PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PUC/SP

ALEXANDRE SOLIS

Argumentação e Prova no estudo de Progressões Aritméticas com o auxílio do Hot Potatoes

MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

São Paulo
2008

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PUC/SP

ALEXANDRE SOLIS

Argumentação e Prova no estudo de Progressões Aritméticas com o auxílio do Hot Potatoes

Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de ***MESTRE PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA****, sob a orientação da* ***Profa. Dra Celina Aparecida Pereira Almeida Abar.***

São Paulo
2008

Banca Examinadora

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta Dissertação por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

Assinatura: ____ **Local e Data:** _______________

AGRADECIMENTOS

À Deus, por iluminar-me durante esta caminhada.

À professora Dra Celina Aparecida Pereira Almeida Abar, pela orientação, dedicação, e incentivo constantes.

Às professoras doutoras da Banca Examinadora, Dra. Sônia Pitta Coelho e Dra Odete Sidericoudes, pelos esclarecimentos e sugestões, que contribuíram para o aperfeiçoamento da pesquisa.

Aos professores do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, pela dedicação e ensinamentos.

Aos alunos da EE Prof. Miguel Sansigolo, pela disposição com que participaram da Pesquisa, e à Direção e professores da Escola que me deram grande apoio.

Aos Assistentes Técnicos Pedagógicos da Oficina Pedagógica da Diretoria de Ensino Região Leste 4, pelo apoio e incentivo.

Aos colegas da turma do Mestrado Profissinonal em Ensino de Matemática da PUC/SP. Meu respeito e agradecimento a todos.

À Secretaria de Educação do Estado de São Paulo, pelo financiamento dos meus estudos.

RESUMO

Este trabalho de pesquisa versa sobre o tema Argumentação e Prova no estudo de Progressões Aritméticas. Tem por objetivo a investigação do desenvolvimento cognitivo dos alunos na construção de conceitos e conhecimentos relacionados à Seqüência Numérica e Progressão Aritmética (PA), e no desenvolvimento de habilidades de argumentação e prova. Tais objetivos resultaram da experiência nos encontros com o grupo de pesquisa do projeto Argumentação e Prova na Matemática Escolar (AProvaME) na PUC/SP. Como metodologia de pesquisa foi utilizado alguns princípios da Engenharia Didática e para o desenvolvimento deste trabalho foi elaborada uma seqüência de dezenove atividades, aplicada a um grupo de oito alunos do primeiro ano do Ensino Médio de uma Escola Pública do Estado de São Paulo. Na elaboração de nove atividades da seqüência, utilizou-se um *software* de autoria, conhecido por Hot Potatoes. A ferramenta JCloze desse *software* mostrou-se adequada para o professor, pois permitiu a fácil construção de atividades. Com relação ao aluno houve a possibilidade de verificação das respostas dadas, permitindo uma maior autonomia na resolução das atividades. As análises da experimentação mostraram que a seqüência de atividades propiciou ao aluno a construção de conceitos relacionados à Seqüência Numérica e Progressão Aritmética, como também habilidades em argumentação e prova matemática, mais especificamente, no desenvolvimento de raciocínios dedutivos que o levou a determinar a generalização de seqüências numéricas e a construção da Fórmula do Termo Geral da PA. Esta pesquisa teve um impacto significativo na minha formação e no meu entendimento sobre a importância da argumentação e prova na prática docente.

Palavras–chave: Argumentação e Prova, Seqüências Numéricas, Progressão Aritmética e *Software* Hot Potatoes.

ABSTRACT

This research work deals with the theme Argumentation and Proof in the study of Arithmetic Progressions. Its purpose is to investigate the cognitive development of students in building concepts and knowledge related to the Numerical Sequence and Arithmetic Progression (AP), and in developing argumentation and proof-related competencies. Such purposes resulted from the experience in meetings with the research group of the project "Argumentation and Proof in School Mathematics (*AProvaME*)" at *Pontifícia Universidade Católica de São Paulo* (*PUC/SP*). As research methodology, there were used some principles of Didactical Engineering, and, for developing this work, a sequence of nineteen activities was prepared, which was applied to a group of eight students of the first year of the Brazilian High School Program from a Public School of the State of São Paulo. An authoring software known as Hot Potatoes was used for preparing the nine activities of the sequence. The JCloze tool of this software showed to be proper for the teacher, because it allowed the easy building of activities. As regards the students, it was possible to check the answers given, allowing more autonomy for solving the activities. The trial analyses showed that the sequence of activities permitted students to build concepts related to the Numerical Sequence and Arithmetic Progression, as well as competencies in mathematical argumentation and proof, more specifically, in the development of deductive reasoning that led them to determine the generalization of numerical sequences and to deduct the General Term Formula for AP. This research had a significant impact on my education and my understanding about the importance of argumentation and proof in the teaching practice.

Keywords: Argumentation and Proof; Numerical Sequences; Arithmetic Progression; Hot Potatoes Software.

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE QUADROS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Lecionando Matemática, na rede pública estadual de ensino de São Paulo há 14 anos, vivencio o que diversos estudos apontam sobre as dificuldades dos alunos em desenvolver competências matemáticas, principalmente no sentido de explicarem e justificarem suas resoluções.

Sempre atento a este problema, procurei buscar recursos de ensino e aprendizagem que suscitem nos alunos a elaboração de um raciocínio, a fim de lhes proporcionar a construção ativa do conhecimento.

Entretanto, lacunas durante a minha formação acadêmica, limitaram minha ação, principalmente nessa tarefa de auxiliar o aluno no desenvolvimento de competências na construção de um raciocínio que lhe permita a elaboração relativa à argumentação e prova, essencial à promoção do raciocínio-lógico matemático.

A oportunidade de ingresso no mestrado profissional em Educação Matemática na PUC-SP veio ao encontro à superação dessa dificuldade, quando por meio de um convite, no segundo semestre de 2005, para participar do Grupo de Pesquisa de Tecnologia e Meio de Expressão em Matemática (TecMEM), passei a freqüentar encontros do grupo de pesquisa relacionado à “Argumentação e Prova na Matemática Escolar” denominado “AProvaME” (ANEXO A).

Em linhas gerais, o AProvaME - Argumentação e Prova na Matemática Escolar - é um projeto do grupo de pesquisa de Tecnologia e Meio de Expressão em Matemática (TecMEM) do Programa de Estudos de Pós Graduação em Educação Matemática. Este projeto foi desenvolvido por um grupo de seis professores/pesquisadores da PUC – SP, juntamente com um grupo de 28 estudantes do curso de Mestrado Profissional no Ensino de Matemática e uma doutoranda .

Minha participação neste grupo forneceu elementos para o amadurecimento das idéias que culminaram na elaboração deste trabalho e no desenvolvimento das questões que o permeiam:

Em que medida a seqüência de atividades propostas permite ao aluno construir os conceitos e conhecimentos relacionados à Seqüência Numérica e Progressão Aritmética, e no desenvolvimento das habilidades de argumentação e prova?

Em que medida a utilização do *software* de autoria Hot Potatoes pode contribuir para o desenvolvimento das atividades propostas?

Para responder a estas questões este trabalho foi estruturado em quatro capítulos.

No capítulo 1, apresentamos um relato sobre o projeto AProvaME, descrevemos como foi o seu desenvolvimento e a minha participação neste projeto. Também tratamos da metodologia de pesquisa utilizada neste trabalho.

No capítulo 2, fazemos algumas considerações teóricas sobre Argumentação e Prova e sobre os seguintes conteúdos matemáticos: padrões, seqüências numéricas e Progressão Aritmética. Verificamos, também, quais são as orientações dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) em relação à Argumentação e Prova, no Ensino Fundamental (EF) e Ensino Médio (EM). Também faremos considerações em relação à utilização das tecnologias no ensino da matemática, sobre ferramentas de autoria e o software Hot Potatoes.

No capítulo 3, focalizamos como as atividades foram organizadas, o perfil do público alvo participante da resolução das atividades e as próprias atividades com suas respectivas análises *a priori* e *a posteriori*.

No capítulo 4, estão presentes as conclusões finais, e também buscamos responder às questões de pesquisa.

CAPÍTULO 1

1.1 O PROJETO AProvaME

O projeto AProvaME- Argumentação e Prova na Matemática Escolar- integrava os estudos desenvolvidos no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da PUC/SP. O grupo de pesquisa do projeto era composto por professores/pesquisadores e alunos do curso do Mestrado Profissional no Ensino de Matemática da PUC/SP.

Os objetivos do projeto AProvaME eram:

- Levantar um mapa das concepções sobre argumentação e prova de alunos adolescentes em escolas do estado da São Paulo.
- Formar grupos colaborativos compostos por pesquisadores e professores para a elaboração de situações de aprendizagem, visando envolver alunos em processos de construção de conjecturas e provas em contextos integrando ambientes informatizados.
- Criar um espaço virtual de compartilhamento entre os membros da equipe do projeto e analisar seu papel no desenvolvimento das situações de aprendizagem, assim como na evolução de conhecimentos pedagógicos sobre prova em Matemática.
- Avaliar situações de aprendizagem, em termos da compreensão dos alunos sobre a natureza e funções de prova em Matemática.
- Investigar a implementação destas atividades por diferentes professores e assim identificar em que medida sua participação nos grupos colaborativos fornece uma apropriação desta abordagem para o ensino e aprendizagem de prova.
- Formular recomendações relacionadas ao papel da argumentação e de prova no currículo de Matemática escolar.
- Contribuir para o debate internacional sobre o ensino e aprendizagem de prova em Matemática.

1.2 O DESENVOLVIMENTO DO PROJETO

De acordo com a proposta do projeto, na primeira fase, foi feito um levantamento sobre as concepções de prova de alunos na faixa etária de 14 a 16 anos, em escolas públicas e privadas do Estado de São Paulo. Os resultados obtidos foram a base para o desenvolvimento da fase que compreende a construção e avaliação de situações de aprendizagem.

Na fase 1 do projeto, um questionário foi elaborado e aplicado para 1998 alunos de escolas públicas e particulares do Estado de São Paulo, visando investigar as concepções desses alunos em relação à prova e à argumentação. Cada professor participante indicou de 6 a 10 turmas para sua aplicação, sendo que estas foram escolhidas ao acaso. Para viabilizar o trabalho, um espaço virtual foi criado no ambiente TelEduc[1], instituída a ocorrência de reuniões quinzenais, que contavam com a presença dos pesquisadores e alunos do Mestrado Profissional.

O questionário (ANEXO B) foi criado com base em um outro questionário elaborado por Healy e Hoyles (1998) na Inglaterra utilizado em diversos países. O objetivo desse questionário foi o de investigar em que medida o aluno considerava evidências empíricas como provas; se ele diferenciava evidências empíricas de argumentos matemáticos válidos; se ele compreendia a validade de uma prova e se ele era capaz de criar argumentos válidos. Também se pretendia pesquisar a forma da apresentação da prova: língua natural, língua formal e figuras. O questionário foi dividido no contexto da Álgebra e Geometria, sendo estruturado em duas etapas: a 1ª etapa para avaliação de vários argumentos apresentados como prova de uma afirmação e a 2ª etapa para a elaboração de provas.

Os dados obtidos foram organizados e classificados pelas equipes de mestrandos e orientadores, considerando os alunos, as turmas, e outras especificidades. Foram analisados levando em conta a correlação de respostas entre sujeitos que possuíam as mesmas experiências. Com os resultados

---

[1] TelEduc:Software distribuído pela GNU-General Public License, que é um ambiente para realização de cursos a distância através da internet. Utilizado como espaço virtual para compartilhamento de informações e comunicação entre os membros do projeto AProvaME. Desenvolvido pelo Nied (Núcleo de InformáticaAplicada à Educação), e pelo Instituto de Computação da Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP).

dessa análise seria possível identificar o grau de compreensão de prova dos alunos.

A fase 2 foi composta por dois eixos de investigação: a aprendizagem e o ensino.

No eixo da aprendizagem, a principal meta foi a criação e a avaliação de situações de aprendizagem, focando as dificuldades com prova identificadas na fase 1. No eixo do ensino, o foco foi o professor e o seu trabalho na elaboração e aplicação em situações de aprendizagem.

A metodologia adotada neste projeto se caracterizou como "*design-based research*" (experimento de ensino) visando o desenvolvimento da compreensão de sistemas complexos que envolvem diversos elementos de naturezas distintas. Dentre esses elementos, podemos destacar as atividades e problemas propostos pelos professores para os alunos, as ferramentas fornecidas para resolução dos problemas e os meios práticos disponíveis para o professor relacionar esses elementos em sala de aula.

A estratégia de ação compreendeu um trabalho colaborativo entre professores/ pesquisadores e mestrandos. As situações de aprendizagens foram desenvolvidas por grupos compostos por alunos do mestrado profissional e por professores/pesquisadores. Cada grupo deveria produzir situações de aprendizagem, envolvendo uso de *softwares* ou de outra tecnologia. As reuniões dos grupos ocorreram presencialmente a cada 15 dias, além de um espaço virtual, como já mencionamos no TelEduc, disponível para os grupos, facilitando a comunicação entre os membros e a ampliação das reflexões .

Esta fase de elaboração de atividades pode ser vista em três etapas.

Na 1ª etapa intragrupos, as situações de aprendizagens foram criadas, aplicadas para alguns alunos para teste, discutidas e reformuladas em cada grupo. As discussões e reformulações tinham como base a análise da interação alunos/computadores, considerando quais aspectos da prova eram favorecidos. Os dados para análise foram obtidos por: vídeo-gravação das reuniões dos grupos e produção escritas e computacionais dos alunos. Cada professor construía seu próprio registro do processo. O banco de dados obtido propiciou conhecimentos pedagógicos sobre prova em Matemática e por meio da análise destes dados a meta era identificar as transformações ocorridas nesses conhecimentos.

Na 2ª etapa intergrupos, as produções dos grupos foram disponibilizadas no ambiente virtual TelEduc, para que cada professor pudesse escolher duas atividades desenvolvidas (Geometria ou Álgebra) por outro grupo e aplicá-las para seus alunos.

A aplicação da atividade foi acompanhada pelos pesquisadores e gravada em um vídeo para análise. Os registros escritos e computacionais dos alunos foram coletados para análise e os professores escreveram, após a aplicação, um relatório descrevendo a aplicação, incluindo uma reflexão sobre os resultados.

Na 3ª etapa, foi aplicado o questionário da Fase1 para alunos da Fase 2. As respostas foram organizadas e analisadas para posteriormente serem comparadas ao obtido na Fase 1. Os grupos se dedicaram à avaliação das situações de aprendizagem criadas, procurando identificar se as principais dificuldades dos alunos com provas na Fase1 foram superadas na Fase 2 e quais aspectos de prova necessitariam uma atenção maior para o aperfeiçoamento.

1.3 EXPERIÊNCIA NO PROJETO

Na primeira fase, os participantes foram divididos em três grupos. Cada grupo era composto por alunos do Mestrado Profissional e por professores do grupo de pesquisa TecMEM. Quinzenalmente, ocorriam as reuniões desses grupos. Inicialmente resolvemos e discutimos as atividades de um questionário a ser aplicado para alunos de 8ª série do Ensino Fundamental e 1ª série do Ensino Médio. O objetivo do questionário era investigar os tipos de argumentação e prova que os alunos são capazes de produzir. O questionário era composto de duas partes, a primeira com questões de álgebra e a segunda com questões envolvendo geometria.Também nesta fase, discutimos a forma de aplicação e foi decidido que o professor, durante a aplicação, deveria intervir o mínimo possível e, ao mesmo tempo, incentivar o aluno a escrever e justificar o seu raciocínio. Efetuamos uma aplicação com alguns alunos - teste piloto - para termos noção real de como o aluno iria reagir às questões, o tempo necessário para respondê-las e as respostas produzidas. Com base nessas informações, modificações foram efetuadas no questionário, e foi estipulada a duração para sua aplicação.

Discutimos, também, a forma como iríamos classificar as respostas obtidas. O objetivo era investigar a capacidade de argumentação e prova do aluno. Para atingir este objetivo, optamos por escolher uma avaliação qualitativa das respostas. Para realizar esta avaliação qualitativa, foi criada a seguinte codificação para classificação das respostas :

Classificação	**Resposta**
– 2	Repostas em branco
– 1	Respostas “não sei” ou “não entendi”
0	Quando as respostas estiverem totalmente erradas, respostas que não apresentam justificativas ou exemplos, ou respostas que simplesmente repetem o enunciado caracterizando um ciclo vicioso.
1	Havendo alguma informação pertinente, mas sem deduções ou inferências – por exemplo, respostas que são completamente empíricas.
2	Quando houver alguma dedução/inferência, explicitação de propriedades pertinentes ou elementos que evidenciam uma estrutura matemática, sem, contudo trazer todos os passos necessários para uma prova.
2a	Respostas com alguma dedução ou inferência, com algumas propriedades pertinentes ou elementos que evidenciam uma estrutura matemática, mas faltando muitos passos para chegar a uma prova formal.
2b	Respostas com alguma dedução ou inferência, algumas propriedades pertinentes ou elementos que evidenciam uma estrutura matemática, mas faltando poucos passos para chegar a uma prova formal
3	Respostas corretas e totalmente justificadas.
3p	Correta com apresentação de propriedades.
3c	Correta com apresentação de cálculos.

Quadro1- Codificação para Classificação das respostas do Questionário

Após a aplicação, tabulamos as respostas dadas pelos alunos, na planilha Excel, seguindo a codificação já descrita. Lançamos os nomes dos alunos e, para cada resposta dada, atribuímos um dos códigos .

No primeiro semestre de 2006, iniciou-se a segunda fase do projeto AProvaME. Foram formadas 5 equipes compostas por 4 a 6 mestrandos e dois professores/ pesquisadores, com o objetivo de elaborar seqüências didáticas para o aluno adquirir novos conceitos e novos conhecimentos. Cada grupo ficou responsável por um tema de Álgebra e de Geometria. Os temas escolhidos para o Ensino Fundamental foram: Múltiplos e divisores; Teorema Fundamental da Aritmética; Congruência e suas aplicações nas aplicações nas propriedades dos quadriláteros; Teorema de Pitágoras; Teorema das Retas Paralelas cortadas por uma transversal e o Teorema da soma das medidas dos ângulos de um triângulo. Os temas trabalhados para o Ensino Médio foram: Conjuntos Numéricos; Progressão Aritmética e Progressão Geométrica; Funções do 1º e 2º Graus; Geometria Espacial envolvendo conceitos de Paralelismo e Perpendicularismo; Geometria analítica envolvendo conceitos de Paralelismo e Perpendicularismo. O quadro abaixo resume a divisão dos temas por equipe:

Equipe 1	Equipe 2	Equipe 3	Equipe 4	Equipe 5
Funções	PA e PG	Conjuntos numéricos	Múltiplos e divisores (incluindo mdc e mmc)	Teorema fundamental da aritmética
Teorema das retas paralelas cortadas por uma transversal e teorema da soma das medidas dos ângulos de um triângulo.	Geometria Analítica (paralelismo e perpendicularismo)	Geometria espacial (paralelismo e perpendicularismo)	Congruência e aplicações nas propriedades dos quadriláteros	Teorema de Pitágoras)

Quadro 2 – Divisão dos grupos nos temas do projeto AProvaME

Participamos da Equipe 2 e discutimos sobre a elaboração de uma seqüência didática envolvendo os conteúdos de Progressão Aritmética (PA), Progressão Geométrica (PG) e de Geometria analítica (paralelismo e perpendicularismo). Em linhas gerais, a proposta consistia em desenvolver atividades para trabalhar os respectivos conteúdos e levar o aluno à construção de argumentação e prova, utilizando recursos de tecnologia.

O grupo do qual participei era formado por 6 alunos e duas professoras/pesquisadoras. As atividades desenvolvidas foram discutidas e resolvidas pelo grupo. Em seguida, foram feitas modificações no sentido de aperfeiçoá-las e torná-las mais viáveis. Alguns questionamentos emergiam, tais como se os alunos seriam capazes de elaborar as passagens algébricas necessárias para a prova formal, ou seja, se as questões estavam adequadas, levando em conta os conhecimentos matemáticos dos alunos.

Desse modo, notamos a necessidade de trabalhar os conceitos dos conteúdos e formas de argumentação com os alunos, para, posteriormente, ser possível tratar de questões de prova mais formal. Concluímos que, apenas desenvolver uma fase empírica, era insuficiente para que o aluno logo em seguida, demonstrasse formalmente. Torna-se necessário, no desenvolvimento do processo de aquisição de um novo conceito ou conhecimento matemático, o aluno se confrontar com questões que exijam uma argumentação com propriedades ou raciocínios matemáticos válidos.

Nesta fase, já tínhamos definido Progressão Aritmética (PA) como conteúdo matemático a ser trabalhado em nossa pesquisa. Deste modo, desenvolvemos uma seqüência de atividades envolvendo Padrões, Seqüências e Progressão Aritmética para alunos do 1º ano do Ensino Médio com o objetivo de levar o aluno a adquirir os conceitos sobre o tema e desenvolver habilidades de argumentação e prova.

1.4 METODOLOGIA DA PESQUISA

Do amadurecimento das idéias e reflexões desenvolvidas no decorrer da participação no projeto, resultou a elaboração das questões presentes nesse trabalho de pesquisa.

Em que medida a seqüência de atividades propostas permite ao aluno construir os conceitos e conhecimentos relacionados à Seqüência Numérica e Progressão Aritmética, e no desenvolvimento das habilidades de argumentação e prova?

Em que medida a utilização do *software* de autoria Hot Potatoes pode contribuir no desenvolvimento das atividades propostas?

Neste trabalho, utilizaremos noções de uma metodologia conhecida como Engenharia Didática. A adoção desta metodologia é pertinente na condução desta pesquisa, pois entendemos que ela contempla tanto a dimensão teórica como experimental da sala de aula. Segundo Pais (2002):

> Uma das vantagens dessa forma de conduzir a pesquisa didática decorre dessa sua dupla ancoragem, interligando o plano teórico da racionalidade ao território experimental da prática educativa. Entendida dessa maneira, a engenharia didática possibilita uma sistematização metodológica para a realização prática da pesquisa, levando em consideração as relações de dependência entre a teoria e a prática.

O termo *engenharia didática* é empregado em pesquisas em educação matemática desde a década de 1980. O termo é uma analogia ao trabalho do engenheiro no que diz respeito à concepção, planejamento e execução de um projeto. Segundo Artigue (1988, apud Machado, 1999):

> ...este termo foi “cunhado” para o trabalho didático que é aquele comparável ao trabalho do engenheiro que, para realizar um projeto preciso, se apóia sobre conhecimentos científicos de seu domínio, aceita submeter-se a um controle de tipo científico mas, ao mesmo tempo, se vê obrigado a trabalhar sobre objetos bem mais complexos que os objetos depurados da ciência e portanto a enfrentar praticamente, com todos os meios que dispõe, problemas que a ciência não quer ou não pode levar em conta.

Esta metodologia de pesquisa é caracterizada por Artigue (1988,apud Almouloud, 2007) pela utilização de um esquema experimental baseado em atividades didáticas em sala de aula, levando em conta a concepção, a realização, a observação e a análise desta seqüência de ensino, pelo registro e modos de validação: a comparação entre análise a *priori* e análise a *posteriori.*

A Engenharia Didática se faz pela execução de quatro fases: análises preliminares; concepção e análise a *priori*; experimentação e a análise a *posteriori* e a validação.

1.4.1 ANÁLISES PRÉVIAS OU PRELIMINARES

Nesta primeira fase, após o levantamento e fundamentação dentro de um quadro teórico, submetemos o objeto de estudo a uma análise preliminar. Para tanto, partimos do pressuposto segundo o qual as ações do pesquisador devem, entre outras, comportar inferências, levantamentos de constatações empíricas, concepção dos sujeitos envolvidos e compreensão da realidade sobre a qual a experiência será realizada.

Em nosso trabalho, esta fase teve como base inicial os estudos e experiências do Projeto AProvaMe. Dessa forma, levando em conta os diversos temas investigados no âmbito do projeto, adotamos como objeto de nossa pesquisa: o estudo de Progressão Aritmética.

Iniciamos estudos em livros didáticos, paradidáticos e dissertações sobre o objeto da pesquisa - compreendendo padrões, seqüências numéricas e progressão aritmética -, bem como realizamos um aprofundamento teórico envolvendo Argumentação e Prova. Desses estudos resultaram as questões de pesquisa.

É importante destacar que este primeiro nível de organização da pesquisa, assim como os demais, vão sendo retomados e reavaliados na medida em que o trabalho vai se evoluindo. Em relação a esta fase Almouloud (2007) afirma:

> Um dos objetivos das análises prévias é identificar os problemas de ensino e aprendizagem do objeto de estudo e delinear de modo fundamentado a(s) questão(ões), as hipóteses, os fundamentos teóricos e metodológicos da pesquisa

1.4.2 CONCEPÇÃO E ANÁLISE A PRIORI

Segundo Artigue (1988, apud Machado, 1999), nesta fase, o pesquisador deve definir um certo número de variáveis - escolhas efetuadas - pertinentes ao sistema sobre os quais o ensino pode atuar e que supostamente interferem na constituição do fenômeno, as quais são chamadas de variáveis de comando.

Este autor distingue essas variáveis em macro-didáticas ou globais e variáveis micro-didáticas ou locais. Determinam-se as variáveis escolhidas sobre as quais se torna possível exercer algum tipo de controle, relacionando o conteúdo estudado com as atividades que os alunos podem desenvolver para a apreensão dos conceitos em questão. Artigue (1988, apud Machado, 1999) descreve que:

> A análise a *priori* deve ser concebida como uma análise do controle do sentido, pois a teoria das situações didáticas que serve de referência à metodologia da engenharia didática teve desde sua origem a ambição de se constituir como uma teoria de controle das relações entre sentido e situações.
> ...o objetivo da análise a *priori* é determinar no que as escolhas feitas permitem controlar os comportamentos dos alunos e o significado de cada um desses comportamentos. Para isso, ela vai se basear em hipóteses cuja validação estará, em princípio, indiretamente em jogo, na confrontação entre a análise a priori e a análise a *posteriori* a ser operada na quarta fase.

Na análise a *priori* temos a elaboração e análise de uma seqüência didática, com o objetivo de observar situações de aprendizagem, responder às questões e validar as hipóteses levantadas na fase inicial.

Em nosso trabalho, consideramos a elaboração de uma seqüência de atividades, visando o aprendizado dos alunos sobre o objeto da pesquisa. Na concepção dessa seqüência escolhemos, inicialmente, trabalhar atividades que estivessem relacionadas ao cotidiano dos alunos. À medida que os alunos desenvolveram as atividades optamos por enfocar situações de aprofundamento dos conhecimentos relativos ao tema estudado. Entendemos que tais escolhas efetuadas permitiriam um controle do comportamento dos alunos, a fim de atingir os objetivos propostos.

1.4.3 EXPERIMENTAÇÃO

Nesta fase, ocorre o contato pesquisador/professor/observado(es) com os alunos escolhidos - objetos da investigação. Esta fase supõe a explicitação dos objetivos e condições de realização da pesquisa aos alunos selecionados; estabelecimento do contrato didático; aplicação dos instrumentos de pesquisa; registro das observações feitas durante a experimentação (descrição, transcrição dos registros a partir das observações). É importante, nesta fase, respeitar as escolhas e deliberações feitas (variáveis priorizadas) na fase anterior.

Em nosso trabalho a experimentação foi realizada com aplicação da seqüência de atividades para duplas, acompanhadas por um professor, que atuou como observador e mediador das situações de aprendizagem. Os dados foram coletados por meio das respostas escritas dos alunos e respostas dadas com a utilização do computador. Os diálogos das duplas foram gravados para entendimento de como foi o desenvolvimento do raciocínio dos alunos.

1.4.4 ANÁLISE A POSTERIORI E DA VALIDAÇÃO

Nesta fase, temos o tratamento de todos os dados obtidos durante a fase anterior, resultante das observações feitas nas sessões e das produções dos alunos selecionados. E o conjunto de resultados que se pode tirar da exploração dos dados recolhidos, devendo atingir a realidade da produção dos alunos, revelando, se possível, como se deu o processo de raciocínio. Segundo Almouloud (2007):

> Assim, a análise a *posteriori* depende das ferramentas técnicas (material didático, vídeo) ou teóricas (teoria das situações, contrato didático, etc) utilizadas com as quais se coletam os dados que permitirão a construção dos protocolos de pesquisa. Esses protocolos serão analisados profundamente pelo pesquisador e as informações daí resultantes serão confrontadas com a análise a *priori* realizada. O objetivo é relacionar as observações com os objetivos definidos a *priori* e estimar a reprodutibilidade e a regularidade dos fenômenos didáticos identificados.

Na Engenharia Didática, da confrontação entre as análises a *priori* e análises a *posteriori*, pode-se validar ou não as hipóteses levantadas pelo pesquisador. Em nosso trabalho, fizemos a audição e transcrição do material gravado na experimentação e do material escrito. Da análise destes dados coletados, buscamos verificar como se deu o processo de raciocínio dos alunos. Confrontamos esses resultados com as expectativas estabelecidas na análise a *priori* procurando, validar ou não, as hipóteses levantadas.

Esta análise permitiu nossas considerações finais, que serão apresentadas no capítulo quatro

CAPÍTULO 2

2.1 FUNDAMENTOS TEÓRICOS - Argumentação e Prova

Segundo Pietropaulo (2005), a Matemática é valorizada por muitas pessoas, principalmente por duas de suas características: “a idealidade pura de seus objetos e a precisão e o rigor dos princípios das demonstrações matemáticas”. Assim, a Matemática pode ser classificada como uma ciência hipotética-dedutiva, pois as provas se apóiam em um sistema de axiomas e postulados.

Neste sentido, a prova tem um papel fundamental na Matemática, sendo o principal aspecto que a diferencia das Ciências da Natureza. Para um físico, uma lei pode ser provada apoiando-se em outras, mas isso não seria possível com todas as leis. Além disso, a validade desta lei dependeria da comprovação através de observações e experimentações.

Entretanto, um matemático pode, por exemplo, fazer experimentações e observações para constatar que a soma de dois números ímpares sempre resulta em um número par. Porém, tal fato só será considerado lei depois de provado.

Na Física, as teorias desenvolvidas representam uma verdade aproximada que pode ser alterada ou substituída por outra melhor. Os Físicos, com seu trabalho, procuram estruturas e modelos que expliquem a realidade, e desta forma buscam justificar os fenômenos físicos observados. Na Matemática, após aceitação da comunidade matemática, a veracidade de um teorema é universal e atemporal.

Segundo Godino e Recio (1997, apud Pietropaulo, 2005), o sentido da palavra prova varia em função do contexto em que é empregada no cotidiano, em ciências empíricas, na matemática escolar e na matemática profissional.

Porém, em qualquer dos sentidos uma idéia comum é observada: a busca para validar ou justificar uma afirmação por meio de argumentos. Estas diferenças de sentidos são em função do tipo de situação de aplicação, aspectos característicos e meios utilizados.

Segundo Nasser e Tinoco (2001), a prova no contexto da matemática profissional é:

> ...um desenvolvimento formal, que parte dos pressupostos(hipóteses) e, através do encadeamento do raciocínio e de resultados já conhecidos ou de teoremas, chega ao resultado que os quer mostrar que é verdadeiro (tese). Esse tipo de prova é conhecido como **prova formal**.

Na concepção de Nasser e Tinoco (2001) a prova possui diversas funções. Consideram que a mais usada é o de validar um resultado, ou seja, comprovar a sua veracidade. Uma outra função é a de explicar ou elucidar, ou seja, mostrar por que o resultado é verdadeiro. Estas autoras relatam que alguns pesquisadores, a exemplo de Bell (1976), consideram que a função da prova é de sistematizar, ação pelo qual o aluno, acompanhando o professor, vai tomando conhecimento das estruturas matemáticas, dominando o processo dedutivo, e até podendo ser capaz de executar. Outra função de prova seria a descoberta de novos resultados e a comunicação.

De acordo com Fonseca e Fernandes (2003) a prova serve para validar, esclarecer e sistematizar o conhecimento matemático. Nesse sentido, é importante o seu uso no processo do ensino da matemática. As experiências que envolvam provas são fundamentais na aprendizagem de crianças, a partir do momento em que começam a aprender matemática.

Nasser e Tinoco (2001) afirmam que a argumentação, por sua vez, tem o objetivo de obter a concordância, o convencimento do interlocutor para a validade de uma dada afirmação, e para tanto, quaisquer meios, em princípio, seriam válidos.

Como resultado da argumentação, as soluções dos problemas podem ter caráter provisório, enquanto que na prova, se não houver alteração do contexto, tal resultado será sempre válido.

A habilidade de argumentação deve sempre ser construída com os alunos por meio de proposições de estratégias diversas. Neste aspecto, essas autoras afirmam:

> Observa-se que nas séries iniciais, a criança é mais espontânea, e consegue explicar seu raciocínio oralmente, com naturalidade. Conforme os anos vão passando, essa espontaneidade diminui, e o aluno não consegue justificar suas soluções nem oralmente nem por escrito. Portanto, a habilidade de argumentar deve ser trabalhada desde as primeiras séries, para que o aluno mais tarde seja capaz de defender um ponto de vista próprio, seja numa conversa informal, ou numa questão de matemática.

2.2 TIPOS DE TAREFAS

Alguns autores propõem, como Balacheff et al (2001), *Preuve et démonstration: quelques questions essentielles*[2] (IREMs de Grenoble et Rennes), algumas tarefas que permitem a iniciação do aluno neste contexto de argumentação e prova. Segundo estes autores, uma tarefa pode ser entendida como “o trabalho que o aluno deve realizar“. Muitos são os tipos de tarefas e existem inúmeras formas de classificá-las. Uma classificação por objetivos se mostra mais vantajosa, pois o professor pode escolher a atividade mais adequada aos objetivos que pretende alcançar.

Balacheff et al (2001) classificaram as tarefas para o ensino e aprendizagem da prova nos seguintes tipos :

1. Tarefa Tradicional : “Demonstrar que”.
2. Tarefas de Iniciação à Prova.
3. Tarefas para dar sentido a uma frase.
4. Tarefas relativas aos enunciados de teoremas.
5. Tarefas para dar sentido à demonstração.
6. Tarefas sobre a utilização das palavras de ligação.
7. Tarefas para encontrar um encadeamento dedutivo.
8. Tarefas para aprendizagem da escrita.
9. Tarefas para tentar descobrir a estrutura de um texto de demonstração.
10. Tarefas para vencer certos obstáculos.

Vamos procurar discorrer sobre cada tipo de tarefa como apresentado por estes autores.

1.Tarefa Tradicional : “Demonstrar que”

Este tipo de tarefa é adequado para alunos que já possuem conhecimentos sobre os assuntos tratados e sobre demonstração. As tarefas deste tipo podem ser consideradas mais como “*exercícios de aplicação de conhecimento já adquirido sobre demonstração do que uma atividade de aprendizagem.”* (Balacheff et al 2001).

---

[2] Para trabalhar no Projeto AProvaME com esta referência, parte do texto foi traduzida pelos coordenadores do Projeto.

2. Tarefas de Iniciação à Prova

Diante de certas situações os alunos reagem criando conjecturas, se interessando em buscar uma justificativa ou prova para essas conjecturas.

Para Balacheff et al (2001), o *“buscar uma prova significa para o aluno encontrar argumentos e justificativas para uma conjectura”.* Uma conjectura pode nascer de indagações e reflexões dos alunos ou ter sido proposta pelo professor.

Para despertar no aluno o interesse por uma conjectura é necessário que a situação proposta seja realmente problemática. A atividade deve gerar dúvidas ou conflitos entre os alunos, pois somente assim, o aluno produzirá e buscará provar as suas conjecturas.

Se o objetivo é propor situações em que as provas sejam semelhantes à demonstração, então é importante se exigir a elaboração de textos. Também é importante deixar claro quais os tipos de prova que serão aceitas, por exemplo, desenhos, explicações orais ou apresentação de cálculos.

Nas tarefas de construção em que é preciso deduzir para executar, o aluno, por exemplo, deve realmente construir a figura, pois desta forma suas reflexões e deduções serão úteis para justificar a sua construção.

O aluno tem dificuldade de expressar suas deduções neste tipo de atividade, pois ao explicar sua construção, muitas vezes não se apóia nas deduções obtidas para construir a figura e se concentra em buscar outras explicações.

2a Enunciar ou validar uma conjectura

Exemplo 1: Complete com “sempre” ou “nunca” ou “às vezes” a seguinte frase:

“Os pontos médios dos lados de um quadrilátero _______________ são os vértices de um paralelogramo.”

No exemplo 1, o professor pode se apoiar nas dúvidas surgidas e motivar os alunos a validar as suas conjecturas propondo, por exemplo, que os alunos desenhem diversas figuras e em especial quadriláteros convexos.

Exemplo 2: ABCD é um quadrado de 8 cm de lado. AF = 5 cm, CE = 13 cm. F, B, E estão alinhados ?

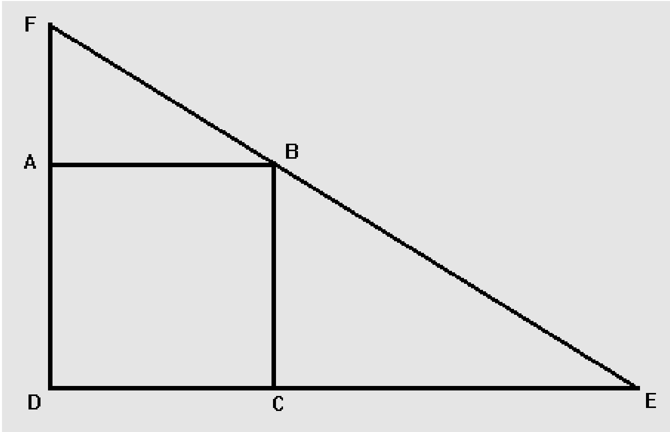


Figura 2.1 – Enunciar ou validar uma conjectura – Exemplo 2

2b Tarefas de construção em que é preciso deduzir para executar

Exemplo 3: OLM é um triângulo. O ponto N pertence ao segmento OM. Ainda, ONL = 50°; OLM = 100°; OML = 30° e LM = 15 cm. A figura está mal construída, ela não corresponde aos dados. Construa uma figura respeitando este enunciado. Explique seu método.

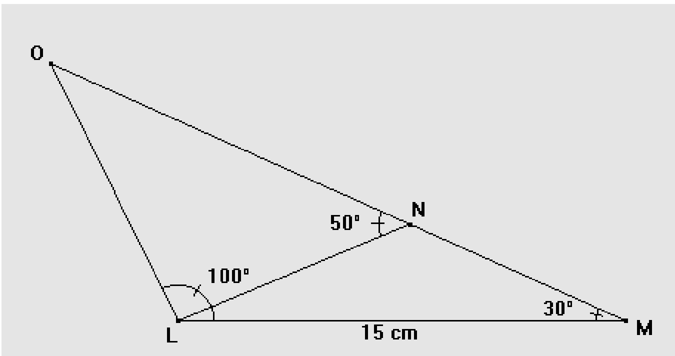


Figura 2.2 – Tarefas de Construção – Exemplo 3

3. Tarefas para dar sentido a uma frase

Os alunos têm dificuldades em compreender o sentido preciso de uma frase e se limita a entender do que se trata. Isto provoca algumas confusões, como por exemplo, o aluno confunde teorema direto com teorema recíproco. A intervenção do professor, nestes casos, se mostra ineficaz, pois o aluno aceita a correção e explicações do professor, mas como o aluno não investigou o sentido preciso da frase, sua atitude e compreensão tendem a não se modificar.

Exemplo 1: A incógnita x representa um comprimento, a equação E não tem solução negativa". Para cada uma das questões seguintes, encontrar a resposta correta: sim, não, nada se pode afirmar.

Eis algumas das questões apresentadas:

- (–2) é solução da equação E?
- 3 é solução da equação E?
- O número t não é solução da equação E. t é negativo?

