



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA – CCEN  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

## TESE DE DOUTORADO

### MÉTODO DE CALLAN-SYMANZIK-LIFSHITZ PARA SISTEMAS COMPETITIVOS

por

**Paulo Renato Silva de Carvalho**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Departamento de Física da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Física.

**Banca Examinadora:**

Prof. Marcelo de Moura Leite (Orientador - UFPE)  
Prof. Maurício Domingues Coutinho Filho (DF - UFPE)  
Prof. Ernesto Carneiro Pessoa Raposo (DF - UFPE)  
Prof. Nathan Jacob Berkovits (IFT - UNESP)  
Prof. Rogério Rosenfeld (IFT - UNESP)

Recife - PE, Brasil  
Agosto - 2008

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

Carvalho. Paulo Renato Silva de  
Método de Callan-Symanzik-Lifshitz para  
sistemas competitivos / Paulo Renato Silva de  
Carvalho – Recife : O autor, 2008.  
xix, 145 f. : fig.

Tese (doutorado) - Universidade Federal de  
Pernambuco. CCEN. Física, 2008.

Inclui bibliografia.

1. Física do estado sólido 2. Renormalização (física)
3. I. Título.

530.41

CDD (22.ed.)

FQ2008-026



Universidade Federal de Pernambuco  
Departamento de Física – CCEN  
Programa de Pós-Graduação em Física  
Cidade Universitária - 50670-901 Recife PE Brasil  
Fone (++ 55 81) 2126-8449/2126-8450 - Fax (++ 55 81) 3271-0359  
<http://www.df.ufpe.br/pg> e-mail: [posgrad@df.ufpe.br](mailto:posgrad@df.ufpe.br)

---

## Parecer da Banca Examinadora de Defesa de Tese de Doutorado

---

**Paulo Renato Silva de Carvalho**

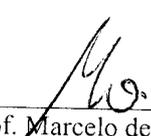
### MÉTODO DE CALLAN-SYMANZIK-LIFSHITZ PARA SISTEMAS COMPETITIVOS

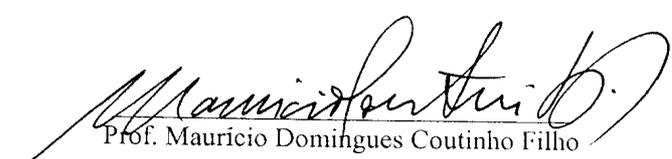
A Banca Examinadora composta pelos Professores Marcelo de Moura Leite (Presidente e Orientador), Maurício Domingues Coutinho Filho, Ernesto Carneiro Pessoa Raposo, todos da Universidade Federal de Pernambuco, Nathan Jacob Berkovits e Rogério Rosenfeld, ambos do Instituto de Física Teórica da Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, consideram o candidato:

Aprovado

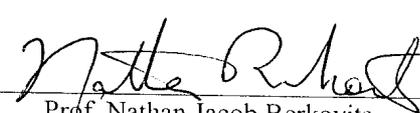
Reprovado

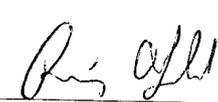
Secretaria do Programa de Pós-Graduação em Física do Departamento de Física do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade Federal de Pernambuco aos oito dias do mês de agosto do ano de 2008.

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Marcelo de Moura Leite  
Presidente e Orientador

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Maurício Domingues Coutinho Filho

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Ernesto Carneiro Pessoa Raposo

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Nathan Jacob Berkovits

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Rogério Rosenfeld

*Dedico esta tese a todas pessoas que de alguma  
maneira contribuíram para a realização deste trabalho.*

# Agradecimentos

Primeiramente a Deus por me conceder mais uma existência corpórea cheia de oportunidades de aprendizado.

Aos meus familiares Marcos (pai), Seuma (mãe), Nelton (irmão) e Heloísa (filha) por todo o apoio durante todos esses anos em que estive longe de casa.

Ao meu orientador Marcelo de Moura Leite por ter me orientado com todo o seu profissionalismo, entusiasmo, e motivação na realização deste trabalho, bem como ter contribuído para minha formação ética profissional que vou carregar para sempre comigo;

Aos professores e funcionários do Departamento de Física da UFPE que de alguma forma contribuíram para a minha formação.

A todos os meus amigos e colegas, antigos e novos, que durante todos os meus 6 anos de estadia em Recife dividiram comigo os mais variados momentos.

Ao Plínio e ao Tayroni por dicas úteis referentes à compilação deste texto.

Ao CNPq pelo apoio financeiro.



*Fé inabalável só aquela que pode encarar a razão face a face em todas  
as épocas da humanidade.*

— ALLAN KARDEC



# Resumo

Neste trabalho investigamos o comportamento crítico de sistemas físicos com interações competitivas arbitrárias, onde introduzimos o método de Callan-Symanzik para esses sistemas. Para sistemas físicos apresentando pontos de Lifshitz  $m$ -axiais, definimos teorias de campo perturbativas com duas massas independentes e renormalizadas em momentos externos nulos. Provamos a renormalizabilidade multiplicativa dessas teorias na dimensão crítica. Em seguida, calculamos os expoentes críticos anisotrópicos  $\eta_{L2}$ ,  $\nu_{L2}$ ,  $\eta_{L4}$  e  $\nu_{L4}$  diagramaticamente, no mínimo, até a ordem de dois "loops" utilizando a aproximação ortogonal. Para esses mesmos sistemas, calculamos os expoentes críticos isotrópicos  $\eta_{L4}$  e  $\nu_{L4}$  na mesma ordem em "loops" usando a aproximação ortogonal. Além do mais, calculamos os expoentes críticos isotrópicos exatamente na mesma ordem em "loops". Todos esses expoentes estão em perfeita concordância com os correspondentes expoentes calculados anteriormente usando teorias de perturbação sem massa renormalizadas em momentos externos arbitrários. Posteriormente, investigamos os comportamentos críticos de sistemas competitivos arbitrários definindo teorias de campo perturbativas com  $L$  massas independentes e renormalizadas em momentos externos nulos. Para esse caso, provamos também a renormalizabilidade multiplicativa na dimensão crítica dessas teorias. Calculamos os vários expoentes críticos anisotrópicos e isotrópicos, no mínimo, até a ordem de dois "loops" usando a aproximação ortogonal generalizada. Os expoentes críticos isotrópicos foram calculados exatamente na mesma ordem em "loops". Os resultados para todos esses expoentes concordam perfeitamente com aqueles obtidos para os respectivos expoentes calculados anteriormente usando teorias de perturbação sem massa renormalizadas em momentos externos arbitrários.

**Palavras-chave:** Renormalização, Callan-Symanzik, Pontos de Lifshitz, Sistemas competitivos

# Abstract

In this work we investigate the critical behavior of physical systems with arbitrary competing interactions, where we introduce the Callan-Symanzik method for these systems. For physical systems presenting  $m$ -axial Lifshitz points, we define perturbative field theories with two independent masses and renormalized at zero external momenta. We prove the multiplicative renormalizability of these theories at the critical dimension. After that, we calculate the anisotropic critical exponents  $\eta_{L2}$ ,  $\nu_{L2}$ ,  $\eta_{L4}$  and  $\nu_{L4}$  diagrammatically, at least up to two-loop order utilizing the orthogonal approximation. For these systems, we calculate the isotropic critical exponents  $\eta_{L4}$  and  $\nu_{L4}$  in the same loop order using the orthogonal approximation. Furthermore, we calculate the isotropic critical exponents exactly in the same loop order. All these exponents are in perfect agreement with the respective exponents calculated before using perturbative massless theories renormalized at nonzero external momenta. After that, we investigate the critical behaviors of arbitrary competing systems defining scalar field theories with  $L$  independent masses and renormalized at zero external momenta. For this case, we prove also the multiplicative renormalizability at the critical dimension of these theories. We calculate the various anisotropic and isotropic critical exponents, at least up to two-loop order using the generalized orthogonal approximation. The isotropic critical exponents were calculated exactly in the same loop order as well. The results for all these exponents are the same in comparison with those obtained for the exponents computed before using perturbative massless theories renormalized at arbitrary nonzero external momenta.

**Keywords:** Renormalization, Callan-Symanzik, Lifshitz points, Competing Systems



# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Revisão de fenômenos críticos</b>	<b>13</b>
2.1	Representação do modelo de Ising por integrais funcionais	14
2.2	Teoria de campo massiva	18
2.3	Divergências na teoria $\phi^4$	21
2.4	Condições de normalização para teorias massivas	25
2.5	Equações de Callan-Symanzik e funções de Wilson	26
2.6	Cálculo dos expoentes críticos	33
<b>3</b>	<b>Pontos de Lifshitz <math>m</math>-axiais</b>	<b>35</b>
3.1	Condições de normalização	38
3.2	Renormalizabilidade em um loop na dimensão crítica	45
3.2.1	Anisotrópico	45
3.2.2	Isotrópico	50
3.3	Equações de Callan-Symanzik	52
3.3.1	Anisotrópico	52
3.3.2	Isotrópico	55
3.4	Prova indutiva da renormalizabilidade multiplicativa	56
3.4.1	Anisotrópico	56
3.4.2	Isotrópico	60
3.5	Equações de Callan-Symanzik fora da dimensão crítica	61
3.5.1	Anisotrópico	61
3.5.2	Isotrópico	66

3.6	Cálculo dos expoentes críticos anisotrópicos	68
3.7	Expoentes críticos isotrópicos na aproximação ortogonal	70
3.8	Cálculo dos expoentes críticos isotrópicos - Exato	71
<b>4</b>	<b>Pontos de Lifshitz de caráter arbitrário</b>	<b>73</b>
4.1	Condições de normalização	77
4.2	Renormalizabilidade em um loop na dimensão crítica	82
4.2.1	Anisotrópico	82
4.2.2	Isotrópico	87
4.3	Equações de Callan-Symanzik	89
4.3.1	Anisotrópico	89
4.3.2	Isotrópico	91
4.4	Prova indutiva da renormalizabilidade multiplicativa	92
4.4.1	Anisotrópico	92
4.4.2	Isotrópico	97
4.5	Equações de Callan-Symanzik-Lifshitz fora da dimensão crítica	98
4.5.1	Anisotrópico	98
4.5.2	Isotrópico	102
4.6	Cálculo dos expoentes críticos anisotrópicos	104
4.7	Expoentes críticos isotrópicos na aproximação ortogonal	106
4.8	Cálculo dos expoentes críticos isotrópicos - Exato	107
<b>5</b>	<b>Conclusões gerais e perspectivas</b>	<b>117</b>
<b>A</b>	<b>Cálculo de integrais: Pontos de Lifshitz <math>m</math>-axiais</b>	<b>121</b>
A.1	Caso Anisotrópico na Aproximação Ortogonal	121
A.2	Caso Isotrópico na Aproximação Ortogonal	125
A.3	Caso Isotrópico - Exato	127
<b>B</b>	<b>Cálculo de integrais: Pontos de Lifshitz arbitrários</b>	<b>131</b>
B.1	Caso Anisotrópico na Aproximação Ortogonal	131

B.2	Caso Isotrópico na Aproximação Ortogonal	135
B.3	Caso Isotrópico - Exato	137



# Lista de Figuras

2.1	Expansão diagramática para os vértices primitivamente divergentes.	29
3.1	Situação física representada pelo modelo ANNNI.	36
3.2	Diagrama típico caracterizando pontos de Lifshitz $m$ -axiais.	38
4.1	Situação em que temos pontos de Lifshitz uniaxiais de terceiro caráter: $m_3 = 1$ .	73
4.2	Diagrama de fase para pontos de Lifshitz $m_3$ -axiais (de terceiro caráter).	74
4.3	Caso mais simples do modelo CECI: $m_2 = m_3 = 1$ .	75
4.4	Situação em que temos pontos de Lifshitz uniaxiais de terceiro caráter genérico.	76



## CAPÍTULO 1

# Introdução

Transições de fase sempre desempenharam um papel muito importante na história da humanidade. As transições mais conhecidas, as da água entre seus estados sólido, líquido e gasoso têm sido fundamentais para a manutenção da vida no planeta terra. Desde os tempos mais remotos o conhecimento desse ramo da física, mesmo que rústico se comparado com o de hoje, ajudou a desenvolver alguns dos setores das civilizações que o detinham. Na área econômica, a fundição de metais na produção de ferramentas agrícolas impulsionou a produção de alimentos. Nos dias de hoje podemos observar essa grande importância, por exemplo, na síntese de novos materiais para um vasto uso em tecnologia.

Ao fazermos aplicações nos vários setores da nossa sociedade moderna, usando sistemas físicos exibindo transições de fase, necessitamos de um conhecimento preciso das propriedades físicas desses sistemas. Para tal, temos que usar um formalismo que nos dê a quantidade de informação necessária sobre essas propriedades, com base em seus aspectos mais fundamentais. Isto é feito usando modelos microscópicos que representam os sistemas físicos estudados. Com esses modelos podemos extrair informações que nos permite entender as transições de fase que ocorrem em tais sistemas em seu nível macroscópico.

As transições mais conhecidas ocorrem entre as várias fases da água e são conhecidas como transições de fase de primeira ordem. Elas são descontínuas e envolvem calor latente. Esse calor é liberado (absorvido) quando ocorre uma mudança do estado de alta (baixa) temperatura para o estado de baixa (alta) temperatura e é responsável por uma mudança estrutural da amostra.

O modelo mais simples utilizado no estudo de transições de fase é o modelo de Ising [1]. Esse modelo foi proposto para tentar entender o comportamento do tipo ímã (ferromag-

nético) de sistemas magnéticos e teve uma solução exata, em sua versão unidimensional, obtida pela primeira vez por E. Ising. Em duas dimensões, sem um campo magnético externamente aplicado, o modelo de Ising foi resolvido exatamente, onde o pioneiro nessa solução foi L. Onsager [2]. O caso bidimensional na presença de um campo magnético ainda não tem solução analítica, assim como o caso tridimensional, mesmo na ausência de um campo externo.

O modelo de Ising bidimensional e em dimensões maiores que duas apresenta transições conhecidas como transições de fase de segunda ordem. Em sistemas magnéticos, essas transições estão associadas a uma mudança de um estado desordenado de alta temperatura para um estado ordenado de baixa temperatura. Elas ocorrem em uma dada temperatura, diferente para cada material, o que define uma temperatura de transição ou temperatura crítica  $T_c$ . Essa temperatura é conhecida como temperatura de Curie. Na fase de alta temperatura (desordenada), acima de  $T_c$ , todos os spins dos átomos são orientados aleatoriamente, devido a efeitos térmicos, não produzindo assim um momento magnético macroscópico resultante. Já na fase de baixa temperatura (ordenada), abaixo de  $T_c$ , uma fração finita desses spins é orientada em uma direção preferencial, por causa da interação entre os spins, resultando num momento magnético macroscópico diferente de zero, mesmo sem aplicarmos um campo magnético externo. Na verdade, para sermos mais precisos, a magnetização média em escalas macroscópicas é nula. No entanto, ocorre a formação de domínios magnéticos em volumes muito menores que o volume do material. Assim, um pequeno campo magnético externo aplicado destrói as paredes de domínio produzindo uma magnetização macroscópica. Essa magnetização macroscópica permanece mesmo quando desligamos o campo externo. Nesse caso, o momento magnético por unidade de volume define a magnetização espontânea  $M$  do material. Assim uma magnetização  $M = 0$  define o estado desordenado e  $M \neq 0$  o estado ordenado. Dizemos então que a magnetização  $M$  é o parâmetro de ordem do sistema, pois dá informação de quando se tem ordem ou não no sistema. Transições de fase de segunda ordem são caracterizadas por um parâmetro de ordem que vai continuamente a zero na temperatura de transição.

Próximo da temperatura de transição a magnetização depende da temperatura de uma maneira simples, através de uma lei de potência da forma

$$M \propto t^\beta, \quad (1.1)$$

onde  $t = (T_c - T)/T_c$ , o que define o expoente crítico  $\beta$ . Vemos que a magnetização (parâmetro de ordem) vai a zero continuamente no ponto  $T = T_c$ . Como vimos essa é uma característica de uma transição de fase de segunda ordem. Podemos definir outros expoentes associados ao comportamento crítico de algumas funções termodinâmicas, calculadas em campo externo nulo, como por exemplo a capacidade calorífica, o comprimento de correlação e a susceptibilidade

$$C \sim |t|^{-\alpha}, \quad (1.2)$$

$$\xi \sim |t|^{-\nu}, \quad (1.3)$$

$$\chi \sim |t|^{-\gamma}, \quad (1.4)$$

respectivamente, onde  $f(x) \sim$  significa a parte singular da função  $f(x)$ . A equação de estado em campo externo não nulo  $H \neq 0$

$$M \sim H^{1/\delta} \quad (1.5)$$

define o expoente  $\delta$ . Assim se conhecermos os valores desses expoentes conheceremos o comportamento crítico dos materiais estudados.

Os cinco expoentes críticos acima definidos e o expoente  $\eta$  associado à função de correlação

$$G_c^{(2)}(r) \sim r^{2-d-\eta}, \quad (1.6)$$

para  $r$  grande com o sistema na temperatura de transição  $T = T_c$ , não são independentes entre si. Foi mostrado pela primeira vez por Rushbrooke [3], Griffiths [4,5], Josephson [6,7] e Fisher [8], que usaram apenas termodinâmica básica e algumas suposições razoáveis, que os seis expoentes críticos deveriam satisfazer a quatro desigualdades. Posteriormente, experimentos indicaram que essas desigualdades deveriam ser, na verdade, igualdades.

Daí uma das importâncias de se obter experimentalmente esses expoentes críticos. Widom [9] supôs que a energia livre de Helmholtz  $f(T, H)$  poderia ser escrita como

$$f(T, H) = t^{1/y} \psi \left( \frac{H}{t^{x/y}} \right). \quad (1.7)$$

A equação (1.7) é conhecida como a hipótese de escala de Widom. Dessa hipótese seguem duas relações de escala, a de Rushbrooke e a de Widom

$$\alpha + 2\beta + \gamma = 2, \quad (1.8)$$

$$\gamma = \beta(\delta - 1), \quad (1.9)$$

respectivamente. As outras duas relações de escala entre os expoentes são as relações de escala de Fisher e Josephson

$$\gamma = \nu(2 - \eta), \quad (1.10)$$

$$\nu d = 2 - \alpha, \quad (1.11)$$

respectivamente.

As relações de escala (1.8)-(1.11) são muito úteis na determinação dos expoentes críticos. Temos seis expoentes críticos a determinar e quatro relações de escala entre eles. Então necessitamos obter independentemente apenas dois deles. Os outros quatro expoentes podem ser calculados através dessas quatro relações de escala.

Essas relações de escala podem ser obtidas de primeiros princípios e não meramente através de hipóteses como vimos anteriormente. Isto é feito utilizando a teoria do grupo de renormalização. A idéia pioneira foi devida a Kadanoff [10], com sua técnica de dizimação ou grupo de renormalização no espaço real. Considere um modelo de Ising bidimensional em uma rede quadrada, que possui uma determinada constante de rede (distância entre dois vizinhos mais próximos). Uma dizimação corresponde a transformar 4 spins de uma quadrado em um único spin efetivo. Aplicando esta técnica a todos os pontos da rede, obtemos uma rede efetiva cujo parâmetro de rede é agora maior do que o original. Este processo pode ser realizado um grande número de vezes, sendo eficiente por exemplo em cálculos numéricos. Esta técnica deu origem a uma linha de pesquisa conhecida como

grupo de renormalização no espaço real. Do ponto de vista quantitativo, esta abordagem não rendeu grandes resultados, pois o método permite obter apenas pequenas correções às soluções de campo médio para as grandezas desejadas.

Entretanto, esta idéia foi adaptada ao espaço dos momentos levando a resultados espetaculares: as transformações de dizimação sobre blocos de spin ganhavam agora um significado mais preciso em termos matemáticos, permitindo pela primeira vez obter resultados analíticos muito além da teoria de campo médio para as grandezas de interesse. Estas transformações de grupo de renormalização no espaço dos momentos correspondem a resolver o problema não-trivial da interação entre todas as escalas de comprimento envolvidas. De acordo com Wilson [11, 12], para examinarmos o problema no regime infravermelho tudo o que temos que fazer é integrar os modos com pequenos comprimentos de onda (dizimação) sucessivamente. Quando as grandezas desejadas não mudam mais depois de um dado número de iterações de grupo de renormalização, dizemos que o sistema físico está em um ponto fixo. Estes conceitos juntamente com a expansão perturbativa em um parâmetro pequeno ( $\epsilon = 4 - d$ , onde  $d$  é a dimensão espacial do sistema) fornece a chave para obter os resultados analíticos há muito tempo esperados.

Podemos utilizar métodos que nos permitem estudar modelos como o de Ising, que são modelos de magnetismo localizado. Desses modelos, os mais simples representam materiais onde seus íons têm um momento magnético resultante diferente de zero por causa da existência de uma camada eletrônica incompleta. Outros modelos possuem spins que interagem através de uma interação que tem uma origem puramente quântica. Essas interações são um resultado de forças Coulombianas combinadas com o princípio da exclusão de Pauli e paridade das funções de onda, resultando assim na conhecida interação de troca. Assim a Hamiltoniana de interação para esses modelos é da forma

$$H \propto \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2. \quad (1.12)$$

A constante de proporcionalidade entre a Hamiltoniana  $H$  e os dois operadores de spin  $\vec{S}_1$  e  $\vec{S}_2$  na última equação correspondente à interação de troca acima discutida é designada pela letra  $J$ . Quando  $J > 0$ , os spins são paralelos e esta situação contribui para um estado do material chamado de ferromagnético. Se  $J < 0$ , os spins são antiparalelos e

este caso resulta em um estado conhecido como antiferromagnético. Se tivermos alguma anisotropia na estrutura cristalina do material podemos adicionar a energia de interação de tal modo a selecionarmos algumas componentes de spin que interagem entre si. Com isso o spin pode ter  $N$  componentes. Como uma magnetização não nula é o resultado de spins alinhados em uma mesma direção, o parâmetro de ordem pode ter  $N$  componentes. Alguns exemplos de modelos de magnetismo localizado com diferentes valores do número de componentes  $N$  do parâmetro de ordem são o modelo de Ising onde  $N = 1$ , o modelo  $XY$  em que  $N = 2$  e o modelo de Heisenberg no qual  $N = 3$ . Todos esses modelos apresentam transições de fase. Nesses modelos os íons ou spins são localizados em pontos de uma rede  $d$ -dimensional denominados sítios e interagem entre si por meio de forças de troca. Na equação (1.12), precisamos somar sobre todos os sítios da rede para obtermos a Hamiltoniana total. Sítios imediatamente adjacentes são chamados de primeiros vizinhos. Em todos esses modelos as interações são apenas entre primeiros vizinhos e existe uma fase ordenada assim como uma fase desordenada.

Uma característica importante desses expoentes críticos é que eles não dependem dos detalhes microscópicos do sistema. Eles dependem apenas do número de componentes  $N$  do parâmetro de ordem e da dimensão espacial  $d$  do sistema. Uma consequência desse fato é que diferentes modelos, em diferentes situações, possuem os mesmos expoentes críticos, desde que esses vários modelos tenham um parâmetro de ordem com o mesmo número de componentes  $N$  e mesma dimensão espacial  $d$ . Os expoentes críticos são grandezas físicas universais e possuem os mesmos valores para um dado par  $(N, d)$ , independentemente do modelo usado para descrevermos o sistema em questão. Esse conjunto de modelos que tem os mesmos expoentes críticos pertencem a uma mesma classe de universalidade definida por  $(N, d)$ . Outros exemplos de grandezas físicas universais são razões entre amplitudes de potenciais termodinâmicos acima e abaixo da transição, como o calor específico e a susceptibilidade.

Técnicas utilizando idéias do grupo de renormalização e expansão  $\epsilon$  foram usadas pela primeira vez no cálculo perturbativo de expoentes críticos usando expansão diagramática no espaço dos momentos [13–15]. Posteriormente esta técnica foi reformulada onde foram

adicionados elementos de teoria de campos convencional para o cálculo de expoentes críticos em teorias sem massa renormalizadas em momentos externos não-nulos [16–18]. Esta abordagem moderna pode ser estendida para calcular expoentes críticos usando uma teoria com campos massivos renormalizados em momentos externos nulos [19] através das equações de Callan-Symanzik [20, 21]. Vamos revisar brevemente esta técnica de integrais funcionais e teoria de campos escalares massivos para calcular expoentes críticos (e outras grandezas universais). O cálculo dos expoentes críticos em segunda ordem no número de laços (loops) será abordado no capítulo 2, o que servirá de subsídio para nossa discussão de sistemas em competição. Para maiores detalhes, o leitor é convidado a ler as referências [18, 22–25]. Podemos perguntar se estas técnicas podem ser utilizadas para estudar sistemas em competição. Vamos então analisar modelos para sistemas físicos em competição.

Consideremos agora os modelos mais simples que exibem competição do tipo Lifshitz. Apesar de sua aplicabilidade em vários sistemas físicos reais, o comportamento crítico de Lifshitz será descrito usando a linguagem de sistemas magnéticos.

Podemos pensar em modelos mais gerais nos quais além de interações de troca entre primeiros vizinhos, existem também interações de troca entre segundos vizinhos. Se  $J_1$  é a constante de acoplamento da interação de troca entre primeiros vizinhos e  $J_2$  a constante de acoplamento associada à interação entre segundos vizinhos podemos ter algumas propriedades novas. Se  $J_1 > 0$  e  $J_2 > 0$  a interação favorece o alinhamento dos spins e nada de novo surge porque obtemos os mesmos expoentes críticos de antes com interações entre apenas primeiros vizinhos. Mas se ao contrário temos  $J_1 > 0$  e  $J_2 < 0$ , o sinal negativo de  $J_2$  favorece o estado onde os spins são antiparalelos. Assim variando a razão  $J_2/J_1$  é equivalente a introduzirmos competição entre ferromagnetismo e antiferromagnetismo nesses modelos.

Competição pode ser introduzida de duas maneiras, anisotrópica e isotrópica. O caso mais simples de competição anisotrópica acontece quando  $J_1$  tiver componentes ao longo de todas as direções espaciais e  $J_2$  tiver componentes ao longo de uma única direção da rede. Essa anisotropia é chamada uniaxial e o comportamento crítico em tal situação

é chamado de comportamento crítico de Lifshitz uniaxial. Esse comportamento crítico ocorre quando a razão  $J_2/J_1$  tem um determinado valor na temperatura de Lifshitz. Este caso é descrito pelo modelo ANNNI (*axial next-nearest-neighbor Ising*) [26,27]. Este modelo descreve um sistema de spins  $1/2$  interagindo através de forças de troca competitivas de curto alcance do tipo Ising. Esses spins estão em sítios de uma rede  $d$ -dimensional composta por camadas  $(d-1)$ -dimensionais. Os spins no plano de cada camada interagem entre seus primeiros vizinhos por meio de forças de troca ferromagnéticas com constante de acoplamento  $J_0 > 0$ . Já os spins situados ao longo do eixo perpendicular aos planos dessas camadas interagem através de forças de troca ferromagnéticas entre seus primeiros vizinhos, com constante de acoplamento  $J_1 > 0$ , e através de forças de troca antiferromagnéticas entre seus segundos vizinhos, onde a constante de acoplamento é  $J_2 < 0$ . (No modelo ANNNI original  $J_0 = J_1$ . Entretanto, o caso  $J_0 \neq J_1$  implica em considerarmos as interações ferromagnéticas entre primeiros vizinhos como sendo independentes nas direções perpendiculares e paralelas ao longo do eixo onde ocorrem interações ferromagnéticas entre segundos vizinhos. Mais tarde nos concentraremos nesta situação.) O diagrama de fase para sistemas descritos por esse modelo possui além das conhecidas fases ordenada ferromagnética e desordenada paramagnética, uma fase modulada ordenada. As linhas que separam as fases ferromagnética, paramagnética e modulada encontram-se num ponto, o ponto de Lifshitz (de segundo caráter). Em uma situação mais geral  $J_2$  pode ter componentes ao longo de  $m$  direções espaciais. Essas direções são conhecidas como eixos de competição. Para esses sistemas o novo parâmetro  $m$  deve ser especificado se quisermos descrever seus comportamentos críticos. Esses sistemas agora pertencem a uma classe de universalidade maior caracterizada por  $(N, d, m)$  e exibem um comportamento crítico do tipo Lifshitz  $m$ -axial. Podemos ter competição isotrópica quando  $J_1$  e  $J_2$  têm componentes em todas as direções espaciais  $d = m$ . As classes de universalidade para esses sistemas são definidas por  $(N, m)$ .

Podemos generalizar o modelo uniaxial acima mencionado. Nesse caso mais geral, a situação mais simples permite além de interações de troca ferromagnéticas entre primeiros vizinhos com  $J_1 > 0$  ao longo de todas as direções espaciais, interações antiferromagnéti-

cas entre segundos vizinhos com  $J_2 < 0$  ao longo de uma única direção espacial, como também interações ferromagnéticas entre terceiros vizinhos com  $J_3 > 0$  ao longo da mesma direção espacial de  $J_2$ . Nesse caso obtemos o comportamento de Lifshitz uniaxial de terceiro caráter quando as razões  $J_2/J_1$ ,  $J_3/J_1$  assumem determinados valores na temperatura crítica de Lifshitz. Quando  $J_2$  e  $J_3$  têm componentes ao longo de  $m_3$  direções espaciais surgem os pontos de Lifshitz  $m_3$ -axiais de terceiro caráter. Suas classes de universalidade são definidas por  $(N, d, m_3)$ . Se tivermos uma situação em que, simultaneamente,  $J_2$  tem  $m_2$  componentes e  $J_3$  tem  $m_3$  componentes, estamos diante de um comportamento crítico de Lifshitz  $m_3$ -axial de terceiro caráter genérico. Nessa situação, as classes de universalidade são dadas por  $(N, d, m_2, m_3)$  e são maiores que as classes de universalidade definidas por  $(N, d, m_3)$  para o comportamento crítico de Lifshitz  $m_3$ -axial de terceiro caráter. O caso isotrópico de terceiro caráter ocorre quando  $m_3 = d$  e as classes de universalidade nesse caso são definidas por  $(N, m_2 = 0, m_3 = d)$  [28].

Essa idéia pode ser estendida para o caso em que permitimos interações entre primeiros vizinhos ao longo de todas as direções espaciais com  $J_1 > 0$  e interações alternadas até  $L$ -ésimos vizinhos ao longo de uma única direção espacial. Este caso define o comportamento crítico de Lifshitz uniaxial de  $L$ -ésimo caráter. Isso ocorre quando as razões  $J_2/J_1, \dots, J_{L-1}/J_1, J_L/J_1$  têm valores particulares na temperatura de Lifshitz. Quando essas interações alternadas ocorrem ao longo de  $m_L$  direções espaciais, obtemos o comportamento crítico de pontos de Lifshitz  $m_L$ -axiais de  $L$ -ésimo caráter. As classes de universalidades para esses sistemas são caracterizadas por  $(N, d, m_L)$ . O caso isotrópico é obtido quando  $m_L = d$ , assim suas classes de universalidade são dadas por  $(N, m_L)$  [29, 30].

Entretanto, o caso mais geral possível de sistemas em competição pode ser compreendido através da seguinte idealização: suponha que temos simultaneamente interações não-competitivas apenas entre primeiros vizinhos ao longo de  $(d - m_2 - \dots - m_L)$  direções espaciais, interações competitivas entre segundos vizinhos ao longo de  $m_2$  direções espaciais, interações competitivas entre terceiros vizinhos ao longo de  $m_3$  direções espaciais, e assim por diante, até  $L$ -ésimos vizinhos ao longo de  $m_L$  direções espaciais. Com isso obtemos o comportamento crítico de Lifshitz de  $L$ -ésimo caráter genérico. Suas classes

de universalidade são definidas por  $(N, d, m_2, \dots, m_L)$ . Essas classes de universalidade são uma extensão não-trivial das classes de universalidade para sistemas sem competição caracterizadas por  $(N, d)$ . No caso isotrópico as interações competitivas ocorrem até  $L$ -ésimos vizinhos ao longo de todas as direções espaciais, assim suas classes de universalidades são caracterizadas por  $(N, m_2 = \dots = m_{L-1} = 0, m_L = d)$ .

Nesta tese, estudamos o cálculo de expoentes críticos de sistemas físicos com interações competitivas arbitrárias usando um formalismo de campos escalares massivos. Para isto, introduzimos o método de Callan-Symanzik-Lifshitz para os casos anisotrópicos e isotrópicos. Utilizamos várias escalas de massa associadas aos diversos comprimentos de correlação presentes no problema. Conseqüentemente, estas escalas definem transformações de grupo de renormalização independentes para cada subespaço inequivalente. Esta análise é feita no regime ultravioleta, pois nesse limite as equações de Callan-Symanzik-Lifshitz podem ser integradas e suas soluções podem ser encontradas. No ponto fixo ultravioleta, as partes de vértice  $1PI$  (irredutíveis a uma partícula) possuem invariâncias por escala. Calculamos os expoentes críticos via teoria de perturbação diagramática renormalizada. Os resultados assim obtidos estão em perfeita concordância com aqueles determinados usando a teoria com campos sem massa.

No capítulo 2 revisamos os conceitos relevantes de sistemas físicos sofrendo transições de fase usuais (sem competição). Para isto, resumimos os aspectos fundamentais necessários para o cálculo de expoentes críticos na teoria de campo escalar massiva renormalizada com uma única escala de massa. Este roteiro será útil na nossa discussão subsequente de sistemas competitivos.

Seria útil entender como estas adaptações funcionam no caso mais simples do ponto de Lifshitz  $m$ -axial, também conhecido como ponto de Lifshitz de segundo caráter. Neste caso as interações competitivas ocorrem apenas entre segundos vizinhos. No caso anisotrópico  $m < d$ , necessitamos de 2 escalas de massa independentes para descrever tal comportamento crítico. No caso isotrópico, apenas 1 escala de massa é necessária para atacar o problema de maneira satisfatória. A renormalizabilidade das partes de vértice irredutíveis a uma partícula pode ser demonstrada rigorosamente por indução através das equações

de Callan-Symanzik na dimensão crítica. A dimensão crítica nos casos anisotrópicos dependem de  $m$  na forma  $d_c = 4 + m/2$ . O parâmetro conveniente para desenvolver uma expansão perturbativa em torno da dimensão crítica é portanto  $\epsilon_L = 4 + m/2 - d$ , onde  $d$  é a dimensão espacial do sistema. No caso isotrópico, a dimensão crítica é 8. O parâmetro perturbativo nesse caso é ( $m = d$ ) é  $\epsilon_L = 8 - d$ . Os expoentes críticos podem ser calculados até segunda ordem na expansão perturbativa no número de "loops". Esta discussão está descrita no capítulo 3.

Este método pode ser adaptado para sistemas competitivos arbitrários descritos pelas classes de universalidade  $(N, d, m_2, \dots, m_L)$ . De fato, interações competitivas ocorrem até  $L$ -ésimos vizinhos, com  $L$  subespaços de momentos independentes. Os casos anisotrópicos ( $d \neq m_2 \dots \neq m_L; d \neq m_2 + \dots + m_L$ ) requerem  $L$  escalas de massa independentes, uma para cada subespaço competitivo distinto. A dimensão crítica dos casos anisotrópicos agora dependem de todos os tipos de eixos de competição na forma  $d_c = 4 + \sum_{n=2}^L [(n-1)/n]m_n$ . Nesse caso o parâmetro perturbativo é  $\epsilon_n = 4 + \sum_{n=2}^L [(n-1)/n]m_n - d$ . Nos casos isotrópicos a dimensão crítica é dada por  $d_c = 4n$ ,  $n = 1, 2, \dots, L$ . Assim  $\epsilon_n = 4n - d$  é o parâmetro usado na expansão perturbativa no número de "loops". Calcularemos os expoentes até a ordem dois no número de "loops" para esses comportamentos críticos arbitrários. Este é o assunto do capítulo 4.

No capítulo 5 discutimos os nossos resultados e concluímos com algumas perspectivas futuras resultantes desta discussão.



## Revisão de fenômenos críticos

Expoentes críticos são exemplos de grandezas universais. Eles podem ser calculados usando técnicas do grupo de renormalização e expansão perturbativa diagramática em teoria de campo. De fato, sistemas físicos que exibem transições de fase e definem os expoentes críticos são objetos de estudo da mecânica estatística, mas podem ser tratados matematicamente usando ferramentas originalmente introduzidas para descrever interações fundamentais de partículas na natureza.

Durante os últimos anos consolidou-se a idéia original de vários pesquisadores [13–15, 17, 19] que o cálculo de expoentes críticos pode ser realizado usando integrais funcionais em teoria de campo. Em particular, foi mostrado que uma teoria escalar do tipo  $\lambda\phi^4$  seria o cenário matemático natural para descrever tais expoentes.

Uma vantagem de utilizar esta descrição de campos escalares é a emergência de universalidade: os expoentes críticos só dependem do número de componentes do parâmetro de ordem e da dimensão espacial do sistema. Estes dois parâmetros são suficientes para caracterizar sistemas físicos que exibem transições de fase usuais. Em outras palavras, diferentes sistemas físicos com os mesmo valores de  $(N, d)$  têm as mesmas grandezas universais, ou seja, a mesma física regida por estas grandezas.

Temos um outro ponto vantajoso nesta formulação: as integrais funcionais podem ser calculadas usando diferentes técnicas de regularização e renormalização. A questão central é que mesmo que as integrais resultantes dependam destes procedimentos, os expoentes críticos obtidos em diferentes esquemas de cálculo são os mesmos.

Neste capítulo vamos nos concentrar sobre uma teoria de campo escalar massiva do tipo  $\lambda\phi^4$  que descreve transições de fase usuais. Na linguagem de sistemas magnéticos, a magnetização (momento de dipolo por unidade de volume) faz o papel do campo. A massa dos campos corresponde à diferença de temperatura em relação à temperatura de

transição de fase. A ação é definida em termos de uma densidade de Lagrangiana definida em um volume euclidiano. Em geral, a densidade de Lagrangiana pode ser escrita como um polinômio nos campos e suas derivadas. No entanto usaremos uma teoria de campo escalar efetiva onde apenas os monômios de segundo e quarto graus serão utilizados. Introduzimos a linguagem de teorias massivas para o cálculo de expoentes críticos de acordo com o método desenvolvido originalmente por E. Brezin, J. C. Le Guillou e J. Zinn-Justin [19]. Seguindo esse método, definimos a teoria renormalizada via condições de normalização em momentos externos nulos. As funções de vértice são renormalizadas multiplicativamente. Apresentamos as equações de Callan-Symanzik e discutimos como essas equações assumem a forma de uma equação do tipo grupo de renormalização. Isto ocorre no limite em que os momentos dos loops nos grafos de Feynman são grandes (momentos no regime ultravioleta) quando comparados com a massa dos campos. As constantes de normalização usadas na renormalização multiplicativa contêm as divergências ultravioletas da teoria através das integrais de Feynman. As integrais de Feynman são calculadas em regularização dimensional e essas divergências ultravioletas são expressas em termos de pólos no parâmetro  $\epsilon$  de regularização. Embora as constantes de normalização sejam divergentes, suas divergências se cancelam no algoritmo de renormalização, de maneira que as funções  $\beta$  e de Wilson utilizadas no cálculo dos expoentes críticos são finitas no parâmetro de expansão  $\epsilon$ . Apresentaremos os resultados para os expoentes que determinam o comportamento crítico de sistemas físicos sem competição.

## 2.1 Representação do modelo de Ising por integrais funcionais

O modelo de Ising descreve transições de fase em sistemas magnéticos. Trata-se de um modelo de spins localizados em uma rede  $d$ -dimensional, interagindo via forças de troca quânticas. Ele é um dos exemplos mais simples em mecânica estatística de um modelo discreto que pode ser representado por integrais funcionais em termos de campos contínuos. Considere uma rede de  $N$  sítios, onde a cada sítio está associado uma variável

de spin que pode assumir dois valores:  $\pm 1$ . A energia desse sistema é dada por

$$E\{s_i\} = - \sum_{i,j} J_{ij} s_i s_j - \sum_i h_i s_i, \quad (2.1)$$

onde a interação ocorre entre primeiros vizinhos,  $J_{ij}$  é a interação de troca entre os spins e  $h_i$  é o campo magnético externo. Na fase ferromagnética, a energia de interação spin-spin é tal que a distribuição energeticamente favorável ocorre quando os spins possuem os mesmos valores nos sítios vizinhos. Se a distribuição mais favorável energeticamente é aquela quando os spins vizinhos assumem valores contrários, o sistema é chamado de antiferromagnético. Se  $J_{ij} > 0$ , o acoplamento é ferromagnético, ao passo que se  $J_{ij} < 0$ , o acoplamento é antiferromagnético. Para um estado de energia  $E\{s_i\}$ , o peso de Boltzmann associado é dado por

$$P\{s_i\} = e^{-\beta E\{s_i\}}, \quad (2.2)$$

onde  $\beta = 1/k_B T$  e a função de partição é

$$Z\{h_i\} = \sum_{\{s_i\}} e^{-\beta E\{s_i\}}. \quad (2.3)$$

As funções de correlação do sistema podem ser obtidas a partir da função de partição. Por exemplo, o valor médio da variável de spin no sítio  $i$  é dada por

$$M_i = \langle s_i \rangle |_{h_i=0} = \frac{1}{Z} \left. \frac{dZ}{dh_i} \right|_{h_i=0}. \quad (2.4)$$

Na fase ferromagnética essa grandeza tem um valor não-nulo. Na fase desordenada paramagnética, a magnetização é nula. Portanto, este parâmetro caracteriza o conceito de ordem e é chamado por esta razão de parâmetro de ordem do ferromagneto de Ising. Além do mais, o spin  $s_i$  é definido como uma grandeza por unidade de volume. Esta é uma característica de uma variável de campo contínuo. Podemos então identificar  $s_i$  como um campo contínuo. Se o sistema possui simetria de translação, então  $J_{ij} = J_{ji}$ , implicando em  $\langle s_i \rangle = \langle s \rangle = M$ .

Podemos entender melhor como o modelo de Ising pode ser representado como uma teoria de campos contínuos através dos argumentos apresentados a seguir. Não tentaremos ser nem completos nem rigorosos nesse tratamento. O leitor interessado nos detalhes envolvidos nessa exposição deve consultar a referência [18] na qual nos baseamos.

A equação (2.3) pode ser escrita de uma maneira diferente usando a transformação Gaussiana

$$\int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^N dx_i \exp\left(-\frac{1}{4}x_i V_{ij} x_j + s_i x_i\right) = \text{Const.} \times \exp(s_i V_{ij} s_j), \quad (2.5)$$

onde  $V$  é uma matriz simétrica com elementos  $V_{ij}$  e índices repetidos são somados automaticamente, como

$$\begin{aligned} Z\{H_i\} &= \sum_{\{s_i\}} \exp(s_i K_{ij} s_j + H_i s_i) \propto \sum_{\{s_i\}} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^N d\phi_i \exp\left[-\frac{1}{4}\phi_i K_{ij} \phi_j + (\phi_i + H_i)s_i\right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^N d\phi_i \exp\left[-\frac{1}{4}(\phi_i - H_i)K_{ij}(\phi_j - H_j)\right] \sum_{\{s_i\}} \exp(\phi_i s_i), \end{aligned} \quad (2.6)$$

onde fizemos uma translação nas variáveis  $\phi_i \rightarrow \phi_i - H_i$ . O termo  $\mathcal{D}\phi = \prod_i d\phi_i$  é a medida da integral funcional e  $K_{ij} = J_{ij}/k_B T$  e  $H_i = h_i/k_B T$ .

Agora podemos somar sobre as variáveis de spin  $s_i$  para obtermos

$$\sum_{\{s_i\}} \exp(\phi_i s_i) = \prod_i (2 \cosh \phi_i) = \text{Const.} \times \exp\left[\sum_i \ln(\cosh \phi_i)\right]. \quad (2.7)$$

Com isso, podemos escrever a função de partição (2.6) usando

$$\psi_i = \frac{1}{2} K_{ij}^{-1} \phi_j \quad (2.8)$$

como

$$Z\{H_i\} \propto \exp\left(-\frac{1}{4} H_i K_{ij}^{-1} H_j\right) \int \mathcal{D}\phi \exp\left\{-\psi_i K_{ij} \psi_j + H_i \psi_i + \sum_i \ln[\cosh(2K_{ij} \psi_j)]\right\}. \quad (2.9)$$

O termo  $H_i \psi_i$  que envolve o campo magnético externo é o análogo do termo  $J\phi$  para uma fonte externa em integrais funcionais usadas em teoria de campo escalar.

Podemos obter alguns resultados simples na teoria livre, em que  $H_i = 0$ . Como a teoria é livre podemos usar ondas planas como funções base. Então definindo as transformadas de Fourier

$$\psi_i \equiv \psi(\mathbf{r}_i) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3 \mathbf{k} \psi(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_i}, \quad (2.10)$$

$$K_{ij} \equiv K(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{k} K(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)} \quad (2.11)$$

e usando a expansão  $\ln \cosh x = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 + \dots$ , o termo livre da (2.9) toma a forma

$$\int \mathcal{L}_0 dx = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3\mathbf{k} [K(\mathbf{k}) - 2|K(\mathbf{k})|^2] \psi(\mathbf{k}) \psi(-\mathbf{k}). \quad (2.12)$$

Um ponto importante surge agora. Expandiremos  $K(\mathbf{k})$  em potências de  $k$  até segunda ordem como

$$K(\mathbf{k}) = K_0(1 - \rho^2 k^2). \quad (2.13)$$

Em princípio todas as potências devem ser consideradas, mas para os sistemas estudados neste capítulo os termos de ordem mais alta são irrelevantes e, no máximo, contribuem com pequenas correções na região crítica. Necessitaremos e voltaremos a discutir esse ponto novamente para os sistemas estudados no próximo capítulo. Com a expansão (2.13) podemos mostrar que

$$\int \mathcal{L}_0 dx = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3\mathbf{k} \frac{1}{2} \left( \frac{T - T_0}{T_0} + \rho^2 k^2 \right) \psi(\mathbf{k}) \psi(-\mathbf{k}), \quad (2.14)$$

onde  $T_0 = 2\gamma J_0$  com  $\gamma$  sendo o número de primeiros vizinhos de cada spin e  $J_0$  uma constante. Com as definições

$$\phi = \rho\psi, \quad (2.15)$$

$$\mu^2 \equiv \frac{1}{\rho^2} \frac{T - T_0}{T_0}, \quad (2.16)$$

a (2.14) é escrita como

$$\int \mathcal{L}_0 dx = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3\mathbf{k} \frac{1}{2} (k^2 + \mu^2) \psi(\mathbf{k}) \psi(-\mathbf{k}). \quad (2.17)$$

A (2.17) tem a mesma forma funcional da densidade de Lagrangiana para um campo escalar real no espaço dos momentos. A massa  $\mu$  está relacionada com a diferença de temperatura de transição de fase. Com isso, uma teoria sem massa pode ser usada para representar uma teoria crítica.

Em particular estamos interessados em um campo escalar real de bósons com interações quânticas, que é o protótipo de fenômenos críticos usuais como mostramos acima e objeto de estudo da próxima seção.

## 2.2 Teoria de campo massiva

A teoria de campo massiva que descreve o comportamento crítico de sistemas sem interações competitivas é uma teoria de campo escalar auto-interagente com densidade de Lagrangiana não-renormalizada definida num volume euclidiano  $d$ -dimensional dada por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(|\nabla\phi|^2 + \mu_0^2\phi^2) + \frac{\lambda_0}{4!}\phi^4, \quad (2.18)$$

onde  $\phi$ ,  $\mu_0$  e  $\lambda_0$  são o campo, a massa e a constante de acoplamento não-renormalizados, respectivamente.

O funcional gerador é dado por

$$Z\{J\} = \frac{\int \mathcal{D}\phi \exp\left\{-\int(\mathcal{L} - J\phi)dx\right\}}{\int \mathcal{D}\phi \exp\left\{-\int \mathcal{L}dx\right\}}, \quad (2.19)$$

onde  $dx$  é um elemento de volume  $d$ -dimensional, mostrando assim que existe uma analogia com a mecânica estatística, onde o análogo do funcional gerador interagente é a função de partição, o que é conveniente para tratarmos problemas de mecânica estatística.

Assim sendo, podemos escrever o funcional gerador interagente como

$$Z\{J\} = \mathcal{N}^{-1} \exp\left\{-\int dx \mathcal{L}_{int}\left(\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)\right\} Z^0\{J\}, \quad (2.20)$$

onde

$$Z^0\{J\} = \exp\left\{\frac{1}{2}\int dx dy J(x)G_0(x-y)J(y)\right\} \quad (2.21)$$

é o funcional gerador para a teoria livre e  $dx$  é um elemento de volume euclidiano em  $d$  dimensões;  $G_0(x-y) = G_0^{(2)}$  é a função de dois pontos não-interagente. A constante  $\mathcal{N}$  é obtida da condição de normalização

$$Z\{J\}|_{J=0} = 1. \quad (2.22)$$

$Z\{J\}$  é chamado de funcional gerador porque é utilizado para gerarmos as funções de Green de  $N$  pontos (ou pernas externas) da teoria interagente, dadas por

$$G^{(N)}(x_1, \dots, x_N) = \frac{\delta^N Z\{J\}}{\delta J(x_1)\dots\delta J(x_N)}\Bigg|_{J=0}. \quad (2.23)$$

A equação (2.23) é uma representação das funções de Green de  $N$  pontos no espaço das coordenadas. Para o problema que abordaremos, com simetria de translação, é conveniente trabalharmos em uma representação das funções de Green de  $N$  pontos no espaço dos momentos. Assim a representação no espaço dos momentos correspondente à equação (2.23) é dada por

$$G^{(N)}(k_1, \dots, k_N) = \frac{\delta^N Z\{J\}}{\delta J(-k_1) \dots \delta J(-k_N)} \Big|_{J=0}. \quad (2.24)$$

Ao fazermos a expansão perturbativa em potências de  $\lambda$ , utilizando a equação (2.24), obtemos grafos que são desconectados e grafos que são conectados. Grafos desconectados são grafos que podem ser escritos como um produto disjunto de dois grafos. Já os grafos conectados não podem ser escritos como o produto disjunto de dois grafos, alguns deles sendo formados pelo produto de dois grafos ligados por um propagador  $G_0(k)$ . Assim, qualquer termo da expansão perturbativa pode, em geral, ser escrito como uma soma de grafos conectados e desconectados.

Com o intuito de trabalharmos com um número menor de grafos, para uma dada ordem em  $\lambda$ , consideraremos apenas grafos conectados. De fato, tal expansão pode ser obtida, onde podemos escrever as funções de Green em termos de funções de Green conectadas, assim temos

$$G_c^{(N)}(k_1, \dots, k_N) = \frac{\delta^N F\{J\}}{\delta J(-k_1) \dots \delta J(-k_N)} \Big|_{J=0}. \quad (2.25)$$

onde

$$Z\{J\} = e^{F\{J\}} \quad (2.26)$$

e  $G_c^{(N)}(k_1, \dots, k_N)$  são as funções de Green conectadas de  $N$  pontos ou pernas externas e  $F\{J\}$  seu funcional gerador.

Podemos trabalhar com uma expansão perturbativa ainda mais simplificada onde temos apenas grafos cujos propagadores associados às pernas externas são omitidos, pois estes propagadores das pernas externas entram como fatores multiplicativos que não envolvem integrais. Desses grafos, os que não podem ser separados em dois dois cortando-se apenas uma linha são chamados de *1PI* (irredutíveis a uma partícula). Eles são

denominados partes de vértice  $1PI$ ,  $\Gamma^{(N)}(k_1, \dots, k_N)$ . A vantagem de utilizar partes de vértice  $1PI$  é que qualquer função de Green de  $N$  pontos pode ser expressa em termos de  $\Gamma^{(N)}$ . Portanto, as partes de vértice  $1PI$  são os tijolos fundamentais desta construção, pois a teoria completa pode ser reconstruída a partir destes blocos básicos em teoria de perturbação.

As partes de vértice  $1PI$  são obtidas, formalmente, das funções de Green conectadas através de uma transformação de Legendre

$$\Gamma\{\bar{\phi}\} = \sum_i \bar{\phi}(i)J(i) - F\{J\}, \quad (2.27)$$

onde

$$\langle \phi(i) \rangle \equiv \langle \phi_{\alpha_i}(k_i) \rangle \equiv \bar{\phi}(i) = \frac{\delta F\{J\}}{\delta J(i)} \quad (2.28)$$

e a equação (2.28) é usada para escrevermos  $J(i)$  em termos de  $\bar{\phi}(i)$ .

