IFT

Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO IFT–D.008/07

TELEPARALELISMO: FORMULAÇÃO HAMILTONIANA E ESTRUTURA DE VÍNCULOS

Danilo Jimenez Rezende

Orientador:
José Geraldo Pereira

Co-orientador:
Cássius A. Miquele de Melo

Julho/2007

Agradecimentos

Há muitas pessoas que foram importantes ao logo do desenvolvimento deste trabalho desde o ponto de vista acadêmico até o pessoal e peço desculpas antecipadamente àqueles que contriburiam e cujo nome não é citado.

Primeiramente agradeço o prof. José Geraldo não apenas por ter me apresentado ao teleparalelismo mas também por sua orientação, paciência e por várias idéias que guiaram meu trabalho. Da mesma maneira, não posso deixar de reconhecer a importância de inúmeras e frutíferas discussões com o prof. Pimentel e com Cássius que muito me ajudaram em diversas fases do projeto.

Agradeço a minha família e a Patrícia pelo apoio, motivação, paciência e compreensão que todos demonstraram nestes dois anos.

Finalmente, agradeço a FAPESP pelo apoio financeiro.

Resumo

No presente trabalho, faremos um estudo de algumas propriedades da versão teleparalela da relatividade geral. No primeiro capítulo, estudaremos diferentes maneiras de obter sua Lagrangiana. No segundo, faremos uma introdução à dinâmica de sistemas vinculados, e no terceiro estudaremos a formulação ADM do teleparalelismo, obtendo a álgebra dos vínculos. Por fim, estudaremos o equivalente às variáveis de Ashtekar teleparalelas.

Palavras Chaves: teleparalelismo, gravitação, Hamiltoniana, Ashtekar, vínculos

Áreas do conhecimento: Gravitação

Abstract

In the present work we study some properties of the teleparallel equivalent of general relativity. In the first chapter, we analyse different ways to obtain the teleparallel Lagrangian. In the second, we make an introduction to the dynamics of constrained systems, and in the third we study the ADM formulation of teleparallel gravity, obtaining its constraint algebra. Finally, we make an analysis of the teleparallel equivalent to the Ashtekar variables.

Sumário

Capítulo 1

O Equivalente Teleparalelo da Relatividade Geral

1.1 Introdução

Um dos mais importantes problemas da física moderna é encontrar uma formulação quântica da gravidade junto com as outras interações da natureza. A formulação Hamiltoniana com vínculos da Relatividade Geral (RG) pode ser um ponto de partida interessante, pois ela nos revela o verdadeiro espaço de fase da teoria (clássica), e nos dá explicitamente os geradores das simetrias envolvidas através dos vínculos, como mostrado nos trabalhos pioneiros de Dirac [1]. Inspirado no formalismo Hamiltoniano canônico, há um expressivo paradigma para se tentar quantizar a gravidade, chamado "Loop Quantum Gravity" (LQG), cujo ponto de partida é encontrar um espaço de Hilbert que resolva a versão quantizada dos vínculos da RG, representando os campos de gauge e matéria por funcionais de objetos estendidos, as redes de spin. Um dos resultados mais impressionantes de LQG é que, como conseqüência deste paradigma, os objetos que representam as soluções quânticas para os vínculos da RG correspondem a espaço-tempos discretizados na escala de Planck (o comprimento de Planck é $l_P = \sqrt{\hbar G/c^3} \approx 1.62 \times 10^{-35} m$, e o tempo de Planck é $t_P = l_P/c = 5.39 \times 10^{-44} s$).

Por outro lado, existem outros paradigmas para se quantizar a gravidade, que modificam completamente o ponto de vista do problema, entre eles, os mais expressivos são a teoria de cordas e supergravidade. O primeiro assume que as partículas elementares são diferentes estados quânticos de cordas vibrantes na escala de Planck (l_P) que vivem num dado espaço-tempo, e as interações entre as partículas são expressas pelas diferentes maneiras pelas quais estas cordas podem se concatenar umas nas outras. Já na supergravidade, assume-se a existência de um parceiro superssimétrico para o gráviton, uma partícula de *spin* $\frac{3}{2}$ chamada gravitino, que com o acoplamento apropriado na Lagrangiana, tenta produzir uma versão mais consistente da RG.

Um ponto fundamental em qualquer tentativa de quantizar a gravidade a partir do formalismo canônico da RG é a escolha de variáveis canônicas e da representação dos vínculos que simplifiquem e viabilizem o processo de quantização, pois como veremos nos próximos capítulos, os vínculos da RG (associados à simetria por transformações de coordenada e invariância local de Lorentz) expressos em termos das variáveis canônicas usuais (a cotetrada e seu momento conjugado) são não polinomiais, o que torna quase impraticável qualquer tentativa de prosseguir com a quantização canônica. No capítulo 2, veremos que, entre outros problemas, quantizar implica em encontrar um espaço de Hilbert que resolve os vínculos da teoria, e este problema por si só já é complexo, mesmo para casos onde a álgebra dos vínculos é simples. A simplicidade dos vínculos não é o único ponto a ser considerado na escolha das variáveis canônicas: é preciso assegurar também que a evolução temporal das soluções seja bem comportada, *i.e.*, que a solução das equações de movimento e dos vínculos sejam funcionais contínuos da condição inicial. Esta propriedade é chamada *hiperbolicidade simétrica* (veja [2]), a qual garante que se uma singularidade aparece na solução das equações de movimento, esta será uma singularidade real, e não apenas do sistema de coordenadas. Esta propriedade é de especial importância para se fazer cálculos numéricos na RG, já que uma simulação numérica não pode lidar com uma singularidade, independente de ser uma singularidade aparente ou não.

Há uma bela proposta para resolver ambos problemas no contexto onde a RG é descrita como um caso particular de uma teoria de gauge para o grupo $SU(2)$, e onde as variáveis canônicas, chamadas de variáveis de Ashtekar * ([3], [4] e [5]), são tais que os vínculos associados à simetria de difeomorfismos se tornam polinômios de grau 2, e o vínculo $SO(3)$ (que é deformado para $SU(2)$) se torna uma lei de Gauss não abeliana. O preço a pagar por estas simplificações dos vínculos é o uso de variáveis canônicas complexas, sendo necessária a imposição de condições de realidade não triviais, como veremos no final do capítulo 3. A descoberta destas variáveis foi um dos passos cruciais no desenvolvimento da LQG, tornando possível a descoberta de uma família infinita de soluções dos vínculos (na verdade, ainda há muitas questões não resolvidas relacionadas à estas soluções).

Quantizar a gravidade não significa necessariamente quantizar a RG *como ela é atualmente aceita*, na formulação de Einstein-Hilbert. Há outras formulações equivalentes em nível clássico (sob hipóteses apropriadas) que poderiam ser usadas como ponto de partida para um programa de quantização, como a teoria de gauge para o grupo de Poincaré (veja [6] e [7]), a teoria de gauge para o grupo Afim (veja [8]), a teoria de Einstein-Cartan (veja [7]) e a teoria Teleparalela (veja [9], [10], [11] e [12]). Algumas dessas formulações serão brevemente estudadas neste trabalho, com exceção da formulação teleparalela, que será tratada em detalhes. Apresentamos alguns dos diferentes modelos alternativos estudados para a RG clássica na tabela abaixo:

	$\zeta = \{\mathcal{M}, \beta \in T^\star\mathcal{M} \otimes M_4 / g \in T^\star\mathcal{M} \otimes T^\star\mathcal{M}\}$	
Modelo	Grupo	Variáveis/geradores
Gauge Poincaré	$\mathrm{SO}(3,1) \ltimes T_4$	$\{\beta^i, \omega_{ij}\}/\{\hat{P}_i, \hat{M}^{ij}\}$
Gauge Afim	$\mathrm{GL}(4,\mathrm{R}) \ltimes T_4$	$\{\beta^i, \omega_{ij}\}/\{\hat{P}_i, \hat{G}^{ij}\}$
Gauge Translações	T^4	$\{\beta^i\}/\{\hat{P}_i\}$
Gauge E.C.	$\mathrm{SO}(3,1)$	$\{\beta^i, \Gamma^{ij}\}/\{\hat{M}^{ij}\}$
"Geométrico"	$\mathrm{SO}(3,1)$	$\{\beta^i, d\beta^i\}/\{\hat{M}^{ij}\}$
Ashtekar	$\mathrm{SU}(2) \ltimes \mathrm{Diff}$	$\{E^i, A_I^{aJ}\}/\{T^a\}$

Tabela 1.1: Diferentes caminhos para a gravidade

Nestes modelos, a dupla $\zeta = \{\mathcal{M}, g\}$, uma variedade Lorentziana (ou pseudo-Riemaniana), onde g é a métrica (uma seção global de $T^\star\mathcal{M} \otimes T^\star\mathcal{M}$), é o que chamamos de *espaço-tempo*†, $T^\star\mathcal{M}$ é o fibrado cotangente de $\mathcal{M}$.

No presente trabalho, nos dedicaremos ao estudo da versão teleparalela da RG. Em particular, estudaremos sua formulação de Arnowitt-Deser-Misner (ADM) [13, 14], obteremos seus vínculos, sua respectiva álgebra, e iniciaremos um estudo das variáveis de Ashtekar. A construção da Lagrangiana teleparalela depende basicamente de dois ingredientes: o frame não-holonômico e a invariância local de Lorentz, que assegura que a Lagrangiana teleparalela, a menos de uma 4-forma exata, é equivalente à de Einstein-Hilbert. Este formalismo tem como propriedade, [14] o fato que, ao menos na teoria livre, ele não necessita da conexão de spin (que é a conexão Levi-Civita no frame ortonormal) para implementar a invariância local de Lorentz (como na teoria de Einstein-Cartan, por exemplo). Além disso, com as hipóteses apropriadas, o tensor de torsão da conexão de Weitzenböck aparece como o objeto que carrega a informação sobre o campo gravitacional no lugar da curvatura. O teleparalelismo pode também ser entendido, num sentido que será explicitado no final deste capítulo, como uma teoria de gauge para o grupo das translações T_4, como mostrado em [9] e [12]. Uma vez construída a Lagrangiana teleparalela e provada sua equivalência com a de Einstein-Hilbert, iniciaremos a parte mais complexa e ambiciosa deste trabalho, na qual faremos um estudo detalhado de sistemas dinâmicos vinculados, com a finalidade de aplicá-lo ao teleparalelismo, obtendo sua álgebra de vínculos. Em seguida, passaremos a um estudo preliminar das variáveis de Ashtekar neste contexto.

Nas seções seguintes, faremos uma breve introdução aos diferentes modelos da tabela (1.1), partindo em seguida para o estudo detalhado do teleparalelismo. Com a finalidade de desenvolver uma boa base teórica sobre sistemas dinâmicos vinculados, dedicamos um capítulo inteiro a esta questão, o cap.2, onde fazemos um estudo detalhado do método de Dirac, aplicando os resultados

*Na verdade, um nome mais apropriado por razões históricas seria Sen-Ashtekar-Immirzi-Barbero.

†Para ser mais preciso, o que é chamado de *espaço-tempo* é a classe de equivalência de díadas $\{\mathcal{M}, g\}$ definida pelo grupo de *isometrias*, i.e., pelos difeomorfismos $\theta : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ tais que $\theta_\star g = g$.

às teorias de Maxwell e de Yang-Mills, antes de aplicá-los ao teleparalelismo, no cap. 3. Neste último, além de aplicar a teoria de vínculos ao teleparalelismo, analisaremos sua álgebra e as correspondentes variáveis de Ashtekar, verificando as consequências desta escolha de variáveis canônicas.

1.2 Teoria de gauge para o grupo de Poincaré

Este modelo é baseado no fibrado de Poincaré,

$$(PM, \Pi, \mathcal{M}, \mathrm{SO}_0(3,1)),$$

onde PM é a extensão afim[‡] do fibrado de Lorentz, LM, que é a variadade dos frames lineares conexos por transformações de Lorentz ortócronas, e Π é a projeção de PM em $\mathcal{M}$. Neste contexto, podemos deduzir a derivada covariante (para detalhes, veja [6]):

$$\mathcal{D}_X \Psi_x = \left[\partial_X + \theta^i(X)\hat{P}_i + \frac{1}{2}\omega_{ij}(X)\hat{M}^{ij} \right] \Psi_x,$$

onde θ^i e ω_{ij} são respectivamente a 1-forma de soldagem e a 1-forma de spin (conexão de spin), $\hat{P}_i$ e $\hat{M}^{ij}$ são respectivamente os geradores de *translações* e de *transformações de Lorentz próprias ortócronas*, satisfazendo a álgebra de Poicaré

$$\begin{cases} [\hat{M}^{ij}, \hat{M}^{kl}] & = \eta^{jl}\hat{M}^{ik} - \eta^{jk}\hat{M}^{il} + \eta^{ik}\hat{M}^{jl} - \eta^{il}\hat{M}^{jk}, \\ [\hat{P}_i, \hat{M}_{jk}] & = \eta_{ik}\hat{P}_j - \eta_{ij}\hat{P}_k, \\ [\hat{P}_i, \hat{P}_j] & = 0. \end{cases} \tag{1.1}$$

O campo Ψ_x pode ser qualquer campo tensorial ou espinorial. A conexão de Poincaré pode ser escrita como um único objeto, lembrando que

$$\tilde{\Gamma} = \theta(X) \otimes \mathrm{Id}_{\mathcal{S}} + \mathrm{Id}_{T_4} \otimes \omega(X) \equiv (\theta(X) = \theta^i(X)\hat{P}_i, \omega(X) = \frac{1}{2}\omega_{ij}(X)\hat{M}^{ij}.$$

Ums das propriedades mais interessantes desta conexão é que ela apresenta tanto curvatura quanto torção, e as equações de movimento acoplam a corrente de spin da matéria com a torção.

Com a conexão de Poincaré em mãos, há muitas Lagrangianas possíveis que podem ser construídas, ao menos do ponto de vista clássico da covariância. Entre as possibilidades mais simples, temos por exemplo,

$$\mathcal{L}_{\mathrm{PG}} \propto \alpha_1 R + \alpha_2 R^2 + \alpha_3 T^2 + \lambda,$$

onde R é a curvatura escalar de $\tilde{\Gamma}$, R^2 e T^2 representam respectivamente todos os termos possíveis quadráticos na curvatura e na torção, e λ é uma constante cosmológica. A partir desta Lagrangiana, é possível reproduzir, como casos particulares, as teorias de Einstein-Cartan (impondo $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$), a teoria teleparalela (impondo $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ e $R = 0$) e a formulação usual da RG (impondo $T = 0$, $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$) (para mais detalhes, veja [6]).

É interessante notar que na teoria de gauge para o grupo de Poincaré, a escolha de acoplamentos minimais não é necessariamente a escolha correta. Por exemplo, se fizermos a substituição minimal $\partial_\mu \to \mathcal{D}_\mu$ na Lagrangiana de Maxwell $\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$, ela *perderá* sua simetria $U(1)$, sendo necessária a escolha do acoplamento apenas com a conexão de spin que está contida na conexão $\tilde{\Gamma}$, veja [16].

[‡] Chamamos de frame afim a díada (a, e_i), onde $a \in T_x\mathcal{M}$ e $e_i \in LM$. Se indentificarmos $(0, e_i)$ com e_i, podemos entender o conjunto de todos os frames afins (a, e_i) como *translações* de e_i a partir do ponto de contato com $\mathcal{M}$. É simples mostrar que este conjunto é uma variedade, e consequentemente um fibrado. Para mais detalhes, veja [15].

1.3 Teoria de gauge para o grupo afim

Este modelo é baseado no fibrado Afim GAM, que é uma generalização de PM,

$$(\mathrm{GAM}, \Pi, \mathcal{M}, \mathrm{GL}(4, \mathrm{R})),$$

send GAM a extensão afim do fibrado dos frames lineares, e GL o fibrado dos frames lineares conexos por transformações lineares inversíveis. Deste modo, como no caso da teoria de gauge para o grupo de Poincaré, o transporte paralelo de um frame afim (a, e_i) é dado pela conexão

$$\tilde{\Gamma} = (\Gamma^T, \Gamma^{\mathrm{GA}}),$$

onde Γ^T é a 1-forma conexão das translações, e Γ^{GA} é a 1-forma conexão associada às transformações lineares. Neste caso, a derivada covariante se torna (veja [8]):

$$\mathcal{D}\Psi = e_a d\Psi + (\Gamma^{T,c}\hat{P}_c + \Gamma^{\mathrm{GA}}_{ij}\hat{G}^{ij})\Psi,$$

lembrando que a ação da conexão de GAM sobre um frame (a, e_i) é dada por

$$(\Gamma^T, \Gamma^{\mathrm{GA}})(a, e_i) = (\Gamma^{\mathrm{GA}}a + \Gamma^T, \Gamma^{\mathrm{GA}}e_i).$$

Em ambas teorias de gauge (para os grupos afim e de Poincaré), é necessário a escolha de uma origem para cada fibra (esta escolha é chamada *soldagem*), i.e., é necessário identificar um ponto $\Pi^{-1}(x)$ com cada ponto x da variedade base, pois as extensões afins dos grupos lineares precisam ser *localmente* isomorfas à variedade base $\mathcal{M}$, caso contrário não haveria sentido em introduzir campos de matéria como seções globais de fibrados associados à PM ou GAM. A problemática[§] associada a esta escolha é que ela quebra a simetria translacional da teoria. Uma maneira de verificar isto é lembrar que a escolha de uma origem para a extensão afim do fibrado linear nada mais do que a escolha de uma seção global. No caso de GAM, $\sigma : \mathcal{M} \to \mathrm{GAM}$, e esta seção pode ser escolhida arbitrariamente. Portanto, dada uma curva $\gamma(\tau) : [0,1] \to \mathcal{M}$ em $\mathcal{M}$ e seu "horizontal lift"[¶] $\tilde{\gamma}(\tau)$, mesmo que $\sigma(\gamma(0)) = \tilde{\gamma}(0)$, não há razão para que $\sigma(\gamma(t \geqslant 0)) = \tilde{\gamma}(t \geqslant 0)$ continue sendo verdadeiro.

Na realidade, este quadro é muito mais geral do que parece e é uma conseqüência imediata de um teorema de Cartan esboçado abaixo:

Teorema 1 *Seja $(E, \pi, \mathcal{M}, F, \rho(G))$ um fibrado associado ao fibrado principal $(P, \Pi, \mathcal{M}, G)$, para o qual a álgebra de Lie do grupo G pode ser decomposta como a soma direta:*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{g}',$$

onde $\mathfrak{t} \sim \mathrm{R}^n$. Então, o fibrado $(E, \pi, \mathcal{M}, F, \rho(G))$ admite uma seção global isomorfa à $\mathcal{M}$.

1.4 Teoria de gauge para o grupo das translações

Nesta seção estudaremos a teoria teleparalela sob o ponto de vista de uma teoria de gauge para as translações. Seguindo o tratamento dado em [9] e [12], começamos com um espaço plano, para o qual o frame $\{e_a\}$ e o co-frame $\{\beta^a\}$ são triviais, e representando os geradores de T_4 por $\{T_\alpha\}$, a álgebra que eles produzem é trivial:

$$[T_\alpha, T_\beta] = 0, \qquad \forall \alpha, \beta = 0 \ldots 3.$$

Introduzindo então uma 1-forma conexão,

$$A = A^\alpha_\mu T_\alpha dx^\mu,$$

[§]Isto pode ser um problema se quisermos interpretar a teoria teleparalela como uma teoria de gauge para o grupo das translações.

[¶]O "horizontal lift" é definido como a curva integral do transporte paralelo de um elemento de um fibrado principal. Esta curva é localmente unica, dada uma condição inicial.

podemos facilmente escrever sua transformação de gauge. Para uma transformação infinitesimal $\gamma = 1 + \theta^\alpha(x)T_\alpha$, temos:

$$\begin{aligned}
A' &= \gamma A \gamma^{-1} + \gamma \partial \gamma^{-1} \\
&= A + (1 + \theta^\alpha(x)T_\alpha)\partial_\mu(1 - \theta^\beta(x)T_\beta) \\
&= A - T_\alpha \partial_\mu \theta^\alpha(x) \Rightarrow \\
\delta A^\alpha_\mu &= -\partial_\mu \theta^\alpha(x).
\end{aligned} \tag{1.2}$$

A curvatura (ou o field strenght) desta conexão é dada pela equação de estrutura de Cartan [17]:

$$\begin{aligned}
F &= dA + [A, A] \\
F^\alpha &= \frac{1}{2}\partial_{[\mu} A^\alpha_{\nu]} dx^\mu \wedge dx^\nu \\
F^\alpha{}_{\mu\nu} &= \partial_{[\mu} A^\alpha_{\nu]},
\end{aligned}$$

Se escrevermos a curvatura em um frame ortonormal arbitrário como função das componentes da conexão neste mesmo frame, obtemos

$$\begin{aligned}
F^\alpha{}_{\mu\nu} e^\mu_b e^\nu_c &= e^\mu_b e^\nu_c \partial_{[\mu} A^\alpha_{\nu]} \\
&= e^\mu_b e^\nu_c (\partial_\mu A^\alpha_\nu - \partial_\nu A^\alpha_\mu) \\
&= e^\nu_c \partial_b A^\alpha_\nu - e^\mu_b \partial_c A^\alpha_\mu \\
&= \partial_b A^\alpha_c - \partial_c A^\alpha_b + A^\alpha_\mu \partial_c e^\mu_b - A^\alpha_\nu \partial_b e^\nu_c \\
F^\alpha{}_{bc} &= \partial_{[b} A^\alpha_{c]} - A^\alpha_d C^d{}_{bc},
\end{aligned}$$

onde introduzimos os coeficientes de não holonomia, C^d_{bc}, definidos por

$$[e_b, e_c] = C^d{}_{bc} e_d = (\partial_c e^\mu_b - \partial_b e^\mu_c)\beta^d_\mu e_d.$$

É simples de verificar que a curvatura F^α_{bc} é um invariante de gauge, como esperado para uma teoria de gauge Abeliana. Note que esta construção poderia ter sido feita para qualquer teoria de gauge, e até o momento não tem relação direta com a gravidade. As diferenças entre uma teoria de gauge usual e o teleparalelismo começam a ficar claras a partir deste ponto. Se *interpretarmos* o campo de gauge A^α_μ como a parte não trivial do co-frame, criando com esta identificação um *espaço-tempo curvo* para o qual,

$$e^\mu_a = \delta^\mu_a + A^\mu_a,$$

então a curvatura se torna

$$\begin{aligned}
F^\alpha{}_{bc} &= \partial_{[b} A^\alpha_{c]} - A^\alpha_d C^d{}_{bc} \\
&= \partial_{[b} e^\alpha_{c]} - e^\alpha_d C^d{}_{bc} + \delta^\alpha_d C^d{}_{bc} \\
&= e^\alpha_d C^d_{bc} - e^\alpha_d C^d{}_{bc} + \delta^\alpha_d C^d{}_{bc} \\
&= \delta^\alpha_d C^d{}_{bc},
\end{aligned}$$

ou seja, ela é uma combinação dos coeficientes de não holonomia. Note que esta decomposição do co-frame é ambígua, $e^\mu_a = (\text{partetrivial}) + A^\mu_a$ depende da base escolhida para $T\mathcal{M}$, uma vez que δ^μ_a não é covariante por uma troca de base, mas esta ambiguidade pode ser absorvida por transformações de gauge e portanto não é problemática.

Para obter a Lagrangiana *invariante sob transformações locais de Lorentz* é preciso considerar uma combinação não natural[‖] de termos quadráticos na curvatura:

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g}(\alpha_1 F_{abc} F^{abc} + \alpha_2 F_{abc} F^{bac} + \alpha_3 F_{ab}{}^a F_c{}^{bc}), \tag{1.3}$$

onde consideramos $G = c = 1$. Antes de impor a invariância local de Lorentz a esta Lagrangiana,

[‖]Não natural para uma teoria de gauge usual, onde a Lagrangiana é dada por $\mathcal{L} = \sqrt{-g}\,\mathrm{Tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})$ e não há mistura de índices de grupo e tensoriais.

i.e., invariância sob $e^\mu_a(x) \to e^\mu_a(x) + \omega_a{}^b e^\mu_b(x)$, com $\omega_{ab} = -\omega_{ba}$, vamos escrever a lei de transformação da curvatura e enunciar um pequeno lema:

$$\begin{aligned} \delta F^\alpha{}_{bc} &= \partial_{[b}\delta e^\alpha_{c]} + (\delta\partial_{[b)})e^\alpha_{c]} \\ &= e^\alpha_a(x)\partial_{[b}\omega_{c]}{}^a + \omega_{[c}{}^a\partial_{b]}e^\alpha_a(x) + \omega^a_{[b}\partial_a e^\alpha_{c]}. \end{aligned}$$

Conseqüentemente:

$$\begin{aligned} \delta F^a{}_{bc} &= (\delta\beta^a_\mu)F^\mu{}_{bc} + \beta^a_\mu\delta F^\mu{}_{bc} \\ &= -\omega^a_d F^d{}_{bc} + \partial_{[b}\omega_{c]}{}^a + \omega^d_b F^a{}_{dc} + \omega^d_c F^a{}_{bd}. \end{aligned}$$

Lema 1

$$-\sqrt{-g}\left(\frac{1}{2}F^{abc}\partial_a\omega_{bc} + F_c{}^{cb}\partial_c\omega^c_a\right) = \partial_\mu[e^\mu_b\sqrt{-g}\partial_d\omega^{db}]. \tag{1.4}$$

Voltando à Lagrangiana, sua variação sob uma transformação local de Lorentz é,

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} &= 2\sqrt{-g}(\alpha_1 F_{abc}\delta F^{abc} + \alpha_2 F_{abc}\delta F^{bac} + \alpha_3 F^a{}_{ab}\delta F_c{}^{bc}) \\ &= 2[(2\alpha_1 - \alpha_2)\sqrt{-g}F_a{}^{bc}\partial_b\omega_c{}^a - \alpha_2\sqrt{-g}F^{abc}\partial_a\omega_{bc} - \alpha_3\sqrt{-g}F_c{}^{cb}\partial_a\omega_b{}^a]. \end{aligned}$$

Utilizando o lema 1.4, obtemos:

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} &= 2[(2\alpha_1 - \alpha_2)\sqrt{-g}F^{bc}_a\partial_b\omega_c{}^a \\ &+ 2\alpha_2\sqrt{-g}F^{cb}_c\partial_c\omega^c_a + 2\alpha_2\partial_\mu[e^\mu_b\sqrt{-g}\partial_d\omega^{db}] + \alpha_3\sqrt{-g}F^{cb}_c\partial_a\omega^a_b] \\ &= 2\sqrt{-g}[(2\alpha_1 - \alpha_2)F_a{}^{bc}\partial_b\omega_c{}^a + (2\alpha_2 + \alpha_3)F_c{}^{cb}\partial_a\omega^a_b] + 4\alpha_2\partial_\mu[e^\mu_b\sqrt{-g}\partial_d\omega^{db}], \end{aligned}$$

onde podemos ver claramente que a única maneira de garantir a invariância local de Lorentz é impor as seguintes relações entre os coeficientes:

$$\begin{cases} 2\alpha_1 - \alpha_2 = 0, \\ 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Definindo $\alpha_3 = -1$, obtemos univocamente $\alpha_2 = \frac{1}{2}$ e $\alpha_1 = \frac{1}{4}$. Nas próximas seções mostraremos que a Lagrangiana (1.3), com os coeficientes, acima é equivalente à de Einstein-Hilbert.

Neste ponto é conveniente notar que a Lagrangiana (1.5) precisa ter termos não usuais para uma teoria de gauge pela mesma razão que é preciso quebrar a simetria translacional nas "teorias de gauge" para os grupos Afim e de Poincaré, *i.e.*, não há maneira de implementar a invariância translacional sem misturar índices de grupo e de espaço-tempo, esta é a razão pela qual estas teorias não são teorias de gauge *stricto sensu*.

1.5 Teleparalelismo: um outro ponto de vista

Esta outra maneira de introduzir o teleparalelismo é tratada em [10], [11] e [12]. Considere uma variedade $\mathcal{M}$ equipada com uma seção global de $T^\star\mathcal{M}$, $\{\beta^i\}$. A díada $\zeta = (\mathcal{M}, \beta)$ é chamada *variedade teleparalela*. Baseando-nos nesta estrutura, para usar as seções globais $\{\beta^i\}$ para descrever o campo gravitacional, escolheremos uma Lagrangiana que reproduz a mesma dinâmica da RG usual. O ponto interessante do procedimento que mostraremos a seguir é que a única simetria imposta na Lagrangiana é a invariância local de Lorentz, e para assegurá-la não será necessário introduzir uma conexão de Lorentz nem falar em simetria de gauge translacional, embora do ponto de vista matemático este processo seja completamente equivalente ao da seção anterior.

A Lagrangiana quadrática em β e $d\beta$ mais geral possível que pode produzir dinâmica é a seguinte:

$$\mathcal{L}_{TT} = \alpha_1 d\beta \wedge \star d\beta + \alpha_2(\beta \wedge d\beta) \wedge \star(\beta \wedge d\beta) + \alpha_3(\beta \wedge d\beta) \wedge \star(\beta \wedge d\beta). \tag{1.5}$$

Note que $d\beta$ não é um vetor de Lorentz, e portanto nenhum dos termos da Lagrangiana acima é invariante por transformações locais de Lorentz (embora o sejam por transformações globais).

Portanto, a única maneira de assegurar tal invariância é encontrar os coeficientes de modo que a Lagrangiana como um todo seja localmente invariante. O resultado é o mesmo do encontrado na seção anterior.

É com a combinação linear invariante por transformações locais que iremos trabalhar daqui em diante, pois apenas esta combinação tem como limite de campo fraco o potencial Newtoniano, e é equivalente à de Einstein-Hilbert (para mais detalhes, veja [11]). Agora, definamos os coeficientes de não holonomia:

$$d\beta^i = \frac{1}{2} C^i_{jk} \beta^j \wedge \beta^k. \tag{1.6}$$

Utilizando esta definição na Lagrangiana (1.5), obtemos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\mathrm{TT}} &= -\frac{1}{2}\beta^i \wedge (\frac{1}{2}C^j_{lk}\beta^l \wedge \beta^k) \wedge \star\left(\beta_j \wedge \frac{1}{2}C_{ilk}\beta^l \wedge \beta^k\right) \\
&+ \frac{1}{4}\beta^i \wedge \frac{1}{2}C_{ilk}\beta^l \wedge \beta^k \wedge \star\left(\beta^j \wedge \frac{1}{2}C_{jlk}\beta^l \wedge \beta^k\right), \\
\mathcal{L}_{\mathrm{TT}} &= -\frac{1}{8}C_{jlk}C_{imn}\beta^i \wedge \beta^l \wedge \beta^k \wedge \star\left(\beta^j \wedge \beta^m \wedge \beta^n\right) \\
&+ \frac{1}{16}C_{ilk}C_{jmn}\beta^i \wedge \beta^l \wedge \beta^k \wedge \star\left(\beta^j \wedge \beta^m \wedge \beta^n\right).
\end{aligned}$$

Relembrando a ação do operador $\star$ sobre uma base ortonormal [17], temos que

$$\star\left(\beta^j \wedge \beta^m \wedge \beta^n\right) = \frac{1}{(3-1)!}\epsilon^{jmnk}\beta_k = \frac{1}{2}\epsilon^{jmnk}\beta_k.$$

Aplicando esta expressão à (1.5), obtemos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\mathrm{TT}} &= -\frac{1}{16}\epsilon^{jmnu}C_{jlk}C_{imn}\beta^i \wedge \beta^l \wedge \beta^k \wedge \beta_u + \frac{1}{32}\epsilon^{jmnu}C_{ilk}C_{jmn}\beta^i \wedge \beta^l \wedge \beta^k \wedge \beta_u \\
&= -\frac{1}{16}\epsilon^{jmnu}C_{jlk}C_{imn}\beta^i \wedge \beta^l \wedge \beta^k \wedge \beta_u + \frac{1}{32}\epsilon^{jmnu}C_{ilk}C_{jmn}\beta^i \wedge \beta^l \wedge \beta^k \wedge \beta_u \\
&= \frac{1}{16}\left(-\epsilon^{jmnu}C_{jlk}C_{imn} + \frac{1}{2}\epsilon^{jmnu}C_{ilk}C_{jmn}\right)\beta^i \wedge \beta^l \wedge \beta^k \wedge \beta_u \\
&= \frac{1}{16}\left(-C_{jlk}C_{imn} + \frac{1}{2}C_{ilk}C_{jmn}\right)\epsilon^{jmnu}\beta^i \wedge \beta^l \wedge \beta^k \wedge \beta_u.
\end{aligned}$$

Antes de partir para a demonstração de que esta Lagrangiana é igual, a menos de uma 4-forma exata, à de Einstein-Hilbert, mostraremos como ela pode ser escrita em termos da torção de uma conexão específica.

