Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Renata de Farias Limeira

SOLUÇÕES GLOBAIS E NÃO-GLOBAIS DE UMA EQUAÇÃO PARABÓLICA NÃO-LINEAR

Recife
2008

Renata de Farias Limeira

SOLUÇÕES GLOBAIS E NÃO-GLOBAIS DE UMA EQUAÇÃO PARABÓLICA NÃO-LINEAR

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFPE, como requisito parcial para a obtenção do grau de MESTRE em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Miguel Loayza

Co-orientador: Prof. Dr. Pablo Braz e Silva

Recife

2008

Limeira, Renata de Farias

Soluções globais e não-globais de uma equação parabólica não-linear / Renata de Farias Limeira. – Recife: O Autor, 2008.

52 folhas : il.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN. Matemática, 2008.

Inclui bibliografia e apêndice.

1. Equações diferenciais parciais. Título.

515.353 CDD (22.ed.) MEI2008-039

Tese submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Grau de Mestrado em Matemática.

Aprovado: ______________________________

Miguel Fidencio Loayza Lozano, DMAT-UFPE
Orientador

____

Pablo Gustavo Albuquerque Braz e Silva, DMAT-UFPE
Co-Orientador

____

Flávio Dickstein, DM-UFRJ

SOLUÇÕES GLOBAIS E NÃO-GLOBAIS DE UMA EQUAÇÃO PARABÓLICA NÃO-LINEAR

Por

Renata de Farias Limeira

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Cidade Universitária – Tels. (081) 2126 - 8414 – Fax: (081) 2126 - 8410
RECIFE – BRASIL

Fevereiro - 2008

A Deus.

A meus pais.

A meus irmãos Rangel, Rose e Reinaldo.

RESUMO

Estudamos o comportamento das soluções do problema parabólico envolvendo a equação do calor não linear com condição de Dirichlet sobre a fronteira em um conjunto limitado de $\mathbb{R}^N$. Introduzimos também a noção de solução fraca para o mesmo problema e estudamos algumas relações com existência de soluções fracas para o problema elíptico estacionário associado. Noções básicas a respeito dos espaços de Lebesgue, espaços de Sobolev, teoria de semigrupos e alguns resultados clássicos são tratados. Mostramos o princípio de comparação para o problema parabólico nos sentidos clássico e fraco.

Palavras-chave: Solução global, solução fraca, princípio de comparação.

ABSTRACT

We study the behaviour of solutions for the nonlinear heat equation with Dirichlet boundary conditions on a bounded subset of $\mathbb{R}^N$. We introduce the notion of weak solutions for this type of problem, and study the relation between such solutions and weak solutions for the associated stationary elliptic problem. Basic notions on Lebesgue spaces, Sobolev spaces, semigroup theory are treated, as well as the comparison principle for parabolic problems both in classical and weak senses.

Keywords: Global solution, weak solution, comparison principle.

AGRADECIMENTOS

A Deus que, me propiciou os mais preciosos ensinamentos, sustendo-me em todo esse período. A Ele o meu louvor.

A meu pai pelas palavras de encorajamento e a minha mãe por conceder-me total apoio.

A meus irmãos Rangel, Rose e Reinaldo que sempre torcem por mim.

Ao Prof. Dr. Almir Alves Olimpo, a quem sou grata por toda a assistência e aconselhamento dispensados.

A meu orientador Prof. Dr. Miguel Loayza por toda direção e dedicação.

A meu Co-orientador Prof. Dr. Pablo Braz e Silva pela colaboração e apoio.

Aos professores e demais funcionários do Departamento de Pós-graduação.

Aos colegas de graduação e pós-graduação pela convivência agradável.

A Adecarlos por toda ajuda com o LATEX.

A Chirleanny, Érika, Nathália, Denize, Aline e Dayana pelos momentos de descontração.

Ao CNPq pelo apoio financeiro.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O estudo de problemas parabólicos não lineares tem importantes aplicações na teoria da combustão, na Medicina e Biologia. Veja, por exemplo, Bebernes *et al.* [10], Childress *et al.* [15] e Bellman [13].

Nosso objetivo é analisar o comportamento assintótico da solução do problema parabólico, com condição de Dirichlet sobre a fronteira, envolvendo a equação do calor não-linear, isto é,

$$\begin{cases} u_t - \Delta u &= g(u) \quad \text{em } (0,T)\times\Omega, \\ u &= 0 \quad \text{em } (0,T)\times\partial\Omega, \\ u(0,x) &= u_0(x) \quad \text{em } \Omega, \end{cases} \tag{P}$$

onde $u_0 \in L^\infty(\Omega)$, Ω é um subconjunto aberto, conexo, suave e limitado de $\mathbb{R}^N$ e $g : [0,\infty) \to [0,\infty)$ é uma função de classe C^1, convexa e não-decrescente. Relacionamos a existência de soluções globais para este problema com a existência de soluções fracas para o problema elíptico

$$\begin{cases} -\Delta u &= g(u) \quad \text{em } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{E}$$

quando g satisfaz condições adicionais.

O comportamento assintótico de soluções para o problema parabólico (P) tem sido objeto de estudo de vários autores, dentre os quais citamos Brézis *et al.* [8], H. Fujita [9] e Y.Martel [19].

Expomos a seguir o que desenvolvemos ao longo deste trabalho, descrevendo o que é tratado em cada parte que o constitui.

O segundo capítulo é destinado à introdução de conceitos básicos e resultados preliminares que estão envolvidos em nosso estudo. Na primeira seção, fixamos a notação adotada e relembramos também a definição de alguns espaços de funções. Na segunda seção, definimos os espaços $L^p(\Omega)$ e $L^p(I,X)$ para $1 \le p \le \infty$, sendo Ω um aberto de $\mathbb{R}^N$, I um intervalo e X um espaço de Banach. Na terceira seção, introduzimos os espaços de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$, $m \ge 1$, e $W^{1,p}(I,X)$. Enunciamos algumas propriedades de tais espaços. A seção seguinte é dedicada à teoria de semigrupos. Definimos semigrupos de classe C^0, citamos algumas de suas propriedades e enunciamos o teorema de Hille-Yosida.

Semigrupos analíticos também são tratados. Em seguida, fazemos algumas considerações quanto ao operador $-\Delta$, no sentido de que ele gera um semigrupo de contrações analítico, denominado semigrupo do calor. Na seção subseqüente, enunciamos vários resultados importantes para nosso estudo, como o Teorema da Convergência Monótona, o Teorema da Convergência Dominada e o Teorema de Lax-Milgram.

No terceiro capítulo, estudamos problemas não lineares. Na primeira seção, enunciamos um resultado geral de existência local de soluções para o problema (P) e vemos que tais soluções satisfazem a equação integral

$$u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)g(u(s))ds,$$

para todo $t \in [0, T_m)$, para um certo $T_m \in (0, \infty]$, onde $(T(t))_{t \geq 0}$ é o semigrupo do calor. Aqui, T_m é o valor maximal de validade de tal propriedade. Além disso, u é uma solução clássica no sentido de que $u \in C((0,T), L^\infty(\Omega))$. Em seguida, se g satisfaz a condição adicional $ug(u) \leq Cu^2 + C'$, onde C e C' são constantes positivas, provamos que a solução de (P) é global, isto é, $T_m = +\infty$. Apresentamos também um exemplo em que a solução u de (P) não está definida para todo $t \geq 0$, isto é, $T_m < \infty$. Na subseção seguinte, definimos solução fraca para o problema (P) e estabelecemos também o princípio de comparação fraco. A seção subseqüente é destinada ao estudo do problema elíptico (E). Introduzimos a noção de solução fraca para (E) e obtemos alguns resultados quanto à existência de tais soluções, os quais constituem ferramentas importantes para a demonstração de resultados do capítulo seguinte.

O quarto capítulo é destinado ao estudo do comportamento assintótico de soluções não-negativas do problema parabólico (P), onde $u_0 \in L^\infty(\Omega)$, $u_0 \geq 0$ e $g : [0, \infty) \to [0, \infty)$ é uma função de classe C^1, convexa, não-decrescente. Para alguns resultados, assumiremos que g satisfaz as condições adicionais

$$g(x_0) > 0$$

e

$$\int_{x_0}^\infty \frac{ds}{g(s)} < \infty,$$

para algum $x_0 \geq 0$. Obtemos resultados de existência de soluções globais de (P) e sua relação com a existência de soluções fracas para (E). O primeiro deles assegura a existência de uma solução fraca para (E), desde que a solução de (P) seja global para um certo valor inicial $u_0 \in L^\infty(\Omega)$. Também estabelecemos uma recíproca para tal resultado no sentido de que, se o problema elíptico possui uma solução fraca w, então existe uma condição inicial $0 \leq u_0 \leq w$ tal que o problema (P) possui solução global para tal valor inicial. Também provamos que, se w é uma solução fraca de (E), então o problema

$$\begin{cases} -\Delta w_\varepsilon &= (1-\varepsilon)g(w_\varepsilon) \quad \text{em } (0,T)\times\Omega, \\ \quad w_\varepsilon &= 0 \qquad\qquad\qquad \text{em } (0,T)\times\partial\Omega, \end{cases}$$

tem uma solução clássica w_ε para cada $\varepsilon \in (0,1)$. Para a demonstração de tais fatos fazemos uso de resultados clássicos tais como a desigualdade de Hölder, o Teorema da Convergência Dominada, o Teorema da Convergência Monótona, a desigualdade de Gronwall, a desigualdade de Jensen e, em especial, o princípio de comparação.

2 TÓPICOS INTRODUTÓRIOS

Este capítulo é destinado a estabelecer a notação, bem como definições e resultados básicos de que faremos uso neste trabalho.

2.1 Notações

Ao longo deste trabalho, $\mathbb{R}^N$ designará o conjunto das n-uplas $(x_1, x_2, ..., x_N)$, $x_i \in \mathbb{R}$, e Ω um aberto de $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$. O corpo de escalares será o de números reais.

Consideraremos funções que assumem valores em $\mathbb{R}$. Denotaremos por $C^k(\Omega)$, $k \geq 0$, o conjunto das funções k-vezes continuamente diferenciáveis sobre Ω. O conjunto das funções contínuas com suporte compacto, isto é, as funções f, contínuas sobre Ω para as quais o conjunto $\overline{\{x \in \Omega; f(x) \neq 0\}}$ é compacto, será denotado por $C_c(\Omega)$. Também convencionamos que $C^\infty(\Omega) = \bigcap_{k \geq 0} C^k(\Omega)$ e $\mathcal{D}(\Omega) = C_c^\infty(\Omega) = C^\infty(\Omega) \cap C_c(\Omega)$. Denotamos por $C_0(\Omega)$ o espaço das funções contínuas f sobre Ω que se "anulam no infinito", isto é, dado $\varepsilon > 0$, existe um compacto $K \subset \Omega$ tal que, $|f(x)| < \varepsilon$, se $x \notin K$. O espaço $C(I, X)$, em que I é um intervalo e X é um espaço de Banach, designará o espaço das funções $f : I \to X$ que são contínuas. De modo análogo, consideramos os espaços $C^k(I, X)$, $C^\infty(I, X)$, $C_c(I, X)$.

Seja $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_N)$, onde α_i é um inteiro não-negativo. Denotamos por x^α, o monômio $x^{\alpha_1} x^{\alpha_2} ... x^{\alpha_N}$ de grau $|\alpha| = \sum_{i=1}^N \alpha_i$, onde $x \in \mathbb{R}^N$. De modo análogo, se $D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, para cada $0 \leq i \leq N$, então, por D^α, denotamos o operador diferencial $D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} ... D_N^{\alpha_N}$.

2.2 Espaços L^p

Admitiremos que o leitor está familiarizado com as definições e resultados básicos sobre mensurabilidade, integrabilidade e medida de Lebesgue, de modo que qualquer uso dessas noções será feito sem comentários adicionais. Denotamos por $|\Omega|$, a medida de Ω.

2.2.1 Espaços $L^p(\Omega)$

Sejam $f : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função mensurável e $1 \leq p \leq \infty$. Se $p < \infty$, consideremos a seguinte grandeza:

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

Definimos $L^p(\Omega)$ como sendo o espaço das funções mensuráveis $f : \Omega \to \mathbb{R}$ para as quais $\|f(x)\|_{L^p} < \infty$. Se $p = \infty$, definimos

$$\|f\|_\infty = \inf\{\alpha; |f| \leq \alpha, q.t.p.x \in \Omega\}.$$

Denotamos por $L^\infty(\Omega)$, o espaço constituído das funções mensuráveis $f : \Omega \to \mathbb{R}$ tais que $\|f\|_\infty < \infty$. A fim de simplificar a notação, usaremos também $\| \cdot \|_{L^p}$ ou $\| \cdot \|_p$ em lugar de $\| \cdot \|_{L^p(\Omega)}$, se não houver risco de confusão.

Enunciaremos, a seguir, alguns resultados bastante clássicos com respeito a tais espaços. Para demonstração, conferir [6].

(i) (Desigualdade de Hölder) Sejam $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$, onde $1 \leq p \leq \infty$, e q satisfaz $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então $fg \in L^1(\Omega)$ e vale a desigualdade

$$\|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}.$$

(ii) Se $1 \leq p \leq \infty$, então $L^p(\Omega)$ é um espaço de Banach munido da norma $\| \cdot \|_p$; se $1 \leq p < \infty$, $L^p(\Omega)$ é separável; se $1 < p < \infty$, $L^p(\Omega)$ é reflexivo, com espaço dual $(L^p)^\star(\Omega) = L^q(\Omega)$, com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

(iii) $C_c^\infty(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$, para $1 \leq p < \infty$.

2.2.2 Espaços $L^p(I, X)$

Sejam X um espaço de Banach com norma $\| \ \|$ e $p \in [1, \infty]$. $L^p(I, X)$ designa o espaço das funções mensuráveis $f : I \to X$ para as quais a grandeza

$$\|f\|_{L^p(I,X)} = \left(\int_I \|f(t)\|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}, \text{ se } p < \infty$$

$$\|f\|_{L^p(I,X)} = \inf\{\alpha; \|f(t)\| \leq \alpha, \ q.t.p. \quad \text{em} \quad I\}, \text{ se } p = \infty$$

é finita. O espaço $L^p_{\text{loc}}(I, X)$ consiste das funções $f \in L^p(I, X)$ tais que a restrição $f\big|_J$ de f a um intervalo $J \subset I$ pertence a $L^p(J, X)$, para todo $J \subset I$.

