

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE ESTRUTURAS

JOÃO PAULO PASCON

**Modelos constitutivos para materiais hiperelásticos:  
estudo e implementação computacional**

São Carlos  
2008

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

JOÃO PAULO PASCON

**Modelos constitutivos para materiais hiperelásticos:  
estudo e implementação computacional**

Dissertação apresentada ao Departamento de Engenharia de  
Estruturas da Universidade de São Paulo, como parte dos  
requisitos para obtenção do título de Mestre em Estruturas

Orientador: Prof. Dr. Humberto Breves Coda

São Carlos  
2008



João Paulo Pascon

Modelos constitutivos para materiais hiperelásticos: estudo e implementação computacional.

Dissertação apresentada ao Departamento de Engenharia  
de Estruturas da Escola de Engenharia de São Carlos da  
Universidade de São Paulo para obtenção do título de Mestre

Aprovado em: \_\_\_\_\_

Banca Examinadora

Prof. Dr. Humberto Breves Coda (Orientador)

Assinatura: \_\_\_\_\_

Prof. Dr. \_\_\_\_\_

Instituição: \_\_\_\_\_ Assinatura: \_\_\_\_\_

Prof. Dr. \_\_\_\_\_

Instituição: \_\_\_\_\_ Assinatura: \_\_\_\_\_

Prof. Dr. Márcio Antonio Ramalho (Coordenador)

Assinatura: \_\_\_\_\_

Ao meu amado filho Breno Justo de Oliveira Pascon

## **AGRADECIMENTOS**

A Deus, por sua infinita sabedoria e por ter iluminado meu caminho todos os dias.

Aos meus pais José Roberto Pascon e Maria Cristina Salvestro Pascon, por terem me criado e me orientado durante toda minha vida.

Aos meus irmãos José Roberto Pascon Júnior e Juliana Cristina Pascon, pelo constante apoio.

À minha namorada Gizele Justo de Oliveira, pela paciência, pelo carinho, pela dedicação e pelo apoio.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pelo auxílio financeiro.

Ao meu orientador Humberto Breves Coda, por ter me orientado adequadamente e por ter sido paciente durante os últimos dois anos.

Ao Dr. Rodrigo Ribeiro Paccola, pelo auxílio e pelos esclarecimentos de certas dúvidas.

A todos os familiares, parentes, amigos e colegas pela amizade e sinceridade.

A todas as pessoas do Departamento de Engenharia de Estruturas (SET) da Universidade de São Paulo (USP) que contribuíram direta ou indiretamente para a realização do presente trabalho.

“Se um dia tiver que escolher entre o mundo e o amor... Lembre-se. Se escolher o mundo ficará sem o amor, mas se escolher o amor com ele você conquistará o mundo”.

Albert Einstein (1879-1955)



## ***RESUMO***

PASCON, J. P. (2008). **Modelos constitutivos para materiais hiperelásticos: estudo e implementação computacional**. Dissertação (Mestrado) - Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2008.

O objetivo central deste trabalho é implementar modelos constitutivos hiperelásticos não lineares em um código computacional que faz análise não linear geométrica de cascas. São necessários, para este propósito, conceitos sobre álgebras linear e tensorial, cinemática, deformação, tensão, balanços, princípios variacionais, métodos numéricos e hiperelasticidade. Tal programa usa a formulação Lagrangiana posicional, o Método dos Elementos Finitos, o Princípio dos Trabalhos Virtuais e o método iterativo de Newton-Raphson para solução das equações não lineares. O elemento finito de casca possui dez nós, sete parâmetros por nó e variação linear da deformação ao longo da espessura. Para dedução dos novos modelos usou-se a decomposição multiplicativa do gradiente da função mudança de configuração, o tensor deformação de Green-Lagrange e o tensor da tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie. O código desenvolvido foi usado em simulações de diversos exemplos e apresentou boa precisão na análise mecânica de polímeros naturais altamente deformáveis. A ocorrência do fenômeno travamento não se manifestou nas análises realizadas. A presente pesquisa confirmou outros trabalhos, reforçou a necessidade de se usar modelos hiperelásticos não lineares para simular o comportamento mecânico de polímeros naturais e apresentou resultados condizentes com dados experimentais existentes na literatura científica e às respectivas soluções analíticas.

Palavras-chave: Hiperelasticidade, Análise Não Linear Geométrica, Cascas com Sete Parâmetros Nodais, Método dos Elementos Finitos, Formulação Lagrangiana Posicional, Materiais Poliméricos Altamente Deformáveis.

## ***ABSTRACT***

PASCON, J. P. (2008). **Constitutive models for hyperelastic materials: study and computational implementation.** Dissertation (Master of Science) - Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2008.

The main objective of this work is to implement nonlinear hyperelastic constitutive models in a computational code of geometrically nonlinear analysis of shells. For this purpose, concepts of linear and tensor algebras, kinematics, strain, stress, balances, variational principles, numerical methods and hyperelasticity are necessary. Such program uses the positional Lagrangian formulation, the Finite Element Method, the Principle of Virtual Work and the iterative method of Newton-Raphson for the solution of the nonlinear equations. The shell finite element has ten nodes, seven parameters per node and presents linear variation of the strain along the thickness. To achieve the new constitutive models the multiplicative decomposition of the deformation gradient, the Green-Lagrange strain tensor and the second Piola-Kirchhoff stress tensor are used. The developed code is tested for simulations of various examples and presents good accuracy in the mechanical analysis of highly deformable natural rubber. The locking phenomena didn't appear in the proposed analysis. The present research confirms other works, corroborates the need of using nonlinear hyperelastic models to simulate the mechanical behavior of natural rubber and presents suitable results when compared to existent experimental data of the scientific literature and to the respective analytical solutions.

**Keywords:** Hyperelasticity, Geometrically Nonlinear Analysis, Seven Nodal Parameters Shells, Finite Element Method, Positional Lagrangian Formulation, Highly Deformable Rubber Materials.

# SUMÁRIO

<b>Resumo.....</b>	<b>6</b>
<b>Abstract.....</b>	<b>7</b>
<b>1. Introdução .....</b>	<b>14</b>
1.1. Generalidades .....	14
1.1.1. Componentes Estruturais Altamente Deformáveis.....	14
1.1.2. Resposta do Material .....	15
1.1.3. Método dos Elementos Finitos .....	15
1.2. Justificativas .....	16
1.3. Objetivos.....	17
1.4. Resumo dos Capítulos .....	18
<b>2. Revisão Bibliográfica.....</b>	<b>20</b>
2.1. Introdução.....	20
2.2. Teorias e Soluções Analíticas para Problemas Estruturais.....	20
2.3. Mecânica dos Sólidos Altamente Deformáveis.....	21
2.4. Análise Não linear Geométrica com o Método dos Elementos Finitos (MEF).....	22
2.5. Modelos Constitutivos Hiperelásticos .....	27
2.6. Comentários sobre o fenômeno Travamento.....	36
<b>3. Preliminares Matemáticas .....</b>	<b>39</b>
3.1. Notação Utilizada .....	39
3.2. Conceito de Escalar, Vetor e Tensor .....	40
3.3. Operações entre dois Tensores .....	41
3.4. Definições que envolvem Tensores.....	42
3.5. Propriedades Tensoriais.....	44

3.6. Auto-vetor e auto-valor.....	46
3.7. Transformação de Base.....	47
3.8. Campos Tensoriais.....	48
3.9. Gradiente e Divergente.....	48
3.10. Teorema da Divergência de Gauss.....	50
3.11. Derivadas de Funções Escalares e Tensoriais.....	50
<b>4. Mecânica Não Linear do Contínuo.....</b>	<b>52</b>
4.1. Conceito da NLG.....	52
4.2. Cinemática.....	53
4.2.1. Configuração.....	54
4.2.2. Movimento de um corpo.....	55
4.2.3. Campo de Deslocamentos.....	56
4.2.4. Movimento de Corpo Rígido.....	57
4.3. Deformação.....	58
4.3.1. Gradiente da Função Mudança de Configuração.....	58
4.3.2. Tensores de Deformação.....	61
4.3.3. Alongamento.....	63
4.3.4. Deformação de Engenharia.....	64
4.3.5. Tensor Gradiente de Deslocamento.....	67
4.3.6. Objetividade da Medida de Deformação.....	67
4.3.7. Teorema da Decomposição Polar.....	68
4.3.8. Relação entre áreas superficiais e volumes.....	69
4.3.9. Tensores Taxa de Deformação.....	70
4.4. Tensão.....	71
4.4.1. Vetor de Tensão.....	72

4.4.2. Tensão na forma Tensorial .....	73
4.4.3. Componentes da Tensão de Cauchy .....	74
4.4.4. Tensão de Piola-Kirchhoff de Segunda Espécie .....	75
4.4.5. Tensão de Engenharia.....	76
4.5. Balanços .....	76
4.5.1. Conservação da Massa .....	76
4.5.2. Balanço da Quantidade de Movimento .....	79
4.5.3. Balanço da Energia Mecânica e da Potência .....	82
4.5.4. Princípio dos Trabalhos Virtuais .....	85
4.5.5. Princípio da Mínima Energia Potencial Total .....	89
4.6. Comentários Finais .....	90
<b>5. Método dos Elementos Finitos.....</b>	<b>91</b>
5.1. Fundamentos.....	91
5.2. Metodologia.....	92
5.3. Procedimento Numérico .....	97
5.3.1. Exemplo Gráfico.....	99
5.4. Montagem do Sistema Global .....	100
5.5. Introdução das Condições de Contorno.....	104
<b>6. Hiperelasticidade .....</b>	<b>106</b>
6.1. Materiais Hiperelásticos .....	107
6.1.1. Relações Constitutivas em termos dos Invariantes de Deformação .....	110
6.1.2. Materiais Incompressíveis .....	111
6.1.3. Materiais Compressíveis .....	112
6.2. Tensão.....	115
6.2.1. Modelo 1.....	117

6.2.2. Modelo 2 .....	117
6.2.3. Modelo 3 .....	118
6.2.4. Modelo 4 .....	118
6.2.5. Modelo 5 .....	119
6.3. Tensor Elástico.....	119
6.3.1. Modelo 1 .....	122
6.3.2. Modelo 2 .....	123
6.3.3. Modelo 3 .....	123
6.3.4. Modelo 4 .....	124
6.3.5. Modelo 5 .....	124
6.4. Existência de Solução .....	125
6.4.1. Domínio Convexo .....	125
6.4.2. Função Convexa.....	126
6.4.3. Funções Policonvexas .....	128
6.4.4. Coercividade .....	129
6.5. Estimativa dos Coeficientes .....	130
6.5.1. Método dos Mínimos Quadrados (MMQ) .....	130
6.5.2. Ensaio de Tração Uniaxial .....	131
6.5.2.1. Modelo 1 .....	133
6.5.2.2. Modelo 2 .....	135
6.5.2.3. Modelo 3 .....	136
6.5.2.4. Modelos 4 e 5.....	137
6.5.2.5. Modelo Elástico .....	138
6.5.2.6. Modelo Hiperelástico Linear .....	139
6.5.3. Ensaio de Cisalhamento Simples .....	141

6.5.4. Ensaio de Tração Biaxial.....	142
<b>7. Código Computacional.....</b>	<b>145</b>
7.1. Elemento Finito de Treliça Plana .....	145
7.1.1. Cinemática.....	146
7.1.2. Lei Elástica Simplificada.....	147
7.1.2.1. Derivadas.....	149
7.1.2.2. Algoritmo Desenvolvido .....	152
7.1.3. Modelo Incompressível Hiperelástico.....	156
7.1.3.1. Derivadas.....	157
7.1.3.2. Algoritmo Desenvolvido .....	160
7.2. Elemento Finito de Casca.....	160
7.2.1. Cinemática.....	161
7.2.2. Lei Constitutiva .....	165
7.2.3. Integração Numérica.....	166
7.2.4. Algoritmo Desenvolvido .....	167
<b>8. Resultados e Discussões.....</b>	<b>173</b>
8.1. Exemplos Simulados com o Elemento Finito de Treliça Plana.....	173
8.1.1. Exemplo 1 - Treliça Plana Abatida.....	173
8.1.2. Exemplo 2 - Tração Uniaxial.....	176
8.1.3. Exemplo 3 - Compressão Uniaxial.....	182
8.2. Exemplos Simulados com o elemento finito de Casca.....	184
8.2.1. Exemplo 4 - Tração Uniaxial.....	184
8.2.2. Exemplo 5 - Compressão Uniaxial.....	187
8.2.3. Exemplo 6 - Cisalhamento Simples .....	190
8.2.4. Exemplo 7 - Tração Biaxial.....	193

8.2.5. Exemplo 8 - Tração Equi-biaxial.....	196
8.2.6. Exemplo 9 - Membrana de Cook 1 .....	199
8.2.7. Exemplo 10 - Membrana de Cook 2 .....	201
8.2.8. Exemplo 11 - Lâmina em Balanço sob Carga Cisalhante na Extremidade Livre.....	202
8.2.9. Exemplo 12 - Chapa Parcialmente Carregada .....	203
8.2.10. Exemplo 13 - Prisma Elastomérico sob Compressão .....	204
8.2.11. Exemplo 14 - Tubo Cilíndrico Hiperelástico sob Linha de Carga.....	206
8.2.12. Exemplo 15 - Flexão Pura de Prisma.....	208
8.2.13. Exemplo 16 - Movimento de Corpo Rígido.....	211
8.3. Comparação entre os modelos de Yeoh e de St.Venant-Kirchhoff .....	213
<b>9. Conclusões.....</b>	<b>216</b>
9.1. Considerações Finais.....	216
9.2. Comparação com a literatura científica consultada .....	219
9.3. Sugestões para Pesquisa Futura .....	220
<b>Referências Bibliográficas.....</b>	<b>223</b>



## ***1. Introdução***

---

### **1.1. Generalidades**

#### **1.1.1. Componentes Estruturais Altamente Deformáveis**

Está cada vez mais amplo o uso de elementos estruturais altamente deformáveis e elásticos, como é o caso dos polímeros naturais ou vulcanizados preenchidos ou não com negro de carbono. Entre suas aplicações na engenharia, podem ser citados os seguintes casos: suportes para máquinas e construções, juntas estruturais e de dilatação flexíveis, vedações para portas de veículos automotivos, pneus, estruturas costeiras, arruelas de vedação, anéis elastoméricos e polímeros reforçados com fibra de carbono para o setor aeronáutico.

As principais funções dos referidos materiais são: redução da vibração, absorção de impacto e aumento da flexibilidade nas ligações. Os componentes poliméricos são bastante úteis para estas finalidades, pois apresentam versatilidade, boa resistência mecânica, quando comparada à sua baixa densidade, grande elasticidade e boa resistência ao impacto.

### **1.1.2. Resposta do Material**

É de extrema importância, para fins de projeto e dimensionamento, o conhecimento das propriedades dos elementos estruturais a serem utilizados, para que se possa prever a resposta do material frente às possíveis solicitações. O modelo que melhor se adapta aos componentes estruturais poliméricos é, segundo pesquisadores e estudiosos sobre o assunto, a chamada hiperelasticidade.

Vários modelos hiperelásticos têm sido desenvolvidos, comparados com dados experimentais e analisados no que diz respeito ao potencial de previsão do comportamento mecânico.

### **1.1.3. Método dos Elementos Finitos**

Sabe-se que, na análise estrutural, a determinação da função analítica que descreve certa grandeza incógnita, como por exemplo, a posição final de equilíbrio de um corpo carregado, é extremamente difícil, devido à complexidade matemática envolvida. Assim, muitos pesquisadores têm buscado outras maneiras para solucionar os mais diversos problemas da engenharia. Uma delas é o uso de métodos numéricos, nos quais a desconhecida função que descreve certa grandeza é aproximada e determinada de acordo com algum parâmetro. Porém, o número de cálculos necessários em problemas com carregamento e geometria complexos é, geralmente, muito grande, o que dificulta a realização manual desses métodos.

Com o surgimento e a constante evolução dos micro-computadores, os quais possibilitam maior velocidade de processamento de dados e, portanto, maior eficiência na realização de cálculos, os métodos numéricos, também chamados de aproximados, têm recebido, a um bom tempo, grande atenção por parte de pesquisadores em todo o mundo.

Uma das ferramentas numéricas desenvolvidas é o Método dos Elementos Finitos (MEF), que tem sido amplamente estudado e implementado em códigos computacionais para análise e simulação de várias estruturas.

Para desenvolvimento, utilização e compreensão das ferramentas de análise estrutural de componentes altamente deformáveis pelo MEF, é necessário o conhecimento das seguintes ciências: cálculo diferencial e integral, álgebra linear e tensorial, mecânica do contínuo, não-linearidade geométrica, hiperelasticidade e linguagem de programação.

## **1.2. Justificativas**

Devido à crescente utilização de materiais hiperelásticos em estruturas, torna-se necessário buscar melhorias no projeto e no dimensionamento destes componentes. Para isto, deve-se ampliar o conhecimento com relação ao comportamento mecânico destes materiais, desenvolver eficientes ferramentas numéricas de simulação de carregamento, as quais podem fornecer previsões mais realistas, e adaptar os modelos hiperelásticos existentes aos dados experimentais.

Podem ser citadas, também, a necessidade de maior eficiência na produção de componentes estruturais poliméricos, com a procura da redução de custos desnecessários

acarretados pelo superdimensionamento, e a possibilidade de serem atingidas menores incertezas quanto à segurança estrutural.

Ademais, sabe-se que os modelos hiperelásticos não lineares são mais adequados, quando comparados aos lineares, para representar o comportamento mecânico de polímeros vulcanizados ou naturais preenchidos ou não com negro de carbono submetidos a grandes deformações. É preciso, portanto, estudar estes modelos e implementá-los em códigos computacionais de simulação estrutural. Assim, espera-se melhorar a previsão do comportamento de estruturas constituídas de polímeros, com uso destas ferramentas numéricas.

Outra importante questão para dimensionamento dos referidos componentes poliméricos é a busca por maior precisão no cálculo de esforços internos, necessários para determinação da possível ocorrência de falhas materiais ou de instabilidade estrutural.

### **1.3. Objetivos**

O objetivo precípua desta pesquisa foi a implementação de modelos constitutivos não lineares para materiais hiperelásticos, homogêneos e isotrópicos em um código computacional de análise não linear geométrica de cascas. Para atingir tal propósito, outros objetivos foram:

- obtenção de conhecimentos nas seguintes disciplinas: Introdução aos Métodos Numéricos; Fundamentos da Mecânica dos Materiais e das Estruturas; Introdução à Dinâmica Não Linear Geométrica de Estruturas Reticuladas Bidimensionais - uma abordagem energética baseada no MEF; Aplicações do Método dos Elementos Finitos; Análise Não Linear de Estruturas;

- revisão e estudo mais aprofundado sobre Álgebra Linear e Tensorial, Mecânica do Contínuo, Não Linearidade Geométrica, Elementos Finitos de Casca, Materiais Hiperelásticos, Formulação Lagrangiana Posicional e Implementação Computacional;
- levantamento bibliográfico dos referidos temas, com a pesquisa em livros, artigos, dissertações e teses;
- pesquisa sobre dados obtidos com ensaios em laboratório com polímeros naturais e vulcanizados;
- dedução da nova formulação para cálculo das tensões e do tensor elástico, baseada nas leis constitutivas adotadas;
- modificação no modelo constitutivo do código computacional existente com as necessárias interferências para sua adaptação;
- simulação de diversos problemas, análise dos resultados e comparação com dados experimentais da literatura científica.

#### **1.4. Resumo dos Capítulos**

Estão apresentados, no segundo capítulo, alguns dos importantes trabalhos e estudos realizados nas seguintes áreas: solução analítica para problemas estáticos, mecânica dos sólidos altamente deformáveis, não linearidade geométrica, método dos elementos finitos, hiperelasticidade e travamento.

No terceiro capítulo comenta-se sobre as Álgebras Linear e Tensorial. São mostrados conceitos, propriedades e fórmulas, todos necessários ao desenvolvimento matemático deste estudo.

No quarto capítulo aborda-se a Mecânica do Contínuo. Estão descritas as principais grandezas envolvidas, como por exemplo, deformação e tensão, e a idéia central da Não Linearidade Geométrica.

São comentados, no quinto capítulo, os fundamentos do Método dos Elementos Finitos (MEF), assim como a metodologia adotada neste trabalho.

No sexto capítulo discorre-se sobre a Hiperelasticidade. Estão descritos os principais modelos hiperelásticos existentes, o cálculo das tensões e do tensor elástico, a existência de solução numérica e a estimativa dos coeficientes pelo Método dos Mínimos Quadrados (MMQ).

Está descrito, no sétimo capítulo, o código computacional modificado. São mostrados o algoritmo alterado, a finalidade de cada sub-rotina, a cinemática adotada para barras de treliça e cascas, as leis constitutivas e o procedimento numérico utilizado.

Estão presentes, no oitavo capítulo, os resultados obtidos para as simulações realizadas com o novo código computacional, tanto para barras de treliça quanto para cascas, assim como a discussão sobre eles com base na revisão bibliográfica.

Estão apresentadas, no nono capítulo, as conclusões baseadas nos resultados fornecidos pelo programa.

## ***2. Revisão Bibliográfica***

---

### **2.1. Introdução**

Neste capítulo são citados e comentados vários trabalhos realizados por pesquisadores nas áreas de elasticidade, análise não linear geométrica, método dos elementos finitos e hiperelasticidade.

### **2.2. Teorias e Soluções Analíticas para Problemas Estruturais**

Muitos pesquisadores buscaram a solução analítica das equações diferenciais de equilíbrio estático para determinados problemas mecânicos.

RIVLIN (1949) obteve a solução analítica para tubos elastoméricos altamente deformáveis sob pressão interna.

RIVLIN & SAUNDERS (1951) apresentaram a solução analítica para barras altamente deformáveis sob tração uniaxial homogênea.

TIMOSHENKO & GOODIER (1951) reuniram vários trabalhos feitos no campo da Elasticidade Linear. Descreveram as equações de equilíbrio estático, a compatibilidade

geométrica e a lei constitutiva para materiais elásticos e isotrópicos, submetidos a pequenos deslocamentos e deformações. Apresentaram as soluções analíticas para casos com carregamento e geometria simplificados, como por exemplo, tração, compressão e torção de barras, e flexão de vigas.

RIVLIN (1956) obteve a solução analítica para os casos de cisalhamento simples homogêneo e tração biaxial pura de materiais altamente deformáveis.

TIMOSHENKO & WOINOWSKY-KRIEGER (1959) apresentaram as equações gerais de equilíbrio para placas e cascas, assim como algumas soluções exatas para certos casos particulares, também no campo elástico linear.

SCHIECK *et al.* (1992) apresentaram a solução exata para placas circulares, elásticas e altamente deformáveis, engastadas em toda borda, com carregamento transversal uniformemente distribuído.

SANSOUR & BUFLER (1992) citaram as teorias não lineares de cascas: von Kármán, Marguerre, Donell-Mushtari-Vlasov e Reissner.

Nota-se facilmente, com base nos trabalhos citados, que a determinação da função analítica, restringe-se a problemas elementares com geometria e carregamentos simples e, portanto, é extremamente difícil em casos mais complexos.

### **2.3. Mecânica dos Sólidos Altamente Deformáveis**

Os trabalhos de MALVERN (1969), COIMBRA (1981), OGDEN (1984), CIARLET (1993), BELYTSCHKO *et al.* (2000) e de HOLZAPFEL (2000) reuniram vários conceitos e equações sobre álgebra linear e tensorial, cinemática, análise do movimento de um corpo,



equações de balanço, deformações, tensões, elasticidade, hiperelasticidade, problemas de valor de contorno (PVC) e princípios variacionais. Para o tratamento matemático de sólidos sujeitos a deformações consideradas grandes, tais conceitos são bastante úteis para análise estrutural não linear geométrica. Uma das hipóteses comuns a todos esses livros é considerar todo sólido como meio contínuo, isto é, sem vazios ou descontinuidades. Em boa parte desses trabalhos, admite-se que os corpos são homogêneos e isotrópicos, o que simplifica bastante o equacionamento.

#### **2.4. Análise Não linear Geométrica com o Método dos Elementos Finitos (MEF)**

Desde o surgimento dos computadores, que possibilitou o uso de métodos numéricos em programas de análise estrutural, inúmeros elementos finitos de casca têm sido desenvolvidos e estudados.

DAWE (1972) fez as seguintes sugestões: a teoria de casca deve ser consistente com movimentos de corpo rígido, e o campo de deslocamento deve incluir a representação explícita deles. Além disso, descreveu a equação geral do movimento de corpo rígido, que inclui translação e rotação, e desenvolveu as expressões do movimento de corpo rígido para determinadas cascas.

SURANA (1983) apresentou uma formulação geometricamente não linear para elementos finitos de cascas curvas altamente deformáveis, com descrição Lagrangiana e campo de deslocamentos em termos de translações e rotações nodais. Segundo o autor, os elementos finitos, cuja aproximação para rotações é linear, são restritos a pequenos

deslocamentos, e os elementos usados com a formulação apresentada naquele trabalho podem ser usados em casos de grandes rotações.

LANCZOS (1986) descreveu, de forma clara, conceitos e expressões do Cálculo Variacional e de Princípios Variacionais de equilíbrio, como por exemplo, o Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV).

BATHE & DVORKIN (1986) propuseram a análise estrutural de cascas e placas com o uso de interpolação mista de componentes tensoriais. Segundo os autores, os requisitos para as cascas são: formulação sem uso de uma teoria específica de casca; respeito à teoria da mecânica do contínuo; elemento finito simples; alta capacidade de previsão do comportamento estrutural; insensibilidade a distorções; ausência de energia nula adulterada, travamento e fatores de ajuste. Para verificação da formulação, usaram o teste sugerido por IRONS & AHMAD (1980) e o proposto por STRANG & FIX (1973). Além disso, usaram o princípio variacional sugerido por WASHIZU (1982), cinco graus de liberdade - três deslocamentos e duas rotações – e elementos finitos retangulares com quatro e oito nós.

SANSOUR & BUFLER (1992) consideraram as deformações cisalhantes transversais. Comentaram que, ao desprezar o estiramento ou o encurtamento das fibras perpendiculares à superfície média da casca, pode haver descontinuidades no campo de deslocamentos em pontos com geometria descontínua, e necessidade de grande e desnecessário esforço computacional. Já os elementos finitos que permitem o estiramento ou o encurtamento das referidas fibras, cujo vetor normal à superfície média da casca é expresso na formulação, não apresentam esses problemas. Esses pesquisadores usaram teorias não lineares de cascas finas, variação linear dos deslocamentos ao longo da espessura da casca e diferentes aproximações para o vetor normal à superfície média. Foram consideradas as deformações cisalhantes transversais, as de membrana e as de flexão.

BÜCHTER *et al.* (1994) estudaram a formulação não linear de cascas com variação linear do campo de deslocamentos ao longo da espessura. Comentaram sobre o procedimento usualmente empregado, no qual se considera nula a tensão normal na direção da espessura e se calcula a deformação das fibras perpendiculares à superfície média com utilização da condensação da lei constitutiva. Segundo os autores, este procedimento pode ocasionar erros, devido à hipótese de variação linear dos deslocamentos ao longo da espessura. Para solucionar este problema, propuseram a introdução de um termo de deformação baseado no conceito de enriquecimento em deformação, proposto inicialmente por SIMO & RIFAI (1990), que varia linearmente ao longo da espessura, o que faz com que o campo de deslocamentos seja quadrático nesta direção. O referido termo foi interpolado independentemente dos demais. Além disso, usaram uma lei constitutiva tridimensional completa, sem condensação, e elementos finitos híbrido-mistos. Também encontraram erros significantes quando se despreza o termo adicional em casos de predomínio da flexão.

O trabalho de BATHE (1996) descreveu vários conceitos e formulações relativos ao Método dos Elementos Finitos (MEF), para implementação em análises estruturais estáticas, dinâmicas, geometricamente lineares e não lineares, elásticas, hiperelásticas, elastoplásticas, viscoelásticas, térmicas e de fluidos incompressíveis.

O livro de GHALI & NEVILLE (1997) fala sobre métodos de cálculo para estruturas isostáticas e hiperestáticas, energia de deformação, Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV), Método dos Elementos Finitos (MEF), implementação computacional e análise não linear.

YINTAO *et al.* (1999) apresentaram leis constitutivas para materiais poliméricos incompressíveis e sua implementação na análise pelo MEF. Utilizaram a decomposição multiplicativa da deformação e o modelo sugerido por YEOH (1990), que apresenta, segundo os referidos autores, boa precisão e simplicidade matemática.

EL-ABBASI & MEGUID (2000) complementaram o trabalho de BÜCHTER *et al.* (1994), ao propor uma formulação, para elementos finitos de casca, com sete parâmetros nodais e variação linear das tensões e deformações ao longo da espessura. Comentaram sobre a hipótese de manter constante a espessura da casca. Tal consideração despreza a tensão normal na direção da espessura e é válida apenas para estruturas finas ou delgadas. Foi apresentada a introdução de mais dois parâmetros nodais, um relativo à mudança de espessura e outro à deformação transversal linearmente variável ao longo da espessura. Segundo os referidos autores, o método apresenta boa precisão de resultados para cascas grossas e insignificantes erros para as finas.

BISCHOFF & RAMM (2000) investigaram o significado físico das variáveis cinemáticas e estáticas, que aparecem na formulação do elemento finito de casca com sete parâmetros nodais, estudado por EL-ABBASI & MEGUID (2000). Entre as variáveis cinemáticas de uma casca, existem deformações normais e cisalhantes no plano médio, mudanças de curvatura, torção da casca, deformações e curvaturas cisalhantes transversais, deformações normais transversais e curvatura transversal. A variável correspondente às curvaturas transversais descreve o movimento da linha material central ao longo da direção da espessura da casca. Ela ocorre geralmente em problemas predominadas pela flexão. Entre as variáveis estáticas, há forças normais e cisalhantes no plano, forças cisalhantes transversais, momentos fletores, momentos volventes, momentos cisalhantes transversais, forças normais transversais e momentos transversais. Os pesquisadores mencionados lembraram, também, que a teoria de casca deve ser equacionada com uso da lei constitutiva adotada e não de hipóteses cinemáticas (LIBAI & SIMMONDS, 1998).

O trabalho de ASSAN (2003), apesar de ser restrito à análise linear geométrica com elementos finitos de barras, vigas, pórticos e chapas, expôs, de maneira clara, os fundamentos

dos métodos numéricos, do Método dos Elementos Finitos (MEF) e da integração numérica, muito úteis para análises não lineares.

CODA & GRECO (2004) desenvolveram a formulação posicional para análise estática não linear geométrica de estruturas unidimensionais (barras, vigas e pórticos) submetidas a pequenas ou grandes deformações pelo MEF. A principal contribuição do estudo foi o uso de uma formulação na qual os parâmetros nodais são as posições e as inclinações finais dos nós no plano. Este procedimento é diferente do usualmente empregado, no qual os parâmetros nodais são os deslocamentos ou as diferenças entre as posições inicial e final.

PIMENTA *et al.* (2004) desenvolveram um elemento finito triangular de casca com seis nós, para grandes deformações e rotações. Os parâmetros nodais utilizados foram os deslocamentos dos nós no espaço, as suas rotações e as variações (constante e linear) das deformações transversais relacionadas à variação da espessura da casca. Além disso, adotaram aproximação quadrática para o campo de deslocamentos e interpolação linear para as rotações e os parâmetros relativos à variação da espessura. Concluíram que o elemento finito estudado possibilita boa capacidade de previsão do comportamento estrutural, desde que a malha seja adequadamente refinada.

SZE *et al.* (2004) desenvolveram um processo de estabilização híbrida de deformações em um elemento finito de casca hiperelástica, com dezoito nós, para análise de estruturas submetidas a grandes deformações. Foi concluído que a metodologia proposta apresentou resultados que estão de acordo com outros trabalhos.

GRECO & CODA (2006) desenvolveram a formulação posicional para análise dinâmica não linear geométrica de estruturas unidimensionais submetidas a pequenas ou grandes deformações pelo MEF. Além das hipóteses do trabalho de CODA & GRECO (2004), utilizaram as equações de Newmark para integração no tempo e formulações dinâmicas com e sem amortecimento.

CODA & PACCOLA (2008) estudaram a formulação posicional para análise não linear geométrica de cascas, considerando a variação linear da espessura e o possível uso de elementos finitos curvos. Assim como EL-ABBASI & MEGUID (2000), incluíram a taxa de variação linear da espessura.

CODA *et al.* (2008) estudaram a formulação posicional para análise não linear geométrica de sólidos hiperelásticos, com a utilização do Método dos Elementos Finitos. Comentaram sobre a deformação real e a tensão real, o teorema da decomposição polar e alguns modelos hiperelásticos. Segundo os autores, o método apresenta rápida convergência e pode ser usado para sólidos finos.

## 2.5. Modelos Constitutivos Hiperelásticos

Toda lei constitutiva hiperelástica pode ser representada, segundo HOLZAPFEL (2000), por uma função, chamada de energia específica de deformação ou energia livre de Helmholtz, por unidade de volume inicial. Quando o material é homogêneo e isotrópico, a referida função pode ser expressa em termos dos alongamentos principais ou, então, dos invariantes de deformação.

MOONEY (1940) propôs, para materiais altamente deformáveis, isotrópicos, incompressíveis e com relação linear entre tensão e deformação no cisalhamento, a seguinte fórmula para a função energia específica de deformação:

$$\Psi = \frac{G}{4} * \sum_{i=1}^3 \left( \lambda_i - \frac{1}{\lambda_i} \right)^2 + \frac{H}{4} \sum_{i=3}^3 \left( \lambda_i^2 - \frac{1}{\lambda_i^2} \right) \quad 2.1$$

onde  $G$  é o módulo de rigidez ao cisalhamento,  $H$  é o novo módulo elástico proposto e  $\lambda_i$  é o alongamento principal na direção  $i$ .

A expressão (2.1) é equivalente à seguinte equação:

$$\Psi = C_{10} * (I_1 - 3) + C_{01} * (I_2 - 3) \quad 2.2$$

onde  $C_{10}$  e  $C_{01}$  são coeficientes do material, e  $I_1$  e  $I_2$  são os dois primeiros invariantes do tensor deformação de Green. Essa fórmula é chamada, também, de modelo de Mooney-Rivlin.

RIVLIN (1956) expandiu a equação (2.2) para materiais hiperelásticos, homogêneos, isotrópicos e incompressíveis<sup>1</sup>, e chegou à seguinte expressão generalizada:

$$\Psi = \sum_{i,j=1}^n C_{ij} * (I_1 - 3)^i * (I_2 - 3)^j \quad 2.3$$

onde  $C_{ij}$  são os coeficientes do material. Foram descritas as relações gerais da energia específica de deformação com as tensões reais de Cauchy, para os casos de deformação homogênea pura:

$$\frac{t_1 - t_2}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} = 2 * \left( \frac{\partial \Psi}{\partial I_1} + \lambda_3^2 * \frac{\partial \Psi}{\partial I_2} \right) \quad 2.4.1$$

$$\frac{t_1 - t_2}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} = 2 * \left( \frac{\partial \Psi}{\partial I_1} + \lambda_3^2 * \frac{\partial \Psi}{\partial I_2} \right) \quad 2.4.2$$

<sup>1</sup> Neste trabalho, material incompressível é aquele que, na deformação, não apresenta variação de volume, apenas de forma.

$$\frac{t_1 - t_2}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} = 2 * \left( \frac{\partial \Psi}{\partial I_1} + \lambda_3^2 * \frac{\partial \Psi}{\partial I_2} \right) \quad 2.4.3$$

onde  $t_1$ ,  $t_2$  e  $t_3$  são as tensões reais de Cauchy nas direções principais.

VALANIS & LANDEL (1967) propuseram a seguinte hipótese simplificadora:

$$\Psi = w(\lambda_1) + w(\lambda_2) + w(\lambda_3) \quad 2.5.1$$

onde  $w(\lambda_i)$  é uma função do alongamento principal na direção  $i$ . Ao analisar o comportamento de polímeros, chegaram à seguinte expressão empírica:

$$\frac{dw}{d\lambda} = 2 * \mu * (\ln \lambda) \quad 2.5.2$$

onde  $(dw/d\lambda)$  é a derivada da função  $w$  em relação a  $\lambda$ ,  $\mu$  é uma constante do material e  $\ln$  representa o logaritmo natural.

OBATA *et al.* (1970) compararam dados experimentais obtidos de seus ensaios de tração biaxial com a hipótese sugerida por VALANIS & LANDEL (1967), para materiais isotrópicos e incompressíveis. Foram usadas misturas de polímeros naturais com quantidade variável de polímeros vulcanizados sintéticos. Os referidos pesquisadores analisaram a influência da quantidade de polímero sintético e da temperatura no comportamento mecânico de materiais poliméricos naturais. Foi estudada a relação entre os invariantes de deformação e a energia específica, com a evolução do carregamento, e concluiu-se que a equação empírica (2.5.2) apresentou dificuldades matemáticas e erros, para certos níveis de deformação, quando comparada aos dados obtidos dos ensaios realizados.



OGDEN (1972a) propôs um modelo para materiais elásticos, isotrópicos e incompressíveis, submetidos a grandes deformações:

$$\Psi = \sum_{p=1}^n \left[ \frac{\mu_p}{\alpha_p} * (\lambda_1^{\alpha_p} + \lambda_2^{\alpha_p} + \lambda_3^{\alpha_p} - 3) \right] \quad 2.6$$

onde  $\mu_p$  e  $\alpha_p$  são constantes do material. Este modelo se mostrou de acordo com dados experimentais de tração simples, cisalhamento puro e tração equi-biaxial.

OGDEN (1972b) propôs um modelo para a parcela volumétrica da energia específica de deformação:

$$\Psi(vol) = k * \beta^{-2} * (\beta * \ln J + J^{-\beta} - 1) \quad 2.7$$

onde  $k$  é o módulo de compressão volumétrica,  $\beta$  é uma constante do material e  $J$  é o jacobiano ou determinante do gradiente.

TRELOAR (1974) estudou as propostas existentes de representar o comportamento mecânico de estruturas poliméricas em termos da função energia específica de deformação. Foi dito que o modelo proposto por MOONEY (1940) apresenta erros para pequenas deformações e o sugerido por RIVLIN (1948) é mais geral. Além disso, falou-se que a hipótese de VALANIS & LANDEL (1967) tem a desvantagem de excluir termos envolvendo produto entre dois alongamentos em direções perpendiculares entre si, e a equação proposta por OGDEN (1972) possui coeficientes com significado físico e tratamento matemático mais simples, porém, implica algumas restrições à forma da função energia específica de deformação. Foi concluído que, de acordo com dados experimentais, as derivadas da energia específica em relação aos dois primeiros invariantes devem ser variáveis com a evolução da deformação.

TRELOAR (1975) descreve o modelo chamado de neo-Hookeano, representado pela seguinte expressão:

$$\Psi = C_{10} * (I_1 - 3) \quad 2.8$$

O autor comenta que, apesar de simples, esse modelo é válido, apenas, para pequenas deformações, no caso de análise mecânica de polímeros.

YEOH (1987) propôs um método para determinação experimental do módulo de compressão volumétrica, ou *bulk modulus*, de materiais poliméricos vulcanizados, com ensaios em corpos de prova cilíndricos, com 29 mm de diâmetro e 12.5 mm de altura. Para isso, aplicou-se compressão, com deformação controlada, e quantificou-se a força aplicada. Tal procedimento foi realizado em vários corpos de prova, com diferentes composições. Deste modo, determinou-se o módulo de compressão volumétrica para cada tipo.

YEOH (1990) falou sobre as considerações fenomenológicas da teoria da elasticidade para grandes deformações, que são: isotropia e representação das propriedades elásticas pela função energia específica de deformação. Foram descritos os modelos neo-Hookeano, de Rivlin e de Mooney-Rivlin. Comentou-se sobre funções de energia específica de deformação com grau mais elevado, as quais possuem mais coeficientes e são mais adequadas para representar o comportamento estrutural de polímeros, em relação ao modelo de Mooney-Rivlin. Baseado nas observações feitas por GREGORY (1979) e por KAWABATA & KAWAI (1977), foi proposta uma nova função energia específica de deformação:

$$\Psi = C_{10} * (I_1 - 3) + C_{20} * (I_1 - 3)^2 + C_{30} * (I_1 - 3)^3 \quad 2.9$$

Ao comparar esta expressão com dados experimentais de tração, compressão e cisalhamento, comprovou-se a variação da rigidez com a evolução da deformação. Foi concluído que tal

modelo é adequado para materiais poliméricos para médias e grandes deformações, e que é uma boa aproximação para os corpos reforçados com negro de carbono, em quaisquer níveis de deformação.

ARRUDA & BOYCE (1992) usaram a teoria estatística de Langevin e, com ela, sugeriram a seguinte fórmula para a energia específica de deformação:

$$\Psi = \mu * \left[ \frac{1}{2} * (I_1 - 3) + \frac{1}{20 * n} * (I_1^2 - 9) + \frac{11}{1050 * n} * (I_1^3 - 27) + \dots \right] \quad 2.10$$

onde  $\mu$  é o módulo de rigidez ao cisalhamento e  $n$  é o número de segmentos encadeados, unidos por ligações químicas. Os autores desse trabalho compararam seu modelo com dados experimentais de tração e compressão uniaxiais, tração biaxial e cisalhamento puro.

YEOH & FLEMING (1997) combinaram conceitos estudados por YEOH (1990) e GENT (1996) e, com isto, propuseram uma nova teoria para análise de estruturas poliméricas com grandes deformações. Concluíram, ao analisar dados experimentais, que a clássica teoria estatística de Gauss é válida, apenas, para pequenos níveis de deformação, e que a teoria estatística de Langevin, apesar de matematicamente complexa, é mais adequada para representar situações de grandes deformações. Comentou-se sobre as desvantagens do modelo proposto por YEOH (1990): aproximação ruim para pequenas deformações; um dos três coeficientes da equação da energia específica de deformação tem que ser negativo, o que contradiz a hipótese de JOHNSON *et al.* (1994), que afirma que todos os coeficientes devem ser positivos. Foram sugeridas as seguintes correções para o modelo: o coeficiente em questão pode ser negativo, desde que os outros dois tenham valores apropriados; introdução de um termo exponencial para melhor aproximação em pequenas deformações. Assim, foi proposto um novo modelo:

$$\Psi = \frac{A}{B} * [1 - e^{-B*(I_1-3)}] - C_{10} * (I_m - 3) * \ln \left[ 1 - \frac{I_1 - 3}{I_m - 3} \right] \quad 2.11$$

onde A e B são constantes do material,  $I_m$  é máximo valor teórico de  $I_1$ . Tal modelo apresentou aproximação bastante satisfatória para pequenas e grandes deformações ao ser comparado com dados experimentais obtidos de ensaios de tração e compressão uniaxial e cisalhamento simples.

YEOH (1997) descreveu modelos constitutivos hiperelásticos, que são mais adequados para realizar análise mecânica com uso de materiais poliméricos. Falou-se que o modelo linear usualmente empregado, apesar de prático, é limitado a pequenas deformações e a condições de carregamento e geometria simplificadas. Foram apresentados os modelos não lineares neo-Hookeano, de Mooney, de Mooney-Rivlin, de Ogden, de Yeoh, de Gent e de Yeoh-Fleming. Chegou-se às seguintes conclusões: estes modelos, com relação ao linear, são mais realistas na análise mecânica com emprego de materiais poliméricos, os quais possuem variação da rigidez com evolução da deformação; o modelo de Mooney-Rivlin necessita grande quantidade de dados experimentais; o modelo de Yeoh precisa de correção para situações de pequenas deformações, sugerida por GENT (1996); e os coeficientes do modelo de Ogden possuem interpretação física com relação à rigidez.

HARTMANN (2001) estudou a identificação, com uso do Método dos Mínimos Quadrados (MMQ), dos coeficientes de materiais hiperelásticos, isotrópicos e incompressíveis, cuja função energia de deformação específica depende apenas dos dois primeiros invariantes de deformação, já que o terceiro é considerado igual a um. Descreveu-se o procedimento para identificação dos coeficientes, baseada no ensaio de tração-torção, com ou sem condições de contorno. Foi concluído que o MMQ pode ser usado apenas para obtenção dos poucos parâmetros essenciais do material.

HARTMANN (2002) estudou o modelo constitutivo viscoelástico proposto inicialmente por ELLSIEPEN & HARTAMANN (2001), constituído por uma parcela hiperelástica e uma viscosa. Tal modelo foi incorporado a estruturas com grandes deformações. O referido autor concluiu que o método proposto apresenta rápida convergência para solução e precisão na integração do tempo, quando se utiliza um polinômio aproximador com grau elevado.

BECHIR *et al.* (2002) apresentaram algumas aplicações de materiais poliméricos em estruturas e propuseram um novo modelo hiperelástico:

$$\Psi = C_{10} * (I_1 - 3) + C_{01} * (I_2 - 3) + C_{20} * (I_1 - 3)^2 + C_{02} * (I_2 - 3)^2 + C_{30} * (I_1 - 3)^3 \quad 2.12$$

Segundo os autores, esta expressão se mostrou mais adequada para prever o comportamento mecânico de materiais poliméricos em ensaios de tração equi-biaxial, cujos coeficientes foram estimados com ensaio de tração simples.

HARTMANN & NEFF (2003) investigaram vários modelos hiperelásticos existentes na literatura, descritos em função dos invariantes de deformação, para o caso de pouca compressibilidade, ou seja, para materiais com pequena alteração de volume durante a deformação. Comentaram sobre a decomposição multiplicativa da deformação nas parcelas isocórica e volumétrica, os modelos constitutivos de incompressibilidade, os de pouca compressibilidade e sobre os requisitos para que o modelo seja policonvexo, com uso de definições, teoremas e corolários matemáticos sobre convexidade, quase-convexidade, elipticidade e policonvexidade. Ademais, propuseram uma função policonvexa para a energia específica de deformação em termos dos invariantes, para materiais isotrópicos com pouca compressibilidade, e desenvolveram as equações para cálculo da tensão de Piola-Kirchhoff e

do tensor elástico. Foi concluído que o polinômio generalizado de hiperelasticidade, descrito por RIVLIN (1956), pode não ser policonvexo, e para que o seja, deve haver dependência entre os dois primeiros invariantes. Foi dito, também, que o modelo proposto é facilmente calibrado pelo MMQ.

DÜSTER *et al.* (2003) apresentaram a aplicação do MEF, para estruturas altamente deformáveis constituídas de material hiperelástico para o caso de pouca compressibilidade. Foi usada a decomposição multiplicativa da deformação em duas parcelas: isocórica e volumétrica. Com esta separação, proposta por FLORY (1961), pôde-se, também, decompor a energia específica de deformação em duas partes: uma referente à deformação com alteração de volume e outra à deformação com preservação de volume. Falou-se sobre os seguintes requisitos da parcela volumétrica da energia específica de deformação: ela deve, além de ser convexa, fornecer valores nulos de tensão e deformação para casos sem alteração de volume. Foram desenvolvidas, no estudo realizado, as fórmulas para obtenção das parcelas isocórica e volumétrica das tensões de Cauchy e de Piola-Kirchhoff de segunda espécie, e para cálculo do tensor elástico, necessário para solução pelo método iterativo de Newton-Raphson. Ademais, os referidos pesquisadores mostraram, com o uso de um elemento finito retangular de casca curva com oito nós, que a formulação proposta é eficiente e que o aumento do número de elementos finitos e do grau do polinômio de aproximação na direção da espessura fornece uma convergência mais rápida para a solução exata.

## 2.6. Comentários sobre o fenômeno Travamento

A análise da ocorrência de travamento não faz parte dos objetivos desta pesquisa. Porém, deve-se comentar alguns aspectos relacionados a esse tema.

Não há teoria ou formulação, para elementos finitos, que elimine definitivamente o fenômeno chamado travamento, o qual pode ser identificado quando ocorre a degeneração do valor de algum coeficiente, durante a simulação numérica. Porém, sabe-se que existem três formas de travamento: por cortante ou cisalhamento, por Poisson ou volumétrico e por membrana. Vários pesquisadores defenderam, em seus respectivos trabalhos, métodos, formulações ou procedimentos que eliminam esse problema da análise estrutural.

STOLARSKI & BELYTSCHKO (1982) investigaram a eliminação do travamento por membrana em elementos curvos, como vigas e cascas, com uso do processo de integração reduzida, o qual, segundo BATHE (1996), consiste na utilização de uma ordem de integração numérica menor do que a recomendada. Disseram que a escolha de um campo de deslocamento de baixa ordem, para elementos curvos, pode causar uma rigidez artificial, com predomínio da parcela de flexão, o que caracteriza este tipo de travamento. Segundo os autores, esse fenômeno pode ser identificado pelo aparecimento de estiramento da linha material central, que não deve ocorrer em casos de flexão pura, devido à incompatibilidade entre as funções de forma usadas e a teoria estrutural do elemento. Segundo FRIED (1975), o uso de aproximações de ordem mais elevada elimina esse fenômeno, porém, reduz a estabilidade da integração no passo de tempo em problemas dinâmicos.

No trabalho de BATHE & DVORKIN (1986), a interpolação das deformações de membrana e a das deformações cisalhantes transversais foram feitas independentemente, para se evitar o travamento por membrana e por cortante.

HUANG (1986) estudou os travamentos por cortante e por membrana. Disse que, para os elementos finitos formulados com a hipótese cinemática de Reissner-Mindlin, a parcela, relativa à deformação transversal, da energia de deformação específica deve ser sempre positiva. Além disso, quando a espessura da casca se torna muito fina, a rigidez de membrana domina a rigidez total e, assim, o valor médio das deformações transversais, ao longo da área, tende a zero. Segundo o autor, pode-se evitar o travamento por cortante ao admitir que as deformações transversais tendem a zero apenas em certa região do elemento.

BÜCHTER *et al.* (1994) disseram que a introdução de um termo de deformação, linearmente variável ao longo da espessura de uma casca, elimina os travamentos por cortante e por Poisson.

YINTAO *et al.* (1999) defenderam a idéia de que a utilização de um princípio variacional misto elimina o travamento volumétrico.

O trabalho de BELYTSCHKO *et al.* (2000) apresenta alguns comentários sobre o assunto. Foi dito que o travamento volumétrico ocorre quando o elemento finito não consegue representar modos de deformação isocórica, o travamento por cortante se manifesta quando aparecem tensões cisalhantes na flexão pura e o travamento por membrana acontece quando surgem deformações normais, ou de membrana, em casos de flexão nas quais as fibras são inextensíveis. Ademais, os autores disseram que quando o elemento não pode satisfazer uma restrição, o modo restrito absorve mais energia e, portanto, é muito mais rígido que a rigidez do movimento correto.

EL-ABBASI & MEGUID (2000) disseram que os elementos finitos que possuem apenas translações como graus de liberdade não conseguem representar estados de flexão pura sem a imposição de deformações transversais ao longo da espessura, o que leva ao travamento por Poisson.



BISCHOFF & RAMM (2000) disseram que a omissão das curvaturas transversais causa o aparecimento de uma rigidez artificial e, com isso, o travamento por Poisson. Confirmaram também o que foi dito por BÜCHTER *et al.* (1994).

SZE *et al.* (2004) usaram uma estabilização híbrida para deformação, para evitar os travamentos por membrana e por cortante. E para evitar o travamento por Poisson, incorporaram enriquecidos modos de deformação ao longo da espessura.

CODA & PACCOLA (2006) propuseram uma formulação para cascas baseada em posições e não deslocamentos. Neste procedimento, no qual foram usados seis parâmetros por nó, identificaram-se os travamentos por cortante e volumétrico. Tal problema foi resolvido com a penalização da lei constitutiva. Atualmente uma formulação com sete parâmetros nodais está disponível e foi utilizada nesta pesquisa. Esta, por sua vez, é livre de travamentos, usa lei constitutiva tridimensional completa e segue os conceitos apresentados em BÜCHTER *et al.* (1994) e em BISCHOFF & RAMM (2000).

### 3. Preliminares Matemáticas

---

Neste item são apresentados, sem demonstração, conceitos, definições e expressões das Álgebras Linear e Tensorial, que foram extraídos dos trabalhos de OGDEN (1984) e de HOLZAPFEL (2000) e necessários para o desenvolvimento do trabalho.

#### 3.1. Notação Utilizada

Foram utilizadas a notação indicial e a convenção de somatório para vetores e tensores de ordem elevada:

$$u = u_i e_i = u_1 e_1 + u_2 e_2 + u_3 e_3 \quad 3.1.1$$

$$A = A_{ij} e_i \otimes e_j = A_{11} e_1 \otimes e_1 + A_{12} e_1 \otimes e_2 + \dots + A_{33} e_3 \otimes e_3 \quad 3.1.2$$

$$B = B_{ijkl} e_i \otimes e_j \otimes e_k \otimes e_l = B_{1111} e_1 \otimes e_1 \otimes e_1 \otimes e_1 + B_{1112} e_1 \otimes e_1 \otimes e_1 \otimes e_2 + \dots + B_{3333} e_3 \otimes e_3 \otimes e_3 \otimes e_3 \quad 3.1.3$$

$$A_{ii} = A_{11} + A_{22} + A_{33} \quad 3.1.4$$

onde  $\{e_i\}$  é uma base ortonormal.

### 3.2. Conceito de Escalar, Vetor e Tensor

É preciso, inicialmente, conceituar escalar, vetor e tensor.

Escalar é uma quantidade física completamente definida por um número real, como por exemplo, massa, densidade e temperatura. Trata-se de um tensor de ordem zero.

Vetor é uma entidade física representada por um segmento de reta orientado, com módulo, direção e sentido definidos. São exemplos de vetores: força, velocidade e aceleração. Além disso, vetor é um tensor de primeira ordem.

