IFT

Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

IFT–D.005/08

Hamilton-Jacobi no Plano Nulo: Aplicações

Carlos Enrique Valcárcel Flores

Orientador

Dr. Bruto Max Pimentel Escobar

Junho de 2008

Agradecimentos

À minha familia, por todo o apoio e confiança, a minha mãe e as minhas irmãs, Natalia e Alejandra pelo amor e alegrias, a meu pai pelas grandes lições e a meu irmão Javier pelos conselhos.

Ao Dr. Pimentel por sua orientação, pela confiança, pela paciência e pelo apoio dentro e fora dos assuntos acadêmicos.

Ao Mario Bertin, pelas correções e sugestões deste trabalho.

Ao German Zambrano, pelas observações e esclarecimentos sobre o Plano Nulo e a abordagem de Dirac.

À Elizabeth, por não salvar-se agora nem nunca.

À Alicia, Carla, Eugenia, Luana, Roxanna, Silvia, Giovanni, Jorge, Roberto e Vilo pelos longos anos de amizade e cumplicidade.

Aos malacos Bonin, David, Giovanni, Luis Carlos e Vu, pela convivência e pela amizade. Agradeço também a Bonin e David pelas várias correções ortográficas deste trabalho.

Aos amigos do "Grupo Estudiantil de Física Teórica" da UNI (Lima): Aldo, Daniel P., Daniel R., Genaro, Martín A., Martín H., Mizael, Oscar e Wilfredo.
Aos profesores A. Bernui, O. Pereyra, R. Ochoa e H. Valqui pelas lições na graduação.

A Almeira, Danuce, Flavia, Patrícia, Pilar, Alexander, Búfalo, Freddy, Noce e outras ótimas amizades que fiz nestes anos no mestrado.

Aos funcionários do IFT, pelo apoio prestado.

Ao CNPq pelo apoio financeiro.

NO TE SALVES

No te quedes inmóvil
al borde del camino
no congeles el júbilo
no quieras con desgana
no te salves ahora
ni nunca.
No te salves
no te llenes de calma
no reserves del mundo
sólo un rincón tranquilo
no dejes caer los párpados
pesados como juicios
no te quedes sin labios
no te duermas sin sueño
no te pienses sin sangre
no te juzgues sin tiempo.
Pero si pese a todo
no puedes evitarlo
y congelas el júbilo
y quieres con desgana
y te salvas ahora
y te llenas de calma
y reservas del mundo
sólo un rincón tranquilo
y dejas caer los párpados
pesados como juicios
y te secas sin labios
y te duermes sin sueño
y te piensas sin sangre
y te juzgas sin tiempo
y te quedas inmóvil
al borde del camino
y te salvas
entonces
no te quedes conmigo

M. Benedetti

Resumo

Neste trabalho apresentamos algumas aplicações do formalismo de Hamilton-Jacobi para sistemas singulares no Plano Nulo. Mostramos primeiramente o estudo deste formalismo de maneira geral, para depois restringí-lo no caso de sistemas de primeira ordem, em que os exemplos clássicos do campo real e do campo complexo pertencem a esta classificação quando estudadas no plano nulo. No caso do campo Eletromagnético no plano nulo usamos o formalismo geral e mostramos como são construídos os parênteses generalizados.

Palavras Chaves: Hamilton-Jacobi, Plano Nulo, Cone de Luz, Sistemas Singulares.

Áreas do conhecimento: Teoria de Campos.

Abstract

In this work, we study some applications of the Hamilton-Jacobi formalism for singular systems on the null plane. First, we study the called completed picture of this formalism in a general case, afterwards we restrict this study to the first order formalism where some classical examples as the real and complex scalar fields might be studied within this case when they are written in light-cone coordinates. A more elaborated example is studied too, the free source Electromagnetic field in light-cone coordinates, for all these fields we show how the generalized brackets are constructed.

Key Words: Hamilton-Jacobi, Null Plane, Light-Cone, Constrained Systems.

Índice

Capítulo 1

Introdução

Os sistemas físicos são frequentemente descritos por funções Lagrangeanas $L(x, v, t)$, a partir das quais se constrói a matriz Hessiana

$$W_{ij} = \frac{\partial^2 L}{\partial v^i \partial v^j}.$$

A chamada Condição Hessiana, que classifica os sistemas como regulares ou singulares, isto é, se o determinante da Hessiana é diferente de zero, o sistema é chamado de Regular. É usual encontrar na mecânica clássica sistemas que possuem termos quadráticos nas velocidades, portanto, estes sistemas serão regulares. No entanto, existem modelos nos quais o determinante da Hessiana é nulo, sistemas deste tipo são chamados de singulares.

Por outro lado, encontramos sistemas nos quais o número de variáveis utilizadas para seu estudo excede seu número de graus de liberdade. Temos por exemplo o caso de uma partícula livre relativística, a qual é descrita por quatro coordenadas de posição, mas que só possui três graus de liberdade; esta diferença está relacionada com a invariança em relação à parametrização de linha de mundo da partícula. Em Teoria de Campos os sistemas descritos possuem infinitos graus de liberdade, correspondendo um número finito em cada ponto do espaço-tempo; assim, o campo Eletromagnético possui dois graus de liberdade num ponto, mas é descrito pelas quatro variáveis de um quadrivetor. Sistemas desta classe, onde existem mais variáveis para descrever o sistema que graus de liberdade, são chamados de Teorias de Gauge. Bergmann e Anderson mostraram [1] que toda Teoria de Gauge é necessariamente singular. Devido ao fato de que os modelos para representar as interações fundamentais na natureza são Teorias de Gauge, o estudo de sistemas singulares é de vital importância para o estudo destas teorias.

Dirac foi o pioneiro no estudo de sistemas singulares [2-5] ao fazê-lo utilizando o formalismo Hamiltoniano. Neste formalismo, a não existência da inversa da transformação de Legendre, que está relacionada com a matriz Hessiana do sistema, implica que esta matriz é singular e, portanto, a função Hamiltoniana não pode ser definida. Bergmann e colaboradores [6-7] complementaram as idéias de Dirac para o formalismo Hamiltoniano no início do seu desemvolvimento. Desde então existe uma grande bibliografia referente ao estudo de sistemas singulares por este método [8-10]. Pontos importantes deste formalismo são a divisão dos vínculos (que podem ser classificados de primeira ou segunda classe), a Condição de Consistência (a qual leva a considerar os vínculos como invariantes sobre a dinâmica do sistema) e a construção do chamado Parênteses de Dirac (de importância para o processo de quantização via o Princípio de Correspondência).

O formalismo Hamiltoniano para sistemas singulares tem sido aplicado em várias teorias, como a QED4, a Relatividade Geral, Teoria de Cordas, etc, ainda assim, existem métodos alternativos para estudar os sistemas singulares, por exemplo, em [11] se mostra uma forma detalhada do estudo via o formalismo Lagrangeano. Faddeev e Jackiw [12] propuseram um formalismo para estudar sistemas de primeira ordem; este formalismo mostrou uma vantagem algébrica com respeito ao formalismo de Dirac; contudo com a desvantagem de não permitir uma análise das simetrias de gauge do sistema físico considerado. Uma extensão ao formalismo de Faddeev-Jackiw é o formalismo Simplético [13-14], o qual permite uma análise sobre o gauge do sistema.

Utilizando o método das Lagrangeanas equivalentes, Carathéodory [15] mostrou que, para sistemas regulares, o Princípio de Ação Estacionária leva, de maneira direta, à equação de Hamilton-Jacobi. Güler [16-18] generalizou esse formalismo para sistemas singulares. Neste caso, se o sistema a considerar possui k vínculos, teremos então $k+1$ equações diferenciais parciais de Hamilton-Jacobi. Uma diferença importante entre o formalismo de Dirac e do Hamilton-Jacobi é que neste último não existe a divisão emtre primeira e segunda classe, por outro lado, a Condição de Integrabilidade do formalismo de Hamilton-Jacobi, que garante a integrabilidade das $k + 1$ equações obtidas pelo formalismo, mostra-se equivalente às Condições de Consistência de Dirac [19]. Existem diversos trabalhos que complementam o formalismo de Hamilton-Jacobi [20-23], assim como diversos estudos para sistemas mais complexos, por exemplo sistemas com Lagrangeanas de segunda ordem [24], ordem superior [25], sistemas de Berezin [19] e outros [26-28].

O principal objetivo deste trabalho é mostrar como o formalismo de Hamilton-Jacobi é aplicado em algums campos no Plano Nulo. A idéia por trás do Plano Nulo se encontra em outro trabalho de Dirac, no qual ele mostra [29] que é possível quantizar uma teoria escolhendo três tipos diferentes de superfícies iniciais, a primeira e mais usual é a superfície de tempos iguais $\Sigma : \tau = x^0$ chamada forma instantânea, a escolha desta superfície dá a impressão de que se utiliza o tempo galileano na teoria e, por isso, a forma não covariante do formalismo Hamiltoniano. Escolhendo as outras duas superfícies estudadas por Dirac se formam as chamadas forma Pontual e forma Frontal da teoria. Nesta última superfície, também chamada de Cone de Luz, escolhemos as condições iniciais é $\Sigma : \tau = x^+$ conhecida como Plano Nulo.

Iniciamos estudando as propriedades básicas do Plano Nulo e as coordenadas de cone de luz, no capítulo dois. Aqui apresentamos algums esboços da idéia de Dirac sobre a escolha das superfícies onde serão impostas as condições iniciais do problema, além de, também, estudarmos como isto afeta a dinâmica de uma partícula livre relativística.

No capítulo três, mostraremos algumas idéias básicas do formalismo Hamiltoniano e dos sistemas singulares. Mostraremos também as bases do formalismo de Hamilton-Jacobi para sistemas regulares para depois estudar este formalismo para sistemas singulares. O chamado Quadro Completo é um estudo tanto do sistema de equações de Hamilton-Jacobi obtidas no formalismo, quanto das Condições de Integrabilidade dos vínculos.

No capítulo quatro, aplicaremos o formalismo de Hamilton-Jacobi em três exemplos clássicos: o campo escalar real, o campo escalar complexo e um campo vetorial não-massivo, o campo Eletromagnético no Plano Nulo. Tanto o campo escalar real como o complexo caem no caso de sistemas de primeira ordem, quando escrevemos suas lagrangeanas em coordenadas de cone de luz; o formalismo tratado no capítulo três mostra como construir os parênteses generalizados nestes casos e, a partir daí, calculamos as equações de movimento. Para o caso do campo Eletromagnético, sua Lagrangeana no cone de luz não é um sistema de primeira ordem, ainda assim, são calculados os parênteses generalizados. Os detalhes de como calcular estes parênteses para tais sistemas são tratados no Apêndice B.

Nas considerações finais, discutiremos os resultados obtidos e algumas perspectivas futuras.

Capítulo 2

O Plano Nulo

O processo de quantização canônica é realizado no contexto do formalismo Hamiltoniano, em que é possível fazer uma correlação entre os parênteses de Poisson $\{x^i, p_j\} = \delta^i_j$ e os comutadores dos operadores $[X^i, P_j] = i\hbar\delta^i_j I$. Considera-se um requisito para uma teoria dinâmica que as equações de movimento sejam expressas em sua forma hamiltoniana.

Outro elemento, que é preciso agregar numa teoria, são as condições relativísticas, em que é preciso que as leis da Física sejam invariantes sob transformações de Poincaré.

O problema ao tentar unir essas duas teorias está na aparente forma não covariante do formalismo Hamiltoniano estudada por Dirac [29] que limitou as teorias respeitando os dois requisitos indicados, e mostrando três diferentes formas de estudar a dinâmica das teorias, chamadas forma Instantânea, forma Pontual e forma Frontal; mais tarde [30] foram encontradas mais duas formas de dinâmica, relacionadas aos diferentes subgrupos do grupo de Poincaré.

2.1 Transformações de Poincaré e Variáveis dinâmicas

Existem transformações Λ de coordenadas do espaço de Minkowski, isto é $\bar{x}^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$, as quais deixam o intervalo ds^2 invariante:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = g_{\alpha\beta}d\bar{x}^\alpha d\bar{x}^\beta = d\bar{s}^2, \tag{2.1}$$

onde $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$, e a métrica $g_{\mu\nu}$ é um tensor simétrico, com elementos na diagonal $(1, -1, -1, -1)$, e os outros elementos nulos, tais que

$$g_{\mu\nu} = g_{\alpha\beta}\Lambda^\alpha_\mu \Lambda^\beta_\nu. \tag{2.2}$$

As transformações Λ, são chamadas Transformações de Lorentz. O conjunto destas transformações formam um grupo, o chamado grupo das transformações de

Lorentz ou simplesmente grupo de Lorentz. Da equação (1.2) podemos deduzir

$$
\begin{aligned}
(\Lambda_0^0)^2 &= 1 + \Lambda_0^i \Lambda_0^i, \\
\Lambda_0^0 \Lambda_i^0 &= \Lambda_i^k \Lambda_{k0}, \\
\Lambda_i^0 \Lambda_o^j + \Lambda_{ki} \Lambda^{kj} &= \delta_i^j.
\end{aligned}
$$

Estas propriedades podem ser representadas em termos de um escalar E, um vetor coluna V, e uma matriz M 3×3, assim

$$
\Lambda = (\begin{array}{cc} E & \mathbf{V}^T \\ \mathbf{V} & \mathbf{M} \end{array}),
$$

portanto, as propriedades mencionadas têm a forma

$$
\begin{aligned}
E^2 &= 1 + \mathbf{V} \cdot \mathbf{V}, \\
S\mathbf{V} &= \mathbf{VM}, \\
I &= \mathbf{MM} + \mathbf{V} \cdot \mathbf{V}.
\end{aligned}
$$

Como $[det(\Lambda)]^2 = 1$, podemos dividir o grupo de Lorentz em dois subconjuntos: o primeiro no qual $det(\Lambda) = +1$, chamado grupo restrito (ou próprio) de Lorentz e, o segundo para o qual $det(\Lambda) = -1$.

Mas as transformações de Lorentz são só um subconjunto de um grupo de transformações maior: as transformações de Poincaré, ou transformações não homogêneas de Lorentz, são descritas por

$$
\bar{x} = \Lambda x + a = \mathcal{S}(\Lambda, a), \tag{2.3}
$$

onde a é independente do ponto do espaço de Minkowski. Assim, o grupo de Lorentz que é obtido escrevendo $a = 0$, é também chamado grupo homogêneo de Lorentz.

As transformações infinitesimais de Poincaré são obtidas pela expansão a partir da unidade da transformação de Lorentz e, considerando $a^\mu = \epsilon^\mu$ um número infinitesimal,

$$
\bar{x}^\mu = \Lambda_\nu^\mu x^\nu + a^\mu = (\delta_\nu^\mu + \omega_\nu^\mu) x^\nu + \epsilon^\mu,
$$

portanto:

$$
\bar{x}^\mu = x^\nu + \omega_\nu^\mu x^\nu + \epsilon^\mu = x^\mu + \xi(\mathbf{x}), \tag{2.4}
$$

onde $\xi^\mu(x) = \omega_\nu^\mu x^\nu + \epsilon^\mu$.

A invariância do intervalo impõe condições nas $\xi^\mu(\mathbf{x})$,

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} &= g_{\alpha\beta}\frac{\partial\bar{x}^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial\bar{x}^\beta}{\partial x^\nu}, \\ g_{\mu\nu} &\approx g_{\mu\nu} + (\frac{\partial\xi_\mu}{\partial x^\nu} + \frac{\partial\xi_\nu}{\partial x^\mu}), \end{aligned}$$

obtemos a chamada equação de Killing

$$\frac{\partial\xi_\mu}{\partial x^\nu} + \frac{\partial\xi_\nu}{\partial x^\mu} = 0, \tag{2.5}$$

ou, em termos das ω^μ_ν

$$\omega^{\mu\nu} + \omega^{\nu\mu} = 0. \tag{2.6}$$

Portanto, temos 16 quantidades $\omega^{\mu\nu}$ para determinar, mas pelo fato de ser anti-simétrico, só precisaremos de 6 delas (que são independentes). Além disso, também temos 4 quantidades ϵ^μ para determinar, portanto temos na teoria 10 parâmetros constantes. Com estes parâmetros, podemos escrever os elementos do grupo de Poincaré como

$$\mathcal{S}(\omega,\epsilon) = \exp(\frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}M^{\mu\nu} + \epsilon_\mu P^\mu), \tag{2.7}$$

onde, $M_{\mu\nu}$ e P_μ, são elementos da Álgebra de Poincaré que satisfazem as seguintes regras de comutação

$$[P^\mu, P^\nu] = 0,$$

$$[M^{\mu\nu}, P^\rho] = P^\mu g^{\nu\rho} - P^\nu g^{\mu\rho},$$

$$[M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}] = g^{\nu\rho}M^{\mu\nu} - g^{\mu\rho}M^{\nu\sigma} + g^{\mu\rho}M^{\nu\rho} - g^{\nu\sigma}M^{\mu\rho}.$$

2.2 A ação do grupo de Poincaré sob os campos

Agora, estudaremos como o grupo de Poincaré afeta alguns campos. Para isto, primeiro mostraremos os tipos de variações que podem ser realizados nos campos, mediante alguma transformação em geral.

Seja $F(x)$ um campo atuando no espaço de Minkowski, define-se a variação na forma da função $\Delta_0 F(x) = \bar{F}(x) - F(x)$, e a variação total $\Delta F(x) = \bar{F}(\bar{x}) - F(x)$, onde em geral $\bar{x}$ é uma função arbitrária de x. Estas variações estão relacionadas como

$$\Delta F(x) = \bar{F}(\bar{x}) - F(x) = \bar{F}(\bar{x}) - \bar{F}(x) + \Delta_0 F(x).$$

Mas em muitos casos só estamos interessados em transformações infinitesimais de Poincaré, $\bar{x} = x + \xi(x)$ e, temos que

$$\Delta F(x) = \bar{F}(x + \xi(x)) - \bar{F}(x) + \Delta_0 F(x) \approx \Delta_0 F(x) + \xi^\mu(x)\partial_\mu \bar{F}(x).$$

Considerando o caso em que os campos também são bem comportados, isto é, as variações infinitesimais no espaço de Minkowski produzem variações infinitesimais nos campos, logo, é possível mudar as Δ's por δ's infinitesimais e a aproximação no campo é agora uma igualdade

$$\delta F(x) = \delta_0 F(x) + \chi^\mu(x)\partial_\mu F(x). \tag{2.8}$$

Define-se o gerador da transformação do campo $F(x)$ como

$$\delta_0 F(x) = (\frac{1}{2}\omega^{\mu\nu} M_{\mu\nu} + \epsilon^\mu P_\mu). \tag{2.9}$$

Para o campo escalar, por exemplo temos que $\bar{\phi}(\bar{x}) = \phi(x)$, então a variação total é zero

$$\delta\phi(x) = \delta_0\phi(x) + \xi^\mu(x)\partial_\mu\phi(x) = 0,$$

então

$$\delta_0\phi(x) = -\xi^\mu(x)\partial_\mu\phi(x) = -(\omega^\mu_\nu x^\nu + \epsilon^\mu)\partial_\mu\phi(x),$$

portanto

$$\delta_0\phi(x) = -\omega^{\mu\nu} x^\nu \partial_\mu\phi(x) - \epsilon^\mu\partial_\mu\phi(x), \tag{2.10}$$

desta última equação, e da equação (2.9) obtemos que os geradores para o campo escalar são

$$\begin{aligned} P_\mu &= -\partial_\mu, & (2.11) \\ M_{\mu\nu} &= x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu, & (2.12) \end{aligned}$$

estos operadores são os geradores de translações P_μ e de rotações $M_{\mu\nu}$.

Para um campo vetorial A^μ temos que, $\bar{A}^\mu(\bar{\mathbf{x}}) = \Lambda^\mu_\nu A^\nu(\mathbf{x})$ então

$$\begin{aligned} \bar{A}^\mu &= (\delta^\mu_\nu + \omega^\mu_\nu)A^\nu = A^\mu + \omega^\mu_\nu A^\nu, \\ \bar{A}^\mu &= (\delta^\mu_\nu + \frac{1}{2}\omega^{\alpha\beta}[\Sigma^1_{\alpha\beta}]^\mu_\nu)A^\nu, \end{aligned}$$

onde $[\Sigma^1_{\alpha\beta}]^\mu_\nu = \delta^\mu_\alpha\eta_{\beta\nu} - \delta^\mu_\beta\eta_{\alpha\nu}$.

2.3 Formas de Dinâmica

Todo vetor $x = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ no espaço de Minkowski possui uma norma

$$|x| \equiv \sqrt{\eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu}, \tag{2.13}$$

esta norma não é bem definida porque pode ser não positiva. Portanto, qualquer vetor, devido à sua norma, pode se classificado em três grupos

$$x^2 > 0, \tag{2.14}$$

$$x^2 = 0, \tag{2.15}$$

$$x^2 < 0, \tag{2.16}$$

vetores do tipo (2.14) são chamados de tipo tempo, os vetores que satisfazem (2.15) são chamados de vetores nulos, ou tipo luz e, quando um vetor satisfaz (2.16) é chamado de tipo espaço.

No caso de dois vetores x e y, tais que $xy = 0$, diz-se que esses vetores são ortogonais. Os pontos que formam o conjunto de vetores nulos formam uma hipersuperfície chamada cone de luz. O conjunto de pontos que satisfazem $x^2 = constante$, formam um hiperbolóide. É fácil observar que todos os vetores temporais permanecem dentro do cone de luz e todos os vetores espaciais fora dele.

Consideremos agora dois pontos no espaço, A e B, no sentido da mecânica clássica, teríamos que, em qualquer evento que fosse simultâneo a A, pertenceria a um hiperplano de tempo constante através de A, $\Gamma : x^0 = constante$. Esta hipersuperfície Γ divide todo o espaço-tempo em três partes: o ponto B pertence ao futuro de A (eventos sobre Γ) ao passado de A (eventos sob Γ) e ao presente (B pertence a Γ).

No ambito da mecânica relativística, o plano Γ não tem um significado universal, já que dois pontos que podem ser simultâneos num sistema inercial podem não sê-los em outro sistema inercial. Contudo, o cone de luz tem papel importante dividindo o espaço de Minkoswki: Seja A e B dois pontos do espaço e X o vetor entre estes dois pontos:

- Se X aponta para o futuro, e é do tipo tempo, então A acontece antes de B e é possível viajar de A para B com uma velocidade menor que c.

- Se X aponta para o futuro, e é do tipo luz, então B pertence ao futuro de A, para enviar um sinal a B é preciso de um fóton.

- Se X for tipo espaço, nenhum sinal se pode enviar de A para B que possua velocidade menor ou igual a c.

- Se X aponta para o passado, e é do tipo tempo, então B ocorreu antes de A e é possível viajar de B para A com uma velocidade menor que c.

- Se X aponta para o passado, e é do tipo luz, então A pertence ao futuro de B; para enviar um sinal a A é preciso um fóton.

Estes são requisitos de causalidade na relatividade. Portanto, na relatividade especial, hipersuperfícies como Γ não trazem toda informação desejada na teoria. Como o objetivo principal é estudar novos tipos de hipersupefícies em que consideraremos condições iniciais para problemas físicos, estudaremos hipersuperfícies Σ no espaço de Minkowski, sob a condição de não ter direções temporais dentro dela. Chamamos grupo de estabilidade G_Σ um subgrupo de Poincaré, que mapeia a superfície Σ sob ela mesma. Então, segue

$$x \in \Sigma, \quad g \in G_\Sigma \rightarrow y = gx \in \Sigma.$$

O subgrupo de geradores do grupo de Poincaré que geram os elementos de G_Σ são chamados operadores cinemáticos. Os outros geradores que mapeiam uma superfície Σ para Σ' são chamados operadores dinâmicos.

No caso que Σ tenha a seguinte propriedade

$$se, \quad x,\ y \in \Sigma, \quad \exists g \in G_\Sigma / \quad y = gx,$$

então, temos uma superfície chamada transitiva e é dito que todos os pontos de Σ são equivalentes.

Leutwyler e Stern [30] fizeram uma classificação dos subgrupos de Poincaré considerando somente as superfícies transitivas e mostrando que só existem cinco possibilidades não equivalentes:

Hipersuperfície	Forma de Dinâmica
$x^0 = 0$	Instantânea
$x^2 = a^2 > 0, \quad x^0 > 0$	Pontual
$x^0 + x^3 = 0$	Frontal
$(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 = a^2 > 0 \quad x^0 > 0$	
$(x^0)^2 - (x^1)^2 = a^2 > 0, \quad x^0 > 0$	

Dirac, em seu artigo, *Forms of Relativistic Dynamics* [29], mostrou as três primeiras, chamando-as: forma Instantânea, forma Pontual e forma Frontal, respectivamente.

Dada a hipersuperfície em que são impostas as condições iniciais, agora é possível estudar a evolução temporal do sistema, isto é, sua dinâmica. Consideremos a superfície com condições iniciais $\Sigma_0 : \tau = \tau_0$, o sistema vai evoluir para $\Sigma_1 : \tau = \tau_1 > \tau_0$. É possível definir as quantidades $\xi^\alpha = \xi^\alpha(x)$ sob Σ, onde ξ^0 representa a variável tempo τ, e as três restantes ξ^i parametrizam Σ. Definimos também o vetor normal a hipersuperfície N_μ, como

$$N_\mu = \left.\frac{\partial \xi^0}{\partial x^\mu}\right|_\Sigma,$$

e o vetor unitário n^μ, como

$$n^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^0},$$

que é a nova quadrivelocidade e temos que levar em conta que $n^\mu N_\mu = 1$. O intervalo, pode ser reescrito como

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \eta_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial \xi^\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta = h_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta, \tag{2.17}$$

onde

$$h_{\alpha\beta} = \eta_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial \xi^\beta}.$$

E possível escrever

$$ds^2 = (n^2 + 2h_i w^i + h_{ij} w^i w^j) d\tau^2 = h(\tau) d\tau^2,$$

onde o tempo τ é definido como $\tau = \xi^0$, $h_{00} = n^2$, $h_i \equiv h_{0i}$ e $w^i \equiv d\xi^i/d\tau$ sendo considerada a nova quadrivelocidade, também $h(\tau) = h_{\alpha\beta}\dot{\xi}^\alpha \dot{\xi}^\beta$.

