UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Auto-similaridade e unicidade para um sistema semilinear, e existência de solução com dado singular para a equação da onda semilinear

ÉDER MATEUS DE SOUZA

Sob orientação do professor Lucas C. F. Ferreira

Recife, 2008.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Auto-similaridade e unicidade para um sistema semilinear, e existência de solução com dado singular para a equação da onda semilinear

Tese apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Matemática.

ÉDER MATEUS DE SOUZA

Sob orientação do professor Lucas C. F. Ferreira

Recife, 2008.

Souza, Éder Mateus de
Auto-similaridade e unicidade para um sistema semilinear, e existência de solução com dado singular para a equação da onda semilinear / Éder Mateus de Souza. – Recife: O Autor, 2008.
108 folhas

Tese (doutorado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN. Matemática, 2008.

Inclui bibliografia.

1. Equações diferenciais parciais não lineares. I. Título.

515.355 CDD (22.ed.) MEI2008-106

Tese submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Grau de Doutorado em Matemática.

Aprovado: ______________________________

Lucas Catão de Freitas Ferreira , UFPE
Orientador

____

Fernando Antônio Figueiredo Cardoso da Silva, UFPE

____

Cláudio Rodrigo Cuevas Henriquez, UFPE

____

Marcelo Fernandes Furtado, UnB

____

Elder Jesús Villamizar Roa, *UIS-Colômbia*

AUTO-SIMILARIDADE E UNICIDADE PARA UM SISTEMA SEMILINEAR, E EXISTÊNCIA DE SOLUÇÃO COM DADO SINGULAR PARA EQUAÇÃO DA ONDA SEMILINEAR

Por
Éder Mateus de Souza

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Cidade Universitária – Tels. (081) 2126.8415– Fax: (081) 2126.8410
RECIFE – BRASIL
Outubro – 2008

Sumário

RESUMO

Obtivemos a boa-colocação global de soluções pequenas em espaços de Marcinkiewicz $L^{(p_1,\infty)} \times L^{(p_2,\infty)}$ para um sistema semilinear. Soluções brandas são obtidas em espaços com índices certos para permitir a existência de solução auto-similar. Usando nossas estimativas dos termos de acoplamento não lineares, provamos a unicidade de soluções na classe $C([0,\infty);L^{p_1}(\mathbb{R}^n) \times L^{p_2}(\mathbb{R}^n))$, sem qualquer hipótese de pequenez. Provamos algumas estimativas de decaimento e analisamos o comportamento assintótico das soluções. Estudamos também o problema de Cauchy para a equação da onda semilinear, com dados singulares em espaços de Marcinkiewicz, provando um resultado de boa-colocação local e decaimento próximo de $t = 0$.

Palavras-Chaves - Sistema semilinear do calor. Equação semilinear da onda. Existência e unicidade. Comportamento assintótico. Espaços de Lorentz

ABSTRACT

We obtain well-posedeness of small global solutions in Marcinkiewicz spaces $L^{(p_1,\infty)} \times L^{(p_2,\infty)}$ for semilinear systems. Mild solutions are obtained in this space with the right index to allow the existence of self-similar solutions. Using our estimates of the nonlinear coupling term, we prove the uniqueness of solutions in the class $C([0,\infty);L^{p_1}(\mathbb{R}^n) \times L^{p_2}(\mathbb{R}^n))$, without any smallness assumptions. We obtain some decay estimates and analyze the asymptotic behavior of the solutions. We also study the Cauchy problem for semilinear wave equations with singular initial date in Marcinkiewicz spaces , proving local well-posedeness results and a decay estimate next $t = 0$.

Keywords - Semilinear system heat equation. Semilinear wave equation. Existence and uniqueness. Asymptotic behavior. Lorentz spaces

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por ter me dado força, serenidade e sabedoria. Agradeço a meu pai João Mateus (Joca), minha mãe Zilda (Nazira) por terem confiado em mim todo instante e terem sempre me apoiado em toda minha trajetória. Não posso esquecer de minhas Avós Vadomira (Dedé) e Laura (Vozinha) pelas orações, conselhos e apoio em todos os momentos e a meu avô Renato (Pai). Deixo registrado meus agradecimentos a meus irmãos Edianne e Mateus pela amizade e torcida pela minha conquista. Enfim agradeço a todos meus familiares que sempre torceram e acreditaram em mim. Não posso esquecer de minha Amanda esposa Marta (Zuga) que me aturou bastante, me deu conselhos e que também sempre me incentivou em todos os momentos: TE amo Zugona.

Agradeço ao professor Lucas por sua orientação, dedicação, disponibilidade, amizade, paciência e também por ter me convidado a ser seu orientando sem mesmo ter sido meu professor. Agradeço a todos os professores do Dmat que contribuíram direta ou indiretamente para minha formação.

A todos meus colegas de mestrado e doutorado que sempre me apoiaram e sempre me ajudavam a relaxar um pouco: Viva as festinhas e o Alemão.

Ao Cnpq pelo apoio financeiro.

Introdução

Nesta tese, estamos interessados em estudar dois problemas de Cauchy associados com equações não lineares. O primeiro trata-se do problema de Cauchy associado com o seguinte sistema semilinear :

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = g_1(u,v), & x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0 \\ v_t - \Delta v = g_2(u,v), & x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0 \\ u(0) = u_0,\ \ v(0) = v_0 & x \in \mathbb{R}^n \\ \end{cases}, \tag{1}$$

onde $n \in \mathbb{N}$ e as funções $g_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $i = 1,2$, são dadas por

$$g_1(u,v) = |u|^{(\rho_1-1)}u|v|^{(\rho_2-1)}v \text{ e } g_2(u,v) = |u|^{(r_1-1)}u|v|^{(r_2-1)}v,$$

com $1 < \rho_i, r_i < \infty$, $i = 1,2$.

O sistema (1) é um exemplo de sistema de reação-difusão (neste caso reação), os quais aparecem naturalmente como modelos no mundo real. Por exemplo, eles podem modelar a transferência de calor entre duas substâncias interagindo entre si, e também reações químicas, onde u e v representam a concentração de duas substâncias distintas. Para mais detalhes, recomendamos a referência [14] e sua bibliografia.

Para o sistema (1), nosso objetivo é demonstrar resultados de boa-colocação global de pequenas soluções, auto-similaridade, decaimento e comportamento assintótico nos espaços de Marcinkiewicz $L^{(p,\infty)}(\mathbb{R}^n)$. Além dos resultados de boa-colocação terem um valor em si mesmo, as principais motivações para estudar o problema de Cauchy (1) em $L^{(p,\infty)}$ são duas:

A primeira é que esse espaço contém funções homogêneas de grau $-n/p$ (ver Capítulo 1, página 16), e assim, escolhendo os índices compatíveis com a homogeneidade característica do sistema (ver (2.4)), podemos mostrar a existência de soluções auto-similares (Ver Teorema 2.3). A segunda é que, em espaços de Marcinkiewicz, as estimativas do termo não linear da equação integral associada (2.6) funcionam melhor que nos espaços de Lebesgue L^p, no sentido que não precisamos de normas auxiliares regularizantes para obter as estimativas necessárias. De posse dessas estimativas, observando que $L^p \subset L^{(p,\infty)}$ e com um argumento que controla a perturbação em relação a parte linear, conseguimos um resultado "perfeito"de unicidade de soluções para o sistema (1) na classe $C([0,\infty);L^{p_1} \times L^{p_2})$(ver Teorema 2.2), onde os índices p_1, p_2 tornam a norma da classe, invariante pela relação de escala característica de (1) (ver (2.72)). Deixe-nos observar que neste teorema de unicidade não é assumida qualquer condição de pequenez sobre as soluções.

O sistema (1) generaliza a equação do calor semilinear, a qual tem sido estudada por vários autores. A título de exemplo, citamos [19, 23, 48, 49]. Agora, deixe-nos falar sobre alguns resultados relacionados com o problema (1). Nas referências [6, 15, 16, 40], os autores estudaram existência ou unicidade em espaços de Lebesgue L^p, assumindo certas condições sobre o domínio, de positividade e restrições nos índices dos espaços que não cobrem os relevantes casos em que a norma é invariante pela relação de escala de (1). Por outro lado, em [45], o autor mostra a existência e o comportamento assintótico de soluções auto-similares pequenas, no contexto de espaços de Besov. Mais precisamente, assumindo que a condição inicial $(u_0, v_0) \in \dot{B}_{p_1}^{-(1-n/p_1),\infty} \times \dot{B}_{p_2}^{-(1-n/p_2),\infty}$, ele obtém um par solução (u,v) na classe

$$\max\{\sup_{t>0} t^{\frac{\alpha_1}{2}} \|u(t,\cdot)\|_{L^{q_1}}, \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha_2}{2}} \|v(t,\cdot)\|_{L^{q_2}}\}, \tag{2}$$

onde $\alpha_i = n(1/p_i - 1/q_i) > 0$, $p_i = n/k_i$, e k_i são os parâmetros de homogeneidade do sistema (ver Definição 2.1). Fazendo uma comparação, primeiro observamos que os resultados que obtivemos nos espaços de Marcinkiewicz, além de tratar com dados homogêneos e mostrar a existência de soluções auto-similares, permitem estimativas dos termos de acoplamento $g_i(u,v)$ sem o uso de normas auxiliares que impõem uma regularização a priori do tipo (2)(ver Lema 2.2). Esse ponto é fundamental para obter a unicidade na classe $C([0,\infty);L^{p_1} \times L^{p_2})$ sem qualquer restrição de tamanho das soluções ou sobre o dado inicial (ver Teorema 2.2). Segundo, as soluções são encontradas na mesma classe do dado inicial, obtendo assim, a persistência e uma órbita no produto de espaços de Marcinkiewicz $L^{(p_1,\infty)} \times L^{(p_2,\infty)}$.

Além disso, obtemos resultados de comportamento assintótico (ver Teorema 2.8), os quais mostram a existência de uma bacia atratora para a solução auto-similar (ver Observação 2.7).

No contexto dos espaços de Lebesgue, mostramos uma perfeita simplificação assintótica, no sentido que a órbita no espaço de Lebesgue produto $L^{p_1} \times L^{p_2}$ converge para zero (ver Teorema 2.7). Desde que os espaços de Lebesgue L^p não contêm funções homogêneas, a única solução auto-similar, no sentido da Definição 2.6, é a solução nula (ver Observação 2.5). Note que esse fato produz uma conexão entre os resultados de comportamento assintótico em espaços de Marcinkiewicz e de Lebesgue.

O segundo problema que estamos interessados é o seguinte problema de Cauchy para a equação da onda não linear:

$$\partial_{tt}u - \Delta u = |u|^{\rho}u, \quad x \in \mathbb{R}^n,\ t \in \mathbb{R}, \tag{3}$$

$$u(0,x) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

$$u_t(0,x) = g(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{4}$$

onde $u = u(t,x)$ é uma função real, $0 < \rho < \infty$ e $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ são as condições iniciais.

Em equações diferenciais parciais, uma questão natural, e importante, é saber se a equação admite solução com o dado inicial sob condições singulares. Em geral, o problema (3)-(4) é mais difícil que as correspondentes versões parabólicas. Essencialmente, o motivo está conectado com o fato de a solução fundamental da equação linear do calor (ou núcleo do calor) ser mais regular e ter mais propriedades de decaimento que a solução fundamental da equação linear da onda (ou núcleo da onda). Geralmente, essa diferença limita a existência e as propriedades das soluções do caso hiperbólico em relação ao parabólico.

Motivados por isso, um dos objetivos desta tese também será estudar a boa-colocação local do problema (3)-(4) em espaços de Marcinkiewicz. Nossos resultados serão para ondas planares, ou seja, o caso $n = 2$. Como já observado acima, o espaço $L^{(p,\infty)}(\mathbb{R}^n)$ contém funções singulares do tipo homogêneas de grau $-n/p$, isto é, funções $f(x) = \frac{h(x)}{|x|^{n/p}}$, onde $h(x)$ é homogênea de grau 0. Por outro lado, é digno de se destacar que esse espaço contém funções que não possuem qualquer regularidade do tipo Sobolev, e em particular, são funções de energia infinita.

Nas últimas décadas, esse problema tem atraído a atenção de vários autores. Por exemplo, em [7, 24, 30, 35, 36, 37, 38, 39, 42, 43] encontramos importantes resultados de auto-similaridade e de existência soluções com dados iniciais em espaços singulares. Devido a baixa regularidade do núcleo da onda, os resultados de existência encontrados nestas referências impõem restrições como: paridade da dimensão de $\mathbb{R}^n$ e limitações no parâmetro ρ de acordo com a dimensão. Mais precisamente, em [38, 39], o autor estuda o problema com condição inicial em certos espaços de Besov com uma regularidade tipo Sobolev local e, respectivamente assumindo as seguintes restrições em ρ e n : 1) $n \geq 2$ e $\rho > \frac{n+3}{n-1}$, e 2) $\rho > 2$ se $n = 3$ e $\rho > 4$ se $n = 2$. Assumindo $n = 3$, em [35, 36], foi provado a existência de solução quando $\rho > (1+\sqrt{13})/3$ e $\sqrt{2} < \rho < 3$, respectivamente. Em [42, 43], os resultados de [35] foram estendidos para outras dimensões, assumindo algumas restrições no intervalo admissível para ρ. Por exemplo, no caso de ondas planares $n = 2$, $\rho > (\rho_0 - 1)$, onde $\rho_0 = \rho_0(n) = \rho_0(2) = (4+2\sqrt{3})/3$ é a maior raiz da equação

$$(n^2-n)\rho^2 - (n^2+3n-2)\rho + 2 = 0$$
$$(2^2-2)\rho^2 - (2^2+3\cdot 2-2)\rho + 2 = 0.$$

Por outro lado, em ([30]), usando estimativas do tipo Strichartz com peso em espaços de Marcinkiewicz, os autores estenderam os resultados de [36] de $n = 3$ para qualquer dimensão ímpar. Para completar essa revisão bibliográfica, em [24], demonstra-se a existência de pequenas soluções globais no caso $n = 2$ com a restrição $(1+\sqrt{17})/2 < \rho < 4$.

Fazendo uma comparação com a bibliografia comentada acima, nosso resultado não exige qualquer restrição do dado inicial e no tamanho da solução, e principalmente, qualquer restrição no intervalo admissível para ρ. De fato, apenas assumiremos que $0 < \rho < \infty$. Outro ponto que é digno de se observar, é a simplicidade da nossa abordagem. Provamos as estimativas para o operador da onda, sem usar complexas estimativas do tipo Strichartz, e sim, usando uma abordagem mais direta, via convolução e a desigualdade de Young. Para isso, usando uma expressão explícita e conhecida para a solução fundamental da onda em $\mathbb{R}^n$, foi necessário calcular em que espaços $L^{(p,\infty)}$ jaz esta solução no instante $t = 1$ (ver Proposição 3.1). Neste ponto, para termos $p > 1$ e $L^{(p,\infty)}$ ser Banach, aparece a restrição do nosso método para ondas planares. A desvantagem do nosso resultado, é que obtemos soluções locais no tempo, $0 < T < \infty$, e temos que trabalhar fora de um espaço invariante pela relação de escala de (3). Para finalizar, sob certas condições, fizemos também uma análise do comportamento da solução próximo do instante $t = 0$, o qual é um resultado simples e que pode ser estendido para outras equações.

Esta tese está organizada da seguinte maneira: No primeiro capítulo apresentamos preliminares essenciais sobre os espaços de Lorentz $L^{(p,q)}$ e suas propriedades como densidade, reflexividade, desigualdade de Young e Hölder, aproximação da identidade e etc. Finalizamos o capítulo com algumas conhecidas estimativas e propriedades do semigrupo associado com a equação linear do calor. No segundo capítulo apresentamos os resultados de boa colocação global em espaços $L^{(p_1,\infty)} \times L^{(p_2,\infty)}$ e o resultado de unicidade na classe invariante $C([0,\infty); L^{p_1} \times L^{p_2})$, para o sistema (1). Em seguida, usando o teorema de existência e a análise da relação de escala, provamos também a existência de solução auto-similar. Depois estudamos a boa-colocação local, e global de pequenas soluções, em espaços de Lebesgue. Logo após demonstrar algumas estimativas de decaimento, provamos a convergência das soluções para zero nos espaços de Lebesgue $L^{p_1} \times L^{p_2}$. Para finalizar, mostramos o teorema de comportamento assintótico e a existência da bacia atratora para a solução auto-similar do sistema (1) obtida. No terceiro capítulo estudamos o problema de Cauchy (3)-(4), onde mostramos o nosso teorema de boa-colocação local e analisamos o comportamento das soluções quando $t \to 0$.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo definiremos espaços de funções relevantes para estudar o problema de Cauchy associado aos problemas do sistema semilinear do calor e da equação semilinear da onda, espaços de Lorentz, introduzidos por G.G. Lorentz (ver [32]), e denotados por $L^{(p,q)}$. Indicaremos algumas propriedades importantes nestes espaços como completude e as desigualdades de Young e Hölder . Estas desigualdades são de suma importância para estudar propriedades dos termos não lineares das equações integrais de cada problema estudado, o que será fundamental para mostrarmos a existência de soluções de cada problema.

1.1 Espaços de Lorentz $L^{(p,q)}$

Seja $(\mathfrak{X},\mathfrak{M},\mu)$ um espaço de medida $\sigma-$finita. No decorrer desta tese $\mathfrak{X} = \mathbb{R}^n$, $\mathfrak{M}$ é a σ-álgebra dos conjuntos mensuráveis a Lebesgue e μ é e medida de Lebesgue. Denotaremos também, ao longo da tese, p' como o expoente conjugado de p, ou seja, $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$ com $1 \leq p \leq \infty$. Ao longo desta tese, a constante C pode variar na mesma linha ou de uma linha para outra.

Para definirmos os Espaços $L^{(p,q)}$, começaremos definindo duas funções relacionadas a uma função mensurável $f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$.

Definição 1.1 *Dada uma função mensurável $f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, definimos a função distribuição associada a f como a função $\mu_f:[0,\infty) \to [0,\infty]$ definida por*

$$\mu_f(s) = \mu(\{x \in \mathbb{R}^n \; ; \; |f(x)| > s\}).$$

Definição 1.2 *Dada uma função mensurável $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, a função rearranjo de f é definida como $f^* : [0\,,\infty) \to [0\,,\infty]$, dada por*

$$f^*(t) = \inf\{s \geq 0\,;\, \mu_f(s) \leq t\}. \tag{1.1}$$

As próximas proposições fornecem algumas propriedades básicas de μ_f e f^*, que podem ser encontradas em [25, 47].

Proposição 1.1 *Se $f, g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ são funções mensuráveis, então*

(i) μ_f *e* f^* *são não-crescentes e contínuas à direita;*

(ii) *Se* $|f(x)| \leq |g(x)|$ *q.t.p em* $\mathbb{R}^n$*, então* $\mu_f(s) \leq \mu_g(s)$*,* $\forall\, s \geq 0$*;*

(iii) $\mu_{f+g}(s_1+s_2) \leq \mu_f(s_1) + \mu_g(s_2)$*,* $\forall\, s_1, s_2 \geq 0$*;*

(iv) f *e* f^* *tem a mesma função distribuição;*

(v) $f^*(\mu_f(s)) \geq s$ *e* $\mu_f(f^*(t)) \leq t$*;*

(vi) $(f+g)^*(t_1+t_2) \leq f^*(t_1) + g^*(t_2)$*.*

Demonstração. Para provar (i), observe que $0 \leq s_1 < s_2$ implica

$$\{x \in \mathbb{R}^n;\ |f(x)| > s_2\} \subset \{x \in \mathbb{R}^n;\ |f(x)| > s_1\}.$$

Assim, pela monotonicidade de medida, temos

$$\mu_f(s_2) \leq \mu_f(s_1).$$

Para provar que μ_f é contínua à direita, considere

$$A_f(s) = \{x \in \mathbb{R}^n;\ |f(x)| > s\},$$

e $s_0 \geq 0$. Note que os conjuntos $A_f(s)$ são crescentes quando s decresce, e

$$A_f(s_0) = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_f(s_0 + \frac{1}{n}).$$

Logo, pela continuidade por baixo de medidas, temos

$$\lim_{n\to\infty} \mu_f(s_0 + \frac{1}{n}) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_f(s_0 + \frac{1}{n})) = \mu(A_f(s_0)) = \mu_f(s_0),$$

ou seja, μ_f é contínua à direita.

Como $|f(x)| \leq |g(x)|$ q.t.p em $\mathbb{R}^n$, então

$$A_f(s) = \{x \in \mathbb{R}^n \, ; \, |f(x)| > s\} \subset \{x \in \mathbb{R}^n \, ; \, |g(x)| > s\} = A_g(s).$$

Portanto $\mu(A_f(s)) \leq \mu(A_g(s))$, isto é, $\mu_f(s) \leq \mu_g(s)$, provando (ii).

Para provar (iii), basta observar que

$$\{x \in \mathbb{R}^n \, ; \, |f(x) + g(x)| > s_1 + s_2\} \subset \{x \in \mathbb{R}^n \, ; \, |f(x)| > s_1\} \cup \{x \in \mathbb{R}^n \, ; \, |g(x)| > s_2\}$$

e aplicar a monotonicidade de medidas.

No intuito de mostrar (iv), note primeiro que da definição de f^* segue que, $f^*(t) > s$ se e somente se $t < \mu_f(s)$. Então $E_s^* = \{t > 0 : f^*(t) > s\}$ é precisamente o intervalo $(0, \mu_f(s))$. A Propriedade (iv) segue do fato que o valor da função distribuição de f^* é justamente a medida de Lebesgue de E_s^*.

A Propriedade (v) segue da continuidade à direita de μ_f. De fato, pela continuidade a direita de μ_f, existe uma sequência (s_n) com $s_{n+1} \leq s_n$, tal que, $s_n \to f^*$ e $\mu_f(s_n) \leq t$. Logo, $\mu_f(f^*(t)) = \lim_{n\to\infty} \mu_f(s_n) \leq t$. Para ver que $f^*(\mu_f(s)) \geq s$, observemos que

$$f^*(\mu_f(s)) = \inf\{z > 0 \, ; \, \mu_f(z) \leq \mu_f(s)\} \geq \inf\{z \, ; \, s < z\} = s,$$

pois μ_f é não-crescente. ■

Observação 1.1 *Do item (v) da Proposição 1.1 , assumindo que μ_f é decrescente, concluímos que f^* é a função inversa de μ_f.*

Proposição 1.2 *A equação $f^*(t) = \mu_{\mu_f}(t)$, para todo $t > 0$, é verdadeira.*

Demonstração. Desde que μ_f é não-crescente, Proposição 1.1 item (i), temos

$$\sup\{s \, : \, \mu_f(s) > t\} = \mu\left(\{s \, : \, \mu_f(s) > t\}\right).$$

Assim, pela definição de μ_f,

$$\mu_{\mu_f}(t) = \mu\left(\{s \, : \, \mu_f(s) > t\}\right) = \sup\{s \, : \, \mu_f(s) > t\} = \inf\{s \geq 0 \, ; \, \mu_f(s) \leq t\}.$$

■

Observação 1.2 *A Proposição 1.2 nos mostra, de uma maneira mais clara, como o rearranjo de f herda algumas propriedades da função distribuição de f, como por exemplo não crescimento e continuidade à direita mostradas na Proposição 1.1.*

Do fato que f^* e f tem a mesma função distribuição, segue que, se $f \in L^p$, $1 \leq p < \infty$, então

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_0^\infty f^*(t)^p dt\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_0^\infty [t^{\frac{1}{p}} f^*(t)]^p \frac{dt}{t})\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Isto sugere a introdução de uma família mais geral de espaços, nos quais os espaços L^p estejam contidos. Estes espaços são chamados espaços de Lorentz cuja definição vem a seguir.

Definição 1.3 *(Espaços de Lorentz) Sejam $0 < p \leqslant \infty$, $0 < q \leqslant \infty$. O espaço de Lorentz, $L^{(p,q)}$, é o conjunto de todas funções mensuráveis $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, tais que $\|f\|^*_{(p,\,q)} < \infty$, onde*

$$\|f\|^*_{(p,\,q)} = \begin{cases} \left[\int_0^\infty (t^{\frac{1}{p}} f^*(t))^q \, \frac{dt}{t}\right]^{\frac{1}{q}}, & se\ 0 < p < \infty,\ 0 < q < \infty, \\ \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^*(t) = \sup_{s>0}\{s\mu_f^{\frac{1}{p}}(s)\}, & se\ 0 < p \leqslant \infty,\ q = \infty \end{cases}$$

Observação 1.3 *Quando $p = \infty$ e $0 < q < 1$ o espaço de Lorentz $L^{(p,q)} = \{0\}$, ou seja, $L^{(p,q)}$ é trivial (ver [25]). Os espaços L^p são casos particulares dos espaços$L^{(p,q)}$, pois*

$$\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_0^\infty f^*(t)^p dt\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_0^\infty [t^{\frac{1}{p}} f^*(t)]^p \frac{dt}{t})\right)^{\frac{1}{p}} = \|f\|_{(p,p)}.$$

Mais precisamente, $L^p = L^{(p,p)}$

Os espaços $L^{(p,\infty)}(q = \infty)$ são chamados espaços de Marcinkiewicz. Uma classe de funções importantes que pertencem a $L^{(p,\infty)}(\mathbb{R}^n)$ são as funções homogêneas de grau $\frac{-n}{p}$. Com efeito, considere $f(x) = |x|^{-\frac{n}{p}} g(x)$, onde $g(x)$ é homogênea de grau zero. Sem perda de generalidade, suponha que $g(x) = 1$. Assim, $f(x) = |x|^{-\frac{n}{p}}$ e

$$\mu_f(s) = \mu(\{x \in \mathbb{R}^n : |x|^{-\frac{n}{p}} > s\}) = \mu(\{x \in \mathbb{R}^n : s^{-\frac{p}{n}} > |x|\}) = C_n s^{-p}.$$

Com isso,

$$\begin{aligned} f^*(t) &= \inf\{s > 0 : \mu_f(s) \leq t\} = \inf\{s > 0 : C_n s^{-p} \leq t\} \\ &= \inf\{s > 0 : C_n^{\frac{1}{p}} t^{-\frac{1}{p}} \leq s\} = C_n^{\frac{1}{p}} t^{-\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\|f^*\|_{(p,\infty)} = \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^*(t) = \sup_{t>0}\left(t^{\frac{1}{p}} C_n^{\frac{1}{p}} t^{-\frac{1}{p}}\right) = C_n^{\frac{1}{p}}.$$

Outra característica interessante dos espaços de Lorentz, é que eles possuem a mesma relação de escala dos espaços L^p. Mais precisamente, dado $\lambda > 0$ e uma função mensurável $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, deixe-nos denotar $f_\lambda(x) = f(\lambda x)$. Temos que,

$$\|f_\lambda(x)\|^*_{(p,\,q)} = \lambda^{-\frac{n}{p}} \|f(x)\|^*_{(p,\,q)}, \tag{1.2}$$

onde $1 \leq p,\ q < \infty$. Com efeito, uma vez que μ é a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^n$, então

$$\begin{aligned} \mu_{f_\lambda}(s) &= \mu(\{x \,:\, |f(\lambda x)| > s\}) \\ &= \lambda^{-n}\mu(\{x \,:\, |f(x)| > s\}) \\ &= \lambda^{-n}\mu_f(s). \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} (f_\lambda)^*(t) &= \inf\{s\,;\, \mu_{f_\lambda}(s) \leq t\} \\ &= \inf\{s \geq 0\,;\, \mu_f(s) \leq \lambda^n t\} \\ &= f^*(\lambda^n t). \end{aligned}$$

Inicialmente analisaremos o caso $0 < q < \infty$. Neste caso,

$$\begin{aligned} \|f_\lambda(x)\|^*_{(p,\,q)} &= \left(\int_0^\infty \left[t^{\frac{1}{p}}(f_\lambda)^*(t)\right]^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\int_0^\infty \left[t^{\frac{1}{p}} f^*(\lambda^n t)\right]^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \lambda^{-\frac{n}{p}} \left(\int_0^\infty \left[(\lambda^n t)^{\frac{1}{p}} f^*(\lambda^n t)\right]^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} = \lambda^{-\frac{n}{p}} \|f(x)\|^*_{(p,\,q)}. \end{aligned}$$

No caso em que $q = \infty$ temos

$$\begin{aligned} \|f_\lambda(x)\|^*_{(p,\infty)} &= \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}}(f_\lambda)^*(t) = \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}}(f_\lambda)^*(\lambda^n t) \\ &= \lambda^{-\frac{n}{p}} \sup_{t>0} (\lambda^n t)^{\frac{1}{p}}(f_\lambda)^*(\lambda^n t) = \lambda^{-\frac{n}{p}} \|f(x)\|^*_{(p,\infty)}. \end{aligned}$$

O espaço de Lorentz $L^{(p,q)}$ é um espaço vetorial topológico com a topologia gerada pela grandeza $\|\cdot\|^*_{(p,q)}$. Mas $\|\cdot\|^*_{(p,q)}$ não é uma norma, uma vez que não satisfaz a desigualdade triangular. Contudo, podemos metrizá-lo com auxílio da função $f^{**} = f^{**}(t)$ definida por

$$f^{**}(t) = \frac{1}{t}\int_0^t f^*(s)ds \text{ para } t > 0. \tag{1.3}$$

Em [44] encontramos uma definição equivalente a (1.3) para f^{**} como segue:

$$f^{**}(t) = \frac{1}{t}\sup\left\{\int_E |f|d\mu : \mu(E) = t\right\}. \tag{1.4}$$

Note que de (1.4), obtemos a propriedade de subaditividade para f^{**}:

$$(f+g)^{**}(t) \leq f^{**}(t)+g^{**}(t). \tag{1.5}$$

De fato,

$$\begin{aligned}
(f+g)^{**}(t) &= \frac{1}{t}\sup\left\{\int_E |f+g|d\mu : \mu(E)=t\right\} \leq \frac{1}{t}\sup\left\{\int_E |f|+|g|d\mu : \mu(E)=t\right\} \\
&\leq \frac{1}{t}\sup\left\{\int_E |f|d\mu : \mu(E)=t\right\} + \frac{1}{t}\sup\left\{\int_E |g|d\mu : \mu(E)=t\right\} = f^{**}(t)+g^{**}(t).
\end{aligned}$$

Agora, considere a quantidade $\|\cdot\|_{(p,q)}$ definida sobre $L^{(p,q)}$ da seguinte forma:

$$\|f\|_{(p,\,q)} = \begin{cases} \left[\int_0^\infty (t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t))^q \, \frac{dt}{t}\right]^{\frac{1}{q}}, & \text{se } 1<p<\infty, 1<q<\infty, \\ \sup_{t>0}\, t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t), & \text{se } 1<p\leqslant\infty, q=\infty. \end{cases}$$

Mais adiante mostraremos que $\|\cdot\|_{(p,q)}$ é uma norma e que a topologia gerada por $\|\cdot\|_{(p,q)}$ é equivalente àquela gerada por $\|\cdot\|^*_{(p,q)}$. Para isso precisamos de um resultado devido a Hardy:

Lema 1.1 *(Desigualdade de Hardy) Se $1\leq q<\infty$, $r>0$ e f é uma função mensurável em $(0,\,\infty)$, então*

$$\left(\int_0^\infty \left(\int_0^t f(u)du\right)^q t^{-r-1}dt\right)^{\frac{1}{q}} \leq \frac{q}{r}\left(\int_0^\infty (tf(t))^q t^{-r-1}dt\right)^{\frac{1}{q}} \tag{1.6}$$

$$\left(\int_0^\infty \left(\int_t^\infty f(u)du\right)^q t^{r-1}dt\right)^{\frac{1}{q}} \leq \frac{q}{r}\left(\int_0^\infty (tf(t))^q t^{r-1}dt\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{1.7}$$

Demonstração. A demonstração deste resultado pode ser encontrada em [53, pg.35]. Como a função $\varphi(x)=x^q$ é convexa em $(0,\infty)$, então

$$\begin{aligned}
&\varphi\left(\int_0^t f(u)du\right) = \left(\int_0^t f(u)du\right)^q = \\
&= \left(\int_0^t f(u)u^{1-\frac{r}{q}}u^{\frac{r}{q}-1}du\right)^q \left(\int_0^t u^{\frac{r}{q}-1}du\right)^q \left(\int_0^t u^{\frac{r}{q}-1}du\right)^{-q} \\
&\leq \left(\int_0^t \varphi(f(u)u^{1-\frac{r}{q}})u^{\frac{r}{q}-1}du\right)\left(\int_0^t u^{\frac{r}{q}-1}du\right)^{q-1} \\
&= \left(\frac{q}{r}\right)^{q-1} t^{r-\frac{r}{q}}\int_0^t f(u)^q u^{q-r+\frac{r}{q}-1}du.
\end{aligned}$$

Integrando de sobre $[0,\infty)$ e usando o Teorema de Fubini, temos

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \left(\int_0^t f(u)du\right)^q t^{-r-1}dt &\leq \left(\frac{q}{r}\right)^{q-1}\int_0^\infty t^{-\frac{r}{q}-1}\left(\int_0^t f(u)^q u^{q-r+\frac{r}{q}-1}du\right)dt \\
&= \left(\frac{q}{r}\right)^{q-1}\int_0^\infty f(u)^q u^{q-r+\frac{r}{q}-1}\left(\int_u^\infty t^{-\frac{r}{q}-1}dt\right)du \\
&= \left(\frac{q}{r}\right)^q \int_0^\infty (uf(u))^q u^{-r-1}du.
\end{aligned}$$

Portanto obtemos (1.6). De maneira análoga obtemos (1.7). ∎

A próxima proposição estuda a equivalência entre as quantidades $\|\cdot\|^*_{(p,q)}$ e $\|\cdot\|_{(p,q)}$.

Proposição 1.3 *Sejam $f \in L^{(p,\,q)}$, $1 < p \leq \infty$ e $1 \leq q \leq \infty$. Então*

$$\|f\|^*_{(p,\,q)} \leq \|f\|_{(p,\,q)} \leq \frac{p}{p-1}\|f\|^*_{(p,\,q)}. \tag{1.8}$$

Demonstração. Como f^* é não-crescente, temos que $f^*(t) \leq f^*(s)$ sempre que $0 \leq s \leq t$. Portanto $f^*(t) \leq f^{**}(t)$. E assim, a primeira desigualdade da proposição é imediata. Para provar a segunda desigualdade, inicialmente considere $1 < p < \infty$ e $1 \leq q < \infty$. Assim, pela desigualdade de Hardy com $r = q(1-1/p)$, estimamos $\|f\|_{(p,\,q)}$ obtendo

$$\begin{aligned}
\|f\|_{(p,\,q)} &= \left(\int_0^\infty [t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t)]^q dt/t\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(\int_0^\infty \left(\int_0^t f^*(s)ds\right)^q t^{-q(1-\frac{1}{p})-1} dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(\int_0^\infty \left(\int_0^\infty f^*(s)ds\right)^q t^{-r-1} dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \frac{q}{r}\left(\int_0^\infty (tf^*(t))^q t^{-r-1} dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \frac{p}{p-1}\|f\|^*_{(p,\,q)}.
\end{aligned}$$

No caso $1 < p \leq \infty$, $q = \infty$, temos

$$\begin{aligned}
\|f\|_{(p,\,\infty)} &= \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t) = \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}-1}\int_0^t f^*(s)ds \\
&= \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}-1}\int_0^t s^{-\frac{1}{p}} s^{\frac{1}{p}} f^*(s)ds \\
&= \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}-1}\int_0^t s^{-\frac{1}{p}}\left(\sup_{u>0} u^{\frac{1}{p}} f^*(u)\right)ds \\
&= \|f\|^*_{(p,\,\infty)} \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}-1}\int_0^t s^{-\frac{1}{p}} ds \\
&= p'\|f\|^*_{(p,\,\infty)}.
\end{aligned}$$

∎

Mostraremos agora que a quantidade $\|\cdot\|_{(p,q)}$ é de fato uma norma.

Proposição 1.4 *Sejam $1 \leq p \leq \infty$ e $1 \leq q \leq \infty$. A grandeza $\|\cdot\|_{(p,q)}$ é uma norma em $L^{(p,q)}$.*

Demonstração. Observe que $\|f\|_{(p,\,q)} \geq 0$ e $\|f\|_{(p,\,q)} = 0 \Leftrightarrow f^{**} = 0 \Leftrightarrow f^{*} = 0 \Leftrightarrow f = 0$ q.t.p. Agora, provaremos a desigualdade triangular. Se $q = \infty$, temos

$$\|f+g\|_{(p,\,\infty)} \;=\; \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}}(f+g)^{**}(t)$$

Assim, da subaditividade f^{**} (Propriedade (1.5)), obtemos

$$\begin{aligned} \|f+g\|_{(p,\,\infty)} &\leq \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}}(f)^{**}(t) + \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}}(g)^{**}(t) \\ &= \|f\|_{(p,\,\infty)} + \|g\|_{(p,\,\infty)}. \end{aligned}$$

Por outro lado, quando $1 \leq q < \infty$, usamos a subaditividade de $\left(\int_0^\infty (\cdot)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}$ e de f^{**} (Propriedade (1.5)), para obter

$$\begin{aligned} \|f+g\|_{(p,q)} &= \left(\int_0^\infty (t^{\frac{1}{p}}(f+g)^{**}(t))^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \left(\int_0^\infty (t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t) + t^{\frac{1}{p}} g^{**}(t))^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \left(\int_0^\infty (t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t))^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\int_0^\infty (t^{\frac{1}{p}} g^{**}(t))^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \|f\|_{(p,q)} + \|g\|_{(p,q)}, \end{aligned}$$

e assim concluímos a prova. ∎

Observação 1.4 *Além disso, os espaços $L^{(p,q)}$, $1 < p \leq \infty$ e $1 \leq q \leq \infty$, munidos da norma $\|\cdot\|_{(p,q)}$ são espaços de Banach. Para uma demonstração veja [25]. Ainda mais, usando (1.2) e a equivalência entre $\|\cdot\|^*_{(p,q)}$ e $\|\cdot\|_{(p,q)}$ (Proposição 1.3), note que $\|\cdot\|_{(p,q)}$ satisfaz a mesma relação de escala que $\|\cdot\|^*_{(p,q)}$, ou seja, na igualdade (1.2) podemos substituir $\|\cdot\|^*_{(p,q)}$ por $\|\cdot\|_{(p,q)}$, isto é,*

$$\|f(\lambda x)\|_{(p,\,q)} = \|f_\lambda(x)\|_{(p,\,q)} = \lambda^{-\frac{n}{p}}\|f(x)\|_{(p,\,q)}. \tag{1.9}$$

1.2 O Espaço Dual de $L^{(p,q)}$

Os dois lemas a seguir são importantes para estudar o dual do espaço de Lorentz $L^{(p,q)}$. Os enunciados e as demonstrações encontram-se em ([44], pag.44). Antes mostraremos que funções simples são densas em $L^{(p,q)}$.

Proposição 1.5 *Sejam $1 \leq p < \infty$ e $1 \leq q < \infty$. O conjunto S, de todas funções simples é denso em $L^{(p,q)}$.*

Demonstração. Para provar que o conjunto S é denso em $L^{(p,q)}$, mostraremos que existe uma sequência de funções simples (s_n), tal que, $\|s_n - f\|_{(p,\,q)} \to 0$, quando $n \to \infty$. De fato, seja $f \in L^{(p,q)}$ (sem perda de generalidade, assuma f positiva). Então existe uma sequência de funções simples, tal que, $0 \leq s_n \leq f$ e $s_n \to f$, quando $n \to \infty$. Pela Proposição 1.1 item (vi), obtemos

$$(f - s_n)^*(t) \leq f^*(t/2) + s_n^*(t/2) \leq 2f^*(t/2) \in L^1.$$

Então, pelo Teorema da Convergência Dominada, concluímos

$$\lim_{n\to\infty} \|f - s_n\|^*_{(p,q)} = \left(\int_0^\infty [t^{1/p} \lim (f - s_n)^*(t)]^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} = 0$$

como f é arbitrário, segue que $\overline{S} = L^{(p,q)}$. ∎

Lema 1.2 *Sejam $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função simples não-negativa e Q um subconjunto mensurável de $\mathbb{R}^n$. Então*

$$\int_Q g(x)dx \leq \int_0^{\mu(Q)} g^*(t)dt.$$

Demonstração. Escreva g como

$$g(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j X_{F_j}(x),$$

onde $F_1 \subset F_2 \subset ... \subset F_n$ e $b_j > 0$, $j = 1...,n$. Agora, calculando a integral em Q, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_Q g(x)dx &= \sum_{j=1}^{n} a_j \mu(Q \cap F_j) \leq \sum_{j=1}^{n} a_j \min(\mu(Q), \mu(F_j)) \\
&= \sum_{j=1}^{n} a_j \int_0^{\mu(Q)} X_{(0,\mu(F_j))}(s)ds = \int_0^{\mu(Q)} \left(\sum_{j=1}^{n} a_j X_{(0,\mu(F_j))}(s) \right) ds \\
&= \int_0^{\mu(Q)} g^*(t)dt.
\end{aligned}$$

∎

Lema 1.3 *Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ são duas funções mensuráveis, então*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |fg|dx \leq \int_0^\infty f^*(s)g^*(s)ds. \tag{1.10}$$

Demonstração. Como f^* e g^* dependem somente dos valores absolutos de f e g, é suficiente considerar f e g positivas. Como podemos aproximar f e g por funções simples e temos as respectivas convergências para as funções rearranjo, usando o teorema da convergência monótona, podemos assumir, sem perda de generalidade, que f e g são funções simples. Assim escrevemos

$$f = \sum_{j=1}^{m} a_j \chi_{E_j}(x)$$

onde $E_j \subset E_{j+1}$ e $a_j > 0$. Calculando a função rearranjo de f, obtemos

$$f^*(t) = \sum_{j=1}^{m} a_j \chi_{[0,\mu(E_j)]}(t).$$

Usando o lema anterior, podemos estimar

$$\begin{aligned}\int_{R^n} |fg|dx &= \sum_{j=1}^{m} a_j \int_{E_j} g(x)dx \leq \sum_{j=1}^{m} a_j \int_0^{\mu(E_j)} g^*(s)ds \\ &= \int_0^{\infty} \sum_{j=1}^{m} a_j \chi_{[0,\mu(E_j)]}(s) g^*(s)ds \\ &= \int_0^{\infty} f^*(s)g^*(s)ds.\end{aligned}$$

■

Sejam $1 < p < \infty$ e $1 \leq q \leq \infty$, p' e q' os respectivos expoentes conjugados e $f \in L^{(p',q')}$. Então $T_f(g) = \int_{\mathbb{R}^n} fgdx$ define um funcional linear continuo em $L^{(p,q)}$. De fato, para $1 < p < \infty$ e $1 < q < \infty$ (caso $q = \infty$ ou $q = 1$ é análogo), usando (1.10) e desigualdade de Hölder em L^q, temos

$$\begin{aligned}\int_{R^n} |fg|dx \leq \int_0^{\infty} f^*(s)g^*(s)ds &= \int_0^{\infty} [s^{\frac{1}{p'}} f^*(s)][s^{\frac{1}{p}} g^*(s)] \frac{ds}{s} \\ &\leq \left(\int_0^{\infty} [s^{\frac{1}{p'}} f^*(s)]^{q'} \frac{ds}{s} \right)^{\frac{1}{q'}} \left(\int_0^{\infty} [s^{\frac{1}{p}} g^*(s)]^{q} \frac{ds}{s} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \|f\|_{(p',q')} \|g\|_{(p,q)}.\end{aligned}$$

Isso demonstra que $L^{(p',q')} \subset L^{(p,q)}$. A seguir enunciamos a caracterização precisa de dualidade para espaços de Lorentz. Para uma demonstração, recomendamos [44] ao leitor.

Proposição 1.6 *(veja [44]) Sejam $1 < p < \infty$ e $1 < q < \infty$. Então o espaço dual de $L^{(p,1)}$ é $L^{(p',\infty)}$ e o espaço dual de $L^{(p,q)}$ é $L^{(p',q')}$.*

Observação 1.5 *Como conseqüência imediata da Proposição 1.6, os espaços de Lorentz $L^{(p,q)}$ são reflexivos para $1 < p < \infty$ e $1 < q < \infty$.*

1.3 Aproximação da Identidade em $L^{(p,q)}$

Os resultados desta seção são muito usados, sem demonstração, em alguns artigos que tratam ou usam espaços de Lorentz para estudar algumas EDP's (ver, por exemplo, [1] e [51]). Como não encontra-se uma farta bibliografia com as demonstrações, para conveniência do leitor, resolvemos incluí-las. Nosso objetivo, nesta seção, é demonstrar um teorema de aproximação (via regularização), em espaços de Lorentz $L^{(p,q)}$, análogo ao teorema que garante que convoluções por um molificador de Friedrichs fornecem uma aproximação da identidade em L^p, ver [12]. A demonstração deste resultado, baseia-se na continuidade da translação em $L^{(p,q)}$, a qual é uma consequência da proposição abaixo.

