

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO  
INSTITUTO DE EDUCAÇÃO**

**HUMBERTO DE ASSIS CLÍMACO**

**PROVA E EXPLICAÇÃO EM BERNARD BOLZANO**

**Cuiabá/MT  
2007**

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

**HUMBERTO DE ASSIS CLÍMACO**

**PROVA E EXPLICAÇÃO EM BERNARD BOLZANO**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação do Instituto de Educação da Universidade Federal do Mato Grosso como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Educação da Área de Teorias e Práticas Pedagógicas da Educação Escolar e na Linha de Pesquisa Educação em Ciências, sob a orientação do Prof. Dr. Michael Otte.

**Orientador: Prof. Dr. Michael Otte**

**Cuiabá/MT  
2007**

C 639 p CLÍMACO, Humberto de Assis

Prova e Explicação em Bernard Bolzano /  
Humberto de Assis Clímaco. \_\_ Cuiabá: UFMT/IE,  
2007.

x, 153 p.: il

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-  
Graduação em Educação/IE, UFMT, sob a orientação  
do Prof. Dr. Michael Otte, como requisito para  
obtenção do título de Mestre em Educação da Área de  
Teorias e Práticas Pedagógicas da Educação Escolar,  
Linha de Pesquisa Educação em Ciências.

Bibliografia: 149-153

CDU – 372.47

#### Índice para Catálogo Sistemático

1. Educação Matemática
2. Prova e Explicação
3. Bernard Bolzano

## **Agradecimentos**

Ao meu orientador Prof. Dr. Michael Otte, que me ensinou que para alcançar grandes vãos é preciso ter uma base sólida; à Prof. Dra. Sônia Barbosa Camargo Iglioni, que tanto contribuiu para este trabalho com suas sugestões e críticas; e à Profa. Dra. Gladys Denise Wielesky, que mesmo com tantas tarefas encontrou momentos para ajudar nesta difícil empreitada. Ao Programa de Pós-Graduação em Educação, e em particular a Luísa e Mariana da secretaria do Programa de Pós-Graduação em Educação, que tanto contribuíram se preocupando com os prazos e os pequenos detalhes que às vezes nos passam despercebidos e que são fundamentais para a conclusão de nosso trabalho. Aos amigos de Cuiabá: Max, Antônio Nobre, Luiz Fernando, Robinson, Efrain, Zelita, Michelly e Rosinéia, pela ajuda dada nos momentos importantes. Aos colegas Evilásio, Luciene e Isabella, por ajudarem e colaborarem nos momentos difíceis sempre que lhes foi solicitado. Aos amigos de Goiânia: Bruno, Daniel, Juliana, Matheus e todos os demais, por estarem presentes nos momentos difíceis. A Patrícia, por me ajudar a ver que entre o perfeito e o imperfeito existe todo um caminho. Aos primos Valter, Silvestre, Lucas e Eduardo, pelos passeios na Chapada e na Santa Branca nos momentos em que a mente parecia ter parado de funcionar. Às primas Sílvia e Isabel, pela companhia. A todos aqueles que, direta e indiretamente, contribuíram para o meu bem-estar nos momentos de dificuldades e incertezas. E, em especial, à minha família: Arlene e José César, Danilo e Flávio, minha cunhada Inês e minha namorada Cleufa. Lhes devo muito e não tenho palavras para agradecer por tudo o que fizeram por mim antes e durante o mestrado.

## RESUMO

Este trabalho tem o objetivo de contribuir para o debate atual da Educação Matemática e da Filosofia da Matemática acerca de provas que provam e provas que explicam. Pretende-se fornecer elementos históricos a respeito do período em que surgiu o problema de que provas matemáticas devem cumprir o papel de mostrar a ordem objetiva dos conceitos matemáticos e comunicar as idéias matemáticas para os estudantes. Para tanto, estudou-se a grande transformação da matemática que ocorreu no século XIX e que colocou a necessidade de provas rigorosas. Em particular, evidenciou-se, nessa transformação, o papel de Bernard Bolzano (1781-1842), matemático, filósofo e teólogo, apelidado por Félix Klein de *o pai da aritmetização da análise* e o primeiro moderno a estabelecer a distinção entre provas que provam e provas que explicam. Bolzano provou, sem o auxílio do tempo ou do espaço – ou seja, dos sentidos – o Teorema do Valor Intermediário, ao passo que os matemáticos de sua época julgavam ser impossível demonstrar algo tão óbvio. Ao fazer essa demonstração, Bolzano inaugurou uma nova fase na matemática, e desde então ela se tornaria definitivamente aritmetizada. Utilizou-se neste estudo a metodologia documental-bibliográfica. Teoricamente o trabalho fundamentou-se em documentos matemáticos, históricos e filosóficos do período da chamada aritmetização da análise, sobretudo aqueles escritos por Bolzano, e em artigos e livros atuais e mais recentes que discutem esse tema; também buscamos obras que discutem a relação provas e explicações; e, por fim, alguns artigos que discutem a relação entre demonstrações e a Reforma da Matemática Moderna. Além de contribuir para a reflexão e compreensão sobre os temas acima citados por parte de pesquisadores da Educação Matemática, esse debate pode apresentar elementos para que professores se questionem acerca do caráter da matemática e seus objetos e a natureza social, histórica, filosófica e cultural do crescimento do conhecimento matemático. Essas reflexões podem repercutir positivamente na prática em sala de aula de professores que se aventurem à difícil tarefa de buscar uma reflexão mais profunda relativa à natureza da matemática.

Palavras-chave: prova e explicação, Reforma da Matemática Moderna, Bolzano.

## ABSTRACT

This work is intended to contribute to the current debate of mathematics education and mathematics philosophy on proving proofs and explaining proofs. We provide evidence on the historical period when the problem arises that mathematical proofs have to meet an order to show objective of mathematical concepts and communicate the ideas mathematics for students. So we have to study the great transformation of mathematics occurred in the nineteenth century and the problem of the evidence placed at the center of considerations. We studied in particular the role to play in transformation of Bernard Bolzano (1781-1842), mathematician, philosopher and theologian, nicknamed by Felix Klein, *the father of an arithmetic analysis* and the first modern make the distinction between proving proofs and explaining proofs. Bolzano proved, without the aid of concepts like time or space – without the senses – the Intermediate Value Theorem, while mathematicians of his time believed that it was impossible to demonstrate something so obvious. In making this demonstration, Bolzano opens a new age in Mathematics. We use the documentary-bibliographic methodology. Bases theoretically our work in mathematical documents, historical and philosophical of the period of the arithmetic analysis, as well as articles and books on current and latest discuss arithmetic of that analysis, the reform of the Modern Mathematics and the debate on proving proofs and explaining proofs. We believe that in addition to contributing to the discussion and understanding on the part of researchers of the Mathematics Education, this debate can bring items to teachers who question on the nature of mathematics and its objects on the nature social, historical, philosophical and cultural as growth of mathematical knowledge. We believe, therefore, these thoughts may impact positively on the practice in the classroom of teachers who adventures the difficult task to find a deeper reflection on the nature of mathematics.

Keywords: Proof and explanation, Modern Mathematical Reform, Bolzano.

## Sumário

Agradecimentos.....	iv
Resumo.....	v
Abstract.....	vi
Introdução.....	1
<b>Capítulo 1 – A Distinção Entre Provas que Provam e Provas que Explicam.</b>	<b>9</b>
<b>Introdução.....</b>	<b>9</b>
<b>1.1 O artigo <i>Mathematical explanation</i>, de Steiner.....</b>	<b>9</b>
<b>1.2 Hanna Abre o Debate na Educação Matemática.....</b>	<b>21</b>
<b>1.3 Possíveis Perspectivas Para a Formulação de uma Teoria da Explicação a Partir do Legado de Bolzano, Segundo Mancosu.....</b>	<b>25</b>
<b>1.4 O que é uma explicação na ciência moderna? Possibilidades e perspectivas.....</b>	<b>27</b>
<b>1.5 A Educação Matemática, os fundamentos e a Filosofia.....</b>	<b>31</b>
<b>Capítulo 2 – O Teorema do Valor Intermediário.....</b>	<b>33</b>
<b>Introdução: Bernard Bolzano, Vida e Obra.....</b>	<b>33</b>
<b>2.1 O artigo <i>Prova Puramente Analítica do Teorema que Afirma que entre Dois Valores de Sinais Opostos Existe pelo Menos Uma Raiz Real da Equação</i>.....</b>	<b>35</b>
<b>2.2 Intuição e Conceito no Teorema do Valor Intermediário.....</b>	<b>41</b>
<b>2.3 Apresentação de Definições dos Números Reais.....</b>	<b>45</b>
<b>2.4 O contínuo: Comparação de Bolzano com Dedekind e Peirce.....</b>	<b>48</b>



<b>Capítulo 3 – Comparando Bolzano com Kant e com Aristóteles.....</b>	<b>51</b>
<b>Introdução.....</b>	<b>51</b>
<b>3.1 Apresentação do <i>Wissenschaftslehre</i>.....</b>	<b>52</b>
<b>3.2 Bolzano e Kant.....</b>	<b>58</b>
<b>3.2.1 Breve Apresentação de Immanuel Kant e da Crítica da Razão Pura.....</b>	<b>58</b>
<b>3.2.1.1 Aspectos do Contexto Filosófico e Científico em que foi Redigida a Crítica da Razão Pura.....</b>	<b>58</b>
<b>3.2.1.2 Conhecimento Analítico e Conhecimento Sintético: o Sintético <i>a priori</i> e o Conhecimento Matemático.....</b>	<b>63</b>
<b>3.2.2 A Primeira Distinção Fundamental: Semântica e Epistemologia.....</b>	<b>68</b>
<b>3.2.3 A segunda Distinção Fundamental: Lógica como Órganon e Cânon, ou apenas como um Cânon?.....</b>	<b>72</b>
<b>3.2.4 A Terceira Distinção Fundamental: o Conceitualismo.....</b>	<b>78</b>
<b>3.2.4.1 Definição de Conceitualismo e a Ordenação de Verdades Científicas.....</b>	<b>78</b>
<b>3.2.4.2 Conceitualismo, Verdade e Conhecimento.....</b>	<b>79</b>
<b>3.2.4.3 Conceitualismo, Relação e Comunicação.....</b>	<b>83</b>
<b>3.3 Bolzano e Aristóteles: O Quê Versus o Por Quê.....</b>	<b>85</b>
<b>3.4 Concluindo Provisoriamente Sobre o Legado de Bolzano.....</b>	<b>91</b>
<b>3.4.1 A Aritmetização do Cálculo: Situação do Cálculo Anterior e nos Tempos de Bolzano.....</b>	<b>91</b>
<b>3.4.2 Bolzano, a Filosofia Analítica e a Moderna Análise Matemática.....</b>	<b>94</b>
<b>Capítulo 4 – Exemplos de Demonstrações e a Noção de Explicação.....</b>	<b>99</b>
<b>Introdução.....</b>	<b>99</b>
<b>4.1 Bolzano e o Binomische Lehrenratz: Simplicidade e Generalidade.....</b>	<b>99</b>
<b>4.2 Esferas no Interior de uma Caixa.....</b>	<b>101</b>
<b>4.3 O Paradoxo de Zenon e a Educação Matemática Hoje.....</b>	<b>104</b>
<b>4.4 Concluindo Provisoriamente sobre o Legado de Bolzano: Explicação (<i>Abfolge</i>) e Dedutibilidade (<i>Ableitbarkeit</i>).....</b>	<b>110</b>

<b>Capítulo 5: Extratos do Trechos do <i>Wissenschaftslehre</i> (traduções feitas em colaboração por Humberto Clímaco e Michael Otte, alguns trechos do inglês e revisados do original em alemão, e outros diretamente do alemão).....</b>	<b>114</b>
5.1 § 12 “Pergunta-se se a lógica é uma ciência formal” .....	114
5.2 § 19 “O quê o autor entende por uma proposição em si”.....	118
5.3 § 24 “Vários Significados das palavras: Verdadeiro e Verdade” .....	120
5.4 § 48 “O Quê o Autor Compreende por Representações ( <i>Vorstellung</i> ) em Si e por Representações ( <i>Vorstellung</i> ) Possuídas” .....	122
5.5 § 133 “Proposições Conceituais e Proposições Intuitivas ( <i>Anschauungsaetze</i> )”.....	123
5.6 § 148 “Proposições Sintéticas e Analíticas” .....	127
5.7 §198 “O conceito de Relação de <i>Abfolge</i> (Fundamento-Conseqüência) entre Verdades” .....	133
5.8 § 206 “Pode um Fundamento Ter Várias Conseqüências ou Uma Conseqüência Vários Fundamentos?” .....	135
5.9 § 213 “Pode a Conseqüência da Conseqüência Ser Considerada uma Conseqüência do Fundamento?” .....	136
5.10 §221 “Alguns Sinais Que Indicam Se Certas Verdades Estão Na Relação De Uma Dependência Uma Com Outra” .....	137
5.11 §525 “Esclarecimentos sobre o fundamento objetivo de uma verdade” ..	141
<b>Conclusão.....</b>	<b>144</b>
<b>Referências Bibliográficas.....</b>	<b>149</b>

## Introdução

Na década de 1960, após o lançamento do Sputnik em 1957, e a decisão de os países ocidentais darem uma maior importância ao ensino de ciências, iniciou-se em vários países do mundo a chamada Reforma da Matemática Moderna, uma tentativa de aproximar a matemática das escolas de Ensino Fundamental e Médio daquela praticada no Ensino Superior. Tratava-se do reconhecimento no ensino escolar de algo que já era uma realidade para a matemática pura e para o ensino superior: a álgebra passava a ocupar o lugar central na matemática, após o fenômeno histórico chamado aritmetização da matemática. Com esse fenômeno, desde então, as demonstrações e conceitos matemáticos passam a ter que se basear na aritmética, o que implicou uma concepção de que a matemática teórica deveria se basear em provas rigorosas. Talvez o primeiro exemplo desse estilo de fazer matemática se encontra no *Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen zwei Werten, die ein entgegengesetztes Resultat gewaehren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege*<sup>1</sup> de Bolzano, publicado em 1817. Assim, eliminava-se a idéia de que a matemática se resume a cálculos, ou a idéia representada pela geometria euclidiana de que a matemática trata das características de grandezas ou de figuras concretas.

A relação da aritmetização com provas formais tem raízes históricas em Leibniz (1646-1716) (RUSNOCK, 1997, CASSIRER, 1998), para quem as demonstrações deveriam ser rigorosas e baseadas em conceitos, e não mais na geometria e naquilo que é passível de percepção. Com essa mudança de ênfase, a concepção de matemática baseada em Aristóteles, cujo ponto-de-vista prevaleceu aproximadamente até o século XVII, mudava. Para Aristóteles (*Segundos Analíticos*, 78a 22<sup>2</sup>), a ciência deveria mostrar as causas dos fenômenos, concebendo-as em termos da essência das coisas. Explicar algo, de acordo com esta concepção, significa mostrar aquilo que liga esse fenômeno à sua essência. Com a aritmetização e a desvinculação da matemática e das ciências de objetos ou coisas em si, toda

---

<sup>1</sup> Tradução: “Prova puramente analítica do teorema que afirma que entre dois valores de sinais opostos existe pelo menos uma raiz real da equação”. É o artigo que contém a demonstração do Teorema do Valor Intermediário, ao qual nos referiremos em diversas ocasiões na dissertação. De agora em diante, o artigo será denominado *Prova Puramente Analítica...* quando citado no corpo do texto, e RB quando em citações (como é o padrão em alguns artigos em diferentes línguas, em referência às iniciais das duas primeiras palavras que aparecem em maiúsculo no título do artigo – Rein e Beweis). O Teorema do Valor Intermediário em questão será sempre escrito em letras maiúsculas, pois é de grande importância para esta dissertação.

<sup>2</sup> Sempre que citarmos obra de Aristóteles, não indicaremos o ano da edição, nem a página de edições particulares. Citaremos o nome da obra em português (*Segundos Analíticos*) acompanhada da numeração da edição padrão. As diferentes edições consultadas são listadas nas referências bibliográficas.

a base da ciência concebida por Aristóteles ficava abalada. Buscou-se, depois do Renascimento, leis universais, em vez de explicações específicas, e por isso a Matemática teve que ser transformada em uma linguagem universal, e a álgebra os números ganharam importância.

A vantagem do método surgido com a aritmetização é a possibilidade de relação da matemática com outras ciências. Tal método pareceu captar bem uma importante característica da ciência moderna, que é a capacidade de explicar os fenômenos em termos de leis e regularidades, e não de causas essenciais.

Em que consistiu a mudança ocorrida na Matemática com a aritmetização? A aritmetização trouxe a ênfase no rigor e o abandono da idéia de que a matemática deveria se referir a objetos concretos e perceptíveis por meio da intuição (ou às coisas em si), em detrimento da noção de explicação em termos de leis. Marx (1978, p. 104) afirma que a sociedade viveu uma primeira etapa em que todos eram parte de uma mesma família, tudo era informal, e não eram necessárias leis, pois tudo poderia ser explicado com base no concreto e no conhecido. A segunda etapa à qual Marx se refere é aquela em que os homens criaram as leis, e a língua adquiriu significados mais abstratos. Para Marx (1978), a segunda etapa era necessária, mas criava o que ele chamava de fetiche da burguesia pelas leis, pela forma, pela linguagem e pelo número; assim, ainda deveria haver uma terceira etapa em que forma e conteúdo se reconciliariam.

Muitos filósofos e educadores matemáticos, no entanto, não compreenderam a passagem da primeira para a segunda etapa, e desejam um retorno à época em que tudo era explicado em termos qualitativos e concretos. Então foi natural que se criticasse a Reforma da Matemática Moderna e as provas formais, por trazerem para o ensino essa realidade da matemática. Outro estímulo à crítica foi o surgimento de demonstrações por computador. O exemplo da demonstração do teorema das quatro cores por Appel e Haken, em 1972, colocou em questão a noção de que teoremas difíceis seriam sempre demonstrados por boas idéias. Pode-se perceber a reação que provocou com a afirmação de Davis e Hersh (1982, p. 427-428):

Quando soube que o teorema das quatro cores tinha sido demonstrado, minha primeira reação foi “Maravilhoso! Como é que eles o conseguiram?” Eu esperava alguma nova percepção brilhante, uma demonstração que tivesse em seu núcleo uma idéia cuja beleza transformaria meu dia. Mas quando recebi a resposta “Eles o conseguiram decompondo-o em milhares de casos, e testando-os em um computador caso a caso”, senti-me desencorajado. Minha reação então foi, “Isso mostra que realmente não se tratava de um

bom problema.”... Neste assunto, meu gosto é provavelmente o de uma época que está passando.

Com o surgimento, na década de 1980, dos *softwares* geométricos, que permitem a visualização de diversas propriedades muito difíceis de serem vistas de outra maneira, e cuja apresentação tradicionalmente é feita por meio de provas formais que muitos alunos têm dificuldades em compreender, muitos acadêmicos renovaram suas esperanças de que o papel da intuição deveria ser reconsiderado.

Assim, surgiu o debate sobre provas que provam contra provas que explicam. Alguns filósofos buscaram as raízes históricas dessa distinção e perceberam que Bolzano era o único, dentre os principais construtores da matemática pura moderna, que a tinha feito. Bolzano (WL, 525), por sua vez, se apoiou na distinção aristotélica entre provas que mostram o que (*oti*) e provas que mostram o porquê (*dioti*), e defendeu – assim como Aristóteles – uma concepção de ciência segundo a qual sempre se deveria mostrar as causas essenciais dos fenômenos.

No entanto, a retomada no século XX desta distinção por alguns autores foi feita como se tratasse de uma novidade: afirmamos isso baseados no fato de que autores como Hanna (1983, 2000) e Steiner (1978) não citam nem se referem nem a Bolzano nem a Aristóteles. Kitcher (1975) e Mancosu (1999) citam Bolzano e Aristóteles e mostram a conexão entre suas obras, mas parecem não compreender que as conexões objetivas que Bolzano pretendeu mostrar não foram preponderantes na matemática pura, pois com o surgimento do método hipotético-dedutivo, a idéia de hierarquia de verdades e proposições foi deixada de lado, em prol de uma abordagem em que o mais importante seria a relação entre as idéias e conceitos. Alguns autores parecem querer uma matemática que mostre as causas essenciais dos conceitos, localizando-as em conceitos puros. Outros localizam as causas essenciais na intuição e na percepção visual ou geométrica. No entanto, essas concepções de matemática dizem muito pouco sobre a natureza da matemática real dos dias atuais. No método hipotético-dedutivo, conceitos mais simples são provados com o uso de conceitos mais complexos para a intuição humana, embora permitam uma maior generalização.

O estudo da obra de Bolzano permite compreendermos a relação intrínseca entre a matemática pura e a noção de provas rigorosas, percebida por Bolzano mais de um século antes de que Hanna abrisse o debate na educação matemática criticando o fracasso da Reforma da Matemática Moderna.

Um exemplo importante do funcionamento da ciência moderna é a aritmética, que se fundamenta nos cinco axiomas chamados “axiomas de Peano<sup>3</sup>”. Eles foram construídos de forma que fornecessem fundamentos para todas as operações que utilizadas normalmente e que mostram-se corretas quando são aplicadas. Os axiomas de Peano ‘explicam’, por exemplo, que  $2+2=4$ . Entretanto, de que explicação se trata, que mostra algo muito simples e que todos conhecem usando algo complexo e formal, como são os axiomas de Peano? Explicação nesse sentido é muito diferente do significado da palavra utilizada em nosso dia-a-dia. O processo de explicar o concreto por meio do abstrato tem o propósito de fazer previsões sobre as possibilidades dos fenômenos, e tem relação direta com a idéia de que a tarefa da ciência moderna não é explicar o mundo, mas lidar com ele de uma maneira eficaz. A este respeito, Otte (1997, p. 351) afirma que

explicar uma afirmação como  $2+2=4$  ou, se quiser,  $7+5=12$  (o famoso exemplo de Kant (B 15)), deve-se primeiro afirmar, como num discurso sobre conhecimento comum, que esta proposição expressa um simples fato, verificável facilmente por meio de um cálculo (que no entanto é em si independente de tal verificação como ela parece presente na intuição). Após um momento de reflexão, busca-se, exatamente como no caso da ciência, tentar e fornecer uma explicação deste fato. Esta tentativa implica uma mudança de perspectiva, um salto rumo a um nível de lógica ou tipo categórico diferente. A lei fornece uma contribuição unificadora daquilo que seria de outra forma um mero conjunto de dados. Nesta tentativa se usa o geral e abstrato para explicar o particular e concreto, ou aparentemente concreto, exatamente da mesma maneira em que as leis de Newton são usadas para explicar fenômenos mecânicos simples, ou a lei de Ohm é usada para explicar os fatos da eletricidade. O geral, tal qual é usado nas explicações científicas como estas, em nosso caso por exemplo a lei associativa da álgebra, é menos certo de um ponto-de- vista empírico e menos positivo do que os fatos individuais que podem ser encontrados sobre ela. O menos certo é usado para explicar o mais certo, porque o que poderia ser mais certo devido a seus efeitos de uma lei nunca pode ser certo. Esta estratégia só faz sentido se ela for empregada explorativamente e para fazer previsões, mesmo se tais previsões podem nunca ser absolutamente certas<sup>4</sup>.

---

<sup>3</sup> Os axiomas são: “1) 0 um número; 2) O sucessor de qualquer número é um número; 3) Não há dois números com um mesmo sucessor; 4) 0 não é o sucessor de número algum; 5) Qualquer propriedade que pertença a 0, e também ao sucessor de todo número que tenha essa propriedade, pertence a todos os números”

<sup>4</sup> To explain a statement like  $2+2=4$  (ibid., 4.91), or  $7+5=12$  if you like, one first argues, as in discourse on ordinary knowledge, that this proposition expresses a simple matter of fact, to be easily verified by means of calculation (which however is in itself independent of such verification as it seems present in intuition). After a while one goes on, completely as in the case of science, to try and give an explanation of this fact. This endeavor implies a change of perspective, a jump to a level of different logical or categorical type. The law gives a unified account of what is otherwise a mere series (Armstrong 1983). In this endeavor one uses the general and abstract to explain the particular and concrete, or seemingly concrete, in exactly the same manner in which Newton’s laws are used to explain simple mechanical phenomena, or Ohm’s law is used to explain the facts of electricity. The general, as used in scientific explanations of such kind, in our case for instance the associative law of algebra, is less sure from a concrete empirical point of view and less positive than the individual facts to be founded on it. The less certain is used to explain the more certain, because what could be more certain because

A forma de raciocínio que envolve a tendência de explicar fatos particulares em termos de leis gerais é muito importante para a matemática moderna, porque possibilita a unificação entre as diferentes áreas da matemática e da ciência; essa unificação chama-se universalismo. O rigor na matemática moderna não se deve a que as provas infalíveis sejam essenciais, mas a que produzem resultados práticos e necessários para a ciência e para a vida das pessoas. A intuição geométrica não pode cumprir o papel fundamental porque intuição é relativa a objetos particulares e à homogeneidade entre método e objeto porque, por ser sempre relativa a um objeto, a intuição não tem como se referir a universos, portanto não é possível, por estar o objeto preso à intuição, haver generalizações e abstrações, pois não é possível transmitir a intuição de uma pessoa para outra. O máximo que se pode fazer é apontar e dizer: “Olhe”. Mas como a existência de objetos matemáticos é uma questão muito complexa, deduz-se que apontar e falar não ajuda muito o ensino da matemática. O pensamento intuitivo é aberto à complexidade de uma situação particular, da qual decorre seu lado forte e também suas limitações.

Por isso, querer, na matemática, retomar a intuição como princípio, implica uma particularidade que levaria à perda das suas principais vantagens, que são a abstração, a generalização e a universalidade.

Alguns alegam que o retorno à intuição seria a solução pelo menos para o ensino da matemática. A Reforma da Matemática Moderna, porém, trouxe uma importante lição também a respeito desta questão. Dentre os elaboradores desta reforma houve, como G. Papy, (1968), quem entendeu a abordagem da teoria dos conjuntos como a forma de retomar a ligação entre a intuição e os conceitos, noção que prevaleceu na geometria euclidiana. O resultado foi que se criou uma dependência dos alunos em relação aos conjuntos, e de repente se percebeu que as crianças não sabiam somar, multiplicar, subtrair e dividir, enquanto se ocupavam com complexas operações entre os conjuntos. Em outras palavras: vincular o conhecimento matemático à intuição leva muitas vezes a aumentar a dificuldade dos alunos em compreender a matemática em termos de leis e de generalização, pois, na percepção, há muitos aspectos irrelevantes que se transformam em distrações e obstáculos.

---

the effects of a law can never be certain. Such a strategy makes sense if it is employed exploratively and predictively, even though the predictions made can never be absolutely sure.

Neste trabalho se retoma o momento crucial em que a matemática passou a ser aritmetizada. Foi realizado o estudo de algumas obras de Bernard Bolzano (1781-1842), matemático, filósofo e teólogo nascido em Praga, e um dos iniciadores e formuladores do programa de aritmetização da análise, e celebrizado por Félix Klein (1849-1924) como o “pai da aritmetização da análise” (1845, p. 99). Bolzano também é considerado por muitos – não sem divergências, como mostraremos – o pai da lógica moderna e um precursor da filosofia analítica.

Foram escolhidas as obras *Prova puramente analítica...* e *Wissenschaftslehre*<sup>5</sup>, que são as principais obras em que Bolzano expõe seu ponto-de-vista que viria a colocar no centro da matemática a aritmetização e o rigor, ao demonstrar, sem a utilização de nenhum pressuposto dos sentidos, o Teorema do Valor Intermediário, que os matemáticos de sua época julgavam indemonstrável por ser intuitivamente óbvio, e ao formular um tipo de filosofia que se concentrava na análise do conteúdo das proposições, e não – como era predominante na época – na análise do conteúdo da mente humana. Bolzano não se interessou pelo pensamento, mas pelos objetos desse pensamento, os quais pelo conhecimento (teorias, proposições, provas, etc.), teriam uma existência própria, que poderia e deveria ser esclarecida. Essa é a tarefa da lógica concebida como uma Doutrina da Ciência (*Wissenschaftslehre*).

As pesquisas matemáticas fazem parte, para ele, dos esforços filosóficos e teológicos por encontrar a realidade das coisas em si e diferenciar a verdade do conhecimento da verdade; Bolzano alega que podemos até nunca vir a conhecer determinadas verdades, mas que elas existem e Deus conhece todas elas.

No capítulo 1, apresenta-se o debate atual na educação matemática, acerca de provas que provam e provas que explicam, com base em textos de educadores matemáticos e filósofos da ciência. Um dos artigos apresentados é o *Mathematical explanation* (STEINER, 1978), em que o autor afirma que a questão da explicação tinha sido deixada de lado na matemática, e propõe que, na matemática, a relação de causa e efeito passe a ser considerada da mesma forma como ela o é nas ciências naturais. Também se apresenta o artigo *Proof, explanation and exploration: an overview* (HANNA, 2000), em que a autora faz um balanço dos debates ocorridos nos últimos anos e destaca que o interesse sobre o assunto tem crescido, até mesmo para o público que não é pesquisador; nesse artigo, Hanna (2000) retoma conceitos

---

<sup>5</sup> Doutrina da Ciência, editado em 1837: de agora em diante, indicaremos por WL. As citações são traduções feitas em colaboração por Humberto Clímaco e Michael Otte, utilizando a edição em alemão de 1980 e a edição em inglês de 1973. Algumas foram feitas do inglês e revisadas do original em alemão, e outras diretas do alemão.



escritos por ela em um livro publicado em 1983, e que abriram o debate sobre a explicação na educação matemática. Ainda se analisa o artigo *Bolzano and Cournot on mathematical explanation* (MANCOSU, 1999), que aborda a questão da explicação retomando a contribuição de Bolzano e discutindo sua noção de explicação; e, por fim, analisa-se o artigo *Explanation*, (NEWTON-SMITH, W. H., 2000), que faz um histórico das tentativas de criar uma noção de explicação científica e mostra as grandes dificuldades em fazê-lo.

No capítulo 2, discute-se o artigo de Bolzano *Prova puramente analítica...*, em que ele demonstra o Teorema do Valor Intermediário para polinômios – talvez a principal obra matemática do autor, que apresenta de maneira bem aguda os problemas que são centrais na educação matemática atual: a relação entre intuição e conceito, entre percepção e rigor, entre abstração e realidade. Bolzano (1817) demonstra este teorema sem nenhum apelo a noções como espaço e tempo – ao contrário de seus contemporâneos, e contrariando as afirmações kantianas de que todo conhecimento novo deveria necessariamente usar tais conceitos. No prefácio do artigo mencionado, ele explicita sua concepção de demonstração científica e mostra de que forma a demonstração que ele chama de puramente analítica se enquadra em sua concepção de ciência. Também discute as demonstrações dos matemáticos de sua época, que acreditavam ser impossível demonstrar tal teorema em razão de sua inquestionável obviedade. Demonstrando algo inquestionavelmente óbvio em termos de algo reconhecidamente difícil de visualizar ou intuir, Bolzano (1817) inaugurava uma nova fase da matemática, em que a relação entre as idéias é mais importante do que a referência a alguma propriedade inerente aos sentidos.

No capítulo 3, apresentam-se as concepções de Bolzano que o levaram a acreditar que era necessária uma demonstração, sem a utilização de elementos dos sentidos, do Teorema do Valor Intermediário, e de que forma ela se ligava a seus esforços para formular uma Teoria da Ciência (*Wissenschaftslehre*) concentrada na análise do conteúdo das proposições, e não na análise do conteúdo da mente humana. Discutem-se divergências e convergências com Kant (1724-1804) e com Aristóteles, apresentando as influências da Matemática Moderna e do pensamento relacional sobre as outras ciências e sobre a filosofia, e as relações de Bolzano com a filosofia analítica.

Analisa-se brevemente de que forma a noção de explicação se desenvolveu dos gregos até os dias atuais, além de abordarmos a relação entre intuição e conceito. Ainda no capítulo 3, apresentam-se alguns trechos do monumental *Wissenschaftslehre* de Bolzano e o diálogo lá

estabelecido com as obras de Kant e Aristóteles, e de que forma Bolzano encarava a relação do conhecimento científico com as capacidades objetivas e subjetivas do ser humano.

Essas comparações trazem à tona questões relativas à natureza da explicação que ajudam a compreender melhor o debate acerca da noção de explicação que se estabelece atualmente. Alguns dos argumentos, discussões e esclarecimentos contidos na obra de Bolzano sobre as motivações e sobre a importância do movimento de aritmetização da análise e suas consequências científicas, apontam importantes aspectos a serem discutidos e analisados.

No capítulo 4, apresentam-se alguns exemplos importantes de demonstrações, seja para a história da matemática, seja para mostrar de modo concreto como se dá na prática matemática a relação entre intuição e conceito. À luz das discussões feitas nos capítulos anteriores, discutem-se as vantagens e desvantagens de cada demonstração, e possíveis critérios para julgá-las, bem como a sugestão de uma noção de explicação que nos parece adequada. Retomamos algumas questões levantadas na introdução, tais como as dificuldades de ensino e aprendizado surgidas com a abstração e sua relação com a noção de explicação, e concluimos com algumas reflexões sobre a relação de fundamento e consequência e a relação de dedutibilidade.

Por fim, no capítulo 5, apresentam-se extratos do *Wissenschaftslehre*, cujas traduções foram feitas em colaboração por Humberto Clímaco e Michael Otte, algumas do inglês e revisadas do original em alemão, e outras diretamente do alemão.

## Capítulo 1 – A distinção Entre Provas que Provam e Provas que Explicam

### Introdução

No final do século XX, diante das dificuldades com o ensino de matemática existentes no mundo inteiro, parte da comunidade da educação matemática internacional passou a localizar na noção de explicação e na Reforma da Matemática Moderna o problema central das dificuldades de aprendizado, particularmente no formalismo de suas demonstrações.

Na filosofia da matemática, em 1978, Steiner escreveu *Mathematical explanation*, no qual apresentou um panorama geral das discussões acerca da noção de explicação, e expôs sua própria noção de explicação. Em 1983, Hanna abriu o debate na educação matemática.

#### 1.1 O artigo *Mathematical explanation*, de Steiner

Em *Mathematical explanation* (1978), Steiner começa afirmando que filósofos se preocuparam muito tempo com o problema da explicação nas ciências naturais mas que, na matemática, ignoraram esse problema durante um longo período. Afirma que provavelmente, isso ocorreu em virtude de ter havido demora na distinção entre materialidade dos fatos e relações entre idéias, implícita na concepção de que a matemática (no que diz respeito às relações entre idéias) não tem nada a explicar (ou seja, não tem nada a dizer a respeito da verdade ou materialidade dos fatos).

Steiner (1978) afirma que seu objetivo é, em continuidade a Quine<sup>6</sup> e Putnam<sup>7</sup>, defender a continuidade entre as ciências matemáticas e as ciências naturais, e assim discutir o problema da explicação na matemática. Em seguida, distingue na matemática provas que apenas provam (justificam) e provas que explicam (confirmam).

Steiner (1978) expõe pontos-de-vista de diferentes autores acerca da explicação. Analisa a noção defendida por Feferman (1969)<sup>8</sup>, o qual afirma que “abstração e

---

<sup>6</sup> Willard Van Orman Quine (1908-2000) foi um dos mais influentes filósofos e lógicos estadunidenses do século XX, considerado o maior filósofo analítico da segunda metade daquele século.

<sup>7</sup> Hilary Whitehall Putnam (1926- ) é um filósofo estadunidense figura central da filosofia ocidental desde a década de 1960, especialmente em filosofia da mente, filosofia da linguagem e filosofia da ciência.

<sup>8</sup> Solomon Feferman, (1928- ), filósofo, lógico e matemático estadunidense.

generalização são constantemente procurados como meios de alcançar explicações realmente satisfatórias que inserem num contexto conceitual resultados individuais dispersos”. Steiner (1978, p. 136) divide a tese de Feferman em três:

- a) Uma prova é explicativa se ela é abstrata (ou geral) em algum sentido absoluto, a ser especificado.
- b) Uma prova é explicativa se ela é *mais* abstrata (ou geral) do que aquilo que ela prova.
- c) Entre duas provas de um mesmo teorema, a *mais* explicativa é a mais abstrata (ou geral).<sup>9</sup>

Steiner (1978) apresenta uma série de exemplos de demonstrações matemáticas e discute os critérios acima apresentados por Feferman, e também outros critérios, que ele mesmo propõe.

O autor assinala que “um critério parcial de generalidade emerge da consideração de que algumas provas provam mais do que outras” (STEINER, 1978, p. 137). Para ele, alguns matemáticos, e talvez o próprio Feferman, consideram as provas analíticas mais explicativas.

Steiner (1978) discute então diferentes demonstrações da irracionalidade da raiz de 2 e, mais geralmente, da raiz de um número primo qualquer.

considere a prova pitagórica de que a raiz quadrada de 2 não é racional: se  $a^2 = 2b^2$ , com a/b reduzido a fração irredutível...então  $a^2$ , e portanto o próprio a deve ser par; então  $a^2$  deve ser múltiplo de 4, e  $b^2$  – e portanto b – é múltiplo de 2. Conseqüentemente,  $a^2 = 2b^2$  implica que tanto a quanto b devem ser pares, contradizendo nossa permissível estipulação de que a/b seja uma fração reduzida, isso ( $\sqrt{2} = a/b$ ) nunca pode ser verdadeiro, c.q.d. O ponto chave aqui é a proposição de que, se  $a^2$  é par, também o é a. Isso pode ser verificado elevando ao quadrado um número ímpar arbitrário  $2q+1$  e mostrando que o resultado deve ser ímpar (p. 137-138).<sup>10</sup>

---

<sup>9</sup> (a) A proof is explanatory per se if it is abstract (or general) in some absolute sense, yet to be specified.

(b) A proof is explanatory per se if it is *more* abstract (or general) than what it proves

(c) Of two proofs of the same theorem, the *more* explanatory is the more abstract (or general)

<sup>10</sup> Consider the Pythagorean proof that the square root of 2 is not rational: if  $a^2 = 2b^2$ , with a/b reduced to lowest terms, then  $a^2$  and thus a itself have to be even; thus  $a^2$  must be a multiple of 4, and  $b^2$  - and thus b - multiplies 2. Since therefore  $a^2 = 2b^2$  implies that both a and b must be even, contradicting our (allowable) stipulation that a/b be reduced to lowest terms, it can never be true, q.e.d. The key point here is the proposition

Olhando para a equação  $a^2 = 2b^2$ , percebe-se que, pela definição de números pares,  $a^2$  deve ser par. No entanto para que  $a^2$  seja par, é necessário que  $a$  seja par; e esta passagem é a que Steiner (1978) chama de *ponto-chave*: demonstrá-la é o mesmo que demonstrar que, se um número qualquer elevado ao quadrado é par, o próprio número é par; Steiner (1978, p.138) não demonstra, mas mostra como fazê-lo ao afirmar que basta elevar “ao quadrado um número ímpar arbitrário  $2q+1$  e mostrando que o resultado deve ser ímpar”. Mais uma vez, recorre-se a uma demonstração por absurdo.

Como  $a$  é múltiplo de 2,  $a^2$  é múltiplo de 4, e fazendo exatamente o mesmo raciocínio do parágrafo anterior, concluí-se que  $b^2$  é par e que, portanto,  $b$  também é par, o que contraria a *permissível* estipulação de que  $a/b$  seja uma fração irredutível. Como já dito, uma fração ser irredutível não pode ser um absurdo; portanto, o absurdo está em assumir que  $\sqrt{2}$  possa ser escrito na forma  $a/b$ . Não podendo ser escrito na forma  $a/b$ ,  $\sqrt{2}$ , é necessariamente irracional.

Em seguida, Steiner (1978) expõe as desvantagens da prova pitagórica:

Certamente para cada primo  $p$ , pode-se separadamente verificar que se  $p$  divide  $a^2$ , deve dividir  $a$  também, embora as provas se tornem mais e mais complexas (para  $p=5$ , por exemplo, deve-se elevar ao quadrado  $5q+1$ ,  $5q+2$ ,  $5q+3$  e  $5q+4$  e mostrar que em nenhum caso o resultado é divisível por 5) (p. 138)<sup>11</sup>.

Também poderia ser afirmado que os métodos de verificação de divisibilidade de um número por um outro se tornam cada vez mais complicados. A esse respeito, Steiner (1978) mostra a prova que ele considera mais geral:

usando o Teorema Fundamental da Aritmética – que cada número tem uma única expansão em primos (por exemplo, 756 é unicamente  $2^2 \times 3^3 \times 7^1$ ) – nós podemos

---

that if  $a^2$  is even so is  $a$ . This can be verified by squaring an arbitrary odd number  $2q+1$  and showing that the result must be odd.

<sup>11</sup> Indeed for each prime  $p$ , one can separately verify that if  $p$  divides  $a^2$  it must divide  $a$  also, though the proofs become more and more complex (where  $p = 5$ , for example, one must square  $5q+1$ ,  $5q+2$ ,  $5q+3$  and  $5q+4$  and show that in no case is the result divisible by 5).

argumentar pela irracionalidade da raiz quadrada de 2 rápida e decisivamente. Porque na expansão de  $a^2$  em primos, o primo 2 aparecerá necessariamente com um expoente par (o dobro do expoente que há na expansão de a), enquanto que em  $2b^2$  seu expoente deve ser ímpar. Então  $a^2$  nunca é igual a  $2b^2$ , c.q.d. Geralmente, a mesma prova mostra que  $a^2$  nunca é igual a  $nb^2$ , a não ser que n seja um quadrado perfeito (de modo que todos os expoentes em sua expansão por primos sejam pares)<sup>12</sup> (p. 138).

De fato, esta prova é mais geral, e generalidade é um critério que Steiner (1978) considera um possível *para* se considerar uma prova mais explicativa *do* que outra.

No entanto, mais adiante, ele afirma:

Em suma, temos uma interpretação parcial da tese (c) acima (a tese de Fefferman que afirma...): dentre duas provas, a mais explicativa é a mais geral. Deduzir um teorema como um exemplo de uma generalização, ou como um corolário de um teorema mais forte, é mais explicativo do que deduzí-lo diretamente.

Mas mesmo este critério falha. Vejamos a raiz quadrada de 2 novamente. Hardy prova o resultado geral que

$$a^2 = nb^2$$

implica que n é um quadrado perfeito por um método diferente do exposto acima. Assume que a/b é irredutível. Se um primo p divide b, e portanto  $b^2$ , ele deve dividir  $a^2$  e portanto a, contradição. Então, nenhum primo divide b, e b deve ser o número 1; e n, evidentemente, um quadrado perfeito. Particularizando para o caso em que n=2, temos o resultado de Pitágoras – que a raiz quadrada de 2 é irracional – mas é difícil afirmar que nossa presente prova, embora mais geral, seja mais explicativa do resultado específico do que o argumento de Pitágoras (devemos distinguir aqui ‘mais explicativa’ de ‘explica mais’). Concluimos relutantemente que a prova que invoca o Teorema Fundamental da Aritmética não é mais explicativa do que a de Pitágoras por ser mais geral, mas por alguma outra razão<sup>13</sup> (p. 139).

---

<sup>12</sup> by using the Fundamental Theorem of Arithmetic – that each number has a unique prime power expansion (e. g. 756 is uniquely  $2^2 \times 3^3 \times 7^1$ ) – we can argue for the irrationality of the square root of two swiftly and decisively. For in the prime power expansion of  $a^2$  the prime 2 will necessarily appear with an even exponent (double the exponent it has in the expansion of a), while in  $2b^2$  its exponent must needs be *odd*. So  $a^2$  never equals  $2b^2$ , q.e.d. Generally, the same proof shows that  $a^2$  can never equal  $nb^2$ , unless n is a perfect square (so that all the exponents in its prime power expansion will be even).

<sup>13</sup> In sum, we have given a partial interpretation to thesis © above: of two proofs, the more explanatory is the more general. To deduce a theorem as an instance of a generalization, or as a corollary of a stronger theorem, is more explanatory than to deduce it directly. But even this criterion fails. Let’s look at the square root of two again. Hardy proves the general result that

$$a^2 = nb^2$$

Implies that n is a perfect square by a method unlike the one above. Assume that a/b is reduced to lowest terms. If a prime p divides b, and thus  $b^2$ , it must divide  $a^2$  and thus a, contradiction. So no prime divides b, and b

Essa outra razão, que Steiner (1978) exporá mais adiante, é que ele busca para dizer o que é ser explicativo. Para tentar refutar o critério de generalidade, Steiner (1978) expõe diferentes demonstrações da seguinte identidade, chamada identidade euleriana:

$$(1+x)(1+x^3)(1+x^5)\dots = 1 + x^2/(1-x^2) + x^4/(1+x^2)(1-x^4) + x^9/(1-x^2)(1-x^4)(1-x^6) + \dots$$

A primeira prova que ele apresenta é a do próprio Euler (1707-1783), que introduz um segundo parâmetro ‘a’, fazendo

$$F(a) = F(a, x) = (1+ax)(1+ax^3)(1+ax^5)\dots$$

$$(I) \quad F(a) = F(a, x) = 1 + c_1a + c_2a^2 + c_3a^3 + \dots$$

e, portanto, tornando cada um dos ‘c’s dependente de ‘x’ mas não de ‘a’. Mais ainda,

$$F(a) = (1+ax)(1+ax^3)(1+ax^5)\dots = (1+ax)(1+(ax)x^2)(1+(ax)x^4)\dots = F(ax^2) .$$

Então,

$$1 + c_1a + c_2a^2 + \dots = (1+ax)(1 + c_1ax^2 + c_2a^2x^4 + \dots)$$

Com base na igualdade acima, obtém-se os coeficientes de c:

---

must be the number 1; and n, of course, is a perfect square. Specializing to the case where n = 2, we get Pythagoras’ result – that the square root of 2 is irrational – but it would be hard to claim that our present proof, though more general, is more explanatory of the specific result than Pythagoras’ argument (we must here distinguish ‘more explanatory’ from ‘explains more’). We reluctantly conclude that the proof invoking the Fundamental Theorem of Arithmetic is not more explanatory than Pythagoras’ because more general, but for some other reason.

$$c_1 = x + c_1 x^2$$

$$c_2 = c_1 x^3 + c_2 x^4$$

M

$$c_m = c_{m-1} x^{2m-1} + c_m x^{2m}$$

Assim,

$$\begin{aligned} c_m &= \frac{x^{2m-1}}{1 - x^{2m} c_{m-1}} = \frac{x^{1+2+\dots+(2m-1)}}{(1-x^2)(1-x^4)\dots(1-x^{2m})} \\ &= \frac{x^{m^2}}{(1-x^2)(1-x^4)\dots(1-x^{2m})}. \end{aligned}$$

E substituindo em (I) os parâmetros  $c_m$ , obtém-se:

$$\begin{aligned} F(a) &= (1+ax)(1+ax^3)(1+ax^5)\dots = \\ &= 1 + ax/(1-x^2) + a^2 x^4/(1-x^2)(1-x^4) + \dots \end{aligned}$$

Fazendo  $a=1$ , obtém-se o teorema de Euler.

