha adequada da matriz  $B_h$  rege a determinação do elemento finito

enriquecido com deformações assumidas. Primeiramente, a mesma compõe-se do produto de duas outras matrizes ficando, neste caso, representada da seguinte forma:

$$B_h = E_h \Lambda \tag{4.118}$$

Onde a matriz  $\Lambda$  dependa unicamente de parâmetros constantes, e já conhecidos, dentro de cada elemento, sendo dada por:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \gamma^T & 0^T \\ 0^T & \gamma^T \\ b_2^T & 0^T \end{bmatrix} \tag{4.119}$$

Sendo assim, a matriz de rigidez de alta ordem fica reestruturada em termos de  $E_h$  e  $\Lambda$ , conforme a equação (4.120).

$$K_h = \Lambda^T \left( \int_A E_h^T C E_h r dA \right) \Lambda \tag{4.120}$$

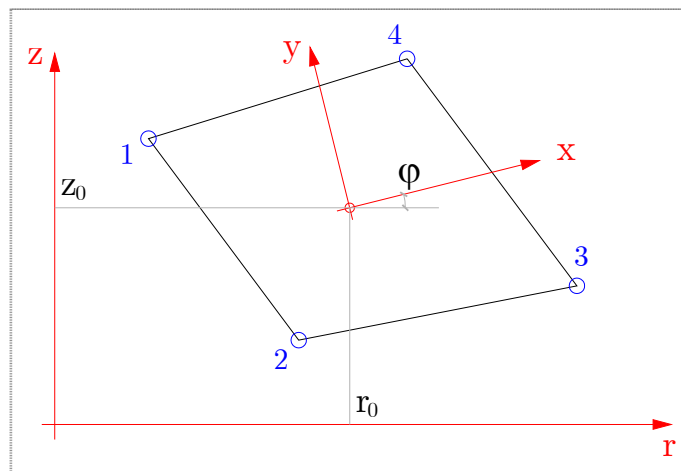


Figura 4.8 – Coordenadas locais x-y .

A matriz a ser determinada passa a ser  $E_h$ , para tanto, parte-se segundo o trabalho (FREDRIKSSON; OTTOSEN, 2007) com a definição de eixos locais em cada elemento, os quais são eixos centrais principais de inércia da área do elemento. O par  $(r_0, z_0)$  posiciona a origem dos eixos locais segundo as coordenadas globais  $r$ - $z$  e o ângulo  $\varphi$ , positivo se marcado no sentido horário, registra a defasagem entre os eixos  $x$  e  $r$ . A Figura 4.8 ilustra os sistemas de coordenadas, bem como o referido

ângulo.

As coordenadas do centróide são facilmente obtidas a partir das seguintes relações:

$$\begin{aligned} r_0 &= \frac{V}{A} \\ z_0 &= \frac{V_z}{A} \end{aligned} \quad \text{onde} \quad V_z = \int_A z dA \quad (4.121)$$

A relação entre os sistemas depende unicamente do ângulo acima descrito, de modo tal que:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} r - r_0 \\ z - z_0 \end{bmatrix} \quad \text{onde} \quad R = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \text{sen} \varphi \\ -\text{sen} \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \quad (4.122)$$

Sendo assim, os deslocamentos nodais descritos nos dois sistemas são relacionados a partir da matriz  $S$  conforme relação (4.123), a seguir, onde  $I_{4 \times 4}$  representa a identidade de ordem 4 (quatro).

$$\begin{bmatrix} q_x \\ q_y \end{bmatrix} = S \begin{bmatrix} q_r \\ q_z \end{bmatrix} \quad \text{onde} \quad S = \begin{bmatrix} I_{4 \times 4} \cdot \cos \varphi & I_{4 \times 4} \cdot \text{sen} \varphi \\ -I_{4 \times 4} \cdot \text{sen} \varphi & I_{4 \times 4} \cdot \cos \varphi \end{bmatrix} \quad (4.123)$$

A metodologia apresentada por (FREDRIKSSON; OTTOSEN, 2004) para um EPD pode ser empregada no caso axissimétrico. Definem-se os seguintes vetores e escalares:

$$\begin{aligned} l^T &= \begin{bmatrix} x_1 y_1 & x_2 y_2 & x_3 y_3 & x_4 y_4 \end{bmatrix} & \theta_1 &= \gamma^T l \\ m^T &= \begin{bmatrix} x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \end{bmatrix} & e \quad \theta_2 &= \gamma^T m \\ n^T &= \begin{bmatrix} y_1^2 & y_2^2 & y_3^2 & y_4^2 \end{bmatrix} & \theta_3 &= \gamma^T n \end{aligned} \quad (4.124)$$

Com os escalares, definem-se, ainda, as seguintes constantes auxiliares, basicamente relacionadas à medidas de distorção do elemento:

$$\begin{aligned}
 L_{11} &= \frac{\theta_1}{(\theta_1^2 + \frac{1}{4}\theta_3^2)^{\frac{1}{2}}} \quad , \quad L_{12} = \frac{\frac{1}{2}\theta_3}{(\theta_1^2 + \frac{1}{4}\theta_3^2)^{\frac{1}{2}}} \quad , \\
 L_{21} &= \frac{\frac{1}{2}\theta_2}{(\theta_1^2 + \frac{1}{4}\theta_2^2)^{\frac{1}{2}}} \quad e \quad L_{22} = \frac{\theta_1}{(\theta_1^2 + \frac{1}{4}\theta_2^2)^{\frac{1}{2}}}
 \end{aligned} \tag{4.125}$$

Para o Estado Plano de Deformações, as deformações assumidas apresentam-se caracterizadas nas equações (4.126), sendo considerado também que as mesmas valem para um sistema  $x$ - $y$  conforme se mostra na Figura 4.8.

$$\begin{aligned}
 \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{EPD}^{(x,y)} &= \mathbf{E}_{EPD}^{(x,y)} \boldsymbol{\Lambda}_{EPD}^{(x,y)} \mathbf{q}^{(x,y)} \quad \text{onde} \\
 \boldsymbol{\Lambda}_{EPD}^{(x,y)} &= \begin{bmatrix} \gamma_{(x,y)}^T & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0}^T & \gamma_{(x,y)}^T \end{bmatrix} \\
 \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{EPD}^{(x,y)T} &= \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_x & \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_y & \tilde{\boldsymbol{\gamma}}_{xy} \end{bmatrix} \\
 \mathbf{E}_{EPD}^{(x,y)} &= \begin{bmatrix} L_{11}y - \bar{\nu}L_{21}x & -\bar{\nu}L_{22}x + L_{12}y \\ -\bar{\nu}L_{11}y + L_{21}x & L_{22}x - \bar{\nu}L_{12}y \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 \bar{\nu} &= \frac{\nu}{1-\nu}
 \end{aligned} \tag{4.126}$$

Faz-se então a transformação do sistema  $x$ - $y$  para as coordenadas  $r$ - $z$ :

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{EPD}^{(r,z)} = \mathbf{T}^T \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{EPD}^{(x,y)} \tag{4.127}$$

Onde a matriz  $\mathbf{T}$ , assim como  $\mathbf{R}$  e  $\mathbf{S}$ , depende exclusivamente do ângulo  $\varphi$ , tendo a mesma a seguinte forma:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos^2\varphi & \sin^2\varphi & 2 \cdot \cos\varphi \cdot \sin\varphi \\ \sin^2\varphi & \cos^2\varphi & -2 \cdot \cos\varphi \cdot \sin\varphi \\ -\cos\varphi \cdot \sin\varphi & \cos\varphi \cdot \sin\varphi & (\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) \end{bmatrix} \tag{4.128}$$

Inserindo as relações (4.123), (4.126) e (4.128) na equação (4.127), obtêm-se a seguinte expressão para a deformação assumida, agora no domínio  $r$ - $z$ :

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{EPD}^{(r,z)} = \mathbf{T}^T \mathbf{E}_{EPD}^{(x,y)} \boldsymbol{\Lambda}_{EPD}^{(x,y)} \mathbf{S} \mathbf{q} \tag{4.129}$$



Como  $\Lambda_{EPD}^{(x,y)} \mathcal{S} = R \Lambda_{EPD}^{(x,y)}$  e  $\Lambda_{EPD}^{(x,y)} = \Lambda_{EPD}^{(r,z)}$ , então se reescreve (4.129), resultando finalmente em:

$$\tilde{\epsilon}_{EPD}^{(r,z)} = E_{EPD}^{(r,z)} \Lambda_{EPD}^{(r,z)} q \quad \text{onde} \quad E_{EPD}^{(r,z)} = T^T E_{EPD}^{(x,y)} R \quad e \quad \Lambda_{EPD}^{(r,z)} = \begin{bmatrix} \gamma^T & 0^T \\ 0^T & \gamma^T \end{bmatrix} \quad (4.130)$$

Voltando-se para a matriz  $E_{EPD}^{(r,z)}$ , a mesma fica da seguinte forma:

$$E_{EPD}^{(r,z)} = T^T \left[ Q_1 R \begin{bmatrix} r - r_0 \\ z - z_0 \end{bmatrix} \quad Q_2 R \begin{bmatrix} r - r_0 \\ z - z_0 \end{bmatrix} \right] R \quad (4.131)$$

Onde as matrizes  $Q_1$  e  $Q_2$  são funções das componentes  $L$ 's e do coeficiente de Poisson, conforme equações (4.132).

$$Q_1 = \begin{bmatrix} -\bar{\nu} L_{21} & L_{11} \\ L_{21} & -\bar{\nu} L_{11} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad e \quad Q_2 = \begin{bmatrix} -\bar{\nu} L_{22} & L_{12} \\ L_{22} & -\bar{\nu} L_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.132)$$

Para que se garanta o atendimento da condição (4.113), pode-se aplicar a seguinte estratégia, considerando uma função continua  $\Xi$  qualquer:

$$\underline{\Xi} = \Xi - \frac{1}{V} \int_A \Xi r dA \quad (4.133)$$

Aplicando a mesma estratégia sobre  $E_{EPD}^{(r,z)}$  obtém-se finalmente:

$$\underline{E}_h = E_{EPD}^{(r,z)} - \frac{1}{V} \int_A E_{EPD}^{(r,z)} r dA \quad (4.134)$$

Por fim, o desenvolvimento feito para o EPD pode ser estendido ao caso axissimétrico mediante ao conveniente acréscimo da última linha e última coluna, conforme indicado na relação seguinte:

$$E_h = \left[ \begin{array}{c|c} & \begin{matrix} 0 \\ -\bar{\nu} \frac{z - z_0}{r} \\ 0 \end{matrix} \\ \hline \underline{E}_h & \begin{matrix} r \\ 0 \\ \frac{z - z_0}{r} \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} \frac{z - z_0}{r} \\ r \end{matrix} \end{array} \right]_{4 \times 3} \quad (4.135)$$

## Implementação Computacional

Como parte integrante deste trabalho de mestrado, foi implementado computacionalmente um programa em linguagem FORTRAN (versão 90), com o intuito de utilizar as formulações anteriormente descritas no estudo de estruturas bidimensionais em EPT e EPD, bem como estruturas axissimétricas. Este capítulo tem por finalidade apresentar o programa desenvolvido e seu funcionamento, assim como as ferramentas numéricas que o mesmo utiliza, e por fim mostrar os outros programas usados para auxiliar o pré e pós-processamento dos dados envolvidos nos problemas.

### 5.1 Descrição geral

O programa implementado é formado por um conjunto de sub-rotinas, funções e módulos, entre outras ferramentas de computação. O mesmo foi totalmente implementado no decorrer deste trabalho de mestrado. As sub-rotinas foram demasiadamente usadas neste programa, como forma de estruturar de forma organizada e hierárquica as tarefas a serem executadas pelo computador na solução dos problemas. Foram elaboradas tais ferramentas desde a fase de entrada de dados até o arquivo de resultado do modelo.

A entrada de dados foi implementada de duas formas distintas, que podem ser usadas pelo usuário: a primeira via arquivo (arquivo de texto, convenientemente arranjado), a segunda é via teclado. Há de se considerar que a última é pouco utilizada em virtude da dificuldade em se lançar muitos dados manualmente, apesar disto a mesma foi mantida e pode ser utilizada em problemas mais simples.

Como este trabalho estudou diversas formulações para os problemas planos, além de uma alternativa para as estruturas axissimétricas, cabem ao usuário as opções com relação à formulação (e por vezes com relação também aos elementos)

a ser utilizada na resolução do problema mecânico. Tal escolha é feita na sub-rotina “Opções Gerais do Programa” conforme a Figura 5.1.

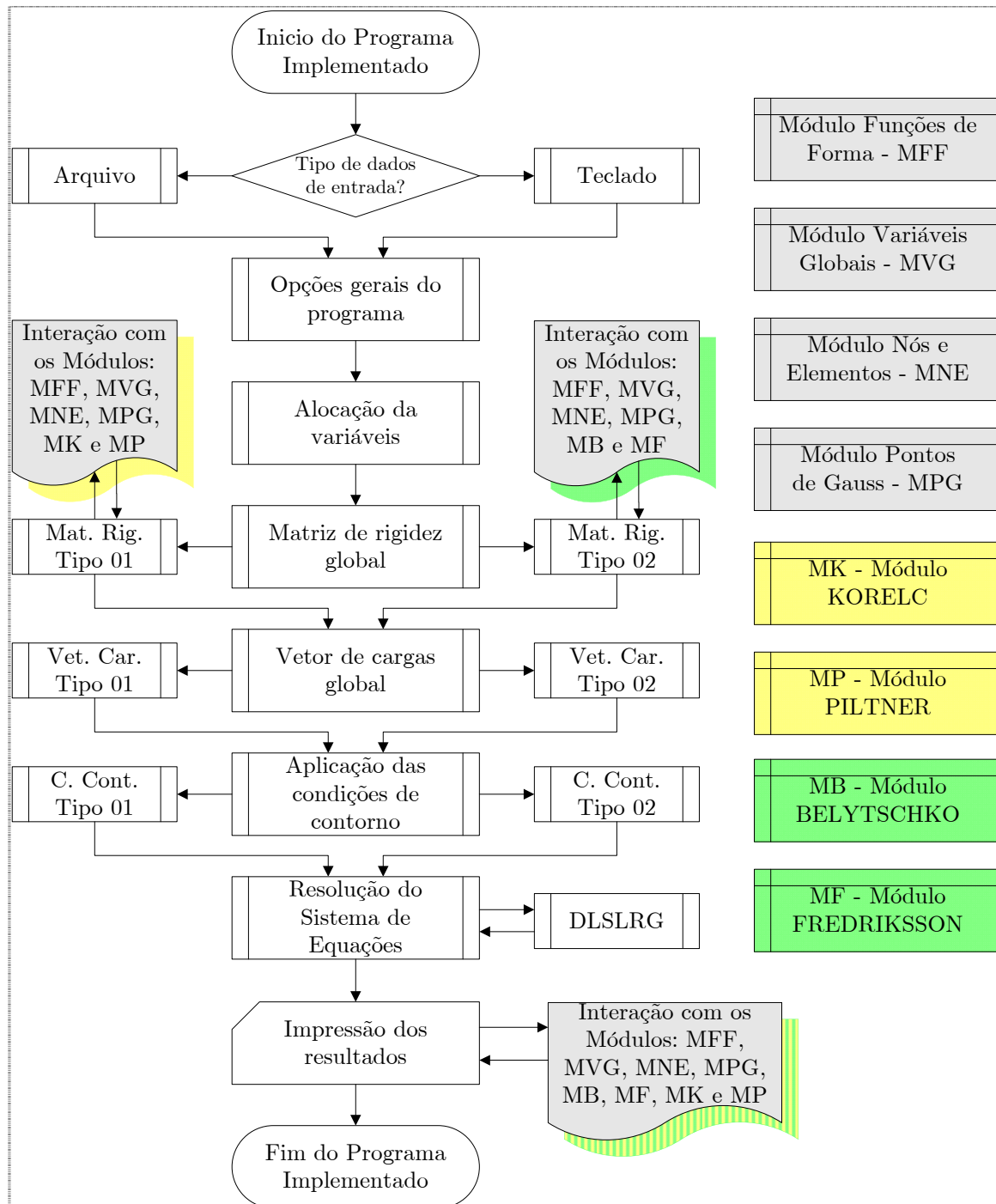


Figura 5.1 – Fluxograma.

Uma vez escolhida a formulação utilizada, o programa realiza a alocação de todas as variáveis de interesse, para a qual foi elaborada uma sub-rotina, conforme se vê no fluxograma acima.

Já na fase de resolução estrutural o programa principal, chama primeiramente a sub-rotina para obtenção da Matriz de Rigidez Global, esta por sua vez aciona uma das duas sub-rotinas, aqui chamadas de Tipo 1 e Tipo 2. A matriz de rigidez do tipo 1 se relaciona aos problemas resolvidos via o método das deformações assumidas (PILTNER; TAYLOR, 1990) ou por meio do uso da expansão em série de Taylor (KORELC; WRIGGERS, 1997). Já a matriz do tipo 2 envolve os diversos elementos formulados por BELYTSCHKO em seus diversos trabalhos, além do problema axissimétrico, conforme o trabalho de (FREDRIKSSON; OTTOSEN, 2007). Estas sub-rotinas interagem intensamente com os módulos auxiliares (na Figura 5.1, quadros na cor cinza) além dos respectivos módulos de formulação, conforme o tipo, quadros amarelos para o tipo 1 e quadros verdes para o tipo 2.

Foram desenvolvidas também sub-rotinas para dar origem ao vetor de cargas e aplicação das condições de contorno, seguindo a mesma lógica apresentada para a matriz de rigidez, com dois tipos para cada o vetor de cargas e dois para a aplicação das condições de contorno. De posse da matriz de rigidez, do vetor de cargas e após a aplicação das condições de contorno, realiza-se a resolução do sistema de equações, utilizando a rotina DLSLRG, que faz parte da biblioteca IMSL, e será discutida adiante. Os resultados são apresentados pelo programa em um arquivo de texto contendo as coordenadas do ponto e as variáveis de interesse (tensões, deslocamentos, deformações).

Uma unidade de programação bastante utilizada neste código computacional foi a ferramenta módulo (no ambiente do Fortran *module*). Este tipo de unidade de programa, o módulo, foi adicionado a esta linguagem a partir da versão 90, e contém definições e especificações que podem ser utilizadas por outras unidades do programa. Sua estrutura é bem semelhante à estrutura de um programa em si. São utilizadas nos módulos; variáveis, funções e sub-rotinas que devem ser chamados por muitas unidades de programas. A grande vantagem de um módulo é que pode ser utilizado por diferentes programas. Trata-se, portanto, de uma maneira de se agrupar

dados globais, tipos derivados e suas operações associadas, blocos de interface e rotinas internas, que podem ser acessados quando necessário por diferentes partes do programa.