Toda 1-forma conexão Γ sobre uma variedade base $\mathcal{M}$ a valores na álgebra de Lie (G) de um grupo de Lie G é caracterizada pelas equações de estrutura de Cartan [17],

$$R(\Gamma) = d\Gamma + \frac{1}{2}[\Gamma, \Gamma] \equiv d\Gamma + \Gamma \wedge \Gamma, \tag{1.7}$$
$$T(\beta, \Gamma) = d\beta + \Gamma \wedge \beta, \tag{1.8}$$

onde R e T são respectivamente a 2-forma curvatura e a 2-forma torção. Nestas expressões,

$$[A, B] = [A_\mu, B_\nu]dx^\mu \wedge dx^\nu,$$

e g é uma seção global de $T^\star\mathcal{M} \otimes T^\star\mathcal{M}$. Podemos considerar também outra propriedade, o tensor de não metricidade:

$$Q(\beta, \Gamma) = D^\Gamma g = dg - \Gamma^t g - g\Gamma. \tag{1.9}$$

No nosso caso,$Q(\beta, \Gamma) = 0$, o que implica em $G = \mathrm{SO}(3, 1)$. Utilizando a lei de transformação de β e Γ pela ação de $\gamma \in G$,

$$\begin{aligned} \beta' &= \gamma\beta, & (1.10) \\ \Gamma' &= \gamma\Gamma\gamma^{-1} + \gamma d\left(\gamma^{-1}\right), & (1.11) \end{aligned}$$

junto com as equações de estrutura de Cartan, derivamos as leis de transformação de $R(\Gamma)$ e $T(\beta, \Gamma)$:

$$\begin{aligned} R'(\Gamma') &= \gamma R(\Gamma)\gamma^{-1}, & (1.12) \\ T'(\beta', \Gamma') &= \gamma T(\beta, \Gamma). & (1.13) \end{aligned}$$

Como esperado, R e T são tensores de Lorentz e vivem, respectivamente, nas representações adjunta e fundamental. Neste contexto, listamos as Lagrangianas mais simples invariantes por transformações locais de Lorentz que podem ser usadas para a construção de uma dinâmica:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{YM} &= Tr\left\{R \wedge \star R\right\} & (1.14) \\ \mathcal{L}_{EH} &= Tr\left\{R \wedge \star(\beta \wedge \beta)\right\} & (1.15) \\ \mathcal{L}_{\Lambda} &= Tr\left\{(\beta \wedge \star\beta\right\} & (1.16) \\ \mathcal{L}_{TT} &= \alpha_1 Tr\left\{T \wedge \star T\right\} + \alpha_2 \operatorname{Tr}\{(\beta \wedge T) \wedge \star(\beta \wedge T)\} \\ &+ \alpha_3 \operatorname{Tr}\{(\beta \wedge T)\} \wedge \star \operatorname{Tr}\{(\beta \wedge T)\} & (1.17) \end{aligned}$$

Nesta lista podemos reconhecer imediatamente algumas Lagrangianas importantes, como $\mathcal{L}_{\mathrm{YM}}$ que é a Lagrangiana tipo Yang-Mills, $\mathcal{L}_{EH}$ é a Lagrangiana de Einstein-Hilbert, e $\mathcal{L}_{\Lambda}$ é apenas uma constante cosmológica. Suponha agora que Γ satisfaça **

$$\begin{aligned} R(\Gamma) &= 0, & (1.18) \\ T(\beta, \Gamma) &\neq 0, & (1.19) \end{aligned}$$

e utilizando a propriedade geral das conexões,

$$\Gamma = \hat{\Gamma} + K, \tag{1.20}$$

onde K é chamado *tensor de contorção*, e onde $\hat{\Gamma}$ (a conexão de Levi-Civita) satisfaz

$$\begin{aligned} R(\hat{\Gamma}) &\neq 0, & (1.21) \\ T(\beta, \hat{\Gamma}) &= 0, & (1.22) \\ Q(\beta, \hat{\Gamma}) &= 0. & (1.23) \end{aligned}$$

Neste caso, obtemos imediatamente das equações de estrutura de Cartan, duas relações que serão utilizadas mais à frente:

$$\begin{aligned} T(\beta, \Gamma) &= d\beta + \hat{\Gamma} \wedge \beta + K \wedge \beta = K \wedge \beta, & (1.24) \\ R(\Gamma) &= R(\hat{\Gamma}) + dK + \frac{1}{2}\Big([\hat{\Gamma}, K] + [K, \hat{\Gamma}] + [K, K]\Big) = 0. & (1.25) \end{aligned}$$

Suponhamos que exista um co-frame $\{\tilde{\beta}\}$ no qual $\Gamma = 0$ (ou seja, Γ é uma conexão de vácuo), o que é consistente com as equações. (1.18, 1.19, 1.20). Portanto, a torção se torna:

$$T(\tilde{\beta}, \Gamma = 0) = d\tilde{\beta} \qquad \Rightarrow \qquad T(\tilde{\beta}, \Gamma = 0)^i = \frac{1}{2} C^i_{jk} \tilde{\beta}^j \wedge \tilde{\beta}^k.$$

Combinando este resultado com a eq. (1.24) obtemos,

$$\frac{1}{2} C^i_{jk} \tilde{\beta}^j \wedge \tilde{\beta}^k = [K \wedge \tilde{\beta}]^i = \frac{1}{2} K^i_{jk} \tilde{\beta}^j \wedge \tilde{\beta}^k \qquad \Rightarrow \qquad K^i_{jk} = C^i_{jk},$$

** Como a conexão de Weitzenböck

e a Lagrangiana (1.5) pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\mathrm{TT}} &= -\frac{1}{2}\tilde{\beta}^i \wedge \tilde{T}_j \wedge \star\left(\tilde{\beta}_j \wedge \tilde{T}_i\right) + \frac{1}{4}\tilde{\beta}^i \wedge \tilde{T}_i \wedge \star\left(\tilde{\beta}^j \wedge \tilde{T}_j\right), \\ &= -\frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\{(\tilde{\beta} \wedge \tilde{T}) \wedge \star(\tilde{\beta} \wedge \tilde{T})\} + \frac{1}{4}\,\mathrm{Tr}\{(\tilde{\beta} \wedge \tilde{T})\} \wedge \star\,\mathrm{Tr}\{(\tilde{\beta} \wedge \tilde{T})\}.\end{aligned}$$

Utilizando a invariância de $\mathcal{L}_{\mathrm{TT}}$ por transformações locais de Lorentz, podemos reescrevê-la em qualquer framediferente de $\tilde{\beta}$ ($\beta = \gamma\tilde{\beta}$):

$$\mathcal{L}_{\mathrm{TT}} = -\frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\{(\beta \wedge T) \wedge \star(\beta \wedge T)\} + \frac{1}{4}\,\mathrm{Tr}\{(\beta \wedge T)\} \wedge \star\,\mathrm{Tr}\{(\beta \wedge T)\},$$

o que mostra que a Lagrangiana (1.5), com os coeficientes $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = -\frac{1}{2}, \alpha_3 = \frac{1}{4}$, é equivalente à (1.17).

Neste ponto é importante diferenciar os papéis das conexões utilizadas neste capítulo, em particular das conexões de Poincaré, teleparalela e da conexão Γ desta seção. Primeiramente, note que a introdução da conexão Γ (chamada conexão de Weitzenbock) nesta seção não é absolutamente necessária[††] pois a Lagrangiana (1.5) já é invariante por transformações locais de Lorentz por si própria (mesmo que cada um de seus termos não o seja individualmente) e tudo o que Γ faz é projetar cada um dos termos de (1.5) numa forma invariante de Lorentz. Neste sentido, podemos dizer que a Lagrangiana (1.17) é duplamente invariante sob transformações locais de Lorentz. Partindo da Lagrangiana (1.17), que já é invariante por transformações locais de Lorentz para quaisquer coeficientes, poderíamos pensar em princípio que a teoria teleparalela é consistente para quaisquer coeficientes. No entanto, isto não é verdade pois ainda é necessário uma combinação linear específica para que a Lagrangiana teleparalela seja equivalente à de Einstein-Hilbert (isso, é claro, se almejarmos a consistência com a relatividade geral padrão).

Freqüentemente na literatura, quando se refere ao tensor de torção, está se referindo à possibilidade de considerar uma variação da conexão de Levi-Civita com torção não nula, introduzindo novos graus de liberdade e modificando a física por trás da dinâmica da geometria. Isto não é o que fazemos neste capítulo: como uma conseqüência da passagem (1.20), é sempre possível decompor uma conexão sem curvatura e com torção em uma conexão com curvatura e sem torção mais um tensor. Portanto, é sempre possível intercambiar os papéis da curvatura e da torção neste sentido. Mas é preciso ter em mente que, nesta troca, nos referimos à curvatura e à torção de conexões diferentes.

1.6 Equivalência entre o teleparalelismo e a relatividade geral

É possível fazer esta demonstração sem referência explícita a nenhum frame. No entanto, para simplificar os cálculos, faremos a demonstração no frame onde $T(\beta, \Gamma) = d\beta$. Deste modo, escrevendo a equação (1.5) no frame das coordenadas, expandindo as componentes de $d\beta$ em termos do tensor de contorção, obtemos:

$$\mathcal{L}_{\mathrm{TT}} = \frac{1}{2}\det(\beta)\left(K^{\mu\nu\rho}K_{\rho\nu\mu} - K^{\sigma\nu}_{\sigma}K^{\rho}_{\nu\rho}\right). \tag{1.26}$$

Utilizando a definição de curvatura para Γ, dada por (1.20), podemos escrever:

$$R(\Gamma) = R(\hat{\Gamma}) + O(K, \hat{\Gamma}) = 0,$$

onde

$$\hat{\Gamma}^{\sigma}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\sigma\lambda}(\partial_\mu g_{\lambda\nu} + \partial_\nu g_{\lambda\mu} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}) \tag{1.27}$$

é a conexão de Levi-Civitta, e portanto, $R(\hat{\Gamma})$ é o mesmo tensor de Riemann utilizado na formulação de Einstein-Hilbert da RG.

[††]Na verdade, o fato de existir um frame no qual Γ é zero implica que Γ não introduz nenhum grau de liberdade adicional à teoria, e portanto não afeta sua dinâmica.

O lema fundamental para a prova de que a Lagrangiana teleparalela é igual à de Einstein-Hilbert será agora enunciado:

Lema 2

$$\det(\beta)\, O(K,\hat{\Gamma}) = \det(\beta)\left(K^{\mu\nu\rho}K_{\rho\nu\mu} - K_{\sigma}^{\sigma\nu}K_{\nu\rho}^{\rho}\right) + \partial_{\mu}(2\det(\beta)T_{\sigma}^{\sigma\mu}).$$

Com este lema, podemos escrever (lembrando que $R(\hat{\Gamma}) + O(K,\hat{\Gamma}) = 0$):

$$\mathcal{L}_{\mathrm{TT}} = -\frac{\sqrt{-g}}{2}\delta_{\mu}^{\lambda}g^{\nu\rho}R(\hat{\Gamma})_{\nu\lambda\rho}^{\mu} + \partial_{\sigma}\left(\sqrt{-g}T_{\mu}^{\mu\rho}\right) = \mathcal{L}_{\mathrm{EH}} + \partial_{\sigma}\left(\sqrt{-g}T_{\mu}^{\mu\rho}\right),$$

o que implica na equivalência almejada entre as Lagrangianas, a menos de uma divergência.

Uma notação mais comumente encontrada na literatura sobre teleparalelismo corresponde a escrever $\mathcal{L}_{\mathrm{TT}}$ em termos da torção de Γ no frame das coordenadas. Deste modo, utilizando a equação (1.24) obtemos a seguinte relação entre a torção e a contorção:

$$T_{\mu\rho}^{\lambda} = -2K_{[\mu,\rho]}^{\lambda},$$

que pode ser invertida, resultando em:

$$K_{\mu\nu\lambda} = -\frac{1}{2}\left(T_{\mu\nu\lambda} - T_{\lambda\mu\nu} + T_{\nu\lambda\mu}\right). \tag{1.28}$$

Substituindo (1.28) em (1.26) obtemos:

$$\mathcal{L}_{\mathrm{TT}} = \frac{\sqrt{-g}}{2}\left(\frac{1}{4}T_{\mu\nu}^{\rho}T_{\rho}^{\mu\nu} + \frac{1}{2}T_{\mu\nu}^{\rho}T_{\rho}^{\nu\mu} - T_{\rho\mu}^{\rho}T_{\nu}^{\nu\mu}\right),$$

que é exatamente a Lagrangiana utilizadas nos trabalhos [9] e [14], por exemplo.

Quanto às equações de movimento, partimos das equações de Euler-Lagrange,

$$\frac{\partial\mathcal{L}(\phi,\partial\phi)}{\partial\phi^{a}(x)} - \partial_{\mu}\frac{\partial\mathcal{L}(\phi,\partial\phi)}{\partial_{\mu}\phi^{a}(x)} = 0,$$

onde ϕ^{a} representa a coleção de campos dinâmicos presentes em $\mathcal{L}$. Para a teoria teleparalela, em princípio, as variáveis dinâmicas (no cap. 3 verificaremos quais são as verdadeiras variáveis dinâmicas) são, $\{\beta_{\mu}^{a}dx^{\mu}\}$, e as equações de Euler-Lagrange se tornam:

$$\frac{\partial\mathcal{L}_{\mathrm{TT}}(\beta,d\beta)}{\partial\beta_{\mu}^{a}(x)} - \partial_{\nu}\frac{\partial\mathcal{L}_{\mathrm{TT}}(\beta,d\beta)}{\partial_{\nu}\beta_{\mu}^{a}(x)} = 0.$$

No apêndice B há uma dedução da equação de movimento em termos da torção (B.6):

$$\det(\beta)S_{c}^{\rho\nu}T_{\nu a}^{c} + e_{a}^{\rho}\mathcal{L}_{\mathrm{TT}} - \partial_{\mu}\left(\det(\beta)S_{a}^{\mu\rho}\right) = 0,$$

onde

$$S_{\lambda}^{\rho\nu} = (K_{\lambda}^{\rho\nu} - g_{\lambda}^{\nu}T_{\sigma}^{\sigma\rho} + g_{\lambda}^{\rho}T_{b}^{b\nu}). \tag{1.29}$$

Note que, em termos de (1.29), a Lagrangiana teleparalela fica

$$\mathcal{L}_{\mathrm{TT}} = \frac{\det(\beta)}{4}S^{\rho\mu\nu}T_{\rho\mu\nu}.$$

Para estudar a teoria teleparalela do ponto de vista Hamiltoniano, é preciso aplicar uma transformação de Legendre na Lagrangiana acima. No entanto, como veremos nos próximos capítulos, este procedimento não é trivial devido à não linearidades das equações e à presença de vínculos. No próximo capítulo mostraremos que a existência de vínculos está intimamente relacionada à existência de variáveis não dinâmicas na teoria ou, equivalentemente, à existência de simetrias internas na Lagrangiana. Mais precisamente, mostraremos que os geradores das simetrias internas são combinações lineares dos vínculos de primeira classe. Deste modo, mesmo antes de fazer os cálculos, podemos predizer quantos vínculos esperamos encontrar no formalismo canônico. Por construção, a Lagrangiana $\mathcal{L}_{\mathrm{TT}}$ é invariante sob transformações locais de Lorentz (6 geradores por ponto do espaço-tempo) e translações locais, i.e., difeomorfismos infinitesimais (4 geradores por ponto do espaço-tempo), dando um total de 10 geradores, e portanto 10 vínculos. Entretanto, devido à razões que serão explicadas no capítulo 3, haverá uma fixação de gauge eliminando os *boosts* de Lorentz, restando apenas 7 vínculos. Outro resultado interessante, que é conseqüência imediata do capítulo 2, é que a simetria por difeomorfismos infinitesimais implica que a Hamiltoniana canônica da RG é nula, restando apenas a Hamiltoniana total, que é uma combinação linear dos vínculos, mostrando que a dinâmica da relatividade geral está nos vínculos.

Capítulo 2

Dinâmica Hamiltoniana com Vínculos

2.1 Introdução

Este capítulo é inteiramente dedicado à dinâmica de sistemas vinculados, introduzindo o método de Dirac para a construção da Hamiltoniana e obtenção das equações de movimento. Veremos como este método fornece o verdadeiro espaço de fases da teoria, e a correspondência entre os vínculos de primeira classe e os geradores das simetrias da Lagrangiana. Em seguida, aplicaremos este programa às teorias de Maxwell e Yang-Mills, não apenas como um exercício, mas para que estes cálculos nos dêem idéias sobre o que poderemos esperar no caso gravitacional. A aplicação destes resultados ao teleparalelismo será feita no capítulo 3, onde estudaremos sua álgebra de vínculos.

2.2 Da Lagrangiana à Hamiltoniana

Suponhamos dispor de uma teoria descrita pela Lagrangiana $\mathcal{L}(q(\tau), \dot{q}(\tau))$, onde q representa a coleção de coordenadas canônicas q_i para $i = 1 \ldots N$, e para a qual a ação é dada por:

$$I = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q(\tau), \dot{q}(\tau)) d\tau. \tag{2.1}$$

Definindo o momento canônico associado à $q(\tau)$ por $p(q, \dot{q}) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$, as equações de Euler-Lagrange se escrevem:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{dp_i}{d\tau} = 0. \tag{2.2}$$

Agora, se fizermos a ingênua transformada de Legendre

$$H_c = p\dot{q} - \mathcal{L}(q, \dot{q}), \tag{2.3}$$

onde H_c é chamado *Hamiltoniana canônica*, podemos verificar facilmente que H_c não depende explicitamente de $\dot{q}$:

$$\delta H_c = p\delta\dot{q} + \dot{q}\delta p - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}\delta q - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\delta\dot{q} = \dot{q}\delta p - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}\delta q. \tag{2.4}$$

Definamos o *parêntese de Poisson* por

Definição 1

$$\{A, B\}_P = \sum_i \left(\frac{\partial A}{\partial q_i}\frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial B}{\partial q_i}\frac{\partial A}{\partial p_i} \right)$$

.

Tendo, portanto, $\{p_i, q^j\}_P = -\delta_i^j$, $\dot{q}^i = \left\{q^i, H_c\right\}_P = \frac{\partial H_c}{\partial p_i}$ e $\dot{p}_i = \{p_i, H_c\}_P = -\frac{\partial H_c}{\partial q^i}$, podemos descrever a evolução temporal de qualquer quantidade g dependente de q, p e τ simplesmente por

$$\dot{g} = \frac{\partial g}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial q}{\partial p}\dot{p} + \frac{\partial g}{\partial \tau} = \{g, H_c\}_P + \frac{\partial g}{\partial \tau}. \tag{2.5}$$

Note porém que este desenvolvimento, baseado na Hamiltoniana, não é nada mais que uma transformação de coordenadas, $(q, \dot{q}) \to (q, p)$, e se a matriz Hessiana for singular, *i.e.*, se

$$\det\left(\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j}\right) = 0, \tag{2.6}$$

não será possível inverter, nem localmente, esta transformação para escrever as velocidades canônicas em termos dos momentos. Em outras palavras, não haverá solução única para $\dot{q} = \dot{q}(q, p)$. Isto é um corolário imediato do teorema* enunciado abaixo:

Teorema 2 *Seja uma função $\boldsymbol{f}$ de um aberto n-dimensional D em um espaço vetorial V_n com derivadas parciais contínuas. Se, para $q \in D$, $[\det J_f](q) \neq 0$, onde J_f é o Jacobiano de f. Então existe um $\delta > 0$ tal que a restrição de $\boldsymbol{f}$ à $D' = \{\xi | \|\xi - q\| < \delta\}$ é uma bijeção.*

Portanto, isto constitui uma limitação da transformada de Legendre ingênua e, considerando que muitos sistemas físicos importantes como o eletromagnetismo tem matrizes Hessianas singulares, é preciso contornar esta dificuldade, o que nos leva ao estudo dos vínculos.

2.3 Vínculos primários

Seja Γ a variedade que representa o espaço de fases tal que $\dim(\Gamma) = 2N$, e suponha que tenhamos vínculos da forma $\phi_m(q, p) = 0$, onde $m = 1, ..., P$. Estes vínculos podem surgir naturalmente da definição do momento canônico e os chamaremos de *vínculos primários*. Portanto, as P funções $\phi_m(q, p)$ restríngem a dinâmica a viver num subconjunto $\Gamma_1 \subseteq \Gamma$. Para que sejamos auto consistentes, vamos assumir que os vínculos satisfaçam certas condições de regularidade:

$$\text{rank}\left(\frac{\partial \phi_m}{\partial (p, q)}\right) |_{\Gamma_1} = const = P, \tag{2.7}$$

o que implica:

- as funções ϕ_m são independentes;
- as funções ϕ_m pode ser utilizadas *localmente* como coordenadas sobre Γ;
- Γ_1 é uma variedade;
- $\dim(\Gamma_1) = 2N - P$,

onde $\partial \phi_m / \partial (p, q)$ representa uma matriz $2N \times P$, denotada Λ_{ab}, tal que

$$\Lambda_{ab} = \begin{cases} \partial \phi_b / \partial p_a, \ \text{para}\, 1 \leqslant a \leqslant N, 1 \leqslant b \leqslant P \\ \\ \partial \phi_b / \partial p_{(a-N)}, \ \text{para}(N+1) \leqslant a \leqslant (2N+1), 1 \leqslant b \leqslant P. \end{cases}$$

Definamos o conceito de igualdade fraca:

Definição 2 *Seja F uma função sobre Γ. Dizemos que F é fracamente nula se, e somente se, $F |_{\Gamma_1} = 0$, e escrevemos $F \approx 0$. Se $F |_{\Gamma} = 0$ dizemos que F é fortemente nula.*

Com esta definição, podemos escrever os vínculos de uma forma mais consistente:

$$\phi_m(q, p) \approx 0. \tag{2.8}$$

Para entender por que os vínculos precisam ser fracamente nulos, e não necessariamente fortemente nulos, suponhamos que podemos resolver localmente P equações para os momentos e

*Para verificar a demonstração deste teorema, veja [18] escrevamos $p_m = f(q_k, p_l)$, onde $l = (P+1), \ldots, N$, de modo que podemos escrever os vínculos como $\tilde{\phi}_m = p_m - f(q_k, p_l)$, onde podemos verificar facilmente que $\frac{\partial \tilde{\phi}_m}{\partial p_n} = \delta^n_m \neq 0$.

Agora derivaremos as equações de movimento, mas desta vez considerando a presença dos vínculos. Começamos por impor a condição de estacionaridade da ação,

$$\delta I = \int_{t_1}^{t_2} d\tau \left(\frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right) = 0. \tag{2.9}$$

Utilizando o fato que a Hamiltoniana canônica não depende das velocidades, obtemos:

$$\delta H_c \approx \dot{q} \delta p - \frac{\partial L}{\partial q} \delta q = \frac{\partial H_c}{\partial q} \delta q + \frac{\partial H_c}{\partial p} \delta p. \tag{2.10}$$

Combinando (2.9) e (2.10) obtemos:

$$\delta I \approx \int_{t_1}^{t_2} d\tau \left[\left(\dot{q} - \frac{\partial H_c}{\partial p} \right) \delta p - \left(\frac{\partial H_c}{\partial q} + \dot{p} \right) \delta q \right] = 0, \tag{2.11}$$

o que nos leva a

$$\left(\dot{q} - \frac{\partial H_c}{\partial p} \right) \delta p - \left(\frac{\partial H_c}{\partial q} + \dot{p} \right) \delta q \approx 0. \tag{2.12}$$

A seguir, enunciamos um teorema que será de grande importância mais tarde.

Teorema 3 *Seja F tal que $F \approx 0$; então, considerando que as variáveis (p, q) estão sujeitas aos vínculos $\varphi_s(p, q) \approx 0$, temos que*

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial q_i} - \lambda^m \frac{\partial \varphi_m}{\partial q_i} \approx 0, \\ \\ \frac{\partial F}{\partial p_i} - \lambda^m \frac{\partial \varphi_m}{\partial p_i} \approx 0, \end{cases}$$

para qualquer λ^m, o que implica que $F - \lambda^m \varphi_m = \Im$, onde $\frac{\partial \Im}{\partial (p,q)} \approx 0$. Considerando as condições de regularidade de φ_m, que implicam que os vínculos são as únicas funções nulas e independentes entre si sobre Γ_2, obtemos necessariamente que $\Im = 0$, e portanto

$$F \approx 0 \Rightarrow F = \lambda^m \varphi_m.$$

Devido à presença dos vínculos, não podemos inferir que $\dot{q} - \frac{\partial H_c}{\partial p} = 0$ e $\frac{\partial H_c}{\partial q} + \dot{p} = 0$. De acordo com o teorema (3), temos:

$$\begin{cases} \dot{q} - \frac{\partial H_c}{\partial p} = u^m \frac{\partial \phi_m}{\partial p}, \\ \\ \frac{\partial H_c}{\partial q} + \dot{p} = -u^m \frac{\partial \phi_m}{\partial q}. \end{cases}$$

Estas novas equações de movimento podem ser obtidas diretamente à partir de uma nova Hamiltoniana, o *Hamiltoniana total*

$$H_T = H_c + u^m \phi_m, \tag{2.13}$$

como se não houvesse vínculos. Neste quadro, a evolução temporal das quantidades dinâmicas é dada pelo parênteses de Poisson com a Hamiltoniana total. Assim, seja $g(p, q, \tau)$ uma quantidade dinâmica; então

$$
\begin{aligned}
\dot{g} &= \frac{\partial g}{\partial \tau} + \frac{\partial g}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial g}{\partial p}\dot{p} \\
&= \frac{\partial g}{\partial \tau} + \frac{\partial g}{\partial q}\left(\frac{\partial H_c}{\partial p} + u^m \frac{\partial \phi_m}{\partial p}\right) - \frac{\partial g}{\partial p}\left(\frac{\partial H_c}{\partial q} + u^m \frac{\partial \phi_m}{\partial q}\right) \\
&= \frac{\partial g}{\partial \tau} + \{g, H_c\}_P + u^m \{g, \phi_m\}_P \approx \frac{\partial g}{\partial \tau} + \{g, H_T\}_P \,, \qquad (2.14)
\end{aligned}
$$

onde na equação (2.14) temos uma igualdade fraca. Vemos o por quê abaixo:

$$
\{g, H_T\}_P = \{g, H_c\}_P + u^m \{g, \phi_m\}_P + \{g, u^m\}_P \phi_m \approx \{g, H_c\}_P + u^m \{g, \phi_m\}_P \,, \qquad (2.15)
$$

pois apesar de $\{g, u^m\}_P$ não ser definido, ele está multiplicando ϕ_m que é fracamente nula.

2.4 Vínculos secundários e condições de consistência

A introdução da igualdade fraca pode trazer problemas de consistência para os vínculos, pois os parênteses de Poisson entre eles e a Hamiltoniana podem não ser nulos. Deste modo, é preciso impor uma condição de consistência para cada vínculo:

$$
\dot{\phi}_m \approx \{\phi_m, H_T\}_P \approx \{\phi_m, H_c\}_P + u^l \{\phi_m, \phi_l\}_P \approx 0. \qquad (2.16)
$$

Para cada uma destas P equações de consistência, temos três resultados possíveis:

- Pode ser um vínculo já conhecido;
- Pode ser um novo vínculo, independente dos multiplicadores de Lagrange u^m. Os novos vínculos serão chamados *vínculos secundários*;
- Pode ser simplesmente uma condição sobre os multiplicadores de Lagrange u^m.

A partir deste ponto, usaremos para os vínculos secundários a notação $\chi_n(q,p) \approx 0$, onde $n = 1, ..., S$. Para o conjunto total de vínculos, usaremos $\varphi_s(p,q) \approx 0$, onde $k = 1, ..., P + S$.

Note que a existência de vínculos secundários implica na existência de novas condições de consistência. Estas condições de consistência podem produzir novos vínculos que devem ser adicionados ao conjunto total de vínculos, e o processo deve continuar até que nenhum vínculo novo seja produzido, ou seja, até que os vínculos formem uma álgebra. Em razão dos novos vínculos, o espaço de fase real é mais uma vez reduzido para $\Gamma_2 \subseteq \Gamma_1 \subseteq \Gamma$. Tendo em mãos todos os vínculos, podemos ter também um conjunto de equações sobre os multiplicadores de Lagrange, e portanto podemos eliminar alguns deles. Deste modo, sejam V_a^m as N_1 soluções da equação homogênea $V_a^m \{\varphi_s, \phi_m\}_P \approx 0$, e seja U^m uma solução particular da solução não homogênea $V_a^m \{\varphi_s, \phi_m\}_P \approx -\{\varphi_s, H_c\}_P$. Então, podemos escrever a solução geral para os multiplicadores como:

$$
u^m = U^m + v^a V_a^m,
$$

onde v^a $(a = 1, \ldots, N_1)$ são funções arbitrárias. Substituindo esta expressão na Hamiltoniana total, obtemos

$$
H_T = H_c + u^m \phi_m = H_c + U^m \phi_m + v^a V_a^m \phi_m = H' + v^a \phi_a, \qquad (2.17)
$$

onde $H' = H_c + U^m \phi_m$ e $\phi_a = V_a^m \phi_m$. Note que H' não é único pois as funções v^a são arbitrárias. Assim, podemos adicionar uma combinação linear qualquer das funções ϕ_a em H'.

2.5 Vínculos de primeira e segunda classes

Definição 3 *Seja $F(q,p)$ uma função sobre Γ; dizemos que $F(q,p)$ é de primeira classe (FC) se e somente se $\{F, \varphi_s\}_P \approx 0$, $\forall s$. Caso contrário, dizemos que $F(q,p)$ é de segunda classe (SC).*

Lema 3 *Sejam A e B dois objetos de primeira classe. Então $\{A, B\}_P$ é de primeira classe.*

Prova Se A e B são de primeira classe, temos

$$\{A, \varphi_s\}_P \approx \{B, \varphi_s\}_P \approx 0$$

Então, pelo teorema 3 concluímos que

$$\begin{aligned} \{A, \varphi_s\}_P &= A_s^r \varphi_r \\ \{B, \varphi_s\}_P &= B_s^r \varphi_r. \end{aligned}$$

Utilizando a identidade de Jacobi para os parênteses de Poisson:

$$\begin{aligned} \{\{A, B\}_P, \varphi_l\}_P &= \{\{A, \varphi_l\}_P, B\}_P - \{\{B, \varphi_l\}_P, A\}_P \\ &= A_s^r \{\varphi_l, B\}_P - B_s^r \{\varphi_l, A\}_P \\ &+ \{A_s^r, B\}_P \varphi_r - \{B_s^r, A\}_P \varphi_r \\ &\approx 0. \end{aligned}$$

□

Na seqüência, denotaremos os vínculos de primeira classe por ψ_s e os de segunda classe por θ_j, ignorando se são primários ou secundários. Agora, introduziremos os parênteses de Dirac para lidar com os vínculos de segunda classe. Em seguida, veremos que os vínculos de primeira classe estão associados aos geradores das simetrias de gauge da teoria, e que a arbitrariedade introduzida pelos multiplicadores de Lagrange na dinâmica não é física.

Definição 4 *Sejam θ_s os vínculos de segunda classe, e seja Δ_{rs} definida por*

$$\Delta_{rs} = \{\theta_r, \theta_s\}_P.$$

Lema 4 *Δ_{rs} é antisimmétrico. A prova é trivial, conseqüência da antissimetria dos parênteses de Poisson.*

Lema 5 *Δ_{rs} não é singular, i.e.,* $\det(\Delta) \neq 0$.

Prova Se Δ fosse singular, então haveria soluções não triviais para a equação $\lambda^s \Delta_{rs} = 0$, e portanto as combinações lineares $\lambda^s \theta_s$ seriam vínculos de primeira classe, o que é uma contradição. □

Lema 6 *Toda matriz antissimétrica de ordem ímpar é singular.*

Prova Seja Δ uma matriz antissimétrica:

$$\det(\Delta) = \det(\Delta^T) = \det(-\Delta) = (-1)^{\partial\Delta} \det(\Delta).$$

Se $\partial\Delta$ é ímpar, então temos $\det(\Delta) = -\det(\Delta) \Rightarrow \det(\Delta) = 0$.

□

Uma conseqüência direta dos lemas (4), (5) e (6) é que o número de vínculos de segunda classe é sempre par.

Baseados no lema (5), podemos inverter a matriz Δ_{rs} e definir os parênteses de Dirac.

Definição 5 *Definimos os parênteses de Dirac, $\{A, B\}_D$, por :*

$$\{A, B\}_D = \{A, B\}_P - \{A, \theta_r\}_P \Delta_{rs}^{-1} \{\theta_s, B\}_P.$$

Por construção, os parênteses de Dirac entre uma variável dinâmica qualquer e um vínculo de segunda classe é zero. A demonstração é simples:

$$\{F, \theta_l\}_D = \{F, \theta_l\}_P - \{F, \theta_r\}_P \Delta_{rs}^{-1} \{\theta_s, \theta_l\}_P = \{F, \theta_l\}_P - \{F, \theta_r\}_P \delta_l^r = 0.$$

Isso nos leva à interpretação geométrica dos parênteses de Dirac, como a projeção dos parênteses de Poisson na variedade determinada pelos vínculos de segunda classe, de modo que podemos considerá-los como igualdades fortes, *i.e.*, podemos substituir $\theta_s \approx 0$ por $\theta_s = 0$ *depois* de ter construído os parênteses de Dirac. A evolução temporal de uma quantidade dinâmica que não depende explicitamente do tempo fica, então,

$$\dot{g} = \{g, H_T\}_D = \{g, H_T\}_P - \{g, \theta_r\}_P \Delta_{rs}^{-1} \{\theta_s, H_T\}_P \approx \{g, H_T\}_P ,$$

onde foi utilizado que H_T é, por definição, um vínculo de primeira classe. Então $\{\theta_s, H_T\}_P \approx 0$. O significado dos vínculos de primeira classe será analisado na próxima seção.