Assim como para as funções de Green de  $N$  pontos, podemos escrever as partes de vértice  $1PI$  em termos de seu funcional gerador (2.27) como

$$\Gamma^{(N)}(1, \dots, N) \equiv \frac{\delta^N \Gamma\{\bar{\phi}\}}{\delta \bar{\phi}(1) \dots \delta \bar{\phi}(N)} \Big|_{J=0}. \quad (2.29)$$

O índice  $N$  está associado ao valor médio de campos  $\phi(x)$  e da mesma forma podemos definir um índice  $L$  associado ao valor médio de campos compostos  $\phi^2(y)$ . Esse valor médio pode ser expresso por

$$\Gamma^{(N,L)}(x_1, \dots, x_N, y_1, \dots, y_L) \equiv \frac{\delta^{N+L} \Gamma\{\bar{\phi}, t\}}{\delta \bar{\phi}(x_1) \dots \delta \bar{\phi}(x_N) \delta t(y_1) \dots \delta t(y_L)} \Big|_{J=t=0} \quad (2.30)$$

que são as partes de vértice  $1PI$  para campos compostos. Temos que introduzir um termo adicional,  $t\phi^2/2$ , na equação (2.18) que é responsável pela geração de funções de Green de campos compostos com  $t(y)$  atuando como uma fonte externa.

Agora, ao invés de trabalharmos com uma expansão perturbativa das partes de vértice  $1PI$  em potências de  $\lambda$ , consideraremos uma expansão no número de loops ou de integrações nos momentos internos dos loops. Isto pode ser visto da seguinte maneira: para uma teoria com densidade de Lagrangiana  $a^{-1}\mathcal{L}$  a equação (2.20) toma a forma

$$Z\{J\} = \mathcal{N}_1 \exp \left\{ - \int dx a^{-1} \mathcal{L}_{int} \left( \frac{\delta}{\delta J(x)} \right) \right\} \int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ \frac{1}{2} \int dx JaG_0J \right\}, \quad (2.31)$$

onde  $\mathcal{N}_1$  é uma constante de normalização. Com isso, no lado direito da equação (2.31), todo vértice de interação é multiplicado por  $a^{-1}$  e todo propagador interno aos loops é multiplicado por  $a$ . Assim, um grafo com  $I$  linhas internas e de ordem  $n$  na constante de acoplamento terá um fator multiplicativo geral dado por  $a^{I-n}$ . A potência desse fator multiplicativo pode ser expressa em termos do número de loops do grafo. De fato, o número de loops de um grafo é o mesmo que o número de variáveis de momento independentes a serem integradas na expressão correspondente ao grafo. Inicialmente, cada linha interna deveria ser rotulada com uma variável de momento independente e com isso teríamos uma integral em  $I$  variáveis. Mas nem todas essas variáveis são independentes entre si. Isto acontece porque em cada vértice de interação há conservação da soma dos momentos que entram e saem de cada vértice. Este fato é expresso matematicamente por funções delta de Dirac onde seus argumentos envolvem os momentos que entram e saem dos vértices considerados. Assim, teríamos  $n$  condições relacionando os momentos dos loops. Os momentos envolvidos nessas  $n$  condições estão relacionados por uma condição de conservação do momento externo total que entra e sai do grafo. Esta última condição elimina uma das  $n$  condições. Assim o número de loops  $L$  é dado por

$$L = I - (n - 1). \quad (2.32)$$

Portanto, todo vértice de interação é multiplicado por  $a^{L-1}$ . Assim vemos que essa é uma expansão em potências do parâmetro  $a$  no número de loops.

### 2.3 Divergências na teoria $\phi^4$

Antes de fazermos a expansão perturbativa no número de loops para as partes de vértice  $1PI$ , consideremos o grafo da função de dois pontos de um loop

$$\int d^d q \frac{1}{q^2 + \mu_0^2}. \quad (2.33)$$

A equação (2.33) tem  $d$  potências do momento no numerador e 2 potências no denominador, assim tem uma divergência de ordem  $d - 2$ . Já o grafo da função de quatro pontos

de um loop

$$\int d^d q \frac{1}{(q^2 + \mu_0^2)[(q+k)^2 + \mu_0^2]}. \quad (2.34)$$

tem uma divergência de ordem  $d - 4$ . Vemos que essas funções de vértice apresentam divergências em 4 dimensões, quadrática e logarítmica, respectivamente. Assim teremos que encontrar uma maneira de removermos essas divergências.

Para entendermos melhor as origens e a importância dessas divergências, consideremos uma teoria com uma interação monomial do tipo  $\lambda_r \phi^r$ . Como estamos num sistema de unidades onde  $\hbar = c = k_B = 1$ , a única dimensão envolvida aqui é a de comprimento  $L$  ou o inverso de comprimento  $\Lambda$ . Assim qualquer grandeza pode ser expressa em unidades de comprimento ou momento; essa dimensão é chamada de dimensão canônica. Como a dimensão canônica em  $d$  dimensões da densidade de Lagrangiana é  $L^{-d}$  ou  $\Lambda^d$ , pois a ação é adimensional, temos que

$$[\phi] = \Lambda^{d/2-1} \quad (2.35)$$

e com isso

$$[\lambda_r \phi^r] = \Lambda^d. \quad (2.36)$$

Assim, a dimensão canônica de  $\lambda_r$  é

$$[\lambda_r] = \Lambda^{r+d-rd/2} = \Lambda^{\delta_r}. \quad (2.37)$$

Da equação (2.37) temos que

$$[\mu_0^2] = \Lambda^2, \quad (2.38)$$

$$[\lambda_4] = \Lambda^{4-d}. \quad (2.39)$$

De acordo com a equação (2.39) vemos que a constante de acoplamento  $\lambda_4$ , para a teoria  $\phi^4$ , é adimensional em  $d = 4$ . De fato, como veremos abaixo, essa é a dimensão em que a teoria  $\phi^4$  é renormalizável.

O propagador livre do campo escalar real contém uma potência quadrática inversa do momento. Para uma teoria com interação  $\lambda_r \phi^r$  em  $d$  dimensões, considere um grafo geral de ordem  $n$  na interação, com  $N$  pernas externas,  $I$  linhas internas e  $L$  loops. A maneira mais simples de visualizar a estrutura das divergências deste diagrama particular é definir

a integral correspondente em termos de um corte ultravioleta nos momentos dos loops . Este corte ultravioleta corresponde ao valor máximo que os momentos internos podem assumir. No limite superior de integração dos momentos internos, definimos um valor máximo  $\Lambda$  para os momentos, a partir do qual o integrando se anula. As divergências ultravioletas do diagrama em questão refletem-se como potências de  $\Lambda$ , que determina o seu comportamento assintótico no limite  $\Lambda \rightarrow \infty$ . Este diagrama, na ausência de divergências devidas a subintegrações quando  $\Lambda \rightarrow \infty$ , terá um comportamento assintótico do tipo  $\Lambda^\delta$  onde

$$\delta = Ld - 2I. \quad (2.40)$$

A constante  $\delta$  é chamada de grau superficial de divergência.

O número de loops  $L$  pode ser escrito em termos do número de linhas internas  $I$  e da ordem em interação  $n$  como vimos na equação (2.32) como

$$L = I - (n - 1). \quad (2.41)$$

O número de linhas internas pode ser escrito como a soma das linhas de todos os vértices  $nr$  menos o número de pernas externas. Como duas linhas formam um propagador temos

$$I = \frac{1}{2}(nr - N). \quad (2.42)$$

Substituindo agora as equações (2.41), (2.42) na equação (2.40) obtemos

$$\delta = -n\delta_r + (d + N - Nd/2). \quad (2.43)$$

O primeiro termo do lado direito da equação (2.43) é a dimensão canônica da constante de acoplamento multiplicada pela ordem perturbativa  $n$ . Já o segundo termo do lado direito da mesma equação representa a soma da dimensão do campo multiplicada por uma constante negativa com a dimensão espacial. Este termo independe da ordem em teoria de perturbação. Para valores de  $d$  e  $r$  tais que  $\delta_r$  é negativo, as divergências dos grafos crescem com o aumento de  $n$ , não permitindo assim que absorvamos todas as divergências da teoria em um conjunto finito de parâmetros, não sendo, assim, possível renormalizarmos a teoria. Para que possamos obter uma expansão perturbativa cujas

divergências sejam independentes da ordem em interação  $n$ , temos que ter constantes de acoplamento adimensionais. Assim fazendo  $\delta_r = 0$  na equação (2.43) obtemos a dimensão crítica na qual a teoria é renormalizável,

$$d_c = \frac{2r}{r-2}. \quad (2.44)$$

No caso de interesse aqui,  $r = 4$  e  $d_c = 4$ .

Em  $d_c$  podemos escrever a equação (2.43) como

$$\delta_c(N, d = d_c) = d_c(1 - N/2) + N. \quad (2.45)$$

Os grafos que possuem  $\delta_c \geq 0$  são chamados de grafos primitivamente divergentes. Essas divergências são conhecidas como divergências primitivas e não resultam de inserções de outras funções de vértice. Assim, da equação (2.45) e (2.44), essa condição toma a forma

$$N \leq \frac{2d_c}{d_c - 2} = r. \quad (2.46)$$

Para a teoria de interesse aqui, com interações do tipo  $\lambda\phi^4$ , temos que os grafos primitivamente divergentes são os que possuem  $N = 2$  e  $N = 4$ , ou seja,  $\Gamma^{(2)}$  e  $\Gamma^{(4)}$ . Como  $d_c = 4$ ,  $\delta_c(N = 2) = 2$  indica uma divergência quadrática, o que requer duas subtrações e  $\delta_c(N = 4) = 0$  indica uma divergência logarítmica, sendo necessário assim uma única subtração. Essas divergências estão associadas a inserções de operadores  $\phi$ . Se considerarmos também inserções de operadores compostos  $\phi^2$ , cada inserção deste tipo adiciona um propagador a mais nas funções de vértice, tornando assim as funções de vértice menos divergentes. Assim, a divergência primitiva de  $\Gamma^{(N,L)}$  é

$$\delta' = \delta - 2L. \quad (2.47)$$

Como a dimensão crítica é a mesma como para  $\Gamma^{(N)}$ , temos

$$\delta'_c(N, L, d = d_c) = d_c(1 - N/2) + N - 2L. \quad (2.48)$$

A condição  $\delta'_c(N, L, d = d_c) \geq 0$  dá, em  $d_c = 4$ ,

$$N \leq \frac{2d_c - 4L}{d_c - 2} = r - 2L \quad (2.49)$$

indicando que os grafos primitivamente divergentes de  $\Gamma^{(N,L)}$  são  $\Gamma^{(0,2)}$  e  $\Gamma^{(2,1)}$ .  $\delta'_c(N = 0, L = 2) = 0$  indica uma divergência logarítmica para  $\Gamma^{(0,2)}$  e que apenas uma subtração é necessária e  $\delta'_c(N = 2, L = 1) = 0$  indica o mesmo para  $\Gamma^{(2,1)}$ . Não iremos tratar a divergência de  $\Gamma^{(0,2)}$  pois esta parte de vértice só pode ser renormalizada aditivamente. Nesta tese, nos restringiremos às partes de vértice renormalizadas multiplicativamente. Assim, ao todo, temos que realizar quatro subtrações, que serão expressas por quatro condições de normalização na próxima seção.

## 2.4 Condições de normalização para teorias massivas

Existem vários esquemas de renormalização. Em particular, estamos interessados em renormalizar a teoria quando os momentos externos são fixos, pois isto simplifica a nossa análise. Quando os momentos externos são fixos, utilizamos condições de normalização e no nosso caso, condições de normalização para teorias massivas. Os expoentes críticos podem ser calculados usando uma teoria massiva em que os valores dos momentos externos são nulos. Neste caso, considera-se que os parâmetros da densidade de Lagrangiana inicial (2.18),  $\mu_0$  e  $\lambda_0$ , são infinitos, e portanto não representam os valores reais das grandezas físicas associadas. Os valores reais dessas grandezas, que são medidos em laboratório, são os novos parâmetros  $\mu$  e  $g$  renormalizados, respectivamente. O mesmo ocorre com as funções de vértice  $\Gamma(k_i, \mu_0, \lambda_0)$  e  $\Gamma_R(k_i, \mu, g)$ . Assim, impomos, às três partes de vértice  $1PI$  primitivamente divergentes, as seguintes condições de normalização em momentos externos nulos:

$$\Gamma_R^{(2)}(0; \mu, g) = \mu^2, \quad (2.50)$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial k^2} \Gamma_R^{(2)}(k; \mu, g) \right|_{k^2=0} = 1, \quad (2.51)$$

$$\Gamma_R^{(4)}(k_i = 0; \mu, g) = g, \quad (2.52)$$

$$\Gamma_R^{(2,1)}(k_i = 0, 0; \mu, g) = 1, \quad (2.53)$$

A diferença para a teoria sem massa é que as integrais necessárias para o cálculo dos

expoentes críticos têm que ser calculadas com massa diferente de zero e os momentos externos nulos.

Para a renormalização das funções de vértice acima citadas utilizaremos as idéias da teoria do grupo de renormalização. Essas idéias consistem em renormalizarmos multiplicativamente as partes de vértice  $1PI$  onde os infinitos são absorvidos em fatores multiplicativos  $Z_\phi$  e  $Z_{\phi^2}$ , assim podemos escrever

$$\Gamma_R^{(N,L)}(k_1, \dots, k_N, p_1, \dots, p_L; g, \mu) = Z_\phi^{N/2} Z_{\phi^2}^L \Gamma^{(N,L)}(k_i, p_i; \lambda_0, \mu_0, \Lambda) \quad (2.54)$$

onde  $k_1, \dots, k_N, p_1, \dots, p_L$  são os momentos externos associados a inserções de operadores  $\phi$  e de operadores compostos  $\phi^2$ , respectivamente. Usamos um corte no momento  $\Lambda$  em que as partes de vértice renormalizadas  $\Gamma_R^{(N,L)}$  são finitas quando  $\Lambda \rightarrow \infty$  para  $d \leq 4$  para todo  $N$  e  $L$  em toda ordem em teoria de perturbação. As constantes  $\mu$  e  $g$  são a massa e a constante de acoplamento renormalizadas, respectivamente. Como veremos adiante, ao renormalizarmos a teoria, usaremos para o cálculo dos expoentes críticos as funções de vértice  $\Gamma^{(2)}$ ,  $\Gamma^{(4)}$  e  $\Gamma^{(2,1)}$ . Assim, para esse cálculo, usaremos a expansão perturbativa até a ordem de três loops para  $\Gamma^{(2)}$  o que nos habilita a calcular o expoente  $\eta$  até a ordem de três loops, e até a ordem de dois loops para  $\Gamma^{(4)}$  e  $\Gamma^{(2,1)}$ , tornando possível o cálculo do expoente  $\nu$  até a ordem de dois loops [18].

## 2.5 Equações de Callan-Symanzik e funções de Wilson

Apresentaremos as equações de Callan-Symanzik para as funções de vértice renormalizadas  $\Gamma_R^{(N,L)}$ . Essas equações são úteis no estudo de teorias de campo massivas pois dão o comportamento das funções de vértice quando a massa renormalizada é variada. Elas fornecem um método alternativo para a obtenção de funções de vértice renormalizadas invariantes por transformações de escala. As equações de Callan-Symanzik tomam a mesma forma de equações do tipo grupo de renormalização em um determinado regime, que ocorre quando os momentos são muito grandes em comparação com a massa. Quando expressas apenas em termos de grandezas renormalizadas, essas equações são escritas

como [18]

$$\left[ \mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta(u) \frac{\partial}{\partial u} - \frac{1}{2} N \gamma_\phi(u) + L \gamma_{\phi^2}(u) \right] \Gamma_R^{(N,L)}(k_i, p_i; \mu, u) = \mu^2 [2 - \gamma_\phi(u)] \Gamma_R^{(N,L+1)}(k_i, p_i, 0; \mu, u), \quad (2.55)$$

onde  $\mu$  é a massa e  $u$  a constante de acoplamento adimensional renormalizadas e as funções  $\beta$  e de Wilson são dadas por

$$\beta(u) = \left( \mu \frac{\partial u}{\partial \mu} \right)_{\lambda_0, \Lambda}, \quad (2.56)$$

$$\gamma_\phi(u) = \mu \left( \frac{\partial \ln Z_\phi}{\partial \mu} \right)_{\lambda_0, \Lambda}, \quad (2.57)$$

$$\gamma_{\phi^2}(u) = - \left( \mu \frac{\partial \ln Z_{\phi^2}}{\partial \mu} \right)_{\lambda_0, \Lambda}. \quad (2.58)$$

A função de vértice do lado direito da equação (2.55) possui uma inserção em momento zero a mais e assim tem um propagador a mais, pois

$$\Gamma_R^{(N,L+1)} = \frac{\partial}{\partial \mu^2} \Gamma_R^{(N,L)}, \quad (2.59)$$

então

$$\Gamma_R^{(N,L+1)}(k_i, p_i, 0; \mu, u) \sim p_i^{-2} \Gamma_R^{(N,L)}(k_i, p_i; \mu, u). \quad (2.60)$$

Assim, quando  $k_i/\mu, p_i/\mu \rightarrow \infty$ , podemos usar o teorema de Weinberg [31]: quando todos os momentos crescem uniformemente na região euclidiana, um grafo com um propagador a mais será menor que o último por uma potência quadrática da escala de momento. Assim o lado direito da equação (2.55) pode ser desprezado com relação ao lado esquerdo ordem a ordem em teoria de perturbação. Neste limite, no regime ultravioleta da teoria, o lado esquerdo da equação pode ser desprezado e podemos então determinar as soluções correspondendo aos pontos fixos que podem ser utilizados no cálculo dos expoentes críticos.

Agora podemos expressar as (2.56)-(2.58) em termos de grandezas adimensionais. De fato, podemos escrever

$$\left( \mu \frac{\partial u}{\partial \mu} \right)_{\lambda_0, \Lambda} = -\mu \frac{(\partial \lambda_0 / \partial \mu)_u}{(\partial \lambda_0 / \partial u)_\mu}, \quad (2.61)$$

onde

$$\mu \left( \frac{\partial \lambda_0}{\partial \mu} \right)_u = \epsilon \lambda_0, \quad (2.62)$$

e assim podemos escrever de uma outra maneira a função  $\beta$  e as funções de Wilson como

$$\beta(u) = -\epsilon \left( \frac{\partial \ln u_0}{\partial u} \right)^{-1}, \quad (2.63)$$

$$\gamma_\phi(u) = \left( \mu \frac{\partial u}{\partial \mu} \right) \frac{\partial \ln Z_\phi}{\partial u} = \beta(u) \frac{\partial \ln Z_\phi}{\partial u}, \quad (2.64)$$

$$\bar{\gamma}_{\phi^2}(u) = - \left( \mu \frac{\partial u}{\partial \mu} \right) \frac{\partial \ln \bar{Z}_{\phi^2}}{\partial u} = -\beta(u) \frac{\partial \ln \bar{Z}_{\phi^2}}{\partial u}, \quad (2.65)$$

onde usa-se  $\bar{\gamma}_{\phi^2}(u)$  ao invés de  $\gamma_{\phi^2}(u)$  no cálculo de expoentes críticos e

$$\bar{Z}_{\phi^2} = Z_\phi Z_{\phi^2}. \quad (2.66)$$

Fazendo então as seguintes expansões em termos da constante de acoplamento renormalizada

$$u_0 = u(1 + a_1 u + a_2 u^2), \quad (2.67)$$

$$Z_\phi(u) = 1 + b_2 u^2 + b_3 u^3, \quad (2.68)$$

$$\bar{Z}_{\phi^2}(u) = 1 + c_1 u + c_2 u^2, \quad (2.69)$$

podemos escrever a função  $\beta$  e as funções de Wilson como

$$\beta(u) = -\epsilon u [1 - a_1 u + 2(a_1^2 - a_2)u^2], \quad (2.70)$$

$$\gamma_\phi(u) = -\epsilon u [2b_2 u + (3b_3 - 2b_2 a_1)u^2], \quad (2.71)$$

$$\bar{\gamma}_{\phi^2}(u) = \epsilon u [c_1 + (2c_2 - c_1^2 - a_1 c_1)u]. \quad (2.72)$$

As grandezas  $u_0$ ,  $Z_\phi$  e  $\bar{Z}_{\phi^2}$  nas equações (2.67)-(2.69) são divergentes e dependem do parâmetro  $\epsilon$  através de integrais de Feynman da teoria interagente. Essa dependência é expressa em termos de pólos de ordem  $n$  em  $\epsilon$  da forma  $1/\epsilon^n$  contidos nas integrais de Feynman. Já as funções nas equações (2.70)-(2.72) dependem do parâmetro  $\epsilon$ , mas os pólos se cancelam no cálculo dessas funções de modo que elas são funções analíticas em  $\epsilon$ .

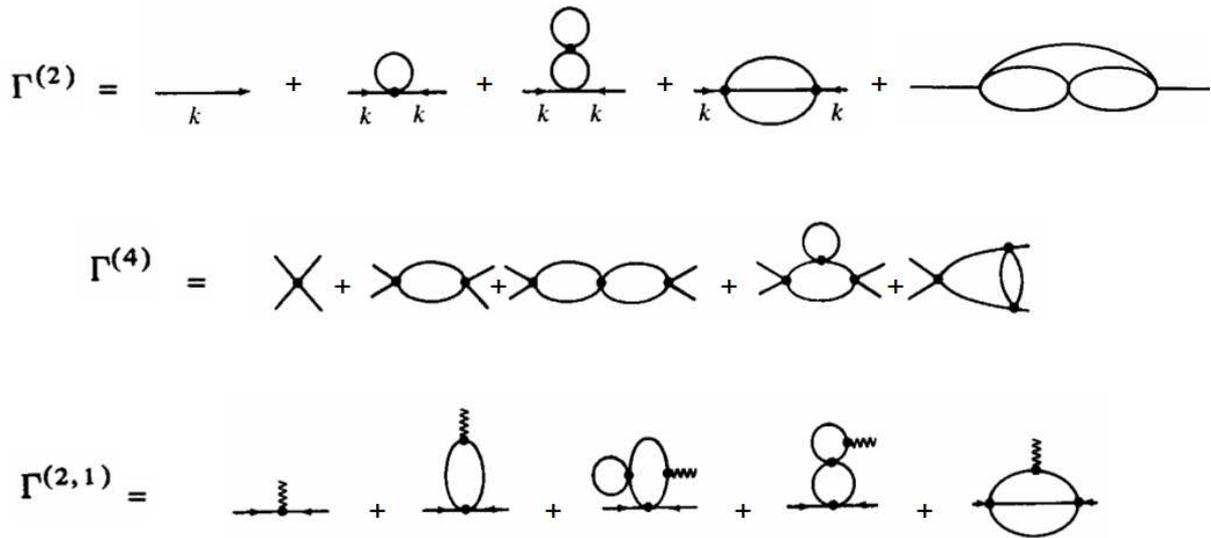
Com o uso da equação (2.70) calculamos o ponto fixo ultravioleta  $u_\infty$  de  $\beta(u_\infty) = 0$ . Os expoentes críticos  $\eta$  e  $\nu$  são calculados através das equações (2.71), (2.72) calculadas no ponto fixo ultravioleta  $u = u_\infty$  como

$$\eta = \gamma_\phi(u_\infty), \tag{2.73}$$

$$\nu^{-1} = 2 - \eta - \bar{\gamma}_{\phi^2}^* \tag{2.74}$$

respectivamente, onde  $\bar{\gamma}_{\phi^2}^* \equiv \bar{\gamma}_{\phi^2}(u_\infty)$ . Os outros expoentes críticos são calculados através de relações de escala.

As constantes nas equações (2.67), (2.68), (2.69) dependem das condições de normalização escolhidas; os expoentes críticos, no entanto, independem dessas condições. Assim calcularemos essas constantes fixando os momentos externos e fazendo-os iguais a zero.



**Figura 2.1** Expansão diagramática para os vértices primitivamente divergentes.

Na figura 2.1, o segundo e o terceiro grafos na expansão de  $\Gamma^{(2)}$  se cancelam quando renormalizamos a massa. De maneira similar, a renormalização da massa permite eliminar a contribuição do quarto diagrama na expansão de  $\Gamma^{(4)}$  na figura acima. Finalmente, na expansão de  $\Gamma^{(2,1)}$ , a renormalização da massa elimina efetivamente a necessidade do terceiro diagrama na expansão dessa função de vértice. O terceiro grafo de  $\Gamma^{(4)}$  e o quarto grafo de  $\Gamma^{(2,1)}$  correspondem essencialmente à mesma expressão para a integral de

Feynman correspondente. Esse mesmo grafo está contido no terceiro grafo de  $\Gamma^{(4)}$  e no quarto grafo de  $\Gamma^{(2,1)}$  na forma de seu quadrado. Assim, com esse grafo somado com o último grafo de  $\Gamma^{(4)}$  e  $\Gamma^{(2,1)}$  e com os dois últimos grafos da expansão de  $\Gamma^{(2)}$ , temos que calcular apenas 4 integrais de Feynman independentes para obtermos os expoentes críticos diagramaticamente, no mínimo, até a ordem de dois "loops" na expansão perturbativa.

Usando a equação (2.54) e as equações (2.51)-(2.53), podemos escrever para as três funções de vértice primitivamente divergentes  $\Gamma^{(2)}$ ,  $\Gamma^{(4)}$  e  $\Gamma^{(2,1)}$ , de acordo com a expansão diagramática para essas funções, no mínimo até a ordem de dois loops [18],

$$\frac{\partial}{\partial k^2} \Gamma^{(2)}(k) \Big|_{k^2=0} = 1 - B_2 u_0^2 + B_3 u_0^3, \quad (2.75)$$

$$\Gamma^{(4)} \Big|_{SP} = \mu_0^\epsilon [u_0 - A_1 u_0^2 + (A_2^{(1)} + A_2^{(2)}) u_0^3], \quad (2.76)$$

$$\Gamma^{(2,1)} \Big|_{SP} = 1 - C_1 u_0 + (C_2^{(1)} + C_2^{(2)}) u_0^2, \quad (2.77)$$

onde  $SP$  significa que as integrais são calculadas em um ponto de simetria que simplifica a análise. Para teorias massivas podemos escolher um ponto de simetria em momentos externos nulos.

As constantes nas equações (2.76) são definidas como

$$A_1 = \bar{A}_1 \mu_0^\epsilon J_{2SP}, \quad (2.78)$$

$$A_2^{(1)} = \bar{A}_2^{(1)} \mu_0^{2\epsilon} J_{2SP}^2, \quad (2.79)$$

$$A_2^{(2)} = \bar{A}_2^{(2)} \mu_0^{2\epsilon} J_4, \quad (2.80)$$

onde as integrais  $J_{2SP}$  e  $J_4$  são dadas por

$$J_{2SP} = \int dq \frac{1}{(q^2 + \mu_0^2)[(q+k)^2 + \mu_0^2]} \Big|_{k=0} \quad (2.81)$$

e

$$J_4 = \int dq_1 dq_2 \frac{1}{(q_1^2 + \mu_0^2)(q_2^2 + \mu_0^2)[(q_1 + q_2)^2 + \mu_0^2]} \quad (2.82)$$

onde escrevemos  $J_4$  em momentos externos nulos e

$$\bar{A}_1 = \frac{N+8}{6}, \quad (2.83)$$

$$\bar{A}_2^{(1)} = \frac{N^2 + 6N + 20}{36}, \quad (2.84)$$

$$\bar{A}_2^{(2)} = \frac{5N + 22}{9}. \quad (2.85)$$

As constantes  $\bar{A}_1$ ,  $\bar{A}_2^{(1)}$  e  $\bar{A}_2^{(2)}$  são os fatores de simetria dos grafos para uma teoria de campo escalar  $N$ -vetorial para uma interação com simetria  $O(N)$  do tipo [18]

$$\mathcal{L}_{int} = \frac{\lambda}{4!} \left( \sum_{i=1}^N \phi_i^2 \right)^2 = \frac{\lambda}{4!} F_{ijkl} \phi_i \phi_j \phi_k \phi_l, \quad (2.86)$$

onde

$$F_{ijkl} = \frac{1}{3} (\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}). \quad (2.87)$$

Já as constantes na equação (2.75) são definidas por

$$B_2 = \bar{B}_2 \mu_0^{2\epsilon} \frac{\partial}{\partial k^2} D_3 \Big|_{k^2=0} \equiv \bar{B}_2 \mu_0^{2\epsilon} D'_3, \quad (2.88)$$

$$B_3 = \bar{B}_3 \mu_0^{3\epsilon} \frac{\partial}{\partial k^2} D_5 \Big|_{k^2=0} \equiv \bar{B}_3 \mu_0^{3\epsilon} D'_5, \quad (2.89)$$

e as integrais  $D_3$  e  $D_5$  têm as seguintes expressões

$$D_3 = \int dq_1 dq_2 \frac{1}{(q_1^2 + \mu_0^2)(q_2^2 + \mu_0^2)[(q_1 + q_2 + k)^2 + \mu_0^2]}, \quad (2.90)$$

$$D_5 = \int dq_1 dq_2 dq_3 \frac{1}{(q_1^2 + \mu_0^2)(q_2^2 + \mu_0^2)(q_3^2 + \mu_0^2)[(q_1 + q_2 + k)^2 + \mu_0^2][(q_1 + q_3 + k)^2 + \mu_0^2]}. \quad (2.91)$$

As constantes  $\bar{B}_2$  e  $\bar{B}_3$  também são os fatores de simetria para uma teoria  $N$ -vetorial para uma interação com simetria  $O(N)$  e são dadas por [18]

$$\bar{B}_2 = \frac{N + 2}{18}, \quad (2.92)$$

$$\bar{B}_3 = \frac{(N + 2)(N + 8)}{108}. \quad (2.93)$$

Da condição de normalização para  $\Gamma_R^{(2,1)}$  obtemos

$$C_1 = \bar{C}_2 \mu_0^\epsilon J_{2SP}, \quad (2.94)$$

$$C_2^{(1)} = \bar{C}_2^{(1)} \mu_0^{2\epsilon} J_{2SP}^2, \quad (2.95)$$

$$C_2^{(2)} = \bar{C}_2^{(2)} \mu_0^{2\epsilon} J_4 \quad (2.96)$$

e

$$\bar{C}_1 = \frac{N+2}{6}, \quad (2.97)$$

$$\bar{C}_2^{(1)} = \left( \frac{N+2}{6} \right)^2, \quad (2.98)$$

$$\bar{C}_2^{(2)} = \frac{N+2}{6}, \quad (2.99)$$

onde as constantes  $\bar{C}_1$ - $\bar{C}_2^{(2)}$  acima também estão associados a fatores de simetria para uma teoria  $N$ -vetorial.

Ao calcularmos as integrais acima, as integrais angulares resultam em um fator angular que é a área de uma esfera  $d$ -dimensional  $S_d$ . Surge então uma potência de  $S_d$  a cada integração, ou seja para cada loop, e as únicas integrais a serem calculadas são as radiais no espaço dos momentos. Essa constante pode ser absorvida em uma redefinição da constante de acoplamento através das definições

$$\mu_0^\epsilon J_{2SP} = S_d D_2, \quad (2.100)$$

$$\mu_0^{2\epsilon} D_3 = (S_d)^2 E_3, \quad (2.101)$$

$$\mu_0^{2\epsilon} J_4 = (S_d)^2 D_4, \quad (2.102)$$

$$\mu_0^{3\epsilon} D_5 = (S_d)^3 E_5. \quad (2.103)$$

Na prática, calculamos as integrais  $D_2$ ,  $E_3$ ,  $E_5$  e  $D_4$ . Essas integrais são determinadas através da mudança de variável nos momentos dos loops  $q_i \rightarrow \mu_0 q_i$ . Assim obtemos

$$D_2 = \int dq \frac{1}{(q^2+1)[(q+k)^2+1]} \Big|_{k=0} = \frac{1}{\epsilon} \left( 1 - \frac{1}{2}\epsilon \right), \quad (2.104)$$

$$\begin{aligned} E_3' = \frac{\partial}{\partial k^2} E_3 \Big|_{k=0} &= \frac{\partial}{\partial k^2} \int dq_1 dq_2 \frac{1}{(q_1^2+1)(q_2^2+1)[(q_1+q_2+k)^2+1]} \Big|_{k=0} = \\ &= -\frac{1}{8\epsilon} \left( 1 - \frac{1}{4}\epsilon \right) - \frac{1}{8} I, \end{aligned} \quad (2.105)$$

onde

$$I = \int_0^1 dx \left\{ \frac{1}{1-x(1-x)} + \frac{\ln[x(1-x)]}{[1-x(1-x)]^2} \right\}, \quad (2.106)$$

$$\begin{aligned}
E'_5 &= \left. \frac{\partial}{\partial k^2} E_5 \right|_{k=0} = \\
\frac{\partial}{\partial k^2} \int dq_1 dq_2 dq_3 & \frac{1}{(q_1^2 + 1)(q_2^2 + 1)(q_3^2 + 1)[(q_1 + q_2 + k)^2 + 1][(q_1 + q_3 + k)^2 + 1]} \Big|_{k=0} = \\
& -\frac{1}{6\epsilon^2} \left( 1 - \frac{1}{4}\epsilon \right) - \frac{1}{4\epsilon} I
\end{aligned} \tag{2.107}$$

e a integral  $I$  é a mesma que aparece na expressão para  $I'_3$  e

$$D_4 = \int dq_1 dq_2 \frac{1}{(q_1^2 + 1)^2 (q_2^2 + 1) [(q_1 + q_2)^2 + 1]} = \frac{1}{2\epsilon^2} \left( 1 - \frac{1}{2}\epsilon \right). \tag{2.108}$$

Em termos das integrais definidas acima, os coeficientes  $a_1$ - $c_2$  podem ser escritos da seguinte forma

$$a_1 = \bar{A}_1 D_2, \tag{2.109}$$

$$a_2 = [2(\bar{A}_1)^2 - \bar{A}_2^{(1)}] D_2^2 - \bar{A}_2^{(2)} D_4 - 2\bar{B}_2 E'_3, \tag{2.110}$$

$$b_2 = \bar{B}_2 E'_3, \tag{2.111}$$

$$b_3 = 2\bar{B}_2 \bar{A}_1 D_2 E'_3 - \bar{B}_3 E'_5, \tag{2.112}$$

$$c_1 = \bar{C}_1 D_2, \tag{2.113}$$

$$c_2 = [(\bar{A}_1 + \bar{C}_1) \bar{C}_1 - \bar{C}_2^{(1)}] D_2^2 - \bar{C}_2^{(2)} D_4. \tag{2.114}$$

Podemos agora calcular os expoentes críticos com os dados mostrados nesta seção. Faremos isso na próxima seção.

## 2.6 Cálculo dos expoentes críticos

Em termos das integrais de Feynman, as equações (2.70)-(2.72) tomam a forma

$$\beta(u) = -\epsilon u + \frac{N+8}{6} \left( 1 - \frac{1}{2}\epsilon \right) u^2 - \frac{3N+14}{12} u^3, \tag{2.115}$$

$$\gamma_\phi(u) = \frac{N+2}{72} \left[ \left( 1 - \frac{1}{4}\epsilon + I\epsilon \right) u^2 - \frac{N+8}{6} (I+1) u^3 \right], \tag{2.116}$$

$$\bar{\gamma}_\phi^2(u) = \frac{N+2}{6} u \left( 1 - \frac{1}{2}\epsilon - \frac{1}{2} \right) u, \tag{2.117}$$

onde os termos de  $\epsilon^{-2}$  nas combinações  $a_1^2 - a_2$  na função  $\beta$  e  $3b_3 - 2b_2a_1$  e  $2c_2 - c_1^2 - a_1c_1$  nas funções de Wilson  $\gamma_\phi$  e  $\bar{\gamma}_{\phi^2}$ , respectivamente se cancelam de maneira que essas funções se tornam analíticas no parâmetro de expansão  $\epsilon$ .

Da equação (2.115) calculamos o ponto fixo de  $\beta(u_\infty) = 0$ , resultando em

$$u_\infty = \frac{6}{N+8}\epsilon \left\{ 1 + \epsilon \left[ \frac{3(3N+14)}{(N+8)^2} + \frac{1}{2} \right] \right\}. \quad (2.118)$$

Esse ponto fixo é não-atrativo e com isso temos que fixar o valor da constante de acoplamento renormalizada no seu valor do regime ultravioleta  $u_\infty$  para obtermos funções de vértice invariantes por transformações de escala. Nesse regime obtemos a invariância de escala das funções de vértice renormalizadas somente quando a constante de acoplamento tem exatamente o valor do ponto fixo ultravioleta.

O expoente  $\eta$  é obtido da equação (2.73) resultando em

$$\eta = \epsilon^2 \frac{N+2}{2(N+8)^2} \left\{ 1 + \epsilon \left[ \frac{6(3N+14)}{(N+8)^2} - \frac{1}{4} \right] \right\}, \quad (2.119)$$

onde a integral  $I$  se cancela no cálculo. O expoente  $\nu$  é calculado através da equação (2.74) com

$$\bar{\gamma}_\phi^2(u^*) = \epsilon \frac{N+2}{N+8} \left[ 1 + \frac{6(N+3)}{(N+8)^2} \epsilon \right], \quad (2.120)$$

que é o mesmo resultado para o caso sem massa, e com isso é dado por

$$\nu = \frac{1}{2} + \frac{N+2}{4(N+8)}\epsilon + \frac{(N+2)(N^2+23N+60)}{8(N+8)^3}\epsilon^2. \quad (2.121)$$

Os expoentes críticos  $\eta$  e  $\nu$  concordam com os calculados utilizando uma teoria sem massa renormalizada em momentos externos não-nulos, confirmando assim o caráter universal desses expoentes. Eles só dependem do número  $N$  de componentes de parâmetro de ordem e da dimensão espacial  $d$  do sistema. Assim, sistemas que possuem os mesmos parâmetros  $(N, d)$  pertencem à mesma classe de universalidade. Os outros expoentes críticos são calculados através das relações de escala (1.8)-(1.11).

## Pontos de Lifshitz $m$ -axiais

Sistemas competitivos são uma extensão natural de sistemas sem competição e possuem propriedades físicas novas como um resultado da introdução dessa competição. No capítulo 2 estudamos sistemas físicos sem competição exibindo transições de fase nos quais existiam apenas interações de troca ferromagnéticas entre primeiros vizinhos e seus diagramas de fase continham somente as conhecidas fases ordenada ferromagnética e desordenada paramagnética.

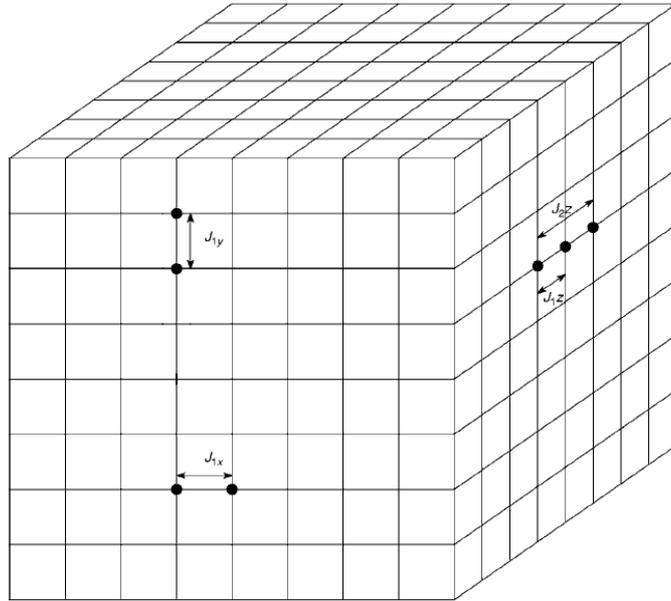
Agora estudaremos o comportamento crítico de sistemas físicos com interações competitivas. Nesse caso surgem além das fases ferromagnética e paramagnética, uma fase ordenada modulada. Isso ocorre porque agora há interações de troca ferromagnéticas entre primeiros vizinhos, como também interações de troca antiferromagnéticas entre segundos vizinhos. A fase ordenada modulada possui um vetor de onda típico não-nulo fixo no equilíbrio, de maneira que a magnetização tem uma dependência senoidal com relação ao eixo de competição  $z$ . A linha de segunda ordem que separa a fase ferromagnética da fase paramagnética e a linha de primeira ordem que separa a fase ferromagnética da fase modulada encontram-se no ponto de Lifshitz [32, 33].

Os pontos de Lifshitz ocorrem em vários sistemas físicos como supercondutores de alta temperatura [34–36], cristais líquidos [37–39], cristais líquidos ferroelétricos [40–42], ferroelétricos uniaxiais [43], alguns tipos de polímeros [44–50], e materiais magnéticos e ligas [51–57]. Um estudo desses pontos críticos tem sido feito também no contexto de transições de fase quânticas [58–60].

Esses pontos críticos têm sido estudados teoricamente usando teorias de campos escalares sem massa renormalizadas em momentos externos não-nulos [61–69]. Neste capítulo, vamos introduzir o formalismo de campos massivos para descrever o comportamento crítico do tipo Lifshitz  $m$ -axial. Este tratamento é análogo àquele esboçado no capítulo

2 para campos massivos convencionais, ou seja, com apenas uma escala de massa.

Como vamos utilizar a linguagem de sistemas magnéticos ao longo da tese, vamos discutir rapidamente ao menos um sistema físico magnético que exibe um ponto de Lifshitz. Esse sistema é o composto magnético MnP. Foram realizados estudos tanto teóricos [51–55] quanto experimentais [56] para descrever o comportamento crítico de Lifshitz desse composto. A transição de fase entre as fases ferromagnética e paramagnética ocorre na temperatura de Curie de 291 K. Esse material magnético apresenta várias fases ordenadas. Entretanto, na temperatura de 47 K na qual ocorre o ponto de Lifshitz, há apenas as fases ordenadas ferromagnética e modulada em torno desse ponto.



**Figura 3.1** Situação física representada pelo modelo ANNNI.

Todos esses sistemas que exibem um comportamento crítico de Lifshitz, apresentam interações competitivas. Desses sistemas, os mais simples são descritos por um modelo que é uma extensão simples do modelo de Ising conhecido como modelo ANNNI (*axial next-nearest-neighbor Ising*) [26,27]. Usando a nomenclatura de sistemas magnéticos esse modelo consiste em uma rede  $d$ -dimensional de spins  $1/2$  como mostrado na figura 3.1. Esses spins interagem através de forças de troca ferromagnéticas entre primeiros vizinhos,

onde a constante de acoplamento  $J_1 > 0$  tem componentes ao longo de todas as direções espaciais, e forças de troca antiferromagnéticas entre segundos vizinhos, em que  $J_2 < 0$  possui componentes ao longo de uma única direção espacial, a direção  $z$  por exemplo. A Hamiltoniana para esses sistemas, na ausência de campo externo, é dada por

$$\mathcal{H}_{ANNI} = - \sum_{j=x,y,z} \sum_i J_{1j} S_{ij} S_{(i+1)j} - J_{2z} \sum_i S_{iz} S_{(i+2)z}, \quad (3.1)$$

onde  $S_{ij}$  é a componente  $z$  do operador de spin  $\mathbf{S}$  no sítio  $i$  ao longo da direção  $j$ . Esses sistemas apresentam um comportamento crítico conhecido como comportamento crítico de Lifshitz uniaxial. Esse caso possui uma anisotropia uniaxial. Os diagramas de fase para esses sistemas possuem as fases ordenada ferromagnética e desordenada paramagnética como em transições de fase usuais, assim como uma fase ordenada modulada.

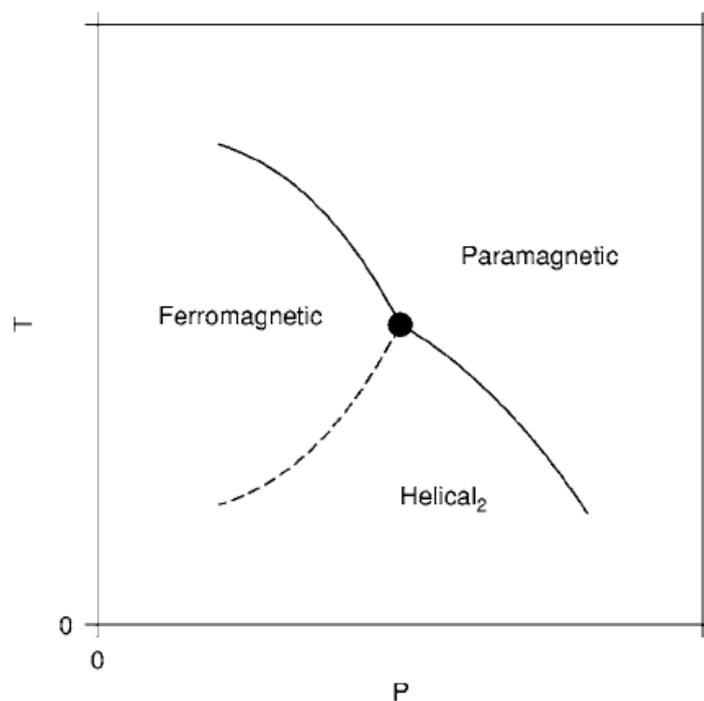
Podemos pensar em uma situação mais geral em que  $J_2$  tem componentes ao longo de  $m$  direções espaciais. Nesse caso obtemos os pontos de Lifshitz  $m$ -axiais. Suas classes de universalidade são definidas por  $(N, d, m)$ . Este é o comportamento anisotrópico. Quando  $J_2$  tem componentes ao longo de todas as direções espaciais obtemos o caso isotrópico cujas classes de universalidade são caracterizadas por  $(N, m)$ . Nesse caso a Hamiltoniana é dada por

$$\mathcal{H} = - \sum_{j=x,y,z} \sum_i J_{1j} S_{ij} S_{(i+1)j} - \sum_{j=x,y,z} \sum_i J_{2j} S_{ij} S_{(i+2)j}. \quad (3.2)$$

A competição entre as interações ferromagnética e antiferromagnética aumenta a complexidade na descrição desses sistemas. De fato, enquanto os sistemas sem competição são caracterizados por uma classe de universalidade definida por  $(N, d)$ , sistemas competitivos possuem classes de universalidade estendidas definidas por  $(N, d, m)$ , onde agora temos que especificar um novo parâmetro  $m$  correspondente ao número de dimensões ao longo das quais existem interações competitivas. Essas  $m$  direções são também conhecidas como eixos competitivos.

Um diagrama de fase típico para sistemas exibindo comportamentos críticos de Lifshitz  $m$ -axiais é mostrado na figura 3.2, onde o parâmetro  $P$  é dado por  $P = J_2/J_1$ . A linha pontilhada indica uma transição de fase de primeira ordem entre as fases modulada

e ferromagnética. Essa linha termina no correspondente ponto de Lifshitz que ocorre para um dado valor da razão  $J_2/J_1$  e da temperatura  $T$  denominada temperatura de temperatura de Lifshitz  $T_L$ . As linhas que separam as fases ferromagnética e modulada da fase paramagnética são linhas de segunda ordem.



**Figura 3.2** Diagrama típico caracterizando pontos de Lifshitz  $m$ -axiais.

O formalismo introduzido no capítulo 2 pode ser estendido para sistemas competitivos descritos acima com pequenas modificações. Iniciaremos essa extensão definindo na próxima seção as condições de normalização para os comportamentos críticos de Lifshitz anisotrópicos e isotrópico.

### 3.1 Condições de normalização

Como discutimos no modelo fenomenológico, neste capítulo estudaremos sistemas que possuem no termo cinético da densidade de Lagrangiana, além de derivadas quadráticas,

derivadas quárticas desse campo. Trata-se de uma teoria de campo efetiva onde o efeito da competição é induzir um termo de derivada mais alta na densidade de lagrangiana efetiva. Essa densidade de Lagrangiana depende do número  $m$  de direções espaciais onde ocorrem interações competitivas. Assim a densidade de Lagrangiana não-renormalizada, em uma teoria Euclidiana, que descreve esses comportamentos críticos é dada por [69]

$$L = \frac{\sigma}{2} |\nabla_m^2 \phi_0|^2 + \frac{1}{2} |\nabla_{(d-m)} \phi_0|^2 + \frac{\delta_0}{2} |\nabla_m \phi_0|^2 + \frac{1}{2} \mu_0^2 \phi_0^2 + \frac{1}{4!} \lambda_0 \phi_0^4, \quad (3.3)$$

onde a constante  $\sigma$  é introduzida para que o termo do qual ela faz parte tenha a mesma dimensão que a dos outros termos. As constantes  $\mu_0$  e  $\lambda_0$  são a massa e a constante de acoplamento não-renormalizada, respectivamente. A variação de  $J_1$  e  $J_2$  nos modelos de rede descritos anteriormente induz uma variação no coeficiente  $\delta_0$ . Para um determinado valor da razão  $J_2/J_1$ ,  $\delta_0$  se anula e isto define a região crítica de Lifshitz, mesmo que o sistema esteja fora da temperatura de Lifshitz ( $T \neq T_L$ ), ou equivalentemente para  $\mu_0 \neq 0$ . O caso anisotrópico ocorre se  $m < d$ . Ainda não sabemos como tratar matematicamente o caso isotrópico para  $m = d$  muito diferente de 8. Por exemplo, o caso  $m = d = 3$  não pode ser tratado com as mesmas técnicas. Restringiremo-nos então ao caso isotrópico (o segundo termo da equação (3.3) é nulo)  $m = d$  próximo de 8.

Como discutido na teoria sem massa [69], a condição  $\delta_0 = 0$  anula as derivadas quadráticas ao longo das  $m$  direções espaciais, onde essa condição ocorre devido a uma instabilidade no espaço dos momentos. Com isso, podemos fazer uma redefinição dimensional dos momentos ao longo dos eixos competitivos, tal que, esses momentos tenham a metade da dimensão de momentos convencionais. Assim podemos nos livrar da constante  $\sigma$  em frente ao primeiro termo da equação (3.3) e considerar os momentos paralelos e perpendiculares aos eixos competitivos como independentes entre si.

Na teoria sem massa foram utilizadas escalas de momento  $\kappa_1$  e  $\kappa_2$  independentes associadas aos subespaços inequivalentes para fixar os valores dos momentos externos. Esses subespaços inequivalentes são o subespaço não-competitivo  $(d - m)$ -dimensional e o subespaço competitivo  $m$ -dimensional. As partes de vértice  $1PI$  correspondentes a estes 2 subespaços foram definidas independentemente. Em outras palavras, componentes

nulas de momentos externos ao longo do subespaço competitivo definem as partes de vértice  $1PI$  ao longo de  $(d - m)$  dimensões (com momentos externos arbitrários ao longo destas direções). Estes objetos foram renormalizados usando uma escala de momento externo  $\kappa_1$ . As partes de vértice  $1PI$  caracterizando os eixos de competição são definidas para componentes nulas de momentos externos ao longo das  $(d - m)$  direções espaciais e momentos externos arbitrários ao longo de  $m$  eixos de competição. Elas foram renormalizadas usando uma escala de momentos externos  $\kappa_2$ . Estas definições implementam as duas escalas independentes necessárias para tratar o caso anisotrópico. O caso isotrópico só requer uma única escala de momento  $\kappa_3$ .

Variações das escalas de momento independentes  $\kappa_1$  e  $\kappa_2$  nas correspondentes teorias renormalizadas partindo da mesma teoria não-renormalizada, ou equivalentemente, os fluxos de grupo de renormalização em direções independentes perpendiculares e paralelas aos eixos competitivos, respectivamente, são gerados pelos comprimentos de correlação  $\xi_{L2}$  perpendicular aos eixos de competição e  $\xi_{L4}$  paralelo aos eixos competitivos. Nesse processo temos a geração de uma equação de grupo de renormalização independente para cada subespaço inequivalente. As duas constantes de acoplamento fluem naturalmente para o mesmo ponto fixo infravermelho, pois esse ponto fixo é um ponto fixo atrativo.