Tensor é uma grandeza genérica. O de segunda ordem pode ser interpretado como sendo uma operação linear entre dois vetores, como por exemplo:

$$\mathbf{v} = \mathbf{A} \mathbf{u} \text{ ou } v_i = A_{ij} u_j \quad 3.2$$

onde  $\mathbf{A}$  é o tensor de segunda ordem que transforma o vetor  $\mathbf{v}$  no vetor  $\mathbf{u}$ .

O de quarta ordem pode ser compreendido como uma relação linear entre dois tensores de segunda ordem, como por exemplo:

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} \mathbf{C} \text{ ou } A_{ij} = B_{ijkl} C_{kl} \quad 3.3$$

onde  $\mathbf{B}$  é tensor de quarta ordem que transforma o tensor  $\mathbf{C}$  no tensor  $\mathbf{A}$ .

Todo tensor de ordem  $n$  possui  $3^n$  componentes, em relação a uma base. Por exemplo: um escalar tem uma componente, um vetor tem três e um tensor de segunda ordem, nove.

Pode-se dizer, também, que um vetor é representado, em relação à base ortonormal  $\{e_1, e_2, e_3\}$ , por uma matriz  $3 \times 1$ , um tensor de segunda ordem por uma matriz  $3 \times 3$  e um tensor de quarta ordem por uma matriz  $3 \times 3 \times 3 \times 3$ .

Definido o conceito de tensor, pode-se descrever suas operações, propriedades e relações existentes.

### 3.3. Operações entre dois Tensores

A soma de dois tensores, sempre de mesma ordem, é dada pela simples adição das componentes correspondentes. Por exemplo:

$$A = B + C \Rightarrow A_{ij} = B_{ij} + C_{ij} \quad 3.4$$

O produto escalar, entre dois vetores, é dado por:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \cos \theta(u, v) = u_i v_i = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 \quad 3.5$$

onde  $\theta(u, v)$  é o ângulo formado entre os vetores  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$ .

O produto vetorial, entre dois vetores, é determinado pela seguinte expressão:

$$\vec{u} \times \vec{v} = u_i v_j (e_i \times e_j) = \varepsilon_{ijk} e_k u_i v_j \quad 3.6$$

onde  $\varepsilon_{ijk}$  é o símbolo de permutação, definido por:

$$\varepsilon_{ijk} = 1, \text{ para permutações de } i, j, k \text{ do tipo } 123, 231, 312, \quad 3.7.1$$

$$\varepsilon_{ijk} = -1, \text{ para permutações de } i, j, k \text{ do tipo } 132, 213, 321, \quad 3.7.2$$

$$\varepsilon_{ijk} = 0, \text{ se houver algum índice repetido.} \quad 3.7.3$$

As componentes do tensor resultante do produto tensorial entre dois vetores são:

$$\left(\vec{u} \otimes \vec{v}\right)_{ij} = u_i v_j \quad 3.8$$

As componentes da multiplicação matricial – produto entre dois tensores de segunda ordem – são dadas por:

$$(AB)_{ij} = A_{ik} B_{kj} = A_{i1} B_{1j} + A_{i2} B_{2j} + A_{i3} B_{3j} \quad 3.9$$

As componentes do produto tensorial entre dois tensores de segunda ordem são as seguintes:

$$(A \otimes B)_{ijkl} = A_{ij} B_{kl} \quad 3.10$$

### 3.4. Definições que envolvem Tensores

As componentes da transposta de uma matriz são:

$$A^T_{ij} = A_{ji} \quad 3.11$$

Com a definição de transposta de uma matriz, demonstra-se a seguinte expressão:

$$(AB)^T = (B^T)(A^T) \quad 3.12$$

Define-se o delta de Kronecker por:

$$\delta_{ij} = 1, \text{ se } i = j, \quad 3.13.1$$

$$\delta_{ij} = 0, \text{ se } i \neq j. \quad 3.13.2$$

O traço de uma matriz é dado por:

$$tr(A) = A_{ii} = A_{11} + A_{22} + A_{33} \quad 3.14$$

A contração pode ser definida em termos do traço:

$$A : B = tr(A^T B) = tr(B^T A) = tr(AB^T) = tr(BA^T) = A_{ij} B_{ij} \quad 3.15$$

A dupla contração, entre um tensor de quarta e um de segunda ordem, é dada por:

$$A : B = A_{ijkl} B_{kl} e_i \otimes e_j \Rightarrow (A : B)_{ij} = A_{ijkl} B_{kl} \quad 3.16$$

A norma de um vetor é definida por:

$$|\vec{u}| = \vec{u} \cdot \vec{u} = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 \quad 3.17$$

A norma de um tensor de segunda ordem é dada por:

$$|A| = (A : A)^{\frac{1}{2}} \geq 0 \quad 3.18$$

O determinante de uma matriz que representa um tensor de segunda ordem é um escalar, calculado pela seguinte fórmula:

$$\det(A) = A_{11}A_{22}A_{33} + A_{12}A_{23}A_{31} + A_{13}A_{21}A_{32} - A_{11}A_{23}A_{32} - A_{22}A_{13}A_{31} - A_{33}A_{12}A_{21} = \varepsilon_{ijk} A_{1i} A_{2j} A_{3k} \quad 3.19$$

### 3.5. Propriedades Tensoriais

Quando  $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ , a matriz ou o tensor segunda ordem  $\mathbf{A}$ , além de ser classificada como não-singular, possui uma única inversa, descrita pela seguinte fórmula:

$$AA^{-1} = I = A^{-1}A \quad 3.20.1$$

$$I_{ij} = \delta_{ij} \quad 3.20.2$$

onde  $\mathbf{I}$  é a matriz identidade de segunda ordem.

Um tensor de segunda ordem é ortogonal quando:

$$\det(Q) = \pm 1 \quad 3.21.1$$

$$Q^{-1} = Q^T \quad 3.21.2$$

A matriz **S** é simétrica quando:

$$S^T = S \quad 3.22$$

A matriz **W** é anti-simétrica quando:

$$W^T = -W \quad 3.23$$

Todo tensor pode ser, unicamente, decomposto em duas parcelas: uma simétrica e uma anti-simétrica. Tal separação é dada por:

$$A = S + W \quad 3.24.1$$

$$S = \frac{1}{2}(A + A^T) \quad 3.24.2$$

$$W = \frac{1}{2}(A - A^T) \quad 3.24.3$$

Toda matriz pode ser decomposta em duas partes: uma chamada de esférica e outra de deviatórica. A referida separação é expressa por:

$$A = \alpha I + dev(A) \quad 3.25.1$$

$$\alpha = \frac{1}{3}tr(A) \quad 3.25.2$$



$$dev(A) = A - \frac{1}{3} tr(A) \quad 3.25.3$$

As componentes do tensor identidade de quarta ordem são:

$$(II)_{ijkl} = \delta_{ik} \delta_{jl} \quad 3.26$$

Uma matriz é positiva definida quando é sempre verdadeira a seguinte relação:

$$v \cdot (Av) > 0 \quad 3.27$$

para qualquer vetor não nulo  $v$ . As componentes de um vetor nulo e de um tensor nulo são todas iguais a zero.

Dada a definição de contração e de transposta de uma matriz, pode-se demonstrar que:

$$A : (BC) = AC^T : B \quad 3.28$$

### 3.6. Auto-vetor e auto-valor

O problema de auto-valor e auto-vetor ocorre quando há a seguinte relação:

$$An_i = \lambda_i n_i, \quad (i = 1, 2, 3; \text{ sem soma}) \quad 3.29$$

onde  $n_i$  são os auto-vetores ou direções principais de  $\mathbf{A}$  e  $\lambda_i$  os auto-valores correspondentes ou valores principais de  $\mathbf{A}$ . Para determinação dos valores e das direções principais, deve-se resolver a equação característica de  $\mathbf{A}$ :

$$\det(A - \lambda_i I) = -\lambda_i^3 + I_1 \lambda_i^2 - I_2 \lambda_i + I_3 = 0 \quad 3.30$$

onde  $I_1$ ,  $I_2$  e  $I_3$  são os invariantes principais de  $\mathbf{A}$ , dados por:

$$I_1 = \text{tr}(A) \quad 3.31.1$$

$$I_2 = \text{tr}(A^{-1}) \det(A) \quad 3.31.2$$

$$I_3 = \det(A) \quad 3.31.3$$

Todo tensor simétrico pode ser escrito sob representação espectral:

$$A = AI = \left( A \vec{n}_i \right) \otimes \vec{n}_i = \sum_{i=1}^3 \lambda_i \vec{n}_i \otimes \vec{n}_i \quad 3.32$$

### 3.7. Transformação de Base

As expressões para transformações de bases são:

$$f_i = Q e_i \Rightarrow e_i = Q^T f_i \quad 3.33.1$$

$$v = Q^T u \Rightarrow u = Q v \quad 3.33.2$$

$$B = Q^T A Q \Rightarrow A = Q B Q^T \quad 3.33.3$$

onde  $\{e_i\}$  e  $\{f_i\}$  são duas bases ortonormais,  $\mathbf{u}$  é um vetor descrito na base  $\{e_i\}$ ,  $\mathbf{v}$  é o mesmo vetor descrito em  $\{f_i\}$ ,  $\mathbf{Q}$  é um tensor ortogonal,  $\mathbf{A}$  é um tensor de segunda ordem definido em  $\{e_i\}$  e  $\mathbf{B}$  é o mesmo tensor definido em  $\{f_i\}$ .

Um tensor  $\mathbf{A}$  é considerado isotrópico quando obedece à seguinte relação:

$$A = Q^T A Q \quad 3.34$$

### 3.8. Campos Tensoriais

Define-se campo tensorial como sendo uma função que relaciona pontos materiais de uma determinada região no espaço com uma grandeza tensorial. Pode-se dizer, por exemplo, que um campo escalar sobre certa região no espaço atribui um valor escalar a cada um dos seus pontos materiais.

### 3.9. Gradiente e Divergente

Para definição dos operadores gradiente e divergente, é necessário descrever o operador vetorial ou operador Nabla, dado por:

$$\nabla(\bullet) = \frac{\partial(\bullet)}{\partial x_i} e_i = \frac{\partial(\bullet)}{\partial x_1} e_1 + \frac{\partial(\bullet)}{\partial x_2} e_2 + \frac{\partial(\bullet)}{\partial x_3} e_3 \quad 3.35$$

Com este operador, define-se o gradiente e o divergente de campos tensoriais, na ordem, escalar, vetorial e tensor de segunda ordem, como:

$$\text{grad}(\phi) = \nabla \cdot \phi = \frac{\partial(\phi)}{\partial x_1} e_1 + \frac{\partial(\phi)}{\partial x_2} e_2 + \frac{\partial(\phi)}{\partial x_3} e_3 \quad 3.36.1$$

$$\text{grad}(u) = \nabla \otimes u = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} e_i \otimes e_j \quad 3.36.2$$

$$\text{grad}(A) = \nabla \otimes A = \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_k} e_i \otimes e_j \otimes e_k \quad 3.36.3$$

$$\text{div}(u) = \nabla \cdot u = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \quad 3.36.4$$

$$\text{div}(A) = \nabla \cdot A = \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_j} e_i \quad 3.36.5$$

onde  $\Phi(\mathbf{x})$  é um campo escalar,  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  é um campo vetorial,  $\mathbf{A}(\mathbf{x})$  é um campo tensorial e  $\mathbf{x}$  é a localização de um ponto no espaço.

Outro importante operador para o presente trabalho é o Hessiano, que é dado por:

$$\nabla \nabla(\bullet) = [\nabla \otimes \nabla](\bullet) = \frac{\partial^2(\bullet)}{\partial x_i \partial x_j} e_i \otimes e_j \quad 3.37$$

### 3.10. Teorema da Divergência de Gauss

O Teorema da Divergência de Gauss possui grande utilidade na mecânica do contínuo, pois transforma integrais de superfície em integrais de volume e vice-versa, sendo que ambas envolvem campos tensoriais. Ele está, resumidamente, descrito pelas seguintes expressões:

$$\int_S (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dS = \int_V [\text{div}(\mathbf{u})] dV \quad \text{ou} \quad \int_S u_i n_i dS = \int_V \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dV \quad 3.38.1$$

$$\int_S (\mathbf{A}\mathbf{n}) dS = \int_V [\text{div}(\mathbf{A})] dV \quad \text{ou} \quad \int_S A_{ij} n_j dS = \int_V \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_j} dV \quad 3.38.2$$

onde  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  é um campo vetorial,  $\mathbf{A}(\mathbf{x})$  é um campo tensorial,  $S$  é a área superficial,  $V$  é o volume e  $\mathbf{n}$  é o vetor normal à superfície, com sentido para o exterior do corpo.

### 3.11. Derivadas de Funções Escalares e Tensoriais

Estão descritas, neste subitem, algumas fórmulas necessárias para cálculo de derivadas de funções escalares, vetoriais e tensoriais:

$$\frac{\partial \det(A)}{\partial A} = \det(A) A^{-T} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial \det(A)}{\partial A_{ij}} = \det(A) A^{-T}{}_{ij} \quad 3.39.1$$

$$\left( \frac{\partial A^{-1}}{\partial A} \right)_{ijkl} = -\frac{1}{2} (A_{ik}^{-1} A_{lj}^{-1} + A_{il}^{-1} A_{kj}^{-1}) \quad 3.39.2$$

$$\frac{\partial \text{tr}(A)}{\partial A} = I \text{ ou } \frac{\partial \text{tr}(A)}{\partial A_{ij}} = I_{ij} = \delta_{ij} \quad 3.39.3$$

$$\frac{\partial \text{tr}(A^2)}{\partial A} = 2A^T \text{ ou } \frac{\partial \text{tr}(A^2)}{\partial A_{ij}} = 2A^T_{ij} \quad 3.39.4$$

$$\frac{\partial A}{\partial A} = II \text{ ou } \frac{\partial A_{ij}}{\partial A_{kl}} = II_{ijkl} \quad 3.39.5$$

$$\frac{\partial (A : B)}{\partial C} = A : \frac{\partial B}{\partial C} + B : \frac{\partial A}{\partial C} \text{ ou } \frac{\partial (A : B)}{\partial C_{ij}} = A_{kl} \frac{\partial B_{kl}}{\partial C_{ij}} + B_{kl} \frac{\partial A_{kl}}{\partial C_{ij}} \quad 3.39.6$$

$$\frac{\partial (\phi A)}{\partial C} = A \otimes \frac{\partial \phi}{\partial C} + \phi \frac{\partial A}{\partial C} \text{ ou } \frac{\partial (\phi A_{ij})}{\partial C_{kl}} = A_{ij} \frac{\partial \phi}{\partial C_{kl}} + \phi \frac{\partial A_{ij}}{\partial C_{kl}} \quad 3.39.7$$

$$\text{div}(A\vec{u}) = [\text{div}(A)]\vec{u} + \text{tr}[A \text{grad}(\vec{u})] \quad 3.39.8$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial A} = \frac{\partial \alpha}{\partial B} : \frac{\partial B}{\partial A} = \frac{\partial \alpha}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial A} \text{ ou } \frac{\partial \alpha}{\partial A_{ij}} = \frac{\partial \alpha}{\partial B_{kl}} \frac{\partial B_{kl}}{\partial A_{ij}} = \frac{\partial \alpha}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial A_{ij}} \quad 3.39.9$$

Deve-se ressaltar que a equação (3.39.2) é válida somente se  $A$  for uma matriz simétrica.

## *4. Mecânica Não Linear do Contínuo*

---

Neste capítulo são introduzidos alguns conceitos sobre a Mecânica Não Linear do Contínuo, como por exemplo, a Não Linearidade Geométrica (NLG), a descrição do movimento de um corpo, medidas de deformação e tensão e Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV).

### **4.1. Conceito da NLG**

Toda estrutura deve estar estaticamente equilibrada pelo carregamento aplicado e pelos esforços internos provenientes desta solicitação.

O equilíbrio de forças, na análise estrutural geometricamente linear, é descrito na posição inicial ou indeformada da estrutura. Apesar de ser prática, restringe-se aos problemas com pequenos deslocamentos, nos quais as posições inicial e atual, do corpo, são próximas.

A análise não linear geométrica, por sua vez, busca a descrição do equilíbrio de forças na configuração atual ou final do corpo, isto é, leva em consideração os deslocamentos e deformações ocorridos. Portanto, apesar de apresentar uma formulação matemática mais complexa, a NLG é essencial para análises estruturais de problemas com grandes deslocamentos, nos quais as configurações de referência e atual podem ser bastante distintas.

Dado um suposto carregamento em uma estrutura, para se equacionar o equilíbrio estático na posição atual, é necessário o conhecimento da presente geometria, a qual é inicialmente desconhecida. Tal equação de equilíbrio, geralmente, depende da incógnita posição atual da estrutura e, portanto, é não linear, isto é, a expressão da posição final não pode ser explicitada em função da magnitude do carregamento. Uma das estratégias numéricas para se resolver este problema é o uso de processos iterativos, nos quais são estimadas as posições atuais e é atualizada a presente configuração até que o equilíbrio seja satisfatório, isto é, apresente pequenos erros. O método iterativo usado neste trabalho será abordado, com mais detalhes, no sétimo capítulo.

## **4.2. Cinemática**

Cinemática é a descrição do movimento de um corpo ou de uma estrutura, sem consideração das causas desta mudança de configuração.

A hipótese mais importante, para a cinemática das estruturas, é admitir que o corpo é um meio contínuo, isto é, um sistema macroscópico sem vazios, no qual, segundo HOLZAPFEL (2000), não se considera o fato de todo material ser constituído por moléculas e átomos. Assim, todo corpo é considerado como sendo um conjunto contínuo, composto de partículas ou de pontos materiais, cuja massa, posição e volume são expressas por funções contínuas.

Para que se possa equacionar o equilíbrio de forças na posição atual, é preciso descrever o movimento ocorrido entre as configurações inicial e atual.



### 4.2.1. Configuração

Conforme dito anteriormente, todo corpo é suposto como um conjunto de partículas ou de pontos materiais. A configuração ou posição desse corpo é uma função contínua que faz a correspondência única entre o ponto material e sua coordenada no espaço em relação a um referencial.

O referencial, também chamado de observador ou de estrutura de referência, tem origem,  $O$ , fixa no espaço e três eixos,  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$  e  $\mathbf{e}_3$ , que constituem a seguinte base ortonormal:

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij} \quad 4.1.1$$

$$\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j = \varepsilon_{ijk} \mathbf{e}_k \quad 4.1.2$$

onde  $\delta_{ij}$  é o delta de Kronecker, e  $\varepsilon_{ijk}$  é o símbolo de permutação, ambos definidos no segundo capítulo.

A configuração inicial, indeformada ou de referência, é representada por  $\mathbf{X}$ , e a atual ou deformada por  $\mathbf{x}$ . Assim, a posição de um ponto material no espaço é:

$$\vec{X} = X_1 \vec{e}_1 + X_2 \vec{e}_2 + X_3 \vec{e}_3 \quad 4.2.1$$

ou 
$$\vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3 \quad 4.2.2$$

onde  $X_1$ ,  $X_2$  e  $X_3$  são as coordenadas iniciais, também chamadas de materiais ou de referência, e  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$  são as atuais, também chamadas de espaciais.

Os vetores  $\mathbf{X}$  e  $\mathbf{x}$  recebem o nome de vetores posição. Uma forma alternativa de descrevê-los é a seguinte:

$$\vec{X} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} \text{ ou } \vec{x} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} \quad 4.3$$

Compreendido o conceito de configuração ou posição, pode-se definir e descrever o movimento de um corpo.

#### 4.2.2. Movimento de um corpo

Movimento, também chamado de alteração de forma ou mudança de configuração, é uma função que associa a posição inicial e a atual, no instante  $t$ , de um ponto material. Essa relação pode ser matematicamente expressa por:

$$\vec{x} = \chi(\vec{X}, t) = \chi_i(\vec{X}) \quad 4.4.1$$

$$\text{ou } x_i = \chi_i(X_1, X_2, X_3, t), \text{ para } i = 1, 2 \text{ ou } 3 \quad 4.4.2$$

onde  $\chi$  caracteriza movimento e  $\chi(\mathbf{X}, t)$  é a trajetória percorrida pelos pontos com coordenadas materiais  $X_1$ ,  $X_2$  e  $X_3$ .

Deve-se lembrar que uma mudança de referencial causa, apenas, alteração das coordenadas dos pontos de um corpo e das componentes da mudança de configuração, pois o movimento físico é o mesmo, independentemente do observador escolhido.

Pode-se definir, também, o chamado movimento inverso:

$$\vec{X} = \chi^{-1}(\vec{x}, t) \quad 4.5.1$$

ou  $X_i = \chi^{-1}_i(x_1, x_2, x_3, t)$ , para  $i = 1, 2$  ou  $3$  4.5.2

Para se expressar o movimento, existem dois tipos de descrição. A Lagrangiana, ou material, caracteriza a mudança de configuração do corpo em relação às coordenadas materiais e ao tempo, e a Euleriana, ou espacial, caracteriza a alteração de forma em relação às coordenadas espaciais e ao tempo. Optou-se, neste trabalho, pela formulação Lagrangiana, pois as principais equações que descrevem o comportamento mecânico dos materiais são escritas em função das coordenadas materiais.

### 4.2.3. Campo de Deslocamentos

Define-se campo de deslocamentos da seguinte maneira:

$$\vec{D}(\vec{X}, t) = \vec{x}(\vec{X}, t) - \vec{X}, \text{ na descrição Lagrangiana} \quad 4.6.1$$

$$\vec{d}(\vec{x}, t) = \vec{x} - \vec{X}(\vec{x}, t), \text{ na descrição Euleriana} \quad 4.6.2$$

$$\vec{d}(\vec{x}, t) = \vec{D}(\vec{X}, t) \quad 4.6.3$$

A figura 4.1 ilustra os principais conceitos expostos, até o presente momento, no subitem 4.2.

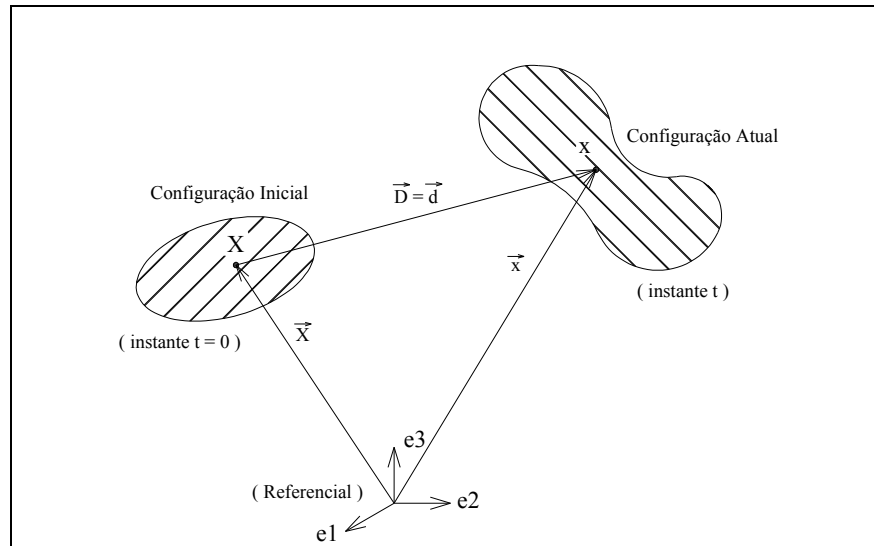


Figura 4.1 – Configurações, Movimento e Campo de Deslocamentos de um corpo

#### 4.2.4. Movimento de Corpo Rígido

Entende-se por movimento de corpo rígido toda mudança de configuração que não causa alteração da forma do corpo e da posição relativa de seus pontos materiais, isto é:

$$\vec{x}(\vec{X}, t) = \vec{c}(t) + \mathbf{Q}(t)\vec{X} \quad 4.7$$

onde  $\mathbf{c}(t)$  é o vetor de translação e  $\mathbf{Q}(t)$  é o tensor ortogonal de rotação, de segunda ordem, constantes para todo  $\mathbf{X}$ . A figura 4.2 ilustra esse tipo de movimento, no qual o corpo é, apenas, transladado e rotacionado.

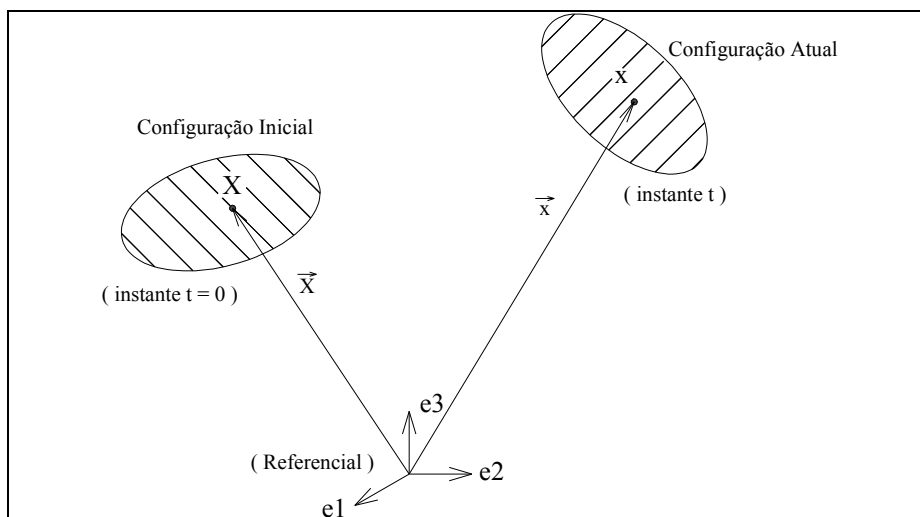


Figura 4.2 – Exemplo de Movimento de Corpo Rígido

### 4.3. Deformação

Para que se possa quantificar e analisar a mudança de configuração de um corpo submetido a certo carregamento, são usadas as medidas de deformação. Estão descritos, a seguir, os principais conceitos e fórmulas com relação a essas grandezas.

#### 4.3.1. Gradiente da Função Mudança de Configuração

O chamado gradiente da função mudança de configuração, ou simplesmente gradiente, além de auxiliar na definição de outras medidas, fornece a variação, no espaço, da função mudança de posição.

Ao analisar a figura 4.3, pode-se concluir que:

$$\Delta \vec{X} = \vec{X} - \vec{X}_0 \quad 4.8.1$$

$$\Delta \vec{x} = \vec{x} - \vec{x}_0 \quad 4.8.2$$

$$\vec{U}_0 = \vec{x}_0 - \vec{X}_0 \quad 4.8.3$$

$$\vec{U} = \vec{x} - \vec{X} \quad 4.8.4$$

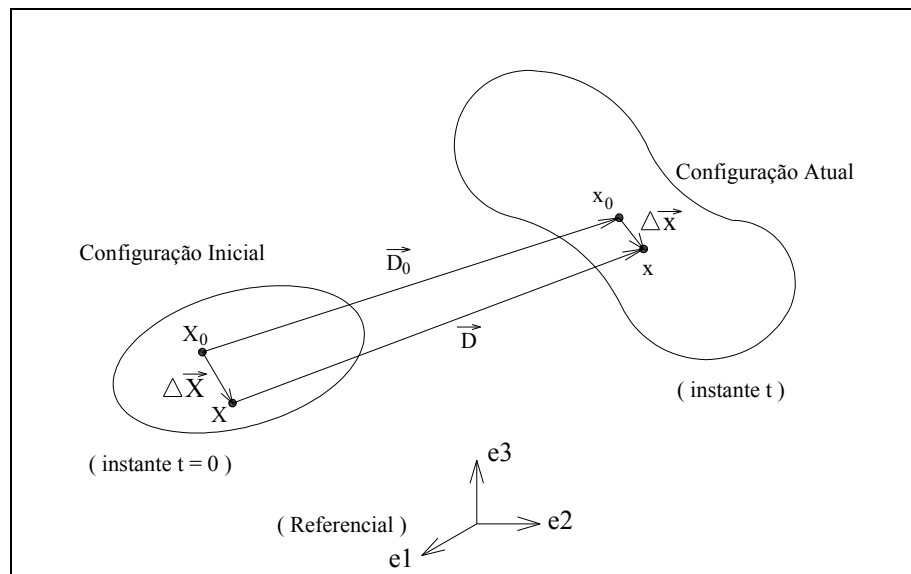


Figura 4.3 – Variação da Função Mudança de Configuração

A expansão, em Série de Taylor, do vetor  $\Delta \vec{x}$  resulta em:

$$\Delta \vec{x} = \vec{x} - \vec{x}_0 = \left[ \vec{x}_0 + \frac{\partial \chi(\vec{X}, t)}{\partial \vec{X}} \Delta \vec{X} + O^2(\Delta X) \right] - \vec{x}_0 \quad 4.9$$

onde  $O^2(\Delta X)$  representa os termos de ordens superiores em  $\Delta X$ .

Se o módulo do vetor  $\Delta \vec{X}$  tender a zero, isto é, se for infinitesimal, pode-se simplificar a expressão (4.9):

$$O^2(\Delta X) \approx 0 \quad 4.10.1$$

$$d\vec{x} = \frac{\partial \chi(\vec{X}, t)}{\partial \vec{X}} d\vec{X} = A(\vec{X}, t) d\vec{X} \quad 4.10.2$$

onde  $\mathbf{A}(\mathbf{X}, t)$ , ou simplesmente  $\mathbf{A}$ , é o tensor gradiente material da função mudança de configuração, que descreve a maneira pela qual o vetor  $d\mathbf{X}$  se transforma no vetor  $d\mathbf{x}$ , dada a alteração de forma do corpo.

Existem outras representações para esse tensor:

$$A = \text{Grad} \chi(\vec{X}, t) = \text{Grad} \vec{x}(\vec{X}, t) = \text{Grad} \vec{x} \quad 4.11$$

onde Grad é o operador gradiente, descrito em relação às coordenadas materiais.

Assim, as componentes do gradiente são as seguintes:

$$A_{ij} = \frac{\partial x_i(\vec{X}, t)}{\partial X_j} = \frac{\partial \chi_i(\vec{X}, t)}{\partial X_j} \quad (\text{para } i, j = 1, 2, 3) \quad 4.12$$

onde  $\chi_i$  são as componentes da função mudança de configuração,  $x_i$  são as coordenadas espaciais e  $X_i$  são as materiais.

Analogamente, define-se o tensor gradiente espacial da função mudança de configuração, que descreve o modo pelo qual o vetor  $d\mathbf{x}$  se transforma em  $d\mathbf{X}$ :

$$B^T = B^T(\vec{x}, t) = A^{-1} = \text{grad} \chi^{-1}(\vec{x}, t) = \text{grad} \vec{X}(\vec{x}, t) \quad 4.13.1$$

$$(B^T)_{ij} = \frac{\partial X_i(\vec{x}, t)}{\partial x_j} = \frac{\partial \chi^{-1}_i(\vec{x}, t)}{\partial x_j} \quad 4.13.2$$

onde grad é o operador gradiente, descrito em relação às coordenadas espaciais.

Deve-se comentar que o tensor  $\mathbf{A}$  é não singular, pois:

$$\vec{dx} = A\vec{dX} \neq \vec{0}, \forall \vec{dX} \neq \vec{0} \Rightarrow \det(A) = J \neq 0 \quad 4.14$$

onde J é o Jacobiano. Tal expressão traduz o fato de que nenhuma fibra do material pode ter seu comprimento anulado pela deformação, isto é, não pode desaparecer ou ser aniquilada.

A partir do gradiente, podem ser expressas outras medidas de deformação.

### 4.3.2. Tensores de Deformação

Aparece, na definição do módulo do vetor  $\mathbf{dx}$ , o seguinte desenvolvimento:

$$|\vec{dx}|^2 = \vec{dx} \cdot \vec{dx} = (A\vec{dX}) \cdot (A\vec{dX}) = \vec{dX} \cdot (A^T A\vec{dX}) = \vec{dX} \cdot C\vec{dX} > 0 \quad 4.15$$

Assim, pode-se concluir que o tensor  $C = A^T A$  é positivo definido. Ele é o chamado tensor alongamento à direita de Cauchy-Green, uma das principais medidas Lagrangianas de deformação.

Além de ser positivo definido,  $\mathbf{C}$  é simétrico, pois:

$$(A^T A)^T = A^T (A^T)^T = A^T A \quad 4.16$$



Analogamente, define-se uma medida Euleriana, que é o tensor alongamento à esquerda de Cauchy-Green, também chamado de tensor de deformação de Finger:

$$b = AA^T \quad 4.17$$

O seguinte desenvolvimento ocorre no cálculo da diferença entre os módulos dos vetores  $\mathbf{dx}$  e  $\mathbf{dX}$ :

$$\left| \overrightarrow{dx} \right|^2 - \left| \overrightarrow{dX} \right|^2 = \overrightarrow{dX} \cdot C \overrightarrow{dX} - \overrightarrow{dX} \cdot \overrightarrow{dX} = \overrightarrow{dX} \cdot (C - I) \overrightarrow{dX} = \overrightarrow{dX} \cdot 2E \overrightarrow{dX} \quad 4.18$$

onde  $\mathbf{I}$  é o tensor identidade de segunda ordem e  $\mathbf{E}$  é o tensor deformação de Green-Lagrange, uma medida Lagrangiana definida por:

$$E = \frac{1}{2}(C - I) = \frac{1}{2}(A^T A - I) \quad 4.19.1$$

$$E_{ij} = \frac{1}{2}(C_{ij} - \delta_{ij}) \quad (\text{para } i = 1, 2, 3) \quad 4.19.2$$

onde  $\delta_{ij}$  é o delta de Kronecker.

Há, também, a medida Euleriana de deformação análoga a  $\mathbf{E}$ :

$$F = \frac{1}{2}(I - BB^T) = \frac{1}{2}(I - b^{-1}) \quad 4.20$$

onde  $\mathbf{B}^T$  é o gradiente espacial da função mudança de configuração,  $\mathbf{b}$  é o alongamento à esquerda de Cauchy-Green e  $\mathbf{F}$  é o tensor deformação de Euler-Almansi.

### 4.3.3. Alongamento

Outra grandeza de bastante interesse, na prática, é o alongamento relativo, também chamado de estiramento, razão de extensão ou, simplesmente, alongamento. Ele é definido como sendo a razão entre os comprimentos final e inicial de uma fibra ou linha material, mostrados na figura 4.4.

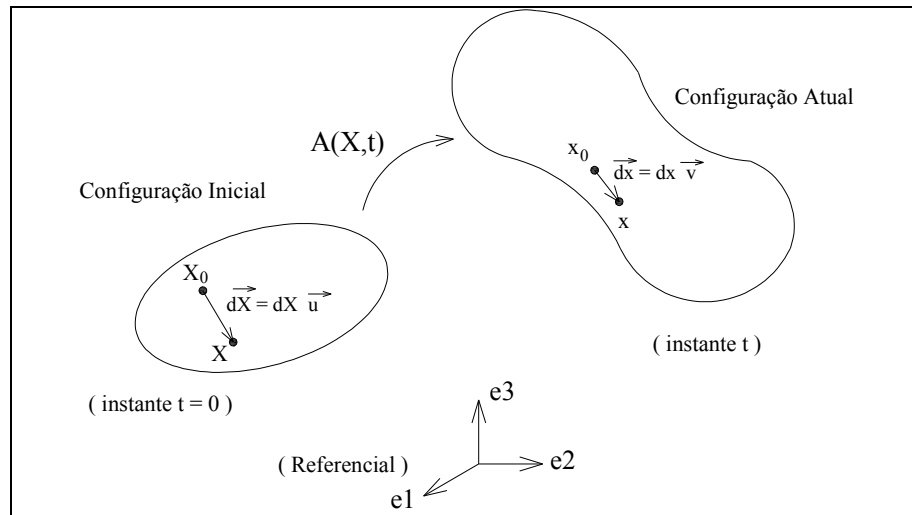


Figura 4.4 - Mudança de Comprimento e Direção de uma Fibra

Na figura 4.4,  $dX$  é o módulo do vetor  $d\mathbf{X}$  ou o comprimento da fibra na posição inicial,  $dx$  é o módulo de  $d\mathbf{x}$  ou o tamanho da fibra na configuração atual,  $\mathbf{u}$  é o vetor unitário na direção inicial da fibra e  $\mathbf{v}$  é o vetor unitário na direção atual da fibra.

Assim, é possível fazer o seguinte desenvolvimento:

$$\vec{dx} = A \vec{dX} = dX A \vec{u} \quad 4.21.1$$

$$\vec{dx}' = dX \vec{u}' A' \quad 4.21.2$$

$$(dx)^2 = \vec{dx} \cdot \vec{dx} = \vec{dx}' \vec{dx} = (dX)^2 \vec{u}' A' A \vec{u} \quad 4.21.3$$

$$\lambda(u) = \frac{dx}{dX} = \sqrt{\vec{u}^t A^t A \vec{u}} = \sqrt{\vec{u}^t C \vec{u}} \quad 4.21.4$$

onde  $\lambda(u)$  é o alongamento de uma fibra que estava, inicialmente, na direção do vetor unitário  $\mathbf{u}$ . Pode-se concluir, pelo fato do tensor  $\mathbf{C}$  ser positivo definido, que  $0 < \lambda(u) < \infty$ , para qualquer  $\mathbf{u}$ .

#### 4.3.4. Deformação de Engenharia

As deformações de engenharia são medidas bastante úteis, pois possuem significado físico aparente, ao contrário do tensor de Green-Lagrange, por exemplo.

A deformação específica de engenharia é a razão entre a extensão de uma fibra, inicialmente na direção do vetor unitário  $\mathbf{u}$ , e seu comprimento inicial:

$$\varepsilon(u) = \frac{dx - dX}{dX} = \lambda(u) - 1 \quad 4.22$$

A distorção de engenharia é a razão entre a mudança no ângulo entre duas fibras, inicialmente perpendiculares entre si, e o ângulo inicial entre elas:

$$\gamma_{12} = \Theta - \frac{\pi}{2} \quad 4.23$$

onde  $\Theta$  é o ângulo ilustrado na figura 4.5.

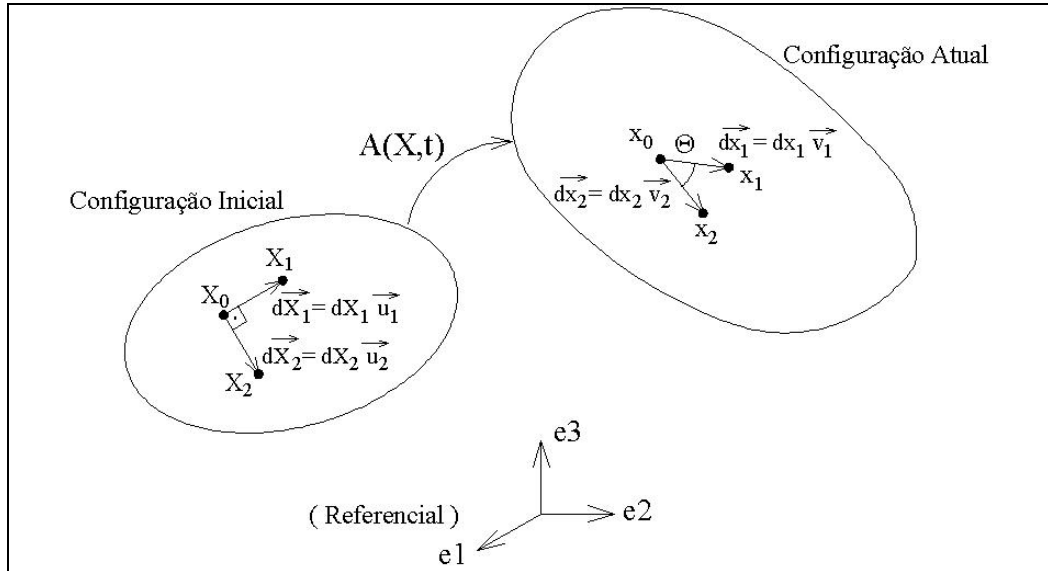


Figura 4.5 - Ângulo de Distorção de Engenharia

Da definição de produto escalar entre dois vetores, escreve-se a seguinte expressão:

$$\cos(\Theta) = \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = \vec{v}_1' \cdot \vec{v}_2' \quad 4.24$$

onde  $\vec{v}_1$  e  $\vec{v}_2$  são os vetores unitários que possuem a mesma direção das fibras deformadas - na atual configuração - que, inicialmente, eram perpendiculares entre si e que estavam nas direções dos vetores unitários  $\vec{u}_1$  e  $\vec{u}_2$ .

É possível, com a figura 4.5 e as expressões (4.14) e (4.24), escrever:

$$\vec{dx}_1 = dx \vec{v}_1 = A d\vec{X}_1 = dXA \vec{u}_1 \Rightarrow \vec{v}_1 = \frac{dX}{dx} A \vec{u}_1 = \frac{A \vec{u}_1}{\lambda_1} \quad 4.25.1$$

$$\vec{v}_1' = \frac{\vec{u}_1' A'}{\lambda_1} \quad 4.25.2$$

$$\vec{v}_2 = \frac{A \vec{u}_2}{\lambda_2} \quad 4.25.3$$

$$\cos(\Theta) = \frac{\vec{u1}' A' Au2}{\lambda_1 \lambda_2} \quad 4.25.4$$

Assim, a distorção de engenharia pode ser expressa da seguinte maneira:

$$\gamma_{12} = \arccos\left(\frac{\vec{u1}' A' Au2}{\lambda_1 \lambda_2}\right) - \frac{\pi}{2} \quad 4.26$$

onde  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são, respectivamente, os alongamentos de duas fibras, inicialmente nas direções de **u1** e **u2**.

O pseudo tensor deformação de engenharia é expresso, em relação à base  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ , por:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{eng} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & \frac{\gamma_{12}}{2} & \frac{\gamma_{13}}{2} \\ \frac{\gamma_{21}}{2} & \varepsilon_2 & \frac{\gamma_{23}}{2} \\ \frac{\gamma_{31}}{2} & \frac{\gamma_{32}}{2} & \varepsilon_3 \end{bmatrix} \quad 4.27$$

É possível mostrar que  $\boldsymbol{\varepsilon}^{eng}$  não é tensor pois não respeita as propriedades descritas no terceiro capítulo (CODA & PACCOLA, 2007).

### 4.3.5. Tensor Gradiente de Deslocamento

Além dos tensores gradientes da função mudança de configuração, existem os gradientes de deslocamento, definidos com as seguintes equações:

$$D_{GR} = Grad \vec{D}(\vec{X}, t) = Grad \vec{x} - Grad \vec{X} = A - I \quad (\text{descrição material}) \quad 4.28.1$$

$$d_{GR} = grad \vec{d}(\vec{x}, t) = grad \vec{x} - grad \vec{X} = I - A^{-1} \quad (\text{descrição espacial}) \quad 4.28.2$$

$$\vec{D}(\vec{X}, t) = \vec{D}_0(\vec{X}, t) + D_{GR} \vec{dX} \quad 4.28.3$$

onde  $I$  é a matriz identidade, e  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{U}_0$  são vetores de deslocamento ilustrados na figura 4.3.

### 4.3.6. Objetividade da Medida de Deformação

Segundo OGDEN (1984), para que possa quantificar, de fato, a mudança de configuração de um corpo, a medida de deformação adotada deve ser objetiva, isto é, deve fornecer valores nulos para movimentos de corpo rígido. Além disso, uma grandeza é objetiva quando fornece os mesmos valores para distintos referenciais.

Se a função mudança de configuração for expressa com a equação (4.7), o que caracteriza movimento de corpo rígido, então:

$$A = Grad \vec{x} = Grad [c(t) + Q(t)\vec{X}] = Grad \vec{X} = I \Rightarrow A^t A = I \Rightarrow E = 0 \quad 4.29$$

onde  $\mathbf{I}$  é a matriz identidade e  $\mathbf{0}$  é o tensor nulo de segunda ordem. Assim, todas as componentes da deformação de Green-Lagrange são nulas, o que prova que o tensor  $\mathbf{E}$  é uma medida de deformação objetiva.

Para o caso de mudança de observador, através do tensor ortogonal  $Q$ , o uso da expressão (3.33.3) resulta em:

$$A^* = QAQ^T \quad 4.30.1$$

$$J^* = \det(A^*) = \det(Q)\det(A)\det(Q^T) = \det(A) = J \quad 4.30.2$$

$$C^* = (A^*)'(A^*) = QA^tQ^tQAQ^T = A^tA = C \quad 4.30.3$$

$$E^* = \frac{1}{2}(C^* - I) = \frac{1}{2}(C - I) = E \quad 4.30.4$$

As relações (4.30) mostram que as grandezas  $J$ ,  $C$  e  $E$  fornecem os mesmos valores quando ocorre mudança de referencial. Portanto, elas são objetivas.

#### 4.3.7. Teorema da Decomposição Polar

O teorema da decomposição polar é de grande importância para análise estrutural do contínuo. Ele afirma que o gradiente pode ser decomposto da seguinte forma:

$$A = RU = VR \quad 4.31.1$$

$$U^2 = C \quad 4.31.2$$

$$V^2 = b$$

4.31.3

onde  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{V}$  são tensores de segunda ordem simétricos e positivos definidos. O primeiro é o tensor material de alongamento e o segundo é o espacial. COIMBRA (1981) definiu  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{V}$  como sendo os tensores elongações direita e esquerda, respectivamente.

Este teorema demonstra, com auxílio dos conceitos sobre auto-vetores e auto-valores, que os tensores  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{C}$  possuem as mesmas direções principais, também chamadas de eixos materiais principais. Porém, os valores ou alongamentos principais são diferentes. Se, por exemplo, os auto-valores de  $\mathbf{U}$  são  $\lambda_a$ , os de  $\mathbf{C}$  são  $\lambda_a^2$ . Analogamente, as direções principais do tensor  $\mathbf{V}$ , também chamadas de eixos espaciais principais, são as mesmas de  $\mathbf{b}$ . Como no caso de  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{C}$ , a relação entre os valores principais de  $\mathbf{V}$  e  $\mathbf{b}$  é a mesma. Além disso, a deformação rotacional, via tensor  $\mathbf{R}$ , as direções principais de  $\mathbf{U}$  para as de  $\mathbf{V}$ .

#### 4.3.8. Relação entre áreas superficiais e volumes

As seguintes equações descrevem a importante relação entre áreas superficiais e volumes, antes e depois da deformação, isto é, nas configurações inicial e atual:

$$dV = JdV_0 \tag{4.32.1}$$

$$dS\vec{n} = J\mathbf{B}\vec{N}_o dS_0 \quad (\text{fórmula de Nanson}) \tag{4.32.2}$$

onde  $dV$  é o volume infinitesimal na posição atual,  $J$  é o Jacobiano ou o determinante do gradiente material  $\mathbf{A}$ ,  $dV_0$  é o volume infinitesimal na configuração de referência,  $dS$  é a área



superficial na posição atual,  $\mathbf{B}^T$  é o gradiente espacial,  $dS_0$  é a área superficial na configuração de referência,  $\mathbf{n}$  é o vetor unitário normal à superfície na posição deformada e  $\mathbf{N}_0$  na indeformada.

#### 4.3.9. Tensores Taxa de Deformação

Estão definidos, neste subitem, alguns tensores relativos à taxa ou à variação temporal da deformação, úteis para o desenvolvimento das equações de balanço energético.

Define-se o campo vetorial velocidade com as seguintes expressões:

$$\vec{V}(\vec{X}, t) = \frac{\partial \vec{D}(\vec{X}, t)}{\partial t} = \dot{\vec{D}}(\vec{X}, t) = \dot{D} \quad (\text{descrição material}) \quad 4.33.1$$

$$\vec{v}(\vec{x}, t) = \frac{\partial \vec{u}(\vec{x}, t)}{\partial t} = \dot{\vec{u}}(\vec{x}, t) = \dot{d} \quad (\text{descrição espacial}) \quad 4.33.2$$

Os tensores gradiente de velocidade são expressos da seguinte maneira:

$$l(\vec{x}, t) = \text{grad}[\vec{v}(\vec{x}, t)] = \frac{\partial [\vec{v}(\vec{x}, t)]}{\partial \vec{x}}, \text{ na descrição espacial} \quad 4.34.1$$

$$L(\vec{X}, t) = \text{Grad}[\vec{V}(\vec{X}, t)] = \frac{\partial [\vec{V}(\vec{X}, t)]}{\partial \vec{X}} = \dot{A}(\vec{X}, t), \text{ na descrição material} \quad 4.34.2$$

O tensor  $\mathbf{l}(\mathbf{x}, t)$  pode ser decomposto em duas parcelas:

$$l(\vec{x}, t) = l_S(\vec{x}, t) + l_A(\vec{x}, t) \quad 4.35.1$$

$$l_S(\vec{x}, t) = l_S = \frac{1}{2}(l + l^T) \quad 4.35.2$$

$$l_A(\vec{x}, t) = l_A = \frac{1}{2}(l - l^T) \quad 4.35.3$$

onde  $l_S$  é o tensor simétrico taxa de deformação e  $l_A$  é o anti-simétrico taxa de rotação.

A variação, no tempo, do tensor de Green-Lagrange é dada pela seguinte fórmula (HOLZAPFEL, 2000):

$$\dot{E} = \frac{\partial E(\vec{X}, t)}{\partial t} = A^T l_S A \quad 4.36$$

onde  $A$  é o gradiente e  $l_S$  é o tensor simétrico taxa de deformação.

#### 4.4. Tensão

A mais importante grandeza para cálculo de esforços internos é a tensão.

#### 4.4.1. Vetor de Tensão

Dado um corpo, existem as forças externas superficiais aplicadas no contorno, as forças de campo que atuam em cada partícula material e as forças internas distribuídas numa superfície no interior desse corpo. Essa superfície pode ser um plano imaginário que separa o corpo em duas partes, como mostra a figura 4.6.

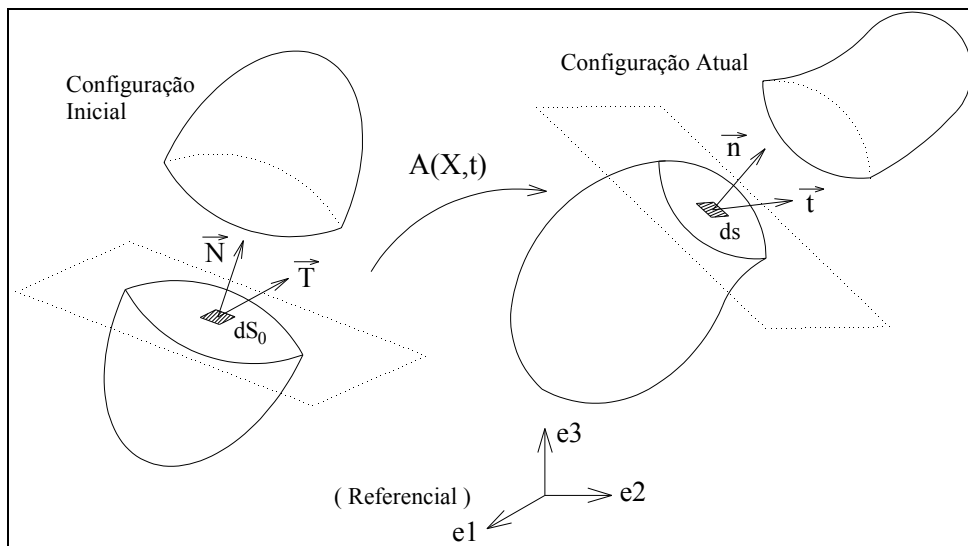


Figura 4.6 - Vetores de Tensão

O vetor de força resultante que atua numa área superficial infinitesimal, no plano imaginário, é  $\vec{df}$  na posição atual e  $\vec{dF}$  na inicial. Assim, a partir da figura 4.6, pode-se concluir que:

$$\vec{df} = \vec{t} ds \quad 4.37.1$$

$$\vec{dF} = \vec{T} dS_0 \quad 4.37.2$$

$$\vec{t} = \vec{t}(\vec{x}, t, \vec{n}) \quad 4.37.3$$

$$\vec{T} = \vec{T}(\vec{X}, t, \vec{N}) \quad 4.37.4$$

onde  $ds$  e  $dS_0$  são as infinitesimais áreas superficiais,  $\mathbf{n}$  e  $\mathbf{N}$  são os vetores unitários normais ao plano imaginário,  $\mathbf{t}$  é o chamado vetor de tensão real de Cauchy e  $\mathbf{T}$  é o vetor de tensão nominal ou vetor de tensão de Piola-Kirchhoff de primeira espécie. Dessa forma,  $\mathbf{t}$  mede a força por unidade de área na presente configuração, e  $\mathbf{T}$  mede a mesma relação na posição de referência.

#### 4.4.2. Tensão na forma Tensorial

É bastante útil definir tensão na forma de tensores de segunda ordem. Para isto, usa-se o Teorema da Tensão de Cauchy:

$$\vec{t}(\vec{x}, t, \vec{n}) = \boldsymbol{\sigma}(\vec{x}, t) \vec{n} \Rightarrow t_i = \sigma_{ij} n_j \quad 4.38.1$$

$$\vec{T}(\vec{X}, t, \vec{N}) = P^T(\vec{X}, t) \vec{N} \Rightarrow T_i = (P^T)_{ij} N_j \quad 4.38.2$$

onde  $\boldsymbol{\sigma}$  é o tensor da tensão real de Cauchy e  $\mathbf{P}^T$  é o tensor da tensão nominal ou de Piola-Kirchhoff de primeira espécie. Esse teorema demonstra que os vetores de tensão  $\mathbf{t}$  e  $\mathbf{T}$  variam linearmente com os vetores normais  $\mathbf{n}$  e  $\mathbf{N}$ , respectivamente.