Neste trabalho, dividiram-se em duas classes os tipos de módulos desenvolvidos para a implementação computacional: os módulos auxiliares (na cor cinza, na Figura 5.1) e os módulos de formulações (nas cores verde e amarelo, na Figura 5.1).

Os módulos auxiliares servem de base para toda a funcionalidade do programa, sendo eles: o módulo das variáveis globais, o módulo das funções de forma, o módulo dos nós e elementos e o módulo dos pontos e pesos de Gauss. O módulo de variáveis globais contém todas as variáveis que tem uso global no programa, ou seja, variáveis que pertençam, dentro do programa como um todo, a mais de uma sub-rotina, função ou módulo. O módulo das funções de forma guarda todas as funções de forma, bem como as funções enriquecedoras (modos incompatíveis), além das derivadas das mesmas funções. O módulo dos nós e dos elementos tem a finalidade retornar o número e as posições dos nós no domínio físico, e também os nós que formam cada elemento. O módulo de Gauss retorna os pontos e pesos de Gauss para integrações numéricas dos domínios bidimensionais.

Como já foi dito, além destes módulos auxiliares, a ferramenta de programação *module* do FORTRAN foi utilizada para reunir dentro de si as funções e sub-rotinas de cada formulação implementada neste trabalho, sendo elas: Módulo PILTNER, módulo KORELC, módulo BELYTSCHKO e módulo FREDRIKSSON. Foi dado o nome do pesquisador principal de cada uma das alternativas implementadas, como forma de reconhecimento dos mesmos aqui neste trabalho.

## 5.2 Recursos numéricos e ferramentas matemáticas

Neste item, descrevem-se as principais ferramentas matemáticas, assim como os recursos numéricos adotados no escopo do programa. Os recursos, nada mais

são do que estratégias implementadas para a resolução de problemas recorrentes, sendo aqui descritos a utilização de elementos isoparamétricos, além da utilização de regras de integrações numéricas. Já as ferramentas matemáticas estão reunidas numa biblioteca fechada de classes de operações matemáticas, tais como inversão de matrizes, resolução de sistema de equações, entre outras.

### 5.2.1 Mapeamento dos elementos

O mapeamento dos elementos foi utilizado com o intuito de simplificar e padronizar as expressões de funções de forma suas derivadas dentro da programação implementada. Tal estratégia implica num maior domínio sobre as mais diversas expressões, de modo a facilitar consideravelmente as integrações e derivações dentro do programa.

### 5.2.2 Integração numérica de domínios bidimensionais

O cálculo exato de integrais, em geral, ficam impossibilitados pela complexidade algébrica envolvida na sua resolução. Por este motivo, a escolha de integrações numéricas é justificada uma vez que ela possibilita tais integrações mediante uso de técnicas de implementação simples e de amplo conhecimento acadêmico-científico.

Neste trabalho optou-se pelo uso de integrações numéricas, com base na quadratura de Gauss-Legendre, particularmente nas integrais da formulação isoparamétrica.

A seguir, na Tabela 5.1, exemplifica-se a fórmula da quadratura de Gauss-Legendre e com os respectivos pontos e pesos, para até uma quadratura de ordem 5, para o caso unidimensional.

Tal regra foi implementada no programa aqui descrito para o caso bidimensional, sendo que a integração é então executada em duas etapas, uma para cada dimensão.

Tabela 5.1 – Quadratura Gauss-Legendre: Pontos e Pesos.

$$\int_{-1}^1 F(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^n F(\xi_i) W_i$$

Número de Pontos $n$	Pontos $\xi_i$	Pesos $W_i$
1	0,0000000000	2,0000000000
2	-0,5773502692	1,0000000000
	0,5773502692	1,0000000000
3	-0,7745966692	0,5555555555
	0,0000000000	0,8888888889
	0,7745966692	0,5555555555
4	-0,8611363116	0,3478548451
	-0,3399810435	0,6521451548
	0,3399810435	0,6521451548
	0,8611363116	0,3478548451
5	-0,9061798459	0,2369268850
	-0,5384693101	0,4786286705
	0,0000000000	0,5688888889
	0,5384693101	0,4786286705
	0,9061798459	0,2369268850

A Figura 5.2 apresenta três possibilidades de distribuição de pontos de integração no domínio paramétrico bidimensional, adotadas neste trabalho.

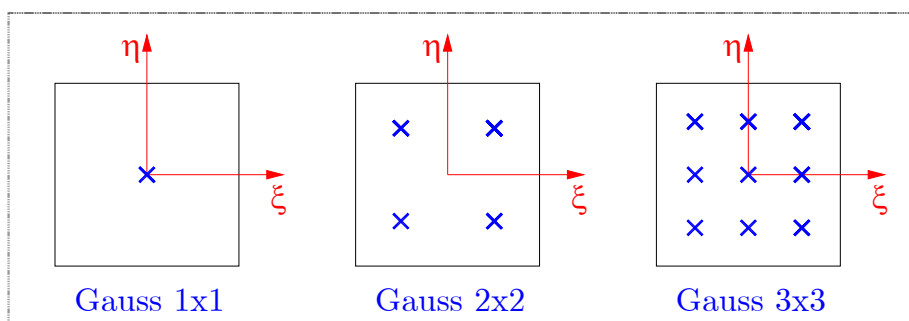


Figura 5.2 – Quadratura bidimensional.

### 5.2.3 Biblioteca matemática

A IMSL (International Mathematical and Statistical Library) é uma biblioteca com aproximadamente mil funções, que pode ser usada em aplicações gerais científicas ou financeiras (análises estatísticas de dados).

A biblioteca IMSL tem fundamental importância para o desenvolvimento deste programa, sendo que algumas funções e sub-rotinas presentes na biblioteca foram usadas no escopo deste trabalho fundamentalmente nas operações de matrizes, resolução de sistema de equações (sub-rotina DLSLRG), além de análises de autovalores e autovetores. A sub-rotina DLSLRG (Função de Resolução de Sistema de Equações Lineares Gerais sem Refinamento Interativo) é utilizada na solução do sistema de equações gerado por cada método implementado no presente trabalho, bastando fornecer a ela os devidos parâmetros de entrada.

### 5.3 Funcionamento do programa

Neste item, descrevem-se etapas importantes de interação entre o usuário e o programa, para perfeita sua execução e conseqüente obtenção de resultados de acordo com as necessidades e desejos do usuário. Aqui é dada atenção a três pontos principais a notar.

#### 5.3.1 Entrada de dados

Como já foi citado anteriormente, no programa existem duas formas de entrada de dados, via teclado ou via arquivo de texto; por razões de maior aplicabilidade, apresenta-se a segunda opção via um problema modelo, uma vez que a primeira se mostra impraticável em estruturas com um número significativo de nós.

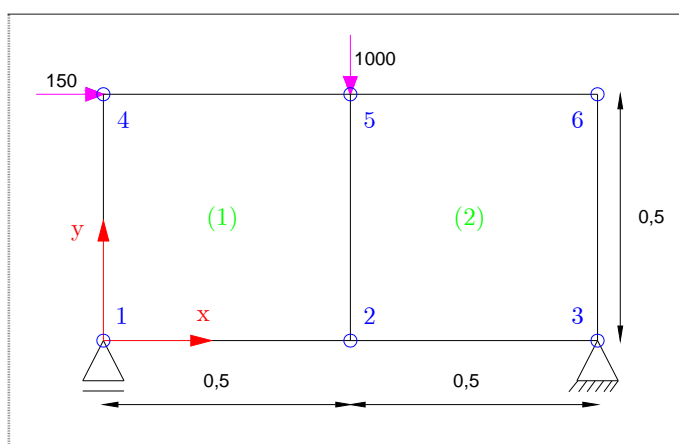


Figura 5.3 – Modelo de estrutura discretizada.



O problema modelo está apresentado na Figura 5.3, consistindo de uma discretização simples (apenas 2 elementos) de uma chapa em EPT submetida a forças verticais e horizontais, aplicadas sobre nós da estrutura.

```

EPT(0) ou EPD(1) = 0
Numero de nos = 6
Numero de elementos = 2
Comprimento em X = 1
Comprimento em Y = 0.5
Modulo de Elast E = 1500
Coef de Poisson nu = .25
Num de pts de Gauss*= 2
Ordem polin do enriq= 2
(*Por direção)
-----
| Informacoes dos elementos da estrutura
|-----
|
| Elemento | | *Nos* | | |
|          | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1        | 1 | 2 | 5 | 4 |
| 2        | 2 | 3 | 6 | 5 |
|-----
| Informacoes dos nos da estrutura
|-----
|
| Numero do no | | *Coordenadas* | |
|              | X | Y |
| 1            | 0.00 | 0.00 |
| 2            | 0.50 | 0.00 |
| 3            | 1.00 | 0.00 |
| 4            | 0.00 | 0.50 |
| 5            | 0.50 | 0.50 |
| 6            | 1.00 | 0.50 |
|-----
| Restricoes dos nos da estrutura
|-----
|
| Num de nos com ires = 2
|
| Ordem | Numero do no | | *Restricoes* | |
|       |              | U_x | U_y |
| 1     | 1            | 0   | 1   |
| 2     | 3            | 1   | 1   |
|-----
| Carregamentos dos nos da estrutura
|-----
|
| Num de nos com carr = 2
|
| Ordem | Numero do no | | *Cargas* | |
|       |              | F_x | F_y |
| 1     | 4            | 150 | 0   |
| 2     | 5            | 0   | -1000 |
|-----

```

Figura 5.4 – Modelo de arquivo de entrada.

Por sua vez, a Figura 5.4 apresenta o arquivo de entrada relativo ao exemplo modelo. Como se vê naquela figura, o arquivo de entrada de dados segue um padrão bastante comum dos elementos finitos, com extensão *.dat*, apresentando numa parte inicial dados relativos ao tipo de problema: número de nós e de elementos, constantes elásticas, dimensões da estrutura, número de pontos de Gauss por direção do elemento e por fim o grau do polinômio utilizado como modo incompatível.

A seguir o arquivo reúne, respectivamente, as informações dos nós que formam cada elemento, segundo ordenamento anti-horário, e as coordenadas dos referidos nós. A seguir, são apresentadas as restrições de vinculação com o meio externo, ou seja, os nós que possuem restrições em seus deslocamentos segundo cada direção. Por último são apresentados os carregamentos nodais na estrutura.

### 5.3.2 Opções do usuário

Após a entrada de dados do problema, cabe ao usuário interagir com o programa de modo a escolher o tipo de formulação e elemento, os quais serão utilizados na resolução da estrutura.

Como foi descrito ao longo do capítulo anterior, foram implementadas três formulações para o elemento plano (EPT e EPD), sendo que em duas destas formulações os elementos são únicos, e na terceira (do pesquisador BELYTSCHKO) existem seis tipos de elementos diferentes.

Por sua vez, os problemas axissimétricos foram estudados com apenas uma formulação, sendo possível à utilização nesta do elemento clássico axissimétrico ou do elemento enriquecido.

Por último, para os problemas de viga biapoiada submetida a carregamento distribuído ou viga engastada, com carregamento concentrado, o usuário ainda pode optar por fazer estudo de erro (norma) em deslocamentos e em energia.

### 5.3.3 Arquivo de saída

No programa foi desenvolvida uma sub-rotina que gera um arquivo contendo os dados da estrutura e os resultados de interesse (deslocamento, deformações e tensões) para diversos pontos de integração adotados dentro do elemento, em consonância com a formulação escolhida, bem como tipo de elemento finito.

Juntamente com a apresentação dos valores calculados, o arquivo apresenta um resumo do modelo analisado, informando as características principais deste, o tempo utilizado no processamento, bem como estudos relativos às normas de deslocamento e de energia.

#### 5.4 Programas Auxiliares à Pesquisa

Neste item são apresentados e descritos os principais programas disponibilizados pelo Laboratório de Computação do Departamento de Engenharia de Estruturas da EESC/USP, que foram utilizados no desenvolvimento desta pesquisa.

- **Compac Visual Fortran 6.6.0** – Este programa foi utilizado para o desenvolvimento do código computacional desta pesquisa, atuando na fase de edição do código e também na criação do programa executável final;
- **Ansys 9.0** – O Ansys é um poderoso programa de análise via MEF, e bastante difundido no meio acadêmico, e foi aqui utilizado apenas para a geração das redes para os mais diversos problemas, quando da impossibilidade de obtenção manual das mesmas;
- **Surfer 8.0** – Foi utilizado para a visualização dos resultados obtidos pelo programa desenvolvido neste mestrado;
- **Mathcad 11** e **Mathematica 5.0** – Tais programas foram utilizados para auxiliar a execução de cálculos analíticos, e obtenção de gráficos de funções de forma, entre outras pequenas aplicações;
- **Microsoft Office Excel 2003** e **Origin 6.0** – Foram as ferramentas auxiliares na elaboração de planilhas eletrônicas, tabelas e outras tarefas de modo mais rápido e eficiente.

## Exemplos Numéricos

Este capítulo apresenta uma série de exemplos e resultados numéricos obtidos com o programa desenvolvido no mestrado. O objetivo é colocar em confronto os diferentes elementos implementados, mediante avaliação do seu desempenho em certa variedade de aplicações.

É importante observar que a maior parte das aplicações consiste em exemplos para os quais os elementos finitos convencionais possuem conhecida limitação. O exemplo 6.1.4 é a única exceção, isto é, para o qual os elementos convencionais apresentam-se eficientes, mas foi incluído para mostrar que os elementos não-convencionais podem ser empregados também em situações simples.

Cabe ressaltar que todos os problemas estão inseridos no campo da elasticidade linear, e que na maior parte dos casos se optou pelo não uso de unidades.

O presente capítulo é subdividido em duas partes: a primeira reunindo aplicações em chapas (ou estruturas planas carregadas em seu próprio plano), e a segunda parte é formada por exemplos com axissimetria.

### 6.1 Exemplos de chapas

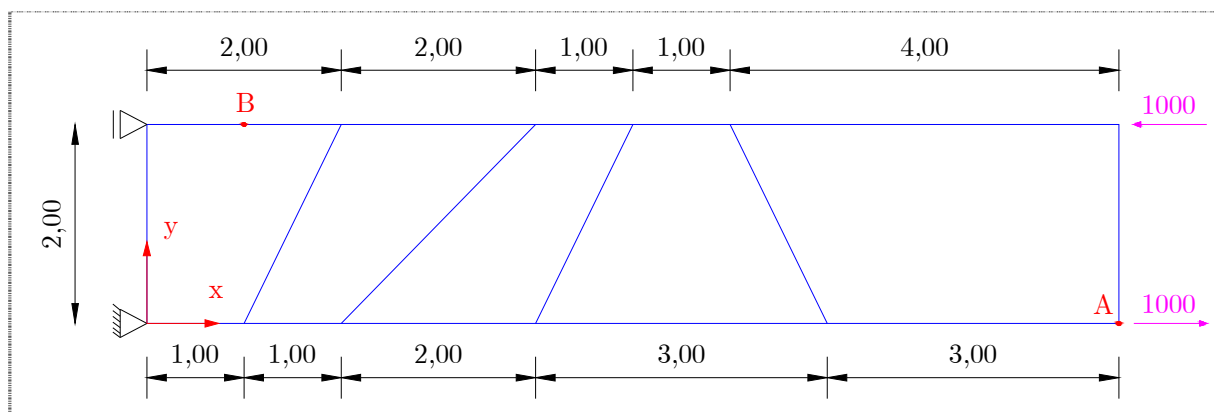
Neste item se apresentam os exemplos formados por estruturas planas carregadas em seu próprio plano, constituindo seis exemplos distintos.

Devido ao número de elementos envolvidos nas diversas formulações implementadas no programa, para diferenciá-los, adotou-se uma nomenclatura específica, em conformidade com o que está apresentado no capítulo 4. O Enriquecimento por deformações assumidas é aqui assinalado por EDA, já a sigla IRE indica a técnica de Integração reduzida com estabilização da rigidez (complementa-se a informação com as siglas dos diferentes elementos implementados segundo a

indicação mostrada na Tabela 4.1). Por último EST representa a Estabilização com uso de séries de Taylor.

### 6.1.1 Viga em flexão pura

O primeiro exemplo é uma viga simples submetida a um carregamento característico que impõem flexão pura, o que ‘a priori’ consiste em situação favorável para os campos de deformações assumidas. A discretização adotada é grosseira, formada por apenas cinco elementos finitos intencionalmente distorcidos conforme mostra a Figura 6.1. Na simulação optou-se por um estado plano de tensões (EPT), e pelas seguintes características do material: módulo de elasticidade de 1500 e coeficiente de Poisson de 0,25. A Figura 6.1 ilustra outros dados do problema estrutural, bem como a discretização adotada.



**Figura 6.1 – Viga em flexão pura – Geometria, carregamento e discretização.**

O confronto de resultados entre os diversos métodos é realizado com base em dois valores: o deslocamento vertical (segundo a direção  $y$ ) da ponta da viga, em posição representada na Figura 6.1 pelo ponto  $A$ , e a tensão normal segundo a direção  $x$  no ponto  $B$ . Como valores de referência utilizam-se os valores exatos fornecidos pela solução de vigas da elasticidade (TIMOSHENKO; GOODIER, 1983).

Os resultados (Tabela 6.1) mostram que os elementos EDA e EST, se apresentam bastantes precisos, apesar do pequeno número de elementos e do grau de distorção dos mesmos. Destaca-se o elemento que usa os conceitos de deformação

assumida, que apresenta os resultados quase coincidentes com os exatos. Já os elementos com integração reduzida e estabilização da matriz de rigidez (IRE), não se mostraram eficientes, indicando que a presença de distorção aliada à baixa discretização gera grandes limitações para os referidos elementos.

Tabela 6.1 – Resultados da viga em flexão pura.

Elemento	Tensão	Deslocamento
<b>Resposta Exata</b>	$\sigma_x = -3000$	$u_y = 100$
EDA	-3007	96,00
EST	-3067	93,81
IRE - Q4	-671	23,63
IRE - ASMD	-386	45,89
IRE - ASQBI	-1046	39,62
IRE - ASOI	-414	43,39
IRE - ASOI(1/2)	-1253	159,89
IRE - ASOB	-956	32,11

### 6.1.2 Sensibilidade dos elementos a redes distorcidas

Este exemplo consiste numa viga engastada (estado plano de tensão), submetida a uma força de distribuição parabólica na sua extremidade, definida pela expressão:  $q_y = 1,2y - 0,12y^2$ . O módulo de elasticidade do material da viga é  $10^7$  e o coeficiente de Poisson é igual a 0,3.

Novamente, avalia-se a influência da distorção dos elementos na qualidade da resposta numérica. No confronto inclui-se também o MEEG. Como referência, adotou-se o deslocamento na direção  $y$  da extremidade da viga. A resposta exata vale:  $8,046E-3$ , no entanto optou-se por apresentar os resultados em termos relativos.