Estudamos como variam as equações dependendo da forma da dinâmica, no caso de uma partícula livre relativística, neste caso temos a Lagrangeana

$$L = -m\sqrt{h(\tau)}, \tag{2.18}$$

os momentos conjugados são definidos como

$$\pi_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}^\alpha} = -\frac{m}{\sqrt{h(\tau)}} h_{\alpha\beta} \dot{\xi}^\beta.$$

Até aqui, aparentemente é possível inverter todas as velocidades em função dos momentos

$$\dot{\xi}^\alpha = -\frac{\sqrt{h}}{m} h^{\alpha\beta} \pi_\beta,$$

agora é possível calcular a Hamiltoniana

$$H_c = \pi_\alpha \dot{\xi}^\alpha - L = -\pi_\alpha \frac{\sqrt{h}}{m} h^{\alpha\beta} \pi_\beta + m\sqrt{h} = -\frac{\sqrt{h}}{m} (h^{\alpha\beta} \pi_\alpha \pi_\beta - m^2) = 0, \tag{2.19}$$

temos então, que a Hamiltoniana canônica é proporcional ao vínculo

$$\Phi = h^{\alpha\beta}\pi_\alpha\pi_\beta - m^2 = p^2 - m^2 = 0. \tag{2.20}$$

Portanto, obtemos um vínculo na teoria, não pelas propriedades de inversão das velocidades, mas pelo fato de se ter uma invariância, na escala ou na escolha de τ. Neste caso, inserimos um *gauge fixing* $\Sigma : \tau = \xi^0$, em que a evolução do sistema é dada por $\pi_0 \equiv H_\tau$, e pode ser resolvida a partir da equação do vínculo

$$\Phi = h^{\alpha\beta}\pi_\alpha\pi_\beta - m^2 = N^2\pi_0^2 + 2h^{0i}\pi_i\pi_0 + h^{ij}\pi_i\pi_j - m^2 = 0.$$

Para o caso $N^2 = 0$, temos uma equação de primeira ordem em π_0, com solução

$$\pi_0 = \frac{m^2 - h^{ij}\pi_i\pi_j}{2h^i\pi_i},$$

para o caso $N^2 > 0$, temos como solução

$$\pi_0 = \frac{-2h^i\pi_i \pm \sqrt{h^i\pi_i - N^2(h^{ij}\pi_i\pi_j - m^2)}}{N^2},$$

neste caso, temos o problema do sinal $\pm$, mas isto pode ser removido fazendo $\pi_0 > 0$. Podemos escolher $\xi^0(x) = x^0 = t$, então Σ é ortogonal ao eixo temporal, $N = (1,0,0,0) = n$, temos que

$$H_t = \pi_0 = N.p = p^0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}, \tag{2.21}$$

também temos que

$$\dot{x}^i = \{x^i, H_t\} = \frac{p^i}{p^0}.$$

Consideremos, agora, a representação $\{x^\mu, p^\nu\} = \eta^{\mu\nu}$, e os geradores

$$P^\mu = p^\mu, \qquad M^{\mu\nu} = x^\mu p^\nu - x^\nu p^\mu,$$

e os geradores da transformação de Poincaré como $\delta G = 1/2\omega_{\mu\nu}(x^\mu\partial^\nu - x^\nu\partial^\mu) - \epsilon_\mu\partial^\mu$. Usando como hipersuperfície $\Sigma : \tau = \xi^0(x)$, e se P^μ ou $M^{\mu\nu}$ são cinemáticos para algum μ, ν, então, temos que

$$\partial^\mu\xi^0 = 0, \quad (x^\mu\partial^\nu - x^\nu\partial^\mu)\xi^0 = 0,$$

ou, em termos do vetor normal $N^\mu = 0$, é $x^\mu N^\nu - x^\nu N^\mu = 0$.

Como foi dito anteriormente, é comum escolher $\Sigma : t = x^0 = 0$, como a variável tempo. Agora, neste caso escrevemos

$$\begin{aligned} P^i &= p^i, \\ P^0 &= H_t \\ M^{ij} &= x^i p^j - x^j p^i, \\ M^{i0} &= x^i\partial^0 - x^0\partial^i = x^i p^0 = x^i H_t. \end{aligned}$$

2.4 Coordenadas de Cone de Luz

Na seção anterior já estudamos algumas propriedades do cone de luz; também mostramos que o cone define uma divisão natural no espaço de Minkowski. Agora definiremos as coordenadas de cone de luz x^+ e x^- como duas combinações lineares independentes de uma coordenada temporal e de uma coordenada espacial, digamos x^3, assim

$$x^+ \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(x^0 + x^3), \tag{2.22}$$

$$x^- \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(x^0 - x^3). \tag{2.23}$$

As coordenadas x^+ e x^- são denominadas de cone de luz pelo fato de que elas estão associadas às linhas de mundo dos raios de luz emitidas desde a origem de coordenadas ao longo do eixo x^3. Assim, para o raio de luz emitido ao longo do eixo positivo de x^3, temos que $x^3 = ct = x^0$ e portanto $x^- = 0$, esta linha é, por definição, o eixo x^+. Por outro lado, para raios de luz emitidos ao longo do eixo x^3 negativo, temos $x^3 = -ct = -x^0$, portanto $x^+ = 0$, que define o eixo x^-.

A superfície $\Sigma : \tau = \xi^0(x) = x^+$ é conhecida como Plano Nulo, o vetor normal é, em coordenadas cartesianas $N = (1, 0, 0, -1)$, e tem norma nula $N^2 = 0$. O vetor n^μ

$$n^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^0} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^+} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}),$$

É possível pensar na coordenada x^+ como a coordenada temporal, e x^- como uma coordenada espacial. Por intervalo, neste caso temos

$$ds^2 = dx^+dx^- + dx^-dx^+ - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 = h_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta, \tag{2.24}$$

onde $h_{\alpha\beta}$ é a métrica induzida pelas coordenadas de cone de luz. Comparando os termos, resulta que os únicos diferentes de zero são, $h_{+-} = h_{-+} = 1$ e $h_{11} = h_{22} = -1$, podendo-se escrever em forma matricial como

$$h_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.25}$$

onde a inversa desta matriz resulta

$$h^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.26}$$

Para representar tanto o intervalo, como qualquer outra operação entre os vetores, é útil ter uma convenção para os índices, neste caso, se um vetor tinha como coordenadas $x^\mu \rightarrow (x^0, x^1, x^2, x^3)$, agora, nas coordenadas de cone de luz, temos $x'^\mu \rightarrow (x^+, x^1, x^2, x^-)$, em que se podem transformar as coordenadas x^μ a x'^μ via uma transformaçõ C^μ_ν, definida como

$$x'^\mu = C^\mu_\nu x^\nu, \tag{2.27}$$

onde

$$C^\mu_\nu = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{2.28}$$

É importante observar que esta transformação C^μ_ν não é uma transformação de Lorentz.

Para qualquer quadrivector A^μ, define-se as suas componentes de cone de luz

$$A^\pm \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(A^0 \pm A^3), \tag{2.29}$$

e definimos o vetor transversal como

$$\vec{A} = (A^1, A^2).$$

O produto escalar definido como $A \cdot B = \eta_{\mu\nu} A^\mu B^\nu$, é

$$A \cdot B = A^+ B^- + A^- B^+ - A^1 B^1 - A^2 B^2 = h_{\mu\nu} A^\mu B^\nu. \tag{2.30}$$

Agora, a métrica também serve para subir e descer os índices, assim

$$\begin{aligned} A_+ &= A^-, \\ A_- &= A^+, \\ A_i &= -A^i. \end{aligned}$$

Para se ter uma idéia mais intuitiva sobre as coordenadas de cone de luz, pode-se considerar o seguinte exemplo: Seja uma partícula que se move ao longo do eixo x^3 com velocidade v. Se, para $t = 0$, tem-se que $x^3 = 0$, para um tempo posterior t temos

$$x^3(t) = vt = \beta x^0, \quad \beta = \frac{v}{c},$$

agora, nas coordenadas de cone de luz

$$x^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^0 + x^3) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+\beta)x^0,$$
$$x^- = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^0 - x^3) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1-\beta)x^0,$$

portanto

$$\frac{dx^-}{dx^+} = \frac{1-\beta}{1+\beta} = \omega, \tag{2.31}$$

onde a razão ω pode ser identificada como a variação da variável espacial com relação à variável temporal, nas coordenadas de cone de luz, isto é, a velocidade. Para um feixe de luz ($\beta = 1$) movendo-se à direita da origem, sua coordenada x^- é nula. Para uma partícula em repouso $\beta = 0$ na origem, temos que sua velocidade de cone de luz é a unidade. Para β negativo (a partícula se move à esquerda da origem) temos que a velocidade ω cresce e quando ela tende a $\beta \to -1$, a velocidade de cone de luz tende ao infinito.

Assim, como se pode decompor as componentes do quadrivetor de posição, fazemos a decomposição nas componentes de cone de luz de um quadrivetor momentum p:

$$p^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(p^0 + p^3),$$
$$p^- = \frac{1}{\sqrt{2}}(p^0 - p^3),$$

O interesse é saber se p^+ é a coordenada relacionada com a energia. Lembrando que

$$p_\mu x^\mu = p_0 x^0 + p_i x^i = p_+ x^+ + p_- x^- + p_i x^i,$$

nas coordenadas usuais, a coordenada $p_0 = E$ é a que acompanha a coordenada temporal x^0, visto que nas coordenadas de cone de luz a coordenada p_+ é a que acompanha a x^+, portanto, p_+ é a energia em coordenadas de cone de luz: E_{cl}

$$p_+ = p^- = E_{cl}. \tag{2.32}$$

Agora é possível resolver o problema da partícula livre, neste caso, temos que resolver o vínculo $2p^+p^- - (p^1)^2 - (p^2)^2 - m^2 = 0$, e a Hamiltoniana é $H_{\tau = x^+}$

$$H_{x^+} = \frac{(p^1)^2 + (p^2)^2 + m^2}{2p^+}. \tag{2.33}$$

A dinâmica está dada por

$$\dot{x}^- = \{x^-, H_{x^+}\} = \frac{p^-}{p^+}, \tag{2.34}$$

$$\dot{x}^i = \{x^i, H_{x^+}\} = \frac{p^i}{p^+}. \tag{2.35}$$

Os geradores cinemáticos, neste caso são

$$\begin{aligned} P^i &= p^i, \\ P^+ &= p^+, \\ M^{+-} &= -x^- p^+, \\ M^{12} &= x^1 p^2 - x^2 p^1, \\ M^{+i} &= -x^i p^+, \end{aligned}$$

num total de sete geradores dos quais, os geradores dinâmicos são

$$\begin{aligned} P^- &= \frac{(p^1)^2 + (p^2)^2 + m^2}{p^+}, \\ M^{-i} &= x^- p^i - x^i p^-, \end{aligned}$$

foi possível também eliminar a raiz quadrada da Hamiltoniana P^-.

Capítulo 3

O formalismo de Hamilton-Jacobi

Para o estudo de um sistema físico é preciso uma quantidade chamada ação, definida por uma função Lagrangeana, cujo estudo das propriedades dinâmicas de um sistema nessa abordagem é chamado de formalismo Lagrangeano. Partindo deste formalismo e mediante uma transformação de Legendre, obtemos uma nova função chamada Hamiltoniana, a qual vai depender das variáveis conjugadas de posição e de momento, e cujo estudo de um sistema via função Hamiltoniana é chamado de Formalismo Hamiltoniano.

A não existência da inversa da transformação de Legendre, que está relacionada com a matriz Hessiana do sistema, implica que o sistema é singular e, portanto, a função Hamiltoniana não pode ser definida. Dirac foi o pioneiro estudando sistemas singulares [2-5] pelo formalismo Hamiltoniano, implementando vínculos na teoria. Ainda assim, existem métodos alternativos para estudar os sistemas singulares, ou sistemas vinculados, por exemplo, em [11] esses sistemas são estudados no formalismo Lagrangeano; o formalismo de Faddeev-Jackiw [12] foi proposto anos mais tarde para estudar sistemas de primeira ordem, este formalismo mostrou uma vantagem algébrica com respeito ao formalismo de Dirac. Neste capítulo estudaremos outro método, o formalismo de Hamilton-Jacobi, no qual sem nenhuma menção à Hamiltoniana, o princípio de ação estacionária leva a considerar um conjunto de equações diferenciais parciais de Hamilton-Jacobi.

O formalismo de Hamilton-Jacobi (HJ) está baseado no método das Lagrangeanas equivalentes utilizado por Carathéodory para sistemas regulares [15]. Güler generalizou esse formalismo para sistemas singulares [16-18]. Tanto as condições de consistência no formalismo de Dirac como as condições de integrabilidade no formalismo de Hamilton-Jacobi, ambas pontos essenciais nos seus respectivos formalismos, são equivalentes, o que tem sido estudado em [19].

Desde o trabalho inicial de Güler, existem diversos trabalhos que complementam o formalismo de Hamilton-Jacobi [20-23], assim como diversos estudos para sistemas mais complexos, por exemplo sistemas com Lagrangeanas de segundo ordem [24], ordem superior [25], sistemas de Berezin [19] e outros [26-28].

3.1 Sistemas Hamiltonianos: Tratamento geral

Dado um sistema físico, consideramos um princípio de ação, $\delta A = 0$, chamado de princípio de ação estacionária, que determina a dinâmica deste sistema. Para isto, é necessário considerar

$$A[\mathbf{x}] = \int_{t_1}^{t_2} dt L(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), t), \tag{3.1}$$

onde a função $L = L(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ é chamada lagrangeana, e as variáveis $\mathbf{x}$ representam o conjunto de N coordenadas generalizadas $\mathbf{x} = (x^1, x^2, .., x^N)$, isto é, elementos do espaço de configurações Q, similarmente para $\mathbf{v} = (v^1, v^2, .., v^N)$, que é um elemento do espaço tangente a Q num ponto, denominado $\mathrm{T}_q\mathrm{Q}$. Por tanto, a Lagrangeana é definida no produto direto do espaço tangente TQ^* com os números reais $\mathrm{TQ} \otimes \mathrm{R}$. Ao ser feita na integral de ação, ela tem que ser avaliada em uma trajetória $(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), t)$. A trajetória física, que denominaremos $(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t)$, satisfaz o princípio $\delta A[\mathbf{q}] = 0$, daí, temos que

$$\frac{\partial L}{\partial x^i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v^i} = 0 \tag{3.2}$$

ao ser calculado na trajetória. O termo que contém a derivada total pode ser expandido como

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v^i} = \frac{\partial^2 L}{\partial t \partial v^i} + \frac{\partial^2 L}{\partial x^j \partial v^i} v^j + \frac{\partial^2 L}{\partial v^j \partial v^i} a^j,$$

onde a^j é tal que, na trajetória $a^j = \ddot{x}^j(t)$. Então, definindo também, W_{ij} e F_i como

$$W_{ij} = \frac{\partial^2 L}{\partial v^j \partial v^i}, \tag{3.3}$$

$$F_i = \frac{\partial L}{\partial x^i} - \frac{\partial^2 L}{\partial t \partial v^i} - \frac{\partial^2 L}{\partial x^j \partial v^i} v^j, \tag{3.4}$$

se pode reescrever a equação de Euler-Lagrange como

$$W_{ij} a^j = F_i. \tag{3.5}$$

Diz-se que a matriz W com componentes W_{ij} é chamada Hessiana, é regular (sistema regular) se for inversível, isto é, com determinante não nulo. Portanto, pode-se

*Que é o espaço formado pelo produto direto do espaço de configuração e o espaço tangente T_qQ, $\mathrm{TQ} = \mathrm{Q} \otimes \mathrm{T}_q\mathrm{Q}$.

resolver tal equação. Caso contrário, quando o determinante é nulo, a Hessiana é chamada singular, ou sistema singular.

A transição da prescrição do um sistema físico da Lagrangeana à Hamiltoniana é realizada pela transformação de Legendre, em que as velocidades generalizadas $\mathbf{v}$ são expressas em termos do momento conjugado $\mathbf{p}$. Deixamos então o estudo no espaço tangente para usarmos novas coordenadas (x^i, p_i), pertencentes ao espaço cotangente $\mathrm{T}^\sharp\mathrm{Q}$.

Definindo o momento conjugado a coordenada x^i como p_i

$$p_i \equiv \frac{\partial}{\partial v^i} L(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = z_i(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t), \tag{3.6}$$

para poder inverter a função z_i precisamos que o determinante da matriz com elementos $\frac{\partial z_j}{\partial v^i}$ seja diferente de zero, isto é

$$det(W_{ij}) = \frac{\partial}{\partial v^i} z_j(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = \frac{\partial^2}{\partial v^i \partial v^j} L(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \tag{3.7}$$

não é zero.

Logo, para casos de sistemas regulares, a equação para os momentos pode ser invertida e reescrita em termos das velocidades

$$v^i = \chi^i(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t). \tag{3.8}$$

A Hamiltoniana é definida como

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) = p_i \chi^i(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) - L(\mathbf{x}, \chi(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t), t). \tag{3.9}$$

Daqui, as novas equações de movimento nesta abordagem são obtidas mediante

$$\begin{aligned} (i) \quad \frac{\partial H}{\partial x^i} &= \frac{\partial}{\partial x^i} p_j \chi^j(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) - \frac{\partial}{\partial x^i} L(\mathbf{x}, \chi(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t), t), \\ \frac{\partial H}{\partial x^i} &= p_j \frac{\partial \chi^j}{\partial x^i} - \frac{\partial L}{\partial x^i} - \frac{\partial L}{\partial v^j}\frac{\partial \chi^j}{\partial x^i} = -\frac{\partial L}{\partial x^i}, \end{aligned} \tag{3.10}$$

também

$$\begin{aligned} (ii) \quad \frac{\partial H}{\partial p_i} &= \frac{\partial}{\partial p_i} p_j \chi^j(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) - \frac{\partial}{\partial p_i} L(\mathbf{x}, \chi(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t), t), \\ \frac{\partial H}{\partial p_i} &= \chi^i + p_j \frac{\partial \chi^j}{\partial p_i} - \frac{\partial L}{\partial v^k}\frac{\partial \chi^k}{\partial p_i} = \chi^i, \end{aligned} \tag{3.11}$$

e por último

$$\begin{aligned} (iii) \quad \frac{\partial H}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} p_j \chi^j(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) - \frac{\partial}{\partial t} L(\mathbf{x}, \chi(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t), t), \\ \frac{\partial H}{\partial t} &= p_j \frac{\partial}{\partial t} \chi^j(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) - \frac{\partial L}{\partial v^i}\frac{\partial \chi^i}{\partial t} - \frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Para duas funções no espaço cotangente, se definem os Parênteses de Poisson, sejam $A = A(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ e $B = B(\mathbf{x}, \mathbf{p})$

$$\{A, B\} = \frac{\partial A}{\partial x^i}\frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i}\frac{\partial B}{\partial x^i}, \tag{3.13}$$

daqui se pode comprovar que

$$\{x^i, p_j\} = \delta^i_j. \tag{3.14}$$

Essas relações entre as coordenadas e seus momentos conjugados respectivos são chamadas de parênteses fundamentais.

Mediante os parênteses de Poisson é possivel reescrever as equações canônicas como

$$\begin{aligned} \dot{p}_i(t) &= \{p_i, H\}, \\ \dot{x}^i(t) &= \{x^i, H\}. \end{aligned}$$

Em geral, temos que para uma função no espaço cotangente $F(x^i, p^i, t)$

$$\frac{dF}{dt} = \{F, H\} + \frac{\partial F}{\partial t}. \tag{3.15}$$

Daqui duas propriedades se mostram importantes: (i), se uma função $G(x^i, p_i)$ é conservada, $dG/dt = 0$, então $\{G, H\} = 0$, ela comuta com a Hamiltoniana e, (ii), se a Hamiltoniana não depende explicitamente do tempo, $\partial H/\partial t = 0$, a Hamiltoniana é conservada.

A estrutura geométrica para a descrição Hamiltoniana é o que é chamado em matemática de variedades simpléticas, na física é mais conhecida como espaço de fase. A variedade simplética formada pelo espaço de fase, junto com a álgebra dos parênteses de Poisson é o que chamamos de estrutura simplética.

3.2 Sistemas Vinculados *à la* Hamilton-Jacobi

Carathéodory desenvolveu um método alternativo para obter a equação de Hamilton-Jacobi sem fazer uso a transformação de Legendre [15], mas fazendo uso do método das Lagrangeanas equivalentes. O formalismo de Hamilton-Jacobi relaciona tanto o cálculo variacional com a teoria das equações diferenciais parciais de primeira ordem e a teoria das equações diferenciais ordinárias. Outro ponto interessante do formalismo é que este mostra uma interpretação geométrica emtre a Mecânica Clássica e a Ótica Geométrica, ao relacionar o momento conjugado de uma partícula com uma familia de superfícies que evoluem no tempo, o que é análogo à propagação de uma onda.

Primeiramente apresentaremos o método das Lagrangeanas equivalentes para assim obter a equação de Hamilton-Jacobi partindo do formalismo Lagrangeano, iniciando o estudo para sistemas regulares, para depois tratar o problema quando o sistema é singular, isto é, apresenta vínculos. Por simplicidade consideraremos sistemas com finitos graus de liberdade, mas todos os resultados obtidos são extensíveis para sistemas com infinitos graus de liberdade, assim mostraremos algumas aplicações na Teoria de Campos.

3.2.1 Sistemas Regulares

Seja a Lagrangeana $L = L(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ e uma função $S = S(\mathbf{x}, t)$, é possível construir uma nova função $\bar{L} = \bar{L}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ como

$$\bar{L}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = L(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) - \frac{\partial S(\mathbf{x}, t)}{\partial x^i} v^i - \frac{\partial S(\mathbf{x}, t)}{\partial t}. \tag{3.16}$$

Primeira questão: Qual é a diferença entre as equações de movimento para ambas Lagrangeanas? Fazemos então

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{L}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)}{\partial v^i} &= \frac{\partial}{\partial v^i}[L(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) - \frac{\partial S(\mathbf{x}, t)}{\partial x^j} v^j - \frac{\partial S(\mathbf{x}, t)}{\partial t}] \\
\frac{\partial \bar{L}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)}{\partial v^i} &= \frac{\partial L(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)}{\partial v^i} - \frac{\partial S(\mathbf{x}, t)}{\partial x^i},
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{L}}{\partial x^i}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) &= \frac{\partial}{\partial x^i}[L(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) - \frac{\partial S(\mathbf{x}, t)}{\partial x^j} v^j - \frac{\partial Y(\mathbf{x}, t)}{\partial t}] \\
\frac{\partial \bar{L}}{\partial x^i}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) &= \frac{\partial L(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)}{\partial x^i} - \frac{\partial^2 S(\mathbf{x}, t)}{\partial x^i \partial x^j} v^j - \frac{\partial^2 S(\mathbf{x}, t)}{\partial x^i \partial t},
\end{aligned}$$

portanto, na trajetória temos

$$\frac{\partial L}{\partial x^i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v^i} = \frac{\partial \bar{L}}{\partial x^i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \bar{L}}{\partial v^i} = 0. \tag{3.17}$$

Então, as duas Lagrangeanas fornecem as mesmas equações de Euler-Lagrange. Além disso, as ações geradas pelas Lagrangeanas L e $\bar{L}$ vão se diferenciar por uma constante

$$\bar{A}[x^i] = \int_{\bar{t}_1}^{\bar{t}_2} dt \bar{L}(x^i, \dot{x}^i, t) = \int_{\bar{t}_1}^{\bar{t}_2} dt L(x^i, \dot{x}^i, t) - \int_{\bar{t}_1}^{\bar{t}_2} dt \frac{dS}{dt}(x^i, \dot{x}^i, t) = A[x^i] + K,$$

onde K é uma constante e $\bar{t}_A = t_A, \quad A = 1, 2$. Este resultado é conseqüência do campo

$$\frac{\partial S(\mathbf{x}, t)}{\partial x^i} v^i - \frac{\partial S(\mathbf{x}, t)}{\partial t},$$

ser uma derivada total na trajetória. Agora, considerando outra trajetória $(X^i(t), \dot{X}^i(t), t)$

$$\bar{A}[X^i] = \int_{\bar{t}_1}^{\bar{t}_2} dt\bar{L}(X^i, \dot{X}^i, t) = \int_{\bar{t}_1}^{\bar{t}_2} dtL(X^i, \dot{X}^i, t) - \int_{\bar{t}_1}^{\bar{t}_2} dt\frac{dS}{dt}(X^i, \dot{X}^i, t) = A[X^i] + K,$$

conclui-se, então, que $\delta\bar{A} = \bar{A}[X^i] - \bar{A}[x^i] = \delta A = A[X^i] - A[x^i]$.

