

**DANIEL NELSON MACIEL**

**Análise de problemas elásticos não lineares geométricos empregando o  
método dos elementos finitos posicional**

**Tese apresentada à Escola de Engenharia  
de São Carlos, da Universidade de São  
Paulo, como parte dos requisitos de  
obtenção do título de Doutor em  
Engenharia de Estruturas.**

**Orientador: Prof. Assoc. Humberto Breves Coda**

São Carlos

2008

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Ficha catalográfica preparada pela Seção de Tratamento da Informação do Serviço de Biblioteca – EESC/USP

M152a Maciel, Daniel Nelson  
Análise de problemas elásticos não lineares geométricos empregando o método dos elementos finitos posicional / Daniel Nelson Maciel ; orientador Humberto Breves Coda. -- São Carlos, 2008.

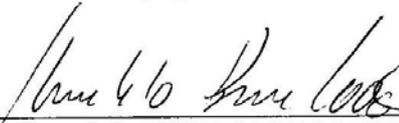
Tese (Doutorado-Programa de Pós-Graduação e Área de Concentração em Engenharia de Estruturas) -- Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, 2008.

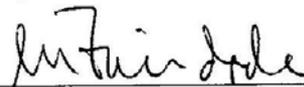
1. Mecânica das estruturas - métodos numéricos. 2. Não linearidade geométrica. 3. Sólidos 3D. 4. Pórticos planos. 5. Elementos finitos.

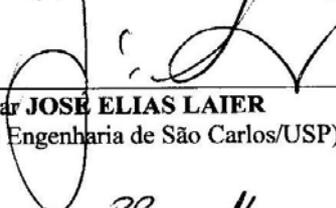
**FOLHA DE JULGAMENTO**

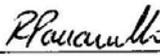
Candidato: Engenheiro **DANIEL NELSON MACIEL**

Tese defendida e julgada em 24/03/2008 perante a Comissão Julgadora:

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Associado **HUMBERTO BREVES CODA (Orientador)**  
(Escola de Engenharia de São Carlos/USP) Aprovado

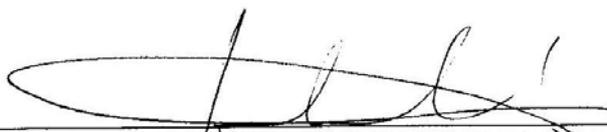
  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. **MARCELO AREIAS TRINDADE**  
(Escola de Engenharia de São Carlos/USP) Aprovado

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Titular **JOSÉ ELIAS LAIER**  
(Escola de Engenharia de São Carlos/USP) APROVADO

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Associado **RENATO PAVANELLO**  
(Universidade Estadual de Campinas/UNICAMP) APROVADO

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. **HERMANO DE SOUZA RIBEIRO**  
(Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação/USP) aprovado

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Associado **MARCIO ANTONIO RAMALHO**  
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em  
Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas)

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Associado **GERALDO ROBERTO MARTINS DA COSTA**  
Presidente da Comissão de Pós-Graduação

*A Elisânia, minha amada esposa.*

## AGRADECIMENTOS

Primeiramente gostaria de expressar meus sinceros agradecimentos aos meus amados pais Elias e Marila e aos meus irmãos Reginaldo e Sílvia, por sempre me apoiarem incondicionalmente, dando-me sempre muito incentivo para prosseguir nos meus estudos e aprimoramento profissional.

À minha esposa, Elisânia, sobretudo pela paciência, amor e incentivo nos momentos mais difíceis.

Ao meu orientador e amigo, Professor Humberto Breves Coda, pelo brilhantismo demonstrado na profissão de pesquisador e excelente orientação a mim dedicada.

Ao Prof. Sergio Pellegrino, da Universidade de Cambridge, Reino Unido, pela atenção e oportunidade conferida a mim, durante minha permanência em Cambridge no período de estágio de doutorado no exterior.

À Família McMullan, pelo suporte emocional ao longo da minha estadia em Cambridge.

Ao Departamento de Engenharia da Universidade de Cambridge (CUED) pela acolhida durante o estágio de doutorado no exterior.

Ao amigo Professor Roberto José de Medeiros, grande incentivador dos meus estudos de pós-graduação.

Aos funcionários do SET, em especial, Nadir, Rosi, Toninho e Sylvia, pela competência e prestimosidade.

Ao amigo Rodrigo R. Paccola, por sempre, com muita competência e conhecimento, ter me ajudado no que fosse necessário durante esses anos de doutorado.

Também ao amigo Marcelo Greco, pelas brilhantes contribuições dadas a linha de pesquisa e a este trabalho, além da grande atenção dispensada a minha pessoa desde a época do meu mestrado.

Aos amigos do SET: Alexandre Buttler, Alexandre Freitas, Sergio Oshima, Alexandre Miná, André Christóforo, Caio, Wesley, Leandro e Marcelo Santos, por tornarem o nosso ambiente de trabalho produtivo e saudável.

Aos demais colegas do GMEC (Grupo de Mecânica Computacional), Patrick, Gustavo e Rogério pela amizade e troca de idéias.

Aos amigos conterrâneos Sales, George e Hamilton por toda ajuda durante todos esses anos aqui em São Carlos.

À AKAER Engenharia, empresa onde trabalho, pela concessão do afastamento temporário, tornando possível a conclusão desta tese em tempo hábil.

À Universidade de São Paulo, através do Departamento de Engenharia de Estruturas, por ter dado essa importantíssima oportunidade a minha pessoa, oferecendo excelente infraestrutura e corpo docente de elevadíssima qualificação.

Ao meu Pai, Elias Cabral Maciel, pela revisão gramatical e sugestões para redação do texto.

Ao Governo do Brasil através da CAPES, pelo fundamental auxílio financeiro para realização deste trabalho.

E finalmente, aos prezados professores participantes da banca deste trabalho, pela paciência e disponibilidade para leitura desta tese, bem como pelas valiosas sugestões e críticas construtivas dadas ao autor.

## RESUMO

MACIEL, D. N. *Análise de problemas elásticos não lineares geométricos empregando o método dos elementos finitos posicional*. 2008, Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos-SP.

Neste trabalho problemas não lineares geométricos envolvendo pórticos planos e sólidos tridimensionais são analisados através do método dos elementos finitos com formulação posicional. A formulação posicional utiliza como incógnitas as posições dos nós ao invés de deslocamentos. O referencial adotado da formulação é o lagrangiano total. Também se utiliza o algoritmo de Newton-Raphson para solução iterativa do problema não linear. Para problemas envolvendo dinâmica, a matriz de massa é consistente e o integrador temporal é o algoritmo de Newmark. Para o pórtico plano, a cinemática adotada é a de Reissner, onde a seção plana do pórtico não necessariamente permanece perpendicular ao seu eixo central após deformação. Com relação à formulação de sólido tridimensional, é adotada aproximação cúbica de variáveis com elementos finitos tetraédricos de 20 nós. É apresentada também a análise de impacto em anteparo rígido para estruturas tridimensionais utilizando o integrador de Newmark modificado para se garantir a estabilidade do problema. A formulação aqui proposta é validada em comparação com exemplos clássicos da literatura especializada.

Palavras-chave: não linearidade geométrica; sólidos 3D; pórticos planos; elementos finitos.

## ABSTRACT

MACIEL, D. N. *Elastic nonlinear geometric analysis with positional finite element method*. 2008, Thesis (Doctoral) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos-SP.

Non linear geometric analysis for 2D frames and 3D solids are analyzed in this work by employing the finite element method with positional description. The present formulation does not use the concept of displacement; it considers positions as the real variables of the problem. In addition, the formulation is developed through total lagrangian description. Besides, the Newton-Raphson method is applied for solving the iterative linear system. For dynamic problems, the mass matrix is consistent and it is applied the Newmark algorithm for time integration. For 2D frame analysis, Reissner kinematics is adopted, that is, initial plane cross-sections remain plane after deformation and angles are independent of the slope of central line. In respect to 3D solids, a cubic approximation for the variables is employed through tetraedric finite elements with 20 nodes. Moreover, impact analysis against rigid wall is performed for 3D solids by applying the modified Newmark procedure in order to guarantee a stabilized response. In order to validate the herein proposed formulation, numerical examples are compared to those in the specialized literature.

Keywords: nonlinear geometric; 3D solids; 2D frames; finite elements.



# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b><u>INTRODUÇÃO</u></b>	<b>1</b>
1.1	CONSIDERAÇÕES INICIAIS	1
1.2	METODOLOGIA	3
1.3	ORGANIZAÇÃO DA TESE	4
<b>2</b>	<b><u>REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</u></b>	<b>5</b>
2.1	NÃO LINEARIDADE GEOMÉTRICA APLICADA A PÓRTICOS PLANOS	5
2.2	NÃO LINEARIDADE GEOMÉTRICA APLICADA A SÓLIDOS	7
<b>3</b>	<b><u>ELASTICIDADE NÃO LINEAR</u></b>	<b>9</b>
3.1	DESCRIÇÃO DAS DEFORMAÇÕES E MOVIMENTOS	9
3.2	TENSOR GRADIENTE DE DEFORMAÇÃO	12
3.3	DEFORMAÇÃO DE VOLUME E SUPERFÍCIE	15
3.4	ALONGAMENTO, DEFORMAÇÃO E DISTORÇÃO	19
3.5	DECOMPOSIÇÃO POLAR	25
3.6	ANÁLISE DO MOVIMENTO	30
3.7	CONSERVAÇÃO DE MASSA	34
3.8	BALANÇO DE QUANTIDADE DE MOVIMENTO	36
3.9	TENSOR DE TENSÕES DE CAUCHY	37
3.10	LEIS DO MOVIMENTO DE CAUCHY	39
3.11	TENSOR DE TENSÕES NOMINAL	40
3.12	EQUAÇÕES LAGRANGIANAS DE CAMPO	41
3.13	BALANÇO DE ENERGIA	42
3.14	CONJUGADO TENSÃO-DEFORMAÇÃO	45
3.15	ENERGIA DE DEFORMAÇÃO	47

<b>4</b>	<b>FORMULAÇÃO POSICIONAL</b>	<b>50</b>
4.1	FUNCIONAL DE ENERGIA POTENCIAL TOTAL	50
4.2	SOLUÇÃO DO PROBLEMA ESTÁTICO	54
4.3	SOLUÇÃO DO PROBLEMA DINÂMICO	56
4.4	IMPACTO EM ANTEPARO RÍGIDO	59
<b>5</b>	<b>PÓRTICOS PLANOS COM CINEMÁTICA DE REISSNER</b>	<b>61</b>
5.1	MAPEAMENTO DA GEOMETRIA	61
5.2	MEDIDA DE DEFORMAÇÃO	64
5.3	ENERGIA POTENCIAL TOTAL	66
5.4	EQUACIONAMENTO ESTÁTICO	67
5.5	EQUACIONAMENTO DINÂMICO	70
5.6	FORMULAÇÃO COM CARGAS NÃO CONSERVATIVAS	72
5.7	EXEMPLOS NUMÉRICOS DE PÓRTICO PLANO	74
5.7.1	EXEMPLOS ESTÁTICOS	75
5.7.2	EXEMPLOS DINÂMICOS	90
<b>6</b>	<b>SÓLIDO TRIDIMENSIONAL – FORMULAÇÃO POSICIONAL</b>	<b>102</b>
6.1	MAPEAMENTO DA GEOMETRIA	102
6.2	MEDIDA DE DEFORMAÇÃO	104
6.3	ENERGIA POTENCIAL TOTAL	105
6.4	EQUACIONAMENTO ESTÁTICO	106
6.5	EQUACIONAMENTO DINÂMICO	109
6.6	EXEMPLOS EMPREGANDO SÓLIDO TRIDIMENSIONAL	110
6.6.1	EXEMPLOS ESTÁTICOS	110
6.6.2	EXEMPLOS DINÂMICOS	123
<b>7</b>	<b>FORMULAÇÃO DE CASCA E APLICAÇÕES</b>	<b>131</b>
7.1	FENÔMENO DE ENRUGAMENTO	132
7.2	CINEMÁTICA DA FORMULAÇÃO POSICIONAL DE CASCA	132

7.3	EXEMPLOS NUMÉRICOS E EXPERIMENTAIS	137
7.3.1	MEMBRANA RETANGULAR SOB CISLHAMENTO	137
7.3.2	ENRUGAMENTO DE MEMBRANA SOB TRAÇÃO	145
<b>8</b>	<b>CONCLUSÕES E SUGESTÕES</b>	<b>148</b>
	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>	<b>151</b>
	<b>BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTAR</b>	<b>161</b>

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Configuração inicial e final do corpo.....	10
Figura 2 – Volume infinitesimal em mudança de configuração.....	16
Figura 3 – Fibra infinitesimal transpassando superfície arbitrária do corpo. ....	18
Figura 4 – Transformação de superfície de um corpo.....	18
Figura 5 – esquema de vetores unitários ao longo de uma fibra arbitrária.....	22
Figura 6 - Ângulo inicial e final. ....	23
Figura 7 – Ilustração esquemática do teorema da decomposição polar. ....	28
Figura 8 – Decomposição Polar via posições principais. ....	30
Figura 9 – Representação do Tensor Real de Cauchy através de suas componentes. ....	38
Figura 10 – Quadro ilustrativo do método de solução para problema dinâmico. ....	58
Figura 11 – Condição de penetração nula.....	59
Figura 12 – Regiões de estabilidade para os valores de $\gamma$ e $\beta$ . ....	60
Figura 13- Esquema de deformação do corpo. ....	62
Figura 14 – Seção transversal genérica do elemento. ....	63
Figura 15 – espaço adimensional auxiliar e mapeamento da geometria.....	65
Figura 16 – elemento finito de “n” nós e suas variáveis nodais. ....	68
Figura 17 – Forças não conservativas aplicadas na extremidade livre da viga engastada. ....	73
Figura 18 – Viga engastada com força transversal. ....	75
Figura 19 – Força vs deslocamento longitudinal $U_x/L$ . ....	76
Figura 20 - Força vs deslocamento transversal $U_y/L$ . ....	76
Figura 21 - Força vs rotação $\omega$ . ....	77
Figura 22 – Configurações deformadas para alguns níveis de carga. ....	77

Figura 23 – Pórtico articulado: esquema estático para a situação de compressão ( $P < 0$ ) e de tração ( $P > 0$ ). .....	78
Figura 24 – Deslocamento horizontal vs carregamento. ....	78
Figura 25 - Deslocamento vertical vs carregamento .....	79
Figura 26 - Rotação vs carregamento .....	79
Figura 27 – Configurações deformadas na tração.....	80
Figura 28 – Configurações deformadas na compressão.....	80
Figura 29 – Coluna analisada.....	81
Figura 30 – Deslocamento lateral do ponto de aplicação da carga P.....	81
Figura 31 – Deslocamento lateral para o ponto de aplicação da carga P. Modos 2 e 3 de flambagem. ....	82
Figura 32 – Deformadas da coluna analisada durante o carregamento. ....	83
Figura 33 – Pórtico em arco submetido à força de compressão. ....	84
Figura 34 – Deformada do arco na flambagem. ....	85
Figura 35 – Pórtico bi-apoiado com carga não conservativa aplicada.....	86
Figura 36 – Posições deformadas para pórtico devido à força não conservativa.....	86
Figura 37 – Deslocamentos no ponto de aplicação da força não conservativa.....	87
Figura 38 - Posição deformada para as faixas devido ao peso próprio. ....	89
Figura 39 – Barra flexível e dados do problema. ....	90
Figura 40 – Deslocamentos relativos ao movimento de corpo rígido da barra.....	91
Figura 41 – Deslocamento $U_1$ .....	91
Figura 42 – Deslocamento $U_2$ .....	92
Figura 43 – Rotação relativa $\alpha$ .....	92
Figura 44 – Aceleração angular do nó 1. ....	93
Figura 45 – Velocidade angular do nó 1. ....	93
Figura 46 – Reação momento do nó 1.....	94

Figura 47 – Curva de torque hipotética.....	95
Figura 48 - Deslocamento $U_1$ .....	96
Figura 49 - Deslocamento $U_2$ .....	96
Figura 50 - Rotação relativa $\alpha$ .....	97
Figura 51 – Mecanismo articulado e dados do problema. ....	98
Figura 52 – Posição horizontal do bloco para primeira situação de carga. ....	98
Figura 53 – Posição horizontal do bloco para segunda situação de carga. ....	99
Figura 54 – Posição horizontal do bloco com massa não desprezível. ....	100
Figura 55 – Posição horizontal do bloco com massa não desprezível. ....	100
Figura 56 – Posições deformadas para o mecanismo ao longo do tempo: massa do bloco desprezível. ....	101
Figura 57 - Posições deformadas para o mecanismo ao longo do tempo: massa do bloco não desprezível. ....	101
Figura 58 – Mapeamento de geometria para o sólido tridimensional. ....	103
Figura 59 – Elemento finito tetraédrico de 20 nós .....	108
Figura 60 – Malha de elementos tetraédricos adotada para viga em flexão simples.....	111
Figura 61 – Força parametrizada versus deslocamento longitudinal $U_x/L$ .....	111
Figura 62 - Força vs deslocamento transversal $U_y/L$ .....	112
Figura 63 – Viga deformada e configuração inicial (sem escala). ....	112
Figura 64 – Viga fina em flexão. ....	113
Figura 65 – Deslocamentos verticais em escala de força para viga fina.....	114
Figura 66 – Malha empregada para viga 3D. ....	115
Figura 67 – Deslocamento lateral versus carga aplicada. ....	115
Figura 68 – Situação deformada para alguns passos de carga - perspectivas 3D. ....	116
Figura 69 – Viga em balanço com carga na extremidade.....	116
Figura 70 – Gráfico de Força versus deslocamento da extremidade livre da viga engastada..	117

Figura 71 – Deformada pós-flambagem lateral da vida analisada (sem escala).....	118
Figura 72 – Geometria, propriedades mecânicas e carregamento na placa. ....	119
Figura 73 – Discretização da placa em elementos tetraédricos.....	119
Figura 74 – Deformada final da placa em formato de anel (sem escala).....	120
Figura 75 – Gráfico de deslocamentos versus força aplicada.....	120
Figura 76 – Cilindro com diafragmas rígidos submetido à força concentrada de compressão. 121	
Figura 77 – Discretização de um quarto do cilindro com 7092 e 18893 graus de liberdade. ....	121
Figura 78 – Deslocamentos para os nós A e B.....	122
Figura 79 – Deformadas do quarto de cilindro para cargas intermediárias e final (sem escala). .....	122
Figura 80 – Barra com carregamento axial na extremidade livre.....	123
Figura 81 – Gráfico da aplicação da força e dados do problema.....	123
Figura 82 – Deslocamento vertical horizontal da extremidade livre versus tempo. ....	124
Figura 83 – Viga com carga súbita de flexão.....	125
Figura 84 – Dados do problema e gráfico de carga aplicada.....	125
Figura 85 – gráfico do deslocamento da extremidade livre versus tempo.....	126
Figura 86 – Esquema de anteparo rígido e dados do problema .....	127
Figura 87 – Gráfico de velocidade para superfície de impacto. ....	127
Figura 88 – Força de contato da superfície de impacto versus tempo.....	128
Figura 89 – Anel e anteparo rígido.....	129
Figura 90 – configurações deformadas do anel que sofre impacto.....	129
Figura 91 – Ângulo de aproximação e reflexão da estrutura anelar.....	130
Figura 92 - Mapeamento do elemento de casca com 10 nós.....	133
Figura 93 - Vetor normal unitário perpendicular à superfície media do elemento de casca.....	134
Figura 94 - Ponto genérico ao longo da espessura do elemento de casca.....	134
Figura 95 - Esquema da membrana analisada.....	138

Figura 96 - Tensão principal 3 versus Deslocamento. ....	139
Figura 97 - Gráfico detalhado para $d\bar{\delta}=0.0003\text{mm}$ e $d\delta=0.003\text{ mm}$ . ....	140
Figura 98 - Comportamento instável da membrana em cisalhamento. ....	140
Figura 99 - Situação deformada para $\bar{\delta}=0.110\text{ mm}$ . ....	141
Figura 100 - Deformada da membrana com deslocamentos prescritos proporcionais. ....	142
Figura 101 – Deslocamento transversal no passo de tempo 100. ....	143
Figura 102 – Deslocamento transversal no passo de tempo 150, deslocamento horizontal $\delta = 0.07\text{ mm}$ . ....	143
Figura 103 - Deslocamento transversal no passo de tempo 180, deslocamento horizontal $\delta = 0.27\text{ mm}$ . ....	143
Figura 104 - Deslocamento transversal no passo de tempo 200, deslocamento horizontal $\delta = 0.54\text{ mm}$ . ....	144
Figura 105 - Deslocamento transversal no passo de tempo 220, deslocamento horizontal $\delta = 1.50\text{ mm}$ . ....	144
Figura 106 - Deslocamento transversal no passo de tempo 240, deslocamento horizontal $\delta = 2.00\text{ mm}$ . ....	144
Figura 107 - Deslocamento transversal no passo de tempo 250, deslocamento horizontal $\delta = 3.09\text{ mm}$ . ....	145
Figura 108 - Foto da membrana analisada no experimento. ....	146
Figura 109 - Resultado da análise numérica da membrana sob tração. ....	147

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Carga crítica “ $P_{cr}$ ” para o pórtico em arco. ....	84
Tabela 2 – Resultados numéricos em comparação com os analíticos. ....	88
Tabela 3 – Resultados para deslocamento na extremidade livre.....	113
Tabela 4 – Ângulos de reflexão para impacto sem atrito.....	130
Tabela 5 - Dimensões da membrana e propriedades do material. ....	138
Tabela 6 – Sensibilidade do número de rugas em relação à pré-tensão.....	141
Tabela 7 - da membrana e propriedades do material.....	146

# 1 INTRODUÇÃO

---

Neste capítulo, introdutório do presente trabalho, fazem-se considerações a respeito das motivações que nortearam o desenvolvimento da pesquisa, a metodologia aplicada e os objetivos desejados, apontando-se por fim como o texto está organizado ao longo da tese.

## 1.1 Considerações iniciais

Com o avanço das tecnologias de materiais empregados na engenharia, no tocante ao desenvolvimento de ligas metálicas, aglomerantes, polímeros etc. cada vez mais resistentes, as estruturas tendem a ser, portanto, mais esbeltas e flexíveis, fazendo-as sofrer grandes mudanças de forma diante das suas solicitações. Dessa forma, o emprego da superposição dos efeitos, por exemplo, que é válido apenas para pequenos deslocamentos, para cálculo das variáveis de um problema estrutural, começa a se tornar deveras limitado para alguns problemas da engenharia moderna.

Além disso, áreas de engenharia tais como a aeroespacial, robótica e biomecânica já empregam amplamente soluções não lineares geométricas devido a sua natureza de grandes deslocamentos.

Diante disso, são importantes trabalhos que levem em consideração grandes mudanças de forma e posição dos elementos estruturais, bem como leis constitutivas não lineares, representando assim, com maior fidelidade, o comportamento estrutural de peças consideradas esbeltas com comportamento não linear físico e geométrico.

Em CODA (2003.c) e CODA & GRECO (2003) foi apresentada pela primeira vez a formulação denominada de Posicional aplicada ao MEF que tem como variáveis nodais as posições dos nós ao invés de deslocamentos como normalmente é empregado na literatura. Essa formulação é aqui implementada para os problemas de pórtico plano com a cinemática de Reissner e para problemas tridimensionais.

Destaca-se, como o objetivo principal deste trabalho, elaborar códigos computacionais empregando o método numérico denominado de Método dos Elementos Finitos (MEF) para a análise de problemas elásticos não lineares geométricos de pórticos planos e sólidos. Essa análise, ou seja, elástica não linear geométrica é desenvolvida tanto para problemas estáticos quanto para problemas dinâmicos (forças inerciais em consideração). A formulação do MEF em questão é a Formulação Posicional, e como dito anteriormente, leva esse nome por se considerar as posições nodais dos elementos finitos, ao invés dos deslocamentos, como as principais variáveis do problema. A formulação de impacto em anteparo rígido baseada nos parâmetros de Newmark modificados é implementada para o caso tridimensional.

É objetivo também, através do emprego da formulação numérica, fazer-se um estudo preliminar de estruturas extremamente finas sujeitas ao fenômeno de enrugamento<sup>1</sup>, que são muito empregadas na indústria aeroespacial, mais especificamente em estruturas de satélite tais como velas solares, por exemplo.

A metodologia do trabalho é apresentada no item a seguir.

---

<sup>1</sup> O estágio de doutorado desenvolvido pelo autor na Universidade de Cambridge, Reino Unido, teve esse objetivo, já que lá se tornou um centro reconhecido no assunto sob a liderança do Prof. S. Pellegrino.

## 1.2 Metodologia

Os corpos dos elementos estruturais - membros de pórtico plano e sólido - analisados são considerados contínuos em termos macroscópicos, ou seja, sem vazios entre uma partícula e outra, não havendo também perdas de massa. Considera-se elástico o material desses elementos estruturais, porém não necessariamente de comportamento linear quanto à lei constitutiva.

O Método dos Elementos Finitos é formulado em descrição Lagrangiana Total a partir da minimização do funcional de energia potencial total do sistema, emprega-se o método iterativo de Newton-Raphson, onde os parâmetros nodais dos elementos finitos são as próprias coordenadas cartesianas dos seus nós, ao invés dos deslocamentos como é comumente empregado nas formulações encontradas na literatura. Para o caso do pórtico plano, além das coordenadas de translação, adiciona-se o giro da seção reta como parâmetro nodal. É importante frisar que a cinemática adotada é a de Reissner, que é similar à de Timoshenko, ou seja, a seção permanece plana, mas não obrigatoriamente perpendicular à linha média do elemento, considerando-se, dessa forma, a influência dos esforços cortantes na deformação do pórtico. O elemento sólido terá forma tetraédrica com aproximação cúbica de variáveis.

Quanto aos problemas que envolvem forças inerciais, isto é, problemas dinâmicos, a matriz de massa será consistente e o algoritmo de solução da equação do movimento na coordenada temporal será o de Newmark (NEWMARK, 1959). Além disso, no caso do impacto em anteparos rígidos para o problema com elementos sólidos, adota-se o esquema desenvolvido em GREGO (2004), que usa parâmetros de Newmark modificados a fim de se estabilizar a resposta do problema.

O Código computacional é desenvolvido utilizando-se FORTRAN como linguagem de programação. Utiliza-se também, para a solução de sistemas lineares simétricos, o código livre denominado de MA27. Para o problema de sólidos, as malhas são criadas empregando-se o pré-processador do software comercial ANSYS® e depois modificadas através da adição de nós a fim de se representar a aproximação de variáveis adotada no presente trabalho.

### 1.3 Organização da tese

Esta tese está organizada em oito capítulos. O primeiro capítulo é introdutório, seguido do capítulo de revisão bibliográfica, onde se discute os artigos mais relevantes encontrados pelo autor, situando também o presente trabalho dentro da literatura especializada, como também mostrando algumas aplicações da linha de pesquisa aqui abordada na engenharia em geral. No terceiro capítulo, está descrita a teoria básica da elasticidade não linear, mostrando-se o equacionamento que serve de alicerce teórico para as formulações em elementos finitos. No capítulo 4, escreve-se sobre a formulação posicional de forma geral, independente das hipóteses cinemáticas abordadas. Já nos capítulos 5 e 6 estão descritas, respectivamente, as formulações de posicionais para o pórtico plano e sólidos, devidamente fundamentadas por exemplos numéricos encontrados na literatura. No capítulo 7, expõe-se sobre a cinemática de elemento finito de casca e suas aplicações para problemas de membranas extremamente finas sujeitas ao fenômeno de enrugamento. E por fim, no capítulo 8, as conclusões do presente trabalho e algumas sugestões de pesquisa dentro dos temas aqui abordados são apontadas.

No capítulo a seguir é descrita a revisão bibliográfica do presente trabalho.

## 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

---

Neste capítulo são mostrados alguns trabalhos desenvolvidos no estudo da não linearidade geométrica empregando o MEF para problemas de pórtico plano e problemas de sólidos tridimensionais, como também, trabalhos desenvolvidos nessa área por pesquisadores do Departamento de Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia de São Carlos (SET). A revisão é dividida em subitens de acordo como assunto abordado.

### 2.1 Não linearidade geométrica aplicada a pórticos planos

Soluções analíticas para problemas de grandes deslocamentos em pórticos planos são bastante restritas devido à complexidade do problema não linear geométrico. Alguns trabalhos, tais como, JENKINS *et. al.* (1966), BISSHOP & DRUCKER (1945) e MATTIASSON (1981) trazem soluções para alguns problemas como barras engastadas e pórticos articulados rígidos. Sendo então de grande valia o estudo desses problemas através da solução via métodos numéricos.

Com relação às formulações numéricas, mais especificamente em elementos finitos, elas podem ser denominadas quanto ao referencial adotado, ou seja, lagrangiana total, lagrangiana atualizada, lagrangiana parcialmente atualizada e euleriana. Na formulação lagrangiana total é considerado um referencial fixo já conhecido para determinação das variáveis do problema. Esse referencial adotado é geralmente a posição inicial do corpo. Essa abordagem é encontrada em, por exemplo, MONDKAR & POWELL (1977), SURANA (1983), GRECO (2004), CODA & GRECO (2004), MACIEL *et al.*(2004), MACIEL & CODA (2005), entre outros. Na lagrangiana atualizada, o referencial conhecido é atualizado durante os incrementos de carga, ou seja, a posição do corpo referente ao nível de carga anterior passa a ser referência e assim por diante. Empregando essa técnica pode-se citar GADALA *et al.* (1984) e GATTASS & ABEL (1987). É denominada lagrangiana parcialmente atualizada quando o referencial é mudado apenas no início dos incrementos de carga (WONG & TINLOI, 1990). Já em formulações baseadas na descrição Euleriana (Espacial), o referencial para determinação das integrais, derivadas, etc. é a configuração atual, corrente do corpo. Essa forma é bastante empregada na mecânica dos fluidos, porém são encontrados trabalhos que empregam essa formulação para pórticos, por exemplo, em IZZUDIN & ELNASHAI (1993) que trata de pórticos tridimensionais.

Com relação a trabalhos que empregam a cinemática de Reissner em pórticos não lineares, pode-se citar entre outros SIMO *et al.* (1986), SAJE *et al.* (1998), YANG & SAIGAL (1984), IBRAHIMBEGOVIĆ (1995), MINGRUI LI (1997), NUKALA & WRITE (2004), MACIEL *et al.* (2004), MACIEL & CODA (2005) etc.

Com relação a trabalhos desenvolvidos por pesquisadores do SET que levam em conta pórticos com não linearidade geométrica, pode-se citar LAVALL (1996) que aborda pórticos planos de aço com formulação lagrangiana co-rotacional. O trabalho de PAULA (2001) aborda problemas estáticos e dinâmicos com referencial lagrangiano total e atualizado. Em PINTO (2002) a não linearidade é apresentada para pórticos planos de concreto armado. Em GRECO (2004), a primeira tese a apresentar a formulação posicional, faz-se análise dinâmica e estática de pórticos planos, bem como desenvolve formulação de contato/impacto para esse tipo de estrutura. Já em SANCHES (2006), faz-se interação fluido-estrutura, considerando-se o pórtico plano com cinemática de Reissner.

No próximo item, discute-se o estado da arte relativo às formulações envolvendo elementos finitos tridimensionais aplicados a problemas de não linearidade geométrica, expondo aqui os trabalhos mais relevantes encontrados na literatura.

## 2.2 Não linearidade geométrica aplicada a sólidos

A maioria das peças estruturais que por ventura podem sofrer grandes deslocamentos apresentam geralmente uma das três dimensões bem menor do que as outras. Assim sendo, não é muito comum encontrar na literatura problemas de não linearidade geométrica envolvendo sólidos tridimensionais na sua forma mais pura, ou seja, sem que haja nenhuma hipótese para representar estruturas de casca, placa, ou mesmo pórtico espacial, por exemplo.

Porém com o crescente avanço do estudo da biomecânica, surge a necessidade de se analisar problemas com sólidos tridimensionais, pois as peças estruturais, no caso músculos e órgãos internos do corpo humano tais como o coração, artérias e até mesmo o globo ocular, sofrem muitas vezes grandes deformações e deslocamentos. Por exemplo, o trabalho de HAUSSY & GANGHOFFER (2005) se destaca por analisar problema de instabilidade de cascas de parede grossa, simulando, assim, uma artéria que sofre aneurisma através do emprego de leis constitutivas mais apropriadas de acordo com a natureza da estrutura deformada (grandes deslocamentos ou grandes deformações). Em HRON & MÁDLIK (2006), uma formulação acoplado fluido-estrutura aplicada a problemas de biomecânica é mostrada com elementos sólidos tetraédricos de 10 nós (aproximação quadrática de variáveis). O mesmo elemento tetraédrico também é usado em ALMEIDA & SPILKER (1998), só que para análise de tecidos do tipo cartilagem (materiais hidratados). Enfim, em outros importantes trabalhos tais como YUCESOY *et al* (2002), TANG *et al* (2007) e BLEMKER *et al* (2005), ROGERS *et al* (1999), desenvolvem modelos e/ou formulações com elementos finitos sólidos a fim de se aplicar aos problemas de biomecânica.

Ainda mais, formulações que empregam coordenadas cilíndricas e polares no lugar de coordenadas cartesianas são empregadas para solução de problemas que envolvem pneumáticos. É o caso de DANIELSON & AHMED (1997) que desenvolve uma formulação para contato de pneumático com pavimento usando elemento hexaédrico de formato cilíndrico de 4 nós. O mesmo tipo de formulação com coordenadas cilíndricas pode também ser encontrado em BOURDARIAS *et al.*(2003) e COSTA *et al* (1996).

Com relação ao grau de aproximação de variáveis em elementos sólidos para representar grandes deslocamentos e deformações, existem muitos trabalhos que desenvolvem

formulações utilizando elemento de aproximação linear, e para contornar o problema de travamento originado pelo polinômio de baixa ordem, estratégias através do melhoramento do campo de tensões e deformações são comumente empregados. É o caso de trabalhos como SIMO *et al* (1993), SIMO & ARMERO (1992), ARMERO & GARIKIPATI (1996), MOITA & CRISFIELD(1996), CRISFIELD & MOITA (1996), REESE *et al* (1999) e REESE *et al* (2000) que utilizam estratégia melhorar o campo de deformações denominada de, no inglês, “*enhanced strains*”, já em BUCALEM & NOBREGA (2000), SZE & YAO,(2000), AUSSERER & LEE (1988), HAUPTMANN & SCHWEIZERHOF (2002), HONG, *et al* (2001), HONG & KIM (2002), HOLT & KRISHNAMURTHY (1995) e PETCHSASITHON & GOSLING (2005), utiliza-se também um campo de deformações otimizado que é chamado no inglês de “*assumed natural strains*” (ANS) e esse enriquecimento ocorre quando se adiciona no termo da energia potencial total a parcela de energia provocada por essas deformações. Em KOŽAR & IBRAHIMBEGOVIĆ (1995), IBRAHIMBEGOVIĆ & FREY (1994) e SIMO & ARMERO (1992), para aliviar o travamento, a técnica dos modos incompatíveis é utilizada, e consiste em assumir que gradiente de deslocamentos é otimizado através da soma de outro gradiente incompatível, ou seja, descontínuo ao longo do elemento, mas variacionalmente consistente.

Apesar dos trabalhos descritos acima enfocarem nos elementos de baixa ordem, alguns como RANK *et al* (1998), RANK *et al* (1998), DÜSTER *et al* (2003), afirmam que basta empregar elementos de alta ordem que problemas de travamento são eliminados. O autor comunga com essa filosofia, por isso o elemento de sólido aqui utilizado é, como dito antes, tetraédrico de 20 nós, gerando uma aproximação cúbica de variáveis e sem a utilização de campos de deformação ou tensão otimizados. No capítulo de exemplos numéricos referente à formulação de sólidos, essa afirmação se confirma ao mostrar a ausência de travamento quando comparado o resultados obtidos por alguns autores aqui já citados.

Sobre formulações de sólidos com grandes deslocamentos e deformações, não foi encontrado atualmente pelo autor trabalhos no SET, levando-o a crer que este é o primeiro a abordar o assunto neste departamento. Entretanto, é importante ressaltar o trabalho de MARQUES (2006), que desenvolveu a formulação posicional estática e dinâmica para problemas sólidos bidimensionais com impacto em anteparo rígido.

## 3 ELASTICIDADE NÃO LINEAR

---

Com o objetivo de fundamentar a teoria aplicada, enfoca-se neste capítulo o equacionamento do problema elástico não linear geométrico. Parte-se, inicialmente, descrevendo-se as configurações e movimentos do contínuo. Feito isso, são mostradas as equações de campo (equilíbrio e movimento), bem como a lei de balanço de energia e medidas de tensão empregadas no presente trabalho.

Para tanto, o texto a seguir é baseado principalmente nos importantes trabalhos de OGDEN (1984), CIARLET (1993), MASE (1999), CRISFIELD (1991), COIMBRA (1978), BONET & WOOD (1997) e CODA (2003.b).

### 3.1 Descrição das deformações e movimentos

Considere um corpo  $\beta$  em um dado instante de tempo como sendo um conjunto de partículas continuamente distribuídas. Esse corpo forma com a região  $\mathbf{B}$  de um espaço euclidiano  $\mathbf{E}$  uma correspondência bijetora, isto é, cada partícula do corpo  $\beta$  pode ser relacionada com um ponto no espaço euclidiano  $\mathbf{E}$ , sendo sua configuração dada por:

$$f_t : \beta \rightarrow \mathbf{B} \tag{3.1}$$

Sendo assim, admitindo sempre a existência dessa correspondência, chamaremos neste texto uma partícula de simplesmente “ponto” e a notação para o corpo ( $\beta$ ) irá se confundir com a da região que ele ocupa no espaço euclidiano  $\mathbf{B}$  (OGDEN, 1984).

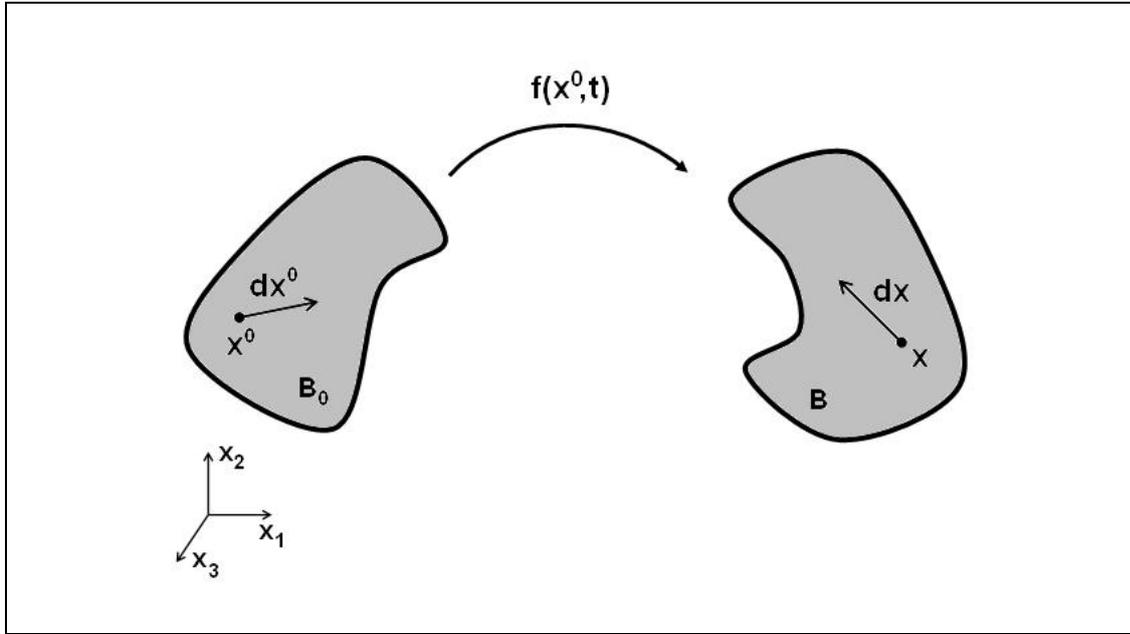


Figura 1 – Configuração inicial e final do corpo.

Considere-se um corpo  $\mathbf{B}_0$  inicialmente em repouso no tempo “ $t_0$ ” no espaço euclidiano  $\mathbf{E}$ . Esse corpo, devido às ações externas, assume diferentes formas e posições ao longo do tempo. Para um determinado tempo “ $t$ ”,  $\mathbf{B}_t$  é a sua configuração atual, ou corrente no espaço euclidiano. Um vetor  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ , no instante qualquer “ $t$ ” pode ser relacionado com o seu correspondente na configuração inicial  $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0)$ , pela função  $f(\mathbf{x}^0, t)$ , então:

$$\mathbf{x} = f(\mathbf{x}^0, t) = \mathbf{f}_t(\mathbf{x}^0) \tag{3.2}$$

Da mesma forma, pode-se escrever:

$$\mathbf{x}^0 = f^{-1}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{f}_t^{-1}(\mathbf{x}) \tag{3.3}$$

A Eq.(3.2) descreve o caminho de  $\mathbf{x}^0$  ao longo do tempo (Ogden, 1984), conforme mostrado na Figura 1. Na forma indicial, a Eq.(3.2), fica:

$$x_i = f_i(x_k^0, t) \tag{3.4}$$

Tomando-se a derivada da Eq. (3.2) em relação ao tempo, fica definida a velocidade do corpo no instante “t” ( $\mathbf{B}_t$ ):

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial}{\partial t} f(\mathbf{x}^0, t) = \mathbf{v}_t(\mathbf{x}^0) \quad (3.5)$$

Derivando-se Eq. (3.5) em relação ao tempo novamente, obtém-se a aceleração do corpo  $\mathbf{B}$  no instante “t” ( $\mathbf{B}_t$ ):

$$\ddot{\mathbf{x}} = \frac{\partial}{\partial t} \dot{f}(\mathbf{x}^0, t) = \mathbf{a}_t(\mathbf{x}^0) \quad (3.6)$$

Portanto observa-se que a função  $\mathbf{f} (f(\mathbf{x}^0, t))$  descreve o movimento do corpo, pois a partir dela, obtém-se posição, velocidade e aceleração. Sendo assim, neste texto,  $\mathbf{f}$  é denominada *Função Mudança de Configuração* do corpo em questão. Também, neste trabalho a função  $\mathbf{f}$  será sempre no mínimo de classe  $C^2$  para garantir as continuidades nos campos associados de velocidade e aceleração (Ogden, 1984 ; Coimbra, 1978).

Segundo OGDEN (1984), para a observação do comportamento físico do corpo ao longo do seu movimento deve ser feita a escolha de uma das suas configurações para ser tomada como referencial. Portanto, uma vez escolhida, essa configuração é denominada de configuração de referência. Quando a escolhida é a  $\mathbf{B}_0$ , chama-se de referencial Lagrangiano. Sendo então chamada de referencial Euleriano quando a referência é a configuração  $\mathbf{B}_t$  (configuração atual).

Nos trabalhos que envolvem métodos numéricos em elasticidade não linear, comumente se formula o problema a partir da descrição Lagrangiana, sendo então a descrição Euleriana mais utilizada para problemas de mecânica dos fluidos.

No caso deste trabalho, como já explanado no primeiro capítulo, a estrutura inicial é adotada como o referencial para descrição das infinitas formas e posições que um corpo pode vir a ocupar. Esse tipo de abordagem do problema não linear é chamado de Descrição Lagrangiana Total, pois a posição de referência é sempre a mesma durante o processo iterativo para determinação da solução do problema. Discussão mais detalhada será feita ao longo dos capítulos relativos à Formulação Posicional.

### 3.2 Tensor Gradiente de Deformação

Se um corpo elástico, submetido às forças externas em equilíbrio ou não, sofre movimento relativo de seus pontos, diz-se que o mesmo sofreu *deformação* ou mudou de forma. Quando isso não ocorre, ou seja, o sistema de forças atuantes não é equilibrado e o corpo não sofre deformação, então há apenas mudança de configuração através de *movimento de corpo rígido*. Na forma matemática isso é descrito através da função Mudança de Configuração  $\mathbf{f}$ , responsável pelo mapeamento do movimento e mudança de forma do corpo.

Escreve-se uma aproximação para função  $\mathbf{f}$  próxima ao ponto  $\mathbf{x}^0$ , na forma (CODA, 2003b):

$$\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{x}^0 + \Delta\mathbf{x}^0, t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}^0, t) + \text{Grad } \mathbf{f}|_{\mathbf{x}^0} \Delta\mathbf{x}^0 + \mathbf{O}^2 \quad (3.7)$$

no limite, ou seja,  $\Delta\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}$ , tem-se:

$$d\mathbf{x} = \text{Grad}(\mathbf{f}|_{\mathbf{x}^0}) d\mathbf{x}^0 \quad (3.8)$$

Ressalta-se que quando o operador gradiente é escrito com a letra inicial maiúscula, isto é,  $\text{Grad}(\bullet)$ , a sua representação é Lagrangiana, ou seja, em relação à  $\mathbf{B}_0$ .

A forma clássica para se obter a Eq.(3.8) é quando se toma uma variação infinitesimal  $d\mathbf{x}^0$  na configuração inicial, essa variação correspondente na configuração atual é, de acordo com a Figura 1,  $d\mathbf{x}$ , que é o diferencial total da Eq.(3.4), então:

$$dx_i = \frac{\partial f_i(x_j^0, t)}{\partial x_k^0} dx_k^0 \quad (3.9)$$

na qual, para uso futuro, far-se-á:

$$A_{ik} = \frac{\partial f_i(x_j^0, t)}{\partial x_k^0} \quad (3.10)$$

sendo Eq.(3.9), fica na forma:

$$dx_i = A_{ik} dx_k^0 \quad (3.11)$$

ou também:

$$A_{ik} = \frac{dx_i}{dx_k^0} \quad (3.12)$$

$A_{ik}$  é denominado Tensor Gradiente Mudança de Configuração (usualmente chamado de Tensor Gradiente de Deformação). Na forma matricial, a Eq.(3.10), escreve-se:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \partial x_1 / \partial x_1^0 & \partial x_1 / \partial x_2^0 & \partial x_1 / \partial x_3^0 \\ \partial x_2 / \partial x_1^0 & \partial x_2 / \partial x_2^0 & \partial x_2 / \partial x_3^0 \\ \partial x_3 / \partial x_1^0 & \partial x_3 / \partial x_2^0 & \partial x_3 / \partial x_3^0 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

Da mesma forma, para Eq.(3.9):

$$\begin{Bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial x_1 / \partial x_1^0 & \partial x_1 / \partial x_2^0 & \partial x_1 / \partial x_3^0 \\ \partial x_2 / \partial x_1^0 & \partial x_2 / \partial x_2^0 & \partial x_2 / \partial x_3^0 \\ \partial x_3 / \partial x_1^0 & \partial x_3 / \partial x_2^0 & \partial x_3 / \partial x_3^0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dx_1^0 \\ dx_2^0 \\ dx_3^0 \end{Bmatrix} \quad (3.14)$$

levando-se em conta também a notação da Eq.(3.8):

$$\mathbf{A} = \text{Grad} \left[ f(\mathbf{x}^0, t) \right] \quad (3.15)$$

Também, na forma tensorial, a Eq.(3.9) e/ou Eq.(3.8), torna-se:

$$d\mathbf{x} = \mathbf{A} d\mathbf{x}^0 \quad (3.16)$$

Importante lembrar que  $d\mathbf{x}^0$  é uma porção fixa, ou seja, um lugar geométrico dos pontos no corpo na configuração inicial, ao passo que  $d\mathbf{x}$  é o novo lugar geométrico e genérico desses pontos após sofrerem a transformação através de  $\mathbf{A}$ . Sendo assim, é relevante enfatizar que:

$$\mathbf{A} d\mathbf{x}^0 \neq 0, \text{ para todo } d\mathbf{x}^0 \neq 0 \quad (3.17)$$

Isso significa que é fisicamente impossível que haja aniquilação do material, isto é, através de uma mudança de forma a fibra  $d\mathbf{x}^0$  desaparecer. Portanto, devido a Eq.(3.17), diz-se que o tensor  $\mathbf{A}$  é não-singular (OGDEN, 1984), ou seja:

$$J = \det(\mathbf{A}) \neq 0 \quad (3.18)$$

Sendo “J” o jacobiano da mudança da configuração do corpo que é dado pelo determinante do Tensor Gradiente Mudança de Configuração. Para tensores de segunda ordem, que é o caso do tensor  $\mathbf{A}$ , o seu terceiro invariante principal é o próprio determinante e, portanto pode ser escrito na forma:

$$I_{\mathbf{A}}^{(3)} = \det(\mathbf{A}) = J = \frac{1}{3} \left[ \text{tr} \mathbf{A}^3 - \frac{3}{2} \text{tr} \mathbf{A}^2 \mathbf{A} + \frac{1}{2} (\text{tr} \mathbf{A})^3 \right] \quad (3.19)$$

Na forma indicial, para uso futuro, o jacobiano, dado pela Eq.(3.18) fica na forma:

$$J = e_{ijk} A_{i1} A_{j2} A_{k3} \quad (3.20)$$

também é válida a relação:

$$e_{lmn} J = e_{ijk} A_{il} A_{jm} A_{kn} \quad (3.21)$$

sendo,  $e_{ijk}$  chamado de *símbolo de permutação*.