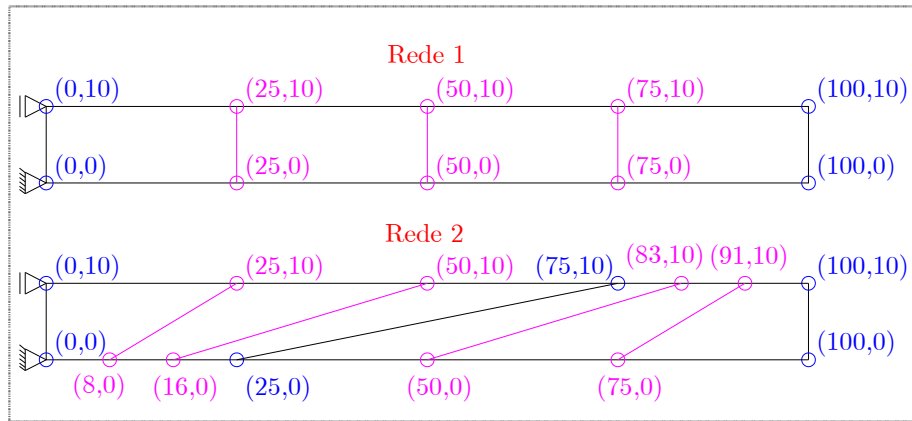


Figura 6.2 – Discretizações adotadas no segundo problema.

Foram definidas duas discretizações, mostradas na Figura 6.2: uma com quatro elementos retangulares, e a segunda com seis elementos bastante distorcidos. Cabe ressaltar que, para fins de confronto do MEFM com as formulações EDA e EST, procurou-se harmonizar o número de graus de liberdade envolvido. Neste sentido, o número de elementos finitos usados no MEFM foi menor, 1 e 2, respectivamente nas redes regular (Rede 01) e distorcida (Rede 02); na Figura 6.2 tais elementos são definidos pelos contornos em linhas pretas. Cabe ressaltar ainda, que o número de graus de liberdade para a formulação IRE é menor que para as demais formulações, uma vez que foram adotadas as mesmas redes de elementos das formulações EDA e EST, que para rede idêntica contam com um maior número de parâmetros aproximados, quando se comparam aos elementos com base na integração reduzida combinada com estabilização.

Os resultados obtidos estão reunidos na Tabela 6.2. Nota-se que os elementos com integração reduzida perdem significativamente a qualidade quando se emprega a rede com elementos distorcidos. Isto, na verdade, já era esperado, uma vez que a formulação IRE foi desenvolvida com o objetivo de superar problemas relacionados ao travamento e não à distorção de forma. Já o elemento EDA tem ótimo desempenho neste tipo de situação. Entre as metodologias, o MEFM se mostra a mais eficiente, reproduzindo as soluções analíticas em ambas as discretizações.

Tabela 6.2 – Resultados obtidos no segundo problema.

	$v_{\text{número}} / v_{\text{exato}}$		Número de GL	
	Rede 01	Rede 02	Rede 01	Rede 02
MEFG	1,0000	1,0000	40	60
EDA	0,9852	1,0025	44	52
EST	0,8971	0,9560	44	52
Q4	0,2859	0,1038	24	28
IRE-ASQBI	0,9852	0,1813	24	28
IRE-ASOB	0,8971	0,1587	24	28

### 6.1.3 Travamento de Poisson

O terceiro exemplo, ilustrado na Figura 6.3, considera uma chapa submetida ao cisalhamento. Foram definidas as seguintes condições de contorno: deslocamento vertical nulo nas faces FG e EC, deslocamento horizontal  $-1 \text{ mm}$  ao longo de FG e de  $1 \text{ mm}$  ao longo de EC. O material da chapa tem módulo de elasticidade unitário (1 MPa) e dois valores para o coeficiente de Poisson foram considerados: 0,3 e 0,4999. Tomando-se por referência o valor da energia de deformação  $0,130680 \text{ N} \times \text{mm}$  (para  $\nu$  de 0,3) e  $0,127035 \text{ N} \times \text{mm}$  (para  $\nu$  de 0,4999), procura-se avaliar a influência do travamento volúmico sobre a qualidade da solução, daí a razão para os diferentes coeficientes de Poisson.

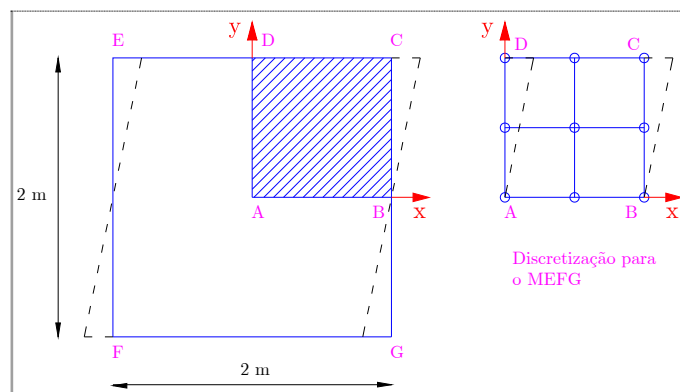


Figura 6.3 – Geometria e discretização de chapa submetida ao cisalhamento.



Para as formulações IRE, EST e EDA adotaram-se redes com 1, 2, 3, 4 e 8 elementos (quadrados) por lado da chapa para obter os graus de liberdade, configurando-se um refino  $h$ . Já no caso do MEFG foi adotada uma única rede de elementos conforme mostra a Figura 6.3, sobre a qual variou a ordem do enriquecimento polinomial utilizado (retirado de BARROS, 2002).

Os resultados estão apresentados na Figura 6.4 e na Figura 6.5, respectivamente para cada um dos valores do coeficiente de Poisson adotados. Os gráficos evidenciam que o MEFG e a metodologia IRE (à exceção do Q4, que é o clássico) são mais eficientes para a superação do travamento. A metodologia EST mostra-se sensível ao travamento na condição de ‘quase’ incompressibilidade.

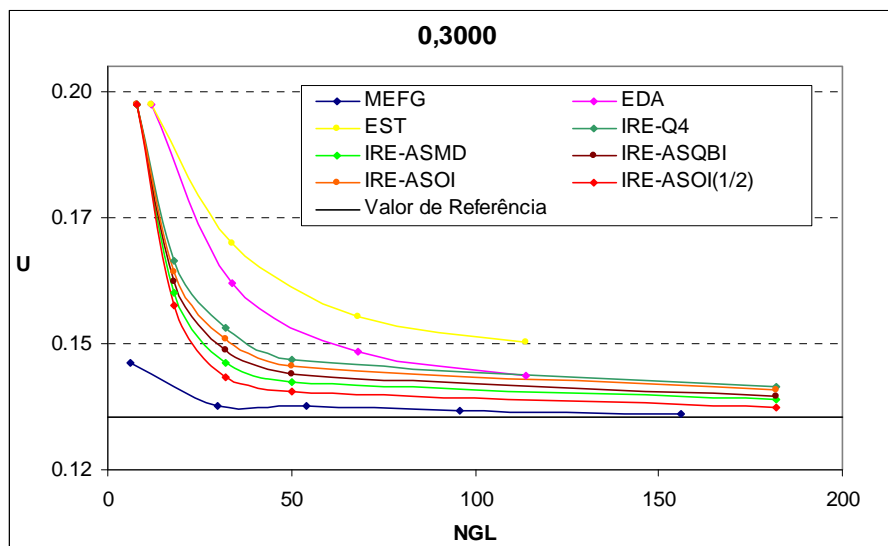


Figura 6.4 – Resultados da energia de deformação para a chapa sob cisalhamento, para  $\nu$  igual 0,3.

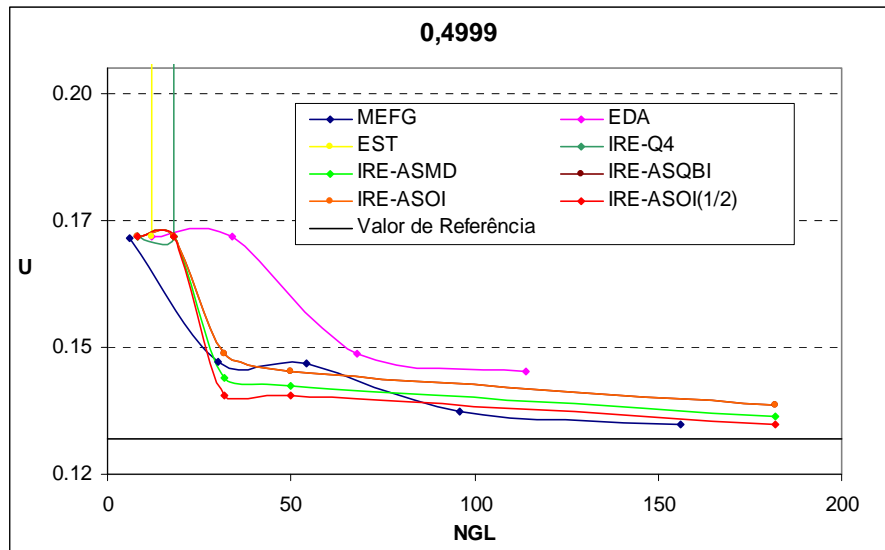


Figura 6.5 – Resultados da energia de deformação para a chapa sob cisalhamento, para  $\nu$  igual 0,4999.

### 6.1.4 Chapa tracionada simetricamente

Este exemplo consiste numa chapa retangular submetida a um carregamento de tração e vinculada conforme apresenta a Figura 6.6. Os dados do material são: coeficiente de Poisson de 0,3 e módulo de elasticidade de 1000 unidades de tensão.

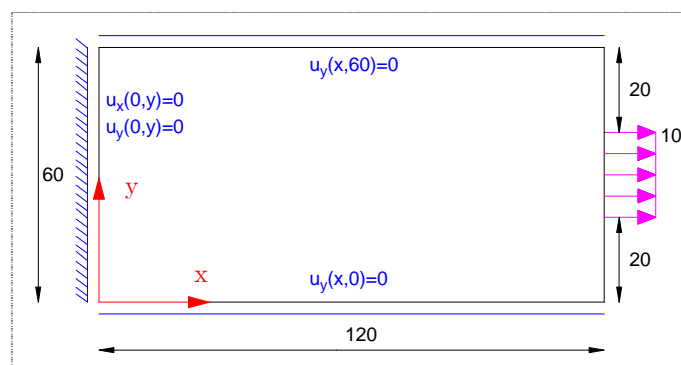
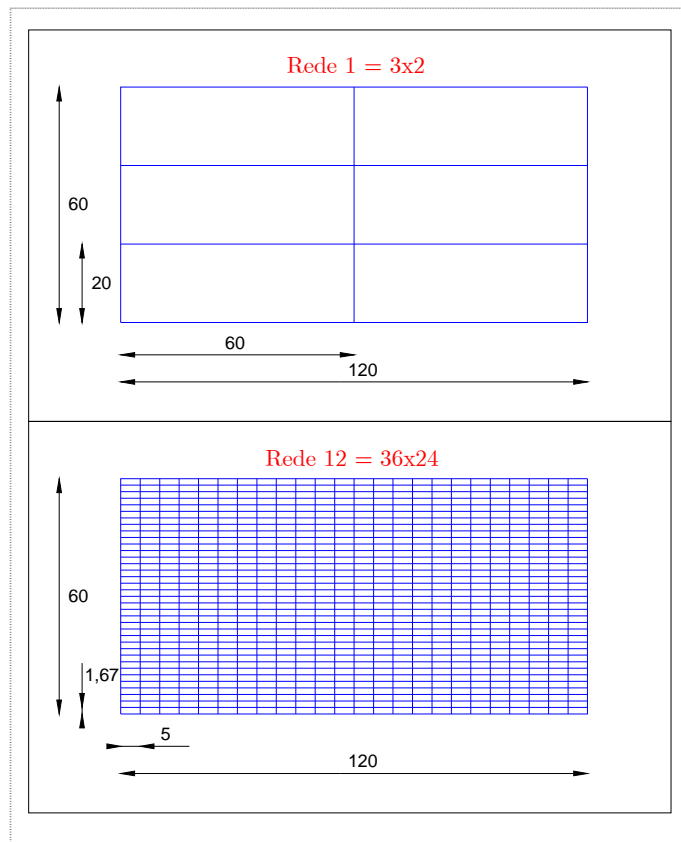


Figura 6.6 – Chapa tracionada simetricamente – Geometria e carregamento.

Este exemplo foi estudado em (GÓIS, 2004), sendo os resultados de referência obtidos a partir de uma abordagem convencional com rede de elementos bastante fina. Os valores de referência para energia de deformação e deslocamentos são os seguintes:

- Energia de deformação = 46,47;

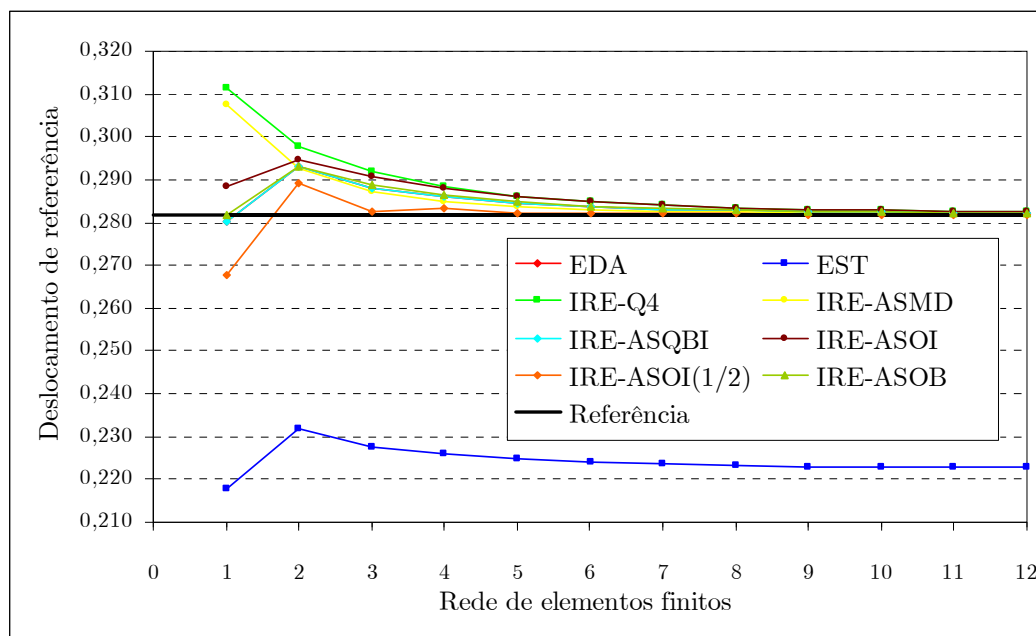
- **Deslocamento na direção  $x = 0,2818$**  (no canto superior direito da chapa);



**Figura 6.7 – Chapa tracionada simetricamente – Redes de elementos finitos adotadas.**

Para discretização, aqui neste trabalho, adotaram-se redes regulares definidas segundo uma estratégia  $h$  de refinamentos sucessivos do tipo  $(2n) \times (3n)$ , onde  $n$  representa o número de divisões de cada direção. Variou-se  $n$  de 1 até 12, obtendo, portanto, doze redes de elementos finitos. A primeira e a última rede estão representadas na Figura 6.7.

Para efeito de comparação entre os diversos métodos, além das respostas em deslocamentos e energia de deformação, procurou-se levar em conta o tempo de processamento despendido em cada caso. Para tanto, foi usado um computador com as seguintes configurações: processador Celeron D (2.53 GHz) e memória RAM de 512 MB.



**Figura 6.8 – Chapa tracionada simetricamente – Deslocamento de referência.**

Para o deslocamento na direção  $x$  os resultados (Figura 6.8) apresentam um comportamento bastante semelhante entre os elementos, convergindo para o resultado esperado. Destaca-se o IRE-ASOI(1/2) que apresentou uma convergência mais rápida. O elemento que faz uso de Série de Taylor na estabilização teve desempenho ruim, fugindo bastante do resultado esperado e não convergindo para a resposta de referência.

Em relação à energia de deformação as conclusões são bastante semelhantes às anteriores. A Figura 6.9 e a Figura 6.10 ilustram as respostas obtidas, representando, respectivamente, a energia de acordo com a rede e com o número de graus de liberdade do modelo. Novamente o elemento EST fugiu do resultado esperado e os demais se apresentaram bastante precisos, convergindo para o valor de referência.

No tocante ao tempo de processamento dos modelos foram elaborados os gráficos da Figura 6.11 e da Figura 6.12. O primeiro relaciona o tempo de processamento com as diversas redes de elementos; já o segundo, em escala logarítmica, compara o tempo de processamento com o número de graus de liberdade

(ambos). Tais gráficos vêm mostrar que os elementos que usam deformações assumidas e os elementos Estabilizados por série de Taylor se mostraram menos eficientes em termos de tempo de processamento. Já os demais elementos (IRE) apresentam em geral custos semelhantes, e bem menores que os dois primeiros.

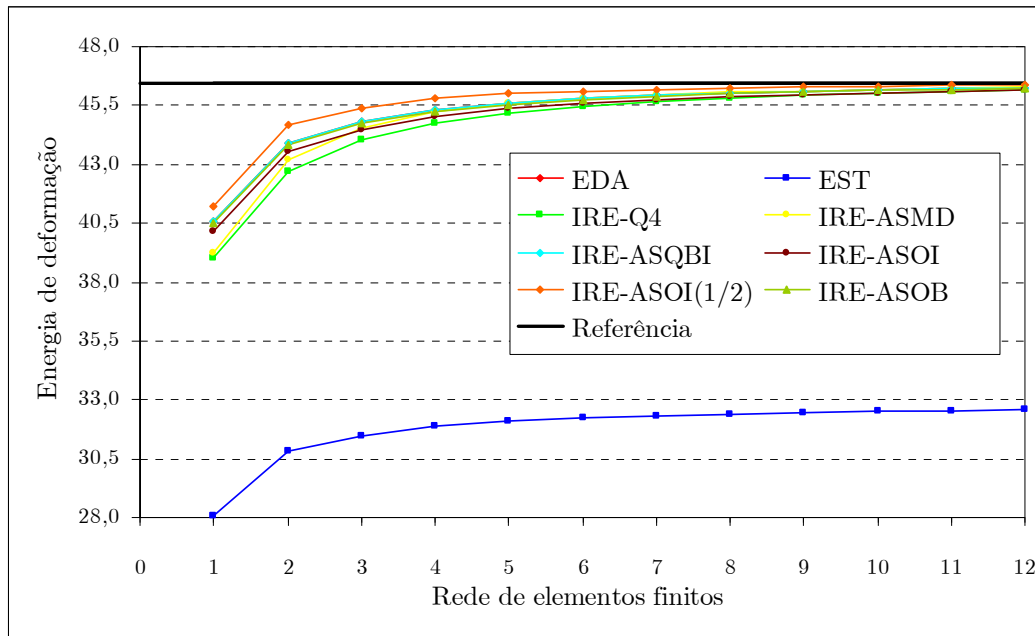


Figura 6.9 – Chapa tracionada simetricamente – Energia de deformação de acordo com a rede.