Por simplicidade, denotaremos $\|f\|_{L^p(I,X)}$ por $\|f\|_{L^p(I)}$ ou $\|f\|_{L^p}$, ou ainda $\|f\|_p$, desde que não haja possibilidade de confusão.

O espaço $L^p(I,X)$ apresenta propriedades análogas às do espaço $L^p(\Omega)$. Podemos citar, dentre elas, que $L^p(I,X)$, munido da norma $\|f\|_{L^p(I,X)}$, é um espaço de Banach. Além disso, $C_c^\infty(I,X)$ é denso em $L^p(I,X)$.

2.3 Espaços de Sobolev

Os espaços de Sobolev serão de grande relevância em nosso estudo, visto que estão estreitamente relacionados com soluções de equações diferenciais parciais.

2.3.1 O espaço $W^{m,p}(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, $m \in \mathbb{N}$

O espaço de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ é constituído das funções $f \in L^p(\Omega)$ tais que existem $g_1, ..., g_N \in L^p(\Omega)$ satisfazendo

$$\int_\Omega f \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega g_i \varphi, \ \forall i = 1, ..., N, \ \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Quando $p = 2$, denotamos $W^{1,2}(\Omega) = H^1(\Omega)$.

Para cada $f \in W^{1,p}(\Omega)$, denotamos

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = g_i, \forall i = 1, ..., N.$$

O espaço de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ é dotado da norma

$$\|f\|_{W^{1,p}} = \|f\|_{L^p} + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\|_{L^p}$$

ou mesmo da norma equivalente $\left(\|f\|_{L^p}^p + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\|_{L^p}^p \right)^{\frac{1}{p}}$. Com esta norma, $W^{1,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach. O espaço $H^1(\Omega)$ é uma espaço de Hilbert dotado do produto interno

$$(f,g)_{H^1} = (f,g)_{L^2} + \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}, \frac{\partial g}{\partial x_i} \right)_{L^2},$$

com norma associada $\|f\|_{H^1} = \left(\|f\|_{L^2}^2 + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$, onde $(\ , \ )_{L^2}$ denota o produto interno de $L^2(\Omega)$. Se Ω tem fronteira suave, é possível aproximarmos uma função f de $W^{1,p}(\Omega)$ por funções em $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, no sentido de que a restrição à Ω de alguma sucessão de $f_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ tem a f como limite em $W^{1,p}(\Omega)$, isto é, o espaço $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ é denso em $W^{1,p}(\Omega)$.

Para $m \geq 2$ e $1 \leq p \leq \infty$, definimos o espaço $W^{m,p}(\Omega)$ por recorrência, como sendo o espaço das funções $f : \Omega \to \mathbb{R}$, com $f \in W^{m-1,p}(\Omega)$ e $D^\alpha f \in W^{1,p}(\Omega)$, para todo multi-índice $|\alpha| \leq m-1$. Isto significa que $f \in L^p(\Omega)$ e, para cada multi-índice $|\alpha| \leq m$, existe $g_\alpha \in L^p(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega f D^\alpha \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega g_\alpha \varphi, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Neste caso, escrevemos $g_\alpha = D^\alpha f$.

O espaço $W^{m,p}(\Omega)$, munido da norma $\|f\|_{W^{m,p}} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha f\|_{L^p}$ é um espaço de Banach.

Seja $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$. Munido do produto interno

$$(f,g)_{H^m} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} (D^\alpha f, D^\alpha g)_{L^2},$$

$H^m(\Omega)$ é um espaço de Hilbert.

2.3.2 Espaços $W_0^{m,p}(\Omega)$ e $W_0^{-m,p}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, $m \in \mathbb{N}$

O espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$ constitui o fecho de $C_c^1(\Omega)$ em $W^{1,p}(\Omega)$. Denotamos por $H_0^1(\Omega)$, o espaço $W_0^{1,2}(\Omega)$.

O espaço $W_0^{1,p}(\Omega)$, dotado da norma induzida por $W^{m,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach separável e, se $1 < p < \infty$, é também reflexivo. O espaço $H_0^1(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com o produto interno de $H^1(\Omega)$.

Denotamos por $W^{-1,p}(\Omega)$ o dual de $W_0^{1,p}(\Omega)$ e por $H^{-1}(\Omega)$ o dual de $H_0^1(\Omega)$. As seguintes inclusões

$$H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega),$$

ocorrem com injeções contínuas e densas. Aqui fazemos uso do Teorema de Riesz para identificar L^2 com $(L^2)^\star$.

2.3.3 Espaços $W^{1,p}(I,X)$

Seja $1 \leq p \leq \infty$. Dizemos que $f \in W^{1,p}(I,X)$, se $f \in L^p(I,X)$ e se existe $g \in L^p(I,X)$ tal que

$$\int_I f(t)\varphi'(t)dt = -\int_I g(t)\varphi(t)dt$$

para todo $\varphi \in C_c^1(I)$. A função g assim definida é única e denotamos $f' = \frac{df}{dt}$. Para cada $f \in W^{1,p}(I,X)$, associamos a norma

$$\|f\|_{W^{1,p}(I,X)} = \|f\|_{L^p(I,X)} + \|f'\|_{L^p(I,X)}.$$

Desde que não haja possibilidade de confusão, também denotaremos
$\|\cdot\|_{W^{1,p}(I,X)}$ por $\|\cdot\|_{W^{1,p}(I)}$ ou $\|\cdot\|_{W^{1,p}}$.

Os espaços $W^{m,p}(I,X)$ apresentam várias propriedades dos espaços $W^{1,p}(I)$. Citaremos algumas:

(i) O espaço $W^{1,p}(I)$, munido da norma $\|\cdot\|_{W^{1,p}(I,X)}$, é um espaço de Banach.

(ii) Se $f \in W^{1,p}(I,X)$ e J é um intervalo de I, então $f_{|J} \in W^{1,p}(J,X)$.

(iii) Se $p < \infty$, então $C_c^\infty(\mathbb{R},X)$ é denso em $W^{1,p}(\mathbb{R},X)$.

Seja $m \geq 2$ e para $1 \leq p \leq \infty$, definamos

$$W^{2,p}(I,X) = \{f \in W^{1,p}(I,X), \frac{\partial f}{\partial t} \in W^{1,p}(I,X)\},$$

com norma correspondente.

Definimos de forma geral, por meio de indução sobre m,

$$W^{m,p}(I,X) = \{f \in W^{m-1,p}(I,X); D^\alpha \in W^{1,p}(I,X),\ |\alpha| \leq m-1\},$$

com norma correspondente.

2.4 Semigrupos

2.4.1 Semigrupos C^0

Seja X um espaço de Banach e seja $T(t)$, $t \geq 0$, uma família de operadores lineares limitados de X em X. Dizemos que $T(t)$, $t \geq 0$ é *um semigrupo de operadores lineares limitados* se

(i) $T(0) = I$ (I constitui o operador identidade em X),

(ii) $T(s+t) = T(s)T(t)$, $\forall s \geq 0, \forall t \geq 0$.

Se, além disso, $T(t), t \geq 0$ satisfaz

$$\lim_{t \downarrow 0} T(t)x = x, \forall x \in X \tag{2.1}$$

dizemos que $T(t), t \geq 0$, é um *semigrupo fortemente contínuo de operadores lineares limitados*, ou *semigrupo de classe* C^0, ou ainda, um *semigrupo* C^0.

Denominamos o operador linear A determinado por

$$D(A) = \left\{ x \in X; \lim_{t \downarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t} \text{ existe} \right\},$$

$$Ax = \lim_{t \downarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t}, \quad x \in D(A)$$

de *gerador infinitesimal do semigrupo* $T(t), t \geq 0$ e $D(A)$, por sua vez, é o domínio de A.

Citamos, agora, algumas propriedades e resultados a respeito de semigrupos C^0.

(i) Seja $T(t)$ um semigrupo C^0. Então existem constantes $\omega \geq 0$ e $M \geq 1$ tais que

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}, \quad \text{se} \quad 0 \leq t < \infty. \tag{2.2}$$

Como conseqüência, para cada $x \in X$, a aplicação $t \to T(t)x$, definida de $\mathbb{R}_0^+$ em X, é contínua.

(ii) Se $T(t)$ é um semigrupo C^0 e A seu gerador infinitesimal, temos que, se $x \in D(A)$, então $T(t)x \in D(A)$ e

$$\frac{d}{dt}T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax. \tag{2.3}$$

(iii) Se A é o gerador infinitesimal de um semigrupo C^0, então $D(A)$ é denso em X e A é um operador linear fechado.

Seja $T(t)$, $t \geq 0$, um semigrupo C^0. Se $\omega = 0$ e $M = 1$ em (2.2), o semigrupo $T(t)$ é dito *semigrupo* C^0 *de contrações.*

Seja A um operador linear, não necessariamente limitado. O conjunto de todos os números complexos λ para os quais $\lambda I - A$ é injetor e sobrejetor, com $(\lambda I - A)^{-1}$ limitado em X, é chamado *conjunto resolvente* $\rho(A)$ de A. O *resolvente* de A, por sua vez, é a família de operadores lineares limitados $R(\lambda; A) = (\lambda I - A)^{-1}$, $\lambda \in \rho(A)$. O seguinte teorema caracteriza os geradores infinitesimais de semigrupos C^0 de contrações:

Teorema 2.1 (Hille-Yosida). *Um operador linear (não limitado) A é o gerador infinitesimal de um semigrupo C^0 de contrações $T(t), t \geq 0$ se, e somente se,*

i) *A é fechado e $\overline{D(A)} = X$.*

ii) *O conjunto resolvente $\rho(A)$ de A contém $[0, \infty)$ e para cada $\lambda > 0$ temos $\|R(\lambda : A)\| \leq \frac{1}{\lambda}$.*

Para a demonstração, ver Pazy [2], Teorema 1.3.1.

2.4.2 Semigrupos Analíticos

Lidamos na seção anterior com semigrupos definidos sobre o semi-eixo real não negativo. Definiremos agora semigrupos cujo domínio de parâmetros é uma região do plano complexo contendo o semi-eixo real não negativo.

Seja $\Sigma = \{z; \varphi_1 < \arg z < \varphi_2, \varphi_1 < 0 < \varphi_2\}$ e para cada $z \in \Sigma$ seja $T(z)$ um operador linear limitado. A família $T(z)$, $z \in \Sigma$, é um *semigrupo analítico* em Σ se

(i) $z \longrightarrow T(z)$ é analítica em Σ;

(ii) $T(0) = I$ e $\lim\limits_{z \to 0} T(z)x = x$, $z \in \Sigma$, para cada $x \in X$;

(iii) $T(z_1 + z_2) = T(z_1)T(z_2)$, para cada $z_1, z_2 \in \Sigma$.

Um semigrupo é chamado *analítico*, se é analítico em algum setor Σ contendo o eixo real não negativo.

2.4.3 O Semigrupo do Calor

Consideremos o operador de Laplace $\Delta = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$. Se $1 < p < \infty$, definamos o operador não limitado

$$\begin{cases} D(A) = W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega), \\ Au = -\Delta u. \end{cases}$$

Se Ω é um aberto limitado de $\mathbb{R}^N$ e sua fronteira $\partial\Omega$ é suave, então o operador $-\Delta$ definido acima é o gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações analítico sobre $L^p(\Omega)$. Se $p = 1$, obtemos o mesmo resultado para o operador acima, desde que

$$D(A) = \{u : u \in W_0^{1,1}(\Omega),\ \Delta u \in L^1(\Omega)\}.$$

Se $p = \infty$, por sua vez, basta considerarmos o domínio de A como sendo

$$D(A) = \{u : u \in C_0(\Omega), \Delta u \in C_0(\Omega)\}$$

e o operador $-\Delta$ assim definido é o gerador infinitesimal de um semigrupo analítico de contrações sobre $C_0(\Omega)$. Tais resultados podem ser encontrados em [2]. Denominamos o semigrupo $(T(t))_{t\geq 0}$, gerado por -Δ, de *semigrupo do calor*.

2.5 Resultados Clássicos e Desigualdades

Eis alguns teoremas e desigualdades bastante conhecidos, os quais nos serão úteis:

Teorema 2.2 (Teorema da Convergência Monótona)**.** *Seja $A \in \mathbb{R}^N$ um conjunto mensurável e $(f_n)_{n\geq 1}$ uma seqüência de funções mensuráveis tais que $0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq ...$, para cada $x \in A$. Então,*

$$\lim_{n\to\infty} \int_A f_n(x)dx = \int_A \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx.$$

Teorema 2.3 (Teorema da Convergência Dominada)**.** *Seja $A \in \mathbb{R}^N$ um conjunto mensurável e seja $(f_n)_{n\geq 1}$ uma seqüência de funções mensuráveis convergindo pontualmente para um limite sobre A. Se existe uma função $g \in L^1(A)$ tal que $|f_n(x)| \leq g(x)$, para cada $n \geq 1$ e todo $x \in A$, então*

$$\lim_{n\to\infty} \int_A f_n(x)dx = \int_A \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx.$$

Para a demonstração desses dois teoremas, conferir [18].

Teorema 2.4 (Lax-Milgram)**.** *Seja H um espaço de Hilbert com norma $\|\cdot\|_H$ e consideremos um funcional bilinear $a : H \times H \to \mathbb{R}$. Se existem $C < \infty$ e $\alpha > 0$ tais que*

(i) $|a(u,v)| \leq C\|u\|\|v\|_H$, $\forall (u,v) \in H \times H$ *(continuidade)*,

(ii) $|a(u,u)| \geq \alpha\|u\|_H^2$, $\forall u \in H$ *(coercividade)*

Então para todo $f \in H^\star$ (o dual de H), a equação

$$a(u,v) = f(v),\ \forall v \in H,$$

tem uma única solução $u \in H$.

Para a demonstração, ver [6].

Teorema 2.5 (Desigualdade de Jensen)**.** *Consideremos um conjunto X munido de uma medida positiva μ tal que $\int_X d\mu = 1$ e seja $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função convexa. Então, para cada $f \in L^1(X, d\mu)$ tal que $F(f) \in L^1(X, d\mu)$, temos*

$$F\left(\int_X f(x)d\mu(x)\right) \leq \int_X F(f(x))d\mu(x).$$

Teorema 2.6 (Lema de Gronwall)**.** *Sejam $T > 0$, $A \geq 0$ e $f \in L^1(0, T)$ uma função não negativa. Se $\varphi \in C([0, T])$ é uma função não-negativa tal que*

$$\varphi(t) \leq A + \int_0^t f(s)\varphi(s)ds,$$

para cada $t \in [0, T]$, então,

$$\varphi(t) \leq A \exp\left(\int_0^t f(s)ds\right),$$

para cada $t \in [0, T]$.