De acordo com Steiner (1978)

esta prova, apesar de ser brilhante, e de sua generalidade, não explica realmente a identidade. Note, em particular, que esta prova poderia ter sido usada, não somente para verificar o teorema, mas para descobri-lo. Então, de passagem, refutamos uma sugestão plausível mesmo antes de ter tido uma chance de discuti-la: que a prova explicativa é aquela que poderia ser usada para determinar, não somente verificar, o resultado. Embora o exemplo anterior – a prova, usando o Teorema Fundamental da Aritmética, de que  $\sqrt{2}$  é irracional – dê crédito a esta sugestão, o exemplo presente mostra que a ‘descoberta’ é no máximo um sintoma de explicação na matemática, e não um critério<sup>14</sup>. (p. 140)

---

<sup>14</sup> This proof, despite its brilliance and generality does not really explain the identity. Note, in particular, that this proof could have been used, not only to verify the theorem, but to discover it. Thus, in passing, we have refuted a plausible suggestion even before we have had a chance to discuss it: that the explanatory proof is the one which could be used to determine, not merely verify, the result. Though our previous example – the proof, using the Fundamental Theorem of Arithmetic, that  $\sqrt{2}$  is irrational – lends credence to this suggestion, the present example shows that ‘discoverability’ is at best a symptom of explanation in mathematics, not a criterion..

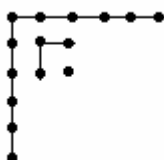


Afinal, segundo Steiner (1978, p. 141), esse exemplo é o caso de uma prova que serviu como descoberta, mas que não fornece explicação. E continua com outro exemplo:

Se a própria prova de Euler não fornece uma explicação desta identidade, como a explicamos? Quando multiplicamos o produto infinito

$$(1+x)(1+x^3)(1+x^5)\dots$$

nós vemos que o coeficiente de  $x^n$  será  $(1+1+1+1+\dots)$ , com tantas unidades quanto o número  $n$  pode ser particionado em partes ímpares e distintas. Agora, considere por exemplo a partição de 15 em  $11+3+1$ , representando-a graficamente como na figura:<sup>15</sup> (STEINER, 1978, p. 141-142)



Steiner (1978) introduz o termo *partição simétrica* referindo-se à partição do desenho indicado na citação anterior, afirmando que

qualquer partição simétrica de  $n$  pode ser vista como um quadrado de área  $m^2$  pontos, neste caso  $m=3$ , e cada um dos dois ‘braços<sup>16</sup>’ representando a mesma partição do número  $1/2(n-m^2)$  em partes que não excedam  $m$ . Neste caso cada braço representa uma partição de 3 em  $1+1+1$ . Com este comentário em mente, voltamos para o termo geral da soma infinita:

$$x^{m^2} / (1-x^2)(1-x^4)(1-x^6)\dots(1-x^{2m}).$$

A fração  $1 / (1-x^2)(1-x^4)(1-x^6)\dots(1-x^{2m})$

Nos fornece o produto de  $m$  diferentes séries geométricas:

$$1 + x^2 + x^{2+2} + x^{2+2+2} + \dots$$

<sup>15</sup> If Euler’s own proof does not provide an explanation of his identity, how do we explain it? When we multiply the infinite product

$$(1+x)(1+x^3)(1+x^5)\dots$$

we see that the coefficient of  $x^n$  will be  $(1+1+1+1+\dots)$ , as many units as the number  $n$  can be partitioned into odd and unequal parts. Now, consider for example the partition of 15 into  $11+3+1$ , representing it graphically as in the figure:

<sup>16</sup> Steiner (1978, p. 141) utiliza a palavra *tail*, que literalmente significa cauda, para designar a sobra do desenho que representa a partição.

$$\begin{aligned}
&1 + x^4 + x^{4+4} + x^{4+4+4} + \dots \\
&1 + x^6 + x^{6+6} + x^{6+6+6} + \dots \\
&\cdot \\
&\cdot \\
&\cdot \\
&1 + x^{2m} + x^{2m+2m} + x^{2m+2m+2m} + \dots
\end{aligned}$$

Multiplicando, obtemos uma série de potências em que o coeficiente de  $x^n$  é  $(1+1+1+\dots)$ , o número de unidades igualando o número de partições de  $n$  em partes pares não excedendo  $2m$  (O coeficiente para  $n$  ímpar é, assim, 0). Em outras palavras, a fração  $1/(1-x^2)(1-x^4)(1-x^6)\dots(1-x^{2m})$  enumera as partições de  $n$  em partes pares não excedendo  $2m$ . Obviamente, então, o termo geral, que é esta fração multiplicada por  $x^{m^2}$ , enumera as partições de  $n-m^2$  nas mesmas partes pares não excedendo  $2m$ . Mas cada partição deste tipo de  $n-m^2$  é obviamente correlata com uma partição particular de  $1/2(n-m^2)$  em partes pares e ímpares não excedendo  $m$ . Então, temos que o termo geral

$$x^{m^2} / (1-x^2)(1-x^4)(1-x^6)\dots(1-x^{2m})$$

enumera a partição de  $1/2(n-m^2)$  em partes (pares e ímpares) não excedendo  $m$ . Mas, lembremos que esta partição também é a partição de  $n$  num quadrado de área  $m^2$  com dois braços, ou seja, o número de partições auto-adjuntas de  $n$  que são baseados sobre o quadrado de lado  $m$  pontos! Claramente, se somamos o termo geral sobre  $m$ , obteremos uma enumeração de todas as partições auto-adjuntas de  $n$ , c.q.d. Esta prova, embora prove somente o resultado em questão, é muito mais explicativa do que a prova de Euler original..., embora a prova de Euler fosse um instrumento de descoberta, além de ser mais geral! (p. 141-142)<sup>17</sup>.

---

<sup>17</sup> Any 'self-adjoint' partition of  $n$  can be seen as a square of size  $m^2$  dots, in this case  $m=3$ , and two 'tails' each representing the same partition of the number  $1/2(n-m^2)$  into parts not exceeding  $m$ . In this case each tail represents a partition of 3 into 1+1+1. Keeping this comment in mind, we turn now to the general term of our infinite sum:

$$x^{m^2} / (1-x^2)(1-x^4)(1-x^6)\dots(1-x^{2m}).$$

The fraction

$$1/(1-x^2)(1-x^4)(1-x^6)\dots(1-x^{2m})$$

gives us the product of  $m$  different geometric series:

$$\begin{aligned}
&1 + x^2 + x^{2+2} + x^{2+2+2} + \dots \\
&1 + x^4 + x^{4+4} + x^{4+4+4} + \dots \\
&1 + x^6 + x^{6+6} + x^{6+6+6} + \dots \\
&\cdot \\
&\cdot \\
&\cdot \\
&1 + x^{2m} + x^{2m+2m} + x^{2m+2m+2m} + \dots
\end{aligned}$$

E, por fim, conclui:

Então, rejeitamos generalidade e abstração como critérios para explicação em matemática – em particular... a visão de que uma prova é mais explicativa do que outra por ser mais geral. Uma outra sugestão, envolvendo descoberta matemática, foi bruscamente dispensada. Um terceiro critério liga explicação com habilidade para visualizar uma prova – e várias provas explicativas têm esse caráter. Deixando de lado possíveis contra-exemplos, este critério é muito subjetivo para animar. Embora uma teoria satisfatória da explicação matemática deveria mostrar porque todas estas sugestões são plausíveis<sup>18</sup>. (p. 143)

A essa altura, Steiner (1978) expõe seu ponto de vista segundo o qual, para explicar a existência de uma entidade, deve-se deduzi-la por meio da essência ou natureza dessa entidade. Após reconhecer que em matemática não se usa falar em essência de uma entidade, ele diz que por essência compreende as *propriedades características* de tais entidades, e entende que *é a propriedade única de uma dada entidade ou estrutura dentro de uma família ou campo de tais entidades ou estruturas* (e reconhece que não definirá famílias).

Steiner (1978), esclarece:

---

Multiplying, we get a power series where the coefficient of  $x^n$  is  $(1+1+1+...)$ , the number of units equaling the number of partitions of  $n$  into even parts not exceeding  $2m$ . (The coefficient for odd  $n$  is, accordingly, 0.) In other words, the fraction  $1/(1-x^2)(1-x^4)(1-x^6)...(1-x^{2m})$  enumerates the partitions of  $n$  into even parts not exceeding  $2m$ . Obviously, then, the general term, which is this fraction multiplied by  $x^{m^2}$ , enumerates the partitions of  $n-m^2$  into the same even parts not exceeding  $2m$ . But each such partition of  $n-m^2$  is obviously correlated with a partition of  $1/2(n-m^2)$  into even and odd parts not exceeding  $m$ . We thus have that the general term

$$x^{m^2}/(1-x^2)(1-x^4)(1-x^6)...(1-x^{2m})$$

Enumerates the partition of  $1/2(n-m^2)$  into (odd and even) parts not exceeding  $m$ . But recall that this also implies the number of partitions of  $n$  into a square of  $m^2$  into with two tails, i.e. the number of self-adjoint partitions of  $n$  which are based on a square of side  $m$  dots! Clearly, if we sum up the general term over  $m$ , we will get an enumeration of all self-adjoint partitions of  $n$ , q.e.d. This proof, though it proves only the result in question, is far more explanatory than the original Eulerian proof using an introduced parameter, even though the Eulerian proof is an instrument of discovery besides being more general!

<sup>18</sup> So far we have rejected generality or abstractness as criteria for explanation in mathematics – in particular... the view that a proof is more explanatory than another because more general. Another suggestion, invoking mathematical discovery, was brusquely dismissed. A third criterion links explanation with ability to visualize a proof – and many explanatory proofs have this character. Aside from possible counter-examples, however, this criterion is too subjective to excite. Yet a satisfactory theory of mathematical explanation must show why all these suggestions are plausible.

Minha proposta é que chamemos de uma prova explicativa aquela que faz referência a uma propriedade característica de uma entidade ou de uma estrutura mencionada no teorema, de tal forma que da prova seja evidente que o resultado depende de tal propriedade. Precisa ser evidente, ao olharmos para a prova, que se substituirmos na prova um outro objeto do mesmo gênero, o teorema deixa de valer; mais ainda, deveríamos ser capazes de ver que, variando o objeto, o teorema muda em reação. Em efeito, portanto, explicação não é simplesmente uma relação entre uma prova e um teorema; ao contrário, é uma relação entre uma classe de provas e uma classe de teoremas, onde outras provas são obtidas de uma prova pela “deformação” prescrita anteriormente<sup>19</sup> (p. 143).

E conclui dizendo que “não é, portanto, a prova geral<sup>20</sup> (‘general proof’) que explica; é a prova generalizável<sup>21</sup>” (‘generalizable proof’) (STEINER, 1978, p. 144), afirmando que a característica de ser generalizável garante que mediante a variação de uma propriedade característica uma prova se torne explicativa, e não simplesmente a generalidade.

Steiner (1978) volta, então, aos exemplos de demonstrações, de teoremas, feitas anteriormente e as analisa do ponto-de-vista da *propriedade característica* de cada uma das entidades às quais se referem os teoremas:

Nossa abordagem da explicação matemática sugere porque os outros critérios são plausíveis. Primeiro, generalidade é freqüentemente necessária para capturar a essência de um particular, e o mesmo se aplica à abstração. (...) Outra sugestão seria que provas explicativas poderiam ter sido usadas para descobrir o resultado, e com freqüência ocorre o caso de que a prova característica é intuitiva o suficiente para servir como um instrumento de descoberta. Finalmente, uma propriedade característica é como ser visualizável (como certamente é o caso de uma propriedade geométrica)<sup>22</sup> (1978, p. 146).

---

<sup>19</sup> My proposal is that an explanatory proof makes reference to a characterizing property of an entity or structure mentioned in the theorem, such that from the proof it is evident that the result depends on the property. It must be evident, that I, that if we substitute in the proof a different object of the same domain, the theorem collapses; more, we should be able to see as we vary the object how the theorem changes in response. In effect, then, explanation is not simply a relation between a proof and a theorem; rather, a relation between an array of proofs and an array of theorems, where the proofs are obtained from one another by the ‘deformation’ prescribed above.

<sup>20</sup> No vernáculo geral é “aquilo que é comum à maior parte de um grupo de coisas ou pessoas” e generalizável é ‘tornar geral, desenvolver, difundir, estender’. Então, uma prova geral é uma prova que vale para um determinado domínio, e a palavra geral refere-se a esse domínio.

<sup>21</sup> Generalizável, no vernáculo, é “o encontro de determinadas propriedades características” (ou princípios fundamentais) que poderiam ser aplicados a diferentes provas”.

<sup>22</sup> Our account of mathematical explanation suggests why the other criteria are plausible. First, generality is often necessary for capturing the essence of a particular, and the same goes for abstraction. (...) Another suggestion

E, por fim, declara “Nós não analisamos explicação matemática, mas explicação por prova; há outros tipos de explicações matemáticas.” (STEINER, 1978, p. 147)

Tradicionalmente, aqueles que defendem uma concepção que aproxima a matemática das demais ciências não costumam aceitar demonstrações por absurdo, pois, apenas demonstrar que algo não pode *deixar de* existir é algo sem sentido para biologia, física, química etc.

Assim, se as afirmações matemáticas devem obedecer a uma relação de causa e efeito, como defende Steiner (1978), então, como aceitar como explicativa uma demonstração por absurdo?

Apresentam-se a seguir os motivos de Steiner (1978) não considerar a última prova da irracionalidade da raiz dos números primos como mais explicativa. Embora ele dê uma definição de prova explicativa que não vá ao encontro à visualização e à particularidade, ele parece preferir a prova que utiliza o Teorema Fundamental da Aritmética porque trata com números particulares, e com a possibilidade de podermos exibir um número como exemplo e *vê-lo* decomposto em fatores primos. Da mesma forma, parece ver a possibilidade de ser visualizável fisicamente como uma virtude da prova.

Pelos desenhos que utiliza, pela insistência na relação de causa semelhante às ciências naturais, parece que a ânsia pelo visualizável e pelo particular é de fato o que motiva Steiner. No entanto, o visualizável e o particular não são critérios adequados para serem aceitos como um critério geral para a noção de explicação. Afinal, como será mostrado nos capítulos 2 e 3, tais critérios não acompanham as mudanças ocorridas na matemática em virtude da aritmetização da análise, movimento muito importante para a construção da matemática como ela é conhecida atualmente.

Podem-se discutir razões didáticas para essa preferência, ou colocar a questão: para uma pessoa que nunca viu nenhuma dessas demonstrações, qual seria a mais fácil? Nesse terreno, talvez Steiner (1978) possa ter razão sobre os critérios que aponta. Ainda assim, como justificar que a prova mais geral não possa ser apresentada posteriormente, como forma de aumentar a abstração? O ponto-de-vista central do artigo de Steiner pode ser resumido pela

---

was that the explanatory proof could have been used to discover the result, and it is often the case that a characterizing proof is intuitive enough to serve as an instrument of discovery. Finally, a characterizing property is likely to be visualizable (as is certainly the case with a geometrical property).

sua definição de propriedade característica, que parece contraditória com o método hipotético-dedutivo e as principais características da matemática moderna, ou seja, a capacidade de generalizar e estabelecer relações. Se a demonstração que utiliza o Teorema Fundamental da Aritmética for a ideal para ser apresentada para alunos que não conhecem nenhuma demonstração, a demonstração de Hardy que ele cita parece importante e talvez seja a melhor para que os alunos percebam que quanto mais se consegue generalizar, mais se pode relacionar com outras áreas e prescindir de objetos e exemplos concretos, e que quanto mais se avança na matemática, mais difícil é encontrar tais objetos e exemplos.

A definição citada de prova explicativa e sua referência a *propriedades características* relaciona-se à idéia de *epagoge* de Aristóteles, pois equivale a afirmar que uma prova realmente é uma prova somente como parte de uma teoria, e a prova, em primeiro lugar, deve mostrar como ela se enquadra nessa teoria. No entanto, o modelo aristotélico de ciência foi substituído na matemática pelo método hipotético-dedutivo, e atualmente provas epagógicas não são exigências na matemática.

A afirmação de Steiner (1978) de que a matemática diz respeito à materialidade dos fatos e a defesa da continuidade entre as ciências matemáticas e as naturais, está diretamente relacionada com a distinção *que ele faz* de que há na matemática provas que apenas provam (confirmam) e provas que explicam (justificam).

Se estivesse querendo dizer com essa afirmação que a matemática tem aplicações em fatos reais, seja no dia-a-dia das pessoas ou em outras ciências, então certamente não haveria divergências. No entanto, o que Steiner (1978) quer dizer com materialidade dos fatos é a *materialidade* ou *verdade* dos objetos matemáticos. Ele explicita esse ponto-de-vista ao afirmar que para explicar a existência de uma entidade precisamos fazer “referência a uma propriedade característica de uma entidade ou de uma estrutura mencionada no teorema” (p.143). E ainda diz que por “propriedade característica” ele entende que é “a propriedade única de uma dada entidade” ou “estrutura dentro de uma *família* ou gênero de tais entidades ou estruturas”, mesmo se reconhece que não definirá *famílias*. E também quando diferencia prova explicativa de prova não-explicativa.

Entretanto Steiner (1978) não cita nem sequer comenta autores que há séculos atrás faziam afirmações análogas; e nada diz a respeito de conciliar seu ideal de explicação com o método hipotético dedutivo.

## 1.2 Hanna Abre o Debate na Educação Matemática

Em seu artigo *Proof, explanation and exploration: an overview* (2000), Hanna retoma os conceitos defendidos em seu livro de 1983 acerca do papel das demonstrações para a compreensão da matemática. Já de início, ela faz uma distinção (que mostra uma opção teórica) entre a demonstração na matemática e a demonstração na sala de aula, dizendo que a compreensão na prática matemática é secundária em importância, e que se deve discutir com os estudantes destacando sua importância e suas limitações. Na sala de aula, no entanto, o papel da prova é promover compreensão matemática, e portanto, “nosso mais importante desafio é encontrar formas mais efetivas de usar provas com esse objetivo” (HANNA, 2000, p. 7).

Além disso, afirma que “uma prova, válida como ela deve ser em termos de derivação formal, se torna realmente convincente e legítima para um matemático somente quando ela lida com verdadeira compreensão matemática (“*real mathematical understanding*”)” (HANNA, 2000, p. 7).

Acerca do papel da prova, a autora discute a importância das demonstrações nos currículos escolares e o papel que os *softwares* podem desempenhar para ajudar os alunos a compreenderem as demonstrações matemáticas e, assim, os objetos matemáticos dos quais as demonstrações tratam. Destaca as novas abordagens que podem ser dadas com a utilização de *softwares* dinâmicos, tais como heurística, exploração e visualização.

Hanna (2000, p. 7) afirma que alguns matemáticos *percebem* que uma prova é mais valiosa (*most valuable*) quando ela lida com compreensão matemática, o que ajuda a pensar mais claramente e efetivamente sobre a matemática. E que

matemáticos claramente esperam mais de uma prova do que verificação... Isso significa que a melhor prova é aquela que também ajuda a compreender o significado do teorema que está sendo provado: a ver não somente que ele é verdadeiro, mas também por quê ele é verdadeiro. É claro que uma tal prova vai mais provavelmente possibilitar novas descobertas (HANNA, 2000, p. 8)<sup>23</sup>.

---

<sup>23</sup> Mathematicians clearly expect more of a proof than justification... This means that the best proof is one that also helps to understand the meaning of the theorem being proved: to see not only *that* it is true, but also *why* it is true. Of course such a proof is also more convincing and more likely to lead to further discoveries.

Pode-se colocar a seguinte questão: o significado de um teorema não é o que mostra o *lugar* do teorema na estrutura da teoria? Parece que Hanna (2000) tem uma visão totalmente psicológica também do termo *significado*, isto é, refere-se ao *significado* que algo tem para alguém.

Após citar oito *funções* das provas (verificação, explicação, sistematização, descoberta, comunicação, construção de uma teoria empírica, exploração e incorporação de um fato bem conhecido numa rede de conhecimentos), Hanna (2000) destaca a explicação como a principal a ser utilizada em sala de aula. A autora segue Steiner (1978) em sua concepção de explicação, citando sua definição de prova explicativa (STEINNER, 1978, p. 173) como a que faz referência à propriedade característica de uma entidade ou estrutura mencionada no teorema a ser demonstrado, de tal forma que da prova seja evidente que os resultados dependem da propriedade (HANNA, 2000, p. 8).

A respeito da heurística, Hanna (2000) também menciona Simpson (1995), que diferencia provas por lógica, que enfatizam o aspecto formal, de provas por raciocínio, que envolvem investigações, argumentando que a segunda apela para o “aluno ‘médio’” (HANNA, 2000, p. 8, grifo da autora), pois envolve argumentos heurísticos, sendo, portanto, acessível para uma maior quantidade de estudantes.

A autora aponta também outros educadores (Simon, Blume e Simpson), que enfatizam não apenas o raciocínio, mas também a justificação. Para eles, técnicas heurísticas são mais úteis do que provas para desenvolver o raciocínio dos estudantes, até mesmo raciocínios que envolvem a noção de justificação. Chegam a avaliar que a exploração e a justificação informal têm um papel mais significativo para a investigação do que as provas, pois – em sua opinião – ao contrário destas últimas, fazem uso da intuição e por isso são melhores para gerar compreensão matemática e até mesmo fluência técnica.

Hanna (2000) cita dois autores, Jaffe e Quinn (1993), que chegaram a sugerir que haveria dois tipos de justificações distintas, ambas legítimas: resultados matemáticos baseados em raciocínios especulativos ou intuitivos ou no exame de casos, aos quais se podem referir como *matemática teórica*; e resultados daquilo que, tradicionalmente, tem sido visto como propriamente matemático, nos quais os teoremas são demonstrados de forma rigorosa, chamados *matemática rigorosa*. Os editores do *Bulletin of the American Mathematical Society* (1994) convidaram vários proeminentes matemáticos para responderem ao artigo de Jaffe e Quinn, e a grande maioria teceu duras críticas ao trabalho.



Acerca da relação entre exploração e prova, Hanna (2000) afirma que *softwares* dinâmicos têm o potencial de estimular tanto exploração quanto prova, pois torna mais fácil propor e testar conjecturas. O sucesso do uso de *softwares*, com a possibilidade de verificar infinitos casos em um pequeno intervalo de tempo e a aparente evidência de que um teorema é verdadeiro pela *observação/experimentação* infelizmente, tem estimulado uma tendência entre educadores a crerem que provas dedutivas em geometria podem ser secundarizadas ou abandonadas com o uso de uma abordagem inteiramente experimental para a justificação matemática. A autora cita dados que mostram que as demonstrações têm perdido espaço nos currículos nos EUA e na Inglaterra desde o final da década de 1980 e início da década de 1990.

Hanna (2000) ainda afirma que, se de um lado exploração e provas são atividades distintas, de outro elas são complementares; por exemplo, para a resolução de um problema, ou mesmo para a construção de novos conceitos matemáticos, a exploração lida com a descoberta, ao passo que a prova, com sua confirmação. O desafio do professor seria, deste ponto de vista, explorar a motivação causada pela exploração de forma que os estudantes melhor compreendessem uma prova.

Analisando o aumento da utilização de computadores, Hanna (2000) esclarece que a discussão sobre a contribuição das representações visuais para uma prova tem ganhado peso nos últimos anos. Discute e vê como uma questão-chave até que ponto, e em quais casos, uma representação visual pode ser utilizada, não somente como evidência para uma afirmação matemática, mas também como sua justificação. Hanna (2000) chega a mencionar autores que sugerem que imagens poderiam substituir a linguagem matemática, mas não emite sua opinião a respeito, e deixa essa possibilidade em aberto.

Hanna (2000) conclui afirmando que *softwares* dinâmicos podem servir para enfatizar o papel da heurística, exploração e visualização em sala-de-aula, e que a questão que se deve colocar de acordo com essa perspectiva é: como essas abordagens podem ser melhor integradas no currículo de matemática, e como elas podem ser melhor utilizadas para promover compreensão (“promote understanding”).

Para Hanna (2000), o desafio para os educadores é deixar claro para seus alunos a interface da dedução e experimentação e a relação entre a matemática e o mundo real. A utilização de *softwares* geométricos dinâmicos, como o Cabri Geometry ou Sketchpad permitem um trabalho experimental parecido com aquele das físicas experimentais.

Como visto na introdução deste trabalho, as conseqüências na educação da Reforma da Matemática Moderna muitas vezes resultam que os professores enfatizem tanto a forma numa demonstração e que não se preocupem em mostrar de outra maneira os conceitos (por exemplo, geometricamente), nem suas aplicações, nem as conexões com outras áreas da matemática. Pode-se perguntar se seriam as posições defendidas por Hanna (2000) possíveis de ser adotadas na educação matemática. A adoção dessas posições seria uma forma de ajudar os estudantes a compreenderem a relação entre as diferentes áreas da matemática, entre a matemática da sala de aula e a prática matemática, ou para a melhor a compreensão dos alunos dos objetos matemáticos, e das próprias demonstrações?

Primeiro, a distinção que Hanna (2000) faz entre a matemática da sala de aula e a prática matemática – na qual a demonstração e a explicação teriam importância secundária – parece contraditória com sua afirmação feita adiante de que uma prova que mostra o motivo de um teorema ser verdadeiro, e não somente o que é verdadeiro, ajudaria a lidar com descobertas. Ora, é natural que os métodos de ensino não sejam iguais aos métodos de descoberta; no entanto, não se deve ensinar aos alunos noções de demonstração que separem ainda mais a prática matemática da prática de sala de aula. Certamente para descoberta de conceitos matemáticos, a linguagem é importante, mas também o são os métodos de tentativa e erro, a intuição matemática, e diversos fatores; mas é justamente esse tipo de método a que Hanna (2000) se refere ao falar em heurística. Possibilitar aos alunos essa maneira de refletir não os distanciaria da *compreensão dos objetos matemáticos* ou das descobertas.

A distinção feita por Hanna (2000) entre provas que provam e provas que explicam será retomada no item 1.5.

### 1.3 Possíveis Perspectivas para a Formulação de uma Teoria da Explicação com Base no Legado de Bolzano, Segundo Mancosu

Na conclusão de seu longo artigo *Bolzano and Cournot on mathematical explanation* (1999), Mancosu avalia o quão prometedora para uma teoria adequada da explicação matemática é a abordagem de Bolzano. Para tanto, avalia duas possíveis linhas de reflexão.

Um problema bem geral é como as hierarquias de fundamentos apresentadas por Bolzano servem como teorias da explicação matemática. O segundo é investigar a consistência interna dos esquemas fundamentais propostos por Bolzano. Ambos são problemas difíceis. No primeiro, a dificuldade consiste em levar em conta o fato de que testar a teoria de Bolzano de fundamento e consequência para adequação como uma teoria da explicação matemática exigiria uma compreensão precisa de para que tal teoria pudesse servir, e (também o conhecimento preciso) de algumas das maiores restrições impostas a ela (...) Já as dificuldades relativas ao segundo assunto são relativas à presença de pelo menos dois diferentes modelos fundamentistas em Bolzano e devido a que algumas das noções centrais empregadas por ele, tais como generalidade, simplicidade e fundamento e consequência, são muito vagas<sup>24</sup> (MANCOSU, 1999, p. 451).

Para o autor, o maior problema do que ele chama de modelo local (ou seja, o modelo que não é holístico) é a ausência de uma análise suficiente de fundamento e consequência. “Particularmente, o exemplo dado por Bolzano falha na tentativa de provar a suficiente evidência intuitiva para distinguir fundamentos de consequências” afirma Mancosu (1999, p. 451), ao dizer que a demonstração de que a soma dos ângulos internos de um quadrilátero é 4 ângulos retos em virtude de tal soma em um triângulo ser 2 ângulos retos e que todo quadrilátero pode ser formado por dois triângulos. Segundo Mancosu (1999) Bolzano não deixa claro a razão de ter argumentado que a verdade de a soma dos ângulos internos de um triângulo ser 2 retos é uma consequência de que a soma dos 4 ângulos do quadrado é igual a 4 retos. Pode-se argumentar que em um quadrado está implícita a presença de dois triângulos, mas que em um triângulo de forma alguma está implícita a presença de um quadrado. Mancosu (1999) reconhece que, caso tomássemos esse caminho, “sairíamos do universo (...)

---

<sup>24</sup> One very general problem is how the grounding hierarchies presented by Bolzano fare as theories of mathematical explanation. The second problem, which is preliminary to the first, is that of probing the internal consistency of the grounding schemes proposed by Bolzano. Both problems are extremely demanding. The first on account of the fact that to test Bolzano’s theory should account for and of some of the major constraints imposed on it... The difficulties facing the second issue are due to the presence of at least two different grounding models in Bolzano and to the vagueness of many of the central notions employed by him, such as generality, simplicity, and the very notions of ground and consequence.

da geometria Euclidiana” (p. 451), ponderando que essa linha de defesa “requeriria uma hierarquia de existência sobre objetos matemáticos, na qual a existência de certos objetos depende da existência de outros objetos (...) uma forma ou outra de construtivismo ou talvez um ‘emanativismo neo-platônico’” (p. 451). O próprio autor não percebe essa linha de defesa como uma tentativa prometedora de ser bem-sucedida.

Analisando o modelo holístico (ou seja, um modelo dependente de um sistema, que Bolzano (WL) chamava de modelo global), Mancosu (1999) diz: “Seja uma partição ótima dada das verdades tal que do menor número de verdades simples o maior número de verdades permanentes pode ser inferida” (p. 451). Esse modelo lida com a noção local (ou seja, independente de um sistema) de fundamento e consequência para definir o que se poderia chamar um sistema fundamentado. Neste caso, há duas possibilidades. Pode-se ou não concordar com a diferença entre verdade fundamentadora e verdade fundamentada. No primeiro caso, volta-se ao problema do modelo local. No segundo, o sistema fundamentado não parece se diferenciar essencialmente de um sistema axiomático arbitrário com a condição extra de otimização. Nesse caso, o modelo torna-se irrelevante para resolver o que se queria no início, ou seja, saber quando se pode fazer uma distinção entre provas explicativas e não-explicativas.

Ao final, o autor afirma que Bolzano teve o grande mérito de colocar o problema da explicação matemática como central para a filosofia da matemática. No entanto, suas tentativas de solução não responderam satisfatoriamente às questões que ele tão magistralmente apresentara. Entretanto, mantém a esperança ao afirmar que

em que medida partes de suas respostas podem ainda nos ajudar dependerá de uma tarefa maior que ainda está diante de nós, que é saber o que uma teoria de explicação matemática poderia ajudar e quais restrições deveriam ser colocadas a ela<sup>25</sup>. (MANCOSU, 1999, p. 453)

Mancosu (1999), ao tentar resgatar as noções de Bolzano, tampouco se esforça por discutir de que forma essas noções podem se relacionar com a tendência atual da matemática, a axiomática moderna, assim como com os conceitos da matemática atual, que envolvem

---

<sup>25</sup> Whether parts of his answer can still do some work for us will depend on a major task still lying ahead of us, that is spelling out what a theory of mathematical explanatory should account for and what constraints should be put upon it.

algumas das mais importantes características das noções de variação, relação e abstração.

#### **1.4 O que é uma Explicação na Ciência Moderna? Possibilidades e Perspectivas**

Newton e Smith (2000), em seu artigo *Explanation*, oferecem um panorama dos diferentes modelos de explicação surgidos no decorrer da história, e situa a discussão atual.

Os autores explicam que o ponto de partida para a discussão de explicação não-estatística na filosofia da ciência é o modelo de explicação nomológico-dedutivo (DN) ou lei abrangente, que, para explicar um evento particular, cita outros eventos particulares com uma lei geral ou leis que abrangem ou englobam aquilo que se pretende explicar, modo que apreende um importante aspecto intuitivo da explicação. O modelo resume-se na afirmação de que alguém compreende o motivo pelo qual algo acontece se, em decorrência de certos aspectos da situação, aquilo tem que acontecer. Tal condição é apreendida se existe um argumento dedutivo válido que parta (1) de verdadeiros pressupostos estabelecidos das condições iniciais e (2) de verdadeiro estabelecimento de leis. O modelo DN descreve a explicação em termos de noções relativamente claras e simples.

No entanto, poucas explicações encontradas no dia-a-dia ou na ciência têm essa forma precisa; às vezes aceita-se como explicação uma formulação elíptica do argumento como um todo, sem a preocupação em formulá-la teoricamente, como quando se diz que a manteiga se derreteu porque o pão estava quente, sem enunciar as leis relevantes para a ocorrência do processo. Em outros casos, simplesmente apresenta-se um esboço explicativo; ou seja, esboça-se parte de uma história que se acredita que poderia ser posteriormente elaborada de forma a incorporar leis apropriadas, com base em novas pesquisas empíricas (Newton e Smith, 2000, p. 127).

O modelo DN pretende abranger leis por outras leis, assim como eventos particulares. Para o caso de eventos particulares, segundo os autores, o modelo DN é especialmente atrativo. Já para o caso de leis que abrangem outras leis, o DN pretende abranger leis sem estabelecer condições iniciais, o que resulta em problemas. Afinal, por exemplo, as leis de Newton podem ser deduzidas por meio das leis de Kepler, mas também as leis de Kepler

podem sê-lo por meio das de Newton; assim, uma tal dedução dessas leis não pode ser considerada como uma explicação da outra. É a condição de assimetria (ou seja, se A é causa de B, então B não pode ser causa de A) da explicação que o modelo DN não garante (Newton e Smith, 2000, p. 128).

Sendo fácil gerar contra-exemplos ao modelo DN, é necessário, para salvá-lo, adicionar um requerimento de que todas as premissas usadas no argumento sejam relevantes. No entanto, pode haver problemas: explicar uma noção adequada de relevância, o que, caso se consiga fazê-lo, o modelo DN perderia em parte seu atrativo particular, que consiste em definir explicações em termos de noções que são relativamente não-problemáticas (Newton e Smith, 2000, p. 128).

O modelo DN não dá atenção suficiente à causa. Afinal, com freqüência explica-se algo por sua causa sem enunciar leis (“há uma mancha no tapete porque o professor bateu no líquido com sua cadeira” é uma explicação, embora referente apenas a causas externas, a mancha, embora não haja na formulação nenhuma lei explícita ou implícita sobre os processos que levaram à formação da mancha); e, inversamente, explica-se algo sem nada dizer a respeito de sua causa (explica-se a altura do mastro por meio da medida de sua sombra, mas a sombra não causa o mastro) (Newton e Smith, 2000, p. 127).

Um modelo que parte dessas reflexões acerca do DN, e leva em conta o papel da causa na explicação, é o modelo de explicação *causal relevance* (relevância causal, modelo CR). Nesse modelo, a explicação não é essencialmente formada por argumentos, mas por esboços causais do mundo; desse ponto-de-vista, a explicação consiste em mostrar o que pelo menos é causamente responsável pelo que se quer explicar, mesmo que não se possa realizar a transposição para a forma DN (ou seja, de leis abrangentes). Newton e Smith (2000, p. 129) consideram que esse modelo localiza a atual prática de explicação em ciência e na vida comum muito melhor que o modelo DN.

Os autores (p. 130) consideram que essa forma de explicação é uma abordagem prometedora para explicações tanto em ciência quanto para explicações de fenômenos da vida diária. No entanto, há dificuldades, tais como o risco de explicar o obscuro em termos de causas igualmente obscuras (ou ainda mais) e a dificuldade em definir satisfatoriamente a causalidade.

Há também outras formas de explicação não-causais. É o caso da explicação por identificação, que fornece o exemplo da descoberta de que o aumento de temperatura significa

aumento do movimento das moléculas, que é uma verdadeira explicação, mas que nada diz sobre a causa (embora haja causas envolvidas); a explicação por modelos de analogia é muito utilizada na vida diária e na ciência.

Há também vários casos de acréscimo de compreensão do mundo por meio de unificação, e não de causa, como é o caso da compreensão promovida pela utilização das três leis do movimento de Newton, com a lei da gravitação, que unificava as três leis dos movimentos planetários de Kepler.

A idéia de Friedman (*apud* NEWTON e SMITH, 2000) é que aumentamos o conhecimento humano à medida que se diminui a quantidade de hipóteses independentes aceitáveis necessárias para explicar o fenômeno do mundo. Salmon (*apud* NEWTON e SMITH, 2000) sugeriu que a abordagem da unificação é complementar à noção de CR.

Para Newton e Smith (2000), a filosofia precisa verificar o que há de comum nas explicações por causalidade, identidade, analogia, unificação, dentre outras, para encontrar uma teoria mais profunda que explique o que as torna explicativas. Uma tal teoria filosófica, no entanto, deve permitir distinguir entre conhecimento falso e conhecimento real. Afirmar que qualquer explicação que faça compreender algo seja aceitável é um erro perigoso, pois, alguém já disse que a explicação para a existência de sete planetas (os encontrados até então) se devia à existência de sete buracos na cabeça e porque existem sete virtudes.

Recentemente, tem crescido o aspecto pragmático da explicação, aceitando-se que o que vale como uma explicação satisfatória depende do contexto no qual a explicação é procurada e das informações anteriores da pessoa que pergunta. Assim, uma resposta satisfatória deve trazer nova informação, e sua sofisticação depende do conhecimento da pessoa que requer a explicação.

Hempel (*apud* NEWTON-SMITH, 2000) tinha o objetivo de construir uma concepção não-pragmática “que não requer relativização com respeito a questionamentos individuais mais do que se exige do conceito de uma prova matemática” (p. 131). Esse projeto é atualmente visto sem esperança por diversos motivos, sobretudo em virtude de seu formalismo exagerado.

Van Frassen (*apud* NEWTON-SMITH 2000), que tentou criar uma teoria puramente pragmática da explicação, responde que as razões devem ser relevantes, mas a relevância em si é uma função do contexto. Por isso, ele nega que sempre possa fazer sentido falar de o poder de explicação de uma teoria. No entanto, seus críticos pontuaram que sua noção de

relevância é sem limites, com a consequência de que qualquer coisa pode explicar qualquer coisa. Esta redução só pode ser feita por meio do desenvolvimento de parâmetros da noção de relevância, parâmetros que não são função do contexto e, portanto, distanciam-se da abordagem puramente pragmática da explicação.

Na literatura, há diferentes modelos de explicação, assim como há várias vias alternativas de elaboração dos modelos já discutidos. As perspectivas de que qualquer desses modelos seja desenvolvido para cobrir todas as boas explicações científicas (ou boas explicações somente) são obscuras. Newton e Smith (2000) afirmam que talvez se deva adotar o pluralismo, e assumir que há vários tipos de explicações, cada qual com seu modelo apropriado, e que, por enquanto, não se pode compreender totalmente o que esses diferentes tipos de explicação têm em comum, ou seja, o que os torna explicativos. No entanto, assinalam que cientistas lidam com situações reais e concretas em seu dia-a-dia, as quais exigem uma atitude mais precisa do que a de que tudo vale.

Newton e Smith (2000) avaliam que o assunto é muito sério, para que se possa buscar refúgio em qualquer noção de família semelhante à de Wittgenstein (1889-1951), pois os cientistas, em seu trabalho diário, julgam teorias e hipóteses em termos de suas habilidades de explicar num determinado espaço e tempo, e não em termos de suas habilidades de explicar em diferentes escalas. Por enquanto, preserva-se o direito de expor um modelo simples ou um princípio subjacente que liga os diferentes modelos.

A situação atual é embaraçosa para a filosofia da ciência. A tarefa de explicar o que faz aceitar diferentes explicações como explicativas é considerada por muitos filósofos como a principal tarefa da filosofia da ciência. E é difícil perceber como se estará em condições de responder às solicitações acerca da relação entre explicação e Epistemologia sem uma teoria unificadora. Realistas dizem que o máximo poder de uma teoria explicativa é parecer-se com verdade ou com verdade aproximada. No entanto, sem as bases de uma teoria unificadora da explicação, essa afirmação é suspeita. O que não significa que tal teoria unificadora validaria tal afirmação, mas deveria permitir ao menos avaliá-la.



## 1.5 A Educação Matemática, os Fundamentos e a Filosofia

Acerca da distinção entre provas que provam e provas que explicam, Hanna (2000) a faz citando a definição de prova explicativa de Steiner que, como já se disse, é parecida com a utilizada por Aristóteles e Bolzano, embora a autora não cite nenhum dos dois. Hanna (2000) não discute que a lógica aristotélica foi deixada de lado em prol da abordagem hipotético-dedutiva (o famoso “Se... então...” dos sistemas axiomáticos), cujo alcance se estendeu a todas as ciências, e não somente à matemática. Não discute também como conciliar seu ideal de demonstração com a matemática atual, aquela que “lida com a descoberta” (HANNA, 2000, p. 13) e, ao não fazê-lo, corre o risco de criar um verdadeiro fosso entre os métodos da matemática e da educação matemática.

A concepção de Hanna (2000) parece um tanto quanto distinta da de Steiner, embora ela cite sua definição de prova explicativa. Hanna (2000) enfatiza com os exemplos e com a ênfase dada ao papel dos *softwares* geométricos uma concepção empirista e psicologista, propondo um papel mais importante para a intuição nos currículos e até mesmo para a concepção de demonstração matemática, ressaltando a intuição geométrica e a relação com o mundo real ou o dia-a-dia das pessoas.

A educação matemática precisa retomar determinados momentos históricos do desenvolvimento da matemática, para poder melhor fundamentar suas afirmações. Não se pode perder em afirmações meramente subjetivas acerca do que se pensa a respeito de algo, e menos ainda se pode cair no erro de Hanna (2000) de definir uma prova explicativa de uma forma objetiva (como a de Steiner que ela cita), de um lado; e, de outro, afirmar que a melhor prova é a que melhor consegue trazer “compreensão matemática” (HANNA, 2000, p. 7), como se fosse possível que as demonstrações partissem de axiomas ou conceitos intuitivos e, ao mesmo tempo, coincidissem com a utilização das definições dos objetos sob consideração, ou seja, que a compreensão (psicológica) de resultados matemáticos coincidissem com a linguagem matemática e seus axiomas (dito de outra forma, que conciliassem a ordem formal com a ordem da compreensão individual, que é, por princípio, subjetiva).

No entanto, Dubucs e Lapointe (2006) e Otte (2007a) corretamente demonstraram que não é possível um tal tipo de demonstração. Afinal, a demonstração dedutiva da matemática moderna parte de princípios mais gerais e abstratos para demonstrar proposições mais particulares e intuitivas; o desenvolvimento da matemática e o método hipotético-dedutivo

caminharam em sentido contrário daquele desejado por Hanna (2000). Como se mostrou na introdução, com os axiomas de Peano, e como será evidente no próximo capítulo, com o Teorema do Valor Intermediário.

A definição de Steiner (1978), embora tenha relação com a visualização, parte de uma noção de essência que não é psicológica como a de Hanna (2000); ao contrário, é uma definição ontológica. Steiner (1978) assume que só não utiliza a palavra *essência* no lugar de *propriedades características* porque não se costuma usá-la em matemática. Assim, a definição de Steiner (1978) parece retomar as concepções de Bolzano (WL, RB), que aceitava como uma demonstração *puramente analítica* ou como *método correto* somente as demonstrações que mostrassem os *fundamentos objetivos* da proposição que se pretendia provar. De fato, a maior diferença entre as *propriedades características* de Steiner (1978) e os *fundamentos objetivos* de Bolzano (WL) é que este último localizava a essência de algo na linguagem, daí a importância que ele atribui a noções como *proposições em si*, ou seja, à estrutura própria das proposições.

Estudar Bolzano e o período histórico em que ocorreu a aritmetização da análise pode trazer importantes elementos para que a educação matemática possa formular melhor seus conceitos e definições. Não porque se tenha a esperança, como Mancosu (1999), de resgatar a noção de Bolzano de explicação como uma noção viável de ser aceita por matemáticos da atualidade e assim superar o difícil quadro da filosofia da ciência mostrado por Newton e Smith (2000) de fornecer uma noção de explicação. A obra de Bolzano é considerada importante por dois motivos principais: em primeiro lugar, pela relevância da análise histórica de sua obra; e, em segundo, pelo próprio conteúdo da obra, que mostra uma enorme erudição do autor e um método de estudo e investigação com o qual todos têm muito a aprender, e que buscava fundamentar todas suas afirmações, e responder, acrescentar algo ou discordar dos argumentos de todos os filósofos e matemáticos de sua época a cuja obra ele tinha acesso.

## Capítulo 2 – O Teorema do Valor Intermediário

### Introdução: Bernard Bolzano, Vida e Obra

Bernard Placidus Johann Nepomuk Bolzano nasceu em 5 de outubro de 1781 em Praga, na Bohemia (que atualmente é parte da República Tcheca), durante o Império Austríaco. Faleceu em 1848. Foi filho de família muito católica, o que influenciou profundamente sua obra, suas concepções filosóficas e seu rígido código moral, e o inclinaria a tornar-se padre em 1804. Estudou em escolas privadas e no Liceu dos Piaristas de Praga. Estudou filosofia e matemática na Faculdade de Filosofia da Universidade Carl-Ferdinand de Praga. Após terminar seus estudos Bolzano tornou-se padre, e inicialmente pretendia estudar mais a fundo a matemática e a filosofia de Kant, autor cuja obra estava, na época, banida da Áustria (LAPOINTE, 2003).

Em 1804, Bolzano obteve o título de professor de ciências da religião católica na Universidade de Praga. O seu discurso inaugural em 1805 intitulava-se *Sobre a necessidade de uma fé que avance sobre bases racionais*. Três meses depois, sob a acusação de ‘kantiano’, Bolzano foi informado de que perderia seu emprego após o término do ano letivo, mas se justificou sem maiores dificuldades e se tornou efetivo em 1806 (LAPOINTE, 2003).

Em 1811, obteve efetivamente o direito de professar suas próprias doutrinas, mas, em 1819, foi demitido com a argumentação de estar associado a pretendidas intrigas políticas de seu estudante Josef Fesl, e também sob acusação de heresia, já que Bolzano não temia expressar seu nacionalismo tcheco abertamente. Ao final do processo, ele foi proibido de trabalhar em todo o território austríaco, e ao fim da década de 30 do século XIX, essa proibição atingiu também suas publicações científicas (LAPOINTE, 2003).

Segundo Lapointe (2003), o abandono de suas funções de professor teve, no entanto, o efeito positivo de permitir-lhe consagrar-se inteiramente à sua obra, contando com o suporte material e moral de amigos e, posteriormente, de antigos alunos. A obra de Bolzano é imensa. Bolzano foi o primeiro filósofo moderno a propor uma abordagem semântica da filosofia e influenciou muito filósofos de diferentes áreas, como Husserl (1859-1938), Twardowski (1866-1938), Frege (1848-1925), Carnap (1891-1970), Tarski (1901-1983), Peirce (1839-1914), Wittgenstein, dentre outros.