$\mathbf{A}$  é não singular, como dito anteriormente, portanto existe sua inversa:

$$\mathbf{B} = (\mathbf{A}^{-1})^T \quad (3.22)$$

Derivando-se a Eq.(3.19) em relação ao tensor  $\mathbf{A}$ , obtém-se:

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{A}} = J (\mathbf{A}^{-1})^T = \mathbf{J} \mathbf{B} \quad (3.23)$$

Assim sendo, a Eq.(3.16) pode ser invertida, na forma:

$$d\mathbf{x}^0 = \mathbf{B}^T d\mathbf{x} \quad (3.24)$$

onde,

$$\mathbf{A} \mathbf{B}^T = \mathbf{I} = \mathbf{B}^T \mathbf{A} \quad (3.25)$$

Pode-se chegar a Eq.(3.24) pelo mesmo raciocínio quando da obtenção da Eq.(3.8), isto é, escrevendo-se agora uma aproximação para a inversa de  $f$  em torno do ponto  $\mathbf{x}$ , ou seja:

$$\mathbf{x}^0 = f^{-1}(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}, t) = f^{-1}(\mathbf{x}, t) + \text{grad} f^{-1} \Big|_{\mathbf{x}} \Delta \mathbf{x} + \mathbf{O}^2 \quad (3.26)$$

no limite novamente, tem-se:

$$\mathbf{dx}^0 = \text{grad} \left[ f^{-1} \Big|_{\mathbf{x}} \right] \mathbf{dx} \quad (3.27)$$

sendo então:

$$\mathbf{B}^T = \text{grad} \left[ f^{-1}(\mathbf{x}, t) \right] \quad (3.28)$$

A mesma Eq. (3.24), sendo o operador gradiente quando escrito com a letra inicial minúscula, isto é,  $\text{grad}(\bullet)$ , indica o gradiente em relação à configuração de atual ( $\mathbf{B}$ ).

Sabe-se que:

$$\left( \mathbf{A}^T \mathbf{A} \right)^T = \mathbf{A}^T \mathbf{A} \quad (3.29)$$

isto é,  $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$  é um tensor simétrico. Sendo assim, pode-se escrever:

$$\mathbf{dx}^0 \mathbf{g} \left( \mathbf{A}^T \mathbf{A} \right) \mathbf{dx}^0 = \left( \mathbf{A} \mathbf{dx}^0 \right) \mathbf{g} \left( \mathbf{A} \mathbf{dx}^0 \right) = \left| \mathbf{A} \mathbf{dx}^0 \right|^2 > 0 \quad (3.30)$$

A Eq.(3.30) mostra que para  $\mathbf{dx}^0 \neq \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$  é chamado por definição de tensor *positivo-definido*, da mesma forma que  $\mathbf{AA}^T$ ,  $\mathbf{BB}^T$  e  $\mathbf{B}^T \mathbf{B}$ . Ademais, na literatura, denominam-se os tensores  $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$  e  $\mathbf{AA}^T$  *Tensores de alongamento de Cauchy-Green direito e esquerdo* respectivamente.

### 3.3 Deformação de volume e superfície

Quando o corpo sofre deformação, há a mudança de volume (Ver Figura 2). Essa quantificação relativa à forma de referencia do corpo é dada pelo gradiente mudança de configuração  $\mathbf{A}$ .

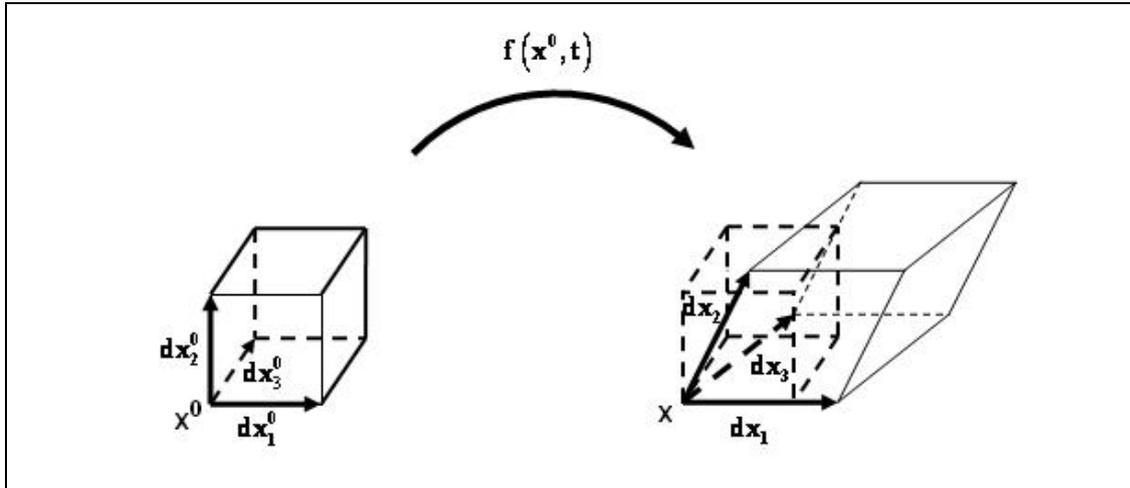


Figura 2 – Volume infinitesimal em mudança de configuração.

Considerando-se o triedro  $(dx_1^0, dx_2^0, dx_3^0)$  no ponto  $x^0$ , pode-se escrever, para as três direções:

$$dx_i = A_{ij} dx_j^0 \tag{3.31}$$

Admitindo-se que o triedro tem orientação positiva (referencial destrógiro), isto é,  $dx_j^0 \times dx_k^0 \geq 0$ , o seu volume do paralelepípedo infinitesimal formado entre eles na configuração de referência é dado por:

$$dV^0 = dx_1^0 \cdot (dx_2^0 \times dx_3^0) = \det(dx_1^0, dx_2^0, dx_3^0) = \varepsilon_{ijk} dx_i^0 dx_j^0 dx_k^0 \tag{3.32}$$

Da mesma forma, o volume infinitesimal do paralelepípedo na configuração atual é determinado por:

$$dV = dx_1 \cdot (dx_2 \times dx_3) = \det(dx_1, dx_2, dx_3) = e_{ijk} dx_i dx_j dx_k \tag{3.33}$$

Substituindo a Eq.(3.11) na Eq.(3.33), fica-se com:

$$dV = e_{ijk} dx_q^0 A_{iq} dx_n^0 A_{jn} dx_m^0 A_{km} \tag{3.34}$$

Substituindo a Eq.(3.21) na Eq.(3.34), tem-se:

$$dV = J e_{lmn} dx_q^0 dx_n^0 dx_m^0 \tag{3.35}$$

e sabendo que, pelo Eq.(3.32),  $dV^0 = e_{lmn} dx_q^0 dx_n^0 dx_m^0$ , obtém-se:

$$dV = JdV^0 \quad (3.36)$$

A Eq.(3.36) significa fisicamente que o Jacobiano da transformação representa a taxa de variação do volume em relação a configuração inicial, isto é, o quanto o volume da configuração atual diminuiu ou aumentou em relação ao corpo na posição de referência. Lembrando que se  $J=1$  significa que não houve variação de volume durante a transformação, ou seja, a transformação é dita *isocórica*. Um exemplo mais simples de transformação *isocórica* é quando o corpo sofre movimento de corpo rígido. É interessante notar, por exemplo, que se o movimento de corpo rígido é de translação, pode-se escrever:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^0 + \mathbf{d} \quad (3.37)$$

sendo  $\mathbf{d}$  um vetor incremento de posição. Aplicando-se a Eq.(3.16) na transformação dada pela Eq.(3.37), obtém-se:

$$d\mathbf{x} = d\mathbf{x}^0 \quad (3.38)$$

sendo então o gradiente mudança de configuração dado por:

$$\mathbf{A} = \mathbf{I} \quad (3.39)$$

onde  $\mathbf{I}$  é o tensor identidade e seu jacobiano é  $J = 1$ , evidentemente.

A Eq.(3.36) representa a transformação local, infinitesimal, do volume do corpo. Pode-se, portanto, ser estendida para todo volume, na forma:

$$\int_B dV = \int_{B^0} JdV^0 \quad (3.40)$$

Considere-se agora na vizinhança do ponto  $\mathbf{x}^0$  vetor infinitesimal de superfície  $d\mathbf{s}^0$ , de forma que:

$$d\mathbf{s}^0 = \mathbf{N}ds^0 \quad (3.41)$$

onde  $\mathbf{N}$  é o vetor normal à superfície infinitesimal  $ds^0$  na configuração  $\mathbf{B}^0$ . Seja  $d\mathbf{x}^0$  uma fibra arbitrária do corpo que corta a superfície  $ds^0$  de forma que  $d\mathbf{x}^0 \cdot d\mathbf{s}^0 > 0$  (ver Figura 3).

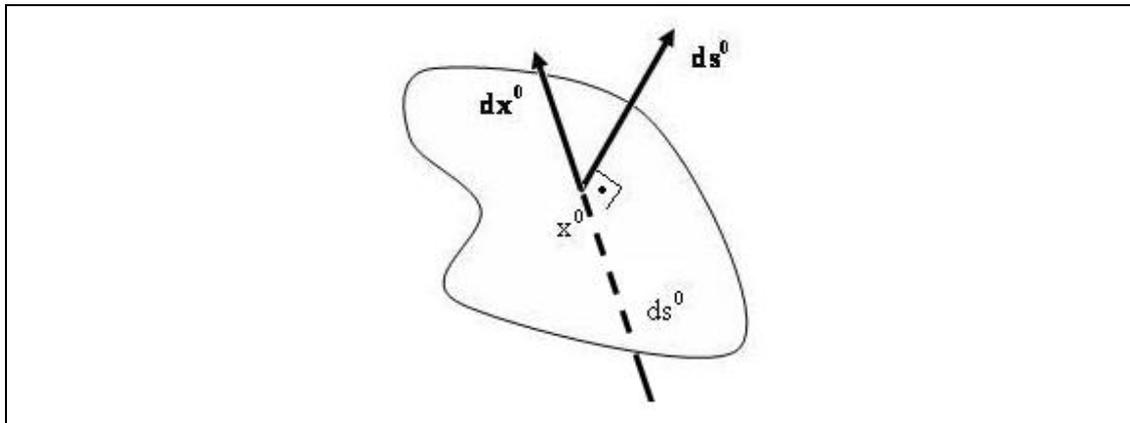


Figura 3 – Fibra infinitesimal transpassando superfície arbitrária do corpo.

Dessa forma, o volume do cilindro de base  $ds^0$  e geratriz  $dx^0$  é dado por:

$$dV^0 = dx^0 \cdot ds^0 \tag{3.42}$$

Após deformação, suponha-se que  $dx^0$  e  $ds^0$  transformem-se respectivamente em  $dx$  e  $ds$ , onde:

$$ds = n ds \tag{3.43}$$

Sendo  $n$  equivalente a  $N$  na configuração atual. Pode-se ter o volume do cilindro na configuração corrente dado por  $ds$  e  $dx$  na mesma forma que em Eq.(3.42) (ver Figura 4) , ou seja:

$$dV = dx \cdot ds \tag{3.44}$$

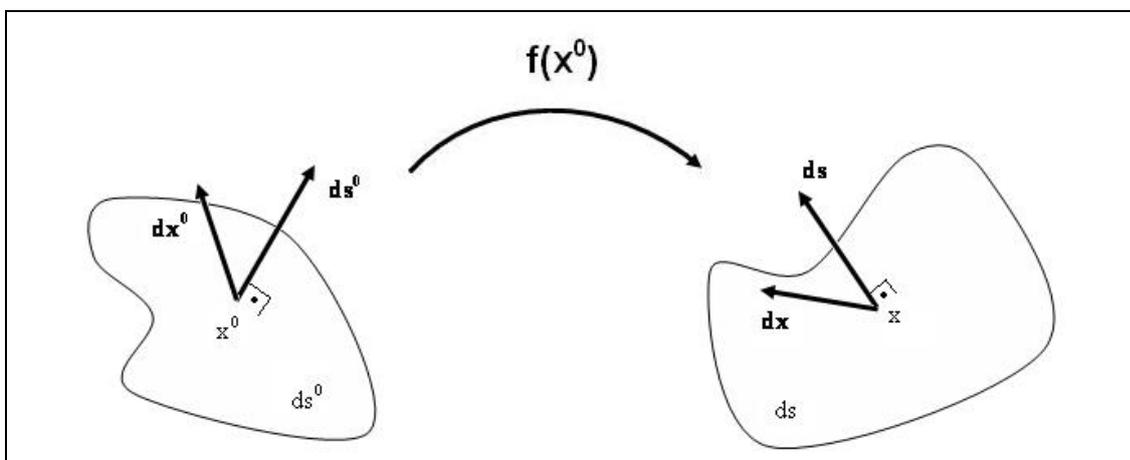


Figura 4 – Transformação de superfície de um corpo.

Então, substituindo a Eqs.(3.42) e (3.44) na Eq.(3.36), tem-se:

$$\mathbf{dx} \cdot \mathbf{ds} = J \mathbf{dx}^0 \cdot \mathbf{ds}^0 \quad (3.45)$$

Novamente, substituindo-se a Eq.(3.31) em (3.45) e removendo  $\mathbf{dx}^0$ , obtém-se:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{ds} = J \mathbf{ds}^0 \quad (3.46)$$

Multiplicando-se a Eq.(3.46) por  $\mathbf{B}$  e empregando-se a propriedade dada pela Eq.(3.25), chega-se a:

$$\mathbf{ds} = J \mathbf{B} \mathbf{ds}^0 \quad (3.47)$$

A Eq.(3.47) pode-se também se escrever na forma:

$$\mathbf{nds} = J \mathbf{B} \mathbf{N} \mathbf{ds}^0 \quad (3.48)$$

A fórmula expressa pela Eq.(3.47) ou (3.48) é chamada de *Fórmula de Nanson* e representa a transformação de uma superfície  $\mathbf{ds}^0$  do corpo na configuração inicial em uma  $\mathbf{ds}$  na atual. É importante notar que, ao longo da superfície do corpo, a lei de transformação não segue a Eq.(3.16), sendo esta transformação dada somente pela *Fórmula de Nanson*. Portanto, o material ao longo do vetor  $\mathbf{N}$  não é o mesmo que está ao longo do vetor  $\mathbf{n}$  (OGDEN,1984).

### 3.4 Alongamento, deformação e distorção

Quando, após mudança de configuração do corpo, a fibra  $\mathbf{dx}^0$  permanece com o mesmo comprimento, o material é dito indeformável, ou seja:

$$|\mathbf{dx}| - |\mathbf{dx}^0| = 0 \quad (3.49)$$

Multiplicando-se a Eq.(3.16) por  $\mathbf{dx}$ , tem-se:

$$\mathbf{dx} \cdot \mathbf{dx} = |\mathbf{dx}|^2 = (\mathbf{A} \mathbf{dx}^0) \cdot (\mathbf{A} \mathbf{dx}^0) = (\mathbf{dx}^0)^T \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{dx}^0 \quad (3.50)$$

Subtraindo-se o resultado obtido pela Eq.(3.50) por  $|\mathbf{dx}^0|^2$ , obtém-se:

$$|\mathbf{dx}|^2 - |\mathbf{dx}^0|^2 = \mathbf{dx}^0 \cdot (\mathbf{A}^T \mathbf{A} - \mathbf{I}) \mathbf{dx}^0 \quad (3.51)$$

A Eq. (3.51) representa a diferença entre os quadrados dos comprimentos da fibra na configuração inicial e final. Para satisfazer a condição de indeformabilidade da fibra  $\mathbf{dx}^0$  dada pela Eq.(3.49), na Eq.(3.51) é necessário e suficiente se ter:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{I} \quad (3.52)$$

Quando a condição dada pela Eq.(3.52) não é satisfeita, a fibra se deforma. Portanto o tensor  $\mathbf{A}^T \mathbf{A} - \mathbf{I}$  fornece uma forma de medir deformação no corpo localmente. Sendo assim, o Tensor de Deformação de Green é definido como sendo:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{A}^T \mathbf{A} - \mathbf{I}) \quad (3.53)$$

Também chamado de Tensor de deformação Lagrangiano, devido à configuração inicial do corpo ser tomada para determinação desse tensor. Da mesma forma, multiplicando-se também a Eq.(3.24) por  $\mathbf{dx}^0$  e seguindo o mesmo procedimento algébrico para se chegar à Eq.(3.51), obtém-se:

$$|\mathbf{dx}|^2 - |\mathbf{dx}^0|^2 = \mathbf{dx} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{B} \mathbf{B}^T) \mathbf{dx} \quad (3.54)$$

e por conseguinte:

$$\mathbf{F} = \frac{1}{2} (\mathbf{I} - \mathbf{B} \mathbf{B}^T) \quad (3.55)$$

O tensor dado pela Eq.(3.55) é denominado de Tensor de Deformação de Almansi ou Tensor de Deformação Euleriano, pois a configuração em que se mede a deformação, ou seja, de referência, é a corrente.

Pode-se escrever o tensor de deformação Lagrangiano dado pela Eq.(3.53) em função dos deslocamentos, para isso, define-se o vetor deslocamento:

$$u_i = x_i - x_i^0 \quad (3.56)$$

Tomando-se o gradiente de (3.56), tem-se:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j^0} = \frac{\partial x_i}{\partial x_j^0} - \frac{\partial x_i^0}{\partial x_j^0} = \mathbf{A} - \mathbf{I} = \mathbf{D} \quad (3.57)$$

A Eq.(3.57) representa o Tensor gradiente de deslocamento  $\mathbf{D}$ . Pode-se escrever o tensor de Green em função do tensor gradiente de deslocamento, na forma:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{D} + \mathbf{D}^T + \mathbf{D}^T \mathbf{D}) \quad (3.58)$$

Na notação indicial a Eq.(3.58) fica-se na forma:

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j^0} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i^0} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i^0} \frac{\partial u_k}{\partial x_j^0} \right) \quad (3.59)$$

Considerem-se, de acordo com a Figura 5, os vetores unitários  $\mathbf{M}$  na configuração de referência e  $\mathbf{m}$  o respectivo vetor na configuração atual, ambos ao longo de  $d\mathbf{x}^0$  e  $d\mathbf{x}$  respectivamente, de forma que se pode escrever:

$$d\mathbf{x}^0 = \mathbf{M} |d\mathbf{x}^0| \quad (3.60)$$

e

$$d\mathbf{x} = \mathbf{m} |d\mathbf{x}| \quad (3.61)$$

Portanto, substituindo a Eq.(3.60) e (3.61) em (3.16), tem-se:

$$\mathbf{m} |d\mathbf{x}| = \mathbf{A} \mathbf{M} |d\mathbf{x}^0| \quad (3.62)$$

Na forma indicial a mesma Eq.(3.62) fica:

$$m_j |d\mathbf{x}| = A_{kj} M_k |d\mathbf{x}^0| \quad (3.63)$$

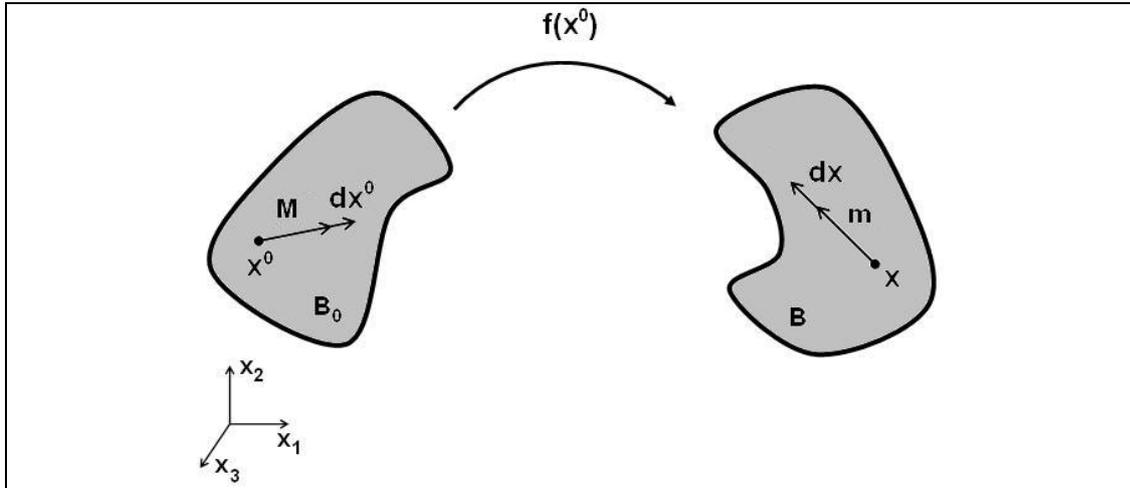


Figura 5 – esquema de vetores unitários ao longo de uma fibra arbitrária.

Multiplicando-se a Eq.(3.62) por  $\mathbf{m}|\mathbf{dx}|$ , fica-se com:

$$|\mathbf{dx}|^2 = \mathbf{M}(\mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{M})|\mathbf{dx}^0|^2 \quad (3.64)$$

Da Eq.(3.64), pode-se escrever:

$$\frac{|\mathbf{dx}|}{|\mathbf{dx}^0|} = |\mathbf{AM}| = [\mathbf{M}(\mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{M})]^{1/2} = \lambda(\mathbf{M}) \quad (3.65)$$

onde  $\lambda(\mathbf{M})$  é definido como sendo o alongamento na direção de  $\mathbf{M}$  da fibra correspondente  $\mathbf{dx}$  medido na configuração lagrangiana. Sendo assim, a medida de deformação de engenharia<sup>2</sup>(CODA, 2003.a; CODA, 2003.b) é dada por:

$$\varepsilon(\mathbf{M}) = \lambda(\mathbf{M}) - 1 \quad (3.66)$$

A Eq.(3.66), pode também ser escrita na forma:

$$\varepsilon(\mathbf{M}) = \frac{|\mathbf{dx}| - |\mathbf{dx}^0|}{|\mathbf{dx}^0|} \quad (3.67)$$

<sup>2</sup>Segundo OGDEN(1984), “ $\varepsilon$ ” é também chamada de *extension ratio*.

Ressaltando novamente que a medida de deformação de engenharia é uma grandeza Lagrangiana. O mesmo raciocínio iniciado a partir da Eq.(3.60) levando-se tomando-se em conta o referencial Euleriano resultaria na seguinte medida de deformação Euleriana:

$$\varepsilon(\mathbf{m}) = \frac{|\mathbf{dx}^0| - |\mathbf{dx}|}{|\mathbf{dx}|} \quad (3.68)$$

Além de se alongar após deformação, as fibras de um corpo também podem sofrer distorção. Na Figura 6 são mostradas duas fibras na configuração inicial que formam um ângulo  $\Theta$  entre elas. Após deformação esse ângulo torna-se  $\theta$  havendo, portanto, distorção.

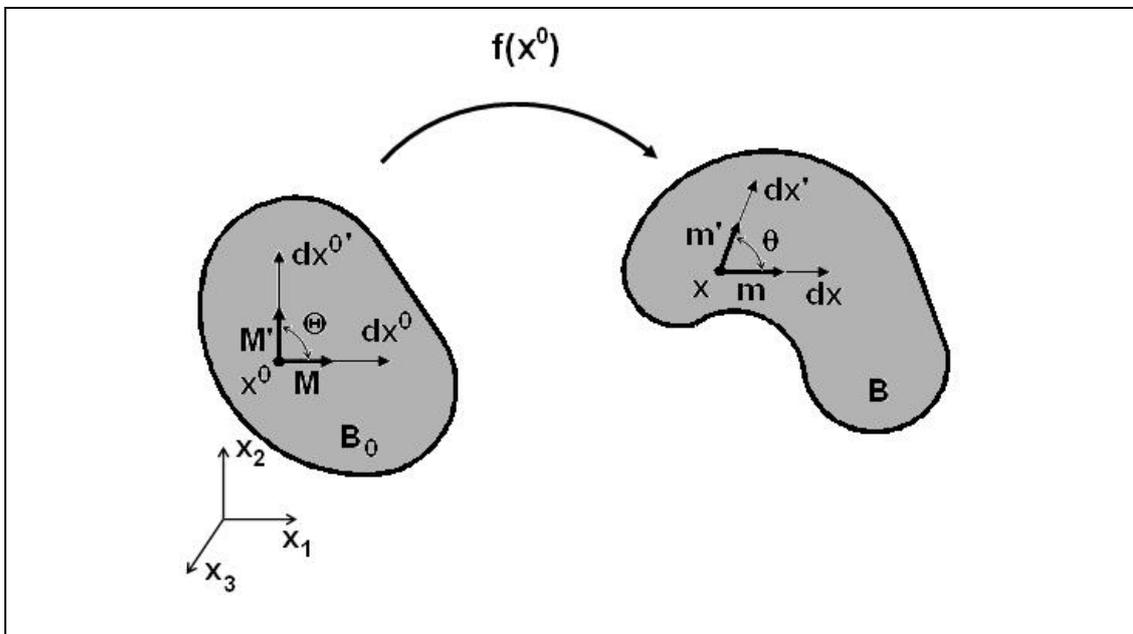


Figura 6 - Ângulo inicial e final.

Para fibra  $\mathbf{dx}'$ , pode-se também escrever:

$$\mathbf{dx}' = \mathbf{A} \mathbf{dx}^{0'} \quad (3.69)$$

onde  $\mathbf{dx}^{0'}$  é a fibra correspondente na configuração de referência. Seja  $\mathbf{m}'$  e  $\mathbf{M}'$  vetores unitários ao longo de  $\mathbf{dx}'$  e  $\mathbf{dx}^{0'}$  respectivamente. Então, os ângulos  $\Theta$  e  $\theta$  são dados por:

$$\Theta = \arccos(\mathbf{M}^T \mathbf{M}') \quad (3.70)$$

$$\theta = \arccos(\mathbf{m}^T \mathbf{m}') \quad (3.71)$$

Sendo, da Eq.(3.62) e Eq.(3.65),  $\mathbf{m} = \frac{\mathbf{AM}}{\lambda(\mathbf{M})}$  e  $\mathbf{m}' = \frac{\mathbf{AM}'}{\lambda(\mathbf{M}')}$ , pode-se escrever a Eq.(3.71) na

forma:

$$\theta = \arccos \left[ \frac{\mathbf{Mg}(\mathbf{A}^T \mathbf{AM}')}{\lambda(\mathbf{M}')\lambda(\mathbf{M})} \right] \quad (3.72)$$

O ângulo de distorção  $\gamma$  ou simplesmente distorção é definido como sendo a diferença entre  $\theta$  e  $\Theta$ , ou seja:

$$\gamma = \theta - \Theta \quad (3.73)$$

É importante ressaltar que  $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ , Tensor de Alongamento de Cauchy-Green, é simétrico, positivo-definido e tem seis componentes independentes (OGDEN,1984). E qualquer medida de deformação em função dele é considerada objetiva, isto é, invariante relativo a rotações e translações (YOJO, 1993; CAMPELLO *et. al.*, 2003).

Neste trabalho, admite-se sempre  $\Theta = \pi/2$ , ou seja, a distorção é o quanto reduziu o ângulo reto, expresso em radianos. Para a representação completa das deformações no espaço tridimensional, faz-se necessário o emprego de seis componentes independentes de deformação, que são três longitudinais e três de distorção. Essas componentes são calculadas escolhendo três vetores unitários mutuamente ortogonais, isto é,  $\mathbf{M}_1$ ,  $\mathbf{M}_2$  e  $\mathbf{M}_3$ , formando um triedo ortogonal cartesiano. Empregando então as fórmulas anteriormente descritas para cálculo das deformações, obtém-se:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^T = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \gamma_{12}, \gamma_{13}, \gamma_{23})^T \quad (3.74)$$

ou na forma matricial:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & \varepsilon_{22} & \gamma_{23} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \quad (3.75)$$

sendo  $\gamma_{ij} = \gamma_{ji}$ .

$\boldsymbol{\varepsilon}$ , nas Eqs.(3.75) e (3.74), escrito na forma vetorial tensorial respectivamente (apesar de não sê-lo), representa as seis componentes de deformação independentes calculadas segundo referencial lagrangiano, ou seja, medidas de deformação de engenharia (CODA, 2003.c ; CODA & GRECO, 2003; MACIEL & CODA, 2004).

### 3.5 Decomposição Polar

Neste item se descreve, para melhor entendimento geométrico de como as deformações ocorrem no corpo, o teorema da decomposição polar.

Foi visto nos itens anteriores que o tensor gradiente de deformação  $\mathbf{A}$  transforma a fibra  $d\mathbf{x}^0$  em  $d\mathbf{x}$  através da Eq.(3.16) e que essa transformação implica em alongamentos e rotações dessa fibra. É possível, portanto, exprimir o tensor  $\mathbf{A}$  como sendo o produto tensorial de um tensor de rotação e um tensor de alongamento. Dessa forma, o teorema da decomposição polar afirma que para um tensor gradiente de deformação  $\mathbf{A}$  existem os únicos tensores positivos-definidos  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{V}$  e um único tensor ortogonal  $\mathbf{R}$ , de forma que:

$$\mathbf{A} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{V}\mathbf{R} \quad (3.76)$$

Esse teorema é demonstrado como se segue.

Das propriedades de Tensores de segunda ordem sabe-se que para um tensor positivo-definido simétrico  $\mathbf{T}$ , existe um tensor  $\mathbf{U}$  positivo-definido e simétrico, tal que:

$$\mathbf{U}^2 = \mathbf{T} \quad (3.77)$$

Dessa forma, sabendo-se da existência da Eq.(3.76) pode-se escrever:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{U}^T \mathbf{R}^T \mathbf{R} \mathbf{U} = \mathbf{U}^2 \quad (3.78)$$

e também:

$$\mathbf{A} \mathbf{A}^T = \mathbf{V} \mathbf{R} \mathbf{R}^T \mathbf{V}^T = \mathbf{V}^2 \quad (3.79)$$

Como já dito antes,  $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$  e  $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$  são simétricos e positivos-definidos, e portanto, de acordo com a propriedade de tensores dada pela Eq.(3.77), conclui-se que  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{V}$  também os são.

Com a finalidade de se demonstrar a ortogonalidade de  $\mathbf{R}$ , definem-se:

$$\mathbf{R} = \mathbf{A}\mathbf{U}^{-1} \quad (3.80)$$

e

$$\mathbf{S} = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{A} \quad (3.81)$$

Empregando-se a Eq.(3.78), tem-se:

$$\mathbf{R}^T\mathbf{R} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{U}\mathbf{U}\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{I} \quad (3.82)$$

Se demonstra, então, que  $\mathbf{R}$  é ortogonal. De forma análoga se demonstra para  $\mathbf{S}$ :

$$\mathbf{S}\mathbf{S}^T = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{A}^T\mathbf{V}^{-1} = \mathbf{I} \quad (3.83)$$

A fim de se provar a unicidade de  $\mathbf{R}$  e  $\mathbf{U}$ , suponha-se que existem também outros tensores  $\mathbf{R}'$  e  $\mathbf{U}'$  com as mesmas propriedades tensoriais, de forma que:

$$\mathbf{A} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{R}'\mathbf{U}' \quad (3.84)$$

Sendo assim, pode-se escrever:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}'\mathbf{U}'\mathbf{U}^{-1} \quad (3.85)$$

e

$$\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{U}\mathbf{U}'^{-1}\mathbf{R}'^T \quad (3.86)$$

Porém, sabendo-se que:

$$\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{U}'\mathbf{R}'^T \quad (3.87)$$

Juntando-se a Eq.(3.86) com a Eq.(3.87), tem-se:

$$\mathbf{U}\mathbf{U}'^{-1} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{U}' \quad (3.88)$$

e, portanto:

$$\mathbf{U}^2 = \mathbf{U}'^2 \quad (3.89)$$

Novamente, de forma análoga, obtém-se também para o tensor  $\mathbf{V}$ :

$$\mathbf{V}^2 = \mathbf{V}'^2 \quad (3.90)$$

Ambos tensores  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{V}$  são positivos-definidos, portanto se conclui que  $\mathbf{U} = \mathbf{U}'$  e  $\mathbf{V} = \mathbf{V}'$ .

Sendo agora,

$$\mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{A} = \mathbf{V}\mathbf{S} \quad (3.91)$$

e sabendo que  $\mathbf{S}\mathbf{S}^T = \mathbf{I}$ , Eq.(3.91) fica:

$$\mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{A} = \mathbf{S}(\mathbf{S}^T\mathbf{V}\mathbf{S}) \quad (3.92)$$

onde  $\mathbf{S}$  é um novo tensor de rotação. Como já provado anteriormente, a decomposição é única, portanto se conclui que  $\mathbf{S} = \mathbf{R}' = \mathbf{R}$ , e:

$$\mathbf{U} = \mathbf{R}^T\mathbf{V}\mathbf{R} \quad (3.93)$$

e também:

$$\mathbf{V} = \mathbf{R}\mathbf{U}\mathbf{R}^T \quad (3.94)$$

O tensor  $\mathbf{R}$  representa somente movimento de rotação (corpo rígido) na mudança de configuração do corpo, sendo assim, tem-se:

$$\det \mathbf{A} = \det \mathbf{U} = \det \mathbf{V} \quad (3.95)$$

É mostrado na Figura 7 um esquema de decomposição da mudança de configuração do corpo de acordo com os tensores  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{V}$  e  $\mathbf{R}$  definidos no teorema da decomposição polar.

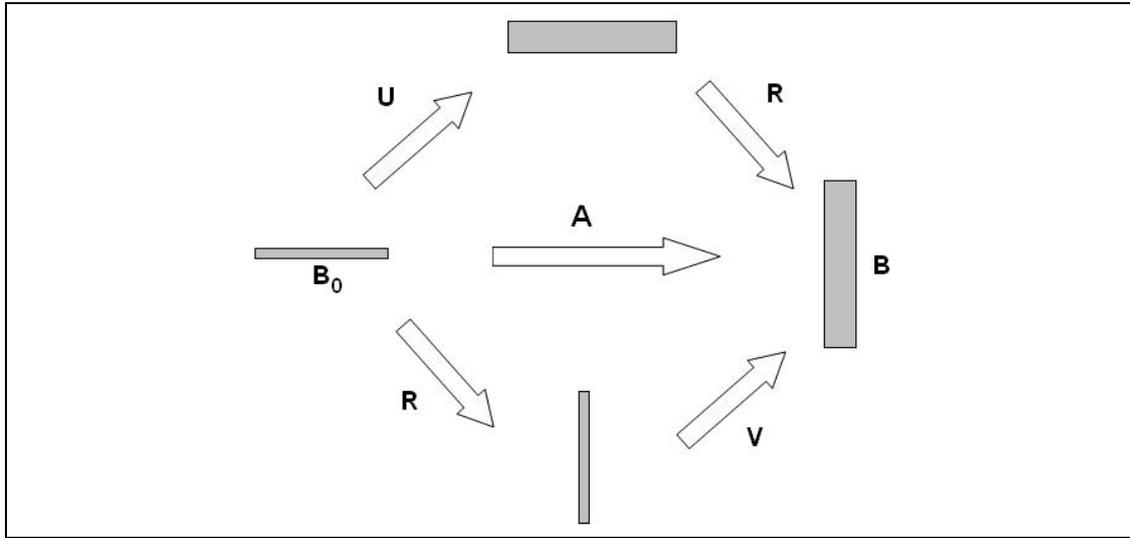


Figura 7 – Ilustração esquemática do teorema da decomposição polar.

Observando-se ainda a Figura 7 percebe-se que o tensor  $R$  somente rotaciona o corpo, enquanto que os demais,  $U$  e  $V$ , o alongam.

É importante ressaltar que o tensor gradiente  $A$  representa uma rotação rígida se somente  $U = V = I$  e uma deformação pura se somente  $R = I$ .

Ademais, pode-se escrever os tensores de deformação de Green e Almansi dados pela Eq.(3.53) e Eq.(3.55) em função dos tensores  $U$  e  $V$ , ou seja:

$$E = \frac{1}{2}(U^2 - I) \quad (3.96)$$

$$F = \frac{1}{2}(I - V^{-2}) \quad (3.97)$$

Fica claro, através das Eq.(3.96) e Eq.(3.97), que as deformações do corpo não dependem do tensor  $R$ , ou seja, são independentes de rotações.

Pode-se escrever também a expressão do alongamento, Eq.(3.65), em função do tensor  $U$ , ou seja:

$$\lambda(M) = [M(A^T A M)]^{1/2} = [M(U M)]^{1/2} = |U M| \quad (3.98)$$

Para que se tenham os alongamentos correspondentes à posição principal de  $U$ , faz-se:

$$\mathbf{U}\mathbf{u}^{(i)} = \lambda_i \mathbf{u}^{(i)} \quad (3.99)$$

onde  $i=1,2,3$  e  $\lambda_i$  são os valores principais (alongamentos principais) de  $\mathbf{U}$  nas direções principais  $\mathbf{u}^{(i)}$ .

Fazendo-se o produto de  $\mathbf{A}$  por  $\mathbf{u}^{(i)}$  e sabendo-se  $\mathbf{A}$  pode ser expresso pela Eq.(3.76), obtém-se:

$$\mathbf{A}\mathbf{u}^{(i)} = \mathbf{V}\mathbf{R}\mathbf{u}^{(i)} = \lambda_i \mathbf{R}\mathbf{u}^{(i)} \quad (3.100)$$

Da Eq.(3.100) se conclui, portanto, que  $\lambda_i$  também são valores principais para o tensor  $\mathbf{V}$  e que uma fibra na posição principal  $i$  sofre alongamento  $\lambda_i$  e rotação de acordo com o tensor  $\mathbf{R}$ . Ademais, sendo  $\mathbf{v}^{(i)}$  a posição principal de  $\mathbf{V}$  na Eq. (3.100), tem-se:

$$\mathbf{V}\mathbf{R}\mathbf{u}^{(i)} = \mathbf{V}\mathbf{v}^{(i)} \quad (3.101)$$

ou seja, a posição principal de  $\mathbf{V}$  sofre rotação através do tensor  $\mathbf{R}$  a partir da posição principal de  $\mathbf{U}$ .

Em termos de alongamentos principais, o jacobiano da transformação dado pela Eq.(3.18), torna-se:

$$J = \det \mathbf{A} = \det(\mathbf{R}\mathbf{U}) = \det(\mathbf{R}) \det(\mathbf{U}) = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \quad (3.102)$$

Com base nessas definições sobre posições principais e alongamentos principais dos tensores  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{V}$ , cabe-se aqui um reforço explicativo em relação à interpretação geométrica das deformações já adiantas através da figura Figura 7. A Figura 8 mostra uma faixa retangular de material no plano bidimensional com as fibras nas posições principais em destaque formando uma elipse de deformação (elipsóide para o caso tridimensional). Ainda na Figura 8, são mostrados os dois caminhos de deformação possíveis, isto é, através dos produtos tensoriais  $\mathbf{R}\mathbf{U}$  e  $\mathbf{V}\mathbf{R}$ .

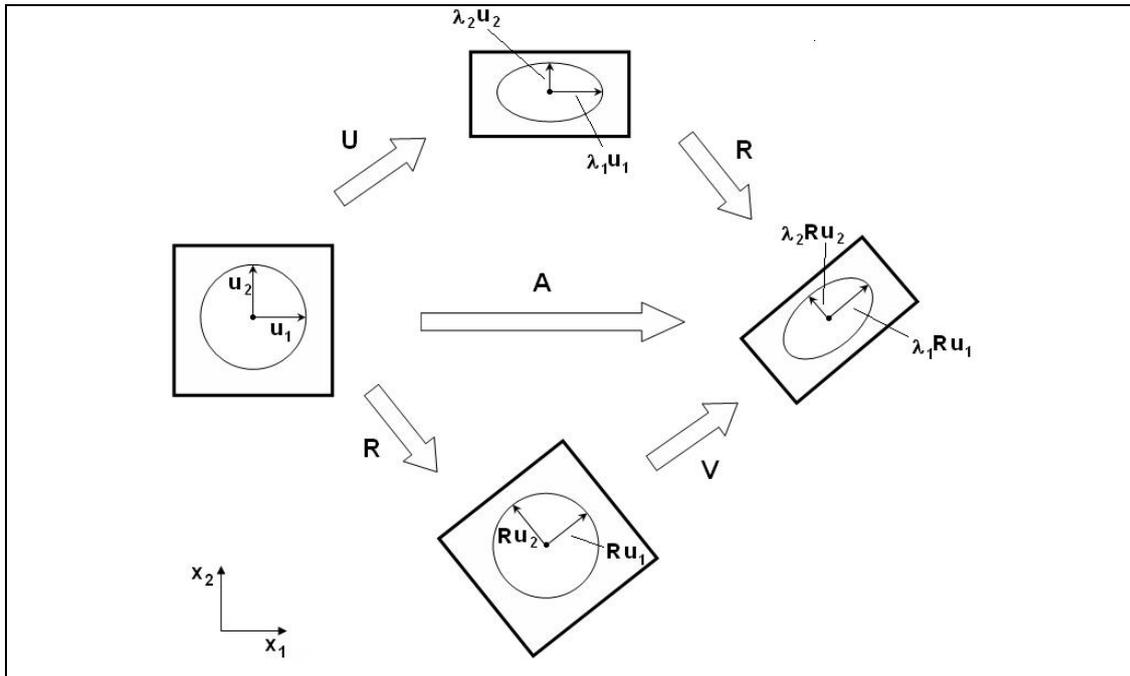


Figura 8 – Decomposição Polar via posições principais.

É importante notar que as fibras na posição principal não sofrem distorção, ou seja, o ângulo reto entre elas se mantém após deformação.

### 3.6 Análise do movimento

No item 3.1 são definidas a velocidade e aceleração do corpo a partir da Eq.(3.2). Sendo assim, as Eqs.(3.5) e (3.6) são aqui reescritas seguindo a notação:

velocidade:

$$\mathbf{v}^0(\mathbf{x}^0, t) = \dot{\mathbf{F}}(\mathbf{x}^0, t) \quad (3.103)$$

aceleração:

$$\mathbf{a}^0(\mathbf{x}^0, t) = \ddot{\mathbf{F}}(\mathbf{x}^0, t) \quad (3.104)$$

Apesar da velocidade e aceleração descritas pelas Eq.(3.103) e (3.104) respectivamente serem valores devidos ao corpo na configuração atual, essas são medidas a partir de argumentos lagrangianos, ou seja, em especificação langrangiana. Na especificação euleriana, pode-se escrever a velocidade na forma  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  e sabendo que  $\mathbf{x}$  pode ser dado pela Eq. (3.2), a velocidade dada pela Eq.(3.103) é expressa então, na forma:

$$\mathbf{v}^0(\mathbf{x}^0, t) = \mathbf{v}\left[\mathbf{f}(\mathbf{x}^0, t), t\right] \quad (3.105)$$

Nota-se que a velocidade que se mede é a mesma, o que muda é o argumento interno da função, ou seja, o referencial (CODA, 2003b).

Derivando-se em relação ao tempo ( $t$ ) o tensor gradiente mudança de configuração na forma dada pela Eq.(3.10), escreve-se:

$$\dot{\mathbf{A}}_{ik} = \frac{\partial A_{ik}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial f_i(x_j^0, t)}{\partial x_k^0} \quad (3.106)$$

Sabendo-se que  $\mathbf{x}$  e  $t$  são variáveis independentes, portanto a derivada dada pela Eq.(3.106) é comutativa, então se escreve:

$$\dot{\mathbf{A}}_{ik} = \frac{\partial A_{ik}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_k^0} \frac{\partial f_i(x_j^0, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_k^0} v(\mathbf{x}, t) \quad (3.107)$$

Aplicando-se a regra da cadeia na Eq.(3.107), obtém-se:

$$\dot{\mathbf{A}}_{ik} = \frac{\partial A_{ik}}{\partial t} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial x_k^0} \quad (3.108)$$

em notação tensorial:

$$\dot{\mathbf{A}} = \text{grad}(\mathbf{v}) \mathbf{A} \quad (3.109)$$

Na Eq.(3.109) é determinado o Tensor Gradiente de Velocidade. Define-se então:

$$\mathbf{\Gamma} = \text{grad} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \quad (3.110)$$

Sendo assim, a Eq.(3.109), escreve-se:

$$\dot{\mathbf{A}} = \mathbf{\Gamma} \mathbf{A} \quad (3.111)$$

Derivando-se em relação ao tempo a Eq.(3.25), tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{B}^T \mathbf{A}) = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{I} = \mathbf{0} \quad (3.112)$$

ou seja,

$$\frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{B}^T \mathbf{A}) = \frac{\partial \mathbf{B}^T}{\partial t} \mathbf{A} + \mathbf{B}^T \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \dot{\mathbf{B}}^T \mathbf{A} + \mathbf{B}^T \mathbf{\Gamma} \mathbf{A} = \mathbf{0} \quad (3.113)$$

Sabendo-se que  $\mathbf{\Gamma} \mathbf{A} = \mathbf{A}^T \mathbf{\Gamma}^T$  e  $\dot{\mathbf{B}}^T \mathbf{A} = \mathbf{A}^T \dot{\mathbf{B}}$ , a Eq.(3.113), fica:

$$\dot{\mathbf{B}} = -\mathbf{\Gamma}^T \mathbf{B} \quad (3.114)$$

também,

$$\dot{\mathbf{B}}^T = -\mathbf{B}^T \mathbf{\Gamma} \quad (3.115)$$

É importante enfatizar que a derivada temporal de uma grandeza é intrínseca ao referencial, isto é, lagrangiano ou euleriano e que a relação entre uma derivada e outra no tocante aos referenciais é dada por:

$$\left. \frac{\partial (\bullet)}{\partial t} \right|_{x^0} = \left. \frac{\partial (\bullet)}{\partial t} \right|_x + \mathbf{v} \text{grad} (\bullet) \quad (3.116)$$

Tomando-se a derivada temporal na especificação lagrangiana do tensor de deformação de Green, tem-se:

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \dot{\mathbf{E}} = \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{A}}^T \mathbf{A} + \mathbf{A}^T \dot{\mathbf{A}}) \quad (3.117)$$

Sabendo que  $\dot{\mathbf{A}} = \mathbf{\Gamma} \mathbf{A}$  e  $\dot{\mathbf{A}}^T = \mathbf{A}^T \mathbf{\Gamma}^T$ , Eq.(3.117) fica:

$$\dot{\mathbf{E}} = \dot{\mathbf{A}}^T \frac{1}{2} (\mathbf{\Gamma}^T + \mathbf{\Gamma}) \mathbf{A} = \dot{\mathbf{A}}^T \mathbf{\Sigma} \mathbf{A} \quad (3.118)$$

onde,

$$\Sigma = \frac{1}{2}(\Gamma^T + \Gamma) \quad (3.119)$$

A parte simétrica  $\Gamma$  é chamada de tensor taxa de deformação euleriano (OGDEN, 1984).

Derivando-se a Eq.(3.16) em relação ao tempo, tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{dx}) = \mathbf{dx} = \mathbf{A} \mathbf{dx}^0 = \Gamma \mathbf{dx} \quad (3.120)$$

que é a taxa com que a fibra  $\mathbf{dx}$  se deforma com o tempo.

É de importância, para o uso futuro, escrever-se a taxa de variação da deformação de engenharia, na forma:

$$\mathfrak{E}(\mathbf{M}) = \mathfrak{E}(\mathbf{M}) = \frac{\partial}{\partial t} [\mathbf{M}(\mathbf{UM})]^{1/2} = \frac{\mathbf{E}}{[\mathbf{M}(\mathbf{UM})]^{1/2}} = \frac{\mathbf{E}}{\lambda(\mathbf{M})} = \frac{\mathbf{A}^T \Sigma \mathbf{A}}{\lambda(\mathbf{M})} \quad (3.121)$$

Na posição principal de  $\mathbf{U}$ , a Eq. (3.121) se escreve:

$$\mathfrak{E} = \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{E}_{11}}{\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\mathbf{E}_{22}}{\lambda_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\mathbf{E}_{33}}{\lambda_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\lambda_1 \Sigma_{11} \lambda_1}{\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\lambda_2 \Sigma_{22} \lambda_2}{\lambda_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\lambda_3 \Sigma_{33} \lambda_3}{\lambda_3} \end{bmatrix} \quad (3.122)$$

onde  $i = 1, 2, 3$  são as direções principais do tensor  $\mathbf{U}$ .

Nos próximos itens serão expostos os equacionamentos no tocante às leis de equilíbrio, determinação de tensões nos corpos, e equações de campo em elasticidade não linear.