Segunda questão: É possivel construir uma função $S(\mathbf{x}, t)$ tal que $\bar{L}$ torne-se um extremo da integral da ação? Para resolver, consideramos as funções $\beta^i = \beta^i(\mathbf{x}, t)$ tal que, para $v^i = \beta^i(\mathbf{x}, t)$

$$\bar{L}(\mathbf{x}, \mathbf{v} = \beta(\mathbf{x}, t), t) = L(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) - \frac{\partial S}{\partial x^i}v^i - \frac{\partial S}{\partial t} = 0,$$

e para uma vizinhança de $v^i = \beta^i(\mathbf{x}, t)$

$$\bar{L}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = L(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) - \frac{\partial S}{\partial x^i}v^i - \frac{\partial S}{\partial t} > 0,$$

Estas condições definem um extremo para $\bar{L}$ em $v^i = \beta^i(\mathbf{x}, t)$.

Agora, a relação entre os momentos conjugados

$$\bar{p}_i(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = \frac{\partial\bar{L}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)}{\partial v^i} = \frac{\partial L(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)}{\partial v^i} - \frac{\partial S(\mathbf{x}, t)}{\partial x^i} = p_i(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) - \frac{\partial S(\mathbf{x}, t)}{\partial x^i}.$$

Na condição para o extremo temos $\bar{p}_i = \bar{p}_i(\mathbf{x}, \mathbf{v} = \beta(\mathbf{x}, t), t) = 0$

$$p_i(\mathbf{x}, \mathbf{v} = \beta(\mathbf{x}, t), t) = \frac{\partial S(\mathbf{x}, t)}{\partial x^i}.$$

Também,

$$\begin{aligned} L(\mathbf{x}, \mathbf{v} = \beta(x, t), t) &= \frac{\partial S(\mathbf{x}, t)}{\partial x^i}v^i + \frac{\partial S(\mathbf{x}, t)}{\partial t}, \\ p_i(\mathbf{x}, \mathbf{v} = \beta(\mathbf{x}, t), t)v^i + \frac{\partial S(\mathbf{x}, t)}{\partial t} &- L(\mathbf{x}, \mathbf{v} = \beta(x, t), t) = 0. \end{aligned}$$

Definido a Hamiltoniana do sistema como

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) \equiv p_i v^i(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) - L(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}), \tag{3.18}$$

então temos a chamada Equação de Hamilton-Jacobi

$$\frac{\partial S}{\partial t}(t, \mathbf{x}) + H(t, \mathbf{x}, \frac{\partial S}{\partial x}) = 0, \tag{3.19}$$

esta equação tem uma interpretação geométrica interessante S. Enquanto $S(x, t)$ define uma família de superfícies, o momento $p_i = \partial_i S$ é transverso a estas superfícies. A equação de Hamilton-Jacobi impõe uma nova condição sobre as superfícies definidas por S de modo que a trajetória que é transversa a família de superfícies seja estacionária.

A partir de agora, por simplicidade, escreveremos as funções $f(\mathbf{x})$ como $f(x^i)$.

3.2.2 Equações Características

Dada a equação de Hamilton-Jacobi para um sistema físico e obtendo uma solução para esta, não resulta ainda em uma relação direta que nos permita obter a trajetória dinâmica do sistema a partir da família de superfícies S. Isto é, temos que encontrar uma forma pela qual se possa recuperar o formalismo Hamiltoniano.

Da definição da Hamiltoniana do sistema sobre a trajetória, temos que

$$\frac{\partial H}{\partial p^i} = \frac{d}{dt}x^i = \dot{x}^i. \tag{3.20}$$

Agora, sob a condição de transversalidade do campo p_i com a família de superfícies S em cada ponto da trajetória,

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial x^i},$$

da qual se pode obter informação dinâmica se derivarmos com respeito ao tempo

$$\frac{d}{dt}p_i = \frac{d}{dt}\frac{\partial S}{\partial x^i} = \frac{\partial^2 S}{\partial x^j \partial x^i}v^j + \frac{\partial^2 S}{\partial t \partial x^i}, \tag{3.21}$$

é possível obter do segundo termo do lado direito da última equação, derivando a equação de Hamilton-Jacobi com respeito à variável de posição

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t \partial x^i} + \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial^2 S}{\partial x^i \partial x^j} = -\frac{\partial H}{\partial x^i},$$

mas, da equação (3.20), temos que

$$-\frac{\partial H}{\partial x^i} = \frac{\partial^2 S}{\partial t \partial x^i} + v^j \frac{\partial^2 S}{\partial x^i \partial x^j}, \tag{3.22}$$

comparando as equações, temos, portanto

$$\dot{p}_i(t) = -\frac{\partial H}{\partial x^i}, \tag{3.23}$$

com a qual, voltamos ao sistema de equações canônicas

$$\begin{aligned} dx^i &= \frac{\partial H}{\partial p^i}dt, \\ dp_i &= -\frac{\partial H}{\partial x^i}dt, \end{aligned}$$

a partir da equação de Hamilton-Jacobi, também chamadas de equações características de Hamilton-Jacobi.

Uma nova equação característica resulta da diferenciação da ação

$$dS = \frac{\partial S}{\partial t}dt + \frac{\partial S}{\partial x^i}dx^i = -Hdt + p_i dx^i,$$

portanto

$$dS = (-H + p_i \frac{\partial H}{\partial p_i})dt. \tag{3.24}$$

Aliadas as outras equações características, obtemos um total de $2n+1$ equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, a partir da equação de Hamilton-Jacobi que é uma equação diferencial parcial de primeira ordem.

Outro ponto fundamental no tratamento à Carathéodory é o fato de se considerar a trajetória como uma solução da equação diferencial ordinária $v^i = \phi^i(t, x^j)$; esta condição também é extraída das equações canônicas. Assim, enquanto a primeira equação define o campo de velocidades

$$v^i = f^i(t, x^j, p_j), \tag{3.25}$$

a segunda equação canônica serve para obter os momentos em função das variáveis de posição e tempo,

$$p_j = g_j(t, x^k), \tag{3.26}$$

portanto, unindo estas duas últimas equações temos

$$v^i = f^i(t, x^j, g_j(t, x^k)) = \phi^i(t, x^j). \tag{3.27}$$

Tanto a obtenção das equações características quanto a consideração da trajetória como solução de uma equação diferencial ordinária, partem da equação de Hamilton-Jacobi, é o que é chamado de Quadro Completo de Carathéodory.

3.2.3 Exemplo: O Campo Escalar

É possivel estender a idéia da equação de Hamilton-Jacobi ao caso da Teoria de Campos, desenvolvendo o exemplo do campo escalar real [35]. Consideraremos, como é usual, o parâmetro temporal do tempo Galileano, $\tau = x^0 = ct$, de modo que a hipersuperficie $\Sigma : \tau = x^0$ resulte em uma superficie espacial com vetor normal $N = (1, 0, 0, 0) = n$. A evolução do sistema é de forma tal que para a condição inicial $\Sigma_0 = ct^0$, evolui-se de maneira contínua para outra superficie $\Sigma_1 = ct^1 > ct^0$.

Um campo real ϕ é definido pela transformação

$$\phi(x) \to \phi'(x') = \phi(x) \tag{3.28}$$

Dadas estas considerações para escolher o parâmetro temporal e a transformação de ϕ, pode-se agora, considerar a ação deste sistema em particular como

$$A[\phi] = \int dtL, \qquad L = \int d^3x\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi),$$

onde

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2. \tag{3.29}$$

Por meio das equações de Euler-Lagrange, pode-se mostrar que esta teoria satisfaz a equação de Klein-Gordon-Fock

$$(\partial_\mu\partial^\mu + m^2)\phi(x) = 0. \tag{3.30}$$

Continuando com a teoria de Hamilton-Jacobi, calculamos o momento conjugado

$$\pi(x) \equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\phi)}(x) = \partial^0\phi(x) = \partial_0\phi(x), \tag{3.31}$$

daqui temos que a velocidade $\partial_0\phi$ é inversível, portanto o sistema é regular.

A densidade Hamiltoniana está definida como

$$\mathcal{H} \equiv \pi\partial_0\phi - \mathcal{L} = \frac{1}{2}(\pi)^2 + \frac{1}{2}\partial^i\phi\partial^i\phi + \frac{1}{2}m^2\phi^2, \tag{3.32}$$

esta densidade assim definida resulta sempre positiva.

Agora, por simplicidade, definimos

$$\begin{aligned} \pi^i &= \partial^i\phi, \\ \pi^0 &= \partial^0\phi = \pi, \end{aligned}$$

com o qual $\mathcal{H}$ resulta

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\pi^0\pi^0 + \frac{1}{2}\pi^i\pi^i + \frac{1}{2}m^2\phi^2.$$

Para construir a equação de Hamilton-Jacobi, simplemente temos que generalizar as equações obtidas da mecânica clássica $p_j = \partial_j S$ e $\partial_t S + H = 0$, de modo que

$$\begin{aligned} p^\mu &= \partial^\mu S \\ \partial_\mu S^\mu + \mathcal{H} &= 0. \end{aligned}$$

Identificamos os momentos com as variações da ação com respeito ao campo, assim

$$\begin{aligned} \pi^0 &= \frac{\partial S^0}{\partial\phi}, \\ \pi^i &= \frac{\partial S^i}{\partial\phi}, \end{aligned}$$

onde $S^0 = S$.

A equação de Hamilton-Jacobi $\mathcal{H}(\frac{\partial S}{\partial \phi}, \frac{\partial S^i}{\partial \phi}, \phi) + \partial_\mu S^\mu = 0$, resulta

$$\frac{1}{2}(\frac{\partial S^0}{\partial \phi})^2 + \frac{1}{2}(\frac{\partial S^i}{\partial \phi})^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \partial_0 S^0 + \partial_i S^i = 0, \tag{3.33}$$

ou

$$\frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}(\frac{\partial S^\mu}{\partial \phi})(\frac{\partial S_\nu}{\partial \phi}) + \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \partial_\mu S^\mu = 0. \tag{3.34}$$

Agora, consideramos a separação de variáveis

$$S^\mu = A^\mu(\phi) + B^\mu(x), \tag{3.35}$$

com as quais obtemos duas equações diferenciais

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}(\frac{\partial A^\mu}{\partial \phi})(\frac{\partial A_\nu}{\partial \phi}) + \frac{1}{2}m^2\phi^2 &= \alpha, \\ \partial_\mu B^\mu &= -\alpha. \end{aligned}$$

A segunda equação tem como solução $B^\mu = -\alpha x^\mu$. Para resolver a primeira, eliminaremos o caráter vetorial desta com o auxílio de um vetor unitário k^μ, com $\eta^{\mu\nu}k^\mu k_\nu = 1$, tal que $A^\mu = k^\mu f(\phi)$, assim, é possível reescrever a equação diferencial como

$$[\frac{df}{d\phi}]^2 + m^2\phi^2 = 2\alpha, \tag{3.36}$$

que tem como solução

$$\frac{df}{d\phi} = \sqrt{2\alpha - m^2\phi^2} \rightarrow \ f = \sqrt{2\alpha}\int d\phi \sqrt{1 - \frac{m^2}{2\alpha}\phi^2} = \frac{2\alpha}{m}\int d\psi\sqrt{1-\psi^2},$$

onde $\psi = \frac{m}{\sqrt{2\alpha}}\phi$. Portanto,

$$f = \frac{2\alpha}{m}[\frac{\psi}{2}\sqrt{1-\psi^2} + \frac{1}{2}\arcsin\psi]$$

e, daqui

$$S^\mu = \frac{2\alpha}{m}k^\mu[\frac{\psi}{2}\sqrt{1-\psi^2} + \frac{1}{2}\arcsin\psi] - \alpha x^\mu, \tag{3.37}$$

esta é uma função tanto das variáveis ψ (ou ϕ), x^μ como de um parâmetro α.

Os quadrimomentos podem ser obtidos da definição $\pi^\mu = \partial_\phi S^\mu$

$$\pi^\mu \ = \ \frac{\partial S^\mu}{\partial \psi}\frac{d\psi}{d\phi} = k^\mu \frac{m}{\sqrt{2\alpha}}\frac{2\alpha}{m}\sqrt{1-\psi^2} = k^\mu\sqrt{2\alpha - m^2\phi^2}, \tag{3.38}$$

portanto, o momento conjugado ao campo é

$$\pi = \pi^0 = k^0 \sqrt{2\alpha - m^2\phi^2}. \tag{3.39}$$

Da expressão da função S^0, calcula-se que

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial S^0}{\partial \alpha}) = 0 \rightarrow \frac{\partial S^0}{\partial \alpha} = \beta \tag{3.40}$$

onde β é constante. Portanto, obtemos

$$\beta = -x^0 + \frac{k^0}{m} \arcsin \psi$$

e, daqui,

$$\phi = \frac{\sqrt{2\alpha}}{m} \sin \frac{m}{k^0}(x^0 + \beta). \tag{3.41}$$

Da expressão para o momento, obtemos que

$$\pi = \sqrt{2\alpha} k^0 \cos \frac{m}{k^0}(x^0 + \beta), \tag{3.42}$$

Este problema mostra-se similar ao oscilador harmônico unidimensional à la Hamilton-Jacobi. Para confirmar os resultados, podemos resolver via equações características, onde

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi} = \dot{\phi}, \tag{3.43}$$

que é um resultado do tratamento Hamiltoniano para o campo escalar. Nota-se, também, que da equação (3.39) se obtém a equação de Klein-Gordon-Fock, sem a necessidade de resolver as equações características.

3.3 Tratamento com vínculos

Quando o determinante da Hessiana de um sistema é nula, o sistema é chamado de singular, como a Hessiana é o Jacobiano da transformada de Legendre, o fato de ter uma Hessiana singular impede a construção de uma Hamiltoniana tanto na abordagem clássica como *à la* Carathéodory. Como foi indicado no inicio do capítulo, foi Dirac o primeiro em estudar sistemas singulares no formalismo Hamiltoniano. Aqui, estudaremos o tratamento para sistemos singulares *à la* Carathéodory. Em geral, tinhamos R momentos conjugados com a forma

$$p_a = \frac{\partial L}{\partial v^a}(x^i, v^i) = z_a(x^i, v^a, v^A),$$

donde pode-se escrever as velocidades v^a como

$$v^a = \chi^a(x^i, p_b, v^B),$$

elas são as velocidades inversíveis.

Mas, por outro lado, temos $N - R = K$ momentos conjugados

$$p_A = \frac{\partial L}{\partial v^A}(x^i, v^i),$$

com os quais não se pode inverter as velocidades correspondentes v^A. Estes momentos são considerados vínculos na teoria, dos quais temos

$$p_A - \frac{\partial L}{\partial v^A} = 0. \tag{3.44}$$

É conveniente definir

$$H_A \equiv -\frac{\partial L}{\partial v^A}(x^i, p_a) \tag{3.45}$$

então, o vinculo é

$$\Phi_A \equiv p_A + H_A(x^i, \chi^a) = 0.$$

Aqui, assumimos que as funções H_A não dependam das variáveis v^A, embora essa dependência possa existir, nesse caso diremos que a Lagrangeana é bem comportada.

Na equação de Hamilton-Jacobi

$$\frac{\partial S}{\partial t} + p_i v^i - L = 0, \tag{3.46}$$

onde, os momentos são relacionados com a função S como $p_i = \partial S/\partial v^i$, separaremos os termos que contenham as velocidades, assim

$$\frac{\partial S}{\partial t} + p_a v^a + p_A v^A - L = 0,$$

e substituindo as funções das velocidades resolvidas,

$$\frac{\partial S}{\partial t} + p_a \chi^a(x^i, p_b) + p_A v^A - L = 0. \tag{3.47}$$

De novo, considerando a Hamiltoniana canônica $H_0 = p_a\chi^a(x^i, p_b) + p_A v^A - L$, temos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H_0}{\partial v^B} &= \frac{\partial}{\partial v^B}[p_A v^A + p_a \chi^a - L(x^i, v^A, \chi^a, t)] \\
\frac{\partial H_0}{\partial v^B} &= p_B - \frac{\partial L}{\partial v^B} \equiv \Phi_B = 0,
\end{aligned}$$

portanto, a Hamiltoniana canônica não depende das velocidades não inversíveis v^A. Agora, na equação de Hamilton-Jacobi

$$\Phi_0 = \frac{\partial S}{\partial t} + H_0(x^i, v^a) = 0, \tag{3.48}$$

mas, considerando $p_0 = \partial S/\partial t$, temos que os vínculos do sistema na abordagem de Hamilton-Jacobi são

$$\Phi_0 = p_0 + H_0 = 0, \tag{3.49}$$
$$\Phi_A = p_A + H_A = 0. \tag{3.50}$$

O que se pode escrever de maneira mais compacta se considerarmos uma nova variável $\theta = \{0, 1, 2, ..\}^\dagger$, então

$$\Phi_\theta = p_\theta + H_\theta(x^i, p_a) = 0. \tag{3.51}$$

Esta é a nova forma estabelecida para as equações de Hamilton-Jacobi.

3.3.1 Equações Características no caso singular

Agora procedemos a calcular as equações características nesta abordagem. Para isto, lembremos que temos duas equações

$$p_0 = \frac{\partial S}{\partial t},$$
$$p_i = \frac{\partial S}{\partial x^i},$$

onde a segunda é uma condição para a família de superfícies S. De maneira compacta escrevemos

$$p_\theta = \frac{\partial S}{\partial x^\theta}(x^a, x^\theta), \quad \theta = 0, 1, 2, ..., K \tag{3.52}$$

e $x^0 = t$. Também temos que levar em conta que as equações de Hamilton-Jacobi têm a forma

$$\Phi_\theta(x^a, x^\vartheta, p_a, p_\vartheta) = 0. \tag{3.53}$$

Diferenciando as equações (3.52) e (3.53) obtemos

$$dp_a = \frac{\partial^2 S}{\partial x^a \partial x^b} dx^b + \frac{\partial^2 S}{\partial x^a \partial x^\vartheta} dx^\vartheta, \tag{3.54}$$

†Usaremos em geral, as letras gregas $\theta, \vartheta, \kappa$.

$$\frac{d\Phi_\vartheta}{dx^a} = \frac{\partial\Phi_\vartheta}{\partial x^a} + \frac{\partial\Phi_\vartheta}{\partial p_\theta}\frac{\partial p_\theta}{\partial x^a} + \frac{\partial\Phi_\vartheta}{\partial p_b}\frac{\partial p_b}{\partial x^a} = 0. \tag{3.55}$$

Consideramos, agora, o caso particular em que os Φ_θ sejam funções lineares dos momentos p_θ. Assim,

$$\frac{\partial\Phi_\theta}{\partial p_\vartheta} = \delta_\theta^\vartheta \tag{3.56}$$

e, sob esta consideração, a equação anterior fica

$$\frac{\partial\Phi_\vartheta}{\partial x^a} + \frac{\partial p_\vartheta}{\partial x^a} + \frac{\partial\Phi_\vartheta}{\partial p_b}\frac{\partial p_b}{\partial x^a} = 0. \tag{3.57}$$

Por outro lado, da equação (3.52) podemos escrever $\partial p_\vartheta/\partial x^a$ como

$$\frac{\partial p_\vartheta}{\partial x^a} = \frac{\partial^2 S}{\partial x^\vartheta \partial x^a}.$$

Comparando as duas últimas equações,

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^\vartheta \partial x^a} = -\frac{\partial\Phi_\vartheta}{\partial x^a} - \frac{\partial\Phi_\vartheta}{\partial p_b}\frac{\partial p_b}{\partial x^a}. \tag{3.58}$$

Voltando à equação da diferencial de p_a, temos

$$dp_a = \frac{\partial^2 S}{\partial x^a \partial x^b}dx^b - [\frac{\partial\Phi_\vartheta}{\partial x^a} + \frac{\partial\Phi_\vartheta}{\partial p_b}\frac{\partial p_b}{\partial x^a}]dx^\vartheta. \tag{3.59}$$

Da definição de $\Phi_0 = p_0 + H_0$, temos que

$$\Phi_0 = p_0 + p_\alpha v^\alpha + p_A v^A - L \tag{3.60}$$

então, derivando

$$\frac{\partial\Phi_0}{\partial p_b} = v^b - \frac{\partial H_A}{\partial p_b}v^A = v^b - \frac{\partial\Phi_A}{\partial p_b}v^A \tag{3.61}$$

e reordenando os termos,

$$dx^b = \frac{\partial\Phi_0}{\partial p_b}dt + \frac{\partial\Phi_A}{\partial p_b}dx^A = \frac{\partial\Phi_0}{\partial p_b}dx^0 + \frac{\partial\Phi_A}{\partial p_b}dx^A.$$

Portanto, em forma compacta, pode-se escrever

$$dx^b = \frac{\partial\Phi_\theta}{\partial p_b}dx^\theta. \tag{3.62}$$

Agora, buscamos uma equação análoga para dp_α. Para isso voltamos à equação (3.59):

$$\begin{aligned}
dp_a &= \frac{\partial^2 S}{\partial x^a \partial x^b}\frac{\partial\Phi_\vartheta}{\partial p_b}dx^\vartheta - [\frac{\partial\Phi_\vartheta}{\partial x^a} + \frac{\partial\Phi_\vartheta}{\partial p_b}\frac{\partial p_b}{\partial x^a}]dx^\vartheta, \\
dp_a &= \frac{\partial p_b}{\partial x^a}\frac{\partial\Phi_\vartheta}{\partial p_b}dx^\vartheta - [\frac{\partial\Phi_\vartheta}{\partial x^a} + \frac{\partial\Phi_\vartheta}{\partial p_b}\frac{\partial p_b}{\partial x^a}]dx^\vartheta,
\end{aligned}$$

portanto, obtemos

$$dp_a = -\frac{\partial \Phi_\theta}{\partial x^a} dx^\theta. \tag{3.63}$$

Ainda falta uma equação característica para a variável S. Para calculá-la só é preciso levar em conta que $S = S(x^a, x^\theta)$, então

$$dS = \frac{\partial S}{\partial x^a} dx^a + \frac{\partial S}{\partial x^\theta} dx^\theta,$$

que em termos da coordenada θ resulta

$$dS = [\frac{\partial S}{\partial x^a}\frac{\partial \Phi_\theta}{\partial p_a} + \frac{\partial S}{\partial x^\theta}]dx^\theta = [p_a \frac{\partial H_\theta}{\partial p_a} - H_\theta]dx^\theta. \tag{3.64}$$

Portanto, as equações $(3.62), (3.63)$ e (3.64) são as equações características do sistema. No espaço de configurações as trajetórias dinâmicas restringem-se ao espaço de R dimensões das x^a, que são funções do tempo como das variáveis x^A e que serão agora tratadas como parâmetros do sistema.

Os observáveis físicos F pertencem, então, a um espaço de fase reduzido, onde não têm só um parâmetro de evolução, mas um conjunto deles que são os x^θ. Portanto, para qualquer observável, $F = F(x^a, x^\theta, p_a)$, temos que sua evolução é

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x^a} dx^a + \frac{\partial F}{\partial x^\theta} dx^\theta + \frac{\partial F}{\partial p_a} dp_a,$$

podendo substituir as equações características e assim obter uma equação dos F's dependendo simplemente dos parâmetros

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x^\theta} dx^\theta + [\frac{\partial F}{\partial x^a}\frac{\partial \Phi_\theta}{\partial p_a} - \frac{\partial F}{\partial p_a}\frac{\partial \Phi_\theta}{\partial x^a}]dx^\theta,$$

que se pode reescrever com os Parênteses de Poisson como

$$dF = \{F, \Phi_\theta\} dx^\theta + \frac{\partial F}{\partial x^\theta} dx^\theta. \tag{3.65}$$

3.3.2 Condições de Integrabilidade

Dada a equação de Hamilton-Jacobi, foi possível encontrar as equações de movimento para as variáveis canônicas (posição e momento) completando, assim, o chamado Quadro Completo de Carathéodory. Contudo, é necessário estudar as condições de integrabilidade destas equações obtidas, que garantem a existência de um conjunto completo de equações diferenciais parciais de Hamilton-Jacobi. Estas condições são equivalentes às condições de consistência formuladas por Dirac [19] no seu formalismo Hamiltoniano para sistemas singulares.

Primeiro definimos

$$\chi_\theta^a \equiv \{x^a, \Phi_\theta\}, \tag{3.66}$$

que representa a componente de um vetor X_θ, o qual é um operador diferencial definido como

$$X_\theta \equiv \chi_\theta^a \frac{\partial}{\partial x^a}. \tag{3.67}$$

Aplicado em alguma função F do espaço de configuração, resulta em

$$\begin{aligned} X_\theta(F) &= \chi_\theta^a \frac{\partial F}{\partial x^a} = \{x^a, \Phi_\theta\} \frac{\partial F}{\partial x^a}, \\ X_\theta(F) &= \frac{\partial \Phi_\theta}{\partial p_a} \frac{\partial F}{\partial x^a} = \{F, \Phi_\theta\}. \end{aligned} \tag{3.68}$$

A condição de Integrabilidade de Frobenius, estudada, por exemplo, nas referências [15] e [36], indicam que se X_θ constitui um conjunto completo de vetores linearmente independentes e, por sua vez, formam uma álgebra de Lie:

$$[X_\theta, X_\kappa](F) = C^{\vartheta}{}_{\theta\kappa} X_\vartheta(F), \tag{3.69}$$

as equações características do sistema serão integráveis.