Deu importantes contribuições para a matemática, revolucionando a concepção de infinito e infinitesimal com base em estudo rigoroso desses assuntos em *Paradoxos do Infinito* (1847), que lançou as bases para a construção da teoria dos conjuntos por Cantor. Sua mais célebre obra matemática, no entanto, foi o *Prova puramente analítica...*, que, como mencionado no capítulo 1, pode ser considerado um marco da aritmetização da análise; Bolzano foi chamado por Félix Klein, pelos princípios formulados nesse artigo, de “o pai da aritmetização da análise”. Os mais importantes resultados dessa obra estão contidos na grande maioria dos livros elementares de análise matemática, particularmente os teoremas que ficaram conhecidos como *Critério de Convergência de Cauchy* e o Teorema do Valor Intermediário; também está contida nessa obra o Teorema chamado por Sebestik de *Teorema de Bolzano-Gauss* (que conhecemos atualmente como o teorema do limite superior), que teria dado origem ao conhecido *Teorema de Bolzano-Weierstrass* (SEBESTIK, 1992).

Bolzano foi uma das poucas pessoas que, no início do século XIX, era competente e dominava os conteúdos da matemática e da filosofia. Por isso, era apto a ver algo que escapou a muitos de seus contemporâneos: que as tentativas de fundamentação da análise matemática formuladas por Pascal e por Leibniz (essa última predominante até o século XIX) não mais correspondiam às necessidades colocadas pelo conjunto das construções matemáticas realizadas nesse período, nomeadamente o Cálculo Moderno, que envolvia conceitos relacionados ao infinito, tais como o conceito de infinitesimal, derivadas, integrais, limites e expansão em séries. Bolzano concordava que em um primeiro momento os esforços concentraram-se no alargamento da matemática em vez de discutir seus fundamentos; mas compreendia que, uma vez amadurecida, requeria-se, para a continuidade do progresso da matemática, a análise filosófica de seus conceitos fundamentais (RUSNOCK, 1997, p. 74-75). Sabia também que tornar explícito o conhecimento intuitivo representa uma contribuição importante para o progresso da matemática. Essa convicção foi compartilhada por todos os lógicos do século XIX.

Seu trabalho permaneceu muito pouco divulgado, e é possível dizer que viveu em um quase anonimato até o fim do século XIX, até que fosse redescoberto por Hermann Hankel (1839-1873) e por Otto Stolz (1842–1905). Esse último republicou em 1881 vários de seus artigos, que haviam sido publicados anteriormente em jornais menores da Europa do Leste ou mesmo por conta própria por Bolzano. (LAPOINTE, 2003).

Lapointe (2003, p. 6) explica esse quase anonimato em parte pela repressão austríaca decorrente do grande conservadorismo que predominava no país, mas também ao fato de que

suas doutrinas não tinham bons efeitos num contexto institucional e intelectual dominado, na Alemanha, pelo idealismo de Fichte e Hegel e pelas interpretações psicológicas das doutrinas kantianas<sup>26</sup>. Além disso, seus discípulos, a quem Bolzano encarregara de “conter [...] – pela divulgação de noções claras – a tremenda desordem que Kant, sem que ele mesmo se desse conta, causou devido a suas filosofias na Alemanha” (BOLZANO, APUD LAPOINTE, 2003, p. 7), não deram continuidade a sua obra.

## 2.1 Apresentação do artigo *Prova Puramente Analítica do Teorema que Afirma que entre Dois Valores de Sinais Opostos Existe pelo Menos Uma Raiz Real da Equação*

Bolzano escreveu, em 1817, o artigo *Prova puramente analítica...* O método utilizado por Bolzano, o de fazer uma demonstração que não utilizasse elementos do espaço e do tempo, mas que ao mesmo tempo confirmasse a idéia intuitiva da validade do teorema, foi fundamental para a aritmetização da análise.

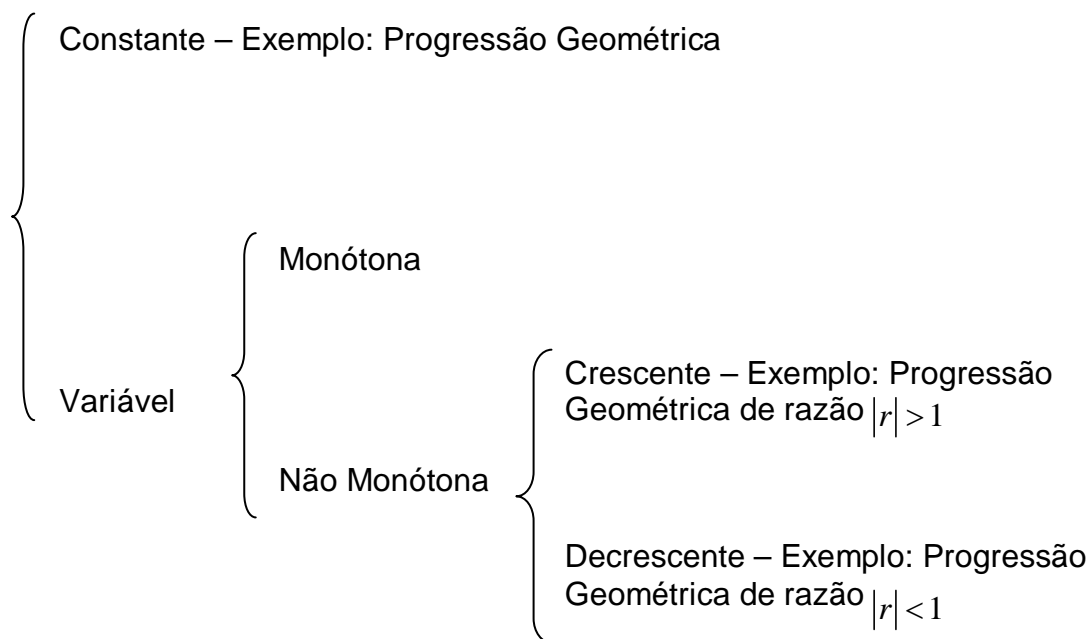
O início do artigo é um pequeno tratado de séries, com a análise das propriedades da expressão que Bolzano interpreta como função de seus termos  $r$  e  $x$ .

Ele define  $F_{(r)}(x) = A + Bx + Cx^2 + \dots + Rx^r$  o que atualmente é escrito como  $F_n(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + \dots + a_nx^{n-1}$ .

Estudando a natureza da variação  $F_{n+r}(x) - F_n(x) = a_{n+1}x^n + a_{n+2}x^{n+1} + a_{n+3}x^{n+2} + \dots + a_{n+r}x^{n+r-1}$  em função de  $n$ , Bolzano classifica as séries da seguinte forma<sup>27</sup>:

<sup>26</sup> É importante deixar claro que a autora se refere a interpretações psicológicas; não, está afirmando que a doutrina kantiana seja psicológica.

<sup>27</sup> Bolzano não se preocupou com o módulo, pois lidou aqui apenas com o acréscimo de termos positivos.



Nos parágrafos de 1 a 4 e de 8 a 10, Bolzano (RB) define e dá exemplos de todos esses tipos de séries: as divergentes; as limitadas (mas não necessariamente convergentes, como o exemplo dado:  $a+a-a+\dots$ ). Em 5, ele fala das séries que considera “particularmente interessantes” (RB, p. 170), que são aquelas “cujo valor do termo somado se torna cada vez menor” (p. 170). Dá então o exemplo da série geométrica de razão  $|e| < 1$  (na notação de Bolzano,  $e < \pm 1$ ), em que a diferença  $F_{n+r}(x) - F_n(x)$  “pode se tornar tão pequena quanto queiramos, se tomarmos o  $r$  suficientemente grande” (p. 170), pois

$$F_{n+r}(x) - F_n(x) = ae^{r+1} + ae^{r+2} + ae^{r+3} + \dots + ae^{r+s} =$$

$$ae^{r+1}(1 - e^s)/(1 - e) \leq ae^{r+1}(2/(1 - e))$$

, e  $ae^{r+1}(2/(1 - e))$  “pode ser tão pequena quanto se queira conforme aumentamos o valor de  $r$ ” (p. 170).

Na seção 6, Bolzano (RB , p. 171) anuncia o lema 5, que diz que

se os valores das somas dos primeiros  $n, n+1, \dots, n+r$  termos de uma série... forem denotados por  $F_n x, F_{n+1} x, F_{n+2} x, \dots, F_{n+r} x$ , então passamos a observar as quantidades

$$F_1x, F_2x, \dots, F_nx, \dots, F_{n+r}x, \dots$$

como uma nova série... Aqui nós assumimos a propriedade especial de que **a diferença entre o n-ésimo termo  $F_nx$  e qualquer termo  $F_{n+r}x$  (não importa quão longe de  $F_nx$  esteja) se torna menor que qualquer quantidade dada se n for escolhido grande o suficiente**<sup>28</sup>, em virtude de a diferença entre esses dois termos poder se tornar, por hipótese, tão pequena quanto se queira, se continuarmos longe o suficiente (como se diria nos livros didáticos de hoje: se n for tomado suficientemente grande, nota minha)<sup>29</sup> (RB , p. 171).

Na seção 7, Bolzano (RB) afirma que se uma seqüência obedece ao critério enunciado na seção 6, então ela converge, completando exatamente o que atualmente chamamos de “critério de convergência de Cauchy”: “se uma seqüência é de Cauchy, então ela converge”<sup>30</sup>. Esta demonstração tem apenas um problema, que discutiremos mais à frente.

Na seção 12, Bolzano (RB) enuncia e demonstra o Teorema:

Se uma propriedade M não vale para todos os valores de uma variável x, mas sim vale para todos os valores que são menores do que um certo u, então há sempre uma quantidade U que é a maior daquelas para as quais pode ser afirmado que todos os x menores que ela têm a propriedade M<sup>31</sup> (RB , p. 174)

Esse teorema (que Sebestik (1992) chama de Bolzano-Gauss) equivale à afirmação da existência de um limite superior de todo conjunto não vazio e limitado superiormente de números reais, e é um dos principais conceitos analíticos que Bolzano elaborou. Para demonstrá-lo, ele constrói uma seqüência que, ou tem um de seus termos coincidente com U

---

<sup>28</sup> Os negritos são nossos; a parte negritada corresponde ao que ficou conhecido nos livros de análise como a condição para uma seqüência ser de Cauchy, muitas vezes definido como “Uma seqüência é de Cauchy se, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que, se  $n > N$ , então  $|a_{n+r} - a_n| < \varepsilon$  para todo r”.

<sup>29</sup> by  $F_nx, F_{n+1}x, F_{n+2}x, \dots, F_{n+r}x$ , then we regard the quantities

$$F_1x, F_2x, \dots, F_nx, \dots, F_{n+r}x, \dots$$

as a new series... Here we have assumed the special property that the difference between the  $n$ th term  $F_nx$  and every later term  $F_{n+r}x$ , however far from the former, remains smaller than any given quantity if n has been taken large enough, then there is always a certain constant quantity, and indeed only one, which the terms of this series approach, and to which they can come as close as desired if the series is continued far enough.

<sup>30</sup> Aqui, nos referimos a seqüências que podem assumir qualquer valor real.

<sup>31</sup> If a property M does not belong to all values of a variable x, but does belong to all values which are less than a certain u, then there is always a quantity U which is the greatest of those of which it can be asserted that all smaller x have property M.

(e, portanto, não é necessário gerar mais termos, podendo parar por aí), ou então será uma seqüência de Cauchy que tenderá para U. A seqüência de Cauchy é criada por meio da aproximação do número procurado por uma série de intervalos obtidos por bipartições sucessivas e cujo comprimento tem limite zero.

Em seguida, na seção 15, Bolzano enuncia o teorema que utilizará para demonstrar o Teorema do Valor Intermediário para polinômios, afirmando que

Se duas funções de  $x$ ,  $f(x)$  e  $\phi(x)$ , variam de acordo com a lei da continuidade, seja para todos os valores de  $x$  ou somente para aqueles que estão entre  $\alpha$  e  $\beta$ , e se  $f(\alpha) < \phi(\alpha)$  e  $f(\beta) > \phi(\beta)$ , então existe sempre um certo valor de  $x$  entre  $\alpha$  e  $\beta$  para o qual  $f(x) = \phi(x)$  <sup>32</sup> (RB, p. 177).

Para demonstrar a afirmação acima, Bolzano utilizou o critério de convergência de Cauchy e o teorema do limite superior já enunciado acima (teorema de Bolzano-Gauss). Esta parte é muito importante, pois nela se articulam o conceito de limite superior com o conceito de continuidade.

Bolzano (RB) define uma propriedade M da seguinte forma:

para todos os valores de  $\omega$  que forem menores que um certo valor determinado, pode-se afirmar que as duas funções  $f(\alpha + \omega)$  e  $\phi(\alpha + \omega)$  se encontram na relação de quantidade menor para maior. Chamemos esta propriedade da variável  $\omega$  de M <sup>33</sup> (p. 178).

Ou seja:  $f(\alpha + \omega) < \phi(\alpha + \omega)$ , nas condições expostas. Usando então o resultado do teorema de Bolzano-Gauss e chamando de  $i$  uma quantidade que satisfaz  $\beta = \alpha + i$ , Bolzano (RB) conclui que “podemos dizer que todos os valores de  $\omega$  que são menores do que um certo valor determinado, possuem a propriedade M” (p. 178). No entanto, Bolzano afirma que

---

<sup>32</sup> If two functions of  $x$ ,  $f(x)$  and  $\phi(x)$ , vary according to the law of continuity either for all values  $x$  or only for those which lie between  $\alpha$  and  $\beta$ , and if  $f(\alpha) < \phi(\alpha)$  e  $f(\beta) > \phi(\beta)$ , then there is always a certain value of  $x$  between  $\alpha$  and  $\beta$  for which  $f(x) = \phi(x)$  <sup>32</sup>.

<sup>33</sup> For all values of  $\omega$  which are less than a certain one it can be asserted that the two functions  $f(\alpha + \omega)$  and  $\phi(\alpha + \omega)$  stand in the relation of smaller quantity to larger. Let us designate this property of the variable  $\omega$  by M.



é claro que essa propriedade M não vale para todos os valores de  $\omega$ , pois, por exemplo, para  $\omega = i$ , por hipótese,  $f(\alpha + \omega) < \phi(\alpha + \omega)$ . “Conseqüentemente, o teorema da Seção 12 (o teorema de Bolzano-Gauss, nota minha) nos fornece um certo U que é o maior dentre os valores para os quais pode ser afirmado que todo  $\omega < U$  tem a propriedade M”, afirma o autor (RB, p. 177). Em outras palavras, U é o maior dos valores que satisfazem a propriedade de que,  $\forall \omega < U$ ,  $f(\alpha + \omega) < \phi(\alpha + \omega)$ .

A continuidade de f e  $\phi$  entra na demonstração de que U está entre  $\alpha$  e  $\beta$ . Mostraremos o raciocínio de Bolzano apenas para quando os dois valores são positivos, para mostrar como ocorre a junção da noção de continuidade com a de limite superior. Bolzano, entretanto, divide em vários casos e demonstra que U está entre  $\alpha$  e  $\beta$  para cada um deles, recorrendo sempre à demonstração que será mostrada aqui. Resumindo, ele conclui que  $f(\alpha + U) = \phi(\alpha + U)$  com o seguinte raciocínio:

(1)  $f(\alpha + U)$  não pode ser maior do que  $\phi(\alpha + U)$ , pois pela continuidade de f e  $\phi$ , haveria  $\omega$  tal que  $f(\alpha + U - \omega) > \phi(\alpha + U - \omega)$ , o que contraria a hipótese de que  $f(\alpha + \omega) < \phi(\alpha + \omega)$  (propriedade M) vale para todo x menor do que  $\alpha + U$ ;

(2)  $f(\alpha + U)$  tampouco poderá ser menor do que  $\phi(\alpha + U)$ , pois pela continuidade de f e  $\phi$ , haveria  $\omega$  tal que  $f(\alpha + U + \omega) < \phi(\alpha + U + \omega)$ , e portanto  $\alpha + U$  não poderia ser o maior valor para o qual  $\forall \omega < U$ ,  $f(\alpha + \omega) < \phi(\alpha + \omega)$

Então, só pode ocorrer  $f(\alpha + U) = \phi(\alpha + U)$ .

Após afirmar que sua demonstração não foi da unicidade da raiz (seção 16, p. 179), Bolzano (RB) demonstra a continuidade da função polinomial  $a + bx^m + cx^n + \dots + px^r$  (Seção 17, P. 180) e, por fim, afirma que “Se uma função na forma  $x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} \dots + px + q$ , na qual n é um número inteiro positivo, é positiva para  $x = \alpha$  e negativa para  $x = \beta$ , então a equação  $x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} \dots + px + q = 0$  tem pelo menos uma raiz real entre  $\alpha$  e  $\beta$ ” (p. 177), usando o fato de que o polinômio  $x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} \dots + px + q$  pode ser dividido em dois polinômios que chamaremos de P e Q (notação nossa), no qual  $P(x) - Q(x) = x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} \dots + px + q$ . Das hipóteses, podemos escrever  $P(\alpha) > Q(\alpha)$  e  $P(\beta) < Q(\beta)$ . Assim, as condições são as mesmas do teorema demonstrado na seção 15 e, portanto, pode-se concluir que  $P(x) = Q(x)$ .

No entanto, o artigo apresenta o seguinte problema: a demonstração da convergência de uma série que obedece ao critério enunciado na seção 6 (lema 5, que enunciamos na página 40 desta dissertação) pressupõe que essa quantidade existe; e essa propriedade é exatamente a que se costuma chamar atualmente de propriedade do supremo, de teorema do supremo (quando a provamos utilizando o axioma do ínfimo); ou axioma do supremo (quando se utiliza esse axioma para deduzir o teorema do ínfimo). Neste trabalho, ela é chamada de propriedade do supremo, por ser mais geral.

Bolzano (RB) justificou esta suposição da seguinte forma:

certamente não há nada impossível em assumir a existência da quantidade X cujos termos da série se aproximam arbitrariamente, desde que não assumamos que a quantidade seja única e invariável. Então se é uma quantidade que pode variar, ela pode sempre, evidentemente, ser tomada de tal forma que seja muito próxima, ou até mesmo exatamente a mesma que o termo  $F_n x$  com o qual ela é comparada. Mas assumir uma quantidade invariável com esta propriedade de proximidade aos termos de nossa série não é impossível porque com esta hipótese é possível determinar a quantidade de forma tão precisa quanto desejado<sup>34</sup> (p. 171).

Bolzano chama essa quantidade variável de X, e prova a convergência da série fazendo  $X - F_n x = (X - F_{n+r} x) - (F_n x - F_{n+r} x) \leq |(d + \omega)|$ , em que d e  $\omega$  são tão pequenos quanto se queira, de acordo com as hipóteses assumidas. Bolzano (RB) prova então que a série pode convergir para um único valor, assumindo que a série converge para um valor Y e, em seguida, tomando  $\omega$  e  $\omega_1$  tão pequenos quanto se queira,  $X - F_{n+r} x = \omega$  e  $Y - F_{n+r} x = \omega_1$ , e, portanto,  $X - Y = \omega - \omega_1$ , que converge para zero.

O raciocínio de Bolzano (RB) acerca da possibilidade de aproximar de mais em mais o limite torna sua existência plausível, já que a série das aproximações sucessivas forma uma série convergente; entretanto, tal raciocínio não a demonstra. Sebestik (1992, p. 107) avalia que “aqui subsistem então irredutivelmente círculos viciosos ou recursos à intuição: somente a definição completa dos números reais permite evitá-los”.

---

<sup>34</sup> There is certainly nothing impossible in assuming the existence of the quantity X which the terms of the series approach arbitrarily closely, provided the quantity is not assumed to be *unique* and *invariable*. For if it is a quantity which can vary then it can, of course, always be taken so that it is suitably near, or even exactly the same as, the term  $F_n x$  with which it is being compared. But the assumption of an invariable quantity with this property is not impossible because with this assumption it is possible to determine the quantity as accurately as desired.

Em outras palavras, que de alguma forma seria necessário postular algo sem se preocupar com a essência das coisas (como o fez Dedekind, 1831-1916), ou a intuir de alguma forma. Nenhuma das duas opções seria conveniente para Bolzano, que pretendia encontrar fundamentos objetivos para todas as afirmações que não fossem consideradas indemonstráveis.

## 2.2 Intuição e Conceito no Teorema do Valor Intermediário

Já se afirmou que a filosofia da ciência na época de Bolzano era dominada principalmente por interpretações psicológicas que foram feitas acerca da doutrina kantiana; para Kant, não era necessário demonstrar algo que fosse dado intuitivamente; pois sua preocupação era com a questão de como se tem acesso às verdades, e certamente a verdade de coisas que se consideram óbvias é dada pela intuição. A matemática, de forma análoga, ainda era influenciada pelas concepções de Pascal e de Descartes (que, apesar de não terem o mesmo ponto de vista a respeito de diversas questões, postulavam que as proposições deveriam ser demonstradas em termos de coisas óbvias, e que não era possível demonstrar mais do que elas). Leibniz, entretanto, afirmava que devem existir alguns conceitos e princípios que eram primitivos para Pascal mas que ainda assim eram complexos, (e portanto, para ele, definíveis), e que proposições seriam não-demonstráveis, não por serem claras ao extremo, mas por sua forma lógica (RUSNOCK, 1997, p. 71). No entanto, Leibniz

tal como Aristóteles e Descartes, exigiu demais desses conceitos simples e axiomas, exigindo que fossem ao mesmo tempo epistemologicamente básicos e metafisicamente básicos. Os conceitos simples da compreensão, como ele disse mais de uma vez, não são nada mais do que a perfeição de Deus. Axiomas deveriam ser não apenas logicamente primitivos, mas também imediatos, isto é, auto-evidentes<sup>35</sup> (RUSNOCK, 1997, p. 71).

---

<sup>35</sup> Like Aristotle and like Descartes, he also asked considerably more of them, requiring that they be at the same time epistemologically and metaphysically basic. The simple concepts of the understanding, he claimed on more than one occasion, are nothing other than the perfections of God. Axioms... are held to be not only logically primitive, but also immediate, that is, self-evident.

Apesar de seus esforços para a fundamentação da matemática e da filosofia, Leibniz deixou o trabalho de construção e difusão de sua filosofia incompleto, sobretudo em virtude do adiamento de publicações importantes: seu *Novos Ensaio Sobre o Entendimento Humano*, escrito no período de 1701 a 1704, em forma de diálogo, e contraposto às idéias de Locke, não foi publicado em sua vida em razão da morte de Locke (1632-1704), e acabou sendo publicado somente em 1765). E outras contribuições matemáticas sofreram adiamento, à espera de unificação de diferentes teorias sobre a matemática. Por isso, “apenas uma parte de sua mensagem foi para os matemáticos que o seguiram”. (RUSNOCK, 1997, p. 72)

De certa forma em virtude da influência de Leibniz, a análise matemática, por fins do século XVIII, se tornou uma vez mais um assunto inteiramente novo, mesmo que freqüentemente fosse apresentado como um desenvolvimento posterior da geometria cartesiana. (RUSNOCK, 1997, p. 72)

Finalmente, o sujeito de estudo e a concepção dos fundamentos da análise mudaram: em vez de curvas e suas propriedades, a análise refere-se agora a expressões analíticas e às regras que regem tais transformações, as quais não mais podem ser justificadas com apelo a uma semântica geométrica; ao contrário, as justificações só poderiam ser feitas em termos puramente sintáticos e algébricos. “Existia uma semântica: as quantidades variáveis... Mas essa semântica era aristotélica, e não moderna – era uma semântica para a maioria das partes”, afirma Rusnock (1997, p. 72). O significado da validade universal permanece puramente sintática. Uma fórmula tem sua validade universal demonstrada se ela for derivada por meio do uso das regras da análise; entretanto, ela pode talvez falhar ou fornecer respostas de um tipo diferente para certos valores da quantidade variável. Então, por exemplo, Euler (*apud* RUSNOCK, 1997) argumentou que, como a equação

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots \quad (\text{I})$$

pode ser estabelecida pelas regras da análise, é possível concluir não somente que tal fórmula seja válida para  $x = 1/2$ , como também para  $x = -1$ ,  $x = 1$ ,  $x = 2$  etc.

A obra de Bolzano retoma o legado de Leibniz. Para ele, na matemática era necessário desenvolver fundamentos que superassem a obviedade intuitiva de Pascal, pois com freqüência a intuição leva ao erro, sobretudo quando se lida com conceitos tão pouco intuitivos, como o de infinito, o de infinitesimal; e dimensões maiores do que 3; além disso, a falta de rigor em matemáticos do calibre de Euler levaram-nos a aceitar com naturalidade

resultados contraditórios, como o que mostramos acima (a equação (I) para qualquer valor de  $x$ ).

Nesse contexto, é compreensível que ninguém pretendesse demonstrar o Teorema do Valor Intermediário, em razão de sua obviedade intuitiva. Mas essa intuição é uma intuição geométrica e, por isso, não faz parte da matemática pura como ela é entendida nos dias atuais, e como já a entendia Bolzano.

Segundo George e Rusnock (1996, p. 463), o artigo *Prova puramente analítica...* contém somente conceitos não intuitivos ou não empíricos, e que “Bolzano apontou o óbvio ao dizer que o teorema não dizia respeito a retas e a pontos, mas a funções, com aplicações geométricas somente como um caso especial”, o que mostra que apenas tornar explícito algo conhecido pode produzir uma generalização importante. George e Rusnock (1996, p. 463-464) esclarecem:

a meta geral dos esforços reducionistas, do cálculo para a aritmética, da aritmética à lógica, da geometria para a lógica das relações etc., de Bolzano em diante, não é epistemológica; ela é, ao contrário, um exercício classificatório, mas não no sentido kantiano: os julgamentos encontrados não são analiticamente kantianos<sup>36</sup>.

Um outro fator que contribuiu para o crescimento da matemática no século XIX foi os matemáticos dos séculos XVII e XVIII terem acumulado tanto conhecimento, e muito progresso matemático foi feito com base apenas na explicitação e diferenciação daquilo que já se sabia (intuitivamente). De acordo com os autores,

Bolzano afirma que a *proposição* é a unidade do significado, mas sua prática matemática antecipa, em alguns aspectos, a doutrina que viria a ser caracterizada como a da ‘definição implícita’: ter uma definição de um conceito (por exemplo, da continuidade) é ter uma (definição) que possa apoiar uma prova puramente formal do teorema do valor intermediário (dentre muitas outras)... Num certo sentido, então, a atividade semântica é inerente na construção de provas; mas já não é análise no sentido kantiano, e não se assenta na intuição de forma alguma<sup>37</sup> (GEORGE; RUSNOCK, 1996, p. 464).

---

<sup>36</sup> the general point of reductionist efforts, of the calculus to arithmetic, arithmetic to logic, geometry to the logic of relations, etc. from Bolzano on, is not epistemological; it is, rather, a clarificatory exercise, but not in the kantian sense: the judgments one encounters are not Kantianly analytic.”

<sup>37</sup> Bolzano maintains that the *proposition* is the unit of significance, but his mathematical practice anticipates, in some respects, the doctrine later characterized, and discussed below, as “implicit definition”: to have a correct

O Teorema do Valor Intermediário já era utilizado desde a Antigüidade. Alguns matemáticos contemporâneos de Bolzano e anteriores haviam tentado justificar ou mesmo demonstrar esse resultado, mas nenhum deixou de utilizar noções como espaço, tempo ou geometria<sup>38</sup>. O artigo foi um marco na aritmetização da análise, tendo em vista que, para a demonstração do resultado, até então tido pela maioria dos matemáticos como óbvio, Bolzano desenvolveu os principais fundamentos da análise que estava por surgir: a análise aritmetizada, em outras palavras, livre de conceitos temporais, espaciais e geométricos, cuja utilização estava levando a resultados contraditórios, como os de Euler.

No prefácio de seu artigo, Bolzano analisa algumas das tentativas de demonstração, criticando particularmente a utilização de elementos exteriores à matemática pura, como a tríade espaço-tempo-geometria já referida.

Ao contrário do que afirmam alguns autores (BROWN, 1997, dentre outros), Bolzano pretendia demonstrar o Teorema do Valor Intermediário, não por acreditar que ele não fosse um resultado óbvio, ou que sua obviedade não implicasse sua veracidade. Ele afirma claramente que

certamente, não há nenhum questionamento referente à *correção*, nem certamente à *obviedade*, desta proposição geométrica. Mas é claro que é uma ofensa intolerável contra o método correto derivar verdades da matemática pura (ou geral) (i.e., aritmética, álgebra, análise) de considerações que valem para uma parte meramente aplicada, particularmente, a geometria<sup>39</sup>. (RB, p. 170, itálicos do autor)

A grande inovação de Bolzano foi representar o contínuo em termos discretos: discretizar modelos contínuos. Esta inovação era, de fato, uma necessidade histórica, pois, embora a percepção do mundo (do espaço e do tempo, mas também de noções percebidas

---

definition of a concept (e.g. of ‘continuity’) is to have one which will support a purely formal proof of the intermediate value theorem (along with many others)... In a sense, then, the semantical activity is inherent in the construction of proofs; it is no longer Kantian analysis, and it relies in no way on intuition.

<sup>38</sup> Bolzano cita: “Kästner, Clairaut, Lacroix, Metternich, Klügel, Lagrange, Rösling, e vários outros” (p. 159-160)

<sup>39</sup> There is certainly no question concerning the *correctness*, nor indeed the *obviousness*, of this geometrical proposition. But it is clear that it is an intolerable offense against *correct method* to derive truths of *pure* (or general) mathematics (i.e., arithmetic, algebra, analysis) from considerations which belong to a merely *applied* (or special) part, namely, *geometry*.

pelos outros três sentidos) seja contínua, há necessidade de modelos discretos desse contínuo para poder aplicar o conhecimento matemático em medição e manipulação de dados e conceitos. Atualmente, para muitos matemáticos, os números reais são o contínuo ou substituem o contínuo, mas, na realidade, os números reais são apenas modelos discretos desse contínuo.

A relação da matemática com o senso comum é bastante complicada e tem implicações nas questões epistemológicas e de ensino: se de um lado o nosso acesso ao contínuo se dá por meio da nossa sensibilidade e percepção (que é relacional e relativa, pois os cinco sentidos trabalham em termos de relações), por outro, foi a conceitualização desse contínuo em termos do discreto que possibilitou o pensamento relacional característico da matemática moderna, e a capacidade da ciência moderna de medir e prever dados.

O estabelecimento de regras aritméticas claras e a aritmetização da análise permitiram que a análise se fundamentasse solidamente o suficiente para tornar possível a definição rigorosa do infinito, do infinitesimal, e de todos os demais conceitos que utilizavam tais definições, e que tanta importância tiveram para o desenvolvimento do Cálculo dos dias atuais. Assim, o fato de que possamos provar, por exemplo, a propriedade do supremo utilizando o Teorema do Valor Intermediário, não implica que se possa assumir qualquer um deles como fundamento. A adoção de princípios aritméticos para a análise permitiu o desenvolvimento do Cálculo já mencionado. Manter os princípios da análise tais como ocorriam na época, isto é, baseados na geometria e sem apelo à aritmética e ao estudo da quantidade, corresponderia a não resolver os problemas essenciais colocados pelo Cálculo de sua época.

### **2.3 Apresentação de Definições dos Números Reais**

Richard Dedekind (*apud* CARAÇA, 2000, p.57-58):

eu vejo a essência da continuidade (...) no princípio seguinte: “se uma repartição de todos os pontos da recta em duas classes é de tal natureza que todo o ponto de uma das classes

está à esquerda de todo o ponto da outra, então existe um e um só ponto pelo qual é produzida esta repartição de todos os pontos em duas classes, ou esta decomposição da recta em duas partes.

Como já disse, creio não errar admitindo que toda a gente reconhecerá imediatamente a exactidão do princípio enunciado. A maior parte dos meus leitores terá uma grande desilusão ao aprender que é esta banalidade que deve revelar o mistério da continuidade. A este propósito observo o que segue. Que cada um ache o princípio enunciado tão evidente e tão concordante com a sua própria representação da recta, isso satisfaz-me ao máximo grau, porque nem a mim nem a ninguém é possível dar deste princípio uma demonstração qualquer. A propriedade da recta expressa por este princípio não é mais que um axioma, e é sob a forma deste axioma que nós pensamos a continuidade da recta, que reconhecemos à recta a sua continuidade.

A afirmação de Dedekind segundo a qual “Que cada um ache o princípio enunciado tão evidente e tão concordante com a sua própria representação da recta, isso satisfaz-me ao máximo grau” (*apud* CARAÇA, 2000), mostra que a escolha da utilização do conceito de cortes para definir números irracionais se dá com base na intuição e na conveniência para a construção de um sistema coerente, o que Bolzano não aceitaria.

Além da preocupação com a comunicação das verdades de uma forma coerente, para Bolzano, significados são objetivos, e portanto, deve-se tentar descobrir e descrever esses significados objetivos. Por isso, ele precisava de uma prova diferente das existentes até então.

Conforme Bolzano, a conexão entre os objetos ou fatos e as descrições matemáticas em termos de caracteres aritméticos seria natural e óbvia, e não escolhida ou construída; Dedekind, porém, discordava dessa afirmação, e o desenvolvimento da matemática daria razão a ele (a Dedekind).

Analisemos agora a definição dos números irracionais por intervalos encaixados, descrita por Courant (2000, p.82-83). Segundo ele,

a existência sobre a reta numérica (considerada como uma reta) de um ponto contido em cada seqüência de intervalos encaixados com pontos extremos racionais é um *postulado fundamental da Geometria* (...) Nós a aceitamos, da mesma forma como aceitamos outros axiomas ou postulados em Matemática, por causa de sua plausibilidade intuitiva e sua utilidade na construção de um sistema consistente de pensamento matemático (...) Um ponto irracional é completamente descrito por uma seqüência de intervalos racionais encaixados de comprimentos tendendo a zero. Portanto, nosso postulado fundamental realmente equivale a uma definição. Construir esta definição, após ter sido levado a uma seqüência de intervalos racionais encaixados por meio de um sentimento intuitivo de que o ponto irracional “existe”, significa dispensar o apoio intuitivo com o qual nosso raciocínio procedeu e compreender que todas as propriedades matemáticas de pontos



irracionais podem ser expressas como propriedades de seqüências de intervalos racionais encaixados.

Temos aqui um exemplo típico da posição filosófica descrita na introdução deste livro; descartar a abordagem ingênua “realista” que considera um objeto matemático como uma “coisa em si mesma” da qual nós despreziosamente investigamos as propriedades e, ao invés, compreender que a única existência relativa a objetos matemáticos está em suas propriedades matemáticas e na relação pela qual eles estão interligados. Estas relações e propriedades esgotam os possíveis aspectos sob os quais um objeto pode entrar no domínio da atividade matemática. Desistimos da “coisa em si” matemática (...). Este é o significado da definição “intrínseca” de um número irracional como uma seqüência de intervalos racionais encaixados.

Ora, a postura realista criticada por Courant é semelhante à de Bolzano, que ao afirmar a existência de proposições objetivas, não desiste da “coisa em si mesma” (Courant, 2000) e pretende encontrar a essência das coisas e demonstrar todas as propriedades de um objeto matemático por meio de verdades não demonstráveis. Para Bolzano, a “construção de um sistema consistente de pensamento matemático” (Courant, 2000) obtém-se encontrando essas verdades não demonstráveis, e não com a escolha mais útil e conveniente.

Já a posição de Courant expressa-se bem explicitamente em suas afirmações relativas a idéias intuitivas e úteis para fundamentar a matemática e que, uma vez formalizadas, dispensam o uso da intuição. Trata-se de uma posição típica da matemática moderna, que se esforça por evitar o uso de intuições ao formalizar um conceito: uma complexa relação entre intuição e conceito, na qual o símbolo desempenha um papel importante e em que os axiomas são aceitos de forma que permitam a construção de novos conceitos e o desenvolvimento da matemática.

Não é comum nem útil que as definições matemáticas contrariem as intuições. Com freqüência, mesmo definições formais, como a de Courant e de Dedekind, têm certa fundamentação na intuição. Uma definição é útil se, além de não contrariar a intuição (intuição refere-se não somente à percepção sensível, mas tem relação com as representações), ela for prática o suficiente para que se possam utilizar seus conceitos sem que se precise recorrer sempre à intuição. Esse aspecto será retomado no próximo capítulo e na conclusão.

## 2.4 O Contínuo: Comparação de Bolzano com Dedekind e Peirce. O Teorema do Valor Intermediário Poderia ser um Axioma?

A respeito da relação da continuidade da reta numérica com a realidade e a percepção da realidade, Dedekind (*apud* CARAÇA, 2000, p. 58) afirmava que

a suposição (da continuidade dos números reais, nota minha) não é mais do que um axioma pelo qual nós atribuímos continuidade à reta. O espaço ter existência real não é de forma alguma necessário para que a reta seja contínua.

De acordo com Dedekind, os postulados que fundamentam os números reais não representam mais do que afirmações sobre a conveniência da linguagem matemática; assim, o espaço não deve necessariamente ser contínuo e seus postulados dizem respeito apenas à representação desse espaço, e não ao espaço em si.

O ‘preenchimento’ das infinitas ‘lacunas’ nos números racionais pela criação de novos pontos individuais é a idéia-chave que está por trás da construção de Dedekind do domínio dos números reais. Para Bolzano, ao contrário, é óbvio que esses pontos, como exemplificado pela incomensurabilidade de um certo segmento de reta, existem realmente.

A posição de Bolzano está no extremo oposto à de Dedekind. Para ele, todas as afirmações matemáticas devem ser explicadas de forma objetiva, e não subjetivamente. Para Otte (2006a, p. 27), porém, “esta objetividade leva a seu erro (de Bolzano) com relação aos fundamentos dos números reais e sua ignorância do fato de que a matemática contém somente afirmações hipotético-dedutivas, e não categóricas”.

A concepção de Charles Sanders Peirce da continuidade é, nesse sentido, intermediária entre as de Dedekind e de Bolzano. Ele afirma que a coerência das regras do contínuo exclui a possibilidade dela ser uma mera coleção de indivíduos ou pontos discretos, no sentido usual. Conforme Otte (2006a, p. 27),

O continuum representa a realidade da determinação possível de pontos, e não um conjunto existente de pontos; mas (para Peirce) esta possibilidade é objetiva, e, portanto, – diferentemente do que era para Dedekind – o espaço não poderia ser discreto<sup>40</sup>.

Assim, para Peirce, os postulados seriam complementares à nossa intuição sensível e, portanto, a continuidade do espaço e do tempo seria, objetiva, e não subjetiva, como Kant acreditou. Otte discute, com base na importante contribuição para a matemática dada por Peirce. Otte (2006 a, p. 31) diz:

Se olharmos para as várias provas do Teorema do Valor Intermediário poderíamos nos inclinar a perguntar: por quê não tomar esse teorema mesmo como o postulado essencial da continuidade? Parece claro e óbvio que como qualquer um dos outros candidatos, a existência do limite de uma seqüência monótona limitada, o teorema Heine-Borel, a existência de um ponto de interseção de uma seqüência encaixada de intervalos fechados de números racionais com medidas tendendo a zero etc.

Principalmente as razões pragmáticas são responsáveis pela escolha de axiomas, razões que são relacionadas com o desenvolvimento do conhecimento matemático e a construção de teorias. Mas e o problema da explicação, então? Explicar significa exibir o significado de algo. Matemática não tem, no entanto, significados definitivos, nem no sentido da estrutura intra-teórica, nem com respeito à objetividade intuitiva. Símbolos e significados são processos (...)

Provas rigorosas ... não admitem “por quês” – questões que não fazem mais do que meros cálculos e é difícil ver como elas poderiam ser de alguma forma explicativas. Considerar a questão de como escolher o modelo matemático que é relevante poderia talvez mudar a situação (...) talvez...os fundamentos das afirmações matemáticas se encontrem, por assim dizer, “no futuro”, no uso e aplicação das proposições matemáticas. A prova matemática deve, portanto, generalizar para ser explicativa<sup>41</sup>.

---

<sup>40</sup> “A continuum is precisely that every part of which has parts, in the same sense” (PEIRCE, W2, 256). The continuum represents the reality of the possible determination of points, rather than be an actual set of points; but this possibility is objective, such that, differently from Dedekind, space could not be discrete, according to Peirce.

<sup>41</sup> If one looks at the various proofs of the intermediate value theorem one might be inclined to ask: why not take this theorem itself as the essential continuity postulate? It seems as clear and obvious as any of the other candidates, the existence of the limit of a bounded monotonous sequence, the Heine-Borel theorem, the existence of a point of intersection of a nested sequence of closed intervals of rational numbers with lengths tending to zero, etc. etc.

Mainly pragmatic reasons are responsible for the choice of axioms, reasons that are related to the development of mathematical knowledge and the construction of theories. But what about the problem of explanation then? To explain amounts to exhibiting the meaning of something. Mathematics has, however, no definite meanings, neither in the structural intra-theoretical sense nor with respect to intuitive objectivity. Signs and meanings are processes (...)

Rigorous proofs in this sense do not admit “why”-questions any more than mere calculations do and it is hard to see how they could be explanatory at all. Considering the question of how to choose the relevant mathematical model might perhaps change the situation. the foundations of mathematical claims lie, so to speak, “in the future”, in the use and application of the mathematical propositions. A mathematical proof must therefore generalize in order to be explanatory.

Otte (2006a) conclui afirmando que as premissas dos argumentos matemáticos têm que ser apresentadas de forma que as tornem intuitivamente aceitáveis e claras e, ao mesmo tempo, metodologicamente produtivas. Afirma que isso pode parecer paradoxal, já que “requer convencimento da intuição e simultaneamente um significado como instrumento e como objeto de cognição”, mas que “os significados e objetos se tornam quase indistinguíveis quando considera-se o processo de generalização em sua dinâmica completa” (OTTE, 2006a, p. 31).

Em outras palavras, a vinculação da matemática à intuição ou à aplicação à realidade não são nem podem ser uma camisa-de-força, pois quando se fala em intuição matemática deve-se levar em consideração a idéia de símbolos, que se relaciona com a abstração matemática. Uma prova pode ser intuitiva por lidar com conceitos familiares aos símbolos e abstrações matemáticas, mesmo que não diga respeito diretamente a capacidades da percepção sensível.

Voltando à noção de explicação, deve-se, de fato, levar em conta a história da matemática. Não se pode aceitar definições simplistas que pretendam reduzir as demonstrações à intuição, já que, como visto, se de um lado a noção de intuição nunca foi abandonada, por outro, ela não pode substituir a necessidade de conceitos e da formalização de teorias.

## Capítulo 3 – Comparando Bolzano com Kant e com Aristóteles

### Introdução

Dos gregos até Descartes, a ciência buscava explicações com base em princípios evidentes. Com Descartes, se inicia o que Foucault (1926-1984) chamou de *Época Clássica* (FOUCAULT, 1995, p. 76), que tem como uma das principais características uma ênfase maior à necessidade de evidência do que à de explicação.

Segundo Otte (2007b), os questionamentos à metafísica escolástica já teriam se iniciado com Galileu (1564-1642), que também afirmou que para ler o livro da natureza era necessário conhecer sua linguagem, a linguagem geométrica. No entanto, “a análise matemática e a descrição matemática da natureza raramente podem fornecer explicações no sentido tradicional aristotélico. Descartes e Galileu acreditavam que o conhecimento objetivo não poderia depender da interpretação ou da retórica, e que o significado do mundo consistiria em mostrar uma ordem abstrata. Ganhou importância a noção de que o mundo seria explicado por leis matemáticas – e por isso ganharam importância os signos e significados – e não em termos de existência – por isso perdeu importância a busca dos objetos “em si”. Então, a questão da certeza estava intimamente ligada a uma crise da (noção de) explicação (OTTE, 2007b, p. 53). Assim, paradoxalmente, o conhecimento da filosofia e da teologia (que deveriam ter o papel de explicar), ao ganharem novas armas (a matemática, utilizada pelos escolásticos da Igreja Católica, por exemplo, para aprimorar seus calendários), perderam em termos de capacidade de explicar. Afinal, o que pode ser mostrado ou demonstrado não necessariamente pode ser explicado, porque cada explicação tem que fornecer um sentido.

Mas é em Kant que a *Época Clássica* atinge o seu auge, e também chega a seu fim. O legado de Kant pode ser considerado como proveniente de duas fontes diferentes: de um lado, o empirismo (Locke, Hume), e de outro o logicismo (Wolff, Leibniz). Kant questionou toda a forma como o conhecimento era encarado, ao afirmar que a *Metafísica* não pode ter hipóteses e que a *Lógica* geral considerada como *Órganon* (em outras palavras: como fornecedora de conhecimento sobre o conteúdo de alguma ciência, como a consideravam Aristóteles e os metafísicos escolásticos) “...é sempre uma lógica da ilusão...” (B86/A61; 2000, p. 96-97).

A noção de Kant de que o sujeito cognoscente não tem acesso direto aos objetos, e que todo conhecimento resulta de uma mediação entre sujeito e objeto, é uma noção que viria a influenciar todos os filósofos e pensadores posteriores a ele: Hegel, Marx, Piaget, dentre outros (OTTE, 2006b, p. 155).

No entanto, a busca de evidência era algo que Kant ainda tinha em comum com todos os filósofos da Época Clássica, desde Galileu e Descartes. Já Bolzano questionou a busca da evidência e da certeza (concebida como a convicção do sujeito, ligada à noção de evidência), por um lado, mas defendeu a noção de explicação como algo que seguisse uma ordem objetiva, por outro, retomando nesse sentido aspectos da ciência aristotélica. Bolzano critica o método de buscar conhecimento por meio da intuição afirmando que o conhecimento deveria ser obtido por meio de conceitos; mas o faz, não por acreditar que buscar conhecimento por meio da intuição seja inseguro ou possa conduzir ao erro, e sim por acreditar que a Lógica é tão segura quanto a intuição, e tem a vantagem de fornecer os fundamentos objetivos dos conhecimentos.

Até Kant, uma prova matemática tinha que mostrar as coisas como elas são. Com Bolzano, a matemática começava a tentar mostrar a ordem objetiva dos conhecimentos, como fora o objetivo de Euclides e Aristóteles. Segundo Bolzano, Segundo Bolzano, Euclides certamente não teve a intenção de aumentar a certeza, dando provas para teoremas que já eram aceitos como corretos; ou que não trouxessem mais convicção.

