



Universidade Federal de Pernambuco  
Centro de Ciências Exatas e da Natureza  
Programa de Pós-Graduação em Matemática  
Curso de Mestrado em Matemática

# Introdução ao Índice de Conley e Aplicações

por

Anete Soares Cavalcanti

sob orientação do

Prof. Dr. Eduardo Leandro

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCEN - UFPE, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Recife - PE

Julho/2007

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.



Tese submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Grau de Mestrado em Ciências.

Aprovado:



*Eduardo Shirlippe Góes Leandro, DMAT-UFPE*

**Orientador**



*Hildeberto Eulálio Cabral DMAT-UFPE*



*Fernando Jorge Sampaio Moraes, DF-UFPB*

## INTRODUÇÃO AO ÍNDICE DE CONLEY

*Por*

*Anete Soares Cavalcanti*

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
*Cidade Universitária – Tels. (081) 2126 - 8414 – Fax: (081) 2126 - 8410*  
RECIFE – BRASIL

Julho - 2007

Cavalcanti, Anete Soares

Introdução ao Índice de Conley e Aplicações /  
Anete Soares Cavalcanti Dória. - Recife: O autor,  
2007.

vii, 81 folhas.: il., fig.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal  
de Pernambuco. CCEN. Matemática, 2007.

Inclui bibliografia.

1. Mecânica Celeste. 2. Número de Rotação. 3.  
Classe de Homotopia de Espaços Pontuados. 4. Índice  
de Conley I. Título.

# Dedicatória

À minha mãe, Ana Elizabeth.

# Agradecimentos

Agradeço primeiramente a minha família, em especial a minha mãe, Ana Elizabeth, e minha avó, Ana Amazonas, sem elas não teria começado o curso de Matemática. À minha irmã, Aninha, pela sua paciência infinita nos momentos em que eu estive “dando choque”. Às minhas tias, Tia Paula, Tia Lena, Tia Nidinha e Tia Rosana, que me deram atenção e abrigo quando mais precisei. Ao meu pai, Zacarias. À Natália, minha irmã de coração, oficialmente adotada em 2006.

Meus sinceros agradecimentos aos meus amigos do Dmat: Tarci, pelo apoio e ajuda; Débora por me acolher em sua casa nesta fase final, sendo sua casa a minha segunda casa (já que a primeira era o laboratório de computação do Dmat); Gigi, pelos momentos de descontração; a todos os meninos que me apoiaram e me motivaram quando estava cansada, Will, Eudes (o mestre ‘prego’), Lucas, Zaqueu, Marcelo, Adecarlos, Joilson, Allyson, Laudelino. A todos os professores do Dmat. Não posso deixar de falar da peça principal para a minha conclusão do mestrado, meu orientador, Eduardo Leandro, que com sua dedicação (quase que exclusiva), sua paciência interminável e seu apoio em todos os momentos durante a dissertação me fez sentir, novamente, a vontade de estudar e querer trabalhar com ciência. É claro que não posso deixar de agradecer a família Recife Rugby Clube por todo apoio, e por ser o lugar onde conseguia descarregar (tacklear) todo o meu estresse, em especial à Naty, Deby, Gigi, Lane, Dany, Karlinha, Nina, Dyana, Kátia, Um agradecimento especial a Chelo nosso técnico, e amigo.

Agradeço também as meninas superpoderosas: Rafaelli, Lila, Marina e Priscila (amigas da área ii). Aos meus amigos da Física que sempre me apoiaram (exceto quando decidi deixar a Física), Rafael, Massan, Gerson. Neste momento posso abrir um espacinho para agradecer aos meus alunos (e ex-alunos), que me stressaram muito durante e após as aulas, mas em compensação me descontraíram muito também.

Agradeço ao Cnpq pelo auxílio financeiro.

# Resumo

Neste trabalho apresentaremos uma introdução ao índice de Conley. Veremos que o índice de Homotopia de Conley é uma generalização do índice de Morse (o próprio Conley a ele se referiu como índice de Morse generalizado). A idéia fundamental do índice de Homotopia de Conley é utilizar o tipo de homotopia dos pares de espaços  $(B, A)$  como um índice topológico para conjuntos invariantes entre eles. A teoria de Morse nos dá a existência de equilíbrios isolados de um sistema de E.D.O.'s. Já o índice de Homotopia de Conley é mais geral pois nos dá a existência de conjuntos invariantes dentro de uma certo compacto. Estudaremos exemplos onde o índice de Morse não pode ser calculado, pois o mesmo não está definido, mas é possível determinar o índice de Conley. Veremos a propriedade de invariância por continuação do índice de Conley. Com esta propriedade, podemos "continuar" nosso problema para um problema mais simples e neste (novo) problema calcular o índice de Homotopia de Conley. Veremos uma generalização do índice de Homotopia de Conley, *The Ultimate Conley Index*. E, por fim, faremos uma aplicação ao Problema Restrito dos 3 Corpos. Calculando o índice de Conley de uma vizinhança contendo um dos equilíbrios. Este índice será mais geral que o índice do equilíbrio, e assim concluiremos que o conjunto invariante contido nesta vizinhança é mais geral que, apenas, o equilíbrio.

**Palavras-chave:** *número de rotação, pares-índices*, classe de homotopia de espaços pontuados, índice de Conley.

# Abstract

This work is an introduction to the Conley Index. We will see that the Homotopy Conley Index is a generalization of the Morse Index (Conley himself referred to it as the *generalized Morse Index*). The fundamental idea of the Homotopy Conley Index is to use the homotopy types of pairs of spaces  $(B, A)$  as a topological index for invariant sets between them. The Morse Theory gives us the existence of rest points of a system of O.D.E.'s. Now the Conley Index is more general, because it gives us the existence of invariant sets in a compact set. We will study examples where the Morse Index couldn't be calculated, because it isn't defined, but it is possible determine the Conley Index. We will study an interesting property: invariance of the Conley Index by continuation. So we may continue our problem to a simpler problem, and in this one, we calculate the Homotopy Conley Index. We will see a generalization of the Homotopy Conley Index, *the Ultimate Conley Index*. And, finally, we will make an application to the Restricted Problem of 3 Bodies. We will calculate the Conley Index of an neighbourhood that contains a rest point. This index will be more general than the index of a rest point, so we will see that the invariant set in this neighbourhood is more general than only the rest point.

**keys-words:** *winding number, index pairs*, homotopy class of pointed spaces, Conley index.

# Sumário

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>Prefácio</b>   | <b>1</b>  |
| <b>2</b> | <b>Introdução a teoria de Morse</b>   | <b>3</b>  |
| 2.1      | Introdução . . . . .  | 3         |
| 2.2      | O Índice de Euler . . . . .   | 3         |
| 2.3      | Invariância por Continuação . . . . .                                       | 7         |
| 2.4      | O Índice de Morse . . . . .   | 9         |
| <b>3</b> | <b>Índice de Conley e fluxos</b>  | <b>21</b> |
| 3.1      | Índice de Conley . . . . .  | 21        |
| 3.2      | Fluxos e Fluxos Locais . . . . .  | 25        |
| <b>4</b> | <b>Pares-índices para conjuntos invariantes isolados.</b>                   | <b>32</b> |
| 4.1      | Definição de par-índice. . . . .  | 32        |
| 4.2      | Pares-índices e índice de homotopia de Conley . . . . .                     | 33        |
| 4.3      | Soma de índices de Conley . . . . .   | 38        |
| 4.4      | Existência de pares-índices para conjuntos invariantes por fluxos locais. . | 40        |
| 4.5      | Equivalência de pares-índices. . . . .                                      | 43        |
| 4.6      | “Ultimate Conley Index” . . . . .   | 51        |
| <b>5</b> | <b>Aplicação: o Problema Restrito dos 3 Corpos</b>                          | <b>56</b> |
| <b>6</b> | <b>Continuação</b>  | <b>71</b> |
| 6.1      | Introdução . . . . .  | 71        |
| 6.2      | Continuação Local . . . . .   | 72        |

|                                  |           |
|----------------------------------|-----------|
| <i>SUMÁRIO</i>                   | viii      |
| 6.3 Continuação Global . . . . . | 74        |
| <b>7 Bibliografia</b>            | <b>81</b> |

# Capítulo 1

## Prefácio

Este trabalho consiste em estudar conjuntos invariantes no interior de compactos. Para isso estudaremos o Índice de Conley, antes teremos uma introdução da teoria de Morse. Vejamos o conteúdo resumido de cada capítulo.

No primeiro capítulo veremos como calcular os índices de Euler e de Morse, o primeiro é definido para fluxos de E.D.O's do tipo  $\dot{x} = F(x)$ , com  $F$  campo vetorial, e o segundo é ainda mais particular, pois o campo vetorial tem que ser um campo gradiente. Neste capítulo usamos fortemente resultados de Topologia Algébrica. Estudaremos também os polinômios de Morse e de Poincaré e um teorema que relaciona estes, que nos ajuda a identificar equilíbrios (pontos críticos) e sua classificação (máximo, mínimo ou sela).

No capítulo 3 apresentaremos uma motivação para generalização do índice de Morse, o índice de Conley. Como o índice de Conley é definido para fluxos em espaços topológicos, introduziremos neste capítulo a teoria de fluxos e fluxos locais. Veremos uma proposição muito interessante neste capítulo, Prop. 35, que fornece um mergulho do nosso espaço topológico, onde o fluxo local pode ser visto como um fluxo global.

No capítulo seguinte entraremos, de fato, na Teoria de Conley, para isto daremos as definições de *pares-índices para conjuntos invariantes* e demonstraremos sua existência. Vemos que o índice de Conley está bem definido. E, por fim, temos o índice de Conley mais geral, definido a partir de Sistemas Conexos Simples (ver [7]).

O capítulo 5 é uma aplicação da teoria, vista nos capítulos anteriores, ao problema

restrito dos 3 corpos. Escreveremos os poliômios de Morse e Poincaré para o problema. Estudaremos seus equilíbrios, construiremos uma *vizinhança isolante* para o conjunto invariante que contém um dos equilíbrios e um par-índice para o mesmo. O final do capítulo é dedicado ao cálculo do índice de Conley para este conjunto invariante.

Durante o capítulo 6 fazemos uma demonstração importante, a do Teorema da Continuação. Este teorema nos diz que o índice de Conley é invariante por continuação, assim podemos continuar o nosso problema para um problema mais simples, e neste último calcular o índice de Conley.

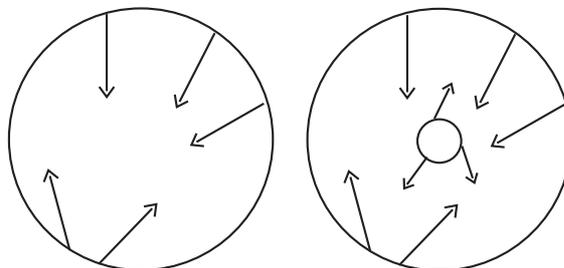
# Capítulo 2

## Introdução a teoria de Morse

### 2.1 Introdução

O que é um índice?

Considere sistemas autônomos de EDOs no plano, denotado por  $\dot{x} = F(x)$ , onde o campo  $F(x)$  tem comportamento descrito nas figuras abaixo



O que se pode afirmar sobre subconjuntos invariantes do sistema no disco da primeira figura? E no anel da segunda figura?

### 2.2 O Índice de Euler

Seja  $P$  um ponto de  $\mathbb{R}^2$  e  $\gamma$  uma curva fechada que não contem  $P$ . Em topologia algébrica aprendemos que o primeiro grupo de homologia do plano ponturado é o grupo aditivo dos inteiros, i.e

$$H_1(\mathbb{R}^2 \setminus P) \approx \mathbb{Z}.$$

Um gerador de  $H_1(\mathbb{R}^2 \setminus P)$  é, por exemplo, um círculo em torno de  $P$ . Definiremos o *número de rotação* da curva  $\gamma$  como o inteiro  $w$  tal que

$$[\gamma] = w[c],$$

onde  $[\cdot]$  denota a classe de homologia.

Denotaremos  $w$  por  $W(\gamma, P)$  (do inglês “*winding number*”), de modo que

$$[\gamma] = W(\gamma, P)[c].$$

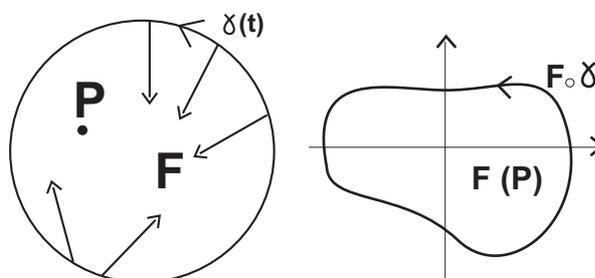
Podemos também definir o número de rotação de um campo vetorial ao longo de uma curva fechada. Seja  $F$  um campo vetorial contínuo e  $\gamma$  uma curva fechada sobre a qual  $F$  não se anula. Suponha que  $F(P) = O$ . Temos então que  $F \circ \gamma$  é uma curva fechada em  $\mathbb{R}^2 \setminus O$ . Defina

$$W(F, \gamma) = W(F \circ \gamma, O).$$

Então

$$[F \circ \gamma] = W(F, \gamma)[c]$$

**Exemplo 1.** Suponha que  $F(x)$  tem o comportamento descrito na figura abaixo



Claramente vemos que  $W(F, \gamma) = +1$ .

**Proposição 2.**  $W(F, \gamma)$  depende somente da classe de homologia de  $\gamma$  em  $\mathbb{R}^2 \setminus S$ , onde  $S = \{x \in \mathbb{R}^2 : F(x) = O\}$ .

*Prova.* Veja  $F$  como uma aplicação contínua  $F : \mathbb{R}^2 \setminus S \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus O$ . Logo  $F$  induz uma função

$$F_* : H_1(\mathbb{R}^2 \setminus S) \rightarrow H_1(\mathbb{R}^2 \setminus O),$$

que leva  $[\gamma]$  em  $[F \circ \gamma]$ . Como  $F_*$  está bem definida, temos que  $[F \circ \gamma]$  depende apenas de  $[\gamma]$ . Disto segue a proposição, pois  $[F \circ \gamma]$  determina  $W(F, \gamma)$ .  $\square$

**Definição 3.** Um *equilíbrio isolado* de  $F$  é um ponto  $P \in \mathbb{R}^2$  tal que  $F(P) = O$  e existe uma vizinhança  $U$  de  $P$  tal que  $F(x) \neq O$  em  $U \setminus P$ .

Seja  $c$  um círculo orientado no sentido anti-horário contido em  $\mathbb{R}^2 \setminus S$  e que contém apenas o equilíbrio  $P$  em seu interior. Note que quaisquer dois círculos com estas propriedades são homólogos.

**Definição 4.** O *índice de Euler* do ponto  $P$  com relação ao campo  $F$  é

$$I(P, F) = W(F, c).$$

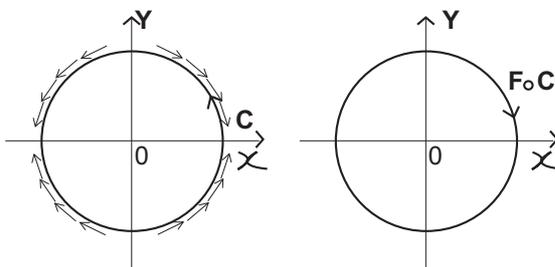
**Exemplo 5.** Seja

$$F(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x.$$

Considere o círculo  $c(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$  em torno do equilíbrio isolado  $x = O$ . Temos que

$$F(c(t)) = (\cos 2\pi t, -\sin 2\pi t),$$

logo  $I(O, F) = -1$ .



**Proposição 6.** Seja  $F$  um campo vetorial com equilíbrios isolados. Seja  $\gamma$  uma curva fechada na qual  $F \neq O$ . Então  $S_\gamma = \{P \in \mathbb{R}^2 : F(P) = O, W(\gamma, P) \neq 0\}$  é finito e

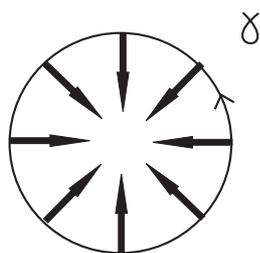
$$W(F, \gamma) = \sum_{P \in S_\gamma} W(\gamma, P) I(P, F).$$

Em particular, se  $\gamma$  é uma curva fechada simples orientada no sentido anti-horário, então

$$W(F, \gamma) = \sum_{P \text{ no interior de } \gamma} I(P, F).$$

Antes de passarmos à demonstração, vejamos uma aplicação.

**Exemplo 7.** Sejam  $F$  e  $\gamma$  como na figura abaixo

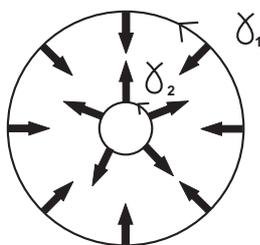


Se  $F$  tem apenas equilíbrios isolados, a proposição acima nos diz que

$$1 = \sum_{P \text{ no interior de } \gamma} I(P, F).$$

Logo existe ao menos um equilíbrio de  $F$  no interior de  $\gamma$ .

Se  $F$ ,  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  forem como na figura



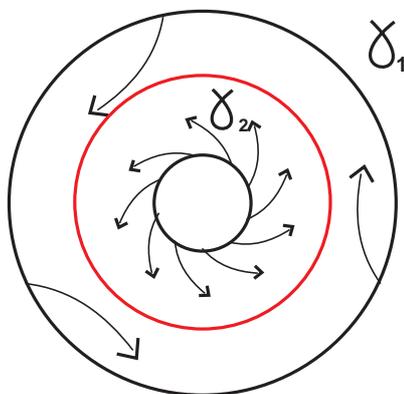
então

$$1 = \sum_{P \text{ no interior de } \gamma_1} I(P, F) = - \sum_{P \text{ no interior de } \gamma_2} I(P, F),$$

donde

$$0 = \sum_{P \text{ no interior do anel}} I(P, F).$$

Neste caso nada podemos afirmar. Veja por exemplo a figura abaixo, onde o conjunto invariante é uma curva fechada, não apenas um equilíbrio.



*Prova.*  $S$  é no máximo enumerável, já que cada compacto de  $\mathbb{R}^2$  contém um número finito de equilíbrios, visto serem estes isolados. Segue-se que

$$H_1(\mathbb{R}^2 \setminus S) = \bigoplus_{P \in S} H_1(\mathbb{R}^2 \setminus P),$$

onde o isomorfismo é induzido pela inclusão  $i_P : \mathbb{R}^2 \setminus S \hookrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus P$ :

$$i_{P*} : H_1(\mathbb{R}^2 \setminus S) \rightarrow H_1(\mathbb{R}^2 \setminus P).$$

levando  $[\gamma]$  em  $[\gamma]$ .

Em  $H_1(\mathbb{R}^2 \setminus P)$ ,  $[\gamma] = W(\gamma, P)[c_P]$ , por definição, onde  $c_P$  é um círculo orientado no sentido anti-horário contendo apenas o equilíbrio  $P$  em seu interior. Temos então

$$[\gamma] = W(\gamma, P_1)[c_{P_1}] + \dots + W(\gamma, P_n)[c_{P_n}],$$

logo

$$\begin{aligned} W(F, \gamma)[c] = [F \circ \gamma] &= F_*([\gamma]) \\ &= \sum_{i=1}^n W(\gamma, P_i) F_*([c_{P_i}]) \\ &= \sum_{i=1}^n W(\gamma, P_i) [F \circ c_{P_i}] \\ &= \left( \sum_{i=1}^n W(\gamma, P_i) I(P_i, F) \right) [c] \end{aligned}$$

em  $H_1(\mathbb{R}^2 \setminus O)$ . □

## 2.3 Invariância por Continuação

De que maneira o índice de Euler varia com o campo  $F$ ?

**Definição 8.** Dizemos que dois campos vetoriais contínuos  $F$  e  $G$  são *homotópicos* se existe uma aplicação contínua

$$\mathcal{H} : [0, 1] \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

tal que  $\mathcal{H}(0, x) = F(x)$  e  $\mathcal{H}(1, x) = G(x)$ .

**Proposição 9.** *Se  $\mathcal{H}_s(x) = \mathcal{H}(s, x) \neq O$  numa curva  $\gamma$ ,  $0 \leq s \leq 1$ , então  $W(\mathcal{H}_s, \gamma)$  é constante (como função de  $s$ ).*

*Prova.* Como  $[H_s, \gamma] = W(H_s, \gamma)[c]$ , mostraremos que  $[H_s \circ \gamma] \in H_1(\mathbb{R}^2 \setminus O)$  é constante.

Note que podemos ver  $\mathcal{H}_s$  como uma aplicação de  $\mathbb{R}^2 \setminus S$  em  $\mathbb{R}^2 \setminus O$ , onde  $S = \{x \in \mathbb{R}^2 : \mathcal{H}_s(x) = O, \text{ para algum } s\}$ . Temos então que  $[\mathcal{H}_s \circ \gamma] = \mathcal{H}_{s*}([\gamma])$ . Porém aplicações homotópicas induzem a mesma aplicação em homologia.  $\square$

**Corolário 10.** *Se  $P$  é um ponto de equilíbrio de todos os  $H_s$ , e se existe alguma vizinhança  $U$  de  $P$  tal que  $H_s \neq O$  em  $U \setminus P$ , para todo  $s$ , então  $I(P, H_s)$  é constante.*

*Prova.* Use  $\gamma = c \subset U$  para todo  $s$ . A conclusão segue-se pois  $I(P, H_s) = W(H_s, c)$ .  $\square$

No próximo exemplo mostraremos como a continuação facilita o cálculo do índice de Euler. A idéia é usar homotopias para simplificar campos vetoriais.

**Exemplo 11.** Considere o sistema de EDO's

$$\dot{x} = Ax + G(x),$$

onde  $G(x) = o(\|x\|)$ , e  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$ .

Como  $A$  é não-singular, existe  $K > 0$  tal que  $\|Ax\| \geq K\|x\|$  (tome, por exemplo,  $K = \inf_{x \in S^2} \|Ax\|$ ). Da hipótese  $G = o(\|x\|)$  deduzimos que  $\|G(x)\| < K\|x\|$  em alguma vizinhança  $U$  de  $O$ . Logo  $F(x) = Ax + G(x) \neq O$  em  $U \setminus O$ , e  $O$  é um equilíbrio isolado.

Consideremos agora a família de campos vetoriais

$$\mathcal{H}_s(x) = Ax + (1-s)G(x), \quad 0 \leq s \leq 1.$$

Claramente  $H_s$  não se anula em  $U \setminus O$ . Do corolário acima deduzimos que  $I(O, F) = I(O, Ax)$ . Note que podemos ainda deformar  $A$  continuamente através de matrizes não-singulares até obtermos a matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

cujos índices são  $-1$ .

## 2.4 O Índice de Morse

Seja  $F(x)$  o campo gradiente determinado pela função real suave  $f(x) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , i.e.,  $F(x) = -\nabla f(x)$ .

Um equilíbrio  $P$  de  $F$  é um ponto crítico de  $f$ , i.e.,  $\nabla f(P) = O$ . Classificamos os pontos críticos de acordo com o Hessiano

$$D^2f(P) = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}.$$

$P$  é dito não-degenerado se  $D^2f(P)$  é não-singular. Pelo Teorema da Função Inversa temos que, se  $P$  é não degenerado, ele é isolado, [5].

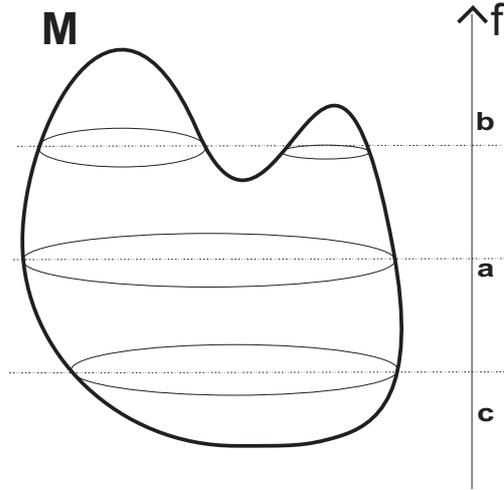
**Definição 12.** O *índice de Morse* de um ponto crítico não-degenerado  $P$  do campo gradiente  $F(x)$  é a dimensão do maior subespaço de  $\mathbb{R}^2$  no qual  $D^2f(P)$  é uma forma quadrática negativa definida.

Considere o sistema de EDOs  $\dot{x} = F(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ , linearizado em torno em  $P$ ,

$$\dot{y} = DF(P)y.$$

Dizemos que  $P$  é um equilíbrio hiperbólico se as partes reais dos autovalores de  $DF(P)$  são não-nulas. Se  $F(x)$  for um campo gradiente, os autovalores de  $DF(P)$  são reais, pois a matriz Hessiana é simétrica. Temos então que o índice de Morse de  $P$  é o número de autovalores negativos.

A seguir relacionaremos o índice de Morse com a topologia dos subconjuntos de nível de uma função suave  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  cujo domínio é a variedade Riemanniana suave  $n$ -dimensional  $M$ , como na figura.



Sejam

$$M_c = \{x \in M : f(x) \leq c\},$$

e

$$M_{[a,b]} = \{x \in M : a \leq f(x) \leq b\}.$$

Se  $a < b$ , temos  $M_a \subset M_b$  e os grupos de homologia relativa  $H_k(M_b, M_a)$  podem ser relacionados aos índices dos pontos críticos em  $M_{[a,b]}$ . A fim de enunciar esta relação mais precisamente, usaremos os polinômios de Poincaré. Defina

$$\beta_k(M_b, M_a) = \text{posto } H_k(M_b, M_a).$$

(O posto de  $H_k(M_b, M_a) = \bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z} \oplus \bigoplus_{j \in J} \mathbb{Z}_{n_j}$  é a cardinalidade do conjunto de índices  $I$ . Em particular, tem-se  $\beta_k \geq 0$ .) Caso  $\beta_k < \infty$ , para toda  $k$  e  $\beta_k \equiv 0$ , para  $k$  suficientemente grande, defina o *polinômio de Poincaré*

$$P(t) = \sum_{k \geq 0} \beta_k(M_b, M_a) t^k.$$

Defina agora a soma formal, usando desta vez o índice de Morse dos pontos críticos

$$M(t) = \sum_{P \in M_{[a,b]}} t^{I(P)} = \sum_{k \geq 0} \gamma_k(M_b, M_a) t^k,$$

onde  $\gamma_k(M_b, M_a)$  é o número de pontos críticos em  $M_{[a,b]}$  cujo índice de Morse é  $k$ . Se  $\gamma_k < \infty$ , para todo  $k$  e  $\gamma_k \equiv 0$ , para  $k$  suficientemente grande,  $M(t)$  é denominado *polinômio de Morse*.