No caso massivo estudado neste trabalho, podemos fazer uma analogia com a análise feita para o caso sem massa. Consideramos os momentos paralelos e perpendiculares aos eixos competitivos como independentes entre si. Assim podemos definir dois conjuntos independentes de condições de normalização, um para cada subespaço inequivalente. Definimos as partes de vértice  $1PI$  do subespaço não-competitivo com momentos externos paralelos aos eixos competitivos iguais a zero e os momentos externos perpendiculares aos eixos de competição arbitrários. Neste caso a massa não-renormalizada  $\mu_{01}$  e a constante de acoplamento não-renormalizada  $\lambda_{01}$  de partida são diferentes de zero enquanto que  $\mu_{02} \equiv \lambda_{02} \equiv 0$ . Já as funções de vértice do subespaço competitivo são definidas com momentos externos nulos perpendiculares aos eixos competitivos e momentos externos paralelos aos eixos de competição arbitrários. Nesta situação temos  $\mu_{02}$  e  $\lambda_{02}$  não-nulos e  $\mu_{01} \equiv \lambda_{01} \equiv 0$ . Usaremos os momentos externos para renormalizarmos a teoria massiva

em cada subespaço inequivalente. Esses momentos externos serão fixados em valores nulos, pois usaremos condições de normalização em momentos externos nulos. Eles podem ser utilizados como rótulos no espaço de parâmetros ao definirmos os dois conjuntos de condições de normalização. No subespaço não-competitivo o momento externo é dado por  $p_{(1)} = P$  (vetor  $(d - m)$ -dimensional) e no subespaço competitivo o momento externo é  $p_{(2)} = K'$  (vetor  $m$ -dimensional). Assim, o momento externo  $p_{(\tau)}$  pertence ao subespaço não-competitivo quando  $\tau = 1$  e ao subespaço competitivo se  $\tau = 2$ .

Como a massa está relacionada com a diferença de temperatura em relação à temperatura de transição, existem duas maneiras independentes de atingirmos a temperatura de Lifshitz através do diagrama de fase para esses sistemas. Uma maneira é por meio da variação da "massa" no subespaço não-competitivo, que é equivalente a nos aproximarmos do ponto de Lifshitz através da fase ordenada ferromagnética. O outro meio é através da variação da "massa" ("fluxo de massa" no espaço dos parâmetros) no subespaço competitivo, correspondente a atingirmos o ponto de Lifshitz pela fase ordenada modulada. Assim, podemos introduzir duas massas não-renormalizadas independentes na densidade de Lagrangiana mencionada acima para que possamos realizar as transformações de escala associadas aos comprimentos de correlação  $\xi_{L2}$  perpendicular aos eixos competitivos e  $\xi_{L4}$  paralelo aos eixos competitivos.

Para introduzirmos massa nos subespaços inequivalentes de teorias de campo escalares do tipo Lifshitz, usaremos o método de redução dimensional de Siegel [70]. Esse método é usado para introduzir massa em teorias de campo com derivadas quadráticas presentes na densidade de Lagrangiana. No caso de campos escalares, como estudado aqui, devemos seguir os seguintes passos: aumentamos o intervalo de índices vetoriais (de momento) onde chamamos o índice adicionado de "-1". Tornamos essa componente de momento igual à massa não-renormalizada  $p_{-1} = \mu_0$ . Usamos um fator de  $i$  para resgatarmos o caráter real da massa não-renormalizada ao quadrado, assim podemos escrever  $\partial_{-1} = ip_{-1} = i\mu_0$ . Com este método de introdução de massa obtemos  $p^2 \rightarrow p^2 + \mu_0^2$ .

No caso anisotrópico usamos o método de redução dimensional para a introdução de massa no subespaço rotulado pelo índice  $\tau$ , em que  $\tau = 1$  para o subespaço não-

competitivo e  $\tau = 2$  para o competitivo. Estendemos o intervalo de índices vetoriais no subespaço  $\tau$  adicionando um índice chamado de "-1". Essa componente do momento adicionada é feita idêntica à massa não-renormalizada nesse subespaço  $p_{-1(\tau)} = \mu_{0\tau}$ . Depois introduzimos um fator de  $i$  para resgatarmos o caráter real da massa não-renormalizada ao quadrado, resultando em  $\partial_{-1(\tau)} = ip_{-1(\tau)} = i\mu_{0\tau}$ . Com isso podemos introduzir massa no termo  $p^2 + (k^2)^2$  de duas maneiras diferentes. Aplicando o método de redução dimensional ao longo do subespaço não-competitivo em que  $\tau = 1$ , onde  $p_{-1(1)} = \mu_{01}$  temos  $p^2 + (k^2)^2 \rightarrow p^2 + (k^2)^2 + \mu_{01}^2$ . Fazendo o mesmo ao longo do subespaço competitivo no qual  $\tau = 2$ , onde  $k_{-1(2)} = \mu_{02}$ , não obtemos o mesmo resultado como obtido para o caso  $\tau = 1$  de maneira tão simples. No subespaço  $\tau = 2$  a potência de momento envolvida é uma potência quártica  $(k^2)^2$ , tal que a redução dimensional agora produz  $(k^2 + k_{-1(2)}^2)^2$ . Então  $p^2 + (k^2)^2 \rightarrow p^2 + (k^2)^2 + \mu_{02}^4$  se  $\{k^2, k_{-1(2)}^2\} = 0$ .

A introdução da massa no caso isotrópico apresenta um padrão similar àquele do caso anisotrópico ao longo dos eixos de competição. O subespaço isotrópico é rotulado pelo índice  $\tau = 3$  e com isso  $k_{-1(3)} = \mu_{03}$ . Então massa é introduzida no operador  $(k^2)^2$  de massa nula como  $(k^2)^2 \rightarrow (k^2)^2 + \mu_{03}^4$  se a condição  $\{k^2, k_{-1(3)}^2\} = 0$  é satisfeita.

Assim vemos que podemos introduzir a massa contida na densidade de Lagrangiana (3.3) das três maneiras descritas acima. Dessa construção matemática para obtermos teorias massivas de operadores de massa nula em direções de momentos inequivalentes concluímos que podemos escolher as massas com a mesma dimensão canônica que a dimensão das componentes dos momentos ao longo do subespaço correspondente a essas massas. Isto impõe que devemos definir massas não-renormalizadas com potências diferentes na densidade de Lagrangiana para deixar claro que os dois subespaços, não-competitivo e competitivo, são inequivalentes. Associadas às massas não-renormalizadas, as massas renormalizadas em cada subespaço têm a mesma dimensão que os momentos nos seus respectivos subespaços. Naturalmente definimos também uma constante de acoplamento para cada subespaço inequivalente. Depois de todas essas considerações a densidade de Lagrangiana não-renormalizada pode ser escrita como

$$L = \frac{1}{2}|\nabla_m^2 \phi_0|^2 + \frac{1}{2}|\nabla_{(d-m)} \phi_0|^2 + \frac{\delta_0}{2}|\nabla_m \phi_0|^2 + \frac{1}{2}\mu_{0\tau}^{2\tau} \phi_0^2 + \frac{1}{4!}\lambda_{0\tau} \phi_0^4, \quad (3.4)$$

Lembre que quando  $\delta_0 = 0$  estamos na região crítica mesmo para  $\mu_{0\tau} \neq 0$ . Como estamos tratando de uma teoria massiva, podemos renormalizar a teoria em momentos externos nulos, pois a teoria é livre de divergências infravermelhas.

Assim, para as funções de vértice de cada subespaço inequivalente podemos escrever as condições de normalização

$$\Gamma_{R(1)}^{(2)}(0; \mu_1, g_1) = \mu_1^2, \quad (3.5)$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial P^2} \Gamma_{R(1)}^{(2)}(P; \mu_1, g_1) \right|_{P^2=0} = 1, \quad (3.6)$$

$$\Gamma_{R(1)}^{(4)}(0; \mu_1, g_1) = g_1, \quad (3.7)$$

$$\Gamma_{R(1)}^{(2,1)}(0, 0; \mu_1, g_1) = 1, \quad (3.8)$$

onde o índice 1 indica que os momentos externos paralelos aos eixos competitivos são identicamente nulos, enquanto que

$$\Gamma_{R(2)}^{(2)}(0; \mu_2, g_2) = \mu_2^4, \quad (3.9)$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial (K'^2)^2} \Gamma_{R(2)}^{(2)}(K'; \mu_2, g_2) \right|_{(K'^2)^2=0} = 1, \quad (3.10)$$

$$\Gamma_{R(2)}^{(4)}(0; \mu_2, g_2) = g_2, \quad (3.11)$$

$$\Gamma_{R(2)}^{(2,1)}(0, 0; \mu_2, g_2) = 1, \quad (3.12)$$

o índice 2 mostra que identificamos os momentos externos perpendiculares aos eixos competitivos iguais a zero, respectivamente. Essas funções de vértice dependem, além de massas renormalizadas, de cortes no momento  $\Lambda_\tau$ , considerados independentes em cada subespaço inequivalente, necessários para termos fluxos independentes no espaço de parâmetros. Constantes de acoplamento renormalizadas independentes  $g_\tau$  também são necessárias para caracterizar cada subespaço. No caso massivo, o ponto fixo ultravioleta é não-atrativo, assim apenas quando essas duas constantes de acoplamento têm precisamente o mesmo valor do ponto fixo ultravioleta anisotrópico  $u_{1\infty} = u_{2\infty} = u_\infty$  obtemos invariança de escala da teoria em cada subespaço separadamente. Esses dois valores são

obtidos das duas condições independentes  $\beta_{1\infty} = 0$  e  $\beta_{2\infty} = 0$  e têm o mesmo resultado  $u_\infty$ . Podemos escrever esses dois conjuntos de condições de normalização como

$$\Gamma_{R(\tau)}^{(2)}(0; \mu_\tau, g_\tau) = \mu_\tau^{2\tau}, \quad (3.13)$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial p_\tau^{2\tau}} \Gamma_{R(\tau)}^{(2)}(p_\tau; \mu_\tau, g_\tau) \right|_{p_\tau^{2\tau}=0} = 1, \quad (3.14)$$

$$\Gamma_{R(\tau)}^{(4)}(0; \mu_\tau, g_\tau) = g_\tau, \quad (3.15)$$

$$\Gamma_{R(\tau)}^{(2,1)}(0, 0; \mu_\tau, g_\tau) = 1, \quad (3.16)$$

onde lembramos que fazemos as identificações  $p_{(1)} = P$ ,  $p_{(2)} = K'$  para os momentos externos dos dois subespaços independentes.

No caso isotrópico, o segundo termo da equação (3.4) é ausente e temos apenas uma escala de momento, massa renormalizada e constante de acoplamento renormalizada envolvidos para definirmos a teoria a ser renormalizada. O rótulo  $\tau$  assume o valor 2 naquela equação mas usamos um índice diferente,  $\tau = 3$ , para deixarmos claro que esse caso difere completamente do caso anisotrópico. As condições de normalização para esse caso são dadas por

$$\Gamma_{R(3)}^{(2)}(0; \mu_3, g_3) = \mu_3^4, \quad (3.17)$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial (K'^2)^2} \Gamma_{R(3)}^{(2)}(K'; \mu_3, g_3) \right|_{(K'^2)^2=0} = 1, \quad (3.18)$$

$$\Gamma_{R(3)}^{(4)}(0; \mu_3, g_3) = g_3, \quad (3.19)$$

$$\Gamma_{R(3)}^{(2,1)}(0, 0; \mu_3, g_3) = 1. \quad (3.20)$$

Essas condições de normalização serão utilizadas posteriormente na obtenção das equações de Callan-Symanzik para os comportamentos críticos de Lifshitz  $m$ -axiais anisotrópico e isotrópico.

Ao renormalizarmos as teorias de campo que descrevem os sistemas com esses comportamentos críticos, as várias funções de vértice, nos casos anisotrópico e isotrópico, serão renormalizadas multiplicativamente até a ordem de dois "loops". Enfatizamos que as funções de vértice aditivamente renormalizadas não serão consideradas em nossa análise. Assim estamos diante do problema de renormalizabilidade multiplicativa em todas as ordens em teoria de perturbação. Este será o assunto das próximas duas seções.

## 3.2 Renormalizabilidade em um loop na dimensão crítica

Na próxima seção provaremos indutivamente a renormalizabilidade multiplicativa em todas as ordens em uma expansão no número de loop em teoria de perturbação. Para tal, analisaremos primeiramente as divergências que ocorrem no nível de 1 loop. Nesta seção, este problema será investigado na dimensão crítica usando um método de regularização que introduz um corte no momento na região ultravioleta. Isto permitirá analisarmos as divergências presentes nas integrais de Feynman.

### 3.2.1 Anisotrópico

Consideremos inicialmente o subespaço não-competitivo. Neste caso  $\tau = 1$  e fixamos  $\mu_{02} = \lambda_{02} = K'_i = 0$ , onde  $K'_i$  são os momentos externos paralelos aos eixos de competição. Os momentos externos perpendiculares aos eixos competitivos  $p_i$  são arbitrários. Assim as partes de vértice  $1PI$ , que são utilizadas no cálculo de expoentes críticos,  $\Gamma_{(1)}^{(2)}$ ,  $\Gamma_{(1)}^{(4)}$  e  $\Gamma_{(1)}^{(2,1)}$  desse subespaço de acordo com a figura 2.1, até a ordem de um loop, são dadas por

$$\Gamma_{(1)}^{(2)}(p) = p^2 + \mu_{01}^2 + \frac{\lambda_{01}}{2} \int \frac{d^{d-m}q d^m k}{q^2 + (k^2)^2 + \mu_{01}^2}, \quad (3.21)$$

$$\Gamma_{(1)}^{(4)}(p_i) = \lambda_{01} - \frac{\lambda_{01}^2}{2} \left[ \int \frac{d^{d-m}q d^m k}{[q^2 + (k^2)^2 + \mu_{01}^2][(q + p_1 + p_2)^2 + (k^2)^2 + \mu_{01}^2]} + \right. \\ \left. (p_1 \rightarrow p_3) + (p_2 \rightarrow p_3) \right], \quad (3.22)$$

$$\Gamma_{(1)}^{(2,1)}(p_1, p_2; p_3) = 1 - \frac{\lambda_{01}}{2} \int \frac{d^{d-m}q d^m k}{[q^2 + (k^2)^2 + \mu_{01}^2][(q + p_3)^2 + (k^2)^2 + \mu_{01}^2]}, \quad (3.23)$$

respectivamente. Estas integrais serão calculadas na dimensão crítica  $d_c = 4 + m/2$ .

A primeira integral que calcularemos é a que aparece na expansão de  $\Gamma_{(1)}^{(2)}(p)$  definida por

$$I_{1(1)} = \int \frac{d^{d-m}q d^m k}{q^2 + (k^2)^2 + \mu_{01}^2}. \quad (3.24)$$

Esta integral pode ser calculada introduzindo um parâmetro de Schwinger  $\alpha$  para escrevermos o propagador livre como

$$\frac{1}{q^2 + (k^2)^2 + \mu_{01}^2} = \int_0^\infty d\alpha \exp\{-\alpha[q^2 + (k^2)^2 + \mu_{01}^2]\}. \quad (3.25)$$

e usando a identidade [69]

$$\int_{-\infty}^\infty dx_1 \dots dx_m \exp[-a(x_1^2 + \dots + x_m^2)^n] = \frac{1}{2n} S_m \Gamma\left(\frac{m}{2n}\right) a^{-m/2n} \quad (3.26)$$

na integração em momento. Seguindo esses passos na integração nos momentos  $q$  e  $k$  obtemos o seguinte resultado

$$I_{1(1)} = \frac{1}{8} S_{4-m/2} S_m \Gamma\left(2 - \frac{m}{4}\right) \Gamma\left(\frac{m}{4}\right) \int_0^\infty d\alpha \alpha^{-2} e^{-\alpha \mu_{01}^2}. \quad (3.27)$$

O termo  $\alpha^{-2}$  na equação (3.27) mostra uma divergência para  $\alpha$  pequeno. Essa divergência é a divergência ultravioleta de  $\Gamma_{(1)}^{(2)}(p)$  nesta ordem em loop. Faremos uma regularização desta integral removendo a região em que  $\alpha$  é pequeno ( $0, \Lambda_1^{-2}$ ), com  $\Lambda_1 \rightarrow \infty$ , onde  $\Lambda_1$  é o corte no momento utilizado nessa regularização. A remoção deste intervalo na integração é feita matematicamente através da introdução da função degrau de Heaviside  $f_{\Lambda_1}(\alpha) = \theta(\alpha - \Lambda_1^{-2})$ . Quando integrada esta função vale 0 para  $\alpha < \Lambda_1^{-2}$  e assume o valor 1 no intervalo  $\alpha > \Lambda_1^{-2}$ . Assim, a integração em  $\alpha$  se dá no intervalo  $(\Lambda_1^{-2}, \infty)$ . Agora integrando a (3.27) nesse intervalo duas vezes por partes e tomando o limite  $\Lambda_1 \rightarrow \infty$  obtemos

$$I_{1(1)} = \frac{1}{8} S_{4-m/2} S_m \Gamma\left(2 - \frac{m}{4}\right) \Gamma\left(\frac{m}{4}\right) \mu_{01}^2 \left[ \frac{\Lambda_1^2}{\mu_{01}^2} - \ln\left(\frac{\Lambda_1^2}{\mu_{01}^2}\right) \right]. \quad (3.28)$$

Este último resultado mostra que a integral calculada tem uma divergência quadrática e uma logarítmica, apresentando assim uma estrutura divergente semelhante à correspondente integral para a teoria  $\phi^4$  convencional [22]. O fator angular global

$$\frac{1}{4} S_{4-m/2} S_m \Gamma\left(2 - \frac{m}{4}\right) \Gamma\left(\frac{m}{4}\right) \quad (3.29)$$

aparece cada vez que realizamos uma integral em loop. Como cada loop de integração produz este fator, podemos absorvê-lo em uma redefinição da constante de acoplamento.

Agora podemos calcular a integral da expansão de  $\Gamma_{(1)}^{(4)}(p_i)$  dada por

$$I_{2(1)}(p) = \int \frac{d^{d-m}q d^m k}{[q^2 + (k^2)^2 + \mu_{01}^2][(q+p)^2 + (k^2)^2 + \mu_{01}^2]}. \quad (3.30)$$

Agora introduzimos um parâmetro de Schwinger para cada propagador e integramos nos momentos  $q$  e  $k$  do loop para obter

$$I_{2(1)}(p) = \frac{1}{8} S_{4-m/2} S_m \Gamma\left(2 - \frac{m}{4}\right) \Gamma\left(\frac{m}{4}\right) \int_0^\infty d\alpha_1 \int_0^\infty d\alpha_2 (\alpha_1 + \alpha_2)^{-2} \times \\ \exp\left[-(\alpha_1 + \alpha_2)\mu_{01}^2 - \frac{\alpha_1 \alpha_2 p^2}{\alpha_1 + \alpha_2}\right]. \quad (3.31)$$

Fazendo agora a mudança de variável  $\alpha' = \alpha_1 + \alpha_2$  e integrando primeiramente em  $\alpha'$  não encontramos nenhuma divergência. Quando integramos sobre a variável remanescente  $\alpha_1$  surge uma divergência ultravioleta para  $\alpha_1$  pequeno. Assim fazendo o mesmo como na integral  $I_{1(1)}$ , introduzindo um corte no momento  $\Lambda_1$  para regularizar a integral obtemos

$$I_{2(1)}(p) = \frac{1}{8} S_{4-m/2} S_m \Gamma\left(2 - \frac{m}{4}\right) \Gamma\left(\frac{m}{4}\right) \ln\left(\frac{\Lambda_1^2}{\mu_{01}^2}\right), \quad (3.32)$$

onde expandimos a exponencial em série de potências envolvendo o momento externo  $p$  e retemos apenas a parte divergente (que é independente do momento).

Estudemos agora o caso  $\tau = 2$  associado ao subespaço competitivo. Neste caso fazemos  $\mu_{01} = \lambda_{01} = p_i = 0$  com  $p_i$  sendo os momentos externos perpendiculares aos eixos competitivos. Já os momentos externos paralelos aos eixos de competição  $K'$  são nulos. As funções correspondentes às (3.21)-(3.23) neste subespaço são

$$\Gamma_{(2)}^{(2)}(K') = (K'^2)^2 + \mu_{02}^4 + \frac{\lambda_{02}}{2} \int \frac{d^{d-m}q d^m k}{q^2 + (k^2)^2 + \mu_{02}^4}, \quad (3.33)$$

$$\Gamma_{(2)}^{(4)}(K'_i) = \lambda_{02} - \frac{\lambda_{02}^2}{2} \left[ \int \frac{d^{d-m}q d^m k}{\{q^2 + (k^2)^2 + \mu_{02}^4\} \{q^2 + [(k + K'_1 + K'_2)^2]^2 + \mu_{02}^4\}} +, \right. \\ \left. (K'_1 \rightarrow K'_3) + (K'_2 \rightarrow K'_3) \right], \quad (3.34)$$

$$\Gamma_{(2)}^{(2,1)}(K'_1, K'_2; K'_3) = 1 - \frac{\lambda_{02}}{2} \int \frac{d^{d-m}q d^m k}{\{q^2 + (k^2)^2 + \mu_{02}^4\} \{q^2 + [(k + K'_3)^2]^2 + \mu_{02}^4\}}, \quad (3.35)$$

respectivamente.

Agora, como a massa do subespaço competitivo  $\mu_{02}$  tem a metade da dimensão da massa  $\mu_{01}$  do subespaço não-competitivo, escolhemos o corte no momento do subespaço competitivo  $\Lambda_2$  ter a metade da dimensão canônica do corte no momento  $\Lambda_1$  do subespaço sem competição. Assim a função degrau de Heaviside utilizada na regularização das integrais neste caso é dada por  $f_{\Lambda_2}(\alpha) = \theta(\alpha - \Lambda_2^{-4})$ . Com isso, fazendo o mesmo como feito para o cálculo das integrais do subespaço não-competitivo obtemos para as correspondentes integrais do subespaço competitivo, no limite em que  $\Lambda_2 \rightarrow \infty$ , os seguintes resultados:

$$I_{1(2)} = \frac{1}{8} S_{4-m/2} S_m \Gamma\left(2 - \frac{m}{4}\right) \Gamma\left(\frac{m}{4}\right) \mu_{02}^4 \left[ \frac{\Lambda_2^4}{\mu_{02}^4} - \ln\left(\frac{\Lambda_2^4}{\mu_{02}^4}\right) \right], \quad (3.36)$$

$$I_{2(2)}(K') = \frac{1}{8} S_{4-m/2} S_m \Gamma\left(2 - \frac{m}{4}\right) \Gamma\left(\frac{m}{4}\right) \ln\left(\frac{\Lambda_2^4}{\mu_{02}^4}\right). \quad (3.37)$$

As equações (3.28), (3.32) e (3.36)-(3.37) podem ser escritas de uma maneira compacta por meio do índice  $\tau$ . Elas são escritas como

$$I_{1(\tau)}(p(\tau)) = \frac{1}{8} S_{4-m/2} S_m \Gamma\left(2 - \frac{m}{4}\right) \Gamma\left(\frac{m}{4}\right) \mu_{02}^{2\tau} \left[ \frac{\Lambda_2^{2\tau}}{\mu_{02}^{2\tau}} - \ln\left(\frac{\Lambda_2^{2\tau}}{\mu_{02}^{2\tau}}\right) \right], \quad (3.38)$$

$$I_{2(\tau)}(p(\tau)) = \frac{1}{8} S_{4-m/2} S_m \Gamma\left(2 - \frac{m}{4}\right) \Gamma\left(\frac{m}{4}\right) \ln\left(\frac{\Lambda_2^{2\tau}}{\mu_{02}^{2\tau}}\right). \quad (3.39)$$

Podemos escrever agora as grandezas renormalizadas  $\mu_\tau$  e  $g_\tau$  em termos das correspondentes não-renormalizadas  $\mu_{0\tau}$  e  $\lambda_{0\tau}$  usando as condições de normalização (3.13) e (3.15) como

$$\mu_\tau^{2\tau} = \mu_{0\tau} + \frac{\lambda_{0\tau}}{2} I_{1(\tau)}(0), \quad (3.40)$$

$$g_\tau = \lambda_{0\tau} - \frac{3\lambda_{0\tau}^2}{2} I_{2(\tau)}(0). \quad (3.41)$$

Podemos fazer o inverso e escrever os parâmetros não-renormalizados em termos dos renormalizados através das últimas equações para a ordem de um loop. Assim, as partes de vértice  $\Gamma_{(\tau)}^{(2)}(p(\tau))$  e  $\Gamma_{(\tau)}^{(4)}(p_i(\tau))$  quando escritas em termos de  $\mu_\tau$  e  $g_\tau$  são finitas em um loop. Fazendo isto podemos escrever

$$\Gamma_{(\tau)}^{(2)}(p(\tau)) = p_{(\tau)}^2 + \mu_\tau^{2\tau}, \quad (3.42)$$

$$\Gamma_{(\tau)}^{(4)}(p_{i(\tau)}) = g_{\tau} - \frac{g_{\tau}^2}{2} [I_{2(\tau)}(p_{1(\tau)} + p_{2(\tau)}) + I_{2(\tau)}(p_{1(\tau)} + p_{3(\tau)}) + I_{2(\tau)}(p_{2(\tau)} + p_{3(\tau)}) - 3I_{2(\tau)}(0)]. \quad (3.43)$$

Apresentaremos agora o conceito de expansão esqueleto, pois de agora em diante usaremos esse conceito nos argumentos que seguem. As funções de vértice  $\Gamma^{(N)}$  para  $N > 4$  são finitas em 1 loop como pode ser visto por contagem de potência. No entanto, se em 2 "loops" essas funções tiverem as partes de vértice  $1PI$   $\Gamma^{(2)}$  e  $\Gamma^{(4)}$  como seus subdiagramas, elas serão divergentes nessa ordem em loop. Assim, se a massa e a constante de acoplamento forem renormalizadas em 1 loop,  $\Gamma^{(N)}$  para  $N > 4$  será automaticamente finita em 2 "loops". Com isso, essas funções, nessa ordem em loop, são chamadas de expansões esqueleto. Podemos generalizar esse conceito para o caso em que  $\Gamma^{(N)}$  ( $N > 4$ ) em uma ordem  $(L + 1)$  no número de "loops" tem como subdiagramas  $\Gamma^{(2)}$  e  $\Gamma^{(4)}$  no nível de  $L$  "loops". Assim, se renormalizarmos as funções  $\Gamma^{(2)}$  e  $\Gamma^{(4)}$  em  $L$  "loops", então  $\Gamma^{(N)}$  será automaticamente finita em  $(L + 1)$  "loops".

Analisaremos agora a estrutura divergente da função de vértice  $\Gamma_{(\tau)}^{(2,1)}$ . Uma característica interessante dessa função é que ela não pode ser renormalizada usando apenas a massa e constante de acoplamento renormalizada em um loop apenas. A renormalização é feita com a introdução de uma função  $Z_{\phi^2(\tau)}$  através da relação

$$\Gamma_{R(\tau)}^{(2,1)}(p_{1(\tau)}, p_{2(\tau)}; p_{3(\tau)}, g_{\tau}, m_{\tau}) = Z_{\phi^2(\tau)} \Gamma_{(\tau)}^{(2,1)}(p_{1(\tau)}, p_{2(\tau)}; p_{3(\tau)}, \lambda_{0\tau}, \mu_{0\tau}, \Lambda_{\tau}). \quad (3.44)$$

Da condição de normalização (3.16) obtemos para  $Z_{\phi^2(\tau)}$

$$Z_{\phi^2(\tau)} = 1 + \frac{g_{\tau}}{2} I_{2(\tau)}(0). \quad (3.45)$$

O conceito de expansão esqueleto para as partes de vértice  $1PI$   $\Gamma^{(N)}$  pode ser estendido para funções de vértice com inserções de operadores compostos  $\Gamma^{(N,L)}$ . De fato, essa função de vértice com  $N > 2$  e  $L > 1$  é finita em 1 loop. Por outro lado, quando aumentamos a ordem dos "loops", quando estamos na ordem 2 por exemplo, essas funções de vértice podem conter subdiagramas envolvendo as partes de vértice  $1PI$   $\Gamma^{(2)}$ ,  $\Gamma^{(4)}$  e  $\Gamma^{(2,1)}$ . Neste caso estas funções serão divergentes em 2 "loops". Mas se renormalizarmos as funções de vértice  $\Gamma^{(2)}$ ,  $\Gamma^{(4)}$  e  $\Gamma^{(2,1)}$  em 1 loop, temos a garantia de que as partes

de vértice  $\Gamma^{(N,L)}$  ( $N > 2, L > 1$ ) serão finitas na ordem de 2 "loops". Assim podemos escrever  $\Gamma_{R(\tau)}^{(2,1)}$ , de maneira análoga às equações (3.42) e (3.43), como

$$\Gamma_{R(\tau)}^{(2,1)}(p_{1(\tau)}, p_{2(\tau)}; p_{3(\tau)}, g_\tau, \mu_\tau) = 1 - \frac{g_\tau}{2} [I_{2(\tau)}(p_{3(\tau)}) - I_{2(\tau)}(0)]. \quad (3.46)$$

Da mesma forma que para as funções de vértice de dois e quatro pontos, todas as funções de vértice envolvendo operadores compostos com um número maior de pernas externas possuem uma expansão esqueleto: elas são finitas em dois "loops" se escritas em termos de  $\mu_\tau, g_\tau$  e  $\Gamma_{R(\tau)}^{(2,1)}(p_{1(\tau)}, p_{2(\tau)}; p_{3(\tau)}, g_\tau, \mu_\tau)$  em seus subdiagramas de um loop. Isso decorre do comportamento assintótico para momentos grandes das partes primitivamente divergentes

$$|\Gamma_{R(\tau)}^{(2)}(\rho_\tau p(\tau))| \leq \rho_\tau^{2\tau} \times \text{potência de } \ln \rho_\tau, \quad (3.47)$$

$$|\Gamma_{R(\tau)}^{(4)}(\rho_\tau p(\tau))| \leq \text{potência de } \ln \rho_\tau, \quad (3.48)$$

$$|\Gamma_{R(\tau)}^{(2,1)}(\rho_\tau p_{1(\tau)}, \rho_\tau p_{1(\tau)}; \rho_\tau q(\tau))| \leq \text{potência de } \ln \rho_\tau, \quad (3.49)$$

em qualquer ordem finita quando  $\rho_\tau \rightarrow \infty$ . Não demonstraremos este comportamento assintótico e o assumiremos como válido quando provarmos a renormalizabilidade multiplicativa na dimensão crítica em todas as ordens em teoria de perturbação na próxima seção.

### 3.2.2 Isotrópico

O caso isotrópico pode ser facilmente tratado de maneira similar ao caso anisotrópico que acabamos de estudar. Usamos o índice  $\tau = 3$  para distinguirmos do caso anisotrópico e a dimensão crítica agora é  $d = m = 8$ . Como só temos uma escala de momento característica presente neste caso, as partes de vértice primitivamente divergentes tratadas aqui são dadas por

$$\Gamma_{(3)}^{(2)}(K') = (K'^2)^2 + \mu_{03}^4 + \frac{\lambda_{03}}{2} \int \frac{d^m k}{(k^2)^2 + \mu_{03}^4}, \quad (3.50)$$

$$\Gamma_{(3)}^{(4)}(K'_i) = \lambda_{03} - \frac{\lambda_{03}^2}{2} \left[ \int \frac{d^m k}{\{(k^2)^2 + \mu_{03}^4\} \{[(k + K'_1 + K'_2)^2]^2 + \mu_{03}^4\}} \right]^+,$$

$$(K'_1 \rightarrow K'_3) + (K'_2 \rightarrow K'_3) \Big], \quad (3.51)$$

$$\Gamma_{(3)}^{(2,1)}(K'_1, K'_2; K'_3) = 1 - \frac{\lambda_{03}}{2} \int \frac{d^m k}{\{(k^2)^2 + \mu_{03}^4\} \{[(k + K'_3)^2]^2 + \mu_{03}^4\}}, \quad (3.52)$$

respectivamente.

As integrais a serem calculadas agora são

$$I_{1(3)}(K') = \int \frac{d^m k}{(k^2)^2 + \mu_{03}^4}, \quad (3.53)$$

$$I_{2(3)}(K') = \int \frac{d^m k}{[(k^2)^2 + \mu_{03}^4] \{[(k + K')^2]^2 + \mu_{03}^4\}}. \quad (3.54)$$

Resolvemos essas integrais em linhas similares ao caso anisotrópico e obtemos

$$I_{1(3)} = \frac{1}{4} S_8 \mu_{03}^4 \left[ \frac{\Lambda_3^4}{\mu_{03}^4} - \ln \left( \frac{\Lambda_3^4}{\mu_{03}^4} \right) \right], \quad (3.55)$$

$$I_{2(3)}(K') = \frac{1}{4} S_8 \ln \left( \frac{\Lambda_3^4}{\mu_{03}^4} \right). \quad (3.56)$$

Agora o fator angular a ser absorvido em uma redefinição da constante de acoplamento é  $S_8$ .

Da mesma forma podemos escrever a massa e a constante de acoplamento renormalizada em termos das respectivas constantes não-renormalizadas, através das condições de normalização (3.17) e (3.19), como

$$\mu_3^4 = \mu_{03} + \frac{\lambda_{03}}{2} I_{1(3)}(0), \quad (3.57)$$

$$g_3 = \lambda_{03} - \frac{3\lambda_{03}^2}{2} I_{2(3)}(0). \quad (3.58)$$

Podemos escrever as funções de vértice  $\Gamma_{(3)}^{(2)}(K')$  e  $\Gamma_{(3)}^{(4)}(K')$  em termos dos parâmetros renormalizados em um loop

$$\Gamma_{(3)}^{(2)}(K') = (K'^2)^2 + \mu_3^4, \quad (3.59)$$

$$\Gamma_{(3)}^{(4)}(K'_i) = g_3 - \frac{g_3^2}{2} [I_{2(3)}(K'_1 + K'_2) + I_{2(3)}(K'_1 + K'_3) + I_{2(3)}(K'_2 + K'_3) - 3I_{2(3)}(0)]. \quad (3.60)$$

e vemos que essas funções são finitas nesta ordem. Como as funções para  $N > 4$  são expansões esqueleto, são finitas em dois "loops" como mencionado no caso anisotrópico.

A constante  $Z_{\phi^2(3)}$  usada na renormalização multiplicativa de  $\Gamma_{(3)}^{(2,1)}(K'_1, K'_2; K'_3)$  é obtida da condição de normalização (3.20) e é dada por dada por

$$Z_{\phi^2(3)} = 1 + \frac{g_3}{2} I_{2(3)}(0). \quad (3.61)$$

Assim, todas as funções que têm inserções de operadores compostos são finitas em dois "loops".

Nesta seção vimos que funções de vértice renormalizadas multiplicativamente são finitas na ordem de um loop. A extensão para todas as ordens perturbativas será o assunto das próximas duas seções.

### 3.3 Equações de Callan-Symanzik

Na seção anterior provamos a renormalizabilidade multiplicativa das partes de vértice  $1PI$  primitivamente divergentes na ordem de um loop. Agora demonstraremos a existência das equações de Callan-Symanzik, ainda na dimensão crítica, que serão utilizadas na prova indutiva da renormalizabilidade multiplicativa em todas as ordens em teoria de perturbação nos casos anisotrópico e isotrópico na próxima seção.

#### 3.3.1 Anisotrópico

Para partes de vértice  $1PI$  renormalizadas multiplicativamente, com  $((N, L) \neq (0, 2))$ , podemos escrever

$$\Gamma_{R(\tau)}^{(N,L)}(p_{i(\tau)}, Q_{i(\tau)}, g_\tau, \mu_\tau) = Z_{\phi(\tau)}^{N/2} Z_{\phi^2(\tau)}^L \Gamma_{(\tau)}^{(N,L)}(p_{i(\tau)}, Q_{i(\tau)}, \lambda_{0\tau}, \mu_{0\tau}, \Lambda_\tau), \quad (3.62)$$

onde  $p_{i(\tau)}$  ( $i = 1, \dots, N$ ) são os momentos externos associados às  $N$  pernas externas das partes de vértice  $1PI$   $\Gamma_{R(\tau)}^{(N,L)}$  e  $Q_{i(\tau)}$  ( $i = 1, \dots, L$ ) os momentos externos associadas às  $L$  inserções de campos compostos  $\phi^2$ . As grandezas  $\Lambda_\tau$  são os cortes no momento usados na regularização das funções de vértice não renormalizadas de cada subespaço inequivalente. No que segue fica subtendido que essas funções estão devidamente regularizadas

em uma ordem qualquer em loop em cada subespaço e não usaremos essas expressões explicitamente.

Apesar de existirem pelo menos duas maneiras de se obter as equações de Callan-Symanzik, obteremos essas equações (que envolvem duas massas independentes, uma em cada subespaço) usando um método que contém argumentos pioneiros na obtenção dessas equações para o caso onde existe apenas uma escala de massa envolvida [71].

Quando derivamos a parte de vértice  $1PI \Gamma_{(\tau)}^{(N,L)}(p_{i(\tau)}, Q_{i(\tau)}, \lambda_{0\tau}, \mu_{0\tau}, \Lambda_{\tau})$  com relação à massa não-renormalizada  $\mu_{0\tau}^{2\tau}$ , onde  $\lambda_{0\tau}$  e  $\Lambda_{\tau}$  são mantidos constantes, obtemos uma soma de funções de vértice como a inicial, mas com cada propagador tendo uma potência a mais nas linhas internas dessas funções. Esses termos aparecem em todas as combinações possíveis. Essa operação tem o mesmo efeito de uma inserção de campo composto  $\phi^2$  em momento zero na função de vértice  $\Gamma_{(\tau)}^{(N,L)}(p_{i(\tau)}, Q_{i(\tau)}, \lambda_{0\tau}, \mu_{0\tau}, \Lambda_{\tau})$ , resultando assim em uma função de vértice  $\Gamma_{(\tau)}^{(N,L+1)}(p_{i(\tau)}, Q_{i(\tau)}, \lambda_{0\tau}, \mu_{0\tau}, \Lambda_{\tau})$  com uma perna externa a mais, ou seja

$$\frac{\partial}{\partial \mu_{0\tau}^{2\tau}} \Gamma_{(\tau)}^{(N,L)}(p_{i(\tau)}, Q_{i(\tau)}, \lambda_{0\tau}, \mu_{0\tau}, \Lambda_{\tau}) = \Gamma_{(\tau)}^{(N,L+1)}(p_{i(\tau)}, Q_{i(\tau)}, \lambda_{0\tau}, \mu_{0\tau}, \Lambda_{\tau}). \quad (3.63)$$

Agora usando a relação (3.63) e a equação (3.62), lembrando que os parâmetros  $m_{\tau}$  e  $g_{\tau}$  dependem da massa não-renormalizada, obtemos

$$\left( 2\tau\rho \frac{\partial}{\partial \mu_{\tau}^{2\tau}} + \frac{\alpha_{\tau}}{\mu_{\tau}^{2\tau}} \frac{\partial}{\partial g_{\tau}} - \frac{1}{2}N \frac{\kappa_{\tau}}{\mu_{\tau}^{2\tau}} - L \frac{\pi_{\tau}}{\mu_{\tau}^{2\tau}} \right) \Gamma_{R(\tau)}^{(N,L)}(p_{i(\tau)}, Q_{i(\tau)}, g_{\tau}, \mu_{\tau}) = \Gamma_{R(\tau)}^{(N,L+1)}(p_{i(\tau)}, Q_{i(\tau)}; 0, g_{\tau}, \mu_{\tau}), \quad (3.64)$$

onde

$$2\tau\rho = Z_{\phi^2(\tau)} \frac{\partial \mu_{\tau}^{2\tau}}{\partial \mu_{0\tau}^{2\tau}}, \quad (3.65)$$

$$\frac{\alpha_{\tau}}{\mu_{\tau}^{2\tau}} = Z_{\phi^2(\tau)} \frac{\partial g_{\tau}}{\partial \mu_{0\tau}^{2\tau}}, \quad (3.66)$$

$$\frac{\kappa_{\tau}}{\mu_{\tau}^{2\tau}} = Z_{\phi^2(\tau)} \frac{\partial \ln Z_{\phi(\tau)}}{\partial \mu_{0\tau}^{2\tau}}, \quad (3.67)$$

$$\frac{\pi_{\tau}}{\mu_{\tau}^{2\tau}} = Z_{\phi^2(\tau)} \frac{\partial \ln Z_{\phi^2(\tau)}}{\partial \mu_{0\tau}^{2\tau}}. \quad (3.68)$$

Com as seguintes definições

$$\beta_\tau = \mu_\tau \frac{\partial g_\tau}{\partial \mu_\tau}, \quad (3.69)$$

$$\gamma_{\phi(\tau)} = \mu_\tau \frac{\partial \ln Z_{\phi(\tau)}}{\partial \mu_\tau}, \quad (3.70)$$

$$\gamma_{\phi^2(\tau)} = -\mu_\tau \frac{\partial \ln Z_{\phi^2(\tau)}}{\partial \mu_\tau} \quad (3.71)$$

e multiplicando a (3.64) em ambos os lados por  $\mu_\tau^{2\tau}/\rho_\tau$  aquela equação toma a forma

$$\begin{aligned} \left( \mu_\tau \frac{\partial}{\partial \mu_\tau} + \beta_\tau \frac{\partial}{\partial g_\tau} - \frac{1}{2} N \gamma_{\phi(\tau)} + L \gamma_{\phi^2(\tau)} \right) \Gamma_{R(\tau)}^{(N,L)}(p_{i(\tau)}, Q_{i(\tau)}, g_\tau, \mu_\tau) = \\ 2\tau \mu_\tau^{2\tau} \frac{\partial \mu_{0\tau}^{2\tau}}{\mu_\tau^{2\tau}} Z_{\phi^2(\tau)}^{-1} \Gamma_{R(\tau)}^{(N,L+1)}(p_{i(\tau)}, Q_{i(\tau)}; 0, g_\tau, \mu_\tau). \end{aligned} \quad (3.72)$$

Fazendo  $(N, L)=(2, 0)$  na equação (4.62) e usando as condições de normalização (3.13) e (3.16) podemos escrever a (4.62) em termos de grandezas renormalizadas apenas como

$$\begin{aligned} \left( \mu_\tau \frac{\partial}{\partial \mu_\tau} + \beta_\tau \frac{\partial}{\partial g_\tau} - \frac{1}{2} N \gamma_{\phi(\tau)} + L \gamma_{\phi^2(\tau)} \right) \Gamma_{R(\tau)}^{(N,L)}(p_{i(\tau)}, Q_{i(\tau)}, g_\tau, \mu_\tau) = \\ \mu_\tau^{2\tau} (2\tau - \gamma_{\phi(\tau)}) \Gamma_{R(\tau)}^{(N,L+1)}(p_{i(\tau)}, Q_{i(\tau)}; 0, g_\tau, \mu_\tau). \end{aligned} \quad (3.73)$$

Obteremos agora algumas informações úteis acerca das funções definidas nas equações (3.69)-(3.71) [22].

Fixando  $N = 2$  e  $L = 2$  na (3.73), derivando a equação resultante com relação a  $p_{(\tau)}^{2\tau}$  e depois fazendo os momentos externos iguais a zero usando a condição de normalização (3.14) obtemos a equação

$$-\gamma_{\phi(\tau)} = \mu_\tau^{2\tau} (2\tau - \gamma_{\phi(\tau)}) \frac{\partial}{\partial p_{(\tau)}^{2\tau}} \Gamma_{R(\tau)}^{(2,1)}(p_{(\tau)}, -p_{(\tau)}; 0, g_\tau, \mu_\tau) \Big|_{p_{(\tau)}^{2\tau}=0}. \quad (3.74)$$

De acordo com a equação (3.46), em um loop  $\Gamma_{R(\tau)}^{(2,1)}(p_{(\tau)}, -p_{(\tau)}; 0, g_\tau, \mu_\tau) = 1 + O(g_\tau^2)$ . Assim, vemos que o termo de  $\gamma_{\phi(\tau)}$  de menor ordem na constante de acoplamento renormalizada é  $O(g_\tau^2)$ .

Novamente escolhendo os valores  $(N, L)=(4, 0)$  na equação (3.73) e fixando os momentos externos iguais a zero para usar a condição de normalização (3.15), obtemos

$$\beta_\tau - 2\gamma_{\phi(\tau)} g_\tau = \mu_\tau^{2\tau} (2\tau - \gamma_{\phi(\tau)}) \Gamma_{R(\tau)}^{(4,1)}(0, 0, 0, 0; 0, g_\tau, \mu_\tau). \quad (3.75)$$

Como  $\Gamma_{R(\tau)}^{(4,1)}(0, 0, 0, 0; 0, g_\tau, \mu_\tau)$  começa na ordem  $O(g_\tau^2)$ , a equação (3.75) nos diz que  $\beta_\tau$  é  $O(g_\tau^2)$ . Com isso, o termo  $\beta_\tau(\partial/\partial g_\tau)$  é  $O(g_\tau)$ , diferentemente do termo  $\mu_\tau(\partial/\partial \mu_\tau)$  que é  $O(g_\tau^0)$ .

Agora fazendo  $(N, L)=(2, 1)$  na (3.73) e utilizando a (3.16) resulta

$$-\gamma_{\phi(\tau)} + \gamma_{\phi^2(\tau)} = \mu_\tau^{2\tau} (2\tau - \gamma_{\phi(\tau)}) \Gamma_{R(\tau)}^{(2,2)}(0, 0; 0, 0, g_\tau, \mu_\tau). \quad (3.76)$$

Sabendo que na expansão de  $\Gamma_{R(\tau)}^{(2,2)}(0, 0; 0, 0, g_\tau, \mu_\tau)$  o termo de menor ordem é  $O(g_\tau)$ , então  $\gamma_{\phi^2(\tau)}$  é  $O(g_\tau)$ .

Usaremos essas propriedades quando apresentarmos a prova indutiva da renormalizabilidade multiplicativa na próxima seção.

### 3.3.2 Isotrópico

No caso isotrópico seguimos os mesmos passos que os do caso anisotrópico. Agora existe apenas uma escala de massa  $\mu_3$  e um subespaço (competitivo) rotulado pelo índice  $\tau = 3$  e a dimensão crítica é  $d_c = 8$ . Procedendo de maneira análoga como na seção anterior obtemos a equação de Callan-Symanzik para o comportamento isotrópico em termos de grandezas renormalizadas apenas como

$$\left( \mu_3 \frac{\partial}{\partial \mu_3} + \beta_3 \frac{\partial}{\partial g_3} - \frac{1}{2} N \gamma_{\phi(3)} + L \gamma_{\phi^2(3)} \right) \Gamma_{R(3)}^{(N,L)}(p_{i(3)}, Q_{i(3)}, g_3, \mu_3) = \mu_3^4 (4 - \gamma_{\phi(3)}) \Gamma_{R(3)}^{(N,L+1)}(p_{i(3)}, Q_{i(3)}; 0, g_3, \mu_3). \quad (3.77)$$

As equações que dão as propriedades usadas na prova indutiva da renormalizabilidade multiplicativa análogas às (3.74)-(3.76) são dadas por

$$-\gamma_{\phi(3)} = \mu_3^4 (4 - \gamma_{\phi(3)}) \frac{\partial}{\partial p_{(3)}^4} \Gamma_{R(3)}^{(2,1)}(p_{(3)}, -p_{(3)}; 0, g_3, \mu_3) \Big|_{p_{(3)}^4=0}, \quad (3.78)$$

$$\beta_3 - 2\gamma_{\phi(3)} g_3 = \mu_3^4 (4 - \gamma_{\phi(3)}) \Gamma_{R(3)}^{(4,1)}(0, 0, 0, 0; 0, g_3, \mu_3), \quad (3.79)$$

$$-\gamma_{\phi(3)} + \gamma_{\phi^2(3)} = \mu_3^4 (4 - \gamma_{\phi(3)}) \Gamma_{R(3)}^{(2,2)}(0, 0; 0, 0, g_3, \mu_3). \quad (3.80)$$

Essa prova será dada na próxima seção nesse caso.

### 3.4 Prova indutiva da renormalizabilidade multiplicativa

Apresentaremos agora a prova indutiva da renormalizabilidade multiplicativa em todas as ordens em loop em teoria de perturbação.

#### 3.4.1 Anisotrópico

De início assumimos que as funções de vértice (3.62) são finitas em uma ordem  $L$  no número de "loops" para  $\mu_r$  e  $g_r$  fixos no limite em que os cortes nos momentos  $\Lambda_\tau \rightarrow \infty$ . Com isso, começamos com funções de vértice  $\Gamma_{R(\tau)}^{(2)}$ ,  $\Gamma_{R(\tau)}^{(4)}$ ,  $\Gamma_{R(\tau)}^{(2,1)}$  finitas nas ordens  $g_\tau^L$ ,  $g_\tau^{L+1}$  e  $g_\tau^L$ , respectivamente.

As idéias usadas na prova da renormalizabilidade em um loop podem ser usadas similarmente para o caso da  $L$ -ésima ordem em "loops". Com a equação (3.74) em ordem  $L$  na constante de acoplamento  $g_L$ , vemos que  $\gamma_{\phi(\tau)}$  é finita em  $O(g_\tau^L)$ . Agora consideremos a equação (3.75).  $\Gamma_{R(\tau)}^{(4,1)}$  é finita na ordem  $(L+1)$  em "loops", pois possui uma expansão esqueleto. Já na ordem  $(L+1)$  em "loops",  $\Gamma_{R(\tau)}^{(4,1)}$  é de ordem  $g_\tau^{L+2}$ , indicando que a combinação  $(\beta_\tau - 2\gamma_{\phi(\tau)}g_\tau)$  é finita na ordem  $O(g_\tau^{L+2})$ . Como  $\gamma_{\phi(\tau)}$  é finita na ordem  $O(g_\tau^L)$ , vemos que  $\beta_\tau$  é finita em  $O(g_\tau^{L+1})$ .

Voltemos nossa atenção à equação de Callan-Symanzik escrita da seguinte forma

$$\mu_\tau \frac{\partial \Gamma_{R(\tau)}^{(N,M)}}{\partial \mu_\tau} = \left( -\beta_\tau \frac{\partial}{\partial g_\tau} + \frac{1}{2} N \gamma_{\phi(\tau)} - M \gamma_{\phi^2(\tau)} \right) \Gamma_{R(\tau)}^{(N,M)} + \mu_\tau^{2\tau} (2\tau - \gamma_{\phi(\tau)}) \Gamma_{R(\tau)}^{(N,M+1)}. \quad (3.81)$$

Mostraremos que o lado direito da equação (3.81) é finito na ordem  $(L+1)$  em "loops". Para tal, só é necessário considerarmos  $\Gamma_{R(\tau)}^{(N,M)}$  no lado direito dessa equação até a ordem  $L$  em "loops", pois  $\beta_\tau(\partial/\partial g_\tau)$  e  $\gamma_{\phi(\tau)^2}$  são, no mínimo,  $O(g_\tau)$ . Já para o último termo do lado direito da equação (3.81), só existem duas possibilidades a considerar. Ou esse termo tem uma expansão esqueleto que é finita na ordem  $L+1$  em "loops", ou a equação de Callan-Symanzik deverá ser iterada.

Fixando  $N = 4$  e  $M = 0$  na equação (3.81) e lembrando que os termos do lado direito são finitos na ordem  $(L+1)$  em "loops", concluímos que  $\mu_\tau(\partial \Gamma_{R(\tau)}^{(4)}/\partial \mu_\tau)$  é finito nesta ordem em loop.