Assim, com as X_θ definidas, satisfazemos a independência linear destas, precisando provar que elas formam uma álgebra, para isto fazemos

$$[X_\theta, X_\kappa](F) = X_\theta[X_\kappa(F)] - X_\kappa[X_\theta](F),$$

estudando cada termo,

$$X_\theta[X_\kappa(F)] = X_\theta(\{F, \Phi_\kappa\}) = \{\{F, \Phi_\kappa\}, \Phi_\theta\}.$$

Portanto,

$$[X_\theta, X_\kappa](F) = \{\{F, \Phi_\kappa\}, \Phi_\theta\} - \{\{F, \Phi_\theta\}, \Phi_\kappa\} = \{\{\Phi_\theta, \Phi_\kappa\}, F\}. \tag{3.70}$$

Caso o sistema seja integrável, temos que se forma um álgebra de Lie sob a seguinte condição

$$\{\Phi_\theta, \Phi_\kappa\} = C^{\vartheta}{}_{\theta\kappa} \Phi_\vartheta, \tag{3.71}$$

isto é, os vínculos também formam uma álgebra de Lie, sob os parentêses de Poisson, com a mesma constante de estructura $C^{\vartheta}{}_{\theta\kappa}$.

Se reformula a condição de integrabilidade, por uma condição mais fraca, tal que a evolução para um vínculo tenha a forma

$$d\Phi_\theta = \{\Phi_\theta, \Phi_\kappa\}dx^\kappa = C^{\vartheta}{}_{\theta\kappa}\Phi_\vartheta dx^\kappa = 0, \tag{3.72}$$

de modo que $d\Phi_\theta = 0$ seja a condição imposta sobre o sistema. Sob esta condição é possível encontrar os chamado parênteses generalizados, que são estudados neste trabalho no contexto de Lagrangeanas de primeira ordem. Esta condição também nos mostra uma forma conveniente de tratar com sistemas em não-involução com o parênteses de Poisson. Em [28] este ponto é tratado com mais detalhe[‡].

3.3.3 Exemplo: O Campo Eletromagnetico Livre

Agora estudaremos o caso do Campo Electromagnético, o qual e caracterizado pelo campo elétrico **E** é o campo magnético **B**, ambos vetores no espaçõ Euclideano. Para construir a teoria covariante para o Campo Electromagnético, precisamos do quadrivetor A^μ o qual é obtido combinando o potencial escalar ϕ e o vetor potencial **A** desta forma:

$$A^\mu = \{\phi, A^1, A^2, A^3\},$$

onde esta equação é dimensionalmente correta ao considerar $c = 1$. Os campos físicos **E** e **B** podem ser obtidos a partir dos campos A^μ assim

$$\begin{aligned} E^i &= -(\partial^0 A^i - \partial^i A^0) = -\partial_t A^i - \partial_i A^0, \\ B^i &= -\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}(\partial^j A^k - \partial^k A^j) = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}(\partial_j A^k - \partial_k A^j), \end{aligned}$$

portanto, é útil definir o tensor de Campo Electromagnético, o campo de Faraday $F_{\mu\nu}$, como

$$F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{3.73}$$

este tensor antisimétrico tem como componentes

$$\begin{aligned} F_{0i} &= E^i, \\ F_{ij} &= -\varepsilon_{ijk}B^k. \end{aligned}$$

A ação do Campo Eletromagnético é

$$A = -\frac{1}{4}\int dx^4 F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \tag{3.74}$$

[‡]ver apêndice B

esta ação nos permite estudar a evolução do sistema em que, como é usual, temos que considerar o parâmetro da teoria à coordenada $\tau = x^0$. Mais adiante, no Capítulo 4, estudaremos o mesmo problema sob outro tipo de parametrização.

Seja π^μ o momento conjugado ao campo A_μ, então

$$\pi^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_\mu)} = -\frac{1}{2} F^{\mu\nu} \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial(\partial_0 A_\mu)} = F^{\mu 0} = -F^{0\mu}, \tag{3.75}$$

isto é $\pi^0 = 0$ e $\pi^i = E^i$, portanto, o sistema não é regular. A singularidade desta teoria também pode ser observada se escrevemos

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = \frac{1}{2}(F_{0i})^2 - \frac{1}{4}(F_{ij})^2,$$

e, fazendo explícitas as coordenadas temporais temos

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_0 A_i - \partial_i A_0)^2 - \frac{1}{4}(F_{ij})^2,$$

na qual observamos que a velocidade $\partial_0 A^0$ não aparece explícitamente nesta densidade Lagrangeana.

O vínculo da teoria pode ser reescrito

$$\Phi^0(x) \equiv \pi^0(x) = 0, \tag{3.76}$$

por outro lado, temos três velocidades $\partial_0 A^i$ que podem ser reescritas a partir dos momentos π_i

$$\pi^i = \partial^i A^0 - \partial^0 A^i,$$

daqui,

$$\partial^0 A^i = \partial^i A^0 - \pi^i. \tag{3.77}$$

Depois de definir os momentos conjugados e o vínculo, o passo seguinte é construir a densidade Hamiltoniana canônica do sistema

$$\mathcal{H} = (\partial_0 A^\mu)\pi_\mu - \mathcal{L},$$

que dá como resultado

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}(\pi_i)^2 + (\partial_i A_0)\pi^i + \frac{1}{4} F_{ij} F^{ij}. \tag{3.78}$$

Portanto, os vínculos da teoria, seguindo o formalismo de Hamilton-Jacobi, são

$$\Phi^0(x) = \pi^0(x) = 0, \tag{3.79}$$
$$\Phi^t(x) = p^t(x) + H(x) = 0, \tag{3.80}$$

onde $p^t = \partial_0 S$, é

$$H(x) = \int d^3x\mathcal{H} = \int d^3x[\frac{1}{2}(\pi_i)^2 + (\partial_i A_0)\pi^i + \frac{1}{4}F_{ij}F^{ij}]. \qquad (3.81)$$

Definindo os Parentêses de Poisson como

$$\{F(x), G(y)\} = \int dz^3[\frac{\delta F(x)}{\delta A_i(z)}\frac{\delta G(y)}{\delta \pi^i(z)} - \frac{\delta F(x)}{\delta \pi^i(z)}\frac{\delta G(y)}{\delta A_i(z)}]_{x^0=cte}, \qquad (3.82)$$

será, agora, possível impor as condições de integrabilidade. Iniciando por Φ^0, temos que

$$d\Phi^0 = \int d^3y\{\Phi^0(x), \Phi^t(y)\}dt + \int d^3y\{\Phi^0(x), \Phi^0(y)\}dA_0. \qquad (3.83)$$

Como

$$\{\Phi^0(x), \Phi^0(y)\} = \{\pi^0(x), \pi^0(x)\} = 0,$$

e

$$\begin{aligned}
\{\Phi^0(x), \Phi^t(y)\} &= \{\pi^0(x), p^t + \mathcal{H}(y)\} = \{\pi^0(x), \mathcal{H}(y)\} \\
&= \int dz^3[\frac{\delta \pi^0(x)}{\delta A_i(z)}\frac{\delta \mathcal{H}(y)}{\delta \pi^i(z)} - \frac{\delta \pi^0(x)}{\delta \pi^i(z)}\frac{\delta \mathcal{H}(y)}{\delta A_i(z)}] \\
&= -\int dz^3\frac{\delta \pi^0(x)}{\delta \pi^i(z)}\frac{\delta \mathcal{H}(y)}{\delta A_i(z)} = -\frac{\delta \mathcal{H}(y)}{\delta A_0(x)},
\end{aligned}$$

a condição para $d\Phi^0 = 0$ se escreve como

$$d\Phi^0 = -\int d^3y\frac{\delta \mathcal{H}(y)}{\delta A_0(x)}dt = -\int d^3y\pi^i(y)\partial_i^y\delta(y-x)dt = \int dy^3\partial_i^y\pi(y)\delta(y-x)dt = 0,$$

o índice y indica que a derivada se aplica na coordenada y. Agora, esta condição de integrabilidade gera um novo vínculo na teoria: Φ^1, o qual é, definido, como

$$\Phi^1(x) \equiv \partial_i^x\pi^i(x) = 0. \qquad (3.84)$$

Para a condição de integrabilidade de Φ^1 ($d\Phi^1 = 0$), calculamos

$$d\Phi^1 = \int d^3y\{\Phi^1(x), \Phi^t(y)\}dt + \int d^3y\{\Phi^1(x), \Phi^0(y)\}dA_0, \qquad (3.85)$$

como $\{\Phi^1(x), \Phi^0(y)\} = 0$, y

$$\{\Phi^1(x), \Phi^t(y)\} = \{\partial_i^x\pi^i(x), \mathcal{H}(y)\} = \partial_i^x\frac{\delta \mathcal{H}(y)}{\delta A_i(x)},$$

portanto,

$$\begin{aligned} d\Phi^1 &= \int d^3y \partial_i^x \frac{\delta \mathcal{H}(y)}{\delta A_i(x)} dt = \int d^3x \partial_i^x [F^{ji}(y) \partial_j^y \delta(x-y)] dt \\ &= \int d^3x \; F^{ji}(y) \partial_i^x \partial_j^y \delta(x-y) dt = dt \partial_i \partial_j F^{ji}, \end{aligned}$$

o que resulta

$$d\Phi^1 = 0 \rightarrow \partial_i \partial_j F^{ij} = 0, \tag{3.86}$$

que é uma identidade, devido à antissimetria do tensor $F_{\mu\nu}$. Assim, Φ^t, Φ^0 y Φ^1 fecham o conjunto de vínculos os quais satisfazem $d\{\Phi\} = 0$.

Considerando como varíaveis independentes t, A_0 e ω, em que a última está relacionada ao vínculo Φ^1, nestas condições, a diferencial fundamental de uma variável dinâmica F quaisquer está dada por

$$dF(x) = \int d^3z \{F(x), \Phi^t(z)\} dt + \int d^3z \{F(x), \Phi^0(z)\} dA_0 + \int d^3z \{F(x), \Phi^1(z)\} d\omega.$$

Aplicaremos esta equação para $F = \{A_i, \pi^i\}$, para isto é necessário calcular os seguintes parênteses

$$\begin{aligned} \{A_i(x), \Phi^t(z)\} &= [\partial_i A_0 - \pi_i] \delta(x-z), \\ \{A_i(x), \Phi^0(z)\} &= 0, \\ \{A_i(x), \Phi^1(z)\} &= \partial_i^z \delta(x-z), \\ \{\pi^i(x), \Phi^t(z)\} &= -\frac{1}{2}[\delta_k^i \partial_j^z \delta(x-z) - \delta_j^i \partial_k^z \delta(x-z)] F^{jk}, \\ \{\pi^i(x), \Phi^0(z)\} &= 0, \\ \{\pi^i(x), \Phi^1(z)\} &= 0. \end{aligned}$$

Agora, substituindo na equação de movimento para A_i, temos que

$$dA_i(x) = \int d^3z [\partial_i A_0 - \pi_i] \delta(x-z) dt + \int d^3z \partial_i^z \delta(x-z) d\omega,$$

daqui obtemos,

$$dA_i(x) = dt[\partial_i A_0 - \pi_i] - \partial_i d\omega, \tag{3.87}$$

da segunda equação de movimento resulta, ao aplicar $F = \pi^i$,

$$\begin{aligned} d\pi^i(x) &= -\frac{1}{2} dt \int d^3z [\delta_k^i \partial_j^z \delta(x-z) - \delta_j^i \partial_k^z \delta(x-z)] F^{jk}, \\ &= \frac{1}{2} dt [\partial_j F^{ji} - \partial_k F^{ik}] = dt \partial_j F^{ji}, \end{aligned} \tag{3.88}$$

isto é o mesmo que dizer $\partial_0 \pi^i = \partial_j F^{ji}$, resumindo as equações de movimento como

$$\partial_0 F^{i0} + \partial_j F^{ij} = 0 \to \partial_\mu F^{i\mu} = 0, \tag{3.89}$$

agora, do vínculo $\partial_i \pi^i = 0$, temos que $\partial_i F^{i0} = \partial_i F^{0i} = 0$, então

$$\partial_i F^{0i} + \partial_0 F^{0i} = 0 \to \partial_\mu F^{0\mu} = 0, \tag{3.90}$$

como resultado final, obtemos

$$\partial_\mu F^{\nu\mu} = 0, \tag{3.91}$$

a equação de Maxwell sem fontes.

3.4 Formalismo de Hamilton-Jacobi para ações de Primeira Ordem

Denomina-se ação de primeira ordem aquela cuja Lagrangeana é linear nas velocidades. Embora este tipo de Lagrangeanas não sejam usuais na mecânica clássica, em que o termo cinético é quadrático nas velocidades, existe uma variedade de sistemas de relativa simplicidade que são vitais na física, por exemplo, o caso de Lagrangeanas formuladas para a equação de Schrödinger, a equação de Dirac, a equação DKP, etc. No contexto de Teoria de Campos, todos os campos conhecidos podem ser levados ao formalismo de primeira ordem via transformações apropriadas. Neste capítulo mostraremos como, por meio da adição de uma divergência ao campo eletromagnético de segundo ordem, torna-se de primeira ordem. No próximo capítulo também analizaremos como alguns campos de segunda ordem estudados no plano nulo tornam-se lineares nas velocidades.

Uma forma geral para essas Lagrangeanos é

$$L(x^i, v^i) = v^i K_i(x^j) - K_0(x^j), \tag{3.92}$$

onde se pode perceber a linearidade nas velocidades. Note-se que também satisfazem a seguinte relação

$$L(x, \lambda v) = \lambda L(x, v).$$

Outra característica importante a considerar é que essas Lagrangeanas possuem matriz Hessiana nula

$$W_{ij} = \frac{\partial^2 L}{\partial v^i \partial v^j} = \frac{\partial K_j}{\partial v^i} = 0,$$

portanto, são sistemas singulares.

Como em outros casos, é possível construir uma nova Lagrangeana $\bar{L}$ adicionando uma divergência à Lagrangeana original, assim, seja $S = S(x^j, t)$, então $\bar{L}$ é definida como

$$\bar{L}(x^j, v^j, t) = L(x^j, v^j) - \frac{\partial S}{\partial t} - v^i \frac{\partial S}{\partial x^i}, \tag{3.93}$$

agora, neste caso em particular pode-se escrever

$$\bar{L}(x^j, v^j, t) = v^i [K_i(x^j) - \frac{\partial S}{\partial x^i}] - [K_0(x^j) + \frac{\partial S}{\partial t}] \equiv v^i \bar{K}_i(x^j, t) - \bar{K}_0(x^j, t).$$

portanto, a transformação

$$\begin{aligned} \bar{K}_i(x^j, t) &= K_i(x^j) - \frac{\partial S}{\partial x^i}, \\ \bar{K}_0(x^j, t) &= K_0(x^j) + \frac{\partial S}{\partial t}, \end{aligned}$$

mantém a linearidade nas velocidades da nova Lagrangeana, isto é, $\bar{L}$ também é uma Lagrangeana de primeira ordem.

O princípio da ação estacionária exige $\bar{L} = 0$ para $v^i = \beta^i(x, t)$ e, na vizinhança de $v^i = \beta^i(x, t)$, temos que $\bar{L} > 0$, então temos que na trajetória

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial v^i} = \frac{\partial S}{\partial x^i}. \tag{3.94}$$

Como a matriz Hessiana é nula, temos que o sistema não é inversível para todas as N velocidades, além disso,

$$v^i \bar{K}_i(x^j, t) - \bar{K}_0(x^j, t) = 0, \tag{3.95}$$

portanto, temos $N + 1$ vínculos

$$\begin{aligned} \Phi_i &\equiv K_i - p_i = 0, \\ \Phi_0 &\equiv K_0 + \frac{\partial S}{\partial t} = 0. \end{aligned}$$

3.4.1 Condições de integrabilidade e parênteses generalizados

Neste capítulo, consideramos índices maiúsculos para identificar as variáveis que não são inversíveis. No caso de sistemas de primeira ordem, todas as velocidades são não inversíveis, não podem ser escritas como funções dos p's momentos, portanto, para manter a convenção de índices, se reescreve $x^B = x^i$, $x^0 = t$, e $x^{B'}$, onde o índice B pode ser, zero ou de 1 até N.

O método das características, que nos permite integrar as equações de Hamilton-Jacobi, nos fornece a seguinte equação diferencial

$$d\Phi_{A'} = \{\Phi_{A'}, \Phi_{B'}\}d\epsilon^{B'} = \{\Phi_{A'}, \Phi_{0'}\}dt + \{\Phi_{A'}, \Phi_B\}d\epsilon^B,$$

fazendo explícita esta equação

$$\begin{aligned} d\Phi_0 &= \{\Phi_0, \Phi_B\}dx^B, \\ d\Phi_A &= \{\Phi_A, \Phi_0\}dt + \{\Phi_A, \Phi_B\}dx^B. \end{aligned}$$

Definindo $M_{AB} \equiv \{\Phi_A, \Phi_B\}$, portanto obtemos

$$d\Phi_A = \{\Phi_A, \Phi_0\}dt + M_{AB}dx^B.$$

Por outro lado, os M_{AB} podem ser reescritos

$$M_{AB} = \{\Phi_A, \Phi_B\} = \{K_A - p_A, K_B - p_B\},$$

onde os parênteses são expressos como

$$M_{AB} = \frac{\partial(K_A - p_A)}{\partial x^C}\frac{\partial(K_B - p_B)}{\partial p_C} - \frac{\partial(K_A - p_A)}{\partial p_C}\frac{\partial(K_B - p_B)}{\partial x^C}.$$

Portanto, a matriz

$$M_{AB} = \frac{\partial K_B}{\partial x^A} - \frac{\partial K_A}{\partial x^B}, \tag{3.96}$$

possui uma expressão mais conveniente já que é invariante sob a adição de uma derivada total na Lagrangeana. Assim, definimos

$$\bar{M}_{AB} = \frac{\partial \bar{K}_B}{\partial x^A} - \frac{\partial \bar{K}_A}{\partial x^B},$$

onde os $\bar{K}$ estão relacionados com os K pela diferença da derivada espacial de uma função conveniente, obtenendo

$$\bar{M}_{AB} = M_{AB},$$

além do mais $M_{AB} = -M_{BA}$.

Retornando ao problema da integração, se consideramos a independência dos $dx^{B'}$, temos que as equações de movimento só serão integráveis no caso

$$\{\Phi_A, \Phi_0\} = M_{AB} = 0,$$

caso contrário, o sistema não será integrável.

Agora, para eliminar a condição da independência dos dx'^B, escrevemos, $\varepsilon^0 = x^0$, $\varepsilon^B = x^B$ e por último, $\varepsilon^{B'}$, com $B' = 0, 1, ..., N$ assumindo que os $d\varepsilon^{B'}$ não são necesariamente independentes, o que fazemos é, então, procurar um sistema de coordenadas em que o sistema considerado seja integrável, o que é satisfeito quando $\Phi_0 = \Phi_B = 0$, portanto,

$$d\Phi_A = \{\Phi_A, \phi_0\}d\varepsilon^0 + \{\Phi_A, \Phi_B\}d\varepsilon^B = 0.$$

Então

$$M_{AB}d\varepsilon^B = -\{\Phi_A, \Phi_0\}d\varepsilon^0. \tag{3.97}$$

Daqui podem acontecer dois casos.

(i) M_{AB} **é regular:**

Por existir a matriz inversa e, portanto,

$$d\varepsilon^B = -(M_{AB})^{-1}\{\Phi_A, \Phi_0\}d\varepsilon^0. \tag{3.98}$$

Como neste novo sistema de coordenadas temos

$$d\Phi_0 = \{\Phi_0, \Phi_B\}d\varepsilon^B,$$

substituindo,

$$d\Phi_0 = -\{\Phi_0, \Phi_B\}(M_{AB})^{-1}\{\Phi_A, \Phi_0\}d\varepsilon^0.$$

Assim como M_{AB}, $(M_{AB})^{-1}$ também satisfaz $(M_{AB})^{-1} = -(M_{BA})^{-1}$ e, portanto, $d\Phi_A = 0$.

Definindo agora os novos parênteses chamados de parênteses generalizados para duas quantidades $F = F(\varepsilon^A, p_A)$ e $G = G(\varepsilon^A, p_A)$, como

$$\{F, G\}^* \equiv \{F, G\} - \{F, \Phi_B\}(M_{BA})^{-1}\{\Phi_A, G\}, \tag{3.99}$$

de modo que, para $F = E$ e $G = \Phi_0$, temos

$$dE = [\{E, \Phi_0\} - \{E, \Phi_B\}(M_{BA})^{-1}\{\Phi_A, \Phi_0\}]d\varepsilon^0 = \{E, \Phi_0\}^* d\varepsilon^0, \tag{3.100}$$

e para $F = M(x^A)$, $G = N(x^B)$, temos

$$\{M, N\}^* = \frac{\partial M}{\partial x^A} M^{-1}_{AB} \frac{\partial N}{\partial x^B}, \tag{3.101}$$

e no caso $M = x^A$, $N = x^B$ temos

$$\{x^A, x^B\}^* = M^{-1}_{AB}. \tag{3.102}$$

Estas duas últimas equações mostram que sob os parênteses generalizados, obtemos uma estrutura simplética do sistema.

Escrevendo de maneira explícita a equação para as funções $E = x^A$, obtemos as equações de movimento do sistema

$$dx^A = \{x^A, \Phi_0\}^* d\varepsilon^0 = M^{-1}_{AB} \frac{\partial K_0}{\partial x^B} d\varepsilon^0. \tag{3.103}$$

(ii) M_{AB} **é singular:**

No caso em que a matriz M_{AB} seja singular, isto é, que possui determinante nulo, é possível obter uma submatriz, de posto $P = N - R$, tal que $det(M_{ab})$ seja não nulo e, portanto, esta submatriz tem inversa.

Considerando esta condição, é possível definir os parênteses generalizados como

$$\{F, G\}^* = \{F, G\} - \{F, \Phi_a\}(M^{-1})^{ab}\{\Phi_b, G\}, \tag{3.104}$$

onde $a, b = 1, 2, ...P$. As equações de movimento são determinadas mediante

$$d\epsilon^A = \{\epsilon^A, \Phi_z\} d\epsilon^z. \tag{3.105}$$

Mas, considerando só as equações de movimento, obtemos

$$dq^A = -(M^{-1})^{AB}(\partial_B K_z - \partial_z K_B) dq^z, \tag{3.106}$$

enquantos que as condições de integrabilidade são

$$\partial_z V = (\partial_z K_A - \partial_A K_z)(M^{-1})^{AB} \partial_B V. \tag{3.107}$$

Portanto, dessas equações obtemos as equações de movimento, assim como as condições de integrabilidade.

Neste caso foi construido o chamado parêntese generalizado, mas é possivel mostrar [28] que não é preciso ter Lagrangeanas de primeira ordem para construir estes parênteses.

No seguinte capítulo mostraremos dois exemplos de Lagrangeanas de primeira ordem e outro exemplo com Lagrangeana de segunda ordem em não-involução em que construíremos os parênteses generalizados.

3.5 Formalismo de primeira ordem para o Campo Eletromagnético Livre

Voltamos a estudar o campo eletromagnético, usando, desta vez, o formalismo de Hamilton-Jacobi de primeira ordem.

A densidade Lagrangeana da teoria é

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu},$$

a qual é de segunda ordem nas velocidades $\partial_0 A^\mu$, então não é possivel utilizar o formalismo de primeira ordem. Contudo, podemos fazer pequenas variações nesta lagrangeana de tal forma que seja possível utilizar o formalismo estudado.