Conferir [7], para a demonstração dessas duas desigualdades.

Teorema 2.7 (Fórmulas de Green)**.** *Suponhamos que Ω seja um subconjunto aberto limitado de $\mathbb{R}^N$ com fronteira suave. Sejam $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$. Então, se ν é a normal unitária externa a Ω e $\frac{\partial}{\partial \nu}$ é a derivada direcional na direção de ν, temos*

(i) $\displaystyle\int_\Omega \nabla v \nabla u dx = -\int_\Omega u\Delta v dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial \nu} u \, dS,$

(ii) $\displaystyle\int_\Omega u\Delta v - v\Delta u \, dx = \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial v}{\partial \nu} - v\frac{\partial u}{\partial \nu} \, dS.$

Conferir [11], Teorema A.C.3, para maiores detalhes.

3 A EQUAÇÃO NÃO-LINEAR

Neste capítulo, estudamos a equação do calor não-linear com condição de Dirichlet sobre a fronteira e condição inicial dada, apresentando um resultado geral de existência de solução para tal problema, a qual é a solução de uma equação integral. Enunciamos o Princípio de Comparação e analisamos um caso em que a solução do problema em questão é globalmente definida e um outro em que a solução explode em tempo finito. Também introduzimos o problema elíptico associado e definimos solução fraca para tal problema. Alguns resultados com respeito a ambos os problemas também são tratados.

3.1 A Equação do Calor Não-Linear.

Seja Ω um aberto conexo e limitado de $\mathbb{R}^N$, com fronteira suave. O objetivo desta seção é analisar a equação do calor não linear com condição de Dirichlet sobre a fronteira e condição inicial $u_0 \in L^\infty(\Omega)$, a saber,

$$\begin{cases} u_t - \Delta u &= g(u) \quad \text{em } (0,T)\times\Omega, \\ u &= 0 \quad \text{em } (0,T)\times\partial\Omega, \\ u(0,x) &= u_0(x) \quad \text{em } \Omega, \end{cases} \tag{3.1}$$

em que $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é localmente Lipschitz. Apresentaremos um resultado geral de existência de soluções para (3.1).

3.1.1 Existência Local de Soluções

Seja $(T(t))_{t\geq 0}$ o semigrupo do calor. Suponhamos que $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ e seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função localmente Lipschitz. Consideremos a equação integral

$$u(t) = u_0 + \int_0^t T(t-s)g(u(s))ds. \tag{3.2}$$

Dizemos que uma função u é solução do problema (3.1) se $u \in L^\infty((0,T)\times\Omega)$ e satisfaz a equação (3.2) para todo $t \in [0,T]$. Como $g(u) \in L^\infty((0,T)\times\Omega)$, segue-se que o segundo membro da equação (3.2) está bem definido, de modo que tal definição faz sentido.

Eis um resultado geral quanto à existência e unicidade de uma solução para o problema (3.1).

Teorema 3.1. *Sejam $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função localmente Lipschitz. Existem um valor máximo $T_m = T_m(u_0) \in (0, \infty]$ e uma única função $u \in L^\infty((0,T) \times \Omega)$, com $0 < T < T_m$, a qual é solução de (3.1). T_m é chamado o tempo de existência da solução u. Além disso, temos:*

(ii) ou $T_m = +\infty$ e dizemos que u é uma solução global*,*

(ii) ou $T_m < \infty$ e $\lim\limits_{t \uparrow T_m} \|u(t)\|_{L^\infty} = +\infty$. Neste caso, dizemos que u explode em tempo finito*.*

Mais ainda, u depende continuamente de u_0. Mais precisamente, a aplicação $u_0 \mapsto T_m(u_0)$ é semicontínua inferiormente e para cada $T < T_m$ existe $\varepsilon > 0$ e $C < \infty$ tais que se $\|v_0 - u_0\|_{L^\infty} \leq \varepsilon$, então $\|v - u\|_{L^\infty((0,T)\times\Omega)} \leq C\|v_0 - u_0\|_{L^\infty(\Omega)}$, onde v é a solução de (3.1) correspondente ao valor inicial v_0.

Para a demonstração, ver [7], Teorema 3.1.1.

Observação 3.2. (i) Como $g(u) \in L^\infty((0,T) \times \Omega)$, então $u \in C((0,T), L^r(\Omega))$, com

$$u - T(t)u_0 \in L^r((0,T), W^{2,r}(\Omega) \cap W_0^{1,r}(\Omega)) \cap W^{1,r}((0,T), L^r(\Omega)),$$

para cada $1 < r < \infty$ e u satisfaz a equação (3.1), q.t.p. em $(0,T)$.

(ii) Suponhamos que g também depende explicitamente de x, isto é, $g = g(x,u)$ e consideremos o problema

$$\begin{cases} u_t - \Delta u &= g(x,u), \text{ em } (0,T) \times \Omega, \\ u(t,x) &= 0, \text{ em } (0,T) \times \partial\Omega, \\ u(0,x) &= u_0(x), \text{ em } \Omega. \end{cases} \tag{3.3}$$

Se g é mensurável com respeito a x e localmente Lipschitz com relação a u, no sentido de que $|g(x,u) - g(x,v)| \leq K_A|u - v|$, para quase todo $x \in \Omega$ e cada $u, v \in [-A, A]$, então, se $g(\cdot, 0) \in L^\infty(\Omega)$, valem as conclusões do Teorema 3.1 para o problema (3.3).

(iii) Se $g : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ é localmente Lipschitz e $u_0 \in L^\infty(\Omega)$, com $u_0 \geq 0$, q.t.p. em Ω, usando a positividade do semigrupo do calor, temos que $u \geq 0$.

3.1.2 Princípio de Comparação

Uma função v na classe

$$L^\infty((0,T)\times\Omega)\cap C([0,T],L^2(\Omega))\cap L^2_{\text{loc}}((0,T),H^1(\Omega))\cap H^1_{\text{loc}}((0,T),H^{-1}(\Omega)),$$

é dita super-solução de (3.1), se

$$\begin{cases} v_t-\Delta v & \geq g(v) \quad \text{em } (0,T)\times\Omega,\\ \qquad v & \geq 0 \qquad\ \ \text{em } (0,T)\times\partial\Omega,\\ \quad v(0) & \geq u_0 \qquad \text{em } \Omega. \end{cases} \tag{3.4}$$

Subsoluções são definidas de maneira análoga, com o sinal da desigualdade em (3.4) invertido.

O lema a seguir pode ser encontrado em [16].

Lema 3.1 (Princípio de Comparação)**.** *Consideremos o problema (3.1), com* $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *localmente Lipschitz. Seja* $u_0\in L^\infty(\Omega)$*. Suponhamos que* u *e* v *são, respectivamente, uma super-solução e uma sub-solução de (3.1) sobre algum intervalo* $[0,T]$*. Então* $u(t)\geq v(t)$ *para todo* $t\in[0,T]$*.*

Demonstração. Como v é sub-solução de (3.1) e u é super-solução deste problema, então $v_t-\Delta v\leq g(v)$ e $u_t-\Delta u\geq g(u)$, de sorte que, multiplicando a diferença de tais desigualdades por $(v-u)^+$, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega (v-u)^{+2}+\int_\Omega |\nabla(v-u)^+|^2 &\leq \int_{\{v>u\}}(g(v)-g(u))(v-u)^+\\ &\leq L_M\int_{\{v>u\}}(v-u)^{+2},\end{aligned}$$

onde $M=\max\{\|u\|_{L^\infty((0,T)\times\Omega)},\|v\|_{L^\infty((0,T)\times\Omega)}\}$ e L_M é a constante de Lipschitz sobre $[-M,M]$. Daí,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega (v-u)^{+2}\leq L_M\int_\Omega (v-u)^{+2}.$$

Segue-se que $\int_\Omega (v-u)^{+2}\leq 0$ e, por conseguinte, $(v-u)^+=0$, donde $v(t)\leq u(t)$, como desejávamos. $\square$

3.1.3 Solução Global

Suponhamos que

$$ug(u)\leq Cu^2+C', \tag{3.5}$$

para cada $u\in\mathbb{R}$, onde C e C' são constantes positivas. Temos o seguinte resultado:

Teorema 3.3. *Para cada $u_0 \in L^\infty(\Omega)$, a solução u de (3.1) está definida para todo $t \geq 0$.*

A fim de demonstrarmos este teorema, fazemos uso do Princípio de Comparação (Lema 3.1).

Demonstração. Notemos que da condição (3.5), juntamente com o fato de que g é localmente Lipschitz, segue-se que

$$g(u) \leq D(u+1) \tag{3.6}$$

para alguma constante D e para todo $u \geq 0$. Se $u \geq 1$, segue-se de (3.5) que

$$g(u) \leq Cu + \frac{C'}{u} \leq Cu + C' \leq D(u+1), \tag{3.7}$$

para algum $D > 0$. Se $0 \leq u \leq 1$, então, como g é contínua, temos $g(u) \leq D_2 \leq D_2(u+1)$, para algum D_2. Basta considerarmos $D = \max\{D_1, D_2\}$.

Seja $v = (\|u_0\|_{L^\infty} + 1)e^{Dt} - 1$. Então v é a solução de

$$\begin{cases} v_t - \Delta v &= D(v+1) \text{ em } (0,\infty) \times \Omega, \\ v &= 0 \text{ em } (0,\infty) \times \partial\Omega, \\ v(0) &= \|u_0\|_{L^\infty} \text{ em } \Omega. \end{cases} \tag{3.8}$$

A condição (3.6) garante que $v_t - \Delta v \geq g(v)$ e o Lema 3.1 assegura que $u \leq v$ em $(0, T_m) \times \Omega$.

Analogamente, da condição (3.5) é possível deduzir que $g(u) \geq \widetilde{D}(u-1)$, para $u \leq 0$ e uma certa constante $\widetilde{D}$. Considerando, então, a subsolução $w = -(\|u_0\|_{L^\infty} + 1)e^{\widetilde{D}t} + 1$ de (3.1), segue-se que $w \leq u$ em $(0, T_m) \times \Omega$, pelo Princípio de Comparação.

Suponhamos que $T_m < \infty$, então a norma L^∞ de u é limitada para todo $t \in (0, T_m)$, pois $w \leq u \leq v$ em $(0, T_m) \times \Omega$. Mas isso contradiz o Teorema 3.1. Logo, concluímos que $T_m = +\infty$. □

3.1.4 Uma Solução que Explode em Tempo Finito

Seja $G(x,u) = \int_0^u g(x,s)ds$. Ao problema (3.3), associamos a energia dada por

$$E(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 - \int_\Omega G(x,u). \tag{3.9}$$

Faremos uso de um resultado com respeito à energia, a fim de estudarmos um caso em que a solução de (3.1) não está definida para todo $t \geq 0$, no sentido de que ela explode em tempo finito.

Lema 3.2. *Seja $u_0 \in L^\infty(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ e seja u a solução de (3.3) definida sobre o intervalo máximo $[0, T_m)$. Então $u \in C([0, T_m), H_0^1(\Omega))$ e*

$$E(u(t)) \leq E(u_0), \tag{3.10}$$

para todo $t \in [0, T_m)$.

Para conferir a prova, ver [7], Teorema 3.4.2.

Se $g(u) = |u|^{p-1}u$, então $G(u) = \frac{1}{p+1}|u|^{p+1}$. Neste caso temos o seguinte resultado:

Teorema 3.4. *Seja $p > 1$. Seja $u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ satisfazendo*

$$E(u_0) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_0|^2 dx - \frac{1}{p+1}\int_\Omega |u_0|^{p+1} dx \leq 0, \tag{3.11}$$

e u_0 não identicamente nula. Então $T_m < \infty$.

Demonstração. Consideremos

$$\varphi(t) = \int_\Omega u(t,x)^2 dx \tag{3.12}$$

e suponhamos que $T_m = +\infty$. Nosso argumento consiste em encontrar uma desigualdade diferencial para φ, que não esteja definida para todo $t \geq 0$. Observemos que, de (3.9), (3.10), obtemos

$$\begin{aligned}
\varphi'(t) &= 2\int_\Omega u u_t = 2\int_\Omega u(\Delta u + |u|^{p-1}u) = 2\int_\Omega |u|^{p+1} - 2\int_\Omega u\Delta u \\
&= 2\int_\Omega |u|^{p+1} - 2\int_\Omega |\nabla u|^2 = -4E(u) + \frac{2(p-1)}{p+1}\int_\Omega |u|^{p+1} \\
&\geq -4E(u_0) + \frac{2(p-1)}{p+1}\int_\Omega |u|^{p+1}.
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Assim, da condição (3.11) e pela desigualdade de Hölder, obtemos

$$\begin{aligned}
\varphi'(t) &\geq \frac{2(p-1)}{p+1}\int_\Omega |u|^{p+1} = \frac{2(p-1)}{p+1}\left[\left(\int_\Omega |u|^{p+1}\right)^{\frac{2}{p+1}} |\Omega|^{\frac{p+1}{p-1}} \cdot |\Omega|^{\frac{p-1}{p+1}}\right]^{\frac{p+1}{2}} \\
&\geq \frac{2(p-1)}{p+1}\left[\left(\int_\Omega |u|^2\right) |\Omega|^{\frac{p-1}{p+1}}\right]^{\frac{p+1}{2}} \\
&= \alpha\varphi(t)^{\frac{p+1}{2}},
\end{aligned} \tag{3.14}$$

onde $\alpha = \frac{2(p-1)}{p+1}|\Omega|^{\frac{p-1}{2}} > 0$. Em particular, a função φ é não-decrescente e, como $\varphi(0) > 0$, segue-se que $\varphi(t) > 0$, para todo $t \geq 0$. Por outro lado, por (3.14), temos

$$\frac{d}{dt}\left(-\frac{2}{p-1}\varphi(t)^{-\frac{p-1}{2}}\right) = \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)^{\frac{p+1}{2}}} \geq \frac{\alpha\varphi(t)^{\frac{p+1}{2}}}{\varphi(t)^{\frac{p+1}{2}}} = \alpha$$

e, integrando sobre $(0, t)$, obtemos

$$0 \leq \frac{2}{p-1}\varphi(t)^{-\frac{p-1}{2}} \leq \frac{2}{p-1}\varphi(0)^{-\frac{p-1}{2}} - \alpha t$$

e, então

$$\alpha t \leq \frac{2}{\alpha(p-1)}\varphi(0)^{-\frac{p-1}{2}},$$

para todo $t \geq 0$. Mas isso contradiz nossa suposição $T_m = +\infty$. Concluímos, então, que $T_m < \infty$. $\square$

Observação 3.5. O resultado acima vale sob condições mais gerais:

Suponhamos que $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função localmente Lipschitz em u e satisfaz

$$ug(x, u) \geq (2 + \varepsilon)G(x, u) = (2 + \varepsilon)\int_0^u g(x, t)dt,$$

para todo $u \in \mathbb{R}$, com $\varepsilon > 0$. Se $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ é tal que $E(u_0) \leq 0$ e u_0 não é identicamente nula, então a solução u de (3.3) para o valor inicial u_0 não está definida para todo $t \geq 0$, isto é, $T_m < \infty$.