### 3.7 Conservação de massa

A massa de um corpo arbitrário  $\mathbf{B}$  é definida como sendo uma função escalar  $m$  tal que:

$$m(\mathbf{B}) \geq 0 \quad (3.123)$$

A massa é diretamente proporcional ao volume do corpo, ou seja, se o seu volume tender a zero, a massa também tenderá. Considera-se aqui neste trabalho a massa invariável durante os processos de mudança de forma corpo, sendo assim é constante ao longo do tempo:

$$\frac{\partial}{\partial t} m(\mathbf{B}) = 0 \quad (3.124)$$

Outra hipótese é da continuidade do corpo  $\mathbf{B}$ . Portanto, define-se que para uma dada configuração de  $\mathbf{B}$ , um campo escalar contínuo  $\rho$  chamado de densidade do corpo, tal que:

$$m(\mathbf{B}) = \int_{\mathbf{B}} \rho(\mathbf{x}, t) dV \quad (3.125)$$

onde,

$$\rho(\mathbf{x}, t) \geq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbf{B}$$

Como  $m(\mathbf{B})$  não varia, ou seja, é independente da configuração, pode-se escrever:

$$\int_{\mathbf{B}} \rho(\mathbf{x}, t) dV = \int_{\mathbf{B}_0} \rho_0(\mathbf{x}^0) dV^0 \quad (3.126)$$

Utilizando-se a Eq.(3.36) em Eq.(3.126), obtém-se:

$$\int_{\mathbf{B}_0} \rho(\mathbf{x}, t) J dV^0 = \int_{\mathbf{B}_0} \rho_0(\mathbf{x}^0) dV^0 \quad (3.127)$$

Da Eq.(3.127), conclui-se que:

$$\rho = J^{-1} \rho_0 \quad (3.128)$$

e que:

$$\det \mathbf{A} = J = \frac{\rho_0}{\rho} > 0 \quad (3.129)$$

A Eq.(3.128) é a forma local do princípio da conservação de massa (OGDEN, 1984). Ainda sobre a Eq. (3.128), conclui-se que  $\dot{\rho} = 0$  se e somente se  $\dot{\rho}_0 = 0$ . Derivando-se em a Eq.(3.128) em relação ao tempo na especificação lagrangiana, tem-se:

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial t} = \dot{\rho}_0 = \frac{\partial (J\rho)}{\partial t} = \dot{J}\rho + J\dot{\rho} \quad (3.130)$$

sendo  $\dot{\rho}_0 = 0$ , tem-se:

$$-\frac{\dot{\rho}}{\rho} = \frac{\dot{J}}{J} \quad (3.131)$$

também,

$$\dot{J} = \frac{\partial (\det \mathbf{A})}{\partial t} = \frac{\partial J}{\partial \mathbf{A}} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \frac{\partial J}{\partial \mathbf{A}} \dot{\mathbf{A}} = J \text{tr}(\boldsymbol{\Gamma}) \quad (3.132)$$

logo, a Eq.(3.131), fica:

$$-\frac{\dot{\rho}}{\rho} = \frac{\dot{J}}{J} = \text{tr}(\boldsymbol{\Gamma}) = \text{div}(\mathbf{v}) \quad (3.133)$$

ou seja,

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \dot{\rho} + \rho \text{div}(\mathbf{v}) = 0 \quad (3.134)$$

onde “div” escrito com letra inicial minúscula representa o divergente na configuração atual. Enfatiza-se que a Eq.(3.134) é a forma local da conservação de massa. Sendo assim, pode-se a Eq. (3.134) na forma global ou integral, ou seja:

$$\int_{\mathbf{B}} [\dot{\rho} + \rho \text{div}(\mathbf{v})] dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathbf{B}} \rho(\mathbf{x}, t) dV = 0 \quad (3.135)$$

É importante ressaltar que  $\mathbf{B}$  varia com o tempo, portanto se pode generalizar a Eq.(3.135), na forma:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_B \rho f dV = \int_B \rho \dot{f} dV \quad (3.136)$$

onde “f” uma variável arbitrária definida em  $\mathbf{B}$ .

### 3.8 Balanço de quantidade de movimento

A quantidade de movimento de translação (momento linear) do corpo na configuração atual  $\mathbf{B}$  é definida como:

$$\int_B \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) dV \quad (3.137)$$

onde, segundo a Eq. (3.105),  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}[\mathbf{f}(\mathbf{x}^0, t), t]$ . Sendo assim, a Eq.(3.137) pode se escrita na forma Lagrangiana, ou seja:

$$\int_{B_0} \rho_0(\mathbf{x}) \mathbf{v}(\mathbf{f}(\mathbf{x}^0, t), t) dV = \int_{B_0} \rho_0(\mathbf{x}) \mathbf{v}^0(\mathbf{x}^0, t) dV^0 \quad (3.138)$$

A quantidade de movimento angular (momento angular) do corpo em relação a um ponto  $\mathbf{x}_0$  dado na configuração Euleriana é:

$$\int_B \rho(\mathbf{x}, t) (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \times \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) dV \quad (3.139)$$

As forças de volume que agem no corpo quando na configuração atual são dadas pela expressão:

$$\int_B \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) dV \quad (3.140)$$

e as de superfície:

$$\int_S \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{S}) dS \quad (3.141)$$

onde a densidade de força de volume  $\mathbf{b}$  é um vetor definido em  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{t}$  é a densidade de força de contato que depende somente da normal à superfície  $\mathbf{S}$ . É importante esclarecer que a superfície  $\mathbf{S}$  pode ser tanto no contorno, quanto no interior do corpo.

A força resultante, portanto, é dada por:

$$\int_{\mathbf{B}} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) dV + \int_{\mathbf{S}} \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{s}) ds \quad (3.142)$$

e o momento resultante em relação ao ponto arbitrário  $\mathbf{x}_0$  é dado por:

$$\int_{\mathbf{B}} \rho(\mathbf{x}, t) (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \times \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) dV + \int_{\mathbf{S}} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{s}) ds \quad (3.143)$$

O balanço de quantidade de movimento é dado pela primeira Lei de Newton, ou seja:

$$\int_{\mathbf{B}} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) dV + \int_{\mathbf{S}} \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{s}) ds = \int_{\mathbf{B}} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{w}(\mathbf{x}, t) dV \quad (3.144)$$

O balanço de momento angular é dado por:

$$\int_{\mathbf{B}} \rho(\mathbf{x}, t) (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \times \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) dV + \int_{\mathbf{S}} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{s}) ds = \int_{\mathbf{B}} \rho(\mathbf{x}, t) (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \times \mathbf{w}(\mathbf{x}, t) dV \quad (3.145)$$

onde a propriedade  $\mathbf{v} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$  foi aplicada.

### 3.9 Tensor de Tensões de Cauchy

O postulado fundamental de Cauchy estabelece que a força de superfície  $\mathbf{t}$  é dependente apenas da normal à superfície em que esta atua. Dessa forma, pode-se escrever:

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{S}) = \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) \quad (3.146)$$

Portanto, uma consequência imediata é que (terceira Lei de Newton):

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, -\mathbf{n}) = -\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) \quad (3.147)$$

Diante disso, o teorema de Cauchy é assim enunciado: Se  $\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n})$  é contínuo em  $\mathbf{x}$  então o mesmo depende linearmente do vetor normal  $\mathbf{n}$  e existe portanto um tensor de segunda ordem  $\mathbf{T}$  independente de  $\mathbf{n}$ , de forma que:

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) = \mathbf{T}(\mathbf{x})\mathbf{n}, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbf{B} \quad (3.148)$$

O tensor  $\mathbf{T}$  é chamado de *Tensor de tensões de Cauchy*. Também chamado de *Tensor Real de Cauchy*. A prova desse teorema pode ser encontrada em OGDEN(1984).

A Eq.(3.148) na forma indicial fica:

$$t_i(\mathbf{x}, \mathbf{n}) = T_{ij}(\mathbf{x})n_j \quad (3.149)$$

e,

$$t_i(\mathbf{x}, \mathbf{n}) = t_i(\mathbf{x}, \mathbf{e}_j)n_j \quad (3.150)$$

Para  $i=j$ , se diz que a tensão é dita normal, do contrário, ou seja,  $i \neq j$ , a tensão é denominada de cisalhamento. Na Figura 9 é mostrada a representação do Tensor de Tensões de Cauchy através de suas componentes. Lembrando que o primeiro índice identifica a direção da tensão com relação ao triado unitário  $\mathbf{e}_i$  e o segundo índice a superfície perpendicular com relação ao mesmo triado.

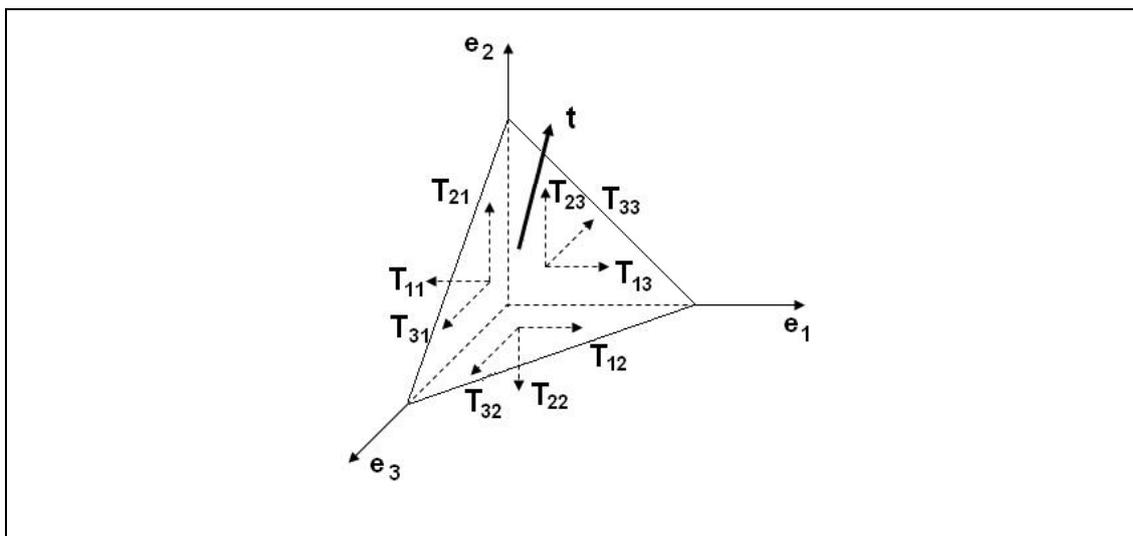


Figura 9 – Representação do Tensor Real de Cauchy através de suas componentes.

A tensão de Cauchy é o esforço pontual na configuração atual, portanto é chamada de tensão real, diferente da tensão nominal, que é determinada levando-se em conta a configuração inicial, ou forma inicial do corpo como será visto no item 3.11. Também, existe uma relação entre as duas tensões, que será descrita no item 3.14.

### 3.10 Leis do Movimento de Cauchy

Diante da relação expressa pela Eq.(3.148), o balanço de momento linear dada pela Eq.(3.144) é agora escrita na forma:

$$\int_B \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) dV + \int_S \mathbf{T}(\mathbf{x}, t) \mathbf{n} ds = \int_B \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{w}(\mathbf{x}, t) dV \quad (3.151)$$

Aplicando-se o teorema da divergência na Eq.(3.151), tem-se:

$$\int_B \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) dV + \int_B \text{div} \mathbf{T}^T(\mathbf{x}, t) dV - \int_B \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{w}(\mathbf{x}, t) dV = \mathbf{0} \quad (3.152)$$

Na forma local, portanto, pode-se escrever a Eq.(3.152):

$$\text{div} \mathbf{T}^T + \rho \mathbf{b} = \rho \mathbf{w} \quad (3.153)$$

A Eq.(3.153) é chamada de *Primeira Lei do Movimento de Cauchy*. Na forma indicial, escreve-se:

$$\frac{\partial T_{ji}}{\partial x_j} + \rho b_i = \rho w_i \quad (3.154)$$

Substituindo-se a Eq.(3.153) na equação de balanço de momento angular, Eq.(3.145), conclui-se que:

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}^T \quad (3.155)$$

que é a *Segunda Lei do Movimento de Cauchy*. Na forma indicial, também se escreve:

$$T_{ij} = T_{ji} \quad (3.156)$$

Reunindo-se, portanto, a Eq. (3.134) (equação de conservação de massa) com as equações das Leis do Movimento de Cauchy, isto é, Eqs. (3.153) e (3.155), tem-se as equações Eulerianas de campo.

### 3.11 Tensor de Tensões Nominal

A força resultante determinada a partir da configuração atual ao longo de uma superfície “s” é dada pela seguinte integral:

$$\mathbf{F} = \int_s \mathbf{T} \mathbf{n} ds \quad (3.157)$$

Empregando-se a fórmula de Nanson, Eq.(3.48), pode-se escrever para a configuração Lagrangiana:

$$\int_s \mathbf{T} \mathbf{n} ds = \int_{s^0} \mathbf{J} \mathbf{T} \mathbf{B} \mathbf{N} ds^0 \quad (3.158)$$

onde,

$$\mathbf{S}^T = \mathbf{J} \mathbf{T} \mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{S} = \mathbf{J} \mathbf{B}^T \mathbf{T} \quad (3.159)$$

que é denominado de *Tensor de Tensões de Piola-Kirchhoff de primeira espécie*. Assim, a Eq.(3.158), torna-se:

$$\int_s \mathbf{T} \mathbf{n} ds = \int_{s^0} \mathbf{S}^T \mathbf{N} ds^0 \quad (3.160)$$

O tensor  $\mathbf{S}$  é de segunda ordem e, portanto denominado de Tensor de Tensões Nominal. Ainda, a partir da Eq.(3.159), pode-se escrever:

$$\mathbf{T} = \frac{\mathbf{A} \mathbf{S}}{J} \quad (3.161)$$

Define-se também, o tensor simétrico denominado de *Tensor de Tensões de Piola-Kirchhoff de segunda espécie*, na forma:

$$\mathbf{P} = \mathbf{S}\mathbf{B} = \mathbf{J}\mathbf{B}^T\mathbf{T}\mathbf{B} = \mathbf{B}^T\hat{\mathbf{T}}\mathbf{B} \quad (3.162)$$

sendo o tensor  $\hat{\mathbf{T}} = \mathbf{J}\mathbf{T}$  denominado de *Tensor de Tensões de Kirchhoff*.

Dessa forma, o Tensor de Cauchy, pode ser reescrito como:

$$\mathbf{T} = \frac{1}{J}\mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{A} \quad (3.163)$$

Cabe esclarecer que o tensor  $\mathbf{S}$  não tem significado físico e nem é necessariamente simétrico. Porém, quando o corpo se deforma tal que os deslocamentos sejam pequenos, ou seja, no regime linear, tem-se  $J \approx 1$  e conseqüentemente  $\mathbf{A} \approx \mathbf{I}$ . Sendo assim, pode-se admitir por simplicidade  $\mathbf{T} = \mathbf{S} = \mathbf{P}$  (MASE, 1999).

É baseada nesse raciocínio, ou seja, que os deslocamentos são pequenos, que a elasticidade linear se utiliza por simplicidade das equações de campo Eulerianas descritas no seguinte item, sem incorrer em grandes distorções da realidade relativa ao problema analisado.

No próximo item são expostas as equações de campo lagrangianas.

### 3.12 Equações Lagrangianas de campo

A equação de momento linear, Eq.(3.151), pode ser escrita em relação à configuração Lagrangiana, então:

$$\int_{B_0} \rho_0(\mathbf{x}^0) \mathbf{b}(\mathbf{x}^0, t) dV^0 + \int_{B_0} \mathbf{S}^T(\mathbf{x}^0, t) \mathbf{N} ds^0 = \int_{B_0} \rho_0(\mathbf{x}^0) \mathbf{g}(\mathbf{x}^0, t) dV^0 \quad (3.164)$$

Aplicando-se o teorema da divergência sobre o segundo termo da Eq.(3.164), resulta em:

$$\int_{B_0} [\text{Div } \mathbf{S} + \rho_0 \mathbf{b}_0 - \rho_0 \mathbf{\ddot{x}}] dV^0 = \mathbf{0} \quad (3.165)$$

e, na forma local,

$$\text{Div } \mathbf{S} + \rho_0 \mathbf{b}_0 - \rho_0 \mathbf{\ddot{x}} = \mathbf{0} \quad (3.166)$$

A Eq.(3.166) é denominada de *Equação do Movimento Lagrangiana*.

O balanço de momento angular resulta em:

$$\mathbf{A}\mathbf{S} = \mathbf{S}^T \mathbf{A}^T \text{ ou } \mathbf{S}\mathbf{B} = \mathbf{B}^T \mathbf{S}^T \quad (3.167)$$

E a equação da conservação de massa, fica:

$$\text{Det}(\mathbf{A}) = J = \frac{\rho_0}{\rho} \quad (3.168)$$

Com isso, estabelece-se o conjunto de equação campo na forma lagrangiana.

As equações descritas no presente item, ou seja, as dadas pelas Eqs. (3.166), (3.167) e (3.168) são amplamente empregadas na formulação de elementos finitos em mecânica dos sólidos, ao passo que as equações Eulerianas de campo são comumente aplicadas em mecânica dos fluidos.

### 3.13 Balanço de Energia

Tomando-se o produto escalar da Eq.(3.154) e levando-se em conta a segunda lei do movimento de Cauchy, tem-se:

$$v_i \left( \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} + \rho b_i \right) = v_i \rho \dot{e} \quad (3.169)$$

e, sabendo que:

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} v_i = \frac{\partial}{\partial x_j} (T_{ij} v_i) - T_{ij} \Gamma_{ij} \quad (3.170)$$

onde  $\Gamma_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$ .

Com base na Eq.(3.170), pode-se escrever então a Eq.(3.169) na forma:

$$\frac{\partial (v_i T_{ij})}{\partial x_j} - T_{ij} \Gamma_{ij} + \rho v_i b_i = \rho v_i \dot{\epsilon}_i \quad (3.171)$$

Na forma global, a Eq.(3.171) fica:

$$\int_B \frac{\partial (v_i T_{ij})}{\partial x_j} dV + \int_B \rho v_i b_i dV = \int_B T_{ij} \Gamma_{ij} dV + \int_B \rho v_i \dot{\epsilon}_i dV \quad (3.172)$$

sendo:

$$\int_B \frac{\partial (v_i T_{ij})}{\partial x_j} dV = \int_S T_{ij} v_i n_j ds = \int_S t_i v_i ds \quad (3.173)$$

tem-se, então novamente a Eq.(3.172):

$$\int_S t_i v_i ds + \int_B \rho v_i b_i dV = \int_B T_{ij} \Gamma_{ij} dV + \int_B \rho v_i \dot{\epsilon}_i dV \quad (3.174)$$

Sendo também:

$$v_i \dot{\epsilon}_i = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (v_i v_i) \quad (3.175)$$

pode-se escrever:

$$\int_B \rho v_i \dot{\epsilon}_i dV = \frac{1}{2} \int_B \rho \frac{d}{dt} (v_i v_i) dV \quad (3.176)$$

Levando-se em conta a propriedade dada pela Eq.(3.136), pode-se escrever a Eq.(3.176) na forma:

$$\int_B \rho \mathbf{v}_i \dot{v}_i dV = \frac{d}{dt} \int_B \rho (v_i v_i) dV \quad (3.177)$$

Portanto, a Eq.(3.174) se torna:

$$\int_B \rho v_i b_i dV + \int_S t_i v_i dS = \int_B T_{ij} \Gamma_{ij} dV + \frac{d}{dt} \int_B \frac{1}{2} \rho v_i v_i dV \quad (3.178)$$

e na notação simbólica, escreve-se:

$$\int_B \rho \mathbf{b} \mathbf{v} dV + \int_S \mathbf{t} \mathbf{v} dS = \int_B \text{tr}(\mathbf{T}\boldsymbol{\Sigma}) dV + \frac{d}{dt} \int_B \frac{1}{2} \rho \mathbf{v} \mathbf{v} dV \quad (3.179)$$

onde, devido à simetria de  $\mathbf{T}$ , tem-se:

$$\text{tr}(\mathbf{T}\boldsymbol{\Gamma}) = \text{tr}(\mathbf{T}\boldsymbol{\Sigma}) \quad (3.180)$$

A Eq.(3.179) é chamada de Equação do Balanço de Energia Mecânica. Seus termos são denominados como se segue:

$$\int_B \rho \mathbf{b} \mathbf{v} dV \rightarrow \text{Taxa do trabalho das forças aplicadas no corpo;}$$

$$\int_S \mathbf{t} \mathbf{v} dS \rightarrow \text{Taxa do trabalho das forças de superfície;}$$

$$\int_B \text{tr}(\mathbf{T}\boldsymbol{\Sigma}) dV \rightarrow \text{Taxa do trabalho das tensões no corpo, ou potência de tensão;}$$

$$\frac{d}{dt} \int_B \frac{1}{2} \rho \mathbf{v} \mathbf{v} dV \rightarrow \text{Taxa de variação da energia cinética do corpo.}$$

Na forma mais geral, os sistemas não são conservativos, e o termo potência de tensão na equação de balanço energético é empregado para incorporar os fenômenos de dissipação e conservação (Ogden, 1984).

Da mesma forma que se obteve a Eq.(3.179) através das equações Eulerianas de campo, pode-se obter equação similar para o referencial Lagrangiano a partir das equações de campo Lagrangianas, ou seja:

$$\int_{B^0} \rho_0 \mathbf{b}^0 \cdot \mathbf{v}^0 dV^0 + \int_{S^0} (\mathbf{S}^T \mathbf{N}) \cdot \mathbf{v}^0 dS^0 = \int_{B^0} \text{tr}(\mathbf{S} \dot{\mathbf{A}}) dV^0 + \frac{d}{dt} \int_{B^0} \frac{1}{2} \rho_0 \mathbf{v}^0 \cdot \mathbf{v}^0 dV^0 \quad (3.181)$$

e os mesmos nomes são dados para os termos Lagrangianos equivalentes à Eq.(3.179). Enfatizando-se que o termo  $\text{tr}(\mathbf{S} \dot{\mathbf{A}})$  é pode ser denominado de densidade de potência de tensão. Esse termo é de suma importância para se validar os conjugados tensão-deformação, como mostrado no item 3.14.

### 3.14 Conjugado Tensão-Deformação

Pode-se escrever, a partir da Eq.(3.159), levando-se em conta as Eqs. (3.111) e (3.180) a equação da densidade de potência de tensão:

$$\text{tr}(\mathbf{S} \dot{\mathbf{A}}) = \text{tr}(\mathbf{S} \dot{\mathbf{F}} \mathbf{A}) = J \text{tr}(\mathbf{T} \dot{\mathbf{\Sigma}}) = \text{tr}(\hat{\mathbf{T}} \dot{\mathbf{\Sigma}}) \quad (3.182)$$

Da mesma forma, a Eq.(3.182), toma a forma:

$$\text{tr}(\hat{\mathbf{T}} \dot{\mathbf{\Sigma}}) = \text{tr}(\mathbf{P} \dot{\mathbf{E}}) \quad (3.183)$$

onde  $\mathbf{P}$  é o *Tensor de Piola-Kirchhoff de segunda espécie*.

Os pares de tensão e deformação definidos por  $(\mathbf{S}, \mathbf{A})$  e  $(\mathbf{P}, \mathbf{E})$ , por exemplo, através das Eqs. (3.182) e (3.183) são ditos pares conjugados tensão-deformação e são bastante conhecidos na literatura. O tensor que relaciona essas tensão e deformações conjugadas é denominado tensor constitutivo e poder ser, no presente trabalho, linear segundo a lei de hooke ou Neo-hookeano padrão, como será mostrado no item 3.15.

É de interesse se estabelecer o conjugado *tensão-deformação de engenharia*. Sendo assim, parte-se de:

$$\text{tr}(\mathbf{P} \dot{\mathbf{E}}) = \text{tr}(\boldsymbol{\sigma} \dot{\boldsymbol{\epsilon}}) \quad (3.184)$$

onde  $\mathcal{E}$  é definido pela Eq.(3.121) e  $\sigma$  é a medida de tensão de engenharia. Na posição principal, pode-se escrever:

$$\text{tr}(\mathbf{PE}) = P_{11}\mathcal{E}_{11} + P_{22}\mathcal{E}_{22} + P_{33}\mathcal{E}_{33} \quad (3.185)$$

ou então substituindo a Eq.(3.122) na Eq.(3.185), tem-se

$$\text{tr}(\mathbf{PE}) = P_{11}\lambda_1\mathcal{E}_{11} + P_{22}\lambda_2\mathcal{E}_{22} + P_{33}\lambda_3\mathcal{E}_{33} \quad (3.186)$$

Por simplicidade, na Eq.(3.186), usa-se apenas um índice para os termos com índice repetido, portanto:

$$\text{tr}(\mathbf{PE}) = P_1\lambda_1\mathcal{E}_1 + P_2\lambda_2\mathcal{E}_2 + P_3\lambda_3\mathcal{E}_3 \quad (3.187)$$

onde se conclui que a tensão de engenharia aqui proposta se relaciona com o Tensor de Piolla-Kirchhoff de segunda espécie através da expressão quando na posição principal:

$$\sigma_i = \lambda_i P_i \quad (3.188)$$

Partindo agora  $\text{tr}(\hat{\mathbf{T}}\mathbf{\Sigma})$ , tem-se na posição principal:

$$\text{tr}(\hat{\mathbf{T}}\mathbf{\Sigma}) = J(T_1\Sigma_1 + T_2\Sigma_2 + T_3\Sigma_3) \quad (3.189)$$

Substituindo agora o termo de interesse da Eq. (3.122) na Eq. (3.185), escreve-se:

$$\text{tr}(\hat{\mathbf{T}}\mathbf{\Sigma}) = J\left(T_1\frac{\mathcal{E}_1}{\lambda_1} + T_2\frac{\mathcal{E}_2}{\lambda_2} + T_3\frac{\mathcal{E}_3}{\lambda_3}\right) \quad (3.190)$$

Conclui-se agora que a tensão de engenharia aqui proposta se relaciona com o Tensor de Real de Cauchy, na seguinte forma quando na posição principal:

$$\sigma_i = \lambda_j\lambda_k T_i \quad (3.191)$$

Resolvendo a Eq.(3.191) para a Tensão de Cauchy, obtém-se:

$$T_i = \frac{\sigma_i}{\lambda_j\lambda_k} \quad (3.192)$$

onde  $J = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$  e os índices  $i, j$  e  $k$  seguem a regra da permutação cíclica.

### 3.15 Energia de deformação

De acordo com OGDEN (1984), CIARLET (1993) e MALVERN (1969), um material hiper-elástico pode ser completamente descrito por um potencial denominado de energia específica  $u_e$  escrito em função de uma medida de deformação objetiva. Neste trabalho, escolhem-se as deformação de engenharia e Green, descritas nos itens anteriores; dessa forma, pode-se escrever:

$$u_e(\boldsymbol{\varepsilon}) = a\boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{C}_a \boldsymbol{\varepsilon} + b\boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{C}_b (\boldsymbol{\varepsilon})^2 + c\boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{C}_c (\boldsymbol{\varepsilon})^3 + d\boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{C}_d (\boldsymbol{\varepsilon})^4 + K \quad (3.193)$$

onde  $\boldsymbol{\varepsilon}$  é dado em (3.74) para a medida de deformação de engenharia e em (3.53) para medida de deformação de Green. Os coeficientes  $a, b, c$  e  $d$  na Eq.(3.193) são calculados através de análise inversa com o intuito de adequar a energia específica de deformação ao comportamento físico do material.  $C_a, C_b, C_c$  e  $C_d$  são tensores de segunda ordem que estabelecem a interdependência das deformações para um dado material. Além disso, na Eq. (3.193) onde aparece o tensor de deformações elevado à potência maior que um, implica em dizer que os seus termos individuais são elevados a essa potência, e não o tensor em si.

O material mais simples, adotado no presente trabalho, é o que apresenta ao se deformar variação linear da energia específica. Sendo assim, da Eq.(3.193), pode-se escrever:

$$u_e(\boldsymbol{\varepsilon}) = a\boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{C}_a \boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.194)$$

Pode-se escrever, então:

$$u_e(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.195)$$

onde  $a = 1/2$  e  $\mathbf{C}$  é o tensor constitutivo para materiais isotrópicos, dado por:

$$C = \begin{bmatrix} K(1-\nu)/\nu & K & K & 0 & 0 & 0 \\ K & K(1-\nu)/\nu & K & 0 & 0 & 0 \\ K & K & K(1-\nu)/\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix} \quad (3.196) \text{ que na}$$

forma indicial, é dado por:

$$C_{ijkl} = K\delta_{ij}\delta_{kl} + 2G\delta_{ik}\delta_{jl} \quad (3.197)$$

sendo  $\nu$  o coeficiente de Poisson,  $G$  o módulo de Elasticidade transversal e  $K$  a constante de Lamé, ou seja:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (3.198)$$

$$K = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (3.199)$$

onde  $E$  é o módulo de Elasticidade Longitudinal do Material ou Módulo de Young.

Para materiais sujeitos às grandes deformações, é comum tratá-los com uma lei constitutiva mais apropriada. O material *Neo-Hookeano*, leva em conta grandes deformações para materiais hiper-elásticos isotrópicos. Seu tensor constitutivo é dado por (BONET & WOOD, 1997):

$$C_{ijkl} = K'\delta_{ij}\delta_{kl} + 2G'\delta_{ik}\delta_{jl} \quad (3.200)$$

onde,

$$G' = \frac{G - K \ln(J)}{J} \quad (3.201)$$

$$K' = \frac{K}{J} \quad (3.202)$$

são respectivamente os valores efetivos para o módulo de elasticidade transversal e constante de lamé. Observe-se que para pequenas deformações, tem-se  $J \approx 1$ , e conseqüentemente  $K' \approx K$  e  $G' \approx G$ .

A tensão nominal é obtida derivando-se a Eq.(3.195) em relação à deformação, ou seja:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial u_e}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.203)$$

Em notação indicial, Eq.(3.203), torna-se:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial u_e}{\partial \varepsilon_{ij}} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (3.204)$$

Pode-se escrever a tensão nominal na forma vetorial:

$$\boldsymbol{\sigma}^T = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \tau_{12}, \tau_{13}, \tau_{23})^T \quad (3.205)$$

E também, apesar de não ser tensor, matricialmente:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{12} & \sigma_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{13} & \tau_{23} & \sigma_{22} \end{bmatrix} \quad (3.206)$$

Na Eq.(3.206)  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$  devido à simetria do Tensor Constitutivo  $C_{ijkl}$  e das componentes de deformação.

É interessante notar que a tensão nominal  $\boldsymbol{\sigma}$  é calculada a partir da configuração inicial, ou seja, é a tensão tomada como parâmetro na maioria dos problemas de engenharia devido a sua fácil obtenção em laboratório de engenharia de materiais. Na elasticidade linear essa medida de tensão se confunde com o valor de tensão de Cauchy ou tensão real, pois a forma inicial é praticamente a mesma da forma final da peça ou elemento estrutural em análise.

No próximo capítulo, discorre-se a respeito da formulação posicional na sua forma mais geral, partindo depois para casos específicos com relação à cinemática do problema abordado.

## 4 FORMULAÇÃO POSICIONAL

---

Neste item é apresentada a formulação do MEF empregada neste trabalho. Essa formulação tem como diferencial o uso de posições ao invés de deslocamentos como incógnitas para solução de problemas não lineares geométricos. Os primeiros trabalhos com essa abordagem posicional são CODA (2003.c) e CODA & GRECO (2003), nos quais a análise de pórtico plano com cinemática de Euler-Bernoulli é tratada. Já nos trabalhos de MACIEL *et. al.* (2004) e MACIEL & CODA (2005), considerou-se o efeito de cisalhamento no pórtico plano através da cinemática de Reissner ou teoria de vigas de Reissner.

### 4.1 Funcional de energia potencial total

Na formulação posicional, o funcional de energia potencial do sistema escrito na configuração Lagrangiana do corpo é dada por:

$$\Pi = U_c + K_c + K_a - P \quad (4.1)$$

Onde  $U_e$  e  $P$  são respectivamente os potenciais de energia de deformação elástica e de energia das forças externas aplicadas.  $K_c$  é a energia cinética do corpo, e para problemas estáticos ou quase-estáticos essa energia é considerada nula.  $K_a$  é a perda de energia devido ao amortecimento.  $U_e$  é a integral da energia específica de deformação elástica ao longo do volume inicial  $V_0$  e é dada por:

$$U_e = \int_{V_0} u_e dV_0 \quad (4.2)$$

sendo  $u_e$  a energia específica de deformação elástica do corpo. Da mesma forma, para a energia cinética  $K_c$ , a integral é desenvolvida ao longo de  $V_0$ , onde  $\rho_0$  é a densidade do corpo no referencial lagrangiano:

$$K_c = \int_{V_0} \rho_0 \frac{\dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}}}{2} dV_0 \quad (4.3)$$

E “ $\dot{\mathbf{x}}$ ” é a velocidade vetorial do ponto material, dada por:

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{d(\mathbf{x})}{dt} \quad (4.4)$$

onde  $\mathbf{x}$  é o vetor posição do ponto.

O potencial das forças externas para um sistema de forças conservativas é dado por:

$$P = \mathbf{F}^T \mathbf{X} \quad (4.5)$$

onde  $\mathbf{F}$  é o vetor de forças externas e  $\mathbf{X}$  o vetor de posições das respectivas forças externas aplicadas.

Quanto às perdas de energia devido ao amortecimento, a integral resultante da derivada em relação às posições, é dada por:

$$\frac{\partial K_a}{\partial \mathbf{x}_i} = \int_{V_0} \frac{\partial k_a}{\partial \mathbf{x}_i} dV_0 = \int_{V_0} c_m \rho_0 \dot{\mathbf{x}}_i dV_0 \quad (4.6)$$

onde  $k_a$  é o funcional de energia específica dissipada e  $c_m$  é a constante de amortecimento.

Sendo assim, substituindo as Eqs.(4.2), (4.3) e (4.5) na Eq.(4.1), fica-se com:

$$\Pi = \int_{V_0} u_e dV_0 + \int_{V_0} \rho_0 \frac{\mathbf{x}_i \mathbf{x}_i}{2} dV_0 - F_j X_j + K_a \quad (4.7)$$

É interessante notar que no potencial de energia dado pela Eq.(4.7) os termos de energia potencial das forças externas e energia cinética estão expressas em função das posições do corpo, faltando apenas a energia de deformação elástica. Para tanto, nos próximos itens, será demonstrado de acordo com cinemática adotada como a energia de deformação elástica também pode ser escrita em função das posições.

Para a solução do problema elástico em questão, é necessária a minimização do funcional de energia potencial através do teorema da mínima energia potencial total, dado pela Eq.(4.7), relativo às incógnitas do problema a cada instante “t”, no caso o vetor de posições na posição de equilíbrio. Portanto, pode-se escrever:

$$\left. \frac{\partial \Pi}{\partial x_i} \right|_t = \int_{V_0} \frac{\partial u_e}{\partial x_i} dV_0 + \int_{V_0} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \rho_0 \frac{\mathbf{x}_k \mathbf{x}_k}{2} \right) dV_0 - \frac{\partial F_j X_j}{\partial x_i} + \frac{\partial K_a}{\partial x_i} = 0 \quad (4.8)$$

onde  $\mathbf{x}$  é o vetor de posição incógnito no equilíbrio do corpo na configuração atual. Levando-se em conta a Eq.(4.6), a Eq.(4.8) se torna:

$$\left. \frac{\partial \Pi}{\partial x_i} \right|_{s+1} = \int_{V_0} \frac{\partial u_e}{\partial x_i} dV_0 + \int_{V_0} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \rho_0 \frac{\mathbf{x}_k \mathbf{x}_k}{2} \right) dV_0 - F_i + \int_{V_0} c_m \rho_0 \mathbf{x}_i dV_0 = 0 \quad (4.9)$$

Na Eq.(4.9), para uso futuro, substitui-se a notação de tempo atual “t” por “S+1” e simplesmente “S” para tempo imediatamente anterior.

Quando o corpo é discretizado em elementos finitos, suas variáveis, no caso posições, velocidades, acelerações e tensões ao longo do mesmo para um dado elemento, podem ser aproximadas através de funções de forma, ou seja:

$$x_i = \Phi_j X_i^j \quad (4.10)$$

$$\dot{x}_i = \Phi_j \dot{X}_i^j \quad (4.11)$$

$$\ddot{x}_i = \Phi_j \ddot{X}_i^j \quad (4.12)$$

sendo  $X_i$ ,  $\dot{X}_i$  e  $\ddot{X}_i$  os valores nodais para posição, velocidade e aceleração respectivamente e  $\Phi_j$  as funções de forma que são em quantidade igual ao de pontos nodais do elemento finito adotado na discretização. Considerando-se, portanto, as variáveis aproximadas através das Eqs.(4.10), (4.11) e (4.12), a Eq.(4.9) se escreve na forma:

$$\left. \frac{\partial \Pi}{\partial X} \right|_{S+1} = \left. \frac{\partial U_e}{\partial X} \right|_{S+1} - F_{S+1} + \mathbf{M} \ddot{\mathbf{X}}_{S+1} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{X}}_{S+1} = 0 \quad (4.13)$$

Sendo a matriz de massa dada por:

$$\mathbf{M} = \int_{V_0} \rho_0 \Phi_k \Phi_j dV_0 \quad (4.14)$$

e amortecimento proporcional a massa dado por:

$$\mathbf{C} = 2c_m \mathbf{M} \quad (4.15)$$

Onde  $c_m$ , como já dito, é o coeficiente de amortecimento.

A Eq.(4.13) representa a equação de movimento para o problema não linear. Os carregamentos nodais  $F_{S+1}$  são funções temporais, que podem ser expressos, por exemplo, por:

$$F_{S+1} = F_0 [c_1 + c_2 t + c_3 t^2 + c_4 t^3 + c_5 \sin(c_6 t) + c_7 \cos(c_8 t) + c_9 e^{c_{10} t}] \quad (4.16)$$

ou também por funções descontínuas ao longo do tempo.

Para o caso estático, as parcelas de forças inerciais e de amortecimento se anulam. Portanto, a Eq.(4.13) se torna:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial X_i} = \frac{\partial U_e}{\partial X_i} - F = 0 \quad (4.17)$$

A técnica de solução da Eq.(4.8), de caráter não linear, é dada através do processo iterativo de Newton-Raphason para cada passo de tempo. Com relação à integração dessa equação diferencial ao longo do tempo, usa-se o método de Newmark com adaptação dos seus coeficientes  $\gamma$  e  $\beta$  de forma a garantir convergência de acordo com o tipo de problema analisado.

No próximo item, mais detalhes são descritos juntamente com a técnica empregada de solução do sistema não linear, Eq.(4.8), no presente trabalho.

## 4.2 Solução do problema estático

Para solução da equação diferencial para o problema estático dada pela Eq.(4.17), faz-se necessário o emprego de um método iterativo de forma a garantir a convergência da solução. No caso do presente trabalho, utiliza-se o método de Newton-Raphson.

Em notação compacta, a Eq. (4.17) pode ser escrita na forma:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial X_i} = g_i(\mathbf{X}) = f_i(\mathbf{X}) - F_i = 0 \quad (4.18)$$

onde  $\mathbf{X}$  é o parâmetro generalizado, no caso o vetor de posições nodais. Em representação vetorial, a Eq.(4.18) se torna:

$$\mathbf{g}(\mathbf{X}, \mathbf{F}) = \mathbf{0} \quad (4.19)$$

ou

$$\mathbf{f}(\mathbf{X}) - \mathbf{F} = \mathbf{0} \quad (4.20)$$

É importante lembrar que neste estudo as forças aplicadas são conservativas. Forças não conservativas podem ser introduzidas diretamente na Eq.(4.20) se desejado. A quantidade  $\mathbf{g}(\mathbf{X}, \mathbf{F})$  é não linear em relação aos parâmetros  $\mathbf{X}$  e  $\mathbf{F}$ . Para se resolver a Eq. (4.20), faz-se, para uma quantidade  $\Delta \mathbf{X}$ , uma expansão em série de Taylor até os termos lineares, isto é:

$$\mathbf{g}(\mathbf{X}) = \mathbf{0} \cong \mathbf{g}(\mathbf{X}_0) + \nabla \mathbf{g}(\mathbf{X}_0) \Delta \mathbf{X} \quad (4.21)$$

ou

$$\Delta \mathbf{X} = -[\nabla \mathbf{g}(\mathbf{X}_0)]^{-1} \mathbf{g}(\mathbf{X}_0) \quad (4.22)$$

onde  $\mathbf{X}$  é o vetor posição incógnito e  $\mathbf{X}_0$  é o vetor posição de tentativa, usualmente o determinado anteriormente. Também,  $\nabla \mathbf{g}(\mathbf{X}_0)$  é chamada de matriz hessiana e é determinada derivando a Eq.(5.36) em relação a uma posição nodal  $X_k$ . Portanto, a matriz hessiana pode ser escrita na forma:

$$\nabla \mathbf{g}(\mathbf{X}_0) = \frac{\partial f_i(X)}{\partial X_k} = \frac{\partial^2 U_e}{\partial X_i \partial X_k} \quad (4.23)$$

É fácil observar na Eq.(4.23) a propriedade de simetria da matriz hessiana.

Sendo assim, procedimento iterativo de solução de Newton-Raphson pode ser resumido na seguinte forma:

Escolhe-se primeiramente a posição tentativa  $\mathbf{X}_0$ ;

Com a solução tentativa  $\mathbf{X}_0$ , calcula-se o vetor desbalanceado  $\mathbf{g}(\mathbf{X}_0)$  de acordo com a Eq.(4.19) e também a matriz hessiana em  $\mathbf{X}_0$ , isto é,  $\nabla \mathbf{g}(\mathbf{X}_0)$  através da Eq.(4.23);

Emprega-se a Eq.(4.22) para se determinar a variação do vetor posição  $\Delta \mathbf{X}$  para corrigir o  $\mathbf{X}_0$ ;

Calcula-se a norma de convergência; no caso do presente trabalho, a norma é dada por:

$$nor = \frac{|\Delta \mathbf{X}|}{|\mathbf{X}_0|} \quad (4.24)$$

Se a norma, dada pela Eq.(4.24), for menor que a tolerância estipulada “*tol*”, o método convergiu, e a solução é:  $\mathbf{X} = \mathbf{X}_0 + \Delta \mathbf{X}$ . Caso contrário se faz  $\mathbf{X}_0 = \mathbf{X}$ , repetindo-se então o procedimento até que  $nor \leq tol$ .

Dependendo do valor do carregamento e mudança de forma da estrutura, é necessário dividir-lo em níveis de carga, de forma que o equilíbrio da estrutura seja atingido para cada nível até que se equilibre a estrutura com seu carregamento final. No próximo item, a estratégia de solução do problema dinâmico é descrita.

### 4.3 Solução do problema dinâmico

Como dito antes, a Eq.(4.13) representa a equação do movimento para o problema não linear. As posições e velocidades atuais, ou seja, “S+1”, para o corpo são aproximadas de acordo com as expressões de Newmark (ver dedução em GRECO(2004)), e são dadas por:

$$X_{S+1} = X_S + \Delta t \dot{X}_S + \Delta t^2 \left[ \left( \frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{X}_S + \beta \ddot{X}_{S+1} \right] \quad (4.25)$$

$$\dot{X}_{S+1} = \dot{X}_S + \Delta t(1-\gamma) \ddot{X}_S + \gamma \Delta t \ddot{X}_{S+1} \quad (4.26)$$

sendo  $\gamma$  e  $\beta$  coeficientes de Newmark que determinam a forma com que as velocidades e deslocamentos variam ao longo do intervalo de tempo  $\Delta t$ . Com um pouco de álgebra, pode-se isolar o termo de aceleração atual na Eq.(4.25), ou seja:

$$\ddot{X}_{S+1} = \frac{X_{S+1} - X_S}{\beta \Delta t^2} - \frac{\dot{X}_S}{\beta \Delta t} - \left( \frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{X}_S \quad (4.27)$$

Então, substituindo-se a Eqs.(4.26), (4.27) na equação do movimento, isto é, Eq. (4.13), tem-se:

$$\left. \frac{\partial \Pi}{\partial X} \right|_{S+1} = \left. \frac{\partial U_t}{\partial X} \right|_{S+1} - F_{S+1} + \frac{M}{\beta \Delta t^2} X_{S+1} - M Q_S + C R_S + \frac{\gamma C}{\beta \Delta t} X_{S+1} - \gamma \Delta t C Q_S = 0 \quad (4.28)$$

sendo os vetores  $Q_S$  e  $R_S$  relativos à contribuição dinâmica das variáveis do passado (passo S) e são dados por:

$$Q_S = \frac{X_S}{\beta \Delta t^2} + \frac{\dot{X}_S}{\beta \Delta t} + \left( \frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{X}_S \quad (4.29)$$

$$R_S = \dot{X}_S + \Delta t(1-\gamma) \ddot{X}_S \quad (4.30)$$

Derivando-se novamente a Eq.(4.28) em relação às posições nodais para o passo atual, obtém-se a matriz hessiana para o problema dinâmico:

$$\left. \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \mathbf{X}^2} \right|_{S+1} = \nabla \mathbf{g}(\mathbf{X}^0) = \left. \frac{\partial^2 U_t}{\partial \mathbf{X}^2} \right|_{S+1} + \frac{\mathbf{M}}{\beta \Delta t^2} + \frac{\gamma \mathbf{C}}{\beta \Delta t} \quad (4.31)$$

Novamente, como feito para o caso estático, aplica-se o método de Newton-Raphson para solução do problema dinâmico dado pela Eq.(4.28), através da expansão de Taylor idêntica a Eq.(4.21). O vetor de resíduos é obtido a partir da Eq.(4.28), ou seja:

$$\mathbf{g}(\mathbf{X}^0) = \left. \frac{\partial U_t}{\partial \mathbf{X}} \right|_{S+1} - \mathbf{F}_{S+1} + \frac{\mathbf{M}}{\beta \Delta t^2} \mathbf{X}_{S+1} - \mathbf{M} \mathbf{Q}_S + \mathbf{C} \mathbf{R}_S + \frac{\gamma \mathbf{C}}{\beta \Delta t} \mathbf{X}_{S+1} - \gamma \Delta t \mathbf{C} \mathbf{Q}_S \quad (4.32)$$

e durante o processo iterativo as correções das posições nodais devem ser feitas na forma:

$$\mathbf{X}_{S+1} = \mathbf{X}_S + \Delta \mathbf{X} \quad (4.33)$$

seguidas pela correção das acelerações, ou seja:

$$\mathbf{\ddot{X}}_{S+1} = \frac{\mathbf{X}_{S+1} - \mathbf{X}_S}{\beta \Delta t^2} - \mathbf{Q}_S \quad (4.34)$$

com esses dois valores de posição e acelerações determinados para o passo atual (S+1), devem-se atualizar as velocidades através da Eq.(4.26). O critério de convergência é o mesmo adotado para o caso estático, ou seja:

$$nor = \frac{|\Delta \mathbf{X}|}{|\mathbf{X}_0|} \leq tol \quad (4.35)$$

onde “tol” é a tolerância de convergência arbitrada para o problema.

É importante ressaltar que para o primeiro passo de tempo deve-se determinar a aceleração inicial do corpo, através de:

$$\mathbf{\ddot{X}}_0 = \mathbf{M}^{-1} \left[ \mathbf{F}_0 - \mathbf{C} \mathbf{\dot{X}}_0 - \left. \frac{\partial U_t}{\partial \mathbf{X}} \right|_0 \right] \quad (4.36)$$

Um quadro ilustrativo idêntico ao mostrado em MARQUES (2006), com a finalidade de facilitar o entendimento do método aqui descrito é mostrado na Figura 10.

**A. INICIALIZAÇÕES**

A.1 Define-se o intervalo de tempo  $\Delta t$

A.2 Inicializa-se os vetores  $X_s$  e  $\dot{X}_s$  (condições iniciais, ou seja  $S = 0$ ) e faz  $\Delta X = 0$

A.3 Calcula-se o vetor de forças desequilibradas (vetor de resíduos)  $g_0 = F_0 - C\dot{X}_0 - \frac{\partial U_t}{\partial X} \Big|_0$

A.5 Calcula-se  $\ddot{X}_0 = M^{-1} \left[ F_0 - C\dot{X}_0 - \frac{\partial U_t}{\partial X} \Big|_0 \right]$

**B. PARA CADA INCREMENTO DE TEMPO**

B.1 Atualiza-se posição  $X_{s+1} = X_s + \Delta X$

B.2 Atualiza-se aceleração  $\ddot{X}_{s+1} = \frac{X_{s+1} - X_s}{\beta \Delta t^2} - Q_s$

B.3 Atualiza-se velocidade  $\dot{X}_{s+1} = \dot{X}_s + \Delta t(1-\gamma)\ddot{X}_s + \gamma\Delta t\ddot{X}_{s+1}$

B.4 Calcula-se o vetor de forças desequilibradas

$$g = F_{int} - F_{s+1} + \frac{M}{\beta \Delta t^2} X_{s+1} - MQ_s + CR_s + \frac{\gamma C}{\beta \Delta t} X_{s+1} - \gamma \Delta t C Q_s$$

B.5 Calcula-se  $\nabla g \Delta X = -g$

B.6 Calcula-se o erro e verifica-se o critério de convergência  $erro = \frac{\|\Delta X\|}{\|X_0\|} \leq TOL$

B.7 Se o critério de convergência for satisfeito vá para B.8 senão volte para B.1

B.8 Atualizam-se as variáveis de passado

$$X_s = X_{s+1}$$

$$\dot{X}_s = \dot{X}_{s+1}$$

$$\ddot{X}_s = \ddot{X}_{s+1}$$

B.9 Volta-se para B com novo passo de tempo

**C. FIM**

Figura 10 – Quadro ilustrativo do método de solução para problema dinâmico.