Para se relacionar  $\boldsymbol{\sigma}$  e  $\mathbf{P}^T$ , utiliza-se as expressões (4.38) e (4.32.2), o que leva à seguinte equação:

$$P^T = J\sigma A^{-T} \Rightarrow (P^T)_{ij} = J\sigma_{ik}(A^{-T})_{kj} \quad (k = 1, 2, 3) \quad 4.39$$

#### 4.4.3. Componentes da Tensão de Cauchy

Ao projetar o tensor  $\sigma$  numa base ortonormal, chega-se à seguinte expressão:

$$\vec{t}_{ei} = \sigma \vec{e}_i \quad \text{ou} \quad t_i = \sigma_{ij} e_j \quad 4.40$$

onde  $\vec{t}_{ei}$  é o vetor que atua no plano cujo vetor unitário normal é  $\vec{e}_i$ , e  $\sigma_{ij}$  são as componentes do tensor  $\sigma$  em relação à base.

As componentes  $\sigma_{ii}$  são chamadas de tensões normais e as  $\sigma_{ij}$ , para  $i \neq j$ , são as tensões tangentes ou cisalhantes. Ademais, a convenção de componente positiva para o tensor  $\sigma$  está ilustrada na figura 4.7.

As tensões normais também possuem suas direções e seus valores principais, muito úteis para o dimensionamento estrutural, determinados com a solução da seguinte equação:

$$(\sigma - \sigma_a I) \vec{n}_a = \vec{0} \quad 4.41$$

onde  $\sigma_a$  são os valores principais de  $\sigma$  e  $\vec{n}_a$  são as direções principais. Assim, a tensão real de Cauchy também possui sua representação espectral:

$$\sigma = \sum_{a=1}^3 \sigma_a \vec{n}_a \otimes \vec{n}_a \quad 4.42$$

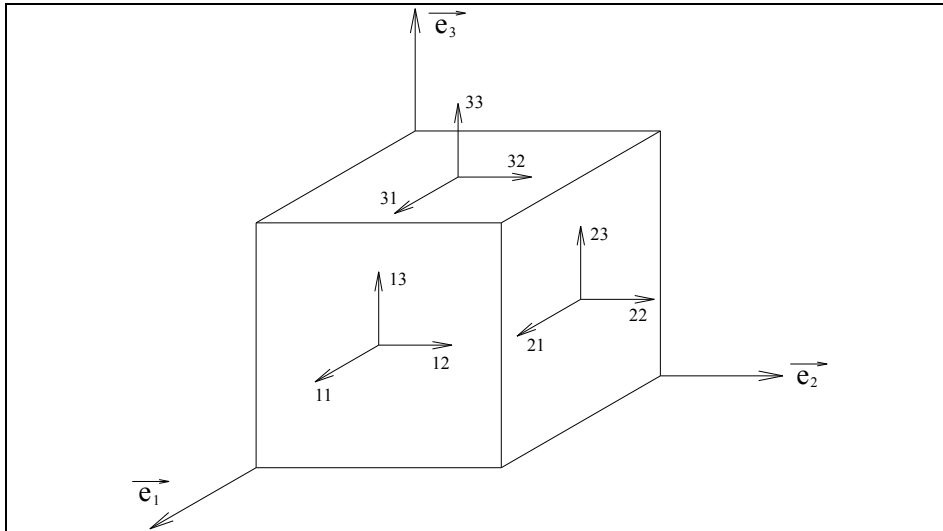


Figura 4.7 - Componentes  $\sigma_{ij}$

#### 4.4.4. Tensão de Piola-Kirchhoff de Segunda Espécie

O tensor simétrico da tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie, apesar de não ter interpretação física, é de grande importância para cálculo da energia e suas derivadas em problemas estruturais. Ele é definido pelas seguintes fórmulas:

$$S = A^{-1} P^T = B^T P^T = J A^{-1} \sigma A^{-T} = J B^T \sigma B \quad 4.43.1$$

$$S_{ij} = (A^{-1})_{ik} (P^T)_{kj} = (B^T)_{ik} (P^T)_{kj} \quad 4.43.2$$

#### 4.4.5. Tensão de Engenharia

A tensão de engenharia representa a razão entre força atual e área inicial. Ela é representada, em relação à base  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ , da seguinte forma:

$$\sigma_{eng} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \sigma_2 & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \sigma_3 \end{bmatrix} \quad 4.44$$

onde  $\sigma_i$  é a tensão normal de engenharia na direção  $i$ , e  $\tau_{ij}$  é a tensão cisalhante de engenharia referente ao plano  $ij$ .

#### 4.5. Balanços

Para que se possa equacionar o equilíbrio, é preciso estabelecer as leis de balanço, as quais, segundo HOLZAPFEL (2000), devem ser respeitadas em qualquer instante e em todo o corpo.

##### 4.5.1. Conservação da Massa

As considerar o corpo analisado como um sistema fechado, o mesmo conserva sua massa após a deformação, ou seja, ela não se altera com o movimento. Isto pode ser matematicamente expresso do seguinte modo:

$$m(\Omega_0) = m(\Omega) > 0 \quad 4.45.1$$

$$dm(\Omega_0) = dm(\Omega) > 0 \quad 4.45.2$$

$$\frac{\partial m(\Omega_0)}{\partial t} = \frac{\partial m(\Omega)}{\partial t} = 0 \quad 4.45.3$$

onde  $dm$  é a massa de um volume infinitesimal do corpo,  $\Omega$  se refere à presente configuração e  $\Omega_0$  à posição inicial. A quantidade escalar massa não varia no tempo e, portanto, é uma medida objetiva.

Devido à consideração da continuidade do meio que compõe o corpo, a massa pode ser caracterizada por contínuas funções escalares de campo, como por exemplo, a densidade, a qual é definida pelas seguintes expressões:

$$\rho_0 = \rho_0(\vec{X}, t) = \frac{dm(\Omega_0)}{dV_0} \quad (\text{densidade material}) \quad 4.46.1$$

$$\rho = \rho(\vec{x}, t) = \frac{dm(\Omega)}{dV} \quad (\text{densidade espacial}) \quad 4.46.2$$

A configuração é dita homogênea quando a densidade é a mesma para qualquer ponto material, isto é:

$$\text{Grad}(\rho_0) = \vec{0} \quad \text{ou} \quad \text{grad}(\rho) = \vec{0} \quad 4.47$$



Para relacionar as densidades nas configurações inicial e atual, usa-se as equações (4.45.2) e (4.46), que resultam em:

$$\rho_0 dV_0 = \rho dV \quad (\text{forma diferencial ou local}) \quad 4.48.1$$

$$\int_{\Omega_0} \rho_0 dV_0 = \int_{\Omega} \rho dV \quad (\text{forma integral ou global}) \quad 4.48.2$$

$$\int_{\Omega_0} (\rho_0 - \rho J) dV_0 = 0, \text{ para qualquer } dV_0 \quad 4.48.3$$

Com a expressão (4.48.3), pode-se escrever a forma local da equação da continuidade de massa:

$$\rho = \frac{\rho_0}{J} \Rightarrow \dot{\rho}_0 = J\dot{\rho} \quad 4.49$$

Ademais, CODA (2003) demonstrou, baseado em OGDEN (1984), as seguintes expressões:

$$\dot{\rho}_0 = 0 \quad 4.50.1$$

$$\dot{\rho} + \text{div}(\vec{v})\rho = 0 \quad 4.50.2$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \int_{\Omega} \rho f dv \right) = \int_{\Omega} \rho \dot{f} dv \quad 4.50.3$$

onde  $f$  é uma função de campo, que pode ser escalar, vetorial ou tensorial.

#### 4.5.2. Balanço da Quantidade de Movimento

A quantidade de movimento translacional, também chamada de momento linear total (HOLZAPFEL, 2000), é definida pela seguinte fórmula:

$$\vec{L}(t) = \int_{\Omega} \rho \vec{v} dV = \int_{\Omega_0} \rho_0 \vec{V} dV_0 \quad 4.51$$

onde  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  e  $\mathbf{V} = \mathbf{V}(\mathbf{X}, t)$  são os vetores de velocidade,  $dV$  é o volume infinitesimal final e  $dV_0$  é o inicial.

Já a quantidade de movimento rotacional, também chamada de momento angular total (HOLZAPFEL, 2000), é determinada pela seguinte expressão:

$$\vec{J}(t) = \int_{\Omega} \vec{r} \times \rho \vec{v} dV = \int_{\Omega_0} \vec{r}_0 \times \rho_0 \vec{V} dV_0 \quad 4.52$$

onde  $\mathbf{r}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$  é o vetor posição espacial,  $\mathbf{r}_0(\mathbf{x}) = \mathbf{X} - \mathbf{X}_0$  é o material,  $\mathbf{x}_0$  é a posição espacial do ponto de referência e  $\mathbf{X}_0$  é a material.

O balanço da quantidade de movimento translacional mostra que a resultante de forças, no instante  $t$ , é dada por:

$$\vec{F}(t) = \frac{\partial}{\partial t} [L(t)] \quad 4.53$$

O balanço da quantidade de movimento rotacional mostra que o momento ou torque resultante, no instante  $t$ , é dado por:

$$\vec{M}(t) = \frac{\partial}{\partial t} [J(t)] \quad 4.54$$

O uso das expressões (4.50.3), (4.53) e (4.54) resulta em:

$$\vec{F}(t) = \int_{\Omega} \rho \dot{\vec{v}} dV = \int_{\Omega_0} \rho_0 \dot{\vec{V}} dV_0 \quad 4.55.1$$

$$\vec{M}(t) = \int_{\Omega} \vec{r} \times \rho \dot{\vec{v}} dV = \int_{\Omega_0} \vec{r}_0 \times \rho_0 \dot{\vec{V}} dV_0 \quad 4.55.2$$

onde o ponto acima da variável significa derivada da mesma em relação ao tempo.

Sabe-se, também, que as resultantes de força e de momento podem ser expressas da seguinte maneira:

$$\vec{F}(t) = \int_{\partial\Omega} \vec{t} dS + \int_{\Omega} \vec{b} dV \quad 4.56.1$$

$$\vec{M}(t) = \int_{\partial\Omega} \vec{r} \times \vec{t} dS + \int_{\Omega} \vec{r} \times \vec{b} dV \quad 4.56.2$$

onde  $\mathbf{t} = \mathbf{t}(\mathbf{x}, t)$  é o vetor de tensão real de Cauchy ou força de superfície, por unidade de área, atuante no contorno  $\partial\Omega$  de um corpo, e  $\mathbf{b} = \mathbf{b}(\mathbf{x}, t)$  é o vetor espacial de forças de campo, por unidade de volume, atuante em cada ponto material. A figura 4.8 mostra os vetores  $\mathbf{t}$  e  $\mathbf{b}$ .

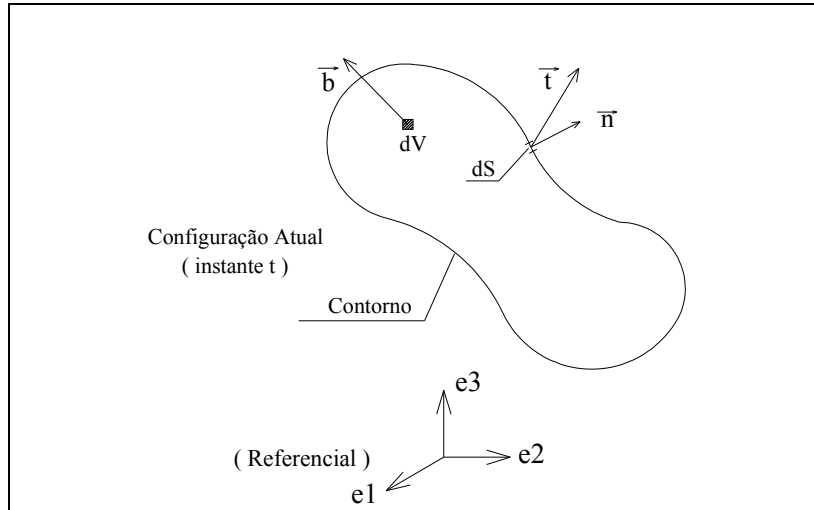


Figura 4.8 - Vetores de Tensão e de Campo na posição atual

A combinação das expressões (4.55) e (4.56) leva, portanto, às seguintes equações Eulerianas:

$$\int_{\Omega} \rho \vec{v} dV = \int_{\partial\Omega} \vec{t} dS + \int_{\Omega} \vec{b} dV \quad 4.57.1$$

$$\int_{\Omega} \vec{r} \times \rho \vec{v} dV = \int_{\partial\Omega} \vec{r} \times \vec{t} dS + \int_{\Omega} \vec{r} \times \vec{b} dV \quad 4.57.2$$

Para simplificar o equacionamento, as integrais ao longo do contorno  $\partial\Omega$ , nas equações (4.57), precisam ser transformadas em integrais no volume, com a utilização do Teorema da Divergência de Gauss, dado pelas expressões (3.38). Pode-se concluir, então, a Primeira Lei de Movimento de Cauchy, com as chamadas equações Eulerianas de campo:

$$\int_{\Omega} \left[ \text{div}(\sigma) + \vec{b} - \rho \vec{v} \right] dV = 0 \quad (\text{forma global}) \quad 4.58.1$$

$$\text{div}(\sigma) + \vec{b} - \rho \vec{v} = 0 \quad (\text{forma local}) \quad 4.58.2$$

$$\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + b_i - \rho \dot{v}_i = 0 \quad (\text{forma local indicial}) \quad 4.58.3$$

Analogamente, existem as equações Lagrangianas de campo:

$$\int_{\Omega_0} \left[ \operatorname{div}(P^T) + \vec{B} - \rho_0 \vec{V} \right] dV_0 = 0 \quad (\text{forma global}) \quad 4.59.1$$

$$\operatorname{div}(P^T) + \vec{B} - \rho_0 \vec{V} = 0 \quad (\text{forma local}) \quad 4.59.2$$

$$\frac{\partial P_{ji}}{\partial X_j} + B_i - \rho_0 \dot{V}_i = 0 \quad (\text{forma local indicial}) \quad 4.59.3$$

onde  $\mathbf{B} = \mathbf{J} \mathbf{b}$  é o vetor material de forças de campo e  $\mathbf{P}$  é a tensão de Piola-Kirchhoff de primeira espécie.

HOLZAPFEL (2000) mostrou que o balanço da quantidade de movimento rotacional, também chamado de Segunda Lei do Movimento de Cauchy, serve apenas para demonstrar a simetria do tensor  $\boldsymbol{\sigma}$ , isto é,  $\boldsymbol{\sigma}^T = \boldsymbol{\sigma}$ .

### 4.5.3. Balanço da Energia Mecânica e da Potência

A energia mecânica, para uma força aplicada em um ponto em deslocamento no espaço, pode ser calculada pela seguinte fórmula:

$$E_{mec} = \vec{F} \cdot \vec{d} = F d_F \quad 4.60$$

onde  $\mathbf{F}$  é a força aplicada e  $\mathbf{d}$  o deslocamento do ponto. Os valores  $F$  e  $d_F$  estão ilustrados na figura 4.9.

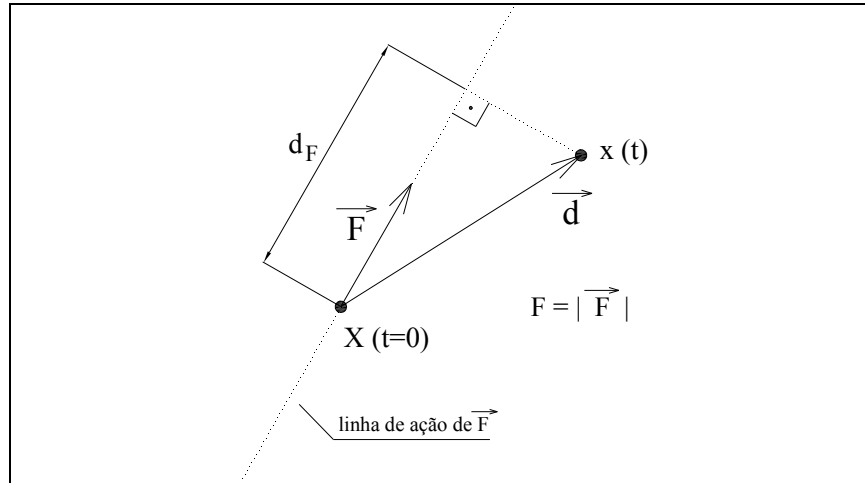


Figura 4.9 - Cálculo da Energia Mecânica

Como a derivada, no tempo, do deslocamento é a velocidade e a força, por hipótese, não varia com o tempo, a potência, ou a taxa de variação temporal, da energia mecânica resulta em:

$$\frac{\partial}{\partial t}(E_m) = F \frac{\partial}{\partial t}(d_F) = Fv_F \quad 4.61$$

onde  $v_F$  é a componente do vetor velocidade  $\mathbf{v}$  na direção da linha de ação da força  $F$ .

Assim, para se fazer o balanço de energia mecânica, basta multiplicar as expressões (4.58), que descrevem a resultante de forças, pelo vetor velocidade, o que leva à seguinte expressão:

$$[div(\sigma)]\vec{v} + b\vec{v} - \rho\vec{v}\vec{v} = \vec{0} \quad 4.62$$

Pode-se concluir, ao fazer uso da expressão (3.39.8), as seguintes equações:

$$div(\sigma\vec{v}) + b\vec{v} = \rho\vec{v}\vec{v} + tr[\sigma grad(\vec{v})] \quad (\text{forma local}) \quad 4.63.1$$

$$\text{ou } \operatorname{div}(\vec{\sigma}\vec{v}) + \vec{b}\vec{v} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\rho\vec{v}\vec{v}}{2} \right) + \operatorname{tr}[\vec{\sigma}\operatorname{grad}(\vec{v})] \quad (\text{forma local}) \quad 4.63.2$$

$$\int_{\partial\Omega} \vec{t}\vec{v}dS + \int_{\Omega} \vec{b}\vec{v}dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \left( \frac{\rho\vec{v}\vec{v}}{2} \right) dV + \int_{\Omega} \operatorname{tr}[\vec{\sigma}\operatorname{grad}(\vec{v})] dV \quad (\text{forma global}) \quad 4.63.3$$

Os dois termos do lado esquerdo da expressão (4.63.3) representam a potência da energia externa, o primeiro termo do lado direito é a variação de energia cinética e o segundo é a potência interna, também chamada de variação temporal da energia de deformação.

Pode-se desenvolver, com auxílio das propriedades tensoriais do capítulo anterior, o termo  $\operatorname{tr}[\vec{\sigma}^*\operatorname{grad}(\vec{v})]$  da seguinte maneira:

$$\operatorname{tr}[\vec{\sigma}\operatorname{grad}(\vec{v})] = \sigma^T : l = \sigma : l = \sigma : (l_S + l_A) = \sigma : l_S + \sigma : l_A = \sigma : l_S \quad 4.64$$

onde  $l_S$  é o tensor simétrico taxa de deformação e  $l_A$  é o anti-simétrico taxa de rotação, dados nas equações (4.35).

Para se descrever o balanço de energia na formulação Lagrangiana, basta substituir o volume infinitesimal  $dV$  por  $J dV_0$  e, com auxílio das referidas propriedades tensoriais, fazer as substituições necessárias, a depender da medida de tensão adotada:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\sigma : l) dV &= \int_{\Omega_0} (J\sigma : l) dV_0 = \int_{\Omega_0} J\sigma : (\dot{A}A^{-1}) dV_0 = \int_{\Omega_0} J\sigma A^{-T} : \dot{A} dV_0 = \\ &= \int_{\Omega_0} (P^T : \dot{A}) dV_0 = \int_{\Omega_0} J\sigma : A^{-T} \dot{E}A^{-1} dV_0 = \int_{\Omega_0} JA^{-1}\sigma A^{-T} : \dot{E} dV_0 = \\ &= \int_{\Omega_0} S : \dot{E} dV_0 \end{aligned} \quad 4.65$$

As integrais das expressões (4.65) são equivalentes, isto é, todas podem ser usadas para cálculo da variação temporal da energia de deformação. Assim, é possível dizer que os pares  $(J\sigma, l_s)$ ,  $(P^T, \dot{A})$  e  $(S, \dot{E})$  são pares conjugados para cálculo da potência na descrição Lagrangiana.

#### 4.5.4. Princípio dos Trabalhos Virtuais

O Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV) é de fundamental importância para formulações numéricas. Ele estabelece que, dado um deslocamento virtual compatível e admissível, representado por  $\delta\mathbf{d} = \mathbf{d}^* - \mathbf{d}$  e ilustrado na figura 4.10, o corpo analisado está em equilíbrio se, e somente se, o trabalho virtual das forças internas for igual ao das externas.

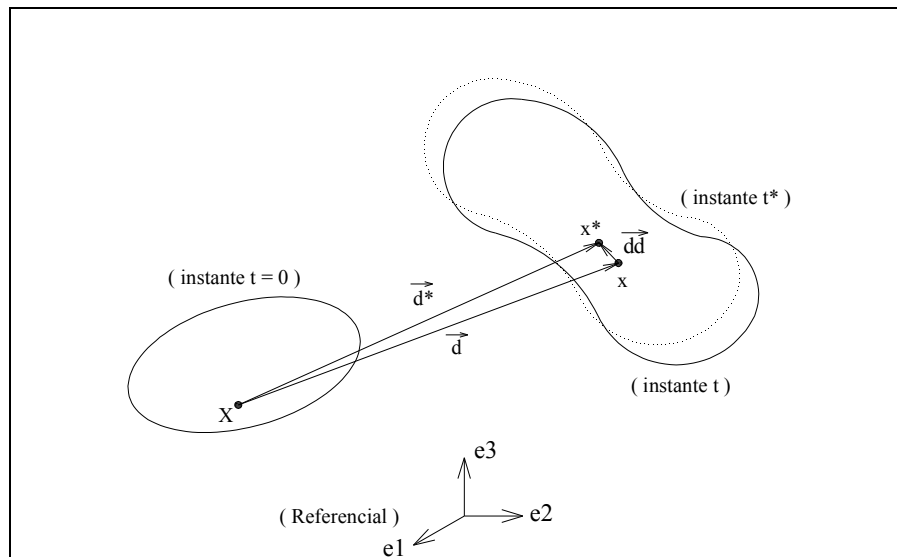


Figura 4.10 - Deslocamento Virtual



O deslocamento virtual é compatível quando atende às condições de contorno essenciais impostas, que são deslocamentos prescritos em certas regiões do corpo, e é admissível quando a função que o descreve possui a continuidade desejada.

Para cálculo do trabalho virtual, multiplica-se a resultante de forças, dada pelas equações (4.59), por  $\delta \mathbf{d}$ , o que resulta, conforme o mesmo procedimento para obtenção do balanço energético, na seguinte expressão Lagrangiana:

$$\int_{\Omega_0} \vec{B}_0 \cdot \delta \vec{d} dV_0 + \int_{\partial\Omega_0} (P^T) \vec{N} \cdot \delta \vec{d} dS_0 = \int_{\Omega_0} \rho_0 \vec{v} \cdot \delta \vec{d} dV_0 + \int_{\Omega_0} \text{tr}[(P) \text{Grad}(\delta \vec{d})] dV_0 \quad 4.66$$

HOLZAPFEL (2000) demonstrou as seguintes expressões:

$$\text{Grad}(\delta \vec{d}) = \text{Grad}(\vec{d}^*) - \text{Grad}(\vec{d}) = \delta [\text{Grad}(\vec{d})] = \delta A \quad 4.67.1$$

$$\delta E = \frac{1}{2} \delta C = \text{sim}(A^T \text{Grad}(\delta \vec{d})) = [A^T \text{Grad}(\delta \vec{d})]^T + [A^T \text{Grad}(\delta \vec{d})] \quad 4.67.2$$

onde  $\text{sim}(\ast)$  representa a parcela simétrica do tensor ( $\ast$ ).

Pode-se mostrar com algum esforço algébrico que:

$$\delta f = \frac{\partial f}{\partial \vec{d}} \delta \vec{d} \quad 4.68.1$$

$$\delta E = A^T \text{Grad}(\delta \vec{d}) = A^T \delta A \quad 4.68.2$$

$$P^T : \text{Grad}(\delta \vec{d}) = S : \delta E \quad 4.68.3$$

onde  $\mathbf{f}$  é um campo tensorial qualquer.

Assim, o trabalho virtual interno é dado pela seguinte equação:

$$TV_{\text{int}} = \int_{\Omega_0} P^T : \delta A dV_0 = \int_{\Omega_0} S : \delta E dV_0 = \int_{\Omega_0} \delta \Psi dV_0 \quad 4.69.1$$

$$\delta \Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial \beta} : \delta \beta \quad 4.69.2$$

onde  $\Psi$  é a chamada energia específica de deformação, por unidade de volume, descrita na configuração inicial, e  $\beta$  é o tensor da medida de deformação adotada.

Com a igualdade (4.69.1), pode-se escrever a expressão para cálculo da variação da energia específica de deformação:

$$\delta \Psi = P^T : \delta A = S : \delta E \quad 4.70$$

As expressões (4.70) e (4.69.2) revelam que a tensão de Piola-Kirchhoff de primeira espécie é conjugada energética do gradiente mudança de configuração e que a tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie é conjugada da deformação de Green-Lagrange, ou seja:

$$P^T = \frac{\partial \Psi(A)}{\partial A} \quad 4.71.1$$

$$S = \frac{\partial \Psi(E)}{\partial E} \quad 4.71.2$$

Ademais, CODA (2003) mostrou as seguintes igualdades:

$$\int_{\Omega_0} (\vec{B}_0 \cdot \delta \vec{d}) dV_0 = \delta \int_{\Omega_0} (\vec{B}_0 \cdot \vec{d}) dV_0 \quad 4.72.1$$

$$\int_{\partial\Omega_0} \left[ (P^T \vec{N}) \cdot \delta \vec{d} \right] dS_0 = \int_{\partial\Omega_0} (\vec{T} \cdot \delta \vec{d}) dS_0 = \delta \int_{\partial\Omega_0} (\vec{T} \cdot \vec{d}) dS_0 \quad 4.72.2$$

$$\int_{\Omega_0} (\vec{v} \cdot \delta \vec{d}) dV_0 = \frac{1}{2} \delta \int_{\Omega_0} (\vec{v} \cdot \vec{v}) dV_0 \quad 4.72.3$$

Deve-se comentar que as expressões (4.72.1) e (4.72.2) são válidas sempre na sua forma global pelo princípio da conservação de massa.

Assim, pode-se dizer, com base no PTV, que a energia potencial total, que é a soma das energias interna, externa e cinética, resulta em:

$$\delta \Pi = \delta \left[ - \int_{\Omega_0} \vec{B}_0 \cdot \vec{d} dV_0 - \int_{\partial\Omega_0} \vec{T} \cdot \vec{d} dS_0 + \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} \rho_0 \vec{v} \cdot \vec{v} dV_0 + \int_{\Omega_0} \Psi dV_0 \right] \Rightarrow \quad 4.73.1$$

$$\Rightarrow \Pi = \left[ - \int_{\Omega_0} \vec{B}_0 \cdot \vec{d} dV_0 - \int_{\partial\Omega_0} \vec{T} \cdot \vec{d} dS_0 + \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} \rho_0 \vec{v} \cdot \vec{v} dV_0 + \int_{\Omega_0} \Psi dV_0 \right] \quad 4.73.2$$

$$TF_{ext} = - \int_{\Omega_0} \vec{B}_0 \cdot \vec{d} dV_0 - \int_{\partial\Omega_0} \vec{T} \cdot \vec{d} dS_0 \quad 4.73.3$$

$$K = \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} \rho_0 \vec{v} \cdot \vec{v} dV_0 \quad 4.73.4$$

$$U_e^0 = \int_{\Omega_0} \Psi dV_0 \quad 4.73.5$$

$$\Pi = TF_{ext} + K + U_e^0 \quad 4.73.6$$

onde  $\Pi$  é a energia potencial total,  $TF_{ext}$  é o trabalho das forças externas,  $K$  é a energia cinética e  $U_e^0$  é a energia de deformação, descritos na posição de referência.

Quando a análise estrutural restringe-se a problemas estáticos, a parcela cinética da energia se anula. Assim:

$$\vec{v} = \vec{0} \quad 4.74.1$$

$$K = 0 \quad 4.74.2$$

$$\Pi = TF_{ext} + U_e^0 \quad 4.74.3$$

#### 4.5.5. Princípio da Mínima Energia Potencial Total

O Princípio da Mínima Energia Potencial Total (PMEPT), que é equivalente ao PTV, diz que a estrutura encontra-se em equilíbrio quando, dado um deslocamento virtual infinitesimal  $\delta\mathbf{d}$ , a primeira variação do funcional  $\Pi$ , representada por  $\delta\Pi$ , deve ser igual a zero.

LANCZOS (1986) definiu a primeira variação do funcional  $f$  como:

$$\delta f = \frac{\partial f}{\partial Y_1} \delta Y_1 + \frac{\partial f}{\partial Y_2} \delta Y_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial Y_n} \delta Y_n \quad 4.75$$

onde  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  são as variáveis das quais o funcional  $f$  é dependente.

Portanto, o equilíbrio da estrutura deve obedecer às seguintes relações:

$$\delta\Pi = \delta TF_{ext} + \delta K + \delta U_e^0 = 0 \quad 4.76.1$$

$$\Pi = \Pi(\vec{Y}) \Rightarrow \delta\Pi = \frac{\partial\Pi}{\partial\vec{Y}} \delta\vec{Y} = \vec{0} \Rightarrow \frac{\partial\Pi}{\partial Y_K} \delta Y_K = 0 \quad 4.76.2$$

Devido ao fato de  $\delta Y_K$  ser arbitrário, é válida a seguinte expressão:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial Y_K} = 0, \text{ para qualquer } K = 1, n$$

4.77

#### **4.6. Comentários Finais**

As equações (4.73) e (4.76) são de grande utilidade para descrição do equilíbrio na posição atual, que é o principal objetivo da análise não linear geométrica. Porém, a determinação desta configuração, geralmente, só é possível com uso de métodos aproximados ou numéricos, devido à complexidade matemática das equações não lineares envolvidas.

## ***5. Método dos Elementos Finitos***

---

Neste capítulo são apresentados alguns fundamentos do Método dos Elementos Finitos (MEF), assim como a metodologia usada neste trabalho.

### **5.1. Fundamentos**

Uma das mais usadas e estudadas ferramentas numéricas para análise estrutural é o MEF, no qual discretiza-se ou divide-se o contínuo domínio de integração - o corpo - em uma finita quantidade de partes, chamadas de elementos. Segundo ASSAN (2003), a função aproximadora, para certa grandeza ou variável incógnita, deve ser descrita, apenas, no domínio de cada elemento, ou seja, não se busca a determinação da função admissível que obedeça às condições de contorno de todo o corpo.

Todos os elementos finitos possuem certo número de pontos, com determinadas localizações, chamados de nós. Estes, por sua vez, possuem os parâmetros nodais ou graus de liberdade, que são os valores, nos respectivos nós, da função aproximadora que descreve a desejada grandeza. Com estes dados, pode-se obter a expressão da variável no domínio do elemento e calcular outras variáveis de interesse.

Pode-se exemplificar o que foi dito no parágrafo anterior com o chamado modelo de deslocamentos ou da rigidez, pertencente ao MEF, da seguinte maneira: para uma estrutura discretizada em elementos finitos e com conhecidos carregamento e rigidez, obtidos os deslocamentos dos nós, pode-se determinar, via interpolação, a expressão que descreve o campo de deslocamentos no domínio de cada elemento finito e, assim, a posição final de todo o corpo. Com isso, é possível calcular, com uso da compatibilidade, as deformações e, com a lei constitutiva, as tensões em cada ponto material da estrutura.

## 5.2. Metodologia

Usou-se, neste trabalho, a formulação Lagrangiana posicional, descrita por CODA (2003), na qual o campo incógnito é a posição final da estrutura, as tensões e deformações são calculadas em relação à configuração de referência e o equilíbrio é expresso pela minimização do funcional energia de deformação, dada por expressões adequadas a cada material e escritas em função da deformação de Green-Lagrange.

Deve-se, inicialmente, fazer a discretização ou a divisão do domínio do corpo em elementos finitos, ilustrada de maneira geral na figura 5.1, a partir da qual se pode concluir:

$$\Omega = \sum_{i=1}^{NEL} \Omega_i \tag{5.1}$$

onde  $\Omega$  é o domínio e  $NEL$  é o número de elementos finitos.

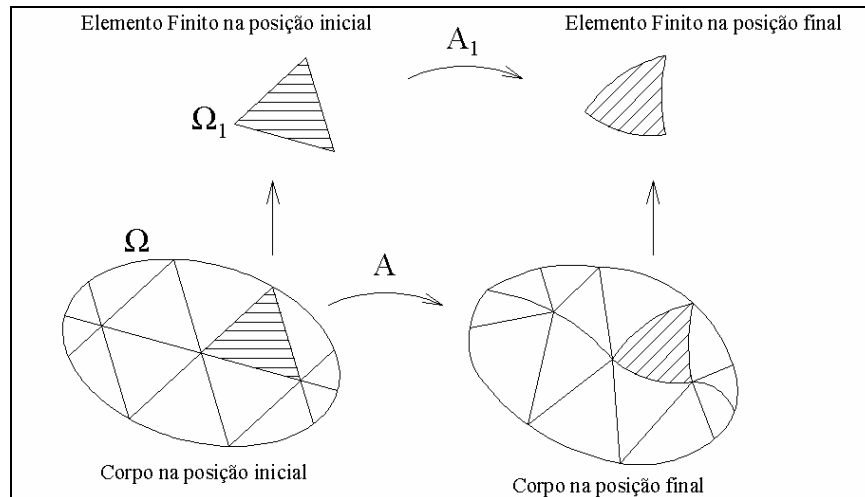


Figura 5.1 - Discretização do Domínio em Elementos Finitos

Para o sólido mostrado na figura 5.2, são escolhidas, com o artifício de uso da configuração auxiliar, as funções aproximadoras das mudanças de posição inicial e final:

$$\begin{aligned} \vec{f}^0 &= \vec{f}^0(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \vec{X}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \Rightarrow \\ \Rightarrow f^0_i &= X_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \sum_j \phi_j(\xi_1, \xi_2, \xi_3) X_{ji} \end{aligned} \quad 5.2.1$$

$$\begin{aligned} \vec{f}^1 &= \vec{f}^1(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \vec{Y}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \Rightarrow \\ \Rightarrow f^1_i &= Y_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \sum_j \phi_j(\xi_1, \xi_2, \xi_3) Y_{ji} \end{aligned} \quad 5.2.2$$

onde  $\xi_1$ ,  $\xi_2$  e  $\xi_3$  são as coordenadas adimensionais de Gauss,  $\mathbf{X}$  é o vetor posição inicial,  $\mathbf{Y}$  é o vetor posição final,  $X_{ji}$  é a coordenada inicial, na direção  $i$ , do nó  $j$ ,  $Y_{ji}$  é a final,  $\mathbf{f}^0$  é o mapeamento da configuração adimensional auxiliar para a inicial,  $\mathbf{f}^1$  é da auxiliar para a final e  $\Phi_j$  são as funções de forma relativas ao nó  $j$ .



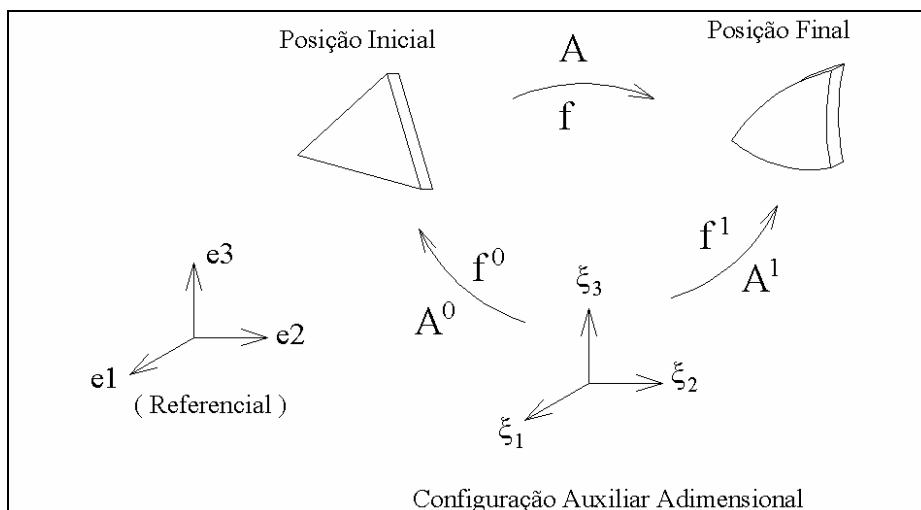


Figura 5.2 - Mapeamento das Configurações Inicial, Final e Auxiliar

Nota-se facilmente que as funções aproximadoras são combinações entre as conhecidas funções de forma e os incógnitos valores nodais. É possível dizer, portanto, que as funções aproximadoras para certo elemento finito dependem apenas dos valores nodais dele. Além disso, as independentes coordenadas finais  $Y_{ji}$ , que são as respostas do problema, recebem o nome de graus de liberdade nodais, os quais, no caso deste trabalho, são posições nodais.

As funções de forma adotadas neste trabalho obedecem às seguintes condições:

$$\phi_J = \phi_J(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = 1, \text{ para } \vec{X} = \vec{X}_J \quad 5.3.1$$

$$\phi_J = \phi_J(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = 0, \text{ para } \vec{X} = \vec{X}_K, K \neq J \quad 5.3.2$$

ou seja, elas valem um nos seus respectivos nós e zero nos demais.

As expressões das funções de forma são obtidas conforme as condições (5.3), do número e localização dos nós e das hipóteses cinemáticas adotadas.

Assim, é possível concluir, a partir da figura 5.2 e da definição do gradiente da função mudança de configuração as seguintes equações:

$$\vec{f} = \vec{f}(\vec{X}) = (\vec{f}^1) \circ (\vec{f}^0)^{-1} \quad 5.4.1$$

$$A^0 = A^0(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \text{Grad} \left[ \vec{f}^0(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \right] \quad 5.4.2$$

$$(A^0)_{ij} = \frac{\partial f^0_i}{\partial \xi_j} \quad 5.4.3$$

$$A^1 = A^1(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \text{Grad} \left[ \vec{f}^1(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \right] \quad 5.4.4$$

$$(A^1)_{ij} = \frac{\partial f^1_i}{\partial \xi_j} \quad 5.4.3$$

$$A = \text{Grad}(\vec{f}) = \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{X}} = (A^1)(A^0)^{-1} \quad 5.4.6$$

Calculado o gradiente, podem ser obtidos os tensores alongamento à direita de Cauchy-Green e deformação de Green-Lagrange:

$$C = A^T A = \left[ (A^1)(A^0)^{-1} \right]^T \left[ (A^1)(A^0)^{-1} \right] \quad 5.5.1$$

$$E = \frac{1}{2}(C - I) = \frac{1}{2} \left\{ \left[ (A^1)(A^0)^{-1} \right]^T \left[ (A^1)(A^0)^{-1} \right] - I \right\} \quad 5.5.2$$

onde  $I$  é o tensor identidade de segunda ordem.

Para determinação da tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie, que é conjugada da deformação de Green-Lagrange para cálculo da energia, usa-se a Lei Constitutiva, que é a resposta do material. Tal relação pode ser expressa, no caso de materiais hiperelásticos, pela energia específica de deformação, representada por  $\Psi$ . Assim, é possível determinar a desejada tensão com a seguinte fórmula:

$$S = \frac{\partial \Psi}{\partial E} \Rightarrow S_{ij} = \frac{\partial \Psi}{\partial E_{ij}} \quad 5.6$$

Pode-se, com o conhecimento da sollicitação estrutural, da geometria e das propriedades do material, obter a expressão da energia potencial total, que depende dos parâmetros nodais, em problemas estáticos:

$$\Pi = \Pi(\vec{Y}) = U_e^0 + P = \int_{V_0} \Psi dV_0 - F_K Y_K \quad (k = 1, n) \quad 5.7$$

onde  $Y_K$  é um grau de liberdade,  $F_K$  é a força correspondente a este parâmetro nodal e  $n$  é o número total de graus de liberdade do elemento finito.

O equilíbrio estático de forças na posição final, via Princípio da Mínima Energia Potencial Total, e a consideração de forças conservativas, que não variam com a posição, resultam em:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \vec{Y}} = \vec{0} \Rightarrow \frac{\partial U_e^0}{\partial \vec{Y}} + \frac{\partial P}{\partial \vec{Y}} = \vec{0} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \vec{Y}} \left[ \int_{V_0} \Psi dV_0 \right] = \frac{\partial}{\partial \vec{Y}} [F_K Y_K] \Rightarrow \quad 5.8.1$$

$$\Rightarrow \int_{V_0} \left[ \frac{\partial \Psi}{\partial \vec{Y}} \right] dV_0 = F_K \frac{\partial Y_K}{\partial \vec{Y}}$$

$$\vec{F}_{\text{int}} = \int_{V_0} \left[ \frac{\partial \Psi}{\partial \vec{Y}} \right] dV_0 \quad 5.8.2$$

$$\vec{F}_{\text{ext}} = F_K \frac{\partial Y_K}{\partial \vec{Y}} \quad 5.8.3$$

$$(F_{\text{int}})_i = \int_{V_0} \left[ \frac{\partial \Psi}{\partial Y_i} \right] dV_0 \quad 5.8.4$$

$$(F_{\text{ext}})_i = F_i \quad 5.8.5$$

onde  $F_i$  é o carregamento externo aplicado correspondente ao grau de liberdade  $i$ .

A análise não linear geométrica, segundo a formulação Lagrangiana posicional do MEF, consiste na determinação da configuração final, representada pelo vetor  $\mathbf{Y}$ , que satisfaça a seguinte relação:

$$\overrightarrow{F}_{int} = \overrightarrow{F}_{ext} \quad 5.9$$

### 5.3. Procedimento Numérico

Devido ao caráter, geralmente, não linear da equação (5.9), é extremamente difícil explicitar ou encontrar diretamente sua solução exata. Assim, é necessário usar uma estratégia numérica para resolver o problema. Optou-se neste trabalho pelo Método de Newton-Raphson, cujo procedimento está descrito a seguir.

Estima-se a posição final  $\mathbf{Y}$  e calcula-se o chamado resíduo:

$$\overrightarrow{g}_0 = \overrightarrow{F}_{int} - \overrightarrow{F}_{ext} \Rightarrow (g_0)_i = \left[ g_0(\vec{Y} = \vec{Y}_0) \right]_i = (F_{int})_i - (F_{ext})_i \quad 5.10$$

onde  $\mathbf{Y}_0$  é a primeira posição final estimada, ou primeira tentativa, e  $\mathbf{g}_0$  é o resíduo inicial.

O procedimento numérico, em questão, consiste em encontrar a configuração final que anule o resíduo. Portanto, se o vetor  $\mathbf{g}_0$  não for suficientemente pequeno, deve-se estimar outra posição final,  $\mathbf{Y}_1 = \mathbf{Y}_0 + \Delta\mathbf{Y}_0$ , e calcular o novo resíduo  $\mathbf{g}_1$ .

Para determinação do incremento  $\Delta\mathbf{Y}_0$ , deve-se expandir  $\mathbf{g}_1$  em série de Taylor:

$$(\mathbf{g}_1)_i = (\mathbf{g}_0)_i + \Delta(\mathbf{g}_1)_i = 0 \quad 5.11.1$$

$$\Delta(\mathbf{g}_1)_i = \frac{\partial(\mathbf{g}_0)_i}{\partial Y_j} \Delta Y_j + o^2 = H^0_{ij} \Delta Y_j + o^2 \quad 5.11.2$$

onde  $\mathbf{H}$  recebe o nome de matriz Hessiana, ou rigidez tangente, e o termo a ser desprezado  $o^2$  representa as derivadas de ordem superior.

É possível concluir, a partir das expressões (5.8), (5.10) e (5.11), as fórmulas gerais para cálculo da Hessiana e da nova posição tentativa:

$$H^0_{ij} = \frac{\partial(\mathbf{g}_0)_i}{\partial Y_j} = \left[ \frac{\partial(F_{int})_i}{\partial Y_j} - \frac{\partial(F_{ext})_i}{\partial Y_j} \right]_{\vec{Y}=\vec{Y}_0} = \int_{V_0} \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y_i \partial Y_j} \right)_{\vec{Y}=\vec{Y}_0} dV_0 \quad 5.12.1$$

$$(\Delta Y_0)_j = (Y_1)_j - (Y_0)_j = -(H^0_{ij})^{-1} (\mathbf{g}_0)_i \Rightarrow \overrightarrow{\Delta Y_0} = -(H^0)^{-1} \overrightarrow{\mathbf{g}_0} \quad 5.12.2$$

$$(Y_1)_j = (Y_0)_j + (\Delta Y_0)_j \Rightarrow \overrightarrow{Y_1} = \overrightarrow{Y_0} - (H^0)^{-1} \overrightarrow{\mathbf{g}_0} \quad 5.12.3$$

Pode-se resumir os passos do método numérico de Newton-Raphson no seguinte algoritmo:

- 1) Estima-se a posição final  $\mathbf{Y}$ ;
- 2) Calcula-se, com as equações (5.8) e (5.10), o correspondente resíduo  $\mathbf{g}$ ;
- 3) Calcula-se, com a expressão (5.12.1), a correspondente matriz Hessiana  $\mathbf{H}$ ;
- 4) Calcula-se, com a fórmula (5.12.2), o incremento em  $\mathbf{Y}$ ;
- 5) Atualiza-se, com a equação (5.12.3), a posição final;
- 6) Realiza-se o seguinte teste:

Se  $\Delta \mathbf{Y}$  ou  $\mathbf{g}$  é suficientemente pequeno, a posição, após a atualização no quinto passo, é a resposta para o problema;

Caso contrário, repete-se do segundo ao quinto passo.

Devido a suas características, o procedimento numérico aqui descrito também recebe o nome de Método Iterativo de Newton-Raphson.

Ademais, quando o carregamento é grande o suficiente para causar altas deformações, costuma-se dividir as cargas em incrementos e aplicá-los nos chamados passos de carga.

### 5.3.1. Exemplo Gráfico

É possível ilustrar, com uso da figura 5.3, o procedimento iterativo de Newton-Raphson, para o caso de apenas um grau de liberdade livre e, portanto, uma força aplicada.

São conhecidas a função  $F = F(Y)$  e sua derivada em relação a  $Y$ , isto é, dado o valor de  $Y$ , obtém-se, com simples substituição, a magnitude de  $F$  e de sua derivada. Porém, não se conhece a inversa de  $F$ , ou seja, a função  $Y = Y(F)$ . Assim, dada a intensidade de  $F$ , não se consegue calcular explicitamente o valor correspondente de  $Y$ .

Na figura 5.3, o par  $(Y_i, F_i)$  representa, respectivamente, a posição e a força na configuração inicial, e  $(Y_f, F_f)$  na final. Os pares  $(Y_n, F_n)$  representam as tentativas. Os ângulos  $\alpha_n$  são as inclinações das retas tangentes ao gráfico da função  $F(Y)$  no ponto de coordenadas  $(Y_n, F_n)$ .

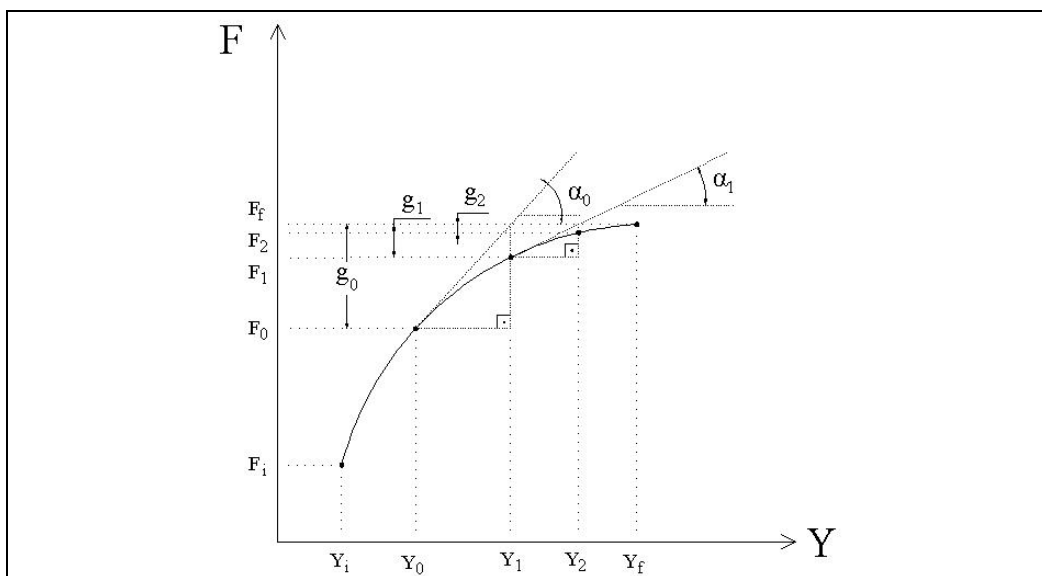


Figura 5.3 – Método Iterativo de Newton-Raphson

Estimada a primeira tentativa para a posição final  $Y_0$ , calcula-se o resíduo e a rigidez tangente iniciais:

$$g_0 = F_f - F_0 = F_f - F(Y_0) \quad 5.13.1$$

$$tg(\alpha_0) = H_0 = \frac{\partial F(Y_0)}{\partial Y} \Rightarrow \alpha_0 = \arctan(H_0) \quad 5.13.2$$

Com estes dois valores, define-se, na figura, um triângulo retângulo e calcula-se a nova tentativa  $Y_1$ . Repete-se a iteração, com a obtenção dos novos resíduo e rigidez tangente, até que  $Y_n$  seja suficientemente próximo de  $Y_f$  ou  $g_n$  seja próximo de zero.

#### 5.4. Montagem do Sistema Global

As expressões (5.8), (5.10) e (5.12) são úteis para o cálculo das forças internas, do resíduo e da Hessiana, para um único elemento finito. É possível, assim, montar o sistema local, isto é, o sistema referente ao domínio de cada elemento:

$$\begin{aligned} \vec{g} = H\Delta\vec{Y} &\Rightarrow g_i = H_{ij}(\Delta Y)_j, (i, j = 1, n) \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{Bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_n \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & \dots & H_{1n} \\ H_{21} & H_{22} & \dots & H_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{n1} & H_{n2} & \dots & H_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} (\Delta Y)_1 \\ (\Delta Y)_2 \\ \vdots \\ (\Delta Y)_n \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad 5.14$$

Deve-se, porém, montar e resolver o sistema global para toda a estrutura, ou seja, para todos os elementos finitos. Isto porque a resposta, ou a posição final, deve ser obtida com a consideração da influência de cada elemento em todo o corpo.

Pode-se demonstrar a montagem do sistema global, a partir dos locais, com o seguinte exemplo unidimensional: se existem dois parâmetros nodais,  $Y_1$  e  $Y_2$ , e três nós por elemento finito, então há seis parâmetros nodais por elemento. Ademais, se houver cinco nós e dois elementos finitos, como mostra a figura 5.4, então existem, no total, dez graus de liberdade.