Proposição 1.7 *Se $1 < p < \infty$ e $1 \leq q < \infty$, então o conjunto C_c^∞ é denso em $L^{(p,q)}$.*

Demonstração. Mostraremos que toda função característica X_A pode ser aproximada na quasi-norma $\|\cdot\|^*_{(p,\,q)}$ por uma função em $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, concluindo assim que o conjunto $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ é denso em $L^{(p,q)}$. Considere $A \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto mensurável e μ, como definimos, a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^n$. Como μ é regular interior e exterior, dado $\varepsilon > 0$, existe um aberto U e um compacto K satisfazendo $K \subset A \subset U$ e $\mu(U \setminus K) < \varepsilon$. Pelo lema de Urysohn, existe $g \in C_c^\infty$, tal que, $0 \leq g \leq 1$, $g(x) = 1$ se $x \in K$ e $g(x) = 0$ se $x \in U^c$. Note que, $|X_A - g| < X_{U\setminus K}$ e por isso $(X_A - g)^*(t) \leq X^*_{U/K}(t)$ para todo $t > 0$. Por fim, calculando a quasi-norma $\|\cdot\|^*_{(p,\,q)}$, obtemos

$$\|X_A - g\|^*_{(p,\,q)} \leq \|X_{U/K}\|^*_{(p,\,q)} = \left(\int_0^{\mu(U/K)} t^{\frac{q}{p}-1} dt\right)^{\frac{1}{q}} < \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{q}} \varepsilon^{\frac{1}{p}},$$

e, usando a Proposição 1.3, concluímos a demonstração. ∎

Proposição 1.8 *(Continuidade da Translação) Sejam $1 < p < \infty$ e $1 \leq q < \infty$. Então*

$$\|f(x-z) - f(x)\|_{(p,\,q)} \to 0, \text{ quando } z \to 0.$$

Demonstração. Denote $A_\delta = \{x \in \mathbb{R}^m \,:\, d(x,A) < \delta\}$. Note que é suficiente supor que $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, uma vez que o conjunto $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ é denso em $L^{(p,q)}$, quando $1 < p < \infty$ e $1 \leq q < \infty$. Denote $g_z(x) = f(x-z) - f(x)$. Como f tem suporte compacto ($\operatorname{supp} f = A$), dado $\varepsilon > 0$ existe δ tal que, se $|z| < \delta$ então $|g_z(x)| \leq \varepsilon \cdot X_{A_\delta}(x)$ para todo x e portanto $g_z^*(t) \leq \varepsilon (X_{A_\delta})^*(t)$. Assim,

$$\limsup_{z\to 0} g_z^*(t) \leq \varepsilon, \text{ para todo } t > 0.$$

Como ε não depende t, então $g_z^*(t) \to 0$ para todo $t > 0$. Note que

$$\begin{aligned}\int_0^\infty t^{\frac{q}{p}-1}(g_z^*(t))^q dt &\leq \varepsilon^q \int_0^\infty t^{\frac{q}{p}-1}((X_{A_\delta})^*)^q(t)dt \\ &= \varepsilon^q \cdot \int_0^{\mu(A_\delta)} t^{\frac{q}{p}-1} dt < \infty.\end{aligned}$$

Assim, pelo Teorema da Convergência Dominada, concluímos

$$\|g_z\|^*_{(p,\,q)} \to 0, \text{ quando } z \to 0.$$

Como os funcionais $\|\cdot\|_{(p,\,q)}$ e $\|\cdot\|^*_{(p,\,q)}$, são equivalentes, segue que $\|g_z\|_{(p,\,q)} \to 0$. ■

A próxima proposição é uma generalização, para espaços de Lorentz, dos resultados de aproximação da identidade usando molificadores de Friedrichs em L^p (ver [22, Teorema 8.14, Cap.8]). A demonstração é uma aplicação interessante da dualidade em espaços de Lorentz.

Proposição 1.9 *(Aproximação da Identidade em $L^{(p,q)}$) Seja $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$, tal que, $\int \varphi(y)dy = 1$. Para cada $\varepsilon > 0$, defina o molificador de Friedrichs $\varphi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^m}\varphi(\frac{x}{\varepsilon})$. Se $f \in L^{(p,q)}$ com $1 < p < \infty$ e $1 \leq q < \infty$, então*

$$\|\varphi_\varepsilon * f - f\|_{(p,\,q)} \to 0, \text{ quando } \varepsilon \to 0.$$

A família $(\varphi_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ é chamada uma aproximação da identidade em $L^{(p,q)}$.

Demonstração. Fazendo a mudança de variável $\varepsilon z = y$ e usando que $\int \varphi_\varepsilon(y)dy = 1$, temos

$$\begin{aligned}\varphi_\varepsilon * f - f &= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(y)[f(x-y) - f(x)]dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(z)[f(x-\varepsilon z) - f(x)]dz.\end{aligned} \tag{1.11}$$

Calculando a norma $\|\cdot\|_{(p,\,q)}$ de $\varphi_\varepsilon * f - f$ e usando a equação (1.11), obtemos

$$\begin{aligned}\|\varphi_\varepsilon * f - f\|_{(p,\,q)} &= \sup_{\|\phi\|_{(p',q')}=1} \left| \int_{\mathbb{R}^n} (\varphi_\varepsilon * f(x) - f(x))\,\phi(x)dx \right| \\ &= \sup_{\|\phi\|_{(p',q')}=1} \left| \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(z)[f(x-\varepsilon z) - f(x)]\phi(x)dzdx \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(z)| \left(\sup_{\|\phi\|_{(p',q')}=1} \left| \int_{\mathbb{R}^n} [f(x-\varepsilon z) - f(x)]\phi(x) \right| dx \right) dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(z)|\, \|f(x-\varepsilon z) - f(x)\|_{(p,\,q)} dz.\end{aligned}$$

Como $\|f(x-\varepsilon z) - f(x)\|_{(p,\,q)} \leq 2\|f(x)\|_{(p,\,q)}$ e $\|f(x-\varepsilon z) - f(x)\|_{(p,\,q)} \to 0$, quando $\varepsilon \to 0$. Usando o Teorema da Convergência Dominada, concluímos a demonstração. ■

1.4 Desigualdade de Young e de Hölder em $L^{(p,q)}$

Iniciamos a seção lembrando algumas propriedades importantes sobre convolução de funções e alguns resultados de duplo rearranjo, cujas demonstrações são essencialmente as mesmas contidas em [53]. Estas propriedades serão importantes para a demonstração, de versões em $L^{(p,q)}$, das desigualdade de Young e de Hölder.

1.4.1 Desigualdade de Young

Sejam $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funções mensuráveis. Denote a convolução de f e g por $h(x) = (f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy$. Inicialmente, discutiremos algumas propriedades do rearranjo do operador convolução. Começemos a recordar a estimativa conhecida para h^{**}.

Lema 1.4 *Sejam $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funções mensuráveis. Então*

$$h^{**}(t) \leq t f^{**}(t) g^{**}(t) + \int_t^\infty f^*(s) g^*(s) ds, \tag{1.12}$$

para todo $t > 0$.

Omitiremos a demonstração, mas podemos encontrá-la em [25, 34]. A razão é que a prova é bastante enfadonha e acreditamos que as idéias usadas nela estão contidas em outros resultados destas preliminares. Uma consequência desta fórmula é a seguinte.

Proposição 1.10 *Sejam $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funções mensuráveis. Então*

$$h^{**}(t) \leq \int_t^\infty f^{**}(s) g^{**}(s) ds,$$

para todo $t > 0$.

Demonstração. A demonstração deste lema está contida essencialmente na demonstração do Lema 1.6 de [34]. Se a integral do lado direito for infinita, não há nada que mostrar. Caso contrário, como $f^{**}(t)$ e $g^{**}(t)$ são não-crescentes, temos que

$$\lim_{t\to\infty} t f^{**}(t) g^{**}(t) = 0.$$

Usando o fato que $f^*(t) \leq f^{**}(t)$ e a desigualdade (1.12), obtemos

$$h^{**}(t) \leq t f^{**}(t) g^{**}(t) + \int_t^\infty f^{**}(s) g^*(s) ds, \; \forall\, t > 0. \tag{1.13}$$

Agora, observando que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}f^{**}(t) &= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{t}\int_0^t f^*(s)ds\right)\\ &= \frac{1}{t}f^*(t) - \frac{1}{t^2}\int_0^t f^*(s)ds\\ &= \frac{1}{t}(f^*(t) - f^{**}(t)),\end{aligned}$$

obtemos

$$\frac{d}{dt}tg^{**}(t) = g^*(t).$$

Portanto, integrando por partes em (1.13), concluímos

$$\begin{aligned}h^{**}(t) &\leq tf^{**}(t)g^{**}(t) + [sf^{**}(s)g^{**}(s)]_t^\infty + \int_t^\infty [f^{**}(s) - f^*(s)]g^{**}(s)ds\\ &\leq \int_t^\infty f^{**}(s)g^{**}(s)ds - \int_t^\infty f^*(s)g^{**}(s)ds\\ &\leq \int_t^\infty f^{**}(s)g^{**}(s)ds.\end{aligned}$$

∎

Os lemas a seguir estabelecem uma relação de inclusão entre $L^{(p,q)}$ e $L^{(p,r)}$. As demonstrações destes dois lemas são baseadas nas demonstrações do Lema 2.4 e do Lema 2.5 de [34], respectivamente. As mesmas demonstrações também podem ser encontradas em ([53], pag.36).

Lema 1.5 *Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função mensurável. Se $1 < p < \infty$ e $1 \leq q < \infty$, então*

$$f^{**}(x) \leq \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{q}} \frac{\|f\|_{(p,q)}}{x^{\frac{1}{p}}}.$$

Demonstração. Como $f^{**}(x)$ é não-crescente, podemos estimar

$$\begin{aligned}\|f\|_{(p,q)}^q &= \int_0^\infty [t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t)]^q dt/t\\ &\geq \int_0^x t^{\frac{q}{p}-1}[f^{**}(t)]^q dt\\ &\geq [f^{**}(x)]^q \int_0^x t^{\frac{q}{p}-1}dt = \frac{p}{q}[f^{**}(x)]^q x^{\frac{q}{p}}.\end{aligned}$$

∎

Lema 1.6 *(Calderón) Se $1 < p < \infty$ e $1 \leq q < r \leq \infty$, então $L^{(p,q)} \subset L^{(p,r)}$. Mais ainda,*

$$\|f\|_{(p,r)} \leq \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{r}} \|f\|_{(p,q)},$$

para toda $f \in L^{(p,q)}$.

Demonstração. Note que

$$\begin{aligned}
\|f\|_{(p,r)}^r &= \int_0^\infty t^{\frac{r}{p}-1}[f^{**}(t)]^r dt \\
&= \int_0^\infty t^{\frac{r}{p}-1}[f^{**}(t)]^q[f^{**}(t)]^{r-q} dt \\
&\leq \int_0^\infty t^{\frac{r}{p}-1}[f^{**}(t)]^q \left[\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{q}} \frac{\|f\|_{(p,q)}}{t^{\frac{1}{p}}}\right]^{r-q} dt \\
&= \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{r}{q}-1} \|f\|_{(p,q)}^{r-q} \int_0^\infty t^{\frac{q}{p}-1}[f^{**}(t)]^q dt \\
&= \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{r}{q}-1} \|f\|_{(p,q)}^{r-q}\|f\|_{(p,q)}^q.
\end{aligned}$$

Logo

$$\|f\|_{(p,r)} \leq \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{r}} \|f\|_{(p,q)},$$

para toda $f \in L^{(p,q)}$.

■

Uma conseqüência imediata do lema anterior é que as inclusões $L^{(p,q_1)} \subset L^p \subset L^{(p,q_2)} \subset L^{(p,\infty)}$, para $1 < p < \infty$ e $1 \leq q_1 \leq p \leq q_2 \leq \infty$, são contínuas.

A próxima proposição nos diz como o operador convolução se comporta em espaços de Lorentz. De fato, ela estende a conhecida desigualdade de Young em espaços de Lebesgue L^p para contexto de espaços de Lorentz $L^{(p,q)}$.

Proposição 1.11 *(Desigualdade Generalizada de Young) Sejam $1 < p_1, p_2, r < \infty$, $1 \leq q_1, q_2 \leq \infty$ e $s \geq 1$ tais que $1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$ e $\frac{1}{s} \leq \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2}$. Se $f \in L^{(p_1,q_1)}$ e $g \in L^{(p_2,q_2)}$, então $h = g * f \in L^{(r,s)}$ com a seguinte estimativa*

$$\|h\|_{(r,s)} \leq C(r)\|f\|_{(p_1,q_1)}\|g\|_{(p_2,q_2)}. \tag{1.14}$$

Demonstração. Primeiro considere o caso $s = \infty$. Usando a Proposição 1.10, estimamos

$$\begin{aligned}
\|h\|_{(r,\infty)} &= \sup_{t>0}[t^{\frac{1}{r}}h^{**}(t)] \leq \sup_{t>0}\left[t^{\frac{1}{r}}\int_t^\infty f^{**}(s)g^{**}(s)ds\right] \\
&\leq \sup_{t>0}\left[t^{\frac{1}{r}}\int_t^\infty s^{-1-\frac{1}{r}}[s^{\frac{1}{p_1}}f^{**}(s)][s^{\frac{1}{p_2}}g^{**}(s)]ds\right] \\
&\leq \|f\|_{(p_1,\infty)}\|g\|_{(p_2,\infty)}\sup_{t>0}\left[t^{\frac{1}{r}}\int_t^\infty s^{-1-\frac{1}{r}}ds\right] \\
&= r\|f\|_{(p_1,\infty)}\|g\|_{(p_2,\infty)} \leq r\|f\|_{(p_1,q_1)}\|g\|_{(p_2,q_2)}.
\end{aligned}$$

Considerando o caso s finito e usando a Proposição 1.10, podemos estimar

$$\|h\|_{(r,s)}^{s} = \int_0^\infty [t^{\frac{1}{r}} h^{**}(t)]^s \frac{dt}{t} \leq \int_0^\infty \left[t^{\frac{1}{r}} \int_t^\infty f^{**}(s) g^{**}(s) ds \right]^s \frac{dt}{t}.$$

Fazendo a mudança de variável $t = \frac{1}{y}$, $s = \frac{1}{u}$, obtemos

$$\begin{aligned}
\|h\|_{(r,s)}^{s} &\leq \int_0^\infty \left[y^{-\frac{1}{r}} \int_0^y f^{**}\left(\frac{1}{u}\right) g^{**}\left(\frac{1}{u}\right) \frac{du}{u^2} \right]^s \frac{dy}{y}, \\
&= \int_0^\infty \left(\int_0^y \frac{f^{**}(1/u) g^{**}(1/u)}{u^2} du \right)^s y^{\frac{s}{r}} y^{-1} dy \\
&= \int_0^\infty \left(\int_0^y \frac{f^{**}(1/u) g^{**}(1/u)}{u^2} du \right)^s y^{\widetilde{r}-1} dy, \text{ onde } \widetilde{r} = \frac{s}{r} \\
&= \int_0^\infty \left(\int_0^y f(u) du \right)^s y^{\widetilde{r}-1} dy,
\end{aligned}$$

onde $f(u) = \frac{f^{**}(1/u) g^{**}(1/u)}{u^2}$. Usando a desigualdade de Hardy (1.6) e o Lema 1.1, obtemos

$$\begin{aligned}
\|h\|_{(r,s)}^{s} &\leq \left(\frac{s}{\widetilde{r}} \right)^s \int_0^\infty [y f(y)]^s y^{\widetilde{r}-1} dy \\
&= r^s \int_0^\infty \left[y \frac{f^{**}(1/y) g^{**}(1/y)}{y^2} \right]^s y^{\frac{s}{r}} \frac{dy}{y} \\
&= r^s \int_0^\infty \left[y^{1-\frac{1}{r}} f^{**}(1/y) g^{**}(1/y) \right]^s \frac{dy}{y} \\
&= r^s \int_0^\infty \left[y^{1+\frac{1}{r}} f^{**}(t) g^{**}(t) \right]^s \frac{dt}{t}.
\end{aligned}$$

Como $\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} \geq \frac{1}{s}$, existem $m_1 \geq 1$ e $m_2 \geq 1$, tais que,

$$\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} = 1 \text{ e } \frac{1}{m_1} \leq \frac{s}{q_1}, \frac{1}{m_2} \leq \frac{s}{q_2}.$$

Usando a desigualdade de Hölder em $L^p(0,\infty)$ com a medida $\mu = \frac{dx}{x}$ e o Lema 1.6, deduzimos que

$$\begin{aligned}
\|h\|_{(r,s)} &\leq r \left(\int_0^\infty [t^{1+\frac{1}{r}} f^{**}(t) g^{**}(t)]^s \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{s}} = r \left(\int_0^\infty [t^{\frac{1}{p_1}} f^{**}(t)]^s [t^{\frac{1}{p_2}} g^{**}(t)]^s \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{s}} \\
&\leq r \left(\int_0^\infty [t^{\frac{1}{p_1}} f^{**}(t)]^{sm_1} \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{sm_1}} \left(\int_0^\infty [t^{\frac{1}{p_2}} g^{**}(t)]^{sm_2} \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{sm_2}} \\
&= r \|f\|_{(p_1, sm_1)} \|g\|_{(p_2, sm_2)}.
\end{aligned}$$

Como $q_1 \leq sm_1$ e $q_2 \leq sm_2$, pelo Lema 1.6, obtemos

$$\|h\|_{(r,s)} \leq C(r) \|f\|_{(p_1,q_1)} \|g\|_{(p_2,q_2)}.$$

■

A próxima proposição trata o caso limite da Proposição 1.11, quando uma das funções f ou $g \in L^1$.

Proposição 1.12 *Seja $g \in L^{(p,\infty)}$ com $1 < p < \infty$, e $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, então $h = g * f \in L^{(p,\infty)}$ e*

$$\|h\|_{(p,\infty)} \leq C(p)\|f\|_1\|g\|_{(p,\infty)}. \tag{1.15}$$

Antes de mostrar esta proposição, introduziremos uma outra norma para $L^{(p,\infty)}$, equivalente a $\|\cdot\|_{(p,\infty)}$, a qual será útil para nossos fins. Para cada $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mensurável denote

$$\|f\|_{M^p} = \sup_{\mu(E)<\infty} \left\{\mu(E)^{-1/p'} \int_E |f(x)|\, dx\right\}.$$

O próximo lema mostra que de fato $\|\cdot\|^*_{(p,\infty)}$ é equivalente $\|\cdot\|_{M_p}$. Como por sua vez $\|\cdot\|^*_{(p,\infty)}$ é equivalente a $\|\cdot\|_{(p,\infty)}$ (Proposição 1.3), então $\|\cdot\|_{(p,\infty)}$ também é equivalente a $\|\cdot\|_{M_p}$. Este resultado pode ser encontrado em [3] e a demonstração apresentada é basicamente uma reprodução do que está lá contido.

Lema 1.7 *(veja [3]) Seja $1 < p < \infty$. Então para toda função mensurável $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, temos as seguintes desigualdades*

$$\frac{(p-1)^p}{p^{p+1}}\|f\|^p_{M_p} \leq \sup_{s>0}\{s^p\lambda_f(s)\} \leq \|f\|^p_{M_p}. \tag{1.16}$$

Demonstração. Considere o conjunto $E_i = \{x \in R^n : |x| \leq i \text{ e } |f(x)| > s\}$. Da definição de $\|f\|_{M^p}$, temos que

$$s \cdot \mu(E_i) \leq \int_{E_i} |f(x)|dx \leq \|f\|_{M^p}(\mu(E_i))^{1/p'}.$$

Assim $s \cdot (\mu(E_i))^{1/p} \leq \|f\|_{M^p}$. Portanto, calculando o limite para $i \to \infty$ e depois o supremo em s, obtemos a desigualdade a segunda desigualdade. Agora vamos demonstrar a primeira desigualdade. Dado $s_0 > 0$, claramente

$$\int_E |f(x)|dx \leq s_0\mu(E) + \int_{\{|f(x)|>s_0\}} |f(x)|dx. \tag{1.17}$$

Por outro lado,

$$\int_{\{|f(x)|>s_0\}} |f(x)|dx = -\int_{s_0}^{\infty} s\ (d\lambda_f)(s) = \int_{s_0}^{\infty} \lambda_f(s)ds + \lambda_f(s_0)s_0$$
$$\leq \sup_{s>0}\{s^p\lambda_f(s)\}\left(\int_{s_0}^{\infty} s^{-p}ds + (s_0)^{1-p}\right)$$
$$= \sup_{s>0}\{s^p\lambda_f(s)\}\left(\frac{p}{p-1}(s_0)^{1-p}\right) \tag{1.18}$$

Agora, depois de usar (1.18) em (1.17) e escolher s_0 de tal forma que $(s_0)^p\mu(E) = p\cdot\sup_{s>0}\{s^p\lambda_f(s)\}$, obtemos

$$\int_E |f(x)|dx \leq s_0\mu(E) + \frac{1}{p-1}s_0\mu(E)$$
$$= \frac{p^{1+1/p}}{p-1}\left(\sup_{s>0}\{s^p\lambda_f(s)\}\right)^{\frac{1}{p}}(\mu(E))^{1/p'}$$

que é a desigualdade desejada. ■

Agora estamos prontos pra demonstrar a Proposição 1.12.

Demonstração da Proposição 1.12. Estimando diretamente, temos

$$\int_E |h(x)|dx \leq \int_E\left(\int_{R^n}|g(x-y)||f(y)|dy\right)dx$$
$$\leq \int_{R^n}|f(y)|\left(\int_E |g(x-y)|dx\right)dy$$
$$= \int_{R^n}|f(y)|\left(\int_{E-y}|g(x)|dx\right)dy$$
$$\leq \|f\|_{L^1}\|g\|_{M^p}\cdot(\mu(E-y))^{1/p'} = \|f\|_{L^1}\|g\|_{M^p}\cdot(\mu(E))^{1/p'},$$

a qual implica que

$$\|f\|_{M^p} = \sup_{\mu(E)<\infty}\left\{\mu(E)^{-1/p'}\int_E |f(x)|\ dx\right\} \leq \|f\|_{L^1}\|g\|_{M^p}.$$

Usando a desigualdade (1.16) e a Proposição 1.3, concluímos a demonstração. ■

1.4.2 Desigualdade de Hölder

A seguir daremos uma generalização da Desigualdade de Hölder para os espaços de Lorentz $L^{(p,q)}$. Para uma referência ver [25].

Proposição 1.13 *(Desigualdade de Hölder Generalizada) Sejam* $1 < p_1, p_2, r < \infty$, $1 \leq q_1, q_2 \leq \infty$ *e* $s \geq 1$ *tais que* $\frac{1}{r} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$ *e* $\frac{1}{s} \leq \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2}$. *Se* $f \in L^{(p_1,q_1)}$ *e* $g \in L^{(p_2,q_2)}$, *então* $h = gf \in L^{(r,s)}$ *com a seguinte estimativa*

$$\|h\|_{(r,s)} \leq C(r')\|f\|_{(p_1,q_1)}\|g\|_{(p_2,q_2)}. \tag{1.19}$$

Demonstração. Seja $t > 0$. Escreva $h = fg$ e considere o conjunto $E = \{x \in \mathbb{R}^n : |h(x)| > h^*(t)\}$. Por definição de h^*, note que $\mu(E) \geq t$ e

$$\begin{aligned}
h^*(t) &\leq \sup_{\mu(E)\geq t}\left\{\frac{1}{\mu(E)}\int_E |h(x)|^{1/2}\,dx\right\}^2 \\
&\leq \sup_{\mu(E)\geq t}\left\{\frac{1}{\mu(E)}\int_E |f(x)|\,dx\right\}\sup_{\mu(E)\geq t}\left\{\frac{1}{\mu(E)}\int_E |g(x)|\,dx\right\} \\
&\leq f^{**}(t)g^{**}(t).
\end{aligned}$$

Como $\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} \geq \frac{1}{s}$, podemos encontrar $m_1 \geq 1$ e $m_2 \geq 1$, tais que,

$$\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} = 1 \text{ e } \frac{1}{m_1} \leq \frac{s}{q_1},\ \frac{1}{m_2} \leq \frac{s}{q_2}\ .$$

Usando a desigualdade de Hölder em $L^p(0,\infty)$ e o Lema 1.6, temos

$$\begin{aligned}
\|h\|_{(r,s)} \leq r'\|h\|^*_{(r,s)} &= r'\left(\int_0^\infty [t^{\frac{1}{r}}h^*(t)]^s dt/t\right)^{\frac{1}{s}} \\
&\leq r'\left(\int_0^\infty [t^{\frac{1}{p_1}}f^{**}(t)]^s[t^{\frac{1}{p_2}}g^{**}(t)]^s\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{s}} \\
&\leq r'\|f\|_{(p_1,sm_1)}\|g\|_{(p_2,sm_2)} \\
&\leq C(r')\|f\|_{(p_1,q_1)}\|g\|_{(p_2,q_2)}.
\end{aligned}$$

■

Observação 1.6 *Seja* $(\cdot,\cdot) : L^{(p_1,\,q_1)} \times L^{(p_2,\,q_2)} \to L^{(r,\,s)}$ *o operador bilinear dado por,* $(f,\,g)(x) = f(x)g(x)$. *A Desigualdade de Hölder Generalizada (Proposição 1.13), afirma que este operador é contínuo sobre os Espaços de Lorentz* $L^{(p_1,\,q_1)} \times L^{(p_2,\,q_2)}$, *quando assumimos certas condições nos índices dos espaços. Em particular, quando* $p = p_1 = q_1$, $q = p_2 = q_2$ *e* $r = s$ *obtemos a bem conhecida desigualdade de Hölder em Espaços de Lebesgue* L^p. *Isto é,*

$$\|fg\|_r \leq \|f\|_p\|g\|_q\ ,\ \ \textit{se}\ \ \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}. \tag{1.20}$$

1.5 Espaços de Interpolação

Começemos introduzindo algumas notações e definições básicas da teoria de interpolação. Nos restringiremos ao $K-$Método.

Sejam X_0 e X_1 dois espaços de Banach. Denote o par $\overline{X} = (X_0, X_1)$. Seja $\Sigma(\overline{X}) = X_0 + X_1$ a soma dos espaços de Banach X_0 e X_1. Para cada $t > 0$ fixo, definimos o $K-$funcional como

$$K(t, a, \overline{X}) = \inf\{\|a_0\|_{X_0} + t\|a_1\|_{X_1} : a_0 \in X_0,\, a_1 \in X_1 \text{ e } a = a_0 + a_1\}.$$

Note que $K(t, \cdot, \overline{X})$ é uma norma no espaço de Banach $\Sigma(\overline{X})$. Para cada $a \in \Sigma(\overline{X})$, denotamos

$$\|a\|_{\theta,q,K} = \begin{cases} \int_0^\infty \left(t^{-\theta} K(t, a, \overline{X})\right)^q \frac{dt}{t} & \text{, se } \quad 0 < \theta < 1,\ 1 \leq q < \infty, \\ \sup_{t>0} t^{-\theta} K(t, a, \overline{X}) & \text{, se } \quad 0 \leq \theta \leq 1\ ,\ q = \infty. \end{cases}$$

Definimos o espaço $X_{\theta,q} = (X_0, X_1)_{\theta,q}$, como o conjunto

$$X_{\theta,q} \equiv \left\{a \in \Sigma(\overline{X}) : \|a\|_{\theta,q,K} < \infty\right\}.$$

Em [4] foi demonstrado que $X_{\theta,q} = (X_0, X_1)_{\theta,q}$ é um espaço de interpolação entre $(X_0, X_1)_{\theta,q}$. Isto é; sejam os pares $\overline{X} = (X_0, X_1)$ e $\overline{Y} = (Y_0, Y_1)$.Se $T : X_0 \to Y_0$ e $T : X_1 \to Y_1$ são aplicações continuas e sublineares, então

$$T : (X_0, X_1)_{\theta,q} \to (Y_0, Y_1)_{\theta,q},$$

é continua.

Agora, estamos em condições de enunciar um resultado clássico de teoria de interpolação em espaços de Lorentz, cuja demonstração será omitida por ser um resultado clássico.

Proposição 1.14 *([4], p.113) Sejam $1 \leq q_0 \leq \infty$ e $1 \leq q_1 \leq \infty$. Assuma que p_0 e p_1 são números positivos tais que $\frac{1}{p} = \frac{1-\lambda}{p_0} + \frac{\lambda}{p_1}$, onde $0 < \lambda < 1$. Então, se $p_0 \neq p_1$,*

$$(L^{(p_0,q_0)}, L^{(p_1,q_1)})_{\lambda,q} = L^{(p,q)}.$$

A igualdade continua verdadeira no caso $p_0 = p_1 = p$, contanto que $\frac{1}{q} = \frac{1-\lambda}{q_0} + \frac{\lambda}{q_1}$.

A próxima proposição é uma conseqüência da proposição anterior e vamos enunciá-la por uma questão de conveniência do leitor.

Proposição 1.15 *([47], p.197) Seja T um operador sublinear em $L^{(p_j,r_j)}$ onde $j=1,2$. Sejam $p_0<p_1$, $r_0\neq r_1$e p,r dados por*

$$\frac{1}{p}=\frac{1-\lambda}{p_0}+\frac{\lambda}{p_1} \; e \; \frac{1}{r}=\frac{1-\lambda}{r_0}+\frac{\lambda}{r_1},$$

onde $0<\lambda<1$. Então, para todo $1\leq q\leq\infty$, existe $B=B(\lambda)$ tal que

$$\|Tf\|_{(p,q)}\leq B\|f\|_{(r,q)}$$

para toda f pertencente a $L^{(r,q)}$.

Para uma demonstração referimos [47], por sua abordagem direta e sem usar elementos pesados de teoria de interpolação em espaços de Banach abstratos.

A próxima Proposição revela uma das principais diferenças entre os espaços L^p e os de Marcinkiewicz $L^{(p,\infty)}$. Essa diferença, como veremos mais adiante, tem implicações diferentes sobre a de soluções auto similares nestes dois espaços. O fato de $L^{(p,\infty)}$ conter funções homogêneas e L^p não, é fundamental para que isso ocorra.

Proposição 1.16 *Sejam $1<p,r<\infty$ e $p\neq r$. Então $L^{(p,\infty)}\cap L^{(r,\infty)}$não é denso em $L^{(p,\infty)}$.*

Demonstração. Os espaços de Lorentz são espaços de interpolação entre os Espaços L^1 e L^∞ ([44], pag. 300), isto é, para $\frac{1}{p}=1-\theta$ tem-se

$$(L^1,L^\infty)_{\theta,q}=L^{(p,q)}.$$

Usando a fórmula de Holmstedt [44, Teorema 2.1, Capítulo 5], podemos estimar assintoticamente o $K-$funcional da interpolação entre os espaços $L^{(p,\infty)}$ e $L^{(r,\infty)}$ por

$$K(t^\delta,f,L^{(p,\infty)},L^{(r,\infty)})\simeq\sup_{0<s<t}\left(s^{-1/p'}\int_0^s f^*(\tau)\,d\tau\right)+t\sup_{s>t}\left(s^{-1/r'}\int_0^s f^*(\tau)\,d\tau\right), \tag{1.21}$$

onde $\delta=(r-p)/pr>0$.

Além disso, C. Bennett and R. Sharpley em [44, Proposição 1.15, Cápitulo 5] demonstram, em espaços de Banach abstratos, que $X_0\cap X_1$ é denso em X_0 se e somente se

$$\lim_{t\to 0}K(t,f,X_0,X_1)=0\;,$$

para toda $f\in X_0+X_1$. Tome $X_0=L^{(p,\infty)}$ e $X_1=L^{(r,\infty)}$. Considere a função homogênea de grau $-n/p$ dada por $|x|^{-n/p}$ que claramente pertence a $X_0=L^{(p,\infty)}$e não pertence a $X_1=L^{(r,\infty)}$. É fácil verificar usando (1.21) que $K(f,t)\to K^*>0$ quando $t\to 0$ e assim concluímos a demonstração. ∎

1.6 A Solução Fundamental do Calor em $\mathbb{R}^n$

Nesta seção iremos relembrar algumas propriedades da solução fundamental do calor em $\mathbb{R}^n$, ou simplesmente, o núcleo do calor, os quais serão úteis no estudo do sistema semilinear que abordaremos nesta tese.

Precisamos começar relembrando a definição de transformada de Fourier de uma função $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. A transformada de Fourier de $f \in L^2$ é

$$\mathfrak{F}(f)(\xi) = \widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i\xi\cdot x} dx.$$

Seja $g(t,x) = (4t\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$ definida em $(t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$. Para cada $t > 0$, $g(t,x)$ tem a seguinte transformada de Fourier:

$$\widehat{g}(t,\xi) = e^{-|\xi|^2 t}.$$

Note que $g(t,x)$ é a solução equação linear

$$\partial_t \phi - \Delta\phi = 0, \;\; t > 0 \;\text{ e }\; x \in \mathbb{R}^n. \tag{1.22}$$

De fato, aplicando formalmente a Transformada de Fourier em (1.22), obtemos uma equação linear equivalente em variáveis de Fourier

$$(\partial_t + |\xi|^2)\widehat{\phi}(t,\xi) = 0, \;\; t > 0 \;\text{ e }\; \xi \in \mathbb{R}^n,$$

a qual é satisfeita por $\widehat{g}(t,\xi)$. Por outro lado, $\lim_{t\to 0^+} g(t,x) = \delta_0$ em $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, o conjunto das distribuições temperadas. Assim, temos que $g(t,x)$ é uma solução fundamental de (1.22).

Observemos que valem as seguintes propriedades de homogeneidade para $g(t,x)$:

$$g(t,x) = t^{-\frac{n}{2}} g(1, xt^{-\frac{1}{2}}) \tag{1.23}$$

e

$$(\nabla_x^k g)(t,x) \;\; = \;\; t^{-\frac{n+k}{2}} (\nabla_x^k g)(1, xt^{-\frac{1}{2}}) \;\; (k = 1, 2, \cdots). \tag{1.24}$$

De fato, (1.23) segue de

$$\begin{aligned} g(t,x) = (4t\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} &= t^{-\frac{n}{2}} (4\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|t^{-\frac{1}{2}} x|^2}{4}} \\ &= t^{-\frac{n}{2}} g(1, t^{-\frac{1}{2}} x). \end{aligned}$$

A prova da igualdade (1.24) é uma aplicação da regra da cadeia k vezes na igualdade (1.23).

Observação 1.7 *Pela propriedade de homogeneidade (1.23),* $g(t,x) = t^{-\frac{n}{2}} g(1, t^{-\frac{1}{2}} x) = \varepsilon^{-n} \varphi(\frac{x}{\varepsilon})$, *onde* $\varepsilon = t^{\frac{1}{2}}$ *e* $\varphi = g(1,x)$*. Como* $\varepsilon \to 0$ *se e somente se* $t^{1/2} \to 0$*, e*

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(t,x)dx = \int t^{-\frac{n}{2}} g(1, t^{-\frac{1}{2}} x)dx = \int t^{-\frac{n}{2}+\frac{n}{2}} g(1,x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} (4\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4}} = 1,$$

pela Proposição 1.9 , concluímos que a família $g(t,x)$*, indexada em* $t > 0$*, é uma aproximação da identidade em* $L^{(p,q)}$*, para* $1 < p < \infty$ *e* $1 \leq q < \infty$*.*

Aqui deixe-nos denotar por $\{G(t)\}_{t \geq 0}$ *a família de operadores de convolução com os respectivos núcleos* $g(t,x)$*,* $t > 0$*, e no caso em que* $t = 0$*,* $G(0) = Id$*(identidade), a qual é a convolução com a dirac* δ_0*. Com isso, observe que* $\{G(t)\}_{t \geq 0}$ *define uma estrutura de semi-grupo em espaços de Lorentz, quando* $1 < p < \infty$ *e* $1 \leq q \leq \infty$*. Esse semi-grupo é contínuo quando* $q \neq \infty$ *e fracamente contínuo quando* $q = \infty$*. De fato, para* $q \neq \infty$*, como* $\{g(t,x)\}_{t \geq 0}$ *é uma aproximação da identidade, segue que,*

$$\lim_{t \to 0} \|G(t+s)u_0 - G(s)u_0\|_{(p,q)} = 0 \ (s > 0) \ \text{ e } \lim_{t \to 0+} \|G(t)u_0 - u_0\|_{(p,q)} = 0.$$

Por outro lado, no Capítulo 2 (ver (2.48)), iremos provar que, quando $u_0 \in L^{(p,\infty)}$ *e* $1 < p < \infty$*,*

$$\lim_{t \to 0+} \langle G(t)u_0 - u_0, \phi \rangle = 0$$

para toda $\phi \in L^{(p',1)}$*, onde* $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *denota o par dualidade (via integral) entre* $L^{(p,\infty)}$ *e* $L^{(p',1)}$*.*

Agora, mostraremos algumas estimativas já conhecidas do semi-grupo $G(t)$, em espaços de Lorentz $L^{(p,q)}$, que serão de grande valia para obtermos, futuramente, soluções para o sistema semilinear (1).

Lema 1.8 *Sejam* $1 < p \leq r < \infty$*,* $1 \leq d_1 \leq d_2 \leq \infty$ *e* $j \in \{0\} \cup \mathbb{N}$*. Se* $f \in L^{(p,d_1)}$*, então* $\nabla_x^i G(t) f \in L^{(r,d_2)}$ *e*

$$\|\nabla_x^j G(t) f\|_{(r,\, d_2)} \leq C\, t^{\frac{n}{2}(\frac{1}{r} - \frac{1}{p}) - \frac{j}{2}} \|f\|_{(p,\, d_1)} \tag{1.25}$$

Demonstração. Primeiro, observe que $\nabla_x^j G(t) f = (\nabla_x^j g(t,x)) * f$. Sejam $q \geq 1$, $l \geq 1$ tais que $1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ e $\frac{1}{d_1} + \frac{1}{l} \geq \frac{1}{d_2}$. Como $f \in L^{(p,d_1)}$ aplicando a Desigualdade Generalizada de Young (1.14) quando $p < r$ (no caso $p = r$, aplicamos (1.15)) , obtém-se $\nabla_x^j G(t) f \in L^{(r,d_2)}$ e

$$\|\nabla_x^j G(t) f\|_{(r,\, d_2)} \leq C(r) \|(\nabla_x^j g)(t,x)\|_{(q,\, l)} \|f\|_{(p,\, d_1)}. \tag{1.26}$$

Por outro lado pela igualdade (1.24) e a relação de escala em espaços de Lorentz $L^{(q,l)}$ (Propriedade (1.9)), obtemos

$$\begin{aligned}
\|(\nabla_x^j g)(t,x)\|_{(q,\,l)} &= \|t^{-\frac{n+j}{2}}(\nabla_x^j g)(1,xt^{-\frac{1}{2}})\|_{(q,\,l)} \\
&= t^{-\frac{n+j}{2}}\|(\nabla_x^j g)(1,xt^{-\frac{1}{2}})\|_{(q,\,l)} \\
&= t^{-\frac{n+j}{2}}t^{\frac{n}{2q}}\|(\nabla_x^j g)(1,xt^{-\frac{1}{2}})\|_{(q,\,l)} \\
&= C(q,l)t^{\frac{n}{2}(\frac{1}{r}-\frac{1}{p})-\frac{j}{2}}.
\end{aligned}$$

Substituindo $\|(\nabla_x^j g)(t,x)\|_{(q,l)} = C(q,l)t^{\frac{n}{2}(\frac{1}{r}-\frac{1}{p})-\frac{j}{2}}$ em (1.26) o resultado segue. ∎

Observação 1.8 *No caso dos espaços de Lebesgue L^r, pode-se provar (1.25) para $1 \leq p \leq r \leq \infty$ (assim, inclui-se os casos extremos $p = 1$ e $r = \infty$), isto é,*

$$\|\nabla_x^j G(t)f\|_r \leq C\,t^{\frac{n}{2}(\frac{1}{r}-\frac{1}{p})-\frac{j}{2}}\|f\|_p. \tag{1.27}$$

De fato, a prova é essencialmente a mesma do Lema 1.8, com excessão que neste caso, aplicamos a desigualdade de Young em L^r, a qual é dada por:

$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p\,\|g\|_q \tag{1.28}$$

para $1 \leq p,q,r \leq \infty$, com $1+\frac{1}{r} = \frac{1}{p}+\frac{1}{q}$ (ver [22, pg. 235]). Como a norma $\|g(t,x)\|_1 = 1$ $\forall\, t > 0$, note que no caso $j = 0$ $r = p$, a constante $C = 1$.

Proposição 1.17 *(Estimativa de Yamazaki) Seja $1 < p < q < \infty$. Existe uma constante $C > 0$ tal que,*

$$\int_0^\infty t^{\frac{n}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})-1}\|G(t)\phi\|_{(q,1)}\,ds \leq C\|\phi\|_{(p,1)} \tag{1.29}$$

para todo $\phi \in L^{(p,1)}(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração. Defina $\xi(t) = t^{\frac{n}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})-1}\|G(t)\phi\|_{(q,1)}$ e suponha $p_1 < p < p_2 < q$ tal que $(\frac{n}{p}-\frac{n}{p_2}) < 2$. De (1.25) para $1 < p_k < q < \infty$, $k = 1,2$ e $j = 0$, obtemos que

$$\xi(t) \leq Ct^{\frac{1}{2}(\frac{n}{p}-\frac{n}{p_k}-2)}\|\phi\|_{(p_k,1)}.$$

Seja $\frac{1}{l_k} = \frac{1}{2}(\frac{n}{p_k}-\frac{n}{p}+2)$ satisfazendo $0 < l_1 < 1 < l_2$. Assim, a propriedade anterior de $\xi(t)$ pode ser substituída por $\xi(t) \in L^{l_k,\infty}(0,\infty)$ e $\|\xi(t)\|_{(l_k,\infty)} \leq C\|\phi\|_{(p_k,1)}$, for $k = 1,2$. Agora, suponha

$\lambda \in (0,1)$ de maneira que $\frac{1}{p} = \frac{\lambda}{p_1} + \frac{1-\lambda}{p_2}$ e, portanto, $1 = \frac{\lambda}{l_1} + \frac{1-\lambda}{l_2}$. Assim, pela Proposição 1.14 e o fato dos espaços de Lorentz serem espaços de interpolação obtemos que

$$\|\xi(t)\|_{L^1(0,\infty)} \leq C\|\phi\|_{(p,1)},$$

pois

$$\left(L^{p_1,1}(\mathbb{R}^n), L^{p_2,1}(\mathbb{R}^n)\right)_{\lambda,1} = L^{p,1}(\mathbb{R}^n)$$

e

$$\left(L^{l_1,\infty}(0,\infty), L^{l_2,\infty}(0,\infty)\right)_{\lambda,1} = L^1(0,\infty).$$

■

Lema 1.9 *Sejam* $1 < p < q < \infty$*,* $u_0 \in L^p$ *e* $\alpha = \frac{n}{p} - \frac{n}{q}$*. Então*

$$\sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|G(t)u_0\|_q \leq C\|u_0\|_p \tag{1.30}$$

$$\lim_{t\to 0^+} t^{\frac{\alpha}{2}} \|G(t)u_0\|_q = 0, \; \lim_{t\to 0^+} \|G(t)u_0 - u_0\|_p = 0. \tag{1.31}$$

Demonstração. A desigualdade (1.30) segue diretamente de (1.27). De fato, basta tomar $j = 0$, $r = q$ e $p = p$ na desigualdade (1.27) para obtermos

$$\|G(t)u_0\|_q \leq C\, t^{-\frac{\alpha}{2}} \|u_0\|_p. \tag{1.32}$$

A seguir, mostraremos (1.31). Pela Observação 1.7, temos que $\{g(t,x)\}_{t>0}$ é uma aproximação da identidade em L^p. Portanto $G(t)u_0 \to u_0$, $t \to 0$, quando $u_0 \in L^p$. Para concluir (1.31), falta mostrar a convergência para zero da norma q. Como $L^p \cap L^q$ é denso em L^q, existe uma sequência, $\{u_{0,k}\}$ em $L^p \cap L^q$, tal que, $u_{0,k} \overset{k\to\infty}{\to} u_0$ em L^p. Aplicando a desigualdade (1.27) com $r = p = q$, obtemos $\|G(t)u_{0,k}\|_q \leq C\|u_{0,k}\|_q$, quando $u_{0,k} \in L^q$. Logo, $\lim_{t\to 0^+} t^{\frac{\alpha}{2}} \|G(t)u_{0,k}\|_q \leq C \lim_{t\to 0^+} t^{\frac{\alpha}{2}} \|u_{0,k}\|_q = 0$. Mas, pela desigualdade (1.30), temos $t^{\frac{\alpha}{2}} \|G(t)u_{0,k}\|_q \in BC((0,\infty); L^q)$ e

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} t^{\frac{\alpha}{2}} \|G(t)u_{0,k} - G(t)u_0\|_q &= \lim_{k\to\infty} t^{\frac{\alpha}{2}} \|G(t)(u_{0,k} - u_0)\|_q \\
&\leq C \lim_{k\to\infty} \|u_{0,k} - u_0\|_p = 0.
\end{aligned}$$

Ou seja, a convergência da sequência $\{t^{\frac{\alpha}{2}} \|G(t)u_{0,k}\|_q\}_k$ é uniforme em $t \in (0,\infty)$. Portanto, podemos comutar o limite e obter

$$\lim_{t\to 0^+} t^{\frac{\alpha}{2}} \|G(t)u_0\|_q = \lim_{k\to\infty} \big(\lim_{t\to 0^+} t^{\frac{\alpha}{2}} \|G(t)u_{0,k}\|\big) = 0.$$

■

Observação 1.9 *Para um dado arbitrário $u_0 \in L^{(p,\infty)}$, a versão fraca das igualdades (1.31) não são verdadeiras. Ou seja, afirmamos que*

$$\lim_{t\to 0^+} t^{\frac{\alpha}{2}} \|G(t)u_0\|_{(q,\infty)} \neq 0 \quad e \quad \lim_{t\to 0^+} \|G(t)u_0 - u_0\|_{(p,\infty)} \neq 0. \tag{1.33}$$

Com efeito, suponha que $\lim_{t\to 0^+} t^{\frac{\alpha}{2}} \|G(t)u_0\|_{(q,\infty)} = 0$ seja verdadeira. Considere $u_0(x) = \frac{1}{|x|^{\frac{n}{p}}} \in L^{(p,\infty)}$ e $u_1(t,x) = G(t)u_0(x) = g(t,x) * u_0$. Usando a propriedade de homogeneidade do núcleo do calor (1.23), obtemos $u_1(t,x) = \lambda^{\frac{n}{p}} u_1(\lambda^2 t, \lambda x)$ (Para maiores detalhes ver prova Corolário 2.3). Usando $\lambda = t^{-\frac{1}{2}}$ e a relação de escala (1.9) em espaços de Lorentz, temos

$$\begin{aligned}
0 = \lim_{t\to 0^+} t^{\frac{\alpha}{2}} \|u_1(t,x)\|_{(q,\infty)} &= \lim_{t\to 0^+} t^{\frac{\alpha}{2}} \lambda^{\frac{n}{p}} \|u_1(\lambda^2 t, \lambda x)\|_{(q,\infty)} \\
&= \lim_{t\to 0^+} t^{\frac{\alpha}{2} - \frac{n}{2p} + \frac{n}{2q}} \|u_1(1,x)\|_{(q,\infty)} \\
&= \lim_{t\to 0^+} \|u_1(1,x)\|_{(q,\infty)} = \|u_1(1,x)\|_{(q,\infty)}.
\end{aligned}$$

Assim, $u_1(1,x) = 0$ q.t.p.. Portanto, obtém-se uma contradição, pois u_0 e $g(t,x)$ são não nulas e, no entanto, $g(t,x) * u_0 = u_1(t,x) = t^{-\frac{1}{2}} u_1(1, t^{-\frac{1}{2}} x) = 0$, para $t > 0$ e $x \in \mathbb{R}^n$. A contradição para igualdade envolvendo a norma $\|\cdot\|_{(p,\infty)}$ segue de maneira semelhante.