### **3.1 Apresentação do *Wissenschaftslehre***

O *Wissenschaftslehre* (Doutrina da Ciência) foi escrito entre os anos 1819 e 1837, depois da aposentadoria forçada de Bolzano, e é sua principal obra filosófica. Faz parte de seus escritos ‘maduros’. É uma obra monumental, totalizando mais de 3.000 páginas. O *Wissenschaftslehre* trata de questões relativas à natureza do conhecimento e das verdades científicas. É dividido em duas partes, marcadas pela distinção objetivo x subjetivo: a primeira é composta pelos volumes I e II (§1 a §268), que tratam da natureza e estrutura da ciência no nível da *ordo essendi* (a ordem do ser, ou a ordem essencial das coisas – em outras

palavras, de como as representações, proposições e verdades são “em si mesmas”); e a segunda pelos volumes III, IV e V (§269 até §718), que tratam da forma como os homens conhecem, descobrem e descrevem a realidade cientificamente (chamada de *ordo cognoscendi*).

Em muitos dos capítulos do *Wissenschaftslehre* (§12, §162, §198, mas muitos outros), sobretudo naqueles em que Bolzano define termos antigos de forma nova, ele inicia comentando definições de contemporâneos e predecessores; nesses comentários percebemos sua crítica a Kant e àqueles que interpretaram de forma psicológica as doutrinas kantianas. Segundo Lapointe (2003, p. 6), “o contexto filosófico e intelectual da época era dominado pelo idealismo de Fichte (1762-1814) e Hegel (1770-1831) e, de maneira crescente, pelas interpretações psicológicas das doutrinas kantianas (Herbart (1776–1841), Benecke (1776-1837))”.

Particularmente Kant – cuja principal obra, *Crítica da Razão Pura*, foi editada no mesmo ano em que Bolzano nasceu (1781) –, que colocou a epistemologia em primeiro lugar, foi considerado por Bolzano seu maior adversário. No entanto, foi estudando, criticando e pretendendo corrigir a obra de Kant que Bolzano construiu sua própria doutrina.

Chama a atenção no *Wissenschaftslehre*, o que diferencia de outros livros didáticos de Lógica de sua época, a distinção permanente entre as coisas objetivas – representações, proposições e verdades em si – e a forma como nós seres humanos passamos a conhecer essas coisas. Muitos dos problemas e até contradições de sua época resultavam do fato de que as coisas foram representadas inadequadamente. Para Bolzano a diferença entre conhecimento e conhecimento verdadeiro é também muito importante e por isso, na Doutrina da Ciência, ele é contra qualquer noção psicológica de conhecimento objetivo. Bolzano chegou a parafrasear o famoso *cogito ergo sum* de Descartes, afirmando que Deus existe, não porque ele pensa; mas que pensa porque existe (§ 25, d). A distinção entre conhecimento e conhecimento verdadeiro o levou a demonstrar por indução que existem infinitas verdades no *Paradoxos do Infinito*, ao construir o conjunto infinito de verdades contido pelas afirmações: “P”, “P é verdadeiro”, ““P” é verdadeiro” é verdadeiro”, e assim por diante. Bolzano foi talvez o primeiro matemático a conceber a noção de infinito atual, ao passo que desde Aristóteles os matemáticos trabalhavam apenas com a noção de infinito potencial.

Os parágrafos iniciais do *Wissenschaftslehre* são uma espécie de apresentação geral da obra, por isso os exporemos aqui.

No §1, **O quê o autor entende pelo nome *Wissenschaftslehre***, Bolzano chama de ciência (*Wissenschaft*) “o conjunto de verdades de um certo tipo que tem a qualidade que sua parte já conhecida e importante merece ser apresentada num livro particular. Aquele livro mesmo que aparentemente foi escrito por alguém com o propósito determinado de representar todas as verdades de uma ciência numa maneira para serem entendidas o mais facilmente possível, eu chamo de manual (ou livro didático) dessa ciência (WL § 1); e denominou Doutrina da Ciência (*Wissenschaftslehre*) ou lógica “aquela ciência que nos ensina como apresentar alguma ciência num livro didático” (WL § 1).

No §2, **Justificação desse conceito e sua nomenclatura (seu nome)**, Bolzano fala sobre a necessidade de uma doutrina da ciência, e pergunta ao leitor “... se ele não consideraria estranho que entre todas as ciências que nós temos não houvesse alguma que nos ensina como proceder para fazer uma ciência e como representá-la num livro didático” (WL, §2), mostrando assim qual é o objetivo da redação da obra e apresentando a diferença entre a lógica (objetiva) e a didática (que contém estruturas psicológicas e subjetivas).

No §3, **Doutrina da ciência é uma ciência já conhecida desde muito tempo com vários nomes distintos** e em §4, **Por quê nunca foi desenvolvida com as finalidades que aqui propomos**, Bolzano afirma que desde Parmênides até sua época, o que o autor chama de doutrina da ciência já existia sob vários títulos (canônica, dialética, tópica, lógica, heurística, órgão), e que o primeiro autor importante nesta área foi Aristóteles, e se pergunta por quê sua própria definição de lógica (em outras palavras, como Doutrina da Ciência) nunca foi apresentada, tentando dar algumas sugestões sobre isso. Particularmente, ele acha que na sua época o grande obstáculo foi a afirmação de Kant de que “uma lógica nunca pode ser um órgão” (apud BOLZANO, WL, §4), em outras palavras, de que a lógica forneceria as regras sobre de raciocínio, mas não tem conteúdo próprio. Desse ponto-de-vista, Bolzano está mais próximo de Aristóteles do que de Kant.

No §5, **O quê o autor pensa sobre essas diferenças**, Bolzano se esforça por invalidar e rejeitar os argumentos de outros autores, como Kant, sobre o que é a lógica; e expor os motivos históricos de não se definir a lógica como Doutrina da Ciência; e a possibilidade de existir uma Doutrina da Ciência mesmo sem unanimidade a respeito da noção de ciência.

No §6, **O autor vai chamar sua doutrina da ciência de “Lógica”**, Bolzano introduz o termo Lógica como outro nome da **Doutrina da Ciência** (*Wissenschaftslehre*). Em §7, **Exame de outras definições (de Lógica)** e §8 **Vários conceitos conectados com a Lógica**, Bolzano fala dos vários aspectos e várias formas da Lógica, e justifica estar adotando um



termo que já foi utilizado anteriormente afirmando que sua concepção de Lógica é completamente diferente de todas as já utilizadas; também fala sobre a relação dessa Lógica com outros conceitos fundamentais como metafísica, ontologia e Lógica formal. Rejeita as afirmações de vários autores de que a Lógica não diria respeito à verdade.

No §9, **Utilidade da Lógica**, Bolzano afirma que a Lógica teria como utilidade principal evitar erros e analisar paradoxos; e que é muito importante conhecer as regras da Lógica para manter um pensamento claro e independente, pois a Lógica não só é uma ciência, mas também um sistema de regras (em outras palavras, é um Cânone). Em §10, **Quanto se deveria estudar a Lógica e como se deveria preparar para isso**, ele fala sobre quando e como se estuda a Lógica. Em §11, **Pergunta-se se a lógica é uma arte ou uma ciência**, ao comentar a afirmação de que a lógica é uma ciência e também uma arte, afirma que não há contradição entre as duas.

No §12, **Pergunta-se se a lógica é uma ciência formal**, Bolzano rejeita a idéia de uma lógica formal ou analítica, que para ele seria fruto de um preconceito psicológico daqueles que acreditam que o objeto da lógica são os pensamentos, ao invés de proposições. Após citar várias opiniões de pensadores de sua época ou anteriores, afirma que “todos esses eruditos... partiram, sem mencioná-la, da premissa de que todos os objetos que pertencem à lógica se subsumem no conceito de um pensamento (Gedanke)” (WL, §12, 2)). Bolzano então se pergunta

se a lógica deveria não só estabelecer as leis que regem verdades pensadas ou pensamentos verdadeiros, mas todas as verdades... se a validade das regras lógicas não se estendem a proposições em si independentemente de se essas foram pensadas por alguém, ou não (WL, §12, 2).

E afirma que tais pensadores teriam “limitado a área da lógica de forma muito estrita”, e que “a fonte da maior parte dos erros na lógica surgem do fato de não se distinguir entre verdades pensadas e verdades em si; proposições e conceitos pensados e proposições e conceitos em si” (WL, §12, 2)).

foi dito que a lógica (retomando o que dissemos em 1)) ...não considera a matéria, mas a forma do pensamento... o mal entendido que pretende que a lógica, por ser chamada formal,

não tem matéria alguma, e por isso verdade alguma porque verdades só podem ser proposições determinadas... é tão louco que não merece atenção... esse mal-entendido pode ser removido pelo fato de que mesmo que algumas frases não aparecem como objetos das doutrinas da lógica, ainda assim tais doutrinas são todas proposições bem determinadas. Porque temos, em qualquer ciência, que distinguir entre o objeto da ciência e seu conteúdo. Por exemplo, o objeto da geometria é o espaço; mas seu conteúdo são teoremas sobre o espaço (WL, §12, 2)).

E conclui dizendo que

Alguns entendem a afirmação de que a lógica é uma ciência meramente formal no sentido de que as doutrinas dela são todas verdades analíticas... Eu não concordo com essa opinião; ao contrário, acredito que nem um único teorema da lógica ou de alguma outra ciência seja uma verdade analítica. Porque acredito que uma sentença analítica é muito pouco importante ao ser afirmada como teorema de alguma ciência. Quem gosta de falar, por exemplo, na geometria, sobre teoremas do tipo um triângulo equilátero é um triângulo ou uma figura equilátera, ou coisas semelhantes? (WL, §12, (5)).

Assim, a Lógica não seria algo independente das ciências, mas trataria também do conteúdo das mesmas.

E como a Lógica tem um conteúdo, e é definida por Bolzano como sendo a doutrina das ciências, no §13, **Pergunta-se se a Lógica é uma ciência independente (separada)**, ele concluirá que a Lógica tem que ser desenvolvida junto com as ciências. Nesse aspecto, vemos mais uma diferença de Bolzano com Frege e Russell (1872-1970). E como a Lógica é uma doutrina da ciência e existem várias ciências, Bolzano conclui que existem, além de uma Lógica geral, Lógicas particulares.

No §14, **Lógica geral e lógica particular (ou especial)**, Bolzano afirma que cada ciência tem sua lógica e conteúdo específico, mas a Lógica como teoria das ciências trataria de tudo o que elas têm em comum, sendo uma lógica geral e uma teoria da comunicação.

No §15, **Plano (estrutura) desse livro**, ele apresenta o plano ou índice do *Wissenschaftslehre*, mostrando suas cinco partes distintas:

1 **A Doutrina das Premissas** (*Fundamentallehre*). É nessa parte que ele demonstra a existência de verdades em si e a nossa capacidade de reconhecê-las. A distinção fundamental entre a verdade que alguém pensa e as verdades de fato, que existem mesmo que ninguém

jamais as tenha pensado, é da maior importância para ele, e vem daí a distinção entre provas e explicações;

2 A **Doutrina Elementar**: a doutrina das representações (*Vorstellungen*), proposições, proposições verdadeiras e conclusões;

3 A **Epistemologia** ou teoria das condições de conhecimento ou cognição;

4 A **Arte da Invenção**, ou as regras que temos que obedecer na busca de verdades;

5 A **Doutrina da Ciência** propriamente dita;

Assim como a lógica não pode ser desvinculada do conteúdo de que ela trata, as demonstrações não podem ser o objeto principal de um livro científico, mas apenas instrumentos auxiliares do conteúdo a ser demonstrado. Bolzano não concorda com os lógicos que afirmam que só as proposições que não são de conhecimento imediato devem ser provadas, e argumenta que a obviedade é algo que varia de uma pessoa para outra; em outras palavras, cada pessoa julga que é óbvia uma coisa diferente. Assim, Bolzano – que faleceu vinte e quatro anos antes do nascimento de Russell – não compactuava com a busca russelliana de um pensamento universalmente correto e inquestionável devido à sua obviedade intuitiva para qualquer ser humano.

O esforço de Bolzano mostrado no *Wissenschaftslehre* poderia ser resumido da seguinte forma: tentativa de demonstrar a objetividade da ciência; e que o papel do homem (ou do cientista, do sujeito cognoscente) é buscar compreender e transmitir esse conhecimento objetivo da melhor forma possível. Bolzano viveu numa época em que questões de comunicação e de ensino se tornavam cada vez mais importantes, e ele compreendeu que não era possível comunicar intuições. Esses objetivos do *Wissenschaftslehre* estão profundamente relacionados com seu esforço, na matemática, de proceder à aritmetização da análise e com os princípios criados no *Prova puramente analítica...*, pois “Eram principalmente problemas de ensino e comunicação que levaram à exposição algébrica da análise” (OTTE, 2001, p. 42).

Boa parte do *Wissenschaftslehre* busca abordar assuntos que Kant tratara na Crítica da Razão Pura: proposições analíticas e sintéticas, a Lógica, dentre vários outros. Por isso, não é possível falar de Bolzano sem abordar a obra de Kant.

Para Bolzano, conhecimento, ciência e teoria são realidades, e não apenas processos mentais ou julgamentos que nós, sujeitos cognoscentes, fazemos sobre as coisas. E por isso a semântica – ou em outras palavras – a teoria do conteúdo ou significado dos elementos do

conhecimento (conceitos, proposições, dentre outros) seria mais importante do que o questionamento sobre como os seres humanos pensam e chegam ao conhecimento. Voltaremos a isso em 3.2.

## **3.2 Bolzano e Kant**

Há três distinções fundamentais que vamos utilizar para delimitar a relação entre Bolzano e Kant, e que mostram os traços mais importantes das concepções e diferenças entre os dois filósofos.

A primeira delas, referente à forma de análise, é a distinção feita entre Semântica e Epistemologia. A segunda é sobre o papel atribuído à Lógica, e diz respeito à distinção entre Cãnõn e Órganon. A terceira distinção é a posição dos dois autores diante do que se chama de conceitualismo.

Antes de apresentá-las, exporemos brevemente alguns dos aspectos mais importantes da doutrina kantiana.

### **3.2.1 Breve Apresentação de Immanuel Kant e da Crítica da Razão Pura**

#### **3.2.1.1 Aspectos do Contexto Filosófico e Científico em que foi Redigida a Crítica da Razão Pura**

A atividade filosófica de Immanuel Kant divide-se em duas fases: uma primeira (pré-crítica), em que estudava sobretudo física e metafísica, essa última dentro dos cânones racionalistas (ver racionalismo em ABBAGNANO, 2000, p. 821-822) de Leibniz-Wolff; e a Crítica, inaugurada a partir da redação da dissertação latina, *De mundi sensibilis atque*

*intelligibilis forma et principiis* (1770); durante a redação da mesma, Kant afirma (carta a Marcus Herz de 7 de junho de 1771) trabalhar “... num estudo sobre os limites da sensibilidade e da razão” (MORUJÃO, 2001, p. VI<sup>42</sup>). Ele anuncia nessa carta que o estudo compreenderá “uma crítica, uma disciplina, um cânone e uma arquitecónica da razão pura.” (MORUJÃO, 2001, p. VI).

O criticismo kantiano é a confluência de duas direções fundamentais do pensamento filosófico: o racionalismo dogmático (Descartes – Spinoza – Leibniz – Wolff) e o empirismo cético (Bacon – Locke – Hume). Para o racionalismo, o conhecimento seria produto de uma simples faculdade: a razão. Para o empirismo, o conhecimento derivaria de uma outra faculdade: a sensibilidade. Kant, que se educou sob a influência do racionalismo de Wolff, declara que o ceticismo de Hume o fez despertar do seu sono dogmático e deu às suas investigações no caminho da filosofia especulativa uma orientação totalmente diversa, impelindo-o a indagar sobre as condições e os limites do conhecimento humano, bem como suas possibilidades. (LEITE, 2007, p. 36-37).

Em 1781, seria editada a *Crítica da Razão Pura*, que retomava as principais características ‘críticas’ da dissertação latina. É o modelo de ciência da natureza que se encontra na base da filosofia de Kant, e todo o pensamento kantiano tem presente essa ciência exata, emergente na Idade Moderna e que estava se expandindo a todos os domínios do real. Foi dito que Kant completou a revolução científica de Newton (HAHN, 1988). A matemática e a Lógica, segundo Kant, já entre os gregos tinham iniciado a “via segura” (*Crítica da Razão Pura*<sup>43</sup>, B/VII) da ciência e no século XVII a física começara a trilhar a mesma via, alcançando a perfeição na *Philosophia Naturalis Principias Mathematicas*<sup>44</sup> (1687) de Newton (1642-1727). Para ele, a filosofia também precisava evitar a multiplicidade de opiniões divergentes, para assim se elevar ao estatuto científico que lhe conferisse um rigor inquestionável. Para isso, era necessário eliminar da filosofia qualquer pretensão infundada.

Desde Descartes, passando por Leibniz e por Wolff (1679-1754), que a filosofia já pretendia se transformar numa ciência, com métodos semelhantes aos da matemática e com análise baseada nos princípios de identidade e da contradição. É esse método que será alvo do ceticismo de Hume, que afasta a noção de substância e de causa em termos de necessidade analítica e de razão suficiente, substituindo-as respectivamente pela noção de sujeito

---

<sup>42</sup> Aqui, trata-se do Prefácio da Tradução Portuguesa à *Crítica da Razão Pura*, escrito por Alexandre F. Morujão; nos referiremos sempre desta forma.

<sup>43</sup> De agora em diante, CRP. Utilizaremos a paginação padrão.

<sup>44</sup> Os princípios matemáticos da filosofia da natureza

‘psicológico’ e pela noção de ‘hábito’, localizando o fundamento da causalidade – e portanto da noção de explicação – no sujeito psicológico, como algo puramente subjetivo (MORUJÃO, 2001, p. IX).

Kant afirma que a filosofia passa por três fases: a dogmática, de que é modelo o sistema wolffiano, em que a uma filosofia dogmática opõem-se outras filosofias também dogmáticas e daí a luta entre sistemas, degenerando na anarquia correspondente à segunda fase; a fase céptica, representada sobretudo por Hume (1711-1777); e a fase crítica, inaugurada pelo próprio Kant. Partindo do pressuposto de que ninguém pode se desinteressar pela metafísica por essa se encontrar radicada na natureza humana, Kant procura princípios adequados ao pensamento metafísico. Por isso classifica sua filosofia como crítica, cuja tarefa fundamental seria criticar a própria razão: averiguar, previamente à constituição de um sistema metafísico (conhecimento pela razão pura das coisas em si), quais as exigências dessa que são justificadas e o que pode conhecer o entendimento e a razão independente de toda experiência, e eliminar as pretensões sem fundamento, encontrando assim os limites de todo o conhecimento puro, *a priori*, em outras palavras, independente de qualquer experiência. Desse modo se obteria, segundo suas expectativas, a garantia da necessidade e universalidade desse saber, o consenso dos que se ocupam de filosofia e o grau de ciência (MORUJÃO, 2001, p. X-XI).

Kant, tentando aproveitar as duas fontes – o racionalismo e o empirismo – afirma que a “faculdade de pensar o objeto da intuição”

...é o entendimento... Pensamentos sem conteúdo são vazios, intuições sem conceitos são cegas. Portanto, tanto é necessário tornar os conceitos sensíveis (isto é, acrescentar-lhes o objeto na intuição) quanto tornar as suas intuições compreensíveis (isto é, pô-las sob conceitos)... O conhecimento só pode surgir da sua reunião. (CRP, B/75 A/51)

Se a filosofia quer realizar a missão fundamentadora da ciência, em outras palavras, a de revelar o que torna possível esse saber, Kant avalia que cumpre desviar-se da idéia de verdade, tal como ela era formulada, em termos absolutos, pela onto-gnoseologia clássica, afirmando que “... é impossível apontar um critério suficiente e ao mesmo tempo geral de verdade.” (CRP, B/83 A/58).

A verdade como *adaequatio rei et intellectus*<sup>45</sup> põe em jogo dois sentidos de intellectus e, assim, duas interpretações de adaequatio: *adequação da coisa ao intelecto, significando que a coisa se há-de conformar à idéia do intelecto divino; a coisa foi criada por Deus conforme a uma idéia. Pelo contrário, falar da adequação do intelecto à coisa supõe o intelecto humano e, se é possível esta segunda adequação, é graças à ordenação da coisa e do intelecto humano segundo o plano divino da criação....*

Embora continue a manter-se a definição de verdade como a adequação entre a coisa e o intelecto, para Kant deixa de ter vigência a consideração do intelecto divino.

Copérnico mostrara que, em vez dos corpos celestes gravitarem em volta do observador, é o observador que se desloca em torno do Sol. Mas, talvez, o mais importante para a compreensão da natureza do conhecimento seja o fato de que, com a descoberta de que somos nós observadores que giramos em torno da Terra, tornou-se mais fácil explicar os movimentos dos corpos celestes; Kant pretende realizar algo de semelhante com a metafísica, afirmando que conseguiremos explicar melhor como se processa o conhecimento se partirmos da consideração de que esse conhecimento é fruto da relação da estrutura do sujeito com o objeto, em outras palavras, entre intuição e conceito. É o que Kant chama de revolução copernicana (CRP, B/XIII). Na introdução à *Crítica da Razão Pura* (B/XVII) afirma:

Se a intuição tiver que se guiar pela natureza dos objectos, não vejo como deles se poderia conhecer algo a priori; se, pelo contrário, o objecto (como objecto dos sentidos) se guiar pela natureza da nossa faculdade de intuição, posso perfeitamente representar essa possibilidade.

E citando Tales, Galileu (1564-1642) e Torricelli (1608-1647), Kant afirma que tais cientistas “compreenderam que a razão só discerne o que ela mesma produz segundo seu projeto, que ela tem de ir à frente com princípios de seus juízos segundo leis constantes e obrigar a natureza a responder às suas perguntas” (CRP, B/13).

Para além do saber a posteriori, extraído da experiência, haverá um saber de outra ordem, saber a priori, que precede a experiência e cujo objecto não nos pode ser dado pela

---

<sup>45</sup> Adequação entre a coisa e o intelecto

experiência. Um objecto desta ordem será o próprio sujeito, a estrutura do sujeito, e é esta estrutura que torna possível a experiência. (CRP, p. IX)

Para Kant, “todo conhecimento implica uma relação – melhor: uma correlação – entre um sujeito e um objeto” (LEITE, 2007, p. 39), e

todo fenômeno, tudo quanto existe, inclusive o conhecimento, integra-se por dois ingredientes: matéria e forma. Aquilo que depende do próprio objeto constitui a matéria do conhecimento. O que depende do sujeito constitui a forma do conhecimento. Assim... conhecer é dar forma a uma matéria dada (LEITE, 2007, p. 39-41).

Para Kant, nós nos encontraríamos, de um modo espontâneo, voltado para as coisas. A viragem copernicana nos obriga a nos orientar no sentido oposto e a voltarmos-nos para o sujeito, procurando nesse as faculdades que tornam possível o conhecimento. A filosofia, ao se transformar em filosofia transcendental, transmuda-se num conhecimento que “se preocupa menos dos objetos do que do modo de os conhecer, na medida em que este deve ser possível a priori” (CRP, B/25). Esse conhecimento especial não pode repousar na experiência, nem é redutível à análise. Será o que Kant designa por conhecimento sintético *a priori*.

Kant afirma que as proposições das ciências da natureza são sintéticas *a priori*, e se pergunta se, sendo a metafísica um saber *a priori*, haveria também na metafísica proposições sintéticas. Sendo o conhecimento metafísico independente da experiência, e se o conhecimento se deve orientar pelas coisas, qual o objeto (ou objetos) da metafísica? Mas, como para Kant,

pensar é o mesmo que julgar, o problema central, a tarefa geral da Crítica resumir-se á em averiguar como são possíveis os juízos sintéticos a priori. A síntese, em tais juízos, é obra da faculdade do entendimento e fundamenta-se na espontaneidade desta. O entendimento humano não é, pois, intuitivo e, ao lado dele, Kant coloca uma outra faculdade, esta sim, intuitiva, que permite o acesso imediato aos dados: a sensibilidade. (MORUJÃO, 2001, p. XII)

Cassirer (1910, p. 17-18), analisando o legado de Kant, afirma que a filosofia – tal como era feita pelos escolásticos – ao buscar a “essência” das “coisas em si” e estáticas, tinha



perdido a capacidade de explicar o mundo, em que a realidade não deixava de mostrar cada vez mais exemplos de particularidades, transformações e mudanças. E que Kant criticava na teoria escolástica que as generalizações fossem feitas deixando várias questões importantes sem justificativa alguma, que eram preenchidas com a metafísica, caracterizando uma explicação de algo que nossa razão não tem como alcançar.

### **3.2.1.2 Conhecimento Analítico e Conhecimento Sintético: o Sintético *a priori* e o Conhecimento Matemático**

Vamos agora analisar as duas descrições da distinção entre juízos analíticos e juízos sintéticos contidas na *Crítica da Razão Pura*, e ver de que forma ela se relaciona com a questão da existência e do princípio da não-contradição.

A primeira dela afirma que

em todos os juízos, nos quais se pensa a relação entre um sujeito e um predicado (apenas considero os juízos afirmativos, porque é fácil depois a aplicação aos negativos), esta relação é possível de dois modos. Ou o predicado B pertence ao sujeito A como algo que está contido (implicitamente) nesse conceito A, ou B está totalmente fora do conceito A, embora em ligação com ele. No primeiro caso chamo analítico ao juízo, no segundo, sintético (CRP, A/67 B/10)

Sobre a importância que Kant dá a cada um deles, ele afirma:

poderiam igualmente denominar-se juízos explicativos; os segundos, juízos extensivos; porque naqueles o predicado nada acrescenta ao conceito do sujeito e apenas pela análise o decompõe nos conceitos parciais, que já nele estavam pensados (embora confusamente); ao passo que os outros juízos (em outras palavras, os juízos sintéticos, nota minha), pelo contrário, acrescentam ao conceito de sujeito um predicado que nele não estava pensado e dele não podia ser extraído por qualquer decomposição. Quando digo, por exemplo, que todos os corpos são extensos, enuncio um juízo analítico, pois não preciso de ultrapassar o conceito que ligo à palavra corpo para encontrar a extensão que lhe está unida; basta-me decompor o conceito, isto é, tomar consciência do diverso que sempre penso nele, para encontrar este predicado; é pois um juízo analítico. Em contrapartida, quando digo que todos os corpos são pesados, aqui o predicado é algo completamente diferente do que penso no

simples conceito de um corpo em geral. A adunção de tal predicado produz, pois, um juízo sintético (CRP, A/7 B/11).

A segunda definição diz:

Se o juízo é analítico... a sua verdade deverá sempre poder ser suficientemente reconhecida pelo princípio de contradição... Temos portanto que admitir que o princípio de contradição é o princípio universal e plenamente suficiente de todo o conhecimento analítico” (CRP, A/151 B/190-191).

Kant identifica proposições analíticas freqüentemente com o princípio da não-contradição. Mas esses juízos seriam para Kant “simplesmente explicativos”, tais que “nada acrescentem ao sujeito” (Prolegômenos, p. 15).

O entendimento, para Kant, é uma faculdade cognitiva não-sensível, em outras palavras, uma faculdade de conhecer por meio de conceitos. Para ele, pensar é o mesmo que julgar, em outras palavras: estabelecer relações entre representações, reduzi-las à unidade. Pois “Pensar é estabelecer, na multiplicidade dada pela intuição, certas relações que façam dessa multiplicidade uma unidade” (GEORGE e RUSNOCK, 2004, p. 68).

A distinção kantiana se baseia numa distinção entre os componentes (*Bestandtheile*) que constituem a idéia (*Vorstellung*) de um objeto (em outras palavras, as idéias que o sujeito tem do objeto); e as propriedades desse objeto (em outras palavras, o objeto em si) (DE JONG, 2001, p. 334). Ao fazer esta distinção, Kant afirmava a diferença entre teoria e experiência. A categoria ‘*sintético a priori*’ diria respeito a propriedades deduzidas com necessidade do conceito do objeto em si (e que, portanto, não tem como fonte a experiência), mas que não pensamos neles como componentes do conceito (portanto não seria analítica).

Bolzano vê essa distinção como excepcionalmente exagerada, e discorda da afirmação de Kant de que todo componente de uma idéia ou representação é uma propriedade (necessária) de todo objeto que cai sobre ou se encaixa nesta idéia (DE JONG, 2001, p. 335). É isto o que faria com que Bolzano viesse a acusar as definições de analiticidade de Kant, e de outros filósofos de sua época (que davam definições semelhantes à de Kant, baseadas no modelo de conjunção do predicado no sujeito), de sofrer “de alguma forma de pouca precisão

lógica”, embora elogiasse Kant por ter sido o primeiro a reconhecer completamente a importância da distinção entre analítico e sintético (WL, §148, Nota 4).

Mas a distinção kantiana colocava uma série de problemas: como obter conhecimento seguro, se cada sujeito pensa diferente? Cada objeto deixará nos sujeitos alguma percepção comum, que seria a representação, por meio da qual nos relacionamos com o objeto? Como alcançar algum conhecimento objetivo, se a teoria é feita por homens, e, portanto, é possível conceitualizar um mesmo objeto de formas diferentes?

Por fim: qual concepção de matemática derivava da definição kantiana de analiticidade, e de que forma isso se relacionava com a polêmica categoria ‘sintética *a priori*’?

Pela definição kantiana de analiticidade, a matemática não poderia ser analítica, pois então teria todos seus princípios conhecidos segundo o princípio da não contradição. Por outro lado, como esses princípios são necessários, eles não podem ser *a posteriori*. Logo, de acordo com Kant, a matemática só poderia ser sintética *a priori*. Assim, a matemática não pode fornecer explicações no sentido aristotélico. Mas Kant vai muito além e afirma que todos os juízos matemáticos, ou exigem recorrer à intuição (“e somente mediante ela é possível a síntese” (Prolegômenos, p. 30)); ou são analíticos, mas “só são permitidos na matemática porque podem ser representados na intuição” (Prolegômenos, p. 31). Por exemplo,  $7+5=12$  seria para Kant uma afirmação sintética *a priori*, pois

o conceito de 12 não está de modo algum pensado no momento em que eu penso apenas aquela reunião de 5 e 7 e, ainda que desmembre por longo tempo meu conceito de uma tal possível soma, não encontrarei nele o doze. Deve-se ir além desses conceitos, tomando por ajuda a intuição que corresponde a um dos dois, por exemplo os cinco dedos, ou cinco pontos, e acrescentar uma após outra as unidades do 5, dado pela intuição, ao conceito de 7. Por esta proposição... ampliamos nosso conceito e acrescentamos ao primeiro conceito um novo, que não havia sido pensado naquele (Prolegômenos, p. 16).

Bolzano pretendeu com o *Wissenschaftslehre* construir uma filosofia da ciência que superasse e respondesse à formulada por Kant na *Crítica da Razão Pura*; no entanto, ao contrário desse último, Bolzano não quis conciliar o empirismo com sua doutrina. Bolzano também quis corrigir o que considerava defeitos da doutrina kantiana, e particularmente seu

conceito de Lógica. Acreditou também que a noção de *a prioridade* de Kant representava uma mistura do subjetivo-epistemológico com o ontológico-objetivo.

Acreditou que a analiticidade e explicação eram fundamentais para alcançar conhecimento correto na filosofia, nas ciências e na matemática pura (particularmente evitar as contradições da qual ela era alvo), e embora aceitasse que no período anterior a ele muitos avanços tivessem sido obtidos na matemática devido à ausência de preocupação constante com o rigor, avaliou que, para avançar, era necessário estabelecer princípios claros que não estivessem fundamentados em noções intuitivas, como espaço e tempo.

### Bolzano

parece ter sido o primeiro na história (moderna) a não considerar a matemática como uma mediação entre o sujeito e a realidade objetiva, como Kant fez, mas considerou a ciência e matemática como realidades *sui generis*, e como um objeto de estudo em seu próprio direito (CAVEILLES, apud OTTE 2007b, p. 8).

Dessa compreensão “surgiu o título de seu trabalho monumental (Doutrina da Ciência). A partir de então, questões de Semântica, e não epistemológicas, passaram a ser o assunto fundamental da filosofia e da lógica” (CAVEILLES, apud OTTE 2007b, p. 8).

### Bolzano afirmou que

não existem intuições puras no sentido que Kant as concebia; que julgamentos sintéticos não vêm de intuições, mas que elas provêm parcialmente dos conceitos, dos quais elas são compostas, parcialmente por derivação de certas outras verdades; afirmou ainda que os julgamentos analíticos somente apareçam se certos julgamentos sintéticos os precedem. (WL §315).

Proposições matemáticas são fundamentadas, de acordo com Bolzano, em verdades conceituais somente. E ele acredita que a esse respeito Kant errou radicalmente em sua filosofia da matemática. “De fato, Bolzano nesse caminho rejeita toda a teoria de sintético a priori de Kant” (DE JONG, 2001, p. 344).

O Teorema do Valor Intermediário foi um exemplo de como fundamentar verdades confirmadas pela intuição em verdades conceituais resulta em generalização e fundamentação

segura, que evita erros e contradições. O que tem relação direta com a noção de Semântica de Bolzano.

Bolzano (WL, §148, (1)) acreditou então que era necessário fazer sua própria distinção entre proposições analíticas e sintéticas:

se existir uma única idéia numa proposição que podemos variar arbitrariamente sem mudar sua validade ou falsidade, ou seja, se todas as proposições produzidas substituindo esta idéia por qualquer outra idéia que quisermos são, ora todas verdadeiras, ora todas falsas, pressupondo apenas que tenham denotação; então... me permito chamar tais proposições - pegando emprestado de Kant a expressão – *analíticas*. Todas as outras, nas quais não há uma única idéia que possa ser arbitrariamente variada sem afetar sua veracidade ou falsidade, chamarei *proposições sintéticas*.

Em seguida, Bolzano distingue entre dois tipos de proposições analíticas: as proposições logicamente analíticas ou analíticas no sentido estrito, como são “A é A, A que é B é A, A que é B é B, Todo objeto é ou B ou não B, etc.” (WL, §148, (2)), ou seja, aquelas em que “nada é necessário para julgar” sua natureza analítica “a não ser seu conhecimento lógico, porque os conceitos que fazem a parte invariante dessas proposições são todas lógicas”; e aquelas em que “conceitos não lógicos entram” e que, portanto, requerem “um tipo bem diferente de conhecimento” (WL, §148, (3)); como é o caso da proposição “um homem moralmente mau de forma alguma goza de eterna felicidade” (WL, §148, (1)), pois

existe uma certa idéia, ou seja, a idéia de um homem, para a qual podemos substituir a idéia que quisermos, por exemplo anjo, ser, etc., de tal forma que a primeira (somente se tem denotação) é sempre verdadeira e a segunda sempre falsa (WL, §148, (1)).

Bolzano justifica, (§148, Nota 4) a importância de sua definição. Ele afirma, sobre a distinção kantiana contida na *Crítica da Razão Pura* entre proposições sintéticas e analíticas, além das definições de diversos autores de sua época que davam definições epistemológicas (tais como Fries, Ulrich Jacob, E. Reinhold, dentre vários outros), que avaliavam a analiticidade de uma proposição em termos da relação do sujeito com o predicado, que

estas definições falham ao não colocar ênfase suficiente naquilo que torna esse tipo de julgamento realmente *importante*. Isto (o que torna tal tipo de julgamento importante, NdT), consiste no fato de que sua veracidade ou falsidade não depende de idéias particulares das quais elas são constituídas, mas permanece a mesma não importa quais mudanças são feitas em algumas delas, pressupondo somente que não destruímos o sentido (*Gegenstaendlichkeit*) da proposição. Somente por esta razão eu dei a definição acima. (WL, §148, Nota 4).

E que

não importa qual definição possa ser aceita, em caso algum, (...) poderia-se ser induzido a conceder que a distinção entre julgamentos analíticos e sintéticos é meramente subjetiva (WL, §148, Nota 4).

Segundo George e Rusnock, a divisão feita por Bolzano em § 133 entre proposições conceituais e empíricas, definindo a primeira como aquela que contém somente não-empíricas, e que se pretendemos prová-las precisamos fazê-lo utilizando outras verdades conceituais, são resultado de “uma reflexão de mais de 30 anos de esforço nas trincheiras dos fundamentos da matemática” (GEORGE e RUSNOCK, 1996, p. 463).

### **3.2.2 A Primeira Distinção Fundamental: Semântica e Epistemologia**

A palavra Epistemologia designa a filosofia das ciências, mas com um sentido mais preciso. Não é propriamente o estudo dos métodos científicos, que é o objeto da Metodologia e que faz parte da Lógica. Não é tampouco uma síntese ou uma antecipação conjectural das leis científicas (tais como o positivismo e o evolucionismo). É essencialmente o estudo crítico dos princípios, das hipóteses e dos resultados das diversas ciências, destinado a determinar a sua origem lógica – portanto, não psicológica –, o seu valor e a sua importância objetiva.

Deve-se, pois, distinguir a epistemologia da teoria do conhecimento, se bem que ela constitua a sua introdução e o seu auxiliar indispensável. Pode-se até dizer que a Semântica e

a Epistemologia são dois auxiliares complementares e indispensáveis de uma doutrina do conhecimento científico (LALANDE, 1999, p. 313).

Já a Semântica é a doutrina dos significados dos signos. Considera as relações dos signos com os objetos a que eles se referem; encontra justificção etimológica no verbo grego *δημαίνειν* introduzido por Aristóteles para indicar a função específica do signo lingüístico, em virtude da qual ele “significa”, “designa” algo. Nesse sentido, era a parte da Lingüística (e mais especialmente da Lógica) que estuda e analisa a função significativa dos signos, os nexos entre os signos lingüísticos (palavras, frases, ícones etc.) e suas significações. Embora seja essa a aceção mais difundida, nos dias atuais, em filosofia e Lógica, esse termo também tem outras aceções, e diferentemente da pragmática e da sintática (que, abstraindo até mesmo dos significados, estuda as relações entre os signos de determinado sistema lingüístico), a Semântica restringe seu campo de investigação à relação entre signo e referente e constitui junto com a sintática os dois grandes capítulos da lógica formal pura (ABBAGNANO, 2000, p. 869).

O problema central da *Crítica da Razão Pura*, que é o de saber como nós sujeitos alcançamos conhecimento (MORUJÃO, 2001, p. IX), não era para Bolzano algo importante, que criticava Kant dizendo que ele tinha confundido a matemática em si com a maneira como nós humanos obtemos conhecimento matemático.

A ênfase dada por Bolzano à Semântica tem relação com sua busca, não de aplicações ou da descoberta de como ocorre o conhecimento, mas de fundamentos objetivos. O que também tem relação com a noção de explicação: a ênfase de Bolzano está mais na explicação do que na descoberta.

Se por um lado os conceitos contidos na *Crítica da Razão Pura* não são aceitos integralmente nos dias atuais por muitos motivos (voltaremos a isso no final desse item), por outro Kant foi o primeiro a criar uma concepção muito aceita na filosofia atualmente, que afirma que o conhecimento humano não se desenvolve pela busca de conceitos existentes “em si”, mas que somos nós sujeitos que os construímos por meio de nossa relação com esse objeto, sua utilidade e aplicação. Assim, por exemplo, o conceito de Integral sofreu diversas modificações ao longo de sua história, por meio de tentativas de aperfeiçoá-lo de acordo com teorias cada vez mais gerais e com o uso que se fazia dele (ver OTTE, 2007a), e não por meio da crença de que tal conceito existia de forma estática, pronto para ser descoberto.

Bolzano acreditava que os objetos da Doutrina da Ciência eram os significados objetivos dos conceitos e proposições. Por isso, acreditava em proposições em si, representações em si, idéias em si, ou seja: na objetividade do conhecimento. Assim, a noção de Semântica era fundamental para ele. Bolzano, no entanto, não desprezava totalmente aspectos pragmáticos; afirmou (WL, § 148, Nota 3), por exemplo, que o sentido de um termo depende da situação e do uso que se faz dele.

Bolzano não se preocupou com questões referentes a aplicações, ou à forma como nós temos acesso ao conhecimento. Sua preocupação era clarificar, e para isso era necessário distinguir rigorosamente o objetivo do subjetivo e, portanto, a Lógica da Didática. À certificação por meio dos sentidos (que diz respeito à convicção por parte do sujeito cognoscente), Bolzano opôs o termo ‘justificação’,

que se refere à idéia leibniziana de que todo conceito pode ser decomposto em “átomos”. Proposições não demonstráveis ou básicas deveriam, de acordo com Bolzano, ser dentre aquelas cujos sujeitos e predicados são conceitos completamente simples no sentido de Leibniz (OTTE, 2006a, p. 40).

Como a concepção Semântica de Bolzano ocorre na análise de proposições? Bolzano concebe uma proposição como uma composição de idéias (Vorstellungen), que também em geral são compostas de idéias mais simples, e por fim existem idéias que não são formadas por nenhuma outra idéia, chamadas idéias simples. Aqui, Bolzano distingue diferentes tipos de idéias. Para começar, existem intuições (Anschauungen), que são idéias simples (einfach) que representam somente objetos simples (WL § 72). Além dessas, existem conceitos (Begriffe), que são idéias “que não são intuições e não contêm intuição alguma como parte delas” (WL § 73). Idéias que não são nem intuições puras, nem conceitos puros, são idéias mistas. Conceitos complexos puros são compostos de conceitos simples, e do último tipo deve haver, de acordo com Bolzano, somente um número finito. Para Bolzano, sendo o conjunto de conceitos fundamentais finito, o conjunto de verdades fundamentais também deve ser finito, pelo menos para as ciências *a priori*, o campo das “verdades conceituais puras” (reine Begriffswahrheiten) (WL §§ 221, 133, 78, conforme DE JONG, 2001, p. 331).

Como consequência, para Bolzano, tanto a ciência quanto a teoria são realidades, e por isso a comunicação, os argumentos e as provas são essenciais. É no contexto da necessidade



de comunicação do conhecimento, e, portanto, de ensino, que devemos compreender a insistência de Bolzano em obter demonstrações independentes da evidência e da convicção, enquanto na época anterior (em que a Epistemologia reinava) Descartes e Pascal – nesse aspecto, concordantes com Kant – afirmavam que nada óbvio deveria ser definido ou provado. Assim,

partes cada vez maiores da atividade matemática passaram a tratar de análise de provas. A Matemática se tornou mais e mais interessada em encontrar formas de provar mais simples, menores e claras, de resultados já conhecidos.

O interesse essencial desse trabalho é em lógica ou metodologia e estrutura e é devido à questão de se determinados resultados estão ao alcance de determinados métodos<sup>46</sup> (OTTE, 2007b, p. 6).

Ou seja: com a abordagem semântica, a ênfase da teoria do conhecimento passou a ser dada na compreensão dos fundamentos da própria matemática e da natureza do saber científico – bem como na comunicação desses saberes –, e não na forma como nós as compreendemos, ou com novas descobertas e aplicações.

Com essa ênfase na comunicação, a matemática e a ciência de Bolzano passam a ser assuntos da didática, enquanto Descartes, por exemplo, não se preocupou com questões de comunicação. Para se comunicar, é necessário generalizar e universalizar, e uma das principais características da matemática atual é exatamente sua capacidade de universalização e generalização. E a intuição geométrica não pode jogar aqui o papel fundamental, como já afirmamos desde a introdução, porque intuição diz respeito a objetos particulares. No entanto, ao que parece, Bolzano não compreendeu o importante papel da experiência para a comunicação.

---

<sup>46</sup> ever greater part of mathematical activity was to be devoted to proof analysis. Mathematics became more and more interested in finding simpler, shorter and clearer ways of proving results which are already known.

The essential interest of such work is in structure and is due to the question of whether certain results are in the reach of certain methods. And with respect to these methods clear understanding and obvious meaning is the concern. Writing down a formula leads to the question, what does it mean, what does it imply, which are its necessary prerequisites. Writing down a Taylor series or a Fourier series leads to investigations into the meaning of notions like continuity differentiability or integrability and to the endeavor of providing these concepts with more precise and more general meanings.

A Semântica de Bolzano, bem como a necessidade de comunicação, foram fundamentais para a realização da aritmetização da análise, o que resultou numa reformulação da análise na matemática e na teoria do conhecimento, bem como a retomada da análise como método de encontrar princípios seguros. E tudo isso resultou na abertura de um novo terreno para a matemática, da abstração, do rigor e da relação entre idéias.

E, por mais estranho que isso pareça, essa revalorização do papel do conceito e da analiticidade, bem ao contrário do que Kant imaginava, viria trazer à tona um novo papel e um aumento na importância da noção de relação.

Segundo George e Rusnock (1996, p. 466),

a nova ênfase na semântica inverte a ordem do tradicional questionamento filosófico, e restaura respeitabilidade a algumas das observações kantianas. Ontologia, por exemplo, se torna subordinada a questões de significado<sup>47</sup>.

George e Rusnock citam então a afirmação de Carnap, para corroborar o ponto de vista de Kant: “Questões sobre a realidade do mundo físico como um todo... não têm sentido” (apud GEORGE e RUSNOCK, 1996, p. 466). Assim, “O a priori, com raízes que não estão nem na natureza humana nem na realidade platônica, na visão – hoje familiar de Carnap – reside na linguagem e é relativa à estrutura escolhida” (GEORGE e RUSNOCK, 1996, p. 467).

### **3.2.3 A segunda Distinção Fundamental: Lógica como Órganon e Cânon, ou Apenas como um Cânon?**

Outra distinção importante para compreender as divergências entre Bolzano e Kant é a que diz respeito ao papel da Lógica. Para isso precisamos retomar alguns aspectos da história da Lógica e a distinção entre Cânon e Órganon.

---

<sup>47</sup> The new emphasis on semantics inverts the order of traditional philosophical inquiry, and restores some Kantian observations to respectability. Ontology, for example, becomes subordinate to questions of meaning.

A diferenciação da noção de Lógica tem toda uma história. Essa história, por sua vez, tem relação com a noção de explicação científica, e começa com a definição de Lógica feita por Aristóteles, no *Segundos Analíticos*. Tal definição da Lógica como a disciplina ou ciência da demonstração e do saber demonstrativo foi feita sem que fosse dado à Lógica um nome próprio. O pensamento medieval acrescentou algumas doutrinas que ajudariam a compor a noção de Lógica, – doutrina da designação e denotação, doutrinas dos signos lógicos e das proposições moleculares, doutrina da implicação material, todas pertencentes ao que nos dias atuais chamamos de Semântica (ABBAGNANO, 2000, p. 625).

Na Idade Média iniciam algumas transformações na noção de Lógica, devidas sobretudo ao fato de que os gregos utilizavam o termo de forma vaga em termos de *status* como disciplina e em termos de *matéria subiecta*. Questões como: “Quais são propriamente os objetos de que a Lógica se ocupa? Entidades reais, pensamentos ou formas de discurso?” não foram respondidas; o que resultou na disputa medieval entre *realistas*, que afirmam a existência real dos universais e para os quais a Lógica é uma espécie de ontologia, e os *nominalistas*, que negam a subsistência ontológica dos universais. A partir de Abelardo (1079-1142), passa-se a definir na Lógica medieval duas correntes ou métodos: a via *antiqua*, fiel à tradição realista (ontológica) e a *via moderna*, que desenvolve uma lógica em que os termos do discurso são considerados como tais, independentemente de qualquer hipótese metafísica sobre a existência real ou não de seu objeto (a Lógica como retórica, que não pretende fornecer explicações em termos do conteúdo das ciências). Foi esse o ponto-de-vista que se firmou a partir do século XIII, depois do qual se difundiu a convicção de que a questão dos universais pertencia mais à metafísica e à gnosiologia (ver ABBAGNANO, 2000, p. 485) do que à Lógica, que permanece relativamente indiferente à questão (ABBAGNANO, 2000, p. 626).