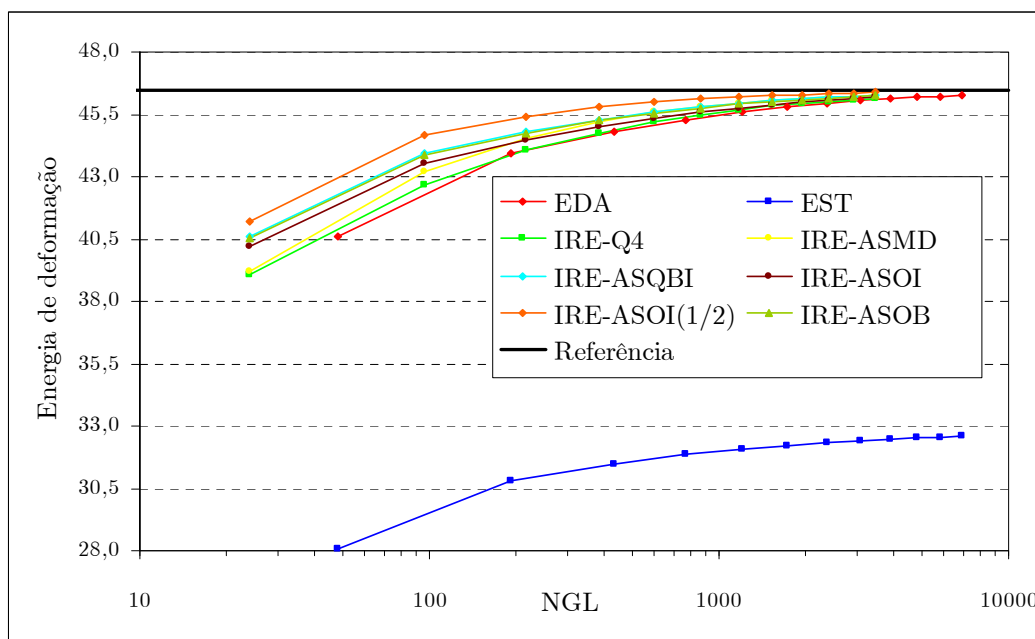


Figura 6.10 – Chapa tracionada simetricamente – Energia de deformação em função do NGL.

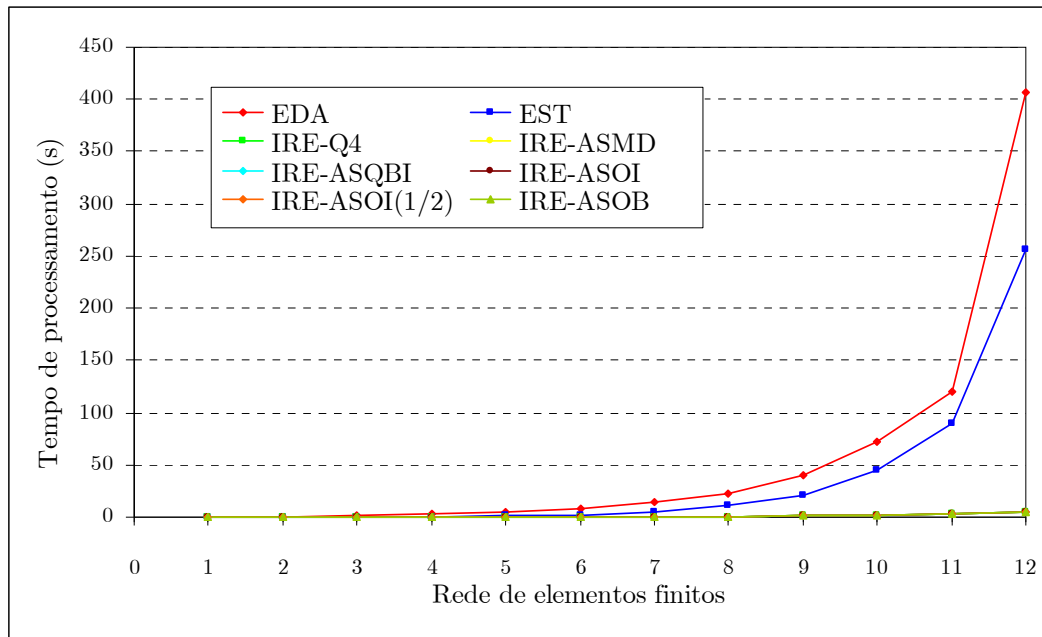


Figura 6.11 – Tempo de processamento em função do da rede.

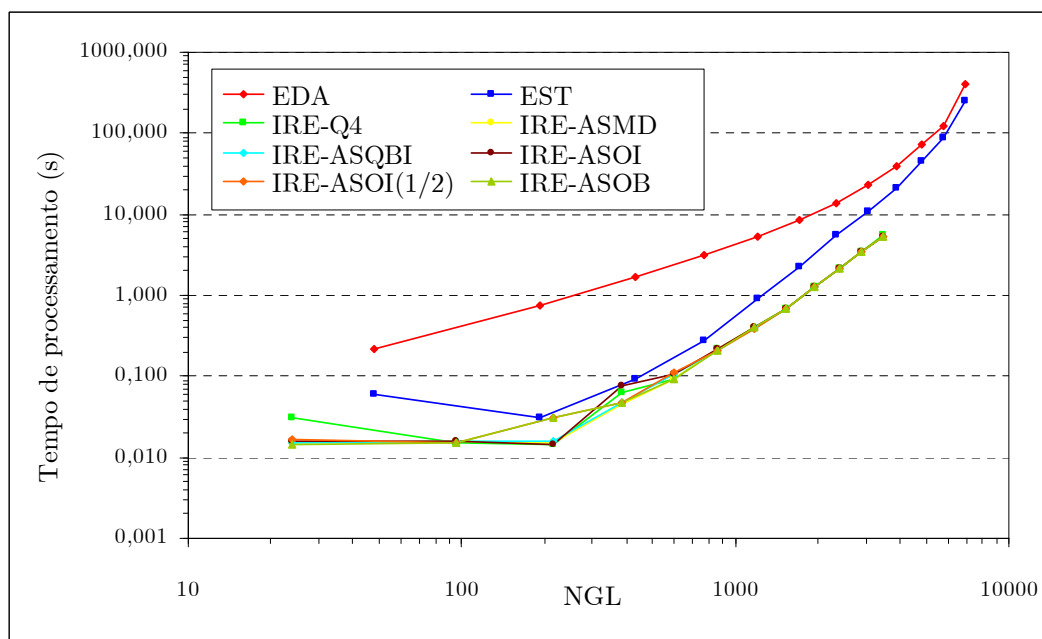


Figura 6.12 – Tempo de processamento em função do número de GL's.

A seguir, apenas para ilustrar os resultados obtidos, mostram-se as distribuições de tensão normal segundo a direção  $x$  para os oito tipos de elementos implementados, em duas redes distintas ( $n = 6$  e  $n = 12$ ).

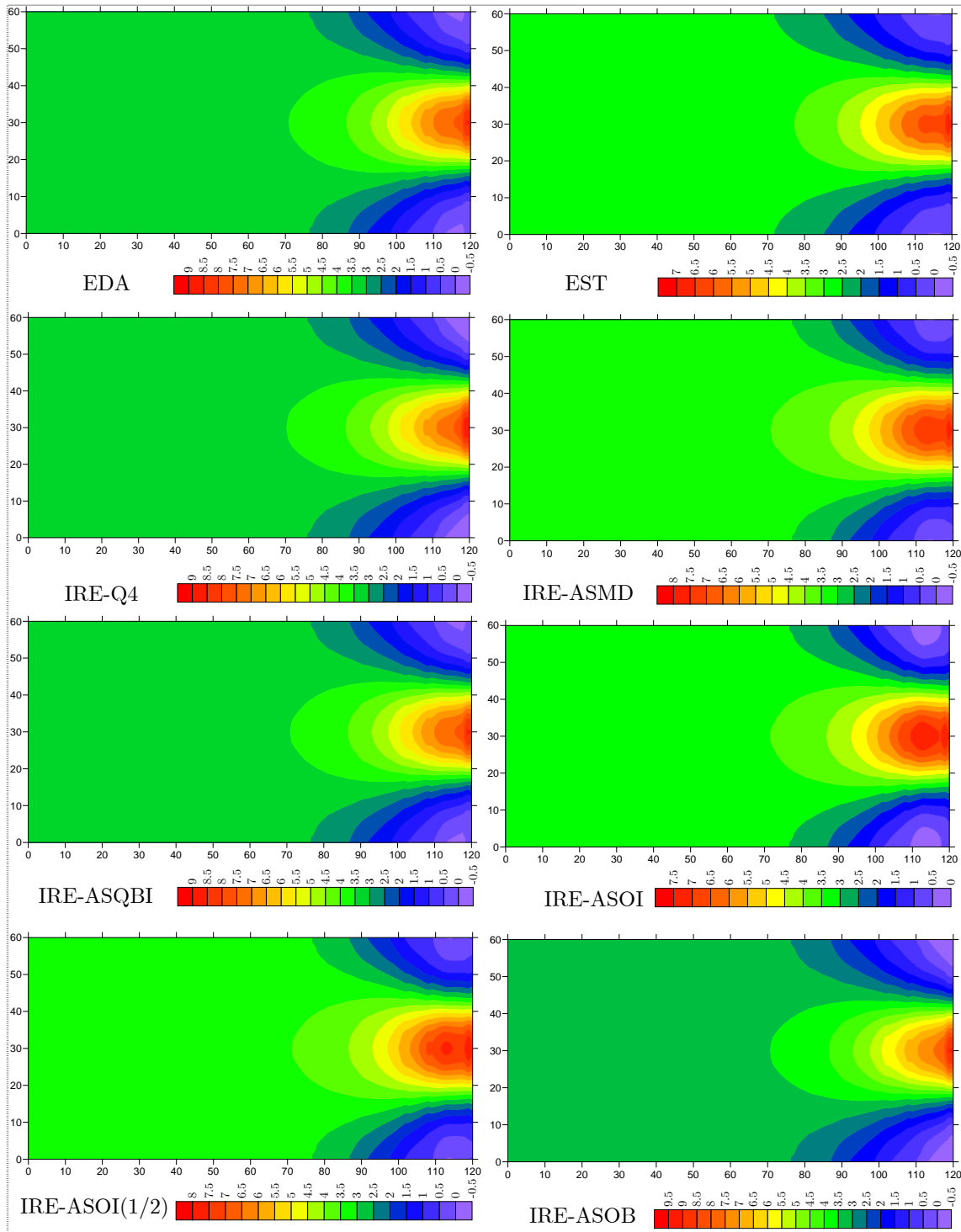


Figura 6.13 – Tensão  $\sigma_x$  para rede 06.

A rede de elementos finitos com  $n = 6$  apresenta bons resultados (Figura 6.13), com alto grau de coerência em relação à distribuição de referência. Todos os elementos apresentam um comportamento adequado em face à solicitação, com pequenas variações entre eles, apenas na escala de valores de tensões. Tomando-se

como referência o valor máximo de tensão  $\sigma_x$  que deveria ser 10, conclui-se que os elementos (EDA, IRE-Q4, IRE-ASOB e IRE-ASQBI) são os melhores nesta discretização, enquanto que o elemento EST apresenta resultados abaixo do esperado.

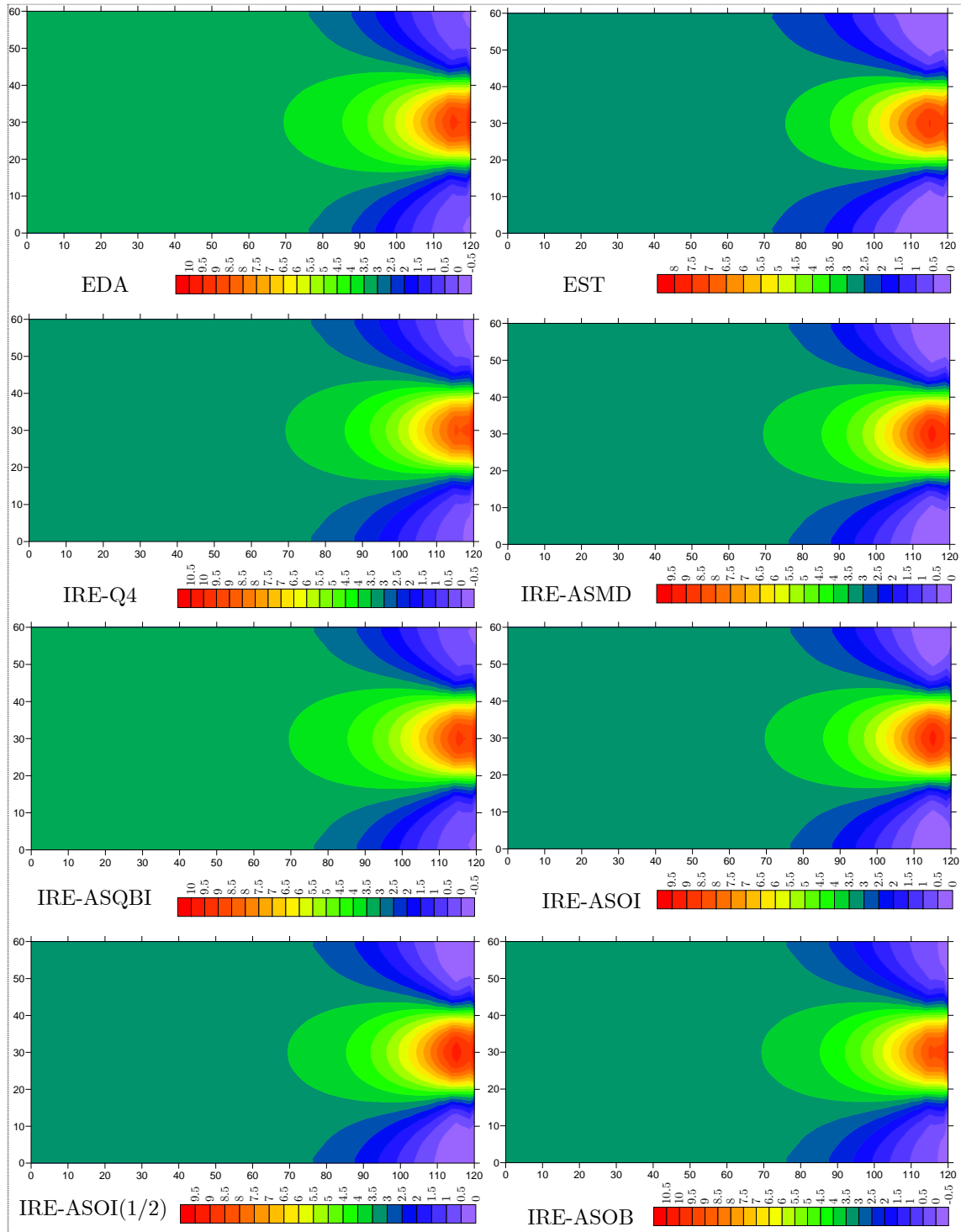


Figura 6.14 – Tensão  $\sigma_x$  para rede 12.

Os resultados obtidos com a rede com  $n = 12$  estão apresentados na Figura



6.14 e mostram-se similares aos anteriores, destacando-se apenas a melhor caracterização das tensões ('bulbo' de tensões) nas proximidades da aplicação do carregamento externo. Ainda assim, o elemento que faz uso da estabilização por série de Taylor mostrou desempenho aquém do esperado.

### 6.1.5 Chapa com fenda

Este exemplo, estudado originalmente em (GÓIS, 2004), consiste em uma chapa carregada nas faces laterais, e que possui uma fenda na sua região interna conforme mostra a Figura 6.15. Como características do material da chapa têm-se: coeficiente de Poisson de 0,3 e módulo de elasticidade de 1000 unidades de tensão.

Como se pode observar é possível explorar os dois eixos de simetria que existem no seu plano, de modo a diminuir a discretização para o problema. Depois de impostas as condições de simetria o exemplo se mostra conforme a Figura 6.16.

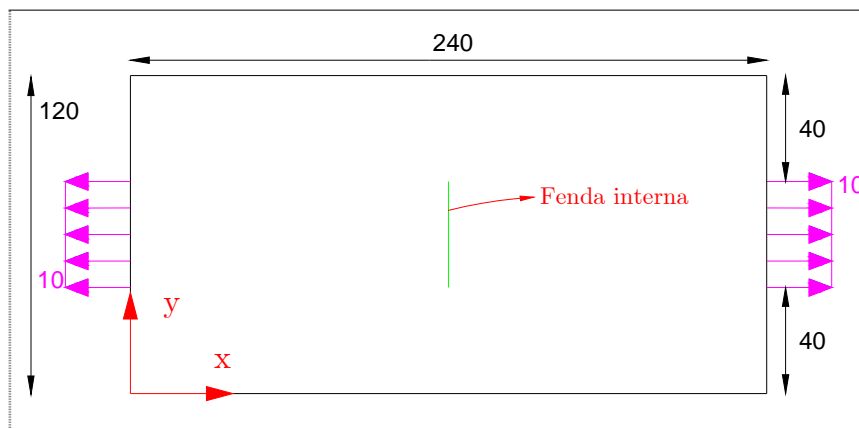


Figura 6.15 – Chapa com fenda – Geometria e carregamento.

(GÓIS, 2004), mediante uma análise convencional sobre uma rede de elementos bastante refinada, obteve os seguintes valores de referência para energia de deformação e deslocamentos:

- **Energia de deformação** = 65,98;
- **Deslocamento na direção  $x$**  = 0,2125 (no canto superior direito da chapa);
- **Deslocamento na direção  $y$**  = 0,0667 (no canto superior direito da chapa).

Com a presença da fenda, espera-se que haja uma forte concentração de tensões na ponta da mesma.

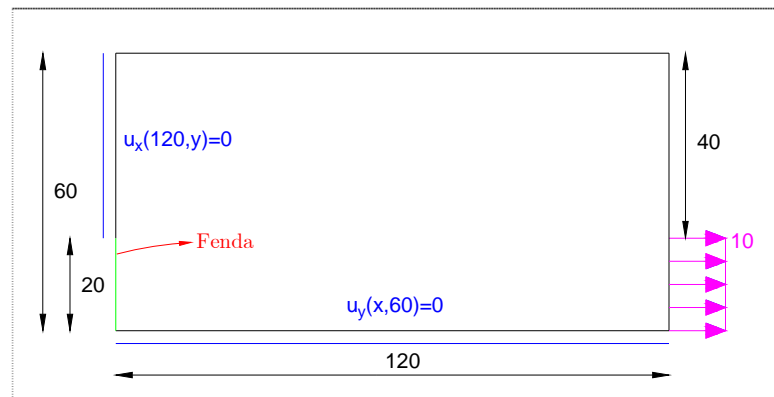


Figura 6.16 – Chapa com fenda – Considerando as condições de Simetria.