3.1.5 Soluções Fracas da Equação do Calor Não Linear

Nesta seção introduzimos a noção de solução fraca para a equação (3.1), tal como é definida em [19]. Sejam $u_0 \in L^1(\Omega)$ e δ a função distância até a fronteira de Ω, isto é,

$$\delta(x) = \text{dist}(x, \partial\Omega). \tag{3.15}$$

Uma solução fraca de (3.1) sobre $(0, T)$ é uma função u tal que para todo $0 < S < T$, temos $u \in L^1((0, S) \times \Omega)$, $\delta g(u) \in L^1((0, S) \times \Omega)$ e

$$-\int_0^S \int_\Omega u(\zeta_t + \Delta\zeta) - \int_\Omega u_0\zeta(0) = \int_0^S \int_\Omega g(u)\zeta$$

para toda $\zeta \in C^2([0, S] \times \overline{\Omega})$, com $\zeta(S) = 0$ e $\zeta = 0$ sobre $\partial\Omega$. Uma função $v \in L^\infty((0, S) \times \Omega)$ é dita uma super-solução fraca de (3.1) quando

$$-\int_0^S \int_\Omega v(\zeta_t + \Delta\zeta) - \int_\Omega u_0\zeta(0) \int_0^S \int_\Omega g(v)\zeta \geq \int_0^S \int_\Omega g(v)\zeta,$$

para $\zeta \in C^2([0, S] \times \overline{\Omega})$, com $\zeta(S) = 0$ e $\zeta \geq 0$ sobre Ω. Subsoluções fracas de (3.1) são definidas analogamente, com o sinal de desigualdade invertido.

Observemos que se u é uma solução clássica de (3.1), então é também solução fraca de (3.1), pois, multiplicando (3.1) por ζ, com $\zeta \in C^2([0,S]\times\overline{\Omega})$, $\zeta(S)=0$ e $\zeta=0$ sobre $\partial\Omega$ e, em seguida, integrando sobre $(0,S)\times\Omega$, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_0^S\int_\Omega g(u)\zeta &= \int_0^S\int_\Omega u_t\zeta - \int_0^S\int_\Omega \Delta u\zeta \\
&= \int_0^S\int_\Omega \frac{d}{dt}(u\zeta) - \int_0^S\int_\Omega u\zeta_t - \int_0^S\int_\Omega u\Delta\zeta \\
&= \int_\Omega u(S)\zeta(S) - \int_\Omega u(0)\zeta(0) - \int_0^S\int_\Omega u(\zeta_t+\Delta\zeta) \\
&= -\int_\Omega u_0\zeta(0) - \int_0^S\int_\Omega u(\zeta_t+\Delta\zeta).
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Teorema 3.6 (Princípio de comparação fraco)**.** *Sejam* $u_0 \in L^1(\Omega)$ *e* $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *uma função não decrescente localmente Lipschitz. Seja* $T>0$. *Suponhamos que* $w\in L^1((0,S)\times\Omega)$ *e* $u\in L^\infty((0,S)\times\Omega)$, *para cada* $0<S<T$. *Se* w *e* u *são, respectivamente, uma super-solução fraca e uma subsolução fraca de* (3.1), $u,v\geq 0$, *então* $u(t)\leq w(t)$, *para cada* $t\in[0,T]$.

Demonstração. Consideremos $h(t,x)\in\mathcal{D}((0,S)\times\Omega)$, sendo $h\geq 0$ e seja ζ a solução de

$$\begin{cases} -\zeta_t-\Delta\zeta &= h, \\ \zeta &= 0, \text{ em } \partial\Omega, \\ \zeta(S) &= 0. \end{cases} \tag{3.17}$$

Em particular, $\zeta\in C([0,S],C^2(\overline{\Omega})\cap C_0(\Omega))$. Como w é super-solução fraca de (3.1) e u é subsolução fraca de (3.1), então

$$-\int_0^S\int_\Omega w(\zeta_t+\Delta\zeta) - \int_\Omega u_0\zeta(0) \geq \int_0^S\int_\Omega g(w)\zeta$$

e

$$-\int_0^S\int_\Omega u(\zeta_t+\Delta\zeta) - \int_\Omega u_0\zeta(0) \leq \int_0^S\int_\Omega g(w)\zeta.$$

Subtraíndo a primeira desigualdade da segunda, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_0^S\int_\Omega (u-w)h &\leq \int_0^S\int_\Omega (g(w)-g(u))\zeta \\
&\leq \int_0^S\int_{\{u\geq w\}} (g(u)-g(w))\zeta \\
&\leq C\int_0^S\int_{\{u\geq w\}} (u-w)\zeta \\
&= C\int_0^S\int_\Omega (u-w)^+\zeta.
\end{aligned}$$

Observemos que a segunda desigualdade se dá em virtude de $\|u\|_{L^\infty((0,S)\times\Omega)} < \infty$ e, desse modo, g ser Lipschitz sobre $[0, \int_0^S \int_\Omega \|u\|_{L^\infty((0,S)\times\Omega)}]$. Notemos que $(u-v)^+ \leq u \in L^\infty$. Assim, pela desigualdade de Hölder, obtemos

$$\int_0^S \int_\Omega (u-w)h \leq C \left(\int_0^S \int_\Omega [(u-w)^+]^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^S \int_\Omega \zeta^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.18}$$

Por outro lado,

$$\zeta(t) = \int_t^S T(s-t)h(s)ds,$$

em que $(T(t))_{t\geq 0}$ é o semigrupo do calor. Assim, uma vez que $(T(t))_{t\geq 0}$ é um semigrupo de contrações, obtemos

$$\|\zeta(t)\|_{L^2}^2 \leq \left(\int_t^S \|h(s)\|_{L^2} ds \right)^2 \leq (S-t) \int_t^S \left(\int_0^S \int_\Omega h^2 \right) ds. \tag{3.19}$$

Logo,

$$\int_0^S \int_\Omega \zeta^2 \leq \frac{S^2}{2} \int_0^S \int_\Omega h^2.$$

Assim, da desigualdade de (3.18), obtemos

$$\int_0^S \int_\Omega (u-w)h \leq \frac{CS}{\sqrt{2}} \left(\int_0^S \int_\Omega [(u-w)^+]^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^S \int_\Omega h^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Desse modo, podemos considerar uma seqüência $(h_n)_{n\geq 0}$, $h_n \in \mathcal{D}((0,S)\times\Omega)$ de sorte que h_n convirja para $(u-w)^+$ em $L^2((0,S)\times\Omega)$, se $n \to \infty$. Pelo Teorema da Convergência Dominada (Teorema 2.3), temos

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^S \int_\Omega (u-w)h \leq \lim_{n\to\infty} \frac{CS}{\sqrt{2}} \left(\int_0^S \int_\Omega [(u-w)^+]^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^S \int_\Omega h^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Logo,

$$\int_0^S \int_\Omega (u-w)(u-w)^+ \leq \frac{CS}{\sqrt{2}} \left(\int_0^S \int_\Omega [(u-w)^+]^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^S \int_\Omega [(u-w)^+]^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

e, portanto

$$\int_0^S \int_\Omega [(u-w)^+]^2 \leq \frac{CS}{\sqrt{2}} \int_0^S \int_\Omega [(u-w)^+]^2.$$

Desse modo, se $C^2S^2 < 2$, então $(u-w)^+ = 0$, donde $u \leq w$, para $0 \leq t < S$. Iterando, obtemos o resultado geral. Procedendo de forma análoga, consideramos o problema a partir do valor inicial $u(S)$ a fim de obter o resultado para um intervalo $(0, S+\delta)$, com $S + \delta < T_m$. O resultado geral segue, pois, por iteração. $\square$

3.2 O Problema Elíptico Não Linear

Consideremos o problema elíptico

$$\begin{cases} -\Delta u &= g(u) \quad \text{em } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.20}$$

em que $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é localmente Lipschitz. Dizemos que u é uma solução fraca de (3.20), se $u \in L^1(\Omega),\ u \geq 0$, $g(u)\delta \in L^1(\Omega)$ e

$$-\int_\Omega u\Delta\zeta = \int_\Omega g(u)\zeta, \tag{3.21}$$

para todo $\zeta \in C^2(\overline{\Omega})$ tal que $\zeta|_{\partial\Omega} = 0$.

Observação 3.7. (i) A segunda integral em (3.21) está bem definida. De fato, dado $x \in \Omega$, seja $y \in \partial\Omega$ o ponto tal que $\delta(x) = |x - y|_E$, onde $|\cdot|_E$ denota a norma euclidiana. Seja $v \in \mathbb{R}^N$, tal que $x = y + v$. Evidentemente, $(y, y + v) \in \overline{\Omega}$. Já que $\zeta \in C^2(\overline{\Omega})$, em particular, ζ é diferenciável em $(y, y + v)$ e contínua em $[y, y + v]$. Se $C = \max_{x\in\overline{\Omega}} |\nabla\zeta(x)|$, então o Teorema do Valor Médio garante que $|\zeta(x)| = |\zeta(y + v) - \zeta(y)| \leq C\delta(x)$. Portanto, visto que $g(u)\delta \in L^1(\Omega)$, obtemos $\int_\Omega g(u)\zeta \leq \int_\Omega g(u)C\delta < \infty$.

(ii) Se uma solução u de (3.20) é clássica no sentido de que $u \in C^2(\overline{\Omega})$ e satisfaz a equação (3.20), então u é também uma solução fraca de (3.20). Com efeito, como $u \in C^2(\overline{\Omega})$ e Ω é limitado, concluímos que $u \in L^1(\Omega)$ e $g(u)\delta \in L^1(\Omega)$. Por outro lado, como $u|_{\partial\Omega} = 0$, bem como $\zeta|_{\partial\Omega} = 0$, obtemos, pelo Teorema 2.7, que

$$\int_\Omega u\Delta\zeta - \zeta\Delta u dx = \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial v}{\partial\nu} - v\frac{\partial u}{\partial\nu} dS = 0$$

$$\Rightarrow -\int_\Omega u\Delta\zeta dx = -\int_\Omega \zeta\Delta u dx = \int_\Omega g(u)\zeta dx.$$

(iii) Como Ω é limitado, o operador $-\Delta$ satisfaz as condições do Teorema 2.4. Deste fato e a partir de resultados de regularidade segue-se que, se $g \in L^\infty(\Omega)$, então existe uma única solução de (3.20) em $C^2(\overline{\Omega})$.

(iv) Uma solução fraca w de (3.20) é uma super-solução fraca de (3.1) se $u_0 \leq w$. Com efeito,

$$-\int_\Omega u_0\zeta(0) - \int_0^S\int_\Omega w(\zeta_t + \Delta\zeta) - \int_0^S\int_\Omega g(w)\zeta = -\int_\Omega u_0\zeta(0) - \int_0^S\int_\Omega w\zeta_t$$

e

$$
\begin{aligned}
-\int_\Omega u_0\zeta(0) - \int_0^S\int_\Omega w\zeta_t &= -\int_\Omega u_0\zeta(0) - \int_\Omega w\zeta(T) + \int_\Omega w\zeta(0) + \int_0^S\int_\Omega w_t\zeta \\
&= -\int_\Omega (u_0 - w)\zeta(0) \geq 0,
\end{aligned}
$$

para cada $\zeta \in C^2([0,S]\times\overline{\Omega})$, com $\zeta(S) = 0$ e $\zeta = 0$ sobre $\partial\Omega$. Pelo princípio de comparação fraca, temos que $u(t) \leq w$, para todo $t \in [0, T_m)$.

Lema 3.3. *Para cada $f \in L^1(\Omega, \delta(x)dx)$, uma existe uma única solução fraca $v \in L^1(\Omega)$ de*

$$
\begin{cases} -\Delta v &= f \qquad\qquad \textit{em } \Omega, \\ \quad v &= 0, \ \ \textit{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.22}
$$

no sentido de que

$$
-\int_\Omega v\Delta\zeta = \int_\Omega f\zeta, \tag{3.23}
$$

para todo $\zeta \in C^2(\overline{\Omega})$ e $\zeta = 0$, sobre $\partial\Omega$. Além disso,

$$
\|v\|_{L^1} \leq C\|f\|_{L^1(\Omega,\delta(x)dx)}, \tag{3.24}
$$

para alguma constante C independente de f. Também é verdade que se $f \geq 0$, q.t.p. em Ω, então $v \geq 0$, q.t.p. em Ω. Mais ainda,

$$
v = T(t)v + \int_0^t T(s)f ds, \tag{3.25}
$$

para todo $t \geq 0$, onde $(T(t))_{t\geq 0}$ é o semigrupo do calor.

Demonstração. Para provar a unicidade, consideremos as soluções v_1 e v_2 de (3.22). Logo, $v = v_1 - v_2$ é tal que

$$
\int_\Omega v\Delta\zeta = \int_\Omega v_1\Delta\zeta - \int_\Omega v_2\Delta\zeta = -f + f = 0, \tag{3.26}
$$

para todo $\zeta \in C^2(\overline{\Omega})$, satisfazendo $\zeta = 0$, sobre $\partial\Omega$. Dado $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, seja ζ a solução de

$$
\begin{cases} \Delta\zeta &= \varphi \text{ em } \Omega, \\ \zeta|_{\partial\Omega} &= 0. \end{cases}
$$

Por (3.22) e (3.26), segue-se que

$$
\int_\Omega v\varphi = \int_\Omega v\Delta\zeta = 0,
$$

em Ω, donde $v = 0$, porquanto φ é arbitrário.