Exemplo 2 :

a) Complete escolhendo entre as palavras: às vezes, sempre, jamais: "Um quadrilátero que tem um ângulo reto____________é um retângulo."

b) Complete escolhendo entre as palavras o, a, um, uma: "Trace_____reta passando por_____ponto A e secante à_____reta(D)."

Figura 2.3 – Tarefas para dar sentido a uma frase – Exemplo 2

4. Tarefas relativas aos enunciados de teoremas

Sem dúvida um dos pontos mais importantes da aprendizagem de prova é levar o aluno ao domínio dos teoremas. Objetivos importantes relacionados a aprendizagem de teoremas:

- Em relação ao conteúdo do teorema o aluno deve compreender precisamente o seu sentido e saber em que situações ele pode ser usado.
- Em relação ao enunciado o aluno deve reconhecer o mesmo teorema em diferentes formas de enunciados , saber diferenciar hipótese de tese e distinguir o teorema e o seu recíproco.

Esses objetivos provavelmente não serão alcançados imediatamente,as tarefas podem ser propostas quando um teorema é descoberto ou no momento em que surjam dificuldades.

4a. Teorema introduzido como uma conjectura

Um teorema pode ser introduzido com uma conjectura em que é necessário validá-la ou rejeitá-la. No entanto, é necessário criar uma situação que leve os alunos a realmente se interessarem por esta conjectura.

Exemplo 1: Teorema dos Pontos Médios

Usando o Cabri, no estudo deste teorema, os alunos podem observar que o comprimento do segmento que une os pontos médios de dois lados é constante quando se movimenta o vértice comum. Esta experiência pode despertar a curiosidade dos alunos para compreender esse fenômeno.

Exemplo 2: A soma das medidas dos ângulos de um triângulo é 180°.

Balacheff propõe uma longa seqüência de atividades com a intenção de que surja essa conjectura. Ao longo do trabalho com essa seqüência, os alunos da 6ª série levantam suposições sobre a soma das medidas dos ângulos s de alguns triângulos e efetuam essas somas.

Para Balacheff et al (2001), conseguir criar uma situação que gere uma verdadeira conjectura é bastante difícil. Em outras palavras, para conduzir os alunos a descobrir uma certa propriedade, até então desconhecida e incerta, é preciso propor uma atividade que produza dúvidas e conflitos na sala, de tal forma a levar os alunos a desenvolver e a buscar provas para suas conjecturas.

4b. Procurar os enunciados de teoremas úteis numa situação dada

Os alunos do Ensino Fundamental, muitas vezes, na resolução de problemas, utilizam conhecimentos adquiridos, porém não fazem referências claras aos teoremas e propriedades usadas. Pode ser desenvolvida uma importante atividade que consiste em evidenciar teoremas e propriedades sem contudo exigir um texto de demonstração. O domínio e o entendimento preciso do enunciado do teorema têm uma grande importância nesse tipo de atividade.

Exemplo 1: Procurar teoremas úteis para promover o estudo de uma figura, considerando algumas propriedades dessa figura.

O grande problema com esse tipo de atividade é de conseguir atribuir-lhe um sentido. Muitas vezes, estas tarefas proporcionam pouca reflexão sobre o significado preciso do enunciado dos teoremas, pois se torna muito simples escrevê-las. Já enunciados com grau de complexidade maior, como por exemplo, “Se duas retas são paralelas, toda perpendicular a uma é perpendicular à outra“ ou diferentes dos habituais possibilitam uma reflexão dos seus significados.

5. Tarefas para dar sentido à demonstração

Para alunos iniciantes, a demonstração é um tipo novo e diferente de texto, muitos não são capazes de entender a sua importância e função. O sentido da demonstração não se torna evidente para os alunos em situações simples, mas quando situações realmente problemáticas são propostas. O professor tem a difícil incumbência de escolher e gerenciar situações visando levar o aluno ao aprendizado do sentido da demonstração.

O contexto neste tipo de atividade tem importância fundamental, muito maior que em outros, pois pela experiência prática sabemos que pequenas modificações na atividade podem estimular ou desestimular o interesse do aluno por uma conjectura.

Exemplo 1: Se (D) e (D’) são duas retas dadas, A e A’ dois pontos que não pertencem nem a (D) e nem a (D’), a todo ponto M de (D) associa-se o ponto M’de intersecção de (D’) e da paralela à (AM) passando por A’. O que se passa com as retas (MM’)?

6. Tarefas sobre a utilização das palavras de ligação

Os textos de demonstração possuem uma estrutura que se caracteriza pela utilização de palavras e expressões específicas e pela maneira com que são dispostas estas palavras. Podemos considerar o domínio do uso de palavras de ligação como um dos mais importantes elementos no aprendizado da demonstração.

Exemplo 1: Propor atividades para levar o aluno ao domínio da expressão “se . . . então“. Inicialmente pode-se propor frases com esta expressão em que o aluno deverá determinar se a frase é verdadeira ou falsa.

Exemplo 2: Torna-se interessante que o aluno utilize estas expressões em um texto real de demonstração. Podemos propor ao aluno completar um texto de demonstração utilizando estas expressões. Tal atividade tem maior eficácia quando não são dadas as palavras a serem completadas.

Uma das grandes dificuldades de se trabalhar com a expressão “se ... então” é o sentido implícito de “qualquer que seja“ contido nesta frase. Para se atingir uma eficiência maior no trabalho com essas expressões o professor precisa estar atento a essa dificuldade.

Promover a validação da reposta correta do ponto de vista do aluno é, na maioria das vezes, problemática. Uma eficiente forma de abordagem consiste em uma aula divulgar para sala todas as respostas produzidas pelos alunos. A turma rapidamente separa as boas respostas das ruins, geralmente utilizando boas razões.

7. Tarefas para encontrar um encadeamento dedutivo

Um texto de demonstração é estruturado pelo encadeamento dedutivo de propriedades. Algumas tarefas podem ser propostas com o objetivo de levar o aluno a redigir um texto com essa estrutura, sem que seja necessário o aluno escrever um texto de demonstração.

O trabalho com esse tipo de tarefa não implica na elaboração de um texto de demonstrações, o objetivo é levar o aluno a entender o encadeamento dedutivo de uma demonstração.

Por isso a intervenção do professor deve ser mínima, para preservar o propósito da atividade. O aproveitamento da atividade é melhor quando executado em grupo, pois através das discussões os alunos compreendem o sentido das respostas.

Exemplo 1: Reconstruir uma demonstração “*puzzle*” (tipo de quebra – cabeça).

Exemplo 2: Isabelle Geslin (1993, apud Balacheff et al, 2001) propõe aos alunos escreverem o que ela chama de planos de raciocínio (planos de resolução de problemas).

Questão da tarefa proposta : Os pontos O, A e P estão alinhados ?

- Posicionar o sistema de referência em O.
- Dar as coordenadas de A e P.
- Escrever a equação de (AP).
- Verificar se O é um ponto de (AP).
- Concluir.

8. Tarefas para aprendizagem da escrita

A aprendizagem da prova exige a escrita de textos matemáticos. Porém, muitos alunos apresentam dificuldades com escrita Matemática e é importante o professor trabalhar atividades buscando desenvolver esta habilidade. O objetivo destas atividades é levar o aluno a escrever textos matemáticos e não somente colocar no papel o que foi falado.

Exemplo 1: Escreva um programa de construção para refazer a figura abaixo

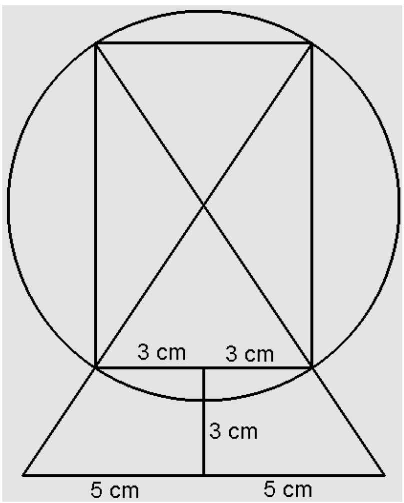


Figura 2.4 – Tarefas para aprendizagem da escrita – Exemplo 1

A tarefa acima proposta por Michèle Martin (apud Balacheff et al, 2001, p.94), para alunos entre 11 e 13 anos, tem dois objetivos:

- levar o aluno a escrever um texto matemático ;
- fazer com que o aluno crie conjecturas e realize deduções antes de se empenhar na elaboração do texto.

9. Tarefas para tentar descobrir a estrutura de um texto de demonstração

Um texto de demonstração é estruturado por passos que se relacionam entre si através do estatuto de suas proposições: dado, teorema, conclusão.

Para Balacheff et al (2001), os passos se articulam entre si por meio do estatuto de suas proposições: dado, teorema e conclusão. Porém, tal ponto de vista não é aceito por todos. Uns defendem que as tarefas proporcionem o domínio de passos isolados da demonstração, outros apontam que a articulação entre os passos é mais importante do que o domínio isolado de passos.

Exemplo 1: São propostos quatro enunciados e seis demonstrações e a seguinte questão: Qual(is) demonstração(ões) corresponde(m) a qual enunciado. Justifique sua escolha. (Balacheff et al., 2001).

Exemplo 2: A partir de uma figura, escrever o enunciado de um problema e sua solução.

10. Tarefas para vencer certos obstáculos

Os alunos muitas vezes fracassam na redação de textos de demonstração devido a alguns obstáculos. O professor pode propor atividades com o objetivo específico de levar o aluno a superar estes obstáculos. Por exemplo:

10a. Condição necessária e suficiente, teorema direto e recíproco, contrapositiva.

Neste caso, os erros dos alunos podem ser devido a falta de domínio do enunciado da demonstração e outros, estar relacionados a dificuldades com conteúdos específicos, por exemplo, confundir o uso do teorema recíproco com a contrapositiva do teorema.

10b. Alinhamento e Ponto Médio

Os alunos cometem um erro freqüente para demonstrar que um ponto é médio de um segmento, pois buscam provar unicamente a igualdade de comprimentos e admitem o alinhamento dos pontos, ou sejam, não se preocupam em provar o alinhamento destes pontos.

Exemplo 1:

Enunciado:

ABCD é um quadrado. I é o ponto médio do segmento BC e E o ponto simétrico de D em relação à C. Mostre que I é o ponto médio do segmento AE.

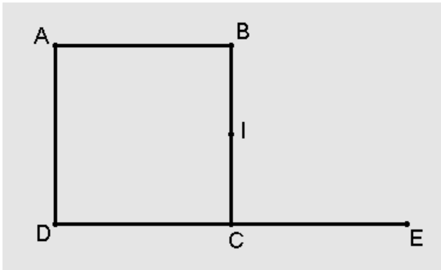


Figura 2.5 –Alinhamento e Ponto Médio– Exemplo 1

Demonstração:

ABCD é um quadrado, então, AD é paralelo a BC.

Sabe-se que E é simétrico de D em relação a C, então C é o ponto médio do segmento DE.

No triângulo ADE, a reta CI é paralela a um lado AD e passa pelo ponto médio do outro lado DE, então ela corta o terceiro lado em seu ponto médio.

Assim, I é o ponto médio do segmento AE.

Esta tarefa (IREM de Rennes, 1995, apud Balacheff et al, 2001) tem por finalidade levar os alunos a descobrirem que a demonstração acima não utilizou o dado “BI = IC”, contido no “I ponto médio do segmento BC”. Como o resultado não é verdadeiro, se I é um ponto do segmento BC e for diferente do ponto médio, esta demonstração contém uma falha que precisa ser encontrada.

10c. Um quadrado é um retângulo

Os alunos constroem o significado das palavras por meio do convívio social. No cotidiano dos alunos a palavra quadrado não é usada para losango, assim como “um quadrado não é um retângulo” ou “um retângulo não é um paralelogramo”. Muitos alunos pensam que na Matemática os significados das palavras são os mesmos do cotidiano, por isso, em muitas situações eles cometem erros não de raciocínio, mas de significação das palavras. Por exemplo, quando se propõe a seguinte atividade : *Você pode traçar um quadrilátero cujas diagonais são perpendiculares e que não seja um losango ? Se sim, faça-o. Se não, explique o por quê?*. Para esta atividade os alunos constroem um quadrado e justificam que o quadrilátero pode ser losango se suas diagonais não tem o mesmo comprimento.

10d. Princípio da Informação Máxima

Os alunos tem dificuldades em considerar a proposição $3 \leq 5$ como verdadeira. Isto se deve ao fato de que no uso da língua corrente é dado o máximo de informação. Novamente a dificuldade não é de raciocínio, mas de interpretação da linguagem matemática.

2.3 PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS (PCN)

No Brasil, os PCN (1998), documento elaborado pelo Ministério da Educação, identificam que o currículo de matemática deve considerar situações problema que envolva o desenvolvimento de argumentos matematicamente válidos.

Os PCN (1998) para o Ensino Fundamental destacam que, na matemática, por se tratar de uma disciplina que não é uma ciência empírica, para a criação desse conhecimento interferem processos heurísticos, e o caráter indutivo é, em geral, pouco destacado. Prescreve que:

> O exercício da indução e da dedução em Matemática reveste-se de importância no desenvolvimento da capacidade de resolver problemas, de formular e testar hipóteses, de induzir, de generalizar e de inferir dentro de determinada lógica, o que assegura um papel de relevo ao aprendizado dessa ciência em todos os níveis de ensino. (PCNEF, 1998, p. 26)

Os PCN (2000) para o Ensino Médio destacam a importância do conhecimento matemático no âmbito formativo e no que diz respeito ao seu caráter instrumental. Contudo, salientam que vai além disso, pois o conhecimento matemático deve ser visto como ciência e por isso:

> É importante que o aluno perceba que as definições, demonstrações e encadeamentos conceituais e lógicos têm a função de construir conceitos e estruturas a partir de outros e que servem para validar intuições e dar sentido às técnicas aplicadas. (PCNEM, 2000, p. 40)

Entre os vários objetivos estabelecidos pelos PCN (2000) do Ensino Médio para a disciplina de matemática, destacamos aqueles que consideramos que estão em consonância com este trabalho. As finalidades do ensino de matemática, no nível médio, indicam como objetivos levar o aluno a :

> - compreender os conceitos, procedimentos e estratégias matemáticas que permitam a ele desenvolver estudos posteriores e adquirir uma formação científica geral;
> - aplicar seus conhecimentos matemáticos a situações diversas, utilizando-os na interpretação da ciência, na atividade tecnológica e nas atividades cotidianas;
> - desenvolver as capacidades de raciocínio e resolução de problemas, de comunicação, bem como o espírito crítico e criativo;
> - reconhecer representações equivalentes de um mesmo conceito, relacionando procedimentos associados às diferentes representações. (PCNEM, 2000,p.42)

Um outro documento elaborado pelo Ministério da Educação que merece destaque, pois tem como proposta a ampliação dos debates sobre as orientações curriculares, são as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (2006). Este documento trata de três aspectos: a escolha de conteúdo, a forma de trabalhar os conteúdos e a organização curricular. Referente ao conteúdo a ser trabalhado no Ensino Médio em matemática sugere ao professor que sua escolha se paute na perspectiva de que esse aluno ao final do Ensino Médio, entre outras coisas, “compreenda que a matemática é uma ciência com características próprias, que se organiza via teoremas e demonstrações”. (Orientações Curriculares, 2006 , p.69)

2.4 PADRÕES, SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS E PROGRESSÕES ARITMÉTICAS

A seqüência de atividades deste trabalho foi concebida com base em leituras de livros paradidáticos em especial “Padrões Numéricos e Seqüências” de Carvalho (1997) , livros didáticos, e em dissertações já escritas sobre o tema prova ou padrões, entre as quais destacamos a dissertação de Monadez (2003) .

Neste trabalho de pesquisa temos por objetivos levar o aluno a adquirir:

- conceitos e conhecimentos relacionados à Seqüência Numérica e à Progressão Aritmética;
- habilidades com argumentação e prova.

Tendo em vista estes objetivos, elaboramos e aplicamos atividades para um grupo de oito alunos do 1º ano do Ensino Médio de uma Escola Pública da Rede Estadual de Ensino. Cada atividade possui algum tipo de regularidade em que é possível identificar uma lei que permita ao aluno completar ou continuar a seqüência numérica e obter a sua generalização.

Existe um consenso entre um grupo de pesquisadores, de que a aprendizagem da matemática requer do aluno uma ação ativa e reflexiva na resolução de atividades diversificadas e significativas. Para Vale e Pimentel (2005), por exemplo, a aprendizagem, tendo como base o estudo de padrões numéricos, pode trazer vantagens tanto para os professores como para alunos:

> É nossa convicção que a matemática perspectivada como ciências dos padrões, pode contribuir para uma nova visão desta disciplina por parte dos professores e proporcionar contextos de aprendizagem bastante ricos e motivantes para os estudantes, onde o seu poder matemático possa ser explorado.

Em particular, em relação ao tema seqüência numérica e Progressão Aritmética, as autoras esclarecem:

> Os temas, sobretudo no estudo das sucessões (progressões, indução matemática) e funções, são um universo para explorar problemas e investigações com padrões.

O termo padrão nos remete a pensarmos em padrões visuais, como por exemplo, em tecidos ou papéis de parede, ou seja, pensarmos em padrões geométricos. Estes padrões seguem regras específicas e não serão estudados neste trabalho de pesquisa. Vamos nos concentrar apenas em padrões numéricos. Vale e Pimentel (2005), esclarecem o significado do termo padrão numérico:

> ...entendendo o termo padrão numérico ligado a idéia de algum tipo de regularidade (e.g. repetição, recursiva) na qual se possa identificar uma lei que permita continuar a seqüência numérica e chegar à generalização.

Uma consulta ao dicionário Aurélio, sobre o que é padrão temos:

> *S. m*.1. Modelo oficial de pesos e medidas. 2. Aquilo que serve de base ou norma para a avaliação de qualidade ou quantidade; medida,estalão,craveira. 3. *P.ext*. Qualquer objeto que serve de modelo à feitura de outro. 4. Desenho decorativo estampado em tecido ou noutra superfície (papel de parede, azulejo,etc.) 5.Título. 6. *Fig.* Modelo, exemplo, protótipo, arquétipo. 7. *Fig.* Nível,qualidade; gabarito.8. *Bot*. Planta típica do grau de fertilidade do solo. 9.Econ. Padrão monetário. Padrão monetário. *Econ.* Elemento determinador da natureza, quantidade e título do metal que constitui uma unidade monetária.(FERREIRA,1999)

Notamos neste verbete que a palavra padrão possui diversos significados. No entanto, existem outros tipos de padrões como: os numéricos, de simetria, rotações e geométricos. Portanto, o termo padrão pode adquirir diferentes significados em contextos diferentes e não existe uma única definição aceita .

Mesmo no âmbito da Matemática não há uma definição única. As definições existentes são, por vezes, conflitantes e específicas (limitadas a um determinado fim).

Para Vale et al (2006) a multiplicidade de significados relacionados ao termo padrão é positivo :

> Apesar de aparentemente todos sabermos o que estamos a falar quando mencionamos o termo padrões, temos constatado que é um termo com uma multiplicidade de sentidos, mesmo quando restringimos apenas ao campo da matemática. Este é para nós um sinal da riqueza do conceito, que não deve ser esvaziado através de definições restritivas mas deve antes ser explorado na sua multiplicidade.

Segundo Devlin (2002, apud Vale et al, 2006), há aproximadamente vinte anos é que surgiu a definição de matemática aceita pela maioria dos matemáticos: a matemática é a ciências dos padrões.

Os matemáticos são hábeis em descobrir e revelar padrões desconhecidos sendo que, de certa forma, identificar regularidades onde a princípio pareça prevalecer desordem e confusão, é o próprio objetivo da matemática.

A utilização de padrões é um recurso poderoso para o desenvolvimento da aprendizagem matemática do aluno, pois na busca de um padrão é necessário o desenvolvimento de conjecturas e generalizações, habilidades também necessárias para o desenvolvimento de argumentação e prova.

Os professores de matemática observam diariamente que seus alunos, por um lado, apresentam pouco interesse pelo estudo desta disciplina e, por outro, uma limitada capacidade matemática . Talvez estas posturas sejam o resultado de uma visão equivocada que muitos alunos têm de que a matemática é uma mera coleção de exercícios, fórmulas e procedimentos a serem aprendidos.

Para Vale et al (2006), o estudo de padrões pode trazer uma série de vantagem para o ensino e aprendizagem da matemática:

> Quando apelamos aos padrões numéricos no ensino da matemática é normalmente porque queremos ajudar o aluno a aprender uma matemática significativa e/ou a envolver – se na sua aprendizagem facultando-lhe um ambiente de aprendizagem que tenha algo a ver com sua realidade e experiências. O estudo de padrões vai ao encontro a este aspecto, apoiando a aprendizagem dos estudantes para descobrirem relações, encontrarem conexões e fazerem generalizações e também previsões.

Para Vale e Pimentel (2005), as atividades que envolvem a procura por padrões permitem:

- contribuir para a construção de uma imagem mais positiva da matemática por parte dos alunos.
- experenciar o poder e utilidade da matemática e desenvolver o conhecimento sobre novos conceitos.
- evidenciar como os diferentes conhecimentos matemáticos se relacionam entre si e com outras áreas do currículo.
- promover o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos tornando-os bons solucionadores de problemas e pensadores abstratos.
- Melhorar a compreensão do sentido do número, da álgebra e de conceitos geométricos.

As autoras complementam que para que isso ocorra é necessário que as atividades dêem condições para os alunos de :

- transferir padrões concretos, pictóricos e simbólicos de uma representação para outra;
- averiguar se uma lista de números mostra alguma regularidade;
- descobrir o padrão numa seqüência;
- descrever o padrão oralmente e por escrito;
- continuar uma seqüência;
- prever termos numa seqüência;
- generalizar;
- construir uma seqüência.

Desta maneira, acreditamos que as atividades envolvendo padrões possam tanto proporcionar uma maior motivação dos alunos no estudo da matemática, quanto aumentar a sua compreensão dessa disciplina.

2.5 TECNOLOGIAS NO ENSINO DA MATEMÁTICA

Atualmente, não podemos ignorar a presença e importância das tecnologias na vida das pessoas, a exemplo do uso da informática, que se torna cada vez mais comum. Assim, a escola, como parte integrante da sociedade, não pode ignorar os avanços tecnológicos.

A introdução das tecnologias - em especial o computador - na educação, pode ser uma ferramenta importante no processo do ensino e aprendizagem. No entanto, sua simples presença na escola não garante uma melhoria na qualidade do ensino e aprendizagem e, conseqüentemente, no enfrentamento das novas demandas sociais. Segundo Valente (1999):

> O ensino tradicional ou a informatização do ensino tradicional são baseados na transmissão de conhecimento. Nesse caso, tanto o professor quanto o computador são proprietário do saber, e assume-se que o aluno é um recipiente que deve ser preenchido. O resultado dessa abordagem é o aluno passivo, sem capacidade crítica e com uma visão de mundo limitada. Esse aluno, quando formado, terá pouca chance de sobreviver na sociedade atual. Na verdade, tanto o ensino tradicional quanto a informatização desse ensino prepara um profissional obsoleto.

Segundo Borba e Penteado (2001), a presença da informática na educação está diretamente relacionada à determinada concepção de ensino e aprendizagem. Por isso, entendemos que o uso eficiente do computador é adequado a uma pedagogia que tem por objetivo a construção de conhecimento pelo aluno e que valorize os processos envolvidos e não somente um resultado em sala de aula.

O papel do professor, dentro de concepção pedagógica que visa a construção do conhecimento, é de mediador. Segundo Masetto (2000), o professor como mediador pedagógico possui determinadas características, tais como: envolver-se com a aprendizagem do aluno, assumindo que ele é o centro do universo do ensino; no processo de ensino-aprendizagem deve haver co-responsabilidade , parceria e respeito mútuo entre o aluno e o professor; ter domínio profundo de sua área de conhecimento, demonstrando competência e ter disponibilidade para o diálogo.

O papel de mediador é um elo que se estabelece, no qual o professor é um facilitador, incentivador e motivador da aprendizagem. Ele dinamiza a aprendizagem, trabalhando em equipe com o aluno para alcançar os objetivos propostos. Para Masetto (2000), a mediação pedagógica significa:

> ... a atitude, o comportamento do professor que se coloca como um facilitador, incentivador ou motivador da aprendizagem, que se apresenta com a disposição de ser uma ponte entre o aprendiz e sua aprendizagem –não uma ponte estática, mas uma ponte “rolante”, que ativamente colabora para que o aprendiz chegue aos seus objetivos.

Portanto, o papel do professor de mediador pedagógico no uso da tecnologia é fundamental. Nesse aspecto, Valente (1997) afirma que:

> A interação aluno-computador precisa ser mediada por um profissional que tenha conhecimento do significado do processo de aprendizado através da construção do conhecimento, que entenda profundamente sobre o conteúdo que está sendo trabalhado pelo aluno e que compreenda os potenciais do computador. Esses conhecimentos precisam ser utilizados pelo professor para interpretar as idéias do aluno e para intervir apropriadamente na situação de modo a contribuir no processo de construção de conhecimento por parte do aluno.

Se considerarmos o uso de tecnologias em aulas de matemática é comum o questionamento de professores: “*Se o aluno utilizar a calculadora, como ele aprenderá a fazer contas?” ; “Se o estudante do ensino médio aperta uma tecla do computador e o gráfico da função já aparece, como ele conseguirá, ‘de fato’, aprender a traçá-los?”.*

Para Borba e Penteado (2001), uma forma de refletir sobre estas perguntas é reformulando-as dentro de um contexto de uso de lápis e papel. E questiona: *“será que o aluno deveria evitar o uso intensivo de lápis e papel para que não fique dependente dessas mídias?”*

Em geral, tal questão choca os professores, pois muitos não consideram o lápis e papel como uma mídia, da mesma forma que consideram os computadores. Para os professores esta mídia não causa dependência quando disponível para auxiliar o aluno na construção dos conhecimentos. Porém, para Borba e Penteado (2001), sempre haverá algum tipo de mídia envolvida na construção de conhecimentos pelo aluno. Essa dependência está relacionada ao contexto educacional do aluno e às mídias disponíveis: oralidade, lápis-e-papel e a informática, dentro deste contexto.

Desta forma, as novas mídias abrem novas possibilidades de práticas pedagógicas. Com as mídias de informática, é possível trabalhar com um enfoque experimental aproveitando ao máximo as condições e as facilidades para construir tabelas, gráficos, expressões algébricas, entre outros.

Para Borba e Penteado (2001), o conhecimento sempre é produzido com a utilização de uma determinada mídia:

> É por isso que adotamos uma perspectiva teórica que se apóia na noção de que o conhecimento é produzido por um coletivo formado por seres-humanos-com-mídias, ou seres-humanos-com-tecnologia e não, como sugerem outras teorias, por seres humanos solidários ou coletivos formados apenas por seres humanos.

Sobre o uso de tecnologias em aulas de matemática, Ponte (1997) considera que a missão da escola que se impõe na sociedade do conhecimento é a de oportunizar aos alunos a se inserirem de modo criativo, crítico e participativo numa sociedade cada vez mais complexa. O desenvolvimento dessas habilidades requer o uso das novas tecnologias, sejam calculadoras, computadores, sistemas multimídia ou a Internet.

A matemática, por sua vez, sempre teve uma relação muito especial com as novas tecnologias, e sua utilização, de maneira eficiente, pode dar a ela caráter de uma disciplina que contribua, significativamente, para a imersão desse aluno na sociedade da informação.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (1998), a utilização das tecnologias traz contribuições para o processo de ensino e aprendizagem da matemática à medida que:

> - relativiza a importância do cálculo mecânico e da simples manipulação simbólica, uma vez que por meio de instrumentos esses cálculos podem ser realizados de modo mais rápido e eficiente;
> - evidencia para os alunos a importância do papel da linguagem gráfica e de novas formas de representação, permitindo novas estratégias de abordagem de variados problemas;
> - possibilita o desenvolvimento, nos alunos, de um crescente interesse pela realização de projetos e atividades de investigação e exploração como parte fundamental de sua aprendizagem;
> - permite que os alunos construam uma visão mais completa da verdadeira natureza da atividade matemática e desenvolvam atitudes positivas diante de seu estudo. (PCN, 1998, p.43)

Ainda, segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (1998), o computador pode ser usado nas aulas de matemática com várias finalidades:

> - como fonte de informação, poderoso recurso para alimentar o processo de ensino e aprendizagem;
> - como auxiliar no processo e construção o conhecimento;
> - como meio para desenvolver autonomia pelo uso de *softwares* que possibilitem pensar, refletir e criar soluções;
> - como ferramenta para realizar determinadas atividades – uso de planilhas eletrônicas, processadores de textos, banco de dados, etc. (PCN, 1998, p.44)

Os estudos de Gravina e Santarosa (1998) sobre a aprendizagem da matemática em ambientes informatizados numa perspectiva construtivista, indicam que eles se apresentam como ferramenta de grande potencial diante de problemas inerentes ao processo de aprendizagem da matemática.

Essas autoras, tomando como referência os trabalhos de Kaput (1992) e Mellar et al (1994), analisam como as características dos ambientes informatizados dão suporte às ações dos alunos sobre os objetos matemáticos.

Apresentamos a seguir essas características, as quais as autoras denominam de meio dinâmico, meio interativo e meio para modelagem e simulação.

Em relação a ser um meio dinâmico, observa-se em livros, lápis e papel, giz e lousa, que os sistemas de representação do conhecimento matemático têm caráter estático, o que, muitas vezes, dificulta a construção do significado por parte dos alunos. O dinamismo que se apresenta na tela do computador pode auxiliar a medida que:

> As novas tecnologias oferecem instâncias físicas em que a representação passa a ter caráter dinâmico, e isto tem reflexos nos processos cognitivos, particularmente no que diz respeito as concretizações mentais. Um mesmo objeto matemático passa a ter representação mutável, diferentemente da representação estática das instâncias físicas tipo “lápis e papel” ou “giz e quadro-negro”. O dinamismo é obtido através de manipulação direta sobre as representações que se apresentam na tela do computador. Por exemplo: em geometria são os elementos de um desenho que são manipuláveis; no estudo de funções são objetos manipuláveis que descrevem relação de crescimento/decrescimento entre as variáveis. (...). Já num meio dinâmico um triângulo como correspondente segmento altura pode ser manipulado, mantendo-se um lado do triângulo fixo e fazendo-se o vértice oposto deslocar-se numa paralela a este lado. Desta forma obtém-se uma família de desenhos com triângulos e segmentos alturas em diversas situações, o que favorece a concretização mental em harmonia com o conceito matemático de altura de um triângulo.

Sobre ser um meio interativo, essas autoras entendem como a dinâmica que se estabelece, considerando as ações dos alunos e reações do ambiente. A interatividade é aquela que não se limita apenas à informação de erros e acertos, mas a que as ações dos alunos correspondam à reação do ambiente de forma que contribua na construção do processo de aprendizagem. Nesse sentido afirmam:

> A “reação do ambiente, correspondente a ação do aluno, funciona como ”sensor” no ajuste entre o conceito matemático e sua concretização mental. Um meio que pretenda ser interativo, na medida do possível, não deve frustar o aluno nos procedimentos exploratórios associados as suas ações mentais. Isto vai depender dos recursos que coloca a disposição e do nível de automação nos procedimentos. Alguns dos recursos já disponíveis em certos ambientes: ferramentas para construção de objetos matemáticos, múltiplas representações, procedimentos dos alunos podem ser registrados ou automatizados (capturação de procedimentos), auto-escala automática, zoom-in e zoom-out, dados que se atualizam com a dinâmica da situação, traçado de lugares geométricos, cálculos matemáticos.

E por último, como meio para modelagem ou simulação, as autoras sustentam a idéia de que esses programas, ao permitirem a criação e exploração de um modelo de um fenômeno, favorecem a construção de conceitos matemáticos. Explicitam que:

> Em programas com recursos de modelagem os alunos constroem modelos a partir representação dada por expressões quantitativas (funções, taxas de variação, equações diferenciais) e de relações entre as variáveis que descrevem o processo ou fenômeno. A característica dominante da modelagem é a explicitação, manipulação e compreensão das relações entre as variáveis que controlam o fenômeno, sendo o *feedback* visual oferecido pela máquina um recurso fundamental para o ‘ajuste’ de idéias. (...) O recurso de simulação permite a realização de experimentos envolvendo conceito mais avançado. Neste caso, a complexidade analítica do modelo fica por conta do programa e os alunos exploram qualitativamente as relações matemáticas que evidenciam no dinamismo da representação de caráter visual.

Constatamos, desta forma, o grande potencial da aplicação da tecnologia na educação e no aprendizado da matemática, especificamente. Acreditamos que os recursos tecnológicos, em especial a informática, podem e devem ser integrados nas atividades pedagógicas, auxiliando no processo de construção do conhecimento pelo aluno.

Entretanto, os recursos tecnológicos, por si só, não garantem a aprendizagem. Ao utilizar ambientes informatizados em aulas de matemática, por exemplo, é preciso que o professor selecione *softwares* adequados, elabore atividades significativas que desafiem os alunos, observe as ações dos alunos, e realize mediações que promovam o processo da construção do raciocínio matemático.

2.6 FERRAMENTAS DE AUTORIA

As Ferramentas de Autoria são programas de computador que permitem a criação de arquivos digitais, normalmente incluindo texto escrito, imagem, som e vídeo. Estes arquivos podem ser armazenados em diferentes tipos de mídias (CD, DVD, disco rígido ou na internet) e, geralmente, não são feitos para serem impressos em papel, mas para serem visualizados na tela do monitor, devido a sua característica dinâmica e interativa.

Segundo Leffa (2006), a principal diferença entre uma atividade na tela do computador, ou no papel é a da interatividade. Um programa de computador pode processar os dados e apresentar um resultado ou resposta sobre estes dados, ou seja, o computador proporciona um *feedback* e uma interação com o usuário. Ele é capaz de avaliar se uma resposta do aluno está correta ou incorreta, oferecer dicas ou fornecer mais ajuda.

Uma ferramenta de autoria permite que o professor elabore suas próprias atividades. O professor pode escolher o conteúdo que deseja trabalhar, os tipos de *feedbacks* automáticos a serem oferecidos, e as ajudas disponibilizadas para os alunos, pelas dicas e pistas. Possibilita, também, a inclusão de textos, imagens, animações e recursos de áudio e vídeo.

As atividades criadas com uma ferramenta de autoria não substituem a riqueza interacional que a sala de aula proporciona, mas pode complementar e enriquecer o trabalho a ser desenvolvido.

No entanto, este tipo de ferramenta apresenta certas limitações: a principal delas é a impossibilidade de administrar a imprevisibilidade que surge a partir da interação dos usuários. O computador não improvisa e nem interage além do que foi programado.

As atividades geradas por este tipo de software, possibilitam aos alunos a verificação das respostas dadas. Porém, tal recurso pode estimular o aluno a responder as atividades de forma mecânica, a exemplo de respostas dadas ao acaso, não usando nenhum procedimento lógico e sem, necessariamente, levantar hipótese.

No processo de aprendizagem o papel do professor é muito importante, não apenas como organizador das atividades, como também de mediador, no qual deve buscar administrar essas limitações.

2.7 O SOFTWARE HOT POTATOES

Neste trabalho de pesquisa, utilizamos o *software de autoria* Hot Potatoes com o objetivo de verificar em que medida este *software* pode contribuir e motivar alunos no desenvolvimento das atividades propostas.

O *software* Hot Potatoes, criado pelo Grupo de Pesquisa e Desenvolvimento do Centro de Informática e Mídia da Universidade de Victoria, Canadá, é composto por 5 ferramentas para o desenvolvimento de exercícios. O programa é gratuito para uso educacional, porém para se obter o seu registro é necessário preencher um formulário no *site* do programa. O Hot Potatoes permite a elaboração de 5 tipos de atividades interativas que funcionam com os navegadores *Internet Explorer* ou *Netscape*. Sua grande vantagem é a de não haver necessidade do usuário conhecer qualquer linguagem de programação. Basta seguir a ordem de entrada dos dados e o programa cria automaticamente uma página da *web.*

As ferramentas para o desenvolvimento de exercícios são:

- JCLOZE – Exercício do tipo “complete as lacunas”.
- JQUIZ –Exercícios de múltipla escolha, verdadeiro ou falso.
- JCROSS – Palavras cruzadas.
- JMIX – Ordenação de frases.
- JMATCH – Exercício de associação.
- THE MASHER – Unir os exercícios, criando uma seqüência de atividades.

Figura 2.6 – Aspecto da ferramenta Hot Potatoes

No JCloze temos a possibilidade de elaborar atividades de preenchimento de espaços, que devem ser completados pelo aluno.

O JQuiz permite a criação de exercícios de múltipla escolha e testes de verdadeiro ou falso. Pode-se responder às perguntas clicando em botões de respostas, continuando a selecionar até o acerto.

O JCross permite a criação de palavras cruzadas. O aluno deve inserir as palavras nos lugares corretos. Podem ver inseridas as pistas e verificação de repostas.

O JMix consiste em fragmentar um texto ou uma seqüência de itens em várias partes a ser apresentada ao aluno de modo aleatório. Os cortes do segmento devem ser feitos no lugar adequados, de modo que não confundam o aluno com segmentos totalmente aleatórios.

O JMatch é um tipo de exercício que consiste em encontrar pares de itens pertencentes a duas listas diferentes e ligadas entre si por algum critério. Os itens podem ser palavras, figuras, sons e pequenas animações. Os critérios podem ser por semelhança, oposição, causa-efeito, parte-todo, pergunta-resposta entre outros.

Em The Masher podemos construir seqüência de atividades, juntando todos os exercícios que a ferramenta nos possibilita elaborar.

Há várias possibilidades de se trabalhar com o software Hot Potatoes. Pode-se, por exemplo, utilizar o Hot Potatoes para que o aluno faça programações no próprio software, criando as atividades e páginas da web.

Entretanto, optamos por utilizá-lo em uma situação que envolve o ambiente do professor e o ambiente do aluno.

O ambiente do professor caracteriza-se por viabilizar a elaboração das atividades interativas, permitindo ao professor escolher o conteúdo que deseja apresentar ao aluno, a maneira como fará a apresentação desse conteúdo, os tipos de *feedback* automáticos a serem oferecidos e as ajudas no desempenho do aluno, por meio de dicas e pistas. É o professor quem programa as atividades no Hot Potatoes, no formato pagina da web.

O ambiente do aluno, por sua vez, o estudante responde as atividades criadas pelo professor,utilizando o navegador de internet.

Salientamos novamente que o uso do *software* Hot Potatoes, neste trabalho de pesquisa, teve como objetivo contribuir e motivar os alunos no desenvolvimento das atividades propostas.

2.8 TRABALHANDO COM O JCLOZE DO HOT POTATOES

Após fazer o *download* do *software* Hot Potatoes, que se encontra disponível na Internet no *site* http://hotpot.uvic.ca/index.htm , fizemos o nosso registro e passamos a estudar o seu modo de funcionamento e as suas potencialidades, realizando alguns testes iniciais.

Elaboramos em nossa seqüência de atividades (ANEXO C), questões com o uso do Hot Potatoes, distribuídos entre os três blocos da seqüência: Padrões Numéricos, Seqüência Numérica e Progressão Aritmética.

Nas atividades nº 1, 2, 4, 5, 9, 10 e 12 da seqüência de atividades o aluno deveria usar apenas o computador para resolução dos exercícios. As atividades nº 11 e 17 o aluno deveria usar o computador, ao mesmo tempo em que responderia no papel, pois teria que justificar suas respostas.

Das ferramentas disponíveis no *software* Hot Potatoes, utilizamos para a elaboração da seqüência de atividades presente nesse trabalho de pesquisa, a ferramenta denominada JCloze.

O JCloze permite a criação de atividades de completar lacunas. O aluno, ao completar as lacunas e acionar o botão de verificação, pode conferir se a resposta dada está certa ou errada.

Passamos a descrever os passos que foram seguidos para a elaboração da Atividade 1 que compõe a seqüência que criamos.