Agora daremos uma prova de que  $\mu_\tau(\partial\Gamma_{R(\tau)}^{(4)}/\partial\mu_\tau)$  é finito na ordem  $(L + 1)$  em "loops" através da integração perturbativa de  $\Gamma_{R(\tau)}^{(4)}$ . Como  $\Gamma_{R(\tau)}^{(4)}$  é adimensional na dimensão crítica, essa função de vértice é invariante sob fluxos de dilatação independentes nos seus parâmetros com dimensionais da forma

$$(p_\tau, \mu_\tau, \Lambda_\tau, g_\tau) \rightarrow (\rho_\tau p_\tau, \rho_\tau \mu_\tau, \rho_\tau \Lambda_\tau, g_\tau). \quad (3.82)$$

Escolhendo  $\rho_\tau = \frac{1}{\mu_\tau}$  podemos escrever

$$\Gamma_{R(\tau)}^{(4)}(p_\tau, \mu_\tau, \Lambda_\tau, g_\tau) = \Gamma_{R(\tau)}^{(4)}\left(\frac{p_\tau}{\mu_\tau}, \frac{\Lambda_\tau}{\mu_\tau}, g_\tau\right). \quad (3.83)$$

Usando esta equação e com  $N = 4$  e  $M = 0$  na (3.81) com momentos externos arbitrários na ordem  $g_\tau^{L+2}$ , podemos escrever

$$\left(\mu'_\tau \frac{\partial\Gamma_{R(\tau)}^{(4)}\left(\frac{p_\tau}{\mu_\tau}, \frac{\Lambda_\tau}{\mu_\tau}, g_\tau\right)}{\partial\mu'_\tau}\right)\Big|_{L+2} = f_{(\tau)}^{(4)}\left(\frac{p_\tau}{\mu_\tau}, \frac{\Lambda_\tau}{\mu_\tau}, g_\tau\right)\Big|_{L+2}, \quad (3.84)$$

onde  $\mu'_\tau = \mu_\tau/\alpha$ . A integração da última equação de  $\mu'_\tau = \infty$  até  $\mu'_\tau = \mu_\tau$  é o mesmo que integrarmos em  $\alpha$  de 0 a 1. Usando agora a condição de normalização (3.15) no limite  $\mu'_\tau = \infty$  como condições de contorno obtemos

$$\left[\Gamma_{R(\tau)}^{(4)}\left(\frac{p_\tau}{\mu_\tau}, \frac{\Lambda_\tau}{\mu_\tau}, g_\tau\right)\right]\Big|_{L+2} = g_\tau - \int_0^1 \frac{d\alpha}{\alpha} \left[f_{(\tau)}^{(4)}\left(\alpha \frac{p_\tau}{\mu_\tau}, \alpha \frac{\Lambda_\tau}{\mu_\tau}, g_\tau\right)\right]\Big|_{L+2}. \quad (3.85)$$

Como falamos no começo dessa discussão,  $[f_{(\tau)}^{(4)}]_{L+2}$  pode ser escrita em termos de grandezas que por hipótese são finitas quando  $\Lambda_\tau \rightarrow \infty$ . Como  $[f_{(\tau)}^{(4)}]_{L+2}$  é uma função analítica para pequenos momentos, temos a certeza de que o limite de momentos externos nulos não resulta em nenhum problema relacionado a divergências na integral em  $\alpha$ . Assim podemos escrever

$$\left[\Gamma_{R(\tau)}^{(4)}\left(\frac{p_\tau}{\mu_\tau}, \infty, g_\tau\right)\right]\Big|_{L+2} = g_\tau - \int_0^1 \frac{d\alpha}{\alpha} \left[f_{(\tau)}^{(4)}\left(\alpha \frac{p_\tau}{\mu_\tau}, \infty, g_\tau\right)\right]\Big|_{L+2}, \quad (3.86)$$

mostrando que  $\Gamma_{R(\tau)}^{(4)}$  está relacionada com a integral de partes de vértice renormalizadas de ordem menor.

Consideremos agora o caso em que fazemos  $N = 2$  e  $M = 1$  na equação (3.81) na ordem  $g_\tau^{L+1}$ , onde obtemos

$$\left( \mu_\tau \frac{\partial \Gamma_{R(\tau)}^{(2,1)}}{\partial \mu_\tau} \right) \Big|_{L+1} = \left[ -\beta_\tau \frac{\partial \Gamma_{R(\tau)}^{(2,1)}}{\partial g_\tau} \right] \Big|_{L+1} + [(\gamma_{\phi(\tau)} - \gamma_{\phi^2(\tau)}) \Gamma_{R(\tau)}^{(2,1)}] \Big|_{L+1} + \mu_\tau^{2\tau} [(2\tau - \gamma_{\phi(\tau)}) \Gamma_{R(\tau)}^{(2,2)}] \Big|_{L+1} \quad (3.87)$$

O primeiro termo do lado direito da última equação contém as funções  $\beta_\tau$  que é  $O(g_\tau^{L+1})$  e  $\Gamma_{R(\tau)}^{(2,1)}$  na ordem  $g_\tau^L$ , pois  $\beta_\tau(\partial/\partial g_\tau)$  é  $O(g_\tau)$ . Esses dois termos são finitos nessa ordem em loop, assim o primeiro termo do lado direito é finito. O último termo está relacionado com  $\Gamma_{R(\tau)}^{(2,2)}$  que possui uma expansão esqueleto e com isso é finito na ordem  $g_\tau^{L+1}$  porque as massas e constantes de acoplamento são finitas em  $O(g_\tau^L)$ .

Já o segundo termo do lado direito da equação (3.87) tem duas funções a considerar,  $\Gamma_{R(\tau)}^{(2,1)}$  em  $O(g_\tau^L)$  que é finita pela hipótese inicial, pois  $\gamma_{\phi^2(\tau)}$  é  $O(g_\tau)$  e  $(\gamma_{\phi(\tau)} - \gamma_{\phi^2(\tau)})$  que é  $O(g_\tau^{L+1})$ . Provaremos que a expressão  $(\gamma_{\phi(\tau)} - \gamma_{\phi^2(\tau)})$  é finita em  $O(g_\tau^{L+1})$ . Esse termo calculado em momento externo nulo é o mesmo que a equação (3.76) calculada em  $(L+1)$  "loops". O lado direito da equação (3.76) é finito pois possui um termo que é um esqueleto  $\Gamma_{R(\tau)}^{(2,2)}$  nesta ordem em loop, assim fica provado que  $(\gamma_{\phi(\tau)} - \gamma_{\phi^2(\tau)})$  é finito em  $O(g_\tau^{L+1})$ . Disso decorre que o lado direito da (3.87) é finito.

Agora integrando o lado esquerdo da equação (3.87) com momentos externos arbitrários obtemos

$$\left( \mu_\tau \frac{\partial \Gamma_{R(\tau)}^{(2,1)}}{\partial \mu_\tau} \right) \Big|_{L+1} = f_{(\tau)}^{(2,1)}. \quad (3.88)$$

Provamos que  $\Gamma_{R(\tau)}^{(2,1)}$  é finita em  $O(g_\tau^{L+1})$  seguindo os mesmos passos que os seguidos na mesma prova para  $\Gamma_{R(\tau)}^{(4)}$ , ou seja,  $\Gamma_{R(\tau)}^{(2,1)}$  é adimensional na dimensão crítica e assim podemos fazer a mesma transformação de escala feita em  $\Gamma_{R(\tau)}^{(4)}$ . Assumimos então que  $f_{(\tau)}^{(2,1)}$  é analítica para momentos  $p_\tau$  pequenos e utilizamos a condição de normalização (3.16) em momentos externos nulos. Assim, usando a equação (3.74) observamos que  $\gamma_{\phi(\tau)}$  é finita em  $O(g_\tau^{L+1})$ .

Finalmente trataremos o caso  $N = 2$  e  $M = 0$  na ordem perturbativa  $g_\tau^{L+1}$  na equação

(3.81) obtendo

$$\left( \mu_\tau \frac{\partial \Gamma_{R(\tau)}^{(2)}}{\partial \mu_\tau} \right) \Big|_{L+1} = \left[ -\beta_\tau \frac{\partial \Gamma_{R(\tau)}^{(2)}}{\partial g_\tau} \right] \Big|_{L+1} + [\gamma_{\phi(\tau)} \Gamma_{R(\tau)}^{(2,1)}] \Big|_{L+1} + \mu_\tau^{2\tau} [(2\tau - \gamma_{\phi(\tau)}) \Gamma_{R(\tau)}^{(2,1)}] \Big|_{L+1} \quad (3.89)$$

Os dois primeiros termos do lado direito da última equação são finitos por dois motivos:  $\Gamma_{R(\tau)}^{(2)}$  é necessária somente em  $O(g_\tau^L)$ , que é finita por hipótese, pois provamos que  $\beta_\tau$  e  $\gamma_{\phi(\tau)}$  são finitas na ordem  $g_\tau^L$ . Os termos dentro dos colchetes são finitos em  $O(g_\tau^{L+1})$ , como mostramos. Assim, como o lado direito é finito, podemos integrar a equação de Callan-Symanzik para esta parte de vértice com momentos arbitrários. Consideremos agora

$$\tilde{\Gamma}_{R(\tau)}^{(2)}(p_\tau) = \Gamma_{R(\tau)}^{(2)}(p_\tau) - p_\tau^{2\tau} - \mu_\tau^{2\tau}. \quad (3.90)$$

A função  $\tilde{\Gamma}_{R(\tau)}^{(2)}(p_\tau)$  tem dimensão de  $\mu_\tau^{2\tau}$  e difere de  $\Gamma_{R(\tau)}^{(2)}(p_\tau)$  por potências maiores de  $p_\tau^{2\tau}$  e  $\mu_\tau^{2\tau}$  que são absorvidas por potência apropriadas dos cortes nos momentos. Das condições de normalização, sabemos que ela se anula com  $(p_\tau^{2\tau})^2$  para  $|p_\tau|$  pequeno. Depois de todas as informações apresentadas até aqui,  $\tilde{\Gamma}_{R(\tau)}^{(2)}(p_\tau)$  é descrita pela equação

$$\left( \mu'_\tau \frac{\partial \tilde{\Gamma}_{R(\tau)}^{(2)}\left(\frac{p_\tau}{\mu'_\tau}, \frac{\Lambda_\tau}{\mu'_\tau}, g_\tau\right)}{\partial \mu'_\tau} \right) \Big|_{L+1} = \mu_\tau^{2\tau} f_{(\tau)}^{(2)}\left(\frac{p_\tau}{\mu_\tau}, \frac{\Lambda_\tau}{\mu_\tau}, g_\tau\right) \Big|_{L+1}, \quad (3.91)$$

em que  $f_{(\tau)}^{(2)} = O((p_\tau^{2\tau})^2)$  para  $|p_\tau|$  pequeno. Fazendo agora a mudança de variável  $\mu'_\tau = \mu_\tau/\alpha$ , integrando sobre  $\mu'_\tau$  de  $\infty$  a  $\mu_\tau$  e utilizando a condição de normalização em momentos externos nulos  $\tilde{\Gamma}_{R(\tau)}^{(2)}(0, 0, g_\tau) = 0$  com os cortes nos momentos  $\Lambda_\tau \rightarrow \infty$ , obtemos

$$\left[ \tilde{\Gamma}_{R(\tau)}^{(2)}\left(\frac{p_\tau}{\mu_\tau}, \infty, g_\tau\right) \right] \Big|_{L+1} = - \int_0^1 \frac{d\alpha}{\alpha^{2n+1}} \left[ f_{(\tau)}^{(2)}\left(\alpha \frac{p_\tau}{\mu_\tau}, \infty, g_\tau\right) \right] \Big|_{L+1}. \quad (3.92)$$

Esta última integral é finita se o integrando for finito. O integrando tem um comportamento  $f_{(\tau)}^{(2)}(\alpha \frac{p_\tau}{\mu_\tau}, \infty, g_\tau) = O((\alpha p_\tau)^{2\tau})^2$  para  $p_\tau$  pequeno e não possui nenhuma divergência quando  $\alpha \rightarrow 0$ .

Com isso, finalmente completamos a prova indutiva da renormalizabilidade multiplicativa e também demonstramos a existência das equações de Callan-Symanzik (3.73).

### 3.4.2 Isotrópico

Podemos obter as equações de Callan-Symanzik para o caso isotrópico da mesma maneira que as obtemos para a teoria  $\phi^4$  convencional do capítulo 2. Neste caso a dimensão crítica é 8. Essas equações são então dadas por

$$\left( \mu_3 \frac{\partial}{\partial \mu_3} + \beta_3 \frac{\partial}{\partial g_3} - \frac{1}{2} N \gamma_{\phi(3)} + L \gamma_{\phi^2(3)} \right) \Gamma_{R(3)}^{(N,L)}(p_{i(3)}, Q_{i(3)}, g_3, \mu_3) = \mu_3^4 (4 - \gamma_{\phi(3)}) \Gamma_{R(3)}^{(N,L+1)}(p_{i(3)}, Q_{i(3)}; 0, g_3, \mu_3), \quad (3.93)$$

onde usamos o índice  $\tau = 3$  para indicarmos que estamos tratando do subespaço competitivo com momentos quárticos. Não existem momentos quadráticos a serem integrados. As informações necessárias para a prova indutiva da renormalização multiplicativa estão contidas nas equações análogas (3.74)-(3.76) às que são

$$-\gamma_{\phi(3)} = \mu_3^4 (4 - \gamma_{\phi(3)}) \frac{\partial}{\partial p_{(3)}^4} \Gamma_{R(3)}^{(2,1)}(p_{(3)}, -p_{(3)}; 0, g_3, \mu_3) \Big|_{p_{(3)}^4=0}, \quad (3.94)$$

$$\beta_3 - 2\gamma_{\phi(3)} g_3 = \mu_3^4 (4 - \gamma_{\phi(3)}) \Gamma_{R(3)}^{(4,1)}(0, 0, 0, 0; 0, g_3, \mu_3). \quad (3.95)$$

$$-\gamma_{\phi(3)} + \gamma_{\phi^2(3)} = \mu_3^4 (4 - \gamma_{\phi(3)}) \Gamma_{R(3)}^{(2,2)}(0, 0; 0, 0, g_3, \mu_3). \quad (3.96)$$

Apresentaremos agora a prova indutiva da renormalização multiplicativa. A equação análoga à (3.81) é

$$\mu_3 \frac{\partial \Gamma_{R(3)}^{(N,M)}}{\partial \mu_3} = \left( -\beta_3 \frac{\partial}{\partial g_3} + \frac{1}{2} N \gamma_{\phi(3)} - M \gamma_{\phi^2(3)} \right) \Gamma_{R(3)}^{(N,M)} + \mu_3^4 (4 - \gamma_{\phi(3)}) \Gamma_{R(3)}^{(N,M+1)}. \quad (3.97)$$

Essa equação pode ser obtida da (3.81) pela substituição do índice  $\tau = 3$  se  $\tau$  aparece como um índice implícito e  $\tau = 2$  quando  $\tau$  aparece explicitamente na equação. Podemos fazer isso nas equações análogas às (3.82)-(4.85) para o caso isotrópico. Disto segue que no caso isotrópico todas as partes de vértice são finitas na dimensão crítica  $m = d = 8$ . Completamos assim a prova indutiva da renormalização multiplicativa e automaticamente provamos também a existência das equações de Callan-Symanzik (3.97).

### 3.5 Equações de Callan-Symanzik fora da dimensão crítica

Até agora usamos um método de regularização em que as divergências ultravioletas da teoria na dimensão crítica foram expressas como potências do corte no momento  $\Lambda_\tau$  para os dois subespaços inequivalentes no caso anisotrópico e  $\Lambda_3$  no caso isotrópico. Agora utilizaremos um método de regularização em que essas mesmas divergências ultravioletas serão expressas como pólos dimensionais em um parâmetro  $\epsilon_L$  em regularização dimensional, onde a teoria é regularizada fora da dimensão crítica.

Como provamos a renormalizabilidade multiplicativa na seção anterior na dimensão crítica, fora da dimensão crítica a teoria é super renormalizável e mais convergente ainda que a mesma teoria na dimensão crítica. Assim, não apresentaremos a mesma prova indutiva de forma rigorosa dessa renormalizabilidade fora da dimensão crítica. Alternativamente, mostraremos indiretamente que fora da dimensão crítica a teoria é renormalizável apresentando explicitamente as expressões finitas para as funções  $\beta$  e funções de Wilson nessa ordem perturbativa.

Assim, como provado na seção anterior, podemos renormalizar multiplicativamente as partes de vértice  $1PI$ , com  $((N, L) \neq (0, 2))$ , como

$$\Gamma_{R(\tau)}^{(N,L)}(p_{i(\tau)}, Q_{i(\tau)}, g_\tau, \mu_\tau) = Z_{\phi(\tau)}^{N/2} Z_{\phi^2(\tau)}^L \Gamma_{(\tau)}^{(N,L)}(p_{i(\tau)}, Q_{i(\tau)}, \lambda_{0\tau}, \mu_{0\tau}, \Lambda_\tau) \quad (3.98)$$

Mostraremos indiretamente agora como renormalizamos a teoria multiplicativamente fora da dimensão crítica nos casos anisotrópico e isotrópico.

#### 3.5.1 Anisotrópico

Escrevendo as constantes de acoplamento não-renormalizada e renormalizadas como

$$\lambda_{0\tau} = u_{0\tau} (\mu_\tau^{2\tau})^{\epsilon_L/2}, \quad (3.99)$$

$$g_\tau = u_\tau (\mu_\tau^{2\tau})^{\epsilon_L/2}, \quad (3.100)$$

respectivamente, onde  $u_{0\tau}$  e  $u_\tau$  são as constantes de acoplamento adimensionais não renormalizada e renormalizada, respectivamente, derivamos a equação (3.98) com relação

a  $\mu_{0\tau}^{2\tau}$  e obtemos

$$\left[ \mu_\tau \frac{\partial}{\partial \mu_\tau} + \beta_\tau(g_\tau, \mu_\tau) \frac{\partial}{\partial g_\tau} - \frac{1}{2} N \gamma_{\phi(\tau)}(g_\tau, \mu_\tau) + L \gamma_{\phi^2(\tau)}(g_\tau, \mu_\tau) \right] \Gamma_{R(\tau)}^{(N,L)}(p_{i(\tau)}, Q_{i(\tau)}, \mu_\tau, g_\tau) = \mu_\tau^{2\tau} [2\tau - \gamma_{\phi(\tau)}(g_\tau, \mu_\tau)] \Gamma_{R(\tau)}^{(N,L+1)}(p_{i(\tau)}, Q_{i(\tau)}, 0, \mu_\tau, g_\tau), \quad (3.101)$$

onde as funções  $\beta_\tau$  e de Wilson agora dependem da constante de acoplamento  $g_\tau$  e a massa  $\mu_\tau$  renormalizadas, ver (3.102) e (3.100) para  $\beta_\tau$  por exemplo, e são dadas por

$$\beta_\tau(g_\tau, \mu_\tau) = \left( \mu_\tau \frac{\partial u_\tau}{\partial \mu_\tau} \right)_{\lambda_{0\tau}, \Lambda_\tau}, \quad (3.102)$$

$$\gamma_{\phi(\tau)}(g_\tau, \mu_\tau) = \mu_\tau \left( \frac{\partial \ln Z_{\phi(\tau)}}{\partial \mu_\tau} \right)_{\lambda_{0\tau}, \Lambda_\tau}, \quad (3.103)$$

$$\gamma_{\phi^2(\tau)}(g_\tau, \mu_\tau) = - \left( \mu_\tau \frac{\partial \ln Z_{\phi^2(\tau)}}{\partial \mu_\tau} \right)_{\lambda_{0\tau}, \Lambda_\tau}. \quad (3.104)$$

Da equação (3.102) podemos escrever

$$\beta_\tau(g_\tau, \mu_\tau) \frac{\partial}{\partial g_\tau} = \left( \mu_\tau \frac{\partial u_\tau}{\partial \mu_\tau} \right)_{\lambda_{0\tau}} \frac{\partial}{\partial u_\tau} + \tau \epsilon_\tau \frac{\partial}{\partial g_\tau}. \quad (3.105)$$

Definimos agora a função de "Gell-Mann-Low" [72,73] para  $\epsilon_L \neq 0$  em função da constante de acoplamento adimensional como

$$[\beta_\tau(g_\tau, \mu_\tau)]_{GL} = -\tau \epsilon_L g_\tau + \beta_\tau(g_\tau, \mu_\tau), \quad (3.106)$$

onde a função  $\beta_\tau$  no lado direito da (3.106) é a que calculamos na seção anterior com a teoria na dimensão crítica. Assim, fora da dimensão crítica as equações de Callan-Symanzik (3.101) podem ser escritas apenas em termos de grandezas adimensionais se a função  $\beta_\tau$  de partida for a função de Gell-Mann-Low. Portanto

$$[\beta_\tau]_{GL}(g_\tau) \frac{\partial}{\partial g_\tau} = \beta_\tau(u_\tau) \frac{\partial}{\partial u_\tau}. \quad (3.107)$$

As equações de Callan-Symanzik em dimensões espaciais  $d = d_c - \epsilon_L$  em termos de constantes de acoplamento adimensionais têm a forma:

$$\left[ \mu_\tau \frac{\partial}{\partial \mu_\tau} + \beta_\tau(u_\tau) \frac{\partial}{\partial u_\tau} - \frac{1}{2} N \gamma_{\phi(\tau)} + L \gamma_{\phi^2(\tau)} \right] \Gamma_{R(\tau)}^{(N,L)}(p_{i(\tau)}, Q_{i(\tau)}, \mu_\tau, u_\tau) =$$

$$\mu_\tau^{2\tau} [2\tau - \gamma_{\phi(\tau)}] \Gamma_{R(\tau)}^{(N,L+1)}(p_{i(\tau)}, Q_{i(\tau)}, 0, \mu_\tau, u_\tau). \quad (3.108)$$

Agora, usando

$$\mu_\tau \frac{\partial u_\tau}{\partial \mu_\tau} = -\mu_\tau \left( \frac{\partial \lambda_{0\tau}}{\partial \mu_\tau} \right)_{u_\tau} \left( \frac{\partial u_\tau}{\partial \lambda_{0\tau}} \right)_{\mu_\tau} \quad (3.109)$$

podemos escrever a função  $\beta_\tau$  e as funções de Wilson de uma outra maneira em termos de grandezas adimensionais

$$\beta_\tau(u_\tau) = -\tau \epsilon_L \left( \frac{\partial \ln u_{0\tau}}{\partial u_\tau} \right)^{-1}, \quad (3.110)$$

$$\gamma_{\phi(\tau)}(u_\tau) = \beta_\tau \frac{\partial \ln Z_{\phi(\tau)}}{\partial u_\tau}, \quad (3.111)$$

$$\bar{\gamma}_{\phi^2(\tau)}(u_\tau) = -\beta_\tau \frac{\partial \ln \bar{Z}_{\phi^2(\tau)}}{\partial u_\tau}, \quad (3.112)$$

onde muitas vezes é conveniente usar a função  $\bar{\gamma}_{\phi^2(\tau)}(u_\tau)$  ao invés de  $\gamma_{\phi^2(\tau)}(u_\tau)$  no cálculo de expoentes críticos e

$$\bar{Z}_{\phi^2(\tau)} = Z_{\phi(\tau)} Z_{\phi^2(\tau)}. \quad (3.113)$$

Como discutimos anteriormente, no caso anisotrópico temos um fluxo de massa independente para cada subespaço inequivalente que dá transformações de escala caracterizados por suas correspondentes constantes de acoplamento e massas renormalizadas. Assim chamaremos a equação (3.101) de equação de Callan-Symanzik-Lifshitz. Ela tem a mesma estrutura que a equação (2.55), ou seja, seu lado direito possui uma inserção em momento zero a mais e com isso um propagador a mais. Assim, a função de vértice  $\Gamma_{R(\tau)}^{(N,L+1)}(p_{i(\tau)}, 0, g_\tau, \mu_\tau) \sim p_{i(\tau)}^{-2\tau} \Gamma_{R(\tau)}^{(N,L)}(p_{i(\tau)}, g_\tau, \mu_\tau)$  para momentos  $p_{i(\tau)}$  grandes, a menos de fatores de  $\ln p_{i(\tau)}$ . Assumimos que esses fatores logarítmicos não contribuem de maneira a compensar o fator  $p_{i(\tau)}^{-2\tau}$ . Esse é o regime ultravioleta e o obtemos fazendo o momento euclidiano  $p_{i(\tau)} \rightarrow \infty$ , ou equivalentemente  $p_{i(\tau)} = \rho_\tau k_{i(\tau)}$ , onde o momento  $k_{i(\tau)}$  que é fixo e diferente de zero também é euclidiano e tomamos o limite  $\rho_{i(\tau)} \rightarrow \infty$ . Este regime pode ser obtido. Com isso, podemos usar o teorema de Weinberg [31] e fazer o lado direito nulo com relação ao lado esquerdo ordem a ordem em teoria de perturbação.

Tomar esse limite é o mesmo que fazer os momentos internos das funções de vértice muito grandes. Isso é feito regularizando as integrais com cortes nos momentos  $\Lambda_\tau$

e tomando o limite  $\Lambda_\tau \rightarrow \infty$ . Obtemos assim integrais que são funções homogêneas da massa renormalizada  $\mu_\tau$ . O limite de momentos dos "loops" grandes é obtido com  $p_{i(\tau)}/\mu_\tau \rightarrow \infty$ . A dimensão de um sistema do tipo Lifshitz é uma dimensão efetiva diferente de  $d$ . Esse fato pode ser percebido lembrando que o elemento de volume no espaço dos momentos é  $d^{d-m} q d^m k$  (veja apêndice A). Esse elemento de volume tem essa forma porque como vimos no início desse capítulo, a condição  $\delta_0$  na teoria de campo correspondente ocorre quando as intensidades das interações de troca entre primeiros e segundos vizinhos no modelo de rede são variadas até atingirem um certo valor. Portanto,  $\delta_0 = 0$  é uma condição atingida "dinamicamente", o que permite a redefinição dos momentos paralelos aos eixos de competição. Devido a essa redefinição, o momento  $k$  tem a metade da dimensão do momento  $q$ . Assim, a dimensão efetiva é então  $(d - m/2)$ .

Fazendo uma transformação de escala, usando análise dimensional podemos escrever

$$\Gamma_{R(\tau)}^{(N)}(\rho_\tau k_{i(\tau)}, u_\tau, \mu_\tau) = \rho_\tau^{\tau[N+(d-m/2)-N(d-m/2)/2]} \Gamma_{R(\tau)}^{(N)}(k_{i(\tau)}, u_\tau(\rho_\tau), \mu_\tau/\rho_\tau). \quad (3.114)$$

A parte assintótica que satisfaz às equações de Callan-Symanzik-Lifshitz têm como solução

$$\Gamma_{as R(\tau)}^{(N)}(k_{i(\tau)}, u_\tau(\rho_\tau), \mu_\tau/\rho_\tau) = \exp\left[-\frac{N}{2} \int_{u_\tau}^{u_\tau(\rho_\tau)} \gamma_{\phi(\tau)}(u'_\tau(\rho_\tau)) \frac{du'_\tau}{\beta_\tau(u'_\tau)}\right] \times \Gamma_{as R(\tau)}^{(N)}(k_{i(\tau)}, u_\tau(\rho_\tau), \mu_\tau), \quad (3.115)$$

onde

$$\rho_\tau = \int_{u_\tau}^{u_\tau(\rho_\tau)} \frac{du'_\tau}{\beta_\tau(u'_\tau)}. \quad (3.116)$$

Daqui por diante não usaremos mais o índice  $as$  indicando que estamos tratando da parte assintótica. As constantes de acoplamento assumem os valores  $u_{\tau\infty}$  que satisfazem a condição  $\beta_\tau(u_{\tau\infty}) = 0$ . De fato, esses valores existem e exatamente nesse valor as soluções das equações de Callan-Symanzik-Lifshitz satisfazem a uma relação de escala, onde

$$\Gamma_{R(\tau)}^{(N)}(\rho_\tau k_{i(\tau)}, u_{\tau\infty}, \mu_\tau) = \rho_\tau^{\tau[N+(d-m/2)-N(d-m/2)/2]-N\gamma_{\phi(\tau)}(u_{\tau\infty})/2} \Gamma_{R(\tau)}^{(N)}(k_{i(\tau)}, u_{\tau\infty}\mu_\tau). \quad (3.117)$$

Definimos a dimensão do campo  $\phi$  como

$$\Gamma_{(\tau)}^{(N)}(\rho_\tau k_{i(\tau)}) = \rho_\tau^{\tau[(d-m/2)-Nd_{\phi(\tau)}]} \Gamma_{R(\tau)}^{(N)}(k_{i(\tau)}, u_{\tau\infty}\mu_\tau). \quad (3.118)$$

Desta definição segue então a definição da dimensão anômala do campo  $\phi$  dada por  $d_{\phi(\tau)} = (d - m/2)/2 - 1 + \eta_{\tau}/2\tau$ , o que mostra que  $\eta_{\tau} = \gamma_{\phi(\tau)}(u_{\tau\infty})$ .

Podemos definir também a dimensão do campo composto  $\phi^2$ . Para  $(N, L) \neq (2, 0)$  e  $u_{\tau} = u_{\tau\infty}$ , a parte assintótica das funções de vértice têm o seguinte comportamento

$$\Gamma_{R(\tau)}^{(N)}(\rho_{\tau}k_{i(\tau)}, \rho_{\tau}p_{i(\tau)}, u_{\tau\infty}, \mu_{\tau}) = \rho_{\tau}^{\tau[N-2L+(d-m/2)-N(d-m/2)/2]-N\gamma_{\phi(\tau)}(u_{\infty})/2+L\gamma_{\phi^2(\tau)}(u_{\tau\infty})} \times \Gamma_{R(\tau)}^{(N)}(k_{i(\tau)}, p_{i(\tau)}, u_{\tau\infty}, \mu_{\tau}). \quad (3.119)$$

Definindo a dimensão do campo composto  $\phi^2$  como

$$\Gamma_{(\tau)}^{(N,L)}(\rho_{\tau}k_{i(\tau)}, \rho_{\tau}p_{i(\tau)}) = \rho_{\tau}^{\tau[(d-m/2)-Nd_{\phi(\tau)}]+Ld_{\phi^2(\tau)}} \Gamma_{(\tau)}^{(N,L)}(k_{i(\tau)}, p_{i(\tau)}, u_{\tau\infty}, \mu_{\tau}), \quad (3.120)$$

obtemos  $d_{\phi^2(\tau)} = -2\tau + \gamma_{\phi^2(\tau)}(u_{\tau\infty})$ . Com esse resultado podemos calcular o expoente  $\nu_{\tau}$  para o comprimento de correlação através da relação  $\nu_{\tau}^{-1} = -d_{\phi^2(\tau)} = 2\tau - \gamma_{\phi^2(\tau)}(u_{\tau\infty})$ .

Fazendo agora a seguinte expansão em termos da constante de acoplamento renormalizada

$$u_{0\tau} = u_{\tau}(1 + a_{1\tau}u_{\tau} + a_{2\tau}u_{\tau}^2), \quad (3.121)$$

$$Z_{\phi(\tau)}(u_{\tau}) = 1 + b_{2\tau}u_{\tau}^2 + b_{3\tau}u_{\tau}^3, \quad (3.122)$$

$$\bar{Z}_{\phi^2(\tau)}(u) = 1 + c_{1\tau}u_{\tau} + c_{2\tau}u_{\tau}^2, \quad (3.123)$$

podemos escrever a função  $\beta$  e as funções de Wilson como

$$\beta_{\tau}(u_{\tau}) = -\tau\epsilon_L u_{\tau}[1 - a_{1\tau}u_{\tau} + 2(a_{1\tau}^2 - a_{2\tau})u_{\tau}^2], \quad (3.124)$$

$$\gamma_{\phi(\tau)}(u_{\tau}) = -\tau\epsilon_L u_{\tau}[2b_{2\tau}u_{\tau} + (3b_{3\tau} - 2b_{2\tau}a_{1\tau})u_{\tau}^2], \quad (3.125)$$

$$\bar{\gamma}_{\phi^2(\tau)}(u_{\tau}) = \tau\epsilon_L u_{\tau}[c_{1\tau} + (2c_{2\tau} - c_{1\tau}^2 - a_{1\tau}c_{1\tau})u_{\tau}]. \quad (3.126)$$

Os coeficientes  $a_{1\tau}$ - $c_{2\tau}$  dependem das condições de normalização escolhidas para renormalizarmos a teoria e os calcularemos usando condições de normalização para teorias massivas renormalizadas em momentos externos nulos na próxima seção.

### 3.5.2 Isotrópico

Neste caso existe apenas uma escala de massa  $\mu_3$  ( $\tau = 3$ ). As constantes de acoplamento não-renormalizada e renormalizada são escritas como

$$\lambda_{03} = u_{03}(\mu_3^4)^{\epsilon_L/4}, \quad (3.127)$$

$$g_3 = u_3(\mu_3^4)^{\epsilon_L/4}, \quad (3.128)$$

respectivamente. A equação de Callan-Symanzik é

$$\left[ \mu_3 \frac{\partial}{\partial \mu_3} + \beta_3(u_3) \frac{\partial}{\partial u_3} - \frac{1}{2} N \gamma_{\phi(3)} + L \gamma_{\phi^2(3)} \right] \Gamma_{R(3)}^{(N,L)}(p_{i(3)}, Q_{i(3)}, \mu_3, u_3) = \mu_3^4 [4 - \gamma_{\phi(3)}] \Gamma_{R(3)}^{(N,L+1)}(p_{i(3)}, Q_{i(3)}, 0, \mu_3, u_3), \quad (3.129)$$

onde a função  $\beta_3$  e as funções de Wilson são dadas por

$$\beta_3(u_3) = \left( \mu_3 \frac{\partial u_3}{\partial \mu_3} \right)_{\lambda_3, \Lambda_3}, \quad (3.130)$$

$$\gamma_{\phi(3)}(u_3) = \mu_3 \left( \frac{\partial \ln Z_{\phi(3)}}{\partial \mu_3} \right)_{\lambda_3, \Lambda_3}, \quad (3.131)$$

$$\gamma_{\phi^2(3)}(u_3) = - \left( \mu_3 \frac{\partial \ln Z_{\phi^2(3)}}{\partial \mu_3} \right)_{\lambda_3, \Lambda_3}. \quad (3.132)$$

Podemos expressar estas funções de uma outra maneira usando

$$\mu_3 \frac{\partial u_3}{\partial \mu_3} = -\mu_3 \left( \frac{\partial \lambda_{03}}{\partial \mu_3} \right)_{u_3} \left( \frac{\partial u_3}{\partial \lambda_{03}} \right)_{\mu_3} \quad (3.133)$$

como

$$\beta_3(u_3) = -\epsilon_L \left( \frac{\partial \ln u_{03}}{\partial u_3} \right)^{-1}, \quad (3.134)$$

$$\gamma_{\phi(3)}(u_3) = \beta_3 \frac{\partial \ln Z_{\phi(3)}}{\partial u_3}, \quad (3.135)$$

$$\bar{\gamma}_{\phi^2(3)}(u_3) = -\beta_3 \frac{\partial \ln \bar{Z}_{\phi^2(3)}}{\partial u_3}, \quad (3.136)$$

onde usamos  $\bar{\gamma}_{\phi^2(3)}(u_3)$  ao invés de  $\gamma_{\phi^2(3)}(u_3)$  ao calcularmos os expoentes críticos e

$$\bar{Z}_{\phi^2(3)} = Z_{\phi(3)} Z_{\phi^2(3)}. \quad (3.137)$$

A dimensão efetiva no caso isotrópico é  $m/2$ , pois o elemento de volume para as integrais nesse caso é  $d^m k$  (veja apêndice A).

Fazendo uma transformação de escala, usando análise dimensional e fixando a constante de acoplamento  $u_3$  no valor do ponto fixo ultravioleta podemos escrever

$$\Gamma_{R(3)}^{(N)}(\rho_3 k_{i(3)}, u_{3\infty}, \mu_3) = \rho_3^{2[N+m/2-N(m/4)]-N\gamma_{\phi(3)}(u_{3\infty})/2} \Gamma_{R(3)}^{(N)}(k_{i(3)}, u_{3\infty} \mu_3). \quad (3.138)$$

A definição da dimensão do campo  $\phi$  é dada por

$$\Gamma_{(3)}^{(N)}(\rho_3 k_{i(3)}) = \rho_3^{2[m/2-Nd_{\phi(3)}]} \Gamma_{R(3)}^{(N)}(k_{i(3)}). \quad (3.139)$$

Assim obtemos a expressão para a dimensão do campo  $\phi$  dada por  $d_{\phi(3)} = m/4 - 1 + \eta_3/4$ .

Com isso, podemos escrever para a dimensão anômala do campo  $\eta_3 = \gamma_{\phi(3)}(u_{3\infty})$ .

Agora consideraremos as funções de vértice para campos compostos. Fixando novamente a constante de acoplamento no valor do ponto fixo ultravioleta  $u_3 = u_{3\infty}$ , podemos escrever depois de uma transformação de escala

$$\Gamma_{R(3)}^{(N)}(\rho_3 k_{i(3)}, \rho_3 p_{i(3)}, u_{3\infty}, \mu_3) = \rho_3^{2(N-2L+m/2-Nm/4)-N\gamma_{\phi(3)}(u_{3\infty})/2+L\gamma_{\phi^2(3)}(u_{3\infty})} \times \Gamma_{R(3)}^{(N)}(k_{i(3)}, p_{i(3)}, u_{3\infty}, \mu_3). \quad (3.140)$$

Podemos escrever para a definição da dimensão do campo composto  $\phi^2$

$$\Gamma_{(3)}^{(N,L)}(\rho_3 k_{i(3)}, \rho_3 p_{i(3)}) = \rho_3^{m/2-Nd_{\phi(3)}+Ld_{\phi^2(3)}} \Gamma_{(3)}^{(N,L)}(k_{i(3)}, p_{i(3)}). \quad (3.141)$$

Então segue que  $d_{\phi^2(3)} = -4 + \gamma_{\phi^2(3)}(u_{3\infty})$ . Assim, calculamos o expoente  $\nu_3$  como  $\nu_3^{-1} = -d_{\phi^2(3)} = 4 - \gamma_{\phi^2(3)}(u_{3\infty})$ .

Procedendo de maneira semelhante ao caso anisotrópico podemos escrever

$$u_{03} = u_3(1 + a_{13}u_3 + a_{23}u_3^2), \quad (3.142)$$

$$Z_{\phi(3)}(u_3) = 1 + b_{23}u_3^2 + b_{33}u_3^3, \quad (3.143)$$

$$\bar{Z}_{\phi^2(3)}(u_3) = 1 + c_{13}u_3 + c_{23}u_3^2 \quad (3.144)$$

e

$$\beta_3(u_3) = -\epsilon_L u_3 [1 - a_{13}u_3 + 2(a_{13}^2 - a_{23})u_3^2], \quad (3.145)$$

$$\gamma_{\phi(3)}(u_3) = -\epsilon_L u_3 [2b_{23}u_3 + (3b_{33} - 2b_{23}a_{13})u_3^2], \quad (3.146)$$

$$\bar{\gamma}_{\phi^2(3)}(u_3) = \epsilon_L u_3 [c_{13} + (2c_{23} - c_{13}^2 - a_{13}c_{13})u_3]. \quad (3.147)$$

Como já dissemos, os coeficientes  $a_{13}$ - $c_{23}$  dependem das condições de normalização e na próxima seção faremos o cálculo dos expoentes críticos em uma teoria massiva renormalizada em massa diferente de zero e momentos externos nulos.

### 3.6 Cálculo dos expoentes críticos anisotrópicos

Usaremos agora as integrais calculadas no apêndice A com massas diferentes de zero, momentos externos nulos e na aproximação ortogonal. Os coeficientes  $a_{1\tau}$ - $c_{2\tau}$  são dados por

$$a_{1\tau} = \frac{N+8}{6\epsilon_L} (1 + [i_2]_m \epsilon_L - \epsilon_L), \quad (3.148)$$

$$a_{2\tau} = \left( \frac{N+8}{6\epsilon_L} \right)^2 + \frac{N^2 + 16N + 64}{18\epsilon_L} [i_2]_m - \frac{4N^2 + 73N + 298}{72\epsilon_L}, \quad (3.149)$$

$$b_{2\tau} = -\frac{N+2}{144\epsilon_L} \left( 1 + 2[i_2]_m \epsilon_L - \frac{5}{4}\epsilon_L + I\epsilon_L \right), \quad (3.150)$$

$$b_{3\tau} = -\frac{(N+2)(N+8)}{1296\epsilon_L^2} \left( 1 + 3[i_2]_m \epsilon_L - \frac{13}{4}\epsilon_L \right), \quad (3.151)$$

$$c_{1\tau} = \frac{N+2}{6\epsilon_L} (1 + [i_2]_m \epsilon_L - \epsilon_L), \quad (3.152)$$

$$c_{2\tau} = \frac{N^2 + 7N + 10}{36\epsilon_L^2} + \frac{N^2 + 7N + 10}{18\epsilon_L} [i_2]_m - \frac{4N^2 + 31N + 46}{72\epsilon_L}. \quad (3.153)$$

Com isso, as equações (3.124)-(3.126) tomam a forma

$$\beta_\tau(u_\tau) = -\tau u_\tau \left[ \epsilon_L - \frac{N+8}{6} (1 + ([i_2]_m - 1)\epsilon_L) u_\tau + \frac{3N+14}{12} u_\tau^2 \right], \quad (3.154)$$

$$\gamma_{\phi(\tau)}(u_\tau) = \tau \frac{N+2}{72} \left[ \left( 1 + 2[i_2]_m \epsilon_L - \frac{5}{4}\epsilon_L + I\epsilon_L \right) u_\tau^2 - \frac{N+8}{6} (I+1) u_\tau^3 \right], \quad (3.155)$$

$$\bar{\gamma}_{\phi^2(\tau)}(u_\tau) = \tau \frac{N+2}{6} u_\tau \left( 1 + [i_2]_m \epsilon_L - \epsilon_L - \frac{1}{2} u_\tau \right). \quad (3.156)$$

Da equação (3.154) calculamos o ponto fixo da condição  $\beta_\tau(u_{\tau\infty}) = 0$  e obtemos  $u_{1\infty} = u_{2\infty} \equiv u_\infty$ , ou seja, as constantes de acoplamento de cada subespaço inequivalente têm o mesmo valor para o ponto fixo. Esse valor é dado por

$$u_\infty = \frac{6}{N+8}\epsilon_L \left\{ 1 + \epsilon_L \left[ \frac{3(3N+14)}{(N+8)^2} + 1 - [i_2]_m \right] \right\}. \quad (3.157)$$

Calculamos o expoente  $\eta_\tau$  através de

$$\eta_\tau = \gamma_{\phi(\tau)}(u_\infty) = \frac{\tau}{2}\epsilon_L^2 \frac{N+2}{(N+8)^2} \left\{ 1 + \epsilon_L \left[ \frac{6(3N+14)}{(N+8)^2} - \frac{1}{4} \right] \right\}, \quad (3.158)$$

onde os fatores  $[i_2]_m$  e a integral  $I$  se cancelaram no cálculo de  $\eta_\tau$ .

Agora com

$$\bar{\gamma}_{\phi^2(\tau)}^* \equiv \bar{\gamma}_{\phi(\tau)}^2(u_\infty) = \tau\epsilon_L \frac{N+2}{N+8} \left[ 1 + \frac{6(N+3)}{(N+8)^2}\epsilon_L \right], \quad (3.159)$$

e com o auxílio da relação  $\nu_\tau^{-1} = 2\tau - \eta_\tau - \bar{\gamma}_{\phi^2(\tau)}^*(u_\infty)$  obtemos

$$\nu_\tau = \frac{1}{2\tau} + \frac{N+2}{4\tau(N+8)}\epsilon_L + \frac{(N+2)(N^2+23N+60)}{8\tau(N+8)^3}\epsilon_L^2. \quad (3.160)$$

Fazendo as identificações  $\eta_1 = \eta_{L2}$  e  $\nu_1 = \nu_{L2}$  onde esses expoentes críticos estão associados às direções perpendiculares aos eixos competitivos e os expoentes  $\eta_2 = \eta_{L4}$  e  $\nu_2 = \nu_{L4}$  associados às direções paralelas aos eixos competitivos, vemos que esses expoentes são os mesmos que os calculados na teoria sem massa renormalizada em momentos externos diferentes de zero [69]. Esses expoentes se reduzem aos respectivos expoentes críticos para sistemas do tipo Ising sem interações competitivas do capítulo 2 quando  $\tau = 1$  e  $m = 0$ ,  $\epsilon_L = 4 + m/2 - d \rightarrow 4 - d = \epsilon$ , ou seja, quando desligamos as interações competitivas. Temos então, nesse limite, uma redução da classe de universalidade caracterizada por  $(N, d, m)$  para a classe de universalidade  $(N, d)$ . Por outro lado, no limite  $m \rightarrow 0$  o caso  $\tau = 2$  não possui significado físico por razões óbvias.

Os expoentes críticos  $\eta_1$ ,  $\nu_1$  e  $\eta_2$ ,  $\nu_2$  foram obtidos independentemente em cada subespaço e têm valores diferentes. Entre ele há as relações  $\eta_2 = 2\eta_1$  e  $\nu_2 = \frac{1}{2}\nu_1$  que são satisfeitas em  $O(\epsilon_L^3)$  e  $O(\epsilon_L^2)$ , respectivamente.

### 3.7 Expoentes críticos isotrópicos na aproximação ortogonal

Do apêndice A para o caso isotrópico onde as integrais são calculadas na aproximação ortogonal, os coeficientes  $a_{13}$ - $c_{23}$  são dados por

$$a_{13} = \frac{N+8}{6\epsilon_L} \left(1 - \frac{1}{4}\epsilon_L\right), \quad (3.161)$$

$$a_{23} = \left(\frac{N+8}{6\epsilon_L}\right)^2 - \frac{2N^2 + 41N + 170}{144\epsilon_L}, \quad (3.162)$$

$$b_{23} = -\frac{N+2}{288\epsilon_L} \left(1 - \frac{1}{8}\epsilon_L + \frac{1}{2}I\epsilon_L\right), \quad (3.163)$$

$$b_{33} = -\frac{(N+2)(N+8)}{2592\epsilon_L^2} \left(1 - \frac{7}{8}\epsilon_L\right), \quad (3.164)$$

$$c_{13} = \frac{N+2}{6\epsilon_L} \left(1 - \frac{1}{4}\epsilon_L\right), \quad (3.165)$$

$$c_{23} = \frac{N^2 + 7N + 10}{36\epsilon_L^2} - \frac{2N^2 + 17N + 26}{144\epsilon_L}. \quad (3.166)$$

Com isso obtemos a função  $\beta_3$  e as funções de Wilson como

$$\beta_3(u_3) = -u_3 \left[ \epsilon_L - \frac{N+8}{6} \left(1 - \frac{1}{4}\epsilon_L\right) u_3 + \frac{3N+14}{12} u_3^2 \right], \quad (3.167)$$

$$\gamma_{\phi(3)}(u_3) = \frac{N+2}{144} \left[ \left(1 - \frac{1}{8}\epsilon_L + \frac{1}{2}I\epsilon_L\right) u_3^2 - \frac{N+8}{12} (I+1) u_3^3 \right], \quad (3.168)$$

$$\bar{\gamma}_{\phi^2(3)}(u_3) = \frac{N+2}{6} u_3 \left(1 - \frac{1}{4}\epsilon_L - \frac{1}{4}u_3\right). \quad (3.169)$$

Calculamos o ponto fixo  $u_{3\infty}$  da equação (3.167) resultando em

$$u_{3\infty} = \frac{6}{N+8} \epsilon_L \left\{ 1 + \frac{1}{2} \epsilon_L \left[ \frac{3(3N+14)}{(N+8)^2} + \frac{1}{2} \right] \right\}. \quad (3.170)$$

O expoente  $\eta_3$  é obtido da expressão  $\eta_3 = \gamma_{\phi(3)}(u_{3\infty})$  e tem o valor

$$\eta_3 = \epsilon_L^2 \frac{N+2}{4(N+8)^2} \left\{ 1 + \epsilon_L \left[ \frac{6(3N+14)}{(N+8)^2} - \frac{1}{8} \right] \right\}, \quad (3.171)$$

onde a integral  $I$  se cancelou no cálculo de  $\eta_3$ .

E finalmente com

$$\bar{\gamma}_{\phi^2(3)}(u_{3\infty}) = \epsilon_L \frac{N+2}{N+8} \left[ 1 + \frac{(3N+9)}{(N+8)^2} \epsilon_L \right], \quad (3.172)$$

e a relação  $\nu_3^{-1} = 4 - \eta_3 - \bar{\gamma}_{\phi(3)}^2(u_{3\infty})$  obtemos

$$\nu_3 = \frac{1}{4} + \frac{N+2}{16(N+8)}\epsilon_L + \frac{(N+2)(N^2+23N+60)}{256(N+8)^3}\epsilon_L^2. \quad (3.173)$$

Com a notação em que  $\eta_3 = \eta_{L4}$  e  $\nu_3 = \nu_{L4}$  obtemos os mesmos expoentes que os calculados na teoria sem massa renormalizada em momentos externos não-nulos [69]. Não podemos obter  $\eta_3$  de  $\eta_\tau$ , (3.158), através de um limite suave. Ou seja, não podemos obter o caso isotrópico do anisotrópico fazendo  $d \rightarrow m$  em torno de 8. O mesmo ocorre com o expoente crítico  $\nu_3$ .

### 3.8 Cálculo dos expoentes críticos isotrópicos - Exato

Os coeficientes  $a_{13}$ - $c_{23}$ , do apêndice A, com as integrais calculadas exatamente são dados por

$$a_{13} = \frac{N+8}{6\epsilon_L} \left(1 - \frac{1}{4}\epsilon_L\right), \quad (3.174)$$

$$a_{23} = \left(\frac{N+8}{6\epsilon_L}\right)^2 - \frac{3N^2+43N+170}{216\epsilon_L} - \frac{N+2}{240\epsilon_L}, \quad (3.175)$$

$$b_{23} = \frac{N+2}{480\epsilon_L} \left(1 - \frac{77}{120}\epsilon_L + 120H\epsilon_L\right), \quad (3.176)$$

$$b_{33} = \frac{(N+2)(N+8)}{4320\epsilon_L^2} \left(1 - \frac{113}{120}\epsilon_L\right), \quad (3.177)$$

$$c_{13} = \frac{N+2}{6\epsilon_L} \left(1 - \frac{1}{4}\epsilon_L\right), \quad (3.178)$$

$$c_{23} = \frac{N^2+7N+10}{36\epsilon_L^2} - \frac{2N^2+13N+18}{144\epsilon_L}. \quad (3.179)$$

Assim podemos calcular a função  $\beta_3$  e as funções de Wilson onde obtemos

$$\beta_3(u_3) = -u_3 \left[ \epsilon_L - \frac{N+8}{6} \left(1 - \frac{1}{4}\epsilon_L\right) u_3 - \frac{41N+202}{1080} u_3^2 \right], \quad (3.180)$$

$$\gamma_{\phi(3)}(u_3) = -\frac{N+2}{240} \left[ \left(1 - \frac{77}{120}\epsilon_L - 120H\epsilon_L\right) u_3^2 - \frac{N+8}{120} (1 - 2400H) u_3^3 \right], \quad (3.181)$$

$$\bar{\gamma}_{\phi(3)}^2(u_3) = \frac{N+2}{6} u_3 \left(1 - \frac{1}{4}\epsilon_L + \frac{1}{12} u_3\right). \quad (3.182)$$

O ponto fixo  $u_{3\infty}$ , da equação (3.180), é

$$u_{3\infty} = \frac{6}{N+8}\epsilon_L \left\{ 1 + \frac{1}{2}\epsilon_L \left[ \frac{1}{2} - \frac{41N+202}{15(N+8)^2} \right] \right\}. \quad (3.183)$$

Calculamos o expoente  $\eta_3$  e obtemos

$$\eta_3 = -\epsilon_L^2 \frac{3(N+2)}{20(N+8)^2} + \frac{N+2}{10(N+8)^2} \left[ \frac{41N+202}{10(N+8)^2} + \frac{23}{80} \right] \epsilon_L^3, \quad (3.184)$$

onde a integral  $H$  se cancelou no cálculo de  $\eta_3$ .

Agora com

$$\bar{\gamma}_{\phi(3)}^2(u_{3\infty}) = \epsilon_L \frac{N+2}{N+8} \left[ 1 - \frac{(13N+41)}{15(N+8)^2} \epsilon_L \right], \quad (3.185)$$

obtemos

$$\nu_3 = \frac{1}{4} + \frac{N+2}{16(N+8)} \epsilon_L + \frac{(N+2)(15N^2+89N+4)}{960(N+8)^3} \epsilon_L^2, \quad (3.186)$$

Com  $\eta_3 = \eta_{L4}$  e  $\nu_3 = \nu_{L4}$  obtemos os mesmos expoentes que os obtidos pela primeira vez por Hornreich, Luban e Shtrikman [32] e de maneira alternativa na teoria sem massa renormalizada em momentos externos não-nulos onde o expoente  $\eta_3$  é calculado até  $O(\epsilon_L^3)$  [74]. O manuscrito cujo conteúdo está associado a este capítulo foi aceito para publicação [75].