2.6 Vínculos de primeira classe e geradores de simetrias de gauge

Seja $T(q(t), p(t))$ uma trajetória no espaço de fases determinada pela Hamiltoniana total e pelo conjunto v^a de multiplicadores de Lagrange. Como já foi mostrado, as equações de Hamilton vinculadas são

$$\begin{cases} \dot{q} \approx \{q, H_T\}_P = \frac{\partial H'}{\partial p} + v^a \frac{\partial \phi_a}{\partial p} \\ -\dot{p} \approx -\{p, H_T\}_P = \frac{\partial H'}{\partial q} + v^a \frac{\partial \phi_a}{\partial q} \\ \varphi_s(p, q) \approx 0. \end{cases}$$

Expandindo até a primeira ordem nas variações das variáveis p, q e v^a, temos

$$\begin{cases} \delta\dot{q} \approx (\delta p \frac{\partial}{\partial p} + \delta q \frac{\partial}{\partial q}) \frac{\partial H_T}{\partial p} + \delta v^a \frac{\partial \phi_a}{\partial p} \\ -\delta\dot{p} \approx (\delta p \frac{\partial}{\partial p} + \delta q \frac{\partial}{\partial q}) \frac{\partial H_T}{\partial q} + \delta v^a \frac{\partial \phi_a}{\partial q} \\ \frac{\partial \varphi_s}{\partial p} \delta p + \frac{\partial \varphi_s}{\partial q} \delta q \approx 0. \end{cases}$$

Agora, suponhamos que a ação dos geradores de transformação de gauge atuem nas variáveis canônicas através dos parênteses de Poisson,

$$\delta F = \{F, G\}_P , \tag{2.18}$$

onde G é dado por

$$G = \sum_{k=0}^{T} \frac{\partial^k \epsilon(t)}{\partial t^k} G_k.$$

Deste modo, substituindo a equação (2.18) nas expressões $\delta\dot{q}$, $\delta\dot{p}$ e $d\varphi_s$, obtemos:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial p}[\sum_{k=0}^{T} \frac{\partial^{k+1}\epsilon(t)}{\partial t^{k+1}} G_k + \sum_{k=0}^{T} \frac{\partial^k \epsilon(t)}{\partial t^k} \{G_k, H_T\}_P - \delta v^a \phi_a] \approx 0 \\ \\ \frac{\partial}{\partial q}[\sum_{k=0}^{T} \frac{\partial^{k+1}\epsilon(t)}{\partial t^{k+1}} G_k + \sum_{k=0}^{T} \frac{\partial^k \epsilon(t)}{\partial t^k} \{G_k, H_T\}_P - \delta v^a \phi_a] \approx 0 \\ \\ \sum_{k=0}^{T} \frac{\partial^k \epsilon(t)}{\partial t^k} \{\varphi_s, G_k\}_P \approx 0. \end{cases}$$

Prova

- Expandindo $\frac{\partial \varphi_s}{\partial p} \delta p + \frac{\partial \varphi_s}{\partial q} \delta q \approx 0$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_s}{\partial p} \delta p + \frac{\partial \varphi_s}{\partial q} \delta q &\approx 0 \\ \frac{\partial \varphi_s}{\partial p} \{p, G\}_P + \frac{\partial \varphi_s}{\partial q} \{q, G\}_P &\approx 0 \\ \sum_{k=0}^{T} \left(\frac{\partial \varphi_s}{\partial p} \{p, G_k\}_P + \frac{\partial \varphi_s}{\partial q} \{q, G_k\}_P \right) \frac{d^k}{dt^k} \epsilon(t) &\approx 0 \end{aligned}$$

$$\sum_{k=0}^{T}\left(-\frac{\partial\varphi_s}{\partial p}\frac{\partial G_k}{\partial q}+\frac{\partial\varphi_s}{\partial q}\frac{\partial G_k}{\partial p}\right)\frac{d^k}{dt^k}\epsilon(t) \approx 0$$

$$\sum_{k=0}^{T}\{\varphi_s, G_k\}_P\frac{d^k}{dt^k}\epsilon(t) \approx 0$$

- Expandindo $\delta\dot{q} \approx (\delta p\frac{\partial}{\partial p}+\delta q\frac{\partial}{\partial q})\frac{\partial H_T}{\partial p}+\delta v^a\frac{\partial\phi_a}{\partial p}$:

$$\begin{aligned}
\left(\delta p\frac{\partial}{\partial p}+\delta q\frac{\partial}{\partial q}\right)\frac{\partial H_T}{\partial p}+\delta v^a\frac{\partial\phi_a}{\partial p} &\approx \delta\dot{q}\\
\sum_{k=0}^{T}\frac{d^k}{dt^k}\epsilon(t)\left(\{p,G_k\}_P\frac{\partial}{\partial p}+\{q,G_k\}_P\frac{\partial}{\partial q}\right)\frac{\partial H_T}{\partial p}+\delta v^a\frac{\partial\phi_a}{\partial p} &\approx \delta\dot{q}\\
\sum_{k=0}^{T}\frac{d^k}{dt^k}\epsilon(t)\left(-\frac{\partial G_k}{\partial q}\frac{\partial}{\partial p}+\frac{\partial G_k}{\partial p}\frac{\partial}{\partial q}\right)\frac{\partial H_T}{\partial p}+\delta v^a\frac{\partial\phi_a}{\partial p} &\approx \delta\dot{q}\\
\sum_{k=0}^{T}\frac{d^k}{dt^k}\epsilon(t)\left\{\frac{\partial H_T}{\partial p},G_k\right\}_P+\delta v^a\frac{\partial\phi_a}{\partial p} &\approx \delta\dot{q}\\
\sum_{k=0}^{T}\frac{d^k}{dt^k}\epsilon(t)\left\{\frac{\partial H_T}{\partial p},G_k\right\}_P+\delta v^a\frac{\partial\phi_a}{\partial p} &\approx \tfrac{d}{dt}\{q,G\}_P\\
\sum_{k=0}^{T}\frac{d^k}{dt^k}\epsilon(t)\left\{\frac{\partial H_T}{\partial p},G_k\right\}_P+\delta v^a\frac{\partial\phi_a}{\partial p}+\sum_{k=0}^{T}\frac{d^k}{dt^k}\epsilon(t)\left\{H_T,\frac{\partial G_k}{\partial p}\right\}_P &\approx \textstyle\sum_{k=0}^{T}\frac{d^{k+1}}{dt^{k+1}}\epsilon(t)\frac{\partial G_k}{\partial p}\\
\frac{\partial}{\partial p}\left[\sum_{k=0}^{T}\frac{d^{k+1}}{dt^{k+1}}\epsilon(t)G_k+\sum_{k=0}^{T}\frac{d^k}{dt^k}\epsilon(t)\{G_k,H_T\}_P-\delta v^a\phi_a\right] &\approx 0,
\end{aligned}$$

onde foi utilizado que

$$\begin{aligned}
\delta\dot{q} &= \frac{d}{dt}\{q,G\}_P\\
&= \{\{q,G\}_P,H_T\}_P+\frac{\partial}{\partial t}\{q,G\}_P\\
&= \sum_{k=0}^{T}\left[\left\{\frac{d^k}{dt^k}\epsilon(t)\{q,G_k\}_P,H_T\right\}_P+\frac{d^{k+1}}{dt^{k+1}}\epsilon(t)\{q,G_k\}_P\right]\\
&= \sum_{k=0}^{T}\left[\frac{d^k}{dt^k}\epsilon(t)\left\{\frac{\partial G_k}{\partial p},H_T\right\}_P+\frac{d^{k+1}}{dt^{k+1}}\epsilon(t)\frac{\partial G_k}{\partial p}\right].
\end{aligned}$$

- Expandindo $-\delta\dot{p} \approx (\delta p\frac{\partial}{\partial p}+\delta q\frac{\partial}{\partial q})\frac{\partial H_T}{\partial q}+\delta v^a\frac{\partial\phi_a}{\partial q}$:

$$\begin{aligned}
\left(\delta p\frac{\partial}{\partial p}+\delta q\frac{\partial}{\partial q}\right)\frac{\partial H_T}{\partial q}+\delta v^a\frac{\partial\phi_a}{\partial q} &\approx -\delta\dot{p}\\
\sum_{k=0}^{T}\frac{d^k}{dt^k}\epsilon(t)\{\frac{\partial H_T}{\partial q},G_k\}_P+\delta v^a\frac{\partial\phi_a}{\partial q}+\sum_{k=0}^{T}\frac{d^k}{dt^k}\epsilon(t)\{H_T,\frac{\partial G_k}{\partial q}\}_P &\approx \textstyle\sum_{k=0}^{T}\frac{d^{k+1}}{dt^{k+1}}\epsilon(t)\frac{\partial G_k}{\partial q}\\
\frac{\partial}{\partial q}\left[\sum_{k=0}^{T}\frac{d^{k+1}}{dt^{k+1}}\epsilon(t)G_k+\sum_{k=0}^{T}\frac{d^k}{dt^k}\epsilon(t)\{G_k,H_T\}_P-\delta v^a\phi_a\right] &\approx 0.
\end{aligned}$$

□

Portanto, pelo teorema (3), obtemos

$$\sum_{k=0}^{T} \frac{\partial^{k+1}\epsilon(t)}{\partial t^{k+1}} G_k + \sum_{k=0}^{T} \frac{\partial^{k}\epsilon(t)}{\partial t^{k}} \{G_k, H_T\}_P - \delta v^a \phi_a \approx \Im,$$

onde $\Im$ é tal que $\frac{\partial \Im}{\partial(q,p)} \approx 0$. Combinando este resultado com a arbitrariedade de $\epsilon(t)$, obtemos a seqüência de equações abaixo:

$$\begin{aligned} G_k &= C_{PFC} \\ G_{k-1} + \{G_k, H_T\}_P &= C_{PFC} \\ \dots & \quad \dots \\ \{G_0, H_T\}_P &= C_{PFC}, \end{aligned}$$

onde C_{PFC} representa uma combinação linear de vínculos de primeira classe. Deste modo, podemos concluir que os geradores das simetrias de gauge são combinações lineares dos vínculos de primeira classe. Para deixar explícitas na Hamiltoniana todas as simetrias de gauge da teoria, poderíamos trabalhar com a *Hamiltoniana estendida*:

$$H_E = H' + \omega^s \psi_s,$$

o que pouco afeta o desenvolvimento do que fizemos até agora.

Com a relação entre vínculos de primeira classe e simetrias de gauge, podemos definir o que são *observáveis* na teoria clássica:

Definição 6 *Chama-se de observável a toda função* $\zeta : \Gamma \rightarrow \Re$ *tal que*

$$\{\zeta, \psi_s\}_P \approx 0,$$

onde ψ_s *representa todos os vínculos de primeira classe da teoria.*

Na teoria sem vínculos, um *estado* é definido simplesmente como um ponto de Γ. No entanto, na presença da liberdade de gauge somos obrigados a estender essa definição, incorporando ao conceito de estado não apenas um ponto de Γ, mas sua órbita de gauge.

2.7 Fixando o gauge

Uma vez obtidos todos os vínculos, um procedimento padrão consiste em introduzir à mão novos vínculos, $\Omega_l(p,q)$, chamados *condições de gauge* e são tais que transformam os vínculos de primeira classe em vínculos de segunda classe. De modo que podemos eliminar todos os vínculos através da construção dos parênteses de Dirac. Este procedimento é chamado *fixação de gauge*. Para que seja consistente, o conjunto $\{\Omega_l(p,q)\}$ precisa satisfazer a condição que a subvariedade que eles determinam intercepte uma única vez cada órbita de gauge. Na prática, este procedimento nem sempre é factível e em geral existem apenas fixações locais de gauge, o que dificulta o tratamento não perturbativo de muitos modelos.

2.8 Infinitos graus de liberdade

Para uma teoria de campos, onde temos infinitos graus de liberdade, a extensão do formalismo de vínculos é direta. Lembremos que no espaço de Minkowski para uma ação dada por,

$$I[\mathcal{L}] = \int d^4x \mathcal{L}(\Phi_A(x), \partial_\mu \Phi(x)),$$

os momentos canônicos associados à $\Phi(x)$ são definidos por,

$$\pi^A(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_0 \Phi_A}.$$

Se a Lagrangiana for invariante por translações, pelo teorema de Noether temos um tensor de momento-energia

$$T_c^{\mu\nu} = \left[-\partial_\nu \Phi_A \frac{\partial}{\partial \partial_\mu \Phi_A} + \eta^{\mu\nu} \right] \mathcal{L}$$

que é uma corrente conservada:

$$\partial_\mu T_c^{\mu\nu} = 0.$$

Neste caso, a densidade de Hamiltoniana é definida por

$$H_c = \int d^3x T_c^{00} = \int d^3x \left[\pi^A(x^\mu) \frac{\partial \Phi_A}{\partial t} - \mathcal{L} \right].$$

Os parênteses de Poisson entre π^A e Φ_B são definidos (no mesmo tempo) por

$$\left\{ \pi^A(x), \Phi_B(y) \right\}_P = -\delta_B^A \delta^3(\vec{x} - \vec{y}).$$

Com estas definições, as equações de movimento do caso sem vínculos são dadas por:

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi_A(x)}{dt} &= \left\{ \Phi_A, H_c \right\}_P, \\ \frac{d\pi^A(x)}{dt} &= \left\{ \pi^A, H_c \right\}_P. \end{aligned}$$

Agora, introduzindo os vínculos na forma

$$\phi_s(\Phi_A, \pi^A, \nabla\Phi_A, \nabla\pi^A) \approx 0,$$

podemos redefinir o tensor de momento-energia,

$$T^{\mu\nu} = T_c^{\mu\nu} + v_i^{\mu\nu} \psi_i(\Phi_A, \pi^A, \nabla\Phi_A, \nabla\pi^A),$$

onde os objetos $\psi_i(\Phi_A, \pi^A, \nabla\Phi_A, \nabla\pi^A)$ são vínculos de primeira classe (como definido para a Hamiltoniana estendida).

2.9 Sobre a quantização

O processo de quantização canônica merece nossa atenção, pois ele é extremamente dificultado pela presença dos vínculos. A promoção das variáveis canônicas a operadores agindo num espaço de Hilbert, nos leva imediatamente a um problema de ordenameto dos operadores canônicos em funções não polinomiais, geralmente resolvido pela introdução de um ordenamento normal (que nem sempre existe, [19]). Os vínculos $\phi_k(p, q)$, como qualquer função das variáveis canônicas, se tornam operadores $\hat{\phi}_k(\hat{p}, \hat{q})$ e isto nos leva a uma nova classe de problemas relacionados à versão quantizada da álgebra dos vínculos e à definição de igualdade fraca. Primeiramente, podemos verificar que não é possível satisfazer as relações de comutação entre os operadores canônicos e os vínculos (considerados como identidades de operadores) simultaneamente. No caso do eletromagnetismo, por exemplo, onde temos um vínculo $\pi_0 \approx 0$, é impossível dar um sentido à expressão $[\hat{A}_0, \hat{\pi}_0] = i$. Podemos superar estes problemas transferindo a responsabilidade do desaparecimento dos vínculos para o espaço de Hilbert:

$$\hat{\phi}_j |\Psi\rangle = 0. \tag{2.19}$$

Porém, esta identidade† implica

$$[\hat{\phi}_j, \hat{\phi}_k] |\Psi\rangle = 0,$$

†Mesmo esta condição é forte demais, como podemos ver para o eletromagnetismo no gauge de Lorentz, $(\partial_\mu A^\mu \approx 0)$, onde nem o vácuo $|0\rangle$ satisfaz a condição $\partial_\mu A^\mu |0\rangle = 0$. Neste caso, a solução é impor $\partial_\mu A^{(+)\mu} |\psi\rangle = 0$, para a qual o vácuo é automaticamente solução e implica que $\langle \psi | \partial_\mu A^\mu | \psi \rangle = 0$.

e este comutador pode eventualmente produzir operadores que não estavam originalmente na álgebra (2.19). Este problema pode ser resolvido se os operadores forem tais que

$$[\hat{\phi}_i, \hat{\phi}_j] = c_{ij}^k \hat{\phi}_k.$$

Também é preciso assegurar que a evolução temporal não afete as expressões acima, ou seja ainda é preciso impor a versão quântica das condições de consistência

$$[\hat{\phi}_i, \hat{H}]|\Psi\rangle = 0,$$

e, novamente, este comutador pode produzir novos vínculos, sendo necessárias mais imposições sobre a álgebra:

$$[\hat{\phi}_i, \hat{H}] = f_{ij}\hat{\phi}_j.$$

Assim, o programa de quantização na presença de vínculos pode se tornar altamente não trivial, como veremos ao final deste capítulo para a teoria de Yang-Mills, e no capítulo (3) para a gravitação. O programa de quantização canônica está longe de acabado, há inúmeros problemas em aberto, especialmente em relação ao tratamento não perturbativo de teorias de gauge não Abelianas. Além disso, há outros programas de quantização que aparentemente não possuem certas dificuldades do programa de Dirac, como a quantização BRST ou programas de quantização mistos BRST-Dirac, [20].

Nas próximas duas seções, desenvolveremos os primeiros passos da quantização canônica das teorias de Maxwell e Yang-Mills. Este estudo será importante no futuro, pois como mostraremos ao final do capítulo 3, com a escolha apropriada das variáveis canônicas, é possível reescrever a gravitação como um caso particular de uma teoria de gauge para o grupo SU(2). Com isso, torna-se possível aplicar algumas das técnicas desenvolvidas para teoria de Yang-Mills em gravitação.

2.10 Quantização canônica do eletromagnetismo

A Lagrangiana de Maxwell no espaço de Minkowski é

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}\int d^3x F_{\mu\nu}F^{\mu\nu},$$

onde

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu,$$

e o momento canônico conjugado à A^μ é

$$\pi_\mu(x) = -F_{0\mu}(x),$$

ou seja, π_i nada mais é do que o campo elétrico. Assim, temos imediatamente o primeiro (e único) vínculo primário da teoria:

$$\phi = \pi_0 \approx 0.$$

As Hamiltonianas total e canônica são, respectivemente,

$$H_c = \int d^3x(\frac{1}{4}F_{ij}F^{ij} - \pi_i\pi^i - A^0\partial^j\pi_j)$$

e

$$H_T = H_c + \int d^3x u(x)\phi(x) = H_c + \int d^3x u(x)\pi_0(x).$$

A condição de consistência para o vínculo ϕ nos leva a um vínculo secundário, conhecido como condição de Gauss, χ :

$$\chi = \partial^i\pi_i \approx 0.$$

A condição de consistência de χ não produz nenhum vínculo, e os dois vínculos ϕ e χ são de primeira classe:

$$\{\phi, \chi\}_P = 0.$$

Para prosseguir com o programa de quantização canônica, fixamos o gauge escolhendo o gauge de Coulomb:

$$\begin{aligned}\Omega_1 &= A^0 \approx 0,\\ \Omega_2 &= \partial_i A^i \approx 0.\end{aligned}$$

Como esperado, os vínculos ϕ e χ se tornam de segunda classe.

Utilizando a propriedade iterativa dos parênteses de Dirac[‡], iniciamos com os vínculos ϕ e Ω_1

$$\Delta = \{\theta_i(x), \theta_j(y)\}_P = \delta^3(\vec{x}-\vec{y}) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

onde $\theta_i(x) = \phi$ ou Ω. Portanto, temos

$$\Delta^{-1} = \delta^3(\vec{x}-\vec{y}) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e os parênteses parciais se tornam:

$$\begin{aligned}\{A^\mu(x), \pi_\nu(x')\}^*_D &= \{A^\mu(x), \pi_\nu(x')\}_P - \int d^3y d^4z \,\{A^\mu(x), \theta_a\}_P \,\Delta^{-1}_{ab}\, \{\theta_b, \pi_\nu(x')\}_P \\ &= (\delta^\mu_\nu - \delta^\mu_\nu \delta^0_\nu)\delta^3(\vec{x}-\vec{x}'),\end{aligned}$$

onde não há soma sobre os índices repetidos. Agora, utilizando os vínculos vínculos χ e Ω_2 para calcular os parênteses finais

$$\Delta' = \{\theta_i(x), \theta_j(x')\}^*_D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Box \delta^3(\vec{x}-\vec{x}'),$$

onde $\theta_i(x) = \phi_2 \,\text{ou}\, \Omega_2$ e portanto,

$$\Delta'^{-1} = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{|x-x'|} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Deste modo, temos os parênteses finais de Dirac:

$$\{A^\mu(x), \pi_\nu(x')\}_D = (\delta^\mu_\nu - \delta^\mu_\nu \delta^0_\nu)\delta^3(\vec{x}-\vec{x}') - \frac{\partial^2}{\partial x_\mu \partial x'_\mu}\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|x-x'|}.$$

Assim, o procedimento de quantização padrão consiste na substituição:

$$\{A, B\}_D \to -i[A, B],$$

e na consideração do ordenamento normal apropriado.

2.11 Quantização canônica de Yang-Mills

Em teorias de Yang-Mills a 1-forma conexão assume valores numa álgebra de Lie do grupo de gauge,

$$A = A^a_\mu T_a dx^\mu,$$

onde T_a são os geradores do grupo. Relembrando que os coeficientes de estrutura C^c_{ab} são definidos por

$$[T_a, T_b] = i C^c_{ab} T_c,$$

[‡]Os parênteses de Dirac têm a seguinte propriedade: suponha que temos N vínculos de segunda classe, onde $N = M + L$, calculamos os *parênteses de Dirac parciais* com os primeiros M vínculos e em seguida calculamos *os parênteses de Dirac finais* com os vínculos restantes, e usando os parênteses parciais no lugar dos parênteses de Poisson.

e assumindo que a álgebra é semi-simples, podemos definir uma métrica sobre ela e esta métrica será inversível:

$$g_{ab} = C^{c}_{ad} C^{d}_{bc}.$$

Nesta seção estudaremos o caso do grupo $SU(2)$, onde

$$\begin{aligned} C^{c}_{ab} &= \epsilon_{abc}, \\ g_{ab} &= 2\delta_{ab}, \end{aligned}$$

mas estes cálculos são facilmente generalizáveis para outros grupos compactos. Como na teoria de Maxwell, a intensidade do campo de Yang-Mills é dada pelo tensor de curvatura, $F = dA + g[A, A]$:

$$F^{\mu\nu}_{a} = \partial^{\mu} A^{\nu}_{a} - \partial^{\nu} A^{\mu}_{a} - g C^{bc}_{a} A^{\mu}_{b} A^{\nu}_{c},$$

onde g é a constante de acoplamento. Assim:

$$S[A] = -\frac{1}{4} \int d^4x F^{\mu\nu}_{a} F^{a}_{\mu\nu}.$$

Definamos o "campo elétrico" e o "campo magnético" de forma análoga ao caso Abeliano:

$$\begin{aligned} E^{i}_{a} &= F^{0i}_{a} \\ B^{i}_{a} &= \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} F^{jk}_{a}. \end{aligned}$$

Da definição de momento canônico temos,

$$\begin{aligned} \pi^{\mu}_{a} &= \frac{\partial \ell}{\partial \partial_0 A^{a}_{\mu}} \\ \pi^{\mu}_{a} &= -F^{0\mu}_{a} \\ \pi^{\mu}_{a} &= -\dot{A}^{\mu}_{a} + \partial^{\mu} A^{0}_{a} + g \epsilon_{abc} A^{0}_{b} A^{\mu}_{c}, \end{aligned} \tag{2.20}$$

de onde obtemos o primeiro vínculo da teoria:

$$\phi_1 \equiv \pi^{0}_{a} \approx 0.$$

Dado o tensor de energia-momento:

$$\theta^{\mu\nu}_{c} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_{\mu} A^{a}_{\lambda}} \partial^{\nu} A_{a\lambda} + g^{\mu\nu} \mathcal{L},$$

construamos agora as Hamiltonianas canônica e total:

$$\begin{aligned} H_c &= \int d^3x \theta^{00}_{c} \\ &= \int d^3x \left(F^{\mu\lambda}_{a} \partial^{\nu} A_{a\lambda} - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F^{\alpha\beta}_{a} F^{a}_{\alpha\beta} \right) \\ &= \int d^3x \left(\pi^{\mu}_{a} \dot{A}^{a}_{\mu} + \frac{1}{2} B^{\mu}_{a} B^{a}_{\mu} - \frac{1}{2} \pi^{\mu}_{a} \pi^{a}_{\mu} \right) \\ H_T &= H_c + \int d^3x v^{a} \pi^{0}_{a}. \end{aligned}$$

Definindo de maneira usual os parênteses de Poisson entre A e π como

$$\{\pi^{\mu}_{a}(t,x), A^{\nu}_{b}(t,y)\}_P = -\eta^{\mu\nu} \delta_{ab} \delta^3(x-y),$$

podemos calcular a condição de consistência para ϕ_1:

$$\begin{aligned}
\dot{\phi}_1 &\approx& \{\phi_1, H_T\}_P \approx \int d^3z \left\{\pi_b^0(x), \pi_a^\mu(z)\dot{A}_\mu^a(z)\right\}_P \\
&\approx& \int d^3z\pi_a^i(z) \left\{\pi_b^0(x), \pi_{ai}(z) - \partial_i A_a^0(z) - g\epsilon_{adc}A_d^0(z)A_{ic}(z)\right\}_P \\
&\approx& \partial_i\pi_b^i(x) - g\epsilon_{abc}\pi_a^i(x)A_{ci}(x) \approx 0,
\end{aligned}$$

o que nos conduz a um vínculo secundário

$$\chi_1 \equiv \partial_i\pi_b^i(x) - g\epsilon_{abc}\pi_a^i(x)A_{ci}(x) \approx 0.$$

Note que ele pode ser reescrito como

$$[\mathcal{D}_i\pi^i]_b \approx 0,$$

onde $\mathcal{D}_i$ é a derivada covariante de SU(2):

$$\mathcal{D}_i = \partial_i - g\epsilon_{abc}A_{ci}(x).$$

Podemos verificar que

$$\{\phi_1, \chi_1\}_P = 0,$$

o que implica que estes vínculos são de primeira classe.

O vínculo de primeira classe χ_1 merece um pouco mais de atenção. Antes de passarmos ao cálculo dos parênteses de Dirac, calculemos $\{[\chi_1]_a, [\chi_1]_b\}_P$:

$$\begin{aligned}
\{[\chi_1]_a(x), [\chi_1]_b(y)\}_P &=& \left\{\partial_{xi}\pi_a^i(x) + g\epsilon_{afc}\pi_f^i(x)A_{ci}(x), \partial_{yi}\pi_b^i(y)\right. \\
&& \left.+g\epsilon_{bde}\pi_d^i(y)A_{ei}(y)\right\}_P \\
&=& g\epsilon_{abk}\left(\partial_{xk}\pi_a^i(x) + g\epsilon_{kfc}\pi_f^i(x)A_{ci}(x)\right)\delta^3(x-y) \\
&=& \epsilon_{abk}[\chi_1]_k(x)\delta^3(x-y).
\end{aligned}$$

Na expressão acima, vemos que os vínculos χ_1 satisfazem a mesma álgebra que os geradores de $SU(2)$ através dos parênteses de Poisson. A seguir mostraremos que estes vínculos são de fato os geradores da simetria de gauge:

$$\begin{aligned}
\left\{[\chi_1]_b(x), A_d^\mu(y)\right\}_P &=& \left\{\partial_{xi}\pi_a^i(x) + g\epsilon_{afc}\pi_f^i(x)A_{ci}(x), A_d^\mu(y)\right\}_P \\
&=& \partial_{xi}\left\{\pi_a^i(x), A_d^\mu(y)\right\}_P + g\epsilon_{afc}\left\{\pi_f^i(x)A_{ci}(x), A_d^\mu(y)\right\}_P \\
&=& -\partial_{xi}\eta^{i\mu}\delta_{ad}\delta^3(x-y) + g\epsilon_{afc}(-1)g^{i\mu}\delta_{fd}\delta^3(x-y)A_{ci}(x) \\
&=& G_{bd}^\mu(x,y).
\end{aligned}$$

Com este gerador, $G_{bd}^\mu(x,y)$, podemos calcular uma transformação de gauge infinitesimal de $A_d^j(x)$ com parâmetro $\Lambda^d(y)$:

$$\begin{aligned}
\delta A_d^j(x) &=& \int d^3y G_{bd}^j(x,y)\Lambda^d(y) \\
&=& \partial_x^i\Lambda^d(x) - g\epsilon_{afc}A_c^j(x)\Lambda^f(x),
\end{aligned}$$

que é exatamente a transformação de uma conexão de $SU(2)$.

Se soubéssemos *a priori* que a Hamiltoniana é invariante de gauge, poderíamos dizer diretamente que

$$\{\chi_1, H_T\}_P = 0.$$

No entanto, isto não é verdade em princípio pois a corrente de *Noether* usada para construir a Hamiltoniana *não é invariante de gauge*. Assim, temos que calcular explicitamente os parênteses de Poisson:

$$\begin{aligned}\{[\chi_1]_a, H_T\}_P &= \left\{[\chi_1]_a, H_c + \int d^3x v^a \pi_a^0\right\}_P \\ &= \left\{[\chi_1]_a, \int d^3x \left(\pi_a^\mu \dot{A}_\mu^a + \frac{1}{2}B_a^\mu B_\mu^a - \frac{1}{2}\pi_a^\mu \pi_\mu^a\right) + \int d^3x v^a \pi_a^0\right\}_P .\end{aligned}$$

Utilizando

$$\pi_a^\mu = -\dot{A}_a^\mu + \partial^\mu A_a^0 + g\epsilon_{abc}A_b^0 A_c^\mu,$$

e fazendo uma integração por partes, obtemos

$$\{[\chi_1]_a, H_T\}_P = \left\{[\chi_1]_a, \int d^3y \left([\chi_1]_a A_0^a + \frac{1}{2}B_a^\mu B_\mu^a + \frac{1}{2}\pi_a^\mu \pi_\mu^a\right) + \int d^3y v^a \pi_a^0\right\}_P ,$$

onde os únicos termos potencialmente não nulos são

$$\left\{[\chi_1]_a, \int d^3y \left(\frac{1}{2}\pi_a^\mu \pi_\mu^a\right)\right\}_P \tag{2.21}$$

e

$$\left\{[\chi_1]_a, \int d^3y \left(\frac{1}{2}B_a^\mu B_\mu^a\right)\right\}_P . \tag{2.22}$$

Para verificar (2.21), calculemos primeiro

$$\begin{aligned}\left\{[\chi_1]_a, \pi_b^j(y)\right\}_P &= \left\{\partial_i \pi_a^i(x) + g\epsilon_{afc}\pi_f^i(x)A_{ci}(x), \pi_b^j(y)\right\}_P \\ &= g\epsilon_{afc}\pi_f^i(x)\left\{A_{ci}(x), \pi_b^j(y)\right\}_P \\ &= g\epsilon_{afc}\delta_{cb}\pi_f^i(x)\delta^3(x-y) \\ &= g\epsilon_{afb}\pi_f^i(x)\delta^3(x-y),\end{aligned}$$

onde vemos que ela é antissimétrica em a e b, e portanto

$$\left\{[\chi_1]_a, \int d^3y \left(\frac{1}{2}\pi_a^\mu \pi_\mu^a\right)\right\}_P = 0.$$

Para verificar a expressão (2.22), calculemos

$$\left\{\partial_i \pi_a^i(x) + g\epsilon_{afc}\pi_f^i(x)A_{ci}(x), B_b^i\right\}_P$$

que é igual a

$$\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\left\{\partial_i \pi_a^i(x) + g\epsilon_{afc}\pi_f^i(x)A_{ci}(x), \partial_y^j A_b^k(y) - \partial_y^k A_b^j(y) - g\epsilon_{bdc}A_d^j(y)A_c^k(y)\right\}_P .$$

Utilizando

$$\left\{[\chi_1]_a(x), A_d^\mu(y)\right\}_P = -\partial_{xi}g^{i\mu}\delta_{ad}\delta^3(x-y) + g\epsilon_{afc}(-1)g^{i\mu}\delta_{fd}\delta^3(x-y)A_{ci}(x),$$

obtemos os primeiros dois termos

$$\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\left\{\partial_i \pi_a^i(x) + g\epsilon_{afc}\pi_f^i(x)A_{ci}(x), \partial_y^j A_b^k(y) - \partial_y^k A_b^j(y)\right\}_P = g\epsilon_{ijk}\epsilon_{abc}\partial_y^k A_c^j(x)\delta^3(x-y)$$

e

$$\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\left\{\partial_i \pi_a^i(x) + g\epsilon_{afc}\pi_f^i(x)A_{ci}(x), -g\epsilon_{bdc}A_d^j(y)A_c^k(y)\right\}_P = -g\epsilon_{ijk}\epsilon_{abc}\partial_y^k A_c^j(x)\delta^3(x-y)$$

Somando estas duas expressões, o resultado é zero. Logo a Hamiltoniana é invariante de gauge.

Agora, escolheremos o análogo ao gauge de Coulomb para o eletromagnetismo,

$$\Omega_1 \equiv \partial_i A_d^i(x) \approx 0.$$

Definamos a função de Green $G_{ab}(x, y, A)$, solução da equação:

$$\left(\delta_{ab}\Delta + g\epsilon_{abd}A_d^i(x)\partial_{xi}\right) G_{ab}(x, y, A) = \delta_{ac}\delta^3(x, y).$$

De acordo com [21], com a condição de contorno que $G_{ab}(x, y, A]$ tenda assintoticamente à $\frac{1}{|x-y|}$ no limite $|x-y| \to \infty$, é possível expandir G em série de potências de g (veja o apêndice A para uma demonstração). Os primeiros dois termos são dados por

$$G_{ab}(x, y, A] = -\frac{\delta_{ab}}{4\pi|x-y|} - g\int d^3z \frac{\delta_{au}}{4\pi|x-y|}\epsilon_{uvc}A_c^i(z)\frac{\partial}{\partial z^i}\frac{\delta_{vb}}{4\pi|z-y|} + O(g^2).$$

Utilizando esta função de Green, podemos calcular os parênteses de Dirac parciais para os vínculos χ_1 e Ω_1. Todos os possíveis parênteses de Poisson são:

$$\begin{aligned}
\left\{[\chi_1]^a(x), [\chi_1]^b(y)\right\}_P &= g\epsilon_{abk}\left(\partial_{xk}\pi_a^i(x) + g\epsilon_{kfc}\pi_f^i(x)A_{ci}(x)\right)\delta^3(x-y) \approx 0 \\
\left\{[\chi_1]^a(x), [\Omega_1]^b(y)\right\}_P &= \left(\delta_{ab}\Delta + g\epsilon_{abd}A_d^i(x)\partial_{xi}\right)\delta^3(x-y) \\
\left\{[\Omega_1]^a(x), [\chi_1]^b(y)\right\}_P &= -\left(\delta_{ab}\Delta + g\epsilon_{abd}A_d^i(x)\partial_{xi}\right)\delta^3(x-y) \\
\left\{[\chi_1]^a(x), [\chi_1]^b(y)\right\}_P &= 0.
\end{aligned}$$

Assim, a inversa da matriz $C_{ij}^{ab}(x, y) = \left\{[\psi_1]^a(x), [\psi_1]^b(y)\right\}_P$ pode ser escrita em termos de G:

$$[C^{-1}]_{ij}^{ab}(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & -G_{ab}(x, y, A] \\ G_{ab}(x, y, A] & 0 \end{pmatrix},$$

e os parênteses de Dirac parciais são

$$\{A(x), B(w)\}_D^* = \{A, B\}_P - \int d^3y d^3z \left\{A(x), [\psi_1]_a^i(y)\right\}_P [C^{-1}]_{ij}^{ab}(y, z)\left\{[\psi_1]_b^j(z), B(w)\right\}_P,$$

onde ψ_1 representa o conjunto dos vínculos χ_1 e Ω_1. Tendo em mãos os parênteses de Dirac parciais, podemos tratar os vínculos χ_1 e Ω_1 como igualdades fortes e impor um novo vínculo, Ω_2, para A^0 (que é a generalização não Abeliana do vínculo $A^0 \approx 0$ que escolhemos para o eletromagnetismo):

$$\Omega_2 \equiv A_a^0(x) - \int d^3y G_{ab}(x, y, A]\partial_{yj}\pi_b^j(y) \approx 0.$$

Agora, com o segundo par de vínculos ϕ_1 e Ω_2, calculemos sua matriz Δ:

$$\begin{aligned}
\{[\phi_1]^a(x), [\phi_1]^b(y)\}_D^* &= 0, \\
\{[\phi_1]^a(x), [\Omega_2]^b(y)\}_D^* &= \delta_{ab}\delta^3(x-y), \\
\{[\Omega_2]^a(x), [\phi_1]^b(y)\}_D^* &= -\delta_{ab}\delta^3(x-y), \\
\{[\Omega_2]^a(x), [\Omega_2]^b(y)\}_D^* &= M_{ab}(x, y).
\end{aligned}$$

A inversa desta matriz é da forma

$$[C^{-1}]_{ij}^{ab}(x, y) = \begin{pmatrix} M^{ab}(x, y) & -\delta_{ab}\delta^3(x-y) \\ \delta_{ab}\delta^3(x-y) & 0 \end{pmatrix}.$$

Portanto, os parênteses de Dirac finais são

$$\{A(x), B(w)\}_D = \{A, B\}_D^* - \int d^3y d^3z \{A(x), [\psi_2]_a^i(y)\}_D^* [C^{-1}]_{ij}^{ab}(y, z)\{[\psi_2]_b^j(z), B(w)\}_D^*,$$

onde ψ_2 representa o conjunto de vínculos ϕ_1 e Ω_2.