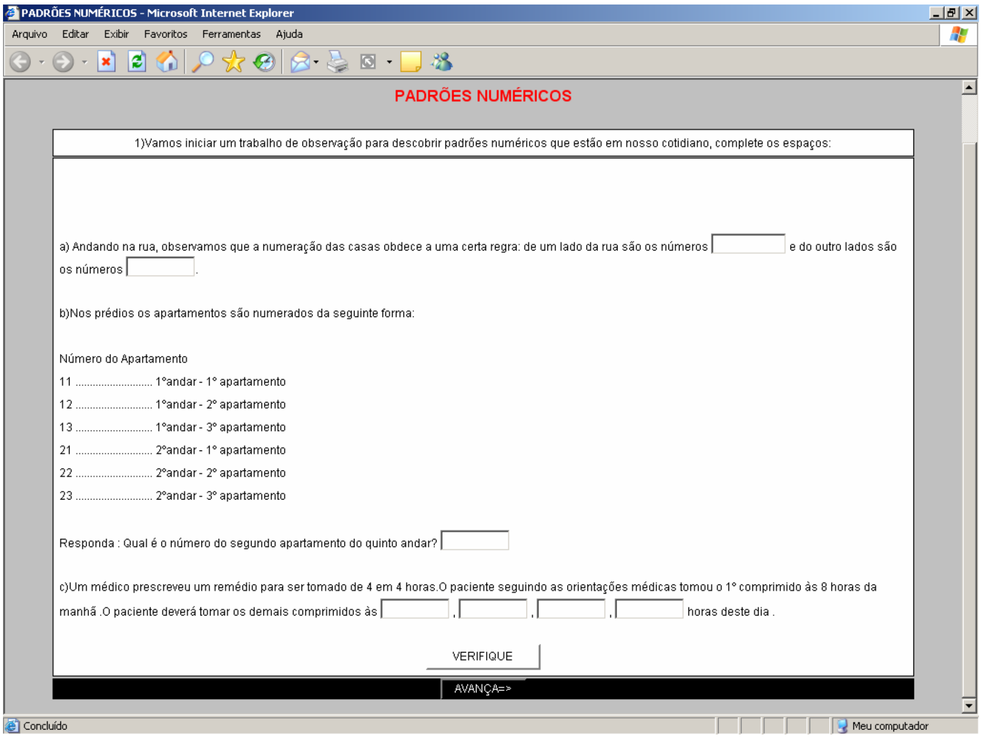


Figura 2.7 – Tela exemplificando uma atividade elaborada no JClose

Para estruturar esta atividade selecionei as opções que a ferramenta JCloze oferece. Para formar uma lacuna a ser preenchida, redigimos primeiramente o texto da atividade, selecionamos a palavra a ser completada com o botão direito do *mouse* e, em seguida, selecionamos o “botão lacuna”.

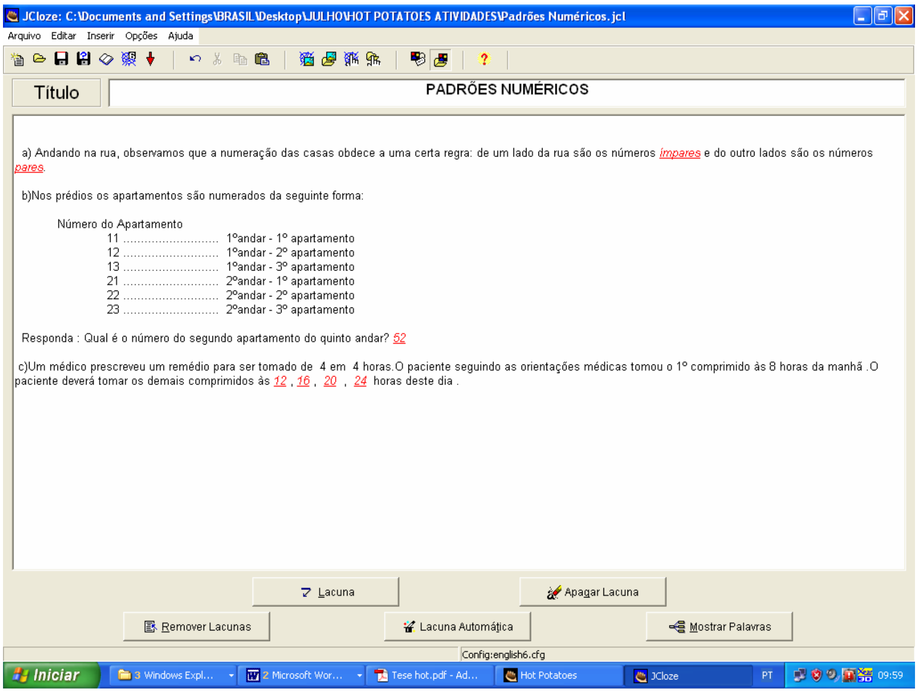


Figura 2.8 – Tela exemplificando as opções do JCloze.

No menu “opções", apontamos para configurações de saída e alteramos as seguintes guias:

• o título do exercício e instruções: escrevemos as instruções a serem seguidas pelo aluno para resolução da atividade.

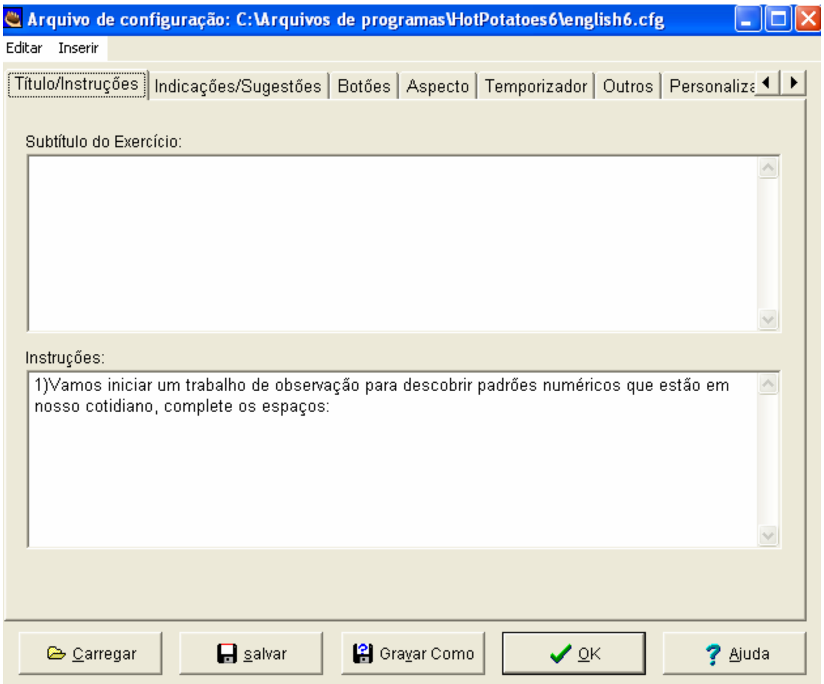


Figura 2.9 – Guias de Configuração JCloze – Título e Instruções

• indicações e sugestões; indica o texto/expressão que desejamos que apareça no final da resolução de cada exercício. Neste caso, escolhemos, para as respostas corretas, a expressão de incentivo “Correto! Continue...” e, para as incorretas, “Há respostas incorretas. Tente de novo”.

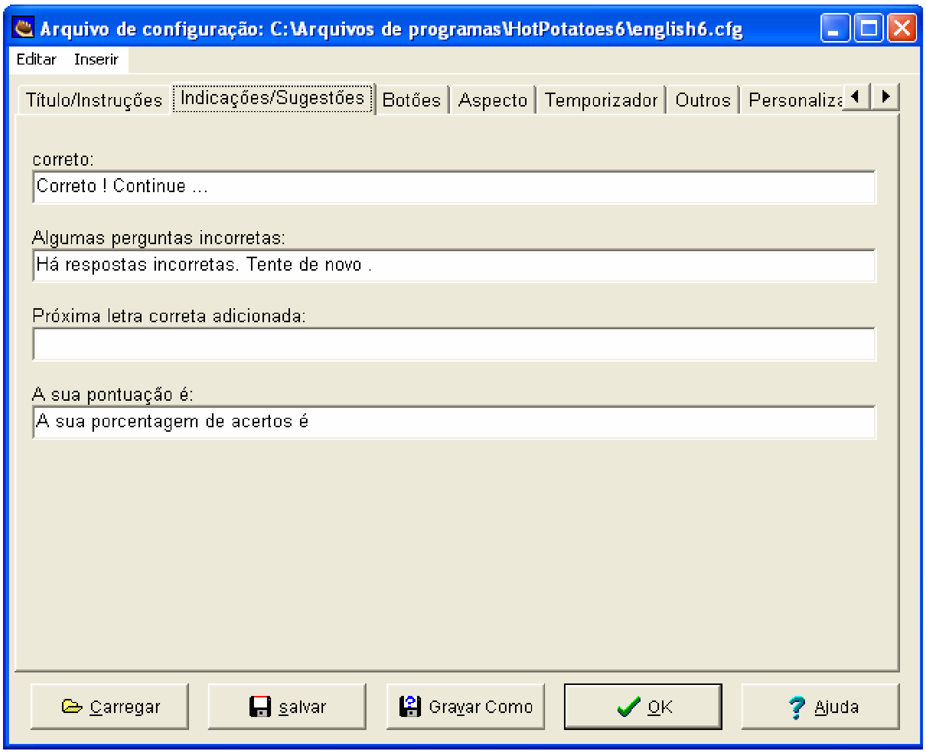


Figura 2.10 – Indicações e sugestões do JCloze

A partir deste ponto já temos o exercício elaborado e as configurações de saída prontas. No menu “Arquivo”, salvamos o documento como “Padrões numéricos. jcl” e finalizamos clicando em “Arquivo” e “Criar página de Web”.

O aluno responde a atividade, utilizando o navegador de internet, completando as lacunas. Ao apertar o botão “Verifique”, sua resposta pode ser validada ou não, aparecendo a mensagem que programamos.

O Programa permite fornecer pistas para guiar o aluno até a resposta correta.

Entretanto, ao elaborar as atividades no software, optamos por não utilizar esse recurso, pois queríamos que o aluno interagisse com o computador, com o seu par e com o professor, forçando-o a repensar a atividade.

Apesar do *Software* Hot Potatoes disponibilizar várias ferramentas, escolhemos o JCloze para elaboração das atividades, pois o recurso de completar lacunas é coerente com o objetivo de nossa pesquisa.

As atividades elaboradas, visam levar o aluno a construir os conceitos relacionados a Seqüências Numéricas e Progressão Aritmética. Para isso criamos atividades que envolviam a descoberta de um padrão ou regra para completar ou construir uma seqüência.

Assim, na utilização desse software procuramos encaminhar os alunos, com as atividades propostas, a desenvolver a habilidade de justificar as questões apresentadas, indo ao encontro de nossa pesquisa.

No próximo capítulo, apresentaremos as atividades propostas e suas respectivas análises.

CAPÍTULO 3

Neste capítulo apresentaremos como as atividades foram organizadas, o perfil do público alvo participante e a seqüência de atividades, com suas respectivas análises *a priori* e *a posteriori*.

3.1 ORGANIZAÇÃO DAS ATIVIDADES

A seqüência de atividades tem por objetivo levar os alunos a construir conceitos e conhecimentos relacionados a Padrões Numéricos, Seqüência Numérica e Progressão Aritmética. Também estamos preocupados em desenvolver conhecimentos relativos à Argumentação e Prova – mais especificamente ao desenvolvimento do pensamento dedutivo relacionado à generalização de Seqüências e Progressões Aritméticas em situações particulares – e a construção da Fórmula do Termo Geral da PA.

São propostas 19 atividades (ANEXO C) que se estruturam em três blocos: Padrões Numéricos e Seqüência Não-Numérica, Seqüência Numérica e Progressão Aritmética.

Para resolução das 19 atividades, o aluno deveria usar somente lápis e papel nas atividades 3, 6, 7, 8, 13, 14, 15, 16, 18 e 19, somente o computador nas atividades 1, 2, 4, 5, 9, 10 e 12 e nas atividades 11 e 17 usar lápis e papel e o computador ao mesmo tempo. Entendemos, nesta pesquisa, o termo “lápis e papel” como o registro escrito na folha da seqüência de atividades.

A opção por elaborar atividades, cujas resoluções contemplassem o uso do computador, resultou por um lado em saber que os alunos, no geral, gostam de trabalhar com o computador e que aceitam bem exercícios interativos.

Por outro lado, o uso do computador, com atividades criadas no Hot Potatoes, pode proporcionar ao aluno uma autonomia na verificação das respostas dadas, possibilitando ou não, a confirmação de suas hipóteses.

Na interação com o computador o aluno pode submeter suas respostas a uma verificação, não apenas limitando-se a conferir se sua resposta está certa ou errada, apertando o botão de validação, mas refletindo sobre o resultado de seu raciocínio, dialogando com seu par e com o professor.

A opção pela resolução de atividades, em que os alunos usam lápis e papel, foi em função de considerarmos que é importante o registro das resoluções, pois o aluno pode acompanhar o que está fazendo e escrever suas justificativas.

Consideramos que, em determinadas situações, é importante um exercício misto, pois o raciocínio fica mais explícito, facilitando a análise pelo professor, a exemplo da atividade 11.

ATIVIDADE 11. Indicar a posição dos elementos de uma seqüência facilita nosso trabalho, assim vamos chamar de a_1 o primeiro termo da seqüência, a_2 o segundo termo, a_3 o terceiro termo , a_4 o quarto termo, e assim por diante.

a) Considere a seqüência (3,8,3,8, . . .):

O primeiro termo a_1 de índice ímpar é igual a _______.

O segundo termo a_2 de índice par é igual a _______.

O termo a_{51} é igual a ________. Justifique seu raciocínio

O termo a_{100} é igual a ________. Justifique seu raciocínio

b)Vamos utilizar a_n para representar um termo qualquer da seqüência.

$$a_n = \begin{cases} 3 \text{ , se o índice n é um número } \_\_\_\_\_\_. \\ 8 \text{ , se o índice n é um número } \_\_\_\_\_\_. \end{cases}$$

Figura 3.1- Atividade 11 da Seqüência

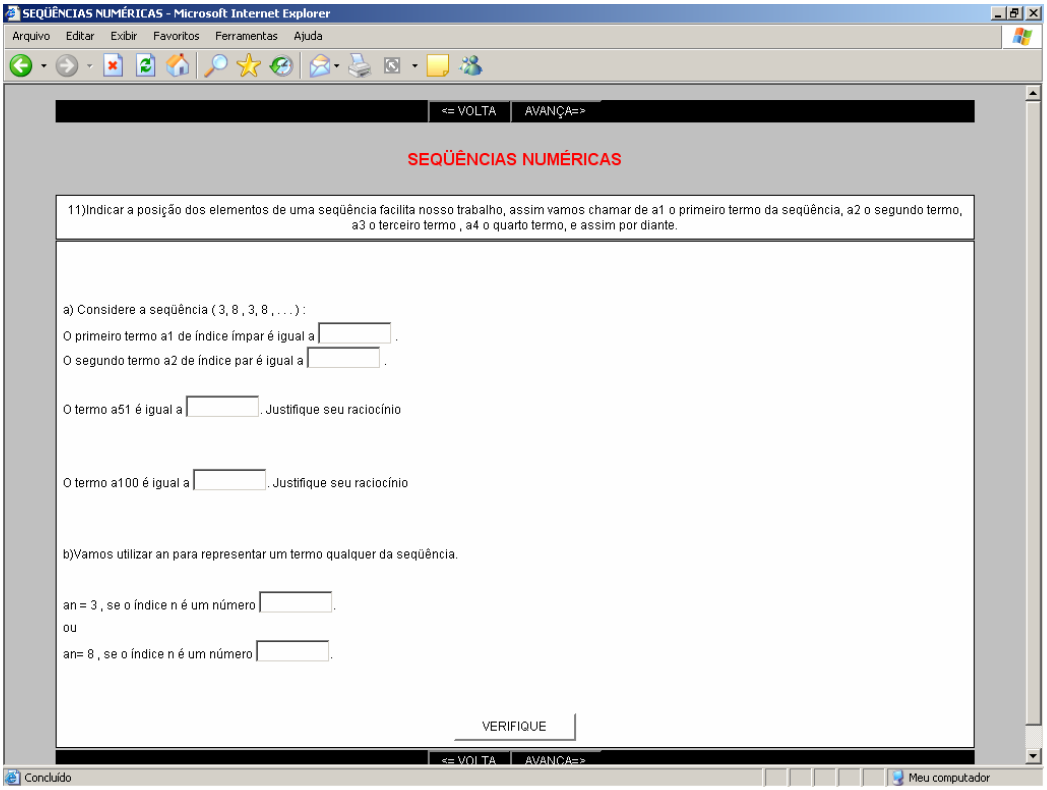


Figura 3.2- Tela do computador da atividade 11

O aluno deve completar as lacunas, com os termos da seqüência e, em seguida, acionar o botão "Verifique" para ver se a resposta está certa ou errada. Posteriormente, registra o valor correto da seqüência na folha e justifica seu raciocínio.

Geralmente, nas aulas tradicionais de matemática o professor deduz a Fórmula do Termo Geral na lousa, o aluno copia e a aplica em exercícios de fixação.

Com a nossa seqüência de atividades, caminhamos em um sentido inverso: procuramos elaborar uma seqüência para levar o aluno a concluir a Fórmula do Termo Geral de uma Progressão Aritmética.

3.1.1 BLOCO 1: PADRÕES NUMÉRICOS E SEQUÊNCIAS NÃO-NUMÉRICAS

No bloco Padrões Numéricos e Seqüência Não-Numérica, pretendemos despertar o interesse do aluno na investigação de Padrões Numéricos e conceituar e definir Seqüência. Este bloco contempla as atividades 1, 2 e 3, sendo que a 1 e 2 foram elaboradas no software Hot Potatoes, no qual o aluno resolve estas questões usando apenas o computador. O aluno resolve a questão 3 usando apenas lápis e papel.

3.1.2 BLOCO 2: SEQUÊNCIA NUMÉRICA

O bloco Seqüência Numérica engloba as atividades de 4 a 14, sendo que as atividades 4, 5, 9, 10, 11, e 12 foram elaboradas no programa Hot Potatoes. As atividades desse bloco estão voltadas para a conceitualização e definição de seqüência numérica. São para propiciar aos alunos a aprendizagem, tanto dos conceitos relacionados com seqüência, como desenvolver habilidades com leitura e compreensão da linguagem matemática utilizada.

Nas atividades 4, 5 e 9, optamos por situações simples do cotidiano e de fácil resolução, com o intuito de estimular o interesse e empenho do aluno para as próximas atividades.

A atividade 10 foi elaborada para o aluno desenvolver os conhecimentos relativos à generalização de seqüência, por isso iniciamos com uma seqüência constante, de fácil compreensão e visualização do termo geral.

Em seguida, é proposta a atividade 11, envolvendo uma seqüência numérica alternante, que exige do aluno relacionar a posição dos termos, par ou ímpar, com os respectivos valores da seqüência para obter a generalização.

As atividades 10 e 12 foram elaboradas, a fim de que o aluno, para resolvê-las, use apenas o computador. Já a atividade 11 é mista, possibilitando ao aluno usar o computador e lápis e papel.

As atividades 13 e 14 envolvem generalização de seqüência. Primeiro, o aluno precisa descobrir o padrão de uma seqüência figural, logo em seguida se pede a construção de uma seqüência numérica onde cada termo corresponde a uma quantidade de pontos ou quadrados da figura, ou seja, os valores da seqüência numérica possuem um significado relacionado à seqüência figural. Novamente, o aluno, para obter a generalização, precisa estabelecer uma relação entre a posição do termo e o seu valor.

Para resolução das atividades 13 e 14 o aluno deve usar lápis e papel. Estas atividades, segundo Balacheff et al (2001), podem ser classificadas como tarefas de iniciação à prova.

3.1.3 BLOCO 3: PROGRESSÃO ARITMÉTICA E FÓRMULA DO TERMO GERAL

O bloco referente à Progressão Aritmética engloba as questões 15, 16, 17, 18 e 19. As atividades devem ser realizadas usando lápis e papel, sendo que a questão 17 é mista, na qual o aluno deve usar computador e lápis e papel, pois além de completar as lacunas deve justificar sua resposta.

O objetivo deste bloco é conceituar e definir Progressão Aritmética e também levar o aluno a concluir a fórmula do Termo Geral.

Iniciamos com a atividade 15, de simples resolução, para introduzir os conceitos de progressão aritmética. A atividade compreende uma situação do dia-a-dia do aluno, na qual um padrão é descrito e, a partir dele, uma Progressão Aritmética é construída.

No que diz respeito à atividade 16, o aluno é orientado a observar que um valor fixo está sempre sendo somado à seqüência construída no exercício anterior. É solicitado este valor e em seguida é apresentada a definição de PA.

Com referência à atividade 17, o aluno precisa determinar a razão e completar a PA, justificando sua resposta.

Na atividade 18, é dada uma seqüência figural onde o aluno necessita determinar seu padrão para construir os próximos dois termos. Em seguida, espera-se que o aluno construa uma seqüência numérica, onde cada um de seus termos corresponda, respectivamente, ao número de traços encontrados aos termos da seqüência figural . A partir disso, o aluno deve identificar esta seqüência como uma PA. Para determinar a generalização da seqüência, o aluno deve observar a variação de posição e estabelecer relação com o valor do termo.

Finalmente no que concerne à atividade 19, para desenvolver a construção da fórmula do termo geral da PA, o aluno é envolvido em uma situação contextualizada. Nesta situação são dados o valor inicial de um empréstimo e o juro fixo cobrado diariamente. Desta forma, todos os termos da seqüência construída possuem um significado dentro do contexto.

A cada nova situação proposta, um valor numérico dado é trocado por uma variável, criando a necessidade do aluno desenvolver raciocínios algébricos e dedutivos para construir uma Progressão Aritmética ou determinar o valor de algum termo de uma PA. A Fórmula do Termo Geral é construída como resposta às perguntas dentro do contexto apresentado.

A atividade 19 procura levar o aluno do pensamento intuitivo ao dedutivo, podendo ser classificada de iniciação à prova, segundo Balacheff et al (2001).

3.2 PARTICIPANTES DA PESQUISA

Como nossa intenção é observar o desenvolvimento cognitivo dos alunos, tanto em relação à aquisição de novos conhecimentos e conceitos sobre seqüência e PA, como em relação à evolução do pensamento intuitivo para o dedutivo, optamos por aplicar a seqüência de atividades a um número pequeno de alunos.

Para participar das atividades decidimos selecionar alunos que cursam o primeiro ano do Ensino Médio das classes em que lecionava. Optei por convidar alunos que durante as aulas demonstraram maior interesse em Matemática, pois pensamos em uma participação ativa do aluno na resolução das atividades propostas, para que nosso trabalho pudesse refletir melhor o desenvolvimento do tema pesquisado.

O grupo de alunos selecionados era constituído por estudantes do primeiro ano do Ensino Médio de uma Escola Pública do Estado de São Paulo, localizada na zona Leste da Capital, na qual trabalho há dois anos como professor efetivo de Matemática.

Este grupo era composto por oito alunos que, segundo sondagem prévia, ainda não havia iniciado os estudos dos conteúdos de Seqüência Numérica e Progressão Aritmética, e não tiveram contato com conhecimentos envolvendo argumentação e prova.

Desenvolveram as atividades em duplas, sendo que a cada uma delas, foi disponibilizado um computador com as atividades, que foram criadas no Hot Potatoes, e uma folha contendo as questões para serem respondidas por escrito.

Foram dados esclarecimentos iniciais sobre o projeto e seus objetivos e orientações sobre os procedimentos no uso do computador e lápis e papel. O aluno deveria escrever as respostas apenas a caneta, pois era importante também como dado, não apenas a última resposta passada a limpo, mas o registro do rascunho com as tentativas, contas e as respostas incompletas ou erradas.

O local escolhido para o desenvolvimento das atividades foi a sala de informática da escola, haja vista que é um ambiente favorável, pois é tranqüilo, possui computadores suficientes para a realização das atividades, mobiliário adequado com mesas grandes, cadeiras e lousa.

Foram realizadas duas sessões com duração de, aproximadamente, duas horas cada uma. Uma mesma dupla foi filmada nas sessões e uma professora da escola desempenhou o papel de observadora.

Para coleta de dados utilizamos um gravador de voz para cada dupla, os questionários respondidos pelos alunos e as anotações da professora/ observadora. Os diálogos dos alunos foram transcritos e registrados na íntegra, para serem analisados.

Desempenhei o papel de professor/pesquisador, observando e anotando as respostas, os comentários, as reações dos alunos, as atividades propostas como, por exemplo, reações de aceitação ou rejeição; se consideraram as atividades muito fáceis ou difíceis. Também desempenhei o papel de mediador em momentos em que o aluno apresentava dificuldade na resolução das atividades. Atuava, formulando perguntas ou pedindo para que verificassem a coerência dos resultados, com a intenção de levar o aluno à resolução da atividade ou para repensar a atividade, para identificar algum erro ou descobrir uma outra resposta.

O grupo era composto por oito alunos organizados em duplas, entretanto devido ao grande volume de dados obtido, optamos por realizar a análise dos dados de duas duplas, que aparecem neste trabalho com nomes fictícios.

3.3 APRESENTAÇÃO E ANÁLISES DAS ATIVIDADES

3.3.1 Bloco 1: Padrões Numéricos e Seqüências não- numéricas.

ATIVIDADE 1. Vamos iniciar um trabalho de observação para descobrir padrões numéricos que estão em nosso cotidiano, complete os espaços:

a) Andando na rua, observamos que a numeração das casas obedece a uma certa regra: de um lado da rua são os números________ e do outro lado são os números _______.

b) Nos prédios os apartamentos são numerados da seguinte forma:

Número do Apartamento	
11	1ºandar - 1º apartamento
12	1ºandar - 2º apartamento
13	1ºandar - 3º apartamento
21	2ºandar - 1º apartamento
22	2ºandar - 2º apartamento
23	2ºandar - 3º apartamento

Responda : Qual é o número do segundo apartamento do quinto andar?_____

c) Um médico prescreveu um remédio para ser tomado de 4 em 4 horas.
O paciente seguindo as orientações médicas tomou o 1º comprimido às 8 horas da manhã .O paciente deverá tomar os demais comprimidos às ________, ________ , ________ e ________horas deste dia .

Figura 3.3- Atividade 1

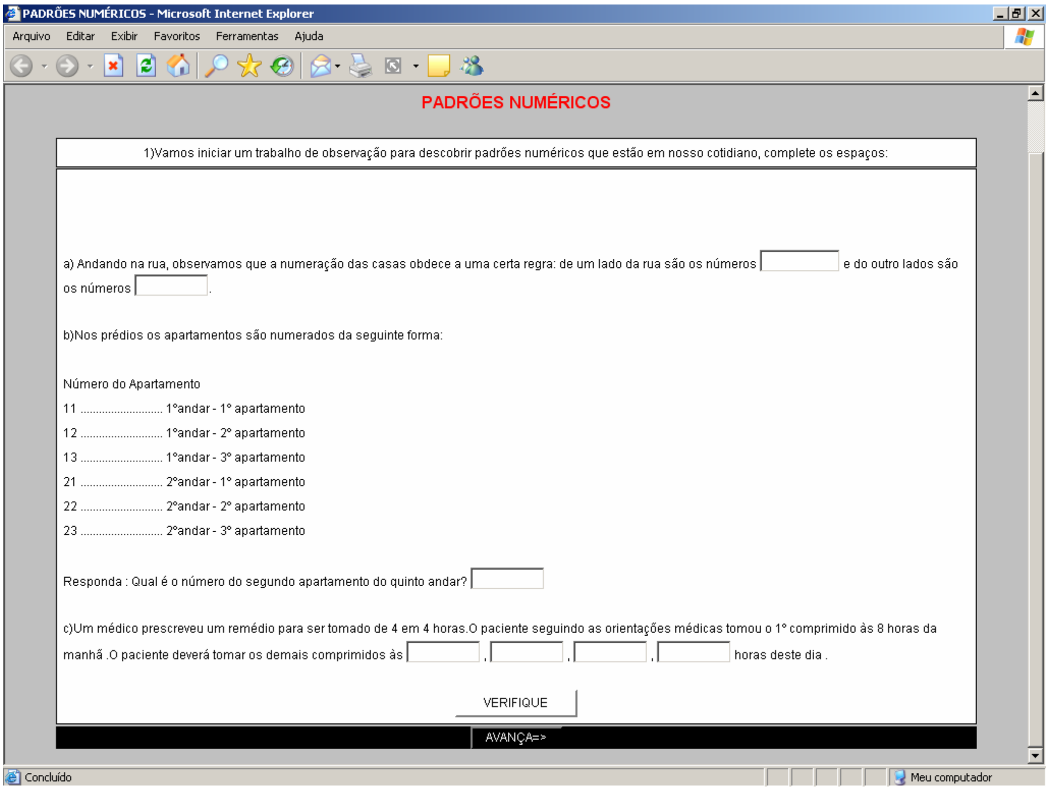


Figura 3.4- Tela do computador: Atividade 1

O objetivo desta atividade é levar o aluno a observar e identificar padrões numéricos de seu cotidiano.

ANÁLISE *A PRIORI*

Como o foco do nosso estudo está dirigido para o desenvolvimento de conceitos e conhecimentos de Seqüências Numéricas e de Progressões Aritméticas, que são tipos de padrões numéricos, decidimos iniciar a seqüência de atividades com algumas situações cotidianas que envolvem padrões numéricos.

Esperamos que o aluno leia atentamente cada item da atividade proposta e discuta com seu colega eventuais respostas, completando-as na tela do computador.

Procuramos com esta atividade despertar no aluno o interesse pela investigação de padrões numéricos e que ele perceba que, no seu dia-a-dia, existem diversas situações que envolvem padrões.

Entendemos que, por se tratar de uma atividade de fácil resolução, o aluno não terá dificuldades.

ANÁLISE *A POSTERIORI*

Lucas e Julia – O item (a) os alunos preencheram as lacunas com as palavras "pares" e "ímpares" No item (b) uma discussão e várias leituras se sucederam até que concluíram que o número do apartamento pedido é 52. Eles observaram que na seqüência dada após o apartamento 13 se sucedia o apartamento 21, e desenvolveram o seguinte raciocínio 13 + 8 = 21 ("aumenta de oito números"). Aplicaram este raciocínio, obtendo 23+8 = 31 ; 33+8= 41; 43+8= 51. Então concluíram que 52 é o número do 2º apartamento do quinto andar.. No item (c) completaram com 12, 14, 16 e 24, não tiveram dificuldade.

Alice e Ronaldo – No item (a) os alunos completaram corretamente, usando as palavras "pares" e "impares" . No item (b), após uma leitura e discussão, observaram que os números dos apartamentos por andar se sucediam de 10 em 10 : *"11, 12, 13" ; "21, 22, 23" ; " 31 ; 32 ; 33 "; "41, 42, 43", " 51, 52, 53",* concluindo que 52 é o quinto apartamento do quinto andar. No item (c) completaram com 12:00, 16:00, 20:00, 24:00, porém a verificação não aceitou esta resposta como correta.

Neste momento, se fez necessária a mediação, pois apesar das respostas estarem corretas o programa só aceita a resposta escrita desta forma 12, 16, 20 e 24.

Os alunos não apresentaram dificuldades para resolver esta atividade. Porém alguns demoraram e discutiram mais que outros.

No item (a) e (c) os alunos mostraram familiaridade com a situação e completaram sem dificuldades as lacunas.

No item (b) esperávamos que, por se tratar de um assunto que envolve uma situação do cotidiano, os alunos já conhecesse o padrão utilizado para numeração de apartamentos. Entretanto, as duplas analisadas utilizaram um raciocínio que não prevíamos: demonstraram desconhecer o padrão para a numeração de apartamentos, não sabiam que o primeiro número indicava o andar e o segundo número correspondia ao número do apartamento daquele andar. Observaram as sucessões de números e identificaram outros padrões também válidos e responderam corretamente a questão.

Quanto à resposta dada pela segunda dupla no computador, constatou-se que ao apertar o botão de verificação, não foi aceita a resposta, pois a forma escrita pelos alunos não correspondia ao que foi programado. O fato está relacionado com a própria limitação do *software*, em que o aluno fica sujeito apenas às possibilidades oferecidas pelo computador, fazendo-se necessária a mediação do professor no sentido de informá-los do procedimento correto quanto à forma de registro aceita pelo computador.

ATIVIDADE 2. No dia-a-dia nos envolvemos em situações onde determinada ordem ou regra é conhecida, complete :

a)(segunda , terça, _______,_______,_______,_______,_______)
b)(primavera, verão, ________,________)
c)(dó,ré,mi,_____, _____ ,_____ ,_____)
d)(janeiro,fevereiro,________, _______,. . . , ________,_______)

Figura 3.5- Atividade 2

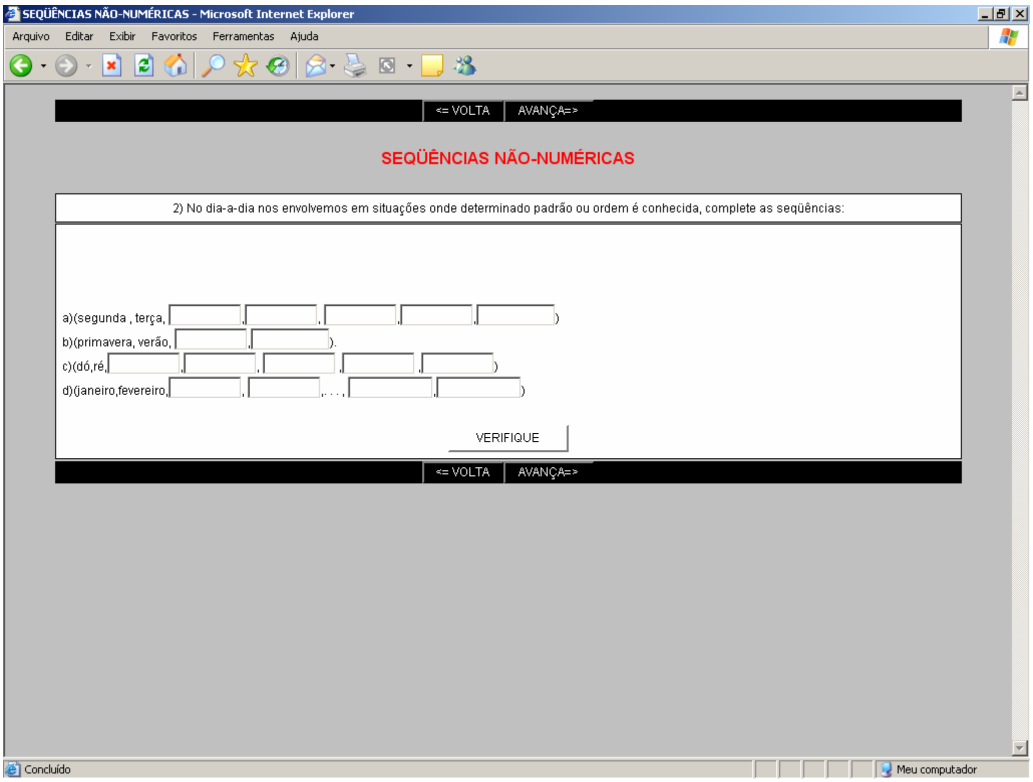


Figura 3.6- Tela do computador: Atividade 2

O objetivo desta atividade é introduzir o conceito de seqüência não-numérica, através de situações cotidianas do aluno.

ANÁLISE *A PRIORI*

Nesta atividade que complementa a anterior, pretendemos despertar o interesse do aluno na investigação de padrões em situações conhecidas do seu cotidiano, por isso acreditamos que o aluno responderá sem dificuldades.

O aluno deve preencher as lacunas, aparecendo a resposta na tela do computador.

ANÁLISE *A POSTERIORI*

A dupla Lucas e Julia preencheu os itens (a), (b), (c) corretamente e o item (d) da seguinte forma: (janeiro, fevereiro, março, abril,. . . , maio, junho). Ao apertar o botão de verificação na tela do computador ocorreu a indicação de erro no item (d). Discutiu novamente este item e preencheram corretamente, desta forma: (janeiro,fevereiro,março, abril,. . . , novembro, dezembro).

A dupla Alice e Ronaldo, como previsto, não apresentou dificuldade para completar as seqüências. Observamos que a dupla já tinha familiaridade com estas seqüências e por isso preencheu corretamente as lacunas.

ATIVIDADE 3. Escreva a seqüência das estações do ano, começando pelo mês de seu aniversário.

Compare a sua seqüência com a do seu colega, elas são iguais ou diferentes?

Figura 3.7- Atividade 3

O objetivo desta atividade é levar o aluno a comparar duas seqüências, reconhecendo se são iguais ou diferentes.

ANÁLISE *A PRIORI*

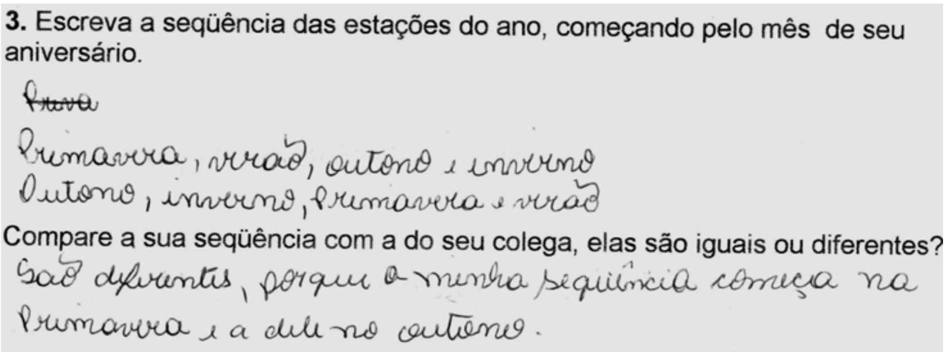
Após escrever as duas seqüências, esperamos que os alunos, ao compará-las, percebam que a ordem ocupada pelos elementos da seqüência é importante. Esperamos que os alunos as considerem iguais, caso todos os elementos sejam iguais e ocupem respectivamente a mesma posição nas seqüências, e, diferentes, caso isso não se verifique.

A atividade deveria ser resolvida usando apenas lápis e papel.

ANÁLISE *A POSTERIORI*

Os alunos apresentaram as seguintes respostas escritas:

Lucas e Julia



3. Escreva a seqüência das estações do ano, começando pelo mês de seu aniversário.

~~Prava~~

Primavera, verão, outono e inverno

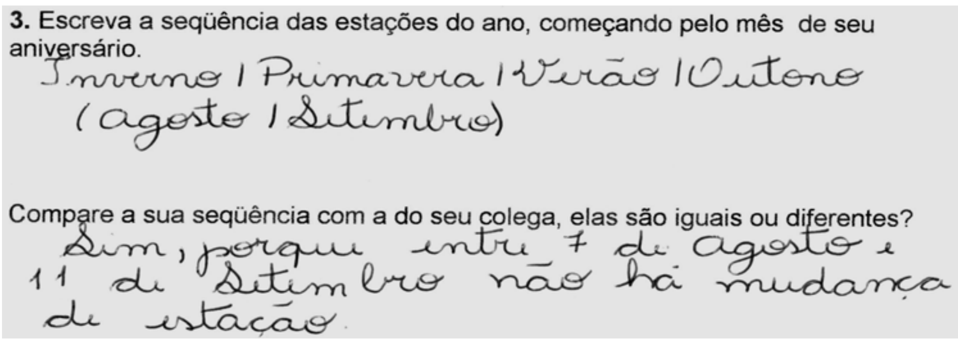
Outono, inverno, Primavera e verão

Compare a sua seqüência com a do seu colega, elas são iguais ou diferentes?

São diferentes, porque a minha sequência começa na Primavera e a dele no outono.

Figura 3.8- Respostas da Atividade 3

Alice e Ronaldo



3. Escreva a seqüência das estações do ano, começando pelo mês de seu aniversário.

Inverno | Primavera | Verão | Outono

(agosto | Setembro)

Compare a sua seqüência com a do seu colega, elas são iguais ou diferentes?

