

# Investigando a Inclusão de Efeitos Espaciais em Modelos Assimétricos

por

Leonardo Correia da Costa

Departamento de Métodos Estatísticos

Instituto de Matemática

Universidade Federal do Rio de Janeiro

2008

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

# Investigando a Inclusão de Efeitos Espaciais em Modelos Assimétricos

Leonardo Correia da Costa

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Instituto de Matemática - Departamento de Métodos Estatísticos da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Estatística.

Aprovada por:

---

Prof. Alexandra M. Schmidt.  
PhD - IM - UFRJ - Orientadora.

---

Prof. Helio S. Migon.  
PhD - IM - UFRJ.

---

Prof. Mariane Branco Alves.  
D. Sc. - IME - UERJ.

Rio de Janeiro, RJ - Brasil

2008

## FICHA CATALOGRÁFICA

Costa, Leonardo Correia da.

Investigando a Inclusão de Efeitos Espaciais em Modelos Assimétricos

Leonardo Correia da Costa.

Rio de Janeiro: UFRJ, IM, DME, 2008.

Dissertação - Universidade Federal do Rio de Janeiro, IM, DME.

1. Introdução.
2. Revisão de Literatura.
3. Estudo Simulado.
4. Análise de dados.
5. Conclusões e Trabalhos Futuros.

(Mestrado-UFRJ/IM/DME) I. Schmidt, Alexandra M.

II. Universidade Federal do Rio de Janeiro III. Título.



Aos meus pais.

# Agradecimentos

Aos meus pais, Laura e Victor, por serem meus alicerces e fazerem com que este momento seja possível.

A minha irmã, Luciana, principalmente por emprestar seu laptop para rodar o MCMC.

A minha namorada Miriam, pela força e, principalmente, pela compreensão nos momentos da minha ausência.

Aos meus amigos, André, Eduardo e Rafael, que fizeram com que meus finais de semana fossem divertidos.

A professora Alexandra M. Schmidt, pelos conhecimentos transmitidos e pela orientação.

Aos demais professores e colegas do Departamento de Estatística da UFRJ pela amizade, e por tudo que me ensinaram.

Em especial aos colegas Vinicíus Israel e Joaquim Neto, que muito me ajudaram e incentivaram durante todo o Mestrado.

Agradeço também a Thais C. Fonseca pela disponibilização dos códigos de alguns modelos em Ox.

# Resumo

A classe de modelos assimétricos está em evidência na literatura recente de Estatística. Essa evidência se deve ao fato de, cada vez mais, ser comum o desenvolvimento de modelos para analisar dados assimétricos. Em especial, a distribuição normal assimétrica (SN) tem sido muito utilizada. Essa distribuição se difere da distribuição normal usual por possuir um parâmetro que controla a assimetria. Os modelos de fronteira estocástica, que são um caso particular dos modelos assimétricos, vêm sendo utilizados para descrever produtividade e eficiência de firmas. Esses modelos apresentam três componentes. A primeira, uma função de produção ou custo. A segunda, uma componente estocástica assimétrica que captura a ineficiência de cada firma e a terceira, um erro aleatório.

Esta dissertação se propõe a investigar a inclusão de um efeito local na componente estocástica assimétrica. Para essa investigação, simulamos 100 amostras, sendo 50 amostras para um conjunto de dados com 192 unidades e, as outras 50, para um conjunto de dados com 500 unidades. Assumimos que as unidades estão localizadas em subregiões de uma região fictícia, assim incluímos um efeito local latente, que possui uma dependência espacial a priori na média da distribuição da componente assimétrica. A partir daí, ajustamos 12 diferentes modelos às amostras geradas. Essencialmente, esses modelos diferem na distribuição associada ao termo assimétrico, na localização do efeito local (na média ou variância da distribuição assimétrica) e na distribuição a priori associada aos efeitos locais, independente ou espacialmente estruturada. Alguns critérios de comparação foram utilizados para investigar quais especificações se ajustam melhor aos dados. Resumidamente, os resultados foram os seguintes: *(i)* o modelo utilizado para gerar os dados não foi o que resultou no melhor ajuste; *(ii)* a inclusão do efeito latente melhora o ajuste dos modelos dependendo da distribuição atribuída à ineficiência; *(iii)* o modelo para o qual o efeito local se encontra na variância da distribuição da ineficiência, ajustou-se melhor aos conjuntos de dados, se comparado àquele em que o efeito local está na média da componente assimétrica.

# Abstract

Assymetrical models have been widely used in Statistics in the last decade. More specifically, a lot of attention has been given to the assymmetric normal distribution. In comparison to the usual normal distribution, the assymmetric normal has another parameter that captures the assymetry present in the data. Stochastic frontier models can be seen as a particular case of assymmetric models. These models are useful for estimating the efficiency of units in producing their outputs given their inputs. Broadly speaking, these stochastic frontier models have three components: the production function, which describes the effects of the inputs, a random positive term, which describes the inefficiency of each unit, and a white noise.

This work aims to investigate the inclusion of a local random effect in the inefficiency term of stochastic frontier models. More specifically, we generate 100 artificial sets of data, considering different sample sizes (192 and 500 units). The units are considered to be spread over a fictious region, such that a neighborhood structure is imposed. Therefore, the dataset is generated based on a assymmetric component which has a local latent effect that carries information about the spatial structure. Then we fit 12 different models. We interchange between the distribution assigned to the assymmetric component and the prior assigned to the local effect, which is considered either independent or spatially structured. We make use of some model comparison criteria to check how each model is able to capture the true (*known*) structure of the data. Our main findings are the following: (*i*) the model used to generate the data did not provide the best fit; (*ii*) the inclusion of the local latent effect improves the fitting depending on the distribution assigned to the assymmetric component; (*iii*) those models which carry the local information in the variance of the assymmetric component provided better fittings than those which considered the local effect in the mean of the inefficiency.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Revisão da Literatura</b>	<b>4</b>
2.1	Modelos Assimétricos . . . . .	4
2.2	Modelos de Fronteira Estocástica . . . . .	10
2.3	Função de produção . . . . .	11
2.3.1	Função Cobb-Douglas . . . . .	13
2.3.2	Função C.E.S ( <i>Constant Elasticity of Substitution</i> ) . . . . .	14
2.3.3	Função Translog . . . . .	15
2.3.4	Função G.P.F. ( <i>Generalized Production Functions</i> ) . . . . .	15
2.4	Distribuições para as Ineficiências . . . . .	15
2.4.1	Normal truncada . . . . .	16
2.4.2	Exponencial . . . . .	17
2.4.3	Gama . . . . .	17
2.4.4	Log-Normal . . . . .	18
2.5	Modelo de fronteira estocástica espacial . . . . .	19
<b>3</b>	<b>Estudo Simulado</b>	<b>22</b>
3.1	Gerando os dados artificiais . . . . .	23
3.2	Modelos Propostos . . . . .	29
3.3	Procedimento de Inferência . . . . .	34
3.3.1	Especificação da Distribuição a Priori . . . . .	34
3.3.2	Distribuição a posteriori . . . . .	35

<b>4</b>	<b>Análise dos Dados</b>	<b>39</b>
4.1	Aspectos Computacionais . . . . .	39
4.1.1	Amostrador de Gibbs . . . . .	40
4.1.2	Metropolis-Hastings . . . . .	41
4.1.3	<i>Slice Sampling</i> . . . . .	42
4.2	Distribuições Condicionais Completas . . . . .	45
4.2.1	Modelo M2 . . . . .	45
4.2.2	Modelo M8 . . . . .	46
4.3	Critérios de Comparação de Modelos . . . . .	48
4.3.1	Critério de Informação Baseado na <i>Deviance</i> . . . . .	48
4.3.2	Perda Preditiva Esperada . . . . .	49
4.3.3	Critério de Ordenação das Eficiências . . . . .	50
4.4	Análise . . . . .	51
4.4.1	Verificação da Convergência das Cadeias . . . . .	51
4.5	Resultados . . . . .	54
4.5.1	Análise dos resultados do conjunto com 192 unidades . . . . .	60
4.5.2	Análise dos resultados do conjunto com 500 unidades . . . . .	70
<b>5</b>	<b>Conclusões e Trabalhos Futuros</b>	<b>81</b>
<b>A</b>	<b>Cálculo das Distribuições Condicionais Completas a Posteriori</b>	<b>87</b>
A.1	Modelo M1 . . . . .	87
A.2	Modelo M3 . . . . .	88
A.3	Modelo M4 . . . . .	89
A.4	Modelo M5 . . . . .	90
A.5	Modelo M6 . . . . .	91
A.6	Modelo M7 . . . . .	92
A.7	Modelo M9 . . . . .	93
A.8	Modelo M12 . . . . .	94
<b>B</b>	<b>Traço das cadeias dos parâmetros para cada modelo</b>	<b>95</b>

C Critério EPD com todas as componentes	104
D Critério DIC com todas as componentes	109

# Lista de Tabelas

3.1	Frequência do número de vizinhos . . . . .	23
3.2	Frequência do número de unidades por localidade para o caso em que consideramos amostras de tamanho 500 . . . . .	27
3.3	Especificação dos modelos propostos . . . . .	33
4.1	Componente D do critério EPD para a amostra com 192 unidades . . . . .	56
4.2	Componente D do critério EPD para a amostra com 500 unidades . . . . .	57
4.3	Critério DIC para a amostra com 192 unidades . . . . .	58
4.4	Critério DIC para a amostra com 500 unidades . . . . .	59
4.5	Sinal da diferença dos critérios EPD e DIC comparando os modelos de acordo com a distribuição da ineficiência, para a amostra com 192 unidades. . . . .	60
4.6	Sinal da diferença dos critérios EPD e DIC comparando os modelos que possuem estrutura espacial com aqueles que não possuem, para a amostra com 192 unidades. . . . .	62
4.7	Sinal da diferença dos critérios EPD e DIC quando comparamos os modelos sem o parâmetro $\alpha$ com aqueles modelos que possuem esse parâmetro, para a amostra com 192 unidades . . . . .	63
4.8	Sinal da diferença dos critérios EPD e DIC comparando o modelo que foi utilizado para gerar os dados com todos os outros modelos, para a amostra com 192 unidades. . . . .	65
4.9	Resultado obtido para o critério de ordenação das eficiências, para a amostra 1 do conjunto de dados com 192 unidades . . . . .	66



4.10	Resultado obtido para o critério de ordenação das eficiências, para a amostra 16 do conjunto de dados com 192 unidades . . . . .	67
4.11	Resultado obtido para o critério de ordenação das eficiências, para a amostra 33 do conjunto de dados com 192 unidades . . . . .	67
4.12	Sinal da diferença dos critérios EPD e DIC comparando os modelos de acordo com a distribuição da ineficiência, para a amostra com 500 unidades.	70
4.13	Sinal da diferença dos critérios EPD e DIC comparando os modelos que possuem estrutura espacial com aqueles que não possuem, para a amostra com 500 unidades. . . . .	72
4.14	Sinal da diferença dos critérios EPD e DIC comparando os modelos sem o parâmetro $\alpha$ com aqueles modelos que possuem esse parâmetro, para a amostra com 500 unidades. . . . .	73
4.15	Sinal da diferença dos critérios EPD e DIC comparando o modelo que foi utilizado para gerar os dados com todos os outros modelos, para a amostra com 500 unidades. . . . .	76
4.16	Resultado obtido no critério de ordenação das eficiências, para a amostra 1 do conjunto de dados com 500 unidades. . . . .	77
4.17	Resultado obtido no critério de ordenação das eficiências, para a amostra 16 do conjunto de dados com 500 unidades. . . . .	78
4.18	Resultado obtido no critério de ordenação das eficiências, para a amostra 33 do conjunto de dados com 500 unidades. . . . .	78
C.1	Componentes do critério EPD para o conjunto com 192 unidades. (continua)	105
C.2	Componentes do critério EPD para o conjunto com 192 unidades. (continuação) . . . . .	106
C.3	Componentes do critério EPD para o conjunto com 500 unidades. (continua)	107
C.4	Componentes do critério EPD para o conjunto com 500 unidades. (continuação) . . . . .	108
D.1	Componentes do critério DIC para o conjunto com 192 unidades. (continua)	110

D.2	Componentes do critério DIC para o conjunto com 192 unidades. (continuação) . . . . .	111
D.3	Componentes do critério DIC para o conjunto com 500 unidades. (continua)	112
D.4	Componentes do critério DIC para o conjunto com 500 unidades. (continuação) . . . . .	113

# Lista de Figuras

2.1	Funções densidade de probabilidade da normal assimétrica padronizada para diferentes valores de $\lambda$ . . . . .	6
2.2	Funções de densidade de probabilidade da normal assimétrica, com parâmetros de escala e posição iguais a 2, para diferentes valores de $\lambda$ . . . . .	8
2.3	Funções de densidade de probabilidade da normal assimétrica estendida com parâmetros de posição e escala iguais a 0 e 1, respectivamente, $\lambda = 2$ e diferentes valores de $\tau$ . . . . .	9
2.4	Funções densidade de probabilidade da normal assimétrica estendida com parâmetros de posição e escala iguais a 2 e $\sqrt{2}$ , respectivamente, $\lambda = 2$ e diferentes valores de $\tau$ . . . . .	10
3.1	Histograma da componente espacial, gerada segundo o modelo proposto em Ferreira e Oliveira (2007), e inserida na média das ineficiências . . . .	24
3.2	Função densidade de probabilidade de $u \sim N^+(\alpha, \tau^2)$ para diversos valores de $\alpha$ . . . . .	26
3.3	Histograma das ineficiências geradas para ambos os conjuntos de dados.	28
3.4	Fronteira de Produção com apenas 1 covariável e em vermelho as ineficiências geradas no trabalho. . . . .	30
3.5	Densidade de $u$ para todas as distribuições propostas e diferentes valores de $\alpha$ , para os modelos que possuem esse parâmetro. . . . .	34

3.6	Função de densidade conjunta de $\mathbf{Y}$ integrada com respeito a $u_{ij}$ , equação (3.9), para os modelos com a especificação em (3.5). Em preto o modelo (3.2), $a = 0$ e $b = \tau^2$ , em azul o modelo (3.4), $a = \alpha_i$ e $b = \tau^2$ , e em verde o modelo em (3.3), $a = 0$ e $b = \tau^2$ , e em vermelho o modelo (3.4), $a = 0$ e $b = \exp(\alpha_i)$ . . . . .	38
4.1	Ilustração do Algoritmo <i>Slice Sampling</i> . . . . .	44
4.2	Amostras da distribuição a posteriori para o Modelo M2, para o caso da amostra com 192 unidades, com <i>burn-in</i> 100.000 e <i>thinning</i> 100. . . . .	52
4.3	Amostras da distribuição posteriori para o Modelo M8, para o caso da amostra com 192 unidades, com <i>burn-in</i> 30.000 e <i>thinning</i> 30. . . . .	53
4.4	Gráfico das ineficiências estimadas contra os verdadeiros valores das ineficiências, segundo cada modelo ajustado, para o conjunto de dados com 192 unidades. . . . .	69
4.5	Gráfico das ineficiências estimadas contra os verdadeiros valores das ineficiências, segundo cada modelo ajustado, para o conjunto de dados com 500 unidades. . . . .	80
2.1	Amostras da distribuição a posteriori para o Modelo M1, amostra com 192 unidades, com <i>burn-in</i> 100.000 e <i>thinning</i> 100. . . . .	96
2.2	Amostras da distribuição a posteriori para o Modelo M3, amostra com 192 unidades, com <i>burn-in</i> 100.000 e <i>thinning</i> 100. . . . .	97
2.3	Amostras da distribuição a posteriori para o Modelo M4, amostra com 192 unidades, com <i>burn-in</i> 100.000 e <i>thinning</i> 100. . . . .	98
2.4	Amostras da distribuição a posteriori para o Modelo M5, amostra com 192 unidades, com <i>burn-in</i> 100.000 e <i>thinning</i> 100. . . . .	99
2.5	Amostras da distribuição a posteriori para o Modelo M6, amostra com 192 unidades, com <i>burn-in</i> 100.000 e <i>thinning</i> 100. . . . .	100
2.6	Amostras da distribuição posteriori para o Modelo M7, amostra com 192 unidades, com <i>burn-in</i> 30.000 e <i>thinning</i> 30. . . . .	101

2.7	Amostras da distribuição posteriori para o Modelo M9, amostra com 192 unidades, com <i>burn-in</i> 30.000 e <i>thining</i> 30. . . . .	102
2.8	Amostras da distribuição a posteriori para o Modelo M12, amostra com 192 unidades, com <i>burn-in</i> 100.000 e <i>thining</i> 100. . . . .	103

# Capítulo 1

## Introdução

Recentemente em Estatística, é cada vez mais comum o desenvolvimento de modelos para analisar dados assimétricos. Para analisar esse tipo de dado, a classe de modelos descritas por Azzalini (1985) está em evidência, principalmente a distribuição normal assimétrica (SN). A distribuição SN proposta por Azzalini (1985) difere da distribuição normal usual devido à inclusão de um parâmetro que descreve a assimetria. Particularmente ela é definida como  $f(x) = 2\phi(x)\Phi(\lambda x)$ , onde  $\phi(x)$  representa a função de densidade da distribuição normal padrão e  $\Phi(x)$  a função de distribuição acumulada da normal padrão. Azzalini (2005) discute alguns problemas relacionados à estimação do parâmetro de assimetria. Mais geralmente, os modelos assimétricos vêm sendo utilizados em Econometria para descrever eficiências de firmas na transformação dos seus insumos em produtos. Os modelos de fronteira de produção estocástica foram introduzidos por Aigner et al. (1977) e Meeusen e van den Broeck (1977). Esses modelos consideram uma representação paramétrica de uma tecnologia e um termo de erro que é decomposto em duas componentes. Uma parte representa a flutuação aleatória, que não depende do comportamento da firma, e a outra, a medida de ineficiência, é passível do controle das firmas. Para essa medida podem ser atribuídas algumas distribuições. Na literatura, Meeusen e van den Broeck (1977) utilizaram a distribuição exponencial, Aigner et al. (1977) a *half-normal*, Stevenson (1980) a normal truncada, Greene (1990) a gama e Migon (2006) a log-normal.

Há situações em que as unidades amostrais estão associadas numa localização no

espaço. Schmidt et al. (2006) propuseram um modelo de fronteira de produção com uma componente espacial para capturar possíveis efeitos locais no termo que descreve as ineficiências das unidades amostrais.

Mais especificamente, os autores utilizaram uma amostra do conjunto de dados de fazendas do Centro-Oeste brasileiro. Essa amostra tem um total de 25.494 fazendas espalhadas em 370 municípios dessa região, e assumiram que as ineficiências das fazendas possuem uma dependência espacial. Ou seja, a priori, fazendas próximas tendem a não ter mudanças bruscas nos valores das ineficiências. A dependência espacial foi incluída no nível municipal da ineficiência. Para modelar essa estrutura espacial atribuiu-se uma distribuição autoregressiva condicional (CAR) a priori para esses efeitos locais.

Este trabalho tem como principal objetivo investigar a importância da inclusão de efeitos locais em modelos de fronteira de produção estocástica.

Para isso, seguindo Schmidt et al. (2006), obteremos 100 amostras baseadas em diferentes números de unidades (192 e 500). As ineficiências serão geradas a partir de uma distribuição com efeito local e para cada uma das amostras geradas, ajustaremos 12 diferentes modelos que procuram comparar

- (i) a importância da especificação da distribuição a priori do termo assimétrico (log-normal ou normal truncada) e
- (ii) a importância da inclusão ou não de efeitos locais com distribuições a priori com ou sem estrutura espacial.

Todo o procedimento de inferência deste trabalho será realizado seguindo o Paradigma de Bayes. Essa dissertação está organizada da seguinte forma: No Capítulo 2, faremos uma revisão da literatura, abordando os modelos assimétricos e uma de suas aplicações, que são os modelos de fronteira estocástica. Também faremos uma abordagem dos modelos de fronteira estocástica com componente espacial baseado no trabalho de Schmidt et al. (2006). No Capítulo 3, será abordada a metodologia utilizada para gerar os conjuntos de dados simulados. Neste capítulo, também discutiremos alguns aspectos da função de verossimilhança resultante. Esses aspectos serão úteis no capítulo 4, no qual trataremos dos aspectos computacionais do procedimento de inferência, os métodos de

simulação estocástica e algoritmos computacionais. Apresentaremos também os critérios de comparação que serão utilizados e finalizaremos o capítulo analisando os resultados para cada conjunto de dados separadamente. Finalmente, o Capítulo 5 apresenta as conclusões e considerações finais desse estudo.



# Capítulo 2

## Revisão da Literatura

O objetivo principal desse capítulo é fazer uma revisão sobre os modelos assimétricos e os modelos de fronteira de produção estocástica abordando as diferentes funções de produção e as distribuições utilizadas na literatura para modelar as ineficiências.

O capítulo está organizado da seguinte forma: na primeira seção apresentamos uma revisão dos modelos assimétricos. Os modelos de fronteira estocástica, que são um caso particular dos modelos assimétricos, são discutidos na seção 2.2. Na seção 2.3 apresentamos as diferentes funções de produção. As diferentes distribuições para as ineficiências são discutidas na seção 2.4 e, finalmente, a seção 2.5 discute o modelo proposto por Schmidt et al. (2006), que é o alvo principal de investigação dessa dissertação.

### 2.1 Modelos Assimétricos

Trabalhos recentes em Estatística estão fortemente ligados ao desenvolvimento de novos modelos para analisar dados assimétricos. Os modelos de fronteira estocástica estão relacionados aos modelos de regressão normal assimétricos.

A classe de distribuições assimétricas introduzidas por Azzalini (1985) está em evidência na literatura atual de Estatística. Uma atenção especial foi dedicada aos casos da normal assimétrica (SN) e a t-Student assimétrica (ST). Azzalini (2005), apresenta algumas dificuldades numéricas para estimar o parâmetro de assimetria desta distribuição. Essencialmente, isso ocorre devido ao fato de haver uma probabilidade positiva do estimador de

máxima verossimilhança do parâmetro de assimetria não ser finito. A distribuição ST é uma extensão da distribuição SN, tendo um parâmetro extra que controla a espessura da cauda da distribuição. Esta classe de modelo permite que se controle, simultaneamente, a assimetria e a curtose presente nas observações.

A classe de distribuições assimétricas é definida como

$$f(x) = 2g(x)Q(W(x)), \quad (2.1)$$

onde  $g(x)$  é a função de densidade de uma variável aleatória contínua  $n$ -dimensional, simétrica em torno de 0,  $Q(x)$  é uma função de distribuição, de tal forma que  $Q(-x) = 1 - Q(x)$  para todo  $x$  e  $W(x)$  é qualquer função par, isto é,  $W(-x) = W(x)$  para todo  $x \in \mathfrak{R}$ .

A distribuição normal assimétrica padronizada é obtida quando temos  $g = \phi$ , onde  $\phi$  representa a função de densidade da distribuição normal padrão,  $Q = \Phi$ , onde  $\Phi$  representa a função de distribuição acumulada da  $N(0, 1)$ , e  $W(x) = \lambda x$ ,  $\lambda \in \mathfrak{R}$ . Ou seja, uma variável aleatória  $Z$  tem distribuição normal assimétrica padronizada se sua função densidade de probabilidade é dada por

$$f(z) = 2\phi(z)\Phi(\lambda z). \quad (2.2)$$

Valores negativos de  $\lambda$  indicam assimetria negativa enquanto valores positivos correspondem a assimetria positiva. Quando  $\lambda = 0$  temos a função densidade da distribuição normal, que é simétrica. A figura 2.1 ilustra o comportamento da função densidade de probabilidade da distribuição normal assimétrica padronizada para diferentes valores de  $\lambda$ .

A distribuição normal assimétrica padronizada pode ser obtida de diversas maneiras. Para exemplificar, mostraremos três maneiras de obtê-la. Para maiores detalhes ver Branco e Arellano-Valle (2004). A primeira maneira é a construção via condicionamento. Ou seja, considere o vetor aleatório bivariado  $\mathbf{X} = (X_1, X_2)' \sim N_2(0, \Omega)$ , onde

$$\Omega = \begin{pmatrix} 1 & \delta \\ \delta & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{com } |\delta| < 1. \quad (2.3)$$

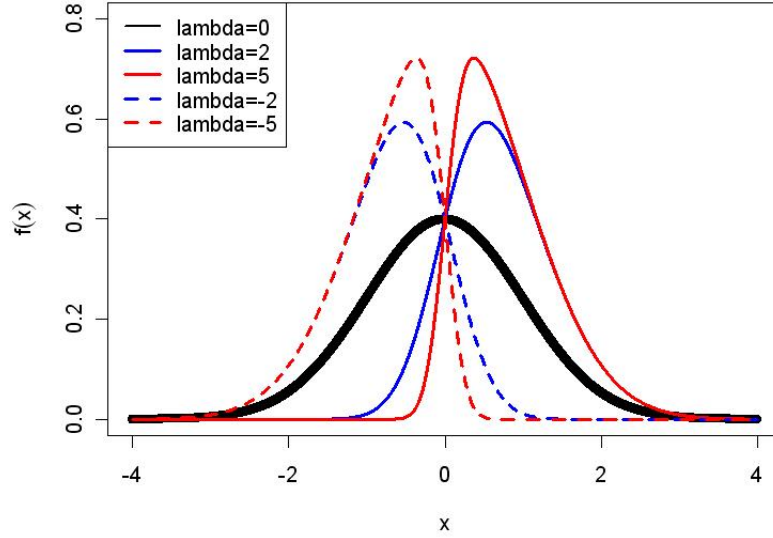


Figura 2.1: Funções densidade de probabilidade da normal assimétrica padronizada para diferentes valores de  $\lambda$ .

Defina a variável aleatória  $Z$  como a variável aleatória  $X_1$  condicionada ao fato de que a variável aleatória  $X_2$  seja não negativa, isto é,  $Z = X_1 | X_2 > 0$ . Pode-se demonstrar que a função de densidade de probabilidade de  $Z$  é dada por

$$f(z) = 2\phi(z)\Phi\left(\frac{\delta z}{\sqrt{1-\delta^2}}\right). \quad (2.4)$$

Para obtermos a densidade dada em (2.2), basta considerar a reparametrização  $\lambda = \frac{\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}$ .

Outra maneira é a construção via transformação de variáveis. Ou seja, define-se uma variável normal assimétrica padrão a partir de uma combinação linear de variáveis aleatórias normais independentes.

Sejam  $X_1$  e  $X_2$  variáveis aleatórias independentes normais padrão, e defina a variável aleatória  $Z = \delta X_1^+ + \sqrt{1-\delta^2}X_2$ , onde  $X_1^+ = |X_1|$  e  $|\delta| < 1$ . Pode-se demonstrar que a função densidade de probabilidade de  $Z$  é dada por

$$f(z) = 2\phi(z)\Phi\left(\frac{\delta z}{\sqrt{1-\delta^2}}\right). \quad (2.5)$$

Para obtermos a densidade dada em (2.2), basta considerar a reparametrização  $\lambda = \frac{\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}$ .

A terceira maneira de se obter a distribuição normal assimétrica padrão é via estatísticas de ordem. Para isto, considere  $(X_1, X_2) \sim N_2(0, \Omega)$  e  $\Omega$  como em (2.3). Agora, considerando  $Z = \max(X_1, X_2)$ , temos que a função densidade de probabilidade de  $Z$  é dada por

$$f(z) = 2\phi(z)\Phi\left(\frac{(1-\delta)z}{\sqrt{1-\delta^2}}\right). \quad (2.6)$$

Para obtermos a densidade dada em (2.2), basta considerar a reparametrização  $\lambda = \frac{1-\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}$ .

Até o momento só foi mencionada a distribuição normal assimétrica padrão. Agora, será apresentada a variável aleatória  $Y$  que tem distribuição normal assimétrica com parâmetros de posição  $\mu$ , escala  $\sigma$  e assimetria  $\lambda$ . A notação utilizada é  $Y \sim SN(\mu, \sigma^2, \lambda)$ , e sua função densidade de probabilidade é dada por

$$f(y) = 2\frac{1}{\sigma}\phi\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)\Phi\left(\lambda\frac{y-\mu}{\sigma}\right). \quad (2.7)$$

Pode-se mostrar que se  $Z \sim SN(\lambda)$  e  $Y = \mu + \sigma Z$  então  $Y \sim SN(\mu, \sigma^2, \lambda)$ . A figura 2.2 ilustra o comportamento da função densidade da distribuição normal assimétrica com parâmetros de escala e posição iguais a 2 e variando o parâmetro de assimetria. Observa-se que quando  $\lambda = 0$ , temos a distribuição normal com parâmetros de escala e posição iguais a 2.

Pode-se observar que quando o parâmetro de assimetria é diferente de zero, temos que a média da distribuição não coincide com o parâmetro de posição, como acontece com a distribuição normal. Em particular, pode ser mostrado que a média e a variância de  $Y$  são, respectivamente,

$$E[Y] = \mu + \sigma\delta\sqrt{\frac{2}{\pi}} \quad \text{e} \quad Var[Y] = \sigma^2\left[1 - \frac{2}{\pi}\delta^2\right]. \quad (2.8)$$

A distribuição normal assimétrica possui uma forma estendida, que também foi introduzida por Azzalini (1985) e explorada melhor em Azzalini (2005). Essa distribuição é chamada, pelo próprio Azzalini em seus trabalhos, de distribuição normal assimétrica estendida, logo, por este motivo, adotaremos esse nome para esta distribuição. A grande

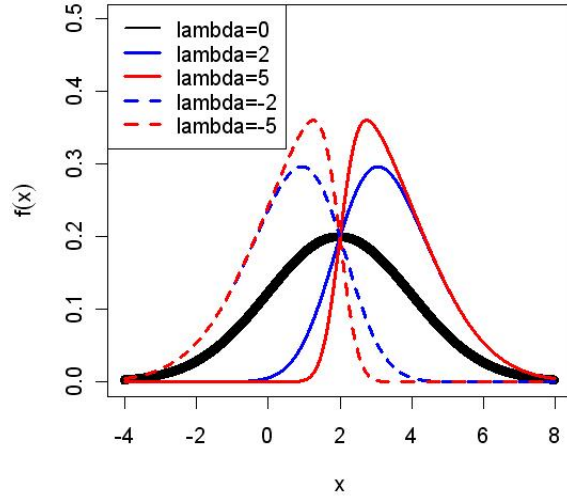


Figura 2.2: Funções de densidade de probabilidade da normal assimétrica, com parâmetros de escala e posição iguais a 2, para diferentes valores de  $\lambda$ .

diferença da forma estendida é a adição de um novo parâmetro, que controla a forma da distribuição, e com isso temos que a função densidade de probabilidade é dada por

$$f(w) = \phi(w)\Phi(\lambda w + \tau\sqrt{1 + \lambda^2})\Phi^{-1}(\tau). \quad (2.9)$$

A notação utilizada para a distribuição acima é  $W \sim SN(0, 1, \lambda, \tau)$ . Caso  $\tau = 0$ , obtemos novamente a distribuição em (2.2). Esse parâmetro de forma afeta também a visualização da assimetria, que não fica tão evidente. E, mesmo esse parâmetro pertencendo aos reais, as densidades são sensíveis ao valor desse parâmetro. A figura 2.3 ilustra o comportamento das funções de densidade de probabilidade da normal assimétrica estendida padrão para o valor de  $\lambda = 2$  e diferentes valores de  $\tau$ .

A equação (2.9) apresenta a função densidade de probabilidade da normal assimétrica estendida com parâmetros de posição e escala iguais a zero e um, respectivamente. Abaixo, segue a função densidade de probabilidade para os parâmetros de posição e escala iguais a  $\mu$  e  $\sigma$ , respectivamente.

$$f(w) = \phi\left(\frac{w - \mu}{\sigma}\right) \Phi\left(\lambda\frac{w - \mu}{\sigma} + \tau\sqrt{1 + \lambda^2}\right) \Phi^{-1}(\tau). \quad (2.10)$$

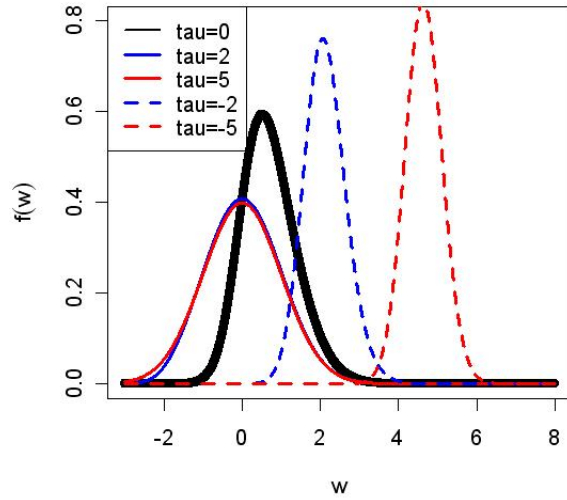


Figura 2.3: Funções de densidade de probabilidade da normal assimétrica estendida com parâmetros de posição e escala iguais a 0 e 1, respectivamente,  $\lambda = 2$  e diferentes valores de  $\tau$ .

A notação utilizada para a distribuição acima é  $W \sim SN(\mu, \sigma^2, \lambda, \tau)$ . A figura 2.4 ilustra o comportamento das funções densidades da normal assimétrica estendida com parâmetros de posição e escala iguais a 2 e  $\sqrt{2}$ , respectivamente,  $\lambda = 2$  e diferentes valores de  $\tau$ .

A seguir discutiremos os modelos de fronteira de produção estocástica e apontaremos as relações com os modelos assimétricos.

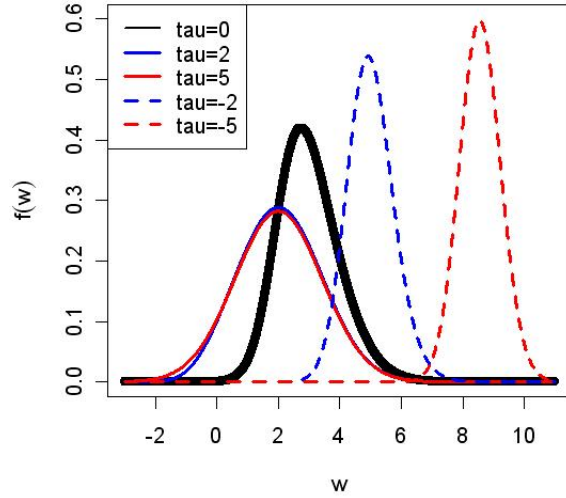


Figura 2.4: Funções densidade de probabilidade da normal assimétrica estendida com parâmetros de posição e escala iguais a 2 e  $\sqrt{2}$ , respectivamente,  $\lambda = 2$  e diferentes valores de  $\tau$ .

## 2.2 Modelos de Fronteira Estocástica

Os modelos de fronteira estocástica vêm sendo utilizados para descrever produtividade e eficiência de firmas. Estes modelos foram introduzidos por Aigner et al. (1977) e Meeusen e van den Broeck (1977). Esta abordagem consistiu, basicamente, em uma tentativa de superar as limitações das fronteiras determinísticas que não permitiam a presença de erros aleatórios, considerando todos os resíduos como ineficiência técnica das firmas, controlados pelas mesmas.

Os modelos de fronteira estocástica apresentam três componentes. A primeira, uma função de produção ou custo (conhecida como fronteira). A segunda, uma componente estocástica assimétrica que captura a ineficiência de cada firma (medida como a distância até a fronteira) e a terceira, um erro aleatório que é assumido estar fora do controle das firmas. O modelo de fronteira estocástica pode ser descrito pela seguinte forma geral:

$$y_i = f(x_i, \beta) + \zeta_i \quad \zeta = \epsilon_i - u_i \quad i = 1, \dots, N, \quad (2.11)$$

onde  $y_i$  é, geralmente, o logaritmo do *output* (ou valor negativo do logaritmo do custo),

$x_i$  denota o logaritmo do vetor de *inputs*,  $\beta$  é um vetor  $k \times 1$  de coeficientes relacionados à tecnologia adotada,  $f$  é a função de produção ou fronteira de produção,  $\varepsilon_i$  é o erro que é dado pela soma de duas componentes, uma dada por  $\epsilon_i$  que, em geral, é assumida como seguindo uma distribuição normal com média 0 e variância  $\sigma^2$ , e outra dada por  $u_i$ , que assume-se seguir uma distribuição com valores nos reais positivos. Essa última parcela do erro  $\varepsilon_i$  mede a eficiência técnica através da diferença entre o *output* observado e o *output* na fronteira. Assume-se que  $\epsilon_i$  e  $u_i$  são independentes. A eficiência que corresponde à firma  $i$  é definida por  $r_i = \exp(-u_i)$ . O distúrbio não negativo  $u_i$  revela que o *output* de cada firma deve estar localizado abaixo da fronteira.

Na literatura existem diferentes propostas para modelar a distribuição assimétrica de  $u_i$ , como a distribuição exponencial (Meeusen e van den Broeck, 1977), a *half-normal* (Aigner et al., 1977), a normal truncada (Stevenson, 1980), a gama (Greene, 1990) e a log-normal (Migon, 2006). Assumindo um vetor de observações  $\underline{Y} = (Y_1, \dots, Y_N)'$ , independente da distribuição atribuída as ineficiências, a função de verossimilhança resultante do modelo de fronteira estocástica é da seguinte forma,

$$p(\mathbf{Y} \mid x_i, \beta, u_i, \sigma^2) = (2\pi\sigma^2)^{-N/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^N (y_i - f(x_i, \beta) + u_i)^2 \right\}. \quad (2.12)$$

Na estimação dos modelos de fronteira estocástica de produção utiliza-se, com frequência, a função Cobb-Douglas, dada suas características simples e de fácil estimação, porém ela impõe algumas restrições. Outras funções podem ser utilizadas como a *Translog*, a *CES* (*Constant Elasticity of Substitution*) e a *GPF's* (*Generalized Production Functions*).

A seguir discutimos, brevemente, essas diferentes formas da função de produção.

## 2.3 Função de produção

Dá-se o nome de função de produção à relação entre o *output* e os *inputs*. A função de produção indica o máximo de produção que se pode obter a partir de uma dada quantidade de *inputs*. Assim, a função de produção descreve a máxima produção que pode ser obtida a partir de diversas combinações dos *inputs*. Desta forma, a função de produção pode ser visualizada como a fronteira entre as regiões viáveis e não viáveis, no



espaço dos *inputs* e *output*.

A função de produção pode ser representada por:

$$y = f(x, \beta) \quad (2.13)$$

onde  $y$  representa o *output*,  $x$  o vetor de *inputs* e  $\beta$  o vetor de coeficientes dos efeitos dos *inputs* no *output*. Antes de fazermos uma revisão das diversas fronteiras de produção, vamos primeiro entender os elementos associados a função de produção.

O primeiro elemento é o produto marginal (PM). O produto marginal mede a variação do *output* quando um valor do *input* é alterado e está associado às derivadas parciais da função de produção, se elas existirem. Seja uma função de produção com um único *output*  $y$  e um vetor de *inputs*  $x$ . O produto marginal em relação ao *input*  $i$  é:

$$MP_i = \frac{\partial y}{\partial x_i}. \quad (2.14)$$

Ou seja, a produção marginal está relacionada à variação do *output* quando varia-se um dos *inputs*, mantendo todos os demais fixos.

Como exemplo, supõe-se uma empresa onde temos dois *inputs*, a quantidade média de horas trabalhadas por cada funcionário, que será fixo, e o número de funcionários, que será variável. O *output* é representado pelo lucro do empresário. Se diversas combinações de funcionários e horas trabalhadas forem utilizadas para aumentar o lucro do empresário, e o número de horas trabalhadas for fixada num determinado valor, o aumento do lucro do empresário dependerá unicamente do aumento do número de funcionários da empresa. Quando isso ocorrer, haverá uma alteração das proporções de combinações entre fatores fixos e variáveis.

O retorno de escala é outra forma de analisar a função de produção. Este observa a taxa de variação do *output*, quando todos os *inputs* variam nas mesmas proporções e, está ligado ao incremento obtido na produção, quando todos os *inputs* são igualmente incrementados. O retorno de escala é dado pela seguinte equação:

$$\Delta y = f[(1 + \Delta)x_1, \dots, (1 + \Delta)x_n] - f(x_1, \dots, x_n). \quad (2.15)$$

ou,

$$y = f(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = \nu^k f(x_1, \dots, x_n). \quad (2.16)$$

Podemos identificar três tipos de ganho do retorno de escala. Retornos crescentes, constantes e decrescentes de escala. O primeiro ocorre quando temos  $k > 1$ , o segundo quando  $k = 1$  e, o terceiro, quando  $k < 1$ .

Os retornos crescentes de escala ocorrem quando a variação na quantidade do produto final é proporcionalmente maior do que a variação da quantidade utilizada dos *inputs*. Por exemplo, aumentando-se a utilização dos inputs em 15%, o *output* cresce mais do que 15%. Os retornos constantes de escala ocorrem quando a variação total do produto é igual à variação da quantidade utilizada dos insumos. Por exemplo, aumentando-se a utilização dos fatores em 15%, o produto total também aumenta em 15%. E os retornos decrescentes de escala ocorrem quando a variação da produção é menor do que a variação proporcional dos fatores. Por exemplo, aumentando-se a utilização dos fatores em 15%, o produto aumenta menos de 15%.

As elasticidades medem as variações percentuais no *output*, causadas por variações nos *inputs*. Assim, define-se a elasticidade da produção  $y$  em função do *input*  $i$ , como

$$\varepsilon_i = \frac{x_i \partial y}{y \partial x_i}. \quad (2.17)$$

A taxa marginal de substituição refere-se à quantidade do *input*  $i$  que a firma reduz pelo aumento da quantidade do *input*  $j$ , sem alterar a quantidade produzida. A taxa marginal de substituição é dada por

$$TMS_{ij} = \frac{MP_i}{MP_j}. \quad (2.18)$$

Um outro conceito é o de elasticidade de substituição, que mede a taxa de mudança da taxa marginal de substituição, ou seja, é uma medida de quão boa foi a substituição de um *input* por outro.

### 2.3.1 Função Cobb-Douglas

A função de produção Cobb-Douglas, dadas suas características simples e de fácil estimação, tem sido bastante utilizada em análise econômica. No entanto, esta função

impõe algumas restrições como elasticidades e retornos de escala constantes, além de apresentar elasticidades de substituição iguais a um (para maiores detalhes ver Kumbhakar e Lovell (2000)). Em geral, a forma desta função para um *output*  $Q$  que, por exemplo, está relacionado a dois *inputs*  $K$  e  $L$ , é expressa como:

$$Q = \beta_0 K^{\beta_1} L^{\beta_2}, \quad (2.19)$$

aplicando a função logaritmica em ambas os lados da equação acima, temos que,

$$\ln Q = \ln \beta_0 + \beta_1 \ln K + \beta_2 \ln L \quad (2.20)$$

onde  $\beta_0$ ,  $\beta_1$  e  $\beta_2$  são parâmetros a serem estimados.

### 2.3.2 Função C.E.S (*Constant Elasticity of Substitution*)

A função C.E.S., diferentemente da função Cobb-Douglas, permite que a elasticidade de substituição seja diferente de um. Entretanto, a elasticidade de substituição é constante para qualquer ponto. A forma da função de produção C.E.S para dois *inputs* é:

$$Q = \gamma[(1 - \delta)K^{-\rho} + \delta L^{-\rho}]^{-\frac{v}{\rho}}, \quad (2.21)$$

aplicando a função logaritmica, temos que,

$$\ln Q = \ln \gamma + v \ln \{[(1 - \delta)K^{-\rho} + \delta L^{-\rho}]^{-\frac{1}{\rho}}\} \quad (2.22)$$

onde  $\gamma$ ,  $v$ ,  $\delta$  e  $\rho$  são parâmetros tais que  $0 < \gamma < \infty$ ,  $0 < \delta < 1$ ,  $-\infty < v < \infty$  e  $-1 < \rho < \infty$ .

Fazendo uma expansão de Taylor em torno de  $\rho = 0$  tem-se:

$$\begin{aligned} y &= \ln \gamma + v(1 - \delta) \ln K + v\delta \ln L + \rho v\delta(1 - \delta) \left( -\frac{1}{2} \ln^2(K/L) \right) \\ &= \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \beta_4 x_4 \end{aligned} \quad (2.23)$$

onde  $y = \ln Q$ ,  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = \ln K$ ,  $x_3 = \ln L$ ,  $x_4 = (-1/2)(\ln^2(k/L))$ ,  $\beta_1 = \ln \gamma$ ,  $\beta_2 = v(1 - \delta)$ ,  $\beta_3 = v\delta$  e  $\beta_4 = \rho v\delta(1 - \delta)$ .