Capítulo 2

Existência de Soluções Brandas para um Sistema Semilinear do Calor

Neste capítulo estamos interessados em estudar o problema de Cauchy para o seguinte sistema semilinear parabólico

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = g_1(u,v), & x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0 \\ v_t - \Delta v = g_2(u,v), & x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0 \\ u(0) = u_0,\ \ v(0) = v_0 & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{2.1}$$

onde

$$g_1(u,v) = |u|^{(\rho_1-1)}u|v|^{(\rho_2-1)}v \text{ e } g_2(u,v) = |u|^{(r_1-1)}u|v|^{(r_2-1)}v, \tag{2.2}$$

$1 < \rho_i, r_i < \infty$, $i = 1,2$ e $n \in \mathbb{N}$. Analisamos a boa-colocação do problema de valor inicial (2.1) no produto de espaços de Marcinkiewicz $L^{(p_1,\infty)} \times L^{(p_2,\infty)}$. Obtemos soluções brandas no espaço com a homogeneidade certa para a existência de soluções auto-similares. Mostramos também que o espaço $C([0,\infty); L^{p_1}(\mathbb{R}^n) \times L^{p_2}(\mathbb{R}^n))$ é suficiente para garantir a unicidade das soluções sem assumir qualquer condição de pequenez. Analisamos a boa-colocação do problema de valor inicial (2.1) no produto de espaços de Lebesgue $L^{p_1} \times L^{p_2}$. Assumindo mais regularidade para o dado inicial, mostramos um decaimento para a solução maior que o fornecido pela normas do espaço $\tilde{E}_{q_1q_2}$ (ver Definição 2.5). Com essas estimativas e um argumento de densidade, provamos que a órbita no espaço de Lebesgue $L^{p_1} \times L^{p_2}$ converge para zero. Finalizamos com um teorema de estabilidade assintótica, nos espaços de Marcinkiewicz, que garante a existência de uma bacia atratora para cada solução auto-similar.

2.1 Resultados de Boa-colocação em $L^{(p,\infty)}$

O objetivo desta seção é obter resultados de boa-colocação nos espaços $L^{(p_1,\infty)} \times L^{(p_2,\infty)}$. Faremos também algumas considerações sobre a boa colocação no espaço de Lebesgue $L^{p_1} \times L^{p_2}$.

2.1.1 Relação de Escala e Espaços Funcionais

Com o intuito de encontrar espaços funcionais adequados para o estudo do problema de Cauchy (2.1), iniciaremos com a análise da relação de escala do sistema (2.1). Suponha que (u,v) é uma solução clássica do problema (2.1), e k_1, k_2 números reais tais que

$$u_\lambda(t,x) = \lambda^{k_1} u(\lambda^2 t, \lambda x), \;\; v_\lambda(t,x) = \lambda^{k_2} v(\lambda^2 t, \lambda x)$$

é também uma solução de (2.1). Substituindo $u_\lambda(t,x), v_\lambda(t,x)$ em (2.1) obtemos

$$\lambda^{k_1+2} u(\lambda^2 t, \lambda x) - \lambda^{k_1+2} \Delta u(\lambda^2 t, \lambda x) = \lambda^{k_1\rho_1 + k_2\rho_2} |u|^{\rho_1 - 1} u(\lambda^2 t, \lambda x) |v|^{\rho_2 - 1} v(\lambda^2 t, \lambda x)$$

$$\lambda^{k_2+2} v(\lambda^2 t, \lambda x) - \lambda^{k_2+2} \Delta v(\lambda^2 t, \lambda x) = \lambda^{k_1 r_1 + k_2 r_2} |u|^{r_1 - 1} u(\lambda^2 t, \lambda x) |v|^{r_2 - 1} v(\lambda^2 t, \lambda x).$$

para todo $\lambda > 0$, $t > 0$ e $x \in \mathbb{R}^n$. Usando o fato que (u,v) é uma solução de (2.1), encontramos o seguinte sistema relacionando $k_1, k_2, \rho_1, \rho_2, r_1, r_2$:

$$\begin{cases} k_1(\rho_1 - 1) + k_2\rho_2 = 2 \\ k_1 r_1 + k_2(r_2 - 1) = 2. \end{cases} \tag{2.3}$$

A única solução para esse sistema é dada por

$$k_1 = \frac{2(r_2 - \rho_2 - 1)}{(\rho_1 - 1)(r_2 - 1) - r_1\rho_2} \;\text{ e }\; k_2 = \frac{2(\rho_1 - r_1 - 1)}{(\rho_1 - 1)(r_2 - 1) - r_1\rho_2} \tag{2.4}$$

desde que o determinante $(\rho_1 - 1)(r_2 - 1) - r_1\rho_2 \neq 0$.

Denotamos $\omega(t,x) = (u(t,x), v(t,x))$ e $\omega_\lambda(t,x) = (\lambda^{k_1} u(\lambda^2 t, \lambda x), \lambda^{k_2} v(\lambda^2 t, \lambda x))$. Com isso surge uma pergunta natural: Existe uma solução particular de (2.1) satisfazendo

$$\omega(t,x) = \omega_\lambda(t,x), \tag{2.5}$$

para todo $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda > 0$?

Estas soluções são chamadas *soluções auto-similares* do problema e é claro que fazendo $t \longrightarrow 0^+$ em (2.5), $u_0 = u(0,x)$ e $v_0 = v(0,x)$ devem ser funções homogêneas de graus $-k_1$ e $-k_2$, respectivamente. Esta observação sugere que um espaço adequado para encontrar soluções auto-similares deverá ser um espaço que contenha funções homogêneas de grau $-k_1$ na primeira e $-k_2$ na segunda coordenada. Por exemplo, $(u_0, v_0) \in L^{(p_1,\infty)} \times L^{(p_2,\infty)}$ com $p_i = \frac{n}{k_i}$, $k_i > 0$, para $i = 1,2$.

Definição 2.1 *Sejam $p_i = \frac{n}{k_i}$, $1 < p_i \leq \infty$, $1 < q_i \leq \infty$, para $i = 1,2$ onde k_i é dado por (2.4), $\alpha = \frac{n}{p_1} - \frac{n}{q_1}$ e $\beta = \frac{n}{p_2} - \frac{n}{q_2}$. Definimos os seguintes espaços de Banach*

$$E \equiv BC((0,\infty); L^{(p_1,\infty)} \times L^{(p_2,\infty)})$$

$$E_{q_1 q_2} \equiv \{(u,v) \in E : (t^{\alpha/2}u, t^{\beta/2}v) \in BC((0,\infty); L^{(q_1,\infty)} \times L^{(q_2,\infty)})\},$$

com normas definidas, respectivamente, como

$$\|(u,v)\|_E = \max\{\sup_{t>0} \|u\|_{(p_1,\infty)}, \sup_{t>0} \|v\|_{(p_2,\infty)}\}$$

$$\|(u,v)\|_{E_{q_1 q_2}} = \|(u,v)\|_E + \max\{\sup_{t>0} t^{\alpha/2} \|u(t)\|_{(q_1,\infty)}, \sup_{t>0} t^{\beta/2} \|v(t)\|_{(q_2,\infty)}\}.$$

Aqui, denotamos $BC((0,T);X)$ como a classe das funções contínuas e limitadas, no intervalo correspondente, com valores no espaço de Banach X.

Agora estamos prontos para formalizar a definição de *solução branda* que usaremos no decorrer deste capítulo.

Definição 2.2 *Uma solução branda global do sistema (2.1) em E, com condição inicial $\omega_0 = (u_0, v_0)$, é um par $\omega = (u(t), v(t)) \in E$, satisfazendo*

$$(u(t), v(t)) = (G(t)u_0, G(t)v_0) + B(u,v)(t), \tag{2.6}$$

onde

$$B(u,v)(t) = \left(\int_0^t G(t-s)|u|^{\rho_1 - 1}u|v|^{\rho_2 - 1}v ds \ , \ \int_0^t G(t-s)|u|^{r_1 - 1}u|v|^{r_2 - 1}v ds \right)$$

e

$$u(t) \rightharpoonup u_0 \ \ e \ \ v(t) \rightarrow v_0 \ quando \ \ t \rightarrow 0^+$$

sendo o limite tomado na topologia fraca-$*$ de $L^{(p_1,\infty)}$ e $L^{(p_2,\infty)}$, respectivamente.

Mostraremos os seguintes teoremas de boa-colocação para o sistema (2.1).

Teorema 2.1 *Sejam* $n \geq 3$, $1 < \rho_i < p_i$, $1 < r_i < p_i$, *com* $p_i > \frac{n}{n-2}$, $i = 1,2$, *e* $(u_0, v_0) \in L^{(p_1,\infty)} \times L^{(p_2,\infty)}$.

1. *(Boa - Colocação) Existem* $\varepsilon > 0$ *e uma constante* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, *tal que, se* $\|u_0\|_{(p_1,\infty)} < \delta, \|v_0\|_{(p_2,\infty)} < \delta$, *então o sistema (2.1) tem uma solução branda global* $(u,v) \in E$, *com condição inicial* $\omega_0 = (u_0, v_0)$. *A solução* ω *é a única na bola fechada* $\overline{B}_E(0, 2\varepsilon)$.

2. *Suponha que* $u_0 \in L^{(p_1,\infty)} \cap L^{(a_1,\infty)}$ *e* $v_0 \in L^{(p_2,\infty)} \cap L^{(a_2,\infty)}$, *com* $a_i > \frac{n}{n-2}$, $i = 1,2$. *Existe* $\delta_{a_1,a_2} > 0$ *com* $0 < \delta_{a_1,a_2} \leq \delta$, *tal que, se* $\|u_0\|_{(p_1,\infty)} < \delta_{a_1,a_2}, \|v_0\|_{(p_2,\infty)} < \delta_{a_1,a_2}$, *então a solução* $(u(t,x), v(t,x))$, *obtida no item 1, verifica que* $(u,v) \in BC((0,\infty), L^{(a_1,\infty)} \times L^{(a_2,\infty)})$.

3. *(Regularização) Para quaisquer* $p_1 < q_1$, $p_2 < q_2$ *satisfazendo* $\frac{\alpha}{2}\rho_1 + \frac{\beta}{2}\rho_2 < 1$, $\frac{\alpha}{2}r_1 + \frac{\beta}{2}r_2 < 1$, *existe* $0 < \delta_{q_1 q_2} < \delta$, *tal que, se* $\|u_0\|_{(p_1,\infty)} < \delta_{q_1,q_2}, \|v_0\|_{(p_2,\infty)} < \delta_{q_1 q_2}$, *então a solução* $(u(t,x), v(t,x))$, *obtida no item 1, pertence a* $E_{q_1 q_2}$.

Pela Proposição 1.6 a inclusão $L^{p_1} \subset L^{(p_1,\infty)}$ é contínua e, como conseqüência, temos a inclusão $C([0,T), L^{p_1} \times L^{p_2}) \subset C\left([0,T), L^{(p_1,\infty)} \times L^{(p_2,\infty)}\right)$. O item 1 do Teorema 2.1 indica unicidade de soluções na classe $C\left([0,T), L^{(p_1,\infty)} \times L^{(p_2,\infty)}\right)$, e portanto na subclasse $C([0,T); L^{p_1} \times L^{p_2})$, quando as soluções são suficientemente pequenas. No caso da subclasse mencionada, essa hipótese de pequenez pode ser retirada, como garante o próximo resultado. Este último não pode ser estendido para os espaços de Marcinkiewicz $L^{(p_1,\infty)} \times L^{(p_2,\infty)}$, essencialmente, e como ficará claro na prova do Teorema 2.2, porque não se verifica o Lema 1.9 no contexto deste espaços (ver Observação 1.9). Deixe-nos lembrar que isto está relacionado com o fato de $L^{(p,\infty)}$ conter funções homogêneas e a interseção de dois $L^{(p,\infty)}$ não ser densa em nenhum deles (ver Proposição 1.16).

Teorema 2.2 *(Unicidade em* $C([0,\infty); L^{p_1} \times L^{p_2})$*) Suponha* $1 < \rho_i < p_i$, $1 < r_i < p_i$, *com* $p_i > \frac{n}{n-2}$, $i = 1,2$. *Sejam* (u,v) *e* $(\widetilde{u}, \widetilde{v})$ *duas soluções brandas de (2.1) na classe* $C([0,\infty); L^{p_1} \times L^{p_2})$ *com condição inicial* $(u_0, v_0) \in L^{p_1} \times L^{p_2}$. *Então* $u = \widetilde{u}$ *e* $v = \widetilde{v}$.

Observação 2.1 *(Comentários e resultados adicionais)*

- *As condições dadas no Teorema 2.1 são não vazias. De fato, é suficiente notar que caso* $r_2 - 1 > \rho_2$ *e* $\rho_1 - 1 > r_1$*, com* $r_2 - 1$ *e* $\rho_1 - 1$ *suficientemente próximos de* ρ_2 *e* r_1 *respectivamente, obtemos* $0 < k_i < n$*,* $i = 1,2$ *. Note que, por continuidade, podemos escolher* q_i *suficientemente próximo de* p_i *de maneira que* $\frac{\alpha}{2}\rho_1 + \frac{\beta}{2}\rho_2 < 1$ *e* $\frac{\alpha}{2}r_1 + \frac{\beta}{2}r_2 < 1$.

- *No Teorema 2.1, podemos incluir o caso* $n = 2$ *e substituir a condição* $p_i > \frac{n}{n-2}$*,* $i = 1,2$*, por uma mais conveniente. Para isso, temos que fazer a análise e as estimativas usando a norma auxiliar ou regularizante, isto é, trabalhar na norma do espaço* $E_{q_1q_2}$*. Por exemplo, a condição* $p_1 > \frac{n}{n-2}$ *vem da estimativa (2.23 e 2.24), onde precisamos que* $p_1' < \frac{n}{2}$*; usando a norma regularizante, podemos substituí-la por*
$$\frac{1}{p_1} < 1 - \frac{\rho_1 - 1}{q_1} - \frac{\rho_2}{q_2}.$$
Por outro lado, nesse caso perderíamos a estimativa (2.8) no espaço E*, a qual é fundamental para provar a unicidade de soluções dada no Teorema 2.2.*

- *Supondo que* $\limsup_{t\to 0} t^{\frac{\alpha}{2}}\|G(t)u_0\|_{(q_1,\infty)}$ *e* $\limsup_{t\to 0} t^{\frac{\beta}{2}}\|G(t)v_0\|_{(q_2,\infty)}$ *são suficientemente pequenas, o Teorema 2.1 tem uma versão correspondente para soluções locais no tempo: Basta supor o tempo suficientemente pequeno em vez de supor condições iniciais suficientemente pequenas, e proceder como na prova do Teorema 2.4 da seção 2.2 (soluções locais em espaços de Lebesgue), trocando os espaços* $E_{q_1q_2}$ *pelos espaços* $\widetilde{E}_{q_1q_2}$*. Como veremos na seção 2.2, no caso da análise no espaço de Lebesgue, esta condição não é necessária, pois pelo Lema 1.9, já sabemos que*
$$\limsup_{t\to 0^+} t^{\frac{\alpha}{2}}\|G(t)u_0\|_{q_1} = 0 \text{ e } \limsup_{t\to 0^+} t^{\frac{\beta}{2}}\|G(t)v_0\|_{q_2} = 0.$$

- *Supondo que* $(u_0, v_0) \in L^{(r,\infty)} \times L^{(\widetilde{r},\infty)}$ *com* $r > p_1$ $\widetilde{r} > p_2$*, podemos resolver o problema de valor inicial (2.1) na classe* $C([0,T); L^{(r,\infty)} \times L^{(\widetilde{r},\infty)})$*, onde* $0 < T < \infty$*. Neste caso a prova é mais simples. Podemos estimar diretamente a norma do termo não linear, sem usar argumentos de dualidade e interpolação ou abordagem com duas normas. É necessário apenas as estimativas do semi-grupo (1.8), e a desigualdade de Hölder em espaços de Marcinkiewicz.*

- *Todos os teoremas relativos ao sistema (2.1) continuariam verdadeiros, se substituíssimos os termos de acoplamento*
$$g_1(u,v) = |u|^{(\rho_1-1)}u|v|^{(\rho_2-1)}v \text{ e } g_2(u,v) = |u|^{(r_1-1)}u|v|^{(r_2-1)}v, \tag{2.7}$$

por quaisquer outros g_i que satisfaçam

$$|g_1(u,v)-g_1(\widetilde{u},v)| \leq C\,|u-\widetilde{u}|\,(|u|^{(\rho_1-1)}+|\widetilde{u}|^{(\rho_1-1)})|v|^{\rho_2},$$
$$|g_1(u,v)-g_1(u,\widetilde{v})| \leq C\,|v-\widetilde{v}|\,(|v|^{(\rho_2-1)}+|\widetilde{v}|^{(\rho_2-1)})|u|^{\rho_1},$$

as mesmas desigualdades para g_2, apenas trocando ρ_i por r_i, $i=1,2$. Observe que se g_i é como em (2.7), então ele satisfaz a propriedade acima. Note também que usamos essa propriedade para mostrar que $B(u,v)$ satisfaz a estimativa (2.8) do Lema 2.1 com o correspondente espaço de Banach X. Por exemplo, no caso $X=E$, ver estimativa (2.41).

2.1.2 Demonstração do Teorema 2.1

Neste seção apresentaremos a prova do Teorema 2.1, enunciado na seção anterior. Iniciaremos com um lema técnico para uma equação não-linear em um espaço de Banach X, com uma estrutura relacionada a do sistema (2.1). Esse lema será útil para evitarmos enfadonhas contas de ponto fixo no decorrer desta tese. A prova é baseada no método de interação de Picard com o auxílio do Teorema do ponto fixo de Banach.

Lema 2.1 *Sejam $1<\rho_i,r_i<\infty$, $i=1,2$, X um espaço de Banach com norma $\|\cdot\|$ e $B:X\to X$ uma aplicação, tal que, $B(0)=0$ e satisfaz a seguinte condição:*

$$\begin{aligned}\|B(x)-B(z)\| \;\leq\;& K\|x-z\|\{\left(\|x\|^{\rho_1-1}+\|z\|^{\rho_1-1}\right)\|x\|^{\rho_2}+\left(\|x\|^{\rho_2-1}+\|z\|^{\rho_2-1}\right)\|z\|^{\rho_1}\\ &+\;\left(\|x\|^{r_1-1}+\|z\|^{r_1-1}\right)\|x\|^{r_2}+\left(\|x\|^{r_2-1}+\|z\|^{r_2-1}\right)\|z\|^{r_1}\},\end{aligned} \tag{2.8}$$

para todo x e $z\in X$. Seja $R>0$ a única raiz positiva de $2^{\rho_1+\rho_2+1}R^{\rho_1+\rho_2-1}+2^{r_1+r_2+1}R^{r_1+r_2-1}-\frac{1}{K}=0$. Dado $0<\varepsilon<R$ e $y\in X$, $y\neq 0$, tal que $\|y\|\leq\varepsilon$, existe uma solução $x\in X$ para a equação $x=y+B(x)$ satisfazendo $\|x\|\leq 2\varepsilon$. A solução x é única na bola fechada $B_{2\varepsilon}:=\overline{B}(0,2\varepsilon)$. Além disso, a solução depende continuamente de y no seguinte sentido: se $\|\tilde{y}\|\leq\varepsilon$, $\tilde{x}=\tilde{y}+B(\tilde{x})$, e $\|\tilde{x}\|\leq 2\varepsilon$, então

$$\|x-\tilde{x}\| \leq \frac{1}{1-\left(2^{\rho_1+\rho_2+1}K\varepsilon^{\rho_1+\rho_2-1}+2^{r_1+r_2+1}K\varepsilon^{r_1+r_2-1}\right)}\|y-\tilde{y}\|. \tag{2.9}$$

Demonstração. Defina $F:X\to X$ como $F(x)=y+B(x)$. Afirmamos que F é uma contração na bola $B_{2\varepsilon}$. De fato: Primeiramente note que $F(B_{2\varepsilon})\subset B_{2\varepsilon}$, pois se $x\in B_{2\varepsilon}$, tomando $z=0$ em

(2.8) e usando que $0<\varepsilon<R$, temos que

$$
\begin{aligned}
\|F(x)\| &\leq \|y\|+\|B(x)\| \leq \|y\|+K\left(\|x\|^{\rho_1+\rho_2}+\|x\|^{r_1+r_2}\right) && (2.10)\\
&\leq \varepsilon+2^{\rho_1+\rho_2}K\varepsilon^{\rho_1+\rho_2}+2^{r_1+r_2}K\varepsilon^{r_1+r_2} && (2.11)\\
&\leq \varepsilon+\varepsilon(2^{\rho_1+\rho_2+1}\varepsilon^{\rho_1+\rho_2-1}+2^{r_1+r_2+1}\varepsilon^{r_1+r_2-1})K<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon.
\end{aligned}
$$

Agora, sejam $x,z\in B_{2\varepsilon}$. Temos que

$$
\begin{aligned}
\|F(x)-F(z)\| \leq \|B(x)-B(z)\| &\leq K\|x-z\|[\left(\|x\|^{\rho_1-1}+\|z\|^{\rho_1-1}\right)\|x\|^{\rho_2}\\
&+\left(\|x\|^{\rho_2-1}+\|z\|^{\rho_2-1}\right)\|z\|^{\rho_1}+\left(\|x\|^{r_1-1}+\|z\|^{r_1-1}\right)\|x\|^{r_2}\\
&+\left(\|x\|^{r_2-1}+\|z\|^{r_2-1}\right)\|z\|^{r_1}]\\
&\leq \left(2^{\rho_1+\rho_2+1}K\varepsilon^{\rho_1+\rho_2-1}+2^{r_1+r_2+1}K\varepsilon^{r_1+r_2-1}\right)\|x-z\|<\|x-z\|,
\end{aligned}
$$

onde novamente na última desigualdade usamos $2^{\rho_1+\rho_2+1}K\varepsilon^{\rho_1+\rho_2-1}+2^{r_1+r_2+1}K\varepsilon^{r_1+r_2-1}<1$, uma vez que $0<\varepsilon<R$. Logo a aplicação F é uma contração na bola $B_{2\varepsilon}$. Pelo Teorema do ponto fixo de Banach, concluímos as afirmações de existência e unicidade do lema, e a solução x é obtida através do método de aproximações sucessivas . Com efeito, defina a seqüencia

$$
\begin{aligned}
x_1 &= y\\
x_{n+1} &= F(x_n),\ n=1,2,3...
\end{aligned}
$$

A solução x é obtida como limite da seqüencia $\{x_n\}$ em X. Para mostrar a continuidade do operador em relação ao parâmetro y, seja $\tilde{x}$ e x como definidos no enunciado do lema. Então, temos

$$
\begin{aligned}
\|x-\tilde{x}\| \leq \|y-\tilde{y}\|+\|B(x)-B(\tilde{x})\| \leq \|y-\tilde{y}\|+(2^{\rho_1+\rho_2+1}K\varepsilon^{\rho_1+\rho_2-1} && (2.12)\\
+2^{r_1+r_2+1}K\varepsilon^{r_1+r_2-1})\|x-\tilde{x}\|,
\end{aligned}
$$

o que implica na desigualdade (2.9), uma vez que

$$0<\varepsilon<R \quad \text{e } (2^{\rho_1+\rho_2+1}\varepsilon^{\rho_1+\rho_2-1}+2^{r_1+r_2+1}\varepsilon^{r_1+r_2-1})K<1.$$

■

Demonstração do Item 1 do Teorema 2.1

Começaremos descrevendo a estrutura geral da prova. Primeiramente, provaremos a propriedade (2.8) do Lema 2.1 para termo não linear $B(u,v)$ da equação integral (2.6) com $X=E$.

Depois, usando o Lema 1.8 obteremos uma estimativa para a parte linear e, finalmente, aplicaremos o Lema 2.1 para obtermos os resultados de boa-colocação.

Considere a termo não-linear $B(u,v)$ da equação integral (2.6) definida como:

$$B(u,v)(t) \equiv \left(B_1(u,v)(t), B_2(u,v)(t)\right), \tag{2.13}$$

$$B_1(u,v) = \int_0^t G(t-s)|u|^{\rho_1-1}u|v|^{\rho_2-1}v ds, \quad B_2(u,v) = \int_0^t G(t-s)|u|^{r_1-1}u|v|^{r_2-1}v ds.$$

Considere o operador não-linear $F(h_1,h_2)(x) = (F_1(h_1,h_2)(x), F_2(h_1,h_2)(x))$,

$$F_1(h_1,h_2)(x) = \int_0^\infty G(s)(|h_1|^{\rho_1-1}h_1|h_2|^{\rho_2-1}h_2)(s)ds, \tag{2.14}$$

$$F_1(h_1,h_2)(x) = \int_0^\infty G(s)(|h_1|^{r_1-1}h_1|h_2|^{r_2-1}h_2)(s)ds, \tag{2.15}$$

e $G(s)$ é o semi-grupo do calor.

O próximo lema diz respeito a uma propriedade do operador $F(h_1,h_2)$, que será usada para mostrar a propriedade (2.8) do Lema 2.1 da parte não-linear $B(u,v)$ da equação integral (2.6).

Antes de enunciarmos o mencionado lema, deixe-nos relembrar uma bem conhecida desigualdade de números reais, a qual será útil para nossos fins.

Para $1 < p < \infty$, existe uma constante $C > 0$, tal que

$$\left||a|^{p-1}a - |b|^{p-1}b\right| \le C|a-b|\left||a|^{p-1} + |b|^{p-1}\right|, \quad \forall a,b \in \mathbb{R}. \tag{2.16}$$

Lema 2.2 *Sejam* $1 < \rho_i < p_i, \ \ 1 < r_i < p_i$, *com* $p_i > \frac{n}{n-2}$, $i = 1,2$. *Se* $(h_1,h_2) \in L^\infty((0,\infty); L^{(p_1,\infty)} \times L^{(p_2,\infty)})$, *então*

$$\|F_1(h_1,h_2) - F_1(\widetilde{h}_1,\widetilde{h}_2)\|_{(p_1,\infty)} \le K_1\{\sup_{t>0}\|(h_1-\widetilde{h}_1)\|_{(p_1,\infty)}\,(\sup_{t>0}\|h_1\|^{\rho_1-1}_{(p_1,\infty)} +$$
$$\sup_{t>0}\|\widetilde{h}_1\|^{\rho_1-1}_{(p_1,\infty)})\sup_{t>0}\|h_2\|^{\rho_2}_{(p_2,\infty)} + \sup_{t>0}\|(h_2-\widetilde{h}_2)\|_{(p_2,\infty)}\sup_{t>0}(\|h_2\|^{\rho_2-1}_{(p_2,\infty)} + \|\widetilde{h}_2\|^{\rho_2-1}_{(p_2,\infty)})\sup_{t>0}\|\widetilde{h}_1\|^{\rho_1}_{(p_1,\infty)}\} \tag{2.17}$$

$$\|F_2(h_1,h_2)-F_2(\widetilde{h}_1,\widetilde{h}_2)\|_{(p_2,\infty)} \leq K_2\{\sup_{t>0}\|(h_2-\widetilde{h}_2)\|_{(p_2,\infty)}\ (\sup_{t>0}\|h_2\|^{r_2-1}_{(p_2,\infty)}+$$
$$\sup_{t>0}\|\widetilde{h_2}\|^{r_2-1}_{(p_2,\infty)})\sup_{t>0}\|h_1\|^{r_1}_{(p_1,\infty)}+\sup_{t>0}\|(h_1-\widetilde{h}_1)\|_{(p_1,\infty)}\sup_{t>0}(\|h_1\|^{r_1-1}_{(p_1,\infty)}+\|\widetilde{h_1}\|^{r_1-1}_{(p_1,\infty)})\sup_{t>0}\|\widetilde{h}_2\|^{r_2}_{(p_2,\infty)}\} \tag{2.18}$$

onde K_1 e K_2 são constantes independentes de $h_1,\widetilde{h}_1,h_1$ e $\widetilde{h}_2$. Além disso, assuma que $a_i > \frac{n}{n-2}$, $i=1,2$. Se $(h_1,h_2)\in L^\infty((0,\infty);L^{(p_1,\infty)}\cap L^{(a_1,\infty)}\times L^{(p_2,\infty)}\cap L^{(a_2,\infty)})$. Então

$$\|F_1(h_1,h_2)-F_1(\widetilde{h}_1,\widetilde{h}_2)\|_{(a_1,\infty)} \leq K_{a_1}\{\sup_{t>0}\|(h_1-\widetilde{h}_1)\|_{(a_1,\infty)}\ (\sup_{t>0}\|h_1\|^{\rho_1-1}_{(p_1,\infty)}+$$
$$\sup_{t>0}\|\widetilde{h_1}\|^{\rho_1-1}_{(p_1,\infty)})\sup_{t>0}\|h_2\|^{\rho_2}_{(p_2,\infty)}+\sup_{t>0}\|(h_2-\widetilde{h_2})\|_{(a_2,\infty)}\sup_{t>0}(\|h_2\|^{\rho_2-1}_{(p_2,\infty)}+\|\widetilde{h_2}\|^{\rho_2-1}_{(p_2,\infty)})\sup_{t>0}\|\widetilde{h_1}\|^{\rho_1}_{(p_1,\infty)}\} \tag{2.19}$$

$$\|F_2(h_1,h_2)-F_2(\widetilde{h}_1,\widetilde{h}_2)\|_{(a_2,\infty)} \leq K_{a_2}\{\sup_{t>0}\|(h_2-\widetilde{h}_2)\|_{(a_2,\infty)}\ (\sup_{t>0}\|h_2\|^{r_2-1}_{(p_2,\infty)}+$$
$$\sup_{t>0}\|\widetilde{h_2}\|^{r_2-1}_{(p_2,\infty)})\sup_{t>0}\|h_1\|^{r_1}_{(p_1,\infty)}+\sup_{t>0}\|(h_1-\widetilde{h}_1)\|_{(a_1,\infty)}\ (\sup_{t>0}\|h_1\|^{r_1-1}_{(p_1,\infty)}+\sup_{t>0}\|\widetilde{h_1}\|^{r_1-1}_{(p_1,\infty)})\sup_{t>0}\|\widetilde{h}_2\|^{r_2}_{(p_2,\infty)}\} \tag{2.20}$$

onde K_{a_1} e K_{a_2} são constantes independentes de $h_1,\widetilde{h}_1,h_1$ e $\widetilde{h}_2$.

Demonstração. Para provar o lema, vamos estimar cada coordenada separadamente. Considere o operador linear

$$F_1(h_1,h_2)(x)=\int_0^\infty G(s)(|h_1|^{\rho_1-1}h_1|h_2|^{\rho_2-1}h_2)(s)ds,$$

onde $G(s)$ é o semi-grupo do calor.

Inicialmente note que

$$\begin{aligned}\|F_1(h_1,h_2)-F_1(\widetilde{h}_1,\widetilde{h}_2)\|_{(p_1,\infty)} &= \|F_1(h_1,h_2)-F_1(\widetilde{h}_1,h_2)+F_1(\widetilde{h}_1,h_2)-F_1(\widetilde{h}_1,\widetilde{h}_2)\|_{(p_1,\infty)}\\ &\leq \|F_1(h_1,h_2)-F_1(\widetilde{h}_1,h_2)\|_{(p_1,\infty)}+\|F_1(\widetilde{h}_1,h_2)-F_1(\widetilde{h}_1,\widetilde{h}_2)\|_{(p_1,\infty)}\end{aligned} \tag{2.21}$$

Vamos estimar $\|F_1(h_1,h_2)-F_1(\widetilde{h}_1,h_2)\|_{(p_1,\infty)}$. Da dualidade em espaços de Lorentz (Proposição 1.6) e de propriedades de convolução temos

$$\begin{aligned}
\| \quad & F_1(h_1,h_2)-F_1(\widetilde{h}_1,h_2)\|_{(p_1,\infty)} = \sup_{\|\phi\|_{(p_1',1)}=1}\left|\int_{\mathbb{R}^n}(F_1(h_1,h_2)-F_1(\widetilde{h}_1,h_2))\phi(x)dx\right| \\
= & \sup_{\|\phi\|_{(p_1',1)}=1}\left|\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^n} G(s)(|h_1|^{\rho_1-1}h_1|h_2|^{\rho_2-1}h_2-|\widetilde{h}|_1^{\rho_1-1}\widetilde{h}_1|h_2|^{\rho_2-1}h_2)(x)\phi(x)dxds\right| \\
= & \sup_{\|\phi\|_{(p_1',1)}=1}\left|\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^n}[(|h_1|^{\rho_1-1}h_1-|\widetilde{h}|_1^{\rho_1-1}\widetilde{h}_1)|h_2|^{\rho_2-1}h_2](G(s)\phi)dxds\right|. \qquad (2.22)
\end{aligned}$$

Sejam $\frac{1}{\tau_1}=\frac{\rho_1}{p_1}+\frac{\rho_2}{p_2}$ e $\frac{1}{\tau_2}=\frac{r_1}{p_1}+\frac{r_2}{p_2}$. Observe que, para $i=1,2$, com $p_i=\frac{n}{k_i}$ e k_i sendo solução de (2.3), temos que

$$\begin{aligned}
\frac{n}{2}(\frac{1}{p_1'}-\frac{1}{\tau_1'})-1 &= \frac{n}{2}(\frac{\rho_2}{p_2}+\frac{\rho_1-1}{p_1})-1=\frac{n}{2}\left(\frac{\rho_2 k_2}{n}+\frac{k_1(\rho_1-1)}{n}\right)-1= \\
&= \left(\frac{\rho_2 k_2}{2}+\frac{k_1(\rho_1-1)}{2}\right)-1=0 \qquad (2.23)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{n}{2}(\frac{1}{p_2'}-\frac{1}{\tau_2'})-1 &= \frac{n}{2}(\frac{r_1}{p_1}+\frac{r_2-1}{p_2})-1=\frac{n}{2}\left(\frac{r_1 k_1}{n}+\frac{k_2(r_2-1)}{n}\right)= \\
&= \left(\frac{r_1 k_1}{2}+\frac{k_2(r_2-1)}{2}\right)-1=0. \qquad (2.24)
\end{aligned}$$

Assim, como $p_1>\frac{n}{n-2}$, implica de (2.23) que

$$\frac{1}{\tau_1}=\frac{\rho_1}{p_1}+\frac{\rho_2}{p_2}=\frac{2}{n}+\frac{1}{p_1}<1. \qquad (2.25)$$

Portanto, podemos aplicar a desigualdade de Hölder (Proposição 1.13) e a desigualdade (2.16) em (2.22) obtendo

$$\begin{aligned}
\| \quad & F_1(h_1,h_2)-F_1(\widetilde{h}_1,h_2)\|_{(p_1,\infty)} \leq \\
\leq \quad & C\sup_{\|\phi\|_{(p_1',1)}=1}\int_0^\infty \|[(|h_1|^{\rho_1-1}h_1-|\widetilde{h}_1|^{\rho_1-1}\widetilde{h}_1)|h_2|^{\rho_2-1}h_2]\|_{(\tau_1,\infty)}\|(G(s)\phi)\|_{(\tau_1',1)}ds \\
\leq \quad & C\sup_{\|\phi\|_{(p_1',1)}=1}\int_0^\infty \|(h_1-\widetilde{h}_1)(|h_1|^{\rho_1-1}+|\widetilde{h}_1|^{\rho_1-1})|h_2|^{\rho_2-1}h_2\|_{(\tau_1,\infty)}\|(G(s)\phi)\|_{(\tau_1',1)}ds \\
\leq \quad & C\{\sup_{t>0}\|(h_1-\widetilde{h}_1)\|_{(p_1,\infty)}\ (\sup_{t>0}\|h_1\|^{\rho_1-1}_{(p_1,\infty)} \\
+ \quad & \sup_{t>0}\|\widetilde{h}_1\|^{\rho_1-1}_{(p_1,\infty)})\sup_{t>0}\|h_2\|^{\rho_2}_{(p_2,\infty)}\sup_{\|\phi\|_{(p_1',1)}=1}\int_0^\infty\|(G(s)\phi)\|_{(\tau',1)}ds\}.
\end{aligned}$$
(2.26)

Note que de (2.23) $\tau_1' > p_1'$ e, portanto, podemos aplicar estimativa de Yamazaki (Proposição 1.17) com $q = \tau_1', p = p_1'$ obtendo

$$\sup_{\|\phi\|_{(p_1',1)}=1} \int_0^\infty \|(G(s)\phi)\|_{(\tau',1)} ds \leq C \sup_{\|\phi\|_{(p_1',1)}=1} \|\phi\| = C. \tag{2.27}$$

Agora, usando (2.27) em (2.26) obtemos

$$\|F_1(h_1,h_2) - F_1(\widetilde{h}_1,h_2)\|_{(p_1,\infty)} \leq K_1 \sup_{t>0} \|(h_1 - \widetilde{h}_1)\|_{(p_1,\infty)} \sup_{t>0}(\|h_1\|_{(p_1,\infty)}^{\rho_1-1} + \|\widetilde{h}_1\|_{(p_1,\infty)}^{\rho_1-1}) \sup_{t>0} \|h_2\|_{(p_2,\infty)}^{\rho_2} \tag{2.28}$$

Analogamente, obtemos

$$\|F_1(\widetilde{h}_1,\widetilde{h}_2) - F_1(\widetilde{h}_1,h_2)\|_{(p_1,\infty)} \leq K_1 \sup_{t>0} \|(h_2 - \widetilde{h}_2)\|_{(p_2,\infty)} \sup_{t>0}(\|h_2\|_{(p_2,\infty)}^{\rho_2-1} + \|\widetilde{h}_2\|_{(p_2,\infty)}^{\rho_2-1}) \sup_{t>0} \|\widetilde{h}_1\|_{(p_1,\infty)}^{\rho_1}. \tag{2.29}$$

Assim, de (2.21), (2.28) e (2.29)

$$\|F_1(h_1,h_2) - F_1(\widetilde{h}_1,\widetilde{h}_2)\|_{(p_1,\infty)} \leq K_1 \{\sup_{t>0} \|(h_1 - \widetilde{h}_1)\|_{(p_1,\infty)} (\sup_{t>0} \|h_1\|_{(p_1,\infty)}^{\rho_1-1} +$$

$$\sup_{t>0} \|\widetilde{h}_1\|_{(p_1,\infty)}^{\rho_1-1}) \sup_{t>0} \|h_2\|_{(p_2,\infty)}^{\rho_2} + \sup_{t>0} \|(h_2 - \widetilde{h}_2)\|_{(p_2,\infty)} \sup_{t>0}(\|h_2\|_{(p_2,\infty)}^{\rho_2-1} + \|\widetilde{h}_2\|_{(p_2,\infty)}^{\rho_2-1}) \sup_{t>0} \|\widetilde{h}_1\|_{(p_1,\infty)}^{\rho_1}\}$$

Para estimar $\|F_2(h_1,h_2) - F_2(\widetilde{h}_1,\widetilde{h}_2)\|_{(p_2,\infty)}$, observe que

$$\begin{aligned} \|F_2(h_1,h_2) - F_2(\widetilde{h}_1,\widetilde{h}_2)\|_{(p_2,\infty)} &= \|F_2(h_1,h_2) - F_2(h_1,\widetilde{h}_2) + F_2(h_1,\widetilde{h}_2) - F_2(\widetilde{h}_1,\widetilde{h}_2)\|_{(p_2,\infty)} \\ &\leq \|F_2(h_1,h_2) - F_2(h_1,\widetilde{h}_2)\|_{(p_2,\infty)} + \|F_2(h_1,\widetilde{h}_2) - F_2(\widetilde{h}_1,\widetilde{h}_2)\|_{(p_2,\infty)}. \end{aligned} \tag{2.30}$$

Novamente da dualidade em espaços de Lorentz (Proposição 1.6) e de propriedades de convolução temos

$$\begin{aligned} \| \quad F_2(h_1,h_2) - F_2(h_1,\widetilde{h}_2)\|_{(p_2,\infty)} &= \sup_{\|\phi\|_{(p_2',1)}=1} \left| \int_{\mathbb{R}^n} (F_2(h_1,h_2) - F_2(h_1,\widetilde{h}_2))\phi(x)dx \right| \\ = \quad & \sup_{\|\phi\|_{(p_2',1)}=1} \left| \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} G(s)(|h_1|^{r_1-1}h_1|h_2|^{r_2-1}h_2 - |h_1|^{r_1-1}h_1|\widetilde{h}|_2^{r_2-1}h_2)(x)\phi(x)dxds \right| \\ = \quad & \sup_{\|\phi\|_{(p_2',1)}=1} \left| \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} [|(h_2|^{r_2-1}h_2 - |\widetilde{h}|_2^{r_2-1}\widetilde{h}_2)|h_1|^{r_1-1}h_1](G(s)\phi)dxds \right| \end{aligned} \tag{2.31}$$

Uma vez que $p_2 > \frac{n}{n-2}$, de (2.24) observamos que

$$\frac{1}{\tau_2} = \frac{r_1}{p_1} + \frac{r_2}{p_2} = \frac{2}{n} + \frac{1}{p_2} < 1. \tag{2.32}$$