Após a fixação de gauge, todos os vínculos de primeira classe se transformam em vínculos de segunda classe e podem ser tratados como igualdades fortes após a construção dos parênteses de Dirac:

$$H = \int d^3x \left(\frac{1}{2}\pi_a^i \pi_j^a + \frac{1}{2} B_a^i B_j^a \right),$$

e as equações de movimento são finalmente:

$$\begin{aligned}
\{A_a^i(x), H\}_D &= \partial_0 A_a^i(x) \\
&= -\pi_a^i + \partial^i A_a^0 + g\epsilon_{abc} A_b^0 A_c^i, \\
\{\pi_a^i(x), H\}_D &= \partial_0 \pi_a^i(x) \\
&= -\nabla \times B_a + g\epsilon_{abc}\pi A_c^0 + g\epsilon_{abc} B_b \times A_c.
\end{aligned}$$

Como para o eletromagnetismo, a quantização consiste em substituir os parênteses de Dirac por comutadores e tratar apropriadamente do ordenamento normal.

2.12 Covariância no tempo e a Hamiltoniana canônica

Nesta seção, mostramos que *qualquer* sistema dinâmico cuja Lagrangiana é *invariante* por transformações de coordenadas no tempo tem uma Hamiltoniana canônica nula sob certas hipóteses. Suponha que tenhamos uma Lagrangiana

$$L = \int_{\mathcal{U}} d^{D-1}x \mathcal{L}(\{\phi_a(\boldsymbol{x})\}, \{\partial\phi_a(\boldsymbol{x})\}, \boldsymbol{x})$$

para uma coleção de campos escalares $\phi_a(\boldsymbol{x})$. A invariância por transformações de coordenadas no tempo implica

$$\mathcal{L}'(\{\phi_a'(x,t')\}, \{\partial\phi_a'(x,t')\}, x, t') \frac{\partial t'(t)}{\partial t} = \mathcal{L}(\{\phi_a(x,t)\}, \{\partial\phi_a(x,t)\}, x, t),$$

para a qual é suficiente que $\mathcal{L}(\{\phi_a(\boldsymbol{x})\}, \{\partial\phi_a(\boldsymbol{x})\}, \boldsymbol{x})$ seja da forma

$$\mathcal{L}(\{\phi_a(x,t)\}, \{\partial\phi_a(x,t)\}, x, t) = \mathcal{F}(\{\phi_a(x,t)\}, \{\partial_x\phi_a(x,t)\}, \{\frac{\partial_t\phi_a(x,t)}{\partial_t u(t)}\})\partial_t u(t),$$

onde $u(t)$ pode ser qualquer função diferenciável do tempo (tal que $\partial_t u(t) \neq 0$). Agora, se considerarmos $u(t)$ como variável dinâmica, *i.e.*, se estendermos o espaço de fases, os momentos canônicos são

$$\begin{aligned}
\Pi_u &= \mathcal{F} - \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\left(\frac{\partial_t\phi_a(x,t)}{\partial_t u(t)}\right)} \frac{\partial_t\phi_a(x,t)}{\partial_t u(t)}, \\
\Pi_{\phi_a} &= \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\left(\frac{\partial_t\phi_a(x,t)}{\partial_t u(t)}\right)}.
\end{aligned}$$

Nestas expressões, podemos notar que ambos os momentos dependem apenas do quociente $\frac{\partial_t\phi_a(x,t)}{\partial_t u(t)}$ e, portanto, não é possível isolar todas as velocidades, havendo um vínculo primário entre eles. A Hamiltoniana canônica fica então:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_c &= \Pi_u \partial_t u(t) + \Pi_{\phi_a}\partial_t\phi_a(x,t) - \mathcal{L} \\
&= \partial_t u(t) \left[\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\left(\frac{\partial_t\phi_a(x,t)}{\partial_t u(t)}\right)} \frac{\partial_t\phi_a(x,t)}{\partial_t u(t)} - \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\left(\frac{\partial_t\phi_a(x,t)}{\partial_t u(t)}\right)} \frac{\partial_t\phi_a(x,t)}{\partial_t u(t)} \right] \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Exemplos deste resultado são a partícula relativística livre e a RG. Isso permite-nos concluir de antemão que a Hamiltoniana total da RG será apenas uma combinação linear dos vínculos primários.

Capítulo 3

O Formalismo ADM do Teleparalelismo

3.1 Introdução

Como analisado em [1], deve haver uma grande liberdade na construção da Hamiltoniana da RG devido à covariância por transformações de coordenadas. Demonstrar quais são estas liberdades é o que faremos nas seções a seguir. O formalismo Hamiltoniano canônico exige uma decomposição $3+1$ da variedade base (espaço-tempo), o que implica em restrições sobre a topologia das variedades admissíveis neste formalismo. Em particular, exige-se que a variedade ${}_{\triangle}\mathcal{M}$ seja da forma ${}_3\mathcal{M} \times \mathrm{R}$, onde ${}_3\mathcal{M}$ é do tipo espaço. Uma maneira simples de nos convencermos da existência de variáveis não dinâmicas na RG, antes de qualquer análise de vínculos, corresponde à seguinte constatação: Seja uma subvariedade $\mathcal{U}_{t=0}$ com um sistema de coordenadas induzidos pela injeção canônica; então, a métrica induzida $\hat{g}_{ij}$ é unicamente determinada pelas componentes espaciais da métrica de $\mathcal{M}$, isto é, g_{ij} (onde $i,j = 1\ldots3$). As componentes $g_{0\mu}$ descrevem intervalos infinitesimais entre duas subvariedades diferentes $\mathcal{U}_{t=0}$ e $\mathcal{U}_{t=\delta t}$. No entanto, mesmo fixando o sistema de coordenadas de $\mathcal{U}_{t=0}$, o sistema de coordenadas de $\mathcal{U}_{t=\delta t}$ *precisa* ser fixado independentemente, e portanto as componentes da métrica $g_{0\mu}$ são completamente arbitrárias diante destas escolhas.

Há outros meios mais formais para entender esta liberdade, como através da análise de Cauchy da RG [22, 23], e através do formalismo de vínculos que estudaremos mais a frente, onde mostraremos que $g_{0\mu}$ são multiplicadores de Lagrange dos vínculos de primeira classe correspondentes aos geradores de transformações de coordenadas.

3.2 Geometria de folheações

A partir deste ponto, utilizaremos os índices latinos $a, b, c, \ldots, i, j, k \ldots = 0, \ldots, 3$ para representar objetos de fibrados tangentes e cotangentes. Os índices Gregos, $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \mu, \nu, \ldots = 0, \ldots, 3$ representam objetos associados a um sistema de coordenadas específico sobre $\mathcal{M}$. Ambos índices, Latinos e Gregos, com barras ($\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \ldots = 0, \ldots, 3$, e com acento circunflexo ($\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}, \ldots = 0, \ldots, 3$), representam tensores sobre subvariedades de $\mathcal{M}$. A métrica da variedade $\mathcal{M}$ tem "signatura" $(-,+,+,+)$.

Definição 7 *Seja $\mathcal{M}$ uma variedade base tal que existem subvariedades do tipo espaço $\mathcal{U}_t$ de $\mathcal{M}$ tais que*

$$\begin{cases} \mathcal{M} & = \bigcup_{t\in\mathrm{R}} \mathcal{U}_t \\ \mathcal{U}_t \bigcap \mathcal{U}_{t'} & = \{\varnothing\} \qquad \text{if } t \neq t'. \end{cases}$$

Neste caso, dizemos que $\mathcal{M}$ pode ser folheada.

O sistema de coordenadas sobre cada subvariedade $\mathcal{U}_t$ é determinado pela injeção

$$\mathcal{J} : \mathcal{U} \to \mathcal{M},$$

que não é necessariamente canônica. Dada esta injeção, a geometria diferencial nos dá automaticamente [17] os correspondentes mapas, $\mathcal{J}_\star$ e $\mathcal{J}^\star$, entre os fibrados tangentes e cotangentes de $\mathcal{U}$

e $\mathcal{M}$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_\star &: \mathrm{T}\mathcal{U} \to \mathrm{T}\mathcal{M} \\
\mathcal{J}_\star(\hat{X})(\phi) &= \hat{X}(\phi \circ \mathcal{J}), \qquad (3.1) \\
\mathcal{J}^\star &: \mathrm{T}_\star\mathcal{M} \to \mathrm{T}_\star\mathcal{U} \\
\mathcal{J}^\star(\beta)(\hat{X}) &= \beta(\mathcal{J}_\star(\hat{X})), \qquad (3.2)
\end{aligned}$$

onde $\phi : \mathcal{M} \to \mathrm{R}^4$ é uma aplicação diferenciável, $\hat{X} \in \mathrm{T}\mathcal{U}$ e $\beta \in \mathrm{T}_\star\mathcal{M}$. Em componentes, podemos representar $\mathcal{J}_\star$ pela matriz de Jacobi $\mathcal{J}_{\bar{\mu}}{}^{\mu}$ e a equação (3.1) pode ser escrita como

$$\hat{X}^{\bar{\mu}}\mathcal{J}_{\bar{\mu}}{}^{\mu} = X^{\mu},$$

onde $\hat{X} \in \mathrm{T}\mathcal{U}$ e $X \in \mathrm{T}\mathcal{M}$. Analogamente, podemos escrever (3.2) como:

$$T_{\mu}\mathcal{J}_{\bar{\mu}}{}^{\mu} = \hat{T}_{\bar{\mu}},$$

onde $\hat{T} \in \mathrm{T}_\star\mathcal{U}$ e $T \in \mathrm{T}_\star\mathcal{M}$.

Com a matriz de Jacobi, podemos calcular diretamente a métrica induzida na subvariedade $\mathcal{U}_t$,

$$\hat{g}_{\bar{\mu}\bar{\nu}} = g_{\mu\nu}\mathcal{J}_{\bar{\mu}}{}^{\mu}\mathcal{J}_{\bar{\nu}}{}^{\nu},$$

e definir uma família de três 4-vetores linearmente independentes

$$k_{\bar{\mu}} = \mathcal{J}_{\bar{\mu}}{}^{\mu}\partial_{\mu},$$

e uma 1-forma $n = n_{\mu}dx^{\mu}$ sobre $\mathcal{M}$ tal que

$$n_{\mu}\mathcal{J}_{\bar{\mu}}{}^{\mu} = 0$$

, a qual representa o kernel de $\mathcal{J}_\star$. Uma conseqüência direta das definições acima é

$$n(k_{\bar{\mu}}) = \mathcal{J}_{\bar{\mu}}{}^{\mu}n(\partial_{\mu}) = n_{\mu}\mathcal{J}_{\bar{\mu}}{}^{\mu} = 0,$$

deste modo, podemos construir uma base de $\mathrm{T}\mathcal{M}$ (resp. $\mathrm{T}_\star\mathcal{M}$) em termos dos objetos definidos sobre a subvariedade:

$$\mathcal{B} = \{n^{\mu}\partial_{\mu}, k_{\bar{\mu}}\}, \mathcal{B}_\star = \{n, k^{\bar{\mu}} = \hat{g}^{\bar{\mu}\bar{\nu}}g_{\mu\nu}k^{\nu}_{\bar{\nu}}dx^{\mu}\}.$$

Note que $\dim(\mathcal{U}) = \dim(\mathcal{M}) - 1$ implica que $\mathcal{J}_{\bar{\mu}}{}^{\mu}$ não é inversível, porém podemos definir sua pseudo-inversa, $\mathcal{J}^{\bar{\mu}}{}_{\mu}$, de modo que a seguinte relação seja verdadeira:

$$\mathcal{J}^{\bar{\nu}}{}_{\nu} = \hat{g}^{\bar{\mu}\bar{\nu}}\mathcal{J}_{\bar{\mu}}{}^{\mu}g_{\mu\nu}.$$

Isso nos permite levantar e descer os índices da matriz de Jacobi *como se* ela fosse um tensor.

A decomposição de um tensor qualquer na base $\mathcal{B}$ será muito útil nas próximas seções. Assim, façamos como exemplo a decomposição de um tensor uma vez contravariante:

$$\begin{aligned}
V &= V^{\mu}\partial_{\mu} \\
&= \frac{1}{|n|^2}n(V)n^{\mu}\partial_{\mu} + k^{\bar{\mu}}(V)k_{\bar{\mu}} \\
&= (V_{\perp}n^{\mu} + \hat{V}^{\bar{\mu}}\mathcal{J}_{\bar{\mu}}{}^{\mu})\partial_{\mu},
\end{aligned}$$

onde $V_{\perp} = \frac{1}{|n|^2}n_{\nu}V^{\nu}$ e $\hat{V}^{\bar{\mu}} = V^{\mu}\mathcal{J}^{\bar{\mu}}{}_{\mu}$.

3.3 A escolha ADM

A escolha ADM consiste no uso de uma injeção canônica da subvariedade $\mathcal{U}$ na variedade $\mathcal{M}$,

$$\mathcal{J}(z^{\bar{\mu}} \in \mathcal{U}_{x^0}) = (x^0, x^{\bar{\mu}} = z^{\bar{\mu}}) \in \mathcal{M},$$

e na imposição que a 1-forma normal seja do tipo tempo:

$$n_\mu n^\mu = -1.$$

Utilizando a definição (3.1) é simples encontrar a matriz de Jacobi neste caso:

$$\{\mathcal{J}_{\bar{\mu}}{}^0, \mathcal{J}_{\bar{\mu}}{}^{\bar{\nu}}\} = \{0_{\bar{\mu}}, \delta^{\bar{\nu}}_{\bar{\mu}}\}.$$

Da definição de n, temos

$$n_\mu \mathcal{J}_{\bar{\mu}}{}^\mu = 0 \qquad \Rightarrow \qquad n = n_0 dx^0,$$

ou seja, a única componente não nula de n é n_0. Assim, definimos a *função de lapso* como $N = -n_0$:

$$n = -N dx^0.$$

Definamos agora o *vetor de shift*, $N^{\bar{\nu}}$, por

$$\{\mathcal{J}^{\bar{\nu}}{}_0, \mathcal{J}^{\bar{\nu}}{}_{\bar{\mu}}\} = \{N^{\bar{\nu}}, \delta^{\bar{\nu}}_{\bar{\mu}}\}.$$

O significado geométrico dos objetos N e $N^{\bar{\nu}}$ será clarificado mais tarde. A seguir, faremos a decomposição ADM dos principais objetos tensoriais que utilizaremos depois para o teleparalelismo:

- Decomposição de n^μ:

$$n_\mu n^\mu = -1 \qquad \text{e} \qquad \mathcal{J}^{\bar{\nu}}{}_\nu n^\nu = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \{n^0, n^{\bar{\mu}}\} = \left\{\frac{1}{N}, -\frac{N^{\bar{\mu}}}{N}\right\}; \tag{3.3}$$

- Decomposição de $g^{\mu\nu}$:

$$g^{\mu\nu} = g^{\perp\perp} n^\mu n^\nu + \hat{g}^{\perp\bar{\nu}} n^\mu \mathcal{J}_{\bar{\nu}}{}^\nu + \hat{g}^{\bar{\mu}\perp} \mathcal{J}_{\bar{\mu}}{}^\mu n^\nu + \hat{g}^{\bar{\mu}\bar{\nu}} \mathcal{J}_{\bar{\mu}}{}^\mu \mathcal{J}_{\bar{\nu}}{}^\nu,$$

  onde

$$g^{\perp\perp} = n^\mu n^\nu g_{\mu\nu} = -1,$$
$$\hat{g}^{\perp\bar{\nu}} = -g^{\mu\nu} n_\mu \mathcal{J}^{\bar{\nu}}{}_\nu = -n^\nu \mathcal{J}^{\bar{\nu}}{}_\nu = 0,$$
$$\hat{g}^{\bar{\mu}\perp} = 0.$$

  Portanto

$$(g^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{N^2} & \frac{N^{\bar{\mu}}}{N^2} \\ \frac{N^{\bar{\nu}}}{N^2} & \hat{g}^{\bar{\mu}\bar{\nu}} - \frac{N^{\bar{\mu}} N^{\bar{\nu}}}{N^2} \end{pmatrix}.$$

- Decomposição de $g_{\mu\nu}$:
  Por um cálculo análogo ao de $g^{\mu\nu}$,

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} -N^2 + N^{\bar{\mu}} N_{\bar{\mu}} & N_{\bar{\mu}} \\ N_{\bar{\nu}} & \hat{g}_{\bar{\mu}\bar{\nu}} \end{pmatrix}. \tag{3.4}$$

- Decomposição de $\det(g_{\mu\nu})$:
  É suficiente notar que, multiplicando a parte inferior da matriz $(g_{\mu\nu})$ por $-N^{\bar{\nu}}$, e adicionando o resultado à primeira linha, obtemos

$$\det \begin{pmatrix} -N^2 + N^{\bar{\mu}} N_{\bar{\mu}} & N_{\bar{\mu}} \\ N_{\bar{\nu}} & \hat{g}_{\bar{\mu}\bar{\nu}} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -N^2 & 0_{\bar{\mu}} \\ N_{\bar{\nu}} & \hat{g}_{\bar{\mu}\bar{\nu}} \end{pmatrix} = -N^2 \det[(\hat{g}_{\bar{\mu}\bar{\nu}})] \tag{3.5}$$

- Decomposição de e_a^μ (base ortonormal do fibrado tangente) $\mathcal{M}$):

$$e_a^\mu = e_a^\perp n^\mu + \hat{e}_a^{\bar{\mu}} \mathcal{J}_{\bar{\mu}}{}^\mu,$$

onde

$$e_a^{\perp} = -n_\mu e_a^\mu = N e_a^0 \equiv -n_a,$$
$$\hat{e}_a^{\bar{\mu}} = \mathcal{J}^{\bar{\mu}}{}_\mu e_a^\mu = N^{\bar{\mu}} e_a^0 + e_a^{\bar{\mu}}.$$

Assim

$$\{e_a^0, e_a^{\bar{\mu}}\} = \left\{-\frac{n_a}{N}, \hat{e}_a^{\bar{\mu}} + \frac{N^{\bar{\mu}}}{N} n_a\right\}. \tag{3.6}$$

- Decomposição de β_μ^a:

$$\beta_\mu^a = \beta_\perp^a n_\mu + \hat{\beta}_{\bar{\mu}}^a \mathcal{J}^{\bar{\mu}}{}_\mu,$$

onde

$$\beta_\perp^a = -\beta_\mu^a n^\mu = -\frac{1}{N}\beta_0^a + \frac{N^{\bar{\mu}}}{N}\beta_{\bar{\mu}}^a \equiv -n^a,$$
$$\hat{\beta}_{\bar{\mu}}^a = \beta_\mu^a \mathcal{J}_{\bar{\mu}}{}^\mu = \beta_{\bar{\mu}}^a.$$

Portanto,

$$\{\beta_0^a, \beta_{\bar{\mu}}^a\} = \left\{N n^a + N^{\bar{\mu}} \hat{\beta}_{\bar{\mu}}^a, \hat{\beta}_{\bar{\mu}}^a\right\}.$$

Note que na expressão (3.4), as funções de lapso e shift aparecem exatamente nas componentes da métrica que a análise de Dirac [1] condena como arbitrárias, o que significa que, de alguma maneira, estas funções estão relacionadas à invariância por transformações de coordenada da RG, e codificam os graus de liberdade não físicos da teoria. Nas seções seguintes, demonstraremos que essas funções são, na realidade, multiplicadores de Lagrange.

3.4 Decomposição ADM da Lagrangiana teleparalela

Utilizando os resultados da seção anterior, façamos a decomposição ADM da Lagrangiana teleparalela, deixando explícita a dependência nas variáveis $\hat{\beta}_{\bar{\mu}}^a, N, N^{\bar{\mu}}$ e suas derivadas. Inicialmente, verifiquemos a decomposição da 2-forma $d\beta$ na base

$$\{n = -N dx^0, k^{\bar{\mu}} = N^{\bar{\mu}} dx^0 + dx^{\bar{\mu}}\}.$$

Invertendo a base acima, temos:

$$\begin{cases} dx^0 &= -\frac{n}{N} \\ dx^{\bar{\mu}} &= \frac{N^{\bar{\mu}}}{N} n + k^{\bar{\mu}} \end{cases}.$$

A decomposição de β^a fica:

$$\begin{aligned}
\beta^a &= \beta_\mu^a dx^\mu \\
&= -\frac{n}{N}\beta_0^a + \beta_{\bar{\mu}}^a \frac{N^{\bar{\mu}}}{N} n + \beta_{\bar{\mu}}^a k^{\bar{\mu}} \\
&= -n^a n + \hat{\beta}_{\bar{\mu}}^a k^{\bar{\mu}},
\end{aligned}$$

e para $d\beta^a$:

$$\begin{aligned}
d\beta^a &= \frac{1}{N}\left(-\partial_{\bar{\nu}}(N n^a) + \partial_0(\hat{\beta}_{\bar{\nu}}^a) - \partial_{\bar{\mu}}(\hat{\beta}_{\bar{\nu}}^a) N^{\bar{\mu}} - \hat{\beta}_{\bar{\mu}}^a \partial_{\bar{\nu}} N^{\bar{\mu}}\right) k^{\bar{\nu}} \wedge n \\
&+ \partial_{\bar{\nu}}(\hat{\beta}_{\bar{\mu}}^a) k^{\bar{\nu}} \wedge k^{\bar{\mu}} \\
&= \frac{1}{N} L_{\bar{\nu}}^a k^{\bar{\nu}} \wedge n + \partial_{\bar{\nu}}(\hat{\beta}_{\bar{\mu}}^a) k^{\bar{\nu}} \wedge k^{\bar{\mu}},
\end{aligned} \tag{3.7}$$

onde definimos o objeto $\frac{1}{N} L_{\bar{\nu}}^a$ como a projeção de $d\beta^a$ em $k^{\bar{\nu}} \wedge n$,

$$L_{\bar{\nu}}^a = \left(-\partial_{\bar{\nu}}(N n^a) + \partial_0(\hat{\beta}_{\bar{\nu}}^a) - \partial_{\bar{\mu}}(\hat{\beta}_{\bar{\nu}}^a) N^{\bar{\mu}} - \hat{\beta}_{\bar{\mu}}^a \partial_{\bar{\nu}} N^{\bar{\mu}}\right). \tag{3.8}$$

Note que $L^a_{\bar{\nu}}$ é o único objeto que contém derivadas temporais das componentes não arbitrárias do coframe, $\partial_0(\hat{\beta}^a_{\bar{\nu}})$, e portanto será importante para a dinâmica da teoria. Expandindo (3.7) em componentes, temos

$$T^a_{\mu\nu} = \frac{1}{N}\left(n_\mu \mathcal{J}^{\bar{\nu}}{}_\nu - n_\nu \mathcal{J}^{\bar{\nu}}_\mu\right) L^a_{\bar{\nu}} + \mathcal{J}^{\bar{\mu}}{}_\mu \mathcal{J}^{\bar{\nu}}{}_\nu \hat{T}^a_{\bar{\mu}\bar{\nu}}.$$

Relembremos a Lagrangiana teleparalela,

$$\mathcal{L}_{\mathrm{TT}} = \frac{\det(\beta)}{4} S^{\rho\mu\nu} T_{\rho\mu\nu},$$

onde o tensor $S^{\rho\mu\nu}$ depende linearmente da torção. Agora, fazemos a separação

$$S^{\rho\mu\nu} = \tilde{S}^{\rho\mu\nu} + \bar{S}^{\rho\mu\nu},$$

$$T^a_{\mu\nu} = \tilde{T}^a_{\mu\nu} + \bar{T}^a_{\mu\nu},$$

onde

$$\begin{aligned}
\tilde{S}^{\rho\mu\nu} &= S^{\rho\mu\nu}(\tilde{T}^a_{\mu\nu}), \\
\bar{S}^{\rho\mu\nu} &= S^{\rho\mu\nu}(\bar{T}^a_{\mu\nu}), \\
\tilde{T}^a_{\mu\nu} &= \frac{1}{N}\left(n_\mu \mathcal{J}^{\bar{\nu}}{}_\nu - n_\nu \mathcal{J}^{\bar{\nu}}_\mu\right) L^a_{\bar{\nu}}, \\
\bar{T}^a_{\mu\nu} &= \mathcal{J}^{\bar{\mu}}{}_\mu \mathcal{J}^{\bar{\nu}}{}_\nu \hat{T}^a_{\bar{\mu}\bar{\nu}}.
\end{aligned}$$

Deste modo, $\mathcal{L}_{\mathrm{TT}}$ se torna:

$$\mathcal{L}_{\mathrm{TT}} = \frac{\det(\beta)}{4}(\tilde{S}^{\rho\mu\nu}\tilde{T}_{\rho\mu\nu} + \tilde{S}^{\rho\mu\nu}\bar{T}_{\rho\mu\nu} + \bar{S}^{\rho\mu\nu}\tilde{T}_{\rho\mu\nu} + \bar{S}^{\rho\mu\nu}\bar{T}_{\rho\mu\nu})$$

Lema 7

$$\tilde{S}^{\rho\mu\nu}\bar{T}_{\rho\mu\nu} = \bar{S}^{\rho\mu\nu}\tilde{T}_{\rho\mu\nu}.$$

Graças ao lema acima, $\mathcal{L}_{\mathrm{TT}}$ se simplifica para

$$\mathcal{L}_{\mathrm{TT}} = \frac{\det(\beta)}{4}(\tilde{S}^{\rho\mu\nu}\tilde{T}_{\rho\mu\nu} + 2\bar{S}^{\rho\mu\nu}\tilde{T}_{\rho\mu\nu} + \bar{S}^{\rho\mu\nu}\bar{T}_{\rho\mu\nu}).$$

Para deixar explícita a dependência nas variáveis $\hat{\beta}^a_{\bar{\mu}}$, N e $N^{\bar{\mu}}$, expandiremos os termos de $L^a_{\bar{\nu}}$. A expansão completa é feita no apêndice C, e o resultado é apresentado abaixo:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\mathrm{TT}} &= -\frac{1}{N}\frac{\det(\hat{\beta})}{4}\left[-2\mathcal{J}^{\bar{\nu}}_{\nu'}\mathcal{J}^{\bar{\sigma}}_{\rho} L^a_{\bar{\nu}} L^{a'}_{\bar{\sigma}} e^{\nu'}_a e^{\rho}_{a'} + (\eta_{aa'} + n_a n_{a'}) g^{\nu'\nu} \mathcal{J}^{\bar{\nu}}_{\nu'}\mathcal{J}^{\bar{\sigma}}_{\nu} L^a_{\bar{\nu}} L^{a'}_{\bar{\sigma}} + \mathcal{J}^{\bar{\nu}}_{\rho}\mathcal{J}^{\bar{\sigma}}_{\mu} L^a_{\bar{\nu}} L^{a'}_{\bar{\sigma}} e^{\mu}_a e^{\rho}_{a'}\right] \\
&+ \det(\hat{\beta})\bar{S}^{\rho\mu\nu} n_\mu \mathcal{J}^{\bar{\nu}}{}_\nu L^a_{\bar{\nu}} e^{\rho'}_a g_{\rho\rho'} + N\frac{\det(\hat{\beta})}{4}\bar{S}^{\rho\mu\nu}\bar{T}_{\rho\mu\nu} \\
&= -\frac{1}{N}\frac{\det(\hat{\beta})}{4}\left[-2L^a_{\bar{\nu}} L^{a'}_{\bar{\sigma}} \hat{e}^{\bar{\nu}}_a \hat{e}^{\bar{\sigma}}_{a'} + (\eta_{aa'} + n_a n_{a'}) g^{\nu'\nu} \mathcal{J}^{\bar{\nu}}_{\nu'}\mathcal{J}^{\bar{\sigma}}_{\nu} L^a_{\bar{\nu}} L^{a'}_{\bar{\sigma}} + L^a_{\bar{\nu}} L^{a'}_{\bar{\sigma}} \hat{e}^{\bar{\sigma}}_a \hat{e}^{\bar{\nu}}_{a'}\right] \\
&+ N\frac{\det(\hat{\beta})}{4}\bar{S}^{\rho\mu\nu}\bar{T}_{\rho\mu\nu} - N\det(\hat{\beta})\bar{S}^{\rho 0\nu}\mathcal{J}^{\bar{\nu}}{}_\nu L^a_{\bar{\nu}} e^{\rho'}_a g_{\rho\rho'}.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

O último termo não foi expandido por enquanto pois ele não possui nenhuma derivada temporal das variáveis canônicas e portanto não contribui para o cálculo dos momentos conjugados.

Neste ponto devemos fazer uma escolha importante, pois se continuarmos com a formulação canônica da Lagrangiana (3.9), teremos que lidar mais tarde com os vínculos provenientes da simetria por boosts de Lorentz, os quais são de segunda classe [3]. Isso que dificultará significativamente os cálculos no futuro, pois como vimos no capítulo 2, para lidar com vínculos de segunda classe é preciso construir os parênteses de Dirac. Como mostrado em [3] e [24], há diferentes modos de lidar com este problema. Podemos reescrever desde o início a RG com variáveis complexas em termos da parte autodual da conexão de spin [3], ou podemos fixar parcialmente o gauge de modo a eliminar os vínculos de segunda classe. Neste trabalho, adotaremos a fixação de gauge como solução. Os boosts de Lorentz, diferente das rotações de SO(3), afetam as componentes de $n^{a=0}$ (o campo normal à subvariedade $\mathcal{U}$) e portanto, se fixarmos o valor de $n^{a=0}$, estaremos quebrando a simetria por boosts de Lorentz. Assim, escolheremos o gauge (implementado como uma igualdade forte):

$$n^a = \beta^a_\mu n^\mu = \delta^a_0,$$

o qual é conhecido como *gauge temporal ou de Schwinger*. Mostraremos que ele implica que apenas a parte simétrica do momento conjugado à $\beta^a_{\bar{\mu}}$ é dinâmica. É importante salientar que, com esta imposição, podemos estar escondendo alguma outra simetria ou propriedade importante do teleparalelismo, mas este é o preço que pagaremos para poder prosseguir com os cálculos. Neste gauge há muitas simplificações, algumas das quais imediatas. Utilizando, (3.3) e (3.6) obtemos:

$$0 = \mathcal{J}^{\bar{\nu}}{}_\nu n^a e^\nu_a = \mathcal{J}^{\bar{\nu}}{}_\nu e^\nu_0 = N^{\bar{\nu}} e^0_0 + e^{\bar{\nu}}_0 = N^{\bar{\nu}} \frac{1}{N} + \hat{e}^{\bar{\nu}}_0 - \frac{N^{\bar{\nu}}}{N} = \hat{e}^{\bar{\nu}}_0, \tag{3.10}$$

e usando as expressões (3.10), (3.4) e $\beta^d_\nu = \eta^{da} e^\mu_a g_{\mu\nu}$, obtemos:

$$\beta^0_\nu = \begin{cases} \beta^0_{\bar{\nu}} = \left(-\frac{g_{0\bar{\nu}}}{N} + \eta^{0a} \hat{e}^{\bar{\mu}}_a g_{\bar{\mu}\bar{\nu}} + \frac{1}{N} N^{\bar{\mu}} g_{\bar{\mu}\bar{\nu}}\right) = 0, \\ \beta^0_0 = N. \end{cases} \tag{3.11}$$

De (3.11), obtemos

$$\begin{aligned} L^0_{\bar{\nu}} &= \left(-\partial_{\bar{\nu}}(N n^0) + \partial_0(\hat{\beta}^0_{\bar{\nu}}) - \partial_{\bar{\mu}}(\hat{\beta}^0_{\bar{\nu}}) N^{\bar{\mu}} - \hat{\beta}^0_{\bar{\mu}} \partial_{\bar{\nu}} N^{\bar{\mu}}\right) \\ &= -\partial_{\bar{\nu}} N. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Podemos também expressar $L^{\bar{a}}_{\bar{\nu}}$ como a derivada de Lie de $\hat{\beta}^{\bar{a}}$ com relação ao campo vetorial Nn, que é normal à $\mathcal{U}$:

$$\begin{aligned} L^{\bar{a}}_{\bar{\nu}} &= \partial_0(\hat{\beta}^{\bar{a}}_{\bar{\nu}}) - \partial_{\bar{\mu}}(\hat{\beta}^{\bar{a}}_{\bar{\nu}}) N^{\bar{\mu}} - \hat{\beta}^{\bar{a}}_{\bar{\mu}} \partial_{\bar{\nu}} N^{\bar{\mu}} \\ &= (N n^\mu) \partial_\mu \hat{\beta}^{\bar{a}}_{\bar{\nu}} + \hat{\beta}^{\bar{a}}_\mu \partial_{\bar{\nu}} (N n^\mu) \\ &= \left[\mathcal{L}_{Nn}(\hat{\beta})\right]^{\bar{a}}_{\bar{\nu}}, \end{aligned} \tag{3.13}$$

onde foi utilizado que a derivada de Lie de uma 1-forma $w = w_\mu dx^\mu$ com respeito a um campo vetorial $X = X^\mu \partial_\mu$ é dada por

$$\mathcal{L}_X(w) = (X^\mu \partial_\mu w_\nu + w_\mu \partial_\nu X^\mu)\, dx^\nu.$$

Com estes resultados, a Lagrangiana (3.9) se simplifica para

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mathrm{TT}} &= -\frac{1}{N} \frac{\det(\hat{\beta})}{4} \left[-2 L^{\bar{a}}_{\bar{\nu}} L^{\bar{a}'}_{\bar{\sigma}} \hat{e}^{\bar{\nu}}_{\bar{a}} \hat{e}^{\bar{\sigma}}_{\bar{a}'} + \eta_{\bar{a}\bar{a}'} \hat{g}^{\bar{\sigma}\bar{\nu}} L^{\bar{a}}_{\bar{\nu}} L^{\bar{a}'}_{\bar{\sigma}} + L^{\bar{a}}_{\bar{\nu}} L^{\bar{a}'}_{\bar{\sigma}} \hat{e}^{\bar{\sigma}}_{\bar{a}} \hat{e}^{\bar{\nu}}_{\bar{a}'}\right] \\ &- \det(\hat{\beta}) \bar{S}^{\rho 0 \nu} N \mathcal{J}^{\bar{\nu}}{}_\nu L^a_{\bar{\nu}} e^{\rho'}_a g_{\rho\rho'} + N \frac{\det(\hat{\beta})}{4} \bar{S}^{\rho\mu\nu} \bar{T}_{\rho\mu\nu} \\ &= -\frac{1}{N} \frac{\det(\hat{\beta})}{4} L^{\bar{a}}_{\bar{\nu}} (-2 L \hat{e}^{\bar{\nu}}_{\bar{a}} + \eta_{\bar{a}\bar{a}'} \hat{g}^{\bar{\sigma}\bar{\nu}} L^{\bar{a}'}_{\bar{\sigma}} + L^{\bar{a}'}_{\bar{\sigma}} \hat{e}^{\bar{\sigma}}_{\bar{a}} \hat{e}^{\bar{\nu}}_{\bar{a}'}) - \det(\hat{\beta}) \bar{S}^{\rho 0 \nu} N \mathcal{J}^{\bar{\nu}}{}_\nu L^a_{\bar{\nu}} e^{\rho'}_a g_{\rho\rho'} \\ &+ N \frac{\det(\hat{\beta})}{4} \bar{S}^{\rho\mu\nu} \bar{T}_{\rho\mu\nu}, \end{aligned}$$

onde L é dado por

$$L = L^{\bar{a}'}_{\bar{\sigma}} \hat{e}^{\bar{\sigma}}_{\bar{a}'}.$$

Esta Lagrangiana é a mesma encontrada em [23].