No próximo item, descreve-se a estratégia para se levar consideração o impacto de estruturas em anteparo rígido utilizada no presente trabalho.

#### 4.4 Impacto em anteparo rígido

A técnica aqui apresentada é implementada em SIMO *et al* (1986), GRECO (2004) e MARQUES (2006) e consiste em limitar as posições dos nós que sofrem impacto através da condição de penetração nula (CPN), ou seja:

$$X - \delta \geq 0 \quad (4.37)$$

onde  $\delta$  é a mínima distância entre o corpo e o anteparo, conforme Figura 11.

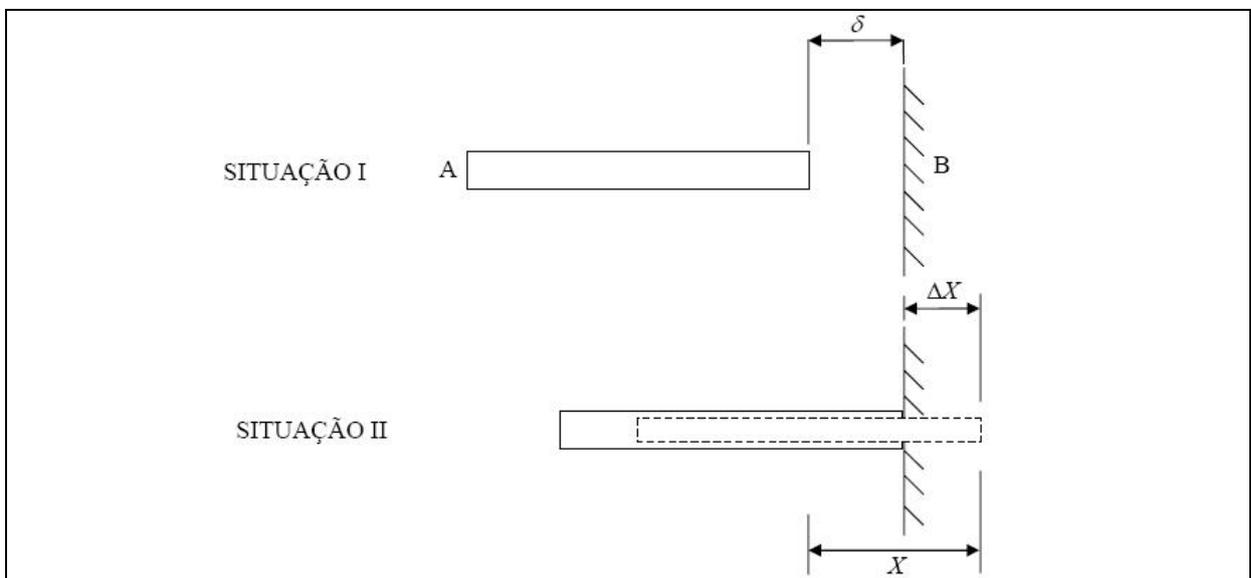


Figura 11 – Condição de penetração nula

Ainda na Figura 11, quando ocorre o impacto, ou seja, na situação II, faz-se a limitação das posições dos nós de forma a satisfazer a condição dada pela Eq.(4.37), igualando, portanto, as posições dos nós às do anteparo, ou seja:

$$X_{\text{NÓ}} = X_{\text{ANTEPARO}} \quad (4.38)$$

Nessa situação se determina o vetor de forças internas  $f_{\text{int}}$  que contribui diretamente no vetor de resíduos, ou seja,  $g = f_{\text{cont}} = f_{\text{ext}} - f_{\text{int}}$  de forma a garantir a força de reflexão do corpo.

Com relação ao problema de integração temporal do problema que envolve impacto, já foi mostrado nos trabalhos de TAYLOR & PAPADOPOULOS (1993), CARPENTER *et al.* (1991) e

SOLBERG & PAPADOPOULOS (1998) que a formulação clássica de Newmark, isto é, com os parâmetros  $\gamma=0,5$  e  $\beta=0,25$  mostra-se ineficiente para problemas de impacto onde geralmente existem altas frequências.

Portanto, neste trabalho se adota o método de Newmark modificado (GRECO, 2004), com os parâmetros  $\gamma=1$  e  $\beta=1.5$  que representam, segundo GRECO (2004), os parâmetros de integração propostos por HU (1997). Na Figura 12 é mostrado um gráfico do parâmetro  $\beta$  em função de  $\gamma$  mostrando as regiões de estabilidade do algoritmo de Newmark.

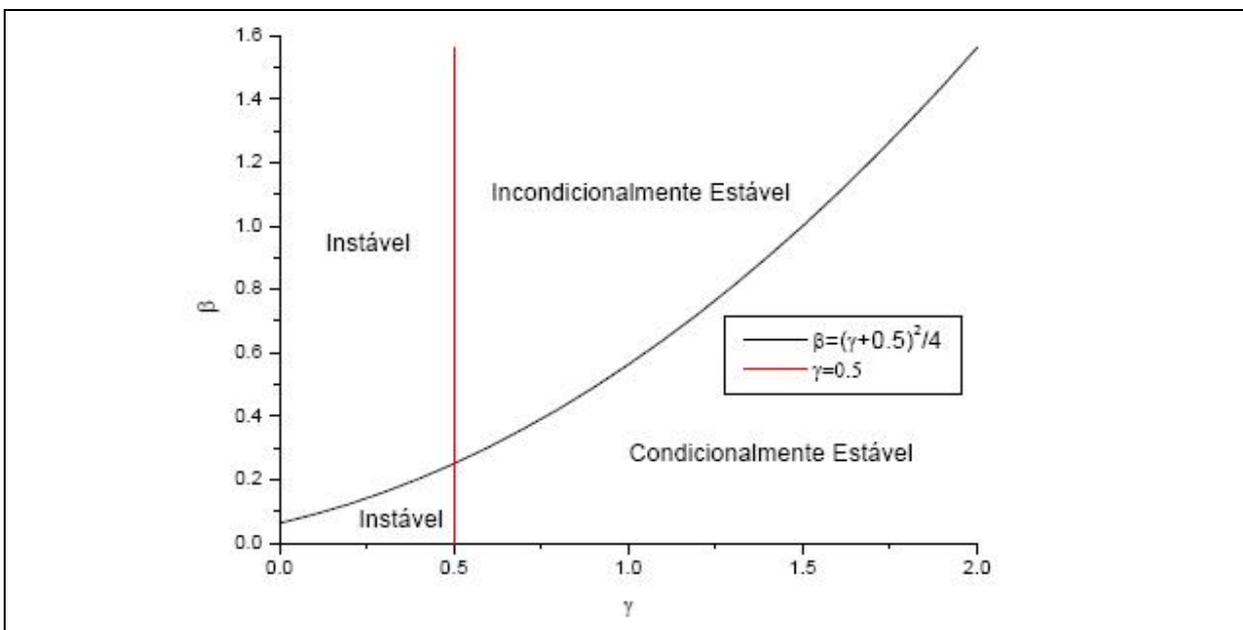


Figura 12 – Regiões de estabilidade para os valores de  $\gamma$  e  $\beta$ .

A curva de  $\beta$  descrita no gráfico, segundo ARGYRIS & MLEJNEK (1991), representa o limite da estabilidade do algoritmo onde ocorre o máximo amortecimento numérico das frequências mais altas de vibração (GRECO, 2004). Percebe-se também, pelo gráfico que os valores dos parâmetros aqui utilizados estão no limite dessa curva.

## 5 PÓRTICOS PLANOS COM CINEMÁTICA DE REISSNER

---

Neste capítulo descreve-se a formulação de pórtico plano com cinemática de Reissner. Essa cinemática, ao contrário da teoria de Euler-Bernoulli para vigas, leva em consideração a deformação provocada pelas tensões de cisalhamento, ou seja, a seção reta permanece plana após deformação, porém não necessariamente perpendicular à linha média da peça. É importante ressaltar que a cinemática de Reissner é similar à teoria de vigas de Timoshenko, porém a forma de se parametrizar a cinemática da seção transversal é diferente.

### 5.1 Mapeamento da geometria

No que diz respeito à formulação aqui proposta, para que se possa tratar numericamente a Eq.(4.7), faz-se necessário o mapeamento da geometria do corpo analisado, bem como determinar, através desse mapeamento, as medidas de deformação empregadas na formulação. Na Figura 13, é mostrado o corpo na configuração inicial ( $B_0$ ), na configuração atual ( $B_1$ ) e o espaço adimensional auxiliar que faz a ligação entre as duas configurações  $B_0$  e  $B_1$ .

É importante enfatizar que configuração de referência é a inicial, ou seja,  $B_0$  (descrição langrangiana total).

Ainda na Figura 13,  $A_I$  e  $A_{II}$  são tensores gradiente de mudança de configuração auxiliar da configuração adimensional para a de referência  $B_0$  e da configuração adimensional para a atual  $B_1$  respectivamente. O tensor gradiente  $A_I$  depende apenas da forma inicial e cinemática adotada, enquanto que  $A_{II}$  varia de acordo com a posição atual ou final do corpo.

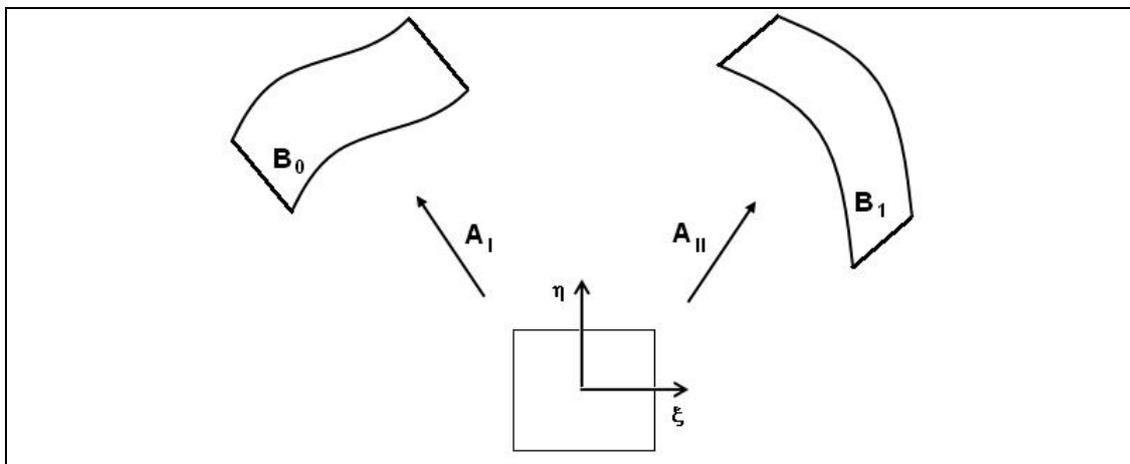


Figura 13- Esquema de deformação do corpo.

Um ponto genérico  $p = (x, y)$ , vê-se Figura 14, dentro do elemento pode ser escrito em função das coordenadas adimensionais e posições nodais (iniciais ou atuais), na forma:

$$p^0(\xi, \eta) = p_m^0(\xi) + \frac{h}{2} \eta \bar{N}^0(\xi) \quad (5.1)$$

$$p^1(\xi, \eta) = p_m^1(\xi) + \frac{h}{2} \eta \bar{N}^1(\xi) \quad (5.2)$$

Onde  $p_m^i = (x_m^i, y_m^i)$  é um ponto pertencente à linha média,  $h$  é espessura do elemento e  $\bar{N}^i$  é um vetor unitário que define a posição da seção transversal, vê-se Figura 14. O índice “i” representa a configuração inicial e atual.

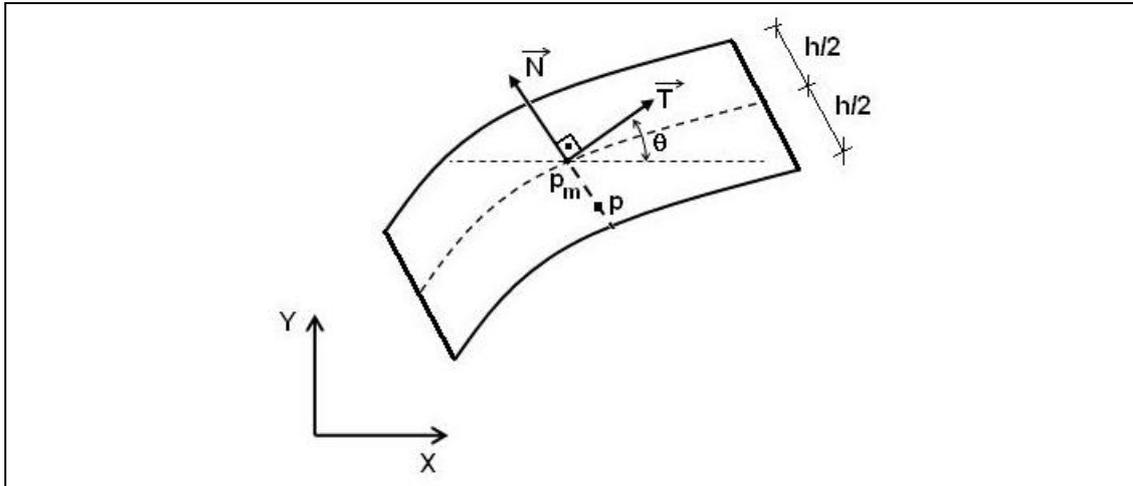


Figura 14 – Seção transversal genérica do elemento.

De acordo com a Figura 14, independentemente de ser a configuração inicial ou atual, os vetores unitários  $\overset{1}{T}$  e  $\overset{1}{N}$  podem ser escritos na forma:

$$\overset{1}{T} = (\cos \theta, \text{sen } \theta) \quad (5.3)$$

$$\overset{1}{N} = (-\text{sen } \theta, \cos \theta) \quad (5.4)$$

onde “ $\theta$ ” é o ângulo global de uma seção transversal genérica.

Substituindo a Eq.(5.4) em (5.1) e (5.2) e escrevendo o resultado em termos coordenadas cartesianas, tem-se:

$$(x^i(\xi, \eta), y^i(\xi, \eta)) = (x_m^i(\xi), y_m^i(\xi)) + \frac{h}{2} \eta (-\text{sen } \theta^i(\xi), \cos \theta^i(\xi)) \quad (5.5)$$

A Eq.(5.5) pode ser dividida em duas partes, ficando:

$$x^i(\xi, \eta) = x_m^i(\xi) - \frac{h}{2} \eta \text{sen } \theta^i(\xi) \quad (5.6)$$

$$y^i(\xi, \eta) = y_m^i(\xi) + \frac{h}{2} \eta \cos \theta^i(\xi) \quad (5.7)$$

sendo, o índice  $i = 0 \Rightarrow$  configuração inicial e  $i = I \Rightarrow$  configuração atual.

Neste ponto é relevante definir os gradientes de mudança de configuração auxiliares  $A_I$  e  $A_{II}$  (Figura 13). Derivando as Eqs.(5.6) e (5.7) com relação às coordenadas adimensionais, pode-se, de forma geral, escrever:

$$\mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} A_{11}^i & A_{12}^i \\ A_{21}^i & A_{22}^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{dx^i}{d\xi} & \frac{dx^i}{d\eta} \\ \frac{dy^i}{d\xi} & \frac{dy^i}{d\eta} \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

sendo,

$$A_{11}^i = \frac{dx_m}{d\xi} - \frac{h}{2} \eta \frac{d\theta}{d\xi} \cos\theta \quad (5.9)$$

$$A_{12}^i = -\frac{h}{2} \text{sen}\theta \quad (5.10)$$

$$A_{21}^i = \frac{dx_m}{d\xi} - \frac{h}{2} \eta \frac{d\theta}{d\xi} \text{sen}\theta \quad (5.11)$$

$$A_{22}^i = \frac{h}{2} \cos\theta \quad (5.12)$$

os elementos de  $\mathbf{A}_i$ . O índice denota a transformação, isto é,  $i = I \Rightarrow$  espaço adimensional para configuração inicial  $B_0$  (gradiente  $\mathbf{A}_I$ ),  $i = II \Rightarrow$  espaço adimensional para configuração atual  $B_1$  (gradiente  $\mathbf{A}_{II}$ ).

## 5.2 Medida de deformação

Com os termos de  $A_I$  e  $A_{II}$  determinados no item anterior, pode-se calcular os alongamentos  $\lambda_r$  e  $\lambda_n$  ao longo das direções de referência “ $\xi$ ” e “ $\eta$ ” definidas aqui pelos vetores unitários

$\vec{M}_t^P = [1,0]^T$  e  $\vec{M}_n^P = [0,1]^T$  mostrados na Figura 15. Sendo assim, os alongamentos são dados por:

$$\lambda_t^i = \lambda(\vec{M}_t^P) = \left| A^i \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right| = \sqrt{(A_{11}^i)^2 + (A_{21}^i)^2} \quad (5.13)$$

$$\lambda_n^i = \lambda(\vec{M}_n^P) = \left| A^i \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right| = 1 \quad (5.14)$$

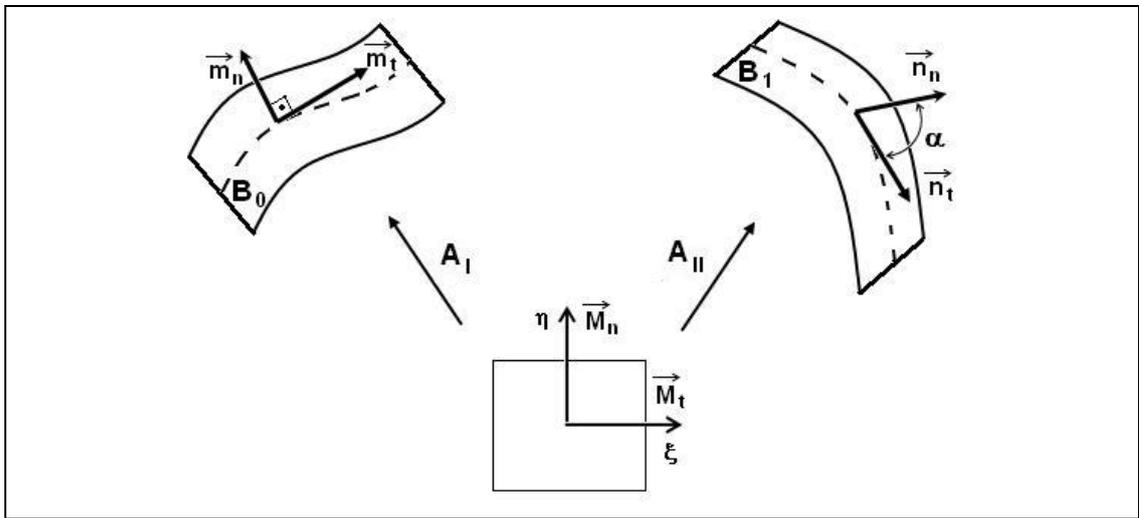


Figura 15 – espaço adimensional auxiliar e mapeamento da geometria.

É importante mostrar que para essa formulação a segunda e terceira direções são consideradas indeformáveis, não havendo, portanto, o efeito de Poisson. Sendo assim,  $\lambda_2 = 1$  e  $\lambda_3 = 1$ . O ângulo “ $\alpha$ ” (Figura 15) entre os vetores unitários  $\hat{n}_t$  e  $\hat{n}_n$  após a deformação, pode ser facilmente calculado através de:

$$\alpha = \arccos \left\{ \frac{[1 \ 0][A_{11}^T \ A_{21}^T] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}{\lambda_t^I \lambda_n^I} \right\} = \arccos \left\{ \frac{A_{11}^{II} A_{12}^{II} + A_{21}^{II} A_{22}^{II}}{\sqrt{(A_{11}^{II})^2 + (A_{21}^{II})^2}} \right\} \quad (5.15)$$

Sendo assim, a distorção relativa à configuração  $B_0$  é simplesmente calculada fazendo:

$$\gamma_m = \alpha - \frac{\pi}{2} = \arccos \left\{ \frac{A_{11}'' A_{12}'' + A_{21}'' A_{22}''}{\sqrt{(A_{11}'')^2 + (A_{21}'')^2}} \right\} - \frac{\pi}{2} \quad (5.16)$$

E os alongamentos relativos também à configuração  $B_0$  são dados por:

$$\lambda_t = \frac{\lambda_t''}{\lambda_t'} = \frac{\sqrt{(A_{11}'')^2 + (A_{21}'')^2}}{\sqrt{(A_{11}')^2 + (A_{21}')^2}} \quad (5.17)$$

$$\lambda_n = \frac{\lambda_n''}{\lambda_n'} = 1 \quad (5.18)$$

E as deformações, dadas por:

$$\varepsilon_t = \lambda_t - 1 = \frac{\sqrt{(A_{11}'')^2 + (A_{21}'')^2}}{\sqrt{(A_{11}')^2 + (A_{21}')^2}} - 1 \quad (5.19)$$

$$\varepsilon_n = \lambda_n - 1 = 0 \quad (5.20)$$

“ $\varepsilon_t$ ” e “ $\varepsilon_n$ ” são medidas de deformação não lineares de engenharia relativas à configuração  $B_0$  na direção de  $\overset{p}{T}$  e  $\overset{i}{N}$  respectivamente.

### 5.3 Energia potencial total

A energia específica para uma lei constitutiva linear, Lei de Hooke no caso, é dada por:

$$u_e = \frac{1}{2} E \left( \varepsilon_t^2 + \frac{\gamma_m^2}{2} \right) \quad (5.21)$$

onde  $E$  é o módulo de elasticidade longitudinal, já citado anteriormente.

Substituindo-se a Eq.(5.21) na Eq.(4.2), a integral da energia potencial elástica, torna-se:

$$U_e = \int_{V_0} \frac{1}{2} E \left( \varepsilon_t^2 + \frac{\gamma_m^2}{2} \right) dV_0 \quad (5.22)$$

É interessante notar que o termo de contribuição ao cisalhamento já aparece no funcional de energia, isto é, na Eq.(5.22) onde a energia de deformação é também função da distorção.

Substituindo a Eq.(5.22) na Eq.(4.7), que é a do funcional de energia potencial total do sistema, fica-se com:

$$\Pi = \int_{V_0} \frac{1}{2} E \left( \varepsilon_t^2 + \frac{\gamma_m^2}{2} \right) dV_0 + \int_{V_0} \rho_0 \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}{2} dV_0 - F_j X_j + K_a \quad (5.23)$$

A Eq.(5.23) representa o funcional de energia potencial total para o pórtico bidimensional. A estratégia de minimização desse funcional, bem como os equacionamentos para o problema estático e dinâmico serão descritos nos itens a seguir.

## 5.4 Equacionamento estático

Para o equacionamento estático, as forças inerciais são negligenciadas, portanto, a Eq. (5.23), toma a seguinte forma simplificada:

$$\Pi = \int_{V_0} \frac{1}{2} E \left( \varepsilon_t^2 + \frac{\gamma_m^2}{2} \right) dV_0 - F_j X_j \quad (5.24)$$

A discretização do problema é feita dividindo-se o pórtico em elementos finitos conforme a Figura 16, por exemplo. Sendo assim, as variáveis das Eqs.(5.6) e (5.7) ao longo da linha central do elemento, isto é,  $x_m$ ,  $y_m$  e  $\theta$  podem ser aproximadas na forma:

$$x_m(\xi, \eta) = \Phi_i X_i \quad (5.25)$$

$$y_m(\xi, \eta) = \Phi_i Y_i \quad (5.26)$$

$$\theta(\xi, \eta) = \Phi_i \Theta_i \quad (5.27)$$

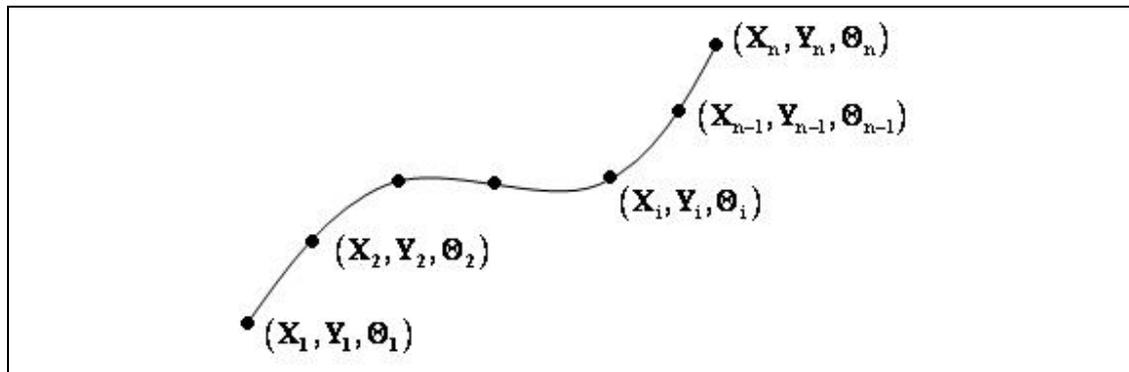


Figura 16 – elemento finito de “n” nós e suas variáveis nodais.

Onde os vetores  $\mathbf{X}$ ,  $\mathbf{Y}$  e  $\mathbf{\Theta}$  são variáveis nodais do elemento, de acordo com a Figura 16 e o vetor  $\mathbf{\Phi}$  é o conjunto de funções de forma ou aproximadoras da família de polinômios de Lagrange. A Figura 16 mostra um elemento com “n” nós, resultando numa aproximação de ordem polinomial “n-1”. É também importante enfatizar que ao se olhar para a Eq.(5.27), percebe-se que o ângulo  $\theta$  não é, como empregado nas formulações em que se usa a teoria de vigas de Euler-Bernoulli, a primeira derivada do deslocamento transversal da viga ou pórtico, sendo, portanto, aproximado de forma independente como as demais variáveis do problema. Aqui se observa a diferença fundamental entre a descrição cinemática apresentada e a de Timoshenko, que consiste em se corrigir as aproximações usadas na cinemática de Euler-Bernoulli introduzindo a distorção.

Substituindo as Eqs.(5.25), (5.26) e (5.27) na Eq.(5.6) e Eq.(5.7), tem-se:

$$x^i = (\Phi_k X_k)^i - \frac{h}{2} \eta \text{sen}(\Phi_k \Theta_k)^i \quad (5.28)$$

$$y^i = (\Phi_k Y_k)^i + \frac{h}{2} \eta \text{cos}(\Phi_k \Theta_k)^i \quad (5.29)$$

Pela mesma razão, as expressões das aproximações das variáveis nas expressões do gradiente de deformação, isto é, Eqs.(5.25), (5.26) e (5.27) nas Eqs.(5.9) até (5.12), resultam em:

$$A_{11}^i = \beta_j X_j^i - \frac{h}{2} \eta (\beta_j \Theta_j^i) \cos(\Phi_k \Theta_k^i) \quad (5.30)$$

$$A_{12}^i = -\frac{h}{2} \eta \operatorname{sen}(\Phi_k \Theta_k^i) \quad (5.31)$$

$$A_{21}^i = \beta_j Y_j^i - \frac{h}{2} \eta (\beta_j \Theta_j^i) \operatorname{sen}(\Phi_k \Theta_k^i) \quad (5.32)$$

$$A_{12}^i = \frac{h}{2} \eta \cos(\Phi_k \Theta_k^i) \quad (5.33)$$

onde:  $\beta_j = \frac{d\Phi_j}{d\xi}$ .

Sendo assim, a energia potencial total do sistema pode ser escrita em função das posições nodais, isto é,  $\Pi \rightarrow f(X_1, Y_1, \Theta_1, X_2, Y_2, \Theta_2, L, X_i, Y_i, \Theta_i, L, X_n, Y_n, \Theta_n) = f(\mathbf{p})$ . O vetor  $\mathbf{p}$  é aqui chamado de vetor posição e é dado de forma geral:

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= (X_1, Y_1, \Theta_1, L, X_i, Y_i, \Theta_i, L, X_n, Y_n, \Theta_n) = \\ &= (p_1, p_2, p_3, L, p_{3i-2}, p_{3i-1}, p_{3i}, L, X_{3n-2}, Y_{3n-1}, \Theta_{3n}) \end{aligned} \quad (5.34)$$

Vale lembrar que  $3n$  é número de graus de liberdade por elemento.

Portanto, a estratégia é minimizar a Eq.(5.24) em relação às posições nodais a fim de encontrar a posição de equilíbrio da estrutura, na forma da Eq.(4.8). Derivando a Eq.(5.23) ao grau de liberdade  $p_i$ , tem-se:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial p_i} = \int_{V_0} \frac{1}{2} E \frac{\partial}{\partial p_i} \left( \varepsilon_i^2 + \frac{\gamma_m^2}{2} \right) dV_0 - F_i = 0 \quad (5.35)$$

onde:

$$f_i^m(\mathbf{p}) = \int_{V_0} \frac{1}{2} E \frac{\partial}{\partial p_i} \left( \varepsilon_i^2 + \frac{\gamma_m^2}{2} \right) dV_0 \quad (5.36)$$

$f_i^m(\mathbf{p})$  é o vetor de forças internas relativo à posição  $p_i$ .

Sendo assim, a solução da Eq.(5.35) é através do método iterativo de Newton-Raphson, já descrito no Capítulo 4.

## 5.5 Equacionamento dinâmico

Para o problema que envolve forças inerciais, o funcional de energia potencial total que se considera é o dado pela Eq.(5.23), reescrita a seguir:

$$\Pi = \int_{V_0} \frac{1}{2} E \left( \varepsilon_t^2 + \frac{\gamma_{tn}^2}{2} \right) dV_0 + \int_{V_0} \rho_0 \frac{\ddot{x}_i \ddot{x}_i}{2} dV_0 - F_j X_j + K_a \quad (5.23)$$

Para a parcela de energia elástica, o equacionamento é idêntico ao dado ao problema estático. Resta agora a determinação da equação do movimento que envolve além da energia elástica parcelas de inerciais representadas pela matriz de massa e de amortecimento.

Considere-se novamente um ponto genérico pertencente à linha média do pórtico plano  $p_m = (x_m, y_m)$  (ver Figura 14). Devido à existência de forças inerciais, surgem as grandezas velocidade e aceleração, portanto, tem-se:

$$\dot{p}_m = (\dot{x}_m, \dot{y}_m) \quad (5.37)$$

$$\ddot{p}_m = (\ddot{x}_m, \ddot{y}_m) \quad (5.38)$$

Levando-se em conta, por exemplo, o elemento finito dado pela Figura 16, os parâmetros nodais de velocidade e aceleração podem ser aproximados, ao longo do elemento, na seguinte forma:

- velocidades:

$$\dot{x}_m(\xi, \eta, t) = \Phi_i \dot{X}_i \quad (5.39)$$

$$\dot{y}_m(\xi, \eta, t) = \Phi_i \dot{Y}_i \quad (5.40)$$

$$\Theta(\xi, \eta, t) = \Phi_i \Theta_i \quad (5.41)$$

- acelerações:

$$\ddot{X}_m(\xi, \eta, t) = \Phi_i \ddot{X}_i \quad (5.42)$$

$$\ddot{Y}_m(\xi, \eta, t) = \Phi_i \ddot{Y}_i \quad (5.43)$$

$$\ddot{\Theta}(\xi, \eta, t) = \Phi_i \ddot{\Theta}_i \quad (5.44)$$

Os vetores velocidade e aceleração dos parâmetros nodais escrevem-se:

$$\dot{\mathbf{p}} = (\dot{X}_1, \dot{Y}_1, \dot{\Theta}_1, \dot{X}_2, \dot{Y}_2, \dot{\Theta}_1, L, \dot{X}_i, \dot{Y}_i, \dot{\Theta}_i, L, \dot{X}_n, \dot{Y}_n, \dot{\Theta}_n) \quad (5.45)$$

$$\ddot{\mathbf{p}} = (\ddot{X}_1, \ddot{Y}_1, \ddot{\Theta}_1, \ddot{X}_2, \ddot{Y}_2, \ddot{\Theta}_1, L, \ddot{X}_i, \ddot{Y}_i, \ddot{\Theta}_i, L, \ddot{X}_n, \ddot{Y}_n, \ddot{\Theta}_n) \quad (5.46)$$

Ou, levando-se em conta as Eqs.(5.39) a (5.44), na forma indicial compacta:

$$\dot{\mathbf{p}}_i = \Phi_{k,i} \dot{\mathbf{p}}_k \quad (5.47)$$

$$\ddot{\mathbf{p}}_i = \Phi_{k,i} \ddot{\mathbf{p}}_k \quad (5.48)$$

onde  $i = 1, 2, 3$ .

O índice “i” nas Eqs. (5.47) e (5.48) agrupa as grandezas relacionadas com a posição x, y e  $\Theta$ , ou de forma mais geral, os graus de liberdade de um nó genérico.

É muito importante frizar que apesar das grandezas velocidade e aceleração angulares serem mostradas na Eq.(5.41) e na Eq.(5.44), no código computacional do presente trabalho essas aproximações não são consideradas, tornando a matriz de massa do problema sem efeitos de inércia rotacional.

Assim, a energia cinética é expressa em termos de valores nodais, como se segue:

$$K_c = \int_{V_0} \frac{\rho_0}{2} \dot{\mathbf{p}}_i \dot{\mathbf{p}}_i dV_0 = \int_{V_0} \frac{\rho_0}{2} \Phi_{k,i} \dot{\mathbf{p}}_k \Phi_{j,i} \dot{\mathbf{p}}_j dV_0 \quad (5.49)$$

Com feito anteriormente para a energia de deformação e cargas externas, deve-se também, de forma a garantir a minimização do funcional de energia potencial total, derivar o termo de

energia cinética, dada pela Eq.(5.49), em relação parâmetros nodais. Feito isso, a condição de estacionareidade potencial total no instante atual (passo S+1), escreve-se:

$$\left. \frac{\partial \Pi}{\partial p_i} \right|_{S+1} = \frac{1}{2} \int_{V_0} E \frac{\partial}{\partial p_i} \left( \varepsilon_i^2 + \frac{\gamma_m^2}{2} \right) \Big|_{S+1} dV_0 + \frac{1}{2} \int_{V_0} \frac{\partial}{\partial p_i} (\rho_0 \dot{\mathbf{p}} \dot{\mathbf{p}}) \Big|_{S+1} dV_0 - F_i \Big|_{S+1} = 0 \quad (5.50)$$

que, de acordo com a Eq.(4.13), chega-se a equação do movimento:

$$\left. \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{p}} \right|_{S+1} = \left. \frac{\partial U_e}{\partial \mathbf{p}} \right|_{S+1} - \mathbf{F}_{S+1} + \mathbf{M} \dot{\mathbf{X}}_{S+1} + \mathbf{C} \mathbf{X}_{S+1} = 0 \quad (5.51)$$

onde  $\mathbf{M}$  é a matriz de massa, dada por:

$$\mathbf{M} = \frac{A}{h} \int_{S_0} \rho_0 \Phi_k \Phi_j dS_0 \quad (5.52)$$

sendo a área “A” e a altura “h” do elemento finito constantes, a integral de volume da matriz de massa se resume numa integral de linha ao longo eixo médio do elemento.

Para a completude da solução dinâmica, basta agora o emprego da estratégia de solução descrita no capítulo anterior, item 4.3.

No próximo item são mostrados exemplos numéricos de forma a validar, diante da literatura especializada, a formulação aqui proposta.

## 5.6 Formulação com cargas não conservativas

No equacionamento para pórtico plano descrito nos itens anteriores sempre se considera forças externas conservativas. As forças externas ditas conservativas, não mudam de direção ao longo da trajetória de deformação da estrutura e conseqüentemente geram trabalho apenas em função do deslocamento final.

O mesmo não acontece com as forças não conservativas. Essas podem mudar de direção e sentido ao longo da trajetória de deformação, resultando, portanto, em trabalho dependente do caminho de carga.

A formulação aqui descrita admite que as forças não conservativas estão em função do ângulo  $\theta$  da seção reta do pórtico. Sendo assim, escreve o funcional de energia potencial das forças externas na forma:

$$P = L(\theta) \mathbf{X} \quad (5.53)$$

onde  $L(\theta)$  é função das forças e do ângulo  $\theta$ , e  $\mathbf{X}$  é o vetor posição nodal no ponto de aplicação dessas forças. Dividem-se as componentes das forças não conservativas em função do ângulo  $\theta$  em normais  $F_\eta$  e perpendiculares  $F_\tau$  à curvatura do pórtico, conforme exemplo de viga engastada da Figura 17.

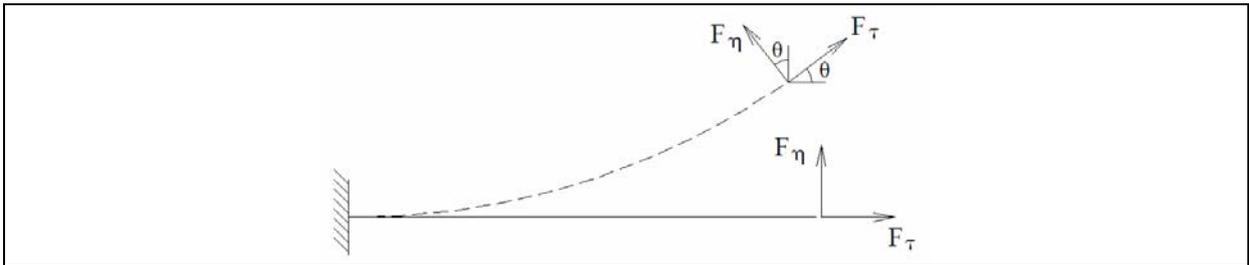


Figura 17 – Forças não conservativas aplicadas na extremidade livre da viga engastada.

Ainda de acordo com a Figura 17, conforme a estrutura se deforma, o ângulo  $\theta$  varia seguido das forças não conservativas. Portanto, as componentes dessas forças nas direções dos eixos cartesianos para um nó genérico “ $j$ ”, podem ser dadas por:

$$L(\theta_j)_1 = Fx_j = -\sin \theta_j F_\eta + \cos \theta_j F_\tau \quad (5.54)$$

$$L(\theta_j)_2 = Fy_j = \cos \theta_j F_\eta + \sin \theta_j F_\tau \quad (5.55)$$

logo, a energia potencial das forças não conservativas para o nó “ $j$ ”, escreve-se:

$$P_j = \begin{Bmatrix} Fx_j \cdot X_j \\ Fy_j \cdot Y_j \end{Bmatrix} \quad (5.56)$$

A fim de se minimizar a energia potencial total do sistema, deriva-se, como feito anteriormente para as demais parcelas de energia potencial do sistema, a Eq.(5.56) em relação a posições nodais do nó “j”, resultando no vetor de forças externas a se equilibrar, ou seja:

$$\frac{\partial P_j}{\partial X_j} = F_{x_j} = -\sin \theta_j F_\eta + \cos \theta_j F_\tau \quad (5.57)$$

$$\frac{\partial P_j}{\partial Y_j} = F_{y_j} = \cos \theta_j F_\eta + \sin \theta_j F_\tau \quad (5.58)$$

Derivando-se novamente as expressões das pela Eq.(5.57) e Eq.(5.58), obtém-se as contribuições das forças não conservativas na matriz hessiana, ou seja:

$$\frac{\partial^2 P_j}{\partial X_j^2} = \frac{\partial^2 P_j}{\partial X_j \partial Y_j} = \frac{\partial^2 P_j}{\partial Y_j \partial X_j} = \frac{\partial^2 P_j}{\partial Y_j^2} = \frac{\partial^2 P_j}{\partial \theta_j \partial X_j} = \frac{\partial^2 P_j}{\partial \theta_j \partial Y_j} = \frac{\partial^2 P_j}{\partial \theta_j^2} = 0 \quad (5.59)$$

$$\frac{\partial^2 P_j}{\partial X_j \partial \theta_j} = -\cos \theta_j F_\eta - \sin \theta_j F_\tau \quad (5.60)$$

$$\frac{\partial^2 P_j}{\partial Y_j \partial \theta_j} = -\sin \theta_j F_\eta + \cos \theta_j F_\tau \quad (5.61)$$

Observa-se que forças não conservativas tornam a matriz hessiana não simétrica. Em ARGYRIS & MLEJNEK (1991) essa matriz é denominada de matriz de rigidez pseudo-simétrica.

## 5.7 Exemplos numéricos de pórtico plano

Neste item são mostrados exemplos numéricos empregando a formulação posicional para o pórtico plano com cinemática de Reissner. A fim de se validar e discutir a formulação aqui empregada, os resultados obtidos são comparados com os da literatura especializada. Além do mais, procurou-se variar a ordem polinomial dos elementos finitos ao longo dos exemplos

mostrados a seguir com a simples finalidade de mostrar a versatilidade do código desenvolvido quanto à escolha mais adequada do elemento utilizado.

## 5.7.1 Exemplos estáticos

### 5.7.1.1 Flexão simples de viga engastada

Uma viga inicialmente horizontal, engastada numa extremidade e livre na outra é analisada. Na sua extremidade livre é aplicada uma força transversal no sentido de cima para baixo ( $P=10$  kN) conforme mostrado na Figura 18. Os dados adotados são:  $L=10$  m,  $A=2,391 \times 10^{-3} \text{ m}^2$ ,  $I_z=4,762 \times 10^{-7} \text{ m}^4$ . Cinquenta passos de carga e 10 elementos finitos com aproximação quadrática (3 nós cada) foram usados para este problema. A tolerância de convergência adotada em posições é de  $tol=10^{-6}$ .

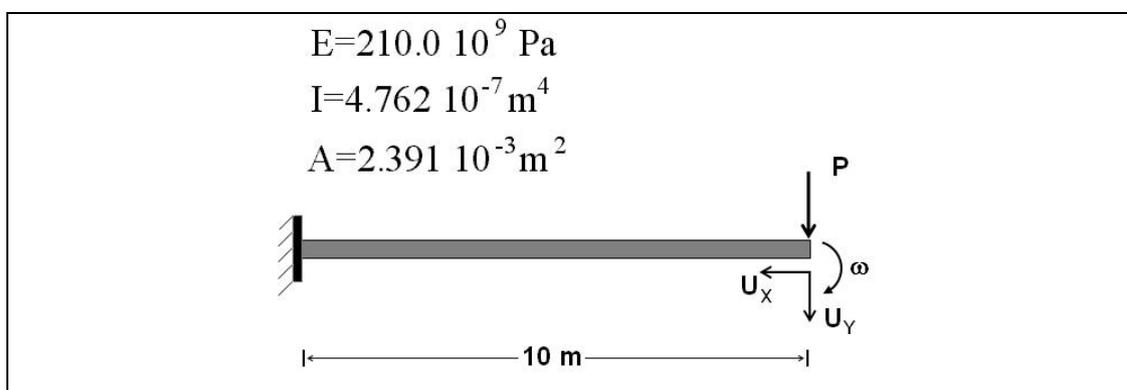


Figura 18 – Viga engastada com força transversal.

Em Figura 19, Figura 20 e Figura 21 são comparados os resultados para 10 elementos finitos quadráticos (cinemática de Reissner) e 50 elementos (cinemática de Euler-Bernoulli por GRECO (2004)) com a solução analítica para deslocamentos  $U_x$ ,  $U_y$  e rotação  $\omega$ . Essa solução analítica pode ser encontrada nos trabalhos de MATTIASSON (1981) e FUJII (1983).

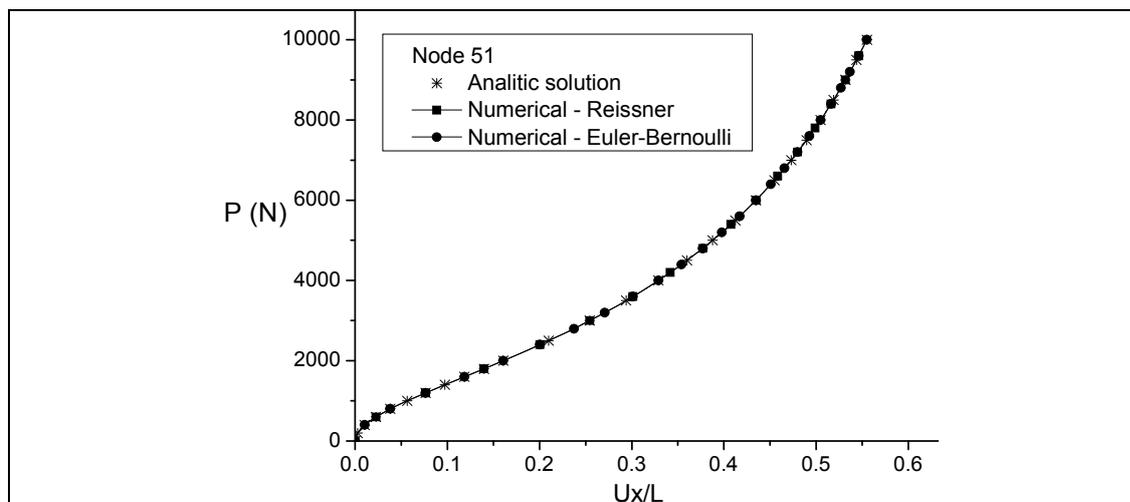


Figura 19 – Força vs deslocamento longitudinal  $U_x/L$ .

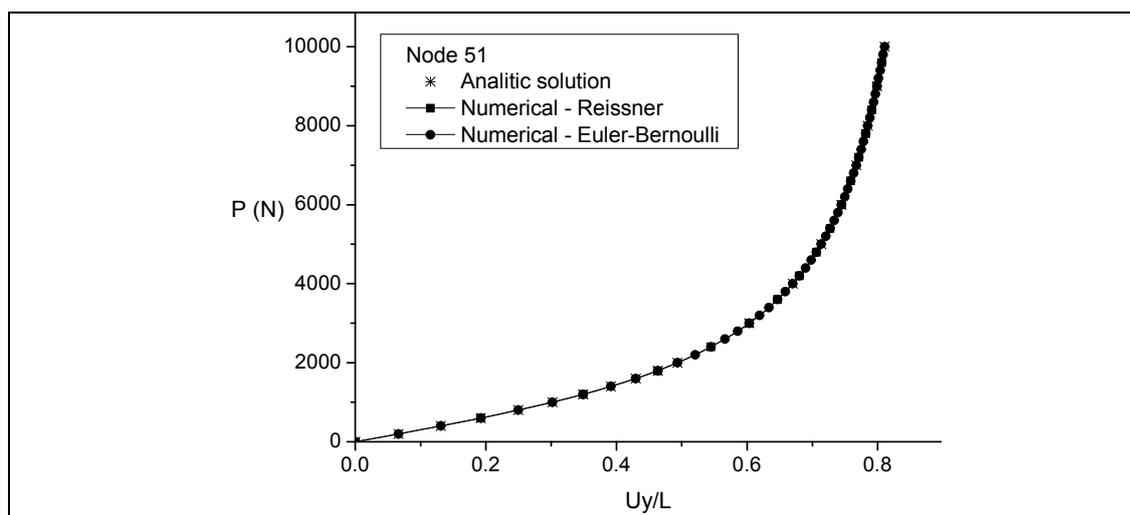


Figura 20 - Força vs deslocamento transversal  $U_y/L$ .

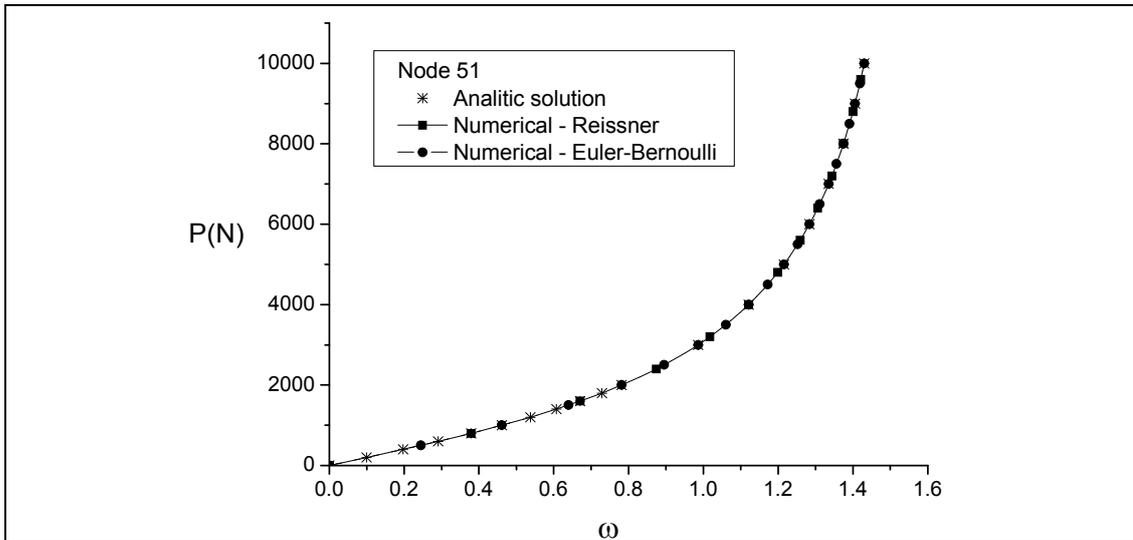


Figura 21 - Força vs rotação  $\omega$ .