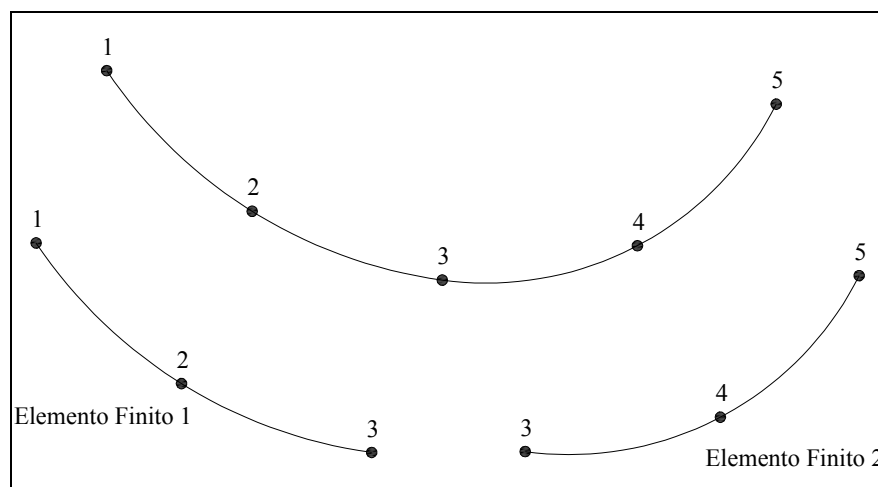


Figura 5.4 - Exemplo Unidimensional para Montagem do Sistema Global



Se  $\mathbf{H}^1$  e  $\mathbf{H}^2$  são, respectivamente, as Hessianas dos elementos finitos 1 e 2, então estas matrizes possuem dimensão 6 x 6, pois a Hessiana representa a derivada parcial da energia de deformação em relação a cada um dos seis graus de liberdade existentes em cada elemento finito. Analogamente, os vetores  $\mathbf{g}^1$ ,  $\mathbf{g}^2$ ,  $\Delta\mathbf{Y}^1$  e  $\Delta\mathbf{Y}^2$  possuem seis componentes. Portanto, pode-se escrever os dois sistemas locais:

$$\begin{cases} \mathbf{g}_1^1 \\ \mathbf{g}_2^1 \\ \mathbf{g}_3^1 \\ \mathbf{g}_4^1 \\ \mathbf{g}_5^1 \\ \mathbf{g}_6^1 \end{cases} = \begin{bmatrix} H_{11}^1 & H_{12}^1 & H_{13}^1 & H_{14}^1 & H_{15}^1 & H_{16}^1 \\ H_{21}^1 & H_{22}^1 & H_{23}^1 & H_{24}^1 & H_{25}^1 & H_{26}^1 \\ H_{31}^1 & H_{32}^1 & H_{33}^1 & H_{34}^1 & H_{35}^1 & H_{36}^1 \\ H_{41}^1 & H_{42}^1 & H_{43}^1 & H_{44}^1 & H_{45}^1 & H_{46}^1 \\ H_{51}^1 & H_{52}^1 & H_{53}^1 & H_{54}^1 & H_{55}^1 & H_{56}^1 \\ H_{61}^1 & H_{62}^1 & H_{63}^1 & H_{64}^1 & H_{65}^1 & H_{66}^1 \end{bmatrix} \begin{cases} \Delta Y_1^1 \\ \Delta Y_2^1 \\ \Delta Y_3^1 \\ \Delta Y_4^1 \\ \Delta Y_5^1 \\ \Delta Y_6^1 \end{cases} \quad 5.15.1$$

$$\begin{cases} \mathbf{g}_1^2 \\ \mathbf{g}_2^2 \\ \mathbf{g}_3^2 \\ \mathbf{g}_4^2 \\ \mathbf{g}_5^2 \\ \mathbf{g}_6^2 \end{cases} = \begin{bmatrix} H_{11}^2 & H_{12}^2 & H_{13}^2 & H_{14}^2 & H_{15}^2 & H_{16}^2 \\ H_{21}^2 & H_{22}^2 & H_{23}^2 & H_{24}^2 & H_{25}^2 & H_{26}^2 \\ H_{31}^2 & H_{32}^2 & H_{33}^2 & H_{34}^2 & H_{35}^2 & H_{36}^2 \\ H_{41}^2 & H_{42}^2 & H_{43}^2 & H_{44}^2 & H_{45}^2 & H_{46}^2 \\ H_{51}^2 & H_{52}^2 & H_{53}^2 & H_{54}^2 & H_{55}^2 & H_{56}^2 \\ H_{61}^2 & H_{62}^2 & H_{63}^2 & H_{64}^2 & H_{65}^2 & H_{66}^2 \end{bmatrix} \begin{cases} \Delta Y_1^2 \\ \Delta Y_2^2 \\ \Delta Y_3^2 \\ \Delta Y_4^2 \\ \Delta Y_5^2 \\ \Delta Y_6^2 \end{cases} \quad 5.15.2$$

onde  $\mathbf{g}_i^j$  é o resíduo relativo ao grau de liberdade  $i$  do elemento  $j$ ,  $H_{ij}^k$  é a componente da Hessiana correspondente aos parâmetros  $i$  e  $j$  do elemento  $k$  e  $\Delta Y_i^j$  é o incremento na posição relativo ao grau de liberdade  $i$  do elemento  $j$ .

É possível, com análise da figura 5.4, relacionar os graus de liberdade locais com os globais, da seguinte maneira:

$$Y_1 = Y_1^1 \quad 5.16.1$$

$$Y_2 = Y_2^1 \quad 5.16.2$$

$$Y_3 = Y_3^1 \quad 5.16.3$$

$$Y_4 = Y_4^1 \quad 5.16.5$$

$$Y_5 = Y_5^1 = Y_1^2 \quad 5.16.6$$

$$Y_6 = Y_6^1 = Y_2^2 \quad 5.16.7$$

$$Y_7 = Y_3^2 \quad 5.16.8$$

$$Y_8 = Y_4^2 \quad 5.16.5$$

$$Y_9 = Y_5^1 \quad 5.16.9$$

$$Y_{10} = Y_6^1 \quad 5.16.10$$

Para montagem do sistema global, neste caso 10 x 10, considera-se as contribuições de cada elemento finito, ou seja, a rigidez de cada elemento à variação dos parâmetros nodais.

Portanto, é necessário somar as componentes relativas ao mesmo grau de liberdade, isto é:

$$\vec{g}_G = \left[ \left( \vec{F}_{\text{int}} \right)_G - \left( \vec{F}_{\text{ext}} \right)_G \right] = H_G \left( \overrightarrow{\Delta Y}_G \right) \quad 5.17.1$$

$$\vec{g}_G = \left\{ \begin{array}{l} (F_{\text{int}})_1^1 - (F_{\text{ext}})_1 \\ (F_{\text{int}})_2^1 - (F_{\text{ext}})_2 \\ (F_{\text{int}})_3^1 - (F_{\text{ext}})_3 \\ (F_{\text{int}})_4^1 - (F_{\text{ext}})_4 \\ (F_{\text{int}})_5^1 + (F_{\text{int}})_1^2 - (F_{\text{ext}})_5 \\ (F_{\text{int}})_6^1 + (F_{\text{int}})_2^2 - (F_{\text{ext}})_6 \\ (F_{\text{int}})_3^2 - (F_{\text{ext}})_7 \\ (F_{\text{int}})_4^2 - (F_{\text{ext}})_8 \\ (F_{\text{int}})_5^2 - (F_{\text{ext}})_9 \\ (F_{\text{int}})_6^2 - (F_{\text{ext}})_{10} \end{array} \right\} \quad 5.17.2$$

$$H_G = \begin{bmatrix} H_{11}^1 & H_{11}^1 & H_{13}^1 & H_{14}^1 & H_{15}^1 & H_{16}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ H_{21}^1 & H_{22}^1 & H_{23}^1 & H_{24}^1 & H_{25}^1 & H_{26}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ H_{31}^1 & H_{32}^1 & H_{33}^1 & H_{34}^1 & H_{35}^1 & H_{36}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ H_{41}^1 & H_{42}^1 & H_{43}^1 & H_{44}^1 & H_{45}^1 & H_{46}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ H_{51}^1 & H_{52}^1 & H_{53}^1 & H_{54}^1 & H_{55}^1 + H_{11}^2 & H_{56}^1 + H_{12}^2 & H_{13}^2 & H_{14}^2 & H_{15}^2 & H_{16}^2 \\ H_{61}^1 & H_{62}^1 & H_{63}^1 & H_{64}^1 & H_{65}^1 + H_{21}^2 & H_{66}^1 + H_{22}^2 & H_{23}^2 & H_{24}^2 & H_{25}^2 & H_{26}^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & H_{31}^1 & H_{32}^2 & H_{33}^2 & H_{34}^2 & H_{35}^2 & H_{36}^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & H_{41}^1 & H_{42}^2 & H_{43}^2 & H_{44}^2 & H_{45}^2 & H_{46}^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & H_{51}^1 & H_{52}^2 & H_{53}^2 & H_{54}^2 & H_{55}^2 & H_{56}^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & H_{61}^1 & H_{62}^2 & H_{63}^2 & H_{64}^2 & H_{65}^2 & H_{66}^2 \end{bmatrix} \quad 5.17.3$$

$$\overrightarrow{\Delta Y_G} = \left\{ \begin{array}{l} \Delta Y_1^1 \\ \Delta Y_2^1 \\ \Delta Y_3^1 \\ \Delta Y_4^1 \\ \Delta Y_5^1 \text{ ou } \Delta Y_1^2 \\ \Delta Y_6^1 \text{ ou } \Delta Y_2^2 \\ \Delta Y_3^2 \\ \Delta Y_4^2 \\ \Delta Y_5^2 \\ \Delta Y_6^2 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \Delta Y_1 \\ \Delta Y_2 \\ \Delta Y_3 \\ \Delta Y_4 \\ \Delta Y_5 \\ \Delta Y_6 \\ \Delta Y_7 \\ \Delta Y_8 \\ \Delta Y_9 \\ \Delta Y_{10} \end{array} \right\} \quad 5.17.4$$

## 5.5. Introdução das Condições de Contorno

O determinante de  $\mathbf{H}_G$ , dado em (5.17.3), é igual a zero e, portanto, não existe a inversa dessa matriz. Assim, não há solução para o sistema (5.17.1), o que traduz matematicamente o fato de a estrutura estar solta no espaço, ou seja, sem vínculos. É preciso introduzir as condições de contorno, que são os deslocamentos prescritos, e modificar o sistema global, com o artifício da anulação da linha e da coluna referente ao grau de liberdade

J com valor prescrito, da introdução do valor unitário na componente (J,J) da matriz  $\mathbf{H}_G$  e valor nulo na linha J do vetor do segundo membro.

Por exemplo, as condições de contorno, para o sistema (5.17), são:

$$\Delta Y_1 = \Delta Y_2 = \Delta Y_4 = \Delta Y_6 = \Delta Y_8 = 0 \quad 5.18.1$$

ou 
$$\Delta Y_1^1 = \Delta Y_2^1 = \Delta Y_4^1 = \Delta Y_6^1 = \Delta Y_2^2 = \Delta Y_4^2 = 0 \quad 5.18.2$$

Assim, o sistema global deve ser modificado para o seguinte:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H_{33}^1 & 0 & H_{35}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H_{53}^1 & 0 & H_{55}^1 + H_{11}^2 & 0 & H_{13}^2 & 0 & H_{15}^2 & H_{16}^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & H_{31}^1 & 0 & H_{33}^2 & 0 & H_{35}^2 & H_{36}^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & H_{51}^1 & 0 & H_{53}^2 & 0 & H_{55}^2 & H_{56}^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & H_{61}^1 & 0 & H_{63}^2 & 0 & H_{65}^2 & H_{66}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta Y_1 \\ \Delta Y_2 \\ \Delta Y_3 \\ \Delta Y_4 \\ \Delta Y_5 \\ \Delta Y_6 \\ \Delta Y_7 \\ \Delta Y_8 \\ \Delta Y_9 \\ \Delta Y_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g_3 \\ 0 \\ g_5 \\ 0 \\ g_7 \\ 0 \\ g_9 \\ g_{10} \end{bmatrix} \quad 5.19$$

A matriz Hessiana deste sistema possui determinante diferente de zero e, portanto, pode-se obter sua inversa. É possível, deste modo, calcular os valores não prescritos de  $\Delta \mathbf{Y}_G$ .

Deve-se comentar que no programa disponível foram usados apenas os valores não nulos da matriz Hessiana. Otimiza-se, dessa forma, o processo de montagem e solução dos sistemas lineares de cada iteração.

## 6. Hiperelasticidade

---

Para que se possa aplicar o método dos elementos finitos posicional, tal como descrito no quinto capítulo, em estruturas sujeitas a grandes deslocamentos e deformações, é preciso expressar, na forma de energia específica de deformações, a lei constitutiva do material.

Foram descritas, no quarto capítulo, as relações entre o gradiente mudança de configuração e a tensão de Piola-Kirchhoff de primeira espécie e a deformação de Green-Lagrange com a tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie. Tais grandezas foram definidas como sendo pares conjugados.

Para facilitar a compreensão, seja a seguinte proposta de energia de deformação:

$$\Psi = \frac{1}{2} \varepsilon^{eng}_{ij} D_{ijkl} \varepsilon^{eng}_{kl} \text{ ou } \Psi = \frac{1}{2} \varepsilon^{eng} : (D \varepsilon^{eng}) \quad 6.1$$

onde  $\varepsilon^{eng}$  é a deformação de engenharia e  $D$  é o tensor elástico de quarta ordem.

Esta energia de deformação específica representa a tradicional relação elástica linear de engenharia e sua derivada resulta em:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon^{eng}_{ij}} = \sigma^{eng}_{ij} = D_{ijkl} \varepsilon^{eng}_{kl} \text{ ou } \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon^{eng}} = \sigma^{eng} = D \varepsilon^{eng} \quad 6.2$$

onde  $\sigma_{\text{eng}}$  é a tensão de engenharia.

Comentou-se, no quarto capítulo, que  $\epsilon^{\text{eng}}$  é um pseudo tensor e, portanto, as expressões (6.1) e (6.2) não podem ser usadas sem alguns cuidados adicionais pois não preservam isotropia (CODA & PACCOLA, 2007).

Entretanto, pode-se propor, para a elasticidade, a seguinte expressão baseada na deformação de Green-Lagrange:

$$\Psi = \frac{1}{2} E_{ij} D_{ijkl} E_{kl} \quad \text{ou} \quad \Psi = \frac{1}{2} E : (DE) \quad 6.3$$

que, para pequenas deformações, também representa comportamento elástico linear dos materiais.

Estas leis constitutivas permitem que, para tensões limitadas, se encontre níveis de deformação, com encurtamento ou distorção, suficientes para degenerar cinematicamente a representação do material, isto é, encontra-se para  $\sigma^{\text{eng}}$  finito a expressão  $\det(\mathbf{A}) = J < 0$ .

Para que esta degeneração não ocorra, leis constitutivas adequadas para materiais chamados hiperelásticos devem ser escritas. O objetivo deste capítulo - e também do trabalho - é mostrar a construção destas leis, de forma a implementá-las e testá-las nos códigos computacionais desenvolvidos inicialmente para materiais elásticos.

## 6.1. Materiais Hiperelásticos

O modelo mais adequado para materiais elásticos altamente deformáveis é a hiperelasticidade. O material hiperelástico ou material elástico de Green postula, segundo

HOLZAPFEL (2000), a existência da função energia específica de deformação  $\Psi$ , chamada também de energia livre de Helmholtz, por unidade de volume inicial, que pode ser descrita, no caso de materiais homogêneos e isotrópicos, das seguintes formas equivalentes:

$$\psi = \psi(A) = \psi(C) = \psi(E) = \psi(I_1, I_2, I_3) = \psi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \quad 6.4$$

onde  $\mathbf{A}$  é o tensor gradiente da função mudança de configuração,  $\mathbf{C}$  o tensor alongamento à direita de Cauchy-Green,  $\mathbf{E}$  é o tensor deformação de Green-Lagrange,  $I_1, I_2$  e  $I_3$  são os invariantes de  $\mathbf{C}$  e  $\lambda_1, \lambda_2$  e  $\lambda_3$  os alongamentos principais.

A função  $\Psi$  deve obedecer às seguintes condições:

$$\psi(C = I) = \psi(E = 0) = 0 \quad (\text{normalização}) \quad 6.5.1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi \rightarrow +\infty, \det(A) \rightarrow +\infty \\ \psi \rightarrow +\infty, \det(A) \rightarrow 0^+ \end{array} \right\} \quad (\text{crescimento}) \quad 6.5.2$$

$$\psi(A) = \psi(A^*) = \psi(QA) \quad (\text{movimento de corpo rígido}) \quad 6.5.3$$

$$\psi(A) = \psi(RU) = \psi(U) \quad (\text{decomposição polar}) \quad 6.5.4$$

onde  $\mathbf{R}$  é o tensor rotação e  $\mathbf{Q}$  o tensor ortogonal.

Analogamente à relação (3.34), a função  $\Psi$  é isotrópica quando:

$$\psi(A) = \psi(AQ^T) \quad 6.6.1$$

ou 
$$\psi(C) = \psi(QCQ^T) \quad 6.6.2$$

Ademais, o trabalho realizado pelas tensões, no material hiperelástico, independe da trajetória do movimento, isto é, depende apenas das posições inicial e final.

A mais simples lei hiperelástica é a relação linear de Saint Venant-Kirchhoff, que é a derivada da expressão (6.3) em relação ao tensor de deformações de Green-Lagrange  $\mathbf{E}$ :

$$\mathbf{S} = \lambda[\text{tr}(\mathbf{E})]\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{E} \quad 6.7$$

onde  $\mathbf{S}$  é o tensor da tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie.

Pode-se dizer, também, que a energia específica de deformação por unidade de volume inicial, em situações nas quais apenas o produto  $S_{11} \times E_{11}$  é diferente de zero, é numericamente igual à área hachurada da figura 6.1, na qual foi escolhido o par conjugado tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie, que avança até  $S^*$ , e deformação de Green-Lagrange, que vai até o nível  $E^*$ .

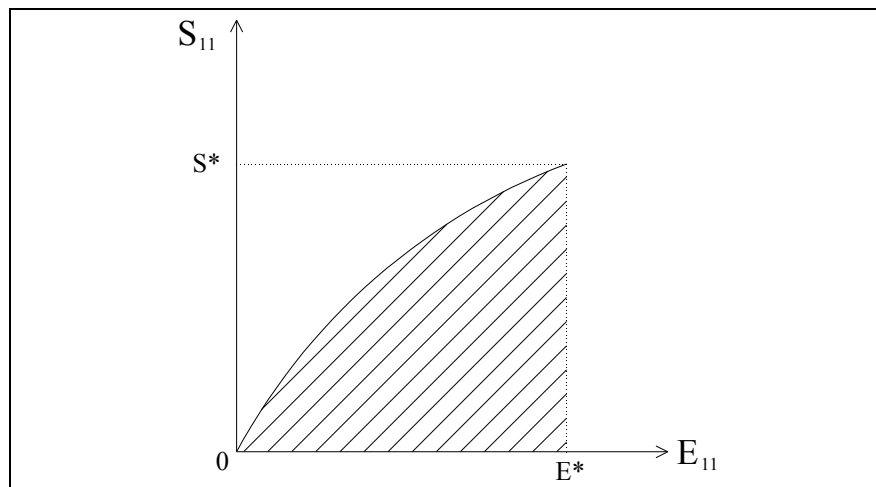


Figura 6.1 - Energia Específica de Deformação



### 6.1.1. Relações Constitutivas em termos dos Invariantes de Deformação

Uma das maneiras de se expressar a função energia específica de deformação para materiais isotrópicos, como mostra a equação (6.4), é com uso dos invariantes de deformação, dados por:

$$I_1 = I_1(C) = \text{tr}(C) = C_{ii} = C_{11} + C_{22} + C_{33} \quad 6.8.1$$

$$I_2 = I_2(C) = \frac{1}{2}[(\text{tr}C)^2 + \text{tr}(C^2)] = \text{tr}(C^{-1})\det(C) \quad 6.8.2$$

$$I_3 = I_3(C) = \det(C) \quad 6.8.3$$

Assim, pode-se escrever a seguinte fórmula:

$$\psi = \psi[I_1(C), I_2(C), I_3(C)] \quad 6.9$$

A partir dos requisitos da função de Helmholtz, dados pelas expressões (6.5), RIVLIN (1956) descreveu a equação geral da lei constitutiva para materiais isotrópicos e hiperelásticos:

$$\psi = \psi(I_1, I_2, I_3) = c_{ijk} (I_1 - 3)^i (I_2 - 3)^j (I_3 - 1)^k \quad 6.10$$

onde  $c_{ijk}$  são os coeficientes do material, sendo que  $i, j, e k$  variam de zero até o número inteiro  $N$ , que determina a quantidade de coeficientes para cada modelo.

### 6.1.2. Materiais Incompressíveis

É possível simplificar a equação (6.10) ao considerar que o terceiro invariante do tensor  $\mathbf{C}$  é, ao longo de todo o corpo, igual a um, isto é:

$$I_3(\mathbf{C}) = \det(\mathbf{C}) = J^2 = 1 \Rightarrow J = \frac{V_f}{V_o} = 1 \Rightarrow V_f = V_o \quad 6.11$$

onde  $J$  é o jacobiano,  $V_o$  é o volume inicial e  $V_f$  o volume final. Tal aproximação é válida para muitos materiais poliméricos, nos quais é desprezível a variação volumétrica. Pode-se, deste modo, expressar a função  $\Psi$  das seguintes maneiras:

$$\psi = \psi(\mathbf{C}) - p(J - 1) \quad 6.12.1$$

$$\psi = \psi(I_1, I_2) = \sum_{i,j=0}^N c_{ij} (I_1 - 3)^i (I_2 - 3)^j \quad 6.12.2$$

onde  $p$  é a pressão hidrostática, a ser determinada com as condições de contorno.

Estão descritas, a seguir, as fórmulas dos principais modelos hiperelásticos para materiais isotrópicos, homogêneos e incompressíveis:

$$\psi = \frac{G}{4} \sum_{i=1}^3 \left( \lambda_i - \frac{1}{\lambda_i} \right)^2 + \frac{H}{4} \sum_{i=3}^3 \left( \lambda_i^2 - \frac{1}{\lambda_i^2} \right) \quad (\text{Mooney}) \quad 6.13.1$$

$$\psi = C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3) \quad (\text{Mooney-Rivlin}) \quad 6.13.2$$

$$\psi = w(\lambda_1) + w(\lambda_2) + w(\lambda_3) \quad (\text{Valanis-Landel}) \quad 6.13.3$$

$$\psi = \sum_{p=1}^n \left[ \frac{\mu_p}{\alpha_p} (\lambda_1^{\alpha_p} + \lambda_2^{\alpha_p} + \lambda_3^{\alpha_p} - 3) \right] \quad \text{(Ogden)} \quad 6.13.4$$

$$\psi = C_{10}(I_1 - 3) \quad \text{(neo-Hookeano)} \quad 6.13.5$$

$$\psi = C_{10}(I_1 - 3) + C_{20}(I_1 - 3)^2 + C_{30}(I_1 - 3)^3 \quad \text{(Yeoh)} \quad 6.13.6$$

$$\psi = \mu \left[ \frac{1}{2}(I_1 - 3) + \frac{1}{20n}(I_1^2 - 9) + \frac{11}{1050n}(I_1^3 - 27) + \dots \right] \quad \text{(Arruda-Boyce)} \quad 6.13.7$$

$$\psi = \frac{A}{B} [1 - e^{-B(I_1-3)}] - C_{10}(I_m - 3) \ln \left[ 1 - \frac{I_1 - 3}{I_m - 3} \right] \quad \text{(Yeoh-Fleming)} \quad 6.13.8$$

$$\psi = C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3) + C_{20}(I_1 - 3)^2 + C_{02}(I_2 - 3)^2 + C_{30}(I_1 - 3)^3 \quad \text{(Bechir-Boufala-Chevalier)} \quad 6.13.9$$

$$\psi = \alpha(I_1^3 - 27) + c_{10}(I_1 - 3) + c_{01}(I_2^{3/2} - 3\sqrt{3}) \quad \text{(Hartmann-Neff)} \quad 6.13.10$$

$$\psi = C_{10}(I_1 - 3) + C_{20}(I_1 - 3)^2 + C_{30}(I_1 - 3)^3 + \frac{\alpha}{\beta} [1 - e^{-\beta(I_1-3)}] \quad \text{(Yeoh modificado)} \quad 6.13.11$$

### 6.1.3. Materiais Compressíveis

Os materiais compressíveis são aqueles que exibem alteração volumétrica significativa, isto é:

$$J \neq 1 \Rightarrow V_f \neq V_0 \quad 6.14$$

Pode ser utilizado, neste caso, o artifício da decomposição multiplicativa, na qual o gradiente é separado em duas parcelas:

$$A = \hat{A}\bar{A} \quad 6.15.1$$

$$\hat{A} = \left( J^{\frac{1}{3}} \right) I \Rightarrow \det(\hat{A}) = J \quad (\text{parcela volumétrica}) \quad 6.15.2$$

$$\bar{A} = \left( J^{-\frac{1}{3}} \right) A \Rightarrow \det(\bar{A}) = 1 \quad (\text{parcela isocórica}) \quad 6.15.3$$

Tal decomposição permite calcular o modificado alongamento à direita de Cauchy-Green e seus invariantes:

$$\bar{C} = (\bar{A}^T) \bar{A} = \left( J^{-\frac{2}{3}} \right) A^T A = \left( J^{-\frac{2}{3}} \right) C \quad 6.16.1$$

$$\bar{I}_1 = tr(\bar{C}) \quad 6.16.2$$

$$\bar{I}_2 = \det(\bar{C}) tr(\bar{C}^{-1}) = tr(\bar{C}^{-1}) \quad 6.16.3$$

$$\bar{I}_3 = \det(\bar{C}) = [\det(\bar{A})]^2 = 1 \quad 6.16.4$$

É possível, segundo DÜSTER *et al.* (2003), expressar a energia específica de deformação da seguinte maneira:

$$\psi = \psi(J, \bar{C}) = \psi_{vol}(J) + \psi_{iso}(\bar{C}) \quad 6.17$$

onde  $\Psi_{vol}$  se refere à parcela de deformação com alteração de volume e  $\Psi_{iso}$  àquela com preservação.

Pode-se usar, para a parcela isocórica da energia, uma das expressões (6.13) e, para a parte volumétrica, uma das seguintes equações:

$$\psi_{vol}(J) = k(J^{2n} + J^{-2n} - 2) \quad (\text{DÜSTER } et al., 2003) \quad 6.18.1$$

$$\psi_{vol}(J) = (J - 1)^k, k > 1 \quad (\text{HARTMANN \& NEFF, 2003}) \quad 6.18.2$$

$$\psi_{vol} = k\beta^{-2}(\beta \ln J + J^{-\beta} - 1) \quad (\text{OGDEN, 1972b}) \quad 6.18.3$$

onde  $k$  é o módulo de compressão volumétrica - o *bulk modulus* - e  $n$  é o coeficiente empírico.

Ademais, o material é considerado quase incompressível ou pouco compressível quando a ocorrência de deformação volumétrica requer um trabalho muito maior do que a de deformação isocórica.

Por fim, devido à simplicidade matemática e à presença, em artigos encontrados durante a pesquisa, de comentários e gráficos obtidos de ensaios em laboratório, foram escolhidos, neste trabalho, os seguintes modelos hiperelásticos não-lineares:

$$\psi = k(J^{2n} + J^{-2n} - 2) + c_1(\bar{I}_1 - 3) + c_2(\bar{I}_1 - 3)^2 + c_3(\bar{I}_1 - 3)^3 \quad 6.19.1$$

$$\psi = k(J^5 + J^{-5} - 2) + \alpha(\bar{I}_1^3 - 27) + c_{10}(\bar{I}_1 - 3) + c_{01}(\bar{I}_2^{3/2} - 3\sqrt{3}) \quad 6.19.2$$

$$\psi = k(J^5 + J^{-5} - 2) + c_{10}(\bar{I}_1 - 3) + c_{20}(\bar{I}_1 - 3)^2 + c_{30}(\bar{I}_1 - 3)^3 + c_{01}(\bar{I}_2 - 3) + c_{02}(\bar{I}_2 - 3)^2 \quad 6.19.3$$

$$\psi = C_{10}[I_1 - 3 - 2 \ln(J)] + \frac{k}{4}[J^2 - 1 - 2 \ln(J)] \quad 6.19.4$$

$$\psi = C_{10}[I_1 - 3 - 2 \ln(J)] + \frac{k}{2}[\ln(J)]^2 \quad 6.19.5$$

onde  $n$ , que é o coeficiente empírico, pode ser calibrado de acordo com o ensaio.

Deve-se ressaltar que os modelos compressíveis neo-Hookeanos, representados pelas equações (6.19.4) e (6.19.5), não utilizam a decomposição multiplicativa da deformação.

## 6.2. Tensão

Conforme comentado, a tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie pode ser expressa, a partir das equações (6.19) e das propriedades (3.39), da seguinte maneira:

$$S = \frac{\partial \psi(E)}{\partial E} = \frac{\partial \psi_{vol}(E)}{\partial E} + \frac{\partial \psi_{iso}(E)}{\partial E} = S_{vol} + S_{iso} \quad 6.20.1$$

$$S_{vol} = \frac{\partial \psi_{vol}(E)}{\partial E} = \frac{\partial \psi_{vol}(C)}{\partial C} : \frac{\partial C}{\partial E} = \frac{\partial \psi_{vol}(C)}{\partial C} : 2II = 2 \frac{\partial \psi_{vol}(C)}{\partial C} \quad 6.20.2$$

$$S_{iso} = \frac{\partial \psi_{iso}(E)}{\partial E} = 2 \frac{\partial \psi_{iso}(C)}{\partial C} \quad 6.20.3$$

$$\Rightarrow (S_{vol})_{ij} = 2 \frac{\partial \psi_{vol}(C)}{\partial C_{ij}} \quad 6.20.4$$

$$\Rightarrow (S_{iso})_{ij} = 2 \frac{\partial \psi_{iso}(C)}{\partial C_{ij}} \quad 6.20.5$$

$$\therefore (S)_{ij} = (S_{vol})_{ij} + (S_{iso})_{ij} \quad 6.20.6$$

onde  $\mathbf{II}$  é o tensor identidade de quarta ordem.

As fórmulas usadas neste trabalho para cálculo das derivadas de  $\Psi$  em relação ao tensor  $C$  são:

$$\frac{\partial \psi_{vol}(C)}{\partial C} = \frac{\partial \psi_{vol}(J)}{\partial J} \frac{\partial J}{\partial C} \Rightarrow \left( \frac{\partial \psi_{vol}}{\partial C} \right)_{ij} = \left( \frac{\partial \psi_{vol}}{\partial C_{ij}} \right) = \frac{\partial \psi_{vol}(J)}{\partial J} \frac{\partial J}{\partial C_{ij}} \quad 6.21.1$$

$$\frac{\partial J}{\partial C} = \frac{\partial J}{\partial(J^2)} \frac{\partial(J^2)}{\partial C} \Rightarrow \left( \frac{\partial J}{\partial C} \right)_{ij} = \frac{\partial J}{\partial C_{ij}} = \frac{\partial J}{\partial(J^2)} \frac{\partial(J^2)}{\partial C_{ij}} \quad 6.21.2$$

$$\frac{\partial J}{\partial(J^2)} = \frac{1}{2} (J^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} J^{-1} \quad 6.21.3$$

$$\frac{\partial(J^2)}{\partial C} = \frac{\partial}{\partial C} (\det C) = (\det C) C^{-T} = (J^2) C^{-1} \quad 6.21.4$$

$$\frac{\partial \psi_{iso}(C)}{\partial C} = \frac{\partial \psi_{iso}(\bar{C})}{\partial \bar{C}} : \frac{\partial \bar{C}}{\partial C} \Rightarrow \left( \frac{\partial \psi_{iso}}{\partial C} \right)_{ij} = \left( \frac{\partial \psi_{iso}}{\partial C_{ij}} \right) = \frac{\partial \psi_{iso}}{\partial \bar{C}_{kl}} \frac{\partial \bar{C}_{kl}}{\partial C_{ij}} \quad 6.21.5$$

$$\frac{\partial \psi_{iso}}{\partial C} = \frac{\partial \psi_{iso}}{\partial I_1} \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial C} + \frac{\partial \psi_{iso}}{\partial I_2} \frac{\partial \bar{I}_2}{\partial C} \Rightarrow \frac{\partial \psi_{iso}}{\partial \bar{C}_{kl}} = \frac{\partial \psi_{iso}}{\partial I_1} \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial \bar{C}_{kl}} + \frac{\partial \psi_{iso}}{\partial I_2} \frac{\partial \bar{I}_2}{\partial \bar{C}_{kl}} \quad 6.21.6$$

$$\frac{\partial \bar{I}_1}{\partial \bar{C}} = \frac{\partial}{\partial \bar{C}} (\text{tr} \bar{C}) = I \Rightarrow \left( \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial \bar{C}} \right)_{ij} = \delta_{ij} \quad 6.21.7$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{I}_2}{\partial \bar{C}} &= \frac{\partial}{\partial \bar{C}} \left\{ \frac{1}{2} \left[ (\text{tr} \bar{C})^2 - \text{tr}(\bar{C}^2) \right] \right\} = \frac{1}{2} \left[ 2(\text{tr} \bar{C}) I - 2(\bar{C})^T \right] \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left( \frac{\partial \bar{I}_2}{\partial \bar{C}} \right)_{ij} = (\text{tr} \bar{C}) \delta_{ij} - \bar{C}_{ij} \end{aligned} \quad 6.21.8$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{C}}{\partial C} &= \frac{\partial}{\partial C} \left[ (J^2)^{-\frac{1}{3}} C \right] = C \otimes \frac{\partial}{\partial C} \left[ (J^2)^{-\frac{1}{3}} \right] + (J^2)^{-\frac{1}{3}} \frac{\partial C}{\partial C} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left( \frac{\partial \bar{C}}{\partial C} \right)_{ijkl} = C_{ij} \left[ \frac{\partial}{\partial C_{kl}} \left( J^{-\frac{2}{3}} \right) \right] + \left( J^{-\frac{2}{3}} \right) \delta_{ik} \delta_{jl} \end{aligned} \quad 6.21.9$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(J^{-2/3})}{\partial C} &= \frac{\partial \left[ (J^2)^{-1/3} \right]}{\partial(J^2)} \frac{\partial(J^2)}{\partial C} = -\frac{1}{3} (J^2)^{-4/3} (J^2) C^{-1} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left[ \frac{\partial(J^{-2/3})}{\partial C} \right]_{kl} = -\frac{1}{3} (J^2)^{-1/3} (C^{-1})_{kl} \end{aligned} \quad 6.21.10$$

As derivadas de  $\Psi_{vol}$  em relação a  $J$ , de  $\Psi_{iso}$  em relação a  $\bar{I}_1$  e de  $\Psi_{iso}$  em relação a  $\bar{I}_2$ , chamadas aqui de derivadas particulares, são calculadas para cada modelo.

### 6.2.1. Modelo 1

As derivadas particulares do modelo 1, representado pela equação (6.19.1), são:

$$\frac{\partial \Psi_{vol}}{\partial J} = k[2nJ^{2n-1} - 2nJ^{-2n-1}] \quad 6.22.1$$

$$\frac{\partial \Psi_{iso}}{\partial I_1} = c_1 + 2c_2(\bar{I}_1 - 3) + 3c_3(\bar{I}_1 - 3)^2 \quad 6.22.2$$

$$\frac{\partial \Psi_{iso}}{\partial I_2} = 0 \quad 6.22.3$$

### 6.2.2. Modelo 2

As derivadas particulares do modelo 2, dado pela fórmula (6.19.2), são:

$$\frac{\partial \Psi_{vol}}{\partial J} = k[5J^4 - 5J^{-6}] \quad 6.23.1$$

$$\frac{\partial \Psi_{iso}}{\partial I_1} = 3\alpha \bar{I}_1^{-2} + c_{10} \quad 6.23.2$$



$$\frac{\partial \psi_{iso}}{\partial I_2} = \frac{3}{2} c_{01} \bar{I}_2^{-1/2} \quad 6.23.3$$

### 6.2.3. Modelo 3

As derivadas particulares do modelo 3, dado pela expressão (6.19.3), são:

$$\frac{\partial \psi_{vol}}{\partial J} = k[5J^4 - 5J^{-6}] \quad 6.24.1$$

$$\frac{\partial \psi_{iso}}{\partial I_1} = c_{10} + 2c_{20}(\bar{I}_1 - 3) + 3c_{30}(\bar{I}_1 - 3)^2 \quad 6.24.2$$

$$\frac{\partial \psi_{iso}}{\partial I_2} = c_{01} + 2c_{02}(\bar{I}_2 - 3) \quad 6.24.3$$

### 6.2.4. Modelo 4

As derivadas necessárias para cálculo da tensão com o modelo 4, representado pela equação (6.19.4), são dadas por:

$$S_{ij} = \frac{\partial \psi}{\partial E_{ij}} = 2 \frac{\partial \psi}{\partial C_{ij}} = 2 \left[ \frac{\partial \psi}{\partial J} \frac{\partial J}{\partial C_{ij}} + \frac{\partial \psi}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial C_{ij}} \right] \quad 6.26.1$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial J} = \frac{k}{4} \left( 2J - \frac{2}{J} \right) + C_{10} \left( -\frac{2}{J} \right) \quad 6.26.2$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial I_1} = C_{10} \quad 6.26.3$$

$$\frac{\partial J}{\partial C_{ij}} = \frac{1}{2} J(C_{ij})^{-T} = \frac{1}{2} J(C_{ij})^{-1} \quad 6.26.4$$

$$\frac{\partial I_1}{\partial C_{ij}} = \delta_{ij} \quad 6.26.5$$

### 6.2.5. Modelo 5

Para se obter a tensão com o modelo 5, foram usadas as expressões (6.26), exceto para cálculo da derivada da energia específica em relação ao jacobiano:

$$\frac{\partial \psi}{\partial J} = k \left( \frac{\ln(J)}{J} \right) + C_{10} \left( -\frac{2}{J} \right) \quad 6.27$$

### 6.3. Tensor Elástico

Para se resolver, com uso do processo iterativo de Newton-Raphson, determinado problema estrutural não linear, é necessário calcular o tensor elástico material, também chamado por DÜSTER *et al.* (2003) de operador tangente consistente, que é utilizado para cálculo da matriz Hessiana, na expressão (5.12.1). Os referidos tensor e cálculo são, respectivamente, dados pelas seguintes fórmulas:

$$T_e = \frac{\partial^2 \psi}{\partial E \partial E} = \frac{\partial S}{\partial E} \Rightarrow (T_e)_{ijkl} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial E_{ij} \partial E_{kl}} = \frac{\partial S_{ij}}{\partial E_{kl}} \quad 6.28.1$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y_i \partial Y_j} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial E_{kl} \partial E_{mn}} \frac{\partial E_{kl}}{\partial Y_i} \frac{\partial E_{mn}}{\partial Y_j} + \frac{\partial \Psi}{\partial E_{kl}} \frac{\partial^2 E_{kl}}{\partial Y_i \partial Y_j} \quad 6.28.2$$

Este tensor simétrico de quarta ordem quantifica a mudança na tensão provocada por uma alteração infinitesimal na deformação. Tal medida é de extrema utilidade para solução de problemas linearizados na técnica iterativa de Newton-Raphson.

As fórmulas gerais para cálculo do tensor elástico são:

$$T_e = (T_e)_{vol} + (T_e)_{iso} \quad 6.29.1$$

$$(T_e)_{vol} = \frac{\partial^2 \psi_{vol}}{\partial E \partial E} = \frac{\partial}{\partial E} \left( 2 \frac{\partial \psi_{vol}}{\partial C} \right) = 2 \frac{\partial^2 \psi_{vol}}{\partial C \partial C} : 2II = 4 \frac{\partial^2 \psi_{vol}}{\partial C \partial C} \quad 6.29.2$$

$$(T_e)_{iso} = \frac{\partial^2 \psi_{iso}}{\partial E \partial E} = 4 \frac{\partial^2 \psi_{iso}}{\partial C \partial C} \quad 6.29.3$$

Analogamente à tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie, as expressões utilizadas neste trabalho para obtenção das segundas derivadas de  $\Psi$  em relação ao tensor  $\mathbf{C}$  são:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi_{vol}}{\partial C \partial C} &= \frac{\partial}{\partial C} \left[ \frac{\partial \psi_{vol}(J)}{\partial J} \frac{\partial J}{\partial C} \right] = \left( \frac{\partial J}{\partial C} \right) \otimes \frac{\partial^2 \psi_{vol}}{\partial C \partial J} + \frac{\partial \psi_{vol}}{\partial J} \frac{\partial^2 J}{\partial C \partial C} \Rightarrow \\ \Rightarrow \left( \frac{\partial^2 \psi_{vol}}{\partial C \partial C} \right)_{ijkl} &= \left( \frac{\partial J}{\partial C} \right)_{ij} \left( \frac{\partial J}{\partial C} \right)_{kl} \frac{\partial^2 \psi_{vol}}{\partial J \partial J} + \frac{\partial \psi_{vol}}{\partial J} \left( \frac{\partial^2 J}{\partial C \partial C} \right)_{ijkl} \end{aligned} \quad 6.30.1$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 J}{\partial C \partial C} &= \frac{\partial}{\partial C} \left( \frac{\partial J}{\partial C} \right) = \frac{\partial}{\partial C} \left( \frac{\partial J}{\partial (J^2)} \frac{\partial (J^2)}{\partial C} \right) = \left( \frac{\partial (J^2)}{\partial C} \right) \otimes \frac{\partial^2 J}{\partial (J^2) \partial (J^2)} \frac{\partial (J^2)}{\partial C} + \\ &+ \frac{\partial^2 (J^2)}{\partial C \partial C} \Rightarrow \left( \frac{\partial^2 J}{\partial C \partial C} \right)_{ijkl} = \left( \frac{\partial (J^2)}{\partial C} \right)_{ij} \frac{\partial^2 J}{\partial (J^2) \partial (J^2)} \left( \frac{\partial (J^2)}{\partial C} \right)_{kl} + \left( \frac{\partial^2 (J^2)}{\partial C \partial C} \right)_{ijkl}\end{aligned}\quad 6.30.2$$

$$\frac{\partial^2 J}{\partial (J^2) \partial (J^2)} = \frac{\partial}{\partial (J^2)} \left[ \frac{1}{2} (J^2)^{-1/2} \right] = -\frac{1}{4} (J^2)^{-3/2} = -\frac{1}{4} J^{-3} \quad 6.30.3$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 (J^2)}{\partial C \partial C} &= \frac{\partial}{\partial C} [(J^2) C^{-1}] = (C^{-1}) \otimes \frac{\partial (J^2)}{\partial C} + J^2 \frac{\partial (C^{-1})}{\partial C} \Rightarrow \\ \Rightarrow \left[ \frac{\partial^2 (J^2)}{\partial C \partial C} \right]_{ijkl} &= (C^{-1})_{ij} \left[ \frac{\partial (J^2)}{\partial C} \right]_{kl} + J^2 \frac{\partial (C^{-1})_{ij}}{\partial C_{kl}}\end{aligned}\quad 6.30.4$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \psi_{iso}}{\partial C \partial C} &= \frac{\partial}{\partial C} \left[ \frac{\partial \psi_{iso}(\bar{C})}{\partial \bar{C}} \cdot \frac{\partial \bar{C}}{\partial C} \right] = \frac{\partial \psi_{iso}(\bar{C})}{\partial \bar{C}} \cdot \frac{\partial^2 \bar{C}}{\partial C \partial C} + \frac{\partial \bar{C}}{\partial C} \cdot \frac{\partial^2 \psi_{iso}(\bar{C})}{\partial \bar{C} \partial \bar{C}} = \\ &= \frac{\partial \psi_{iso}(\bar{C})}{\partial \bar{C}} \cdot \frac{\partial^2 \bar{C}}{\partial C \partial C} + \frac{\partial \bar{C}}{\partial C} \cdot \left[ \frac{\partial^2 \psi_{iso}}{\partial \bar{C} \partial \bar{C}} \cdot \frac{\partial \bar{C}}{\partial C} \right] \Rightarrow \\ \Rightarrow \left( \frac{\partial^2 \psi_{iso}}{\partial C \partial C} \right)_{ijkl} &= \left( \frac{\partial \psi_{iso}}{\partial \bar{C}} \right)_{mn} \left( \frac{\partial^2 \bar{C}}{\partial C \partial C} \right)_{mnijkl} + \left( \frac{\partial \bar{C}}{\partial C} \right)_{mnij} \left( \frac{\partial^2 \psi_{iso}}{\partial \bar{C} \partial \bar{C}} \right)_{mnop} \left( \frac{\partial \bar{C}}{\partial C} \right)_{opkl}\end{aligned}\quad 6.30.5$$

$$\begin{aligned}\left( \frac{\partial^2 \bar{C}}{\partial C \partial C} \right)_{mnijkl} &= \delta_{mk} \delta_{nl} \left\{ \frac{\partial [(J^2)^{-1/3}]}{\partial C} \right\}_{ij} + C_{mn} \left\{ \frac{\partial^2 [(J^2)^{-1/3}]}{\partial C \partial C} \right\}_{ijkl} + \\ &+ \left\{ \frac{\partial [(J^2)^{-1/3}]}{\partial C} \right\}_{kl} \delta_{mi} \delta_{nj}\end{aligned}\quad 6.30.6$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \psi_{iso}}{\partial \bar{C} \partial \bar{C}} &= \frac{\partial}{\partial \bar{C}} \left[ \frac{\partial \psi_{iso}}{\partial I_1} \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial \bar{C}} + \frac{\partial \psi_{iso}}{\partial I_2} \frac{\partial \bar{I}_2}{\partial \bar{C}} \right] = \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial \bar{C}} \otimes \left( \frac{\partial^2 \psi_{iso}}{\partial I_1 \partial I_1} \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial \bar{C}} \right) + \\ &+ \frac{\partial \psi_{iso}}{\partial I_1} \frac{\partial^2 \bar{I}_1}{\partial \bar{C} \partial \bar{C}} + \frac{\partial \bar{I}_2}{\partial \bar{C}} \otimes \left( \frac{\partial^2 \psi_{iso}}{\partial I_2 \partial I_2} \frac{\partial \bar{I}_2}{\partial \bar{C}} \right) + \frac{\partial \psi_{iso}}{\partial I_2} \frac{\partial^2 \bar{I}_2}{\partial \bar{C} \partial \bar{C}} \Rightarrow \\ \Rightarrow \left( \frac{\partial^2 \psi_{iso}}{\partial \bar{C} \partial \bar{C}} \right)_{mnop} &= \frac{\partial^2 \psi_{iso}}{\partial I_1 \partial I_1} \left( \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial \bar{C}} \right)_{mn} \left( \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial \bar{C}} \right)_{op} + \frac{\partial^2 \psi_{iso}}{\partial I_2 \partial I_2} \left( \frac{\partial \bar{I}_2}{\partial \bar{C}} \right)_{mn} \left( \frac{\partial \bar{I}_2}{\partial \bar{C}} \right)_{op} + \\ &+ \frac{\partial \psi_{iso}}{\partial I_2} (\delta_{op} \delta_{mn} - \delta_{no} \delta_{mp})\end{aligned}\quad 6.30.7$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 [(J^2)^{-1/3}]}{\partial C \partial C} &= \frac{\partial}{\partial C} \left\{ \frac{\partial [(J^2)^{-1/3}]}{\partial (J^2)} \frac{\partial (J^2)}{\partial C} \right\} = \frac{\partial (J^2)}{\partial C} \otimes \frac{\partial^2 [(J^2)^{-1/3}]}{\partial (J^2)} \frac{\partial (J^2)}{\partial C} + \\
&+ \frac{\partial [(J^2)^{-1/3}]}{\partial (J^2)} \frac{\partial^2 (J^2)}{\partial C \partial C} \Rightarrow \\
\Rightarrow \left\{ \frac{\partial^2 [(J^2)^{-1/3}]}{\partial C \partial C} \right\}_{ijkl} &= \frac{1}{9} (J^2)^{-4/3} \left( \frac{\partial J^2}{\partial C} \right)_{kl} (C^{-1})_{ij} - \frac{1}{3} (J^2)^{-1/3} \left( \frac{\partial C^{-1}}{\partial C} \right)_{ijkl}
\end{aligned} \tag{6.30.8}$$

Assim como no caso da tensão, as segundas derivadas de  $\Psi_{vol}$  em relação a  $J$ , de  $\Psi_{iso}$  em relação a  $\bar{I}_1$  e de  $\Psi_{iso}$  em relação a  $\bar{I}_2$ , chamadas aqui de derivadas segundas particulares, devem ser obtidas para cada modelo.

### 6.3.1. Modelo 1

As derivadas segundas particulares do modelo 1, representado pela equação (6.19.1), são:

$$\frac{\partial^2 \psi_{vol}}{\partial J \partial J} = k [2n(2n-1)J^{2n-2} + 2n(2n+1)J^{-2n-2}] \tag{6.31.1}$$

$$\frac{\partial^2 \psi_{iso}}{\partial I_1 \partial I_1} = 2c_2 + 6c_3 (\bar{I}_1 - 3) \tag{6.31.2}$$

$$\frac{\partial^2 \psi_{iso}}{\partial I_2 \partial I_2} = 0 \tag{6.31.3}$$

### 6.3.2. Modelo 2

As derivadas segundas particulares do modelo 2, dado pela fórmula (6.19.2), são:

$$\frac{\partial^2 \psi_{vol}}{\partial J \partial J} = k[20J^3 + 30J^{-7}] \quad 6.32.1$$

$$\frac{\partial^2 \psi_{iso}}{\partial I_1 \partial I_1} = 6\alpha \bar{I}_1 \quad 6.32.2$$

$$\frac{\partial^2 \psi_{iso}}{\partial I_2 \partial I_2} = \frac{3}{4} c_{01} \bar{I}_2^{-1/2} \quad 6.32.3$$

### 6.3.3. Modelo 3

As derivadas segundas particulares do modelo 2, dado pela fórmula (6.19.2), são:

$$\frac{\partial^2 \psi_{vol}}{\partial J \partial J} = k[20J^3 + 30J^{-7}] \quad 6.33.1$$

$$\frac{\partial^2 \psi_{iso}}{\partial I_1 \partial I_1} = 2c_{20} + 6c_{30}(\bar{I}_1 - 3) \quad 6.33.2$$

$$\frac{\partial^2 \psi_{iso}}{\partial I_2 \partial I_2} = 2c_{02} \quad 6.33.3$$

#### 6.3.4. Modelo 4

Para cálculo do tensor elástico com o modelo 4, dado pela fórmula (6.19.4), foram usadas as seguintes equações:

$$(T_e)_{ijkl} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial E_{ij} \partial E_{kl}} = 4 \frac{\partial^2 \psi}{\partial C_{ij} \partial C_{kl}} \quad 6.35.1$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi}{\partial C_{ij} \partial C_{kl}} &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial J \partial J} \frac{\partial J}{\partial C_{ij}} \frac{\partial J}{\partial C_{kl}} + \frac{\partial \psi}{\partial J} \frac{\partial^2 J}{\partial C_{ij} \partial C_{kl}} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial I_1 \partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial C_{ij}} \frac{\partial I_1}{\partial C_{kl}} + \\ &+ \frac{\partial \psi}{\partial I_1} \frac{\partial^2 I_1}{\partial C_{ij} \partial C_{kl}} \end{aligned} \quad 6.35.2$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial J \partial J} = \frac{k}{4} \left( 2 + \frac{2}{J^2} \right) + C_{10} \left( \frac{2}{J^2} \right) \quad 6.35.3$$

$$\frac{\partial J}{\partial C_{ij}} = \frac{1}{2} J (C_{ij})^{-T} = \frac{1}{2} J (C_{ij})^{-1} \quad 6.35.4$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial I_1 \partial I_1} = \frac{\partial^2 I_1}{\partial C_{ij} \partial C_{kl}} = 0 \quad 6.35.5$$

A segunda derivada do jacobiano em relação ao tensor  $C$  é dada pela equação (6.30.2).

#### 6.3.5. Modelo 5

Para determinação do tensor elástico com o modelo 5, representado pela fórmula (6.19.5), foram usadas as expressões (6.35), exceto a segunda derivada da energia específica em relação ao jacobiano:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial J \partial J} = k \left[ \frac{1}{J^2} - \frac{\ln(J)}{J^2} \right] \quad 6.36$$

#### 6.4. Existência de Solução

HARTMANN & NEFF (2003) disseram que as chamadas condições de policonvexidade e coercividade são suficientes para garantir a existência de uma única solução, com a imposição da minimização do funcional de energia  $\Pi$ .

É preciso, antes de conceituar as referidas condições, definir domínio convexo e função convexa.

##### 6.4.1. Domínio Convexo

Segundo OGDEN (1984), diz-se que o domínio  $\Omega$  é convexo quando contém o seguinte segmento de reta:

$$t\vec{u} + (1-t)\vec{v}, \text{ para quaisquer vetores } \vec{u}, \vec{v} \in \Omega, 0 \leq t \leq 1 \quad 6.37$$



A figura 6.2 ilustra um domínio convexo e outro não convexo.

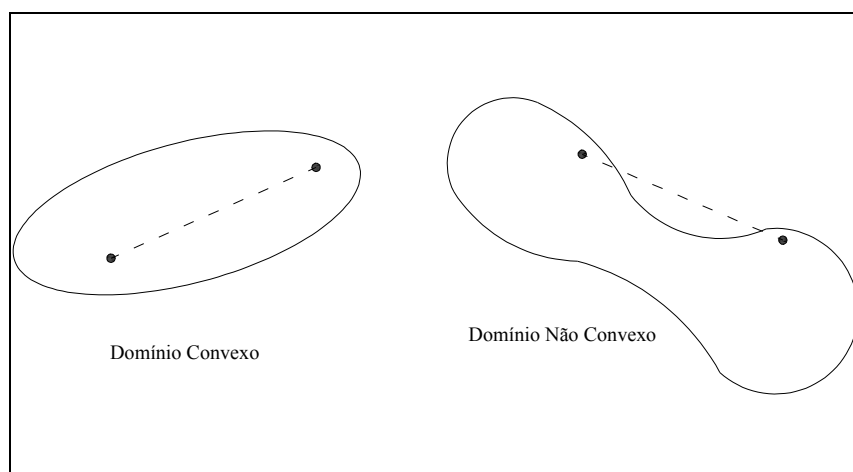


Figura 6.2 - Domínio Convexo e Não Convexo

### 6.4.2. Função Convexa

Quando a função escalar  $f(x)$ ,  $f: R \rightarrow R$ , possui segunda derivada definida no interior de certo domínio, podem ocorrer as seguintes situações:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} > 0 \quad 6.38.1$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} < 0 \quad 6.38.2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} = 0 \quad 6.38.3$$

A figura 6.3 ilustra as referidas situações.