**Teorema 13.** *Suponha que  $M_{[a,b]}$  é compacto, que todos os pontos críticos de  $f$  em  $M_{[a,b]}$  são não-degenerados e que seus valores críticos estão no intervalo aberto  $(a,b)$ . Então  $P(t)$  e  $M(t)$  são polinômios e*

$$M(t) = P(t) + (1+t)Q(t),$$

onde  $Q(t)$  é um polinômio com coeficientes não-negativos.

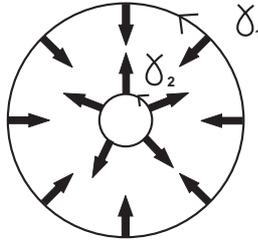
Uma consequência imediata da proposição acima é  $\gamma_k \geq \beta_k$ , para todo  $k$ .

**Exemplo 14.** Seja  $a < \inf_{x \in M} f(x)$ . Então  $M_a = \emptyset$ . Logo  $\beta_k(M_b, M_a) = \beta_k(M_b)$ . Se  $M_b$  for um disco, então  $M_b$  é homotopicamente equivalente a um ponto, donde

$$H_k(M_b) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & k = 0, \\ \{0\}, & k > 0 \end{cases}$$

Temos então que  $P(t) = 1$ ,  $\beta_0 = 1$  e  $\beta_k = 0$  para  $k \geq 1$ . Logo  $\gamma_0 \geq 1$ , i.e, se  $f$  tem pontos críticos não-degenerados, então pelo menos um deles é um mínimo local no interior de  $M_b$ .

**Exemplo 15.** Seja  $a < \inf_{x \in M} f(x)$ , onde  $M$  é o plano  $\mathbb{R}^2$  com um disco aberto removido. Seja  $M_b$  como na figura abaixo.



Então

$$H_k(M_b) \approx H_k(S^1) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & k = 0, 1, \\ \{0\}, & k \geq 2 \end{cases}$$

Logo o polinômio de Poincaré é  $P(t) = 1 + t$  e, da proposição acima, deduzimos que  $M(t) = \gamma_0 + \gamma_1 t + \dots = 1 + t + (1+t)Q(t)$ , e portanto  $\gamma_0 \geq 1$  e  $\gamma_1 \geq 1$ . Concluimos que  $f(x)$  possui ao menos um mínimo e uma sela.

**Exemplo 16.** Seja  $M = T^n = S^1 \times \dots \times S^1$ , o  $n$ -toro. Sejam  $b > \max_{x \in T^n} f(x)$  e  $a < \min_{x \in T^n} f(x)$ , logo  $M_b = T^n$  e  $M_a = \emptyset$ . Como determinar os  $\beta_k(T^n)$ ? Podemos aplicar a proposição seguinte.

**Proposição 17.** *O polinômio de Poincaré de um espaço produto  $X \times Y$  é o produto dos polinômios de Poincaré dos fatores  $X$  e  $Y$ .*

Utilizando o último exemplo, deduzimos que  $P(t) = (1+t)^n$ , donde  $\beta_k = \binom{n}{k}$ . Uma consequência desta expressão é que  $P(1) = 2^n$  e, como  $P(1) \leq M(1) = \sum_k \gamma_k$ , concluímos que  $f : T^n \rightarrow \mathbb{R}$  tem pelo menos  $2^n$  pontos críticos isolados! Mais precisamente, se  $n = 2$ , por exemplo, temos que  $f$  possui ao menos um mínimo, duas selas e um máximo.

*Prova da Proposição.* Basta aplicarmos a fórmula de Künneth da topologia algébrica, ver [3]:

$$H_k(X \times Y) = \left( \sum_{i+j=k} H_i(X) \otimes H_j(Y) \right) \oplus \left( \sum_{i+j=k-1} \text{Tor}(H_i(X), H_j(Y)) \right).$$

Temos que

$$\beta_k(X \times Y) = \text{posto} \left( \sum_{i+j=k} H_i(X) \otimes H_j(Y) \right) = \sum_{i+j=k} \beta_i(X) \beta_j(Y),$$

o que completa a demonstração.  $\square$

**Definição 18.** Uma *filtração de Morse* de  $M_{[a,b]}$  é uma sequência de valores regulares  $a = c_0 < c_1 < \dots < c_n = b$  de  $f(x)$ .

Lembre-se da definição de valor regular,  $c_i$  é valor regular se não existirem pontos críticos no nível  $c_i$ , ou seja se  $f(x) = c_i$ , então  $\nabla f(x) \neq 0$ . Vamos introduzir a notação

$$P_i(t) = \sum \beta_k(M_{c_i}, M_{c_{i-1}}) t^k.$$

**Proposição 19.**  $\sum_{i=1}^n P_i(t) = P(t) + (1+t)Q(t)$ , onde  $Q(t)$  é um polinômio com coeficientes não-negativos.

*Prova.* Seja  $P^i(t) = \sum \beta_k(M_{c_i}, M_a) t^k$ . Afirmamos que

$$P_i(t) + P^{i-1}(t) = P^i(t) + (1+t)Q_i(t). \quad (2.1)$$

Somando membro a membro para  $i = 1$  a  $n$ , obtemos

$$\sum P_i(t) + P^0(t) = P^n(t) + (1+t) \sum Q_i(t).$$

Visto que  $P^0(t) = \sum \beta_k(M_a, M_a)t^k = 0$ , e  $P^n(t) = \sum \beta_k(M_b, M_a)t^k = P(t)$ , segue o resultado desejado. Provemos agora a igualdade (2.1).

Uma sequência de homomorfismos

$$\dots \xrightarrow{\alpha_{n+2}} A_{n+1} \xrightarrow{\alpha_{n+1}} A_n \xrightarrow{\alpha_n} A_{n-1} \xrightarrow{\alpha_{n-1}} \dots$$

é dita exata, se  $\text{Ker}\alpha_n = \text{Im}\alpha_{n+1}$  para cada  $n$ .

Considere a sequência exata da tripla  $(M_{c_i}, M_{c_{i-1}}, M_a)$ , ver [3]:

$$\dots \xrightarrow{\partial_k} H_k(M_{c_{i-1}}, M_a) \xrightarrow{i_*} H_k(M_{c_i}, M_a) \xrightarrow{j_*} H_k(M_{c_i}, M_{c_{i-1}}) \xrightarrow{\partial_{k-1}} \dots$$

Como  $\text{Ker}(j_*) = \text{Im}(i_*)$ , temos

$$\text{posto Ker}(j_*) = \text{posto Im}(i_*) = \beta_k(M_{c_{i-1}}, M_a) - \text{posto}(\partial_k).$$

Por outro lado,

$$\text{posto Im}(j_*) = \beta_k(M_{c_i}, M_{c_{i-1}}) - \text{posto}(\partial_{k-1}),$$

e, lembrando que

$$\beta_k(M_{c_i}, M_a) = \text{posto Im}(j_*) + \text{posto Ker}(j_*),$$

obtemos finalmente

$$\beta_k(M_{c_i}, M_{c_{i-1}}) + \beta_k(M_{c_{i-1}}, M_a) = \beta_k(M_{c_i}, M_a) + \text{posto}(\partial_k) + \text{posto}(\partial_{k-1}).$$

A fórmula acima se expressa em termos polinomiais como

$$P_i(t) + P^{i-1}(t) = P^i(t) + (1+t)Q_i(t),$$

onde  $Q_i(t) = \sum (\text{posto}(\partial_k))t^k$ . □

**Observação 20.** Os coeficientes do polinômio de Poincaré são denominados *números de Betti* do par  $(M_b, M_a)$ .

A fim de calcular  $P_i(t)$ , utilizamos as proposições abaixo.

**Proposição 21.** *Se  $M_{[a,b]}$  é compacto e não contém pontos críticos, então  $P(t) \equiv 0$ .*

**Proposição 22.** *Suponha que  $M_{[a,b]}$  é compacto. Se existe apenas um valor crítico  $a < c < b$ , e se todos os pontos críticos em  $M_{[a,b]}$  são não-degenerados, então*

$$P(t) = \sum_{P \text{ pto crítico em } M_{[a,b]}} t^{I(P)}.$$

Estas proposições implicam o teorema principal (na verdade equivalem a este), pois se  $M_{[a,b]}$  é compacto e todos os pontos críticos são não-degenerados, logo isolados, existe apenas um número finito deles e, portanto, de valores críticos de  $f(x)$ . Escolhendo uma filtração de Morse de tal modo que cada  $[c_{i-1}, c_i]$  contenha 0 ou 1 valor crítico, obtemos que cada  $P_i(t)$  é ou identicamente nulo ou da forma  $\sum_P t^{I(P)}$  e, conseqüentemente,  $\sum P_i(t) = M(t)$ . As demonstrações das proposições acima utilizam fluxos gradientes para produzir homotopias, as quais simplificam o cálculo de  $H_k(M_b, M_a)$ . Antes façamos as seguintes considerações.

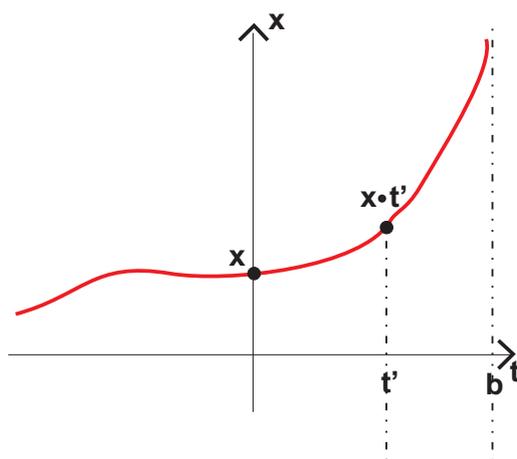
**Definição 23.** Um *fluxo local* num espaço topológico  $X$  é uma aplicação contínua  $\phi : D \rightarrow X$  tal que

- (a)  $D \subset \mathbb{R} \times X$  é aberto. Para cada  $x \in X$ ,  $D_x = \{t \in \mathbb{R} : (t, x) \in D\}$  é um intervalo aberto contendo 0.
- (b)  $\phi_0(x) = x$ , para todo  $x \in X$ .
- (c) Se  $t_0 \in D_x$ , então  $D_{\phi_{t_0}(x)} = D_x - t_0$  e, se  $s \in D_{\phi_t(x)}$ , temos

$$\phi_s(\phi_t(x)) = \phi_{s+t}(x).$$

- (d) Para cada  $x \in X$ ,  $\phi_t : D_x \rightarrow X$  descreve uma curva regular em  $X$ , i.e., o gráfico de  $\phi_t$  é um subconjunto fechado de  $\mathbb{R} \times X$ .

Note que a propriedade (d) de um fluxo local implica que se  $D_x$  é limitado, então, quando  $t$  se aproximar de um dos extremos de  $D_x$ , a imagem de  $\phi_t$  não pode estar contida num compacto (veja a figura abaixo).



Caso  $D = \mathbb{R} \times X$ , dizemos que  $\phi$  com as propriedades (a)-(d) é um *fluxo*.

Um sistema de equações diferenciais ordinárias de classe  $C^\infty$  numa variedade suave  $M$  dá origem a um fluxo local, ver [4], Teorema "Global smoothness of the flow".

**Observação 24.** Denotaremos a partir deste momento  $\phi_t(x)$  por  $x \cdot t$ . mais geralmente, se  $A \subset X$  e  $B \subset \mathbb{R}$ , então

$$A \cdot B = \{x \cdot t : x \in A, t \in B\}.$$

**Definição 25.** Um subconjunto  $A \subset X$  é *invariante* se

$$\forall x \in A, \forall t \in D_x \implies x \cdot t \in A,$$

ou seja

$$A \cdot D_x \subset A \forall x \in A$$

.  $A \subset X$  é *positivamente invariante* se

$$\forall x \in A, \forall t \in D_x, t \geq 0 \implies x \cdot t \in A.$$

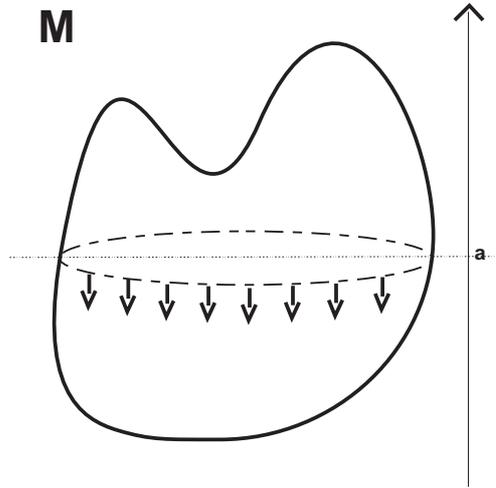
$A \subset X$  é *estritamente positivamente invariante* se

$$\forall x \in A, \forall t \in D_x, t > 0 \implies x \cdot t \in \text{int}(A).$$

**Exemplo 26.** Considere uma função suave  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ , onde  $M$  é uma variedade Riemanniana suave. Então  $M_a$  é positivamente invariante com relação ao fluxo do sistema de equações diferenciais  $\dot{x} = -\nabla f(x)$ . De fato

$$\frac{d}{dt}f(x \cdot t) = Df(x \cdot t)\dot{x} = -\|\nabla f\|^2,$$

i.e,  $f$  é uma função não-crescente ao longo das soluções do sistema.



Se  $a$  não é um valor crítico de  $f$ ,  $-\|\nabla f\| < 0$  em  $f^{-1}(a)$ , logo  $M_a$  é estritamente positivamente invariante.

**Lema-Chave.** *Seja  $\phi$  um fluxo local em  $M$ . Sejam  $B \subset M$  positivamente invariante e  $A \subset B$  um subconjunto fechado e estritamente positivamente invariante. Suponha que, para cada  $x \in B$ , existe  $t \geq 0$  com  $x \cdot t \in A$ . Então*

$$T(x) = \inf\{t \geq 0 : x \cdot t \in A\}$$

é uma função contínua  $T : B \rightarrow [0, \infty)$  e  $x \cdot T(x) \in A$ .

A inclusão,  $i : A \rightarrow B$  é uma equivalência homotópica. Logo  $i_* : H_k(A) \approx H_k(B)$  e  $H_k(B, A) \approx 0$ , para todo  $k$ .

*Prova.* Dados  $x \in B$  e  $\epsilon > 0$ , vamos encontrar vizinhanças de  $x$  cujos pontos  $y$  sejam tais que  $T(y) \geq T(x) - \epsilon$  ou  $T(y) \leq T(x) + \epsilon$ .

Note que

$$T(x) - \epsilon \leq 0 \Rightarrow T(y) \geq T(x) - \epsilon.$$

Logo vamos assumir que  $T(x) > \epsilon$ . Segue-se que  $x \cdot (T(x) - \epsilon)$  existe e, por definição,  $x \cdot (T(x) - \epsilon) \in M \setminus A$ .

Como  $D$  (o domínio do fluxo local) é aberto,  $M \setminus A$  é aberto e o fluxo local é contínuo, existe uma vizinhança  $U$  de  $x$  tal que se  $y \in U$ , então  $y \cdot (T(x) - \epsilon)$  existe e  $y \cdot (T(x) - \epsilon) \in M \setminus A$ . Como  $A$  é positivamente invariante,  $y \cdot [0, T(x) - \epsilon] \subset M \setminus A$ . Portanto  $T(y) \geq T(x) - \epsilon$ .

Vamos agora tomar  $t$  com  $x \cdot t \in A$ . Podemos assumir que  $t \in [T(x), T(x) + \epsilon)$  e, aumentando  $t$ , que  $x \cdot t \in \text{int}(A)$ .

Usando novamente a continuidade do fluxo, deduzimos que existe uma vizinhança  $V$  de  $x$  tal que, se  $y \in V$  então  $y \cdot t$  existe e  $y \cdot t$  está em  $\text{int}(A)$ . Logo  $T(y) \leq t < T(x) + \epsilon$ .

Como  $A$  é fechado,  $T(x)$  está contido em  $\{t \geq 0 : x \cdot t \in A\}$  e, portanto,  $x \cdot T(x) \in A$ .

Seja  $\mathcal{H}(s, x) = h_s(x) = x \cdot (sT(x))$ . Note que

(i)  $h_0(x) = x \cdot 0 = x$ , i.e,  $h_0 = id_B$  é a identidade em  $B$ .

(ii)  $h_1(x) = x \cdot T(x) \in A$ , i.e,  $h_1 : B \rightarrow A$ .

Afirmamos que  $h_1$  é uma inversa homotópica de  $i : A \hookrightarrow B$ . De fato, temos por um lado

$$x \in B \Rightarrow (i \circ h_1)(x) = h_1(x) \quad \text{e} \quad h_1 \stackrel{\mathcal{H}}{\approx} h_0 = id_B,$$

e por outro,

$$x \in A \Rightarrow (h_1 \circ i)(x) = h_1(x) = x \cdot T(x) = x \cdot 0 = x,$$

pois  $x \in A$ .

Concluimos que  $A$  é um retrato de  $B$ , logo temos o isomorfismo  $i_* : H_k(A) \approx H_k(B)$ , para todo  $k$ . Finalmente, utilizando a sequência exata

$$\dots \rightarrow H_k(A) \xrightarrow{i_*} H_k(B) \rightarrow H_k(B, A) \rightarrow H_{k-1}(A) \xrightarrow{i_*} H_{k-1}(B) \rightarrow \dots,$$

obtemos  $H_k(B, A) = \{0\}$ . □

Vamos demonstrar as proposições 21 e 22 usando o Lema-chave.

Aplicaremos o lema aos conjuntos  $M_a \subset M_b$ , novamente considerando o fluxo do sistema  $\dot{x} = -\nabla f(x)$ . Sejam  $A = M_a$  e  $B = M_b$ . Então  $A$  é fechado e estritamente positivamente invariante, e  $B$  é positivamente invariante. Mostraremos que se  $x \in B$  então existe  $t \geq 0$  tal que  $x \cdot t \in A$ .

Por contradição, suponha que para algum  $x \in B$ ,  $x \cdot t$  permaneça em  $M_{[a,b]}$  para todo  $t \in D_x$ ,  $t \geq 0$ . Como  $M_{[a,b]}$  é compacto,  $x \cdot t$  existe para todo  $t \geq 0$ . Visto que  $M_{[a,b]}$  não contem pontos críticos de  $f$ , existe  $k > 0$  tal que

$$\frac{d}{dt}f(x \cdot t) = -\|\nabla f(x)\|^2 < -k < 0,$$

donde segue que o tempo máximo de permanência de  $x \cdot t$  em  $M_{[a,b]}$  não excede  $\frac{b-a}{k}$ , o que é impossível.

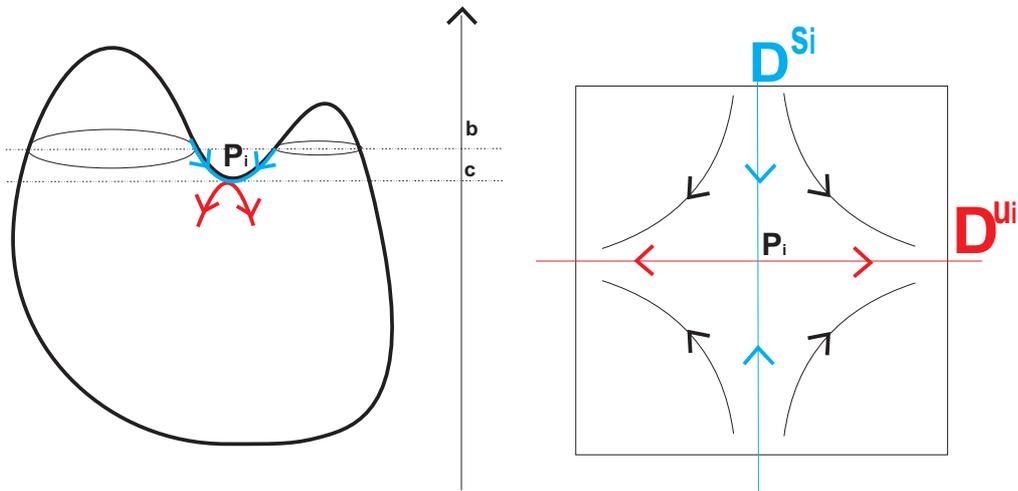
Portanto, o lema-chave provado acima nos diz que  $H_k(B, A) = H_k(M_b, M_a) = \{0\}$ , i.e,  $P(t) \equiv 0$ , ficando demonstrada a proposição 21.

Suponhamos agora que  $M_{[a,b]}$  é compacto, onde  $a, b$  são valores regulares, que existe apenas um valor crítico  $c \in ]a, b[$ , e que todos os pontos críticos em  $M_{[a,b]}$  são não-degenerados. Lembre que pontos críticos não-degenerados são isolados e formam um conjunto finito  $\{P_1, \dots, P_n\}$ , pois  $M_{[a,b]}$  é compacto. Vamos calcular os grupos  $H_k(M_b, M_a)$  usando o lema-chave para simplificar  $M_a$  e  $M_b$ .

De acordo com o Teorema de Hartman-Grobman (ver [6]), existe uma vizinhança  $P_i$  na qual o fluxo é conjugado ao fluxo-produto

$$\begin{cases} \dot{x} = x, & x \in D^{u_i}, \\ \dot{y} = -y, & x \in D^{s_i}, \end{cases}$$

onde  $D^{u_i}, D^{s_i}$  são discos de dimensões  $u_i, s_i$ , e  $u_i = I(P_i)$  é o índice de  $P_i$ . Tomando  $D^{s_i}$  pequeno o suficiente, podemos assumir que  $f < b$  em  $U_i = D^{u_i} \times D^{s_i}$  e  $f < c$  em  $\partial D^{u_i} \times D^{s_i}$  ("conjunto de saída").



Faremos agora algumas simplificações. A primeira delas consiste em substituir  $M_a$  por  $M_\alpha$ , onde  $\alpha \in ]a, c[$  e  $f < \alpha$  em  $D^{u_i} \times \partial D^{s_i}$ . Como não existem pontos críticos no compacto  $M_{[\alpha,a]}$ , o lema-chave implica que  $H_k(M_\alpha, M_a) = \{0\}$  para todo  $k$ . Da sequência exata da tripla  $(M_b, M_\alpha, M_a)$ ,

$$\dots \rightarrow H_k(M_\alpha, M_a) \rightarrow H_k(M_b, M_a) \rightarrow H_k(M_b, M_\alpha) \rightarrow H_{k-1}(M_\alpha, M_a) \rightarrow \dots,$$

deduzimos então que  $H_k(M_b, M_a) \rightarrow H_k(M_b, M_\alpha)$  é um isomorfismo.

Nossa próxima simplificação consiste em substituir  $M_b$  por  $M_\alpha \cup_i U_i$ , onde  $U_i = D^{u_i} \times D^{s_i}$ , para algum  $\alpha$  como acima. Para isto, aplicaremos o lema-chave com  $B = M_b$  e  $A = M_\alpha \cup_i U_i$ , onde tomamos  $\sup_{D^{u_i} \times \partial D^{s_i}} f < \alpha < c$ . Vemos que ambos  $A$  e  $B$  são estritamente positivamente invariantes. Além disso, dado  $x \in M_b$ , podemos mostrar que existe  $t \geq 0$  tal que  $x \cdot t \in A$ . Como  $\overline{M_b \setminus A}$  é compacto e não contém pontos críticos, temos

$$\frac{d}{dt} f(x \cdot t) \leq -k < 0.$$

Logo, repetindo um argumento utilizado anteriormente, as órbitas devem continuar existindo (i.e, estão definidas para todo  $t \in \mathbb{R}$ ) e atingem  $A$  em tempo finito. Portanto  $H_k(M_b, A) = \{0\}$  e, conseqüentemente,  $H_k(M_b, M_a) \approx H_k(A, M_\alpha)$  (basta analisar a seqüência exata da tripla  $(M_b, A, M_\alpha)$ ).

Substituiremos agora  $M_\alpha$  por

$$S = M_\alpha \cup_i (U_i \setminus (\{0\} \times D^{s_i})).$$

Note que  $S$  é positivamente invariante,  $M_\alpha$  é fechado e estritamente positivamente invariante, e que

$$x \in S \implies \exists t \geq 0 \text{ tal que } x \cdot t \in M_\alpha.$$

Portanto  $H_k(M_b, M_a) \approx H_k(A, S)$ , onde mais uma vez usamos a seqüência exata de uma tripla. A fim de calcular esse último grupo de homologia, utilizaremos o Teorema de Excisão [3]:

$$H_k(A, S) \approx H_k(A \setminus V, S \setminus V), \quad \forall \overline{V} \subset \text{int}(S).$$

Tome  $V = S \setminus \cup_i U_i = A \setminus \cup_i U_i$ . Logo  $V \subset M_\alpha, \overline{V} \subset M_\alpha \subset \text{int}(S)$  (na topologia induzida em  $A$ ) e

$$A \setminus V = \cup_i U_i, \quad S \setminus V = \cup_i (U_i \setminus \{0\} \times D^{s_i}).$$

Assim obtemos

$$H_k(A \setminus V, S \setminus V) \approx \oplus_i H_k(U_i, U_i \setminus \{0\} \times D^{s_i}).$$

Observemos agora que os pares  $(U_i, U_i \setminus \{0\} \times D^{s_i})$  e  $(D^{u_i}, D^{u_i} \setminus O)$  são homotopicamente

equivalentes (via colapso do disco "estável",  $D^{s_i}$ ). Mas

$$H_k(D^{u_i}, D^{u_i} \setminus O) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & k = u_i = I(P_i) \\ \{0\}, & k \neq u_i, \end{cases}$$

donde finalmente concluimos que

$$P(t) = \sum_{i=1}^n t^{I(P_i)},$$

e assim fica provada a proposição 22. □

No próximo capítulo introduziremos uma generalização das idéias da teoria de Morse.

# Capítulo 3

## Índice de Conley e fluxos

### 3.1 Índice de Conley

Na teoria de Morse, partimos das hipóteses:

- O sistema dinâmico é da forma  $\dot{x} = -\nabla f(x)$  e está definido numa variedade suave  $M$  compacta,
- Os pontos críticos de  $f$  são não-degenerados,

e deduzimos que se  $H_k(M_b, M_a) \neq \{0\}$  então existem equilíbrios para o sistema. Não é difícil mostrar a existência de equilíbrios mesmo quando a segunda hipótese acima não é feita.