É importante notar que os resultados são bastante próximos para ambas cinemáticas, Euler-Bernoulli e Reissner. Isso confirma que para barras esbeltas o efeito de cisalhamento não chega a afetar a resposta do problema. Na Figura 22 algumas posições deformadas são mostradas para os respectivos níveis de carga. Esse problema também pode ser resolvido com poucos níveis de carga (seis níveis de carga com no máximo vinte iterações), sendo esses suficientes para obtenção de uma resposta com a mesma precisão.

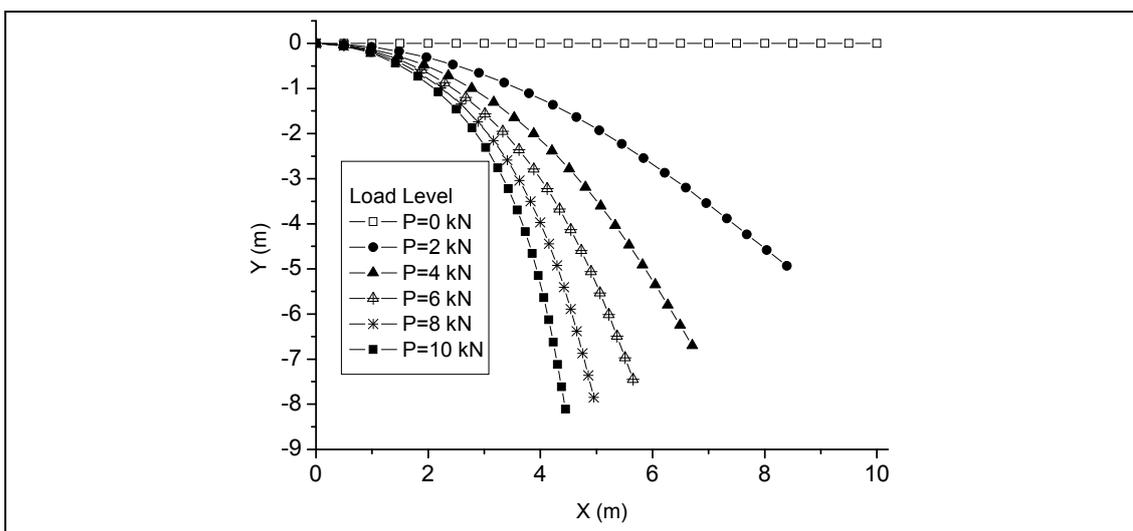


Figura 22 – Configurações deformadas para alguns níveis de carga.

### 5.7.1.2 Pórtico articulado em forma de losango

Jenkins *et. al.* (1966) obteve a solução analítica desse problema empregando integrais elípticas. As seguintes propriedades foram adotadas no problema:  $L=1$ ,  $E=1$ ,  $I_2=1$  e  $A=10000$ . Na Figura 23 o pórtico em formato de losango e as variáveis deslocamento a serem medidas. Os deslocamentos são calculados aqui como sendo a diferença entre posições a fim de se comparar com MATTIASSON (1981). A simetria é empregada.

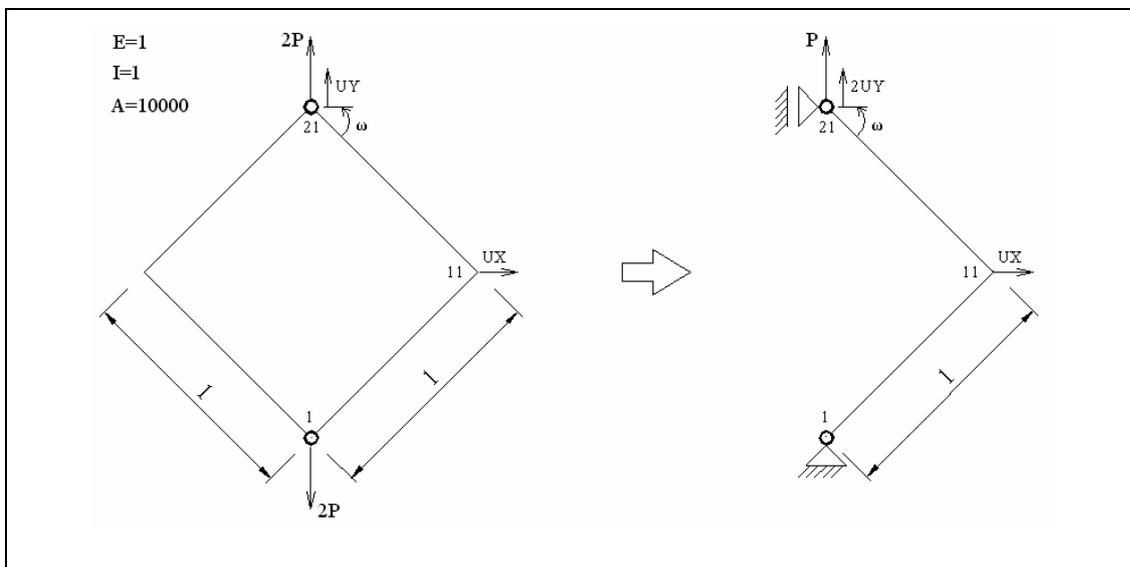


Figura 23 – Pórtico articulado: esquema estático para a situação de compressão ( $P < 0$ ) e de tração ( $P > 0$ ).

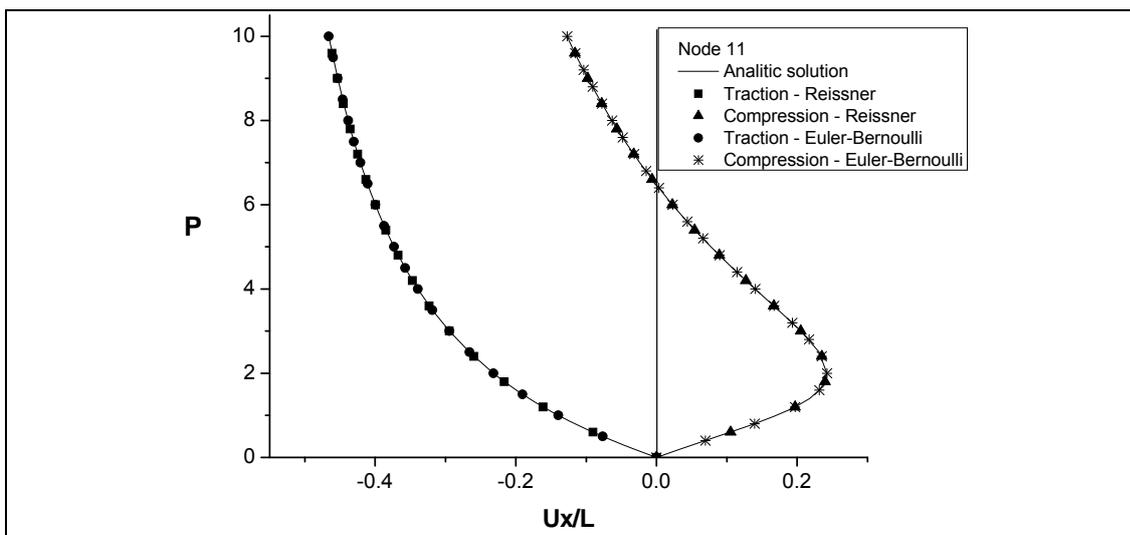


Figura 24 – Deslocamento horizontal vs carregamento.

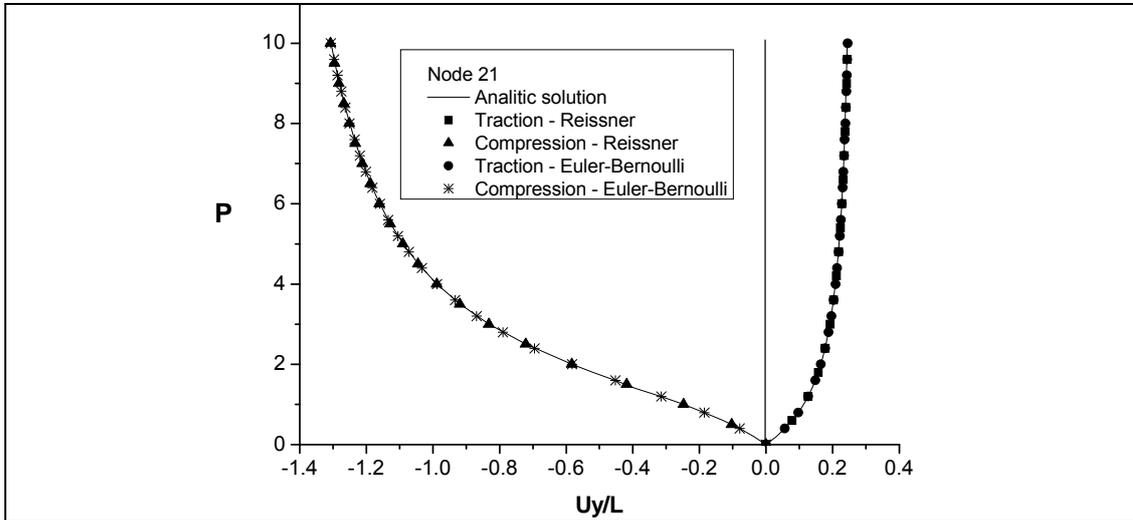


Figura 25 - Deslocamento vertical vs carregamento

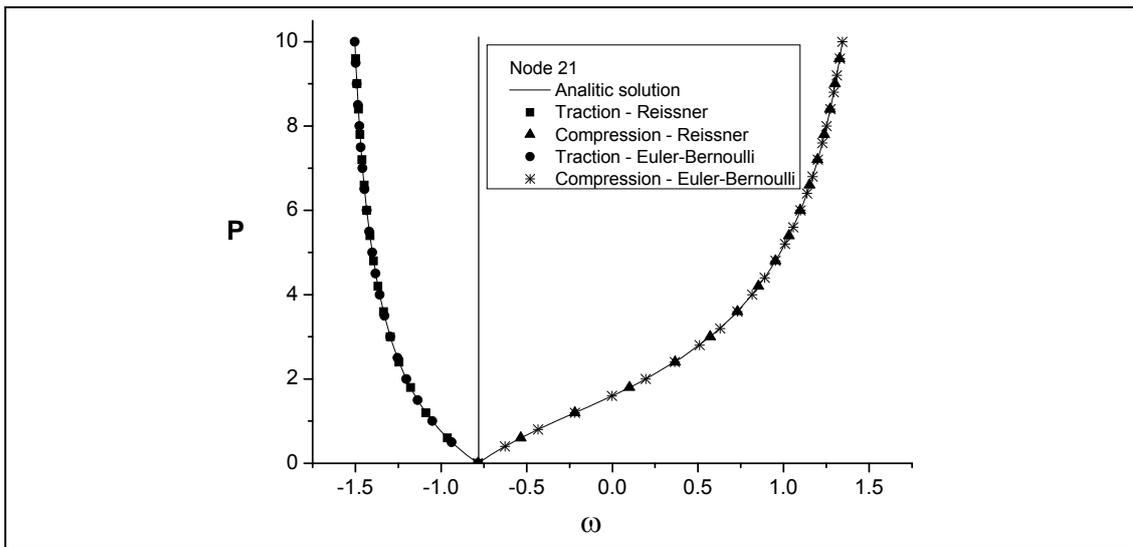


Figura 26 - Rotação vs carregamento

Vinte elemento finitos com aproximação quadrática foram usados na discretização desse problema. Em Figura 24, Figura 25 e Figura 26 os resultados são mostrados juntamente com a solução analítica obtida por MATTIASSON (1981). A tolerância adotada foi de  $tol = 10^{-6}$  em posições. Em Figura 27 e Figura 28 são mostradas algumas configurações deformadas.

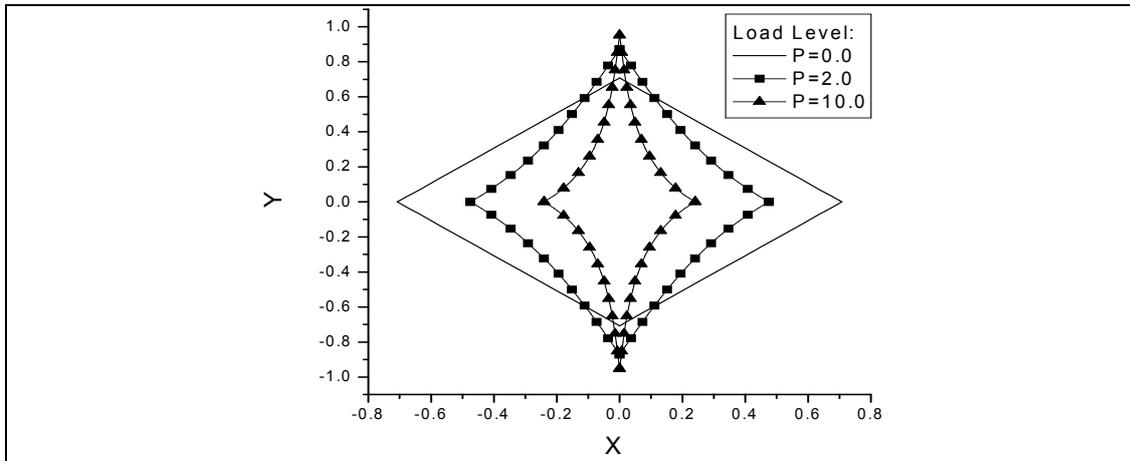


Figura 27 – Configurações deformadas na tração.

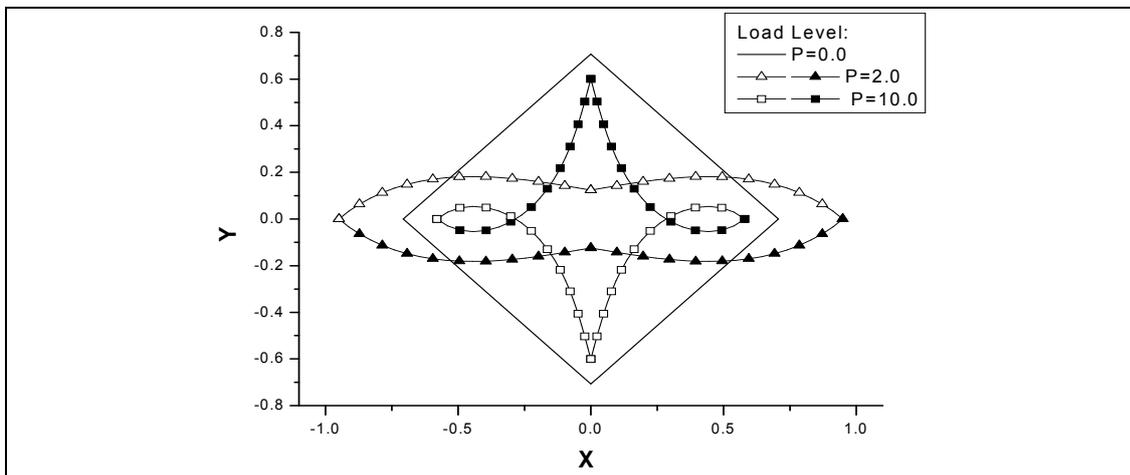


Figura 28 – Configurações deformadas na compressão.

Novamente, nenhuma diferença plausível foi detectada entre as cinemáticas de Reissner e Euler-Bernoulli para esses níveis de carga.

### 5.7.1.3 Elástica de Euler

Uma coluna engastada, Figura 29, com comprimento  $L=2$  m submetida a uma força de compressão variando de 0 até 37100 kN é analisada. As propriedades físicas são  $I=2,425 \times 10^{-5} \text{ m}^4$ ,  $A=0.0175 \text{ m}^2$  e  $E=210 \times 10^9 \text{ Pa}$ . Dez elementos de aproximação cúbica (4 nós cada) são usados na discretização da barra.

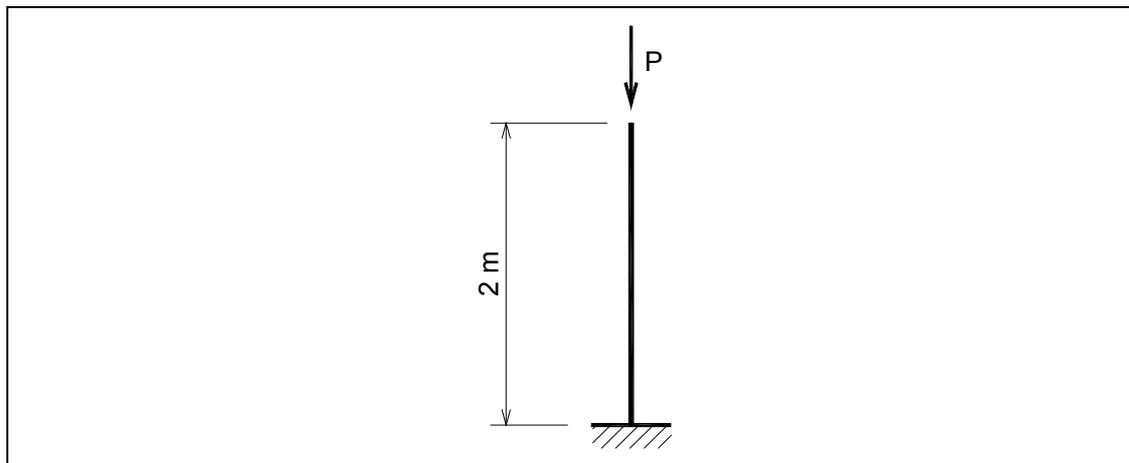


Figura 29 – Coluna analisada.

Na Figura 30, o deslocamento horizontal para o ponto onde a carga é aplicada é mostrado. A excentricidade (defeito na peça) adotada inicialmente medida no topo da coluna é de  $L/1000$ . Uma tolerância de  $tol = 10^{-6}$  é adotada para posições residuais absolutas. Devido à excentricidade, o formato inicial é considerado parabólico. Na Figura 30, o valor da carga crítica para o primeiro modo de flambagem também é mostrado com a finalidade de analisar a precisão dos resultados.

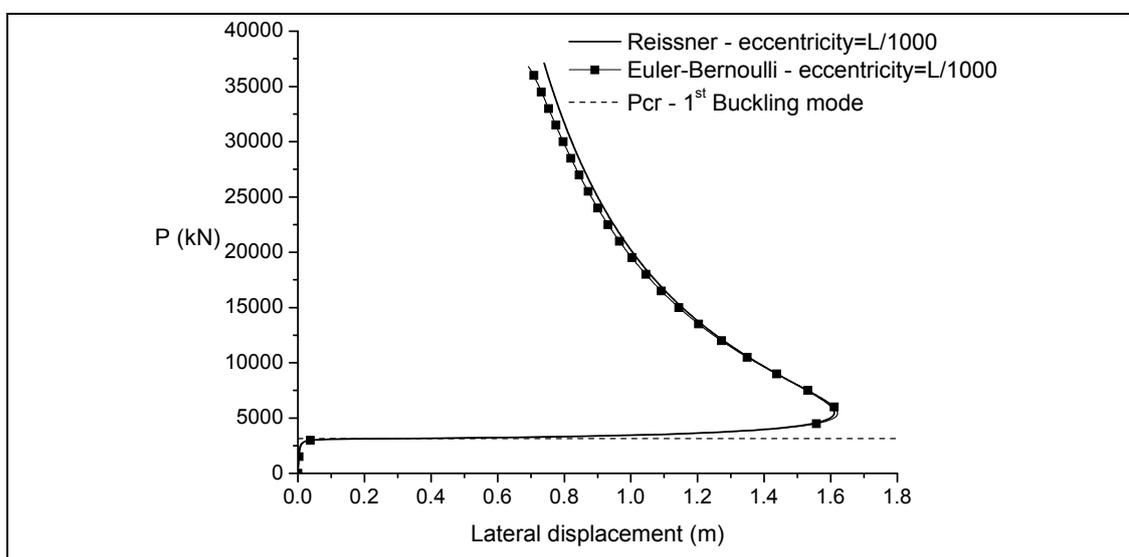


Figura 30 – Deslocamento lateral do ponto de aplicação da carga P.

Neste momento, como pode ser visto na Figura 30, percebe-se a diferença entre as cinemáticas de Reissner e Euler-Bernoulli no fim da análise. A este nível de carga as deformações causadas pelas tensões de cisalhamento se tornam relevantes.

#### 5.7.1.4 Deformações causadas por instabilidade

Para o exemplo anterior, se é reduzido a imperfeição inicialmente adotada, a barra pode flambar em modos mais elevados.

Para excentricidades de  $L/100000$  e  $L/1000000$ , a coluna se torna instável em modo 2 e modo 3 de instabilidade respectivamente, conforme Figura 31.

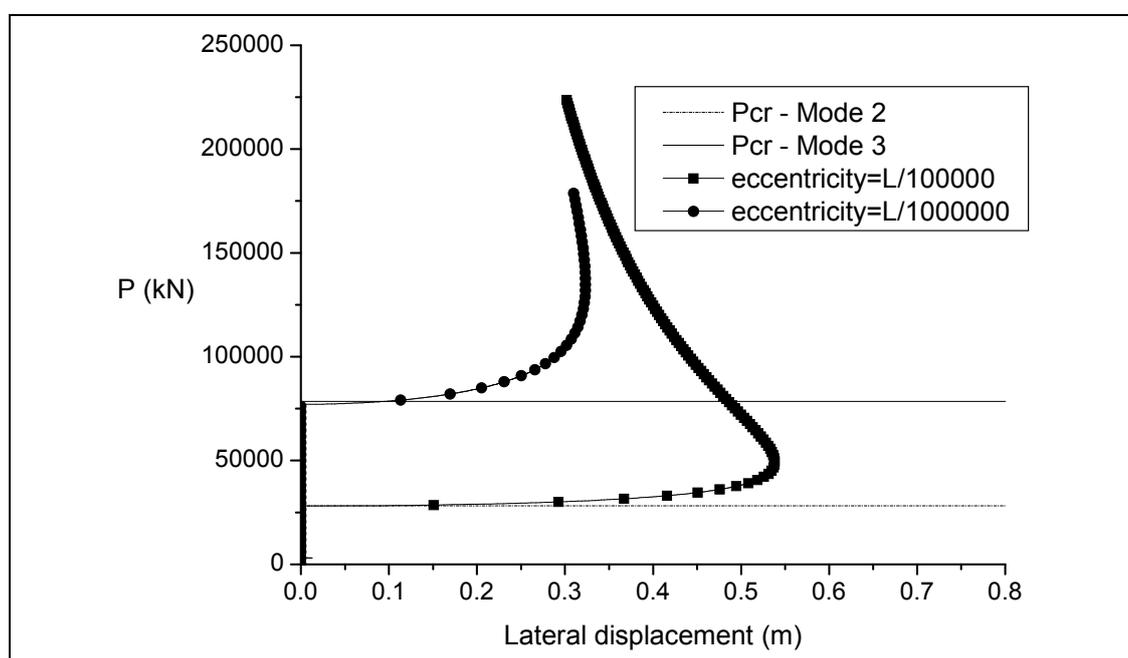


Figura 31 – Deslocamento lateral para o ponto de aplicação da carga  $P$ . Modos 2 e 3 de flambagem.

Na Figura 32, algumas deformadas da coluna são mostradas para os 3 modos aqui analisados.

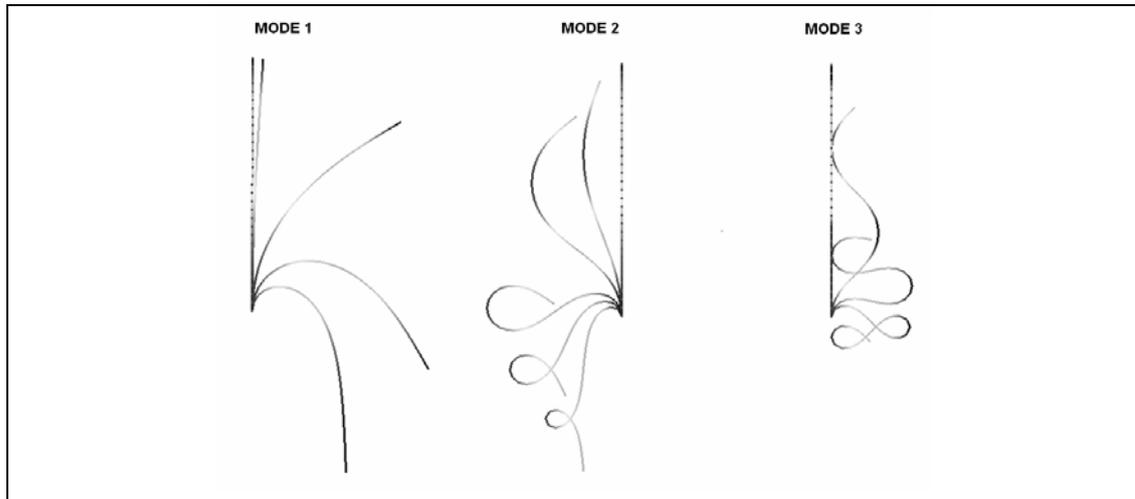


Figura 32 – Deformadas da coluna analisada durante o carregamento.

É mostrado, através da Figura 31, que a formulação proposta é capaz de capturar instabilidades em vários níveis de carga, uma importante característica para boas formulações não lineares geométricas.

#### 5.7.1.5 Instabilidade de pórtico circular

Um pórtico em forma de arco circular, engastado numa extremidade e apoiado na outra, como mostra a Figura 33, é submetido a uma força vertical compressiva “P” aplicado no seu intermédio. Esse problema tem solução analítica empregando-se a teoria de Euler-Bernoulli para carga crítica em DADEPPO & SCHMIDT (1975). Para essa análise numérica, vinte elementos finitos cúbicos foram usados para discretização do pórtico com a tolerância de convergência  $tol = 10^{-6}$  em posições.

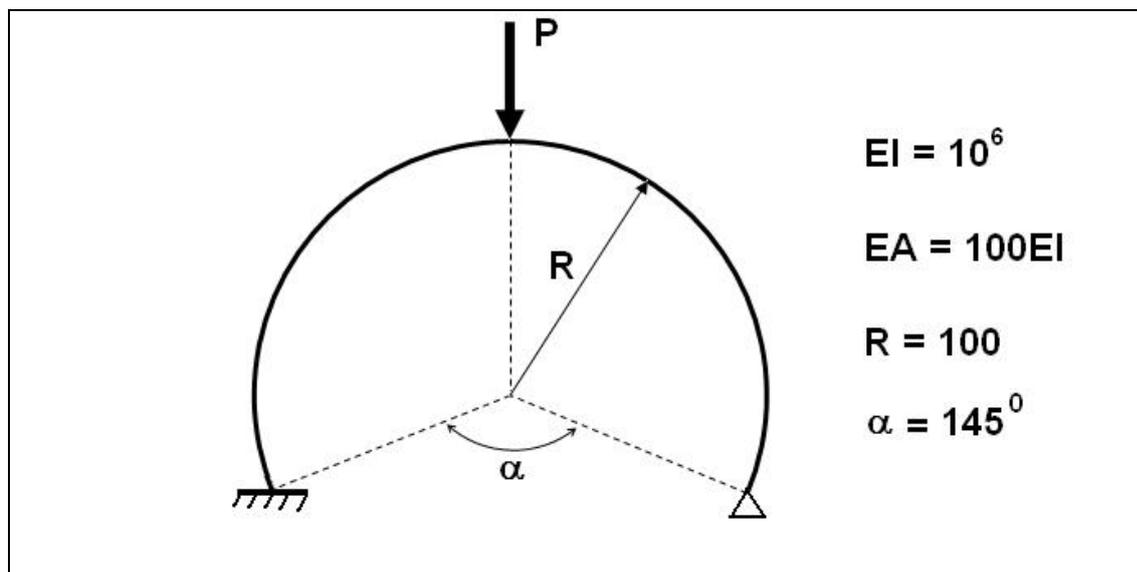


Figura 33 – Pórtico em arco submetido à força de compressão.

Na Tabela 1, o resultado obtido com a presente formulação para o valor de  $P_{cr}$  é mostrado e comparado com os da literatura consultada.

Tabela 1 – Carga crítica “ $P_{cr}$ ” para o pórtico em arco.

Referência	$P_{CR}$
Presente trabalho	897.3
IBRAHIMBEGOVIĆ (1995)	897.3
DADEPPO & SCHMIDT (1975)	897

É importante enfatizar que a cinemática de Reissner é também empregada em IBRAHIMBEGOVIĆ (1995). Figura 34, nota-se a deformada do arco quando a carga P atinge o seu máximo e o método de Newton-Raphson perde a convergência.

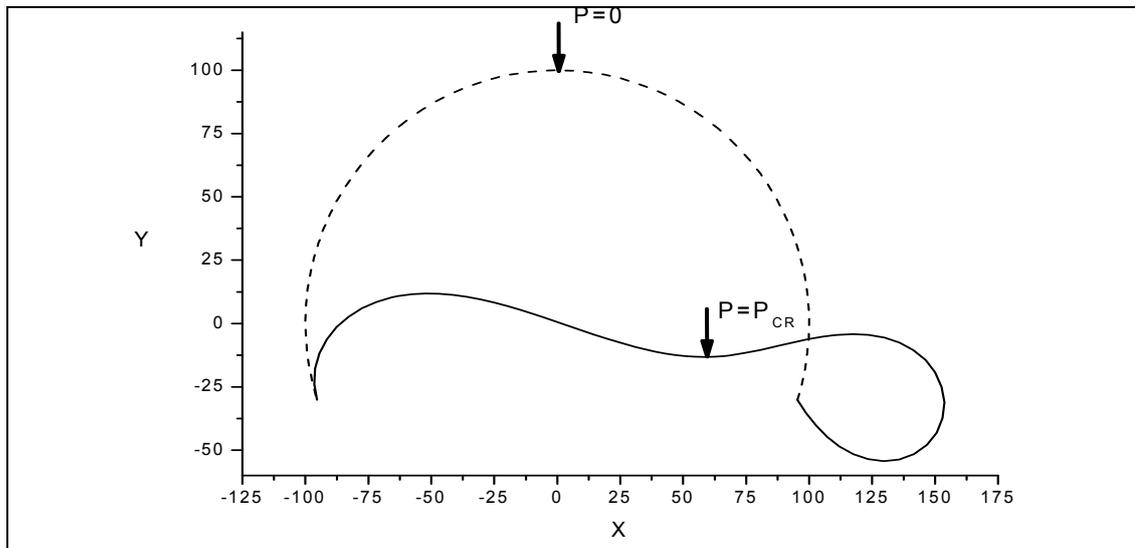


Figura 34 – Deformada do arco na flambagem.

#### 5.7.1.6 Pórtico com força não conservativa concentrada

Este exemplo, encontrado em VITALIANI *et al* (1997), analisa-se comportamento de estabilidade um pórtico bi-apoiado devido a aplicação de força não conservativa aplicada de cima para baixo conforme Figura 35. Os dados do problema são também mostrados na Figura 35. Analisa-se o exemplo para duas malhas de elementos finitos, a primeira composta por 10 elementos e a segunda, bem mais refinada, com 40 elementos finitos, todos com aproximação cúbica.

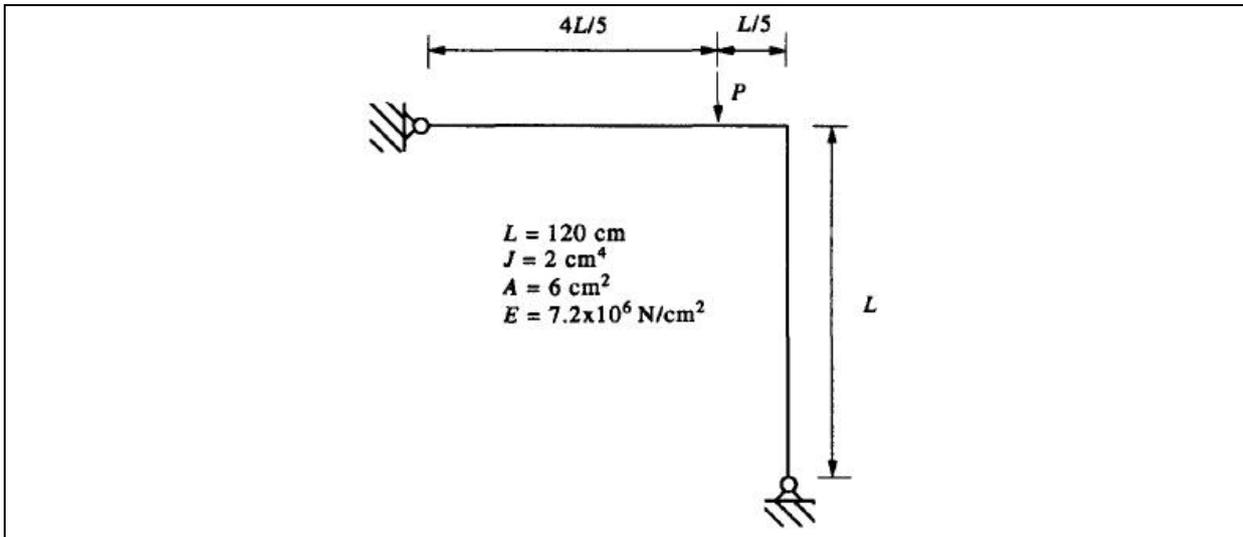


Figura 35 – Pórtico bi-apoiado com carga não conservativa aplicada.

Na Figura 36, mostra-se algumas posições deformadas do pórtico com 40 elementos finitos até o nível de carga em que se ocorre um salto na deformada, ou seja, de  $P_{CR}=34 \text{ KN}$  para  $P=34,13 \text{ KN}$ . Para a malha de 10 elementos finitos, o mesmo salto ocorre quando  $P_{CR}=34,95 \text{ KN}$ . Em VITALIANI *et al* (1997), o valor de carga crítica é de  $P_{CR}=35 \text{ KN}$ .

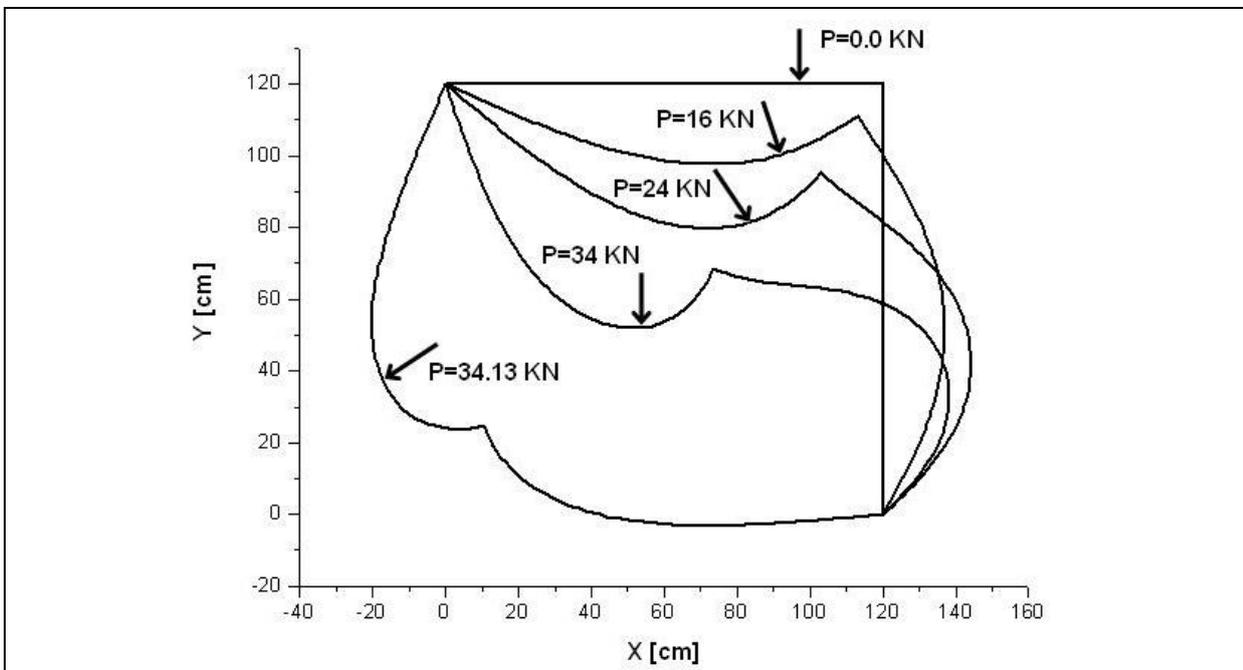


Figura 36 – Posições deformadas para pórtico devido à força não conservativa.

Na Figura 37, mostra-se o gráfico dos deslocamentos nas direções X e Y para o ponto de aplicação da força não conservativa. Após o patamar de  $P=34$  KN, a forma da estrutura praticamente se mantém para os níveis de carga mais elevados.

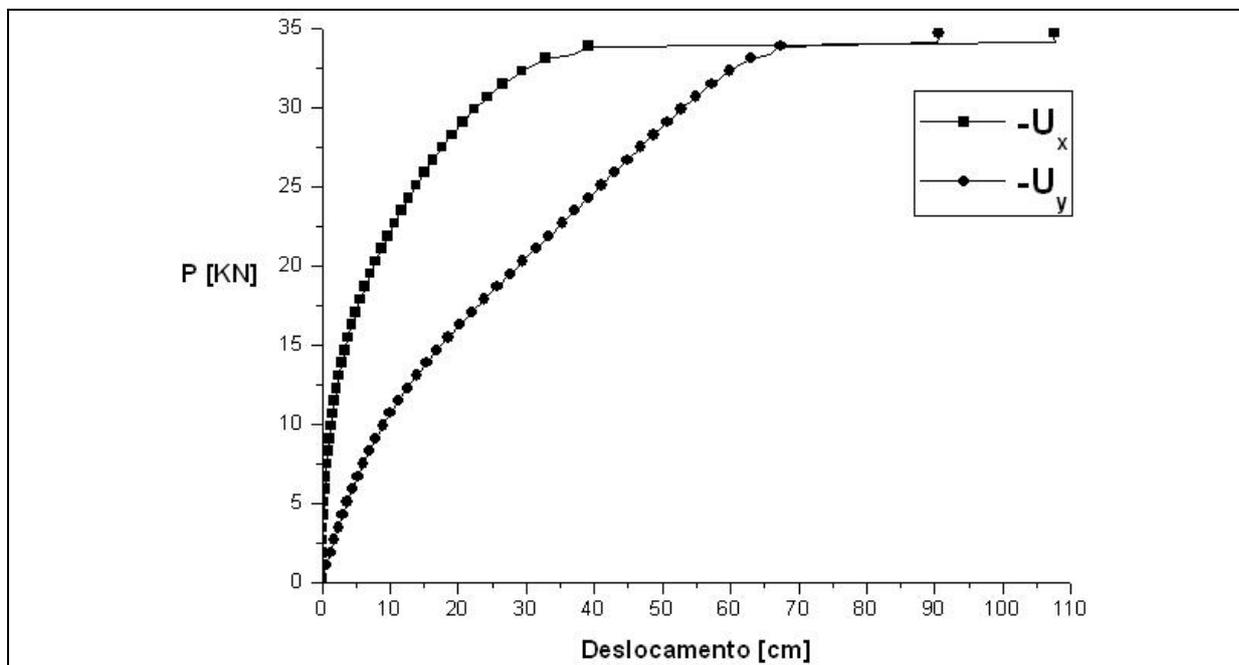


Figura 37 – Deslocamentos no ponto de aplicação da força não conservativa.

É importante enfatizar, que se considera aqui o valor  $P_{CR}=34$  KN como o valor de carga crítica mais apropriado, isto é, valor este obtido com malha mais refinada.

### 5.7.1.7 Faixas finas sujeitas ao peso próprio

Neste exemplo faixas finas de forma a simular velas solares sujeitas ao peso próprio são analisadas com o programa de pórtico 2D com cinemática de Reissner. Investiga-se para três comprimentos diferentes, ou seja, 100 m, 1 Km, 10 Km respectivamente, porém a largura e a espessura são constantes em todos os casos, isto é, 1m e 1  $\mu$ m respectivamente. Sendo Módulo de Elasticidade  $E=2.6$  GPa e massa específica  $\rho=1420$  kg/m<sup>3</sup>. O peso da faixa pode ser considerado como uma força transversal uniformemente distribuída e conservativa ao longo

do vão. A fim de se evitar instabilidades de convergência durante o processo iterativo de convergência, o seguinte esquema de incremento de carga é empregado (LEE & LEE, 2005):

$$P = P_0 \times 10^{-m} \quad (5.62)$$

Onde  $P_0$  é a carga alvo, no caso o peso total da faixa e  $10^{-m}$  controla a magnitude da força aplicada. Nesta análise em particular  $m=nl/i$ , onde  $nl$  é o número de passos de carga previamente adotados e “ $i$ ” é o passo atual durante a análise. Também, o peso da faixa é dado por:

$$P_0 = \rho g t b \quad (5.63)$$

Onde  $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ . “ $t$ ” e “ $b$ ” são espessura e largura da faixa respectivamente. A solução analítica, devido a, para a deflexão máxima da faixa é dada por (ROARK & YOUNG, 2005):

$$y_{\max} = \frac{P_0 L^2}{8F_h} \quad (5.64)$$

Onde  $L$  é o comprimento da faixa e  $F_h$  é a reação de apoio. Também,  $F_h$  pode ser determinado resolvendo a seguinte equação iterativa (IRVANE, 1981):

$$\sinh\left(\frac{P_0 L}{2F_h} - \frac{P_0 L}{2EA}\right) = \frac{P_0 L}{2F_h} \quad (5.65)$$

Na Tabela 2 são mostrados os resultados numéricos obtidos com o programa de pórtico para três comprimentos distintos em comparação com resultados analíticos obtidos através da Eq.(5.64).

Tabela 2 – Resultados numéricos em comparação com os analíticos.

Geometria		Num. de elementos	$y_{\max}$ [m]		Erro (%)
L [m]	Espessura [m]		Analítico	Numérico	
100	0.00001	100	2.936	2.931	0.16
1000	0.00001	100	63.68	63.54	0.22
10000	0.00001	200	1419.19	1410	0.65

Foram adotados 20 passos de carga, com tolerância de convergência de  $10^{-4}$  para o algoritmo de Newton-Raphson. Na Figura 38, posições deformadas finais para as faixas devido ao peso próprio são mostradas.

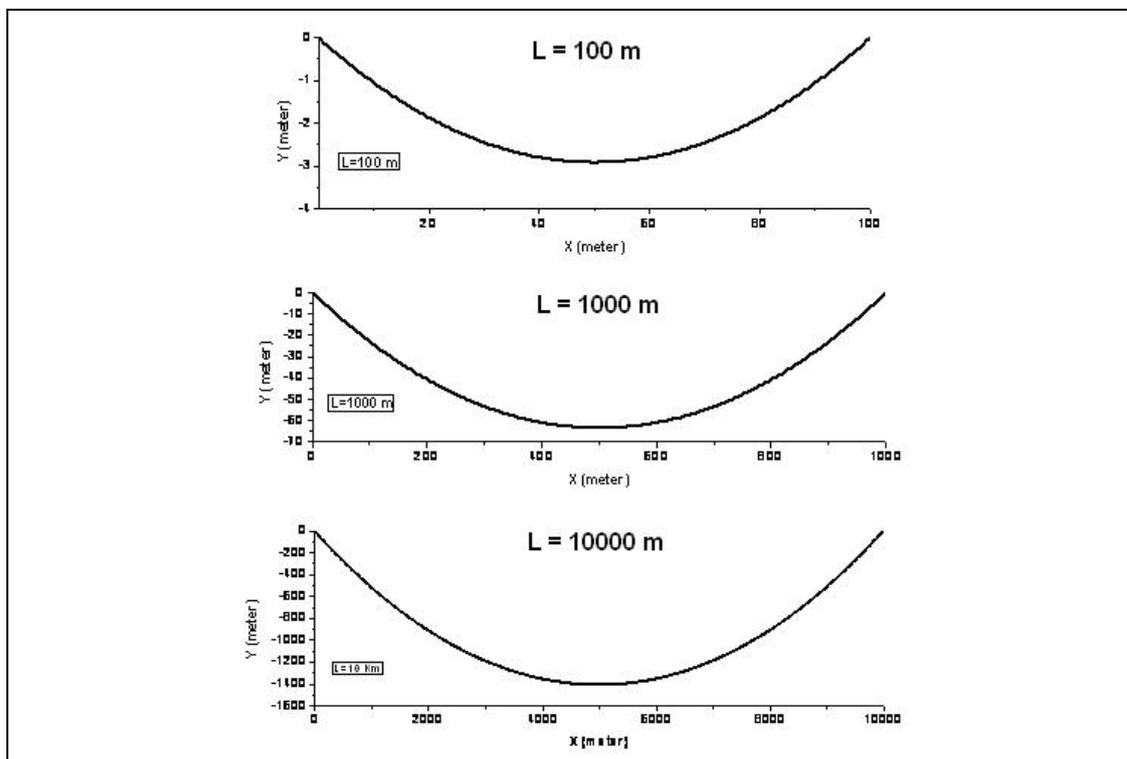


Figura 38 - Posição deformada para as faixas devido ao peso próprio.

É importante enfatizar que nenhuma técnica especial tais como variáveis com precisão quádrupla (LEE & LEE, 2005), módulo modificado (LEE & LEE, 2005), pré-tensão, amortecimento artificial etc, foi necessária para se alcançar os resultados mostrados. Também, nenhum travamento (locking), como já esperado, foi detectado. Por outro lado, modificações nas unidades de comprimento foram feitas com o objetivo de se evitar números menores do que a dupla precisão do computador na matriz hessiana. Portanto, nesse exemplo, a unidade em micrômetros foi perfeitamente adequada.

## 5.7.2 Exemplos dinâmicos

### 5.7.2.1 Barra giratória flexível com deslocamento aplicado

Neste exemplo uma barra flexível é presa a um apoio rotulado e livre na outra extremidade, de acordo com a Figura 39. O deslocamento é prescrito ao longo do tempo, de acordo com o gráfico na Figura 39. Esse exemplo pode ser encontrado em SIMO & VU-QUOC (1986), bem como em HSIAO *et. al.* (1994) entre outros. Este exemplo foi discretizado com 10 elementos finitos de aproximação quadrática.

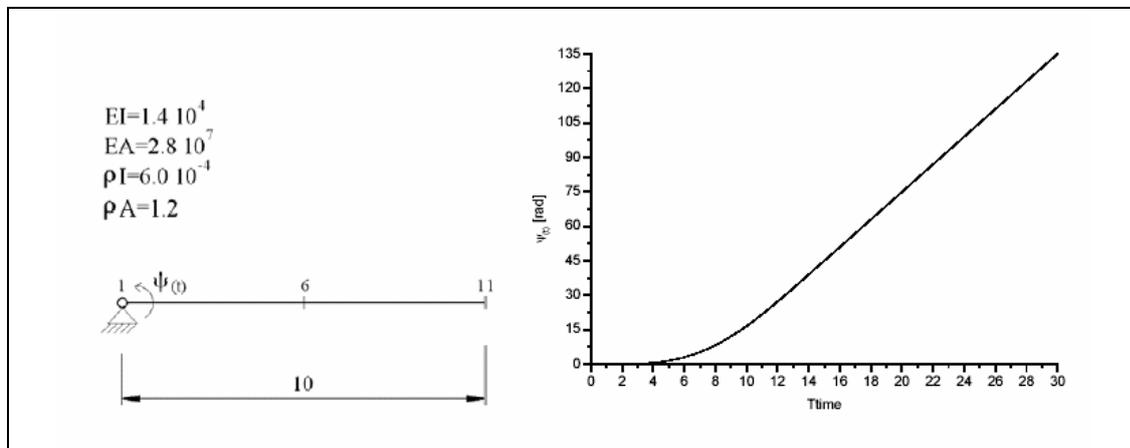


Figura 39 – Barra flexível e dados do problema.

As expressões da função dada pelo gráfico da Figura 40 são:

$$\psi(t) = \frac{2}{5} \left[ \frac{t^2}{2} + \left( \frac{15}{2\pi} \right)^2 \left( \cos \frac{2\pi t}{15} - 1 \right) \right] \text{ rad} \quad 0 \leq t \leq 15 \quad (5.66)$$

$$\psi(t) = (6t - 45) \text{ rad} \quad t > 15 \quad (5.67)$$

Na Figura 40 são representados os deslocamentos da barra flexível em face do movimento de corpo rígido da haste.