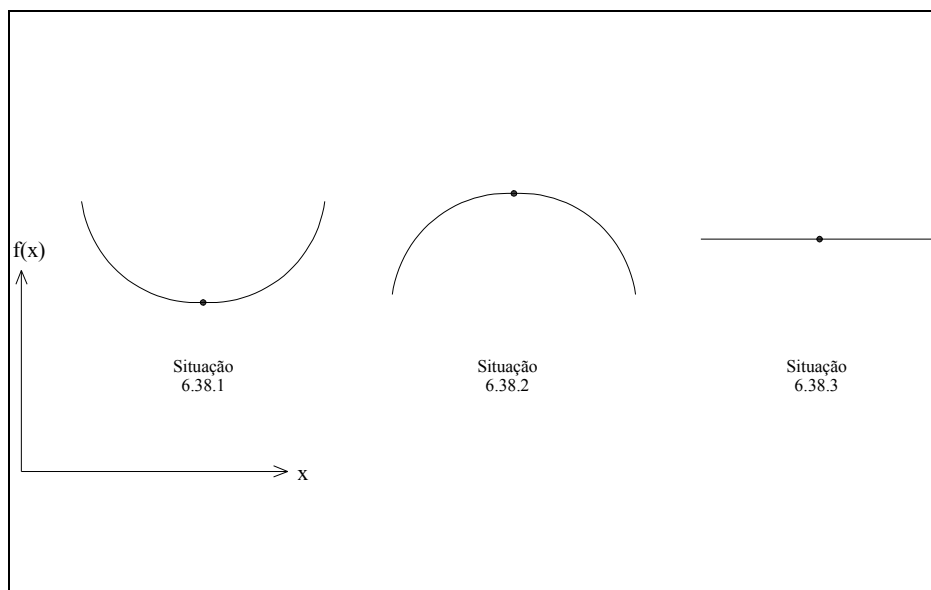


Figura 6.3 - Segunda Derivada de  $f(x)$

Comenta-se que quando a função  $f(x)$  representa o funcional de energia, calculado para certa estrutura, a situação (6.38.1) representa equilíbrio estável, a (6.38.2) o instável e a (6.38.3) é o caso de equilíbrio indiferente. Deve-se lembrar que a análise estrutural, com uso do Princípio da Mínima Energia Potencial Total, busca sempre a primeira situação, na qual a função  $f(x)$  é dita convexa.

BELYTSCHKO *et al.* (2000) disseram que a função  $\Psi$  é convexa quando:

$$\left[ \left( \frac{\partial \Psi}{\partial E} \right)_{E_1} - \left( \frac{\partial \Psi}{\partial E} \right)_{E_2} \right] (E_1 - E_2) \begin{cases} > 0, E_1 \neq E_2 \\ = 0, E_1 = E_2 \end{cases} \quad 6.39.1$$

$$[S(E_1) - S(E_2)](E_1 - E_2) \begin{cases} > 0, E_1 \neq E_2 \\ = 0, E_1 = E_2 \end{cases} \quad 6.39.2$$

$$\frac{\partial S}{\partial E} > 0 \quad 6.39.3$$

onde  $S$  é a tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie,  $E_1$  e  $E_2$  são níveis de deformação de Green-Lagrange, mostrados na figura 6.4.

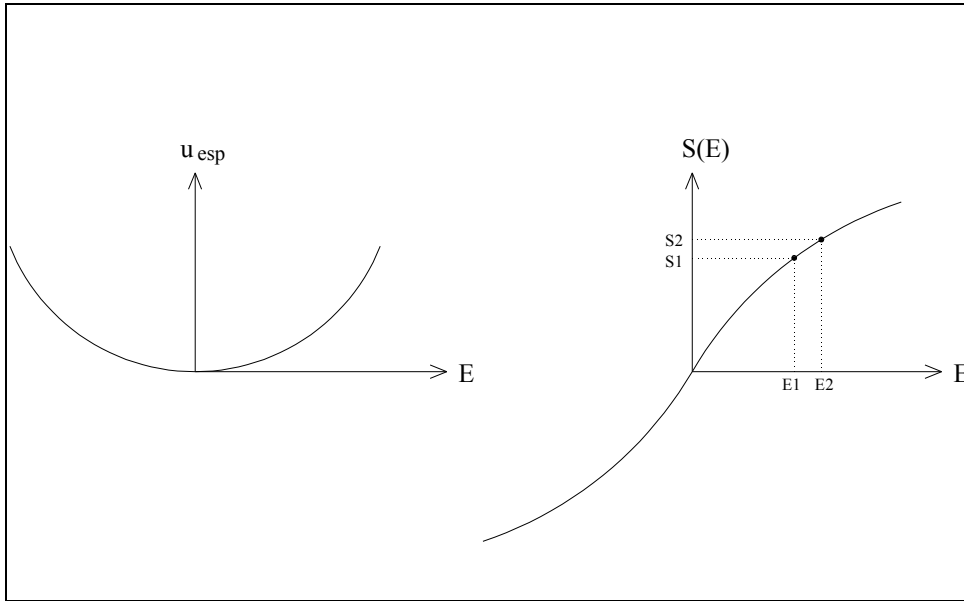


Figura 6.4 - Função Energia Específica de Deformação Convexa

### 6.4.3. Funções Policonvexas

Dada a função  $\Psi$ , definida por:

$$\psi(A) = \psi_1(A) + \psi_2(\text{adj}A) + \psi_3(\det A) \quad 6.40$$

diz-se, de acordo com HARTMANN & NEFF (2003), que se as funções  $\Psi_1$ ,  $\Psi_2$  e  $\Psi_3$  são convexas, então a função  $\Psi$  é dita policonvexa. Ademais, os seguintes termos da parcela isocórica da energia específica de deformação são, segundo os referidos autores, policonvexos:

$$\psi_1(\bar{C}) = \psi_1 \left[ \frac{C}{(\det C)^{1/3}} \right] = \psi_1 \left[ \frac{A^T A}{J^{2/3}} \right] \quad 6.41.1$$

$$\left(\operatorname{tr}\bar{C} - 3\right)^i, i \geq 1 \quad 6.41.2$$

$$\left[\left(\operatorname{tr}(\operatorname{adj}\bar{C})\right)^{3/2} - 3\sqrt{3}\right]^j, j \geq 1 \quad 6.41.3$$

Deve-se analisar, também, a parcela volumétrica da energia, que deve obedecer às seguintes condições:

$$\lim_{J \rightarrow +\infty} [U(J)] = +\infty \quad 6.42.1$$

$$\lim_{J \rightarrow 0^+} [U(J)] = +\infty \quad 6.42.2$$

$$U'(1) = 0 \quad 6.42.3$$

$$U(1) = 0 \quad 6.42.4$$

$$U''(J) \geq 0 \quad 6.42.5$$

#### 6.4.4. Coercividade

A coercividade representa as restrições impostas ao crescimento da função  $\Psi$  com o gradiente  $\mathbf{A}$  ou o jacobiano  $J$ , como por exemplo, as expressões (6.42.1) e (6.42.2).

Segundo HARTMANN & NEFF (2003), as funções adotadas, descritas pelas equações (6.19), são policonvexas, obedecem às condições de coercividade e, portanto, podem ser utilizadas para análise estrutural de materiais hiperelásticos com o método iterativo de Newton-Raphson.

## 6.5. Estimativa dos Coeficientes

Os coeficientes das expressões usadas para a energia específica de deformação foram estimados ou interpolados com uso do Método dos Mínimos Quadrados (MMQ), cujo procedimento está descrito a seguir.

A interpolação consiste na determinação da expressão matemática que melhor representa a relação entre duas grandezas, cujos pontos estão em um gráfico, mostrado na figura 6.5, na qual a variável  $y$  depende de  $x$ .

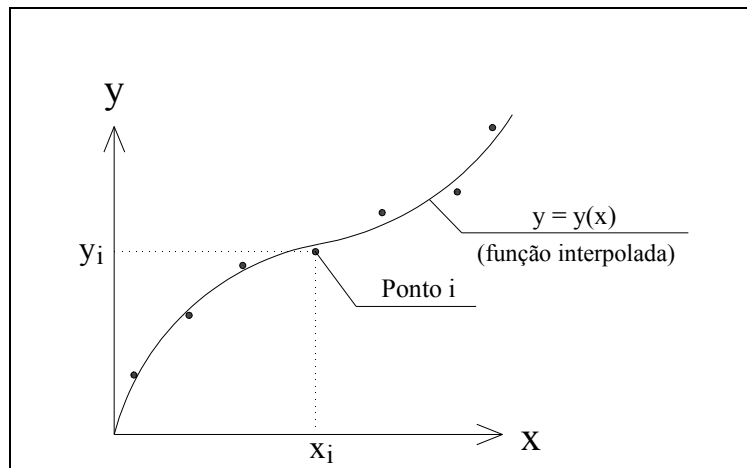


Figura 6.5 - Interpolação Gráfica

### 6.5.1. Método dos Mínimos Quadrados (MMQ)

Dado o conjunto de pontos ou de pares ordenados  $(x_i, y_i)$ , pode-se interpolar a função polinomial  $y = y(x)$  de modo que:

$$y(x) = \sum_{j=0}^n (a_j x^j) \quad 6.43.1$$

$$\frac{d}{d(a_j)}(e^2) = \frac{d}{d(a_j)} \left\{ \sum_{i=1}^{NP} [y(x_i) - y_i]^2 \right\} = 0 \quad 6.43.2$$

onde  $a_j$  são os coeficientes do polinômio  $y(x)$ ,  $n$  é o escolhido grau desse polinômio e  $NP$  é o número de pontos no gráfico  $(x,y)$ .

É possível concluir, a partir das expressões (6.43), as seguintes equações:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{NP} \left\{ [y(x_i) - y_i] \frac{\partial y}{\partial a_j} \right\} = 0 &\Rightarrow \\ \Rightarrow \sum_{i=1}^{NP} \left\{ \sum_{j=0}^n [a_j (x_i)^j] \frac{\partial y}{\partial a_j} \right\} = \sum_{i=1}^{NP} \left\{ y_i \frac{\partial y}{\partial a_j} \right\} & \quad 6.44 \end{aligned}$$

Assim, foram interpolados, com uso do MMQ, os coeficientes da função energia específica de deformação para os casos de tração e compressão uniaxiais, cisalhamento simples e tração biaxial.

### 6.5.2. Ensaio de Tração Uniaxial

São obtidos, a partir do ensaio de tração uniaxial, os valores da tensão ( $\sigma_e$ ) e da deformação específica de engenharia ( $\epsilon_e$ ), ambos na direção longitudinal.

O gradiente, para este ensaio feito em barras prismáticas mostrado na figura 6.6, é dado pela seguinte expressão:

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \quad 6.45.1$$

$$\lambda_i = (\varepsilon_e)_i + 1 \quad 6.45.2$$

onde  $\lambda_i$  é o alongamento na direção  $i$ .

A hipótese da incompressibilidade ( $J = 1$ ) possibilita o cálculo dos alongamentos transversais  $\lambda_2$  e  $\lambda_3 = \lambda_2$ , do gradiente, do alongamento à direita de Cauchy-Green e dos invariantes:

$$\lambda_2 = \lambda_3 = (\lambda_1)^{-1/2} \Rightarrow J = \det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1 \Rightarrow \quad 6.46.1$$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^{-1/2} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^{-1/2} \end{bmatrix} \Rightarrow C = A^T A = \begin{bmatrix} \lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1/\lambda \end{bmatrix} \quad 6.46.2$$

$$\Rightarrow I_1(C) = \text{tr}(C) = \lambda^2 + \frac{2}{\lambda}$$

$$\Rightarrow I_2(C) = \lambda^{-2} + 2\lambda \quad 6.46.3$$

$$\Rightarrow I_3(C) = 1$$

Ademais, RIVLIN & SAUNDERS (1951) obtiveram a solução analítica para o caso de tração uniaxial homogênea, expressa pela relação entre a tensão de engenharia na direção longitudinal e energia específica de deformação:

$$\frac{\sigma_e}{\lambda - \lambda^{-2}} = \frac{(F/A_0)}{\lambda - \lambda^{-2}} = 2 \left[ \frac{\partial \psi}{\partial I_1} + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \psi}{\partial I_2} \right] \quad 6.47$$

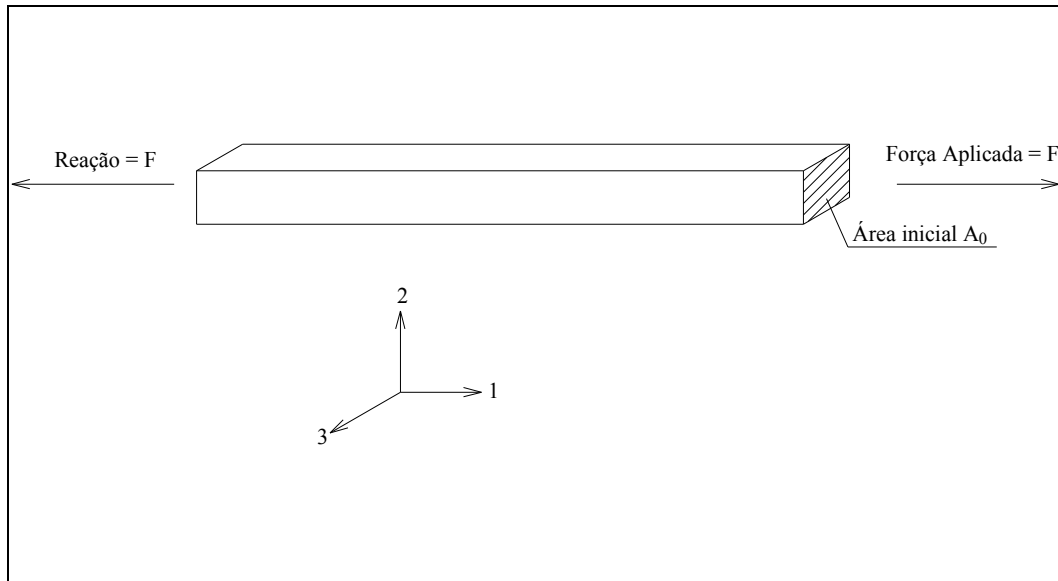


Figura 6.6 - Ensaio de Tração Uniaxial de Barras Prismáticas

### 6.5.2.1. Modelo 1

Para o modelo hiperelástico de Yeoh, dado pela fórmula (6.13.6), a relação (6.47) resulta em:

$$\frac{\sigma_e}{\lambda - \lambda^{-2}} = 2 \left[ c_1 + 2c_2(I_1 - 3) + 3c_3(I_1 - 3)^2 \right] \quad 6.48$$

Para se interpolar, com o MMQ, os coeficientes  $c_1$ ,  $c_2$  e  $c_3$ , foram utilizadas as seguintes expressões:

$$y(I_1 - 3) = 2 \left[ c_1 + 2c_2(I_1 - 3) + 3c_3(I_1 - 3)^2 \right] \quad 6.49.1$$

ou 
$$y(\alpha) = 2 \left[ c_1 + 2c_2(\alpha) + 3c_3(\alpha)^2 \right] \quad 6.49.2$$



$$y_i = \left( \frac{\sigma_e}{\lambda - \lambda^{-2}} \right)_i \quad 6.49.3$$

$$x_i = \alpha_i = (I_1 - 3)_i \quad 6.49.4$$

$$y(\alpha_i) = y(x_i) = 2c_1 + 4c_2(\alpha_i) + 6c_3(\alpha_i)^2 \quad 6.49.5$$

$$\frac{\partial y(\alpha)}{\partial c_1} = 2 \quad 6.49.6$$

$$\frac{\partial y(\alpha)}{\partial c_2} = 4\alpha \quad 6.49.7$$

$$\frac{\partial y(\alpha)}{\partial c_3} = 6\alpha^2 \quad 6.49.8$$

onde o índice  $i$  se refere ao ponto  $i$  do gráfico  $\sigma_e$  x  $\epsilon_e$ .

Pôde-se obter, a partir das expressões (6.38) e (6.43), o seguinte sistema linear de equações:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[ \sum_{i=1}^{NP} (4) \right] c_1 + \left[ \sum_{i=1}^{NP} (8\alpha_i) \right] c_2 + \left[ \sum_{i=1}^{NP} (12\alpha_i^2) \right] c_3 = \left[ \sum_{i=1}^{NP} (2y_i) \right] \\ \left[ \sum_{i=1}^{NP} (8\alpha_i) \right] c_1 + \left[ \sum_{i=1}^{NP} (16\alpha_i^2) \right] c_2 + \left[ \sum_{i=1}^{NP} (24\alpha_i^3) \right] c_3 = \left[ \sum_{i=1}^{NP} (4\alpha_i y_i) \right] \\ \left[ \sum_{i=1}^{NP} (12\alpha_i^2) \right] c_1 + \left[ \sum_{i=1}^{NP} (24\alpha_i^3) \right] c_2 + \left[ \sum_{i=1}^{NP} (36\alpha_i^4) \right] c_3 = \left[ \sum_{i=1}^{NP} (6\alpha_i^2 y_i) \right] \end{array} \right\} \quad 6.50$$

cuja solução é o vetor dos coeficientes do material, ou seja,  $c_1$ ,  $c_2$  e  $c_3$ .

### 6.5.2.2. Modelo 2

Para o modelo de Hartmann-Neff, dado pela equação (6.13.10), as expressões (6.49) devem ser substituídas por:

$$y(I_1, I_2) = 6\alpha I_1^2 + 2c_{10} + \frac{3}{\lambda} c_{01} I_2^{1/2} \quad 6.51.1$$

ou  $y(I_1, I_2) = y(x, z) \quad 6.51.2$

$$y_i = \left( \frac{\sigma_e}{\lambda - \lambda^{-2}} \right)_i \quad 6.51.3$$

$$x_i = (I_1)_i \quad 6.51.4$$

$$z_i = (I_2)_i \quad 6.51.5$$

$$\frac{\partial y}{\partial \alpha} = 6I_1^2 \quad 6.51.6$$

$$\frac{\partial y}{\partial c_{10}} = 2 \quad 6.51.7$$

$$\frac{\partial y}{\partial c_{01}} = \frac{3}{2\lambda} I_2^{1/2} \quad 6.51.8$$

Analogamente ao modelo de Yeoh, obteve-se, para a lei constitutiva de Hartmann-Neff, o seguinte sistema linear de equações:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[ \sum_{i=1}^{NP} (36x_i^4) \right] \alpha + \left[ \sum_{i=1}^{NP} (12x_i^2) \right] c_{10} + \left[ \sum_{i=1}^{NP} \left( \frac{9}{\lambda_i} x_i^2 z_i^{1/2} \right) \right] c_{01} = \left[ \sum_{i=1}^{NP} (6x_i^2 y_i) \right] \\ \left[ \sum_{i=1}^{NP} (12x_i^2) \right] \alpha + \left[ \sum_{i=1}^{NP} (4) \right] c_{10} + \left[ \sum_{i=1}^{NP} \left( \frac{3}{2\lambda_i} z_i^{1/2} \right) \right] c_{01} = \left[ \sum_{i=1}^{NP} (2y_i) \right] \\ \left[ \sum_{i=1}^{NP} (9x_i^2 z_i^{1/2}) \right] \alpha + \left[ \sum_{i=1}^{NP} (3z_i^{1/2}) \right] c_{10} + \left[ \sum_{i=1}^{NP} \left( \frac{9}{4\lambda_i^2} z_i \right) \right] c_{01} = \left[ \sum_{i=1}^{NP} \left( \frac{3}{2\lambda_i} z_i^{1/2} y_i \right) \right] \end{array} \right\} \quad 6.52$$

cuja solução fornece os valores de  $\alpha$ ,  $c_{10}$  e  $c_{01}$ .

### 6.5.2.3. Modelo 3

Para a lei hiperelástica de Bechir-Boufala-Chevalier, dado por (6.13.9), as seguintes equações devem ser usadas:

$$y(\beta_1, \beta_2) = 2c_{10} + 4c_{20}\beta_1 + 6c_{30}\beta_1^2 + \frac{1}{\lambda} [2c_{01} + 4c_{02}\beta_2] \quad 6.53.1$$

ou 
$$y(\beta_1, \beta_2) = 2c_{10} + 4c_{20}(I_1 - 3) + 6c_{30}(I_1 - 3)^2 + \frac{1}{\lambda} [2c_{01} + 4c_{02}(I_2 - 3)] \quad 6.53.2$$

$$y_i = \left( \frac{\sigma_e}{\lambda - \lambda^{-2}} \right)_i \quad 6.53.3$$

$$(\beta_2)_i = (I_1 - 3)_i \quad 6.53.4$$

$$(\beta_2)_i = (I_2 - 3)_i \quad 6.53.5$$

$$\frac{\partial y}{\partial c_{10}} = 2 \quad 6.53.6$$

$$\frac{\partial y}{\partial c_{20}} = 4\beta_1 \quad 6.53.7$$

$$\frac{\partial y}{\partial c_{30}} = 6\beta_1^2 \quad 6.53.8$$

$$\frac{\partial y}{\partial c_{01}} = \frac{2}{\lambda} \quad 6.53.9$$

$$\frac{\partial y}{\partial c_{01}} = \frac{4}{\lambda} \beta_2 \quad 6.53.10$$

Para o modelo de Bechir-Boufala-Chevalier, escreveu-se o seguinte sistema:

$$\begin{aligned} & \left[ \sum_{i=1}^{NP} (4) \right] c_{10} + \left[ \sum_{i=1}^{NP} (8\beta_1)_i \right] c_{20} + \left[ \sum_{i=1}^{NP} (12\beta_1^2)_i \right] c_{30} + \left[ \sum_{i=1}^{NP} \left( \frac{4}{\lambda} \right)_i \right] c_{10} + \left[ \sum_{i=1}^{NP} \left( \frac{8\beta_2}{\lambda} \right)_i \right] c_{02} = \left[ \sum_{i=1}^{NP} (2y_i) \right] \\ & \left[ \sum_{i=1}^{NP} (8\beta_1)_i \right] c_{10} + \left[ \sum_{i=1}^{NP} (16\beta_1^2)_i \right] c_{20} + \left[ \sum_{i=1}^{NP} (24\beta_1^3)_i \right] c_{30} + \left[ \sum_{i=1}^{NP} \left( \frac{8\beta_1}{\lambda} \right)_i \right] c_{10} + \left[ \sum_{i=1}^{NP} \left( \frac{16\beta_1\beta_2}{\lambda} \right)_i \right] c_{02} = \left[ \sum_{i=1}^{NP} (4\beta_1 y_i) \right] \\ & \left[ \sum_{i=1}^{NP} (12\beta_1^2)_i \right] c_{10} + \left[ \sum_{i=1}^{NP} (24\beta_1^3)_i \right] c_{20} + \left[ \sum_{i=1}^{NP} (36\beta_1^4)_i \right] c_{30} + \left[ \sum_{i=1}^{NP} \left( \frac{12\beta_1^2}{\lambda} \right)_i \right] c_{10} + \left[ \sum_{i=1}^{NP} \left( \frac{24\beta_1^2\beta_2}{\lambda} \right)_i \right] c_{02} = \left[ \sum_{i=1}^{NP} (6\beta_1^2 y_i) \right] \\ & \left[ \sum_{i=1}^{NP} \left( \frac{4}{\lambda} \right)_i \right] c_{10} + \left[ \sum_{i=1}^{NP} \left( \frac{8\beta_1}{\lambda} \right)_i \right] c_{20} + \left[ \sum_{i=1}^{NP} \left( \frac{12\beta_1^2}{\lambda} \right)_i \right] c_{30} + \left[ \sum_{i=1}^{NP} \left( \frac{4}{\lambda^2} \right)_i \right] c_{10} + \left[ \sum_{i=1}^{NP} \left( \frac{8\beta_2}{\lambda^2} \right)_i \right] c_{02} = \left[ \sum_{i=1}^{NP} \left( \frac{2}{\lambda} y_i \right) \right] \\ & \left[ \sum_{i=1}^{NP} \left( \frac{8\beta_2}{\lambda} \right)_i \right] c_{10} + \left[ \sum_{i=1}^{NP} \left( \frac{16\beta_1\beta_2}{\lambda} \right)_i \right] c_{20} + \left[ \sum_{i=1}^{NP} \left( \frac{24\beta_1^2\beta_2}{\lambda} \right)_i \right] c_{30} + \left[ \sum_{i=1}^{NP} \left( \frac{8\beta_2}{\lambda^2} \right)_i \right] c_{10} + \left[ \sum_{i=1}^{NP} \left( \frac{16\beta_2^2}{\lambda^2} \right)_i \right] c_{02} = \left[ \sum_{i=1}^{NP} \left( \frac{4}{\lambda^2} y_i \right) \right] \end{aligned}$$

6.54

cuja solução é vetor que contém os coeficientes  $c_{10}$ ,  $c_{20}$ ,  $c_{30}$ ,  $c_{01}$  e  $c_{02}$ .

#### 6.5.2.4. Modelos 4 e 5

Para se interpolar o coeficiente da parcela isocórica dos modelos neo-Hookeanos compressíveis, dados pelas expressões (6.19.4) e (6.19.5), usou-se as fórmulas (6.49),

correspondentes ao modelo cúbico de Yeoh. Como o jacobiano é aproximadamente igual a um para materiais pouco compressíveis, bastou apenas desconsiderar os coeficientes  $c_2$  e  $c_3$  e resolver o seguinte sistema:

$$\left[ \sum_{i=1}^{NP} (4) \right] C_{10} = \sum_{i=1}^{NP} y_i \quad 6.55$$

onde  $y_i$  é dado pela expressão (6.49.3).

#### 6.5.2.5. Modelo Elástico

Foi usada também a seguinte lei constitutiva elástica não linear em um programa simplificado de treliça plana utilizado para balizar os desenvolvimentos desejados ao longo do presente trabalho:

$$\psi(\varepsilon) = E \frac{\varepsilon^2}{2} + B \frac{\varepsilon^3}{3} + D \frac{\varepsilon^4}{4} + C[(\varepsilon + 1)\ln(\varepsilon + 1) - (\varepsilon + 1)] \quad 6.56$$

onde  $\varepsilon$  é a deformação específica de engenharia longitudinal.

São válidas, para esta lei, as seguintes expressões:

$$y(\varepsilon) = \sigma(\varepsilon) = \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon} = E\varepsilon + B\varepsilon^2 + D\varepsilon^3 + C \ln(\varepsilon + 1) \quad 6.57.1$$

$$\frac{\partial y}{\partial E} = \varepsilon \quad 6.57.2$$

$$\frac{\partial y}{\partial B} = \varepsilon^2 \quad 6.57.3$$

$$\frac{\partial y}{\partial D} = \varepsilon^3 \quad 6.57.4$$

$$\frac{\partial y}{\partial C} = \ln(\varepsilon + 1) \quad 6.57.5$$

Com as fórmulas (6.57) obteve-se o sistema:

$$\begin{aligned} \left[ \sum_{i=1}^{NP} (\varepsilon_i)^2 \right] E + \left[ \sum_{i=1}^{NP} (\varepsilon_i)^3 \right] B + \left[ \sum_{i=1}^{NP} (\varepsilon_i)^4 \right] D + \left[ \sum_{i=1}^{NP} (\varepsilon_i) \ln(\varepsilon_i + 1) \right] C &= \left[ \sum_{i=1}^{NP} (\varepsilon_i) \sigma_i \right] \\ \left[ \sum_{i=1}^{NP} (\varepsilon_i)^3 \right] E + \left[ \sum_{i=1}^{NP} (\varepsilon_i)^4 \right] B + \left[ \sum_{i=1}^{NP} (\varepsilon_i)^5 \right] D + \left[ \sum_{i=1}^{NP} (\varepsilon_i^2) \ln(\varepsilon_i + 1) \right] C &= \left[ \sum_{i=1}^{NP} (\varepsilon_i^2) \sigma_i \right] \\ \left[ \sum_{i=1}^{NP} (\varepsilon_i)^4 \right] E + \left[ \sum_{i=1}^{NP} (\varepsilon_i)^5 \right] B + \left[ \sum_{i=1}^{NP} (\varepsilon_i)^6 \right] D + \left[ \sum_{i=1}^{NP} (\varepsilon_i^3) \ln(\varepsilon_i + 1) \right] C &= \left[ \sum_{i=1}^{NP} (\varepsilon_i^3) \sigma_i \right] \\ \left[ \sum_{i=1}^{NP} (\varepsilon_i) \ln(\varepsilon_i + 1) \right] E + \left[ \sum_{i=1}^{NP} (\varepsilon_i^2) \ln(\varepsilon_i + 1) \right] B + \left[ \sum_{i=1}^{NP} (\varepsilon_i^3) \ln(\varepsilon_i + 1) \right] D + \left[ \sum_{i=1}^{NP} [\ln(\varepsilon_i + 1)]^2 \right] C &= \left[ \sum_{i=1}^{NP} \ln(\varepsilon_i + 1) \sigma_i \right] \end{aligned} \quad 6.58$$

### 6.5.2.6. Modelo Hiperelástico Linear

A partir da definição de tensão real e tensão de engenharia, pode-se expressar, para o caso de tração uniaxial, a seguinte relação entre estas grandezas:

$$F = tA = \sigma_{eng} A_0 \Rightarrow t(\lambda_2 \lambda_3 A_0) = \sigma_{eng} A_0 \Rightarrow t = \frac{\sigma_{eng}}{\lambda_2 \lambda_3} \quad 6.59$$

onde  $F$  é a força aplicada na direção longitudinal,  $t$  é o valor da tensão real,  $\sigma_{eng}$  é o valor da tensão de engenharia,  $\lambda_2$  e  $\lambda_3$  são os alongamentos transversais,  $A$  é a área atual da seção transversal e  $A_0$  é a inicial.

Para interpolação do módulo de Young referente ao modelo hiperelástico linear de St.Venant-Kirchhoff, dado pela equação (6.7), combinou-se as expressões (4.43.1), (6.46.2) e (6.59), o que resultou em:

$$S_{11} = J(A^{-1})_{11}(\sigma_{real})_{11}(A^{-T})_{11} = \frac{t}{\lambda_1^2} = \frac{\left(\frac{\sigma_{eng}}{\lambda_2\lambda_3}\right)}{\lambda_1^2} = \frac{\sigma_{eng}\lambda_1}{\lambda_1^2} = \frac{\sigma_{eng}}{\lambda_1} = \frac{\sigma_{eng}}{\lambda} \quad 6.60.1$$

$$E_{11} = \frac{1}{2}(\lambda^2 - 1) = \frac{1}{2}(\lambda + 1)(\lambda - 1) = \frac{1}{2}(\varepsilon)(\varepsilon + 2) = \frac{1}{2}(\varepsilon^2 + 2\varepsilon) \quad 6.60.2$$

$$S_{11} = EE_{11} \quad 6.60.3$$

$$e^2 = \sum_{i=1}^{NP} [(EE_{11} - S_{11})_i]^2 \quad 6.60.4$$

$$\frac{de^2}{dE} = 0 \Rightarrow \left[ \sum_{i=1}^{NP} (E_{11})_i^2 \right] E = \sum_{i=1}^{NP} (E_{11}S_{11})_i \quad 6.60.5$$

onde  $S_{11}$  é a primeira componente da tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie,  $E_{11}$  é a deformação de Green-Lagrange,  $E$  é o módulo de Young e  $NP$  é o número de pontos no gráfico  $\sigma_{eng} \times \varepsilon$ .

### 6.5.3. Ensaio de Cisalhamento Simples

São obtidos, no ensaio de cisalhamento simples mostrado na figura 6.7, os valores da força aplicada  $F$  e do ângulo  $\Phi$ .

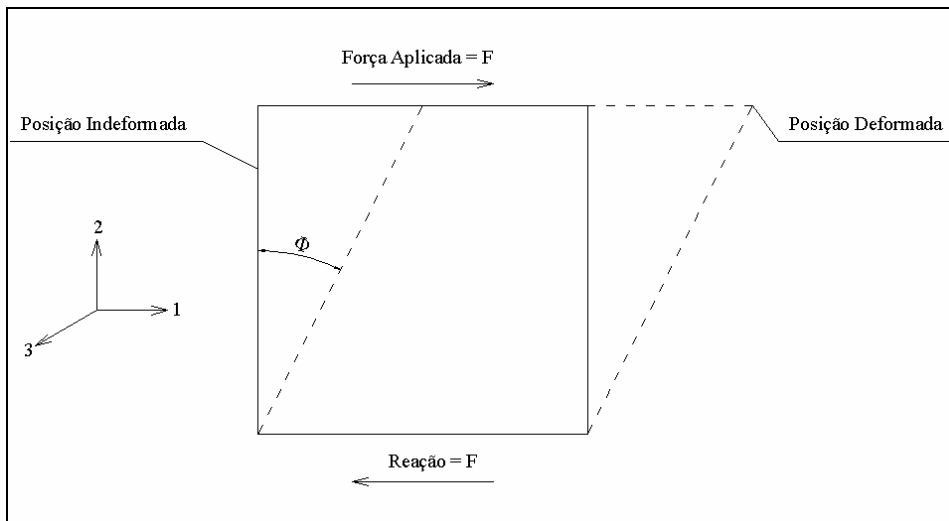


Figura 6.7 - Ensaio de Cisalhamento Simples

Pode-se calcular, assim como no caso da tração uniaxial, o gradiente, o alongamento à direita de Cauchy-Green e os invariantes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow C = A^T A = \begin{bmatrix} 1 & \gamma & 0 \\ \gamma & \gamma^2 + 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \quad 6.61.1$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow I_1(C) &= \gamma^2 + 3 \Rightarrow I_1 - 3 = \gamma^2 \\ \Rightarrow I_2(C) &= \gamma^2 + 3 \Rightarrow I_2 - 3 = \gamma^2 = I_1 - 3 \\ \Rightarrow I_3(C) &= 1 \end{aligned} \quad 6.61.2$$

$$\operatorname{tg} \phi = \gamma \Rightarrow \phi = \operatorname{arctg}(\gamma) \quad 6.61.3$$



onde  $\gamma$  é a chamada quantidade de cisalhamento.

RIVLIN (1956) obteve a solução analítica para o caso de cisalhamento simples homogêneo:

$$\frac{\tau}{\gamma} = 2 \left[ \frac{\partial \psi}{\partial I_1} + \frac{\partial \psi}{\partial I_2} \right] \quad 6.62$$

Para se interpolar, com uso do MMQ, os coeficientes do ensaio de cisalhamento simples, bastou substituir, respectivamente, as equações (6.51.1) e (6.53.1) pelas seguintes fórmulas e determinar os sistemas correspondentes:

$$y(I_1, I_2) = 6\alpha I_1^2 + 2c_{10} + \frac{3}{2}c_{01}I_2^{1/2} \quad 6.63.1$$

$$y(\beta_1, \beta_2) = 2c_{10} + 4c_{20}\beta_1 + 6c_{30}\beta_1^2 + 2c_{01} + 4c_{02}\beta_2 \quad 6.63.2$$

A igualdade (6.63.1) corresponde à lei constitutiva de Hartmann-Neff e a (6.63.2) à de Bechir-Boufala-Chevalier.

#### 6.5.4. Ensaio de Tração Biaxial

A figura 6.8 mostra o esquema representativo do ensaio de tração biaxial.

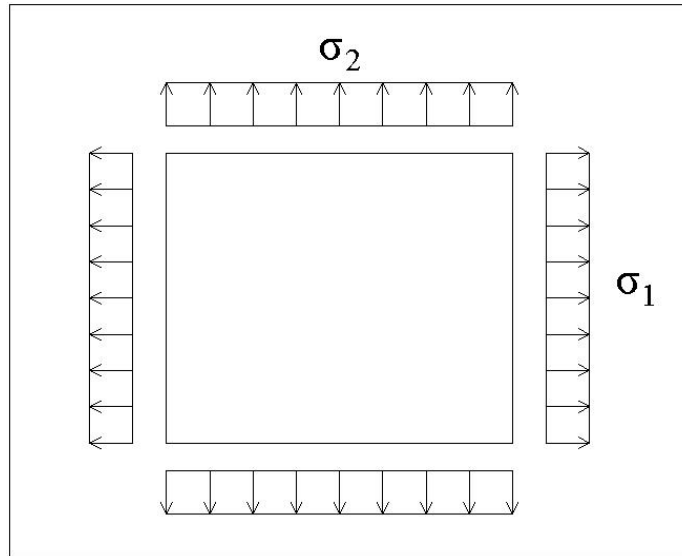


Figura 6.8 - Ensaio de Tração Biaxial

São válidas, para este ensaio, as seguintes expressões:

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A) = J = 1 \quad 6.64.1$$

$$C = \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{(\lambda_1 \lambda_2)^2} \end{bmatrix} \quad 6.64.2$$

$$I_1(C) = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + (\lambda_1 \lambda_2)^{-2} \quad 6.64.3$$

$$I_2(C) = \lambda_1^{-2} + \lambda_2^{-2} + (\lambda_1 \lambda_2)^2 \quad 6.64.4$$

$$I_3(C) = 1 \quad 6.64.5$$

A relação entre a tensão longitudinal de engenharia e os alongamentos longitudinal e transversal também foi determinada por RIVLIN (1956):

$$\frac{\sigma_1}{\lambda_1 - \lambda_1^{-3} \lambda_2^{-2}} = 2 \left[ \frac{\partial \Psi}{\partial I_1} + \lambda_2^2 \frac{\partial \Psi}{\partial I_2} \right] \quad 6.65$$

Para o ensaio de tração equi-biaxial, no qual  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ , a equação (6.65) resulta em:

$$\frac{\sigma_1}{\lambda - \lambda^{-5}} = 2 \left[ \frac{\partial \Psi}{\partial I_1} + \lambda^2 \frac{\partial \Psi}{\partial I_2} \right] \quad 6.66$$

## ***7. Código Computacional***

---

O objetivo precípua desta pesquisa foi a modificação de um código computacional existente, na linguagem Fortran, que faz análise estrutural não linear geométrica de cascas. Tal mudança refere-se à implementação de modelos hiperelásticos não lineares na lei constitutiva, que era, no programa inicial, a relação linear de St.Venant-Kirchhoff. Houve, assim, a necessidade de alterar, apenas, a leitura das propriedades hiperelásticas do material e o cálculo das tensões e do tensor elástico.

Descreveu-se, no quinto capítulo, a metodologia posicional do MEF sem, no entanto, se preocupar com a cinemática específica aplicada às cascas.

Antes de se expor o equacionamento do elemento finito de casca hiperelástica com sete parâmetros nodais utilizado (CODA & PACCOLA, 2003), descreve-se a formulação do mais simples elemento finito, o de treliça plana, que foi desenvolvido neste trabalho e que é muito útil para compreensão da não linearidade geométrica usada neste trabalho.

### **7.1. Elemento Finito de Treliça Plana**

Estão descritas, a seguir, a cinemática e as leis constitutivas usadas para este elemento finito.

### 7.1.1. Cinemática

O elemento finito de treliça plana, mostrado na figura 7.1, possui dois nós e dois parâmetros por nó, que são as coordenadas espaciais ou finais nas direções 1 e 2.

Usou-se aproximação linear para o mapeamento das configurações inicial e final:

$$f_1^0(\xi) = (1 - \xi)x_1^1 + (\xi)x_1^2 \quad 7.1.1$$

$$f_2^0(\xi) = (1 - \xi)x_2^1 + (\xi)x_2^2 \quad 7.1.2$$

$$f_1^1(\xi) = (1 - \xi)y_1^1 + (\xi)y_1^2 \quad 7.1.3$$

$$f_2^1(\xi) = (1 - \xi)y_2^1 + (\xi)y_2^2 \quad 7.1.4$$

$$\phi_1(\xi) = 1 - \xi \quad 7.1.5$$

$$\phi_2(\xi) = \xi \quad 7.1.6$$

onde  $\xi$  é a coordenada adimensional,  $\Phi_1(\xi)$  e  $\Phi_2(\xi)$  são as funções de forma, mostradas na figura 7.2,  $x_i^j$  é a coordenada material ou inicial, na direção  $i$ , do nó  $j$  e  $y_i^j$  é a coordenada espacial ou final, na direção  $i$ , do nó  $j$ .

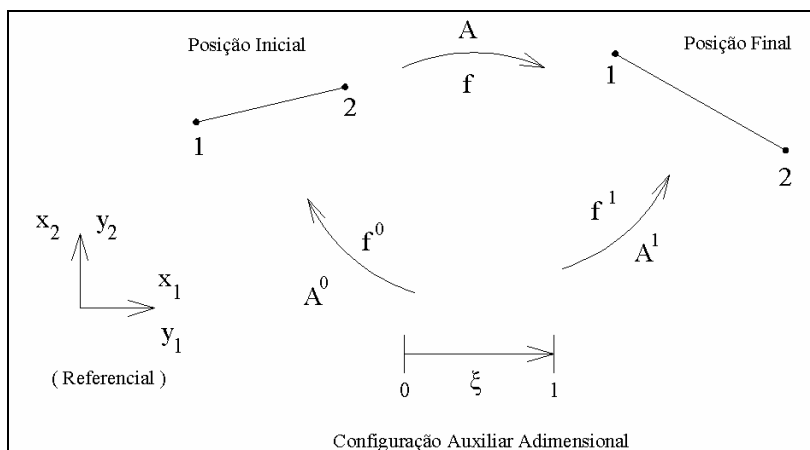


Figura 7.1 - Elemento Finito de Treliça Plana

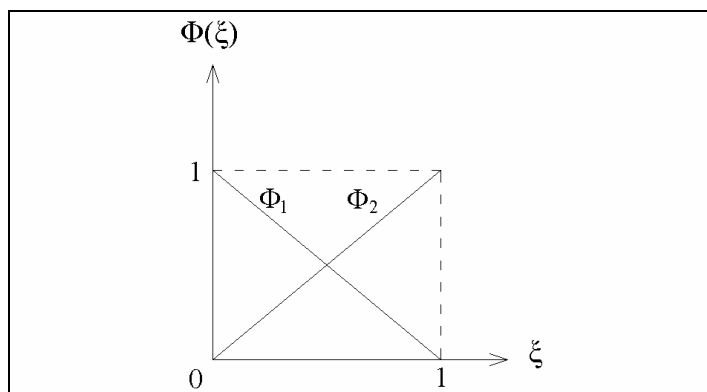


Figura 7.2 - Funções de Forma para o Elemento Finito de Treliça Plana

O vetor  $\mathbf{Y}$ , que contém os graus de liberdade ou parâmetros nodais deste elemento finito, também pode ser escrito como:

$$\vec{Y} = \begin{Bmatrix} y_1^1 \\ y_2^1 \\ y_1^2 \\ y_2^2 \end{Bmatrix} \quad 7.2$$

### 7.1.2. Lei Elástica Simplificada

Utilizou-se a chamada forma simplificada para barras de treliça plana, na qual se considera, apenas, a deformação específica longitudinal de engenharia:

$$\varepsilon = \varepsilon_1^{eng} = \frac{\Delta L}{L_0} = \frac{(L_f - L_0)}{L_0} = \frac{L_f}{L_0} - 1 \quad 7.3.1$$

$$L_0 = \sqrt{[(x_1^2 - x_1^1)^2 + (x_2^2 - x_2^1)^2]} \quad 7.3.2$$

$$L_f = L_f(\vec{Y}) = \sqrt{[(y_1^2 - y_1^1)^2 + (y_2^2 - y_2^1)^2]} \quad 7.3.3$$

onde  $L_0$  é o comprimento inicial do elemento finito e  $L_f$  é o final.

Com a equação (6.56), pode-se obter a tensão:

$$\sigma = \sigma_{11} = \sigma_1^{eng} = \frac{\partial \Psi(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} = E\varepsilon + B\varepsilon^2 + D\varepsilon^3 + C \ln(\varepsilon + 1) \quad 7.4.1$$

$$\sigma_2^{eng} = \sigma_3^{eng} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = 0 \quad 7.4.2$$

onde as constantes E, B, D e C são as constantes elásticas do material,  $\sigma_1^{eng}$  é a tensão normal longitudinal de engenharia, que não varia ao longo da seção transversal,  $\sigma_2^{eng}$  e  $\sigma_3^{eng}$  são as tensões normais transversais.

A energia potencial total, para casos estáticos, resultou em:

$$\Pi = \Pi(\vec{Y}) = U_e(\vec{Y}) - T(\vec{Y}) \quad 7.5.1$$

$$U_e(\vec{Y}) = \int_{V_0} \Psi(\vec{Y}) dV_0 = \Psi(\vec{Y}) \cdot V_0 \quad (\text{deformação constante}) \quad 7.5.2$$

$$T(\vec{Y}) = (\vec{Y})^T (\vec{F}_{ext}) \quad 7.5.3$$

$$\vec{F}_{ext} = \begin{Bmatrix} F_1^1 \\ F_2^1 \\ F_1^2 \\ F_2^2 \end{Bmatrix} \quad 7.5.4$$

onde  $U_e$  é a energia de deformação, T é o trabalho das forças externas aplicadas e  $\vec{F}_{ext}$  é o vetor destas forças.

Quando as forças externas são conservativas, isto é, não se alteram com a posição, o equilíbrio de forças na posição final, com uso do Princípio da Mínima Energia Potencial Total (PMEPT), resulta em:

$$\frac{\partial \Pi(\vec{Y})}{\partial \vec{Y}} = \frac{\partial U_e(\vec{Y})}{\partial \vec{Y}} - \frac{\partial T(\vec{Y})}{\partial \vec{Y}} = \vec{F}_{int}(\vec{Y}) - \vec{F}_{ext} = \vec{0} \Rightarrow \vec{F}_{int}(\vec{Y}) = \vec{F}_{ext} \Rightarrow \quad 7.6.1$$

$$\Rightarrow (F_{int})_i = (F_{ext})_i \Rightarrow \frac{\partial U_e}{\partial Y_i} = \frac{\partial T}{\partial Y_i} \text{ ou } \frac{\partial \Psi}{\partial Y_i} V_0 = (F_{ext})_i \quad 7.6.2$$

Devido ao caráter não linear da equação (7.6.2), aplicou-se o método iterativo de Newton-Raphson, no qual são calculados o vetor resíduo, a matriz Hessiana e o vetor incremento na posição final:

$$\vec{g} = \vec{F}_{int} - \vec{F}_{ext} \Rightarrow g_i = (F_{int})_i - (F_{ext})_i = \frac{\partial \Psi}{\partial Y_i} V_0 - (F_{ext})_i \quad 7.7.1$$

$$H = \frac{\partial^2 U_e}{\partial \vec{Y} \partial \vec{Y}} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \vec{Y} \partial \vec{Y}} V_0 \Rightarrow H_{ij} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y_i \partial Y_j} V_0 \quad 7.7.2$$

$$\Delta \vec{Y} = -(H^{-1}) \vec{g} \quad 7.7.3$$

### 7.1.2.1. Derivadas

As primeiras e segundas derivadas da energia específica de deformação, em relação aos graus de liberdade, são:



$$\frac{\partial \Psi}{\partial \vec{Y}} = \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \vec{Y}} = \sigma \frac{\partial \varepsilon}{\partial \vec{Y}} \Rightarrow \left( \frac{\partial \Psi}{\partial Y_i} \right) = \sigma_{kl} \frac{\partial \varepsilon_{kl}}{\partial Y_i} \quad 7.7.3$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \vec{Y} \partial \vec{Y}} &= \frac{\partial}{\partial \vec{Y}} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \vec{Y}} \right) = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varepsilon \partial \varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \vec{Y}} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \vec{Y}} + \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \vec{Y} \partial \vec{Y}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y_i \partial Y_j} \right) = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varepsilon_{kl} \partial \varepsilon_{mn}} \frac{\partial \varepsilon_{kl}}{\partial Y_i} \frac{\partial \varepsilon_{mn}}{\partial Y_j} + \sigma_{kl} \frac{\partial^2 \varepsilon_{kl}}{\partial Y_i \partial Y_j} \end{aligned} \quad 7.7.4$$

As derivadas da deformação específica de engenharia em relação aos parâmetros nodais são:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \vec{Y}} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial L_f} \frac{\partial L_f}{\partial \vec{Y}} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial L_0} \frac{\partial L_0}{\partial \vec{Y}} = \frac{1}{L_0} \frac{\partial L_f}{\partial \vec{Y}} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial L_0} \vec{0} \Rightarrow \frac{\partial \varepsilon}{\partial Y_i} = \frac{1}{L_0} \frac{\partial L_f}{\partial Y_i} \quad 7.7.5$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \vec{Y} \partial \vec{Y}} &= \frac{\partial}{\partial \vec{Y}} \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial L_f} \frac{\partial L_f}{\partial \vec{Y}} \right) = \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial L_f \partial L_f} \frac{\partial L_f}{\partial \vec{Y}} \frac{\partial L_f}{\partial \vec{Y}} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial L_f} \frac{\partial^2 L_f}{\partial \vec{Y} \partial \vec{Y}} = \\ &= 0 \frac{\partial L_f}{\partial \vec{Y}} \frac{\partial L_f}{\partial \vec{Y}} + \frac{1}{L_0} \frac{\partial^2 L_f}{\partial \vec{Y} \partial \vec{Y}} \Rightarrow \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial Y_i \partial Y_j} = \frac{1}{L_0} \frac{\partial^2 L_f}{\partial Y_i \partial Y_j} \end{aligned} \quad 7.7.6$$

Foram calculadas, com a expressão (7.3.3), as primeiras e segundas derivadas do comprimento final em relação aos graus de liberdade:

$$\frac{\partial L_f}{\partial y_1^1} = \frac{1}{L_f} (y_1^1 - y_1^2) \quad 7.8.1$$

$$\frac{\partial L_f}{\partial y_2^1} = \frac{1}{L_f} (y_2^1 - y_2^2) \quad 7.8.2$$

$$\frac{\partial L_f}{\partial y_1^2} = \frac{1}{L_f} (y_1^2 - y_1^1) \quad 7.8.3$$

$$\frac{\partial L_f}{\partial y_2^2} = \frac{1}{L_f} (y_2^2 - y_2^1) \quad 7.8.4$$

$$\frac{\partial^2 L_f}{\partial y_1^1 \partial y_1^1} = -\frac{(y_1^1 - y_1^2)^2}{L_f^3} + \frac{1}{L_f} \quad 7.8.5$$

$$\frac{\partial^2 L_f}{\partial y_1^1 \partial y_2^1} = -\frac{(y_1^1 - y_1^2)(y_2^1 - y_2^2)}{L_f^3} \quad 7.8.6$$

$$\frac{\partial^2 L_f}{\partial y_1^1 \partial y_1^2} = \frac{(y_1^2 - y_1^1)^2}{L_f^3} - \frac{1}{L_f} \quad 7.8.7$$

$$\frac{\partial^2 L_f}{\partial y_1^1 \partial y_2^2} = -\frac{(y_1^1 - y_1^2)(y_2^2 - y_2^1)}{L_f^3} \quad 7.8.8$$

$$\frac{\partial^2 L_f}{\partial y_2^1 \partial y_1^1} = \frac{\partial^2 L_f}{\partial y_1^1 \partial y_2^1} \quad 7.8.9$$

$$\frac{\partial^2 L_f}{\partial y_2^1 \partial y_2^1} = -\frac{(y_2^1 - y_2^2)^2}{L_f^3} + \frac{1}{L_f} \quad 7.8.10$$

$$\frac{\partial^2 L_f}{\partial y_2^1 \partial y_1^2} = -\frac{(y_2^1 - y_2^2)(y_1^2 - y_1^1)}{L_f^3} \quad 7.8.11$$

$$\frac{\partial^2 L_f}{\partial y_2^1 \partial y_2^2} = \frac{(y_2^2 - y_2^1)^2}{L_f^3} - \frac{1}{L_f} \quad 7.8.12$$

$$\frac{\partial^2 L_f}{\partial y_1^2 \partial y_1^1} = \frac{\partial^2 L_f}{\partial y_1^1 \partial y_1^2} \quad 7.8.13$$

$$\frac{\partial^2 L_f}{\partial y_1^2 \partial y_2^1} = \frac{\partial^2 L_f}{\partial y_2^1 \partial y_1^2} \quad 7.8.14$$

$$\frac{\partial^2 L_f}{\partial y_1^2 \partial y_1^2} = -\frac{(y_1^2 - y_1^1)^2}{L_f^3} + \frac{1}{L_f} \quad 7.8.15$$

$$\frac{\partial^2 L_f}{\partial y_1^2 \partial y_2^2} = -\frac{(y_1^2 - y_1^1)(y_2^2 - y_2^1)}{L_f^3} \quad 7.8.16$$

$$\frac{\partial^2 L_f}{\partial y_2^2 \partial y_1^1} = \frac{\partial^2 L_f}{\partial y_1^1 \partial y_2^2} \quad 7.8.17$$

$$\frac{\partial^2 L_f}{\partial y_2^2 \partial y_2^1} = \frac{\partial^2 L_f}{\partial y_2^1 \partial y_2^2} \quad 7.8.18$$

$$\frac{\partial^2 L_f}{\partial y_2^2 \partial y_1^2} = \frac{\partial^2 L_f}{\partial y_1^2 \partial y_2^2} \quad 7.8.19$$

$$\frac{\partial^2 L_f}{\partial y_2^2 \partial y_2^2} = -\frac{(y_2^2 - y_2^1)^2}{L_f^3} + \frac{1}{L_f} \quad 7.8.20$$

A derivada da energia em relação à deformação específica de engenharia está expressa na equação (7.4.2). Restou, portanto, determinar o tensor elástico, também chamado de operador tangente consistente (DÜSTER *et al.*, 2003):

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varepsilon \partial \varepsilon} = E + 2B\varepsilon + \frac{C}{\varepsilon + 1} \Rightarrow \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varepsilon_{11} \partial \varepsilon_{11}} = E + 2B\varepsilon_{11} + \frac{C}{\varepsilon_{11} + 1} \quad 7.9.1$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} = 0, \text{ para } (i,j) \neq (1,1) \text{ e } (k,l) \neq (1,1) \quad 7.9.2$$

### 7.1.2.2. Algoritmo Desenvolvido

Está descrito, a seguir, o algoritmo usado no código computacional desenvolvido para análise estática não linear geométrica de barras de treliça plana.