Assim, podemos, novamente, aplicar a desigualdade de Hölder (Proposição 1.13), desigualdade (2.16) e a estimativa de Yamazaki (Proposição 1.17) com $q=\tau_2', p=p_2'$ em (2.31) (como na prova da desigualdade (2.28)) obtendo

$$\begin{aligned}
\| \quad & F_2(h_1,h_2)-F_2(h_1,\widetilde{h}_2)\|_{(p_2,\infty)} \leq \\
\leq \quad & \sup_{\|\phi\|_{(p_2',1)}=1}\int_0^\infty \|[|(h_2|^{r_2-1}h_2-|\widetilde{h}|_2^{r_2-1}\widetilde{h}_2)|h_1|^{r_1-1}h_1]\|_{(\tau_2,\infty)}\|(G(s)\phi)\|_{(\tau_2',1)}ds \\
\leq \quad & C\sup_{\|\phi\|_{(p_2',1)}=1}\int_0^\infty \|(h_2-\widetilde{h}_2)(|h_2|^{r_2-1}+|\widetilde{h}_2|^{r_2-1})|h_1|^{r_1-1}h_1\|_{(\tau_2,\infty)}\|(G(s)\phi)\|_{(\tau_2',1)}ds \\
\leq \quad & K_2\sup_{t>0}\|(h_2-\widetilde{h}_2)\|_{(p_2,\infty)}\,(\sup_{t>0}\|h_2\|^{r_2-1}_{(p_2,\infty)}+\sup_{t>0}\|\widetilde{h}_2\|^{r_2-1}_{(p_2,\infty)})\sup_{t>0}\|h_1\|^{r_1}_{(p_1,\infty)}\sup_{\|\phi\|_{(p_2',1)}=1}\|\phi\| \\
= \quad & K_2\sup_{t>0}\|(h_2-\widetilde{h}_2)\|_{(p_2,\infty)}\,(\sup_{t>0}\|h_2\|^{r_2-1}_{(p_2,\infty)}+\sup_{t>0}\|\widetilde{h}_2\|^{r_2-1}_{(p_2,\infty)})\sup_{t>0}\|h_1\|^{r_1}_{(p_1,\infty)} \qquad (2.33)
\end{aligned}$$

De maneira análoga,

$$\|F_2(h_1,\widetilde{h}_2)-F_2(\widetilde{h}_1,\widetilde{h}_2)\|_{(p_2,\infty)}\leq K_2\sup_{t>0}\|(h_1-\widetilde{h}_1)\|_{(p_1,\infty)}\sup_{t>0}(\|h_1\|^{r_1-1}_{(p_1,\infty)}+\|\widetilde{h}_1\|^{r_1-1}_{(p_1,\infty)})\sup_{t>0}\|\widetilde{h}_2\|^{r_2}_{(p_2,\infty)} \tag{2.34}$$

Portanto, de (2.30), (2.33) e (2.34) , obtemos

$$\begin{aligned}
&\|F_2(h_1,h_2)-F_2(\widetilde{h}_1,\widetilde{h}_2)\|_{(p_2,\infty)}\leq K_2\{\sup_{t>0}\|(h_2-\widetilde{h}_2)\|_{(p_2,\infty)}\,(\sup_{t>0}\|h_2\|^{r_2-1}_{(p_2,\infty)}+ \\
&\sup_{t>0}\|\widetilde{h}_2\|^{r_2-1}_{(p_2,\infty)})\sup_{t>0}\|h_1\|^{r_1}_{(p_1,\infty)}+\sup_{t>0}\|(h_1-\widetilde{h}_1)\|_{(p_1,\infty)}\,\sup_{t>0}(\|h_1\|^{r_1-1}_{(p_1,\infty)}+\|\widetilde{h}_1\|^{r_1-1}_{(p_1,\infty)})\sup_{t>0}\|\widetilde{h}_2\|^{r_2}_{(p_2,\infty)}\}.
\end{aligned} \tag{2.35}$$

Agora, mostraremos a última afirmação do lema. Inicialmente, note que $a_i>\frac{n}{n-2}$ implica que $\frac{1}{a_i'}>\frac{2}{n}$, onde lembremos que a_i' é o conjugado de a_i, $i=1,2$. De (2.23) e (2.24), temos que

$$\frac{1}{a_1'}>\frac{\rho_2}{p_2}+\frac{\rho_1-1}{p_1} \ \text{ e } \ \frac{1}{a_2'}>\frac{r_1}{p_1}+\frac{r_2-1}{p_2}.$$

Portanto, podemos encontrar d_1 e $d_2>1$ tais que $\frac{1}{d_1}=\frac{1}{a_1}+\frac{\rho_2}{p_2}+\frac{\rho_1-1}{p_1}$ e $\frac{1}{d_2}=\frac{1}{a_2}+\frac{r_1}{p_1}+\frac{r_2-1}{p_2}$. Pela desigualdade de Hölder (Proposição 1.13), note que se $(h_1(t),h_2(t))\in L^{p_1,\infty)}\cap L^{(a_1,\infty)}\times L^{(p_2,\infty)}\cap L^{(a_2,\infty)}$, q.t.p $t>0$, então

$$|h_1(t)|^{\rho_1-1}\,|h_1(t)||h_2(t)|^{\rho_2-1}|h_2(t)|\in L^{(d_1,\infty)}$$

e

$$|h_1(t)|^{r_1-1}\,|h_1(t)||h_2(t)|^{r_2-1}|h_2(t)|\in L^{(d_1,\infty)},$$

com as seguintes estimativas:

$$\| |h_1|^{\rho_1-1} |h_1||h_2|^{\rho_2-1}|h_2|\|_{(d_1,\infty)} \leq C\|h_1\|_{(a_1,\infty)}\|h_1\|^{\rho_1-1}_{(p_1,\infty)}\|h_2\|^{\rho_2}_{(p_2,\infty)} \tag{2.36}$$

$$\| |h_1|^{r_1-1} |h_1||h_2|^{r_2-1}|h_2|\|_{(d_2,\infty)} \leq C\|h_2\|_{(a_2,\infty)}\|h_2\|^{r_2-1}_{(p_2,\infty)}\|h_1\|^{r_1}_{(p_1,\infty)}. \tag{2.37}$$

Agora, observe que $a_i > d_i$, $i = 1,2$ e

$$\frac{n}{2}(\frac{1}{d_1'} - \frac{1}{a_1'}) - 1 = \frac{n}{2}(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{d_1}) - 1 = \frac{n}{2}(\frac{\rho_2}{p_2} + \frac{\rho_1 - 1}{p_1}) - 1 = 0 \tag{2.38}$$

$$\frac{n}{2}(\frac{1}{d_2'} - \frac{1}{a_2'}) - 1 = \frac{n}{2}(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{d_2}) - 1 = \frac{n}{2}(\frac{r_1}{p_1} + \frac{r_2 - 1}{p_2}) - 1 = 0 \tag{2.39}$$

Portanto, usando dualidade em espaços de Lorentz (Proposição 1.6), propriedades de convolução, desigualdade de Hölder (Proposição 1.13), estimativa de Yamazaki (Proposição 1.17) com $q = d_i', p = a_i'$, e procedendo de maneira análoga à prova das desigualdades (2.17) e (2.18), obtemos (2.19) e (2.20), respectivamente. ∎

Deixe-nos volta à prova da primeira parte do Teorema 2.1, o qual nos fala sobre a boa-colocação da equação integral (2.6) em $L^{(p_1,\infty)} \times L^{(p_2,\infty)}$. A prova do Teorema 2.1 é uma aplicação dos lemas anteriores. Inicialmente aplicaremos o Lema 2.1 para a equação integral (2.6) com $X = E,\ y = (G(t)u_0, (G(t)v_0),\ x = (u,v)$ e

$$B(x) := B(u,v) = (B_1(u,v), B_2(u,v)). \tag{2.40}$$

Considere R satisfazendo a equação $2^{\rho_1+\rho_2+1}R^{\rho_1+\rho_2-1} + 2^{r_1+r_2+1}R^{r_1+r_2-1} - \frac{1}{K} = 0$ onde $K = \max\{K_1, K_2\}$ e K_1, K_2 são as constantes das desigualdades (2.17) e (2.18). Seja $0 < \varepsilon < R$ e $\delta = \delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{C}$, onde C é a constante Lema 1.8. Portanto, usando o Lema 1.8, temos

$$\begin{aligned} \|y\|_E &= \|(G(t)u_0, G(t)v_0)\|_E = \max\{\sup_{t>0}\|G(t)u_0\|_{(p_1,\infty)}, \sup_{t>0}\|G(t)v_0\|_{(p_2,\infty)}\} \\ &\leq \max\{C\|u_0\|_{(p_1,\infty)}, C\|v_0\|_{(p_2,\infty)}\} \leq \varepsilon \end{aligned}$$

pois $\|u_0\|_{(p_1,\infty)} < \delta, \|v_0\|_{(p_2,\infty)} < \delta$. Observe ainda que B definida como em (2.40) satisfaz $B(0) = 0$. Agora, para poder aplicar o Lema 2.1, mostraremos que o termo não-linear

$$B(u,v) = (B_1(u,v)\ ,\ B_2(u,v))\,,$$

satisfaz a desigualdade (2.8) do Lema 2.1 com $X = E$, i.e,

$$\begin{aligned} \|B(x) - B(z)\|_E \leq K\|x - z\|_E[&\left(\|x\|_E^{\rho_1-1} + \|z\|_E^{\rho_1-1}\right)\|x\|_E^{\rho_2} + \left(\|x\|_E^{\rho_2-1} + \|z\|_E^{\rho_2-1}\right)\|z\|_E^{\rho_1} \\ &+ \left(\|x\|_E^{r_1-1} + \|z\|_E^{r_1-1}\right)\|x\|_E^{r_2} + \left(\|x\|_E^{r_2-1} + \|z\|_E^{r_2-1}\right)\|z\|_E^{r_1}],\quad \forall x, z \in E \end{aligned} \tag{2.41}$$

onde $x=(u,v), z=(\widetilde{u},\widetilde{v})$ e $K=\max\{K_1,K_2\}$ com K_1,K_2 são as constantes das desigualdades (2.17) e (2.18). De fato, definindo

$$\begin{cases} h_1(s,\cdot)=u(t-s,\cdot), \text{ se } 0\le s\le t \\ h_1(s,.)=0 \text{ se } s>t \\ h_2(s,\cdot)=v(t-s,\cdot) \text{ se } 0\le s\le t \\ h_2(s,.)=0 \text{ se } s>t \end{cases} \tag{2.42}$$

então

$$B_1(u,v)=F_1(h_1,h_2) \text{ e } B_2(u,v)=F_2(h_1,h_2). \tag{2.43}$$

De maneira análoga, definindo

$$\begin{cases} \widetilde{h}_1(s,\cdot)=\widetilde{u}(t-s,\cdot), \text{ se } 0\le s\le t \\ \widetilde{h}_1(s,.)=0 \text{ se } s>t \\ \widetilde{h}_2(s,\cdot)=\widetilde{v}(t-s,\cdot) \text{ se } 0\le s\le t \\ \widetilde{h}_2(s,.)=0 \text{ se } s>t \end{cases} \tag{2.44}$$

obtemos

$$B_1(\widetilde{u},\widetilde{v})=F_1(\widetilde{h}_1,\widetilde{h}_2) \text{ e } B_2(\widetilde{u},\widetilde{v})=F_2(\widetilde{h}_1,\widetilde{h}_2). \tag{2.45}$$

Assim, de (2.43), (2.45) e pela desigualdade (2.17) do Lema 2.2, temos que

$$\begin{aligned} \|B_1(u,v)-B_1(\widetilde{u},\widetilde{v})\|_{(p_1,\infty)} &\le K_1\{\sup_{t>0}\|(u-\widetilde{u})\|_{(p_1,\infty)}\sup_{t>0}(\|u\|^{\rho_1-1}_{(p_1,\infty)}+\|\widetilde{u}\|^{\rho_1-1}_{(p_1,\infty)})\sup_{t>0}\|v\|^{\rho_2}_{(p_2,\infty)} \\ &+ \sup_{t>0}\|(v-\widetilde{v})\|_{(p_2,\infty)}\sup_{t>0}(\|v\|^{\rho_2-1}_{(p_2,\infty)}+\|\widetilde{v}\|^{\rho_2-1}_{(p_2,\infty)})\sup_{t>0}\|\widetilde{u}\|^{\rho_1}_{(p_1,\infty)}\} \\ &\le K\|x-z\|_E[\left(\|x\|_E^{\rho_1-1}+\|z\|_E^{\rho_1-1}\right)\|x\|_E^{\rho_2}+\left(\|x\|_E^{\rho_2-1}+\|z\|_E^{\rho_2-1}\right)\|z\|_E^{\rho_1} \\ &+ \left(\|x\|_E^{r_1-1}+\|z\|_E^{r_1-1}\right)\|x\|_E^{r_2}+\left(\|x\|_E^{r_2-1}+\|z\|_E^{r_2-1}\right)\|z\|_E^{r_1}], \end{aligned} \tag{2.46}$$

onde $K=\max\{K_1,K_2\}$,

$$\|x-z\|_E=\max\{\sup_{t>0}\|(u-\widetilde{u})\|_{(p_1,\infty)},\sup_{t>0}\|(v-\widetilde{v})\|_{(p_2,\infty)}\},$$

$$\|x\|_E=\max\{\sup_{t>0}\|u\|_{(p_1,\infty)},\sup_{t>0}\|v\|_{(p_2,\infty)}\} \text{ e}$$

$$\|z\|_E=\max\{\sup_{t>0}\|\widetilde{u}\|_{(p_1,\infty)},\sup_{t>0}\|\widetilde{v}\|_{(p_2,\infty)}\}.$$

Agora, novamente de (2.43), (2.45) e pela desigualdade (2.18) do Lema 2.2 obtemos

$$\begin{aligned}
\|B_2(u,v)-B_2(\widetilde{u},\widetilde{v})\|_{(p_2,\infty)} &\leq K_2\{\sup_{t>0}\|(v-\widetilde{v})\|_{(p_2,\infty)}\sup_{t>0}(\|v\|_{(p_2,\infty)}^{r_2-1-1}+\|\widetilde{v}\|_{(p_2,\infty)}^{r_2-1})\sup_{t>0}\|u\|_{(p_1,\infty)}^{r_1} \\
&+ \sup_{t>0}\|(u-\widetilde{u})\|_{(p_1,\infty)}\sup_{t>0}(\|u\|_{(p_1,\infty)}^{r_1-1}+\|\widetilde{u}\|_{(p_1,\infty)}^{r_1-1})\sup_{t>0}\|\widetilde{v}\|_{(p_2,\infty)}^{r_2}\} \\
&\leq K\|x-z\|_E[\left(\|x\|_E^{\rho_1-1}+\|z\|_E^{\rho_1-1}\right)\|x\|_E^{\rho_2}+\left(\|x\|_E^{\rho_2-1}+\|z\|_E^{\rho_2-1}\right)\|z\|_E^{\rho_1} \\
&+ \left(\|x\|_E^{r_1-1}+\|z\|_E^{r_1-1}\right)\|x\|_E^{r_2}+\left(\|x\|_E^{r_2-1}+\|z\|_E^{r_2-1}\right)\|z\|_E^{r_1}] \qquad (2.47)
\end{aligned}$$

Como $\|B(x)-B(z)\|_E=\max\{\sup_{t>0}\|B_1(u,v)-B_1(\widetilde{u},\widetilde{v})\|_{(p_1,\infty)},\sup_{t>0}\|B_2(u,v)-B_2(\widetilde{u},\widetilde{v})\|_{(p_2,\infty)}\}$, de (2.46) e (2.47) obtemos (2.41).

Portanto, uma aplicação direta do Lema 2.1 garante a existência de uma solução branda global $u\in E$. Esta solução é única na bola $B_{2\varepsilon}:=\overline{B}(0,2\varepsilon)\subset E$. Note que o Lema 2.1 garante unicidade somente na bola $B_{2\varepsilon}:=\overline{B}(0,2\varepsilon)\subset E$. Mostraremos agora que $(u(t),v(t))\overset{t\to 0^+}{\rightharpoonup}(u_0,v_0)$ sendo este limite tomado na topologia fraca-$*$ de $L^{(p_1,\infty)}\times L^{(p_2,\infty)}$, concluindo que a solução $(u(t),v(t))$ é, de fato, uma solução branda, no sentido da Definição 2.2. Com efeito, note que para todo $\phi_1\in L^{(p_1',1)}$

$$\begin{aligned}
|\langle G(t)u_0-u_0,\phi_1\rangle| &= |\langle u_0,G(t)\phi_1-\phi_1\rangle| \\
&\leq \|u_0\|_{(p_1,\infty)}\|G(t)\phi_1-\phi_1\|_{(p_1',1)}\to 0, \qquad (2.48)
\end{aligned}$$

pois $\|G(t)\phi_1-\phi_1\|_{(p_1',1)}\overset{t\to 0^+}{\to}0$(ver Observação 1.7). De maneira semelhante

$$|\langle G(t)v_0-v_0,\phi_2\rangle|\overset{t\to 0^+}{\to}0,\ \text{ onde }\ \phi_2\in L^{(p_2',1)}.$$

Para concluir vamos mostrar que $B(u,v)\rightharpoonup 0$. Observe que das desigualdades (2.17) e (2.18) do Lema 2.2, com $\widetilde{h_1}=\widetilde{h_2}=0$, e pela equações (2.42) e (2.43) temos

$$\|B_1(u,v)\|_{(p_1,\infty)}\leq K_1\sup_{t>0}\|u\|_{(p_1,\infty)}^{\rho_1}\sup_{t>0}\|v\|_{(p_2,\infty)}^{\rho_2} \qquad (2.49)$$

$$\|B_2(u,v)\|_{(p_2,\infty)}\leq K_2\sup_{t>0}\|u\|_{(p_1,\infty)}^{r_1}\sup_{t>0}\|v\|_{(p_2,\infty)}^{r_2}. \qquad (2.50)$$

Pela Proposição 1.7, o conjunto C_c^∞ é denso tanto em $L^{(p_1',1)}$ quanto em $L^{(p_2',1)}$. Logo pelas desigualdades (2.49) e (2.50) é suficiente mostrar por argumento de densidade que dada $\phi_1,\phi_2\in C_c^\infty$, então

$$\langle B_1(u,v),\phi_1\rangle=\int_{\mathbb{R}^n}\int_0^t G(t-s)|u|^{\rho_1-1}u|v|^{\rho_2-1}v ds\,\phi_1\,dx\to 0\quad\text{quando }\ t\to 0^+. \qquad (2.51)$$

e

$$\langle B_2(u,v),\phi_2\rangle = \int_{\mathbb{R}^n}\int_0^t G(t-s)|u|^{r_1-1}u|v|^{r_2-1}vds\,\phi_2\,dx \to 0 \quad \text{quando} \quad t\to 0^+ \tag{2.52}$$

Começaremos com (2.51). Dado $\phi_1 \in C_c^\infty$, temos de (2.51) que

$$|\langle B_1(u,v),\phi_1\rangle| = \left|\int_0^t \left\langle G(t-s)|u|^{\rho_1-1}u|v|^{\rho_2-1}vds,\phi_1\right\rangle\right|.$$

Portanto

$$|\langle B_1(u,v),\phi_1\rangle| \leq \int_0^t \|G(t-s)|u|^{\rho_1-1}u|v|^{\rho_2-1}v\|_{(r',\infty)}\|\phi_1\|_{(r,1)}ds. \tag{2.53}$$

Seja $\frac{1}{r'} = \frac{1}{l}+\frac{\rho_1}{p_1}+\frac{\rho_2}{p_2}-1$ com $r'<p_1$. Assim, usando as desigualdades de Hölder e Young (Proposições 1.13 e 1.11) obtemos

$$\begin{aligned}\|G(t-s)|u|^{\rho_1-1}u|v|^{\rho_2-1}v\|_{(r',\infty)} &\leq C(t-s)^{\frac{n}{2}(-1+\frac{1}{l})}\|g(x,1)\|_{(l,\infty)}\|u\|^{\rho_1}_{(p_1,\infty)}\|v\|^{\rho_2}_{(p_2,\infty)}\\ &\leq C(t-s)^{\frac{n}{2}(\frac{1}{r'}-\frac{\rho_1}{p_1}-\frac{\rho_2}{p_2})}\end{aligned} \tag{2.54}$$

Como $r'<p_1$, de (2.23)

$$\frac{n}{2}\left(\frac{1}{r'}-\frac{\rho_1}{p_1}-\frac{\rho_2}{p_2}\right) > \frac{n}{2}\left(\frac{1}{p_1}-\frac{\rho_1}{p_1}-\frac{\rho_2}{p_2}\right) = -1.$$

Portanto substituindo (2.54) em (2.53), obtemos

$$|\langle B_1(u,v),\phi_1\rangle| \leq C\|\phi_1\|_{(r,1)}\int_0^t (t-s)^{\frac{n}{2}(\frac{1}{r'}-\frac{\rho_1}{p_1}-\frac{\rho_2}{p_2})}ds.$$

Logo

$$|\langle B_1(u,v),\phi_1\rangle| \leq C\|\phi_1\|_{(r,1)}t^{\frac{n}{2}(\frac{1}{r'}-\frac{\rho_1}{p_1}-\frac{\rho_2}{p_2})+1}, \tag{2.55}$$

concluindo que $\langle B_1(u,v),\phi_1\rangle \to 0$ quando $t\to 0^+$, uma vez que $\frac{n}{2}(\frac{1}{r'}-\frac{\rho_1}{p_1}-\frac{\rho_2}{p_2}) > -1$.

Analisaremos agora (2.52). Dado $\phi_2 \in C_c^\infty$, temos de (2.52) que

$$|\langle B_2(u,v),\phi_2\rangle| = \left|\int_0^t \left\langle G(t-s)|u|^{r_1-1}u|v|^{r_2-1}vds,\phi_2\right\rangle\right|. \tag{2.56}$$

Portanto,

$$|\langle B_2(u,v),\phi_2\rangle| \leq \int_0^t \|G(t-s)|u|^{r_1-1}u|v|^{r_2-1}v\|_{(\varsigma',\infty)}\|\phi_2\|_{(\varsigma,1)}ds. \tag{2.57}$$

Seja $\frac{1}{\varsigma'} = \frac{1}{l}+\frac{r_1}{p_1}+\frac{r_2}{p_2}-1$ com $\varsigma'<p_2$. Assim, usando as desigualdades de Hölder e Young (Proposições 1.13 e 1.11) obtemos

$$\begin{aligned}\|G(t-s)|u|^{r_1-1}u|v|^{r_2-1}v\|_{(\varsigma',\infty)} &\leq C(t-s)^{\frac{n}{2}(-1+\frac{1}{l})}\|g(x,1)\|_{(l,\infty)}\|u\|^{r_1}_{(p_1,\infty)}\|v\|^{r_2}_{(p_2,\infty)}\\ &\leq C(t-s)^{\frac{n}{2}(\frac{1}{\varsigma'}-\frac{r_1}{p_1}-\frac{r_2}{p_2})}\end{aligned} \tag{2.58}$$

Uma vez que $\varsigma' < p_2$, de (2.24) observamos que $\frac{n}{2}\left(\frac{1}{\varsigma'} - \frac{r_1}{p_1} - \frac{r_2}{p_2}\right) > \frac{n}{2}\left(\frac{1}{p_2} - \frac{r_1}{p_1} - \frac{r_2}{p_2}\right) = -1$. Assim, substituindo (2.58) em (2.57) obtemos

$$|\langle B_2(u,v), \phi_2\rangle| \leq C\|\phi_2\|_{(\varsigma,1)} \int_0^t (t-s)^{\frac{n}{2}(\frac{1}{\varsigma'} - \frac{r_1}{p_1} - \frac{r_2}{p_2})} ds.$$

Logo

$$|\langle B_2(u,v), \phi_2\rangle| \leq C\|\phi_1\|_{(r,1)} t^{\frac{n}{2}(\frac{1}{\varsigma'} - \frac{r_1}{p_1} - \frac{r_2}{p_2})+1}, \tag{2.59}$$

concluindo que $\langle B_2(u,v), \phi_2\rangle \to 0$ quando $t \to 0^+$, pois $\frac{n}{2}(\frac{1}{\varsigma'} - \frac{r_1}{p_1} - \frac{r_2}{p_2}) > -1$. Portanto $B(u,v) \rightharpoonup 0$.

Agora deixe-nos tratar o caso geral onde $(\phi_1, \phi_2) \in L^{(p_1',1)} \times L^{(p_2',1)}$. Vamos mostrar apenas a convergência fraca de $B_1(u,v)$, pois a convergência fraca de $B_2(u,v)$ segue analogamente. Seja $\{\phi_{1,k}\} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subset L^{(r,1)} \cap L^{(p_1',1)}$, com $r' < p_1$, tal que $\phi_{1,k} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \phi_1$ em $L^{(p_1',1)}$. Assim,

$$\begin{aligned} \limsup_{t\to 0^+} |\langle B_1(u,v), \phi_1\rangle| &\leq \limsup_{t\to 0^+} |\left\langle B_1(u,v), \phi_1 - \phi_{1,k}\right\rangle| + \limsup_{t\to 0^+} |\left\langle B_1(u,v), \phi_{1,k}\right\rangle| \\ &= \limsup_{t\to 0^+} I_1 + \limsup_{t\to 0^+} I_2. \end{aligned} \tag{2.60}$$

Antes de tratar com I_1, como $\{\phi_{1,k}\} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, já mostramos que $I_2 \overset{t\to 0^+}{\longrightarrow} 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Para finalizar, mostraremos agora que $I_1 \overset{t\to 0^+}{\longrightarrow} 0$. Pela desigualdade de Hölder, obtemos

$$I_1 \leq \|B_1(u,v)\|_{(p_1,\infty)} \|\phi_1 - \phi_{1,k}\|_{(p_1',1)}. \tag{2.61}$$

Observe que fazendo $(\widetilde{u}, \widetilde{v}) = (0,0)$ em (2.46), usando que $(u,v) \in \overline{B}_E(0, 2\varepsilon)$, de (2.61) temos

$$\begin{aligned} \limsup_{t\to 0^+} I_1 &\leq \limsup_{t\to 0^+} K_1 \|u\|_{(p_1,\infty)}^{\rho_1} \|v\|_{(p_2,\infty)}^{\rho_2} \|\phi_1 - \phi_{1,k}\|_{(p_1',1)} \\ &\leq K_1 \limsup_{t\to 0} (2\varepsilon)^{\rho_1+\rho_2} \|\phi_1 - \phi_{1,k}\|_{(p_1',1)} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

■

Demonstração do Item 2 do Teorema 2.1.

Vamos mostrar o segundo item do teorema, ou seja, $(u,v) \in BC((0,\infty), L^{(a_1,\infty)} \times L^{(a_2,\infty)})$, quando as condições iniciais $u_0 \in L^{(p_1,\infty)} \cap L^{(a_1,\infty)}$ e $v_0 \in L^{(p_2,\infty)} \cap L^{(a_2,\infty)}$, $a_i > \frac{n}{n-2}$. Note que esta última condição, como mostramos na prova do Lema 2.2, equivale a dizer que $1 < a_1' < \left(\frac{\rho_2}{p_2} + \frac{\rho_1 - 1}{p_1}\right)^{-1}$ e $1 < a_2' < \left(\frac{r_1}{p_1} + \frac{r_2 - 1}{p_2}\right)^{-1}$.

Lembremos que as soluções obtidas no Lema 2.1 são construídas por recursão. Em nosso caso, temos que a seqüência

$$u_1(t,x) = G(t)u_0(x),\ \ v_1(t,x) = G(t)v_0(x),$$
$$u_{k+1}(t,x) = u_1(t,x) + B(u_k,v_k),\ \ v_{k+1}(t,x) = v_1(t,x) + B(u_k,v_k),\ \ k \in N,$$

converge para (u,v) em E. Observe que da estimativa (1.25), obtemos

$$\sup_{t>0} \|u_1(t)\|_{(a_1,\infty)} \le \widetilde{C}\|u_0\|_{(a_1,\infty)}$$
$$\sup_{t>0} \|v_1(t)\|_{(a_2,\infty)} \le \widetilde{C}\|u_0\|_{(a_2,\infty)}.$$

Além disso, as desigualdades (2.19) e (2.20) do Lema 2.2, nos permite afirmar que

$$\sup_{t>0} \|u_{k+1}(t)\|_{(a_1,\infty)} \le \widetilde{C}\|u_0\|_{(a_1,\infty)} + K_{a_1} \sup_{t>0} \|u_k(t)\|_{(a_1,\infty)} \sup_{t>0} \|u_k(t)\|^{\rho_1-1}_{(p_1,\infty)} \sup_{t>0} \|v_k(t)\|^{\rho_2}_{(p_2,\infty)} \tag{2.62}$$

e

$$\sup_{t>0} \|v_{k+1}(t)\|_{(a_2,\infty)} \le \widetilde{C}\|v_0\|_{(a_2,\infty)} + K_{a_2} \sup_{t>0} \|v_k(t)\|_{(a_2,\infty)} \sup_{t>0} \|v_k(t)\|^{r_2-1}_{(p_2,\infty)} \sup_{t>0} \|u_k(t)\|^{r_1}_{(p_1,\infty)}. \tag{2.63}$$

Seja $K_{a_1,a_2} = \max\{K_{a_1}, K_{a_2}\}$. Escolha $0 < \delta_{a_1,a_2} \le \delta$ de tal forma que $0 < \varepsilon_{a_1,a_2} \le \varepsilon$ e $2^{\rho_1+\rho_2+1} K_{a_1,a_2} \varepsilon_{a_1,a_2}^{\rho_1+\rho_2-1} + 2^{r_1+r_2+1} K_{a_1,a_2} \varepsilon_{a_1,a_2}^{r_1+r_2-1} < 1$ ($\varepsilon_{a_1,a_2} = C\delta_{a_1,a_2}$ e $\varepsilon = C\delta$). Por hipótese temos que $\|u_0\|_{(p_1,\infty)} < \delta_{a_1,a_2}$ e $\|v_0\|_{(p_2,\infty)} < \delta_{a_1,a_2}$. Do item 1 do Teorema 2.1 e do Lema 2.1 concluímos que

$$\sup_{t>0} \|u_k(t)\|_{(p_1,\infty)} \le 2\varepsilon_{a_1,a_2} \quad \sup_{t>0} \|v_k(t)\|_{(p_2,\infty)} \le 2\varepsilon_{a_1,a_2}.$$

Seja $\{(s_k,z_k)\}_{k\ge 2}$ uma seqüência definida por

$$s_{k+1} = u_{k+1} - u_k = B_1(u_k,v_k) - B_1(u_{k-1},v_{k-1})$$
$$z_{k+1} = v_{k+1} - v_k = B_2(u_k,v_k) - B_2(u_{k-1},v_{k-1}).$$

Das desigualdades (2.19) e (2.20) do Lema 2.2, temos que

$$\begin{aligned}\sup_{t>0} \|s_{k+1}\|_{(a_1,\infty)} \le K_{a_1,a_2} \sup_{t>0} \|s_k(t)\|_{(a_1,\infty)} \{ (\sup_{t>0} \|u_k\|^{\rho_1-1}_{(p_1,\infty)} + \sup_{t>0} \|u_{k-1}\|^{\rho_1-1}_{(p_1,\infty)}) \sup_{t>0} \|v_{k-1}\|^{\rho_2}_{(p_2,\infty)} \\ + (\sup_{t>0} \|v_k\|^{\rho_2-1}_{(p_2,\infty)} + \sup_{t>0} \|v_k\|^{\rho_2-1}_{(p_2,\infty)}) \sup_{t>0} \|u_{k-1}\|^{\rho_1}_{(p_1,\infty)} \}\end{aligned} \tag{2.64}$$

e

$$\sup_{t>0}\|z_{k+1}\|_{(a_2,\infty)} \le K_{a_1,a_2}\sup_{t>0}\|z_k(t)\|_{(a_2,\infty)}\{(\sup_{t>0}\|u_k\|^{r_1-1}_{(p_1,\infty)}+\sup_{t>0}\|u_{k_1}\|^{r_1-1}_{(p_1,\infty)})\sup_{t>0}\|v_k\|^{r_2}_{(p_2,\infty)}$$
$$+(\sup_{t>0}\|v_k\|^{r_2-1}_{(p_2,\infty)}+\sup_{t>0}\|v_{k-1}\|^{r_2-1}_{(p_2,\infty)})\sup_{t>0}\|u_{k_1}\|^{r_1}_{(p_1,\infty)}\}. \tag{2.65}$$

Denote $M_k = \sup_{t>0}\|s_k(t)\|_{(a_1,\infty)}$ e $N_k = \sup_{t>0}\|z_k(t)\|_{(a_2,\infty)}$. Das desigualdades (2.62) e (2.63), temos que $0 \le M_2 < \infty$ e $0 \le N_2 < \infty$. Observe que as seqüências $\{M_k\}_{k\ge2}$ e $\{N_k\}_{k\ge2}$ satisfazem

$$M_{k+1} \le 2^{\rho_1+\rho_2+1}K_{a_1,a_2}\varepsilon^{\rho_1+\rho_2-1}_{a_1,a_2}M_k$$

$$N_{k+1} \le 2^{r_1+r_2+1}K_{a_1,a_2}\varepsilon^{r_1+r_2-1}_{a_1,a_2}N_k.$$

Agora, das hipóteses sobre ε_{a_1,a_2}, temos que $A_1 = 2^{\rho_1+\rho_2+1}K_{a_1,a_2}\varepsilon^{\rho_1+\rho_2-1}_{a_1,a_2} < 1$ e $A_2 = 2^{r_1+r_2+1}K_{a_1,a_2}\varepsilon^{r_1+r_2-1}_{a_1,a_2} < 1$. Portanto as seqüências $\{u_k\}$ e $\{v_k\}$ são contrativas e então são seqüências de Cauchy em $BC((0,\infty);L^{(a_1,\infty)})$ e $BC((0,\infty);L^{(a_2,\infty)})$, com $u_k \to \widetilde{u}$ e $v_k \to \widetilde{v}$ em $BC((0,\infty);L^{(a_1,\infty)})$ e $BC((0,\infty);L^{(a_2,\infty)})$, respectivamente. Como $(u_k,v_k) \to (u,v)$ em E, pela unicidade do limite no sentido de distribuição $\widetilde{u}=u$ e $\widetilde{v}=v$ e, assim, $(u,v)\in BC((0,\infty);L^{(a_1,\infty)}\times L^{(a_2,\infty)})$.

Demonstração da Parte 3 **do Teorema 2.1**

Para demonstrar a parte 3 do Teorema 2.1, usaremos mais uma vez o Lema 2.1, agora com $X = E_{q_1q_2}$. Para isso, iniciaremos a demonstração encontrando estimativas para a parte linear da equação integral (2.6).

Seja $\alpha = \frac{n}{p_1}-\frac{n}{q_1}$ e $\beta = \frac{n}{p_2}-\frac{n}{q_2}$ com $p_1<q_1$ e $p_2<q_2$. Do Lema (1.8) podemos estimar $\sup_{t>0}t^{\frac{\alpha}{2}}\|\cdot\|_{(q_1,\infty)}$ e $\sup_{t>0}t^{\frac{\beta}{2}}\|\cdot\|_{(q_2,\infty)}$ fazendo $j=0$, $r=q_i$, $p=p_i$, $d_1=d_2=\infty$, $i=1,2$, obtendo respectivamente

$$\begin{aligned}\|G(t)u_0\|_{(q_1,\infty)} &\le Ct^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1})}\|u_0\|_{(p_1,\infty)}\\ &= Ct^{-\frac{\alpha}{2}}\|u_0\|_{(p_1,\infty)},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|G(t)v_0\|_{(q_2,\infty)}C &\le t^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{p_2}-\frac{1}{q_2})}\|v_0\|_{(p_2,\infty)}\\ &= Ct^{-\frac{\beta}{2}}\|v_0\|_{(p_2,\infty)}.\end{aligned}$$

Portanto

$$\sup_{t>0}t^{\frac{\alpha}{2}}\|G(t)u_0\|_{(q_1,\infty)} \le C\sup_{t>0}\|u_0\|_{(p_1,\infty)}$$

e

$$\sup_{t>0} t^{\frac{\beta}{2}} \|G(t)v_0\|_{(q_2,\infty)} \leq C \sup_{t>0} \|v_0\|_{(p_2,\infty)}.$$

Logo, para provar a segunda parte do teorema aplicando o Lema 2.1, precisamos mostrar a desigualdade (2.8) para o termo não-linear $B(u,v) = (B_1(u,v), B_2(u,v))$ no espaço $X = E_{q_1,q_2}$. Como provamos tal propriedade na norma do espaço E, resta-nos provar a correspondente estimativa nas normas $\sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|B_1(x) - B_1(y)\|_{(q_1,\infty)}$ e $\sup_{t>0} t^{\frac{\beta}{2}} \|B_2(x) - B_2(y)\|_{(q_2,\infty)}$ para todo $x = (u,v), z = (\widetilde{u},\widetilde{v}) \in E_{q_1 q_2}$. É o que faremos agora.

Inicialmente, note que

$$\begin{aligned}\|B_1(u,v) - B_1(\widetilde{u},\widetilde{v})\|_{(q_1,\infty)} &= \|B_1(u,v) - B_1(\widetilde{u},v) + B_1(\widetilde{u},v) - B_1(\widetilde{u},\widetilde{v})\|_{(q_1,\infty)} \\ &\leq \|B_1(u,v) - B_1(\widetilde{u},v)\|_{(q_1,\infty)} + \|B_1(\widetilde{u},v) - B_1(\widetilde{u},\widetilde{v})\|_{(q_1,\infty)}\end{aligned}$$

Fixe v e suponha que $\frac{1}{\widetilde{r}} = \frac{\rho_1}{q_1} + \frac{\rho_2}{q_2}$ e $\frac{1}{q_1} = \frac{1}{\widetilde{l}} + \frac{1}{\widetilde{r}} - 1$. Uma vez que $p_i < q_i$, $i = 1,2$ observe que de (2.25) temos $\frac{1}{\widetilde{r}} = \frac{\rho_1}{q_1} + \frac{\rho_2}{q_2} < 1$. Portanto, utilizando as desigualdades Young e Hölder (Proposições 1.11 e 1.13), temos que

$$\begin{aligned}
&\|B_1(u,v) - B_1(\widetilde{u},v)\|_{(q_1,\infty)} = \int_0^t \|G(t-s)(|u|^{\rho_1-1}u - |\widetilde{u}|^{\rho_1-1}\widetilde{u})|v|^{\rho_2-1}v\|_{(q_1,\infty)} ds \leq \\
&\leq C \int_0^t \|g(t-s)\|_{(\widetilde{l},\infty)} \|(|u|^{\rho_1-1}u - |\widetilde{u}|^{\rho_1-1}\widetilde{u})|v|^{\rho_2-1}v\|_{(\widetilde{r},\infty)} ds \\
&\leq C \int_0^t (t-s)^{\frac{-n}{2} + \frac{n}{2\widetilde{l}}} \|(u-\widetilde{u})(|u|^{\rho_1-1} + |\widetilde{u}|^{\rho_1-1})|v|^{\rho_2-1}v\|_{(\widetilde{r},\infty)} ds \\
&\leq C \int_0^t (t-s)^{\frac{-n}{2} + \frac{n}{2\widetilde{l}}} \|(u-\widetilde{u})\|_{(q_1,\infty)} (\|u\|^{\rho_1-1}_{(q_1,\infty)} + \|\widetilde{u}\|^{\rho_1-1}_{(q_1,\infty)}) \|v\|^{\rho_2}_{(q_2,\infty)} ds \\
&= C \int_0^t (t-s)^{\frac{-n}{2} + \frac{n}{2\widetilde{l}}} s^{\frac{\alpha}{2}} \|(u-\widetilde{u})\|_{(q_1,\infty)}\, s^{\frac{\alpha}{2}(\rho_1-1)} (\|u\|^{\rho_1-1}_{(q_1,\infty)} + \|\widetilde{u}\|^{\rho_1-1}_{(q_1,\infty)}) s^{-\frac{\alpha}{2}\rho_1} s^{-\frac{\beta}{2}\rho_2} s^{\frac{\beta}{2}\rho_2} \|v\|^{\rho_2}_{(q_2,\infty)} ds \\
&= C \int_0^t (t-s)^{\frac{-n}{2}(1-\frac{1}{\widetilde{l}})} s^{\frac{\alpha}{2}} \|(u-\widetilde{u})\|_{(q_1,\infty)}\, s^{\frac{\alpha}{2}(\rho_1-1)} (\|u\|^{\rho_1-1}_{(q_1,\infty)} + \|\widetilde{u}\|^{\rho_1-1}_{(q_1,\infty)}) s^{-\frac{\alpha}{2}\rho_1 - \frac{\beta}{2}\rho_2 + \frac{\beta}{2}\rho_2} \|v\|^{\rho_2}_{(q_2,\infty)} ds.
\end{aligned}$$

Então,

$$\|B_1(u,v) - B_1(\widetilde{u},v)\|_{(q_1,\infty)} \leq \left(C \int_0^t (t-s)^{\frac{-n(\rho_1-1)}{2q_1} - \frac{n\rho_2}{2q_2}} s^{-\frac{\alpha}{2}\rho_1 - \frac{\beta}{2}\rho_2} ds \right) \Lambda_1,$$

onde

$$\Lambda_1 = \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|(u-\widetilde{u})\|_{(q_1,\infty)} \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}(\rho_1-1)} (\|u\|^{\rho_1-1}_{(q_1,\infty)} + \|\widetilde{u}\|^{\rho_1-1}_{(q_1,\infty)}) \sup_{t>0} t^{\frac{\beta}{2}\rho_2} \|v\|^{\rho_2}_{(q_2,\infty)}.$$

Observe que

$$\int_0^t (t-s)^{\frac{-n(\rho_1-1)}{2q_1} - \frac{n\rho_2}{2q_2}} s^{-\frac{\alpha}{2}\rho_1 - \frac{\beta}{2}\rho_2} ds = t^{\frac{-n(\rho_1-1)}{2q_1} - \frac{n\rho_2}{2q_2} - \frac{\alpha}{2}\rho_1 - \frac{\beta}{2}\rho_2 + 1} \int_0^1 (1-y)^{\frac{-n(\rho_1-1)}{2q_1} - \frac{n\rho_2}{2q_2}} y^{-\frac{\alpha}{2}\rho_1 - \frac{\beta}{2}\rho_2} dy.$$

Note que, por hipótese, $-\frac{\alpha}{2}\rho_1-\frac{\beta}{2}\rho_2>-1$. Como $p_i<q_i$, de (2.23) temos que $\frac{-n(\rho_1-1)}{2q_1}-\frac{n\rho_2}{2q_2}>-1$. Portanto $\int_0^1(1-y)^{\frac{-n(\rho_1-1)}{2q_1}-\frac{n\rho_2}{2q_2}}y^{-\frac{\alpha}{2}\rho_1-\frac{\beta}{2}\rho_2}dy<\infty$.