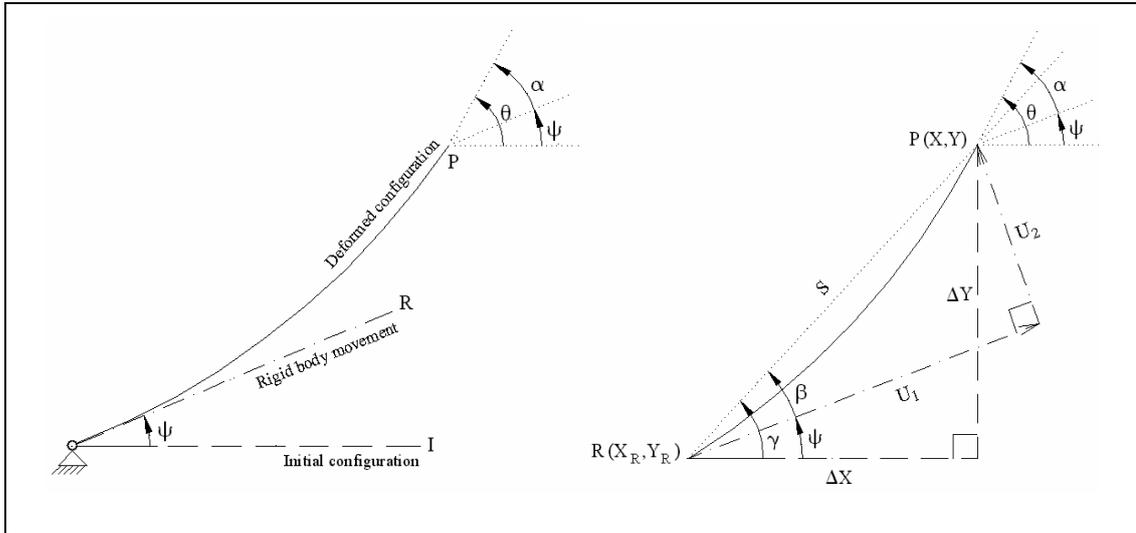


Figura 40 – Deslocamentos relativos ao movimento de corpo rígido da barra.

Na Figura 41, Figura 42 e Figura 43 são mostrados os deslocamentos  $U_1$ ,  $U_2$  e a rotação relativa  $\alpha$  respectivamente ao longo do tempo.

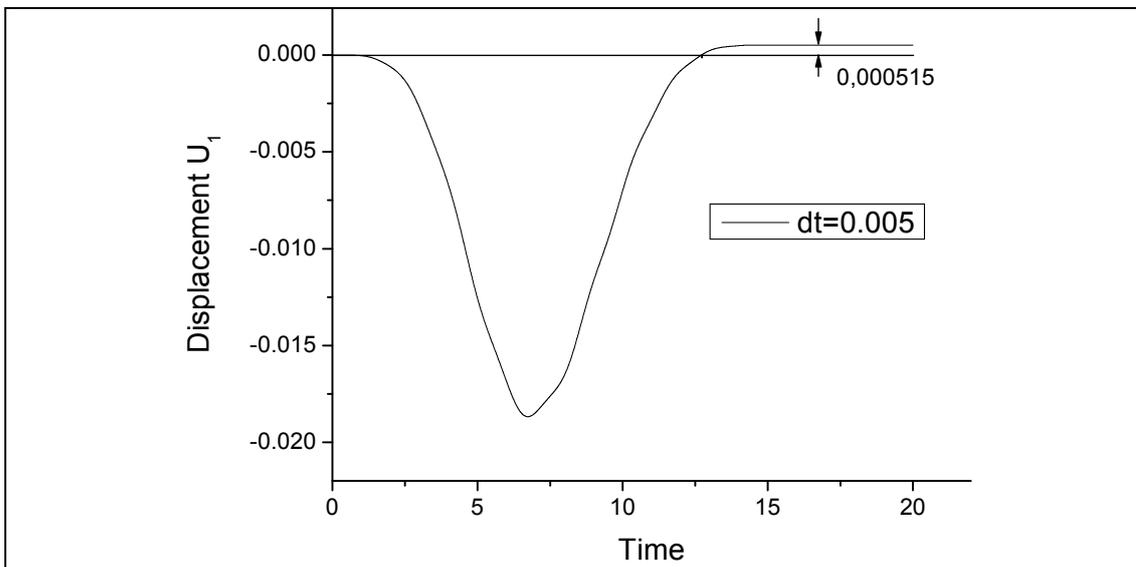
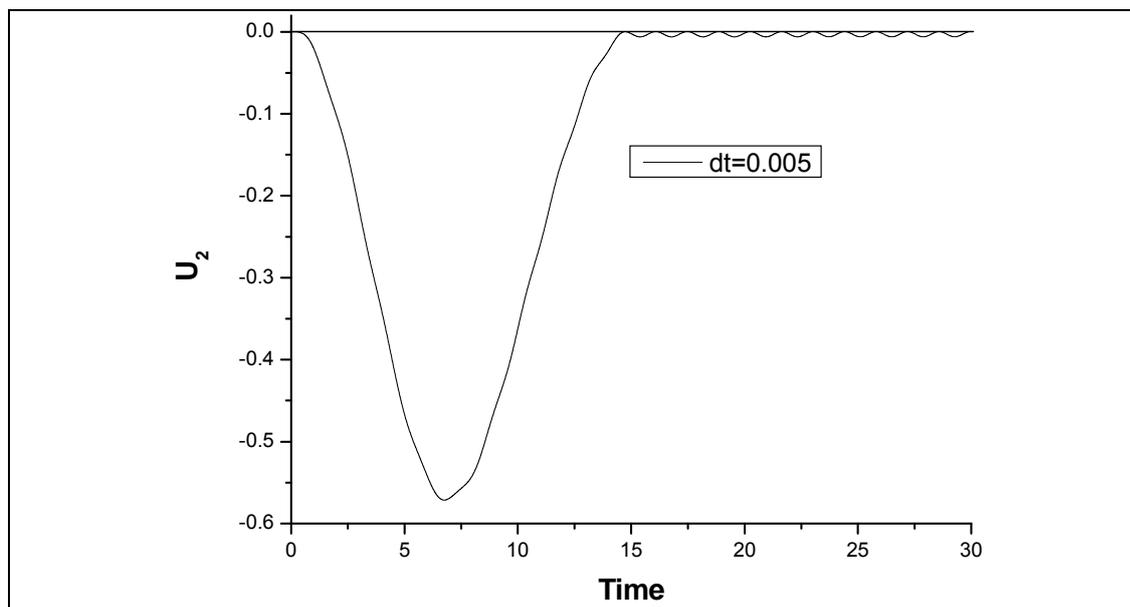
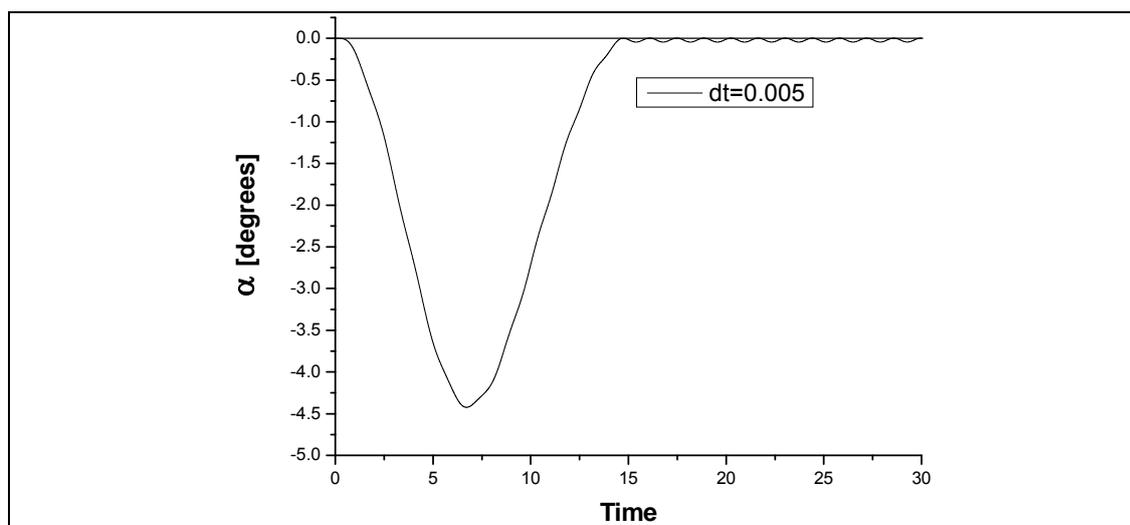


Figura 41 – Deslocamento  $U_1$ .

Para o deslocamentos  $U_1$ , após o movimento se tornar estável, tem-se como solução analítica o valor de 0,000514, sendo bem próximo ao encontrado com 10 elementos finitos quadráticos de acordo com o gráfico da Figura 41.

Figura 42 – Deslocamento  $U_2$ .Figura 43 – Rotação relativa  $\alpha$ .

Neste exemplo foi empregada uma tolerância de convergência de  $tol = 10^{-4}$  em posições para o Método de Newton Raphson e parâmetros de Newmark  $\beta=0.30$   $\gamma=0.55$  de forma a dar mais estabilidade na convergência com o mínimo de amortecimento numérico. Esses parâmetros são escolhidos devido ao estudo sobre máquinas em rotação em CODA *et al* (2005), onde se obtiveram esses valores mais apropriados.

São também mostrados na Figura 44 e Figura 45 os gráficos de aceleração e velocidade angular respectivamente.

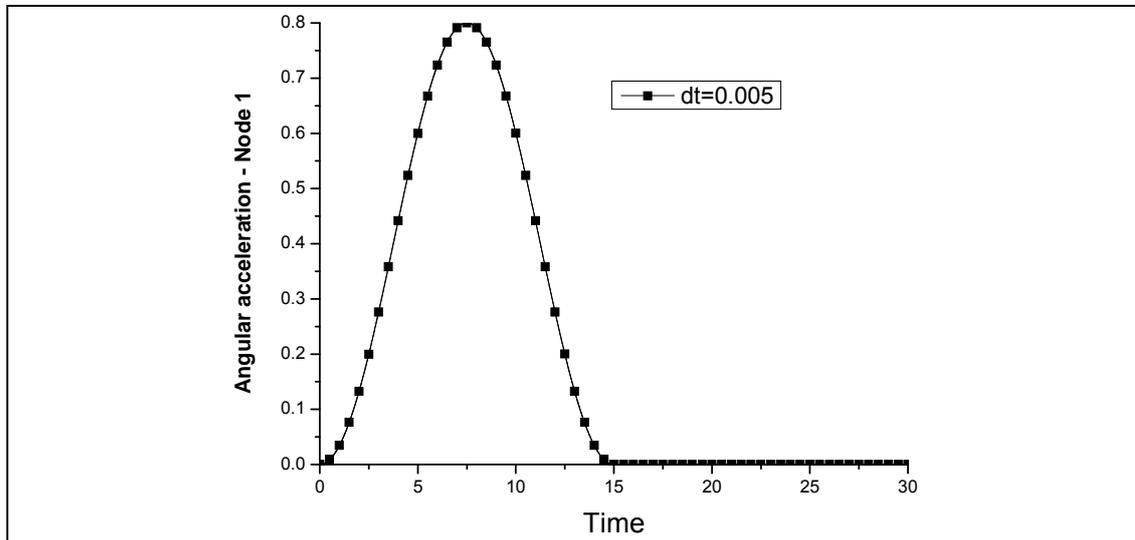


Figura 44 – Aceleração angular do nó 1.

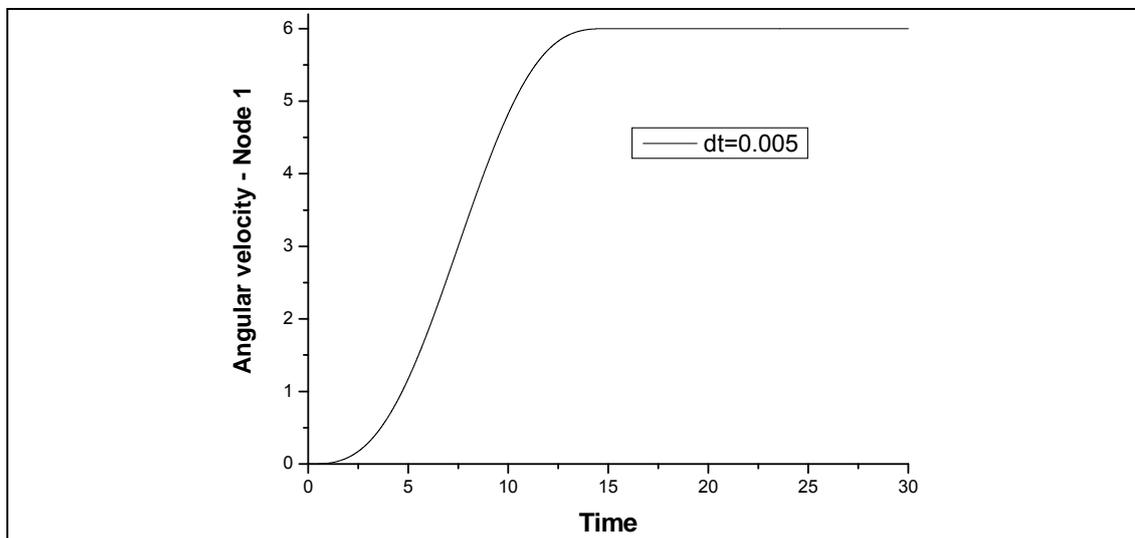


Figura 45 – Velocidade angular do nó 1.

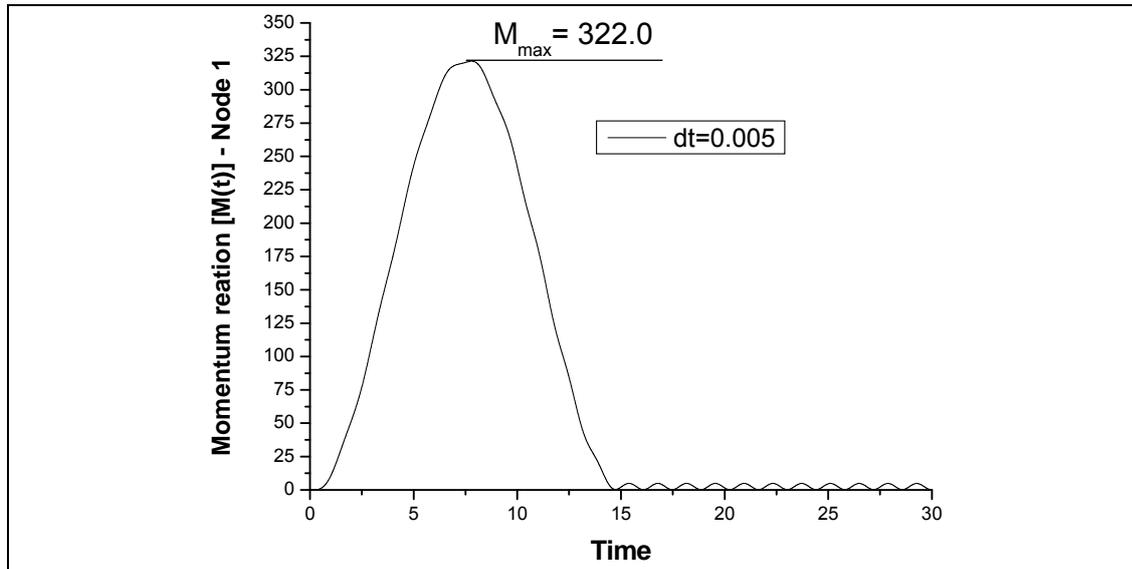


Figura 46 – Reação momento do nó 1.

É relativamente fácil de ver que derivando a Eq.(5.66) e Eq.(5.67) em relação ao tempo, se obtém uma boa convergência relativa aos resultados numéricos obtidos. Além disso, na Figura 46 o gráfico da reação momento é mostrado, bem como o valor máximo do momento durante a análise, com o objetivo de empregá-lo no exemplo a seguir.

### 5.7.2.2 Barra Giratória com momento aplicado

Para este caso a estrutura do exemplo 0 é agora submetida a um momento prescrito que é função da velocidade angular da haste (curva de torque), de acordo com a Figura 47. A fim de se evitarem vibrações excessivas e aproximar ainda mais de um problema real, o momento de inércia é cem vezes maior do que o do exemplo anterior.

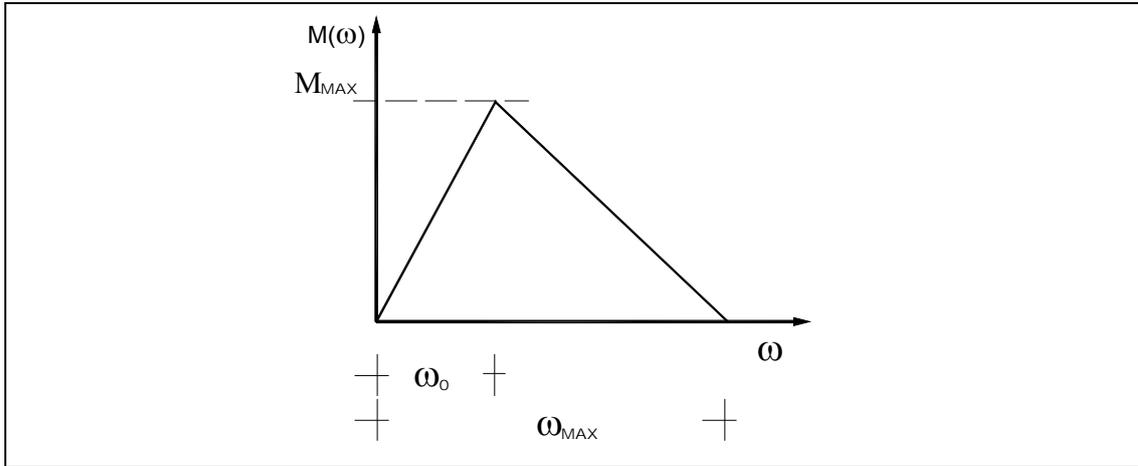


Figura 47 – Curva de torque hipotética.

De acordo com a Figura 47, o momento aplicado é dado por:

$$M(\omega) = \frac{M_{\max}}{\omega_0} \omega \quad \omega \leq \omega_0 \quad (5.68)$$

$$M(\omega) = \frac{M_{\max}}{\omega_0 - \omega_{\max}} \omega + M_{\max} \left( 1 - \frac{\omega_0}{\omega_0 - \omega_{\max}} \right) \quad \omega > \omega_0 \quad (5.69)$$

Onde  $M_{\max}$ ,  $\omega_0$  e  $\omega_{\max}$  são valores arbitrários. Para este caso, como mencionado anteriormente, o momento máximo é o valor obtido no exemplo anterior.

Também neste exemplo a mesma discretização é empregada e os parâmetros de Newmark são  $\beta=0.30$   $\gamma=0.55$ . Na Figura 48, Figura 49 e Figura 50 os deslocamentos  $U_1$ ,  $U_2$  e rotação relativa  $\alpha$  são mostrados respectivamente.

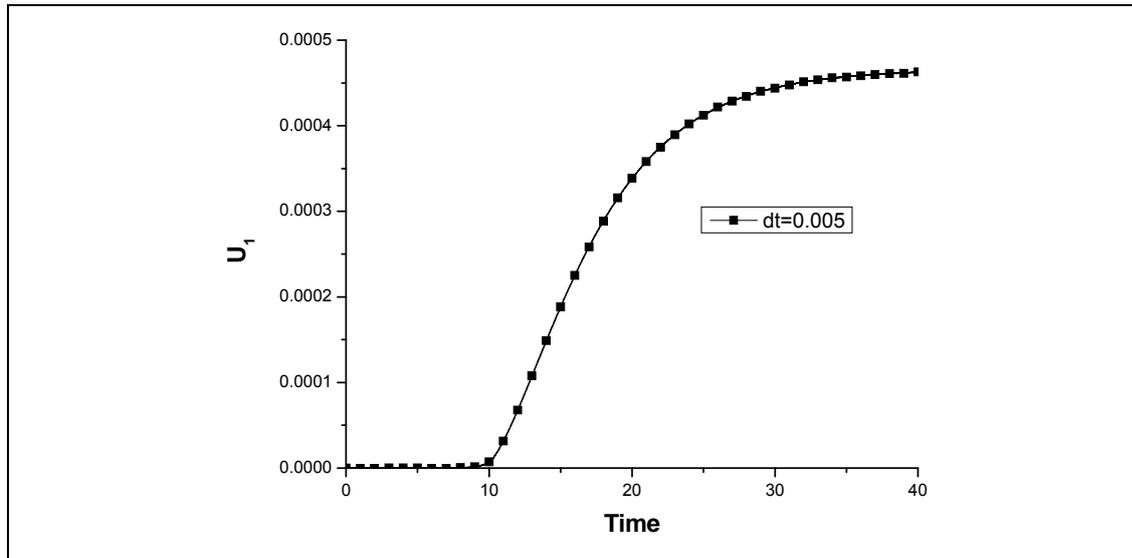


Figura 48 - Deslocamento  $U_1$ .

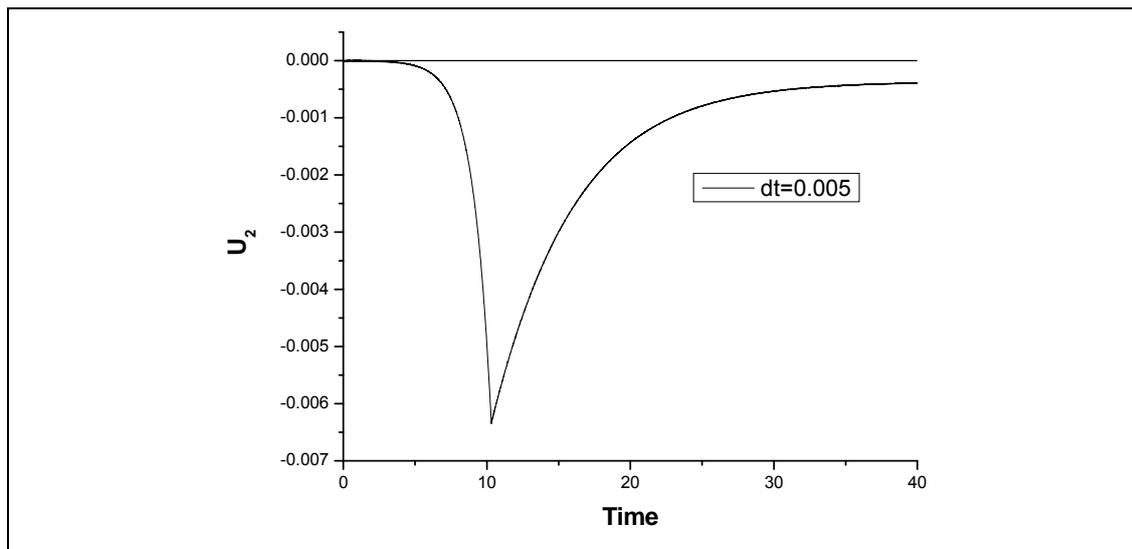
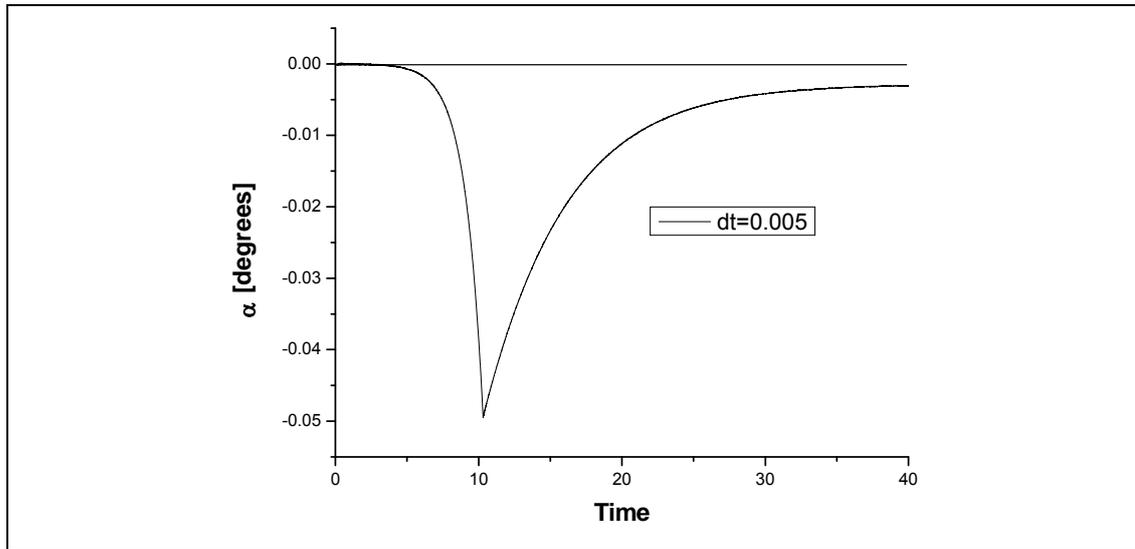


Figura 49 - Deslocamento  $U_2$ .

Figura 50 - Rotação relativa  $\alpha$ .

É importante ressaltar que com esta formulação, em trabalhos futuros, pode ser possível a análise de pórticos sujeitos a cargas não ideais, tais como em BALTHAZAR & BRASIL (1995), WARMINSKI *et al.* (2001), KUROIWA (2003) entre outros.

### 5.7.2.3 Mecanismo flexível articulado

Um mecanismo de acordo com a Figura 51 composto por um braço mecânico  $\overline{AB}$  e uma haste  $\overline{CB}$  é articulado no ponto C e no ponto B por um bloco de massa desprezível apoiado numa superfície sem atrito. O módulo de elasticidade da haste é vinte vezes menor do que o do braço mecânico e um momento  $M(t)$  é aplicado no ponto A. Os dados do problema também são mostrados na Figura 51. Este exemplo encontra-se em GRECO (2004) e ESCALONA *et al.* (1998).

A análise é feita para duas situações de carregamento. A primeira é dada por:

$$M_{(t)} = 0.01 \left( 1 - e^{\frac{-t}{0.167}} \right) \text{ Nm} \quad (5.70)$$

e a segunda, é composta por duas fases, ou seja:

$$M(t) = 0.01 \left( 1 - e^{-\frac{t}{0.167}} \right) \text{ Nm} \quad \text{para } 0s \leq t \leq 0.7s \quad (5.71)$$

$$M(t) = 0 \text{ Nm} \quad \text{para } t > 0.7s \quad (5.72)$$

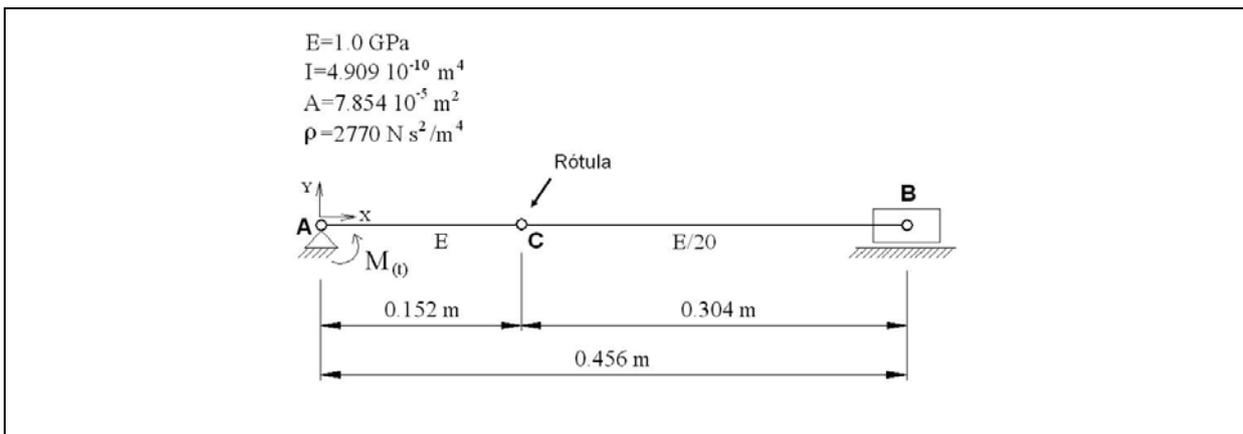


Figura 51 – Mecanismo articulado e dados do problema.

O problema foi discretizado em 15 elementos de aproximação cúbica (4 nós) no total com intervalo de tempo  $\Delta t = 0.005$ . Na Figura 52, mostram-se os resultados para o deslocamento horizontal do bloco (ponto B) em comparação aos obtidos em GRECO (2004).

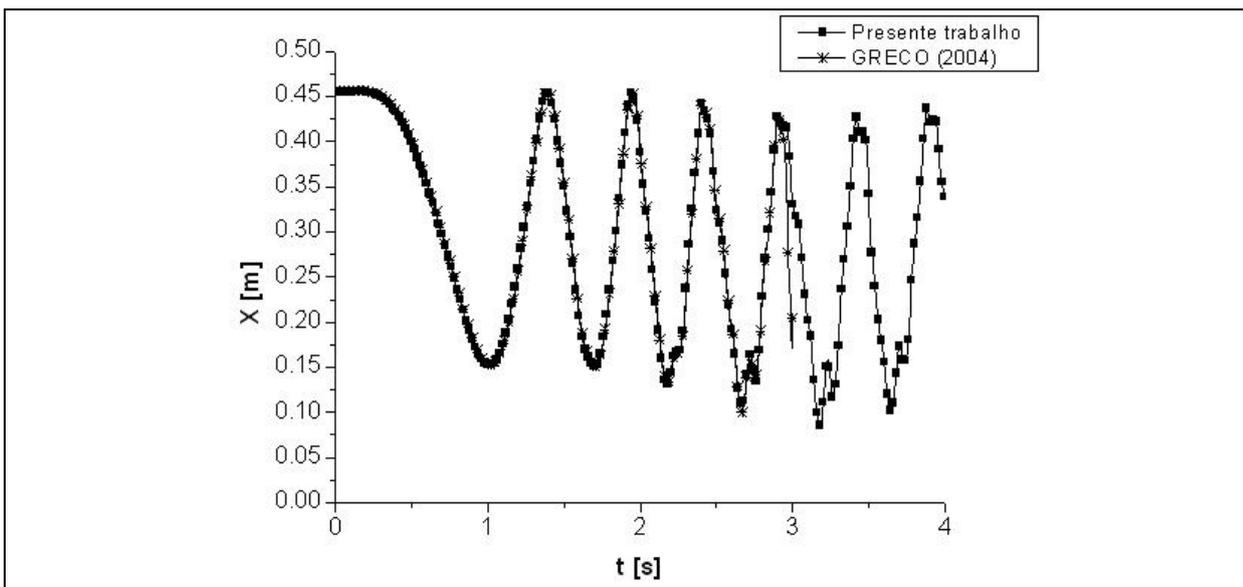


Figura 52 – Posição horizontal do bloco para primeira situação de carga.

A análise em GRECO (2004) é levada até 3 s e os resultados são praticamente idênticos até  $t = 2.95$  s. No seguinte gráfico, dado pela Figura 53, os resultados obtidos para posição do bloco devido à segunda situação de carga são mostrados para um tempo de até  $t = 8$  s.

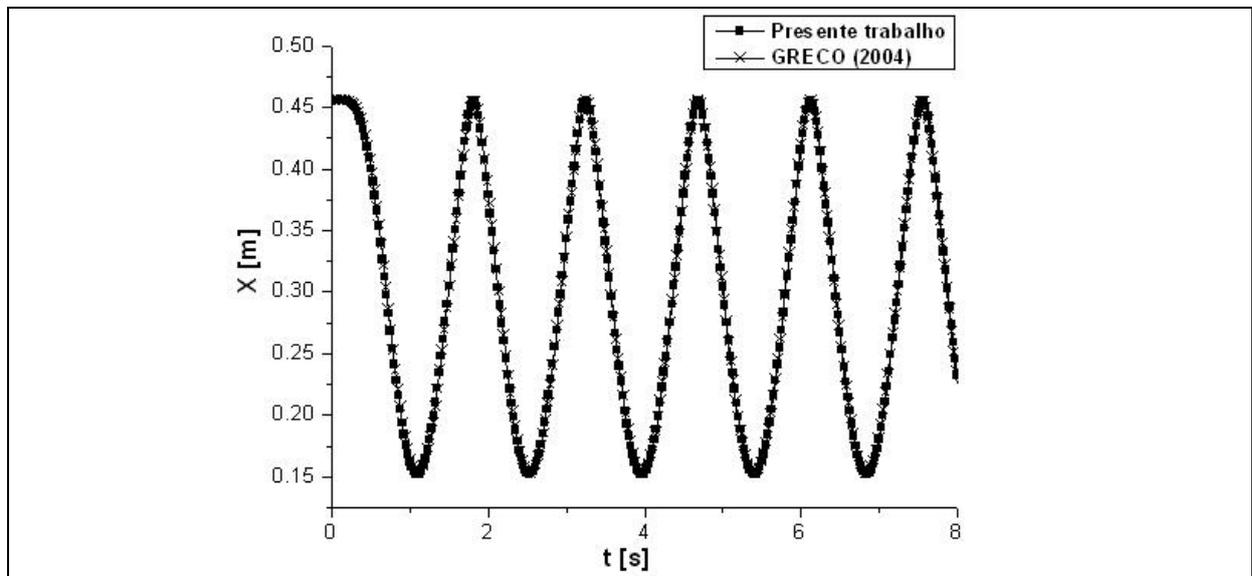


Figura 53 – Posição horizontal do bloco para segunda situação de carga.

No gráfico da Figura 53 os deslocamentos são praticamente idênticos aos da referência.

Convém notar que as rótulas são levadas em conta segundo o acoplamento nodal encontrado em GRECO (2004).

Admite-se agora que a massa do bloco não é desprezível. Sendo assim, são mostrados na Figura 54 os gráficos dos resultados aplicando-se a primeira situação de carga para o bloco com massa concentrada arbitrária de 15% e 30% respectivamente da massa total do mecanismo (braço mecânico + haste flexível).

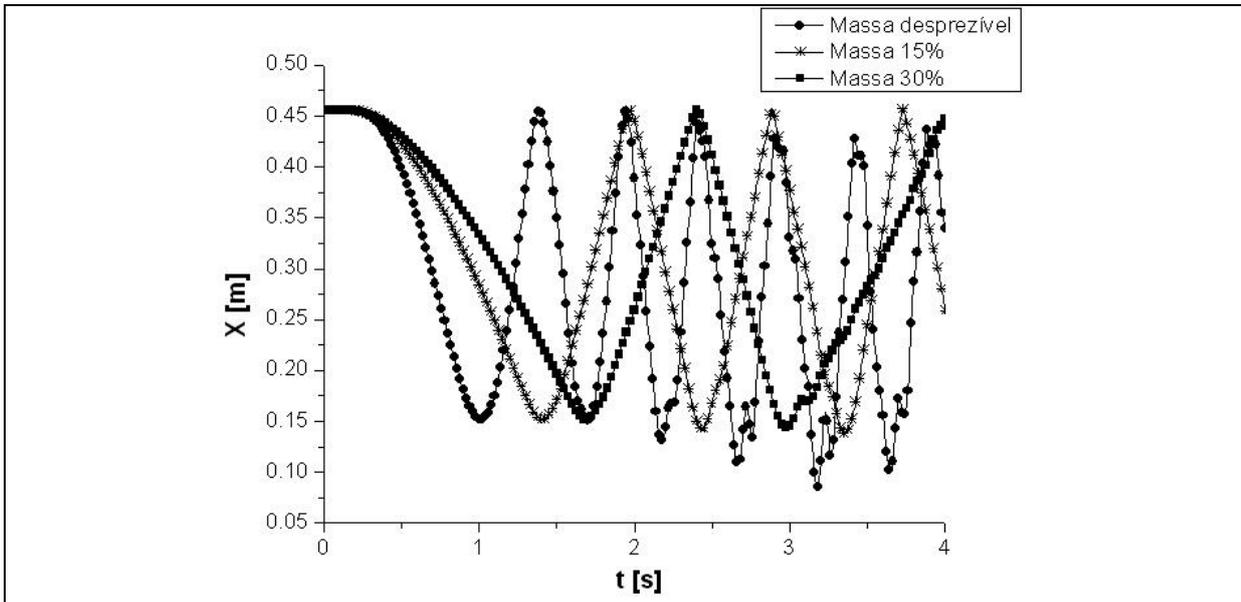


Figura 54 – Posição horizontal do bloco com massa não desprezível.

Os resultados mostram coerência na aplicação da massa concentrada, pois o período de revolução do mecanismo aumenta com a massa do bloco. A mesma situação de massa não desprezível é mostrada no gráfico da Figura 55 para a segunda situação de carga.

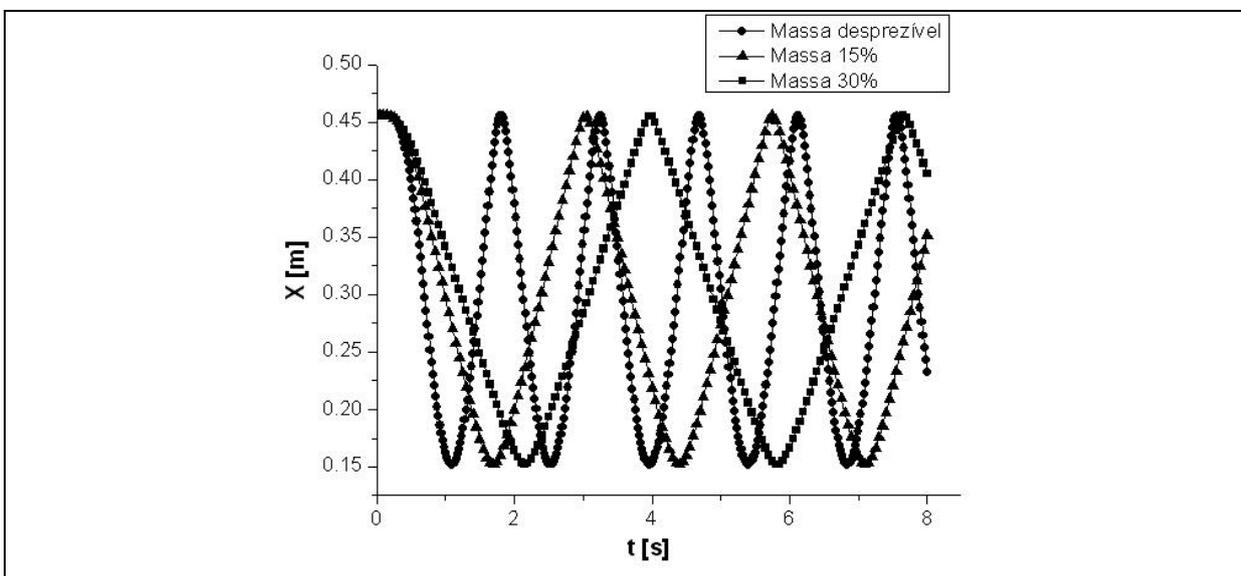


Figura 55 – Posição horizontal do bloco com massa não desprezível.

Salienta-se que para a obtenção dos resultados acima mostrados, foram utilizados coeficientes de Newmark  $\beta=0.50$  e  $\gamma=0.50$ .

Algumas posições deformadas para o primeiro e segundo ciclo são mostradas na Figura 56 para o primeiro caso de carga considerando-se o bloco com massa desprezível.

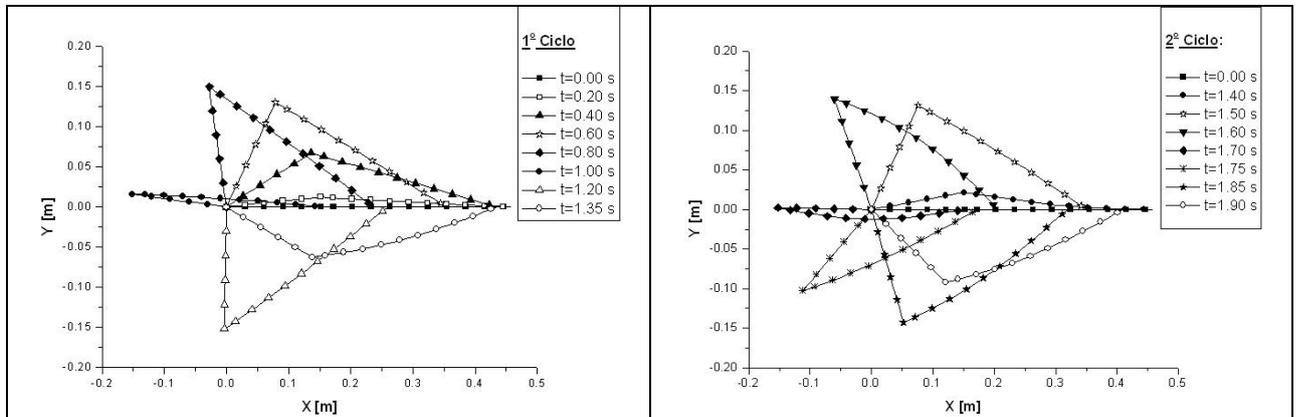


Figura 56 – Posições deformadas para o mecanismo ao longo do tempo: massa do bloco desprezível.

Percebe-se, através da Figura 56, maiores deflexões na haste no segundo ciclo. O mesmo é mostrado na Figura 57 para massa do bloco não desprezível com 30% do valor da massa total do mecanismo.

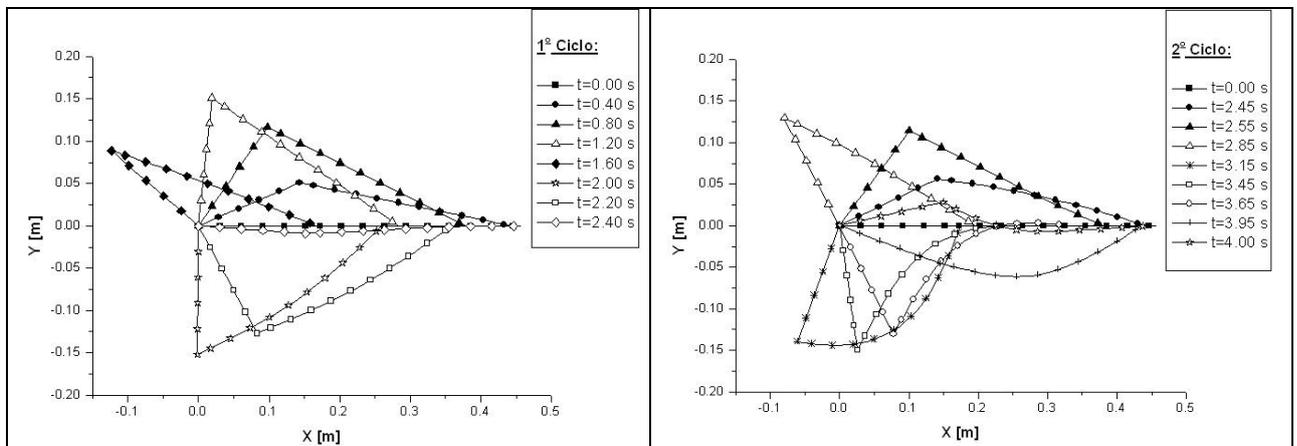


Figura 57 - Posições deformadas para o mecanismo ao longo do tempo: massa do bloco não desprezível.

Nessa situação, de acordo com a Figura 57, as deflexões na haste atingem valores bem mais expressivos devido à consideração das forças inerciais do bloco, sobretudo para o segundo ciclo como já esperado.

## **6 SÓLIDO TRIDIMENSIONAL – FORMULAÇÃO POSICIONAL**

---

O presente capítulo trata da formulação posicional para sólidos no espaço tridimensional. Aqui se descrevem as equações básicas da formulação estática e dinâmica, finalizando com exemplos numéricos de forma a validar as soluções propostas.

### **6.1 Mapeamento da geometria**

Para o elemento finito tridimensional, o mapeamento da geometria é feito de forma análoga ao do pórtico bidimensional, porém ao espaço adimensional se adiciona mais uma coordenada. Na Figura 58 é mostrado o mapeamento esquemático.

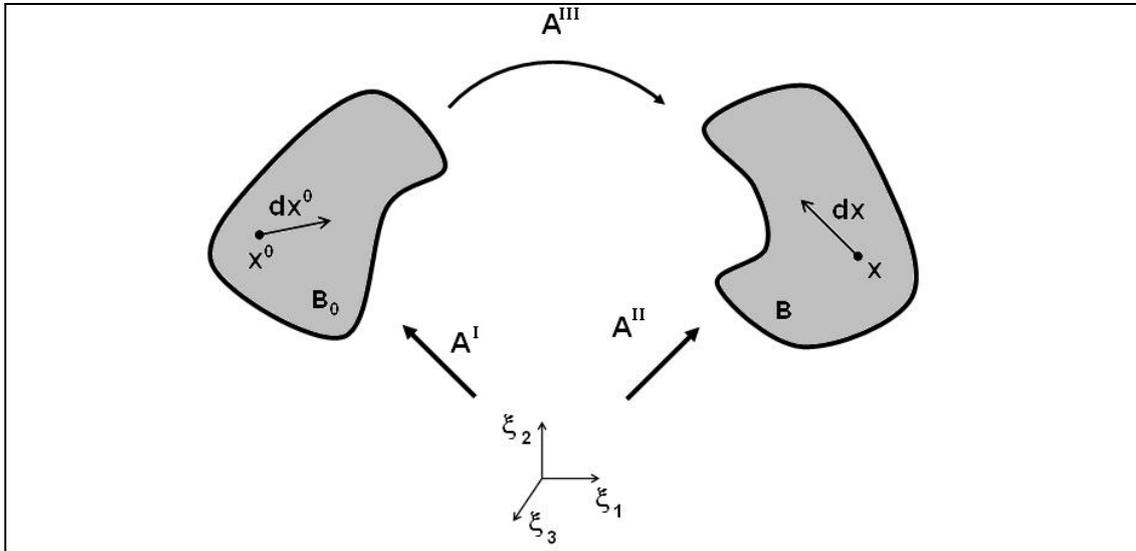


Figura 58 – Mapeamento de geometria para o sólido tridimensional.

O gradiente de mudança de configuração de  $B_0$  para  $B$  é dado por:

$$A_{ik}^{III} = \frac{dx_i}{dx_k^0} \quad (6.1)$$

E os gradientes auxiliares,  $A^I$  e  $A^{II}$ , são respectivamente:

$$A_{ik}^I = \frac{dx_i^0}{d\xi_k} \quad (6.2)$$

$$A_{ik}^{II} = \frac{dx_i}{d\xi_k} \quad (6.3)$$

Esses dois últimos gradientes são em verdade fictícios, pois são referenciados com o espaço adimensional. Porém, através da obtenção deles, chega-se ao gradiente  $A^{III}$ , fazendo-se:

$$A_{ik}^{III} = \frac{dx_i}{d\xi_j} \frac{d\xi_j}{dx_k^0} = \frac{dx_i}{dx_k^0} = A_{ik}^{II} (A_{ik}^I)^{-1} \quad (6.4)$$

## 6.2 Medida de deformação

Dessa forma, os alongamentos são dados, para as direções globais  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$ :

$$\lambda_k = \left[ \mathbf{e}_{(k)}^T (\mathbf{A}^{\text{III}})^T \mathbf{A}^{\text{III}} \mathbf{e}_{(k)} \right]^{1/2} \quad (6.5)$$

onde  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$  e  $\mathbf{e}_3$  são os vetores unitários nas direções de  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$  respectivamente. Sendo assim, escreve-se a deformação de engenharia na forma:

$$\varepsilon_k = \lambda_k - 1 = \left[ \mathbf{e}_{(k)}^T (\mathbf{A}^{\text{III}})^T \mathbf{A}^{\text{III}} \mathbf{e}_{(k)} \right]^{1/2} - 1 \quad (6.6)$$

Com relação às distorções, da Eq.(3.73), escreve-se:

$$\gamma_{ij} = \theta_{ij} - \frac{\pi}{2} = a \cos \left[ \frac{\mathbf{e}_i^T (\mathbf{A}^{\text{III}})^T \mathbf{A}^{\text{III}} \mathbf{e}_j}{\lambda_i \lambda_j} \right] \quad (6.7)$$

Portanto, com as Eqs.(6.6) e (6.7), determinam-se as componentes das medidas de deformação de engenharia. Também no presente trabalho, utiliza-se para o problema de sólidos a medida de deformação de Green, sendo o tensor dado por:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} \left[ (\mathbf{A}^{\text{III}})^T \mathbf{A}^{\text{III}} - \mathbf{I} \right] \quad (6.8)$$

Na forma indicial,

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left[ A_{ik}^{\text{III}} A_{kj}^{\text{III}} - \delta_{ij} \right] \quad (6.9)$$

### 6.3 Energia potencial total

Procedendo-se com a multiplicação tensorial da Eq. (3.195), a energia específica para o caso elástico tridimensional também se escreva na forma:

$$u_e(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{(K+2G)}{2} (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2) + K(\varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_1 \varepsilon_3 + \varepsilon_2 \varepsilon_3) + \frac{G}{2} [(2\varepsilon_{12})^2 + (2\varepsilon_{13})^2 + (2\varepsilon_{23})^2] \quad (6.10)$$

sendo  $\boldsymbol{\varepsilon}$  a medida de deformação adotada, que no presente trabalho pode ser a de engenharia ou de Green.