#### *Programa Principal*

#### 1. INÍCIO DO PROGRAMA

- 1.1. Inserção de nova biblioteca no programa, para alocação de variáveis;
- 1.2. Declaração de uso de bibliotecas do compilador;
- 1.3. Declaração de variáveis não alocáveis;

## 2. LEITURA DOS DADOS

- 2.1. Abertura de arquivos de entrada e saída de dados;
- 2.2. Leitura do nome do arquivo de entrada;
- 2.3. Leitura do número de nós e de elementos da estrutura;
- 2.4. Declaração da dimensão das variáveis alocáveis;
- 2.5. Anulação das variáveis alocáveis;
- 2.6. Leitura das coordenadas dos nós nas direções 1 e 2;
- 2.7. Leitura da incidência dos elementos, que indica quais são os nós que pertencem a certo elemento finito no sistema global de numeração desses nós;
- 2.8. Leitura das propriedades dos elementos: área inicial da seção transversal e coeficientes E, B e C da equação (7.4) para cada elemento;
- 2.9. Leitura das forças externas aplicadas em cada nó nas direções 1 e 2;
- 2.10. Leitura das condições de contorno ou da liberdade de movimento dos nós, que indica se o nó está ou não vinculado;
- 2.11. Leitura dos recalques de cada nó restrito, que são os valores prescritos de deslocamento;
- 2.12. Leitura do número de passos de carga;
- 2.13. Leitura da tolerância, que é o valor máximo permitido para o erro;
- 2.14. Leitura do nó e da direção escolhidos para impressão da lista de força e posição final;
- 2.15. Leitura do elemento selecionado para impressão da lista de tensão real de Cauchy e alongamento longitudinal;

### 3. IMPRESSÃO DOS DADOS DE ENTRADA NO ARQUIVO DE SAÍDA

## 4. CÁLCULOS

4.1. Divisão do carregamento em incrementos de força;

4.2. Início do passo de carga, com adição de um incremento de força aplicada;

4.3. Determinação da posição final dos nós vinculados, que é a soma da posição inicial com o correspondente recalque;

4.4. Início da Iteração no passo de carga;

4.4.1. Chamada da sub-rotina MATRIZES, para cálculo do vetor de forças internas e da matriz Hessiana;

4.4.2. Chamada da sub-rotina SOLVE, para obtenção dos vetores resíduo e incremento na posição final;

4.4.3. Chamada da sub-rotina ATUALIZA, para determinação da nova posição final tentativa;

4.5. Realização do teste:

Se  $ERRO > TOLERÂNCIA \Rightarrow$  retorna ao item 4.4, para nova iteração;

Caso contrário  $\Rightarrow$  continua;

4.6. Fim da Iteração;

4.7. Cálculo das reações de apoio;

4.8. Impressão das posições finais dos nós em cada passo de carga;

4.9. Impressão das forças externas e das posições finais do nó escolhido;

4.10. Impressão das tensões reais de Cauchy e do alongamento longitudinal do elemento escolhido;

4.11. Impressão do erro e do número de iterações em cada passo de carga;

4.12. Se o passo de carga atual for o último  $\Rightarrow$  continua;

Caso contrário => retorna ao item 4.2, para novo passo de carga;

## 5. FIM DO PROGRAMA

### *Sub-rotina MATRIZES*

1. Cálculo dos comprimentos inicial e final, da tensão e da deformação de engenharia para cada elemento finito;
2. Cálculo das derivadas da energia específica em relação à deformação de Green-Lagrange, também chamadas de tensão de Piola-Kirchoff de segunda espécie;
3. Cálculo da tensão de Piola-Kirchoff de primeira espécie e da tensão real de Cauchy;
4. Cálculo da energia específica de deformação, do trabalho das forças externas e da energia potencial total;
5. Cálculo das segundas derivadas da energia específica em relação à deformação de Green-Lagrange, também chamadas de tensor elástico;
6. Cálculo das primeiras e segundas derivadas da deformação de Green-Lagrange em relação aos parâmetros nodais;
7. Cálculo do vetor de forças internas para cada elemento;
8. Cálculo da matriz Hessiana para cada elemento;
9. Montagem do vetor global de forças internas;
10. Montagem da matriz Hessiana global;

### *Sub-rotina SOLVE*

1. Modificação do sistema global, com a introdução das condições de contorno;
2. Inversão da matriz Hessiana global;
3. Cálculo do vetor resíduo global;
4. Cálculo do incremento no vetor posição final global;

### *Sub-rotina ATUALIZA*

1. Atualização da posição final e das forças externas:  
Se Grau de Liberdade é restrito => iguala-se Força Externa à Interna;  
Caso contrário => atualiza-se a posição final, somando-a ao incremento obtido;

### **7.1.3. Modelo Incompressível Hiperelástico**

A lei constitutiva hiperelástica usada para o elemento finito de treliça plana foi:

$$\Psi = \psi_{iso} - p(J - 1) \quad 7.10$$

onde  $\Psi_{iso}$ , que é a parcela isocórica da energia específica de deformação, pode ser a equação de Yeoh (6.13.6), a de Hartmann-Neff (6.13.10) ou a de Bechir-Boufala-Chevalier (6.13.9),  $p$  é a pressão hidrostática a ser determinada pelas condições de contorno e  $J$  é o jacobiano ou o determinante do gradiente.

### 7.1.3.1. Derivadas

Analogamente à lei elástica simplificada, expressa na igualdade (7.4), foi preciso calcular as derivadas da energia específica de deformação em relação aos graus de liberdade, que são:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \vec{Y}} = \frac{\partial \Psi}{\partial E} \frac{\partial E}{\partial \vec{Y}} \Rightarrow \frac{\partial \Psi}{\partial Y_i} = \frac{\partial \Psi}{\partial E_{kl}} \frac{\partial E_{kl}}{\partial Y_i} \quad 7.11.1$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \vec{Y} \partial \vec{Y}} &= \frac{\partial}{\partial \vec{Y}} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial E} \frac{\partial E}{\partial \vec{Y}} \right) = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial E \partial E} \frac{\partial E}{\partial \vec{Y}} \frac{\partial E}{\partial \vec{Y}} + \frac{\partial \Psi}{\partial E} \frac{\partial^2 E}{\partial \vec{Y} \partial \vec{Y}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y_i \partial Y_j} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial E_{kl} \partial E_{mn}} \frac{\partial E_{kl}}{\partial Y_i} \frac{\partial E_{mn}}{\partial Y_j} + \frac{\partial \Psi}{\partial E_{kl}} \frac{\partial^2 E_{kl}}{\partial Y_i \partial Y_j} \end{aligned} \quad 7.11.2$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial E} = S_{iso} - pC^{-1} \quad 7.11.3$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial E \partial E} = (T_e)_{iso} - 2p \frac{\partial(C^{-1})}{\partial C} \quad 7.11.4$$

onde  $\mathbf{E}$  é o tensor deformação de Green-Lagrange,  $\mathbf{S}$  é o tensor tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie e  $\mathbf{T}_e$  é o tensor elástico de quarta ordem.

Deve-se comentar que a derivada da inversa do tensor  $\mathbf{C}$  em relação a  $\mathbf{C}$  é dada pela igualdade (3.39.2) e as parcelas isocóricas das derivadas da energia em relação à deformação de Green-Lagrange são dadas pelas equações (6.20) e (6.26). Foi necessário, portanto, o cálculo dessa medida de deformação e de suas derivadas em relação aos parâmetros nodais.

Para o caso de treliça plana incompressível, os tensores gradiente, alongamento à direita de Cauchy-Green e deformação de Green-Lagrange, assim como os invariantes, são:



$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^{-1/2} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^{-1/2} \end{bmatrix} \quad 7.12.1$$

$$C = \begin{bmatrix} \lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^{-1} \end{bmatrix} \Rightarrow C^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad 7.12.2$$

$$E = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \lambda^2 - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^{-1} - 1 \end{bmatrix} \quad 7.12.3$$

$$I_1 = I_1(C) = \lambda^2 + \frac{2}{\lambda} \quad 7.12.4$$

$$I_2 = I_2(C) = \frac{1}{\lambda^2} + 2\lambda \quad 7.12.5$$

$$I_3 = I_3(C) = 1 \quad 7.12.6$$

$$\lambda = \lambda_1 = \varepsilon_1^{eng} + 1 = \frac{L_f}{L_0} \quad 7.12.7$$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \left(\frac{L_f}{L_0}\right)^2 - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{L_0}{L_f}\right) - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{L_0}{L_f}\right) - 1 \end{bmatrix} \quad 7.12.8$$

As derivadas da deformação adotada em relação aos graus de liberdade são:

$$\frac{\partial E}{\partial \vec{Y}} = \frac{\partial E}{\partial L_f} \frac{\partial L_f}{\partial \vec{Y}} \Rightarrow \frac{\partial E_{kl}}{\partial Y_i} = \frac{\partial E_{kl}}{\partial L_f} \frac{\partial L_f}{\partial Y_i} \quad 7.13.1$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E}{\partial \vec{Y} \partial \vec{Y}} &= \frac{\partial^2 E}{\partial L_f \partial L_f} \frac{\partial L_f}{\partial \vec{Y}} \frac{\partial L_f}{\partial \vec{Y}} + \frac{\partial E}{\partial L_f} \frac{\partial^2 L_f}{\partial \vec{Y} \partial \vec{Y}} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{\partial^2 E_{kl}}{\partial Y_i \partial Y_j} &= \frac{\partial^2 E_{kl}}{\partial L_f \partial L_f} \frac{\partial L_f}{\partial Y_i} \frac{\partial L_f}{\partial Y_j} + \frac{\partial E_{kl}}{\partial L_f} \frac{\partial^2 L_f}{\partial Y_i \partial Y_j} \end{aligned} \quad 7.13.2$$

As derivadas do comprimento final do elemento em relação aos graus de liberdade estão descritas nas expressões (7.8). Já as derivadas da deformação de Green-Lagrange em relação a esse comprimento são:

$$\frac{\partial E_{11}}{\partial L_f} = \frac{L_f}{L_0^2} \quad 7.14.1$$

$$\frac{\partial E_{22}}{\partial L_f} = \frac{\partial E_{33}}{\partial L_f} = -\frac{L_0}{2L_f^2} \quad 7.14.2$$

$$\frac{\partial^2 E_{11}}{\partial L_f \partial L_f} = \frac{1}{L_0^2} \quad 7.14.3$$

$$\frac{\partial^2 E_{22}}{\partial L_f \partial L_f} = \frac{\partial^2 E_{33}}{\partial L_f \partial L_f} = \frac{L_0}{L_f^3} \quad 7.14.4$$

A pressão hidrostática deve ser obtida com as condições de contorno:

$$S_{22} = S_{33} = (S_{22})_{iso} - p(C^{-1})_{22} = 0 \Rightarrow p = \frac{(S_{22})_{iso}}{\lambda} = \frac{(S_{33})_{iso}}{\lambda} \quad 7.15.1$$

$$S_{11} = (S_{11})_{iso} - p(C^{-1})_{11} = (S_{11})_{iso} - \frac{(S_{22})_{iso}}{\lambda^3} \quad 7.15.2$$

$$(T_e) = (T_e)_{iso} - 2 \frac{(S_{22})_{iso}}{\lambda} \frac{\partial(C^{-1})}{\partial C} \quad 7.15.3$$

### 7.1.3.2. Algoritmo Desenvolvido

O algoritmo desenvolvido para o elemento finito de treliça plana incompressível segue o mesmo procedimento da lei elástica simplificada, dado no subitem 7.1.2.2. A única exceção é a leitura das propriedades elásticas, na qual são lidos os coeficientes da lei hiperelástica adotada:

$c_{10}, c_{20}, c_{30}$	(Yeoh)	7.16.1
$\alpha, c_{10}, c_{01}$	(Hartmann-Neff)	7.16.2
$c_{10}, c_{20}, c_{30}, c_{01}, c_{02}$	(Bechir-Boufala-Chevalier)	7.16.3

## 7.2. Elemento Finito de Casca

O elemento finito de casca estudado é aquele cuja cinemática foi sugerida por EL-ABBASI & MEGUID (2000), que foi alterada, para a formulação Lagrangiana posicional, por CODA & PACCOLA (2006) e melhorada em CODA & PACCOLA (2008), os quais introduziram o sétimo parâmetro. Está descrito a seguir o equacionamento usado para este elemento.

### 7.2.1. Cinemática

A figura 7.3 ilustra a superfície média do elemento finito de casca usado, que possui dez nós e sete parâmetros nodais.

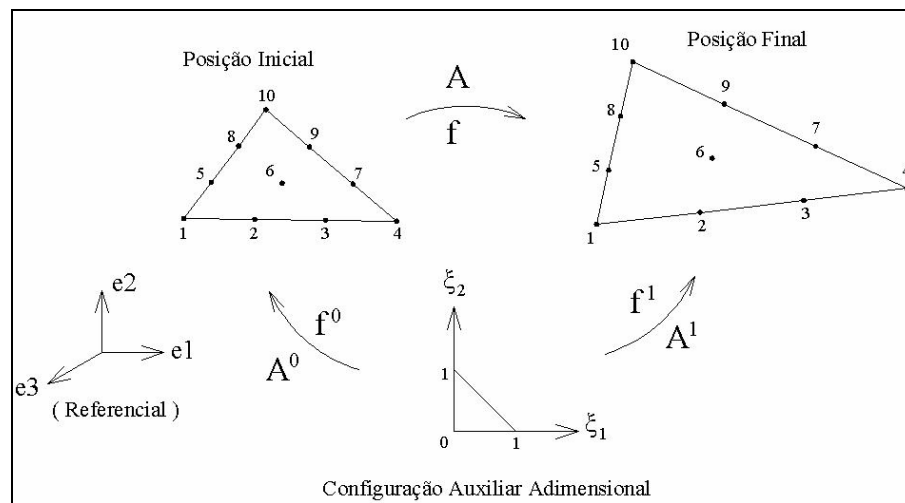


Figura 7.3 - Elemento Finito de Casca

As coordenadas adimensionais  $\xi_1$  e  $\xi_2$  dos nós estão na tabela 7.1.

Tabela 7.1 - Coordenadas Adimensionais dos Nós

nó	$\xi_1$	$\xi_2$
1	0	0
2	1/3	0
3	2/3	0
4	1	0
5	0	1/3
6	1/3	1/3
7	2/3	1/3
8	0	2/3
9	1/3	2/3
10	0	1

Os mapeamentos das configurações inicial e final da superfície média são, respectivamente:

$$x_i^m(\xi_1, \xi_2, X_{Li}) = \phi_L(\xi_1, \xi_2) X_{Li} \quad 7.17.1$$

$$y_i^m(\xi_1, \xi_2, Y_{Li}) = \phi_L(\xi_1, \xi_2) Y_{Li} \quad 7.17.2$$

onde  $\Phi_L(\xi_1, \xi_2)$  são as funções de forma referentes ao nó L,  $X_{Li}$  são as coordenadas iniciais, na direção i, do nó L e  $Y_{Li}$  são as finais.

Os polinômios aproximadores inteligentes, obtidos com as coordenadas da tabela 7.1, são:

$$\phi_1(\xi_1, \xi_2) = 1 - \frac{11}{2}(\xi_1 + \xi_2) + 9(\xi_1 + \xi_2)^2 - \frac{9}{2}(\xi_1 + \xi_2)^3 \quad 7.18.1$$

$$\phi_2(\xi_1, \xi_2) = 9\xi_1 - \frac{45}{2}\xi_1(\xi_1 + \xi_2) + \frac{27}{2}\xi_1^2(\xi_1 + \xi_2)^2 \quad 7.18.2$$

$$\phi_3(\xi_1, \xi_2) = -\frac{9}{2}\xi_1(1 - \xi_2) + 18\xi_1^2 - \frac{27}{2}\xi_1^2(\xi_1 + \xi_2) \quad 7.18.3$$

$$\phi_4(\xi_1, \xi_2) = \xi_1 - \frac{9}{2}\xi_1^2(1 - \xi_1) \quad 7.18.4$$

$$\phi_5(\xi_1, \xi_2) = 9\xi_2 - \frac{45}{2}\xi_2(\xi_1 + \xi_2) + \frac{27}{2}\xi_2^2(\xi_1 + \xi_2)^2 \quad 7.18.5$$

$$\phi_6(\xi_1, \xi_2) = 27\xi_1\xi_2(1 - \xi_1 - \xi_2) \quad 7.18.6$$

$$\phi_7(\xi_1, \xi_2) = -\frac{9}{2}\xi_1\xi_2(1 - 3\xi_1) \quad 7.18.7$$

$$\phi_8(\xi_1, \xi_2) = -\frac{9}{2}\xi_2(1 - \xi_1) + 18\xi_2^2 - \frac{27}{2}\xi_2^2(\xi_1 + \xi_2) \quad 7.18.8$$

$$\phi_9(\xi_1, \xi_2) = -\frac{9}{2}\xi_1\xi_2(1 - 3\xi_2) \quad 7.18.9$$

$$\phi_{10}(\xi_1, \xi_2) = \xi_2 - \frac{9}{2} \xi_2^2 (1 - \xi_2) \quad 7.18.10$$

É preciso mapear não apenas os da superfície média, mas todos os pontos da casca. Para isto, são adicionados aos vetores  $\mathbf{f}^0$  e  $\mathbf{f}^1$  os seguintes vetores posição, chamados de vetores generalizados:

$$f_i^0 = x_i^m(\xi_1, \xi_2, X_{Li}) + \mathbf{g}_i^0 \quad 7.19.1$$

$$f_i^1 = y_i^m(\xi_1, \xi_2, Y_{Li}) + \mathbf{g}_i^1 \quad 7.19.2$$

onde  $\mathbf{f}^0$  é o mapeamento da configuração auxiliar para a inicial,  $\mathbf{f}^1$  para a final,  $\mathbf{g}^0$  é o vetor generalizado na posição inicial e  $\mathbf{g}^1$  na final.

A partir da figura 7.4, que ilustra os vetores  $\mathbf{g}^0$  e  $\mathbf{g}^1$ , é possível obter as seguintes expressões:

$$\mathbf{g}_i^0 = \frac{h_0}{2} e_i^0(\xi_1, \xi_2) \xi_3, \quad -1 \leq \xi_3 \leq 1 \quad 7.20.1$$

$$e_i^0(\xi_1, \xi_2) = \phi_L(\xi_1, \xi_2) N_{Li} \quad 7.20.2$$

$$\mathbf{g}_i^1 = \frac{h(\xi_1, \xi_2)}{2} e_i^1(\xi_1, \xi_2) \xi_3 \quad 7.20.3$$

$$\frac{h(\xi_1, \xi_2)}{2} e_i^1(\xi_1, \xi_2) = \frac{h_0}{2} \phi_L(\xi_1, \xi_2) \mathbf{G}_{Li} \quad 7.20.4$$

onde  $h_0$  é a espessura inicial,  $h$  é a atual,  $\mathbf{N}_L$  é o vetor normal à superfície média inicial referente ao nó L,  $\mathbf{e}^0$  é o vetor unitário na direção de  $\mathbf{N}_L$ ,  $\mathbf{e}^1$  é o vetor unitário na direção de  $\mathbf{g}^1$  e  $\mathbf{G}_L$  é o vetor generalizado na configuração atual referente ao nó L.

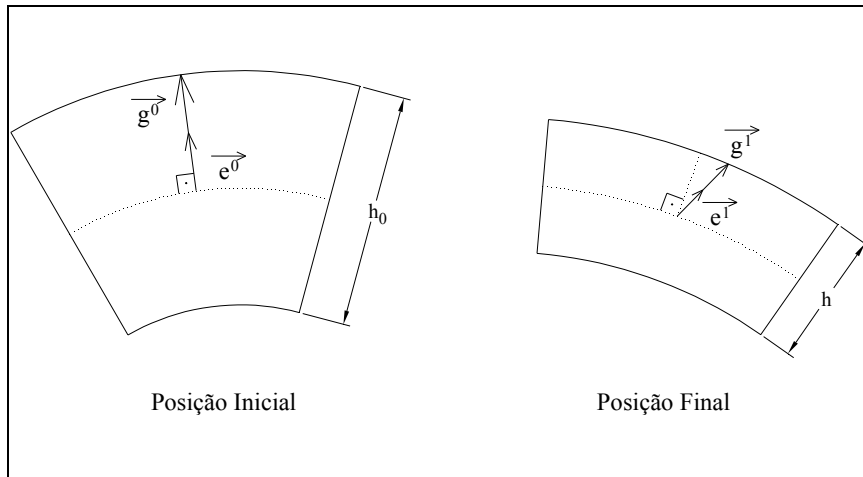


Figura 7.4 - Vetores Generalizados Inicial e Final

Para introdução da variação da deformação ao longo da espessura da casca, introduz-se segundo o chamado enriquecimento em deformação, do inglês *Enhanced Assumed Strain*, a variável escalar  $A$ , expressa por:

$$A(\xi_1, \xi_2) = \phi_L(\xi_1, \xi_2) A_L \quad 7.21$$

onde  $A$  é a taxa de variação linear da deformação ao longo da espessura e  $A_L$  é valor dessa taxa no ponto correspondente ao nó  $L$ .

Assim, a expressão do vetor generalizado  $\mathbf{g}^1$  é:

$$\mathbf{g}_i^1 = \frac{h_0}{2} \phi_L(\xi_1, \xi_2) G_{Li} [\xi_3 + A \xi_3^2] \quad 7.22$$

Portanto, os sete parâmetros por nó são as três componentes da posição final  $\mathbf{Y}$  do nó na superfície média, as três componentes do vetor generalizado atual  $\mathbf{G}$  e o valor da taxa de variação linear  $A$ .

Com as hipóteses cinemáticas adotadas para este elemento finito, pode-se concluir que o vetor generalizado  $\mathbf{G}_L$ , mostrado na figura 7.5, refere-se à rotação do eixo normal à superfície média deformada e à mudança de espessura. A taxa  $A$  garante às superfícies paralelas à média a possibilidade de se afastar ou aproximar dela em diferentes taxas.

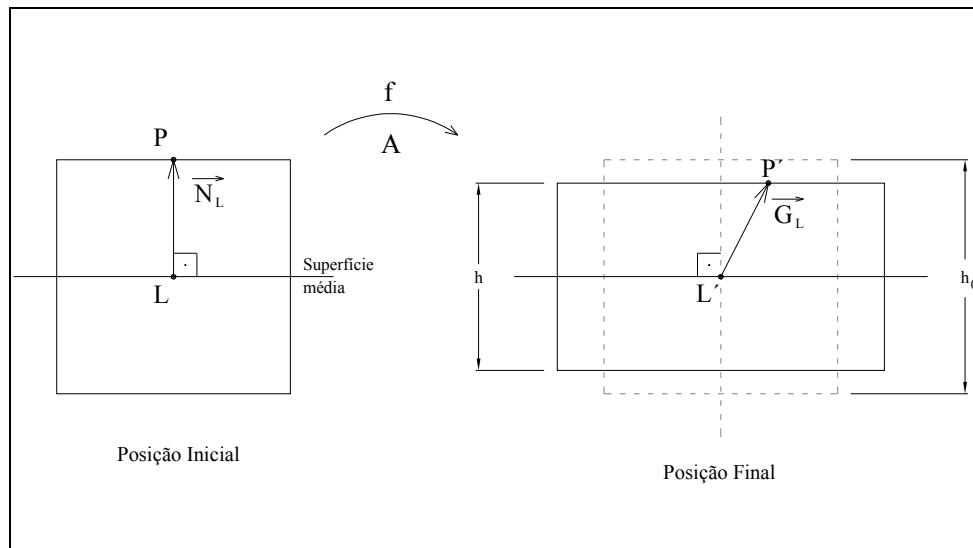


Figura 7.5 - Vetor Generalizado

Deve-se comentar que  $\mathbf{G}_L$  não é normal à superfície média, ou seja, a cinemática básica da formulação, com exceção da taxa de variação da espessura, é a de Reissner-Mindlin.

### 7.2.2. Lei Constitutiva

Os modelos constitutivos hiperelásticos usados foram os que estão expressos pelas fórmulas (6.19). Assim, foram utilizadas, para o cálculo do vetor resíduo e da matriz Hessiana, as seguintes equações:



$$\vec{g} = \vec{F}_{\text{int}} - \vec{F}_{\text{ext}} = \int_{V_0} \frac{\partial \Psi}{\partial \vec{Y}} dV_0 - \vec{F}_{\text{ext}} = \int_{V_0} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial E} \frac{\partial E}{\partial \vec{Y}} \right) dV_0 - \vec{F}_{\text{ext}} \quad 7.23.1$$

$$H = \int_{V_0} \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \vec{Y} \partial \vec{Y}} \right) dV_0 = \int_{V_0} \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial E \partial E} \frac{\partial E}{\partial \vec{Y}} \frac{\partial E}{\partial \vec{Y}} + \frac{\partial \Psi}{\partial E} \frac{\partial^2 E}{\partial \vec{Y} \partial \vec{Y}} \right) dV_0 \quad 7.23.2$$

O volume inicial foi calculado da seguinte maneira:

$$dV_0 = J^0 d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 = \det(A^0) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \quad 7.24$$

Como as derivadas, em relação aos graus de liberdade, da deformação de Green-Lagrange haviam sido calculadas e usadas no programa inicial, houve necessidade apenas de substituir as primeiras e segundas derivadas da energia específica em relação à referida medida de deformação, com a aplicação das equações (6.20) e (6.26) nas leis constitutivas de Yeoh, de Hartmann-Neff e de Bechir-Boufala-Chevalier.

### 7.2.3. Integração Numérica

Devido à extrema dificuldade de se fazer a integração exata, foi preciso usar a integração numérica para cálculo das expressões (7.23). Para isto, foram utilizados sete pontos nas superfícies paralelas à média e variável número de pontos ao longo da espessura da casca.

A tabela 7.2 mostra a localização, com as coordenadas adimensionais, e o peso para cada ponto.

Desse modo, as expressões (7.23) foram substituídas por:

$$\vec{g} = \sum_{i=1}^7 \sum_{j=1}^{NP} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial \vec{Y}} J^0 w_{12} w_3 \right)_{i,j} - \vec{F}_{ext} \quad 7.25.1$$

$$H = \sum_{i=1}^7 \sum_{j=1}^{NP} \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \vec{Y} \partial \vec{Y}} J^0 w_{12} w_3 \right)_{i,j} \quad 7.25.2$$

onde NP é o número de pontos de integração ao longo da espessura,  $w_{12}$  é o peso relativo ao ponto na superfície paralela à média e  $w_3$  é o peso relativo ao ponto na espessura da casca.

Tabela 7.2 - Pontos e Pesos para Integração Numérica

Ponto	$\xi_1$	$\xi_2$	Peso ( $w_{12}$ )
1	1/3	1/3	0,11250000
2	0,797426985353087	0,101286507323456	0,0629695902724135
3	0,101286507323456	0,797426985353087	0,0629695902724135
4	0,101286507323456	0,101286507323456	0,0629695902724135
5	0,470142064105115	0,470142064105115	0,066197076394253
6	0,059715871789770	0,470142064105115	0,066197076394253
7	0,470142064105115	0,059715871789770	0,066197076394253

#### 7.2.4. Algoritmo Desenvolvido

Está descrito, em seguida, o algoritmo usado no código computacional modificado para análise estática não linear geométrica de cascas hiperelásticas com sete parâmetros por nó.

## *Programa Principal*

### 1. INÍCIO DO PROGRAMA

- 1.1. Inserção de nova biblioteca no programa, para alocação de variáveis;
- 1.2. Declaração de uso de bibliotecas do compilador;
- 1.3. Declaração implícita de variáveis não alocáveis;
- 1.4. Declaração de variáveis inteiras usadas para marcação do tempo de processamento;
- 1.5. Indicação da inclusão do arquivo *bloclagatbig.for*, que serve para compartilhar o valor das variáveis em diferentes sub-rotinas;

### 2. LEITURA DOS DADOS

- 2.1. Indicação da abertura de arquivos de entrada e saída;
- 2.2. Chamada da sub-rotina GETTIM, para marcação do tempo de início do processamento;
- 2.3. Chamada da sub-rotina DADOSINICIAIS, que lê os dados iniciais de entrada;

### 3. CÁLCULOS

- 3.1. Chamada da sub-rotina HAMER7, que fornece a localização e o peso dos pontos para integração numérica;
- 3.2. Chamada da sub-rotina PREPARA, que converte valores dos pontos de integração numérica para pontos nodais;
- 3.3. Definição do valor do número  $\pi$ ;
- 3.4. Início do passo de carga;
- 3.5. Definição dos tensores identidade de segunda e quarta ordens;

- 3.6. Início da Iteração;
  - 3.6.1. Chamada da principal sub-rotina, denominada MATRIZ, que calcula o vetor resíduo global e a matriz Hessiana global;
  - 3.6.2. Chamada da sub-rotina CONDCON, que modifica o sistema global com a inserção das condições de contorno;
  - 3.6.3. Chamada da sub-rotina MA27, que resolve o sistema modificado;
  - 3.6.4.. Chamada da sub-rotina CALCULANORMA, que calcula o erro;
- 3.7. Realização do Teste:

Se  $ERRO > TOLERÂNCIA \Rightarrow$  retorna ao item 3.6, para nova iteração;

Caso contrário  $\Rightarrow$  continua;
- 3.8. Fim da Iteração;
- 3.9. Impressão do número de iterações necessárias no passo de carga;
- 3.10. Chamada da sub-rotina SAIDA, que imprime os valores das posições finais no passo;
- 3.11. Chamada da sub-rotina SAIDAPOSNOV, que imprime os valores das posições finais no passo para pós-processamento;
- 3.12. Chamada da sub-rotina TENSAO, que imprime os valores das tensões reais de Cauchy no passo;
- 3.13. Chamada da sub-rotina SAIDAPOSNOVTENSAO, que imprime os valores das tensões reais de Cauchy no passo para pós-processamento;
- 3.14. Chamada da sub-rotina TENSAOPRINCIPAL, que imprime os valores principais das tensões reais de Cauchy no passo;
- 3.15. Chamada da sub-rotina SAIDAPOSNOVTENSAOPRINCIPAL, que imprime os valores principais das tensões reais de Cauchy no passo para pós- processamento;
- 3.16. Fim do passo de carga;

- 3.17. Se o passo de carga atual for o último => continua;  
Caso contrário => retorna ao item 3.4, para novo passo de carga;

#### 4. FIM DO PROGRAMA

- 4.1. Chamada da sub-rotina GETTIM, para marcação do tempo final do processamento;
- 4.2. Impressão da duração, em segundos, do tempo de processamento;
- 4.3. Declaração do fim da execução;

#### *Sub-rotina DADOSINICIAIS*

1. Leitura do número de nós por lado do elemento, de pontos de Gauss na área e de pontos de Gauss na espessura e leitura da frequência de impressão;
2. Leitura do número de nós e de elementos e da tolerância;
3. Leitura das coordenadas iniciais dos nós;
4. Leitura da incidência dos elementos;
5. Leitura das propriedades físicas dos elementos: módulo de elasticidade longitudinal, coeficiente de Poisson, espessura, densidade específica inicial e coeficiente de amortecimento;
6. Leitura dos coeficientes da lei hiperelástica adotada;
7. Chamada da sub-rotina GEOMETRIAINICIAL, que determina os cossenos diretores iniciais e, portanto, os vetores generalizados iniciais;

### *Sub-rotina MATRIZ*

1. Chamada da sub-rotina ELEMENTO, que calcula o vetor resíduo e a matriz Hessiana para cada elemento finito;
2. Montagem do sistema global;

### *Sub-rotina ELEMENTO*

1. Chamada da sub-rotina GEOMETRIAATUAL, que atualiza a configuração de cada elemento e determina os cossenos diretores finais e, portanto, os vetores generalizados finais;
2. Chamada da sub-rotina FORMAEDERITRI, que calcula as funções de forma e suas derivadas para cada ponto de Gauss;
3. Chamada da sub-rotina CALC\_A0, que calcula o gradiente da mudança de configuração inicial;
4. Chamada da sub-rotina CALC\_AF, que calcula o gradiente da mudança de configuração final;
5. Chamada da sub-rotina CAUCHY, que calcula o gradiente da mudança de configuração total e o alongamento à direita de Cauchy-Green;
6. Chamada da sub-rotina DEVCSF, que determina os valores e as direções principais do tensor de Cauchy-Green;
7. Chamada da sub-rotina DECOMPOS, que decompõe o gradiente e calcula os invariantes de deformação;
8. Chamada da sub-rotina DEFORMACOES, que calcula as deformações de engenharia e de Green-Lagrange e os alongamentos;

9. Chamada da sub-rotina ENERGDEF, que determina a energia específica de deformação;
10. Chamada da sub-rotina PK2, que calcula a tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie;
11. Chamada da sub-rotina OPTANGCONS, que calcula o tensor elástico de quarta ordem, também chamado de operador tangente consistente;
12. Chamada da sub-rotina DERIVADPS, que determina as derivadas do gradiente final em relação a cada grau de liberdade;
13. Chamada da sub-rotina DGRAD, que calcula as derivadas do gradiente total em relação a cada grau de liberdade;
14. Chamada da sub-rotina DERIDEF, que determina as derivadas dos tensores de Cauchy-Green e de Green-Lagrange em relação a cada parâmetro nodal;
15. Chamada da sub-rotina DERIVENER, na qual são obtidas as derivadas da energia específica de deformação em relação aos graus de liberdade;
16. Cálculo do vetor local de forças internas;
17. Chamada da sub-rotina SEGDERIVAPS, que calcula as segundas derivadas do gradiente final em relação a cada parâmetro nodal;
18. Chamada da sub-rotina D2GRAD, que determina as segundas derivadas do gradiente total em relação a cada parâmetro nodal;
19. Chamada da sub-rotina DERI2DEF, na qual são obtidas as segundas derivadas dos tensores de Cauchy-Green e de Green-Lagrange em relação aos graus de liberdade;
20. Chamada da sub-rotina SEGDERENE, na qual são calculadas as segundas derivadas da energia específica de deformação em relação aos parâmetros nodais;
21. Cálculo da matriz Hessiana local.

## ***8. Resultados e Discussões***

---

Neste capítulo são apresentados os resultados obtidos com as simulações estruturais estáticas realizadas com os elementos finitos de treliça plana e de casca para os diversos modelos constitutivos adotados. Quando possível, foram comparados os resultados numéricos com soluções analíticas ou respostas experimentais.

### **8.1. Exemplos Simulados com o Elemento Finito de Treliça Plana**

Os exemplos com o elemento finito de treliça plana foram simulados com 100 passos de carga, ou incrementos.

#### **8.1.1. Exemplo 1 - Treliça Plana Abatida**

O objetivo desta simulação, ilustrada na figura 8.1, foi mostrar uma das vantagens da análise não linear geométrica em relação à linear, pela comparação com a equação analítica de equilíbrio.



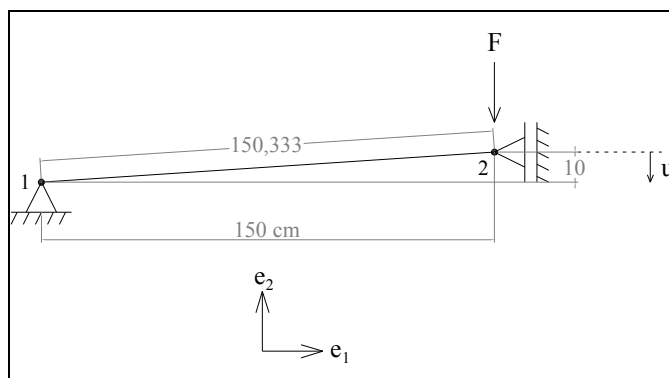


Figura 8.1 - Treça Plana Elástica Abatida

Os dados desta treça, retirados de PROENÇA (2006), são:

$$\sigma = E\varepsilon \quad 8.1.1$$

$$E = 20500 \text{ kN/cm}^2 \quad 8.1.2$$

$$A = 6,526 \text{ cm}^2 \quad 8.1.3$$

onde  $\sigma$  é a tensão longitudinal de engenharia,  $\varepsilon$  é a deformação específica longitudinal de engenharia,  $E$  é o módulo de Young e  $A$  é a área inicial da seção transversal.

O equacionamento do equilíbrio com a linearidade geométrica (LG) resulta em:

$$F = F(u) = \frac{EAh^2}{L_0^3}u \Rightarrow F(u) = (3,937661)u \quad 8.2.1$$

$$\frac{dF}{du} = \frac{EAh^2}{L_0^2} \Rightarrow \frac{dF}{du} = 3,937661 \quad 8.2.2$$

onde  $F$  é o valor da força aplicada,  $u$  é o deslocamento vertical do nó 2,  $(dF/du)$  é a rigidez que a estrutura possui em relação ao deslocamento  $u$ ,  $h = 10\text{cm}$  é a diferença entre as coordenadas verticais dos nós 1 e 2 e  $L_0$  é o comprimento inicial do elemento finito.

Já o equilíbrio com uso da não linearidade geométrica (NLG), na posição deslocada, conduz às seguintes expressões:

$$F = F(u) = \frac{EA}{L_o}(h-u) \left\{ 1 - \frac{L_0}{\sqrt{a^2 + (h-u)^2}} \right\} \Rightarrow \quad 8.3.1$$

$$\Rightarrow F(u) = 889,9113(10-u) \left\{ 1 - \frac{150,333}{\sqrt{22500 + (10-u)^2}} \right\}$$

$$\frac{dF}{du} = -889,9113 + 133783,0355 \frac{1}{\sqrt{22600 - 20u + u^2}} + \quad 8.3.2$$

$$+ 66891,5177 \frac{(10-u)(-20-2u)}{(22600 - 20u + u^2)^{\frac{3}{2}}}$$

onde  $a = 150\text{cm}$  é a diferença entre as coordenadas horizontais dos nós 1 e 2.

Os resultados obtidos com a simulação realizada e com as fórmulas (8.2) e (8.3) estão nas figuras 8.2 e 8.3.

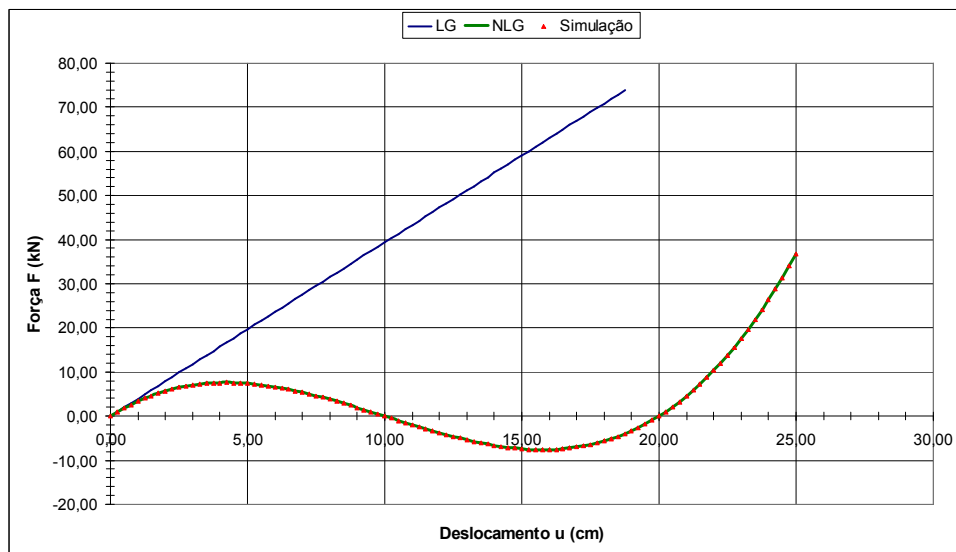


Figura 8.2 - Gráfico Força x Deslocamento da Treliça Plana Abatida

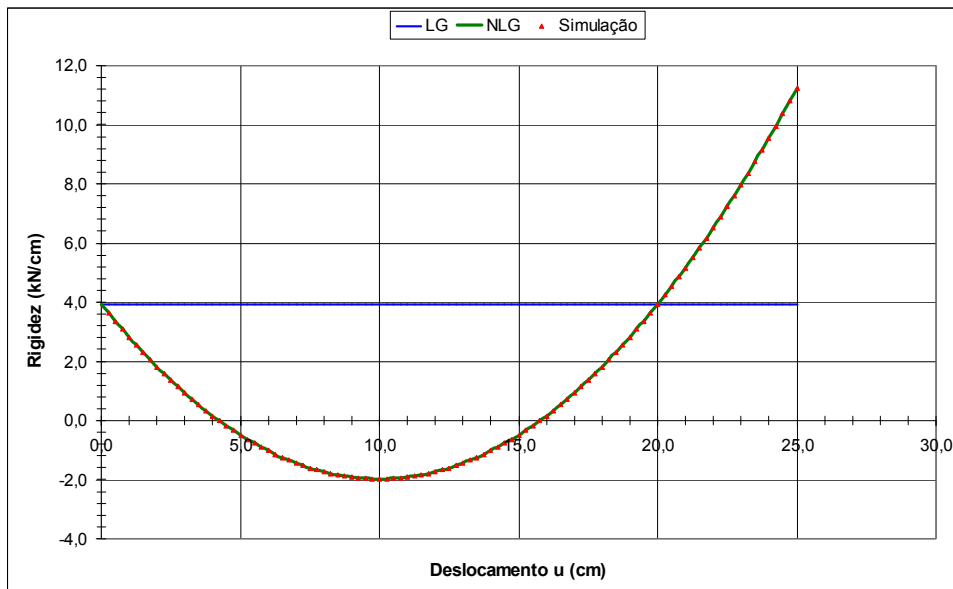


Figura 8.3 - Gráfico Rigidez x Deslocamento da Treliça Plana Abatida

As figuras 8.2 e 8.3 mostram que os resultados da simulação estão de acordo com a solução analítica (8.3). Ademais, tais ilustrações demonstram a incoerência da análise linear geométrica para esta situação. Isto porque, conforme a figura 8.1, para  $0 < u < 10\text{cm}$  a barra é comprimida e para  $u > 10\text{cm}$  a barra é tracionada. Os resultados da LG mostram que a barra está sempre comprimida para qualquer  $u > 0$ . Esta incompatibilidade ocorre pois a rigidez utilizada nesta análise não é a rigidez tangente da estrutura, isto é, a rigidez real, que varia com o deslocamento. Porém, para pequenos deslocamentos, com  $0 < u < 1\text{cm}$  por exemplo, os resultados se confundem e, portanto, é possível adotar a LG para simplificar os cálculos.

### 8.1.2. Exemplo 2 - Tração Uniaxial

A finalidade desta simulação foi a tentativa de se reproduzir um dos gráficos presentes em YEOH (1997), que está na figura 4 da página 150 deste artigo, com a implementação de

modelos hiperelásticos não lineares no elemento finito de treliça plana. Os dados experimentais foram extraídos de ensaios com polímeros vulcanizados naturais.

A figura 8.4 reproduz o referido gráfico.

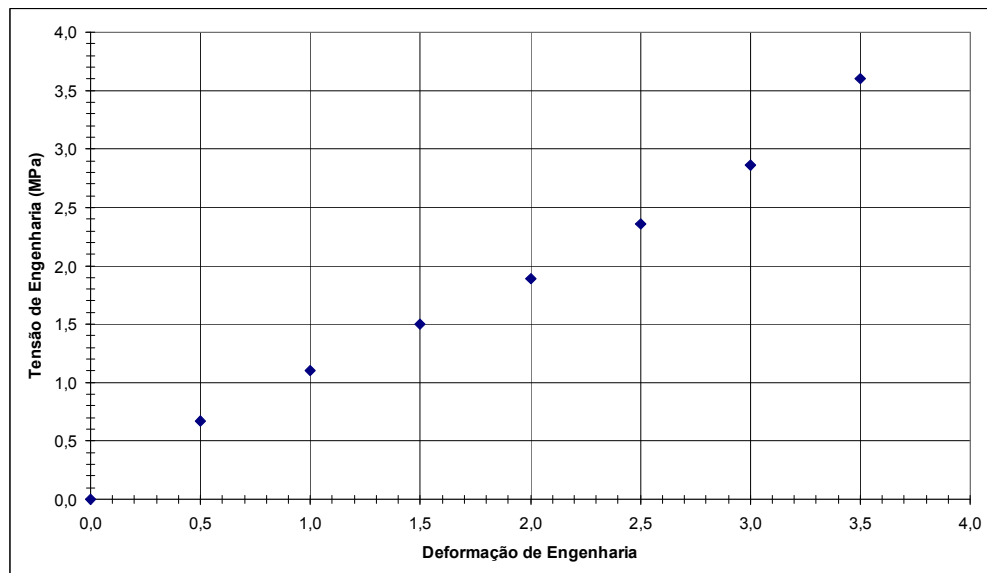


Figura 8.4 - Gráfico Tensão x Deformação de Engenharia na Tração Uniaxial (dados experimentais do artigo)

A figura 8.5 mostra a barra de treliça submetida à tração uniaxial homogênea com força concentrada em uma das extremidades.

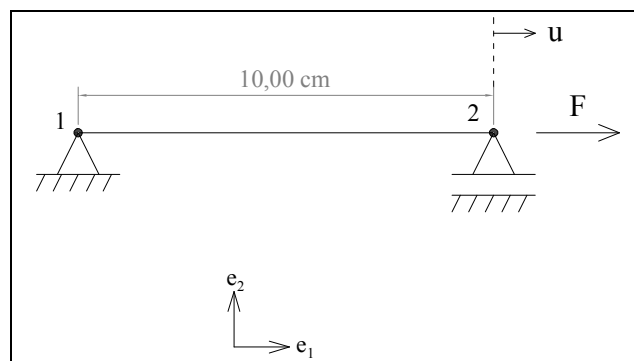


Figura 8.5 - Treliça Plana Hiperelástica submetida à Tração Uniaxial

A solução analítica tanto para tração quanto para compressão uniaxial, encontrada por RIVLIN & SAUNDERS (1951), descrita em termos da força aplicada  $F$  e do deslocamento horizontal  $u$  é:

$$F(u) = 2A \left[ \left( \frac{10+u}{10} \right) - \left( \frac{10+u}{10} \right)^{-2} \right] \left[ \frac{\partial \Psi}{\partial I_1} + \left( \frac{10}{10+u} \right) \frac{\partial \Psi}{\partial I_2} \right] \quad 8.4$$

onde  $I_1$  e  $I_2$  são os dois primeiros invariantes de deformação,  $A$  é a área inicial da seção transversal e  $\Psi$  é a energia específica de deformação.

A interpolação dos coeficientes, com o MMQ, resultou em:

$$\begin{aligned} c_{10} &= 0,31237237 \\ c_{20} &= 0,00054257 \quad (\text{modelo de Yeoh}) \\ c_{30} &= 0,00006962 \end{aligned} \quad 8.5.1$$

$$\begin{aligned} \alpha &= 0,00007671 \\ c_{10} &= 0,29233813 \quad (\text{modelo de Hartmann-Neff}) \\ c_{01} &= 0,01142455 \end{aligned} \quad 8.5.2$$

$$\begin{aligned} c_{10} &= 0,05997239 \\ c_{20} &= -0,00271249 \\ c_{30} &= 0,00014319 \quad (\text{modelo de Bechir-Boufala-Chevalier}) \\ c_{01} &= 0,31022729 \\ c_{02} &= 0,08792465 \end{aligned} \quad 8.5.3$$

$$c_{10} = 0,34175202 \quad (\text{modelo neo-Hookeano}) \quad 8.5.4$$

$$\begin{aligned} c_{10} &= 0,33016537 \\ c_{01} &= 0,03051485 \end{aligned} \quad (\text{modelo de Mooney-Rivlin}) \quad 8.5.5$$

$$\begin{aligned} E &= 0,17031219 \\ B &= -0,12186514 \\ D &= 0,05322614 \\ C &= 1,46668627 \end{aligned} \quad (\text{modelo elástico simplificado}) \quad 8.5.6$$

Deve-se ressaltar que a unidade desses coeficientes é MPa.

As figuras 8.6 e 8.7 mostram, respectivamente, os gráficos tensão x deformação de engenharia e força x deslocamento, que foram obtidos com as simulações realizadas e comparados com os dados do artigo.

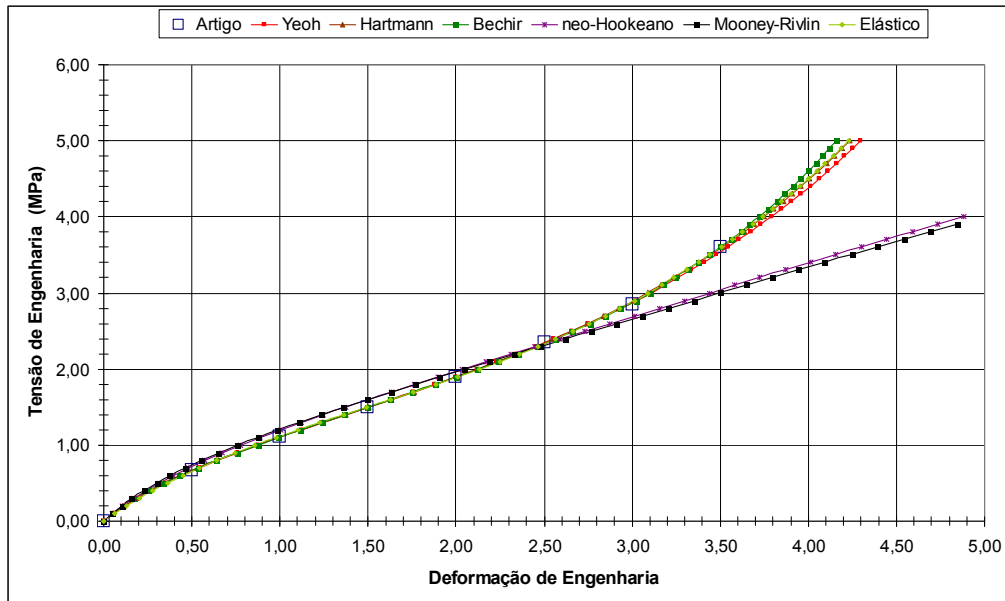


Figura 8.6 - Gráfico Tensão x Deformação de Engenharia na Tração Uniaxial (comparação com dados experimentais do artigo)

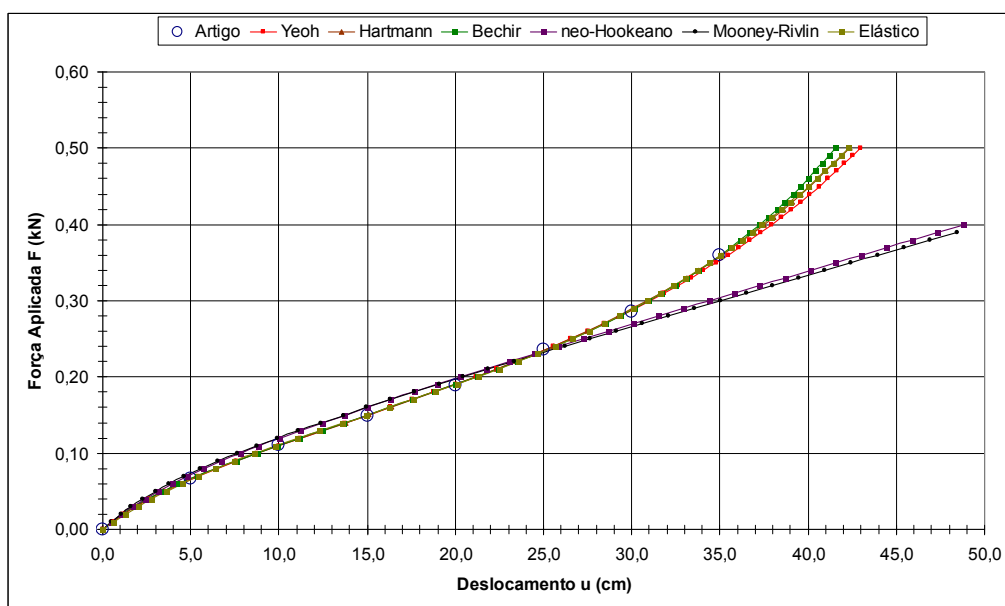


Figura 8.7 - Gráfico Força x Deslocamento na Tração Uniaxial (comparação com dados experimentais do artigo)

A figura 8.8 ilustra a comparação entre a simulação realizada e a equação (8.4) para o modelo hiperelástico de Yeoh, que resultou em:

$$F(u) = 2A \left[ \left( \frac{10+u}{10} \right) - \left( \frac{10+u}{10} \right)^{-2} \right] * \quad 8.6.1$$

$$* \left[ 0,31237237(I_1 - 3) + 0,00054257(I_1 - 3)^2 + 0,00006962(I_1 - 3)^3 \right]$$

$$\text{Área}(A) = 1,0\text{cm}^2 = 0,00010\text{m}^2 \quad 8.6.2$$

$$I_1 = I_1(u) = \left( \frac{10+u}{10} \right)^2 + 2 \left( \frac{10}{10+u} \right) \quad 8.6.3$$

As figuras 8.6 e 8.7 demonstram a boa concordância entre os modelos de Yeoh, de Hartmann-Neff, de Bechir-Boufala-Chevalier e elástico com os dados experimentais obtidos com ensaio de tração uniaxial e reproduzidos na figura 8.5. Já os modelos hiperelásticos neo-Hookeano e de Mooney-Rivlin apresentaram, neste caso, razoável concordância com os valores experimentais até, aproximadamente, o nível de deslocamento  $u = 27\text{cm}$ , correspondente a um alongamento longitudinal de 3,70.

A figura 8.8 ilustra a excelente conformidade entre a solução analítica e os resultados provenientes da simulação realizada com o modelo de Yeoh.