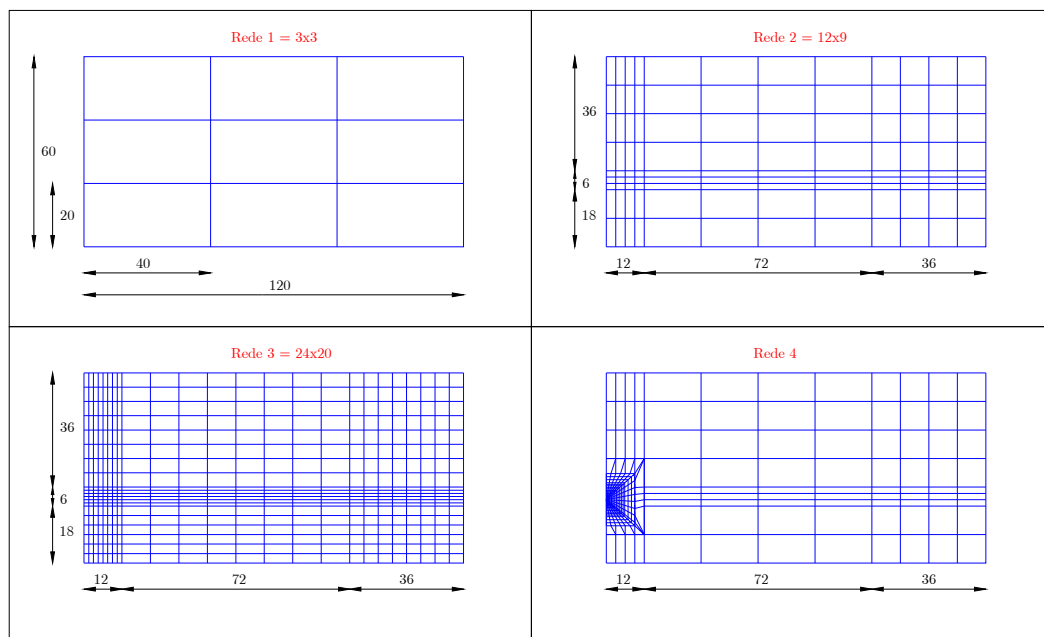


Figura 6.17 – Chapa com fenda – Redes de elementos finitos adotadas.

Com relação à discretização usada, optou-se por quatro redes de elementos finitos com características peculiares (Figura 6.17). A Rede-01 é regular com um número pequeno, claramente insuficiente, de elementos retangulares. As Redes 02 e 03 são também regulares, com refino na região próxima à fenda (a Rede 03 é duas vezes mais refinada que a Rede 02). A Rede 04 tem como base a rede 02, porém com discretização refinada com elementos distorcidos na região a frente da ponta da fenda.

Os resultados obtidos, em termos de energia e deslocamentos, comparados aos valores de referência descritos, são apresentados nas tabelas que seguem para as quatro redes de elementos finitos.

**Tabela 6.3 – Resultados da chapa com fenda para rede 01 (3x3 elementos).**

<b>Elemento</b>	<b>Energia de Deformação</b>	<b>Deslocamento</b>	
<b>Referência</b>	65,98	$u_x=0,2125$	$u_y=0,0667$
EDA	59,58	0,2179	0,0516
EST	50,59	0,1996	0,0229
IRE - Q4	57,46	0,2239	0,0425
IRE - ASMD	59,08	0,2105	0,0575
IRE - ASQBI	59,58	0,2179	0,0516
IRE - ASOI	58,37	0,2250	0,0399
IRE – ASOI (1/2)	61,85	0,2218	0,0615
IRE - ASOB	59,33	0,2191	0,0494

Na Tabela 6.3, como esperado, os resultados são pobres, notando-se, entretanto, o bom desempenho do elemento IRE-ASOI (1/2).

**Tabela 6.4 – Resultados da chapa com fenda para rede 02 (12x9 elementos).**

<b>Elemento</b>	<b>Energia de Deformação</b>	<b>Deslocamento</b>	
<b>Referência</b>	65,98	$u_x=0,2125$	$u_y=0,0667$
EDA	64,96	0,2100	0,0664
EST	54,79	0,1912	0,0371
IRE - Q4	64,53	0,2105	0,0654
IRE - ASMD	64,91	0,2100	0,0662
IRE - ASQBI	64,96	0,2100	0,0664
IRE - ASOI	64,68	0,2104	0,0658
IRE – ASOI (1/2)	65,33	0,2099	0,0671
IRE - ASOB	64,90	0,2101	0,0663

Nota-se que os resultados apresentados na Tabela 6.4 se mostram bem mais aprimorados que os da rede anterior, com era de se esperar devido ao refino apresentado na região da fissura. O pior desempenho é do elemento baseado em estabilização por uso de série de Taylor; os demais elementos apresentam desempenho bastante semelhante, com melhor precisão para as respostas dos elementos (EDA, IRE-ASBQI e IRE-ASOI (1/2)).

**Tabela 6.5 – Resultados da chapa com fenda para rede 03 (24x20 elementos).**

<b>Elemento</b>	<b>Energia de Deformação</b>	<b>Deslocamento</b>	
<b>Referência</b>	65,98	$u_x=0,2125$	$u_y=0,0667$
EDA	65,72	0,2115	0,0669
EST	55,42	0,1925	0,0375
IRE - Q4	65,59	0,2114	0,0667
IRE - ASMD	65,72	0,2114	0,0669
IRE - ASQBI	65,72	0,2115	0,0669
IRE - ASOI	65,63	0,2115	0,0667
IRE - ASOI (1/2)	65,84	0,2116	0,0671
IRE - ASOB	65,70	0,2115	0,0669

Como evidencia a Tabela 6.5, os resultados da rede 03 são ainda melhores que os da Rede 02. O elemento EST continua a apresentar resultados insatisfatórios. Os demais elementos se mostram equivalentes em termos de desempenho, com destaque para o elemento baseado no método das deformações assumidas e para os elementos com integração reduzida (IRE-ASBQI e IRE-ASOI (1/2)).

Os resultados para a rede com um forte refino na região a frente da fenda estão apresentados na Tabela 6.6. Esta estratégia de refino proporciona melhores valores para a energia de deformação em todas as formulações estudadas. No tocante aos deslocamentos, os resultados obtidos indicam que a maior discretização a frente da ponta da fenda não provoca um aperfeiçoamento na estima dos valores, tendo em

vista as respostas de referência.

Tabela 6.6 – Resultados da chapa com fenda para rede 04.

Elemento	Energia de Deformação	Deslocamento	
<b>Referência</b>	65,98	$u_x=0,2125$	$u_y=0,0667$
EDA	65.30	0.2226	0,0633
EST	54.96	0.1966	0,0365
IRE - Q4	64.64	0.2170	0,0645
IRE - ASMD	65.12	0.2178	0,0649
IRE - ASQBI	65.17	0.2174	0,0654
IRE - ASOI	64.88	0.2180	0,0647
IRE - ASOI (1/2)	65.64	0.2182	0,0662
IRE - ASOB	65.10	0.2172	0,0654

Neste ponto, são apresentadas comparações entre os campos de deslocamento e de tensão nas quatro redes de elementos finitos adotadas, para o caso do elemento finito enriquecido por deformações assumidas.

A Figura 6.18 apresenta as respostas para a tensão  $\sigma_x$ . Verifica-se que os valores para a primeira rede são menos precisos que os demais, como esperado, em razão do baixo número de elementos. As duas redes seguintes (01 e 02) conseguem, de um modo geral, representar o campo de tensão. A última rede consegue reproduzir de forma adequada a concentração de tensão a frente da fenda.

Para os casos da tensão  $\sigma_y$  (Figura 6.19) e da tensão  $\tau_{xy}$  (Figura 6.20) mostram-se tendências semelhantes às obtidas para a tensão  $\sigma_x$ . A rede pouco refinada é insatisfatória, enquanto que as redes 02 e 03 apresentam melhores resultados. A quarta rede é a mais eficiente, caracterizando com uma melhor precisão a concentração de tensões na região da ponta da fenda.

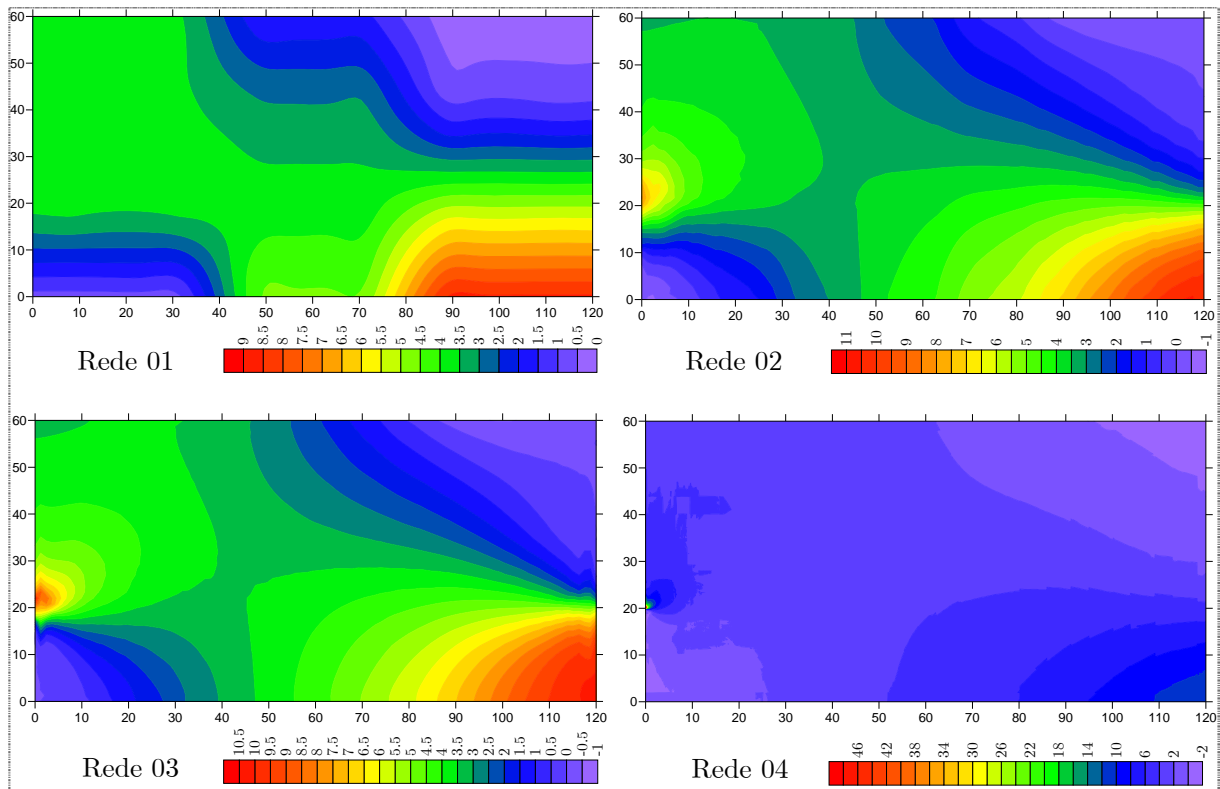


Figura 6.18 – Chapa com fenda – Tensão  $\sigma_x$  para as quatro redes.

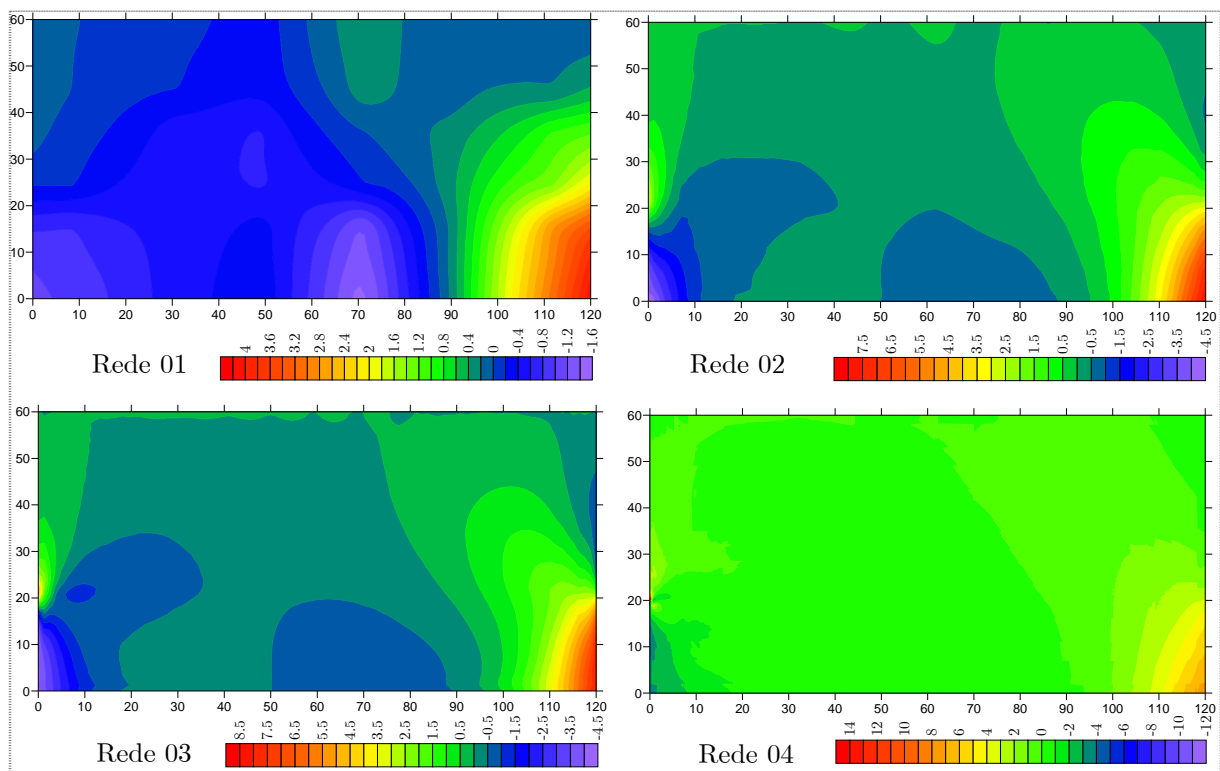


Figura 6.19 – Chapa com fenda – Tensão  $\sigma_y$  para as quatro redes.

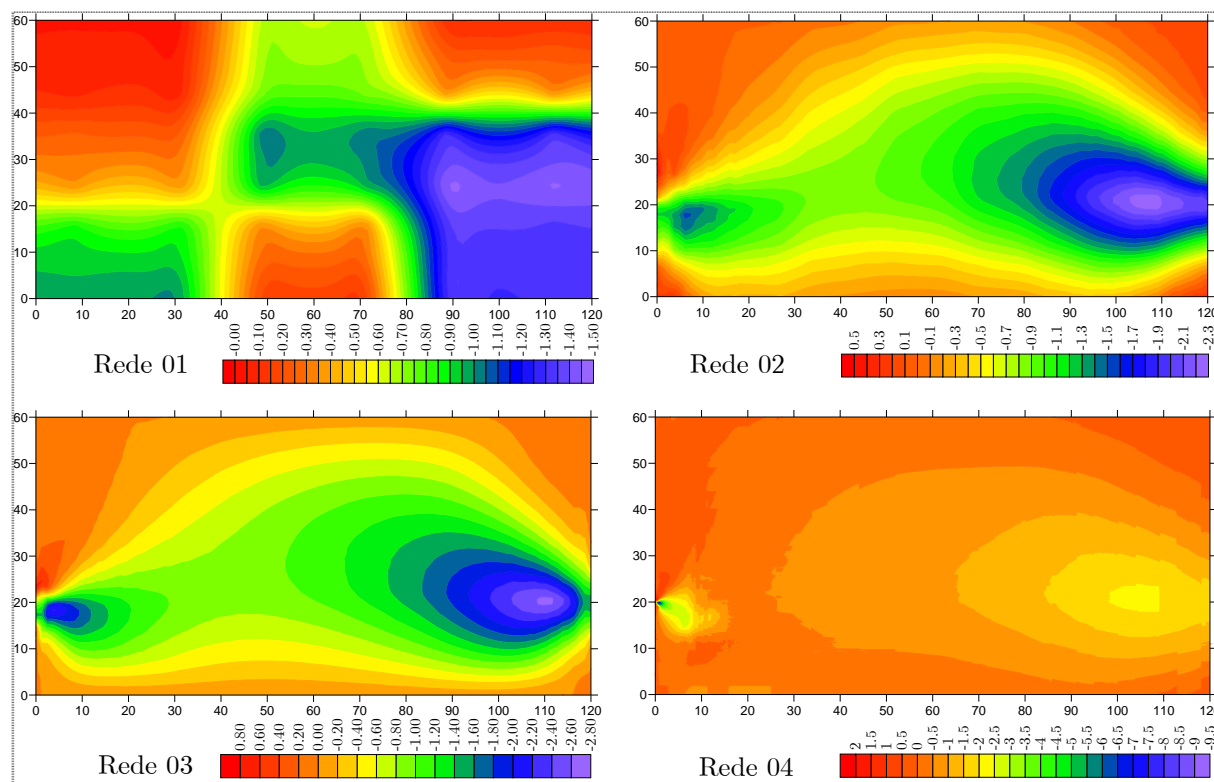


Figura 6.20 – Chapa com fenda – Tensão  $\tau_{xy}$  para as quatro redes.

Por fim, os casos dos campos de deslocamento, segundo as direções x e y, estão mostrados na Figura 6.21 e na Figura 6.22. Nestas figuras observa-se que todas as redes apresentam resultados bons e semelhantes entre si.