A energia potencial elástica para todo o corpo é a integral da energia específica ao longo do volume do mesmo, ou seja:

$$U_e = \int_{V_0} u_e(\boldsymbol{\varepsilon}) dV_0 = \int_{V_0} \left\{ \frac{(K+2G)}{2} (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2) + K(\varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_1 \varepsilon_3 + \varepsilon_2 \varepsilon_3) + \frac{G}{2} [(2\varepsilon_{12})^2 + (2\varepsilon_{13})^2 + (2\varepsilon_{23})^2] \right\} dV_0 \quad (6.11)$$

Substituindo a Eq.(6.11) na Eq.(4.7), que é a do funcional de energia potencial total do sistema, fica-se com:

$$\Pi = \int_{V_0} \left\{ \frac{(K+2G)}{2} (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2) + K(\varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_1 \varepsilon_3 + \varepsilon_2 \varepsilon_3) + \frac{G}{2} [(2\varepsilon_{12})^2 + (2\varepsilon_{13})^2 + (2\varepsilon_{23})^2] \right\} dV_0 + \int_{V_0} \rho_0 \frac{\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}}{2} dV_0 - F_i X_i + K_a \quad (6.12)$$

A Eq.(6.12) representa o funcional de energia potencial total para o sólido. A estratégia de minimização desse funcional, bem como os equacionamentos para o problema estático e dinâmico serão descritos nos itens a seguir.

## 6.4 Equacionamento estático

Para o equacionamento estático, as forças inerciais são negligenciadas, portanto, a Eq.(6.12), toma a seguinte forma simplificada:

$$\begin{aligned} \Pi = \int_{V_0} \left\{ \frac{(K+2G)}{2} (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2) + K (\varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_1 \varepsilon_3 + \varepsilon_2 \varepsilon_3) + \right. \\ \left. + \frac{G}{2} [(2\varepsilon_{12})^2 + (2\varepsilon_{13})^2 + (2\varepsilon_{23})^2] \right\} dV_0 - F_j X_j \end{aligned} \quad (6.13)$$

A discretização do problema é feita dividindo-se o sólido em elementos finitos, no caso deste trabalho tetraédricos de 20 nós, conforme a Figura 59. Sendo assim, as posições ao longo do elemento podem ser aproximadas na forma:

$$x_i (\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \Phi_j X_i^j \quad (6.14)$$

sendo  $X_i$  as posições nodais e  $\Phi_j$  as 20 funções de forma, que são mostradas a seguir:

$$\Phi_1 = \frac{1}{2} (3\xi_4 - 1)(3\xi_4 - 2) \xi_4 \quad (6.15)$$

$$\Phi_2 = \frac{1}{2} (3\xi_1 - 1)(3\xi_1 - 2) \xi_1 \quad (6.16)$$

$$\Phi_3 = \frac{1}{2} (3\xi_2 - 1)(3\xi_2 - 2) \xi_2 \quad (6.17)$$

$$\Phi_4 = \frac{1}{2} (3\xi_3 - 1)(3\xi_3 - 2) \xi_3 \quad (6.18)$$

$$\Phi_5 = \frac{9}{2} (3\xi_4 - 1) \xi_1 \xi_4 \quad (6.19)$$

$$\Phi_6 = \frac{9}{2} (3\xi_4 - 1) \xi_2 \xi_4 \quad (6.20)$$

$$\Phi_7 = \frac{9}{2}(3\xi_4 - 1)\xi_3\xi_4 \quad (6.21)$$

$$\Phi_8 = \frac{9}{2}(3\xi_1 - 1)\xi_1\xi_4 \quad (6.22)$$

$$\Phi_9 = \frac{9}{2}(3\xi_2 - 1)\xi_2\xi_4 \quad (6.23)$$

$$\Phi_{10} = \frac{9}{2}(3\xi_3 - 1)\xi_3\xi_4 \quad (6.24)$$

$$\Phi_{11} = \frac{9}{2}(3\xi_1 - 1)\xi_1\xi_2 \quad (6.25)$$

$$\Phi_{12} = \frac{9}{2}(3\xi_2 - 1)\xi_1\xi_2 \quad (6.26)$$

$$\Phi_{13} = \frac{9}{2}(3\xi_2 - 1)\xi_2\xi_3 \quad (6.27)$$

$$\Phi_{14} = \frac{9}{2}(3\xi_3 - 1)\xi_2\xi_3 \quad (6.28)$$

$$\Phi_{15} = \frac{9}{2}(3\xi_3 - 1)\xi_1\xi_3 \quad (6.29)$$

$$\Phi_{16} = \frac{9}{2}(3\xi_1 - 1)\xi_1\xi_3 \quad (6.30)$$

$$\Phi_{17} = 27\xi_1\xi_2\xi_4 \quad (6.31)$$

$$\Phi_{18} = 27\xi_1\xi_3\xi_4 \quad (6.32)$$

$$\Phi_{19} = 27\xi_1\xi_2\xi_3 \quad (6.33)$$

$$\Phi_{20} = 27\xi_2\xi_3\xi_4 \quad (6.34)$$

onde  $\xi_4$  é linearmente dependente das três primeiras coordenadas adimensionais, ou seja:

$$\xi_4 = 1 - (\xi_1 + \xi_2 + \xi_3) \tag{6.35}$$

Cabe salientar que essas funções de forma, bem como a ordem de numeração dos nós do elemento tetraédrico segue a numeração encontrada em SORIANO(2003).

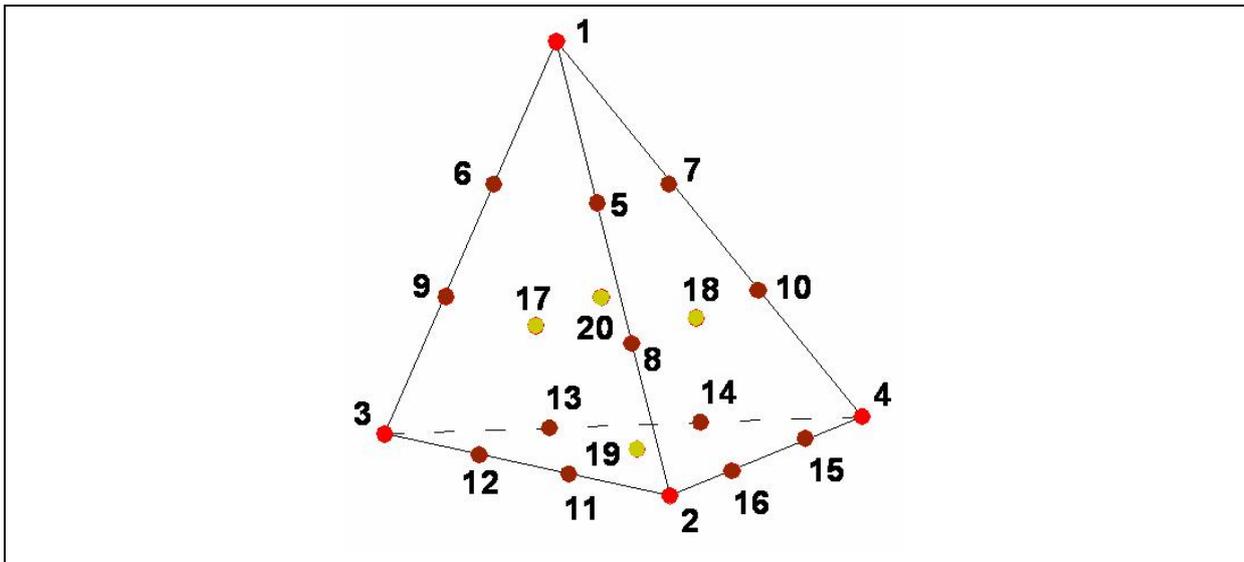


Figura 59 – Elemento finito tetraédrico de 20 nós

Sabendo que as variáveis ao longo do elemento finito são aproximadas segundo a Eq.(6.14), faz-se a substituição dessa equação nas equações relativas aos gradientes auxiliares de mudança de configuração, isto é, Eq.(6.2) e Eq.(6.3), então:

$$A_{ik}^I = \frac{\partial(\Phi_j^i X_0^j)}{\partial \xi_k} = \frac{\partial(\Phi_j)}{\partial \xi_k} X_0^j \tag{6.36}$$

$$A_{ik}^{II} = \frac{\partial(\Phi_j X_i^j)}{\partial \xi_k} = \frac{\partial(\Phi_j)}{\partial \xi_k} X_i^j \tag{6.37}$$

Com os gradientes auxiliares determinados, usa-se a Eq.(6.4) para determinar o gradiente mudança de configuração  $A^{III}$  e conseqüentemente as componentes de deformação.

Aplicando-se o teorema da mínima energia potencial em relação a uma posição nodal genérica  $X_i$  na Eq.(6.13), obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial X_i} = g(\mathbf{X}) = \int_{V_0} \frac{\partial}{\partial X_i} \left\{ \frac{(K+2G)}{2} (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2) + K(\varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_3 + \varepsilon_2\varepsilon_3) + \right. \\ \left. + \frac{G}{2} [(2\varepsilon_{12})^2 + (2\varepsilon_{13})^2 + (2\varepsilon_{23})^2] \right\} dV_0 - F_i = 0 \end{aligned} \quad (6.38)$$

Lembrando que as integrais da Eq.(6.38) são determinadas numericamente utilizando pontos de Hammer no código computacional.

Resta agora solucionar a Eq.(6.38) através do método iterativo de Newton-Raphson, já descrito no item 4.2 do capítulo 4.

## 6.5 Equacionamento dinâmico

Para o problema que envolve forças inerciais, o funcional de energia potencial total é o dado pela Eq. (6.12), reescrita a seguir:

$$\begin{aligned} \Pi = \int_{V_0} \left\{ \frac{(K+2G)}{2} (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2) + K(\varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_3 + \varepsilon_2\varepsilon_3) + \right. \\ \left. + \frac{G}{2} [(2\varepsilon_{12})^2 + (2\varepsilon_{13})^2 + (2\varepsilon_{23})^2] \right\} dV_0 + \int_{V_0} \rho_0 \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}{2} dV_0 - F_i X_i + K_a \end{aligned} \quad (6.12)$$

Para a parcela de energia elástica, o equacionamento é idêntico ao dado ao problema estático. Resta agora a determinação da equação do movimento que envolve, além da energia elástica, parcelas inerciais representadas pela matriz de massa e de amortecimento.

Levando-se em conta, por exemplo, o elemento finito dado pela Figura 59, os parâmetros nodais de velocidade e aceleração podem ser aproximados ao longo do elemento de forma análoga às posições nodais, ou seja:

$$\mathbf{x}_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \Phi_j \mathbf{x}_i^j \quad (6.39)$$

$$\mathbf{a}_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \Phi_j \mathbf{a}_i^j \quad (6.40)$$

Substituindo-se as expressões de aproximação de variáveis, isto é, Eq.(6.14), Eq.(6.39) e Eq.(6.40), obtém-se o funcional de energia potencial total em função dos parâmetros nodais, tal que  $\Pi \rightarrow f(\mathbf{X})$ . Portanto, como já mostrado no capítulo 4, aplicando-se o teorema da mínima energia potencial na Eq.(6.12), obtém-se a equação do movimento dada pela Eq.(4.13), restando agora proceder com método de solução descrito no item 4.3 do capítulo 4.

No próximo item, exemplos numéricos envolvendo sólidos são mostrados de forma a validar a formulação proposta.

## 6.6 Exemplos empregando sólido tridimensional

Aqui são mostrados alguns exemplos com a formulação tridimensional posicional, empregando-se elementos tetraédricos sólidos com aproximação cúbica de variáveis. As malhas para os exemplos a seguir são feitas com a utilização do pré-processador do programa comercial de elementos finitos ANSYS® e depois adaptadas através da adição de nós nos elementos, para que se represente a aproximação cúbica de variáveis aqui proposta. Para a visualização dos resultados, no tocante ao mapa de tensões e posições deformadas, usa-se o software desenvolvido em PACCOLA & CODA (2005).

### 6.6.1 Exemplos estáticos

#### 6.6.1.1 Flexão simples de viga engastada

O mesmo exemplo dado no item 0 para pórticos planos e representado esquematicamente pela Figura 18 é aqui analisado com a formulação de sólidos. A malha utilizada, mostrada na Figura 60, é composta por 49 elementos finitos, totalizando 319 nós ou 957 graus de liberdade. Os resultados numéricos são comparados com os analíticos dados por MATTIASSON (1981) e FUJII (1983).

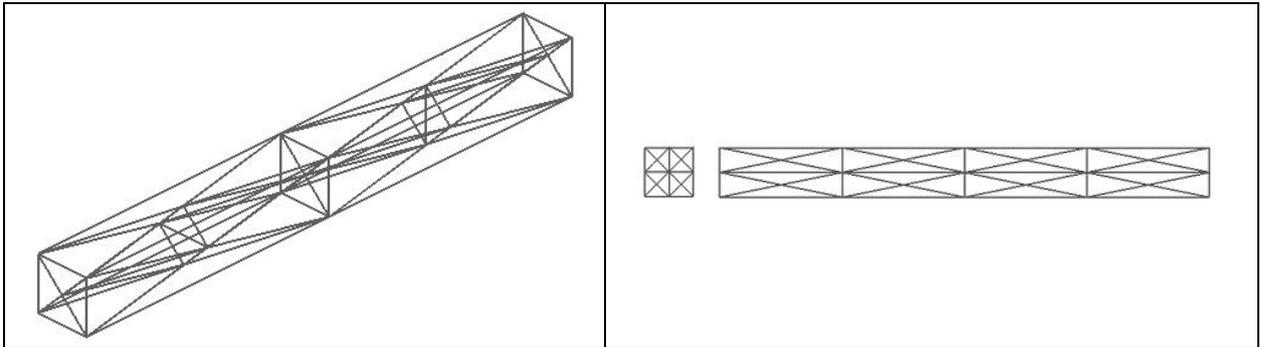


Figura 60 – Malha de elementos tetraédricos adotada para viga em flexão simples.

Os gráficos dos resultados para o deslocamento da extremidade livre  $U_x$  e  $U_y$ , de acordo com convenção adotada na Figura 18, são mostrados na Figura 61 e Figura 62 respectivamente.

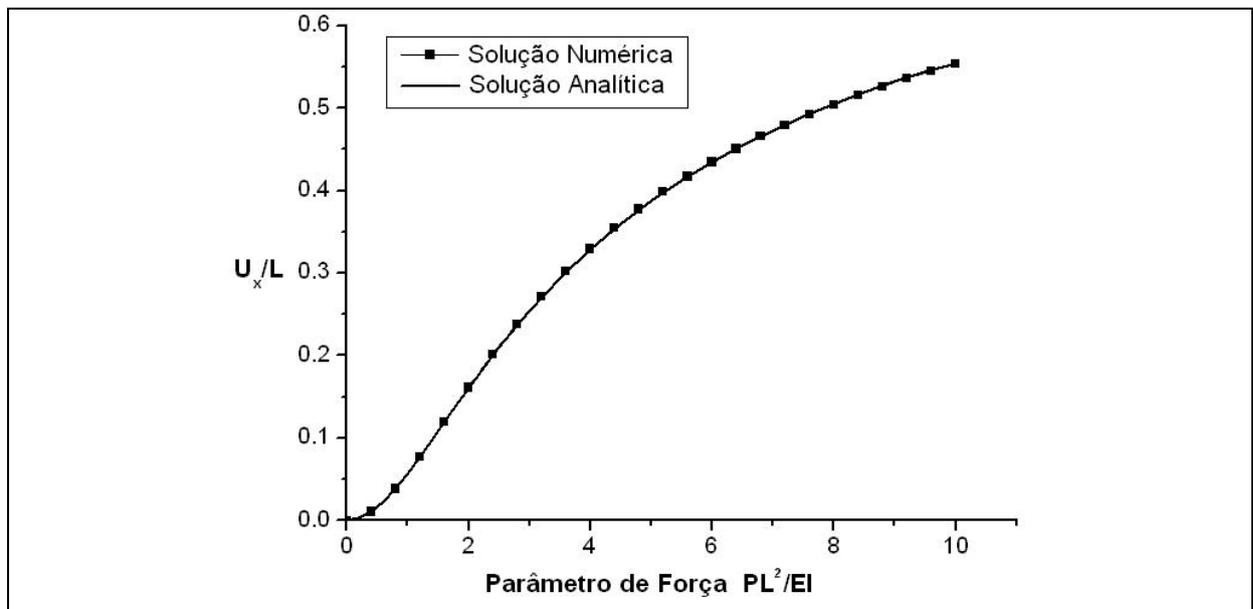


Figura 61 – Força parametrizada versus deslocamento longitudinal  $U_x/L$ .

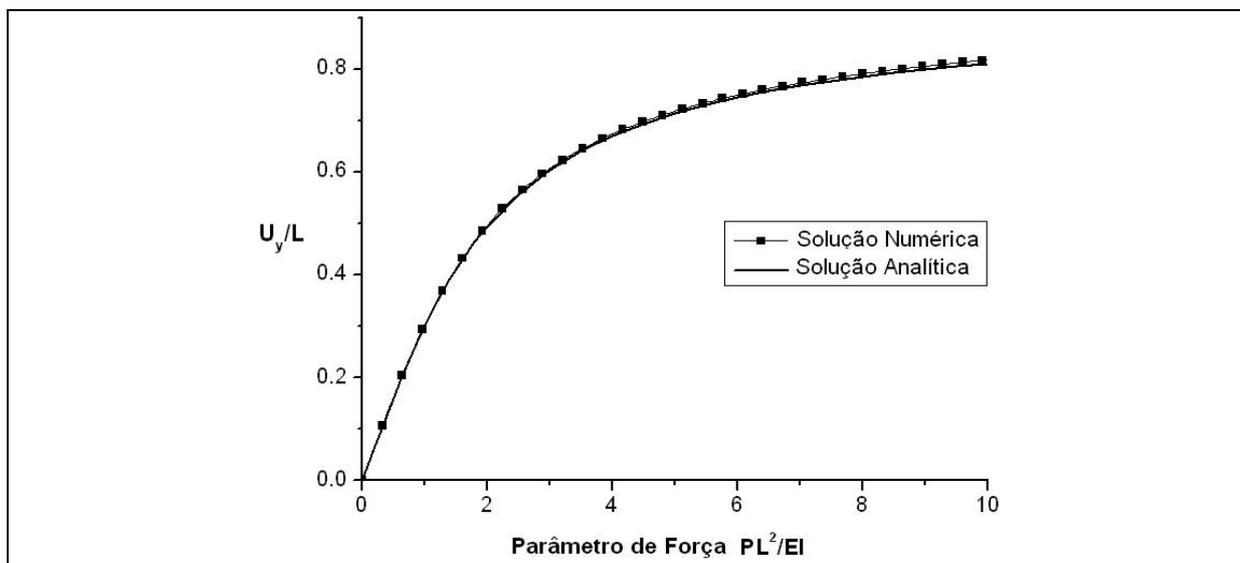


Figura 62 - Força vs deslocamento transversal  $U_y/L$ .

Os resultados obtidos mostram total concordância com a resposta analítica. Para efeito de visualização da ordem de grandeza dos deslocamentos, na Figura 63 se mostra, sem escala, a deformada final da viga em comparação com sua configuração inicial.

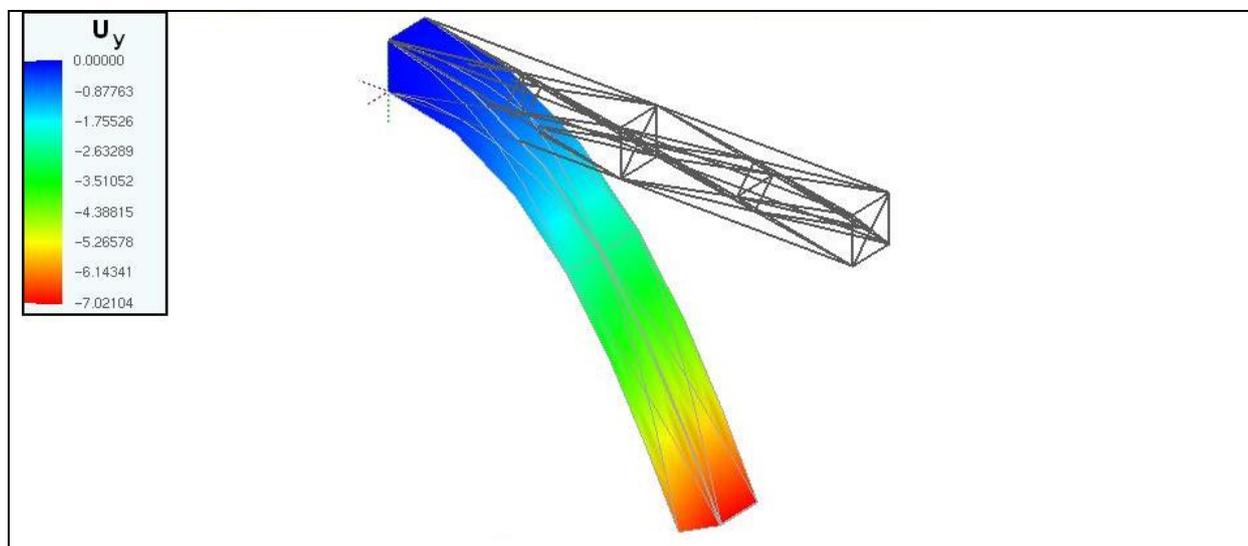


Figura 63 – Viga deformada e configuração inicial (sem escala).

### 6.6.1.2 Flexão de simples de viga fina

Outro exemplo importante para mostrar o desempenho da formulação em relação a grandes flexões é o de uma viga fina dado em REESE *et al* (1999). A viga, engastada numa extremidade e livre na outra conforme Figura 64, é sujeita à força transversal aplicada no seu extremo livre. Suas dimensões são  $L = 10,0 \text{ mm}$ ,  $h = b = 0,1 \text{ mm}$ . A medida de deformação é a de Green e o material Neo-Hookeano (ver Eqs.(3.200), (3.201) e (3.202)) são considerados para este exemplo, sendo então  $E = 1,68 \times 10^4 \text{ N/mm}^2$  e  $\nu = 0,4$ . A força aplicada é de  $F = 0,001 \text{ N}$  uniformemente distribuída ao longo da face do extremo livre.

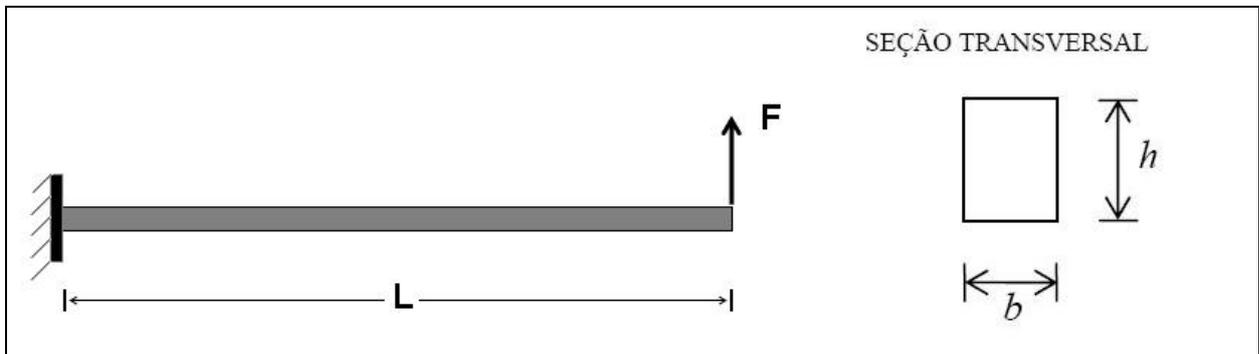


Figura 64 – Viga fina em flexão.

Duas discretizações são tomadas para a análise desse exemplo. A primeira é composta por 56 elementos finitos e 357 nós (1071 graus de liberdade). A segunda por 95 elementos finitos e 642 nós (1926 graus de liberdade). Os resultados para deslocamento transversal máximo “ $U_y$ ” são mostrados na Tabela 3. Em REESE *et al* (1999) se faz um estudo de convergência “p” para elementos quadráticos.

Tabela 3 – Resultados para deslocamento na extremidade livre.

Referência	$U_y$ (mm)
REESE <i>et al</i> (1999)	7,40
Presente trabalho (56 elem.)	7,07
Presente trabalho (95 elem.)	7,58

Como se observa na Tabela 3, a resposta obtida com a formulação posicional apresentou maiores deslocamentos do que a referência. Na Figura 65, mostra-se sem escala, os deslocamentos verticais da viga devido à força aplicada.

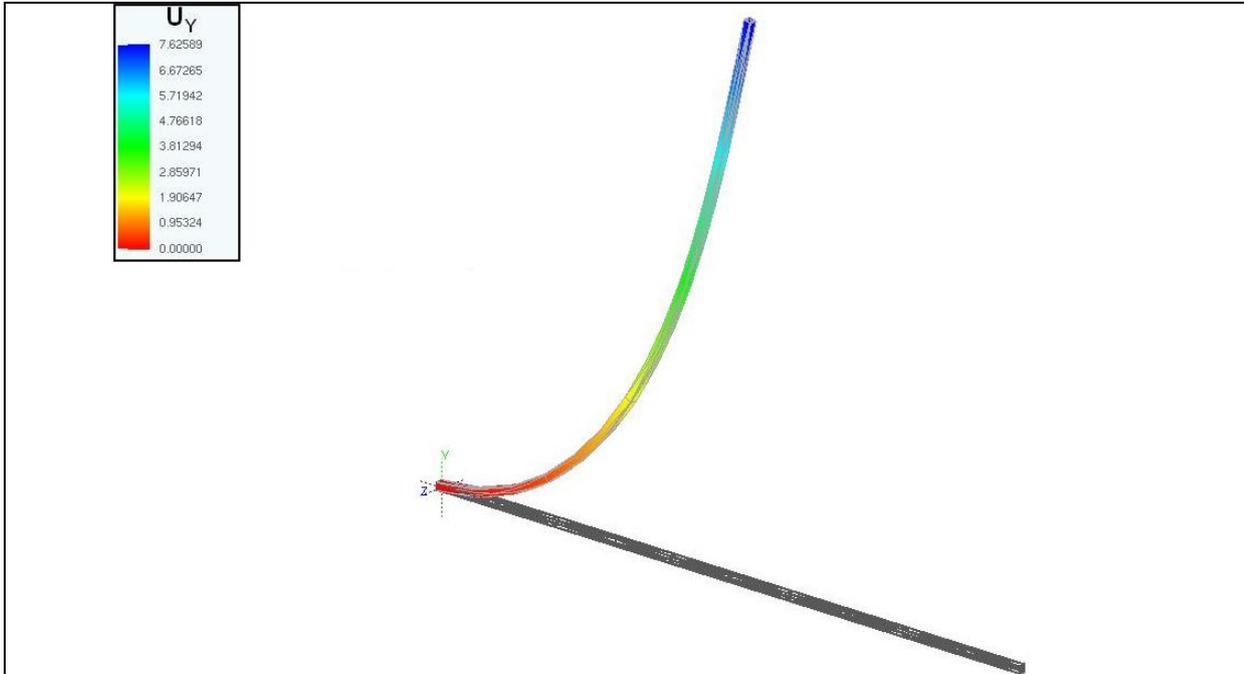


Figura 65 – Deslocamentos verticais em escala de força para viga fina.

### 6.6.1.3 Elástica de Euler

Neste exemplo, analisa-se novamente, com o programa não linear 3D a elástica de Euler do exemplo 0 representado na Figura 29. A discretização do problema em elementos tetraédricos cúbicos é mostrada na Figura 66.

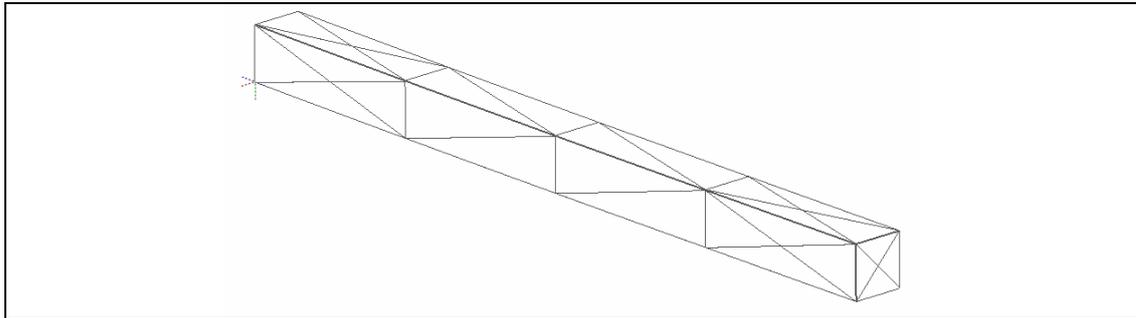


Figura 66 – Malha empregada para viga 3D.

Os resultados para o deslocamento lateral são mostrados no gráfico da Figura 67 e são comparados com resultados obtidos com o programa de pórtico com cinemática de Reissner. Para este exemplo, foram utilizados 60 elementos tetraédricos com 20 nós cada.

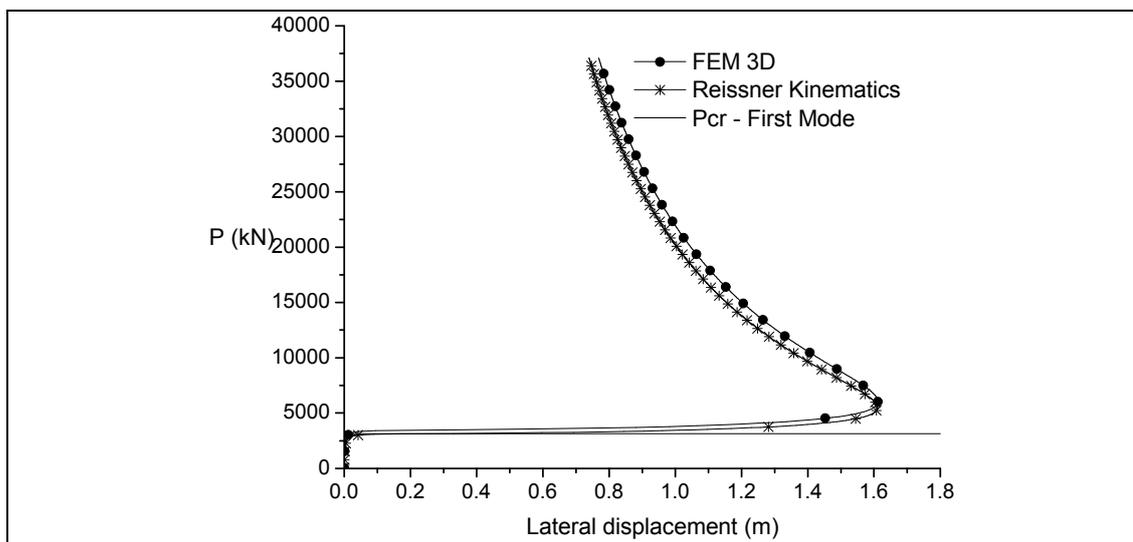


Figura 67 – Deslocamento lateral versus carga aplicada.

A resposta empregando formulação de sólidos se mostra como já esperado, um pouco mais flexível por conta da ausência de hipóteses cinemáticas simplificadoras.

Na Figura 68, mostra-se a situação deformada para alguns níveis de carga em duas perspectivas.

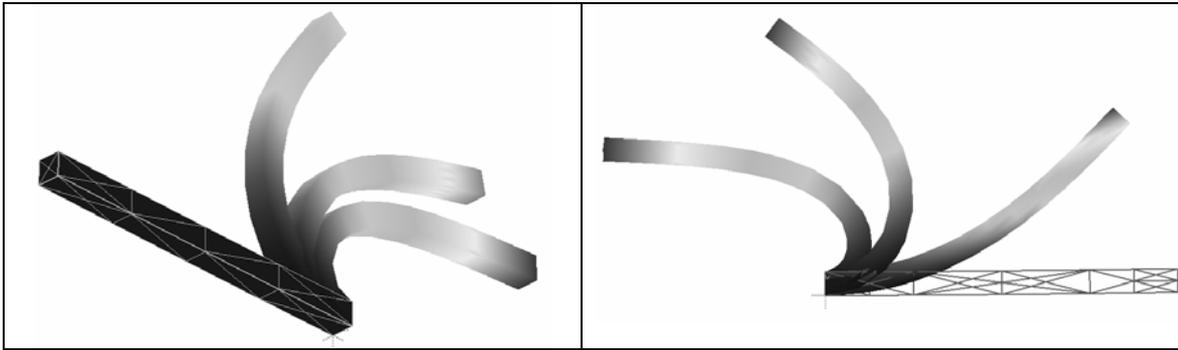


Figura 68 – Situação deformada para alguns passos de carga - perspectivas 3D.

#### 6.6.1.4 Flambagem lateral de viga engastada

Neste exemplo, faz-se a análise de flambagem lateral de uma viga engastada com carga concentrada na extremidade livre, conforme Figura 69. Os dados são  $L=100$  cm,  $h=10,0$  cm,  $b=1,00$  cm,  $E=100000$  N/cm<sup>2</sup>, com coeficiente de poisson nulo. Para este problema existe resposta analítica para carga crítica dada por TIMOSHENKO & GERE (1961), ou seja:

$$P_{cr} = 4.013 \frac{\sqrt{EIGJ}}{L^2} \quad (6.41)$$

onde  $I = bh^3 / 12$  e  $J = hb^3 / 3$ .

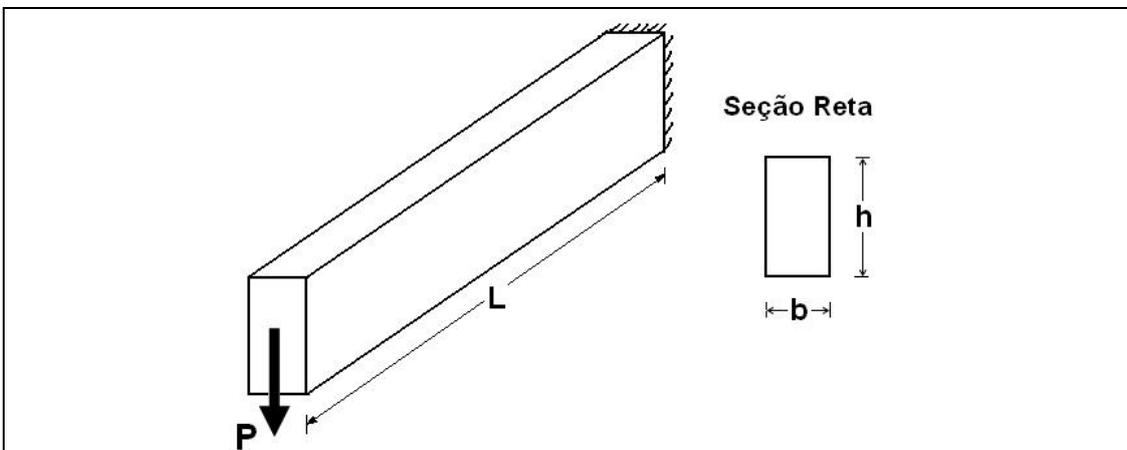


Figura 69 – Viga em balanço com carga na extremidade.

Substituindo-se os dados do problema na Eq.(6.41), chega-se a  $P_{cr} = 47,3$  N. Na Figura 70 é mostrado o gráfico força versus deslocamento na extremidade livre da viga nas direções x e y. Para este exemplo foram utilizados 74 elementos finitos tetraédricos cúbicos (543 nós) e um defeito inicial na extremidade livre de  $\varphi = 0.16rad$  em ângulo de torção é adotado.

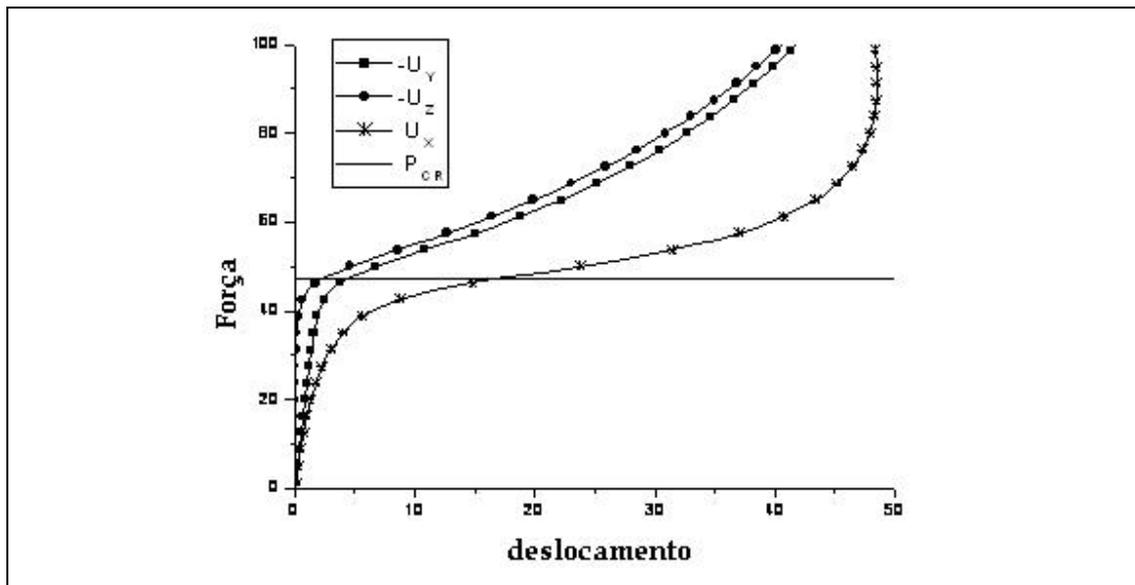


Figura 70 – Gráfico de Força versus deslocamento da extremidade livre da viga engastada.

É relativamente fácil observar no gráfico da Figura 70 que próximo ao valor da carga crítica, como já esperado, há instabilidade, acontecendo assim grandes deslocamentos laterais (anormais) na extremidade livre da viga.

Para efeito de melhor visualização da perda de estabilidade, na Figura 71, mostra-se a deformada pós-flambagem da viga analisada.

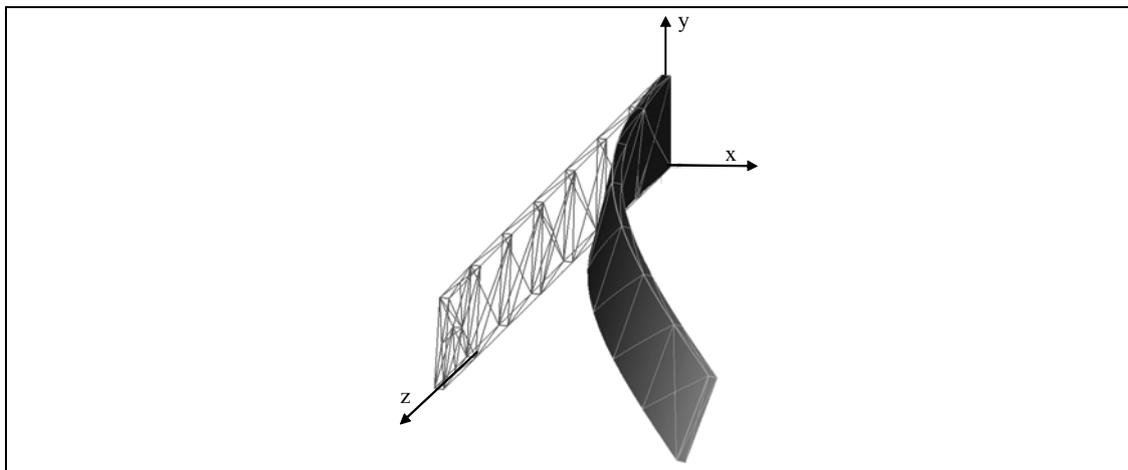


Figura 71 – Deformada pós-flambagem lateral da vida analisada (sem escala).

#### 6.6.1.5 Placa em formato de anel

Este exemplo é apresentado com a finalidade de testar a formulação aqui proposta em relação ao travamento que ocorre em estruturas de pequena espessura. A placa é engastada numa extremidade e livre na outra, sendo o carregamento aplicado na extremidade livre. Os resultados são comparados com PETCHSASITHON & GOSLING (2005).

Na Figura 72, mostram-se os dados do problema, bem como a malha utilizada em PETCHSASITHON & GOSLING (2005) para obtenção dos resultados. Em seguida, vista de cima, a malha composta por 420 elementos tetraédricos (2803 nós) é mostrada na Figura 73.

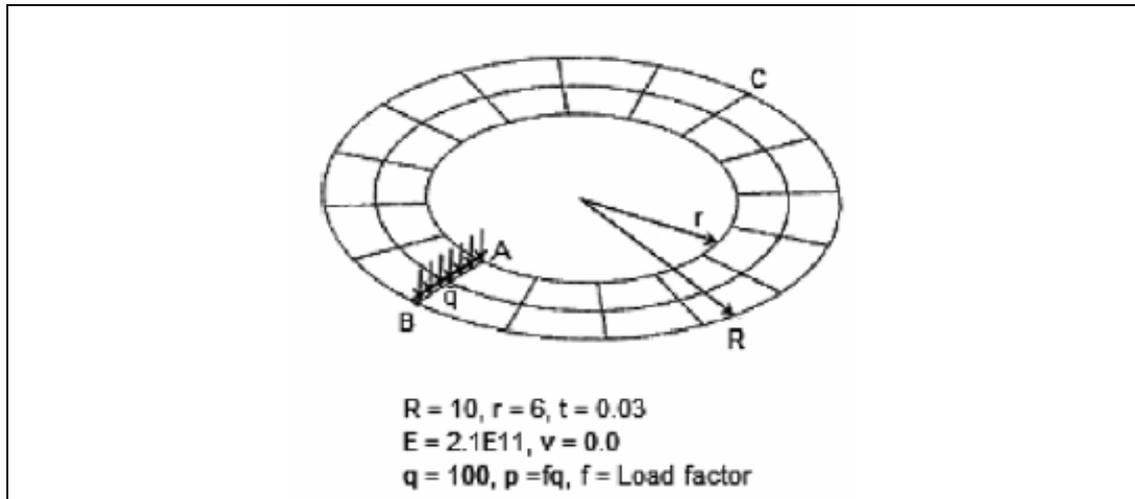


Figura 72 – Geometria, propriedades mecânicas e carregamento na placa.

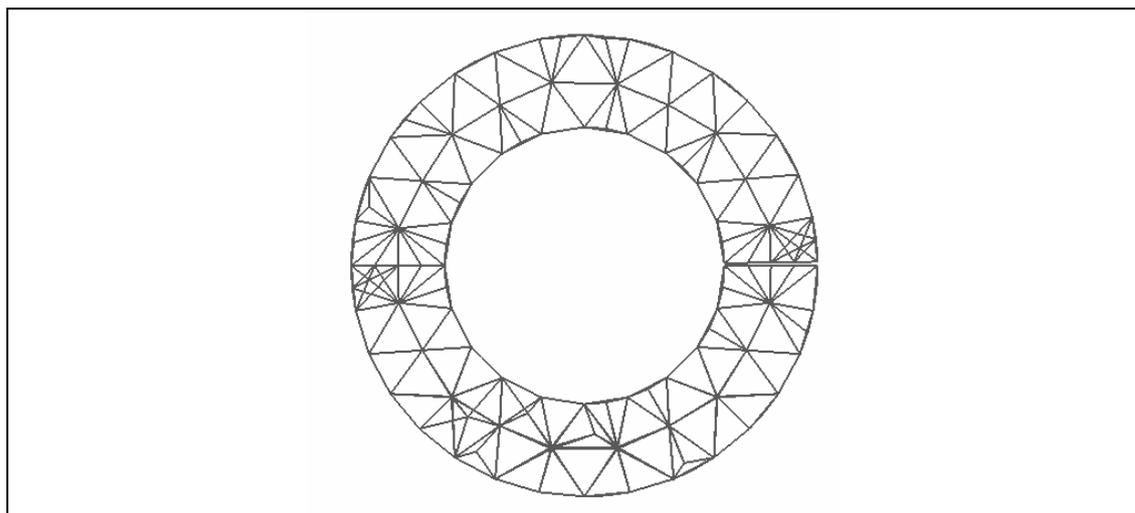


Figura 73 – Discretização da placa em elementos tetraédricos.

A configuração final (deformada) sem escala é mostrada na Figura 74.

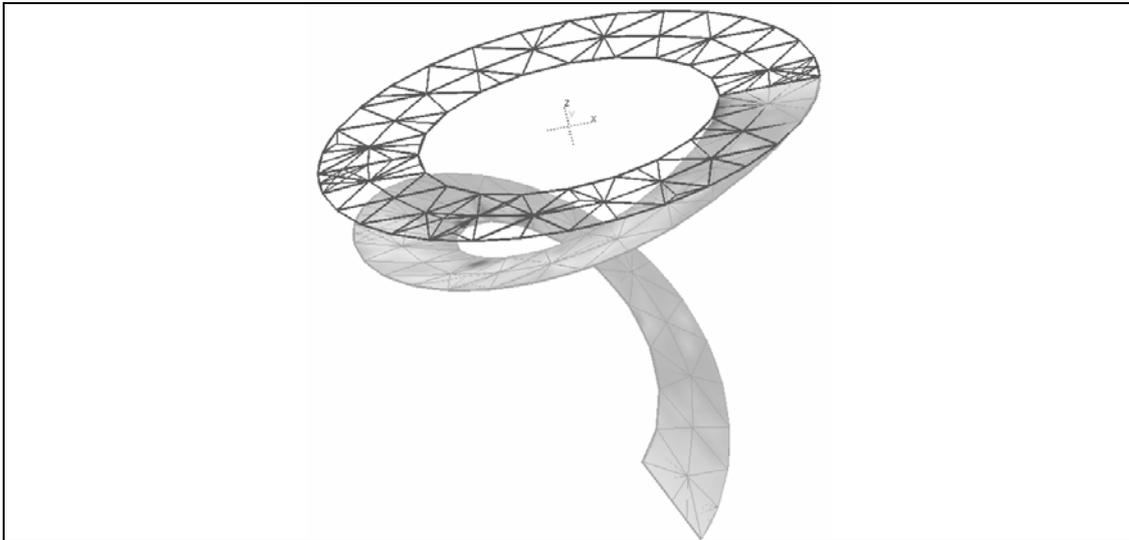


Figura 74 – Deformada final da placa em formato de anel (sem escala).

São destacados três pontos para medição de deslocamentos (A, B e C), destacados na Figura 72. Sendo assim, na Figura 75 são mostrados os gráficos referentes aos deslocamentos para esses pontos.

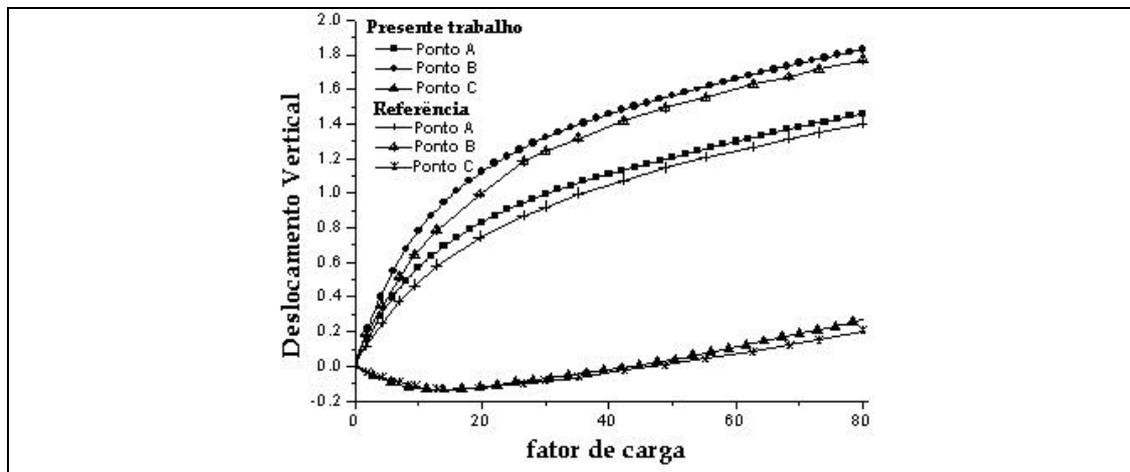


Figura 75 – Gráfico de deslocamentos versus força aplicada

A partir do gráfico na Figura 75, conclui-se que, para este exemplo não há travamento, sendo até mais flexível do que a referência de comparação (PETCHSASITHON & GOSLING, 2005).

### 6.6.1.6 Cilindro transversalmente comprimido com diafragmas rígidos

Um exemplo mais complexo envolvendo estruturas com de espessura fina é aqui apresentado. Um cilindro com diafragmas rígidos é submetido às forças concentradas de compressão aplicada transversalmente ao seu eixo, de acordo com a Figura 76.