Sim, porque entre 7 de agosto e 11 de Setembro não há mudança de estação.

Figura 3.9- Respostas da Atividade 3

Observamos que as duplas resolveram corretamente a atividade. Os alunos perceberam que duas seqüências são iguais quando todos os seus elementos são iguais e ocupam, respectivamente, as mesmas posições na seqüência, sendo diferentes quando isso não ocorre.

ANÁLISE DO BLOCO 1

Neste bloco, nosso principal objetivo foi o de despertar o interesse do aluno na investigação de Padrões Numéricos e introduzir o conceito de Seqüência. Constatamos que o objetivo foi atingido, na medida em que os alunos discutiram e responderam a atividade.

Nas questões 1 e 2, ao apertarem o botão de verificação, tiveram o *feedback* do computador, possibilitando uma maior autonomia, oportunizando repensar a atividade. O aluno também se sentiu motivado, quando o computador apontou que o seu raciocínio estava correto.

Na atividade 3, utilizando lápis e papel, o aluno observou que duas seqüências são iguais quando seus elementos sãos os mesmos e ocupam as mesmas posições e, diferente, caso isto não ocorra.

3.3.2 Bloco 2: Sequência Numérica

ATIVIDADE 4. Na 82º corrida Internacional de São Silvestre os 5 primeiros colocados na prova masculina foram :

Colocação	Número de Inscrição	Nome	Pais
1º lugar	03	Franck Caldeira	Brasil
2º lugar	30	Clodoaldo Gomes	Brasil
3º lugar	12	Paulo Alves dos Santos	Brasil
4º lugar	56	Javier Guarin	Colômbia
5º lugar	46	João Ntyamba	Brasil

Complete :

Podemos colocar os números dos corredores de acordo com a sua ordem de chegada. O conjunto ordenado de números (03, 30, ___, ___, ___) seria a **seqüência** dos números dos corredores por ordem de chegada.

Figura 3.10- Atividade 4

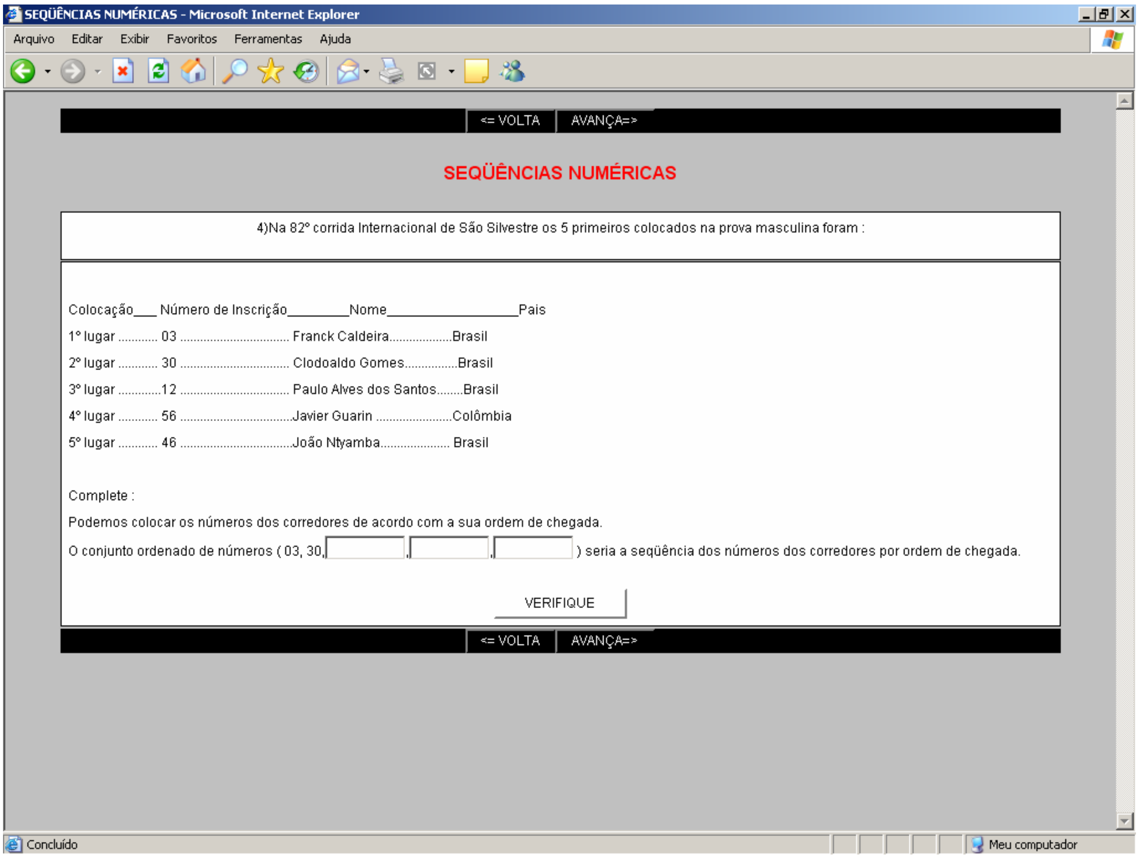


Figura 3.11- Tela do computador da Atividade 4

O objetivo dessa atividade é levar o aluno a construir uma Seqüência Numérica, a partir de uma situação prática, com o intuito de desenvolver seu conceito.

ANÁLISE *A PRIORI*

O aluno deve seguir o padrão descrito, ou seja, escrever os números dos corredores por ordem de chegada. Sua resposta aparecerá registrada na tela do computador. Acreditamos que não haverá dificuldades.

ANÁLISE *A POSTERIORI*

As duplas não apresentaram dificuldade para preencher a seqüência numérica. Observamos que os alunos, após fazerem a leitura do enunciado, identificaram o padrão da seqüência e preencheram corretamente as lacunas. Na verificação tiveram 100% de acerto.

ATIVIDADE 5. Em um concurso da Mega-Sena foram sorteados os seguintes números:

Sorteio	Número
1º	49
2º	02
3º	51
4º	25
5º	18
6º	33

O conjunto ordenado de números (49, 02, ___,___,___,___) é a seqüência dos números do concurso da Mega Sena por ordem de sorteio.

Escreva a seqüência dos números sorteados na ordem crescente :
(02, 18, ___,___,___,___).

Escreva a seqüência dos números sorteados na ordem decrescente:
(51, 49, ___,___,___,___).

Figura 3.12- Atividade 5

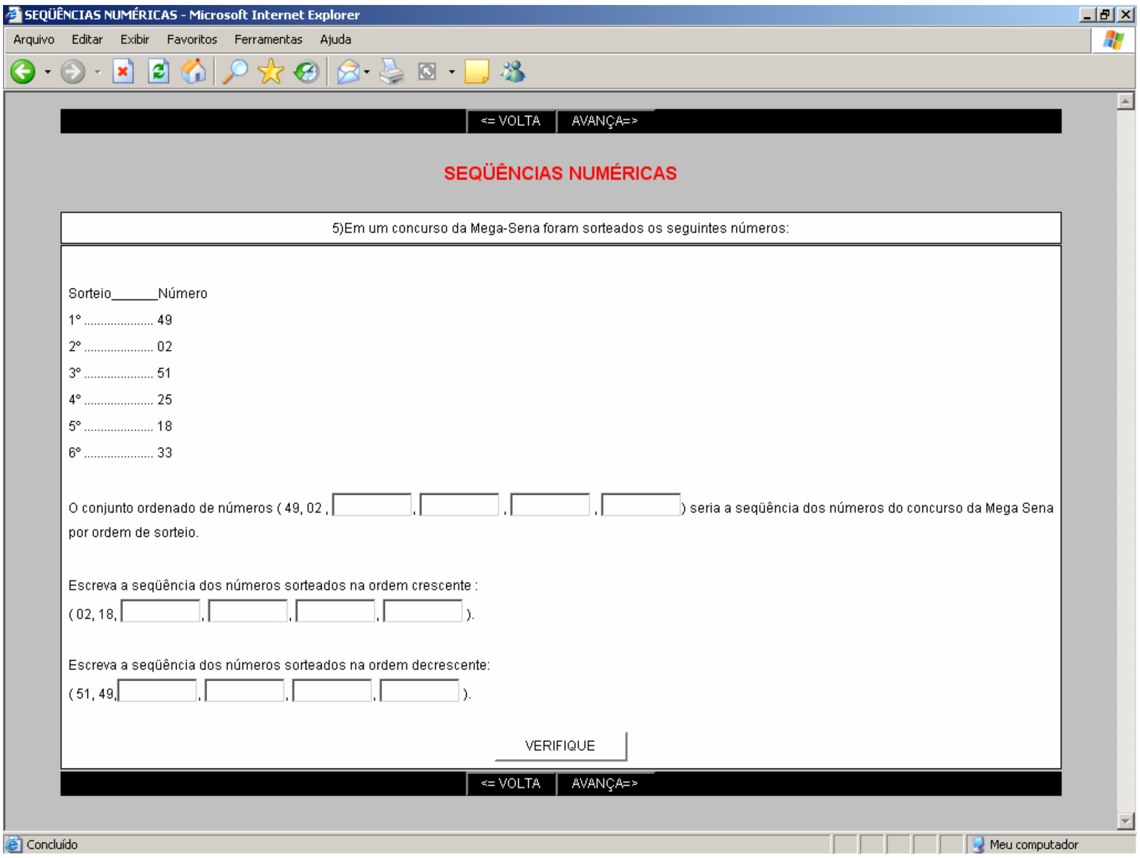


Figura 3.13- Tela do computador da Atividade 5

O objetivo desta atividade é levar o aluno a desenvolver o conceito de seqüência numérica a partir de uma situação prática.

ANÁLISE *A PRIORI*

Para resolver essa atividade o aluno deve completar os espaços, seguindo as orientações propostas , e sua resposta sairá registrada na tela do computador.

Com esta atividade o aluno prossegue desenvolvendo os conceitos de seqüência numérica. Esperamos levar o aluno à compreensão do que é uma seqüência numérica através de uma situação prática .

ANÁLISE *A POSTERIORI*

Como prevíamos os alunos não tiveram dificuldade para completar os espaços. Os alunos identificaram o padrão da seqüência e preencheram corretamente as lacunas.

ATIVIDADE 6. Escreva a seqüência dos números ímpares positivos até 12. Quantos números ou termos há nesta seqüência?

Figura 3.14- Atividade 6

O objetivo desta atividade é levar o aluno a construir uma seqüência numérica a partir de uma propriedade que os termos da seqüência apresentam.

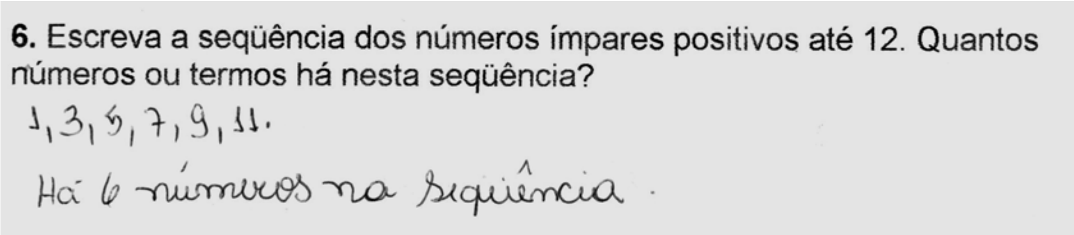
ANÁLISE *A PRIORI*

Esta atividade não tem um contexto relacionado ao dia-a-dia do aluno. No entanto, ela exige conhecimentos básicos de matemática e esperamos que o aluno a resolva sem dificuldades.

Deve ser resolvida pelo aluno usando apenas lápis e papel.

ANÁLISE *A POSTERIORI*

Lucas e Julia

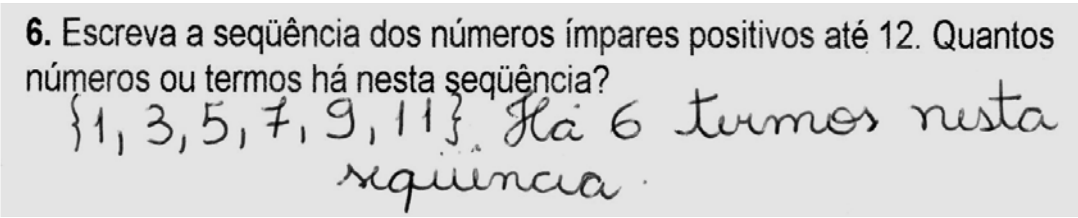

6. Escreva a seqüência dos números ímpares positivos até 12. Quantos números ou termos há nesta seqüência?

1, 3, 5, 7, 9, 11.

Há 6 números na seqüência.

Figura 3.15- Resposta da Atividade 6

Alice e Ronaldo


6. Escreva a seqüência dos números ímpares positivos até 12. Quantos números ou termos há nesta seqüência?

{1, 3, 5, 7, 9, 11}. Há 6 termos nesta seqüência.

Figura 3.16- Resposta da Atividade 6

As duplas resolveram esta atividade corretamente.

A dupla Alice e Ronaldo estava com dúvida se o zero era par ou ímpar. Como percebi que estavam discutindo sem conseguir chegar a uma conclusão, fiz a seguinte pergunta : “s*e fossemos considerar o número zero como par ou ímpar qual seria mais coerente considerá-lo*?” Responderam *“par*”. Esclarecida a dúvida, responderam corretamente a atividade.

ATIVIDADE 7. Escreva a seqüência os números pares positivos. Quantos números ou termos há nesta seqüência?

Figura 3.17- Atividade 7

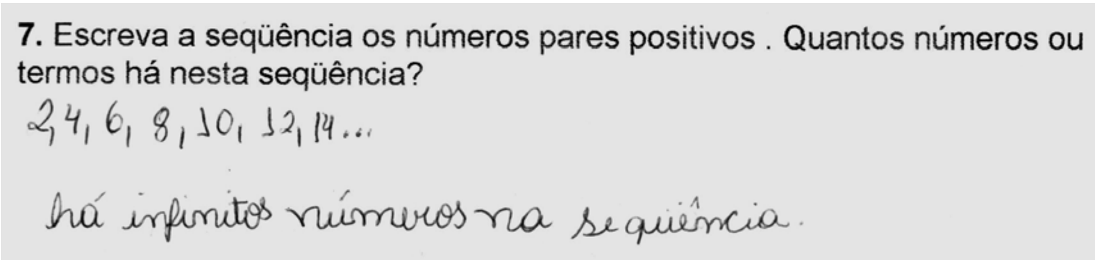
O objetivo desta atividade é levar o aluno a construir uma seqüência numérica a partir de uma propriedade que os termos da seqüência apresentam e classificá-la como uma seqüência infinita.

ANÁLISE *A PRIORI*

Esperamos que os alunos construam a seqüência e a reconheçam como uma seqüência infinita. Para resolver a atividade os alunos devem respondê-la usando lápis e papel.

ANÁLISE *A POSTERIORI*

Lucas e Julia



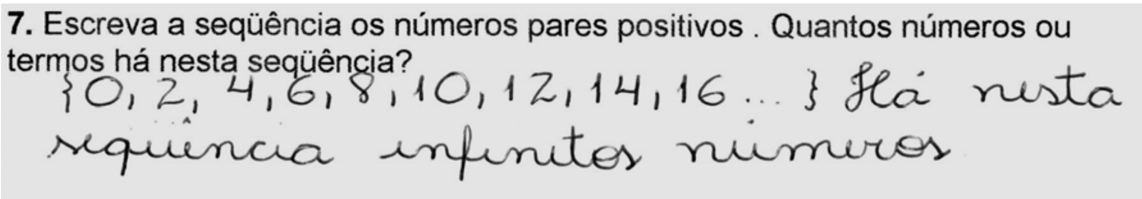
7. Escreva a seqüência os números pares positivos . Quantos números ou termos há nesta seqüência?

2, 4, 6, 8, 10, 12, 14...

há infinitos números na seqüência.

Figura 3.18- Resposta da Atividade 7

Alice e Ronaldo



7. Escreva a seqüência os números pares positivos . Quantos números ou termos há nesta seqüência?

{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16 ... } Há nesta seqüência infinitos números

Figura 3.19- Resposta da Atividade 7

A dupla Lucas e Julia não considerou o zero como número par, mas perceberam que a seqüência é infinita. Respondeu sem dificuldade.

A dupla Alice e Ronaldo iniciou corretamente a seqüência pelo número zero, não apresenta dificuldade para escrever a seqüência e responde corretamente que há infinitos números na seqüência.

ATIVIDADE 8. Escreva os elementos ou termos da seqüência formada por :

a)números múltiplos de 7 positivos .

b)números primos positivos .

Figura 3.20- Atividade 8

O objetivo desta atividade é levar o aluno a construir uma seqüência numérica a partir de uma propriedade que os termos da seqüência apresentam.

ANÁLISE *A PRIORI*

O aluno mobiliza conhecimentos matemáticos já adquiridos para construir a seqüência.

Nesta atividade, há possibilidade de que alguns alunos tenham esquecido a idéia de números múltiplos ou de números primos. Neste caso, o professor deve fazer uma mediação, no sentido de relembrar conteúdos, para dar ao aluno condições de responder a atividade.

Esperamos também que o aluno associe conhecimentos prévios , múltiplos e números primos, com o conhecimento novo sobre seqüência numérica.

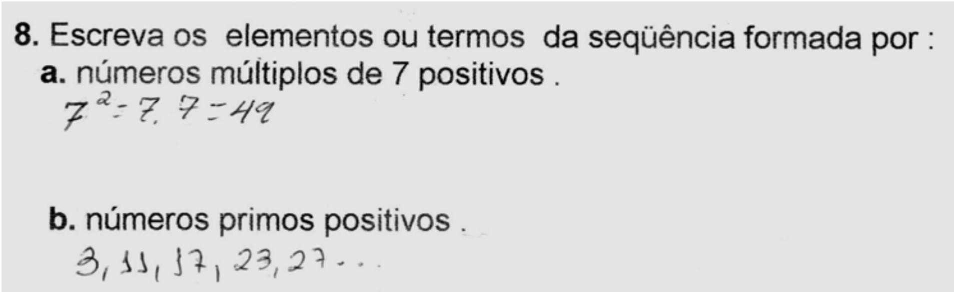
Devem responder a atividade usando somente lápis e papel.

ANÁLISE *A POSTERIORI*

Lucas e Julia

Item a:

Lucas: *Múltiplo de 7, Múltiplo de 7 é 77*
Julia: *Como assim?*
Lucas: *7 e 7.*
Julia: *Na.*
Lucas: *Múltiplo, a palavra múltiplo, triplo é 3 vezes.*
Lucas: *Múltiplo de 7 é 2 vezes.*
Julia: *É dobro isso.*
Lucas: *Então múltiplo de 7 é 7 vezes 7 ... 49 ... é isso ?*
Lucas*: Múltiplo é ele vezes ele mesmo que dá 49.*
Lucas: *Múltiplo de 7 é 7 ao quadrado ...7 vezes 7 ... 49*
Julia: *49.*



8. Escreva os elementos ou termos da seqüência formada por :

a. números múltiplos de 7 positivos .

$7^2 = 7.7 = 49$

b. números primos positivos .

3, 11, 17, 23, 27 . . .

Figura 3.21- Resposta da Atividade 8

Item a:

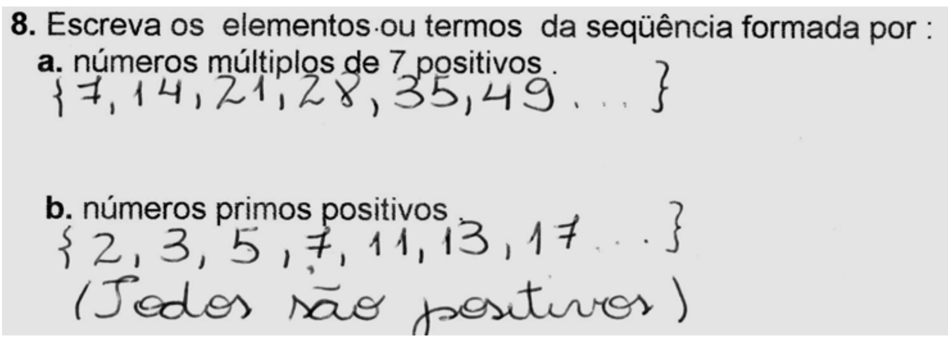
Notamos que a dupla não domina o conceito de números múltiplos. Pelo diálogo, a dupla considera múltiplo de 7 como sendo número elevado ao quadrado. Também não compreenderam o enunciado, pois a resposta deveria apresentar uma seqüência de números e não um único valor.

Item b:

Também demonstraram não dominar o conceito de número primo. Não consideraram o 2 , 5 , 7 e 13 como primos, e consideram o 27 como número primo.

Alice e Ronaldo

Alice: *7, 14, 21, 28, 35, 42, 49.*
Ronaldo*: 7, 14, 21, 28, 35, 49, 56. Não ta faltando algum número não ?*
Alice : *O zero ?*
Ronaldo *Não .... 7, 14, 21, 28.*
Alice : *Não começa pelo zero este?*
Ronaldo*: Múltiplos de 7*
Alice: *Não né ?*
Alice: *Começa por 7 ?*
Ronaldo: *Calma, calma agora você me pegou.*
Ronaldo*: Começa pelo próprio 7.*



8. Escreva os elementos ou termos da seqüência formada por :

a. números múltiplos de 7 positivos .

{7, 14, 21, 28, 35, 49 . . . }

b. números primos positivos

{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 . . . }
(Todos são positivos)

Figura 3.22- Resposta da Atividade 8

Item a:

Leram o enunciado, discutiram e logo apresentaram a resposta .

Ficaram na dúvida se o zero era número de múltiplo de 7, concluíram que não era.

Item b:

Responderam corretamente a atividade sem dificuldades.

Nesta atividade, a dupla Lucas e Julia não construiu as seqüências numéricas solicitadas, pois não domina as idéias de números múltiplos ou de números primos. Embora prevíamos que deveria ocorrer mediação do professor, neste caso não foi feita. Isso ocorreu por falha do professor, pois estávamos mais atentos à outra dupla e como eles estavam caminhando bem, não nos atentamos à dupla Lucas e Julia que, por sua vez, não solicitou auxílio, prosseguindo para o próximo exercício.

ATIVIDADE 9. Complete as seqüências :

a)(1,6,11, _____, _____, _____, _____)

b)(12,12,12, _____, _____, _____, _____, . . .)

c)(2 , 6, 18 , _____, _____, _____ ...)

d)(4,7,4,7,4,7, _____, _____, _____, _____, . . .)

e)(–3,–7,–11, _____, _____, _____, _____)

Figura 3.23- Atividade 9

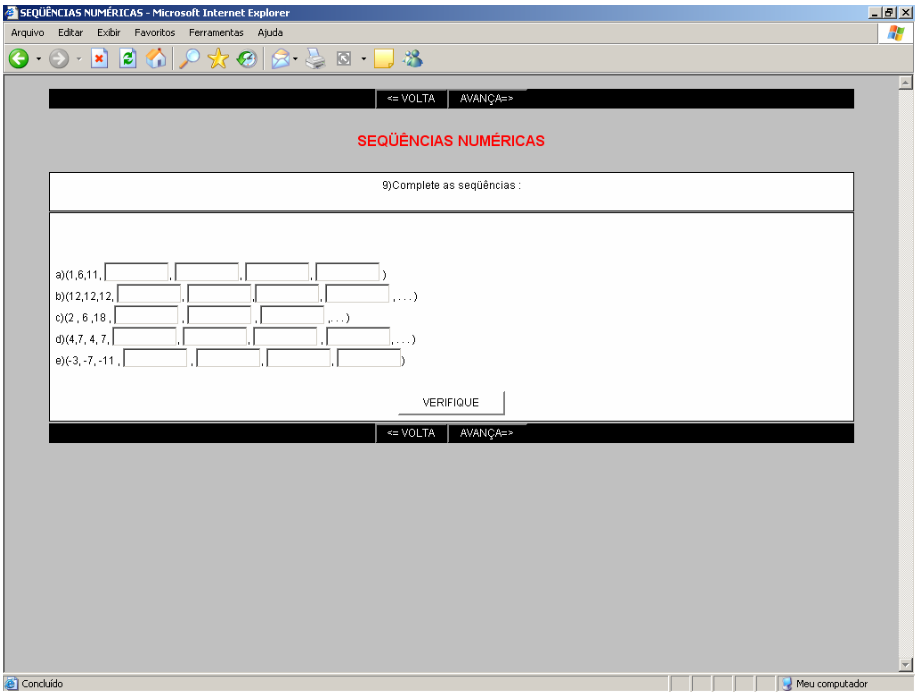


Figura 3.24-Tela do computador da Atividade 9

O objetivo desta atividade é levar o aluno a identificar o padrão e construir a respectiva seqüência.

ANÁLISE *A PRIORI*

O aluno, por meio da variação dos primeiros termos da seqüência, determina o seu padrão, completando os espaços em branco na tela do computador.

No item (a) esperamos que o aluno identifique que um mesmo valor seja somado a um termo constante que é igual a 5 e complete a seqüência da seguinte forma: (1, 6, 11, 16, 21, 26, 31). No item (b), o aluno deve reconhecer que se trata de uma seqüência constante e esperamos a seguinte resposta: (12, 12, 12, 12, 12, 12,12, ...). No item (c), o aluno deve descobrir que um mesmo valor está sendo multiplicado termo a termo. São válidos dois raciocínios, ou seja, o aluno pode pensar que está multiplicando por 3 ou o triplo em relação ao anterior e esperamos que respondam: (2, 6, 18, 54, 162, 486, ...). No item (d), o aluno tem que reconhecer que a seqüência é alternante e que os valores se alternam em 4 e 7. Esperamos a seguinte resposta: (4, 7, 4, 7, 4, 7, 4, 7, 4, 7, 4, 7...). No item (e), que o mesmo valor está sendo somado a um termo constante, que é o – 4, ou diminuindo 4 e complete a seqüência da seguinte forma: (-3, -7, -11, -15, -19, -23, -27).

Todos os itens desta atividade deverão ser respondidos no computador.

ANÁLISE *A POSTERIORI*

Lucas e Julia

.

Item a:

> ***Julia****: 17, eu acho.*
> ***Lucas:*** *É para colocar um número de cada ou três de cada vez.*
> ***Lucas****: Acho que é de três em três*
> ***Julia:*** *Três em três ?*
> ***Lucas****: 11, 16, 21.*
> ***Julia:*** *11 com 6, 17.*
> ***Lucas:*** *12 já tá aqui.*
> ***Lucas:*** *12, 17, 22.*

> ***Julia**: Haaa…*
> ***Lucas:** 12, 17, 22.*
> ***Julia:** Acho que não é isso não, porque do 1 pulou pro 6 do 6 pulou pro 11.*
> ***Julia:** Uma diferencia de 6.*
> ***Lucas:** 5 números.*
> ***Julia:** Aqui vai ser 15 não 16*
> ***Lucas:** Tipo aquela lá que a gente vez no início, aqui vai aumentando um número 12 17 2,2.*
> ***Julia:** Vamos tentar assim depois a gente vem com outro método.*

Item b:

> ***Lucas**: 22. 22. 22.*
> ***Julia:** Por que ?*
> ***Lucas**: 22, 22, 22, 33, 33, 33.*
> ***Julia:** Por que 22 ?*
> ***Lucas:** Ta aumentando de 10 em 10. .*
> ***Lucas:** È a lógica.*

Item c:

> ***Lucas**: 2, 4, 6, 8.*
> ***Lucas:** Isso aqui que eu to pensando não pode repetir ou será que pode*
> ***Lucas:** Aumenta de 4.*
> ***Julia:** Haaa...*
> ***Lucas:** Aumenta 4 né.*
> ***Julia:** Calma deixa ver se é isso mesmo.*

Item d:

> ***Lucas**: 4, 7, 4, 7.*
> ***Lucas:** 14, 17, 14, 17.*
> ***Julia:** Por que ?*
> ***Lucas:** Ta aumentando de 10 em 10 ..*
> ***Julia:** Acho que ele que é um dentro do negocinho .*
> ***Lucas:**Um número dentro?*
> ***Lucas:** Não pode ser porque ele quer a seqüência.*
> ***Lucas:**Se não der a gente volta.*

Item e:

> ***Lucas:** Seria de 10 em 10.*
> ***Lucas:** De 10 em 10 diminui de – 10.*
> ***Lucas**: – 13 –15 – 17*
> ***Lucas**: – 23*
> ***Julia:** É*

A dupla apresentou dificuldade para completar as lacunas que deveriam ser preenchidas.

Inicialmente, não compreendeu que cada espaço deveria ser preenchido com apenas um número, preenchendo cada espaço com três números.

A dupla acionou o botão de verificação e as respostas estavam erradas. Neste momento, pediram auxilio, pois estava com muitas dúvidas.

Na mediação, observei primeiro o preenchimento e a lógica utilizada e, em seguida, orientei a iniciar a atividade novamente fazendo a atualização da página. Orientei que cada espaço deveria ser preenchido com apenas um número, e eles deveriam ter como referência a variação dos primeiros números da seqüência.

A dupla retomou a atividade.

Item a:

> ***Julia***: *21.*
> ***Lucas:*** *É para somar.*
> ***Julia***: *Coloca 21 tem de ser.*
> ***Julia***: *26.*

Idem b:

> ***Julia:*** *Coloca 22.*
> ***Lucas:*** *É tudo igual.*
> ***Julia***: *Verifica.*
> ***Lucas:*** *Não é.*
> ***Lucas:*** *12, 12, 12.*
> ***Julia***: *Verifica.*
> ***Julia :*** *É isso.*
> ***Lucas:*** *É nunca ia imaginar.*

Item c:

> ***Lucas:*** *Tá aumentado 4.*
> ***Lucas:*** *22, 26, 32, 36.*
> ***Lucas::*** *Aqui é mais 4.*
> ***Lucas:*** *Tá errado.*
> ***Lucas:*** *Não ta aumentando de 16 em 16 4 com 12.*
> ***Julia:*** *Tenta ai 16.*
> ***Julia:*** *12 com 4, 16.*
> ***Lucas***: *20. 28, 34.*

Como estavam com dificuldade, pediram auxilio. Nesta nova mediação, orientei que, para determinar os outros termos da seqüência, é necessário encontrar um número de tal forma que, multiplicando por um mesmo valor cada termo se obtenha os demais.

Os alunos retomaram a atividade , item (c):

> ***Lucas:*** *A diferença de 2 e 6 é 4.*
> ***Julia***: *Multiplica por 4.*
> ***Lucas***: *Vamos fazer 4 vezes.*

Como a dupla continuava com dificuldade e já havia despendido bastante tempo deste item, decidi auxiliar novamente. Orientei a multiplicar por três para completar a seqüência.

> ***Lucas:*** *54.*
> ***Julia:*** *416.*
> ***Julia:*** *Verifique.*
> ***Lucas:*** *Está certo.*

Item d:

***Lucas**: 4, 7,4, 7, 4, 7.*
***Julia:** Verifique .*

Item e:

***Julia:** – 13 – 15 – 17 – 19.*
***Lucas:** Ta errado.*
***Lucas:** – 15 – 19 – 23.*

Os alunos completaram corretamente, de acordo com o que solicitado inicialmente.

Alice e Ronaldo
Item a:

***Alice**: 1, 6, 11.*
***Ronaldo**: Complete a seqüência ta uma seqüência crescente*
***Alice**: 1+5 6 ; 6+5 11 ; 11 + 5 16*
***Ronaldo**: Aqui vai ?*
***Alice:** 16.*
***Alice:** 16 + 5 21 ; 21+ 5 26 ; 26 + 5 31.*

Item b:

***Ronaldo :** 12, 12, 12, 12, 12, 12.*

Item c:

***Ronaldo**: 2, 6, 18.*
***Alice:** De 2 para 6*
***Ronaldo:** 2 vezes 3*
***Alice:** 6.*
***Ronaldo:** 6 vezes 3*
***Alice**: 18*
***Ronaldo:** 18 vezes 3*
***Alice**: 54*
***Alice:** 162 486*

Item d:

***Ronaldo**: 4 7 4 7 4 7*

Item e:

***Ronaldo**: – 3 – 7 – 11*
***Alice:** – 15*
***Ronaldo:** 3 para 7 4*
***Alice:** 7 para 11 4*
***Ronaldo**: 11 para 15 4 então – 15*
***Alice**: – 19 – 23*
***Ronaldo:** Não é por 5*
***Alice:** É por 4*

A dupla não apresentou dificuldade com esta atividade. Como previsto, identificou o padrão, analisando a variação dos primeiros termos da seqüência e completou os espaços.

ATIVIDADE 10: Observe a seqüência (9 , 9 , 9 , . . .), complete escrevendo :

O valor do primeiro termo da seqüência é _____.
O valor do segundo termo da seqüência é ______.
O valor do terceiro termo da seqüência é ______.
O valor do décimo termo da seqüência é ______.
O valor do centésimo termo da seqüência é ______.
O valor de um termo qualquer da seqüência é _____.

Figura 3.25- Atividade 10

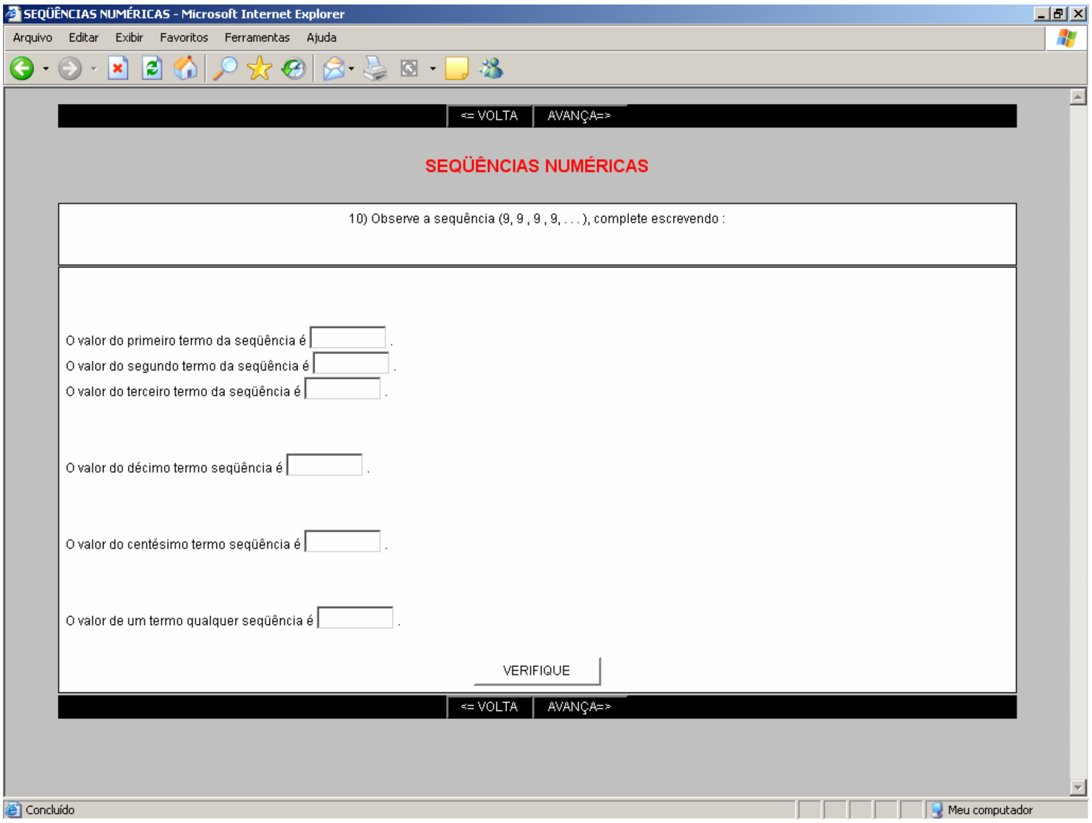


Figura 3.26- Tela do computador da Atividade 10

O objetivo desta atividade e levar o aluno a iniciar a compreensão da linguagem matemática utilizada e generalizar uma seqüência .

ANÁLISE *A PRIORI*

Pela nossa experiência, sabemos que inicialmente alguns alunos apresentam dificuldade na leitura e compreensão da simbologia matemática que indica a posição do termo a_1, a_2, ... É comum o aluno confundir o valor do termo com o índice de localização do termo, ao invés de escrever $a_5=9$, por exemplo, escreve $a_5=5$.

Alguns alunos apresentam dificuldade em compreender o significado do termo geral a_n, por isso, primeiro, optamos por uma seqüência constante cujo termo geral é de fácil visualização e identificação.

Prevendo está dificuldade, estruturamos está atividade de fácil resposta e utilizando a língua natural.

Esta atividade deve ser realizada no computador.

ANÁLISE *A POSTERIORI*

Lucas e Julia

> **Lucas**: *9, 9, 9, 9.*
> **Julia:** *Por que ?*
> **Lucas:** *9, 9, 9, 9 é infinito.*
> **Lucas:** *O valor do centésimo termo é 9.*

Alice e Ronaldo

> ***Ronaldo:*** *9, 9, 9, 9.*
> ***Ronaldo:*** *9*
> ***Alice:*** *9*
> ***Ronaldo****: O centésimo termo é nove.*
> ***Ronaldo:*** *Um termo qualquer da seqüência é 9.*

As duplas não tiveram dificuldades para responder esta atividade.

Os alunos determinaram com facilidade o padrão desta seqüência e identificaram os termos da seqüência que foi pedido. Também obtiveram a generalização desta seqüência ao perceberem que todos os termos possuem valor igual a nove. Consideramos que esta atividade vai facilitar ao aluno a compreensão da linguagem matemática envolvida.

ATIVIDADE 11. Indicar a posição dos elementos de uma seqüência facilita nosso trabalho, assim vamos chamar de a_1 o primeiro termo da seqüência, a_2 o segundo termo, a_3 o terceiro termo , a_4 o quarto termo, e assim por diante.

a) Considere a seqüência (3,8,3,8, . . .) :
O primeiro termo a_1 de índice ímpar é igual a ________.
O segundo termo a_2 de índice par é igual a ________.
O termo a_{51} é igual a _________. Justifique seu raciocínio
O termo a_{100} é igual a _________. Justifique seu raciocínio

b)Vamos utilizar a_n para representar um termo qualquer da seqüência.

$$a_n = \begin{cases} 3\text{ , se o índice n é um número \_\_\_\_\_\_.} \\ 8\text{ , se o índice n é um número \_\_\_\_\_\_.} \end{cases}$$

Figura 3.27- Atividade 11

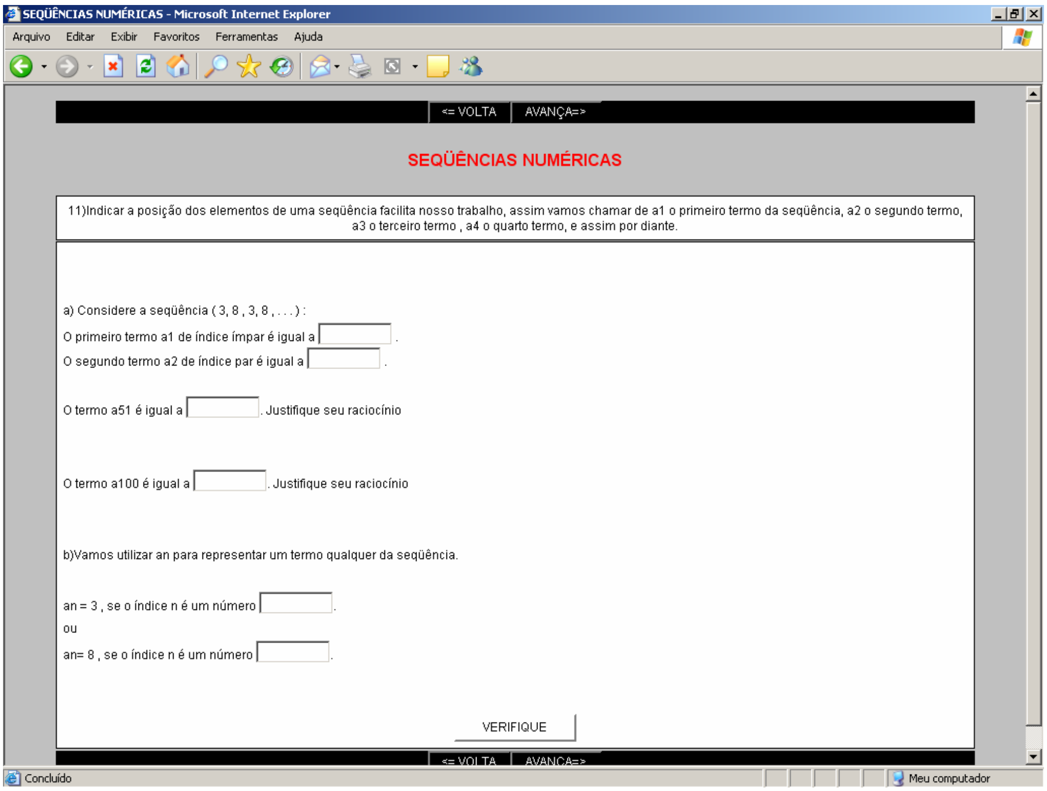


Figura 3.28- Tela do computador da Atividade 11

O objetivo desta atividade é levar o aluno a compreensão da linguagem matemática utilizada e a determinar o termo geral da seqüência dada.