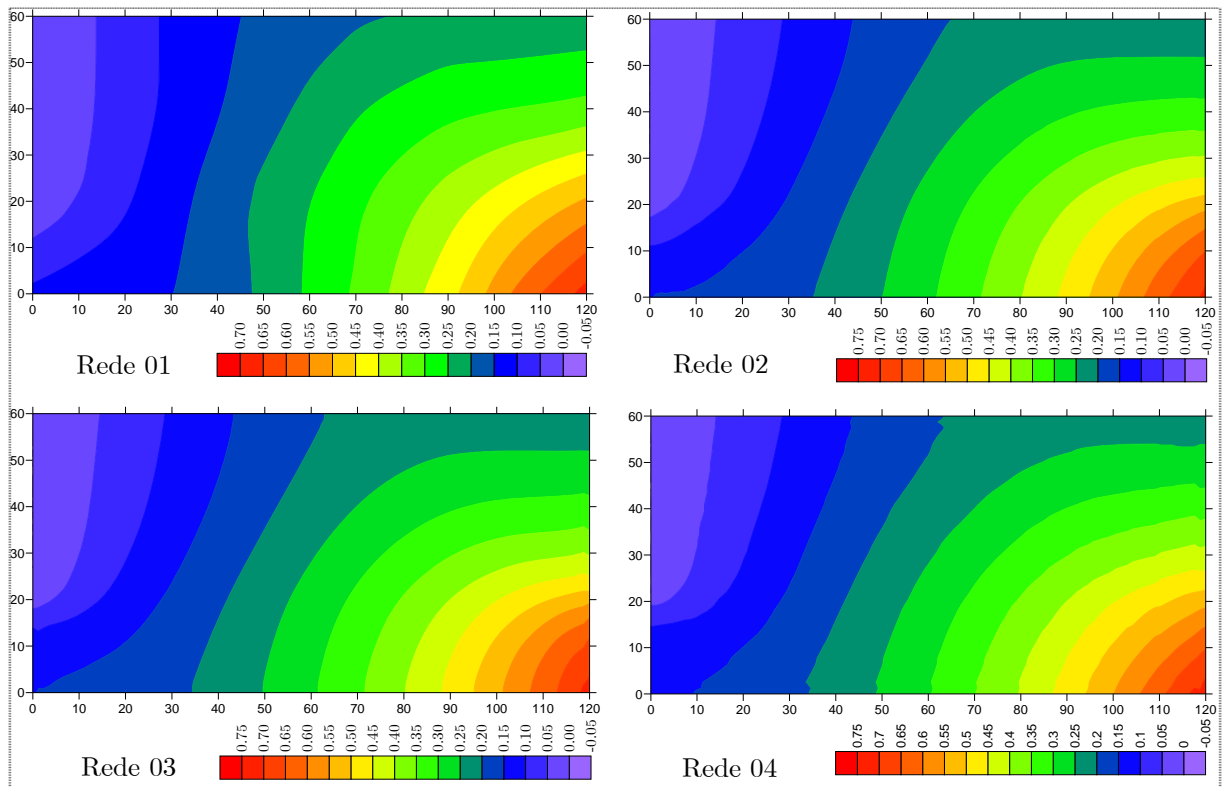


Figura 6.21 – Chapa com fenda – Deslocamento segundo a direção  $x$  para as quatro redes.

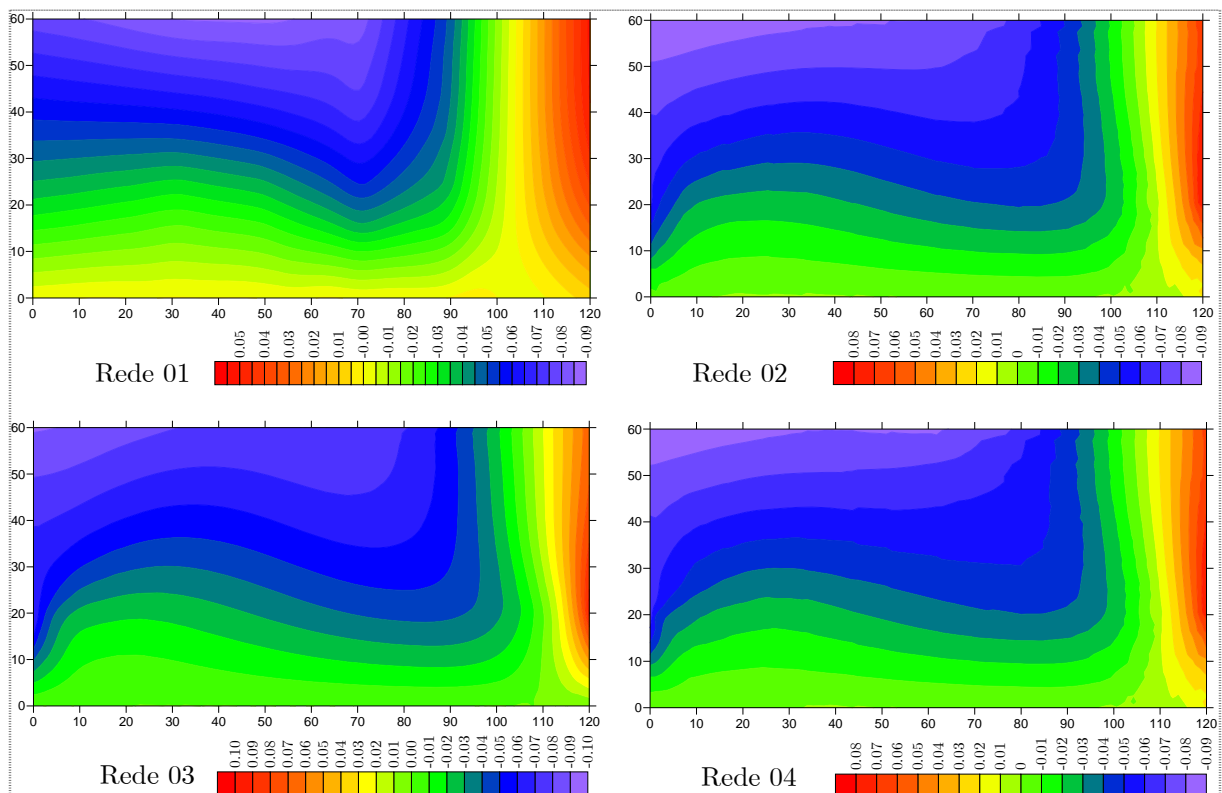


Figura 6.22 – Chapa com fenda – Deslocamento segundo a direção  $y$  para as quatro redes.



### 6.1.6 Painel de Cook

O último exemplo de chapa apresentado é o painel de Cook, constituído por chapa de espessura unitária e com geometria mostrada na Figura 6.23. As propriedades do material da chapa são: módulo de elasticidade unitário e coeficiente de Poisson igual à  $1/3$ .

Foram utilizadas três redes de elementos finitos com 2, 4 e 8 elementos, dividindo em igual número os lados da chapa, gerando respectivamente 4, 16 e 64 elementos finitos na discretização. Os resultados tomados como referências no confronto entre os métodos são: o deslocamento vertical do ponto B e a tensão normal máxima no ponto A, ambos indicados na Figura 6.23.

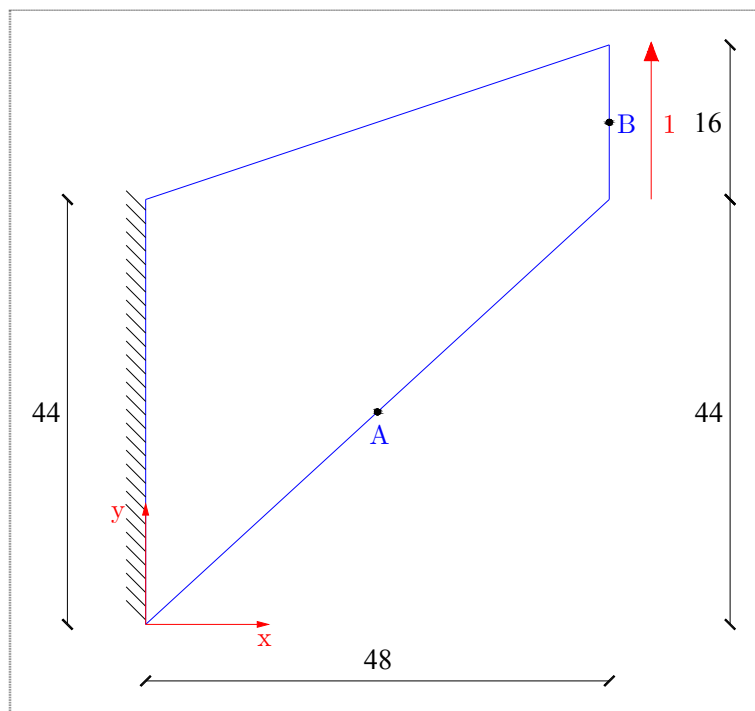


Figura 6.23 – Geometria e carregamento do painel de Cook.

As respostas obtidas estão reunidas nos gráficos da Figura 6.24 e da Figura 6.25, e descritas pelo erro de aproximação em relação aos valores de referência (gerados via MEF clássico, com discretização muito refinada (SOUZA, 2008)). Claramente o elemento EST apresentou os maiores erros. O elemento EDA apresentou um desempenho uniforme em ambos os casos (tensão e deslocamento), o

que o coloca em destaque em relações aos outros. O conjunto de elementos IRE apresenta respostas equivalentes, porém sem respeitar uniformidade quando se comparam os erros relativos nas duas situações. Por exemplo, o IRE-ASOI(1/2) se destacou no tocante ao deslocamento vertical, porém perde precisão na representação das tensões; um comportamento inverso é apresentado pelo elemento IRE-ASOB.

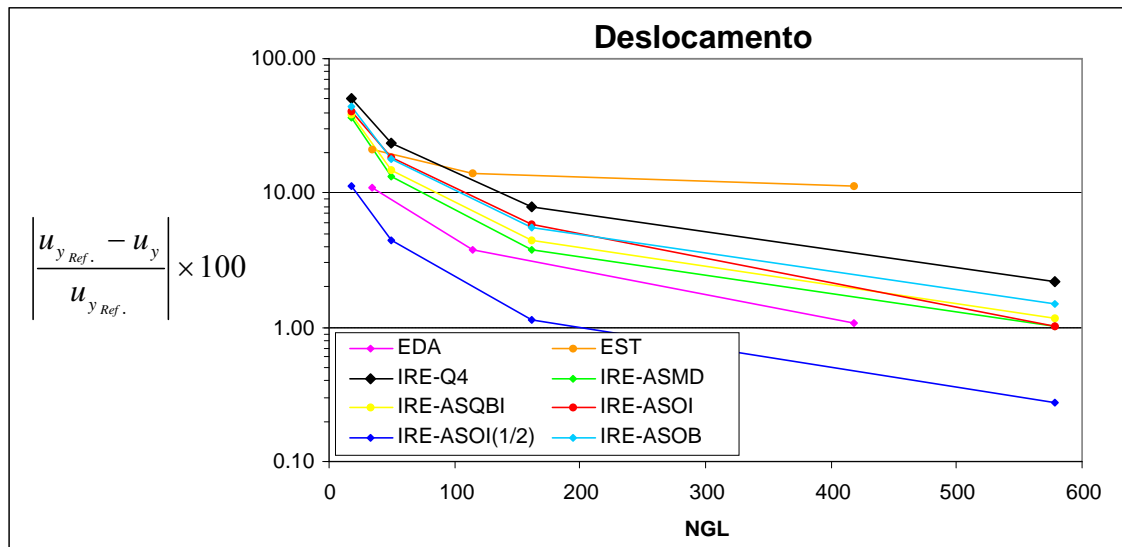


Figura 6.24 – Resultados (em deslocamento) do painel de Cook

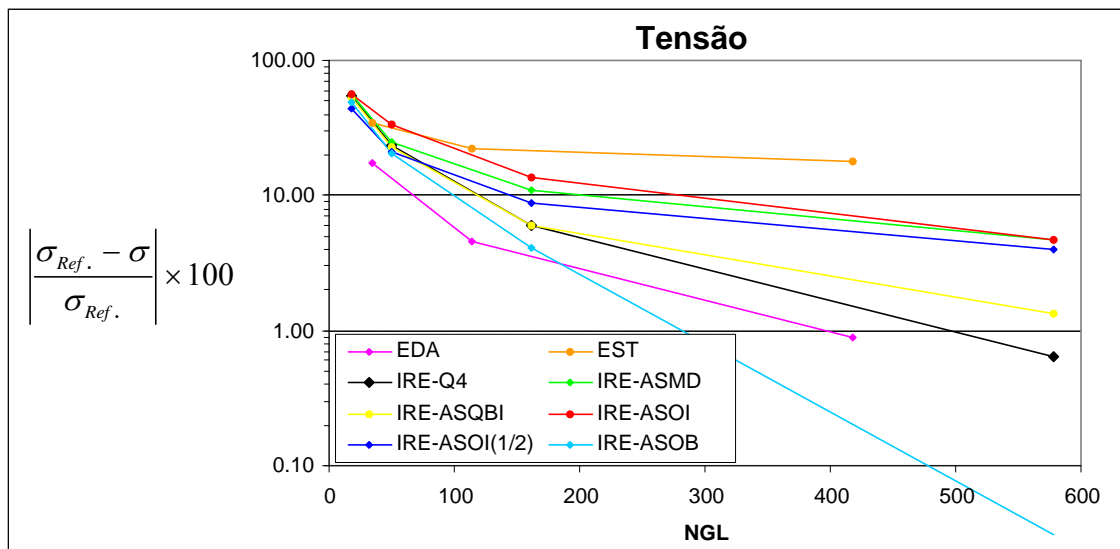


Figura 6.25 – Resultados (em tensão) do painel de Cook.

## 6.2 Exemplos com axissimetria

Neste item são estudados dois exemplos de estruturas com axissimetria em geometria e carregamento. Para os dois exemplos desenvolvidos comparam-se as respostas numéricas obtidas pela formulação descrita no item 4.2 com as soluções analíticas.

### 6.2.1 Placa circular sob ação do peso próprio

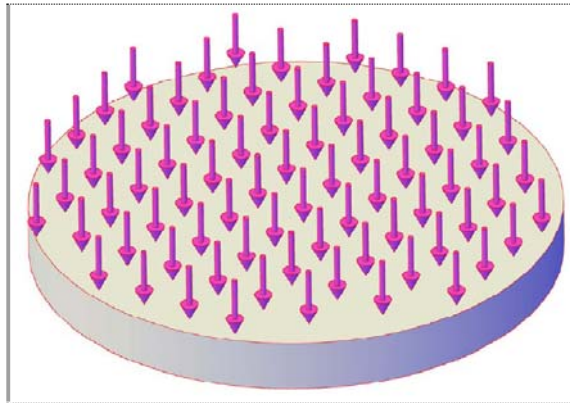


Figura 6.26 – Placa circular submetida ao seu peso próprio.

O primeiro exemplo consiste numa placa circular, engastada em toda a sua borda, submetida apenas ao seu peso próprio (que na modelagem foi aplicado na face superior), conforme está esquematizado na Figura 6.26.

Para a simulação numérica explorou-se a axissimetria em torno do eixo  $z$ , dando-se atenção exclusivamente à faixa compreendida entre os pontos O e P, conforme mostra a Figura 6.27. Na mesma figura estão indicadas as condições de contorno adotadas.

O material da placa apresenta as seguintes propriedades de interesse:

- **Coefficiente de Poisson** ( $\nu$ ) = 0,30;
- **Módulo de Elasticidade longitudinal** ( $E$ ) =  $2,1 \times 10^5$  MPa;
- **Peso específico** =  $9,81 \times 10^{-4}$  N/mm<sup>3</sup>.

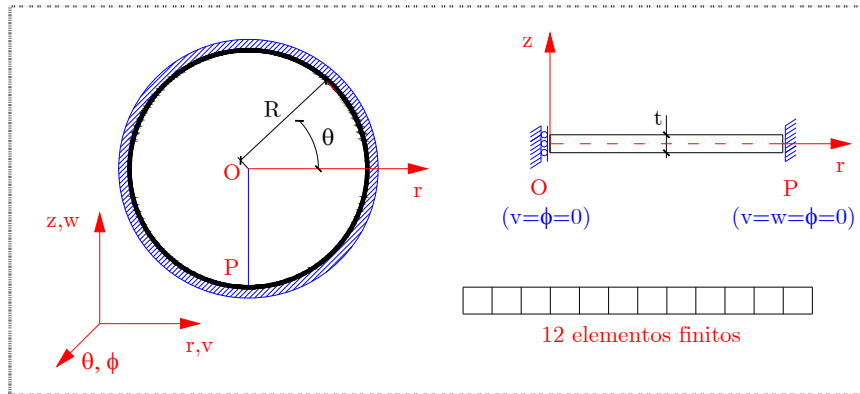


Figura 6.27 – Geometria, condições de contorno e discretização adotada para a placa circular.

No tocante à geometria, o problema possui as seguintes características:

- **Raio** ( $R$ ) = 800 mm ;
- **Espessura** ( $t$ ) = Variável entre 320 mm até 0,00122 mm . Onde a variação de espessura de caso a caso obedece a razão 0,5, ou seja 320; 160; 80; etc;

A solução exata relativa ao deslocamento transversal no centro da placa (TIMOSHENKO; WOINOWSKY-KRIEGER, 1959) é dada por:

$$w_{\text{máx}} = \frac{qR^4}{64D} \quad (6.1)$$

Na relação anterior,  $q$  é a carga uniformemente distribuída na superfície média da placa (resultante da atuação do peso próprio) e  $D$  é a rigidez à flexão dada pela seguinte expressão:

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \quad (6.2)$$

Para discretização do problema optou-se pelo uso de 12 elementos finitos de iguais dimensões, conforme mostra a Figura 6.27. Foram testados três tipos de elementos finitos: o axissimétrico quadrilateral clássico (Axi-Q4) e o axissimétrico enriquecido conforme descrito na seção 4.2, e por fim elementos oriundos do MEEG (conforme (GARCIA; PROENÇA, 2007)).

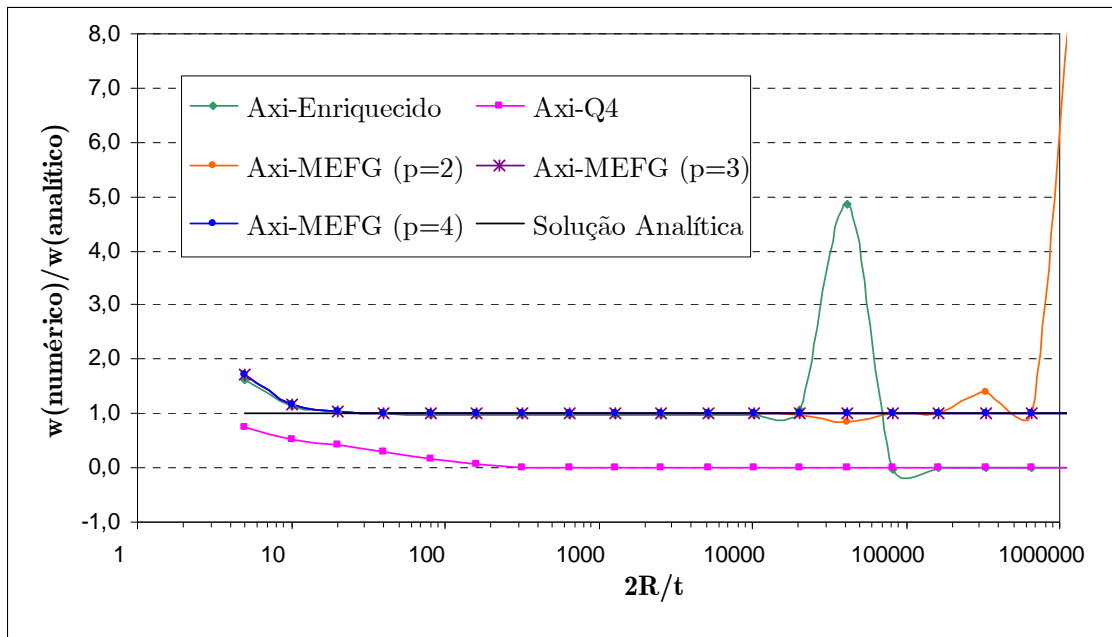


Figura 6.28 – Deslocamento máximo segundo a direção  $z$  da placa circular.