**Proposição 27.** *Considere o sistema gradiente  $\dot{x} = -\nabla f(x)$ . Se  $M_{[a,b]}$  é compacto e  $\beta_k(M_b, M_a) \text{ posto}(H_k(M_b, M_a)) \neq 0$  para algum  $k$ , então existe ao menos um equilíbrio em  $M_{[a,b]}$ .*

*Prova.* Se não existirem pontos críticos, a proposição 21 nos diz que  $P(t) \equiv 0$ , i.e,

$$\text{posto}(H_k(M_b, M_a)) = 0, \quad \forall k.$$

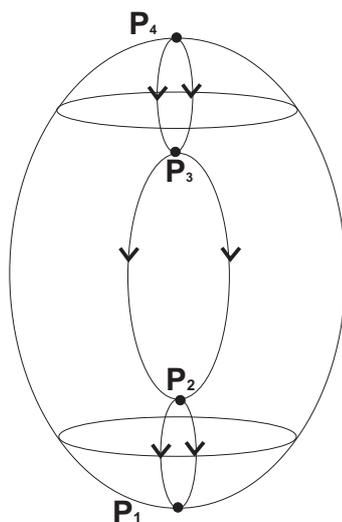
Isto contradiz o enunciado. □

**Exemplo 28.** Considere o sistema gradiente determinado pela função altura do toro,  $h : T^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Sejam  $P_1, P_2, P_3$  e  $P_4$  os pontos críticos de  $h$ , com  $h(P_i) < h(P_{i+1})$ . Suponha

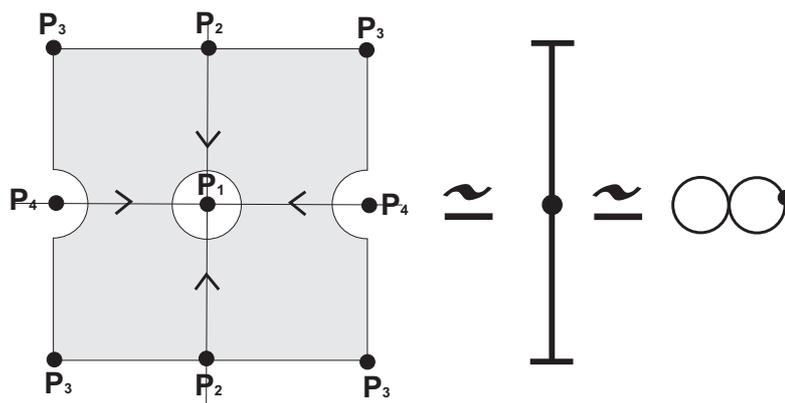
que  $h(P_1) < a < h(P_2)$  e  $h(P_3) < b < h(P_4)$ . Utilizando homotopias, não é difícil ver que  $(M_b, M_a) \approx (S^1 \vee S^1, *)$ , a operação  $\vee$  é chamada produto wedge, e será estudada com mais detalhes nos próximos capítulos. Logo

$$H_k(M_b, M_a) = \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, & k = 1, \\ \{0\}, & k \neq 1, \end{cases}$$

donde deduzimos que o sistema tem dois equilíbrios do tipo sela em  $M_{[a,b]}$ .

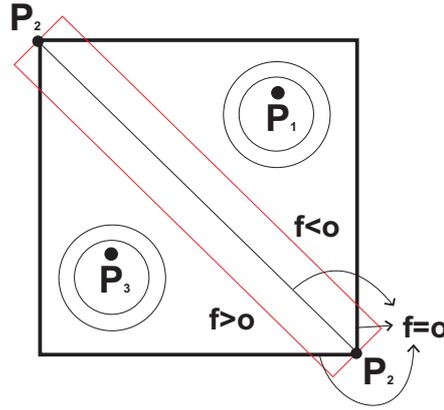


Para ver que  $(M_a, M_b)$  é homotopicamente equivalente a  $(S^1 \vee S^1, *)$ , considere a próxima figura:



Vejamos agora um exemplo com equilíbrios degenerados.

**Exemplo 29.** Considere a função  $f : T^2 \rightarrow \mathbb{R}$  descrita pelo diagrama abaixo.



Observe que os pontos críticos de  $f$  são:  $P_1$  (mínimo),  $P_3$  (máximo) e  $P_2$  (sela degenerada). Sejam  $0 < b < f(P_3)$  e  $f(P_1) < a < 0$ . Podemos tomar  $M_{[a,b]}$  como a região limitada pelo retângulo inclinado. Então novamente temos  $(M_b, M_a) \approx (S^1 \vee S^1, *)$ , porém desta vez  $M_{[a,b]}$  contém apenas  $P_2$  e não dois pontos críticos como antes.

Podemos eliminar a hipótese de o sistema ser gradiente, caso nosso objetivo se limite a conhecer a existência de um conjunto invariante não-vazio.

Ao invés de considerarmos subníveis de alguma função, tomaremos pares  $(B, A)$  de conjuntos positivamente invariantes. O papel do conjunto  $M_{[a,b]}$  será desempenhado por  $\overline{B \setminus A}$ .

**Definição 30.** Se  $N$  é um subconjunto de um espaço topológico  $M$  com um fluxo local, o conjunto invariante maximal em  $N$  é

$$\mathcal{I}(N) = \{x \in N : x \cdot t \in N, \forall t \in D_x\}.$$

Frequentemente ocorre que  $N$  é compacto, logo as órbitas em  $\mathcal{I}(N)$  estão definidas para todo  $t \in \mathbb{R}$ , (ver [6]).

**Proposição 31.** Suponha que  $A \subset B \subset M$ , com  $B$  positivamente invariante e  $A$  estritamente positivamente invariante. Além disso, suponha que  $\overline{B \setminus A}$  é compacto. Se a inclusão  $i : A \rightarrow B$  não for uma equivalência homotópica, então  $\mathcal{I}(\overline{B \setminus A}) \neq \emptyset$ .

*Prova.* De acordo com o Lema-Chave, existe algum  $x \in B$  para o qual não existe  $t \geq 0$ ,  $t \in D_x$  com  $x \cdot t \in A$ . Como  $\overline{B \setminus A}$  é compacto,  $x \cdot t$  existe para todo  $t \geq 0$  e  $x \cdot \mathbb{R}^+ \subset B \setminus A$ . Por compacidade,  $x \cdot \mathbb{R}^+$  tem um ponto de acumulação  $y$ . Seja  $\{t_n\}$  uma sequência tal que  $x \cdot t_n$  converge para  $y$ .

Afirmamos que  $y \cdot t \in \overline{B \setminus A}$  para todo  $t \in D_y$ . Seja  $t \in D_y$  (possivelmente  $t < 0$ ). Para  $n$  suficientemente grande,  $t_n + t \geq 0$  e

$$x \cdot (t_n + t) = (x \cdot t_n) \cdot t \rightarrow y \cdot t.$$

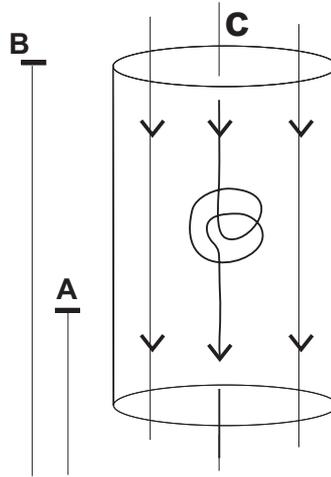
Visto que  $x \cdot (t_n + t) \in B \setminus A$ ,  $y \cdot t \in \overline{B \setminus A}$ . Logo  $y \in \mathcal{I}(\overline{B \setminus A})$ .  $\square$

**Observação 32.** Ao invés de assumir que  $\overline{B \setminus A}$  é compacto, podemos supor que existe um compacto  $K \subset \overline{B \setminus A}$  tal que

$$x \cdot \mathbb{R}^+ \subset \overline{B \setminus A} \implies x \cdot \mathbb{R}^+ \subset K.$$

Neste caso, temos que  $x \cdot \mathbb{R}^+ \subset K$ ,  $y \in K$  e  $y \cdot t \in K$  na demonstração acima, ficando provado que  $y \in \mathcal{I}(K) \subset \mathcal{I}(\overline{B \setminus A})$ .

**Exemplo 33.** Considere o fluxo num cilindro sólido  $C$  representado pela figura abaixo, na qual  $c$  é um nó. Seja  $M = C \setminus c$  e  $A, B$  os subconjuntos fechados em  $M$  estritamente positivamente invariantes representados na figura.



Note que  $\overline{B \setminus A}$  não é compacto, mas as órbitas próximas a  $c$  eventualmente atingem  $A$ .

Seja  $K = \overline{B \setminus A} \setminus U$ , onde  $U$  é uma vizinhança de  $c$  contendo os pontos de  $B \setminus A$  cujas órbitas se aproximam de  $c$ . Logo, todo  $x$  tal que  $x \cdot \mathbb{R}^+ \subset B \setminus A$  deve estar em  $K$ .

Porém,  $i : A \rightarrow B$  não é uma equivalência homotópica, pois o homomorfismo de grupos fundamentais  $i_{\#} : \pi_1(A) \rightarrow \pi_1(B)$  não é um isomorfismo. De fato, enquanto

$\pi_1(A) = \pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$ ,  $\pi_1(B)$  é mais complicado! O leitor pode consultar a literatura sobre a teoria dos nós. Curiosamente, porém,  $i_* : H_1(A) \rightarrow H_1(B)$  é um isomorfismo (a teoria da dualidade implica que a homologia do complemento de um conjunto depende apenas da topologia do conjunto, neste caso do nó  $c$ ). Daí temos um conjunto invariante não-vazio no cilindro.

A idéia que fundamenta o conceito de índice de Conley é utilizar o tipo de homotopia dos pares de espaços  $(B, A)$  como um índice topológico para conjuntos invariantes entre eles.

## 3.2 Fluxos e Fluxos Locais

Seja  $M$  um espaço topológico.

**Definição 34.** Uma *curva regular* em  $M$  é uma aplicação contínua  $\gamma : D_\gamma \rightarrow M$ , onde  $D_\gamma$  é um intervalo aberto, cujo gráfico  $\{(t, \gamma(t)), t \in D_\gamma\} \subset \mathbb{R} \times M$  é fechado.

Lembre que, segundo a definição 23, se  $\phi : D \rightarrow M$  é um fluxo local, então para todo  $x \in M$ , a curva  $\gamma : D_x \rightarrow M$ , dada por  $\gamma(t) = \phi(t, x)$  é regular. Caso o domínio  $D$  seja todo o  $\mathbb{R} \times M$ , diremos que o  $\phi$  é um fluxo global ou simplesmente um *fluxo*.

Mostraremos como ‘mergulhar’ um fluxo local em um fluxo.

Seja  $\Gamma(M)$  o conjunto das curvas regulares em  $M$ . Podemos definir uma topologia em  $\Gamma(M)$  tomando por sub-base o conjunto formado por  $\Gamma(K, V) = \{\gamma \in \Gamma(M) : \gamma(K) \subset V\}$ , onde  $K \subset \mathbb{R}$  é um compacto e  $V \subset M$  é um aberto. Esta topologia é conhecida pelo nome de *topologia compacta-aberta*.

$\Gamma(M)$  possui um fluxo natural, o *fluxo de translação à esquerda*:

Dado  $\gamma : D_\gamma \rightarrow M$ , defina  $\gamma \cdot t : D_{\gamma \cdot t} \rightarrow M$  fazendo  $D_{\gamma \cdot t} = D_\gamma - \{t\}$  e  $(\gamma \cdot t)(s) = \gamma(t + s)$ .

Vamos introduzir a notação

$$\Psi : \begin{array}{ll} \mathbb{R} \times \Gamma(M) & \longrightarrow \Gamma(M) \\ (t, \gamma) & \longmapsto \gamma \cdot t. \end{array}$$

Consideremos agora um fluxo local  $\phi$ . Defina um mergulho

$$h : \begin{array}{ccc} M & \longrightarrow & \Gamma(M) \\ x & \longmapsto & \gamma = \phi(\cdot, x), \end{array}$$

onde  $\gamma : D_x \rightarrow M$ . Seja  $\Phi = h(M)$  a imagem de  $M$  em  $\Gamma(M)$ . Seja

$$D' = \bigcup_{\gamma \in \Phi} D_\gamma \times \{\gamma\} = \{(t, \gamma) \in \mathbb{R} \times \Phi : t \in D_\gamma, \gamma \in \Phi\}.$$

**Proposição 35.**  $h : M \rightarrow \Phi$  é um homeomorfismo. Além disso, o diagrama

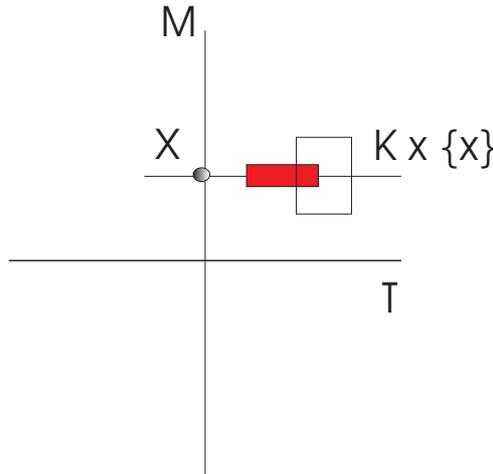
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times M & \supset & \begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{\phi} & M \\ \text{Id} \times h \downarrow & & \downarrow h \\ D' & \xrightarrow{\Psi} & \Phi \end{array} \\ \mathbb{R} \times \Phi & \supset & \end{array}$$

é comutativo.

*Prova.*  $h^{-1} : \Phi \rightarrow M$  nos dá a condição inicial, visto que  $\phi(0, \cdot) = \text{Id}_M$ . Temos portanto  $h^{-1}(\gamma) = \gamma(0)$ .

Afirmamos que  $h$  é contínua.

Dado  $x \in M$ , seja  $\gamma = h(x)$ . Escolha uma vizinhança  $\Gamma(K, V)$  de  $\gamma$ . Para cada  $(t, x) \in K \times \{x\}$ , escolha  $\epsilon > 0$  e uma vizinhança  $U_x$  de  $x$  em  $M$  tais que  $(t - \epsilon, t + \epsilon) \times U_x \subset D$ , e  $\phi((t - \epsilon, t + \epsilon) \times U_x) \subset V$  (use a continuidade de  $\phi$  e veja a figura abaixo).



Como  $K \times \{x\}$  é compacto, podemos tomar uma subcobertura finita  $(t_i - \epsilon_i, t_i + \epsilon_i) \times (U_x)_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Seja  $U = \bigcap_i (U_x)_i$ . Então  $K \times U \subset D$  e  $\phi(K \times U) \subset V$ . Concluimos que  $U$  é uma vizinhança de  $x$  em  $M$  cujos pontos são levados por  $h$  em  $\Gamma(K, V)$ .

Verificamos facilmente que  $h^{-1}$  é contínua. Dada uma vizinhança  $U$  de  $\gamma(0)$ ,  $\Gamma(\{0\}, U)$  é uma vizinhança de  $\gamma$  tal que  $h^{-1}(\gamma') \in U, \forall \gamma' \in \Gamma(0, U)$ .

Resta provar que o diagrama do enunciado é comutativo. Por um lado temos

$$h(\phi(t, x)) = \gamma(\cdot) = \phi(\cdot, \phi(t, x)) = \phi(t + \cdot, x),$$

pois  $\phi$  é um fluxo local. Por outro lado, vale

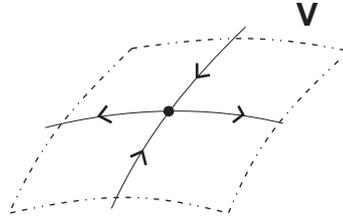
$$\Psi(Id \times h(t, x)) = \Psi(t, h(x)) = \Psi(t, \phi(\cdot, x)) = \phi(t + \cdot, x).$$

A demonstração está concluída. □

A proposição 35 fornece um mergulho de  $M$  com o fluxo local  $\phi$  em  $\Gamma(M)$  com o fluxo global  $\Psi$ .

O fato de  $\phi$  ser um fluxo local implica que  $\Phi$  é um conjunto localmente invariante por translações em  $\Gamma(M)$ . Em geral, dizemos que se  $X$  é um espaço topológico com um fluxo, um subconjunto  $\Phi$  de  $X$  é *localmente invariante* se existe um aberto  $V$  contendo  $\Phi$  tal que se

$$\gamma \in \Phi, \gamma \cdot [a, b] \subset V \ (a < 0, b > 0) \implies \gamma \cdot [a, b] \subset \Phi.$$



Os conjuntos destacados da figura acima são conjuntos localmente invariantes.

Uma condição equivalente é que  $\Phi$  é localmente invariante se, dado  $\gamma \in \Phi$ , existe uma vizinhança  $U$  de  $\gamma$  e  $\epsilon > 0$  tais que

$$(U \cap \Phi) \cdot (-\epsilon, \epsilon) \subset \Phi.$$

**Proposição 36.** *O conjunto  $\Phi = h(M)$  definido acima é localmente invariante em  $\Gamma(M)$ .*

*Prova.* Usaremos o fato de  $D$ , o domínio de  $\phi$ , ser um conjunto aberto.

$$h : \begin{array}{l} M \longrightarrow \Gamma(M) \\ x \longmapsto \gamma(\cdot, x) \end{array},$$

onde  $\gamma$  é a solução que passa por  $x$ .

$D \subset \mathbb{R} \times M$  é aberto. Tome  $\gamma \in \Phi$ , assim  $D' = id \times h(D)$  é aberto, pois  $h$  é um homeomorfismo. Considere  $D''$  como a projeção de  $D'$  em  $\Gamma(M)$ , assim  $D''$  é vizinhança de  $\gamma$ . Além disso,  $(D'' \cap \Phi) \cdot (-\epsilon, \epsilon) \subset \Phi$ .  $\square$

**Proposição 37.** *Todo fluxo local pode ser mergulhado como subconjunto localmente invariante de um fluxo. Reciprocamente, a restrição de um fluxo a um conjunto localmente invariante é um fluxo local naquele conjunto.*

Vejamos agora os elementos a serem utilizados na teoria do índice de Conley.

Seja  $\Gamma$  um espaço topológico com um fluxo denotado por  $x \cdot t$ . Seja  $\Phi$  um subconjunto localmente invariante de  $\Gamma$ . Vamos supor também que  $\Phi$  é localmente compacto e Hausdorff.

**Observação 38.** Lembramos que um espaço  $X$  é localmente compacto se cada um de seus pontos  $x$  tem ao menos um vizinhança compacta, i.e, existe  $N$  compacto tal que  $x \in \text{int}(N)$ . Se, além disso,  $X$  é Hausdorff, então cada  $x \in X$  possui vizinhanças compactas arbitrariamente pequenas, i.e, dada  $U$  vizinhança de  $x$ , existe  $N$  vizinhança compacta de  $x$  tal que  $N \subset U$ .

Note que a restrição do fluxo  $x \cdot t$  a  $\Phi$  é um fluxo local em  $\Phi$ .

**Proposição 39.** *Seja  $N \subset \Phi$  compacto e seja  $x \in N$  tal que  $x \cdot \mathbb{R}^+ \not\subset N$ . Então existe  $t \geq 0$  tal que  $x \cdot [0, t] \subset \Phi$ , mas  $x \cdot t \notin N$ . De fato, existe uma vizinhança  $U$  de  $x$  em  $\Phi$  e  $t \geq 0$  tais que*

$$U \cdot [0, t] \subset \Phi, \quad (U \cdot t) \cap N = \emptyset.$$

*Prova.* Seja

$$T = \inf\{t \geq 0 : x \cdot t \notin N\} = \sup\{t \geq 0 : x \cdot [0, t] \subset N\}.$$

Por hipótese,  $T < \infty$ .

Como  $N$  é compacto, existe uma sequência  $t_n \rightarrow T$  tal que  $x \cdot t_n$  converge para algum ponto de  $N$ . Mas  $x \cdot t_n \rightarrow x \cdot T$ , logo  $x \cdot T \in N$  e, mais ainda,  $x \cdot [0, T] \subset N$ .

Visto que  $\Phi$  é localmente invariante, existe  $\epsilon > 0$  tal que  $x \cdot [0, T + \epsilon) \subset \Phi$ . Da definição de  $T$ , concluímos que existe  $t \in (T, T + \epsilon)$  com  $x \cdot t \notin N$ . Mas  $\Phi$  é Hausdorff e

$N$  é compacto, logo  $N$  é fechado e  $\Phi \setminus N$  é aberto em  $\Phi$ . Por continuidade do fluxo local em  $\Phi$ , existe uma vizinhança  $U$  de  $x$  tal que, para  $y \in U$ ,  $y \cdot t \in \Phi \setminus N$  (observe que  $y \cdot t$  está definido). Portanto

$$U \cdot [0, t] \subset \Phi \quad \text{e} \quad (U \cdot t) \cap N = \emptyset.$$

□

*Prova.* Usaremos o fato de  $D$ , o domínio de  $\phi$ , ser um conjunto aberto.

$$h : \begin{array}{ccc} M & \longrightarrow & \Gamma(M) \\ x & \longmapsto & \gamma(\cdot, x) \end{array},$$

onde  $\gamma$  é a solução que passa por  $x$ .

$D \subset \mathbb{R} \times M$  é aberto. Tome  $\gamma \in \Phi$ , assim  $D' = id \times h(D)$  é aberto, pois  $h$  é um homeomorfismo. Considere  $D''$  como a projeção de  $D'$  em  $\Gamma(M)$ , assim  $D''$  é vizinhança de  $\gamma$ . Além disso,  $(D'' \cap \Phi) \cdot (-\epsilon, \epsilon) \subset \Phi$ . □

**Proposição 40.** *Todo fluxo local pode ser mergulhado como subconjunto localmente invariante de um fluxo. Reciprocamente, a restrição de um fluxo a um conjunto localmente invariante é um fluxo local naquele conjunto.*

Vejamos agora os elementos a serem utilizados na teoria do índice de Conley.

Seja  $\Gamma$  um espaço topológico com um fluxo denotado por  $x \cdot t$ . Seja  $\Phi$  um subconjunto localmente invariante de  $\Gamma$ . Vamos supor também que  $\Phi$  é localmente compacto e Hausdorff.

**Observação 41.** Lembramos que um espaço  $X$  é localmente compacto se cada um de seus pontos  $x$  tem ao menos um vizinhança compacta, i.e, existe  $N$  compacto tal que  $x \in \text{int}(N)$ . Se, além disso,  $X$  é Hausdorff, então cada  $x \in X$  possui vizinhanças compactas arbitrariamente pequenas, i.e, dada  $U$  vizinhança de  $x$ , existe  $N$  vizinhança compacta de  $x$  tal que  $N \subset U$ .

Note que a restrição do fluxo  $x \cdot t$  a  $\Phi$  é um fluxo local em  $\Phi$ .

**Proposição 42.** *Seja  $N \subset \Phi$  compacto e seja  $x \in N$  tal que  $x \cdot \mathbb{R}^+ \not\subset N$ . Então existe  $t \geq 0$  tal que  $x \cdot [0, t] \subset \Phi$ , mas  $x \cdot t \notin N$ . De fato, existe uma vizinhança  $U$  de  $x$  em  $\Phi$  e  $t \geq 0$  tais que*

$$U \cdot [0, t] \subset \Phi, \quad (U \cdot t) \cap N = \emptyset.$$

*Prova.* Seja

$$T = \inf\{t \geq 0 : x \cdot t \notin N\} = \sup\{t \geq 0 : x \cdot [0, t] \subset N\}.$$

Por hipótese,  $T < \infty$ .

Como  $N$  é compacto, existe uma sequência  $t_n \rightarrow T$  tal que  $x \cdot t_n$  converge para algum ponto de  $N$ . Mas  $x \cdot t_n \rightarrow x \cdot T$ , logo  $x \cdot T \in N$  e, mais ainda,  $x \cdot [0, T] \subset N$ .

Visto que  $\Phi$  é localmente invariante, existe  $\epsilon > 0$  tal que  $x \cdot [0, T + \epsilon) \subset \Phi$ . Da definição de  $T$ , concluímos que existe  $t \in (T, T + \epsilon)$  com  $x \cdot t \notin N$ . Mas  $\Phi$  é Hausdorff e  $N$  é compacto, logo  $N$  é fechado e  $\Phi \setminus N$  é aberto em  $\Phi$ . Por continuidade do fluxo local em  $\Phi$ , existe uma vizinhança  $U$  de  $x$  tal que, para  $y \in U$ ,  $y \cdot t \in \Phi \setminus N$  (observe que  $y \cdot t$  está definido). Portanto

$$U \cdot [0, t] \subset \Phi \quad \text{e} \quad (U \cdot t) \cap N = \emptyset.$$

□

Dado um conjunto compacto  $N \subset \Phi$ , defina

$$\begin{aligned} I(N) &= \{x \in N : x \cdot \mathbb{R} \subset N\}, \\ A^+(N) &= \{x \in N : x \cdot \mathbb{R}^+ \subset N\}, \\ A^-(N) &= \{x \in N : x \cdot \mathbb{R}^- \subset N\}. \end{aligned}$$

**Proposição 43.** *Para todo compacto  $N$ , os conjuntos  $I(N)$ ,  $A^+(N)$  e  $A^-(N)$  são compactos e são, respectivamente, invariante, positivamente invariante e negativamente invariante. Além disso,*

$$A^+(N) \cap A^-(N) = I(N).$$

*Prova.* Considere  $A^+(N)$ . De acordo com a última proposição, o conjunto

$$\{x \in N : x \cdot \mathbb{R}^+ \not\subset N\}$$

é aberto em  $N$ . Este conjunto é precisamente  $N \setminus A^+(N)$ , logo  $A^+(N)$  é fechado em  $N$ , donde compacto, já que  $N$  é compacto.

Se  $x \in A^+(N)$ ,  $t \geq 0$ , então

$$(x \cdot t) \cdot \mathbb{R}^+ = x \cdot [t, \infty) \subset N.$$

Portanto,  $x \cdot t \in A^+(N)$ .