Para provar a existência, assumiremos que $f \geq 0$ (do contrário, podemos considerar $f = f_+ - f_-$). Dado um inteiro $k \geq 0$, seja $f_k(x) = \min\{f(x), k\}$. Notemos que $f_k \to f$ em $L^1(\Omega, \delta(x)dx)$, se $k \to \infty$. Seja v_k a solução de

$$\begin{cases} -\Delta v_k &= f_k \quad \text{em } \Omega, \\ \quad v_k &= 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.27}$$

Como $f^k \in L^\infty(\Omega)$, tal solução existe, segundo a Observação 3.7, item (iii). Notemos que a seqüência $(v_k)_{k\geq 0}$ é não-decrescente. Também é uma seqüência de Cauchy em $L^1(\Omega)$, pois

$$\int_\Omega (v_k - v_l) = \int_\Omega (f_k - f_l)\zeta_0,$$

onde ζ_0 é solução de

$$\begin{cases} -\Delta\zeta_0 &= 1 \text{ em } \Omega, \\ \quad \zeta_0 &= 0, \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.28}$$

Portanto,

$$\int_\Omega |v_k - v_l| \leq C \int_\Omega |f_k - f_l|\delta(x)dx.$$

Multiplicando (3.27) por ζ, concluímos que v é uma solução fraca de (3.22), se $k \to \infty$ em (3.27). A fim de estabelecermos a estimativa (3.24), basta tomarmos $\zeta = \zeta_0$ em (3.23) e, assim,

$$\|v\|_{L^1} = \int_\Omega v = \int_\Omega f\zeta_0 \leq C\|f\|_{L^1(\Omega,\delta(x)dx)}.$$

A fim de estabelecermos (3.25), consideremos primeiro que f é suave e que v é uma solução suave da equação integral (3.25). Desse modo, $g(s) = T(t-s)v$ também é suave para $0 < s < t$. Ora, pela propriedade (ii), item **c)**, dos semigrupos (seção 2.4.1), temos que

$$\frac{dg}{ds} = \Delta T(t-s)v = T(t-s)(\Delta v) = -T(t-s)f.$$

Integrando sobre $(0,t)$, temos

$$v = T(t)v - \int_0^t T(t-s)f.$$

Obtemos (3.25) por uma mudança de variáveis. Se f é arbitrária, basta considerarmos uma seqüência (f_k) suave convergindo para f em $L^1(\Omega)$. Seja, pois, v_k a solução do problema (3.22) correspondente a f_k. Assim,

$$v_k = T(t)v_k + \int_0^t T(s)f_k ds.$$

Logo, se $k \to \infty$, obtemos

$$v = T(t)v + \int_0^t T(s)f ds,$$

para todo $t \geq 0$.

$\square$

Lema 3.4. *Seja $f \in L^1(\Omega, \delta(x)dx)$, e seja $u \in L^1(\Omega)$ a solução fraca de (3.22). Seja $\phi \in C^2(\mathbb{R})$ uma função côncava tal que ϕ' é limitada e $\phi(0) = 0$. Então,*

$$-\int_\Omega \phi(u)\Delta\zeta \geq \int_\Omega \phi'(u)f\zeta,$$

para todo $\zeta \in C^2(\overline{\Omega})$, com $\zeta \geq 0$ e $\zeta = 0$ sobre $\partial\Omega$.

Demonstração. Como $\mathcal{D}(\Omega)$ é denso em $L^1(\Omega, \delta(x)dx)$, existe uma seqüência $(f_n) \subset \mathcal{D}(\Omega)$ tal que $f_n \to f$ em $L^1(\Omega, \delta(x)dx)$, se $n \to \infty$. Seja u_n a solução de

$$\begin{cases} -\Delta u_n &= f_n \quad \text{em } \Omega, \\ \quad u_n &= 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Então, $u_n \to u$ em $L^1(\Omega)$, se $n \to \infty$, pelo Lema 3.3. Por outro lado, como ϕ é côncava, segue-se que $\phi'' \leq 0$. Assim,

$$\Delta\phi(u_n) = \phi'(u_n)\Delta u_n + \phi''(u_n)|\nabla u_n|^2 \leq \phi'(u_n)\Delta u_n = -\phi'(u_n)f_n.$$

Portanto,

$$-\int_\Omega \phi(u_n)\Delta\zeta = -\int_\Omega \Delta\phi(u_n)\zeta \geq \int_\Omega \phi'(u_n)f_n\zeta$$

para todo $\zeta \in C^2(\overline{\Omega})$, com $\zeta \geq 0$ e $\zeta = 0$ sobre $\partial\Omega$. Fazendo $n \to \infty$, segue-se o resultado. $\square$

Lema 3.5. *Seja $\overline{w}$ uma super-solução fraca de (3.20), no seguinte sentido: $\overline{w} \in L^1(\Omega)$, $\overline{w} \geq 0$, $g(\overline{w})\delta \in L^1(\Omega)$, onde δ é dada por (4.3) e*

$$-\int_\Omega \overline{w}\Delta\zeta \geq \int_\Omega g(\overline{w})\zeta,$$

para todo $\zeta \in C^2(\overline{\Omega})$, com $\zeta \geq 0$ e $\zeta = 0$ sobre $\partial\Omega$. Então existe uma solução fraca w de (3.20) tal que $0 \leq w \leq \overline{w}$.

Demonstração. Faremos uso de um argumento de iteração monótona. Definamos a seqüência (w_n), considerando $w_1 = \overline{w}$ e

$$\begin{cases} -\Delta w_{n+1} &= g(w_n) \quad \text{em } \Omega, \\ \quad w_{n+1} &= 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

para $n \geq 1$. Afirmamos que $\overline{w} = w_1 \geq w_2 \geq ... \geq 0$. Com efeito, é suficiente provarmos que $w_1 \geq w_2 \geq 0$, visto que o caso geral é facilmente obtido por indução (desigualdade $w_n \geq w_{n+1}$) e pelo Lema 3.3 (existência da solução fraca w_{n+1} e condição $w_{n+1} \geq 0$). Observemos que a solução fraca w_2, assim definida, existe pelo Lema 3.3 e que

$$\begin{aligned} \int_\Omega (w_1 - w_2)(-\Delta\zeta) &= -\int_\Omega \overline{w}\Delta\zeta - \left(-\int_\Omega w_2 \Delta\zeta\right) \\ &\geq \int_\Omega g(\overline{w})\zeta - \int_\Omega g(w_1)\zeta = 0, \end{aligned} \tag{3.29}$$

para todo $\zeta \in C^2(\overline{\Omega})$, com $\zeta \geq 0$ e $\zeta = 0$ sobre $\partial\Omega$. Dado $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\varphi \geq 0$, seja ζ_φ a solução de

$$\begin{cases} -\Delta\zeta_\varphi &= \varphi \quad \text{em } \Omega, \\ \zeta_\varphi &= 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Tomando $\zeta = \zeta_\varphi$ na expressão (3.29), obtemos

$$\int_\Omega (w_1 - w_2)\varphi = \int_\Omega (w_1 - w_2)(-\Delta\zeta_\varphi) \geq 0.$$

Como $\varphi \geq 0$ é arbitrário, então $w_1 \geq w_2$ para quase todo $x \in \Omega$. Por outro lado, o Lema 3.3 assegura que $w_2 \geq 0$. Ora, a seqüência $(w_n)_{n\geq 1}$ é não-decrescente e, portanto, converge para um limite $u \in L^1(\Omega)$, que obviamente é solução fraca de (3.20).

□

4 COMPORTAMENTO ASSINTÓTICO

Neste capítulo analisaremos o comportamento assintótico das soluções do problema

$$\begin{cases} u_t - \Delta u &= g(u) \quad \text{em } (0,T)\times\Omega, \\ u &= 0 \quad \text{em } (0,T)\times\partial\Omega, \\ u(0,x) &= u_0(x) \quad \text{em } \Omega. \end{cases} \tag{4.1}$$

onde $g : [0,\infty) \to [0,\infty)$ é uma função de classe C^1, convexa, não-decrescente, $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ e Ω é um aberto suave, conexo e limitado de $\mathbb{R}^N$. Consideraremos apenas soluções não negativas. Veremos que há situações em que o comportamento assintótico da solução de (4.1) determina a existência de soluções fracas para o problema estacionário elíptico associado

$$\begin{cases} -\Delta u &= g(u) \quad \text{em } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.2}$$

no sentido da definição dada na seção 2.2. Em alguns resultados, assumiremos as condições adicionais

$$g(x_0) > 0 \tag{4.3}$$

e

$$\int_{x_0}^{\infty} \frac{ds}{g(s)} < \infty, \tag{4.4}$$

para algum $x_0 \geq 0$.

Os resultados deste capítulo, bem como o teor de suas demonstrações podem ser encontrados em [8].

Observemos que da condição (4.4) segue-se que

$$\lim_{s\to\infty} g'(s) = +\infty; \tag{4.5}$$

do contrário, existiria C tal que $g'(u_k) \leq C$, para alguma seqüência $u_k \geq 0$, $u_k \to +\infty$. Como g é convexa, segue-se que g' é não decrescente e, por conseguinte, $g'(u) \leq C$, para todo $u \geq 0$. Assim, $g(u) \leq Cs + g(0)$, para todo $u \geq 0$, donde

$$\infty = \int_{x_0}^{\infty} \frac{ds}{Cs + g(0)} \leq \int_{x_0}^{\infty} \frac{ds}{g(s)},$$

o que contradiz (4.4).

Exemplos:

1) Seja $g(u) = e^u$. Sabemos que g é de classe C^1, convexa, não-decrescente e obviamente satisfaz (4.3). Quanto à condição (4.4), notemos que

$$\int_0^\infty \frac{ds}{e^s} = \lim_{M\to+\infty} \int_0^M \frac{ds}{e^s} = \lim_{M\to+\infty} \left(-\frac{1}{e^s}\right)\Big|_0^M = \lim_{M\to+\infty} \left(-\frac{1}{e^M}+1\right) = 1.$$

2) Seja $h(u) = (1+u)^p$, $1 < p < \infty$. Ora,

$$\int_0^\infty \frac{ds}{(1+s)^p} = \lim_{M\to+\infty} \frac{(1+s)^{1-p}}{1-p}\Big|_0^M = \lim_{M\to+\infty} \frac{(1+M)^{1-p}-1}{1-p} = \frac{1}{p-1}.$$

Logo, h é um exemplo de função satisfazendo as condições do problema em questão.

Nosso primeiro resultado assegura a existência de uma solução fraca para o problema estacionário (4.2), desde que exista uma solução global de (4.1).

Teorema 4.1. *Suponhamos que a condição (4.4) é satisfeita. Se existe uma solução global de* (4.1) *para algum* $u_0 \in L^\infty(\Omega)$, $u_0 \geq 0$, *então existe uma solução fraca de* (4.2).

Demonstração. Vamos assumir que $g(0) > 0$, pois do contrário, $w = 0$ é uma solução fraca de (4.2). Sem perda de generalidade, admitiremos também que $u_0 = 0$, de modo que $u(t) \geq 0$ e $u_t \geq 0$, para todo $t \geq 0$. Para verificarmos tais fatos, observemos que $g(t) \geq g(0) > \frac{g(0)}{2} = \eta > 0$, para todo $t \geq 0$, uma vez que g é não-decrescente. Consideremos, então, a solução $v(t) = \eta t T(t)\varphi_1$, onde φ_1 é a primeira autofunção associada ao primeiro autovalor $\lambda_1 > 0$ de $-\Delta$ em $H_0^1(\Omega)$ (uma abordagem sobre autovalores e autofunções do operador $-\Delta$ em $H_0^1(\Omega)$ pode ser encontrada em [7]), com $\|\varphi_1\|_{L^\infty} = 1$. Então,

$$v_t - \Delta v = \eta T(t)\varphi_1 \leq \eta \leq g(v).$$

Como $v(0) = 0$, temos, pelo princípio de comparação, que $u(t) \geq v(t) = \eta t e^{-\lambda_1 t}\varphi_1 > 0$, para todo $t > 0$.

A fim de mostrarmos que $u_t \geq 0$, para todo $t \geq 0$, fixemos $0 < T < \infty$. Notemos que se $\tau_0 > 0$ é suficientemente pequeno, então $\|u(\tau)\|_{L^\infty((0,\tau)\times\Omega)}$ é arbitrariamente pequeno, para $0 < \tau < \tau_0$. Com efeito, $u(t) = \int_0^t T(t-s)g(u(s))ds$, para todo $t \geq 0$ e $g(s) - g(0) \leq L_M s$, para todo $0 \leq s \leq M$, onde $M = \|u\|_{L^\infty((0,\tau)\times\Omega)}$. Como $(T(t))_{t\geq 0}$ é um semigrupo de contrações, temos que

$$\|u(t)\|_{L^\infty((0,\tau)\times\Omega)} \leq \int_0^t [L_M \|u(s)\|_{L^\infty((0,\tau)\times\Omega)} + g(0)]ds.$$

Logo, pela Desigualdade de Gronwall,

$$\|u(t)\|_{L^\infty((0,\tau)\times\Omega)} \leq g(0)\tau e^{\tau L_{M_0}} \to 0,$$

quando $\tau \to 0$. Aqui, $M_0 = \|u\|_{L^\infty((0,\tau_0)\times\Omega)}$.

Pelo Teorema 3.1, a aplicação $u_0 \mapsto T_m(u_0)$ é semicontínua inferiormente; logo, existe $\tau_0 > 0$ suficientemente pequeno de modo que a solução do problema (4.1) associada à condição inicial $u(\tau_0)$ é $z(t) = u(\tau_0 + t)$, para todo $t \in [0, T]$. Como $z(0) > u_0 = 0$, então z é uma super-solução de (4.1) com respeito ao valor inicial u_0. Logo, $z(t) \geq u(t)$, para todo $t \in [0, T]$, em virtude do Princípio de Comparação. Assim, para $0 < \tau \leq \tau_0$, temos que $u(t + \tau) - u(t) \geq 0$, para todo $t \in [0, T]$. Analogamente, $u(t - \tau) - u(t) \leq 0$. Portanto, $u_t \geq 0$, para todo $t \in [0, T]$. Como T é arbitrário, segue-se que $u_t \geq 0$, para todo $t \geq 0$.