Primeiro, consideramos que tanto A_μ como $F^{\mu\nu}$ são campos independentes, portanto, a densidade Lagrangeana vai depender de 20 variáveis independentes, 4 devidas ao campo vetorial A_μ e 16 relacionadas ao tensor $F_{\mu\nu}$. Agora, devido a o fato de que a dinâmica do sistema não é afetada ao adicionar uma divergencia à densidade Lagrangeana, adicionamos $\partial_\mu[A_\nu(F^{\mu\nu} - F^{\nu\mu})]$:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{4}\partial_\mu[A_\nu(F^{\mu\nu} - F^{\nu\mu})], \tag{3.108}$$

expandindo a divergência obtemos

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4}A_\nu\partial_\mu F^{\mu\nu} - \frac{1}{4}A_\nu\partial_\mu F^{\nu\mu} + \frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu)(F^{\mu\nu} - F^{\nu\mu}) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}.$$

Consideraremos agora A_0, A_i, F^{0i}, F^{i0}, F^{00} y F^{ij} como as variáveis de campo, separaremos $\mathcal{L}$ da seguinte forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4}A_i(\partial_0 F^{0i}) - \frac{1}{4}A_i(\partial_0 F^{i0}) + \frac{1}{4}(F^{0i} - F^{i0})(\partial_0 A_i) - \mathcal{H} \tag{3.109}$$

onde

$$\begin{aligned}\mathcal{H} = {} & \frac{1}{4}A_0(\partial_i F^{0i} - \partial_i F^{i0}) + \frac{1}{4}A_0(\partial_i F^{0i} - \partial_i F^{i0}) + \frac{1}{4}(F^{ji} - F^{ij})\partial_i A_j + \\ & \frac{1}{4}A_i(\partial_j F^{ij} - \partial_j F^{ji}) + \frac{1}{4}[F_{00}F^{00} + F_{0i}F^{0i} + F_{i0}F^{i0} + F_{ij}F^{ij}]\end{aligned} \tag{3.110}$$

Temos três velocidades explícitas na densidade Lagrangeana: $\partial_0 A_i$, $\partial_0 F^{0i}$ e $\partial_0 F^{i0}$, de onde podemos identificar as funções K_A, como

$$\begin{aligned} K^i(x) &\equiv \frac{1}{4}[F^{0i}(x) - F^{i0}(x)], \\ K_{0i}(x) &\equiv \frac{1}{4}A_i(x), \\ K_{i0}(x) &\equiv -\frac{1}{4}A_i(x). \end{aligned}$$

O seguinte passo é construir a matriz M^{A_x,B_y}, onde

$$M^{A_x,B_y} = \frac{\delta K^A(x)}{\delta q_B(y)} - \frac{\delta K^B(y)}{\delta q_A(x)}, \tag{3.111}$$

onde os q's são $q_A = \{q_1 = A_0, q_2 = A_i, q_3 = F^{0i}, q_4 = F^{i0}, q_5 = F^{00}, q_6 = F^{ij}\}$ e $K^A = \{K^1 = 0, K^2 = K^i, K^3 = K_{0i}, K^4 = K_{i0}, K^5 = 0, K^6 = 0\}$. Os únicos valores não nulos da matriz M^{A_x,B_y} são

$$\begin{aligned} M^{1_x,2_y} &= -M^{2_x,1_y} = -\frac{1}{2}\delta^i_j \delta(x-y), \\ M^{1_x,3_y} &= -M^{3_x,1_y} = \frac{1}{2}\delta^i_j \delta(x-y), \end{aligned}$$

Agora, a matriz $M^{A_x B_y}$ se escreve como

$$M^{A_x B_y} = \frac{1}{2}\delta(x-y) \begin{pmatrix} 0 & -I & I & 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.112}$$

onde I é a matriz identidade 3×3. Como esta matriz não é inversível, então reduzimos o número de variáveis, isto é, consideramos como os campos independentes $q^A = \{A^i, F_{0i}\}$, e os demais $A^0, F_{00}, F_{i0}, F_{ij}$ são novos parâmetros, portanto, só precisamos da matriz

$$M^{A_x B_y} = \frac{1}{2}\delta(x-y) \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.113}$$

a qual tem inversa

$$M_{A_x B_y} = 2\delta(x-y) \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.114}$$

Agora, usaremos as condições de integrabilidade nos parâmetros

$$\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta q^A} = (\partial^z K^A - \partial^A K^z) M^{-1} \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta q^B}, \tag{3.115}$$

onde $q^z = \{A^0, F_{00}, F_{i0}, F_{ij}\}$. Para o caso $q^z = A^0$, obtemos

$$\frac{\delta \mathcal{H}(y)}{\delta A^0(x)} = \partial_i [F^{i0} - F^{0i}] = 0. \tag{3.116}$$

Para o caso $q^z = F_{i0}$, obtemos

$$\frac{\delta\mathcal{H}(y)}{\delta F_{i0}(x)} = -(\frac{1}{4}\partial_i A_0 + \frac{1}{2}F_{i0})\delta(y-x) = -(\frac{1}{4}\partial_i A_0 - \frac{1}{2}F_{i0})\delta(y-x) = 0.$$

Portanto, obtemos que

$$F_{i0} = -F_{0i}. \tag{3.117}$$

Para o caso $q^z = F_{00}$, temos que

$$F_{00} = 0 \tag{3.118}$$

e, por último, no caso $q^z = F^{ij}$, obtemos

$$\frac{\delta\mathcal{H}(y)}{\delta F_{ij}(x)} = -\frac{1}{4}(\partial_i A_j - \partial_j A_i - F_{ij})\delta(y-x) = 0,$$

portanto,

$$F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i. \tag{3.119}$$

Dadas as condições de integrabilidade, agora passamos a estudar as equações de movimento:

$$dA^0 = -M^{-1}\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial F_{0j}}dx^0,$$
$$dF^{0i} = -M^{-1}[\{\Phi_j, \Phi_z\}dq^z + \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial A^j}]dx^0,$$

destas equações obtemos

$$\partial_0 A_i = F_{0i} + \partial_i A_0, \tag{3.120}$$
$$\partial_0 F^{0i} = -\partial_j F^{ji}. \tag{3.121}$$

Considerando as equações de movimento e as condições de integrabilidade, obtemos, portanto, as equações de campo eletromagnético livre

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \tag{3.122}$$
$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0. \tag{3.123}$$

O importante ao resolver o problema é que obtemos as equações de movimento sem precisar de uma escolha de gauge em particular.

Capítulo 4

Aplicações no Plano Nulo

Como foi indicado por Dirac [29], existem três formas diversas de estudar a dinâmica de um sistema; elas estão relacionadas com a escolha de hipersuperfície onde são impostas as condições iniciais do sistema. Assim, temos a chamada forma Instantânea, na qual a hipersuperfície é $\Sigma : \tau = x^0$, a forma Pontual, na qual a hipersuperfície é uma hipérbole e a forma Frontal, na qual a hipersuperfície é tangente ao plano do Cone de Luz e para esta forma escrevemos a hipersuperfície como $\Sigma : \tau = x^+$, onde $x^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^0 + x^3)$.

A forma Instantânea é a mais usual para estudar a dinâmica de um sistema. Contudo, a forma Frontal tem sido também amplamente estudada devido à simplicidade da estrutura do vácuo ao estudar fenômenos não perturbativos [37], [38].

A formulação Hamiltoniana dos campos no Plano Nulo tem sido estudada no contexto de sistemas vinculados *à la* Dirac [39], [40], [41], já que, ao escrever os campos em coordenadas de Cone de luz, estes se tornam singulares. O formalismo de Dirac para esses sistemas classifica os vínculos, chamando-os de primeira ou segunda classe, mas estudar os campos no Plano Nulo nos leva a considerar os chamados vínculos próprios e impróprios [42], relacionados com a não unicidade da matriz inversa construída a partir dos vínculos. Vários aspectos sobre o formalismo de Dirac para sistemas vinculados podem ser lidos em [9], [10] e [40].

Neste capítulo utilizaremos o formalismo de Hamilton-Jacobi para estudar alguns sistemas no Plano Nulo. Os casos do campo escalar real e do campo escalar complexo em $(1 + 1)$ dimensões, os quais, apesar de sua simplicidade mostram pontos interessantes que serão vistos em campos com maior estrutura, como por exemplo, no caso do Campo Eletromagnético que também será estudado neste capítulo. Este campo já foi estudado no capítulo anterior sob a parametrização usual $\tau = x^0$, agora não só mostraremos como o formalismo de Hamilton-Jacobi conduz às equações corretas dos campos, como também calcularemos os parênteses generalizados.

4.1 Algumas considerações gerais de Teoria de Campos

Consideraremos uma densidade lagrangeana $\mathcal{L}$ como um funcional de ϕ_r e suas primeiras derivadas $\partial_\mu\phi_r$, onde $r = 1, 2, ..., N$ refere-se ao número de campos que possui esta teoria. A ação é dada por

$$S = \int d^4x\mathcal{L}(\phi_r, \partial_\mu\phi_r), \tag{4.1}$$

a dinâmica da teoria é dada pelas equações de Euler-Lagrange

$$\frac{\delta S}{\delta\phi_r} = \frac{\delta L}{\delta\phi_r} - \frac{d}{dt}\frac{\delta L}{\delta(\partial_\mu\phi_r)} = 0, \tag{4.2}$$

onde

$$\delta S = \int d^4x\frac{\delta S}{\delta\phi_r}\delta\phi_r, \tag{4.3}$$

que leva a considerar uma nova leitura para as equações de Euler-Lagrange em função da densidade Lagrangeana

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_r} - \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_r)} = 0, \tag{4.4}$$

os campo ϕ_r satisfazem uma equação diferencial de, no máximo, segunda ordem.

Assim como no caso da mecânica clássica, a adição de uma derivada total na ação não influi na dinâmica de um sistema; no caso da Teoria de Campos a adição de uma quadridivergência de algum vetor F^μ não afeta a dinâmica do campo, isto é, considerando uma nova densidade Lagrangeana

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} - \partial_\mu F^\mu,$$

as equações de Euler-Lagrange não serão mudadas.

Por outro lado, para iniciar o formalismo de Hamilton-Jacobi é necessário definir o parâmetro temporal τ e, daqui o momento canonicamente conjugado $\pi^r(x)$ à variável de campo $\phi_r(x)$. Considerando a hipersuperfície $\Sigma : \tau = x^0$, e definindo

$$\pi^r = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\phi_r)}, \tag{4.5}$$

e a Hamiltoniana canônica, definida como

$$H(t) = \int d^3x[\pi^r\ \partial_0\phi_r - \mathcal{L}] \tag{4.6}$$

e a densidade Hamiltoniana canônica como $\mathcal{H} = \pi^r\ \partial_0\phi_r - \mathcal{L}$, temos que

$$H(t) = \int d^3x\ \mathcal{H}. \tag{4.7}$$

Se define a matriz Hessiana como

$$W_{rs}(x,y) = \frac{\delta^2 \ L}{\delta_\mu \phi_r(x) \delta_\nu \phi_s(y)} \tag{4.8}$$

que podese reescrever

$$W_{rs}(x,y) = W_{rs}\delta(x-y), : \quad W_{rs} = \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial_\mu \phi_r \ \partial_\nu \phi_s},$$

onde o critério para conhecer a singularidade ou não singularidade da teoria reside na singularidade ou não singularidade da matriz W, isto é, se W tem determinante não nulo e, portanto, possui inversa, então, o sistema é chamado regular; por outro lado, se o determinante de W é nulo, não existe a inversa da Hessiana e a teoria é chamada singular.

Dados dois funcionais $F[\phi,\pi]$ y $G[\phi,\pi]$, são definidos os Parênteses de Poisson como

$$\{F(x), G(y)\} = \int dz^3 [\frac{\delta F(x)}{\delta \phi_r(z)} \frac{\delta G(y)}{\delta \pi^r(z)} - \frac{\delta F(x)}{\delta \pi^r(z)} \frac{\delta G(y)}{\delta \phi_r(z)}]_{x^0=cte}, \tag{4.9}$$

onde as expressões $F(x)$, $G(y)$ são só uma forma simplificada de se escrever $F[\phi_r(x), \pi^r(x)]$ e $G[\phi_r(y), \pi^r(y)]$, respectivamente. Com estes parênteses as equações canônicas do formalismo Hamiltoniano se escrevem como

$$d\phi_r = \{\phi_r, H\}dt = \frac{\delta H}{\delta \pi^r} dt, \tag{4.10}$$

$$d\pi^r = \{\pi^r, H\}dt = -\frac{\delta H}{\delta \phi_r} dt. \tag{4.11}$$

A aparente não covariança na teoria Hamiltoniana está na escolha inicial $\tau = x^0$. Contudo, é possível escolher outro parâmetro temporal, como, por exemplo, dada a hipersuperfície chamado de Plano Nulo, $\Sigma : \tau = x^+$, o momento conjugado é definido como

$$\pi^r \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_+ \phi_r)} \tag{4.12}$$

e a Hamiltoniana canônica é dada por

$$H = \int d^2x dx^- \mathcal{H}, \quad \mathcal{H} = \pi^r \partial_+ \phi_r - \mathcal{L}. \tag{4.13}$$

Dados os momentos conjugados e a densidade Hamiltoniana canônica identificamos os vínculos da teoria. Ainda assim, esses vínculos podem não ser os únicos. É preciso definir o diferencial fundamental, testar todos os vínculos via condições de integrabilidade e procurar novos vínculos. Dado o conjunto completo de vínculos já é possível obter as equações de movimento. Mostraremos nos três exemplos deste capítulo como construímos os parênteses generalizados.

4.2 O Campo Escalar Real no Plano Nulo em (1+1) dimensões

Consideraremos o campo escalar real $\phi(x)$ livre em $(1+1)$ dimensões, cuja ação é definida como

$$S = \int d^2x\mathcal{L}, \quad \mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi(x)\ \partial^\mu\phi(x) - \frac{m^2}{2}\phi^2,$$

onde, $\mu = 0$ e 3, o fator $1/2$ que acompanha o primeiro termo, chamado de termo cinético, é só uma convenção e m tem dimensão de massa. A equação de Euler-Lagrange para este sistema fornece a equação de Klein-Gordon-Fock (KGF)

$$(\partial_\mu\partial^\mu + m^2)\phi(x) = 0. \tag{4.14}$$

Esta teoria é regular, mas ao ser estudada no Plano Nulo ela se torna uma teoria singular, assim,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_+\phi\ \partial^+\phi + \frac{1}{2}\partial_-\phi\ \partial^-\phi - \frac{m^2}{2}\phi^2.$$

Lembremos que

$$\begin{aligned} x^+ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x^0 + x^3), \\ x^- &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x^0 - x^3), \end{aligned}$$

sob esta transformação, agora temos que considerar $x = (x^+, x^-)$, que permite subir e descer os índices nas derivadas parciais como $\partial_- = \partial^+$, $\partial_+ = \partial^-$, portanto, a densidade Lagrangeana se escreve como

$$\mathcal{L} = \partial_+\phi\ \partial_-\phi - \frac{m^2}{2}\phi^2. \tag{4.15}$$

A ação se escreve como

$$S = \int dx^+ L, \quad L = \int dx^-[\partial_+\phi\ \partial_-\phi - \frac{m^2}{2}\phi^2].$$

Neste caso, o termo cinético desce uma ordem na velocidade, portanto, é um sistema de primeira ordem; a linearidade na velocidade $\partial_+\phi$ é evidente. Aqui podemos usar o formalismo de primeira ordem apresentado no capítulo anterior e em [28].

De (4.15) teremos só uma função $K(x)$

$$K(x) \ \equiv \ \pi(x) - \partial_-^x\phi(x), \tag{4.16}$$

onde o índice x sobre a derivada parcial indica o ponto no qual atua a derivada. Como já foi estudado em sistemas de primeira ordem, todas as velocidades são não-inversíveis, portanto forman vínculos. De (4.15) também encontramos a função K_0

$$K_0 = \frac{1}{2} m\phi^2, \tag{4.17}$$

que é a densidade Hamiltoniana canônica do sistema $\mathcal{H}_0$. O cálculo destas funções é equivalente a considerar os vínculos

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\tau &= p_\tau + \mathcal{H}_0 = 0, \\ \mathcal{H}_1 &= \pi - \partial_- \phi = 0. \end{aligned}$$

Temos que levar em conta que os parênteses de Poisson são agora calculados na superfície $x^+ = constante$. Portanto, temos que

$$\begin{aligned} \{\phi(x), \phi(y)\} &= 0, \\ \{\pi(x), \pi(y)\} &= 0, \\ \{\phi(x), \pi(y)\} &= \delta(x^- - y^-), \end{aligned}$$

daqui construímos a matriz 1×1, $M(x, y)$

$$\begin{aligned} M(x, y) &\equiv \frac{\delta K(y)}{\delta \phi(x)} - \frac{\delta K(x)}{\delta \phi(y)} = \{\mathcal{H}_1(x), \mathcal{H}_1(y)\}, \\ &= -\partial_-^x \delta(x^- - y^-) + \partial_-^y \delta(x^- - y^-), \end{aligned}$$

já que $\partial_-^y \delta(y^- - x^-) = -\partial_-^x \delta(x^- - y^-)$, resulta a matriz

$$M(x, y) = -2\partial_-^x \delta(x^- - y^-). \tag{4.18}$$

A condição de integrabilidade para $\mathcal{H}_1$ leva à equação de movimento caso a matriz $M(x, y)$ seja inversível. A matriz inversa, se existe, tem que satisfazer

$$\int dy^- M(x, y) M^{-1}(y, z) = \delta(x^- - z^-),$$

substituindo M

$$\int dy^- \; [\partial_-^x \delta(x^- - y^-)] M^{-1}(y, z) = -\frac{1}{2} \delta(x^- - z^-),$$

como a derivada parcial é avaliada no ponto x, esta comuta com a integral

$$\partial_-^x \int dy^- \delta(x^- - y^-) M^{-1}(y, z) = -\frac{1}{2} \delta(x^- - z^-).$$

Daqui obtemos uma equação diferencial para a matriz M^{-1}

$$\frac{\partial}{\partial x^-}M^{-1}(x,z) = -\frac{1}{2}\delta(x^- - z^-). \tag{4.19}$$

A função $-2M^{-1}(x,z)$ é a função de Green do operador diferencial ∂_-^x, a qual só tem solução única ao se considerar as condições de contorno adequadas a cada sistema. O problema da não-unicidade da matriz inversa é discutida no formalismo de Dirac em [39].

É conhecido que a função sinal $sgn(x)$, ou $\epsilon(x)$, satisfaz a seguinte relação

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dx^-}\epsilon(x^- - z^-) = \delta(x^- - z^-), \tag{4.20}$$

comparando as duas últimas relações temos, portanto,

$$M^{-1}(x,z) = -\frac{1}{4}\epsilon(x^- - z^-) + h(x^+) \tag{4.21}$$

onde $h(x^+)$ tem que satisfazer as relações de contorno do problema considerado.

Calculada a inversa da matriz, os parênteses generalizados são definidos como

$$\{F(x),G(y)\}^* = \{F(x),G(y)\} - \int dw^- \int dz^- \{F(x),\mathcal{H}_1(z)\}M^{-1}(z,w)\{\mathcal{H}_1(w),G(y)\}.$$

Daqui,

$$\begin{aligned}
\{\phi(x),\phi(y)\}^* &= \{\phi(x),\phi(y)\} - \int dw^- \int dz^- \{\phi(x),\mathcal{H}_1(z)\}M^{-1}(z,w)\{\mathcal{H}_1(w),\phi(y)\},\\
\{\pi(x),\pi(y)\}^* &= \{\pi(x),\pi(y)\} - \int dw^- \int dz^- \{\pi(x),\mathcal{H}_1(z)\}M^{-1}(z,w)\{\mathcal{H}_1(w),\pi(y)\},\\
\{\phi(x),\pi(y)\}^* &= \{\phi(x),\pi(y)\} - \int dw^- \int dz^- \{\phi(x),\mathcal{H}_1(z)\}M^{-1}(z,w)\{\mathcal{H}_1(w),\pi(y)\}.
\end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}
\{\phi(x),\mathcal{H}_1(z)\} &= \{\phi(x),\pi(z) - \partial_-^z\phi(z)\} = \delta(x^- - z^-),\\
\{\pi(x),\mathcal{H}_1(z)\} &= \{\pi(x),\pi(z) - \partial_-^z\phi(z)\} = \partial_-^z\delta(z^- - x^-),
\end{aligned}$$

e substituindo

$$\begin{aligned}
\{\phi(x),\phi(y)\}^* &= +\int dw^- \int dz^- \delta(x^- - z^-)[-\frac{1}{4}\epsilon(z^- - w^-) + h(z^+)]\delta(y^- - w^-),\\
\{\pi(x),\pi(y)\}^* &= -\int dw^- \int dz^- \partial_-^z\delta(z^- - x^-)[-\frac{1}{4}\epsilon(z^- - w^-) + h(z^+)]\partial_-^w\delta(w^- - y^-),\\
\{\phi(x),\pi(y)\}^* &= \delta(x^- - y^-)\\
&\quad -\int dw^- \int dz^- \delta(x^- - z^-)[-\frac{1}{4}\epsilon(z^- - w^-) + h(z^+)]\partial_-^y\delta(w^- - y^-),
\end{aligned}$$

portanto

$$\begin{aligned}
\{\phi(x),\phi(y)\}^* &= -\frac{1}{4}\epsilon(x^- - y^-) + h(x^+),\\
\{\pi(x),\pi(y)\}^* &= \frac{1}{2}\partial_-^x\delta(x^- - y^-),\\
\{\phi(x),\pi(y)\}^* &= \frac{1}{2}\delta(x^- - y^-).
\end{aligned}$$

Notemos que o termo de contorno só aparece num dos parênteses.

Como foi mostrado no capítulo anterior, não é preciso construir os parênteses generalizados para o cálculo da equação de movimento do sistema, mas aqui obteremos as equações via esses parênteses. A evolução do campo ϕ está dada por

$$d\phi = \{\phi, H_0\}^* d\tau \tag{4.22}$$

daqui obtemos

$$\partial_+\phi(x) = -\frac{1}{4}m^2\int dy^-\epsilon(x^- - y^-)\phi(y) + m^2\int dy^- h(x^+)\phi(y), \tag{4.23}$$

aplicando a derivada ∂_-, temos

$$\begin{aligned}
\partial_-\partial_+\phi(x) &= -\frac{1}{4}m^2\int dy^-[\partial_-^x\epsilon(x^- - y^-)]\phi(y),\\
\partial_-\partial_+\phi(x) &= -\frac{1}{2}m^2\phi(x).
\end{aligned}$$

Portanto, reproduzimos a equação de Klein-Gordon-Fock em coordenadas de cone de luz

$$(2\partial_+\partial_- + m^2)\phi(x) = 0. \tag{4.24}$$

Considerando a função $h(x^+)$, ela vai desaparecer na equação de movimento, uma vez que é necessario aplicar o operador $\partial_-^x h(x^+) = 0$. Ainda assim, o termo de contorno tem que ser eliminado dos parênteses generalizados, seja porque a antisimetria dos parênteses faz anular o termo ou seja pelo fato que esse termo não aparece nas equações características do formalismo. Portanto,

$$\begin{aligned}
\{\phi(x),\phi(y)\}^* &= -\frac{1}{4}\epsilon(x^- - y^-),\\
\{\pi(x),\pi(y)\}^* &= \frac{1}{2}\partial_-^x\delta(x^- - y^-),\\
\{\phi(x),\pi(y)\}^* &= \frac{1}{2}\delta(x^- - y^-).
\end{aligned}$$

Os parênteses aqui obtidos, segundo o formalismo de Hamilton-Jacobi, são iguais aos parênteses de Dirac, do formalismo Hamiltoniano. Para o processo de quantização canônica, neste caso, temos que substituir os parênteses generalizados pelos comutadores $\{\phi, \pi\}^* \rightarrow i\hbar[\phi, \pi]$, assim

$$[\phi(x), \pi(y)] = i\frac{\hbar}{2}\delta(x^- - y^-), \tag{4.25}$$

a tempos iguais ($x^+ = y^+$).

Pode-se estender este formalismo de maneira direta para aplicá-lo ao campo escalar no plano nulo em $(3+1)$ dimensões. Neste caso obtemos

$$\begin{aligned}
\{\phi(x), \phi(y)\}^* &= -\frac{1}{4}\epsilon(x^- - y^-)\delta^2(\vec{x} - \vec{y}), \\
\{\pi(x), \pi(y)\}^* &= \frac{1}{2}\partial_-^x \delta(x^- - y^-)\delta^2(\vec{x} - \vec{y}), \\
\{\phi(x), \pi(y)\}^* &= \frac{1}{2}\delta(x^- - y^-)\delta^2(\vec{x} - \vec{y}).
\end{aligned}$$

onde o termo $\delta^2(\vec{x} - \vec{y})$ é introduzido devido às componentes transversais ao Plano Nulo.

4.3 Campo Escalar Complexo em (1+1) dimensões

O seguinte exemplo é o caso de um campo escalar complexo $\phi(x) \neq \phi^*(x)$. Esses campos representam partículas carregadas, devido a existir um grau interno de simetria. Considerando a densidade Lagrangeana desses campos como

$$\mathcal{L} = \partial_\mu\phi\ \partial^\mu\phi^* - m^2\phi\phi^*, \quad \mu = 0, 3, \tag{4.26}$$

onde ϕ e ϕ^* são considerados como campos independentes.