Como já é conhecido, o elemento quadrilateral clássico é muito sensível ao travamento. Os elementos enriquecidos possuem um comportamento significativamente melhor, notando-se ausência de travamento numa larga faixa envolvendo espessuras muito finas. Quando a razão geométrica passa a abranger placas ainda mais finas, somente o MEFEG, dotado de conveniente enriquecimento polinomial, mantém a qualidade da aproximação. Pode-se afirmar que, em geral, o MEFEG apresenta resultados melhores que o enriquecimento estudado para o elemento quadrilateral.

### 6.2.2 Cilindro submetido a carregamento de punção

O exemplo a seguir é um cilindro longo submetido a uma carga de punção, conforme esquematizado na Figura 6.29. Devido à condição de simetria em relação ao plano de carregamento e também em relação ao eixo de axissimetria, o problema pode ser idealizado conforme apresenta a Figura 6.30. Assim, apenas a região compreendida entre os pontos A e O é discretizada.

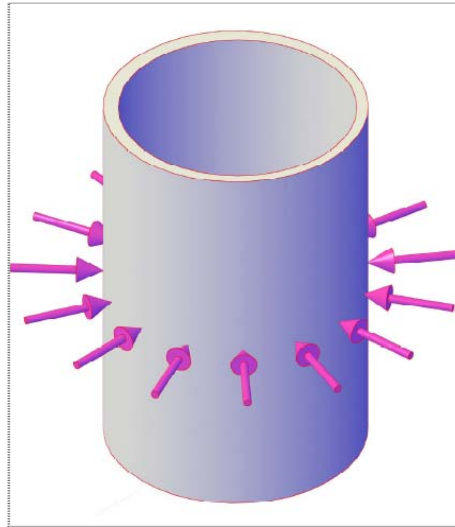


Figura 6.29 – Cilindro longo submetida à carga de punção.

As características do material que forma o cilindro, assim como o valor do carregamento de punção, são apresentadas a seguir:

- **Coefficiente de Poisson** ( $\nu$ ) = 0,30;
- **Módulo de Elasticidade longitudinal** ( $E$ ) =  $2,1 \times 10^5$  MPa;
- **Força P** =  $1000 \text{ N/mm}$ .

Com relação à sua geometria, o cilindro apresenta as medidas:

- **Altura** ( $H$ ) –  $2400 \text{ mm}$ ;
- **Raio** ( $R$ ) –  $300 \text{ mm}$ ;
- **Espessura** ( $t$ ) – Variável entre  $50 \text{ mm}$  até  $0,00305 \text{ mm}$ , com razão de variação igual à 0,5, ou seja 50; 25; 12,5; etc;

Para discretização da estrutura optou-se por duas estratégias distintas: um refino sucessivo com a rede uniforme, ou seja, elementos de iguais dimensões (em redes com 6, 12 e 24 elementos finitos), e um refino geométrico em direção a região de aplicação do carregamento, usando uma razão 2,5.

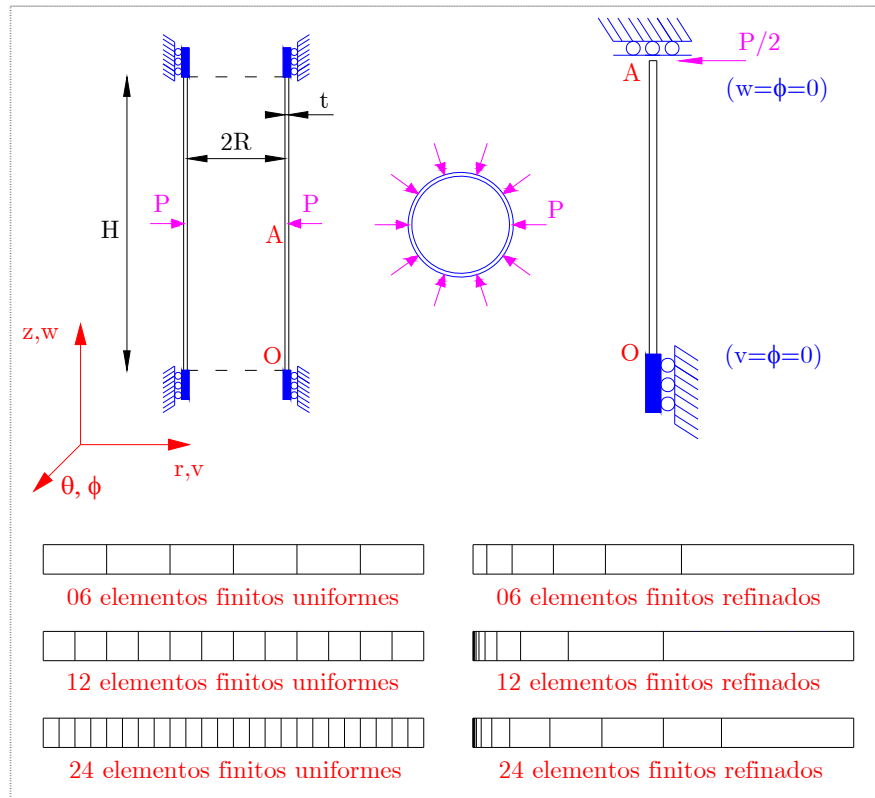


Figura 6.30 – Geometria, condições de contorno e força aplicada no cilindro.

O deslocamento exato (analítico) do ponto de aplicação da carga é dado segundo (TIMOSHENKO; WOINOWSKY-KRIEGER, 1959) pela seguinte expressão:

$$v_{\text{máx}} = \frac{PR^2\beta}{2Et} \quad (6.3)$$

Na relação anterior \$P\$ é a força de punção por unidade de comprimento de circunferência do cilindro, \$R\$ é o raio do cilindro e \$\beta\$ é um fator dado pela expressão (6.4), a seguir:

$$\beta^4 = \frac{3(1-\nu^2)}{R^2t^2} \quad (6.4)$$

Os resultados obtidos estão mostrados nos gráficos da Figura 6.31 e da Figura 6.32. Claramente, em termos gerais, o refino uniforme surte um efeito bastante discreto na melhoria da aproximação. Este fato é esperado, pois a força concentrada impõe localmente forte singularidade, perturbando a regularidade da solução, dominante em quase toda a extensão do cilindro; o refino regular não é capaz de

captar com eficiência tal perturbação. Mesmo na condição de rede regular de elementos, nota-se que o MEFG apresenta menos sensível ao travamento que o elemento não convencional enriquecido.

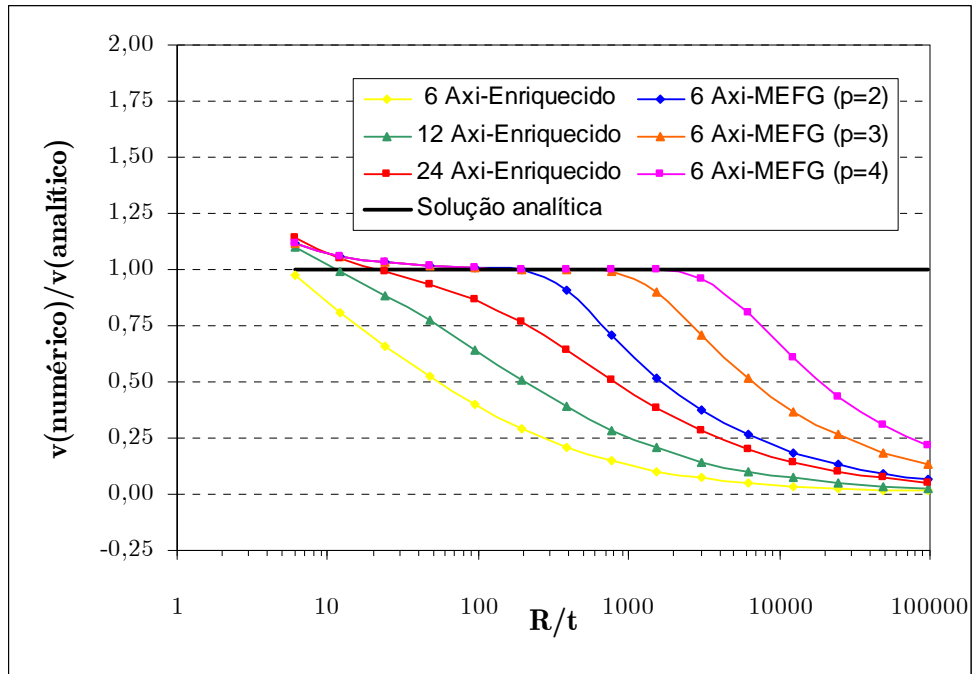


Figura 6.31 – Deslocamento no ponto de aplicação da punção (Rede uniforme).

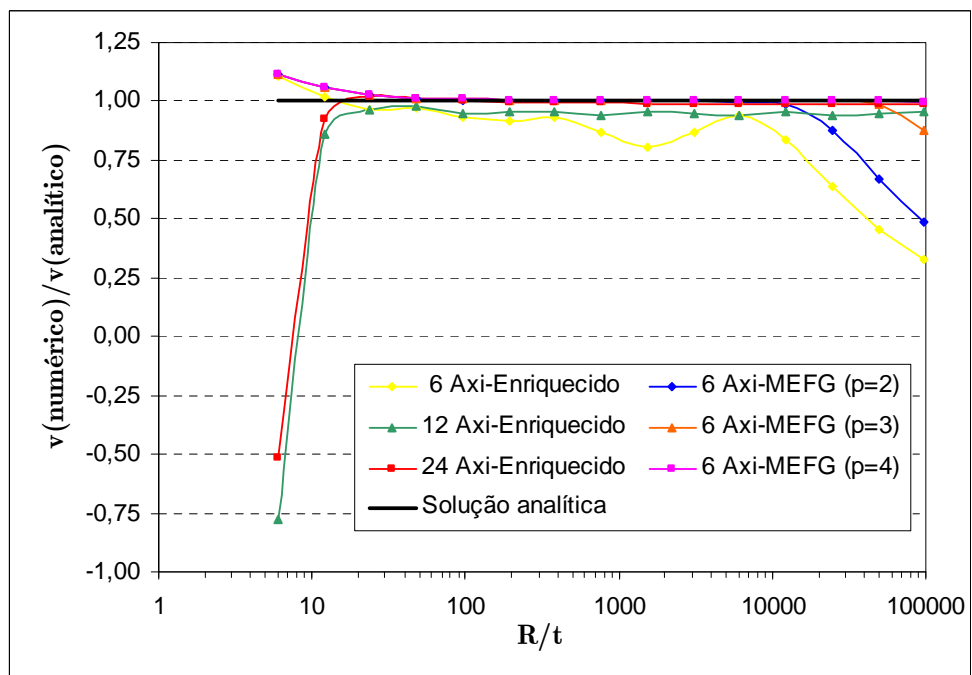


Figura 6.32 – Deslocamento no ponto de aplicação da punção (Rede refinada).



Por outro lado, considerando-se uma larga faixa envolvendo espessuras muito finas, o refino geométrico proporciona respostas numéricas satisfatórias para ambos os métodos. Tal fato decorre, sobretudo, da eficiência da discretização no sentido de captar a perturbação local da solução, próximo ao ponto de aplicação da força. Verifica-se que o MEEG, quando dotado de enriquecimento conveniente, neste exemplo configurando um enriquecimento ‘h-p’, é capaz superar o problema do travamento mesmo para razões geométricas (raio/espessura) extremamente elevadas.

## Conclusão e Considerações Finais

A finalidade deste último capítulo é apresentar as conclusões e considerações finais da pesquisa realizada. Além disto, tem a importância de trazer sugestões de trabalhos futuros, com base no estudo aqui desenvolvido.

O presente trabalho inclui-se no âmbito das formulações não-convencionais propostas na literatura para superar dificuldades apresentadas pelo método dos elementos finitos clássico em análises planas e axissimétricas. Procurou-se avaliar a eficiência de algumas alternativas, revisando seus aspectos conceituais, realizando sua implementação computacional e, por fim, procedendo a um confronto com base em simulações numéricas de problemas diversos.

### 7.1 Conclusões

Os dois primeiros exemplos e o caso do painel de Cook evidenciaram que o método das deformações assumidas apresenta desempenho satisfatório mesmo com redes pouco refinadas e/ou distorcidas em problemas que envolvem flexão pura ou simples, confirmando as indicações das referências consultadas. Entretanto, ainda em relação a esta formulação, verificou-se que a mesma apresenta resultados aquém do esperado em condição de quase-incompressibilidade (coeficiente de Poisson próximo de meio). Destaca-se, também, que a referida metodologia possui um maior custo computacional quando comparada às outras estudadas (EST e IRE).

A técnica de integração reduzida combinada com estabilização da rigidez é de fato eficiente nos problemas que envolvem o travamento volúmico, conforme se verifica nos resultados apresentados pelo exemplo apresentado no item 6.1.3 (referente ao travamento de Poisson). Além disso, os elementos baseados nesta formulação envolvem um número reduzido de graus de liberdade, simplificando a sua implementação. No tocante ao custo computacional, em termos do tempo dispensado

para o processamento dos modelos numéricos, esses elementos demonstraram melhor desempenho quando comparados aos das famílias EDA e EST. Porém, há que se observar que este tipo de elemento possui a característica negativa de não apresentar resultados bons nos problemas em que se empregam redes de elementos finitos irregulares.

O uso da expansão em série de Taylor de parcela das deformações compatíveis, proporcionou uma implementação computacional mais simples quando comparada com aquela do método das deformações assumidas puro. Todavia, de um modo geral, esta formulação apresentou resultados bem inferiores ao obtidos por outras formulações, seja nos casos de redes distorcidas ou nas situações em que o coeficiente de Poisson tende para 0,5.

O MEEG se mostrou uma eficiente ferramenta numérica em todos os casos em que foi testado (nos dois problemas axissimétricos, além do segundo e terceiro de estruturas planas), com a vantagem em relação às outras formulações de dispensar um maior refino da rede de elementos. Observa-se que o custo computacional foi equivalente, entretanto poderia ser ainda melhorado se explorado o enriquecimento seletivo, isto é, o emprego de ordens polinomiais diferenciadas somente nas regiões de interesse.

## 7.2 Propostas para trabalhos futuros

Como proposta para trabalhos futuros pode-se incluir a utilização das formulações aqui apresentadas em problemas com não-linearidade geométrica e de resposta material. Particularmente na formulação EDA pode-se inserir de outras funções interpoladoras para a geração das deformações assumidas. A extensão das alternativas estudadas para os problemas tridimensionais e seu emprego na análise de outros tipos de estruturas, como placas e cascas, consistem em desenvolvimentos naturais para uma seqüência imediata de investigação.

## Referências Bibliográficas



ALVES, M. M. (2005). *Emprego do método de resíduos ponderados para a análise de tubos*. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2005.

ASSAN, A. E. (2003). *Método dos Elementos Finitos: primeiros passos*. 2<sup>a</sup> ed. Editora UNICAMP, Campinas.

BABUŠKA, I.; CALOZ, G.; OSBORN, J. E. (1994). Special finite element method for a class of second order elliptic problems with rough coefficients. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, v.31, n.4, p.727-981.

BARROS, F. B. (2002). *Métodos sem malha e método dos elementos finitos generalizados em análise não-linear de estruturas*. Tese (Doutorado). Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2005.

BATHE, K. J. (1996). *Finite element procedures*. 2<sup>a</sup>.ed. Prentice-Hall.

BELYTSCHKO, T.; BACHRACH, W. E. (1986). Efficient implementation of quadrilaterals with high coarse-mesh accuracy. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v.54 n.3, p.279-301.

BELYTSCHKO, T.; BINDEMAN, L. P. (1991). Assumed strain stabilization of the 4-node quadrilateral with 1-point quadrature for nonlinear problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v.88 n.3, p.311-340.

BELYTSCHKO, T.; LIU, W.; MORAN, B. (2000). *Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures*. New York : Wiley.

BELYTSCHKO, T.; ONG, J. S. J.; LIU, W. K.; KENNEDY, J. M. (1984). Hourglass control in linear and nonlinear problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v.43, p. 251-276.

BOLDRINI, J. L.; COSTA, S. I. R.; FIGUEIREDO, V. L.; WETZLER, H. G. (1980). *Álgebra linear*. 3<sup>a</sup>.ed. Editora Harbra Ltda., São Paulo.

CARDOSO, R. P. R.; YOON, J. W.; GRÁCIO, J. J.; BARLAT, F.; CÉSAR DE SÁ, J. M. A. (2002). Development of a one point quadrature shell element for nonlinear applications with contact and anisotropy. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v.191, p. 5177-5206.

CÉSAR DE SÁ, J. M. A.; NATAL JORGE, R. M. (1999). New enhanced strain elements for incompressible problems. *International journal for numerical methods in engineering*, v.44, p. 229-248.

CÉSAR DE SÁ, J. M. A.; NATAL JORGE, R. M.; VALENTE R. A. F.; AREIAS, P. M. A. (2002). Development of shear locking-free shell elements using an enhanced assumed strain formulation. *International journal for numerical methods in engineering*, v.53, p. 1721-1750.

CHAVAN, K.S.; LAMICHHANE, B.P.; WOHLMUTH, B.I. (2007). Locking-free finite element methods for linear and nonlinear elasticity in 2D and 3D. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v.196, p. 4075-4086.

DUARTE, C. A. (1996). *The hp-cloud method*. Tese (Doutorado) - The University of Texas at Austin, Austin, 1996.

DUARTE, C. A.; BABUŠKA, I.; ODEN, J. T. (2000). Generalized finite element methods for three-dimensional structural mechanics problems. *Computers & Structures*, v. 77, n. 2, p. 215-232.

FERREIRA, K. I. I.; ROEHL, D. (2001). Three dimensional elastoplastic contact analysis at large strains with enhanced assumed strain elements. *International Journal of Solids and Structures*, v. 38, p. 1855-1870.

FREDRIKSSON, M.; OTTOSEN, N. S. (2004). Fast and accurate 4-node quadrilateral. *International journal for numerical methods in engineering*, v.61, p.1809-1834.

FREDRIKSSON, M.; OTTOSEN, N. S. (2007). Simple and accurate four-node axisymmetric element. *International journal for numerical methods in engineering*, v.71, p.175-200.

FREDRIKSSON, M.; OTTOSEN, N. S. (2007-b). Accurate eight-node hexahedral

element. *International journal for numerical methods in engineering*, in press.