Agora, observemos que, devido à condição (4.5), existe $M > 0$ tal que

$$g(s) - \lambda_1 s \geq \frac{1}{2} g(s) \quad \text{para} \quad s \geq M. \tag{4.6}$$

Seja $\varphi \in C^2(\overline{\Omega})$, $\varphi_{|\partial\Omega} = 0$. Como $\frac{d}{dt}\int_\Omega u(t)\varphi = \int_\Omega u_t \varphi$ e $-\int_\Omega \Delta u(t)\varphi = \int_\Omega u(t)(-\Delta\varphi)$, então, multiplicando (4.1) por φ e integrando sobre Ω, obtemos

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega u(t)\varphi + \int_\Omega u(t)(-\Delta\varphi) = \int_\Omega g(u(t))\varphi. \tag{4.7}$$

Primeiramente afirmamos que

$$\sup_{t\geq 0} \int_\Omega g(u)\varphi_1 \leq (1 + \lambda_1)M, \tag{4.8}$$

em que M é tal como em (4.6) e φ_1 é a primeira autofunção de $-\Delta$ em $H_0^1(\overline{\Omega})$ associada ao primeiro autovalor λ_1, com $\int_\Omega \varphi_1 = 1$. De fato, tomando $\varphi = \varphi_1$ na equação (4.7), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\int_\Omega u(t)\varphi_1 + \lambda_1 \int_\Omega u(t)\varphi_1 &= \frac{d}{dt}\int_\Omega u(t)\varphi_1 + \int_\Omega u(t)(-\Delta\varphi_1) \\ &= \int_\Omega g(u(t))\varphi_1 \\ &\geq g\left(\int_\Omega u(t)\varphi_1\right), \end{aligned} \tag{4.9}$$

pela Desigualdade de Jensen. Ora, se existe $t_0 \geq 0$ tal que $\int_\Omega u(t_0)\varphi_1 > M$, então segue-se das desigualdades (4.9) e (4.6) que

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega u(t)\varphi_1 \geq g\left(\int_\Omega u(t)\varphi_1\right) - \lambda_1 \int_\Omega u(t)\varphi_1 \geq \frac{1}{2} g\left(\int_\Omega u(t)\varphi_1\right), \tag{4.10}$$

para todo $t \geq t_0$. Mas isso contradiz a hipótese, pois, se tomarmos $c = \max\{t_0, x_0\}$ e $\psi(t) = \int_\Omega u(t)\varphi_1$ na expressão (4.10), obtemos

$$\frac{d}{dt}\psi(t) \geq \frac{1}{2} g(\psi(t)),$$

donde

$$\int_c^\infty \frac{d\psi}{g(\psi)} \geq \int_c^\infty \frac{1}{2} ds = +\infty.$$

Assim,

$$\int_\Omega u(t)\varphi_1 \leq M,$$

para todo $t \geq 0$. Integrando a desigualdade (4.9) sobre $(t, t+1)$ e sabendo que $u_t \geq 0$, o que assegura que u é não decrescente, temos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega g(u(t))\varphi_1 &\leq \int_t^{t+1} \int_\Omega g(u)\varphi_1 \\
&= \int_\Omega (u(t+1) - u(t))\varphi_1 + \lambda_1 \int_t^{t+1} \int_\Omega u\varphi_1 \\
&\leq \int_\Omega u(t+1)\varphi_1 + \lambda_1 \int_t^{t+1} \int_\Omega u\varphi_1 \\
&\leq (1+\lambda_1)M,
\end{aligned}$$

donde a estimativa (4.8) fica estabelecido. Afirmamos, agora, que existe $K \geq 0$ tal que

$$\sup_{t\geq 0} \|u(t)\|_{L^1} \leq K. \tag{4.11}$$

Com efeito, consideremos a solução ζ_0 de (3.28). Seja $\varphi = \zeta_0$ na expressão (4.7) e integremos sobre $(t, t+1)$, o que nos dá

$$\begin{aligned}
\int_\Omega u(t) \leq \int_t^{t+1} \int_\Omega u &= -\int_t^{t+1} \int_\Omega u\Delta\zeta_0 \\
&= \int_\Omega u(t)\zeta_0 - \int_\Omega u(t+1)\zeta_0 + \int_t^{t+1} \int_\Omega g(u)\zeta_0.
\end{aligned}$$

A afirmação (4.11) segue-se, então, do fato de u ser crescente e de (4.8), usando que $\zeta_0 \leq C\varphi_1$.

Pelo Teorema da Convergência Monótona, segue-se da estimativa (4.11) que $u(t)$ tem um limite $w \in L^1(\Omega)$ o que, juntamente com (4.8), assegura que, se $t \to \infty$, então $g(u)$ converge para $g(w)$ em $L^1(\Omega, \delta(x)dx)$, uma vez que $g(u)\delta$ converge para $g(w)\delta$ em $L^1(\Omega)$. Seja $\varphi \in C^2(\overline{\Omega})$, $\varphi_{|\partial\Omega} = 0$. Integrando (4.7) sobre $(t, t+1)$, temos

$$\left[\int_\Omega u\varphi\right]_t^{t+1} + \int_t^{t+1} \int_\Omega u(t)(-\Delta\varphi) = \int_t^{t+1} \int_\Omega g(u(t))\varphi.$$

Se $t \to \infty$, obtemos

$$\int_\Omega w(-\Delta\varphi) = \int_\Omega g(w)\varphi.$$

Isto significa que w é uma solução fraca do problema (4.2). $\square$

Como conseqüência imediata do Teorema 4.1, temos:

Corolário 4.1. *Suponhamos que vale a condição (4.4). Se não existe solução fraca para o problema (4.2), então, para todo valor inicial $u_0 \in L^\infty(\Omega)$, $u_0 \geq 0$, a solução de (4.1) explode em tempo finito.*

Como recíproca do Teorema 4.1, temos o seguinte resultado, válido ainda que g não satisfaça a condição (4.4).

Teorema 4.2. *Se existe uma solução fraca w do problema* (4.2)*, então para cada $u_0 \in L^\infty(\Omega)$, tal que $0 \leq u_0 \leq w$, a solução u de* (4.1) *com $u(0) = u_0$ é global.*

O teorema que enunciaremos a seguir é concernente à existência de soluções clássicas para "perturbações"do problema (4.2), pressupondo que o mesmo admite uma solução fraca.

Teorema 4.3. *Se existe uma solução fraca w do problema (4.2), então, para cada $\varepsilon \in (0,1)$, existe uma solução clássica w_ε de*

$$\begin{cases} -\Delta w_\varepsilon &= (1-\varepsilon) g(w_\varepsilon) \quad \text{em } (0,T)\times\Omega, \\ \quad w_\varepsilon &= 0 \qquad\qquad\quad\ \ \text{em } (0,T)\times\partial\Omega. \end{cases} \tag{4.12}$$

A fim de demonstrarmos tal teorema, enunciamos o seguinte resultado:

Lema 4.1. *Suponhamos que $g(0) > 0$ e seja*

$$h(u) = \int_0^u \frac{ds}{g(s)},$$

para todo $u \geq 0$. Seja $\widetilde{g}$ uma função sobre $[0,\infty)$ tal que $\widetilde{g} \leq g$ e $\widetilde{g}' \leq g'$. Definamos

$$\widetilde{h} = \int_0^u \frac{ds}{\widetilde{g}(s)},$$

e

$$\phi(u) = \widetilde{h}^{-1}(h(u)),$$

para todo $u \geq 0$. Então

(i) $\phi(0) = 0$ e $0 \leq \phi(u) \leq u$ para todo $u \geq 0$.

(ii) ϕ é crescente, côncava e $\phi'(u) \leq 1$ para todo $u \geq 0$.

(iii) Se $h(\infty) < \infty$ e $\widetilde{g} \not\equiv g$, então $\phi(\infty) < \infty$.

Demonstração. As propriedades (i) e (iii) são imediatas. Para verificarmos a propriedade (ii), observemos que

$$\phi'(u) = \frac{\widetilde{g}(\phi(u))}{g(u)} > 0,$$

e, por conseguinte, ϕ é crescente. Também temos que

$$\phi''(u) = \frac{g(u)\widetilde{g}'(\phi(u))\phi'(u) - \widetilde{g}(\phi(u))g'(u)}{g(u)^2} = \frac{\widetilde{g}(\phi(u))(\widetilde{g}'(\phi(u)) - g'(u))}{g(u)^2}.$$

Da hipótese do lema e por ser g uma função convexa, temos que $\widetilde{g}'(\phi(u)) \leq g'(\phi(u)) \leq g'(u)$, donde $\phi'(u) \leq 1$ e $\phi \geq 0$. Portanto, ϕ é côncava. Assim, o item (ii) está provado. □

Demonstração do Teorema 4.3. Observemos que se $g(0) = 0$, então 0 é uma solução fraca de (4.12). Podemos, pois, assumir que $g(0) > 0$. Consideremos dois casos. Primeiro suponhamos que

$$\int_0^\infty \frac{ds}{g(s)} < \infty.$$

Seja $v = \phi(w)$, onde ϕ é como no Lema 4.1, considerando $\widetilde{g} = (1-\varepsilon)g$. Em virtude do Lema 4.1, $v \in L^\infty(\Omega)$ satisfaz as condições do Lema 3.4.

Assim,

$$\begin{aligned}
-\int_\Omega v\Delta\zeta &= -\int_\Omega \phi(w)\Delta\zeta \geq \int_\Omega \phi'(w)g(w)\zeta \\
&= \int_\Omega \frac{(1-\varepsilon)g(\phi(w))}{g(w)} g(w)\zeta = \int_\Omega (1-\varepsilon)g(\phi(w))\zeta \\
&= \int_\Omega (1-\varepsilon)g(v)\zeta,
\end{aligned}$$

para todo $\zeta \in C^2(\overline{\Omega})$, $\zeta \geq 0$ e $\zeta = 0$ sobre $\partial\Omega$. Logo, v é uma super-solução de (4.12). Segue-se, então, pelo Lema 3.5, que existe uma solução fraca w_ε de (4.12). Suponhamos, agora, que $\int_0^\infty \frac{ds}{g(s)} = \infty$. Como no caso anterior, seja $v_1 = \phi(w)$ e $\widetilde{g} = (1-\varepsilon)g$, segundo a construção do Lema 4.1, o qual assegura que $0 \leq v_1 \leq w$ (item (i)). Observemos que $h(u) = \int_0^u \frac{ds}{g(u)}$ é côncava, pois $h''(u) = -\frac{g'(u)}{g^2(u)} \leq 0$.

Assim,

$$h(w) - h(v_1) \leq (w - v_1)h'(v_1)$$

e então

$$h(w) \leq h(v_1) + (w - v_1)h'(v_1) = h(v_1) + \frac{w - v_1}{g(v_1)}.$$

Como

$$\begin{aligned} h(v_1) &= \int_0^{\phi(w)} \frac{ds}{g(s)} = \int_0^w \frac{\phi'(u)}{g(\phi(u))du} \\ &= (1-\varepsilon)\int_0^w \frac{du}{g(u)} = (1-\varepsilon)h(w), \end{aligned}$$

obtemos

$$h(w) \le (1-\varepsilon)h(w) + \frac{w-v_1}{g(v_1)}$$

e, por conseguinte,

$$\varepsilon g(v_1) \le \frac{w-v_1}{h(w)} \le \frac{w}{h(w)} \le C(1+w).$$

Em particular, $g(v_1) \in L^1(\Omega)$, pois $C(1+w) \in L^1(\Omega)$, uma vez que Ω é limitado.

Em virtude do Lema 3.4,

$$\begin{aligned} -\int_\Omega v_1\Delta\zeta = -\int_\Omega \phi(w)\Delta\zeta \ge \int_\Omega \phi'(w)g(w)\zeta = \int_\Omega \frac{(1-\varepsilon)g(\phi(w))}{g(w)}g(w)\zeta \\ = \int_\Omega (1-\varepsilon)g(\phi(w))\zeta = \int_\Omega (1-\varepsilon)g(v_1)\zeta. \end{aligned}$$

Logo, v_1 é uma super-solução do problema

$$\begin{cases} -\Delta u_1 &= (1-\varepsilon)g(u_1) \quad \text{em } \Omega, \\ \quad u_1 &= 0 \qquad\qquad\qquad \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.13}$$

O Lema 3.5 garante, então, que existe uma solução fraca u_1 de (4.13) tal que $0 \le u_1 \le v_1$. Como g é não-decrescente, segue-se que $0 \le g(u_1) \le g(v_1) \in L^1(\Omega)$, de sorte que $u_1 \in L^p(\Omega)$, para todo $p \ge 1$ tal que (ver [3])

$$p < \frac{N}{N-2} \quad (p \le \infty \text{ } se \text{ } N=1, \text{ } p < \infty \text{ } se \text{ } N=2). \tag{4.14}$$

Consideremos, agora, $g_1 = (1-\varepsilon)g$ e procedamos como na construção anterior. Sejam, $\widetilde{g}_1 = (1-\varepsilon)g_1$ e $v_2 = \phi(u_1)$, em que ϕ está associada a $\widetilde{g}_1$, no sentido de que

$$\phi(u) = \widetilde{h}_1^{-1}(h_1(u)),$$

com $\widetilde{h}(u) = \displaystyle\int_0^u \frac{ds}{\widetilde{g}_1(s)}$ e $h_1(u) = \displaystyle\int_0^u \frac{ds}{g_1(s)}$. Da concavidade de h_1, obtemos

$$\begin{aligned} h_1(u_1) &\le h_1(\phi(u_1)) + \frac{u_1-v_2}{g_1(v_2)} = \int_0^{u_1} \frac{\phi'(u)du}{g(\phi(u))} \\ &= \int_0^{u_1} \frac{\widetilde{g}_1(\phi(u))du}{g_1(u)g_1(\phi(u))} = (1-\varepsilon)\int_0^{u_1} \frac{g_1(\phi(u))du}{g_1(u)g_1(\phi(u))} \\ &= (1-\varepsilon)\int_0^{u_1} \frac{du}{g_1(u)} = (1-\varepsilon)h_1(u_1) \end{aligned}$$

e então

$$\varepsilon g_1(v_2) \leq \widetilde{C}(1 + u_1).$$

Ora, pelo Lema 3.4, v_2 é uma super-solução fraca do problema

$$\begin{cases} -\Delta u_2 &= (1-\varepsilon) g_1(u_2) \quad \text{em } \Omega, \\ \quad u_2 &= 0 \quad\quad\quad\quad\quad\; \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.15}$$

de modo que, pelo Lema 3.5, existe uma solução fraca u_2 do problema (4.15), de sorte que $0 \leq u_2 \leq v_2$. Como pelo Lema 4.1 temos que $0 \leq v_2 \leq u_1$, então $0 \leq u_2 \leq v_2 \leq u_1$. Assim, $g(u_2) \leq g(u_1) \leq C(1 + u_1)$. Em particular, $g(u_2) \in L^p(\Omega)$, para todo $p \geq 1$ satisfazendo (4.14). Logo, $u_2 \in L^r(\Omega)$, para todo $r \geq 1$ tal que $r < \frac{N}{N-4}$ ($r \leq \infty$ se $N = 1, 2, 3, r < \infty$ se $N = 4$). Iterando, obtemos em k etapas que $k(N) = \frac{N}{2} + 1$, de modo que a solução u_k de

$$\begin{cases} -\Delta u_k &= (1-\varepsilon) g_{k-1}(u_k) \quad \text{em } \Omega, \\ \quad u_k &= 0 \quad\quad\quad\quad\quad\quad\; \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $g_{k-1} = (1-\varepsilon)^{k-1} g$, pertence a $L^\infty(\Omega)$. Como $\varepsilon \in (0,1)$ é arbitrário, o resultado está provado.