Portanto, se  $\rho = 0$ , a função C.E.S. resulta na forma da função Cobb-Douglas.

### 2.3.3 Função Translog

A função translogarítmica, ou translog, é uma formulação mais flexível do que a função Cobb-Douglas. Ou seja, não trabalha com retornos de escala restritos aos mesmos valores para todas as firmas da amostra, e nem com elasticidade de substituição igual a um, dando uma maior flexibilidade ao modelo. A idéia por trás desse pressuposto é que, devido à maior flexibilidade, os escores de eficiência sejam mais elevados que os da Cobb-Douglas. A função translog é dada pela forma,

$$\ln Q = \ln \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 (1/2x_1^2) + \beta_4 (1/2x_2^2) + \beta_5 x_1 x_2, \quad (2.24)$$

onde  $x_1 = \ln L$ ,  $x_2 = \ln K$  e  $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$  e  $\beta_5$  são parâmetros.

Observa-se que na equação (2.24) se tivermos  $\beta_3 = \beta_4 = \beta_5 = 0$ , tem-se a forma da função Cobb-Douglas. A função de produção Translog serve como uma aproximação local de segunda ordem para qualquer função de produção.

### 2.3.4 Função G.P.F. (*Generalized Production Functions*)

Esta função foi introduzida com o objetivo de permitir uma generalização em duas direções. Primeiro, permite que a elasticidade de substituição possa ser constante ou variável. A segunda generalização é permitir que os retornos de escala variem com o nível do *output*. A forma da função de produção G.P.F. é expressa por:

$$Q \exp(\lambda Q) = \gamma K^{\alpha(1-\delta)} L^{\alpha\delta}, \quad (2.25)$$

aplicando o logaritmo em ambas as partes da equação acima, temos

$$y + \lambda y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2, \quad (2.26)$$

onde  $y = \ln Q$ ,  $x_1 = \ln K$ ,  $x_2 = \ln L$ ,  $\beta_0 = \ln \gamma$ ,  $\beta_1 = \alpha(1 - \delta)$  e  $\beta_2 = \alpha\delta$ .

Na equação (2.26) se  $\lambda = 0$ , a função G.P.F. recai na Cobb-Douglas.

## 2.4 Distribuições para as Ineficiências

Nesta seção faremos uma revisão das distribuições utilizadas na literatura para modelar as ineficiências em (2.11). Nota-se que essa variável aleatória deve ser estritamente

positiva.

### 2.4.1 Normal truncada

A primeira utilização dessa distribuição nos modelos de fronteira estocástica foi no trabalho de Aigner et al. (1977), que atribui uma distribuição normal truncada no zero para modelar as ineficiências. Mais à frente, Stevenson (1980) utilizou uma distribuição normal truncada no zero cuja normal associada possui média  $\mu$  para modelar as ineficiências. Neste caso, a distribuição da ineficiência é dada por

$$u_i \sim N^+(\mu, \tau^2), \quad (2.27)$$

onde  $\mu$  e  $\tau^2$  são, respectivamente, a média e a variância da normal associada. A função de densidade de probabilidade é dada pela forma abaixo,

$$f(u_i) = \frac{1}{\Phi(\mu/\sigma)\sqrt{2\pi\tau^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\tau^2}(u_i - \mu)^2\right), \quad u_i > 0, \quad (2.28)$$

onde  $\Phi(x)$  é a função de distribuição acumulada da normal padrão, avaliada no ponto  $x$ .

Como foi mostrado no início do capítulo, a função de verossimilhança do modelo de fronteira estocástica é dada pela equação (2.12). Entretanto, Stevenson (1980) mostrou que integrando a função densidade de probabilidade conjunta de  $\mathbf{Y}$ , com respeito a  $u_i$ , obtemos,

$$\begin{aligned} p(\mathbf{Y} \mid x_i, \beta, \sigma^2, \mu, \tau^2) &\propto \prod_{i=1}^N \frac{1}{\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}} \phi\left(\frac{y_i - f(x_i, \beta) + \mu}{\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}}\right) \\ &\times \Phi\left(\frac{\mu\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}}{\sigma\tau} - \frac{\tau(y_i - f(x_i, \beta) + \mu)}{\sigma\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}}\right) \Phi^{-1}\left(\frac{\mu}{\tau}\right), \end{aligned} \quad (2.29)$$

que é a normal assimétrica estendida descrita por Azzalini (1985), e no caso em que  $\mu = 0$  temos a normal assimétrica também descrita em Azzalini (1985). Novamente,  $\Phi(x)$  é a função de distribuição acumulada e  $\phi(x)$  é a função densidade de probabilidade da distribuição normal padrão.

Broeck et al. (1994) mostraram que a distribuição condicional de  $u_i$  dado  $y_i, x_i$  e os parâmetros é

$$u_i \mid y_i, x_i, \beta, \mu, \tau^2, \sigma^2 \sim N^+\left(\frac{-\tau^2(y_i - f(x_i, \beta)) + \mu\sigma^2}{\sigma^2 + \tau^2}, \frac{\sigma^2\tau^2}{\sigma^2 + \tau^2}\right). \quad (2.30)$$

Aplicando essa marginalização, a estimativa das ineficiências na inferência clássica é feita utilizando a média, ou a moda da condicional acima, e os valores dos parâmetros são substituídos por suas respectivas estimativas.

## 2.4.2 Exponencial

A distribuição exponencial foi atribuída para as ineficiências inicialmente no trabalho de Meeusen e van den Broeck (1977). Tsionas (2002) utilizou a distribuição exponencial para modelar as ineficiências, e o procedimento de inferência foi realizado seguindo o enfoque bayesiano. Neste caso, assume-se que a distribuição das ineficiências é dada por

$$u_i \sim \exp(1/\lambda), \quad (2.31)$$

e a função de densidade de probabilidade é dada por

$$f(u_i) = \frac{1}{\lambda} \exp\left(-\frac{u_i}{\lambda}\right). \quad (2.32)$$

Seguindo a especificação de  $u_i$  como em (2.32), e marginalizando a função de densidade de probabilidade conjunta de  $\mathbf{Y}$  com respeito a  $u_i$ , Stevenson (1980) mostrou que

$$p(\mathbf{Y} | x_i, \beta, \sigma^2, \lambda) \propto \prod_{i=1}^N \frac{1}{\lambda} \Phi\left(\frac{-m_i}{\sigma} - \frac{\sigma}{\lambda}\right) \exp\left(\frac{m_i}{\lambda} + \frac{\sigma^2}{2\lambda^2}\right), \quad (2.33)$$

onde  $m_i = y_i - f(x_i, \beta)$ .

Stevenson (1980) mostrou que a distribuição condicional de  $u_i$  dado  $y_i$ ,  $x_i$  e todos os parâmetros é da forma

$$u_i | y_i, x_i, \beta, \lambda, \sigma^2 \sim N^+\left(-\left(y_i - f(x_i, \beta)\right) - \frac{\sigma^2}{\lambda}, \sigma^2\right). \quad (2.34)$$

## 2.4.3 Gama

O modelo de fronteira estocástica normal-gama provém de uma extensão do modelo normal-exponencial. A utilização da distribuição gama para modelar as ineficiências foi introduzida por Greene (1990). Broeck et al. (1994) apresentaram um dos primeiros artigos de fronteira estocástica utilizando uma abordagem bayesiana. Nesse trabalho, a distribuição gama foi proposta para modelar as ineficiências. Porém, eles se concentraram

no caso Erlang (valores inteiros no parâmetro de forma da gama) e utilizaram o método de amostragem por importância para a realização da inferência Bayesiana.

Caso o parâmetro de forma não seja inteiro, a estimação dos parâmetros requer a avaliação de integrais que não podem ser aproximadas com uma precisão satisfatória. Este problema também foi encontrado por Greene (1990). Medrano e Migon (2007) também discutem os aspectos numéricos para modelar o parâmetro de forma da distribuição gama.

A ineficiência nesses modelos é dada por

$$u_i \sim Gama(\theta, \alpha), \quad (2.35)$$

e a função de distribuição é da seguinte forma

$$f(u_i) = \frac{\alpha^\theta}{\Gamma(\theta)} u_i^{\theta-1} e^{-\alpha u_i}, \quad (2.36)$$

onde  $\Gamma(\theta) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\theta-1} dt$ .

Sob o enfoque clássico é comum realizar a marginalização da verossimilhança em relação a  $u_i$ . Porém, a distribuição condicional de  $u_i$  dado  $y_i, x_i$  e os outros parâmetros não possui uma forma conhecida. Nesse caso é comum calcular a média dessa distribuição condicional para estimar  $u_i$ . Entretanto, existem problemas para calcular essa média caso o valor de  $\theta$  não seja inteiro, como já foi mencionado acima.

Sob o enfoque bayesiano existem trabalhos na literatura que utilizaram a marginalização da função de densidade conjunta de  $\mathbf{Y}$  (Greene, 1990), e trabalhos que não utilizam essa marginalização (Medrano e Migon, 2007).

#### 2.4.4 Log-Normal

A distribuição Log-Normal foi introduzida na literatura para modelar as ineficiências por Migon (2006). O procedimento de inferência foi realizado sob o enfoque bayesiano. Nesse caso a distribuição das ineficiências é dada por

$$u_i \sim LN(\mu, \sigma_u^2), \quad (2.37)$$

e a função de densidade de probabilidade possui a seguinte forma

$$f(u_i) = \frac{1}{u_i \sigma_u \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\ln(u_i) - \mu)^2}{2\sigma_u^2}\right), \quad (2.38)$$

onde  $\mu$  e  $\sigma_u^2$  são, respectivamente, a média e a variância da normal associada.

Em seu trabalho, Migon (2006) não utilizou a marginalização da função de densidade conjunta de  $\mathbf{Y}$  com respeito a  $u_i$ . Com isso, teve que obter amostras de todos os parâmetros a cada iteração do algoritmo de Monte Carlo via Cadeia de Markov (MCMC).

## 2.5 Modelo de fronteira estocástica espacial

Nesta seção faremos uma revisão do modelo proposto por Schmidt et al. (2006). Este modelo é interessante para dados que são observados numa região geográfica, onde espera-se que observações em localidades próximas possuam uma relação, seja de atração ou dispersão. Diversos conjuntos de dados podem ser utilizados nessa abordagem, desde que se suponha que as ineficiências das firmas, ou unidades, possuam uma dependência espacial para localidades próximas.

Mais especificamente, Schmidt et al. (2006) analisam a produtividade de fazendas em 370 municípios da região Centro-Oeste do Brasil, onde a diferença entre as características das localidades e a infra-estrutura, podem afetar a variação das eficiências da produção agrícola. Os autores propuseram um modelo que permite a inclusão de um vetor de covariáveis ao nível municipal que tenha relevância, enquanto que, simultaneamente, capturam os efeitos de condições locais omitidas.

Na abordagem dos autores, o efeito latente municipal é introduzido de duas formas: uma no termo da ineficiência dos modelos de fronteira de produção estocástica e outra, na média da variável dependente.

Assim, seja  $y_{ij}$  o logaritmo do *output* da unidade  $j$  no município  $i$ ,  $j = 1, 2, \dots, n_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Eles exploram duas diferentes especificações,

$$y_{ij} = g(r_{ij}, \vartheta) + \alpha_i - u_{ij} + \epsilon_{ij}, \text{ ou} \quad (2.39)$$

$$y_{ij} = g(r_{ij}, \vartheta) - u_{ij}(\alpha_i) + \epsilon_{ij}, \quad (2.40)$$

onde, em ambas as equações,  $g(r_{ij}, \vartheta)$  representa a função de produção,  $r$  é um vetor de *inputs*, e  $\vartheta$  é o vetor de parâmetros que descreve o efeito de  $r_{ij}$  em  $y_{ij}$ . A componente  $u_{ij}$  modela a ineficiência da unidade  $j$  na localidade  $i$ .



Quando não há covariáveis ao nível municipal, eles exploraram o modelo com  $\alpha_i$  diretamente na média da estrutura  $y_{ij}$ . A equação (2.39) representa essa especificação. Nesse caso, as ineficiências são geradas por uma única distribuição, que não varia entre os municípios, não dependendo de nenhuma característica local.

Em contraste com o modelo em (2.39), os autores propuseram aquele descrito em (2.40) que considera cada  $u_{ij}$  como sendo uma realização de uma distribuição que depende de um efeito latente não observado local,  $\alpha_i$ . Isso permite que a distribuição das ineficiências varie entre os municípios, enquanto que, ao mesmo tempo, garante que todas as unidades que estão no mesmo município tenham os mesmos parâmetros na distribuição de  $u_{ij}$ . Note que nesse modelo, equação (2.40), o efeito latente  $\alpha_i$  é introduzido no segundo nível de hierarquia, não afetando os  $y_{ij}$  diretamente.

Dentre as possíveis distribuições para as ineficiências, os autores optaram por duas distribuições para  $u_{ij}$ , a normal truncada e a exponencial. Na primeira, eles assumem que a variância da distribuição normal associada é comum a todas as unidades e, somente, a média da distribuição normal associada varia de localidade para localidade. Na segunda, a média e a variância são funções do mesmo parâmetro e, portanto, ambas variam entre os municípios. Abaixo seguem as duas especificações,

$$(u_{ij}|\alpha_i, \tau^2) \sim N^+(\alpha_i, \tau^2) \quad \text{ou} \quad (2.41)$$

$$(u_{ij}|\lambda_i) \sim \exp(1/\lambda_i) \quad \text{com} \quad \ln \lambda_i = \alpha_i, \quad (2.42)$$

onde  $N^+(a, b)$  denota a distribuição normal truncada no zero, com a normal associada com média  $a$  e variância  $b$ , e  $\exp(1/\lambda_i)$  denota a distribuição exponencial com média  $\lambda_i$ . O trabalho ajusta um total de 16 diferentes modelos ao conjunto de dados.

A inferência dos modelos foi toda realizada sob o enfoque bayesiano. Logo, foram atribuídas distribuições a priori para todos os parâmetros. Para o efeito latente, em diversas especificações, os autores assumiram que  $\alpha = (\alpha_i, \dots, \alpha_n)$  segue uma distribuição condicional autoregressiva que depende dos seus vizinhos. Com isso, uma estrutura espacial é imposta (Besag et al., 1991).

Segundo os resultados encontrados pelos autores, e baseados em critérios de comparação de modelos, é importante, para aqueles dados, incluir o efeito latente ao nível

municipal no termo de ineficiência. A melhor especificação foi o modelo que inclui covariáveis locais, condiciona à distribuição da ineficiência no efeito latente municipal  $\alpha_i$ , e impõe uma priori CAR para esses efeitos.

# Capítulo 3

## Estudo Simulado

O estudo simulado deste trabalho consiste na aplicação de diversos modelos propostos a um conjunto de dados artificialmente gerado. Isto é, os valores dos parâmetros e o mecanismo gerador das observações são conhecidos. De posse desses conjuntos de dados e sabendo qual modelo o gerou, ajustaremos diferentes modelos e utilizaremos critérios de comparação para verificar qual modelo captura melhor a verdadeira estrutura das observações. Além disso, também estamos interessados em investigar se conseguimos recuperar a estrutura dos parâmetros  $\alpha_i$ , que captura a estrutura local. Outro ponto é verificar se a presença do efeito latente,  $\alpha$ , faz com que estes modelos tenham um melhor ajuste ao conjunto de dados. Também queremos comparar o que acontece com os modelos caso seja modificada a verdadeira distribuição atribuída às ineficiências, e observar qual modelo consegue ordenar as ineficiências de maneira mais próxima à ordenação original. A motivação para este estudo simulado se baseia na idéia do trabalho de Schmidt et al. (2006).

Neste capítulo, mostraremos os procedimentos utilizados para a criação do conjunto de dados simulados. Também serão apresentados os modelos propostos para análise dos conjuntos de dados simulados, assim como o procedimento de inferência realizado sob uma perspectiva bayesiana.

### 3.1 Gerando os dados artificiais

O primeiro passo para a criação dos dados foi a elaboração de uma região fictícia. Nossa região contém um total de 64 localidades e uma estrutura de vizinhança que pode ser observada na tabela abaixo.

Tabela 3.1: Frequência do número de vizinhos

Número de Vizinhos	Quantidade de Localidades
1	3
2	3
3	15
4	20
5	8
6	8
7	4
8	2
10	1

Logo, observa-se que 3 localidades possuem apenas 1 vizinho, enquanto 1 localidade possui um total de 10 vizinhos. O próximo passo foi a criação da estrutura espacial nos dados, essa estrutura foi inserida na média das ineficiências. Ou seja, os dados serão dependentes pelas ineficiências. O procedimento para a criação da estrutura espacial segue o modelo descrito em Ferreira e Oliveira (2007). No modelo, denotaremos esse efeito por  $\alpha_i$ , onde  $i$  é a localidade. Assim, temos um vetor paramétrico  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)'$ . A distribuição conjunta de  $\alpha$  é da seguinte forma:

$$\alpha \sim N_n(\mu \vec{1}, \tau^{-1} \Sigma_\phi), \quad (3.1)$$

onde  $\mu \in \mathfrak{R}$ , é um parâmetro de posição,  $\vec{1}$  é um vetor de uns,  $\tau > 0$  é um parâmetro de escala e  $\Sigma_\phi^{-1} = (I_n + \phi H)$ , com  $\phi \geq 0$  um parâmetro "espacial",  $I_n$  uma matriz identidade de dimensão  $n$  e

$$(H)_{kl} = \begin{cases} h_k, & k = l \\ -g_{kl}, & k \in N_l \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

onde  $g_{kl} > 0$  é uma "medida de similaridade" entre as localidades  $k$  e  $l$ ,  $g_{kl} = g_{lk}$ ,  $h_k = \sum_{l \in N_k} g_{kl}$  e  $N_l$  é o conjunto contendo os índices dos vizinhos a  $l$ . O parâmetro  $\phi$  controla o grau de associação entre os  $\alpha_i$ , ou seja, se  $\phi = 0$  as componentes de  $\alpha$  são variáveis independentes com média  $\mu$  e variância  $\tau^{-1}$ , entretanto, se  $\phi \rightarrow \infty$ ,  $\alpha$  se aproxima do modelo autoregressivo intrínseco (Besag et al., 1991).

Neste trabalho optou-se pela estrutura de vizinhança do tipo zero ou um, com isso se  $k$  é vizinho de  $l$ , ou seja, se  $k$  divide fronteira com  $l$ ,  $g_{kl} = 1$  e,  $g_{kl} = 0$ , caso contrário. O parâmetro  $\phi$  foi fixado no valor 100 e  $\tau$  em 0,5. Abaixo segue o histograma dos  $(\alpha_i, \dots, \alpha_{64})'$  e observa-se uma concentração maior perto do zero, tendo um decaimento mais suave na parte negativa e mais brusca na parte positiva.

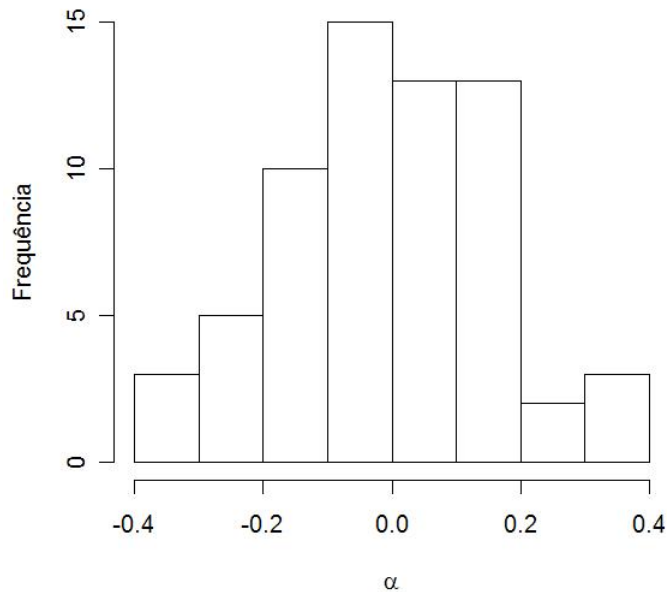


Figura 3.1: Histograma da componente espacial, gerada segundo o modelo proposto em Ferreira e Oliveira (2007), e inserida na média das ineficiências

O teste de Moran foi aplicado para testar a hipótese da existência de uma estrutura espacial nos  $\alpha_i$ . A técnica I de Moran (Moran, 1950) foi pensada originalmente para explorar padrões espaciais de doenças, mas também, pode ser utilizada para investigar

qualquer padrão espacial. A estatística de Moran é dada pela equação

$$I = \frac{n}{S_0} \frac{\sum_i \sum_j W_{ij} (\alpha_i - \bar{\alpha})(\alpha_j - \bar{\alpha})}{\sum_i (\alpha_i - \bar{\alpha})^2},$$

onde  $n$  é o número de regiões,  $W_{ij}$  é a estrutura de vizinhança do tipo zero ou um,  $\alpha_i$  é o valor gerado de  $\alpha$  para a região  $i$ ,  $\bar{\alpha} = \sum_i \frac{\alpha_i}{n}$  e  $S_0 = \sum_i \sum_j W_{ij}$ .

O índice de Moran (I) é descrito como um coeficiente de autocorrelação espacial, onde no numerador está uma medida de covariância entre os  $\alpha$ 's e, no denominador, está uma medida de variância. Pode-se interpretá-lo de maneira similar ao coeficiente de correlação, ou seja, restrito ao intervalo  $[-1, +1]$  com valores próximos à unidade, significando forte relação (Cliff e Ord, 1981). Agregação espacial é indicada quando I assume valores próximos de  $+1$  e significa que regiões próximas no espaço tendem a ter valores parecidos. Se não existir correlação, I é próximo de  $0$ , e se a correlação for inversa, isto é, se regiões próximas no espaço tendem a ter valores discrepantes, I é próximo de  $-1$ . Porém, os limites de I em geral não alcançam  $\pm 1$ .

Admite-se que, com mais de vinte e cinco observações ( $n$ ), I é assintoticamente normalmente distribuído, permitindo testes de significância baseados em médias e variâncias teóricas.

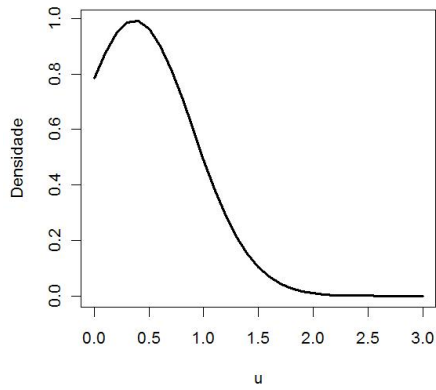
Assim, o passo seguinte foi verificar se os  $\alpha_i$  gerados a partir da distribuição em (3.1), apresentam correlação espacial. Obteve-se um valor de  $0,786$  para I, o que indica uma estrutura espacial positiva.

A ineficiência, como já foi comentado no capítulo anterior, será definida por  $u_{ij}$ , onde  $i$  representa a localidade e  $j$  a unidade. Assumiremos que as ineficiências são realizações da seguinte distribuição:

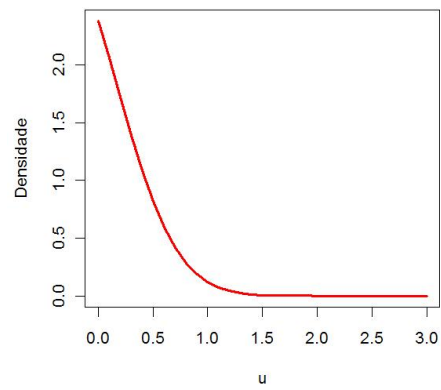
$$u_{ij} \sim N^+(\alpha_i, \tau^2).$$

A figura 3.2 apresenta o comportamento da distribuição normal truncada para diferentes valores de  $\alpha_i$  e  $\tau^2$  (fixado em  $0,284$ ). Percebe-se que para valores positivos de  $\alpha_i$  temos a formação de um pico na função, exatamente onde está localizada a média da função, enquanto que, para o valor negativo, temos um decaimento rápido da função. Quando a média assume o valor zero temos a normal truncada no zero.

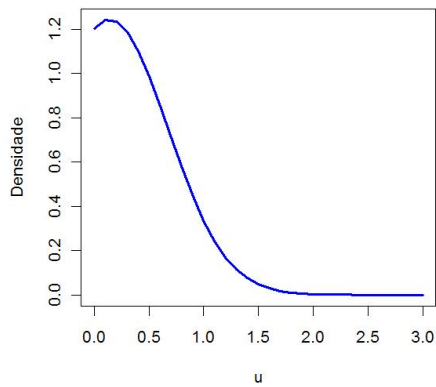
Nesta parte do trabalho uma das idéias foi a geração de 2 conjuntos de dados de



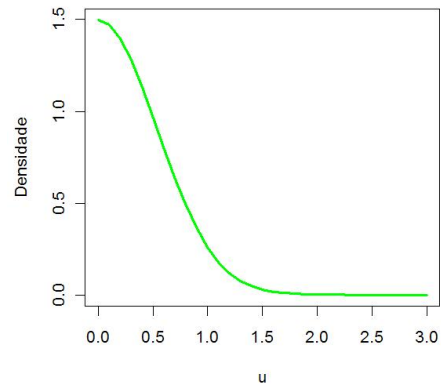
(a)  $u \sim N^+(0, 36, 0, 284)$



(b)  $u \sim N^+(-0, 35, 0, 284)$



(c)  $u \sim N^+(0.13, 0, 284)$



(d)  $u \sim N^+(0, 284)$

Figura 3.2: Função densidade de probabilidade de  $u \sim N^+(\alpha, \tau^2)$  para diversos valores de  $\alpha$ .

tamanhos diferentes, para verificar se chegaremos a diferentes conclusões, dependendo do tamanho do conjunto de dados. O primeiro conjunto de dados tem um total de 192 unidades, sendo que cada localidade contém 3 unidades e, o outro conjunto, 500 unidades, sendo distribuídas aleatoriamente nas 64 localidades. A tabela 3.2 apresenta a distribuição de frequências das 500 unidades nas 64 localidades, observa-se que 10 localidades possuem 1 unidade apenas, enquanto, 17 localidades, possuem mais de 10 unidades.

Tabela 3.2: Frequência do número de unidades por localidade para o caso em que consideramos amostras de tamanho 500

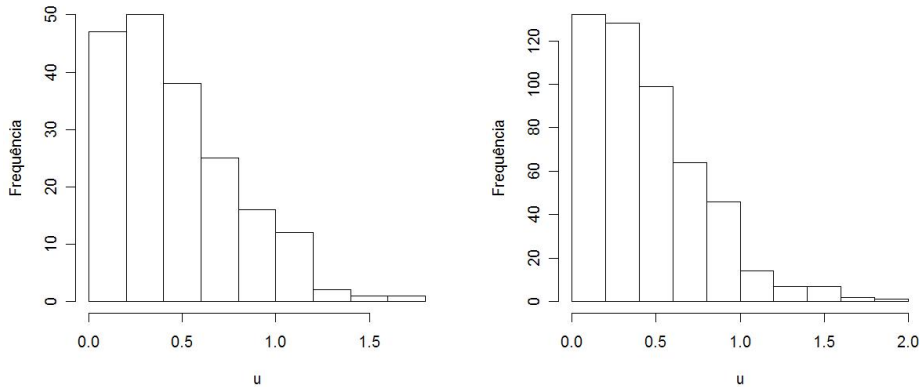
Número de Unidades	Quantidade de Localidades	Número de Unidades	Quantidade de Localidades.
1	10	13	1
2	10	14	2
3	7	15	2
4	3	16	2
5	6	18	1
6	6	19	1
7	1	20	1
8	4	21	1
11	2	30	1
12	2	75	1

A figura 3.3 apresenta os histogramas das ineficiências geradas para a amostra com 192 unidades (painel (a)) e 500 unidades (painel (b)). Observa-se uma grande concentração de localidades que apresentam um baixo valor de ineficiência, enquanto poucas localidades possuem valores altos. Observa-se também que a amostra com mais unidades chega a valores mais extremos. Acreditamos que esse é um comportamento razoável, já que espera-se que a maioria das unidades tenha a ineficiência próxima de zero.

Fixada as ineficiências, o próximo passo foi a escolha das covariáveis e os valores dos respectivos parâmetros. O modelo escolhido possui um intercepto e mais o efeito de duas covariáveis, para ambos os conjuntos de dados. Logo o modelo escolhido para gerar os dados do estudo simulado é dado pela equação abaixo:

$$\ln(Y_{ij}) = \beta_0 + \beta_1 \ln(X_{2ij}) + \beta_2 \ln(X_{3ij}) - u_{ij} + \epsilon_{ij},$$





(a) Amostra com 192 unidades. (b) Amostra de dados com 500 unidades.

Figura 3.3: Histograma das ineficiências geradas para ambos os conjuntos de dados.

onde  $i$  denota a localidade,  $i = 1, \dots, 64$  e,  $j$  a unidade,  $j = 1, \dots, n_i$ .

Os parâmetros das covariáveis foram fixados nos seguintes valores para os dois conjuntos de dados:  $\beta_0 = 4$ ,  $\beta_1 = -2$  e  $\beta_2 = 6$ .

Relembrando o capítulo anterior temos que  $\epsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2)$ . Logo se deve fixar um valor para o parâmetro  $\sigma^2$ . Quanto mais próximo de 1 a razão  $\frac{\tau^2}{\tau^2 + \sigma^2}$ , mais informação terá a componente assimétrica. Logo, fixamos essa razão em 0,85. Por esta razão o valor de  $\sigma^2$  foi fixado em 0,05 e o valor de  $\tau^2$  em 0,284 nos dois conjuntos de dados, de tal modo que  $\frac{0,284}{0,284 + 0,05} = 0,85$ .

Com todos os parâmetros do modelo fixados, o último passo é a geração da variável dependente ( $Y_{ij}$ ). Esta geração é feita da mesma forma, independente do conjunto, sendo que cada um possui as suas respectivas covariáveis e parâmetros. A variável dependente foi gerada da seguinte forma:

$$\ln(Y_{ij}) \sim N(\beta_0 + \beta_1 \ln(X_{2ij}) + \beta_2 \ln(X_{3ij}) - u_{ij}, \sigma^2),$$

onde  $i$  denota a localidade,  $i = 1, \dots, 64$  e  $j$  a unidade  $j = 1, \dots, n_i$ .

Entretanto, a geração de uma única amostra para cada conjunto de dados pode acarretar sérios problemas na hora da análise, pois pode-se obter uma amostra atípica, que esteja localizada nos extremos da distribuição, fazendo com que se interprete os resultados

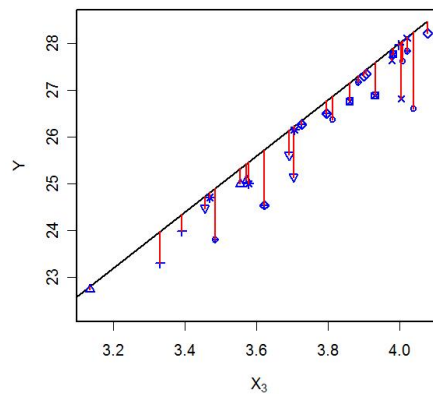
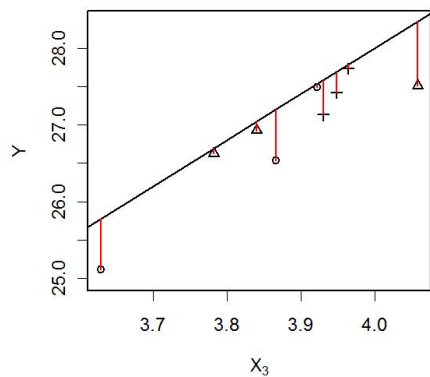
de maneira enganosa. Para solucionar esse problema gerou-se um total de 50 amostras para cada conjunto de dados. Ajustaremos todos os modelos propostos em todas as amostras, verificando, segundo os critérios de comparação, qual modelo se adequa mais as amostras e, também, a capacidade de cada um em estimar a ordenação verdadeira da componente assimétrica.

Para entendermos melhor o modelo proposto neste trabalho, vamos imaginar a fronteira de produção como sendo  $f(X_{ij}, \beta) = 4 + 6X_{ij}$ . Essa fronteira possui apenas 2 dimensões o que torna a visualização mais fácil. Fixando os valores de  $X_{ij}$  como sendo  $X_{3ij}$ , e utilizando as ineficiências geradas na amostra de número 33 (as amostras geradas foram numeradas de 1 a 50) deste estudo, observa-se na figura 3.4 esta fronteira de produção, na escala logarítmica. A linha em preto representa a fronteira de produção. Escolheu-se as localidades 8 e 51 (as localidades foram numeradas de 1 a 64) que estão representadas, respectivamente, nos painéis (a), (c) e (b), (d), no gráfico pela circunferência. Os outros pontos marcados são as unidades das localidades vizinhas. Esses pontos marcados nos gráficos representam a variável dependente ( $Y_{ij}$ ), representada pela fronteira mais a ineficiência verdadeira. A linha em vermelho representa as verdadeiras ineficiências que foram geradas neste trabalho. Observa-se, como esperado, que há uma dependência espacial, que se torna mais forte quando a localidade possui um maior número de vizinhos (compare painéis (a) com (b), e (c) com (d)). No caso da localidade 8 (painel (a)), que possui apenas 2 vizinhos, a estrutura espacial não fica tão evidente, principalmente para a amostra menor. Entretanto, na localidade 51, que possui 10 vizinhos, fica mais clara a dependência espacial, ou seja, as ineficiências não sofrem mudanças bruscas entre essas localidades.

## 3.2 Modelos Propostos

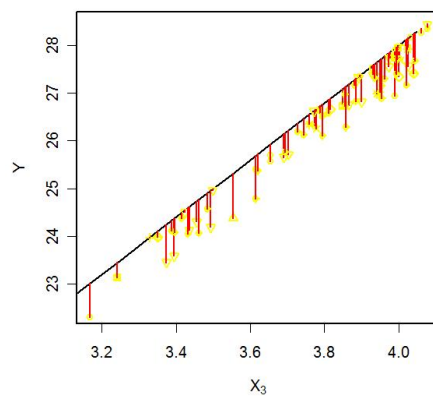
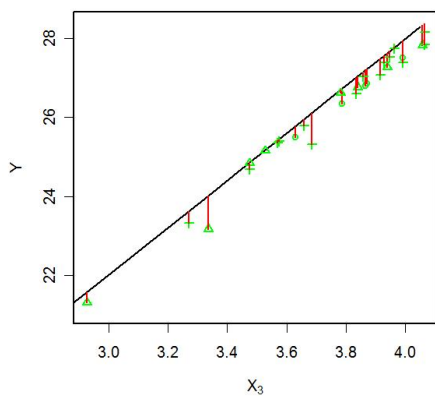
Como foi visto no capítulo anterior existem diversas distribuições possíveis para modelar as ineficiências. Logo, nesta seção apresentaremos as diferentes distribuições utilizadas nesse estudo simulado.

Como na literatura existem diversas maneiras de se modelar a ineficiência do modelo



(a) Localidade 8 e seus vizinhos da amostra com 192 unidades

(b) Localidade 51 e seus vizinhos da amostra com 192 unidades



(c) Localidade 8 e seus vizinhos da amostra com 500 unidades

(d) Localidade 51 e seus vizinhos da amostra com 500 unidades

Figura 3.4: Fronteira de Produção com apenas 1 covariável e em vermelho as ineficiências geradas no trabalho.

de fronteira estocástica, tivemos que escolher os modelos que seriam aplicados aos conjunto de dados. O primeiro modelo a ser pensado foi obviamente o modelo que gerou o conjunto de dados, já que se espera que esse modelo consiga capturar toda a estrutura das observações. A grande questão desse trabalho é investigar se a inclusão ou não da estrutura espacial no modelo afeta as estimativas das ineficiências, mesmo sabendo que o efeito foi utilizado para gerar os dados. Assim serão exploradas diferentes estruturas de modelos.

Pensando na importância de um parâmetro para medir a média das ineficiências em cada localidade, ou seja, supondo que as médias das ineficiências nas unidades se alteram de localidade para localidade, propomos o modelo que contém um parâmetro para medir a média de cada unidade, assim como o modelo que originou os dados, porém faremos a suposição de que estas médias são normais independentes e não seguem, a priori, uma estrutura espacial, como o modelo que gerou as observações.

Por que não pensar que as ineficiências das unidades variam de localidade para localidade em relação à variância e média? Com base nessa pergunta foi formulado um modelo que permite que as ineficiências variem na variância e média da distribuição. Ou seja, utilizando a mesma notação da seção anterior, temos que  $u_{ij} \sim N^+(0, \tau_i^2)$ . Na seção 3.3.2 discutiremos mais detalhadamente essa especificação. Agora a questão é como modelar  $\tau_i^2$ . Dentro das possibilidades pensamos em modelar esse parâmetro de duas formas, uma utilizando uma dependência espacial e, a outra, de tal forma que eles sejam independentes, a priori. Logo, pensou-se na transformação  $\tau_i^2 = \exp(\alpha_i)$ , de tal forma que, independentemente do valor atribuído a  $\alpha_i$ , sempre teremos  $\tau_i^2$  positivo. Assim como foi citado nos modelos acima, será atribuída uma distribuição a priori espacial para o parâmetro  $\alpha$  para uma especificação e a distribuição normal independente para a outra.

Outro modelo escolhido foi o modelo de fronteira estocástica com ineficiência distribuída segundo uma normal truncada no zero, com a média da normal associada igual a zero e variância comum a todas as unidades. Esse modelo é interessante pela economia de parâmetros sobre todos os outros citados acima, tendo uma redução de 64 parâmetros em relação aos dois primeiros modelos (já que nossa região fictícia tem 64 localidades, generalizando se tivéssemos  $n$  localidades, teríamos uma redução de  $n$  parâmetros) e 63

em relação aos dois modelos do parágrafo acima. Além da economia de parâmetros, o uso desse modelo tem por finalidade investigar a necessidade da estrutura espacial nos dados, e a diferença nas distribuições das ineficiências de cada localidade, que foi considerada na geração dos dados.

As estruturas assimétricas dos modelos citados acima serão todas modeladas utilizando a distribuição normal truncada no zero. Entretanto, existem outras possibilidades como, por exemplo, utilizar a distribuição exponencial, a distribuição Gama ou a Log-Normal. O modelo com distribuição exponencial na estrutura das ineficiências também foi explorado por Schmidt et al. (2006). Aqui, vamos explorar a distribuição Log-Normal para modelar as ineficiências, por ser uma proposta mais recente na literatura.

Os modelos escolhidos são os mesmos dos outros citados acima, só que em vez de utilizar a distribuição normal truncada no zero, será utilizada a distribuição Log-Normal para as ineficiências.

Outro modelo sugerido ao longo deste trabalho foi a decomposição do erro aleatório em duas componentes, uma num erro aleatório e a outra num efeito latente que varia de localidade para localidade. Logo, com esse modelo, queremos investigar se faz diferença a estrutura espacial estar localizada na estrutura da variável dependente ao invés de estar na distribuição das ineficiências. Esse modelo também foi explorado por Schmidt et al. (2006). Resumindo, serão propostos três modelos gerais, que são,

$$\ln(y_{ij}) = \beta_0 + \beta_1 \ln(X_{2ij}) + \beta_2 \ln(X_{3ij}) - u_{ij} + \epsilon_{ij}, \quad (3.2)$$

$$\ln(y_{ij}) = \beta_0 + \beta_1 \ln(X_{2ij}) + \beta_2 \ln(X_{3ij}) + \alpha_i - u_{ij} + \epsilon_{ij}, \quad (3.3)$$

$$\ln(y_{ij}) = \beta_0 + \beta_1 \ln(X_{2ij}) + \beta_2 \ln(X_{3ij}) - u_{ij}(\alpha_i) + \epsilon_{ij}, \quad (3.4)$$

onde em todas as equações  $\beta_0 + \beta_1 X_{2ij} + \beta_2 X_{3ij}$  representa a fronteira de produção,  $X_{2ij}$  e  $X_{3ij}$  são covariáveis do modelo,  $\beta_0$ ,  $\beta_1$  e  $\beta_2$  são os parâmetros que descrevem o efeito das covariáveis na variável dependente. A ineficiência da unidade  $j$  na localidade  $i$ ,  $u_{ij}$ , é independente de  $\epsilon_{ij}$  e, em alguns modelos,  $u_{ij}(\alpha_i)$ , segue uma distribuição que depende de um fator latente local. A ineficiência será modelada de duas formas,

$$(u_{ij} \mid a, b) \sim N^+(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \quad (3.5)$$

ou

$$(u_{ij} \mid a, b) \sim LN(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \quad (3.6)$$

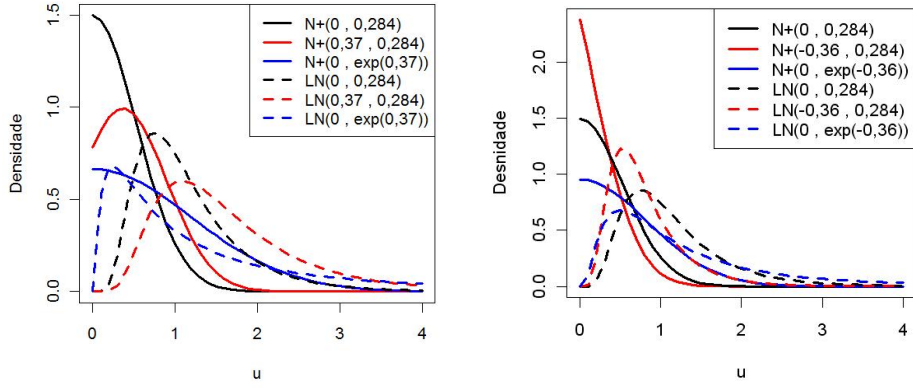
onde  $N^+(a, b)$  denota a distribuição normal truncada no zero, com a normal associada tendo média  $a$  e variância  $b$ , e  $LN(a, b)$  denota a distribuição log-normal, com a normal associada tendo média  $a$  e variância  $b$ .

Abaixo seguem todos os modelos propostos neste trabalho e como serão denominados a partir deste ponto. A distribuição a priori para o parâmetro  $\alpha$  será comentada na próxima seção.

Tabela 3.3: Especificação dos modelos propostos

Modelo	Eq. para $y_{ij}$	Dist. da Inef.	Dist. de $\alpha$	Modelo	Eq. para $y_{ij}$	Dist. da Inef.	Dist. de $\alpha$
M1	3.2	$N^+(0, \tau^2)$	-	M7	3.2	$LN(0, \tau^2)$	-
M2	3.4	$N^+(\alpha_i, \tau^2)$	$CAR(\psi^2)$	M8	3.4	$LN(\alpha_i, \tau^2)$	$CAR(\psi^2)$
M3	3.4	$N^+(\alpha_i, \tau^2)$	$N(0, \psi^2)$	M9	3.4	$LN(\alpha_i, \tau^2)$	$N(0, \psi^2)$
M4	3.4	$N^+(0, \tau_i^2)$	$CAR(\psi^2)$	M10	3.4	$LN(0, \tau_i^2)$	$CAR(\psi^2)$
M5	3.4	$N^+(0, \tau_i^2)$	$N(0, \psi^2)$	M11	3.4	$LN(0, \tau_i^2)$	$N(0, \psi^2)$
M6	3.3	$N^+(0, \tau^2)$	$CAR(\psi^2)$	M12	3.3	$N^+(0, \tau^2)$	$N(0, \psi^2)$

A figura 3.5 mostra o comportamento da densidade da ineficiência para todas as distribuições propostas neste trabalho. Analisando os gráficos percebe-se que a utilização da distribuição Log-Normal, as linhas em tracejado, faz com que valores mais extremos de  $u$  tenham mais chances de acontecer. A utilização do modelo com o efeito latente na variância possui uma densidade mais suave, ou seja, com um decaimento mais lento, possibilitando valores mais extremos. As distribuições em preto não se alteram, pois não dependem do efeito do parâmetro  $\alpha$ . Quando esse efeito é utilizado na média, representado no gráfico em vermelho, observa-se que quando este parâmetro assume um valor negativo (painel (b)), apresenta um decaimento muito brusco na distribuição normal truncada, e um achatamento na distribuição Log-Normal.



(a) Utilizando valor positivo de  $\alpha$       (b) Utilizando valor negativo de  $\alpha$

Figura 3.5: Densidade de  $u$  para todas as distribuições propostas e diferentes valores de  $\alpha$ , para os modelos que possuem esse parâmetro.

### 3.3 Procedimento de Inferência

Como o procedimento de inferência será realizado seguindo o paradigma de Bayes, a especificação do modelo estará completa após atribuírmos uma distribuição a priori para o vetor paramétrico. O procedimento de inferência é realizado sobre a distribuição a posteriori resultante.