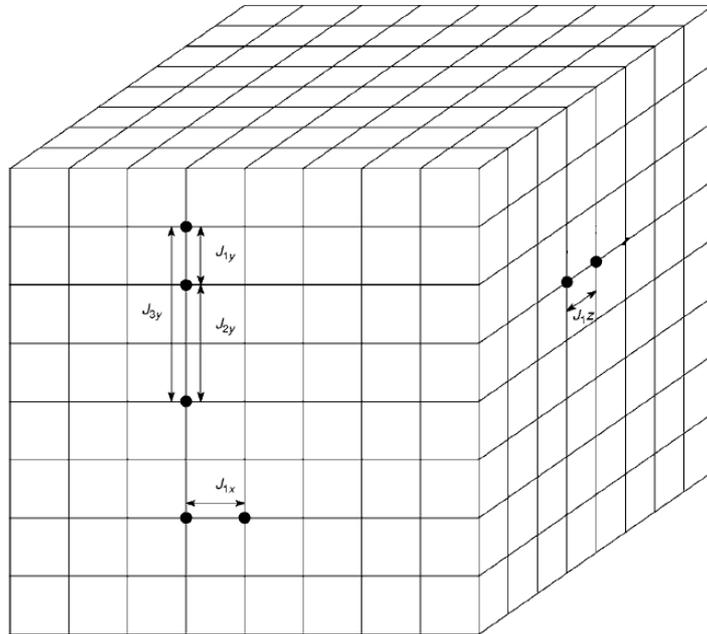
Podemos verificar a eficiência da aproximação ortogonal comparando os resultados para os expoentes críticos no caso isotrópico calculados na aproximação ortogonal e exatamente. Consideraremos o caso de um sistema magnético em 7 dimensões e que o parâmetro de ordem tenha  $N = 1$  componente. Neste caso o parâmetro de expansão  $\epsilon_L$  tem o valor  $\epsilon_L = 1$ . Temos então, respectivamente, os seguintes valores para os expoentes críticos, até três algarismos significativos, calculados usando a aproximação ortogonal e exatamente [74]

$$\begin{aligned} \nu_3 = 0.276 \quad \eta_3 = 0.009 \quad \gamma_3 = 1.103 \quad \alpha_3 = 0.061 \quad \beta_3 = 0.418 \quad \delta_3 = 3.616 \\ \nu_3 = 0.271 \quad \eta_3 = -0.006 \quad \gamma_3 = 1.087 \quad \alpha_3 = 0.100 \quad \beta_3 = 0.406 \quad \delta_3 = 3.631 \end{aligned}$$

O menor erro ocorre para o expoente crítico do comprimento de correlação  $\nu_3$  que é de 0.5% e o maior para o expoente  $\alpha_3$  com erro de 3.9%. Isto mostra que a aproximação ortogonal é bastante eficiente para obtermos expoentes críticos nesta situação particular.

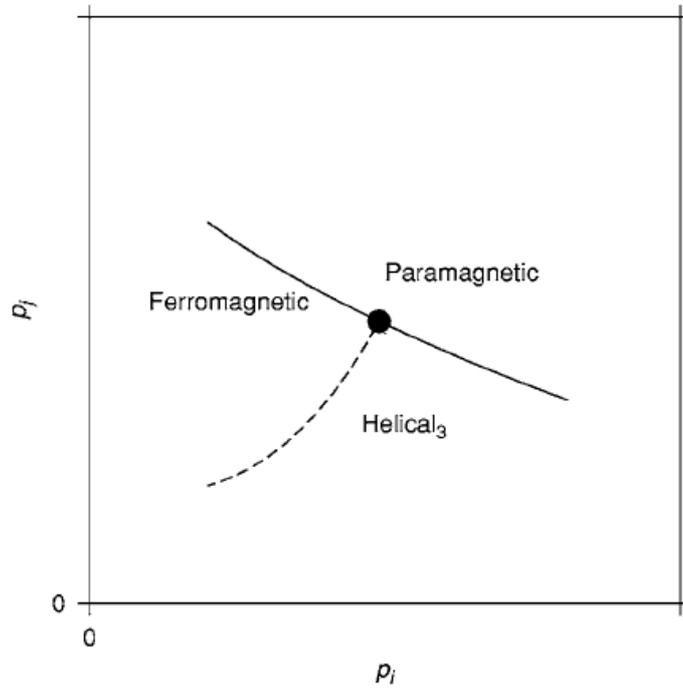
## Pontos de Lifshitz de caráter arbitrário

Neste capítulo faremos uma generalização do estudo feito no capítulo 3. Trataremos sistemas competitivos arbitrários. Para a renormalização da teoria de campo que descreve esses sistemas usaremos condições de normalização em massas diferentes de zero e em momentos externos nulos. Daremos uma prova da renormalizabilidade multiplicativa em todas as ordens em teoria de perturbação. Uma análise da teoria fora da dimensão crítica será feita. As integrais de Feynman serão calculadas no apêndice B nos vários casos anisotrópico e isotrópico na aproximação ortogonal. Alternativamente o caso isotrópico será tratado exatamente.



**Figura 4.1** Situação em que temos pontos de Lifshitz uniaxiais de terceiro caráter:  $m_3 = 1$ .

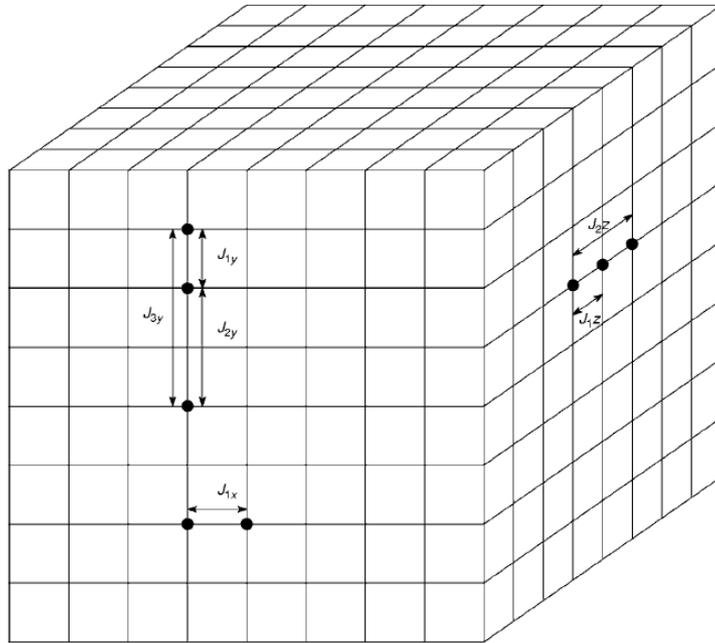
Sistemas competitivos arbitrários são descritos pelo modelo CECI (*competing exchange coupling Ising*) que descreve sistemas do tipo Ising em  $d$  dimensões com interações



**Figura 4.2** Diagrama de fase para pontos de Lifshitz  $m_3$ -axiais (de terceiro caráter).

competitivas de longo alcance [74]. Em sistemas magnéticos, esse modelo descreve um sistema de spins  $1/2$  em sítios de uma rede  $d$ -dimensional. No caso mais simples, como visto na figura 4.1, esses spins interagem através de forças de troca ferromagnéticas entre primeiros vizinhos ao longo de todas as direções espaciais com constante de acoplamento  $J_1 > 0$ , forças de troca antiferromagnéticas entre segundos vizinhos ao longo de uma única direção espacial com constante de acoplamento  $J_2 < 0$  e interações de troca ferromagnéticas entre terceiros vizinhos ao longo da mesma direção espacial de  $J_2$  com constante de acoplamento  $J_3 > 0$ . Esse caso define o comportamento crítico de Lifshitz uniaxial de terceiro caráter ( $m_3 = 1$ ) quando as razões  $J_2/J_1$  e  $J_3/J_1$  assumem valores especiais na temperatura crítica de Lifshitz. No caso em que  $J_2$  e  $J_3$  têm componentes ao longo de  $m_3$  direções espaciais obtemos os pontos de Lifshitz  $m_3$ -axiais de terceiro caráter. As classes de universalidade que definem esses sistemas são dadas por  $(N, d, m_3)$ . No caso isotrópico  $m_3 = d$ . O diagrama de fase para esses sistemas tem a forma geral como mostrada na figura 4.2, onde além das fases paramagnética e ferromagnética existe também uma fase

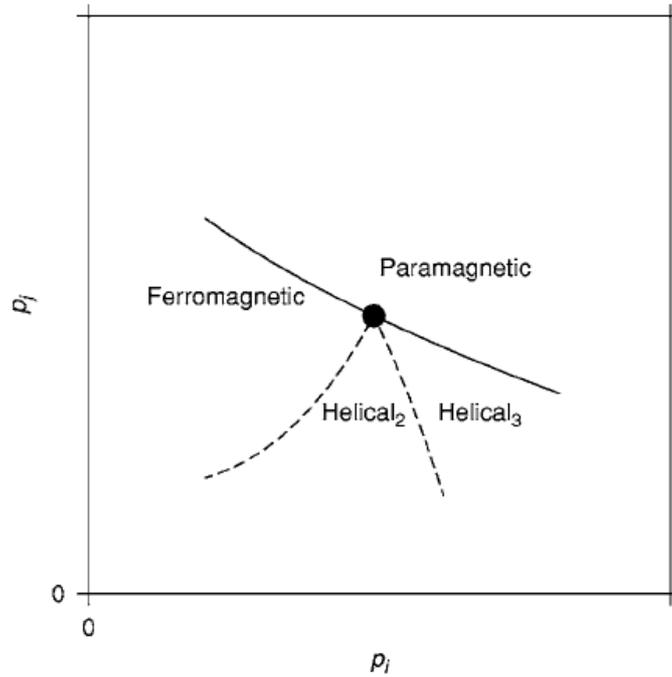
modulada. Os parâmetros  $p_i$  são as razões  $p_i = J_i/J_1$ . Quando estendemos esse caso para a situação em que existem agora ao longo desse único eixo interações alternadas até  $L$ -ésimos vizinhos ( $J_1 > 0$ ,  $J_2 < 0$ ,  $J_3 > 0$ ,  $J_4 < 0$ ,  $J_5 > 0$  e assim sucessivamente), temos o comportamento de Lifshitz uniaxial de  $L$ -ésimo caráter. Quando essas interações ocorrem ao longo de  $m_L$  direções espaciais, obtemos os pontos de Lifshitz  $m_L$ -axiais. Suas classes de universalidade são definidas por  $(N, d, m_L)$  [29,30]. O caso isotrópico ocorre se  $m_L = d$ , assim as classe de universalidade para essa situação são dadas por  $(N, m_L = d)$ . Os autores da referência [50] argumentam que, em princípio, pontos de Lifshitz de até sexto caráter podem ser observados em alguns tipos de polímeros.



**Figura 4.3** Caso mais simples do modelo CECI:  $m_2 = m_3 = 1$ .

Uma situação mais geral que a mencionada acima é a representada pela figura 4.3 onde existem interações de troca ferromagnéticas entre primeiros vizinhos ao longo de todas as direções espaciais com  $J_1 > 0$ , interações de troca antiferromagnéticas entre segundos vizinhos com  $J_2 < 0$  e interações de troca ferromagnéticas entre terceiros vizinhos ao longo de uma única direção espacial com  $J_3 > 0$ . Essa situação define os pontos de Lifshitz uniaxiais de terceiro caráter genérico ( $m_2 = m_3 = 1$ ) e o diagrama de fase para

esse caso está mostrado na figura 4.4. Existem agora além das fases paramagnética e ferromagnética, duas fases moduladas onde a linha que separa as fases moduladas é uma linha de primeira ordem.



**Figura 4.4** Situação em que temos pontos de Lifshitz uniaxiais de terceiro caráter genérico.

A situação mais geral possível ocorre quando ocorrem simultaneamente interações não-competitivas somente entre primeiros vizinhos ao longo de  $(d - m_2 - \dots - m_L)$  direções espaciais, interações competitivas ao longo de  $m_2$  direções espaciais, interações competitivas ao longo de  $m_3$  direções espaciais, e assim sucessivamente, até  $L$ -ésimos vizinhos ao longo de  $m_L$  direções espaciais. Observe que os diferentes subespaços com competição ou não, são todos ortogonais entre si nesta situação de máxima generalidade. As classes de universalidade caracterizando esses sistemas são definidas por  $(N, d, m_2, \dots, m_L)$ . No caso isotrópico temos interações competitivas entre  $L$ -ésimos vizinhos ao longo de todas as direções espaciais. Nesse caso as classes de universalidade são dadas por  $(N, m_2 = \dots = m_{L-1} = 0, m_L = d)$ . Ressaltamos que as diferentes componentes das forças de troca competitivas são independentes entre si em cada subespaço

competitivo. Nesta situação mais geral surgem as fases desordenada paramagnética, ordenada ferromagnética e ordenadas moduladas. A cada uma dessas direções espaciais inequivalentes está associado um comprimento de correlação independente,  $\xi_1$  para as direções espaciais paralelas aos  $(d - m_2 - \dots - m_L)$  eixos não-competitivos,  $\xi_2$  para as direções espaciais paralelas aos  $m_2$  eixos competitivos, ...,  $\xi_L$  para as direções espaciais paralelas aos  $m_L$  eixos de competição. Para esses sistemas as classes de universalidade são caracterizadas por  $(N, d, m_2, \dots, m_L)$ . No caso isotrópico  $d = m_n$  próximo de  $4n$  onde  $n = 1, 2, \dots, L$  e temos apenas um comprimento de correlação  $\xi_{4n}$  e a classe de universalidade é caracterizada por  $(N, d, m_n)$ .

Definiremos agora as condições de normalização usadas na renormalização da teoria de campo que descreve esses sistemas.

#### 4.1 Condições de normalização

Os comportamentos críticos dos sistemas magnéticos definidos acima são descritos por uma teoria de campo em que a densidade de Lagrangiana apresenta em seu termo cinético, além de derivadas quadráticas do campo  $\phi$ , derivadas quárticas, sêxtuplas etc. Essa densidade de Lagrangiana depende dos números  $m_2, m_3, \dots, m_L$  de direções espaciais em que existem interações competitivas. A teoria de campo usada será uma teoria efetiva onde a densidade de Lagrangiana contém vários termos de derivadas de ordens mais altas que são induzidos por um efeito da competição. A densidade de Lagrangiana não-renormalizada, em uma teoria Euclidiana, que descreve esses sistemas é dada por [74]

$$L = \sum_{n=2}^L \frac{\sigma_n}{2} |\nabla_{m_n}^n \phi_0|^2 + \frac{1}{2} |\nabla_{(d-\sum_{n=2}^L m_n)} \phi_0|^2 + \sum_{n=2}^L \frac{\delta_{0n}}{2} |\nabla_{m_n} \phi_0|^2 + \sum_{n=3}^{L-1} \sum_{n'=2}^{n-1} \frac{1}{2} \tau_{nn'} |\nabla_{m_n}^{n'} \phi_0|^2 + \frac{1}{2} \mu_0^2 \phi_0^2 + \frac{1}{4!} \lambda_0 \phi_0^4, \quad (4.1)$$

onde as constantes  $\sigma_n$  foram introduzidas na equação acima para que os termos dos quais elas fazem parte tenham a mesma dimensão que os outros termos da densidade de

Lagrangiana. A região crítica de Lifshitz de caráter geral é definida por  $\delta_{0n} = \tau_{nn'} = 0$ , mesmo quando  $\mu_0^2 \neq 0$ . As condições  $\delta_{0n} = \tau_{nn'} = 0$ , devido à competição entre as interações ferromagnética e antiferromagnética ao longo das  $m_2, \dots, m_L$  direções espaciais, anula o terceiro e quarto termos da última equação. Com isso podemos redefinir os momentos ao longo das direções paralelas aos eixos competitivos tal que as constantes  $\sigma_n$  possam ser descartadas. Depois dessa redefinição, esses momentos têm dimensões diferentes. Os momentos paralelos aos  $m_2$  eixos competitivos têm a metade da dimensão de um momento convencional. Já os momentos paralelos aos  $m_3$  eixos de competição têm um terço da dimensão de um momento convencional e assim sucessivamente: os momentos paralelos aos eixos de competição que acoplam os  $L$ -ésimos vizinhos têm  $(1/L)$  da dimensão canônica de uma escala de momento convencional. Isto significa que todos esses eixos ou direções espaciais podem ser considerados inequivalentes. As condições  $\delta_{0n} = \tau_{nn'} = 0$  implicam então que os momentos ao longo dessas direções inequivalentes podem ser considerados independentes entre si.

Na descrição dos comportamentos críticos de sistemas competitivos arbitrários usando a teoria sem massa [74], temos que utilizar  $L$  escalas independentes de momento  $\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_L$  para fixarmos os momentos externos. Essas  $n$  escalas de momento são independentes entre si. Para cada uma dessas escalas de momento associamos um subespaço inequivalente. O subespaço não-competitivo em  $(d - m_2 - \dots - m_L)$  dimensões está associado à escala de momento  $\kappa_1$ . O subespaço competitivo em  $m_2$  dimensões está associado à escala de momento  $\kappa_2$ . Esta idéia pode ser usada até o subespaço competitivo em  $m_L$  dimensões associado à escala de momento  $\kappa_L$ .

As partes de vértice  $1PI$  são definidas independentemente para cada subespaço inequivalente. Assim as partes de vértice  $1PI$  definidas no subespaço não-competitivo têm momentos externos arbitrários ao longo das  $(d - m_2 - \dots - m_L)$  direções espaciais e momentos externos nulos ao longo das  $m_2, \dots, m_L$  direções espaciais. Essas funções são renormalizadas usando a escala de momento  $\kappa_1$ . Já as partes de vértice  $1PI$  definidas no subespaço competitivo em  $m_2$  dimensões têm momentos externos arbitrários ao longo das  $m_2$  direções espaciais, momentos externos nulos ao longo dos  $(d - m_2 - \dots - m_L)$  eixos

não-competitivos e componentes dos momentos externos nulos ao longo dos  $m_3, \dots, m_L$  eixos de competição. A renormalização dessas partes de vértice é feita utilizando a escala de momento  $\kappa_2$ . Podemos definir as partes de vértice até o subespaço competitivo em  $m_L$  dimensões onde essas funções têm momentos externos arbitrários ao longo das  $m_L$  direções espaciais e componentes dos momentos externos nulos ao longo de cada subespaço inequivalente. Essas funções de vértice são renormalizadas usando a escala de momento  $\kappa_L$ . Partindo da mesma teoria não-renormalizada, variações das escalas de momentos independentes  $\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_L$  ou, equivalentemente, fluxos de grupo de renormalização nas  $L$  direções inequivalentes são gerados pelos comprimentos de correlação  $\xi_1$  perpendiculares aos eixos não-competitivos,  $\xi_2, \dots, \xi_L$  paralelos aos eixos de competição. Assim, uma equação de grupo de renormalização independente é gerada para cada subespaço inequivalente.

Quando estudamos o caso massivo, podemos realizar esse estudo através de uma analogia com o caso sem massa. Nesse caso os momentos perpendiculares e paralelos aos eixos de competição são considerados independentes. Com isso, podemos definir um conjunto de condições de normalização para as funções de vértice de cada subespaço inequivalente. Definimos então as partes de vértice *1PI* do subespaço não-competitivo com momentos externos arbitrários perpendiculares aos eixos competitivos e momentos externos nulos paralelos aos eixos de competição. Nessa situação a massa não-renormalizada  $\mu_{01}$  e a constante de acoplamento não-renormalizada  $\lambda_{01}$  são não-nulas de início e  $\mu_{02} \equiv \dots \equiv \mu_{0L} \equiv \lambda_{02} \equiv \dots \equiv \lambda_{0L} = 0$ . As funções de vértice do subespaço competitivo em  $m_2$  dimensões têm momentos externos arbitrários paralelos aos  $m_2$  eixos de competição e momentos externos nulos paralelos aos eixos não-competitivos e aos  $m_3, \dots, m_L$  eixos competitivos. Nesse caso, o ponto de partida é considerarmos a massa não-renormalizada  $\mu_{02}$  e a constante de acoplamento não-renormalizada  $\lambda_{02}$  assumindo valores não-nulos e  $\mu_{01} \equiv \dots \equiv \mu_{0L} \equiv \lambda_{01} \equiv \dots \equiv \lambda_{0L} = 0$ . Podemos usar essa idéia até as funções de vértice para o subespaço competitivo em  $m_L$  dimensões. Nesse subespaço as funções de vértice têm momentos externos arbitrários paralelos aos  $m_L$  eixos de competição e momentos nulos paralelos aos eixos não-competitivos e aos  $m_2, \dots, m_{L-1}$  eixos

competitivos. Agora a massa  $\mu_{0L}$  e a constante de acoplamento não-renormalizadas  $\lambda_{0L}$  são não-nulas de início e  $\mu_{01} \equiv \dots \equiv \mu_{0(L-1)} \equiv \lambda_{01} \equiv \dots \equiv \lambda_{0(L-1)} = 0$ . Nessas definições são introduzidas as escalas de massa usadas no tratamento do caso anisotrópico. No caso isotrópico existe apenas uma escala de massa  $\mu_n$ , com  $n = 1, 2, \dots, L$ .

Podemos usar os momentos externos como rótulos para os diferentes subespaços inequivalentes. O momento externo do subespaço não-competitivo é dado por  $p_{(1)} = P$  (vetor  $(d - m_2 - \dots - m_L)$ -dimensional). Os momentos externos dos subespaços competitivos são  $p_{(2)} = K'_{(2)}$  (vetor  $m_2$ -dimensional), ...,  $p_{(L)} = K'_{(L)}$  (vetor  $m_L$ -dimensional).

A massa está relacionada com a diferença de temperatura em relação à temperatura crítica. Assim há  $L$  maneiras independentes de atingirmos a temperatura crítica de Lifshitz no diagrama de fase para sistemas com interações competitivas arbitrárias. Uma maneira é através da variação da "massa" ("fluxo de massa" no espaço dos parâmetros) no subespaço não-competitivo. Isto é equivalente a atingirmos o ponto de Lifshitz através da fase ordenada ferromagnética. Outra maneira é por meio da variação da "massa" nos subespaços competitivos, atingindo assim o ponto de Lifshitz pelas fases ordenadas moduladas. Com isso, introduzimos  $L$  massas não-renormalizadas independentes na densidade de Lagrangiana que descreve os comportamentos críticos desses sistemas. Essas massas proporcionam que realizemos transformações de escala associadas aos comprimentos de correlação  $\xi_1, \dots, \xi_L$ . Assim, é natural considerar a massa e o momento em cada subespaço com a mesma dimensão canônica.

Podemos introduzir massa na densidade de Lagrangiana de partida. Assim podemos escolher as massas dos subespaços inequivalentes com a mesma dimensão das componentes dos momentos dos subespaços correspondentes. Juntamente com esse fato, escolhemos também uma constante de acoplamento para cada subespaço. Assim, podemos definir a densidade de Lagrangiana não-renormalizada como

$$L = \sum_{n=2}^L \frac{1}{2} |\nabla_{m_n}^n \phi_0|^2 + \frac{1}{2} |\nabla_{(d-\sum_{n=2}^L m_n)} \phi_0|^2 + \sum_{n=2}^L \frac{\delta_{0n}}{2} |\nabla_{m_n} \phi_0|^2 + \sum_{n=3}^{L-1} \sum_{n'=2}^{n-1} \frac{1}{2} \tau_{nn'} |\nabla_{m_n}^{n'} \phi_0|^2 + \frac{1}{2} \mu_{0n}^{2n} \phi_0^2 + \frac{1}{4!} \lambda_{0n} \phi_0^4, \quad (4.2)$$

O índice  $n$  em  $\mu_{0n}^{2n}$  e  $\lambda_{0n}$  rotula os subespaços não-competitivo ( $n = 1$ ) e competitivos ( $n = 2, 3, \dots, L$ ), respectivamente e estamos na região crítica de Lifshitz quando  $\delta_{0n} = \tau_{nn'} = 0$ , mesmo se  $\mu_{0n}^{2n} \neq 0$ . Como a teoria com massas diferentes de zero não possuem divergências infravermelhas, podemos renormalizá-las em momentos externos nulos. Assim, as condições de normalização para as partes de vértice  $1PI$  dos  $L$  subespaços independentes entre si são dadas por

$$\Gamma_{R(n)}^{(2)}(0; \mu_n, g_n) = \mu_n^{2n}, \quad (4.3)$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial p_{(n)}^{2n}} \Gamma_{R(n)}^{(2)}(p_{(n)}; \mu_n, g_n) \right|_{p_{(n)}^{2n}=0} = 1, \quad (4.4)$$

$$\Gamma_{R(n)}^{(4)}(0; \mu_n, g_n) = g_n, \quad (4.5)$$

$$\Gamma_{R(n)}^{(2,1)}(0, 0; \mu_n, g_n) = 1, \quad (4.6)$$

Essas funções dependem também de cortes no momento  $\Lambda_n$ . Esses cortes nos momentos são independentes para cada subespaço. Eles proporcionam fluxos independentes no espaço de parâmetros. Temos que ter também as constantes de acoplamento renormalizadas independentes  $g_n$  para cada subespaço inequivalente.

No caso isotrópico o segundo termo da equação (4.2) é ausente e temos apenas uma escala de massa característica presente para cada subespaço inequivalente. Assim, cada  $n$  define um caso diferente. Eles podem ser escritos de uma única maneira por meio de um índice  $n$ . As condições de normalização para esses casos são dadas por

$$\Gamma_{R(n)}^{(2)}(0; \mu_n, g_n) = \mu_n^{2n}, \quad (4.7)$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial K_{(n)}'^{2n}} \Gamma_{R(n)}^{(2)}(K'_{(n)}; \mu_n, g_n) \right|_{K_{(n)}'^{2n}=0} = 1, \quad (4.8)$$

$$\Gamma_{R(n)}^{(4)}(0; \mu_n, g_n) = g_n, \quad (4.9)$$

$$\Gamma_{R(n)}^{(2,1)}(0, 0; \mu_n, g_n) = 1. \quad (4.10)$$

Usaremos essas condições de normalização quando formos obter as equações de Callan-Symanzik para os comportamentos críticos de Lifshitz arbitrários.

## 4.2 Renormalizabilidade em um loop na dimensão crítica

Apresentaremos agora a prova indutiva da renormalizabilidade multiplicativa das teorias de campo que descrevem o comportamento crítico de sistemas físicos com interações competitivas arbitrárias. Essa prova será válida para todas as ordens no número de "loops" em teoria de perturbação. Entretanto, esta prova será dada estudando inicialmente como se comportam as divergências no nível de 1 loop com a teoria sempre na dimensão crítica. Para tal, utilizaremos um método de regularização onde introduzimos um corte no momento na região ultravioleta. Dessa maneira analisamos as divergências desejadas.

### 4.2.1 Anisotrópico

Analisaremos primeiramente o subespaço não-competitivo. Esse é o caso em que  $n = 1$  e  $\mu_{02} = \lambda_{02} = K'_{i(n)} = 0$ , onde  $K'_{i(n)}$  são os momentos externos paralelos aos eixos competitivos. Já os momentos externos perpendiculares aos eixos de competição  $p_{i(1)}$  são arbitrários. No caso de sistemas do tipo Lifshitz geral, a dimensão é uma dimensão efetiva que não é a dimensão  $d$  usual. O elemento de volume no espaço dos momentos é  $d^{d-\sum_{n=2}^L m_n} q \prod_{n=2}^L d^{m_n} k_{(n)}$  (ver apêndice B). Por causa da redefinição dos momentos ao longo dos eixos competitivos, os momentos ao longo desses eixos não têm a mesma dimensão do momento  $q$ . Então, essa dimensão efetiva é  $(d - \sum_{n=2}^L [(n-1)/n] m_n)$ . As partes de vértice  $1PI$   $\Gamma_{(1)}^{(2)}$ ,  $\Gamma_{(1)}^{(4)}$  e  $\Gamma_{(1)}^{(2,1)}$  desse subespaço, até a ordem de um loop de acordo com a figura 2.1, são

$$\Gamma_{(1)}^{(2)}(P) = P^2 + \mu_{01}^2 + \frac{\lambda_{01}}{2} \int \frac{d^{d-\sum_{n=2}^L m_n} q \prod_{n=2}^L d^{m_n} k_{(n)}}{q^2 + \sum_{n=2}^L (k^2)^n + \mu_{01}^2}, \quad (4.11)$$

$$\Gamma_{(1)}^{(4)}(p_{(i)}) = \lambda_{01} - \frac{\lambda_{01}^2}{2} \left[ \int \frac{d^{d-\sum_{n=2}^L m_n} q \prod_{n=2}^L d^{m_n} k_{(n)}}{[q^2 + \sum_{n=2}^L (k^2)^n + \mu_{01}^2][(q + P_1 + P_2)^2 + \sum_{n=2}^L (k^2)^n + \mu_{01}^2]} + \right. \\ \left. (P_1 \rightarrow P_3) + (P_2 \rightarrow P_3) \right], \quad (4.12)$$

$$\Gamma_{(1)}^{(2,1)}(P_1, P_2; P_3) = 1 - \frac{\lambda_{01}}{2} \int \frac{d^{d-\sum_{n=2}^L m_n} q \prod_{n=2}^L d^{m_n} k_{(n)}}{[q^2 + \sum_{n=2}^L (k^2)^n + \mu_{01}^2][(q + P_3)^2 + \sum_{n=2}^L (k^2)^n + \mu_{01}^2]}, \quad (4.13)$$

respectivamente. Calcularemos essas integrais na dimensão crítica  $d_c = 4 + \sum_{n=2}^L [(n-1)/n]m_n$ .

Calcularemos agora a integral que contribui para a expansão de  $\Gamma_{(1)}^{(2)}(P)$  dada por

$$I_{1(1)} = \int \frac{d^{d-\sum_{n=2}^L m_n} q \prod_{n=2}^L d^{m_n} k_{(n)}}{q^2 + \sum_{n=2}^L (k^2)^n + \mu_{01}^2}. \quad (4.14)$$

Podemos calcular esta integral usando parâmetros de Schwinger  $\alpha$  onde expressamos o propagador livre como

$$\frac{1}{q^2 + \sum_{n=2}^L (k^2)^n + \mu_{01}^2} = \int_0^\infty d\alpha \exp\left\{-\alpha \left[q^2 + \sum_{n=2}^L (k^2)^n + \mu_{01}^2\right]\right\}. \quad (4.15)$$

Usamos agora a identidade [69]

$$\int_{-\infty}^\infty dx_1 \dots dx_m \exp[-a(x_1^2 + \dots + x_m^2)^n] = \frac{1}{2n} S_m \Gamma\left(\frac{m}{2n}\right) a^{-m/2n} \quad (4.16)$$

na integração em momento. Depois disso, integrando nos momentos temos

$$I_{1(1)} = \frac{1}{2} S_{(4-\sum_{n=2}^L m_n/n)} \prod_{n=2}^L \frac{1}{2n} S_{m_n} \Gamma\left(\frac{m_n}{2n}\right) \Gamma\left(2 - \sum_{n=2}^L \frac{m_n}{2n}\right) \int_0^\infty d\alpha \alpha^{-2} e^{-\alpha \mu_{01}^2}. \quad (4.17)$$

O termo  $\alpha^{-2}$  na (4.17) é divergente para  $\alpha$  pequeno. Este comportamento divergente ultravioleta é o mesmo comportamento divergente ultravioleta de  $\Gamma_{(1)}^{(2)}(P)$  em um loop. Regularizaremos esta integral excluindo a região onde  $\alpha$  é pequeno ( $0, \Lambda_1^{-2}$ ) no limite  $\Lambda_1 \rightarrow \infty$ , em que  $\Lambda_1$  é o corte no momento utilizado nessa regularização. Isto é feito introduzindo a função degrau de Heaviside  $f_{\Lambda_1}(\alpha) = \theta(\alpha - \Lambda_1^{-2})$ . Quando integramos, esta função vale 0 para  $\alpha < \Lambda_1^{-2}$  e tem o valor 1 quando  $\alpha > \Lambda_1^{-2}$ . Com isso, a integração em  $\alpha$  ocorre no intervalo  $(\Lambda_1^{-2}, \infty)$ . Então, integrando a (4.17) nesse intervalo duas vezes por partes e tomando o limite  $\Lambda_1 \rightarrow \infty$  obtemos

$$I_{1(1)} = \frac{1}{2} S_{(4-\sum_{n=2}^L m_n/n)} \prod_{n=2}^L \frac{1}{2n} S_{m_n} \Gamma\left(\frac{m_n}{2n}\right) \Gamma\left(2 - \sum_{n=2}^L \frac{m_n}{2n}\right) \mu_{01}^2 \left[ \frac{\Lambda_1^2}{\mu_{01}^2} - \ln\left(\frac{\Lambda_1^2}{\mu_{01}^2}\right) \right]. \quad (4.18)$$

Assim vemos que a integral calculada apresenta divergência quadrática e uma divergência logarítmica, mostrando assim que sua estrutura divergente é semelhante à integral análoga para a teoria  $\phi^4$  convencional [22]. O fator angular global

$$S_{(4-\sum_{n=2}^L m_n/n)} \prod_{n=2}^L \frac{1}{2n} S_{m_n} \Gamma\left(\frac{m_n}{2n}\right) \Gamma\left(2 - \sum_{n=2}^L \frac{m_n}{2n}\right) \quad (4.19)$$

surge toda vez que uma integral em loop é realizada. Todo loop de integração produz este fator, assim podemos absorvê-lo em uma redefinição da constante de acoplamento.

Calcularemos agora a integral envolvendo  $\Gamma_{(1)}^{(4)}(p_i)$ . Essa integral é

$$I_{2(1)}(P) = \int \frac{d^{d-\sum_{n=2}^L m_n} q \prod_{n=2}^L d^{m_n} k_{(n)}}{[q^2 + \sum_{n=2}^L (k^2)^n + \mu_{01}^2][(q+P)^2 + \sum_{n=2}^L (k^2)^n + \mu_{01}^2]}. \quad (4.20)$$

Introduzindo um parâmetro de Schwinger correspondente a cada propagador e integrando nos momentos obtemos

$$I_{2(1)}(P) = \frac{1}{2} S_{(4-\sum_{n=2}^L m_n/n)} \prod_{n=2}^L \frac{1}{2n} S_{m_n} \Gamma\left(\frac{m_n}{2n}\right) \Gamma\left(2 - \sum_{n=2}^L \frac{m_n}{2n}\right) \int_0^\infty d\alpha_1 \int_0^\infty d\alpha_2 (\alpha_1 + \alpha_2)^{-2} \\ \times \exp\left[-(\alpha_1 + \alpha_2)\mu_{01}^2 - \frac{\alpha_1 \alpha_2 p^2}{\alpha_1 + \alpha_2}\right]. \quad (4.21)$$

Com a mudança de variável  $\alpha' = \alpha_1 + \alpha_2$  e a integração em  $\alpha'$  primeiramente, não encontramos nenhuma divergência. Mas quando integramos sobre a outra variável,  $\alpha_1$ , surge uma divergência ultravioleta quando  $\alpha_1$  é pequeno. Então seguindo os mesmos passos que os seguidos no cálculo da integral  $I_{1(1)}$ , introduzindo um corte no momento  $\Lambda_1$  para regularizar a integral obtemos

$$I_{2(1)}(P) = \frac{1}{2} S_{(4-\sum_{n=2}^L m_n/n)} \prod_{n=2}^L \frac{1}{2n} S_{m_n} \Gamma\left(\frac{m_n}{2n}\right) \Gamma\left(2 - \sum_{n=2}^L \frac{m_n}{2n}\right) \ln\left(\frac{\Lambda_1^2}{\mu_{01}^2}\right). \quad (4.22)$$

Na última integral expandimos a exponencial em série de potências no momento externo  $P$  e retemos apenas a parte divergente (que é independente do momento).

Agora analisaremos o caso relacionado com o subespaço competitivo. Neste caso fazemos  $\mu_{01} = \lambda_{01} = p_{i(1)} = 0$  onde  $p_{i(1)}$  são os momentos externos perpendiculares aos eixos competitivos. Os momentos externos paralelos aos eixos competitivos  $K'_{(n)}$  para um

determinado  $n$  são não-nulos. As funções correspondentes às (4.11)-(4.13) são

$$\Gamma_{(n)}^{(2)}(K'_{(n)}) = (K'_{(n)})^2 + \mu_{0n}^{2n} + \frac{\lambda_{0n}}{2} \int \frac{d^{d-\sum_{n=2}^L m_n} q \prod_{n=2}^L d^{m_n} k_{(n)}}{q^2 + \sum_{n=2}^L (k^2)^n + \mu_{0n}^{2n}}, \quad (4.23)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{(n)}^{(4)}(K'_{i(n)}) &= \lambda_{0n} - \\ \frac{\lambda_{0n}^2}{2} \left[ \int \frac{d^{d-\sum_{n=2}^L m_n} q \prod_{n=2}^L d^{m_n} k_{(n)}}{\{q^2 + \sum_{n=2}^L (k^2)^n + \mu_{0n}^{2n}\} \{q^2 + \sum_{n=2}^L [(k + K'_{1(n)} + K'_{2(n)})^2]^n + \mu_{0n}^{2n}\}} + \right. \\ &\quad \left. (K'_{1(n)} \rightarrow K'_{3(n)}) + (K'_{2(n)} \rightarrow K'_{3(n)}) \right], \end{aligned} \quad (4.24)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{(n)}^{(2,1)}(K'_{1(n)}, K'_{2(n)}; K'_{3(n)}) &= 1 - \\ \frac{\lambda_{0n}}{2} \int \frac{d^{d-\sum_{n=2}^L m_n} q \prod_{n=2}^L d^{m_n} k_{(n)}}{\{q^2 + \sum_{n=2}^L (k^2)^n + \mu_{0n}^{2n}\} \{q^2 + [\sum_{n=2}^L (k + K'_{3(n)})^2]^n + \mu_{0n}^{2n}\}}, \end{aligned} \quad (4.25)$$

respectivamente.

Agora, usamos o fato de que a massa do subespaço competitivo  $\mu_{0n}$  tem uma dimensão que é  $1/n$  da dimensão da massa  $\mu_{01}$ . Assim, escolhemos o corte no momento do subespaço competitivo  $\Lambda_n$  ter uma dimensão que é  $1/n$  da dimensão canônica do corte no momento  $\Lambda_1$  do subespaço sem competição. Assim a função degrau de Heaviside usada para regularizarmos as integrais é  $f_{\Lambda_n}(\alpha) = \theta(\alpha - \Lambda_n^{-2n})$ . Assim, obtemos as correspondentes integrais, no limite em que  $\Lambda_n \rightarrow \infty$ , como

$$I_{1(n)} = \frac{1}{2} S_{(4-\sum_{n=2}^L m_n/n)} \prod_{n=2}^L \frac{1}{2n} S_{m_n} \Gamma\left(\frac{m_n}{2n}\right) \Gamma\left(2 - \sum_{n=2}^L \frac{m_n}{2n}\right) \mu_{0n}^{2n} \left[ \frac{\Lambda_n^{2n}}{\mu_{0n}^{2n}} - \ln\left(\frac{\Lambda_n^{2n}}{\mu_{0n}^{2n}}\right) \right], \quad (4.26)$$

$$I_{2(n)}(K'_{(n)}) = \frac{1}{2} S_{(4-\sum_{n=2}^L m_n/n)} \prod_{n=2}^L \frac{1}{2n} S_{m_n} \Gamma\left(\frac{m_n}{2n}\right) \Gamma\left(2 - \sum_{n=2}^L \frac{m_n}{2n}\right) \ln\left(\frac{\Lambda_n^{2n}}{\mu_{0n}^{2n}}\right). \quad (4.27)$$

Podemos escrever as equações (4.18), (4.22) e (4.26)-(4.27) de uma maneira compacta por meio do índice  $n = 1, \dots, L$ . Elas são escritas como

$$I_{1(n)}(p_{(n)}) = \frac{1}{2} S_{(4-\sum_{n=2}^L m_n/n)} \prod_{n=2}^L \frac{1}{2n} S_{m_n} \Gamma\left(\frac{m_n}{2n}\right) \Gamma\left(2 - \sum_{n=2}^L \frac{m_n}{2n}\right) \mu_{0n}^{2n} \left[ \frac{\Lambda_n^{2n}}{\mu_{0n}^{2n}} - \ln\left(\frac{\Lambda_n^{2n}}{\mu_{0n}^{2n}}\right) \right], \quad (4.28)$$

$$I_{2(n)}(p_{(n)}) = \frac{1}{2} S_{(4-\sum_{n=2}^L m_n/n)} \prod_{n=2}^L \frac{1}{2n} S_{m_n} \Gamma\left(\frac{m_n}{2n}\right) \Gamma\left(2 - \sum_{n=2}^L \frac{m_n}{2n}\right) \ln\left(\frac{\Lambda_n^{2n}}{\mu_{0n}^{2n}}\right). \quad (4.29)$$

Expressaremos agora as grandezas renormalizadas  $\mu_n$  e  $g_n$  em termos das correspondentes grandezas não-renormalizadas  $\mu_{0n}$  e  $\lambda_{0n}$  usando as condições de normalização (4.3) e (4.5) como

$$\mu_n^{2n} = \mu_{0n} + \frac{\lambda_{0n}}{2} I_{1(n)}(0), \quad (4.30)$$

$$g_n = \lambda_{0n} - \frac{3\lambda_{0n}^2}{2} I_{2(n)}(0). \quad (4.31)$$

Faremos o inverso e escreveremos os parâmetros não-renormalizados em termos dos renormalizados usando as últimas equações para a ordem de um loop. Com isso, as funções de vértice  $\Gamma_{(n)}^{(2)}(p_{(n)})$  e  $\Gamma_{(n)}^{(4)}(p_{i(n)})$  se expressas em termos de  $\mu_n$  e  $g_n$  são finitas em um loop. Fazendo isto podemos escrever

$$\Gamma_{(n)}^{(2)}(p_{(n)}) = p_{(n)}^2 + \mu_n^{2n}, \quad (4.32)$$

$$\Gamma_{(n)}^{(4)}(p_{i(n)}) = g_n - \frac{g_n^2}{2} [I_{2(n)}(p_{1(n)} + p_{2(n)}) + I_{2(n)}(p_{1(n)} + p_{3(n)}) + I_{2(n)}(p_{2(n)} + p_{3(n)}) - 3I_{2(n)}(0)]. \quad (4.33)$$

Como as funções de vértice com  $N > 4$  são expansões esqueleto, essas funções são finitas na ordem de dois "loops" pois elas podem ser escritas em termos da massa e constante de acoplamento renormalizadas em um loop.

Trataremos agora a parte de vértice  $1PI$   $\Gamma_{(n)}^{(2,1)}$ . Essa função não pode ser renormalizada usando apenas a massa e constante de acoplamento renormalizadas em um loop. Sua renormalização tem que ser feita introduzindo uma função  $Z_{\phi^2(n)}$  através da relação

$$\Gamma_{R(n)}^{(2,1)}(p_{1(n)}, p_{2(n)}; p_{3(n)}, g_n, m_n) = Z_{\phi^2(n)} \Gamma_{(n)}^{(2,1)}(p_{1(n)}, p_{2(n)}; p_{3(n)}, \lambda_{0n}, \mu_{0n}, \Lambda_n). \quad (4.34)$$

Da condição de normalização (3.16) obtemos para  $Z_{\phi^2(n)}$

$$Z_{\phi^2(n)} = 1 + \frac{g_n}{2} I_{2(n)}(0). \quad (4.35)$$

Assim podemos escrever  $\Gamma_{R(n)}^{(2,1)}$ , de maneira análoga às equações (3.42) e (3.43), como

$$\Gamma_{R(n)}^{(2,1)}(p_{1(n)}, p_{2(n)}; p_{3(n)}, g_n, \mu_n) = 1 - \frac{g_n}{2} [I_{2(n)}(p_{3(n)}) - I_{2(n)}(0)]. \quad (4.36)$$

Todas as funções de vértice com inserções de campos compostos com um número maior de pernas externas têm uma expansão esqueleto: elas são finitas em dois "loops" se expressas

em função de  $\mu_n$ ,  $g_n$  e  $\Gamma_{R(n)}^{(2,1)}(p_{1(n)}, p_{2(n)}; p_{3(n)}, g_n, \mu_n)$  em seus subdiagramas de um loop. Isso é uma consequência do comportamento assintótico para momentos grandes das partes primitivamente divergentes

$$|\Gamma_{R(n)}^{(2)}(\rho_n p_{(n)})| \leq \rho_n^{2n} \times \text{potência de } \ln \rho_n, \quad (4.37)$$

$$|\Gamma_{R(n)}^{(4)}(\rho_n p_{(n)})| \leq \text{potência de } \ln \rho_n, \quad (4.38)$$

$$|\Gamma_{R(n)}^{(2,1)}(\rho_n p_{1(n)}, \rho_n p_{1(n)}; \rho_n q_{(n)})| \text{ potência de } \ln \rho_n, \quad (4.39)$$

em todas as ordens finitas quando  $\rho_n \rightarrow \infty$ . Esse comportamento assintótico não será demonstrado aqui. Ao invés disso, assumiremos que ele é válido quando provarmos a renormalizabilidade multiplicativa na dimensão crítica em todas as ordens em teoria de perturbação na próxima seção.

### 4.2.2 Isotrópico

Podemos tratar o caso isotrópico analogamente ao caso anisotrópico. Usamos o índice  $n = 1, 2, \dots, L$  e lembramos que esse caso é completamente diferente do caso anisotrópico. A dimensão crítica agora é  $d = m_n = 4n$ . Assim, só existe uma escala de momento característica e as partes de vértice primitivamente divergentes são

$$\Gamma_{(n)}^{(2)}(K'_{(n)}) = (K'_{(n)})^{2n} + \mu_{0n}^{2n} + \frac{\lambda_{0n}}{2} \int \frac{d^{m_n} k_{(n)}}{(k^2)^n + \mu_{0n}^{2n}}, \quad (4.40)$$

$$\Gamma_{(n)}^{(4)}(K'_{i(n)}) = \lambda_{0n} - \frac{\lambda_{0n}^2}{2} \left[ \int \frac{d^{m_n} k_{(n)}}{\{(k^2)^n + \mu_{0n}^{2n}\} \{[(k + K'_{1(n)} + K'_{2(n)})^2]^n + \mu_{0n}^{2n}\}} + \right. \\ \left. (K'_{1(n)} \rightarrow K'_{3(n)}) + (K'_{2(n)} \rightarrow K'_{3(n)}) \right], \quad (4.41)$$

$$\Gamma_{(n)}^{(2,1)}(K'_{1(n)}, K'_{2(n)}; K'_{(n)}) = 1 - \frac{\lambda_{0n}}{2} \int \frac{d^{m_n} k_{(n)}}{\{(k^2)^n + \mu_{0n}^{2n}\} \{[(k + K'_{3(n)})^2]^n + \mu_{0n}^{2n}\}}, \quad (4.42)$$

respectivamente.

Calcularemos agora as seguintes integrais

$$I_{1(n)}(K'_{(n)}) = \int \frac{d^{m_n} k_{(n)}}{(k^2)^n + \mu_{0n}^{2n}}, \quad (4.43)$$

$$I_{2(n)}(K') = \int \frac{d^{m_n} k_{(n)}}{[(k^2)^n + \mu_{0n}^{2n} \{[(k + K'_{(n)})^2]^n + \mu_{0n}^{2n}\}]} \quad (4.44)$$

Essas integrais podem ser resolvidas de maneira análoga às resolvidas para o caso anisotrópico. Assim obtemos

$$I_{1(n)} = \frac{1}{2n} S_{4n} \mu_{0n}^{2n} \left[ \frac{\Lambda_n^{2n}}{\mu_{0n}^{2n}} - \ln \left( \frac{\Lambda_n^{2n}}{\mu_{0n}^{2n}} \right) \right], \quad (4.45)$$

$$I_{2(n)}(K') = \frac{1}{2n} S_{4n} \ln \left( \frac{\Lambda_n^{2n}}{\mu_{0n}^{2n}} \right). \quad (4.46)$$

Agora o fator angular a ser absorvido em uma redefinição da constante de acoplamento é  $S_{4n}$ .

Escrevemos agora a massa e a constante de acoplamento renormalizada em termos das respectivas constantes não-renormalizadas, usando as condições de normalização (4.7) e (4.9). O resultado obtido é

$$\mu_n^{2n} = \mu_{0n} + \frac{\lambda_{0n}}{2} I_{1(n)}(0), \quad (4.47)$$

$$g_n = \lambda_{0n} - \frac{3\lambda_{0n}^2}{2} I_{2(n)}(0). \quad (4.48)$$

Podemos escrever as partes de vértice  $\Gamma_{(n)}^{(2)}(K'_{(n)})$  e  $\Gamma_{(n)}^{(4)}(K'_{(n)})$  em termos dos parâmetros renormalizados em um loop

$$\Gamma_{(n)}^{(2)}(K'_{(n)}) = (K'^2_{(n)})^n + \mu_n^{2n}, \quad (4.49)$$

$$\Gamma_{(n)}^{(4)}(K'_{i(n)}) = g_n - \frac{g_n^2}{2} [I_{2(n)}(K'_{1(n)} + K'_{2(n)}) + I_{2(n)}(K'_{1(n)} + K'_{3(n)}) + I_{2(n)}(K'_{2(n)} + K'_{3(n)}) - 3I_{2(n)}(0)]. \quad (4.50)$$

Essas funções são finitas nesta ordem. As funções para  $N > 4$  são expansões esqueleto, pois são finitas em dois "loops" como no caso anisotrópico. A constante  $Z_{\phi^2(n)}$  usada na renormalização multiplicativa de  $\Gamma_{(n)}^{(2,1)}(K'_{1(n)}, K'_{2(n)}; K'_{3(n)})$  é obtida da condição de normalização (4.10) e dada por

$$Z_{\phi^2(n)} = 1 + \frac{g_n}{2} I_{2(n)}(0). \quad (4.51)$$

Com isso, todas as funções que têm inserções de operadores  $\phi^2$  são finitas em dois "loops".

Mostramos que funções de vértice renormalizadas multiplicativamente são finitas na ordem de um loop. Faremos o mesmo para todas as ordens perturbativas nas próximas duas seções.

### 4.3 Equações de Callan-Symanzik

Demonstraremos agora a existência das equações de Callan-Symanzik para os comportamentos críticos de Lifshitz de caráter genérico. Isto será feito com a teoria na dimensão crítica.

#### 4.3.1 Anisotrópico

As partes de vértice  $1PI$  com  $((N, L) \neq (0, 2))$  são renormalizadas multiplicativamente como

$$\Gamma_{R(n)}^{(N,L)}(p_{i(n)}, Q_{i(n)}, g_n, \mu_n) = Z_{\phi(n)}^{N/2} Z_{\phi^2(n)}^L \Gamma_{(n)}^{(N,L)}(p_{i(n)}, Q_{i(n)}, \lambda_{0n}, \mu_{0n}, \Lambda_n), \quad (4.52)$$

onde  $p_{i(n)}$  ( $i = 1, \dots, N$ ) são os momentos externos associados às  $N$  pernas externas das partes de vértice  $1PI$   $\Gamma_{R(n)}^{(N,L)}$  e  $Q_{i(n)}$  ( $i = 1, \dots, L$ ) os momentos externos associadas às  $L$  inserções de campos compostos  $\phi^2$ . Usamos os cortes no momento  $\Lambda_n$  na regularização das partes de vértice não-renormalizadas em cada subespaço inequivalente. Assim, de agora em diante estará implícito que essas funções são regularizadas em uma ordem arbitrária no número de "loops" em cada subespaço. As respectivas expressões para essas funções não serão usadas explicitamente.

Usaremos um método que contém argumentos originais para a obtenção das equações de Callan-Symanzik para o caso em que existe somente uma escala de massa envolvida [71], embora existam pelo menos 2 maneiras de se obter essas equações. Obteremos essas equações que envolvem  $L$  massas independentes, uma para cada subespaço inequivalente.