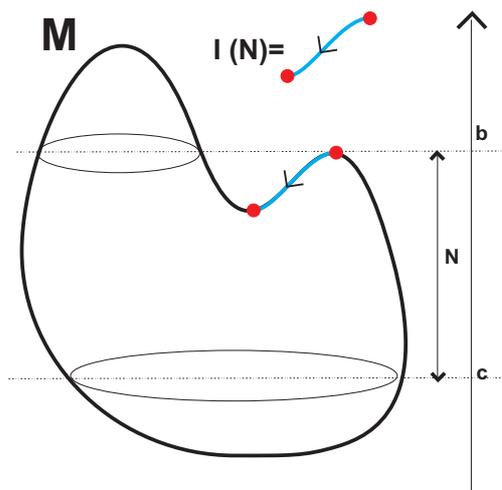
Os argumentos para  $I(N)$  e  $A^-(N)$  são análogos. □

**Definição 44.** Um conjunto compacto  $N \subset \Phi$  é uma *vizinhança isolante* se  $I(N) \subset \text{int}(N)$ . Um conjunto compacto invariante  $S$  é dito *conjunto invariante isolado* se  $S = I(N)$  para alguma vizinhança isolante.

**Observação 45.**  $N$  é uma vizinhança isolante se e somente se todo ponto  $x \in \partial N$  deixa  $N$  em uma ou ambas as direções do tempo, i.e

$$\partial N \cap I(N) = \emptyset.$$

**Exemplo 46.** Se  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  é a função altura, suave, e  $a < b$  são tais que  $M_{[a,b]}$  é compacto, então  $M_{[a,b]}$  é uma vizinhança isolante.



# Capítulo 4

## Pares-índices para conjuntos invariantes isolados.

### 4.1 Definição de par-índice.

Dado um conjunto invariante  $S$ , construiremos pares de espaços  $(N_1, N_0)$  cuja topologia relativa fornece um "índice" associado a  $S$ .

**Definição 47.** Seja  $S \subset \Phi$  um conjunto compacto invariante do fluxo local  $\Phi \subset \Gamma$ . Um *par-índice para  $S$  em  $\Phi$*  é um par  $(N_1, N_0)$  de conjuntos compactos  $N_0 \subset N_1 \subset \Phi$  tais que

(i)  $\overline{N_1 \setminus N_0}$  é uma vizinhança isolante para  $S$ .

(ii)  $N_0$  é positivamente invariante em  $N_1$ , i.e

$$x \in N_0, x \cdot [0, t] \subset N_1 \Rightarrow x \cdot [0, t] \subset N_0, t \geq 0.$$

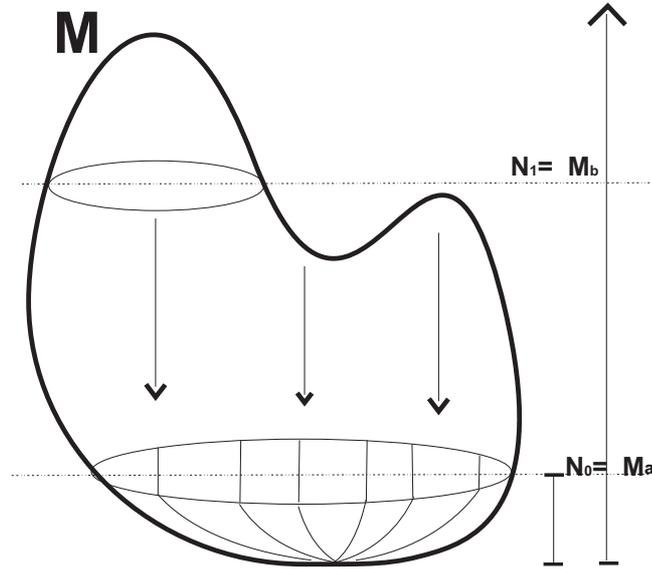
(iii)  $N_0$  é um *conjunto de saída* para  $N_1$ , i.e

$$x \in N_1, x \cdot \mathbb{R}^+ \not\subset N_1 \Rightarrow \exists t \geq 0, x \cdot [0, t] \subset N_1, x \cdot t \in N_0.$$

**Exemplo 48.** Seja  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  uma função altura, suave.

Se  $M_a \subset M_b$  são ambos compactos e  $a, b$  não são valores críticos, então  $(M_b, M_a)$  é um par-índice para o conjunto  $I(M_{[a,b]})$  (ver a figura abaixo). Se  $M_a$  não é compacto, mas

$M_{[a,b]}$  o é, poderíamos utilizar o par  $(M_{[a,b]}, M_{[a,\alpha]})$ , onde  $\alpha \in (a, b)$  e  $M_{[a,\alpha]}$  não contém pontos críticos.



## 4.2 Pares-índices e índice de homotopia de Conley

Dado um par-índice  $(N_1, N_0)$  para um conjunto invariante  $S$  em  $\Phi$ , a teoria de Morse sugere que o grupo  $H_k(N_1, N_0)$  seja um índice para  $S$ . Vamos revisar o conceito de homologia relativa. Uma  $k$ -cadeia relativa em  $(N_1, N_0)$  é um elemento do quociente

$$\Delta_k(N_1, N_0) = \Delta_k(N_1) / \Delta_k(N_0),$$

onde  $\Delta_k(X)$  é o grupo livre gerado pelas  $k$ -simplexos em  $X$  (ver [3]).

Ao invés de considerarmos a homologia relativa, vamos trabalhar diretamente com o espaço quociente  $N_1/N_0$ . Este espaço tem por pontos as classes de equivalência de  $N_1$  pela relação

$$x \sim y \iff x, y \in N_0 \text{ ou } x = y.$$

Denotaremos a classe de  $x \in N_1$  por  $[x]$ . A projeção de  $N_1$  sobre o quociente  $N_1/N_0$  é a aplicação:

$$\begin{aligned} \pi : N_1 &\longrightarrow N_1/N_0 \\ x &\longmapsto [x] \end{aligned}$$

Definimos em  $N_1/N_0$  a *topologia quociente*, isto é, topologia mais fina tal que  $\pi$  é uma aplicação contínua.

Observe que o conjunto  $N_0$  é um ponto de  $N_1/N_0$ . Vamos denotá-lo por  $*$ . Podemos então ver a projeção como uma aplicação de pares de espaços

$$\pi : (N_1, N_0) \rightarrow (N_1/N_0, *).$$

Um par de espaços em que o segundo espaço consiste em um ponto, é chamado *espaço pontuado*.

**Observação 49.** Sob certas hipóteses relativamente fracas,  $H_k(N_1, N_0) \approx H_k(N_1/N_0, *)$ . Porém não existe uma relação simples entre os grupos de homotopia.

**Definição 50.** Uma aplicação entre pares  $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  é uma *equivalência homotópica entre pares* se existe  $g : (Y, B) \rightarrow (X, A)$  tais que

$$f \circ g \cong id_{(Y,B)} \quad , \quad g \circ f \cong id_{(X,A)},$$

onde as homotopias são homotopias de pares, isto é

$$H : ([0, 1] \times X, [0, 1] \times A) \longrightarrow (Y, B),$$

com  $H_t(A) \subset B$ , para todo  $t$ .

Um caso particular são as equivalências homotópicas de espaços pontuados.

**Definição 51.** Dado  $(X, *)$ , seja  $[X, *]$  o *tipo de homotopia* do par  $(X, *)$ , isto é, o conjunto de todos os espaços pontuados homotopicamente equivalentes a  $(X, *)$ .

**Definição 52.** O *índice de homotopia de Conley* para um conjunto invariante isolado  $S$  é

$$h(S) = [N_1/N_0, *], \tag{4.1}$$

onde  $(N_1, N_0)$  é um par-índice para  $S$ .

**Observação 53.** Denotaremos a classe de homotopia do espaço pontuado  $(N_1/N_0, *)$  por  $[N_1/N_0]$

Mais adiante demonstraremos o seguinte teorema :

**Teorema 54.** *Dados  $(N_1, N_0)$  e  $(M_1, M_0)$  pares-índices para o conjunto invariante isolado  $S$ , então*

$$[N_1/N_0] = [M_1/M_0],$$

ou seja o índice de homotopia de Conley está bem definido.

Vejamos alguns preliminares para demonstração do teorema. Lembre que os elementos de  $N_1/N_0$  são dados por  $[x] \in N_1 \setminus N_0$  tais que

$$[x] = \begin{cases} \{x\} & \text{se } x \in N_1 \setminus N_0 \\ * & \text{se } x \in N_0 \end{cases}$$

Se  $N_1 = \emptyset$ , então  $N_1/N_0 = \{N_0\} \neq \emptyset$ , assim  $h(\emptyset) = [*] = \bar{0}$ .

**Proposição 55.**  $h(S) \neq \bar{0} \Rightarrow S \neq \emptyset$

Com a proposição acima vemos que quando o índice de Conley do conjunto invariante maximal de  $N$ ,  $I(N)$ , não é a classe de um ponto, isto é  $\bar{0}$ , então  $I(N) \neq \emptyset$ , ou seja, temos um conjunto invariante não trivial no interior de  $N$ .

**Observação 56.** Dado o par-índice  $(N_1, \emptyset)$ , temos que  $N_1/\emptyset = N_1 \sqcup *$  (união disjunta), daí  $[N_1/\emptyset] = [N_1 \sqcup \emptyset]$ , fazendo  $N_1 = \emptyset$ , temos que  $[\emptyset/\emptyset] = [*] = \bar{0}$

**Proposição 57.**  $N_0 \subset N_1$  espaços Hausdorff compactos,  $N_1/N_0$  é também espaço Hausdorff compacto. Além disso, se  $f : (N_1, N_0) \rightarrow (N'_1, N'_0)$  é contínua, então o diagrama:

$$\begin{array}{ccc} (N_1, N_0) & \xrightarrow{f} & (N'_1, N'_0) \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ (N_1/N_0, *) & \xrightarrow{\tilde{f}} & (N'_1/N'_0, *) \end{array}$$

é comutativo, onde  $\tilde{f}$  é a aplicação induzida por  $f$ .

*Prova.* Basta usar o fato que  $\tilde{f}$  é a aplicação induzida por  $f$ , isto é, que  $\tilde{f}([x]) = [f(x)]$ .

□

**Corolário 58.** Se  $(N_1, N_0)$  e  $(N'_1, N'_0)$  são Hausdorff, compactos e homotopicamente equivalentes, então  $[N_1/N_0] = [N'_1/N'_0]$ .

*Prova.* Seja  $f : (N_1, N_0) \rightarrow (N'_1, N'_0)$  homotopia. Pelo teorema, temos que  $\tilde{f} : (N_1/N_0, *) \rightarrow (N'_1/N'_0, *)$  é equivalência homotópica.  $\square$

**Definição 59.**  $N_0 \subset N_1$  é um *retrato forte de deformação* de  $N_1$  se existe homotopia  $H : [0, 1] \times N_1 \rightarrow N_1$  tal que  $H_0 = id_{N_1}$  e  $H_1 : N_1 \rightarrow N_0$  com  $x \in N_0 \Rightarrow H_t(x) = x$  para todo  $t$ .

A partir desta definição temos o corolário:

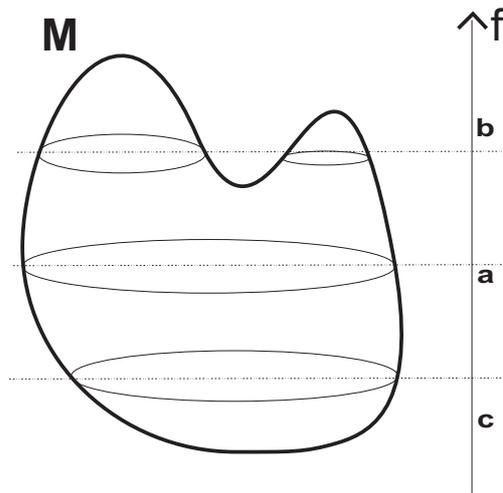
**Corolário 60.** Se  $N_0$  é um retrato forte de deformação de  $N_1$ , então  $[N_1/N_0] = \bar{0}$ .

*Prova.* Como  $N_0$  é um retrato forte de deformação de  $N_1$ , existe

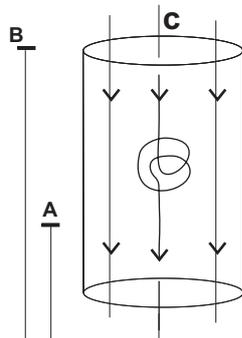
$$H_1 : (N_1, N_0) \rightarrow (N_0, N_0)$$

contínua, que induz a equivalência homotópica  $\tilde{H}_1$  (com inversa a aplicação induzida pela inclusão), daí  $[N_1/N_0] = [N_0/N_0] = [*] = \bar{0}$   $\square$

**Exemplo 61.** Seja  $M_{[a,c]}$  compacto sem pontos críticos. Vimos antes, que  $(M_a, M_c)$  é um par-índice para  $I(M_{[a,c]}) = \emptyset$ , por exemplo quando não temos conjuntos invariantes em  $M_{[a,c]}$ , daí  $[M_a/M_c] = \bar{0}$ . Veja a figura abaixo:



**Exemplo 62.** Cilindro sem um nó.

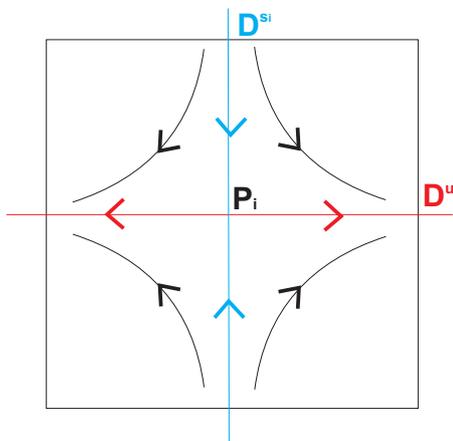


Claramente  $N_0$  (parte compacta de A desenhada) é um retrato forte de deformação de  $N_1$  (parte compacta de B desenhada), basta observar na figura que a homotopia é o fluxo. Pelo corolário temos que  $[N_1/N_0] = \bar{0}$ .

Vejam os  $(N_1, N_0)$  dados pela figura é um par-índice para o cilindro sem o nó.

- (0)  $N_0 \subset N_1$  e ambos são compactos.
- (i)  $S = I(\overline{N_1 \setminus N_0})$
- (ii)  $N_0$  é positivamente invariante em  $N_1$ , veja figura.
- (iii)  $N_0$  é conjunto de saída para  $N_1$ , veja a figura.

**Exemplo 63.** Equilíbrios hiperbólicos. Considere o fluxo da E.D.O.  $\dot{x} = F(x), x \in \mathbb{R}^n$ . Seja  $P_i$  um equilíbrio hiperbólico dessa E.D.O. Existe uma vizinhança  $N_1$  em que o fluxo é um produto de uma parte instável, de dimensão  $u_i$ , por uma parte estável de dimensão  $s_i$  (veja a figura abaixo).



Note que podemos considerar  $N_0 = \partial D^{u_i} \times D^{s_i}$ .  $(N_1, N_0)$  será um par-índice para  $P_i$ . Se consideramos a homotopia

$$H : \begin{array}{ccc} ([0, 1] \times D^{u_i}, [0, 1] \times \partial D^{u_i}) & \rightarrow & (N_1, N_0) \\ x & \mapsto & H_t(x) = x \cdot t \end{array}$$

vemos que  $(N_1, N_0) \cong (D^{u_i}, \partial D^{u_i})$ . Assim  $[N_1/N_0] = [D^{u_i}/\partial D^{u_i}]$ . Note que  $D^{u_i}/\partial D^{u_i}$  é homotópico a  $(S^{u_i}, *)$  (esfera pontuada de dimensão  $u_i$ ).

$$\text{Daí } h(P_i) = [D^{u_i}/\partial D^{u_i}] = [S^{u_i}].$$

**Observação 64.** Denote por  $\Sigma^u$  a classe de homotopia da esfera pontuada de dimensão  $u$ .

$$\text{Da observação temos que: } h(P_i) = \Sigma^{u_i}.$$

**Proposição 65.** *O índice de homotopia de Conley de um equilíbrio hiperbólico de dimensão instável  $u$  é  $\Sigma^u$ .*

**Exemplo 66.** O índice de Conley de um conjunto  $M_{[a,b]}$ .

Na teoria de Morse, se  $M_{[a,b]}$  é compacto e contém um ponto crítico,  $P$ , o qual é não degenerado, então

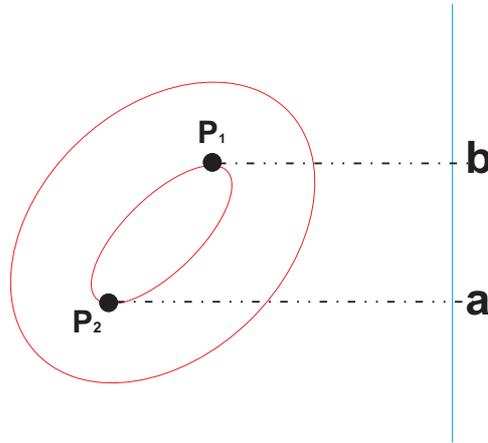
$$h(I(M_{[a,b]})) = h(P) = [M_b/M_a] = \Sigma^{I(P)},$$

onde  $I(P)$  é o índice de Morse de  $P$ .

### 4.3 Soma de índices de Conley

Da teoria de Morse sabemos que em  $M_{[a,b]}$  compacto temos um número finito de pontos críticos  $P_1, P_2, \dots, P_n$

**Exemplo 67.** Toro inclinado.



Como  $a, b$  não são valores críticos da função altura,  $(M_b, M_a)$  é um par-índice para  $I(M_{[a,b]})$ . Podemos ter  $(N'_1, N'_0)$ ,  $(N''_1, N''_0)$  pares-índices para os equilíbrios  $P_1$  e  $P_2$ , respectivamente. Queremos encontrar um par-índice para  $I(M_{[a,b]}) = \{P_1, P_2\}$ . Note que  $(N_1, N_0) = (N'_1, N'_0) \cup (N''_1, N''_0)$  é um par-índice para  $I(M_{[a,b]})$ . Como definir a classe de homotopia de conjuntos que são união de outros? Este problema nos leva a seguinte definição:

**Definição 68.** O *wedge* " $\vee$ " (ou buquê) de  $(X, x_0)$ ,  $(Y, y_0)$  espaços pontuados é definido por

$$(X, x_0) \vee (Y, y_0) = X \cup Y / \{x_0, y_0\},$$

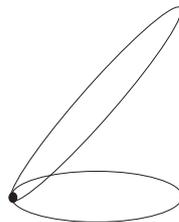
dotado da topologia quociente.

**Observação 69.**  $[X] = [X']$  e  $[Y] = [Y'] \implies [X \vee Y] = [X' \vee Y']$ . Nesse sentido podemos definir  $[X \vee Y] = [X] \vee [Y]$

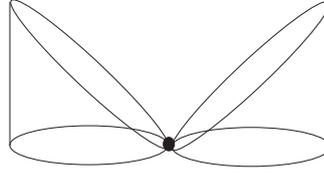
No contexto do exemplo acima, temos

$$[N_1/N_0] = [N'_1/N'_0 \vee N''_1/N''_0] = [N'_1/N'_0] \vee [N''_1/N''_0].$$

Cada equilíbrio  $P_i$  tem índice de Conley dado pela classe de homotopia da figura



Usando a definição de wedge, temos que o índice de Conley do conjunto  $\{P_1, P_2\}$  é dado pela classe de homotopia de :



.

**Observação 70.** O *wedge* é conhecido como soma de índice de conjuntos invariantes isolados.

**Observação 71.** Uma maneira alternativa de definir o *wedge* é

$$(X, x_0) \vee (Y, y_0) = (X \times \{y_0\}) \cup (\{x_0\} \times Y) \subset X \times Y,$$

dotado da topologia induzida.

**Proposição 72.** *Seja  $S$  um conjunto invariante isolado  $S = S_1 \sqcup S_2 \sqcup \dots \sqcup S_n$ , onde  $S_i$  é conjunto invariante isolado disjunto de  $S_j$ ,  $j \neq i$ , então  $h(S) = h(S_1) \vee \dots \vee h(S_n)$ .*

*Prova.* Seja  $(N_1^i, N_0^i)$  par-índice para  $S_i$ , onde esses pares-índices são disjuntos dois a dois. Vimos acima o caso  $n = 2$ , basta agora usar indução e temos:

$$h(S) = [N_1/N_0] = [N_1^1/N_0^1] \vee [N_1^2/N_0^2] \vee \dots \vee [N_1^n/N_0^n] = h(S_1) \vee h(S_2) \dots \vee h(S_n)$$

□

## 4.4 Existência de pares-índices para conjuntos invariantes por fluxos locais.

Para definirmos o índice de Conley de um conjunto invariante, precisamos verificar que existe um par-índice para um conjunto invariante dado e que o índice está bem definido. Provaremos nesta seção o seguinte teorema:

**Teorema 73.** *Seja  $N$ , compacto, vizinhança isoladora de  $S$  ( $S = I(N)$ ). Suponha que  $N_0 \subset N_1 \subset N$  compactos e positivamente invariantes em  $N$ . Com*

- (a)  $S \subset \text{int}(N_1)$ ,
- (b)  $S \cap N_0 = \emptyset$ ,
- (c)  $N_1 \cap \partial N = \partial N \subset N_0$ .

Então  $(N_1, N_0)$  é um par-índice para  $S = I(N)$

*Prova.* Vamos verificar que (a), (b), (c)  $\Rightarrow$  (i), (ii), (iii), da definição 44, página 27

- (i) (a) e (b)  $\Rightarrow S \subset \text{int}(N_1) \setminus N_0 \subset \text{int}(N_1 \setminus N_0)$ . para ver isto basta notar que  $\text{int}(N_1) \setminus N_0$  é um aberto contido em  $N_1 \setminus N_0$
- (ii)  $N_0$  é positivamente invariante em  $N_1$ , pois  $x \in N_0$  e  $x \cdot [0, t] \subset N_1 \subset N \Rightarrow x \cdot [0, t] \subset N_0$
- (iii)  $N_0$  é conjunto de saída para  $N_1$ . De fato, se  $x \in N_1$  e  $x \cdot \mathbb{R}_+ \subset N_1 \Rightarrow x \cdot \mathbb{R}_+ \subset N$  ( $N_1$  é positivamente invariante em  $N$ ). Assim  $\exists s \geq 0$  tal que  $x \cdot [0, s] \subset N$  e  $x \cdot s \in \partial N$ . Usando o fato que  $N_1$  é positivamente invariante em  $N$ , temos que  $x \cdot [0, s] \subset N_1$ , daí  $x \cdot s \in \partial N \cap N_1 \subset N_0$ , e como vimos acima temos também que  $x \cdot [0, s] \subset N_1$ .

□

Dado um conjunto invariante  $S = I(N)$ , onde  $N$  é uma vizinhança isolante de  $S$ , queremos encontrar um par-índice  $(N_1, N_0)$  para  $S$ .

**Definição 74.**  $N^t = \{x / x \cdot [-t, 0] \subset N\} =$  (andar  $t$  para trás em  $N$ ), onde  $t \geq 0$ .

**Teorema 75.**  $N^t$  é compacto e positivamente invariante em  $N$ .

*Prova.* Note que  $N^t \subset N$ . Portanto, para mostrar a compacticidade, basta verificar que  $N^t$  é fechado. Vejamos que  $N \setminus N^t$  é aberto. Tome  $x \in N \setminus N^t$ . Note que  $x \cdot [-t, 0] \not\subset N \Rightarrow \exists -s \in [-t, 0]$  tal que  $x \cdot (-s) \notin N$ . Usando que  $N$  é compacto e a continuidade do fluxo, sabemos que existe  $W$  uma vizinhança de  $x \cdot (-s)$ , isto é,  $W = \text{Viz}(x \cdot (-s))$  contida no exterior de  $N$  tal que,  $W \cdot s \subset N$ . Daí  $W \cdot s$  é vizinhança de  $x$  tal que  $W \cdot s \subset N \setminus N^t$ .

Vejamos que  $N^t$  é positivamente invariante em  $N$ . Dado  $x \in N^t$  tal que  $x \cdot [0, s] \subset N$ , tome  $y \in x \cdot [0, s] \Rightarrow y = x \cdot v$  para algum  $v \in [0, s]$ . Precisamos demonstrar que  $y \cdot [-t, 0] \subset N$ , i.e. que  $x \cdot [v - t, v] \subset N$ . Separando em dois casos:

1.  $v - t \geq 0$ , temos  $x \cdot [v - t, v] \subset x \cdot [0, v] \subset N$ , pois  $v \leq s$ ,
2.  $v - t \leq 0$ , sabemos que  $x \cdot [-t, 0] \subset N$ , como  $x \cdot [v - t, v] = x \cdot [v - t, 0] \cup x \cdot [0, v]$ , temos novamente que  $x \cdot [v - t, v] \subset N$ .

Em qualquer caso  $y \in N^t$ . Daí  $x \cdot [0, s] \subset N^t$ .  $\square$

Um dos conjuntos do meu par-índice para  $S = I(N)$  será  $N^t$ . Este com certeza será  $N_1$ , já que  $S \subset N^t$ .

**Observação 76.**  $\bigcap_{t \geq 0} N^t = A_-(N) = \{x \in N/x \cdot \mathbb{R}_- \subset N\}$ . Vejamos qual ‘t’, satisfaz  $N_1 = N_t$ . Sabemos que  $A_+(N) \cap \partial N$  é compacto (interseção de dois compactos)  $\Rightarrow V = N \setminus A_+(N) \cap \partial N$  é aberto em  $N$ . E como  $A_+(N) \cap \partial N \cap A_-(N) = S \cap \partial N = \emptyset$ , temos que  $V$  é vizinhança de  $A_-(N)$ . Usando a observação anterior sabemos que  $\exists T'$  tal que  $N^{T'} \subset N \setminus A_+(N) \cap \partial N$ , portanto  $N^{T'} \cap A_+(N) \cap \partial N = \emptyset$ . Considere o conjunto  $N^{T'} \cap \partial N$  (disjunto de  $A_+(N)$ ). Como  $N^{T'} \cap A_+(N) \cap \partial N = \emptyset$  temos que todos os pontos de  $N^{T'} \cap \partial N$  tem um tempo (positivo) de saída. Seja  $T''$  tal que  $x \in N^{T'} \cap \partial N \Rightarrow x \cdot [0, T''] \not\subset N$ . Tome  $T = \max\{T', T''\}$ , e seja  $N_1 = N^T$ .

Para construir  $N_0$  considere o conjunto  $N_1 \cap \partial N$ . E tome

$$N_0 = N_1 \cap ((N_1 \cap \partial N) \cdot [0, T]),$$

que é compacto.