No Plano Nulo, esta densidade se escreve como

$$\mathcal{L} = \partial_+\phi(x)\ \partial^+\phi^*(x) + \partial_-\phi(x)\ \partial^-\phi^*(x) - m^2\phi(x)\ \phi^*(x),$$

onde x representa o ponto com coordenadas $x = (x^+, x^-)$. Como no caso do campo escalar, é possível descer os índices nas derivadas $\partial^+\phi^*$ e $\partial^-\phi^*$ obtendo, assim,

$$\mathcal{L} = \partial_+\phi(x)\ \partial_-\phi^*(x) + \partial_-\phi(x)\ \partial_+\phi^*(x) - m^2\phi(x)\ \phi^*(x). \tag{4.27}$$

A coordenada $\tau = x^+$ é considerada uma nova coordenada temporal, então esta densidade Lagrangeana é linear nas velocidades $\partial_+\phi$ e $\partial_+\phi^*$. Daqui encontramos as funções K's e K_0, neste caso,

$$\begin{aligned}
K_0(x) &= m^2\phi(x)\ \phi^*(x), && (4.28) \\
K_1(x) &= \pi(x) - \partial_-\phi^*(x), && (4.29) \\
K_2(x) &= \pi^*(x) - \partial_-\phi(x), && (4.30)
\end{aligned}$$

onde $K_0 = \mathcal{H}_0$ é a densidade Hamiltoniana canônica do sistema, e os momentos conjugados são

$$\begin{aligned} \pi(x) &= \partial_-\phi^*(x), & (4.31) \\ \pi^*(x) &= \partial_-\phi(x), & (4.32) \end{aligned}$$

o cálculo das funções K's é equivalente ao considerar os vínculos

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\tau &= \pi_\tau + \mathcal{H}_0 = 0, & (4.33) \\ \mathcal{H}_1 &= \pi - \partial_-\phi^* = 0, & (4.34) \\ \mathcal{H}_2 &= \pi^* - \partial_-\phi = 0. & (4.35) \end{aligned}$$

Para o caso do campo complexo, os únicos parênteses de Poisson, definidos sobre uma superfície de $x^+ = cte$ não nulos são

$$\{\phi(x), \pi(x)\} = \{\phi^*(x), \pi^*(x)\} = \delta(x^- - y^-) \tag{4.36}$$

Construímos agora a matriz 2×2: $M_{AB}(x, y)$, onde

$$M_{AB}(x, y) = \frac{\delta K_A(y)}{\delta\phi^B(x)} - \frac{\delta K_B(x)}{\delta\phi^B}, \quad A, B = 1, 2, \tag{4.37}$$

onde $\phi^1 = \phi$, e $\phi^2 = \phi^*$, isto é equivalente a considerar

$$M_{AB}(x, y) = \begin{pmatrix} \{\mathcal{H}_1(x), \mathcal{H}_1(y)\} & \{\mathcal{H}_1(x), \mathcal{H}_2(y)\} \\ \{\mathcal{H}_2(x), \mathcal{H}_1(y)\} & \{\mathcal{H}_2(x), \mathcal{H}_2(y)\} \end{pmatrix}, \; A, B = 1, 2.$$

Como

$$\begin{aligned} &\{\mathcal{H}_1(x), \mathcal{H}_1(y)\} = \{\mathcal{H}_2(x), \mathcal{H}_2(y)\} = 0, \\ &\{\mathcal{H}_1(x), \mathcal{H}_2(y)\} = \{\mathcal{H}_2(x), \mathcal{H}_1(y)\} = -2\partial_-^x\delta(x^- - y^-), \end{aligned}$$

substituindo estes parênteses

$$M_{AB}(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & -2\partial_-^x\delta(x^- - y^-) \\ -2\partial_-^x\delta(x^- - y^-) & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.38}$$

Como já foi indicado no caso do campo real, a matriz inversa satisfaz a relação

$$\int du^- M_{AC}(x, u) M_{CB}^{-1}(u, y) = \delta_{AB}\delta(x^- - y^-). \tag{4.39}$$

Escrevendo a inversa como

$$M^{-1}(x, y) = \begin{pmatrix} a(x, y) & b(x, y) \\ c(x, y) & d(x, y) \end{pmatrix} \tag{4.40}$$

e substituindo na equação anterior, obtemos que

$$a(x,y) = d(x,y) = 0, \tag{4.41}$$

enquanto $b(x,y)$ e $c(x,y)$ tem que satisfazer a seguinte equação diferencial

$$\partial_-^x b(x,y) = \partial_-^x c(x,y) = -\frac{1}{2}\delta(x^- - y^-). \tag{4.42}$$

Obtemos uma relação análoga com a obtida no caso do campo real. Sabemos também que as soluções dependem das condições de contorno do problema, daqui

$$b(x,y) = c(x,y) = -\frac{1}{4}\epsilon(x^- - y^-) + f(x^+), \tag{4.43}$$

nota-se que consideramos, tanto para $b(x,y)$ e $c(x,y)$ a mesma função $f(x^+)$, isto é devido à Lagrangeana do campo complexo em que as coordenadas do Plano Nulo são de primeira ordem e, portanto, só é preciso uma única condição de contorno para o problema. Sob essas considerações, temos que a matriz inversa é

$$[M^{-1}]_{AB}(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{4}\epsilon(x^- - y^-) + f(x^+) \\ -\frac{1}{4}\epsilon(x^- - y^-) + f(x^+) & 0 \end{pmatrix}.$$

Construímos agora os parênteses generalizados

$$\begin{aligned} \{F(x), G(y)\}^* &= \{F(x), G(y)\} \\ &\quad - \int dz^- \int dw^- \{F(x), \mathcal{H}_A(z)\}[M^{-1}]_{AB}(z,w)\{\mathcal{H}_B(w), G(y)\}, \end{aligned}$$

e, como a matriz inversa tem traço nulo,

$$\begin{aligned} \{F(x), G(y)\}^* &= \{F(x), G(y)\} \\ &\quad - \int dz^- \int dw^- \{F(x), \mathcal{H}_1(z)\}[M^{-1}]_{12}(z,w)\{\mathcal{H}_2(w), G(y)\} \\ &\quad - \int dz^- \int dw^- \{F(x), \mathcal{H}_2(z)\}[M^{-1}]_{21}(z,w)\{\mathcal{H}_1(w), G(y)\}. \end{aligned}$$

Daqui obtemos os parênteses generalizados fundamentais não nulos

$$\begin{aligned} \{\phi(x), \phi^*(y)\}^* &= -\frac{1}{4}\epsilon(x^- - y^-) + f(x^+), \\ \{\pi^*(x), \pi(y)\}^* &= \frac{1}{2}\partial_-^x \delta(x^- - y^-), \\ \{\phi(x), \pi(y)\}^* &= \frac{1}{2}\delta(x^- - y^-), \\ \{\phi^*(x), \pi^*(y)\}^* &= \frac{1}{2}\delta(x^- - y^-). \end{aligned}$$

Neste caso também obtemos que a função $f(x^+)$ que só afeta um dos parênteses generalizados. Como foi indicado no caso do campo real, é possível eliminar o termo de contorno $f(x^+)$ devido a que este não aparece nas equações canônicas do formalismo.

As equações de movimento para ϕ e ϕ^* são obtidas mediante

$$\begin{aligned} d\phi(x) &= d\tau \int dy^- \{\phi(x), \mathcal{H}(y)\}^*, \\ d\phi^*(x) &= d\tau \int dy^- \{\phi^*(x), \mathcal{H}(y)\}^*. \end{aligned}$$

Daqui,

$$\begin{aligned} \partial_+\phi(x) &= -\frac{1}{4}m^2 \int dy^- \epsilon(x^- - y^-)\phi(y), \\ \partial_+\phi^*(x) &= -\frac{1}{4}m^2 \int dy^- \epsilon(x^- - y^-)\phi^*(y), \end{aligned}$$

e, por último, para obter a equação de Klein-Gordon-Fock, aplicamos a derivada parcial com respeito a x^-

$$(2\partial_-\partial_+ + m^2)\phi(x) = 0, \tag{4.44}$$

$$(2\partial_-\partial_+ + m^2)\phi^*(x) = 0. \tag{4.45}$$

Portanto, obtemos equações de KGF tanto para o campo $\phi(x)$ como para $\phi^*(x)$.

Uma extensão deste exemplo para o caso de um campo complexo em $(3 + 1)$ dimensões leva a obtenção dos seguintes parênteses generalizados

$$\begin{aligned} \{\phi(x), \phi^*(y)\}^* &= -\frac{1}{4}\epsilon(x^- - y^-)\delta^2(\vec{x} - \vec{y}), \\ \{\pi^*(x), \pi(y)\}^* &= \frac{1}{2}\partial_-^x \delta(x^- - y^-)\delta^2(\vec{x} - \vec{y}), \\ \{\phi(x), \pi(y)\}^* &= \frac{1}{2}\delta(x^- - y^-)\delta^2(\vec{x} - \vec{y}), \\ \{\phi^*(x), \pi^*(y)\}^* &= \frac{1}{2}\delta(x^- - y^-)\delta^2(\vec{x} - \vec{y}), \end{aligned}$$

tanto estes parênteses como os obtidos no caso de $(1 + 1)$ dimensão são os mesmos calculados via o formalismo de Dirac; com estes parênteses o processo de quantização canônica é imediato via o Princípio de Correspondência.

4.4 Campo Eletromagnético

No capítulo anterior, já tínhamos estudado o caso de um campo vetorial não massivo, o campo Eletromagnético, que é um campo de gauge abeliano. Agora estudaremos este campo no Plano Nulo, aplicando o método de Hamilton-Jacobi.

Seja o campo vetorial A^μ, e sua densidade Lagrangeana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \tag{4.46}$$

onde $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Este sistema é singular já que não tem o termo $\partial_0 A^0$. Ao escrever este sistema nas coordenadas de cone de luz ainda ele é singular, mas existem diversas abordagems para resolver o problema *à la* Hamilton-Jacobi. Por exemplo, é possível utilizar o formalismo de primeira ordem; neste caso temos que fazer novas considerações como acrescentar ao lagrangeano um termo de superfície, assim como considerar tanto os A's como os F's como variáveis independentes. Em [31] é usado este método para a teoria de Yang-Mills. Tal formalismo é atribuído a Deser [43]. Ele indica em notas pedagógicas [44] que o método de construção de Lagrangeanas de primeira ordem a partir de Lagrangeanas de segunda ordem, é simplesmente um caso partícular da teoria de Ostrogadski.

Escrevendo a densidade Lagrangeana em termos das coordenadas de cone de luz, temos que

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}(2F_{+-}F^{+-} + 2F_{+i}F^{+i} + 2F_{-i}F^{-i} + F_{ij}F^{ij}), \quad i,j = 1,2. \tag{4.47}$$

Em coordenadas de cone de luz os índices do tensor $F^{\mu\nu}$ satisfazem: $F_{-+} = F^{+-}$, $F_{-i} = -F^{+i}$, $F_{+i} = -F^{-i}$, $F_{ij} = F^{ij}$, portanto,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(F_{+-})^2 + (F_{+i})(F_{-i}) - \frac{1}{4}(F_{ij})^2. \tag{4.48}$$

Este sistema não é de primeira ordem. Existe também um método para utilizar o formalismo de primeira ordem em Lagrangeanas de ordem superior [27], ainda assim, aqui utilizaremos o processo mostrado em [28]. Os momentos conjugados a cada uma das variáveis são

$$\pi^+ \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_+ A_+)} = 0, \tag{4.49}$$

$$\pi^i \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_+ A_i)} = F^{i+}, \ i = 1,2 \tag{4.50}$$

$$\pi^- \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_+ A_-)} = F^{-+}. \tag{4.51}$$

As duas primeiras equações representam vínculos na teoria, mas a terceira não é um vínculo, já que ela possui um termo de velocidade.

Agora é preciso calcular a densidade Hamiltoniana canônica $\mathcal{H}_0 = \pi^\mu \partial_+ A_\mu - \mathcal{L}$:

$$H_0 = \int dx^- d^2x [\frac{1}{2}(\pi^-)^2 + \frac{1}{4}F_{ij}^2 + \pi^i \partial_i A_+ + \pi^- \partial_- A_+]. \tag{4.52}$$

Ainda é possível simplificar a Hamiltoniana se eliminarmos os termos de contorno, assim

$$\begin{aligned} \pi^i \partial_i A_+ &= \partial_i(\pi^i A_+) - A_+ \partial_i \pi^i, \\ \pi^- \partial_- A_+ &= \partial_-(\pi^- A_+) - A_+ \partial_- \pi^-, \end{aligned}$$

portanto,

$$H_0 = \int dx^- d^2x \mathcal{H} = \int dx^- d^2x [\frac{1}{2}(\pi^-)^2 + \frac{1}{4}F_{ij}^2 - A^-(\partial_i \pi^i + \partial_- \pi^-)]. \qquad (4.53)$$

Escrevemos os vínculos da teoria como

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\tau &\equiv p_\tau + \mathcal{H}_0 = 0, && (4.54) \\ \mathcal{H}_+ &\equiv \pi^+ = 0, && (4.55) \\ \mathcal{H}_1 &\equiv \pi^1 - \partial^1 A^+ + \partial^+ A^1 = 0, && (4.56) \\ \mathcal{H}_2 &\equiv \pi^2 - \partial^2 A^+ + \partial^+ A^2 = 0. && (4.57) \end{aligned}$$

Portanto, temos como variáveis independentes da teoria ao conjunto (τ, A_+, A_1, A_2). O diferencial fundamental está dado por

$$dF = \{F, H_\tau\}d\tau + \{F, H_+\}dA_+ + \{F, H_1\}dA_1 + \{F, H_2\}dA_2, \qquad (4.58)$$

onde $H_\mu = \int dx^- d^2x \mathcal{H}_\mu$, e os parênteses de Poisson são definidos na superfície $x^+ = cte$,

$$\{F(x), G(y)\}_{x^+=y^+} = \int dz^- d^2z [\frac{\delta F(x)}{\delta A_\mu(z)} \frac{\delta G(y)}{\delta \pi^\mu(z)} - \frac{\delta F(x)}{\delta \pi^\mu(z)} \frac{\delta G(y)}{\delta A_\mu(z)}]. \qquad (4.59)$$

Daqui obtemos os parênteses fundamentais

$$\begin{aligned} \{A^\mu(x), \pi^\nu(y)\} &= g^{\mu\nu}\delta(x^- - y^-)\delta^2(\vec{x} - \vec{y}), \\ \{A^\mu(x), A^\nu(y)\} &= 0, \\ \{\pi^\mu(x), \pi^\nu(y)\} &= 0, \end{aligned}$$

onde $\delta^2(\vec{x} - \vec{y}) = \delta(x^1 - y^1)\delta(x^2 - y^2)$ e onde os únicos termos não nulos da métrica são $g^{ij} = -\delta_{ij}$, $g^{+-} = g^{-+} = 1$.

Considerando, a seguir, as condições de integrabilidade dos vínculos substituir o diferencial fundamental $F = H_+$ e $F = H_i$. Precisaremos dos seguintes parênteses

$\{\mathcal{H}_A(x), \mathcal{H}_B(y)\}$	$\mathcal{H}_\tau(y)$	$\mathcal{H}_+(y)$	$\mathcal{H}_1(y)$	$\mathcal{H}_2(y)$
$\mathcal{H}_+(x)$	$\pi^i(y)\partial_i^x + \pi^-(y)\partial_-^x$	0	0	0
$\mathcal{H}_1(x)$	$-\partial_2^x F^{12}(y) + \partial_1^x \pi^-(y)$	0	$-2\partial_-^x$	0
$\mathcal{H}_2(x)$	$\partial_1^x F^{12}(y) + \partial_2^x \pi^-(y)$	0	0	$-2\partial_-^x$

onde todos os termos devem estar acompanhados de $\delta(x^- - y^-)\delta^2(\vec{x} - \vec{y})$.

Da condição de integrabilidade para $\mathcal{H}_+$, temos que

$$\begin{aligned} d\mathcal{H}_+ &= \int dy^- d^2y \{\mathcal{H}_+(x), \mathcal{H}_\tau(y)\}d\tau, \\ &= \int dy^- d^2y (\partial_i \pi^i + \partial_- \pi^-)\delta(x^- - y^-)\delta^2(\vec{x} - \vec{y})d\tau, \\ &= (\partial_i \pi^i + \partial_- \pi^-)d\tau, \end{aligned}$$

o que resulta em um novo vínculo

$$\mathcal{H}_3(x) \equiv \partial_i^x \pi^i(x) + \partial_-^x \pi^-(x) = 0. \tag{4.60}$$

A condição $d\mathcal{H}_i = 0$ não gera novos vínculos. Então, a partir da diferencial fundamental encontramos só um novo vínculo. Este vínculo também tem que satisfazer a condição de integrabilidade. Pode-se mostrar que $\mathcal{H}_3$ está em involução com $\mathcal{H}_+$ e $\mathcal{H}_i$, mas

$$\{\mathcal{H}_3(x), H_\tau\} = -\int dy^- d^2y \partial_i^x \ \partial_j^x F_{ji}(y)\delta(x^- - y^-)\delta^2(\vec{x} - \vec{y}),$$

substituindo na condição de integrabilidade

$$\begin{aligned} d\mathcal{H}_3 &= \{\mathcal{H}_3(x), H_\tau(y)\}d\tau, \\ &= \int dy^- d^2y \ \partial_i^x \partial_j^x F_{ji}(y)\delta(y^- - x^-)\delta^2(\vec{y} - \vec{x})d\tau, \\ &= \partial_i^x \partial_j^x F_{ji} d\tau, \end{aligned}$$

mas, pela antisimetria de F_{ij}, temos que este resultado é identicamente zero, portanto, temos uma condição do tipo $0 = 0$, em que o vínculo satisfaz a condição de integrabilidade e não gera um novo vínculo.

Portanto, o conjunto de todos os vínculos que satisfazem $d\{\mathcal{H}\} = 0$, está formado por $\mathcal{H}_+, \mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ é $\mathcal{H}_3$, mas não existem variáveis relacionadas com o vínculo $\mathcal{H}_3$, desta forma, expandimos o espaço das variáveis considerando ω a variável correspondente a $\mathcal{H}_3$. Assim, a diferencial fundamental formada por todos esses vínculos resulta

$$dF = \{F, H_\tau\}d\tau + \{F, H_+\}dA_+ + \{F, H_1\}dA_1 + \{F, H_2\}dA_2 + \{F, H_3\}d\omega.$$

Como é indicado em [28], é possível construir os parênteses generalizados para sistemas em não-involução, como neste caso, por isso construímos uma matriz com o seguinte conjunto de vínculos

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_+(x) &= \pi^+(x), \\ \mathcal{H}_1(x) &= \pi^1(x) + F_{1-}(x), \\ \mathcal{H}_2(x) &= \pi^2(x) + F_{2-}(x), \\ \mathcal{H}_3(x) &= \partial_i \pi^i(x) + \partial_- \pi^-(x), \end{aligned}$$

Resumindo os parênteses de Poisson entre todos estes vínculos na tabela

$\{\mathcal{H}_A(x),\mathcal{H}_B(y)\}$	$\mathcal{H}_+(y)$	$\mathcal{H}_1(y)$	$\mathcal{H}_2(y)$	$\mathcal{H}_3(y)$
$\mathcal{H}_+(x)$	0	0	0	0
$\mathcal{H}_1(x)$	0	$-2\partial_-^x$	0	0
$\mathcal{H}_2(x)$	0	0	$-2\partial_-^x$	0
$\mathcal{H}_3(x)$	0	0	0	0

observamos que nem todos os parênteses de Poisson são nulos, demostrando que o sistema está em não-involução. Além disso, temos que a matriz formada por estes vínculos é singular, então, temos que nos restringir-la submatriz $\bar{M}_{AB}$,

$$\bar{M}_{AB}(x,y) = \begin{pmatrix} -2\partial_-^x \delta(x^- - y^-)\delta(\vec{x}-\vec{y}) & 0 \\ 0 & -2\partial_-^x \delta(x^- - y^-)\delta(\vec{x}-\vec{y}) \end{pmatrix}, \quad A,B = 1,2,$$

a qual é regular e possui inversa

$$[\bar{M}^{-1}]_{AB}(x,y) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}\epsilon(x^- - y^-)\delta(\vec{x}-\vec{y}) & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4}\epsilon(x^- - y^-)\delta^2(\vec{x}-\vec{y}) \end{pmatrix}, \quad A,B = 1,2,$$

pelas mesmas considerações dos casos do campo escalar real e complexo, não levamos em consideração o termo de contorno. Os parênteses generalizados serão definidos com esta matriz reduzida

$$\begin{aligned} \{F(x),G(y)\}^* &= \{F(x),G(y)\} \\ &\quad - \int dz^- d^2z \int dw^- d^2w \{F(x),\mathcal{H}_1(z)\}[\bar{M}^{-1}]_{11}(z,w)\{\mathcal{H}_1(w),G(y)\} \\ &\quad - \int dz^- d^2z \int dw^- d^2w \{F(x),\mathcal{H}_2(z)\}[\bar{M}^{-1}]_{22}(z,w)\{\mathcal{H}_2(w),G(y)\}. \end{aligned}$$

Daqui obtemos que os únicos parênteses não nulos são

$$\{A^-(x),\pi^+(y)\}^* = \delta(x^- - y^-)\delta^2(\vec{x}-\vec{y}), \tag{4.61}$$
$$\{A^+(x),\pi^-(y)\}^* = \delta(x^- - y^-)\delta^2(\vec{x}-\vec{y}), \tag{4.62}$$
$$\{A^i(x),A^j(y)\}^* = -\frac{1}{4}\delta_{ij}\epsilon(x^- - y^-)\delta^2(\vec{x}-\vec{y}), \tag{4.63}$$
$$\{A^i(x),\pi^-(y)\}^* = -\frac{1}{4}\partial_i^x\epsilon(x^- - y^-)\delta^2(\vec{x}-\vec{y}), \tag{4.64}$$
$$\{A^i(x),\pi^j(y)\}^* = -\frac{1}{2}\delta_{ij}\delta(x^- - y^-)\delta^2(\vec{x}-\vec{y}), \tag{4.65}$$
$$\{\pi^-(x),\pi^i(y)\}^* = -\frac{1}{2}\partial_i^x\delta(x^- - y^-)\delta^2(\vec{x}-\vec{y}), \tag{4.66}$$
$$\{\pi^-(x),\pi^-(y)\}^* = \frac{1}{4}\nabla^2\epsilon(x^- - y^-)\delta^2(\vec{x}-\vec{y}), \tag{4.67}$$
$$\{\pi^i(x),\pi^j(y)\}^* = \frac{1}{2}\delta_{ij}\partial_-^x\delta(x^- - y^-)\delta^2(\vec{x}-\vec{y}). \tag{4.68}$$

As equações de movimento são obtidas mediante

$$dF = \{F,H_\tau\}^* d\tau + \{F,H_+\}^* dA_+ + \{F,H_3\}^* d\omega, \tag{4.69}$$

substituindo os vínculos ou hamiltonianas por suas respectivas densidades

$$\begin{aligned} dF &= \int dy^- d^2y \{F(x),\mathcal{H}_\tau(y)\}^* d\tau + \int dy^- d^2y \{F(x),\mathcal{H}_+(y)\}^* dA_+ \\ &\quad + \int dy^- d^2y \{F(x),\mathcal{H}_3(y)\}^* d\omega. \end{aligned} \tag{4.70}$$

Daqui obtemos as seguintes equações

$$\begin{aligned} dA^+ &= [\pi^- + \partial_- A^-]d\tau - \partial_- d\omega, && (4.71)\\ d\pi^+ &= [\partial_i \pi^i + \partial_- \pi^-]d\tau, && (4.72)\\ dA^- &= dA_+, && (4.73)\\ d\pi^- &= \frac{1}{4}\partial_j^x \partial_j^x \int dy^- d^2y \pi^-(y)\epsilon(x^- - y^-)\delta^2(\vec{x}-\vec{y})d\tau, && (4.74)\\ dA^i &= \frac{1}{4}\int dy^- d^2y[-\partial_i^x \pi^-(y) + \delta_{1i}\partial_2^x F_{12}(y) + \delta_{2i}\partial_1^x F_{21}(y)]\epsilon(x^- - y^-)\delta^2(\vec{x}-\vec{y})d\tau \\ &\quad -\partial_i A^- d\tau + \partial_i^x d\omega, && (4.75)\\ d\pi^i &= [-\frac{1}{2}\partial_i^x \pi^- + \frac{1}{2}\delta_{2i}\partial_1^x F_{12} + \frac{1}{2}\delta_{1i}\partial_2^x F_{21}]d\tau. && (4.76) \end{aligned}$$

Levando em conta que $\pi^\mu = F^{\mu+}$, obtemos as seguintes equações

$$\begin{aligned} \partial_\mu F^{\mu+} &= 0, && (4.77)\\ \partial_\mu F^{\mu i} &= 0, && (4.78) \end{aligned}$$

e a partir dessas, satisfaz-se

$$\partial_\mu F^{\mu-} = 0. \quad (4.79)$$

Portanto, destas três últimas equações obtemos

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0. \quad (4.80)$$

a equação de Maxwell sem fontes.

No caso do campo eletromagnético sem fontes no Plano Nulo, obtemos os parênteses generalizados do sistema, ainda sendo este um campo em não-involução e de segunda ordem.

Capítulo 5

Considerações Finais

Neste trabalho estudamos alguns aspectos da dinâmica no Plano Nulo na Teoria de Campos. Devido à singularidade das teorias a serem escritas em coordenadas de cone de luz utilizamos o formalismo de Hamilton-Jacobi para tratar estes sistemas.

Como aplicações do formalismo de Hamilton-Jacobi no Plano nulo estudamos três exemplos: o campo escalar real e complexo massivo em $(1+1)$ dimensões e o campo eletromagnético em $(3+1)$ dimensões.

Apesar da simplicidade do estudo do campo escalar real e do campo complexo em $(1+1)$ dimensões, eles mostram pontos importantes a serem utilizados em campos mais elaborados. Tanto o campo real como o complexo na forma instantânea são regulares, no entanto, em coordenadas de cone de luz o termo cinético diminui uma ordem, o sistema é agora de primeira ordem e, portanto, singular. Dados os vínculos da teoria e contruída a matriz entre eles, o cálculo da matriz inversa mostra a não-unicidade desta matriz. Portanto, existe uma família de inversas, as quais diferem por termos de contorno; a própria natureza do formalismo de Hamilton-Jacobi elimina estes termos. E, a partir da matriz inversa construímos os parênteses generalizados. Nos casos considerados eles são iguais aos obtidos pelo formalismo de Dirac.

No Plano Nulo o campo Eletromagnético não se torna de primeira ordem, mas ainda assim é singular. Neste caso temos vínculos em involução por isso a matriz construida pelos vínculos será singular. Para eliminar este problema, precisamos de escolher uma submatriz regular com a qual se constrói os parênteses generalizados. O problema da não unicidade da matriz inversa também está presente neste caso, mas assim como para o campo escalar, o formalismo de Hamilton-Jacobi elimina qualquer termo de contorno possível e assim obtemos uma inversa única.

Embora o trabalho não é fazer um método comparativo entre o formalismo *à la* Dirac e *à la* Hamilton-Jacobi, vemos que ambos os formalismos têm os mesmos parênteses generalizados em teorias sem estrutura de gauge, como o campo escalar real e complexo. Mas em Teorias de Gauge como o campo Eletromagnético, os parênteses generalizados via diferentes formalismos mudam. A razão deste fato é tema de pesquisa futura.

Como outras perspectivas podemos considerar um estudo do campo Eletromagnético no Plano Nulo em primeira ordem. Como já foi indicado, é possivel usar a Lagrangeana do campo vetorial não-massivo na sua forma de Palatini e, escrevê-la nas coordenadas de cone de luz verifica-se que esta Lagrangeana é de primeira ordem.