Ao derivarmos a parte de vértice  $1PI$   $\Gamma_{(n)}^{(N,L)}(p_{i(n)}, Q_{i(n)}, \lambda_{0n}, \mu_{0n}, \Lambda_n)$  com relação à massa não-renormalizada  $\mu_{0n}^{2n}$ , onde  $\lambda_{0n}$  e  $\Lambda_n$  são mantidos constantes, obtemos uma soma de funções de vértice como a de partida. A diferença agora é que cada propagador tem uma potência a mais nas linhas internas. Estes termos ocorrem em todas as combinações possíveis. Assim temos uma inserção de campo composto  $\phi^2$  em momento zero na função de vértice  $\Gamma_{(n)}^{(N,L)}(p_{i(n)}, Q_{i(n)}, \lambda_{0n}, \mu_{0n}, \Lambda_n)$ , o que resulta em uma função de vértice

$\Gamma_{(n)}^{(N,L+1)}(p_{i(n)}, Q_{i(n)}, \lambda_{0n}, \mu_{0n}, \Lambda_n)$  com uma perna externa a mais como

$$\frac{\partial}{\partial \mu_{0n}^{2n}} \Gamma_{(n)}^{(N,L)}(p_{i(n)}, Q_{i(n)}, \lambda_{0n}, \mu_{0n}, \Lambda_n) = \Gamma_{(n)}^{(N,L+1)}(p_{i(n)}, Q_{i(n)}, \lambda_{0n}, \mu_{0n}, \Lambda_n). \quad (4.53)$$

Agora usando a relação (4.53) e a equação (4.52) e lembrando que os parâmetros  $m_n$  e  $g_n$  dependem da massa não-renormalizada, obtemos

$$\left( 2n\rho \frac{\partial}{\partial \mu_n^{2n}} + \frac{\alpha_n}{\mu_n^{2n}} \frac{\partial}{\partial g_n} - \frac{1}{2} N \frac{\kappa_n}{\mu_n^{2n}} - L \frac{\pi_n}{\mu_n^{2n}} \right) \Gamma_{R(n)}^{(N,L)}(p_{i(n)}, Q_{i(n)}, g_n, \mu_n) = \Gamma_{R(n)}^{(N,L+1)}(p_{i(n)}, Q_{i(n)}; 0, g_n, \mu_n), \quad (4.54)$$

onde

$$2n\rho = Z_{\phi^2(n)} \frac{\partial \mu_n^{2n}}{\partial \mu_{0n}^{2n}}, \quad (4.55)$$

$$\frac{\alpha_n}{\mu_n^{2n}} = Z_{\phi^2(n)} \frac{\partial g_n}{\partial \mu_{0n}^{2n}}, \quad (4.56)$$

$$\frac{\kappa_n}{\mu_n^{2n}} = Z_{\phi^2(n)} \frac{\partial \ln Z_{\phi(n)}}{\partial \mu_{0n}^{2n}}, \quad (4.57)$$

$$\frac{\pi_n}{\mu_n^{2n}} = Z_{\phi^2(n)} \frac{\partial \ln Z_{\phi^2(n)}}{\partial \mu_{0n}^{2n}}. \quad (4.58)$$

Definindo

$$\beta_n = \mu_n \frac{\partial g_n}{\partial \mu_n}, \quad (4.59)$$

$$\gamma_{\phi(n)} = \mu_n \frac{\partial \ln Z_{\phi(n)}}{\partial \mu_n}, \quad (4.60)$$

$$\gamma_{\phi^2(n)} = -\mu_n \frac{\partial \ln Z_{\phi^2(n)}}{\partial \mu_n} \quad (4.61)$$

e multiplicando a (4.54) em ambos os lados por  $\mu_n^{2n}/\rho_n$ , aquela equação fica

$$\left( \mu_n \frac{\partial}{\partial \mu_n} + \beta_n \frac{\partial}{\partial g_n} - \frac{1}{2} N \gamma_{\phi(n)} + L \gamma_{\phi^2(n)} \right) \Gamma_{R(n)}^{(N,L)}(p_{i(n)}, Q_{i(n)}, g_n, \mu_n) = 2n \mu_n^{2n} \frac{\partial \mu_{0n}^{2n}}{\mu_n^{2n}} Z_{\phi^2(n)}^{-1} \Gamma_{R(n)}^{(N,L+1)}(p_{i(n)}, Q_{i(n)}; 0, g_n, \mu_n). \quad (4.62)$$

Com  $(N, L)=(2, 0)$  na equação (4.62) e usando as condições de normalização (4.3) e (4.6) podemos escrever a equação (4.62) em termos de grandezas renormalizadas apenas, como

$$\left( \mu_n \frac{\partial}{\partial \mu_n} + \beta_n \frac{\partial}{\partial g_n} - \frac{1}{2} N \gamma_{\phi(n)} + L \gamma_{\phi^2(n)} \right) \Gamma_{R(n)}^{(N,L)}(p_{i(n)}, Q_{i(n)}, g_n, \mu_n) =$$

$$\mu_n^{2n} (2n - \gamma_{\phi(n)}) \Gamma_{R(n)}^{(N,L+1)}(p_{i(n)}, Q_{i(n)}; 0, g_n, \mu_n). \quad (4.63)$$

Agora extrairemos informações úteis associadas às funções (4.59)-(4.61) [22].

Com  $N = 2$  e  $L = 2$  na equação (4.63), derivando a equação resultante com relação a  $p_{(n)}^{2n}$  e posteriormente fixando os momentos externos iguais a zero através da condição de normalização (4.4) obtemos

$$-\gamma_{\phi(n)} = \mu_n^{2n} (2n - \gamma_{\phi(n)}) \frac{\partial}{\partial p_{(n)}^{2n}} \Gamma_{R(n)}^{(2,1)}(p_{(n)}, -p_{(n)}; 0, g_n, \mu_n) \Big|_{p_{(n)}^{2n}=0}. \quad (4.64)$$

Através da (4.36), na ordem de um loop  $\Gamma_{R(n)}^{(2,1)}(p_{(n)}, -p_{(n)}; 0, g_n, \mu_n) = 1 + O(g_n^2)$ . Com isso, vemos que o termo de  $\gamma_{\phi(n)}$  de menor ordem na constante de acoplamento renormalizada é  $O(g_n^2)$ .

Escolhendo agora  $(N, L) = (4, 0)$  na (4.63), fixando os momentos externos iguais a zero e usando a condição de normalização (4.5), resulta na expressão

$$\beta_n - 2\gamma_{\phi(n)} g_n = \mu_n^{2n} (2n - \gamma_{\phi(n)}) \Gamma_{R(n)}^{(4,1)}(0, 0, 0, 0; 0, g_n, \mu_n). \quad (4.65)$$

Como  $\Gamma_{R(n)}^{(4,1)}(0, 0, 0, 0; 0, g_n, \mu_n)$  inicia na ordem  $O(g_n^2)$ , a (4.65) mostra que  $\beta_n$  é  $O(g_n^2)$ . Então, o termo  $\beta_n(\partial/\partial g_n)$  é  $O(g_n)$ , diferentemente do termo  $\mu_n(\partial/\partial \mu_n)$  que é  $O(g_n^0)$ .

Fixando agora  $(N, L) = (2, 1)$  na equação (4.63) e utilizando a (4.6) temos

$$-\gamma_{\phi(n)} + \gamma_{\phi^2(n)} = \mu_n^{2n} (2n - \gamma_{\phi(n)}) \Gamma_{R(n)}^{(2,2)}(0, 0; 0, 0, g_n, \mu_n). \quad (4.66)$$

Sabendo que na expansão de  $\Gamma_{R(n)}^{(2,2)}(0, 0; 0, 0, g_n, \mu_n)$  o termo de menor ordem é  $O(g_n)$ , então  $\gamma_{\phi^2(n)}$  é  $O(g_n)$ .

Essas propriedades serão muito úteis para os argumentos apresentados na prova indutiva da renormalizabilidade multiplicativa na próxima seção.

### 4.3.2 Isotrópico

Podemos utilizar agora os mesmos argumentos usados para o caso anisotrópico. Nesse caso existe somente uma escala de massa  $\mu_n$  e um subespaço competitivo que é rotulado pelo índice  $n$ . A dimensão crítica é  $d_c = 4n$ . Seguindo os mesmos passos daqueles dados

na seção anterior temos que a equação de Callan-Symanzik no caso isotrópico em termos de grandezas renormalizadas é dada por

$$\left( \mu_n \frac{\partial}{\partial \mu_n} + \beta_n \frac{\partial}{\partial g_n} - \frac{1}{2} N \gamma_{\phi(n)} + L \gamma_{\phi^2(n)} \right) \Gamma_{R(n)}^{(N,L)}(p_{i(n)}, Q_{i(n)}, g_n, \mu_n) = \mu_n^{2n} (2n - \gamma_{\phi(n)}) \Gamma_{R(n)}^{(N,L+1)}(p_{i(n)}, Q_{i(n)}; 0, g_n, \mu_n). \quad (4.67)$$

Analogamente, as equações necessárias para provar a renormalizabilidade multiplicativa por indução (4.64)-(4.66) são dadas por

$$-\gamma_{\phi(n)} = \mu_n^{2n} (2n - \gamma_{\phi(n)}) \frac{\partial}{\partial p_{(n)}^{2n}} \Gamma_{R(n)}^{(2,1)}(p_{(n)}, -p_{(n)}; 0, g_n, \mu_n) \Big|_{p_{(n)}^{2n}=0}, \quad (4.68)$$

$$\beta_n - 2\gamma_{\phi(n)} g_n = \mu_n^{2n} (2n - \gamma_{\phi(n)}) \Gamma_{R(n)}^{(4,1)}(0, 0, 0, 0; 0, g_n, \mu_n), \quad (4.69)$$

$$-\gamma_{\phi(n)} + \gamma_{\phi^2(n)} = \mu_n^{2n} (2n - \gamma_{\phi(n)}) \Gamma_{R(n)}^{(2,2)}(0, 0; 0, 0, g_n, \mu_n). \quad (4.70)$$

Vamos agora examinar como os subsídios fornecidos nesta seção podem ser empregados para provar a renormalizabilidade multiplicativa da teoria de campo caracterizando pontos de Lifshitz de caráter genérico nos casos anisotrópicos e isotrópicos.

## 4.4 Prova indutiva da renormalizabilidade multiplicativa

Usaremos os resultados da seção anterior para apresentarmos a prova indutiva da renormalizabilidade multiplicativa em todas as ordens em teoria de perturbação na próxima seção. Os passos finais da prova indutiva da renormalizabilidade multiplicativa em todas as ordens em "loops" em teoria de perturbação será dada nesta seção.

### 4.4.1 Anisotrópico

Faremos uma suposição de que as partes de vértice (4.52) são finitas em uma ordem  $L$  no número de "loops" para  $\mu_n$  e  $g_n$  fixos no limite em que os cortes nos momentos  $\Lambda_n \rightarrow \infty$ . Assim, partimos com funções de vértice  $\Gamma_{R(n)}^{(2)}$ ,  $\Gamma_{R(n)}^{(4)}$ ,  $\Gamma_{R(n)}^{(2,1)}$  finitas nas ordens  $g_n^L$ ,  $g_n^{L+1}$  e  $g_n^L$ , respectivamente.

Como na prova da renormalizabilidade em um loop, podemos usar as mesmas idéias usadas no caso da  $L$ -ésima ordem em "loops". Usando a equação (4.64) em ordem  $L$  na constante de acoplamento  $g_L$ , observamos que  $\gamma_{\phi(n)}$  é finita em  $O(g_n^L)$ . Considerando agora a (4.65),  $\Gamma_{R(n)}^{(4,1)}$  é finita na ordem  $(L+1)$  em "loops", pois possui uma expansão esqueleto. Na ordem  $(L+1)$  em "loops",  $\Gamma_{R(n)}^{(4,1)}$  é de ordem  $g_n^{L+2}$ , mostrando assim que a combinação  $(\beta_n - 2\gamma_{\phi(n)}g_n)$  é finita na ordem  $O(g_n^{L+2})$ . Como  $\gamma_{\phi(n)}$  é finita na ordem  $O(g_n^L)$ , temos que  $\beta_n$  é finita em  $O(g_n^{L+1})$ .

Com a equação de Callan-Symanzik escrita como

$$\mu_n \frac{\partial \Gamma_{R(n)}^{(N,M)}}{\partial \mu_n} = \left( -\beta_n \frac{\partial}{\partial g_n} + \frac{1}{2} N \gamma_{\phi(n)} - M \gamma_{\phi^2(n)} \right) \Gamma_{R(n)}^{(N,M)} + \mu_n^{2n} (2n - \gamma_{\phi(n)}) \Gamma_{R(n)}^{(N,M+1)}, \quad (4.71)$$

mostraremos que o lado direito da (4.71) é finito na ordem  $(L+1)$  em "loops". Para isso, necessitamos apenas considerar  $\Gamma_{R(n)}^{(N,M)}$  no lado direito dessa equação até a ordem  $L$  em "loops", porque  $\beta_n(\partial/\partial g_n)$  e  $\gamma_{\phi(n)}^2$  são, no mínimo,  $O(g_n)$ . No último termo do lado direito da (4.71), só há duas possibilidades a serem consideradas. Ou esse termo tem uma expansão esqueleto que é finito na ordem  $L+1$  em "loops", ou a equação de Callan-Symanzik deverá ser iterada.

Agora para o caso em que fazemos  $N = 4$  e  $M = 0$  na (4.71) e lembrando que os termos do lado direito são finitos na ordem  $(L+1)$  em "loops", temos que  $\mu_n(\partial \Gamma_{R(n)}^{(4)}/\partial \mu_n)$  é finito nesta ordem em loop.

Provaremos agora que  $\mu_n(\partial \Gamma_{R(n)}^{(4)}/\partial \mu_n)$  é finito na ordem  $(L+1)$  em "loops" por meio da integração perturbativa de  $\Gamma_{R(n)}^{(4)}$ . A função de vértice  $\Gamma_{R(n)}^{(4)}$  é adimensional na dimensão crítica, assim é invariante sob fluxos de dilatação independentes nos seus parâmetros dimensionais da forma

$$(p_n, \mu_n, \Lambda_n, g_n) \rightarrow (\rho_n p_n, \rho_n \mu_n, \rho_n \Lambda_n, g_n). \quad (4.72)$$

Com  $\rho_n = \frac{1}{\mu_n}$  podemos escrever

$$\Gamma_{R(n)}^{(4)}(p_n, \mu_n, \Lambda_n, g_n) = \Gamma_{R(n)}^{(4)}\left(\frac{p_n}{\mu_n}, \frac{\Lambda_n}{\mu_n}, g_n\right). \quad (4.73)$$

Desta equação e fixando  $N = 4$  e  $M = 0$  na (4.71) onde momentos externos são arbitrários

na ordem  $g_n^{L+2}$ , temos

$$\left( \mu_n' \frac{\partial \Gamma_{R(n)}^{(4)}\left(\frac{p_n}{\mu_n}, \frac{\Lambda_n}{\mu_n}, g_n\right)}{\partial \mu_n'} \right) \Big|_{L+2} = f_{(n)}^{(4)}\left(\frac{p_n}{\mu_n}, \frac{\Lambda_n}{\mu_n}, g_n\right) \Big|_{L+2}, \quad (4.74)$$

onde  $\mu_n' = \mu_n/\alpha$ . Ao integrarmos a última equação de  $\mu_n' = \infty$  até  $\mu_n' = \mu_n$  temos o mesmo efeito que integrarmos em  $\alpha$  de 0 a 1. Usando a condição de normalização (4.5) no limite  $\mu_n' = \infty$  como condição de contorno obtemos

$$\left[ \Gamma_{R(n)}^{(4)}\left(\frac{p_n}{\mu_n}, \frac{\Lambda_n}{\mu_n}, g_n\right) \right] \Big|_{L+2} = g_n - \int_0^1 \frac{d\alpha}{\alpha} \left[ f_{(n)}^{(4)}\left(\alpha \frac{p_n}{\mu_n}, \alpha \frac{\Lambda_n}{\mu_n}, g_n\right) \right] \Big|_{L+2}. \quad (4.75)$$

No início dessa discussão enfatizamos que  $[f_{(n)}^{(4)}]_{L+2}$  pode ser escrita em termos de grandezas que por suposição são finitas quando  $\Lambda_n \rightarrow \infty$ . Como  $[f_{(n)}^{(4)}]_{L+2}$  é uma função analítica em pequenos momentos, temos que o limite de momentos externos nulos não produz nenhum problema associado a divergências na integral em  $\alpha$ . Assim podemos escrever

$$\left[ \Gamma_{R(n)}^{(4)}\left(\frac{p_n}{\mu_n}, \infty, g_n\right) \right] \Big|_{L+2} = g_n - \int_0^1 \frac{d\alpha}{\alpha} \left[ f_{(n)}^{(4)}\left(\alpha \frac{p_n}{\mu_n}, \infty, g_n\right) \right] \Big|_{L+2}, \quad (4.76)$$

mostrando que  $\Gamma_{R(n)}^{(4)}$  está relacionada com a integral de partes de vértice renormalizadas em ordem menor na constante de acoplamento.

Estudaremos agora o caso onde fixamos  $N = 2$  e  $M = 1$  na (4.71) na ordem  $g_n^{L+1}$ . Assim, obtemos

$$\left( \mu_n \frac{\partial \Gamma_{R(n)}^{(2,1)}}{\partial \mu_n} \right) \Big|_{L+1} = \left[ -\beta_n \frac{\partial \Gamma_{R(n)}^{(2,1)}}{\partial g_n} \right] \Big|_{L+1} + [(\gamma_{\phi(n)} - \gamma_{\phi^2(n)}) \Gamma_{R(n)}^{(2,1)}] \Big|_{L+1} + \mu_n^{2n} [(2n - \gamma_{\phi(n)}) \Gamma_{R(n)}^{(2,2)}] \Big|_{L+1} \quad (4.77)$$

Vemos que o primeiro termo do lado direito da última equação contém as funções  $\beta_n$  que é  $O(g_n^{L+1})$  e  $\Gamma_{R(n)}^{(2,1)}$  na ordem  $g_n^L$ , porque  $\beta_n(\partial/\partial g_n)$  é  $O(g_n)$ . Esses dois termos são finitos nessa ordem em loop, então o primeiro termo do lado direito é finito. O último termo está associado a  $\Gamma_{R(n)}^{(2,2)}$  que tem uma expansão esqueleto e com isso é finito na ordem  $g_n^{L+1}$  pois as massas e constantes de acoplamento são finitas em  $O(g_n^L)$ .

Por outro lado, o segundo termo do lado direito da equação (4.77) tem duas funções a serem consideradas,  $\Gamma_{R(n)}^{(2,1)}$  em  $O(g_n^L)$  que é finita pela suposição inicial, porque  $\gamma_{\phi^2(n)}$  é  $O(g_n)$  e  $(\gamma_{\phi(n)} - \gamma_{\phi^2(n)})$  que é  $O(g_n^{L+1})$ . Demonstramos que a expressão  $(\gamma_{\phi(n)} - \gamma_{\phi^2(n)})$

é finita em  $O(g_n^{L+1})$ . Esse termo calculado em momento externo nulo é o mesmo que a (3.76) calculada em  $(L+1)$  "loops". O lado direito da equação (3.76) é finito porque tem um termo que é um esqueleto  $\Gamma_{R(n)}^{(2,2)}$  nesta ordem em loop, assim fica provado que  $(\gamma_{\phi(n)} - \gamma_{\phi^2(n)})$  é finito em  $O(g_n^{L+1})$ . Uma consequência desse fato é que o lado direito da (4.77) é finito.

Integrando o lado esquerdo da equação (4.77) com momentos externos arbitrários temos

$$\left( \mu_n \frac{\partial \Gamma_{R(n)}^{(2,1)}}{\partial \mu_n} \right) \Big|_{L+1} = f_{(n)}^{(2,1)}. \quad (4.78)$$

Provamos que  $\Gamma_{R(n)}^{(2,1)}$  é finita em  $O(g_n^{L+1})$  seguindo os mesmos passos para a obtenção da mesma prova para  $\Gamma_{R(n)}^{(4)}$ , ou seja,  $\Gamma_{R(n)}^{(2,1)}$  é adimensional na dimensão crítica e assim podemos fazer a mesma transformação de escala feita em  $\Gamma_{R(n)}^{(4)}$ . Essa transformação resulta em

$$\left( \mu'_n \frac{\partial \Gamma_{R(n)}^{(2,1)}(\frac{p_n}{\mu_n}, \frac{\Lambda_n}{\mu_n}, g_n)}{\partial \mu'_n} \right) \Big|_{L+2} = f_{(n)}^{(2,1)} \left( \frac{p_n}{\mu_n}, \frac{\Lambda_n}{\mu_n}, g_n \right) \Big|_{L+2}, \quad (4.79)$$

onde  $\mu'_n = \mu_n/\alpha$ . Integrando essa equação de  $\mu'_n = \infty$  até  $\mu'_n = \mu_n$ , podemos igualmente integrar em  $\alpha$  de 0 a 1. Usando a condição de normalização (4.6) no limite  $\mu'_n = \infty$  como condição de contorno temos

$$\left[ \Gamma_{R(n)}^{(2,1)} \left( \frac{p_n}{\mu_n}, \frac{\Lambda_n}{\mu_n}, g_n \right) \right] \Big|_{L+2} = 1 - \int_0^1 \frac{d\alpha}{\alpha} \left[ f_{(n)}^{(2,1)} \left( \alpha \frac{p_n}{\mu_n}, \alpha \frac{\Lambda_n}{\mu_n}, g_n \right) \right] \Big|_{L+2}. \quad (4.80)$$

Assumimos que  $f_{(n)}^{(2,1)}$  é analítica para momentos  $p_n$  pequenos quando tomamos o limite  $\Lambda \rightarrow \infty$ . Essa operação não leva a nenhuma divergência na integração em  $\alpha$ . Assim nesse limite obtemos

$$\left[ \Gamma_{R(n)}^{(2,1)} \left( \frac{p_n}{\mu_n}, \infty, g_n \right) \right] \Big|_{L+2} = 1 - \int_0^1 \frac{d\alpha}{\alpha} \left[ f_{(n)}^{(2,1)} \left( \alpha \frac{p_n}{\mu_n}, \infty, g_n \right) \right] \Big|_{L+2}. \quad (4.81)$$

Isso demonstra que  $\Gamma_{R(n)}^{(2,1)}$  está diretamente conectada com a integral de partes de vértice renormalizadas em ordem menor nas constantes de acoplamento, sendo portanto finita.

Finalmente trataremos o caso  $N = 2$  e  $M = 0$  na ordem perturbativa  $g_n^{L+1}$  na equação

(3.81) obtendo

$$\left( \mu_n \frac{\partial \Gamma_{R(n)}^{(2)}}{\partial \mu_n} \right) \Big|_{L+1} = \left[ -\beta_n \frac{\partial \Gamma_{R(n)}^{(2)}}{\partial g_n} \right] \Big|_{L+1} + [\gamma_{\phi(n)} \Gamma_{R(n)}^{(2,1)}] \Big|_{L+1} + \mu_n^{2n} [(2n - \gamma_{\phi(n)}) \Gamma_{R(n)}^{(2,1)}] \Big|_{L+1} \quad (4.82)$$

Os dois primeiros termos do lado direito da última equação são finitos por dois motivos:  $\Gamma_{R(n)}^{(2)}$  é necessária somente em  $O(g_n^L)$ , que é finita por hipótese, pois provamos que  $\beta_n$  e  $\gamma_{\phi(n)}$  são finitas na ordem  $g_n^L$ . Os termos dentro dos colchetes são finitos em  $O(g_n^{L+1})$ , como mostramos. Assim, como o lado direito é finito, podemos integrar a equação de Callan-Symanzik para esta parte de vértice com momentos arbitrários. Consideremos agora

$$\tilde{\Gamma}_{R(n)}^{(2)}(p_n) = \Gamma_{R(n)}^{(2)}(p_n) - p_n^{2n} - \mu_n^{2n}. \quad (4.83)$$

A função  $\tilde{\Gamma}_{R(n)}^{(2)}(p_n)$  tem dimensão de  $\mu_n^{2n}$  e difere de  $\Gamma_{R(n)}^{(2)}(p_n)$  por potências maiores de  $p_n^{2n}$  e  $\mu_n^{2n}$  que são suprimidas por potências apropriadas dos cortes nos momentos. Das condições de normalização, sabemos que ela se anula com  $(p_n^{2n})^2$  para  $|p_n|$  pequeno. Depois de todas as informações apresentadas até aqui,  $\tilde{\Gamma}_{R(n)}^{(2)}(p_n)$  é descrita pela equação

$$\left( \mu'_n \frac{\partial \tilde{\Gamma}_{R(n)}^{(2)}\left(\frac{p_n}{\mu_n}, \frac{\Lambda_n}{\mu_n}, g_n\right)}{\partial \mu'_n} \right) \Big|_{L+1} = \mu_n^{2n} f_{(n)}^{(2)}\left(\frac{p_n}{\mu_n}, \frac{\Lambda_n}{\mu_n}, g_n\right) \Big|_{L+1}, \quad (4.84)$$

em que  $f_{(n)}^{(2)} = O((p_n^{2n})^2)$  para  $|p_n|$  pequeno. Fazendo agora a mudança de variável  $\mu'_n = \mu_n/\alpha$ , integrando sobre  $\mu'_n$  de  $\infty$  a  $\mu_n$  e utilizando a condição de normalização em momentos externos nulos  $\tilde{\Gamma}_{R(n)}^{(2)}(0, 0, g_n) = 0$  com os cortes nos momentos  $\Lambda_n \rightarrow \infty$ , obtemos

$$\left[ \tilde{\Gamma}_{R(n)}^{(2)}\left(\frac{p_n}{\mu_n}, \infty, g_n\right) \right] \Big|_{L+1} = - \int_0^1 \frac{d\alpha}{\alpha^{2n+1}} \left[ f_{(n)}^{(2)}\left(\alpha \frac{p_n}{\mu_n}, \infty, g_n\right) \right] \Big|_{L+1}. \quad (4.85)$$

Esta última integral é finita se a integral for finita. O integrando tem um comportamento  $f_{(n)}^{(2)}(\alpha \frac{p_n}{\mu_n}, \infty, g_n) = O((\alpha p_n)^{2n})^2$  para  $p_n$  pequeno e não possui nenhuma divergência quando  $\alpha \rightarrow 0$ .

Com isso, finalmente completamos a prova indutiva da renormalizabilidade multiplicativa e também demonstramos a existência das equações de Callan-Symanzik (3.73).

### 4.4.2 Isotrópico

Obteremos as equações de Callan-Symanzik para o caso isotrópico. Agora a dimensão crítica é  $4n$ . Assim podemos escrever essas equações como

$$\left( \mu_n \frac{\partial}{\partial \mu_n} + \beta_n \frac{\partial}{\partial g_n} - \frac{1}{2} N \gamma_{\phi(n)} + L \gamma_{\phi^2(n)} \right) \Gamma_{R(n)}^{(N,L)}(p_{i(n)}, Q_{i(n)}, g_n, \mu_n) = \mu_n^{2n} (2n - \gamma_{\phi(n)}) \Gamma_{R(n)}^{(N,L+1)}(p_{i(n)}, Q_{i(n)}; 0, g_n, \mu_n). \quad (4.86)$$

Usamos o índice  $n$  para deixarmos claro que o subespaço competitivo considerado possui momentos com potências  $2n$ . As equações análogas às (4.64)-(4.66) são

$$-\gamma_{\phi(n)} = \mu_n^{2n} (2n - \gamma_{\phi(n)}) \frac{\partial}{\partial p_{(n)}^{2n}} \Gamma_{R(n)}^{(2,1)}(p_{(n)}, -p_{(n)}; 0, g_n, \mu_n) \Big|_{p_{(n)}^{2n}=0}, \quad (4.87)$$

$$\beta_n - 2\gamma_{\phi(n)} g_n = \mu_n^{2n} (2n - \gamma_{\phi(n)}) \Gamma_{R(n)}^{(4,1)}(0, 0, 0, 0; 0, g_n, \mu_n). \quad (4.88)$$

$$-\gamma_{\phi(n)} + \gamma_{\phi^2(n)} = \mu_n^{2n} (2n - \gamma_{\phi(n)}) \Gamma_{R(n)}^{(2,2)}(0, 0; 0, 0, g_n, \mu_n). \quad (4.89)$$

A prova indutiva da renormalização multiplicativa será dada agora. A equação análoga à (4.71) é

$$\mu_n \frac{\partial \Gamma_{R(n)}^{(N,M)}}{\partial \mu_n} = \left( -\beta_n \frac{\partial}{\partial g_n} + \frac{1}{2} N \gamma_{\phi(n)} - M \gamma_{\phi^2(n)} \right) \Gamma_{R(n)}^{(N,M)} + \mu_n^{2n} (2n - \gamma_{\phi(n)}) \Gamma_{R(n)}^{(N,M+1)}. \quad (4.90)$$

Note que esta equação é análoga àquela dos casos anisotrópicos (4.71) A diferença é que só temos uma escala de massa. Os passos que nos levam à prova indutiva da renormalizabilidade multiplicativa são análogos àqueles que levaram às equações (4.72)-(4.85). Disto segue que no caso isotrópico todas as partes de vértice são finitas na dimensão crítica  $m_n = 4n$ . Completamos assim a prova indutiva da renormalização multiplicativa e automaticamente provamos também a existência das equações de Callan-Symanzik (4.90).

## 4.5 Equações de Callan-Symanzik-Lifshitz fora da dimensão crítica

Usaremos agora o método de regularização dimensional para regularizarmos a teoria fora da dimensão crítica. A teoria abaixo da dimensão crítica é menos divergente do que aquela definida na dimensão crítica. Com isso, não apresentaremos uma mesma prova rigorosa da renormalizabilidade multiplicativa fora da dimensão crítica. Nesta seção será mostrado explicitamente que obtemos expressões finitas para as funções  $\beta$  e funções de Wilson. Isto será suficiente para os nossos propósitos de obter expressões finitas para grandezas universais como os expoentes críticos que serão determinados no momento oportuno.

Assim, a renormalização multiplicativa das partes de vértice  $1PI$ , com  $((N, L) \neq (0, 2))$ , é dada por

$$\Gamma_{R(n)}^{(N,L)}(p_{i(n)}, Q_{i(n)}, g_n, \mu_n) = Z_{\phi(n)}^{N/2} Z_{\phi^2(n)}^L \Gamma_{(n)}^{(N,L)}(p_{i(n)}, Q_{i(n)}, \lambda_{0n}, \mu_{0n}, \Lambda_n). \quad (4.91)$$

Mostraremos isso nos casos anisotrópicos e isotrópicos.

### 4.5.1 Anisotrópico

No caso anisotrópico expressamos as constantes de acoplamento não-renormalizada e renormalizada como

$$\lambda_{0n} = u_{0n} (\mu_n^{2n})^{\epsilon_L/2}, \quad (4.92)$$

$$g_n = u_n (\mu_n^{2n})^{\epsilon_L/2}, \quad (4.93)$$

respectivamente, onde  $u_{0n}$  e  $u_n$  são as constantes de acoplamento adimensionais não renormalizada e renormalizada, respectivamente. Derivamos a (4.91) com relação a  $\mu_{0n}^{2n}$  para obter

$$\left[ \mu_n \frac{\partial}{\partial \mu_n} + \beta_n(g_n, \mu_n) \frac{\partial}{\partial g_n} - \frac{1}{2} N \gamma_{\phi(n)}(g_n, \mu_n) + L \gamma_{\phi^2(n)}(g_n, \mu_n) \right] \Gamma_{R(n)}^{(N,L)}(p_{i(n)}, Q_{i(n)}, \mu_n, g_n) = \mu_n^{2n} [2n - \gamma_{\phi(n)}(g_n, \mu_n)] \Gamma_{R(n)}^{(N,L+1)}(p_{i(n)}, Q_{i(n)}, 0, \mu_n, g_n), \quad (4.94)$$

onde as funções  $\beta_n$  e de Wilson agora dependem da constante de acoplamento  $g_n$  e a massa  $\mu_n$  renormalizadas

$$\beta_n(g_n, \mu_n) = \left( \mu_n \frac{\partial g_n}{\partial \mu_n} \right)_{\lambda_{0n}, \Lambda_n}, \quad (4.95)$$

$$\gamma_{\phi(n)}(g_n, \mu_n) = \mu_n \left( \frac{\partial \ln Z_{\phi(n)}}{\partial \mu_n} \right)_{\lambda_{0n}, \Lambda_n}, \quad (4.96)$$

$$\gamma_{\phi^2(n)}(g_n, \mu_n) = - \left( \mu_n \frac{\partial \ln Z_{\phi^2(n)}}{\partial \mu_n} \right)_{\lambda_{0n}, \Lambda_n}. \quad (4.97)$$

De acordo com a equação (4.95) em conjunção com a (4.93) podemos escrever

$$\beta_n(g_n, \mu_n) \frac{\partial}{\partial g_n} = \left( \mu_n \frac{\partial u_n}{\partial \mu_n} \right)_{\lambda_{0n}} \frac{\partial}{\partial u_n} + n \epsilon_n \frac{\partial}{\partial g_n}. \quad (4.98)$$

Agora definimos a função de "Gell-Mann-Low" [72,73] para  $\epsilon_n \neq 0$  em função da constante de acoplamento adimensional como

$$[\beta_n(g_n, \mu_n)]_{GL} = -n \epsilon_L g_n + \beta_n(g_n, \mu_n), \quad (4.99)$$

onde a função  $\beta_n$  no lado direito da equação (4.99) é a que usamos no cálculo da seção anterior com a teoria exatamente na dimensão crítica. Com isso, fora da dimensão crítica as equações de Callan-Symanzik (4.94) podem ser escritas apenas em termos de grandezas adimensionais se a função  $\beta_n$  de início for a função de Gell-Mann-Low. Assim

$$[\beta_n]_{GL}(g_n) \frac{\partial}{\partial g_n} = \beta_n(u_n) \frac{\partial}{\partial u_n}. \quad (4.100)$$

As equações de Callan-Symanzik em dimensões  $d = d_c - \epsilon_L$  em termos de constantes de acoplamento adimensionais têm a forma:

$$\left[ \mu_n \frac{\partial}{\partial \mu_n} + \beta_n(u_n) \frac{\partial}{\partial u_n} - \frac{1}{2} N \gamma_{\phi(n)} + L \gamma_{\phi^2(n)} \right] \Gamma_{R(n)}^{(N,L)}(p_{i(n)}, Q_{i(n)}, \mu_n, u_n) = \mu_n^{2n} [2n - \gamma_{\phi(n)}] \Gamma_{R(n)}^{(N,L+1)}(p_{i(n)}, Q_{i(n)}, 0, \mu_n, u_n). \quad (4.101)$$

Agora, com

$$\mu_n \frac{\partial u_n}{\partial \mu_n} = -\mu_n \left( \frac{\partial \lambda_{0n}}{\partial \mu_n} \right)_{u_n} \left( \frac{\partial u_n}{\partial \lambda_{0n}} \right)_{\mu_n} \quad (4.102)$$

podemos escrever

$$\beta_n(u_n) = -n\epsilon_L \left( \frac{\partial \ln u_{0n}}{\partial u_n} \right)^{-1}, \quad (4.103)$$

$$\gamma_{\phi^{(n)}}(u_n) = \beta_n \frac{\partial \ln Z_{\phi^{(n)}}}{\partial u_n}, \quad (4.104)$$

$$\bar{\gamma}_{\phi^2(n)}(u_n) = -\beta_n \frac{\partial \ln \bar{Z}_{\phi^2(n)}}{\partial u_n}, \quad (4.105)$$

onde

$$\bar{Z}_{\phi^2(n)} = Z_{\phi^{(n)}} Z_{\phi^2(n)}. \quad (4.106)$$

No caso anisotrópico, existe um fluxo de massa independente para cada uma dos subespaços inequivalentes. Esses fluxos correspondem a transformações de escala independentes as suas respectivas constantes de acoplamento e massas não-renormalizadas. A equação de Callan-Symanzik-Lifshitz tem a mesma forma funcional que a equação (2.55). Com isso, seu lado direito possui uma inserção em momento zero a mais e com isso um propagador a mais. Portanto, a função de vértice  $\Gamma_{R(n)}^{(N,L+1)}(p_{i(n)}, 0, g_n, \mu_n) \sim p_{i(n)}^{-2n} \Gamma_{R(n)}^{(N,L)}(p_{i(n)}, g_n, \mu_n)$  para momentos  $p_{i(n)}$  grandes, a menos de fatores de  $\ln p_{i(n)}$ . Esses fatores logarítmicos não contribuem de tal modo a compensar o fator  $p_{i(n)}^{-2n}$ . Nessas circunstâncias atingimos o regime temos o regime ultravioleta e o obtemos fazendo o momento euclidiano  $p_{i(n)} \rightarrow \infty$ . Podemos definir  $p_{i(n)} = \rho_n k_{i(n)}$ , onde o momento  $k_{i(n)}$  também corresponde a um momento euclidiano fixo e tomamos o limite  $\rho_n \rightarrow \infty$ . Assim, usamos o teorema de Weinberg [31] o que implica que o lado direito pode ser desprezado com relação ao lado esquerdo da (4.101), ordem a ordem em teoria de perturbação.

Isso é equivalente a fazermos os momentos internos das partes de vértice muito grandes. Fazemos isso regularizando as integrais com cortes nos momentos  $\Lambda_n$  e tomando o limite  $\Lambda_n \rightarrow \infty$ . Assim as integrais são funções homogêneas da massa renormalizada  $\mu_n$ . Obtemos o limite de momentos dos "loops" grandes quando  $p_{i(n)}/\mu_n \rightarrow \infty$ .

De análise dimensional e fazendo uma transformação de escala temos

$$\Gamma_{R(n)}^{(N)}(\rho_n k_{i(n)}, u_n, \mu_n) = \rho_n^{n[N+(d-\sum_{n=2}^L[(n-1)/n]m_n)-N(d-\sum_{n=2}^L[(n-1)/n]m_n)/2]} \times \Gamma_{R(n)}^{(N)}(k_{i(n)}, u_n(\rho_n), \mu_n/\rho_n). \quad (4.107)$$

A solução das equações de Callan-Symanzik-Lifshitz para a parte assintótica é

$$\Gamma_{as\ R(n)}^{(N)}(k_{i(n)}, u_n(\rho_n), \mu_n/\rho_n) = \exp\left[-\frac{N}{2} \int_{u_n}^{u_n(\rho_n)} \gamma_{\phi(n)}(u'_n(\rho_n)) \frac{du'_n}{\beta_n(u'_n)}\right] \times \\ \Gamma_{as\ R(n)}^{(N)}(k_{i(n)}, u_n(\rho_n), \mu_n), \quad (4.108)$$

onde

$$\rho_n = \int_{u_n}^{u_n(\rho_n)} \frac{du'_n}{\beta_n(u'_n)}. \quad (4.109)$$

Omitiremos o índice *as* de agora em diante. As constantes de acoplamento assumem os valores  $u_{n\infty}$  que satisfazem a condição  $\beta_n(u_{n\infty}) = 0$ . Neste valor, as soluções das equações de Callan-Symanzik-Lifshitz satisfazem a uma relação de escala, onde

$$\Gamma_{R(n)}^{(N)}(\rho_n k_{i(n)}, u_{n\infty}, \mu_n) = \rho_n^{n[N+(d-\sum_{n=2}^L[(n-1)/n]m_n)-N(d-\sum_{n=2}^L[(n-1)/n]m_n)/2]-N\gamma_{\phi(n)}(u_{n\infty})/2} \times \\ \Gamma_{R(n)}^{(N)}(k_{i(n)}, u_{n\infty}, \mu_n). \quad (4.110)$$

A definição da dimensão do campo  $\phi$  é

$$\Gamma_{(n)}^{(N)}(\rho_n k_{i(n)}) = \rho_n^{n[N+(d-\sum_{n=2}^L[(n-1)/n]m_n)-N(d-\sum_{n=2}^L[(n-1)/n]m_n)]-Nd_{\phi(n)}} \Gamma_{R(n)}^{(N)}(k_{i(n)}, u_{n\infty}, \mu_n). \quad (4.111)$$

Assim, a definição da dimensão anômala do campo  $\phi$  é dada por  $d_{\phi(n)} = (d - \sum_{n=2}^L[(n-1)/n]m_n)/2 - 1 + \eta_n/2n$ , mostrando que  $\eta_n = \gamma_{\phi(n)}(u_{n\infty})$ .

Definimos também a dimensão do campo composto  $\phi^2$ . Para  $(N, L) \neq (2, 0)$  e  $u_n = u_{n\infty}$ , a parte assintótica das funções de vértice se comportam como

$$\Gamma_{R(n)}^{(N,L)}(\rho_n k_{i(n)}, \rho_n p_{i(n)}, u_{n\infty}, \mu_n) = \\ \rho_n^{n(N-2L+(d-\sum_{n=2}^L[(n-1)/n]m_n)-N(d-\sum_{n=2}^L[(n-1)/n]m_n)/2)-N\gamma_{\phi(n)}(u_{n\infty})/2+L\gamma_{\phi^2(n)}(u_{n\infty})} \times \\ \Gamma_{R(n)}^{(N,L)}(k_{i(n)}, p_{i(n)}, u_{n\infty}, \mu_n). \quad (4.112)$$

Com a definição da dimensão do campo composto  $\phi^2$

$$\Gamma_{(n)}^{(N,L)}(\rho_n k_{i(n)}, \rho_n p_{i(n)}) = \rho_n^{n[(d-\sum_{n=2}^L[(n-1)/n]m_n)]-Nd_{\phi(n)}+Ld_{\phi^2(n)}} \Gamma_{(n)}^{(N,L)}(k_{i(n)}, p_{i(n)}, u_{n\infty}, \mu_n), \quad (4.113)$$

obtemos  $d_{\phi^2(n)} = -2n + \gamma_{\phi^2(n)}(u_{n\infty})$ . Assim, calculamos o expoente  $\nu_n$  usando a relação  $\nu_n^{-1} = -d_{\phi^2(n)} = 2n - \gamma_{\phi^2(n)}(u_{n\infty})$ .

Fazendo agora a seguinte expansão em termos da constante de acoplamento renormalizada

$$u_{0n} = u_n(1 + a_{1n}u_n + a_{2n}u_n^2), \quad (4.114)$$

$$Z_{\phi(n)}(u_n) = 1 + b_{2n}u_n^2 + b_{3n}u_n^3, \quad (4.115)$$

$$\bar{Z}_{\phi^2(n)}(u) = 1 + c_{1n}u_n + c_{2n}u_n^2, \quad (4.116)$$

temos

$$\beta_n(u_n) = -n\epsilon_L u_n [1 - a_{1n}u_n + 2(a_{1n}^2 - a_{2n})u_n^2], \quad (4.117)$$

$$\gamma_{\phi(n)}(u_n) = -n\epsilon_L u_n [2b_{2n}u_n + (3b_{3n} - 2b_{2n}a_{1n})u_n^2], \quad (4.118)$$

$$\bar{\gamma}_{\phi^2(n)}(u_n) = n\epsilon_L u_n [c_{1n} + (2c_{2n} - c_{1n}^2 - a_{1n}c_{1n})u_n]. \quad (4.119)$$

Na próxima seção calcularemos os expoentes usando condições de normalização para teorias massivas renormalizadas em momentos externos nulos. Essas condições de normalização determinam os coeficientes  $a_{1n}$ - $c_{2n}$  quando calculamos as integrais de Feynman correspondentes.

### 4.5.2 Isotrópico

Com apenas uma escala de massa  $\mu_n$ , as constantes de acoplamento não-renormalizada e renormalizada são

$$\lambda_{0n} = u_{0n}(\mu_n^{2n})^{\epsilon_L/2n}, \quad (4.120)$$

$$g_n = u_n(\mu_n^{2n})^{\epsilon_L/2n}, \quad (4.121)$$

respectivamente. As equações de Callan-Symanzik obtidas são dadas por

$$\left[ \mu_n \frac{\partial}{\partial \mu_n} + \beta_n(u_n) \frac{\partial}{\partial u_n} - \frac{1}{2} N \gamma_{\phi(n)} + L \gamma_{\phi^2(n)} \right] \Gamma_{R(n)}^{(N,L)}(p_{i(n)}, Q_{i(n)}, \mu_n, u_n) = \mu_n^{2n} [2n - \gamma_{\phi(n)}] \Gamma_{R(n)}^{(N,L+1)}(p_{i(n)}, Q_{i(n)}, 0, \mu_n, u_n), \quad (4.122)$$

onde a função  $\beta_n$  e as funções de Wilson são dadas por

$$\beta_n(u_n) = \left( \mu_n \frac{\partial u_n}{\partial \mu_n} \right)_{\lambda_n, \Lambda_n}, \quad (4.123)$$

$$\gamma_{\phi(n)}(u_n) = \mu_n \left( \frac{\partial \ln Z_{\phi(n)}}{\partial \mu_n} \right)_{\lambda_n, \Lambda_n}, \quad (4.124)$$

$$\gamma_{\phi^2(n)}(u_n) = - \left( \mu_n \frac{\partial \ln Z_{\phi^2(n)}}{\partial \mu_n} \right)_{\lambda_n, \Lambda_n}. \quad (4.125)$$

Usando

$$\mu_n \frac{\partial u_n}{\partial \mu_n} = -\mu_n \left( \frac{\partial \lambda_{0n}}{\partial \mu_n} \right)_{u_n} \left( \frac{\partial u_n}{\partial \lambda_{0n}} \right)_{\mu_n} \quad (4.126)$$

podemos escrever essas funções como

$$\beta_n(u_n) = -\epsilon_L \left( \frac{\partial \ln u_{0n}}{\partial u_n} \right)^{-1}, \quad (4.127)$$

$$\gamma_{\phi(n)}(u_n) = \beta_n \frac{\partial \ln Z_{\phi(n)}}{\partial u_n}, \quad (4.128)$$

$$\bar{\gamma}_{\phi^2(n)}(u_n) = -\beta_n \frac{\partial \ln \bar{Z}_{\phi^2(n)}}{\partial u_n}, \quad (4.129)$$

onde

$$\bar{Z}_{\phi^2(n)} = Z_{\phi(n)} Z_{\phi^2(n)}. \quad (4.130)$$

A dimensão efetiva no caso isotrópico é  $m_n/n$ , porque o elemento de volume nesse caso é  $d^m k_{(n)}$  (veja apêndice B).

De análise dimensional e fazendo uma transformação de escala, fixamos a constante de acoplamento  $u_{n\infty}$  exatamente no valor do ponto fixo ultravioleta e com isso podemos escrever

$$\Gamma_{R(n)}^{(N)}(\rho_n k_{i(n)}, u_{n\infty}, \mu_n) = \rho_n^{n(N+m_n/n-Nm_n/2n)-N\gamma_{\phi(n)}(u_{n\infty})/2} \Gamma_{R(n)}^{(N)}(k_{i(n)}, u_{n\infty} \mu_n). \quad (4.131)$$

Definimos a dimensão do campo  $\phi$  como

$$\Gamma_{(n)}^{(N)}(\rho_n k_{i(n)}) = \rho_n^{n[m_n/n-Nd_{\phi(n)}]} \Gamma_{R(n)}^{(N)}(k_{i(n)}). \quad (4.132)$$

Com isso, obtemos a expressão para a dimensão do campo  $\phi$  que é  $d_{\phi(n)} = m_n/2n - 1 + \eta_n/2n$ . Assim, podemos escrever para a dimensão anômala do campo  $\eta_n = \gamma_{\phi(n)}(u_{n\infty})$ .

Para partes de vértice com campos compostos, fixamos a constante de acoplamento no valor do ponto fixo ultravioleta  $u_n = u_{n\infty}$ , pois esta é a maneira que invariança de escala é restaurada nas partes de vértice  $1PI$ . Assim, depois de uma transformação de escala podemos escrever

$$\Gamma_{R(n)}^{(N,L)}(\rho_n k_{i(n)}, \rho_n p_{i(n)}, u_{n\infty}, \mu_n) = \rho_n^{n(N-2L+m_n/n-Nm_n/2n)-N\gamma_{\phi(n)}(u_{n\infty})/2+L\gamma_{\phi^2(n)}(u_{n\infty})} \times \Gamma_{R(n)}^{(N,L)}(k_{i(n)}, p_{i(n)}, u_{n\infty}, \mu_n). \quad (4.133)$$

Definimos a dimensão do campo composto  $\phi^2$  como

$$\Gamma_{(n)}^{(N,L)}(\rho_n k_{i(n)}, \rho_n p_{i(n)}) = \rho_n^{m_n - Nd_{\phi(n)} + Ld_{\phi^2(n)}} \Gamma_{(n)}^{(N,L)}(k_{i(n)}, p_{i(n)}). \quad (4.134)$$

Assim temos  $d_{\phi^2(n)} = -2n + \gamma_{\phi^2(n)}(u_{n\infty})$ . Com essa expressão calculamos o expoente crítico  $\nu_n$  através da relação  $\nu_n^{-1} = -d_{\phi^2(n)} = 2n - \gamma_{\phi^2(n)}(u_{n\infty})$ .

Fazendo o mesmo como no caso anisotrópico podemos escrever

$$u_{0n} = u_n(1 + a_{1n}u_n + a_{2n}u_n^2), \quad (4.135)$$

$$Z_{\phi(n)}(u_n) = 1 + b_{2n}u_n^2 + b_{3n}u_n^3, \quad (4.136)$$

$$\bar{Z}_{\phi^2(n)}(u_n) = 1 + c_{1n}u_n + c_{2n}u_n^2 \quad (4.137)$$

e

$$\beta_n(u_n) = -\epsilon_L u_n [1 - a_{1n}u_n + 2(a_{1n}^2 - a_{2n})u_n^2], \quad (4.138)$$

$$\gamma_{\phi(n)}(u_n) = -\epsilon_L u_n [2b_{2n}u_n + (b_{3n} - 2b_{2n}a_{1n})u_n^2], \quad (4.139)$$

$$\bar{\gamma}_{\phi^2(n)}(u_n) = \epsilon_L u_n [c_{1n} + (2c_{2n} - c_{1n}^2 - a_{1n}c_{1n})u_n]. \quad (4.140)$$

Os coeficientes  $a_{1n}$ - $c_{2n}$  serão calculados em uma teoria massiva renormalizada em massas diferente de zero e momentos externos nulos.

## 4.6 Cálculo dos expoentes críticos anisotrópicos

Do apêndice B, para o cálculo das integrais na aproximação ortogonal, os coeficientes  $a_{1n}$ - $c_{2n}$  são dados por

$$a_{1n} = \frac{N+8}{6\epsilon_n} (1 + h_m \epsilon_n - \epsilon_n), \quad (4.141)$$

$$a_{2n} = \left( \frac{N+8}{6\epsilon_n} \right)^2 + \frac{N^2 + 16N + 64}{18\epsilon_n} h_m - \frac{4N^2 + 73N + 298}{72\epsilon_n}, \quad (4.142)$$

$$b_{2n} = -\frac{N+2}{144\epsilon_n} \left( 1 + 2h_m\epsilon_n - \frac{5}{4}\epsilon_n + I\epsilon_n \right), \quad (4.143)$$

$$b_{3n} = -\frac{(N+2)(N+8)}{1296\epsilon_n^2} \left( 1 + 3h_m\epsilon_n - \frac{13}{4}\epsilon_n \right), \quad (4.144)$$

$$c_{1n} = \frac{N+2}{6\epsilon_n} (1 + h_m\epsilon_n - \epsilon_n), \quad (4.145)$$

$$c_{2n} = \frac{N^2 + 7N + 10}{36\epsilon_n^2} + \frac{N^2 + 7N + 10}{18\epsilon_n} h_m - \frac{4N^2 + 31N + 46}{72\epsilon_n}. \quad (4.146)$$

Com isso, as equações (4.117)-(4.119) tomam a forma

$$\beta_n(u_n) = -n u_n \left[ \epsilon_L - \frac{N+8}{6} (1 + (h_m - 1)\epsilon_L) u_n + \frac{3N+14}{12} u_n^2 \right], \quad (4.147)$$

$$\gamma_{\phi(n)}(u_n) = n \frac{N+2}{72} \left[ \left( 1 + 2h_m\epsilon_L - \frac{5}{4}\epsilon_L + I\epsilon_L \right) u_n^2 - \frac{N+8}{6} (I+1) u_n^3 \right], \quad (4.148)$$

$$\bar{\gamma}_{\phi(n)}^2(u_n) = n \frac{N+2}{6} u_n \left( 1 + h_m\epsilon_L - \epsilon_L - \frac{1}{2} u_n \right). \quad (4.149)$$

Da equação (4.147) calculamos o ponto fixo onde obtemos o resultado  $u_{1\infty} = u_{2\infty} = \dots = u_{n\infty} \equiv u_\infty$  e vemos que o ponto fixo em cada subespaço tem o mesmo valor, valor esse que é dado por

$$u_\infty = \frac{6}{N+8} \epsilon_L \left\{ 1 + \epsilon_L \left[ \frac{3(3N+14)}{(N+8)^2} + 1 - h_m \right] \right\}. \quad (4.150)$$

No caso sem massa, o ponto fixo infravermelho é atrativo e a constante de acoplamento flui naturalmente para o valor desse ponto fixo. Já no caso massivo estudado aqui, o ponto fixo ultravioleta é não-atrativo. Com isso somente quando as  $n$  constantes de acoplamento assumem exatamente o valor do ponto fixo ultravioleta anisotrópico  $u_{1\infty} = u_{2\infty} = \dots = u_{n\infty} = u_\infty$ , a teoria é invariante de escala. Obtemos esses valores para as constantes de acoplamento das  $n$  condições independentes  $\beta_{1\infty} = 0, \beta_{2\infty} = 0, \dots, \beta_{n\infty} = 0$ . Essas condições fornecem o mesmo valor para o ponto fixo ultravioleta  $u_\infty$ .

Para  $\eta_n$  obtemos

$$\eta_n = \frac{n}{2} \epsilon_L^2 \frac{N+2}{(N+8)^2} \left\{ 1 + \epsilon_L \left[ \frac{6(3N+14)}{(N+8)^2} - \frac{1}{4} \right] \right\}. \quad (4.151)$$

Os fatores  $h_m$  e a integral  $I$  se cancelaram no cálculo de  $\eta_n$ .