3.5 A densidade de Hamiltoniana

Note que, da expressão (3.8), obtemos diretamente as derivadas de L^a_μ com relação às componentes das velocidades do coframe:

$$\frac{\partial L^c_{\bar\mu}}{\partial(\partial_0\beta^a_{\bar\nu})} = \delta^c_a\delta^{\bar\nu}_{\bar\mu}.$$

Com este resultado, calculemos

$$\frac{\partial}{\partial(\partial_0\beta^{\bar d}_{\bar\mu})}\{L^{\bar a}_{\bar\nu}(-2L\hat e^{\bar\nu}_{\bar a} + \eta_{\bar a\bar a'}\hat g^{\bar\sigma\bar\nu}L^{\bar a'}_{\bar\sigma} + L^{\bar a'}_{\bar\sigma}\hat e^{\bar\sigma}_{\bar a}\hat e^{\bar\nu}_{\bar a'})\} =$$
$$L^{\bar a}_{\bar\nu}(-2\hat e^{\bar\mu}_{\bar d}\hat e^{\bar\nu}_{\bar a} + \eta_{\bar a\bar d}\hat g^{\bar\mu\bar\nu} + \hat e^{\bar\mu}_{\bar a}\hat e^{\bar\nu}_{\bar d}) + (-2L\hat e^{\bar\mu}_{\bar d} + \eta_{\bar d\bar a'}\hat g^{\bar\sigma\bar\mu}L^{\bar a'}_{\bar\sigma} + L^{\bar a'}_{\bar\sigma}\hat e^{\bar\sigma}_{\bar d}\hat e^{\bar\mu}_{\bar a'}) =$$
$$2(-2L\hat e^{\bar\mu}_{\bar d} + \eta_{\bar d\bar a'}\hat g^{\bar\sigma\bar\mu}L^{\bar a'}_{\bar\sigma} + L^{\bar a'}_{\bar\sigma}\hat e^{\bar\sigma}_{\bar d}\hat e^{\bar\mu}_{\bar a'}).$$

Portanto,

$$\frac{\partial}{\partial(\partial_0\beta^{\bar d}_{\bar\mu})}\mathcal{L}_{\mathrm{TT}} = -\frac{1}{N}\frac{\det(\hat\beta)}{2}(-2L\hat e^{\bar\mu}_{\bar d} + \eta_{\bar d\bar a'}\hat g^{\bar\sigma\bar\mu}L^{\bar a'}_{\bar\sigma} + L^{\bar a'}_{\bar\sigma}\hat e^{\bar\sigma}_{\bar d}\hat e^{\bar\mu}_{\bar a'}) - \det(\hat\beta)\bar S^{\rho 0\nu}N\mathcal{J}^{\bar\mu}_{\nu}e^{\rho'}_{\bar d}g_{\rho\rho'}.$$

Assim, dos resultados do capítulo 2, temos o momento conjugado a $\hat\beta^{\bar d}_{\bar\mu}$:

$$\Pi^{\bar\mu}_{\bar d} = -\frac{1}{N}\frac{\det(\hat\beta)}{2}(-2L\hat e^{\bar\mu}_{\bar d} + \eta_{\bar d\bar a'}\hat g^{\bar\sigma\bar\mu}L^{\bar a'}_{\bar\sigma} + L^{\bar a'}_{\bar\sigma}\hat e^{\bar\sigma}_{\bar d}\hat e^{\bar\mu}_{\bar a'}) - \det(\hat\beta)\bar S^{\rho 0\nu}N\mathcal{J}^{\bar\mu}_{\nu}e^{\rho'}_{\bar d}g_{\rho\rho'}.$$

Antes de prosseguir, anunciaremos um lema que será necessário em seguida.

Lema 8 *O termo linear em $L^a_{\bar\nu}$,*

$$\bar S^{\rho 0\nu}N\mathcal{J}^{\bar\nu}{}_{\nu}L^a_{\bar\nu}e^{\rho'}_a g_{\rho\rho'},$$

que aparece na Lagrangiana (3.9) satisfaz a equação

$$\bar S^{\rho 0\nu}N\mathcal{J}^{\bar\nu}{}_{\nu}L^a_{\bar\nu}e^{\rho'}_a g_{\rho\rho'} = e^0_a e^{\bar\nu}_u \hat e^{\bar\mu}_v \eta^{uv}\hat e^{\bar\omega}_c\hat T^c_{\bar\mu\bar\omega}L^a_{\bar\nu}.$$

Graças a este lema podemos perceber, devido à forma das componentes e^0_a no gauge de Schwinger

$$e^0_a = -\frac{\eta_{0a}}{N},$$

que apenas as contrações envolvendo $L^0_{\bar\nu}$ contribuirão para a expressão total. Entretanto, o momento $\Pi^{\bar\mu}_{\bar d}$ depende apenas das componentes $L^{\bar a}_{\bar\nu}$, de modo que este termo não contribui para o momento no gauge Schwinger, que se simplifica:

$$\Pi^{\bar\mu}_{\bar d} = -\frac{1}{N}\frac{\det(\hat\beta)}{2}(-2L\hat e^{\bar\mu}_{\bar d} + \eta_{\bar d\bar a'}\hat g^{\bar\sigma\bar\mu}L^{\bar a'}_{\bar\sigma} + L^{\bar a'}_{\bar\sigma}\hat e^{\bar\sigma}_{\bar d}\hat e^{\bar\mu}_{\bar a'}). \tag{3.14}$$

Agora, procederemos de um modo análogo ao feito para a teoria de Yang-Mills (ver capítulo 2) para obter os vínculos da teoria teleparalela, fatorando as variáveis que são multiplicadores de Lagrange diretamente na Lagrangiana. Note que podemos reconhecer diretamente o momento Π em (3.9):

$$\mathcal{L}_{\mathrm{TT}} = \frac{1}{2}L^{\bar a}_{\bar\nu}\Pi^{\bar\nu}_{\bar a} + \frac{1}{N}\det(\hat\beta)e^{\bar\nu}_u\hat e^{\bar\mu}_v\eta^{uv}\hat e^{\bar\omega}_c\hat T^c_{\bar\mu\bar\omega}L^0_{\bar\nu} + N\frac{\det(\hat\beta)}{4}\bar S^{\rho\mu\nu}\bar T_{\rho\mu\nu}.$$

No gauge de Schwinger, esta expressão se simplifica para

$$\mathcal{L}_{\mathrm{TT}} = \frac{1}{2}L^{\bar a}_{\bar\nu}\Pi^{\bar\nu}_{\bar a} + \det(\hat\beta)\hat T^{\bar\nu}\partial_{\bar\nu}N + N\frac{\det(\hat\beta)}{4}\bar S^{\rho\mu\nu}\bar T_{\rho\mu\nu}, \tag{3.15}$$

onde

$$\hat T^{\bar\nu} = \hat T^a{}_\mu{}^{\bar\nu}e^\mu_a.$$

Definamos agora os objetos:

$$L^{\bar{a}\bar{\mu}} = \hat{g}^{\bar{\mu}\bar{\nu}} L^{\bar{a}}_{\bar{\nu}},$$
$$L^{\bar{\mu}\bar{d}} = L^{\bar{a}'}_{\bar{\sigma}} \hat{e}^{\bar{\sigma}}_{\bar{d}} \hat{e}^{\bar{\mu}}_{\bar{a}'},$$
$$\Pi^{\bar{d}\bar{\mu}} = \Pi^{\bar{\mu}}_{a} \eta^{a\bar{d}},$$

e

$$\Pi = \Pi^{\bar{\mu}}_{\bar{a}} \hat{\beta}^{\bar{a}}_{\bar{\mu}} = 2\det(\hat{\beta}) \frac{1}{N} L.$$

Com estas definições, o momento pode ser escrito como

$$\Pi^{\bar{d}\bar{\mu}} = -\frac{1}{N}\frac{\det(\hat{\beta})}{2}(-2L\hat{e}^{\bar{\mu}\bar{d}} + L^{\bar{d}\bar{\mu}} + L^{\bar{\mu}\bar{d}}) = -\frac{1}{N}\frac{\det(\hat{\beta})}{2}(2L^{(\bar{d}\bar{\mu})} - 2L\hat{e}^{\bar{\mu}\bar{d}}),$$

onde $L^{(\bar{d}\bar{\mu})}$ representa a simetrização nos respectivos índices. Assim, podemos escrever a parte simétrica de $L^{(\bar{d}\bar{\mu})}$ em termos de $\Pi^{\bar{d}\bar{\mu}}$ e Π:

$$L^{(\bar{d}\bar{\mu})} = L\hat{e}^{\bar{\mu}\bar{d}} - \frac{N}{\det(\hat{\beta})}\Pi^{\bar{d}\bar{\mu}} = -\frac{N}{\det(\hat{\beta})}\left(\Pi^{\bar{d}\bar{\mu}} - \frac{1}{2}\Pi\hat{e}^{\bar{\mu}\bar{d}}\right).$$

Substituindo este resultado em (3.15), obtemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\mathrm{TT}} &= \frac{1}{2}L^{\bar{a}}_{\bar{\nu}}\Pi^{\bar{\nu}}_{\bar{a}} + \det(\hat{\beta})\hat{T}^{\bar{\nu}}\partial_{\bar{\nu}}N + N\frac{\det(\hat{\beta})}{4}\bar{S}^{\rho\mu\nu}\bar{T}_{\rho\mu\nu} \\
&= \frac{1}{2}L^{\bar{\mu}\bar{\nu}}\Pi_{\bar{\mu}\bar{\nu}} + \det(\hat{\beta})\hat{T}^{\bar{\nu}}\partial_{\bar{\nu}}N + N\frac{\det(\hat{\beta})}{4}\bar{S}^{\rho\mu\nu}\bar{T}_{\rho\mu\nu} \\
&= \frac{1}{2}L^{(\bar{\mu}\bar{\nu})}\Pi_{\bar{\mu}\bar{\nu}} + \det(\hat{\beta})\hat{T}^{\bar{\nu}}\partial_{\bar{\nu}}N + N\frac{\det(\hat{\beta})}{4}\bar{S}^{\rho\mu\nu}\bar{T}_{\rho\mu\nu} \\
&= -\frac{1}{2}\frac{N}{\det(\hat{\beta})}\left(\Pi^{\bar{\mu}\bar{\nu}} - \frac{1}{2}\Pi\hat{g}^{\bar{\mu}\bar{\nu}}\right)\Pi_{\bar{\mu}\bar{\nu}} + \det(\hat{\beta})\hat{T}^{\bar{\nu}}\partial_{\bar{\nu}}N + N\frac{\det(\hat{\beta})}{4}\bar{S}^{\rho\mu\nu}\bar{T}_{\rho\mu\nu}.
\end{aligned}$$

Este é o ponto ideal para construirmos a Hamiltoniana canônica, pois eliminamos todas a velocidades da Lagrangiana. Note que em (3.15) não há velocidades das variáveis N e $N^{\bar{\mu}}$. Isto implica diretamente que seus momentos canônicos, π_N e $\pi_{N^{\bar{\mu}}}$ são vínculos primários:

$$\begin{aligned}
\phi_N &\approx 0, \\
\phi_{N^{\bar{\mu}}} &\approx 0.
\end{aligned}$$

A componente antissimétrica do momento canônico das tríadas também é um vínculo primário, $\phi_{[\bar{\mu},\bar{\nu}]} \equiv \Pi^{[\bar{\nu}}_{\bar{d}}\hat{\beta}^{\bar{d}}_{\bar{\sigma}}\hat{g}^{\bar{\sigma}\bar{\mu}]} \approx 0$. Assim, temos a coleção de vínculos primários da teoria:

$$\{\phi_{[\bar{\mu},\bar{\nu}]}, \phi_N, \phi_{N^{\bar{\mu}}}\}.$$

Do capítulo 2, sabemos que Hamiltoniana canônica é:

$$\mathcal{H}_c = \pi_N\partial_0 N + \pi_{N^{\bar{\mu}}}\partial_0 N^{\bar{\mu}} + \Pi^{\bar{d}\bar{\nu}}\partial_0\hat{\beta}_{\bar{d}\bar{\nu}} - \mathcal{L}_{\mathrm{TT}}.$$

Utilizando (3.8) para escrever as velocidades $\partial_0\hat{\beta}_{\bar{d}\bar{\nu}}$ em termos de $L^{\bar{a}}_{\bar{\nu}}$, obtemos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_c &= \frac{1}{2}\frac{N}{\det(\hat{\beta})}\left(\Pi^{\bar{\mu}\bar{\nu}} - \frac{1}{2}\Pi\hat{g}^{\bar{\mu}\bar{\nu}}\right)\Pi_{\bar{\mu}\bar{\nu}} - \det(\hat{\beta})\hat{T}^{\bar{\nu}}\partial_{\bar{\nu}}N - N\frac{\det(\hat{\beta})}{4}\bar{S}^{\rho\mu\nu}\bar{T}_{\rho\mu\nu} \\
&+ \Pi^{\bar{d}\bar{\nu}}(L_{\bar{d}\bar{\nu}} + N^{\bar{\mu}}\partial_{\bar{\mu}}\beta_{\bar{d}\bar{\nu}} + \beta_{\bar{d}\bar{\mu}}\partial_{\bar{\nu}}N^{\bar{\mu}}) + \pi_N\partial_0 N + \pi_{N^{\bar{\mu}}}\partial_0 N^{\bar{\mu}} \\
&= -\frac{1}{2}\frac{N}{\det(\hat{\beta})}\left(\Pi^{\bar{\mu}\bar{\nu}} - \frac{1}{2}\Pi\hat{g}^{\bar{\mu}\bar{\nu}}\right)\Pi_{\bar{\mu}\bar{\nu}} + N\partial_{\bar{\nu}}(\det(\hat{\beta})\hat{T}^{\bar{\nu}}) - N\frac{\det(\hat{\beta})}{4}\bar{S}^{\rho\mu\nu}\bar{T}_{\rho\mu\nu} \\
&+ N^{\bar{\mu}}(\Pi^{\bar{d}\bar{\nu}}\partial_{\bar{\mu}}\beta_{\bar{d}\bar{\nu}} - \partial_{\bar{\nu}}(\Pi^{\bar{d}\bar{\nu}}\beta_{\bar{d}\bar{\mu}})) \\
&+ \partial_{\bar{\nu}}(\Pi^{\bar{d}\bar{\nu}}\beta_{\bar{d}\bar{\mu}}N^{\bar{\mu}} - \det(\hat{\beta})\hat{T}^{\bar{\nu}}N) + \pi_N\partial_0 N + \pi_{N^{\bar{\mu}}}\partial_0 N^{\bar{\mu}}.
\end{aligned}$$

Essa expressão pode ser reescrita na forma

$$\mathcal{H}_c = N\chi_0 + N^{\bar{\mu}}\chi_{\bar{\mu}} + \partial_{\bar{\nu}}B^{\bar{\nu}} + \pi_N\partial_0 N + \pi_{N^{\bar{\mu}}}\partial_0 N^{\bar{\mu}}, \tag{3.16}$$

onde

$$\begin{cases}
\chi_0 &= -\frac{1}{2}\frac{1}{\det(\hat{\beta})}\left(\Pi^{\bar{\mu}\bar{\nu}} - \frac{1}{2}\Pi\hat{g}^{\bar{\mu}\bar{\nu}}\right)\Pi_{\bar{\mu}\bar{\nu}} + \partial_{\bar{\nu}}(\det(\hat{\beta})\hat{T}^{\bar{\nu}}) - \frac{\det(\hat{\beta})}{4}\bar{S}^{\rho\mu\nu}\bar{T}_{\rho\mu\nu}, \\
\chi_{\bar{\mu}} &= \Pi^{\bar{d}\bar{\nu}}\partial_{\bar{\mu}}\beta_{\bar{d}\bar{\nu}} - \partial_{\bar{\nu}}(\Pi^{\bar{d}\bar{\nu}}\beta_{\bar{d}\bar{\mu}}), \\
B^{\bar{\nu}} &= \Pi^{\bar{d}\bar{\nu}}\beta_{\bar{d}\bar{\mu}}N^{\bar{\mu}} - \det(\hat{\beta})\hat{T}^{\bar{\nu}}N.
\end{cases}$$

Portanto, a Hamiltoniana total é

$$\mathcal{H}_T = \mathcal{H}_c + \lambda\phi_N + \lambda^{\bar{\mu}}\phi_{N^{\bar{\mu}}} + \lambda^{\bar{\mu}\bar{\nu}}\phi_{[\bar{\mu},\bar{\nu}]},$$

onde $\{\lambda, \lambda^{\bar{\mu}}, \lambda^{\bar{\mu}\bar{\nu}}\}$ são os multiplicadores de Lagrange dos vínculos primários.

É preciso ainda analisar as condições de consistência para verificar a existência de vínculos secundários. Como visto no capítulo 2, os parênteses de Poisson são definidos por

$$\{A, B\}_P = \sum_{Q,P}\int_{\mathcal{U}} d^3z\left[\frac{\delta A}{\delta Q(z)}\frac{\delta B}{\delta P(z)} - \frac{\delta A}{\delta P(z)}\frac{\delta B}{\delta Q(z)}\right],$$

onde a soma é sobre todas as variáveis canônicas. Assim, neste caso temos:

$$\begin{aligned}
\{A, B\}_P &= \int_{\mathcal{U}} d^3z\left[\frac{\delta A}{\delta\hat{\beta}^{\bar{a}}_{\bar{\mu}}(z)}\frac{\delta B}{\delta\Pi^{\bar{\mu}}_{\bar{a}}(z)} - \frac{\delta A}{\delta\Pi^{\bar{\mu}}_{\bar{a}}(z)}\frac{\delta B}{\delta\hat{\beta}^{\bar{a}}_{\bar{\mu}}(z)}\right. \\
&+ \left.\frac{\delta A}{\delta N(z)}\frac{\delta B}{\delta\pi_N(z)} - \frac{\delta A}{\delta\pi_N(z)}\frac{\delta B}{\delta N(z)} + \frac{\delta A}{\delta N^{\bar{\mu}}(z)}\frac{\delta B}{\delta\pi_{N^{\bar{\mu}}}(z)} - \frac{\delta A}{\delta\pi_{N^{\bar{\mu}}}(z)}\frac{\delta B}{\delta N^{\bar{\mu}}(z)}\right].
\end{aligned}$$

Portanto, as condições de consistência para $\{\phi_{[\bar{\mu},\bar{\nu}]}, \phi_N, \phi_{N^{\bar{\mu}}}\}$ são:

$$\begin{aligned}
\{\phi_N(x), \mathcal{H}_T(y)\}_P &\approx \int_{\mathcal{U}} d^3z\left[\frac{\delta\phi_N(x)}{\delta N(z)}\frac{\delta\mathcal{H}_T(y)}{\delta\pi_N(z)} - \frac{\delta\phi_N(x)}{\delta\pi_N(z)}\frac{\delta\mathcal{H}_T(y)}{\delta N(z)}\right] \\
&= -\int_{\mathcal{U}} d^3z\left[\delta^3(x-z)\delta^3(y-z)\chi_0(y)\right] \\
&= -\left[\chi_0(y) - \partial_0\phi_N(y)\right]\delta^3(x-y) \approx 0 \Rightarrow \\
0 &\approx \chi_0(y),
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\{\phi_{N^{\bar\mu}}(x), \mathcal{H}_T(y)\}_P &\approx \int_{\mathcal{U}} d^3z \left[\frac{\delta\phi_{N^{\bar\mu}}(x)}{\delta N^{\bar\mu}(z)}\frac{\delta\mathcal{H}_T(y)}{\delta\pi_{N^{\bar\mu}}(z)} - \frac{\delta\phi_{N^{\bar\mu}}(x)}{\delta\pi_{N^{\bar\mu}}(z)}\frac{\delta\mathcal{H}_T(y)}{\delta N^{\bar\mu}(z)}\right] \\
&= -\int_{\mathcal{U}} d^3z \left[\delta^3(x-z)\delta^3(y-z)\chi_{\bar\mu}(y)\right] \\
&= -\left[\chi_{\bar\mu}(y) - \partial_0\phi_{N^{\bar\mu}}(y)\right]\delta^3(x-y) \approx 0 \Rightarrow \\
0 &\approx \chi_{\bar\mu}(y),
\end{aligned}
$$

e

$$
\{\phi_{[\bar\mu,\bar\nu]}(x), \mathcal{H}_T(y)\}_P \approx \int_{\mathcal{U}} d^3z \left[\frac{\delta\phi_{[\bar\mu,\bar\nu]}(x)}{\delta\hat\beta^{\bar a}_{\bar\mu}(z)}\frac{\delta\mathcal{H}_T(y)}{\delta\Pi^{\bar\mu}_{\bar a}(z)} - \frac{\delta\phi_{[\bar\mu,\bar\nu]}(x)}{\delta\Pi^{\bar\mu}_{\bar a}(z)}\frac{\delta\mathcal{H}_T(y)}{\delta\hat\beta^{\bar a}_{\bar\mu}(z)}\right],
$$

onde estes últimos parênteses de Poisson serão explicitados mais a frente. Deste modo, temos uma nova coleção de vínculos:

$$\{\chi_0, \chi_{\bar\mu}, \phi_{[\bar\mu,\bar\nu]}, \phi_N, \phi_{N^{\bar\mu}}\}.$$

Note que na Hamiltoniana total

$$\mathcal{H}_T = N\chi_0 + N^{\bar\mu}\chi_{\bar\mu} + \partial_{\bar\nu}B^{\bar\nu} + \pi_N\partial_0 N + \pi_{N^{\bar\mu}}\partial_0 N^{\bar\mu} + \lambda\phi_N + \lambda^{\bar\mu}\phi_{N^{\bar\mu}} + \lambda^{\bar\mu\bar\nu}\phi[\bar\mu,\bar\nu],$$

podemos absorver os termos $\pi_N\partial_0 N + \pi_{N^{\bar\mu}}\partial_0 N^{\bar\mu}$ nos termos contendo os multiplicadores de Lagrange $\lambda\phi_N + \lambda^{\bar\mu}\phi_{N^{\bar\mu}}$. De fato, a evolução temporal das variáveis N e $N^{\bar\mu}$ depende apenas de λ e $\lambda^{\bar\mu}$ respectivamente e portanto, é arbitrária. Assim, podemos interpretá-las como multiplicadores de Lagrange dos vínculos χ_0 e $\chi_{\bar\mu}$. Além disso, as equações de movimento para a tríada e seu momento conjugado não dependem de λ e $\lambda^{\bar\mu}$. Portanto, podemos simplesmente remover estes termos da Hamiltoniana total e trabalhar apenas com a expressão simplificada

$$\mathcal{H}_T = N\chi_0 + N^{\bar\mu}\chi_{\bar\mu} + \partial_{\bar\nu}B^{\bar\nu} + \lambda^{\bar\mu\bar\nu}\phi_{[\bar\mu,\bar\nu]},$$

conhecida como Hamiltoniana ADM.

O cálculo completo de todos os parênteses de Poisson dos vínculos $\{\chi_0, \chi_{\bar\mu}, \phi_{[\bar\mu,\bar\nu]}\}$ é muito extenso, e daremos aqui apenas o resultado final, obtido da Ref. [13]:

$$
\begin{aligned}
\{\chi_0(x), \chi_0(y)\}_P &= \left[-\hat g^{\bar\mu\bar\nu}(x)\chi_{\bar\mu}(x) - \partial_{\bar\mu}\Pi^{[\bar\mu\bar\nu]}(x) + \Pi_{[\bar\mu\bar\sigma]}\left(-\frac{1}{2}T^{\bar\nu\bar\mu\bar\sigma} + T^{\bar\mu\bar\sigma\bar\nu}\right)\right]\partial_{\bar\nu}\delta^3(x-y) \\
&- (x \leftrightarrow y) \\
\{\chi_0(x), \chi_{\bar\mu}(y)\}_P &= \chi_0(x)\partial_{\bar\mu}\delta^3(x-y) \\
\{\chi_{\bar\mu}(x), \chi_{\bar\nu}(y)\}_P &= \chi_{\bar\mu}(y)\partial_{\bar\nu}\delta^3(x-y) - \chi_{\bar\nu}(x)\partial_{\bar\mu}\delta^3(x-y) \\
\{\chi_0(x), \Pi^{[\bar a\bar b]}(y)\}_P &= 0 \\
\{\chi_{\bar\mu}(x), \Pi^{[\bar a\bar b]}(y)\}_P &= 0 \\
\{\Pi^{[\bar a\bar b]}(x), \Pi^{[\bar c\bar d]}(y)\}_P &= \left(\eta^{\bar b\bar d}\Pi^{[\bar a\bar c]}(x) - \eta^{\bar b\bar c}\Pi^{[\bar a\bar d]}(x) + \eta^{\bar a\bar c}\Pi^{[\bar b\bar d]}(x) - \eta^{\bar a\bar d}\Pi^{[\bar b\bar c]}(x)\right)\delta^3(x-y).
\end{aligned}
$$

Nestas expressões podemos ver que todos os vínculos encontrados são de primeira classe (todos os parênteses de Poisson são fracamente nulos) e fecham uma álgebra, o que implica que não há mais vínculos.

Note que se impusermos o vínculo $\phi_{[\bar\mu,\bar\nu]}$ como uma igualdade forte e escrevermos o vínculo escalar em termos da projeção do tensor de curvatura da conexão de Levi-Civita,* obtemos exatamente a mesma álgebra da relatividade usual (onde as variáveis canônicas são a métrica e seu momento conjugado). Veja [23], [3] e [24].

Note também que os parênteses de Poisson $\{\Pi^{[\bar a\bar b]}(x), \Pi^{[\bar c\bar d]}(y)\}_P$ satisfazem exatamente a mesma álgebra que os geradores (1.1) do grupo de Lorentz (que, se restritos à subvariedade $\mathcal{U}$,

*Para isso é suficiente notar que o termo $\partial_{\bar\nu}(\det(\hat\beta)\hat T^{\bar\nu}) - \frac{\det(\hat\beta)}{4}\bar S^{\rho\mu\nu}\bar T_{\rho\mu\nu}$ é, pelo lema (2), igual a $\frac{1}{2}\sqrt{-g}\bar R$.

são apenas os geradores de SO(3)). De fato, a parte antissimétrica do momento $\Pi^{[\bar{a}\bar{b}]}(x)$ é o gerador de rotações de SO(3) da tríada, através se seu fluxo Hamiltoniano:

$$
\begin{aligned}
\{\hat{\beta}^{\bar{a}}_{\bar{\mu}}(x), \int_{\mathcal{U}} d^3y \frac{1}{2} M_{\bar{c}\bar{d}}(y) \Pi^{[\bar{c}\bar{d}]}(y)\}_P &= \int_{\mathcal{U}} d^3y \frac{1}{2} M_{\bar{c}\bar{d}}(y) \{\hat{\beta}^{\bar{a}}_{\bar{\mu}}(x), \Pi^{[\bar{c}\bar{d}]}(y)\}_P \\
&= -\int_{\mathcal{U}} d^3y \frac{1}{2} M_{\bar{c}\bar{d}}(y) \times \int_{\mathcal{U}} d^3z \left[\frac{\delta \Pi^{[\bar{c}\bar{d}]}(y)}{\delta \Pi^{\bar{\mu}}_{\bar{a}}(z)}\right] \delta^3(x-z) \\
&= -\int_{\mathcal{U}} d^3y \frac{1}{2} M_{\bar{c}\bar{d}}(y) \left[\eta^{\bar{a}\bar{c}} \hat{\beta}^{\bar{d}}_{\bar{\mu}}(y) - \eta^{\bar{a}\bar{d}} \hat{\beta}^{\bar{c}}_{\bar{\mu}}(y)\right] \delta^3(x-y) \\
&= -\frac{1}{2} M_{\bar{c}\bar{d}}(x) \left[\eta^{\bar{a}\bar{c}} \hat{\beta}^{\bar{d}}_{\bar{\mu}}(x) - \eta^{\bar{a}\bar{d}} \hat{\beta}^{\bar{c}}_{\bar{\mu}}(x)\right] \\
&= -M_{\bar{c}\bar{d}}(x) \eta^{\bar{a}\bar{c}} \hat{\beta}^{\bar{d}}_{\bar{\mu}}(x) \\
&= -M^{\bar{a}}_{\bar{d}}(x) \hat{\beta}^{\bar{d}}_{\bar{\mu}}(x),
\end{aligned}
$$

onde $M_{\bar{c}\bar{d}}(y)$ é uma matriz antissimétrica.