Uma distinção que é fundamental, e que remete à disputa entre Kant e Bolzano, é a que se refere ao objeto da Lógica; para uns, a fatos mentais (e que, portanto, diz respeito à estrutura do sujeito e às suas sensações); para outros, a formas estruturais intencionalmente dirigidas para a constituição de conteúdos semânticos, e, como formas, independentes tanto de tais conteúdos quanto dos atos mentais em que tais conteúdos são apreendidos. Essa última posição é a posição de Bolzano, que foi retomada por E. Husserl (e de maneira menos clara por B. Russell e por L. Wittgenstein), e que “determinará o atual renascimento da concepção da Lógica como *formal pura*” (ABBAGNANO, 2000, p. 626).

Outra questão importante estava em aberto e era objeto de disputa: a Lógica é ciência e, como tal, faz afirmações referentes a objetos próprios, ou é uma arte, ou seja, uma técnica para obter discursos corretos e verdadeiros? Em outras palavras: a Lógica é um Cânon, ou é um Órganon? Para os lógicos medievais a Lógica é as duas coisas, um preceituário e um exercício ativo de discurso controlado por esses preceitos. A reação humanista (ver humanismo em ABBAGNANO, 2000, p. 518-519) contra a Escolástica (ver ABBAGNANO, 2000, p. 344-345), no campo da Lógica, leva à exaltação desse último aspecto e a uma áspera polêmica contra o formalismo tradicional. Nos séculos XVI e XVII surgem correntes cujo interesse pelas estruturas formais do discurso dedutivo diminui muito em favor de uma concepção pragmática e metodológica da ciência da Lógica, como foi o empreendimento de Francis Bacon (1561-1626), que realiza uma reforma radical da Lógica, concebida exclusivamente como metodologia científica geral. O desinteresse pelo formalismo lógico e, em seu lugar, o interesse pelos problemas gnosiológicos, psicológicos e metodológicos de uma Lógica *utens* acentuam-se durante a Idade Moderna. Típica nesse aspecto é a *Art de penser* dos mestres de Port Royal, mais conhecida como a Lógica de Port Royal. (ABBAGNANO, 2000, p. 626-627).

No início do século XVI, alguns filósofos repropõem o problema de fixar as estruturas discursivas que constituem o rigor euclidiano, dos quais este problema resulta. Já no século XVII, Descartes (1591-1650) e Pascal (1623-1662) (que escreveram trechos da Lógica de Port Royal) começam a extrapolar, em forma de regras metodológicas, alguns aspectos desse “rigor”, remetendo-se ao terreno de indagações das formas estruturais de uma linguagem perfeita (aqui, a linguagem matemática) e repondo alguns problemas fundamentais de Lógica formal, como o da definição (nominal e real) e o da validade da dedução com base em axiomas. Hobbes (1588-1679) introduz a idéia do raciocínio como “cálculo lógico”. Assim, aparecia aquele convencionalismo que seria o ponto de vista mais eficaz para isentar a Lógica de todos os pressupostos dogmáticos e metafísicos, bem como das contaminações psicologizantes (que continuarão a obstar seu desenvolvimento até quase nossos dias) e organizá-la como disciplina das estruturas formais do discurso “rigoroso”, segundo determinados modelos ideolinguísticos. Representando os termos com símbolos genéricos e as operações lógicas com símbolos vários, é possível tentar desenvolver uma doutrina matemática (formal) do discurso. Leibniz fez numerosas tentativas nesse sentido, todas, porém, infrutíferas; no entanto, a maior importância de Leibniz para o renascimento da Lógica após a crise desencadeada pelo Humanismo está na idéia de uma “arquitetônica da razão”

(não mais concebida psicologicamente, mas de tal maneira que renunciava o ponto de vista “transcendental” da filosofia posterior). A herança leibniziana foi recolhida por Kant, que, em *Logik*, distingue nitidamente a Lógica da Psicologia (com a qual os Iluministas tendiam a confundí-la), afirmando o caráter de doutrina formal pura: não do discurso, mas do pensamento, donde as possibilidades de recaída numa espécie de psicologismo transcendental, inerentes ao kantismo. No fim do século XIX, apresenta-se um quadro em que a Lógica é entendida como uma “teoria do pensamento” (cf. ABBAGNANO, 2000, p. 627), portanto, tratada com métodos naturalistas pelos positivistas (Sigwart, Wundt e outros), e com métodos metafísico-transcendentais pelos idealistas. Husserl (*Logische Untersuchungen*, I, 1900-1901) criticou profundamente este ponto de vista e, retomando as idéias de Bolzano contidas no *Wissenschaftslehre*, repropõe a idéia da Lógica formal pura como doutrina das proposições em si (em sua pura aponfaticidade lógica, portanto, independentes dos atos psicológicos em que são pensadas e da realidade sobre a qual versam) e da pura dedução de proposições com base em outras proposições (em si). Já nessa primeira obra, porém, Husserl retoma a idéia da razão como “razão formal” (ABBAGNANO, 2000, p. 627-628).

Cânion é um termo de origem grega que significa regra de escolhas para um campo qualquer de conhecimento ou de ação. Foi retomado pelos matemáticos do séc. XVIII e Leibniz o emprega para designar “as fórmulas gerais que dão o que se pede” (ABBAGNANO, 2000, p. 114).

Kant entende por Cânion da razão pura o conjunto dos princípios *a priori* do uso correto de certas faculdades de conhecimento em geral. A Lógica geral em sua parte analítica constitui um cânion para o *entendimento* e a razão em geral; mas só o é quanto à forma, pois abstrai de todo o conteúdo. Assim, a Analítica Transcendental era o cânion do entendimento puro, pois exclusivamente este último é capaz de obter conhecimentos sintéticos *a priori* verdadeiros. Mas onde não é possível o uso correto de uma capacidade de conhecimento, não há cânion (A/796 B/824); por isso, a dialética transcendental, isto é, o uso especulativo da razão, não tem um Cânion ou pelo menos não tem um Cânion teórico, mas pode ter apenas um para uso prático (A/800 B/828).

Kant ainda afirma que

O proveito maior e talvez único de toda a filosofia da razão pura é, por isso, certamente apenas negativo; é que não serve de organon para alargar os conhecimentos, mas de

disciplina para lhe determinar os limites e, em vez de descobrir a verdade, tem apenas o mérito silencioso de impedir os erros (A/795 B/823).

Órganon é o título dado pelos comentadores gregos ao conjunto das obras lógicas de Aristóteles: *Categorias*, *Sobre a Interpretação*, *Primeiros Analíticos*, *Segundos Analíticos*, *Tópicos* e *Refutações Sofísticas*. Aparece ao longo da história da filosofia ainda em *Novum Organum* (1620) de Francis Bacon, que contrapôs explicitamente sua Lógica à Lógica aristotélica, e *Neues O.* (1764) de J. H. Lambert, filósofo iluminista alemão com quem Kant manteve importante correspondência. O uso desse título, porém, não tem relação exata com a tarefa atribuída à lógica. (ABBAGNANO, 2000, p. 734). Mas em geral podemos dizer que o termo Órganon significa um conjunto de conhecimentos científicos, com conteúdos e objetos próprios.

Para Kant, “a Lógica geral considerada como Órganon, é sempre uma lógica da aparência...” (B/86 A/61). Afirmou que “essa lógica geral, que é apenas um cânone para julgar, tem sido usada como um organon para realmente produzir afirmações objectivas ou, pelo menos, dar essa ilusão, o que de facto constitui um abuso” (B/85 A/61). E que

A pretensão de se servir como instrumento (organon) para, ao menos pretensamente, alargar e ampliar os conhecimentos, não pode senão redundar em oco palavreado, onde se afirma com certa aparência de verdade ou se contesta a bel-prazer tudo o que se quer. (B/86 A/61-62).

É para reduzir as pretensões da Lógica geral “de descoberta e extensão, que a razão supõe alcançar unicamente graças aos princípios transcendentais, à simples acção de julgar o entendimento puro e acautela-lo de ilusões sofisticas”, que Kant cria sua dialética transcendental (B/88 A/64).

Kant considerou que a Lógica desde os gregos não teria dado nenhum passo adiante; considerou também que a Lógica fosse “... uma ciência que apenas expõe minuciosamente e demonstra rigorosamente as regras formais de todo pensamento” (CRP B/IX), e “em que a razão apenas se ocupa de si própria” (CRP B/X).

Ainda afirmou que a Lógica geral “abstrai totalmente do conteúdo do conhecimento do entendimento, e da diversidade dos seus objectos e refere-se apenas à simples forma do

pensamento” (B/78 A/54). E mesmo uma Lógica geral aplicada “não é um cânone do entendimento em geral, nem um organon de ciências particulares...” (B/77-78 A/53).

Assim, para Kant, o papel da Lógica seria muito reduzido quanto à sua capacidade de encontrar erros nas ciências, pois

Embora um conhecimento seja perfeitamente adequado à forma lógica, isto é, não se contradiga a si próprio, pode todavia estar em contradição com o objecto. Assim, o critério puramente lógica da verdade, ou seja, a concordância de um conhecimento com as leis gerais e formais do entendimento e da razão, é uma *conditio sine qua non*, por conseguinte a condição negativa de toda a verdade; mas a lógica não pode ir mais longe, e quanto ao erro que incida, não sobre a forma, mas sobre o conteúdo, não tem a lógica pedra de toque para o descobrir” (B/84 A59/60).

Assim, para Kant, a Lógica isoladamente não teria capacidade de explicar nada sobre o conteúdo de alguma ciência. Esta concepção seria partilhada por Frege, Russell e Carnap.

Para Kant, além disso,

Saber o que são as coisas obriga, pois, ao concurso da sensibilidade e do entendimento. Mas a coisa, tal como a conhecemos, não é simples imagem de algo real. A coisa, tal como se pode compreender graças às faculdades que o homem possui, é a coisa na medida em que aparece, i. é, dada pelas formas da sensibilidade – o espaço e o tempo – ou seja, é o que aparece graças às nossas faculdades do conhecimento. Do mesmo modo o mundo científico, que surge pela contribuição do sujeito, é fenomênico (MORUJÃO, 2001, p. XII).

Nos juízos analíticos, que são *a priori*, Kant afirma que somente se explicita o já implicitamente sabido, e, portanto, não se criam conhecimentos novos. Mas afirma que um saber autêntico não se pode procurar nesse tipo de juízos.

O *a priori* que se busca diz respeito à estrutura do sujeito, que é o que torna possível a experiência. Esta contribui para o conhecimento através dos sentidos, que nos fornecem impressões. Faltando estas impressões, a faculdade de conhecer não tem matéria. O conhecimento é assim constituído pela matéria e pela elaboração que esta sofre graças à estrutura do sujeito. (MORUJÃO, 2001, p. XII)

Assim, Kant deixa claro que, para ele, todo conhecimento novo viria de juízos sintéticos, em que algo novo se acrescenta ao sujeito da frase, ou seja, algo que não estava já contido nesse sujeito (mesmo que implicitamente).

Questões de prática e de nossa relação com o conhecimento eram as principais preocupações de Kant. Mais do que formular um conceito próprio de ciência, ou uma filosofia da ciência própria, Kant se ocupa de como nós temos acesso ao conhecimento. Ele afirmou que só é possível teorizar sem cair no que ele chama de “*lógica da aparência*” (B/86 A/61) se concebermos os fenômenos – e particularmente a noção de causa e efeito – como resultado da relação entre nós, sujeitos cognoscentes, e os objetos. Afirmava que só é possível pensar (e fazer julgamentos, o que era o mesmo para Kant) em termos de representação das coisas.

Já Bolzano não concordou com a concepção de Lógica de Kant (WL §12 e §13) e afirmou que a lógica era um Cânon e também um Órganon, e que trataria não apenas da forma, mas também do conteúdo do pensamento (WL §12).

Dizer que a Lógica não poderia ser um Órganon equivalia, para Bolzano, a dizer que os objetos dos quais a Lógica ocupa, bem como os resultados obtidos por ela, não diriam respeito ao conteúdo das Ciências (e que, portanto, não poderia fornecer explicações), o que Bolzano não aceitava de forma alguma (WL, §12, 2)). Além disso, contrariava sua própria noção de Lógica como Doutrina da Ciência.

### **3.2.4 A Terceira Distinção Fundamental: o Conceitualismo**

#### **3.2.4.1 Definição de Conceitualismo e a Ordenação de Verdades Científicas**

Por fim, Bolzano se distingue de Kant pelo que Coffa (1982) chama de conceitualismo. Uma das principais características do conceitualismo consiste na afirmação de que conceitos, e não intuições, fundamentam as verdades científicas; ou seja, pela afirmação de que conhecer significa saber como foi ou poderia ser representado algo por meio



de conceitos e pela linguagem<sup>48</sup>. Já vimos que Kant afirmou que nosso conhecimento viria das duas fontes fundamentais: intuição e conceito. O conceitualismo elimina uma das fontes kantianas. Para o conceitualismo, e particularmente para Bolzano, a intuição seria uma espécie de fonte obscura, e o conhecimento verdadeiro deveria ser buscado em conceitos.

Outra característica importante do conceitualismo é a relação entre certeza e ordem. Vimos que Kant queria saber sobre certeza no sentido de convicção subjetiva e aplicação, sem se preocupar sobre a natureza das coisas em si. Para Bolzano, interessava uma ordem objetiva do conhecimento, lhe interessava a capacidade de comunicação. O que tem relação com a diferenciação entre conhecimento e conhecimento verdadeiro.

A convicção de que todas as verdades estão ordenadas de uma forma (objetiva) dada e que precisamente esta ordem deve ser descoberta [sought out] e estabelecida explicitamente pela ciência (em sistemas de conhecimento científico) forma um motivo básico na teoria da ciência de Bolzano (DE JONG, 2001, p. 330).

E a relação de *Abfolge* (à qual voltaremos no Capítulo 4) seria aquela que designaria

a toda verdade seu lugar próprio com relação a outras verdades dentro com a ciência em questão. Toda proposição deveria ter uma única hierarquia ou “prova-de-árvore” *Abfolge* voltando aos primeiros fundamentos ou proposições fundamentais (DE JONG, 2001, p. 331).

### 3.2.4.2 Conceitualismo, Verdade e Conhecimento

Para Kant, conhecimento era o mesmo que conhecimento verdadeiro. Então, por exemplo, afirmar “Esta casa é branca” seria o mesmo que afirmar “É verdade que esta casa é branca”, pois para ele só podemos afirmar a verdade de alguma proposição através do nosso (do sujeito) acesso à verdade.

---

<sup>48</sup> No entanto, Bolzano também se distingue de outros conceitualistas, como Hegel, por sua diferença de noção de conceito. Enquanto Hegel acreditava no conhecimento como um processo, e em leis do desenvolvimento, Bolzano acreditava em conceitos claros e definitivos, e em uma estrutura definitiva das verdades em si.

Desta identificação de conhecimento com conhecimento verdadeiro, Kant deduziu sua definição de analiticidade contida na *Crítica da Razão Pura* de que uma proposição é analítica quando for possível transformá-la por meios lógicos numa tautologia.

Mas, como Kant justificava esta identificação diante de questões de natureza relativas à existência?

Se assumimos um conceito unificado de existência sem diferenciar entre conceito e objeto (ou seja, sem diferenciar entre o que é universal e o que é particular), somos levados à impossibilidade de utilizar o princípio da não contradição (pois de algo que tiver mais de um atributo não se pode dizer que não tenha uma propriedade que possa ao mesmo tempo ser atribuída e negada a ela) (NEEMAN, 1971, p. 1-2). Mas distinguir o particular do universal coloca questões sobre a natureza da existência de algo universal, questões que historicamente trouxeram restrições ao platonismo.

A forma com que Kant assume a noção de existência e ao mesmo tempo evita o risco de cair no platonismo, é afirmando que o universal é composto de formas do sujeito cognoscente, que “têm existência na medida em que o sujeito humano é algo que realmente existe, mas não são reais para o sujeito cognoscente em si, já que eles não afetam seus sentidos e já que Kant define realidade em termos de percepção (B/272)” (NEEMAN, 1971, p. 2). Nesse contexto, a idéia de um conceito de objeto com vários atributos não é auto-contraditória, e até mesmo o princípio da contradição vale, mas com a condição de que a extensão a que o objeto cujas afirmações contraditórias se refiram seja um objeto de nossa experiência, já que, de acordo com B/521, nada pode ser predicado a respeito de algo que esteja fora de nossa experiência. Mas assim a validade do princípio da não contradição é limitada, pois não vale no domínio da razão pura, por não podermos empiricamente estabelecer quando uma afirmação é ou não verdadeira; a estas conclusões que não têm premissas empíricas, Kant chamou de dialéticas, vazias e sem significado (B 397). Quer dizer, que para Kant “o princípio do terceiro excluído se torna vazio no domínio da razão pura; isto é uma consequência de identificar verdade com cognição” (NEEMAN, 1971, p. 2).

O conceito de existência é encarado por Bolzano de uma forma diferente da que Kant o encarava. Bolzano tenta manter o princípio da não contradição em sua forma original. Mas, para isso, é levado a ter que diferenciar o conceito de existência ainda mais, distinguindo individual de atributo; conteúdo da cognição do ato da cognição; e verdade (ou conhecimento verdadeiro) de conhecimento.

Para Bolzano, uma proposição é verdadeira ou falsa, mesmo se não tivermos como afirmar isso, ou seja, independentemente de sua verificabilidade, não havendo “inferências dialéticas no sentido de Kant” (NEEMAN, 1971, p. 3).

Bolzano faz o seguinte raciocínio para justificar esta distinção: se eu penso, eu penso sobre alguma coisa; se estou consciente, estou consciente de alguma coisa (o que, mais tarde, Brentano (1838-1917) chamaria de intencionalidade, que foi a base da fenomenologia, de Husserl, de Peirce, de Heidegger (1889-1976), dentre outros).

O conteúdo da cognição seria para Bolzano o objeto sobre o qual pensamos, adquiriria existência quando alguém pensasse ou pronunciasse esse conteúdo. Já o ato de cognição seria o processo mental por meio do qual nós pensamos no objeto; para Bolzano, tal ato existiria, mas nós não teríamos acesso a ele, e, portanto, não podemos basear nossas decisões nele (WL, § 19). Analogamente com a intuição: Bolzano não nega a existência da intuição, mas afirma que nós só temos acesso ao seu conteúdo, e por isso é esse conteúdo (que são as proposições, conceitos, e representações em si) tudo o que nos interessa se queremos obter conhecimento seguro. Bolzano acredita que a matéria prima sobre a qual nossos processos mentais estão processando é o conteúdo das intuições, e esse é o motivo pelo qual não lhe importam os processos mentais. Bolzano quer objetividade, nomes objetivos para os conceitos.

Bolzano concorda com Kant sobre o fato de que os conteúdos objetivos abstraídos do ato mental não têm realidade isoladamente, mas acredita que as proposições objetivas podem adquirir existência como afirmações no sujeito que as pensa ou expressa (WL, § 19). Afirmações são, portanto, sempre proposições subjetivas (por serem feitas por sujeitos), embora elas sempre se refiram a uma proposição objetiva (ou seja, sempre tenham um objeto) (NEEMAN, 1970, p. 3).

Da distinção entre conteúdo e ato da cognição, Bolzano deriva a distinção entre conhecimento (que pode ser confuso e até mesmo falso, pelo fato de se basear em nossa intuição) e conhecimento verdadeiro (e esse é um dos motivos pelos quais ele não aceitava a definição de analiticidade de Kant). Voltando às afirmações que dissemos que Kant não diferenciava, “Esta casa é branca” e “É verdade que esta casa é branca”: para Bolzano se trata de duas afirmações diferentes, pois a primeira afirmação é um julgamento do sujeito, enquanto a segunda é uma afirmação objetiva referente a um objeto real, cuja verdade não depende de nenhum sujeito.

Bolzano é explícito e vai até as últimas conseqüências na distinção entre conhecimento e conhecimento verdadeiro, como na citação abaixo:

Por exemplo, o conjunto das flores que uma árvore tinha, num certo lugar, na primavera passada, é um número determinado, mesmo que ninguém a conheça. Uma proposição que indique esse número, para mim, é uma verdade objetiva, mesmo que ninguém a conheça. (WL, § 25)

Bolzano dava o seguinte exemplo: “...dizemos que toda equação com um grau ímpar tem necessariamente uma raiz real, embora nem equações nem suas raízes sejam algo existente” (WL, §182).

Outro aspecto da distinção entre verdade e certeza é o seguinte: nós podemos ter ou não certeza sobre as afirmações ou julgamentos que fazemos, enquanto que a propriedade de ser verdadeira ou falsa é atribuível somente a proposições; Bolzano justifica esta distinção dizendo que pode haver diferentes graus de certeza, enquanto não existe tal gradação para verdades (WL, § 26).

Esse é um dos motivos pelos quais Bolzano acreditava (WL §12, como citamos em 3.1) que a Lógica não pode ser simplesmente uma ciência formal. Aliás, para Bolzano, não existiria nenhuma ciência apenas formal, porque toda ciência tem que ter um objeto, pois todo pensamento tem que ter um objeto; em termos da Lógica, esse objeto pode ser bem abstrato, mas ainda assim é um conceito.

A noção de existência de Bolzano, que faz com que ele acredite em representações em si, proposições em si, verdades em si, tem relação com as necessidades de comunicação, à qual já nos referimos. Pois, se queremos conversar sobre algo, não podemos nos preocupar com o pensamento, com o processo mental ao qual não temos acesso.

### 3.2.4.3 Conceitualismo, Relação e Comunicação

Um exemplo da importância da noção de relação como formulada por Kant (ou seja, como unificadora de uma multiplicidade de relações dadas na intuição) é fornecida por Cassirer, ao afirmar que, se a teoria escolástica generalizava as letras “ab, ac e ad” por meio da letra “a”, ou seja, negando as particularidades dos objetos; diferentemente, a noção de função é o que permite representar tal conjunto de letras por meio de “ax”, em que x representa a, b e c, sem que tenha que ser as três letras ao mesmo tempo. Esta capacidade de generalizar afirmando as diferenças, e não as negando e preenchendo as lacunas por meio de uma metafísica obscura, é o que permite ao pensamento matemático sua riqueza. (CASSIRER, 1910, p. 24).

Tal forma de pensamento tem conseqüências que se estendem para muito além da matemática, em que a possibilidade de se referir a diferentes tipos de objetos por meio de leis gerais já possibilitou uma enorme generalização e abstração.

A linguagem da Álgebra merece a atenção, não somente dos matemáticos, mas de todos os filósofos que venham a estudar a influência que os signos têm sobre a formação das idéias, e a aquisição de conhecimento. ... (Comunicação) que diz respeito principalmente a outras línguas, com respeito a ela (a Álgebra, nota minha) é secundária e acidental. (...) Novamente na linguagem da Álgebra em si, a parte que é mais interessante... é a aplicação de expressões imaginárias à investigação de teoremas, onde a verdade é às vezes descoberta somente com a ajuda de signos, sem nenhuma ajuda das idéias que elas representam (The Edinburgh Review, April 1808, 306f, apud OTTE 2007b, p. 8).

Afinal, o pensamento matemático abre novos campos para explicar a relação entre nossa experiência interna e os objetos de nossa cognição, exatamente por essa capacidade de generalizar e abstrair sem negar as particularidades dos objetos aos quais nos referimos teoricamente.

Ainda sobre o legado de Kant para a filosofia da ciência e da matemática, George e Rusnock (1996, p. 462), comentando a importante obra de Coffa “The Semantic Tradition from Kant to Carnap” afirmam que “Inspeções mostraram que vários dos julgamentos sobre a matemática e a ciência natural não eram analíticos no sentido estreito de Kant, e, portanto,

eram reconhecidos como necessários, *a priori* etc. A intuição pura trouxe a concessão de sua verdade”, e que

Por mais plausibilidade que as afirmações kantianas referentes à intuição possam ter tido algum dia... (esta plausibilidade, nota minha) logo foi perdida. Intuição se mostrou desnecessária, e até mesmo um obstáculo, para garantir os resultados do Cálculo (Cap. 2), era bastante dispensável na aritmética (Cap. 4), e e qualquer dúvida que permanecesse referente à geometria foram resolvidas por Helmholtz e Hilbert (Caps. 3 e 7) (GEORGE e RUSNOCK, 1996, p. 464)<sup>49</sup>.

E por fim, conclui com as seguintes afirmações:

O projeto logicista ofereceu no início o que pareceu ser um lugar promissor para o fundacionalismo epistêmico reagrupar (Cap. 7)... os estudos fundacionalistas do século XIX mostraram que a maior parte da matemática clássica poderia ser adequadamente representada usando somente alguns poucos conceitos básicos e inferências. Se tais reduções mostraram que a intuição não era necessária durante todo o percurso da construção da matemática, como Kant suporá, talvez algo parecido com a intuição poderia ainda servir como a fundação para uma semente capaz de gerar matemática. O desenvolvimento de geometrias não-euclidianas também poderiam ser interpretadas como provedoras de um lugar proeminente para a intuição. Kant não tinha dito que geometrias alternativas eram logicamente possível, e portanto antecipado tudo isso? E suas observações não mostraram que a intuição foi aquilo que selecionou a geometria euclidiana dentre todas as estruturas logicamente possíveis de relações espaciais?<sup>50</sup> (GEORGE e RUSNOCK, 1996, p. 464).

Se referindo a Cassirer, George e Rusnock (1996, p. 465) afirmam que

---

<sup>49</sup> Whatever plausibility Kant's claims concerning intuition may once have had... was soon lost. Intuition was shown to be unnecessary, and indeed a hindrance, to securing the results of the calculus (Ch. 2), it was quite dispensable in arithmetic (Ch. 4), and any doubts which remained concerning geometry were quashed in a conspicuous way by Helmholtz and Hilbert (Ch. 3, 7).

<sup>50</sup> The logicist project offered at first what seemed to be a promising place for epistemic foundationalism to regroup (Ch. 7)... The foundational studies of the nineteenth century had shown that most of classical mathematics could be adequately represented using only a few basic concepts and inferences. If such reductions had shown that intuition was not necessary throughout the fabric of mathematics, as Kant had supposed, perhaps something quite like intuition might still serve as the foundation for a kernel capable of generating mathematics. The development of non-Euclidean geometries would also be interpreted as providing a prominent place for intuition. Had not Kant said that alternative geometries were logically possible, and thus anticipated all of this? And did not his remarks show that intuition was that which selected Euclidean geometry from among all the logically possible structures of spatial relations?

a extensão de recentes derrotas foi aparente mesmo para alguns dos mais fortes defensores de Kant. Ao invés de arriscar uma outra humilhação, eles recuaram a um nível de generalidade suficientemente vago para valer por algum tempo...<sup>51</sup>

Ainda segundo George e Rusnock (1996, p. 465), Schlik, por sua vez, percebeu que

a filosofia de Kant não tinha como função ser uma tentativa de produzir platitudes sobre a unidade da ciência, mas sim prover uma fundamentação filosófica dirigida aos detalhes. Sem esta ambição, o projeto seria sem valor, e a isso seus defensores o reduziram<sup>52</sup>

### 3.3 Bolzano e Aristóteles: O Quê Versus o Por Quê

Aristóteles viveu aproximadamente no período 384 a 322 a. C. Foi responsável pela construção da primeira teoria sobre ciência organizada na filosofia ocidental nos escritos que compõem sua obra *Órganon*. É sobretudo no livro contido no *Órganon* chamado *Segundos Analíticos* que Aristóteles formula de forma mais explícita sua concepção de ciência. Concepção esta que está profundamente relacionada com sua compreensão da noção de explicação. Para ele, ter uma explicação de algo era condição *sine qua non* para podermos afirmar que temos uma demonstração científica. Sua noção de ciência prevaleceu até o século XVIII, mas sua influência nos conceitos científicos chega até os dias atuais.

DE JONG chamará de ciência aristotélica ou modelo aristotélico de ciência, um modelo que tenha

a convicção de que todas as verdades estão ordenadas de uma forma (objetiva) dada e que precisamente esta ordem deve ser descoberta e estabelecida explicitamente pela ciência (em

---

<sup>51</sup> The extent of recent losses was apparent even to some of Kant's strongest defenders. Rather than risking another humiliation, they retreated to a level of generality sufficiently vague to hold for some time.

<sup>52</sup> Kant's philosophy had not been put forth as an attempt to produce platitudes on the unity of science but to provide a philosophical foundation right down to the details. Without such ambitions, the project would be worthless, and to this his defenders had reduced it.

sistemas de conhecimento científico)... A axiomatização da geometria de Euclides é o tradicional exemplo por excelência de uma tal ciência<sup>53</sup> (DE JONG, 2004, p. 330).

Ele ainda afirma que certamente, uma ciência aristotélica como *cognitio ex principiis* é freqüentemente descrita na tradição como uma ordenação sistemática não somente de verdades mas também de conceitos de acordo com o seguinte paralelismo de direção: das causas (objetivas) ou fundamentos para as conseqüências, das (mais) simples para as mais complexas, e ao mesmo tempo da (mais) universal para a menos universal e mesmo individual. DE JONG introduz certas características de um modelo aristotélico de ciência do nível do *ordo essendi*:

Uma ciência aristotélica determina um sistema S de proposições e conceitos que satisfazem as seguintes condições:

1. Cada proposição e cada conceito de S se refere a um conjunto específico de objetos ou domínio da realidade. (postulado da realidade)
  - a – Existe em S um número (finito) de assim chamados conceitos fundamentais.
  - 2b – Qualquer outro conceito que ocorra em S é composto de (ou definível em termos de) esses conceitos fundamentais. (postulado da composição)
    - a – Existe em S um número (finito) de proposições que são chamadas proposições fundamentais.
  3. b – Todas as outras proposições de S se seguem ou estão fundamentadas em (ou, como pode ser, são demonstráveis com base em) essas proposições fundamentais. (postulado da prova; é central neste postulado a noção de prova explicativa ou demonstração científica)
  - 4 – Toda proposição de S deve ser necessária<sup>54</sup> (DE JONG, 2001, p. 330-331).

Assim, esse modelo de ciência consistia de um sistema de conceitos fundamentais em que qualquer outro conceito seria composto ou definível por eles, e também por um sistema de proposições fundamentais em que todas as outras proposições estariam fundamentadas e seriam provadas com base nelas. Esses conceitos ou proposições deveriam ser

---

<sup>53</sup> The conviction that all truths are ordered in a given (objective) way and that precisely this order must be sought out and stated explicitly by science (in systems of scientific knowledge) (...) Euclid's axiomatization of geometry is the traditional example par excellence of such a science.

<sup>54</sup> An Aristotelian science determines a system S of propositions and concepts which satisfies the following conditions:

- 1 – Each proposition and each concept of S refers to a specific set of objects or domain of reality.
- 2 a – There are in S a (finite) number of so-called fundamental concepts.
- 2 b – Any other concept occurring in S is composed of (or is definable in terms of) these fundamental concepts.
- 3 a – There are in S a (finite) number of propositions which are called fundamental propositions.
- 3 b – All other propositions of S follow from or are grounded in (or, as the case may be, are provable from) these fundamental propositions.
- 4 – Any proposition of S must be necessary.



indubitavelmente claros e certos (nas palavras de Aristóteles: “verdadeiros, primeiros, imediatos, mais cognoscíveis que a conclusão, anteriores a ela e que sejam causas dela” (Segundos Analíticos, 71b 19), de forma que nenhuma outra justificação pudesse ser deles exigida. “Nesse contexto, explicação significa redução a um conjunto de princípios e proposições epistemologicamente e ontologicamente privilegiados” (OTTE, 2007c, p. 12, tradução minha), e conhecimento verdadeiro se limita àquilo que pode ser explicado por meio desses princípios. Para Aristóteles, “a ciência lida primariamente com o universal e necessário, e não com o particular e contingente. Trata dos indivíduos não como particulares, mas caindo sob (ou como pertencentes a, NdT) universais” (MCKIRAHAN 1992, p. 4, tradução minha). A premissa ou causa de uma conclusão possui um grau mais alto de evidência do que esta última.

“Num modelo aristotélico de ciência, somente se pode falar em conhecimento científico quando os fundamentos (objetivos) são conhecidos. Explicar algo é fornecer as razões, ou os fundamentos reais, de por quê algo é como é” (DE JONG, 2001, p. 331).

Uma questão de importância fundamental para a noção de ciência e de matemática de Aristóteles é a questão do contínuo: para Aristóteles, a matemática era principalmente geometria; e na geometria (que então ainda não era aritmetizada), prevalecia a noção de qualidade sobre a quantidade; dito de outra forma: estudava-se a matemática abordando os objetos matemáticos de forma contínua, e não como o fazemos nos dias atuais, de forma discreta.

Ainda segundo DE JONG,

O modelo de ciência aristotélico é inquebravelmente conectado com uma forte forma de fundamentalismo. Conhecimento científico nesse modelo deve satisfazer, no mínimo, o que é conhecido na análise moderna padrão de conhecimento (proposicional) como a condição de verdade e a condição de justificação (...) Na perspectiva de um modelo de ciência aristotélico uma proposição é vista como adequadamente justificada se ela é demonstrada com base em proposições fundamentais... Certamente, conhecimento científico tem que ser *cognitio ex principiis*<sup>55</sup>. (DE JONG, 2001, p. 332).

---

<sup>55</sup> The Aristotelian model of science is unbreakably connected with a strong form of foundationalism. Scientific knowledge in this model must satisfy, as a minimum, what is known in the modern standard analysis of (propositional) knowledge as the truth condition and the justification condition (...) In the perspective of the Aristotelian model of science a proposition seems to be justified adequately only if it is demonstrated on the basis of fundamental propositions... Indeed, scientific knowledge has to be *cognitio ex principiis*.

Segundo sua noção de explicação, demonstrar algo correspondia a explicá-lo, mostrar causas e por quês, e não apenas relações lógicas entre premissas e conclusões.

Sobre a noção de prova explicativa, Aristóteles afirma que “É diferente conhecer o que e conhecer o por que” (Segundos Analíticos 78a 22), e que

conhecer cientificamente não por concomitância aquilo de que há demonstração é possuir demonstração... conhecemos cientificamente quando sabemos as causas, e, se são causas, é preciso que sejam anteriores e previamente conhecidas – não apenas por compreendê-las (...) mas também por saber *que são o caso*. (71b 25).

Mas, Bolzano realmente endossou um ideal aristotélico de ciência?

Bolzano (WL, Anotações de § 525) concorda com Aristóteles em sua distinção de que provas explicativas mostram o por quê, enquanto que provas não explicativas somente mostram o quê, bem como o fato de que o pesquisador deve sempre buscar o por quê – ou o que Bolzano chamava de ‘fundamentos objetivos’ – das verdades. Mas critica um certo “exagero” de Aristóteles em dizer que somente as provas explicativas produzem conhecimento genuíno ou verdadeiro.

Bolzano preserva a crença no ideal aristotélico da existência de conceitos e proposições básicas que deveriam ser utilizadas para demonstrar todas as demais. No entanto, embora concorde com ele nos critérios generalidade e simplicidade para se encontrar os princípios que seriam básicos (e portanto indemonstráveis), discorda radicalmente dele num quesito fundamental, que influenciará todos os outros: Bolzano não concorda que tais princípios básicos devem ser mais intuitivamente óbvios.

A propriedade de ser mais geral e mais simples (e portanto mais básica), para Bolzano, é relativa à estrutura das proposições e conceitos, e não à sua obviedade intuitiva. Bolzano concorda com o fato de que os princípios básicos devem ser “verdadeiros” e “causas” (Aristóteles, 71b 19), mas não com que sejam “imediatos”, “mais cognoscíveis que a conclusão”, como afirmava Aristóteles (71b 19). O mesmo ocorrendo com o conceito de causa: em Bolzano ele está ligado à idéia de que os fundamentos das verdades se encontram na estrutura das proposições e conceitos, e não naquilo que percebemos com nossos sentidos sobre estas verdades. Essa distinção é o que pareceu não ficar claro para os autores que

procuraram em Bolzano uma referência que confirmasse suas idéias de que prova explicativa seria aquela que partisse da intuição.

Ao contrário, ele rejeita explicitamente o critério de obviedade (prefácio do RB, p. 160), e toda a demonstração que ele faz do Teorema do Valor Intermediário se baseia na idéia de que coisas óbvias devem sim ser demonstradas, por meio de conceitos analíticos que não precisam ser óbvios, mas sim os mais simples e gerais (no capítulo 4 veremos como na concepção de Bolzano se articulam esses dois critérios).

Kant fez coincidir com a exigência que Aristóteles fazia de necessidade intuitiva dos primeiros conceitos com a demanda de que conhecimento científico deve ser *a priori*. A evolução da noção de sistema axiomático rumo à construção do método hipotético-dedutivo pode ser considerada como resultado de uma crítica e um abandono crescentes das exigências de homogeneidade ontológica e de evidência e necessidade. Para ele, a noção de *a prioridade* de Kant representa uma mistura do subjetivo-epistemológico com o ontológico-objetivo. (DE JONG, 2001, p. 331-332).

A exigência que Aristóteles fazia de que os primeiros princípios fossem evidentes intuitivamente estava diretamente ligada à idéia de que a coerência de um sistema aristotélico era garantida pela conexão dos conceitos e proposições a um domínio específico de objetos, ou seja, à evidência de que as demonstrações de um gênero ou tipo de objeto deveriam ser feitas utilizando conceitos ou objetos do mesmo gênero (ou seja, que as provas fossem puras). É a homogeneidade entre método e objeto. Mais ainda, ele considerava o pensamento teórico que opere com formas vazias de conteúdo ontológico como secundárias, atribuindo assim um caráter absoluto à relação de dedutibilidade entre premissas e conclusão, e não como se considera atualmente, relativa a um sistema teórico ou a um sistema de regras de dedução.

Bolzano também defendia esta homogeneidade entre o método e o objeto, mas de uma forma diferente da de Aristóteles: as únicas partes de sua obra em que ele se refere à *metabase* (o nome que Aristóteles dava à homogeneidade ontológica) é nas que ele a utiliza para justificar a primazia do número sobre o contínuo, da quantidade sobre a qualidade; quer dizer, no sentido de que, para garantir que algo específico seja provado por algo geral é necessário demonstrar as verdades da geometria (considerada como parte “meramente aplicada” (RB, p. 170) com base em verdades aritméticas, por serem as aritméticas mais gerais ou puras. Então, me parece que a importância que Bolzano deu à homogeneidade ontológica é completamente diferente daquela de Aristóteles; e que, ao enfatizar os critérios de simplicidade e

generalidade para os ‘primeiros princípios’, na verdade ele contribuiu para o fim da exigência de homogeneidade ontológica entre método e objeto.

Esta homogeneidade ontológica – assim como a exigência de necessidade intuitiva – é totalmente estranha à axiomática moderna (em que prevalece o método hipotético-dedutivo) e vinha sendo questionada desde Descartes. Como ilustra bem a famosa afirmação de Hilbert (1862-1943) “que contém o ponto-de-vista axiomático em seu cerne: deve ser possível substituir, em toda afirmação geométrica, as palavras ponto, reta, plano por mesa, cadeira, caneca” (REID, 1970, p. 264). É o que Hilbert chamava de dedução axiomática existencial, em que os axiomas não têm conteúdo ontológico determinado.

A característica mais inovadora desse sistema é que, nele, não há preocupação com a correspondência ou não de uma determinada relação matemática com alguma realidade material, ou aplicação dos princípios matemáticos a algo externo; ao contrário, a atenção se concentra na relação entre os conceitos; ou seja, na análise do conhecimento dedutivo que liga as hipóteses às conseqüências. A relação entre idéias e conceitos, entre as diferentes áreas da matemática e a matemática com as outras ciências, e a liberdade da matemática por não ter obrigações de corresponder a um domínio específico são as principais vantagens do método hipotético-dedutivo, e a razão de seu ‘triumfo histórico’.

Como mostramos, Bolzano contribuiu para o abandono da exigência aristotélica de necessidade intuitiva e de referência material (segundo De Jong (2001), Bolzano enfraquece a exigência de necessidade a uma exigência de verdade, ao definir já em §1 do *Wissenschaftslehre* a ciência como um sistema de verdades), e acredito que ao pretender fundamentar os primeiros princípios na estrutura dos conceitos e das proposições – ou seja, na linguagem – ele também contribuiu para o fim da idéia de que as demonstrações sobre verdades em um campo do conhecimento devem ser feitas com base somente em verdades desse campo.

Assim, concluímos que Bolzano não endossou um ideal aristotélico de ciência, e uma das razões principais é o problema do contínuo e o papel da intuição.

E, na medida em que o sistema hipotético-dedutivo mostrou-se mais próprio para as características assumidas pela ciência moderna, a importância de provas explicativas foi diminuindo.

Otte (2007b, p. 5) afirma que, para Aristóteles,

Uma explicação é sempre uma relação de tipos, e não uma mera informação particular, e como tal parece caminhar para regressão infinita, daí a importância do contínuo e da continuidade, em que a distinção entre particular e geral é somente relativa e perceptível...<sup>56</sup>

Para estas mudanças na noção de ciência contribuiu sobremaneira a idéia de discretizar o contínuo, ou seja, representá-lo por meio de números, de forma que algo que percebemos com nossos sentidos pudesse ser medido, quantizado, previsto. CARAÇA (2000) relaciona esta mudança com a necessidade das classes sociais surgidas junto com a expansão da navegação e do comércio de produzir, medir e quantificar.

### **3.4 Concluindo Provisoriamente sobre o Legado de Bolzano**

#### **3.4.1 A Aritmetização do Cálculo: Situação do Cálculo Anterior e nos Tempos de Bolzano**

Boyer (1949) afirma que no século XVIII questões referentes a métodos como fluxões, relações, limites de diferenciais ou de funções derivadas estavam em grande medida não resolvidas, devido a que os matemáticos de então tentavam respondê-los em termos de concepções de espaço e de tempo. Boyer chega a comparar os argumentos levantados na época àqueles utilizados por Zenon mais de 2000 anos antes. Os problemas se concentravam principalmente sobre questões relativas à infinidade e à continuidade: alguns matemáticos não aceitavam a introdução de tais conceitos; e aqueles que a aceitavam, não tinham condições de fornecer explicações logicamente consistentes dos mesmos. Muitos matemáticos consideravam as idéias relativas à infinidade e à continuidade como metafísicas, e assim sua explicação das mesmas ia para um terreno externo ao da definição matemática.

A concepção de matemática de Pascal expressa bem o espírito da época, e quando comparada com a de Bolzano é bem ilustrativa da grande mudança ocorrida. Ambos

---

<sup>56</sup> An explanation is always a relation of kinds, rather than being merely particular information and as such it seems to run into infinite regress and hence the importance of the continuum and the continuity, in what the distinction between the particular and the general is only relative and perceptible...

acreditavam que não é possível definir tudo. Mas Pascal acreditava que deveríamos parar quando encontrássemos termos tão óbvios que não fosse possível defini-los utilizando algo ainda mais óbvio. Já Bolzano acreditava na noção de simplicidade em termos de estrutura da linguagem, e, portanto, mesmo o que fosse óbvio poderia ser decomposto e explicado com a utilização de conceitos mais simples, embora não necessariamente menos óbvios.

Os métodos mais adversos à introdução na matemática das noções de infinidade e continuidade foram precisamente aqueles que tornaram esta introdução possível. Pois parecia óbvio para a grande maioria dos matemáticos desta época que a infinidade e a continuidade tinham em comum algo relacionado à nossa noção de movimento e aproximação, enquanto que os limites diriam respeito a algo discreto e numérico, que nos remete a algo estático.

Mas o método dos limites foi justamente o que permitiu captar o contínuo e o infinito de uma forma que nosso conhecimento a respeito desses conceitos pudesse ser expressível e comunicável, pois foi o que lhes forneceu sua base Lógica; e o método de Lagrange (1736-1813), criado para evitar estas dificuldades utilizando a noção de séries não infinitas que continham um resto, levantou questões referentes à infinidade e ao infinitamente pequeno que apontaram o caminho para sua solução.

Lagrange já tinha advertido sobre o fato de que as concepções de tempo e movimento não deveriam ser utilizadas na matemática, mas foi Bolzano quem estendeu esse esforço até os fundamentos, indo muito além do que qualquer um antes dele o tinha feito. Para isso, foi necessário em primeiro lugar uma definição satisfatória de continuidade.

Newton tinha tentado resolver o problema da continuidade recorrendo à intuição do movimento, e Leibniz formulando o postulado da continuidade. Já Bolzano deu uma definição da continuidade que, pela primeira vez, indicou claramente que a idéia básica da continuidade deveria ser encontrada no conceito de limite, articulando por fim o método discreto (numérico) como ‘explicador’ do contínuo. Sua definição da continuidade de uma função não é tão diferente daquela que pouco tempo depois seria formulada por Cauchy (1789-1857), e é fundamental para o Cálculo dos tempos atuais. No trabalho de Bolzano, como no de Cauchy, o conceito de limite se tornou claramente e definitivamente aritmético, e não geométrico.

No “Paradoxos do Infinito”, Bolzano viria a definir a função derivada da forma como a compreendemos atualmente, formulando uma concepção de limite que avançava com relação às definições de L’Huillier e de matemáticos que, como Lagrange, acreditaram que a noção de limite se estendia ao quociente de quantidades que se anulavam ou de zeros. Euler

(1707-1783), por exemplo, tinha explicado que  $dy/dx$  era um quociente de zeros. Bolzano, ao contrário, enfatizou o fato de que esse símbolo não deveria ser interpretado como uma razão entre  $dy$  e  $dx$  ou como a divisão de zero por zero, mas que era, ao contrário, um símbolo para uma única função, afirmando (como o fazemos atualmente no Cálculo) que uma função não tem valor determinado num ponto se ela se reduz a  $0/0$ , mas que ela pode ter um valor limite conforme esse ponto é aproximado, e que assumindo esse valor limite no lugar de  $0/0$ , a função poderia se tornar contínua nesse ponto.

A continuidade de uma função era tida, até os tempos de Bolzano, como condição suficiente para a existência de uma derivada. É algo aparentemente óbvio, e sua negação vai contra nossa intuição física e geométrica; também coube a Bolzano fornecer o exemplo de uma função contínua e não diferenciável, por meio de um raciocínio que envolvia subdivisões infinitas de intervalos (até infinitésimos). No entanto, esse trabalho ficou desconhecido, e tal exemplo seria mostrado por Weierstrass (1815-1897) entre 30 e 40 anos depois.