ANÁLISE *A PRIORI*

Nesta atividade, além do aluno desenvolver o aprendizado da linguagem matemática utilizada para localizar os termos da seqüência, também é exigido que ele obtenha o termo geral da seqüência.

O item (a) tem por finalidade levar o aluno a identificar o valor de certos termos da seqüência. Os valores dos termos a_{51} e a_{100} podem ser determinados de duas maneiras. A primeira, é construindo a seqüência até o termo $a_{51,}$ prosseguindo até o termo a_{100}, porém acreditamos ser improvável tal solução, por ser muito trabalhosa. A segunda maneira de determinar o valor dos termos a_{51} e a_{100}, é a relação entre o índice do termo e o seu valor. Esperamos que o aluno perceba a relação existente entre a variação do índice de posição do termo com o seu valor, desenvolvendo o seguinte raciocínio: para a_{51} o índice é ímpar, então o seu valor é 3 e, para $a_{100,}$ o seu índice é par, então o seu valor é 8.

No item (b), pretendemos que o aluno generalize, escrevendo a fórmula do termo geral, do seguinte modo: a_n= 3 se n é ímpar e a_n = 8 se n é par.

Escolhemos uma seqüência alternante por ser de fácil determinação dos termos, inclusive do termo geral. Por isso, não acreditamos que o aluno encontre dificuldade para respondê-la.

Para resolução desta atividade o aluno deve completar os espaços, e sua resposta registrada na tela do computador, como também usar lápis e papel, pois deve justificar as respostas.

Podemos classificar esta atividade, como de iniciação a prova segundo Balacheff et al. (2001), pois pra determinar os valores dos termos a_{51}, a_{100} e a generalização da seqüência $a_{n,}$ o aluno desenvolve um raciocínio dedutivo ao relacionar o índice com o valor do termo.

ANÁLISE *A POSTERIORI*

Lucas e Julia

Lucas : *3, 8, 3, 8*
Lucas *: a_1 índice ímpar é igual a*
Julia*: 3*
Lucas : *Haaa*
Julia: *3 e a outro 8*
Lucas *: É só 3 ou 3,8*
Julia: *8*
Lucas *: O termo a_{51} justifique seu raciocínio*

***Lucas** : Justificar na folha, não da para colocar aqui não.*
***Julia:** Aqui*
***Lucas :**Aqui não dá*
***Lucas** :O termo a_{51} é*
***Julia:** É igual a 8 justifique seu raciocínio.*
***Lucas** :É igual a 1.*
***Julia**: É igual a 8. Coloca ai pra gente ver.*
***Julia:**Escreve ímpar e aqui coloca par e verifica pra ver se esta certo.*
***Lucas**: Vamos responder tudo antes .*
***Julia**:E se tiver errado.*
***Lucas:** A gente volta.*
***Lucas**: a_n é 3 se o índice é um número ?*
***Julia**: 1*
***Lucas**: a_n é 8 se o índice é um número ?*
***Julia**: 4*
***Julia**: Porque na seqüência o número vai ser 1 ou 4 8 ou 4*
***Lucas**: Aqui é 4 ?*
***Julia:** 6*
***Lucas:** Por que 6?*
***Julia:** Porque 8 é par 4 6 8*
***Julia:** Verifica*
***Julia:** Tá errado*

Os alunos responderam corretamente o valor dos termos a_1 e a_2, respectivamente, 3 e 8. Para os termos a_{51} e a_{100} responderam respectivamente, par ou ímpar. Esta resposta demonstra que os alunos não atentaram que a resposta é o valor do termo da seqüência, responderam ímpar para o termo a_{51} pelo seu índice ser ímpar e para a_{100}, pois o índice é par, em nenhum momento da discussão os alunos demonstraram estarem pensando nos valores dos temos 3 ou 8. Para o termo geral, os alunos responderam 1 para a_n igual a 3 e 4 ou 6 para igual a 8. Apenas pela discussão, é difícil entender o raciocínio utilizado para esta resposta dada. Após a verificação, retomaram a atividade buscando corrigir os itens que estão incorretos.

Lucas: É igual a 3
Lucas: a_1 é um número ímpar a_3 é ímpar.
Lucas: Leitura.
Julia: Coloca a_1
Lucas: Acho que é a_2
Julia: Tem de somar os números ímpares.
Julia: 4 com 2, 6.
Julia: Tira o a pra ver.
Julia: Embaixo coloca o 1
Lucas: 10 e zero
Lucas: 15 não é
Julia: 3 vezes 1 4 vezes 2 8. Deixa ver.
Lucas: 3 e 8
Lucas: Tá certo
Julia: Falei para prestar atenção.
Lucas: Tava claro.
Lucas: *a_n é 3 se o índice n é um número ímpar .*
Julia: *É par.*
Julia: *Olha a gente inverteu. A gente tinha colocado em cima.*

Observamos que a dupla estava buscando calcular valores para dar a resposta, acreditava que a resposta dependia de uma conta. Os alunos, após várias tentativas conseguiram identificar o padrão da sequência e generalizar. No item (a), completaram corretamente a_{51} com 3 e a_{100} com 8 e, no item (b), completaram corretamente com as palavras “ímpar” e “par”.

Observamos que a dupla não justificou o item (a) no papel.

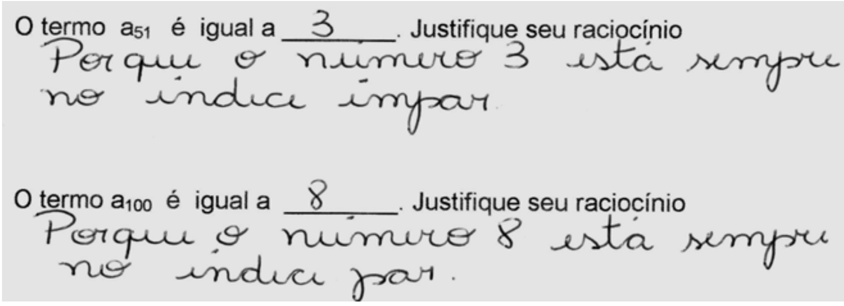
Alice e Ronaldo

> **Ronaldo:** *Leitura*
> **Ronaldo:** *3 e 8 3 e 8*
> **Ronaldo:** *O primeiro termo de índice ímpar é*
> **Alice:** *O que é índice ?*
> **Alice:** *É o número que fica aqui.*
> **Alice:** *O primeiro número de índice ímpar é 3,8.*
> **Ronaldo:** *Mas, mão é só 3 e 8 .*
> **Alice:** *Eu acho que é 3,8*
> **Ronaldo:** *O termo a_1 não é 3.*
> **Alice:** *Não é 3,8*
> **Ronaldo:** *Mas tem este monte de vírgula.*

Como tinham dúvidas, pediram auxilio ao professor. Orientei para colocar os valores e acionar a verificação, desta forma eles poderiam descobrir se estão certos ou errados. Porém, a dupla optou por examinar as atividades anteriores já respondidas para elucidar a dúvida.

> **Alice:** *Acho que é decimal.*
> **Ronaldo:** *Acho que é normal, pois se fosse 3,8 colocaria ponto e vírgula entre os termos.*
> **Alice:** *O outro tava igual 4 7 4 7.*
> **Ronaldo:** *Não veja só, nos espaços a gente colocou em cada espaço 4 ou 7 sucessivamente.*
> **Ronaldo:** *Termo a_{51} ... justifique seu raciocínio.*
> **Ronaldo:** *Veja bem, 3 cai no ímpar*
> **Ronaldo:** *8 cai no par; 3 ímpar e 8 no par assim sucessivamente.*
> **Ronaldo:** *Porque o 3 tá caindo.*
> **Alice:** *Caindo é bom.*
> **Alice:** *Porque 3 tá representando os números ímpares.*
> **Ronaldo:** *Ta no índice ímpar . Sempre no índice impar.*
> **Ronaldo:** *O outro já é um número par   é o 8.*

Os alunos conseguiram descobrir uma relação entre os índices e os valores dos termos. Perceberam que para índice ímpar os termos têm valor 3 e, para índice par, os termos têm valor 8. Logo, completaram corretamente a_{51} com 3 e a_{100} com 8 e, na folha,escreveram a justificativa para sua resposta.


O termo a_{51} é igual a 3. Justifique seu raciocínio
Porque o número 3 está sempre no índice ímpar

O termo a_{100} é igual a 8. Justifique seu raciocínio
Porque o número 8 está sempre no índice par.

Figura 3.29- Resposta da Atividade 11

Ronaldo: *Vamos utilizar a_n para representar um termo qualquer da seqüência.*
Alice*: Ímpar ou par*
Ronaldo*: Ele quer a justificativa.*
Alice: *É par ou ímpar.*
Ronaldo: *O índice n é um número ímpar.*
Alice: *Acho que é .*

Os alunos identificaram o n como uma variável que corresponde a posição do termo, compreenderam sua função e sua variação 1, 2 , 3 ... . Como esperado, escreveram o termo geral, relacionando a_n igual a 3 para n ímpar e a_n igual a 8 para n par.

ATIVIDADE 12. Na seqüência (4,7,4,7,4,7,. . .)

Se a_n representa um termo qualquer da seqüência então :

$$a_n = \begin{cases} 4 \text{ , se n é \_\_\_\_\_\_\_.} \\ 7\text{, se n é \_\_\_\_\_\_\_.} \end{cases}$$

Figura 3.30- Atividade 12

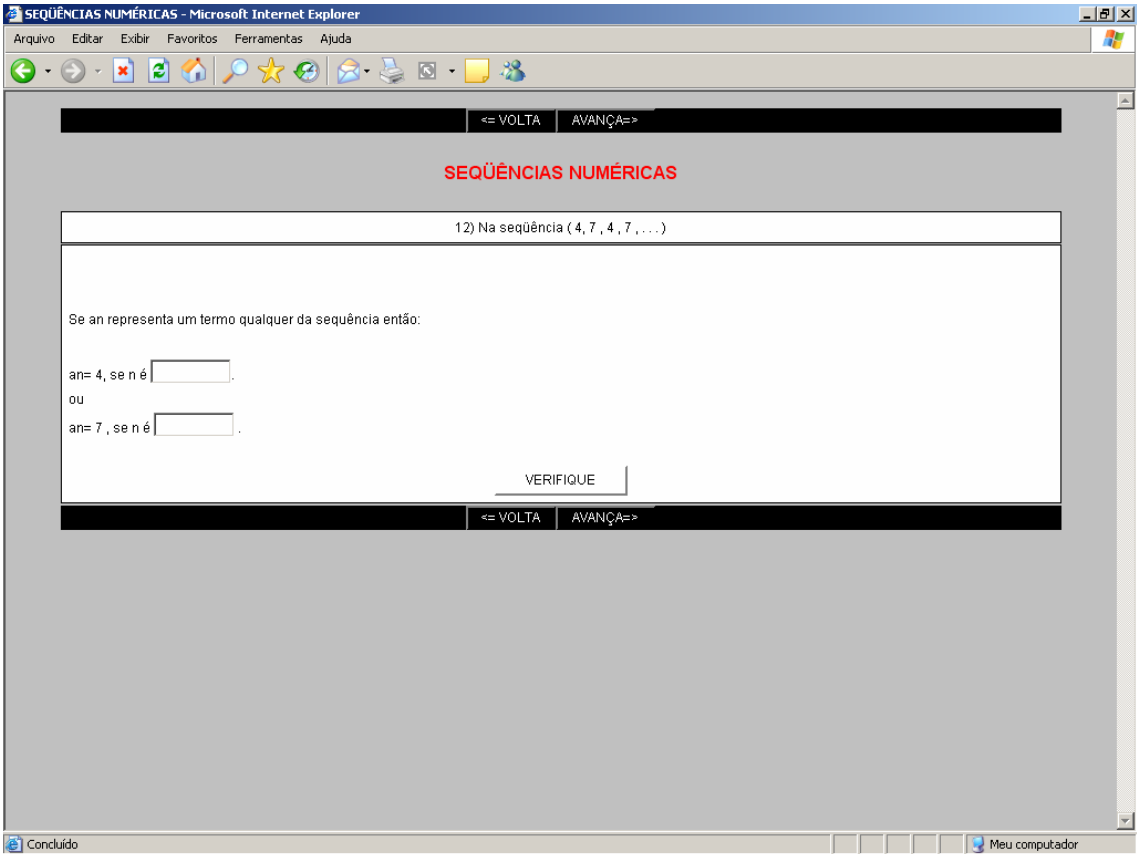


Figura 3.31- Tela do computador da Atividade 12

O objetivo desta atividade é levar o aluno a determinar o termo geral da seqüência dada e tentar consolidar os conhecimentos obtidos da atividade anterior.

ANÁLISE *A PRIORI*

Esperamos que o aluno relacione o índice do termo com seu respectivo valor e conclua que, nesta seqüência, quando o termo tem índice ímpar, o seu valor é 4 e, quando o termo tem o índice par, o seu valor é 7. A atividade deve ser feita usando o computador.

ANÁLISE *A POSTERIORI*

Lucas e Julia

> ***Lucas***: *É um número aqui.*
> ***Lucas***: *a_4*
> ***Julia***: *Acho que tem colocar número.*
> ***Julia***: *4, 7, 4, 7*

***Julia**: 4,7*
***Julia**: Aqui é 4,7*
***Lucas**: A debaixo é 7,4*
***Lucas**: 4, 7*
***Julia**: Não é*
***Lucas**: a_n*
***Julia**: 4,4*
***Julia**: 5,2*
***Lucas**: Não tem nada de multiplicação.*
***Julia**: A gente ta chutando.*

Como estavam com muita dificuldade orientei para observar como haviam respondido a questão 11. Os alunos, a princípio, não gostaram da orientação, provavelmente porque estão acostumados a ouvirem do professor uma explicação no sentido de como se faz a atividade. Mas retornaram atividade anterior, discutiram e logo responderam corretamente a atividade 12.

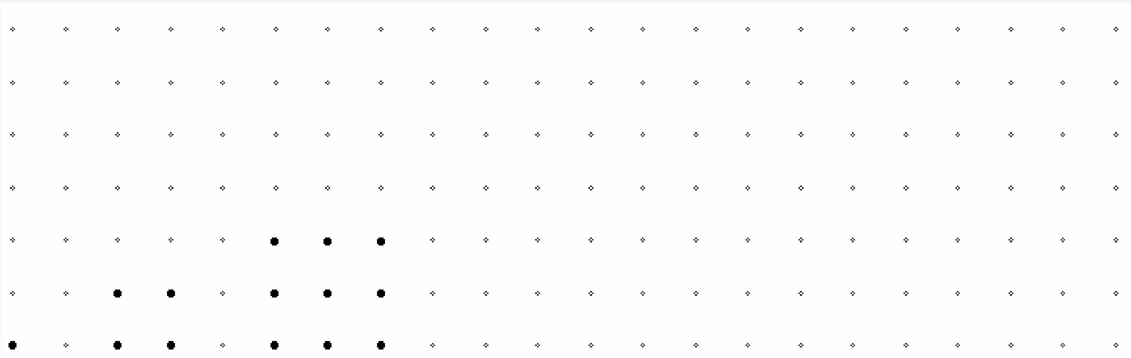
***Lucas**: Aqui* (atividade 11) *a gente colocou ímpar e par.*
***Julia**: Mas aqui a gente colocou, mas não é impar e par.*
***Lucas:** Par e ímpar.*
***Julia:** Falei.*

Alice e Ronaldo

***Ronaldo:** a_n é 4 se n é ?*
***Ronaldo:** 4 7 4 7*
***Alice:** n é par o 4 é par*
***Alice:** o n é 1 então ele ta no ímpar.*
***Ronaldo:** Então n é ímpar*
***Alice:** Vai.*
***Ronaldo:** Tá correto.*

A dupla não teve dificuldade para responder a atividade. Corretamente relacionou o índice com o valor do termo, da seguinte forma: para índice ímpar o valor do termo é 4 e, para índice par, o valor do termo é 7 .

ATIVIDADE 13. a)Desenhe as próximas duas figuras.



a_1 a_2 a_3

b)Escreva a seqüência correspondente ao número de pontos das figuras .

c)Complete a tabela

Termo	Números de pontos
a_1	
a_2	
a_3	
a_4	
a_5	

d) Escreva o trigésimo termo (a_{30}). Justifique seu raciocínio

e) Escreva o termo (a_{80}). Justifique seu raciocínio

f) Escreva termo (a_n) da seqüência. Justifique

Figura 3.32- Atividade 13

Os objetivos desta atividade são: levar o aluno a determinar o padrão de uma seqüência figural e, a partir dela, construir uma seqüência numérica; e também determinar a fórmula do termo geral desta seqüência .

ANÁLISE *A PRIORI*

Através da observação da forma e do número de pontos apresentados pela seqüência figural, o aluno determina o padrão desta seqüência e desenha mais dois termos.

A partir da contagem dos pontos de cada termo da seqüência figural, o aluno constrói uma seqüência numérica correspondente.

A tabela facilita o aluno a perceber a variação dos valores dos termos da seqüência com o seu respectivo índice e procura buscar uma forma de determinar os valores dos termos a_{30} e a_{80}.

Para determinar os valores a_{30} e a_{80}, o aluno poderá até construir a seqüência e determinar os valores, porém escolhemos estes termos justamente para provocar a busca por outro tipo de raciocínio, pois para construir a seqüência com tantos termos se torna muito trabalhoso.

O aluno pode desenvolver um raciocínio tomando por referência a seqüência figural e, desta forma, perceber que o total de pontos da figura corresponde à multiplicação do número de pontos da vertical com a horizontal ou podem desenvolver o raciocínio analisando a tabela, observando a variação dos índices de posição com os seus respectivos valores, e concluir que se $a_1=1.1=1$; $a_2=2.2=4$; $a_3=3.3=9$; $a_4=4.4=16$; então $a_{30}=30.30=900$ e $a_{80}=80.80=6400$.

Para determinar a fórmula do termo geral, esperamos que o aluno analise os resultados numéricos e conclua que $a_n = n.n$ ou $a_n = n^2$.

Os alunos possivelmente encontrarão dificuldades em determinar os termos a_{30} e a_{80}, pois não estão ainda habituados com esse tipo de atividade.

Outra dificuldade esperada pode ocorrer no momento de determinar a fórmula do termo geral e compreender o seu significado, acreditando, por exemplo, que o índice n tenha que ter um valor fixo e, portanto, não é possível calcular o valor ou, ainda, que a_n seja igual a n.

O professor, nesses casos, pode atuar como mediador, indicando alguma forma dos alunos perceberem o erro ou iniciarem nova investigação.

Todos os itens dessa atividade devem ser resolvidos usando somente lápis e papel.

Podemos classificar esta atividade como de iniciação a prova segundo Balacheff et al (2001), pois o aluno ao relacionar o índice com o valor do termo para determinar os valores dos termos a_{30} e a_{80} e a generalização da seqüência, desenvolve um raciocínio dedutivo.

ANÁLISE *A POSTERIORI*

Lucas e Julia

Lucas*: Desenhe as próximas duas figuras*
Julia: *Olha a (atividade)14.*
Lucas: *São duas figuras.*
Julia*:Aqui também.*
Lucas:*Aqui não sei o que é .*
Lucas*: É um quadrado e o outro também.*
Lucas*:O primeiro é um ponto e os outros são quadrados.*
Lucas:*Como é só um ponto não dá para ligar.*
Julia*: Olha são duas figuras. Aqui é um quadrado.*
Julia: *Não vai ser é um quadrado.*
Lucas:*Vão ser vários quadrados.*
Lucas*:Já sei vão ser paralelas.*
Julia: *São.*
Lucas*:Tô pensando em paralelas.*
Lucas*:Escreva a seqüência formada pelo número de pontos da figura.*
Julia: *Como assim? Escreva a seqüência?*
Lucas:*Quantos pontos tem ?*
Julia*: a_2 tem 1, 2, 3, 4.*
Lucas: *Escreva a seqüência 9.*
Julia: *4 vírgula 9.*
Lucas:*E aqui 4 né.*
Julia*: a_1 é 1   1 ponto.*
Julia*: É uma figura que tem 4 quadrados.*

Observei que os alunos estavam com dificuldades para desenhar os próximos termos da seqüência, ou seja, estavam com dificuldades para reconhecer o padrão da seqüência figural. A dupla entendeu que tinha que ligar os pontos e, desta forma, obter quadrados, pois estavam se baseando na atividade 14 onde isto era realmente necessário. Com a intenção de auxiliar a dupla formulei algumas perguntas e iniciei um diálogo.

Professor: *Vocês estão desenhando quadrados?*
Lucas: *Mas você não pediu para ligar?*
Professor: *Mas o enunciado não diz isso.*
Lucas*:Desenhe as próximas duas figuras.*
Lucas:*Veja o próximo exercício como é, esses pontos maiores são ligados.*
Lucas*:Mas é a mesma coisa.*
Julia*: Desenhe as próximas duas figuras. Aqui o nosso (atividade 13) também é e lá (atividade 14) ta ligado.*
Professor*: Aqui você desenha as duas figuras usando só os pontos.*
Julia*: Como assim ?*
Professor: *Não é para desenhar o quadrado. Forma a figura quando você marca os pontos.*
Lucas:*Esse aqui a gente poderia desenhar triângulos, é isso.*
Professor: *Não, só os pontos. Aqui 1 ponto, depois 4 pontos , 9 pontos. Quantos pontos terá a próxima figura ?*
Julia: *Desenhar uma figura não é ligar todos os pontos.*
Professor: *As figuras já estão desenhadas. Chamamos de seqüência figural. Qual é a próxima figura? Desenhe na malha.*
Professor: *Está seqüência tem um padrão . Você precisa procurar este padrão.*

A dupla permaneceu pensando e discutindo por mais alguns minutos e decidiu perguntar para dupla ao lado, Ronaldo e Alice, como ela resolveu a atividade.

> ***Julia:*** *Qual é a próxima figura?*
> ***Ronaldo:*** *O número de pontos forma o quadrado.*
> ***Julia:*** *Haaa... obrigado.*

Após o diálogo com a outra dupla, os alunos desenharam as figuras pedidas e fizeram a contagem dos pontos de cada termo da seqüência para responder o item (b) e (c) .

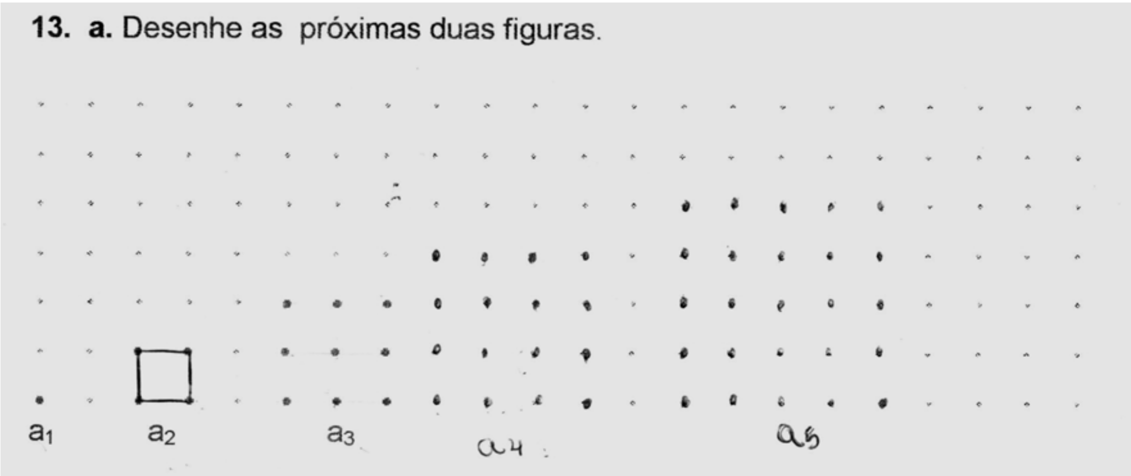
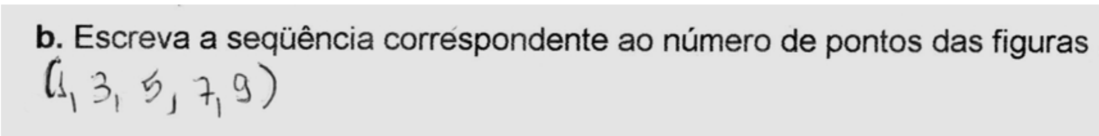


Figura 3.33- Resposta da Atividade 13 – item (a)

> ***Julia:*** *15*
> ***Lucas****:16*
> ***Julia****: 4 8 12 16*
> ***Lucas:****Ele que saber. Escreva a seqüência correspondente ao número de pontos da seqüência.*
> ***Lucas****:Seqüência.*
> ***Julia****: 1 4 para 9*
> ***Lucas:****Aqui seria o número de pontos será que ta aumentando 3.*
> ***Lucas****:não é de 3 em 3 .*
> ***Lucas****:Aqui aumenta 5.*
> ***Julia****: 9 16 aumentou 7.*
> ***Julia:*** *16 para 25 aumenta 9.*
> ***Lucas:*** *Aumenta 3,5, 7, 9.*
> ***Lucas:*** *Escreva a seqüência correspondente.*
> ***Lucas:*** *Está certo este aqui.*
> ***Julia:*** *Acho que está.*

Observamos que os alunos estavam buscando um padrão em relação ao aumento dos valores da seqüência. Perceberam que a diferença entre os termos da seqüência forma a seguinte seqüência: (1, 3, 5, 7, 9) . Apresentaram esta seqüência como resposta para o item (b). A resposta está incorreta.

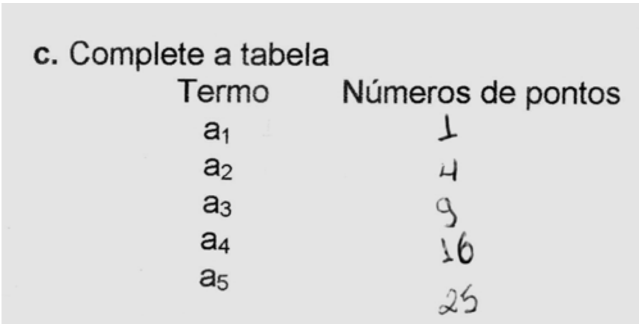


b. Escreva a seqüência correspondente ao número de pontos das figuras .

(1, 3, 5, 7, 9)

Figura 3.34- Resposta da Atividade 13- item (b)

O item (c) responderam corretamente e sem dificuldades.

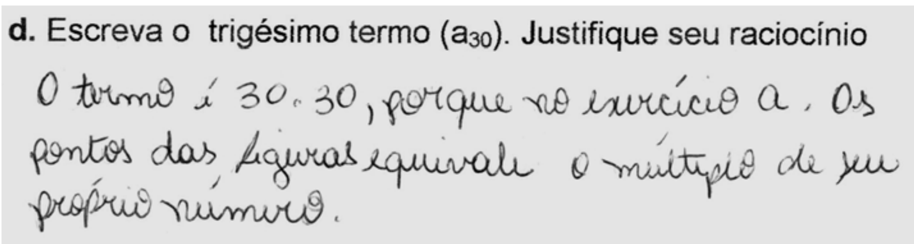


c. Complete a tabela

Termo	Números de pontos
a_1	1
a_2	4
a_3	9
a_4	16
a_5	25

Figura 3.35- Resposta da Atividade 13- item (c)

Lucas: *Escreva o trigésimo termo.*
Julia*: Isso aqui tá certo*
Lucas:*É isso sim.*
Julia: *O trigésimo termo.*
Lucas*:Vai ser 30 vezes 30 1 vezes 1 2 vezes 2.*
Lucas: *Por que ?*
Lucas: *Os pontos das figuras equivalem ao múltiplo de seu próprio número.*



d. Escreva o trigésimo termo (a_{30}). Justifique seu raciocínio

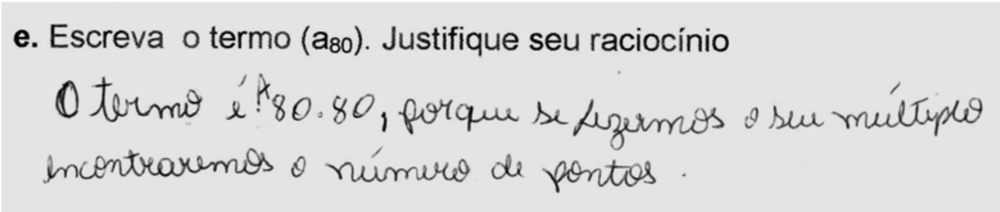
O termo é 30 . 30, porque no exercício a. Os pontos das figuras equivale o múltiplo de seu próprio número.

Figura 3.36- Resposta da Atividade 13- item (d)

A resposta da dupla para este item da atividade está parcialmente correta . Observaram que o número de pontos do trigésimo termo é trinta vezes trinta . Porém, na justificativa, os alunos confundiram número ao quadrado com número múltiplo. Provavelmente, “ múltiplo do seu próprio número”, significa que índice ao quadrado é igual o número de pontos da figura.

No item (e), procedem da mesma forma.

> ***Lucas****:Esse mesmo raciocínio aqui.*
> ***Lucas****:Porque nós utilizamos o mesmo raciocínio da questão anterior.*
> ***Lucas:****Ou a gente escreve a mesma coisa.*
> ***Julia:*** *Porque 80 vezes 80.*
> ***Julia:*** *Porque o múltiplo do número de pontos .*
> ***Lucas:****Porque utilizamos o mesmo número ao quadrado.*
> ***Lucas:****Tudo que a gente for falar dá na mesma.*

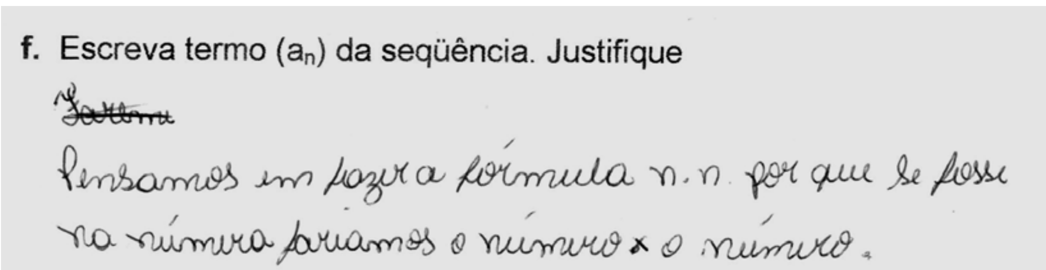

e. Escreva o termo (a_{80}). Justifique seu raciocínio

O termo é 80.80, porque se fizermos o seu múltiplo incontraremos o número de pontos.

Figura 3.37- Resposta da Atividade 13- item (e)

> ***Lucas****: n ao quadrado.*
> ***Lucas****:Se fosse como as outras seriam n vezes n , n ao quadrado.*
> ***Lucas:****Se for isso.*
> ***Lucas****: Aqui a gente tem de achar um número.*
> ***Professor:*** *Escrever uma fórmula.*
> ***Julia:*** *Porque se fosse uma fórmula numérica seria um número vezes um número.*
> ***Julia:*** *Porque a fórmula seria n vezes n.*

Os alunos tiveram dúvidas se a resposta compreendia um valor numérico ou uma fórmula, por isso pediram ajuda ao professor. Optei por dar uma resposta de forma mais direta, “escrever uma fórmula”, pois os alunos já estavam discutindo, levando em conta esta possibilidade. Observamos, pela justificativa, que a dupla estava insegura em apresentar uma resposta não numérica.


f. Escreva termo (a_n) da seqüência. Justifique

~~Fazemos~~

Pensamos em fazer a fórmula n.n porque se fosse na número faríamos o número x o número.

Figura 3.38- Resposta da Atividade 13- item (f)

Alice e Ronaldo

***Ronaldo**: Desenhe as próximas duas figuras.*
***Ronaldo:** A primeira é um ponto, um quadrado e a outra um quadrado maior.*
***Alice:** Tem uma seqüência aqui . Tem uma lógica.*
***Alice**: 1 foi pra 4 . Aqui é 16 quer ver .*
***Alice**: Aqui é 9, 1, 4, 9*
***Alice:**Mais 5.*
***Ronaldo**: Aqui ta aumentando 1 ponto.*
***Ronaldo**: Essa é a 1ª lógica.*
***Ronaldo:** O próximo (ponto) será aqui .*
***Ronaldo**: Aqui é só um quadrado.*
***Alice:** Pula um ponto e vai até aqui.*
***Ronaldo:** Exatamente.*
***Ronaldo:** No caso é 1 4 9 o outro vai ser 16.*
***Alice**: Aqui né*
***Ronaldo**: O próximo é 25.*
***Alice:** É aqui né*

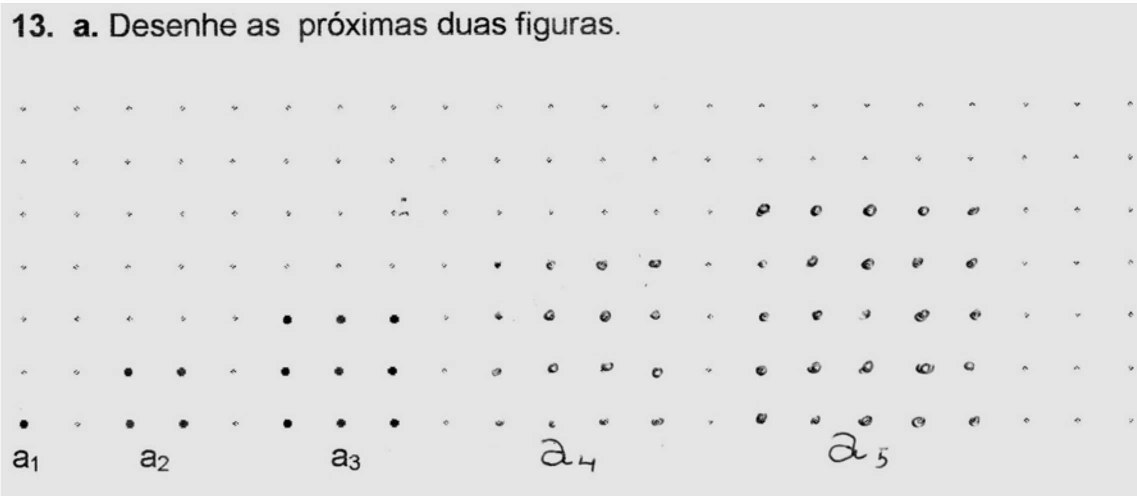
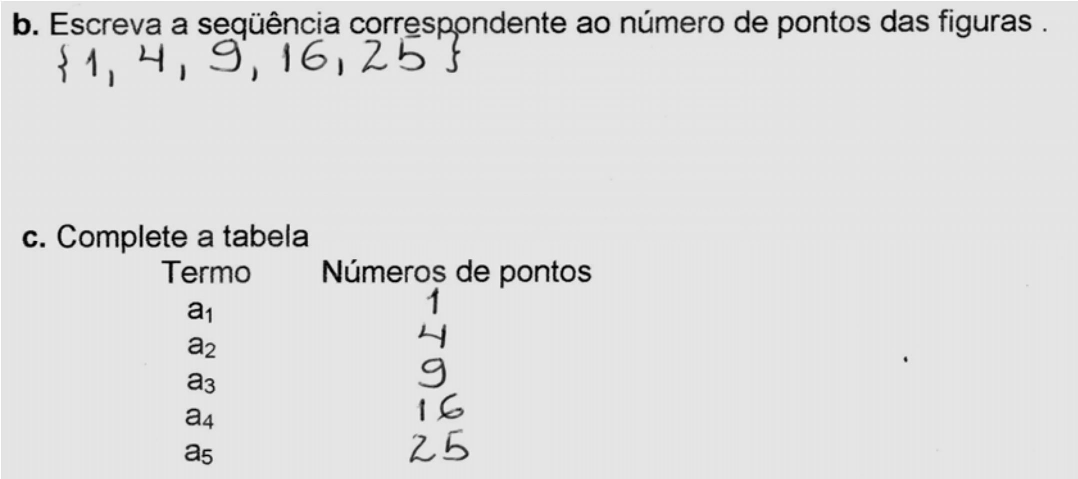


Figura 3.39- Resposta da Atividade 13- item (a)

***Ronaldo:** É ele vezes ele mesmo.*
***Ronaldo**: 1 vezes 1 é 1 ponto . Aqui é 2º 2 vezes 2 4*
***Ronaldo:** Aqui é 3º 3 vezes 3 9 . E vai indo.*
***Alice:** Escreva o número de pontos da figura.*
***Alice:** 1, 2, 3, 4.*
***Alice:** Seqüência de pontos então é 1, 4, 9, 16, 25.*
***Ronaldo**: O número multiplicado por ele mesmo.*
***Ronaldo**: a_1 1; a_2 4 ; a_3 9 ; a_4 16 ; a_5 5.*


b. Escreva a seqüência correspondente ao número de pontos das figuras .
{1, 4, 9, 16, 25}

c. Complete a tabela

Termo	Números de pontos
a_1	1
a_2	4
a_3	9
a_4	16
a_5	25

Figura 3.40- Resposta da Atividade 13- itens (b) e (c)

Ronaldo: *Escreva o trigésimo termo.*
Ronaldo: *30 vezes 30.*
Ronaldo: *Não pode ser outro. 3 vezes 3, 9 ; 1vezes 1, 1 ; 2 vezes 2, 4; 4 vezes 4, 16.*
Alice: *Trigésimo termo. Por que ?*
Alice: *Porque é o quadrado do número.*
Ronaldo: *Porque é o quadrado do índice.*

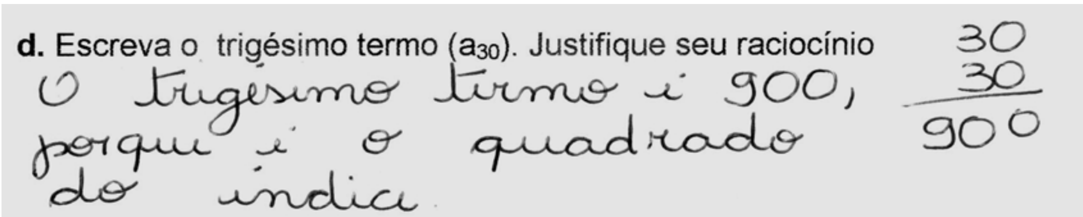

d. Escreva o trigésimo termo (a_{30}). Justifique seu raciocínio
O trigesimo termo é 900, porque é o quadrado do indice.
30
30
900

Figura 3.41- Resposta da Atividade 13- item (d)

Ronaldo: *Escreva o termo a_{80}.*
Ronaldo: *80 vezes 80.*
Alice: *80 vezes 80 640.*
Alice: *Não 6400.*
Ronaldo: *O termo a_{80} é 6400.*

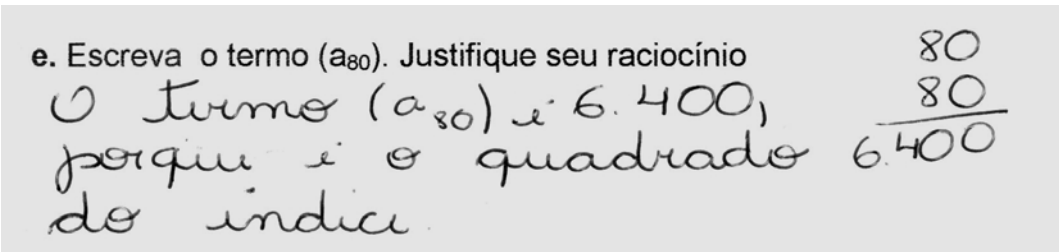
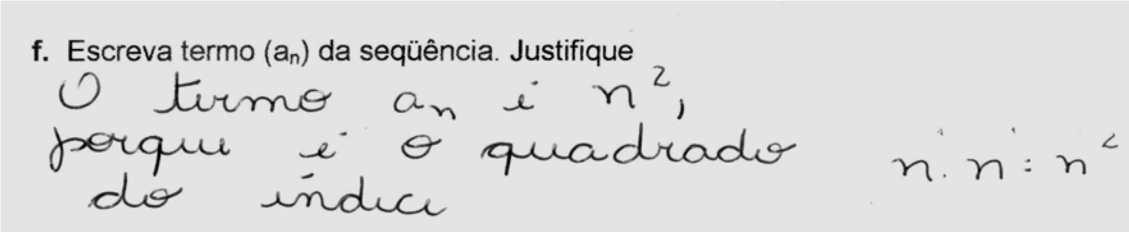

e. Escreva o termo (a_{80}). Justifique seu raciocínio
O termo (a_{80}) é 6.400, porque é o quadrado do indice.
80
80
6.400

Figura 3.42- Resposta da Atividade 13- item (e)

Alice: *Porque é o quadrado do índice.*
Alice: *Escreva o termo a_n da seqüência.*
Ronaldo: *n vezes n.*
Ronaldo: *n ao quadrado n vezes n .*
Alice: *n ao quadrado a mesma justificativa.*
Ronaldo:*Todos é a mesma justificativa.*
Alice: *n vezes n.*

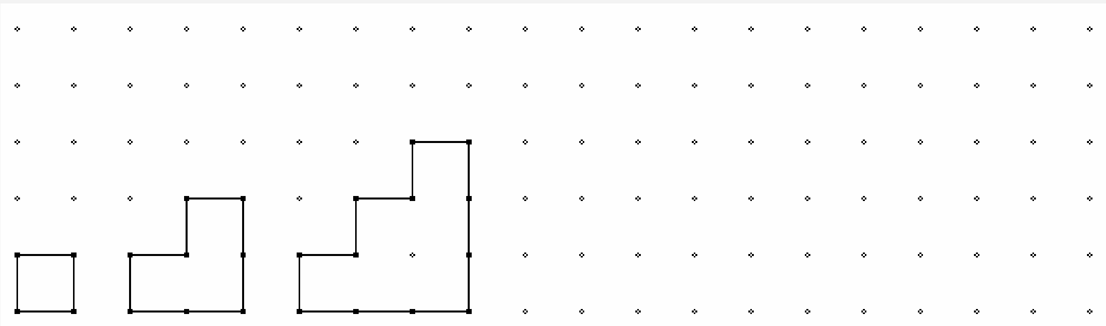

f. Escreva termo (a_n) da seqüência. Justifique

O termo a_n é n^2, porque é o quadrado do índice $n \cdot n = n^2$

Figura 3.43- Resposta da Atividade 13- item (f)

A dupla não teve dificuldades em responder esta atividade. Identificou o padrão da seqüência e respondeu corretamente os itens (a), (b) e (c). Também percebeu que o índice ao quadrado é igual ao valor do termo e responderam os itens (d) e (e). Observamos que no princípio da atividade a dupla já havia determinado o termo geral da seqüência "quadrado do índice". E escreveu corretamente a resposta do item (f) "o termo a_n é n^2".