Analogamente, podemos confirmar o significado geométrico dos outros vínculos analisando o papel de seu fluxo Hamiltoniano. Assim, para o vínculo vetorial $\chi_{\bar{\mu}}(x)$ calculemos

$$
\begin{aligned}
\{\hat{\beta}^{\bar{a}}_{\bar{\mu}}(x), \int_{\mathcal{U}} d^3y \xi^{\bar{\rho}}(y) \chi_{\bar{\rho}}(y)\}_P &= \int_{\mathcal{U}} d^3y \xi^{\bar{\rho}}(y) \int_{\mathcal{U}} d^3z \{\hat{\beta}^{\bar{a}}_{\bar{\mu}}(x), \chi_{\bar{\rho}}(y)\}_P \\
&= \int_{\mathcal{U}} d^3y \xi^{\bar{\rho}}(y) \int_{\mathcal{U}} d^3z \left[\frac{\delta \chi_{\bar{\rho}}(y)}{\delta \Pi^{\bar{\mu}}_{\bar{a}}(z)}\right] \delta^3(x-z) \\
&= \int_{\mathcal{U}} d^3y \xi^{\bar{\rho}}(y) \left[\frac{\delta \chi_{\bar{\rho}}(y)}{\delta \Pi^{\bar{\mu}}_{\bar{a}}(x)}\right] \\
&= \int_{\mathcal{U}} d^3y \xi^{\bar{\rho}}(y) \left[\delta^3(y-x) \partial_{\bar{\rho}} \hat{\beta}_{\bar{a}\bar{\mu}}(y) - \partial_{\bar{\mu}}(\delta^3(y-x) \hat{\beta}_{\bar{a}\bar{\rho}}(y))\right] \\
&= \xi^{\bar{\rho}}(x) \partial_{\bar{\rho}} \hat{\beta}_{\bar{a}\bar{\mu}}(x) + \hat{\beta}_{\bar{a}\bar{\rho}}(x) \partial_{\bar{\mu}} \xi^{\bar{\rho}}(x),
\end{aligned}
$$

que é exatamente menos a *variação na forma funcional* de um campo vetorial sob um difeomorfismo infinitesimal, definida por

$$\delta_0 f_\mu(x) = f'_\mu(x) - f_\mu(x),$$

onde $f_\mu(x)$ é qualquer campo tensorial covariante. Como a *variação total* é definida por

$$\delta f_\mu(x) = f'_\mu(x') - f_\mu(x),$$

a relação entre as duas variações é

$$\delta f_\mu(x) = \delta_0 f_\mu(x) + \xi^\nu(x) \partial_\nu f_\mu(x),$$

onde $x' = x + \xi(x)$, com $\xi^\nu(x)$ um campo infinitesimal. Como é bem conhecido, a variação total de um campo tensorial sob um difeomorfismo é dada por

$$f'_\mu(x') = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} f_\nu(x),$$

que expandindo até primeira ordem em ξ, se torna

$$f'_\mu(x') = f_\mu(x) - f_\nu(x) \partial_\mu \xi^\nu(x).$$

Isso implica em

$$-\delta_0 f_\mu(x) = f_\nu(x) \partial_\mu \xi^\nu(x) + \xi^\nu(x) \partial_\nu f_\mu(x),$$

que é exatamente a expressão que obtivemos para $\{\hat{\beta}^{\bar{a}}_{\bar{\mu}}(x), \int_{\mathcal{U}} d^3y \xi^{\bar{\rho}}(y) \chi_{\bar{\rho}}(y)\}_P$, substituindo $f_\mu(x)$ por $\hat{\beta}^{\bar{a}}_{\bar{\mu}}(x)$. Assim, concluimos que o vínculo vetorial é o gerador de transformação de forma sob difeomorfismos infinitesimais em $\mathcal{U}$. Em termos da derivada de Lie, podemos escrever

$$\left\{\hat{\beta}^{\bar{a}}_{\bar{\mu}}(x), \int_{\mathcal{U}} d^3y\xi^{\bar{\rho}}(y)\chi_{\bar{\rho}}(y)\right\}_P = \mathcal{L}_{\vec{\xi}}(\hat{\beta}). \tag{3.17}$$

Com relação ao vínculo escalar, calculemos:

$$\begin{aligned}
\{\hat{\beta}^{\bar{a}}_{\bar{\mu}}(x), \int_{\mathcal{U}} d^3y\xi(y)\chi_0(y)\}_P &= -\{\hat{\beta}^{\bar{a}}_{\bar{\mu}}(x), \int_{\mathcal{U}} d^3y\xi(y)\frac{1}{2}\frac{1}{\det(\hat{\beta})} \times \left(\Pi^{\bar{\sigma}\bar{\nu}} - \frac{1}{2}\Pi\hat{g}^{\bar{\sigma}\bar{\nu}}\right)(y)\Pi_{\bar{\sigma}\bar{\nu}}(y)\}_P \\
&= -\frac{\xi(x)}{\det(\hat{\beta}(x))}\left[\Pi^{\bar{a}}_{\bar{\mu}}(x) - \frac{1}{2}\Pi(x)\hat{\beta}^{\bar{a}}_{\bar{\mu}}(x)\right] \\
&= \frac{\xi(x)}{N(x)}L^{(\bar{a}\bar{\nu})}\hat{g}_{\bar{\nu}\bar{\mu}} \\
&= \frac{\xi(x)}{N(x)}\frac{1}{2}\left[\delta^{\bar{\nu}}_{\bar{\mu}}\delta^{\bar{a}}_{\bar{c}} + e^{\bar{a}\bar{\nu}}\beta_{\bar{c}\bar{\mu}}\right]L^{\bar{c}}_{\bar{\nu}}(x) \\
&= \frac{1}{2}\left[\delta^{\bar{\nu}}_{\bar{\mu}}\delta^{\bar{a}}_{\bar{c}} + e^{\bar{a}\bar{\nu}}\beta_{\bar{c}\bar{\mu}}\right]\frac{\xi(x)}{N(x)}[\mathcal{L}_{Nn}(\beta)]^{\bar{c}}_{\bar{\nu}}(x) \\
&= \frac{1}{2}\left[\delta^{\bar{\nu}}_{\bar{\mu}}\delta^{\bar{a}}_{\bar{c}} + e^{\bar{a}\bar{\nu}}\beta_{\bar{c}\bar{\mu}}\right][\mathcal{L}_{\xi n}(\beta)]^{\bar{c}}_{\bar{\nu}}(x),
\end{aligned}$$

onde usamos a propriedade da derivada de Lie

$$\mathcal{L}_{fX}(w) = f\mathcal{L}_X(w) + w_\mu X^\mu(\partial_\nu f)dx^\nu.$$

Utilizando o fato que, no gauge de Schwinger, $n^a = \beta^a_\mu n^\mu$ e $n^a = \delta^a_0$, temos

$$\begin{aligned}
\frac{\xi(x)}{N(x)}[\mathcal{L}_{Nn}(\beta)]^{\bar{c}}_{\bar{\nu}} &= [\mathcal{L}_{\xi n}(\beta)]^{\bar{c}}_{\bar{\nu}} - \beta^{\bar{c}}_{\bar{\mu}}Nn^{\bar{\mu}}\partial_{\bar{\nu}}\left(\frac{\xi}{N}\right) \\
&= [\mathcal{L}_{\xi n}(\beta)]^{\bar{c}}_{\bar{\nu}}.
\end{aligned}$$

Os mesmos parênteses, calculados para a métrica, são

$$\begin{aligned}
\{\hat{g}_{\bar{\sigma}\bar{\rho}}, \int_{\mathcal{U}} d^3y\xi(y)\chi_0(y)\}_P &= \frac{\delta\hat{g}_{\bar{\sigma}\bar{\rho}}}{\delta\hat{\beta}^{\bar{a}}_{\bar{\mu}}}\{\hat{\beta}^{\bar{a}}_{\bar{\mu}}(x), \int_{\mathcal{U}} d^3y\xi(y)\chi_0(y)\}_P \\
&= \frac{1}{2}\left[\delta^{\bar{\mu}}_{\bar{\rho}}\hat{\beta}^{\bar{a}}_{\bar{\sigma}} + \delta^{\bar{\mu}}_{\bar{\sigma}}\hat{\beta}^{\bar{a}}_{\bar{\rho}}\right]\left[\delta^{\bar{\nu}}_{\bar{\mu}}\delta^{\bar{a}}_{\bar{c}} + e^{\bar{a}\bar{\nu}}\hat{\beta}_{\bar{c}\bar{\mu}}\right][\mathcal{L}_{\xi n}(\beta)]^{\bar{c}}_{\bar{\nu}} \\
&= \left[\delta^{\bar{\nu}}_{\bar{\rho}}\hat{\beta}_{\bar{c}\bar{\sigma}} + \delta^{\bar{\nu}}_{\bar{\sigma}}\hat{\beta}_{\bar{c}\bar{\rho}}\right][\mathcal{L}_{\xi n}(\beta)]^{\bar{c}}_{\bar{\nu}} \\
&= 2[\mathcal{L}_{\xi n}(\beta)]_{(\bar{\sigma}\bar{\rho})} \\
&= [\mathcal{L}_{\xi n}(\hat{g})]_{\bar{\sigma}\bar{\rho}}.
\end{aligned}$$

O significado geométrico desta expressão é claro: o vínculo escalar é o gerador de transformações de coordenada na direção normal às subvariedades $\mathcal{U}$ para a métrica.

3.6 Novas variáveis

Tendo em mãos os vínculos e sua álgebra, vemos explicitamente que os vínculos escalar e vetorial dependem de um modo altamente não polinomial nas variáveis canônicas β e Π. Além de ser uma grande dificuldade técnica lidar com estes vínculos, sua forma torna inviável qualquer empreitada direta de quantização (e.g. através do algoritmo de Dirac) devido ao teorema de Groenwold-van Hove [19], que impossibilita a construção de uma representação unitária e irredutível agindo em certos espaços de Hilbert de álgebras cujos vínculos são polinômios de grau maior que dois nas variáveis canônicas. Assim, seguindo as idéias apresentadas em [3], [24] e [25], nosso objetivo nesta seção é encontrar um novo conjunto de variáveis canônicas e uma nova representação dos vínculos satisfazendo os seguintes requerimentos:

- Os vínculos escalar e vetorial devem ser polinômios de grau menor ou igual a dois nas novas variáveis canônicas;
- O vínculo gerador de transformações de SO(3), $\Pi^{[\bar{c}\bar{d}]}(y)$, deve ser escrito numa forma semelhante ao vínculo de Gauss (após a introdução de uma conexão apropriada), permitindo o uso na RG de técnicas válidas em teorias do tipo Yang-Mills;
- Introdução das densidades de tríadas como variáveis canônicas. Isto é útil, pois densidades tensoriais são melhor definidas em variedades não Euclidianas do que campos tensoriais puros.

Antes de prosseguir, faremos modificações na notação de modo a simplificá-la e torná-la mais semelhante à notação utilizada nas principais referências sobre o assunto. Após a decomposição ADM das variáveis canônicas do teleparalelismo, os valores relevantes para os índices vão de 1 à 3 (tanto para os índices de Lorentz quanto os do espaço-tempo), de modo que não é necessário carregar a notação com barras sobre os índices. A partir deste ponto, passaremos a utilizar os índices latinos do começo do alfabeto $a, b, c \ldots$ para representar objetos sobre a subvariedade $\mathcal{U}$ e os índices latinos do meio do alfabeto $i, j, k, \ldots$ para representar objetos de SO(3).

Com esta nova notação, a relação entre a parte simétrica de L^{ia} e o momento conjugado à tríada se escreve

$$\begin{aligned} L^{(ia)} &= -\frac{N}{\det(\hat{\beta})}\left(\Pi^{ia} - \frac{1}{2}\Pi e^{ai}\right) \\ &= M^{ia}, \end{aligned}$$

onde definimos o tensor $M^{ia} = L^{(ia)}$. Denotaremos as densidades de tríadas e cotríadas, respectivamente, por

$$\begin{aligned} E^a_i &= \det(\hat{\beta})\hat{e}^a_i, \\ E^i_a &= \det(e)\hat{\beta}^i_a. \end{aligned}$$

Estas relações podem ser facilmente invertidas, bastando para isso notar que

$$E = \det(E^a_i) = \det{}^2(\hat{\beta}).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \hat{e}^a_i &= E^{-\frac{1}{2}}E^a_i, \\ \hat{\beta}^i_a &= E^{\frac{1}{2}}E^i_a. \end{aligned}$$

Para promover a densidade de tríada E^a_i como variável canônica, basta encontrar uma transformação canônica que leve as tríadas nas densidades de tríadas. Para este propósito, notemos primeiramente que

$$\begin{aligned} \{E^a_i, M^b_k\}_P &= \frac{\delta E^a_i}{\delta\hat{\beta}^j_c}\left\{\hat{\beta}^j_c, M^b_k\right\}_P \\ &= \frac{\delta E^a_i}{\delta\hat{\beta}^j_c}\frac{\delta M^b_k}{\delta\Pi^c_j} \\ &= -N\left(\hat{e}^c_j\hat{e}^a_i - \hat{e}^c_i\hat{e}^a_j\right)\left(\delta^j_k\delta^b_c - \frac{1}{2}\hat{\beta}^j_c\hat{e}^b_k\right) \\ &= -N\left(\hat{e}^b_k\hat{e}^a_i - \frac{3}{2}\hat{e}^a_i\hat{e}^b_k - \hat{e}^b_i\hat{e}^a_k + \frac{1}{2}\hat{e}^a_i\hat{e}^b_k\right) \\ &= N\hat{e}^b_i\hat{e}^a_k. \end{aligned}$$

A partir desta observação, é simples encontrar uma variável conjugada à E^a_i. De fato, escrevendo

$$P^k_b = \frac{1}{N} M^a_i \hat{\beta}^i_b \hat{\beta}^k_a,$$

podemos verificar que

$$\{E^a_i, P^k_b\}_P \;\; = \;\; \delta^k_i \delta^a_b.$$

Agora, analisaremos os vínculos, começando por reescrever o vínculo de $SO(3)$ com estas novas variáveis canônicas:

$$\begin{aligned} \phi_{ij} &= \hat{e}^a_{[j} \Pi_{i]a} \approx 0 \\ &= E^{-\frac{1}{2}} E^a_{[j} \Pi_{i]a} \\ &\Leftrightarrow \; E^a_{[j} \Pi_{i]a} \approx 0 \\ &\Leftrightarrow \; E^a_{[j} P_{i]a} \approx 0. \end{aligned}$$

Assim, podemos redefinir este vínculo de duas maneiras diferentes. Uma delas consiste simplesmente em

$$G_{ij} = E^a_{[j} P_{i]a} \approx 0,$$

e a outra se baseia na constatação de que, em 3 dimensões, podemos fazer a identificação

$$G_{ij} \approx 0 \quad \Leftrightarrow G_k = \epsilon_{ijk} E^a_j P_{ia} \approx 0.$$

Esta equivalência será essencial mais a frente para a construção das variáveis de Ashtekar.

Para escrever o vínculo de $SO(3)$ como um vínculo de Gauss e possibilitar a redefinição dos vínculos escalar e vetorial como polinômios, nos valeremos de duas transformações canônicas (como em [24]): uma transformação global de Weyl e uma transformação Afim no momento Π. A transformação global de Weyl é definida simplesmente por

$$(P^i_a, E^b_j) \rightarrow (\gamma P^i_a, \gamma^{-1} E^b_j), \qquad \gamma \in \mathrm{C},$$

o que, evidentemente, não modifica os parênteses de Poisson. Para encontrar a transformação afim apropriada, relembremos a definição da conexão de spin Ω: da identidade

$$D_a \hat{\beta}^j_c = \partial_a \hat{\beta}^j_c + \Omega^j_{ak} \hat{\beta}^k_c - \Gamma^d_{ac} \hat{\beta}^j_d = 0,$$

onde Γ é a conexão de Levi-Civita, vemos que

$$\Omega^j_{ak} = \hat{e}^c_k \Gamma^d_{ac} \hat{\beta}^j_d - \hat{e}^c_k \partial_a \hat{\beta}^j_c. \tag{3.18}$$

Utilizando a extensão da derivada covariante D_a para densidades tensoriais, e aplicando-a à E^b_k, obtemos:

$$\begin{aligned} D_a E^b_k &= \partial_a E^b_k + \Gamma^b_{ac} E^c_k - \Gamma^c_{ac} E^b_k + \Omega^j_{ak} E^b_j \\ &= \det(\hat{\beta}) D_a \hat{e}^b_k - \Gamma^c_{ac} E^b_k + \hat{e}^b_k \partial_a \det(\hat{\beta}) \\ &= \det(\hat{\beta}) D_a \hat{e}^b_k - \Gamma^c_{ac} E^b_k + E^b_k \hat{e}^c_j \partial_a \hat{\beta}^j_c \\ &= \det(\hat{\beta}) D_a \hat{e}^b_k - \Gamma^c_{ac} E^b_k + E^b_k (\hat{e}^c_j \Gamma^d_{ac} \hat{\beta}^j_d - \Omega^j_{aj}) \\ &= \det(\hat{\beta}) D_a \hat{e}^b_k - \Gamma^c_{ac} E^b_k + E^b_k (\Gamma^c_{ac} - \Omega^j_{aj}) \\ &= \det(\hat{\beta}) D_a \hat{e}^b_k \\ &= 0. \end{aligned}$$

Em particular,

$$D_a E^a_k = \partial_a E^a_k + \Omega^I_a [T_I]^j_k E^a_j = 0,$$

onde introduzimos uma aplicação entre as representações fundamental e adjunta de SO(3),

$$\Omega_{ak}^{j} = \Omega_a^I [T_I]_k^j = \Omega_a^i \epsilon_{ijk},$$

válida apenas em três dimensões espaciais.

Com estes resultados e definições, podemos reescrever o vínculo de $SO(3)$ de uma maneira astuciosa:

$$\begin{aligned}
G_k &= \epsilon_{ijk} \frac{1}{\gamma} E_j^a \gamma P_{ia} \\
&= D_a \frac{1}{\gamma} E_k^a + \epsilon_{ijk} \frac{1}{\gamma} E_j^a \gamma P_{ia} \\
&= \partial_a \frac{1}{\gamma} E_k^a + \Omega_a^I [T_I]_k^j \frac{1}{\gamma} E_j^a + \epsilon_{ijk} \frac{1}{\gamma} E_j^a \gamma P_{ia} \\
&= \partial_a \frac{1}{\gamma} E_k^a + \Omega_a^i \epsilon_{ijk} \frac{1}{\gamma} E_j^a + \epsilon_{ijk} \frac{1}{\gamma} E_j^a \gamma P_{ia} \\
&= \mathcal{D}_a \frac{1}{\gamma} E_k^a \\
&= \mathcal{D}_a {}^{\gamma} E_k^a .
\end{aligned}$$

Note que Ω_a^i não depende de γ, e portanto é invariante por transformações globais de Weyl. Isto pode ser verificado a partir de (3.18), e escrevendo a conexão de spin em termos da densidade de tríadas:

$$\begin{aligned}
\Omega_a^i &= \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} \hat{e}_k^b \left[\partial_b \hat{\beta}_a^j - \partial_a \hat{\beta}_b^j + \hat{\beta}_a^l \hat{e}_j^c \partial_b \hat{\beta}_c^l \right] \\
&= \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} E^{-\frac{1}{2}} E_k^b \left[E^{\frac{1}{2}} \left(\partial_b E_a^j - \frac{1}{2} E_a^j E_m^d \partial_b E_d^m \right) \right. \\
&- \left. E^{\frac{1}{2}} \left(\partial_a E_b^j - \frac{1}{2} E_b^j E_m^d \partial_a E_d^m \right) + E^{\frac{1}{2}} E_a^l E_j^c \left(\partial_b E_c^l - \frac{1}{2} E_c^l E_m^d \partial_b E_d^m \right) \right] \\
&= \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} E_k^b \left(\partial_b E_a^j - \partial_a E_b^j + E_a^l E_j^c \partial_b E_c^l \right) + \frac{1}{4} \epsilon^{ijk} E_k^b \left(-2 E_a^j E_m^d \partial_b E_d^m + E_b^j E_m^d \partial_a E_d^m \right),
\end{aligned}$$

de onde verificamos diretamente que a conexão de spin é uma função homogênea de grau zero da densidade de tríada.

Se introduzirmos o objeto

$${}^{\gamma} A_a^i = \Omega_a^i + \gamma P_a^i,$$

o vínculo de SO(3) se torna

$$\mathcal{D}_a {}^{\gamma} E_k^a = \partial_a \frac{1}{\gamma} E_k^a + {}^{\gamma} A_a^i \epsilon_{ijk} \frac{1}{\gamma} E_j^a \approx 0.$$

Podemos verificar também que o conjunto de variáveis $(\gamma E_j^a, {}^{\gamma} A_a^i)$ é uma transformação canônica do par $(\gamma E_j^a, \gamma P_a^i)$. Os únicos parênteses de Poisson não trivialmente nulos das variáveis E_i^a e ${}^{\gamma} A_a^i$ são $\{ {}^{\gamma} A_a^i(x), {}^{\gamma} A_b^j(y) \}_P$ e a verificação de sua nulidade depende de um lema crucial para o desenvolvimento das variáveis de Ashtekar:

Lema 9 *Seja $G[E]$ um funcional da densidade de tríada definido por*

$$G[E] = \epsilon^{abc} \int_{\mathcal{U}} d^3x \beta^k{}_c \frac{\partial \beta_{kb}}{\partial x^a}.$$

Então, a conexão de spin se relaciona com G através de

$$\Omega_a{}^{ij} \epsilon_{ijk} = \frac{\delta G[E]}{\delta E^{ka}}$$

ou, equivalentemente,

$$\Omega^k_a = \frac{1}{2}\frac{\delta G[E]}{\delta E^{ka}}.$$

Graças ao lema acima, podemos calcular $\{^\gamma A^i_a(x), ^\gamma A^j_b(y)\}_P$:

$$\begin{aligned}
\{^\gamma A^i_a(x), ^\gamma A^j_b(y)\}_P &= \{\Omega^i_a + \gamma P^i_a, \Omega^j_b + \gamma P^j_b\}_P \\
&= \gamma\left(\{\Omega^i_a, P^j_b\}_P + \{P^i_a, \Omega^j_b\}_P\right) \\
&= \gamma\left(\{\Omega^i_a, P^j_b\}_P - \{\Omega^j_b, P^i_a\}_P\right) \\
&= \gamma\left(\frac{\delta\Omega^i_a}{\delta E^b_j} - \frac{\delta\Omega^j_b}{\delta E^a_i}\right) \\
&= \frac{\gamma}{2}\left(\frac{\delta^2}{\delta E^b_j \delta E^a_i} - \frac{\delta^2}{\delta E^a_i \delta E^b_j}\right) G[E] \\
&= 0.
\end{aligned}$$

A partir deste ponto, podemos reinterpretar as variáveis canônicas como provindas de uma teoria de gauge para $SO(3)$, onde as variáveis $^\gamma A^i_a(x)$ são as componentes espaciais da conexão de gauge

$$^\gamma A = ^\gamma A^i_a T_i dx^a.$$

O análogo ao campo elétrico desta conexão é dado pela densidade de tríada, interpretada como assumindo valores na álgebra de Lie de $SO(3)$:

$$\gamma E = \gamma E^a_i T^i \partial_a.$$

O que torna esta interpretação consistente é a existência do vínculo do tipo Gauss:

$$[\gamma\mathcal{D}_a {}^\gamma E]^a = \partial_a \frac{1}{\gamma} E^a + [E^a, ^\gamma A_a] \approx 0.$$

A conexão $^\gamma A$ é chamada de conexão de Barbero-Immirzi-Sen-Ashtekar [24], mas por questões de simplicidade nos referiremos a ela como conexão de Ashtekar apenas. O propósito do parâmetro γ será justificado mais a frente, onde ele será necessário para colocar os vínculos escalar e vetorial numa forma polinomial.

Quanto aos vínculos vetorial e escalar, escrevendo-os primeiramente em termos de E e P, obtemos:

$$\begin{aligned}
\chi_a &= \Pi^b_k \partial_a \hat{\beta}^k_b - \partial_b\left(\Pi^b_k \hat{\beta}^k_a\right) \\
&= -\frac{\det(\hat{\beta})}{N}(M^b_i - M\hat{e}^b_i)\partial_a\hat{\beta}^i_b + \partial_b\left[\frac{\det(\hat{\beta})}{N}(M^b_i - M\hat{e}^b_i)\hat{\beta}^i_a\right] \\
&= -\left(P^k_c E^b_k - P^k_d E^d_k \delta^b_c\right)\hat{e}^c_i \partial_a \hat{\beta}^i_b + \partial_b\left(P^k_a E^b_k - P^k_d E^d_k \delta^b_a\right) \\
&= \left(\delta^c_a \partial_b - \hat{e}^c_i \partial_a \hat{\beta}^i_b\right)\left(P^k_c E^b_k - P^k_d E^d_k \delta^b_c\right)
\end{aligned}$$

e

$$
\begin{aligned}
\chi_0 &= -\frac{1}{2}\frac{1}{\det(\hat{\beta})}\left(\Pi^{ab} - \frac{1}{2}\Pi\hat{g}^{ab}\right)\Pi_{ab} + \frac{1}{2}\det(\hat{\beta})\bar{R}(\hat{\beta}) \\
&= \frac{1}{2N}M^{ia}\Pi_{ia} + \frac{1}{2}\det(\hat{\beta})\bar{R}(\hat{\beta}) \\
&= -\frac{\det(\hat{\beta})}{2N^2}M_i^a\left(M_i^b - Me_i^b\right)\hat{g}_{ab} + \frac{1}{2}\det(\hat{\beta})\bar{R}(\hat{\beta}) \\
&= -\frac{\det(\hat{\beta})}{2}\left(P_a^iP_b^j - P_a^jP_b^i\right)\hat{e}_j^a\hat{e}_i^b + \frac{1}{2}\det(\hat{\beta})\bar{R}(\hat{\beta}) \\
&= -\frac{\det^{-1}(\hat{\beta})}{2}\left(P_a^iP_b^j - P_a^jP_b^i\right)E_j^aE_i^b + \frac{1}{2}\det(\hat{\beta})\bar{R}(\hat{\beta}) \\
&= -\frac{E^{-\frac{1}{2}}}{2}\left(P_a^iP_b^j - P_a^jP_b^i\right)E_j^aE_i^b + \frac{1}{2}\det(\hat{\beta})\bar{R}(\hat{\beta}).
\end{aligned}
$$

Em termos das variáveis de Ashtekar ${}^{\gamma}E_k^a$ e ${}^{\gamma}A_b^i$ [24], obtemos

$$
\begin{aligned}
\chi_0 &= \left[\gamma^{2\gamma}F_{ab}^j + \left(\gamma^2 + \frac{1}{4}\right)\epsilon_{jmn}{}^{\gamma}P_a^{m\gamma}P_b^n\right]\frac{\epsilon_{jkl}{}^{\gamma}E_k^{a\gamma}E_l^b}{\sqrt{\det({}^{\gamma}g\gamma)}}, \\
\chi_a &= \frac{1}{\gamma}{}^{\gamma}F_{ab}^j{}^{\gamma}E_j^b,
\end{aligned}
$$

onde

$$
{}^{\gamma}F_{ab}^j = \partial_aA_b^j - \partial_bA_a^j + \epsilon_{jkl}{}^{\gamma}A_a^{k\gamma}A_b^l
$$

é a curvatura da conexão ${}^{\gamma}A_b^i$.

Com estas expressões para os vínculos, podemos entender a importância do parâmetro γ: se o fixarmos em $\gamma = \pm\frac{i}{2}$, obtemos:

$$
\chi_0 = \gamma^{2\gamma}F_{ab}^j\frac{\epsilon_{jkl}{}^{\gamma}E_k^{a\gamma}E_l^b}{\sqrt{\det({}^{\gamma}g\gamma)}} \quad \Leftrightarrow \quad \chi_0' = \gamma^{2\gamma}F_{ab}^j\epsilon_{jkl}{}^{\gamma}E_k^{a\gamma}E_l^b, \tag{3.19}
$$

ou seja, o vínculo escalar se torna equivalente a um vínculo polinomial de grau 2 nas variáveis canônicas, com o custo de complexifica-las. Para que esta construção seja equivalente à RG real, precisamos impor condições de realidade às variáveis de Ashtekar:

$$
{}^{\gamma}E = -\overline{{}^{\gamma}E},
$$

e

$$
{}^{\gamma}A_a^i - \Omega_a^i = -\overline{({}^{\gamma}A_a^i - \Omega_a^i)}.
$$

Estas condições são equivalentes a dizer que o par de objetos (P_a^i, E_j^b) é real. Note porém que Ω_a^i é uma função não polinomial de E_i^a, o que torna a realização destas condições não trivial [24] e [3].

Neste ponto, seria interessante estabelecer a relação entre estas variáveis e as variáveis de Ashtekar utilizadas para a RG em termos de tetradas, e sua relação com o desenvolvimento original de Ashtekar baseado na escolha da parte auto-dual da conexão de spin (4-dimensional). Para isso, utilizaremos uma relação conhecida [24] [25] entre o momento canônico à métrica da folha e a curvatura extrínseca,

$$
\Pi_{ab} = \det(\hat{e})\left(K_{ab} - \hat{g}_{ab}K\right), \tag{3.21}
$$

onde K_{ab} é definido pela projeção espacial do tensor

$$
K_{\mu\nu} = \left[\mathcal{D}_{\mu}n\right]_{\nu},
$$

que é conhecido como curvatura extrínseca. Assim, combinando a expressão (3.21) com o resultado já obtido neste capítulo, isto é,

$$\Pi^{ab} = -\frac{\det(\hat{\beta})}{N}\left(L^{(ab)} - L\hat{g}^{ab}\right),$$

podemos deduzir a relação entre $L^{(ab)}$, M_{ab} e K^{ab}:

$$K_{ab} = -\frac{L_{(ab)}}{N} = -\frac{M_{ab}}{N}.$$

Introduzindo o objeto K_a^i através da expressão

$$K_a^i = -2\hat{e}^{ib}K_{ab},$$

obtemos diretamente sua relação com a variável canônica P_a^i:

$$K_a^i = P_a^i.$$

Esta última identificação serve de ponte para ligação entre o que desenvolvemos partindo das variáveis teleparalelas e o desenvolvimento usual da RG em termos da curvatura.

Para estabelecer uma relação como o formalismo auto-dual de Ashtekar, escrevamos K_a^i em termos da definição da curvatura extrínseca,

$$K_a^i = -2\hat{e}^{ib}\left[\mathcal{D}_a n\right]_b,$$

notando que, no gauge de Schwinger, $n_b = \beta_b^0$, e usando o fato que a derivada covariante $\mathcal{D}_a$ é compatível com as tetradas, i.e., $\mathcal{D}_a\beta_b^i = 0$, obtemos:

$$K_a^i = 2\hat{e}^{ib}{\omega_a}^0{}_\alpha e_b^\alpha.$$

Assim, a conexão de Ashtekar pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} {}^\gamma A_a^i &= \Omega_a^i + \gamma K_a^i \Rightarrow \\ {}^\gamma A_{ajk} &= \Omega_{ajk} + \gamma K_{ai}\epsilon_{ijk} \\ &= \Omega_{ajk} + 2\gamma\hat{e}^{ib}{\omega_a}^0{}_\alpha e_b^\alpha\epsilon_{ijk}. \end{aligned}$$

Da definição do operador Hodge [17], notemos que

$$\begin{aligned} (*\omega_{ajk}) &= \frac{1}{2}\epsilon_{jk\gamma\delta}\omega_{a\gamma\delta} \\ &= \epsilon_{jk0\delta}\omega_{a\gamma\delta} + \frac{1}{2}\epsilon_{jklm}\omega_{alm} \\ &= \epsilon_{jki}\omega_{a0i}, \end{aligned}$$

implicando que a conexão de Ashtekar nada mais é do que:

$${}^\gamma A_{ajk} = \Omega_{ajk} + \gamma\left[*\Omega_a\right]_{jk}.$$

Ou seja, se $\gamma = \pm\frac{i}{2}$, ${}^\gamma A_{ajk}$ corresponde às partes auto-dual ou anti-auto-dual da conexão de spin, encerrando a relação entre a escolha do parâmetro de Immirzi e o desenvolvimento inicial de Ashtekar.

Com o procedimento apresentado, atingimos os objetivos iniciais desta seção: o vínculo de $SO(3)$ se tornou um vínculo do tipo Gauss, e os vínculos escalar e vetorial se tornaram polinômios de grau 2 nas variáveis canônicas — às custas da introdução do problema das condições de realidade que são não polinomiais.

Para ilustrar como nestas variáveis o uso de técnicas e ferramentas desenvolvidas para teoria de Yang-Mills pode ser feito, definamos o objeto, $H_\wp[A]$, chamado *holonomia*,

$$H_\wp[A] = P_\wp e^{-i\int_\wp {}^\gamma A_a dy^a},$$

onde $\wp : [0,1] - > \mathcal{U}$ é uma curva diferenciável, $P_\wp$ denota o operador de ordenamento ao longo da curva $\wp$, e ${}^\gamma A_a = {}^\gamma A_a^i T_i$, sendo T_i os geradores da álgebra de Lie de $SO(3)$. Lembrando do capítulo 2, onde mostramos que o vínculo de Gauss é o gerador de transformações infinitesimais de gauge da teoria, podemos aplicar diretamente às variáveis de Ashtekar:

$$\delta_\theta A_a^j = \left\{ A_a^j, \int_{\mathcal{U}} d^3 z \theta^i \left[{}^\gamma \mathcal{D}_c E^c \right]_i \right\}_P = - \left[{}^\gamma \mathcal{D}_a \theta \right]^j, \tag{3.22}$$

e

$$\delta_\theta E_j^a = \left\{ E_j^a, \int_{\mathcal{U}} d^3 z \theta^i \left[{}^\gamma \mathcal{D}_c E^c \right]_i \right\}_P = [E^a, \theta]_j. \tag{3.23}$$

Analogamente, dado $g \in SO(3)$, temos

$${}^\gamma A'_a = g^\gamma A_a g^{-1} + g \partial_a g^{-1}.$$

Aplicando esta lei de transformação à holonomia, podemos mostrar, expandindo a exponencial em série e aplicando o operador de ordenamento ordem a ordem, que ela se transforma como

$$H'_\wp[A] = g(\wp(0)) H_\wp[A] g^{-1}(\wp(1)),$$

de modo que se $\wp$ for uma curva fechada, i.e., $\wp(0) = \wp(1)$, e tomarmos o traço da holonomia, obtemos o objeto

$$W_\wp[A] = Tr \left[P_\wp e^{-i \oint_\wp {}^\gamma A_a dy^a} \right],$$

chamado *loop de Wilson*. O loop de Wilson foi introduzido originalmente para se estudar questões não perturbativas em QCD, e é invariante de gauge devido à simetria por permutações cíclicas do traço. Com este resultado, estes funcionais podem ser usados para resolver ao menos o vínculo de Gauss da teoria. Os loops de Wilson foram posteriormente generalizados por meio das chamadas *funções cilíndricas* [24], e das *redes de spin*.

Note, no entanto, que aparentemente não há um modo simples de lidar com os outros vínculos. Por exemplo, a ação de um difeomorfismo sobre o loop de Wilson é da forma

$$\phi W_\wp[A] = W_\wp[\phi^* A] = W_{\phi^{-1} \circ \wp}[A],$$

ou seja, a ação de ϕ em $W_\wp[A]$ corresponde a uma deformação de $\wp$, de modo que não há uma maneira não trivial de construir funcionais deste tipo, e que sejam invariantes por ϕ.

Capítulo 4

Conclusões e Comentários Finais

No primeiro capítulo, mostramos que mesmo em nível clássico, há várias alternativas diferentes para a gravitação. Algumas dessas alternativas são equivalentes entre si sob certas hipóteses. Em alguns casos, como na teoria de gauge para o grupo de Poincaré e no teleparalelismo, a torção aparece como um objeto relevante, tendo significados geométricos diferentes, dependendo das escolhas (da Lagrangiana e de restrições na conexão de spin) feitas em cada modelo. A prova da equivalência entre as Lagrangianas teleparalela e de Einstein-Hilbert é um forte indício matemático de que existe uma liberdade de escolha, entre descrever a gravitação em termos da curvatura ou da torção de conexões apropriadas.

Todos estes modelos são ou foram tentativas de expressar a gravitação em termos de uma teoria de gauge. No entanto, não se pode ir muito longe com esta interpretação de gauge pois nestes modelos (Poincaré, Afim, Einstein-Cartan e teleparalelo) é preciso misturar os índices internos do grupo de simetria com os índices do espaço-tempo na Lagrangiana de modo a obter os resultados corretos, o que torna estas Lagrangianas diferentes das Lagrangianas das teorias de gauge padrão. Assim, seria mais apropriado dizer que estes modelos são *gauge-like* mas não são teorias de gauge *stricto sensu*.

Uma observação interessante é que, como uma teoria *gauge-like*, o teleparalelismo tem uma aparente vantagem sobre os outros modelos, que é o fato de suas equações de movimento serem obtidas pela variação da Lagrangiana em relação ao campo de gauge, diferentemente das teorias para o grupo de Poincaré e Afim, o que o torna mais próximo das teorias de gauge padrão.

Com as ferramentas exploradas no capítulo 2 e com a técnica de folheação ADM, obtivemos a Hamiltoniana e a álgebra de vínculo do teleparalelismo, que é exatamente a mesma da GR em termos de tetradas. Como esperado dos capítulos 1 e 2, os vínculos são funções não polinomiais das variáveis canônicas (tríadas e seus momentos), o que constitui uma dificuldade não apenas técnica mas também uma dificuldade real em definir o ordenamento normal das variáveis canônicas [19].

Com a finalidade de dar os primeiros passos na quantização da formulação teleparalela da RG, exploramos as variáveis de Sen-Ashtekar-Immirzi-Barbero que constituem uma transformação canônica e uma nova escolha na representação dos vínculos de modo a simplificá-los. Um caso particular destas variáveis, quando o parâmetro de Immirzi é puramente complexo, $\gamma = \pm i/2$, os vínculos escalar e vetorial se tornam polinomiais de grau 2, o que corresponde a uma grande simplificação da teoria, às custas da complexificação do espaço de fases. Apesar da simplificação da forma dos vínculos, a complexificação introduz novos problemas que aparentemente ainda não foram resolvidos [24].