Veja ainda que

$$\begin{aligned}\frac{-n(\rho_1-1)}{2q_1}-\frac{n\rho_2}{2q_2}-\frac{\alpha}{2}\rho_1-\frac{\beta}{2}\rho_2+1 &= \frac{-n\rho_1}{2q_1}+\frac{n}{2q_1}-\frac{n\rho_2}{2q_2}-\frac{n\rho_1}{2p_1}-\frac{n\rho_2}{2p_2}+\frac{n\rho_2}{2q_2}+1\\ &= \frac{n}{2q_1}-\frac{n}{2p_1}-\frac{n}{2}(\frac{\rho_1-1}{p_1}+\frac{\rho_2}{p_2})+1.\end{aligned}$$

Portanto, usando (2.23), obtemos

$$\frac{-n(\rho_1-1)}{2q_1}-\frac{n\rho_2}{2q_2}-\frac{\alpha}{2}\rho_1-\frac{\beta}{2}\rho_2+1=\frac{n}{2q_1}-\frac{n}{2p_1}=-\frac{\alpha}{2} \tag{2.66}$$

e assim,

$$\sup_{t>0}t^{\frac{\alpha}{2}}\|B_1(u,v)-B_1(\widetilde{u},v)\|_{(q_1,\infty)}\leq C_1\Lambda_1. \tag{2.67}$$

De maneira análoga

$$\|B_1(\widetilde{u},v)-B_1(\widetilde{u},\widetilde{v})\|_{(q_1,\infty)}\leq C_2t^{-\frac{\alpha}{2}}\Lambda_2,$$

onde

$$\Lambda_2=\sup_{t>0}t^{\frac{\beta}{2}}\|(v-\widetilde{v})\|_{(q_2,\infty)}\sup_{t>0}t^{\frac{\beta}{2}(\rho_2-1)}(\|v\|_{(q_2,\infty)}^{\rho_2-1}+\|\widetilde{v}\|_{(q_2,\infty)}^{\rho_2-1})\sup_{t>0}t^{\frac{\alpha}{2}\rho_1}\|\widetilde{u}\|_{(q_1,\infty)}^{\rho_1}.$$

Portanto, fazendo $K_{B_1}=\max\{C_1,C_2\}$, obtemos

$$\sup_{t>0}t^{\frac{\alpha}{2}}\|B_1(u,v)-B_1(\widetilde{u},\widetilde{v})\|_{(q_1,\infty)}\leq K_{B_1}(\Lambda_1+\Lambda_2)$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}\|B_2(u,v)-B_2(\widetilde{u},\widetilde{v})\|_{(q_2,\infty)} &= \|B_2(u,v)-B_2(u,\widetilde{v})+B_2(u,\widetilde{v})-B_2(\widetilde{u},\widetilde{v})\|_{(q_2,\infty)}\\ &\leq \|B_2(u,v)-B_2(u,\widetilde{v})\|_{(q_2,\infty)}+\|B_2(u,\widetilde{v})-B_2(\widetilde{u},\widetilde{v})\|_{(q_2,\infty)}\end{aligned}$$

Agora fixe u e suponha que $\frac{1}{\widetilde{r}}=\frac{r_1}{q_1}+\frac{r_2}{q_2}$ e $\frac{1}{q_1}=\frac{1}{\widetilde{l}}+\frac{1}{\widetilde{r}}-1$. Uma vez que $p_i<q_i$, $i=1,2$, observe que de (2.32) $\frac{1}{\widetilde{r}}=\frac{r_1}{q_1}+\frac{r_2}{q_2}<1$. Portanto, utilizando as desigualdades Young e Hölder (desigualdades (1.14) e (1.19)), temos que

$$\|B_2(u,v)-B_2(u,\widetilde{v})\|_{(q_2,\infty)} \leq \int_0^t \|G(t-s)(|v|^{r_2-1}v-|\widetilde{v}|^{r_2-1}\widetilde{v})|u|^{r_1-1}u\|_{(q_2,\infty)}ds \leq$$
$$\leq C\int_0^t \|g(t-s)\|_{(\widetilde{l},\infty)}\ \|(|v|^{r_2-1}v-|\widetilde{v}|^{r_2-1}\widetilde{v})|u|^{r_1-1}u\|_{(\widetilde{r},\infty)}ds$$
$$\leq C\int_0^t (t-s)^{\frac{-n}{2}+\frac{n}{2\widetilde{l}}}\|(v-\widetilde{v})(|v|^{r_2-1}+|\widetilde{v}|^{r_2-1})|u|^{r_1-1}u\|_{(\widetilde{r},\infty)}ds$$
$$\leq C\int_0^t (t-s)^{\frac{-n}{2}+\frac{n}{2\widetilde{l}}}\|(v-\widetilde{v})\|_{(q_2,\infty)}\ (\|v\|^{r_2-1}_{(q_2,\infty)}+\|\widetilde{v}\|^{r_2-1}_{(q_2,\infty)})\|u\|^{r_1}_{(q_1,\infty)}ds$$
$$= C\int_0^t (t-s)^{\frac{-n}{2}+\frac{n}{2\widetilde{l}}}s^{\frac{\beta}{2}}\|(v-\widetilde{v})\|_{(q_2,\infty)}\ s^{\frac{\beta}{2}(r_2-1)}(\|v\|^{r_2-1}_{(q_2,\infty)}+\|\widetilde{v}\|^{r_2-1}_{(q_2,\infty)})s^{-\frac{\beta}{2}r_2}s^{-\frac{\alpha}{2}r_1}s^{\frac{\alpha}{2}r_1}\|u\|^{r_1}_{(q_1,\infty)}ds$$
$$= C\int_0^t (t-s)^{\frac{-n}{2}(1-\frac{1}{\widetilde{l}})}s^{\frac{\beta}{2}}\|(v-\widetilde{v})\|_{(q_2,\infty)}\ s^{\frac{\beta}{2}(r_2-1)}(\|v\|^{r_2-1}_{(q_2,\infty)}+\|\widetilde{v}\|^{r_2-1}_{(q_2,\infty)})s^{-\frac{\beta}{2}r_2-\frac{\alpha}{2}r_1+\frac{\alpha}{2}r_1}\|u\|^{r_1}_{(q_1,\infty)}ds$$

Então,

$$\|B_2(u,v)-B_2(u,\widetilde{v})\|_{(q_2,\infty)} \leq \left(C\int_0^t (t-s)^{\frac{-n(r_2-1)}{2q_2}-\frac{nr_1}{2q_1}}s^{-\frac{\beta}{2}r_2-\frac{\alpha}{2}r_1}ds\right)\widetilde{\Lambda}_1,$$

onde

$$\widetilde{\Lambda}_1 = \sup_{t>0} t^{\frac{\beta}{2}}\|(v-\widetilde{v})\|_{(q_2,\infty)} \sup_{t>0} t^{\frac{\beta}{2}(r_2-1)}(\|v\|^{r_2-1}_{(q_2,\infty)}+\|\widetilde{v}\|^{r_2-1}_{(q_2,\infty)}) \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}r_1}\|u\|^{r_1}_{(q_1,\infty)}.$$

Observe que

$$\int_0^t (t-s)^{\frac{-n(r_2-1)}{2q_2}-\frac{nr_1}{2q_1}}s^{-\frac{\beta}{2}r_2-\frac{\alpha}{2}r_1}ds = t^{\frac{-n(r_2-1)}{2q_2}-\frac{nr_1}{2q_1}-\frac{\beta}{2}r_2-\frac{\alpha}{2}r_1+1}\int_0^1 (1-y)^{\frac{-n(r_2-1)}{2q_2}-\frac{nr_1}{2q_1}}s^{-\frac{\beta}{2}r_2-\frac{\alpha}{2}r_1}ds.$$

Por hipótese, $-\frac{\alpha}{2}r_1-\frac{\beta}{2}r_2 > -1$. Como $p_i < q_i$, de (2.24), temos que $\frac{-n(r_2-1)}{2q_2}-\frac{nr_1}{2q_1} > -1$. Portanto $\int_0^1 (1-y)^{\frac{-n(r_2-1)}{2q_2}-\frac{nr_1}{2q_1}}s^{-\frac{\beta}{2}r_2-\frac{\alpha}{2}r_1}ds < \infty$.

Note também que

$$\frac{-n(r_2-1)}{2q_2}-\frac{nr_1}{2q_1}-\frac{\beta}{2}r_2-\frac{\alpha}{2}r_1+1 = \frac{n}{2q_2}-\frac{n}{2p_2}-\frac{n}{2}(\frac{r_1}{p_1}+\frac{r_2-1}{p_2})+1.$$

Portanto, usando (2.24), obtemos

$$\frac{-n(r_2-1)}{2q_2}-\frac{nr_1}{2q_1}-\frac{\beta}{2}r_2-\frac{\alpha}{2}r_1+1 = \frac{n}{2q_2}-\frac{n}{2p_2} = -\frac{\beta}{2}. \tag{2.68}$$

Assim,

$$\sup_{t>0} t^{\frac{\beta}{2}}\|B_2(u,v)-B_2(u,\widetilde{v})\|_{(q_2,\infty)} \leq D_1\widetilde{\Lambda}_1, \tag{2.69}$$

De maneira análoga

$$\|B_2(u,\widetilde{v})-B_2(\widetilde{u},\widetilde{v})\|_{(q_2,\infty)} \leq D_2 t^{-\frac{\beta}{2}}\widetilde{\Lambda}_2,$$

onde

$$\widetilde{\Lambda_2} = \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|(u-\widetilde{u})\|_{(q_1,\infty)} \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}(r_1-1)} (\|u\|_{(q_1,\infty)}^{r_1-1} + \|\widetilde{u}\|_{(q_1,\infty)}^{r_1-1}) \sup_{t>0} t^{\frac{\beta}{2} r_2} \|\widetilde{v}\|_{(q_2,\infty)}^{r_2}.$$

Portanto, fazendo $K_{B_2} = \max\{D_1, D_2\}$

$$\sup_{t>0} t^{\frac{\beta}{2}} \|B_2(u,v) - B_2(\widetilde{u},\widetilde{v})\|_{(q_2,\infty)} \leq K_{B_2}(\widetilde{\Lambda_1} + \widetilde{\Lambda_2}). \tag{2.70}$$

Assim de (2.68) e (2.70), obtemos a seguinte estimativa

$$\begin{aligned}
&\max\{\sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|B_1(u,v) - B_1(\widetilde{u},\widetilde{v})\|_{(q_1,\infty)}, \sup_{t>0} t^{\frac{\beta}{2}} \|B_2(u,v) - B_2(\widetilde{u},\widetilde{v})\|_{(q_2,\infty)}\} \leq \\
&\leq K_{q_1q_2} \|x-z\|_{E_{q_1q_2}} [\left(\|x\|_{E_{q_1q_2}}^{\rho_1-1} + \|z\|_{E_{q_1q_2}}^{\rho_1-1}\right) \|x\|_{E_{q_1q_2}}^{\rho_2} + \left(\|x\|_{E_{q_1q_2}}^{\rho_2-1} + \|z\|_{E_{q_1q_2}}^{\rho_2-1}\right) \|z\|_{E_{q_1q_2}}^{\rho_1} \\
&+ \left(\|x\|_{E_{q_1q_2}}^{r_1-1} + \|z\|_{E_{q_1q_2}}^{r_1-1}\right) \|x\|_{E_{q_1q_2}}^{r_2} + \left(\|x\|_{E_{q_1q_2}}^{r_2-1} + \|z\|_{E_{q_1q_2}}^{r_2-1}\right) \|z\|_{E_{q_1q_2}}^{r_1}],
\end{aligned} \tag{2.71}$$

onde $K_{q_1q_2} = \max\{K_{B_1}, K_{B_2}\}$,

$$\|x-z\|_{E_{q_1q_2}} = \max\{\sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|(u-\widetilde{u})\|_{(q_1,\infty)}, \sup_{t>0} t^{\frac{\beta}{2}} \|(v-\widetilde{v})\|_{(q_2,\infty)}\},$$

$$\|x\|_{E_{q_1q_2}} = \max\{\sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|u\|_{(q_1,\infty)}, \sup_{t>0} t^{\frac{\beta}{2}} \|v\|_{(q_2,\infty)}\} \text{ e}$$

$$\|z\|_{E_{q_1q_2}} = \max\{\sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|\widetilde{u}\|_{(q_1,\infty)}, \sup_{t>0} t^{\frac{\beta}{2}} \|\widetilde{v}\|_{(q_2,\infty)}\}.$$

Ou seja, $B(u,v)$ satisfaz a propriedade (2.8) do Lema 2.1 com $X = E_{q_1q_2}$, finalizando assim a prova da terceira parte do teorema.

2.1.3 Demonstração do Teorema 2.2 (Unicidade)

Seja $\omega = (u,v)$ e $\widetilde{\omega} = (\widetilde{u},\widetilde{v})$ duas soluções brandas de (2.1) em $C([0,\infty); L^{p_1} \times L^{p_2})$, com condições iniciais $\omega_0 = (u_0,v_0) \in L^{p_1} \times L^{p_2}$. Para mostrar o Teorema 2.2, é suficiente provar que $\omega = \widetilde{\omega}$ em $[0,T]$, $0 < T < \infty$, T suficientemente pequeno. O caso geral segue cobrindo a semi-reta $[0,\infty)$ por intervalos de comprimento T. Denote $W = \omega - \widetilde{\omega}$, onde ω_1 e ω_2 denotam primeira e segunda coordenada de W, respectivamente. Sejam $\gamma = (G(t)u_0 - u, G(t)v_0 - v)$ e $\widetilde{\gamma} = (G(t)u_0 - \widetilde{u}, G(t)v_0 - \widetilde{v})$ onde γ_i e $\widetilde{\gamma}_i$, $i = 1,2$, são as coordenadas de γ e $\widetilde{\gamma}$ respectivamente.

Assim, para a primeira coordenada de W, temos a seguinte estimativa

$$
\begin{aligned}
&\left\| \int_0^t G(t-s)(|u|^{\rho_1-1}u|v|^{\rho_2-1}v - |\widetilde{u}|^{\rho_1-1}\widetilde{u}|\widetilde{v}|^{\rho_2-1}\widetilde{v})ds \right\|_{(p_1,\infty)} \\
&= \left\| \int_0^t G(t-s)(|u|^{\rho_1-1}u - |\widetilde{u}|^{\rho_1-1}\widetilde{u})|v|^{\rho_2-1}v + |\widetilde{u}|^{\rho_1-1}\widetilde{u}(|v|^{\rho_2-1}v - |\widetilde{v}|^{\rho_2-1}\widetilde{v})ds \right\|_{(p_1,\infty)} \\
&\leq \left\| \int_0^t G(t-s)(|u|^{\rho_1-1}u - |\widetilde{u}|^{\rho_1-1}\widetilde{u})|v|^{\rho_2-1}vds \right\|_{(p_1,\infty)} \\
&+ \left\| \int_0^t G(t-s)|\widetilde{u}|^{\rho_1-1}\widetilde{u}(|v|^{\rho_2-1}v - |\widetilde{v}|^{\rho_2-1}\widetilde{v})ds \right\|_{(p_1,\infty)} \\
&\leq \left\| \int_0^t G(t-s)|\omega_1|(|u|^{\rho_1-1} + |\widetilde{u}|^{\rho_1-1})|v|^{\rho_2-1}vds \right\|_{(p_1,\infty)} \\
&+ \left\| \int_0^t G(t-s)|\omega_2|(|v|^{\rho_2-1} + |\widetilde{v}|^{\rho_2-1})|\widetilde{u}|^{\rho_1-1}\widetilde{u}ds \right\|_{(p_1,\infty)} \\
&= I_1 + I_2.
\end{aligned}
$$

Contudo, como $u = G(t)u_0 - \gamma_1$ e $\widetilde{u} = G(t)u_0 - \widetilde{\gamma}_1$, temos

$$
\begin{aligned}
I_1 &\leq C \left\| \int_0^t G(t-s)|\omega_1|(|\gamma_1|^{\rho_1-1} + |\widetilde{\gamma}_1|^{\rho_1-1})|v|^{\rho_2-1}vds \right\|_{(p_1,\infty)} \\
&+ 2C \left\| \int_0^t G(t-s)|\omega_1||G(s)u_0|^{\rho_1-1}||v|^{\rho_2-1}vds \right\|_{(p_1,\infty)} \\
&= I_{1_1} + I_{1_2}.
\end{aligned}
$$

Com cálculos análogos aos feitos para encontrar a desigualdade (2.17) do Lema 2.2 e utilizando o fato que $L^r \subset L^{(r,\infty)}, 1 < r \leq \infty$ (Proposição 1.6), obtemos:

$$
I_{1_1} \leq CK \sup_{0<t<T} \|\omega_1\|_{(p_1,\infty)} (\sup_{0<t<T} \|\gamma_1\|_{L^{p_1}}^{\rho_1-1} + \sup_{0<t<T} \|\widetilde{\gamma}_1\|_{L^{p_1}}^{\rho_1-1}) \sup_{0<t<T} \|v\|_{(p_2,\infty)}^{\rho_2}.
$$

Por outro lado, temos que

$$
I_{1_2} \leq C \sup_{0<t<T} \|\omega_1\|_{(p_1,\infty)} (\sup_{0<t<T} t^{\frac{\alpha}{2}} \|G(t)u_0\|_{L^{q_1}})^{\rho_1-1} \sup_{0<t<T} \|v\|_{(p_2,\infty)}^{\rho_2} \int_0^t (t-s)^{-\frac{n}{2}(\frac{\rho_1-1}{q_1}+\frac{\rho_2}{p_2})} s^{\frac{-\alpha(\rho_1-1)}{2}} ds.
$$

Observe que a finitude da última integral, segue analogamente da finitude da integral do Teorema de existência.

Portanto, $I_{1_1} + I_{1_2} \leq CA(T) \sup_{0<t<T} \|\omega_1\|_{(p_1,\infty)} \sup_{0<t<T} \|v\|_{(p_2,\infty)}^{\rho_2}$, onde

$$
A(T) = [(\sup_{0<t<T} \|\gamma_1\|_{L^{p_1}}^{\rho_1-1} + \sup_{0<t<T} \|\widetilde{\gamma}_1\|_{L^{p_1}}^{\rho_1-1}) + (\sup_{0<t<T} t^{\frac{\alpha}{2}} \|G(t)u_0\|_{L^{q_1}})^{\rho_1-1})].
$$

Como $v = G(t)v_0 - \gamma_2$ e $\widetilde{v} = G(t)v_0 - \widetilde{\gamma}_2$, temos que

$$\begin{aligned} I_2 &\leq C\left\| \int_0^t G(t-s)|\omega_2|(|\gamma_2|^{\rho_2-1} + |\widetilde{\gamma}_2|^{\rho_2-1})|\widetilde{u}|^{\rho_1} ds \right\|_{(p_1,\infty)} \\ &+ 2C\left\| \int_0^t G(t-s)|\omega_2||G(s)v_0|^{\rho_2-1}||\widetilde{u}|^{\rho_1} ds \right\|_{(p_1,\infty)} \\ &= I_{2_1} + I_{2_2}. \end{aligned}$$

Então, analogamente

$$I_{2_1} \leq CK \sup_{0<t<T} \|\omega_2\|_{(p_2,\infty)} \big(\sup_{0<t<T} \|\gamma_2\|_{L^{p_2}}^{\rho_2-1} + \sup_{0<t<T} \|\widetilde{\gamma}_2\|_{L^{p_2}}^{\rho_2-1} \big) \sup_{0<t<T} \|\widetilde{u}\|_{(p_1,\infty)}^{\rho_1}.$$

Por outro, lado temos que

$$I_{2_2} \leq C \sup_{0<t<T} \|\omega_2\|_{(p_2,\infty)} \big(\sup_{0<t<T} t^{\frac{\beta}{2}} \|G(t)v_0\|_{L^{q_2}} \big)^{\rho_2-1} \sup_{0<t<T} \|\widetilde{u}\|_{(p_1,\infty)}^{\rho_1} \int_0^t (t-s)^{-\frac{n}{2}(\frac{\rho_2-1}{q_2} + \frac{\rho_1}{p_1})} s^{\frac{-\beta(\rho_2-1)}{2}} ds.$$

Observe que a finitude da última integral, também segue analogamente da finitude da integral do Teorema de existência.

Assim, $I_{2_1} + I_{2_2} \leq CB(T) \sup_{0<t<T} \|\omega_2\|_{(p_2,\infty)} \sup_{0<t<T} \|\widetilde{u}\|_{(p_1,\infty)}^{\rho_1}$, onde

$$B(T) = [(\sup_{0<t<T} \|\gamma_2\|_{L^{p_2}}^{\rho_2-1} + \sup_{0<t<T} \|\widetilde{\gamma}_2\|_{L^{p_2}}^{\rho_2-1}) + (\sup_{0<t<T} t^{\frac{\beta}{2}} \|G(t)v_0\|_{L^{q_2}})^{\rho_2-1})].$$

A estimativa para ω_2 segue de maneira semelhante. De fato,

$$\begin{aligned} &\left\| \int_0^t G(t-s)(|u|^{r_1-1}u|v|^{r_2-1}v - |\widetilde{u}|^{r_1-1}\widetilde{u}|\widetilde{v}|^{r_2-1}\widetilde{v}) ds \right\|_{(p_2,\infty)} = \\ &= \left\| \int_0^t G(t-s)(|v|^{r_2-1}v - |\widetilde{v}|^{r_2-1}\widetilde{v})|u|^{r_1-1}u + |\widetilde{v}|^{r_2-1}\widetilde{v}(|u|^{r_1-1}u - |\widetilde{u}|^{r_1-1}\widetilde{u}) ds \right\|_{(p_2,\infty)} \\ &\leq \left\| \int_0^t G(t-s)(|v|^{r_2-1}v - |\widetilde{v}|^{r_2-1}\widetilde{v})|u|^{r_1-1}u ds \right\|_{(p_2,\infty)} \\ &+ \left\| \int_0^t G(t-s)|\widetilde{v}|^{r_2-1}\widetilde{v}(|u|^{r_1-1}u - |\widetilde{u}|^{r_1-1}\widetilde{u}) ds \right\|_{(p_2,\infty)} \\ &\leq \left\| \int_0^t G(t-s)|\omega_2|(|v|^{r_2-1} + |\widetilde{v}|^{r_2-1})|u|^{r_1-1}u ds \right\|_{(p_2,\infty)} \\ &+ \left\| \int_0^t G(t-s)|\omega_1|(|u|^{r_1-1} + |\widetilde{u}|^{r_1-1})|\widetilde{v}|^{r_2-1}\widetilde{v} ds \right\|_{(p_2,\infty)} \\ &= \widetilde{I}_1 + \widetilde{I}_2. \end{aligned}$$

Contudo, como $v=G(t)v_0-\gamma_2$ e $\widetilde{v}=G(t)v_0-\widetilde{\gamma}_2$

$$\begin{aligned}\widetilde{I}_1 &\le C\left\|\int_0^t G(t-s)|\omega_2|(|\gamma_2|^{r_2-1}+|\widetilde{\gamma}_2|^{r_2-1})|u|^{r_1}ds\right\|_{(p_2,\infty)}\\ &+2C\left\|\int_0^t G(t-s)|\omega_2||G(s)v_0|^{r_2-1}||u|^{r_1}ds\right\|_{(p_2,\infty)}\\ &=\widetilde{I}_{1_1}+\widetilde{I}_{1_2}.\end{aligned}$$

Utilizando cálculos análogos aos feitos para encontrar a desigualdade (2.18) no Lema 2.2 e novamente utilizando que $L^r\subset L^{(r,\infty)}, 1<r\le\infty$ temos que:

$$\widetilde{I}_{1_1}\le CK\sup_{0<t<T}\|\omega_2\|_{(p_2,\infty)}(\sup_{0<t<T}\|\gamma_2\|_{L^{p_2}}^{r_2-1}+\sup_{0<t<T}\|\widetilde{\gamma}_2\|_{L^{p_2}}^{r_2-1})\sup_{0<t<T}\|u\|_{(p_1,\infty)}^{r_1}$$

Por outro lado, temos que

$$\widetilde{I}_{1_2}\le C\sup_{0<t<T}\|\omega_2\|_{(p_2,\infty)}(\sup_{0<t<T}t^{\frac{\beta}{2}}\|G(t)v_0\|_{L^{q_2}})^{r_2-1}\sup_{0<t<T}\|u\|_{(p_1,\infty)}^{r_1}\int_0^t(t-s)^{-\frac{n}{2}(\frac{r_2-1}{q_2}+\frac{r_1}{p_1})}s^{\frac{-\beta(r_2-1)}{2}}ds.$$

Portanto, $\widetilde{I}_{1_1}+\widetilde{I}_{1_2}\le C\widetilde{B}(T)\sup_{0<t<T}\|\omega_2\|_{(p_2,\infty)}\sup_{0<t<T}\|u\|_{(p_1,\infty)}^{r_1}$, onde

$$\widetilde{B}(T)=[(\sup_{0<t<T}\|\gamma_2\|_{L^{p_2}}^{r_2-1}+\sup_{0<t<T}\|\widetilde{\gamma}_2\|_{L^{p_2}}^{r_2-1})+(\sup_{0<t<T}t^{\frac{\beta}{2}}\|G(t)v_0\|_{L^{q_2}})^{r_2-1})].$$

Como $u=G(t)u_0-\gamma_1$ e $\widetilde{u}=G(t)u_0-\widetilde{\gamma}_1$, temos

$$\begin{aligned}\widetilde{I}_2 &\le C\left\|\int_0^t G(t-s)|\omega_1|(|\gamma_1|^{r_1-1}+|\widetilde{\gamma}_1|^{r_1-1})|\widetilde{v}|^{r_2}ds\right\|_{(p_2,\infty)}\\ &+2C\left\|\int_0^t G(t-s)|\omega_1||G(s)u_0|^{r_1-1}||\widetilde{v}|^{r_2}ds\right\|_{(p_2,\infty)}\\ &=\widetilde{I}_{2_1}+\widetilde{I}_{2_2}.\end{aligned}$$

Então, similarmente obtemos

$$\widetilde{I}_{2_1}\le CK\sup_{0<t<T}\|\omega_1\|_{(p_1,\infty)}(\sup_{0<t<T}\|\gamma_1\|_{L^{p_1}}^{r_1-1}+\sup_{0<t<T}\|\widetilde{\gamma}_1\|_{L^{p_1}}^{r_1-1})\sup_{0<t<T}\|\widetilde{v}\|_{(p_2,\infty)}^{r_2}.$$

Por outro, lado temos que

$$\widetilde{I}_{2_2}\le C\sup_{0<t<T}\|\omega_1\|_{(p_1,\infty)}(\sup_{0<t<T}t^{\frac{\alpha}{2}}\|G(t)u_0\|_{L^{q_1}})^{r_1-1}\sup_{0<t<T}\|\widetilde{v}\|_{(p_2,\infty)}^{r_2}\int_0^t(t-s)^{-\frac{n}{2}(\frac{r_1-1}{q_1}+\frac{r_2}{p_2})}s^{\frac{-\alpha(r_1-1)}{2}}ds.$$

Assim, $\widetilde{I}_{2_1}+\widetilde{I}_{2_2}\le C\widetilde{A}(T)\sup_{0<t<T}\|\omega_1\|_{(p_1,\infty)}\sup_{0<t<T}\|\widetilde{v}\|_{(p_2,\infty)}^{r_2}$, onde

$$\widetilde{A}(T)=[(\sup_{0<t<T}\|\gamma_1\|_{L^{p_1}}^{r_1-1}+\sup_{0<t<T}\|\widetilde{\gamma}_1\|_{L^{p_1}}^{r_1-1})+(\sup_{0<t<T}t^{\frac{\alpha}{2}}\|G(t)u_0\|_{L^{q_1}})^{r_1-1})].$$

Então,

$$
\begin{aligned}
&\sup_{0<t<T}\|\omega_1\|_{(p_1,\infty)}+\sup_{0<t<T}\|\omega_2\|_{(p_2,\infty)}\leq\\
&\qquad\leq C\left(A(T)\sup_{0<t<T}\|v\|^{\rho_2}_{(p_2,\infty)}+\widetilde{A}(T)\sup_{0<t<T}\|\widetilde{v}\|^{r_2}_{(p_2,\infty)}+\right)\sup_{0<t<T}\|\omega_1\|_{(p_1,\infty)}\\
&\qquad+C\left(B(T)\sup_{0<t<T}\|\widetilde{u}\|^{\rho_1}_{(p_1,\infty)}+\widetilde{B}(T)\sup_{0<t<T}\|u\|^{r_1}_{(p_1,\infty)}\right)\sup_{0<t<T}\|\omega_2\|_{(p_2,\infty)},
\end{aligned}
$$

onde

$$
\begin{aligned}
A(T)&=[(\sup_{0<t<T}\|\gamma_1\|^{\rho_1-1}_{L^{p_1}}+\sup_{0<t<T}\|\widetilde{\gamma}_1\|^{\rho_1-1}_{L^{p_1}})+(\sup_{0<t<T}t^{\frac{\alpha}{2}}\|G(t)u_0\|_{L^{q_1}})^{\rho_1-1})],\\
B(T)&=[(\sup_{0<t<T}\|\gamma_2\|^{\rho_2-1}_{L^{p_2}}+\sup_{0<t<T}\|\widetilde{\gamma}_2\|^{\rho_2-1}_{L^{p_2}})+(\sup_{0<t<T}t^{\frac{\beta}{2}}\|G(t)v_0\|_{L^{q_2}})^{\rho_2-1})],\\
\widetilde{A}(T)&=[(\sup_{0<t<T}\|\gamma_1\|^{r_1-1}_{L^{p_1}}+\sup_{0<t<T}\|\widetilde{\gamma}_1\|^{r_1-1}_{L^{p_1}})+(\sup_{0<t<T}t^{\frac{\alpha}{2}}\|G(t)u_0\|_{L^{q_1}})^{r_1-1})],\\
\widetilde{B}(T)&=[(\sup_{0<t<T}\|\gamma_2\|^{r_2-1}_{L^{p_2}}+\sup_{0<t<T}\|\widetilde{\gamma}_2\|^{r_2-1}_{L^{p_2}})+(\sup_{0<t<T}t^{\frac{\beta}{2}}\|G(t)v_0\|_{L^{q_2}})^{r_2-1})].
\end{aligned}
$$

Da hipótese $(u,v)\in C([0,\infty);L^{p_1}\times L^{p_2})$ segue que $(u(t),v(t))\overset{t\to0^+}{\longrightarrow}(u_0,v_0)$ em $L^{p_1}\times L^{p_2}$. Assim, o fato que $(\gamma_1,\gamma_2)=(G(t)u_0-u,G(t)v_0-v)$ e $(\widetilde{\gamma},\widetilde{\gamma}_2)=(G(t)u_0-\widetilde{u},G(t)v_0-\widetilde{v})$, juntamente com o Lema 1.9, nos diz que

1. $\limsup_{t\to0^+}t^{\frac{\alpha}{2}}\|G(t)u_0\|_{L^{q_1}}=0,\ \limsup_{t\to0^+}t^{\frac{\beta}{2}}\|G(t)v_0\|_{L^{q_2}}=0$;
2. $\limsup_{t\to0^+}(\sup_{0<t<T}\|\gamma_1\|^{\rho_1-1}_{L^{p_1}}+\sup_{0<t<T}\|\widetilde{\gamma}_1\|^{\rho_1-1}_{L^{p_1}})=0,\ \limsup_{t\to0^+}(\sup_{0<t<T}\|\gamma_1\|^{r_1-1}_{L^{p_1}}+\sup_{0<t<T}\|\widetilde{\gamma}_1\|^{r_1-1}_{L^{p_1}})=0$;
3. $\limsup_{t\to0^+}(\sup_{0<t<T}\|\gamma_2\|^{\rho_2-1}_{L^{p_2}}+\sup_{0<t<T}\|\widetilde{\gamma}_2\|^{\rho_2-1}_{L^{p_2}})=0,\ \limsup_{t\to0^+}(\sup_{0<t<T}\|\gamma_2\|^{r_2-1}_{L^{p_2}}+\sup_{0<t<T}\|\widetilde{\gamma}_2\|^{r_2-1}_{L^{p_2}})=0$.

Logo $A(T),\widetilde{A}(T),B(T),\widetilde{B}(T)$ tendem a 0 para T suficientemente pequeno. Portanto, podemos escolher T suficientemente pequeno, de maneira que

$$C\left(A(T)\sup_{0<t<T}\|v\|^{\rho_2}_{(p_2,\infty)}+\widetilde{A}(T)\sup_{0<t<T}\|\widetilde{v}\|^{r_2}_{(p_2,\infty)}\right)<1$$

e

$$C\left(B(T)\sup_{0<t<T}\|\widetilde{u}\|^{\rho_1}_{(p_1,\infty)}+\widetilde{B}(T)\sup_{0<t<T}\|u\|^{r_1}_{(p_1,\infty)}\right)<1.$$

Dessa forma concluímos que $W=0$ e então $u=\widetilde{u}$ e $v=\widetilde{v}$. ■

2.1.4 Auto-similaridade

Nesta sub-seção, mostraremos a existência de soluções auto-similares para o problema (2.1) em $L^{(p_1,\infty)} \times L^{(p_2,\infty)}$, desde que as condição inicial (u_0, v_0) tenha a homogeneidade certa: u_0 homogênea de grau $-k_1$ e v_0 homogênea de grau $-k_2$, onde k_1 e k_2 são definidos como em (2.4). Um ponto importante a se destacar é que as normas dos espaços com dependência no tempo, E e $E_{q_1q_2}$, são invariantes pela transformação de escala

$$(u(t,x), v(t,x)) \to (\lambda^{k_1} u(\lambda^2 t, \lambda x), \lambda^{k_2} v(\lambda^2 t, \lambda x)),\ \forall\, \lambda > 0,$$

relembrando que $k_i = \frac{n}{p_i}$. De fato, usando a relação de escala (1.9) dos espaços de Lorentz , temos que

$$\begin{aligned}
\|(u_\lambda, v_\lambda)\|_E &= \max\{\lambda^{k_1} \sup_{t>0} \|u(\lambda^2 t, \lambda x)\|_{(p_1,\infty)}, \lambda^{k_2} \sup_{t>0} \|v(\lambda^2 t, \lambda x)\|_{(p_2,\infty)}\} \\
&= \max\{\lambda^{k_1} \lambda^{-\frac{n}{p_1}} \sup_{t>0} \|u(\lambda^2 t, x)\|_{(p_1,\infty)}, \lambda^{k_2} \lambda^{-\frac{n}{p_2}} \sup_{t>0} \|v(\lambda^2 t, x)\|_{(p_2,\infty)}\} \\
&= \max\{\sup_{t>0} \|u(\lambda^2 t, x)\|_{(p_1,\infty)}, \sup_{t>0} \|v(\lambda^2 t, x)\|_{(p_2,\infty)}\} \\
&= \|(u,v)\|_E.
\end{aligned} \tag{2.72}$$

A demonstração para o espaço $E_{q_1q_2}$ é análoga, e portanto a omitiremos.

Teorema 2.3 *Assuma todas as hipótese do Teorema 2.1. Se $u_0 \in L^{(p_1,\infty)}$ e $v_0 \in L^{(p_2,\infty)}$ são funções homogêneas de grau $-k_1$ e $-k_2$ respectivamente, então, a solução $(u(t,x), v(t,x))$ proveniente do Teorema 2.1 é auto-similar, isto é,*

$$(u(t,x), v(t,x)) = (\lambda^{k_1} u(\lambda^2 t, \lambda x), \lambda^{k_2} v(\lambda^2 t, \lambda x))$$

q.t.p, $x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$ e todo $\lambda > 0$. Além disso, se a condição inicial for suficientemente pequena, então a solução auto-similar obtida previamente pode ser regularizada, isto é, $(u,v) \in E_{q_1q_2}$.

Demonstração. Do Lema 2.1, observamos que a solução pode ser obtida como limite da seguinte seqüência recursiva:

$$u_1(t,x) = G(t)u_0(x) \quad v_1(t,x) = G(t)v_0(x),$$
$$u_{k+1}(t,x) = u_1(t,x) + B(u_k, v_k) \quad v_{k+1}(t,x) = v_1(t,x) + B(u_k, v_k),\ \ k \in \mathbb{N}.$$

Essa seqüência é a seqüência associada com sistema (2.1). Inicialmente temos que $u_1(t,x)$ e $v_1(t,x)$ satisfazem

$$u_1(t,x) = \lambda^{k_1} u_1(\lambda^2 t, \lambda x)$$

$$v_1(t,x) = \lambda^{k_2} v_1(\lambda^2 t, \lambda x).$$

De fato,

$$\begin{aligned}
u_1(\lambda^2 t, \lambda x) &= \int_{\mathbb{R}^n} g(\lambda^2 t, \lambda x - y) u_0(y) dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} g(\lambda^2 t, \lambda(x - \lambda^{-1} y)) u_0(y) dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \lambda^{-n} g(t, x - \lambda^{-1} y) u_0(y) dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} g(t, x - z) u_0(\lambda z) dz \\
&= \lambda^{-k_1} \int_{\mathbb{R}^n} g(t, x - z) u_0(z) dz = \lambda^{-k_1} u_1(t,x)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
v_1(\lambda^2 t, \lambda x) &= \int_{\mathbb{R}^n} g(\lambda^2 t, \lambda x - y) v_0(y) dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} g(\lambda^2 t, \lambda(x - \lambda^{-1} y)) v_0(y) dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \lambda^{-n} g(t, x - \lambda^{-1} y) v_0(y) dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} g(t, x - z) v_0(\lambda z) dz \\
&= \lambda^{-k_2} \int_{\mathbb{R}^n} g(t, x - z) v_0(z) dz = \lambda^{-k_2} v_1(t,x).
\end{aligned}$$

Assim, por argumento de indução, concluímos que u_n e v_n satisfazem a propriedade $u_n(t,x) = \lambda^{k_1} u_n(\lambda x, \lambda^2 t)$, $v_n(t,x) = \lambda^{k_1} v_n(\lambda x, \lambda^2 t)$ para todo n. Com efeito, suponha que u_n, v_n satisfaçam as relações $u_n(t,x) = \lambda^{k_1} u_n(\lambda^2 t, \lambda x)$ e $v_n(t,x) = \lambda^{k_2} v_n(\lambda^2 t, \lambda x)$. Assim,

$$\begin{aligned}
&B_1(u_n, v_n)(\lambda^2 t, \lambda x) = \int_0^{\lambda^2 t} \int_{\mathbb{R}^n} g(\lambda^2 t - s, \lambda x - y) |u_n|^{\rho_1 - 1} u_n(s,y) |v_n|^{\rho_2 - 1} v_n(s,y) dy ds \\
&= \lambda^2 \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} g(\lambda^2(t-s), \lambda x - y)(|u_n|^{\rho_1 - 1} u_n)(\lambda^2 s, y)(|v_n|^{\rho_2 - 1} v_n)(\lambda^2 s, y) dy ds \\
&= \lambda^2 \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \lambda^n g(\lambda^2(t-s), \lambda(x-y))(|u_n|^{\rho_1 - 1} u_n)(\lambda^2 s, \lambda y)(|v_n|^{\rho_2 - 1} v_n)(\lambda^2 s, \lambda y) dy ds \\
&= \lambda^2 \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} g(t-s, x-y) \lambda^{-(k_1 \rho_1 + k_2 \rho_2)} (|u_n|^{\rho_1 - 1} u_n)(s,y)(|v_n|^{\rho_2 - 1} v_n)(s,y) dy ds \\
&= \lambda^2 \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} g(t-s, x-y) \lambda^{-(k_1 + 2)} (|u_n|^{\rho_1 - 1} u_n)(s,y)(|v_n|^{\rho_2 - 1} v_n)(s,y) dy ds \\
&= \lambda^{-k_1} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} g(t-s, x-y)(|u_n|^{\rho_1 - 1} u_n)(s,y)(|v_n|^{\rho_2 - 1} v_n)(s,y) dy ds \\
&= \lambda^{-k_1} B(u_n, v_n)(t,x)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
B_2(u_n,v_n)(\lambda^2 t,\lambda x) &= \int_0^{\lambda^2 t}\int_{\mathbb{R}^n} g(\lambda^2 t-s,\lambda x-y)(|u_n|^{r_1-1}u_n)(s,y)(|v_n|^{r_2-1}v_n)(s,y)dyds\\
&= \lambda^2\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n} g(\lambda^2(t-s),\lambda x-y)(|u_n|^{r_1-1}u_n)(\lambda^2 s,y)(|v_n|^{r_2-1}v_n)(\lambda^2 s,y)dyds\\
&= \lambda^2\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n} \lambda^n g(\lambda^2(t-s),\lambda(x-y))(|u_n|^{r_1-1}u_n)(\lambda^2 s,\lambda y)(|v_n|^{r_2-1}v_n)(\lambda^2 s,\lambda y)dyds\\
&= \lambda^2\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n} g(t-s,x-y)\lambda^{-(k_1r_1+k_2r_2)}(|u_n|^{r_1-1}u_n)(s,y)(|v_n|^{r_2-1}v_n)(s,y)dyds\\
&= \lambda^2\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n} g(t-s,x-y)\lambda^{-(k_2+2)}(|u_n|^{r_1-1}u_n)(s,y)(|v_n|^{r_2-1}v_n)(s,y)dyds\\
&= \lambda^{-k_2}\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n} g(t-s,x-y)(|u_n|^{r_1-1}u_n)(s,y)(|v_n|^{r_2-1}v_n)(s,y)dyds\\
&= \lambda^{-k_2}B_2(u_n,v_n)(t,x).
\end{aligned}$$

Portanto

$$u_{n+1}(t,x) = u_1(t,x)+B_1(u_n,v_n) = \lambda^{k_1}\left(u_1(\lambda^2 t,\lambda x)+B_1(u_n,v_n)(\lambda^2 t,\lambda x)\right) = \lambda^{k_1}u_{n+1}(\lambda^2 t,\lambda x).$$

De maneira análoga, obtemos

$$v_{n+1}(t,x) = v_1(t,x)+B_2(u_n,v_n) = \lambda^{k_2}\left(u_1(\lambda^2 t,\lambda x)+B_2(u_n,v_n)(\lambda^2 t,\lambda x)\right) = \lambda^{k_2}v_{n+1}(\lambda^2 t,\lambda x).$$

Além disso, como a solução branda $(u(t,x),v(t,x))$ é obtida como limite da seqüência $\{(u_n,v_n)\}$ no espaço E, chegamos a conclusão que $((u(t,x),v(t,x))$ verifica

$$u(t,x)=u_\lambda(t,x)=\lambda^{k_1}u(\lambda x,\lambda^2 t),\ v(t,x)=v_\lambda(t,x)=\lambda^{k_2}v(\lambda x,\lambda^2 t)$$

para todo $\lambda>0$, todo $t>0$ e quase todo $x\in\mathbb{R}^n$. De fato, usando a invariância da norma $\|\cdot\|_{(p_1,\infty)}$ pela transformação de escala (2.72) e que $u_n(t,x)=\lambda^{k_1}u_n(\lambda^2 t,\lambda x)$, temos que

$$\begin{aligned}
\|u(t,x)-\lambda^{k_1}u(\lambda^2 t,\lambda x)\|_{(p_1,\infty)} &= \|u(t,x)-u_n(t,x)+u_n(t,x)-\lambda^{k_1}u(\lambda^2 t,\lambda x,)\|_{(p_1,\infty)}\\
&\le \|u(t,x)-u_n(t,x)\|_{(p_1,\infty)}+\|\lambda^{k_1}u_n(\lambda^2 t,\lambda x)-\lambda^{k_1}u(\lambda^2 t,\lambda x)\|_{(p_1,\infty)}\\
&= 2\|u(t,x)-u_n(t,x)\|_{(p_1,\infty)}\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}0.
\end{aligned}$$

De maneira similar

$$\|v(t,x)-\lambda^{k_2}v(\lambda^2 t,\lambda x)\|_{(p_2,\infty)}\le 2\|v(t,x)-v_n(t,x)\|_{(p_2,\infty)}\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}0.$$

Assim,

$$\|(u-u_\lambda,v-v_\lambda)\|_E\le 2\max\{\sup_{t>0}\|u(t,x)-u_n(t,x)\|_{(p_1,\infty)},\sup_{t>0}\|v(t,x)-v_n(t,x)\|_{(p_2,\infty)}\}\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}0,$$

donde concluímos que

$$(u(t,x),v(t,x)) = (u_\lambda(t,x),v_\lambda(t,x)) = (\lambda^{k_1}u(\lambda x,\lambda^2 t),\lambda^{k_2}v(\lambda x,\lambda^2 t))$$

para quase todo $x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$ e todo $\lambda > 0$.

Observação 2.2 *Na seção 2.3.3, Observação 2.5, mostraremos que se $(u_0,v_0) \in L^{p_1} \times L^{p_2}$, então a única solução auto-similar que podemos encontrar é a solução nula. Por outro lado, pelo Corolário 2.3 podemos encontrar soluções auto-similares em espaços de Marcinkiewicz $L^{(p_1,\infty)} \times L^{(p_2,\infty)}$. Essa diferença de comportamento do sistema (2.1) está essencialmente relacionado com o fato do espaço $L^{(p_1,\infty)} \times L^{(p_2,\infty)}$ conter funções homogêneas com o grau certo, enquanto que a versão correspondente em espaço de Lebesgue $L^{p_1} \times L^{p_2}$ não contém funções homogêneas de qualquer grau.*

2.2 Soluções Brandas Locais em L^p

Nesta seção estabeleceremos condições sobre os espaços L^p para existência de soluções branda locais para a equação integral (2.73). Veremos na próxima seção que na prova do teorema de existência de soluções globais em $L^{p_1} \times L^{p_2}$ (Teorema 2.5), a existência segue imediatamente dos argumentos do teorema de existência em $L^{(p_1,\infty)} \times L^{(p_2,\infty)}$. Diferentemente, para garantir a existência local, aplicaremos o Lema 2.1 em um espaço apropriado e posteriormente, mostraremos que a seqüência de Picard associada também converge para a solução $(u(t,x),v(t,x))$ na norma $\max\{\sup_{0<t<T}\|\cdot\|_{p_1},\sup_{0<t<T}\|\cdot\|_{p_2}\}$, onde $\|\cdot\|_p$ denota a norma do espaço L^P, e que de fato a solução pertence a $\widetilde{E}^T_{q_1q_2}$, cuja definição veremos a seguir.

Definição 2.3 *Sejam $p_i = \frac{n}{k_i}$, $k_i > 0$, $1 < p_i \leq \infty$, $1 < q_i \leq \infty$, para $i = 1,2$ onde k_i é dado por (2.4), $\alpha = \frac{n}{p_1} - \frac{n}{q_1}$ e $\beta = \frac{n}{p_2} - \frac{n}{q_2}$. O espaço de Banach $\widetilde{E}^T_{q_1q_2}$ é o espaço de todas as funções vetoriais $(u(t,\cdot),v(t,\cdot)) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ com $0 < t < T$, tal que,*

$$(u(t,x),v(t,x)) \in BC([0,T),L^{p_1}\times L^{p_2}) \quad e \quad (t^{\frac{\alpha}{2}}u(t,x),t^{\frac{\beta}{2}}v(t,x)) \in BC([0,T),L^{q_1}\times L^{q_2}),$$

a norma em $\widetilde{E}^T_{q_1q_2}$ é dada por:

$$\|(u,v)\|_{\widetilde{E}^T_{q_1q_2}} = \max\{\sup_{0<t<T} t^{\frac{\alpha}{2}}\|u(t,x)\|_{q_1} + \sup_{0<t<T}\|u(t,x)\|_{p_1}, \sup_{0<t<T} t^{\frac{\beta}{2}}\|v(t,x)\|_{q_2} + \sup_{0<t<T}\|v(t,x)\|_{p_2}\}.$$

Observe que na definição 2.3, além da função $(u,v) \in BC((0,T), L^{p_1} \times L^{p_2})$, estamos assumindo que (u,v) é contínua em $t = 0$ na topologia da norma do espaço $L^{p_1} \times L^{p_2}$.

A seguir, daremos a definição precisa de soluções brandas locais no espaços $\widetilde{E}^T_{q_1 q_2}$.