#### 3.3.1 Especificação da Distribuição a Priori

Discutiremos nesta seção a especificação da distribuição a priori para o vetor paramétrico descrito na seção anterior.

Como o parâmetro  $\beta_k$ ,  $k = 0, 1, 2$  pode assumir tantos valores positivos quanto negativos, assumiremos uma distribuição Normal de modo que

$$\beta_k \sim N(0, \sigma_\beta^2).$$

Para os parâmetros  $\sigma^2$  e  $\tau^2$  que estão na variância da ineficiência e do erro aleatório, respectivamente, temos que atribuir uma priori estritamente positiva. Dentre todas as distribuições, escolheu-se a Gama Inversa, ou seja,

$$\tau^2 \sim GI(a_\tau, b_\tau) \text{ e}$$

$$\sigma^2 \sim GI(a_\sigma, b_\sigma).$$

Assumiremos duas prioris diferentes para o parâmetro  $\alpha$ , que serão utilizadas dependendo do modelo. Seguindo Besag et al. (1991), assumiremos uma priori autoregressiva condicional (CAR) para  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)'$  para alguns modelos, ou seja,

$$(\alpha_i | \alpha_k, k \neq i) \sim N(m_i, v_i)$$

$$m_i = \frac{\sum_{k \in \zeta_i} \mathbf{W}_{ik} \alpha_k}{\sum_{k \in \zeta_i} \mathbf{W}_{ik}} \quad \text{e} \quad v_i = \frac{\psi^2}{\sum_{k \in \zeta_i} \mathbf{W}_{ik}} \quad (i, k = 1, \dots, n), \quad (3.7)$$

sendo que  $\zeta_i$  é o conjunto de todos os vizinhos da localidade  $i$ . Denotamos essa priori como  $\alpha \sim CAR(\psi^2)$ . É comum considerar a estrutura de vizinhança do tipo 0 - 1, tal que  $\mathbf{W}_{ik} = 1$ , se  $i$  e  $k$  são vizinhos e 0, caso contrário. Nesse caso, temos que

$$m_i = \frac{\sum_{k \in \zeta_i} \alpha_k}{n_i^*} \quad \text{e} \quad v_i = \frac{\psi^2}{n_i^*},$$

onde  $n_i^*$  é o número de vizinhos da localidade  $i$ .

Como  $\alpha_i$  pode assumir qualquer valor nos reais, a outra priori que será assumida pra  $\alpha_i$  será a distribuição Normal com média zero e a mesma variância  $\psi^2$ ,  $\forall i$ . Com isso, incluímos um efeito local, mas assumimos que todos os  $\alpha$ 's sejam independentes a priori, ou seja,

$$\alpha_i \sim N(0, \psi^2), \forall i = 1, \dots, n.$$

Para o parâmetro,  $\psi^2$  assumiremos uma priori Inversa Gama, já que deve ser assumida uma priori estritamente positiva, logo,

$$\psi^2 \sim GI(a_\psi, b_\psi).$$

Fixamos  $\sigma_\beta^2 = 4$ ,  $a_\tau = 2$ ,  $b_\tau = 0,35$ ,  $a_\sigma = 2$  e  $b_\sigma = 0,35$ . Para a priori de  $\psi^2$ , escolheu-se os valores dos hiperparâmetros de tal forma que a média fosse igual ao estimador de mínimos quadrados ordinários da variância para um modelo de fronteira estocástica independente, com variância infinita, mais especificamente,  $\sigma^2 \sim IG(2, \hat{\sigma}^2)$ , onde  $\hat{\sigma}^2$  representa o valor da estimativa do estimador mencionada acima.

### 3.3.2 Distribuição a posteriori

Sob a perspectiva bayesiana, sabemos que o procedimento de inferência é baseado na distribuição a posteriori dos parâmetros. Para cada modelo ajustado combinaremos



a respectiva função de verossimilhança com a distribuição a priori descritas acima para obter a distribuição a posteriori.

Sob as especificações em (3.5) e (3.6) a função de verossimilhança do modelo é dada por

$$p(\mathbf{Y} | X_{ij}, \beta, u_{ij}, \sigma^2) \propto (\sigma^2)^{-\sum_{i=1}^n n_i/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - f(X_{ij}, \beta) + u_{ij})^2 \right\}, \quad (3.8)$$

onde  $n_i$  é o número de unidades na localidade  $i$ ,  $f(X_{ij}, \beta) = \beta_0 + \beta_1 X_{2ij} + \beta_2 X_{3ij} + \alpha_i$  para o modelo em (3.3) e  $f(X_{ij}, \beta) = \beta_0 + \beta_1 X_{2ij} + \beta_2 X_{3ij}$  para os modelos em (3.2) e (3.4).

Assumindo que  $u_{ij}$  tem distribuição como em (3.5), Stevenson (1980) e Broeck et al. (1994) mostraram que integrando a função de densidade conjunta de  $\mathbf{Y}$  com respeito a  $u_{ij}$  obtemos

$$\begin{aligned} p(\mathbf{Y} | X_{ij}, \beta, \sigma^2, a, b) &\propto \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^{n_i} \frac{1}{\sqrt{\sigma^2 + b}} \phi \left( \frac{y_{ij} - f(X_{ij}, \beta) + a}{\sqrt{\sigma^2 + b}} \right) \\ &\times \Phi \left( \frac{a\sqrt{\sigma^2 + b}}{\sqrt{\sigma^2 b}} - \frac{\sqrt{b}(y_{ij} - f(X_{ij}, \beta) + a)}{\sigma\sqrt{\sigma^2 + b}} \right) \Phi^{-1} \left( \frac{a}{\sqrt{b}} \right) \end{aligned} \quad (3.9)$$

que é a normal assimétrica estendida descrita por Azzalini (1985), como já mencionado no capítulo 2. No caso em que  $a = 0$ , as ineficiências têm distribuição normal truncada no zero, com a normal associada tendo média zero. E, com isso, resulta a normal assimétrica descrita em Azzalini (1985). Fazendo uma comparação do parâmetro de assimetria entre os modelos com especificação  $u_{ij} \sim N^+(\alpha_i, \tau^2)$  e  $u_{ij} \sim N^+(0, \exp(\alpha_i))$ , percebe-se que para o modelo onde  $u_{ij} \sim N^+(0, \exp(\alpha_i))$  a assimetria depende do parâmetro  $\alpha_i$ , enquanto que para o modelo  $u_{ij} \sim N^+(\alpha_i, \tau^2)$  a assimetria só depende de  $\tau$  e  $\sigma$ . Essa marginalização com respeito a  $u_{ij}$  é muito interessante em relação aos métodos de simulação, pois após a convergência dos parâmetros serem obtidas, podemos utilizar amostras dos parâmetros para obter amostras das posteriores das ineficiências. E, como deixamos de sortear  $u_{ij}$  a cada iteração do algoritmo, o tempo computacional do programa para gerar as amostras da posteriori também se reduz. A distribuição a posteriori de  $u_{ij}$  para esses modelos é dada por,

$$u_{ij} | y_{ij}, X_{ij}, \beta, a, b, \sigma^2 \sim N^+ \left( \frac{-b(y_{ij} - f(X_{ij}, \beta)) + a\sigma^2}{\sigma^2 + b}; \frac{\sigma^2 b}{\sigma^2 + b} \right), \quad (3.10)$$

onde  $a$  e  $b$  são os parâmetros da equação (3.5), respectivamente.

Logo o núcleo da distribuição a posteriori para os modelos com ineficiência normal truncada no zero é obtido através de

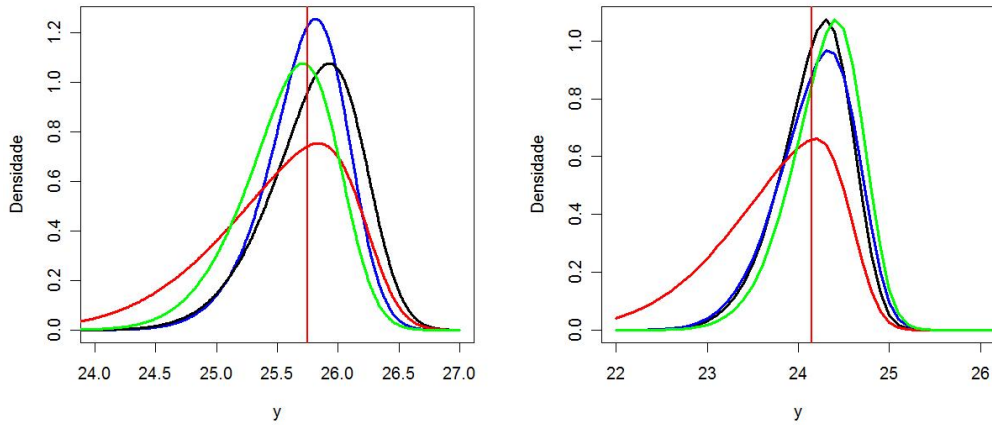
$$p(\beta_0, \beta_1, \beta_2, \sigma^2, a, b, \psi^2 | \mathbf{Y}) \propto p(\mathbf{Y} | X_{ij}, \beta, \sigma^2, a, b) p(\beta_0) p(\beta_1) p(\beta_2) p(\sigma^2) p(a | \psi^2) p(b) p(\psi^2). \quad (3.11)$$

A figura (3.6) mostra a função de densidade conjunta de  $\mathbf{Y}$  integrada  $u_{ij}$  para duas localidades do conjunto de dados com 192 unidades, com todos os parâmetros fixados nos verdadeiros valores. Para o desenho da densidade da normal assimétrica estendida (linha em azul) foi utilizada a metodologia descrita em Azzalini (2005). Observa-se que a utilização do efeito latente,  $\alpha_i$ , na variância (linha em vermelho) faz com que a densidade possua caudas mais pesadas. Também vemos que a diferença entre o modelo sem o efeito latente (linha em preto) e o modelo com o efeito latente na média da variável dependente (linha em verde) é apenas um deslocamento da média. Em azul temos a densidade da normal assimétrica estendida que possui uma forma mais concentrada.

Para os modelos com ineficiência com especificação como em (3.6) não calcularemos a função de densidade conjunta de  $\mathbf{Y}$  integrada em relação a  $u_{ij}$ , já que não podemos obter uma solução analítica para a distribuição das ineficiências dado  $\mathbf{Y}$ ,  $\mathbf{X}$  e todos os outros parâmetros. Com isso, a distribuição a posteriori é dada por,

$$p(\beta_0, \beta_1, \beta_2, \sigma^2, a, b, \psi^2, u_{ij} | Y) = p(\mathbf{Y} | X_{ij}, \beta, u_{ij}, \sigma^2) p(\beta_0) p(\beta_1) p(\beta_2) p(u_{ij} | a, b) \quad (3.12) \\ p(\sigma^2) p(a | \psi^2) p(b) p(\psi^2).$$

As posterioris dos modelos não possuem uma forma analítica fechada. Com isso, será necessário a utilização de métodos de simulação estocástica para fazer inferência sobre esta distribuição. Utilizaremos o método de Monte Carlo via Cadeias de Markov (MCMC), em particular o algoritmo Amostrador de Gibbs (Gelfand e Smith, 1990), com alguns passos de Metropolis-Hastings (Hastings, 1970) e o algoritmo *Slice Sampling* (Neal, 2003). Esses métodos serão explicados no próximo capítulo.



(a) Função de densidade conjunta de  $\mathbf{Y}$  integrada a ineficiência, com os parâmetros fixados nos verdadeiros valores da unidade 1 do conjunto com 192 unidades

(b) Função de densidade conjunta de  $\mathbf{Y}$  integrada a ineficiência, com os parâmetros fixados nos verdadeiros valores da unidade 38 do conjunto com 192 unidades

Figura 3.6: Função de densidade conjunta de  $\mathbf{Y}$  integrada com respeito a  $u_{ij}$ , equação (3.9), para os modelos com a especificação em (3.5). Em preto o modelo (3.2),  $a = 0$  e  $b = \tau^2$ , em azul o modelo (3.4),  $a = \alpha_i$  e  $b = \tau^2$ , e em verde o modelo em (3.3),  $a = 0$  e  $b = \tau^2$ , e em vermelho o modelo (3.4),  $a = 0$  e  $b = \exp(\alpha_i)$ .

# Capítulo 4

## Análise dos Dados

Neste capítulo, como o procedimento de inferência será realizado sob o enfoque bayesiano, faremos uma revisão dos aspectos computacionais associados a inferência bayesiana na primeira seção. Na seção 4.2, mostraremos as distribuições condicionais completas dos parâmetros em estudo para cada modelo proposto na seção 3.2. Os critérios de comparação que serão utilizados neste trabalho serão introduzidos na seção 4.3. Na seção 4.5, será realizada a análise resultante do estudo descrito no capítulo 3.

### 4.1 Aspectos Computacionais

Nos últimos anos, a inferência Bayesiana vem experimentando um grande avanço graças à introdução de métodos de Monte Carlo via Cadeia de Markov (MCMC) e também devido ao avanço dos computadores, que hoje em dia são muito velozes. O MCMC é uma técnica poderosa que permite a análise de modelos altamente estruturados.

Seguindo o paradigma de Bayes, sabemos que a distribuição a posteriori é proporcional ao produto da função de verossimilhança pela distribuição a priori. Entretanto, como foi observado na seção 3.3.2, tanto no modelo em que as ineficiências possuem distribuição normal truncada, quanto naqueles em que elas possuem distribuição Log-Normal, quaisquer que sejam as distribuições a priori associadas aos parâmetros, não é possível fazer nenhuma sumarização da distribuição a posteriori de forma analítica. Por-

tanto, é preciso fazer uso de métodos de simulação estocástica para obter amostras da distribuição a posteriori de interesse.

A idéia do MCMC consiste em gerar amostras da distribuição de interesse a partir de distribuições que constituam uma cadeia de Markov, chamadas de distribuições de transição. Estas distribuições devem ser escolhidas de forma adequada para que a cadeia convirja para uma distribuição estacionária. Após a convergência ser encontrada, as amostras obtidas estarão sendo geradas da distribuição estacionária de interesse. Com isso, o grande objetivo é obter uma amostra grande, após a convergência ser encontrada, que se aproxime da distribuição posteriori conjunta. As amostras geradas antes da convergência ser obtida são descartadas e essa quantidade é chamada de *burn-in*, e este valor não é fixo. Para evitar a autocorrelação das amostras geradas, é comum descartar alguns valores obtidos após a convergência. Logo, guardamos apenas os valores entre um intervalo específico de iterações, que é chamado de *thinning*. Para maiores detalhes, ver Gamerman e Lopes (2006).

Neste trabalho, o Amostrador de Gibbs com passos de Metropolis-Hastings e o algoritmo *Slice Sampling* foram os métodos de simulação estocástica escolhidos para gerar as amostras das distribuições a posteriori.

A linguagem Ox (Doornik, 2002) foi utilizada para implementar o algoritmo proposto.

#### 4.1.1 Amostrador de Gibbs

O amostrador de Gibbs é um algoritmo iterativo introduzido por Geman e Geman (1984) com grande contribuição no contexto estatístico de Gelfand e Smith (1990). O algoritmo possui esse nome em homenagem ao físico J.W. Gibbs. Este algoritmo permite gerar amostrar de uma distribuição conjunta  $p(\theta_1, \dots, \theta_q)$  a partir das distribuições de cada parâmetro, condicionada aos demais parâmetros do modelo, denominadas de distribuições condicionais completas,  $p(\theta_j|\cdot)$ ,  $j = 1, 2, \dots, q$ . Porém, esse algoritmo só pode ser utilizado quando a distribuição condicional completa do parâmetro é conhecida. As distribuições condicionais completas dos parâmetros para os modelos propostos neste trabalho são apresentadas na Seção 4.2.

Este método consiste em tomar as distribuições condicionais completas como as dis-

tribuições de transição de uma cadeia de Markov. O objetivo do algoritmo Amostrador de Gibbs é gerar observações de cada distribuição, uma por vez, condicionada no valor corrente dos outros parâmetros.

Supondo que  $\theta_i^{(k)}$  seja a amostra de  $\theta_i$  na iteração  $k$  (para  $i \in \{1, \dots, q\}$  e  $k \in \{1, \dots, L\}$ ), o algoritmo pode ser resumido nos passos a seguir:

1. Inicializar o contador de iterações da cadeia  $j = 0$ .
2. Especificar valores iniciais para  $\theta_1^{(0)}, \theta_2^{(0)}, \dots, \theta_q^{(0)}$ .
3. Obter um novo valor de  $\theta_i^{(j)}$  a partir de  $\theta_i^{(j-1)}$  através de sucessivas gerações de valores

$$\begin{aligned}\theta_1^{(j)} &\sim p(\theta_1 | \theta_2^{(j-1)}, \dots, \theta_q^{(j-1)}), \\ \theta_2^{(j)} &\sim p(\theta_2 | \theta_1^{(j)}, \theta_3^{(j-1)}, \dots, \theta_q^{(j-1)}), \\ &\vdots \\ \theta_q^{(j)} &\sim p(\theta_q | \theta_1^{(j)}, \theta_2^{(j)}, \dots, \theta_{q-1}^{(j)}); \end{aligned}$$

4. Mudar o contador  $j$  para  $j + 1$  e retornar ao passo 3 até a convergência ser obtida.

### 4.1.2 Metropolis-Hastings

Inicialmente proposto por Metropolis et al. (1953), este algoritmo foi desenvolvido para lidar com os cálculos das propriedades de substâncias químicas. Hastings (1970) estendeu o algoritmo com a criação de mais um passo. Esse passo consiste na definição de uma probabilidade de aceitação para a transição da cadeia para um novo valor. O algoritmo de Metropolis-Hastings (MH) é um esquema MCMC que utiliza uma distribuição proposta, de forma conhecida, para obter um estado proposto para a cadeia. Este estado então é aceito com o passo proposto por Hastings (1970).

Suponha que  $p(\theta)$  é a distribuição de interesse, que não possui uma forma analítica fechada, para qual se deseja gerar amostras sucessivas. Admita que  $\theta^{(j)}$  representa a amostra na iteração  $j$ , os passos abaixo descrevem resumidamente o algoritmo Metropolis-Hastings:

1. Inicializar o contador de iterações,  $j = 0$ , e especificar um valor inicial  $\theta^{(0)}$ .
2. Gerar um valor proposto  $\theta^*$  da distribuição proposta  $q(\theta^*|\theta^{(j)})$ , que possui uma forma conhecida.
3. Calcular a probabilidade de aceitação  $\alpha(\theta^*, \theta^{(j)}) = \min \left\{ 1, \frac{p(\theta^*)q(\theta^{(j)}|\theta^*)}{p(\theta^{(j)})q(\theta^*|\theta^{(j)})} \right\}$ .
4. Gerar  $u \sim U(0, 1)$ .
5. Se  $u \leq \alpha(\theta^*, \theta^{(j)})$  então aceitar o novo valor gerado e fazer  $\theta^{(j+1)} = \theta^*$ , caso contrário rejeitar o valor gerado, e fazer  $\theta^{(j+1)} = \theta^{(j)}$ .
6. Mudar o contador  $j$  para  $j + 1$  e retornar ao passo 2 até a convergência ser obtida.

O algoritmo Metropolis-Hastings é uma importante ferramenta ao implementar métodos de Monte Carlo via Cadeias de Markov. No entanto, sua eficiência está diretamente relacionada à escala da distribuição proposta. Ou seja, caso a variância da distribuição proposta seja muito pequena, a Cadeia de Markov irá convergir lentamente, uma vez que seus incrementos serão pequenos. Ao contrário, se a variância é muito grande, a taxa de rejeição dos valores propostos será alta e a cadeia tenderá a não se mover. Vários autores sugerem que a taxa de aceitação do algoritmo esteja entre 20% a 50%, para maiores detalhes ver Gamerman e Lopes (2006). Neste trabalho tomou-se o cuidado de manter as taxas de aceitação em torno de 40%, alterando o valor da variância proposta para que isso fosse possível.

### 4.1.3 *Slice Sampling*

Métodos de Monte Carlo via Cadeia de Markov como o Amostrador de Gibbs (Gelfand e Smith, 1990) e o algoritmo Metropolis-Hastings (Metropolis et al. (1953), Hastings (1970)) podem ser utilizados para amostrar de muitas distribuições complexas. Entretanto, para implementar o Amostrador de Gibbs, a distribuição do parâmetro deve ser conhecida, e para usar o algoritmo Metropolis-Hastings, deve ser encontrada uma distribuição proposta adequada. O algoritmo *Slice Sampling* proposto por Neal (2003),

originou-se com a observação de que é possível, a partir de uma amostra de uma distribuição univariada, amostrar pontos uniformes da região sob a curva de sua função de densidade e, em seguida, observar somente os pontos amostrados na coordenada horizontal. As principais vantagens do método *Slice Sampling*, segundo o autor, são:

- requer menos esforço na implementação;
- requer um menor tempo de afinamento para se obter um desempenho satisfatório comparado com outros métodos, como o algoritmo de Metropolis-Hastings.

Para introduzir a idéia do *Slice Sampling*, suponha que se deseja amostrar da função de densidade  $f(x)$  onde  $x \in X \subseteq \mathfrak{R}$ . A idéia do método é formalizado introduzindo uma variável auxiliar  $y$ , e definindo a distribuição conjunta de  $x$  e  $y$ , que é uniforme sobre a região  $U = \{(x; y) : 0 < y < f(x)\}$  debaixo da curva definida por  $f(x)$ . Assim, a densidade conjunta de  $(x; y)$  é

$$p(x, y) = \begin{cases} 1/Z, & \text{se } 0 < y < f(x) \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases} \quad (4.1)$$

onde  $Z = \int f(x)dx$ . Consequentemente, a densidade marginal para  $x$  é

$$p(x) = \int_0^{f(x)} \frac{1}{Z} dz = \frac{f(x)}{Z} \quad (4.2)$$

Para amostrar de  $x$ , podemos amostrar conjuntamente de  $(x; y)$  e, então ignorar  $y$ . Muitas vezes gerar pontos independentes de  $U$  pode não ser fácil. Uma das alternativas é o esquema do Amostrador Gibbs. Para tanto é preciso definir as seguintes distribuições condicionais:

- $(y|x) \sim U(0, f(x))$
- $(x|y) \sim U(S(y))$ , onde  $S(y) = \{x : y < f(x)\}$

Neal (2003) propõe um procedimento de três passos para amostrar valores de  $x$ .

1. Amostra-se um valor de  $y$ , de uma uniforme entre  $(0; f(x_0))$ , onde  $(x_0)$  é o valor inicial. Assim define-se a fatia (*slice*) horizontal:  $S(y) = x : y < f(x)$ ;



2. Encontra-se um intervalo,  $I = (L; R)$ , em torno de  $x_0$  que contenha a maior parte da fatia. Este segundo passo poder ser implementado de vários modos. A Figura 4.1 ilustra umas das formas, proposta por Neal (2003), para a construção do intervalo  $I$ . O esquema consiste em criar um intervalo de largura  $w$ , que é posicionado aleatoriamente em torno de  $x_0$ . Então, esse intervalo é ampliado com incrementos de tamanho  $w$ , até que os extremos dos intervalos saiam fora da fatia.
3. Amostre um novo ponto,  $x_1$ , de uma parte da fatia pertencente ao intervalo, ou seja, de  $S \cap I$ .

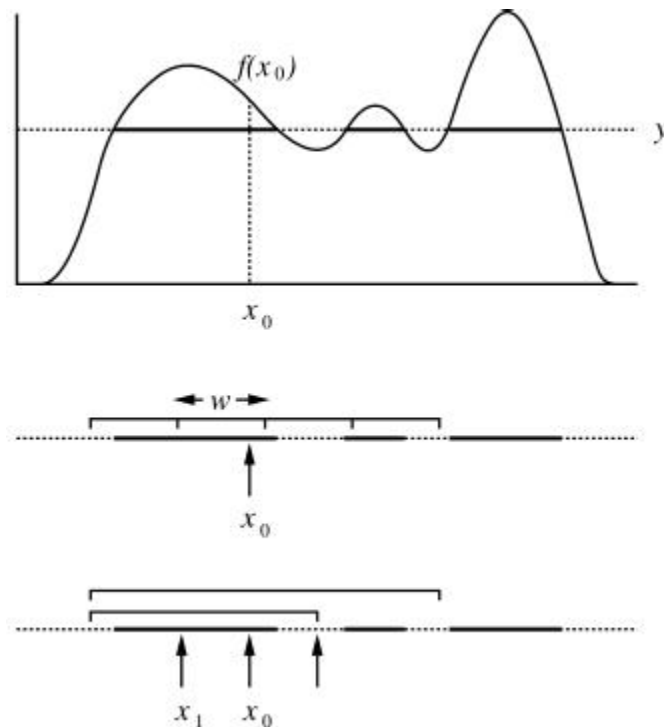


Figura 4.1: Ilustração do Algoritmo *Slice Sampling*

Para maiores detalhes ver Neal (2003).

## 4.2 Distribuições Condicionais Completas

Como neste trabalho temos um total de 12 modelos, nesta seção apresentaremos as distribuições condicionais completas para apenas dois modelos. As outras distribuições e os cálculos detalhados para os demais modelos encontram-se no Apêndice A.

### 4.2.1 Modelo M2

Para este modelo, as distribuições condicionais completas de quase todos os parâmetros não possuem uma forma fechada conhecida. Observando essas distribuições, temos que somente as amostras do parâmetro  $\psi^2$  podem ser diretamente obtidas da sua distribuição condicional completa. Os parâmetros  $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \sigma^2, \tau^2$  serão amostrados utilizando passos de Metropolis-Hastings (MH). Já para o sorteio dos parâmetros  $\alpha_i$  será utilizado o algoritmo *Slice Sampling*. Abaixo, seguem as distribuições condicionais completas de cada parâmetro.

1. Distribuição Condicional Completa para  $\beta_k, k = 0, 1, 2$

$$\begin{aligned} p(\beta_k | \mathbf{Y}, X_{ij}, \sigma^2, \alpha_i, \tau^2) &\propto \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^{n_i} \phi \left( \frac{y_{ij} - f(X_{ij}, \beta) + \alpha_i}{\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}} \right) \\ &\times \Phi \left( \frac{\alpha_i \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}}{\sqrt{\sigma^2 \tau^2}} - \frac{\sqrt{\tau^2} (y_{ij} - f(X_{ij}, \beta) + \alpha_i)}{\sigma \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}} \right) \\ &\times \exp \left( \frac{1}{2\sigma_\beta^2} \beta_k^2 \right) \end{aligned}$$

Como o núcleo da distribuição acima não tem forma conhecida, sugerimos amostrar cada  $\beta_k$  com um passo de MH cuja densidade proposta está baseada no valor corrente da cadeia.

2. Distribuição Condicional Completa para  $\tau^2$

$$\begin{aligned} p(\tau^2 | \mathbf{Y}, X_{ij}, \sigma^2, \alpha_i, \beta_i) &\propto \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^{n_i} \frac{1}{\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}} \phi \left( \frac{y_{ij} - f(X_{ij}, \beta) + \alpha_i}{\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}} \right) \\ &\times \Phi \left( \frac{\alpha_i \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}}{\sqrt{\sigma^2 \tau^2}} - \frac{\sqrt{\tau^2} (y_{ij} - f(X_{ij}, \beta) + \alpha_i)}{\sigma \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}} \right) \Phi^{-1} \left( \frac{\alpha_i}{\sqrt{\tau^2}} \right) \\ &\times (\tau^2)^{-(a_\tau+1)} \exp \left( \frac{-b_\tau}{\tau^2} \right) \end{aligned}$$

Analogamente ao caso de  $\beta_k$ ,  $\tau^2$  será amostrado com um passo de MH cuja densidade proposta, uma distribuição log-normal, está baseada no valor corrente da cadeia.

### 3. Distribuição Condicional Completa para $\sigma^2$

$$\begin{aligned} p(\sigma^2 \mid \mathbf{Y}, X_{ij}, \tau^2, \alpha_i, \beta_i) &\propto \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^{n_i} \frac{1}{\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}} \phi\left(\frac{y_{ij} - f(X_{ij}, \beta) + \alpha_i}{\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}}\right) \\ &\times \Phi\left(\frac{\alpha_i \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}}{\sqrt{\sigma^2 \tau^2}} - \frac{\sqrt{\tau^2}(y_{ij} - f(X_{ij}, \beta) + \alpha_i)}{\sigma \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}}\right) \\ &\times (\sigma^2)^{-(a_\sigma+1)} \exp\left(\frac{-b_\sigma}{\sigma^2}\right) \end{aligned}$$

Assim como os outros parâmetros citados acima,  $\sigma^2$  também será amostrado com um passo de MH cuja densidade proposta, uma distribuição log-normal, está baseada no valor corrente da cadeia.

### 4. Distribuição Condicional Completa para $\alpha_i$

$$\begin{aligned} p(\alpha_i \mid \mathbf{Y}, X_{ij}, \tau^2, \sigma^2, \beta_i, \psi^2) &\propto \prod_{j=1}^{n_i} \phi\left(\frac{y_{ij} - f(X_{ij}, \beta) + \alpha_i}{\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}}\right) \\ &\times \Phi\left(\frac{\alpha_i \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}}{\sqrt{\sigma^2 \tau^2}} - \frac{\sqrt{\tau^2}(y_{ij} - f(X_{ij}, \beta) + \alpha_i)}{\sigma \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}}\right) \Phi^{-1}\left(\frac{\alpha_i}{\sqrt{\tau^2}}\right) \\ &\times \exp\left(\frac{1}{2\psi^2} \sum_{j=1}^{n_i} W_{ij} (\alpha_i - \alpha_j)^2\right) \end{aligned}$$

Diferentemente dos outros parâmetros, amostraremos cada  $\alpha_i$  através do algoritmo *Slice Sampling*, baseado no valor corrente da cadeia.

### 5. Distribuição Condicional Completa para $\psi^2$

$$\psi^2 \mid \alpha \sim GI\left(\frac{n}{2} + a_\psi, \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n_i} W_{ij} (\alpha_i - \alpha_j)^2}{2} + b_\psi\right)$$

## 4.2.2 Modelo M8

Como foi visto anteriormente os modelos com distribuição como em (3.6) não tiveram a função de densidade conjunta de  $\mathbf{Y}$  integrada em relação a  $u_{ij}$ . Com isso as ineficiências

são estimadas conjuntamente com os outros parâmetros. Abaixo veremos que a condicional completa das ineficiências não possui uma forma analítica fechada e, por isso, utilizaremos o algoritmo *Slice Sampling* para sortear amostras dessa distribuição condicional. Aqui, o vetor paramétrico a ser estimado é  $\Theta = (\beta_0, \beta_1, \beta_2, \sigma^2, \tau^2, \psi^2, \alpha_1, \dots, \alpha_n, u_{1,1}, \dots, u_{n,n_n})'$ . A condicional completa para  $\beta$  será exibida na forma matricial.

1. Distribuição Condicional para  $\beta$

$$\beta \mid Y, X, u, \sigma^2 \sim N \left( V \frac{1}{\sigma^2} (Y - u)' X, V \right),$$

onde  $I$  é a matriz identidade de dimensão 3,  $V^{-1} = (\sigma_\beta^2)^{-1} I + \frac{1}{\sigma^2} X' X$  e  $\sigma_\beta^2$  a variância a priori de  $\beta$ , que é assumida a mesma,  $\forall k = 0, 1, 2$ .

2. Distribuição Condicional para  $\sigma^2$

$$\sigma^2 \mid Y, X, u, \beta \sim GI \left( a_\sigma + \frac{\sum_{j=1}^{n_i}}{2}, b_\sigma + \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - f(X_{ij}, \beta) + u_{ij})^2}{2} \right)$$

3. Distribuição Condicional para  $\tau^2$

$$\tau^2 \mid u, \alpha \sim GI \left( a_\tau + \frac{\sum_{j=1}^{n_i}}{2}, b_\tau + \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n_i} (\ln u_{ij} - \alpha_i)^2}{2} \right)$$

4. Distribuição Condicional para  $\alpha_i$

$$\alpha_i \mid u, \tau^2, \psi^2 \sim N \left( \left[ \frac{\sum_{j=1}^{n_i} \ln u_{ij}}{\tau^2} + \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n_i} W_{ij} \alpha_j}{\psi^2} \right] \left[ \frac{n_i}{\tau^2} + \frac{n \text{viz}_i}{\psi^2} \right]^{-1}, \left[ \frac{n_i}{\tau^2} + \frac{n \text{viz}_i}{\psi^2} \right]^{-1} \right)$$

onde  $n_i$  é o número de unidades da localidade  $i$  e  $n \text{viz}_i$  é o número de vizinhos da localidade  $i$ .

5. Distribuição Condicional para  $\psi^2$

$$\psi^2 \mid \alpha \sim GI \left( \frac{64}{2} + a_\psi, \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n_i} W_{ij} (\alpha_i - \alpha_j)^2}{2} + b_\psi \right)$$

6. Distribuição Condicional para  $u_{ij}$

$$p(u_{ij} \mid y_{ij}, X_{ij}, \beta, \sigma^2, \tau^2, \tau^2) \propto \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} (y_{ij} - f(X_{ij}, \beta) + u_{ij})^2 \right\} \\ \exp \left\{ -\frac{1}{2\tau^2} \sum_{j=1}^{n_i} (\ln u_{ij} - \alpha_i)^2 \right\} \frac{1}{\ln u_{ij}}$$

Como o núcleo da distribuição acima não tem forma conhecida, sugerimos amostrar cada  $u_{ij}$  através do algoritmo *Slice Sampling*. Entretanto, esse algoritmo só pode ser utilizado para gerar amostras de distribuições que estejam nos reais e, a distribuição de  $u_{ij}$  é estritamente positiva. Logo, utilizou-se a transformação  $u_{ij}^* = \ln u_{ij}$  e, amostraremos através do algoritmo amostras de  $u_{ij}^*$ . Após obtida a amostra de  $u_{ij}^*$  utilizaremos a transformação  $u_{ij} = \exp u_{ij}^*$  para obter a amostra de  $u_{ij}$ .

## 4.3 Critérios de Comparação de Modelos

Na análise dos resultados que será apresentada nesse capítulo, utilizaremos três critérios para comparar os modelos propostos. Nesta seção, apresentaremos a descrição destes critérios.

Uma das dificuldades ao propor diferentes especificações para analisar um certo fenômeno é como escolher o modelo que melhor representa esse fenômeno. Há na literatura muitos critérios diferentes para apontar o modelo que melhor se ajusta aos dados. No entanto, não há um consenso sobre qual critério funciona melhor. Por esta razão, é comum usar mais de um critério de comparação de modelos. Neste contexto, insere-se a aplicação de critérios para seleção de modelos baseados em medidas que tentam quantificar sua qualidade de ajuste e aplicam alguma punição a modelos complexos, com muitos parâmetros. Nesta seção apresentaremos os três critérios utilizados para comparar os diversos modelos ajustados, sendo o primeiro, o Critério de Informação Baseado na *Deviance*, o segundo, o Desvio Preditivo Esperado, e o último um critério baseado na ordenação das ineficiências. Esse último critério é possível, já que estamos dentro de um contexto onde sabemos os verdadeiros valores das ineficiências, logo, podemos comparar suas ordenações. Para maiores detalhes sobre os dois primeiros critérios ver, por exemplo, Banerjee et al. (2004). A distribuição de  $Y$  utilizada em todos os critérios é baseada na distribuição normal, e não na marginalização da distribuição conjunta de  $Y$ .

### 4.3.1 Critério de Informação Baseado na *Deviance*

Spiegelhalter et al. (2002) propõem uma generalização do critério AIC (*Akaike In-*

*formation Criterion*) e BIC (*Bayesian information criterion*), baseada na distribuição a posteriori da estatística *deviance*. Podendo ser definido como:

$$D(\theta) = -2\ln(p(Y|\theta)) + 2\ln(f(Y)), \quad (4.3)$$

onde  $p(Y|\theta)$  é a função de verossimilhança condicionada ao conjunto de parâmetros  $\theta$  e  $f(Y)$  é a distribuição marginal da variável  $Y$ .

O critério DIC também pode ser definido por

$$DIC = \bar{D} + pD, \quad (4.4)$$

onde  $\bar{D}$  é a esperança a posteriori da estatística *deviance*,  $E_{\theta|Y}[D(\theta)]$ , que avalia o ajuste do modelo. A componente  $pD$  mede a complexidade do modelo, podendo ser interpretada como sendo o número efetivo de parâmetros. Esta componente é dada por

$$pD = \bar{D} - \hat{D}, \quad (4.5)$$

onde  $\hat{D} = -2\ln(p(Y|\hat{\theta}))$ , ou seja, uma estimativa pontual da *deviance* utilizando, por exemplo, a média a posteriori de  $\theta$ ,  $\hat{\theta}$ . Portanto, podemos reescrever o DIC como

$$DIC = 2\bar{D} - \hat{D}, \quad (4.6)$$

A idéia é que modelos com valores menores de DIC sejam preferidos a modelos com valores grandes de DIC.

### 4.3.2 Perda Preditiva Esperada

Outra maneira de fazer a escolha dos modelos é utilizar métodos que os comparem de acordo com suas distribuições preditivas. Ou seja, o modelo mais adequado é aquele que faz as melhores previsões para os valores observados. O critério *Expected Prediction Loss* (EPD), introduzido por Gelfand e Ghosh (1998), tem como objetivo minimizar uma função perda. Resumindo, calcula-se uma medida que é baseada em replicações,  $y_{rep,l}$ , dos dados observados,  $y_{obs,l}$ ,  $l = 1, \dots, n$ . E, considera-se duas parcelas, uma de qualidade de ajuste e uma de capacidade preditiva do modelo. O critério EPD é obtido através da estatística  $D_c$ , que é dada por

$$D_c = P + \frac{c}{c+1}G, \text{ com} \quad (4.7)$$

$$G = \sum_{l=1}^n (\mu_l - y_{obs,l})^2 \text{ e}$$

$$P = \sum_{l=1}^n (\sigma_l^2),$$

onde  $\mu_l = E(y_{rep,l})$  e  $\sigma_l^2 = Var(y_{rep,l})$ , são a média e a variância, respectivamente, da distribuição de  $y_{rep,l}$ . Banerjee et al. (2004) mencionam que a classificação dos modelos não é sensível ao valor de  $c$ , com isso, aqui fazemos  $c = 1$ . A idéia é que modelos com valores menores de  $D_c$  sejam preferidos do que modelos com valores grandes de  $D_c$ . O cálculo do EPD será realizado para a verossimilhança que possui distribuição normal, e não na verossimilhança integrada as ineficiências.

### 4.3.3 Critério de Ordenação das Eficiências

Este critério é uma adaptação do critério proposto por Schmidt et al. (2006). Lançamos mão do fato de conhecermos a verdadeira ordenação das componentes assimétricas. Desta forma, podemos verificar qual modelo é capaz de recuperar a verdadeira ordenação dessas componentes. Nesse caso, iremos comparar as ordenações das eficiências,  $\exp(-u_{ij})$ . Inicialmente, defina  $rank(i, j, m)$  a mediana a posteriori do posto da eficiência da localidade  $i$ , unidade  $j$  do modelo  $m$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  e  $j = 1, 2, \dots, n_i$ . Seja  $rank(i, j, m')$  como sendo a ordenação verdadeira das eficiências. Seja agora,  $d(i, j, m, m') = |rank(i, j, m) - rank(i, j, m')|$  a diferença absoluta entre o posto da localidade  $i$ , unidade  $j$  do modelo  $m$  e o posto verdadeiro. Agora considere  $n_k(m, m') = (\#\{1, \text{ se } d(i, j, m, m') > n_k\})/n_k$  como o número de unidades cujas diferenças entre os postos são maiores que o percentil  $n_k$ . Esta é uma medida do grau de distorção dos postos do modelo  $m$  em relação aos postos verdadeiros. Menores valores de  $d(i, j, m, m')$  indicam um melhor modelo.

## 4.4 Análise

Primeiramente nesta seção, mostraremos a convergência dos parâmetros para os modelos propostos. E, verificadas as convergências, será realizada uma análise dos resultados obtidos.

### 4.4.1 Verificação da Convergência das Cadeias

A verificação de convergência dos métodos MCMC utilizados será baseada na idéia de que as trajetórias de cadeias com diferentes valores iniciais devem ser muito similares após a convergência. Os modelos M10 e M11 não apresentaram convergência, logo os resultados das cadeias referentes a estes modelos não serão apresentadas nesta seção.

Nesta seção mostraremos apenas os traços das cadeias de alguns parâmetros dos modelos M2 e M8. As outras cadeias são apresentadas no Apêndice B.

Para os modelos sob a especificação em (3.5), foi realizado um total de 200.000 iterações, *burn-in* de 100.000 e *thinning* de 100. Com isso, temos uma amostra final de tamanho 1.000 para cada parâmetro. Já para os modelos sob a especificação em (3.6), foi realizada um total de 60.000 iterações, *burn-in* de 30.000 e *thinning* de 30. Obtendo também uma amostra de tamanho 1.000. A redução do total de iterações da cadeia dos modelos sob especificação como em (3.6), deve-se ao fato de o algoritmo *Slice Sampling* ser utilizado tanto para gerar amostras dos parâmetros  $\alpha_i$ , como amostras das ineficiências, fazendo com que o tempo computacional para gerar uma iteração do algoritmo Monte Carlo via Cadeia de Markov seja muito maior que o tempo para os modelos sob a especificação em (3.5). Entretanto, como pode ser observado, não afetou a convergência das cadeias.

As figuras 4.2 e 4.3 apresentam, respectivamente, as cadeias de alguns parâmetros, sendo omitidos alguns  $\alpha$ 's e  $u_{ij}$ 's, para os modelos M2 e M8. Observando as figuras, consideramos que há indícios de convergência para ambos os modelos.



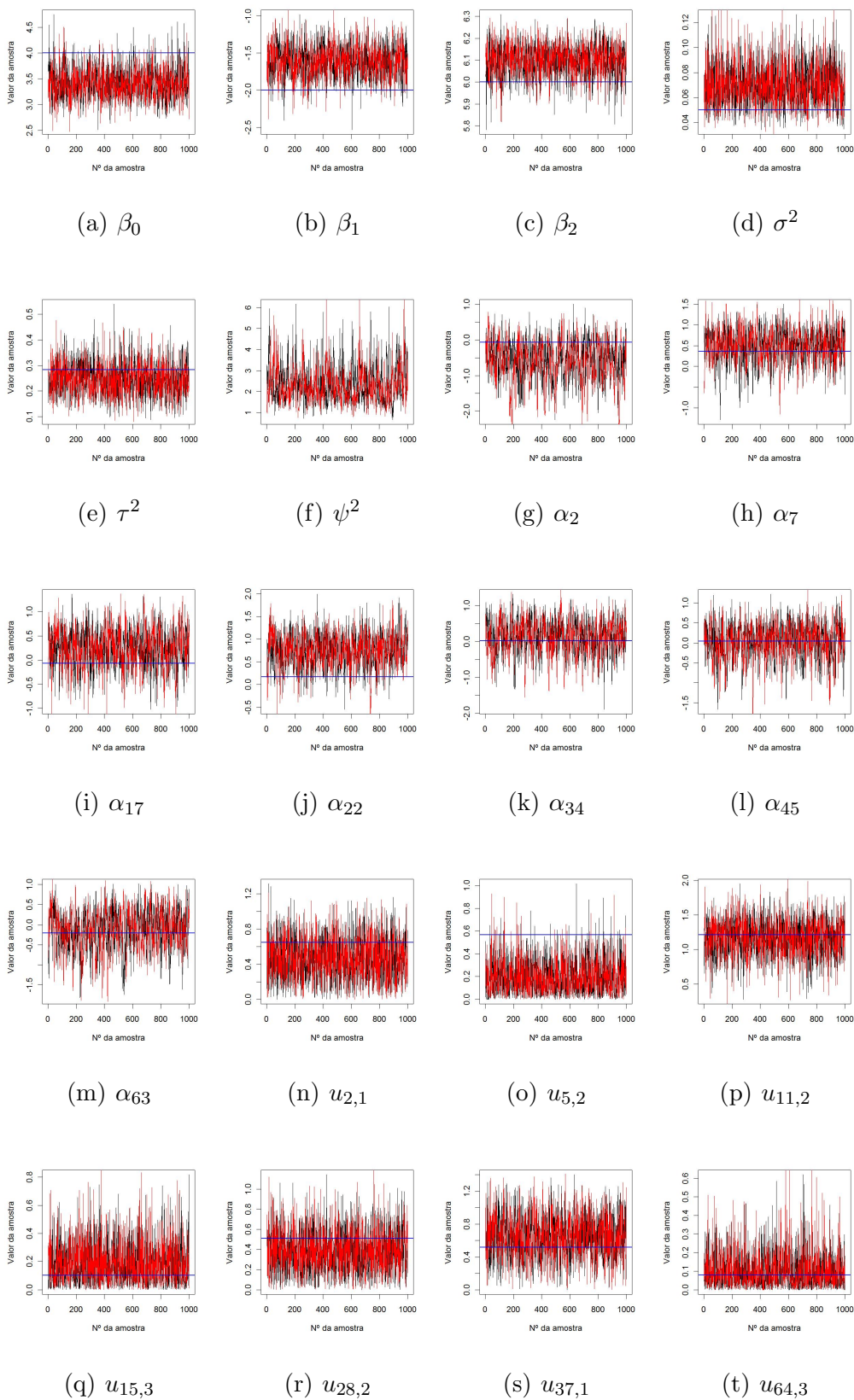


Figura 4.2: Amostras da distribuição a posteriori para o Modelo M2, para o caso da amostra com 192 unidades, com *burn-in* 100,000 e *thining* 100.