**Teorema 77.**  $N_0$  é Positivamente invariante em  $N_1$

*Prova.* . Se  $x \in N_0$  é tal que  $x \cdot [0, s] \subset N_1$ , precisamos demonstrar que  $x \cdot [0, s] \subset N_1 \cap ((N_1 \cap \partial N) \cdot [0, T])$ , isto é,  $x \cdot [0, s] \subset (N_1 \cap \partial N) \cdot [0, T]$ . Como  $x \in N_0$  então  $x = y \cdot t$ , onde  $y \in N_1 \cap \partial N$ ,  $t \in [0, T]$  e  $y \cdot t \in N_1$ . Assim, tome  $z \in x \cdot [0, s] = y \cdot [t, t+s] \Rightarrow z = y \cdot w$ . Basta mostrar que  $w \in [0, T]$  e  $y \cdot w \in N_1$ . Para isto mostraremos que  $y \cdot [0, s] \subset N_1$ . De  $x \in N_0 \Rightarrow x \cdot [0, T] \subset N \Rightarrow y \cdot [t - T, t] \subset N$  e como por hipótese tínhamos que  $x \cdot [0, s] \subset N_1 \subset N$ , obtemos  $y \cdot [0, s+t] \subset N$ . Usando o fato de que  $N_1$  é positivamente invariante em  $N$  temos  $y \cdot [0, s+t] \subset N_1$ . Por fim temos que  $[0, s+t] \subset [0, T]$ , já que  $t+s > T \Rightarrow y \cdot [0, s+t] \subset N_1 \subset N$  mas os pontos de  $N_1$  saem de  $N$  para tempos maiores que  $T$ , teríamos assim uma contradição. Daí,  $w \in [0, t+s] \subset [0, T]$ .  $\square$

Já vimos que  $N_1, N_0$  são positivamente invariantes em  $N$ . Para completar a demonstração da existência de pares-índices, vejamos que  $(N_1, N_0)$  satisfaz as condições  $a, b$  e  $c$  do teorema 19.

(a)  $S \subset \text{int}N_1$ . Sabemos que  $S \subset \text{int}(N)$ . Seja  $x \in S \Rightarrow x \cdot [-T, 0] \subset S \subset \text{int}(N)$ . Podemos construir uma cobertura aberta para o compacto  $x \cdot [0, T]$ , e extrair uma subcobertura finita, escolha o ‘menor’ dos abertos da subcobertura, digamos  $U$ , tal que  $U \cdot [-T, 0] \subset \text{int}(N)$ , daí  $U \subset N^t = N_1 \Rightarrow x \in \text{int}N_1$

(b)  $S \cap N_0 = \emptyset$ , pois pontos de  $N_0$  saem de  $N$  para  $t > T$  e  $S$  é conjunto invariante.

(c)  $N_1 \cap \partial N = N_1 \cap (N_1 \cap \partial N) \cdot 0 \subset N_0$

Note que este teorema não só diz que existe, como também constrói um par-índice.

## 4.5 Equivalência de pares-índices.

Queremos agora verificar que o índice de homotopia de Conley para conjuntos invariantes está bem definido, *i.e.* demonstrar o teorema:

**Teorema 78.** (*Equivalência de pares-índices*) Sejam  $(N_1, N_0), (M_1, M_0)$  pares-índices para o conjunto invariante  $S$ , então

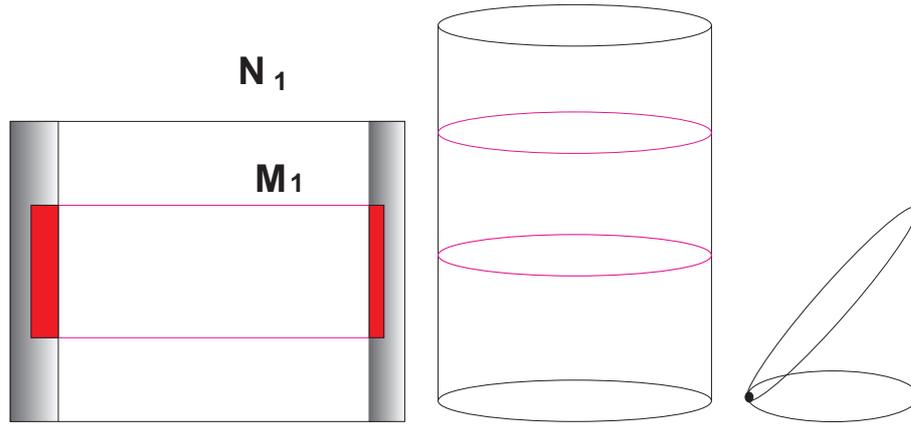
$$[N_1/N_0] = [M_1/M_0] = h(S) \quad (4.2)$$

A idéia da demonstração é construir uma equivalência homotópica entre  $N_1/N_0$  e  $M_1/M_0$ . Para isto lembremos das definições de homotopia e equivalência homotópica.

**Definição 79.** (Homotopia) Dizemos que  $f$  é homotópica à  $g$  se existe uma função contínua  $H : [0, 1] \times A \rightarrow B$  com  $H_0(x) = f(x)$  e  $H_1(x) = g(x)$ . Usaremos a notação  $f \cong g$ .

**Definição 80.** (Equivaleência homotópica)  $f : A \rightarrow B$  é equivalência homotópica se existe  $g$  tal que  $f \circ g \cong id_B$  e  $g \circ f \cong id_A$ . Chamamos  $g$  de inversa homotópica de  $f$ . Usaremos a notação  $g = f^{-\bar{1}}$ .

**Exemplo 81.** Vejamos um caso simples de equivalência de pares-índices, o caso  $(M_1, M_0) \subset (N_1, N_0)$ , como na figura



Basta considerarmos a aplicação induzida pela inclusão, que claramente é equivalência homotópica (ver figura).

Vamos agora trabalhar para conseguir construir a equivalência homotópica entre o quociente dos pares-índices. Dados dois pares-índices,  $(M_1, M_0), (N_1, N_0)$  defina a família de Funções (ver [7]).

$$f_{(t,u,v)} : M_1/M_0 \rightarrow N_1/N_0,$$

dadas por:

$$f_{(t,u,v)}([x]_M) = \left\{ \begin{array}{ll} [x \cdot (t + u + v)]_N, & (1) x \cdot [0, t + u] \subset M_1 \setminus M_0 \\ & (2) x \cdot [t, t + u + v] \subset N_1 \setminus N_0, \\ * & c.c., \end{array} \right\},$$

onde a notação *c.c.* significa caso contrário.

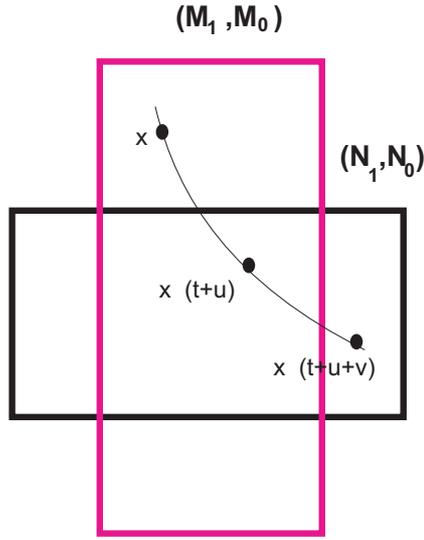
Dê algumas condições para  $(t, u, v)$ :

(I)  $t + u \geq 0, u + v \geq 0$ ;

(II)  $x \cdot [-t, u] \subset M_1 \setminus M_0 \Rightarrow x \in N_1$ ;

(III)  $x \in M_1, x \cdot [-u, v] \subset N_1 \setminus N_0 \Rightarrow x \in M_1 \setminus M_0$ .

Veja figura



**Proposição 82.** Cada  $f_{(t,u,v)}$  é contínua.

Veremos a seguir a demonstração desta proposição.

**Observação 83.** Se (I),(II) e (III) são satisfeitos para certos  $(t_0, u_0, v_0)$ , então são satisfeitos para quaisquer  $(t, u, v)$ , com  $t \geq t_0, u \geq u_0$  e  $v \geq v_0$ .

**Proposição 84.** As  $f_{(t,u,v)}$  com  $(t, u, v)$  satisfazendo (I),(II) e (III) são duas a duas homotópicas e cada uma é equivalência homotópica.

Provando a proposição acima, construiremos uma  $f_{(t,u,v)}$  conectando os quocientes dos pares-índices.

*Prova.* Sejam  $f_{(t,u,v)}$  e  $f_{(t',u',v')}$  satisfazendo (I),(II) e (III). Seja  $T = \max\{t, u, v, t', u', v'\}$ ;  $f : M_1/M_0 \times [T, \infty) \times [T, \infty) \times [T, \infty) \rightarrow N_1/N_0$  é contínua e  $f_{(t,u,v)} \cong f_{(T,T,T)}$ , de fato seja  $Q = [t, \infty) \times [u, \infty) \times [v, \infty)$ , o octante com ‘origem’ no ponto  $(t, u, v)$ .  $Q$  é convexo, então  $\exists$  caminho  $\lambda : [0, 1] \rightarrow Q, \lambda(0) = (t, u, v)$  e  $\lambda(1) = (T, T, T)$ , por exemplo o segmento ligando os pontos. Daí a homotopia será  $H_s([x]) = f([x], \lambda(s))$ . Analogamente, temos  $f_{(t',u',v')} \cong f_{(T,T,T)}$ . Concluimos que  $f_{(t',u',v')} \cong f_{(t,u,v)}$ .

**Lema 85.**  $f_{(t,u,v)} : M_1/M_0 \rightarrow N_1/N_0$ , satisfazendo (I),(II) e (III) e  $f'_{(t',u',v')} : N_1/N_0 \rightarrow P_1/P_0$ , satisfazendo (I'),(II') e (III')  $\Rightarrow$

$$f'_{(t',u',v')} \circ f_{(t,u,v)} = f''_{(t'',u'',v'')} : M_1/M_0 \rightarrow P_1/P_0$$

satisfazendo (I''),(II'') e (III''), com  $t'' = t + t', u'' = u + u'$  e  $v'' = v + v'$ .

Provaremos este lema após a demonstração da proposição, na verdade na proposição precisamos do caso particular em que  $(P_1, P_0) = (M_1, M_0)$ .

Voltando à proposição, note que  $f''_{(0,0,0)}$  é uma das  $(f'')$ 's, i.e.  $(0,0,0)$  satisfaz (I''),(II'') e (III''). Note também que  $f''_{(0,0,0)}([x]) = [x] \Leftrightarrow x \in M_1 \setminus M_0$ , daí  $f''_{(0,0,0)} = id_{M_1/M_0}$ . Concluimos que  $f' \circ f = f'' \cong f''_{(0,0,0)} = id_{M_1/M_0}$ . Analogamente verificamos que  $f \circ f' \cong id_{N_1/N_0}$ . Isto prova que  $f$  é equivalência homotópica.  $\square$

**Exemplo 86.** (A inclusão induzida.)

Sejam  $(M_1, M_0), (N_1, N_0)$  pares-índices para o conjunto invariante  $S$  tais que

$$\begin{cases} M_1 \setminus M_0 \subset N_1 \\ M_0 \cap N_1 \subset N_0 \end{cases}$$

Considere a aplicação inclusão induzida (inclusão do quociente dos pares-índices)

$$\tilde{i} : M_1/M_0 \rightarrow N_1/N_0$$

dada por

$$\tilde{i} : [x]_M \mapsto \begin{cases} [x]_N & \text{se } x \in M_1 \setminus M_0 \\ *, & \text{c.c.} \end{cases}$$

Vejamos que  $\tilde{i}$  pode ser escrita como uma das  $f'$ 's sendo assim o índice de homotopia de Conley está bem definido para este exemplo.

$$f_{(0,0,0)}([x]_M) = \begin{cases} [x]_N, & x \in M_1 \setminus M_0 \text{ e } x \in N_1 \setminus N_0, \\ *, & \text{c.c.,} \end{cases}$$

Mas  $M_1 \setminus M_0 \subset N_1 \Rightarrow (M_1 \setminus M_0) \cap (N_1 \setminus N_0) \subset N_1 \setminus N_0$ , daí  $f_{(0,0,0)}([x]_M) = \tilde{i}([x]_M)$  e  $[N_1/N_0] = [M_1/M_0]$ .

Usando o Teorema 70 podemos verificar que dado uma par-índice  $(P_1, P_0)$  para  $S$ , então  $(P_1, P_0^{-t})$  e  $(P_1, P_1^t \cap P_0)$  também são pares-índices para  $S$ .  $P_0^{-t}$  é definido por:

**Definição 87.**  $P_0^{-t} = \{x \mid \exists s \in [0, t] \text{ tal que } x \cdot [0, s] \subset P_1 \text{ e } x \cdot s \in P_0\}$

Vejamos agora um exemplo importante.

**Exemplo 88.** (o homeomorfismo induzido pelo fluxo) A função  $h(x) = x \cdot t$  é um homeomorfismo (com inversa  $h^{-1}(y) = y \cdot (-t)$ ). Tome a função induzida por  $h$ ,

$$\tilde{h} : P_1/P_0^{-t} \rightarrow P_1^t/P_1^t \cap P_0,$$

dada por

$$\tilde{h}([x]) = \begin{cases} [x \cdot t], & x \in P_1 \setminus P_0, \\ *, & c.c., \end{cases}$$

Vemos que  $\tilde{h}$  é uma das  $f$ 's. Usando a notação

$$(M_1, M_0) = (P_1, P_0^{-t}), (N_1, N_0) = (P_1^t, P_1^t \cap P_0)$$

temos

$$f_{(t,-t,t)}([x]) = \begin{cases} [x \cdot t], & x \in M_1 \setminus M_0 \text{ e } x \cdot t \in N_1 \setminus N_0, \\ *, & c.c., \end{cases}$$

Mas  $x \in M_1 \setminus M_0 \Rightarrow x \cdot t \in N_1 \setminus N_0$ , pois

$$x \in M_1 \setminus M_0 = P_1 \setminus P_0^{-t} \Rightarrow x \notin P_0^{-t} \Rightarrow x \cdot [0, t] \subset P_1 \setminus P_0 \Rightarrow$$

$$x \cdot t \cdot [-t, 0] \subset P_1 \setminus P_0 \Rightarrow x \cdot t \in P_1^t \setminus P_0^{-t} \subset N_1 \setminus N_0.$$

Portanto

$$f_{(t,-t,t)}([x]) = \tilde{h}([x]).$$

Basta verificar que  $(t, -t, t)$  satisfazem (I),(II) e (III):

$$(I) \quad t - t \geq 0$$

$$(II) \quad x \cdot [-t, -t] = x \cdot (-t) \in M_1 \setminus M_0 \Rightarrow x \in P_1^t = N_1$$

$$(III) \quad x \in M_1 = P_1, x \cdot [t, t] = x \cdot t \in N_1 \setminus N_0 = P_1^t \setminus P_1^t \cap P_0 \Rightarrow x \cdot t \cdot [-t, 0] \subset P_1 \setminus P_0 \Rightarrow x \in P_1 \setminus P_0^{-t} = M_1 \setminus M_0.$$

**Corolário 89.** *Qualquer composição de inclusão induzida e homeomorfismo induzido por fluxos locais é equivalência homotópica, e quaisquer duas composições (com mesmo domínio e contradomínio) são homotópicas.*

*Prova.* Basta ver que inclusões induzidas e homeomorfismos induzidos por fluxos locais são escritos como as  $f$ 's □

Provemos o Teorema da Equivalência de pares-índices.

**Teorema 90.** *Sejam  $(M_1, M_0), (N_1, N_0)$  pares-índices para um conjunto invariante isolado  $S$ , suponha que temos uma função*

$$T : M_1 \rightarrow [0, \infty)$$

*tal que para  $x \in M_1$  temos  $x \cdot [0, T(x)] \subset N_1$ , e para  $x \in M_0$  temos  $x \cdot T(x) \in N_0$ . Então defina*

$$\begin{aligned} g : (M_1, M_0) &\longrightarrow (N_1, N_0) \\ x &\longmapsto x \cdot T(x). \end{aligned}$$

*Esta  $g$  induz uma  $\tilde{g} : M_1/M_0 \rightarrow N_1/N_0$  que será uma das  $f$ 's.*

Note que  $g$ , é uma função de pares que está bem definida, pois  $g(M_0) \subset N_1$  e  $g(M_1) \subset N_0$ .

*Prova.* Podemos escolher um compacto  $K$  vizinhança de  $A^+(N)$  disjunta de  $M_0$ , pois  $M_0$  é conjunto de saída e  $A^+(N)$  é formado por pontos que não saem de  $N$  para  $t \geq 0$ . Como  $K$  e  $M_0$  são compactos disjuntos, pelo Teorema de Uryshon (ver [9]), existe  $\varphi : N_1 \rightarrow [0, 1]$  que vale 0 em  $K$ , e que vale 1 em  $M_0$ . Defina

$$h(x) = x \cdot \varphi(x) \cdot T(x).$$

Note que  $g \cong h$ , basta tomar  $H_t(x) = x \cdot ((1-t)\varphi(x) + t) \cdot T(x)$  como homotopia entre as funções. Vamos mostrar que  $\tilde{h} \cong f_{(t,u,v)}$ , onde  $\tilde{h}([x]) = [h(x)]$ . Escolha  $t \geq 0$  tal que  $N_1 \setminus N_0^{-t} \subset K$ , daí

$$M_1/M_0 \xrightarrow{\tilde{h}} N_1/N_0 \xrightarrow{\tilde{\pi}} N_1/N_0^{-t},$$

onde  $\tilde{\pi}$  é a aplicação induzida pela projeção. Daí

$$\tilde{\pi} \circ \tilde{h}(x) = x,$$

se  $x \in K$  portanto  $\tilde{\pi} \circ \tilde{h}$  é uma inclusão induzida e está na família das  $f$ 's, daí  $\tilde{\pi} \circ \tilde{h} \cong f_{(t,u,v)}$ , como  $\tilde{\pi}$  tem inversa homotópica, então

$$\tilde{h} \cong \tilde{\pi}^{-1} \circ f_{(t,u,v)} \cong f'_{(t',u',v')},$$

portanto  $\tilde{g}$  é equivalência homotópica e

$$[N_1/N_0] = [M_1/M_0].$$

□

Vamos agora à demonstração da proposição (79), sobre a continuidade das  $f$ 's.

*Prova.*

- Caso 1:  $x \cdot [0, t + u] \not\subset \overline{M_1 \setminus M_0}$ , por (1) temos que  $f([x], t, u, v) = *$ , precisamos demonstrar que existe uma vizinhança de  $([x], t, u, v)$  tal que (1) não vale, isto é, dado  $([y], t', u', v')$  nessa vizinhança então  $f([y], t', u', v') = *$ . Sabemos que  $\Phi \setminus \overline{M_1 \setminus M_0}$  é aberto. Pela continuidade do fluxo, vemos que como  $x \cdot [0, t + u] \not\subset \overline{M_1 \setminus M_0}$  existe uma vizinhança,  $U$  de  $x$  e  $s \in [0, t + u]$  com  $(U \cdot s) \cap \overline{M_1 \setminus M_0} = \emptyset$ , assim

$$\forall y \in U \Rightarrow y \cdot [0, t + u] \not\subset \overline{M_1 \setminus M_0}.$$

Vejam os dois possíveis casos para  $t + u$ :

–  $(t + u) = 0$ ,

daí  $y \in \overline{M_1 \setminus M_0}$ , como  $(t', u', v')$  satisfazem (I) temos que  $t' + u' \geq t + u = 0$ .

Basta tomar nossa vizinhança como :  $V_1 = \{([y], t', u', v') / y \in U\}$ , e  $f_{(t,u,v)}$  é contínua.

–  $(t + u) > 0$ ,

escolha  $s > 0$ , tal que  $t + u < s$ , isto nos diz que  $y \cdot [0, t' + u'] \not\subset \overline{M_1 \setminus M_0}$ , para  $t' + u' > s$ , e uma vizinhança de  $([x], t, u, v)$  seria  $V_2 = \{([y], t', u', v') / y \in U \text{ e } t' + u' > s\} \cap (M_1/M_0 \times [t_0, \infty) \times [u_0, \infty) \times [v_0, \infty))$ , novamente  $f_{(t,u,v)}$  é contínua.

- Caso 2:  $([x], t, u, v)$  não satisfaz (2), isto é,  $x \cdot [t, t + u + v] \not\subset \overline{N_1 \setminus N_0}$ . É um caso análogo ao caso 1, basta fazer as trocas  $0 \leftrightarrow t$  e  $(M_1, M_0) \leftrightarrow (N_1, N_0)$ .

- Caso 3:  $x \cdot [0, t + u] \subset \overline{M_1 \setminus M_0}$ ,  $x \cdot [t, t + u + v] \subset \overline{N_1 \setminus N_0}$  e  $x \cdot [0, t + u + v] \cap N_0 = \emptyset$ .

Vejam que  $([x], t, u, v)$  satisfaz (1) e (2),

- (2) sabemos que  $\overline{N_1 \setminus N_0} \setminus N_0 \subset N_1 \setminus N_0$  e que  $x \cdot [t, t + u + v] \subset \overline{N_1 \setminus N_0} \setminus N_0$ , daí  $x \cdot [t, t + u + v] \subset \overline{N_1 \setminus N_0} \setminus N_0 \subset N_1 \setminus N_0$

- (1)  $x \cdot (t + u) \cdot [-u, v] = x \cdot [t, t + u + v] \subset N_1 \setminus N_0$ , por (III) temos que  $x \cdot (t + u) \in M_1 \setminus M_0$ , como  $M_0$  é conjunto de saída para  $M_1$  concluímos que  $x \cdot [0, t + u] \subset M_1 \setminus M_0$ .

Assim temos que  $f([x], t, u, v) = [x \cdot (t + u + v)]$ . Sabemos, pela continuidade do fluxo, que existe vizinhança,  $W$ , de  $(x, t, u, v)$  tal que  $\forall (y, t', u', v') \in W \Rightarrow y \cdot [0, t' + u'] \cap M_0 = \emptyset$  e  $y \cdot [t, t' + u' + v'] \cap N_0 = \emptyset$ , já que  $\Phi \setminus M_0, \Phi \setminus N_0$  são abertos. Para mostrar que  $(y, t', u', v')$  satisfazem (1), note que

$$y \in M_1, y \cdot t' \cdot [-t', u'] \cap M_0 = \emptyset \Rightarrow y \cdot [0, t' + u'] \subset M_1 \setminus M_0.$$

Para mostrar que (2) também vale para pontos de  $W$ , note que  $y \cdot t' \cdot [-t', u'] \subset M_1 \setminus M_0$ . Por (II), temos que  $y \cdot t' \in N_1$ . De  $y \cdot [t', t' + u' + v'] \cap N_1 = \emptyset$ , obtem-se  $y \cdot [t', t' + u' + v'] \subset N_1 \setminus N_0$ . Basta tomar  $\tilde{W} = \{([y], t', u', v') / y \in W\}$ , como vizinhança de  $([x], t, u, v)$ , e nesta os pontos tem imagem  $f([y], t', u', v') = [y \cdot (t' + u' + v')]$ . Mais uma vez,  $f$  é contínua.

- Caso 4:  $x \cdot [0, t' + u'] \subset \overline{M_1 \setminus M_0}$ ,  $x \cdot [t, t + u + v] \subset \overline{N_1 \setminus N_0}$  e  $x \cdot [t, t + u + v] \cap N_0 \neq \emptyset$ . (2) falha pois  $x \cdot [t, t + u + v] \cap N_0 \neq \emptyset \Rightarrow \exists w^* \in [t, t + u + v]$  tal que  $x \cdot w^* \in N_0 \Rightarrow x \cdot [t, t + u + v] \not\subset N_1 \setminus N_0 \Rightarrow f([x], t, u, v) = *$ . Seja  $\tilde{V} = \text{Viz}(*)$  em  $N_1/N_0$  e tome  $V = \pi^{-1}(\tilde{V}) = \{y \in N_1 / [y] \in \tilde{V}\}$ , onde  $\pi$  é a projeção :

$$\pi : \begin{array}{ccc} N_1 & \longrightarrow & N_1/N_0 \\ x & \longmapsto & [x]. \end{array}$$

Lembre-se que  $N_0$  é positivamente invariante em  $N_1$ , assim para  $(y, t', u', v')$  próximo de  $(x, t, u, v)$ , temos  $y \cdot (t' + u' + v') \in V$ , então  $f([y], t', u', v') = *$

□

Agora vejamos a demonstração do Lema que usei na demonstração do Teorema de equivalência de pares-índices, que diz que a família das  $f'$ s é fechada quanto a composição.

*Prova.* Queremos provar que a composição abaixo é uma das  $f''_{(t'', u'', v'')} : M_1/M_0 \rightarrow P_1/P_0$ , com  $(t'', u'', v'') = (t + t', u + u', v + v')$

$$M_1/M_0 \xrightarrow{f_{(t, u, v)}} N_1/N_0 \xrightarrow{f'_{(t', u', v')}} P_1/P_0,$$

onde  $f$  satisfaz (I),(II),(III) e  $f'$  satisfaz (I'),(II'),(III').

$$f'_{(t',u',v')} \circ f_{(t,u,v)}([x]) = \begin{cases} f'_{(t',u',v')}([x \cdot (t+u+v)]), & (1)x \cdot [0, t+u] \subset M_1 \setminus M_0 \\ & (2)x \cdot [t, t+u+v] \subset N_1 \setminus N_0, \\ f'_{(t',u',v')}(*), & c.c., \end{cases}$$

$$= \begin{cases} [x \cdot (t+u+v) \cdot (t'+u'+v')], & (1)x \cdot [0, t+u] \subset M_1 \setminus M_0 \\ & (2)x \cdot [t, t+u+v] \subset N_1 \setminus N_0, \\ & (1')x \cdot (t+u+v) \cdot [0, t'+u'] \subset N_1 \setminus N_0, \\ & (2')x \cdot (t+u+v) \cdot [t', t'+u'+v'] \subset P_1 \setminus P_0, \\ *, & c.c., \end{cases}$$

Precisamos demonstrar que

$$(1), (2), (1'), (2') \Leftrightarrow (1''), (2'').$$

Assumindo que valem (I), (II), (III), (I'), (II') e (III').

- (1), (2), (1') e (III)  $\Rightarrow$  (1'').

(2),(1')  $\Rightarrow x \cdot [t, t'' + u'' + v] \subset N_1 \setminus N_0 \Rightarrow x \cdot [t+u, t'' + u''] \cdot [-u, v] \subset N_1 \setminus N_0 \stackrel{(III)}{\Rightarrow} x \cdot [t+u, t'' + u''] \subset M_1 \setminus M_0$ . Como de (1) temos  $x \cdot [0, t+u] \subset M_1 \setminus M_0$ , obrigatoriamente temos (1'').