Também se pode estudar o campo Gravitacional linearizado em primeira ordem agregando termos de superfície na densidade. Outra forma de estudar o campo gravitacional linearizado em primeira ordem é considerar tanto $g_{\mu\nu}$ como $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ como campos independentes.

Seria interessante também estudar teorias de gauge topologicamente massivas em $(2+1)$ dimensões. Estes sistemas estão relacionados com o limite de teorias em altas temperaturas em $(3+1)$ dimensões.

Apêndice A

Notação

No presente trabalho, temos utilizado tanto de equações relativísticas, assim como de equações da mecânica clássica, portanto é útil diferenciar as notações e convenções gerais utilizadas nesta dissertação.

Os pontos do espaço-tempo (eventos) estão descritos por quatro variáveis, uma temporal e três espaciais. Escrevemos o quadrivetor (contravariante) de posição como

$$x^\mu = \{x^0, x^1, x^2, x^3\} = \{ct, x, y, z\}, \tag{A.1}$$

onde os índices gregos μ, ν, α, β serão utilizados em geral para denotar os vetores do espaço de Minkowski, esses índices possuem valores de 0, 1, 2, 3. Os índices latinos i, j, k possuem valores de $1, 2, 3$ e serão utilizados para nos referirmos à variáveis espaciais.

O intervalo é definido como

$$(ds)^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2.$$

Segundo a convenção da adição para índices repetidos o intervalo se pode reescrever como

$$(ds)^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu,$$

onde a métrica (em componentes covariantes) é definida como

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{A.2}$$

possui determinante $g = det(g_{\mu\nu}) = -1$. A matriz inversa de $g_{\mu\nu}$: $g^{\mu\nu}$ é definida por

$$g^{\mu\alpha} g_{\alpha\nu} = \delta^\mu{}_\nu,$$

onde δ^μ_ν é a chamada Delta de Kronecker. Esta delta é definida como $\delta^\mu_\nu = 1$, no caso $\mu = \nu$ e, $\delta^\mu_\nu = 0$ no caso $\mu \neq \nu$.

Dado um quadrivetor contravariante, este pode ser escrito numa forma covariante assim

$$x_\mu = g_{\alpha\mu} x^\alpha = \{x_0, x_1, x_2, x_3\} = \{ct, -x, -y, -z\}.$$

Para todo campo $\phi(x)$ utilizamos a seguinte notação para a derivada

$$\frac{\partial \phi}{\partial x^\mu} \equiv \partial_\mu \phi \tag{A.3}$$

este novo campo é um quadrivector covariante. De maneira análoga, se construi o quadrivector contravariante

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_\mu} \equiv \partial^\mu \phi. \tag{A.4}$$

No estudo de sistemas vinculados, é possível encontrar uma sub matriz $K \times K$ (onde $K < N$) a qual não tenha determinante zero. Como a determinante é invariante sob uma troca de columna o fila, então nos mudamos os elementos desta submatriz para a parte inferior direita.

$$W_{ab} = \frac{\partial z_b}{\partial v^a} = \frac{\partial^2 L}{\partial v^b \partial v^a}; \quad a, b = R+1, R+2, ..., N, \tag{A.5}$$

onde $K + R = N$, e $det(W_{ab})$ não é nulo.

Pode-se escrever os momentos como

$$\begin{aligned} p_a &= \frac{\partial L}{\partial v^a} = z_a(\mathbf{x}, v^a, v^A, t); \quad a = 1, 2, ..., R, \\ p_A &= \frac{\partial L}{\partial v^A} = z_A(\mathbf{x}, v^\alpha, v^A, t); \quad A = R+1, R+2, ..., N. \end{aligned}$$

Destas equações só as primeiras são inversíveis, então temos K velocidades v_A que serão funções de x, p e as outras velocidades v^a $(a = 1, 2, ..., R)$

$$v^a = \chi^a(x^i, p_a, v^A). \tag{A.6}$$

Aqui fazemos uma convenção, os indices i, j, k serão utilizados para as N coordenadas, os indices A, B serão usados para as velocidades não inversíveis e, os indices a, b serão utilizados para as velocidades resolvidas.

Apêndice B

Non-Involutive Constrained Systems and Hamilton-Jacobi Formalism

M. C. Bertin*, B. M. Pimentel†, C. E. Valcárcel‡
Instituto de Física Teórica - São Paulo State University,
Rua Pamplona 145, 01405-900, São Paulo, SP, Brazil.

Abstract
In this work we discuss the natural appearance of the Generalized Brackets in systems with non-involutive (equivalent to second class) constraints in the Hamilton-Jacobi formalism. We show how a consistent geometric interpretation of the integrability conditions leads to the reduction of degrees of freedom of these systems and, as consequence, naturally defines a dynamics in a reduced phase space.

Keywords: Hamilton-Jacobi formalism, Constrained systems, Generalized Brackets.

B.1 Introduction

Constraints in Lagrangian systems appear when the Hessian matrix built from the Lagrangian function is singular. Since the Hessian is the Jacobian of the Legendre transformation that takes velocities to conjugate momenta, the non existence of an inverse transformation leads to a phase space that is not isomorphic to the tangent bundle of the configuration space. In this phase space the symplectic structure is degenerate and a unique Hamiltonian cannot be defined, leading to problems

*mcbertin@ift.unesp.br
†pimentel@ift.unesp.br
‡valcarcel@ift.unesp.br

in the usual construction of the Hamiltonian formalism. This problem was first treated by Dirac's [1, 2, 3] canonical approach, in which the constraints are added to the canonical Hamiltonian function with Lagrange multipliers. The so called Dirac's algorithm is based on consistency conditions, that imposes the constraints as invariants over time evolution.

Other alternative approaches have been formulated since, including the Hamilton-Jacobi (HJ) approach, first developed in [4] and improved later in [5, 6, 7], based on Carathéodory's equivalent Lagrangian method [8]. The Carathéodory's approach to HJ formalism has a very profound geometrical meaning: the necessary and sufficient condition for an Action to be minimized in a region of the configuration space is the existence of a family of surfaces everywhere orthogonal to a congruence of curves in this space. The family is a solution, in the case of regular systems, of a single HJ partial differential equation (HJPDE). If the system is singular with k constraints we will not have one, but a set of $k + 1$ HJPDE. The solution of the characteristics equations related to the HJPDE is the congruence of curves, called simply the characteristics, which forms a dynamical system with several independent variables. This geometrical interpretation is called in the literature [8] "the complete figure" of variational calculus.

The integrability conditions are in the central role of the HJ formalism for singular systems. They should guarantee, supposing linear independence of the independent variables, the existence of a complete set of HJPDE and, by consequence, the integrability of the characteristics equations. The Frobenius' integrability condition sets up that the constraints must form a complete system in involution with the Poisson Brackets (PB). However, there are systems that do not obey this condition, presenting non-involutive constraints. To circumvent this problem some authors elaborate alternative methods [9, 10], out of the scope of the HJ formalism.

We will show that imposing the Frobenius' conditions in the form $d\{\phi\} = 0$, in which $\{\phi\}$ represents the set of all constraints, we can deal with non-involutive constraints in a very natural way, allowing linear dependence of the former independent variables. The integrability conditions in this form also leads naturally to a non degenerate symplectic structure in a reduced phase space, represented by some Generalized Brackets (GB). The appearance of GB in the HJ formalism was already noticed in first order Lagrangians [11], but in this work we intend to make a more general formulation, to be valid for general, not only first order systems.

B.2 The Complete Figure

Let it be a Lagrangian function $L(y, \dot{y}, x, \dot{x}, t)$, with n degrees of freedom, whose Hessian matrix is singular of rank m. This means that there are $k = n - m$ constraints $\phi_z \equiv \pi_z - \partial L/\partial \dot{x}^z = 0$ and the system has its configuration space separated in two sub-spaces, namely the space of m variables y, relate to the invertible part of the Hessian, and the space of k variables x, related to the non invertible part. The equation

$$\pi_0 + p_a \dot{y}^a + \pi_z \dot{x}^z - L = 0 \ , \tag{B.1}$$

where $\pi_0 \equiv \partial_t S$, $p_a = \partial_a S$ and $\pi_z = \partial_z S$ and the indexes are given by $\{a\} = \{1, \ldots, m\}$, $\{z\} = \{1, \ldots, k\}$ and $\{i\} = \{1, \ldots, n\}$, is the sufficient condition for an extremum of the action $\int L dt$. Wherever the constraints are valid this equation becomes a HJPDE with the canonical Hamiltonian defined by

$$H_0 \equiv p_a \dot{y}^a + \pi_z \dot{x}^z - L \ , \tag{B.2}$$

which does not depend on the undetermined velocities $\dot{x}$. Hence, the system must obey the set of $k + 1$ HJPDE

$$\phi_\alpha \equiv X_\alpha(S) = \pi_\alpha + H_\alpha = 0 \ , \qquad \{\alpha\} = \{0, 1, \ldots, k\} \ , \tag{B.3}$$

in which $X_\alpha = \chi^i_\alpha \partial_i$ is a set of vector fields, $\chi^z_\alpha = \delta^z_\alpha$ and $\chi^a_\alpha = \partial \phi_\alpha / \partial p_a$. In our notation x^0 is related to the time parameter and $H_z \equiv -\partial L/\partial \dot{x}^z$.

The characteristic equations are given by

$$dy^a = \chi^a_\alpha dx^\alpha = \{y^a, \phi_\alpha\} dx^\alpha \ , \tag{B.4}$$

$$dp_a = \{p_a, \phi_\alpha\} dx^\alpha \ , \tag{B.5}$$

$$dS = p_a dy^a - H_\alpha dx^\alpha \ , \tag{B.6}$$

where we used Poisson brackets. With equation (B.6) we are able, if desirable, to build an explicit solution for the HJPDE, which gives the family of surfaces orthogonal to the characteristic curves.

B.3 Integrability

The vector fields X_α form a basis of vectors in the tangent space of the family of surfaces, as it can easily be seen by the HJPDE $X_\alpha(S) = \chi^i_\alpha \partial_i S = \chi^i_\alpha p_i = 0$. For integrability we need that these vectors form a complete set of linear independent (LI) Hamiltonian vector fields. The necessary and sufficient condition is given by the Frobenius' integrability condition: the Lie derivative of a member of the base with respect to the Hamiltonian flow generated by other member must be a vector in this tangent space. In other words, they must close a Lie algebra:

$$[X_\alpha, X_\beta] = C_{\alpha\beta}{}^{\gamma} X_\gamma \ . \tag{B.7}$$

Since the constraints are the generators of the flows, this condition is reflected on the system of HJPDE which must form a system in involution:

$$\{\phi_\alpha, \phi_\beta\} = C_{\alpha\beta}{}^{\gamma} \phi_\gamma \ . \tag{B.8}$$

However, systems in physics do not, in general, respect this condition only with the constraints extracted from the Lagrangian. The problem rests in two situations: it may happen that the set of HJPDE is not complete. In this case the integrability conditions should provide new constraints to complete the system. This scenario is actually well supported by the conditions in the form (B.8). Of course, if the final complete set of constraints closes a Lie algebra the system is completely integrable.

The other situation, which is not covered by condition (B.8), is the case in which the vectors in the tangent space of the family are not really LI. To deal with this case we will use as integrability conditions the equations

$$d\phi_\alpha = C_{\alpha\beta}{}^{\gamma} \phi_\gamma = 0 \ , \tag{B.9}$$

with use of the constraints equations. However, it must be noticed that (B.8) is covered, since $d\phi_\alpha = \{\phi_\alpha, \phi_\beta\}\, dx^\beta$. This is important since the Frobenius' condition is a theorem and must be satisfied for every integrable system.

The conditions (B.9) can lead to three situations. It can result in expressions of the type $f(y, x, p, \pi) = 0$ and these expressions are the ones we are interested in first place, because they must be considered as constraints in equality to the former set. They must obey the integrability conditions as well and we should be aware of the appearance of other constraints. When all possible constraints are found they must be inserted in the formalism.

However, there will be no independent variables related to the constraints that come from the imposition of integrability. We will deal with this problem by expanding the space of independent variables, relating arbitrary parameters to each new constraint. The set of all constraints, ϕ_z in which the index z now cover all the expanded parameter space, is supposed to be complete and the new characteristic equations can be derived from the fundamental differential

$$dF = \{F, \phi_\alpha\}\, dx^\alpha \ , \tag{B.10}$$

when, now, x^α is the set of all independent variables, including the ones related to the new constraints.

At this stage we must use the differential (B.10) to test the integrability of all constraints again. It can happen that a subset, if not all the constraints, identically satisfies the conditions. This is the second situation that will happen when this set is actually in involution, obeying the condition (B.8). If all HJPDE are in this case the system becomes completely integrable. If only a subset is in involution, the system is only partially integrable.

B.4 The Generalized Brackets

The first two possible results of the integrability conditions (B.9), related above, are in agreement with the conditions (B.8). There is, however, a third possibility not predicted by the latter. It may happen that the final set of constraints turns out to be not in involution with the PB.

One way to deal with this problem, using (B.8), is expanding the space of constraints finding new vector fields that closes, finally, a system in involution [**?**]. However, the formalism itself cannot give a consistent way to find these constraints: any system that leaves the final set in involution is a good one. Other way [**?**] is performing a canonical transformation that takes pairs of non-involutive constraints into conjugate variables.

The conditions (B.9) provides a more natural way to deal with non-involutive constraints. It permits linear dependence (LD) of the tangent vector fields X_α.

Let us suppose that all constraints are found and form a complete set of HJPDE, $\phi_\alpha = 0$, which are related to a set of independent variables x^α. Separating the time variable from the other parameters the integrability conditions (B.9) reads

$$d\phi_\alpha = \{\phi_\alpha, \phi_0\}\, dt + \{\phi_\alpha, \phi_z\}\, dx^z = 0 \ . \tag{B.11}$$

First, we analyze the conditions for ϕ_x:

$$\{\phi_x, \phi_0\}\, dt + \{\phi_x, \phi_z\}\, dx^z = 0 \ . \tag{B.12}$$

Let us define an antisymmetric matrix from the PB between the constraints ϕ_z, $M_{xz} \equiv \{\phi_x, \phi_z\}$. Then we can write

$$M_{xz} dx^z = -\{\phi_x, \phi_0\}\, dt \ . \tag{B.13}$$

If the complete system of HJPDE is not in involution, we deal with a regular M matrix. In this case it becomes clear that all vectors X_α are LD from the total differential equations

$$dx^z = -(M^{-1})^{zx}\{\phi_x, \phi_0\}\, dt \ . \tag{B.14}$$

Notice that the fundamental differential (B.10) becomes

$$\begin{aligned} dF &= \{F,\phi_\alpha\}\,dx^\alpha = \{F,\phi_0\}\,dt + \{F,\phi_z\}\,dx^z \qquad (B.15)\\ &= \Big[\{F,\phi_0\} - \{F,\phi_z\}\,(M^{-1})^{zx}\,\{\phi_x,\phi_0\}\Big]\,dt\ . \qquad (B.16)\end{aligned}$$

Therefore, we redefine the dynamics by eliminating all the independent variables with exception of t. It allows us to define the Generalized Brackets

$$\{F,G\}^* \equiv \{F,G\} - \{F,\phi_z\}\,(M^{-1})^{zx}\,\{\phi_x,G\}\ , \qquad (B.17)$$

which have all the properties of the PB: it is a bilinear antisymmetric operator that obeys the Jacobi identity and the Leibniz rule. With the GB the dynamics is given by

$$dF = \{F,\phi_0\}^*\,dt\ . \qquad (B.18)$$

Besides, all the constraints are in involution with the GB, $\{\phi_\alpha,\phi_\beta\}^* = 0$. There is no need to test the integrability of ϕ_0, we can easily see that it is identically satisfied with the GB.

Let us suppose the case in which the M matrix is singular of rank $r \leq k$. In this case there will be a set of r non-involutive constraints. The equations (B.13) can be written by

$$M_{x\bar{a}}dx^{\bar{a}} + M_{x\bar{z}}dx^{\bar{z}} = -\{\phi_x,\phi_0\}\,dt\ , \qquad (B.19)$$

where $\{\bar{a}\} = \{1,\ldots,r\}$ and $\{\bar{z}\} = \{r+1,\ldots,k\}$. There are two sets of equations:

$$\begin{aligned} M_{\bar{b}\bar{a}}dx^{\bar{a}} + M_{\bar{b}\bar{z}}dx^{\bar{z}} &= -\{\phi_{\bar{b}},\phi_0\}\,dt \qquad (B.20)\\ M_{\bar{x}\bar{a}}dx^{\bar{a}} + M_{\bar{x}\bar{z}}dx^{\bar{z}} &= -\{\phi_{\bar{x}},\phi_0\}\,dt\ . \qquad (B.21)\end{aligned}$$

The first set gives

$$M_{\bar{b}\bar{a}}dx^{\bar{a}} = -\{\phi_{\bar{b}},\phi_0\}\,dt - \{\phi_{\bar{b}},\phi_{\bar{z}}\}\,dx^{\bar{z}} = -\{\phi_{\bar{b}},\phi_{\bar{\alpha}}\}\,dx^{\bar{\alpha}}\ , \qquad (B.22)$$

making $\{\bar{\alpha}\} = \{0, r+1,\ldots,k\}$. Since the rank of M_{xz} is r, $M_{\bar{b}\bar{a}}$ is regular and we can write

$$dx^{\bar{a}} = -(M^{-1})^{\bar{a}\bar{b}}\,\{\phi_{\bar{b}},\phi_{\bar{\alpha}}\}\,dx^{\bar{\alpha}}\ . \qquad (B.23)$$

Hence, we can eliminate r independent variables. The fundamental differential becomes

$$\begin{aligned} dF &= \{F,\phi_{\bar{a}}\}\,dx^{\bar{a}} + \{F,\phi_{\bar{\alpha}}\}\,dx^{\bar{\alpha}}\\ &= \{F,\phi_{\bar{\alpha}}\}\,dx^{\bar{\alpha}} - \{F,\phi_{\bar{a}}\}\,(M^{-1})^{\bar{a}\bar{b}}\,\{\phi_{\bar{b}},\phi_{\bar{\alpha}}\}\,dx^{\bar{\alpha}}\\ &= \{F,\phi_{\bar{\alpha}}\}^*\,dx^{\bar{\alpha}}\ , \qquad (B.24)\end{aligned}$$

in which we have the GB

$$\{F,G\}^* \equiv \{F,G\} - \{F,\phi_{\bar{a}}\}\,(M^{-1})^{\bar{a}\bar{b}}\,\{\phi_{\bar{b}},G\}\ . \tag{B.25}$$

The set of equations (B.21) gives $\{\phi_{\bar{x}},\phi_{\bar{\alpha}}\}^*\,dx^{\bar{\alpha}} = 0$. If M_{xz} has rank r, the structure of the GB gives $\{\phi_{\bar{x}},\phi_{\bar{z}}\} = 0$ and $\{\phi_{\bar{x}},\phi_{\bar{a}}\} = 0$, which left us with the conditions

$$\{\phi_{\bar{x}},\phi_0\}^* = 0\ . \tag{B.26}$$

In the beginning of this analysis we made the supposition that all the constraints that could come from integrability conditions are computed in ϕ_α. In this case the above conditions are just $0 = 0$, identically satisfied. But we could define the GB for any set of non-involutive constraints. If there is any new constraint yet to be found it will appear in conditions (B.26).

B.5 Free particle on a surface

In this example we will apply the described procedure in detail in order to clarify the main aspects of the HJ formalism. Let us consider a free particle in an Euclidian space $\mathbf{R^n}$ restricted in a m dimensional surface $\mathcal{M}^{\Updownarrow}$. The surface is defined by the set of equations $\psi_z(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, in which $\{z\} = \{1,\ldots,k\}$ and $k+m = n$. We will work in the following notation: $\mathbf{x}$ represents a dot in $\mathbf{R^n}$ whose coordinates are given by the set $(x^1,x^2,\ldots,x^n)$. All vectorial quantities are represented in the same way.

The Lagrangian can be written as

$$L(\mathbf{x},\mathbf{v}) = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 + u^z\psi_z(\mathbf{x})\ , \tag{B.27}$$

in which $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}}$ is the velocity of the particle and u^z are Lagrange multipliers. The momenta are given by

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = m\mathbf{v}\ , \qquad\qquad \pi_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{u}^z} = 0\ . \tag{B.28}$$

We have by these relations n velocities and k conditions over the momenta. The canonical Hamiltonian function of this system is given by

$$H_0 = \mathbf{p}\cdot\mathbf{v} + \pi_z\dot{u}^z - L = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - u^z\psi_z\ . \tag{B.29}$$

Therefore, we have the following set of constraints:

$$\phi_0 \equiv \pi_0 + H_0 = 0\ , \tag{B.30}$$
$$\phi_{z;1} \equiv \pi_z = 0\ . \tag{B.31}$$

We should analyze the integrability of this set. The evolution of any dynamical function $F(\mathbf{x}, \mathbf{p}, u^z, \pi_z)$ is given by

$$dF = \{F, \phi_0\}\, dt + \{F, \phi_{z;1}\}\, du^z \ . \tag{B.32}$$

Because $\{\phi_{z;1}, \phi_{x;1}\} = 0$, the condition for $\phi_{z;1}$,

$$d\phi_{z;1} = \{\phi_{z;1}, \phi_0\}dt + \{\phi_{z;1}, \phi_{x;1}\}du^x = 0 \ , \tag{B.33}$$

gives a secondary set of constraints

$$\phi_{z;2} \equiv \psi_z = 0 \ , \tag{B.34}$$

which are expected since those are the equations of the surface. These constraints must also obey integrability. Hence, we apply

$$d\phi_{z;2} = \{\phi_{z;2}, \phi_0\}dt + \{\phi_{z;2}, \phi_{x;1}\}du^x = 0 \ , \tag{B.35}$$

which gives a tertiary set:

$$\phi_{z;3} \equiv \mathbf{p} \cdot \nabla\psi_z = 0 \ . \tag{B.36}$$

These constraints tells us that the momentum $\mathbf{p}$ is tangent to the surface. And, from these,

$$d\phi_{z;3} = \{\phi_{z;3}, \phi_0\}dt + \{\phi_{z;3}, \phi_{x;1}\}du^x = 0 \ , \tag{B.37}$$

a quaternary set arise:

$$\phi_{z;4} \equiv mu^x \Delta_{xz} + \mathbf{p} \cdot \nabla \left(\mathbf{p} \cdot \nabla\psi_z\right) = 0 \ , \tag{B.38}$$

in which we define the matrix $\Delta_{xz} \equiv \nabla\psi_x \cdot \nabla\psi_z$.

Notice that $\{\phi_{z;4}, \phi_0\} \neq 0$ and $\{\phi_{z;4}, \phi_{x;1}\} \neq 0$, so that the integrability of $\phi_{z;4}$ will not give any new constraint, but a total differential equation relating the independent variables. We suppose, therefore, that all constraints are found and the complete set is given by

$$\phi_0 = p_0 + H_0 \ , \tag{B.39}$$

$$\phi_{z;1} = \pi_z \ , \tag{B.40}$$

$$\phi_{z;2} = \psi_z \ , \tag{B.41}$$

$$\phi_{z;3} = \mathbf{p} \cdot \nabla\psi_z \ , \tag{B.42}$$

$$\phi_{z;4} = m\Delta_{zx} u^x + \mathbf{p} \cdot \nabla \left(\mathbf{p} \cdot \nabla\psi_z\right) \ . \tag{B.43}$$

To consider this set in the theory we must build a differential that contains these constraints as generators of the dynamics. However, we do not have independent variables related to all constraints in the system. Therefore, we will expand the parameter space with new arbitrary independent variables $(\omega^z, \tau^z, \theta^z)$. Then we define the dynamics of the system by the new fundamental differential

$$dF = \{F, \phi_0\}\, dt + \{F, \phi_{z;1}\}\, du^z + \{F, \phi_{z;2}\}\, d\omega^z + \{F, \phi_{z;3}\}\, d\tau^z + \{F, \phi_{z;4}\}\, d\theta^z \ , \quad \text{(B.44)}$$

as prescribed in section 3.