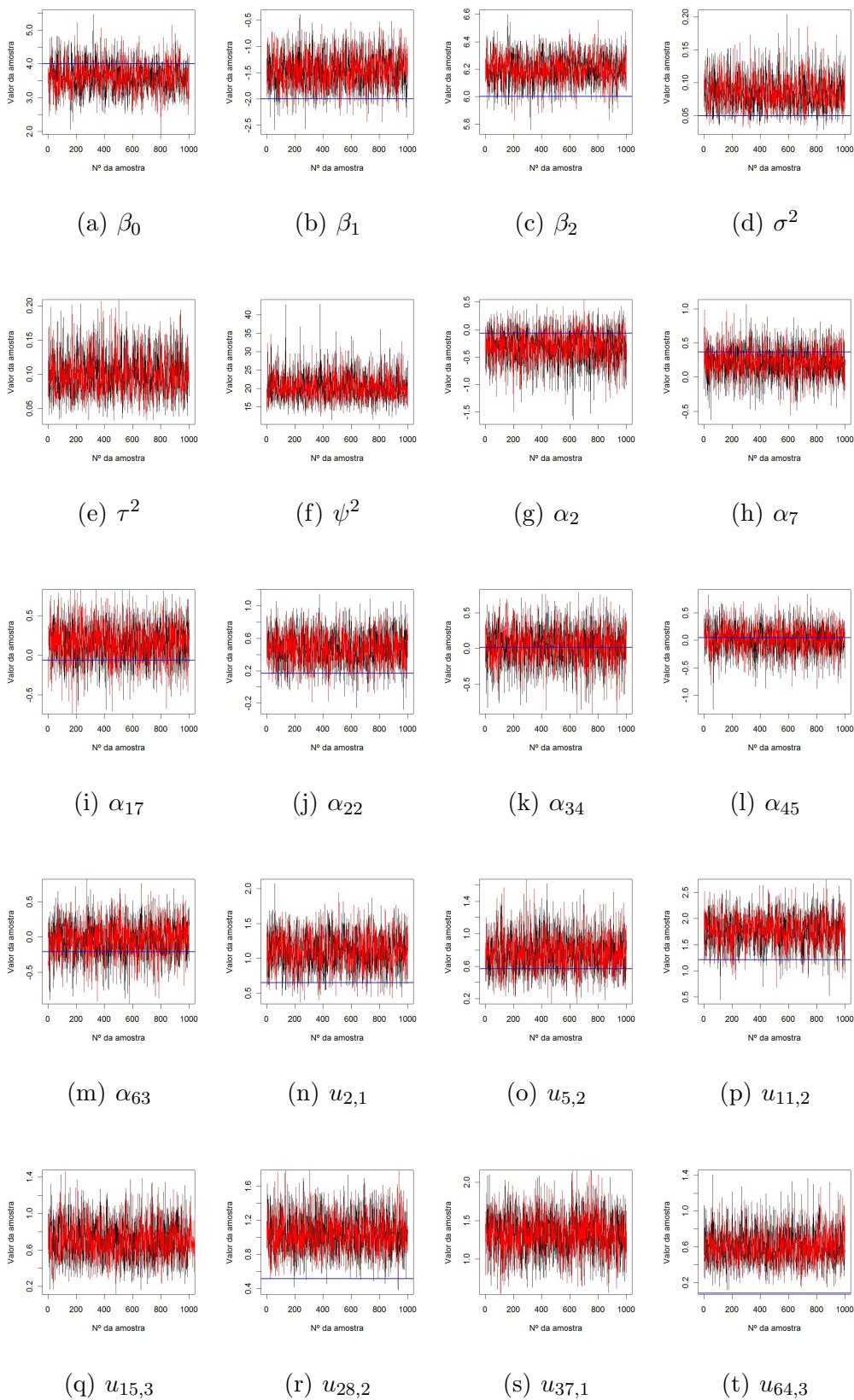


Figura 4.3: Amostras da distribuição posteriori para o Modelo M8, para o caso da amostra com 192 unidades, com *burn-in* 30.000 e *thinning* 30.

## 4.5 Resultados

Nesta seção, utilizaremos os critérios citados neste capítulo para verificar quais modelos conseguem capturar melhor a estrutura dos dados gerados a partir da especificação do modelo M2. Como foi mencionado na seção 4.4.1, os modelos M10 e M11 não foram incluídos nesta análise devido a problemas de convergência das cadeias.

As tabelas 4.1 e 4.2 mostram os valores do critério EPD para os dez modelos e os dois conjuntos de dados, respectivamente. As respectivas tabelas com todas as componentes encontram-se no Apêndice C. Valores menores de EPD indicam um melhor ajuste.

Analogamente, as tabelas 4.3 e 4.4, mostram os valores da medida DIC para os dez modelos e os dois conjuntos de dados. As tabelas com todas as componentes deste critério encontram-se no Apêndice D. Quanto menor o valor do DIC, melhor é o ajuste do modelo.

Observando as quatro tabelas citadas acima, podemos fazer diferentes comparações. Por exemplo, podemos comparar os modelos que possuem estrutura espacial, com aqueles que não possuem. Comparar também, os modelos cujas ineficiências seguem uma distribuição normal truncada com aqueles que possuem uma distribuição log-normal. Pensando nas diferentes análises que podem ser feitas, listaremos abaixo as comparações que serão realizadas neste trabalho para os dois conjuntos de dados:

1. Comparação dos modelos que diferem entre si apenas pela distribuição atribuída a ineficiência;

Aqui estamos interessados em saber se a modificação da distribuição atribuída a ineficiência, ou seja, especificar uma distribuição normal truncada, que foi utilizada para gerar o conjunto de dados, ou uma distribuição log-normal, melhora ou piora o ajuste do modelo para o conjunto de dados gerados.

2. Comparação dos modelos que possuem estrutura espacial com aqueles que não possuem;

Neste caso, investigamos se a imposição da estrutura espacial consegue ser capturada, já que os conjuntos de dados foram gerados assumindo uma estrutura es-

pacial nas ineficiências.

3. Comparação dos modelos que não possuem o efeito latente,  $\alpha$ , com aqueles que possuem esse efeito;

Agora, analisamos se a inclusão do efeito latente  $\alpha$  melhora o ajuste do modelo, ou se o modelo mais simples, sem esse efeito, fornece um ajuste equivalente, mesmo com um número menor de parâmetros.

4. Comparação do modelo que foi utilizado para gerar o conjunto de dados com todos os outros modelos;

Já que conhecemos o mecanismo gerador das observações, agora comparamos os ajustes resultantes de todos os modelos com aqueles resultantes do modelo M2.

5. Comparação dos modelos segundo o critério de ordenação das eficiências;

Como em geral, no contexto de fronteira de produção estocástica, o interesse está em ordenar as unidades segundo suas eficiências estimadas, aqui comparamos as ordenações das eficiências estimadas com as verdadeiras ordenações. Esse critério deveria ser feito para todas as amostras, mas dado que temos 50 amostras, decidimos por mostrar essa comparação para apenas três conjuntos de dados.

6. Análise dos modelos segundo as estimativas a posteriori das ineficiências.

Finalizando essa análise dos dados, comparamos as estimativas a posteriori das ineficiências com os verdadeiros valores. Novamente, decidimos por resumir essa informação e apresentar somente um gráfico para cada modelo. E nesse gráfico será apresentado somente a mediana a posteriori obtida para cada amostra contra os valores verdadeiros.

Para uma melhor organização desta seção, mostraremos as análises citadas para o conjunto com 192 unidades na seção 4.5.1 e para o conjunto com 500 unidades na seção 4.5.2.

Tabela 4.1: Componente D do critério EPD para a amostra com 192 unidades

	M1	M2	M3	M4	M5	M6	M7	M8	M9	M12	Melhor Modelo Segundo o Critério
Amostra 1	27.75	24.79	23.48	17.59	19.59	42.50	23.66	30.76	30.39	57.87	M4
Amostra 2	34.09	30.04	31.36	21.42	23.80	47.09	27.96	34.65	34.69	62.46	M4
Amostra 3	29.04	26.93	25.25	18.20	20.66	43.36	24.13	31.22	31.43	62.42	M4
Amostra 4	27.07	23.26	21.31	15.74	17.49	42.12	23.53	29.34	29.44	57.77	M4
Amostra 5	39.00	34.73	37.59	21.97	25.30	50.60	31.55	40.46	40.68	65.79	M4
Amostra 6	24.46	21.54	21.76	15.35	15.87	32.50	19.95	22.64	22.42	43.43	M4
Amostra 7	29.93	28.02	28.42	18.87	21.57	43.64	25.06	31.39	31.74	55.96	M4
Amostra 8	18.54	17.53	12.57	13.64	14.65	36.22	18.49	23.63	23.45	54.11	M3
Amostra 9	23.11	21.48	17.31	14.80	15.97	40.47	21.00	26.01	26.35	55.70	M4
Amostra 10	26.57	24.87	23.31	16.89	19.06	40.00	22.77	27.55	28.42	54.57	M4
Amostra 11	33.76	30.67	33.50	20.61	24.01	44.67	27.78	34.15	33.99	56.70	M4
Amostra 12	25.40	23.87	22.16	16.74	18.16	38.76	21.76	28.13	27.97	52.82	M4
Amostra 13	28.73	26.47	26.96	19.03	20.72	39.86	23.33	29.88	29.61	53.39	M4
Amostra 14	25.34	23.63	22.12	16.35	18.14	37.36	21.02	26.96	26.55	51.39	M4
Amostra 15	25.66	24.21	21.46	16.84	18.56	41.09	22.07	30.16	28.94	60.35	M4
Amostra 16	31.49	28.94	28.84	17.29	19.53	45.16	25.79	31.62	31.93	59.17	M4
Amostra 17	23.64	22.56	20.20	16.85	18.26	35.43	19.58	25.92	25.20	50.56	M4
Amostra 18	29.78	26.94	27.26	18.24	21.05	41.98	24.46	31.99	30.94	55.45	M4
Amostra 19	32.22	30.31	30.61	19.98	22.91	43.65	25.55	32.84	33.46	57.70	M4
Amostra 20	27.39	24.03	22.43	16.75	18.08	43.03	24.20	28.20	28.29	57.52	M4
Amostra 21	31.88	28.70	30.63	18.63	20.94	42.60	25.80	31.86	31.53	55.68	M4
Amostra 22	32.26	28.56	29.42	19.77	22.03	47.01	25.98	30.82	31.16	61.28	M4
Amostra 23	33.43	29.72	31.27	20.10	22.76	42.94	27.04	33.36	33.37	57.18	M4
Amostra 24	28.46	26.52	25.67	17.32	19.88	41.20	22.97	30.65	30.57	55.72	M4
Amostra 25	26.30	25.06	24.64	16.24	18.78	40.05	21.45	28.29	27.99	51.94	M4
Amostra 26	30.27	27.69	29.09	20.05	22.27	38.96	24.79	29.23	29.94	50.52	M4
Amostra 27	24.96	23.62	21.22	16.04	18.29	37.09	20.80	26.20	26.15	51.27	M4
Amostra 28	24.18	21.92	20.94	15.01	16.33	39.94	20.45	23.83	23.43	51.78	M4
Amostra 29	25.12	21.56	20.39	15.81	16.94	38.34	22.69	27.12	26.91	51.92	M4
Amostra 30	31.45	26.63	28.85	18.37	20.05	42.08	25.94	30.75	30.33	55.12	M4
Amostra 31	29.27	26.67	26.55	17.77	19.73	36.34	23.84	29.18	28.40	46.57	M4
Amostra 32	32.29	30.12	31.39	20.42	23.33	44.35	25.44	33.86	34.13	54.18	M4
Amostra 33	30.25	26.42	28.55	18.36	20.43	38.69	25.04	28.74	29.08	46.80	M4
Amostra 34	31.63	29.46	30.29	20.59	23.66	39.58	25.39	31.34	31.90	49.78	M4
Amostra 35	30.50	28.25	27.74	19.71	21.92	43.64	24.90	32.18	31.85	54.64	M4
Amostra 36	27.68	25.76	25.30	18.58	20.71	38.72	22.46	28.37	27.92	48.05	M4
Amostra 37	25.83	24.25	22.32	16.86	18.99	41.62	22.19	29.35	29.52	54.01	M4
Amostra 38	33.43	29.80	32.89	18.86	21.33	41.19	27.26	30.35	30.40	49.12	M4
Amostra 39	23.15	22.63	19.56	17.02	18.41	37.36	20.64	26.34	26.21	49.17	M4
Amostra 40	37.58	34.56	36.94	22.10	26.95	46.36	30.67	38.96	38.20	55.46	M4
Amostra 41	29.22	25.72	26.60	17.66	19.37	39.72	23.86	28.75	28.38	50.05	M4
Amostra 42	24.80	23.37	20.63	16.74	18.15	40.05	21.34	26.55	26.66	51.93	M4
Amostra 43	31.87	29.79	30.96	20.58	22.92	42.24	26.00	33.15	33.54	52.94	M4
Amostra 44	27.50	24.79	25.12	16.89	19.19	39.03	22.62	27.65	27.41	49.93	M4
Amostra 45	26.98	23.30	24.07	17.07	18.13	39.66	21.97	26.75	27.56	49.77	M4
Amostra 46	20.28	20.26	15.47	15.24	16.21	36.82	18.35	24.99	24.65	50.66	M4
Amostra 47	26.72	25.46	23.98	16.83	19.04	40.68	21.89	28.46	28.25	51.86	M4
Amostra 48	31.05	27.95	26.90	17.69	20.08	46.28	26.12	34.14	34.09	57.98	M4
Amostra 49	27.28	24.05	23.60	16.56	18.15	38.81	23.54	28.71	36.73	49.00	M4
Amostra 50	32.04	28.94	30.97	19.51	22.86	42.65	26.31	32.70	32.30	51.13	M4

Tabela 4.2: Componente D do critério EPD para a amostra com 500 unidades

	M1	M2	M3	M4	M5	M6	M7	M8	M9	M12	Melhor Modelo Segundo o Critério
Amostra 1	49.69	53.12	47.35	40.04	47.16	76.89	42.09	52.15	53.61	105.50	M4
Amostra 2	48.29	47.69	43.84	35.79	42.12	68.07	41.19	45.41	45.40	89.59	M4
Amostra 3	67.02	62.91	62.59	46.22	60.22	83.30	57.78	60.54	60.58	104.79	M4
Amostra 4	40.75	42.04	34.59	31.84	36.88	68.72	40.37	45.97	47.31	96.54	M4
Amostra 5	57.19	56.23	51.66	40.18	48.46	78.59	50.05	57.43	59.67	101.35	M4
Amostra 6	44.15	44.53	39.35	34.20	39.78	62.82	40.91	45.29	46.41	86.76	M4
Amostra 7	65.28	61.96	61.04	47.07	56.39	92.18	58.09	64.44	65.83	120.20	M4
Amostra 8	45.65	44.81	39.66	35.17	41.62	67.38	42.32	48.22	49.61	93.32	M4
Amostra 9	59.84	58.20	55.88	43.32	49.36	81.73	50.99	52.15	52.14	105.47	M4
Amostra 10	62.06	60.96	59.04	47.17	55.55	78.74	50.15	53.72	54.64	101.70	M4
Amostra 11	54.12	52.84	48.68	40.24	48.46	78.14	47.38	51.58	52.03	103.55	M4
Amostra 12	51.87	52.83	47.50	38.97	46.19	75.59	45.19	52.33	52.26	102.55	M4
Amostra 13	50.28	51.32	46.14	38.16	43.76	73.02	43.40	48.21	48.52	98.80	M4
Amostra 14	61.26	61.72	57.63	44.52	53.65	92.78	55.90	64.47	65.99	122.44	M4
Amostra 15	71.65	69.85	68.68	51.87	61.30	94.94	60.53	67.32	68.55	122.33	M4
Amostra 16	64.49	64.26	61.26	47.14	56.52	87.94	55.59	60.88	61.94	115.38	M4
Amostra 17	54.12	52.80	49.05	39.46	46.19	93.26	50.62	59.23	60.35	123.31	M4
Amostra 18	67.07	67.22	65.21	47.23	57.16	115.09	56.03	66.32	66.05	120.50	M4
Amostra 19	43.02	43.53	37.37	32.70	37.68	64.31	37.56	40.69	40.86	88.98	M4
Amostra 20	51.42	48.72	45.65	37.91	43.99	73.93	46.52	46.24	47.46	94.95	M4
Amostra 21	50.22	51.29	46.10	37.63	44.56	73.57	43.23	49.84	51.13	98.37	M4
Amostra 22	53.33	53.99	48.69	39.20	47.52	73.90	45.21	53.45	53.89	100.29	M4
Amostra 23	49.31	50.30	43.52	34.85	42.61	65.91	44.79	50.18	49.32	87.88	M4
Amostra 24	62.52	60.64	59.40	46.39	54.79	76.27	52.10	54.61	55.37	96.94	M4
Amostra 25	55.37	53.34	50.34	39.93	49.36	79.19	46.83	53.84	54.37	104.68	M4
Amostra 26	57.14	54.43	50.95	39.31	47.34	78.90	50.39	55.00	56.56	101.97	M4
Amostra 27	48.26	47.60	39.77	33.97	42.01	77.08	46.77	52.37	54.82	100.85	M4
Amostra 28	56.18	55.73	53.54	40.19	51.17	82.77	47.14	53.66	55.29	103.41	M4
Amostra 29	47.45	46.15	43.10	36.13	41.33	77.83	40.97	46.24	46.97	102.56	M4
Amostra 30	59.16	61.36	56.11	43.10	52.70	80.20	51.73	56.35	58.44	106.80	M4
Amostra 31	66.43	64.38	61.21	44.43	52.05	84.59	59.59	59.47	60.18	110.97	M4
Amostra 32	56.64	52.27	50.47	39.86	45.93	82.56	50.91	49.27	48.39	104.74	M4
Amostra 33	49.21	48.14	42.71	35.03	44.59	71.99	44.36	49.10	49.80	98.79	M4
Amostra 34	59.06	59.30	55.42	43.30	51.02	78.85	50.29	55.31	55.70	99.20	M4
Amostra 35	68.65	69.14	66.35	46.65	59.76	111.25	62.10	73.92	74.26	138.97	M4
Amostra 36	66.02	63.67	62.11	45.29	55.90	92.13	58.07	64.63	65.18	119.04	M4
Amostra 37	50.35	48.76	43.68	34.97	42.54	73.41	46.79	50.62	51.31	92.40	M4
Amostra 38	68.92	69.51	65.47	49.49	58.25	91.86	58.09	70.17	71.72	120.68	M4
Amostra 39	62.44	62.81	58.43	45.40	55.25	87.18	56.04	65.17	65.26	115.63	M4
Amostra 40	52.27	51.70	46.50	38.62	46.71	75.95	47.03	53.80	54.14	98.43	M4
Amostra 41	53.18	52.39	48.67	39.23	47.57	74.84	47.24	54.02	54.87	98.90	M4
Amostra 42	62.74	60.97	59.52	46.04	53.27	85.10	51.45	54.78	53.80	111.34	M4
Amostra 43	48.64	46.48	40.42	34.67	41.06	69.93	45.16	47.40	49.52	93.10	M4
Amostra 44	55.06	55.14	48.81	39.69	48.08	74.95	50.28	56.56	56.86	101.43	M4
Amostra 45	54.48	55.75	50.57	39.01	48.49	79.50	47.58	55.00	56.14	102.53	M4
Amostra 46	48.25	46.74	42.44	35.30	41.84	73.43	44.31	48.90	49.32	94.43	M4
Amostra 47	79.59	76.42	76.99	52.69	65.34	106.46	69.39	76.83	77.20	133.09	M4
Amostra 48	67.03	65.84	63.31	46.27	56.79	91.59	59.84	67.22	69.51	119.68	M4
Amostra 49	61.72	60.53	57.47	44.26	55.37	85.78	53.66	57.62	58.09	111.12	M4
Amostra 50	57.82	56.76	52.87	39.10	47.21	73.64	48.99	49.38	48.67	97.99	M4

Tabela 4.3: Critério DIC para a amostra com 192 unidades

	M1	M2	M3	M4	M5	M6	M7	M8	M9	M12	Melhor Modelo Segundo o Critério DIC
Amostra 1	196.06	181.40	189.92	147.94	165.93	456.82	155.46	249.41	231.00	624.28	M4
Amostra 2	222.34	211.32	220.80	197.67	213.08	465.06	183.67	261.88	252.85	646.67	M7
Amostra 3	205.94	196.91	208.69	157.36	179.65	540.96	164.10	246.40	244.94	728.77	M4
Amostra 4	203.88	184.02	197.94	152.42	170.41	480.01	156.98	243.54	230.88	641.78	M4
Amostra 5	234.72	229.17	242.72	193.25	225.78	446.49	196.21	285.70	275.35	626.20	M4
Amostra 6	155.52	138.88	157.74	127.98	138.35	438.94	121.05	191.01	176.25	621.28	M7
Amostra 7	197.30	191.40	204.15	167.12	189.72	462.22	160.06	248.15	235.80	684.39	M7
Amostra 8	140.63	124.85	90.85	110.07	119.60	529.79	123.51	215.27	197.65	745.58	M3
Amostra 9	176.42	156.95	150.72	124.61	138.44	517.36	140.99	222.11	210.92	706.62	M4
Amostra 10	187.45	181.56	188.10	145.36	167.96	528.62	152.66	226.24	220.65	767.43	M4
Amostra 11	209.57	202.57	210.11	176.59	208.66	431.04	172.39	256.37	241.04	617.24	M7
Amostra 12	175.58	163.41	175.85	144.36	151.20	427.15	140.26	233.47	219.17	614.66	M7
Amostra 13	185.07	181.62	189.08	173.67	193.05	430.25	149.00	237.69	224.30	626.94	M7
Amostra 14	177.80	163.63	169.20	140.99	156.05	454.09	136.74	228.65	211.24	610.52	M7
Amostra 15	187.13	180.78	181.31	154.86	171.10	471.30	150.43	252.43	232.36	639.86	M7
Amostra 16	223.86	205.51	222.86	152.74	167.97	486.17	171.81	239.70	235.24	677.81	M4
Amostra 17	161.48	162.50	162.63	150.25	164.93	484.15	127.02	223.13	206.57	676.94	M7
Amostra 18	197.91	187.14	198.55	156.65	184.28	440.38	158.38	244.36	234.26	623.64	M4
Amostra 19	205.05	210.85	211.48	176.32	203.58	432.57	163.20	256.04	247.06	642.73	M7
Amostra 20	202.33	180.11	185.38	142.19	155.49	499.35	161.22	241.65	218.88	686.69	M4
Amostra 21	205.29	199.48	213.15	168.49	183.60	444.36	165.24	247.30	234.40	618.24	M7
Amostra 22	215.95	196.24	211.24	182.03	201.99	511.87	173.36	247.68	236.92	708.48	M7
Amostra 23	219.09	202.69	219.53	176.72	198.80	472.75	177.92	262.65	248.27	664.36	M4
Amostra 24	190.54	191.56	195.25	154.67	172.63	421.26	148.55	245.16	231.99	622.90	M7
Amostra 25	177.99	170.64	188.77	149.59	173.19	468.06	135.52	222.25	210.18	671.38	M7
Amostra 26	188.02	182.85	192.88	171.25	187.31	451.31	154.02	222.65	222.02	707.91	M7
Amostra 27	173.98	165.06	177.79	133.35	156.20	501.01	134.42	220.00	203.94	708.08	M4
Amostra 28	178.67	156.28	170.35	124.32	135.93	578.93	138.62	195.88	187.61	774.72	M4
Amostra 29	183.02	166.41	172.35	138.73	148.77	524.09	150.56	227.56	215.73	709.39	M4
Amostra 30	207.51	195.22	208.65	162.51	178.50	484.74	168.17	239.57	231.70	716.63	M4
Amostra 31	189.00	191.46	192.83	163.00	177.37	471.81	151.54	243.08	223.96	577.70	M7
Amostra 32	208.62	199.57	213.55	182.60	205.49	461.38	166.46	256.17	245.58	546.71	M7
Amostra 33	188.19	185.19	202.89	169.91	185.77	490.18	156.33	226.28	218.68	611.94	M7
Amostra 34	199.54	195.23	197.49	182.05	201.88	482.94	159.76	238.40	234.38	580.74	M7
Amostra 35	204.40	192.55	207.96	176.90	191.85	459.87	161.06	248.62	238.45	564.46	M7
Amostra 36	181.89	171.75	182.80	167.28	174.67	482.14	143.77	224.48	216.78	584.99	M7
Amostra 37	186.00	174.62	178.96	145.35	165.32	469.98	146.64	243.16	230.63	542.18	M4
Amostra 38	200.22	200.31	202.56	161.79	187.29	433.96	160.29	236.73	225.76	550.11	M7
Amostra 39	161.10	161.71	160.52	141.60	168.20	570.77	137.52	224.07	212.39	702.68	M7
Amostra 40	214.14	220.45	222.23	193.69	233.13	425.11	183.59	270.97	260.00	532.46	M7
Amostra 41	193.78	175.04	195.88	149.87	165.86	452.03	154.08	224.27	212.55	528.56	M4
Amostra 42	183.18	171.46	170.55	142.12	154.15	538.47	144.31	222.95	217.08	637.95	M4
Amostra 43	199.13	200.59	204.21	180.89	198.48	437.26	162.59	255.14	241.15	531.66	M7
Amostra 44	186.25	167.07	182.33	144.20	156.51	425.82	144.96	222.68	205.40	598.25	M4
Amostra 45	183.79	165.85	181.50	150.39	163.90	469.53	142.24	215.33	211.43	542.85	M7
Amostra 46	145.49	151.93	129.46	126.35	136.85	554.75	122.46	219.57	205.78	611.61	M7
Amostra 47	188.91	179.81	193.89	143.92	170.47	518.14	146.53	234.42	217.49	607.65	M4
Amostra 48	222.29	208.44	223.72	162.99	177.40	449.78	170.46	267.99	254.48	520.16	M4
Amostra 49	191.57	178.98	191.71	146.66	165.97	447.10	152.29	237.21	179.85	527.68	M4
Amostra 50	201.86	197.42	212.02	174.77	197.53	440.16	164.82	250.63	240.45	561.09	M7

Tabela 4.4: Critério DIC para a amostra com 500 unidades

	M1	M2	M3	M4	M5	M6	M7	M8	M9	M12	Melhor Modelo Segundo o Critério DIC
Amostra 1	310.18	333.30	318.59	223.56	294.82	1038.46	234.68	350.88	368.99	1609.22	M4
Amostra 2	291.39	282.24	260.57	175.16	248.02	1050.95	216.90	292.56	292.02	1696.76	M4
Amostra 3	445.27	425.09	440.52	305.40	410.82	1384.27	369.86	416.98	421.24	1964.42	M4
Amostra 4	234.59	257.93	206.64	139.18	206.29	1321.49	225.17	296.44	315.49	2011.78	M4
Amostra 5	379.50	369.98	355.21	234.03	317.49	1098.01	301.39	387.33	402.46	1653.41	M4
Amostra 6	273.96	271.43	236.19	159.03	231.70	1205.76	222.00	288.96	306.87	2050.44	M4
Amostra 7	427.13	409.55	412.81	307.81	372.64	1094.96	369.68	428.79	440.09	1531.31	M4
Amostra 8	279.15	282.49	249.91	180.39	263.30	1203.37	241.04	319.26	328.20	2042.88	M4
Amostra 9	377.76	380.98	367.59	284.43	325.50	1098.10	308.81	354.96	358.38	1674.58	M4
Amostra 10	396.50	390.41	387.53	309.69	375.85	1125.05	309.91	369.23	371.43	1766.64	M4
Amostra 11	358.35	351.05	328.99	261.96	321.35	1243.27	290.58	358.23	358.67	1889.93	M4
Amostra 12	341.42	341.21	320.72	237.79	297.57	1143.79	272.41	357.73	364.12	1757.09	M4
Amostra 13	315.24	320.91	297.10	214.59	275.86	1200.59	250.92	324.39	319.68	1796.31	M4
Amostra 14	416.31	417.54	404.33	302.32	375.79	1081.02	359.54	440.06	458.39	1517.67	M4
Amostra 15	460.72	449.20	453.17	351.24	419.88	1045.62	382.51	461.27	472.63	1507.20	M4
Amostra 16	426.48	429.31	419.10	317.80	382.79	1122.61	352.54	416.05	425.11	1698.67	M4
Amostra 17	369.02	357.76	331.57	246.03	312.42	1227.81	321.99	410.67	422.05	1700.14	M4
Amostra 18	422.60	422.07	415.95	304.74	371.87	1011.33	340.71	437.42	433.95	1318.94	M4
Amostra 19	247.03	262.20	201.86	146.86	211.39	1089.84	181.11	257.04	261.62	1866.67	M4
Amostra 20	329.55	315.06	302.33	223.72	278.73	1374.66	273.81	310.55	315.65	2059.29	M4
Amostra 21	321.84	333.71	302.88	213.37	273.37	1136.78	253.75	334.84	354.49	1815.38	M4
Amostra 22	337.13	338.42	322.80	230.09	291.02	1085.91	260.47	356.62	362.16	1636.17	M4
Amostra 23	307.43	326.88	280.42	190.80	267.29	1090.43	257.35	345.04	334.16	1846.88	M4
Amostra 24	393.01	382.62	383.27	296.01	354.38	1223.51	315.96	365.82	369.88	1785.55	M4
Amostra 25	363.19	347.76	337.87	230.64	314.38	1063.44	283.26	358.54	364.54	1686.40	M4
Amostra 26	365.53	354.09	348.14	243.14	303.35	1154.88	309.36	373.14	383.65	1641.18	M4
Amostra 27	326.79	310.11	272.58	171.60	265.62	1074.65	285.91	360.57	379.08	1691.39	M4
Amostra 28	356.21	349.74	348.60	244.69	325.04	1090.05	272.95	356.67	365.54	1616.96	M4
Amostra 29	297.49	281.90	275.73	190.52	231.53	1055.34	220.90	302.91	312.58	1574.50	M4
Amostra 30	388.70	407.85	385.65	279.35	353.53	1188.31	318.48	393.84	404.01	1852.48	M4
Amostra 31	438.15	429.37	425.65	297.68	357.08	1184.87	368.48	411.22	415.74	1863.17	M4
Amostra 32	377.46	342.81	350.97	237.37	292.65	1191.73	315.74	331.73	328.02	1759.30	M4
Amostra 33	321.00	323.05	286.20	194.10	283.24	1212.82	258.29	334.34	333.93	1966.38	M4
Amostra 34	360.94	365.11	358.75	267.51	327.59	1064.75	288.35	356.59	359.92	1691.13	M4
Amostra 35	453.93	456.88	458.07	316.67	409.90	1050.55	393.75	486.76	490.83	1416.73	M4
Amostra 36	442.84	430.50	425.23	298.64	385.90	1160.29	365.96	435.81	442.06	1724.30	M4
Amostra 37	321.75	312.70	290.14	186.26	272.99	1065.66	271.70	331.00	336.17	1737.68	M4
Amostra 38	444.44	441.44	434.63	328.93	398.69	1017.60	362.28	468.11	475.19	1467.31	M4
Amostra 39	416.10	428.38	404.31	308.52	381.15	1091.81	357.77	447.79	450.74	1712.97	M4
Amostra 40	339.25	341.09	318.04	238.54	305.78	1063.57	288.21	373.49	373.54	1621.51	M4
Amostra 41	345.35	338.40	325.12	236.84	305.78	1000.43	282.55	368.86	374.14	1561.59	M4
Amostra 42	396.16	380.11	380.38	289.53	344.72	1145.31	316.73	370.11	367.24	1737.85	M4
Amostra 43	324.36	301.98	262.06	188.97	262.44	1292.45	269.91	328.55	345.45	2101.01	M4
Amostra 44	369.03	362.19	344.89	248.13	317.57	1117.05	310.17	393.49	401.00	1778.81	M4
Amostra 45	350.52	356.00	332.67	227.40	309.86	1083.62	275.69	369.40	380.27	1645.32	M4
Amostra 46	305.88	298.24	273.79	178.68	242.28	1223.70	257.32	316.83	325.13	1768.20	M4
Amostra 47	505.06	486.39	495.08	352.33	432.61	964.76	428.63	499.38	502.86	1335.18	M4
Amostra 48	440.39	438.11	438.67	320.74	386.54	1060.37	382.23	459.84	475.41	1549.10	M4
Amostra 49	405.66	401.95	386.17	275.08	366.27	1028.33	330.46	390.62	397.88	1552.44	M4
Amostra 50	366.30	363.57	356.81	366.30	296.22	1035.58	284.86	329.38	323.72	1587.10	M7



### 4.5.1 Análise dos resultados do conjunto com 192 unidades

#### Comparação dos modelos que diferem entre si apenas pela distribuição atribuída a ineficiência

A Tabela 4.5 indica o sinal da diferença dos critérios EPD e DIC comparando os modelos que diferem apenas pela distribuição atribuída às ineficiências. Nesta tabela, o sinal positivo, tanto para o critério EPD e DIC, indica que, para a respectiva amostra, o modelo com distribuição log-normal atribuída à ineficiência tem um melhor ajuste; caso o sinal seja negativo o modelo com distribuição normal truncada atribuída à ineficiência possuiu um melhor ajuste.

Observando a tabela e, analisando os modelos sem o efeito latente (modelos M1 e M7), notamos que 100% das amostras indicam que temos um melhor ajuste quando a distribuição log-normal é atribuída à ineficiência, tanto sob critério EPD como sob o DIC.

Tabela 4.5: Sinal da diferença dos critérios EPD e DIC comparando os modelos de acordo com a distribuição da ineficiência, para a amostra com 192 unidades.

	M1 - M7		M2 - M8		M3 - M9			M1 - M7		M2 - M8		M3 - M9	
	EPD	DIC	EPD	DIC	EPD	DIC		EPD	DIC	EPD	DIC	EPD	DIC
Amostra 1	+	+	-	-	-	-	Amostra 26	+	+	-	-	-	-
Amostra 2	+	+	-	-	-	-	Amostra 27	+	+	-	-	-	-
Amostra 3	+	+	-	-	-	-	Amostra 28	+	+	-	-	-	-
Amostra 4	+	+	-	-	-	-	Amostra 29	+	+	-	-	-	-
Amostra 5	+	+	-	-	-	-	Amostra 30	+	+	-	-	-	-
Amostra 6	+	+	-	-	-	-	Amostra 31	+	+	-	-	-	-
Amostra 7	+	+	-	-	-	-	Amostra 32	+	+	-	-	-	-
Amostra 8	+	+	-	-	-	-	Amostra 33	+	+	-	-	-	-
Amostra 9	+	+	-	-	-	-	Amostra 34	+	+	-	-	-	-
Amostra 10	+	+	-	-	-	-	Amostra 35	+	+	-	-	-	-
Amostra 11	+	+	-	-	-	-	Amostra 36	+	+	-	-	-	-
Amostra 12	+	+	-	-	-	-	Amostra 37	+	+	-	-	-	-
Amostra 13	+	+	-	-	-	-	Amostra 38	+	+	-	-	+	-
Amostra 14	+	+	-	-	-	-	Amostra 39	+	+	-	-	-	-
Amostra 15	+	+	-	-	-	-	Amostra 40	+	+	-	-	-	-
Amostra 16	+	+	-	-	-	-	Amostra 41	+	+	-	-	-	-
Amostra 17	+	+	-	-	-	-	Amostra 42	+	+	-	-	-	-
Amostra 18	+	+	-	-	-	-	Amostra 43	+	+	-	-	-	-
Amostra 19	+	+	-	-	-	-	Amostra 44	+	+	-	-	-	-
Amostra 20	+	+	-	-	-	-	Amostra 45	+	+	-	-	-	-
Amostra 21	+	+	-	-	-	-	Amostra 46	+	+	-	-	-	-
Amostra 22	+	+	-	-	-	-	Amostra 47	+	+	-	-	-	-
Amostra 23	+	+	-	-	-	-	Amostra 48	+	+	-	-	-	-
Amostra 24	+	+	-	-	-	-	Amostra 49	+	+	-	-	-	+
Amostra 25	+	+	-	-	-	-	Amostra 50	+	+	-	-	-	-

Se observamos os modelos que possuem o efeito latente (Modelos M2, M3, M8 e

M9), para 100% das amostras, ambos os critérios, indicam que o modelo M2 ( $u_{ij} \sim N^+(\alpha_i, \tau^2); \alpha \sim CAR(\psi^2)$ ) possui um melhor ajuste que o modelo M8 ( $u_{ij} \sim LN(\alpha_i, \tau^2); \alpha \sim CAR(\psi^2)$ ). E, para 98% das amostras, os dois critérios, também indicam um melhor ajuste do modelo M3 ( $u_{ij} \sim N^+(\alpha_i, \tau^2); \alpha \sim N(0, \psi^2)$ ) em relação ao modelo M9 ( $u_{ij} \sim LN(\alpha_i, \tau^2); \alpha \sim N(0, \psi^2)$ )

### **Comparação dos modelos que possuem estrutura espacial com aqueles que não possuem**

A Tabela 4.6 mostra a comparação entre os ajustes dos modelos em relação à priori atribuída ao efeito latente. Nesta tabela, o sinal positivo indica um melhor ajuste do modelo que possui priori normal independente para o efeito latente; e, o sinal negativo, um melhor ajuste para o modelo que possui a priori espacial para esse parâmetro.

Analisando a tabela, observa-se que em todas as amostras, nos dois critérios de comparação, a priori espacial mostra um melhor ajuste, em relação à priori normal independente, quando o parâmetro  $\alpha$  está localizado na média da variável dependente (modelo M6). Isso também é observado quando o parâmetro  $\alpha$  está localizado variância das ineficiências (modelo M4).

Para os modelos onde o efeito latente está localizado na média das ineficiências (modelos M2, M3, M8 e M9), não temos uma concordância entre os critérios. Segundo o critério EPD, observa-se que 46% das amostras indicam que o modelo com priori espacial possui um melhor ajuste, quando  $u_{ij} \sim N^+(\alpha_i, \tau^2)$ . Entretanto para 90% das amostras, segundo o critério DIC, temos um melhor ajuste do modelo com priori espacial para a mesma comparação. Se  $u_{ij} \sim LN(\alpha_i, \tau^2)$ , todas as amostras, segundo critério DIC, indicam que a priori normal independente possui um melhor ajuste. E, sob o critério EPD, apenas 56% das amostras indicam um melhor ajuste da priori normal independente.

Tabela 4.6: Sinal da diferença dos critérios EPD e DIC comparando os modelos que possuem estrutura espacial com aqueles que não possuem, para a amostra com 192 unidades.

	M2 - M3		M4 - M5		M6 - M12		M8 - M9			M2 - M3		M4 - M5		M6 - M12		M8 - M9	
	EPD	DIC	EPD	DIC	EPD	DIC	EPD	DIC		EPD	DIC	EPD	DIC	EPD	DIC	EPD	DIC
Amostra 1	+	-	-	-	-	-	+	+	Amostra 26	-	-	-	-	-	-	-	+
Amostra 2	-	-	-	-	-	-	-	+	Amostra 27	+	-	-	-	-	-	-	+
Amostra 3	+	-	-	-	-	-	-	+	Amostra 28	+	-	-	-	-	-	-	+
Amostra 4	+	-	-	-	-	-	-	+	Amostra 29	+	-	-	-	-	-	-	+
Amostra 5	-	-	-	-	-	-	-	+	Amostra 30	-	-	-	-	-	-	-	+
Amostra 6	-	-	-	-	-	-	+	+	Amostra 31	+	-	-	-	-	-	-	+
Amostra 7	-	-	-	-	-	-	-	+	Amostra 32	-	-	-	-	-	-	-	+
Amostra 8	+	+	-	-	-	-	+	+	Amostra 33	-	-	-	-	-	-	-	+
Amostra 9	+	+	-	-	-	-	-	+	Amostra 34	-	-	-	-	-	-	-	+
Amostra 10	+	-	-	-	-	-	-	+	Amostra 35	+	-	-	-	-	-	-	+
Amostra 11	-	-	-	-	-	-	+	+	Amostra 36	+	-	-	-	-	-	-	+
Amostra 12	+	-	-	-	-	-	+	+	Amostra 37	+	-	-	-	-	-	-	+
Amostra 13	-	-	-	-	-	-	+	+	Amostra 38	-	-	-	-	-	-	-	+
Amostra 14	+	-	-	-	-	-	+	+	Amostra 39	+	+	-	-	-	-	-	+
Amostra 15	+	-	-	-	-	-	+	+	Amostra 40	-	-	-	-	-	-	-	+
Amostra 16	+	-	-	-	-	-	-	+	Amostra 41	-	-	-	-	-	-	-	+
Amostra 17	+	-	-	-	-	-	+	+	Amostra 42	+	+	-	-	-	-	-	+
Amostra 18	-	-	-	-	-	-	+	+	Amostra 43	-	-	-	-	-	-	-	+
Amostra 19	-	-	-	-	-	-	-	+	Amostra 44	-	-	-	-	-	-	-	+
Amostra 20	+	-	-	-	-	-	-	+	Amostra 45	-	-	-	-	-	-	-	+
Amostra 21	-	-	-	-	-	-	+	+	Amostra 46	+	+	-	-	-	-	-	+
Amostra 22	-	-	-	-	-	-	-	+	Amostra 47	+	-	-	-	-	-	-	+
Amostra 23	-	-	-	-	-	-	-	+	Amostra 48	+	-	-	-	-	-	-	+
Amostra 24	+	-	-	-	-	-	+	+	Amostra 49	+	-	-	-	-	-	-	+
Amostra 25	+	-	-	-	-	-	+	+	Amostra 50	-	-	-	-	-	-	-	+

### Comparação dos modelos que não possuem o efeito latente, $\alpha$ , com aqueles que possuem esse efeito

A Tabela 4.7 mostra a comparação dos critérios entre o modelo sem o efeito latente com os modelos que possuem esse efeito. O sinal positivo indica um melhor ajuste dos modelos que possuem o efeito latente e, o sinal negativo os modelos que não possuem o efeito  $\alpha$ .

Observando a tabela, temos que segundo o critério EPD, 100% das amostras indicam que a presença do efeito latente melhora o ajuste do modelo quando atribuímos a distribuição normal truncada à ineficiência. Já sob o critério DIC, mais da metade das amostras também indicam que o ajuste do modelo melhora com a inclusão do efeito latente.

Quando atribuímos a distribuição Log-normal para a ineficiência, 100% das amostras sob os dois critérios indicam que o modelo sem o efeito latente possui um melhor ajuste.