Ademais, quando a interpolação dos coeficientes dos modelos neo-Hookeano e Mooney-Rivlin foi feita com os valores do gráfico presente no artigo até o nível de deformação  $\varepsilon = 1,50$ , foram determinados os seguintes coeficientes:

$$c_{10} = 0,31754412 \quad (\text{modelo neo-Hookeano}) \quad 8.7.1$$

$$c_{10} = 0,31700487 \quad (\text{modelo Mooney-Rivlin}) \quad 8.7.2$$

$$c_{20} = 0,00103262$$

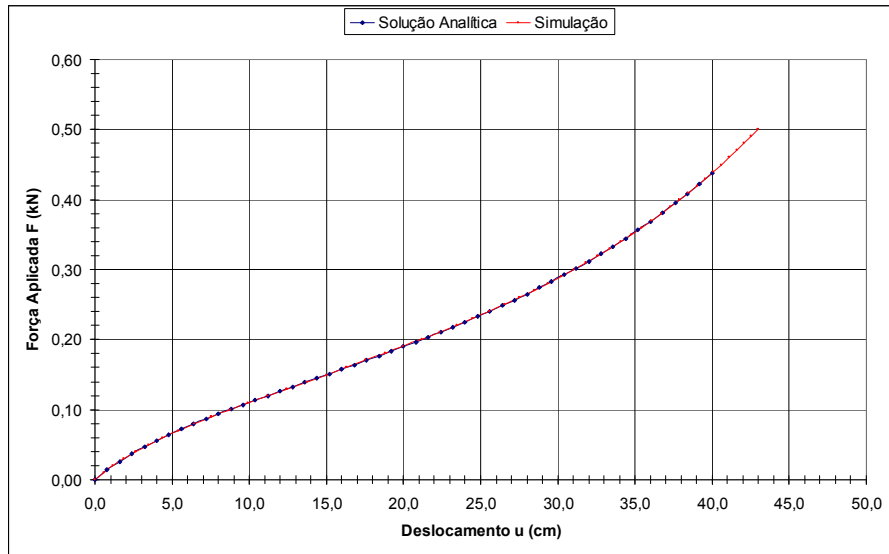


Figura 8.8 - Comparação entre solução analítica e simulação na Tração Uniaxial para o modelo hiperelástico de Yeoh

A figura 8.9 mostra que os resultados da simulação até o nível  $\epsilon = 1,50$  estão de acordo com os dados experimentais.

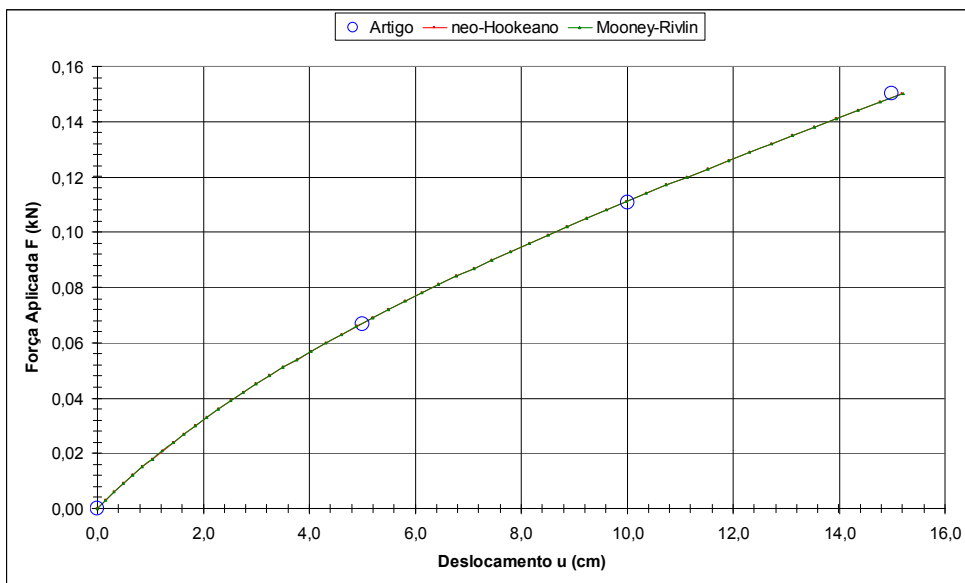


Figura 8.9 - Comparação entre os dados experimentais e a simulação realizada na Tração Uniaxial com os modelos neo-Hookeano e de Mooney-Rivlin



### 8.1.3. Exemplo 3 - Compressão Uniaxial

Para a compressão, as equações envolvidas e a barra de treliça plana usada são as mesmas do caso de tração uniaxial. Porém, os coeficientes interpolados com uso do MMQ são outros:

$$\begin{aligned} c_{10} &= 0,37052117 \\ c_{20} &= -0,00440558 \quad (\text{modelo de Yeoh}) && 8.8.1 \\ c_{30} &= -0,00152442 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha &= -0,00009288 \\ c_{10} &= 0,39506964 \quad (\text{modelo de Hartmann-Neff}) && 8.8.2 \\ c_{01} &= -0,00621006 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_{10} &= 1,23601499 \\ c_{20} &= 0,20027975 \\ c_{30} &= -0,15644268 \quad (\text{modelo de Bechir-Boufala-Chevalier}) && 8.8.3 \\ c_{01} &= -0,78091874 \\ c_{02} &= 0,11641676 \end{aligned}$$

$$c_{10} = 0,34627847 \quad (\text{modelo neo-Hookeano}) \quad 8.8.4$$

$$\begin{aligned} c_{10} &= 0,33392423 \\ c_{01} &= 0,00650728 \quad (\text{modelo de Mooney-Rivlin}) && 8.8.5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E &= -18,21239452 \\ B &= 2,99642348 \\ D &= -10,23950301 \quad (\text{modelo elástico simplificado}) && 8.8.6 \\ C &= 19,65184243 \end{aligned}$$

As figuras 8.10 e 8.11 demonstram a boa concordância de todos os modelos com os dados experimentais de compressão uniaxial, presentes em YEOH (1997) na figura 6 da página 151 deste artigo. A única exceção é o modelo de Bechir-Boufala-Chevalier no trecho

correspondente à deformação com valor absoluto maior que 0,60. Os modelos neo-Hookeano e de Mooney-Rivlin apresentaram, neste caso, boa conformidade com o gráfico do artigo, mesmo para grandes deformações, ao contrário da tração uniaxial.

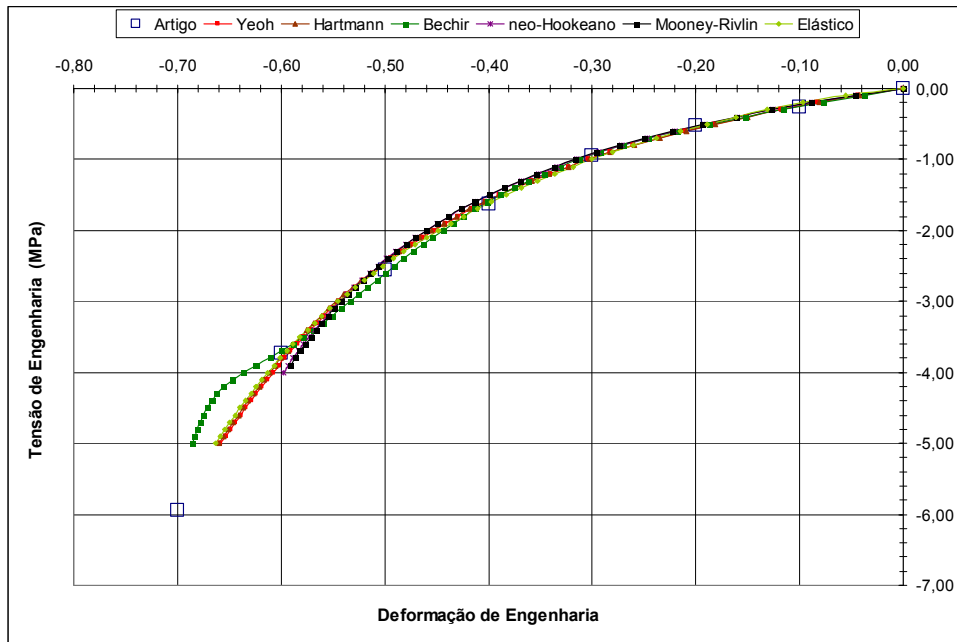


Figura 8.10 - Gráfico Tensão x Deformação de Engenharia na Compressão Uniaxial (comparação com dados experimentais do artigo)

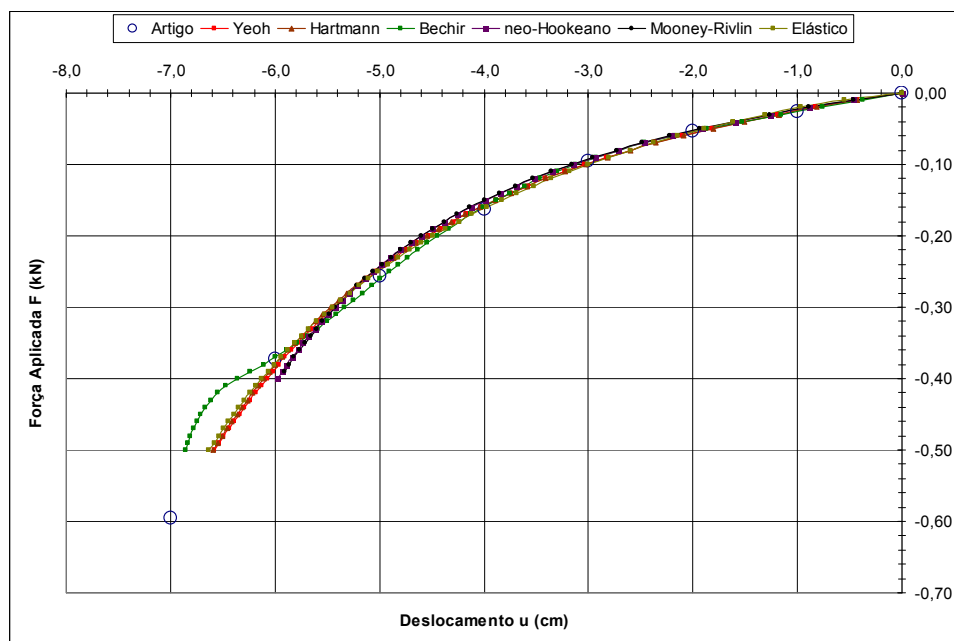


Figura 8.11 - Gráfico Força x Deslocamento na Compressão Uniaxial (comparação com dados experimentais do artigo)

## 8.2. Exemplos Simulados com o elemento finito de Casca

Deve-se comentar que todos os exemplos de casca também foram simulados com 100 passos de carga e que nenhum deles apresentou o fenômeno travamento.

### 8.2.1. Exemplo 4 - Tração Uniaxial

Este exemplo foi simulado com o elemento finito de casca e os resultados obtidos foram comparados com um dos gráficos apresentados em YEOH (1990), que está na figura 4 da página 799 desse artigo. Trata-se de polímeros naturais vulcanizados preenchidos com negro de carbono na proporção, em massa, de 70 partes por centena de elastômero.

As figuras 8.12, 8.13 e 8.14 mostram, respectivamente, o esquema ilustrativo do corpo de prova usado, a comparação com dados experimentais e os valores, em MPa, da tensão longitudinal real no último passo de carga.

A figura 8.13 demonstra que os resultados obtidos nas simulações com os modelos de Yeoh e neo-Hookeano estão de acordo com as respectivas soluções analíticas. Porém, apenas o primeiro modelo apresenta boa concordância com os dados do artigo. Deve-se comentar, ademais, que na referida figura  $I_1$  é o primeiro invariante de deformação.

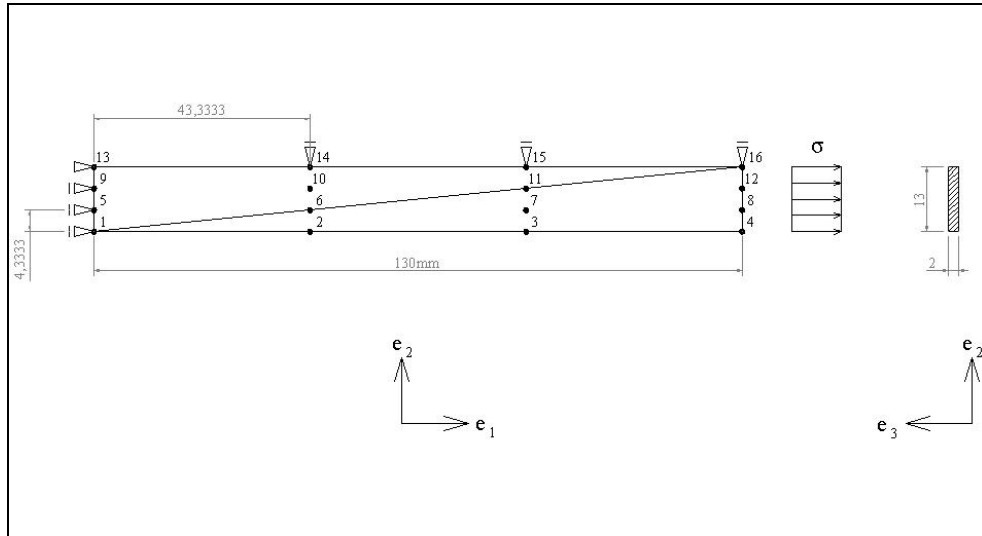


Figura 8.12 - Discretização do Corpo de Prova na Tração Uniaxial (2 elementos finitos e 16 nós)

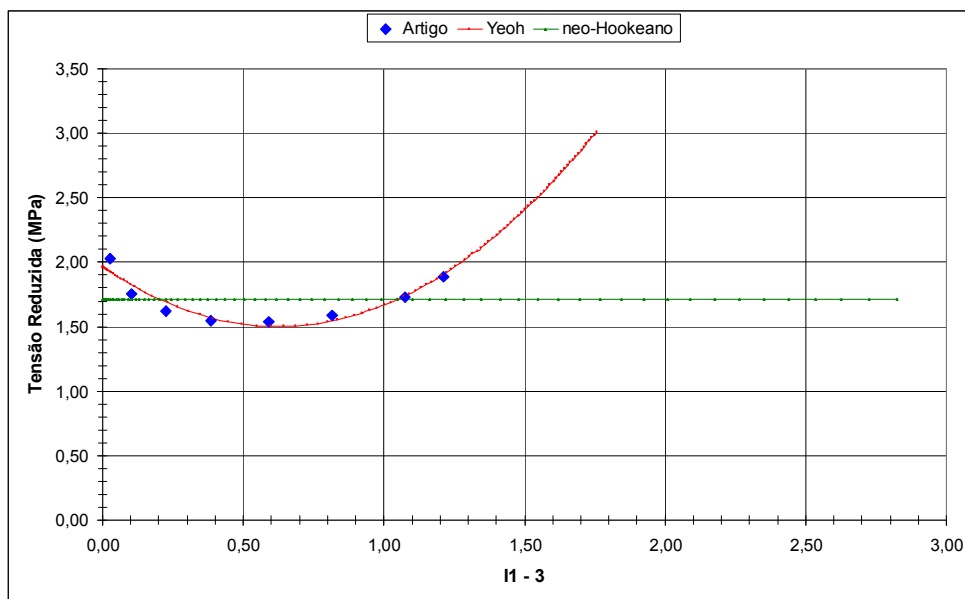


Figura 8.13 - Comparação entre os dados do artigo e da simulação da tração uniaxial com elemento finito de casca

Foi usada a equação (6.19.1) com módulo de compressão volumétrica igual a 10000 MPa, para simular deformação isocórica, e coeficiente empírico igual a 1,0. A interpolação dos coeficientes resultou em:

$$\begin{aligned} c_{10} &= 0,98217570 \\ c_{20} &= -0,37037343 \quad (\text{modelo de Yeoh}) \end{aligned} \quad 8.9.1$$

$$c_{30} = 0,19718061$$

$$c_{10} = 0,85595000 \quad (\text{modelo neo-Hookeano}) \quad 8.9.2$$



Figura 8.14 - Valores da tensão longitudinal real obtidos com a simulação da casca sob tração uniaxial no último passo de carga (tensão de engenharia  $\sigma = 5,0$  MPa)

Para verificação dos valores da figura 8.14, que foram gerados pelo programa a partir da tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie, calculou-se a tensão real com base na de engenharia, no valor do primeiro invariante de deformação fornecido pela simulação e na hipótese de incompressibilidade:

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1 \Rightarrow \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_1^{-\frac{1}{2}} \quad 8.10.1$$

$$I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = \lambda_1^2 + \frac{2}{\lambda_1} = 1,7561 \Rightarrow \lambda_1 = 1,9286 \quad 8.10.2$$

$$\sigma_{real} = \frac{\sigma_{eng}}{\lambda_2 \lambda_3} = \frac{\sigma_{eng}}{\sqrt{\frac{1}{\lambda_1}} \sqrt{\frac{1}{\lambda_1}}} = \sigma_{eng} \lambda_1 = 5,0 * 1,9286 = 9,643 MPa \quad 8.10.3$$

O gradiente fornecido pelo código computacional no último passo de carga, para o modelo de Yeoh, é:

$$A = \begin{bmatrix} 1,928646 & 0 & 0 \\ 0 & 0,720083 & 0 \\ 0 & 0 & 0,720083 \end{bmatrix} \Rightarrow J = \det(A) = 1,00004018 \quad 8.11$$

o que está de acordo com os dados experimentais, com a equação (6.46.2) e com a hipótese da incompressibilidade, na qual  $J = 1$ .

### 8.2.2. Exemplo 5 - Compressão Uniaxial

Na compressão uniaxial foi usada a mesma discretização do elemento finito de casca sob tração. Deve-se ressaltar que em ambos os casos foram utilizados apenas dois pontos de integração ao longo da espessura.

Os dados experimentais estão em YEOH (1990), na figura 5 da página 800 desse artigo. O material polimérico e o módulo de compressão volumétrica são os mesmos do ensaio de tração.

Os coeficientes interpolados com o MMQ, para a compressão uniaxial, são:

$$\begin{aligned} c_{10} &= 0,95313386 \\ c_{20} &= -0,39389089 \quad (\text{modelo de Yeoh}) \\ c_{30} &= 0,21201994 \end{aligned} \quad 8.12.1$$

$$\begin{aligned} \alpha &= 0,12562336 \\ c_{10} &= 0,07017126 \quad (\text{modelo de Hartmann-Neff}) \\ c_{01} &= -0,89409634 \end{aligned} \quad 8.12.2$$

$$\begin{aligned}
 c_{10} &= 2,83943606 \\
 c_{20} &= -1,93927895 \\
 c_{30} &= -1,87639223 \quad (\text{modelo de Bechir-Boufala-Chevalier}) & 8.12.3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 c_{01} &= -1,72153659 \\
 c_{02} &= 1,89444175
 \end{aligned}$$

$$c_{10} = 0,82648751 \quad (\text{modelo neo-Hookeano}) \quad 8.12.4$$

$$\begin{aligned}
 c_{10} &= 0,81641636 \\
 c_{01} &= 0,00707518 \quad (\text{modelo de Mooney-Rivlin}) & 8.12.5
 \end{aligned}$$

As figuras 8.15 e 8.16 mostram, respectivamente, a comparação entre os resultados da simulação com os dados experimentais do artigo e o valor da tensão real longitudinal no último passo de carga.

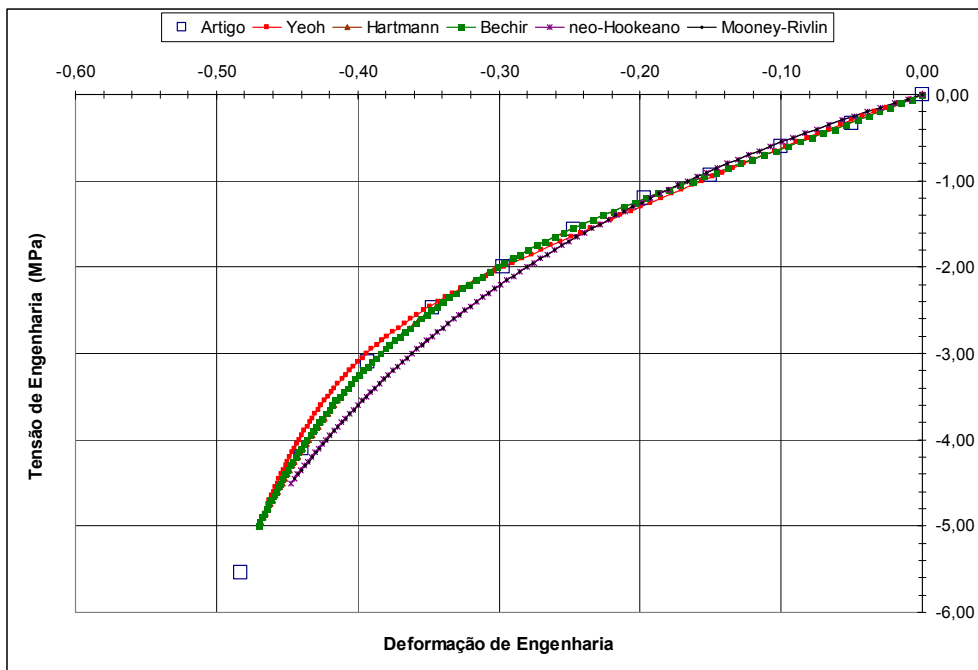


Figura 8.15 - Comparação entre os dados do artigo e da simulação da casca sob compressão uniaxial

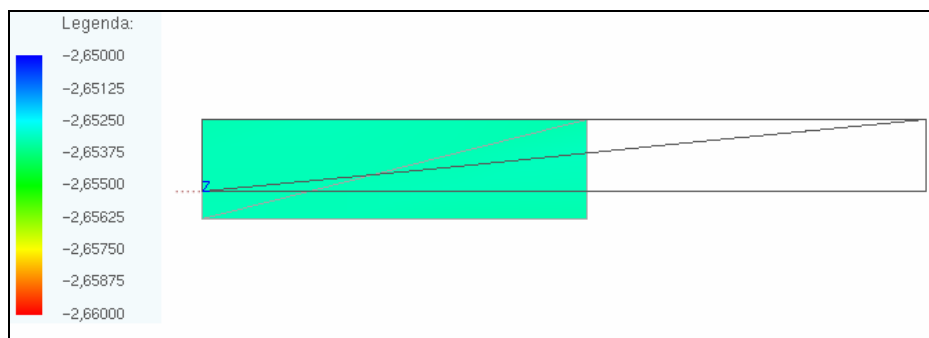


Figura 8.16 - Valores da tensão longitudinal real obtidos com a simulação da casca sob compressão uniaxial para o modelo de Yeoh (tensão de engenharia  $\sigma = -5,0$  MPa)

A figura 8.15 ilustra a boa concordância dos modelos de Yeoh, de Hartmann-Neff e de Bechir-Boufala-Chevalier com os dados experimentais e a razoável conformidade dos modelos de Mooney-Rivlin e neo-Hookeano.

Analogamente à tração, obteve-se o gradiente:

$$A = \begin{bmatrix} 0,530632 & 0 & 0 \\ 0 & 1,372776 & 0 \\ 0 & 0 & 1,372776 \end{bmatrix} \Rightarrow J = \det(A) = 0,999989 \quad 8.14$$

que também está de acordo com os dados experimentais, com a equação (6.46.2) e com a hipótese da incompressibilidade.

Pode-se comentar que a comparação entre as expressões (8.9.1), (8.9.2), (8.12.1) e (8.12.4) demonstra que os coeficientes interpolados, tanto para o modelo de Yeoh quanto para o neo-Hookeano, são aproximadamente os mesmos, o que era de se esperar pois o material usado no ensaio de tração é o mesmo da compressão.



### 8.2.3. Exemplo 6 - Cisalhamento Simples

Os resultados da casca sob cisalhamento simples foram comparados com dados experimentais presentes em YEOH (1990), na figura 2 da página 795. O material ensaiado é um polímero natural vulcanizado preenchido com negro de carbono na proporção, em massa, de 40 partes por centena de elastômero.

Foram usados, de acordo com a figura 8.17, 8 elementos finitos, 49 nós e 2 pontos de integração numérica na espessura. O módulo de compressão volumétrica e o coeficiente empírico adotados são os mesmos da tração e da compressão uniaxiais, ou seja, 10 GPa e 1,0.

A interpolação dos coeficientes, via MMQ, resultou em:

$$\begin{aligned}c_{10} &= 0,41491334 \\c_{20} &= -0,04627321 \quad (\text{modelo de Yeoh}) & 8.15.1 \\c_{30} &= 0,00645605\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha &= 0,00007671 \\c_{10} &= 0,29233813 \quad (\text{modelo de Hartmann-Neff}) & 8.15.2 \\c_{01} &= 0,01142455\end{aligned}$$

$$c_{10} = 0,35732720 \quad (\text{modelo neo-Hookeano}) \quad 8.15.3$$

As figuras 8.18 e 8.19 mostram as comparações entre os dados experimentais e os resultados da simulação da casca sob cisalhamento simples e a figura 8.20 ilustra a posição final no último passo de carga para o modelo de Yeoh.

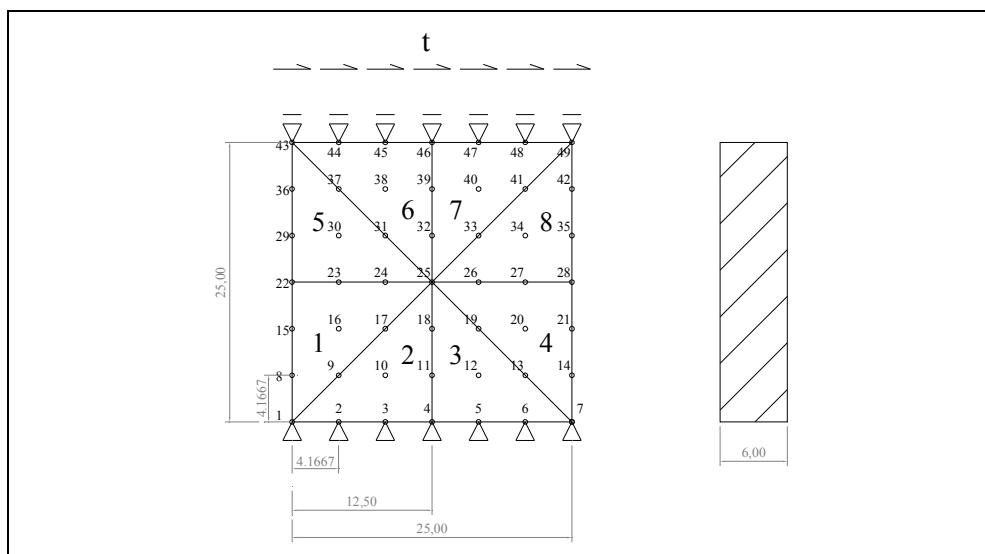


Figura 8.17 - Discretização da casca submetida ao cisalhamento simples (8 elementos finitos e 49 nós)

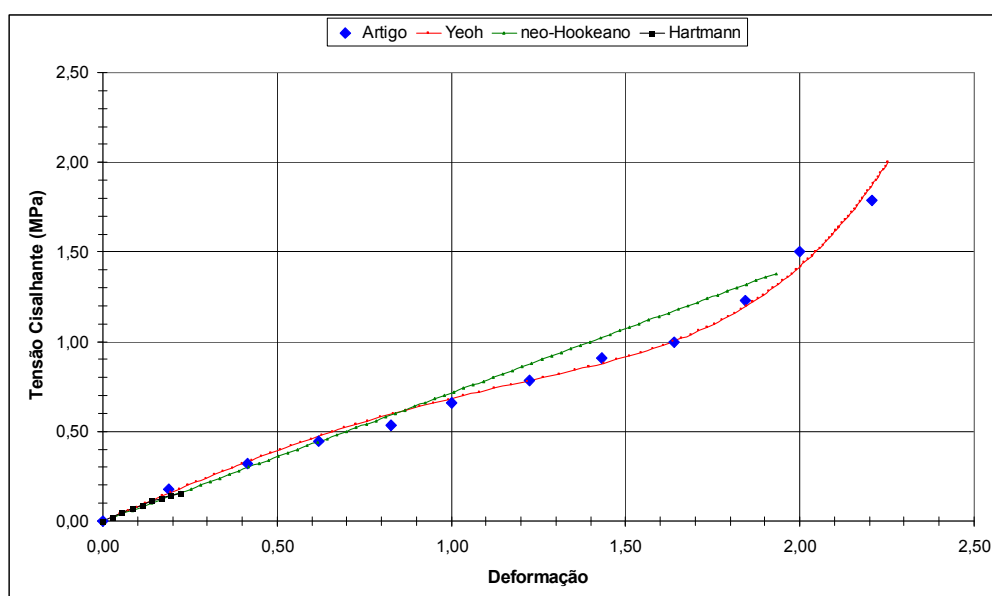


Figura 8.18 - Gráfico Tensão x Deformação para a casca sob cisalhamento simples (comparação com dados experimentais do artigo)

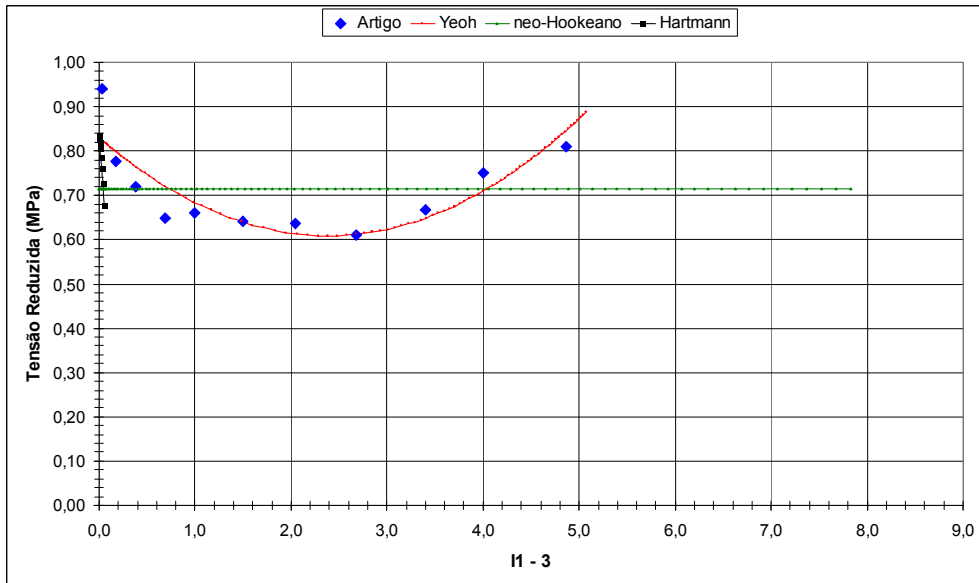


Figura 8.19 - Comparação entre os resultados da simulação da casca sob cisalhamento simples e os dados experimentais do artigo (tensão reduzida)

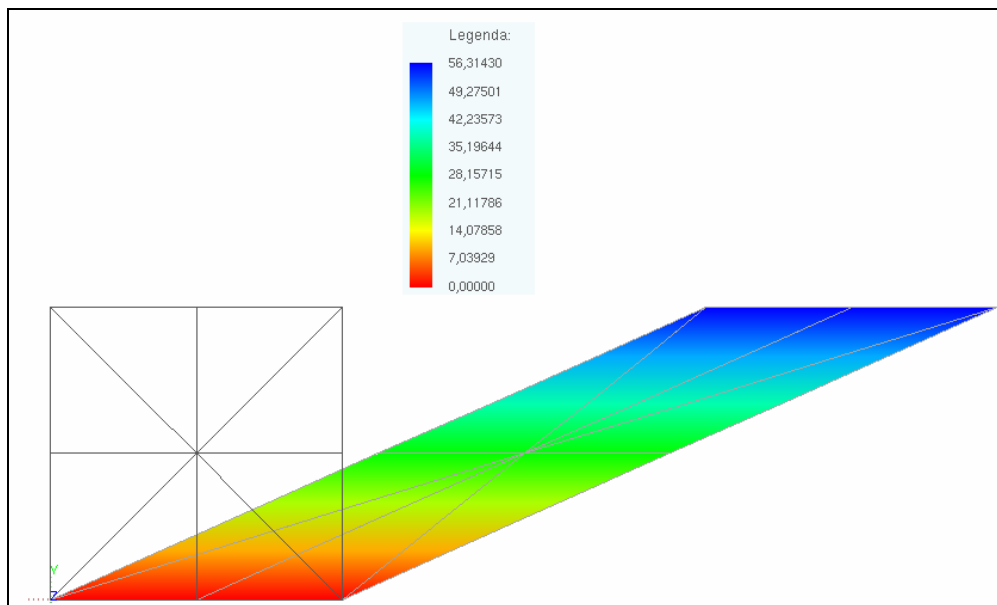


Figura 8.20 - Deslocamentos horizontais, dados em cm, da casca sob cisalhamento simples no último passo de carga ( $\tau = 2,0$  MPa) para o modelo de Yeoh

A análise das figuras 8.18 e 8.19 mostra que o modelo de Yeoh foi o que melhor se adequou aos dados experimentais do artigo, o neo-Hookeano apresentou razoável conformidade com o ensaio até pequenos níveis de deformação, com  $\gamma < 1,0$ , e o modelo de Hartmann-Neff não conseguiu simular esta situação.

O gradiente no último passo de carga fornecido pelo programa é:

$$A = \begin{bmatrix} 1,00000796 & 2,25256640 & 0 \\ 0 & 1,000000 & 0 \\ 0 & 0 & 1,0000108114 \end{bmatrix} \Rightarrow J = 1,000019 \quad 8.16$$

o que está de acordo com a teoria.

Deve-se ressaltar que não foi possível interpolar os coeficientes, via MMQ, dos modelos de Bechir-Boufala-Chevalier e de Mooney-Rivlin. No primeiro caso, o determinante da matriz a ser invertida resultou igual a zero e, no segundo, os valores coincidiram com o modelo neo-Hookeano.

Pode-se comentar que as diferenças nos coeficientes do modelo de Yeoh, dados pelas expressões (8.9.1) e (8.15.1), são devidas às distintas proporções de negro de carbono presentes nos materiais ensaiados.

#### 8.2.4. Exemplo 7 - Tração Biaxial

Os dados experimentais do ensaio de tração biaxial foram extraídos de JAMES *et al.* (1975), na tabela 2 da página 2038. O material ensaiado é um polímero natural.

Os coeficientes interpolados são os seguintes:

$$\begin{aligned} c_{10} &= 0,24402996 \\ c_{20} &= -0,00184591 \quad (\text{modelo de Yeoh}) \\ c_{30} &= 0,00010696 \end{aligned} \quad 8.17.1$$

$\alpha = -0,00002522$		
$c_{10} = 0,23506690$	(modelo de Hartmann-Neff)	8.17.2
$c_{01} = 0,00058220$		
$c_{10} = 0,23359241$		
$c_{20} = -0,00180765$		
$c_{30} = 0,00005818$	(modelo de Bechir-Boufala-Chevalier)	8.17.3
$c_{01} = 0,00669300$		
$c_{02} = 0,00000000$		
$c_{10} = 0,24151123$	(modelo neo-Hookeano)	8.17.4
$c_{10} = 0,25163904$		
$c_{01} = -0,00346741$	(modelo de Mooney-Rivlin)	8.17.5

Foram usados, na simulação, 2 pontos de integração ao longo da espessura e tensões normais iguais nas direções 1 e 2. As figuras 8.21, 8.22 e 8.23 mostram, respectivamente, a discretização usada, a comparação da simulação com dados experimentais do artigo e a posição final do corpo de prova no último passo de carga.

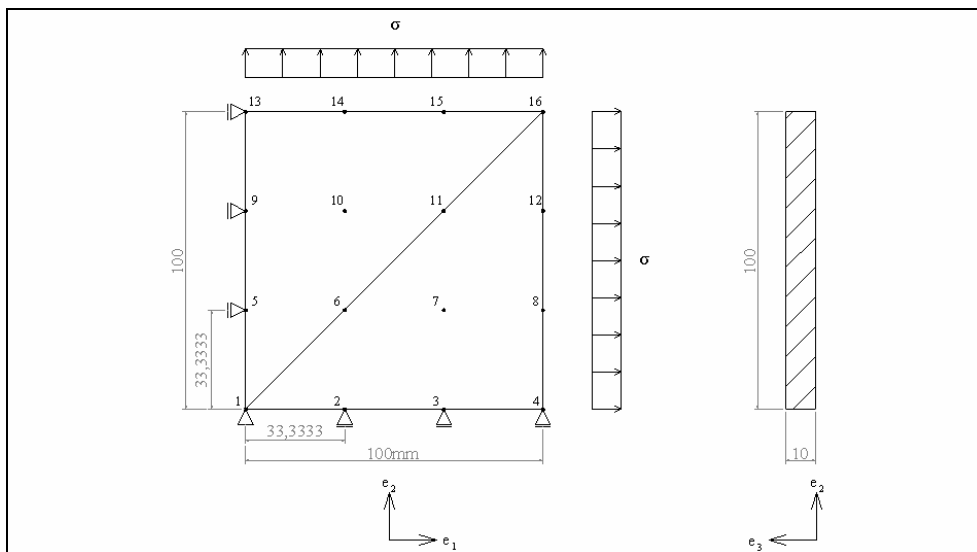


Figura 8.21 - Discretização usada para a simulação de casca sob tração biaxial (dois elementos finitos e dezesseis nós)

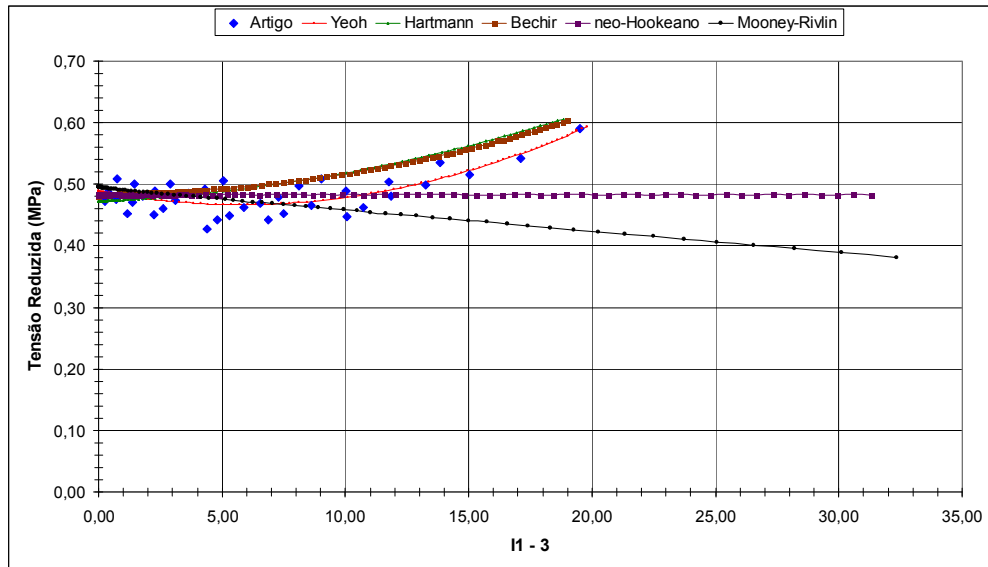


Figura 8.22 - Comparação dos resultados da simulação da casca sob tração biaxial com os dados experimentais do artigo (tensão reduzida)

A figura 8.22 ilustra a boa concordância entre as simulações de casca sob tração biaxial com os modelos de Yeoh, Hartmann-Neff e Bechir-Boufala-Chevalier com os dados do artigo. Porém, os modelos neo-Hookeano e de Mooney-Rivlin apresentaram muita discrepância para grandes deformações, com  $(I_1-3) > 10,0$  ou  $\lambda_1 > 2,5$ .

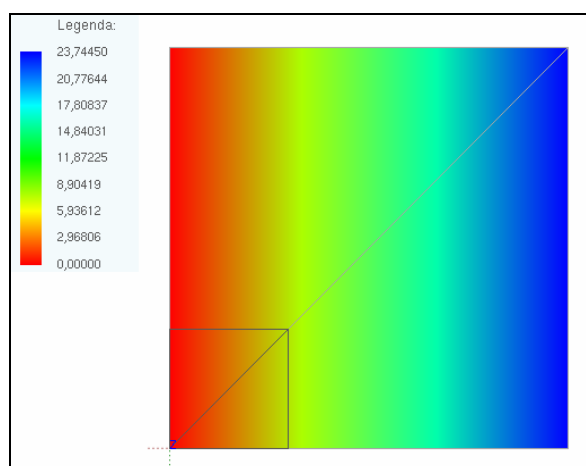


Figura 8.23 - Deslocamentos horizontais, dados em cm, da casca sob tração biaxial no último passo de carga para o modelo de Yeoh ( $\sigma = 2,0$  MPa)

O gradiente e a tensão real na direção 1, para o modelo de Yeoh, fornecidos pelo programa no último passo de carga são:

$$A = \begin{bmatrix} 3,37443967 & 0 & 0 \\ 0 & 3,37443291 & 0 \\ 0 & 0 & 0,08782576 \end{bmatrix} \Rightarrow J = 1,00006900 \quad 8.18.1$$

$$\sigma_{11}^{real} = 6,7423MPa \quad 8.18.2$$

Os valores obtidos em (8.18) estão de acordo com a teoria pois:

$$\sigma_{11}^{real} = \frac{\sigma_{11}^{eng}}{\lambda_2 \lambda_3} = \frac{2MPa}{(3,37443291 * 0,08782576)} = 6,7485MPa \quad 8.19$$

### 8.2.5. Exemplo 8 - Tração Equi-biaxial

Os dados experimentais de tração equi-biaxial foram retirados de YEOH (1990), na figura 9 da página 803. O material ensaiado é um polímero natural vulcanizado.

A simulação foi realizada com o mesmo corpo de prova da tração biaxial, porém a tensão de engenharia, nas duas direções, avançou até  $\sigma_{eng} = 3,0$  MPa e o único modelo utilizado foi o de Yeoh, cujos coeficientes neste caso são:

$$\begin{aligned}c_{10} &= 0,50521429 \\c_{20} &= -0,01451784 \\c_{30} &= 0,00292185 \\K &= 10000,0 \\n &= 1,0\end{aligned}$$

8.20

As comparações entre os resultados do código computacional, a solução analítica (6.64) e os dados do artigo estão, respectivamente, nas figuras 8.23 e 8.24. Tais figuras demonstram que a simulação com o modelo de Yeoh está de acordo com a solução analítica e com os dados do artigo.

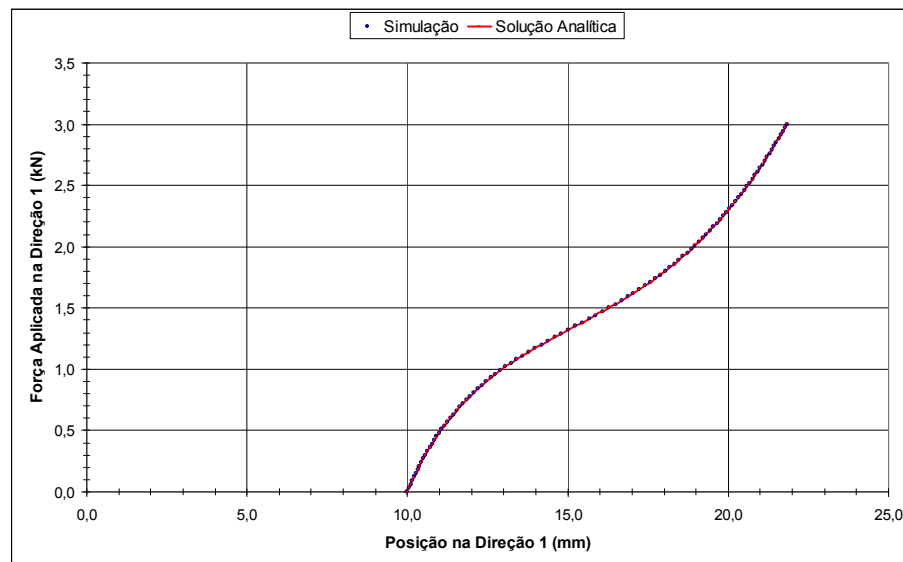


Figura 8.23 - Gráfico Força x Posição da casca sob tração equi-biaxial (comparação entre simulação e solução analítica)



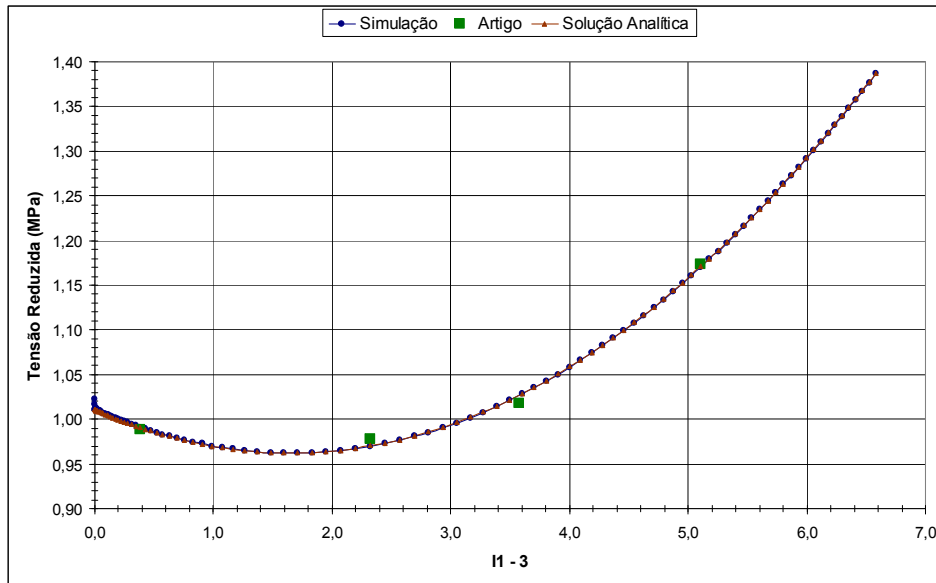


Figura 8.24 - Comparação entre simulação, solução analítica e dados experimentais para a casca sob tração equi-biaxial (tensão reduzida)

Analogamente à tração biaxial, o gradiente e a tensão normal real na direção 1, fornecidos pelo programa no último passo de carga, são:

$$A = \begin{bmatrix} 2,18366667 & 0 & 0 \\ 0 & 2,18366667 & 0 \\ 0 & 0 & 0,20971500 \end{bmatrix} \Rightarrow J = 1,00000503 \quad 8.21.1$$

$$\sigma_{11}^{real} = 6,550MPa \quad 8.21.2$$

Os resultados expressos em (8.21) também estão em conformidade com a teoria pois:

$$\sigma_{11}^{real} = \frac{\sigma_{11}^{eng}}{\lambda_2 \lambda_3} = \frac{3MPa}{(2,18366667 * 0,209771500)} = 6,5510MPa \quad 8.22$$

### 8.2.6. Exemplo 9 - Membrana de Cook 1

Este exemplo foi extraído de DÜSTER *et al.* (2003). A figura 8.25 ilustra as dimensões da membrana, assim como o carregamento e as condições de vinculação.

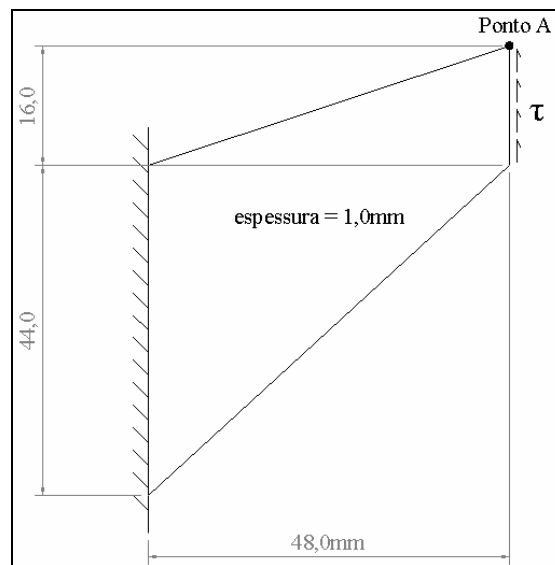


Figura 8.25 - Membrana de Cook

Foi usado o modelo de Hartmann-Neff, descrito pela fórmula (6.19.2), e os coeficientes são os mesmos do artigo:

$$\alpha = 0,00367$$

$$c_{10} = 0,17880$$

$$c_{01} = 0,19580$$

$$K = 5000,0$$

8.23

Na simulação foram usados 2 pontos de integração numérica ao longo da espessura e foram impedidos os deslocamentos dos nós na direção normal ao plano da membrana. A variação da espessura, porém, foi liberada.

A figura 8.26 mostra, via gráfico tensão cisalhante x deslocamento, a comparação entre os valores do artigo e da simulação realizada. Pode-se perceber que os resultados estão bem próximos daqueles do artigo e que a malha mais refinada, a MCook2, apresenta melhor concordância que a MCook1.

A figura 8.27 ilustra as malhas usadas e suas respectivas posições finais no último passo de carga.

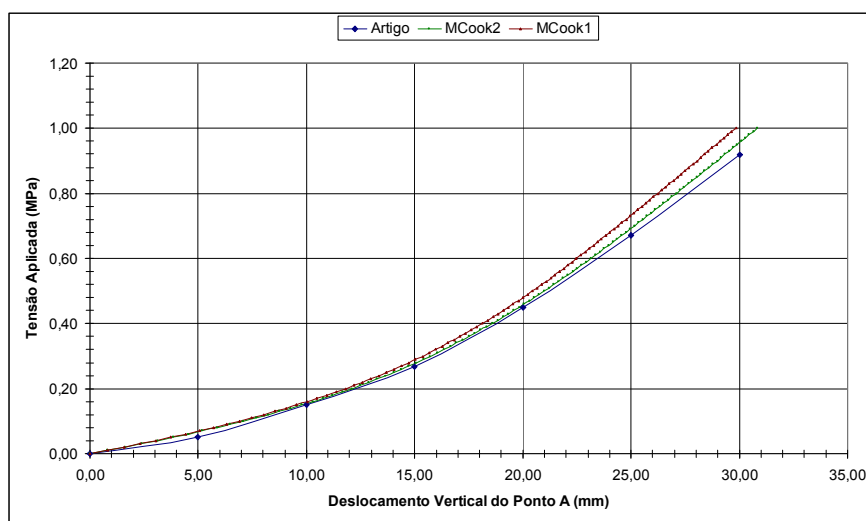


Figura 8.26 - Gráfico Tensão Aplicada x Deslocamento do Ponto A para a membrana de Cook do Exemplo 9

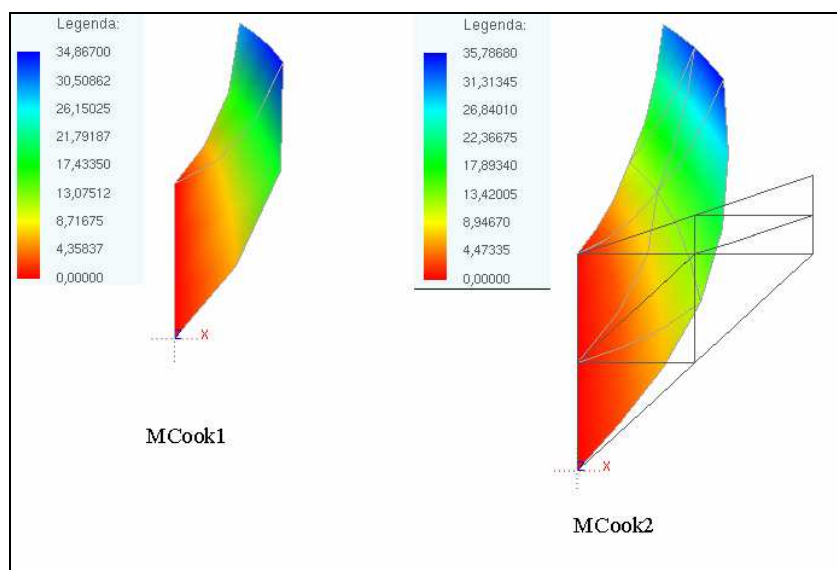


Figura 8.27 - Deslocamentos Verticais, dados em mm, no último passo de carga para a Membrana de Cook do Exemplo 9 ( $\tau = 1,0$  MPa)

### 8.2.7. Exemplo 10 - Membrana de Cook 2

Foi simulada outra membrana de Cook com o modelo hiperelástico neo-Hookeano compressível 1, descrito pela expressão (6.19.4). Os dados, neste caso, foram extraídos de SZE *et al.* (2004):

$$K = 400890$$

$$c_{10} = 40,095$$

8.24

Utilizou-se 2 pontos de integração na espessura e impediu-se os deslocamentos dos nós na direção normal à membrana.

Foram usadas três malhas, as quais estão mostradas na figura 8.28.

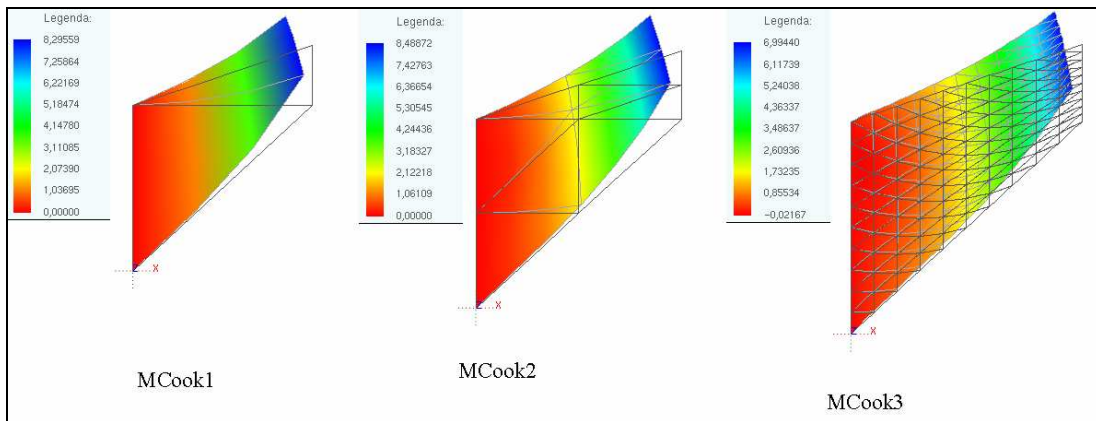


Figura 8.28 - Deslocamentos Verticais, dados em mm, no último passo de carga para a Membrana de Cook do Exemplo 10 (carga total = 100 unidades)

O valor do deslocamento vertical do ponto A converge, com o refinamento da malha, para o valor do artigo, que é aproximadamente 6,9mm.