Analogamente,

- (2), (1'), (2') e (III')  $\Rightarrow$  (2''),

- (1'')  $\Rightarrow$  (1),

- (2'')  $\Rightarrow$  (2'),

- (1''), (2''), (II) e (III')  $\Rightarrow$  (2) e (1'). □

## 4.6 “Ultimate Conley Index”

Vamos agora definir outro índice de Conley que será utilizado para provarmos o Teorema da Continuação mais adiante.

**Definição 91.** Um sistema conexo simples (SCS), é um par  $(P, J)$  onde  $P$  é conjunto de espaços topológicos pontuados e  $J$  é um conjunto de funções entre esses espaços espaços satisfazendo :

- (i) existe uma função entre dois espaços quaisquer e quaisquer duas funções entre os mesmos espaços são homotópicas;
- (ii) o conjunto de funções é fechado quanto à composição;
- (iii) dado  $X \in P$  a identidade de  $X$  é uma destas funções,

ou seja, para  $X, Y \in P$ ,  $J(X, Y) = \{f : X \rightarrow Y \text{ tais que } f \text{ está em uma classe de homotopia } \}$

No caso particular de um conjunto invariante isolado  $S$ , temos:  $P = \{N_1/N_0 \text{ tal que } (N_1, N_0) \text{ é par-índice para } S\}$ ,

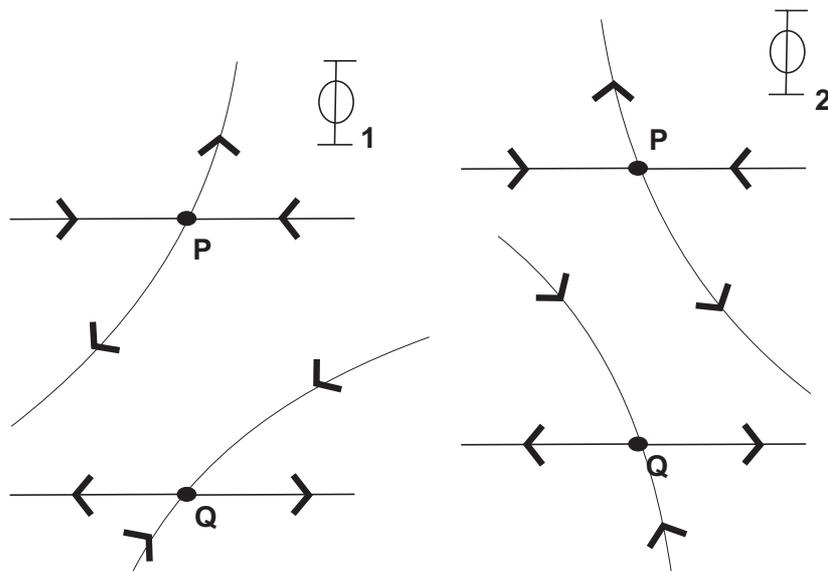
$$J(N_1/N_0, N'_1/N'_0) = \{[f_{(t,u,v)}]\}, \text{ com } P \text{ e } J \text{ definidos acima.}$$

**Definição 92.** O índice de Conley de um conjunto invariante isolado  $S$  é o SCS:

$$CI(S) = (P, J)$$

Vejamos a importância de incluir as  $f$ 's na definição desse índice.

**Exemplo 93.** Sejam os fluxos  $\Phi_1$  e  $\Phi_2$  dados pela figura abaixo.



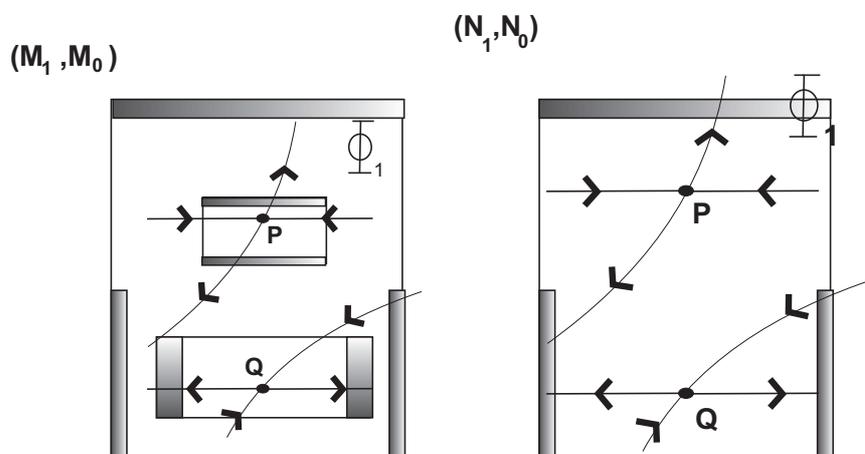
Temos que  $S_1 = \{P, Q\} = S_2$ , denote estes conjuntos por  $S$ , portanto tem o mesmo índice de homotopia de Conley que é dado por

$$h(S_1) = h(S_2) = [S^1 \vee S^1] = \Sigma^1 \vee \Sigma^1,$$

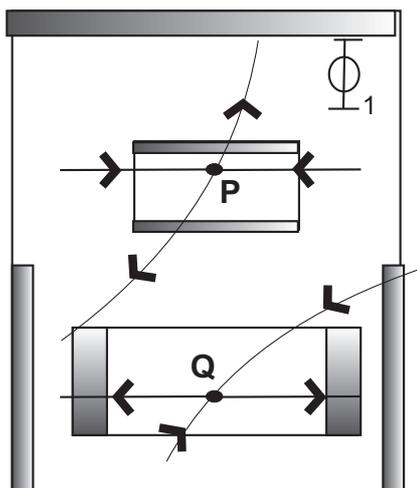
pois  $P, Q$  são equilíbrios hiperbólicos. Mas

$$CI_1(S_1) \neq CI_2(S_2).$$

Como veremos a seguir. Sejam  $(M_1, M_0), (N_1, N_0)$  pares-índices para  $S_1$ , conforme a figura:



tais que



Note que estes pares-índices,  $(N_1, N_0)$  e  $(M_1, M_0)$ , também são pares-índices para  $S_2$ . Queremos construir

$$f_{(t,u,v)}^j : M_1/M_0 \rightarrow N_1/N_0, j = 1, 2,$$

tais que  $f^1 \not\cong f^2$ . Defina  $g^j$  da seguinte maneira:

Seja  $T_1$  o tempo de saída de  $M_0$  para  $N_0$  pelo fluxo  $\Phi_1$ , e  $T_2$  o tempo de saída de  $M_0$  para  $N_0$  pelo fluxo  $\Phi_2$ . Note que  $T_j \leq$  tempo de saída em todo lugar. A partir daí defina,

$$\begin{aligned} g^j : (M_1, M_0) &\longrightarrow (N_1, N_0) \\ x &\longmapsto x \cdot T_j(x), \end{aligned}$$

cada  $g^j$  induz uma  $\tilde{g}^j \cong f_{(t,u,v)}^j$ , como vimos no teorema de equivalência de pares-índices, na página 46. Para mostrar que  $f^1 \not\cong f^2$ , basta mostrar que  $\tilde{g}^1 \not\cong \tilde{g}^2$ , ou seja que

$$\tilde{g}_*^j : H_1(M_1, M_0) \rightarrow H_1(N_1, N_0)$$

são diferentes. Considere as sequências exatas:

$$H_1(M_1) \rightarrow H_1(M_1, M_0) \xrightarrow{\delta_*} H_0(M_0) \xrightarrow{i_*} H_0(M_1),$$

$$H_1(N_1) \rightarrow H_1(N_1, N_0) \xrightarrow{\delta_*} H_0(N_0) \xrightarrow{i_*} H_0(N_1).$$

De fato  $H_1(M_1) = H_1(N_1) = 0$ , pois  $N_1$  e  $M_0$  contém apenas dois equilíbrios hiperbólicos que não são ligados por um ciclo (órbita). Vejamos as outras classes de homologia:

- $M_0$  tem 4 componentes conexas  $\Rightarrow H_0(M_0) \approx \mathbb{Z}^4$ ,
- $N_0$  tem 3 componentes conexas  $\Rightarrow H_0(N_0) \approx \mathbb{Z}^3$ ,
- $M_1$  tem 2 componentes conexas  $\Rightarrow H_0(M_1) \approx \mathbb{Z}^2$ ,
- $M_0$  tem 1 componentes conexas  $\Rightarrow H_0(N_1) \approx \mathbb{Z}^1$ .

O núcleo de  $i_* : H_0(M_0) \rightarrow H_0(M_1)$  é dado por  $H_1(M_1, M_0)$ , já que a sequência é exata. Como  $H_0(M_0) \approx \mathbb{Z}^4$  e  $H_0(M_0) \approx \mathbb{Z}^2 = \langle a, c \rangle$ , note que  $a \approx b$  e  $d \approx c$ , pois estão na mesma componente conexa. Por este mesmo motivo, temos que

$$i_*(a) = i_*(b) = a,$$

analogamente

$$i_*(c) = i_*(d) = c.$$

Concluimos que  $i_*$  é sobrejetiva. Pelo teorema do núcleo e imagem temos  $\mathbb{Z}^4 = \mathbb{Z}^2 \oplus \mathbb{Z}^2$ . Obtemos que  $\ker(i_*) = \mathbb{Z}^2$ , e que gerado por  $\langle a - b, c - d \rangle$ . Daí  $H_1(M_1, M_0) \approx \mathbb{Z}^2$ .

Da mesma maneira, vemos que

$$i_*(A) = i_*(B) = i_*(C) = A$$

e  $\ker(i_*) = \langle A - B, A - C \rangle$ . Assim  $H_1(N_1, N_0) \approx \mathbb{Z}^2$ .

Por  $\Phi_1$  temos que

$$g^1 : \begin{array}{ll} a \mapsto A & c \mapsto B \\ b \mapsto B & d \mapsto C, \end{array}$$

e por  $\Phi_2$  temos

$$g^2 : \begin{array}{ll} a \mapsto A & c \mapsto B \\ b \mapsto C & d \mapsto C. \end{array}$$

Assim

$$g_*^1(a - b) = A - B \neq g_*^2(a - b) = A - C,$$

e então

$$g_*^1 \neq g_*^2 \Rightarrow \tilde{g}_*^1 \not\cong \tilde{g}_*^2 \Rightarrow f_*^1 \not\cong f_*^2 \Rightarrow CI_1(S) \neq CI_2(S)$$

## Capítulo 5

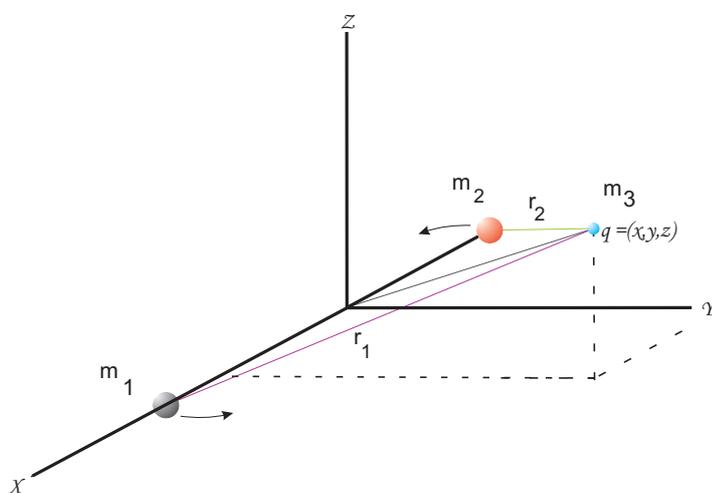
# Aplicação: o Problema Restrito dos 3 Corpos

Sejam  $m_1$  e  $m_2$  duas massas, no plano e  $m_3$  um corpo de massa infinitesimal no espaço. Suponha que as primárias,  $m_1, m_2$ , movem-se ao longo de uma solução do problema dos 2 Corpos, isto é:

$$m_1 \ddot{q}_1 = \frac{m_1 m_2 (q_2 - q_1)}{r^3},$$
$$m_2 \ddot{q}_2 = \frac{m_1 m_2 (q_1 - q_2)}{r^3},$$

onde  $q_i = (x_i, y_i, z_i)$  é a posição da massa  $m_i$ , e  $r = \|q_1 - q_2\|$ . Daí temos que

$$(\ddot{q}_1 - \ddot{q}_2) = -\frac{(m_1 + m_2)(q_1 - q_2)}{r^3}$$



Considere a solução:

$$q_1 - q_2 = r(\cos(\omega t), \sin(\omega t), 0), \quad (5.1)$$

Estas duas últimas equações implicam que  $\omega^2 = \frac{m_1+m_2}{r^3}$ . Para simplificar o problema vamos normalizar as massas, isto é,  $m_1 + m_2 = 1$ , e supor que o centro de massa do nosso sistema está na origem, isto é,  $m_1 q_1 + m_2 q_2 = (0, 0, 0)$ . Denote  $m_2 = \mu$  e conseqüentemente  $m_1 = 1 - \mu$ . Assim a equação (5.1) se reescreve como

$$q_1 - q_2 = (\cos t, \sin t, 0), \quad (5.2)$$

já que  $\omega = 1$ . A equação do centro de massa também pode ser reescrita

$$(1 - \mu)q_1 - \mu q_2 = 0 \quad (5.3)$$

(4) e (5)  $\Rightarrow q_1 = \mu(\cos t, \sin t, 0)$  e  $q_2 = -(1 - \mu)(\cos t, \sin t, 0)$ .

Agora vamos estudar o comportamento do corpo de massa  $m_3$ . A equação do movimento de  $m_3$  é dada por

$$m_3 \ddot{q}_3 = -\frac{m_1 m_3 (q_3 - q_1)}{r_1^3} - \frac{m_2 m_3 (q_3 - q_2)}{r_2^3},$$

ou equivalentemente,

$$\ddot{q}_3 = -\frac{m_1 (q_3 - q_1)}{r_1^3} - \frac{m_2 (q_3 - q_2)}{r_2^3},$$

onde  $r_1 = \|q_3 - q_1\|$  e  $r_2 = \|q_3 - q_2\|$ . Sabemos que este é um sistema não autônomo de E.D.O. , pois os  $q_i$ 's são função de  $t$ . Usando a matriz de rotação

$$R(t) = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

temos que

$$q_1 = R(t) \begin{bmatrix} \mu \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$q_2 = R(t) \begin{bmatrix} -(1 - \mu) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Defina  $q$  de modo que

$$q_3 = R(t)q. \quad (5.4)$$

Note que podemos escrever

$$q_3 - q_1 = R(t) \left( q - \begin{bmatrix} \mu \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right),$$

$$q_3 - q_2 = R(t) \left( q - \begin{bmatrix} \mu - 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right).$$

Derivando (5.4), obtemos

$$\ddot{q}_3 = R(t)\ddot{q} + 2\dot{R}(t)\dot{q} + \ddot{R}(t)q = R(t)\left(\left(-\frac{1-\mu}{r_1^3}\right)(q - (\mu, 0, 0)) - \left(\frac{\mu}{r_2^3}\right)(q - (\mu - 1, 0, 0))\right),$$

Multiplicando por  $R(t)^{-1}$  temos

$$\ddot{q} + 2R^{-1}\dot{R}\dot{q} + R^{-1}\ddot{R}q = \left(\left(-\frac{1-\mu}{r_1^3}\right)(q - (\mu, 0, 0)) - \left(\frac{\mu}{r_2^3}\right)(q - (\mu - 1, 0, 0))\right), \quad (5.5)$$

Note que  $R^{-1}\dot{R} = R^t\dot{R} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  e  $R^{-1}\ddot{R} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ .

Seja  $q = (x, y, z)$ , tome  $\dot{q} = (u, v, w)$ . Por (7), e usando o produto de matrizes feito acima, temos que

$$\begin{cases} \dot{u} = 2v + x - \frac{(1-\mu)(x-\mu)}{r_1^3} - \frac{\mu(x-\mu+1)}{r_2^3} \\ \dot{v} = -2u + y - \frac{(1-\mu)y}{r_1^3} - \frac{\mu y}{r_2^3} \\ \dot{w} = -\frac{(1-\mu)z}{r_1^3} - \frac{\mu z}{r_2^3} \end{cases}$$

Escreva

$$\begin{cases} \dot{u} = 2v + V_x \\ \dot{v} = -2u + V_y \\ \dot{w} = V_z \end{cases}, \quad (5.6)$$

com  $V(x, y, z) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + U(x, y, z)$ , onde  $U(x, y, z) = \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2}$ . O Hamiltoniano desse sistema é dado por

$$H(x, y, z) = \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) - V(x, y, z).$$

$H$  é a nossa constante de movimento. Para cada valor de  $H$  fixo ( $H = h$ ), considere o conjunto invariante

$$M_h = \{p = (x, y, z, u, v, w) \in \mathbb{R}^6 / H(p) = h\}.$$

Pelo Teorema de Sard (ver [4]),  $M_h$  é uma subvariedade de  $\mathbb{R}^6$  de dimensão 5. Vamos nos restringir ao fluxo local da E.D.O. em  $M_h$  e estudar este fluxo.

Os equilíbrios são, por definição, dados por  $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = (u, v, w) = (0, 0, 0)$ . De (8) vem:

$$V_x = V_y = V_z = 0 \Leftrightarrow (x, y, z), \text{ ponto crítico de } V.$$

Vejam os pontos críticos de  $V$ :

- $V_x = x - \frac{(1-\mu)(x-\mu)}{r_1^3} - \frac{\mu(x+\mu+1)}{r_2^3} = x(1 - \gamma^2) + (1 - \mu)\mu\left[\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_2^3}\right]$
- $V_y = y - \frac{(1-\mu)y}{r_1^3} - \frac{\mu y}{r_2^3} = y(1 - \gamma^2)$
- $V_z = z - \frac{(1-\mu)z}{r_1^3} - \frac{\mu z}{r_2^3} = -z\gamma^2,$

com

$$\gamma^2 = \frac{1 - \mu}{r_1^3} + \frac{\mu}{r_2^3}.$$

Note que pela definição de  $\gamma$ , temos que  $\gamma^2 > 0$ . Temos que  $V_z = 0 \Leftrightarrow z = 0 \Rightarrow$  os pontos de críticos de  $V$  estão no plano  $xy$ .

Vamos analisar apenas o caso planar,  $V(x, y, 0)$ . Temos que os níveis de  $H$ , nos equilíbrios deste caso, são dados por

$$h = -V(x, y, 0) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1 - \mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2}.$$

Vamos fazer agora uma análise do gráfico de  $V(x, y, 0)$ . Lembre-se da definição de  $r_1 = \sqrt{(x - \mu)^2 + y^2}$  e de  $r_2 = \sqrt{(x + 1 - \mu)^2 + y^2}$ . Daí

$$r_1 \rightarrow 0 \Leftrightarrow x \rightarrow \mu \text{ e } y \rightarrow 0 \Rightarrow r_2 \rightarrow 1,$$

Vejam os pontos críticos de  $V$ :

- $V_x = x - \frac{(1-\mu)(x-\mu)}{r_1^3} - \frac{\mu(x+\mu+1)}{r_2^3} = x(1 - \gamma^2) + (1 - \mu)\mu\left[\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_2^3}\right]$
- $V_y = y - \frac{(1-\mu)y}{r_1^3} - \frac{\mu y}{r_2^3} = y(1 - \gamma^2)$

- $V_z = z - \frac{(1-\mu)z}{r_1^3} - \frac{\mu z}{r_2^3} = -z\gamma^2,$

com

$$\gamma^2 = \frac{1-\mu}{r_1^3} + \frac{\mu}{r_2^3}.$$

Note que pela definição de  $\gamma$ , temos que  $\gamma^2 > 0$ . Temos que  $V_z = 0 \Leftrightarrow z = 0 \Rightarrow$  os pontos de críticos de  $V$  estão no plano  $xy$ .

Vamos analisar apenas o caso  $V(x, y, 0)$ . Temos que os níveis de  $H$ , nos equilíbrios deste caso, são dados por

$$h = -V(x, y, 0) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2}.$$

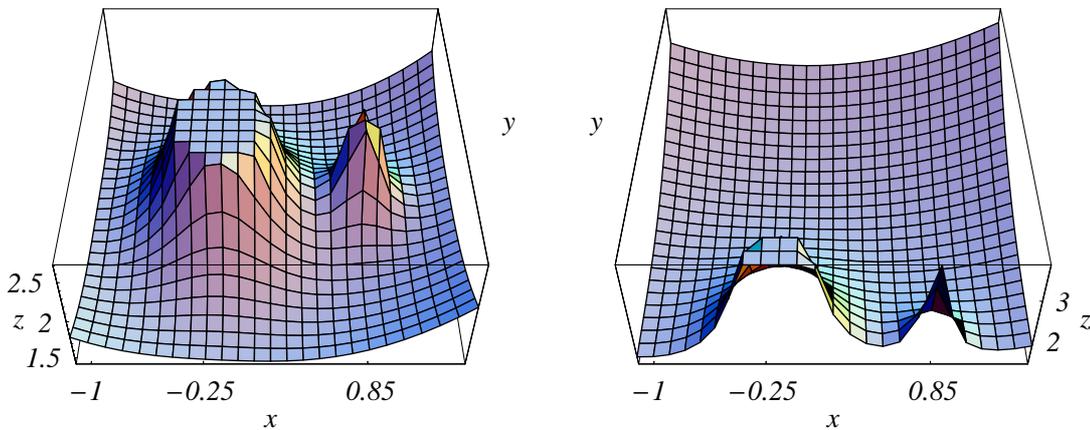
Vamos fazer agora uma análise do gráfico de  $V(x, y, 0)$ . Lembre-se da definição de  $r_1 = \sqrt{(x-\mu)^2 + y^2}$  e de  $r_2 = \sqrt{(x+1-\mu)^2 + y^2}$ . Daí

$$r_1 \rightarrow 0 \Leftrightarrow x \rightarrow \mu \text{ e } y \rightarrow 0 \Rightarrow r_2 \rightarrow 1,$$

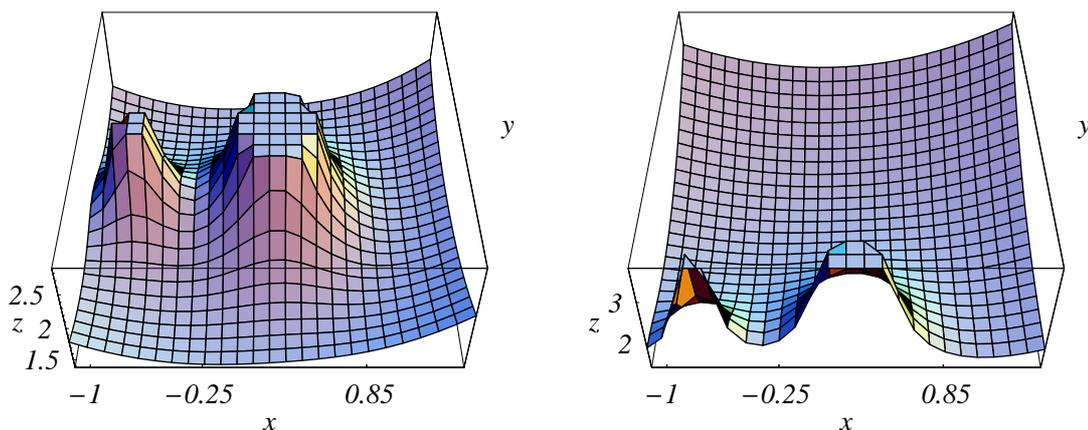
daí  $V(x, y, 0) \rightarrow \infty$ , se  $x \approx \mu$  ou para  $x, y \rightarrow \infty$ . Analogamente  $V(x, y, 0) \rightarrow \infty$ , se  $x \approx -(1-\mu)$  ou para  $x, y \rightarrow \infty$ . Podemos também fazer um estudo da concavidade do gráfico, pois

$$V_{xx} = 1 + 2\gamma^2 > 1 > 0.$$

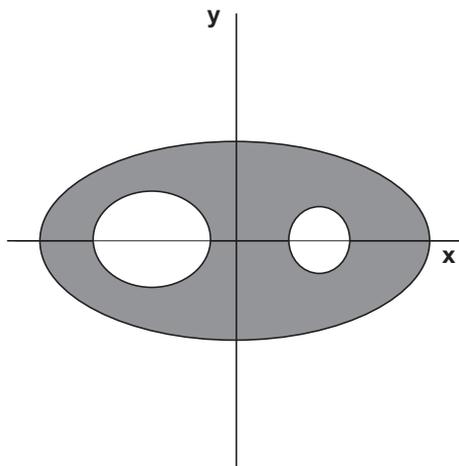
Portanto, nos pontos críticos, temos que a concavidade do gráfico é para cima. Veja na figura abaixo o gráfico de  $V(x, y, 0)$ , plotados para os valores  $\mu = 0.85$



O caso  $\mu = 0.35$  é dado pela figura abaixo:



. Note que as curvas de nível  $H = h \gg 1$  são dadas pela figura abaixo, onde a parte sombreada é o nosso  $M_{[a,b]}$ .



Agora iremos aplicar o que foi visto no início da dissertação. Escreveremos o polinômio de Poincaré para a figura acima ( $M_{[a,b]}$ ). As classes de Homologia são dadas por:

$$H_k(M_a, M_b) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & k = 0 \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, & k = 1 \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

O polinômio de Poincaré é

$$P(t) = 1 + 2t.$$

Agora vamos trabalhar para escrever o polinômio de Morse de  $M_{[a,b]}$ . Voltando aos pontos críticos de  $V(x, 0, 0)$ , queremos que  $V_x = 0$ , ou seja

$$V_x = x - \frac{(1 - \mu)(x - \mu)}{(x - \mu)^2} - \frac{\mu(x + \mu + 1)}{(x - \mu)^2} = 0 \quad (5.7)$$

Acima temos um polinômio de grau 5 em  $x$ , seja  $\bar{x}(\mu)$  a raiz em  $(-(1 - \mu), \mu)$ . A hessiana de  $V(x, 0, 0)$  é:

$$D^2V = \begin{bmatrix} 1 + 2\gamma^2 & 0 \\ 0 & 1 - \gamma^2 \end{bmatrix}$$

Como  $\gamma^2 > 1$  (provado no lema 91 a seguir), esta matriz Hessiana não é definida, pois tem um autovalor negativo e outro positivo, então para os três pontos críticos do eixo  $x$  ocorre que  $\det(D^2V) < 0$ , ou seja os três pontos críticos são selas, isto é, seu índice de Morse é  $I(P) = 1$ . Usando a notação vista anteriormente e o Teorema 13, que relaciona o polinômio de Morse com o de Poincaré da seguinte maneira:

$$M(t) = P(t) + (1 - t)Q(t),$$

temos

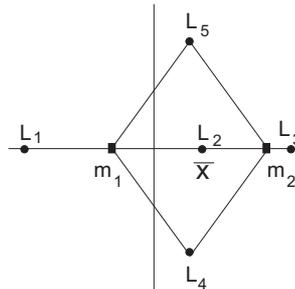
$$\gamma_0 + \gamma_1 t + \gamma_2 t^2 = 1 + 2t + (1 + t)Q(t) \quad (5.8)$$

Note que  $\gamma_1 \geq 3$ , pois temos pelo menos 3 pontos críticos de índice de Morse 1, no eixo  $x$ . Concluimos que  $Q(t) \not\equiv 0$ . Analisando (5.8) em  $t = 1$  resulta  $\gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2 = 1 + 2 + 2Q(1) \geq 5$ .