Tabela 4.7: Sinal da diferença dos critérios EPD e DIC quando comparamos os modelos sem o parâmetro  $\alpha$  com aqueles modelos que possuem esse parâmetro, para a amostra com 192 unidades

	M1 - M2		M1 - M3		M1 - M4		M1 - M5		M7 - M8		M7 - M9	
	EPD	DIC	EPD	DIC	EPD	DIC	EPD	DIC	EPD	DIC	EPD	DIC
Amostra 1	+	+	+	+	+	+	+	+	-	-	-	-
Amostra 2	+	+	+	+	+	+	+	+	-	-	-	-
Amostra 3	+	+	+	-	+	+	+	+	-	-	-	-
Amostra 4	+	+	+	+	+	+	+	+	-	-	-	-
Amostra 5	+	+	+	-	+	+	+	+	-	-	-	-
Amostra 6	+	+	+	-	+	+	+	+	-	-	-	-
Amostra 7	+	+	+	-	+	+	+	+	-	-	-	-
Amostra 8	+	+	+	+	+	+	+	+	-	-	-	-
Amostra 9	+	+	+	+	+	+	+	+	-	-	-	-
Amostra 10	+	+	+	-	+	+	+	+	-	-	-	-
Amostra 11	+	+	+	-	+	+	+	+	-	-	-	-
Amostra 12	+	+	+	-	+	+	+	+	-	-	-	-
Amostra 13	+	+	+	-	+	+	+	-	-	-	-	-
Amostra 14	+	+	+	+	+	+	+	+	-	-	-	-
Amostra 15	+	+	+	+	+	+	+	+	-	-	-	-
Amostra 16	+	+	+	+	+	+	+	+	-	-	-	-
Amostra 17	+	-	+	-	+	+	+	-	-	-	-	-
Amostra 18	+	+	+	-	+	+	+	+	-	-	-	-
Amostra 19	+	-	+	-	+	+	+	+	-	-	-	-
Amostra 20	+	+	+	+	+	+	+	+	-	-	-	-
Amostra 21	+	+	+	-	+	+	+	+	-	-	-	-
Amostra 22	+	+	+	+	+	+	+	+	-	-	-	-
Amostra 23	+	+	+	-	+	+	+	+	-	-	-	-
Amostra 24	+	-	+	-	+	+	+	+	-	-	-	-
Amostra 25	+	+	+	-	+	+	+	+	-	-	-	-
Amostra 26	+	+	+	-	+	+	+	+	-	-	-	-
Amostra 27	+	+	+	-	+	+	+	+	-	-	-	-
Amostra 28	+	+	+	+	+	+	+	+	-	-	-	-
Amostra 29	+	+	+	+	+	+	+	+	-	-	-	-
Amostra 30	+	+	+	-	+	+	+	+	-	-	-	-
Amostra 31	+	-	+	-	+	+	+	+	-	-	-	-
Amostra 32	+	+	+	-	+	+	+	+	-	-	-	-
Amostra 33	+	+	+	-	+	+	+	+	-	-	-	-
Amostra 34	+	+	+	+	+	+	+	-	-	-	-	-
Amostra 35	+	+	+	-	+	+	+	+	-	-	-	-
Amostra 36	+	+	+	-	+	+	+	+	-	-	-	-
Amostra 37	+	+	+	+	+	+	+	+	-	-	-	-
Amostra 38	+	-	+	-	+	+	+	+	-	-	-	-
Amostra 39	+	-	+	+	+	+	+	-	-	-	-	-
Amostra 40	+	-	+	-	+	+	+	-	-	-	-	-
Amostra 41	+	+	+	-	+	+	+	+	-	-	-	-
Amostra 42	+	+	+	+	+	+	+	+	-	-	-	-
Amostra 43	+	-	+	-	+	+	+	+	-	-	-	-
Amostra 44	+	+	+	+	+	+	+	+	-	-	-	-
Amostra 45	+	+	+	+	+	+	+	+	-	-	-	-
Amostra 46	+	-	+	+	+	+	+	+	-	-	-	-
Amostra 47	+	+	+	-	+	+	+	+	-	-	-	-
Amostra 48	+	+	+	-	+	+	+	+	-	-	-	-
Amostra 49	+	+	+	-	+	+	+	+	-	-	-	-
Amostra 50	+	+	+	-	+	+	+	+	-	-	-	-

## Comparação do modelo que foi utilizado para gerar o conjunto de dados com todos os outros modelos

A Tabela 4.8 mostra a comparação do ajuste entre o modelo que foi utilizado para gerar o conjunto de dados simulados com os demais modelos propostos. O sinal negativo indica um melhor ajuste do modelo que originou os dados; e, o sinal positivo um pior ajuste quando comparado ao respectivo modelo.

Observa-se que o modelo que originou os dados possui um ajuste melhor em 100% das amostras, sob ambos os critérios, que os modelos que possuem o efeito latente na média da variável dependente (M6 e M12) e, os modelos M8 ( $u_{ij} \sim N^+(0, \tau_i^2); \alpha \sim CAR(\psi^2)$ ) e M9 ( $u_{ij} \sim N^+(0, \tau_i^2); \alpha \sim N(0, \psi^2)$ ). Também observa-se que este modelo possui um melhor ajuste que o modelo M1 ( $u_{ij} \sim N^+(0, \tau^2)$ ) em 100% das amostras segundo o critério EPD e, 80% no critério DIC. Comparando com o modelo que só se difere em relação à priori atribuída à ineficiência (modelo M3), o modelo que originou os dados mostra uma melhor ajuste em 90% das amostras segundo o critério DIC e, no critério EPD em apenas 46% das amostras.

Em relação aos outros modelos, o modelo que originou os dados mostrou um pior ajuste segundo ambos os critérios. Observando os modelos com efeito latente na variância das ineficiências e distribuição normal truncada atribuída, M4 e M5, temos que sob o critério EPD, todas as amostras indicaram um melhor ajuste desses modelos e, sob o critério DIC, 100% das amostras indicaram um melhor ajuste do modelo M4 e, 70% para o modelo M5. Também temos que 100% das amostras segundo o critério DIC e 92% sob o critério EPD, indicam um melhor ajuste do modelo sem o efeito latente e distribuição log-normal atribuída a ineficiência

Tabela 4.8: Sinal da diferença dos critérios EPD e DIC comparando o modelo que foi utilizado para gerar os dados com todos os outros modelos, para a amostra com 192 unidades.

	M2 - M1		M2 - M3		M2 - M4		M2 - M5		M2 - M6		M2 - M7		M2 - M8		M2 - M9		M2 - M12	
	EPD	DIC	EPD	DIC	EPD	DIC	EPD	DIC	EPD	DIC	EPD	DIC	EPD	DIC	EPD	DIC	EPD	DIC
Amostra 1	-	-	+	-	+	+	+	+	-	-	+	+	-	-	-	-	-	-
Amostra 2	-	-	-	-	+	+	+	-	-	-	+	+	-	-	-	-	-	-
Amostra 3	-	-	+	-	+	+	+	+	-	-	+	+	-	-	-	-	-	-
Amostra 4	-	-	+	-	+	+	+	+	-	-	-	+	-	-	-	-	-	-
Amostra 5	-	-	-	-	+	+	+	+	-	-	+	+	-	-	-	-	-	-
Amostra 6	-	-	-	-	+	+	+	+	-	-	+	+	-	-	-	-	-	-
Amostra 7	-	-	-	-	+	+	+	+	-	-	+	+	-	-	-	-	-	-
Amostra 8	-	-	+	+	+	+	+	+	-	-	-	+	-	-	-	-	-	-
Amostra 9	-	-	+	+	+	+	+	+	-	-	+	+	-	-	-	-	-	-
Amostra 10	-	-	+	-	+	+	+	+	-	-	+	+	-	-	-	-	-	-
Amostra 11	-	-	-	-	+	+	+	-	-	-	+	+	-	-	-	-	-	-
Amostra 12	-	-	+	-	+	+	+	+	-	-	+	+	-	-	-	-	-	-
Amostra 13	-	-	-	-	+	+	+	-	-	-	+	+	-	-	-	-	-	-
Amostra 14	-	-	+	-	+	+	+	+	-	-	+	+	-	-	-	-	-	-
Amostra 15	-	-	+	-	+	+	+	+	-	-	+	+	-	-	-	-	-	-
Amostra 16	-	-	+	-	+	+	+	+	-	-	+	+	-	-	-	-	-	-
Amostra 17	-	+	+	-	+	+	+	-	-	-	+	+	-	-	-	-	-	-
Amostra 18	-	-	-	-	+	+	+	+	-	-	+	+	-	-	-	-	-	-
Amostra 19	-	+	-	-	+	+	+	+	-	-	+	+	-	-	-	-	-	-
Amostra 20	-	-	+	-	+	+	+	+	-	-	-	+	-	-	-	-	-	-
Amostra 21	-	-	-	-	+	+	+	+	-	-	+	+	-	-	-	-	-	-
Amostra 22	-	-	-	-	+	+	+	-	-	-	+	+	-	-	-	-	-	-
Amostra 23	-	-	-	-	+	+	+	+	-	-	+	+	-	-	-	-	-	-
Amostra 24	-	+	+	-	+	+	+	+	-	-	+	+	-	-	-	-	-	-
Amostra 25	-	-	+	-	+	+	+	-	-	-	+	+	-	-	-	-	-	-
Amostra 26	-	-	-	-	+	+	+	-	-	-	+	+	-	-	-	-	-	-
Amostra 27	-	-	+	-	+	+	+	+	-	-	+	+	-	-	-	-	-	-
Amostra 28	-	-	+	-	+	+	+	+	-	-	+	+	-	-	-	-	-	-
Amostra 29	-	-	+	-	+	+	+	+	-	-	-	+	-	-	-	-	-	-
Amostra 30	-	-	-	-	+	+	+	+	-	-	+	+	-	-	-	-	-	-
Amostra 31	-	+	+	-	+	+	+	+	-	-	+	+	-	-	-	-	-	-
Amostra 32	-	-	-	-	+	+	+	-	-	-	+	+	-	-	-	-	-	-
Amostra 33	-	-	-	-	+	+	+	-	-	-	+	+	-	-	-	-	-	-
Amostra 34	-	-	-	-	+	+	+	-	-	-	+	+	-	-	-	-	-	-
Amostra 35	-	-	+	-	+	+	+	+	-	-	+	+	-	-	-	-	-	-
Amostra 36	-	-	+	-	+	+	+	-	-	-	+	+	-	-	-	-	-	-
Amostra 37	-	-	+	-	+	+	+	+	-	-	+	+	-	-	-	-	-	-
Amostra 38	-	+	-	-	+	+	+	+	-	-	+	+	-	-	-	-	-	-
Amostra 39	-	+	+	+	+	+	+	-	-	-	+	+	-	-	-	-	-	-
Amostra 40	-	+	-	-	+	+	+	-	-	-	+	+	-	-	-	-	-	-
Amostra 41	-	-	-	-	+	+	+	+	-	-	+	+	-	-	-	-	-	-
Amostra 42	-	-	+	+	+	+	+	+	-	-	+	+	-	-	-	-	-	-
Amostra 43	-	+	-	-	+	+	+	+	-	-	+	+	-	-	-	-	-	-
Amostra 44	-	-	-	-	+	+	+	+	-	-	+	+	-	-	-	-	-	-
Amostra 45	-	-	-	-	+	+	+	+	-	-	+	+	-	-	-	-	-	-
Amostra 46	-	+	+	+	+	+	+	+	-	-	+	+	-	-	-	-	-	-
Amostra 47	-	-	+	-	+	+	+	+	-	-	+	+	-	-	-	-	-	-
Amostra 48	-	-	+	-	+	+	+	+	-	-	+	+	-	-	-	-	-	-
Amostra 49	-	-	+	-	+	+	+	+	-	-	+	+	-	-	-	-	-	-
Amostra 50	-	-	-	-	+	+	+	-	-	-	+	+	-	-	-	-	-	-

## Comparação dos modelos segundo o critério de ordenação das eficiências quando comparados às ordenações verdadeiras

As Tabelas 4.9, 4.10 e 4.11 apresentam os resultados, para 3 amostras, segundo o critério de ordenação das eficiências para o conjunto de dados com 192 unidades.

Avaliando as três tabelas, percebe-se que os modelos M6 e M12, que possuem o efeito latente na média da variável dependente, apresentam os maiores valores desse critério, indicando que estes modelos são os que estão ordenando as eficiências de maneira mais distantes da ordenação original.

Outra conclusão é que o modelo M4, que possui o parâmetro  $\alpha$  na variância da distribuição da ineficiência e estrutura espacial, apresenta os menores valores desse critério. Indicando que este modelo está mais parecido com a ordenação original, apesar de ser diferente do modelo que gerou os dados.

Para entendermos melhor o que significa o resultado desse critério, vamos tomar por base a tabela da amostra 33, modelo M12 e percentil 5,2%. Observando esse percentil, ou as dez primeiras eficiências, temos que a diferença entre as ordenações estimada e verdadeira se diferem em mais de 5,2%, ou dez posições, para 90% das unidades desse percentil. Ou seja, temos que das dez primeiras eficiências, nove delas têm uma ordenação estimada com uma diferença maior que 10 posições da ordenação original. Caso analisemos o mesmo percentil e tabela para o modelo M4, temos que apenas quatro, das dez primeiras eficiências, diferem em mais de dez posições da ordenação original.

Tabela 4.9: Resultado obtido para o critério de ordenação das eficiências, para a amostra 1 do conjunto de dados com 192 unidades

Modelo	Percentil $n_k/N$									
	0.052	0.104	0.156	0.208	0.260	0.313	0.365	0.417	0.469	0.521
M1	0.100	0.200	0.200	0.200	0.100	0.117	0.057	0.000	0.000	0.000
M2	0.100	0.250	0.200	0.200	0.120	0.117	0.086	0.038	0.011	0.000
M3	0.100	0.200	0.167	0.175	0.120	0.083	0.071	0.000	0.000	0.000
M4	0.100	0.200	0.167	0.175	0.100	0.100	0.071	0.000	0.000	0.000
M5	0.100	0.200	0.200	0.175	0.120	0.117	0.086	0.025	0.000	0.000
M6	<b>0.400</b>	<b>0.500</b>	<b>0.367</b>	<b>0.275</b>	0.100	0.067	0.043	0.000	0.000	0.000
M7	0.100	0.200	0.200	0.175	0.100	0.117	0.057	0.000	0.000	0.000
M8	0.100	0.300	0.300	0.225	0.120	0.150	0.143	0.088	0.056	0.020
M9	0.100	0.300	0.300	0.225	0.120	0.150	0.114	0.075	0.044	0.020
M12	<b>0.700</b>	<b>0.600</b>	<b>0.600</b>	<b>0.450</b>	0.140	0.100	0.014	0.013	0.011	0.000

Tabela 4.10: Resultado obtido para o critério de ordenação das eficiências, para a amostra 16 do conjunto de dados com 192 unidades

Modelo	Percentil $n_k/N$									
	0.052	0.104	0.156	0.208	0.260	0.313	0.365	0.417	0.469	0.521
M1	0.40	0.25	0.23	0.15	0.16	0.07	0.01	0.00	0.00	0.00
M2	0.30	0.20	0.27	0.23	0.14	0.12	0.07	0.01	0.00	0.00
M3	0.30	0.20	0.23	0.15	0.12	0.08	0.03	0.00	0.00	0.00
M4	<b>0.10</b>	<b>0.15</b>	0.20	<b>0.13</b>	<b>0.10</b>	0.10	0.03	0.03	0.01	0.00
M5	0.10	0.15	0.20	0.18	0.10	0.10	0.04	0.04	0.00	0.00
M6	<b>0.70</b>	<b>0.50</b>	<b>0.33</b>	0.30	0.16	0.10	0.00	0.00	0.00	0.00
M7	0.30	0.25	0.20	0.15	0.12	0.08	0.03	0.01	0.00	0.00
M8	0.40	0.25	0.30	0.23	0.20	0.15	0.11	0.08	0.07	0.03
M9	0.40	0.35	0.30	0.28	0.18	0.17	0.11	0.08	0.07	0.04
M12	<b>0.80</b>	<b>0.70</b>	<b>0.47</b>	0.40	0.20	0.10	0.03	0.00	0.00	0.00

Tabela 4.11: Resultado obtido para o critério de ordenação das eficiências, para a amostra 33 do conjunto de dados com 192 unidades

Modelo	Percentil $n_k/N$									
	0.052	0.104	0.156	0.208	0.260	0.313	0.365	0.417	0.469	0.521
M1	0.80	0.45	0.27	0.20	0.12	0.05	0.03	0.01	0.00	0.00
M2	0.80	0.30	0.27	0.20	0.20	0.10	0.06	0.01	0.01	0.00
M3	0.80	0.35	0.23	0.23	0.10	0.07	0.01	0.01	0.00	0.00
M4	<b>0.40</b>	<b>0.15</b>	<b>0.23</b>	<b>0.13</b>	<b>0.06</b>	0.03	0.03	0.01	0.01	0.01
M5	0.50	0.15	0.23	0.18	0.12	0.03	0.04	0.01	0.01	0.01
M6	<b>0.80</b>	<b>0.65</b>	<b>0.43</b>	<b>0.20</b>	0.16	0.12	0.04	0.01	0.01	0.00
M7	0.70	0.35	0.27	0.18	0.08	0.05	0.03	0.01	0.01	0.00
M8	0.60	0.40	0.27	0.20	0.20	0.12	0.10	0.05	0.02	0.01
M9	0.60	0.35	0.27	0.20	0.20	0.12	0.11	0.05	0.02	0.01
M12	<b>0.90</b>	<b>0.80</b>	<b>0.47</b>	<b>0.38</b>	0.24	0.15	0.06	0.04	0.01	0.01

### Análise dos modelos segundo as estimativas a posteriori das ineficiências

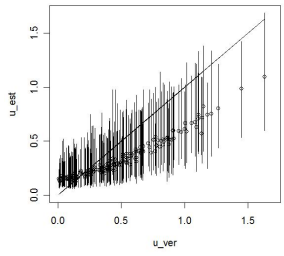
Nesta seção investigaremos, para cada modelo, os valores estimados das ineficiências com os respectivos valores verdadeiros. Entretanto, como temos 50 amostras para cada modelo, faremos um sumário dos resultados. Para esse sumário, só utilizaremos as medianas a posteriori de cada ineficiência, obtida em cada amostra. Resultando num total de 50 medianas a posteriori das ineficiências, para cada modelo.

A Figura 4.4 apresenta para cada modelo as medianas a posteriori estimadas contra os verdadeiros valores. O símbolo "o" no gráfico significa a mediana das 50 medianas a posteriori de cada amostra, e a linha se estende da menor mediana até a maior mediana encontrada entre as 50 amostras.

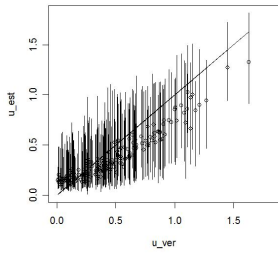
Analisando o gráfico, observa-se que os modelos M4 e M5, que possuem o efeito latente na variância da distribuição da ineficiência, apresentam as estimativas a posteriori



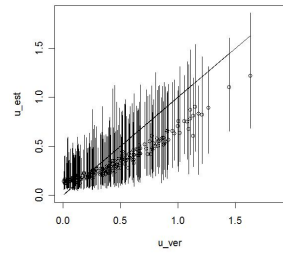
mais próximas dos verdadeiros valores. Já para os modelos que possuem distribuição log-normal para as ineficiências, M7, M8 e M9, percebe-se uma superestimação das ineficiências estimadas, quando comparadas às verdadeiras. Também, observa-se uma subestimação das ineficiências estimadas quando utilizamos os modelos M6 e M12.



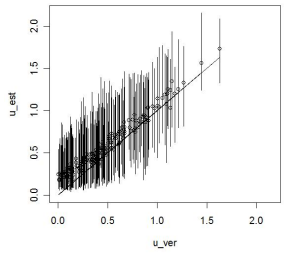
(a) M1



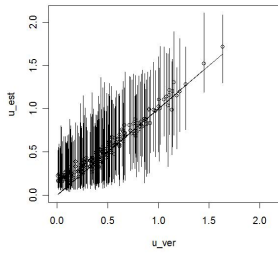
(b) M2



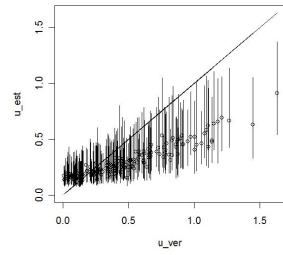
(c) M3



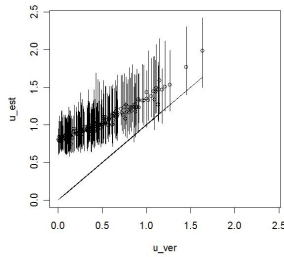
(d) M4



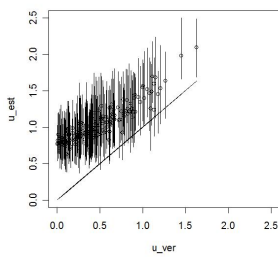
(e) M5



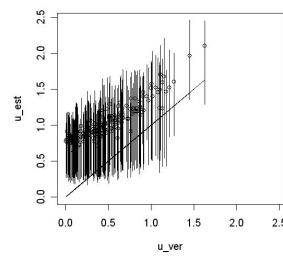
(f) M6



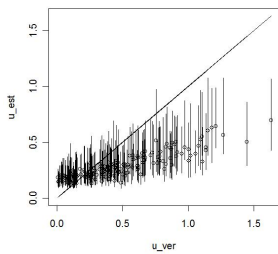
(g) M7



(h) M8



(i) M9



(j) M12

Figura 4.4: Gráfico das ineficiências estimadas contra os verdadeiros valores das ineficiências, segundo cada modelo ajustado, para o conjunto de dados com 192 unidades.

## 4.5.2 Análise dos resultados do conjunto com 500 unidades

### Comparação dos modelos que diferem entre si apenas pela distribuição atribuída a ineficiência

A Tabela 4.12 indica o sinal da diferença dos critérios EPD e DIC comparando os modelos que diferem entre si apenas pela distribuição atribuída às ineficiências. Nesta tabela, o sinal positivo, tanto para o critério EPD, como para o DIC, indica que para a respectiva amostra o modelo com distribuição log-normal atribuída à ineficiência tem um melhor ajuste; caso o sinal seja negativo o modelo com distribuição normal truncada atribuída à ineficiência possuiu um melhor ajuste.

Observando a tabela, e comparando os modelos sem o efeito latente (modelos M1 e M7), temos que 100% das amostras indicam que temos um melhor ajuste quando a distribuição log-normal é atribuída à ineficiência, tanto sob o critério EPD como sob o DIC.

Tabela 4.12: Sinal da diferença dos critérios EPD e DIC comparando os modelos de acordo com a distribuição da ineficiência, para a amostra com 500 unidades.

	M1 - M7		M2 - M8		M3 - M9			M1 - M7		M2 - M8		M3 - M9	
	EPD	DIC	EPD	DIC	EPD	DIC		EPD	DIC	EPD	DIC	EPD	DIC
Amostra 1	+	+	+	-	-	-	Amostra 26	+	+	-	-	-	-
Amostra 2	+	+	+	-	-	-	Amostra 27	+	+	-	-	-	-
Amostra 3	+	+	+	+	+	+	Amostra 28	+	+	+	-	-	-
Amostra 4	+	+	-	-	-	-	Amostra 29	+	+	-	-	-	-
Amostra 5	+	+	-	-	-	-	Amostra 30	+	+	+	+	-	-
Amostra 6	+	+	-	-	-	-	Amostra 31	+	+	+	+	+	+
Amostra 7	+	+	-	-	-	-	Amostra 32	+	+	+	+	+	+
Amostra 8	+	+	-	-	-	-	Amostra 33	+	+	-	-	-	-
Amostra 9	+	+	+	+	+	+	Amostra 34	+	+	+	+	-	-
Amostra 10	+	+	+	+	+	+	Amostra 35	+	+	-	-	-	-
Amostra 11	+	+	+	-	-	-	Amostra 36	+	+	-	-	-	-
Amostra 12	+	+	+	-	-	-	Amostra 37	+	+	-	-	-	-
Amostra 13	+	+	+	-	-	-	Amostra 38	+	+	-	-	-	-
Amostra 14	+	+	-	-	-	-	Amostra 39	+	+	-	-	-	-
Amostra 15	+	+	+	-	+	-	Amostra 40	+	+	-	-	-	-
Amostra 16	+	+	+	+	-	-	Amostra 41	+	+	-	-	-	-
Amostra 17	+	+	-	-	-	-	Amostra 42	+	+	+	+	+	+
Amostra 18	+	+	+	-	-	-	Amostra 43	+	+	-	-	-	-
Amostra 19	+	+	+	+	-	-	Amostra 44	+	+	-	-	-	-
Amostra 20	+	+	+	+	-	-	Amostra 45	+	+	+	-	-	-
Amostra 21	+	+	+	-	-	-	Amostra 46	+	+	-	-	-	-
Amostra 22	+	+	+	-	-	-	Amostra 47	+	+	-	-	-	-
Amostra 23	+	+	+	-	-	-	Amostra 48	+	+	-	-	-	-
Amostra 24	+	+	+	+	+	+	Amostra 49	+	+	+	+	-	-
Amostra 25	+	+	-	-	-	-	Amostra 50	+	+	+	+	+	+

Para os modelos que o parâmetro  $\alpha$  está na média da distribuição da ineficiência (modelos M2, M3, M8 e M9), temos que, se a priori atribuída ao parâmetro  $\alpha$  for normal independente, o modelo com a distribuição normal truncada tem um ajuste melhor em 82% das amostras sob o critério EPD e 84% sob o critério DIC. Caso a priori atribuída seja a distribuição CAR, o modelo com distribuição normal truncada para as ineficiências se ajusta melhor em 48% das amostras sob o critério EPD e 72% sob o critério DIC.

### **Comparação dos modelos que assumem estrutura espacial a priori com aqueles que não assumem**

A Tabela 4.13 mostra a comparação entre os ajustes dos modelos em relação à priori atribuída ao efeito latente. Nesta tabela, o sinal positivo indica um melhor ajuste do modelo que possui priori normal independente para o efeito latente e o sinal negativo um melhor ajuste para o modelo que possui a priori espacial para esse parâmetro.

Analisando os modelos que possuem distribuição normal truncada atribuída à ineficiência, observa-se que em todas as amostras, sob os dois critérios de comparação, a priori espacial mostra um melhor ajuste quando o parâmetro  $\alpha$  está localizado na média da variável dependente. Para os modelos onde o efeito latente está na variância da distribuição da ineficiência (modelos M4 e M5), temos que a priori espacial se ajusta melhor em 100% e 98% das amostras segundo os critérios EPD e DIC, respectivamente. Entretanto, se o efeito latente estiver na média da distribuição da ineficiência, apenas 2% e 18% das amostras indicam um melhor ajuste da priori espacial nos critérios EPD e DIC, respectivamente.

Avaliando os modelos que possuem distribuição log-normal atribuída à ineficiência (modelos M8 e M9), observamos que, sob ambos os critérios, 84% das amostras apontam que a priori espacial se ajusta melhor ao conjunto de dados.

Tabela 4.13: Sinal da diferença dos critérios EPD e DIC comparando os modelos que possuem estrutura espacial com aqueles que não possuem, para a amostra com 500 unidades.

	M2 - M3		M4 - M5		M6 - M12		M8 - M9			M2 - M3		M4 - M5		M6 - M12		M8 - M9	
	EPD	DIC	EPD	DIC	EPD	DIC	EPD	DIC		EPD	DIC	EPD	DIC	EPD	DIC	EPD	DIC
Amostra 1	+	+	-	-	-	-	-	-	Amostra 26	+	+	-	-	-	-	-	-
Amostra 2	+	+	-	-	-	-	+	+	Amostra 27	+	+	-	-	-	-	-	-
Amostra 3	+	-	-	-	-	-	-	-	Amostra 28	+	+	-	-	-	-	-	-
Amostra 4	+	+	-	-	-	-	-	-	Amostra 29	+	+	-	-	-	-	-	-
Amostra 5	+	+	-	-	-	-	-	-	Amostra 30	+	+	-	-	-	-	-	-
Amostra 6	+	+	-	-	-	-	-	-	Amostra 31	+	+	-	-	-	-	-	-
Amostra 7	+	-	-	-	-	-	-	-	Amostra 32	+	-	-	-	-	-	+	+
Amostra 8	+	+	-	-	-	-	-	-	Amostra 33	+	+	-	-	-	-	-	+
Amostra 9	+	+	-	-	-	-	+	-	Amostra 34	+	+	-	-	-	-	-	-
Amostra 10	+	+	-	-	-	-	-	-	Amostra 35	+	-	-	-	-	-	-	-
Amostra 11	+	+	-	-	-	-	-	-	Amostra 36	+	+	-	-	-	-	-	-
Amostra 12	+	+	-	-	-	-	+	-	Amostra 37	+	+	-	-	-	-	-	-
Amostra 13	+	+	-	-	-	-	-	+	Amostra 38	+	+	-	-	-	-	-	-
Amostra 14	+	+	-	-	-	-	-	-	Amostra 39	+	+	-	-	-	-	-	-
Amostra 15	+	-	-	-	-	-	-	-	Amostra 40	+	+	-	-	-	-	-	-
Amostra 16	+	+	-	-	-	-	-	-	Amostra 41	+	+	-	-	-	-	-	-
Amostra 17	+	+	-	-	-	-	-	-	Amostra 42	+	-	-	-	-	-	+	+
Amostra 18	+	+	-	-	-	-	+	+	Amostra 43	+	+	-	-	-	-	-	-
Amostra 19	+	+	-	-	-	-	-	-	Amostra 44	+	+	-	-	-	-	-	-
Amostra 20	+	+	-	-	-	-	-	-	Amostra 45	+	+	-	-	-	-	-	-
Amostra 21	+	+	-	-	-	-	-	-	Amostra 46	+	+	-	-	-	-	-	-
Amostra 22	+	+	-	-	-	-	-	-	Amostra 47	-	-	-	-	-	-	-	-
Amostra 23	+	+	-	-	-	-	+	+	Amostra 48	+	-	-	-	-	-	-	-
Amostra 24	+	-	-	-	-	-	-	-	Amostra 49	+	+	-	-	-	-	-	-
Amostra 25	+	+	-	-	-	-	-	-	Amostra 50	+	+	-	+	-	-	+	+

### Comparação dos modelos que não possuem o efeito latente, $\alpha$ , com aqueles que possuem esse efeito

A Tabela 4.14 mostra a comparação dos critérios entre o modelo sem o efeito latente com os modelos que possuem esse efeito. O sinal positivo indica um melhor ajuste dos modelos que possuem o efeito latente e o sinal negativo um melhor ajuste dos modelos sem o efeito local.

Analisando os modelos em que a distribuição log-normal foi atribuída à ineficiência (modelos M7, M8 e M9), temos que segundo o critério DIC, 100% das amostras apontam que o modelo sem o efeito latente (modelo M7) possui um melhor ajuste em relação aos modelos M8 e M9. No critério EPD, temos um total de 94% e 96% das amostras indicam um melhor ajuste do modelo M7 comparado aos modelos M8 e M9, respectivamente.

Agora avaliaremos os modelos em que a distribuição normal truncada foi atribuída à ineficiência (modelos M1, M2, M3, M4 e M5). Observando os modelos onde o efeito

Tabela 4.14: Sinal da diferença dos critérios EPD e DIC comparando os modelos sem o parâmetro  $\alpha$  com aqueles modelos que possuem esse parâmetro, para a amostra com 500 unidades.

	M1 - M2		M1 - M3		M1 - M4		M1 - M5		M7 - M8		M7 - M9	
	EPD	DIC	EPD	DIC	EPD	DIC	EPD	DIC	EPD	DIC	EPD	DIC
Amostra 1	-	-	+	-	+	+	+	+	-	-	-	-
Amostra 2	+	+	+	+	+	+	+	+	-	-	-	-
Amostra 3	+	+	+	+	+	+	+	+	-	-	-	-
Amostra 4	-	-	+	+	+	+	+	+	-	-	-	-
Amostra 5	+	+	+	+	+	+	+	+	-	-	-	-
Amostra 6	-	+	+	+	+	+	+	+	-	-	-	-
Amostra 7	+	+	+	+	+	+	+	+	-	-	-	-
Amostra 8	+	-	+	+	+	+	+	+	-	-	-	-
Amostra 9	+	-	+	+	+	+	+	+	-	-	-	-
Amostra 10	+	+	+	+	+	+	+	+	-	-	-	-
Amostra 11	+	+	+	+	+	+	+	+	-	-	-	-
Amostra 12	-	+	+	+	+	+	+	+	-	-	-	-
Amostra 13	-	-	+	+	+	+	+	+	-	-	-	-
Amostra 14	-	-	+	+	+	+	+	+	-	-	-	-
Amostra 15	+	+	+	+	+	+	+	+	-	-	-	-
Amostra 16	+	-	+	+	+	+	+	+	-	-	-	-
Amostra 17	+	+	+	+	+	+	+	+	-	-	-	-
Amostra 18	-	+	+	+	+	+	+	+	-	-	-	-
Amostra 19	-	-	+	+	+	+	+	+	-	-	-	-
Amostra 20	+	+	+	+	+	+	+	+	+	-	-	-
Amostra 21	-	-	+	+	+	+	+	+	-	-	-	-
Amostra 22	-	-	+	+	+	+	+	+	-	-	-	-
Amostra 23	-	-	+	+	+	+	+	+	-	-	-	-
Amostra 24	+	+	+	+	+	+	+	+	-	-	-	-
Amostra 25	+	+	+	+	+	+	+	+	-	-	-	-
Amostra 26	+	+	+	+	+	+	+	+	-	-	-	-
Amostra 27	+	+	+	+	+	+	+	+	-	-	-	-
Amostra 28	+	+	+	+	+	+	+	+	-	-	-	-
Amostra 29	+	+	+	+	+	+	+	+	-	-	-	-
Amostra 30	-	-	+	+	+	+	+	+	-	-	-	-
Amostra 31	+	+	+	+	+	+	+	+	+	-	-	-
Amostra 32	+	+	+	+	+	+	+	+	+	-	+	-
Amostra 33	+	-	+	+	+	+	+	+	-	-	-	-
Amostra 34	-	-	+	+	+	+	+	+	-	-	-	-
Amostra 35	-	-	+	-	+	+	+	+	-	-	-	-
Amostra 36	+	+	+	+	+	+	+	+	-	-	-	-
Amostra 37	+	+	+	+	+	+	+	+	-	-	-	-
Amostra 38	-	+	+	+	+	+	+	+	-	-	-	-
Amostra 39	-	-	+	+	+	+	+	+	-	-	-	-
Amostra 40	+	-	+	+	+	+	+	+	-	-	-	-
Amostra 41	+	+	+	+	+	+	+	+	-	-	-	-
Amostra 42	+	+	+	+	+	+	+	+	-	-	-	-
Amostra 43	+	+	+	+	+	+	+	+	-	-	-	-
Amostra 44	-	+	+	+	+	+	+	+	-	-	-	-
Amostra 45	-	-	+	+	+	+	+	+	-	-	-	-
Amostra 46	+	+	+	+	+	+	+	+	-	-	-	-
Amostra 47	+	+	+	+	+	+	+	+	-	-	-	-
Amostra 48	+	+	+	+	+	+	+	+	-	-	-	-
Amostra 49	+	+	+	+	+	+	+	+	-	-	-	-
Amostra 50	+	+	+	+	+	-	+	+	-	-	+	-

local está na variância da distribuição da ineficiência (M4 e M5), 100% das amostras sob o critério EPD indicam uma melhor ajuste desses modelos. Já para o critério DIC, 98% e 100% das amostras apontam, respectivamente, que os modelos M4 e M5 apresentam um melhor ajuste quando comparados ao modelo mais simples (modelo M1). Se o efeito latente estiver na média da distribuição da ineficiência (modelos M2 e M3), temos que o modelo M2 tem um melhor ajuste em 64% das amostras sob os dois critérios. Já o modelo M3, possui um melhor ajuste do que o modelo sem o efeito latente (modelo M1), em 100% das amostras sob o critério EPD e, em 94% das mesmas, sob o critério DIC.

### **Comparação do modelo que foi utilizado para gerar o conjunto de dados com todos os outros modelos**

A Tabela 4.15 mostra a comparação do ajuste entre o modelo que foi utilizado para gerar o conjunto de dados simulados com os demais modelos propostos. O sinal negativo indica um melhor ajuste do modelo que originou os dados e, o sinal positivo um pior ajuste comparado com o respectivo modelo.

Observa-se que o modelo que originou os dados possui um ajuste melhor em 100% das amostras, sob ambos os critérios, do que os modelos que possuem o efeito latente na média da variável dependente (M6 e M12).

Analisando os modelos M4 ( $u_{ij} \sim N^+(0, \tau_i^2); \alpha \sim CAR(\psi^2)$ ) e M5 ( $u_{ij} \sim N^+(0, \tau_i^2); \alpha \sim N(0, \psi^2)$ ), temos que sob o critério EPD, todas as amostras indicaram um melhor ajuste desses modelos e, sob o critério DIC, 98% das amostras indicaram um melhor ajuste do modelo M4 e, 100% para o modelo M5.

Em relação aos modelos que não possuem o efeito latente (modelos M1 e M7), observa-se que para 100% das amostras, os dois critérios indicam um melhor ajuste do modelo M7 ( $u_{ij} \sim LN(0, \tau^2)$ ). Entretanto, o modelo que originou os dados se ajusta melhor para 64% das amostras, sob ambos os critérios, em relação ao modelo M1 ( $u_{ij} \sim N^+(0, \tau^2)$ ).

Comparando com os modelos que possuem o efeito latente na média da distribuição das ineficiências (modelos M3, M8 e M9), observa-se que o modelo que originou os dados possui melhor ajuste para apenas 2% e 18% das amostras, sob os critérios EPD e DIC, respectivamente, comparado ao modelo M3 ( $u_{ij} \sim N^+(\alpha_i, \tau^2); \alpha \sim N(0, \psi^2)$ ). Já o

modelo M2 tem um melhor ajuste para 48% e 52% das amostras sob o critério EPD comparando com os modelos M8 ( $u_{ij} \sim LN(\alpha_i, \tau^2)$ ;  $\alpha \sim CAR(\psi^2)$ ) e M9 ( $u_{ij} \sim LN(\alpha_i, \tau^2)$ ;  $\alpha \sim N(0, \psi^2)$ ), respectivamente, e 72% sob o critério DIC em ambos os modelos.



Tabela 4.15: Sinal da diferença dos critérios EPD e DIC comparando o modelo que foi utilizado para gerar os dados com todos os outros modelos, para a amostra com 500 unidades.

	M2 - M1		M2 - M3		M2 - M4		M2 - M5		M2 - M6		M2 - M7		M2 - M8		M2 - M9		M2 - M12	
	EPD	DIC	EPD	DIC	EPD	DIC	EPD	DIC	EPD	DIC	EPD	DIC	EPD	DIC	EPD	DIC	EPD	DIC
Amostra 1	+	+	+	+	+	+	+	+	-	-	+	+	+	-	-	-	-	-
Amostra 2	-	-	+	+	+	+	+	+	-	-	+	+	+	-	+	-	-	-
Amostra 3	-	-	+	-	+	+	+	+	-	-	+	+	+	+	+	+	-	-
Amostra 4	+	+	+	+	+	+	+	+	-	-	+	+	-	-	-	-	-	-
Amostra 5	-	-	+	+	+	+	+	+	-	-	+	+	-	-	-	-	-	-
Amostra 6	+	-	+	+	+	+	+	+	-	-	+	+	-	-	-	-	-	-
Amostra 7	-	-	+	-	+	+	+	+	-	-	+	+	-	-	-	-	-	-
Amostra 8	-	+	+	+	+	+	+	+	-	-	+	+	-	-	-	-	-	-
Amostra 9	-	+	+	+	+	+	+	+	-	-	+	+	+	+	+	+	-	-
Amostra 10	-	-	+	+	+	+	+	+	-	-	+	+	+	+	+	+	-	-
Amostra 11	-	-	+	+	+	+	+	+	-	-	+	+	+	-	+	-	-	-
Amostra 12	+	-	+	+	+	+	+	+	-	-	+	+	+	-	+	-	-	-
Amostra 13	+	+	+	+	+	+	+	+	-	-	+	+	+	-	+	+	-	-
Amostra 14	+	+	+	+	+	+	+	+	-	-	+	+	-	-	-	-	-	-
Amostra 15	-	-	+	-	+	+	+	+	-	-	+	+	+	-	+	-	-	-
Amostra 16	-	+	+	+	+	+	+	+	-	-	+	+	+	+	+	+	-	-
Amostra 17	-	-	+	+	+	+	+	+	-	-	+	+	-	-	-	-	-	-
Amostra 18	+	-	+	+	+	+	+	+	-	-	+	+	+	-	+	-	-	-
Amostra 19	+	+	+	+	+	+	+	+	-	-	+	+	+	+	+	+	-	-
Amostra 20	-	-	+	+	+	+	+	+	-	-	+	+	+	+	+	-	-	-
Amostra 21	+	+	+	+	+	+	+	+	-	-	+	+	+	-	+	-	-	-
Amostra 22	+	+	+	+	+	+	+	+	-	-	+	+	+	-	+	-	-	-
Amostra 23	+	+	+	+	+	+	+	+	-	-	+	+	+	-	+	-	-	-
Amostra 24	-	-	+	-	+	+	+	+	-	-	+	+	+	+	+	+	-	-
Amostra 25	-	-	+	+	+	+	+	+	-	-	+	+	-	-	-	-	-	-
Amostra 26	-	-	+	+	+	+	+	+	-	-	+	+	-	-	-	-	-	-
Amostra 27	-	-	+	+	+	+	+	+	-	-	+	+	-	-	-	-	-	-
Amostra 28	-	-	+	+	+	+	+	+	-	-	+	+	+	-	+	-	-	-
Amostra 29	-	-	+	+	+	+	+	+	-	-	+	+	-	-	-	-	-	-
Amostra 30	+	+	+	+	+	+	+	+	-	-	+	+	+	+	+	+	-	-
Amostra 31	-	-	+	+	+	+	+	+	-	-	+	+	+	+	+	+	-	-
Amostra 32	-	-	+	-	+	+	+	+	-	-	+	+	+	+	+	+	-	-
Amostra 33	-	+	+	+	+	+	+	+	-	-	+	+	-	-	-	-	-	-
Amostra 34	+	+	+	+	+	+	+	+	-	-	+	+	+	+	+	+	-	-
Amostra 35	+	+	+	-	+	+	+	+	-	-	+	+	-	-	-	-	-	-
Amostra 36	-	-	+	+	+	+	+	+	-	-	+	+	-	-	-	-	-	-
Amostra 37	-	-	+	+	+	+	+	+	-	-	+	+	-	-	-	-	-	-
Amostra 38	+	-	+	+	+	+	+	+	-	-	+	+	-	-	-	-	-	-
Amostra 39	+	+	+	+	+	+	+	+	-	-	+	+	-	-	-	-	-	-
Amostra 40	-	+	+	+	+	+	+	+	-	-	+	+	-	-	-	-	-	-
Amostra 41	-	-	+	+	+	+	+	+	-	-	+	+	-	-	-	-	-	-
Amostra 42	-	-	+	-	+	+	+	+	-	-	+	+	+	+	+	+	-	-
Amostra 43	-	-	+	+	+	+	+	+	-	-	+	+	-	-	-	-	-	-
Amostra 44	+	-	+	+	+	+	+	+	-	-	+	+	-	-	-	-	-	-
Amostra 45	+	+	+	+	+	+	+	+	-	-	+	+	+	-	-	-	-	-
Amostra 46	-	-	+	+	+	+	+	+	-	-	+	+	-	-	-	-	-	-
Amostra 47	-	-	-	-	+	+	+	+	-	-	+	+	-	-	-	-	-	-
Amostra 48	-	-	+	-	+	+	+	+	-	-	+	+	-	-	-	-	-	-
Amostra 49	-	-	+	+	+	+	+	+	-	-	+	+	+	+	+	+	-	-
Amostra 50	-	-	+	+	+	-	+	+	-	-	+	+	+	+	+	+	-	-

## Comparação dos modelos segundo o critério de ordenação das eficiências

As Tabelas 4.16, 4.17 e 4.18 apresentam os resultados para o critério de ordenação das eficiências para o conjunto de dados com 500 unidades.

Avaliando as três tabelas, percebe-se que os modelos M6 e M12, que possuem o efeito latente na média da variável dependente, apresentam os maiores valores desse critério. Indicando, que estes modelos são os que estão ordenando as eficiências de maneira mais distante da ordenação original.

Por exemplo na tabela 4.16, para o percentil 5%, na linha do modelo M4, temos que a diferença entre as ordenações estimadas por este modelo e a ordenação verdadeira, diferem em mais de 5%, ou vinte e cinco posições, para apenas 12% das unidades desse percentil. Com isso, percebemos que este modelo está ordenando melhor as unidades, quando comparadas à ordenação verdadeira.

Tabela 4.16: Resultado obtido no critério de ordenação das eficiências, para a amostra 1 do conjunto de dados com 500 unidades.

Modelo	Percentil $n_k/N$									
	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50
M1	0.24	0.22	0.19	0.13	0.10	0.07	0.04	0.02	0.00	0.00
M2	0.20	0.22	0.20	0.18	0.10	0.07	0.05	0.02	0.00	0.00
M3	0.20	0.20	0.19	0.16	0.10	0.06	0.03	0.03	0.01	0.00
M4	<b>0.12</b>	0.20	0.19	0.15	<b>0.09</b>	0.06	0.03	0.03	0.01	0.00
M5	0.16	0.22	0.17	0.15	0.10	0.07	0.04	0.02	0.01	0.00
M6	<b>0.32</b>	<b>0.26</b>	0.21	0.18	<b>0.12</b>	0.09	0.05	0.02	0.01	0.00
M7	0.16	0.18	0.19	0.14	0.09	0.07	0.05	0.03	0.01	0.00
M8	0.20	0.22	0.19	0.13	0.11	0.05	0.03	0.02	0.01	0.00
M9	0.20	0.22	0.20	0.14	0.12	0.05	0.04	0.02	0.01	0.00
M12	<b>0.44</b>	<b>0.36</b>	0.27	0.22	<b>0.15</b>	0.11	0.06	0.02	0.00	0.00

Tabela 4.17: Resultado obtido no critério de ordenação das eficiências, para a amostra 16 do conjunto de dados com 500 unidades.