Lagrange acreditou que seu método de séries evitava a necessidade de se considerar os infinitesimais ou limites, mas Bolzano pontuou que no caso de séries infinitas é necessário considerar questões de convergência. Estas eram análogas a considerações de limites, como podemos ver pela afirmação de Bolzano de que se a seqüência  $F_1(x), F_2(x), \dots$  é tal que a diferença entre  $F_n(x)$  e  $F_{n+r}(x)$  se torna e permanece menor do que qualquer quantidade dada conforme  $n$  aumenta indefinidamente, então existe um e somente um valor para o qual a seqüência se aproxima tanto quanto se queira. Posteriormente, se perceberá que esta proposição tem também relação com a definição de números reais e de contínuo aritmético.

Bolzano acreditou, a despeito dos paradoxos apresentados pelas noções de espaço e tempo, que qualquer contínuo deveria ser pensado, em última instância, como composto de pontos, semelhantemente a Galileu (1564-1642), a quem ele se referiu e com quem concordou com a questão de que o todo poderia ser correspondido com suas partes. Sua visão do infinito seria a mesma até os tempos de Cantor (1845-1918), exceto pelo fato de que Bolzano considerou como diferentes graus de infinito infinitos que tinham o mesmo grau. No mesmo século a propriedade que ele e Galileu viram como um simples paradoxo foi tornada por Dedekind, em sua clarificação do Cálculo, a base de uma definição de conjuntos infinitos.

Embora as idéias de Bolzano indicassem a direção na qual a formulação final do Cálculo se assenta e da qual muito da matemática do século XIX seguiria, elas não constituíram a influência decisiva nesta determinação. Seu trabalho permaneceu muito pouco

divulgado até que fosse redescoberto por Hermann Hankel mais de meio século depois. Felizmente, no entanto, o matemático A. L. Cauchy criou idéias similares aproximadamente na mesma época e conseguiu afirmar a tese da descrição da continuidade por meio de limites como básica no Cálculo.

A seguinte afirmação de Otte (2007c, p. 26) mostra a relação entre o programa de aritmetização e a criação da filosofia analítica, da qual falaremos a seguir:

Ao invés de conceber a continuidade em termos de variação e invariância, Bolzano e Cauchy pensaram nela em termos aritméticos. O programa de rigorização pela aritmetização buscou resolver os problemas fundamentais de uma maneira reducionista, por meio da definição de todos os conceitos matemáticos em termos de algumas entidades básicas, em última análise nos números naturais. Posições anti-fundacionalistas, como as de Poncelet ou Peirce, ao contrário, tentaram empregar, por assim dizer, uma estratégia contrária, resolvendo o problema da objetividade da Matemática estendendo e generalizando suas estruturas relacionais e suas regras de inferência. A matemática se tornou dessa forma compreendida como algo que lida com “estado ideal de coisas” (Peirce, CP 3.558), ao invés de com uma aproximação ao mundo real concebido como um conjunto estático de objetos<sup>57</sup>.

### **3.4.2 Bolzano, a Filosofia Analítica e a Moderna Análise Matemática**

A relação entre o significado da palavra ‘análise’ na matemática e na filosofia tem toda uma história que remonta a Aristóteles e aos gregos. Nesta história, houve momentos de aproximação e de distanciamento entre esses dois diferentes significados do termo análise.

Mas, qual é a relação da criação da moderna análise matemática – feita principalmente por Bolzano e Cauchy – com a criação da filosofia analítica? Em quê medida a afirmação de que Bolzano foi o primeiro filósofo analítico corresponde à realidade?

---

<sup>57</sup> Rather than conceiving of continuity in terms of variation and invariance, Bolzano and Cauchy thought of it in arithmetical terms. The program of rigorization by arithmetization searched to solve the foundational problems in a reductionistic manner, by defining all mathematical concepts in terms of some basic entities, ultimately the natural numbers. Anti-foundationalist positions, like Poncelet or Peirce, in contrast, tried to employ, so to say, a top-down strategy, solving the problem of the objectivity of mathematics by extending and generalizing its relational structures and its rules of inference. Mathematics became in this manner to be understood as dealing with “ideal states of things” (Peirce, CP 3.558), rather than with an approximation to the actual world conceived of as a static set of objects.



A obra de Bolzano não foi devidamente difundida por seus discípulos, e continua até nossa época muito pouco traduzida. Então, de que forma a influência de Bolzano sobre a filosofia analítica ocorreu, se é que ocorreu?

Rusnock (1997) diz que aqueles que afirmam que a obra de Bolzano teve pouco impacto sobre o desenvolvimento histórico da filosofia não levaram em conta a importante influência que a matemática de Bolzano desenvolveu sobre a filosofia. Se analisarmos, por exemplo, o desenvolvimento filosófico de importantes autores do século XIX e XX, veremos que Russell (1872-1970) e Husserl (1859-1938) receberam influências de Weierstrass. É possível que Weierstrass e Cantor não tenham lido o *Wissenschaftslehre*, como Husserl (1975) sugere. No entanto, certamente conheciam a obra matemática de Bolzano, pois sabe-se que o *Prova puramente analítica...* – com seus vários elementos cruciais para a fundamentação rigorosa da análise – bem como o *Paradoxos do Infinito* – com suas importantes definições rigorosas (embora imperfeitas) do conceito de infinito – foram cuidadosamente estudadas por Weierstrass e seu círculo, bem como por Cantor.

O método de Bolzano expresso nestas obras consistia em fundamentar uma proposição integrando-a

“num sistema de verdades científicas ordenadas pela relação de fundamento e consequência” (cf. SEBESTIK, 1922, 94). A tarefa da análise é agora a elaboração de uma estrutura dedutiva e conceitual por meio da especificação dos conceitos primitivos ou simples, de axiomas, e a apresentação das relações dedutivas e definicionais, relacionando esses elementos primitivos com a proposição em questão. Assim apresentada, a análise filosófica é verdadeiramente global, uma busca por fundamentos últimos; e nós podemos facilmente ver por quê Bolzano se sentiu na obrigação de desenvolver teorias de coleções, de inteiros, e de números (entre outros) para fundamentar proposições da teoria de funções reais. O que surgiu destes questionamentos foi já uma outra versão da análise matemática, a análise real moderna mais ou menos como nós a encontramos ainda hoje<sup>58</sup> (RUSNOCK, 1997, p. 80-81).

Esses desenvolvimentos na metodologia, na compreensão dos fundamentos, tão claramente exemplificados nos trabalhos de Bolzano, se estenderam à filosofia, e Bolzano

---

<sup>58</sup> “into the system of scientific truths ordered by the ground-consequence relation” (cf. Sebestik 1992, p. 94). The target of analysis is now the elaboration of a conceptual and deductive structure: the specification of primitive, or simple concepts, of axioms, and the presentation of the definitional and deductive relations linking these primitive elements with the proposition in question. Thus presented, philosophical analysis is truly global, a searching for ultimate grounds; and we can readily see why Bolzano felt compelled to develop theories of collections, of integers, and of real numbers (among others) in order to ground the propositions of real function theory. What emerged from these inquiries was yet another version of mathematical analysis, modern real analysis more or less as we still find it today.

certamente via a maior parte de sua pesquisa matemática como sendo, ao mesmo tempo, pesquisa filosófica.

Além disso, Bolzano foi certamente o primeiro a localizar na linguagem o terreno primordial para a filosofia, combatendo uma série de abordagens filosóficas de sua época que pretendiam fazer da análise do conteúdo da mente sua meta principal. Sua ambição era criar uma Doutrina da Ciência (*Wissenschaftslehre*) que forneceria um método para todas as ciências e para a filosofia – sem negar as especificidades da Lógica de cada uma delas – com base na análise da linguagem.

Na avaliação de que o conhecimento se situa na estrutura da linguagem, das proposições e dos conceitos e que nós o acessamos por meio da análise desta estrutura (ao contrário da pretensão em reduzir ao maximamente compreensível, ou seja, àquilo que se adapta melhor ao sujeito), certamente é algo que a filosofia analítica herdou de Bolzano.

Mas, então, Bolzano foi o primeiro filósofo analítico? É isto o que afirma Coffa (1991). Creio que uma importante diferença de Bolzano com os filósofos analíticos consiste em que ele se preocupava com a organização da matemática real praticada pelos matemáticos, e dos fundamentos necessários para tornar essa organização coerente, que era afinal uma preocupação com comunicação e com didática; de onde deriva sua afirmação de que um livro didático é formado pelo conteúdo acumulado da ciência.

Bolzano pareceu contribuir para duas tradições distintas, com sua semântica, que localizava significados definitivos na linguagem: uma delas é a chamada formalista, tradição cuja ênfase era a linguagem e a aplicação, sem a preocupação com o conteúdo, representada principalmente por Hilbert, Dedekind e Peano; e outra que buscava resultados definitivos e a desvinculava das aplicações, como foi o caso de Frege, Russell, Carnap e Quine.

Segundo Otte (2001, p. 43):

Eram principalmente problemas de ensino e comunicação que levaram à exposição algébrica da análise e que, após isso não parecer mais apropriado forçou uma busca por novos fundamentos do conceito de número em si. Até então, estas duas tradições não pareciam ter se tornado conscientes de sua real diferença, ou da possibilidade de se proporem como duas alternativas de perspectivas fundacionais, mais ainda porque a própria axiomática moderna veio em duas formas diferentes, a de Pasch (1843-1930) de um lado, e a de Hilbert, de outro.

Sobre a questão das aplicações, os formalistas sempre viram a prática como um importante critério de verdade. Já a filosofia analítica reconhece que o significado depende da comunicação, mas não aceita o papel essencial das aplicações matemáticas. Russell conheceu matemáticos que compreendiam a Lógica matemática como leis ou relações entre idéias (Peirce, Boole, Grassmann, De Morgan, Whitehead, dentre outros), mas não lhe admirou muito seus métodos. Embora Russell tenha afirmado que lhe agradou a abordagem de Peano, talvez ele não tenha compreendido que os princípios de Peano eram mais semelhantes aos dos primeiros autores do que aos seus.

Russell, embora assuma Peano como uma referência para o pensamento lógico de clareza, criticará em seu *Filosofia da Matemática* (1981) a vagueza dos conceitos expressos por Peano, afirmando que seus axiomas poderiam ser utilizados para qualquer coisa, enfatizando que

Os lógicos da escola algébrica como Peirce, Peano ou Schröder, é verdade, procederam matematicamente, transpondo as leis matemáticas para o reino da lógica, compreendendo lógica como uma álgebra universal, sem pretender revisar os métodos da matemática. O método axiomático moderno representa nada mais do que o último passo rumo a uma matematização de todos os fenômenos e áreas da realidade com a própria matemática agora se tornando finalmente matematizada (RUSSELL, apud OTTE, 2001, p. 57).

Russell tinha conhecimento dos matemáticos que tratavam os fundamentos como um assunto de utilidade e generalização, mas não compreendeu sua importância (OTTE, 2001). Sobre o método hipotético-dedutivo e as diferenças de Russell com Peano, o próprio Russell diz:

Poder-se-á sugerir que, em vez de estabelecer “0” e “número” e “sucessor” como termos cujos significados conhecemos embora não os possamos definir, podemos deixar que representem três termos *quaisquer* que verifiquem os cinco axiomas de Peano. Não mais serão termos que têm um significado que é determinado embora não definido: serão “variáveis”, termos a respeito dos quais fazemos certas hipóteses, isto é, aquelas enunciadas nos cinco axiomas, mas que são, de outro modo, indeterminados. Se adotarmos esse plano, os nossos teoremas não serão provados no tocante a um determinado conjunto de termos chamados “os números naturais”, mas relativamente a todos os conjuntos de termos que tenham certas propriedades. Tal procedimento não é falacioso; na verdade representa, para certos propósitos, valiosa generalização (1981, p. 17).

Acreditamos que a preocupação de Bolzano era intermediária entre estas duas tradições: seu interesse era sobretudo com comunicação, daí sua preocupação em estabelecer

conceitos claros. Ele não se colocava questões como “o quê é o contínuo em sua essência?”, tais como Frege (1848-1925) e Russell se colocariam anos mais tarde sobre o número. Ele não se preocupou em especular sobre a natureza de conceitos cuja utilização não era problemática, mas em resolver os graves problemas de fundamentos da matemática de sua época.

No entanto, como Frege e Russell, Bolzano não via a matemática como restrita à relação de *Ableitbarkeit* (derivabilidade); e busca na sua relação de *Abfolge* aquilo que apenas *Ableitbarkeit* não pode oferecer: fundamentos objetivos para as ciências. Nesse aspecto, existe uma semelhança entre Bolzano e Frege e Russell, e uma distinção nítida das pretensões de Hilbert. É a busca por respostas definitivas, à qual nos referimos acima.

Por outro lado, a identificação que Bolzano fazia entre a Lógica e a Doutrina da Ciência, a crença em que seu desenvolvimento não era independente um do outro e o reconhecimento de que cada ciência tem algumas formas lógicas que lhe são peculiares, como vimos em 3.1, é mais uma nítida diferença de Bolzano com a filosofia analítica.

Bem em contraste com a visão de Russell, pode-se afirmar que é precisamente sob aspectos da aplicação que a variedade de interpretações dos sistemas axiomáticos tornam a força e significância do método axiomático. É particularmente difícil compreender por quê o significado de todos conceitos deveria ser totalmente fixados anteriormente a qualquer aplicação. Ao final, conceitos não seriam mais do que descrição completa de entidades individuais. Axiomática moderna, ao contrário, é frequentemente caracterizada pelo pronunciamento de Hilbert de acordo com o qual, no plano dos axiomas da geometria, os termos ‘ponto’ e ‘reta’ poderiam muito bem serem substituídos pelos termos ‘cadeira’ e ‘mesa’; “em outras palavras: toda e qualquer teoria pode sempre ser aplicada a um número infinito de sistemas de elementos básicos” (carta de Hilbert a Frege, 29 de dezembro de 1899). O que é verdadeiro: para resolver o problema da existência, nós precisamos encontrar pelo menos uma aplicação. (OTTE, 2001, p. 34-35).

No próximo capítulo, discutiremos alguns exemplos de demonstrações importantes, que dizem respeito a situações históricas e ao próprio Bolzano fazendo comparação entre duas proposições e julgando sobre qual seria mais simples.

## Capítulo 4 – Exemplos Diferentes Demonstrações e a Noção de Explicação

### Introdução

Neste capítulo será discutido de forma prática e com exemplos, como se processa o pensamento relacional, à luz de demonstrações importantes historicamente para o contexto que diz respeito a este trabalho. Na primeira, do binômio de Newton, apresenta-se a prova contida no artigo *Der Binomische Lehrsatz und als Folgerung aus ihm der polynomische, und die Reihen, die zur Berechnung der Logarithmen und Exponentialgrößen dienen, genauer als bisher erwiesen*<sup>59</sup> de Bolzano (1816) e sua discussão explícita acerca dos critérios de generalidade; na segunda, das esferas no interior de uma caixa, apresenta-se um exemplo concreto de como se dá a relação entre intuição e conceito; por último, discute-se o famoso paradoxo de Aquiles e a tartaruga, cuja resolução só foi possível com o desenvolvimento dos fundamentos do Cálculo, para o qual Bolzano tanto contribuiu por intermédio da aritmetização da análise e do artigo *Prova puramente analítica...*

### 4.1 Bolzano e o Binomische Lehrsatz: simplicidade e generalidade

Quando uma prova é mais explicativa do que outra? Bolzano (WL, BL, RB) sugere que partir do geral ao particular, e do mais simples para o mais complexo, são critérios importantes. Como estes critérios se articulam? Na introdução ao *Teoria das Grandezas* (2000), Bolzano analisa essa articulação em um caso bem concreto, no chamado binômio de Newton:

---

<sup>59</sup> O Teorema Binomial e, como uma consequência dele, o Teorema Polinomial e de Séries que serve para o cálculo de quantidades logarítmicas e exponenciais provado mais rigorosamente do que nunca antes. De agora em diante, o artigo será denominado *Teorema Binomial...* quando citado no corpo do texto, e BL quando em citações (como é o padrão em alguns artigos em diferentes línguas, em referência às iniciais das duas primeiras palavras – exceto ao artigo *Der* que aparecem em maiúsculo no título do artigo – *Binomische e Lehrsatz*).

A proposição bem conhecida, que afirma que

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \times 3}x^3 + \dots$$

em que  $n$  designa uma grandeza numérica positiva, negativa, inteira, fracionária, irracional ou mesmo imaginária, dado somente que  $x < 1$ , é evidentemente mais geral que a proposição que enuncia esta igualdade somente para expoentes positivos inteiros; portanto, não se pode de forma alguma considerar a segunda verdade como uma consequência objetiva da primeira; e, portanto, não mais se poderá exigir que a primeira proposição seja exposta antes da segunda. Porque embora a primeira não seja muito mais conhecida (*weiter*) que a segunda, ela não é por isso mais simples, mas consideravelmente mais composta; porque o conceito de uma potência da qual o expoente possa ser uma representação de grandeza qualquer é muito mais composta que aquela de uma potência ao expoente inteiro (§ 4, 70r, p.94).

Proust (1986) avalia que esse exemplo

mostrará o que faz com que uma proposição que, mesmo sendo mais geral, não pode ser tomada por fundamento objetivo de uma outra, por ser também mais composta que ela. Por uma breve alusão do *Wissenschaftslehre*, nós sabemos que “ao menos sob uma certa concepção” deste teorema, o binômio de Newton pode ser considerado como uma proposição analítica (par. 315, t. III, p. 241). A introdução à *Teoria das Grandezas* é mais explícita e esclarece o status deste teorema relativamente à consequência objetiva; ela nos informa indiretamente sobre o que a torna analítica (p. 157).

Na segunda proposição, que historicamente foi a primeira, um componente pode ser variado sem mudar a veracidade da fórmula; assim, pela definição de Bolzano (WL, § 148), a fórmula de Newton é analítica. Mas não se pode afirmar que seu fundamento objetivo resida na proposição sintética correspondente que é a própria fórmula para todo  $n$ , na qual nenhuma nova substituição é possível. No entanto Proust (1986) explica que essa exceção não deve ser uma surpresa:

O que de fato mostra a comparação entre os dois conceitos, “expoente inteiro positivo” e “expoente qualquer”, é que se o primeiro é subordinado ao segundo e consequentemente é extensionalmente *menos amplo*, é, no entanto, igualmente *mais simples*<sup>60</sup>. Com efeito, a demonstração da fórmula na qual o expoente é inteiro positivo envolve somente combinação algébrica. A fórmula geral, ao contrário, requer para sua demonstração uma teoria da convergência e de limites (p. 158, grifo do autor).

---

<sup>60</sup> Nesse parágrafo, Proust (1986) inverte a ordem usada nos dois parágrafos anteriores, e chama de primeira a proposição com “expoente inteiro positivo”, ao contrário do que vinha sendo dito antes.

Na época de Bolzano, as dificuldades de demonstrar o teorema para um expoente real qualquer significava uma diferença muito importante comparada à relativa facilidade de demonstrá-lo para um número inteiro positivo.

Por fim, para Proust (1986) esse exemplo mostra que não é somente o grau de generalidade entre verdades que determina a hierarquia dos teoremas. Trata-se de uma conseqüência da concepção expressa no *Wissenschaftslehre* que, como já foi visto, afirma que a relação de *Abfolge* requer muito mais do que dedutibilidade. “A conseqüência objetiva que ela manifesta exige da demonstração que ela respeite *antes de tudo* a progressão do simples ao complexo e *somente em seguida* e, se possível, que ela vá do geral ao particular”, afirma Proust (1986, p. 158).

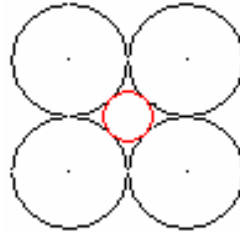
É perfeitamente compreensível que Bolzano utilizasse uma tal hierarquização, visto que conceitos importantes do Cálculo Infinitesimal começavam a aparecer nessa época. Entretanto, atualmente, não se pode considerar mais complexa uma demonstração por utilizar elementos do Cálculo Infinitesimal. Apresenta-se, então, a necessidade da discussão, até mesmo sobre a universalidade temporal de uma possível noção de explicação e de hierarquia de proposições.

## 4.2 Esferas no Interior de uma Caixa

Brown (1977) fornece, em seu artigo *Proof and Pictures*, um exemplo muito interessante, concorde-se ou não com suas conclusões.

Ele mostra que, caso se desenhem quatro círculos no plano, centrados nos pontos  $(\pm 1, \pm 1)$ , cada um com raio 1 e, depois, desenhe-se um quinto círculo, com centro na origem, de forma que ele toque cada um dos quatro círculos, e se faça uma caixa em torno dos quatro círculos (o que resultará em lados que tocam as retas  $-2$  e  $+2$  de cada um dos eixos coordenados), é evidente que o círculo interior fique assim completamente contido na caixa (ver figura 1). Fazendo o mesmo para o espaço tri-dimensional, com as esferas centradas em

$(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ , e com a nona esfera na origem tocando as outras oito, a caixa construída em torno das oito esferas novamente conterá totalmente a esfera interior.



(Figura 1: esferas de Brown no  $j^2$ )

Brown (1997) afirma que “refletindo sobre as figuras, seria perfeitamente razoável deduzir a “óbvia” conclusão de que o resultado vale em dimensões maiores. Surpreendentemente, este não é o caso. Em 10 ou mais dimensões, a esfera interior rompe a caixa n-dimensional”, que contorna as esferas posteriores, e isso ocorre porque o diâmetro da esfera interior é  $2 \times \left( \sqrt{(\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + \dots + (\pm 1)^2} - 1 \right) = 2 \times (\sqrt{n} - 1)$ . Mas cada esfera das exteriores tem diâmetro 2, e, portanto, os ‘lados’ da caixa n-dimensional medem 4. Para  $n \geq 10$ , temos que  $2 \times (\sqrt{n} - 1) \geq 4$ , e, portanto, a esfera central romperá os lados da caixa n-dimensional, o que constitui, segundo Brown (p. 178) “um tremendo choque para a intuição”.

Brown (1997) então argumenta que o costume é lidar com esse tipo de choque à intuição “relegando aos desenhos somente status heurístico” (p. 178), e não de evidências matemáticas sérias. No entanto, argumenta que provas verbais/simbólicas também podem enganar, e que “desenhos não são piores, e podem mesmo corrigir deduções equivocadas” (p. 178); propõe então que exemplos como esse sejam tratados da mesma forma que as evidências extraídas de microscópios, câmaras de bolha ou outros instrumentos de observação, que também podem levar a erros. Conclui que “propriedades ópticas e técnicas de mancha levaram usuários a ‘observar’ coisas que não eram reais, mas meros artefatos do processo de observação” (p. 178), e que

o fato de que alguns enganos ocorram não é razão para rejeitá-los por princípio como uma forma de evidência. Nós simplesmente *temos que aprender* como usá-los, assim como



precisamos continuar a aprender mais sobre microscópios. Este é um processo que nunca acabará<sup>61</sup> (BROWN, 1997, p. 179, sublinhado do autor).

Parece que Brown está levando em consideração, ao falar de intuição, não a matemática e seu real funcionamento, mas sim como se podem extrair verdadeiras certezas acerca de um mundo matemático platônico, em que as respostas sobre a veracidade de determinadas propriedades dos objetos já existam.

O próprio Brown (1997) reconhece que as verdades na matemática são escolhidas de acordo com sua conveniência para a obtenção de novos resultados. No entanto, ele não tira as conseqüências devidas dessa visão, pois não considera que a linguagem matemática foi construída justamente com o intuito de medir e prever, e não para a obtenção de certezas absolutas de verdades já existentes – daí a aritmetização da análise e, portanto, a eliminação de recursos como espaço e tempo legítimos nas demonstrações. É verdade que há desenhos que oferecem muito mais certeza do que as demonstrações, e o próprio Teorema do Valor Intermediário é o melhor exemplo. No entanto, a aritmetização da análise, como visto, era exatamente a substituição das provas por certeza (convicção subjetiva) por provas em que a conexão da linguagem se desse de forma coerente. A visão de BROWN (1997) é quase a mesma de Pascal e Descartes, isto é, que demonstrar é reduzir ao intuitivamente óbvio, embora com suas ressalvas de que “temos que aprender como usá-los” (p. 179).

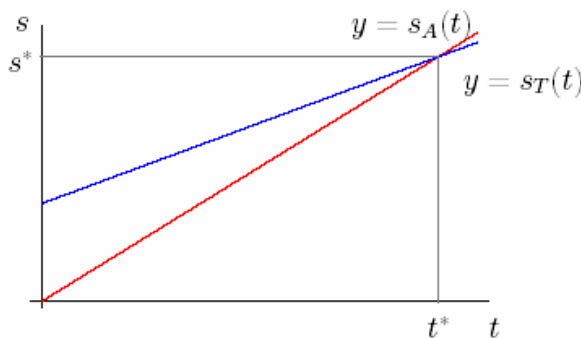
---

<sup>61</sup> The fact that many mislead is no reason to reject them in principle as a source of evidence. We simply *have to learn* how to use them, just as we must continue to learn more about microscopes. This is a process which will never end.

### 4.3 O Paradoxo de Aquiles e a Tartaruga e a Educação Matemática Atual

O enunciado do paradoxo de Zenon referente a Aquiles e a Tartaruga pode ser formulado da seguinte maneira: Suponha que Aquiles disputa uma corrida com uma tartaruga e dá a ela uma vantagem inicial. Desta forma, por mais que Aquiles corra, ele nunca alcançará a Tartaruga, pois quando ele atinge o ponto de onde a tartaruga partiu, ela ter-se-á deslocado para outro ponto; quando ele alcança esse segundo ponto, ela ter-se-á deslocado de novo; e assim sucessivamente, *ad infinitum*.

Pode-se resolver esse problema por meio do movimento retilíneo uniforme. Sejam  $s_A(t)$  e  $s_T(t)$  as posições de Aquiles e da tartaruga, respectivamente, no instante  $t$ ,  $t \geq 0$ . Por hipótese, a tartaruga tem uma vantagem inicial, que será denotada por  $d = s_T(0) - s_A(0) > 0$ . Então, supondo que ambos se deslocam com velocidade constante, temos que  $v_A > v_T$  e  $s_T(t) = d + v_T \times t$ , em que  $v_A > v_T$  é uma hipótese implícita no enunciado do paradoxo. A Figura 2 ilustra a movimentação dos corredores.



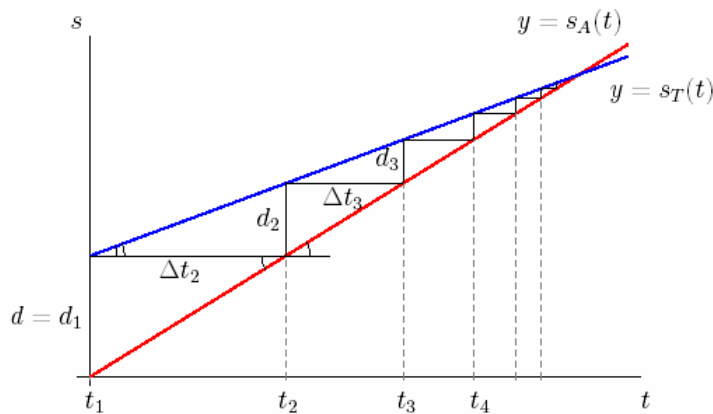
(Figura 2: Movimentação de Aquiles e da Tartaruga ao longo do tempo)

A aparente contradição consiste em que, de um lado, a experiência confirma inquestionavelmente que Aquiles ultrapassaria a tartaruga; a figura 1 também mostra isso, pois cada reta descreve a posição ao longo do tempo de cada corredor, e, obviamente, no

ponto de intersecção das retas  $(t^*, s^*)$  os corredores estão emparelhados, e a partir desse instante, Aquiles assume a dianteira na corrida.

De outro lado, parece também verdadeira a afirmação de que, caso se observem os corredores no instante inicial, e, depois, quando Aquiles atinge a posição inicial da tartaruga, e ainda, quando Aquiles atinge a posição da tartaruga no instante anterior etc., então, a cada observação, a tartaruga terá se adiantado em relação à posição ocupada anteriormente, ao passo que Aquiles terá atingido essa última posição, estando, portanto, atrás da tartaruga. Além disso, a cada observação avança-se no tempo.

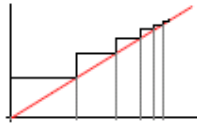
Pode-se investigar então exatamente em que instantes de tempo essas observações estão sendo feitas, denotando por  $t_i$  o instante da  $i$ -ésima observação, a relação entre  $t_i$  e  $t_{i+1}$  é dada por  $s_A(t_{i+1}) = s_T(t_i)$  e a primeira observação corresponde ao instante  $t_1 = 0$ . A partir do ponto  $t-1$  traça-se uma reta horizontal para a direita, encontrando a reta  $s_T(t) = d + v_T \times t$  e obtendo o ponto  $(t_2, s_A(t_2)) = (t_2, s_T(t_1))$ . Subindo em uma vertical deste ponto até a reta  $y = s_T(t)$  encontra-se a posição da tartaruga no instante de tempo  $t_2$ , representada na figura 3 por  $(t_2, s_T(t_2))$ . Para obter os outros pontos, basta repetir o procedimento.



(Figura 3: Instantes de observação dos corredores)

Este procedimento produz no gráfico uma seqüência de segmentos em forma de escada, como retratado na figura 3. Denotando a distância entre Aquiles e a tartaruga no instante  $t_i$  por  $d_i = s_T(t_i) - s_A(t_i)$ , para  $t \geq 1$ , e o intervalo entre as observações  $i$  e  $i-1$  por  $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ , para  $i \geq 2$ , pode-se identificar nesta figura duas seqüências de triângulos semelhantes. Na primeira, o  $i$ -ésimo triângulo tem catetos de comprimento  $d_i$  e  $\Delta t_{i+1}$  e sua hipotenusa está sobre a reta  $y = s_A(t)$ . Uma vez que a tangente do ângulo delimitado pela

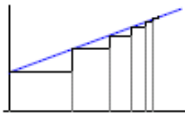
hipotenusa é o cateto de  $\Delta t_i$  é precisamente a inclinação da reta  $y = s_A(t)$ , pelo teorema de Tales,



$$v_A = \frac{d_1}{\Delta t_2} = \frac{d_2}{\Delta t_3} = \frac{d_3}{\Delta t_4} = \dots = \frac{d_i}{\Delta t_{i+1}} = \dots \quad (1)$$

(Figura 4: movimento de Aquiles)

O  $i$ -ésimo triângulo da segunda seqüência tem catetos de comprimento  $d_i$  e  $\Delta t_i$  e sua hipotenusa está sobre a reta  $y = s_T(t)$ . Neste caso, a tangente do ângulo delimitado pela hipotenusa e o cateto  $\Delta t_i$  é a inclinação da reta  $y = s_T(t)$ , acarretando que



$$v_T = \frac{d_2}{\Delta t_2} = \frac{d_3}{\Delta t_3} = \frac{d_4}{\Delta t_4} = \dots = \frac{d_i}{\Delta t_i} = \dots \quad (2)$$

(Figura 5: movimento da Tartaruga)

De (1) e (2) decorre que

$$\begin{aligned} \Delta t_2 &= \frac{d_1}{v_A} \\ \Delta t_3 &= \frac{d_2}{v_A} = \frac{v_T \Delta t_2}{v_A} = \frac{v_T}{v_A} \Delta t_2 \\ \Delta t_4 &= \frac{d_3}{v_A} = \frac{v_T \Delta t_3}{v_A} = \frac{v_T}{v_A} \Delta t_3 \\ &\vdots \quad (\text{indução}) \\ \Delta t_i &= \frac{v_T}{v_A} \Delta t_{i-1}. \end{aligned}$$

Somando os lados, obtém-se

$$\Delta t_2 + \Delta t_3 + \dots \Delta t_i = \frac{d_1}{v_A} + \frac{d_1 v_T}{v_A v_A} + \frac{d_1 \left(\frac{v_T}{v_A}\right)^2}{v_A} + \frac{d_1 \left(\frac{v_T}{v_A}\right)^3}{v_A} + \dots \frac{d_1 \left(\frac{v_T}{v_A}\right)^{i-1}}{v_A}$$

De  $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ , percebe-se que a seqüência  $t_2, t_3, \dots$  constitui uma progressão geométrica com razão  $q = \frac{v_T}{v_A}$  (positiva e menor do que 1, pois  $v_A > v_T$ ).

É fácil ver pelo gráfico que  $t_n = t_{n-1} + \Delta t_n$ , para todo n e, portanto, a seqüência  $t_2, t_3, \dots$  é a seqüência das somas parciais desta progressão geométrica, e

$$t_i = \sum_{k=1}^i \Delta t_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{d_1}{v_A} \left(\frac{v_T}{v_A}\right)^k = \frac{d_1}{v_A} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \left(\frac{v_T}{v_A}\right)^k = \frac{d_1}{v_A} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n q^k$$

Chamando  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n q^k$  de S e  $\sum_{k=0}^n q^k$  de  $S_n$ , temos

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n .$$

Como  $S_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n$ , multiplicando por q dos dois lados da equação,

$$qS_n = q + q^2 + q^3 + \dots + q^n + q^{n+1} .$$

Subtraindo  $qS_n$  de  $S_n$ ,

$$S_n - qS_n = 1 - q^{n+1}$$

$$S_n (1 - q) = 1 - q^{n+1}$$

$$S_n = \frac{1 - q^{n+1}}{(1 - q)}$$

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{1}{1 - q}, \text{ pois como vimos } q < 1 .$$

$$\text{Assim, } t_i = \frac{d_1}{v_A} \times \frac{1}{1 - \frac{v_T}{v_A}} = \frac{d_1}{v_A} \times \frac{v_A}{v_A - v_T} = \frac{d_1}{v_A - v_T}$$

Para mostrar que a contradição relatada na formulação do problema é apenas aparente, é necessário compreender que os intervalos de tempo entre cada alcance da tartaruga por

Aquiles se tornam cada vez menores, de forma que a soma desses tempos é finita, ou seja: chegará um momento em que Aquiles não mais estará atrás da Tartaruga.

Igualando as equações  $s_T(t^*) = s_A(t^*)$ , pode-se encontrar calculando  $t^*$ , a abscissa do ponto de interseção das duas retas,  $d + v_T \times t^* = v_A \times t^*$ , e, portanto,  $t^* = \frac{d}{v_A - v_T}$ , coincidindo com o valor de  $t_i$  encontrado, o que resolve o problema.

Wertheimer (1945, p. 41), psicólogo, comenta a prova apresentada anteriormente da convergência da soma da PG infinita de razão, cujo módulo é menor do que um – o tipo de demonstração mais comum nos livros de ensino médio e superior – da seguinte forma:

é corretamente derivada, provada, e elegante em sua brevidade. Obter uma forma de adquirir compreensão real do assunto, entretanto, não é tão fácil assim quanto simplesmente derivar a fórmula; envolveria passos difíceis e muito mais. Quando deparadas a acreditar na correção do procedimento acima, muitas pessoas se sentem insatisfeitas, enganadas. A multiplicação de  $(1 + a + a^2 + a^3 + \dots)$  por  $a$ , junto com a subtração de uma série pela outra, fornece o resultado; mas ela não fornece a compreensão de como a série continua se aproximando deste valor em seu crescimento<sup>62</sup>.

Otte (2006a, p. 27) objeta que

Wertheimer deseja tornar esta abordagem explícita e intuitivamente presente. Intuição é essencialmente ‘ver’ a essência de um pensamento ou objeto como uma forma ou objeto em si. No entanto, as coisas não têm uma essência única e demonstrável e, além disso, uma tal essência não seria dada de forma direta e imediata, de outra forma não haveria ciência ou matemática. A essência de uma coisa dada nada mais pode ser do que a essência de uma representação desta coisa e, portanto, a prova que Wertheimer não aceita como satisfatória, poderia ser aceita como uma prova intuitiva. Com a diferença de que a intuição é dirigida à representação diagramática em si e à sua forma<sup>63</sup>.

---

<sup>62</sup> It is correctly derived, proved, and elegant in its brevity. A way to get real insight into the matter, sensibly to derive the formula is not nearly so easy; it involves difficult steps and many more. While compelled to agree to the correctness of the above proceeding, there are many who feel dissatisfied, tricked. The multiplication of  $(1 + a + a^2 + a^3 + \dots)$  by  $a$  together with the subtraction of one series from the other, gives the result; it does not give understanding of how the continuing series approaches this value in its growth.

<sup>63</sup> Wertheimer wants an intuitive demonstration. Intuition is essentially the seeing of the essence of a thought or object as a form or object itself. Things do not have, however, a unique and demonstrable essence, as we have argued before. The essence of something cannot be anything but the essence of a representation of that thing and therefore the diagrammatic proof which Wertheimer does not accept as satisfactory, could be called an intuitive proof, exactly like the proof number 3 of the theorem of Pythagoras above. It is also more advanced, because it contains some general methodological message.

É um fato que sem a continuidade da reta não seria possível resolver o Paradoxo de Aquiles e a Tartaruga. Esta continuidade só foi estabelecida a partir da definição rigorosa do conceito de limite, como visto em 3.4.1. Esta fundamentação foi iniciada por Bolzano e teve seu auge alcançado com os cortes de Dedekind.

Por isso, é também curioso que um dos principais livros de análise adotados no Brasil, um dos preferidos de muitos professores, ignore totalmente a grande tarefa histórica que significou a construção dos números reais. Trata-se do livro *Análise I* (LIMA, 1992), que limita o problema da fundamentação dos números reais para definir um corpo, e depois demonstrar que os números reais cumprem todas as propriedades de um corpo, não reservando sequer uma palavra sobre Dedekind! Já Ávila (2000), em *Introdução à análise matemática*, fala nos cortes de Dedekind e ainda cita trechos originais das obras de Bolzano e Cauchy, além de indicar referências para a apresentação rigorosa dos cortes de Dedekind. Curiosamente, esse último livro é muito menos adotado.

Em relação a Aquiles e à Tartaruga, existe ainda uma outra abordagem, identificada com o pensamento relacional, que oferece uma solução mais simples. Pode-se trabalhar com a noção de velocidade relativa de Aquiles e a Tartaruga. Considerando  $v$  a velocidade de Aquiles e, por exemplo,  $\frac{v}{10}$  a velocidade da Tartaruga, então a velocidade relativa de Aquiles é  $\frac{9v}{10}$ . Considerando a distância inicial  $d(0) = d_0$ ,  $d(t) = d_0 - vt$  e no instante  $\frac{t}{vd_0}$  Aquiles alcançará a Tartaruga.

O que têm em comum os exemplos descritos e as diferentes demonstrações da irracionalidade da raiz de 2, mostradas no capítulo 1? Que lição pode-se extrair disso?

O estímulo à intuição, que os psicólogos corretamente apontam como necessário, na matemática não pode ser desvinculado do estímulo à representação e à abstração, uma vez que a intuição matemática, quanto mais avançada, mais se refere a objetos próprios da matemática, e, por seu lado, cada vez mais distantes de objetos físicos e reais, exatamente porque a *essência* da matemática não pode ser desvinculada da formalização, da abstração e dos símbolos, e nem de possíveis aplicações atuais ou futuras.

Pode-se dizer que se lida com uma situação muito parecida no exemplo da demonstração da incomensurabilidade da raiz de um número primo, visto no capítulo 1, e

no exemplo de Aquiles e a Tartaruga. No primeiro caso, a solução mais simples é a generalizadora, não a que trabalha com a intuição do número concreto e exemplificável, visualizável, mas com o número geral. No segundo caso, o que possibilitou uma solução simples foi a observação da relação entre os dois sujeitos, e não sua visualização particular e separada.

Essas demonstrações exemplificam algo discutido nos capítulos anteriores: a linguagem matemática tem uma abstração que lhe é inerente, e é por meio dessa abstração que ela consegue resolver problemas que a linguagem comum não consegue.

#### **4.4 Concluindo Provisoriamente sobre o Legado de Bolzano: Explicação (*Abfolge*) e Dedutibilidade (*Ableitbarkeit*)**

Qual foi o legado de Bolzano, qual era sua noção de explicação?

Bolzano (WL) usa a palavra *Ableitbarkeit* para mostrar deducibilidade ou dedução lógica, e *Abfolge* (uma coisa que segue de uma outra de forma necessária, numa relação de fundamento e consequência) para explicação. Explicar uma verdade é mostrar os seus fundamentos objetivos.

Bolzano (WL) Estabelece que o conceito de *Abfolge* não pode ser definido (§ 203), embora tente caracterizá-lo fazendo uso de múltiplos exemplos e estabelecendo as propriedades que a caracterizam, em comparação com outras relações, tais como causalidade e *Ableitbarkeit*. (§ 221), que define em §155.

Qual é a relação entre *Abfolge* e *Ableitbarkeit*?

Bolzano (WL) questiona se existiria uma relação de subordinação entre *Abfolge* e *Ableitbarkeit*, e afirma que não conhece nenhuma prova que podem justificar a questão dessa forma (§ 200). *Ableitbarkeit* vale também para proposições falsas, e *Abfolge* apenas para proposições verdadeiras. Em relação à unicidade, na relação de derivabilidade, Bolzano (WL, § 206) afirma que “diversas conclusões podem decorrer das mesmas premissas e a mesma



conclusão pode ser derivada de diversas premissas”. Já na relação de *fundamento* e *conseqüência*, isso não pode acontecer.

Há também diferenças formais: *Ableitbarkeit* pode ser simétrica, ao passo que *Abfolge*, como a causa, é assimétrica; afinal, é incontestável que se descubra o tamanho do mastro do navio por meio de sua sombra; mas é o mastro que explica a sombra, e não o contrário.

Para melhor exemplificar *Abfolge*, Bolzano (WL, § 162) dá os seguintes exemplos:

A: “A soma dos ângulos de um triângulo é 180 graus”;

B: “Cada quadrado pode ser dividido em dois triângulos”;

C: “A soma dos ângulos de um quadrado é 360 graus”;

D: “No verão costuma ser mais quente que no inverno”;

E: “No verão o termômetro costuma estar mais alto do que no inverno”;

F: “Se o termômetro está mais alto, faz mais calor”;

Pode-se deduzir (*ableiten*) D de E e F e também E de D e F. Nas palavras de Bolzano:

estamos acostumados a usar a locução “A verdade de que é mais quente no verão do que no inverno está *fundamentada* na verdade de que o termômetro está mais alto no verão do que no inverno”, às vezes. Mas logo modificamos nossa afirmação. Na verdade nós apenas falamos do *conhecimento* destas verdades, nós somente quisemos indicar que o *conhecimento* de uma destas verdades produz o conhecimento da outra. Mas que a primeira verdade está dentro e o fundamento certamente nós reconhecemos que exatamente a relação oposta é válida. (WL, § 198)

Em outros termos, é claro que D e F são causa ou um fundamento de E, mas ninguém afirmaria que D e E são causa de F. Então, D e F formam uma explicação de E, mas D e E não são uma explicação de F.

No entanto, Bolzano comete um erro ao aplicar a mesma argumentação na matemática, ao afirmar que A e B fundamentam – e, portanto, explicam – C, mas que B e C não fundamentam ou explicam A.

Outra diferença formal entre *Ableitbarkeit* e *Abfolge* é sobre a transitividade. Bolzano (WL, §155) afirma que “É uma importante característica da relação de derivabilidade que proposições deriváveis de certas conclusões podem também ser vistas como conclusões das premissas das quais as primeiras são derivadas”. Discute ainda se o mesmo ocorre com a relação de *Abfolge*, dizendo que “Devo confessar que o uso lingüístico predominante favorece isto. Porque normalmente não fazemos objeção alguma em chamar uma verdade de consequência de uma outra quando ela é, na verdade, somente uma consequência de sua consequência” (WL, § 155). E conclui sem fechar totalmente as opções:

Mesmo com tudo o que este ponto-de-vista tem em seu favor, eu não posso abrir mão de duvidar de sua correção. Me parece que a relação de fundamento e consequência é de um tal tipo que não se pode dizer de uma consequência de uma consequência, somente por ser uma consequência de uma *consequência*, que ela seja a consequência do *fundamento* de seu fundamento, sem alterar o conceito. (WL, § 213).

No tocante à a questão da unicidade entre premissas e conclusões (próprias da relação de *Ableitbarkeit*) e entre fundamentos e consequências (próprias da relação de *Abfolge*), em *Ableitbarkeit* essa unicidade não ocorre. Sobre *Abfolge*, afirma

que não existem várias consequências decorrentes de um fundamento dado, a não ser que as compreendamos como sendo meramente consequências parciais. Ao contrário, pode-se acreditar que é possível encontrar exemplos em que a mesma consequência é obtida de fundamentos diferentes, como efeitos de causas diversas. (WL, § 204).

Além das características de *Abfolge* já citadas, Sebestik (2007, p. 38-39) menciona as seguintes:

4. Nenhuma verdade conceitual pode ser fundamentada numa verdade empírica, mas a última pode ter entre suas consequências a primeira.
5. Os fundamentos são mais gerais do que suas consequências, enquanto generalidade é compreendida em termos de extensão mais ampla do sujeito ou do predicado.
6. Com frequência, mas nem sempre, a relação de *Abfolge* induz uma ordem entre teoremas de acordo com o grau de complexidade (o número de conceitos simples que há

numa verdade).

7. “A verdade mais simples deve ser colocada à frente da mais complexa e, onde haja uma complexidade igual, a mais geral deve sempre ser afirmada antes da mais particular” (Bolzano 2004, 79). Esta propriedade, também, admite exceções.

8. Em caso de conflito entre o critério de simplicidade e de generalidade, simplicidade é anterior a generalidade.

9. A busca por fundamentos de uma verdade para com verdades básicas (= axiomas).

De acordo com Bolzano (WL, § 148) não se pode confundir a definição ou representação de algo, com o seu conceito, ao dizer que

por exemplo, Maas disse (Eberhard's Phil. Mag., V. II, Pt. 2, No. 2): “O triângulo pode ser definido como uma figura na qual a soma dos ângulos é dois ângulos retos. Neste caso, a proposição, a soma dos ângulos é dois ângulos retos, que é vista como sintética na definição usual, se torna analítica”. Eu tenho uma opinião diferente sobre o assunto. Como o que eu entendo por uma proposição não é uma mera combinação de *palavras* que afirma algo, mas o sentido desta afirmação, então eu não admito que a proposição, a soma dos ângulos de um triângulo, etc., permanece a mesma quando eu designo à palavra, triângulo, num momento um conceito e noutro momento outro (conceito).