Vimos que para  $y = 0$  temos 3 pontos críticos, um em  $(-(1 - \mu), \mu)$ , outro em  $(-\infty, -(1 - \mu))$ , e outro entre  $(\mu, \infty)$ . Mas  $V_x$  é um polinômio de grau 5, logo as outras duas raízes de  $V_x$  estão em  $y \neq 0$ , ou seja quando  $\gamma^2 = 1$ . Vamos estudar este caso.

$$V_x = (1 - \mu)\mu \left[ \frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_2^3} \right] = 0 \Leftrightarrow r_1 = r_2.$$

Usando  $r_1 = r_2$  e  $\gamma^2 = \frac{1-\mu}{r_1^3} + \frac{\mu}{r_2^3}$ , obtemos que  $r_1 = r_2 = 1$ . Os equilíbrios são dados pela figura abaixo:



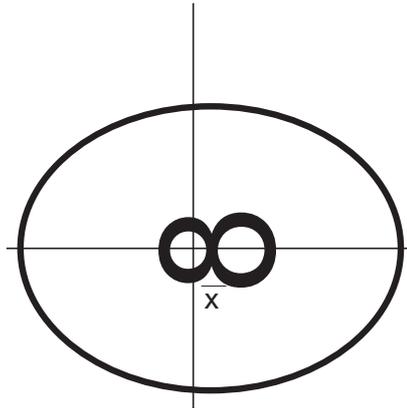
. Estudaremos, agora, os conjuntos invariantes isolados próximos do equilíbrio

$$P = (\bar{x}(\mu), 0, 0, 0, 0, 0) \in \mathbb{R}^6,$$

e calcularemos seus índices de homotopia de Conley. Seja  $M_{\bar{h}}$  a curva de nível que passa por  $\bar{x}$ . Vamos observar agora os níveis de energia  $h \approx \bar{h}$  e  $h > \bar{h}$ . Seja

$$\pi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^6 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z, u, v, w) & \longmapsto & (x, y, z) \end{array} .$$

Seja  $C_h = \{(x, y, z) / \exists(u, v, w) \text{ tal que } H(x, y, z, u, v, w) = h\}$ . Podemos reescrever o conjunto  $C_h$ , da seguinte maneira  $C_h = \{(x, y, z) / V(x, y, z) \geq -h\}$ , pois  $h = \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) - V(x, y, z) = h \Rightarrow 2(V(x, y, z) + h) = u^2 + v^2 + w^2 \geq 0$ . A fronteira de  $C_h$  é claramente  $\partial C_h = \{(x, y, z) / V(x, y, z) = -h\}$ .  $C_h$  é chamada *região de Hill*. A região  $\partial C_{\bar{h}}$ , é a curva de nível  $V = -\bar{h}$ , a região é dada pela figura abaixo:



Vamos fazer uma análise de  $V$  próximo de  $(\bar{x}, 0, 0)$ . Vamos expandir  $V$  em série de Taylor em torno de  $(\bar{x}, 0, 0)$ . A hessiana de  $V$  neste ponto é dada por:

$$D^2V = \begin{bmatrix} 1 + 2\gamma^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \gamma^2 & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma^2 \end{bmatrix} .$$

Expandindo, temos

$$V(x, y, z) \approx -\bar{h} + \frac{1}{2}[(1 + 2\gamma^2)\xi^2 + (1 - \gamma^2)\eta^2 + (-\gamma^2)\zeta^2].$$

Daí as superfícies  $V(x, y, z) = -h \geq -\bar{h}$  são:

$$\frac{1}{2}[(1 + 2\gamma^2)\xi^2 + (1 - \gamma^2)\eta^2 + (-\gamma^2)\zeta^2] = -h + \bar{h},$$

que podem ser:

- um cone, se  $h = \bar{h}$
- um hiperbolóide de uma folha, se  $\gamma^2 - 1 > 0$ ,
- um hiperbolóide de duas folhas, se  $\gamma^2 - 1 < 0$ ,
- cilindro com base hiperbolica no plano  $\xi\eta$ ,  $\gamma^2 - 1 = 0$ .

Usando coordenadas cilíndricas  $\begin{cases} y = r\cos\theta \\ z = r\sin\theta \end{cases}$ ,  $V(x, y, z)$  se reescreve como

$$V(x, r, \theta) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}r^2\cos^2\theta + U(x, r),$$

com

$$U(x, r) = \frac{1 - \mu}{\sqrt{(x - \mu)^2 + r^2}} + \frac{\mu}{\sqrt{(x + 1 - \mu)^2 + r^2}}.$$

Assim  $V_r = r\cos^2\theta + U_r = r(\cos^2\theta - \gamma^2)$ .

**Lema 94.** *Se  $(x, y, z) \in L = \{r_1 < 1, r_2 < 1\}$ , então  $\gamma^2 \geq 1$ , e assim  $V_r(x, r, \theta) < 0$ .*

*Prova.* Note que

$$\gamma^2 = \frac{(1 - \mu)r_2^3 + \mu r_1^3}{(r_1 r_2)^3} > 1 \Leftrightarrow (1 - \mu)r_2^3 + \mu r_1^3 - (r_1 r_2)^3 > 0,$$

faça a mudança  $r_1^3 \leftrightarrow a$  e  $r_2^3 \leftrightarrow b$ . Precisamos demonstrar que  $g(a, b) = b(1 - \mu) + a\mu - ab > 0$ , ou equivalentemente que  $\mu(a - b) + b(1 - a) > 0$

- $a > b \Rightarrow \mu(a - b) > 0$  e  $b(1 - \mu) > 0 \Rightarrow g(a, b) > 0$ ;
- $a < b$  e  $\mu < 1 \Rightarrow \mu(a - b) > a - b \Rightarrow g(a, b) = \mu(a - b) + b(1 - a) > a - b + b(1 - a) = a(1 - b) > 0$ ;
- $a = b \Rightarrow \gamma^2 = 1$ .

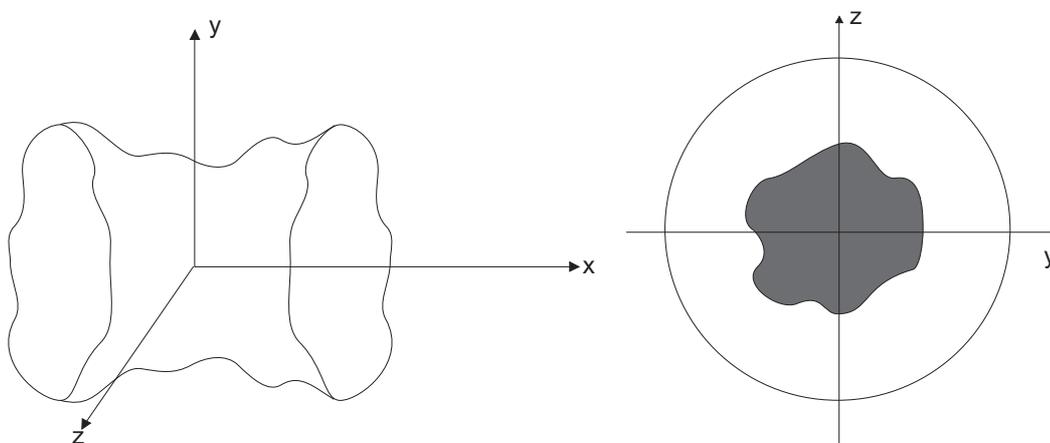
Em qualquer caso  $\gamma^2 \geq 1$ .  $\square$  Usando o Teorema da Função Implícita e o fato que  $V_r(x, r, \theta) < 0$ , em  $L$ , temos o corolário:

**Corolário 95.** *Superfícies de nível de  $V$  em  $L$  podem ser expressas como gráficos de  $r = r(x, \theta)$ .*

Agora vamos em busca de uma vizinhança isolante do equilíbrio  $(\bar{x}, 0, 0, 0, 0, 0)$ . Sabemos que a região  $L$  é formada pelo interior de duas esferas de raio 1, uma centrada na massa  $m_1$ , e a outra centrada em  $m_2$ . Fixe um  $x = x_0$ . A parte de  $C_h$  dentro de  $L$  em  $\{x = x_0\}$  é um disco deformado que vamos denotar por  $D_{x_0}$ . De fato este disco deformado é a interseção do hiperbolóide deformado ( $C_h$ ) com o plano  $\{x = x_0\}$ , que está dentro de  $L$ . (Ver figura abaixo.)

**Observação 96.** Dentro de  $L$ , temos  $\gamma^2 > 1$ , daí a superfície é aproximadamente um hiperbolóide de uma folha, se estivermos numa vizinhança de  $(\bar{x}, 0, 0)$ .

Figura espacial e seção plana:



Considere agora o cilindro sólido que é limitado pela superfície  $C_h$  e lateralmente pelos planos  $\{x = a\}$  e  $\{x = b\}$ . Chame esta região de  $N_{(h,a,b)}$ . Queremos, agora, determinar  $h, a, b$  de maneira que  $N_{(h,a,b)}$  seja uma vizinhança isolante em  $M_h$ .

**Proposição 97.**  $N_{(h,a,b)} \approx [a, b] \times S^4$ .

*Prova.* Fixando um  $x_0 \in [a, b]$ , então existe um homeomorfismo entre pontos do disco deformado,  $(y, z) = (r \cos \theta, r \sin \theta) \in D_{x_0}$ , e o disco unitário  $D^2$ , digamos

$$f_{x_0} : D_{x_0} \rightarrow D^2.$$

A pré-imagem de  $\text{int}(D_{x_0})$  em  $M_h$  é dada por

$$2(V(x_0, y, z) + h) = u^2 + v^2 + w^2 = \rho^2.$$

Esta notação significa que, para cada  $(y, z) \in D_{x_0}$ , temos no espaço das velocidades  $uvw$  uma esfera de raio  $\rho(x_0, y, z) = \sqrt{2(V(x_0, y, z) + h)}$ . Note que este raio é zero em  $\partial D_{x_0}$ , então a pré-imagem da fronteira de  $D_{x_0}$  é um ponto, a origem.

Em  $f_{x_0}(D_{x_0})$  tome

$$S^4 = \{(y', z', u', v', w') / (u')^2 + (v')^2 + (w')^2 = 1 - ((y')^2 + (z')^2)\},$$

onde  $\rho'(x_0, y', z')^2 = 1 - ((y')^2 + (z')^2)$ . Neste contexto defina o homeomorfismo

$$h : N_{(h,a,b)} \rightarrow [a, b] \times S^4$$

dado por

$$H(x, y, z, u, v, w) = \begin{cases} (x, f_x(y, z), \frac{(u,v,w)}{\rho(x,y,z)}\rho'(x, f_x(y, z))) & \text{se } \rho > 0 \\ (x, f_x(y, z), 0, 0, 0) & \text{se } \rho = 0 \end{cases},$$

que prova a proposição. □

Para mostrar que  $N_{(h,a,b)}$  é vizinhança isolante, precisamos verificar que pontos da fronteira saem de  $N_{(h,a,b)}$ , isto é:

$$p \in \partial N_{(h,a,b)} \Rightarrow p \cdot \mathbb{R} \not\subset N_{(h,a,b)}.$$

**Observação 98.**  $N_{(h,a,b)}$  é uma variedade com bordo contido na união dos dois planos  $x = a$  e  $x = b$ . A parte deformada do hiperbolóide *não* faz parte da fronteira do mesmo.

Suponha que  $x = b$ , isto é  $p = (b, y, z, u, v, w)$ . É verdade que  $p \cdot t$  sai de  $N_{(h,a,b)}$  em alguma direção de tempo?

Supondo que  $\ddot{x} \neq 0$ , temos que

- $\dot{x} = u > 0 \Rightarrow p \cdot \mathbb{R}_+ \not\subset N_{(h,a,b)}$ ,
- $\dot{x} = u < 0 \Rightarrow p \cdot \mathbb{R}_- \not\subset N_{(h,a,b)}$ ,

e, em qualquer caso,  $p$  sai de  $N_{(h,a,b)}$ . Possivelmente teremos problems quando  $\dot{x} = u = 0$ . Neste caso a velocidade é tangente à região  $N_{(h,a,b)} \cap \{x = b\}$ , isto é a velocidade está no plano  $\{x = b\}$ . Vejamos com mais detalhes este caso. Se além disso  $\ddot{x} > 0$ , então a solução que passa por  $x$  (o fluxo) tangencia a fronteira mas a solução fica toda (exceto o próprio  $x$ ) no exterior de  $N_{(h,a,b)}$ . Já o caso  $\ddot{x} < 0$ , a solução tangencia e não sai de  $N_{(h,a,b)}$ . Teremos que verificar que sempre  $\ddot{x} > 0$ .

Num caso mais geral, temos um conjunto da forma  $g_1(p) \leq 0, \dots, g_n(p) \leq 0$ . Se as  $g$ 's são suaves, esta região é uma variedade com quinas. No nosso caso podemos ver  $g_1(p) = x - b$  e  $a - x$ .

**Proposição 99.** *Seja  $p \cdot t$  um fluxo local contínuo numa variedade suave,  $M$ . Considere  $g_j : M \rightarrow \mathbb{R}$ , um conjunto de funções suaves. Considere  $N_1 = \{p / g_j(p) \leq 0 \forall j\}$ . Suponha que  $N_1$  é compacto e*

$$p \in N_1; g_j(p) = 0; \dot{g}_j(p \cdot t)|_{t=0} \Rightarrow \ddot{g}_j(p \cdot t)|_{t=0} > 0.$$

*Seja  $N_0 = \{p \in N_1 / \text{para algum } j, g_j(p) = 0 \text{ e } \dot{g}_j(p \cdot t) \geq 0\}$ . Então  $(N_1, N_0)$  é um par-índice para  $I(N_1)$ .*

*Prova.* Para mostrar que  $N_0$  é conjunto de saída para  $N_1$ , suponha  $p \in N_1$  tal que  $p \cdot \mathbb{R}_+ \not\subset N_1$ . Seja  $T = \sup\{t \geq 0 / p \cdot [0, t] \subset N_1\}$ . Pelas propriedades do supremo existe um  $j$  e  $t_n > T$  tais que  $t_n \rightarrow T$  e  $p \cdot t_n \notin N_1 \Rightarrow g_j(p \cdot t_n) > 0$ . Usando a continuidade do fluxo,  $\Rightarrow g_j(p \cdot T) = 0$ . Concluimos que  $p \cdot T$  é um mínimo para  $g_j$ , daí  $\ddot{g}_j(p \cdot t)|_{t=T} > 0$ , ou seja  $p \cdot T \in N_0$ . Também podemos ver que os pontos de  $N_0$  saem imediatamente de  $N_1$ , pois nos pontos de  $N_0$  temos que a primeira derivada de uma  $g_j$  é não-negativa, ou seja  $p \cdot [0, \epsilon) \not\subset N_1$  para todo  $\epsilon > 0$ . Segue deste fato que  $N_0$  é positivamente invariante em  $N_1$ .

□

Antes de mostrar que  $\ddot{x} > 0$ , vejamos um exemplo da situação acima:

**Exemplo 100.** Equilíbrio hiperbólico.

Considere o fluxo em  $\mathbb{R}^2$  dado pelo sistema de E.D.O.

$$\begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = -y, \end{cases}$$

ou equivalentemente

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} X.$$

Considere  $g_1(X) = \|X\|^2 - 1 = x^2 + y^2 - 1$ , assim  $\dot{g}_1 = 2x\dot{x} + 2y\dot{y} = 2(x^2 - y^2)$  e  $\ddot{g}_1 = 2(x^2 + y^2)$ . Na notação da proposição acima temos  $N_1 = \{p / g_1(p) \leq 0\}$ , ou seja  $N_1$  é o disco unitário centrado na origem. Note que  $p \in N_1$ ,  $\dot{g}_1(p \cdot t)|_{t=0} = 0 \Rightarrow \ddot{g}_1(p \cdot t)|_{t=0} > 0$ , já que  $\ddot{g}_1 > 0$  sempre que  $g_1(p) = 0$  e  $\dot{g}_1(p \cdot t)|_{t=0}$ .

Para provar que  $N_{(h,a,b)}$  é vizinhança isolante, basta mostrar que  $\ddot{x} > 0$  em  $\{x = b\}$  e que  $\ddot{x} < 0$  em  $\{x = a\}$ . Vimos, no sistema (8), que  $\ddot{x} = \dot{u}$  pode ser escrito como  $\dot{u} = 2v + V_x$ , provaremos que  $V_x^2 > 4v^2$  em  $\{x = a, b\}$ . Estime  $v^2$  usando  $H = h$  da seguinte maneira

$$u^2 + v^2 + w^2 = 2(V(x, y, z) + h) \Rightarrow 4v^2 \leq 4(u^2 + v^2 + w^2) = 8(V + h).$$

Para mostrar que  $V_x^2 > 4v^2$ , mostre que  $W(x, y, z) = \frac{1}{8}V_x^2(x, y, z) - V(x, y, z) > h$  quando  $x = a, b$  e  $V \geq -h$ . Vamos fazer uma análise de  $W(x, y, z)$  usando a Hessiana nas proximidades do ponto crítico  $\bar{x}$ , como vimos antes,

$$V \approx -\bar{h} + \frac{1}{2}(1 + 2\gamma^2)\xi^2 + -\frac{1}{2}(\gamma^2 - 1)\eta^2 - \frac{1}{2}\gamma^2\zeta^2,$$

onde fizemos a mudança de variáveis  $(x, y, z) \leftrightarrow (\bar{x} + \xi, \eta, \zeta)$ . Isto implica que

$$W(x, y, z) \approx \frac{1}{8}(4\gamma^4 - 4\gamma^2 - 3)\xi^2 + \frac{1}{2}(\gamma^2 - 1)\eta^2 + \frac{1}{2}\gamma^2\zeta^2 + \bar{h}.$$

Para mostrar que  $W > h$ , basta mostrar que  $\frac{1}{8}(4\gamma^4 - 4\gamma^2 - 3)\xi^2 > h - \bar{h}$ , já que  $\gamma^2 > 1$  nesta região próxima do equilíbrio.

**Observação 101.** Sabemos que  $\gamma^2 > 1$  no equilíbrio  $(\bar{x}(\mu), 0, 0)$ , então pela continuidade da função  $\gamma^2$  vemos que  $\gamma^2 > 1$  próximo deste equilíbrio.

**Proposição 102.**  $\gamma^2 > 3$  próximo de  $(\bar{x}(\mu), 0, 0)$  para todo  $\mu$ .

Usando a proposição acima temos :

$$4\gamma^4 - 4\gamma^2 - 3 = 4\gamma^2(\gamma^2 - 1) - 3 > 12(\gamma^2 - 1) - 3 > 24 - 3 = 21 > 0$$

ou seja

$$\frac{1}{8}(4\gamma^4 - 4\gamma^2 - 3) > \frac{21}{8}.$$

Se tivermos  $\xi^2 > \frac{8}{21}(h - \bar{h})$ , teremos  $W > h$ . Daí devemos escolher  $a$  e  $b$  de maneira que  $\xi^2 > \frac{8}{21}(h - \bar{h})$ , ou seja na região abaixo da parábola  $\xi^2 = \frac{8}{21}(h - \bar{h})$ . Isto nos leva à seguinte proposição:

**Proposição 103.** *Se  $h - \bar{h} > 0$  é suficientemente pequeno, existem  $a$  e  $b$  com  $|\bar{x} - a|$ ,  $|\bar{x} - b|$  pequenos. Então  $N_{(h,a,b)}$  é uma vizinhança isolante.*

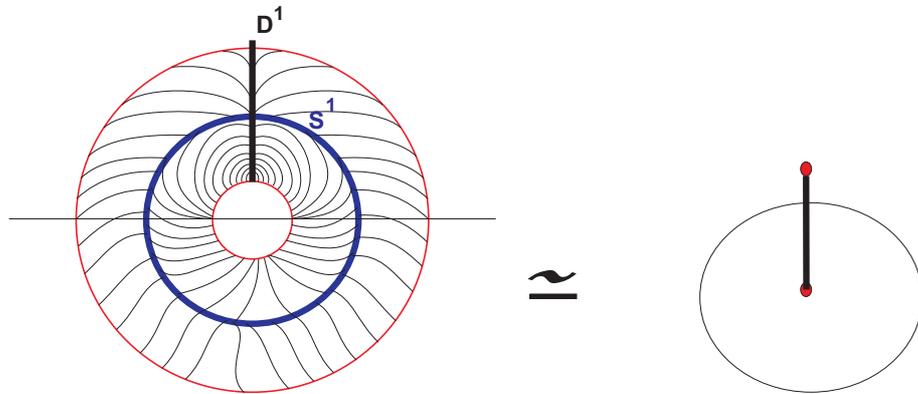
Já temos uma vizinhança isolante para o conjunto invariante que contém o equilíbrio  $(\bar{x}, 0, 0)$  (ou melhor  $(\bar{x}(\mu), 0, 0)$ ). Vamos agora determinar o índice de homotopia de Conley deste conjunto invariante. Vimos que  $(N_1, N_0)$ , onde  $N_1 = N_{(h,a,b)} \approx [a, b] \times S^4$  e que  $N_0 = \{x = b, \dot{x} \geq 0\} \cup \{x = a, \dot{x} \leq 0\}$ , é um par-índice para  $I(N_1)$ . Note que  $N_0$  pode ser escrito como  $S^0 \times D^4$ , pois  $\{x = b, \dot{x} \geq 0\}$  é um hemisfério e  $\{x = a, \dot{x} \leq 0\}$  também é um hemisfério.

**Proposição 104.**  $[D^k \times S^l / S^{k-1} \times D^l] = [S^k \vee S^l]$ .

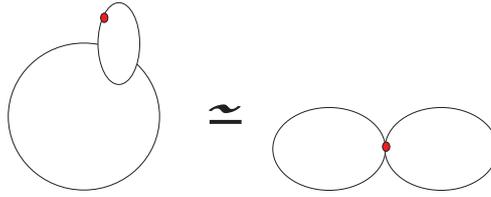
Na verdade o que precisamos provar é que  $[D^1 \times S^l / S^0 \times D^l] = [S^1 \vee S^l]$ , que é o que vamos mostrar.

*Prova.* Faremos a demonstração usando indução em  $l$ .

- caso 1:  $l = 1$ , ou seja  $D^1 \times S^1$ . Podemos deformar, homotopicamente,  $D^1 \times S^1$ , como na figura



Identificando os pontos que correspondem a fronteira do segmento, temos a figura:



Que é  $S^1 \vee S^1$ . Daí

$$[S^1 \times D^1 / S^0 \times D^1] = [S^1 \vee S^1].$$

- Podemos generalizar esta idéia para  $S^l$ , pois a esfera  $S^{l-1}$  pode ser transformada na esfera  $S^l$  por uma rotação em torno de um hiperplano fixo. Vejamos por exemplo

o caso  $S^1 \rightarrow S^2$ . Usaremos a matriz de rotação  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\text{sen}\theta \\ 0 & \text{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$  da seguinte maneira:

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\text{sen}\theta \\ 0 & \text{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cos\theta x_2 \\ \text{sen}\theta x_2 \end{pmatrix}.$$

e assim temos  $\tilde{x}_1^2 + \tilde{x}_2^2 + \tilde{x}_3^2 = 1$ . Fazendo o  $\theta$  variar de 0 a  $2\pi$ , geramos toda a esfera  $S^2$ . Para transformar a esfera  $S^{l-1}$  na  $S^l$  use a matriz de rotação com  $(l-2)$  1's na diagonal principal e por último um bloco  $2 \times 2$   $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\theta \\ \text{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ . Para cada  $\theta$  fixo tome a interseção de  $S^l$  com o hiperplano de inclinação  $\theta$ , teremos a figura análoga à figura do caso  $l=1$ , basta trocar  $S^1 \leftrightarrow S^l$  acima, e usar uma deformação semelhante à anterior, teremos, por fim,  $[D^1 \times S^l / S^0 \times D^l] = [S^1 \times S^l]$ .  $\square$

O índice de homotopia de Conley para o conjunto invariante  $I(N_{(h,a,b)})$  é  $[S^1 \vee S^4]$ .

# Capítulo 6

## Continuação

### 6.1 Introdução

Queremos verificar a seguinte propriedade: conjuntos invariantes isolados podem ser continuados em uma vizinhança do fluxo local onde o índice é invariante.

Considere a família de E.D.O.'s

$$\dot{x} = f(x, \lambda), x \in \mathbb{R}^n \text{ e } \lambda \in \Lambda, \quad (6.1)$$

onde  $\Lambda$  é o espaço de parâmetros, e  $f$  é definida em um conjunto aberto  $\Phi$ , com  $\Phi \subset X \times \Lambda$ , onde  $X \subset \mathbb{R}^n$ . Acrescentamos a equação  $\dot{\lambda} = 0$ , isto é,  $\lambda$  é constante para cada  $f$  dada.