Tendo os vínculos como polinômios de grau 2, o próximo passo do programa de quantização canônica seria encontrar o espaço de Hilbert que é aniquilado pelos vínculos e é neste momento que entram os trabalhos pioneiros [3], [4], [5], [24] e outros que propõe a substituição do grupo $SO(3)$ por $SU(2)$ ou $SL(2,C)$, e a introdução de um espaço de Hilbert cujos elementos são rotulados por grafos chamados *redes de spin*, que são auto-estados dos operadores de área e volume simultaneamente na representação de loops. Note que o programa de quantização canônica está longe de ser completamente consistente e correto, de modo que ele deveria ser entendido como uma primeira tentativa ou uma aproximação da versão quântica final de qualquer teoria. Assim, tendo em vista que a escolha das variáveis de Ashtekar é apenas o começo de um empreendimento muito mais ambicioso e complexo chamado LQG, há muitos problemas que podem ser explorados na continuidade deste trabalho. Como exemplo podemos mencionar o estudo das possíveis implicações e interpretações do parâmetro de Immirzi, o estudo do espaço de Hilbert aniquilado pelos vínculos, o estudo da regularidade dos vínculos em termos das variáveis de Ashtekar, e o estudo do papel da torção da conexão de Ashtekar na gravidade. Lembremos que, ao introduzir a curvatura extrínseca multiplicada pelo parâmetro de Immirzi, a conexão adquire naturalmente uma torção, cujo papel é ainda uma questão em aberto.

Apêndice A

Solução de $(\triangle + gK)\,T = \delta$

Seja G uma solução de $\triangle G = \delta$, onde $\triangle$ é o Laplaciano. Sabemos que, com as condições de contorno apropriadas, G é dada por

$$G = -\frac{1}{4\pi r}.$$

Escrevendo

$$\triangle T = -gKT + \delta, \tag{A.1}$$

onde K é um operador diferencial agindo em T. Podemos encontrar T como uma série de potências de g, assumindo:

$$T = \sum_{k=0}^{\infty} g^k T_k, \tag{A.2}$$

e substituindo esta expressão na equação diferencial, obtemos:

$$\triangle T_0 + \sum_{k=0}^{\infty} g^{k+1} \triangle T_{k+1} = \delta - K \sum_{k=0}^{\infty} g^{k+1} T_k \tag{A.3}$$

o que nos leva ao conjunto de equações abaixo :

$$\begin{cases} T_0 = G, \\ \vdots \\ T_k = -\int GKT_{k-1}, \\ \vdots \end{cases}$$

Assim, formalmente T pode ser escrito como

$$T = G - gGKG + g^2 GKGKG - \ldots,$$

esta série na constante de acoplamento é conhecida como *série de Dyson-Shwinger* e é muito comum em problemas de espalhamento em mecânica quântica.

Apêndice B

Equações de movimento teleparalelas

Para simplificar os cálculos, definamos primeiramente:

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{\partial \mathcal{L}_{\mathrm{TT}}(\beta, d\beta)}{\partial \beta^a_\mu(x)}, \\ E_2 &= \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}_{\mathrm{TT}}(\beta, d\beta)}{\partial_\nu \beta^a_\mu(x)}. \end{aligned}$$

Assim, as equações de Euler-Lagrange são expressas por:

$$E_1 - E_2 = 0.$$

Antes de prosseguir, listemos algumas relações simples e úteis:

$$\begin{aligned} \frac{\partial (e^\mu_b \beta^b_\nu)}{\partial \beta^a_\rho} &= \beta^b_\nu \frac{\partial (e^\mu_b)}{\partial \beta^a_\rho} + e^\mu_b \frac{\partial (\beta^b_\nu)}{\partial \beta^a_\rho} \\ &= \beta^b_\nu \frac{\partial (e^\mu_b)}{\partial \beta^a_\rho} + e^\mu_b \delta^b_a \delta^\rho_\nu \\ &= 0 \qquad \Rightarrow \\ \beta^b_\nu \frac{\partial (e^\mu_b)}{\partial \beta^a_\rho} &= -e^\mu_b \delta^b_a \delta^\rho_\nu \qquad \Rightarrow \\ \frac{\partial (e^\mu_b)}{\partial \beta^a_\rho} &= -e^\mu_b e^\rho_a, \end{aligned} \tag{B.1}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \det(\beta)}{\partial \beta^a_\rho} &= \det(\beta) \operatorname{Tr}(e \frac{\partial \beta}{\partial \beta^a_\rho}) \\ &= \det(\beta) e^\rho_a, \end{aligned} \tag{B.2}$$

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu} &= e^\mu_a e^\nu_b \eta^{ab} \qquad \Rightarrow \\ \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial \beta^c_\rho} &= -(e^\rho_a e^\mu_c e^\nu_b + e^\mu_a e^\rho_b e^\nu_c)\eta^{ab} \\ &= -(g^{\rho\nu} e^\mu_a + g^{\mu\rho} e^\nu_a), \end{aligned} \tag{B.3}$$

$$\frac{\partial [d\beta]^a_{\mu\nu}}{\partial \beta^b_\rho} = 0, \tag{B.4}$$

$$\frac{\partial [d\beta]^a_{\mu\nu}}{\partial \partial_\rho \beta^b_\sigma} = \delta^a_b (\delta^\rho_\mu \delta^\sigma_\nu - \delta^\rho_\nu \delta^\sigma_\mu). \tag{B.5}$$

Cálculo de E_1:
Das expressões (B.1, B.2, B.3 e B.4), façamos a decomposição

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{\mathrm{TT}}}{\partial \beta^a_\rho} = \frac{\det(\beta)}{2}(\frac{1}{4}A + \frac{1}{2}B - C1 - C2) + e^\rho_a \mathcal{L}_{\mathrm{TT}},$$

onde

$$\begin{aligned} A &= T^c_{\mu\nu}\frac{\partial T_c^{\mu\nu}}{\partial \beta^a_\rho}, \\ B &= T^c_{\mu\nu}\frac{\partial T_c^{\nu\mu}}{\partial \beta^a_\rho}, \\ C1 &= T^c_{\mu c}\frac{\partial T_c^{c\mu}}{\partial \beta^a_\rho}, \\ C2 &= T_c^{c\mu}\frac{\partial T^c_{\mu c}}{\partial \beta^a_\rho}. \end{aligned}$$

Cálculo de A: Relembrando as definições seguintes Utilizando a expressão (B.4) em A temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_c^{\mu\nu}}{\partial \beta^a_\rho} &= \eta_{cb}\frac{\partial}{\partial \beta^a_\rho}\left(g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}T^b_{\alpha\beta}\right) \\ &= T_{c\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial \beta^a_\rho}\left(g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\right) \\ &= -T_{c\alpha\beta}\left[\left(g^{\rho\alpha}e^\mu_a + g^{\mu\rho}e^\alpha_a\right)g^{\nu\beta} + g^{\mu\alpha}\left(g^{\rho\nu}e^\beta_a + g^{\beta\rho}e^\nu_a\right)\right] \\ &= -\left[e^\mu_a T_c^{\rho\nu} + g^{\mu\rho}T^\nu_{ca} + g^{\rho\nu}T_c{}^\mu{}_a + e^\nu_a T_c^{\mu\rho}\right], \end{aligned}$$

o que implica

$$\begin{aligned} A &= T^c_{\mu\nu}\frac{\partial T_c^{\mu\nu}}{\partial \beta^a_\rho} \\ &= -T^c_{\mu\nu}\left[e^\mu_a T_c^{\rho\nu} + g^{\mu\rho}T^\nu_{ca} + g^{\rho\nu}T_c{}^\mu{}_a + e^\nu_a T_c^{\mu\rho}\right] \\ &= -\left[T^c_{a\nu}T_c^{\rho\nu} + T^{c\rho}_\nu T^\nu_{ca} + T^{c\rho}_\mu T_c{}^\mu{}_a + T^c_{\mu a}T_c^{\mu\rho}\right] \\ &= -2(T^c_{a\nu}T_c^{\rho\nu} + T^{c\rho}_\mu T_c{}^\mu{}_a) \\ &= -4T^c_{a\nu}T_c^{\rho\nu}. \end{aligned}$$

Cálculo de B:
Calculemos primeiramente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_c^{\nu\mu}}{\partial \beta^a_\rho} &= \frac{\partial}{\partial \beta^a_\rho}\left(\eta_{cb}\beta^b_\sigma T^{\nu\mu\sigma}\right) \\ &= \eta_{cb}\delta^b_a\delta^\rho_\sigma T^{\nu\mu\sigma} + \eta_{cb}\beta^b_\sigma\frac{\partial T^{\nu\mu\sigma}}{\partial \beta^a_\rho} \\ &= \eta_{ca}T^{\nu\mu\rho} + \eta_{cb}\beta^b_\sigma\frac{\partial T^{\nu\mu\sigma}}{\partial \beta^a_\rho}. \end{aligned}$$

Relembrando que

$$B = T^c_{\mu\nu}\frac{\partial T_c^{\nu\mu}}{\partial \beta^a_\rho},$$

façamos:

$$
\begin{aligned}
T_{\sigma\mu\nu}\frac{\partial T^{\nu\mu\sigma}}{\partial \beta^a_\rho} &= -\left[\left(g^{\rho\lambda}e^\mu_a + g^{\mu\rho}e^\lambda_a\right)T_\lambda^{\ \nu\sigma} + \left(g^{\rho\lambda}e^\sigma_a + g^{\sigma\rho}e^\lambda_a\right)T_\lambda^{\ \nu\mu}\right] \\
&= -\left(T_{\sigma a\nu}T^{\nu\rho\sigma} + T^\rho_{\ \sigma\nu}T_a^{\ \nu\sigma} + T_{a\mu\nu}T^{\nu\mu\rho} + T^\rho_{\ \mu\nu}T_a^{\ \nu\mu} + T_{\sigma\mu a}T^{\rho\mu\sigma}\right) \\
&= -\left(2T_{\sigma a\nu}T^{\nu\rho\sigma} + T_{a\mu\nu}T^{\nu\mu\rho} + 2T_{\sigma\mu a}T^{\rho\mu\sigma}\right),
\end{aligned}
$$

assim, a expressão completa de B é:

$$
\begin{aligned}
B &= T^c_{\ \mu\nu}\frac{\partial T_c^{\ \nu\mu}}{\partial \beta^a_\rho} \\
&= -2(T_{\sigma a\nu}T^{\nu\rho\sigma} + T_{\sigma\mu a}T^{\rho\mu\sigma})
\end{aligned}
$$

Cálculo de C1:
Calculemos primeiramente

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial T_c^{\ c\mu}}{\partial \beta^a_\rho} &= \frac{\partial}{\partial \beta^a_\rho}(g^{\mu\nu}e^\sigma_c T^c_{\ \nu\sigma}) \\
&= -(e^\mu_a T_\sigma^{\ \sigma\rho} + g^{\mu\rho}T^\sigma_{\ a\sigma} + T_a^{\ \rho\mu}),
\end{aligned}
$$

assim,

$$
\begin{aligned}
C1 &= T^c_{\ \mu c}\frac{\partial T_c^{\ c\mu}}{\partial \beta^a_\rho} \\
&= -T^c_{\ \mu c}(e^\mu_a T_\sigma^{\ \sigma\rho} + g^{\mu\rho}T^\sigma_{\ a\sigma} + T_a^{\ \rho\mu}) \\
&= -(T^c_{\ ac}T_\sigma^{\ \sigma\rho} + T_c^{\ c\rho}T^\sigma_{\ a\sigma} + T^c_{\ \mu c}T_a^{\ \rho\mu})
\end{aligned}
$$

Cálculo de C2:
Calculemos primeiramente:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial T^c_{\ \mu c}}{\partial \beta^a_\rho} &= \frac{\partial}{\partial \beta^a_\rho}(e^\nu_c T^c_{\ \mu\nu}) \\
&= -e^\rho_c e^\nu_c T^c_{\ \mu\nu} \\
&= -T^\rho_{\ \mu a},
\end{aligned}
$$

assim,

$$
\begin{aligned}
C2 &= T_c^{\ c\mu}\frac{\partial T^c_{\ \mu c}}{\partial \beta^a_\rho} \\
&= -T_c^{\ c\mu}T^\rho_{\ \mu a}
\end{aligned}
$$

Combinando A, B, C1 e C2:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{4}A + \frac{1}{2}B - C1 - C2 &= -T^c_{\ a\nu}T_c^{\ \rho\nu} - (T_{\sigma a\nu}T^{\nu\rho\sigma} + T_{\sigma\mu a}T^{\rho\mu\sigma}) + 2(T^c_{\ ac}T_\sigma^{\ \sigma\rho} + T^c_{\ \mu c}T_a^{\ \rho\mu}) \\
&= (T_c^{\ \rho\nu} + T_c^{\ \nu\rho} - T_c^{\ \rho\nu} - 2e^\nu_c T_\sigma^{\ \sigma\rho} + 2e^\rho_c g^{\mu\nu}T^b_{\ \mu b})T^c_{\ \nu a} \\
&= 2(K^{\rho\nu}_{\ \ \lambda}e^\lambda_c - e^\lambda_c g^\nu_\lambda T_\sigma^{\ \sigma\rho} + e^\lambda_c g^\rho_\lambda T_b^{\ b\nu})T^c_{\ \nu a} \\
&= 2e^\lambda_c S_\lambda^{\ \rho\nu}T^c_{\ \nu a},
\end{aligned}
$$

onde utilizamos a definição

$$
S_\lambda^{\ \rho\nu} = (K^{\rho\nu}_{\ \ \lambda} - g^\nu_\lambda T_\sigma^{\ \sigma\rho} + g^\rho_\lambda T_b^{\ b\nu}).
$$

Deste modo, a expressão completa de E_1 é:

$$\begin{aligned}
E_1 &= \frac{\partial \mathcal{L}_{\mathrm{TT}}(\beta, d\beta)}{\partial \beta^a_\mu(x)} \\
&= \frac{\det(\beta)}{2}(\frac{1}{4}A + \frac{1}{2}B - C1 - C2) + e^\rho_a \mathcal{L}_{\mathrm{TT}} \\
&= \frac{\det(\beta)}{2} 2e^\lambda_c S^{\rho\nu}_\lambda T^c_{\nu a} + e^\rho_a \mathcal{L}_{\mathrm{TT}}.
\end{aligned}$$

Cálculo de E_2:
Analogamente ao cálculo de E_1, façamos a decomposição:

$$\frac{\partial}{\partial(\partial_\sigma \beta^a_\rho)} \mathcal{L}_{\mathrm{TT}} = \frac{\det(\beta)}{2}\left(A + B - C\right),$$

onde

$$\begin{aligned}
A &= \frac{\partial}{\partial(\partial_\sigma \beta^a_\rho)} \left(\frac{1}{4} T^\rho_{\mu\nu} T^{\mu\nu}_\rho\right), \\
B &= \frac{\partial}{\partial(\partial_\sigma \beta^a_\rho)} \left(\frac{1}{2} T^\rho_{\mu\nu} T^{\nu\mu}_\rho\right), \\
C &= \frac{\partial}{\partial(\partial_\sigma \beta^a_\rho)} \left(T^\rho_{\rho\mu} T^{\nu\mu}_\nu\right).
\end{aligned}$$

Utilizando a expressão (B.5) e o fato que $\frac{\partial \beta^a_\mu}{\partial(\partial_\sigma \beta^c_\nu)} = 0$ calcularemos os termos A, B e C.
Cálculo de A:

$$\begin{aligned}
A &= \frac{\partial}{\partial(\partial_\sigma \beta^a_\rho)} \left(\frac{1}{4} T^\rho_{\mu\nu} T^{\mu\nu}_\rho\right) \\
&= \frac{1}{4}[\delta^a_b(\delta^\rho_\mu \delta^\sigma_\nu - \delta^\rho_\nu \delta^\sigma_\mu) T^{\mu\nu}_a + g_{\alpha\alpha'} e^{\alpha'}_a g^{\mu'\mu} g^{\nu'\nu} \delta^a_b (\delta^\rho_\mu \delta^\sigma_\nu - \delta^\rho_\nu \delta^\sigma_\mu) T^\alpha_{\mu'\nu'}] \\
&= \frac{1}{4}(T^{\rho\sigma}_b - T^{\sigma\rho}_b + T^{\rho\sigma}_b - T^{\sigma\rho}_b) \\
&= \frac{1}{2}(T^{\rho\sigma}_b - T^{\sigma\rho}_b) \\
&= T^{\rho\sigma}_b.
\end{aligned}$$

Cálculo de B:

$$\begin{aligned}
B &= \frac{\partial}{\partial(\partial_\sigma \beta^a_\rho)} \left(\frac{1}{2} T^\rho_{\mu\nu} T^{\nu\mu}_\rho\right) \\
&= \frac{1}{2}[\delta^a_b(\delta^\rho_\mu \delta^\sigma_\nu - \delta^\rho_\nu \delta^\sigma_\mu) T^{\nu\mu}_a + e^{\nu'}_a g^{\mu'\mu} \delta^a_b (\delta^\rho_\mu \delta^\sigma_\alpha - \delta^\rho_\alpha \delta^\sigma_\mu) T^\alpha_{\mu'\nu}] \\
&= \frac{1}{2}(T^{\sigma\rho}_\sigma - T^{\rho\sigma}_b + T^{\sigma\rho}_b - T^{\rho\sigma}_b) \\
&= T^{\sigma\rho}_\sigma - T^{\rho\sigma}_b
\end{aligned}$$

Cálculo de C:

$$
\begin{aligned}
C &= \frac{\partial}{\partial(\partial_\sigma \beta^a_\rho)} \left(T^\rho_{\ \rho\mu} T_\nu^{\ \nu\mu}\right) \\
&= -[g_{\alpha\alpha'} e_a^{\alpha'} g^{\alpha\nu} \delta^a_b (\delta^\rho_{\mu'} \delta^\sigma_\nu - \delta^\rho_\nu \delta^\sigma_{\mu'}) T_{\nu'}^{\ \nu'\mu'} \\
&\quad + T^\alpha_{\ \alpha\mu'} e^\nu_a g^{\mu'\mu} \delta^a_b (\delta^\rho_\mu \delta^\sigma_\nu - \delta^\rho_\nu \delta^\sigma_\mu)] \\
&= -(e^\sigma_b T_\nu^{\ \nu\rho} - e^\rho_b T_\nu^{\ \nu\sigma} + e^\sigma_b T_\alpha^{\ \rho\alpha} - e^\rho_b T_\alpha^{\ \sigma\alpha}) \\
&= -2(e^\sigma_b T_\nu^{\ \nu\rho} - e^\rho_b T_\nu^{\ \nu\sigma})
\end{aligned}
$$

Combinando A, B e C:

$$
\begin{aligned}
A + B - C &= T_b^{\ \rho\sigma} + T^{\sigma\rho}_{\ \ \sigma} - T_b^{\ \rho\sigma} - 2(e^\sigma_b T_\nu^{\ \nu\rho} - e^\rho_b T_\nu^{\ \nu\sigma}) \\
&= 2(K_b^{\ \rho\sigma} - e^\sigma_b T_\nu^{\ \nu\rho} + e^\rho_b T_\nu^{\ \nu\sigma}) \\
&= 2e^\mu_b (K_\mu^{\ \rho\sigma} - g^\sigma_\mu T_\nu^{\ \nu\rho} + g^\rho_\mu T_\nu^{\ \nu\sigma}) \\
&= 2e^\mu_b S_\mu^{\ \rho\sigma} \\
&= 2S_b^{\ \rho\sigma},
\end{aligned}
$$

e portanto:

$$E_2 = \frac{\det(\beta)}{2} 2S_b^{\ \rho\sigma} = \det(\beta) S_b^{\ \rho\sigma}.$$

Agora podemos escrever as equações de movimento completas:

$$\det(\beta) S_c^{\ \rho\nu} T^c_{\ \nu a} + e^\rho_a \mathcal{L}_{\mathrm{TT}} - \partial_\mu \left(\det(\beta) S_a^{\ \mu\rho}\right) = 0. \tag{B.6}$$

Esta expressão é exatamente a mesma encontrada em [9].

Apêndice C

Decomposição ADM da Lagrangiana teleparalela

Relembrando as definições abaixo:

$$
\begin{aligned}
S^{\rho\mu\nu} &= K^{\mu\nu\rho} - g^{\rho\nu}T^{\sigma\mu}_{\sigma} + g^{\rho\mu}T^{\sigma\nu}_{\sigma}, \\
K^{\mu\lambda\nu} &= -\frac{1}{2}(T^{\mu\lambda\nu} - T^{\nu\mu\lambda} + T^{\lambda\nu\mu}), \\
\tilde{T}^{a}_{\mu\nu} &= \frac{1}{N}\left(n_\mu \mathcal{J}^{\bar{\nu}}_{\nu} - n_\nu \mathcal{J}^{\bar{\nu}}_{\mu}\right) L^{a}_{\bar{\nu}}.
\end{aligned}
$$

Façamos a expansão de $\tilde{S}^{\rho\mu\nu}\tilde{T}_{\rho\mu\nu}$:

$$\tilde{S}^{\rho\mu\nu}\tilde{T}_{\rho\mu\nu} = A + B + C,$$

onde

$$
\begin{aligned}
A &= -g^{\rho\nu}\tilde{T}^{\sigma\mu}_{\sigma}\tilde{T}_{\rho\mu\nu}, \\
B &= g^{\rho\mu}\tilde{T}^{\sigma\nu}_{\sigma}\tilde{T}_{\rho\mu\nu}, \\
C &= \tilde{K}^{\mu\nu\rho}\tilde{T}_{\rho\mu\nu}.
\end{aligned}
$$

Cálculo de A:

$$
\begin{aligned}
A &= -g^{\rho\nu}\frac{1}{N^2}\left(n_{\mu'}\mathcal{J}^{\bar{\nu}}_{\nu'} - n_{\nu'}\mathcal{J}^{\bar{\nu}}_{\mu'}\right) g^{\mu'\mu} e^{\nu'}_{a} L^{a}_{\bar{\nu}} \left(n_\mu \mathcal{J}^{\bar{\nu}}_{\nu} - n_\nu \mathcal{J}^{\bar{\nu}}_{\mu}\right) L^{a'}_{\bar{\nu}} e^{\rho'}_{a'} g_{\rho'\rho} \\
&= -\frac{1}{N^2} g^{\mu'\mu}\left(n_{\mu'}\mathcal{J}^{\bar{\nu}}_{\nu'} - n_{\nu'}\mathcal{J}^{\bar{\nu}}_{\mu'}\right)\left(n_\mu \mathcal{J}^{\bar{\sigma}}_{\rho} - n_\rho \mathcal{J}^{\bar{\sigma}}_{\mu}\right) L^{a}_{\bar{\nu}} L^{a'}_{\bar{\sigma}} e^{\nu'}_{a} e^{\rho}_{a'} \\
&= -\frac{1}{N^2} g^{\mu'\mu}(n_{\mu'}\mathcal{J}^{\bar{\nu}}_{\nu'} n_\mu \mathcal{J}^{\bar{\sigma}}_{\rho} - n_{\mu'}\mathcal{J}^{\bar{\nu}}_{\nu'} n_\rho \mathcal{J}^{\bar{\sigma}}_{\mu} \\
&- n_{\nu'}\mathcal{J}^{\bar{\nu}}_{\mu'} n_\mu \mathcal{J}^{\bar{\sigma}}_{\rho} + n_{\nu'}\mathcal{J}^{\bar{\nu}}_{\mu'} n_\rho \mathcal{J}^{\bar{\sigma}}_{\mu}) L^{a}_{\bar{\nu}} L^{a'}_{\bar{\sigma}} e^{\nu'}_{a} e^{\rho}_{a'}
\end{aligned}
$$

Cálculo de B:

$$B = g^{\rho\mu}\tilde{T}^{\sigma\nu}_{\sigma}\tilde{T}_{\rho\mu\nu} = -g^{\rho\nu}\tilde{T}^{\sigma\mu}_{\sigma}\tilde{T}_{\rho\mu\nu} = A$$

Cálculo de C:
Expandindo C obtemos:

$$C = \tilde{K}^{\mu\nu\rho}\tilde{T}_{\rho\mu\nu} = -\frac{1}{2}(\tilde{T}^{\mu\nu\rho} - \tilde{T}^{\rho\mu\nu} + \tilde{T}^{\nu\rho\mu})\tilde{T}_{\rho\mu\nu},$$

agora fazendo a decomposição

$$C = C_1 + C_2 + C_3,$$

onde

$$\begin{aligned}
C_1 &= -\frac{1}{2}\tilde{T}^{\mu\nu\rho}\tilde{T}_{\rho\mu\nu},\\
C_2 &= \frac{1}{2}\tilde{T}^{\rho\mu\nu}\tilde{T}_{\rho\mu\nu},\\
C_3 &= -\frac{1}{2}\tilde{T}^{\nu\rho\mu}\tilde{T}_{\rho\mu\nu},\\
&= C_1.
\end{aligned}$$

Cálculo de C_1:

$$\begin{aligned}
C_1 &= -\frac{1}{2}\frac{1}{N^2}\left(n_\nu \mathcal{J}^{\bar{\nu}}_\rho - n_\rho \mathcal{J}^{\bar{\nu}}_\nu\right) L^a_{\bar{\nu}} e^\mu_a \left(n_\mu \mathcal{J}^{\bar{\sigma}}_\nu - n_\nu \mathcal{J}^{\bar{\sigma}}_\mu\right) L^{a'}_{\bar{\nu}} e^\rho_{a'}\\
&= -\frac{1}{2}\frac{1}{N^2} g^{\nu'\nu}(n_{\nu'}\mathcal{J}^{\bar{\nu}}_\rho n_\mu \mathcal{J}^{\bar{\sigma}}_\nu - n_{\nu'}\mathcal{J}^{\bar{\nu}}_\rho n_\nu \mathcal{J}^{\bar{\sigma}}_\mu\\
&- n_\rho \mathcal{J}^{\bar{\nu}}_{\nu'} n_\mu \mathcal{J}^{\bar{\sigma}}_\nu + n_\rho \mathcal{J}^{\bar{\nu}}_{\nu'} n_\nu \mathcal{J}^{\bar{\sigma}}_\mu) L^a_{\bar{\nu}} L^{a'}_{\bar{\sigma}} e^\mu_a e^\rho_{a'}
\end{aligned}$$

Cálculo de C_2:

$$\begin{aligned}
C_2 &= \frac{1}{2}\frac{1}{N^2} g^{\mu'\mu} g^{\nu'\nu}\left(n_{\mu'}\mathcal{J}^{\bar{\nu}}_{\nu'} - n_{\nu'}\mathcal{J}^{\bar{\nu}}_{\mu'}\right) L^a_{\bar{\nu}} e^\rho_a \left(n_\mu \mathcal{J}^{\bar{\sigma}}_\nu - n_\nu \mathcal{J}^{\bar{\sigma}}_\mu\right) L^{a'}_{\bar{\nu}} e^{\rho'}_{a'} g_{\rho\rho'}\\
&= \frac{1}{N^2} g^{\mu'\mu} g^{\nu'\nu}(n_{\mu'}\mathcal{J}^{\bar{\nu}}_{\nu'} n_\mu \mathcal{J}^{\bar{\sigma}}_\nu - n_{\mu'}\mathcal{J}^{\bar{\nu}}_\nu n_{\nu'}\mathcal{J}^{\bar{\sigma}}_\mu) L^a_{\bar{\nu}} L^{a'}_{\bar{\sigma}} \eta_{aa'}
\end{aligned}$$

Utilizando as propriedades de n, da equação (3.3), há uma grande simplificação de A, C_1 e C_2:

$$\begin{aligned}
C_1 &= \frac{1}{2}\frac{1}{N^2}(-\mathcal{J}^{\bar{\nu}}_\rho \mathcal{J}^{\bar{\sigma}}_\mu L^a_{\bar{\nu}} L^{a'}_{\bar{\sigma}} e^\mu_a e^\rho_{a'} + g^{\nu'\nu} n_\rho \mathcal{J}^{\bar{\nu}}_{\nu'} n_\mu \mathcal{J}^{\bar{\sigma}}_\nu L^a_{\bar{\nu}} L^{a'}_{\bar{\sigma}} e^\mu_a e^\rho_{a'}),\\
C_2 &= -\frac{1}{N^2} g^{\nu'\nu}\mathcal{J}^{\bar{\nu}}_{\nu'}\mathcal{J}^{\bar{\sigma}}_\nu L^a_{\bar{\nu}} L^{a'}_{\bar{\sigma}} \eta_{aa'},\\
A &= \frac{1}{N^2}(\mathcal{J}^{\bar{\nu}}_{\nu'}\mathcal{J}^{\bar{\sigma}}_\rho L^a_{\bar{\nu}} L^{a'}_{\bar{\sigma}} e^{\nu'}_a e^\rho_{a'} - g^{\mu'\mu} n_{\nu'} n_\rho \mathcal{J}^{\bar{\nu}}_{\mu'}\mathcal{J}^{\bar{\sigma}}_\mu L^a_{\bar{\nu}} L^{a'}_{\bar{\sigma}} e^{\nu'}_a e^\rho_{a'}).
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\tilde{S}^{\rho\mu\nu}\tilde{T}_{\rho\mu\nu} &= A + B + C = 2A + 2C_1 + C_2\\
&= \frac{1}{N^2}(2\mathcal{J}^{\bar{\nu}}_{\nu'}\mathcal{J}^{\bar{\sigma}}_\rho L^a_{\bar{\nu}} L^{a'}_{\bar{\sigma}} e^{\nu'}_a e^\rho_{a'}\\
&- 2g^{\mu'\mu} n_{\nu'} n_\rho \mathcal{J}^{\bar{\nu}}_{\mu'}\mathcal{J}^{\bar{\sigma}}_\mu L^a_{\bar{\nu}} L^{a'}_{\bar{\sigma}} e^{\nu'}_a e^\rho_{a'}\\
&- \mathcal{J}^{\bar{\nu}}_\rho \mathcal{J}^{\bar{\sigma}}_\mu L^a_{\bar{\nu}} L^{a'}_{\bar{\sigma}} e^\mu_a e^\rho_{a'} + g^{\nu'\nu} n_\rho \mathcal{J}^{\bar{\nu}}_{\nu'} n_\mu \mathcal{J}^{\bar{\sigma}}_\nu L^a_{\bar{\nu}} L^{a'}_{\bar{\sigma}} e^\mu_a e^\rho_{a'}\\
&- g^{\nu'\nu}\mathcal{J}^{\bar{\nu}}_{\nu'}\mathcal{J}^{\bar{\sigma}}_\nu L^a_{\bar{\nu}} L^{a'}_{\bar{\sigma}} \eta_{aa'})\\
&= \frac{1}{N^2}(2\mathcal{J}^{\bar{\nu}}_{\nu'}\mathcal{J}^{\bar{\sigma}}_\rho L^a_{\bar{\nu}} L^{a'}_{\bar{\sigma}} e^{\nu'}_a e^\rho_{a'}\\
&- g^{\mu'\mu} n_{\nu'} n_\rho \mathcal{J}^{\bar{\nu}}_{\mu'}\mathcal{J}^{\bar{\sigma}}_\mu L^a_{\bar{\nu}} L^{a'}_{\bar{\sigma}} e^{\nu'}_a e^\rho_{a'}\\
&- \mathcal{J}^{\bar{\nu}}_\rho \mathcal{J}^{\bar{\sigma}}_\mu L^a_{\bar{\nu}} L^{a'}_{\bar{\sigma}} e^\mu_a e^\rho_{a'} + g^{\nu'\nu}\mathcal{J}^{\bar{\nu}}_{\nu'}\mathcal{J}^{\bar{\sigma}}_\nu L^a_{\bar{\nu}} L^{a'}_{\bar{\sigma}} \eta_{aa'})\\
&= -\frac{1}{N^2}(-2\mathcal{J}^{\bar{\nu}}_{\nu'}\mathcal{J}^{\bar{\sigma}}_\rho L^a_{\bar{\nu}} L^{a'}_{\bar{\sigma}} e^{\nu'}_a e^\rho_{a'}\\
&+ (\eta_{aa'} + n_a n_{a'}) g^{\nu'\nu}\mathcal{J}^{\bar{\nu}}_{\nu'}\mathcal{J}^{\bar{\sigma}}_\nu L^a_{\bar{\nu}} L^{a'}_{\bar{\sigma}} + \mathcal{J}^{\bar{\nu}}_\rho \mathcal{J}^{\bar{\sigma}}_\mu L^a_{\bar{\nu}} L^{a'}_{\bar{\sigma}} e^\mu_a e^\rho_{a'}).
\end{aligned}$$

Façamos a expansão de $\bar{S}^{\rho\mu\nu}\tilde{T}_{\rho\mu\nu}$:

$$\begin{aligned}
\bar{S}^{\rho\mu\nu}\tilde{T}_{\rho\mu\nu} &= \bar{S}^{\rho\mu\nu}\frac{1}{N}\left(n_\mu \mathcal{J}^{\bar{\nu}}_{\nu} - n_\nu \mathcal{J}^{\bar{\nu}}_{\mu}\right) L^{a}_{\bar{\nu}} e^{\rho'}_{a} g_{\rho\rho'} \\
&= \frac{2}{N}\bar{S}^{\rho\mu\nu} n_\mu \mathcal{J}^{\bar{\nu}}_{\nu} L^{a}_{\bar{\nu}} e^{\rho'}_{a} g_{\rho\rho'}.
\end{aligned}$$

De modo que, a Lagrangiana pode ser expressa como

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\mathrm{TT}} &= \frac{\det(\beta)}{4}(\tilde{S}^{\rho\mu\nu}\tilde{T}_{\rho\mu\nu} + 2\bar{S}^{\rho\mu\nu}\tilde{T}_{\rho\mu\nu} + \bar{S}^{\rho\mu\nu}\bar{T}_{\rho\mu\nu}) \\
&= -\frac{1}{N^2}\frac{\det(\beta)}{4}\Big[-2\mathcal{J}^{\bar{\nu}}_{\nu'}\mathcal{J}^{\bar{\sigma}}_{\rho} L^{a}_{\bar{\nu}} L^{a'}_{\bar{\sigma}} e^{\nu'}_{a} e^{\rho}_{a'} \\
&+ (\eta_{aa'} + n_a n_{a'}) g^{\nu'\nu}\mathcal{J}^{\bar{\nu}}_{\nu'}\mathcal{J}^{\bar{\sigma}}_{\nu} L^{a}_{\bar{\nu}} L^{a'}_{\bar{\sigma}} \\
&+ \mathcal{J}^{\bar{\nu}}_{\rho}\mathcal{J}^{\bar{\sigma}}_{\mu} L^{a}_{\bar{\nu}} L^{a'}_{\bar{\sigma}} e^{\mu}_{a} e^{\rho}_{a'}\Big] + \frac{\det(\beta)}{N}\bar{S}^{\rho\mu\nu} n_\mu \mathcal{J}^{\bar{\nu}}_{\nu} L^{a}_{\bar{\nu}} e^{\rho'}_{a} g_{\rho\rho'} + \frac{\det(\beta)}{4}\bar{S}^{\rho\mu\nu}\bar{T}_{\rho\mu\nu}
\end{aligned}$$

e, usando a expressão (3.5), obtemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\mathrm{TT}} &= -\frac{1}{N}\frac{\det(\hat{\beta})}{4}\Big[-2\mathcal{J}^{\bar{\nu}}_{\nu'}\mathcal{J}^{\bar{\sigma}}_{\rho} L^{a}_{\bar{\nu}} L^{a'}_{\bar{\sigma}} e^{\nu'}_{a} e^{\rho}_{a'} \\
&+ (\eta_{aa'} + n_a n_{a'}) g^{\nu'\nu}\mathcal{J}^{\bar{\nu}}_{\nu'}\mathcal{J}^{\bar{\sigma}}_{\nu} L^{a}_{\bar{\nu}} L^{a'}_{\bar{\sigma}} \\
&+ \mathcal{J}^{\bar{\nu}}_{\rho}\mathcal{J}^{\bar{\sigma}}_{\mu} L^{a}_{\bar{\nu}} L^{a'}_{\bar{\sigma}} e^{\mu}_{a} e^{\rho}_{a'}\Big] + \det(\hat{\beta})\bar{S}^{\rho\mu\nu} n_\mu \mathcal{J}^{\bar{\nu}}_{\nu} L^{a}_{\bar{\nu}} e^{\rho'}_{a} g_{\rho\rho'} + N\frac{\det(\hat{\beta})}{4}\bar{S}^{\rho\mu\nu}\bar{T}_{\rho\mu\nu}.
\end{aligned}$$

Apêndice D

Demonstrações complementares

Neste apêndice constam algumas demonstrações que foram omitidas no corpo da dissertação.