Agora com

$$\bar{\gamma}_{\phi(n)}^{*2} \equiv \bar{\gamma}_{\phi(n)}^2(u_\infty) = n\epsilon_L \frac{N+2}{N+8} \left[ 1 + \frac{6(N+3)}{(N+8)^2} \epsilon_L \right], \quad (4.152)$$

e com  $\nu_n^{-1} = 2n - \eta_n - \bar{\gamma}_{\phi(n)}^2(u_\infty)$  obtemos

$$\nu_n = \frac{1}{2n} + \frac{N+2}{4n(N+8)} \epsilon_L + \frac{(N+2)(N^2+23N+60)}{8n(N+8)^3} \epsilon_L^2. \quad (4.153)$$

Os resultados para  $\eta_n$  e  $\nu_n$  estão em perfeita concordância com os resultados para os respectivos expoentes obtidos na teoria sem massa. Os expoentes críticos acima calculados se reduzem aos respectivos expoentes críticos para pontos de Lifshitz  $m$ -axiais capítulo anterior quando  $m_3 = \dots = m_L = 0$ ,  $\epsilon_L = 4 + \sum_{n=2}^L [(n-1)/n] m_n \rightarrow 4 + m_2/2 = 4 + m/2$ . Assim a redução da classe de universalidade é uma propriedade geral de pontos de Lifshitz. As relações  $\eta_n = n\eta_1$  em  $O(\epsilon_n^3)$  e  $\nu_n = \frac{1}{n}\nu_1$  em  $O(\epsilon_n^2)$  são satisfeitas em dois "loops".

## 4.7 Expoentes críticos isotrópicos na aproximação ortogonal

Os coeficientes  $a_{1n}$ - $c_{2n}$ , do apêndice B, para o cálculo das integrais na aproximação ortogonal, são dados por

$$a_{1n} = \frac{N+8}{6\epsilon_n} \left( 1 - \frac{1}{2n} \epsilon_n \right), \quad (4.154)$$

$$a_{2n} = \left( \frac{N+8}{6\epsilon_n} \right)^2 - \frac{2N^2 + 41N + 170}{72n\epsilon_n}, \quad (4.155)$$

$$b_{2n} = -\frac{N+2}{144n\epsilon_n} \left( 1 - \frac{1}{4n} \epsilon_n + \frac{1}{n} I\epsilon_n \right), \quad (4.156)$$

$$b_{3n} = -\frac{(N+2)(N+8)}{1296n\epsilon_n^2} \left( 1 - \frac{7}{4n} \epsilon_n \right), \quad (4.157)$$

$$c_{1n} = \frac{N+2}{6\epsilon_n} \left( 1 - \frac{1}{2n} \epsilon_n \right), \quad (4.158)$$

$$c_{2n} = \frac{N^2 + 7N + 10}{36\epsilon_n^2} - \frac{2N^2 + 17N + 26}{72n\epsilon_n}. \quad (4.159)$$

Assim obtemos a função  $\beta_n$  e as funções de Wilson como

$$\beta_n(u_n) = -u_n \left[ \epsilon_n - \frac{N+8}{6} \left( 1 - \frac{1}{2n} \epsilon_n \right) u_n + \frac{3N+14}{12n} u_n^2 \right], \quad (4.160)$$

$$\gamma_{\phi(n)}(u_n) = \frac{N+2}{72n} \left[ \left( 1 - \frac{1}{4n}\epsilon_n + \frac{1}{n}I\epsilon_n \right) u_n^2 - \frac{N+8}{6n}(I+1)u_n^3 \right], \quad (4.161)$$

$$\bar{\gamma}_{\phi(n)}^2(u_n) = \frac{N+2}{6} u_n \left( 1 - \frac{1}{2n}\epsilon_n - \frac{1}{2n}u_n \right). \quad (4.162)$$

Calculamos o ponto fixo  $u_{n\infty}$  da equação (3.167) e obtemos

$$u_{n\infty} = \frac{6}{N+8}\epsilon_n \left\{ 1 + \frac{1}{n}\epsilon_n \left[ \frac{3(3N+14)}{(N+8)^2} + \frac{1}{2} \right] \right\}. \quad (4.163)$$

Calculando o expoente  $\eta_n$  obtemos

$$\eta_n = \frac{1}{2n}\epsilon_n^2 \frac{N+2}{(N+8)^2} \left\{ 1 + \epsilon_n \frac{1}{n} \left[ \frac{6(3N+14)}{(N+8)^2} - \frac{1}{4} \right] \right\}, \quad (4.164)$$

onde a integral  $I$  se cancelou no cálculo de  $\eta_n$ . Não podemos obter esse expoente de  $\eta_n$ , (4.151), ou seja, não podemos obter o caso isotrópico do anisotrópico fazendo  $d \rightarrow m_n$  em torno de  $4n$ .

E com

$$\bar{\gamma}_{\phi(n)}^2(u_{n\infty}) = \epsilon_n \frac{N+2}{N+8} \left[ 1 + \frac{6(N+3)}{n(N+8)^2}\epsilon_n \right] \quad (4.165)$$

e usando  $\nu_n^{-1} = 2n - \eta_n - \bar{\gamma}_{\phi(n)}^2(u_{n\infty})$  obtemos

$$\nu_n = \frac{1}{2n} + \frac{N+2}{4n^2(N+8)}\epsilon_n + \frac{(N+2)(N^2+23N+60)}{8n^3(N+8)^3}\epsilon_n^2. \quad (4.166)$$

Os expoentes críticos acima estão em perfeita concordância com os obtidos na teoria sem massa.

## 4.8 Cálculo dos expoentes críticos isotrópicos - Exato

Como as integrais no caso isotrópico possuem apenas uma escala de momento, elas podem ser calculadas exatamente. No cálculo dessas integrais, necessitaremos dos seguintes resultados:

$$\int dq \frac{1}{(q^2 + 2k \cdot q + m^2)^\alpha} = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(\frac{d}{2})\Gamma(\alpha - \frac{d}{2})}{\Gamma(\alpha)} (m^2 - k^2)^{d/2-\alpha}, \quad (4.167)$$

onde

$$dq = d^d q / S_d, \quad (4.168)$$

$S_d$  sendo absorvida numa redefinição da constante de acoplamento, com

$$S_d = [2^{d-1}\pi^{d/2}\Gamma(d/2)]^{-1}; \quad (4.169)$$

uma identidade envolvendo os chamados *parâmetros de Feynman*  $x_i$

$$\frac{1}{a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \dots a_n^{\alpha_n}} = \frac{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n)}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)\dots\Gamma(\alpha_n)} \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \dots \int_0^1 dx_{n-1} \times$$

$$\frac{x_1^{\alpha_1-1} x_2^{\alpha_2-1} \dots x_{n-1}^{\alpha_{n-1}-1} (1 - x_1 - x_2 - \dots - x_{n-1})^{\alpha_n-1}}{[x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_{n-1} a_{n-1} + (1 - x_1 - x_2 - \dots - x_{n-1}) a_n]^{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n}}; \quad (4.170)$$

a relação entre uma função  $\Gamma(x+1)$  e  $\Gamma(x)$ , válida para  $x > -1$ ,

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \quad (4.171)$$

e uma identidade válida para a razão entre produtos de funções Gama

$$\frac{\Gamma(1 + \alpha_1 \epsilon) \dots \Gamma(1 + \alpha_n \epsilon)}{\Gamma(1 + \beta_1 \epsilon) \dots \Gamma(1 + \beta_m \epsilon)} = 1 + O(\epsilon^2) \quad (4.172)$$

se

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i - \sum_{i=1}^m \beta_i = 0. \quad (4.173)$$

O propagador agora tem momento com uma potência  $2n$ . Assim, analogamente ao caso isotrópico exato do capítulo anterior, usamos agora a identidade

$$(k^2)^n + 1 = (k^2 - r_1)(k^2 - r_2)\dots(k^2 - r_n), \quad (4.174)$$

onde  $r_i$  é a  $i$ -ésima raiz complexa da equação

$$(k^2)^n + 1 = 0. \quad (4.175)$$

Usaremos essa identidade no cálculo das integrais para um número  $n$  arbitrário.

A integral mais simples é a integral de um loop da função de dois pontos. Sua expressão é

$$I_2 = \int d^m k \frac{1}{[(k^2)^n + 1]\{(k + K')^2\}^n + 1}. \quad (4.176)$$

Assim, para o caso  $n = 2$  usamos parâmetros de Feynman e obtemos

$$\frac{1}{(k^2 - r_1)(k^2 - r_2)} = \Gamma(2) \int_0^1 dx_1 \frac{1}{(k^2 + m_{x_1}^2)^2}, \quad (4.177)$$

onde

$$m_{x_1}^2 = (r_2 - r_1)x_1 - r_2. \quad (4.178)$$

Para o caso  $n = 3$  temos

$$\frac{1}{(k^2 - r_1)(k^2 - r_2)(k^2 - r_3)} = \Gamma(3) \int_0^1 dx_1 dx_2 x_2 \frac{1}{(k^2 + m_{x_2}^2)^3}, \quad (4.179)$$

onde

$$m_{x_2}^2 = (m_{x_1}^2 + r_3)x_2 - r_3. \quad (4.180)$$

Para o caso geral com  $n$  um inteiro positivo qualquer, temos

$$\frac{1}{(k^2)^n + 1} = \Gamma(n) \int_0^1 dx_1 dx_2 x_2 \dots dx_{n-1} x_{n-1}^{n-2} \frac{1}{(k^2 + m_{x_{n-1}}^2)^n}, \quad (4.181)$$

onde

$$m_{x_n}^2 = (m_{x_{n-1}}^2 + r_{n+1})x_n - r_{n+1}. \quad (4.182)$$

Com isso, usando a equação (4.181), podemos escrever a integral  $I_2$  como

$$I_2 = \Gamma(n)^2 \int_0^1 dx_1 dx_2 x_2 \dots dx_{n-1} x_{n-1}^{n-2} dy_1 dy_2 y_2 \dots dy_{n-1} y_{n-1}^{n-2} \times \\ \int d^{m_n} k \frac{1}{(k^2 + m_{x_{n-1}}^2)^n (k^2 + m_{y_{n-1}}^2)^n}. \quad (4.183)$$

Agora usando parâmetros de Feynman, integrando e absorvendo o fator  $S_m$  em uma redefinição da constante de acoplamento obtemos

$$I_2 = \frac{\Gamma(2n)}{\epsilon_n} \left[ 1 + \frac{1}{2} \psi(1) \epsilon_n - \frac{1}{2} \psi(2n) \epsilon_n \right] \int_0^1 dx_1 dx_2 x_2 \dots dx_{n-1} x_{n-1}^{n-2} dy_1 dy_2 y_2 \dots dy_{n-1} y_{n-1}^{n-2} \times \\ dt [t(1-t)]^{n-1} [t(1-t)k'^2 + (m_{y_{n-1}}^2 - m_{x_{n-1}}^2)t + m_{x_{n-1}}^2]^{-\epsilon_n/2}, \quad (4.184)$$

onde as funções  $\psi(x) = \frac{\partial \ln \Gamma(x)}{\partial x}$  são as funções digama. Com isso, no ponto de simetria obtemos

$$I_{2SP} = I_2|_{k'^2=0} = \frac{\Gamma(2n)}{\epsilon_n} \left[ 1 + \frac{1}{2} \psi(1) \epsilon_n - \frac{1}{2} \psi(2n) \epsilon_n \right] \times \\ \int_0^1 dx_1 dx_2 x_2 \dots dx_{n-1} x_{n-1}^{n-2} dy_1 dy_2 y_2 \dots dy_{n-1} y_{n-1}^{n-2} dt [t(1-t)]^{n-1} [(m_{y_{n-1}}^2 - m_{x_{n-1}}^2)t + m_{x_{n-1}}^2]^{-\epsilon_n/2}. \quad (4.185)$$

Na prática, temos que especificar o valor de  $n$  para podermos calcular a integral acima, pois como visto anteriormente no caso  $n = 2$  para as integrais desse tipo, temos que calcular seu valor em termos de pólos simples  $O(\epsilon_n^{-1})$  e um termo regular  $O(\epsilon_n^{-1})$ . Esse termo, para valores específicos de  $n$ , é calculado integrando em todos os parâmetros de Feynman restantes e fazendo uso da forma particular das raízes complexas contidas nas constantes do tipo  $m_{x_i}^2$ . Nesse cálculo fazemos  $\epsilon_n = 0$  nas potências dos números complexos depois de integrarmos em todos os parâmetros de Feynman. Assim, não conseguimos no presente momento resolver integral na equação (4.185) para um valor arbitrário de  $n$ . Podemos então tentar calcular essa integral para alguns valores de  $n$  e ver se conseguimos encontrar uma fórmula para o termo geral dessa integral, que deve ser função de  $n$ . Assim, para os valores de  $n = 1$  e  $n = 2$  já sabemos que

$$I_{2SP} = \frac{1}{\epsilon_1} \left( 1 - \frac{1}{2}\epsilon_1 \right), \quad (4.186)$$

$$I_{2SP} = \frac{1}{\epsilon_2} \left( 1 - \frac{1}{4}\epsilon_2 \right), \quad (4.187)$$

respectivamente.

Para o caso  $n = 3$ , as três raízes complexas são  $r_1 = -1$ ,  $r_2 = 1/2 + i\sqrt{3}/2 \equiv A$  e  $r_3 = A^*$ . Usando a equação (4.181) para esse caso, podemos escrever o propagador livre como

$$\frac{1}{(k^2)^3 + 1} = \Gamma(3) \int_0^1 dx dy y \frac{1}{(k^2 + m_y^2)^3}, \quad (4.188)$$

onde

$$m_y^2 = \left( i\sqrt{3}x - \frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) y + 1. \quad (4.189)$$

Agora podemos escrever a integral  $I_2$  como

$$I_2 = \Gamma(3)^2 \int_0^1 dx dz dy y dw w \int d^{m_3} k \frac{1}{(k^2 + m_y^2)^3 (k^2 + m_w^2)^3}, \quad (4.190)$$

em que

$$m_w^2 = \left( i\sqrt{3}z - \frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) w + 1. \quad (4.191)$$

Usamos agora parâmetros de Feynman, integramos e absorvemos o fator  $S_3$  em uma redefinição da constante de acoplamento. Com isso, obtemos

$$I_2 = \frac{120}{\epsilon_3} \left( 1 - \frac{137}{120}\epsilon_3 \right) \int_0^1 dx dz dy y dw dt t^2 (1-t)^2 \times$$

$$\left[ t(1-t)k'^2 + \left( i\sqrt{3}x - \frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) y(1-t) + \left( i\sqrt{3}z - \frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) wt + 1 \right]^{-\epsilon_3/2}. \quad (4.192)$$

Com isso, no ponto de simetria obtemos

$$I_{2SP} = \frac{120}{\epsilon_3} \left( 1 - \frac{137}{120} \epsilon_3 \right) \int_0^1 dx \int_0^1 dz \int_0^1 dy \int_0^1 dw \int_0^1 dt t^2 (1-t)^2 \times \\ \left[ \left( i\sqrt{3}x - \frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) y(1-t) + \left( i\sqrt{3}z - \frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) wt + 1 \right]^{-\epsilon_3/2}. \quad (4.193)$$

Essa integral pode ser calculada e resulta em

$$I_{2SP} = \frac{1}{\epsilon_3} \left( 1 - \frac{1}{6} \epsilon_3 \right), \quad (4.194)$$

onde fizemos  $\epsilon_3 = 0$  nas potências dos números complexos finais.

O caso  $n = 4$  possui quatro raízes complexas. Elas são  $r_1 = 1/2 + i\sqrt{3}/2 \equiv B$ ,  $r_2 = -B^*$ ,  $r_3 = -B$  e  $r_4 = B^*$ . Novamente usamos a (4.181). Nesse caso, o propagador livre toma a forma

$$\frac{1}{(k^2)^4 + 1} = \Gamma(4) \int_0^1 dx dy dz z^2 \frac{1}{(k^2 + m_z^2)^4}, \quad (4.195)$$

onde

$$m_z^2 = \{[(2x-1)B^* - B]y + 2B\}z - B. \quad (4.196)$$

Assim, expressamos a integral  $I_2$  como

$$I_2 = \Gamma(4)^2 \int_0^1 dx dw dy dr dz z^2 ds s^2 \int d^m k \frac{1}{(k^2 + m_z^2)^3 (k^2 + m_s^2)^3}, \quad (4.197)$$

em que

$$m_s^2 = \{[(2w-1)B^* - B]r + 2B\}s - B. \quad (4.198)$$

Usando parâmetros de Feynman, integrando em momento e absorvendo o fator  $S_4$  em uma redefinição da constante de acoplamento, obtemos

$$I_2 = \frac{\Gamma(8)}{\epsilon_4} \left( 1 - \frac{363}{280} \epsilon_4 \right) \int_0^1 dx dw dy dr dz z^2 ds s^2 dt t^3 (1-t)^3 \times \\ [t(1-t)k'^2 + (m_s^2 - m_z^2)t + m_z^2]^{-\epsilon_3/2}. \quad (4.199)$$

Com isso, no ponto de simetria obtemos

$$I_2 = \frac{\Gamma(8)}{\epsilon_4} \left(1 - \frac{363}{280}\epsilon_4\right) \int_0^1 dx dw dy dr dz z^2 ds s^2 dt t^3 (1-t)^3 [(m_s^2 - m_z^2)t + m_z^2]^{-\epsilon_3/2}. \quad (4.200)$$

Calculamos essa integral e obtemos

$$I_{2SP} = \frac{1}{\epsilon_4} \left(1 - \frac{1}{8}\epsilon_4\right), \quad (4.201)$$

onde novamente fizemos  $\epsilon_4 = 0$  nas potências dos números complexos finais.

Assim, olhando para os casos  $n = 1, 2, 3, 4$ , podemos escrever o resultado para um valor geral de  $n$  como

$$I_{2SP} = \frac{1}{\epsilon_n} \left(1 - \frac{1}{2n}\epsilon_n\right). \quad (4.202)$$

Agora vamos calcular  $I_4$  que é o grafo de dois "loops" que contribui para a função de 4 pontos. Essa integral é dada por

$$I_4 = \int d^m k_1 d^m k_2 \frac{1}{[(k_1^2)^n + 1]^2 [(k_2^2)^n + 1] \{[(k_1 + k_2)^2]^n + 1\}}. \quad (4.203)$$

Usando  $I_2$  expressa pela equação (4.184), podemos escrever a integral  $I_4$  como

$$I_4 = \frac{\Gamma(2n)}{\epsilon_n} \left[1 + \frac{1}{2}\psi(1)\epsilon_n - \frac{1}{2}\psi(2n)\epsilon_n\right] \int_0^1 dx_1 dx_2 x_2 \dots dx_{n-1} x_{n-1}^{n-2} dy_1 dy_2 y_2 \dots dy_{n-1} y_{n-1}^{n-2} \times \\ dt [t(1-t)]^{n-1-\epsilon_2/2} \int dk_1^m \frac{1}{[(k_1^2)^n + 1]^2 [(k_1^2)^n + m_t^2]^{\epsilon_n/2}}, \quad (4.204)$$

onde  $m_t^2$  é o mesmo fator que o (B.41). Agora usando parâmetros de Feynman podemos escrever

$$\frac{1}{[(k^2)^n + 1]^2} = \frac{1}{(k_1^2 - r_n)^2 \dots (k_n^2 - r_1)^2} = \Gamma(2n) \times \\ \int_0^1 dx_1 x_1 (1-x_1) dx_2 x_2^3 (1-x_2) \dots dx_{n-1} x_{n-1}^{2n-3} (1-x_{n-1}) \frac{1}{(k_1^2 + m_{x_{n-1}}^2)^{2n}}, \quad (4.205)$$

onde  $m_{x_n}^2$  é dado pela equação (4.182). Assim usando a equação (4.205) na equação (4.204), podemos escrever a integral  $I_4$  como

$$I_4 = \frac{\Gamma(2n)}{\epsilon_n} \left[1 + \frac{1}{2}\psi(1)\epsilon_n - \frac{1}{2}\psi(2n)\epsilon_n\right] \int_0^1 dx_1 dx_2 x_2 \dots dx_{n-1} x_{n-1}^{n-2} dy_1 dy_2 y_2 \dots dy_{n-1} y_{n-1}^{n-2} \times \\ dt [t(1-t)]^{n-1-\epsilon_n/2} dz_1 z_1 (1-z_1) dz_2 z_2^3 (1-z_2) \dots dz_{n-1} z_{n-1}^{2n-3} (1-z_{n-1}) \times$$

$$\int dk_1^m \frac{1}{(k_1^2 + m_{z_{n-1}}^2)^{2n} (k_1^2 + m_t^2)^{\epsilon_n/2}}, \quad (4.206)$$

onde  $m_{z_n}^2$  e  $m_t^2$  são dados pelas equações (B.40) e (B.41), respectivamente. Usando parâmetros de Feynman, integrando em  $k_1$  e absorvendo o fator angular  $S_m$  em uma redefinição da constante de acoplamento temos

$$I_4 = \frac{\Gamma(2n)}{\epsilon_n} \left[ 1 + \frac{1}{2}\psi(1)\epsilon_n - \frac{1}{2}\psi(2n)\epsilon_n \right] \frac{\Gamma(2n - \epsilon_n/2)\Gamma(\epsilon_n)}{2\Gamma(\epsilon_n/2)} \int_0^1 dx_1 dx_2 x_2 \dots dx_{n-1} x_{n-1}^{n-2} \times \\ dy_1 dy_2 y_2 \dots dy_{n-1} y_{n-1}^{n-2} dt [t(1-t)]^{n-1-\epsilon_n/2} dz_1 z_1 (1-z_1) dz_2 z_2^3 (1-z_2) \dots dz_{n-1} z_{n-1}^{2n-3} (1-z_{n-1}) \times \\ du u^{\epsilon_n/2-1} (1-u)^{2n-1} [(m_t^2 - m_{z_{n-1}}^2)u + m_{z_{n-1}}^2]^{-\epsilon_n}. \quad (4.207)$$

Para calcularmos essa integral até a ordem desejada é suficiente calculá-la em

$$[(m_t^2 - m_{z_{n-1}}^2)u + m_{z_{n-1}}^2]_{u=0}^{-\epsilon_n} = (m_{z_{n-1}}^2)^{-\epsilon_n}. \quad (4.208)$$

O fator  $m_{z_{n-1}}^2$  depende das variáveis  $z_i$ , assim podemos integrar  $I_4$  nas outras variáveis obtendo

$$I_4 = \frac{\Gamma(2n)}{2\epsilon_n^2} \left[ 1 + \frac{3}{2}\psi(1)\epsilon_n - \psi(n)\epsilon_n - \frac{1}{2}\psi(2n)\epsilon_n \right] \times \\ \int_0^1 dz_1 z_1 (1-z_1) dz_2 z_2^3 (1-z_2) \dots dz_{n-1} z_{n-1}^{2n-3} (1-z_{n-1}) (m_{z_{n-1}}^2)^{-\epsilon_n}. \quad (4.209)$$

Nesse ponto, assim como em  $I_2$ , não podemos calcular essa integral sem especificarmos o valor de  $n$ . Já conhecemos essas integrais para os casos  $n = 1$  e  $n = 2$

$$I_4 = \frac{1}{2\epsilon_1^2} \left( 1 - \frac{1}{2}\epsilon_1 \right), \quad (4.210)$$

$$I_4 = \frac{1}{2\epsilon_2^2} \left( 1 - \frac{7}{12}\epsilon_2 \right). \quad (4.211)$$

Para os casos  $n = 3$  e  $n = 4$ , procedemos da mesma maneira que na obtenção das equações (4.203)-(4.209). Fazendo isto, obtemos os seguintes resultados

$$I_4 = \frac{1}{2\epsilon_3^2} \left( 1 - \frac{83}{120}\epsilon_3 \right), \quad (4.212)$$

$$I_4 = \frac{1}{2\epsilon_4^2} \left( 1 - \frac{661}{840}\epsilon_4 \right), \quad (4.213)$$

onde usamos a integral

$$\int_0^1 dx x^a (1-x)^b = \frac{\Gamma(a+1)\Gamma(b+1)}{\Gamma(a+b+2)} \quad (4.214)$$

Assim, a expressão para a integral válida para  $n$  geral que se reduz aos casos  $n = 1, 2, 3, 4$  pode ser escrita como

$$I_4 = \frac{1}{2\epsilon_n^2} \left( 1 + D(n)\epsilon_n - \frac{1}{n}\epsilon_n \right), \quad (4.215)$$

onde

$$D(n) = \frac{1}{2}\psi(1) - \psi(n) + \frac{1}{2}\psi(2n). \quad (4.216)$$

Apesar dessas complicações aparecerem no cálculo de  $I_2$  e  $I_4$ , o cálculo de  $I_3'$  e  $I_5'$  que contribuem para a função de 2 pontos pode ser realizado para todo  $n$ . Elas se encontram no apêndice B. Portanto, podemos usar estes resultados para determinar os expoentes.

Os coeficientes  $a_{1n}$ - $c_{2n}$ , do apêndice B, com as integrais calculadas exatamente, são dados por

$$a_{1n} = \frac{N+8}{6\epsilon_n} \left( 1 - \frac{1}{2n}\epsilon_n \right), \quad (4.217)$$

$$a_{2n} = \left( \frac{N+8}{6\epsilon_n} \right)^2 - \frac{N^2 + 26N + 108}{36n\epsilon_n} + \frac{5N+22}{18\epsilon_n} \left( \frac{1}{n} - D(n) \right) - (-1)^n \frac{\Gamma(2n)^2(N+2)}{36\Gamma(n+1)\Gamma(3n)\epsilon_n}, \quad (4.218)$$

$$b_{2n} = (-1)^n \frac{\Gamma(2n)^2(N+2)}{72\Gamma(n+1)\Gamma(3n)\epsilon_n} \left( 1 - \frac{3}{4}\epsilon_n + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{p}\epsilon_n - \frac{1}{2} \sum_{p=3}^{3n-1} \frac{1}{p}\epsilon_n - \Gamma(3n)J^{n-1}\epsilon_n \right), \quad (4.219)$$

$$b_{3n} = (-1)^n \frac{\Gamma(2n)^2(N+2)(N+8)}{648\Gamma(n+1)\Gamma(3n)\epsilon_n^2} \left( 1 - \frac{1}{4}\epsilon_n + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{p}\epsilon_n - \sum_{p=2}^{2n-1} \frac{1}{p}\epsilon_n + \frac{1}{2} \sum_{p=3}^{3n-1} \frac{1}{p}\epsilon_n - \frac{3}{2n}\epsilon_n \right), \quad (4.220)$$

$$c_{1n} = \frac{N+2}{6\epsilon_n} \left( 1 - \frac{1}{2n}\epsilon_n \right), \quad (4.221)$$

$$c_{2n} = \frac{N+2}{6\epsilon_n^2} \left[ \frac{N+5}{6} \left( 1 - \frac{1}{n} \right) \epsilon_n - \frac{1}{2} D(n) \epsilon_n \right]. \quad (4.222)$$

Assim obtemos a função  $\beta_n$  e as funções de Wilson como

$$\beta_n(u_n) = -u_n \left\{ \epsilon_n - \frac{N+8}{6} \left( 1 - \frac{1}{2n}\epsilon_n \right) u_n + \left[ \frac{5N+22}{9} D(n) + (-1)^n \frac{\Gamma(2n)^2(N+2)}{18\Gamma(n+1)\Gamma(3n)} \right] u_n^2 \right\}, \quad (4.223)$$

$$\gamma_{\phi(n)}(u_n) = (-1)^{n+1} \frac{\Gamma(2n)^2(N+2)}{36\Gamma(n+1)\Gamma(3n)} u_n^2 \left[ 1 - \frac{3}{4}\epsilon_n + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{p} \epsilon_n - \frac{1}{2} \sum_{p=3}^{3n-1} \frac{1}{p} \epsilon_n - \Gamma(3n) J^{n-1} \epsilon_n + \frac{N+8}{6} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sum_{p=2}^{2n-1} \frac{1}{p} + \frac{1}{2} \sum_{p=3}^{3n-1} \frac{1}{p} - \frac{1}{n} + \Gamma(3n) J^{n-1} \right) u_n \right], \quad (4.224)$$

$$\bar{\gamma}_{\phi(n)}^2(u_n) = \frac{N+2}{6} u_n \left( 1 - \frac{1}{2n} \epsilon_n - D(n) u_n \right). \quad (4.225)$$

Calculamos o ponto fixo  $u_{n\infty}$  e obtemos

$$u_{n\infty} = \frac{6}{N+8} \epsilon_n \left\{ 1 + \epsilon_n \left( \left[ (20N+88)D(n) + (-1)^n \frac{\Gamma(2n)^2(2N+4)}{\Gamma(n+1)\Gamma(3n)} \right] \frac{1}{(N+8)^2} + \frac{1}{2n} \right) \right\}. \quad (4.226)$$

Calculamos o expoente  $\eta_n$  como

$$\eta_n = (-1)^{n+1} \frac{\Gamma(2n)^2(N+2)}{\Gamma(n+1)\Gamma(3n)(N+8)^2} \epsilon_n^2 [1 + F(N, n) \epsilon_n], \quad (4.227)$$

onde

$$F(N, n) = \left( (-1)^n \frac{\Gamma(2n)^2(4N+8)}{\Gamma(n+1)\Gamma(3n)} + (40n+176)D(n) \right) \frac{1}{(N+8)^2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{p} - \sum_{p=1}^{2n-1} \frac{1}{p} + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{3n-1} \frac{1}{p}. \quad (4.228)$$

A integral  $J^{n-1}$  se cancelou no cálculo de  $\eta_n$ .

Agora com

$$\bar{\gamma}_{\phi(n)}^2(u_{n\infty}) = \epsilon_n \frac{N+2}{N+8} \left\{ 1 + \epsilon_n \left( \left[ (14N+40)D(n) + (-1)^n \frac{\Gamma(2n)^2(2N+4)}{\Gamma(n+1)\Gamma(3n)} \right] \frac{1}{(N+8)^2} \right) \right\}, \quad (4.229)$$

obtemos

$$\nu_n = \frac{1}{2n} + \frac{N+2}{4n^2(N+8)} \epsilon_n + \frac{(N+2)}{4n^2(N+8)^3} \epsilon_n^2 \left( (-1)^n (N-4) \frac{\Gamma(2n)^2(2N+4)}{\Gamma(n+1)\Gamma(3n)} + \frac{(N+2)(N+8)}{2n} + (14N+40)D(n) \right). \quad (4.230)$$

Os expoentes  $\eta_n$  e  $\nu_n$  estão em perfeita concordância com os respectivos expoentes calculados na teoria sem massa. Um manuscrito contendo os resultados relacionados a este capítulo está em preparação [76].

Agora faremos uma comparação dos resultados para os expoentes críticos em alguns casos isotrópicos calculados na aproximação ortogonal e exatamente [74].

Com um valor  $N = 1$  para o número de componentes do parâmetro de ordem e  $d = 4n - \epsilon_n$  a dimensão espacial do sistema de maneira que o valor de  $\epsilon_n$  seja  $\epsilon_n = 1$ , obtemos, respectivamente, os expoentes críticos para alguns valores de  $n$  calculados na aproximação ortogonal e exatamente.

Para um sistema em 11 dimensões temos o caso isotrópico de terceiro caráter ( $n = 3$ ) e os seguintes expoentes críticos isotrópicos

$$\nu_3 = 0.177 \quad \eta_3 = 0.006 \quad \gamma_3 = 1.064 \quad \alpha_3 = 0.046 \quad \beta_3 = 0.446 \quad \delta_3 = 3.385$$

$$\nu_3 = 0.174 \quad \eta_3 = 0.002 \quad \gamma_3 = 1.046 \quad \alpha_3 = 0.085 \quad \beta_3 = 0.435 \quad \delta_3 = 3.390$$

Nesse caso, o maior erro ocorre para o expoente  $\alpha_3$ (4.1%) e para  $\gamma_3$ (1.8%),  $\beta_3$ (1%). Os outros expoentes possuem um erro menor que 0.5%.

Os expoentes críticos para uma rede em 15 dimensões que definem o comportamento crítico de um sistema isotrópico de quarto caráter ( $n = 4$ ) são dados por

$$\nu_4 = 0.131 \quad \eta_4 = 0.005 \quad \gamma_4 = 1.046 \quad \alpha_4 = 0.036 \quad \beta_4 = 0.459 \quad \delta_4 = 3.279$$

$$\nu_4 = 0.129 \quad \eta_4 = -0.001 \quad \gamma_4 = 1.029 \quad \alpha_4 = 0.058 \quad \beta_4 = 0.449 \quad \delta_4 = 3.282$$

Os respectivos erros nesse caso são  $\alpha_4$ (2.2%),  $\gamma_4$ (1.7%) e  $\beta_4$ (1%) e os outros expoentes têm um erro menor que 0.6%.

Agora para o caso de uma rede em 19 dimensões, temos o comportamento isotrópico de quinto caráter ( $n = 5$ ). Com isso os expoentes nesta situação são dados por

$$\nu_5 = 0.104 \quad \eta_5 = 0.004 \quad \gamma_5 = 1.036 \quad \alpha_5 = 0.030 \quad \beta_5 = 0.467 \quad \delta_5 = 3.219$$

$$\nu_5 = 0.102 \quad \eta_5 = 0.001 \quad \gamma_5 = 1.020 \quad \alpha_5 = 0.064 \quad \beta_5 = 0.475 \quad \delta_5 = 3.220$$

Os erros são dados por  $\alpha_5$ (3.4%),  $\gamma_5$ (1.6%). Os outros expoentes críticos possuem um erro menor que 0.8%.

Concluimos então que a aproximação ortogonal possui uma precisão muito grande ao fornecer resultados para os expoentes críticos em valores específicos dos parâmetros envolvidos.

## Conclusões gerais e perspectivas

Devemos obter o mesmo valor para uma grandeza física quando a obtemos de maneiras distintas. Com essa finalidade, propusemos um método alternativo para calcular os expoentes críticos de sistemas físicos exibindo transições de fase caracterizadas por pontos de Lifshitz  $m$ -axiais. Nesse método, usamos uma teoria de campo escalar massiva renormalizada em momentos externos nulos. Como esse método envolve duas escalas de massa independentes no caso anisotrópico que geram duas transformações de escala independentes, uma em cada subespaço inequivalente, o denominamos de método de Callan-Symanzik-Lifshitz. Calculamos os expoentes críticos anisotrópicos que descrevem o comportamento crítico desses sistemas, no mínimo, até a ordem de 2 "loops" usando a aproximação ortogonal. De fato, calculamos as dimensões anômalas  $\eta_{L2}$  e  $\eta_{L4}$  até a ordem 3 no número de "loops" e os expoentes críticos  $\nu_{L2}$  e  $\nu_{L4}$  até segunda ordem em "loops". Realizamos um cálculo para os expoentes críticos isotrópicos  $\eta_{L4}$  e  $\nu_{L4}$  nessa mesma ordem em "loops" usando a aproximação ortogonal. Como no caso isotrópico existe somente uma escala de massa, os calculamos exatamente pela primeira vez usando uma teoria massiva. Os resultados para todos esses expoentes estão em perfeita concordância com os obtidos usando teorias sem massa renormalizadas em momentos externos não-nulos [69]. Este fato confirma a hipótese de universalidade dos expoentes críticos que são os mesmos independentemente da teoria utilizada para calculá-los, apesar da teoria massiva ser conceitualmente diferente (com estágios intermediários distintos). Os expoentes anisotrópicos  $\eta_{L2}$  e  $\nu_{L2}$  do subespaço não-competitivo ( $\tau = 1$ ) se reduzem aos expoentes críticos de sistemas físicos sem interações competitivas quando essas interações são desligadas. Isto é obtido fazendo  $m = 0$ . Este é um exemplo de redução de classe de universalidade.

Diferentemente da teoria sem massa que é invariante por duas transformações de es-

cala independentes em cada subespaço inequivalente quando  $\beta_\tau(u_\tau^*) = 0$  e as constantes de acoplamento fluem naturalmente para o mesmo valor do ponto fixo infravermelho  $u^*$ , em teorias massivas temos a condição  $\beta_\tau(u_{\tau\infty}) = 0$ , onde  $u_{\tau\infty}$  são os dois pontos fixos ultravioletas associados aos subespaços não-competitivo e competitivo inequivalentes. Esses pontos fixos são não atrativos e invariança de escala foi obtida apenas quando fixamos os valores das constantes de acoplamentos em cada subespaço inequivalente em seu valor ultravioleta  $u_\infty$ . Assim, como estamos no regime ultravioleta, todos os nossos resultados são válidos no limite em que os momentos são grandes em comparação com as escalas de massa envolvidas neste problema. Provamos também a renormalizabilidade multiplicativa para todas as ordens em "loops" em teoria de perturbação para a teoria massiva.

Como uma extensão deste trabalho, podemos pensar em estudar outras grandezas físicas universais como razões entre amplitudes de alguns potenciais termodinâmicos acima e abaixo da temperatura crítica como susceptibilidade e calor específico. Embora tenham sido realizados alguns cálculos para as razões entre amplitudes da susceptibilidade [63] e calor específico [68] para pontos de Lifshitz uniaxiais. Dentro dessa idéia, uma análise de grupo de renormalização para todas as amplitudes ainda não foi realizada para essa situação. Gostaríamos de estender o estudo desse caso para os pontos de Lifshitz  $m$ -axiais que são mais gerais.

Dentro da Mecânica Estatística podemos estudar os problemas de correções à escala e fenômenos de crossover para sistemas críticos exibindo pontos de Lifshitz.

Outro problema que pode ser atacado futuramente é o cálculo dos mesmos expoentes críticos que obtemos usando o método de subtração mínima de pólos dimensionais. Nesse caso, temos que usar uma teoria massiva em que os momentos externos são arbitrários.

Uma possível aplicação do método de Callan-Symanzik-Lifshitz pode ser uma no estudo de campos quânticos anisotrópicos. Nesse caso teríamos duas massas independentes para o mesmo campo. Embora seja difícil entender fisicamente este conceito, lembramos que o comprimento de correlação de um campo quântico é essencialmente o comprimento de onda Compton, que está relacionado com o inverso de massa em unidades naturais,

da partícula representada pelo esse campo. Assim, mais de um comprimento de correlação indicaria que temos mais de uma massa para o mesmo campo representando a partícula. Chegamos então à conclusão de que o campo é distribuído anisotropicamente no espaço-tempo, onde cada comprimento de correlação independente em cada direção espacial inequivalente corresponde a um comprimento de onda Compton inequivalente.

Além do mais, essa distribuição anisotrópica do campo pode indicar uma natureza anisotrópica do espaço-tempo onde esses campos estão definidos. Numa teoria com uma densidade de Lagrangiana euclidiana com derivadas de ordem mais alta como a densidade de Lagrangiana para sistemas do tipo Lifshitz, podemos descrever teorias de campo quânticos anisotrópicos. Assim, podemos definir derivadas quárticas usando uma métrica tal que esse termo quártico toma a forma  $g_{MN}\phi_0(\partial_M)^2(\partial_N)^2\phi_0\phi_0$  onde  $M, N = 1, \dots, m$  em que  $g_{MN} = \delta_{MN}$ . Ainda podemos aplicar esse método em teorias de campo com derivadas de ordem superior

Calculamos também os expoentes descrevendo o comportamento crítico de sistemas com interações competitivas arbitrárias. Para tal, introduzimos um método que envolve  $L$  escalas de massa independentes nos casos anisotrópicos necessárias para termos  $L$  transformações de grupo de renormalização independentes em cada subespaço inequivalente. Os casos isotrópicos têm apenas uma escala de massa independente em cada caso. Na renormalização dessas teorias usamos teorias renormalizadas em momentos externos nulos. Ao calcularmos as integrais de Feynman necessárias para o cálculo desses expoentes críticos, usamos a aproximação ortogonal generalizada para os casos anisotrópicos e isotrópicos. Os casos isotrópicos foram resolvidos exatamente para um valor de  $n$  arbitrário. Todos esses expoentes foram calculados até, no mínimo, a ordem de 2 "loops" em teoria de perturbação. Todos os resultados obtidos para os expoentes calculados foram idênticos àqueles calculados usando teorias sem massa renormalizadas em momentos externos arbitrários anteriormente [74]. Esses expoentes obedecem assim à hipótese de universalidade que nos diz que grandezas físicas universais são as mesmas, independentemente do esquema de renormalização em sua que foram obtidas. Eles também satisfazem ao critério de redução de classe de universalidade quando as interações competitivas são

desligadas e se reduzem aos seus respectivos valores para sistemas críticos na ausência dessas interações competitivas.

Obtivemos a propriedade de invariança de escala para esses sistemas com interações competitivas arbitrárias. Isto foi obtido apenas quando fixamos os valores das constantes de acoplamento encontradas com o auxílio das condições  $\beta_n(u_{n\infty}) = 0$  nos seus valores do ponto fixo ultravioleta  $u_\infty$ .

Um trabalho futuro associado a sistemas com interações competitivas arbitrárias que pode ser realizado em princípio é o problema de calcularmos os expoentes críticos encontrados para esses sistemas usando o método de subtração mínima de pólos dimensionais.

# Cálculo de integrais: Pontos de Lifshitz *m*-axiais

Calcularemos agora integrais de Feynman em regularização dimensional. No caso anisotrópico as integrais são calculadas usando uma aproximação, conhecida como aproximação ortogonal [69]. Esta aproximação é utilizada no cálculo de integrais onde seus propagadores possuem momentos com potências quárticas e consiste em fazermos

$$[(k + K')^2]^2 \approx [k^2 + K'^2]^2 = (k^2)^2 + 2k^2 K'^2 + (K'^2)^2. \quad (\text{A.1})$$

Nessa aproximação, ao integrarmos nos momentos quárticos, usamos a fórmula

$$\int d^m k \frac{1}{[(k^2)^2 + 2ak^2 + m^2]^\beta} \cong \frac{1}{4} S_m \frac{\Gamma(m/4)\Gamma(\beta - m/4)}{\Gamma(\beta)} (m^2 - a^2)^{m/4 - \beta}, \quad (\text{A.2})$$

onde  $S_m$  é a área da hipersfera  $m$ -dimensional.

## A.1 Caso Anisotrópico na Aproximação Ortogonal

Lembrando que no caso anisotrópico a dimensão crítica é  $d_c = 4 + m/2$ , o parâmetro de expansão  $\epsilon_L$  nesse caso é definido por  $\epsilon_L = 4 + m/2 - d$ .

A primeira integral é o grafo de um loop da função de dois pontos

$$I_2 = \int d^{d-m} q d^m k \frac{1}{[q^2 + (k^2)^2 + 1]\{(q + P)^2 + [(k + K')^2]^2 + 1\}}. \quad (\text{A.3})$$

Com

$$a_1 = (q + P)^2 + [(k + K')^2]^2 + 1, a_2 = q^2 + (k^2)^2 + 1, \alpha_1 = \alpha_2 = 1, \quad (\text{A.4})$$

na equação (4.170), integrando em  $q$ , a equação (A.3) toma a forma

$$I_2 = \frac{1}{2} S_{d-m} \Gamma\left(2 - \frac{m}{4} - \frac{\epsilon_L}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m}{4} + \frac{\epsilon_L}{2}\right) \int_0^1 dx \times$$

$$\int d^m k \frac{1}{[(k^2)^2 + 2xK'^2 k^2 + x(1-x)P^2 + x(K'^2)^2 + 1]^{m/4 + \epsilon_L/2}}. \quad (\text{A.5})$$

Agora usando a equação (A.2), usando parâmetros de Feynman, obtemos para  $I_2$

$$I_2 = \frac{1}{8} S_{d-m} S_m \Gamma\left(2 - \frac{m}{4} - \frac{\epsilon_L}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m}{4}\right) \Gamma\left(\frac{\epsilon_L}{2}\right) \int_0^1 dx \{x(1-x)[P^2 + (K'^2)^2] + 1\}^{-\epsilon_L/2}. \quad (\text{A.6})$$

Expandindo as funções  $\Gamma$  de acordo com a identidade

$$\Gamma(a + bx) = \Gamma(a)[1 + bx\psi(a) + O(x^2)] \quad (\text{A.7})$$

e a equação (4.172) podemos escrever  $I_2$  como

$$I_2 = \frac{1}{4} S_{d-m} S_m \Gamma\left(2 - \frac{m}{4}\right) \Gamma\left(\frac{m}{4}\right) \frac{1}{\epsilon_L} [1 + ([i_2]_m - 1)\epsilon_L] \int_0^1 dx \{x(1-x)[P^2 + (K'^2)^2] + 1\}^{-\epsilon_L/2}, \quad (\text{A.8})$$

onde

$$[i_2]_m = 1 + \frac{1}{2} \left[ \psi(1) - \psi\left(2 - \frac{m}{4}\right) \right], \quad (\text{A.9})$$

e  $\psi(z) = (d/dz) \ln \Gamma(z)$ . Agora absorvendo o fator angular

$$\frac{1}{4} S_{d-m} S_m \Gamma\left(2 - \frac{m}{4}\right) \Gamma\left(\frac{m}{4}\right) \quad (\text{A.10})$$

em uma redefinição da constante de acoplamento, como nas equações (2.100)- (2.103), temos

$$I_2 = \frac{1}{\epsilon_L} [1 + ([i_2]_m - 1)\epsilon_L] \int_0^1 dx \{x(1-x)[P^2 + (K'^2)^2] + 1\}^{-\epsilon_L/2}. \quad (\text{A.11})$$

Assim no ponto de simetria  $SP$ , onde os momentos externos são feitos nulos, temos

$$I_{2SP} = I_2|_{P^2=(K'^2)^2=0} = \frac{1}{\epsilon_L} [1 + ([i_2]_m - 1)\epsilon_L]. \quad (\text{A.12})$$

Agora a próxima integral que calcularemos é o grafo de dois "loops" da função de dois pontos

$$I_3 = \int dq_1^{d-m} dq_2^{d-m} dk_1^m dk_2^m \frac{1}{[q_1^2 + (k_1^2)^2 + 1][q_2^2 + (k_2^2)^2 + 1]} \times \frac{1}{\{(q_1 + q_2 + P)^2 + [(k_1 + k_2 + K')^2]^2 + 1\}}. \quad (\text{A.13})$$

De  $I_2$ , equação (A.3), podemos escrever a integral  $I_3$  como

$$I_3 = \int dq_1^{d-m} dk_1^m \frac{1}{[q_1^2 + (k_1^2)^2 + 1]} I_2(q_1 + P, k_1 + K'). \quad (\text{A.14})$$

Da equação (A.11) podemos escrever  $I_3$  como

$$I_3 = \frac{1}{\epsilon_L} [1 + ([i_2]_m - 1)\epsilon_L] \int_0^1 dx [x(1-x)]^{-\epsilon_L/2} \times \int dq_1^{d-m} dk_1^m \frac{1}{[q_1^2 + (k_1^2)^2 + 1] \{(q_1 + P)^2 + [(k_1 + K')^2]^2 + m_x^2\}^{\epsilon_L/2}}, \quad (\text{A.15})$$

onde  $m_x^2 = [x(1-x)]^{-1}$ . Agora usando parâmetros de Feynman, integrando em  $q_1$ ,  $k_1$ , e absorvendo o fator angular (A.10) em uma redefinição da constante de acoplamento obtemos

$$I_3 = -\frac{1}{4\epsilon_L} [1 + (2[i_2]_m - 1)\epsilon_L] \int_0^1 dx [x(1-x)]^{-\epsilon_L/2} \times \int_0^1 dy y^{\epsilon_L/2-1} \{y(1-y)[P^2 + (K'^2)^2] + (m_x^2 - 1)y + 1\}^{1-\epsilon_L}. \quad (\text{A.16})$$

Assim, fazendo o mesmo como feito no cálculo de  $I_3$  para a teoria  $\phi^4$ , no ponto de simetria temos

$$I_3' = \left. \frac{\partial I_3}{\partial P^2} \right|_{P^2=(K'^2)^2=0} = \left. \frac{\partial I_3}{\partial (K'^2)^2} \right|_{P^2=(K'^2)^2=0} = -\frac{1}{8\epsilon_L} \left( 1 + 2[i_2]_m \epsilon_L - 1 - \frac{5}{4}\epsilon_L \right) - \frac{1}{8} I, \quad (\text{A.17})$$

onde a integral  $I$  é a mesma que a (2.106).

Consideremos agora o grafo de três "loops" da função de dois pontos

$$I_5 = \int dq_1^{d-m} dq_2^{d-m} dq_3^{d-m} dk_1^m dk_2^m dk_3^m \frac{1}{[q_1^2 + (k_1^2)^2 + 1][q_2^2 + (k_2^2)^2 + 1][q_3^2 + (k_3^2)^2 + 1]} \times \frac{1}{\{(q_1 + q_2 + P)^2 + [(k_1 + k_2 + K')^2]^2 + 1\} \{(q_1 + q_3 + P)^2 + [(k_1 + k_3 + K')^2]^2 + 1\}}. \quad (\text{A.18})$$

De  $I_2$ , equação (A.3), podemos escrever a integral  $I_3$  como

$$I_5 = \int dq_1^{d-m} dk_1^m \frac{1}{[q_1^2 + (k_1^2)^2 + 1]} [I_2(q_1 + P, k_1 + K')]^2. \quad (\text{A.19})$$

Como no cálculo de  $I_5$  para a teoria  $\phi^4$  podemos escrever  $I_5$  como

$$I_5 = \frac{1}{\epsilon_L^2} [1 + 2([i_2]_m - 1)\epsilon_L] \int_0^1 dx [x(1-x)]^{-\epsilon_L} \times$$

$$\int dq_1^{d-m} dk_1^m \frac{1}{[q_1^2 + (k_1^2)^2 + 1] \{(q_1 + P)^2 + [(k_1 + K')^2]^2 + m_x^2\}^{\epsilon_L}}, \quad (\text{A.20})$$

Utilizando agora parâmetros de Feynman, integrando em  $q_1$  e  $k_1$ , e absorvendo o fator angular (A.10) em uma redefinição da constante de acoplamento obtemos

$$I_5 = -\frac{1}{3\epsilon_L^2} \left( 1 + 3[i_2]_m \epsilon_L - \frac{3}{2} \epsilon_L \right) \int_0^1 dx [x(1-x)]^{-\epsilon_L} \times \int_0^1 dy y^{\epsilon_L-1} \{y(1-y)[P^2 + (K'^2)^2] + (m_x^2 - 1)y + 1\}^{1-3\epsilon_L/2}. \quad (\text{A.21})$$

Assim no ponto de simetria temos

$$I'_5 = \frac{\partial I_3}{\partial P^2} \Big|_{P^2=(K'^2)^2=0} = \frac{\partial I_3}{\partial (K'^2)^2} \Big|_{P^2=(K'^2)^2=0} = -\frac{1}{6\epsilon_L} \left( 1 + 3[i_2]_m \epsilon_L - \frac{7}{4} \epsilon_L \right) - \frac{1}{4\epsilon_L} I, \quad (\text{A.22})$$

onde a integral  $I$  é a mesma que a (2.106).

Finalmente calcularemos o grafo de dois "loops" da função de quatro pontos

$$I_4 = \int dq_1^{d-m} dq_2^{d-m} dk_1^m dk_2^m \frac{1}{[q_1^2 + (k_1^2)^2 + 1]^2 [q_2^2 + (k_2^2)^2 + 1]} \times \frac{1}{\{(q_1 + q_2)^2 + [(k_1 + k_2)^2]^2 + 1\}}. \quad (\text{A.23})$$

Usando  $I_2$ , equação (A.3), podemos escrever  $I_4$  como

$$I_4 = \int dq_1^{d-m} dk_1^m \frac{1}{[q_1^2 + (k_1^2)^2 + 1]^2} I_2(q_1, k_1). \quad (\text{A.24})$$

De acordo com a equação (A.11) podemos escrever  $I_4$  como

$$I_4 = \frac{1}{\epsilon_L} [1 + ([i_2]_m - 1)\epsilon_L] \int_0^1 dx [x(1-x)]^{-\epsilon_L/2} \times \int dq_1^{d-m} dk_1^m \frac{1}{[q_1^2 + (k_1^2)^2 + 1] \{q_1^2 + (k_1^2)^2 + m_x^2\}^{\epsilon_L/2}}. \quad (\text{A.25})$$

Usando agora parâmetros de Feynman, integrando em  $q_1$ ,  $k_1$ , e absorvendo o fator angular (A.10) em uma redefinição da constante de acoplamento temos

$$I_4 = \frac{1}{4\epsilon_L} [1 + 2([i_2]_m - 1)\epsilon_L] \int_0^1 dx [x(1-x)]^{-\epsilon_L/2} \int_0^1 dy y^{\epsilon_L/2-1} (1-y) [(m_x^2 - 1)y + 1]^{-\epsilon_L}. \quad (\text{A.26})$$

Como vimos no capítulo 3, calculamos integrais desse tipo em  $[\ ]_{y=0}^{-\epsilon_L}$ , assim obtemos

$$I_4 = \frac{1}{4\epsilon_L} [1 + 2([i_2]_m - 1)\epsilon_L] \int_0^1 dx [x(1-x)]^{-\epsilon_L/2} \int_0^1 dy y^{\epsilon_L/2-1} (1-y). \quad (\text{A.27})$$

Portanto

$$I_4 = \frac{1}{2\epsilon_L^2} \left( 1 + 2[i_2]_m \epsilon_L - \frac{3}{2} \epsilon_L \right). \quad (\text{A.28})$$

## A.2 Caso Isotrópico na Aproximação Ortogonal

No caso isotrópico a dimensão crítica é 8, assim temos  $d = m = 8 - \epsilon_L$ . Calcularemos as integrais usando a Aproximação Ortogonal.