GARCIA, O. A.; PROENÇA, S. P. B. (2007). Linear analysis of axis-symmetric plates and shells by the generalized finite element method. *Latin American Journal of Solids and Structures*, v. 4, p. 121-148, 2007.

GLASER, S.; ARMERO, F. (1997). On the formulation of enhanced strain finite elements in finite deformations. *Engineering Computations*, v.14, n.7, p. 759-791.

GÓIS, W. (2004). *Método dos elementos finitos generalizados em formulação variacional mista*. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

HUECK U, WRIGGERS P. (1995). A formulation for the four-node quadrilateral element. *International journal for numerical methods in engineering*, v.38, p. 3007-3037.

HUECK U.; REDDY B. D.; WRIGGERS P. (1994). On the stabilization of the rectangular 4-node quadrilateral element. *Communications in numerical methods in engineering*, v.10, p. 555-563.

HUGHES, T. J. R. (1980). Generalization of selective integration procedures to anisotropic and nonlinear media. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v.15, p.1413-1418.

HUGHES, T. J. R. (1987). *The Finite Element Method*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.

KORELC, J.; WRIGGERS, P. (1997). Improved enhanced four-node element with Taylor expansion of the shape functions. *International journal for numerical methods in engineering*, v.40, p.407-421.

LESAINT, P.; ZLÁMAL, M. (1980). Convergence of the nonconforming Wilson element for arbitrary quadrilateral meshes. *Numerische Mathematik*, v.36, p.33-52.

LIU, W. K.; ONG, J. S. J.; URAS, R. A. (1985). Finite element stabilization matrices – A unification approach. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v.53, p. 13-46.

MANGINI, M. (2006) *Método dos Elementos Finitos Generalizados para análise de estruturas em casca de revolução*. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

MELENK, J. M.; BABUŠKA, I. (1996). The partition of unity finite element method: basic theory and applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v.139, p.289-314.

NIRSCHL, G. C. (2005) *Método dos elementos finitos e técnicas de enriquecimento da aproximação aplicados à análise de tubos cilíndricos e cascas esféricas*. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

ODEN, J. T.; DUARTE, C.A.; ZIENKIEWICZ, O. C. (1998). A new cloud – based hp finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v.153, p. 117-126.

PAIVA, J. B. (2006). *Aplicações do Método dos Elementos Finitos – Notas de Aula*. São Carlos.

PIAN, T. H. H.; CHEN, D. P. (1982). Alternative ways for formulation of hybrid stress elements. *International journal for numerical methods in engineering*, v.18, p.1679-1684.

PIAN, T. H. H.; SUMIHARA, K. (1984). Rational approach for assumed stress finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* v.20, p.1685-1695.

PIAN, T. H. H.; TONG, P. (1986). Relations between incompatible displacement models and hybrid stress model. *International journal for numerical methods in engineering*, v.22, p.173-181.

PILTNER, R.; TAYLOR, R. L. (1995). A quadrilateral finite element with two enhanced strain modes. *International journal for numerical methods in engineering*, v.38, p.1783-1808.

PILTNER, R.; TAYLOR, R. L. (1999). A systematic construction of B-bar functions for linear e non-linear mixed-enhanced finite elements for plane elasticity problems.

*International journal for numerical methods in engineering*, v.44, p.615-639.

PILTNER, R.; TAYLOR, R. L. (2000) Triangular finite elements with rotational degrees of freedom and enhanced strain modes. *Computers and Structures*, v.75, p.361-368

PROENÇA, S. P. B. (2006). Análise não-linear de estruturas – Notas de Aula. São Carlos.

PROENÇA, S. P. B. (2006). Introdução aos Métodos Numéricos – Notas de Aula. São Carlos.

SIMO J. C.; ARMERO F. (1992). Geometrically non-linear enhanced strain mixed methods and the methods of incompatible modes. *International journal for numerical methods in engineering*, v.33, p.1413-1449.

SIMO J. C.; ARMERO F.; TAYLOR, R. L. (1993). Improved versions of assumed enhanced strain tri-linear elements or 3D finite deformation problems. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, v.110, p.359-386.

SIMO, J. C.; RIFAI, M. S. (1990). A class of mixed assumed strain method of incompatible modes. *International journal for numerical methods in engineering*, v.29, p.1595-1638.

SORIANO, H. L. (2003) *Método de elementos finitos em análise de estruturas*. São Paulo, SP: Edusp.

SOUSA, R. J. A.; CARDOSO, R. P. R.; VALENTE, R. A. F.; YOON, J. W.; GRÁCIO, J. J.; NATAL JORGE, R. M. (2005). A new one-point quadrature enhanced assumed strain (EAS) solid-shell element with multiple integration points along thickness: Part I - geometrically linear applications. *International journal for numerical methods in engineering*, v.62, p. 952-977.

SOUSA, R. J. A.; CARDOSO, R. P. R.; VALENTE, R. A. F.; YOON, J. W.; GRÁCIO, J. J.; NATAL JORGE, R. M. (2006). A new one-point quadrature enhanced assumed strain (EAS) solid-shell element with multiple integration points along thickness - Part II: Nonlinear applications. *International journal for numerical methods in engineering*, v.67, p. 160-188.



- SOUZA, C. O. (2008). *Formulação híbrida-Trefftz com enriquecimento seletivo: aplicação a problemas bidimensionais da elasticidade*. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.
- TAYLOR, R. L.; BERESFORD P. J.; WILSON, E. L. (1976). A non-conforming element for stress analysis. *International journal for numerical methods in engineering*, v.10, p.1211-1219.
- TIMOSHENKO, S. P.; GOODIER, J. N. (1983). *Teoria da elasticidade*. 3<sup>a</sup>.ed. Editora Guanabara Dois, Rio de Janeiro.
- TIMOSHENKO, S. P.; WOINOWSKY-KRIEGER, S. (1959). *Theory of plates and shells*. 2<sup>a</sup>.ed. McGraw-Hill Book Company, INC.
- TORRES, I. F. R. (2003). *Desenvolvimento e aplicação do método dos elementos finitos generalizados em análise tridimensional não-linear de sólidos*. Tese (Doutorado). Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2003.
- VALLIAPAN, S. (1981). *Continuum mechanics fundamentals*. A. A. Balkema, Rotterdam.
- VILLAÇA, S. F.; GARCIA, L. F. T. (2000). *Introdução á Teoria da Elasticidade*. 4<sup>a</sup> ed. COPPE-UFRJ, Rio de Janeiro.
- WACHSPRESS, E. L. (1978). Incompatible quadrilateral basis functions *International journal for numerical methods in engineering*, v.12, p.589-595.
- WILSON, E. L.; TAYLOR, R. L.; DOHERTY, W. P.; GHABOUSSI, J. (1973). Incompatible displacement models. *Numerical and computer models in Structural Mechanics*, p.43-57.
- WRIGGERS P, HUECK U. (1996). A formulation of the QS6 element for large elastic deformation. *International journal for numerical methods in engineering*, v.39, p.1437-1454.
- ZHANG W.; CHEN, D. P. (1997). The patch test conditions and some multivariable finite element formulations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* v.40, p.3015-3032.

ZHANG, W.; DESAI, C. S.; YONG, Y. K. (2000) An improved axisymmetric Wilson nonconforming finite element method for stress analysis. *Journal of Zhejiang University (English & Science Edition)* v.1 n.3, p.284-290.

ZHOU, X. X.; CHOW, Y. K.; LEUNG, C. F. (2007). Application of enhanced assumed strain finite element method to predict collapse loads of undrained geotechnical problems. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, v.31, p.1033–1043.

ZHOU, X. X.; CHOW, Y. K.; LEUNG, C. F. (2007-b). Hybrid and enhanced finite element methods for problems of soil consolidation. *International journal for numerical methods in engineering*, v.69, p. 221-249.

ZIENKIEWICZ, O. C.; HINTON, E. (1976). Reduced integration, function smoothing and non-conformity in finite element analysis (with special reference to thick plates). *Journal of the Franklin Institute*, v.302, p.443-461.

ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L. (2000). *The finite element method (vol. 1)*. 5.ed. Oxford: Butterworth-Heinemann.



## Apêndice A – Derivadas de $\mathbf{B}_0^{\text{desv}}$ em relação às coordenadas $\xi$ e $\eta$

Neste apêndice apresenta-se em forma explícita a parcelas derivadas das matrizes  $\mathbf{B}_0^{\text{desv}}$ , e está de acordo com o trabalho de (LIU; ONG; URAS, 1985).

Apresentam-se primeiramente, os vetores das coordenadas paramétricas para os nós do elemento finito:

$$\bar{\xi} = \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{Bmatrix} \quad \bar{\eta} = \begin{Bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

Tomando-se o domínio físico têm-se também os seguintes vetores coluna com as coordenadas nodais:

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} \quad \mathbf{y} = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{Bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

Tome-se agora a matriz Jacobiana, sendo a mesma calculada no centro do elemento finito, em outras palavras, tomando apenas um ponto de quadratura, no centro, onde  $(\xi = 0, \eta = 0)$ :

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \bar{\xi}^T \mathbf{x} & \frac{1}{4} \bar{\xi}^T \mathbf{y} \\ \frac{1}{4} \bar{\eta}^T \mathbf{x} & \frac{1}{4} \bar{\eta}^T \mathbf{y} \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

O determinante da matriz do Jacobiana, então, resulta em:

$$J(\xi, \eta) = J(0, 0) = J_0 = \frac{1}{4} A \quad (\text{A.4})$$

As derivadas das funções de forma do elemento são então:

$$\begin{aligned}
b_x &= \frac{1}{2A} \left\{ + \left( \frac{1}{4} \bar{\eta}^T \mathbf{y} \right) \bar{\xi} - \left( \frac{1}{4} \bar{\xi}^T \mathbf{y} \right) \bar{\eta} \right\} \\
b_y &= \frac{1}{2A} \left\{ - \left( \frac{1}{4} \bar{\eta}^T \mathbf{x} \right) \bar{\xi} + \left( \frac{1}{4} \bar{\xi}^T \mathbf{x} \right) \bar{\eta} \right\}
\end{aligned} \tag{A.5}$$

Definindo também o vetor de ‘Hourglass’, bem como o vetor de projeção conforme segue a seguir:

$$\begin{aligned}
h &= \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{Bmatrix} \\
\gamma &= \left\{ h - (h^T \mathbf{x}) b_x - (h^T \mathbf{y}) b_y \right\}
\end{aligned} \tag{A.6}$$

Finalmente obtêm-se, depois de alguns algebrismos, as derivadas que definem  $B_0^{desv}$  em relação às coordenadas paramétricas:

$$\begin{aligned}
b_{x,\xi} &= -\frac{\bar{\xi}^T \mathbf{y}}{4A} \gamma \\
b_{y,\xi} &= \frac{\bar{\xi}^T \mathbf{x}}{4A} \gamma \\
b_{x,\eta} &= \frac{\bar{\eta}^T \mathbf{y}}{4A} \gamma \\
b_{y,\eta} &= -\frac{\bar{\eta}^T \mathbf{x}}{4A} \gamma
\end{aligned} \tag{A.7}$$

## Anexo A – Ortogonalização de Gram-Schmidt

Neste anexo se descreve brevemente o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt. O mesmo foi retirado de (BOLDRIBI *et al*, 1980).

Seja uma base  $\beta = \{v_1, v_2, v_3 \dots v_n\}$  de um espaço vetorial  $V$ . Uma base ortogonal  $\{v'_1, v'_2, v'_3 \dots v'_n\}$  pode ser obtida a partir de  $\beta$  da seguinte forma:

$$\begin{aligned}v'_1 &= v_1 \\v'_2 &= v_2 - \frac{\langle v_2, v'_1 \rangle}{\langle v'_1, v'_1 \rangle} v'_1 \\v'_3 &= v_3 - \frac{\langle v_3, v'_2 \rangle}{\langle v'_2, v'_2 \rangle} v'_2 - \frac{\langle v_3, v'_1 \rangle}{\langle v'_1, v'_1 \rangle} v'_1 \\&\vdots \\v'_n &= v_n - \frac{\langle v_n, v'_{n-1} \rangle}{\langle v'_{n-1}, v'_{n-1} \rangle} v'_{n-1} - \dots - \frac{\langle v_n, v'_1 \rangle}{\langle v'_1, v'_1 \rangle} v'_1\end{aligned}\tag{A.1}$$

A operação  $\langle v'_a, v'_b \rangle$  representa o produto interno entre os vetores da base.



## Anexo B – Forma fechada da expansão de 1ª ordem em série de Taylor

Este anexo serve de complemento ao item 4.1.3, que trata da estabilização da rigidez mediante o uso de expansão em série de Taylor.

Apresentam-se as expressões em forma fechada da expansão das derivadas das funções de forma em série de Taylor, em primeira ordem; tais expressões são apresentadas no trabalho de (KORELC; WRIGGERS, 1997).

As funções de forma sejam elas as clássicas, bem como os modos incompatíveis, podem ser obtidas conforme se segue:

$$\begin{aligned}\bar{N}_{i,x} &= C_i^X + C_i^{X\xi}\xi + C_i^{X\eta}\eta \\ \bar{N}_{i,y} &= C_i^Y + C_i^{Y\xi}\xi + C_i^{Y\eta}\eta\end{aligned}\quad (\text{B.1})$$

O índice  $i$  varia de 1 a 6, sendo que, de 1 a 4 o índice representa as funções clássicas bilineares, e os índices 5 e 6 referem-se aos dois modos incompatíveis. As constantes  $C$  maiúsculas são tais que:

$$\begin{aligned}C_i^X &= c_J (b_3\xi_i - b_1\eta_i) & C_5^X &= 0 & C_6^X &= 0 \\ C_i^Y &= c_J (a_1\eta_i - a_3\xi_i) & C_5^Y &= 0 & C_6^Y &= 0 \\ C_i^{X\xi} &= -c_\xi (b_1\eta_i - b_3\xi_i) - c_J (b_1\eta_i\xi_i - b_2\xi_i) & C_5^{X\xi} &= -8c_J b_3 & C_6^{X\xi} &= 0 \\ C_i^{Y\xi} &= c_\xi (a_1\eta_i - a_3\xi_i) + c_J (a_1\eta_i\xi_i - a_2\xi_i) & C_5^{Y\xi} &= 8c_J a_3 & C_6^{Y\xi} &= 0 \\ C_i^{X\eta} &= -c_\eta (b_1\eta_i - b_3\xi_i) - c_J (b_2\eta_i - b_3\eta_i\xi_i) & C_5^{X\eta} &= 0 & C_6^{X\eta} &= 8c_J b_1 \\ C_i^{Y\eta} &= c_\eta (a_1\eta_i - a_3\xi_i) + c_J (a_2\eta_i - a_3\eta_i\xi_i) & C_5^{Y\eta} &= 0 & C_6^{Y\eta} &= -8c_J a_1\end{aligned}\quad (\text{B.2})$$

Por sua vez as constantes  $a$ ,  $b$  e  $c$  minúsculas são tais que:

$$\begin{aligned}a_0 &= \sum_{i=1}^4 x_i & a_1 &= \sum_{i=1}^4 \xi_i x_i & a_2 &= \sum_{i=1}^4 \xi_i \eta_i x_i & a_3 &= \sum_{i=1}^4 \eta_i x_i \\ b_0 &= \sum_{i=1}^4 y_i & b_1 &= \sum_{i=1}^4 \xi_i y_i & b_2 &= \sum_{i=1}^4 \xi_i \eta_i y_i & b_3 &= \sum_{i=1}^4 \eta_i y_i \\ c_\xi &= c_J^2 (a_2 b_1 - a_1 b_2) & c_\eta &= c_J^2 (a_3 b_2 - a_2 b_3) & c_J &= \frac{1}{a_1 b_3 - a_3 b_1}\end{aligned}\quad (\text{B.3})$$



Com base nas derivadas das funções de forma funções de forma (B.1) podem ser calculadas as matrizes B-barra:

$$\bar{B}_i = \begin{bmatrix} \bar{N}_{i,x} & 0 \\ 0 & \bar{N}_{i,y} \\ \bar{N}_{i,y} & \bar{N}_{i,x} \end{bmatrix}_{3 \times 2} \quad (\text{B.4})$$

Conseqüentemente agora se podem calcular as submatrizes  $K_{ij}$  que formam a matriz de rigidez da estrutura, definidas conforme a relação:

$$K_{ij} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 J \bar{B}_i^T C \bar{B}_j d\xi d\eta \quad (\text{B.5})$$

onde o determinante do Jacobiano é calculado levando-se em conta apenas um ponto de integração no centro do elemento, conforme a seguir:

$$J = J_0 = \left| \mathbf{J} \Big|_{\xi=0, \eta=0} \right| = \frac{1}{16c_j} \quad (\text{B.6})$$

Reescrevendo a matriz de constitutiva elástica  $C$ , para os estados planos de tensão e deformação, em termos das constantes de Lamè:

$$C = \begin{bmatrix} E_1 & E_2 & 0 \\ E_2 & E_1 & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}$$

$$\text{EPT} \quad E_1 = \frac{4\lambda(\lambda + \mu)}{1 + 2\mu} \quad E_2 = \frac{2\lambda\mu}{1 + 2\mu}, \quad (\text{B.7})$$

$$\text{EPD} \quad E_1 = \lambda + 2\mu \quad E_2 = \lambda$$

calculando-se as expressões de (B.5) para  $i, j = 1, 2, \dots, 6$  chega-se à seguinte expressão para as submatrizes de rigidez:

$$K_{ij} = \begin{bmatrix} E_1 d_{ij}^{XX} + \mu d_{ij}^{YY} & E_2 d_{ij}^{XY} + \mu d_{ji}^{XY} \\ E_2 d_{ji}^{XY} + \mu d_{ij}^{XY} & E_1 d_{ij}^{YY} + \mu d_{ij}^{XX} \end{bmatrix} \quad (\text{B.8})$$

Na relação anterior as constantes  $d$  são tais que:

$$\begin{aligned}
d_{ij}^{XX} &= \frac{4J_0}{3} (3C_i^X C_j^X + C_i^{X\eta} C_j^{X\eta} + C_i^{X\xi} C_j^{X\xi}) \\
d_{ij}^{YY} &= \frac{4J_0}{3} (3C_i^Y C_j^Y + C_i^{Y\eta} C_j^{Y\eta} + C_i^{Y\xi} C_j^{Y\xi}) \\
d_{ij}^{XY} &= \frac{4J_0}{3} (3C_i^X C_j^Y + C_i^{X\eta} C_j^{Y\eta} + C_i^{X\xi} C_j^{Y\xi})
\end{aligned} \tag{B.9}$$

Por fim, a matriz de rigidez resulta:

$$K = \begin{bmatrix} K_{1\dots4,1\dots4} & K_{5,1\dots4} & K_{6,1\dots4} \\ K_{5,1\dots4}^T & K_{5,5} & 0 \\ K_{6,1\dots4}^T & 0 & K_{6,6} \end{bmatrix} \tag{B.10}$$

# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)