Modelo	Percentil $n_k/N$									
	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50
M1	0.32	0.24	0.24	0.14	0.09	0.05	0.04	0.02	0.00	0.00
M2	0.40	0.22	0.21	0.15	0.10	0.10	0.05	0.02	0.01	0.00
M3	0.32	0.24	0.21	0.14	0.07	0.05	0.05	0.02	0.00	0.00
M4	<b>0.20</b>	<b>0.18</b>	<b>0.17</b>	0.13	0.06	0.06	0.05	0.03	0.01	0.00
M5	0.24	0.18	0.20	0.14	0.08	0.07	0.05	0.03	0.01	0.01
M6	0.40	0.28	0.32	0.12	0.13	0.04	0.03	0.01	0.00	0.00
M7	0.28	0.22	0.23	0.10	0.07	0.05	0.05	0.03	0.00	0.00
M8	0.40	0.20	0.23	0.12	0.10	0.07	0.06	0.03	0.01	0.00
M9	0.40	0.22	0.24	0.13	0.10	0.07	0.06	0.03	0.01	0.00
M12	<b>0.44</b>	<b>0.38</b>	<b>0.35</b>	0.19	0.15	0.07	0.03	0.01	0.00	0.00

Tabela 4.18: Resultado obtido no critério de ordenação das eficiências, para a amostra 33 do conjunto de dados com 500 unidades.

Modelo	Percentil $n_k/N$									
	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50
M1	0.32	0.22	0.24	0.12	0.09	0.03	0.02	0.02	0.01	0.00
M2	0.32	0.24	0.21	0.11	0.09	0.04	0.03	0.02	0.01	0.00
M3	0.32	0.20	0.21	0.13	0.06	0.03	0.02	0.02	0.01	0.00
M4	<b>0.16</b>	0.20	0.20	0.12	0.06	0.03	0.02	0.03	0.01	0.01
M5	0.24	0.22	0.20	0.14	0.07	0.03	0.02	0.02	0.02	0.01
M6	<b>0.40</b>	0.28	0.27	0.18	<b>0.10</b>	0.06	0.05	0.02	0.01	0.01
M7	0.32	0.20	0.23	0.12	0.09	0.03	0.02	0.02	0.01	0.00
M8	0.36	0.22	0.23	0.13	0.06	0.04	0.04	0.02	0.01	0.01
M9	0.28	0.26	0.23	0.13	0.06	0.04	0.04	0.02	0.01	0.01
M12	<b>0.40</b>	0.40	0.31	0.20	<b>0.12</b>	0.08	0.05	0.03	0.01	0.01

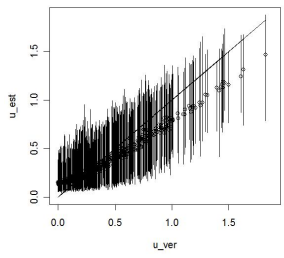
### Análise dos modelos segundo as estimativas a posteriori das ineficiências

A Figura 4.5 apresenta para cada modelo as medianas a posteriori estimadas contra os verdadeiros valores. O símbolo "o" no gráfico significa a mediana das 50 medianas a posteriori de cada amostra, e a linha se estende da menor mediana até a maior mediana encontrada entre as 50 amostras.

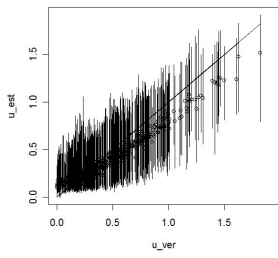
Analisando o gráfico, observa-se que os modelos M4 e M5, que possuem o efeito latente na variância da distribuição da ineficiência, apresentam as estimativas a posteriori mais próximas dos verdadeiros valores. Já para os modelos que possuem distribuição log-normal para as ineficiências, M7, M8 e M9, percebe-se uma superestimação das ineficiências estimadas. E, também, observa-se uma subestimação das ineficiências estimadas nos modelos M6 e M12.

Observando a figura das estimativas o modelo que gerou os dados (Modelo M2), temos

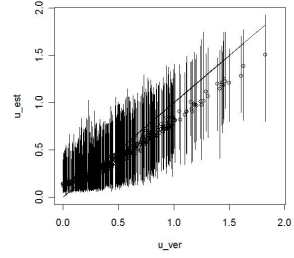
que as estimativas estão próximas dos verdadeiros valores. Porém, aparentemente não tão próximas como os modelos M4 e M5.



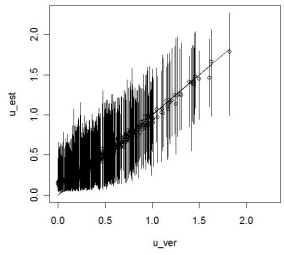
(a) M1



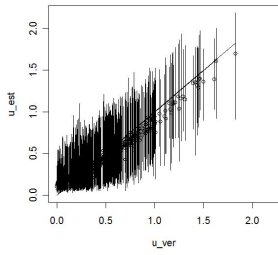
(b) M2



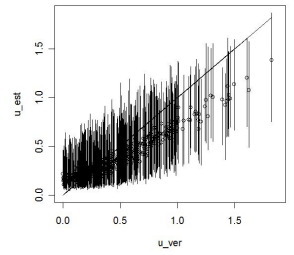
(c) M3



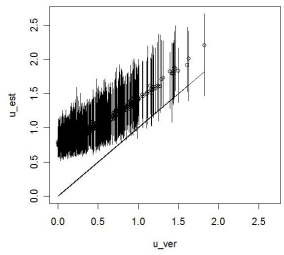
(d) M4



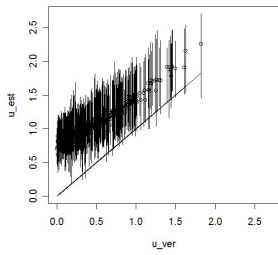
(e) M5



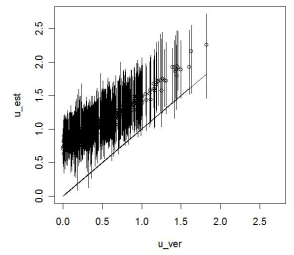
(f) M6



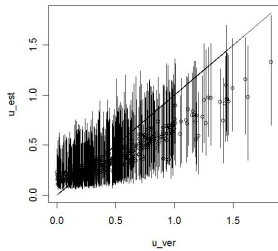
(g) M7



(h) M8



(i) M9



(j) M12

Figura 4.5: Gráfico das ineficiências estimadas contra os verdadeiros valores das ineficiências, segundo cada modelo ajustado, para o conjunto de dados com 500 unidades.

# Capítulo 5

## Conclusões e Trabalhos Futuros

Este trabalho teve como principal objetivo investigar a presença de efeitos locais no parâmetro que descreve a assimetria para a família de distribuições normais assimétricas, como definida em Azzalini (1985). Em particular, investigamos a presença desses efeitos em modelos de fronteira de produção estocástica que, como visto no capítulo 2, podem ser vistos como um caso particular desses modelos.

O capítulo 2 fez uma breve revisão sobre os modelos de fronteira de produção estocástica e revisou o modelo proposto por Schmidt et al. (2006). Essencialmente, a novidade deste modelo está na introdução de um efeito local na componente de ineficiência do modelo de fronteira de produção. Quando as observações são espacialmente referenciadas, é natural pensar em incluir um efeito local latente que capture possíveis estruturas que não tenham sido observadas mas, acredita-se, influenciam o processo de interesse.

Assim, seguindo o modelo proposto em Schmidt et al. (2006), propomos no capítulo 3 um estudo de simulação, onde conjuntos de dados artificiais foram gerados. Esses conjuntos seguem a estrutura do modelo proposto em Schmidt et al (2006). Para isso uma região geográfica fictícia foi criada e efeitos locais foram gerados, segundo uma distribuição autoregressiva condicional própria, como descrita em Ferreira e De Oliveira (2007). Para que não houvesse possíveis influências de amostras, repetimos o exercício para 100 amostras, divididas em dois tamanhos, 50 amostras com 192 unidades e outras 50, com 500 unidades, respectivamente.

Para verificar qual modelo possui o melhor ajuste, utilizamos os seguintes critérios

de comparação: Critério de Informação Baseado na *Deviance*, Perda Preditiva Esperada, Critério de Ordenação das Eficiências e também analisamos as estimativas a posteriori das ineficiências.

Resumindo, os critérios EPD e DIC apontam algumas conclusões para os conjuntos de dados gerados:

1. Comparando os modelos em relação à distribuição atribuída as ineficiências, para ambos os critérios e amostras, a distribuição log-normal ajustou-se melhor ao conjunto de dados para o modelo sem o efeito latente. Já nos modelos onde houve a inclusão do efeito latente, para o conjunto de dados com 192 unidades, atribuir a distribuição normal truncada às ineficiências melhora o ajuste dos modelos, sob ambos os critérios em todas as amostras. No conjunto de dados com 500 unidades, temos a mesma conclusão para ambos os critérios na maioria das amostras.
2. Analisando os modelos em relação à priori atribuída ao parâmetro  $\alpha$ , observou-se que a priori espacial se ajustou melhor ao dados quando o efeito latente está na média da variável dependente ou na variância da normal associada às ineficiências. Caso o parâmetro  $\alpha$  esteja na média da normal associada às ineficiências, os critérios não apontam a mesma conclusão.
3. A inclusão do efeito latente fez com que os modelos em que a distribuição normal truncada foi atribuída à ineficiência tenham um melhor ajuste que o modelo sem o efeito latente, para os dois conjuntos de dados. Porém, se a distribuição log-normal for atribuída à ineficiência, o modelo sem o efeito latente ajusta-se melhor ao conjunto de dados que os modelos com o efeito.
4. O modelo que serviu de estrutura para gerar o conjunto de dados não possui o melhor ajuste, dentre todos os modelos propostos.
5. Analisando todos os modelos conjuntamente, temos que para o conjunto com 192 unidades, o critério EPD mostrou um melhor ajuste do modelo M4 em 49 das 50 amostras. No critério DIC, o modelo M4 foi o melhor em 21 amostras e o modelo M7 em 28. Para o conjunto com 500 unidades, o modelo M4 se mostrou melhor

nas 50 amostras no critério EPD e, no critério DIC, o modelo M4 foi o melhor em 49 amostras. Observa-se também, que os piores ajustes são obtidos quando o efeito local foi incluído na média da variável dependente.

No critério de ordenação das eficiências observou-se que os modelos M6 e M12 ordenaram as eficiências de forma mais distantes da ordenação original, para ambos os conjuntos de dados. O modelo M4, foi o modelo que ordenou de forma mais semelhante à ordenação original.

Analisando as estimativas a posteriori das ineficiências, temos que o modelo M4, junto com o modelo M5 são os que possuem as estimativas mais próximas aos verdadeiros valores.

Levando em consideração todas as análises obtidas segundo os critérios apresentados, o modelo M4, que não possui a estrutura que originou os dados, parece ter o melhor ajuste nos dois conjuntos de dados.

Possíveis questões a serem investigadas futuramente são:

1. Uma melhor investigação dos modelos M10 e M11, já que não conseguimos encontrar convergência no traço das cadeias;
2. Uma extensão desses modelos quando a distribuição gama é atribuída às ineficiências, ou seja, a inclusão de um efeito latente em um dos parâmetros da distribuição gama;
3. Gerar um conjunto de dados onde a dependência espacial esteja na variância da normal associada às ineficiências e verificar se o modelo que originou os dados consegue capturar melhor a estrutura das observações.



# Referências Bibliográficas

- Aigner, D. J., Lovell, C. A. K. e Schmidt, P. (1977) Formulation and estimation of stochastic frontier production function models. *Journal of Econometrics*, **6**, 21–37.
- Azzalini, A. (1985) A class of distribution wich includes the normal ones. *Scand J Statist*, **12**, 171–178.
- (2005) The skew-normal distribution and related multivariate families. *Scand J Statist*, **32**, 159–188.
- Banerjee, S., Carlin, B. e Gelfand, A. (2004) *Hierarchical Modeling and Analysis for Spatial Data*. CRC Press/Chapman Hall.
- Besag, J., York, J. e Mollié, A. (1991) Bayesian image restoration, with two applications on spatial statistics (with discussion). *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, **43**, 1–59.
- Branco, M. e Arellano-Valle, R. (2004) *Distribuições Elípticas Assimétricas*. 16° SINAPE: Associação Brasileira de Estatística.
- Broeck, J. v., Koop, G., Osiewalski, J. e Steel, M. F. J. (1994) Stochastic frontier models. *Journal of Econometrics*, **61**, 273–303.
- Cliff, A. D. e Ord, J. K. (1981) *Spatial Processes*. London: Pion.
- Doornik, J. A. (2002) *Object-Oriented Matrix Programming Using Ox*. London, UK: Timberlake Consultants Press and Oxford.
- Ferreira, M. A. R. e Oliveira, V. (2007) Bayesian reference analysis for gaussian markov random fields. *Journal of Multivariate Analysis*, **98**, 789–812.

- Gamerman, D. e Lopes, H. F. (2006) *Markov Chain Monte Carlo - Stochastic Simulation for Bayesian Inference*. London, UK: Chapman & Hall, 2nd. Edition.
- Gelfand, A. e Ghosh, S. (1998) Model Choice: A Minimum Posterior Predictive Loss Approach. *Biometrika*, **85**, 1–11.
- Gelfand, A. e Smith, A. (1990) Sampling-based approaches to calculating marginal densities. *Journal of the American Statistical Association*, **85**, 398–409.
- Geman, S. e Geman, D. (1984) Stochastic relaxation, gibbs distributions, and the bayesian restoration of images. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, **6**, 721–741.
- Greene, W. H. (1990) A gamma-distributed stochastic frontier model. *Journal of Econometrics*, **46**, 141–163.
- Hastings, W. (1970) Monte Carlo Sampling Methods Using Markov Chains and Their Applications. *Biometrika*, **57**, 97–109.
- Kumbhakar, S. C. e Lovell, C. A. K. (2000) *Stochastic frontier analysis*. Cambridge: Cambridge University.
- Medrano, L. e Migon, H. (2007) Sampling schemes for asymmetric models a comparative study. *Relatório técnico*.
- Meeusen, W. e van den Broeck, J. (1977) Efficiency estimation from Cobb-Douglas production functions with composed errors. *International Econometric Review*, **8**, 435–444.
- Metropolis, N., Rosenbulth, A., Rosenbulth, M., Teller, A. e Teller, E. (1953) Equation of state calculations by fast computing machine. *Journal of Chemical Physics*, **21**, 1087–1091.
- Migon, H. S. (2006) Bayesian hierarchical models for stochastic production frontier. *Estadística (to appear)*.

- Moran, P. A. P. (1950) Notes on continuous stochastic phenomena. *Biometrika*, **37**, 17–23.
- Neal, R. M. (2003) Slice sampling (with discussion). *Annals of Statistics*, **31**, 705–767.
- Schmidt, A. M., Moreira, A. R. B., Fonseca, T. C. O. e Helfand, S. M. (2006) Spatial stochastic frontier models: accounting for unobserved local determinants of inefficiency. *Relatório técnico*, Departamento de Métodos Estatísticos No.196, UFRJ.
- Spiegelhalter, D., Best, N., Carlin, B. e van der Linde, A. (2002) Bayesian Measures of Model Complexity and fit (with discussion). *Journal of the Royal Statistical Society Series B*, **64**, 583–639.
- Stevenson, R. E. (1980) Likelihood functions for generalized stochastic frontier estimation. *Journal of Econometrics*, **13**, 57–66.
- Tsionas, E. G. (2002) Stochastic frontier models with random coefficients. *Journal of Applied Econometrics*, **17**, 127–147.

# Apêndice A

## Cálculo das Distribuições Condicionais Completas a Posteriori

### A.1 Modelo M1

1. Distribuição Condicional Completa para  $\beta_k$ ,  $k = 0, 1, 2$

$$\begin{aligned} p(\beta_k | \mathbf{Y}, X_{ij}, \sigma^2, \tau^2) &\propto \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^{n_i} \phi\left(\frac{y_{ij} - f(X_{ij}, \beta)}{\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}}\right) \\ &\times \Phi\left(-\frac{\sqrt{\tau^2}(y_{ij} - f(X_{ij}, \beta))}{\sigma\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}}\right) \\ &\times \exp\left(\frac{1}{2\sigma_\beta^2}\beta_k^2\right) \end{aligned}$$

2. Distribuição Condicional Completa para  $\tau^2$

$$\begin{aligned} p(\tau^2 | \mathbf{Y}, X_{ij}, \sigma^2, \beta_i) &\propto \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^{n_i} \frac{1}{\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}} \phi\left(\frac{y_{ij} - f(X_{ij}, \beta)}{\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}}\right) \\ &\times \Phi\left(-\frac{\sqrt{\tau^2}(y_{ij} - f(X_{ij}, \beta))}{\sigma\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}}\right) \\ &\times (\tau^2)^{-(a_\tau+1)} \exp\left(\frac{-b_\tau}{\tau^2}\right) \end{aligned}$$

3. Distribuição Condicional Completa para  $\sigma^2$

$$\begin{aligned}
p(\sigma^2 \mid \mathbf{Y}, X_{ij}, \tau^2, \beta_i) &\propto \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^{n_i} \frac{1}{\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}} \phi \left( \frac{y_{ij} - f(X_{ij}, \beta)}{\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}} \right) \\
&\times \Phi \left( -\frac{\sqrt{\tau^2}(y_{ij} - f(X_{ij}, \beta))}{\sigma\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}} \right) \\
&\times (\sigma^2)^{-(a_\sigma+1)} \exp \left( \frac{-b_\sigma}{\sigma^2} \right)
\end{aligned}$$

## A.2 Modelo M3

1. Distribuição Condicional Completa para  $\beta_k$ ,  $k = 0, 1, 2$

$$\begin{aligned}
p(\beta_k \mid \mathbf{Y}, X_{ij}, \sigma^2, \alpha_i, \tau^2) &\propto \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^{n_i} \phi \left( \frac{y_{ij} - f(X_{ij}, \beta) + \alpha_i}{\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}} \right) \\
&\times \Phi \left( \frac{\alpha_i \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}}{\sqrt{\sigma^2 \tau^2}} - \frac{\sqrt{\tau^2}(y_{ij} - f(X_{ij}, \beta) + \alpha_i)}{\sigma\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}} \right) \\
&\times \exp \left( \frac{1}{2\sigma_\beta^2} \beta_k^2 \right)
\end{aligned}$$

2. Distribuição Condicional Completa para  $\tau^2$

$$\begin{aligned}
p(\tau^2 \mid \mathbf{Y}, X_{ij}, \sigma^2, \alpha_i, \beta_i) &\propto \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^{n_i} \frac{1}{\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}} \phi \left( \frac{y_{ij} - f(X_{ij}, \beta) + \alpha_i}{\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}} \right) \\
&\times \Phi \left( \frac{\alpha_i \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}}{\sqrt{\sigma^2 \tau^2}} - \frac{\sqrt{\tau^2}(y_{ij} - f(X_{ij}, \beta) + \alpha_i)}{\sigma\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}} \right) \Phi^{-1} \left( \frac{\alpha_i}{\sqrt{\tau^2}} \right) \\
&\times (\tau^2)^{-(a_\tau+1)} \exp \left( \frac{-b_\tau}{\tau^2} \right)
\end{aligned}$$

3. Distribuição Condicional Completa para  $\sigma^2$

$$\begin{aligned}
p(\sigma^2 \mid \mathbf{Y}, X_{ij}, \tau^2, \alpha_i, \beta_i) &\propto \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^{n_i} \frac{1}{\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}} \phi \left( \frac{y_{ij} - f(X_{ij}, \beta) + \alpha_i}{\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}} \right) \\
&\times \Phi \left( \frac{\alpha_i \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}}{\sqrt{\sigma^2 \tau^2}} - \frac{\sqrt{\tau^2}(y_{ij} - f(X_{ij}, \beta) + \alpha_i)}{\sigma\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}} \right) \\
&\times (\sigma^2)^{-(a_\sigma+1)} \exp \left( \frac{-b_\sigma}{\sigma^2} \right)
\end{aligned}$$

4. Distribuição Condicional Completa para  $\alpha_i$

$$\begin{aligned}
p(\alpha_i | \mathbf{Y}, X_{ij}, \tau^2, \sigma^2, \beta_i, \psi^2) &\propto \prod_{j=1}^{n_i} \phi \left( \frac{y_{ij} - f(X_{ij}, \beta) + \alpha_i}{\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}} \right) \\
&\times \Phi \left( \frac{\alpha_i \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}}{\sqrt{\sigma^2 \tau^2}} - \frac{\sqrt{\tau^2} (y_{ij} - f(X_{ij}, \beta) + \alpha_i)}{\sigma \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}} \right) \Phi^{-1} \left( \frac{\alpha_i}{\sqrt{\tau^2}} \right) \\
&\times \exp \left( \frac{1}{2\psi^2} \alpha_i^2 \right)
\end{aligned}$$

5. Distribuição Condicional Completa para  $\psi^2$

$$\psi^2 | \alpha \sim GI \left( \frac{64}{2} + a_\psi, \frac{\sum_{i=1}^n (\alpha_i)^2}{2} + b_\psi \right)$$

### A.3 Modelo M4

1. Distribuição Condicional Completa para  $\beta_k$ ,  $k = 0, 1, 2$

$$\begin{aligned}
p(\beta_k | \mathbf{Y}, X_{ij}, \sigma^2, \exp(\alpha_i)) &\propto \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^{n_i} \phi \left( \frac{y_{ij} - f(X_{ij}, \beta)}{\sqrt{\sigma^2 + \exp(\alpha_i)}} \right) \\
&\times \Phi \left( -\frac{\sqrt{\exp(\alpha_i)} (y_{ij} - f(X_{ij}, \beta))}{\sigma \sqrt{\sigma^2 + \exp(\alpha_i)}} \right) \\
&\times \exp \left( \frac{1}{2\sigma_\beta^2} \beta_k^2 \right)
\end{aligned}$$

2. Distribuição Condicional Completa para  $\sigma^2$

$$\begin{aligned}
p(\sigma^2 | \mathbf{Y}, X_{ij}, \beta_0, \beta_1, \beta_2, \exp(\alpha_i)) &\propto \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^{n_i} \frac{1}{\sqrt{\sigma^2 + \exp(\alpha_i)}} \phi \left( \frac{y_{ij} - f(X_{ij}, \beta)}{\sqrt{\sigma^2 + \exp(\alpha_i)}} \right) \\
&\times \Phi \left( -\frac{\sqrt{\exp(\alpha_i)} (y_{ij} - f(X_{ij}, \beta))}{\sigma \sqrt{\sigma^2 + \exp(\alpha_i)}} \right) \\
&\times (\sigma^2)^{-(a_\sigma+1)} \exp \left( \frac{-b_\sigma}{\sigma^2} \right)
\end{aligned}$$

3. Distribuição Condicional Completa para  $\alpha_i$

$$\begin{aligned}
p(\alpha_i \mid \mathbf{Y}, X_{ij}, \sigma^2, \beta_i, \psi^2) &\propto \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^{n_i} \frac{1}{\sqrt{\sigma^2 + \exp(\alpha_i)}} \phi \left( \frac{y_{ij} - f(X_{ij}, \beta)}{\sqrt{\sigma^2 + \exp(\alpha_i)}} \right) \\
&\times \Phi \left( -\frac{\sqrt{\exp(\alpha_i)}(y_{ij} - f(X_{ij}, \beta))}{\sigma \sqrt{\sigma^2 + \exp(\alpha_i)}} \right) \\
&\times \exp \left( \frac{1}{2\psi^2} \sum_{j=1}^{n_i} W_{ij} (\alpha_i - \alpha_j)^2 \right)
\end{aligned}$$

4. Distribuição Condicional Completa para  $\psi^2$

$$\psi^2 \mid \alpha \sim GI \left( \frac{64}{2} + a_\psi, \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n_i} W_{ij} (\alpha_i - \alpha_j)^2}{2} + b_\psi \right)$$

## A.4 Modelo M5

1. Distribuição Condicional Completa para  $\beta_k$ ,  $k = 0, 1, 2$

$$\begin{aligned}
p(\beta_k \mid \mathbf{Y}, X_{ij}, \sigma^2, \exp(\alpha_i)) &\propto \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^{n_i} \phi \left( \frac{y_{ij} - f(X_{ij}, \beta)}{\sqrt{\sigma^2 + \exp(\alpha_i)}} \right) \\
&\times \Phi \left( -\frac{\sqrt{\exp(\alpha_i)}(y_{ij} - f(X_{ij}, \beta))}{\sigma \sqrt{\sigma^2 + \exp(\alpha_i)}} \right) \\
&\times \exp \left( \frac{1}{2\sigma_\beta^2} \beta_k^2 \right)
\end{aligned}$$

2. Distribuição Condicional Completa para  $\sigma^2$

$$\begin{aligned}
p(\sigma^2 \mid \mathbf{Y}, X_{ij}, \beta_0, \beta_1, \beta_2, \exp(\alpha_i)) &\propto \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^{n_i} \frac{1}{\sqrt{\sigma^2 + \exp(\alpha_i)}} \phi \left( \frac{y_{ij} - f(X_{ij}, \beta)}{\sqrt{\sigma^2 + \exp(\alpha_i)}} \right) \\
&\times \Phi \left( -\frac{\sqrt{\exp(\alpha_i)}(y_{ij} - f(X_{ij}, \beta))}{\sigma \sqrt{\sigma^2 + \exp(\alpha_i)}} \right) \\
&\times (\sigma^2)^{-(a_\sigma+1)} \exp \left( \frac{-b_\sigma}{\sigma^2} \right)
\end{aligned}$$

3. Distribuição Condicional Completa para  $\alpha_i$

$$\begin{aligned}
p(\alpha_i | \mathbf{Y}, X_{ij}, \sigma^2, \beta_i, \psi^2) &\propto \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^{n_i} \frac{1}{\sqrt{\sigma^2 + \exp(\alpha_i)}} \phi \left( \frac{y_{ij} - f(X_{ij}, \beta)}{\sqrt{\sigma^2 + \exp(\alpha_i)}} \right) \\
&\times \Phi \left( -\frac{\sqrt{\exp(\alpha_i)}(y_{ij} - f(X_{ij}, \beta))}{\sigma \sqrt{\sigma^2 + \exp(\alpha_i)}} \right) \\
&\times \exp \left( \frac{1}{2\psi^2} (\alpha_i)^2 \right)
\end{aligned}$$

4. Distribuição Condicional Completa para  $\psi^2$

$$\psi^2 | \alpha \sim GI \left( \frac{64}{2} + a_\psi, \frac{\sum_{i=1}^n (\alpha_i)^2}{2} + b_\psi \right)$$

## A.5 Modelo M6

1. Distribuição Condicional Completa para  $\beta_k$ ,  $k = 0, 1, 2$

$$\begin{aligned}
p(\beta_k | \mathbf{Y}, X_{ij}, \sigma^2, \tau^2, \alpha_i) &\propto \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^{n_i} \phi \left( \frac{y_{ij} - f(X_{ij}, \beta) - \alpha_i}{\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}} \right) \\
&\times \Phi \left( -\frac{\sqrt{\tau^2}(y_{ij} - f(X_{ij}, \beta) - \alpha_i)}{\sigma \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}} \right) \\
&\times \exp \left( \frac{1}{2\sigma_\beta^2} \beta_k^2 \right)
\end{aligned}$$

2. Distribuição Condicional Completa para  $\tau^2$

$$\begin{aligned}
p(\tau^2 | \mathbf{Y}, X_{ij}, \sigma^2, \beta_i, \alpha_i) &\propto \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^{n_i} \frac{1}{\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}} \phi \left( \frac{y_{ij} - f(X_{ij}, \beta) - \alpha_i}{\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}} \right) \\
&\times \Phi \left( -\frac{\sqrt{\tau^2}(y_{ij} - f(X_{ij}, \beta) - \alpha_i)}{\sigma \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}} \right) \\
&\times (\tau^2)^{-(a_\tau+1)} \exp \left( \frac{-b_\tau}{\tau^2} \right)
\end{aligned}$$

3. Distribuição Condicional Completa para  $\sigma^2$

$$\begin{aligned}
p(\sigma^2 | \mathbf{Y}, X_{ij}, \tau^2, \beta_i, \alpha_i) &\propto \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^{n_i} \frac{1}{\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}} \phi \left( \frac{y_{ij} - f(X_{ij}, \beta) - \alpha_i}{\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}} \right) \\
&\times \Phi \left( -\frac{\sqrt{\tau^2}(y_{ij} - f(X_{ij}, \beta) - \alpha_i)}{\sigma \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}} \right) \\
&\times (\sigma^2)^{-(a_\sigma+1)} \exp \left( \frac{-b_\sigma}{\sigma^2} \right)
\end{aligned}$$



4. Distribuição Condicional Completa para  $\alpha_i$

$$\begin{aligned} p(\alpha_i | \mathbf{Y}, X_{ij}, \tau^2, \beta_i, \sigma^2) &\propto \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^{n_i} \phi \left( \frac{y_{ij} - f(X_{ij}, \beta) - \alpha_i}{\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}} \right) \\ &\times \Phi \left( -\frac{\sqrt{\tau^2}(y_{ij} - f(X_{ij}, \beta) - \alpha_i)}{\sigma\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}} \right) \\ &\times \exp \left( \frac{1}{2\psi^2} \sum_{j=1}^{n_i} W_{ij}(\alpha_i - \alpha_j)^2 \right) \end{aligned}$$

5. Distribuição Condicional Completa para  $\psi^2$

$$\psi^2 | \alpha \sim GI \left( \frac{64}{2} + a_\psi, \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n_i} W_{ij}(\alpha_i - \alpha_j)^2}{2} + b_\psi \right)$$

## A.6 Modelo M7

1. Distribuição Condicional Completa para  $\beta$ ,  $k = 0, 1, 2$

$$\beta | Y, X, u, \sigma^2 \sim N \left( V \frac{1}{\sigma^2} (Y + u)' X, V \right),$$

onde  $I$  é a matriz identidade de dimensão 3,  $V^{-1} = (\sigma_\beta^2)^{-1}I + \frac{1}{\sigma^2}X'X$  e  $\sigma_\beta^2$  a matriz de covariâncias a priori de  $\beta$ .

2. Distribuição Condicional para  $\sigma^2$

$$\sigma^2 | Y, X, u, \beta \sim GI \left( a_\sigma + \frac{\sum_{j=1}^{n_i}}{2}, b_\sigma + \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - f(X_{ij}, \beta) + u_{ij})^2}{2} \right)$$

3. Distribuição Condicional Completa para  $\tau^2$

$$\tau^2 | u, \sim GI \left( a_\tau + \frac{\sum_{j=1}^{n_i}}{2}, b_\tau + \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n_i} (\ln u_{ij})^2}{2} \right)$$

4. Distribuição Condicional Completa para  $u_{ij}$

$$p(u_{ij} | y_{ij}, X_{ij}, \beta, \sigma^2, \tau^2) \propto \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} (y_{ij} - f(X_{ij}, \beta) + u_{ij})^2 \right\} \exp \left\{ -\frac{1}{2\tau^2} \sum_{j=1}^{n_i} (\ln u_{ij})^2 \right\} \frac{1}{\ln u_{ij}}$$

## A.7 Modelo M9

1. Distribuição Condicional Completa para  $\beta$ ,  $k = 0, 1, 2$

$$\beta \mid Y, X, u, \sigma^2 \sim N \left( V \frac{1}{\sigma^2} (Y - u)' X, V \right),$$

onde  $I$  é a matriz identidade de dimensão 3,  $V^{-1} = (\sigma_\beta^2)^{-1} I + \frac{1}{\sigma^2} X'X$  e  $\sigma_\beta^2$  a matriz de covariâncias a priori de  $\beta$ .

2. Distribuição Condicional para  $\sigma^2$

$$\sigma^2 \mid Y, X, u, \beta \sim GI \left( a_\sigma + \frac{\sum_{j=1}^{n_i}}{2}, b_\sigma + \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - f(X_{ij}, \beta) + u_{ij})^2}{2} \right)$$

3. Distribuição Condicional Completa para  $\tau^2$

$$\tau^2 \mid u, \alpha \sim GI \left( a_\tau + \frac{\sum_{j=1}^{n_i}}{2}, b_\tau + \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n_i} (\ln u_{ij} - \alpha_i)^2}{2} \right)$$

4. Distribuição Condicional Completa para  $\alpha_i$

$$\alpha_i \mid u, \tau^2, \psi^2 \sim N \left( \frac{\sum_{j=1}^{n_i} \ln u_{ij}}{\tau^2} \left[ \frac{n_i}{\tau^2} + \frac{1}{\psi^2} \right]^{-1}, \left[ \frac{n_i}{\tau^2} + \frac{1}{\psi^2} \right]^{-1} \right)$$

onde  $n_i$  é o número de unidades da localidade  $i$ .

5. Distribuição Condicional Completa para  $\psi^2$

$$\psi^2 \mid \alpha \sim GI \left( \frac{64}{2} + a_\psi, \frac{\sum_{i=1}^n (\alpha_i)^2}{2} + b_\psi \right)$$

6. Distribuição Condicional Completa para  $u_{ij}$

$$\begin{aligned} p(u_{ij} \mid y_{ij}, X_{ij}, \beta, \sigma^2, \tau^2, \tau^2) &\propto \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} (y_{ij} - f(X_{ij}, \beta) + u_{ij})^2 \right\} \exp \left\{ -\frac{1}{2\tau^2} \sum_{j=1}^{n_i} (\ln u_{ij} - \alpha_i)^2 \right\} \\ &\times \frac{1}{\ln u_{ij}} \end{aligned}$$

## A.8 Modelo M12

1. Distribuição Condicional Completa para  $\beta_k$ ,  $k = 0, 1, 2$

$$\begin{aligned} p(\beta_k | \mathbf{Y}, X_{ij}, \sigma^2, \tau^2, \alpha_i) &\propto \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^{n_i} \phi \left( \frac{y_{ij} - f(X_{ij}, \beta) - \alpha_i}{\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}} \right) \\ &\times \Phi \left( -\frac{\sqrt{\tau^2}(y_{ij} - f(X_{ij}, \beta) - \alpha_i)}{\sigma\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}} \right) \\ &\times \exp \left( \frac{1}{2\sigma_\beta^2} \beta_k^2 \right) \end{aligned}$$

2. Distribuição Condicional Completa para  $\tau^2$

$$\begin{aligned} p(\tau^2 | \mathbf{Y}, X_{ij}, \sigma^2, \beta_i, \alpha_i) &\propto \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^{n_i} \frac{1}{\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}} \phi \left( \frac{y_{ij} - f(X_{ij}, \beta) - \alpha_i}{\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}} \right) \\ &\times \Phi \left( -\frac{\sqrt{\tau^2}(y_{ij} - f(X_{ij}, \beta) - \alpha_i)}{\sigma\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}} \right) \\ &\times (\tau^2)^{-(a_\tau+1)} \exp \left( \frac{-b_\tau}{\tau^2} \right) \end{aligned}$$

3. Distribuição Condicional Completa para  $\sigma^2$

$$\begin{aligned} p(\sigma^2 | \mathbf{Y}, X_{ij}, \tau^2, \beta_i, \alpha_i) &\propto \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^{n_i} \frac{1}{\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}} \phi \left( \frac{y_{ij} - f(X_{ij}, \beta) - \alpha_i}{\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}} \right) \\ &\times \Phi \left( -\frac{\sqrt{\tau^2}(y_{ij} - f(X_{ij}, \beta) - \alpha_i)}{\sigma\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}} \right) \\ &\times (\sigma^2)^{-(a_\sigma+1)} \exp \left( \frac{-b_\sigma}{\sigma^2} \right) \end{aligned}$$

4. Distribuição Condicional Completa para  $\alpha_i$

$$\begin{aligned} p(\alpha_i | \mathbf{Y}, X_{ij}, \tau^2, \beta_i, \sigma^2) &\propto \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^{n_i} \phi \left( \frac{y_{ij} - f(X_{ij}, \beta) - \alpha_i}{\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}} \right) \\ &\times \Phi \left( -\frac{\sqrt{\tau^2}(y_{ij} - f(X_{ij}, \beta) - \alpha_i)}{\sigma\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}} \right) \\ &\times \exp \left( \frac{1}{2\psi^2} (\alpha_i)^2 \right) \end{aligned}$$

5. Distribuição Condicional Completa para  $\psi^2$

$$\psi^2 | \alpha \sim GI \left( \frac{64}{2} + a_\psi, \frac{\sum_{i=1}^n (\alpha_i)^2}{2} + b_\psi \right)$$

## Apêndice B

Traço das cadeias dos parâmetros  
para cada modelo

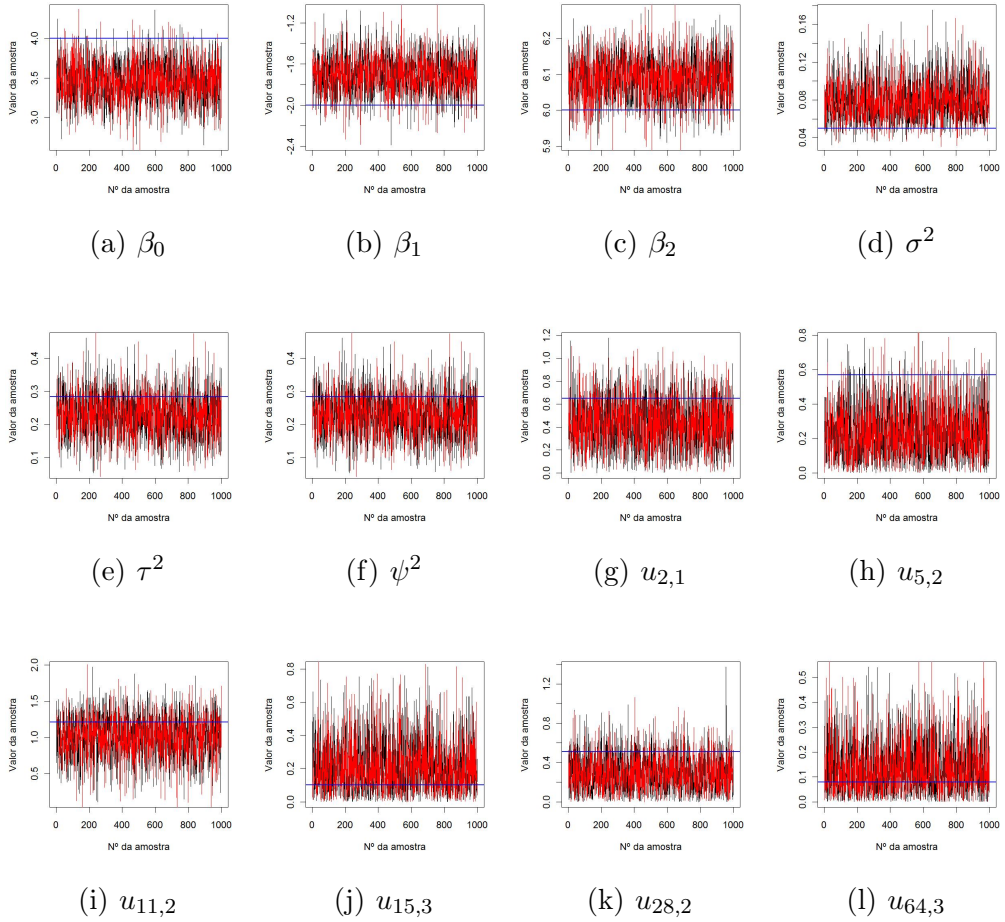


Figura 2.1: Amostras da distribuição a posteriori para o Modelo M1, amostra com 192 unidades, com *burn-in* 100.000 e *thinning* 100.

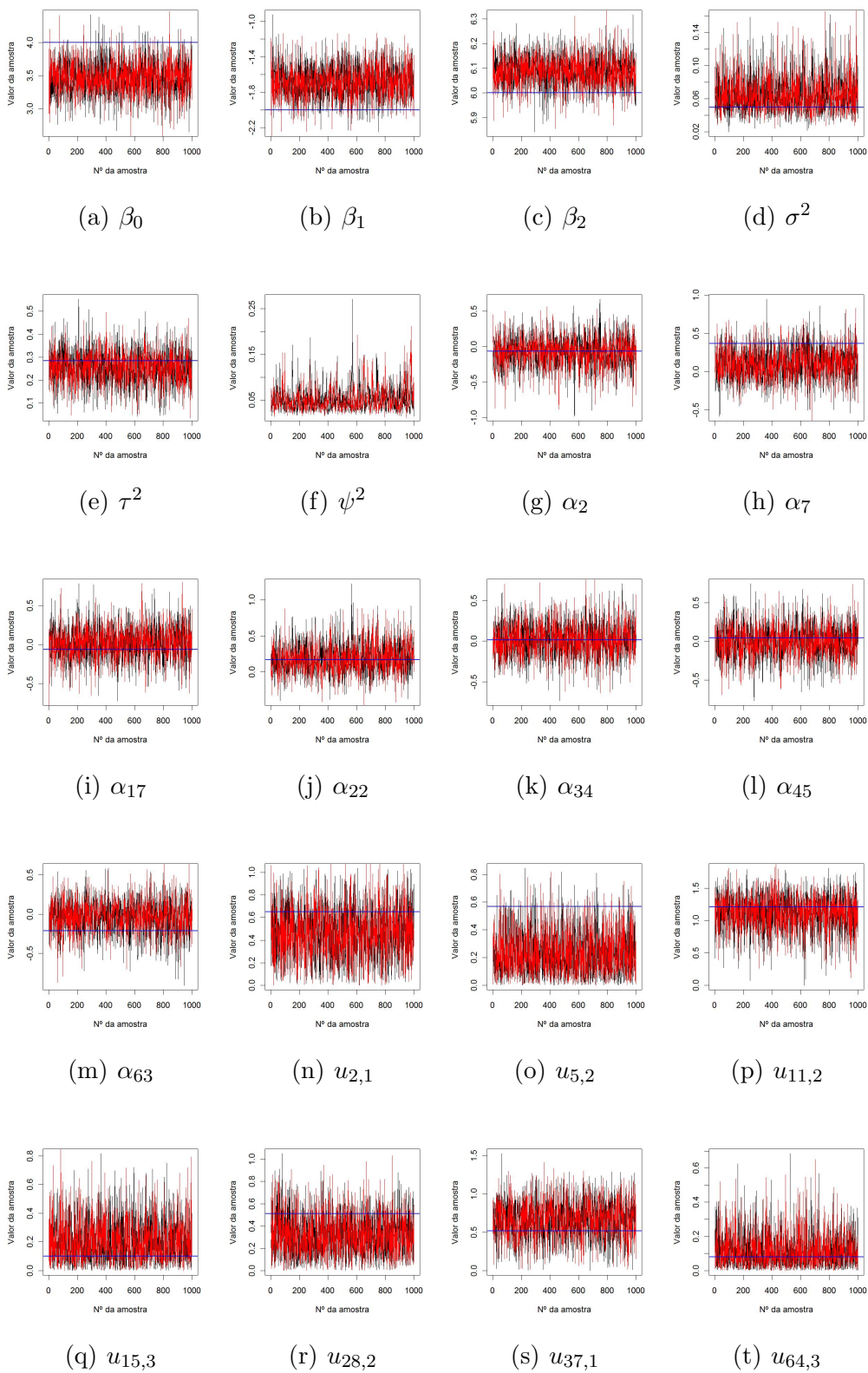


Figura 2.2: Amostras da distribuição a posteriori para o Modelo M3, amostra com 192 unidades, com *burn-in* 100.000 e *thinning* 100.