Note que

$$\mathbb{R} \times \Phi \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \Lambda$$

escreva  $\varphi_t(x, \lambda) = (x, \lambda) \cdot t$ , onde  $t \in \mathbb{R}$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$  e  $\lambda \in \Lambda$

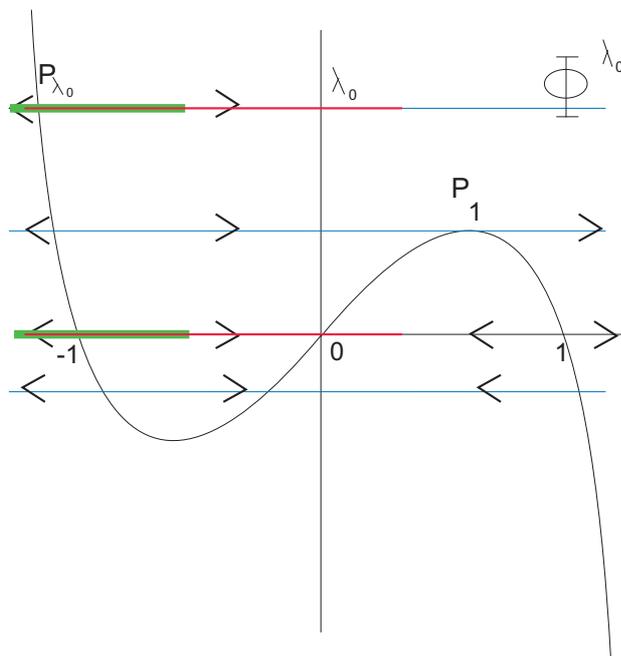
**Observação 105.** Quando nos restringimos à fibra  $\Phi^{\lambda_0} = \Phi \cap \mathbb{R}^n \times \{\lambda_0\}$ , temos um fluxo local em  $\Phi^{\lambda_0}$ , dado por  $x \cdot_{\lambda_0} t$ , onde  $\cdot_{\lambda_0}$  é o fluxo (conjunto solução da E.D.O.) que depende de  $\lambda_0$ . Denotaremos o fluxo em  $\Phi^{\lambda_0}$  por  $\varphi^{\lambda_0}$ .

Vejamos um exemplo:

**Exemplo 106.** Considere a E.D.O

$$\dot{x} = x(x^2 - 1) + \lambda, x \in \mathbb{R}. \quad (6.2)$$

Os equilíbrios ( $\dot{x} = 0$ ) são dados por  $\lambda = x(1 - x^2)$ .



- Acima da curva,  $\lambda > x(1 - x^2)$ , e temos  $\dot{x} = x(x^2 - 1) + \lambda > 0 \Rightarrow x(t)$  é crescente.
- Abaixo da curva,  $\lambda < x(1 - x^2)$ , e temos  $\dot{x} = x(x^2 - 1) + \lambda < 0 \Rightarrow x(t)$  é decrescente.

## 6.2 Continuação Local

Seja  $N \subset X$  compacto tal que  $N \times \{\lambda\}$  é uma vizinhança isolante em  $\Phi^\lambda$ .  $N \times \{\lambda\}$  é uma vizinhança isolante de um certo conjunto invariante  $S$  em  $\Phi^\lambda$ .

**Definição 107.**  $\Lambda(N) = \{\lambda \in \Lambda / N \times \{\lambda\} \text{ é uma vizinhança isolante em } \Phi^\lambda\}$

**Proposição 108.**  $\Lambda(N)$  é um conjunto aberto em  $\Lambda$

*Prova.* Um conjunto é uma vizinhança isolante se, e somente se, todo ponto de fronteira deixa o conjunto em alguma direção de tempo. Mostraremos que isto persiste com uma pequena perturbação.

Seja  $\lambda \in \Lambda(N)$  e considere  $(x, \lambda) \in \partial N \times \{\lambda\}$ , então existe  $t \in \mathbb{R}$  tal que

$$(x, \lambda) \cdot t = x \cdot_\lambda t \in \Phi \setminus N \times \Lambda.$$

Como  $\Phi$  e  $\Phi \setminus N \times \Lambda$  são conjuntos abertos (em  $\Phi$ ), então existe uma vizinhança  $U \times V$  de  $(x, \lambda)$  tal que

$$U \times V \in \Phi \text{ e } (U \times V) \cdot t \subset \Phi \setminus N \times \Lambda.$$

Daí temos uma cobertura para  $\partial N \times \{\lambda\}$ , que é compacto, formada pelos  $U \times V$ . Considere uma subcobertura finita de  $\partial N \times \{\lambda\}$ ,  $\{U_i \times V_i\}$  e seja  $V = \bigcup_{i=1}^{i=n} V_i \neq \emptyset$ , pois contém pelo menos  $\{\lambda\}$ , onde  $V$  é uma vizinhança de  $\lambda$ .

Então  $\mu \in V, x \in \partial N \Rightarrow (x, \mu) \in U_i \times V_i$ , para algum  $i$ . Daí ele,  $(x, \mu)$ , deixa  $N$  para um certo  $t_i$ . Concluimos que  $N \times \{\mu\}$  é uma vizinhança isolante em  $\Phi^\mu$  e assim  $\mu \in \Lambda(N)$   $\square$

**Definição 109.** Conjuntos invariantes isolados  $(S, \lambda)$  e  $(T, \mu)$  por  $\varphi^\lambda, \varphi^\mu$  (fluxos) são relacionados por continuação local por caminhos se existe uma vizinhança isolante  $N$ , tal que

$$(S, \lambda) = I(N \times \{\lambda\}) \text{ e } (T, \mu) = I(N \times \{\mu\})$$

e se  $\lambda$  e  $\mu$  estão na mesma componente conexa por caminho de  $\Lambda$ .

**Exemplo 110.** No contexto do exemplo anterior (103), todos os conjuntos  $I(N \times \{\lambda\})$  com  $\lambda > \lambda_0$  estão relacionados por continuação por caminhos, basta tomar  $\lambda_0 = 0.5$ , por exemplo. Assim  $(\lambda_0, \infty) \subset \Lambda(N)$ . Ainda neste exemplo calculemos os índices de hmotopia de Conley para alguns conjuntos: Neste exemplo podemos continuar o conjunto invariante  $P_{\lambda_0}$  para  $-1$  e para o conjunto invariante que contém  $\{-1, 0\}$  e a órbita conectando estes dois equilíbrios.

Ainda neste exemplo vemos um fato interessante: invariância por continuação não é uma relação de equivalência! Ou seja, podemos ter  $(S, \lambda), (T, \mu), (W, \nu)$  tais que  $S$  é continuado a  $T$  e  $T$  continuado a  $W$ , mas  $S$  pode não ser continuado à  $W$ !! Na notação deste exemplo, considere os seguintes conjuntos invariantes:

- $W$  o conjunto invariante em  $\lambda = 0$  formado pela união dos equilíbrios  $\{-1, 0\}$  com a órbita conectando-os;
- $S$  o equilíbrio  $-1$ , em  $\lambda = 0$ ;
- $T$  o equilíbrio em  $\lambda = \lambda_0$ .

Tome  $N$  uma vizinhança isolante de  $S$  tal que  $I(N \times \lambda_0) = T$ , por exemplo  $N$  como o compacto em verde da figura (no eixo  $\lambda = 0$ ). Tome  $N'$  uma vizinhança isolante de  $W$

tal que  $I(N' \times \lambda_0) = T$ , por exemplo  $N'$  sendo a vizinhança em vermelho (no eixo  $\lambda = 0$ ). Assim temos que  $S$  pode ser continuado a  $T$ ,  $T$  pode ser continuado a  $W$ , mas  $W$  não pode ser continuado a  $S$ .

Vamos calcular alguns índices deste exemplo,

- O índice de homotopia de Conley para  $P_{\lambda_0}$  é dado pela classe de homotopia abaixo

$$[\overset{P_{\lambda_0}}{\leftarrow} \xrightarrow{\quad} \ast, \ast] = [\overset{\circ}{\ast}]$$

que é a classe de homotopia da esfera pontuada de dimensão 1, i.e.  $h(P_{\lambda_0}) = \Sigma^1$ .

- O conjunto de saída para o equilíbrio 0 é  $\emptyset$ , seu índice é dado pela classe

$$[\overset{0}{\leftarrow} \xrightarrow{\quad} \ast, \ast] = [\ast', \ast]$$

Que é a classe da esfera pontuada de dimensão 0, isto é  $h(0) = \Sigma^0$ .

- Outro índice interessante de se calcular é o índice de  $P_1$ , pois como este equilíbrio é degenerado, seu índice de Morse não está definido, mas o índice de Conley é dado pela classe abaixo:

$$[\overset{0}{\leftarrow} \xrightarrow{\quad} \ast, \ast] = [\ast, \ast] = [\ast]$$

Ou seja  $h(P_1) = \bar{0}$ , isto é um contra-exemplo para a recíproca da proposição (3). Podemos continuar  $P_1$  para o conjunto  $\emptyset$  (basta elevar um compacto vizinhança isolante de  $P_1$ ). Usando continuação, temos que o índice de Conley não se altera, pois  $\emptyset/\emptyset \neq \emptyset$ , já que  $\emptyset/\emptyset = \{\emptyset\}$ .

### 6.3 Continuação Global

Podemos ter  $(S, \lambda), (T, \mu), (W, \nu)$  tais que  $S$  é localmente continuado a  $T$  e  $T$  localmente continuado a  $W$ , mas  $S$  pode não ser localmente continuado à  $W$ !! Vejamos um exemplo onde isso acontece. Na notação do exemplo (103), considere os seguintes conjuntos invariantes:

- $W$  o conjunto invariante maximal para  $\lambda = 0$ , isto é, a união dos equilíbrios  $\{-1, 0, 1\}$  com as órbitas;
- $S$  o equilíbrio -1, em  $\lambda = 0$ ;
- $T$  o equilíbrio em  $\lambda = 0.6$ .

Tome  $N$  uma vizinhança isolante de  $S$  tal que  $I(N \times 0.6) = T$ , por exemplo  $N = [-1.5, -0.5]$ . Tome  $N'$  uma vizinhança isolante de  $W$  tal que  $I(N' \times 0.6) = T$ , por exemplo  $N' = [-1.5, 1.5]$ . Assim temos que  $S$  pode ser continuado a  $T$ ,  $T$  pode ser continuado a  $W$ , mas  $W$  não pode ser continuado a  $S$ . Introduza o espaço de todos os conjuntos invariantes isolados:

$\mathcal{S} = \{(S, \lambda) / S \text{ é conjunto invariante isolado em } \Phi^\lambda\}$ .

Para  $N$  compacto, já vimos que temos o conjunto aberto  $\Lambda(N) \subset \Lambda$ . Defina

$$\sigma_N : \begin{array}{ccc} \Lambda(N) & \rightarrow & \mathcal{S} \\ \lambda & \mapsto & \sigma_N(\lambda), \end{array}$$

onde  $\sigma_N(\lambda) = \text{conjunto invariante isolado em } N \times \{\lambda\} = (I(N \times \{\lambda\}), \lambda)$ . Use os conjuntos  $\sigma_N(U)$ ,  $U$  aberto e  $N$  compacto como base para topologia em  $\mathcal{S}$  (isto é, a topologia em  $\mathcal{S}$  é formada por uniões arbitrárias dos  $\sigma_N(U)$  e interseções finitas deles).

**Proposição 111.** *O conjunto  $\{\sigma_N(U)\}$  com  $N$  compacto e  $U$  aberto é base para uma topologia.*

*Prova.* Considere dois conjuntos  $\{\sigma_N(U)\}$  e  $\{\sigma_M(V)\}$ . E  $(S, \lambda) \in \sigma_N(U) \cap \sigma_M(V)$ . Precisamos encontrar algum  $\sigma_K(W)$ , com  $W \neq \emptyset$ , tal que  $(S, \lambda) \in \sigma_K(W) \subset \sigma_N(U) \cap \sigma_M(V)$ . Sabemos que

$$(S, \lambda) \in \sigma_N(U) \cap \sigma_M(V) = \{(T, \mu) / \mu \in U \cap V, T = I(M \times \{\mu\}) = I(N \times \{\mu\})\}.$$

Daí  $M \cap N \times \{\lambda\}$  é também vizinhança isolante de  $(S, \lambda)$ .

$$I(M \cap N \times \{\lambda\}) = I(M \times \{\lambda\}) = I(N \times \{\lambda\}) = (S, \lambda)$$

se, e somente se,

$$(S, \lambda) = \sigma_{M \cap N}(\lambda) = \sigma_M(\lambda) \tag{6.3}$$

e

$$(S, \lambda) = \sigma_{M \cap N}(\lambda) = \sigma_N(\lambda) \quad (6.4)$$

"Afirmação": As equações (6.3) e (6.4) valem para todo  $\mu$  numa vizinhança  $W$  de  $\mu$ . Todo  $x \in N \setminus N \cap M$  sai de  $N$ , pois  $I(N) = I(N \cap M)$ . Isto permanece válido numa vizinhança de  $(x, \lambda)$ . A compacidade nos dá que

$$\sigma_N(\mu) = \sigma_{N \cap M}(\mu)$$

para  $\mu$  numa vizinhança  $W$  de  $\lambda$ . Se (6.3) e (6.4) valem para  $\mu \in W$ , então  $(S, \lambda) \in \sigma_{M \cap N}(W) \subset \sigma_M(U) \cap \sigma_N(V)$   $\square$

**Proposição 112.**

$$\begin{aligned} \pi : \quad \mathcal{S} &\mapsto \Lambda \\ (S, \lambda) &\mapsto \lambda \end{aligned}$$

é um homeomorfismo local.

*Prova.* A restrição

$$\tilde{\pi} = \pi|_{\sigma_N(U)} : \sigma_N(U) \rightarrow U \subset \Lambda$$

é um homeomorfismo. Basta mostrar que  $\tilde{\pi}$  e  $\sigma_N$  são contínuas.

- $\sigma_N$  é contínua. Considere um aberto  $W$  de  $\sigma_N(U)$  contendo  $I(N \times \{\lambda_1\})$  escolha  $\widetilde{W} = \{\lambda/I(N \times \{\lambda\}) \subset W\} \Rightarrow \sigma_N(\widetilde{W}) \subset W$  e  $\widetilde{W}$  é aberto. (Pois  $\widetilde{W} = \Lambda(W)$  que é aberto). Veja que  $\widetilde{W} \neq \emptyset$ , pois  $\widetilde{W} \supset \{\lambda_1\}$ .

- $\tilde{\pi}$  é contínua, pois  $\tilde{\pi}$  é a restrição de  $\pi$  que é a projeção de  $\mathcal{S}$  em  $\Lambda$ , que é contínua.

$\square$

**Observação 113.** Então  $\pi : \mathcal{S} \rightarrow \Lambda$  é como uma aplicação recobrimento, mas a cardinalidade das fibras  $\pi^{-1}(\lambda)$  pode mudar. Funções como estas são chamadas "sheaf" (pilha ou maço).

**Definição 114.**  $(S, \lambda), (T, \mu) \in \mathcal{S}$  são ditos relacionados por continuação conexa por caminhos se ficam na mesma componente de caminho em  $\mathcal{S}$ .

Usando "pullbacks", faça a seguinte construção: dado um caminho  $\sigma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{S}$ , visto como uma seção do fluxo local parametrizada por  $[0, 1]$ . Seja  $\sigma(s) = (S(s), \lambda(s))$  e defina um fluxo local num subconjunto de  $X \times [0, 1]$

$$(x, s) \cdot t = (x \cdot_{\lambda_s}, s).$$

Assim podemos ver a aplicação como uma aplicação de  $[0, 1]$  em  $\mathcal{S}$ , ao invés de aplicação de  $\Lambda$  em  $\mathcal{S}$ . Suponha que existe um caminho ligando  $S_1$  a  $S_2$  ou seja  $\sigma(\lambda)$  escrito como  $(S_\lambda, \lambda)$ ,  $\lambda \in [0, 1]$ . Daí podemos continuar  $S_0$  para  $S_1$

A invariância do Índice de Conley por continuação se dá ao mostraremos que  $I(S_0) \simeq I(S_1)$  isomorfismo de um sistema conexo simples (SCS). (ver definição de SCS na seção "Ultimate Conley index"). Para um conjunto invariante isolado,  $S$  um SCS é um par  $(P, J)$  onde,  $P = \{N_1/N_0$  onde  $(N_1, N_0)$  é par-índice para  $S\}$ ,  $J(N_1/N_0, N'_1/N'_0) = [f_{(t,u,v)}]$ . Uma função  $\Omega : (P, J) \rightarrow (P', J')$  é uma coleção de classes de homotopia  $\Omega(X, X')$ , uma classe para cada  $X \in P, X' \in P'$  que são compatíveis com  $J$  e  $J'$ . Veja o diagrama abaixo.

$$\begin{array}{ccc} (P, J) & & X \xrightarrow{f} Y \\ & & \omega_1 \downarrow \quad \downarrow \omega_2 \\ (P', J') & & X' \xrightarrow{g} Y' \end{array}$$

Além disso, temos:

$$\Omega(X, Y') = \Omega(Y, Y') \circ J(X, Y) = J'(X', Y') \circ \Omega(X, X'),$$

onde a notação  $\Omega(A, B)$  acima é dada pelas classes e significa que dados  $\omega_2 \in \Omega(A, B)$  e  $f_{(t,u,v)} \in J$ , então  $\omega_2 \circ f_{(t,u,v)} = \tilde{\omega} \in \Omega(A, B)$ .

**Definição 115.**  $\Omega$  é dita isomorfismo se cada  $w \in \Omega$  é uma equivalência homotópica.

Note que  $\Omega$  é unicamente determinado por qualquer  $\omega : X \rightarrow X'$ .

**Observação 116.** duas funções  $\omega_1 : X \rightarrow X'$  e  $\omega_2 : Y \rightarrow Y'$  determinam o mesmo  $\Omega$  se, e somente se,  $Y' \leftarrow X : \omega_2 \circ f = g \circ \omega_1 : X \rightarrow Y'$  para alguma  $f \in J$  e  $g \in J'$

**Teorema 117.** (Teorema da Continuação) Se  $(S, \lambda), (T, \mu)$  estão relacionados por continuação por caminhos. Então cada caminho:  $\sigma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{S}$ ,  $\sigma(0) = (S, \sigma)$  e  $\sigma(1) = (T, \mu)$  determina um isomorfismo  $\Omega : I(S, \lambda) \rightarrow I(T, \mu)$ . Além disso,  $\sigma_1 \simeq \sigma_2$  são homotópicos  $I_{\sigma_1} = I_{\sigma_2}$ .

**Corolário 118.** *Se  $(S, \lambda), (T, \mu)$  relacionados por continuação por caminhos, então  $h(S, \lambda) = h(T, \mu)$ . (O índice de homotopia de Conley é invariante por continuação).*

*Prova.* Basta observar que se tivermos o isomorfismo  $\Omega$  (do teorema), temos uma equivalência homotópica entre os quocientes dos pares-índices.  $\square$  Seja  $\sigma$  um tal caminho, que, utilizando a construção de pullbacks podemos substituir  $\Lambda$  pelo intervalo  $[0, 1]$ . Para qualquer intervalo  $K \subset [0, 1]$ , seja  $S_K = \cup_{\lambda \in K} (S_\lambda, \lambda)$ ,  $S_\lambda = \sigma(\lambda) = \sigma_N(\lambda)$  (conjunto invariante contido em um certo  $N \times \{\lambda\}$ ).  $S_K$  é um conjunto invariante.

**Proposição 119.** *Para qualquer  $K$  subconjunto do intervalo  $[0, 1]$ ,  $S_K$  é um conjunto invariante isolado na restrição do fluxo a  $\Phi^K$*

*Prova.* Seja  $N$  tal que,  $N_\lambda = N \times \{\lambda\}$  é vizinhança isolante para  $S_\lambda$  para todo  $\lambda \in K$ . Portanto  $N \times K$  é uma vizinhança isolante para  $S_K$ , onde  $N$  e  $K$  são compactos.  $\square$

Agora vamos relacionar  $I(S_\lambda)$  com  $I(S_K)$ . Seja  $(P_1, P_0)$  um par-índice para  $S_K$ . Para cada  $\lambda \in K$ , temos  $(P_1^\lambda, P_0^\lambda) = (P_1, P_0) \cap \Phi^\lambda$  par-índice para  $S$ . Assim, a inclusão  $i : (P_1^\lambda, P_0^\lambda) \rightarrow (P_1, P_0)$  induz uma aplicação

$$F_\lambda : I(S_\lambda) \rightarrow I(S_K),$$

pois  $\gamma : P_1^\lambda/P_0^\lambda \rightarrow P_1/P_0$ , onde  $P_1^\lambda/P_0^\lambda \in I(S_\lambda)$  e  $P_1/P_0 \in I(S_K)$ . Analogamente para cada subintervalo  $M \subset K$ , temos uma inclusão similar:

$$F_M : I(S_M) \longrightarrow I(S_K).$$

**Proposição 120.** *As funções  $F_M$  e  $F_\lambda$  não dependem da escolha do par-índices para  $S_K$ . Assim existe uma cobertura de  $[0, 1]$  por intervalos  $K$ , nos quais estas funções são isomorfismos.*

**Prova do Teorema da Continuação:**

Pela proposição 116 podemos escolher uma subcobertura finita de  $[0, 1]$ . Se  $\lambda_1, \lambda_2 \in K$  existe um isomorfismo

$$F_{\lambda_2}^{-1} \circ F_{\lambda_1} : I(S_{\lambda_1}) \longrightarrow I(S_{\lambda_2})$$

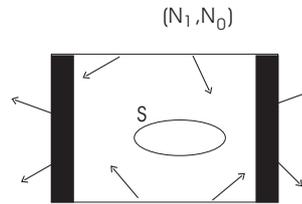
(obtido pelas inclusões em  $S_K$ ), onde  $F_{\lambda_1} : I(S_{\lambda_1}) \longrightarrow I(S_K)$ ,  $F_{\lambda_2} : I(S_{\lambda_2}) \longrightarrow I(S_K)$  e  $F_{\lambda_1} \simeq F_{\lambda_2}$ . Podemos substituir  $K$  por  $[\lambda_1, \lambda_2] = L$ , mudamos também o isomorfismo,

pois  $F_L$  também é isomorfismo. Sejam  $F'_{\lambda_i}$  isomorfismos induzidos pelas inclusões em  $I(S_L)$ . Considere uma partição de  $[0, 1]$  dada por  $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < 1$ , onde  $[\lambda_i, \lambda_{i+1}]$  são compactos, usando os isomorfismos acima (generalizados para os  $\lambda_i$ s além de  $i = 1, 2$ ) temos:

$$I(S_0) \simeq I(S_{\lambda_1}) \simeq \dots \simeq I(S_{\lambda_n}) \simeq I(S_n).$$

Note que a composição acima não depende da partição. □

**Exemplo 121.** (Perturbação do equilíbrio hiperbólico.) Se perturbarmos o campo vetorial, esta figura continua representando um par-índice para  $S$ . Ou seja, podemos usar o mesmo  $(N_1, N_0)$  para toda perturbação pequena.



$(N_1, N_0) \times \{\lambda\} \longrightarrow (N_1, N_0) \times K$  é uma equivalência homotópica, desde que o primeiro conjunto seja uma retrato forte de deformação do segundo. Já quando perturbamos o fluxo local (não mais o campo vetorial), nem sempre é possível usar o mesmo par-índice para todo  $\mu$  próximo de  $\lambda$ . Procuramos um par  $(P_1, P_0)$  que seja "aproximadamente um produto".

**Lema 122.** Dado  $\lambda \in [0, 1]$  existe um intervalo  $K$  com  $\lambda \in K \subset [0, 1]$  e pares-índices  $(N_1, N_0) \times \{\lambda\}, (N'_1, N'_0) \times \{\lambda\}$  para  $S_\lambda$  e  $(P_1, P_0), (P'_1, P'_0)$  para  $S_K$  com  $(N_1, N_0) \times K \subset (P_1, P_0) \subset (N'_1, N'_0) \times K \subset (P'_1, P'_0)$ .

**Lema 123.** Se  $\Omega : (P, J) \longrightarrow (P', J')$  é uma função de SCS, formado por funções  $f : X \longrightarrow X', X \in P, X' \in P'$  tal que existe  $g : X' \longrightarrow Y, h : Y \longrightarrow Y'$  com  $Y \in P, Y' \in P'$ , tal que  $g \circ f \in J$  e  $h \circ g \in J'$  ( $\Rightarrow$  são equivalências homotópicas). Então  $\Omega$  é um isomorfismo.

*Prova.* Temos que verificar que cada  $f$  é equivalência homotópica. Sabemos que  $g \circ f$  é equivalência homotópica com inversa homotópica  $(g \circ f)^{-1}$ . Analogamente  $(h \circ g)^{-1}$  é

uma inversa homotópica para  $h \circ g$ .

Afirmção:  $k = (g \circ f)^{\widetilde{-1}} \circ g$  é uma inversa homotópica para  $f$ . De fato,

$$k \circ f = (g \circ f)^{\widetilde{-1}} \circ (g \circ f) \simeq id_X$$

$$f \circ k = f \circ (g \circ f)^{\widetilde{-1}} \circ g \simeq (h \circ g)^{\widetilde{-1}} \circ h \circ g \circ f \circ (g \circ f)^{\widetilde{-1}} \circ g \simeq (h \circ g)^{\widetilde{-1}} \circ h \circ g \simeq id_X,$$

□

Da mesma forma que para o índice de Euler, a continuação é uma maneira de simplificar o calculo do índice de Conley. Continue seu problema até chegar num problema mais simples. Se seus conjuntos invariantes satisfazem o Teorema da Continuação, o índice será o mesmo.

## Referências Bibliográficas

- [1] Conley, Charles, "Isolated Invariants Sets and the Morse Index", Conference Board of the Mathematical Sciences, number 38, publicado por AMS;
- [2] Smoller, Joel, "Shock waves and reaction-diffusion equations." New York: Springer-Verlag, c1983.. 581p.- ISBN 0-387-90752-1
- [3] Hatcher, Alan, "Algebraic Topology", Cornell Univ. 3rd Ed. 553 pp; publicado por Cambridge University Press.
- [4] Lang, Serge, "Differential Manifolds". Reading: Addison-Wesley, c1972.. 230p;
- [5] Lima, Elon, "Um curso de Análise", vol. 2. Rio de Janeiro: Instituto de Matematica Pura e Aplicada : CNPq 2v. ((Projeto Euclides))
- [6] Sotomayor, Jorge, "Lições de Equações diferenciais ordinárias". 1942-; Instituto de Matematica Pura e Aplicada (Brasil).. Licoes de equacoes diferenciais ordinarias. Rio de Janeiro: IMPA, 1979.. 327p. ((Projeto Euclides))
- [7] Ditemar, Salomon, "Connected Simple Systems and the Conley Index of Isolated Invariants Sets", Transactions of the American Mathematical Society, sep.1985.
- [8] Easton, Robert, "Some Topology of the 3-Body Problem", J. of Differential Equations, 1971.
- [9] DUGUNDJI, James.. "Topology". Boston ; London: Allyn and Bacon, c1970.. 447p.

# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)