ATIVIDADE 14. a) Desenhe as próximas duas figuras da seqüência



a_1 a_2 a_3

b) Escreva a seqüência correspondente ao número de traços das figuras

c) Complete a tabela.

Termo	Números de traços
a_1	
a_2	
a_3	
a_4	
a_5	

d) Escreva o número de traços do vigésimo termo (a_{20}). Justifique.

e) Escreva o número de traços do termo (a_{151}). Justifique.

f) Escreva o termo (a_n) da seqüência.Justifique.

Figura 3.44- Atividade 14

Os objetivos desta atividade são: levar o aluno determinar o padrão de uma seqüência figural e a partir dela construir uma seqüência numérica. Deve também determinar a fórmula do termo geral da seqüência.

ANÁLISE *A PRIORI*

A intenção desta atividade é procurar consolidar os conhecimentos aprendidos na atividade anterior.

O aluno, através do desenho ou da tabela, estabelece uma relação entre a posição do termo na seqüência e o seu valor, e poderá concluir que se a_1= 4= 2.1, a_2=8=4.2, a_3= 12=4.3 então a_{21}=4.21=84 e a_{151}=4.151=604.

Para determinar a fórmula do termo geral, esperamos que o aluno analise os resultados numéricos e conclua que a_n= 4.n.

Esperamos também que o aluno não encontre tanta dificuldade com esta atividade como na anterior.

Todos os itens desta atividade devem ser resolvidos, usando apenas lápis e papel.

Podemos classificar esta atividade como de iniciação a prova, segundo Balacheff et al(2001), pois para determinar os valores dos termos a_{21} e a_{151} e a generalização da seqüência a_n , o aluno desenvolve um raciocínio dedutivo ao relacionar o índice com o valor do termo.

ANÁLISE *A POSTERIORI*

Lucas e Julia

Item a:

Julia: *Desenhe as próximas duas figures.*
Lucas: *É só desenhar e aumentar 1 degrau.*
Lucas: *São 5 negocinhos.*
Julia: *4 vezes 2, 8 ; 4 vezes 3, 12 ; 4 vezes 4, 16 ; 4 vezes 1, 4 agora é...*
Julia: *É igual o desenho.*
Lucas: *É igual o desenho.*
Lucas: *Não, esses dois aqui vão na seqüência.*
Lucas: *Tipo uma escada .*
Julia: *Tem de ter 16.*
Lucas:*1, 2, 3, 4 ... 15, 16 . Só aumentar um degrau.*
Lucas: *Agora é só aumentar um degrau para cá.*

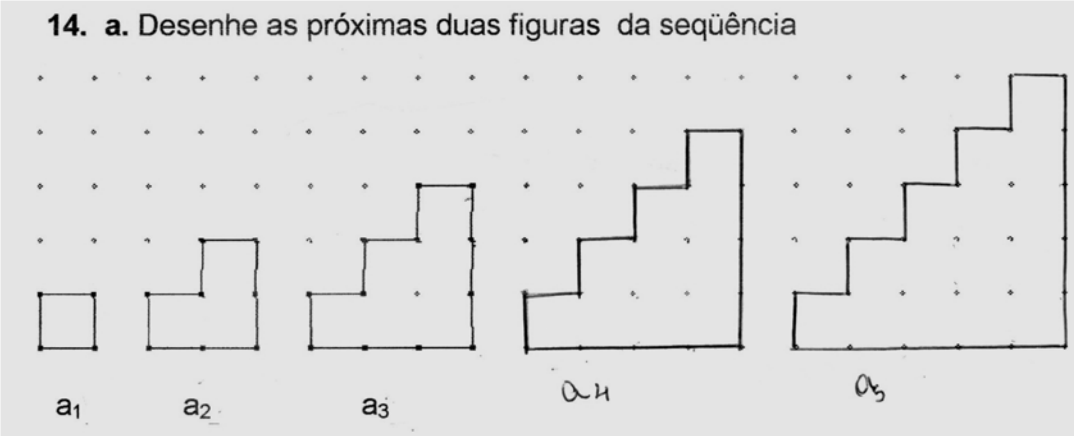
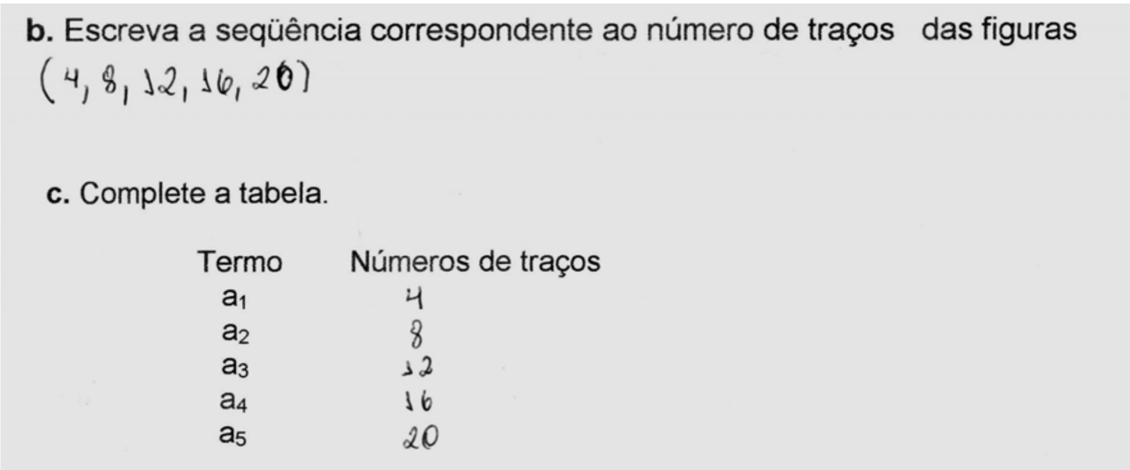


Figura 3.45- Resposta da Atividade 14- item (a)

Observamos que, inicialmente,os alunos identificaram o padrão da seqüência figural visualmente, pois perceberam que aumentava um degrau a cada figura. Também notaram que o total de traços da figura é igual ao número de traços da base multiplicado por 4.

Itens (b) e (c):

> ***Lucas****: Escreva a seqüência correspondente ao número de traços das figuras.*
> ***Julia****: 4, 8, 16, 25 não.*
> ***Lucas:*** *20.*
> ***Lucas:*** *1,2,3,4, … é 20.*
> ***Lucas:*** *Complete a tabela.*
> ***Julia:*** *Quantos pontos tem.*
> ***Lucas:*** *De acordo com os pontos né.*
> ***Lucas:*** *4, 8, 12, 16, 20.*



b. Escreva a seqüência correspondente ao número de traços das figuras

(4, 8, 12, 16, 20)

c. Complete a tabela.

Termo	Números de traços
a_1	4
a_2	8
a_3	12
a_4	16
a_5	20

Figura 3.46- Resposta da Atividade 14- itens (b) e (c)

A dupla não teve dificuldade para responder esses itens, escreveu corretamente a seqüência correspondente ao número de traços da figura e completou a tabela.

Item d:

Lucas: *Escreva o número de traços do vigésimo termo (a_{20}).*
Lucas: *Número de traços.*
Lucas: *80 traços.*
Julia: *Por que ?*
Lucas: *Porque nos seguimos a função 4 vezes o termo.*
Julia: *80 por que ?*
Lucas: *Conseguimos o termo a_1 a_2 .*
Lucas: *Nas outras questões a gente colocou os termos a_1 , a_2, ...*
Lucas: *Porque analisamos as três figuras.*
Julia: *Porque analisando as figuras percebemos índice 4.*
Lucas: *Percebemos que um número é igual a 4 vezes a posição da figura.*
Julia: *Vezes o termo.*
Julia: *80 porque analisando as figuras.*
Lucas:Vimos que o termo.*
Julia: *É multiplicado por 4.*
Lucas: *Só isso.*

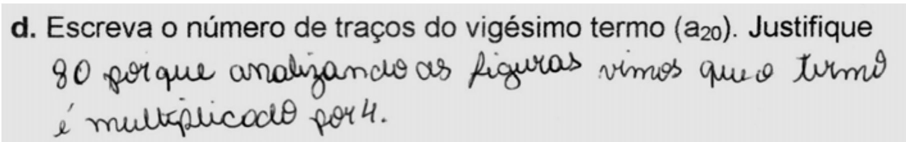

d. Escreva o número de traços do vigésimo termo (a_{20}). Justifique
80 porque analizando as figuras vimos que o termo é multiplicado por 4.

Figura 3.47- Resposta da Atividade 14- item (d)

item e:

Lucas: *Escreva o número de traços do termo a_{151}.*
Lucas: *604, quer fazer conta.*
Julia: *Não precisa.*
Lucas: *Porque fizemos igual a questão anterior.*
Lucas: *Fizemos o mesmo raciocínio.*
Lucas: *Multiplicamos o termo por 4.*

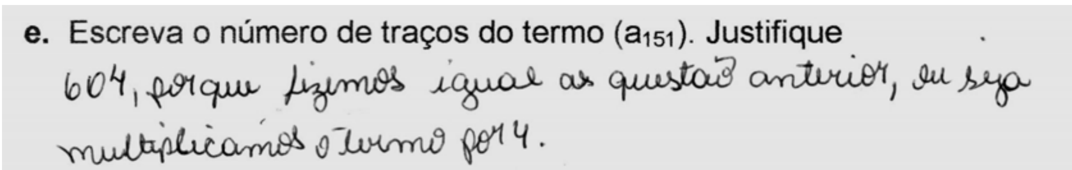

e. Escreva o número de traços do termo (a_{151}). Justifique
604, porque fizemos igual as questão anterior, ou seja multiplicamos o termo por 4.

Figura 3.48- Resposta da Atividade 14- item (e)

A dupla, tendo como base os itens anteriores, determinou os termos a_{20} e a_{81} corretamente, percebeu que multiplicando o índice por 4 obtinha o valor do termo. Porém, na justificativa escreveu erradamente "termo" pensando em "índice" do termo. Analisando o diálogo, observamos que os alunos estão raciocinando corretamente e compreendendo a situação proposta :
"percebemos que um número é igual a 4 vezes a posição da figura".

item f:

> ***Lucas:*** *Escreva o termo a_n da seqüência.*
> ***Lucas:****Esse termo a_n o que é mesmo ?*
> ***Lucas:*** *Para sabermos qual o número pontos do termo a_n nos teremos de multiplicar n por 4.*
> ***Julia****: Como que é ?*
> ***Lucas****: Para sabermos o número de pontos da figura.*
> ***Julia:*** *Teríamos que fazer n vezes 4.*

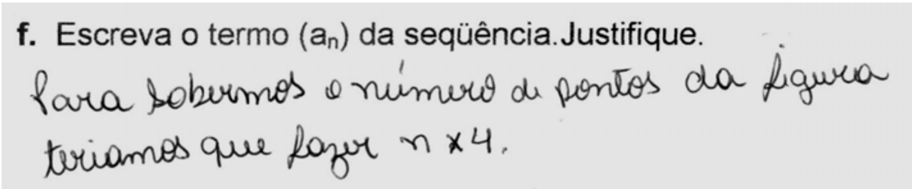

f. Escreva o termo (a_n) da seqüência. Justifique.
Para sabermos o número de pontos da figura teriamos que fazer n x 4.

Figura 3.49- Resposta da Atividade 14- item (f)

Responderam corretamente que o termo geral da seqüência é igual a 4 x n. Na justificativa, os alunos optaram em escrever em língua natural e se basearam na seqüência figural, ou seja, o contexto apresentado pela atividade foi um fator importante para esses alunos .

Alice e Ronaldo

item a:

> ***Ronaldo****: Desenhe as próximas duas figuras.*
> ***Ronaldo****: Essa aqui é uma equação.*
> ***Alice****: Qual é ?*
> ***Ronaldo:*** *Essa aqui é 2 vezes 2 –1 ; 3 vezes 3 –2 ; 4 vezes 4 – 3 , entendeu*
> ***Alice:*** *2 vezes 2 –1 ; 3 vezes 3 –1 ; tem 8 aqui 3 vezes 3 – 2.*
> ***Ronaldo****: Aqui não é 3 então é –2.*
> ***Ronaldo****: Aqui fica menos 1 e aqui menos zero.*
> ***Ronaldo****: Vai pode desenhar.*
> ***Ronaldo:*** *É uma escadinha.*

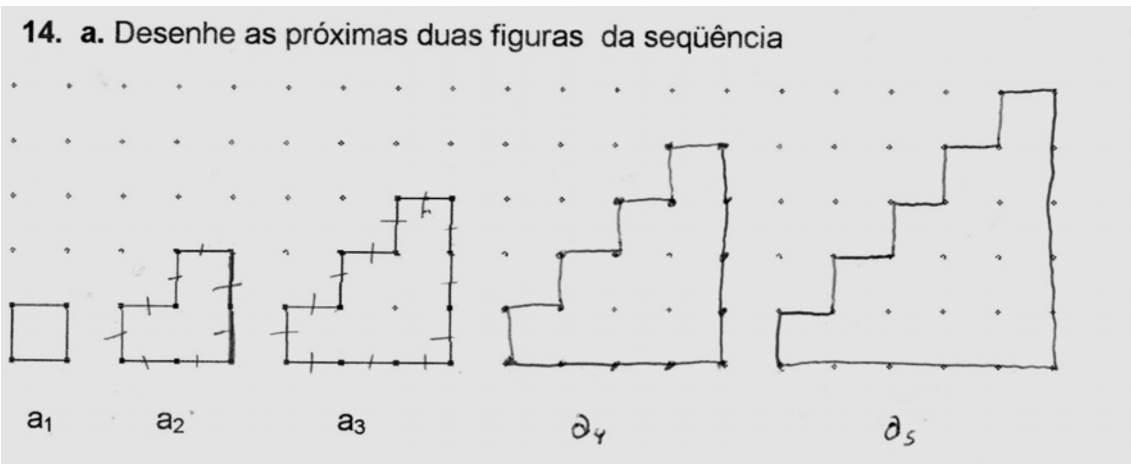


Figura 3.50- Resposta da Atividade 14- item (a)

A dupla, já de início, busca a generalização da seqüência procura estabelecer uma relação entre o número de pontos da figura e sua posição. Primeiro faz uma menção à "equação", acreditamos que estava, devido ao contexto, pensando em "função". Posteriormente inicia a formulação da seguinte conjectura: 2.2–1; 3.3–2; 4.4–3...., mas não consegue obter, desta forma, a generalização. Logo em seguida, os alunos perceberam visualmente o padrão as figuras ("é uma escadinha") e desenharam as duas figuras seguintes.

item b:

Ronaldo*: Escreva a seqüência correspondente ao número de traços das figuras.*
Alice*: O 1º tem 4 traços o 2º termo tem 8 traços .*
Ronaldo*: Não é número de pontos é número de traços.*
Ronaldo*: Se fosse pontos seria uma equação função.*
***Alice:** Só muda um pouco. Esse é traço o outro é ponto.*
Ronaldo*: Aqui seria 9 pontos.*
Alice*: Não são pontos são traços.*
***Alice:** Esse é o mesmo traço.*
***Ronaldo:** Correto*
Alice*: São seis.*
***Ronaldo:** Traço é uma reta ou é de um ponto ao outro.*
***Professor:** Traço considere de um ponto ao outro.*
***Ronaldo:** O 1º são 4 traços*
Ronaldo*: 1, 2, 3, 4. 4 vezes 2 tira 2*
Ronaldo*: 1, 2, 3, 4, 5, 6.*
***Alice:** 1, 2, 3 ...7, 8, 8.*
Alice*: 1, 2, 3, 4... 11, 12*
Ronaldo*: 4 vezes 1, 4 ; 4 vezes 2, 8 ; 4 vezes 3, 12 ; 4 vezes 4, 16; 4 vezes 5, 20.*
***Ronaldo:** O 1º são 4 traços.*
Ronaldo*: 1, 2, 3, 4, 4 vezes 2, 8 tira 2.*
Alice*: 6*
Ronaldo*: 1, 2, 3, 4, 5, 6, errei.*
***Alice:** 1, 2, 3 ... 7, 8.*
Alice*: 1, 2, 3, 4... 14 . É 14, não.*
***Alice:** 1, 2, 3...1,1 12 .*
Alice*: 4 mais 8, 12.*
Ronaldo*: 4 vezes 1, 4 ; 4 vezes 2, 8 ; 4 vezes 3, 12 ; 4 vezes 4, 16.*
***Alice:** 4 vezes 5, 20.*

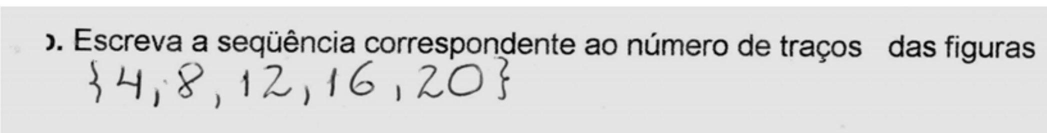
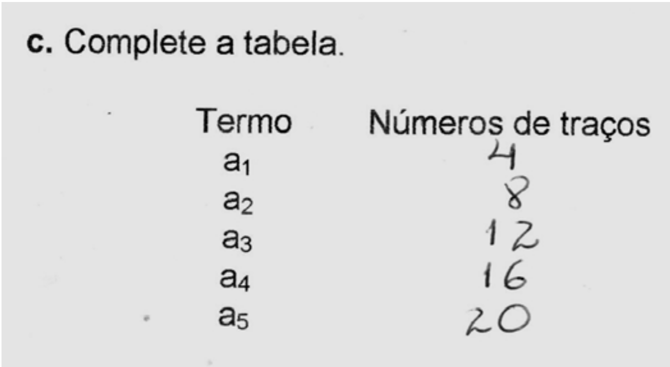

). Escreva a seqüência correspondente ao número de traços das figuras
{4, 8, 12, 16, 20}

Figura 3.51- Resposta da Atividade 14- item (b)

item c:

> ***Alice:*** *Complete a tabela*
> ***Alice****: a_1 4 traços ; a_2 8 ; a_3 12 ; 16 ; 20*



c. Complete a tabela.

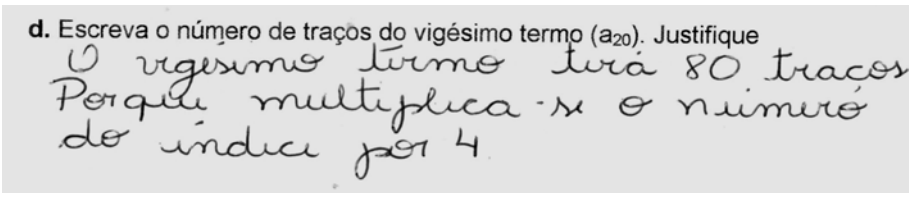
Termo	Números de traços
a_1	4
a_2	8
a_3	12
a_4	16
a_5	20

Figura 3.52- Resposta da Atividade 14- item (c)

No item (b), os alunos divergiam se a atividade tratava do número de pontos ou traços, logo chegaram a um consenso que se trata do número de traços da figura, sendo traço de "um ponto ao outro". Para escrever a seqüência numérica correspondente, contaram o número de traços das figuras. Enquanto desenvolviam a atividade, continuavam a procurar a generalização da seqüência, e por fim descobriram a relação entre a posição do termo e o total de traços da figura da seguinte forma: "*4 vezes 1, 4 ; 4 vezes 2, 8 ; 4 vezes 3, 12 ; 4 vezes 4, 16" ; "4 vezes 5, 20".*

item d:

> ***Ronaldo:*** *Escrever o número de traços do vigésimo termo a_{20} .*
> ***Ronaldo****: 20 vezes 4.*
> ***Alice:*** *80*
> ***Alice:*** *O vigésimo termo terá 80 traços por quê?*
> ***Ronaldo****: Porque o número é múltiplo de 4, não consigo colocar isso no papel.*
> ***Alice:*** *Porque multiplica o índice por 4.*
> ***Ronaldo****: Exatamente. Porque multiplica o número do índice por 4.*



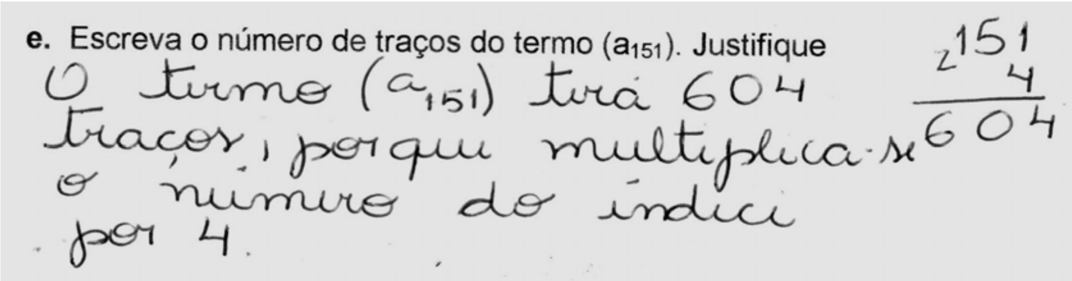
d. Escreva o número de traços do vigésimo termo (a_{20}). Justifique

O vigésimo termo terá 80 traços
Porque multiplica-se o número
do índice por 4

Figura 3.53- Resposta da Atividade 14- item (d)

item e:

> ***Alice:*** *Escreva o número de traços do termo a_{151} .*
> ***Ronaldo:*** *624*
> ***Alice****: 604*
> ***Alice:*** *O termo a_{151} terá 604 traços, porque multiplica – se o índice por 4.*



e. Escreva o número de traços do termo (a_{151}). Justifique

O termo (a_{151}) terá 604 traços, porque multiplica-se o número do índice por 4.

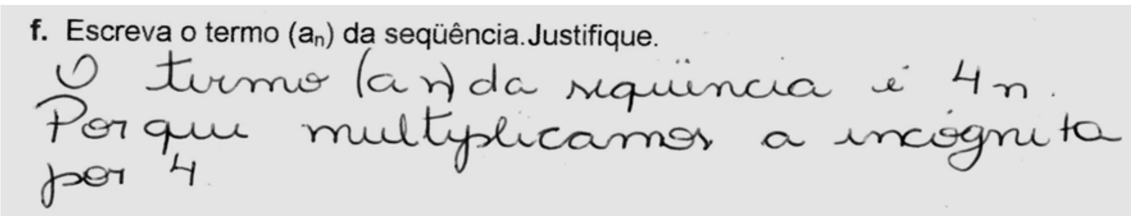
$$\begin{array}{r} {}^{2}151 \\ \times\ 4 \\ \hline 604 \end{array}$$

Figura 3.54- Resposta da Atividade 14- item (e)

No item (d) e (e), os alunos aplicaram o raciocínio que já haviam descoberto quando respondiam os itens anteriores e determinaram corretamente os termos a_{20} e a_{151} da seqüência numérica.

item f:

> ***Ronaldo:*** *Escreva o termo a_n da seqüência.*
> ***Ronaldo****: 4n*
> ***Ronaldo:*** *4n , não é ? 4 vezes n.*
> ***Alice:*** *O n é substituído por um número qualquer.*
> ***Ronaldo****: O n equivaleria a um número 1 2 3 4 um número qualquer.*
> ***Ronaldo:*** *Então é 4 vezes n.*
> ***Ronaldo****: Então seria 4n porque se multiplica a incógnita por 4.*
> ***Alice:*** *Qual seria o termo a_n da seqüência ?*
> ***Ronaldo****: 4n*
> ***Alice:*** *Por que ?*
> ***Alice:*** *O termo a_n da seqüência é 4n por quê?*
> ***Ronaldo****: Multiplicamos a incógnita por 4.*



f. Escreva o termo (a_n) da seqüência. Justifique.

O termo (a_n) da sequência é 4n. Porque multiplicamos a incógnita por 4

Figura 3.55- Resposta da Atividade 14- item (f)

Os alunos não tiveram dificuldades neste item, responderam corretamente que o termo a_n desta seqüência é “4n”.

ANÁLISE DO BLOCO 2

Pela análise verificamos que nas atividades 4, 5, 6 e 7 os alunos entenderam o que é uma seqüência numérica e perceberam, intuitivamente, quando uma seqüência é finita ou infinita.

Na atividade 8, o objetivo previsto era construir uma seqüência numérica a partir de uma propriedade que os termos da seqüência apresentam. A dupla Lucas e Julia demonstrou certa dificuldade, pois não dominava os conceitos de números múltiplos e números primos, desta forma não atingiram o objetivo proposto para a atividade. Consideramos que deveria ter ocorrido, por parte do professor, uma atuação mais efetiva.

Na atividade 9, os alunos, após algumas discussões, atingiram o objetivo pois identificaram o padrão e construíram a seqüência.

Nas atividades 10, 11 e 12 os principais objetivos foram alcançados, pois os alunos desenvolveram habilidades com leitura e compreensão da linguagem matemática utilizada e determinarem o termo geral da seqüência.

As duplas atingiram os objetivos propostos para as atividades 13 e 14, pois determinaram o padrão de uma seqüência figural , e a partir dela construíram uma seqüência numérica correspondente e também desenvolveram raciocínios dedutivos para determinaram a fórmula do termo geral a_n da seqüência.

Desse modo, verificamos que os objetivo desse bloco foram alcançados na medida em que os alunos entenderam o que é uma seqüência numérica como sendo um conjunto numérico que possui uma ordem ou padrão, a linguagem matemática envolvida e desenvolveram raciocínios dedutivos para a generalização de uma seqüência.

As generalizar uma seqüência o aluno fez uma atividade que, segundo Balacheff et al (2001) ,podemos classificar como de iniciação a prova.

As atividades que foram construídas no Hot Potatoes auxiliaram os alunos na construção dos conceitos de seqüência e na compreensão da linguagem matemática, ao possibilitarem a verificação.

Diante das dúvidas dos alunos para responderem algumas atividades a mediação do professor foi necessária. O papel do professor foi o de fornecer orientações sobre as atividades e, fazer perguntas, para que os alunos pudessem refazer o raciocínio.

3.3.3 Bloco 3: Progressão Aritmética e Fórmula do Termo Geral da PA

ATIVIDADE 15. Um médico receitou para sua paciente tomar um comprimido a cada 3 horas. A paciente tomou o 1º comprimido às 6 horas da manhã.

a)Escreva a seqüência dos horários que a paciente deve tomar o medicamento durante as 24 horas de apenas um dia .

b) Como você determinou os horários que a paciente deve seguir para tomar o seu medicamento? Justifique.

Figura 3.56- Atividade 15

O objetivo desta atividade é introduzir o conceito de progressão aritmética através de uma situação conhecida do aluno.

ANÁLISE *A PRIORI*

Esperamos que os alunos, no item (a), escrevam a seguinte seqüência (6,9,12,15,18,21,24) que corresponde a todos os horários em que a paciente deve tomar seu remédio .

Na justificativa, item (b), esperamos que os alunos escrevam que construíram a seqüência somando um mesmo valor ao termo anterior ou somando um mesmo número. Neste item, queremos levar o aluno a refletir e analisar a seqüência construída e a perceber que um mesmo número está sempre sendo somado termo a termo.

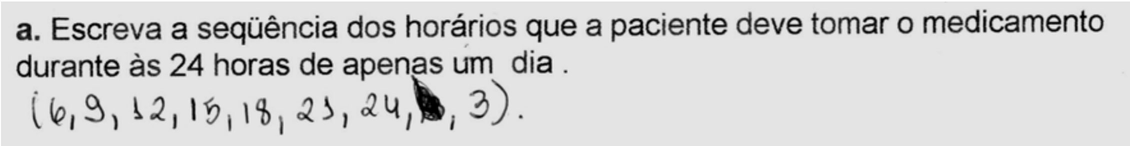
A atividade deve ser resolvida usando apenas lápis e papel.

ANÁLISE *A POSTERIORI*

Lucas e Julia

item a:

> ***Lucas****: Escreva a seqüência dos horários de apenas um dia. Ele começou as três horas.*
> ***Julia****: Ele começou às 6 horas.*
> ***Lucas****: Tá. Ele começou às 6 horas.*
> ***Lucas:*** *Coloca aí. Ele começou às 6, depois 9, às 15, 18, 21.*
> ***Julia :*** *24*
> ***Lucas*** *24, 27. Não...Não tem 27.*
> ***Julia*** *: 3 e 6 horas.*
> ***Lucas:*** *Não. É em um dia só então não é para colocar.*

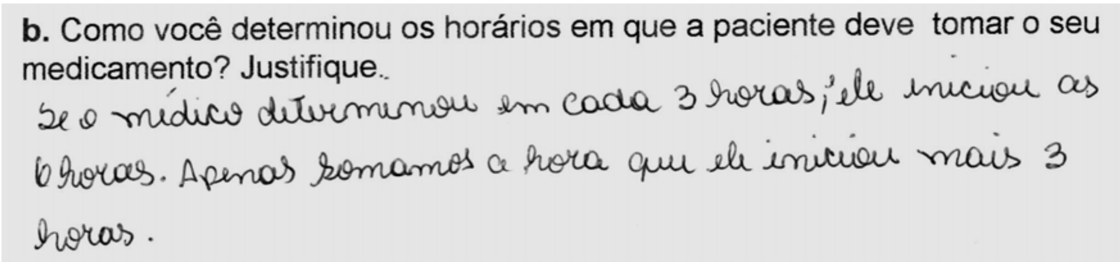

a. Escreva a seqüência dos horários que a paciente deve tomar o medicamento durante às 24 horas de apenas um dia .

(6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, , 3).

Figura 3.57- Resposta da Atividade 15- item (a)

item b:

> ***Julia****: Como você determinou os horários que o paciente deve seguir para tomar o seu medicamento? Justifique*
> ***Lucas****: Tô pensando assim... se ta falando 24 horas. Seria um dia, certo.Aqui você fez 24 horas. Mas se for um dia inteiro termina em 24 horas, ou seja, um dia não tá falando que vai terminar às 24 horas. Durante 24 horas então precisa ter os três.*
> ***Julia****- Eu acho.*
> ***Lucas:*** *Somando o horário que ele iniciou mais três horas.*
> ***Lucas****: Somamos a hora que ele iniciou com mais três horas e assim por diante.*


b. Como você determinou os horários em que a paciente deve tomar o seu medicamento? Justifique.

Se o médico determinou em cada 3 horas; ele iniciou as 6 horas. Apenas somamos a hora que ele iniciou mais 3 horas.

Figura 3.58- Resposta da Atividade 15- item (b)

No item (a), a dupla iniciou corretamente a seqüência, partindo de 6 horas. A partir deste valor, obteve os demais. Os alunos interpretaram que a paciente deveria tomar os comprimidos durante 24 horas e escreveram 3 horas como último número da seqüência. No entanto, a atividade pede que seja escrita a seqüência dos horários que a paciente deve tomar os medicamentos num mesmo dia, ou seja, até a meia noite deste dia.

No item (b), a dupla justifica esclarecendo seu raciocínio, ou seja, que iniciou às 6 horas obtendo os demais horários somando 3, a partir da hora inicial.

Alice e Ronaldo

item a:

> ***Alice****: Um médico receitou para sua paciente tomar um comprimido a cada 3. horas. A paciente tomou o 1º comprimido às 6 horas da manhã.*
> ***Ronaldo****: De quantos em quanto ele tem que tomar?*
> ***Alice****: De três em três horas.*
> ***Ronald****o: 1,2,3,4 horas da manhã.*
> ***Alice****: 1, 2,3,4 horas da manhã, o que?*
> ***Ronaldo****:às 4 horas ele tomou o 1º, não foi?*
> ***Alice****: Ele tomou o 1º às 6 da manhã. Ele quer saber a freqüência dos horários que ele vai ter que tomar.*
> ***Ronaldo****: Até às 24 horas.*

***Alice**: Durante o dia quantas vezes ele vai tomar?A tomou às 6. 6 + 3= 9. O próximo ele vai tomar às nove.*
***Alice**: Mas quantas vezes ele tem que tomar no dia? Não ta falando nada.*
***Ronaldo**: só falou de três em três horas.*
***Ronaldo**: Primeiro ele tomou às 6 da manhã.*
***Alice**: 6 não entra.*
***Ronaldo**: 6 não entra, não.*
***Alice**: Entra. Ele tomou as 6 o primeiro.*
***Ronaldo**: Escreva a eqüência dos horários que o paciente deve tomar.*
***Ronaldo**: O que ele vai tomar.*
***Alice:** 9, 12,15,18 (18 com 3) 21*
Ronaldo*:* *24.*

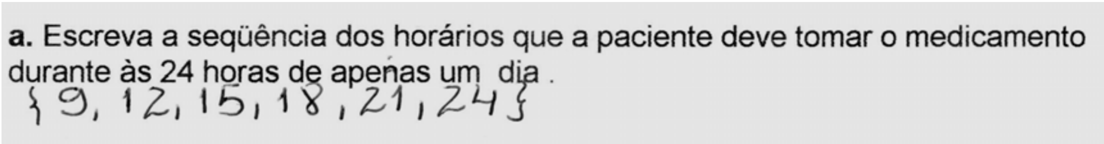

a. Escreva a seqüência dos horários que a paciente deve tomar o medicamento durante às 24 horas de apenas um dia .
{9, 12, 15, 18, 21, 24}

Figura 3.59- Resposta da Atividade 15- item (a)

item b:

***Ronaldo:** Como determinar os horários? Como você determinou os horários em que a paciente deve tomar o seu medicamento? Justifique. Múltiplos de 3.*
***Alice:** Nós descobrimos que as outras doses são múltiplos da 1ª hora que ele tomou.*
***Alice:** As horas que ele deve tomar são múltiplos da 1ª hora que ele tomou. Perfeito.*
***Alice**: Ou somando.*
***Ronaldo**: Somando 3.*
***Ronaldo**: Somamos 3 horas à primeira hora que ele tomou.*

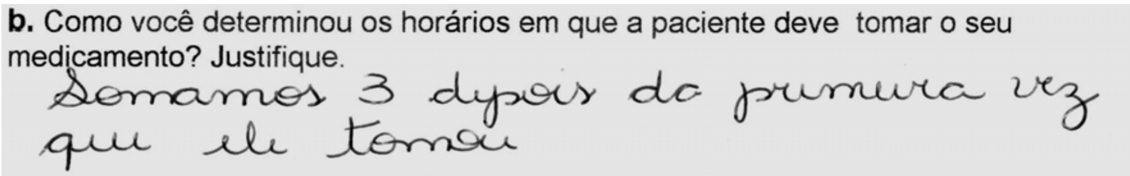

b. Como você determinou os horários em que a paciente deve tomar o seu medicamento? Justifique.
Somamos 3 depois da primeira vez que ele tomou

Figura 3.60- Resposta da Atividade 15- item (b)

A dupla, no item (a), não escreveu 6 horas como um primeiro elemento da seqüência. Acreditamos que a dupla considerou, após ler o enunciado, que a paciente já havia tomado o 1° comprimido às 6 horas e, desse modo, eles deveriam escrever apenas a seqüência dos demais horários.

No item (b), em sua justificativa, escreveram que obtiveram os termos da seqüência somando 3, a partir da primeira hora.

ATIVIDADE 16. Observe que os termos da seqüência do exercício 15 foram obtidos, a partir do primeiro termo, com a soma de um valor constante ao termo anterior. O valor constante somado para se obter cada termo da seqüência é igual a _____.

A seqüência cujos termos são obtidos com a soma de uma constante ao termo anterior é chamada de Progressão Aritmética (PA). Esta constante é chamada de razão(r) .

Figura 3.61- Atividade 16

O objetivo desta atividade é levar o aluno a reconhecer o valor constante que é somado na seqüência construída, ou seja, determinar a razão de uma PA.

ANÁLISE *A PRIORI*

Os alunos são levados a observar que os termos da seqüência da atividade anterior foram obtidos através da soma de um mesmo valor ao termo anterior e a identificar este valor. Esperamos que os alunos, após a leitura da definição de Progressão Aritmética, reconheçam que a seqüência da atividade 15 é uma PA de razão 3.

Os alunos devem completar o espaço, usando lápis e papel, com o valor da razão que é 3.