$\square$

Observação 4.4. Há também resultados associados a uma equação mais geral que (4.2). Trata-se da equação

$$\begin{cases} -\Delta u &= \lambda g(u) \quad \text{em } \Omega, \\ \quad u &= 0 \quad\quad\;\;\; \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.16}$$

em que $\lambda > 0$. Nesse caso, existe $0 < \lambda^* < \infty$, tal que

(i) para cada $0 < \lambda < \lambda^*$, a equação (4.16) tem uma solução clássica, positiva, minimal $u(\lambda)$, que é a única solução estável de (4.16), sendo a estabilidade aqui caracterizada por

$$\lambda_1(-\Delta - \lambda g'(u(\lambda))) > 0.$$

É possível que, para alguns valores de $\lambda \in (0, \lambda^*)$, haja uma ou mais soluções de (4.16), porém estas serão instáveis.

(ii) a aplicação $\lambda \mapsto u(\lambda)$ é crescente.

(iii) para $\lambda > \lambda^*$, o problema (4.16) não possui solução fraca.

(iv) para $\lambda = \lambda^*$, existe uma solução fraca $u^* = \lim\limits_{\lambda \uparrow \lambda^*} u(\lambda)$ de (4.16).

Conferir [1], [4], [5] e [12].

A fim de demonstrarmos o Teorema 4.2, faremos uso dos seguintes lemas:

Lema 4.2. *Suponhamos que a condição (4.4) é satisfeita. Existem constantes* $K \geq 0$ *e* $\varepsilon_0 > 0$ *tais que para cada* $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$*, existe uma função* $\phi_\varepsilon \in C^2([0,\infty))$*, côncava, crescente, e*

(i) $\phi_\varepsilon(0) = 0$*,*

(ii) $0 < \phi_\varepsilon(x) \leq x$*, para* $x > 0$*,*

(iii) $1 \geq \phi'_\varepsilon(x) \geq \frac{(g(\phi_\varepsilon(x)) - \varepsilon K)^+}{g(x)}$ *para* $x \geq 0$*.*

Além disso, $\sup_{x \geq 0} \phi_\varepsilon(x) < \infty$*.*

Demonstração. Se $g(0) > 0$, basta aplicarmos o Lema 4.1, para $\widetilde{g}(u) = g(u) - \varepsilon$. O resultado é obtido com $\varepsilon_0 = g(0)$ e $K = 1$. Podemos, então, assumir que $g(0) = 0$. Seja a a única solução de $g(a) = 1$ e definamos

$$H(x) = a + \int_a^x \frac{ds}{g(s)} \quad \text{para} \quad x \geq a.$$

Como $g(a) = 1$, existe $0 < \varepsilon_0 < 1$ tal que $0 < \varepsilon < g((1-\varepsilon)a)$, para $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$. Para tais valores de ε, definamos

$$H_\varepsilon(x) = a + \int_{(1-\varepsilon)a}^x \frac{ds}{g(s) - \varepsilon} \quad \textit{para} \quad x \geq (1-\varepsilon)a.$$

Observemos que $H_\varepsilon((1-\varepsilon)a) = a = H(a)$. Além disso,

$$\lim_{x\to\infty} H_\varepsilon(x) > a + \int_{(1-\varepsilon)a}^\infty \frac{ds}{g(s)} \geq \lim_{x\to\infty} H(x).$$

Desse modo, $\psi_\varepsilon(x) = H_\varepsilon^{-1}(H(x))$ está bem definida para todo $x \geq a$, $\psi_\varepsilon(a) = (1-\varepsilon)a$ e $\sup_{x \geq a} \psi_\varepsilon(x) < \infty$. Também temos que, para $x \geq a$,

$$\psi'_\varepsilon(x) = \frac{g(\psi_\varepsilon(x)) - \varepsilon}{g(x)}. \tag{4.17}$$

Mais ainda, para $x \geq a$ temos

$$\begin{aligned}
\psi''_\varepsilon(x) &= \frac{g(x)g'(\psi_\varepsilon(x))\psi'_\varepsilon(x) - (g(\psi_\varepsilon(x)) - \varepsilon)g'(x)}{g(x)^2} \\
&= \frac{(g(\psi_\varepsilon(x)) - \varepsilon)(g'(\psi_\varepsilon(x)) - g'(x))}{g(x)^2} \leq 0,
\end{aligned}$$

pois como $\psi_\varepsilon(x) \le x$, então $g'(\psi_\varepsilon(x)) \le g'(x)$, já que g é convexa e, portanto sua derivada é não-decrescente. Consideramos, agora, uma função côncava $\phi_\varepsilon \in C^2([0,\infty))$ tal que $\phi_\varepsilon(x) = \psi_\varepsilon(x)$, para $x \ge a$, $\phi_\varepsilon(0) = 0$ e $\phi'_\varepsilon(x) \le 1$, para todo $x \ge 0$. Tal função existe, uma vez que

$$\psi'_\varepsilon(a) \le \frac{\psi_\varepsilon(a)}{a} \le 1.$$

Observemos que ϕ_ε satisfaz os itens (i) e (ii). Quanto à propriedade (iii), mostraremos que é válida com $K = 1 + ag'(a)$. De (4.17) obtemos, para $x \ge a$, que

$$\phi_\varepsilon(x) \ge \frac{g(\phi_\varepsilon(x)) - \varepsilon}{g(x)} \ge \frac{g(\phi_\varepsilon(x)) - \varepsilon K}{g(x)},$$

e, assim, a (iii) é válida para $x \ge a$. Se $x \le a$, temos

$$\phi'_\varepsilon(x) \ge \phi'_\varepsilon(a) = g((1-\varepsilon)a) - \varepsilon.$$

Além disso, como g é convexa, então

$$g((1-\varepsilon)a) \ge g(a) - \varepsilon a g'(a) = 1 - \varepsilon(K-1),$$

pelo que deduzimos, para $x \le a$, que

$$\begin{aligned}\phi'_\varepsilon(x) &\ge 1 - \varepsilon K = 1 - \frac{\varepsilon K}{g(a)} \ge 1 - \frac{\varepsilon K}{g(x)} \\ &= \frac{g(x) - \varepsilon K}{g(x)} \ge \frac{g(\phi_\varepsilon(x)) - \varepsilon K}{g(x)}.\end{aligned}$$

Logo, a propriedade (iii) é satisfeita para $x \le a$ o que conclui a prova. □

Lema 4.3. *Seja δ a função distância até a fronteira de Ω, isto é,*

$$\delta(x) = dist(x, \partial\Omega).$$

Para cada $0 < T < \infty$, existe $\varepsilon_1(T) > 0$ tal que, se $0 < \varepsilon \le \varepsilon_1$, então a solução Z da equação

$$\begin{cases} Z_t - \Delta Z &= -\varepsilon K \quad \text{em } (0,\infty) \times \Omega, \\ Z &= 0 \quad \text{em } (0,\infty) \times \partial\Omega, \\ Z(0) &= \delta, \quad \text{em } \Omega, \end{cases}$$

é tal que $Z \ge 0$ sobre $[0,T] \times \overline{\Omega}$.

Demonstração. Seja ζ_0 a solução de

$$\begin{cases} -\Delta\zeta_0 &= 1 \text{ em } \Omega, \\ \zeta_0 &= 0, \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Sabemos que

$$\zeta_0 = T(t)\zeta_0 + \int_0^t T(s)1_\Omega ds,$$

para todo $t \geq 0$. Como $T(t)\zeta_0 \geq 0$, então

$$\int_0^t T(s)1_\Omega ds \leq \zeta_0 \leq C\delta, \tag{4.18}$$

para todo $t \geq 0$ e alguma constante $C > 0$. Por outro lado,

$$Z(t) = T(t)\delta - \varepsilon \int_0^t T(s)1_\Omega ds$$

e, desse modo, segue-se da desigualdade (4.18) que

$$Z(t) \geq T(t)\delta - \varepsilon C\delta.$$

Sejam, agora, $c_0 > 0$ e $c_1 > 0$ tais que $c_0\varphi_1 \leq \delta \leq c_1\varphi_1$, onde $\varphi_1 > 0$ é a primeira autofunção do operador $-\Delta$ em $H_0^1(\Omega)$, associada ao primeiro autovalor λ_1. Assim,

$$T(t)\delta \geq c_0 T(t)\varphi_1 = c_0 e^{-\lambda_1 t}\varphi_1 \geq \frac{c_0}{c_1} e^{-\lambda_1 t}\delta.$$

Portanto,

$$Z(t) \geq \left(\frac{c_0}{c_1} e^{-\lambda_1 t} - \varepsilon C\right)\delta.$$

Logo, $Z(t) \geq 0$ sobre $[0, T]$, se $\varepsilon \leq \frac{c_0}{c_1 C} e^{-\lambda_1 T}$. □

Demonstração do Teorema 4.2 Suponhamos primeiro que a condição (4.4) não é satisfeita, isto é, $\int_{x_0}^\infty \frac{ds}{g(s)} = +\infty$. Então, a solução de

$$\begin{cases} \theta' &= g(\theta), \\ \theta(0) &= \|u_0\|_{L^\infty}, \end{cases} \tag{4.19}$$

é global. Com efeito, consideremos a função de classe C^1, $F : [\theta(0), \infty) \to [0, \infty)$, definida por

$$F(x) = \int_{\theta(0)}^x \frac{ds}{g(s)}.$$

A partir de (4.19), obtemos

$$\int_{\theta(0)}^{\theta(t)} \frac{d\sigma}{g(\sigma)} = t.$$

Logo,

$$F(\theta(t)) = t \Rightarrow \theta(t) = F^{-1}(t). \tag{4.20}$$

Ora, F^{-1} está definida para todo $t \geq 0$. De fato, F é sobrejetiva, uma vez que a condição (4.4) falha. É injetiva, visto que $F'(x) = \frac{1}{g(x)} > 0$, para todo $x \geq \theta(0)$. Com efeito, se houvesse $x_1 \geq \theta(0)$ e $x_2 \geq \theta(0)$ tais que $x_1 \neq x_2$ e $F(x_1) = F(x_2)$, existiria algum $x \in (x_1, x_2)$ tal que $F'(x) = 0$, pelo Teorema de Rolle, o que é um absurdo. Portanto, segue-se de (4.20) que θ é global. Como $\theta(t)$ é uma super-solução do problema (4.1) e 0, por sua vez, é sub-solução do mesmo, concluímos que todas as soluções de (4.1) são globais, segundo o princípio de comparação.

Assumimos, pois, que a condição (4.4) é satisfeita. Assumimos também que

$$w \notin L^\infty(\Omega), \tag{4.21}$$

pois, do contrário, teríamos $u(t) \leq w$ pelo princípio de comparação e, por conseguinte, u seria global, visto que sua norma em $L^\infty(\Omega)$ seria finita. Seja $[0, T_m)$ o intervalo máximo de existência da solução u de (4.1). Notemos que, pela Observação 3.7, item (iv), temos que $u(t) \leq w$, para cada $[0, T_m)$. Prosseguimos, demonstrando o Teorema em quatro etapas.

Etapa 1. Existem $0 < \tau < T_m$ e $C_0, c_0 > 0$ tais que

$$u(\tau) \leq C_0\delta, \tag{4.22}$$

e

$$u(\tau) \leq w - c_0\delta. \tag{4.23}$$

Seja $v_0 = \min\{w, 1 + u_0\}$. Temos que $v_0 \geq u_0$, visto que $w \geq u_0$. Também, $v_0 \not\equiv u_0$, pois do contrário, teríamos $v_0 = w = u_0 \in L^\infty(\Omega)$, o que contradiz (4.21). Consideremos uma função $\gamma : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ tal que $\gamma(t) > 0$ para $t > 0$ e

$$T(t)(v_0 - u_0) \geq \gamma(t)\delta, \tag{4.24}$$

em que δ é definida por (4.3) e $(T(t))_{t\geq 0}$ é o semigrupo do calor. Suponhamos que v é a solução de (4.1) com valor inicial $v(0) = v_0$ e seja $\overline{T}$ o tempo de existência de v. Ora, $v \geq 0$ e, segundo a Observação 3.7, item (iv), temos que $v \leq w$. Definamos $z(t) = u(t) + T(t)(v_0 - u_0)$ para $0 \leq t < \overline{T}$. Então,

$$\begin{cases} z_t - \Delta z &= g(u) \leq g(z) \quad \text{em} \quad (0, \overline{T}) \times \Omega, \\ z &= 0 \text{ em } \partial\Omega, \\ z(0) &= v_0 \text{ em } \Omega, \end{cases}$$

de sorte que $z \leq v$ pelo princípio de comparação. Portanto,

$$u(t) \leq v(t) - T(t)(v_0 - u_0) \leq w - T(t)(v_0 - u_0) \leq w - \gamma(t)\delta, \tag{4.25}$$

para $0 \leq t < \overline{T}$, em que a última desigualdade segue-se de (4.24). Fixemos $0 < T < \min\{\overline{T}, T_m\}$. u é limitada por alguma constante M sobre $[0,T] \times \overline{\Omega}$ e, desse modo,

$$u(t) \leq MT(t)1_\Omega + g(M) \int_\Omega T(s)1_\Omega ds.$$

Consideremos uma função $\overline{C} : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ tal que $T(t)1_\Omega \leq C(t)\delta$, para $t > 0$. Assim, a partir de (4.18), obtemos

$$u(t) \leq MC(t)\delta + g(M)C\delta, \tag{4.26}$$

para $0 < t \leq T$. Logo para $t = \tau$ fixo, satisfazendo esta última desigualdade, obtemos (4.22) e (4.23) de (4.25) e (4.26), sendo $c_0 = \gamma(\tau)$ e $C_0 = MC(\tau) + g(M)C$.

Etapa 2. Sem perda de generalidade, podemos assumir que

$$u_0 \leq C_0\delta, \tag{4.27}$$

e

$$u_0 \leq w - c_0\delta, \tag{4.28}$$

em que C_0, c_0 são como na Etapa 1. Com efeito, basta tomarmos $u(\cdot + \tau)$ em lugar de $u(\cdot)$.