Definição 2.4 *Uma solução branda global do Problema do valor inicial (2.1) em $\widetilde{E}^T_{q_1 q_2}$ é uma função $\omega = (u(t), v(t))$ no espaço correspondente , satisfazendo*

$$(u(t), v(t)) = (G(t)u_0, G(t)v_0) + B(u,v)(t), \ \ 0 \le t \ < T \tag{2.73}$$

onde

$$B(u,v)(t) = \left(\int_0^t G(t-s)|u|^{\rho_1 - 1} u |v|^{\rho_2 - 1} v ds \ , \ \int_0^t G(t-s)|u|^{r_1 - 1} u |v|^{r_2 - 1} v ds \right)$$

e

$$(u(t), v(t)) \to (u_0, v_0) \ quando \ \ t \to 0^+$$

sendo este limite tomado na $\|(\cdot,*)\|_{p_1 \times p_2} = \max\{\|\cdot\|_{p_1}, \|*\|_{p_2}\}$ de $L^{p_1} \times L^{p_2}$.

Observemos, pelo Lema 1.9, que a parte linear da equação integral (2.73) é dominada pela norma do dado inicial (u_0, v_0). O próximo lema garante que a parte não linear da equação (2.73) satisfaz a propriedade (2.8) do Lema 2.1 no espaço $\widetilde{E}^T_{q_1 q_2}$.

Lema 2.3 *Sejam $0 < T \le \infty$, $1 < \rho_i, r_i < p_i < q_i < \infty$, $i - 1, 2$, $1 < a_1' < \left(\frac{\rho_2}{q_2} + \frac{\rho_1 - 1}{q_1}\right)^{-1}$, $1 < a_2' < \left(\frac{\rho_1}{q_1} + \frac{r_2 - 1}{q_2}\right)^{-1}$ e $u, v \in \widetilde{E}_{q_1, q_2 T}$. Se $\frac{\alpha}{2}\rho_1 + \frac{\beta}{2}\rho_2 < 1$ e $\frac{\alpha}{2} r_1 + \frac{\beta}{2} r_2 < 1$, então*

1.

$$\begin{aligned} &\sup_{0<t<T} \|B_1(u,v) - B_1(\widetilde{u},\widetilde{v})\|_{p_1} \le \widetilde{K_1}\{ \sup_{0<t<T} \|(u - \widetilde{u})\|_{p_1} \sup_{0<t<T} t^{\frac{\alpha}{2}(\rho_1 - 1)}(\|u\|^{\rho_1 - 1}_{q_1} \\ &+ \|\widetilde{u}\|^{\rho_1 - 1}_{q_1}) \sup_{0<t<T} t^{\frac{\beta}{2}\rho_2} \|v\|^{\rho_2}_{q_2}) + \sup_{0<t<T} t^{\frac{\beta}{2}} \|(v - \widetilde{v})\|_{p_2} \sup_{0<t<T} t^{\frac{\beta}{2}(\rho_2 - 1)}(\|v\|^{\rho_2 - 1}_{q_2} \\ &+ \|\widetilde{v}\|^{\rho_2 - 1}_{q_2}) \sup_{0<t<T} t^{\frac{\alpha}{2}\rho_1} \|\widetilde{u}\|^{\rho_1}_{q_1}\}; \end{aligned} \tag{2.74}$$

2.

$$\begin{aligned} &\sup_{0<t<T} t^{\frac{\alpha}{2}} \|B_1(u,v) - B_1(\widetilde{u},\widetilde{v})\|_{q_1} \le \widetilde{K}_2\{ \sup_{0<t<T} t^{\frac{\alpha}{2}} \|(u - \widetilde{u})\|_{q_1} \sup_{0<t<T} t^{\frac{\alpha}{2}\rho_1 - 1}(\|u\|^{\rho_1 - 1}_{q_1} \\ &+ \|\widetilde{u}\|^{\rho_1 - 1}_{q_1}) \sup_{0<t<T} t^{\frac{\beta}{2}\rho_2} \|v(t)\|^{\rho_2}_{q_2} + \sup_{0<t<T} t^{\frac{\beta}{2}} \|(v - \widetilde{v})\|_{q_2} \sup_{0<t<T} t^{\frac{\beta}{2}(\rho_2 - 1)}(\|v\|^{\rho_2 - 1}_{q_2} + \\ &+ \|\widetilde{v}\|^{\rho_2 - 1}_{q_2}) \sup_{0<t<T} t^{\frac{\alpha}{2}\rho_1} \|\widetilde{u}\|^{\rho_1}_{q_1}\}; \end{aligned} \tag{2.75}$$

3.

$$\sup_{0<t<T}\|B_1(u,v)-B_1(\widetilde{u},\widetilde{v})\|_{a_1}\leq \widetilde{K}_3\{\sup_{0<t<T}\|(u-\widetilde{u})\|_{a_1}\sup_{0<t<T}t^{\frac{\alpha}{2}(\rho_1-1)}(\|u\|_{q_1}^{\rho_1-1}$$
$$+\|\widetilde{u}\|_{q_1}^{\rho_1-1})\sup_{0<t<T}t^{\frac{\beta}{2}\rho_2}\|v\|_{q_2}^{\rho_2}+\sup_{0<t<T}t^{\frac{\beta}{2}}\|(v-\widetilde{v})\|_{a_2}\sup_{0<t<T}t^{\frac{\beta}{2}(\rho_2-1)}(\|v\|_{q_2}^{\rho_2-1}+$$
$$+\|\widetilde{v}\|_{q_2}^{\rho_2-1})\sup_{0<t<T}t^{\frac{\alpha}{2}\rho_1}\|\widetilde{u}\|_{q_1}^{\rho_1}\};\tag{2.76}$$

4.

$$\sup_{0<t<T}\|B_2(u,v)-B_2(\widetilde{u},\widetilde{v})\|_{p_2}\leq \widetilde{K}_4\{\sup_{0<t<T}\|v-\widetilde{v}\|_{p_2}\sup_{0<t<T}t^{\frac{\beta}{2}(r_2-1)}(\|v\|_{q_2}^{r_2-1}$$
$$+\|\widetilde{v}\|_{q_2}^{r_2-1})\sup_{0<t<T}t^{\frac{\alpha}{2}r_1}\|u\|_{q_1}^{r_1}+\sup_{0<t<T}\|(u-\widetilde{u})\|_{p_1}\sup_{0<t<T}t^{\frac{\alpha}{2}(r_1-1)}(\|u\|_{q_1}^{r_1-1}+$$
$$+\|\widetilde{u}\|_{q_1}^{r_1-1})\sup_{0<t<T}t^{\frac{\beta}{2}r_2}\|\widetilde{v}\|_{q_2}^{r_2}\};\tag{2.77}$$

5.

$$\sup_{0<t<T}t^{\frac{\beta}{2}}\|B_2(u,v)-B_2(\widetilde{u},\widetilde{v})\|_{q_2}\leq \widetilde{K}_5\{\sup_{0<t<T}t^{\frac{\alpha}{2}}\|u-\widetilde{u}\|_{q_1}\sup_{0<t<T}t^{\frac{\alpha}{2}(r_1-1)}(\|u\|_{q_1}^{r_1-1}+$$
$$+\|\widetilde{u}\|_{(q_1,\infty)}^{r_1-1})\sup_{0<t<T}t^{\frac{\beta}{2}r_2}\|\widetilde{v}\|_{q_2}^{r_2}+\sup_{0<t<T}t^{\frac{\beta}{2}}\|(v-\widetilde{v})\|_{q_2}\sup_{0<t<T}t^{\frac{\beta}{2}(r_2-1)}(\|v\|_{q_2}^{r_2-1}+$$
$$+\|\widetilde{v}\|_{q_2}^{r_2-1})\sup_{0<t<T}t^{\frac{\alpha}{2}r_1}\|u\|_{q_1}^{r_1}\};\tag{2.78}$$

6.

$$\sup_{0<t<T}\|B_2(u,v)-B_2(\widetilde{u},\widetilde{v})\|_{a_2}\leq \widetilde{K}_6\{\sup_{0<t<T}\|v-\widetilde{v}\|_{a_2}\sup_{0<t<T}t^{\frac{\beta}{2}(r_2-1)}(\|v\|_{q_2}^{r_2-1}$$
$$+\|\widetilde{v}\|_{q_2}^{r_2-1})\sup_{0<t<T}t^{\frac{\alpha}{2}r_1}\|u\|_{q_1}^{r_1}+\sup_{0<t<T}\|(u-\widetilde{u})\|_{a_1}\sup_{0<t<T}t^{\frac{\alpha}{2}(r_1-1)}(\|u\|_{q_1}^{r_1-1}+$$
$$+\|\widetilde{u}\|_{q_1}^{r_1-1})\sup_{0<t<T}t^{\frac{\beta}{2}r_2}\|\widetilde{v}\|_{q_2}^{r_2}\},\tag{2.79}$$

onde $\widetilde{K}_1$, $\widetilde{K}_2$, $\widetilde{K}_3$, $\widetilde{K}_4$, $\widetilde{K}_5$, $\widetilde{K}_6$ são constantes independentes de u.

Demonstração. A idéia da demonstração deste Lema já foi apresentada anteriormente. Por esse motivo, algumas passagens serão omitidas.

Considere

$$B_1(u,v)=\int_0^t G(t-s)|u|^{\rho_1-1}u|v|^{\rho_2-1}v\,ds$$

e

$$B_2(u,v) = \int_0^t G(t-s)|u|^{r_1-1}u|v|^{r_2-1}v\,ds.$$

Inicialmente, note que

$$\begin{aligned}\|B_1(u,v)-B_1(\widetilde{u},\widetilde{v})\|_{a_1} &= \|B_1(u,v)-B_1(\widetilde{u},v)+B_1(\widetilde{u},v)-B_1(\widetilde{u},\widetilde{v})\|_{a_1}\\ &\leq \|B_1(u,v)-B_1(\widetilde{u},v)\|_{a_1}+\|B_1(\widetilde{u},v)-B_1(\widetilde{u},\widetilde{v})\|_{a_1} \qquad (2.80)\end{aligned}$$

Primeiramente, analisaremos $\|B_1(u,v)-B_1(\widetilde{u},v)\|_{a_1}$. Fixe v e suponha que $\frac{1}{\widetilde{r}} = \frac{1}{a_1}+\frac{\rho_1-1}{q_1}+\frac{\rho_2}{q_2}$ e $\frac{1}{q_1} = \frac{1}{\widetilde{l}}+\frac{1}{\widetilde{r}}-1$. Da hipótese sobre a_1' observe que $\frac{1}{\widetilde{r}} = \frac{1}{a_1}+\frac{\rho_1-1}{q_1}+\frac{\rho_2}{q_2} < 1$. Assim, pelas desigualdades Young e Hölder em espaços L^p (desigualdades (1.28) e (1.20) das Observações 1.8 e 1.6), temos que

$$\begin{aligned}&\|B_1(u,v)-B_1(\widetilde{u},v)\|_{a_1} \leq \int_0^t \|G(t-s)(|u|^{\rho_1-1}u-|\widetilde{u}|^{\rho_1-1}\widetilde{u})|v|^{\rho_2-1}v\|_{a_1}ds\\ &\leq \int_0^t \|g(t-s)\|_{\widetilde{l}}\,\|(|u|^{\rho_1-1}u-|\widetilde{u}|^{\rho_1-1}\widetilde{u})|v|^{\rho_2-1}v\|_{\widetilde{r}}ds\\ &\leq \int_0^t (t-s)^{\frac{-n}{2}+\frac{n}{2\widetilde{l}}}\|(u-\widetilde{u})(|u|^{\rho_1-1}+|\widetilde{u}|^{\rho_1-1})|v|^{\rho_2-1}v\|_{\widetilde{r}}ds\\ &\leq \int_0^t (t-s)^{\frac{-n(\rho_1-1)}{2q_1}-\frac{n\rho_2}{2q_2}}s^{-\frac{\alpha}{2}(\rho_1-1)-\frac{\beta}{2}\rho_2}ds\times\\ &\times \sup_{0<t<T}\|(u-\widetilde{u})\|_{a_1}\sup_{0<t<T} t^{\frac{\alpha}{2}(\rho_1-1)}(\|u\|_{q_1}^{\rho_1-1}+\|\widetilde{u}\|_{q_1}^{\rho_1-1})\sup_{0<t<T} t^{\frac{\beta}{2}\rho_2}\|v\|_{q_2}^{\rho_2}. \qquad (2.81)\end{aligned}$$

Observe que fazendo a simples mudança de variável $s = yt$, obtemos

$$\begin{aligned}\int_0^t (t-s)^{\frac{-n(\rho_1-1)}{2q_1}-\frac{n\rho_2}{2q_2}}s^{-\frac{\alpha}{2}(\rho_1-1)-\frac{\beta}{2}\rho_2}ds &= t^{\frac{-n(\rho_1-1)}{2q_1}-\frac{n\rho_2}{2q_2}-\frac{\alpha}{2}(\rho_1-1)-\frac{\beta}{2}\rho_2+1}\times\\ &\times\int_0^1 (1-y)^{\frac{-n(\rho_1-1)}{2q_1}-\frac{n\rho_2}{2q_2}}y^{-\frac{\alpha}{2}(\rho_1-1)-\frac{\beta}{2}\rho_2}dy.\end{aligned}$$

Note que de (2.66) concluímos que

$$\frac{-n(\rho_1-1)}{2q_1}-\frac{n\rho_2}{2q_2}-\frac{\alpha}{2}(\rho_1-1)-\frac{\beta}{2}\rho_2+1 = 0.$$

Calculando $\sup_{0<t<T}$ em (2.81), obtemos

$$\begin{aligned}\sup_{0<t<T}\|B_1(u,v)-B_1(\widetilde{u},v)\|_{a_1} &\leq M_1\sup_{0<t<T}\|(u-\widetilde{u})\|_{a_1}\sup_{0<t<T} t^{\frac{\alpha}{2}(\rho_1-1)}(\|u\|_{q_1}^{\rho_1-1}+\\ &\|\widetilde{u}\|_{q_1}^{\rho_1-1})\sup_{0<t<T} t^{\frac{\beta}{2}\rho_2}\|v\|_{q_2}^{\rho_2}. \qquad (2.82)\end{aligned}$$

De maneira análoga,

$$\sup_{0<t<T} \|B_1(\widetilde{u},v)-B_1(\widetilde{u},\widetilde{v})\|_{a_1} \leq M_2 \sup_{0<t<T} t^{\frac{\beta}{2}} \|(v-\widetilde{v})\|_{a_2} \sup_{0<t<T} t^{\frac{\beta}{2}(\rho_2-1)}(\|v\|_{q_2}^{\rho_2-1}+ \|\widetilde{v}\|_{q_2}^{\rho_2-1}) \sup_{0<t<T} t^{\frac{\alpha}{2}\rho_1}\|\widetilde{u}\|_{q_1}^{\rho_1}. \tag{2.83}$$

Portanto de (2.80),(2.82) e (2.83) obtemos (2.76), com $\widetilde{K}_3 = \max\{M_1, M_2\}$. Fazendo $a_1 = p_1$ obtemos (2.74).

Agora mostraremos (2.79). Primeiramente, fixe u e suponha que $\frac{1}{\widetilde{r}} = \frac{1}{a_2} + \frac{r_1}{q_1} + \frac{r_2-1}{q_2}$ e $\frac{1}{q_1} = \frac{1}{\widetilde{l}} + \frac{1}{\widetilde{r}} - 1$. Da hipótese sobre a_2 observe que $\frac{1}{\widetilde{r}} = \frac{1}{a_2} + \frac{r_1}{q_1} + \frac{r_2-1}{q_2} < 1$. Logo, pelas desigualdades Young e Hölder em espaços L^p (desigualdades (1.28) e (1.20)), temos que

$$\begin{aligned}
&\|B_2(u,v)-B_2(u,\widetilde{v})\|_{a_2} \leq \int_0^t \|G(t-s)(|v|^{r_2-1}v-|\widetilde{v}|^{r_2-1}\widetilde{v})|u|^{r_1-1}u\|_{a_2} ds \leq \\
&\leq D\int_0^t \|g(t-s)\|_{(\widetilde{l},\infty)} \, \|(|v|^{r_2-1}v-|\widetilde{v}|^{r_2-1}\widetilde{v})|u|^{r_1-1}u\|_{\widetilde{r}} ds \\
&\leq \widetilde{D}\int_0^t (t-s)^{\frac{-n}{2}+\frac{n}{2\widetilde{l}}} \|(v-\widetilde{v})(|v|^{r_2-1}+|\widetilde{v}|^{r_2-1})|u|^{r_1-1}u\|_{(\widetilde{r},\infty)} ds \\
&\leq \int_0^t (t-s)^{\frac{-n(r_2-1)}{2q_2}-\frac{nr_1}{2q_1}} s^{-\frac{\beta}{2}(r_2-1)-\frac{\alpha}{2}r_1} ds \times \\
&\times \sup_{0<t<T} \|v-\widetilde{v}\|_{a_2} \sup_{0<t<T} t^{\frac{\beta}{2}(r_2-1)}(\|v\|_{q_2}^{r_2-1}+\|\widetilde{v}\|_{q_2}^{r_2-1}) \sup_{0<t<T} t^{\frac{\alpha}{2}r_1}\|u\|_{q_1}^{r_1}.
\end{aligned} \tag{2.84}$$

Novamente fazendo a simples mudança de variável $s = yt$, obtemos

$$\int_0^t (t-s)^{\frac{-n(r_2-1)}{2q_2}-\frac{nr_1}{2q_1}} s^{-\frac{\beta}{2}(r_2-1)-\frac{\alpha}{2}r_1} ds = t^{\frac{-n(r_2-1)}{2q_2}-\frac{nr_1}{2q_1}-\frac{\beta}{2}(r_2-1)-\frac{\alpha}{2}r_1+1} \times \\ \times \int_0^1 (1-y)^{\frac{-n(r_2-1)}{2q_2}-\frac{nr_1}{2q_1}} y^{-\frac{\beta}{2}(r_2-1)-\frac{\alpha}{2}r_1} dy.$$

De (2.68) segue que

$$\frac{-n(r_2-1)}{2q_2} - \frac{nr_1}{2q_1} - \frac{\beta}{2}(r_2-1) - \frac{\alpha}{2}r_1 + 1 = 0,$$

e, portanto, calculando $\sup_{0<t<T}$ em (2.84), obtemos

$$\sup_{0<t<T} \|B_2(u,v)-B_2(u,\widetilde{v})\|_{a_2} \leq \widetilde{M_1} \sup_{0<t<T} \|v-\widetilde{v}\|_{a_2} \sup_{0<t<T} t^{\frac{\beta}{2}(r_2-1)}(\|v\|_{q_2}^{r_2-1}+ \|\widetilde{v}\|_{q_2}^{r_2-1}) \sup_{0<t<T} t^{\frac{\alpha}{2}r_1}\|u\|_{q_1}^{r_1}. \tag{2.85}$$

De maneira análoga,

$$\sup_{0<t<T} \|B_2(\widetilde{u},\widetilde{v})-B_2(u,\widetilde{v})\|_{a_2} \leq \widetilde{M_2} \sup_{0<t<T} \|(u-\widetilde{u})\|_{a_1} \sup_{0<t<T} t^{\frac{\alpha}{2}(r_1-1)}(\|u\|_{a_1}^{r_1-1}+ \|\widetilde{u}\|_{q_1}^{r_1-1}) \sup_{0<t<T} t^{\frac{\beta}{2}r_2}\|\widetilde{v}\|_{q_2}^{r_2}. \tag{2.86}$$

Note ainda que

$$\begin{aligned}\|B_2(u,v)-B_2(\widetilde{u},\widetilde{v})\|_{a_2} &= \|B_2(u,v)-B_2(u,\widetilde{v})+B_2(u,\widetilde{v})-B_2(\widetilde{u},\widetilde{v})\|_{a_2}\\ &\leq \|B_2(u,v)-B_2(u,\widetilde{v})\|_{a_2}+\|B_2(u,\widetilde{v})-B_2(\widetilde{u},\widetilde{v})\|_{a_2}. \qquad (2.87)\end{aligned}$$

Logo de (2.85), (2.86) e (2.87) obtemos (2.79), onde $\widetilde{K_3}=\max\{\widetilde{M_1},\widetilde{M_2}\}$. Note que para obtermos (2.77), basta fazermos $p_2=a_2$.

Vamos agora à prova de (2.75). De maneira análoga à prova de (2.76) obtemos

$$\begin{aligned}&\|B_1(u,v)-(\widetilde{u},\widetilde{v})\|_{q_1} \leq \int_0^t (t-s)^{\frac{-n(\rho_1-1)}{2q_1}-\frac{n\rho_2}{2q_2}} s^{-\frac{\alpha}{2}\rho_1-\frac{\beta}{2}\rho_2} ds \{\sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}}\|(u-\widetilde{u})\|_{q_1} \sup_{0<t<T} t^{\frac{\alpha}{2}\rho_1-1}(\|u\|_{q_1}^{\rho_1-1}\\ &+\|u\|_{q_1}^{\rho_1-1}) \sup_{0<t<T} t^{\frac{\beta}{2}\rho_2}\|v(t)\|_{q_2}^{\rho_2}+\sup_{0<t<T} t^{\frac{\beta}{2}}\|(v-\widetilde{v})\|_{q_2} \sup_{0<t<T} t^{\frac{\beta}{2}(\rho_2-1)}(\|v\|_{q_2}^{\rho_2-1}+\|\widetilde{v}\|_{q_2}^{\rho_2-1}) \sup_{0<t<T} t^{\frac{\alpha}{2}\rho_1}\|\widetilde{u}\|_{q_1}^{\rho_1}\}\\ &\leq \widetilde{K_2} t^{\frac{-\alpha}{2}}\{\sup_{0<t<T} t^{\frac{\alpha}{2}}\|(u-\widetilde{u})\|_{q_1} \sup_{0<t<T} t^{\frac{\alpha}{2}\rho_1-1}(\|u\|_{q_1}^{\rho_1-1}+\|u\|_{q_1}^{\rho_1-1}) \sup_{0<t<T} t^{\frac{\beta}{2}\rho_2}\|v(t)\|_{q_2}^{\rho_2}\\ &+\sup_{0<t<T} t^{\frac{\beta}{2}}\|(v-\widetilde{v})\|_{q_2} \sup_{0<t<T} t^{\frac{\beta}{2}(\rho_2-1)}(\|v\|_{q_2}^{\rho_2-1}++\|\widetilde{v}\|_{q_2}^{\rho_2-1}) \sup_{0<t<T} t^{\frac{\alpha}{2}\rho_1}\|\widetilde{u}\|_{q_1}^{\rho_1}\}, \qquad (2.88)\end{aligned}$$

uma vez que

$$\int_0^t (t-s)^{\frac{-n(\rho_1-1)}{2q_1}-\frac{n\rho_2}{2q_2}} s^{-\frac{\alpha}{2}\rho_1-\frac{\beta}{2}\rho_2} ds = t^{\frac{-n(\rho_1-1)}{2q_1}-\frac{n\rho_2}{2q_2}-\frac{\alpha}{2}\rho_1-\frac{\beta}{2}\rho_2+1}\int_0^1 (1-y)^{\frac{-n(\rho_1-1)}{2q_1}-\frac{n\rho_2}{2q_2}} y^{-\frac{\alpha}{2}\rho_1-\frac{\beta}{2}\rho_2} dy$$

e $\frac{-n(\rho_1-1)}{2q_1}-\frac{n\rho_2}{2q_2}-\frac{\alpha}{2}\rho_1-\frac{\beta}{2}\rho_2+1=-\frac{\alpha}{2}$. Multiplicando ambos os lados da desigualdade (2.88) por $t^{\frac{\alpha}{2}}$ e tomando $\sup_{0<t<T}$ obtemos (2.75).

Semelhantemente obtemos (2.79). ■

Teorema 2.4 *(Soluções Locais, $n\geq 2$) Sejam $(u_0,v_0)\in L^{p_1}\times L^{p_2}$ e $1<\rho_i,r_i<p_i<q_i<\infty$, $i=1,2$, satisfazendo $\frac{\alpha}{2}\rho_1+\frac{\beta}{2}\rho_2<1$ e $\frac{\alpha}{2}r_1+\frac{\beta}{2}r_2<1$.*

1. *Existe $T>0$, tal que, o problema de valor inicial (2.1) tem uma solução branda local (u,v) em $\widetilde{E}^T_{q_1q_2}$.*
2. *Além disso, quando assumimos $(u_0,v_0)\in L^{a_1}\times L^{a_2}$, tal que $1<a_1'<\left(\frac{\rho_2}{q_2}+\frac{\rho_1-1}{q_1}\right)^{-1}$ e $1<a_2'<\left(\frac{r_1}{q_1}+\frac{r_2-1}{q_2}\right)^{-1}$, a solução (u,v) tem a propriedade adicional de está em $BC([0,T),L^{a_1}\times L^{a_2})$.*

Observação 2.3

- *(Unicidade) Note que se $n\geq 3$ e $p_i\geq\frac{n}{n-2}$, (u,v) é a única solução em $\widetilde{E}^T=C([0,T);L^{p_1}\times L^{p_2})$ para o sistema (2.1). Isto segue diretamente do Teorema 2.2 pois*

$$C([0,\infty);L^{p_1}\times L^{p_2})\supset C([0,T);L^{p_1}\times L^{p_2})\supset\widetilde{E}^T_{q_1q_2}.$$

- *Usando a finitude da norma auxiliar ("regularizante") das soluções pertencentes a* $\tilde{E}^T_{q_1q_2}$ *e adaptando os argumentos de ([27], [11]) podemos mostrar que as soluções do Teorema 2.4 são suaves e satisfazem o sistema (2.1) no sentido clássico quando* $t > 0$.

- *Pelo item 5 da Observação 2.1, o Teorema 2.4 continua verdadeiro se trocarmos o sinal de* $g_i(u,v)$ *em (2.1), isto é, se tomarmos*

$$g_1(u,v) = -|u|^{(\rho_1-1)}u|v|^{(\rho_2-1)}v \text{ e } g_2(u,v) = -|u|^{(r_1-1)}u|v|^{(r_2-1)}v.$$

Desde que a convolução com o núcleo do calor preserva a positividade, se as condições iniciais $u_0 \geq 0$ *e* $v_0 \geq 0$ *(e não identicamente nulas), então a solução satisfaz* $u \geq 0$ *e* $v \geq 0$ *(e não identicamente nulas). De fato, por indução podemos mostrar que todos os elementos da sequência de Picard* $\{(u_k,v_k)\}$*, que converge para* (u,v)*, são positivos, e como a convergência no sentido de distribuição preserva a positividade, então a solução* (u,v) *é positiva. Como pelo primeiro item da observação a solução é clássica, temos*

$$u_t - \Delta u = -|u|^{(\rho_1-1)}u|v|^{(\rho_2-1)} < 0,$$
$$v_t - \Delta v = -|u|^{(r_1-1)}u|v|^{(r_2-1)}v < 0,$$

e então, pelo príncipio do máximo para equações parabólicas e usando argumentos próximos aos de ([27] e [11]), podemos mostrar que a solução é global. Mais ainda, podemos mostrar que ela pertence ao espaço $\tilde{E}^\infty_{q_1q_2} := \tilde{E}^T_{q_1q_2}$ *com* $T = \infty$.

2.2.1 Demonstração do Teorema 2.4

Assumindo $(u_0,v_0) \in L^{p_1} \times L^{p_2}$, vamos provar que existe $T_1 > 0$ e $\varepsilon_1 > 0$ suficientemente pequeno e uma única solução para equação integral (2.73), tal que,

$$\lim_{t\to 0^+} t^{\frac{\alpha}{2}}\|u(t,x)\|_{q_1} = 0 \text{ e } \sup_{0<t<T_1} t^{\frac{\alpha}{2}}\|u(t,x)\|_{q_2} < 2\varepsilon_1. \tag{2.89}$$

$$\lim_{t\to 0^+} t^{\frac{\beta}{2}}\|v(t,x)\|_{q_2} = 0 \text{ e } \sup_{0<t<T_1} t^{\frac{\beta}{2}}\|v(t,x)\|_{q_2} < 2\varepsilon_1. \tag{2.90}$$

Seja $H_{\varepsilon_1,T_1} = \{(u,v) \ : \ \|(u,v)\|_{H_{\varepsilon_1,T_1}} < 2\varepsilon_1\}$, onde a norma $\|\cdot\|_{H_{\varepsilon_1,T_1}}$ é dada por

$$\|(u,v)\|_{H_{\varepsilon_1,T_1}} = \max\{\sup_{0<t<T_1} t^{\frac{\alpha}{2}}\|u(t,x)\|_{q_1}, \sup_{0<t<T_1} t^{\frac{\beta}{2}}\|v(t,x)\|_{q_2}\}.$$

Note que o espaço H_{ε_1,T_1} não é vazio. De fato, como $(u_0,v_0) \in L^{p_1} \times L^{p_2}$, da propriedade (1.31) do Lema 1.9, temos que para cada $\varepsilon_1 > 0$, podemos encontrar T_1 suficientemente pequeno, tal que

$$\sup_{0<t<T_1} t^{\frac{\alpha}{2}} \|G(t)u_0\|_{q_1} < \varepsilon_1 < 2\varepsilon_1 \tag{2.91}$$

e

$$\sup_{0<t<T_1} t^{\frac{\beta}{2}} \|G(t)v_0\|_{q_2} < \varepsilon_1 < 2\varepsilon_1. \tag{2.92}$$

Assim, escolhendo ε_1, T_1 suficientemente pequenos, as desigualdades (2.75) e (2.78) do Lema 2.3 garante que o operador B satisfaz a propriedade (2.8) do Lema 2.1 com $X = H_{\varepsilon_1,T_1}$, $K = \max\{\widetilde{K}_2, \widetilde{K}_5\}$, $x = (u,v)$ e $z = (\widetilde{u}, \widetilde{v})$. Observe que de (2.91) e (2.92) temos $\|(G(t)u_0, G(t)v_0)\|_{H_{\varepsilon_1,T_1}} < \varepsilon_1$. Portanto, podemos aplicar o Lema 2.1, com $X = H_{\varepsilon_1,T_1}$ e $y = (G(t)u_0, G(t)v_0)$, garantindo assim, a existência de uma solução $(u(t,x), v(t,x))$ da equação integral (2.73) em H_{ε_1,T_1}. As igualdades em (2.89) e (2.90) segue exatamente como no Lema 1.9 .

Mostraremos agora que $(u,v) \in BC([0,T), L^{p_1} \times L^{p_2})$ para algum $0 < T \leq T_1$. Inicialmente escolha, $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$ e $0 < T \leq T_1$, tal que, $2^{\rho_1+\rho_2+1} K_{14} \varepsilon^{\rho_1+\rho_2-1} + 2^{r_1+r_2+1} K_{14} \varepsilon^{r_1+r_2-1} - 1 < 0$, $K_{14} = \max\{\widetilde{K_1}, \widetilde{K_4}\}$ e $\sup_{0<t<T} t^{\frac{\alpha}{2}} \|u_0\|_{q_1} \leq 2\varepsilon$, $\sup_{0<t<T} t^{\frac{\beta}{2}} \|u_0\|_{q_2} \leq 2\varepsilon$. Pelo Lema 2.1, sabemos que a solução (u,v) pode ser obtida como limite em H_{ε_1,T_1} da seguinte sequência de Picard:

$$\begin{cases} u_1(t,x) = G(t)u_0 \\ u_{k+1}(t,x) = u_1(t,x) + B(u_k, v_k)(t,x), \;\; k \in \mathbb{N} \end{cases} \tag{2.93}$$

$$\begin{cases} v_1(t,x) = G(t)v_0 \\ v_{k+1}(t,x) = v_1(t,x) + B(u_k, v_k)(t,x), \;\; k \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{2.94}$$

Usando a desigualdade (1.27) da Observação 1.8, com $k = 0$, $r = p_1$, e o Lema 2.3 fazendo $(\widetilde{u}, \widetilde{v}) = (0,0)$ e $(u,v) = (u_k, v_k)$, obtemos

$$\begin{aligned} \|u_1(t)\|_{p_1} &\leq \|u_0\|_{p_1} \\ \|u_{k+1}(t,x)\|_{p_1} &\leq \|u_1(t,x)\|_{p_1} + \|B(u_k,v_k)(t,x)\|_{p_1} \\ &\leq \|u_0\|_{p_1} \\ &+ \widetilde{K}_1 \sup_{0<t<T} t^{\frac{\alpha}{2}(\rho_1-1)} \|u_k(t,x)\|_{q_1}^{\rho_1-1} \sup_{0<t<T} t^{\frac{\beta}{2}\rho_2} \|v_k(t,x)\|_{q_2}^{\rho_2} \sup_{0<t<T} \|u_k(t,x)\|_{p_1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|v_1(t)\|_{p_2} &\leq \|v_0\|_{p_2} \\
\|v_{k+1}(t,x)\|_{p_2} &\leq \|v_1(t,x)\|_{p_2} + \|B_2(u_k,v_k)(t,x)\|_{p_2} \\
&\leq \|v_0\|_{p_2} \\
&+ \widetilde{K}_2 \sup_{0<t<T} t^{\frac{\alpha}{2}r_1} \|u_k(t,x)\|_{q_1}^{r_1} \sup_{0<t<T} t^{\frac{\beta}{2}(r_2-1)} \|v_k(t,x)\|_{q_2}^{r_2-1} \sup_{0<t<T} \|v_k(t,x)\|_{p_2}.
\end{aligned}$$

Denote $s_{k+1} = u_{k+1} - u_k = B(u_k,v_k) - B(u_{k-1},v_{k-1})$ e $z_{k+1} = u_{k+1} - u_k = B(u_k,v_k) - B(u_{k-1},v_{k-1})$. De maneira análoga à demonstração do segundo item do Teorema 2.1, agora em espaços $L^{p_1} \times L^{p_2}$ com $a_1 = p_1,\ a_2 = p_2$, obtemos que a seqüência (u_k,v_k) é contrativa e portanto de Cauchy em $BC([0,T);L^{p_1} \times L^{p_2})$. Por unicidade do limite no sentido de distribuição, e como a (u_k,v_k) também converge para (u,v) em H_{ε_1,T_1}, a solução $(u,v) \in BC([0,T);L^{p_1} \times L^{p_2})$. ∎

2.3 Soluções Brandas Globais em L^p

2.3.1 Boa-Colocação em L^p

Uma pergunta que pode ser feita em relação aos Teoremas de boa-colocação é se eles também valem nos espaços de Lebesgue L^p. A resposta é positiva e esta seção será dedicada a demonstrar tais resultados. Começaremos definindo, como anteriormente, os espaços funcionais adequados nos quais iremos procurar as soluções para as equações do sistema semilinear (2.1).

Definição 2.5 *Seja $1 < q_1 \leq \infty, 1 < q_2 \leq \infty$, $\alpha = \frac{n}{p_1} - \frac{n}{q_1}$ e $\beta = \frac{n}{p_2} - \frac{n}{q_2}$. Definimos os seguintes espaços de Banach*

$$\widetilde{E} \equiv BC((0,\infty), L^{p_1} \times L^{p_2}\}$$

$$\widetilde{E}_{q_1q_2} \equiv \{(u,v) \in E : (t^{\alpha/2}u, t^{\beta/2}v) \in BC((0,\infty); L^{q_1} \times L^{q_2})\},$$

com normas definidas, respectivamente, como

$$\|(u,v)\|_{\widetilde{E}} = \max\{\sup_{t>0} \|u\|_{p_1}, \sup_{t>0} \|v\|_{p_2}\}$$

$$\|(u,v)\|_{\widetilde{E}_{q_1q_2}} = \|(u,v)\|_{\widetilde{E}} + \max\{\sup_{t>0} t^{\alpha/2} \|u(t)\|_{q_1}, \sup_{t>0} t^{\beta/2} \|v(t)\|_{q_2}\}.$$

Nosso próximo passo é definir soluções branda nos espaços L^p. A definição coincide com a definição em espaços de Marcinkiewicz $L^{(p,\infty)}$ a menos da condição de convergência para o dado inicial, uma vez que agora exigiremos convergência forte em vez de fraca. É razoável esperar que tal convergência aconteça uma vez que o núcleo do calor é uma aproximação da identidade em L^p, além das convergência dadas no Lema 1.9.

Definição 2.6 *Uma solução branda global do Problema do valor inicial (2.1) em $\widetilde{E}$ e $\widetilde{E}_{q_1 q_2}$ é uma função $\omega = (u(t), v(t))$ no espaço correspondente , satisfazendo*

$$(u(t), v(t)) = (G(t)u_0, G(t)v_0) + B(u,v)(t), \tag{2.95}$$

onde

$$B(u,v)(t) = \left(\int_0^t G(t-s)|u|^{\rho_1 - 1}u|v|^{\rho_2 - 1}v ds \ , \ \int_0^t G(t-s)|u|^{r_1 - 1}u|v|^{r_2 - 1}v ds \right)$$

e

$$(u(t), v(t)) \overset{t \to 0^+}{\longrightarrow} (u_0, v_0)$$

sendo este limite tomado na $\|\cdot\|_{p_1 \times p_2} = \max\{\|\cdot\|_{p_1}, \|\cdot\|_{p_2}\}$ de $L^{p_1} \times L^{p_2}$.

Agora, estamos prontos para enunciar o Teorema de boa-colocação em espaços L^p

Teorema 2.5 *Sejam $n \geq 2$ $1 < \rho_i < p_i < q_i$, $1 < r_i < p_i < q_i$, $i = 1,2$, satisfazendo $\frac{\alpha}{2}\rho_1 + \frac{\beta}{2}\rho_2 < 1$ e $\frac{\beta}{2}r_2 + \frac{\alpha}{2}r_1 < 1$, com $(u_0, v_0) \in L^{p_1} \times L^{p_2}$.*

1. *Dado $\varepsilon > 0$ existe $0 < \delta_{q_1 q_2}$, tal que, se $\|u_0\|_{p_1} < \delta_{q_1 q_2}, \|v_0\|_{p_2} < \delta_{q_1 q_2}$, então existe a solução branda (u,v) para o sistema (2.1) em $\widetilde{E}$. Além disso, $(u,v) \in \widetilde{E}_{q_1,q_2}$ e satisfaz*

$$\lim_{t \to 0^+} t^{\frac{\alpha}{2}} \|u(t,x)\|_{q_1} = 0 \quad e \quad \lim_{t \to 0^+} t^{\frac{\beta}{2}} \|v(t,x)\|_{q_2} = 0$$

2. *Suponha $(u_0, v_0) \in L^{p_1} \cap L^{a_1} \times L^{p_2} \cap L^{a_2}$, com $1 < a_1' < \left(\frac{\rho_2}{q_2} + \frac{\rho_1 - 1}{q_1} \right)^{-1}$ e $1 < a_2' < \left(\frac{r_1}{q_1} + \frac{r_2 - 1}{q_2} \right)^{-1}$. Existe $\delta_{a_1,a_2} > 0$, tal que, se $\|u_0\|_{p_1} < \delta_{a_1,a_2}, \|v_0\|_{p_2} < \delta_{a_1,a_2}$, a solução $(u(t,x), v(t,x))$ verifica que $(u,v) \in BC((0,\infty), L^{a_1} \times L^{a_2})$.*

Observação 2.4 *Note que se $n \geq 3$ e $p_i \geq \frac{n}{n-2}$, (u,v) é a única solução em $\widetilde{E}$ para o sistema (2.1). Isto segue diretamente do Teorema 2.2, pois*

$$C([0,\infty); L^{p_1} \times L^{p_2}) \supset \widetilde{E} \supset \widetilde{E}_{q_1 q_2}$$

2.3.2 Demonstração do Teorema 2.5

Existência em $\widetilde{E}_{q_1,q_2}$

Assim como no Teorema 2.1, usaremos o Lema 2.1. Para isso temos que mostrar inicialmente que o operador

$$B(u,v)(t,x) = \left(\int_0^t G(t-s)|u|^{\rho_1 -1}u|v|^{\rho_2 -1}v ds,\ \int_0^t G(t-s)|u|^{r_1-1}u|v|^{r_2-1}v ds \right)$$

satisfaz a propriedade (2.8) do Lema 2.1 no espaço $\widetilde{E}_{q_1q_2}$. De fato, fazendo $T=\infty$ nas desigualdades (2.74), (2.77), (2.75) e (2.78) do Lema 2.3, e tomando $X=\widetilde{E}_{q_1q_2}$, $K=\max\{\widetilde{K}_1,\widetilde{K}_2,\widetilde{K}_4\widetilde{K}_5\}$, $x=(u,v)$ e $z=(\widetilde{u},\widetilde{v})$, obtemos o desejado procedendo como na prova do Teorema 2.1.

Por outro lado, o Lema 1.9 mostra que podemos controlar a norma em $\widetilde{E}_{q_1q_2}$, da parte linear da equação integral (2.95), pela norma do dado inicial em $L^{p_1}\times L^{p_1}$, ou seja,

$$\begin{aligned}
\|(G(t)u_0,G(t)v_0)\|_{E_{q_1q_2}} &\leq \|(G(t)u_0,G(t)v_0)\|_{\widetilde{E}} + \max\{\sup_{t>0} t^{\alpha/2}\|G(t)u_0\|_{q_1}, \sup_{t>0} t^{\beta/2}\|G(t)v_0\|_{q_2}\} \\
&\leq 2\max\{C\|u_0\|_{p_1}, C\|u_0\|_{p_2}\} \leq \varepsilon,
\end{aligned}$$

pois $\|u_0\|_{(p_1,\infty)} < \delta_{q_1q_2}, \|v_0\|_{(p_2,\infty)} < \delta_{q_1q_2}$, com $\delta_{q_1q_2} = \frac{\varepsilon}{2C}$ onde C é a constante do Lema 1.9. Assim, supondo que a norma $\|\cdot\|_{p_1\times p_2}$ do dado inicial (u_0,v_0) é suficientemente pequena, podemos mais uma vez aplicar o Lema 2.1 com $X=\widetilde{E}_{q_1q_2}$ obtendo a existência de solução para a formulação integral (2.95).

Agora, mostraremos que a solução obtida $(u,v)\in BC((0,\infty),L^{a_1}\times L^{a_2})$. Suponha $(u_0,v_0)\in L^{p_1}\cap L^{a_1}\times L^{p_2}\cap L^{a_2}$. Fazendo $T=\infty$ no Lema 2.3, temos

$$\begin{aligned}
&\sup_{t>0}\|B_1(u,v)-B_1(\widetilde{u},\widetilde{v})\|_{a_1} \leq \widetilde{K}_3\{\sup_{t>0}\|(u-\widetilde{u})\|_{a_1}\sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}(\rho_1-1)}(\|u\|_{q_1}^{\rho_1-1} \\
&+\|\widetilde{u}\|_{q_1}^{\rho_1-1})\sup_{t>0} t^{\frac{\beta}{2}\rho_2}\|v\|_{q_2}^{\rho_2} + \sup_{t>0} t^{\frac{\beta}{2}}\|(v-\widetilde{v})\|_{a_2}\sup_{t>0} t^{\frac{\beta}{2}(\rho_2-1)}(\|v\|_{q_2}^{\rho_2-1}+ \\
&+\|\widetilde{v}\|_{q_2}^{\rho_2-1})\sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}\rho_1}\|\widetilde{u}\|_{q_1}^{\rho_1}\},
\end{aligned} \tag{2.96}$$

$$\begin{aligned}
&\sup_{t>0}\|B_2(u,v)-B_2(\widetilde{u},\widetilde{v})\|_{a_2} \leq \widetilde{K}_6\{\sup_{t>0}\|v-\widetilde{v}\|_{a_2}\sup_{0<t} t^{\frac{\beta}{2}(r_2-1)}(\|v\|_{q_2}^{r_2-1} \\
&+\|\widetilde{v}\|_{q_2}^{r_2-1})\sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}r_1}\|u\|_{q_1}^{r_1} + \sup_{t>0}\|(u-\widetilde{u})\|_{a_1}\sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}(r_1-1)}(\|u\|_{q_1}^{r_1-1}+ \\
&+\|\widetilde{u}\|_{q_1}^{r_1-1})\sup_{t>0} t^{\frac{\beta}{2}r_2}\|\widetilde{v}\|_{q_2}^{r_2}\}.
\end{aligned} \tag{2.97}$$

Primeiramente, relembremos mais uma vez que a solução (u,v) é obtida como o limite em $\widetilde{E}_{q_1q_2}$ da seguinte seqüência recorrente:

$$\begin{cases} u_1(t,x) = G(t)u_0 \\ u_{k+1}(t,x) = u_1(t,x) + B(u_k,v_k)(t,x) \end{cases} \tag{2.98}$$

e

$$\begin{cases} v_1(t,x) = G(t)v_0 \\ v_{k+1}(t,x) = v_1(t,x) + B(u_k,v_k)(t,x). \end{cases} \tag{2.99}$$

De maneira análoga ao caso $L^{(a_1,\infty)} \times L^{(a_2,\infty)}$ (prova do item 2 do Teorema 2.1), agora usando as estimativas (2.96) e (2.97), mostra-se que as seqüências $\{u_k\}$ e $\{v_k\}$ são contrativas em $BC((0,\infty);L^{a_1})$ e $BC((0,\infty);L^{a_2})$, respectivamente. Assim, elas são seqüências de Cauchy neste respectivos espaços. Então $u_k \to \widetilde{u}$ e $v_k \to \widetilde{v}$ em $BC((0,\infty);L^{a_1})$ e $BC((0,\infty);L^{a_2})$, respectivamente. Novamente pela unicidade do limite no sentido de distribuição $\widetilde{u} = u$ e $\widetilde{v} = v$ e assim, $(u,v) \in BC((0,\infty);L^{a_1} \times L^{a_2})$.