### 8.2.8. Exemplo 11 - Lâmina em Balanço sob Carga Cisalhante na Extremidade Livre

Este exemplo é um caso extremo de flexão, no qual as dimensões da seção transversal são muito menores do que o comprimento da lâmina. Os dados foram extraídos de DÜSTER *et al.* (2003). A lâmina é engastada em uma das extremidades e na outra há um carregamento cisalhante uniformemente distribuído na seção transversal. Seu comprimento é de 10mm e tanto a altura quanto a espessura são iguais a 0,1mm. O modelo hiperelástico e seus coeficientes são os mesmos do exemplo 9.

A figura 8.29 ilustra a única malha, com 52 nós e 8 elementos, que foi capaz de simular esta situação. Foram usados 2 pontos para integração numérica ao longo da espessura.

O valor do deslocamento vertical da extremidade fornecido pela simulação é igual a 6,25mm e o do artigo é igual a 7,0mm.

Serão necessárias maiores investigações, com o refinamento da malha.

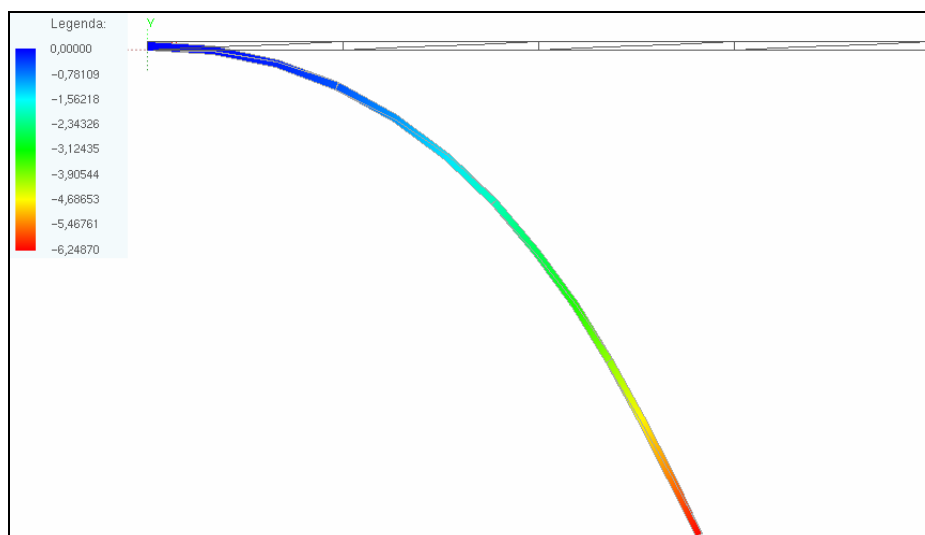


Figura 8.29 - Deslocamentos Verticais, dados em mm, da Lâmina em Balanço sob carga cisalhante na extremidade livre no último passo de carga ( $\tau = 0,0002$  MPa)

### 8.2.9. Exemplo 12 - Chapa Parcialmente Carregada

Este caso também foi extraído de DÜSTER *et al.* (2003). Trata-se de uma chapa parcialmente carregada, ilustrada na figura 8.30.

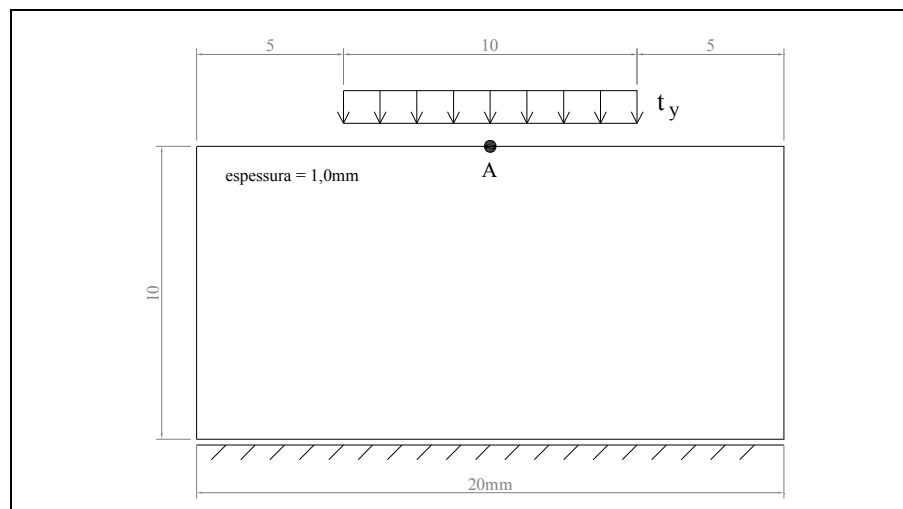


Figura 8.30 - Chapa Parcialmente Carregada

Tanto o modelo quanto os coeficientes usados na simulação são os mesmos do exemplo 11, com exceção do módulo de compressão volumétrica, que neste caso é igual a 1000,0 MPa.

Foram simuladas duas malhas, uma com 16 elementos e 91 nós, e outra com 21 elementos e 115 nós, ambas mostradas na figura 8.31. Deve-se comentar que a malha 2 foi feita com refinamento nas regiões mais críticas, isto é, na extremidade do apoio e na descontinuidade do carregamento.

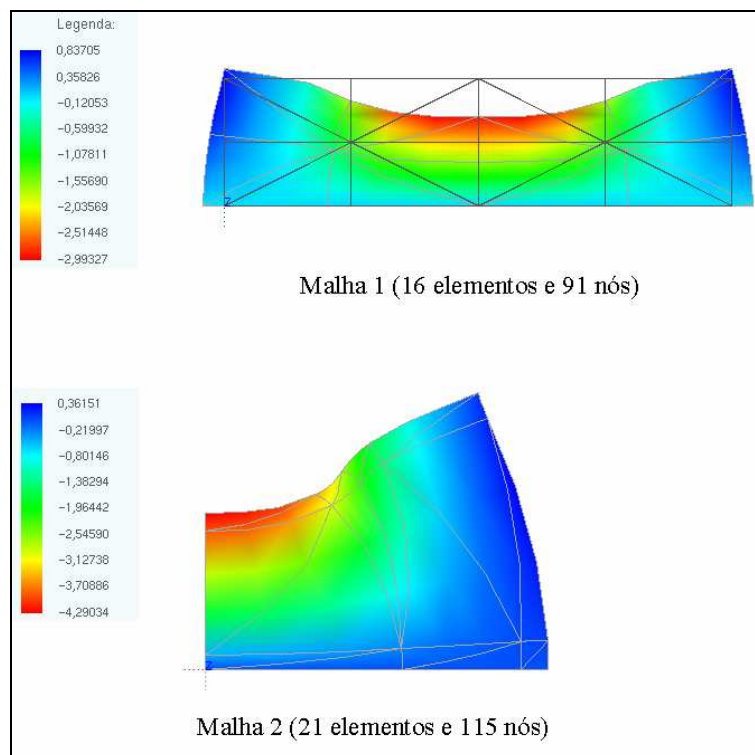


Figura 8.31 - Deslocamento Verticais, dados em mm, resultantes da simulação da Chapa Parcialmente Carregada no último passo de carga ( $t_y = 5$  MPa)

O deslocamento vertical do ponto A, fornecido pela simulação, é de -2,95mm para a malha 1, e -4,29mm para a malha 2. Já o artigo fornece -3,87mm. Deve-se comentar que as discretizações usadas aqui são diferentes da referência e que não foi feita análise de convergência.

### 8.2.10. Exemplo 13 - Prisma Elastomérico sob Compressão

O último exemplo retirado de DÜSTER *et al.* (2003) é um prisma elastomérico, mostrado na figura 8.32, o qual é comprimido, na direção 3, até uma deformação de 20%, isto é, até sua espessura passar de 33,0 para 26,4mm.

Foram usados, na simulação, os mesmos coeficientes do exemplo 11 e uma malha retangular com 8 elementos e 49 nós, ilustrada na figura 8.33.

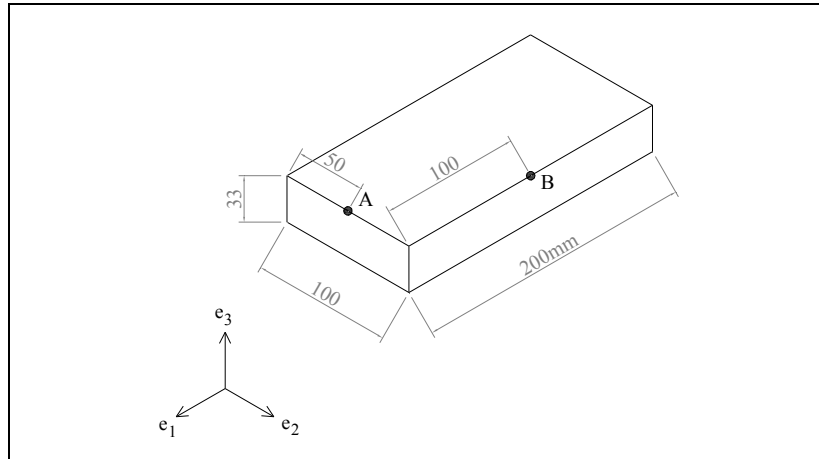


Figura 8.32 - Prisma Elastomérico Comprimido

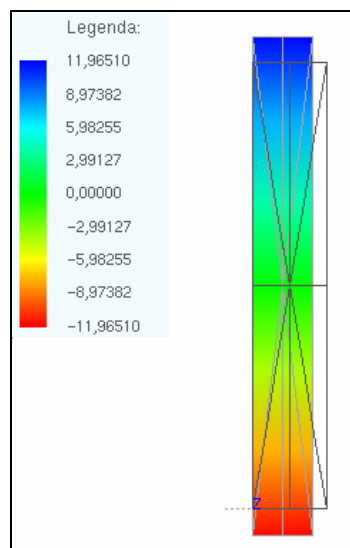


Figura 8.33 - Deslocamentos Verticais, dados em mm, resultantes da simulação do Prisma Elastomérico sob Compressão no último passo de carga ( $\lambda_2 = 0,80$  ou  $\epsilon_2 = -0,20$ )

Na simulação, os deslocamentos do ponto A na direção 1 e do ponto B na direção 2 são, respectivamente, 11,97mm e 11,72mm. Já o artigo fornece 11,0mm e 13,5mm.



Deve-se ressaltar que tanto no exemplo 11 quanto no 12, foram utilizados apenas 2 pontos para integração numérica na espessura.

### 8.2.11. Exemplo 14 - Tubo Cilíndrico Hiperelástico sob Linha de Carga

O último exemplo extraído de SZE *et al.* (2004) é um tubo cilíndrico hiperelástico sob linha de carga, mostrado na figura 8.34. Segundo PACCOLA (2004), este caso é sugerido para verificação da ocorrência de travamento por cortante e por membrana. A malha usada na simulação possui 325 nós, 64 elementos e 5 pontos de integração numérica na espessura. O modelo utilizado foi o dado pela expressão (6.19.5) e os coeficientes são:

$$K = 24000$$

$$c_{10} = 3000$$

8.25

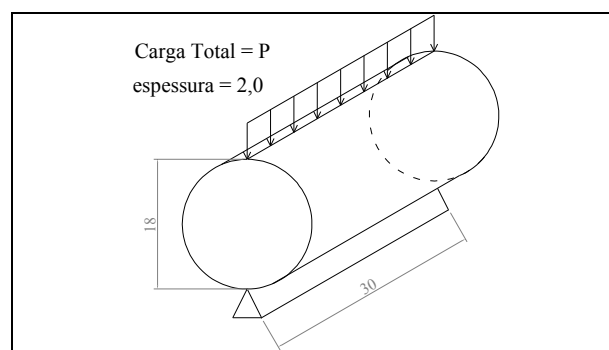


Figura 8.34 - Tubo Cilíndrico Hiperelástico sob Linha de Carga

As figuras 8.35 e 8.36 mostram, respectivamente, os deslocamentos verticais do ponto de aplicação da carga no último passo e a comparação com o artigo.

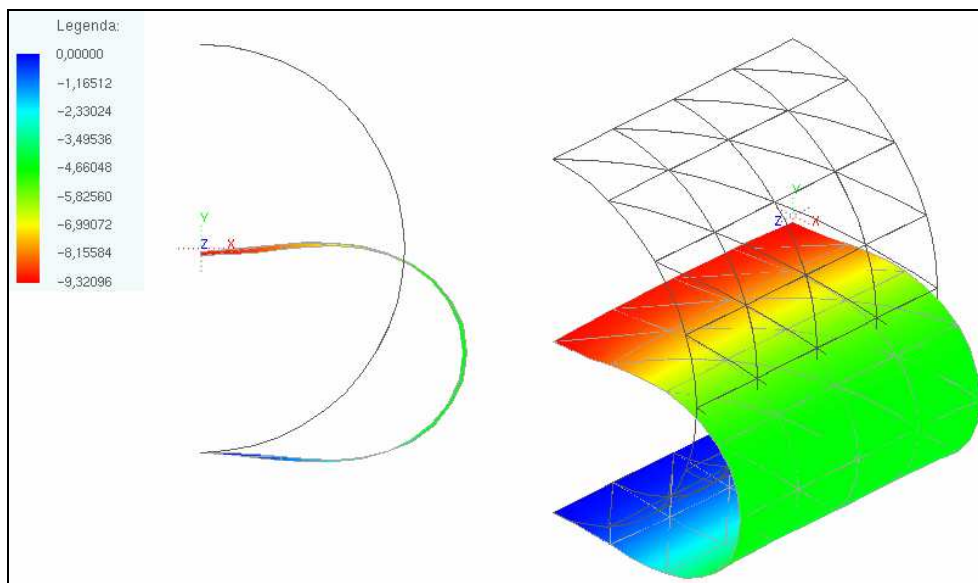


Figura 8.35 - Deslocamentos Verticais do Ponto de Aplicação da Carga no Tubo Cilíndrico Hiperelástico no último passo da simulação ( $P = 20000$ )

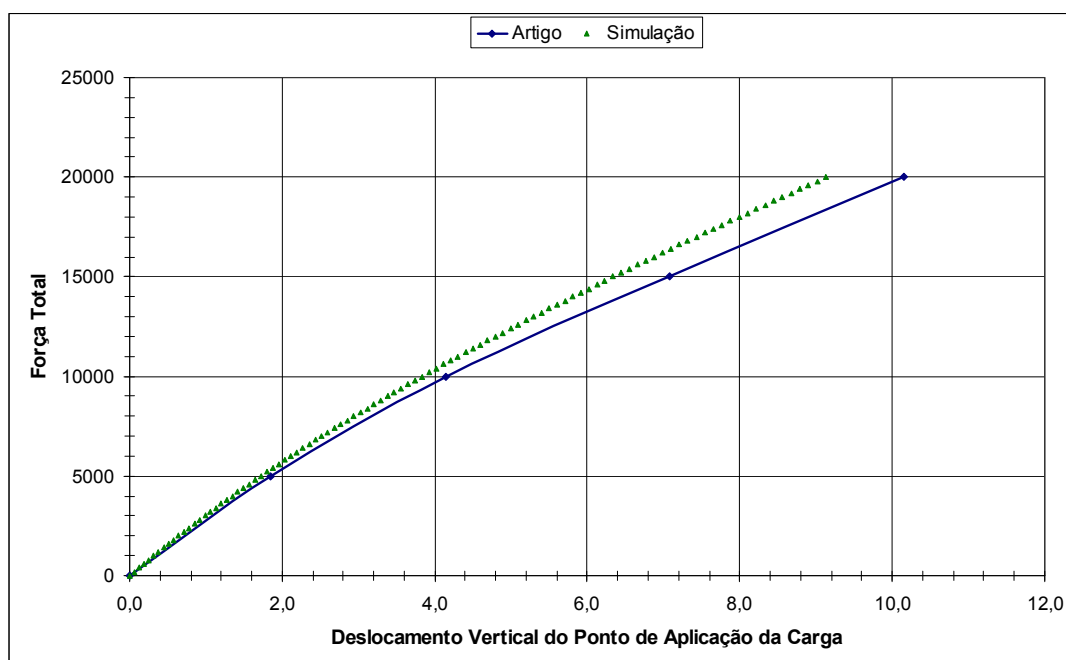


Figura 8.36 - Deslocamentos Verticais do Ponto de Aplicação da Carga no Tubo Cilíndrico Hiperelástico (comparação com artigo)

### 8.2.12. Exemplo 15 - Flexão Pura de Prisma

Este exemplo foi simulado com os coeficientes interpolados do ensaio de tração uniaxial, referente ao exemplo 2. Trata-se de um prisma em balanço, mostrado na figura 8.37, com momento aplicado na extremidade livre igual a 1,0. A simulação foi realizada com 91 nós, 16 elementos finitos e 6 pontos de integração numérica na espessura.

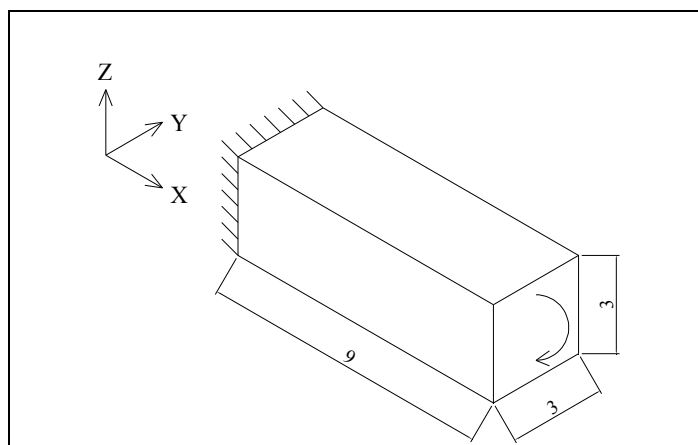


Figura 8.37 - Prisma em Balanço sob Flexão Pura

A figura 8.38 mostra a posição deformada do prisma no último passo de carga. Já as figuras 8.39 e 8.40 ilustram, respectivamente, a distribuição das tensões reais e dos alongamentos, ambos na direção X, ao longo de uma seção transversal deformada próxima ao engaste, no último passo de carga.

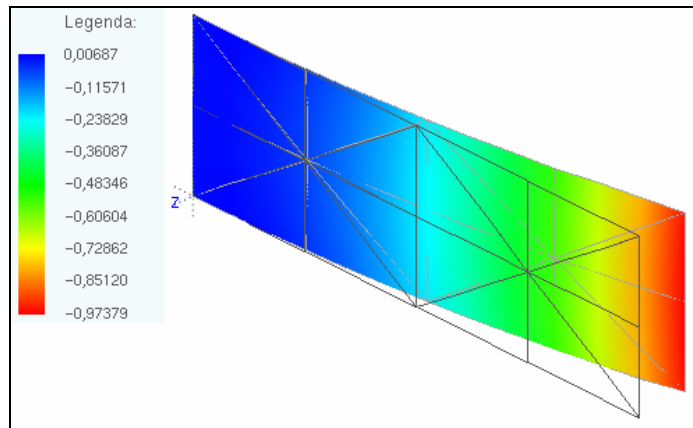


Figura 8.38 - Deslocamentos, na direção Z, do prisma em balanço sob flexão pura no último passo de carga para o modelo de Yeoh (momento = 1,0)

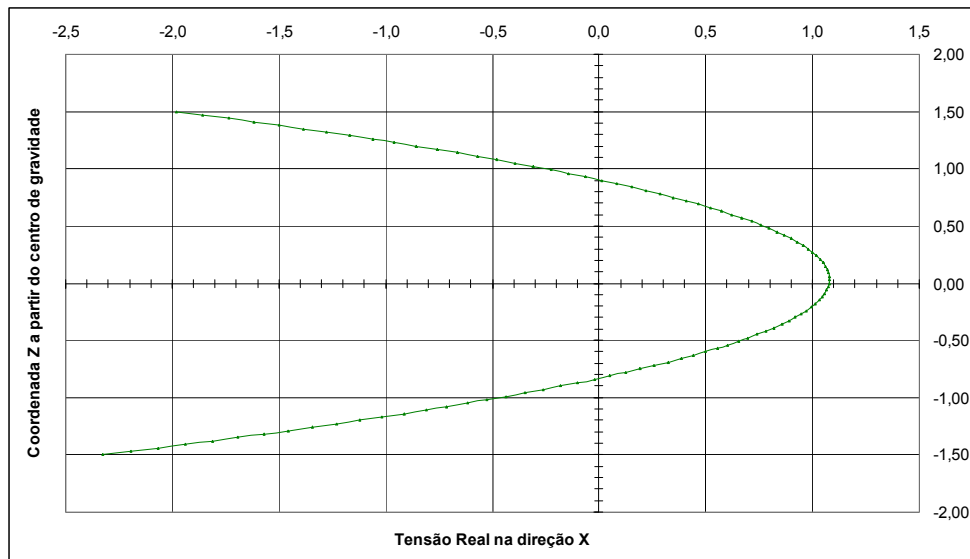


Figura 8.39 - Distribuição das Tensões Reais na direção X, no último passo de carga, do Prisma em Balanço sob Flexão Pura (seção próxima ao engaste)

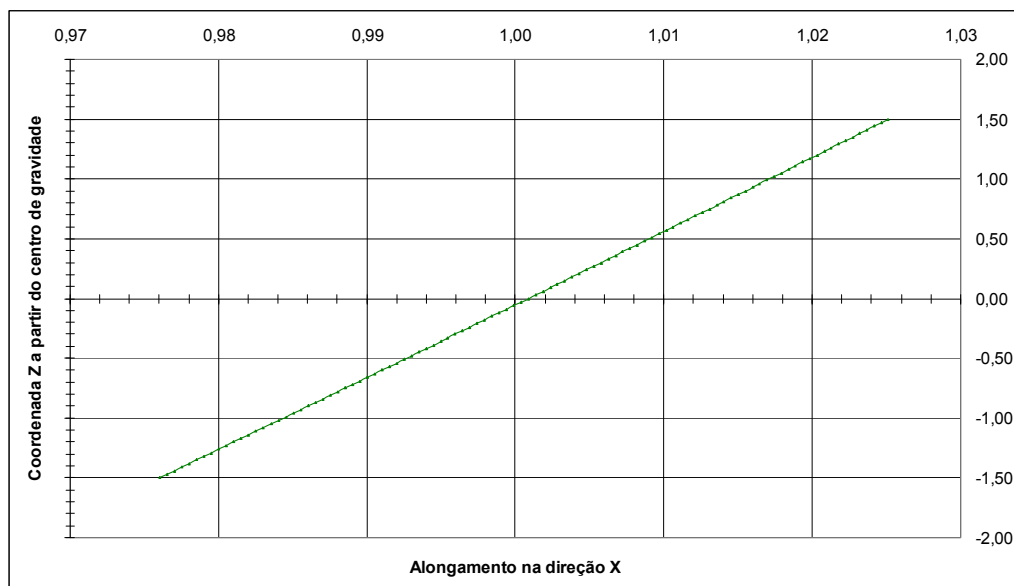


Figura 8.40 - Distribuição dos Alongamentos na direção X, no último passo de carga, do Prisma em Balanço sob Flexão Pura (seção próxima ao engaste)

A figura 8.39 mostra que para  $-1,50 \leq Z \leq -0,84$  e  $0,90 \leq Z \leq 1,50$  as tensões são de compressão e para  $-0,84 \leq Z \leq 0,90$  as tensões são de tração. A figura 8.40 ilustra o deslocamento da linha neutra, que é igual a  $-0,06$ . Tal linha possui alongamento na direção X igual a 1,0. Como era de se esperar, a região superior da seção transversal é alongada e a inferior é comprimida. As figuras citadas neste parágrafo demonstram o caráter não linear da relação entre deformação e tensão, e o estranho comportamento desta última grandeza ao longo da seção transversal, pois era esperado que a região acima da linha neutra estivesse sob tensões de tração e a que está abaixo sob compressão.

Assim como no exemplo 11, são necessárias maiores investigações para se identificar a necessidade, ou não, de maior enriquecimento dos campos de deformação para simulação de cascas sujeitas predominantemente à flexão.

### 8.2.13. Exemplo 16 - Movimento de Corpo Rígido

Simulou-se uma casca, com apenas um elemento finito, submetida a um movimento de corpo rígido, ou seja, apenas rotação e translação. O modelo usado foi o de Yeoh, com os mesmos coeficientes usados no exemplo 4.

O gradiente, o jacobiano, o primeiro invariante de deformação, o tensor alongamento à direita de Cauchy-Green e o tensor deformação de Green-Lagrange, todos calculados pelo programa, são:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad 8.26.1$$

$$J = \det(A) = 1,0 \quad 8.26.2$$

$$I_1 = 3,0 \quad 8.26.3$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad 8.26.4$$

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad 8.26.5$$

A figura 8.41 mostra as malhas indeformada e deformada, assim como as tensões reais calculadas na posição final do corpo.

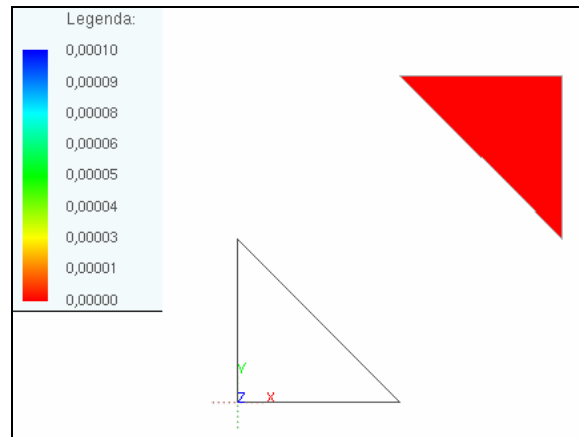


Figura 8.41 - Valores das Tensões Reais, nas três direções principais, para a Casca sob Movimento de Corpo Rígido

Os valores das deformações de Green-Lagrange e das tensões reais estão de acordo com a teoria, pois para movimentos de corpo rígido estas grandezas devem ser nulas.

Deve-se ressaltar que as direções principais são dadas pelo tensor ortogonal, obtido pelo programa, que rotaciona o tensor alongamento à direita de Cauchy-Green para as referidas direções:

$$Q = \begin{bmatrix} -0,613940613514920 & 0,789352217376326 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0,789352217376326 & 0,613940613514920 & 0 \end{bmatrix} \quad 8.27.1$$

$$u_1 = \begin{Bmatrix} -0,613940613514920 \\ 0 \\ 0,789352217376326 \end{Bmatrix} \quad 8.27.2$$

$$u_2 = \begin{Bmatrix} 0,789352217376326 \\ 0 \\ 0,613940613514920 \end{Bmatrix} \quad 8.27.3$$

$$u_3 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad 8.27.4$$

onde  $u_1$ ,  $u_2$  e  $u_3$  são os auto-vetores.

### 8.3. Comparação entre os modelos de Yeoh e de St.Venant-Kirchhoff

Comparou-se o modelo hiperelástico não linear de Yeoh com o linear de St.Venant-Kirchhoff, com a simulação de tração uniaxial com o elemento finito de treliça plana. Os coeficientes para o primeiro modelo são os mesmos usados no exemplo 2, expressos em (8.5.1), e a interpolação do módulo de Young, para o modelo linear, resultou em:

$$E = 0,10701725MPa \quad 8.28.1$$

$$S_{11} = 0,10701725E_{11} \quad 8.28.2$$

Para o modelo linear de St.Venant-Kirchhoff, a combinação entre as expressões (6.60.1), (6.60.2), e (8.27.2) resulta na relação entre tensão e deformação de engenharia:

$$\left(\sigma_{eng}\right)_{11} = \sigma = 0,05350863(\varepsilon + 1)(\varepsilon^2 + 2\varepsilon) = 0,05350863(\varepsilon^3 + 3\varepsilon^2 + 2\varepsilon) \quad 8.29$$

As figuras 8.42, 8.43 e 8.44 mostram os resultados das simulações realizadas com os dois modelos citados, assim como os valores extraídos de YEOH (1997).



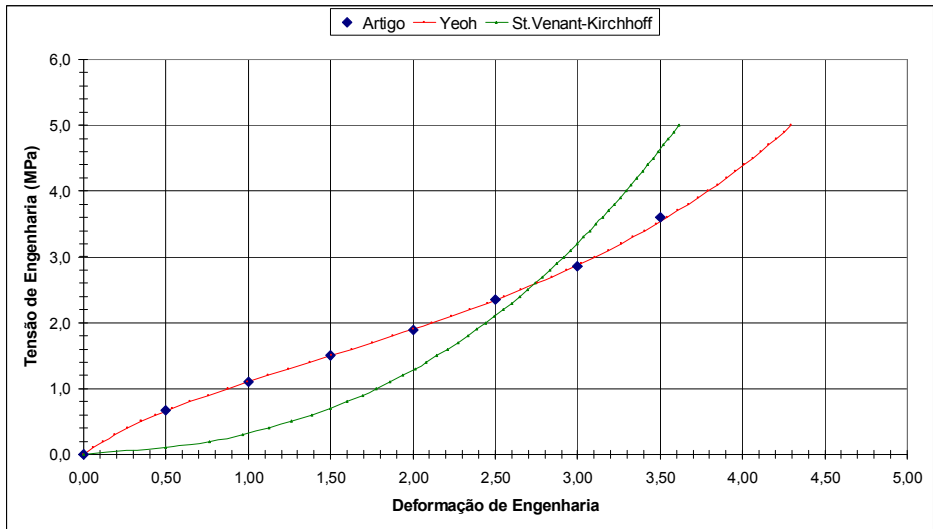


Figura 8.42 - Gráfico Tensão x Deformação de Engenharia para Barra de Treliça Plana sob Tração Uniaxial

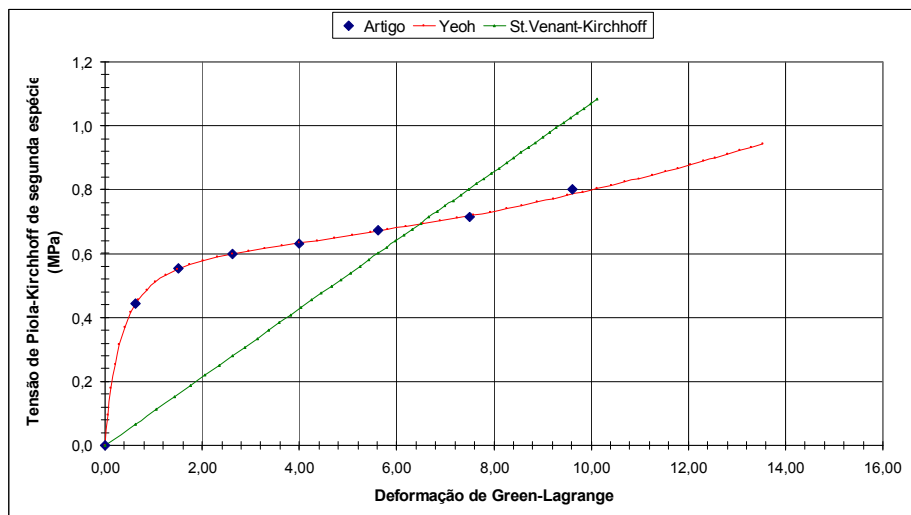


Figura 8.43 - Gráfico Tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie x Deformação de Green-Lagrange para Barra de Treliça Plana sob Tração Uniaxial

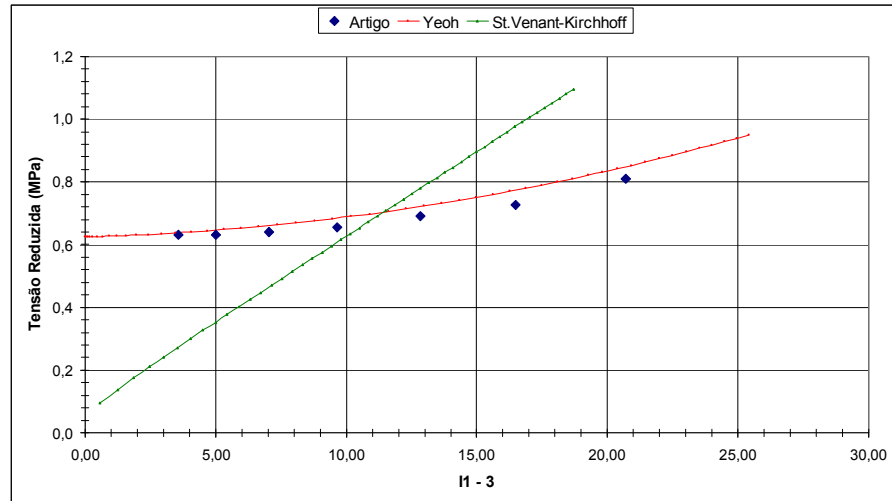


Figura 8.44 - Gráfico da Tensão Reduzida para Barra de Treliça Plana sob Tração Uniaxial

As figuras 8.42, 8.43 e 8.44 demonstram a boa conformidade entre o modelo não linear de Yeoh com os dados experimentais de tração uniaxial do artigo. Já o linear não foi capaz de apresentar resultados condizentes com o ensaio.

## ***9. Conclusões***

---

### **9.1. Considerações Finais**

Os resultados apresentados no capítulo anterior demonstram que foi bem sucedida a implementação dos modelos constitutivos hiperelásticos não lineares nos programas de análise não linear geométrica de treliças planas e cascas que trabalham como chapa. O objetivo precípua deste trabalho foi, portanto, alcançado no decorrer da pesquisa. Serão necessárias, contudo, maiores investigações para cobrir o elemento de casca sob predomínio da flexão.

A análise não linear geométrica mostrou-se mais adequada para simulações estruturais com grandes deformações, com relação à linear. Tal fato foi demonstrado com um simples exemplo de treliça plana abatida. Reforçou-se, deste modo, a necessidade de se equacionar o equilíbrio do corpo na posição deslocada em situações com grandes deslocamentos, para que se possa obter uma previsão mais realista do comportamento estrutural.

Na tração uniaxial homogênea de polímeros naturais, os modelos de Yeoh, de Hartmann-Neff e de Bechir-Boufala-Chevalier mostraram excelente conformidade entre os resultados da simulação e os dados experimentais da literatura científica. Já os modelos neo-Hookeano e de Mooney-Rivlin foram adequados para pequenas e médias deformações.

Para a compressão uniaxial de polímeros naturais, os cinco modelos supracitados mostraram-se adequados para todos os níveis de deformação.

Na tração uniaxial de polímeros preenchidos com negro de carbono na proporção, em massa, de 70 partes por centena de elastômero, a simulação com o modelo de Yeoh foi capaz de reproduzir, com boa precisão, os dados experimentais para quaisquer níveis de deformação. Já o modelo neo-Hookeano mostrou-se adequado, apenas, para pequenas deformações.

Na tentativa de se reproduzir o ensaio de compressão com polímeros preenchidos com negro de carbono na proporção, em massa, de 70 partes por centena de elastômero, a simulação com os modelos de Yeoh, de Hartmann-Neff e de Bechir-Boufala-Chevalier apresentou boa precisão. Já as leis hiperelásticas neo-Hookeana e de Mooney-Rivlin mostraram-se válidas somente para pequenas deformações.

Deve-se ressaltar que os coeficientes interpolados, com os modelos de Yeoh e neo-Hookeano, para os casos de tração e compressão do mesmo material, isto é, para os polímeros citados no parágrafo anterior, resultaram muito próximos. Tal fato permite concluir que é possível, para os referidos materiais e modelos, simular a compressão uniaxial com base nos dados experimentais de tração uniaxial e vice-versa.

O modelo de Yeoh também se mostrou eficiente, com relação à acurácia dos resultados da simulação, no caso de cisalhamento simples de polímeros preenchidos com negro de carbono na proporção, em massa, de 40 partes por centena de elastômero. O modelo de Hartmann-Neff não foi capaz de simular esta situação e o neo-Hookeano apresentou conformidade com os dados experimentais, apenas, para pequenas deformações.

A simulação de tração biaxial de polímeros naturais forneceu resultados condizentes com os dados experimentais para os modelos de Yeoh, de Hartmann-Neff e de Bechir-

Boufala-Chevalier. Novamente, as leis neo-Hookeana e de Mooney-Rivlin foram válidas somente para pequenas deformações.

Na tração equi-biaxial de polímeros naturais, o único modelo usado na simulação, o de Yeoh, apresentou boa conformidade com os dados experimentais, para quaisquer níveis de deformação.

O código computacional desenvolvido mostrou-se adequado para simular, além dos casos supramencionados, a membrana de Cook, a lâmina em balanço sob cisalhamento uniforme na face da extremidade livre, a chapa parcialmente carregada, o prisma elastomérico sob compressão uniforme e o tubo cilíndrico hiperelástico sob linha de carga.

Pode-se comentar que as simulações realizadas com o modelo de Yeoh apresentaram boa conformidade com a solução analítica para os casos de deformação homogênea, o que era esperado, pois a interpolação dos coeficientes da lei hiperelástica foi feita com base nas respectivas soluções analíticas.

Os conceitos, as fórmulas e as hipóteses da mecânica não linear do contínuo foram fundamentais para a realização do presente trabalho. As álgebras linear e tensorial foram de grande auxílio para a dedução das novas formulações constitutivas, que foram implementadas no programa.

Por fim, o elemento finito de casca com sete parâmetros por nó, a formulação Lagrangiana posicional não linear geométrica, os métodos energético e iterativo usados, juntamente com os modelos hiperelásticos não lineares implementados, foram capazes de simular diversos casos de solicitação estrutural com grandes deformações sem ocorrência de travamento.

É possível, no transcorrer desta pesquisa, notar a complexidade da análise estrutural para materiais altamente deformáveis. Faz-se necessário, portanto, dar continuidade ao estudo

destes componentes, que possuem grande potencial de utilização na engenharia, para que se possa prever com maior precisão seu comportamento estrutural em diversas situações.

## **9.2. Comparação com a literatura científica consultada**

O presente trabalho apresentou diferenças com relação ao de TRELOAR (1974). Este último afirmou que o modelo de Mooney-Rivlin apresentava erros em situações de pequenas deformações, mas as simulações realizadas com tal modelo apresentaram resultados condizentes com dados experimentais para esses níveis de deformação. Ademais, TRELOAR (1974) disse que as derivadas da energia específica de deformação em relação aos dois primeiros invariantes deveriam variar com a deformação. Porém, o modelo de Yeoh, no qual não há dependência entre a energia e o segundo invariante, mostrou-se adequado aos dados experimentais.

A pesquisa atual confirmou a de TRELOAR (1975), o qual afirmou que o modelo neo-Hookeano era válido, na maioria dos casos, somente em situações com pequenas deformações.

Também foi confirmado o trabalho de YEOH (1990), que ressaltou a variação da rigidez do material polimérico com a evolução da deformação.

A presente pesquisa não confirmou uma das idéias da obra de YEOH & FLEMING (1997), os quais constataram que o modelo de Yeoh apresentava erros para pequenas deformações nos casos de cisalhamento simples.

Foi reforçada a idéia, comentada por YEOH (1997), a qual afirma que os modelos hiperelásticos não lineares são mais realistas, com relação ao potencial de previsão do comportamento estrutural.

Corroborou-se o trabalho de DÜSTER *et al.* (2003), os quais disseram que a parcela volumétrica da energia específica de deformação deveria ser nula quando a deformação fosse isocórica e que o uso de elevado módulo de compressão volumétrica seria capaz de simular este tipo de deformação. Ademais, os referidos pesquisadores ressaltaram a eficiência da formulação posicional e da decomposição multiplicativa do gradiente, que foram usados no presente trabalho.

Foi comprovada, para os exemplos simulados nesta pesquisa que o elemento finito de casca com sete parâmetros nodais e enriquecidos modos de deformação, CODA & PACCOLA (2008), torna possível a análise de chapas hiperelásticas, como a membrana de Cook, sem a ocorrência de travamento.

Demonstrou-se, também, que a aplicação de movimento de corpo rígido no elemento finito de casca não provoca aparecimento de deformações e tensões, o que era esperado.

### **9.3. Sugestões para Pesquisa Futura**

Podem ser citadas, a partir deste trabalho, algumas sugestões, ou idéias, para futuras pesquisas:

- implementação dos modelos hiperelásticos não lineares usados em outros elementos finitos, como o de casca com aproximação mais elevada, o sólido tetraédrico e o de bloco tridimensional;
- estudo e implementação de modelos hiperelásticos não lineares com grau mais elevado, ou seja, com mais coeficientes;
- desenvolvimento de novos modelos hiperelásticos com base em dados experimentais obtidos com ensaios com materiais altamente deformáveis;
- realização de ensaios com materiais poliméricos para determinação dos coeficientes da parcela isocórica da energia específica de deformação e do módulo de compressão volumétrica;
- verificação da possibilidade de simular com bastante precisão, com a interpolação dos dados experimentais de tração uniaxial, outros ensaios, como o de cisalhamento, o de compressão e o de tração biaxial;
- verificação detalhada do elemento de casca sujeito predominantemente à flexão pura para materiais hiperelásticos;
- análise de convergência e da necessidade de maior enriquecimento das deformações transversais;
- verificação da estranha distribuição, ao longo da seção transversal, das tensões reais obtidas na simulação do prisma em balanço sob flexão pura;
- estudo e implementação de modelos para materiais com características hiperelásticas, plásticas e viscosas;
- análises estruturais dinâmicas, devido ao fato dos polímeros possuírem as finalidades de absorção de impacto e vibração;



- simulações, com os mesmos modelos, de outros casos, como por exemplo, placas apoiadas em toda a borda com carga concentrada no centro, flambagem, estruturas com molas, torção, flexo-torção, tubos sob pressão interna, inflação de balões, etc.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARRUDA, E. M., BOYCE, M. C. (1992). *A Three-Dimensional Constitutive Model for the Large Stretch Behavior of Rubber Elastic Materials*. J. Mech. Phys. Solids, vol. 41, no. 2, p. 389-412.

ASSAN, A. E. (2003). *Método dos Elementos Finitos – Primeiros Passos*. Editora da Unicamp, Campinas, SP, Brasil.

BATHE, K.-J. (1996). *Finite Element Procedures*. Prentice-Hall, Inc., New Jersey, USA.

BATHE, K.-J., DVORKIN, N. (1986). *A Formulation of General Shell Elements – The Use of Mixed Interpolation of Tensorial Components*. International Journal for Numerical Methods in Engineering 22, p. 697-722.

BECHIR, H., BOUFALA, K., CHEVALIER, Y. (2002). *Strain energy density function for carbon black filled rubber vulcanized for industrial applications*. Mécanique & Industries 3, p. 245-252.

BELYTSCHKO, T., LIU, W. K., MORAN, B. (2000). *Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures*. John Wiley & Sons Ltd., Chichester, England.

BISCHOFF, M., RAMM, E. (2000). *On the physical significance of higher order kinematic and static variables in the three-dimensional shell formulation*. International Journal of Solids and Structures 37, p. 6933-6960.

BÜCHTER, N., RAMM, E., ROEHL, D. (1994). *Three-dimensional Extension of Non-linear Shell Formulation Based on the Enhanced Assumed Strain Concept*. International Journal for Numerical Methods in Engineering 37, p. 2551-2568.

CIARLET, P. G. (1993). *Mathematical Elasticity, Volume 1: Three Dimensional Elasticity*. Elsevier Science Publishers B. V., Amsterdam, The Netherlands.

CODA, H. B. (2003). *Análise não linear geométrica de sólidos e estruturas: Uma formulação posicional baseada no MEF, Volume II*. Departamento de Estruturas (SET), Escola de Engenharia de São Carlos (EESC), Universidade de São Paulo (USP).

CODA, H. B., GRECO, M. (2004). *A simple FEM formulation for large deflection 2D frame analysis based on position description*. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 193, p.3541-3557.

CODA, H. B., PACCOLA, R. R. (2006). *An Alternative Positional FEM Formulation for Geometrically Non-linear Analysis of Shells - Curved Triangular Isoparametric Elements*. *Computational Mechanics*, DOI: 10.1007/s00466-006-0094-1.

CODA, H. B., PACCOLA, R. R. (2008). *Positional FEM Formulation for Geometrically Non-Linear Shells – Seven Parameters Curved Triangular Element*. *Computers & Structures*. Artigo submetido.

CODA, H. B., PACCOLA, R. R., MACIEL, D. N. (2008). *Positional Finite Elements applied to geometrical non-linear analysis of elastic solids*. *Computers & Structures*. Artigo submetido.

COIMBRA, A. L. (1981). *Novas Lições de Mecânica do Contínuo*. Edgard Blucher, São Paulo.

DAWE, D. J. (1972). *Rigid-body motions and strain-displacement equations of curved shells finite elements*. *Int. J. Mech. Sci.* 14, p. 569-578.

DÜSTER, A., HARTMANN, S., RANK, E. (2003). *p-FEM applied to finite isotropic hyperelastic bodies*. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 192, p. 5147-5166.

EL-ABBASI, N., MEGUID, S. A. (2000). *A new shell element accounting for through-thickness deformation*. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 189, p. 841-862.

ELLSIEPEN, P., HARTAMANN, S. (2001). International Journal of Numerical Methods in Engineering 51, p. 679-707.

FLORY, P. (1961). *Thermodynamic relations for high elastic materials*. Trans. Faraday Soc. 57, p. 829-838.

FRIED, I. (1975). *Finite Element Analysis of Thin Elastic Shells with Residual Energy Balancing and the Role of Rigid Body Modes*. ASME Journal of Applied Mechanics 42, p. 99-104.

GENT, A. N. (1996). Rubb. Chem. Technol. 69, p. 59.

GHALI, A., NEVILLE, A.M. (1997). *Structural Analysis - A unified classical and matrix approach*. Fourth Edition. E & FN SPON, London and New York.

GRECO, M., CODA, H. B. (2006). *Positional FEM formulation for flexible multi-body dynamic analysis*. Journal of Sound and Vibration 290, p.1141-1174.

HARTMANN, S. (2001). *Parameter estimation of hyperelastic relations of generalized polynomial-type with constraint conditions*. International Journal of Solids and Structures 38, p. 7999-8018.

HARTMANN, S. (2002). *Computation in finite-strain viscoelasticity: finite elements based on the interpretation as differential-algebraic equations*. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 191, p. 1439-1470.

HARTMANN, S., NEFF, P. (2003). *Polyconvexity of generalized polynomial-type hyperelastic strain functions for near-incompressibility*. International Journal of Solids and Structures 40, p. 2767-2791.

HOLZAPFEL, G. A. (2000). *Nonlinear Solid Mechanics – A Continuum Approach for Engineering*. John Wiley & Sons Ltd., Chichester, England.

HUANG, H-C. (1986). *Membrane Locking and Assumed Strain Shell Elements*. Computers & Structures 27, No. 5, p. 671-677.

IRONS, B., AHMAD, S. (1980). *Techniques of Finite Elements*. Ellis Horwood, Chichester, U.K.

JOHNSON, A. R., QUIGLEY, C. J., MEAD, J. L. (1994). Rubber Chemistry Technology 67, p. 604.

KAWABATA, S., MATSUDA, M., TEI, K., KAWAI, H. (1981). *Experimental survey of strain energy density function of isoprene rubber vulcanizate*, Macromolecules 14, p. 154-162.

LAMBERT-DIANI, J., REY, C. (1999). *New phenomenological behavior laws for rubbers and thermoplastic elastomers*. Eur. J. Mech. A/Solids 18, p. 1027-1043.

LANCZOS, C. (1986). *The variational principles of mechanics*. Fourth Edition. Dover Publications, New York.

LIBAI, A., SIMMONDS, J. G. (1998). *The Nonlinear Theory of Elastic Shells*. Cambridge University Press, Cambridge, London.

MALVERN, L. E. (1969). *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, USA.

MOONEY, R. (1940). *A theory of large elastic deformation*. J. Appl. Phys. 11, p. 582-592.

OBATA, Y., KAWABATA, S., KAWAI, H. (1970). *Mechanical Properties of Natural Rubber Vulcanizates in Finite Deformation*. Journal of Polymer Science, Part A-2, Vol. 8, p. 903-919.

OGDEN, R. W. (1972a). *Large deformation isotropic elasticity – on the correlation of theory and experiment for incompressible rubberlike solids*. Proc. R. Soc. Lond. A 326, p. 565-584.

OGDEN, R. W. (1972b). *Large deformation isotropic elasticity – on the correlation of theory and experiment for compressible rubberlike solids*. Proc. R. Soc. Lond. A 328, p. 567-583.

OGDEN, R. W. (1984). *Non-linear Elastic Deformations*. Ellis Horwood Ltd., Chichester, England.

PACCOLA, R. R. (2004). *Análise não linear física de placas e cascas anisotrópicas laminadas acopladas ou não com meio contínuo tridimensional viscoelástico através da combinação entre o MEC e o MEF*. Tese de Doutorado. Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

PIMENTA, P. M., CAMPELLO, E. M. B., WRIGGERS, P. (2004). *A fully nonlinear multi-parameter shell model with thickness variation and a triangular shell finite element*. Computational Mechanics 34, p. 181-193.

PROENÇA, S. P. B. (2006). *Análise não-linear de Estruturas – Notas de Aula (Não-linearidade Geométrica)*. Departamento de Estruturas (SET), Escola de Engenharia de São Carlos (EESC), Universidade de São Paulo (USP).

RIVLIN, R. S. (1948). *Large elastic deformation of isotropic materials: I. Fundamental concepts, II. Some uniqueness theories for pure homogeneous deformations*. Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A 240, p. 459-508.

RIVLIN, R. S. (1949). *Large elastic deformation of isotropic materials: VI. Further Results in the Theory of Torsion, Shear and Flexure*. Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A 242, p. 173-195.

RIVLIN, R. S., SAUNDERS, D. W. (1951). *Large Elastic Deformation of Isotropic Materials. Part 7: Experiments of the Deformation of Rubber*. Philos. Trans. Roy. Soc. London A243, p. 251-288.

RIVLIN, R. S. (1956). *Rheology Theory and Applications Vol 1*. F. R. Eirich Ed., Academic Press, New York, ch. 10, p. 351.

SANSOUR, C., BUFLER, H. (1992). *An Exact Finite Rotation Shell Theory, its Mixed Variational Formulation and its Finite Element Implementation*. International Journal for Numerical Methods in Engineering 34, p. 73-115.

SCHIECK, B., PIETRASZKIEWICZ, W., STUMPF, H. (1992). *Theory and Numerical Analysis of Shells undergoing large elastic strains*. Int. J. Solids Struct. 29, p. 689-709.

SIMO, J. C., RIFAI, S. (1990). *A class of mixed assumed strain methods and the method of incompatible modes*. International Journal for Numerical Methods in Engineering 29, p. 1595-1638.

STOLARSKI, H., BELYTSCHKO, T. (1982). *Membrane Locking and Reduced Integration for Curved Elements*. Transactions of the ASME 49, p. 172-176.

STRANG, G., FIX, G. J., (1973). *An Analysis of the Finite Element Method*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.

SURANA, K. S. (1983). *Geometrically nonlinear formulation for the curved shell elements*. International Journal for Numerical Methods in Engineering 19, p. 581-615.

SZE, K.Y., ZHENG, S. J., LO, S. H. (2004). *A stabilized eighteen-node solid element for hyperelastic analysis of shells*. Finite Elements in Analysis and Design 40, p. 319-340.

TIMOSHENKO, S., GERE, J. M. (1961). *Theory of Elastic Stability, 2nd edn*. McGraw-Hill, New York.

TIMOSHENKO, S., GOODIER, J. N. (1951). *Theory of Elasticity*. Ed. McGraw-Hill, New York.

TIMOSHENKO, S., WOINOWSKY-KRIEGER, S. (1959). *Theory of Plates and Shells*. Ed. McGraw-Hill, New York.

TRELOAR, L. R. G. (1974). *The Mechanics of Rubber Elasticity*. J. Polymer Science 48, p. 107-123.

TRELOAR, L. R. G. (1975). *The Physics of Rubber Elasticity, 3rd edition*. Clarendon Press, Oxford.

VALANIS, K. C., LANDEL, R. F. (1970). J. Appl. Phys. 38, p. 2997.

VALLIAPPAN, S. (1981). *Continuum Mechanics Fundamentals*. A. A. Balkema, Rotterdam, Netherlands.

WASHIZU, K. (1982). *Variational Methods in Elasticity & Plasticity, 3rd edn*. Pergamon Press, London.

YAMASHITA, Y., KAWABATA, S. (1993). *Approximated form of the strain energy-density function of carbon black filled rubber for industrial applications*. International Polymer Sci. Technol. 20 (2), p. 52-64.



YEOH, O. H. (1987). *A Method for the Routine Determination of Compression Modulus of Rubber Vulcanizates*. Polymer Testing 7, p. 121-136.

YEOH, O. H. (1990). *Characterization of Elastic Properties of Carbon-Black-Filled Rubber Vulcanizates*. American Chemical Society, Rubber Division, Las Vegas, Nevada.

YEOH, O. H., FLEMING, P. D. (1997). *A New Attempt to Reconcile the Statistical and Phenomenological Theories of Rubber Elasticity*. Journal of Polymer Science, Part B: Polymer Physics 35, p. 1919-1931.

YEOH, O. H. (1997). *Hyperelastic Material Models for Finite Element Analysis of Rubber*. J. Nat. Rubb. Res. 12 (3), p. 142-153.

YINTAO, W., TINGQING, Y., XINGWEN, D. (1999). *On the large deformation rubber-like materials: Constitutive laws and FEM*. ACTA Mechanica Solida Sinica 12, no. 4, p. 283-293.

# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)