A primeira integral a ser calculada é o grafo de um loop da função de dois pontos

$$I_2 = \int d^m k \frac{1}{[(k^2)^2 + 1] \{[(k + K')^2]^2 + 1\}}. \quad (\text{A.29})$$

Com

$$a_1 = [(k + K')^2]^2 + 1, a_2 = (k^2)^2 + 1, \alpha_1 = \alpha_2 = 1, \quad (\text{A.30})$$

na equação (4.170), integrando em  $k$ , temos que a equação (A.29), depois de absorvermos o fator angular  $S_m$  em uma redefinição da constante de acoplamento, toma a forma

$$I_2 = \frac{1}{\epsilon_L} \left(1 - \frac{1}{4}\epsilon_L\right) \int_0^1 dx [x(1-x)(K'^2)^2 + 1]^{\epsilon_L/4}. \quad (\text{A.31})$$

Com isso, no ponto de simetria obtemos

$$I_{2SP} = I_2|_{(K'^2)^2=0} = \frac{1}{\epsilon_L} \left(1 - \frac{1}{4}\epsilon_L\right). \quad (\text{A.32})$$

Agora calcularemos o grafo de dois "loops" da função de dois pontos

$$I_3 = \int d^m k_1 d^m k_2 \frac{1}{[(k_1^2)^2 + 1][(k_2^2)^2 + 1] \{[(k_1 + k_2 + K')^2]^2 + 1\}}. \quad (\text{A.33})$$

De  $I_2$ , equação (A.29), podemos escrever a integral  $I_3$  como

$$I_3 = \frac{1}{\epsilon_L} \left(1 - \frac{1}{4}\epsilon_L\right) \int_0^1 dx [x(1-x)]^{-\epsilon_L/4} \int dk_1^m \frac{1}{[(k_1^2)^2 + 1] \{[(k_1 + K')^2]^2 + m_x^2\}^{\epsilon_L/4}}. \quad (\text{A.34})$$

Usando agora parâmetros de Feynman, integrando em  $k_1$ , e absorvendo o fator angular  $S_m$  em uma redefinição da constante de acoplamento obtemos

$$I_3 = -\frac{1}{8\epsilon_L} \int_0^1 dx [x(1-x)]^{-\epsilon_L/4} \int_0^1 dy y^{\epsilon_L/4-1} [y(1-y)(K'^2)^2 + (m_x^2 - 1)y + 1]^{1-\epsilon_L/2}. \quad (\text{A.35})$$

Fazendo o mesmo como feito no cálculo de  $I_3$  para a teoria  $\phi^4$ , no ponto de simetria temos

$$I'_3 = \left. \frac{\partial I_3}{\partial (K'^2)^2} \right|_{(K'^2)^2=0} = -\frac{1}{16\epsilon_L} \left(1 - \frac{1}{8}\epsilon_L\right) - \frac{1}{32}I, \quad (\text{A.36})$$

onde a integral  $I$  é a mesma que a (2.106).

Calcularemos agora o grafo de três "loops" da função de dois pontos

$$I_5 = \int d^m k_1 d^m k_2 d^m k_3 \frac{1}{[(k_1^2)^2 + 1][(k_2^2)^2 + 1][(k_3^2)^2 + 1]} \times \frac{1}{\{[(k_1 + k_2 + K')^2]^2 + 1\} \{[(k_1 + k_3 + K')^2]^2 + 1\}}. \quad (\text{A.37})$$

De  $I_2$ , equação (A.29), podemos escrever a integral  $I_5$  como

$$I_5 = \frac{1}{\epsilon_L^2} \left(1 - \frac{1}{2}\epsilon_L\right) \int_0^1 dx [x(1-x)]^{-\epsilon_L/2} \int dk_1^m \frac{1}{[(k_1^2)^2 + 1] \{[(k_1 + K'^2)^2]^2 + m_x^2\}^{\epsilon_L/2}}. \quad (\text{A.38})$$

Utilizando parâmetros de Feynman, integrando em  $k_1$ , e absorvendo o fator angular  $S_m$  em uma redefinição da constante de acoplamento, obtemos

$$I_5 = -\frac{1}{6\epsilon_L^2} \int_0^1 dx [x(1-x)]^{-\epsilon_L/2} \int_0^1 dy y^{\epsilon_L/2-1} [y(1-y)(K'^2)^2 + (m_x^2 - 1)y + 1]^{1-3\epsilon_L/4}. \quad (\text{A.39})$$

Então no ponto de simetria temos

$$I_5' = \left. \frac{\partial I_5}{\partial (K'^2)^2} \right|_{(K'^2)^2=0} = -\frac{1}{12\epsilon_L^2} \left(1 - \frac{1}{8}\epsilon_L\right) - \frac{1}{16\epsilon_L} I, \quad (\text{A.40})$$

onde a integral  $I$  é a mesma que a (2.106).

E por último calcularemos o grafo de dois "loops" da função de quatro pontos

$$I_4 = \int dk_1^m dk_2^m \frac{1}{[(k_1^2)^2 + 1]^2 [(k_2^2)^2 + 1] \{[(k_1 + k_2)^2]^2 + 1\}}. \quad (\text{A.41})$$

De acordo com a equação (A.11) podemos escrever  $I_4$  como

$$I_4 = \frac{1}{\epsilon_L} \left(1 - \frac{1}{4}\epsilon_L\right) \int_0^1 dx [x(1-x)]^{-\epsilon_L/4} \int dk_1^m \frac{1}{[(k_1^2)^2 + 1]^2 \{(k_1^2)^2 + m_x^2\}^{\epsilon_L/4}}. \quad (\text{A.42})$$

Usando agora parâmetros de Feynman, integrando em  $k_1$ , e absorvendo o fator angular  $S_m$  em uma redefinição da constante de acoplamento temos

$$I_4 = \frac{1}{8\epsilon_L} \left(1 - \frac{1}{2}\epsilon_L\right) \int_0^1 dx [x(1-x)]^{-\epsilon_L/4} \int_0^1 dy y^{\epsilon_L/4-1} (1-y) [(m_x^2 - 1)y + 1]^{-\epsilon_L/2}. \quad (\text{A.43})$$

Calculamos essa integral em  $\left. \right|_{y=0}^{-\epsilon_L/2}$  e resultando em

$$I_4 = \frac{1}{8\epsilon_L} \left(1 - \frac{1}{2}\epsilon_L\right) \int_0^1 dx [x(1-x)]^{-\epsilon_L/4} \int_0^1 dy y^{\epsilon_L/4-1} (1-y). \quad (\text{A.44})$$

Fazendo uso da equação (4.214) obtemos

$$I_4 = \frac{1}{2\epsilon_L^2} \left(1 - \frac{1}{4}\epsilon_L\right). \quad (\text{A.45})$$

### A.3 Caso Isotrópico - Exato

Como no caso isotrópico temos apenas uma escala de momento, podemos calcular as integrais exatamente. Neste cálculo usamos sempre para cada propagador a identidade

$$(k^2)^2 + 1 = (k^2 + i)(k^2 - i). \quad (\text{A.46})$$

Assim podemos escrever a integral de um loop da função de dois pontos

$$I_2 = \int d^m k \frac{1}{[(k^2)^2 + 1]\{(k + K')^2 + 1\}}. \quad (\text{A.47})$$

Usando parâmetros de Feynman podemos escrever  $I_2$  como

$$I_2 = \int_0^1 \int_0^1 dx dy \int d^m k \frac{1}{(k^2 + im_x^2)^2 (k^2 + im_y^2)^2}, \quad (\text{A.48})$$

onde

$$m_x^2 = 2x - 1, m_y^2 = 2y - 1. \quad (\text{A.49})$$

Usando parâmetros de Feynman e integrando em  $k$ , tendo absorvido o fator angular  $S_m$  em uma redefinição da constante de acoplamento, temos

$$I_2 = \frac{6}{\epsilon_L} \left(1 - \frac{11}{12}\epsilon_L\right) \int_0^1 dz z(1-z) \int_0^1 \int_0^1 dx dy [z(1-z)K'^2 + 2ix(1-z) + 2iyz - i]^{-\epsilon_L/2}. \quad (\text{A.50})$$

Com isso, no ponto de simetria obtemos

$$I_{2SP} = I_2|_{K'^2=0} = \frac{6}{\epsilon_L} \left(1 - \frac{11}{12}\epsilon_L\right) \int_0^1 dz z(1-z) \int_0^1 \int_0^1 dx dy [2ix(1-z) + 2iyz - i]^{-\epsilon_L/2}. \quad (\text{A.51})$$

Calculando as integrais paramétricas e fazendo  $\epsilon_L = 0$  nas potências de  $i$  podemos escrever

$$I_{2SP} = \frac{1}{\epsilon_L} \left(1 - \frac{1}{4}\epsilon_L\right). \quad (\text{A.52})$$

A integral de dois "loops" da função de dois pontos é

$$I_3 = \int d^m k_1 d^m k_2 \frac{1}{[(k_1^2)^2 + 1][(k_2^2)^2 + 1]\{(k_1 + k_2 + K')^2 + 1\}}. \quad (\text{A.53})$$

De  $I_2$ , equação (A.50), podemos escrever a integral  $I_3$  como

$$I_3 = \frac{6}{\epsilon_L} \left(1 - \frac{11}{12}\epsilon_L\right) \int_0^1 dz [z(1-z)]^{1-\epsilon_L/2} \int_0^1 \int_0^1 dx dy \int_0^1 dt \times \\ \int dk_1^m \frac{1}{(k_1^2 + im_t^2)^2 [(k_1 + K')^2 + im_z^2]^{\epsilon_L/2}}, \quad (\text{A.54})$$

onde

$$m_t^2 = 2t - 1, m_z^2 = \frac{2x(1-z) + 2yz - 1}{z(1-z)}. \quad (\text{A.55})$$

Com o uso de parâmetros de Feynman, integrando em  $k_1$ , e absorvendo o fator angular  $S_m$  em uma redefinição da constante de acoplamento obtemos

$$I_3 = \frac{9}{2\epsilon_L} \left(1 - \frac{1}{3}\epsilon_L\right) \int_0^1 dz [z(1-z)]^{1-\epsilon_L/2} \int_0^1 \int_0^1 dx dy \int_0^1 dt \times \\ \int_0^1 du u^{\epsilon_L/2-1} [u(1-u)K'^2 + i(m_z^2 - m_t^2)u + im_t^2]^{2-\epsilon_L}. \quad (\text{A.56})$$

Agora, fazemos o mesmo como feito no cálculo de  $I_3$  para a teoria  $\phi^4$ , no ponto de simetria podemos escrever

$$I_3' = \left. \frac{\partial I_3}{\partial K'^2} \right|_{K'^2=0} = \frac{3}{80\epsilon_L} \left(1 - \frac{77}{120}\epsilon_L\right) - \frac{9}{2}H, \quad (\text{A.57})$$

onde a integral  $H$  é a integral

$$H = \int_0^1 dz z(1-z) \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 dx dy dt \int_0^1 du u(1-u)^3 \times \\ \ln \left\{ \left[ \frac{2x(1-z) + 2yz - 1}{z(1-z)} - 2t + 1 \right] u + 2t - 1 \right\}. \quad (\text{A.58})$$

Calcularemos agora o grafo de três "loops" da função de dois pontos

$$I_5 = \int d^m k_1 d^m k_2 d^m k_3 \frac{1}{[(k_1^2)^2 + 1][(k_2^2)^2 + 1][(k_3^2)^2 + 1]} \times \\ \frac{1}{\{[(k_1 + k_2 + K')^2]^2 + 1\} \{[(k_1 + k_3 + K')^2]^2 + 1\}}. \quad (\text{A.59})$$

De  $I_2$ , equação (A.50), podemos escrever a integral  $I_5$  como

$$I_5 = \frac{6}{\epsilon_L^2} \left(1 - \frac{11}{6}\epsilon_L\right) \int_0^1 dz [z(1-z)]^{1-\epsilon_L} \int_0^1 \int_0^1 dx dy \times$$

$$\int dk_1^m \frac{1}{(k_1^2 + im_t^2)^2 [(k_1 + K')^2 + m_z^2]^{\epsilon_L}}, \quad (\text{A.60})$$

onde  $m_t^2$  e  $m_z^2$  são as constantes da equação (A.55). Utilizando agora parâmetros de Feynman, integrando em  $k_1$ , e absorvendo o fator angular  $S_m$  em uma redefinição da constante de acoplamento, temos

$$I_5 = \frac{6}{\epsilon_L^2} \left(1 - \frac{1}{2}\epsilon_L\right) \int_0^1 dz [z(1-z)]^{1-\epsilon_L} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 dx dy dt \int_0^1 du u^{\epsilon_L-1} (1-u) [u(1-u)K'^2 + i(m_z^2 - m_t^2)u + im_t^2]^{2-3\epsilon_L/2}. \quad (\text{A.61})$$

Assim no ponto de simetria temos

$$I_5' = \left. \frac{\partial I_5}{\partial K'^2} \right|_{K'^2=0} = \frac{1}{20\epsilon_L^2} \left(1 - \frac{13}{15}\epsilon_L\right) - \frac{9}{\epsilon_L} H, \quad (\text{A.62})$$

onde a integral  $H$  é a mesma que a (A.58).

E por fim calcularemos o grafo de dois "loops" da função de quatro pontos

$$I_4 = \int dk_1^m dk_2^m \frac{1}{[(k_1^2)^2 + 1]^2 [(k_2^2)^2 + 1] \{[(k_1 + k_2)^2]^2 + 1\}}. \quad (\text{A.63})$$

Com a equação (A.50) podemos escrever  $I_4$  como

$$I_4 = \frac{6\Gamma(4)}{\epsilon_L} \left(1 - \frac{11}{12}\epsilon_L\right) \int_0^1 dz [z(1-z)]^{-\epsilon_L/2} \int_0^1 \int_0^1 dx dy \int_0^1 dt t(1-t) \times \int dk_1^m \frac{1}{(k_1^2 + im_t^2)^4 (k_1^2 + im_z^2)^{\epsilon_L/2}}, \quad (\text{A.64})$$

onde  $m_t^2$  e  $m_z^2$  são as constantes da equação (A.55). Usando agora parâmetros de Feynman, integrando em  $k_1$ , e absorvendo o fator angular  $S_m$  em uma redefinição da constante de acoplamento obtemos

$$I_4 = i^{-\epsilon_L} \frac{3}{\epsilon_L} \left(1 - \frac{11}{12}\epsilon_L\right) \frac{\Gamma(4 - \frac{\epsilon_L}{2})\Gamma(\epsilon_L)}{\Gamma(\frac{\epsilon_L}{2})} \int_0^1 dz [z(1-z)]^{1-\epsilon_L/2} \times \int_0^1 \int_0^1 dx dy \int_0^1 dt t(1-t) \int_0^1 du u^{\epsilon_L/2-1} (1-u)^3 [(m_z^2 - m_t^2)u + m_t^2]^{-\epsilon_L}. \quad (\text{A.65})$$

Fazendo  $\epsilon_L = 0$  na potência de  $i$  na equação acima e a calculando em  $[\ ]|_{y=0}^{-\epsilon_L}$  temos

$$I_4 = \frac{3}{\epsilon_L} \left(1 - \frac{11}{12}\epsilon_L\right) \frac{\Gamma(4 - \frac{\epsilon_L}{2})\Gamma(\epsilon_L)}{\Gamma(\frac{\epsilon_L}{2})} \int_0^1 dz [z(1-z)]^{1-\epsilon_L/2} \times$$

$$\int_0^1 \int_0^1 dx dy \int_0^1 dt t(1-t)(2t-1)^{-\epsilon_L} \int_0^1 du u^{\epsilon_L/2-1}(1-u)^3. \quad (\text{A.66})$$

Fazendo uso da equação (4.214) obtemos

$$I_4 = \frac{1}{2\epsilon_L^2} \left( 1 - \frac{7}{12}\epsilon_L \right). \quad (\text{A.67})$$

# Cálculo de integrais: Pontos de Lifshitz arbitrários

## B.1 Caso Anisotrópico na Aproximação Ortogonal

No caso anisotrópico a dimensão crítica é  $4 + \sum_{n=2}^L [(n-1)/n]m_n$ . Para  $n$  geral temos

$$\int d^{m_n} k \frac{1}{[(k^2)^n + 2ak^n + m^2]^\beta} \cong \frac{1}{2n} S_{m_n} \frac{\Gamma(m_n/2n)\Gamma(\beta - m_n/2n)}{\Gamma(\beta)} (m^2 - a^2)^{m_n/2n - \beta}, \quad (\text{B.1})$$

onde  $S_{m_n}$  é a área da hipersfera  $m_n$ -dimensional. Na aproximação ortogonal generalizada fazemos

$$[(k + K')^2]^n = [(k + K')^n]^2 \approx [k^n + K'^n]^2 = (k^2)^n + 2k^n K'^n + (K'^2)^n. \quad (\text{B.2})$$

A integral de um loop da função de dois pontos é

$$I_2 = \int d^{d - \sum_{n=2}^L m_n} q \prod_{n=2}^L d^{m_n} k_{(n)} \frac{1}{\left[ q^2 + \sum_{n=2}^L (k_{(n)}^2)^n + 1 \right]} \times \frac{1}{\left\{ (q + P)^2 + \sum_{n=2}^L [(k_{(n)} + K'_{(n)})^2]^n + 1 \right\}}. \quad (\text{B.3})$$

Usando parâmetros de Feynman podemos escrever a integral  $I_2$  como

$$I_2 = \int_0^1 dx \int d^{d - \sum_{n=2}^L m_n} q \prod_{n=2}^L d^{m_n} k_{(n)} \left( q^2 + 2xP \cdot q_2 + xP^2 + \sum_{n=2}^L (k_{(n)}^2)^n + x \sum_{n=2}^L \{ [(k_{(n)} + K'_{(n)})^2]^n - (k_{(n)}^2)^n \} + 1 \right)^{-2}. \quad (\text{B.4})$$

Agora integrando nos momentos  $q, k_2, \dots, k_L$ , obtemos

$$I_2 = \frac{1}{\epsilon_L} [1 + (h_{m_L} - 1)\epsilon_L] \int_0^1 dx \left\{ x(1-x) \left[ P^2 + \sum_{n=2}^L (K'_{(n)})^2 \right] + 1 \right\}^{-\epsilon_L/2}, \quad (\text{B.5})$$

usamos a equação (A.7) e onde absorvemos o fator angular

$$S_{(d-\sum_{n=2}^L m_n)} \prod_{n=2}^L \frac{1}{2n} S_{m_n} \Gamma\left(\frac{m_n}{2n}\right) \Gamma\left(2 - \sum_{n=2}^L \frac{m_n}{2n}\right) \quad (\text{B.6})$$

em uma redefinição da constante de acoplamento, como nas equações (2.100)-(2.103). A constante  $h_{m_L}$  é dada por

$$h_{m_L} = 1 + \frac{1}{2} \left[ \psi(1) - \psi\left(2 - \sum_{n=2}^L \frac{m_n}{2n}\right) \right], \quad (\text{B.7})$$

e  $\psi(z) = (d/dz) \ln \Gamma(z)$ . No ponto de simetria  $SP$ , onde todos os momentos externos são feitos nulos, temos

$$I_{2SP} = I_2 \Big|_{P^2=(K'^2)^2=\dots(K'^2)^L=0} = \frac{1}{\epsilon_L} [1 + (h_{m_L} - 1)\epsilon_L]. \quad (\text{B.8})$$

A próxima integral é o grafo de dois "loops" da função de dois pontos

$$I_3 = \int d^{d-\sum_{n=2}^L m_n} q_1 d^{d-\sum_{n=2}^L m_n} q_2 \prod_{n=2}^L d^{m_n} k_{1(n)} \prod_{n=2}^L d^{m_n} k_{2(n)} \frac{1}{\left[ q_1^2 + \sum_{n=2}^L (k_{1(n)}^2)^n + 1 \right]} \frac{1}{\left[ q_2^2 + \sum_{n=2}^L (k_{2(n)}^2)^n + 1 \right]} \frac{1}{\left[ (q_1 + q_2 + P)^2 + \sum_{n=2}^L [(k_{1(n)} + k_{2(n)} + K'_{(n)})^2]^n + 1 \right]}. \quad (\text{B.9})$$

Podemos escrever  $I_3$  em termos de  $I_2$ , equação (B.5), como

$$I_3 = \frac{1}{\epsilon_L} [1 + (h_{m_L} - 1)\epsilon_L] \int_0^1 dx [x(1-x)]^{-\epsilon_L/2} \int d^{d-\sum_{n=2}^L m_n} q_1 \prod_{n=2}^L d^{m_n} k_{1(n)} \frac{1}{\left[ q_1^2 + \sum_{n=2}^L (k_{1(n)}^2)^n + 1 \right]} \frac{1}{\left[ (q_1 + P)^2 + \sum_{n=2}^L [(k_{1(n)} + K'_{(n)})^2]^n + m_x^2 \right]^{\epsilon_L/2}}, \quad (\text{B.10})$$

onde  $m_x^2 = [x(1-x)]^{-1}$ . Integrando agora em  $q_1, k_1, \dots, k_L$ , e absorvendo o fator angular (B.6) em uma redefinição da constante de acoplamento temos

$$I_3 = -\frac{1}{4\epsilon_L} [1 + (2h_{m_L} - 1)\epsilon_L] \int_0^1 dx [x(1-x)]^{-\epsilon_L/2} \times \int_0^1 dy y^{\epsilon_L/2-1} \left\{ y(1-y) \left[ P^2 + \sum_{n=2}^L (K'^2)^n \right] + (m_x^2 - 1)y + 1 \right\}^{1-\epsilon_L}. \quad (\text{B.11})$$

Agora obtemos

$$I_3' = \frac{\partial I_3}{\partial P^2} \Big|_{P^2=\dots(K'^2)^L=0} = \dots = \frac{\partial I_3}{\partial (K'^2)^L} \Big|_{P^2=(K'^2)^2=\dots(K'^2)^L=0} \\ = -\frac{1}{8\epsilon_L} \left( 1 + 2h_{m_L} - \frac{5}{4}\epsilon_L \right) - \frac{1}{8}I, \quad (\text{B.12})$$

onde a integral  $I$  é a mesma que a (2.106).

A integral de três "loops" da função de dois pontos é

$$I_5 = \int d^{d-\sum_{n=2}^L m_n} q_1 d^{d-\sum_{n=2}^L m_n} q_2 d^{d-\sum_{n=2}^L m_n} q_3 \prod_{n=2}^L d^{m_n} k_{1(n)} \prod_{n=2}^L d^{m_n} k_{2(n)} \prod_{n=2}^L d^{m_n} k_{3(n)} \times \\ \frac{1}{\left[ q_1^2 + \sum_{n=2}^L [(k_{1(n)})^2]^n + 1 \right] \left[ q_2^2 + \sum_{n=2}^L (k_{2(n)}^2)^n + 1 \right] \left[ q_3^2 + \sum_{n=2}^L (k_{3(n)}^2)^n + 1 \right]} \times \\ \frac{1}{\left[ (q_1 + q_2 + P)^2 + \sum_{n=2}^L [(k_{1(n)} + k_{2(n)} + K'_{(n)})^2]^n + 1 \right]} \times \\ \frac{1}{\left[ (q_1 + q_3 + P)^2 + \sum_{n=2}^L [(k_{1(n)} + k_{3(n)} + K'_{(n)})^2]^n + 1 \right]}. \quad (\text{B.13})$$

Agora escrevemos  $I_5$  em termos de  $I_2$ , equação (B.5), como

$$I_5 = \frac{1}{\epsilon_L^2} [1 + 2(h_{m_L} - 1)\epsilon_L] \int_0^1 dx [x(1-x)]^{-\epsilon_L/2} \int d^{d-\sum_{n=2}^L m_n} q_1 \prod_{n=2}^L d^{m_n} k_{1(n)} \\ \frac{1}{\left[ q_1^2 + \sum_{n=2}^L (k_{1(n)}^2)^n + 1 \right] \left[ (q_1 + P)^2 + \sum_{n=2}^L [(k_{1(n)} + K'_{(n)})^2]^n + m_x^2 \right]^{\epsilon_L}} \quad (\text{B.14})$$

Integrando em  $q_1, k_1, \dots, k_L$ , e absorvendo o fator angular (B.6) em uma redefinição da constante de acoplamento obtemos para  $I_5$

$$I_5 = -\frac{1}{3\epsilon_L^2} [1 + 3(h_{m_L} - 1)\epsilon_L] \left(1 + \frac{3}{4}\epsilon_L\right) \int_0^1 dx [x(1-x)]^{-\epsilon_L} \times \int_0^1 dy y^{\epsilon_L-1} \left\{ y(1-y) \left[ P^2 + \sum_{n=2}^L (K'^2)^n \right] + (m_x^2 - 1)y + 1 \right\}^{1-3\epsilon_L/2}. \quad (\text{B.15})$$

Assim obtemos

$$I'_5 = \frac{\partial I_5}{\partial P^2} \Big|_{P^2=\dots(K'^2)^L=0} = \dots = \frac{\partial I_5}{\partial (K'^2)^L} \Big|_{P^2=(K'^2)^2=\dots(K'^2)^L=0} = -\frac{1}{6\epsilon_L^2} \left(1 + 3h_{m_L} - \frac{7}{4}\epsilon_L\right) - \frac{1}{4\epsilon_L} I, \quad (\text{B.16})$$

onde a integral  $I$  é a mesma que a (2.106).

Por último calcularemos a integral de dois "loops" da função de quatro pontos

$$I_4 = \int d^{d-\sum_{n=2}^L m_n} q_1 d^{d-\sum_{n=2}^L m_n} q_2 \prod_{n=2}^L d^{m_n} k_{1(n)} \prod_{n=2}^L d^{m_n} k_{2(n)} \frac{1}{\left[ q_1^2 + \sum_{n=2}^L (k_{1(n)}^2)^n + 1 \right]^2} \times \frac{1}{\left[ q_1^2 + \sum_{n=2}^L (k_{1(n)}^2)^n + 1 \right] \left[ (q_1 + q_2)^2 + \sum_{n=2}^L [(k_{1(n)} + k_{2(n)})^2]^n + 1 \right]}. \quad (\text{B.17})$$

Escrevendo  $I_4$  em termos de  $I_2$ , equação (B.5), como

$$I_4 = \frac{1}{\epsilon_L} [1 + (h_{m_L} - 1)\epsilon_L] \int_0^1 dx [x(1-x)]^{-\epsilon_L/2} \int d^{d-\sum_{n=2}^L m_n} q_1 d^{d-\sum_{n=2}^L m_n} q_2 \prod_{n=2}^L d^{m_n} k_{1(n)} \frac{1}{\left[ q_1^2 + \sum_{n=2}^L (k_{1(n)}^2)^n + 1 \right]^2 \left[ q_1^2 + \sum_{n=2}^L (k_{1(n)}^2)^n + m_x^2 \right]^{\epsilon_L/2}}, \quad (\text{B.18})$$

Integrando em  $q_1, k_1, \dots, k_L$ , e absorvendo o fator angular (B.6) em uma redefinição da constante de acoplamento obtemos

$$I_4 = \frac{1}{4\epsilon_L} [1 + 2(h_{m_L} - 1)\epsilon_L] \int_0^1 dx [x(1-x)]^{-\epsilon_L/2} \int_0^1 dy y^{\epsilon_L/2-1} (1-y) [(m_x^2 - 1)y + 1]^{-\epsilon_L}. \quad (\text{B.19})$$

Calculando a integral acima em  $[(m_x^2 - 1)y + 1]^{-\epsilon_L}|_{y=0} = 1$  podemos escrever  $I_4$  como

$$I_4 = \frac{1}{4\epsilon_L} [1 + 2(h_{m_L} - 1)\epsilon_L] \int_0^1 dx [x(1-x)]^{-\epsilon_L/2} \int_0^1 dy y^{\epsilon_L/2-1} (1-y) \quad (\text{B.20})$$

onde obtemos após a integração

$$I_4 = \frac{1}{2\epsilon_L^2} \left( 1 + 2h_{m_L}\epsilon_L - \frac{3}{2}\epsilon_L \right). \quad (\text{B.21})$$

## B.2 Caso Isotrópico na Aproximação Ortogonal

No caso isotrópico a dimensão crítica é  $4n$ . Calcularemos as integrais usando a aproximação ortogonal generalizada.

A primeira integral a ser calculada é o grafo de um loop da função de dois pontos

$$I_2 = \int d^{m_n} k \frac{1}{[(k^2)^n + 1] \{[(k + K')^2]^n + 1\}}. \quad (\text{B.22})$$

Usando parâmetros de Feynman, integrando e absorvendo o fator angular  $S_{m_n}$  em uma redefinição da constante de acoplamento, podemos escrever  $I_2$  como

$$I_2 = \frac{1}{\epsilon_n} \left( 1 - \frac{1}{2n} \epsilon_n \right) \int_0^1 dx [x(1-x)(K'^2)^n + 1]^{\epsilon_n/2n}. \quad (\text{B.23})$$

Com isso, no ponto de simetria obtemos

$$I_{2SP} = I_2|_{(K'^2)^n=0} = \frac{1}{\epsilon_n} \left( 1 - \frac{1}{2n} \epsilon_n \right). \quad (\text{B.24})$$

A próxima integral é o grafo de dois "loops" da função de dois pontos

$$I_3 = \int d^{m_n} k_1 d^{m_n} k_2 \frac{1}{[(k_1^2)^n + 1][(k_2^2)^n + 1] \{[(k_1 + k_2 + K')^2]^n + 1\}}. \quad (\text{B.25})$$

Podemos escrever  $I_3$  em termos de  $I_2$ , equação (B.23), como

$$I_3 = \frac{1}{\epsilon_n} \left( 1 - \frac{1}{2n} \epsilon_n \right) \int_0^1 dx [x(1-x)]^{-\epsilon_n/2n} \int dk_1^{m_n} \frac{1}{[(k_1^2)^n + 1] \{[(k_1 + K')^2]^n + m_x^2\}^{\epsilon_n/2n}}. \quad (\text{B.26})$$

Agora usando parâmetros de Feynman, integrando em  $k_1$  e absorvendo o fator angular  $S_{m_n}$  em uma redefinição da constante de acoplamento obtemos para  $I_3$

$$I_3 = -\frac{1}{4n\epsilon_n} \int_0^1 dx [x(1-x)]^{-\epsilon_n/2n} \int_0^1 dy y^{\epsilon_n/2n-1} [y(1-y)(K'^2)^n + (m_x^2 - 1)y + 1]^{1-\epsilon_n/n}. \quad (\text{B.27})$$

Assim obtemos

$$I'_3 = \left. \frac{\partial I_3}{\partial (K'^2)^n} \right|_{(K'^2)^n=0} = -\frac{1}{8n\epsilon_n} \left(1 - \frac{1}{4n}\epsilon_n\right) - \frac{1}{8n^2} I, \quad (\text{B.28})$$

onde a integral  $I$  é a mesma que a (2.106).

O grafo de três "loops" da função de dois pontos é

$$I_5 = \int d^{m_n} k_1 d^{m_n} k_2 d^{m_n} k_3 \frac{1}{[(k_1^2)^n + 1][(k_2^2)^n + 1][(k_3^2)^n + 1]} \times \frac{1}{\{[(k_1 + k_2 + K')^2]^n + 1\} \{[(k_1 + k_3 + K')^2]^n + 1\}}. \quad (\text{B.29})$$

Podemos escrever  $I_5$  através de  $I_2$ , equação (B.23), como

$$I_5 = \frac{1}{\epsilon_n^2} \left(1 - \frac{1}{n}\epsilon_n\right) \int_0^1 dx [x(1-x)]^{-\epsilon_n/n} \int dk_1^{m_n} \frac{1}{[(k_1^2)^n + 1] \{[(k_1 + K')^2]^n + m_x^2\}^{\epsilon_n/n}}. \quad (\text{B.30})$$

Usando parâmetros de Feynman, integrando em  $k_1$  e absorvendo o fator angular  $S_{m_n}$  em uma redefinição da constante de acoplamento temos

$$I_5 = -\frac{1}{3n\epsilon_n^2} \int_0^1 dx [x(1-x)]^{-\epsilon_n/n} \int_0^1 dy y^{\epsilon_n/n-1} [y(1-y)(K'^2)^n + (m_x^2 - 1)y + 1]^{1-3\epsilon_n/2n}. \quad (\text{B.31})$$

Assim obtemos para  $I'_5$

$$I'_5 = \left. \frac{\partial I_5}{\partial (K'^2)^n} \right|_{(K'^2)^n=0} = -\frac{1}{6n\epsilon_n^2} \left(1 - \frac{1}{4n}\epsilon_n\right) - \frac{1}{4n^2\epsilon_n} I, \quad (\text{B.32})$$

onde a integral  $I$  é a mesma que a (2.106).

Agora calcularemos o grafo de dois "loops" da função de quatro pontos

$$I_4 = \int dk_1^{m_n} dk_2^{m_n} \frac{1}{[(k_1^2)^n + 1]^2 [(k_2^2)^n + 1] \{[(k_1 + k_2)^2]^n + 1\}}. \quad (\text{B.33})$$

De  $I_2$ , equação (B.23), podemos escrever  $I_4$  como

$$I_4 = \frac{1}{\epsilon_n} \left(1 - \frac{1}{2n}\epsilon_n\right) \int_0^1 dx [x(1-x)]^{-\epsilon_n/2n} \int dk_1^{m_n} \frac{1}{[(k_1^2)^n + 1]^2 \{(k_1^2)^n + m_x^2\}^{\epsilon_n/2n}}. \quad (\text{B.34})$$

Agora usando parâmetros de Feynman, integrando em  $k_1$  e absorvendo o fator angular  $S_{m_n}$  em uma redefinição da constante de acoplamento obtemos

$$I_4 = \frac{1}{4n\epsilon_n} \left(1 - \frac{1}{n}\epsilon_n\right) \int_0^1 dx [x(1-x)]^{-\epsilon_n/2n} \int_0^1 dy y^{\epsilon_n/2n-1} (1-y) [(m_x^2 - 1)y + 1]^{-\epsilon_n/n}. \quad (\text{B.35})$$

Calculando essa integral em  $[(m_x^2 - 1)y + 1]^{-\epsilon_n/n}|_{y=0}$ , temos

$$I_4 = \frac{1}{4n\epsilon_n} \left(1 - \frac{1}{n}\epsilon_n\right) \int_0^1 dx [x(1-x)]^{-\epsilon_n/2n} \int_0^1 dy y^{\epsilon_n/2n-1} (1-y). \quad (\text{B.36})$$

Com isso obtemos

$$I_4 = \frac{1}{2\epsilon_n^2} \left(1 - \frac{1}{2n}\epsilon_n\right). \quad (\text{B.37})$$

### B.3 Caso Isotrópico - Exato

A integral de dois "loops" da função de dois pontos é

$$I_3 = \int d^m k_1 d^m k_2 \frac{1}{[(k_1^2)^n + 1][(k_2^2)^n + 1]\{(k_1 + k_2 + K')^2\}^n + 1}. \quad (\text{B.38})$$

Da equação (4.181) e de  $I_2$ , equação (4.184), podemos escrever a integral  $I_3$  como

$$I_3 = \frac{\Gamma(2n)\Gamma(n)}{\epsilon_n} \left[1 - \frac{1}{2}\epsilon_n\psi(1) - \frac{1}{2}\epsilon_n\psi(2n)\right] \int_0^1 dx_1 dx_2 x_2 \dots dx_{n-1} x_{n-1}^{n-2} dy_1 dy_2 y_2 \dots dy_{n-1} y_{n-1}^{n-2} \times \\ dz_1 dz_2 z_2 \dots dz_{n-1} z_{n-1}^{n-2} dt [t(1-t)]^{n-1-\epsilon_n/2} \int dk_1^m \frac{1}{(k_1^2 + m_{z_{n-1}}^2)^n [(k_1 + K')^2 + m_t^2]^{\epsilon_n/2}}, \quad (\text{B.39})$$

onde

$$m_{z_n}^2 = (m_{z_{n-1}}^2 + r_{n+1})z_n - r_{n+1}, \quad (\text{B.40})$$

$$m_t^2 = \frac{(m_{y_{n-1}} - m_{x_{n-1}})t + m_{x_{n-1}}}{t(1-t)}. \quad (\text{B.41})$$

Agora usando parâmetros de Feynman, integrando em  $k_1$ , usando identidade

$$\Gamma(-n + \epsilon_n) = \frac{(-1)^n}{n!} \left[ \frac{1}{\epsilon_n} + \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \gamma\right) \right] \quad (\text{B.42})$$

onde a contante  $\gamma = 0.5772157\dots$  é a contante de Euler-Mascheroni e absorvendo o fator angular  $S_m$  em uma redefinição da constante de acoplamento obtemos

$$I_3 = \frac{(-1)^n \Gamma(2n)^2}{4\Gamma(n+1)\epsilon_n} \left[ 1 - \psi(2n)\epsilon_n + \epsilon_n \sum_{p=1}^n \frac{1}{p} - \gamma\epsilon_n \right] \int_0^1 dx_1 dx_2 x_2 \dots dx_{n-1} x_{n-1}^{n-2} \times \\ du u^{\epsilon_n/2-1} (1-u)^{n-1} [u(1-u)K'^2 + (m_t^2 - m_{z_{n-1}}^2)u + m_{z_{n-1}}^2]^{n-\epsilon_n}. \quad (\text{B.43})$$

Assim no ponto de semetria obtemos

$$I_3' = \left. \frac{\partial I_3}{\partial K'^{2n}} \right|_{K'^{2n}=0} = \frac{(-1)^n \Gamma(2n)^2}{4\Gamma(n+1)\Gamma(3n)\epsilon_n} \left[ 1 - \frac{3}{4}\epsilon_n - \frac{1}{2}\epsilon_n \sum_{p=3}^{3n-1} \frac{1}{p} + \frac{1}{2}\epsilon_n \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{p} \right] + \\ (-1)^{n+1} \frac{\Gamma(2n)^2}{4\Gamma(n+1)} J_n, \quad (\text{B.44})$$

onde usamos a identidade [77]

$$\int_0^1 dx x^{\mu-1} (1-x^r)^{\nu-1} \ln x = \frac{1}{r^2} B\left(\frac{\mu}{r}, \nu\right) \left[ \psi\left(\frac{\mu}{r}\right) - \psi\left(\frac{\mu}{r} + \nu\right) \right] \quad (\text{B.45})$$

onde  $B$  é a função Beta de Euler e a integral  $J_n$  é dada por

$$J_n = \int_0^1 dx_1 dx_2 x_2 \dots dx_{n-1} x_{n-1}^{n-2} dy_1 dy_2 y_2 \dots dy_{n-1} y_{n-1}^{n-2} dz_1 dz_2 z_2 \dots dz_{n-1} z_{n-1}^{n-2} dt [t(1-t)]^{n-1} \times \\ du (1-u)^{2n-1} \ln \left\{ \left[ \frac{(m_{y_{n-1}}^2 - m_{x_{n-1}}^2)t + m_{x_{n-1}}^2}{t(1-t)} - m_{z_{n-1}}^2 \right] u + m_{z_{n-1}}^2 \right\}. \quad (\text{B.46})$$

Agora a integral de três "loops" da função de dois pontos é

$$I_5 = \int d^m k_1 d^m k_2 \frac{1}{[(k_1^2)^n + 1][(k_2^2)^n + 1][(k_3^2)^n + 1]\{(k_1 + k_2 + K')^2\}^n + 1} \times \\ \frac{1}{\{(k_1 + k_3 + K')^2\}^n + 1}. \quad (\text{B.47})$$

Através da equação (4.181) e de  $I_2$ , equação (4.184), podemos escrever a integral  $I_5$  como

$$I_5 = \frac{\Gamma(2n)\Gamma(n)}{\epsilon_n^2} [1 + \psi(1)\epsilon_n - \psi(2n)\epsilon_n] \int_0^1 dx_1 dx_2 x_2 \dots dx_{n-1} x_{n-1}^{n-2} dy_1 dy_2 y_2 \dots dy_{n-1} y_{n-1}^{n-2} \times \\ dz_1 dz_2 z_2 \dots dz_{n-1} z_{n-1}^{n-2} dt [t(1-t)]^{n-1-\epsilon_n} \int dk_1^m \frac{1}{(k_1^2 + m_{z_{n-1}}^2)^n [(k_1 + K')^2 + m_t^2]^{\epsilon_n}}, \quad (\text{B.48})$$

onde  $m_{z_n}^2$  e  $m_t^2$  são os mesmos fatores que os (B.40) e (B.41), respectivamente. Novamente usando parâmetros de Feynman, integrando em  $k_1$ , usando identidade (B.42) e absorvendo o fator angular  $S_m$  em uma redefinição da constante de acoplamento temos

$$I_5 = \frac{(-1)^n \Gamma(2n)^2}{3\Gamma(n+1)\epsilon_n^2} \left[ 1 - \frac{3}{2}\psi(2n)\epsilon_n + \frac{3}{2}\epsilon_n \sum_{p=1}^n \frac{1}{p} - \frac{3}{2}\gamma\epsilon_n \right] \int_0^1 dx_1 dx_2 x_2 \dots dx_{n-1} x_{n-1}^{n-2} \times$$

$$dy_1 dy_2 y_2 \dots dy_{n-1} y_{n-1}^{n-2} dz_1 dz_2 z_2 \dots dz_{n-1} z_{n-1}^{n-2} dt [t(1-t)]^{n-1-\epsilon_n} \times$$

$$du u^{\epsilon_n-1} (1-u)^{n-1} [u(1-u)K'^2 + (m_t^2 - m_{z_{n-1}}^2)u + m_{z_{n-1}}^2]^{n-3\epsilon_n/2}. \quad (\text{B.49})$$

Agora no ponto de simetria obtemos

$$I'_5 = \left. \frac{\partial I_5}{\partial K'^{2n}} \right|_{K'^{2n}=0} = \frac{(-1)^n \Gamma(2n)^2}{3\Gamma(n+1)\Gamma(3n)\epsilon_n^2} \left[ 1 - \epsilon_n - \epsilon_n \sum_{p=3}^{3n-1} \frac{1}{p} + \frac{1}{2}\epsilon_n \sum_{p=2}^{2n-1} \frac{1}{p} + \frac{1}{2}\epsilon_n \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{p} \right] +$$

$$(-1)^{n+1} \frac{\Gamma(2n)^2}{3\Gamma(n+1)\epsilon_n} J_n, \quad (\text{B.50})$$

onde novamente usamos as identidades (B.42) e (B.45) e a integral  $J_n$  é a mesma que a (B.46).



# Referências Bibliográficas

- [1] E. Ising, Z. Phys. **31**, 253 (1925).
- [2] L. Onsager, Phys. Rev. **65**, 117 (1944).
- [3] G. S. Rushbrooke, The Journal of Chemical Physics **39**, 842 (1963).
- [4] R. B. Griffiths, Phys. Rev. Lett. **14**, 623 (1965).
- [5] R. B. Griffiths, The Journal of Chemical Physics **43**, 1958 (1965).
- [6] B. D. Josephson, Proc. Phys. Soc. **92**, 269 (1967).
- [7] B. D. Josephson, Proc. Phys. Soc. **92**, 276 (1967).
- [8] M. E. Fisher, Phys. Rev. **180**, 594 (1969).
- [9] B. Widom, The Journal of Chemical Physics **43**, 3892 (1965).
- [10] L. P. Kadanoff, Physics **2**, 263 (1966).
- [11] K. G. Wilson, Phys. Rev. B **4**, 3174 (1971).
- [12] K. G. Wilson, Phys. Rev. B **4**, 3184 (1971).
- [13] K. G. Wilson and M. E. Fisher, Phys. Rev. Lett. **28**, 240 (1972).
- [14] K. G. Wilson, Phys. Rev. Lett. **28**, 548 (1972).
- [15] K. G. Wilson and J. Kogut, Phys. Rep. **12**, 75 (1974).
- [16] E. Brezin, J. C. L. Guillou, J. Zinn-Justin, and B. G. Nickel, Phys. Letters **44A**, 227 (1973).

- [17] E. Brezin, J. C. L. Guillou, and J. Zinn-Justin, in *Phase Transitions and Critical Phenomena* Vol. 6, editado por C. Domb e M. S. A. Green (Academic Press, London, 1976).
- [18] D. J. Amit, in *Field Theory, the Renormalization Group and Critical Phenomena* (World Scientific, Singapore, 1984).
- [19] E. Brezin, J. C. Le Guillou, and J. Zinn-Justin, *Phys. Rev. D* **8**, 434 (1973).
- [20] C. G. Callan, *Phys. Rev. D* **2**, 1541 (1970).
- [21] K. Symanzik, *Comm. Math. Phys.*, **18**, 227 (1970).
- [22] J. Zinn-Justin, in *Quantum Field Theory and Critical Phenomena*, Clarendon Press, Oxford, 1996 .
- [23] C. Itzykson and J. M. Drouffe, *Statistical Field Theory Volume 1* (Cambridge University Press, March 29, 1991).
- [24] C. Itzykson and J. M. Drouffe, *Statistical Field Theory Volume 2* (Cambridge University Press, March 29, 1991).
- [25] J. Binney, N. J. Dowrick, A. J. Fisher, and M. E. J. Newman, *The Theory of Critical Phenomena: An Introduction to the Renormalization Group* (Oxford University Press, USA, July 16, 1992).
- [26] W. Selke, *Phys. Rep.* **170**, 213 (1988).
- [27] W. Selke, in *Phase Transitions and Critical Phenomena* Vol. 15, editado por C. Domb e J. Lebowitz (Academic Press, London, 1998).
- [28] W. Selke, *Phys. Lett A* **61**, 443 (1977).
- [29] T. S. Chang, G. F. Tuthill, and H. E. Stanley, *Phys. Rev. B* **9**, 4882 (1974).
- [30] J. Nicoll, G. Tuthill, T. Chang, and H. Stanley, *Phys. Lett A* **58**, 1 (1976).

- [31] S. Weinberg, Phys. Rev. **118**, 838 (1960).
- [32] R. M. Hornreich, M. Luban, and S. Shtrikman, Phys. Rev. Lett. **35**, 1678 (1975).
- [33] R. M. Hornreich, J. Magn. Magn. Mater. **15-18**, 387 (1980).
- [34] S. M. Hayden et al., Phys. Rev. Lett. **66**, 821 (1991).
- [35] B. Keimer et al., Phys. Rev. Lett. **67**, 1930 (1991).
- [36] S. Sachdev and J. Ye, Phys. Rev. Lett. **69**, 2411 (1992).
- [37] J.-h. Chen and T. C. Lubensky, Phys. Rev. A **14**, 1202 (1976).
- [38] C. C. Huang and S. C. Lien, Phys. Rev. Lett. **47**, 1917 (1981).
- [39] X. Wen, C. W. Garland, and M. D. Wand, Phys. Rev. A **42**, 6087 (1990).
- [40] P. G. J. van Dongen and V. Janiš, Phys. Rev. Lett. **72**, 3258 (1994).
- [41] B. Zalar et al., Phys. Rev. Lett. **80**, 4458 (1998).
- [42] M. Škarabot, R. Blinc, I. Musčević, A. Rastegar, and T. Rasing, Phys. Rev. E **61**, 3961 (2000).
- [43] Y. M. Vysochanskii and V. U. Slivka, Usp. Fiz. Nauk **162**, 139 (1992)[Sov. Phys. Usp. **35**, 123 (1992)] .
- [44] D. Broseta and G. H. Fredrickson, Journ. Chem. Phys. **93**, 2927 (1990).
- [45] G. H. Fredrickson and S. T. Milner, Phys. Rev. Lett. **67**, 835 (1991).
- [46] F. S. Bates et al., Phys. Rev. Lett. **75**, 4429 (1995).
- [47] R. R. Netz and M. Schick, Phys. Rev. Lett. **77**, 302 (1996).
- [48] F. S. Bates et al., Phys. Rev. Lett. **79**, 849 (1997).
- [49] L. Kielhorn and M. Muthukumar, Journ. Chem. Phys. **107**, 5588 (1997).

- [50] P. D. Olmsted and I. W. Hamley, *Europhys. Lett.* **45**, 83 (1999) .
- [51] C. C. Becerra, Y. Shapira, N. F. Oliveira, and T. S. Chang, *Phys. Rev. Lett.* **44**, 1692 (1980).
- [52] Y. Shapira, C. C. Becerra, N. F. Oliveira, and T. S. Chang, *Phys. Rev. B* **24**, 2780 (1981).
- [53] C. S. O. Yokoi, M. D. Coutinho-Filho, and S. R. Salinas, *Phys. Rev. B* **24**, 5430 (1981).
- [54] Y. Shapira, *J. Appl. Phys.* **53**, 1914 (1982) .
- [55] C. S. O. Yokoi, M. D. Coutinho-Filho, and S. R. Salinas, *Phys. Rev. B* **29**, 6341 (1984).
- [56] V. Bindilatti, C. C. Becerra, and N. F. Oliveira, *Phys. Rev. B* **40**, 9412 (1989).
- [57] C. C. Becerra, H. J. Brumatto, and N. F. Oliveira, *Phys. Rev. B* **54**, 15997 (1996).
- [58] M. A. Continentino, *Journ. Magn. Magn. Mat.* **272-276**, 231 (2004).
- [59] E. Ardonne, P. Fendley, and E. Fradkin, *Ann. Phys.* **310**, 493 (2004).
- [60] P. Ghaemi, A. Vishwanath, and T. Senthil, *Physical Review B* **72**, 024420 (2005).
- [61] C. Mergulhão and C. E. I. Carneiro, *Phys. Rev. B* **58**, 6047 (1998).
- [62] C. Mergulhão and C. E. I. Carneiro, *Phys. Rev. B* **59**, 13954 (1999).
- [63] M. M. Leite, *Phys. Rev. B* **61**, 14691 (2000).
- [64] L. C. de Albuquerque and M. M. Leite, cond-mat/0006462 (não publicado).
- [65] L. C. de Albuquerque and M. M. Leite, *J. Phys. A* **34** (2001), L327 .
- [66] M. Shpot and H. W. Diehl, *Nucl. Phys. B* **612** (2001), 340 .
- [67] M. Shpot and H. W. Diehl, *J. Phys. A: Math. Gen.* **35** (2002), 6249 .

- [68] M. M. Leite, Phys. Rev. B **68**, 052408 (2003).
- [69] M. M. Leite, Phys. Rev. B **67**, 104415 (2003).
- [70] W. Siegel, in *Fields*, hep-th/9912205 Chapter II, B.4 (não publicado) .
- [71] C. G. Callan Jr., *Introduction to Renormalization Theory*, in *Methods in Field Theory*, editado por R. Balian and J. Zinn-Justin (North-Holland/World Scientific, Singapore, 1981, pg. 41).
- [72] A. A. Vladimirov, D. I. Kasakov, and O. V. Tarasov, Sov. Phys. JETP **50**, 521 (1970).
- [73] J. Naud, I. Nemenmann, and M. V. Raamsdonk, Nucl. Phys. B **540**, 533 (1999).
- [74] M. M. Leite, Physical Review B **72**, 224432 (2005).
- [75] P. R. S. Carvalho and M. M. Leite, Ann. of Phys. (2008), doi:10.1016/j.aop.2008.05.006 (2008).
- [76] P. R. S. Carvalho and M. M. Leite, (Em preparação).
- [77] I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik, A. Jeffrey, and D. Zwillinger, *Table of Integrals, Series, and Products* (Academic Press, July 31, 2000).





# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)