ANÁLISE *A POSTERIORI*

Lucas e Julia –

> ***Julia:*** *Observe que os termos da seqüência do exercício 15 foram obtidos, a partir do primeiro termo, com a soma de um valor constante ao termo anterior. O valor constante somado para se obter cada termo da seqüência é igual a... Não entendi.*
> ***Lucas:*** *Não entendi também.*
> ***Lucas:*** (leitura do enunciado)
> ***Julia:*** *Não entendi.*
> ***Lucas:*** *Acho que é o 3.*
> ***Lucas:*** *Por que valor das horas mais 3 é o horário em que ele deve tomar o remédio.*
> ***Lucas:*** *Acho que é três mesmo.*

16. Observe que os termos da seqüência do exercício 15 foram obtidos, a partir do primeiro termo, com a soma de um valor constante ao termo anterior. O valor constante somado para se obter cada termo da seqüência é igual a 3.

Figura 3.62- Resposta da Atividade 16

A dupla demonstra dificuldade na interpretação do enunciado, fica indecisa e insegura quanto ao valor pedido na atividade. Mesmo assim, responde corretamente escrevendo o valor, 3. Os alunos não relacionaram a definição da PA à atividade 15 como esperado.

Alice e Ronaldo –

> ***Ronaldo:*** (faz a leitura da atividade)
> ***Alice:*** *A gente sempre soma 3.*
> ***Ronaldo:*** *9, 12.*
> ***Ronaldo:*** (leitura). *O três é a razão. O que acontece é uma PA. O número 3 é a razão de uma PA, correto.*

16. Observe que os termos da seqüência do exercício 15 foram obtidos, a partir do primeiro termo, com a soma de um valor constante ao termo anterior.O valor constante somado para se obter cada termo da seqüência é igual a __3__.

Figura 3.63- Resposta da Atividade 16

A dupla leu, interpretou e respondeu corretamente esta atividade. Também, assim como o esperado, reconheceu a seqüência obtida na atividade anterior como uma PA de razão 3.

ATIVIDADE 17. Complete as Progressões Aritméticas abaixo e escreva ao lado o valor da razão.Justifique sua resposta.

a) (1 ,3 , 5, _____ , _____ , _____, . . .) r= _____

b) (5, 8, 11, _____ , _____, _____, . . .) r= _____

c)(7, 7 , _____ , _____, 7, 7,. . .) r= _____

d)(0,5 ; 4,5 ; _____ ; _____;16,5 ; 20,5) r= _____

e)(10, 4, -2, _____, _____, -20, . . .) r= _____

f) (13, 12 , _____ , _____ , 9 , 8) r= _____

g)(5 ; 5,2 ; 5,4 ; _____ ; _____; . . .) r= _____

h) (4/5 ; 7/5 ; 10/5 ; _____ ; _____; 19/5) r = _____

Figura 3.64- Atividade 17

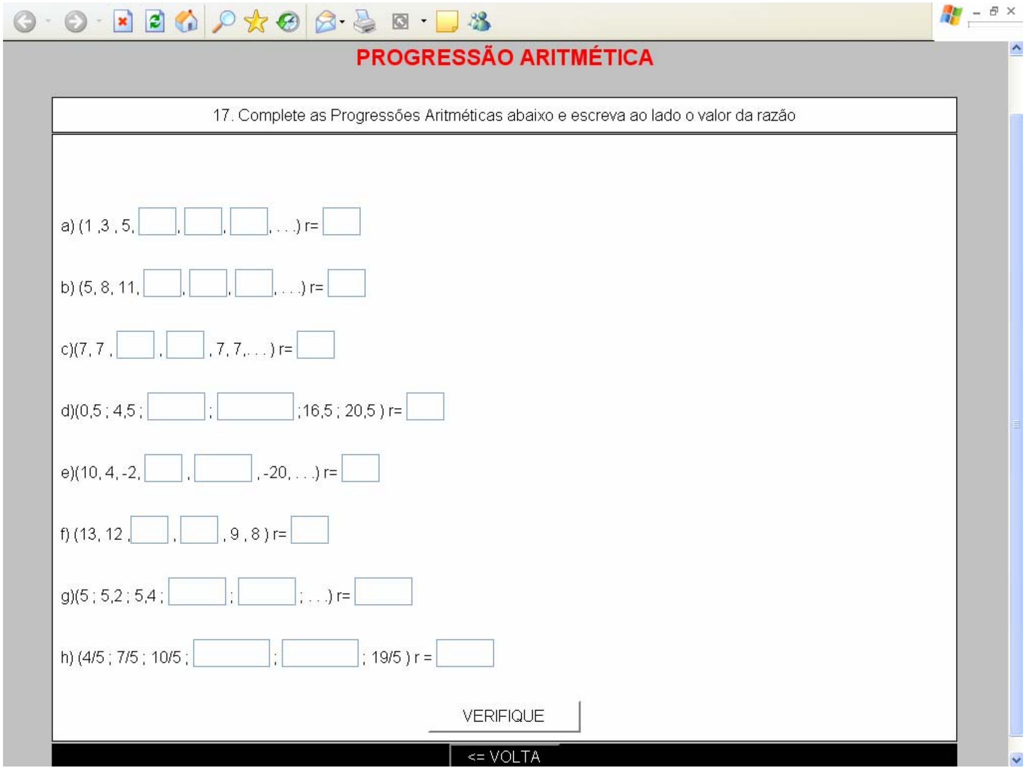


Figura 3.65- Tela do computador da Atividade 17

O objetivo desta atividade é levar o aluno a determinar a razão de uma PA.

ANÁLISE *A PRIORI*

O aluno deverá determinar a razão da PA analisando a variação dos valores dos termos dados.

Acreditamos que o aluno possa ter alguma dificuldade para determinar a razão quando os números envolvidos forem negativos, decimais ou fracionários. Para resolução desta atividade, o aluno necessita completar os espaços. Deve usar o computador e também lápis e papel, pois deve justificar as respostas.

ANÁLISE *A POSTERIORI*

Lucas e Julia

> ***Lucas:*** *Complete as progressões aritméticas abaixo e escreva ao lado o valor da razão. Justifique a sua resposta.*
> ***Julia:*** *1,3,5,7,9. A razão é 2*
> ***Lucas:*** *Entendi.*

17. Complete as Progressões Aritméticas abaixo e escreva ao lado o valor da razão. Justifique sua resposta.

a. (1 ,3 , 5, 7 , 9 , 11 , . . .)   r= 2

Figura 3.66- Respostas da Atividade 17- item (a)

Julia: *13, 15, 17*
Lucas: *A razão é 3*
Lucas: *não, aqui é 14*

b. (5, 8, 11, 14 , 17 , 20 , . . .)   r= 3

Figura 3.67- Respostas da Atividade 17- item (b)

Julia: *7,7,7*

c. (7, 7 , 7 , 7 , 7, 7,. . .)   r= 0

Figura 3.68- Respostas da Atividade 17- item (c)

Lucas: *8, 5*
Julia: *Razão é 4*

d. (0,5 ; 4,5 ; 8,5 ; 12,5 ;16,5 ; 20,5)   r= 4

Figura 3.69- Respostas da Atividade 17- item (d)

A dupla respondeu esta atividade até o item (d) no computador e passaram os resultados para o papel. Não sabemos porque os alunos não concluíram a atividade e passaram para a seguinte. Os itens respondidos estão todos corretos, a dupla identificou a razão e completou as PA. No entanto, não escreveu nenhuma justificativa.

Alice e Ronaldo

Ronaldo: *Complete as progressões aritméticas abaixo e escreva ao lado o valor da razão. Justifique sua resposta.*
Ronaldo: *1, 3, 5, 7, 9, 11.*
Alice *Por que 7?*
Ronaldo: *É por 2.*
Ronaldo: *1 pra 3, 2; 3 pra 5, 2; 5 pra 7, 2; 7 pra 5, 2; 9 pra 11, 2.*
Ronaldo *A razão é 2.*

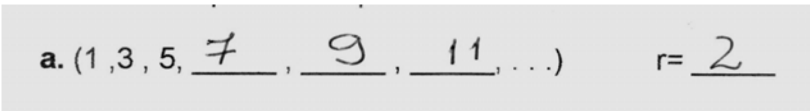

a. (1 ,3 , 5, 7, 9, 11, . . .) r= 2

Figura 3.70- Respostas da Atividade 17- item (a)

Ronaldo: *Aqui é 3.*
Alice: *3.*
Ronaldo: *5 pra 8, 3.*
Alice: (leitura)
Ronaldo: *Justifique sua resposta.*
Ronaldo: *Por que 2?*
Alice: *Porque é o valor fixo que está sendo somado.*
Ronaldo: *Claramente.*
Alice: *Melhor fazer aqui, depois justificar.*
Ronaldo: *14 com 3, 17; 17 com 3, 20.*

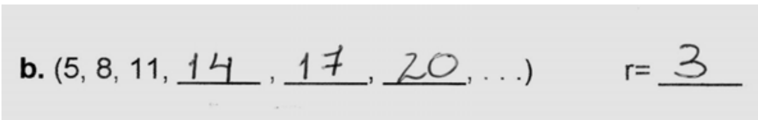

b. (5, 8, 11, 14, 17, 20, . . .) r= 3

Figura 3.71- Respostas da Atividade 17- item (b)

Ronaldo: *7,7,7,7... a razão é zero.*

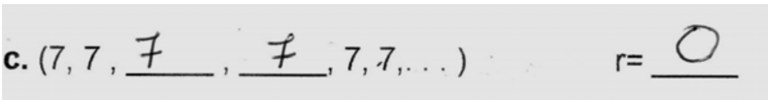

c. (7, 7 , 7, 7, 7, 7,. . .) r= 0

Figura 3.72- Respostas da Atividade 17- item (c)

Ronaldo: Aqui é o que?
Ronaldo: 0, 5; 4,5 é 1. Aqui ta em número decimal. Aqui tá aumentando de 4. A razão é 4.
Ronaldo: 0 , 5, 4, 5 aumenta mais 4; 4, 5 aumenta mais 4; 8,5 aumenta mais 4; 12,5 aumenta mais4; 16,5 aumenta mais 4...
Alice: 4.
Ronaldo: 4.

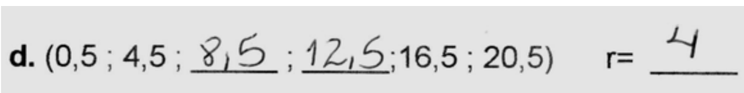

d. (0,5 ; 4,5 ; 8,5 ; 12,5;16,5 ; 20,5) r= 4

Figura 3.73- Respostas da Atividade 17- item (d)

No itens (a), (b), (c) e (d), os alunos identificam o valor da razão e completam a PA com facilidade. Discutiram como justificar as respostas, mas decidem escrevê-las depois.

Ronaldo: *É um número negativo, porque aqui é –2.*
Ronaldo: *Não é progressão aritmética, nem regressão.*
Julia: *Consulta a folha anterior.*
Ronaldo: *10 pra 4, 6; 4 pra 2, 2.*
Alice: *Ah, não . É –6.*
Ronaldo: ***–****2+-6, –8.*
Alice: *–8,–6,–14.*
Ronaldo *depois –20.*
Ronaldo: *correto é –6.*

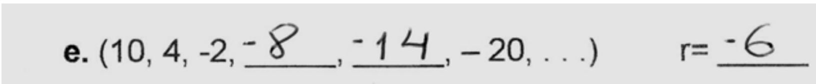


Figura 3.74- Respostas da Atividade 17- item (e)

Neste item, os alunos primeiros pensaram em razão –2 , porém logo perceberam que não poderia ser e identificaram, corretamente, o valor de – 6 como a razão desta PA. Porém, os alunos ficaram na dúvida se esta seqüência era uma Progressão Aritmética, pois os valores obtidos eram decrescentes.

Por isso, voltaram à atividade anterior para ler novamente a definição de PA. Acreditamos que a dupla tenha interpretado a palavra Progressão no sentido corriqueiro de evoluir, avançar ou progredir, por isso tiveram dificuldade para compreender que a PA pode ter uma razão negativa e ser decrescente, ou seja, o valor constante que está sempre sendo somado é negativo.

Ronaldo: *13, 12 é –1.*
Alice: *13,12.*
Ronaldo: *11,10,9,8.*

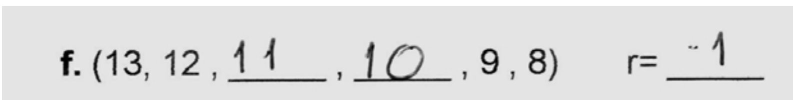


Figura 3.75- Respostas da Atividade 17- item (f)

Neste item, notamos que os alunos identificaram corretamente a razão desta PA sendo –1.

***Ronaldo**: Aqui é + 0,2.*
***Ronaldo:** Olha bem, pode perceber, aqui é – 0,2.*
***Alice**: É mais.*
***Ronaldo**: É mais? Exatamente, +0,2.*
***Alice:** 5; 5,2; 5,4; 5,6; 5,8.*
***Ronaldo:** Não gosto de número decimal.*
***Alice**: Nem eu.*

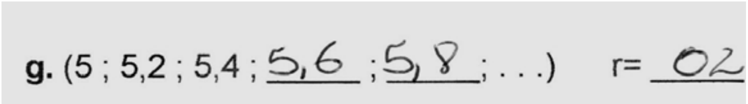

g. (5 ; 5,2 ; 5,4 ; 5,6 ; 5,8 ; . . .) r= 02

Figura 3.76- Respostas da Atividade 17- item (g)

Os alunos iniciam a atividade indecisos entre dois valores : + 0,2 ou – 0,2. Isto demonstra que os alunos já perceberam que a razão de uma PA pode ser positiva ou negativa. Por fim, identificam corretamente a razão como sendo – 0,2 e completam a PA .

***Ronaldo**: Isso é o que? É fração?*
***Alice:** É fração.*
***Ronaldo:** 4/5; 7/5; 10/5.*
***Alice**: 4 pra 7, 3; 7 pra 10, 3. O próximo, então, vai ser 13/5 e 16/5.*
***Ronaldo**: Então são frações, mas soma um número inteiro, 3.*
***Alice:** A base é igual.*
***Ronaldo**: Não importa o que tem abaixo, a base é sempre igual.*
***Ronaldo:** É 3/5*
***Alice:** O denominador é sempre igual.*

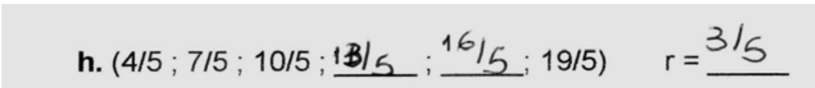

h. (4/5 ; 7/5 ; 10/5 ; 13/5 ; 16/5 ; 19/5) r = 3/5

Figura 3.77- Respostas da Atividade 17- item (h)

Neste item, a variação dos numeradores chama a atenção dos alunos que identificam 3 como valor que está sendo somado termo a termo. Depois, percebem que os denominadores das frações permanecem sempre o mesmo, igual a 5, que chamam equivocadamente de "base". Continuando, identificam que se a razão desta PA é a fração 3/5 e que o denominador é sempre o mesmo igual a 5.

***Ronaldo**: Vemos a variação da seqüência.*
***Alice:** Descobrimos o valor fixo e somamos com os outros termos.*
***Ronaldo**, Professor, pode ser uma justificativa para todos.*
***Professor:** Vocês pensaram igual para tudo?*

Alice: *Pois pensamos igual.*
Ronaldo*: Pegamos a diferença entre os números.*
Alice: *Pegamos mesmo?*
Ronaldo: *Sentido figurado, em português.*
Alice: *Pegamos a diferença entre os números isso é a razão, a gente descobriu a razão.*
Ronaldo: *E continuamos a seqüência.*
Alice: *Com a mesma razão.*

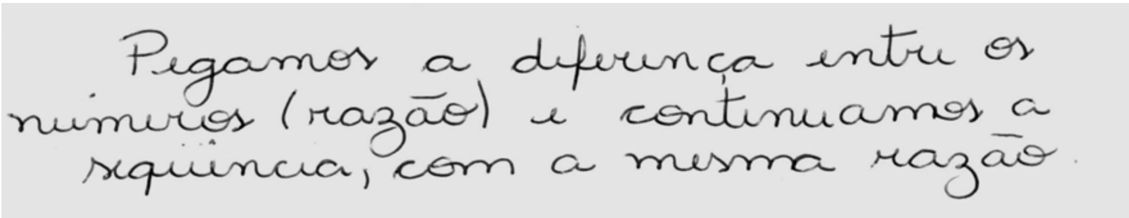

Pegamos a diferença entre os números (razão) e continuamos a sequência, com a mesma razão.

Figura 3.78- Justificativa da Atividade 17

Na justificativa, os alunos escreveram que identificaram a razão, para todos os itens, calculando a diferença entre dois termos consecutivos, o que consideramos correto. No entanto, observamos pelos diálogos, que esta forma de raciocinar não foi a única. Em alguns casos, os alunos analisaram a variação dos termos da PA, buscando identificar qual número somado ao anterior se obtinha o próximo, sem efetuar uma subtração.

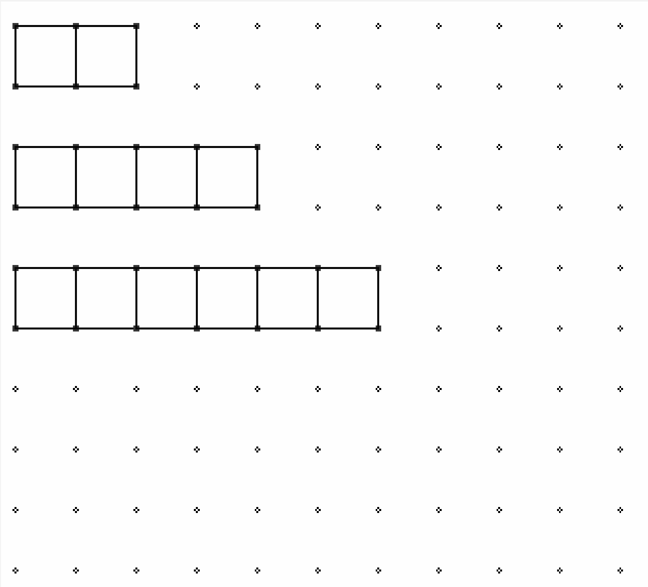
A dupla não teve dificuldades para identificar a razão e completar as PA. A atividade, desenvolvida com auxilio do computador, facilitou para validação das respostas, o que contribuiu para o desenvolvimento de uma autonomia do aluno na aquisição destes conhecimentos matemáticos.

ATIVIDADE 18. a)Desenhe as próximas duas figuras:

a_1

a_2

a_3



b)Escreva a seqüência correspondente ao número de quadrados das figuras.

c)Complete a tabela.

Termo	Número de quadrados
a_1	
a_2	
a_3	
a_4	
a_5	

d)Está seqüência é uma PA ? Por que ?

e)Escreva o termo (a_{30}) da seqüência.Justifique.

f)Escreva o termo (a_n) da PA. Justifique.

Figura 3.79- Atividade 18

Os objetivos desta atividade são: levar o aluno a determinar o padrão de uma seqüência figural e, a partir dela, construir uma seqüência numérica correspondente. Reconhecer que a seqüência construída é uma Progressão Aritmética e escrever a sua lei de formação ou termo geral.

ANÁLISE *A PRIORI*

O aluno procede como nas atividades 13 e 14. Primeiro determina o padrão da seqüência figural. Em seguida, constrói uma seqüência numérica, na qual o valor de cada um de seus termos corresponde à quantidade de quadrados da seqüência figural do item anterior.

O aluno deve reconhecer que a seqüência obtida é uma PA e apresentar sua justificativa.

A resolução da atividade deverá ser feita usando apenas lápis e papel.

Podemos classificar esta atividade como de iniciação a prova, segundo Balacheff et al. (2001), pois para determinar os valores dos termos a_{30} e a generalização da seqüência a_n o aluno desenvolve um raciocínio dedutivo ao relacionar o índice com o valor do termo.

ANÁLISE *A POSTERIORI*

Lucas e Julia

Item a:

> ***Lucas****: Ele aumenta a cada 2 quadrados.*
> ***Julia****: 1,2,3,4,5,6.*
> ***Lucas****: 1vezes 2, 2; 2 vezes 2,4; 3 vezes 2, 6. São números de quadrado 2,4,6,8,10.*
> ***Julia****:* (Desenha a figura).
> ***Lucas****: Aumenta dois quadrados.*

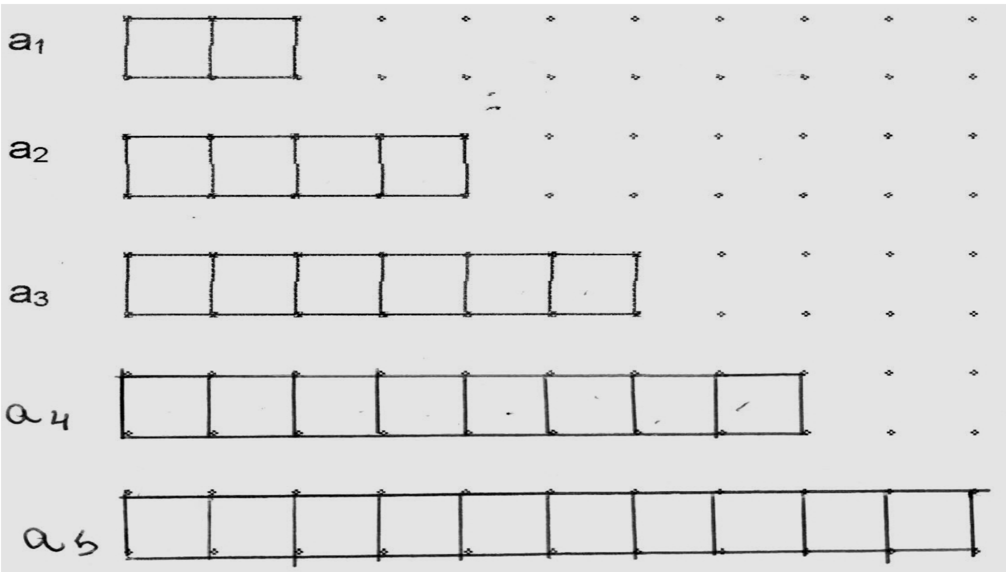


Figura 3.80- Respostas da Atividade 18- item (a)

item b:

Lucas: *Escreva a seqüência.*
Lucas: *2,4,6,8.*
Julia: *8,10.*
Lucas *1 vezes 2; 2 vezes 2; 4 vezes 2. São números de quadrados.*
Lucas: *2,4,6,8,10.*

b. Escreva a seqüência correspondente ao número de quadrados das figuras.
2, 4, 6, 8, 10

Figura 3.81- Respostas da Atividade 18- item (b)

item c:

c. Complete a tabela.

Termo	Número de quadrados
a_1	2
a_2	4
a_3	6
a_4	8
a_5	10

Figura 3.82- Respostas da Atividade 18- item (c)

Nos itens (a) , (b) e (c), a dupla não teve dificuldade para determinar o padrão da seqüência figural, desenhar os próximos dois termos e escrever os termos da seqüência numérica, correspondentes. Também observamos que os alunos, com facilidade, estabeleceram uma relação entre o número de quadrados das figuras com a sua respectiva posição: “1 vezes 2, 2; 2 vezes 2, 4; ... “ .

item d:

Julia: *O que é PA?*
Lucas: *(Volta para a pagina anterior); (Leitura da definição de PA).*
Lucas: *Dá pra visualizar a cada figura ai você vai aumentando 2 quadrados. A figura dá pra ser determinada pelo número do termo ou da figura anterior cada uma foi aumentada por 2 quadrados.*
Julia: *Por que cada termo é multiplicado por 3.*
Lucas: *Multiplicado por 2*

Julia: *Mesmo assim, se não tivermos de multiplicar a gente ia ver pelo desenho da figura que cada um aumenta 2 quadrados.*
Lucas: *Essa seqüência é uma PA? Sim.*
Julia: *Você sabe o que é PA?*
Lucas *(página anterior). Aqui olha ta falando* (leitura).
Julia: *Por que a soma de uma constante.*
Lucas: *A soma de uma constante com o termo anterior.*
Lucas: *Pronto.*

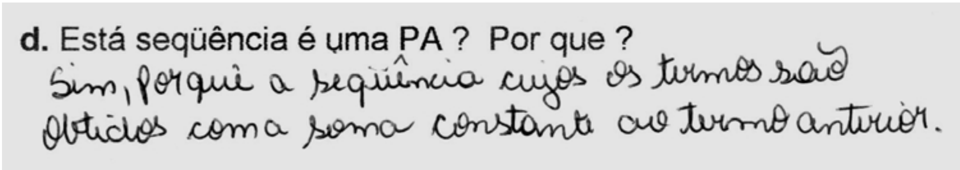

d. Está seqüência é uma PA ? Por que ?
Sim, porquê a seqüência cujos os termos são obtidos coma soma constante ao termo anterior.

Figura 3.83- Respostas da Atividade 18- item (d)

Neste item, os alunos demonstram não entender o que é uma PA . Voltam à página anterior, fazem uma nova leitura da definição de PA, buscando entender o seu significado. Por fim, tendo como base a leitura feita, concluem, corretamente, que a seqüência é uma PA e justificam destacando que os termos da seqüência são obtidos com a soma de um número constante ao termo anterior.

item e:

Julia: *60*
Lucas: *É isso aí.*

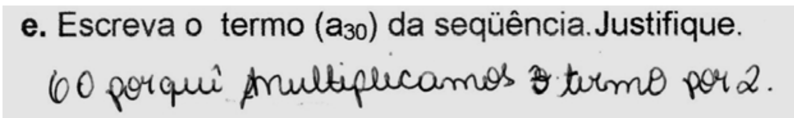
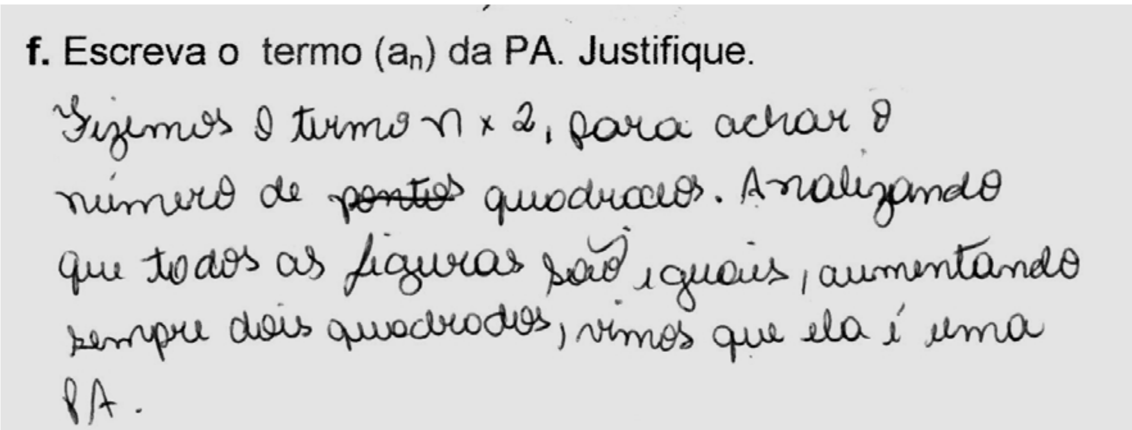

e. Escreva o termo (a_{30}) da seqüência. Justifique.
60 porquê multiplicamos o termo por 2.

Figura 3.84- Respostas da Atividade 18- item (e)

Os alunos determinaram com facilidade e corretamente o termo a_{30} igual a 60. Na justificativa, explicaram que o valor foi calculado da seguinte forma: ”multiplicamos o termo por 2” o que entendemos significar “multiplicamos o índice do termo por 2”. A dupla demonstra dificuldade com a linguagem matemática utilizada, como significado da palavra termo, termo a_{30}, índice ou posição, não estão ainda familiarizados com o uso específico destas palavras e símbolos.

item f:

Lucas: *Escreva o termo a_n da PA?*
Julia: *Olha é a mesma coisa (das anteriores)*
Lucas: *Aqui o termo na.*
Lucas: *As anteriores a_n da seqüência; a_n da PA.*
Julia: *Como assim o termo a_n da PA* ?(perguntam para o professor)
Professor*: Semelhante as outras atividades anteriores (...).*
Professor*: Encontrar uma fórmula.*
Lucas: *Fizemos o termo n vezes 2 para dar um valor da figura para podermos completar a figura.*
Lucas: *Analisando todas as figuras são iguais aumentando sempre dois. quadrados, vimos que ela é uma progressão aritmética.*
Lucas: *Perfeito.*


f. Escreva o termo (a_n) da PA. Justifique.

Fizemos o termo n x 2, para achar o número de ~~pontos~~ quadrados. Analizando que todos as figuras são iguais, aumentando sempre dois quadrados, vimos que ela é uma PA.

Figura 3.85- Respostas da Atividade 18- item (f)

Pelo diálogo, os alunos demonstram dúvidas sobre o que significa "o termo a_n da PA" e pedem auxilio para o professor. Na mediação, oriento que esta atividade é semelhante as anteriores, 13 e 14, e complemento ,de forma mais direta: "encontrar uma fórmula".

Na justificativa, escrevem "o termo n vezes 2", o que acreditamos significar que "o termo (a_n é igual) n vezes 2" e complementam escrevendo que este valor corresponde ao número de quadrados da figura. Também observam, visualmente, que cada figura em relação à anterior é a mesma, acrescida de dois quadrados, e constatam, corretamente, que por isso é uma PA.

Alice e Ronaldo

itens a, b , c:

Ronaldo: (Leitura do enunciado).
Ronaldo: *Tá sendo somado por 2 ; 2,4,6,8.*
Alice*: Bonitinho.*
Ronaldo: *2,4,6,8,10.*

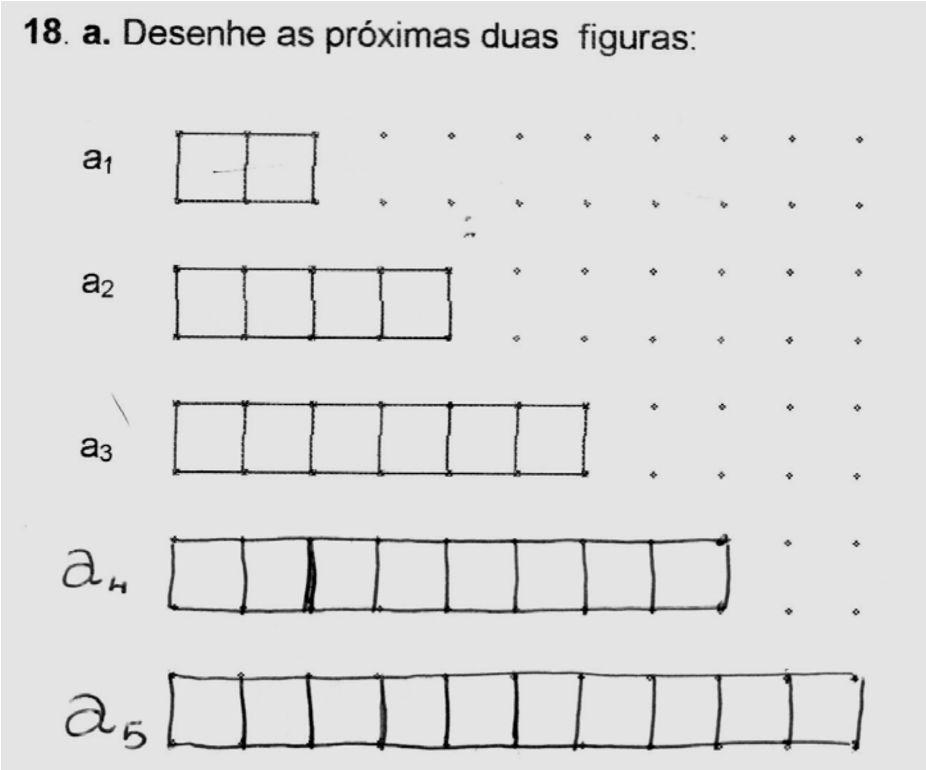
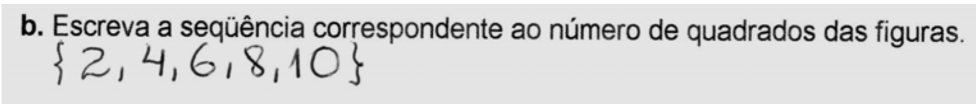


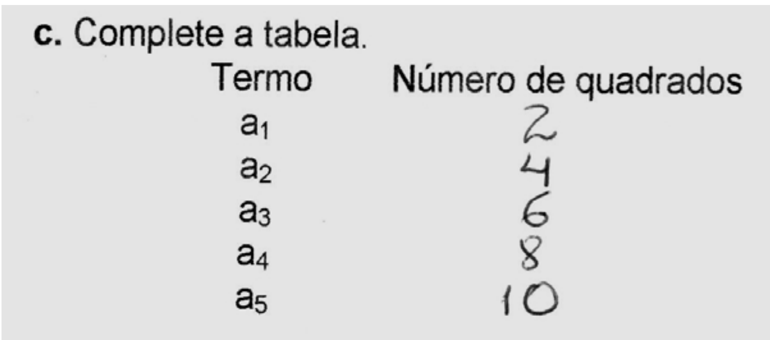
Figura 3.86- Respostas da Atividade 18- item (a)



b. Escreva a seqüência correspondente ao número de quadrados das figuras.

{2, 4, 6, 8, 10}

Figura 3.87- Respostas da Atividade 18- item (b)



c. Complete a tabela.

Termo	Número de quadrados
a_1	2
a_2	4
a_3	6
a_4	8
a_5	10

Figura 3.88- Respostas da Atividade 18- item (c)

A dupla, reconheceu o padrão da seqüência figural : “aumentando 2”, e não tive dificuldade para desenhar os termos da seqüência figural, escrever a seqüência numérica correspondente e completar a tabela. Pelo diálogo, demonstra ter apreciado a atividade: “bonitinho”.

item d:

> ***Alice:*** *Esta seqüência é uma PA?*
> ***Alice:*** *Sim.*
> ***Ronaldo:*** *Por que a razão é sempre a mesma.*

d. Está seqüência é uma PA ? Por que ?
Sim, porque a razão é sempre a mesma (2)

Figura 3.89- Respostas da Atividade 18- item (d)

A dupla considerou , corretamente, a seqüência obtida como sendo uma PA. Na justificativa, não foram claros na explicação ao escreverem que "a razão é sempre a mesma (2)". Ao nosso ver, faltou explicar que a seqüência é uma PA, porque seus termos são obtidos pela soma de um valor constante igual a 2.

Item e:

> ***Ronaldo:*** (leitura)
> ***Alice:*** *Escreva o termo na da seqüência.*
> ***Ronaldo****: 2 vezes 1; 2 vezes 2; 2 vezes 3; 2 vezes 5.*
> ***Alice:*** *2 vezes 30, 60.*
> ***Alice:*** *O termo a30 da seqüência é 60, por que?*
> ***Alice:*** *Porque se multiplica a incógnit.*
> ***Ronaldo:*** *Não, a incógnita não porque é um número.*
> ***Alice:*** *Multiplica-se a razão pelo índice.*
> ***Ronaldo:*** *Multiplica-se o número do índice pela razão, no caso 2 vezes 60.*

e. Escreva o termo (a_{30}) da seqüência.Justifique.
O termo (a_{30}) da sequência é a_{60}
Porque multiplica-se o índice pela razão (2 . 30)

Figura 3.90- Respostas da Atividade 18- item (e)

Neste item, a dupla calculou corretamente o termo a_{30} igual a 60. Na justificativa, explicam que calcularam esse valor "multiplicando-se o índice pela razão (2 . 30)". Observamos que os alunos escreveram a_{60}, ao invés de 60, acreditamos se tratar de um erro de escrita por falta de atenção, pois na justificativa fazem corretamente a diferenciação entre termo e índice do termo: "o termo a_{30}" e "o índice pela razão".

Item f:

> ***Ronaldo;*** *(leitura)*
> ***Alice*** *:2n*
> ***Alice:*** *Por que?*
> ***Ronaldo:*** *Porque multiplicamos a razão pela incógnita.*

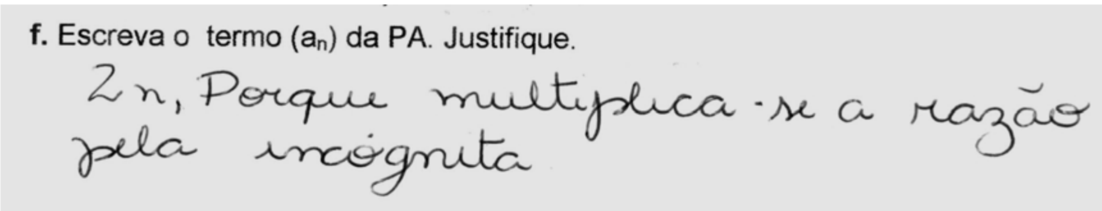

f. Escreva o termo (a_n) da PA. Justifique.
2n, Porque multiplica-se a razão pela incógnita

Figura 3.91- Respostas da Atividade 18- item (f)

A dupla corretamente escreve o termo geral desta PA: “2n”. Na justificativa, explica de forma semelhante ao item anterior, “multiplica-se a razão pela incógnita”, apenas substituiu índice por incógnita. Acreditamos que os alunos ao escreverem “incógnita” não estão pensando no sentido de um valor para ser determinado e sim no sentido de variável.

ATIVIDADE 19.

a)Pedro emprestou 50 reais de um amigo com juros fixos de 2 reais por dia.
Complete a seqüência formada pela quantia devida por Pedro nos primeiros 5 dias (50 ,_____ , _____ , _____ , _____)
Essa seqüência é uma PA? Justifique.

b)Pedro fez um novo empréstimo de 80 reais com juros fixos de **r** reais por dia
Complete a seqüência formada pela quantia devida por Pedro nos primeiros 5 dias (80 ,_____ , _____ , _____ , _____)
Esta seqüência é uma PA?Justifique.
Passados 100 dias de quanto é a dívida do segundo empréstimo de Pedro?
Passados **n** dias de quanto é a dívida do segundo empréstimo de Pedro?

c) Pedro fez um novo empréstimo de valor $\mathbf{a_1}$ e pagando **r** de juros por dia.
Complete a seqüência formada pela quantia devida por Pedro nos primeiros 5 dias (a_1 ,_____ , _____ , _____ , _____)
Esta seqüência é uma PA? Explique.
Depois de 70 dias, de quanto é a dívida desse novo empréstimo?
Passados n dias, de quanto é a dívida do novo empréstimo de Pedro?

d) Pedro fez um outro empréstimo de 530 reais com juros fixo de 25 reais por dia. No entanto, ele ganhou na Mega Sena e conseguiu pagar sua dívida 120 dias depois. Quanto ele pagou ? Justifique.

Figura 3.92- Atividade 19

O objetivo desta atividade final é levar o aluno a construir a Fórmula do Termo Geral da PA.

ANÁLISE *A PRIORI*

No item (a), esperamos que o aluno faça a leitura e a interpretação do enunciado e complete a seqüência desta forma: (50,52,54,56,58).

Esperamos que o aluno perceba que a seqüência obtida é uma PA e apresente uma justificativa.

No item (b), esperamos que o aluno complete a seqüência da seguinte forma: (80, 80+r, 80+2r, 80+3r, 80+4r). Prevemos que alguns alunos possam apresentar alguma dificuldade para escrever esta seqüência, pois é necessário algum conhecimento prévio de álgebra. Esperamos que o aluno reconheça que esta seqüência é uma PA e apresente uma justificativa.

Para determinar o termo a_{100}, esperamos que o aluno não desenvolva a estratégia de construir a seqüência termo a termo até o centésimo termo, pois tal tarefa é muito trabalhosa e desanimadora. Nossa intenção é que o aluno desenvolva um raciocínio dedutivo relacionando a posição e o valor dos termos e apresente a seguinte resposta $a_{100} = 80+99r$.

Para determinar o enésimo termo, esperamos que o aluno se apóie nos resultados anteriores e desenvolva um raciocínio dedutivo relacionando os n dias ao valor fixo de juros r e apresente a seguinte resposta $a_n = 80 + (n-1)r$.