The above set of HJPDE is not in involution, as we can see with the PB

$$\begin{array}{ll} \{\phi_{x;1}, \phi_{y;2}\} = 0 & \{\phi_{x;1}, \phi_{y;3}\} = 0 \\ \{\phi_{x;1}, \phi_{y;4}\} = -m\Delta_{xy} & \{\phi_{x;2}, \phi_{y;3}\} = \Delta_{xy} \\ \{\phi_{x;2}, \phi_{y;4}\} = \mathbf{p} \cdot \nabla (\Delta_{xy}) & \{\phi_{x;3}, \phi_{y;4}\} = \Gamma_{xy} \end{array} \quad \text{(B.45)}$$

where

$$\Gamma_{xy} \equiv -mu^z \nabla (\Delta_{yz}) \cdot \nabla \psi_x + \mathbf{p} \cdot \nabla [\mathbf{p} \cdot \nabla (\Delta_{xy})] - 3 (\nabla \psi_x) \cdot [\mathbf{p} \cdot \nabla [\mathbf{p} \cdot \nabla (\nabla \psi_y)]] \ . \quad \text{(B.46)}$$

We expect, therefore, that all independent variables can be eliminated in function of t. Let us reorganize the constraints so that their order in the M matrix becomes $(\phi_{z;1}, \phi_{z;4}, \phi_{z;2}, \phi_{z;3})$. The matrix is given by $(I_x J_y = \{1, 4, 2, 3\})$

$$M_{I_x J_y} = \begin{pmatrix} 0 & -m\Delta_{xy} & 0 & 0 \\ m\Delta_{xy} & 0 & -\mathbf{p} \cdot \nabla (\Delta_{xy}) & -\Gamma_{xy} \\ 0 & \mathbf{p} \cdot \nabla (\Delta_{xy}) & 0 & \Delta_{xy} \\ 0 & \Gamma_{xy} & -\Delta_{xy} & 0 \end{pmatrix} . \quad \text{(B.47)}$$

Let us suppose that the surface is smooth, of class C^∞. This condition guarantees the existence of the inverse

$$(M^{-1})^{I_x J_y} = \begin{pmatrix} 0 & 1/m\ (\Delta^{-1})^{xy} & \bar{\Gamma}^{xy} & \Sigma^{xy} \\ -1/m\ (\Delta^{-1})^{xy} & 0 & 0 & 0 \\ -\bar{\Gamma}^{xy} & 0 & 0 & -(\Delta^{-1})^{xy} \\ -\Sigma^{xy} & 0 & (\Delta^{-1})^{xy} & 0 \end{pmatrix} , \quad \text{(B.48)}$$

where

$$\bar{\Gamma}^{xy} \equiv (\Delta^{-1})^{xz} \Gamma_{zw} (\Delta^{-1})^{wy} \quad \text{(B.49)}$$

and

$$\Sigma^{xy} \equiv \mathbf{p} \cdot \nabla (\Delta^{-1})^{xy} \ . \quad \text{(B.50)}$$

This inverse is unique. Since the matrix is regular all independent variables are indeed dependent of the parameter t, as learned with equation (B.14). We are able to define, then, the GB of the system:

$$\{F, G\}^* \equiv \{F, G\} - \{F, \phi_{I_x}\} (M^{-1})^{I_x J_y} \left\{\phi_{J_y}, G\right\} \ . \quad \text{(B.51)}$$

The only non zero fundamental GB are given by

$$\{\mathbf{x},\mathbf{p}\}^* = \mathbf{I} - \nabla\psi_x(\Delta^{-1})^{xy}\nabla\psi_y \equiv \mathcal{P} \ . \tag{B.52}$$

All others are zero, including $\{u,\pi\}^*$, which is expected since u^z are degenerate variables in the theory. Here we define the projector operator $\mathcal{P}$, whose job is to take vectors in $\mathbf{R^n}$ into vectors on the surface. It is a singular operator, whose base of the null space are the vectors $\nabla\psi_z$. This is expected since normal vectors are projected into null vectors on the surface.

Let us go for the characteristic equations of the reduced system:

$$\begin{aligned} d\mathbf{x} &= \{\mathbf{x},\phi_0\}^* dt = \frac{\mathbf{1}}{m}\ \mathcal{P}\cdot\mathbf{p}\ dt \\ \bar{\mathbf{p}} &= \mathcal{P}\cdot\mathbf{p} \ , \end{aligned} \tag{B.53}$$

$$\begin{aligned} d\mathbf{p} &= \{\mathbf{p},\phi_0\}^* dt = \mathcal{P}\cdot u^z\nabla\psi_z dt = 0 \\ \bar{\mathbf{a}} &= \mathcal{P}\cdot\mathbf{a} = 0 \ . \end{aligned} \tag{B.54}$$

The first equation gives the projection of the momentum vector over the surface, it is a geometric relation. The second equation is the dynamical equation: it tells us that the acceleration induced on the surface is zero. Of course, we cannot invert the projector, since it is singular, so the equations of motion are still degenerate. Since $\dot{\mathbf{p}} = 0$, the derivative of (B.53) over time is given by

$$\ddot{\mathbf{x}} = \frac{d\mathcal{P}}{dt}\cdot\dot{\mathbf{x}} \ . \tag{B.55}$$

Let us suppose the case in which $n=3$ and the surface is just $\mathbf{S^2}$ with equation $\psi = \mathbf{x}^2 - r^2 = 0$. We have $\nabla\psi = 2\mathbf{x}$ and $\Delta = 4\mathbf{x}^2$. In this case $\Delta^{-1} = 1/4r^2$ and

$$\mathcal{P} \equiv \mathbf{I} - \frac{\mathbf{x}\otimes\mathbf{x}}{r^2} \ , \tag{B.56}$$

where $\otimes$ represents a dyadic product. Using the fact that $\phi_{z;3} = 0$ implies $\mathbf{x}\cdot\dot{\mathbf{x}} = 0$, equation (B.55) gives

$$\ddot{\mathbf{x}} + \omega^2\mathbf{x} = 0 \ , \tag{B.57}$$

in which $\omega = v/r$ and $v = |\mathbf{v}|$. The case in which $r=1$ and $m=1$ is an analogous to the linear quantum mechanical σ-model treated in [10].

B.6 The multi-dimensional rotator

Let us work with the Lagrangian [10]

$$L = \frac{1}{2}\ \mathbf{v}^2 + u\mathbf{x}\cdot\mathbf{v} \ , \tag{B.58}$$

where $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}}$. This system constitutes a more general case than the previous example. The conjugate momenta are given by

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \mathbf{v} + u\mathbf{x} \ , && \text{(B.59)} \\ \pi &= 0 \ . && \text{(B.60)} \end{aligned}$$

The canonical Hamiltonian gives

$$H_0 = \frac{1}{2}\left[\mathbf{p} - u\mathbf{x}\right]^2 = \frac{1}{2}\,\bar{\mathbf{p}}^2 \ , \tag{B.61}$$

in which we define $\bar{\mathbf{p}} \equiv \mathbf{p} - u\mathbf{x}$. Therefore, the system has the constraints

$$\begin{aligned} \phi_0 &= p_0 + H_0 \ , && \text{(B.62)} \\ \phi_1 &= \pi \ . && \text{(B.63)} \end{aligned}$$

The fundamental differential is, in this case,

$$dF = \{F, \phi_0\}dt + \{F, \phi_1\}du \ . \tag{B.64}$$

The integrability condition for ϕ_1 gives

$$d\phi_1 = \{\phi_1, \phi_0\}dt + \{\phi_1, \phi_1\}du = \bar{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{x}dt \ , \tag{B.65}$$

which results in a new constraint

$$\phi_2 = \bar{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - u\mathbf{x}^2 = 0 \ . \tag{B.66}$$

The integrability of ϕ_2 gives no new constraint. The system is not in involution, giving a regular M matrix and its inverse

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{x}^2 \\ -\mathbf{x}^2 & 0 \end{pmatrix} , \qquad M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1/\mathbf{x}^2 \\ 1/\mathbf{x}^2 & 0 \end{pmatrix} . \tag{B.67}$$

The GB of this problem, that will eliminate the independent variables in function of t, is given by

$$\{F, G\}^* = \{F, G\} - \{F, \phi_1\}\,(M^{-1})^{12}\,\{\phi_2, G\} - \{F, \phi_2\}\,(M^{-1})^{21}\,\{\phi_1, G\} \ , \tag{B.68}$$

which gives the following GB:

$$\begin{aligned} \{\mathbf{x}, \bar{\mathbf{p}}\}^* &= \mathbf{I} - \frac{\mathbf{x} \otimes \mathbf{x}}{\mathbf{x}^2} \equiv \mathcal{P} \ , && \text{(B.69)} \\ \{\mathbf{x}, u\}^* &= \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{x}^2} \ , \qquad \{u, \bar{\mathbf{p}}\}^* = \frac{\bar{\mathbf{p}}}{\mathbf{x}^2} \ . && \text{(B.70)} \end{aligned}$$

The characteristics equations are given by

$$
\begin{aligned}
d\mathbf{x} &= \{\mathbf{x}, \phi_0\}^* dt = \mathcal{P} \cdot \bar{\mathbf{p}} \; dt \;, && \text{(B.71)} \\
d\bar{\mathbf{p}} &= \{\bar{\mathbf{p}}, \phi_0\}^* dt = 0 \;, && \text{(B.72)} \\
du &= \{u, \phi_0\}^* dt = \frac{\bar{\mathbf{p}}^2}{\mathbf{x}^2} \; dt \;. && \text{(B.73)}
\end{aligned}
$$

Hence, we have the equations

$$
\begin{aligned}
\mathbf{v} &= \mathcal{P} \cdot \bar{\mathbf{p}} \;, && \text{(B.74)} \\
\dot{\bar{\mathbf{p}}} &= 0 \;. && \text{(B.75)}
\end{aligned}
$$

Derivation of the first equation over time and the use of the second equation gives

$$
\ddot{\mathbf{x}} = \dot{\mathcal{P}} \cdot \bar{\mathbf{p}} = -\frac{\mathbf{v} \cdot \bar{\mathbf{p}}}{\mathbf{x}^2} \; \mathbf{x} \;, \tag{B.76}
$$

where we used the constraint $\bar{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$, which also implies, from (B.74), $\mathbf{v} = \bar{\mathbf{p}}$. We have, therefore, the nonlinear second order ODE

$$
\ddot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{x} + \dot{\mathbf{x}}^2 = 0 \;. \tag{B.77}
$$

This equation can also be written by

$$
\frac{d^2\mathbf{x}^2}{dt^2} = 0 \;. \tag{B.78}
$$

Notice that the equation of motion (B.77) is obeyed by any system in which $\mathbf{x} \cdot \dot{\mathbf{x}}$ is a constant. The most simple particular solution is given by $|\mathbf{x}| = \sqrt{\alpha t + \beta}$. However, considering a system in which $\mathbf{x}^2 = r^2$ is fixed and $|\mathbf{v}|$ is constant, we can build a solution

$$
\mathbf{x} = \mathbf{a} \sin \omega(t) + \mathbf{b} \cos \omega(t) \tag{B.79}
$$

where $\mathbf{a}$ and $\mathbf{b}$ are constant vectors and

$$
\omega(t) = \frac{1}{r} \left(|\mathbf{v}| t + \beta \right) , \tag{B.80}
$$

where β is a parameter. This solution is of the same class of the one found in [?] for the n dimensional case.

B.7 Landau model

Consider the Lagrangian [10]

$$
L = \frac{1}{2} \left(m v_i v_i + B \epsilon_{ij} x_i v_j - k x_i x_i \right) \qquad \{i\} = \{1, 2\} \;, \tag{B.81}
$$

which represents a charged particle in a plane with a transversal magnetic field B and a harmonic potential. In the limit $m = 0$ this system is described by

$$L = \frac{1}{2}\left(B\epsilon_{ij}x_i v_j - kx_i x_i\right) . \tag{B.82}$$

The conjugate momenta give the relations

$$p_i = \frac{1}{2}\, B\epsilon_{ij}x_j . \tag{B.83}$$

Let us write the canonical Hamiltonian:

$$H_0 = \frac{1}{2}\, kx_i x_i , \tag{B.84}$$

that gives us the system of HJPDE

$$\phi_0 = p_0 + H_0 = 0 , \tag{B.85}$$

$$\phi_i = p_i + \frac{1}{2}\, B\epsilon_{ij}x_j = 0 . \tag{B.86}$$

This problem is completely constrained and all x variables are parameters in the theory. The fundamental differential is

$$dF = \{F, \phi_0\}dt + \{F, \phi_i\}dx^i . \tag{B.87}$$

Since $\{\phi_i, \phi_j\} = B\epsilon_{ij}$, the constraints are not involutive and the integrability conditions for ϕ_i will not give any constraint, but a total differential equation relating the variables x and t. We have the M matrix and the inverse

$$M_{ij} = B\epsilon_{ij} \qquad M^{-1}_{ij} = -\frac{1}{B}\,\epsilon_{ij} . \tag{B.88}$$

The GB are defined by

$$\{F, G\}^* \equiv \{F, G\} + \frac{1}{B}\,\{F, \phi_i\}\epsilon_{ij}\{\phi_j, G\} . \tag{B.89}$$

Therefore,

$$\{x_i, x_j\}^* = -\frac{1}{B}\,\epsilon_{ij} , \qquad \{x_i, p_j\}^* = \frac{1}{2}\,\delta_{ij} , \qquad \{p_i, p_j\}^* = -\frac{1}{4}\,B\epsilon_{ij} . \tag{B.90}$$

The equations of motion are given by

$$dx_i = \{x_i, \phi_0\}^* dt = -\frac{1}{B}\,k\epsilon_{ij}x_j dt , \tag{B.91}$$

$$dp_i = \{p_i, \phi_0\}^* dt = -\frac{1}{2}\,kx_i dt . \tag{B.92}$$

The result is

$$\ddot{x}_i + \frac{k^2}{B^2}\,x_i = 0 , \tag{B.93}$$

in full agreement with [10].

B.8 The Güler's example

Consider the following Lagrangian function [9]

$$L = \frac{1}{2}\,\dot{q}_1^2 - \frac{1}{4}\,\left(\dot{q}_2 - \dot{q}_3\right)^2 + b\dot{q}_2 - c\ , \tag{B.94}$$

in which b and c are functions of q_1, q_2, q_3 and t. The momenta are given by

$$p_1 = \dot{q}_1\ , \qquad p_2 = -\frac{1}{2}\left(\dot{q}_2 - \dot{q}_3\right) + b\ , \qquad p_3 = \frac{1}{2}\left(\dot{q}_2 - \dot{q}_3\right)\ . \tag{B.95}$$

Therefore, there is a constraint relating the momenta p_2 and p_3:

$$p_2 + p_3 - b = 0\ . \tag{B.96}$$

We will choose to write the Hamiltonian in terms of p_1 and p_2, which implies to choose q_1 and q_2 as dependent variables, while q_3 ant t are the independent ones. We have, then,

$$H_0 = \frac{1}{2}\,p_1^2 - \left(b - p_2\right)^2 + c\ , \tag{B.97}$$

which gives us the set

$$\phi_0 \equiv p_0 + H_0\ , \tag{B.98}$$

$$\phi_1 \equiv p_2 + p_3 - b = 0\ . \tag{B.99}$$

The fundamental differential is given by

$$dF = \{F, \phi_0\}dt + \{F, \phi_1\}dq_3\ . \tag{B.100}$$

With this differential we test the integrability of ϕ_1, which gives a new constraint

$$2\left(b - p_2\right)\frac{\partial b}{\partial q_3} - \frac{\partial b}{\partial t} - p_1\frac{\partial b}{\partial q_1} - \frac{\partial c}{\partial q_2} - \frac{\partial c}{\partial q_3} = 0\ . \tag{B.101}$$

With $b = q_1 + q_3$ and $c = q_1 + q_2 + q_3^2$ this constraint can be written as

$$\phi_2 \equiv 2p_2 + p_1 - 2q_1 + 1 = 0\ . \tag{B.102}$$

We have $\{\phi_2, \phi_1\} = 1$ and no new constraints. The M matrix and its inverse follows:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\ , \qquad M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\ . \tag{B.103}$$

The GB are defined by

$$\{F, G\}^* \equiv \{F, G\} - \{F, \phi_1\}\{\phi_2, G\} + \{F, \phi_2\}\{\phi_1, G\} \tag{B.104}$$

and gives the following non zero fundamental GB:

$$\{q_1, q_2\}^* = \{q_1, q_3\}^* = \{q_1, p_3\}^* = -1 \tag{B.105}$$

$$\{q_2, q_3\}^* = \{q_2, p_3\}^* = \{p_1, p_3\}^* = -2 \tag{B.106}$$

$$\{q_2, p_2\}^* = \{q_3, p_3\}^* = 1 \tag{B.107}$$

$$\{q_3, p_1\}^* = 2\ . \tag{B.108}$$

Those give us the equations

$$dq_1 = \{q_1, \phi_0\}^* dt = (2q_1 - 2p_2 - 1)\, dt \tag{B.109}$$

$$dq_2 = \{q_2, \phi_0\}^* dt = (4q_1 - 4p_2 + 1)\, dt \tag{B.110}$$

$$dq_3 = \{q_3, \phi_0\}^* dt = (2p_1 + 2p_2 - 2q_1 - 2q_3 + 3)\, dt \tag{B.111}$$

$$\tag{B.112}$$

$$dp_1 = \{p_1, \phi_0\}^* dt = (4q_1 + 2q_3 - 4p_2)\, dt \tag{B.113}$$

$$dp_2 = \{p_2, \phi_0\}^* dt = -1 dt \tag{B.114}$$

$$dp_3 = \{p_3, \phi_0\}^* dt = (2p_1 - 2q_3 + 3)\, dt\ , \tag{B.115}$$

which can be written, using the constraints, by

$$\ddot{q}_1 = 2\,(\dot{q}_1 + 1)\ , \qquad \ddot{q}_2 = 4\,(\dot{q}_1 + 1)\ , \qquad \ddot{q}_3 = 4\left(q_3 - \frac{1}{2}\right)\ . \tag{B.116}$$

As we can see, the solutions in [9] satisfies these equations.

B.9 Final Comments

The appearance of non-involutive constraints violates the Frobenius' integrability condition, by which the constraints related to a set of LI Hamiltonian vector fields must close a Lie algebra with the Poisson brackets. In this work we have shown that the imposition of the integrability conditions $d\phi_\alpha = 0$ provides a self consistent way to treat non-involutive (second class) constrained systems.

It must be stressed, however, that the procedure do not change the Frobenius' theorem: if a system is in agreement with (B.9) it is also in agreement with (B.8). We saw that the imposition of (B.9) can reveal new constraints or show that the system, or part of it, is integrable, cases that are covered by (B.8), but it can also reveal linear dependence in the vector fields tangent to the surfaces, which implies elimination of independent variables related to non-involutive constraints.

The process of elimination shows that it is always possible to redefine the dynamics with the introduction of Generalized brackets. The GB actually defines a symplectic structure in a reduced phase space. Systems that presents only non-involutive constraints (M regular case) are completely reduced and the evolution of any observable is generated by the canonical Hamiltonian with the GB, as shows equation (B.18). Therefore, non-involutive constraints are not dynamical generators in the reduced phase space. This is reflex of the fact that the constraints that were not in involution with the PB are in involution with the GB now.

However, if the system presents secondary constraints a previous step is needed. Since there are no independent variables related to constraints that come from the integrability conditions, we may expand the parameter space to include new parameters, one for each of those constraints. The secondary constraints are, then, assumed to be generators of infinitesimal transformations[§] in the phase space, in equality with the primary constraints, as shown in the evolution equation (B.10).

If the system has only a subset of non-involutive constraints we have the case in which M is singular. This subset of r constraints is computed in the GB of the system. However, integrability conditions for the other $k - r$ constraints are given by equations (B.26), which can only result in new relations between the variables (in this case new constraints), or in identical $0 = 0$ relations. The primary case requires the insertion of these new constraints in the system. However, this case will not occur if all secondary constraints are already previously found. The second case implies that the remaining constraints must be in involution with the GB and the system whose evolution differential is given by (B.24) is already completely integrable.

Acknowledgments

MCB was supported by CAPES. CEV was supported by CNPq. BMP was partially supported by CNPq. The authors would like to thank P. J. Pompeia for the critical reading and suggestions.

[§]This statement can always be made, but we stress that secondary constraints may not be dynamical generators in the reduced phase space. This is actually the case with non-involutive constraints. For involutive set of constraint the validity and consequences of this statement are still under investigation.

References

1. P. A. M. Dirac, Canad. J. Math. **2** (1950) 129, **3** (1951) 1.

2. P. A. M. Dirac - Proc. Roy. Soc. **A 246** (1958) 326.

3. P. A. M. Dirac - *Lectures on Quantum Mechanics*, Yeshiva University, New York, 1964.

4. Y. Güler, Nuovo Cimento **B 107** (1992) 1398, **107** (1992) 1143.

5. B. M. Pimentel, R. G. Teixeira, Nuovo Cimento **B 111** (1996) 841, **113** (1998) 805.

6. B. M. Pimentel, R. G. Teixeira, J. L. Tomazelli, Ann. Phys. **267** (1998) 75.

7. M. C. Bertin, B. M. Pimentel, P. J. Pompeia, Ann. Phys. **323** (2008) 527.

8. C. Carathéodory, *Calculus of Variations and Partial Differential Equations of the First Order*, Part I, II, Holden Day Inc, NY, 1967.

9. E. M. Rabei, Y. Güler, Phys. Rev. **A 46** (1992) 3513

10. K.D. Rothe, F.G. Scholtz, Ann. Phys. **308** (2003) 639

11. M. C. Bertin, B. M. Pimentel, P. J. Pompeia, Mod. Phys. Lett. **A 20** (2005) 2873.

Referências Bibliográficas

[1] P. G. Bergmann, J. L. Anderson; Phys. Rev. **83**, 1018 (1951)

[2] P. A. M. Dirac; Canad. J. Math. **2**, 129 (1950)

[3] P. A. M. Dirac; Canad. J. Math. **3**, 1 (1951)

[4] P. A. M. Dirac; Proc. Roy. Soc. **A246**, 326 (1958)

[5] P. A. M. Dirac; *Lectures in Quantum Mechanics* (Benjamin, NewYork, 1964).

[6] J. L. Anderson, P. G. Bergmann; Phys. Rev. **111**, 965 (1951).

[7] P. G. Bergmann, I. Goldberg; Phys. Rev. **98**, 531 (1955).

[8] A. Hanson, T. Regge, C. Teitelboim; *Constrained Hamiltonian Systems* (1976).

[9] Gitman D.M., Tyutin I.V, *Quantization of fields with constraints* (Springer, 1990).

[10] M. Henneaux, C. Teitelboim, *Quantization of Gauge systems* (Princeton University Press, 1992).

[11] E. C. G. Sudarshan, N. Mukunda; *Classical Dynamics* (John Wiley Sons Inc. 1974)

[12] L. Faddeev, R. Jackiw; Phys. Rev. Lett. **60**, 1692 (1988)

[13] J. Barcelos-Neto, C. Wotzasek; Mod. Phys. Lett **A7**, 1737 (1992).

[14] J. Barcelos-Neto, C. Wotzasek; Mod. Phys. Lett **A7**, 4981 (1992).

[15] C. Carathéodory; *Calculus of Variations and Partial Differential Equations of the First Order* (Chelsea 593 Publishing Company, 1999).

[16] Y. Güler; Il Nuovo Cimento **B100**, 251 (1987)

[17] Y. Güler; J. Math. Phys. **30**, 785 (1989)

[18] Y. Güler; Il Nuovo Cimento **B107**, 1398 (1992)

[19] B. M. Pimentel, R. G. Teixeira, J. L. Tomazelli; Ann. Phys. **267**, 75 (1998)

[20] Y. Güler; Il Nuovo Cimento **B111**, 513 (1996)

[21] Y. Güler, D. Baleanu; Il Nuovo Cimento **B114**, 1023 (1999)

[22] Y. Güler, D. Baleanu; Il Nuovo Cimento **B115**, 319 (2000)

[23] S. T. Hong, Y. W. Kim, K. D. Rothe; Mod. Phys. Lett. **A 17**, 435 (2002)

[24] B.M. Pimentel, R.G. Teixeira; Il Nuovo Cimento **B111** (1996)

[25] B.M. Pimentel, R.G. Teixeira; Il Nuovo Cimento **B113** (1998)

[26] M. C. Bertin, B. M. Pimentel, P. J. Pompeia; Mod. Phys. Lett. **A 20**, 2873 (2005).

[27] M. C. Bertin, B. M. Pimentel, P. J. Pompeia; Ann. Phys. **323**, 527 (2008).

[28] M. C. Bertin, B. M. Pimentel, C. E. Valcárcel; *Non-Involutive Constrained Systems and Hamilton-Jacobi Formalism*, hep-th/0805.0379.

[29] P. A. M. Dirac, Rev. Mod. Phys. **21**, 392 (1949)

[30] H. Leutwyler, J. Stern, Ann. Phys. **112**, 94 (1978)

[31] M. Blagojevick - *Gravitation and Gauge Symmetries* (IoP 2002).

[32] H. Latal, W. Schweiger - *Methods of quantization* (Springer, 2001).

[33] N. M. J. Woodhouse - *Special Relativity* (Springer, 1992).

[34] B. A. Zwiebach - *First course in string theory* (Cambridge University Press 2004).

[35] G. H. Goedecke; Phys. Rev. **152** 1120 (1966).

[36] G. F. D. Duff - *Partial Differential Equations* (University of Toronto Press, 1956)

[37] T. Heinzl, S. Krusche, E. Werner; Z. Phys. **A334**, (1989).

[38] Thomas Heinzl; Lectures Notes in Physics, Vol. **572**, (2001).

[39] Steinhardt; Ann. Phys **128**, (1980).

[40] K. Sundermeyer; *Constrained Dynamics*, Lectures Notes in Physics, Vol. **169** (Springer, New York, 1982).

[41] M. Huszar; *Light front quantization by Dirac Method*, Published in Smolenice Conf. (1975).

[42] R. Benguria, P. Cordero, C. Teitelboim; Nucl. Phys. **B122**, (1977).

[43] S. Deser; Gen. Rel. Grav. **1**, (1970).

[44] S. Deser; Class. Quant. Grav. **23**, (2006).

Baixar livros de Literatura
Baixar livros de Literatura de Cordel
Baixar livros de Literatura Infantil
Baixar livros de Matemática
Baixar livros de Medicina
Baixar livros de Medicina Veterinária
Baixar livros de Meio Ambiente
Baixar livros de Meteorologia
Baixar Monografias e TCC
Baixar livros Multidisciplinar
Baixar livros de Música
Baixar livros de Psicologia
Baixar livros de Química
Baixar livros de Saúde Coletiva
Baixar livros de Serviço Social
Baixar livros de Sociologia
Baixar livros de Teologia
Baixar livros de Trabalho
Baixar livros de Turismo