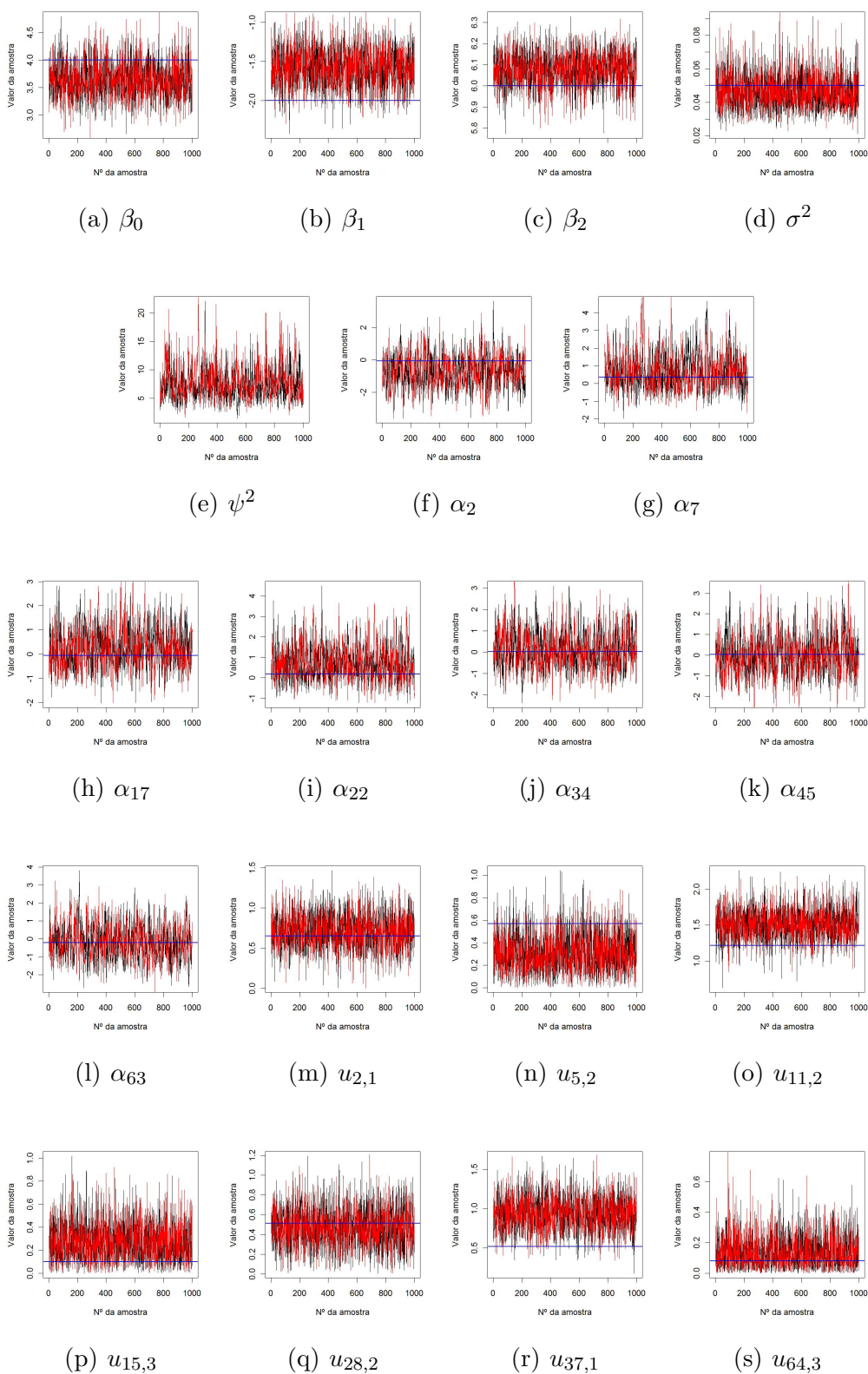


Figura 2.3: Amostras da distribuição a posteriori para o Modelo M4, amostra com 192 unidades, com *burn-in* 100.000 e *thinning* 100.

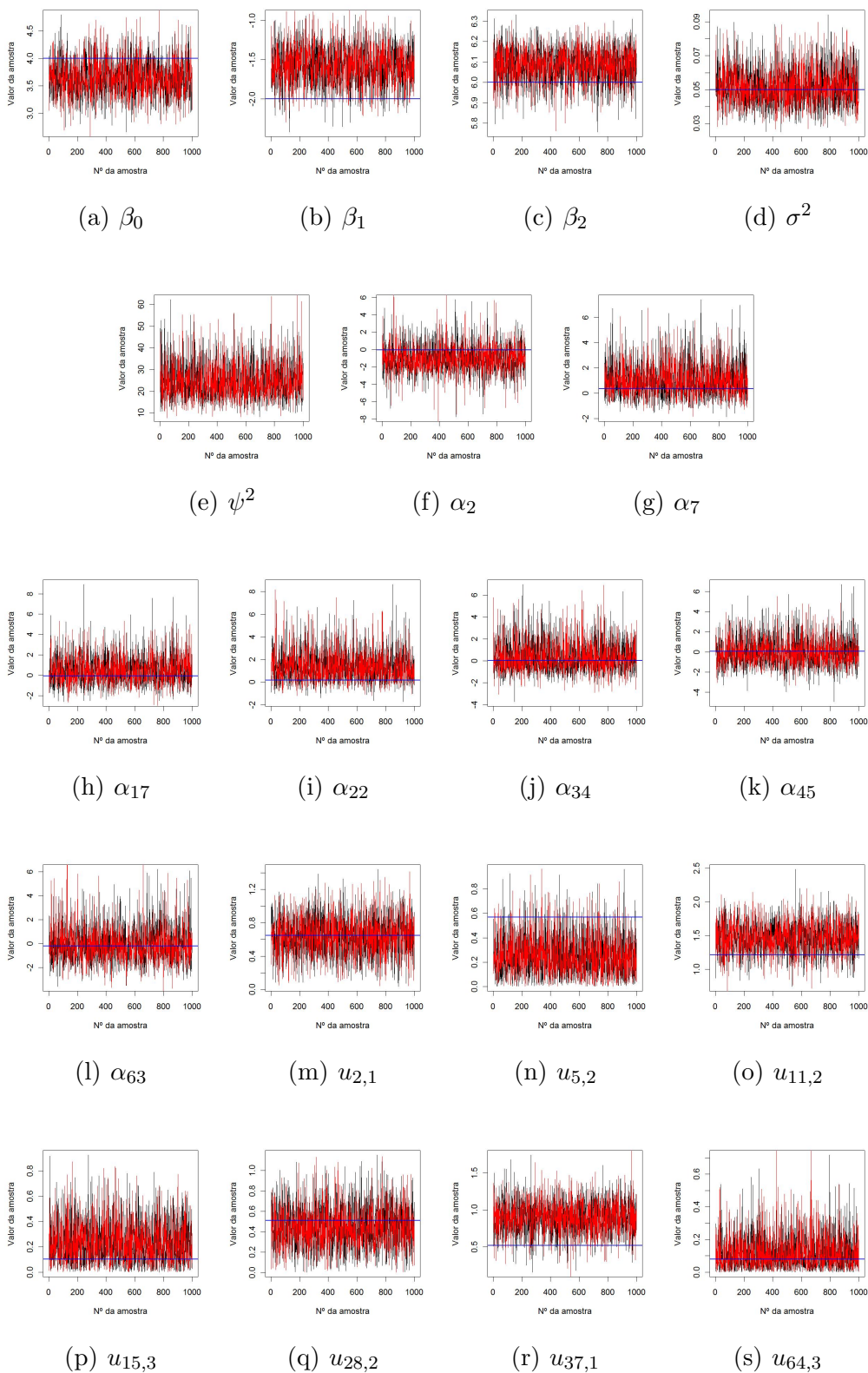


Figura 2.4: Amostras da distribuição a posteriori para o Modelo M5, amostra com 192 unidades, com *burn-in* 100.000 e *thinning* 100.



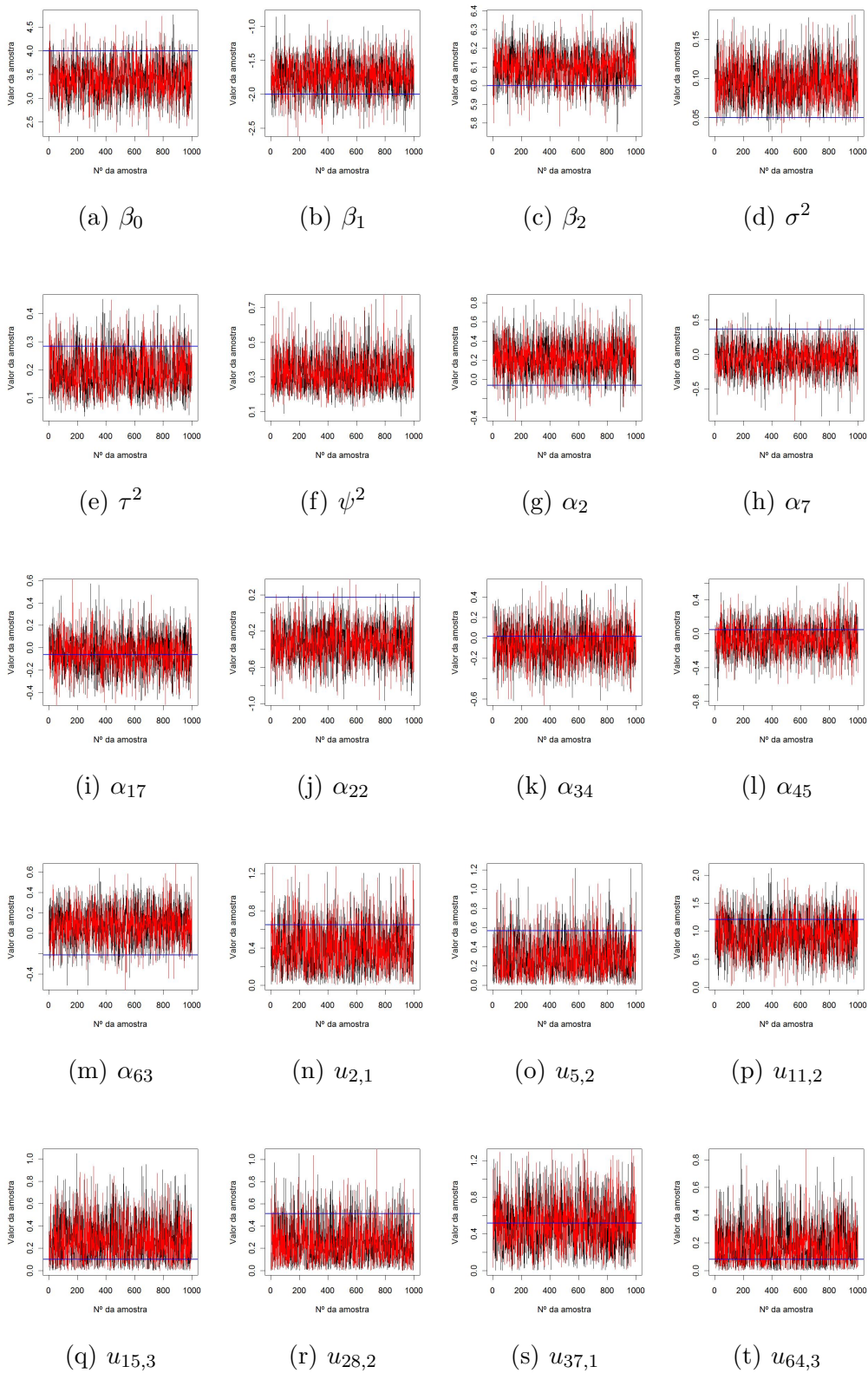


Figura 2.5: Amostras da distribuição a posteriori para o Modelo M6, amostra com 192 unidades, com *burn-in* 100.000 e *thinning* 100.

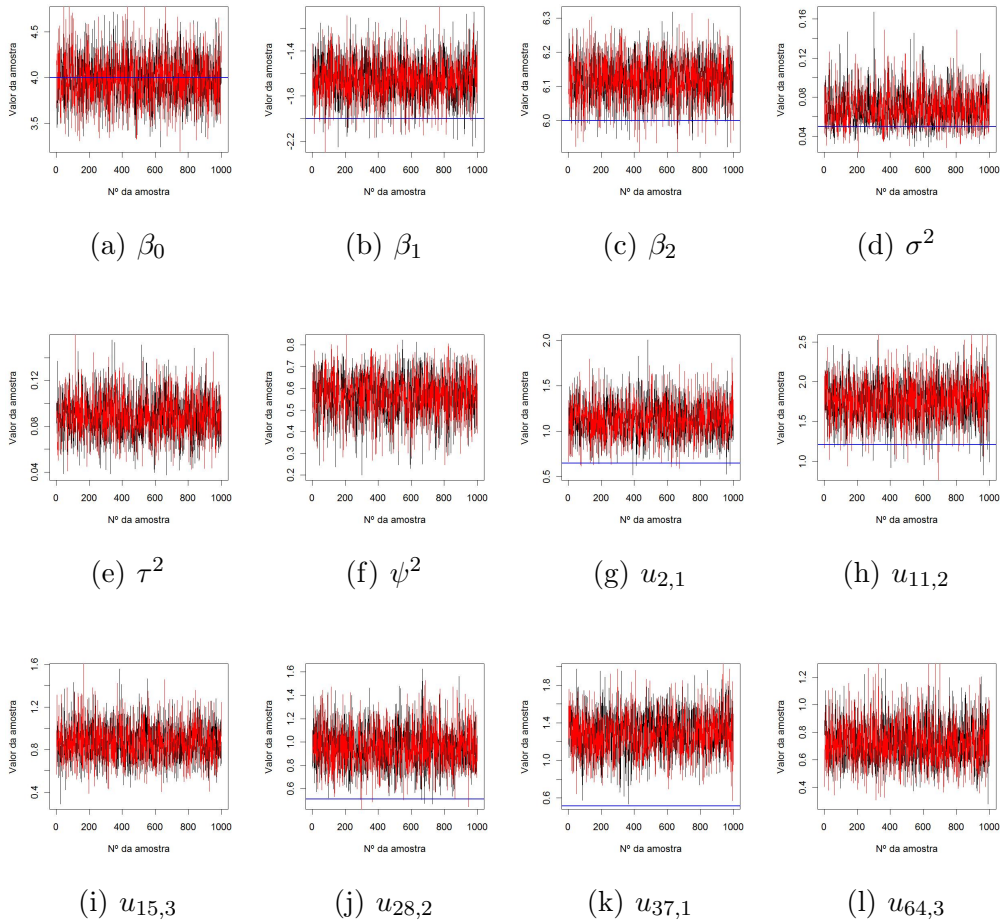


Figura 2.6: Amostras da distribuição posteriori para o Modelo M7, amostra com 192 unidades, com *burn-in* 30.000 e *thining* 30.

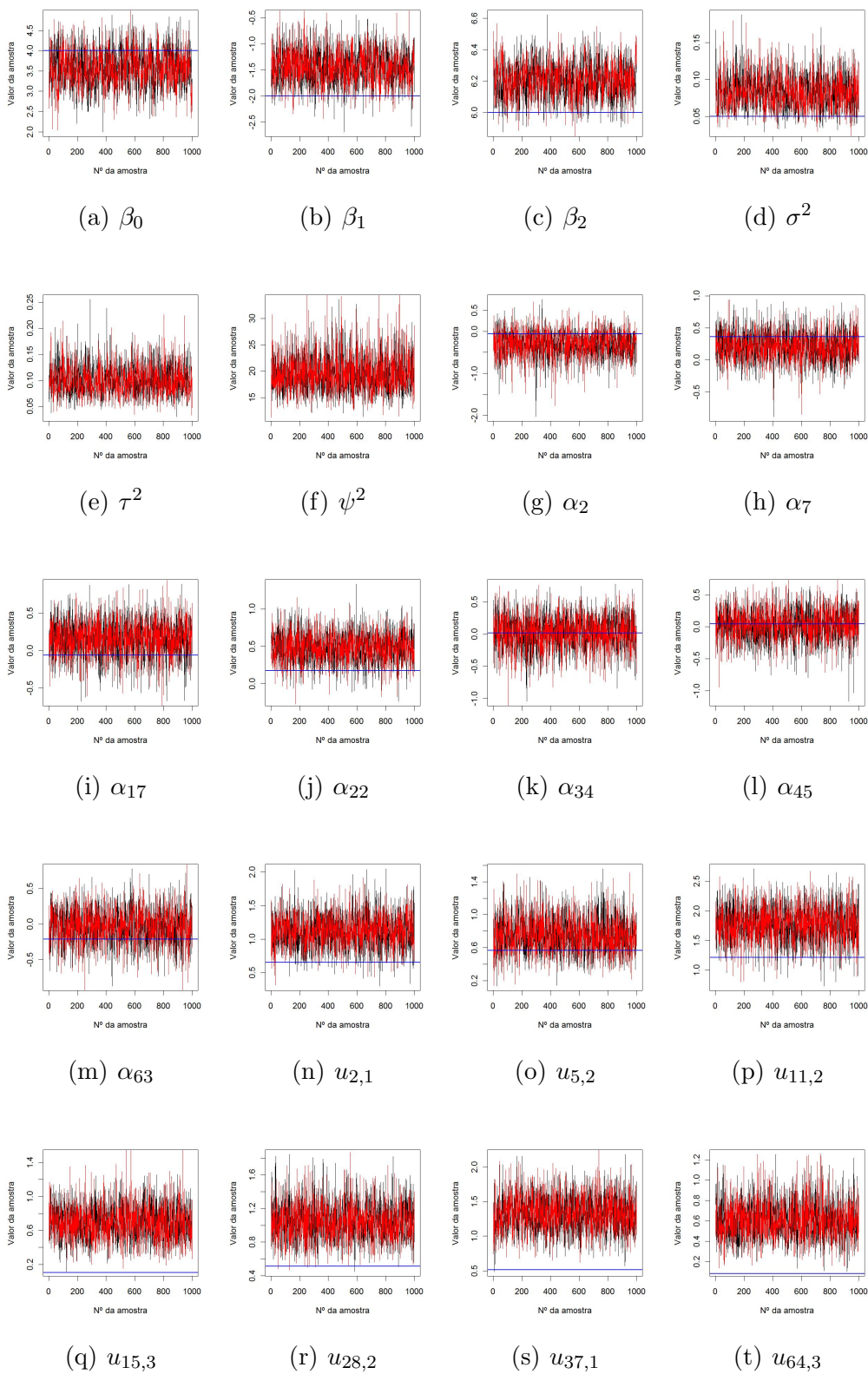


Figura 2.7: Amostras da distribuição posteriori para o Modelo M9, amostra com 192 unidades, com *burn-in* 30.000 e *thinning* 30.

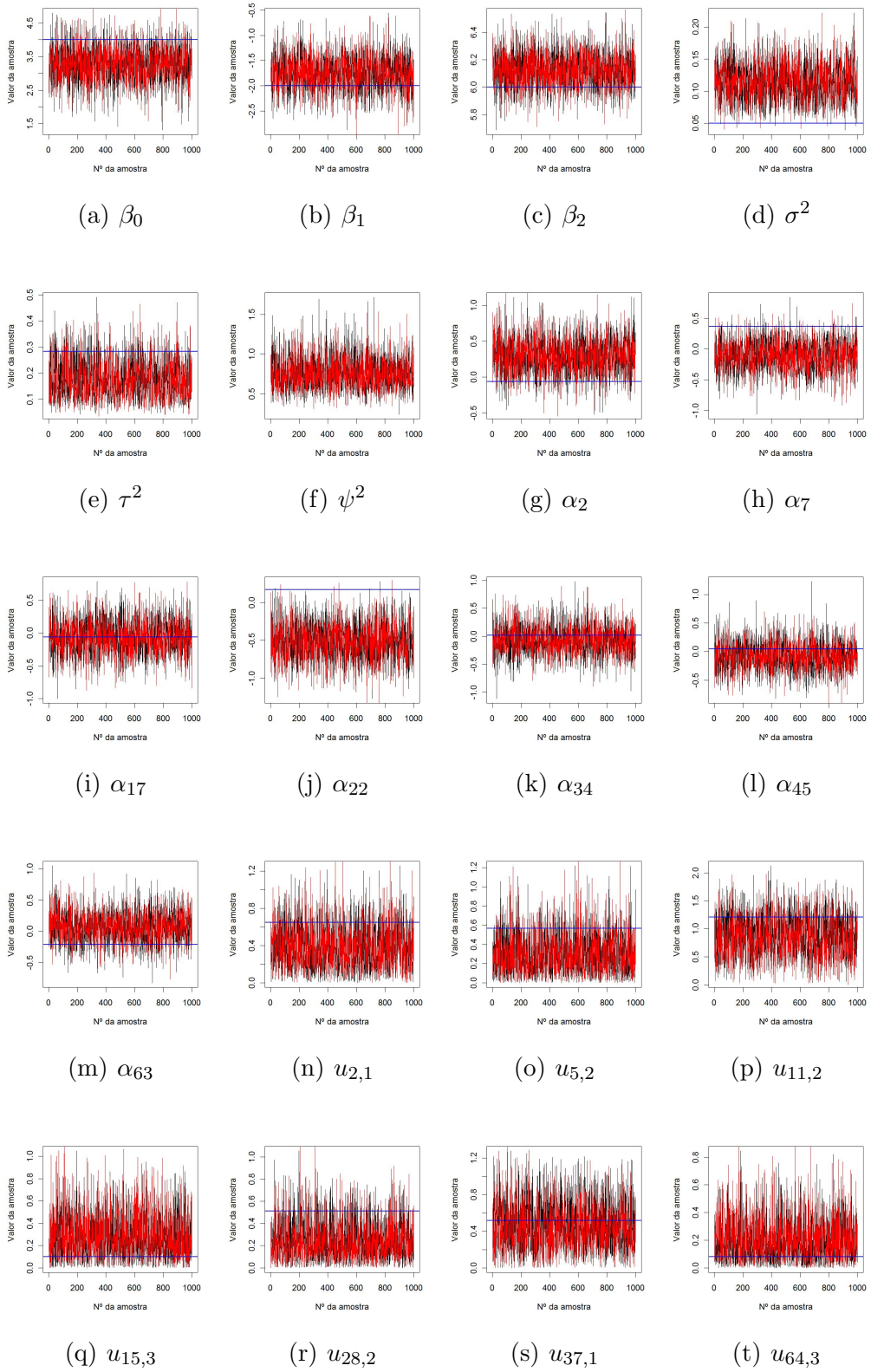


Figura 2.8: Amostras da distribuição a posteriori para o Modelo M12, amostra com 192 unidades, com *burn-in* 100.000 e *thinning* 100.

## Apêndice C

### Critério EPD com todas as componentes

Tabela C.1: Componentes do critério EPD para o conjunto com 192 unidades. (continua)

	M1		M2		M3		M4		M5						
	P	G	D	P	G	D	P	G	D	P	G	D			
Amostra 1	24.07	7.36	27.75	22.47	4.64	24.79	20.90	5.17	23.48	17.03	1.12	17.59	18.79	1.60	19.59
Amostra 2	28.65	10.87	34.09	26.76	6.56	30.04	26.87	8.97	31.36	20.60	1.64	21.42	22.66	2.29	23.80
Amostra 3	25.34	7.41	29.04	24.31	5.24	26.93	22.51	5.48	25.25	17.61	1.18	18.20	19.79	1.75	20.66
Amostra 4	23.63	6.89	27.07	21.21	4.10	23.26	19.25	4.12	21.31	15.32	0.84	15.74	16.89	1.19	17.49
Amostra 5	31.94	14.12	39.00	30.26	8.93	34.73	31.16	12.87	37.59	21.10	1.73	21.97	24.04	2.52	25.30
Amostra 6	20.84	7.24	24.46	19.41	4.27	21.54	19.00	5.53	21.76	14.97	1.05	15.35	15.40	0.95	15.87
Amostra 7	25.36	9.14	29.93	24.73	6.58	28.02	24.25	8.33	28.42	18.24	1.26	18.87	20.64	1.86	21.57
Amostra 8	16.94	3.21	18.54	16.34	2.38	17.53	11.79	1.55	12.57	13.35	0.59	13.64	14.22	0.86	14.65
Amostra 9	20.70	4.82	23.11	19.68	3.60	21.48	15.94	2.74	17.31	14.43	0.74	14.80	15.44	1.05	15.97
Amostra 10	23.19	6.76	26.57	22.45	4.84	24.87	20.73	5.15	23.31	16.40	0.97	16.89	18.32	1.47	19.06
Amostra 11	27.76	11.98	33.76	26.68	7.97	30.67	27.77	11.47	33.50	19.86	1.49	20.61	22.89	2.24	24.01
Amostra 12	21.93	6.94	25.40	21.50	4.74	23.87	19.62	5.09	22.16	16.25	0.98	16.74	17.49	1.33	18.16
Amostra 13	24.20	9.07	28.73	23.48	5.97	26.47	23.18	7.57	26.96	18.42	1.24	19.03	19.85	1.76	20.72
Amostra 14	22.02	6.63	25.34	21.28	4.70	23.63	19.65	4.96	22.12	15.90	0.89	16.35	17.44	1.39	18.14
Amostra 15	22.66	6.01	25.66	22.03	4.36	24.21	19.39	4.14	21.46	16.38	0.92	16.84	17.86	1.41	18.56
Amostra 16	26.89	9.21	31.49	25.74	6.40	28.94	25.19	7.31	28.84	16.77	1.04	17.29	18.77	1.51	19.53
Amostra 17	20.67	5.93	23.64	20.37	4.38	22.56	18.03	4.34	20.20	16.35	1.01	16.85	17.57	1.37	18.26
Amostra 18	25.09	9.37	29.78	23.89	6.10	26.94	23.48	7.56	27.26	17.63	1.22	18.24	20.12	1.87	21.05
Amostra 19	27.02	10.41	32.22	26.87	6.89	30.31	26.14	8.94	30.61	19.25	1.46	19.98	21.84	2.12	22.91
Amostra 20	23.93	6.92	27.39	21.80	4.46	24.03	20.19	4.49	22.43	16.25	1.00	16.75	17.38	1.39	18.08
Amostra 21	26.56	10.62	31.88	25.46	6.47	28.70	25.93	9.40	30.63	18.02	1.21	18.63	20.07	1.74	20.94
Amostra 22	27.51	9.50	32.26	25.40	6.31	28.56	25.61	7.61	29.42	19.07	1.40	19.77	21.05	1.96	22.03
Amostra 23	28.00	10.87	33.43	26.37	6.70	29.72	26.73	9.07	31.27	19.41	1.39	20.10	21.73	2.07	22.76
Amostra 24	24.27	8.37	28.46	23.78	5.47	26.52	22.44	6.46	25.67	16.82	1.00	17.32	19.07	1.61	19.88
Amostra 25	22.59	7.42	26.30	22.18	5.76	25.06	21.48	6.31	24.64	15.82	0.85	16.24	18.08	1.40	18.78
Amostra 26	25.09	10.37	30.27	24.38	6.61	27.69	24.45	9.27	29.09	19.30	1.50	20.05	21.23	2.09	22.27
Amostra 27	21.76	6.40	24.96	21.21	4.82	23.62	18.92	4.59	21.22	15.61	0.88	16.04	17.60	1.38	18.29
Amostra 28	21.40	5.55	24.18	19.85	4.16	21.92	18.78	4.31	20.94	14.64	0.73	15.01	15.78	1.09	16.33
Amostra 29	22.10	6.04	25.12	19.74	3.64	21.56	18.48	3.83	20.39	15.39	0.84	15.81	16.35	1.17	16.94
Amostra 30	26.51	9.87	31.45	23.82	5.62	26.63	24.78	8.14	28.85	17.77	1.20	18.37	19.25	1.60	20.05
Amostra 31	24.67	9.20	29.27	23.78	5.78	26.67	22.99	7.12	26.55	17.24	1.06	17.77	18.94	1.58	19.73
Amostra 32	27.15	10.29	32.29	26.51	7.22	30.12	26.61	9.56	31.39	19.68	1.49	20.42	22.27	2.12	23.33
Amostra 33	25.18	10.14	30.25	23.48	5.87	26.42	24.19	8.72	28.55	17.77	1.19	18.36	19.57	1.70	20.43
Amostra 34	26.41	10.45	31.63	25.94	7.04	29.46	25.61	9.35	30.29	19.84	1.49	20.59	22.51	2.29	23.66
Amostra 35	26.06	8.89	30.50	25.11	6.27	28.25	24.04	7.41	27.74	19.01	1.40	19.71	20.94	1.97	21.92
Amostra 36	23.71	7.95	27.68	23.00	5.52	25.76	22.06	6.47	25.30	17.95	1.26	18.58	19.82	1.79	20.71
Amostra 37	22.62	6.42	25.83	21.92	4.66	24.25	20.00	4.64	22.32	16.38	0.95	16.86	18.24	1.50	18.99
Amostra 38	27.04	12.78	33.43	26.13	7.33	29.80	26.92	11.93	32.89	18.24	1.23	18.86	20.46	1.75	21.33
Amostra 39	20.61	5.09	23.15	20.50	4.25	22.63	17.68	3.75	19.56	16.52	1.01	17.02	17.73	1.37	18.41
Amostra 40	30.19	14.77	37.58	29.78	9.55	34.56	29.71	14.46	36.94	21.26	1.69	22.10	25.55	2.80	26.95
Amostra 41	24.76	8.92	29.22	22.99	5.47	25.72	23.03	7.15	26.60	17.11	1.11	17.66	18.61	1.52	19.37
Amostra 42	22.04	5.52	24.80	21.21	4.32	23.37	18.72	3.81	20.63	16.26	0.98	16.74	17.48	1.34	18.15
Amostra 43	26.57	10.60	31.87	26.15	7.28	29.79	26.12	9.69	30.96	19.82	1.51	20.58	21.85	2.15	22.92
Amostra 44	23.36	8.28	27.50	22.04	5.50	24.79	21.72	6.80	25.12	16.89	1.02	16.89	18.43	1.51	19.19
Amostra 45	23.24	7.50	26.98	20.93	4.74	23.30	21.12	5.91	24.07	16.56	1.03	17.07	17.44	1.37	18.13
Amostra 46	18.33	3.91	20.28	18.57	3.37	20.26	14.27	2.39	15.47	14.85	0.79	15.24	15.65	1.12	16.21
Amostra 47	23.22	7.00	26.72	22.85	5.23	25.46	21.26	5.43	23.98	16.33	1.01	16.83	18.29	1.51	19.04
Amostra 48	26.69	8.72	31.05	25.03	5.85	27.95	23.73	6.34	26.90	17.14	1.12	17.69	19.24	1.67	20.08
Amostra 49	23.42	7.71	27.28	21.74	4.62	24.05	20.92	5.35	23.60	16.11	0.89	16.56	17.49	1.33	18.15
Amostra 50	26.59	10.90	32.04	25.58	6.72	28.94	26.17	9.60	30.97	18.85	1.32	19.51	21.82	2.07	22.86

Tabela C.2: Componentes do critério EPD para o conjunto com 192 unidades. (continuação)

	M6			M7			M8			M9			M12			Melhor Modelo	
	P	G	D	P	G	D	P	G	D	P	G	D	P	G	D	Segundo o	Critério
Amostra 1	35.35	14.30	42.50	21.06	5.21	23.66	28.51	4.48	30.76	28.09	4.59	30.39	47.62	20.50	57.87	M4	
Amostra 2	37.65	18.88	47.09	24.50	6.92	27.96	31.77	5.76	34.65	31.68	6.01	34.69	49.72	25.50	62.46	M4	
Amostra 3	35.14	16.46	43.36	21.69	4.89	24.13	28.97	4.49	31.22	29.02	4.82	31.43	49.76	25.33	62.42	M4	
Amostra 4	34.38	15.49	42.12	20.97	5.12	23.53	27.15	4.38	29.34	27.27	4.32	29.44	46.37	22.79	57.77	M4	
Amostra 5	39.80	21.60	50.60	27.08	8.95	31.55	36.53	7.87	40.46	36.62	8.12	40.68	52.36	26.86	65.79	M4	
Amostra 6	26.15	12.72	32.50	17.78	4.34	19.95	21.12	3.05	22.64	20.86	3.13	22.42	34.85	17.16	43.43	M4	
Amostra 7	33.98	19.33	43.64	22.07	5.98	25.06	28.65	5.48	31.39	29.04	5.40	31.74	43.19	25.54	55.96	M4	
Amostra 8	29.78	12.89	36.22	17.03	2.91	18.49	22.26	2.73	23.63	22.12	2.67	23.45	43.49	21.24	54.11	M3	
Amostra 9	32.60	15.73	40.47	19.12	3.76	21.00	24.19	3.64	26.01	24.49	3.72	26.35	44.05	23.30	55.70	M4	
Amostra 10	32.76	14.48	40.00	20.47	4.60	22.77	25.63	3.83	27.55	26.32	4.19	28.42	43.70	21.73	54.57	M4	
Amostra 11	34.89	19.57	44.67	24.03	7.50	27.78	30.97	6.35	34.15	30.80	6.38	33.99	44.54	24.33	56.70	M4	
Amostra 12	32.01	13.49	38.76	19.41	4.72	21.76	26.07	4.12	28.13	25.84	4.26	27.97	42.96	19.72	52.82	M4	
Amostra 13	32.23	15.26	39.86	20.66	5.35	23.33	27.46	4.83	29.88	27.18	4.87	29.61	43.58	19.62	53.39	M4	
Amostra 14	30.62	13.47	37.36	18.89	4.25	21.02	25.03	3.87	26.96	24.67	3.76	26.55	42.04	18.69	51.39	M4	
Amostra 15	34.91	12.36	41.09	19.93	4.29	22.07	28.08	4.14	30.16	26.93	4.03	28.94	50.38	19.94	60.35	M4	
Amostra 16	36.18	17.96	45.16	22.75	6.08	25.79	29.07	5.11	31.62	29.35	5.17	31.93	46.41	25.52	59.17	M4	
Amostra 17	29.37	12.12	35.43	17.74	3.68	19.58	24.10	3.63	25.92	23.46	3.47	25.20	41.20	18.73	50.56	M4	
Amostra 18	33.81	16.34	41.98	21.53	5.87	24.46	29.28	5.42	31.99	28.33	5.23	30.94	44.28	22.34	55.45	M4	
Amostra 19	35.83	15.64	43.65	22.49	6.12	25.55	30.11	5.45	32.84	30.60	5.72	33.46	47.30	21.00	57.70	M4	
Amostra 20	34.21	17.65	43.03	21.58	5.23	24.20	26.11	4.17	28.20	26.23	4.12	28.29	45.20	20.45	57.52	M4	
Amostra 21	34.20	16.79	42.60	22.55	6.51	25.60	29.14	5.44	31.86	28.77	5.52	31.53	44.79	21.78	55.68	M4	
Amostra 22	36.56	20.91	47.01	23.02	5.92	25.98	28.42	4.81	30.82	28.64	5.03	31.16	47.40	27.75	61.28	M4	
Amostra 23	35.12	15.64	42.94	23.65	6.78	27.04	30.47	5.78	33.36	30.52	5.70	33.37	47.06	20.24	57.18	M4	
Amostra 24	33.81	16.34	41.98	21.53	5.87	24.46	29.28	5.42	31.99	28.33	5.23	30.94	44.28	22.34	55.45	M4	
Amostra 25	31.28	17.54	40.05	19.10	4.68	21.45	26.02	4.52	28.29	25.70	4.58	27.99	39.95	23.98	51.94	M4	
Amostra 26	31.45	15.03	38.96	21.62	6.35	24.79	26.80	4.84	29.23	27.41	5.07	29.94	40.18	20.66	50.52	M4	
Amostra 27	30.07	14.04	37.09	18.71	4.19	20.80	24.29	3.84	26.20	24.22	3.86	26.15	40.77	20.99	51.27	M4	
Amostra 28	30.16	19.56	39.94	18.57	3.75	20.45	22.18	3.31	23.83	21.81	3.24	23.43	38.24	27.08	51.78	M4	
Amostra 29	31.19	14.30	38.34	20.26	4.87	22.69	25.24	3.76	27.12	24.97	3.88	26.91	41.87	20.10	51.92	M4	
Amostra 30	33.47	17.22	42.08	22.78	6.32	25.94	28.27	4.95	30.75	27.83	5.01	30.33	43.54	23.15	55.12	M4	
Amostra 31	29.99	12.69	36.34	20.97	5.72	23.84	26.90	4.55	29.18	26.32	4.17	28.40	37.78	17.59	46.57	M4	
Amostra 32	35.33	18.03	44.35	22.42	6.04	25.44	30.84	6.03	33.86	31.10	6.06	34.13	42.27	23.83	54.18	M4	
Amostra 33	30.19	16.99	38.69	21.85	6.38	25.04	26.34	4.81	28.74	26.62	4.92	29.08	35.28	23.04	46.80	M4	
Amostra 34	32.02	15.11	39.58	22.29	6.19	25.39	28.65	5.38	31.34	29.07	5.67	31.90	39.16	21.24	49.78	M4	
Amostra 35	35.14	16.99	43.64	22.11	5.58	24.90	29.55	5.27	32.18	29.27	5.16	31.85	42.96	23.34	54.64	M4	
Amostra 36	31.59	14.26	38.72	20.05	4.82	22.46	26.22	4.30	28.37	25.77	4.30	27.92	38.22	19.65	48.05	M4	
Amostra 37	34.08	15.08	41.62	20.05	4.28	22.19	27.15	4.39	29.35	27.29	4.48	29.52	42.46	23.10	54.01	M4	
Amostra 38	31.71	18.96	41.19	23.37	7.77	27.26	27.72	5.26	30.35	27.74	5.32	30.40	37.56	23.14	49.12	M4	
Amostra 39	29.94	14.84	37.36	18.77	3.74	20.64	24.57	3.53	26.34	24.38	3.64	26.21	37.61	23.12	49.17	M4	
Amostra 40	36.62	19.49	46.36	26.07	9.19	30.67	34.95	8.03	38.96	34.28	7.84	38.20	43.16	24.60	55.46	M4	
Amostra 41	31.89	15.66	39.72	21.10	5.53	23.86	26.37	4.76	28.75	26.09	4.59	28.38	39.20	21.70	50.05	M4	
Amostra 42	32.12	15.85	40.05	19.38	3.91	21.34	24.79	3.53	26.55	24.90	3.51	26.66	40.27	23.31	51.93	M4	
Amostra 43	33.94	16.60	42.24	22.70	6.60	26.00	30.11	6.09	33.15	30.56	5.96	33.54	41.20	23.47	52.94	M4	
Amostra 44	30.95	16.15	39.03	20.02	5.22	22.62	25.40	4.49	27.65	25.24	4.35	27.41	39.28	21.31	49.93	M4	
Amostra 45	31.50	16.31	39.66	19.56	4.80	21.97	24.69	4.12	26.75	25.36	4.40	27.56	38.22	23.12	49.77	M4	
Amostra 46	30.26	13.13	36.82	16.95	2.81	18.35	23.45	3.08	24.99	23.13	3.05	24.65	39.65	22.01	50.66	M4	
Amostra 47	32.45	16.47	40.68	19.69	4.40	21.89	26.33	4.25	28.46	26.08	4.33	28.25	39.66	24.40	51.86	M4	
Amostra 48	37.81	16.95	46.28	23.13	5.98	26.12	31.29	5.71	34.14	31.21	5.77	34.09	46.10	23.76	57.98	M4	
Amostra 49	32.02	13.58	38.81	20.83	5.43	23.54	26.58	4.26	28.71	28.24	16.98	36.73	39.63	18.73	49.00	M4	
Amostra 50	34.46	16.40	42.65	22.81	7.00	26.31	29.89	5.61	32.70	29.53	5.53	32.30	40.23	21.81	51.13	M4	

Tabela C.3: Componentes do critério EPD para o conjunto com 500 unidades. (continua)

	M1		M2		M3		M4		M5		
	P	G	P	D	P	G	P	G	P	G	
Amostra 1	44.67	10.05	49.69	53.12	42.61	9.48	47.35	40.04	43.10	8.11	47.16
Amostra 2	43.06	10.44	48.29	47.69	39.47	8.74	43.84	35.79	38.58	7.08	42.12
Amostra 3	58.99	16.06	67.02	62.91	55.42	14.35	62.59	46.22	54.39	11.67	60.22
Amostra 4	37.36	6.79	40.75	38.47	7.13	34.59	32.03	3.18	31.84	4.80	36.88
Amostra 5	50.58	13.21	57.19	50.08	12.29	56.23	46.20	10.92	44.30	8.31	48.46
Amostra 6	40.08	8.13	44.15	40.54	7.99	44.53	36.01	34.20	36.81	5.94	39.78
Amostra 7	57.24	16.09	65.28	54.74	14.44	61.96	53.92	6.00	43.66	10.92	56.39
Amostra 8	41.47	8.37	45.65	40.92	7.78	44.81	36.43	3.84	35.17	38.05	5.93
Amostra 9	52.58	14.52	59.84	51.60	13.20	58.20	49.45	12.86	43.32	8.34	49.36
Amostra 10	54.52	15.08	62.06	53.93	14.06	60.96	52.15	13.78	59.04	47.17	50.23
Amostra 11	48.56	11.12	54.12	47.62	10.44	52.84	44.07	9.23	48.68	40.24	44.52
Amostra 12	46.64	10.45	51.87	47.56	10.54	52.83	43.04	8.94	47.50	36.66	42.55
Amostra 13	45.11	10.33	50.28	46.08	10.48	51.32	41.69	4.73	38.16	40.26	6.99
Amostra 14	54.47	13.57	61.26	55.19	13.05	61.72	51.57	12.12	57.63	44.52	49.07
Amostra 15	61.82	19.66	71.65	60.89	17.92	69.85	59.68	18.01	68.68	47.91	7.90
Amostra 16	56.70	15.58	64.49	56.67	15.18	64.26	54.21	14.11	61.26	43.83	6.62
Amostra 17	48.78	10.68	54.12	47.66	10.27	52.80	44.53	9.04	49.05	37.09	4.74
Amostra 18	57.60	18.94	67.07	58.05	18.33	67.22	56.40	17.64	65.21	43.72	7.01
Amostra 19	38.93	8.17	43.02	39.41	8.24	43.53	34.16	6.43	37.37	30.77	3.87
Amostra 20	46.17	10.51	51.42	44.11	9.21	48.72	41.37	8.56	45.65	35.70	4.40
Amostra 21	45.13	10.18	50.22	46.12	10.34	51.29	41.77	8.67	46.10	35.30	4.66
Amostra 22	47.25	12.16	53.33	48.05	11.87	53.99	43.61	10.16	48.69	39.20	43.37
Amostra 23	44.14	10.34	49.31	45.31	9.98	50.30	39.51	8.02	43.52	32.93	3.85
Amostra 24	54.49	16.08	62.52	53.26	14.74	60.64	52.03	14.73	59.40	42.94	6.90
Amostra 25	49.12	12.50	55.37	47.65	11.37	53.34	45.06	10.55	50.34	37.30	5.25
Amostra 26	50.71	12.86	57.14	48.74	11.39	54.43	45.74	10.43	50.95	36.97	4.68
Amostra 27	43.79	8.93	48.26	43.37	8.46	47.60	36.68	6.18	39.77	32.21	3.51
Amostra 28	49.46	13.45	56.18	49.24	12.97	55.73	47.39	12.30	53.54	37.59	5.20
Amostra 29	42.68	9.55	47.45	41.67	8.96	46.15	39.11	7.98	43.10	33.82	4.62
Amostra 30	52.56	13.21	59.16	54.39	13.93	61.36	50.14	11.94	56.11	40.30	5.61
Amostra 31	58.07	16.74	66.43	57.11	14.53	64.38	54.20	14.02	61.21	41.54	5.78
Amostra 32	50.37	12.54	56.64	47.08	10.39	52.27	45.36	10.22	50.47	37.39	4.94
Amostra 33	44.38	9.67	49.21	43.62	9.06	48.14	38.99	7.43	42.71	33.14	3.78
Amostra 34	51.26	15.60	59.06	51.71	15.17	59.30	48.47	13.91	55.42	40.12	6.38
Amostra 35	60.05	17.20	68.65	60.51	17.26	69.14	58.24	16.22	66.35	43.58	6.15
Amostra 36	57.71	16.63	66.02	56.33	14.69	63.67	54.84	14.54	62.11	42.35	5.88
Amostra 37	45.00	10.70	50.35	43.87	9.79	48.76	39.60	8.17	43.68	32.98	3.98
Amostra 38	59.72	18.40	68.92	60.43	18.15	69.51	57.06	16.83	65.47	45.67	7.64
Amostra 39	55.29	14.31	62.44	56.00	13.63	62.81	52.18	12.49	58.43	42.42	5.97
Amostra 40	47.09	10.36	52.27	46.79	9.82	51.70	42.27	8.45	46.50	36.35	4.54
Amostra 41	47.41	11.54	53.18	47.00	10.79	52.39	43.66	10.01	48.67	36.79	4.87
Amostra 42	54.83	15.84	62.74	53.43	15.09	60.97	52.19	14.65	59.52	42.59	6.90
Amostra 43	44.15	8.98	48.64	42.53	7.91	46.48	37.20	6.44	40.42	32.94	3.47
Amostra 44	49.28	11.57	55.06	49.64	10.99	55.14	44.29	9.05	48.81	37.36	4.66
Amostra 45	48.34	12.28	54.48	49.39	12.72	55.75	45.21	10.72	50.57	36.57	4.88
Amostra 46	43.43	9.63	48.25	42.23	9.03	46.74	38.60	7.67	42.44	33.17	4.25
Amostra 47	67.69	23.79	79.59	65.89	21.06	76.42	66.01	21.97	76.99	48.63	8.11
Amostra 48	58.69	16.69	67.03	58.20	15.29	65.84	55.89	14.83	63.31	43.25	6.05
Amostra 49	54.10	15.24	61.72	53.57	13.92	60.53	50.97	13.02	57.47	41.28	5.95
Amostra 50	50.48	14.69	57.82	50.14	13.24	56.76	46.86	12.03	52.87	36.61	4.98