## Capítulo 5: Extratos do Trechos do *Wissenschaftslehre* (traduções feitas em colaboração por Humberto Clímaco e Michael Otte, alguns trechos do inglês e revisados do original em alemão, e outros diretamente do alemão)

### 5.1 Tradução de “§ 12 Pergunta-se se a lógica é uma ciência formal”

1) Nos livros didáticos de lógica recentes geralmente se lê “que a lógica não se preocupa com a matéria do pensamento, mas com sua mera forma” e que por isso ela merece o nome de uma ciência meramente formal. O sentido destas expressões obscuras está explicado de maneiras diferentes. Por exemplo, no “Fundamentos de Uma Lógica Geral” de Jacobs (Halle, 1791, § 62) se lê o seguinte: “porque a lógica abstrai de todas as diferenças dos objetos e considera meramente a maneira como a mente pensa nesses objetos e como ela deveria pensar neles, por isso ela é uma ciência só formal”. Na Lógica de Sr. Houfbauers..., em contrapartida, se lê o seguinte (§ 11) : “A matéria de um pensamento é aquela coisa que corresponde com aquilo que é pensado. A forma é aquilo que é produzido pelo próprio pensamento. A matéria do pensamento são as intuições ou representações que produzem idéias e a forma do pensamento é a maneira como isso acontece. A lógica pura é “a ciência da forma do pensamento”. O professor Metz (Dicionário da Lógica, 2ª Edição, p. 4) disse: na lógica se deveria abstrair das diferenças dos objetos nos quais você pensa, e também das diferenças dos sujeitos e dever-se-ia refletir só sobre o pensamento em si, *in abstracto*. Por isso na lógica poder-se-ia considerar somente a forma do pensamento. Essa forma seria aquela “pela qual a representação se transforma em pensamento e esse pensamento é a determinação na unidade da consciência de dadas *Vorstellungen* [intuições ou representações] (ou seja, (as representações) são a matéria do pensamento)”. Sr. Professor Krug disse que o pensamento formal, que é a matéria da lógica, consiste no fato de que as *Vorstellungen* são relacionadas somente entre si, sem se referir ao objeto do qual elas são representações.

2) Como, por um lado, o assunto não fica muito claro para mim com essas explicações e como, por outro lado, ela me parece não decidida corretamente, eu me permito desenvolver minha própria opinião da seguinte maneira: todos esses eruditos que fizeram afirmações semelhantes àquelas já citadas acima partiram, sem mencioná-lo, das premissas de que todos

os objetos que pertencem à lógica se subsumem no conceito do pensamento (Gedanken), ou seja, que mesmo se elas não são nada mais, pelo menos precisam ser pensamentos.

Agora, como estariam as coisas se essa premissa não fosse correta e o objeto da lógica fosse algo muito mais geral? A história das ciências é, cheia de exemplos de surgimento da necessidade de ampliar sua área a partir do reconhecimento do fato de que inicialmente tal área da ciência foi considerada reduzida demais. A geometria, no início, foi considerada a doutrina da medição de terras, mas ao longo da história esta noção foi gradualmente ampliada e, no final, a geometria se transformou numa doutrina do espaço em geral. Então, nos perguntamos se a lógica deveria não só estabelecer as leis que regem verdades pensadas ou pensamentos verdadeiros, mas todas as verdades. E ainda temos de nos perguntar se a validade das regras lógicas não se estendem a proposições em si independentemente do fato de essas terem sido pensadas por alguém, ou não. Teríamos, nesse caso, limitado a área da lógica de forma muito estreita. Eu pretendo mostrar mais à frente que a fonte da maior parte dos erros na lógica surgem da não distinção entre verdades pensadas e verdades em si; proposições pensadas e conceitos de proposições; e que não foi suficientemente diferenciado entre conceitos de proposições e conceitos em geral. Mas todo mundo concorda que a lógica tem que apontar somente as regras que devem ser obedecidas no trabalho numa ciência em geral e não aquelas que se referem somente a uma ou outra verdade particular. Por exemplo, se tratamos somente as verdades sobre as três dimensões do espaço dentro de uma ciência do espaço é óbvio que a lógica deveria só descrever os tipos de procedimentos que se aplicam em várias verdades juntas, ou – o que significa a mesma coisa – se aplicam numa classe de verdades juntas; por causa disso a lógica nunca considera uma única proposição totalmente determinada, ou seja, uma proposição onde o sujeito, o predicado e a cópula são completamente determinados, mas ela considera uma classe inteira de proposições, que significa todas as proposições juntas mesmo sendo algumas partes delas determinadas, outras sendo variáveis (ou pode aparecer de maneira diferente).

Por exemplo, a proposição particular: “Alguns homens têm a pele branca” poderia servir no máximo como um exemplo, mas nunca como objeto de um teorema da lógica. Isso acontece se a própria classe a que essa frase pertence, ou seja, todas as proposições que contêm a expressão: alguns A são B está em jogo. Se nós quisermos chamar essas classes de proposições formas gerais de proposições, então poderia ser dito que a lógica trata somente das formas das proposições, mas não das proposições particulares. (temos de observar que, na realidade, só a designação, ou seja, a expressão por escrito ou oral, poderia ser chamada de

forma). Se quisermos chamar aquelas partes nesta classe de sentenças que ainda é determinada em nosso exemplo  $A \text{ é } B$  de matéria destas sentenças, então poder-se-ia dizer que a lógica só considera a forma e não a matéria das proposições. Isso poderia ser o motivo pelo qual foi dito que a lógica (lembrando 1)) não considera a matéria, mas a forma do pensamento. Eu só posso concordar com esta definição no sentido apresentado aqui. Se alguém quer, por causa disso, chamar a lógica de uma ciência somente formal, eu não tenho nada contra. Porque o mal entendido que pretende dizer que a lógica, por ser chamada formal, não tem matéria alguma, e por isso verdade alguma porque verdades só podem ser proposições determinadas, este mal-entendido eu disse que é tão louco que não merece atenção. Em todo caso, esse mal-entendido pode ser removido pelo fato de que mesmo que algumas frases não aparecem como objetos das doutrinas da lógica, ainda assim tais doutrinas são todas proposições bem determinadas. Porque temos, em qualquer ciência, que distinguir entre o objeto da ciência e seu conteúdo. Por exemplo, o objeto da geometria é o espaço; mas seu conteúdo são teoremas sobre o espaço.

3) Mas parece que nem todos que definiram a lógica como uma ciência meramente formal entenderam as coisas dessa maneira, porque, caso fosse assim, não teriam se utilizado da expressão que a lógica “tinha de abstrair de todas as diferenças dos objetos”. Porque sem dúvida a lógica tem de refletir sobre algumas diferenças entre objetos possíveis do pensamento, porque isso é necessário para estabelecer regras úteis para pensar sobre esses objetos. Por exemplo, obviamente temos que distinguir entre verdades que só podem ser alcançadas pela experiência, e outras que são independentes de qualquer experiência. Se não, a lógica não poderia nem descrever, nem provar a correção das regras que têm que ser obedecidas na busca de um ou outro tipo de verdade. Me parece que alguns acadêmicos tinham usado a expressão que a lógica tem que abstrair de toda a matéria do pensamento só para se livrar das dificuldades de uma pesquisa. Por exemplo, na Doutrina dos Conceitos, e mais ainda na Doutrina dos Julgamentos, algumas divisões são recusadas só porque não cabem no sistema de categorias tradicionais ou porque são inconvenientes porque ela se preocupa com a matéria dos objetos considerados, e não com a forma. Por exemplo, eu só lembro a distinção entre proposições sintéticas e analíticas.

4) Parece óbvio que a gente usa a expressão forma num significado mais estreito, mas é difícil determinar em qual (significado, NdT) porque as explicações que citei no 1) deste parágrafo e outras que encontrei na literatura não providenciam uma resposta satisfatória. A maior parte já não porque elas falam do pensamento, ou seja, das sentenças e representações

como elas aparecem em nossa mente, e não de proposições e suas partes em si no sentido objetivo. As explicações mais claras que encontrei só dizem que nós consideramos as proposições e representações dadas num aspecto de mera forma quando nos concentramos só naquela coisa que elas têm em comum com outras, ou seja, quando nós falamos de espécies e classes delas. Mas que isso não é verdade, devemos ter visto agora mesmo (ou acima mesmo). Se vocês me permitissem uma suposição audaciosa, eu diria que a gente tinha chamado classes de proposições e representações formais se nada mais fora necessário para indicar algumas partes dessas proposições ou representações enquanto as outras partes que costumávamos chamar de matéria poderiam ficar indeterminadas. Por exemplo, a gente acredita que a divisão das proposições em proposições afirmativas e proposições negativas afeta só a forma porque não se precisa de mais nada para determinar este tipo de proposições do que a qualidade de uma parte (ou seja, a cópula), enquanto as outras partes (ou seja, o sujeito e o predicado) poderiam ser arbitrários. Por outro lado, a gente considera a distinção das proposições *a priori* e *a posteriori* como uma distinção material porque ela não trata somente da indicação de algumas partes da proposição, mas resultam da consideração do conteúdo inteiro delas. Se essa realmente fosse a opinião dos nossos lógicos, e eu acredito que é, então eu diria que a restrição – da área da lógica à forma – ocorre em detrimento da ciência e é arbitrária. Porque isso já é provado pelo exemplo das proposições *a priori* e *a posteriori*, que de acordo com essa definição da lógica não pertence a ela, e por outro lado esse exemplo é tão importante que todos os lógicos falam dele, mesmo aqueles que não podem fazer isso sem serem inconseqüentes.

5) Alguns entendem a afirmação de que a lógica é uma ciência meramente formal no sentido de que suas doutrinas são todas verdades analíticas. Por exemplo, o Senhor Fries parece que acredita nisso, ao se referir à lógica como a um sistema de julgamentos analíticos e Hofbauer e Twisten tinha dado à lógica o nome aristotélico de uma analítica. Eu não concordo com essa opinião; ao contrário, acredito que nem um único teorema da lógica ou de alguma outra ciência seja uma verdade analítica. Porque acredito que uma sentença analítica é muito desimportante ao ser estabelecida como teorema de alguma ciência. Quem gosta de falar, por exemplo, na geometria, sobre teoremas do tipo um triângulo equilátero é um triângulo ou uma figura equilátera, ou coisas semelhantes?

## 5.2 Tradução de “§ 19 O quê o autor entende por uma proposição em si”

Para deixar mais claro possível para meus leitores o quê eu entendo por uma proposição em si, eu começo a explicar o quê eu entendo por uma proposição dita e expressa por palavras. Com esse nome, eu indico qualquer conversa quando através dela alguma coisa é dita ou afirmada e quando, por isso, ela sempre está verdadeira ou falsa no sentido comum destas palavras. Ou seja, quando ela – como a gente também fala – é correta, ou incorreta. Por exemplo, eu chamo a seguinte série de palavras: “Deus é onipresente” uma proposição dita, pois por essas palavras alguma coisa – e nesse caso alguma coisa verdadeira – é afirmada. No mesmo sentido, também chamo a seguinte série de palavras: “um retângulo é redondo” uma proposição, pois aqui também alguma coisa é dita por essa conexão de palavras, mesmo que seja algo errado ou falso. Em contraste, a seguinte conexão de palavras: “O Deus onipresente” ou “um retângulo redondo” não são chamados proposições, pois por meio delas alguma coisa é apresentada (vorgestellt), mas nada dito ou afirmado; e, por isso, no sentido estrito não se pode dizer que estas palavras contêm uma coisa verdadeira ou falsa. Se a gente agora sabe o que eu entendo por uma proposição dita, eu posso observar, além disso, que existem proposições que não são representadas por palavras, mas são proposições, por exemplo, que alguém poderia só pensar. Estas proposições, eu chamo de proposições pensadas. Como eu distingo na expressão: “Uma proposição dita” ou a proposição mesma da sua declaração; da mesma forma eu distingo na frase: “uma proposição pensada” a proposição em si do pensamento nela. Agora, aquilo que nós teríamos necessariamente que imaginar na palavra proposição, ou seja, aquela coisa que a gente pensa na palavra proposição e que deixa em aberto se alguém algum dia já a tenha dito ou expressado, ou não; pensado nela, ou não; é exatamente aquilo que eu chamo de proposição em si; ou, para ser mais curto, de proposição, sem usar as palavras “em si”. Em outras palavras: por uma proposição em si eu entendo não somente uma afirmação que alguma coisa é ou não é, independentemente de se esta afirmação é verdadeira ou falsa, independentemente também de se ela jamais foi formulada em palavras ou não, ou se ela foi pensada ou não. Se vocês querem um exemplo de como a palavra proposição ocorre neste sentido, eu vou dar o seguinte, que poderia ser adicionado por muitos outros semelhantes: “Deus, o onisciente, não só conhece todas as proposições verdadeiras, mas também todas as proposições falsas; não só todas as proposições que algum ser acredite que seja verdadeira ou daqueles que ele se faz uma representação, mas também daquelas que ninguém jamais pensou como verdadeira, ou que ninguém jamais imaginara”. Então, para



fixar o mais firmemente possível na mente do meu leitor o conceito que eu espero que já tenha se tornado compreensível pelo que foi dito anteriormente, e também para fazer com que o leitor confie que ele compreendeu corretamente ainda mais, as seguintes observações podem servir. (a) se alguém quer imaginar pela expressão “proposição em si” aquela coisa que eu desejo, então não pode-se mais pensar no que está indicado pelo seu significado *original*, ou seja, não pensa-se numa coisa estabelecida, pois (uma coisa estabelecida) exige a existência de um ser que tinha estabelecido a proposição. Igualmente, tem de se abstrair das palavras artificiais que existem em muitas ciências. As conotações empíricas, que acompanham o significado original de qualquer palavra. Certamente é também verdade sobre os termos técnicos que ocorrem em várias outras ciências. Então, por exemplo, na matemática, quando lidamos com o conceito de raiz quadrada, nós não podemos pensar numa raiz, conhecida para o botânico; nem em um quadrado geométrico. (b) Nós não temos que pensar em uma proposição em si como algo estabelecido por alguém; para não mais a confundirmos com uma idéia presente na consciência de um ser pensante, nem com uma afirmação ou julgamento.

É claro que é verdade que toda proposição é concebida ou pensada por Deus, mesmo se por nenhum outro ser, e, se ela for verdadeira, é também reconhecida como sendo uma verdade. Conseqüentemente, na compreensão divina, ocorre tanto como uma mera idéia ou mesmo como um julgamento. Mas a proposição, no entanto, é algo diferente de uma idéia ou um julgamento. (c) Por esta razão, não se pode atribuir ser (existência ou atualidade) a proposições em si. É somente a proposição afirmada ou pensada, ou seja, somente o pensamento de uma proposição, assim como o julgamento contendo uma certa proposição, que tem existência na mente do ser que pensa o pensamento ou faz o julgamento. Mas a proposição em si, que contém o conteúdo do pensamento ou julgamento, não é algo que exista; então seria igualmente impróprio dizer que uma proposição tem existência eterna já que ela veio a ser num determinado momento e depois – num outro momento – ela deixou de ser. (d) Por fim, é óbvio que embora uma proposição em si não é como tal nem um pensamento nem um julgamento, ela pode tratar de pensamentos e julgamentos, ou seja, conter o conceito de um pensamento ou julgamento em alguma de suas partes componentes. Certamente, a própria proposição que eu ofereci anteriormente como um exemplo de uma proposição em si mostra exatamente isto.

### 5.3 § 24 “Vários Significados das palavras: Verdadeiro e Verdade”

Não há dúvidas de que é algo a ser criticado que uma e mesma palavra receba vários significados que podem facilmente ser confundidos um com o outro. Na verdade, entretanto, esta advertência só diz respeito/atinge muito raramente os significados que o uso comum atribui à palavra... Pois mesmo se forem atribuídos vários significados à mesma palavra, elas são na realidade de uma forma que o uso comum raramente pode confundi-las. Isso também se aplica para os vários significados das palavras, Verdadeiro e Verdade. Não precisamos nos preocupar que elas possam causar confusão. Confusões só podem surgir pelos significados que algum acadêmico tenha proposto, mas que ainda não tenha se tornado uso lingüístico comum.

(1) O primeiro e mais específico (significado, NdT) é o seguinte: nós entendemos como verdadeiras algumas proposições independentemente de se alguém as tenha ou não afirmado se essas proposições afirmam as coisas como elas são. Nesse sentido/significado, usamos a palavra verdade, por exemplo, quando alguém diz que, “das três proposições seguintes: cobras com asas nunca existiram; elas estão extintas; elas existem ainda. Uma delas é realmente verdadeira, mesmo se não sabemos qual.

(2) Este resultado produz um segundo (significado, NdT) quando alguém chama uma proposição verdadeira de uma verdade. Isso acontece por exemplo na expressão ‘*o conhecimento das verdades*’. Porque aqui nós entendemos pela palavras *verdades* as proposições que são verdadeiras. Nesse significado/sentido, coloca-se o falso em oposição ao verdadeiro. Por exemplo, quando alguém afirma sobre as três proposições acima que, enquanto uma das três proposições é verdade, e as outras duas são falsas. Qual desses dois significados da palavra verdade é intensionado, percebemos facilmente dentro do contexto que mostra se somente se fala sobre alguma característica das proposições ou das proposições em si.

(3) Um terceiro significado da palavra verdade aparece quando alguém atribui uma propriedade que pertence à proposição também no *juízo* que esta proposição contém chamando julgamentos que contêm uma proposição verdadeiras eles mesmos julgamentos verdadeiros ou *verdades*. Entretanto, não se precisa deste significado da palavra verdadeiro, e se poderia chamar julgamentos que contêm uma proposição verdadeira também de julgamentos *corretos*. Neste meio tempo, é entretanto bastante óbvio que a expressão um julgamento verdadeiro, não é responsável por nenhuma ambigüidade; e se se compreende pela palavra *verdade* uma mera propriedade de proposições, ou uma proposição em si, ou um julgamento, o contexto mostrará suficientemente claro. Por exemplo, é muito claro que na seguinte conversa “A verdade também pode às vezes ser prejudicial” nós entendemos *verdade* o conhecimento dela, isto é, um julgamento que contém uma proposição verdadeira. se compreende pela palavra ‘verdade’ o conhecimento dela, i.e., um julgamento que inclui uma proposição verdadeira. Verdade neste sentido da palavra é contrastada com erro. Por exemplo, dizemos, “Se a verdade às vezes prejudica, então deve haver erros úteis.”

(4) Num quarto significado, às vezes entendemos pela palavra verdade um conjunto de várias verdades, por exemplo, Jesus disse que ele veio ao mundo para testemunhar a verdade.

(5) Finalmente, entendemos o verbo verdadeiro num quinto significado. Quando nós aplicamos esse atributo não só em proposições e julgamentos, mas também a qualquer coisa se queremos expressar que ele é exatamente o que ele deveria ser de acordo com sua denominação. Nesse sentido, falamos do verdadeiro ou genuíno ou autêntico e chama seu contrário o falso, não autêntico ou só aparente. Por exemplo, disse-se que “Isso é o Verdadeiro Deus”, quando queremos dizer que isso é um ser que não só parece ser Deus, mas realmente é Deus. No mesmo sentido, chamamos um objeto um *bem real* se ele é realmente bom ou também se escuta a expressão “uma mentira verdadeira” que parece contraditória, mas que não significa nada mais do que uma conversa que não só parece ser uma mentira, mas realmente é uma mentira. É fácil entender que este significado da palavra verdadeiro

surgiu como causa de uma mera abreviação. Em vez de falar prolixamente como na seguinte conversa “A proposição que este ser é Deus não só parece verdadeira mas é realmente verdadeira” podemos nos pronunciar mais curtamente dizendo “esse ser é o Deus verdadeiro”. Uma proposição não pode ser produzida devido a esse significado porque o fato de que o verbo verdadeiro é aplicado aqui a objetos que não são proposições nem julgamentos nos deixam entender a realidade desse fato. E o exemplo dada acima mostra como nós temos que compreender esta maneira abreviada de falar.

Anotação 1: (RESUMO) Podemos chamar esses cinco significados da palavra verdade da seguinte maneira. O primeiro pode ser chamado abstrato objetivo, a segunda concreto-objetivo, a terceira subjetivo, a quarta coletivo e a quinta significado secundário.

Anotação 2: De acordo com Sextus Empíricus o verdadeiro originalmente significava alguma opinião que todo mundo deveria reconhecer e em alemão há teorias que acham que a palavra verdadeiro é derivada da palavra perceber.

#### **5.4 § 48 “O Quê o Autor Compreende por Representações (*Vorstellung*) em Si e por Representações (*Vorstellung*) Possuídas”**

(1) Embora anteriormente eu já tenha usado a palavra representações (*Vorstellung*) com freqüência, e às vezes até mesmo em parágrafos que deveriam ser compreensíveis para iniciantes. Mas naquelas ocasiões, ou eu tomei a palavra num sentido que eu poderia pressupor como já conhecido do uso comum, ou, se na ocasião estivesse sendo usado num sentido peculiar meu, isso ocorreu num tal contexto e junto com tal outra proposição que não seria difícil adivinhar o que eu entendo pelo termo. Este conhecimento aproximado, no entanto, não pode ser suficiente para o futuro. Ao contrário, a importância deste conceito e sua dificuldade, ambos demandam que meus leitores fossem esclarecidos por uma

consideração que fosse adequada nesta tarefa. Entender o conceito de uma *representação em si* deveria ser facilitado partindo da palavra representada no sentido comum, que eu chamo de uma *representação subjetiva* ou *possuída*. Portanto, o mais certo é que ambos sejam consideradas juntas para serem tomadas na apresentação da lógica, pois estamos mais inclinados para discutir ambos juntos, na lógica.

### 5.5 § 133 “Proposições Conceituais e Proposições Intuitivas (*Anschauungsaetze*)”

Não importa como se concebem as partes das quais uma proposição deve ser composta, raramente se questionará que há proposições, mesmo proposições verdadeiras, que consistem meramente de conceitos puros, sem nenhuma intuição. Desta natureza são, por exemplo, obviamente proposições do tipo: Deus é onipresente, Gratidão é uma obrigação, a raiz quadrada do número 2 é irracional, etc. Só em seguida veremos que proposições desse tipo, particularmente se são verdadeiras, se distinguem em (*stuecken*) pontos essenciais de outras proposições que contêm também intuições (*Anschauungen*). Parece-me, então, que para objetivos científicos é indispensável designá-las com um nome próprio. Chamarei então proposições de conceitos puros, proposições conceituais ou julgamentos conceituais, e também, se forem verdadeiras, verdades conceituais. Todas as outras proposições, que contêm uma ou mais intuições, serão chamadas proposições intuitivas, em razão dessas circunstâncias. Também são chamadas de proposições empíricas, proposições perceptuais ou de alguma forma semelhante. Então, por exemplo, eu chamarei proposições como “Isso é uma flor”, “Sócrates era ateniense de nascimento”, de proposições intuitivas (*Anschauungsaetze*), pois cada uma delas contém uma ou mais idéias intuitivas.

Nota:

O motivo mais importante para a distinção entre proposições conceituais e proposições intuitivas da forma como eu expliquei é que as verdades em um discurso científico – especialmente quando eles não servem apenas para a convicção, mas também para a indicação dos seus fundamentos objetivos – deveriam ser tratadas de uma forma diferente se contêm apenas conceitos ou se contêm também intuições. Nós podemos procurar os fundamentos de

uma verdade puramente conceitual somente em outras verdades conceituais. O fundamento de uma verdade empírica, no entanto, pode também se assentar pelo menos em parte nos objetos aos quais as intuições se referem. No entanto, em virtude da importância da distinção entre verdades conceituais e empíricas, seria muito estranho que essa distinção tivesse escapado dos lógicos. Ao passo que é permitido resmungar que nos livros didáticos da lógica essa distinção não foi tratada com toda a clareza, por outro lado nós temos que admitir que os filósofos antigos já tinham estabelecido esta distinção.

Já Platão faz uma grande diferença entre os conceitos puros (*νοησις*) e representações empíricas ou intuições (*φαντασται*). Ele já exigiu de uma ciência (*επιστημη*), especialmente de uma ciência pura (*χαθαρα*), que trata do imutável – que seus teoremas fossem derivados não da experiência, mas de conceitos puros. Viu o pensamento puro sendo ocupado somente com conceitos, nos quais eles são analisados, combinados, dentre outras coisas, sem nenhuma atenção dada à percepção sensível (intuição). Faltava o que então, exceto ele não ter designado o conceito de proposições compostas de meros *νοησεσ* e a noção de outras proposições nas quais não é o caso com seus nomes próprios, para melhor fixá-los? E isso não era algo a ser esperado dele de forma alguma, porque ele nunca buscou uma especificação precisa dos componentes das proposições e geralmente falou somente de conceitos ou idéias e vez dede proposições.

De Aristóteles, ao contrário, nós sabemos plenamente que ele distinguiu entre proposições universais, (*ποστασεισ χαθολυ*, que são certamente nada além de proposições consistindo de conceitos puros) e outras (como, por exemplo, na *Analytica posteriora* I, cap. 7). E com base nisso, ele insistiu que não podemos provar proposições que tenham apenas coisas perecíveis (*σθαρτον*, coisas empíricas, intuição).

Locke (Ensaio, B.4, Cap. 3, § 31. Cap.4 § 6. 16 e outros lugares) não somente concebeu a distinção entre proposições conceituais e empíricas com grande clareza, mas também distinguiu as ciências para as quais elas são respectivamente características e sustentou que a primeira confere certidão completa e, a última, nada além de probabilidade. Agora, apesar de eu não poder concordar incondicionalmente com esta afirmação – ou seja, que as ciências empíricas só contêm verdades probabilísticas – parece-me mesmo assim que essa é uma visão muito correta da distinção entre proposições empíricas e conceituais. Todo julgamento da experiência (e deles consiste a maior e mais importante classe dos julgamentos

empíricos) é mero julgamento de probabilidade, porque resulta de uma premissa maior que tem apenas probabilidade.

Julgamentos conceituais, por outro lado, são meramente prováveis somente em uma via accidental, somente no caso em que não estamos completamente seguros de que não estamos cometendo um erro em sua derivação ou se não estamos seguros de que não são derivados da mera experiência.

Crusius (W. z. G. §§ 222. 231) não somente falou da distinção entre esses dois tipos de julgamentos, mas também propôs nomes próprios para eles e recomendou que recebessem maior atenção dos filósofos. Ele chamou “proposições com um sujeito que é um indivíduo ou coleção de indivíduos, como por exemplo, a terra é redonda, ou os gregos conquistaram Tróia, *proposições individuais*, as outras, *proposições universais*”. Sobre estas últimas, ele disse “que elas são, ou de abrangência infinita, se falam de conceitos gerais dos quais todas as características particulares foram removidas, por exemplo, “todos os corpos são compostos” – (estas são as proposições que eu chamo de proposições conceituais), ou de alcance finito, se elas são conjuntos de proposições individuais, por exemplo, “todos os planetas de nosso céu são menores do que o sol”. É importante notar esta distinção, Crusius diz mais adiante, “porque proposições universais de alcance infinito” (proposições conceituais) “devem ser provadas de uma forma diferente. Sua verdade deve ser provada, ou com conceitos, ou com uma base externa, porém necessária. Essa necessidade pode ser provada com base em conceitos” (e então sua verdade é novamente provada com base em conceitos) “ou dos atributos de Deus” (esses também serão, igualmente, conhecidos por meio de conceitos). É inequivocamente evidente dessas proposições que Crusius tinha imaginado a distinção entre proposições conceituais e empíricas. De acordo com minha opinião, seu único erro foi, não tendo uma clara concepção de intuição, tê-la confundido com idéias particulares, e assim também acreditou que intuições só se encontram no lugar do sujeito da proposição, e nunca no lugar do predicado. Nos tempos modernos, quando a compreensão da distinção entre conceitos e intuições tem sido mais nítida do que antes, certamente também a distinção entre proposições conceituais e empíricas seria mais clara se as seguintes circunstâncias não tivessem causado o fracasso de sua correta explicação. (Pelo menos é isso o que eu penso). A divisão do nosso conhecimento entre aqueles que sabemos somente pela experiência e aqueles que não requerem nenhuma experiência era já familiar para os filósofos antigos (mas eles não deram suficiente atenção a isso) e foi destacada especialmente por Leibniz e Kant como uma das mais importantes distinções. Mas acontece, no entanto, que a divisão de nossos

conhecimentos quase coincide com a divisão entre proposições conceituais e empíricas, já que verdades da maioria das proposições conceituais podem ser decididas por mero pensamento sem nenhuma experiência, ao passo que proposições que incluem uma intuição podem, em geral, serem julgadas somente com base na experiência. Então aconteceu que se achava que a diferença essencial entre essas proposições deveria se encontrar, nem tanto na natureza de seus componentes, como na forma com que nós nos convencemos de sua verdade ou falsidade. Deste ponto-de-vista as primeiras seriam definidas como aquelas que podem ser conhecidas sem nenhuma experiência, e as últimas, no entanto, como aquelas que requerem experiência, e de acordo com isso são chamadas: julgamentos *a priori* e *a posteriori*. (Ver, por exemplo, a Introdução à *Crítica da Razão Pura*, de Kant). Eu concordo que essa distinção é suficientemente importante para ser mantida para sempre, mas eu acredito que não deveríamos ignorar a outra distinção, que não depende da mera relação de proposições com nossas faculdades cognitivas, mas de seu caráter intrínseco. Na verdade, eu acredito que esta última, ou seja, a questão se uma proposição é construída à base de conceitos puros foi, na minha opinião, a base verdadeira da distinção entre o *a priori* e o *a posteriori* e eu me permito sustentar que tenha realmente sido a última divisão que eles tiveram em mente, sem estarem claramente conscientes disso. Pois se fosse realmente entendido corretamente daquilo que fora concebido sob o título julgamentos *a priori*, fosse realmente apresentado corretamente mediante a sua definição como cognições que são independentes de toda experiência, então quase não teria sido necessário adicionar outros atributos pelos quais julgamentos *a priori* poderiam ser reconhecidos, particularmente a necessidade e a universalidade. Agora, se uma proposição é estritamente universal ou não, e se poder-se-ia dizer que o predicado que ela atribui ao seu sujeito se estende para ela com necessidade ou não, são assuntos que dependem do caráter intrínseco da proposição em si e não se referem às suas relações com nossa faculdade cognitiva. Também não há dúvida de que desde que Kant explicitamente disse que toda proposição matemática pertence aos julgamentos *a priori*, a essa classe de julgamentos também pertencem as proposições matemáticas que nós, no momento, não podemos reconhecer; por exemplo, uma fórmula que permita calcular todos os números primos, e por outro lado, ele poderia ter designado outras certas proposições, por exemplo, a resposta à questão acerca do que os habitantes de Urano estão fazendo exatamente agora, à classe de proposições empíricas, muito embora não há experiências que nos levem a tomar uma decisão sobre essa questão.



Beck (Lógica, § 67) explicitamente nos alerta que um julgamento pode ser objetivamente *a priori*, mesmo sendo subjetivamente só *a posteriori*; eu não acredito que possamos discordar disso. Resulta desse fato que as circunstâncias que decidem que um julgamento é *a priori* ou não deveria ser considerado como uma característica objetiva do próprio julgamento. Conseqüentemente, deveria ser definido de uma forma objetiva, e não deduzida do julgamento com nossas faculdades cognitivas. Que os dois critérios, o de universalidade e o de necessidade, não são aptos para nosso objetivo, no entanto, já está claro por eles poderem ser aplicados somente a proposições *verdadeiras*. Apesar disso, todos os lógicos declaram a proposição, “alguns números são números primos”, como sendo uma proposição particular, e a maioria deles declara problemática a proposição, “todos os seres finitos são falíveis”. Mesmo assim, ambas as proposições são puramente *a priori*. Na verdade, em § 182 espero mostrar que o conceito de necessidade deve ser definido e que já pressupõe a distinção entre verdades *a priori* e outras.

## 5.6 § 148 “Proposições Sintéticas e Analíticas”

(1) Da Seção anterior, ficou claro que há proposições que são, de acordo com sua natureza, verdadeiras ou falsas se certas partes delas são consideradas variáveis. Mas a mesma proposição, que tem esta característica quando somente idéias *i, j, ...* são vistas como variáveis, não reteria isso (o valor de verdade) quando outras idéias diferentes são vistas como variáveis. Em particular, é fácil entender que nenhuma proposição poderia ser constituída de tal forma que a propriedade de que fosse verdadeira se *todas* as idéias das quais ela consiste são variáveis. Pois se pudéssemos mudar todas as idéias (constituintes) de uma proposição de acordo com nossa vontade, então nós poderíamos transformá-la em qualquer outra proposição e conseqüentemente resultariam destas transformações às vezes proposições verdadeiras, e às vezes proposições falsas. Mas se existir uma única idéia numa proposição que podemos variar arbitrariamente sem mudar sua validade ou falsidade, ou seja, se todas as proposições produzidas substituindo esta idéia por qualquer outra idéia que quisermos são, ora todas verdadeiras, ora todas falsas, pressupondo apenas que tenham denotação; então esta proposição é suficientemente interessante para ser distinguida de qualquer outra. Assim, me

permito chamar tais proposições - pegando emprestado de Kant a expressão – *analíticas*. Todas as outras, nas quais não há uma única idéia que possa ser arbitrariamente variada sem afetar sua veracidade ou falsidade, chamarei *proposições sintéticas*. Então, por exemplo, eu poderia chamar as proposições “Um homem moralmente mau não merece respeito” e “um homem moralmente mal de forma alguma goza de eterna felicidade”, um par de proposições analíticas. Em ambas, existe uma certa idéia, ou seja, a idéia de um homem, para a qual podemos substituir a idéia que quisermos, por exemplo, anjo, ser, etc., de tal forma que a primeira (somente se tem denotação) é sempre verdadeira e a segunda sempre falsa. Em contraste, nas proposições “Deus é onisciente”, “um triângulo tem dois ângulos retos”, eu não poderia apontar idéia alguma que poderia ser arbitrariamente variada de maneira que a primeira permaneceria constantemente verdadeira e a última constantemente falsa. Conseqüentemente para mim, esses seriam exemplos de proposições sintéticas.

(2) Existem alguns exemplos bem gerais de proposições analíticas que são também verdadeiras:  $A \text{ é } A$ ,  $A \text{ que é } B \text{ é } A$ ,  $A \text{ que é } B \text{ é } B$ ,  $\text{Todo objeto é ou } B \text{ ou não } B$ , etc. Proposições do primeiro tipo, ou daquelas incluídas sob a forma  $A \text{ é } A$  ou  $A \text{ tem (a propriedade) } a$ , nós costumamos identificar por um nome próprio como proposições *idênticas* ou *tautológicas*.

(3) Os exemplos de proposições analíticas que citei são diferenciadas das dadas em (1) pelo fato de que nada é necessário para julgar a natureza analítica das primeiras a não ser seu conhecimento lógico, porque os conceitos que fazem a parte invariante destas proposições são todas lógicas. Mas julgar a veracidade ou falsidade de proposições como aquelas em (1) requer um tipo bem diferente de conhecimento, porque conceitos não lógicos entram aqui. Para ter certeza, esta distinção tem sua ambigüidade, porque a área dos conceitos lógica não é tão claramente delimitada que não poderia ser assunto de uma divergência. Às vezes poderia ser útil prestar atenção a esta distinção, e assim poderíamos chamar proposições como aquelas em (2) *logicamente* analíticas ou analíticas no sentido *mais estrito* e aquelas em (1), por outro lado, analíticas no *sentido mais amplo*.

Nota 1: Decidir se uma proposição é analítica ou sintética exige um pouco mais do que um olhar superficial nas palavras. Uma proposição pode ser analítica, até mesmo logicamente

analítica, ou até mesmo idêntica, mesmo que sua representação em palavras não indiquem isso. E, por outro lado, existem proposições que aparecem, de acordo com suas palavras, como se fosse analítica ou mesmo idêntica, mas, de acordo com o sentido, é sintética. Por exemplo: não é fácil ver que a proposição, “todo efeito tem sua causa”, seja idêntica, ou pelo menos analítica, como ela realmente é. Porque se nós entendemos por um ‘efeito’ algo efetuado por alguma outra coisa, e para a expressão, causa, uma coisa efetuando uma outra coisa, então esta proposição só significa: “O que é efetuado por uma outra coisa é efetuado por uma outra coisa”. – O mesmo se aplica às proposições:: Se A é maior que B, então B é menor do que A; se  $P=Mxm$ , então  $M=P/m$ ; e várias outras. Por outro lado, há várias proposições que sempre têm sido elevadas ao status de provérbios do dia-a-dia, que parecem muito analíticas, ou até mesmo tautológicas, sem realmente sê-lo. Por exemplo, já foi dito antes que “o que é mau, é mau”, e literalmente esta é uma tautologia vazia, claro. Mas sobre o que alguém está realmente pensando com estas palavras, o que ela quer dizer com elas, deveria ser algo muito diferente e ainda diferente em circunstâncias diferentes. Uma pessoa poderia, usando esta proposição, querer indicar que ela não poderia falar de uma outra maneira de algo que ela acha ruim.

Outra pessoa poderia ter a intenção de chamar à mente o fato de que o esforço de colocar o mau numa boa luz é sempre um esforço vão, porque cedo ou tarde sempre se saberá isso para o que isso é, etc., etc. O mesmo acontece com a proposição “Mesmo um homem educado é um homem” que Leibniz introduz (Novos ensaios L. IV Cap.8) como um exemplo de uma proposição idêntica (ou, na realidade, analítica) “que não é inútil”. No sentido em que se interpreta isso quando se acha útil, ela não é analítica. A interpretação neste caso é: Mesmo um homem educado é falível. O mesmo torna verdadeiro o segundo exemplo de Leibniz: *civis potest accidere, quod quicam potest*. Então, também, *δγεγραφα*, *δγεγραφα* (o que eu escrevi, eu escrevi, NdT) de Pilatos não era uma tautologia, mas tinha o sentido: o que eu escrevi eu nunca mudarei. Mais ainda, outros já tomaram nota do fato de que proposições aparentemente idênticas não eram sempre realmente idênticas, em particular Reusch (Syst. L. § 62).

Nota 2: Alguns lógicos, Krug entre eles (L. § 62), aplicam a palavra, *idêntica*, pela qual eu designei uma propriedade *intrínseca* de algumas proposições, como significando uma mera relação entre várias proposições, chamando julgamentos que eu chamo de equivalentes em §156 de idênticas. Entre os lógicos que utilizam o mesmo conceito que eu para esta palavra,

aqueles que mais se aproximaram à explicação que eu tenho dado são aqueles como Wolf (L. § 213), Maass (§ 220) e outros que dizem que proposições idênticas são proposições nas quais sujeito e predicado representam a mesma idéia. A única razão pela qual eu não posso concordar com esta definição sem modificações é que, como eu vejo a questão, a proposição, A é A, não tem a idéia de A como sua idéia de predicado, mas ao contrário a abstractum (o símbolo, NdT) correspondente a ela. Por isso eu disse que uma proposição é idêntica quando seu sujeito é um concreto, e a afirmação é o abstractum correspondente. Mas, se outros, por exemplo, Lambert (Dian §124), Kiesewetter (W. A. d. L. § 109 e §134), Klein (§158), entendem a essência de julgamentos idênticos no fato de que seu sujeito e predicado são *idéias com a mesma extensão*, ou seja, idéias com a mesma extensão, então isto é um totalmente errado. Porque, neste sentido, um julgamento como “Um triângulo é uma figura com a soma dos ângulos igual a dois ângulos retos”, deveria que ser chamada de proposição idêntica, o que certamente não é. Ainda há outros que dizem que proposições idênticas são *equações*. Mas obviamente elas não são, se entendemos por equação o que é conhecido na utilização da linguagem comum por expressões de equivalência ou igualdade, porque nessas proposições nem precisa aparecer o conceito de uma igualdade ou equivalência.

Nota 3: É notável que enquanto alguns filósofos consideram nossos pensamentos como sendo nada mais que uma coleção de julgamentos idênticos (ou ainda analíticos), outros assumem a posição oposta e vão tão longe ao nunca conceder o título de proposições a qualquer proposição idêntica de forma alguma. Maimon (L. P. 55) fez isso dizendo sem conceder às proposições idênticas o status de fundamentos. Ele não estava errado, mas por quê negar, por causa disso, a elas o nome de proposições? Keckermann disse L. 1. 2, séc.. 1: *Identicae propositiones per se non sunt*. (proposições idênticas não existem) E assim por diante.

Nota 4: Uma distinção mais ou menos similar à que estou fazendo aqui entre julgamentos analíticos e sintéticos já era conhecida pelos lógicos antigos. Por exemplo, Aristóteles (Sofistas c. 3) considerava um erro dos sofistas: *το πολλακις ταυτο λεγειν*. Locke (Ensaio (B.4, C.8) utiliza o conceito de proposições fúteis), que ele define como aquelas que não nos instruem, e enumera dentre elas (a) todas as proposições idênticas e (b) todas as proposições que afirmam uma parte de uma idéia composta. Vemos que ele tem em mente os julgamentos analíticos, e ainda mais claramente que o próprio Kant. Mas um importante erro

ocorre, quando Locke acrescenta que todas proposições são da forma que o sujeito é a espécie e o predicado é o gênero. Pois nem todo conceito de espécie é composto de conceito de gênero. – Schmidt já notou que Crusius (W. z. G. 260) compreendeu a distinção entre proposições analíticas e sintéticas como Kant o fez, em sua ocasião. Mas mesmo que seja verdade que esta distinção já fora mencionada tempos antes, certamente ela nunca tinha sido fixada claramente e aplicada de forma fértil. O mérito de ter sido o primeiro a fazer isso indiscutivelmente se deve a Kant. Mesmo assim, me parece que as explicações desta distinção com que nos confrontamos, seja nos escritos de Kant ou nos outros, ainda sofre de baixa precisão lógica. Por exemplo, se lemos na *Lógica* de Kant (§36) que proposições analíticas são aquelas em que a certidão se baseia na identidade do conceito do predicado com a noção do sujeito, isto é aplicável no máximo a proposições idênticas. Se for dito, como na *Crítica da Razão Pura* (Introdução §4) e em outros que nos julgamentos analíticos o predicado está contido no sujeito (implicitamente), ou pelo menos não está fora dele; ou como disse Fries (Syst. D. L. P. 184) “que o predicado somente repete as idéias do sujeito”; ou como Ulrich (Log. §9), Jacob (L. §659), E. Reinhold (L. §82) e outros, que o predicado já está pensado (*implicitamente*) no sujeito; ou com Gerlach (L. §70) que o conceito do sujeito é determinado só parcialmente; ou com Rösling (L. §68) que o predicado é uma idéia parcial ou num julgamento negado é só uma negação do conceito de sujeito, e coisas parecidas; estas são em parte meramente formas figurativas de expressão que não analisam o conceito a ser definido, em parte expressões que admitem interpretações muito amplas). Sobre tudo que tem sido dito aqui pode-se também ser dito de proposições que ninguém poderia aceitar como analíticas, por exemplo, O pai de Alexandre, Rei da Macedônia, foi Rei da Macedônia; Um triângulo similar a um triângulo isósceles é também isósceles, e coisas do tipo, particularmente que a idéia do predicado é nada além de uma repetição de um dos componentes da idéia do sujeito, está incluída nela, se assenta junto com ela, está concebida nela, etc. Este infeliz estado das coisas poderia ter sido evitado se as pessoas dissessem que em julgamentos analíticos o predicado é uma das partes essenciais do sujeito ou (ou uma das características essenciais dela) e se nós entendemos entre essenciais aquelas que são contidas no conceito de sujeito, como fizeram (Phil. Mag. V. I, §3, no.4), Maass (ibid. V. II, §1, No. 2, cp. Log. § 210), Krug (L. § 67, Nota 1) e outros. Mas esta explicação é aplicável somente a um tipo de julgamentos analíticos, somente aqueles da forma: A que é B é B. Não haveria outros também? Não deveríamos contar o julgamento, A que é B é A, e também os julgamentos, Todo objeto é B ou não B, entre julgamentos analíticos? Em geral me parece que eles não destacaram aquilo que é *importante* neste tipo de proposições. Isto (o que torna tal tipo de julgamento

importante), consiste no fato de que sua veracidade ou falsidade não depende das idéias particulares das quais elas são constituídas, mas permanece a mesma não importa quais mudanças são feitas em algumas delas, pressupondo somente que não destruimos o sentido (Gegenstaendlichkeit) da proposição. Somente por esta razão eu dei a definição acima, muito embora eu saiba que isso torna o conceito destas proposições algo mais amplo do que é ordinariamente concebido, pois proposições como aquelas citadas em (1) não são ordinariamente contadas como analíticas. Ao mesmo tempo, me pareceu útil interpretar ambos conceitos, das proposições analíticas assim como as sintéticas, tão largamente que não somente as proposições verdadeiras como também as falsas poderiam se incluídas sob elas. – Ainda, não importa qual definição possa ser aceita, em caso algum, acredito eu, poder-se-ia ser induzido a conceder que a distinção entre julgamentos analíticos e sintéticos é meramente subjetiva, e que o mesmo julgamento pode ser às vezes analítico, às vezes sintético, dependendo do conceito do objeto que formulamos. Isso é exatamente o que fizeram muitos lógicos, por exemplo Platner (Phil. Aph. B. 1, §§510, 512), Maass (em Eberhard's Phil. Mag., V. II, Pt. 2, No. 2), Krug (L. § 67, Nota 1), Hillebrand (L. § 295, Nota 1), Schultz (Prf. K. Kant., Kr., Pt. I, p. 32), E. Reinhold (L. § 82, Nota 1), Beneke (L. §58), Troxler (L., Vol. I, p. 277) e outras fizeram. Por exemplo, Maas disse (loc. Cit.): “O triângulo pode ser definido como uma figura na qual a soma dos ângulos é dois ângulos retos. Neste caso, a proposição, a soma dos ângulos é dois ângulos retos, que é vista como sintética na definição usual, se torna analítica”. Eu tenho uma opinião diferente sobre o assunto. Como o que eu entendo por uma proposição não é uma mera combinação de *palavras* que afirma algo, mas o sentido desta afirmação, então eu não admito que a proposição, a soma dos ângulos de um triângulo, etc., permanece a mesma quando eu designo à palavra, triângulo, num momento um conceito e noutro momento outro (conceito). Tampouco como quando nós dizemos, “Euclides era um matemático famoso”, nós podemos pensar sobre o nome Euclides como representando o homem que pensou a geometria para Alexander na época de Ptolemy Soter, como outro Euclides de Megara, o estudante de Sócrates. É verdade que no exemplo anterior ambas idéias se referem a um mesmo objeto, aqui se referem a objetos diferentes, mas para proposições serem reconhecidas como distintas é suficiente que elas sejam compostas de idéias diferentes, mesmo que tenham o mesmo objeto.

## 5.7 §198 “O conceito de Relação de *Abfolge* (Fundamento-Conseqüência) entre Verdades”

De todas as relações que valem entre verdades, a mais digna de atenção em minha opinião é a de fundamento e conseqüência, em virtude da qual certas proposições são *fundamentos* de certas outras proposições e as últimas suas *conseqüências*. Já tive a ocasião de falar desta relação várias vezes (particularmente em §162), mas aqui é o lugar no qual eu deveria me concernir com isso em detalhes. Antes de mais nada vamos estabelecer propriamente tal *conceito*. Quando comparamos as seguintes três verdades:

“Alguém nunca deveria preferir sua própria vantagem a uma maior vantagem de outra pessoa”;

“Uma pessoa está preferindo sua própria vantagem a uma maior vantagem de outro quando esta pessoa destrói o que é necessário para satisfazer os requerimentos essenciais necessários para a vida de uma outra pessoa somente para produzir um desnecessário prazer físico para si mesmo”.