Logo para concluir a demonstração do Teorema 2.5, ainda falta mostrar que a solução converge em $L^{p_1} \times L^{p_2}$ para o dado inicial, quando $t \to 0^+$ e que a solução satisfaz

$$\lim_{t\to 0^+} t^{\frac{\alpha}{2}} \|u(t,x)\|_{q_1} = 0 \ \text{ e } \ \lim_{t\to 0^+} t^{\frac{\beta}{2}} \|v(t,x)\|_{q_2} = 0. \tag{2.100}$$

Inicialmente, mostraremos que (2.100) é verdadeira. Com efeito, pelo Lema 1.9, temos

$$\lim_{t\to 0^+} t^{\frac{\alpha}{2}} \|G(t)u_0\|_{q_1} = 0 \text{ e } \lim_{t\to 0^+} t^{\frac{\beta}{2}} \|G(t)v_0\|_{q_2} = 0 \tag{2.101}$$

$$\lim_{t\to 0^+} \|G(t)u_0 - u_0\|_{p_1} = 0 \text{ e } \lim_{t\to 0^+} \|G(t)v_0 - v_0\|_{p_2}. \tag{2.102}$$

Uma vez que a solução (u,v) é o limite da seqüência $\{(u_k,v_k)\}$ em $\widetilde{E}_{q_1q_2}$, isto é, o limite é tomado na norma

$$\max\{\sup_{t>0} \|\cdot\|_{p_1} + \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|\cdot\|_{q_1}, \sup_{t>0} \|\cdot\|_{p_1} + \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|\cdot\|_{q_1}\},$$

é suficiente mostrar (2.100) para a seqüência $\{(u_k,v_k)\}$. Observe que (2.101) corresponde à propriedade (2.100) para (u_k,v_k) com $k=1$. Por hipótese de indução assuma que $\{(u_k,v_k)\}$ satisfaz (2.100). Vamos mostrar que $(u_{k+1} = u_1 + B_1(u_k,v_k), v_{k+1} = v_1 + B_2(u_k,v_k))$ satisfaz e referida propriedade. De fato, do Lema 2.3 e da hipótese de indução temos

$$\begin{aligned}
t^{\frac{\alpha}{2}}\|B_1(u_k,v_k)\|_{q_1} &= \int_0^t \|G(t-s)(|u_k|^{\rho_1-1}u_k - |v_k|^{\rho_2-1}v_k)\|_{q_1} ds \\
&\leq \widetilde{K_2}(\sup_{0<s<t} s^{\frac{\alpha}{2}}\|u_k(s)\|_{q_1})^{\rho_1}(\sup_{0<s<t} s^{\frac{\beta}{2}}\|v_k(s)\|_{q_2})^{\rho_2} \stackrel{t\to 0^+}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
t^{\frac{\beta}{2}}\|B_2(u_k,v_k)\|_{q_2} &= \int_0^t \|G(t-s)(|u_k|^{r_1-1}u_k - |v_k|^{r_2-1}v_k)\|_{q_2} ds \\
&\leq \widetilde{K_5}(\sup_{0<s<t} s^{\frac{\alpha}{2}}\|u_k(s)\|_{q_1})^{r_1}(\sup_{0<s<t} s^{\frac{\beta}{2}}\|v_k(s)\|_{q_2})^{r_2} \stackrel{t\to 0^+}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

Em nosso último argumento usamos que

$$\lim_{t\to 0^+}|f(t)| = \limsup_{t\to 0^+}|f(t)| = \lim_{t\to 0^+}(\sup_{0<s<t}|f(t)|).$$

Assim concluímos a veracidade de (2.100).

Agora, mostraremos a convergência forte para o dado inicial. Usando as desigualdades (2.74) e (2.77) do Lema 2.3 temos as seguintes estimativas

$$\|B_1(u,v)(t,x)\|_{p_1} \leq C\sup_{0<s<t}\|u(s)\|_{p_1}(\sup_{0<s<t} s^{\frac{\alpha}{2}}\|u(s)\|_{q_1})^{\rho_1-1}(\sup_{0<s<t} s^{\frac{\beta}{2}}\|v(s)\|_{q_2})^{\rho_2} \tag{2.103}$$

e

$$\|B_2(u,v)(t,x)\|_{p_2} \leq \sup_{0<s<t}\|v(s)\|_{p_2}(\sup_{0<s<t} s^{\frac{\alpha}{2}}\|u(s)\|_{q_1})^{r_1}(\sup_{0<s<t} s^{\frac{\beta}{2}}\|v(s)\|_{q_2})^{r_2-1}. \tag{2.104}$$

Finalmente por (2.102) e (2.100) com (2.103) e (2.104) obtemos que

$$(u(t),v(t)) \stackrel{t\to 0^+}{\longrightarrow} (u_0,v_0) \quad \text{em} \quad L^{p_1}\times L^{p_2},$$

concluindo assim a demonstração.

■

2.3.3 Estimativas de Decaimento e Convergência a Zero em $L^{p_1}\times L^{p_2}$

Nesta seção provaremos alguns resultados de decaimento das soluções, supondo condições iniciais mais regulares

Teorema 2.6 *Suponha as condições do Teorema 2.1 (partes 2 e 3) com $a_i < p_i$, $i = 1,2$. Se $a_1 < r < \infty$ e $a_2 < \widetilde{r} < \infty$ satisfazem $\frac{1}{a_1} + \frac{\rho_1 - 1}{q_1} + \frac{\rho_2}{q_2} - \frac{1}{r} < \frac{2}{n}$ e $\frac{1}{a_2} + \frac{r_1}{q_1} + \frac{r_2 - 1}{q_2} - \frac{1}{\widetilde{r}} < \frac{2}{n}$, então a solução dada pelo Teorema 2.1 satisfaz*

$$\left(t^{\left(\frac{n}{2a_1} - \frac{n}{2r}\right)} u, t^{\left(\frac{n}{2a_2} - \frac{n}{2\widetilde{r}}\right)} v\right) \in BC((0,\infty), L^{(r,\infty)} \times L^{(\widetilde{r},\infty)}).$$

Além disso, se substituirmos as condições do Teorema 2.1 (partes 2 e 3) pelas condições do Teorema 2.5, o resultado continua verdadeiro substituindo o espaço de Marcinkiewicz $L^{(r,\infty)} \times L^{(\widetilde{r},\infty)}$ pelos respectivos espaços de Lebesgue $L^r \times L^{\widetilde{r}}$.

Prova do Teorema 2.6.

Inicialmente observe que do Lema 1.8 obtemos

$$\sup_{t>0} t^{\left(\frac{n}{2a_1} - \frac{n}{2r}\right)} \|G_(t) u_0\|_{(r,\infty)} \leq C \|u_0\|_{(a_1,\infty)}$$

$$\sup_{t>0} t^{\left(\frac{n}{2a_2} - \frac{n}{2\widetilde{r}}\right)} \|G_(t) v_0\|_{(\widetilde{r},\infty)} \leq C \|v_0\|_{(a_2,\infty)}$$

Da segunda parte do Teorema 2.1, sabemos que $u_0 \in L^{(a_1,\infty)} \cap L^{(p_1,\infty)} \times L^{(a_2,\infty)} \cap L^{(p_2,\infty)}$ implica que a solução $(u(t), v(t))$ satisfaz $\max\{\sup_{t>0} \|u(t)\|_{(a_1,\infty)}, \sup_{t>0} \|v(t)\|_{(a_2,\infty)}\} < \infty$. Portanto, para concluir a demonstração do Teorema 2.6, é suficiente estimar as normas $\sup_{t>0} t^{\left(\frac{n}{2a_1} - \frac{n}{2r}\right)} \|\cdot\|_{(r,\infty)}$, $\sup_{t>0} t^{\left(\frac{n}{2a_2} - \frac{n}{2\widetilde{r}}\right)} \|\cdot\|_{(\widetilde{r},\infty)}$ das coordenadas do termo não linear de (2.6) $(B(u,v))$, usando as normas $t^{\frac{\alpha}{2}} \|u\|_{(q_1,\infty)}$, $t^{\frac{\beta}{2}} \|v\|_{(q_2,\infty)}$, $\sup_{t>0} \|u\|_{(a_1,\infty)}$ e $\sup_{t>0} \|v\|_{(a_2,\infty)}$. O próximo lema garante tal estimativa:

Lema 2.4 *Supondo as condições do Teorema 2.6, concluímos que*

$$\sup_{t>0} t^{\left(\frac{n}{2a_1} - \frac{n}{2r}\right)} \|B_1(u,v)\|_{(r,\infty)} \leq C \sup_{t>0} \|u(t)\|_{(a_1,\infty)} \left(\sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|u(t)\|_{(q_1,\infty)}\right)^{\rho_1 - 1} \left(\sup_{t>0} t^{\frac{\beta}{2}} \|v(t)\|_{(q_2,\infty)}\right)^{\rho_2}$$

$$\sup_{t>0} t^{\left(\frac{n}{2a_2} - \frac{n}{2\widetilde{r}}\right)} \|B_2(u,v)\|_{(\widetilde{r},\infty)} \leq C \sup_{t>0} \|v(t)\|_{(a_2,\infty)} \left(\sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|u(t)\|_{(q_1,\infty)}\right)^{r_1} \left(\sup_{t>0} t^{\frac{\beta}{2}} \|v(t)\|_{(q_2,\infty)}\right)^{r_2 - 1}.$$

Além disso, valem as versões fortes destas desigualdades, isto é, em espaços de Lebesgue.

Demonstração. Seja $m > 1$ tal que $\frac{1}{m} = \frac{1}{p} + \frac{\rho_1 - 1}{q_1} + \frac{\rho_2}{q_2}$ e $\frac{1}{r} = \frac{1}{m} + \frac{1}{l} - 1$. Observe $\frac{1}{a_1} + \frac{\rho_1 - 1}{q_1} + \frac{\rho_2}{q_2} - \frac{1}{r} < \frac{2}{n}$ implica $\frac{n}{2}(\frac{1}{m} - \frac{1}{r}) < 1$. Portanto, pelas desigualdades de Hölder e Young (ver Preposições 1.13 e 1.11), e pelo Lema 1.8, temos

$$\begin{aligned}
\|B_1(u,v)\|_{(r,\infty)} &\leq \int_0^t (t-s)^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{m}-\frac{1}{r})} s^{-\frac{\alpha}{2}(\rho_1-1)-\frac{\beta}{2}\rho_2} ds \times \\
&\times \sup_{t>0} \|u(t)\|_{(a_1,\infty)} \left(\sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|u(t)\|_{(q_1,\infty)}\right)^{\rho_1-1} \left(\sup_{t>0} t^{\frac{\beta}{2}} \|v(t)\|_{(q_2,\infty)}\right)^{\rho_2} \\
&\leq Ct^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{m}-\frac{1}{r})-\frac{\alpha}{2}(\rho_1-1)-\frac{\beta}{2}\rho_2+1} \sup_{t>0} \|u(t)\|_{(a_1,\infty)} \left(\sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|u(t)\|_{(q_1,\infty)}\right)^{\rho-1} \left(t^{\frac{\beta}{2}} \|v(t)\|_{(q_2,\infty)}\right)^{\rho_2} \\
&= Ct^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{r})} \sup_{t>0} \|u(t)\|_{(a_1,\infty)} \left(\sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|u(t)\|_{(q_1,\infty)}\right)^{\rho_1-1} \left(t^{\frac{\beta}{2}} \|v(t)\|_{(q_2,\infty)}\right)^{\rho_2},
\end{aligned}$$

Seja $\widetilde{m} > 1$ tal que $\frac{1}{\widetilde{m}} = \frac{1}{a_2} + \frac{r_1}{q_1} + \frac{r_2-1}{q_2}$ e $\frac{1}{\widetilde{r}} = \frac{1}{\widetilde{m}} + \frac{1}{l} - 1$. Observe $\frac{1}{a_2} + \frac{r_1}{q_1} + \frac{r_2-1}{q_2} - \frac{1}{\widetilde{r}} < \frac{2}{n}$ implica $\frac{n}{2}(\frac{1}{\widetilde{m}} - \frac{1}{\widetilde{r}}) < 1$. Portanto pelas desigualdades de Hölder e Young (Propriedades 1.13 1.11), e pelo Lema 1.8 temos

$$\begin{aligned}
\|B_2(u,v)\|_{(r,\infty)} &\leq \int_0^t (t-s)^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{\widetilde{m}}-\frac{1}{\widetilde{r}})} s^{-\frac{\alpha}{2}r_1-\frac{\beta}{2}(r_2-1} ds \times \\
&\times \sup_{t>0} \|v(t)\|_{(a_2,\infty)} \left(\sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}r_1} \|u(t)\|_{(q_1,\infty)}\right)^{r_1} \left(\sup_{t>0} t^{\frac{\beta}{2}} \|v(t)\|_{(q_2,\infty)}\right)^{r_2-1} \\
&\leq Ct^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{\widetilde{m}}-\frac{1}{\widetilde{r}})-\frac{\alpha}{2}r_1-\frac{\beta}{2}(r_2-1)+1} \sup_{t>0} \|v(t)\|_{(a_2,\infty)} \left(\sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|u(t)\|_{(q_1,\infty)}\right)^{r_1} \left(t^{\frac{\beta}{2}} \|v(t)\|_{(q_2,\infty)}\right)^{r_2-1} \\
&= Ct^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{\widetilde{r}})} \sup_{t>0} \|v(t)\|_{(a_2,\infty)} \left(\sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|u(t)\|_{(q_1,\infty)}\right)^{r_1} \left(t^{\frac{\beta}{2}} \|v(t)\|_{(q_2,\infty)}\right)^{r_2-1},
\end{aligned}$$

Para finalizar, deixe-nos lembrar que no caso dos espaços de Lebesgue $L^r \times L^{\widetilde{r}}$ a demonstração é essencialmente a mesma, agora usando as desigualdades de Hölder e Young em espaços L^p (desigualdades (1.20) e (1.28)). ∎

Teorema 2.7 *Suponha as hipóteses do Teorema 2.5. Então as soluções correspondentes satisfazem*

$$\lim_{t\to\infty} \|u(t)\|_{L^{p_1}} = \lim_{t\to\infty} \|v(t)\|_{L^{p_2}} = 0.$$

Demonstração.

Como $p_i < q_i < \infty$ de (2.23) e (2.24)

$$-\frac{\rho_1-1}{q_1} - \frac{\rho_2}{q_2} + \frac{2}{n} > 0 \quad \text{e} \quad -\frac{r_1}{q_1} - \frac{r_2-1}{q_2} + \frac{2}{n} > 0.$$

Portanto $\frac{1}{p_1} - \frac{\rho_1-1}{q_1} - \frac{\rho_2}{q_2} + \frac{2}{n} > \frac{1}{p_1}$ e $\frac{1}{p_2} - \frac{r_1}{q_1} - \frac{r_2-1}{q_2} + \frac{2}{n} > \frac{1}{p_2}$. Assim, podemos escolher a_i $(i = 1,2)$ de tal forma que $\frac{1}{p_1} - \frac{\rho_1-1}{q_1} - \frac{\rho_2}{q_2} + \frac{2}{n} > \frac{1}{a_1} > \frac{1}{p_1}$ e $\frac{1}{p_2} - \frac{r_1}{q_1} - \frac{r_2-1}{q_2} + \frac{2}{n} > \frac{1}{a_2} > \frac{1}{p_2}$.

Sejam $(u_{0,k},v_{0,k}) \in L^{a_1}\bigcap L^{p_1}\times \in L^{a_2}\bigcap L^{p_2}$, $k\in\mathbb{N}$, de norma $\|\cdot\|_{p_1\times p_2}$ suficientemente pequena. Agora, fazendo $r=p_1$ e $\widetilde{r}=p_2$ no Teorema 2.6, obtemos que a solução correspondente (u_k,v_k) satisfazem

$$\|u_k(t)\|_{L^{p_1}} \leq Ct^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{p_1})}$$

$$\|v_k(t)\|_{L^{p_2}} \leq Ct^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{p_2})}.$$

Portanto,

$$\lim_{t\to\infty}\|u_k(t)\|_{L^{p_1}} = \lim_{t\to\infty}\|v_k(t)\|_{L^{p_2}} = 0. \tag{2.105}$$

Denote por BC_0 o subespaço fechado de BC formado por todas as funções que se anulam quando $t\to\infty$. Uma vez que $L^{a_i}\bigcap L^{p_i}$ são densos em L^{p_i} $(a_i<p_i), i=1,2$, dados $u_0\in L^{p_1}$, $v_0\in L^{p_2}$, eles podem ser aproximados, nas normas $\|\cdot\|_{L^{p_1}}$ e $\|\cdot\|_{L^{p_2}}$ respectivamente, por funções $(u_{0,k},v_{0,k}) \in L^{a_1}\bigcap L^{p_1}\times L^{a_2}\bigcap L^{p_2}$. Relembramos que usamos o Lema 2.1 para obter soluções do Teorema 2.5. Logo, pela desigualdade (2.9) temos a continuidade em relação ao dado inicial, isto é,

$$\|(u_k,v_k)-(u,v)\|_{\widetilde{E}} \leq \|(u_k,v_k)-(u,v)\|_{\widetilde{E}_{q_1q_2}} \leq C\|(u_{0,k},v_{0,k})-(u_0,v_0)\|_{L^{p_1}\times L^{p_2}} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Isto implica que a solução (u_k,v_k) converge na norma do espaço $\widetilde{E}$ para a solução branda (u,v). De (2.105) vemos que $(u_k,v_k)\in BC_0([0,\infty);L^{p_1}\times L^{p_2})$. Como $BC_0([0,\infty);L^{p_1}\times L^{p_2})$ é um subespaço fechado de $BC([0,\infty);L^{p_1}\times L^{p_2})$, obtemos $(u,v)\in BC_0([0,\infty);L^{p_1}\times L^{p_2})$, ou seja,

$$\lim_{t\to\infty}\|u(t)\|_{L^{p_1}} = \lim_{t\to\infty}\|v(t)\|_{L^{p_2}} = 0. \tag{2.106}$$

Observação 2.5 *Como resultado imediato do Teorema 2.7, a única solução auto-similar, no sentido da Definição 2.6, em $L^{p_1}\times L^{p_2}$ é a solução nula. Com efeito, suponha que $(u(t),v(t))\in BC((0,\infty);L^{p_1}\times L^{p_2})$ é uma solução auto-similar, isto é,*

$$u(t,x)=u_\lambda(t,x)=\lambda^{k_1}u(\lambda^2t,\lambda x) \;\; v(t,x)=v_\lambda(t,x)=\lambda^{k_2}u(\lambda^2t,\lambda x), \tag{2.107}$$

$(t,x)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^n$(q.t.p), para todo $\lambda>0$, onde k_1 e k_2 são definidos como em (2.3). Substituindo $\lambda=t^{-\frac{1}{2}}$ em (2.107), obtemos

$$u(t,x)=t^{-\frac{n}{2p_1}}u(t^{-\frac{1}{2}}x,1) \;\; v(t,x)=t^{-\frac{n}{2p_2}}v(t^{-\frac{1}{2}}x,1).$$

Portanto, tomando o limite $t\to\infty$ concluímos que

$$0=\lim_{t\to\infty}\|u(t)\|_{L^{p_1}} = \lim_{t\to\infty}t^{-\frac{k_1}{2}}\|u(t^{-\frac{1}{2}}x,1)\|_{L^{p_1}} = \|u(x,1)\|_{L^{p_1}}$$

$$0 = \lim_{t\to\infty} \|v(t)\|_{L^{p_2}} = \lim_{t\to\infty} t^{-\frac{k_2}{2}} \|v(t^{-\frac{1}{2}}x,1)\|_{L^{p_2}} = \|v(x,1)\|_{L^{p_2}}.$$

Assim, $u(x,1) = v(x,1) = 0$ *q.t.p., e então* $u(t,x) = t^{-\frac{k_1}{2}} u(t^{-\frac{1}{2}}x,1) = v(t,x) = t^{-\frac{k_2}{2}} u(t^{-\frac{1}{2}}x,1) = 0$*, q.t.p* $t > 0$ *e* $x \in \mathbb{R}^n$*.*

De fato, uma outra prova mais imediata, vem do fato que $(u(t),v(t)) \overset{t\to 0^+}{\longrightarrow} (u_0,v_0)$ *em* $L^{p_1} \times L^{p_2}$*, como veremos agora.*

Suponha (u,v) *uma solução auto-similar. Uma vez que* $(u_\lambda,v_\lambda) = (u,v)$ *temos que* $(u_\lambda,v_\lambda) \overset{t\to 0^+}{\longrightarrow} (u_0,v_0)$*. Mas observe que* $(u_\lambda,v_\lambda) \overset{t\to 0^+}{\longrightarrow} (\lambda^{k_1}u_0(\lambda x),\lambda^{k_2}v_0(\lambda x))$*. Como o limite é único na topologia da norma* $\max\{\|\cdot\|_{p_1},\|\cdot\|_{p_2}\}$ *em* $L^{p_1}\times L^{p_2}$*, temos* $(u_0,v_0) = (\lambda^{k_1}u_0(\lambda x),\lambda^{k_2}v_0(\lambda x))$*. Mas como a única função homogênea nos espaços de Lebesgue* L^p *é a função nula, concluímos que* $(u_0,v_0) = (0,0)$*. Portanto* $(u(t,x),v(t,x)) = (0,0)$*.*

2.4 Estabilidade Assintótica

O objetivo desta seção é estudar o comportamento no infinito das soluções da sistema (2.1). Em particular, mostraremos que soluções brandas, com condição inicial no espaço de Lebesgue $L^{p_1}\times L^{p_2}$, tem um comportamento dissipativo, isto é, a solução decai a 0 em $L^{p_1}\times L^{p_2}$ quando $t\to\infty$. Nossos resultados são os seguintes:

Teorema 2.8 *Assuma as hipótese do item* 1 *do Teorema 2.1. Sejam* (u,v) *e* $(\widetilde{u},\widetilde{v})$ *são soluções de (2.1) dada pelo item* 1 *Teorema 2.1, com as condições inicias* (u_0,v_0) *e* $(\widetilde{u}_0,\widetilde{v}_0) \in L^{(p_1,\infty)} \times L^{(p_2,\infty)}$*, respectivamente, e satisfazendo*

$$\lim_{t\to\infty} \|G(t)(u_0-\widetilde{u}_0)\|_{(p_1,\infty)} = 0,\ \|G(t)(v_0-\widetilde{v}_0)\|_{(p_2,\infty)} = 0. \tag{2.108}$$

Então

$$\lim_{t\to\infty} \|(u(t)-\widetilde{u}(t)\|_{(p_1,\infty)} = 0,\ \lim_{t\to\infty} \|v(t)-\widetilde{v}(t)\|_{(p_2,\infty)} = 0 \tag{2.109}$$

Além disso, suponha as hipóteses do item 3 do Teorema 2.1. Se (u_0,v_0) *e* $(\widetilde{u}_0,\widetilde{v}_0) \in L^{(p_1,\infty)} \times L^{(p_2,\infty)}$ *são tais que*

$$\lim_{t\to\infty} t^{\frac{\alpha}{2}} \|G(t)(u_0-\widetilde{u}_0)\|_{(q_1,\infty)} = 0, \lim_{t\to\infty} t^{\frac{\beta}{2}} \|G(t)(v_0-\widetilde{v}_0)\|_{(q_2,\infty)} = 0.$$

Então

$$\lim_{t\to\infty} t^{\frac{\alpha}{2}} \|u(t)-\widetilde{u}(t)\|_{(q_1,\infty)} = 0, \lim_{t\to\infty} t^{\frac{\beta}{2}} \|v(t)-\widetilde{v}(t)\|_{(q_2,\infty)} = 0. \tag{2.110}$$

Como conseqüência, se $(u_0,v_0)\in L^{p_1}\times L^{p_2}$, com $\|u_0\|_{p_1}$ e $\|v_0\|_{p_2}$ suficientemente pequenas, então as soluções correspondentes satisfazem

$$\lim_{t\to\infty} \|u(t)\|_{L^{(p_1,\infty)}} = \lim_{t\to\infty} \|v(t)\|_{L^{(p_2,\infty)}} = 0.$$

Demonstração do Teorema 2.8

Seja (u,v) e $(\widetilde{u},\widetilde{v})$ duas soluções brandas com condições iniciais (u_0,v_0) e $(\widetilde{u}_0,\widetilde{v}_0)$. Primeiramente, vamos estimar a norma $\|.\|_{(p_1,\infty)}$ da diferença entre u e $\widetilde{u}$. Usando a equação integral (2.6) podemos estimar a diferença da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\|u(t)-\widetilde{u}(t)\|_{(p_1,\infty)} \le\ & \|G(t)(u_0-\widetilde{u}_0)\|_{(p_1,\infty)} \\
&+ \left\| \int_0^{\delta t} G(t-s)(|u|^{\rho_1-1}u|v|^{\rho_2-1}v - |\widetilde{u}|^{\rho_1-1}\widetilde{u}|\widetilde{v}|^{\rho_2-1}v)ds \right\|_{(p_1,\infty)} \\
&+ \left\| \int_{\delta t}^{t} G(t-s)(|u|^{\rho_1-1}u|v|^{\rho_2-1}v - |\widetilde{u}|^{\rho_1-1}\widetilde{u}|\widetilde{v}|^{\rho_2-1}\widetilde{v})ds \right\|_{(p_1,\infty)} \\
=\ & I_0 + I_1 + I_2,
\end{aligned} \tag{2.111}$$

onde o constante δ será escolhida apropriadamente.

Depois de passar a norma $\|.\|_{(p_1,\infty)}$ para dentro da integral em ds, usamos a desigualdade de Hölder e Young (Proposições 1.13 e 1.11, respectivamente) para estimar I_1 como

$$\begin{aligned}
I_1 \le\ & C\int_0^{\delta t} (t-s)^{-1}\|u-\widetilde{u}\|_{(p_1,\infty)}[(\|u\|^{\rho_1-1}_{(p_1,\infty)} + \|\widetilde{u}\|^{\rho_1-1}_{(p_1,\infty)})\|v\|^{\rho_2}_{(p_2,\infty)}]ds \\
&+ C\int_0^{\delta t} (t-s)^{-1}\|v-\widetilde{v}\|_{(p_2,\infty)}[(\|v\|^{\rho_2-1}_{(p_2,\infty)} + \|\widetilde{v}\|^{\rho_2-1}_{(p_2,\infty)})\|\widetilde{u}\|^{\rho_1}_{(p_1,\infty)}]ds \\
\le\ & 2^{\rho_1+\rho_2}C\varepsilon^{\rho_1+\rho_2-1}\int_0^{t\delta} (t-s)^{-1}\|u(s)-\widetilde{u}(s)\|_{(p_1,\infty)}ds \\
&+ 2^{\rho_1+\rho_2}C\varepsilon^{\rho_1+\rho_2-1}\int_0^{t\delta} (t-s)^{-1}\|v(s)-\widetilde{v}(s)\|_{(p_2,\infty)}ds.
\end{aligned} \tag{2.112}$$

Agora, fazendo a simples mudança de variáveis $s=tz$, obtemos a seguinte expressão

$$\begin{aligned}
I_1 \le\ & 2^{\rho_1+\rho_2}C\varepsilon^{\rho_1+\rho_2-1}\int_0^{\delta} (1-z)^{-1}\|u(tz)-\widetilde{u}(tz)\|_{(p_1,\infty)}dz \\
&+ 2^{\rho_1+\rho_2}C\varepsilon^{\rho_1+\rho_2-1}\int_0^{\delta} (1-z)^{-1}\|v(tz)-\widetilde{v}(tz)\|_{(p_2,\infty)}dz,
\end{aligned} \tag{2.113}$$

para todo $t > 0$. Por outro lado, para estimar I_2, usamos a desigualdade (2.46) do termo não-linear $B_1(u,v)$ (proveniente do Lema 2.2), para obter

$$\begin{aligned} I_2 &\le K_1 \left(\sup_{\delta t<s<t} \|u(s)-\widetilde{u}(s)\|_{(p_1,\infty)} \right) \sup_{\delta t<s<t} [(\|u\|^{\rho_1-1}_{(p_1,\infty)} + \|\widetilde{u}\|^{\rho_1-1}_{(p_1,\infty)})\|v(s)\|^{\rho_2}_{(p_2,\infty)}] \\ &+ K_1 \left(\sup_{\delta t<s<t} \|v(s)-\widetilde{v}(s)\|_{(p_2,\infty)} \right) \sup_{\delta t<s<t} [(\|v\|^{\rho_2-1}_{(p_2,\infty)} + \|\widetilde{v}\|^{\rho_2-1}_{(p_2,\infty)})\|\widetilde{u}\|^{\rho_1}_{(p_1,\infty)}] \\ &\le 2^{\rho_1+\rho_2} K_1 \varepsilon^{\rho_1+\rho_2-1} (\sup_{\delta t<s<t} \|u(s)-\widetilde{u}(s)\|_{(p_1,\infty)} + \sup_{\delta t<s<t} \|v(s)-\widetilde{v}(s)\|_{(p_2,\infty)}), \end{aligned} \tag{2.114}$$

para todo $t > 0$. Portanto, pelas desigualdades (2.111), (2.113) e (2.114), encontramos

$$\begin{aligned} \|u(t)-\widetilde{u}(t)\|_{(p_1,\infty)} &\le \|G(t)(u_0-\widetilde{u}_0)\|_{(p_1,\infty)} \\ &+ 2^{\rho_1+\rho_2} C \varepsilon^{\rho_1+\rho_2-1} \int_0^{\delta} (1-s)^{-1} \|u(ts)-\widetilde{u}(ts)\|_{(p_1,\infty)} ds \\ &+ 2^{\rho_1+\rho_2} C \varepsilon^{\rho_1+\rho_2-1} \int_0^{\delta} (1-s)^{-1} \|v(ts)-\widetilde{v}(ts)\|_{(p_2,\infty)} ds \\ &+ 2^{\rho_1+\rho_2} K_1 \varepsilon^{\rho_1+\rho_2-1} (\sup_{\delta t<s<t} \|u(s)-\widetilde{u}(s)\|_{(p_1,\infty)} + \sup_{\delta t<s<t} \|v(s)-\widetilde{v}(s)\|_{(p_2,\infty)}), \end{aligned} \tag{2.115}$$

para todo $t > 0$.

Agora deixe-nos estimar a norma da diferença entre v e $\widetilde{v}$. Usando a equação satisfeita por v e $\widetilde{v}$, temos

$$\begin{aligned} \|v(t)-\widetilde{v}(t)\|_{(p_2,\infty)} &\le \|G(t)(v_0-\widetilde{v}_0)\|_{(p_2,\infty)} \\ &+ \left\| \int_0^{\delta t} G(t-s)(|u|^{r_1-1}u|v|^{r_2-1}v - |\widetilde{u}|^{r_1-1}\widetilde{u}|\widetilde{v}|^{r_2-1}\widetilde{v}) ds \right\|_{(p_2,\infty)} \\ &+ \left\| \int_{\delta t}^{t} G(t-s)(|u|^{r_1-1}u|v|^{r_2-1}v - |\widetilde{u}|^{r_1-1}\widetilde{u}|\widetilde{v}|^{r_2-1}\widetilde{v}) ds \right\|_{(p_2,\infty)} \\ &= \widetilde{I}_0 + \widetilde{I}_1 + \widetilde{I}_2, \end{aligned} \tag{2.116}$$

onde a constante δ é a mesma definida acima.

Procedendo de maneira análoga a (2.112) e novamente fazendo uma simples mudança de variáveis $s = tz$, estimamos $\widetilde{I}_1$ como

$$
\begin{aligned}
\widetilde{I}_1 \leq\, & C\int_0^{\delta t}(t-s)^{-1}\|u-\widetilde{u}\|_{(p_1,\infty)}[(\|u\|^{r_1-1}_{(p_1,\infty)}+\|\widetilde{u}\|^{r_1-1}_{(p_1,\infty)})\|v\|^{r_2}_{(p_2,\infty)}]ds\\
&+C\int_0^{\delta t}(t-s)^{-1}\|v-\widetilde{v}\|_{(p_2,\infty)}[(\|v\|^{r_2-1}_{(p_2,\infty)}+\|\widetilde{v}\|^{r_2-1}_{(p_2,\infty)})\|\widetilde{u}\|^{r_1}_{(p_1,\infty)}]ds\\
&\leq 2^{r_1+r_2}C\varepsilon^{r_1+r_2-1}\int_0^{\delta}(1-z)^{-1}\|u(tz)-\widetilde{u}(tz)\|_{(p_1,\infty)}dz\\
&+2^{r_1+r_2}C\varepsilon^{r_1+r_2-1}\int_0^{\delta}(1-z)^{-1}\|v(tz)-\widetilde{v}(tz)\|_{(p_2,\infty)}dz
\end{aligned}
\tag{2.117}
$$

Por outro lado, para estimar $\widetilde{I}_2$, usamos a desigualdade (2.47 do termo não-linear $B_2(u,v)$ (novamente proveniente do Lema 2.2),para obter

$$
\begin{aligned}
\widetilde{I}_2 \leq\, & K_2\left(\sup_{\delta t<s<t}\|u(s)-\widetilde{u}(s)\|_{(p_1,\infty)}\right)\sup_{\delta t<s<t}[(\|u\|^{r_1-1}_{(p_1,\infty)}+\|\widetilde{u}\|^{r_1-1}_{(p_1,\infty)})\|v(s)\|^{r_2}_{(p_2,\infty)}]\\
&+K_2\left(\sup_{\delta t<s<t}\|v(s)-\widetilde{v}(s)\|_{(p_2,\infty)}\right)\sup_{\delta t<s<t}[(\|v\|^{r_2-1}_{(p_2,\infty)}+\|\widetilde{v}\|^{r_2-1}_{(p_2,\infty)})\|\widetilde{u}\|^{r_1}_{(p_1,\infty)}]\\
&\leq 2^{r_1+r_2}K_2\varepsilon^{r_1+r_2-1}(\sup_{\delta t<s<t}\|u(s)-\widetilde{u}(s)\|_{(p_1,\infty)}+\sup_{\delta t<s<t}\|v(s)-\widetilde{v}(s)\|_{(p_2,\infty)}).
\end{aligned}
\tag{2.118}
$$

Portanto, das desigualdades (2.116),(2.117) e (2.118), obtemos

$$
\begin{aligned}
\|v(t)-\widetilde{v}(t)\|_{(p_2,\infty)} \leq\, & \|G(t)(v_0-\widetilde{v}_0)\|_{(p_2,\infty)}\\
&+2^{r_1+r_2}C\varepsilon^{r_1+r_2-1}\int_0^{\delta}(1-s)^{-1}\|u(ts)-\widetilde{u}(ts)\|_{(p_1,\infty)}ds\\
&+2^{r_1+r_2}C\varepsilon^{r_1+r_2-1}\int_0^{\delta}(1-s)^{-1}\|v(ts)-\widetilde{v}(ts)\|_{(p_2,\infty)}ds\\
&+2^{r_1+r_2}K_2\varepsilon^{r_1+r_2-1}(\sup_{\delta t<s<t}\|u(s)-\widetilde{u}(s)\|_{(p_1,\infty)}+\sup_{\delta t<s<t}\|v(s)-\widetilde{v}(s)\|_{(p_2,\infty)}),
\end{aligned}
\tag{2.119}
$$

Agora, defina

$$
\Gamma_1 = \limsup_{t\to\infty}\|u(t)-\widetilde{u}(t)\|_{(p_1,\infty)} = \lim_{k\in\mathbb{N},k\to\infty}\sup_{t>k}\|u(t)-\widetilde{u}(t)\|_{(p_1,\infty)} \tag{2.120}
$$

$$
\Gamma_2 = \limsup_{t\to\infty}\|v(t)-\widetilde{v}(t)\|_{(p_2,\infty)} = \lim_{k\in\mathbb{N},k\to\infty}\sup_{t>k}\|v(t)-\widetilde{v}(t)\|_{(p_2,\infty)}. \tag{2.121}
$$

Queremos mostrar que $\Gamma_1 = 0$ e $\Gamma_2 = 0$.

Da monotonicidade da integral, note que

$$
\sup_{t>k}\int_0^{\delta}(1-s)^{-1}\|u(ts)-\widetilde{u}(ts)\|_{(p_1,\infty)}ds \leq \int_0^{\delta}(1-s)^{-1}\sup_{t>k}\|u(ts)-\widetilde{u}(ts)\|_{(p_1,\infty)}ds.
$$

$$\sup_{t>k}\int_0^\delta (1-s)^{-1}\|v(ts)-\widetilde{v}(ts)\|_{(p_2,\infty)}ds \leq \int_0^\delta (1-s)^{-1}\sup_{t>k}\|v(ts)-\widetilde{v}(ts)\|_{(p_2,\infty)}ds.$$

Este fato, junto com o teorema da convergência dominada, implica

$$\limsup_{t\to\infty}\int_0^\delta (1-s)^{-1}\|u(ts)-\widetilde{u}(ts)\|_{(p_1,\infty)}ds \leq \Gamma_1\int_0^\delta (1-s)^{-1}ds = \Gamma_1\log\left(\frac{1}{1-\delta}\right).$$

$$\limsup_{t\to\infty}\int_0^\delta (1-s)^{-1}\|v(ts)-\widetilde{v}(ts)\|_{(p_2,\infty)}ds \leq \Gamma_2\int_0^\delta (1-s)^{-1}ds = \Gamma_2\log\left(\frac{1}{1-\delta}\right).$$

Como

$$\sup_{t>k}\sup_{\delta t<s<t}\|u(s)-\widetilde{u}(s)\|_{(p_1,\infty)} \leq \sup_{s>\delta k}\|u(s)-\widetilde{u}(s)\|_{(p_1,\infty)} \tag{2.122}$$

$$\sup_{t>k}\sup_{\delta t<s<t}\|v(s)-\widetilde{v}(s)\|_{(p_2,\infty)} \leq \sup_{s>\delta k}\|v(s)-\widetilde{v}(s)\|_{(p_2,\infty)}, \tag{2.123}$$

por (2.120) e (2.121) , obtemos

$$\limsup_{t\to\infty}\sup_{\delta t<s<t}\|u(s)-\widetilde{u}(s)\|_{(p_1,\infty)} \leq \Gamma_1. \tag{2.124}$$

$$\limsup_{t\to\infty}\sup_{\delta t<s<t}\|v(s)-\widetilde{v}(s)\|_{(p_2,\infty)} \leq \Gamma_2. \tag{2.125}$$

Adicionado (2.115) e (2.119), calculando $\limsup_{t\to\infty}$, usando as últimas desigualdades e tomando $K=\max\{K_1,K_2\}$,

$$\Gamma_1+\Gamma_2 \leq (2^{\rho_1+\rho_2}\varepsilon^{\rho_1+\rho_2-1}+2^{r_1+r_2}\varepsilon^{r_1+r_2-1})\left(C\log\left(\frac{1}{1-\delta}\right)+K\right)(\Gamma_1+\Gamma_2).$$

Uma vez que $(2^{\rho_1+\rho_2+1}\varepsilon^{\rho_1+\rho_2-1}+2^{r_1+r_2+1}\varepsilon^{r_1+r_2-1})K<1$ e $\lim_{\delta\to 0}\log\left(\frac{1}{1-\delta}\right)=0$, podemos escolher $\delta>0$ suficientemente pequeno tal que

$$(2^{\rho_1+\rho_2}\varepsilon^{\rho_1+\rho_2-1}+2^{r_1+r_2}\varepsilon^{r_1+r_2-1})\left(C\log\left(\frac{1}{1-\delta}\right)+K\right)<1.$$

Como Γ_1, Γ_2 são números não negativos, concluímos que $\Gamma_1=\Gamma_2=0$ o que é equivalente a (2.109).

Demonstração da segunda parte do Teorema 2.8

Seja (u,v) e $(\widetilde{u},\widetilde{v})$ duas soluções brandas com condições iniciais (u_0,v_0) e $(\widetilde{u}_0,\widetilde{v}_0)$. Primeiramente, vamos estimar a norma $\|.\|_{(q_1,\infty)}$ da diferença entre u e $\widetilde{u}$. Usando a equação integral (2.6) podemos estimar a diferença da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\|u(t)-\widetilde{u}(t)\|_{(q_1,\infty)} &\leq \|G(t)(u_0-\widetilde{u}_0)\|_{(q_1,\infty)}\\ &+\left\|\int_0^t G(t-s)(|u|^{\rho_1-1}u|v|^{\rho_2-1}v-|\widetilde{u}|^{\rho_1-1}\widetilde{u}|\widetilde{v}|^{\rho_2-1}\widetilde{v})ds\right\|_{(q_1,\infty)}\\ &=I_0+I_1\end{aligned} \tag{2.126}$$

Neste caso não será necessário dividir a integral acima em duas partes como na demonstração da primeira parte do teorema, uma vez que o comportamento das estimativas na norma regularizante $\sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|\cdot\|_{(q_1,\infty)}$ é melhor.