D.1 Demonstração do lema 1.4

$$
\begin{aligned}
-\sqrt{-g}\left(\frac{1}{2}F^{abc}\partial_a\omega_{bc} + F_c^{cb}\partial_c\omega_a^c\right) &= \\
-\sqrt{-g}\left(\frac{1}{2}\beta_\mu^a\partial^{[b}e^{\mu c]}\partial_a\omega_{bc} + \beta_\mu^c\partial^{[b}e_{c]}^\mu\partial_d\omega_b^d\right) &= \\
-\sqrt{-g}\left(\frac{1}{2}\beta_\mu^a\partial^{[b}e^{\mu c]}\partial_a\omega_{bc} + \beta_\mu^c\partial^b e_c^\mu\partial_d\omega_b^d - \beta_\mu^c\partial_c e_b^\mu\partial_d\omega^{db}\right) &= \\
-\sqrt{-g}\left(\frac{1}{2}\beta_\mu^a\partial^b e_c^\mu\partial_a\omega_b^c - \frac{1}{2}\beta_\mu^a\partial^c e_b^\mu\partial_a\omega_c^b + \beta_\mu^c\partial^b e_c^\mu\partial_d\omega_b^d - \beta_\mu^c\partial_c e_b^\mu\partial_d\omega^{db}\right) &= \\
-\sqrt{-g}\left(\beta_\mu^a\partial^b e_c^\mu\partial_a\omega_b^c + \beta_\mu^c\partial^b e_c^\mu\partial_d\omega_b^d - \beta_\mu^c\partial_c e_b^\mu\partial_d\omega^{db}\right) &= \\
-\sqrt{-g}\left(-e_b^\mu\partial_\mu\partial_c\omega^{cd} - e_c^\nu\partial_\mu\beta_\nu^c e_b^\mu\partial_d\omega^{db} - \partial_\mu e_b^\mu\partial_d\omega^{db}\right) &= \\
\sqrt{-g}\left(e_b^\mu\partial_\mu\partial_c\omega^{cd} + e_c^\nu\partial_\mu\beta_\nu^c e_b^\mu\partial_d\omega^{db} + \partial_\mu e_b^\mu\partial_d\omega^{db}\right) &= \\
\partial_\mu[e_b^\mu\sqrt{-g}\partial_d\omega^{db}], &
\end{aligned}
\tag{D.1}
$$

onde na última passagem foi utilizada a relação $\partial\det(M) = \det(M)\operatorname{Tr}(M^{-1}\partial M)$, para uma matriz inversível M.

D.2 Cálculo da variação da Lagrangiana 1.3 sob uma transformação local de Lorentz

$$
\begin{aligned}
\delta\mathcal{L} &= 2\sqrt{-g}(\alpha_1 F_{abc}\delta F^{abc} + \alpha_2 F_{abc}\delta F^{bac} + \alpha_3 F_{ab}^a\delta F_c{}^{bc}) \\
&= 2\sqrt{-g}(\alpha_1 F_a^{bc}\partial_{[b}\omega_{c]}{}^a + \alpha_2 F^b{}_a{}^c\partial_{[b}\omega_{c]}{}^a + \alpha_3 F_a^{ba}\partial_{[b}\omega_{a]}{}^a) \\
&= 2\sqrt{-g}[\alpha_1 F_a^{bc}(\partial_b\omega_c{}^a - \partial_c\omega_b{}^a) + \alpha_2 F_a^{bc}(\partial_b\omega_c{}^a - \partial_c\omega_b{}^a) \\
&+ \alpha_3 F_a^{ba}(\partial_b\omega_a{}^a - \partial_a\omega_b{}^a)] \\
&= 2\sqrt{-g}[2\alpha_1 F_a^{bc}\partial_b\omega_c{}^a + \alpha_2 F_a^{bc}\partial_b\omega_c{}^a - \alpha_2 F_b^{ca}\partial_c\omega_a{}^b - \alpha_3 F_c^{bc}\partial_a\omega_b{}^a] \\
&= 2\sqrt{-g}[(2\alpha_1 - \alpha_2)F_a^{bc}\partial_b\omega_c{}^a + \alpha_2 F_a^{bc}\partial_b\omega_c{}^a - \alpha_3 F_c^{bc}\partial_a\omega_b{}^a] \\
&= 2\sqrt{-g}[(2\alpha_1 - \alpha_2)F_a^{bc}\partial_b\omega_c{}^a - \alpha_2 F^{abc}\partial_a\omega_{bc} - \alpha_3 F_c^{cb}\partial_a\omega_b{}^a] \\
&= 2[(2\alpha_1 - \alpha_2)\sqrt{-g}F_a^{bc}\partial_b\omega_c{}^a - \alpha_2\sqrt{-g}F^{abc}\partial_a\omega_{bc} - \alpha_3\sqrt{-g}F_c^{cb}\partial_a\omega_b{}^a],
\end{aligned}
$$

D.3 Demonstração do lema 2

Prova

Das definições de curvatura, (1.7), e do símbolo de Cristofell, (1.27), podemos escrever as componentes do tensor O no frame das coordenadas:

$$\begin{aligned} O^{\mu}_{\nu\lambda\rho} &= \partial_\lambda K^{\mu}_{\nu\rho} - \partial_\rho K^{\mu}_{\nu\lambda} + \hat{\Gamma}^{\mu}_{\sigma\lambda}K^{\sigma}_{\nu\rho} + \hat{\Gamma}^{\sigma}_{\nu\rho}K^{\mu}_{\sigma\lambda} + K^{\mu}_{\sigma\lambda}K^{\sigma}_{\nu\rho} \\ &- \hat{\Gamma}^{\mu}_{\sigma\rho}K^{\sigma}_{\nu\lambda} - \hat{\Gamma}^{\sigma}_{\nu\lambda}K^{\mu}_{\sigma\rho} - K^{\mu}_{\sigma\rho}K^{\sigma}_{\nu\lambda}. \end{aligned}$$

Fazendo as contrações pertinentes à construção da Lagrangiana de Einstein-Hilbert:

$$\begin{aligned} O &= \delta^{\lambda}_{\mu} g^{\nu\rho} O^{\mu}_{\nu\lambda\rho} \\ &= \partial_\mu K^{\mu\nu}_{\nu} - \partial_\rho K^{\mu\rho}_{\mu} + K^{\mu}_{\nu\mu}\partial_\rho g^{\nu\rho} - K^{\mu}_{\nu\rho}\partial_\mu g^{\nu\rho} \\ &+ g^{\mu\rho}(\hat{\Gamma}_{\rho\sigma\nu} - \hat{\Gamma}_{\sigma\rho\mu})K^{\sigma\nu}_{\nu} - (\hat{\Gamma}_{\mu\sigma\nu} + \hat{\Gamma}_{\nu\mu\sigma})K^{\sigma\nu\mu} + K^{\mu}_{\sigma\mu}K^{\sigma\nu}_{\nu} - K^{\mu}_{\sigma\nu}K^{\sigma\nu}_{\mu}, \end{aligned}$$

onde foi utilizado

$$\Gamma_{\rho\sigma\nu} = g_{\rho\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\sigma\nu}.$$

Da expressão (1.27), obtemos duas identidades:

$$\hat{\Gamma}_{\nu\lambda\mu} + \hat{\Gamma}_{\lambda\nu\mu} = \partial_\mu g_{\nu\lambda}, \tag{D.2}$$

$$\hat{\Gamma}_{\rho\sigma\mu} - \hat{\Gamma}_{\sigma\rho\mu} = \partial_\sigma g_{\mu\rho} - \partial_\rho g_{\mu\sigma}. \tag{D.3}$$

Substituindo-as em O resulta:

$$\begin{aligned} O &= -2\partial_\rho T^{\mu\rho}_{\mu} + K^{\mu}_{\sigma\mu}K^{\sigma\nu}_{\nu} - K^{\mu}_{\sigma\nu}K^{\sigma\nu}_{\mu} \\ &+ K^{\mu}_{\nu\mu}\partial_\rho g^{\nu\rho} - K^{\mu}_{\nu\rho}\partial_\mu g^{\nu\rho} + g^{\mu\rho}\left(\partial_\sigma g_{\mu\rho} - \partial_\rho g_{\mu\sigma}\right)K^{\sigma\nu}_{\nu} - K^{\sigma\nu\mu}\partial_\sigma g_{\mu\nu} \\ &= -2\partial_\rho T^{\mu\rho}_{\mu} + K^{\mu}_{\sigma\mu}K^{\sigma\nu}_{\nu} - K^{\mu}_{\sigma\nu}K^{\sigma\nu}_{\mu} + g^{\mu\rho}K^{\sigma\nu}_{\nu}\partial_\sigma g_{\mu\rho} \\ &= -2\partial_\rho T^{\mu\rho}_{\mu} + K^{\mu}_{\sigma\mu}K^{\sigma\nu}_{\nu} - K^{\mu}_{\sigma\nu}K^{\sigma\nu}_{\mu} - g^{\mu\rho}K^{\nu\sigma}_{\nu}\partial_\sigma g_{\mu\rho} \\ &= -\left(2\partial_\sigma T^{\mu\sigma}_{\mu} + g^{\mu\rho}T^{\nu\sigma}_{\nu}\partial_\sigma g_{\mu\rho}\right) - K^{\mu}_{\sigma\mu}K^{\nu\sigma}_{\nu} + K^{\mu}_{\sigma\nu}K^{\nu\sigma}_{\mu}. \end{aligned}$$

Agora, multiplicando O por $\sqrt{-g}$ ($g = \det(G)$) e utilizando a expressão

$$\partial_\sigma\sqrt{-g} = \frac{1}{2}\sqrt{-g}\,\mathrm{Tr}(G^{-1}\partial_\sigma G),$$

onde G é a matriz cujos elementos são iguais às componentes da métrica, i.e., $G_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}$, obtemos:

$$\sqrt{-g}O = 2\partial_\sigma\left(\sqrt{-g}T^{\mu\rho}_{\mu}\right) + \sqrt{-g}\left(-K^{\mu}_{\sigma\mu}K^{\mu\sigma}_{\mu} + K^{\mu}_{\sigma\nu}K^{\nu\sigma}_{\mu}\right),$$

onde podemos verificar imediatamente que o segundo termo é exatamente a Lagrangiana (1.5).

□

D.4 Demonstração do lema 7

Prova

$$\begin{aligned} \bar{S}^{\rho\mu\nu}\tilde{T}_{\rho\mu\nu} &= (\bar{K}^{\nu\mu\rho} - g^{\rho\nu}\bar{T}^{\sigma\mu}_{\sigma} + g^{\rho\mu}\bar{T}^{\sigma\nu}_{\sigma})\tilde{T}_{\rho\mu\nu} \\ &= \left[-\frac{1}{2}(\bar{T}^{\nu\mu\rho} - \bar{T}^{\rho\nu\mu} + \bar{T}^{\mu\rho\nu}) - g^{\rho\nu}\bar{T}^{\sigma\mu}_{\sigma} + g^{\rho\mu}\bar{T}^{\sigma\nu}_{\sigma}\right]\tilde{T}_{\rho\mu\nu} \\ &= \left[-\frac{1}{2}(\bar{T}^{\nu\mu\rho}\tilde{T}_{\rho\mu\nu} - \bar{T}^{\rho\nu\mu}\tilde{T}_{\rho\mu\nu} + \bar{T}^{\mu\rho\nu}\tilde{T}_{\rho\mu\nu}) - g^{\rho\nu}\bar{T}^{\sigma\mu}_{\sigma}\tilde{T}_{\rho\mu\nu} + g^{\rho\mu}\bar{T}^{\sigma\nu}_{\sigma}\tilde{T}_{\rho\mu\nu}\right] \\ &= \left[-\frac{1}{2}(\tilde{T}^{\nu\mu\rho} - \tilde{T}^{\rho\nu\mu} + \tilde{T}^{\mu\rho\nu}) - g^{\rho\nu}\tilde{T}^{\sigma\mu}_{\sigma} + g^{\rho\mu}\tilde{T}^{\sigma\nu}_{\sigma}\right]\bar{T}_{\rho\mu\nu} \\ &= \tilde{S}^{\rho\mu\nu}\bar{T}_{\rho\mu\nu} \end{aligned}$$

□

D.5 Demonstração do lema 8

Expandindo o tensor S:

$$\begin{aligned}
\bar{S}^{\rho 0\nu} N \mathcal{J}^{\bar{\nu}}{}_{\nu} L^{a}_{\bar{\nu}} e^{\rho'}_{a} g_{\rho\rho'} &= (K^{\mu\nu\rho} - g^{\rho\nu}\bar{T}^{\sigma\mu}_{\sigma} + g^{\rho\mu}\bar{T}^{\sigma\nu}_{\sigma})\mathcal{J}^{\bar{\nu}}{}_{\nu} L^{a}_{\bar{\nu}} e^{\rho'}_{a} g_{\rho\rho'} \\
&= (e^{\rho'}_{a} g_{\rho\rho'} \bar{K}^{0\bar{\nu}\rho} - e^{\bar{\nu}}_{a}\bar{T}^{\sigma 0}_{\sigma} + e^{0}_{a}\bar{T}^{\sigma\bar{\nu}}_{\sigma}) L^{a}_{\bar{\nu}} \\
&= (e^{\rho'}_{a} g_{\rho\rho'} \bar{K}^{0\bar{\nu}\rho} - e^{\bar{\nu}}_{a}\bar{T}^{\sigma 0}_{\sigma} + e^{0}_{a}\bar{T}^{\sigma\bar{\nu}}_{\sigma}) L^{a}_{\bar{\nu}},
\end{aligned}$$

Expandindo a contorção obtemos:

$$\begin{aligned}
\left[-\frac{1}{2} e^{\rho'}_{a} g_{\rho\rho'} \left(-\frac{1}{N}\bar{T}^{(0)\bar{\nu}\rho} - e^{\rho}_{c}\bar{T}^{c0\bar{\nu}} - e^{\bar{\nu}}_{c}\bar{T}^{c0\rho}\right) - e^{\bar{\nu}}_{a}\bar{T}^{\sigma 0}_{\sigma} + e^{0}_{a}\bar{T}^{\sigma\bar{\nu}}_{\sigma}\right] L^{a}_{\bar{\nu}} &= \\
\Bigg[-\frac{1}{2} e^{\rho'}_{a} g_{\rho\rho'} \left(-\frac{1}{N} g^{\bar{\nu}\nu'} g^{\rho\rho''}\bar{T}^{(0)}_{\nu'\rho''} + e^{\rho}_{c} g^{0\rho''} g^{\bar{\nu}\nu'}\bar{T}^{c}_{\nu'\rho''} - e^{\bar{\nu}}_{c} g^{0\nu'} g^{\rho\rho''}\bar{T}^{c}_{\nu'\rho''}\right) &+ \\
-e^{\bar{\nu}}_{a}\bar{T}^{\sigma 0}_{\sigma} + e^{0}_{a}\bar{T}^{\sigma\bar{\nu}}_{\sigma}\Big] L^{a}_{\bar{\nu}} &= \\
\Bigg[-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{N} g^{\bar{\nu}\nu'}\bar{T}^{(0)}_{\nu'\rho'} e^{\rho'}_{a} + \eta_{ac} g^{0\rho''} g^{\bar{\nu}\nu'}\bar{T}^{c}_{\nu'\rho''} - e^{\rho'}_{a} e^{\bar{\nu}}_{c} g^{0\nu'}\bar{T}^{c}_{\nu'\rho'}\right) &+ \\
-e^{\bar{\nu}}_{a}\bar{T}^{\sigma 0}_{\sigma} + e^{0}_{a}\bar{T}^{\sigma\bar{\nu}}_{\sigma}\Big] L^{a}_{\bar{\nu}} &= \\
\Bigg[-\frac{1}{2}\Bigg(-\frac{1}{N} g^{\bar{\nu}\nu'}\mathcal{J}^{\bar{\mu}}_{\nu'}\mathcal{J}^{\bar{\nu}}_{\rho'}\hat{T}^{(0)}_{\bar{\mu}\bar{\nu}} e^{\rho'}_{a} + \eta_{ac} g^{0\rho''} g^{\bar{\nu}\nu'}\mathcal{J}^{\bar{\mu}}_{\nu'}\mathcal{J}^{\bar{\nu}}_{\rho''}\hat{T}^{c}_{\bar{\mu}\bar{\nu}} &+ \\
-e^{\rho'}_{a} e^{\bar{\nu}}_{c} g^{0\nu'}\mathcal{J}^{\bar{\mu}}_{\nu'}\mathcal{J}^{\bar{\nu}}_{\rho'}\hat{T}^{c}_{\bar{\mu}\bar{\nu}}\Bigg) &+ \\
-e^{\bar{\nu}}_{a}\bar{T}^{\sigma 0}_{\sigma} + e^{0}_{a}\bar{T}^{\sigma\bar{\nu}}_{\sigma}\Big] L^{a}_{\bar{\nu}} &= \\
\Bigg[-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{N} g^{\bar{\nu}\nu'}\mathcal{J}^{\bar{\mu}}_{\nu'}\hat{T}^{(0)}_{\bar{\mu}\bar{\sigma}}\hat{e}^{\bar{\sigma}}_{a} - \eta_{ac}\eta^{de}\frac{1}{N} e^{\bar{\nu}}_{d}\hat{e}^{\bar{\sigma}}_{0}\hat{e}^{\bar{\mu}}_{e}\hat{T}^{c}_{\bar{\mu}\bar{\sigma}} + e^{\bar{\nu}}_{c}\frac{1}{N}\hat{e}^{\bar{\sigma}}_{a}\hat{e}^{\bar{\mu}}_{0}\hat{T}^{c}_{\bar{\mu}\bar{\sigma}}\right) &+ \\
-e^{\bar{\nu}}_{a}\bar{T}^{\sigma 0}_{\sigma} + e^{0}_{a}\bar{T}^{\sigma\bar{\nu}}_{\sigma}\Big] L^{a}_{\bar{\nu}} &= \\
\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{N} g^{\bar{\nu}\nu'}\mathcal{J}^{\bar{\mu}}_{\nu'}\hat{T}^{(0)}_{\bar{\mu}\bar{\sigma}}\hat{e}^{\bar{\sigma}}_{a}\right) - e^{\bar{\nu}}_{a}\bar{T}^{\sigma 0}_{\sigma} + e^{0}_{a}\bar{T}^{\sigma\bar{\nu}}_{\sigma}\right] L^{a}_{\bar{\nu}} &= \\
\left[-e^{\bar{\nu}}_{a}\bar{T}^{\sigma 0}_{\sigma} + e^{0}_{a}\bar{T}^{\sigma\bar{\nu}}_{\sigma}\right] L^{a}_{\bar{\nu}} &= \\
\left[-e^{\bar{\nu}}_{a} g^{0\nu'} e^{\sigma}_{c}\bar{T}^{c}_{\nu'\sigma} + e^{0}_{a} g^{\bar{\nu}\nu'} e^{\sigma}_{c}\bar{T}^{c}_{\nu'\sigma}\right] L^{a}_{\bar{\nu}} &= \\
\left[-e^{\bar{\nu}}_{a} g^{0\nu'} e^{\sigma}_{c}\mathcal{J}^{\bar{\mu}}_{\nu'}\mathcal{J}^{\bar{\omega}}_{\sigma}\hat{T}^{c}_{\bar{\mu}\bar{\omega}} + e^{0}_{a} g^{\bar{\nu}\nu'} e^{\sigma}_{c}\mathcal{J}^{\bar{\mu}}_{\nu'}\mathcal{J}^{\bar{\omega}}_{\sigma}\hat{T}^{c}_{\bar{\mu}\bar{\omega}}\right] L^{a}_{\bar{\nu}} &= \\
\left[-e^{\bar{\nu}}_{a} e^{0}_{u} e^{\nu'}_{v}\eta^{uv}\hat{e}^{\bar{\omega}}_{c}\mathcal{J}^{\bar{\mu}}_{\nu'}\hat{T}^{c}_{\bar{\mu}\bar{\omega}} + e^{0}_{a} e^{\bar{\nu}}_{u} e^{\nu'}_{v}\eta^{uv}\hat{e}^{\bar{\omega}}_{c}\mathcal{J}^{\bar{\mu}}_{\nu'}\hat{T}^{c}_{\bar{\mu}\bar{\omega}}\right] L^{a}_{\bar{\nu}} &= \\
\left[e^{\bar{\nu}}_{a}\frac{\eta_{0u}}{N}\hat{e}^{\bar{\mu}}_{v}\eta^{uv}\hat{e}^{\bar{\omega}}_{c}\hat{T}^{c}_{\bar{\mu}\bar{\omega}} + e^{0}_{a} e^{\bar{\nu}}_{u}\hat{e}^{\bar{\mu}}_{v}\eta^{uv}\hat{e}^{\bar{\omega}}_{c}\hat{T}^{c}_{\bar{\mu}\bar{\omega}}\right] L^{a}_{\bar{\nu}} &= \\
\left[e^{\bar{\nu}}_{a}\frac{1}{N}\hat{e}^{\bar{\mu}}_{0}\hat{e}^{\bar{\omega}}_{c}\hat{T}^{c}_{\bar{\mu}\bar{\omega}} + e^{0}_{a} e^{\bar{\nu}}_{u}\hat{e}^{\bar{\mu}}_{v}\eta^{uv}\hat{e}^{\bar{\omega}}_{c}\hat{T}^{c}_{\bar{\mu}\bar{\omega}}\right] L^{a}_{\bar{\nu}} &= \\
e^{0}_{a} e^{\bar{\nu}}_{u}\hat{e}^{\bar{\mu}}_{v}\eta^{uv}\hat{e}^{\bar{\omega}}_{c}\hat{T}^{c}_{\bar{\mu}\bar{\omega}} L^{a}_{\bar{\nu}}.
\end{aligned}$$

D.6 Demonstração do lema 9

Dado o funcional

$$G[E] = \epsilon^{abc}\int_{\mathcal{U}} d^3x \beta^{k}_{c}(x)\frac{\partial\beta_{kb}(x)}{\partial x^a},$$

podemos reescrevê-lo em termos das densidades de tríadas através das relações $\hat{e}^a_i = E^{-\frac{1}{2}} E^a_i$ e $\hat{\beta}^i_a = E^{\frac{1}{2}} E^i_a$:

$$\begin{aligned} G[E] &= \epsilon^{abc} \int_{\mathcal{U}} d^3x \beta^k_c(x) \frac{\partial \beta_{kb}(x)}{\partial x^a} \\ &= \epsilon^{abc} \int_{\mathcal{U}} d^3x E^{\frac{1}{2}}(x) E^k_c(x) \frac{\partial \left(E^{\frac{1}{2}}(x) E_{kb}(x) \right)}{\partial x^a} \\ &= \epsilon^{abc} \int_{\mathcal{U}} d^3x E(x) E^k_c(x) \frac{\partial E_{kb}(x)}{\partial x^a} \end{aligned}$$

e, com a propriedade combinatória do tensor de Levi-Civita em três dimensões:

$$\det(\hat{\beta}) \epsilon^{ijk} \hat{e}^a_i \hat{e}^b_j \hat{e}^c_k = \epsilon^{abc}, \tag{D.4}$$

podemos finalmente escrever

$$\begin{aligned} G[E] &= \epsilon^{abc} \int_{\mathcal{U}} d^3x E(x) E^k_c(x) \frac{\partial E_{kb}(x)}{\partial x^a} \\ &= \int_{\mathcal{U}} d^3x E(x) \epsilon^{ijk} \hat{e}^a_i(x) \hat{e}^b_j(x) \frac{\partial E_{kb}(x)}{\partial x^a} \\ &= \int_{\mathcal{U}} d^3x \epsilon^{ijk} E^a_i(x) E^b_j(x) \frac{\partial E_{kb}(x)}{\partial x^a}. \end{aligned}$$

Esta expressão pode agora ser diretamente derivada em relação à densidade de tríada. Assim, calculemos sua derivada funcional:

$$\begin{aligned} \frac{\delta G[E]}{\delta E^{ld}(z)} &= \frac{\delta}{\delta E^{ld}(z)} \int_{\mathcal{U}} d^3x \epsilon^{ijk} E^a_i(x) E^b_j(x) \frac{\partial E_{kb}(x)}{\partial x^a} \\ &= \epsilon^{ijk} \int_{\mathcal{U}} d^3x \left(\delta^a_d \delta_{li} E^b_j(x) + E^a_i(x) \delta^b_d \delta_{lj} \right) \delta^3(x-z) \frac{\partial E_{kb}(x)}{\partial x^a} \\ &+ \int_{\mathcal{U}} d^3x \epsilon^{ijk} E^a_i(x) E^b_j(x) \frac{\delta}{\delta E^{ld}(z)} \left[\frac{\partial E_{kb}(x)}{\partial x^a} \right] \\ &= \epsilon^{ijk} \left(\delta^a_d \delta_{li} E^b_j(z) + E^a_i(z) \delta^b_d \delta_{lj} \right) \partial_a E_{kb}(z) + \int_{\mathcal{U}} d^3x \epsilon^{ijk} E^a_i(x) E^b_j(x) \left[\frac{\partial \frac{\delta}{\delta E^{ld}(z)} E_{kb}(x)}{\partial x^a} \right] \\ &= \left(\epsilon^{ljk} E^b_j(z) \partial_d E_{kb}(z) + \epsilon^{ilk} E^a_i(z) \partial_a E_{kd}(z) \right) \\ &- \int_{\mathcal{U}} d^3x \epsilon^{ijk} E^a_i(x) E^b_j(x) \left[\frac{\partial E_{lb}(x) E_{kd}(x) \delta^3(x-z)}{\partial x^a} \right] \\ &= \epsilon^{ljk} E^b_k \left(\partial_b E_{jd} - \partial_d E_{jb} \right) + \epsilon^{ijk} \partial_a (E^a_i E^b_j) E_{lb} E_{kd} \\ &= \epsilon^{ljk} E^b_k \left(\partial_b E_{jd} - \partial_d E_{jb} \right) + \epsilon^{ijk} \partial_a (E^a_i) E^b_j E_{lb} E_{kd} + \epsilon^{ijk} \partial_a (E^b_j) E_{lb} E^a_i E_{kd} \\ &= \epsilon^{ljk} E^b_k \left(\partial_b E_{jd} - \partial_d E_{jb} \right) + \epsilon^{ilk} \partial_a (E^a_i) E_{kd} - \epsilon^{ijk} \partial_a (E_{lb}) E^b_j E^a_i E_{kd}, \end{aligned}$$

e utilizando a relação (D.4) duas vezes em seguida, podemos reescrever

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta G[E]}{\delta E^{ld}} &= \epsilon^{ljk}E^b_k\left(\partial_b E_{jd}-\partial_d E_{jb}\right)+\epsilon^{ilk}\partial_a(E^a_i)E_{kd}-\epsilon^{ijk}E^b_jE^a_iE^{d'}_k\partial_a(E_{lb})E^{-1}\hat{g}_{dd'} \\
&= \epsilon^{ljk}E^b_k\left(\partial_b E_{jd}-\partial_d E_{jb}\right)+\epsilon^{ilk}\partial_a(E^a_i)E_{kd}-E\epsilon^{abd'}\hat{g}_{dd'}\partial_a(E_{lb})E^{-1} \\
&= \epsilon^{ljk}E^b_k\left(\partial_b E_{jd}-\partial_d E_{jb}\right)+\epsilon^{ilk}\partial_a(E^a_i)E_{kd}-\hat{g}_{dd'}\partial_a(\epsilon^{abd'}E_{lb}) \\
&= \epsilon^{ljk}E^b_k\left(\partial_b E_{jd}-\partial_d E_{jb}\right)+\epsilon^{ilk}\partial_a(E^a_i)E_{kd}+\hat{g}_{dd'}\partial_a(E^{-1}\epsilon^{ijl}E^a_iE^{d'}_j) \\
&= \epsilon^{ljk}E^b_k\left(\partial_b E_{jd}-\partial_d E_{jb}\right)+\epsilon^{ilk}\partial_a(E^a_i)E_{kd}-E^{-1}\hat{g}_{dd'}E^m_u\partial_a(E^u_m)\epsilon^{ijl}E^a_iE^{d'}_j \\
&+ \epsilon^{ijl}E^a_iE^{-1}\hat{g}_{dd'}\partial_a(E^{d'}_j)+\epsilon^{ijl}E^{-1}E^{d'}_j\hat{g}_{dd'}\partial_a(E^a_i) \\
&= \epsilon^{ljk}E^b_k\left(\partial_b E_{jd}-\partial_d E_{jb}\right)+\epsilon^{ilk}\partial_a(E^a_i)E_{kd}-\epsilon^{lji}E^u_m\partial_a(E^m_u)E^a_iE_{jd} \\
&+ \epsilon^{ijl}E^a_iE^{-1}\hat{g}_{dd'}\partial_a(E^{d'}_j)-\epsilon^{ilk}E_{jd}\partial_a(E^a_i) \\
&= \epsilon^{ljk}E^b_k\left(\partial_b E_{jd}-\partial_d E_{jb}\right)-\epsilon^{lji}E^u_m\partial_a(E^m_u)E^a_iE_{jd}+\epsilon^{ijl}E^a_iE^k_dE^k_{d'}\partial_a(E^{d'}_j) \\
&= \epsilon^{ljk}E^b_k\left(\partial_b E_{jd}-\partial_d E_{jb}\right)+\epsilon^{ljk}E^a_kE^{k'}_dE^{d'}_j\partial_a(E^{k'}_{d'})-\epsilon^{ljk}E^u_m\partial_a(E^m_u)E^a_kE_{jd} \\
&= 2\Omega^l_d
\end{aligned}
$$

Referências Bibliográficas

[1] P. A. M. Dirac, *Lectures on Quantum Mechanics* (Dover Publications, 2001), ISBN 0486417131.

[2] O. A. Reula, Living Reviews Relativity **1** (1998).

[3] A. Ashtekar, *Lectures on Non-Perturbative Canonical Gravity*, vol. 6 of *Advanced Series in Astrophysics and Cosmology* (World Scientific, 1991).

[4] C. Rovelli, *Quantum Gravity (Cambridge Monographs on Mathematical Physics)* (Cambridge University Press, 2004), ISBN 0521837332.

[5] R. Gambini and J. Pullin, *Loops, Knots, Gauge Theories and Quantum Gravity* (Cambridge University Press, 2000), ISBN 0521654750.

[6] W. Drechsler, Annales de L'I.H.P., section A **37**, 155 (1982).

[7] M. Blagojevic, *Gravitation and Gauge Symmetries* (IOP, 2002).

[8] F. Gronwald and F. W. Hehl, *On the gauge aspects of gravity* (1996), `gr-qc/9602013`.

[9] J. Pereira, Classical Quantum Gravity **21**, 5193 (2004), `gr-qc/0408096`.

[10] Y. Itin, *On variations in teleparallelism theories* (1999), `gr-qc/9904030`.

[11] Y. Itin, International Journal of Modern Physics D **10**, 547 (2001), `gr-qc/9912013`.

[12] Y. M. Cho, Physical Review D **14** (1976).

[13] J. W. Maluf, Journal of Mathematical Physics **35**, 335 (1994).

[14] B. M. Pimentel, P. Pompeia, J. da Rocha-Neto, and R. Teixeira, General Relativity and Gravitation **35**, 877 (2003), `gr-qc/0303087`.

[15] E. Prugovecki, *Quantum Geometry, A Framework for Quantum General Relativity* (Kluwer Academic Publishers, 1992).

[16] M. Blagojevic, SFIN A **1**, 147 (2003).

[17] M. Nakahara, *Geometry, Topology and Physics, Second Edition (Graduate Student Series in Physics)* (Taylor & Francis, 2003).

[18] S. Hoffman, *Advanced Calculus* (Pretince-Hall, 1970).

[19] H. Zainuddin, T. S. Poh, N. M. Shah, M. Zainy, Z. Zulkarnain, J. Hassana, and Z. A. Hassana, Journal of Fundamental Sciences **3**, 127 (2007).

[20] D. McMullan, Communications on Mathematical Physics **160**, 431 (1994).

[21] T. Regge, C. Teitelboim, and A. Hanson, *Constrained Hamiltonian Systems* (Accademia Nazionale dei Lincei, 1976).

[22] S. W. Hawking and G. F. R. Ellis, *The Large Scale Structure of Space-Time (Cambridge Monographs on Mathematical Physics)* (Cambridge University Press, 1975), ISBN 0521099064.

[23] P. J. Pompeia, Master's thesis, IFT-UNESP (2003).

[24] T. Thiemann, *Modern Canonical Quantum General Relativity* (Cambridge University Press, 2007), 1st ed.

[25] M. Henneaux, C. Schomblond, and J. E. Nelson, Physical Review **D39**, 434 (1989).