Etapa 3. Sejam ε e ϕ_ε como no Lema 4.2 e para $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ consideremos $w_\varepsilon = \phi_\varepsilon(w)$. Então,

$$w_\varepsilon \in L^\infty(\Omega), \tag{4.29}$$

e

$$\int_\Omega \zeta(-\Delta w_\varepsilon) \geq \int_\Omega (g(w_\varepsilon) - \varepsilon K)\zeta, \tag{4.30}$$

para todo $\zeta \in C^2(\overline{\Omega})$, $\zeta \geq 0$ em Ω e $\zeta = 0$ sobre $\partial\Omega$. Além disso, existe $0 < \varepsilon_1 \leq \varepsilon_0$ tal que

$$u_0 \leq w_\varepsilon - \frac{c_0}{2}\delta, \tag{4.31}$$

para todo $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$, em que c_0 é como em (4.28). Com efeito, os Lemas 3.4 e 4.2 garantem as afirmações (4.29) e (4.30). A fim de provar a desigualdade (4.31), consideremos

$$\eta = \min\{w, (C_0 + c_0)\delta\} \qquad e \qquad \eta_\varepsilon = \phi_\varepsilon(\eta),$$

em que δ é dada por (4.3) e C_0 é como em (4.27). De (4.27) e (4.28), obtemos

$$u_0 \leq \eta - c_0\delta. \tag{4.32}$$

Afirmamos que

$$\eta \leq \eta_\varepsilon + \frac{c_0}{2}\delta, \tag{4.33}$$

para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno. Ora, de (4.32) e (4.33), segue-se que $u_0 \leq \eta_\varepsilon - \frac{c_0}{2}\delta$. Tal fato assegura (4.31), visto que $\eta_\varepsilon \leq w_\varepsilon$, já que ϕ_ε é crescente. Assim, resta-nos mostrar (4.33). Observemos que $\eta_\varepsilon \leq \eta \leq M$, com $M = (C_0 + c_0)\|\delta\|_{L^\infty}$, e que $\phi'_\varepsilon(x) \to 1$ uniformemente sobre $[0, M]$, se $\varepsilon \downarrow 0$, em virtude do Lema 4.2. Logo,

$$\eta - \eta_\varepsilon \leq \eta \sup_{0 \leq x \leq M}(1 - \phi'_\varepsilon(x)) \leq (C_0 + c_0)\delta \sup_{0 \leq x \leq M}(1 - \phi'_\varepsilon(x)) \leq \frac{c_0}{2}\delta,$$

para ε suficientemente pequeno, donde (4.33) está provado.

Etapa 4. Para concluirmos a demonstração, suponhamos que $T_m < \infty$. Segundo a Etapa 3 e o Lema 4.3, existe $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno de sorte que

$$u_0 \leq w_\varepsilon - \frac{c_0}{2}\delta,$$

e a solução Z da equação

$$\begin{cases} Z_t - \Delta Z &= -\varepsilon \quad \text{em } (0, T_m) \times \Omega, \\ Z &= 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega, \\ Z(0) &= \frac{c_0}{2}\delta \quad \text{em } \Omega, \end{cases}$$

é não-negativa sobre $[0, T_m] \times \overline{\Omega}$, sendo K como no Lema 4.2. Seja v a solução de

$$\begin{cases} v_t - \Delta v &= g(|v|) - \varepsilon K \text{ em } (0, T) \times \Omega, \\ v &= 0, \text{ sobre } \partial\Omega, \\ v(0) &= w_\varepsilon \text{ em } \Omega. \end{cases}$$

Seja $[0, S_m)$ o intervalo máximo de existência de v. Definamos $z(t) = Z(t) + u(t)$, para $0 \leq t < T_m$. Então, $z \geq u \geq 0$ e

$$\begin{cases} z_t - \Delta z &= g(u) - \varepsilon K \leq g(z) - \varepsilon K, \text{ em } (0, T_m) \times \Omega, \\ z &= 0, \text{ em } \partial\Omega, \\ z(0) &= u_0 + \frac{c_0}{2}\delta \leq w_\varepsilon, \text{ em } \Omega. \end{cases}$$

Pelo princípio de comparação, segue-se que $z \leq v$ sobre $[0, \min\{T_m, S_m\})$. Em particular, temos que $v \geq 0$ sobre $[0, \min\{T_m, S_m\})$. Desse modo, considerando (4.30) e o princípio de comparação, garantimos que $v \leq w_\varepsilon$. Como $w_\varepsilon \in L^\infty(\Omega)$, o Teorema 3.1 assegura que $S_m = +\infty$. Logo, $T_m < S_m$ e, portanto, $u \leq z \leq v \leq w_\varepsilon$ sobre $[0, T_m)$, o que, pelo Teorema 3.1, é impossível.

$\square$

A APÊNDICE

A.1 Funções Mensuráveis

Seja I um intervalo aberto de $\mathbb{R}$ e X um espaço de Banach com norma $\| \ \|$. Dizemos que uma função $f : I \to X$ é mensurável se existe um conjunto $N \subset I$ de medida nula e uma seqüência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_c(I, X)$ tal que $\lim_{n\to\infty} f_n(t) = f(t)$, para todo $t \in I - N$.

Observação A.1. (i) Observemos que se $f : I \to X$ é mensurável, então $\|f\| : I \to X$ também o é. Basta considerarmos que $\|\|f_n\| - \|f\|\| \leq \|f_n - f\|$.

(ii) Se $f : I \to X$ é uma função mensurável e se Y é um espaço de Banach com norma $|| \ ||$ tal que $X \subseteq Y$ com injeção contínua, então $f : I \to Y$ é mensurável. Isto é conseqüência imediata de que $||x|| \leq M\|x\|$, para todo $x \in X$, para uma certa constante $M \geq 0$.

(iii) Se $f : I \to X$ e $\varphi : I \to \mathbb{R}$ são funções mensuráveis, então $f\varphi : I \to X$ é mensurável.

A.2 Funções Integráveis

Uma função mensurável $f : I \to X$ é integrável se existe uma seqüência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_c(I, X)$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} \int_I \|f_n(t) - f(t)\|dt = 0$. Observemos que $\|f_n - f\| : I \to \mathbb{R}$ é mensurável, de sorte que $\int_I \|f_n(t) - f(t)\|dt$ faz sentido.

Lema A.1. *Seja $f : I \to X$ uma função integrável. Existe $i(f) \in X$ tal que para alguma seqüência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_c(I, X)$ satisfazendo*

$$\lim_{n\to\infty} \int_I \|f_n(t) - f(t)\|dt = 0, \tag{A.1}$$

tem-se

$$\lim_{n\to\infty} \int_I f_n(t)dt = i(f).$$

Demonstração. Se a seqüência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_c(I, X)$ satisfaz (A.1), então

$$\begin{aligned}\left\|\int_I f_n(t)dt - \int_I f_p(t)dt\right\| &\leq \int_I \|f_n(t) - f_p(t)\|dt \\ &\leq \int_I \|f_n(t) - f(t)\|dt + \int_I \|f(t) - f_p(t)\|dt.\end{aligned}$$

Logo, $\int_I f_n(t)dt$ é um seqüência de Cauchy e, portanto, coverge para algum elemento $x \in X$. Seja $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_c(I, X)$ uma outra seqüência satisfazendo (A.1). Então

$$\begin{aligned}\left\|\int_I g_n(t)dt - x\right\| &\leq \left\|\int_I g_n(t) - f(t)dt\right\| + \left\|\int_I f(t) - f_n(t)dt\right\| + \left\|\int_I f_n(t)dt - x\right\| \\ &\leq \int_I \|g_n(t) - f(t)\|dt + \int_I \|f_n(t) - f(t)\|dt + \left\|\int_I f_n(t)dt - x\right\|.\end{aligned}$$

Portanto, $\int_I g_n(t)dt$ também converge para x, se $n \to \infty$. Logo, podemos estabelecer $i(f) = x$. □

Dizemos que $i(f) \in X$ é a integral de f sobre I e escrevemos

$$i(f) = \int f = \int_I f = \int_I f(t)dt.$$

Teorema A.2 (Teorema de Bochner)**.** *Seja $f : I \to X$ uma função mensurável. Então f é integrável se, e somente se, a função $\|f\| : I \to X$ é integrável. Além disso,*

$$\left\|\int_I f(t)dt\right\| \leq \int_I \|f(t)\|dt,$$

para toda função integrável $f : I \to X$.

Demonstração. Suponhamos que f é integrável e consideremos uma seqüência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_c(I, X)$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \int_I \|f_n(t) - f(t)\|dt = 0.$$

Como

$$\|f\| \leq \|f_n\| + \|f_n - f\|,$$

então $\|f\|$ também é integrável.

Reciprocamente, suponhamos que f é mensurável e que $\|f\|$ é integrável. Seja $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_c(I, \mathbb{R})$ uma seqüência tal que $g_n \to \|f\|$ em $L^1(I)$, q.t.p. e $|g_n| \leq g$, q.t.p., para alguma função $g \in L^1(I)$. Consideremos também uma seqüência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_c(I, X)$ tal que $f_n \to f$, q.t.p. Consideremos, ainda,

$$h_n = \frac{f_n|g_n|}{\|f_n\| + \frac{1}{n}}.$$

Observemos que $h_n \in C_c(I, X)$, $\|h_n\| \leq g$, q.t.p. e $h_n \to f$ em X, q.t.p., quando $n \to \infty$. O Teorema da Convergência Dominada assegura, então, que

$$\lim_{n\to\infty} \int \|h_n(t) - f(t)\|dt = 0.$$

Logo, f é integrável. Também temos que

$$\left\| \int f(t)dt \right\| = \lim_{n\to\infty} \left\| \int h_n(t)dt \right\| \leq \lim_{n\to\infty} \int \|h_n(t)\|dt \leq \int \|f(t)\|dt,$$

onde a última desigualdade é decorrente do Teorema da Convergência Dominada. O teorema está, pois, estabelecido. □

Observação A.3. O Teorema de Bochner permite que lidemos com funções vetoriais integráveis tal como no caso em que as funções são reais, uma vez que podemos em algumas situações aplicar as propriedades usuais das funções reais integráveis a $\|f\|$. Eis alguns resultados que podem ser mostrados nesse sentido.

(i) Se $f : I \to X$ é integrável e $\varphi \in L^\infty(I)$, então $f\varphi : I \to X$ é integrável.

(ii)(O Teorema da Convergência Dominada) Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma seqüência de funções integráveis definidas em I e com valores em X. Seja $f : I \to X$ uma função mensurável e seja $g \in L^1(I)$. Se

$$\begin{cases} \|f_n(t)\| \leq g(t) \text{ para quase todo } t \in I \text{ e todo } n \in \mathbb{N}, \\ \lim_{n\to\infty} f_n(t) = f(t) \text{ para quase todo } t \in I, \end{cases} \tag{A.2}$$

então f é integrável e $\int_I f(t)dt = \lim_{n\to\infty} \int_I f_n(t)dt$.

(iii) Se Y é um espaço de Banach, $A : X \to Y$ é um operador linear contínuo e $f : I \to X$ é integrável, então $Af : I \to Y$ é integrável e

$$\int_I Af(t)dt = A\left(\int_I f(t)dt\right).$$

Em particular, se $X \subseteq Y$ com injeção contínua e se $f : I \to X$ é integrável, então a integral de f no sentido de X coincide com a integral de f no sentido de Y.

REFERÊNCIAS

[1] A. Ambrosetti, H. Brézis and G. Cerami, *Combined effects of concave and convex nonlinearities in some elliptic problems*, J. Funct. Anal., 122, 1994, pp. 519-453.

[2] A. Pazy, "Semi-groups of linear operators and applications to partial differential equations", Applied Math. Sciences #44, Springers, New York,1983.

[3] G. Stampacchia, *Le Problème de Dirichlet pour les Équations Elliptiques du Second Ordre à Coefficients Discontus*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble,15, 1 (1965),189-258.

[4] H.B. Keller and D.S. Cohen, *Some positone problems suggested by nonlinear heat generation*, J. Math. Mech., 16 (1967), 1361-1376.

[5] H.B. Keller and J. Keener, *Positive solutions of convex nonlinear eigenvalue problems*, J. Differ. Eq., 16 (1974), 103-125.

[6] H. Brézis, "Análisis Funcional", teoría y aplicaciones, Alianza, Madrid, 1984.

[7] H.Brézis, T. Cazenave, "Nonlinear evolution equations", 1994.

[8] H. Brézis, T. Cazenave, Y. Martel and A. Ramiandrisoa, *Blow up for* $u_t - \Delta u = g(u)$ revisited, Advence to Differential Equations, Vol.1, 1996, pp. 73-90.

[9] H. Fujita, *On the nonlinear equations* $\Delta u + e^u = 0$ *e* $\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + e^u$, Bull. Amer. Math. Soc., 75, 1969, pp. 132-135.

[10] J. Bebernes, D. Eberly, "Mathematical Problems from Combustion Theory", Applied Math. Sciences, Springers, New York, 1989.

[11] L.C. Evans, "Partial Differential Equation", American Mathematical Society, 1998.

[12] M.G. Crandall and P.H. Rabinowitz, *Some continuation and variational methods for positive solutions of nonlinear elliptic eigenvalue ploblems*, Arch. Rational Mech. Anal., 58 (1975), 207-218.

[13] R. Bellman, "Mathematical methods in medicine", World Scientific, Singapore, 1983.

[14] R.A. Adams, "Sobolev Spaces", Academic press, New York, 1975.

[15] S. Childress, J. K. Percus, "Mathematical Models in Developmental Biology", Courant Inst. of Math. Sciences, New York University, 1977-1978.

[16] T. Cazenave, F. Dickstein and M. Escobedo, *A semilinear heat equation with concave-convex nonlinearity*, Rend. Mat. Appl. *(7)*,19, 1999, pp.211-242.

[17] T. Cazenave, M. Escobedo and M. Assunta Pozio, *Some stability properties for minimal solutions of* $\Delta u = \lambda g(u)$, Port. Math., Vol.59, Fasc. 4, 2002.

[18] W. Rudin, "Real and Complex Analysis", McGraw-Hill Book Company, New York, 1966.

[19] Y. Martel, *Complete blow up and global behavior of solutions of* $u_t - \Delta u = g(u)$, Ann. Inst. Henri Poincaré, Vol. 15, n. 6, 1998, pp. 687-723.