“Uma pessoa nunca deveria destruir o que é necessário para outra satisfazer seus requerimentos essenciais para a vida somente para procurar um desnecessário prazer físico”.

uma com a outra, nós brevemente poderíamos nos conscientizar de que as duas primeiras têm uma relação muito distintiva com a terceira. Isto afirma sua existência na forma correta pelo fato de que nós passamos a ver a última verdade com a máxima clareza e distinção quando temos previamente reconhecido as duas primeiras e trazido elas diante de nossa consciência.

Em consideração posterior se torna claro (pelo menos eu penso assim) que a essência da relação ainda não está totalmente expressa pelo efeito mencionado, particularmente que a última verdade pode ser conhecida das duas primeiras. Pois este é também o caso com verdades que é óbvio que não se devem à relação daquelas consideradas acima. Então, por exemplo, é também apropriado dizer das três verdades:

“Se o termômetro está mais alto, faz mais calor”;

”No verão o termômetro costuma estar mais alto do que no inverno”:

“No verão costuma ser mais quente que no inverno”;

que nós conhecemos a última tão logo conhecemos as duas primeiras e as trazemos diante de nossa consciência. Ao mesmo tempo, quem não sentiria que a relação entre as verdades no primeiro exemplo é bem diferente daquela na qual as verdades do último exemplo se assentam? Se nós estamos supondo expressar o caráter distintivo daquela primeira relação em palavras, nos sentimos quase forçados a chamá-la uma relação entre *fundamento* e *conseqüência*, dizer que as duas verdades naquele exemplo são o *fundamento* da última e que esta é a *conseqüência* delas. Nós não precisamos fazer a mesma afirmação no segundo exemplo, se queremos falar precisamente. Para ter certeza, estamos acostumados a usar a locução “A verdade de que é mais quente no verão do que no inverno está *fundamentada* na [baseada na] verdade de que o termômetro está mais alto no verão do que no inverno”, às vezes. Mas logo modificamos nossa afirmação. Na verdade nós apenas falamos do *conhecimento* destas verdades, nós somente quisemos indicar que o *conhecimento* de uma destas verdades produz o conhecimento da outra. Mas que a primeira verdade é dentro e a partir de si mesma o fundamento da última é uma afirmação que nós estamos tão pouco inclinados a fazer que certamente nós reconhecemos que exatamente a relação oposta é válida. Agora, já que todos verão por si mesmos que o exemplo acima não é o único do tipo, eu concluo que existem verdades que se assentam em uma tal relação umas com as outras que não temos melhor forma de identificar em termos de utilização lingüística do que por meio de uma relação de *fundamento* e suas *conseqüências*... Pressupondo isso, como o exemplo citado nos recorda, é freqüentemente não uma única verdade, mas todo um conjunto de verdades que se assentam na relação de fundamento e conseqüência com uma ou todo um conjunto de várias verdades, será permitido chamar as verdades individuais que preparam um tal conjunto de fundamentos parciais e conseqüências parciais, de fato, sempre simplesmente fundamentos e conseqüências em si mesmas, se nós apenas tomamos certo cuidado para que o duplo sentido destas palavras não nos leve a nenhuma confusão. Por exemplo, onde falamos de fundamentos e conseqüências que não são meros fundamentos parciais e conseqüências



parciais, para a obtenção de maior clareza chamá-las fundamentos e conseqüências completos. Finalmente, porque acontece com muita freqüência que nós pensamos em fundamentos cognitivos e conseqüências cognitivas de forma meramente subjetiva, i.e. de verdades cujas premissas produzem conhecimento ou se originam delas como conclusão, em conexão com as palavras, *fundamentos* e *conseqüências*, nós também chamaremos os fundamentos e conseqüências às quais nos estamos referindo agora objetivamente de fundamentos e conseqüências às vezes, para indicar que sua relação existe no meio de verdades *em si mesmas*, independentemente de nosso pensamento.

### **5.8 § 206 “Pode um Fundamento Ter Várias Conseqüências ou Uma Conseqüência Vários Fundamentos?”**

De acordo com o conceito da relação de *derivabilidade* que já estabelecemos, diversas conclusões podem decorrer das mesmas premissas e a mesma conclusão pode ser derivada de diversas premissas. Não acontece exatamente o mesmo com a relação de *fundamento* e *conseqüência* (*Abfolge*). Porque já foi deixado claro na seção anterior que não existem várias conseqüências decorrentes de um fundamento dado, a não ser que as compreendamos como sendo meramente conseqüências parciais. Nada menos que todas as verdades que têm a relação fundamento-conseqüência relativamente a certas verdades dadas constituem suas conseqüências completas. Inversamente, pode-se acreditar que é possível encontrar exemplos em que a mesma conseqüência é obtida de fundamentos diferentes, como efeitos de causas diversas. Então o comandante Thou não deveria mentir, pode ser derivado da lei moral maior de uma grande variedade de formas, particularmente citando cada um dos vários tipos de danos que a mentira causa para o bem-estar, e cada uma destas derivações poderia merecer ser chamada de uma relação de fundamento e conseqüência. É bem conhecido que existem também um número infinito de diferentes combinações de duas ou mais forças mecânicas que são chamadas equivalentes umas com as outras porque, como causas, elas têm como efeito movimentos completamente idênticos. E em termos da conexão entre fundamentos e causas que foi assumido acima (§201), decorre que causas equivalentes pressupõem fundamentos equivalentes. Entretanto, tudo o que esses exemplos provam, quando examinados mais

proximamente, é que fundamentos diferentes podem ter *alguma mesma consequência parcial*. Mas eles não mostram que *todas* suas *conseqüências* são iguais. A consequência completa que certas verdades A, B, C, D,... têm inclui, dentre outras coisas, a verdade “que cada uma das proposições A, B, C, D,... seja verdadeira”. Esta, no entanto, é uma consequência (uma consequência parcial) que obviamente nenhum outro conjunto de verdades tem, mas somente e precisamente este conjunto. Então, é claro que todo fundamento distinto tem uma consequência que é pelo menos em certas partes distintas em si mesmas.

### **5.9 § 213 “Pode a Conseqüência da Conseqüência Ser Considerada uma Conseqüência do Fundamento?”**

É uma importante característica da relação de derivabilidade que proposições deriváveis de certas conclusões podem também ser vistas como conclusões das premissas das quais as primeiras são derivadas (§ 155 (24)). Aqui deve existir alguma discussão sobre se isso é igualmente verdadeiro para a relação de *fundamento* e *conseqüência*. Qualquer que responda a esta questão afirmativamente se permite chamar de C a consequência da consequência parcial de A, e A, por outro lado, o fundamento – ou fundamento parcial – de A e C a consequência parcial de B. Devo confessar que o uso lingüístico predominante favorece isto. Porque normalmente não fazemos objeção alguma em chamar uma verdade de consequência de uma outra quando ela é, na verdade, somente uma consequência de sua consequência; e analogamente dizemos que vários fenômenos são efeitos de um objeto, embora saibamos que eles são, na verdade, somente efeitos de seu efeito. Assim, chamamos todos os teoremas estabelecidos pelos geômetras de consequências daquelas poucas proposições básicas das quais elas nos parecem ter sido derivadas, mesmo de uma forma indireta. Analogamente, chamamos de morte final de um alcoólatra um efeito da bebida gelada pela qual ele contraiu a doença um dia. Mesmo com tudo o que este ponto-de-vista tem em seu favor, eu não posso abrir mão de duvidar de sua correção. Me parece que a relação de fundamento e consequência é de um tal tipo que não se pode dizer de uma consequência de uma consequência, somente por ser uma consequência de uma *conseqüência*, que ela seja a consequência do *fundamento* de seu fundamento, sem alterar o conceito.

Se nós adotamos o ponto-de-vista usual, devemos dizer – contra o que dissemos em § 206 – que a mesma conseqüência tem vários fundamentos. Porque poderíamos dizer agora não somente o que é realmente o seu fundamento, mas também o fundamento deste fundamento, etc., como sendo *fundamentos* dela. E assim o mesmo *efeito* deveria ter não somente *causas parciais* mas várias *causas completas*, também. Porque, supondo que as várias realidades a, b, c,... juntas contêm a causa completa das realidades m, n, o,... e que elas contêm a realidade completa de r. Então o fundamento completo da verdade, r *existe*, e o fundamento completo destas verdades nas verdades, a existe, b existe, c existe, .... Agora, se o fundamento de um fundamento é também o fundamento de suas conseqüências, então o fundamento completo da verdade, r existe, também se baseia no conjunto de verdades, a existe, b existe, c existe, ... Consequentemente, a existência das coisas a, b, c, já inclui uma causa completa da existência da coisa r. Assim, nós temos uma causa completa de r tanto em m, n, o,... quanto em a, b, c,.... Então, um mesmo objeto tem mais de uma causa completa de sua existência. Deveríamos, definitivamente, aceitar isso? Não deveríamos então nos justificar em dizer que *várias* causas (pressupondo que elas não são causas parciais, mas causas completas) devem também produzir vários *efeitos*?

### **5.10 §221 “Alguns Sinais Que Indicam Se Certas Verdades Estão Na Relação De Uma Dependência Uma Com Outra”**

Nada seria mais desejável para a lógica do que a identificação de alguns sinais universais que indicam se certas verdades dadas estão na relação de *Abfolge*, ou pelo menos de uma dedutibilidade, ou não. Ou seja, se temos que considerar uma destas verdades como fundamento, ou fundamento parcial, das outras, ou pelo menos como uma verdade auxiliar ou não. Mas, sobre este assunto, não sei dizer mais do que algumas conjecturas.

(1) Em primeiro lugar, me parece que a distinção feita no parágrafo 133 entre proposições conceituais e proposições empíricas poderia ser aplicada aqui. Verdades conceituais que só contêm conceitos puros parecem ter a característica que dependem sempre de verdades puramente conceituais, e nunca de proposições empíricas. É verdade que verdades empíricas, ou seja, experiências, muitas vezes poderiam ser úteis para o reconhecimento de uma verdade

conceitual, mas o fundamento objetivo de uma verdade deste tipo pode nunca ser encontrado neles, mas sempre numa outra verdade conceitual se existe um fundamento.

(2) Também acredito que cada verdade conceitual da qual uma outra é dependente nunca poderia ser mais complexa do que outra, mesmo que não seja simples. As proposições constituindo o fundamento objetivo de uma verdade é uma verdade conceitual. Nunca podem ter mais partes simples do que estas verdades. Por exemplo, nunca permitir-me-ia reconhecer uma relação de *Abfolge* no silogismo comum

O que tem a tem b

O que tem b tem c, então,

O que tem a tem c,

se o conceito a é mais composto do que b, ou b mais composto do que c, porque no primeiro caso seria a segunda premissa mais complexa, e no segundo a primeira premissa mais composta do que a consequência. Mas em geral eu não quero esta afirmação aplicada também nas proposições empíricas, porque eu observo nelas casos que contradizem esta afirmação. Porque quando J é uma idéia simples que se refere só a um único objeto existente, ou seja, se J é uma intuição, então, sem dúvida alguma, existe um conjunto infinito de verdades que tem essa idéia J como seu fundamento e, no seu predicado, alguma característica desse objeto. Por exemplo, se J designa um grito que escuto, a verdade que esse grito me obriga a olhar é qual pessoa em perigo deu este grito. E essa verdade tem seu fundamento em outras verdades; por exemplo, que esse grito tem uma semelhança com um grito de socorro. Mas é fácil entender que num caso desses o fundamento completo de uma verdade como J é B nunca pode ser encontrado numa verdade particular da forma J é A, mas sempre somente numa combinação dessa com uma outra da forma “cada A é um B”. A proposição J é B é sempre um pouco mais simples do que A é B, mesmo se a idéia a – ou seja, ao abstracto que pertence ao concreto A.

(3) Se aceitarmos as afirmações (1) e (2), e também a suposição do parágrafo 78, que existe somente um conjunto finito de conceitos simples, então seria fácil provar a respeito das proposições conceituais a afirmação do parágrafo 214, que existem verdades sem fundamentos. Se o conjunto de todos os conceitos é simples e finito, então o conjunto de todas as verdades conceituais que não superam um certo grau de complexidade, que por exemplo não conte mais do que M partes, seria finito. Agora, se alguém quisesse afirmar que cada verdade conceitual tem seu fundamento, então esta pessoa deveria também afirmar que toda

verdade, como por exemplo, M, se baseia num conjunto infinito de verdades auxiliares, porque se cada justificação exige mais uma justificação, e assim até o infinito, então o conjunto das proposições das quais esta verdade depende seria infinito. Mas, se estas verdades auxiliares são todas proposições conceituais, e não são mais compostas do que a verdade de que falamos, então isso contradiz o que foi dito. Então, seria resolvido que pelo menos no campo das verdades conceituais existem *verdades genuinamente fundamentais*. Se o leitor aceita tudo isso, então eu vou arriscar ainda a afirmar o seguinte: se nós pensamos todas as verdades conceituais cuja complexidade não supera um certo limite (por exemplo, 100 partes) juntos num único conceito, então resulta do que foi dito acima que uma verdade que pertence a este conjunto que não é ela mesma uma verdade básica encontra seu fundamento completo neste conjunto de verdades, e não somente seu fundamento aproximado, mas todos os seus fundamentos remotos, indo até aos fundamentos últimos que não têm fundamento posterior algum. Nós também já sabemos que existem verdades A, B, C,... que são completamente sem fundamento; provavelmente há outras verdades D, E, F,... que têm um fundamento, certamente, mas não têm nenhuma relação de *Ableitbarkeit* (derivabilidade) com este fundamento (§200). Todas as outras verdades M, N,... Z que pertencem a este conjunto, por fim, parecem como conseqüências que são ao mesmo tempo *Ableitbar* (deriváveis) de seus fundamentos. Obviamente, se tentássemos mudar a ordem destas verdades arbitrariamente, seria algo muito fácil agrupá-las numa maneira que, assumindo uma parte delas como premissas, todas as outras podem ser *Ableitbar* (derivadas) dela. E agora eu afirmo o seguinte: se obedecermos à regra de nunca *Ableitbar* (derivar) uma verdade mais simples de premissas que por si já são mais complexas do que ela, então o número preciso de proposições que devemos assumir (ou seja, sem ter derivado primeiro elas de outras) sempre será maior do que no caso em que nós agrupamos as proposições de acordo com sua conexão objetiva. Então a relação de *Abfolge* (fundamento e conseqüência) tem, de acordo com o que eu penso, uma característica que, de um número mínimo de premissas, um número maior de conseqüências que não são mais simples do que suas premissas. [é distinguida pelo fato de que ela provém para o maior número de conclusões do *menor* número de premissas, dado somente que as conclusões não são mais simples que suas premissas.]

(4) Uma outra característica própria desta relação deveria ser que as verdades A, B, C, D,... que formam o fundamento de uma verdade M, são sempre as mais simples dentre todas aquelas que são equivalentes a elas quando consideradas individualmente. E que também cada verdade que fosse considerada como uma conseqüência das verdades A, B, C,... seria sempre

a mais simples das suas premissas equivalentes consideradas individualmente. Por isso, todas as verdades equivalentes a *M*, e que são mesmo assim mais compostas só poderiam ser conseqüências dela.

(5) Em geral, me parece que as verdades *A*, *B*, *C*,..., que formam o fundamento de uma verdade *M*, que é ao mesmo tempo derivável delas, deve sempre ser o conjunto mais simples de verdades das quais *M* pode ser derivada, sempre que se suponha que as mesmas idéias são vistas como variáveis e que nenhuma das premissas são mais complexas do que a conseqüência.

(6) E não somente devem as proposições *A*, *B*, *C*, ... ser as mais simples das quais *M* é Ableitbar derivável, elas devem também serem as mais *gerais*. Então, por exemplo, eu não considero de forma alguma a proposição, Caius tem obrigações com Deus, uma conseqüência das duas proposições, Caius é um homem e Todo homem tem obrigações com Deus. Pois estas duas proposições não são as mais gerais das quais a primeira pode ser derivada, pois não somente homens, mas todo ser racional e finito tem obrigações para Deus. Então eu acredito que posso assumir com certeza que existe uma relação de *Abfolge* fundamento e conseqüência no tipo de argumento em (2) somente se *B* e *C* são *Wechselvorstellungen* [*idéias equivalentes*]. Neste caso, as duas proposições, Todo *A* é *B*, Todo *B* é *C*, são certamente as proposições mais gerais das quais a conclusão, Todo *A* é *C*, é derivável

(7) Se a proposição *M* tem a relação de derivabilidade *exata* (§ 155 no (26)) com as proposições *A*, *B*, *C*, ..., com relação às idéias (*vorstellungen*) *i*, *j*,...; e se além disso estas proposições *A*, *B*, *C*,... e *M* são as mais simples dentre suas equivalentes e nenhum membro de *A*, *B*, *C*,... é mais complexo do que *M*; então nós podemos bem suspeitar de que *M* tem uma relação genuína de *Abfolge* para com *A*, *B*, *C*,..., e uma (relação, NdT) tal que sempre que as idéias são substituídas por *i*, *j*, ... que não somente tornam *A*, *B*, *C*,... verdadeiras, mas também livres de redundância, a verdade *M* deve ser vista como uma conseqüência genuína das verdades *A*, *B*, *C*,... . Então eu não faço nenhuma objeção a considerar a relação das proposições:

Todo *A* é *B*

Todo *B* é *C*

Todo *A* tanto *B* quanto *C*

Como uma relação de *Abfolge* fundamento e consequência, porque não somente ela é a última proposição *Abfolge* derivável das duas primeiras, mas que elas são também *Ableitbar* deriváveis dela e ainda mais, são tão simples quanto o que foi dito exige.

*Nota:* Algumas das coisas que eu tinha apresentado neste parágrafo será aceito por todos. Porque se for dito que uma verdade *a priori* não pode ser demonstrada pela experiência, o que isso significa é quase o mesmo que de dizer que o fundamento objetivo de uma verdade conceitual pura não pode ser situado em verdades perceptível. E se está dito que uma palestra é verdadeiramente apresentação científica procede do geral para o particular, do mais simples para o mais composto, então isso deveria ser uma consequência do fato de que a gente pensa que as verdades mais gerais e mais simples contêm o fundamento das particulares e mais compostas. Aqui, pode ser o lugar mais apropriado para eu confessar ao meu leitor que às vezes tenho dúvidas sobre o conceito de relação de *Abfolge* fundamento e consequência,... que eu afirmei ser simples no debate anterior e que poderia ser mais composto, e ao final talvez não seja outra do que a idéia de uma ordem entre verdades numa maneira que do menor número de premissas simples pode ser deduzido o maior número de verdades como meras consequências.

### **5.11 §525 “Esclarecimentos sobre o fundamento objetivo de uma verdade”**

Não é raro que possamos provar que uma coisa é pela indicação do fundamento (causa) porque (ou pela qual) ela é. Sendo a indicação do fundamento objetivo uma coisa muito útil, nós temos que nos esforçar por fazê-la (tal indicação) nos nossos livros didáticos. Por isso, sem dúvida alguma, se uma prova consegue deduzir a verdade a ser provada de seu fundamento objetivo, deveria-se considerar tal feito como uma virtude de tal prova. Provas desse gênero poderíamos chamá-las convicções (*bejrunduy*), em oposição a outras que só têm a meta de convencer (ou dar certeza), e que nós podemos chamar *gewissmachungen*. Em algumas ciências, particularmente naquelas puramente conceituais e na doutrina da moral, quase toda proposição pode ser provada à base de seus fundamentos objetivos. Quase todas as provas nessas ciências deveriam ser por isso justificações genuínas. Em outras ciências, especialmente naquelas empíricas, como na Química, na Farmacêutica, Historiográfica, etc. é

raramente possível deduzir a prova de uma verdade apenas de seu fundamento objetivo, pois este fundamento é desconhecido ou incompletamente conhecido. Podemos, por exemplo, provar o assassinato de uma pessoa por uma outra, raramente pelo fato de que eles foram inimigos um do outro, que a pessoa tenha ameaçado de morte à outra, que ela tinha até adquirido uma espingarda, etc.; mas, todos esses fatos, junto com outros fundamentos do nosso conhecimento (por exemplo, um testemunho) podem aumentar a probabilidade de que essa pessoa realmente tenha assassinado a outra.

Anotações: Posto que a gente até agora nem sempre distinguiu o fundamento objetivo de uma verdade dos meios subjetivos de conhecimento segue-se, obviamente, que também esses dois tipos de provas – ou seja, as do tipo fundamentista e as do tipo certificadora – não foram sempre distinguidas com precisão. Aristóteles (*Analytica posteriora*, L I c2 et 13) e também os escolásticos dividiram as provas em provas que só mostram que alguma coisa é (*hoti*) e outras que também explicam por quê a coisa é (*dioti*) e afirmavam com um pouco de exagero que só os últimos (*dioti*) produzem conhecimento genuíno (ou verdadeiro).

Mas os lógicos dos tempos novos parecem não prestar atenção a esta distinção. Crusius deveria ser este lógico que dá ainda mais precisão nesta distinção; ele chama provas que também mostram por quê alguma coisa é verdadeira de provas *a priori*; e todo o resto de provas *a posteriori*; e adicionando a observação correta de que a maior parte das provas da geometria até agora são meras provas *a posteriori*. Fries tem a opinião de que todas as provas do primeiro tipo, porque deduzem o particular do geral, mostram o fundamento real de uma verdade, ou seja, são do tipo *dioti*, enquanto provas do segundo tipo se referem somente aos fundamentos do entendimento que não são fundamentos objetivos ou reais e por isso só indicam o *oti*. Uma opinião semelhante ensina o senhor Calker, que propõe as denotações (nomes) provas explicativas e provas que apenas mostram. O Duque de Tracy, ao contrário, acredita o inverso (oposto): que uma proposição geral nunca pode ser a causa real da verdade de uma proposição particular (*q'une proposition générale ne peut jamais être la cause réelle de la vérité d'une proposition particulière*). O leitor sabe por causa do parágrafo 221 do *Wissenschaftslehre* que eu não concordo completamente com nenhuma destas duas opiniões. Jakod disse que todas as provas diretas são por explicações dos fundamentos. Mas por que por fundamentos nós entendemos não só os fundamentos do nosso entendimento (*insight*) (pois as provas indiretas também possuem esses fundamentos) então o Sr. Jakod acreditava que todas as provas diretas são *dioti*. O professor Krug divide as provas em diretas – que mostram a



coisa a ser provada através dos próprios fundamentos dela – e provas indiretas – que mostram o verdadeiro através da falsidade do oposto. O Sr. Reinhold tem quase a mesma opinião. Eu, no entanto, acredito que se nós queremos chamar todas as provas que não mostram a verdade da proposição da falsidade do oposto de ‘provas diretas’, não se pode concluir que todas as provas diretas mostram o fundamento objetivo da verdade a ser provada. Por exemplo, a prova da 1ª proposição de Euclides que trata da possibilidade da construção de um triângulo equilátero não é apagógico (ou seja, não é uma prova indireta. NdT) mas é direta. Mesmo assim ela (a prova) nos dá o fundamento da verdade a ser provada? É um triângulo equilátero só possível porque esses dois círculos se interceptam? Ou não seria o caso contrário, que os círculos se interceptam porque o triângulo equilátero existe? Assim, o quê eu poderia dizer de muitas outras provas, por exemplo, as dos empíricos?

## Conclusão:

A obra de Bolzano, e particularmente seu artigo *Prova puramente analítica...*, significaram um marco na matemática pura porque colocaram no centro a idéia de que mesmo as questões intuitivas ou subjetivamente óbvias deveriam ser demonstradas em termos de conceitos que não envolviam intuições.

Quando Bolzano escreveu o *Prova puramente analítica...*, ainda exercia muita influência a concepção de matemática de Descartes, Pascal e Kant, para os quais demonstrar era reduzir a princípios óbvios. Matemáticos de grande calibre, como Euler, ao não se preocuparem com os fundamentos, chegaram a resultados contraditórios, embora tenham exercido um papel importante na expansão da matemática.

A grande mudança ocorrida na matemática pura tem relação direta com as necessidades de comunicação e de ensino, que se expandia cada vez mais no século XIX. Matemáticos como Bolzano, Riemman e, mais tarde, Dedekind e outros, perceberam que não é possível comunicar intuições, e que para comunicar as idéias matemáticas para os estudantes é necessário que as provas matemáticas cumpram um papel de mostrar a ordem objetiva dos conceitos.

Concluimos que a exigência de provas rigorosas nasceu junto com a matemática pura como nós a conhecemos hoje. E a própria matemática pura surgiu das necessidades de ensino, conforme atesta Dedekind:

Minha atenção foi pela primeira vez dirigida a considerações que formam o objeto deste texto (Ensaio sobre a teoria dos números) no outono de 1858. Como professor na Escola Politécnica de Zurique eu me encontrei pela primeira vez obrigado à leitura sobre os elementos do cálculo diferencial e me senti mais ciente do que nunca antes da falta de uma fundamentação realmente científica para a aritmética. Discutindo a noção da aproximação de uma magnitude variável a um valor limite fixo, e especialmente provando o teorema de que toda magnitude que cresce continuamente, mas não além de determinado limite, deve certamente aproximar de um valor limite, eu sempre tinha que recorrer a evidências geométricas. Mesmo agora tal recurso à intuição numa primeira apresentação do cálculo diferencial, eu vejo como muito útil, do ponto de vista didático, e certamente indispensável, se não queremos perder muito tempo. Mas que esta forma de introdução no cálculo diferencial não pode ser chamada de científica, ninguém negará (1901, p.1).

Assim, as provas rigorosas não foram resultado de um capricho ou invenção de alguns matemáticos; nem uma forma particular de conceber ou interpretar a matemática, como alguns autores da educação matemática, como Hanna, parecem acreditar. E a Reforma da Matemática Moderna foi uma tentativa de levar para as escolas características que eram próprias da matemática pura desde seu surgimento no século XIX. Não foi, portanto, a criação de uma nova matemática, uma nova concepção de ensino, nem uma transposição artificial de conceitos que não fazem parte da matemática atual. Acreditamos que Hanna e outros autores fizeram propostas para a educação matemática desvinculadas da história e da filosofia da matemática.

Rigor e abstração vieram junto com a aritmetização. E aritmetização é a própria essência da matemática pura, pois representou a idéia de que as verdades geométricas seriam partes aplicadas ou subordinadas da matemática pura (RB, p. 170 (prefácio)).

O desenvolvimento da matemática pode ser visto como o resultado de uma complexa relação entre intuição e conceito, e como um esforço por evitar o uso de intuições ao formalizar um conceito, na qual o símbolo desempenha um papel importante e em que os axiomas são aceitos de forma que permitam a construção de novos conceitos e o desenvolvimento da matemática.

Aprendemos com Kant que todo conhecimento é resultado de uma relação entre o sujeito e o objeto da cognição. Não é adequado para a matemática pura de hoje que as definições contrariem nossas intuições, e mesmo algumas definições formais se fundamentam na intuição. Uma definição é considerada útil se, além de não contrariar nossa intuição (chamando intuição aqui não somente percepção sensível, mas relação com as representações – símbolos e abstrações), ela for prática o suficiente para podermos utilizar seus conceitos sem que precisemos recorrer sempre à nossa intuição.

No entanto, a intuição não é uma camisa-de-força, e a matemática tentou ser fiel a ela até que essa fidelidade resultou em contradições com outras verdades aceitas. Quando não estamos lidando com infinitos, infinitésimos, e dimensões maiores do que 3, frequentemente nossa intuição é plenamente confirmada. Além disso, como já afirmamos no capítulo 2, a matemática não tem significados definitivos, e seus símbolos e significados são processos, não cabendo portanto um questionamento causal das demonstrações matemáticas, pois a justificativa das mesmas muitas vezes se encontra em possíveis novas aplicações ou generalizações, e as premissas são escolhidas de forma que confirme até onde for possível nossa intuição e sirva como instrumento para novas descobertas.

Mas também aprendemos que a insistência de Bolzano em provas que não utilizassem a intuição e as noções que para Kant todo ser humano teria de forma inata – as noções de espaço e tempo – foi o que permitiu o desenvolvimento da matemática pura e sua fundamentação. A aritmetização diz respeito à abstração. Lidar com objetos que não existem no mundo físico, psíquico e nem mesmo têm a possibilidade de existir em lugar algum, é algo impossível de se fazer sem abstrair. E a capacidade de abstração e generalização, ligadas à capacidade de relacionar diferentes ramos do conhecimento, é talvez o maior legado que a matemática tem, e aquilo de que as outras áreas da ciência, e a filosofia, mais emprestam da matemática.

Embora nossa percepção do mundo (do espaço e do tempo, mas também de noções percebidas por nossos outros 3 sentidos) seja contínua, foi a conceitualização do contínuo em termos discretos que possibilitou o pensamento relacional característico da Matemática Moderna, e a capacidade da ciência moderna de medir e prever. Bolzano construiu uma demonstração do Teorema do Valor Intermediário procurando não recorrer às noções de espaço e tempo por acreditar que significados são objetivos, e que temos que descobrir e descrever estes significados objetivos. Mas Bolzano também acreditou que a conexão entre os objetos ou fatos e as descrições matemáticas em termos de caracteres aritméticos seria natural e óbvia, e não escolhida ou construída, como é aceito na matemática pura moderna. Além disso, Bolzano não compreendeu – como Kant o fez – o papel da experiência para a comunicação.

Concordo com Kant em que a relação entre intuição e conceito deve ser concebida de forma complementar, mas a crença kantiana em que a matemática seria sintética a priori mostrou-se exagerada, e a abordagem que Bolzano deu à matemática foi importante para corrigir os erros de fundamento de sua época, cuja abordagem kantiana não resolvia nem apontava caminhos férteis.

No entanto, tratar a ciência, a teoria e a matemática como realidades, como o fez Bolzano, não me parece que tenha sido mostrado pela história completamente equivocado. Me parece que, uma vez que tenhamos assumido determinados princípios e axiomas, devemos tratá-los como tendo realidade, mesmo sendo uma realidade interna ao modelo caracterizado por esses axiomas. Desse ponto de vista, a busca da ordem objetiva foi importante para o desenvolvimento da matemática, e é por isso que a Semântica passou a ser uma noção muito aceita na filosofia analítica, surgida com muitos dos princípios elaborados por Bolzano. No entanto, me parece que a abordagem genética feita por Kant – ou seja, a abordagem que leva

em conta aspectos da evolução, e, portanto, a história e a cultura – é muito importante para explicar grande parte do desenvolvimento da matemática, e seria muito útil que historiadores da matemática e matemáticos compreendessem isso, para abandonarem a noção de que a história é feita apenas por personalidades geniais.

Se Kant enfatizou que nós só temos conhecimento das coisas por meio de representações que nós fazemos delas a partir da nossa estrutura interna, Bolzano colocou a necessidade de fazer representações que se adequassem o máximo possível com o que ele acreditava ser a ordem objetiva das coisas, e a revalorização do papel do conceito e da analiticidade – trazida com a criação da matemática pura – deu um importante papel para a noção kantiana de relação.

Desse ponto-de-vista, Kant e Bolzano, e portanto Epistemologia e Semântica, são complementares, como vimos em Lalande (1999, p. 313), bem como intuição e conceito.

A própria fundamentação que Bolzano pretendeu fazer deixa em aberto a possibilidade de haver diferentes formas de representar um conceito, pois conceituar na linguagem coloca diretamente a questão: como fazê-lo? É natural que se procure conceituar da forma mais conveniente possível para o uso que fizermos do conceito, e, portanto, há uma subjetividade na escolha dos conceitos iniciais (RUSNOCK, 1997).

Ou seja: com a abordagem semântica, a ênfase da teoria do conhecimento passou a ser dada na compreensão dos fundamentos da própria matemática e da natureza do saber científico – bem como na comunicação destes saberes, e foi essa ênfase na comunicação que fez com que a matemática e a ciência passassem a ser assuntos didáticos, enquanto os epistemólogos não se preocuparam com a comunicação. Para se comunicar, é necessário generalizar e universalizar, e uma das principais características da matemática de hoje é exatamente sua capacidade de universalização e generalização, em que a intuição geométrica não pode ocupar o papel central por dizer respeito a objetos particulares.

Afinal, o pensamento matemático abre novos campos para explicar a relação entre nossa experiência interna e os objetos de nossa cognição, exatamente por essa capacidade de generalizar e abstrair sem negar as particularidades dos objetos aos quais nos referimos teoricamente.

Bolzano pareceu contribuir para duas tradições distintas, ao atribuir significados definitivos na linguagem: uma delas é a chamada formalista, tradição cuja ênfase era a linguagem e a aplicação, sem a preocupação com o conteúdo, representada principalmente por

Hilbert, Dedekind e Peano; e outra que buscava resultados definitivos e desvinculados das aplicações, como foi o caso de Frege, Russell, Carnap e Quine.

Por fim, algumas questões que gostaríamos de deixar em aberto, e que nos parecem importantes como objeto de análise e estudos posteriores: como analisar o legado de Kant para a filosofia em geral, e para as ciências exatas em particular? Afirmamos em 3.2 que muitas das afirmações que Kant fez sobre a matemática não ajudavam a resolver as crises de fundamento que ela enfrentava. Como é possível que Kant seja tão aceito e tenha tanta influência sobre a filosofia posterior a ele, e seja tão criticado na matemática e na filosofia analítica?

E o legado de Bolzano? Como compreender que ele ajudasse a esclarecer tanto os fundamentos da matemática, e tenha contribuído tanto para a fundamentação da mesma, apesar de acreditar em noções tão pouco aceitas contemporaneamente, tanto na matemática quanto na filosofia, como a de “verdades em si”, “proposições em si”, “idéias em si”?

Por fim, acredito que esta dissertação possibilita apontar para duas perspectivas diferentes e complementares para estudos posteriores: de um lado, o início do estudo no Brasil das obras de Bolzano, bem como da tradução de sua obra para o português; e a continuidade da reflexão com base em estudos históricos e filosóficos sobre a relação entre intuição e conceito.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ABBAGNANO, N. *Dicionário de filosofia*. 4. ed. Tradução de BOSI, A. São Paulo: Mestre Jou, 2000.
- ARISTÓTELES. *Segundos analíticos*. Campinas: Unicamp/Departamento de Filosofia (IFCH). Tradução de Lucas Angioni, 2004, livro 1.
- \_\_\_\_\_. *Ultimos analíticos*. Madrid: Nueva Biblioteca Filosófica, 1931, livro 1.
- ÁVILA, G. *Introdução à análise matemática*. 2. ed. São Paulo: Editora Edgard Blücher 2000.
- BOLZANO, B. *Las paradojas del infinito*. México: Servicios Editoriales de la Facultad de Ciencias/UNAM, 1991.
- BOLZANO, B.. *Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen zwei Werten, die ein entgegengesetztes Resultat gewaehren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege*. Tradução inglesa por S. Russ, *Historia Mathematica*, *Historia Mathematica*, n. 7, p. 156-185, 1980.
- \_\_\_\_\_. *Der Binomische Lehrsatz und als Folgerung aus ihm der polynomische, und die Reihen, die zur Berechnung der Logarithmen und Exponentialgrössen dienen, genauer als bisher erwiesen*. Praga: C. W. Enders, 1816.
- \_\_\_\_\_. *Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen zwei Werten, die ein entgegengesetztes Resultat gewaehren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege*. Prague: Gottlob Hass, 1817. Ostwald's Klassiker der exacten Wissenschaften, Leipzig, v. 153, p. 343-395, 1905.
- \_\_\_\_\_. *Wissenschaftslehre*, 4 vol. (Sulzbach). Sulzbach: Wolfgang Schultz. Reprint Scientia Verlag Aalen, 1981.
- \_\_\_\_\_. *Theory of science*. TERRELL, B. Boston and Dordrecht: D. Reidel Publishing Company, 1973.
- BOYER, C. B. *The history of the calculus and its conceptual development*. New York: Dover, 1949.
- BROWN, J. R. Proofs and pictures. *The British Journal for the Philosophy of Science*, Oxford, v. 2, n. 48, p. 161-180, 1997.
- BUTCHART, S.J. *Evidence and explanation in mathematics*. 2001. Tese (Doutorado) – Departamento de Filosofia da Monash University, Ottawa.
- CASSIRER, E. *Substance et fonction: éléments pour une théorie du concept*. Tradução francesa de P. Caussat. Paris: Éditions de Minuit, 1910.

\_\_\_\_\_. *Filosofía de las formas simbólicas*. 2. ed. Tradução espanhola de A. Morones. México: Fondo de Cultura Económica, 1998.

CARAÇA, B. de J. *Conceitos fundamentais da matemática*. 3. ed. Lisboa: Gradiva Publicações, 2000.

COFFA, J. A. *The semantic tradition from Kant to Carnap: to the Vienna Station*. New York: Cambridge UP, 1991.

\_\_\_\_\_. Kant, Bolzano, and the Emergence of Logicism. *The Journal of Philosophy*, Vol. 79, No. 11, Seventy-Ninth Annual Meeting of the American Philosophical Association, Eastern Division, p. 679-689, 1982.

COURANT, Richard; ROBBINS, H. *O que é matemática? Uma abordagem elementar de métodos e conceitos*. 4. ed. Tradução de Adalberto da Silva Brito. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2000.

DAVIS, P. J.; HERSH, R. *A experiência matemática: a história de uma ciência em tudo e por tudo fascinante*. 4. ed. Tradução de J. B. Pitombeira. Rio de Janeiro: Livraria Francisco Alves Editora, 1982.

DE JONG, W.R. Bernard Bolzano, analyticity and the aristotelian model of science. *Kant Studien*, n. 92, p. 328-349, 2001.

DEDEKIND, R. *Was sind und was sollen die Zahlen?* Tradução inglesa de W. Beman. Courier Dover Publications, 1963.

DUBUCS, J.; LAPOINTE, S. On Bolzano's alleged explicativism. *Synthese*, v. 50, p. 229-246, 2006.

FEFERMAN, S.: *Systems of predicative analysis*. Oxford: Oxford University Press, 1969.

FOUCAULT, M. *As Palavras e as Coisas*. Tradução de Salma Tannus Muchail. Editora Martins Fontes: São Paulo, 1999.

FREGE, J. G. *Os fundamentos científicos da aritmética*. Tradução de Luís Henrique dos Santos. São Paulo: Cultrix, 1974. (Os Pensadores)

\_\_\_\_\_. *Sobre a justificação científica de uma conceitografia*. Tradução de Luís Henrique dos Santos. São Paulo: Cultrix, 1974. (Os Pensadores)

GEORGE, R.; RUSNOCK, P. Resenha de "The Semantic Tradition from Kant to Carnap: To the Vienna Station", de Albert Coffa. In: *Philosophy and Phenomenological Research*, Vol. LVI, No. 2, 1996.

HAHN, R. Kant's Newtonian Revolution in Philosophy. In: *Journal of the History of Philosophy*. Carbondale: Southern Illinois University Press. Carbondale and Edwardsville, 1988.



- HANNA, G. *Rigorous Proof in Mathematics Education*. Toronto: OISE Press, 1983.
- HANNA, G. Proofs That Prove and Proofs That Explain. In: G. Vergnaud, J. Rogalski. *Anais do Grupo Internacional de Psicologia da Educação Matemática*, vol. 2, p. 45-51. Paris, 1989.
- HANNA, G. Proof, explanation and exploration: an overview. *Educational Studies in Mathematics* (EMS), v. 44, p. 5-23. Dordrecht: 2000.
- HILBERT, D. (1925). On the infinite. In: VAN HEIJENOORT. *From Frege to Gödel*. Harvard: Harvard Univ. Press., 1967, p. 376-395
- JAFFE, A.; QUINN, F. Theoretical mathematics: towards a cultural synthesis of mathematics and theoretical physics. *Bulletin of the American Mathematical Society*, v. 29, n. 1, p. 1-13.
- KANT, I. *Crítica da razão pura*. 5. ed. Tradução de M. P. Santos; A. F. Morujão. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 2001.
- \_\_\_\_\_. *Critique of pure reason*. New York: N. Kemp Smith., 1965.
- \_\_\_\_\_. *Prolegômenos*. Organização: BERNKOPF, T. M. São Paulo: Abril Cultural, 1980. (Os Pensadores)
- KITCHER, P. (1975). Bolzano's ideal of algebraic analysis. *Studies in the History and Philosophy of Science*, v. 6, n. , p. 229-267, 1975.
- KLEIN, F. (1887). The arithmetizing of mathematics. 965-71. In: EWALD, W. B. *From Kant to Hilbert: a source book in the foundations of mathematics*. Oxford: Oxford University Press, 1996, v. 1.
- LALANDE, A. *Vocabulário Técnico e Crítico da Filosofia*. Editora Martins Fontes: São Paulo, 1999.
- LAPOINTE, S. Introduction: Bernard Bolzano: contexte et actualité. In: LAPOINTE, S. *Bernard Bolzano: philosophie de la logique et théorie de la connaissance*. *Philosophique* v. 31, p. 3-17. Printemps: 2003,.
- LEIBNIZ, G. W. *Novos ensaios sobre o conhecimento humano*. Organização: BARAÚNA, L. J. São Paulo: Editora, 2004. (Os Pensadores)
- LIMA, E. L. *Curso de análise*. 7. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1992, v. 1.
- MACHADO, N. J. *Matemática e língua materna: análise de uma impregnação mútua*. 4. ed. São Paulo: Cortez, 1998.
- MANCOSU, P. Bolzano and Cournot on mathematical explanation. *Revue d'Histoire des Sciences*, v. , n. 52, p. 429-455, 1999.
- MARX, K. Para a crítica da economia política. In: \_\_\_\_\_. *Manuscritos econômico-filosóficos e outros textos escolhidos*. 2. ed. Organização: MALAGODI, Edgar. São Paulo: Abril Cultural, 1978 (Os Pensadores).

- MASHAAL, M. Quem é Bourbaki? In: MARIN, L. (org.). *A vanguarda matemática e os limites da razão*. São Paulo: Duetto, 2006, p. 25-49 (Gênios da Ciência, 12)
- MELLO, M. *Limites e seqüências: amigos novos e antigos*. Projeto II da disciplina Laboratório Computacional do IMECC-Unicamp. Campinas: Unicamp, 2002.
- NEEMAN, U.: *Analytic and synthetic propositions in Kant and Bolzano*, n. 12: vol. 6, p. 1-25 1971.
- NEWTON-SMITH, W. H. Explanation. In: NEWTON-SMITH, W. *A Companion to Philosophy of Science*: Blackwell Publishers, Malden/Oxford, 2000, pg.127-133.
- OTTE, M. *Analysis and Synthesis from the perspective of Peirce*. In: OTTE, M. & PANZA, O. *Analysis and Synthesis in Mathematics*. Kluwer Dordrecht. BSPS Vol. 196, 1997.
- OTTE, M. *B. Russell's Introduction to Mathematical Philosophy*. Educação matemática pesquisa, São Paulo - SP - Brasil, v. 03, n. 1, p. 11-55, 2001.
- OTTE, M. *Proof and Explanation from a semiotic point of view*. In: Relime, Número Especial, p. 23-43, 2006 a.
- OTTE, M. *Mathematical History, Philosophy and Education*. In: *Studies in Mathematics* 2007a.
- OTTE, M. Learning Difficulties resulting from the Nature of modern Mathematics: the Problem of Explanation. In: MAASZ, J. SCHLOEGLMANN, W. *New Mathematics Education Research and Practice*. Sense Publishers, p. 133-147, 2006 b.
- \_\_\_\_\_. Certainty and explanation in mathematics. In: CONFERÊNCIA INTERNACIONAL PERSPECTIVES ON MATHEMATICAL PRACTICES. Bruxelas, 26 a 28 de março de 2007. *Anais...* Bruxelas, 2007b.
- \_\_\_\_\_. Certainty, explanation and creativity in mathematics. In: WOO, J-H.; LEW, H.-C.; PARK, K.-S; SEO, D.-Y. *Proceedings of the 31<sup>st</sup> Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Seul: The Korea Society of Educational Studies in Mathematics, p. 43-59, 2007c.
- \_\_\_\_\_. Análise de prova e o desenvolvimento do pensamento geométrico. *Educação Matemática Pesquisa*, São Paulo, v. 5, n. 1, p. 14-45, 2003.
- PAPY, G. Mathématique moderne. *Dialectica*, v. 22, n. 1, p. 75-78, 1968.
- PEIRCE, C. S. A classificação das ciências e elementos de lógica. In: D'OLIVEIRA, M *Escritos coligidos*. Tradução de A. M. D'Oliveira; S. Pomerangblum. São Paulo: Abril, 1974, p. 7-92.
- \_\_\_\_\_. *Semiótica e filosofia*. 2. ed. Tradução: MOTA, O. S.; EGENBERG, L. São Paulo: Cultrix, 1993.

- PEREIRA, O. P. *Ciência e dialética em Aristóteles*. São Paulo: Editora da UNESP, 2001.
- PROUST, J. *Questions de forme: logique e proposition analytique chez Bernard Bolzano*. Paris: Librairie Arthème Fayard, 1986.
- RAGGIO, A. A evolução da noção de sistema axiomático. Tradução de Stéfano e Wagner. In: BRITO, A. N. *Philosophos. Revista de Filosofia*. Programa de Pós-Graduação em Filosofia da Universidade Federal de Goiás. Goiânia, v. 8, n. 1, p. 95-119, 2003.
- RUSNOCK, P: Bolzano and the traditions of analysis. In: KÜNNE, W.; SIEBEL, M.; TEXTOR, M. *Grazer Philosophische Studien. Internationale Zeitschrift für Analytische Philosophie*. n. 53, p. 61-85, 1997.
- RUSS, S. *The mathematical works of Bernard Bolzano*. Oxford: Oxford University Press, 2004.
- RUSSELL, B. *Introdução à filosofia da matemática*. 4. ed. Rio de Janeiro: Zahar, 1981.
- SEBESTIK, J. *Logique et mathématique chez Bernard Bolzano*. Paris: Librairie Philosophique J. Vrin, 1992.
- SEBESTIK, J. *Bolzano's Logic*. In: Stanford Encyclopedia of Philosophy. 2007.
- SIMPSON, A. *Developing a proving attitude*. In: HOLTON, D. The teaching and learning mathematics in London: University of London, 1995, p. 111-136.
- STEINER, M. Mathematical explanation, *Philosophical Studies*, D. Reidel Publishing Company, n. 34, p. 135-151, 1978.
- VAN HEIJENOORT, J. (ed.) 1967: *From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931*. Harvard University Press, 1967.
- WEBB, J. C. (1980), *Mechanism, Mentalism and Metamathematics*. Dordrecht: Reidel, 1980.
- WERTHEIMER, M. *Productive Thinking*. New York: Harper, 1945.

# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)