Tabela C.4: Componentes do critério EPD para o conjunto com 500 unidades. (continuação)

	M6		M7		M8		M9		M12		Melhor Modelo Segundo o Critério					
	P	G	P	D	P	G	P	G	P	G	D					
Amostra 1	64.29	25.20	76.89	6.63	42.09	47.60	9.10	52.15	48.87	9.48	53.61	83.28	44.44	105.50	M4	
Amostra 2	56.36	23.42	68.07	37.73	6.91	41.19	41.77	7.28	45.41	41.77	7.26	45.40	70.32	38.54	89.59	M4
Amostra 3	66.26	34.09	83.30	51.83	11.90	57.78	54.81	11.44	60.54	54.95	11.26	60.58	80.54	48.49	104.79	M4
Amostra 4	56.81	23.83	68.72	37.40	5.93	40.37	42.55	6.86	45.97	43.68	7.27	47.31	73.73	43.62	96.54	M4
Amostra 5	65.22	26.73	78.59	45.11	9.88	50.05	51.93	10.99	57.43	53.82	11.71	59.67	81.37	39.97	101.35	M4
Amostra 6	52.82	19.99	62.82	37.71	6.41	40.91	41.88	6.83	45.29	42.86	7.09	46.41	69.08	35.37	86.76	M4
Amostra 7	75.08	34.20	92.18	51.94	12.31	58.09	57.63	13.62	64.44	58.81	14.04	65.83	93.45	53.50	120.20	M4
Amostra 8	55.81	23.14	67.38	39.02	6.60	42.32	44.53	7.38	48.22	45.73	7.76	49.61	73.07	40.51	93.32	M4
Amostra 9	67.03	29.40	81.73	46.04	9.89	50.99	47.77	8.76	52.15	47.77	8.74	52.14	82.01	46.92	105.47	M4
Amostra 10	65.52	26.45	78.74	45.48	9.34	50.15	49.12	9.20	53.72	49.97	9.36	54.64	81.61	40.18	101.70	M4
Amostra 11	64.11	28.06	78.14	43.39	7.99	47.38	47.43	8.30	51.58	47.78	8.50	52.03	80.83	45.44	103.55	M4
Amostra 12	62.75	25.68	75.59	41.50	7.37	45.19	48.08	8.48	52.33	48.04	8.44	52.26	82.22	40.67	102.55	M4
Amostra 13	60.25	25.54	73.02	39.77	7.25	43.40	44.31	7.80	48.21	44.58	7.86	48.52	76.76	44.08	98.80	M4
Amostra 14	76.80	31.96	92.78	50.50	10.80	55.90	58.34	12.25	64.47	59.65	12.69	65.99	97.66	49.55	122.44	M4
Amostra 15	78.33	33.23	94.94	53.78	13.52	60.53	60.29	14.07	67.32	61.35	14.40	68.55	95.89	52.87	122.33	M4
Amostra 16	72.43	31.02	87.94	50.06	11.06	55.59	55.15	11.46	60.88	56.01	11.85	61.94	90.94	48.88	115.38	M4
Amostra 17	75.36	35.80	93.26	46.13	8.98	50.62	53.75	10.97	59.23	54.76	11.19	60.35	93.45	59.72	123.31	M4
Amostra 18	96.63	36.92	115.09	49.78	12.49	56.03	58.86	14.92	66.32	58.61	14.88	66.05	94.13	52.75	120.50	M4
Amostra 19	53.59	21.44	64.31	34.70	5.72	37.56	37.79	5.80	40.69	37.98	5.77	40.86	68.79	40.37	88.98	M4
Amostra 20	58.59	30.69	73.93	42.48	8.07	46.52	42.69	7.11	46.24	43.77	7.37	47.46	70.62	48.67	94.95	M4
Amostra 21	62.43	22.27	73.57	39.66	7.13	43.23	45.72	8.24	49.84	46.96	8.35	51.13	78.01	40.71	98.37	M4
Amostra 22	61.14	25.52	73.90	41.14	8.13	45.21	48.53	9.86	53.45	48.84	10.08	53.89	79.10	42.38	100.29	M4
Amostra 23	56.58	18.66	65.91	40.84	7.90	44.79	46.10	8.15	50.18	45.39	7.87	49.32	71.42	32.92	87.88	M4
Amostra 24	61.40	29.74	76.27	46.76	10.68	52.10	49.50	10.23	54.61	50.18	10.39	55.37	75.52	42.85	96.94	M4
Amostra 25	66.22	25.94	79.19	42.58	8.50	46.83	48.90	9.89	53.84	49.38	9.97	54.37	82.31	44.74	104.68	M4
Amostra 26	64.51	28.68	78.90	45.22	9.72	50.39	49.98	10.04	55.00	51.27	10.57	56.56	79.92	44.10	101.97	M4
Amostra 27	65.06	24.04	77.08	42.72	8.09	46.77	48.10	8.55	52.37	50.23	9.17	54.82	81.77	45.95	104.74	M4
Amostra 28	66.55	32.42	82.77	42.75	8.79	47.14	48.53	10.26	53.66	50.01	10.57	55.29	79.64	47.53	103.41	M4
Amostra 29	64.68	26.30	77.83	37.69	6.56	40.97	42.58	7.33	46.24	43.25	7.45	46.97	80.55	44.02	102.56	M4
Amostra 30	67.04	26.33	80.20	46.90	9.67	51.73	51.40	9.90	56.35	53.09	10.70	58.44	83.54	46.53	106.80	M4
Amostra 31	69.65	29.88	84.59	53.12	12.94	59.59	53.99	10.97	59.47	54.57	11.21	60.18	85.50	50.95	110.97	M4
Amostra 32	67.38	30.36	82.56	46.13	9.55	50.91	45.35	7.85	49.27	44.69	7.41	48.39	81.77	45.95	104.74	M4
Amostra 33	59.07	25.84	71.99	40.65	7.41	44.36	45.20	7.81	49.10	45.90	7.81	49.80	75.99	45.59	98.79	M4
Amostra 34	64.51	28.68	78.85	44.89	10.80	50.29	49.79	11.05	55.31	50.19	11.01	55.70	75.74	46.92	99.20	M4
Amostra 35	88.11	46.28	111.25	55.20	13.79	62.10	65.28	17.29	73.92	65.63	17.24	74.26	105.06	67.84	138.97	M4
Amostra 36	75.31	33.64	92.13	51.96	12.24	58.07	58.18	12.91	64.63	58.65	13.06	65.18	91.34	55.39	119.04	M4
Amostra 37	61.72	23.38	73.41	42.37	8.83	46.79	46.24	8.77	50.62	46.87	8.86	51.31	74.10	36.60	92.40	M4
Amostra 38	76.17	31.38	91.86	51.70	12.77	58.09	62.35	15.63	70.17	63.47	16.49	71.72	95.10	51.18	120.68	M4
Amostra 39	64.78	22.34	75.95	43.05	7.97	47.03	49.40	8.79	53.80	49.75	8.78	54.14	82.22	32.41	98.43	M4
Amostra 40	63.23	23.22	74.84	43.00	8.47	47.24	49.22	9.60	54.02	50.04	9.65	54.87	81.31	35.19	98.90	M4
Amostra 42	68.61	32.98	85.10	46.33	10.24	51.45	49.70	10.16	54.78	48.93	9.75	53.80	83.34	56.00	111.34	M4
Amostra 43	58.05	23.78	69.93	41.50	7.33	45.16	43.93	6.95	47.40	45.81	7.42	49.52	73.06	40.10	93.10	M4
Amostra 44	64.15	21.60	74.95	45.72	9.12	52.00	51.64	9.83	56.56	52.00	9.72	56.86	82.62	37.63	101.43	M4
Amostra 45	64.65	29.71	79.50	43.15	8.86	47.58	49.83	10.35	55.00	50.90	10.49	56.14	79.78	45.50	102.53	M4
Amostra 46	60.10	26.67	73.43	40.46	7.71	44.31	44.74	8.31	48.90	45.14	8.36	49.32	73.94	40.99	94.43	M4
Amostra 47	86.52	39.88	106.46	60.65	17.48	69.39	67.63	18.40	76.83	67.88	18.65	77.20	105.78	54.61	133.09	M4
Amostra 48	76.47	30.25	91.59	53.40	12.88	59.84	60.27	13.89	67.22	62.31	14.40	69.51	95.92	47.51	119.68	M4
Amostra 49	72.16	27.25	85.78	48.20	10.92	53.66	52.21	10.82	57.62	52.64	10.90	58.09	88.02	46.20	111.12	M4
Amostra 50	61.14	25.00	73.64	43.99	9.99	48.99	45.17	8.43	49.38	44.60	8.16	48.67	77.19	41.60	97.99	M4

## Apêndice D

### Critério DIC com todas as componentes

Tabela D.1: Componentes do critério DIC para o conjunto com 192 unidades. (continua)

	M1			M2			M3			M4			M5		
	pd	Dbarra	DIC	pd	Dbarra	DIC	pd	Dbarra	DIC	pd	Dbarra	DIC	pd	Dbarra	DIC
Amostra 1	118.71	77.35	196.06	136.18	45.23	181.40	141.65	48.27	189.92	179.65	-31.70	147.94	177.05	-11.12	165.93
Amostra 2	101.33	121.01	222.34	124.91	86.41	211.32	113.78	107.02	220.80	185.21	12.46	197.67	178.28	34.80	213.08
Amostra 3	120.82	85.12	205.94	134.30	62.60	196.91	142.08	66.01	208.69	182.11	-24.75	157.36	175.50	4.16	179.65
Amostra 4	127.27	76.61	203.88	143.25	40.76	184.02	161.94	36.00	197.94	196.44	-44.02	152.42	194.01	-23.60	170.41
Amostra 5	86.51	148.22	234.72	113.99	115.18	229.17	99.42	143.30	242.72	181.51	11.75	193.25	177.19	48.59	225.78
Amostra 6	103.94	51.58	155.52	125.86	13.02	138.88	127.20	30.54	157.74	189.04	-61.06	127.98	186.88	-48.52	138.35
Amostra 7	103.73	93.57	197.30	117.08	74.32	191.40	116.77	87.38	204.15	183.29	-16.16	167.12	178.93	10.79	189.72
Amostra 8	147.35	-6.72	140.63	151.79	-26.93	124.85	174.04	-83.19	90.85	190.74	-80.67	110.07	185.50	-65.90	119.60
Amostra 9	137.51	38.90	176.42	142.94	14.01	156.95	164.90	-14.18	150.72	187.51	-62.90	124.61	182.84	-44.40	138.44
Amostra 10	120.04	67.40	187.45	135.65	45.90	181.56	146.67	41.42	188.10	184.98	-39.62	145.36	178.82	-10.86	167.96
Amostra 11	89.03	120.54	209.57	113.90	88.67	202.57	92.63	117.48	210.11	178.54	-1.96	176.59	174.71	33.95	208.66
Amostra 12	115.31	60.27	175.58	130.76	32.64	163.41	137.72	38.14	175.85	186.34	-41.98	144.36	177.46	-26.26	151.20
Amostra 13	99.65	85.42	185.07	123.81	57.80	181.62	112.88	76.19	189.08	187.95	-14.28	173.67	183.84	9.22	193.05
Amostra 14	118.65	59.15	177.80	131.24	32.38	163.63	137.62	31.58	169.20	186.28	-45.29	140.99	178.01	-21.96	156.05
Amostra 15	127.93	59.20	187.13	142.16	38.62	180.78	151.70	29.62	181.31	191.15	-36.29	154.86	185.33	-14.23	171.10
Amostra 16	115.42	108.43	223.86	127.82	77.68	205.51	134.18	88.68	222.86	186.68	-33.94	152.74	175.22	-7.25	167.97
Amostra 17	119.22	42.26	161.48	136.36	26.14	162.50	141.89	20.75	162.63	189.31	-39.06	150.25	184.87	-19.94	164.93
Amostra 18	103.17	94.74	197.91	122.37	64.77	187.14	119.59	78.96	198.55	179.14	-22.49	156.65	177.41	6.87	184.28
Amostra 19	96.91	108.13	205.05	123.99	86.86	210.85	111.46	100.02	211.48	182.45	-6.12	176.32	177.22	26.36	203.58
Amostra 20	125.87	76.46	202.33	137.26	42.85	180.11	150.05	35.33	185.38	184.76	-42.58	142.19	178.68	-23.20	155.49
Amostra 21	96.09	109.20	205.29	124.48	75.00	199.48	112.41	100.75	213.15	184.79	-16.30	168.49	178.31	5.29	183.60
Amostra 22	109.29	106.66	215.95	123.74	72.50	196.24	122.82	88.42	211.24	185.73	-3.70	182.03	181.67	20.32	201.99
Amostra 23	100.43	118.65	219.09	124.35	78.34	202.69	115.65	103.88	219.53	182.34	-5.63	176.72	176.63	22.17	198.80
Amostra 24	107.03	83.51	190.54	130.34	61.22	191.56	130.71	64.54	195.25	188.96	-34.30	154.67	179.59	-6.95	172.63
Amostra 25	110.56	67.42	177.99	122.62	48.02	170.64	129.12	59.65	188.77	191.32	-41.73	149.59	184.06	-10.87	173.19
Amostra 26	91.47	96.55	188.02	115.85	67.00	182.85	103.29	89.59	192.78	178.30	-7.06	171.25	172.15	15.15	187.31
Amostra 27	119.58	54.40	173.98	131.51	33.54	165.06	141.30	36.50	177.79	184.69	-51.34	133.35	181.00	-24.81	156.20
Amostra 28	130.07	48.60	178.67	136.11	20.17	156.28	151.27	19.08	170.35	186.99	-62.67	124.32	180.79	-44.86	135.93
Amostra 29	126.58	56.44	183.02	143.04	23.37	166.41	157.61	14.74	172.35	190.05	-51.32	138.73	185.37	-36.59	148.77
Amostra 30	102.66	104.85	207.51	129.02	66.20	195.22	117.57	91.08	208.65	185.42	-22.90	162.51	180.58	-2.07	178.50
Amostra 31	99.89	89.11	189.00	130.38	61.09	191.46	121.73	71.10	192.83	188.10	-25.10	163.00	183.50	-6.13	177.37
Amostra 32	100.32	108.30	208.62	116.67	82.90	199.57	108.13	105.42	213.55	181.86	0.74	182.60	178.48	27.01	205.49
Amostra 33	92.90	95.29	188.19	125.65	59.55	185.19	109.30	93.59	202.89	188.88	-18.97	169.91	182.85	2.91	185.77
Amostra 34	94.53	105.01	199.54	116.32	78.91	195.23	101.49	96.00	197.49	180.65	1.40	182.05	172.77	29.11	201.88
Amostra 35	108.01	96.39	204.40	124.88	67.67	192.55	125.47	82.49	207.96	182.84	-5.94	176.90	177.59	14.25	191.85
Amostra 36	106.52	75.36	181.89	121.61	50.14	171.75	122.21	60.59	182.80	184.75	-17.47	167.28	173.73	0.94	174.67
Amostra 37	123.88	62.12	186.00	134.05	40.57	174.62	142.63	36.33	178.96	184.20	-38.85	145.35	178.63	-13.31	165.32
Amostra 38	80.50	119.72	200.22	115.92	84.39	200.31	86.59	115.97	202.56	180.96	-19.17	161.79	179.68	7.61	187.29
Amostra 39	126.62	34.48	161.10	136.16	25.55	161.71	150.04	104.48	160.52	184.55	-42.95	141.60	186.08	-17.87	168.20
Amostra 40	73.93	140.22	214.14	105.57	114.88	220.45	80.99	141.24	222.23	180.37	13.32	193.69	174.92	58.21	233.13
Amostra 41	104.10	89.68	193.78	124.65	50.39	175.04	120.52	75.36	195.88	181.86	-31.98	149.87	177.48	-11.62	166.86
Amostra 42	130.42	52.76	183.18	138.76	32.70	171.46	150.19	20.35	170.55	185.13	-43.01	142.12	178.19	-24.04	154.15
Amostra 43	93.92	105.22	199.13	116.50	84.09	200.59	103.45	100.76	204.21	180.10	0.79	180.89	174.45	24.03	198.48
Amostra 44	108.06	78.19	186.25	123.67	43.40	167.07	121.20	61.13	182.33	183.61	-39.41	144.20	173.46	-16.95	156.51
Amostra 45	111.87	71.91	183.79	128.50	37.35	165.85	127.39	54.11	181.50	186.21	-35.83	150.39	183.11	-19.20	163.90
Amostra 46	137.91	7.58	145.49	140.82	11.11	151.93	162.74	-33.28	129.46	187.40	-61.06	126.35	179.95	-43.10	136.85
Amostra 47	119.32	69.59	188.91	130.31	49.50	179.81	140.24	53.65	193.89	183.30	-39.38	143.92	181.46	-10.98	170.47
Amostra 48	117.97	104.32	222.29	131.44	77.00	208.44	140.10	83.62	223.72	189.38	-26.39	162.99	180.95	-3.55	177.40
Amostra 49	114.95	76.62	191.57	137.51	41.47	178.98	138.89	52.82	191.71	188.77	-42.12	146.66	186.69	-20.72	165.97
Amostra 50	92.69	109.17	201.86	120.42	77.00	197.42	108.51	103.50	212.02	184.22	-9.45	174.77	177.85	19.68	197.53

Tabela D.2: Componentes do critério DIC para o conjunto com 192 unidades. (continuação)

	M6			M7			M8			M9			M12			Melhor Modelo Segundo o Critério
	pd	Dbarra	DIC	pd	Dbarra	DIC	pd	Dbarra	DIC	pd	Dbarra	DIC	pd	Dbarra	DIC	
Amostra 1	202.35	254.47	456.82	121.06	34.40	155.46	159.67	89.74	249.41	150.66	80.34	231.00	254.80	369.48	624.28	M4
Amostra 2	182.28	282.77	465.06	113.39	70.28	183.67	150.03	111.85	261.88	144.11	108.74	252.85	244.84	401.83	646.67	M7
Amostra 3	233.78	307.18	540.96	126.92	37.18	164.10	156.43	89.98	246.40	154.15	90.78	240.94	285.88	442.89	728.77	M4
Amostra 4	208.28	271.73	480.01	122.70	34.28	156.98	160.88	82.66	243.54	154.50	76.38	230.88	253.09	388.69	641.78	M4
Amostra 5	160.52	285.97	446.49	101.18	95.03	196.21	142.00	143.70	285.70	134.37	140.98	275.35	229.20	397.00	626.20	M4
Amostra 6	207.43	231.51	438.94	120.39	0.66	121.05	163.79	27.22	191.01	154.93	21.32	176.25	268.78	352.49	621.28	M7
Amostra 7	179.17	283.04	462.22	114.00	46.07	160.06	151.96	96.19	248.15	143.96	91.84	235.80	260.05	424.34	684.39	M7
Amostra 8	252.02	277.77	529.79	140.74	-17.23	123.51	176.35	38.92	215.27	167.30	30.35	197.65	310.50	435.08	745.58	M3
Amostra 9	226.96	290.40	517.36	133.35	7.64	140.99	164.61	57.50	222.11	156.69	54.23	210.92	280.92	425.69	706.62	M4
Amostra 10	240.56	288.05	528.62	126.85	25.80	152.66	159.39	66.86	226.24	152.51	68.14	220.65	317.25	450.18	767.43	M4
Amostra 11	162.33	268.71	431.04	104.08	68.30	172.39	144.95	111.41	256.37	136.73	104.31	241.04	233.50	383.74	617.24	M7
Amostra 12	194.07	233.08	427.15	121.82	18.44	140.26	160.27	73.21	233.47	152.35	66.82	219.17	253.42	361.24	614.66	M7
Amostra 13	185.09	245.15	430.25	116.79	32.21	149.00	154.02	83.68	237.69	146.78	77.52	224.30	260.65	366.29	626.94	M7
Amostra 14	209.16	244.94	454.09	126.35	10.39	136.74	163.32	65.33	228.65	155.00	56.24	211.24	256.90	353.63	610.52	M7
Amostra 15	222.48	248.82	471.30	130.20	20.23	150.43	165.75	86.68	252.43	158.83	73.53	232.36	263.62	376.24	639.86	M7
Amostra 16	198.48	287.69	486.17	118.29	53.51	171.81	148.62	91.07	239.70	145.62	89.62	235.24	258.00	419.81	677.81	M4
Amostra 17	233.70	250.45	484.15	130.75	-3.73	127.02	166.64	56.49	239.13	158.99	47.58	206.57	289.52	387.42	676.94	M7
Amostra 18	183.66	256.72	440.38	115.18	43.19	158.38	148.87	95.49	244.36	146.19	88.06	234.26	245.29	378.35	623.64	M4
Amostra 19	182.85	249.72	432.57	113.56	49.65	163.20	152.88	103.16	256.04	145.94	101.11	247.06	261.48	381.25	642.73	M7
Amostra 20	206.20	293.15	499.35	122.48	38.75	161.22	164.62	77.04	241.65	153.32	66.56	218.88	267.03	419.66	686.69	M4
Amostra 21	183.51	260.85	444.36	111.17	54.07	165.24	150.77	96.53	247.30	143.86	90.54	234.40	245.07	373.17	618.24	M7
Amostra 22	196.66	315.20	511.87	119.89	53.47	173.36	157.03	90.65	247.68	148.99	87.92	236.92	264.39	444.10	708.48	M7
Amostra 23	203.19	269.56	472.75	112.70	65.22	177.92	153.93	108.71	262.65	146.44	101.83	248.27	275.38	388.98	664.36	M4
Amostra 24	183.08	238.19	421.26	119.93	28.62	148.55	156.54	88.62	245.16	149.38	82.60	231.99	254.04	368.86	622.90	M7
Amostra 25	191.94	276.11	468.06	120.77	14.76	135.52	151.05	71.20	222.25	144.92	63.26	210.18	259.13	412.25	671.38	M7
Amostra 26	197.24	254.07	451.31	108.26	45.76	134.02	146.08	76.57	222.65	142.77	75.25	222.02	293.06	414.85	707.91	M7
Amostra 27	229.16	271.85	501.01	126.78	7.63	134.42	160.93	59.07	220.00	152.65	51.29	203.94	291.91	416.17	708.08	M4
Amostra 28	231.95	346.98	578.93	133.09	5.52	138.62	159.10	36.79	195.88	155.61	31.99	187.61	288.96	485.77	774.72	M4
Amostra 29	238.85	285.23	524.09	124.20	26.36	150.56	162.34	65.22	227.56	156.52	59.21	215.73	298.79	410.60	709.39	M4
Amostra 30	201.54	283.20	484.74	113.26	54.90	168.17	151.76	87.81	239.57	148.38	83.32	231.70	286.11	430.52	716.63	M4
Amostra 31	223.30	248.51	471.81	114.76	36.78	151.54	161.45	81.63	243.08	154.40	69.56	223.96	246.00	331.70	577.70	M7
Amostra 32	184.92	276.46	461.38	115.82	50.64	166.46	147.52	108.65	256.17	140.98	104.60	245.58	200.16	346.54	546.71	M7
Amostra 33	204.96	285.22	490.18	108.54	47.79	156.33	151.02	75.25	226.28	144.98	73.70	218.68	232.71	379.22	611.94	M7
Amostra 34	212.80	270.14	482.94	111.42	48.34	159.76	146.47	91.93	238.40	142.30	92.08	234.38	228.32	352.42	580.74	M7
Amostra 35	190.14	269.73	459.87	117.72	43.34	161.06	151.25	97.36	248.62	147.25	91.20	238.45	210.64	353.82	564.46	M7
Amostra 36	217.77	264.37	482.14	120.32	23.45	143.77	153.72	70.76	224.48	149.82	66.95	216.78	238.09	346.90	584.99	M7
Amostra 37	205.95	264.03	469.98	127.88	18.76	146.64	160.09	83.07	243.16	152.55	78.08	230.63	201.77	340.41	542.18	M4
Amostra 38	167.63	286.32	433.96	96.52	63.76	160.29	148.90	87.84	236.73	142.77	82.99	225.76	202.92	347.19	550.11	M7
Amostra 39	258.02	312.75	570.77	133.72	3.81	137.52	164.90	59.18	224.07	158.23	54.16	212.39	276.51	426.17	702.68	M7
Amostra 40	159.69	265.42	425.11	93.93	89.66	183.59	135.97	135.00	270.97	131.30	128.70	260.00	191.10	341.35	532.46	M7
Amostra 41	194.43	287.60	452.03	116.47	37.61	154.08	150.31	73.96	224.27	144.24	68.31	212.55	200.28	328.28	528.56	M4
Amostra 42	236.81	301.66	538.47	132.08	12.24	144.31	163.70	59.25	222.95	161.17	55.91	217.08	247.11	390.85	637.95	M4
Amostra 43	180.44	256.82	437.26	108.89	53.70	162.59	148.73	106.49	255.14	140.05	101.10	241.15	194.68	336.98	531.66	M7
Amostra 44	177.83	247.98	425.82	117.75	27.21	144.96	154.19	68.49	222.68	145.04	60.35	205.40	236.82	361.43	598.25	M4
Amostra 45	198.22	271.30	469.53	121.44	20.80	142.24	154.12	61.21	215.33	148.95	62.48	211.43	201.63	341.22	542.85	M7
Amostra 46	262.30	292.45	554.75	142.61	-20.15	122.46	170.64	48.93	219.57	163.50	46.28	205.78	239.64	371.97	611.61	M7
Amostra 47	222.32	285.81	518.14	127.08	19.45	146.53	160.86	73.56	234.42	150.86	66.63	217.49	226.88	380.77	607.65	M4
Amostra 48	183.67	286.11	449.78	116.96	53.50	170.46	154.47	113.52	267.99	147.62	106.86	254.48	187.72	332.43	520.16	M4
Amostra 49	203.85	243.25	447.10	117.12	35.16	152.29	159.38	77.83	237.21	147.20	132.65	179.85	215.10	312.58	527.68	M4
Amostra 50	182.64	287.52	440.16	106.98	57.84	164.82	149.00	101.63	250.63	145.02	95.43	240.45	215.68	345.41	561.09	M7

Tabela D.3: Componentes do critério DIC para o conjunto com 500 unidades. (continua)

	M1			M2			M3			M4			M5		
	pd	Dbarra	DIC	pd	Dbarra	DIC	pd	Dbarra	DIC	pd	Dbarra	DIC	pd	Dbarra	DIC
Amostra 1	332.61	-22.43	310.18	319.69	13.61	333.30	347.99	-29.40	318.59	381.52	-157.96	223.56	353.35	-58.53	294.82
Amostra 2	322.38	-30.98	291.39	325.79	-43.55	282.24	345.53	-84.97	260.57	387.81	-212.65	175.16	358.86	-110.84	248.02
Amostra 3	305.83	139.43	445.27	316.61	108.48	425.09	325.52	115.00	440.52	387.86	-82.46	305.40	339.49	71.34	410.82
Amostra 4	362.24	-127.65	234.59	360.55	-102.62	257.93	399.66	-193.02	206.64	406.63	-267.46	139.18	388.20	-181.91	206.29
Amostra 5	318.00	61.50	379.50	322.03	47.95	369.98	342.68	12.53	355.21	396.35	-162.32	234.03	355.13	-37.64	317.49
Amostra 6	353.45	-79.49	273.96	348.80	-77.37	271.43	379.14	-142.95	236.19	402.42	-243.40	159.03	378.42	-146.73	231.70
Amostra 7	300.03	127.10	427.13	305.97	103.58	409.55	317.74	95.06	412.81	379.24	-71.43	307.81	334.59	38.05	372.64
Amostra 8	347.09	-67.94	279.15	356.35	-73.86	282.49	381.93	-132.02	249.91	412.17	-231.78	180.39	386.10	-122.80	263.30
Amostra 9	298.93	78.84	377.76	315.35	65.62	380.98	321.64	45.95	367.59	396.12	-111.69	284.43	351.42	-25.93	325.50
Amostra 10	298.88	97.62	396.50	303.93	86.49	390.41	314.17	73.35	387.53	375.60	-65.91	309.69	339.13	36.72	375.85
Amostra 11	333.54	24.80	358.35	332.61	18.45	351.05	350.21	-21.22	328.99	397.28	-135.32	261.96	365.34	-43.99	321.35
Amostra 12	337.50	3.92	341.42	334.76	6.45	341.21	356.97	-36.25	320.72	395.66	-157.87	237.79	368.66	-71.08	297.57
Amostra 13	330.28	-15.04	315.24	328.99	-8.08	320.91	353.61	-56.51	297.10	393.12	-178.53	214.59	368.01	-92.15	275.86
Amostra 14	324.68	91.63	416.31	328.39	89.15	417.54	339.56	64.76	404.33	389.01	-86.69	302.32	363.80	11.99	375.79
Amostra 15	279.13	181.59	460.72	290.42	158.77	449.20	291.30	161.87	453.17	370.71	-19.46	351.24	332.90	86.99	419.88
Amostra 16	304.25	122.22	426.48	306.15	123.16	429.31	317.70	101.40	419.10	378.98	-61.18	317.80	343.94	38.85	382.79
Amostra 17	344.50	24.51	369.02	344.86	12.89	357.76	363.19	-31.62	331.57	394.91	-148.87	246.03	377.24	-64.82	312.42
Amostra 18	272.76	149.84	422.60	278.24	143.83	422.07	279.67	136.27	415.95	365.93	-61.19	304.74	322.80	49.07	371.87
Amostra 19	342.70	-95.67	247.03	347.05	-84.85	262.20	368.50	-166.65	201.86	406.32	-259.46	146.86	378.73	-167.33	211.39
Amostra 20	332.32	-2.78	329.55	348.50	-33.44	315.06	358.16	-55.83	302.33	404.92	-181.20	223.72	377.20	-88.47	278.73
Amostra 21	335.04	-13.20	321.84	333.22	0.49	333.71	359.83	-56.95	302.88	394.54	-181.16	213.37	358.54	-85.17	273.37
Amostra 22	315.09	22.04	337.13	321.02	17.40	338.42	333.58	-10.77	322.80	394.09	-164.00	230.09	360.30	-69.28	291.02
Amostra 23	329.06	-21.63	307.43	340.37	-13.49	326.88	361.66	-81.24	280.42	411.25	-220.45	190.80	379.70	-112.41	267.29
Amostra 24	287.76	105.25	393.01	297.67	84.94	382.62	298.31	84.96	383.27	366.09	-70.08	296.01	330.76	23.62	354.38
Amostra 25	319.11	44.07	363.19	321.76	26.00	347.76	340.11	-2.24	337.87	385.87	-155.23	230.64	347.93	-83.55	314.38
Amostra 26	312.07	53.46	365.53	324.44	29.65	354.09	344.93	344.93	344.93	348.14	-152.37	243.14	359.18	-55.83	303.35
Amostra 27	358.30	-31.51	326.79	360.44	-50.33	310.11	393.92	-121.34	272.58	417.23	-245.63	171.60	383.22	-117.60	265.62
Amostra 28	304.79	51.42	356.21	306.55	43.19	349.74	318.60	30.00	348.60	392.15	-147.47	244.69	336.50	-11.46	325.04
Amostra 29	339.21	-41.72	297.49	343.16	-61.26	281.90	358.30	-82.57	275.73	389.96	-199.43	190.52	356.24	-124.71	231.53
Amostra 30	316.49	72.21	388.70	317.29	90.57	407.85	336.43	49.22	385.65	390.95	-111.60	279.35	358.62	-5.09	353.53
Amostra 31	298.97	139.18	438.15	314.17	115.20	429.37	326.66	98.98	425.65	389.73	-92.05	297.68	367.19	-10.10	357.08
Amostra 32	323.07	54.39	377.46	338.10	4.71	342.81	349.41	1.56	350.97	400.13	-162.76	237.37	370.10	-77.45	292.65
Amostra 33	343.13	-22.13	321.00	350.47	-27.43	323.05	377.34	-91.14	286.20	409.74	-215.64	194.10	377.61	-94.37	283.24
Amostra 34	281.42	79.53	360.94	289.85	75.27	365.11	300.53	58.22	358.75	375.42	-107.91	267.51	342.74	-15.15	327.59
Amostra 35	298.70	155.23	453.93	300.46	156.42	456.88	311.92	146.15	458.07	381.16	-64.49	316.67	343.94	65.96	409.90
Amostra 36	303.68	139.16	442.84	313.98	116.52	430.50	325.08	100.16	425.23	388.59	-89.94	298.64	351.99	33.91	385.90
Amostra 37	329.68	-7.92	321.75	338.29	-25.59	312.70	359.07	-68.92	290.14	401.71	-215.45	186.26	377.08	-104.09	272.99
Amostra 38	283.87	160.57	444.44	286.80	154.64	441.44	293.82	140.81	434.63	373.79	-44.86	328.93	336.43	62.26	398.69
Amostra 39	314.45	101.64	416.10	322.32	106.06	428.38	330.10	74.21	404.31	396.56	-88.04	308.52	356.95	24.19	381.15
Amostra 40	336.60	2.65	339.25	350.67	-9.58	341.09	362.10	-44.05	318.04	405.40	-166.86	238.54	372.25	-66.48	305.78
Amostra 41	324.82	20.53	345.35	328.81	9.59	338.40	346.02	-20.90	325.12	390.39	-153.55	236.84	359.60	-53.83	305.78
Amostra 42	289.69	106.46	396.16	297.60	82.50	380.11	299.19	81.20	380.38	369.61	-80.09	289.53	339.68	5.04	344.72
Amostra 43	354.21	-29.85	324.36	364.79	-62.81	301.98	386.04	-123.98	262.06	420.49	-231.51	188.97	391.39	-128.95	262.44
Amostra 44	332.94	36.10	369.03	337.83	24.36	362.19	365.08	-20.19	344.89	411.03	-162.90	248.13	369.42	-51.85	317.57
Amostra 45	316.75	33.77	350.52	313.62	42.38	356.00	336.51	-3.84	332.67	398.14	-170.74	277.40	355.49	-45.63	309.86
Amostra 46	338.93	-33.04	305.88	337.47	-39.23	298.24	371.90	92.11	495.08	397.22	-218.54	178.68	368.17	-125.89	242.28
Amostra 47	262.72	242.33	505.06	278.21	208.19	486.39	273.93	221.15	475.08	367.97	-15.64	352.33	321.06	111.56	432.61
Amostra 48	299.09	141.29	440.39	314.02	124.09	438.11	322.52	116.15	438.67	384.82	-64.08	320.74	349.82	36.72	386.54
Amostra 49	303.47	102.20	405.66	311.78	90.17	401.95	327.68	58.50	386.17	388.65	-113.57	275.08	342.76	23.51	366.27
Amostra 50	296.71	69.59	366.30	312.17	51.40	363.57	325.69	31.12	356.81	296.71	69.59	366.30	357.71	-61.49	296.22

Tabela D.4: Componentes do critério DIC para o conjunto com 500 unidades. (continuação)

	M6			M7			M8			M9			M12			Melhor Modelo Segundo o Critério
	pd	Dbarra	DIC	pd	Dbarra	DIC	pd	Dbarra	DIC	pd	Dbarra	DIC	pd	Dbarra	DIC	
Amostra 1	549.14	489.32	1038.46	356.89	-122.22	234.68	356.36	-5.48	350.88	355.50	13.49	368.99	695.81	913.42	1609.22	M4
Amostra 2	580.35	470.59	1050.95	348.31	-131.41	216.90	369.60	-77.04	292.56	369.12	-77.19	292.02	771.16	925.60	1696.76	M4
Amostra 3	653.50	730.77	1384.27	321.11	48.76	369.86	344.48	72.50	416.98	347.12	74.12	421.24	833.65	1130.77	1964.42	M4
Amostra 4	713.07	608.42	1321.49	369.11	-143.94	225.17	372.71	-76.26	296.44	373.69	-58.20	315.49	864.89	1146.90	2011.78	M4
Amostra 5	568.16	529.85	1098.01	327.01	-25.62	301.39	340.33	47.00	387.33	336.43	66.03	402.46	746.27	907.14	1653.41	M4
Amostra 6	696.51	509.25	1205.76	359.26	-137.27	222.00	372.20	-83.24	288.96	373.88	-67.01	306.87	963.80	1086.64	2050.44	M4
Amostra 7	507.63	587.33	1094.96	316.34	53.34	369.68	322.16	106.63	428.79	320.96	119.13	440.09	610.06	921.24	1531.31	M4
Amostra 8	658.48	544.89	1203.37	360.44	-119.40	241.04	370.03	-50.76	319.26	367.49	-39.30	328.20	919.21	1123.67	2042.88	M4
Amostra 9	546.36	551.74	1098.10	326.84	-18.03	308.81	361.78	-6.82	354.96	364.15	-5.76	358.38	712.65	961.92	1674.58	M4
Amostra 10	585.29	539.76	1125.05	337.10	-27.19	309.91	358.66	10.57	369.23	354.98	16.45	371.43	799.08	967.55	1766.64	M4
Amostra 11	633.16	610.11	1243.27	351.15	-60.57	290.58	369.83	-11.60	358.23	366.38	-7.71	358.67	819.80	1070.13	1889.93	M4
Amostra 12	602.23	541.56	1143.79	355.62	-83.22	272.41	365.41	-7.68	357.73	369.10	-4.99	364.12	791.90	965.20	1757.09	M4
Amostra 13	633.71	566.88	1200.59	353.46	-102.54	250.92	368.98	-44.59	324.39	364.30	-44.62	319.68	784.14	1012.17	1796.31	M4
Amostra 14	513.36	607.67	1081.02	330.82	28.71	359.54	339.01	101.05	440.06	342.17	116.22	458.39	627.40	890.27	1517.67	M4
Amostra 15	486.01	559.60	1045.62	306.52	75.99	382.51	328.99	132.28	461.27	328.83	143.80	472.63	603.66	903.54	1507.20	M4
Amostra 16	544.88	577.74	1122.61	325.04	27.50	352.54	340.65	75.40	416.05	340.17	84.94	425.11	715.20	983.47	1698.67	M4
Amostra 17	564.67	663.14	1227.81	345.63	-23.64	321.99	347.65	63.02	410.67	349.54	72.51	422.05	656.53	1043.61	1700.14	M4
Amostra 18	432.93	578.39	1011.33	305.07	35.64	340.71	311.21	126.21	437.42	310.55	123.40	433.95	510.05	808.89	1318.94	M4
Amostra 19	618.49	471.35	1089.84	363.07	-181.96	181.11	388.95	-131.91	257.04	391.14	-129.52	261.62	832.53	1034.13	1866.67	M4
Amostra 20	673.10	701.55	1374.66	344.56	-70.75	273.81	378.39	-67.84	310.55	372.37	-56.72	315.65	856.27	1203.02	2059.29	M4
Amostra 21	627.91	508.87	1136.78	357.84	-104.10	253.75	364.26	-29.42	334.84	367.64	-13.15	334.49	819.23	996.15	1815.38	M4
Amostra 22	575.07	510.84	1085.91	340.56	-80.09	260.47	346.79	9.83	356.62	347.09	15.08	362.16	719.66	916.52	1636.17	M4
Amostra 23	646.56	443.87	1090.43	343.20	-85.85	257.35	369.91	-24.88	345.04	369.49	-35.33	334.16	889.97	956.91	1846.88	M4
Amostra 24	605.73	617.33	1223.51	319.25	-3.29	315.96	344.39	21.43	365.82	343.55	26.33	369.88	783.56	1001.99	1785.55	M4
Amostra 25	555.51	507.92	1063.44	342.70	-59.45	283.26	347.31	11.23	358.54	346.61	17.93	364.54	731.01	955.40	1686.40	M4
Amostra 26	577.52	577.37	1154.88	332.76	-23.40	309.36	349.81	23.34	373.14	345.50	38.14	383.65	712.90	928.28	1641.18	M4
Amostra 27	577.11	497.54	1074.65	350.28	-64.37	285.91	366.27	-5.71	360.57	360.26	18.82	379.08	779.79	911.61	1691.39	M4
Amostra 28	519.29	570.76	1090.05	333.21	-60.26	272.95	341.65	15.02	356.67	339.13	26.41	365.54	677.40	939.56	1616.96	M4
Amostra 29	551.32	504.02	1055.34	356.70	-135.80	220.90	369.40	-66.49	302.91	371.77	-59.19	312.58	680.00	894.50	1574.50	M4
Amostra 30	616.63	571.68	1188.31	332.61	-14.13	318.48	357.64	63.20	393.84	350.11	53.90	404.01	797.30	1055.18	1852.48	M4
Amostra 31	585.45	599.42	1184.87	307.28	61.20	368.48	347.64	63.59	411.22	346.21	69.54	415.74	775.51	1087.66	1863.17	M4
Amostra 32	585.62	606.11	1191.73	334.57	-18.84	315.74	367.86	-36.13	331.73	373.58	-45.56	328.02	756.91	1002.39	1759.30	M4
Amostra 33	637.61	575.21	1212.82	351.99	-93.70	258.29	370.72	-36.37	334.34	368.62	-34.69	333.93	847.13	1119.24	1966.38	M4
Amostra 34	534.83	529.92	1064.75	310.81	-22.47	288.35	328.74	27.84	356.59	330.45	29.48	359.92	711.55	979.58	1691.13	M4
Amostra 35	412.30	638.25	1050.55	305.65	88.10	393.75	304.99	181.77	486.76	306.19	184.63	490.83	492.30	924.42	1416.73	M4
Amostra 36	543.53	616.76	1160.29	314.57	51.39	365.96	329.83	105.98	435.81	331.47	110.59	442.06	689.74	1034.55	1724.30	M4
Amostra 37	581.86	483.79	1065.66	334.12	-62.42	271.70	353.67	-22.67	331.00	351.97	-15.80	336.17	807.45	930.23	1737.68	M4
Amostra 38	484.87	532.72	1017.60	308.00	54.27	362.28	314.43	153.68	468.11	308.66	166.53	475.19	593.42	873.89	1467.31	M4
Amostra 39	549.04	475.59	1091.81	325.86	31.91	357.77	336.87	110.92	447.79	339.46	111.28	450.74	727.20	985.76	1712.97	M4
Amostra 40	587.98	442.77	1063.57	349.98	-61.77	288.21	365.87	7.61	373.49	363.62	9.92	373.54	784.65	836.86	1621.51	M4
Amostra 41	548.76	451.67	1000.43	341.05	-58.50	282.55	353.95	-55.80	368.86	352.94	21.19	374.14	734.61	826.98	1561.59	M4
Amostra 42	543.87	601.44	1145.31	326.05	-9.32	316.73	347.81	22.30	370.11	352.22	15.02	367.25	684.60	1053.25	1737.85	M4
Amostra 43	696.63	595.82	1292.45	355.40	-85.48	269.91	384.35	-55.80	328.55	380.89	-35.44	365.45	951.47	1149.55	2101.01	M4
Amostra 44	622.55	494.50	1117.05	339.68	-29.51	310.17	358.20	-35.80	393.49	361.19	39.81	401.00	825.49	953.32	1778.81	M4
Amostra 45	537.16	546.47	1083.62	332.09	-56.39	275.69	345.11	24.29	369.40	346.00	34.28	380.27	705.25	940.07	1645.32	M4
Amostra 46	635.47	588.24	1223.70	347.48	-90.16	257.32	357.05	-40.22	316.83	358.60	-33.47	325.13	789.07	979.13	1768.20	M4
Amostra 47	399.65	565.11	964.76	280.66	147.97	428.63	298.66	200.72	499.38	296.86	206.00	502.86	511.50	823.68	1335.18	M4
Amostra 48	515.19	545.18	1060.37	314.00	68.23	382.23	328.39	131.45	459.84	328.37	147.04	475.41	652.90	806.20	1549.10	M4
Amostra 49	523.27	505.05	1028.33	321.77	-8.69	330.46	342.89	47.72	390.62	344.74	53.14	397.88	658.99	893.45	1552.44	M4
Amostra 50	552.47	483.10	1035.58	320.31	-35.44	284.86	361.74	-32.36	329.38	362.78	-39.06	323.72	700.90	886.20	1587.10	M7

# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)