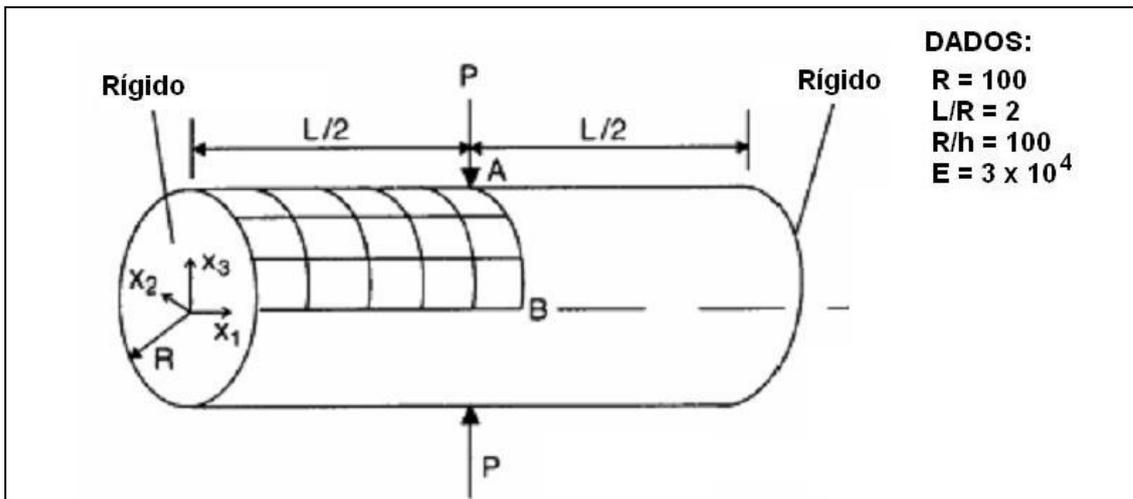


Figura 76 – Cilindro com diafragmas rígidos submetido à força concentrada de compressão.

Devido à simetria do problema, apenas um quarto do cilindro é discretizado, sendo considerada duas malhas distintas quando ao número de graus de liberdade, de acordo com a Figura 77.

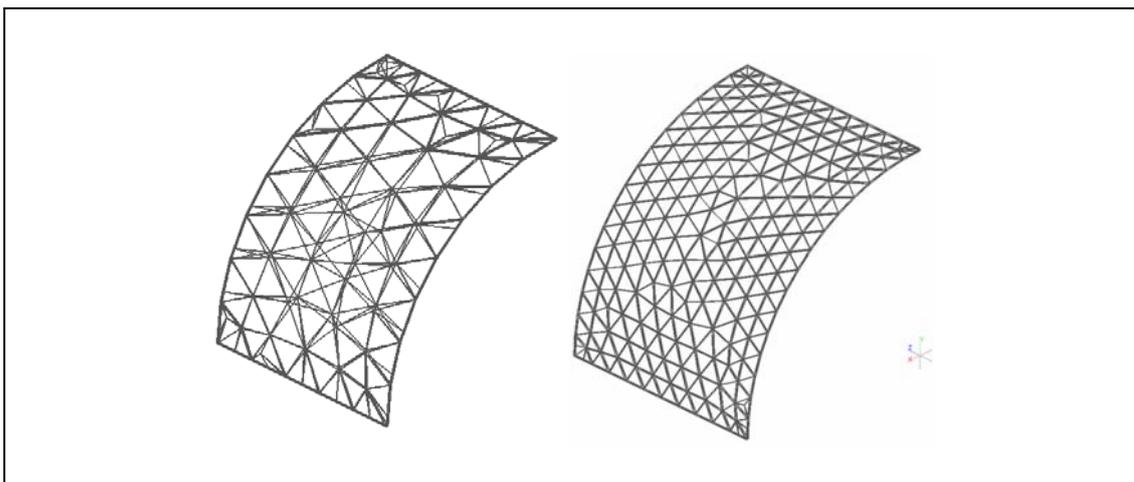


Figura 77 – Discretização de um quarto do cilindro com 7092 e 18893 graus de liberdade.

O gráfico de resultados de deslocamento para os nós A e B (ver Figura 76) é mostrado na Figura 78. Para efeito comparativo, a referência bibliográfica deste exemplo é dada em SANSOUR & KOLLMANN (2000).

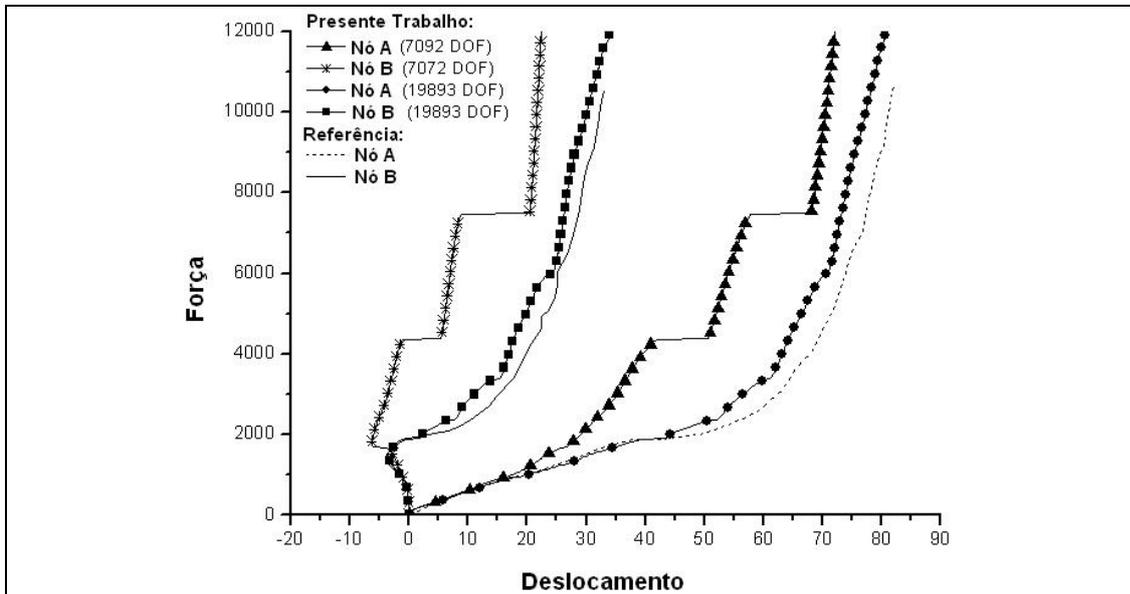


Figura 78 – Deslocamentos para os nós A e B.

Ademais, configurações deformadas intermediárias e final são mostradas em escala de cinza para deslocamento vertical na Figura 79.

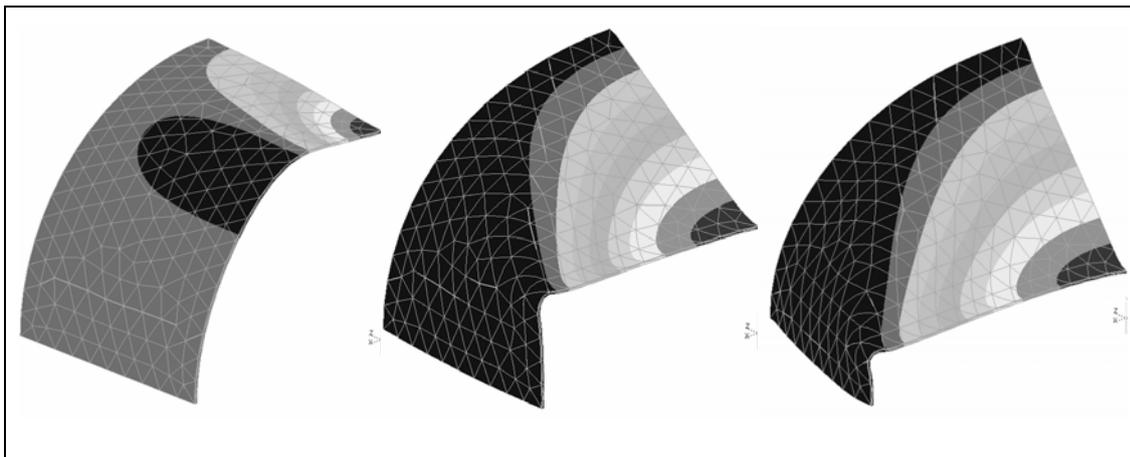


Figura 79 – Deformadas do quarto de cilindro para cargas intermediárias e final (sem escala).

Deste exemplo, conclui-se que para aumentar a flexibilidade na fase final do carregamento, melhor otimização da malha deve ser aplicada através mais refinamento nas regiões onde ocorrem maiores curvaturas nos níveis de carga mais elevados.

Os exemplos a seguir levam em conta forças inerciais (caso dinâmico).

## 6.6.2 Exemplos dinâmicos

### 6.6.2.1 Barra engastada submetida à carga súbita de tração

Neste exemplo, analisa-se uma barra submetida à carga de tração aplicada repentinamente, conforme Figura 80. O gráfico esquemático da força aplicada versus tempo é mostrado na Figura 81.

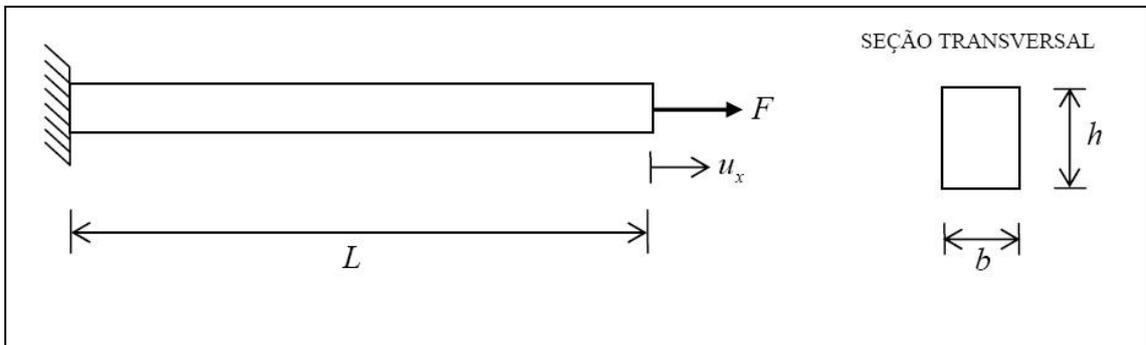


Figura 80 – Barra com carregamento axial na extremidade livre.

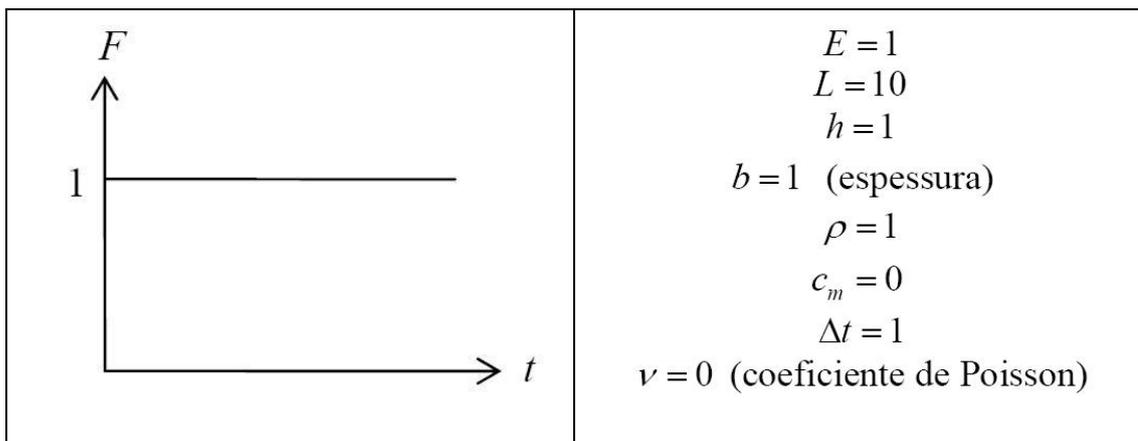


Figura 81 – Gráfico da aplicação da força e dados do problema.

Na Figura 82, mostra-se a resposta de deslocamento “ $u_x$ ” da extremidade livre versus tempo para duas discretizações distintas, sendo a primeira composta por 463 nós e a segunda 3329 nós. Ademais, a resposta analítica serve de base para comparação dos resultados.

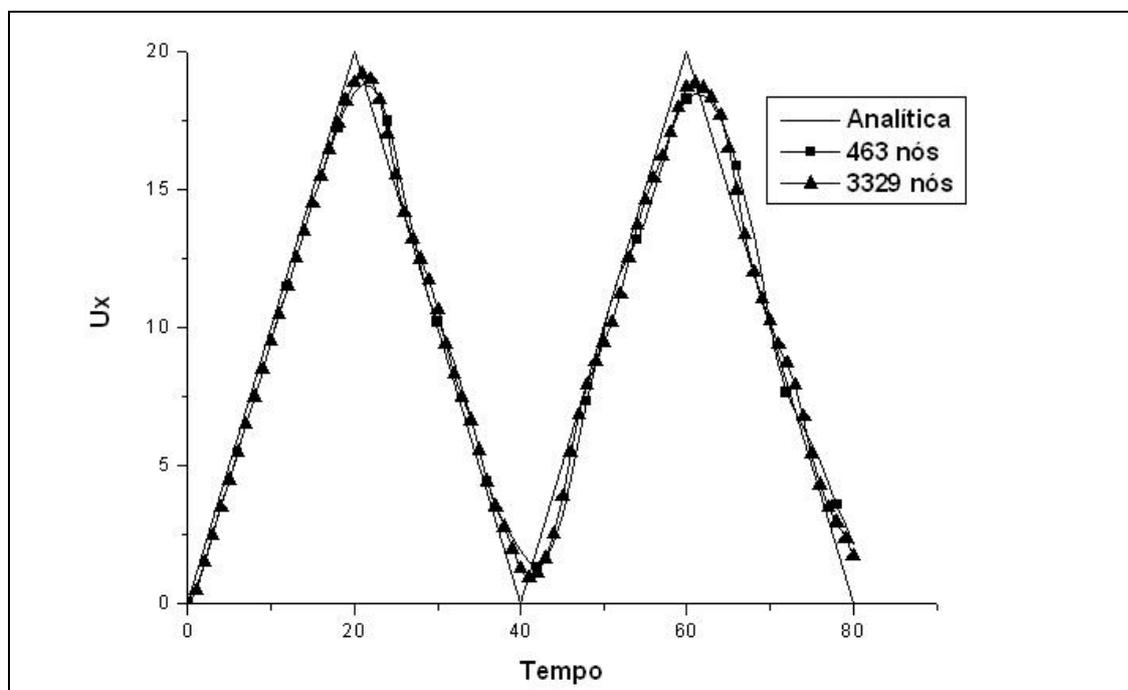


Figura 82 – Deslocamento vertical horizontal da extremidade livre versus tempo.

Para obtenção das respostas dadas pela Figura 82, foram utilizados parâmetros de Newmark  $\beta = 0,25$  e  $\gamma = 0,5$ . Observa-se que, apesar do já esperado amortecimento numérico, com o refinamento da malha, o pico de deslocamento se aproxima da resposta analítica, ou seja,  $u_x = 20$ .

### 6.6.2.2 Viga engastada com e sem amortecimento

Neste exemplo, uma viga é submetida à carga súbita de flexão, conforme Figura 83, de forma que apresente apenas pequenos deslocamentos. É analisada para as duas situações: sem amortecimento e com amortecimento. A análise aqui apresentada tem como finalidade demonstrar o funcionamento do modelo de amortecimento. Exemplo similar é encontrado em

GRECO (2004) e MARQUES (2006). O Modelo de aplicação da carga e os dados do problema são mostrados na Figura 84.

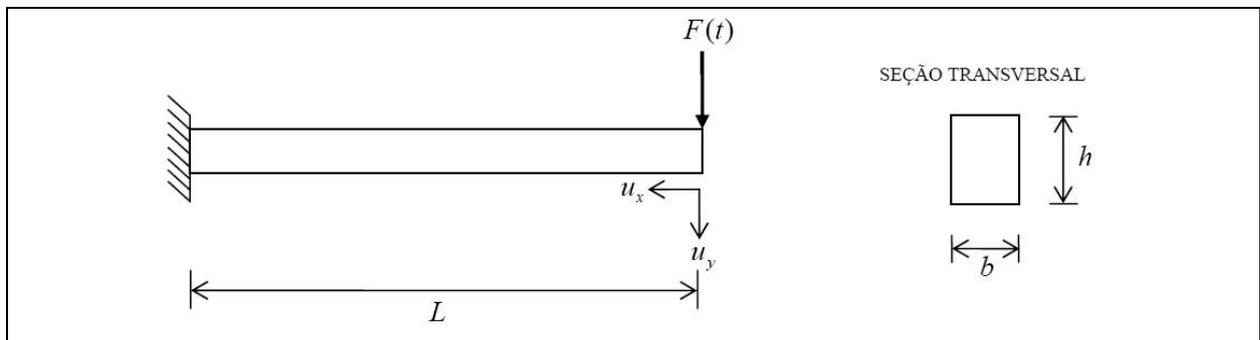


Figura 83 – Viga com carga súbita de flexão.

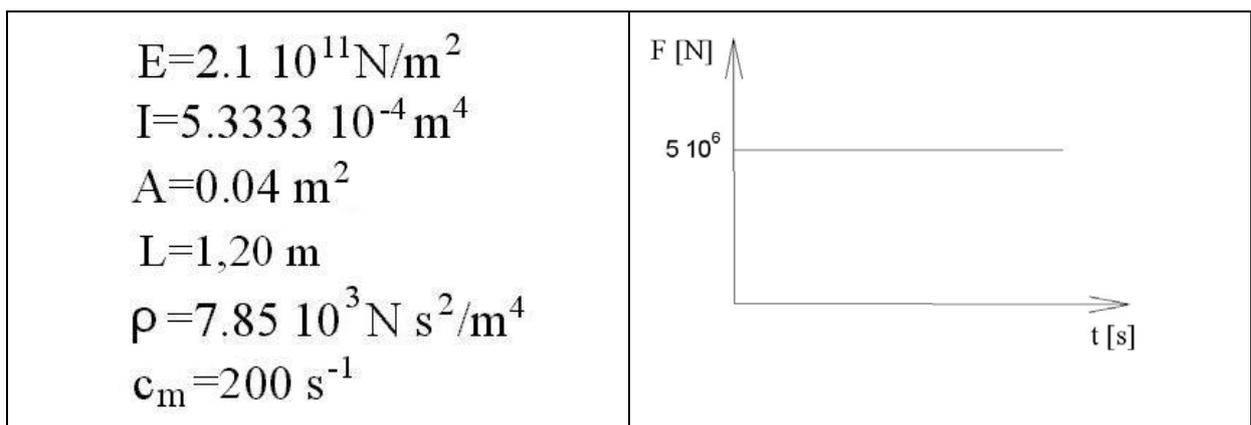


Figura 84 – Dados do problema e gráfico de carga aplicada.

A malha de elemento finitos é composta por 77 elementos finitos tetraédricos, totalizando 525 nós e intervalo de tempo  $\Delta t = 0,0001$ .

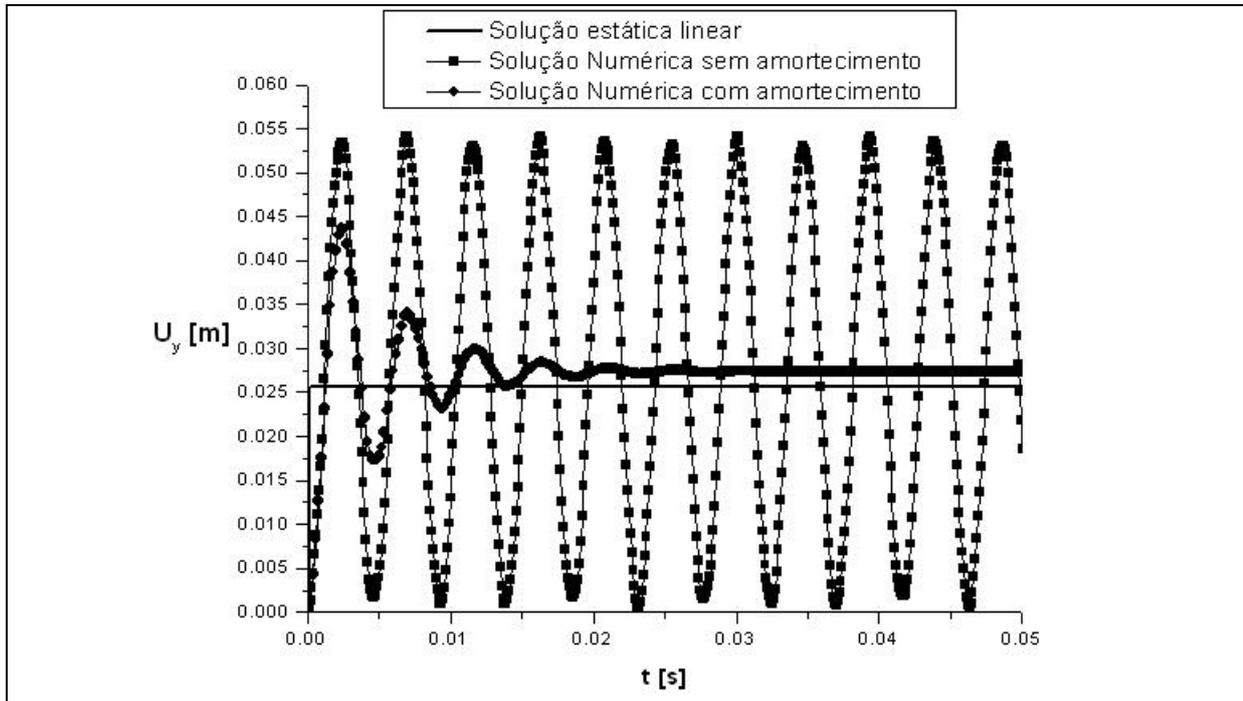


Figura 85 – gráfico do deslocamento da extremidade livre versus tempo.

Como já esperado, a resposta para o deslocamento final, após não haver mais vibrações, é levemente mais flexível do que a resposta analítica, pois esta é calculada levando-se em conta a teoria de vigas em regime linear sem considerar o efeito do cisalhamento.

### 6.6.2.3 Impacto unidirecional entre barra e anteparo rígido

Analisa-se agora o impacto de uma barra em um anteparo rígido dado em ARMERO & PETOCZ (1998) e também reproduzido por MARQUES (2006). Na Figura 86, é mostrado o esquema de impacto barra-anteparo, bem como a velocidade de aproximação da barra. Os dados do problema são adimensionais, ou seja,  $E = 1$ ,  $\nu = 0$ ,  $L = 1$ ,  $h = 1$ ,  $b = 1$  (espessura),  $\rho = 1$ ,  $c = 0$  e  $\delta = 0,05$ .

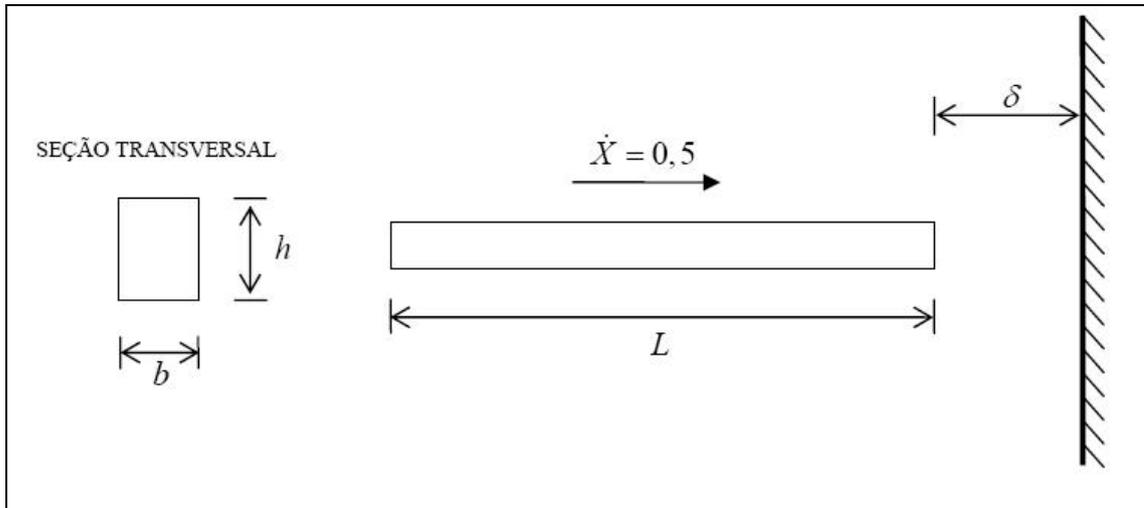


Figura 86 – Esquema de anteparo rígido e dados do problema

Para este problema empregou-se malha de elementos finitos com 199 nós e 30 elementos tetraédricos, intervalo de tempo  $\Delta t = 0,05$  e parâmetros de Newmark  $\gamma = 1,5$  e  $\beta = 1,0$ . O gráfico da velocidade da face onde ocorre o impacto é mostrado na Figura 87, sendo, portanto, feita a comparação com a solução analítica considerando o corpo rígido. Vale ressaltar que a resposta analítica da velocidade de reflexão é dada como sendo a média para o corpo como um todo e não para a superfície de contato apenas (MARQUES, 2006).

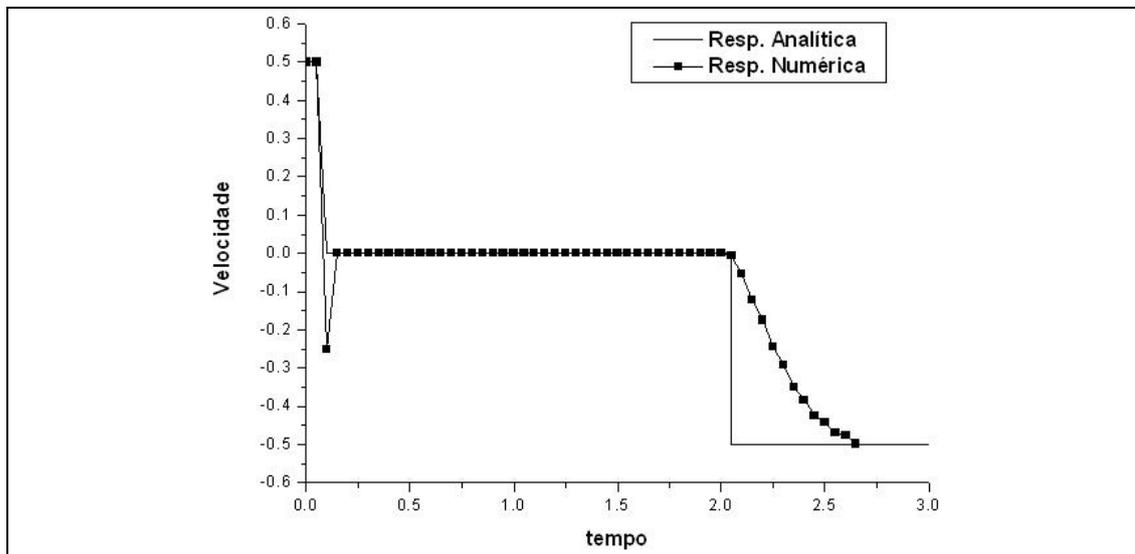


Figura 87 – Gráfico de velocidade para superfície de impacto.

É oportuno também mostrar a força de contato da superfície durante o impacto. Na Figura 88 é mostrada a resposta numérica versus tempo em comparação com a resposta clássica, neste caso analítica.

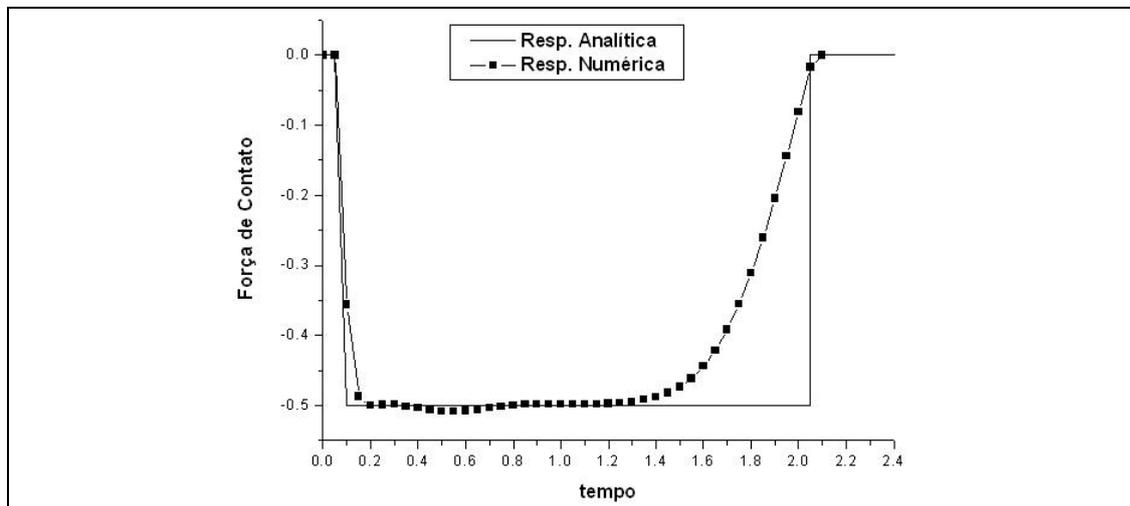


Figura 88 – Força de contato da superfície de impacto versus tempo.

#### 6.6.2.4 Impacto bidirecional de anel em anteparo rígido

Neste exemplo, também encontrado em WRIGGERS *et al* (1990), GRECO (2004) e MARQUES (2006), uma estrutura em formato de anel é submetida a um impacto bidirecional em anteparo rígido sem atrito, conforme Figura 89. Os dados do problema são mostrados também na Figura 89.

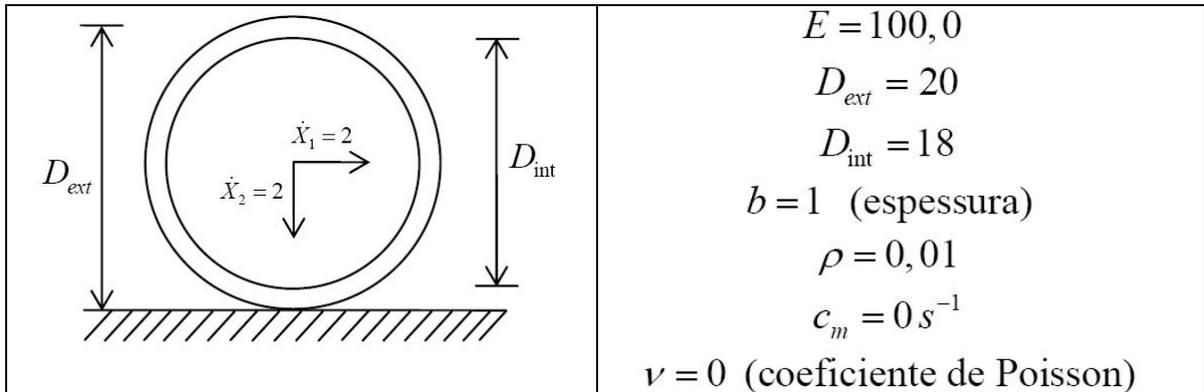


Figura 89 – Anel e anteparo rígido.

Com malha de elemento finitos composta por 156 elementos tetraédricos, 1200 nós e intervalo de tempo  $\Delta t = 0,01$ , os resultados para algumas posições deformadas são mostrados na Figura 90.

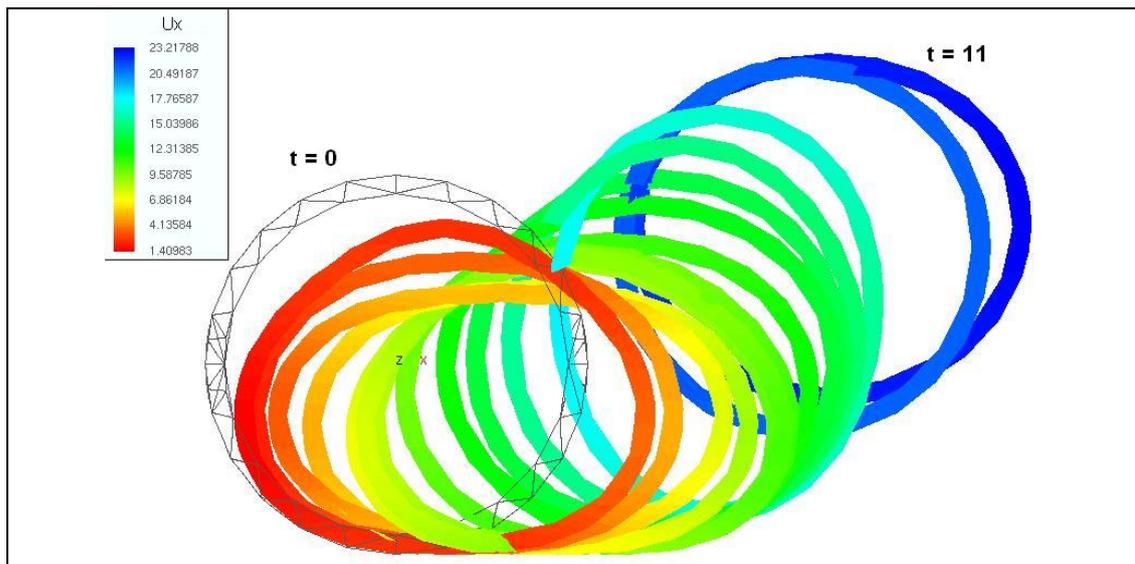


Figura 90 – configurações deformadas do anel que sofre impacto

Investiga-se também o ângulo de reflexão da estrutura anelar, medido de acordo com a Figura 91.

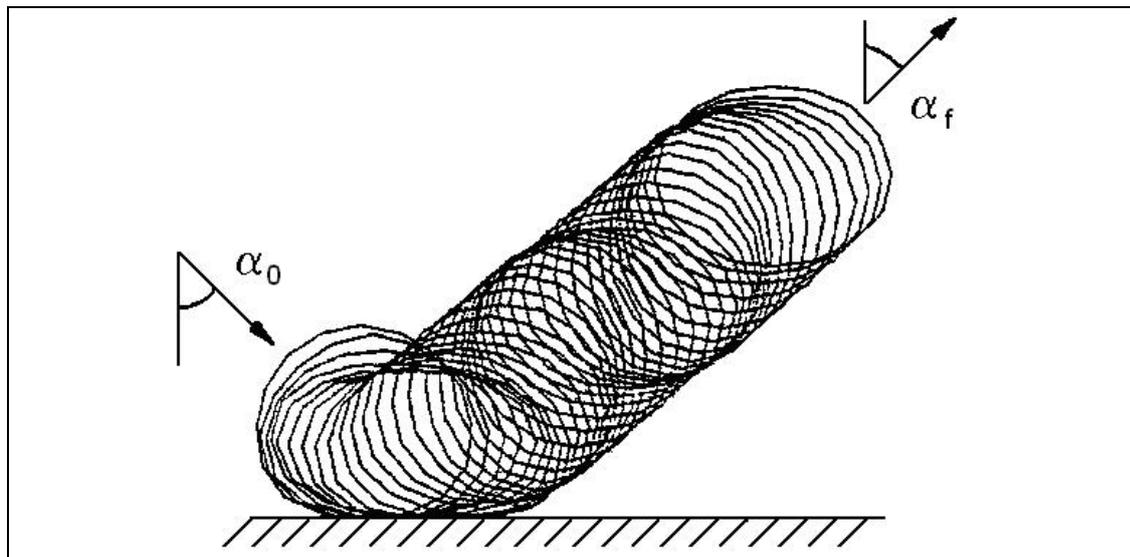


Figura 91 – Ângulo de aproximação e reflexão da estrutura anelar.

Na Tabela 4 são mostrados, em graus, os ângulos de reflexão  $\alpha_f$  obtidos neste exemplo e em outras referências.

Tabela 4 – Ângulos de reflexão para impacto sem atrito.

Referência	$\alpha_0$	$\alpha_f$
WRIGGERS <i>et al</i> (1990)	45°	50°
GRECO (2004)	45°	49,83°
Presente trabalho	45°	50,19°

Ambas as referências de comparação obtiveram os resultados com formulação do MEF para pórtico plano.

## 7 FORMULAÇÃO DE CASCA E APLICAÇÕES

---

Não é objetivo do presente trabalho desenvolver formulações de elementos finitos com cinemática de elemento de casca, por isso os exemplos de estruturas relativamente finas ao longo de sua espessura são tratados no capítulo anterior, utilizando-se a formulação de sólidos (ver exemplos 0, 0 e 0). Porém, para estruturas tridimensionais extremamente finas, tais como velas solares, como já apresentado no exemplo 0 do capítulo 5 para o caso bidimensional, a formulação de casca é mais apropriada. Diante dessa necessidade, em CODA & PACCOLA (2007) foi desenvolvida a formulação posicional com aproximação cúbica de variáveis, apresentando bons resultados em exemplos clássicos quando em comparação com a literatura especializada.

A necessidade de empregar o código computacional de casca surgiu durante o estágio de doutorado no exterior, na Universidade de Cambridge, onde o autor analisou alguns exemplos de estruturas finas sujeitas ao fenômeno de enrugamento quando sujeitas aos esforços de tração e cisalhamento.

Neste capítulo, apresenta-se a cinemática da formulação posicional de casca desenvolvida por CODA & PACCOLA (2007), bem como alguns exemplos numéricos e experimentais resultantes do estágio de doutorado na Universidade de Cambridge.

## 7.1 Fenômeno de enrugamento

Atualmente, em estruturas espaciais tais como velas solares, coletores solares, escudos solares etc, permite-se que não seja necessária uma superfície totalmente plana (WONG & PELLEGRINO, 2006a), admitindo-se portanto que as membranas dessas estruturas trabalhem de forma levemente enrugada. Em JENKINS (2001) foi demonstrado que estruturas enrugadas são eficientes, de custo mais baixo e muito mais simples de lidar do que as totalmente lisas. Sendo assim, parte das pesquisas de estruturas de membrana enrugadas é feita de forma a quantificar o formato, número, comprimento de onda e amplitude dessas rugas quando sujeitas a esforços de tração e cisalhamento, como estudado em CERDA & MAHADEVAN (2003), CERDA *et al* (2002), WONG & PELLEGRINO (2002) e EPSTEIN (2003).

Também em WONG & PELLEGRINO (2006a), WONG & PELLEGRINO (2006b) e WONG & PELLEGRINO (2006c) são apresentadas análises experimentais, numéricas e analíticas respectivamente do problema de enrugamento para estruturas tracionadas e sob efeito de cisalhamento. Baseado nesses trabalhos e das necessidades da colaboração entre o SET e o CUED (Cambridge University Engineering Department), o autor desenvolveu análises numéricas e experimentais como apresentados nos itens referentes aos exemplos numéricos deste capítulo.

## 7.2 Cinemática da formulação posicional de casca

A Figura 92 mostra a configuração de referência ( $\mathbf{B}_0$ ), a configuração atual ( $\mathbf{B}_1$ ) e o espaço adimensional auxiliar que atua como uma ponte entre  $\mathbf{B}_0$  e  $\mathbf{B}_1$ . É importante ressaltar que a configuração de referência adotada é a inicial, ou seja, a configuração não deformada, portanto sendo esse tipo de descrição do problema denominada de Lagrangiana Total. Também na Figura 92  $\mathbf{A}_1$  é um Gradiente mudança de configuração auxiliar da posição adimensional para a

de referência.  $\mathbf{A}_1$  depende das posições nodais iniciais e da cinemática adotada.  $\mathbf{A}_2$  tem sentido idêntico a  $\mathbf{A}_1$ , porém depende da posição atual dos nós ( $\mathbf{B}_1$ ).

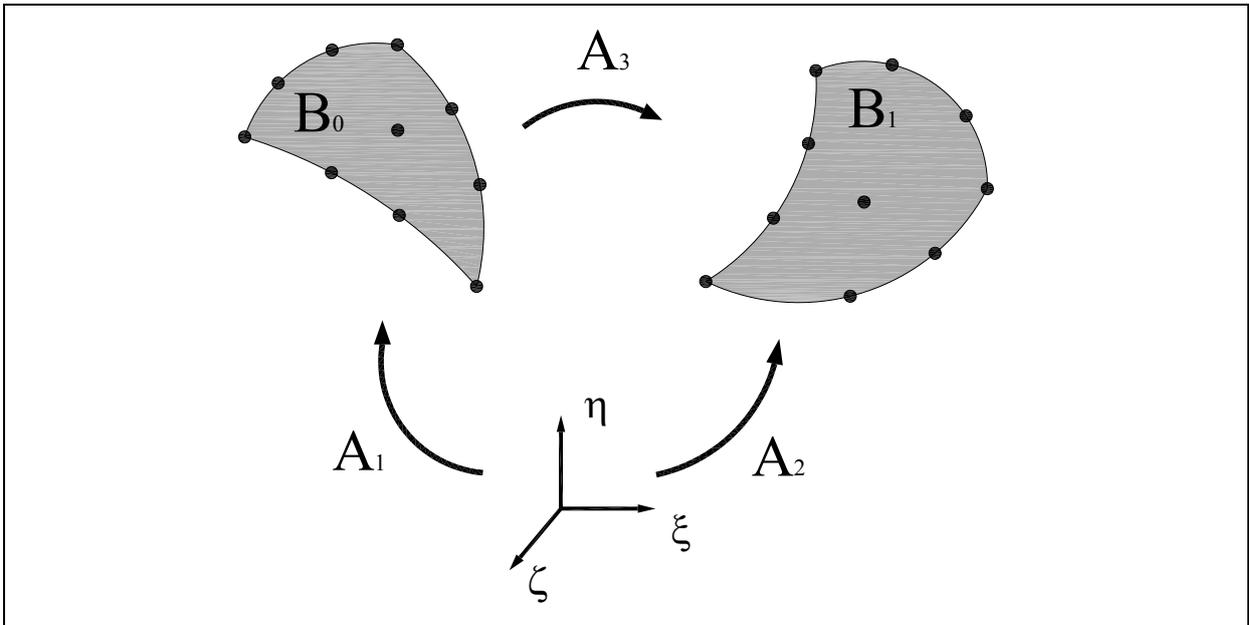


Figura 92 - Mapeamento do elemento de casca com 10 nós.

De acordo com a Figura 92 novamente,  $\mathbf{A}_3$  pode ser calculado, isto é, o gradiente mudança de configuração de  $\mathbf{B}_0$  para  $\mathbf{B}_1$  como se segue:

$$\mathbf{A}_3 = \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1^{-1} \quad (7.1)$$

Considere-se o vetor unitário  $\bar{\nu}$  normal à superfície média do elemento na configuração de referência mostrado na Figura 93. A origem do versor é o ponto " $p_m$ " ao qual é um ponto genérico ao longo da superfície média como mostrado na Figura 93.

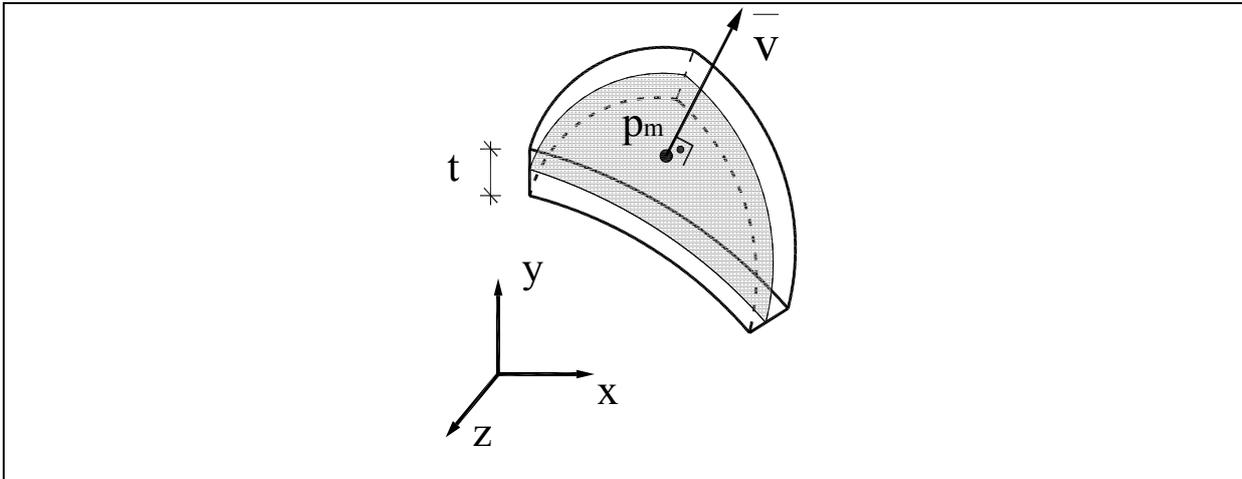


Figura 93 - Vetor normal unitário perpendicular à superfície média do elemento de casca.

Outro ponto genérico “p” ao longo da direção de  $\bar{n}_v$  pode ser representado na Figura 94.

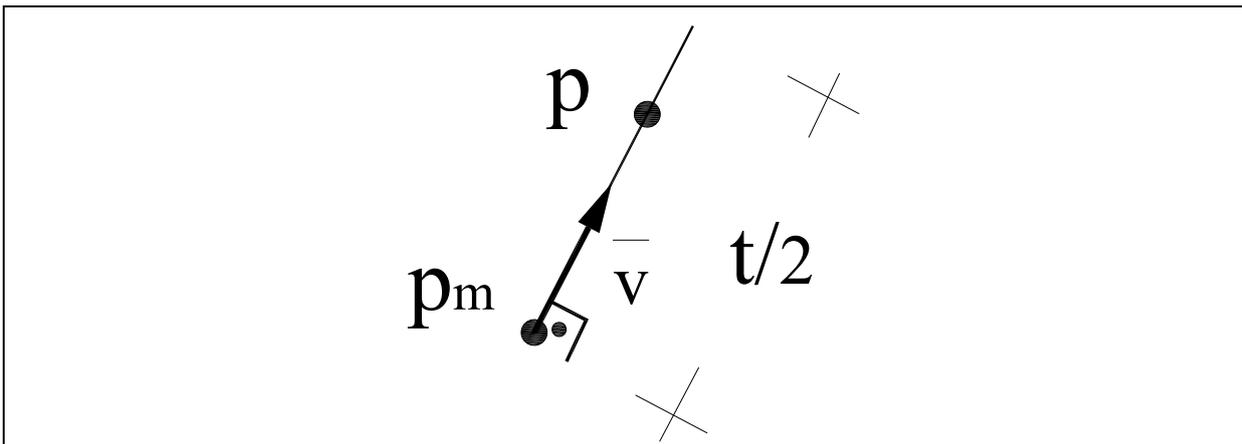


Figura 94 - Ponto genérico ao longo da espessura do elemento de casca.

De acordo com a Figura 94, a equação do ponto “p” pode ser escrita na forma:

$$p = p_m + \frac{t}{2} \zeta \bar{n}_v \tag{7.2}$$

ou em coordenadas cartesianas:

$$x = x_m + \frac{t}{2} \zeta v_x \tag{7.3}$$

$$y = y_m + \frac{t}{2} \zeta v_y \tag{7.4}$$

$$z = z_m + \frac{t}{2} \zeta v_z \quad (7.5)$$

sendo:

$$p = (x, y, z) \quad (7.6)$$

$$p_m = (x_m, y_m, z_m) \quad (7.7)$$

$$\bar{v} = (v_x, v_y, v_z) \quad (7.8)$$

“ $\zeta$ ” é a coordenada adimensional ao longo da espessura “ $t$ ”, e varia de -1 a 1, isto é,  $-1 \leq \zeta \leq 1$ . Dessa forma, é importante ressaltar que o ponto genérico “ $p$ ” pode ser expresso como sendo uma função de coordenadas adimensionais, ou seja:

$$p(\xi, \eta, \zeta) = p_m(\xi, \eta) + \frac{t}{2} \zeta \bar{v} \quad (7.9)$$

Portanto, os gradientes mudança da configuração  $\mathbf{A}_1$  e  $\mathbf{A}_2$  mostrados na Figura 92 podem ser escritos de forma genérica:

$$\mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} A_{11}^i & A_{12}^i & A_{13}^i \\ A_{21}^i & A_{22}^i & A_{23}^i \\ A_{31}^i & A_{32}^i & A_{33}^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x^i}{\partial \xi} & \frac{\partial x^i}{\partial \eta} & \frac{\partial x^i}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial y^i}{\partial \xi} & \frac{\partial y^i}{\partial \eta} & \frac{\partial y^i}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial z^i}{\partial \xi} & \frac{\partial z^i}{\partial \eta} & \frac{\partial z^i}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (7.10)$$

sendo o índice “ $i$ ” representando o número da transformação.

Dividindo-se, portanto, um corpo em elementos finitos, neste caso, elementos triangulares de casca com 10 nós, as variáveis  $x_m$ ,  $y_m$ ,  $z_m$ ,  $v_x$ ,  $v_y$  e  $v_z$  podem ser aproximadas ao longo da superfície média de um elemento genérico através de:

$$x_m = \Phi_i X_m^i$$

# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)