Depois de passar a norma $\|\cdot\|_{(q_1,\infty)}$ para dentro da integral em ds, usamos as desigualdades de Hölder e Young (Proposições 1.13 e 1.11) para estimar I_1 (de maneira análoga a estimativa do termo não linear do item 3 do Teorema 2.1), como

$$\begin{aligned} I_1 &\leq C\,\Omega_1 \int_0^t (t-s)^{\frac{-n(\rho_1-1)}{2q_1} - \frac{n\rho_2}{2q_1}} s^{-\frac{\alpha}{2}\rho_1 - \frac{\beta}{2}\rho_2} s^{\frac{\alpha}{2}} \|u(s) - \widetilde{u}(s)\|_{(q_1,\infty)} ds \\ &+ C\,\Omega_2 \int_0^t (t-s)^{\frac{-n(\rho_1-1)}{2q_1} - \frac{n\rho_2}{2q_1}} s^{-\frac{\alpha}{2}\rho_1 - \frac{\beta}{2}\rho_2} s^{\frac{\beta}{2}} \|v(s) - \widetilde{v}(s)\|_{(q_2,\infty)} ds, \end{aligned} \tag{2.127}$$

onde

$$\Omega_1 = \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}(\rho_1-1)} (\|u\|_{(q_1,\infty)}^{\rho_1-1} + \|\widetilde{u}\|_{(q_1,\infty)}^{\rho_1-1}) \sup_{t>0} t^{\frac{\beta}{2}\rho_2} \|v\|_{(q_2,\infty)}^{\rho_2}$$

$$\Omega_2 = \sup_{t>0} t^{\frac{\beta}{2}(\rho_2-1)} (\|v\|_{(q_2,\infty)}^{\rho_2-1} + \|\widetilde{v}\|_{(q_2,\infty)}^{\rho_2-1}) \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}\rho_1} \|\widetilde{u}\|_{(q_1,\infty)}^{\rho_1}.$$

Usando que $\|(u,v)\|_{E_{q_1q_2}} \leq 2\varepsilon_{q_1q_2}$ e $\|(\widetilde{u},\widetilde{v})\|_{E_{q_1q_2}} \leq 2\varepsilon_{q_1q_2}$, e fazendo a simples mudança de coordenadas, $s = yt$ (analogamente à mudança de coordenadas na prova do item 3 do Teorema 2.1), obtemos

$$\begin{aligned} I_1 \leq t^{-\frac{\alpha}{2}} (2^{\rho_1+\rho_2} C \varepsilon^{\rho_1+\rho_2-1} &\int_0^1 (1-y)^{\frac{-n(\rho_1-1)}{2q_1} - \frac{n\rho_2}{2q_1}} y^{-\frac{\alpha}{2}\rho_1 - \frac{\beta}{2}\rho_2} (ty)^{\frac{\alpha}{2}} \|u(ty) - \widetilde{u}(ty)\|_{(p_1,\infty)} dy \\ + 2^{\rho_1+\rho_2} C \varepsilon^{\rho_1+\rho_2-1} &\int_0^1 (1-y)^{\frac{-n(\rho_1-1)}{2q_1} - \frac{n\rho_2}{2q_1}} y^{-\frac{\alpha}{2}\rho_1 - \frac{\beta}{2}\rho_2} (ty)^{\frac{\beta}{2}} \|v(ty) - \widetilde{v}(ty)\|_{(p_2,\infty)} dy). \end{aligned} \tag{2.128}$$

Assim,

$$\begin{aligned} t^{\frac{\alpha}{2}} \|u(t) - \widetilde{u}(t)\|_{(q_1,\infty)} \leq t^{\frac{\alpha}{2}} &\|G(t)(u_0 - \widetilde{u}_0)\|_{(q_1,\infty)} + \\ &+ 2^{\rho_1+\rho_2} C \varepsilon^{\rho_1+\rho_2-1} \int_0^1 (1-y)^{\frac{-n(\rho_1-1)}{2q_1} - \frac{n\rho_2}{2q_2}} y^{-\frac{\alpha}{2}\rho_1 - \frac{\beta}{2}\rho_2} (ty)^{\frac{\alpha}{2}} \|u(ty) - \widetilde{u}(ty)\|_{(q_1,\infty)} dy \\ &+ 2^{\rho_1+\rho_2} C \varepsilon^{\rho_1+\rho_2-1} \int_0^1 (1-y)^{\frac{-n(\rho_1-1)}{2q_1} - \frac{n\rho_2}{2q_2}} y^{-\frac{\alpha}{2}\rho_1 - \frac{\beta}{2}\rho_2} (ty)^{\frac{\beta}{2}} \|v(ty) - \widetilde{v}(ty)\|_{(q_2,\infty)} dy. \end{aligned} \tag{2.129}$$

De maneira análoga,

$$\begin{aligned} t^{\frac{\beta}{2}}\|v(t)-\widetilde{v}(t)\|_{(q_2,\infty)} &\leq t^{\frac{\beta}{2}}\|G(t)(v_0-\widetilde{v}_0)\|_{(q_2,\infty)}+\\ &+2^{r_1+r_2}C\varepsilon_{q_1q_2}^{r_1+r_2-1}\int_0^1(1-y)^{\frac{-nr_1}{2q_1}-\frac{n(r_2-1)}{2q_2}}y^{-\frac{\alpha}{2}r_1-\frac{\beta}{2}r_2}(ty)^{\frac{\beta}{2}}\|v(ty)-\widetilde{v}(ty)\|_{(q_2,\infty)}dy\\ &+2^{r_1+r_2}C\varepsilon_{q_1q_2}^{r_1+r_2-1}\int_0^1(1-y)^{\frac{-nr_1}{2q_1}-\frac{n(r_2-1)}{2q_2}}y^{-\frac{\alpha}{2}r_1-\frac{\beta}{2}r_2}(ty)^{\frac{\alpha}{2}}\|u(ty)-\widetilde{u}(ty)\|_{(q_1,\infty)}dy \end{aligned} \tag{2.130}$$

Defina

$$\Gamma_1=\limsup_{t\to\infty}t^{\frac{\alpha}{2}}\|u(t)-\widetilde{u}(t)\|_{(q_1,\infty)}.$$

$$\Gamma_2=\limsup_{t\to\infty}t^{\frac{\beta}{2}}\|v(t)-\widetilde{v}(t)\|_{(q_2,\infty)}.$$

Adicionando (2.129) e (2.130), calculando $\limsup_{t\to\infty}$, usando o monotonicidade da integral e o Teorema da convergência dominada, obtemos

$$\begin{aligned} \Gamma_1+\Gamma_2 \leq \{&2^{\rho_1+\rho_2}C\varepsilon^{\rho_1+\rho_2-1}\int_0^1(1-y)^{\frac{-n(\rho_1-1)}{2q_1}-\frac{n\rho_2}{2q_2}}y^{-\frac{\alpha}{2}\rho_1-\frac{\beta}{2}\rho_2}dy\\ &+2^{r_1+r_2}C\varepsilon_{q_1q_2}^{r_1+r_2-1}\int_0^1(1-y)^{\frac{-nr_1}{2q_1}-\frac{n(r_2-1)}{2q_2}}y^{-\frac{\alpha}{2}r_1-\frac{\beta}{2}r_2}dy\}(\Gamma_1+\Gamma_2). \end{aligned} \tag{2.131}$$

Da demonstração do item 3 do Teorema 2.1, temos que:

$$C\int_0^1(1-y)^{\frac{-n(\rho_1-1)}{2q_1}-\frac{n\rho_2}{2q_2}}y^{-\frac{\alpha}{2}\rho_1-\frac{\beta}{2}\rho_2}dy\leq K_{B_1}\ \text{ e}$$

$$C\int_0^1(1-y)^{\frac{-nr_1}{2q_1}-\frac{n(r_2-1)}{2q_2}}y^{-\frac{\alpha}{2}r_1-\frac{\beta}{2}r_2}dy\leq K_{B_2}.$$

Assim,

$$\Gamma_1+\Gamma_2\leq(2^{\rho_1+\rho_2}K\varepsilon_{q_1q_2}^{\rho_1+\rho_2-1}+2^{r_1+r_2}K\varepsilon_{q_1q_2}^{r_1+r_2-1})(\Gamma_1+\Gamma_2),$$

onde $K=\max\{K_{B_1},K_{B_2}\}$. Uma vez que $2^{\rho_1+\rho_2+1}K\varepsilon_{q_1q_2}^{\rho_1+\rho_2-1}+2^{r_1+r_2+1}K\varepsilon_{q_1q_2}^{r_1+r_2-1}<1$ e Γ_1, Γ_2 são números não negativos, $\Gamma_1=\Gamma_2=0$, o que é equivalente a (2.110).

Mostraremos agora que $\lim_{t\to\infty}\|G(t)u_0\|_{L^{p_1}}=\lim_{t\to\infty}\|G(t)v_0\|_{L^{p_2}}=0$, quando $(u_0,v_0)\in L^{p_1}\times L^{p_2}$. Então, obteremos o resultado desejado aplicando o Teorema 2.8 com $(\widetilde{u}_0,\widetilde{v}_0)=(0,0)$ no Teorema 2.8. De fato, suponha $1<d_1<p_1$, $1<d_2<p_2$ e seja a seqüência $(u_{0,k},v_{0,k})\in L^{d_1}\cap L^{p_1}\times L^{d_2}\cap L^{p_2}$. Pelo lema 3.1, temos que

$$\left\|G(t)u_{0,k}\right\|_{L^{p_1}} \leq Ct^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{d_1}-\frac{1}{p_1})}\left\|u_{0,k}\right\|_{L^{d_1}} \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$\left\|G(t)v_{0,k}\right\|_{L^{p_2}} \leq Ct^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{d_2}-\frac{1}{p_2})}\left\|v_{0,k}\right\|_{L^{d_2}} \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Uma vez que a interseção $L^{d_1} \cap L^{p_1}$ é densa em L^{p_1} e $L^{d_2} \cap L^{p_2}$ é densa em L^{p_2}, concluímos que $\lim_{t\to\infty} \|G(t)u_0\|_{L^{p_1}} = \|G(t)v_0\|_{L^{p_2}} = 0$ e assim,

$$\lim_{t\to\infty} \|u(t)\|_{(p_1,\infty)} = \|v(t)\|_{(p_2,\infty)} = 0.$$

■

Observação 2.6 • *Mais geralmente, se* $(u_0, v_0) \in \overline{L^{(a_1,\infty)} \cap L^{(p_1,\infty)} \times L^{(a_2,\infty)} \cap L^{(p_2,\infty)}}$*, podemos provar de maneira análoga que*

$$\lim_{t\to\infty} \|G(t)u_0\|_{(p_1,\infty)} = \lim_{t\to\infty} \|G(t)v_0\|_{(p_2,\infty)} = 0$$

- *Note que no enunciado do Teorema 2.8, dissemos que uma conseqüência imediata é a convergência a zero na norma do espaço* $L^{(p_1,\infty)} \times L^{(p_2,\infty)}$*, se assumirmos que as condições inciais estão na versão forte, isto é, nos espaços de Lebesgue* $L^{p_1} \times L^{p_2}$*. Contudo, observe que essa conclusão é mais fraca que a do Teorema 2.7, onde mostramos que a órbita converge a zero na norma de* $L^{p_1} \times L^{p_2}$*.*

Observação 2.7 *(Bacia atratora auto-similar) Se tomarmos* (u_0, v_0) *com as coordenadas homogêneas com o grau certo para a existência de solução auto-similar (Teorema 2.3), então o Teorema 2.8 garante a existência de uma bacia atratora (por exemplo, pertubações de suporte compacto das condições iniciais homogêneas) em torno de cada solução auto-similar. Do Teorema 2.1, observe que para aplicar o Teorema 2.8, estamos sempre falando de pertubações de tamanho pequeno.*

Capítulo 3

Existência de Soluções Brandas para a Equação da Onda Semilinear

Neste capítulo estamos interessados em estudar o problema de Cauchy associado com a equação semilinear da onda:

$$\begin{cases} \partial_{tt}u - \Delta u = |u|^{\rho}u, \ x \in \mathbb{R}^n, \ t \in \mathbb{R} \\ u(0,x) = f(x), \ x \in \mathbb{R}^n, \\ u_t(0,x) = g(x), \ x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{3.1}$$

onde $u = u(t,x)$ é uma função real, $0 < \rho < \infty$ e $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ são condições iniciais dadas. Encontramos estimativas para o grupo da onda nos espaços de Marcinkiewicz $L^{(p,\infty)}$ e obtemos um resultado de boa-colocação local do problema (3.1) nestes espaços. Estudamos o decaimento das soluções quando o tempo t se aproxima de zero.

3.1 Resultados de Boa-colocação e Decaimento quando $t \to 0$

3.1.1 Problema Linear e Formulação Integral

Considere o seguinte problema de valor inicial para a equação linear da onda

$$\begin{cases} \partial_{tt}u - \Delta u = 0, \ x \in \mathbb{R}^n, \ t \in \mathbb{R}, \\ u(0,x) = f(x), \ x \in \mathbb{R}^n, \\ u_t(0,x) = g(x), \ x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{3.2}$$

Note que se $g, f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, então u definida através da transformada de Fourier como $\widehat{u}(t,\xi) = \widehat{f}(\xi)\cos(2\pi|\xi|t) + \widehat{g}(\xi)\frac{\sin(2\pi|\xi|t)}{2\pi|\xi|}$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$, satifaz

$$\begin{cases} \widehat{u}_{tt} + |\xi|^2\widehat{u} = 0, & \xi \in \mathbb{R}^n,\ t \in \mathbb{R}, \\ \widehat{u}(0,\xi) = \widehat{f}(\xi), & \xi \in \mathbb{R}^n, \\ \widehat{u}_t(0,\xi) = \widehat{g}(\xi), & \xi \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{3.3}$$

Portanto, tomando a transformada inversa de Fourier, obtemos que u satisfaz o problema de valor inicial (3.2).

Suponha $n \geq 2$. Para cada $t \neq 0$ fixado, podemos escrever $u(t) = \partial_t K_t * f + K_t * g$, onde $K_t(x) = \left(\frac{\sin(2\pi|\xi|t)}{2\pi|\xi|}\right)^{\vee}$. Mais explicitamente, $K_t(x)$ tem a seguinte expressão

$$K_t(x) = K(t,x) = \frac{(-1)^{(n/2)-1}\Gamma((n+1)/2)sgn\, t}{(n-1)\pi^{(n+1)/2}} \frac{1}{(t^2-|x|^2)^{(n-1)/2}}\chi_{\{|x|<|t|\}}(t). \tag{3.4}$$

Para maiores detalhes indicamos ao leitor a referência [21].

Observação 3.1 *Uma propriedade importante de $K(t,x)$ é que $K(1,x) \in L^1(B_1(0))$ se $n = 2$. De fato, observe que*

$$\begin{aligned} K(1,x) &= C_n \frac{1}{(1-|x|^2)^{\frac{n-1}{2}}} \\ &= C_n \frac{1}{(1-|x|)^{\frac{n-1}{2}}} \frac{1}{(1+|x|)^{\frac{n-1}{2}}} \\ &\leq C \frac{1}{(1-|x|)^{\frac{n-1}{2}}}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Como

$$\int_{B_1(0)} \frac{1}{(1-|x|)^{\frac{n-1}{2}}} dx = C\int_0^1 \frac{r^{n-1}}{(1-r)^{\frac{n-1}{2}}} dr \leq C\int_0^1 \frac{1}{(1-r)^{\frac{n-1}{2}}} dr, \tag{3.6}$$

e a última integral é finita se $n \leq 2$. De (3.5) e (3.6) provamos nossa afirmação.

Pelo princípio de Duhamel, podemos reduzir o problema de Cauchy (3.1) à seguinte equação integral

$$u(t) = \partial_t W(t) f + W(t) g + \int_0^t W(t-s)(|u(s)|^{\rho} u(s))ds, \tag{3.7}$$

onde a família de operadores $\{W(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ é o operador convolução $W(t)g = K_t * g$, para cada $t \neq 0$ fixado e $W(0) = Id$ (Identidade).

3.1.2 Estimativa da Família de Operadores da Onda $\{W(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$

Nesta subseção provaremos estimativas para o operador da onda $W(t)$ em Espaços de Lorentz. Primeiramente, note que vale a seguinte propriedade de homogeneidade para $K_t(x) = K(t,x)$:

$$K(t,x) = |t|^{-(n-1)}K(1,xt^{-1}). \tag{3.8}$$

De fato,

$$K(t,x) = C_n\frac{sgn(t)}{(t^2-|x|^2)^{\frac{n-1}{2}}} = |t|^{-(n-1)}C_n\frac{sgn(t)}{(1-|xt^{-1}|^2)^{\frac{n-1}{2}}} = |t|^{-(n-1)}K(1,xt^{-1}).$$

Desde que vamos estudar (3.1) em espaços $L^{(p,\infty)}$, é de fundamental importância conseguir estimativas para a família $\{W(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ em espaços de Marcinkiewicz $L^{(p,\infty)}$. Pela relação de escala (3.8), observe que é importante saber em que espaços de Marcinkiewicz jaz o núcleo $K(t,x)$ quando $t=1$. Este é o conteúdo da próxima proposição.

Proposição 3.1 *Sejam $n\geq 2$ e $K_1(x)$ dado como em (3.4). Se $0<l\leq\frac{2}{n-1}$, então $K_1(x)\in L^{(l,\infty)}$.*

Demonstração. Seja $\lambda_f(s) = \mu(x\in\mathbb{R}^n : |f(x)|>s)$ a função distribuição de f, onde μ é a medida de Lebesgue. Analisaremos os casos $s>1$ e $s\leq 1$ separadamente afim de concluirmos em qual espaço $L^{(l,\infty)}$ encontra-se $K_1(x)$.

Uma vez que $supp\ K_1 \subset B_1(0)$, observe que

$$\lambda_{K_1}(s) = \mu\left(x\in B_1(0) : \left|\frac{1}{(1^2-|x|^2)^{(n-1)/2}}\right| > s\right). \tag{3.9}$$

Note que se $s\leq 1$, obtemos $\lambda_{K_1}(s)=1$ uma vez que $x\in B_1(0)$. De $\frac{1}{\left(1^2-|x|^2\right)^{(n-1)/2}}>s$ obtemos $|x|>(1-s^{\frac{-2}{n-1}})^{\frac{1}{2}}$. Assim, no caso em que $s>1$, temos que

$$\{x\in B_1(0) : \frac{1}{(1^2-|x|^2)^{(n-1)/2}} > s\} = \{x\in\mathbb{R}^n : (1-s^{\frac{-2}{n-1}})^{\frac{1}{2}} < |x| < 1\}.$$

Logo

$$\lambda_{K_1}(s) = C_n\left(1-(1-s^{\frac{-2}{n-1}})^{\frac{n}{2}}\right).$$

Então,

$$\lambda_{K_1}(s) = \begin{cases} 1, & \text{if } \ s\leq 1 \\ C_n\left(1-(1-s^{\frac{-2}{n-1}})^{n/2}\right), & \text{if } \ s>1. \end{cases} \tag{3.10}$$

Temos que $\left(\sup\limits_{0<s<1} s^l\lambda_{K_1}(s)\right)^{\frac{1}{l}} = 1$ para todo $l > 0$. Por outro lado, usando que $1-(1-x)^{\frac{n}{2}} \leq \frac{n}{2}x$, $\forall x \in (0,1)$, observe que

$$\left(\sup_{s>1} s^l\left(1-(1-s^{\frac{-2}{n-1}})^{n/2}\right)\right)^{\frac{1}{l}} \leq \sup_{s>1}\left(s^l\cdot\frac{n}{2}s^{-\frac{2}{n-1}}\right)^{\frac{1}{l}} < \infty,$$

somente quando $0 < l \leq \frac{2}{n-1}$. Assim , assumindo $0 < l \leq \frac{2}{n-1}$, chegamos à seguinte estimativa:

$$\begin{aligned}\|K_1(x)\|_{(l,\infty)} &= (\sup_{s>0} s^l\lambda_{K_1}(s))^{\frac{1}{l}} = \max\left\{(\sup_{0<s<1} s^l\lambda_{K_1}(s))^{\frac{1}{l}}, (\sup_{s>1} s^l\lambda_{K_1}(s))^{\frac{1}{l}}\right\}\\ &\leq \max\{1, \left(\sup_{s>1} s^l\left(1-(1-s^{\frac{-2}{n-1}})^{n/2}\right)\right)^{\frac{1}{l}}\} < \infty.\end{aligned}$$

■

Agora estamos prontos para encontrar estimativas para o operador $W(t)$ em espaços de Lorentz. Esta estimativa será importante no intuito de encontrar soluções brandas de (3.1).

Lema 3.1 *(Estimativa de $W(t)$ em espaços de Lorentz) Sejam $n=2$, $1 \leq d \leq \infty$, $1 < p < q \leq \infty$ e $\frac{1}{p}-\frac{1}{q} < \frac{1}{2}$. Existe uma constante $C = C(p,q) > 0$ tal que*

$$\|W(t)\varphi\|_{(q,d)} \leq C|t|^{-2(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})+1}\|\varphi\|_{(p,d)}, \tag{3.11}$$

para todo $\varphi \in L^{(p,d)}$ e $t \neq 0$. Além disso, se $p = q$ temos

$$\|W(t)\varphi\|_{(q,\infty)} \leq D|t|\,\|\varphi\|_{(q,\infty)} \tag{3.12}$$

Demonstração. Desde que $K(t,x) = -K(-t,x)$, sem perda de generalidade, podemos supor $t > 0$. Primeiramente, observe que $W(t)\varphi = K(t,x)*\varphi$. Sejam $1 < p \leq q \leq \infty$,$\frac{1}{p}-\frac{1}{q} < \frac{1}{2}$ e $1 \leq l \leq 2$ tais que $\frac{1}{q} = \frac{1}{l}+\frac{1}{p}-1$. Se $p \neq q$, então $1 < l \leq 2$, e pela desigualdade de Young (Proposição 1.11) ,

$$\|W(t)\varphi\|_{(q,d)} \leq \|K_t(x)\|_{(l,\infty)}\|\varphi\|_{(p,d)}. \tag{3.13}$$

Por outro lado, pela igualdade (3.8) e relação de escala em espaços de Lorentz $L^{(l,d)}$, propriedade (1.9), temos que

$$\begin{aligned}\|K_t(x)\|_{(l,\infty)}\|\varphi\|_{(p,d)} &= t^{-(2-1)}\left\|K(1,xt^{-1})\right\|_{(l,\infty)}\|\varphi\|_{(p,d)}\\ &= t^{-2(1-\frac{1}{l})+1}\|K(1,x)\|_{(l,\infty)}\|\varphi\|_{(p,d)} = Ct^{-2(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})+1}\|\varphi\|_{(p,d)}.\end{aligned} \tag{3.14}$$

Portanto, de (3.13) e (3.14) obtemos (3.11).

Da Observação 3.1, temos que $K(1,x) \in L^1$. Logo, pela Proposição 1.12 e, novamente pela igualdade (3.8) e pela relação de escala (1.9), obtemos

$$\|K_t(x)\|_{L^1}\|\varphi\|_{(q,\infty)} = t^{-(2-1)}\left\|K(1,xt^{-1})\right\|_{L^1}\|\varphi\|_{(q,\infty)} = t\|K(1,x)\|_{L^1}\|\varphi\|_{(q,\infty)},$$

e portanto

$$\|W(t)\varphi\|_{(q,\infty)} \leq \|K_t(x)\|_{L^1}\|\varphi\|_{(q,\infty)} \leq Dt\,\|\varphi\|_{(q,\infty)}, \tag{3.15}$$

onde $D = \|K(1,x)\|_{L^1}$. ■

3.1.3 Relação de Escala e Espaços Funcionais

De agora em diante, denotaremos $\alpha := \frac{n}{\rho_0} - \frac{n}{q}$, $\rho_0 = \frac{n}{k}$, onde k é determinado pela relação de escala de (3.1) como a seguir. Supondo que u é uma solução clássica de (3.1), queremos encontrar valores de k tais que

$$u_\lambda(t,x) = \lambda^k u(\lambda t, \lambda x)$$

é também uma solução (3.1), para todo $t > 0$. Assim, substituindo $u_\lambda(t,x)$ em (3.1), obtemos

$$\lambda^{k+2}u_{tt}(\lambda t,\lambda x) - \lambda^{k+2}\Delta u(\lambda t,\lambda x) = \lambda^{k(\rho+1)}|u|^\rho(\lambda t,\lambda x)u(\lambda t,\lambda x)$$

para todo $t \in \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}^n$. Portanto, $k+2 = k(\rho+1)$ e então $k = \frac{2}{\rho}$.

Definição 3.1 *Sejam $0 < T < \infty$ e $1 < q \leq \infty$. Definimos os seguintes espaços de Banach*

$$E_q^T \equiv BC((-T,T), L^{(q,\infty)})$$

$$H_1 \equiv \{f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n);\ \sup_{0<|t|<T} \|\partial_t W(t) f\|_{(q,\infty)} < \infty\}$$

$$H_2 \equiv \{f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n);\ \sup_{0<|t|<T} \|W(t) f\|_{(q,\infty)} < \infty\}$$

com as normas definidas, respectivamente, como

$$\|u\|_{E_q^T} = \sup_{0<|t|<T} \|u(t)\|_{(q,\infty)}$$

$$\|f\|_{H_1} = \sup_{0<|t|<T} \|\partial_t W(t) f\|_{(q,\infty)}$$

$$\|f\|_{H_2} = \sup_{0<|t|<T} \|W(t) f\|_{(q,\infty)}$$

Definição 3.2 *Uma solução branda global para o problema (3.1) em E_q^T é uma função u , satisfazendo, para $t \neq 0$,*

$$u(t) = \partial_t W(t)f + W(t)g + B(u)(t) \equiv \partial_t W(t)f + W(t)g + \int_0^t W(t-s)|u|^\rho u(s)\,ds. \tag{3.16}$$

Mostraremos os seguintes resultados para o problema de Cauchy não-linear (3.2).

Teorema 3.1 *(Soluções locais no tempo) Sejam $n = 2$, $0 < \rho < \infty$ e $\max\{2\rho, \rho+1\} < q$.*

- *Sejam f, g são distribuições tais que $f \in H_1$ e $g \in H_2$. Então, existem $\varepsilon = \|f\|_{H_1} + \|g\|_{H_2} > 0$ e $0 < T = T(\varepsilon) < \infty$, tal que, o problema de valor inicial (3.1) tem uma única solução branda $u(t,x) \in E_q^T$. A solução é única na bola fechada $\overline{B}_{E_q^T}(0, 2\varepsilon)$.*
- *Em particular, se $f = 0$ e $g \in L^{(q,\infty)}$, então as condições sobre f e g são satisfeitas.*

Observação 3.2 *Acreditamos que os resultados do Teorema 3.1 possam ser estendidos para condições iniciais pertencentes a outros espaços que contenham funções singulares. Isso fará parte de estudos futuros.*

Analisaremos também o comportamento das soluções quando $t \to 0$. Mais precisamente temos o seguinte resultado:

Teorema 3.2 *Sejam $u_1, u_2 \in E_q^T$ duas soluções obtidas no Teorema (3.1) e $h > 0$. Suponha f_1, g_1 e f_2, g_2 condições iniciais de u_1 e u_2, respectivamente. Se*

$$\lim_{t\to 0} |t|^{-h} \|W(t)(g_1 - g_2)\|_{(q,\infty)} = 0 \ \ e \ \ \lim_{t\to 0} |t|^{-h} \|\partial_t W(t)(f_1 - f_2)\|_{(q,\infty)} = 0,$$

então

$$\lim_{t\to 0} |t|^{-h} \|u_1(t) - u_2(t)\|_{(q,\infty)} = 0. \tag{3.17}$$

3.2 Demonstração dos Resultados de Boa-Colocação e Decaimento

Como no capítulo anterior, iniciaremos com um lema técnico sobre existência de soluções de uma equação abstrata em um espaço de Banach que possui uma estrutura relacionada a do sistema (3.1). A demonstração deste lema é conhecida, e para esta referimos [12] ao leitor . Incluiremos a demonstração para comodidade do leitor.

Lema 3.2 *Seja* $0 < \rho < \infty$ *e* X *um espaço de Banach com norma* $\|\cdot\|$. *Suponha que* $B : X \to X$ *seja uma aplicação satisfazendo*

$$\|B(x) - B(z)\| \leq K\|x - z\| \left(\|x\|^{\rho} + \|z\|^{\rho}\right) \tag{3.18}$$

e seja $R > 0$ *a única raiz positiva da equação* $2^{\rho+1}K(R)^{\rho} - 1 = 0$. *Dado* $0 < \varepsilon < R$ *e* $y \in X$, $y \neq 0$, *tal que* $\|y\| \leq \varepsilon$, *existe uma solução* $x \in X$ *para a equação* $x = y + B(x)$ *tal que* $\|x\| \leq 2\varepsilon$. *A solução* x *é única na bola* $B_{2\varepsilon} := \overline{B}(0, 2\varepsilon)$. *Além disso, a solução depende continuamente de* y *no seguinte sentido: Se* $\|\tilde{y}\| \leq \varepsilon$, $\tilde{x} = \tilde{y} + B(\tilde{x})$, *e* $\|\tilde{x}\| \leq 2\varepsilon$, *então*

$$\|x - \tilde{x}\| \leq \frac{1}{1 - 2^{\rho+1}K\varepsilon^{\rho}} \|y - \tilde{y}\|.$$

Demonstração. Defina $F : X \to X$ como $F(x) = y + B(x)$. Afirmamos que F é uma contração na $B_{2\varepsilon}$. De fato: Primeiramente note que $F(B_{2\varepsilon}) \subset B_{2\varepsilon}$, pois se $x \in B_{2\varepsilon}$, escolhendo $z = 0$ em (3.18), temos que

$$\begin{aligned}
\|F(x)\| &\leq \|y\| + \|B(x)\| \leq \|y\|K\|x\|^{\rho+1} \\
&\leq \varepsilon + K(2^{\rho+1}\varepsilon^{\rho+1}), \\
&\leq \varepsilon + \varepsilon(K(2^{\rho+1}\varepsilon^{\rho}) < 2\varepsilon
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Agora, sejam $x, z \in B_{2\varepsilon}$. Temos que

$$\begin{aligned}
\|F(x) - F(z)\| &\leq \|B(x) - B(z)\| \leq K\|x - z\| \left(\|x\|^{\rho} + \|z\|^{\rho}\right) \\
&\leq K(2^{\rho+1}\varepsilon^{\rho})\|x - z\| < \|x - z\|,
\end{aligned}$$

onde na última desigualdade usamos $2^{\rho+1}K\varepsilon^{\rho} - 1 < 0$, uma vez que $0 < \varepsilon < R$. Logo a aplicação F é uma aplicação na $B_{2\varepsilon}$. Pelo Teorema do ponto fixo de Banach, concluímos a existência e unicidade, onde a solução x é obtida através do método de aproximações sucessivas . Com efeito, defina a seqüência

$$\begin{aligned}
x_1 &= y \\
x_{n+1} &= F(x_n),\ n = 1, 2, 3...
\end{aligned}$$

A solução x é obtida como limite da seqüência $\{x_n\}$. Para mostrar a continuidade do operador em relação ao parâmetro y, seja $\tilde{x}$ e x como definidos no teorema. Então, temos

$$\|x-\tilde{x}\| \leq \|y-\tilde{y}\| + \|B(x)-B(\tilde{x})\| \leq \|y-\tilde{y}\| + 2^{\rho+1}K\varepsilon^{\rho}\|x-\tilde{x}\|,$$

Portanto temos (3.18). ∎

Mostraremos agora que o termo não-linear de (3.16), ou seja, $B(u) = \int_0^t W(t-s)|u|^{\rho}u(s)\,ds$, satisfaz (3.18) com $X = E_q^T$. Antes disso deixe-nos lembrar que quando $n=2$, $\rho_0 = \frac{2}{k}$, onde $k = \frac{2}{\rho}$. Ou seja $\rho = \rho_0$.

Lema 3.3 *Sejam $n=2$, $0<\rho<\infty$ e B definido como*

$$B(u) = \int_0^t W(t-s)(|u(s)|^{\rho}u(s))ds.$$

Considere q tal que $\max\{\rho+1, 2\rho\} < q \leq \infty$. Então existe uma constante K_q, de maneira que

$$\|B(u)-B(v)\|_{E_q^T} \leq K_q T^{2(1-\frac{\rho}{q})} \sup_{0<|t|<T}\left[\|u-v\|_{(q,\infty)}\left(\|u\|^{\rho}_{(q,\infty)} + \|v\|^{\rho}_{(q,\infty)}\right)\right] \tag{3.20}$$

para todo u, $v \in E_q^T$

Demonstração. Sem perda de generalidade, vamos assumir que $t>0$. Seja $r = \frac{q}{\rho+1}$. Uma vez que $q > \rho+1$, então $1 < r = \frac{q}{\rho+1} < q \leq \infty$. Como $q > 2\rho$, temos que

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{q} = \frac{\rho+1}{q} - \frac{1}{q} = \frac{\rho}{q} < \frac{1}{2}. \tag{3.21}$$

Portanto, podemos aplicar o Lema 3.1 com $q=q$,$p=r$ e $d=\infty$, obtendo

$$\begin{aligned}
&\|B(u)-B(v)\|_{(q,\infty)} \leq C\int_0^t (t-s)^{-2(\frac{1}{r}-\frac{1}{q})+1}\||u|^{\rho}u - |v|^{\rho}v\|_{(r,\infty)}ds \\
&\|B(u)-B(v)\|_{(q,\infty)} \leq C\int_0^t (t-s)^{-\frac{2\rho}{q}+1}\|u-v\|_{(q,\infty)}\left(\|u\|^{\rho}_{(q,\infty)} + \|v\|^{\rho}_{(q,\infty)}\right)ds \\
&\leq C\int_0^t (t-s)^{-\frac{2\rho}{q}+1}ds\left(\sup_{0<t<T}\|u-v\|_{(q,\infty)}\sup_{0<t<T}\left(\|u\|^{\rho}_{(q,\infty)} + \|v\|^{\rho}_{(q,\infty)}\right)\right) \\
&\leq K_q T^{-\frac{2\rho}{q}+2}\|u-v\|_{E_q^T}\left(\|u\|^{\rho}_{E_q} + \|v\|^{\rho}_{E_q}\right).
\end{aligned}$$

Portanto

$$\|B(u)-B(v)\|_{E_q^T} \leq K_q T^{2(1-\frac{\rho}{q})}\|u-v\|_{E_q}\left(\|u\|^{\rho}_{E_q} + \|v\|^{\rho}_{E_q}\right),$$

e então concluímos a prova. ∎

3.2.1 Demonstração do Teorema 3.1

Sejam $y = \partial_t W(t)f + W(t)g$ e $\varepsilon = \|f\|_{H_1} + \|g\|_{H_2}$. Então,

$$\begin{aligned} \|y\|_{E_q^T} &\leq \sup_{0<|t|<T} \|\partial_t W(t)f\|_{(q,\infty)} + \sup_{0<|t|<T} \|W(t)g\|_{(q,\infty)} \\ &\leq \|\partial_t W(t)f\|_{E_q^T} + \|W(t)g\|_{E_q^T} = \|f\|_{H_1} + \|g\|_{H_2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Assim, utilizando o Lema 3.3, encontramos a seguinte limitação

$$\|B(u) - B(v)\|_{E_q^T} \leq K_q T^\delta \sup_{0<|t|<T} \left[\|u-v\|_{(q,\infty)} \left(\|u\|^\rho_{(q,\infty)} + \|v\|^\rho_{(q,\infty)} \right) \right],$$

onde $\delta = 2(1 - \frac{\rho}{q}) > 0$. Observe que esta estimativa corresponde à propriedade (3.18) para $B(u) = \int_0^t W(t-s)(|u(s)|^\rho u(s))ds$ no espaço E_q^T. Considere R satisfazendo a equação $2^{\rho+1}K(R)^\rho - 1 = 0$, onde $K = K_q T^\delta$. Escolha $0 < T < \infty$ suficientemente pequeno, tal que $\varepsilon < \left(\frac{1}{2^{(\rho+1)} K_q T^\delta} \right)^{\frac{1}{\rho}}$. Observe que com essa escolha de T, $2^{\rho+1}K\varepsilon^\rho < 1$. Portanto, podemos aplicar o Lema 3.2 para obter uma solução branda global $u \in E_q^T$. Além disso esta solução é única na bola fechada $B_{2\varepsilon} := \overline{B}(0, 2\varepsilon) \subset E_q^T$.

Agora, deixe-nos tratar com a última afirmação. Observe que se $f = 0$, obviamente $\|f\|_{H_1} = 0 < \infty$. Por outro lado, tomando $q = q$ e $\varphi = g$ na desigualdade (3.12) do Lema 3.1, temos que

$$\|g\|_{H_2} = \sup_{0<|t|<T} \|W(t)g\|_{(q,\infty)} \leq \sup_{0<|t|<T} |t| \|K(1,x))\|_{L^1} \|g\|_{(q,\infty)} \leq DT\|g\|_{(q,\infty)} = DT\varepsilon < \infty.$$

Escolhendo $0 < T < \infty$, tal que, $2^{\rho+1}DK_q T^{\delta+1}(\varepsilon)^\rho < 1$, obtemos o desejado. ■

3.2.2 Demonstração do Teorema 3.2

Inicialmente considere $\delta = -\frac{2\rho}{q} + 2$, u_1 e u_2 soluções brandas com condições iniciais f_1, g_1 e f_2, g_2, respectivamente. Sem perda de generalidade, deixe-nos assumir que $t > 0$. Para provar o Teorema 3.2, primeiramente vamos estimar a norma $\|\cdot\|_{(q,\infty)}$ da diferença entre u_1 e u_2. Usando a equação integral (3.7) para u_1 e u_2 podemos estimar a diferença da seguinte forma

$$\begin{aligned} \|u_1(t) - u_2(t)\|_{(q,\infty)} &\leq \|W(t)(g_1 - g_2)\|_{(q,\infty)} + \|\partial_t W(t)(f_1 - f_2)\|_{(q,\infty)} \\ &\quad + \left\| \int_0^t W(t-s)(u_1|u_1|^\rho - u_2|u_2|^\rho) ds \right\|_{(q,\infty)} \\ &\leq I_0 + I_1. \end{aligned} \tag{3.22}$$

Depois de passar a norma $\|\cdot\|_{(q,\infty)}$ para dentro da integral em ds, usamos as desigualdades de Hölder e Young (Proposições 1.13 e 1.14) para estimar I_1 como

$$\begin{aligned} I_1 &\leq C\int_0^t (t-s)^{\delta-1}s^h(\|u_1(s)\|^{\rho}_{(q,\infty)}+\|u_2(s)\|^{\rho}_{(q,\infty)})\; s^{-h}\|u_1(s)-u_2(s)\|_{(q,\infty)}ds \\ &\leq C2^{\rho+1}\varepsilon^{\rho}t^{\delta+h}\int_0^1 (1-s)^{\delta-1}s^h(ts)^{-h}\|u_1(ts)-u_2(ts)\|_{(q,\infty)}ds. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Portanto, de (3.22) e (3.23)

$$\begin{aligned} t^{-h}\|u_1(t)-u_2(t)\|_{(q,\infty)} \leq t^{-h}\|W(t)(g_1-g_2)\|_{(q,\infty)}+t^{-h}\|\partial_t W(t)(f_1-f_2)\|_{(q,\infty)}+ \\ +C2^{\rho+1}\varepsilon^{\rho}t^{\delta}\int_0^1 (1-s)^{\delta-1}s^h(ts)^{-h}\|u_1(ts)-u_2(ts)\|_{(q,\infty)}ds. \end{aligned}$$

Considere $A := \limsup_{t\to 0} t^{-h}\|u_1(t)-u_2(t)\|_{(q,\infty)}$. Assim, calculando $\limsup_{t\to 0}$ na última desigualdade, obtemos

$$A \leq C2^{\rho+1}\varepsilon^{\rho}A\int_0^1 (1-s)^{\delta-1}s^h ds\, \lim_{t\to 0} t^{\delta} = 0,$$

uma vez que a última integral é finita, pois $h>0$ e $\delta-1>-1$. Como A é não-negativo, concluímos que

$$\lim_{t\to 0} t^{-h}\|u_1(t)-u_2(t)\|_{(q,\infty)} = 0.$$

■

Referências Bibliográficas

[1] Barraza, O., Self-similar solutions in weak L^p-spaces of the Navier-Stokes equations, Revista Matemática Iberoamericana, 12(2), 1996.

[2] Barraza, O., Regularity and stability for the solutions of the navier-stokes equation in lorentz spaces, Nonlinear Analysis, (35): 747–764, 1997.

[3] Benilan, P., Brezis, H., Crandall, M., A semilinear Equation in $L^1(R^n)$, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, Serie V 2 (1975) 523-555.

[4] Berg, J., Lofstrom, Interpolation Spaces. Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1976.

[5] Berg, J., Lofstrom, J., *Interpolation Spaces. An introduction*, Springer, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, No. 223, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1976.

[6] Bokes, P., A uniqueness result for a semilinear parabolic system. J. Math. Anal. Appl. 331 (2007), no. 1, 567–584.

[7] Brenner, P., On $L_p - L_{p'}$ estimates for the wave-equation. Math. Z. 145 (1975), no. 3, 251–254.

[8] Brezis H., Cazenave T., A nonlnear heat equation with singular initial data. J. d' Anal. Math. 68 (1996) 277–304.

[9] Cannone, M., Karch,G., About the regularized Navier-Stokes equations, J. Math Fluid Mechanics 7:1–28, 2005.

[10] Cannone, M., Harmonic analysis tools for solving the incompressible Navier-Stokes equations. Handbook of mathematical fluid dynamics. Vol. III, 161–244, North-Holland, Amsterdam, 2004.

[11] Carrillo, J. A.; Ferreira, Lucas C. F.,The asymptotic behaviour of subcritical dissipative quasi-geostrophic equations. Nonlinearity 21 (2008), no. 5, 1001–1018.

[12] Carrillo, J. A.; Ferreira, L. C. F., Self-similar solutions and large time asymptotics for the dissipative quasi-geostrophic equation. Monatsh. Math. 151, no. 2, 111–142, 2007.

[13] Cazenave, T., Vega, L., Vilela, M. C., *A note on the nonlinear Schrödinger equation in weak-L^p spaces*, Commun. Contemp. Math. **3** (2001), no. 1, 153–162.

[14] Dankwerts, P. V., Gas Liquid Reactions, McGraW-Hill, New York, 1970.

[15] Escobedo, M.; Herrero, M. A., Boundedness and blow up for a semilinear reaction-diffusion system. J. Differential Equations 89 (1991), no. 1, 176–202.

[16] Escobedo, M.; Herrero, M. A., A uniqueness result for a semilinear reaction-diffusion system. Proc. Amer. Math. Soc. 112 (1991), no. 1, 175–185.

[17] Escobedo, M.; Levine, H. A., Critical blowup and global existence numbers for a weakly coupled system of reaction-diffusion equations. Arch. Rational Mech. Anal. 129 (1995), no. 1, 47–100.

[18] Evans, L.C., Partial Differential Equations, Graduate Studies in Mathematics, 19, American Mathematical Society, Providence RI, 1998.

[19] Ferreira, L. C. F.; Villamizar-Roa, E. J., Self-similar solutions, uniqueness and long time asymptotic behavior for the semilinear heat equation. Differential and Integral Equations, v. 19, p. 1349-1370, 2006.

[20] Ferreira, L. C. F., Soluções auto-similares para a equação quase-geostrófica e comportamento assitótico, Tese de Doutorado, Departamento de Matemática-Unicamp, Março 2005.

[21] Folland, G., Introduction to Partial Diferential Equations, Prentice -Hall India. 2003

[22] Folland, G., Real Analysis, John Wiley & Sons, 1984.

[23] Giga Y., Solutions for semilinear parabolic equations in L^p and regularity of weak solutions of the Navier-Stokes system. J. Differential Equations. 62 (2) (1986),186–212.

[24] Hidano, K., Scattering and self-similar solutions for the nonlinear wave equation. Differential Integral Equations 15 (2002), no. 4, 405–462.

[25] Hunt, R., On $L^{(p,q)}$ spaces, L'Enseignement Mathématique, (2) **12** 1966, 249–276 .

[26] Kato,T.,Strong solutions of the Navier-Stokes equation in Morrey spaces. Bol. Soc. Brasil. Mat. (N.S.) 22 (1992), no. 2, 127–155.

[27] Kato,T.,The Navier-Stokes equation for an incompressible fluid in $\mathbb{R}^2$ with a measure as the initial vorticity. Differential Integral Equations 7 (1994), no. 3-4, 949–966.

[28] Kato,T., Strong L^p solutions of the Navier-Stokes equations in the $\mathbb{R}^n$ with applications, Math. Z. 187 (1984), 471–480.

[29] Kato, T., Fujita, H., On the non-satationary navier-stokes system, Math Univ, 32: 243–260, 1962.

[30] Kato, J.; Ozawa, T., Weighted Strichartz estimates and existence of self-similar solutions for semilinear wave equations. Indiana Univ. Math. J. 52 (2003), no. 6, 1615–1630.

[31] Lemarié-Rieusset,P. , "Recent Developments in the Navier-Stokes Problem."Chapman & Hall/ CRC Press, Boca Raton, (2002).

[32] Lorentz, G. G., Some new functional space, Ann. of Math, 51:37–55, 1950.

[33] Meyer, Y., "Wavelets, paraproducts and Navier-Stokes equations,"Current developments in Mathematics (1996), International Press, 105–212 Cambridge, MA 02238-2872 (1999).

[34] O'Neil, R., Convolution operators and $L^{(p,q)}$ spaces, Duke Math. J. 30 (1963) 129-142.

[35] Pecher, H., Self-similar and asymptotically self-similar solutions of nonlinear wave equations. Math. Ann. 316 (2000), no. 2, 259–281.

[36] Pecher, H., Sharp existence results for self-similar solutions of semilinear wave equations. NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl. 7 (2000), no. 3, 323–341.

[37] Pecher, H., Nonlinear small data scattering for the wave and Klein\mhy Gordon equation. Math. Z. 185 (1984), no. 2, 261–270.

[38] Planchon, F., Self-similar solutions and semi-linear wave equations in Besov spaces. J. Math. Pures Appl. (9) 79 (2000), no. 8, 809–820.

[39] Planchon, F., On self-similar solutions, well-posedness and the conformal wave equation. Commun. Contemp. Math. 4 (2002), no. 2, 211–222.

[40] Quittner, P.; Souplet, P., Admissible L^p- norms for local existence and for continuation in semilinear parabolic systems are not the same. Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 131 (2001), no. 6, 1435–1456.

[41] Quittner, P., A priori bounds for global solutions of a semilinear parabolic problem. Acta Math. Univ. Comenian. (N.S.) 68 (1999), no. 2, 195–203

[42] Ribaud, F.; Youssfi, A., Solutions globales et solutions auto-similaires de l'équation des ondes non linéaire. (French. English, French summary).C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 329 (1999), no. 1, 33–36.

[43] Ribaud, F.; Youssfi, A., Global solutions and self-similar solutions of semilinear wave equation. Math. Z. 239 (2002), no. 2, 231–262.

[44] Sharpley, R., Bennett, C., Interpolation of Operators, Academic Press, New York, Mathematics vol. 129, 1988.

[45] Snoussi, S.; Tayachi, S., Global existence, asymptotic behavior and self-similar solutions for a class of semilinear parabolic systems. Nonlinear Anal. 48 (2002), no. 1, Ser. A: Theory Methods, 13–35.

[46] Stein, E., Singular integral and Differentiabillity properties of functions, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1970.

[47] Stein, E. M., Weiss, G., Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1971.

[48] Weissler, F. B., Local existence and nonexistence for semilinear parabolic equations in L^p. Indiana Univ. Math. J. 29 (1) (1980), 79–102.

[49] Weissler,F. B. , Existence and nonexistence of global solutions for a semilinear heat equation. Israel J. Math. 38(1-2) (1981), 29–40.

[50] Weissler,F. B., Asymptotic analysis of an ordinary differential equation and nonuniqueness for a semilinear partial differential equation. Arch. Rational Mech. Anal. 91(3) (1985), 231–245.

[51] Yamazaki, M., The Navier-Stokes equations in the weak-L^n spaces with time-dependent external force, Math. Ann. 317 (2000),635–675.

[52] Walter, R., Real And complex Analysis, Mathematics Series, 3^0 edition.

[53] Ziemer, W., Weakly Differentiable Functions: Sobolev spaces and Functions of bounded variation,120, Springer-Verlag, N.Y., 1980.