No item (c), esperamos que o aluno complete a seqüência da seguinte forma:

(a_1, a_1+r, a_1+2r, a_1+3r, a_1+4r). Acreditamos que o aluno associe esta seqüência com as anteriores e a reconheça como uma PA.

Para determinar o termo a_{70}, esperamos que o aluno aplique o mesmo raciocínio desenvolvido nos itens anteriores e apresente a seguinte resposta: $a_{70} = a_1+69r$.

Para determinar o enésimo termo, esperamos que o aluno, levando em conta os itens anteriores, escreva a seguinte resposta: $a_n = a_1 + (n - 1)r$, obtendo a Fórmula do Termo Geral da PA.

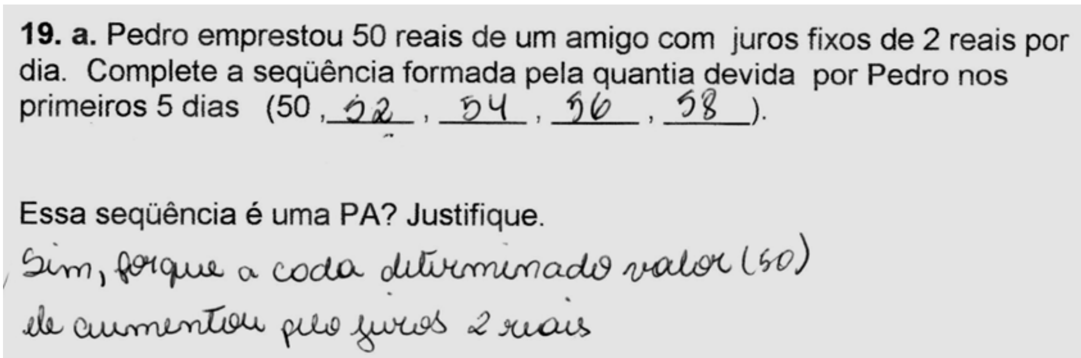
No item (d), esperamos que o aluno aplique a Fórmula do Termo Geral e obtenha o resultado de 3505 reais de dívida.

ANÁLISE *A POSTERIORI*

Lucas e Julia

Item a:

> ***Lucas**: (Leitura do enunciado).*
> ***Lucas**: Os juros são de dois reais por dia. Cinco dias, são 10 reais. Foi aumentada de 10 reais.*
> ***Lucas**: Se cada dia são dois reais.*
> ***Julia:** (Leitura)*
> ***Julia:** 50,52,54,56,58.*
> ***Lucas**: Se nesta questão nos primeiros dias ele não pagou e nos cinco dias o quanto ele tem que pagar teria de fazer 2 vezes 5 para saber determinado valor. É o que eu estou pensando, pode ser que eu esteja errado. Mas seria 50, 60,70,80,90.*
> ***Julia:** Acho que não é isso não.*
> ***Julia:** Sabe porque? Olha. Os juros é por dia.*
> ***Julia:** Então vai ser assim. Eu te empresto os reais, no dia seguinte ele vai cobrar juros de dois reais.*
> ***Lucas**: Certo.*
> ***Lucas:** Essa seqüência é uma PA.*
> ***Julia:** Professor, aqui cobra dois reais por dia?*
> ***Professor**: Correto. Tem um acréscimo de dois reais por di.a*
> ***Lucas:** É uma PA porque a cada determinado valor ele aumenta dois reais. Coloca entre parênteses, 50 reais.*



19. a. Pedro emprestou 50 reais de um amigo com juros fixos de 2 reais por dia. Complete a seqüência formada pela quantia devida por Pedro nos primeiros 5 dias (50 , 52 , 54 , 56 , 58).

Essa seqüência é uma PA? Justifique.

Sim, porque a cada determinado valor (50) ele aumentou pelo juros 2 reais

Figura 3.93-Resposta da Atividade 19- item (a)

Neste item, os alunos leram o enunciado duas vezes e pensaram inicialmente em duas respostas: (50,52,54,56,58) e (50,60,70,80,90), mas logo decidem por (50,52,54,56,58) pois perceberam, e confirmaram com o professor, que se tratava de acréscimos de 2 reais por dia de juros.

Na justificativa, os alunos responderam corretamente que a seqüência é uma PA, mas a explicação do porquê a seqüência é uma PA, não está clara. Consideramos que a dupla teve intenção de expressar que a seqüência é uma PA, pois "cada determinado valor" desta seqüência, a partir do primeiro (50), é obtido aumentando 2 reais de juros por dia. Observamos que os alunos têm dificuldade de expressar com precisão suas idéias, mas perceberam que a seqüência foi obtida pela soma de um mesmo valor, 2 reais de juros, a partir do primeiro termo, 50 reais.

Item b:

> ***Julia*:(** Leitura do enunciado).
> ***Lucas****: Seria dois, o juro é dois. Esse r é razão, não é. Será que é a razão de quanto seria dois.*
> ***Lucas:*** *Professor, esse r é a razão da questão anterior?*
> ***Professor:*** *Não. É um valor qualquer.*
> ***Julia****: Vamos supor, 4. É um número.*
> ***Lucas****: Nós podemos dizer qual número pode ser.*
> ***Professor:*** *Sim, até poderia.*
> ***Lucas:*** *É um número escondido.*
> ***Professor:*** *Isso.*
> ***Julia****: Como eu vou fazer isso?*
> ***Professor****: Você tem que trabalhar podendo ser um valor qualquer.*
> ***Lucas:*** *Podendo ver um valor qualquer.*
> ***Julia****: Acho que é assim.*
> ***Lucas****: 80 aumenta 3.*
> ***Julia:*** *Acho que é isso.*
> ***Julia****: Acho que 5.*
> ***Lucas:*** *Vamos determinar que o valor é 5.*
> ***Julia:*** *Professor é 5 ?*
> ***Lucas:*** *Vamos colocar 5.*
> ***Professo****r: Não tem um valor numérico fixo.*
> ***Julia:*** *Tem que ter um valor.*
> ***Lucas:*** *80r, 80r, 80r.*
> ***Julia:*** *É 5.*
> ***Professor****: Não é 5. Pois 5 são os dias. Pode ser 10, 50.*
> ***Lucas****: Pode ser qualquer valor. A razão não tem uma conta certa, porque não. tem razão. Esse exercício não tem razão.*

Os alunos, a princípio, não entenderam que r é uma variável e que não possui um valor fixo. Primeiro pensaram que r valia 2 como no item anterior, depois 5. Neste momento, orientei os alunos a descartarem valores numéricos fixos e expliquei que r poderia ser qualquer valor.

> ***Lucas****: Tô pensando.*
> ***Julia:*** *Eu vou achar a razão.*
> ***Lucas:*** *Nas questões anteriores, quando você não tinha a razão, ela era zero (volta às atividades anteriores).*
> ***Professor:*** *Naquela atividade, era dada a seqüência e você determina a razão. Nesta atividade é diferente. É dada a razão e você constrói a seqüência.*
> ***Julia:*** *Você não dá a razão e você não deu a seqüência.*
> ***Julia****: Ai só tem os dias e o valor inicial, que é 80.*
> ***Professor****: Vamos pensar, o que seria o próximo dia.*
> ***Lucas:*** *Aqui seriam dois reais. Aqui vai ser 80 + r.*

Os alunos ainda persistem em determinar um valor para r, procuram desenvolver o mesmo raciocínio da atividade 17, mas oriento que naquela atividade alguns termos da PA foram dados e por isso foi possível determinar a razão, o que não era a situação desta atividade.

Um raciocínio chama a atenção: "Aqui (no item a) seriam dois reais. Aqui (item b) vai ser 80 + r", Lucas, fazendo a analogia com o item anterior, expressa oralmente o segundo termo da seqüência que esperamos que os alunos escrevam como resposta: (80, 80 + r, ...).

> ***Lucas****: Tá vendo o que é o valor. É tudo 80r, 80r.*
> ***Professor:*** *Se você colocar em tudo, imagine que o valor seja 2 ou 3, pra ver se o que você está falando é verdadeiro.*
> ***Lucas:*** *Aqui a gente pode colocar qualquer valor, e aqui a gente explica porque nós colocamos este valor. Por exemplo, 2 e 80, 82, 84, 86. E aqui a gente explica a seqüência.*
> ***Julia:*** *A gente tem que dar um valor.*
> ***Lucas:*** *Podemos colocar qualquer valor que a gente quiser. Pode colocar valor 4.*
> ***Lucas:*** *E aqui a gente justifica.*
> ***Julia****: Você sabe justificar?*
> ***Lucas:*** *80,84,88,82,86.*
> ***Julia:*** *Esta seqüência é uma PA? Justifique.*
> ***Lucas****: Vamos colocar assim, porque a cada dia ele vai aumentar um determinado valor.*
> ***Julia:*** *Porque aumenta de um determinado valor r.*
> ***Lucas:*** *Acrescentamos 4 reais na questão anterior, porque a razão não estava determinada. Então nós demos uma razão para seqüência de juros.*
> ***Julia:*** *Para sabermos a seqüência de juros.*
> ***Lucas:*** *Sendo que os juros poderiam ser qualquer número porque a razão estava determinada.*

Neste momento, os alunos atribuem um valor 4 de juros (r) e desenvolveram o mesmo raciocínio do item anterior. Escrevem a seqüência (80, 84, 88, 82, 86), identificam esta seqüência como uma PA e discutem como escrever a justificativa.

> ***Professor:*** *Aqui não dá para saber que é 84. Só se fosse colocar r igual a 4.*
> ***Professor:*** *Começa com 80. Se fosse somar um valor, como você faria? Como você fez com o 4.*
> ***Julia:*** *O que?*
> ***Professor:*** *Como você chegou no 84?*
> ***Lucas****: A gente somou 4*
> ***Professor:*** *Esquece o 4 e coloque r. Qual seria o próximo?*
> ***Lucas****: 80 r.*
> ***Professor:*** *O que você faria com o 80r?*
> ***Lucas:*** *80 mais um valor que não sabemos.*
> ***Professor:*** *80 mais quanto?*
> ***Lucas****: 80 mais r.*
> ***Professor:*** *Observe que o mesmo raciocínio que você fez em cima, mas agora você está fazendo com r*
> ***Julia:*** *Tudo vai ser 80+r?*
> ***Professor:*** *Não. Viu para o próximo.*
> ***Professor:*** *Escreve 80 + r, agora + r?*
> ***Julia:*** *80 +2r.*
> ***Lucas:*** *80+3r, 80 +4r.*

b. Pedro fez um novo empréstimo de 80 reais com juros fixos de **r** reais por dia. Complete a seqüência formada pela quantia devida por Pedro nos primeiros 5 dias (80 ; 84 , 88 , 92 , 96).

(80; 80R, 80+2R, 90+3R, 80+4R).

Está seqüência é uma PA?Justifique.

Sim, porque a cada dia aumenta um determinado valor (r).
Acrescentamos o 4 para saber qual a seqüência de juros, sendo que os juros poderia ser qualquer número, porque a razão não estava determinada.

Figura 3.94-Resposta da Atividade 19- item (b)

Os alunos já haviam discutido há bastante tempo e estavam convencidos de que realmente era necessário atribuir um valor para r para responder esta atividade. Por isso, iniciei uma ação mais direta de mediação com intenção de levar os alunos a responderem a atividade.

As respostas dadas às perguntas feitas oralmente, são inicialmente numéricas, mas progridem gradativamente para respostas algébricas mais elaboradas. Respostas dos alunos: “ 84 “ ; “ 80r” ; “ 80 + r “ ; “80 + 2r “ ; “ 80 + 3r , 80 + 4r “.

> ***Julia***: (Leitura do enunciado)
> ***Lucas***: *100r.*
> ***Lucas***: *100 r. Não, não.*
> ***Lucas:*** *80 + 100r.*
> ***Julia:*** *Cada 5 dias aumentou 1r.*
> ***Lucas:*** *É a cada dia.*
> ***Lucas:*** *80+100r.*
> ***Julia:*** *Professor, seria de 80+100r ?*
> ***Professor***: *Volte item anterior, verifique um por um se essa idéia de 80+100r se aplica.*
> ***Julia:*** *Passaram 5 dias e aumentou até 4r.*
> ***Julia:*** *Os r vão diminuir.*
> ***Lucas:*** *80 +99r.*

Passados 100 dias de quanto é a dívida do segundo empréstimo de Pedro?

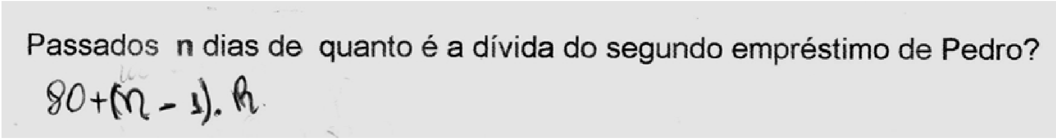
Passados os 100 dias a dívida do segundo empréstimo será ~~[illegible]~~. 80+99R.

Figura 3.95-Resposta da Atividade 19 item (b)

Os alunos responderam que a dívida era de 80 + 100r, 80 correspondendo ao valor inicial do empréstimo e 100r aos juros a serem cobrados em 100 dias. Porém, nesta atividade, no 1º dia do empréstimo não são cobrados juros. Sendo assim, os alunos estão calculando o valor da dívida do centésimo primeiro dia e não centésimo dia. Os alunos ficaram na dúvida se a resposta estava correta, e perguntaram para o professor. Orientei a dupla a verificar se o mesmo raciocínio se aplicava aos itens anteriores. Logo, perceberam que passados 5 dias os juros aumentavam de 4r, em 100 dias os juros seriam de 99r, "diminuía um r" e escreveram corretamente a resposta 80+ 99r.

Julia: *Professor, aqui foram 100 dias. Aqui é n. Então n é maior que 100 dias*
Lucas: *Não pode ser qualquer valor.*
Professor: *Pode ser qualquer número de dias. Observe que r são os juros e n é a quantidade de dias.*
Lucas: *Se cada dia foi aumentado 1r, passados n dias, nr.*
Lucas: *Seria 80 + nr, professor?*
Professor: *Se o que você está falando é verdadeiro. É se n for 100? Vai dar o que você está falando?*
Lucas: *O n é determinado valor de algum dia, tem de ser somado por r.*
Julia: *Professor, tá difícil essa aqui.*
Lucas*: nr.*
Professor: *Um dia lá na frente vai passando os dias.*
Lucas: *nr-.1*
Julia: *Vamos supor que está passando 5 dias.*
Lucas: *80+nr-1.*
Professor: *Está quase lá.*
Lucas: *O valor inicial é 80. Não pode ser n-1.*
Julia*: Professor, fala aí.*
Professor*: Como você começaria para n dias?*
Lucas: *Começaria com 80.*
Lucas: *80 +nr. A gente não sabe os dias.*
Professor*: Mas se for nr, vai dar igual a esse aqui ?*
Lucas*: Voltando ao valor 100 dias se a cada dia ela aumentar 1r o valor inicial é 80 e 99r.*
Lucas: *menos nr.*
Professor: *O que é o 100 e o que é o r?*
Julia: *O r são os dias.*
Professor: *Procura anotar as duas coisas e escrever.*
Lucas*: 80-nr.*
Professor: *Quando n for 100 o resultado tem de ser este aqui.*
Lucas: *80-nr.*
Professor: *O r vai ser multiplicador, como vamos multiplicar o r?*
Lucas*: O n.*
Lucas*: 80-nr.*
Julia: *Tem que dar esta fórmula.*
Lucas*: Aqui diminui 1 dia, n+n-n dá zero.*
Lucas: *Uma letra vezes outra letra, elas se juntam fica n vezes r.*
Julia: *80 + n vezes r.*
Julia: *É menos n.*
Lucas: *80 + n.*
Julia: *80 – r vezes 9 r.*
Lucas: *Por que 9? Não tem valor?*

Julia: *80*
Lucas: *Tem que ter o n que é o + e tem que - menos vai dar zero não tem o n.*
Lucas: (Leitura).
Lucas*: Agora não mostra nada.*
Lucas: *Seria a n vezes r.*
Julia: *A gente deve responder a outra, senão a gente não vai conseguir.*
Lucas*: 80 +nr.*
Professor: *Se fosse fazer n100.*
Professor: *Vocês chegaram nesta fórmula o n não, o número de dias ?*
Lucas*: 99.*
Julia*: Aqui a gente tem de escrever a fórmul.a*
Lucas: *80+nr*
Professor: *Se eu colocasse na fórmula 5 obteria 80+4r?*
Julia: *Se colocarmos 5 vai ter 4r e então diminui.*
Julia: *Aqui é 80 menos r.*
Lucas: *80 menos o r.*
Lucas*: 80+ (100-1)-r.*
Julia: *80+n-r.*
Professor: *Observe aqui é 100, mas se fosse n.*
Professor: *Observe aqui é 100 e temos aqui 99. Se for n quanto vamos ter aqui?*
Julia: *99*
Professor: *99 se for 100, e se for n?*
Lucas: *nr*
Professor: *Se fosse assim, aqui teríamos 100, mas é 99.*
Lucas *0r,1r,r*
Professor: *Se n é 5, temos 4; se o n é 4, temos 3; n temos?*
Lucas*: -1*
Lucas: *-r ou –1.*
Julia: *80+n*
Lucas: *80+nr..*
Professor: *Se fosse escrever n estaria colocando 100 e não 99. Se fosse esta colocando 100, tem de ser 99 o que você tem de fazer?*
Julia: *Tirar, tirar 1*
Lucas: *Tirar 1n*
Lucas: *Mas fica zero.*
Julia: *Não, vamos supor que a gente tem 100. A gente tira 1, vai ficar 99.*
Lucas: *Tirar 1n.*
Professor: *n é um número?*
Lucas: *Se fosse número a gente tira 1, mas como não é, a gente tira n. Eu só estou pensando em n.*
Lucas: *Se fosse 100 a gente tiraria 1 que é um número. Como é letra a gente tira mesma letra. Eu só estou pensando em n.*
Professor: *Mas se fosse n e tira n é zero.*
Professor*: Se fosse que 99 tirou quanto?*
Julia*: 1*
Professor: *Você tem n aqui tem aparecer quanto?*
Lucas: *nr.*
Professor: *Não, pois se colocasse 100 teríamos 10.*
Lucas: *Seria –r.*
Professor: *Se fosse tirar r está tirando os juros.*
Lucas: *-n vezes r.*
Professor: *Se colocar 100 tem que ter quanto aqui?*
Lucas: *menos n.*
Lucas *menos 1 n.*
Lucas *n-1.*
Lucas: *Como a gente sempre vê as contas com letras sempre começando letra terminando com número.*
Julia: *n-1 vezes o r.*
Professor: *Observe, se fosse colocar 100 aqui, você obtém 99.*


Passados **n** dias de quanto é a dívida do segundo empréstimo de Pedro?

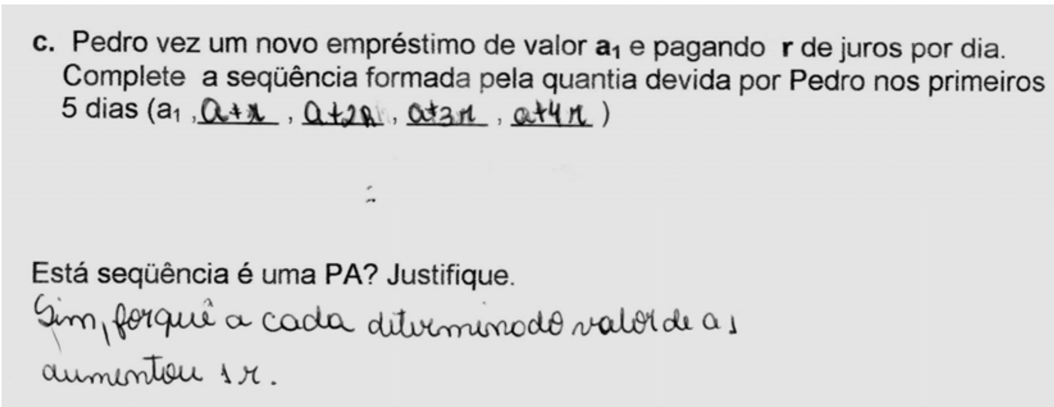
$80+(n-1).r$

Figura 3.96-Resposta da Atividade 19- item (b)

Os alunos inicialmente pensaram em nr como o valor de juros para n dias. Entretanto, com a mediação perceberam, através da utilização de valores numéricos, que não estava correto. Procuraram e testaram várias respostas como “80 + nr”; “80 + n – r”; ... . A cada resposta, orientei-os a verificarem se elas eram coerentes com os valores já trabalhos, como n igual a 100. Procurei incentivar os alunos a buscarem formas de validarem suas respostas. A dupla percebeu a necessidade de diminuir 1 da quantidade dos dias, escreveu corretamente 100 dias – 1 = 99, mas não utilizava esse raciocínio quando escrevia a generalização utilizando a variável n. Após muitas tentativas, os alunos percebem que os juros para n dias se calculavam fazendo “n-1 vezes o r”. E escreveram a resposta corretamente : 80 + (n-1)r.

Item c:

> ***Lucas :*** (Leitura do enunciado)
> ***Lucas:*** *Seria como aquela lá.*
> ***Julia:*** *Eu não agüento mais pensar.*
> ***Lucas:*** *a_1 r; a_1 2r; a_1 3r.*
> ***Lucas:*** *Duas escolhas. Ou é a_1, a_2 , a_3 ,a_4 ou a_1 r ; a_1 2r ; a_1 3r.*
> ***Lucas:*** *Igual a outra, só que a gente não tem o valor.*
> ***Lucas:*** *a_1+r; a_1+2r; a_1+3r.*
> ***Lucas****: A gente colocou 2r aqui, aqui e aqui.*
> ***Lucas:*** *Essa seqüência é uma PA? Sim Por que?*
> ***Julia:*** *Sim por que?*
> ***Lucas:*** *Porque a cada determinado valor.*
> ***Julia:*** *Porque a cada determinado valor certo aumento um r.*
> ***Lucas:*** *Porque determinado valor de a1 aumentou 1r.*


c. Pedro vez um novo empréstimo de valor **a_1** e pagando **r** de juros por dia. Complete a seqüência formada pela quantia devida por Pedro nos primeiros 5 dias (a_1 , a+r , a+2r , a+3r , a+4r)

Está seqüência é uma PA? Justifique.

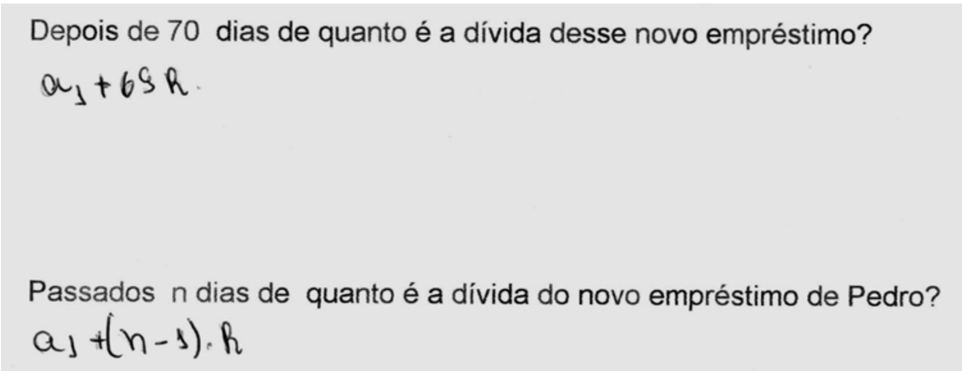
Sim, porquê a cada determinado valor de a 1 aumentou 1r.

Figura 3.97-Resposta da Atividade 19- item (c)

Neste item, os alunos não tiveram dificuldade para construir a seqüência. Porém, esta parcialmente correta, pois faltou escrever em cada termo em lugar de apenas “a” escrever a_1.

Reconhecem corretamente que a seqüência é uma PA, porém a justificativa não é clara. Acreditamos que ao escreverem “a cada determinado valor” estão se referindo aos termos da seqüência e “aumentou 1r”, estão se referindo a soma de r como um valor constante.

> ***Julia:*** *Passados 100 dias.*
> ***Lucas****: Esse aí vai ficar.*
> ***Julia:*** *Vai ficar a1.*
> ***Lucas****: São 70 dias.*
> ***Julia****: Vai ficar a1+ 69 r.*
> ***Julia****: Passados n dias.*
> ***Julia:*** *a1 é o valor + (n-1) é.*
> ***Lucas****: Entre parênteses.*
> ***Julia:*** *vezes r.*
> ***Lucas****: Agora sim.*


Depois de 70 dias de quanto é a dívida desse novo empréstimo?

$a_1 + 69R$.

Passados n dias de quanto é a dívida do novo empréstimo de Pedro?

$a_1 + (n-1).R$

Figura 3.98-Resposta da Atividade 19- item (c)

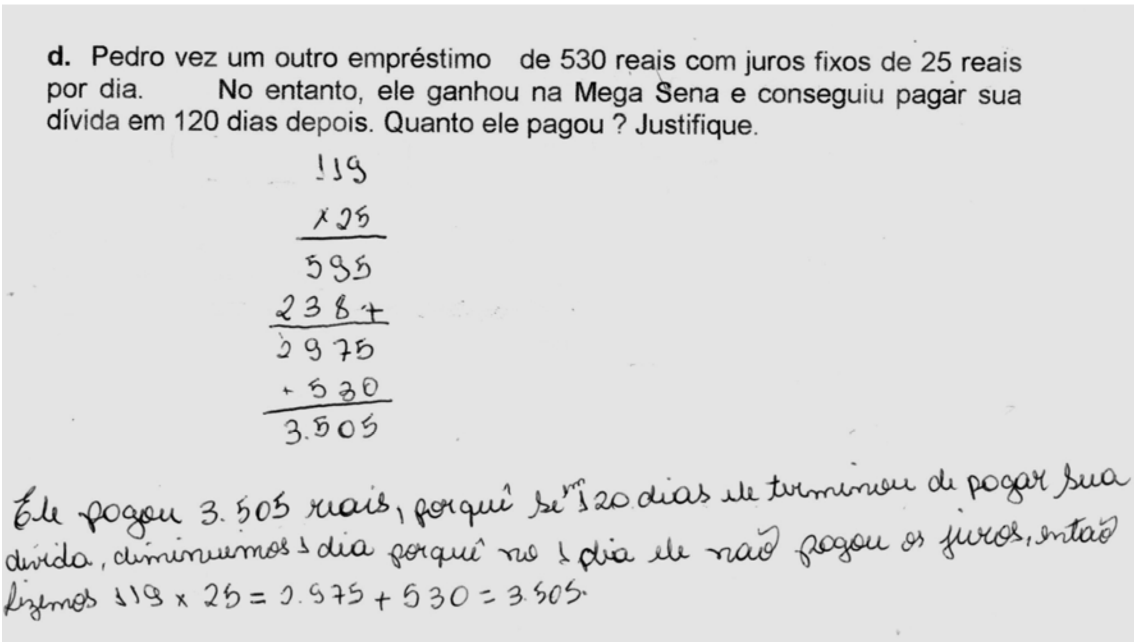
Os alunos responderam corretamente esta atividade. Desenvolveram o raciocínio se baseando nos itens anteriores já respondidos : se forem “70 dias” “ficar a_1 + 69r” . Se passados n dias “é $a_{1\ ...}$ + (n-1)” “vezes r”.

A resposta final desta atividade é a **Fórmula do Termo Geral da PA,** deduzida pelos alunos.

Item d:

> ***Julia****: (Leitura do enunciado).*
> ***Lucas:*** *530 dividido por 120?*
> ***Julia:*** *Não, a gente deve achar primeiro esse pra depois.*
> ***Lucas****: 120 certo. São 25 reais cada dia que é menos n menos 25.*
> ***Julia:*** *Eu não estou entendendo.*
> ***Julia****: Tô pensando assim, 530 reais com juros fixos. No 530 vai ter de entrar o 25 reais por dia. Aí a gente vê o todo e vai subtrair o 120 dias e vai dar o tanto que ele pagou. Eu tô pensando isto.*

***Lucas**: Subtrair 120 dias?*
***Lucas:** São 120 dias certo a cada dia são 25 reais. Seria 120 vezes 25; 3000.*
***Lucas**: Como o sempre no valor final o valor inicial foi 530 tem que ser 1n menos que no caso é 25 reais. 2975. É isso aí. Esse é o tanto de juros que ele pagou em 120 dias somado com 530.*
***Lucas:** Neste caso, vai ter uma divisão 120 dias.*
***Lucas**: Ele pagou ao todo tudo isso aqui.*
|*Lucas*: *É o que eu acredito que seja, talvez não seja.*
***Lucas**: 240 vai dar 2 daria 360. To dividindo. Nossa 1105, não.*
***Lucas:** Ta, ta. Demais 9 então é 8.*
***Lucas:** Vai ver não é nada disso.*
***Julia** Pedro, jogou... (leitura.)*
***Julia:** A conta que você fez. 3000.*
***Lucas:** 530, 5.*
***Lucas:** Professor: 530 e juros 25 em 120. 120 vezes 25, 3000-25; 2975 juros mais o valor inicial...*
***Professor:** Mas por que você está dividindo por 120? Está pedindo por dia.*
***Lucas:** Não ta.*
***Professor:** A partir do momento que vocês pegaram ... multiplicou por 25 e vocês tiraram 25.*


d. Pedro vez um outro empréstimo de 530 reais com juros fixos de 25 reais por dia. No entanto, ele ganhou na Mega Sena e conseguiu pagar sua dívida em 120 dias depois. Quanto ele pagou ? Justifique.

119
x25
595
238+
2975
+530
3.505

Ele pagou 3.505 reais, porquê se em 120 dias ele terminou de pagar sua dívida, diminuímos 1 dia porquê no 1 dia ele não pagou os juros, então fizemos 119 x 25 = 2.975 + 530 = 3.505.

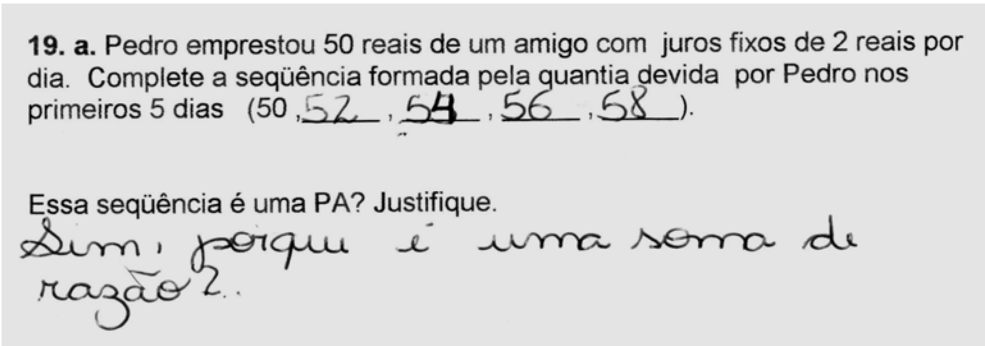
Figura 3.99-Resposta da Atividade 19- item (d)

Neste item, a dupla não respondeu como esperávamos, utilizando a Fórmula do Termo Geral deduzida anteriormente. Calcularam a dívida de forma prática, utilizando os mesmos raciocínios usados em itens anteriores. Primeiro, do total de dias subtraíram um, 120 –1 = 119, depois multiplicaram esse valor obtido pelos juros cobrados diariamente, 119 vezes 25 = 2975. Por último, somaram o valor obtido da multiplicação pelo valor do empréstimo inicial, 2975 + 530= 3505. E obtiveram corretamente o valor da dívida, 3505 reais.

Alice e Ronaldo

Item a:

***Ronaldo**: Essa é fácil.*
***Alice**: 50,100,150.*
***Ronaldo**: Não.*
***Ronaldo**: 50,52,54 são dois reais por dia.*
***Ronaldo**: 56*
***Alice**: Essa seqüência é uma PA? Sim. Por que?*
***Ronaldo**: Porque a razão é 2*



19. a. Pedro emprestou 50 reais de um amigo com juros fixos de 2 reais por dia. Complete a seqüência formada pela quantia devida por Pedro nos primeiros 5 dias (50 ,52 ,54 ,56 ,58).

Essa seqüência é uma PA? Justifique.
Sim, porque é uma soma de razão 2..

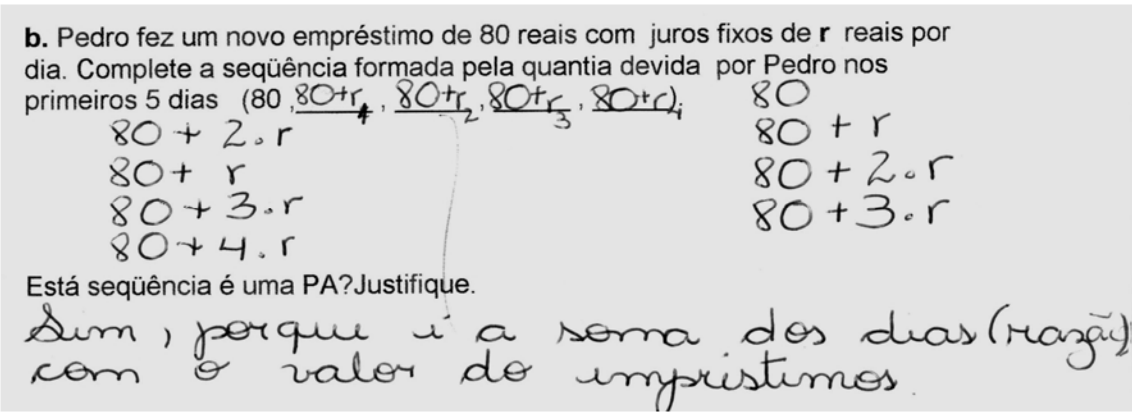
Figura 3.100-Resposta da Atividade 19- item (a)

A dupla não apresentou dificuldade para completar a seqüência, escreveu corretamente os seus termos: (50,52,54,56,58). Também reconheceu a seqüência como sendo uma PA. Na justificativa, identificou a razão da PA, "a soma de uma razão 2", ou seja, percebeu que um valor fixo 2 esta sendo somado termo a termo, sendo este valor a razão.

Item b:

***Alice**:* (Leitura do enunciado).
***Ronaldo**: r de razão mas não temos um número fixo.*
***Alice**: Iss.o*
***Ronaldo:** 80, 80r, 80r2.*
***Ronaldo**: Não, porque aqui a gente ta somando. 80; 80+r; 80+rr? Não tem como.*
***Alice**: 5 r*
***Alice:** (Leitura do enunciado).*
***Ronaldo:** 80+5r é uma função equação.*
***Alice:** Não é só colocar r1,r2,r3,r4.*
***Ronaldo**: 80+1r; 80+2r;80+3r;80+4r.*
***Ronaldo:** Tem certeza que é isso. É minha dúvida.*
***Alice:** Vai ficar uma função. Eu acho que é um número.*
***Alice:** O fixo é 80, tá. Sempre vai variar.*
***Ronaldo**: Fixo é o r.*
***Alice**: 80+r*
***Ronaldo:** 80+r.*
***Alice:** 80 r1; 80 r2;80 r3.*
***Ronaldo:** Mesma coisa daqui, pensa com r; 50 +r; 50+2 vezes r. No caso aqui o r vale 2. A razão 2 vezes 2, 4 + 50, 54.*
***Alice:** Então.*
***Ronaldo:** 80 + r; 80+r2; 80+r3; 80+r4. Entendeu, né?*

Alice: *São cinco.*
Alice: *Aqui é 82.*
Ronaldo*: então 80+r.*
Alice: *80 +r. Aqui é r2 porque é 5 dias*.
Alice: *Aqui é r2.*
Ronaldo: *Não, toma como exemplo esse daqui. Aqui é 50 + r2.*
Alice*: Não, mas não é 52 e aqui 82, no caso.*
Alice: *80 + 2 vezes r.*
Ronaldo *80 + r não, só isso.*
Alice*: Não sei, são 5 dias.*
Alice: *Aqui são 80 + r3, r4,r5, porque são 5 primeiros dias. Esse já é o primeiro.*
Ronaldo*: Aqui é o r2, r3, r4.*
Alice*: E o r5? São 5 parcelas, não 5 dias.*
Ronaldo: *Aqui é o primeiro, sem juros.*
Ronaldo*: Aqui é o primeiro na soma.*
Alice: *80+r; 80+r2; 80+r3; 80 +r4, por que?*
Alice*: Talvez não seja, porque r é uma incógnita.*
Alice: *Porque é a soma da razão mais o valor do empréstimo..*
Ronaldo*: É a razão mais*
Alice: *É a razão somada com o valor do empréstimo.*
Professor: *O que significa r2, r3,r4?*
Ronaldo: *O r multiplicado pelo valor.*
Professor*: Não há outra forma de escrever?*
Ronaldo*: Há. 2 vezes r.*
Ronaldo: *80 é o primeiro valor.*
Alice*: 80+ 2 vezes r.*
Ronaldo: *Ou só 2 r.*
Professor: *Correto.*
Ronaldo*: (Leitura do enunciado).*
Ronaldo*: É fácil.*


b. Pedro fez um novo empréstimo de 80 reais com juros fixos de **r** reais por dia. Complete a seqüência formada pela quantia devida por Pedro nos primeiros 5 dias (80 ,80+r_1, 80+r_2, 80+r_3, 80+r_4)

80 + 2.r
80+ r
80+3.r
80+4.r

80
80 + r
80 + 2.r
80 + 3.r

Está seqüência é uma PA?Justifique.

Sim, porque é a soma dos dias (razão) com o valor do empréstimos.

Figura 3.101-Resposta da Atividade 19- item (b)

Neste item, inicialmente, Alice responde (80, 80+r_1, 80+ r_2, 80+r_3, 80 +r_4) e Ronaldo falava em (80, 80+r, 80+r2, 80+r3, 80+r4). Ronaldo explica para Alice seu raciocínio, para isso se apoiou no item anterior, *"pensa com r; 50 +r; 50+2 vezes r. No caso aqui o r vale 2. A razão 2 vezes 2, 4 + 50, 54".* Em vários momentos do diálogo os alunos falavam e escreviam r2,r3,r4, e ao serem questionados do significado, responderam: *"O r multiplicado pelo valor".* Perguntei se não havia uma outra maneira de escrever e a dupla respondeu

“Há. 2 vezes r “. A dupla finaliza escrevendo corretamente a resposta (80, 80+r, 80+2r, 80+3r, 80+4r).

***Ronaldo**: (Leitura do enunciado).*
***Alice:** 80 + 100r.*
***Ronaldo:** 80+100r.*
***Alice:** 80+ n vezes r.*
***Professor:** Por que aqui é 80+r e aqui é 80+2r.*
***Alice**: A gente só inverteu.*
***Professor**: Tudo bem.*
***Professor:** Quanto é o primeiro dia?*
***Ronaldo:** O primeiro dia é no 80.*
***Professor:** Então, escreva aqui, para vocês perceberem mais alguma coisa.*

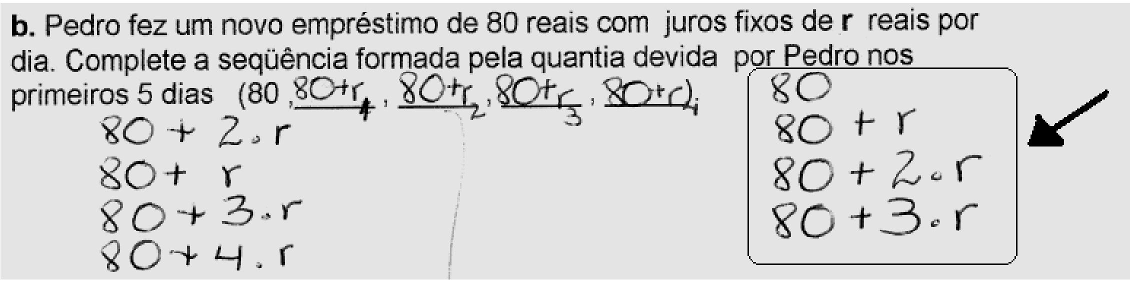
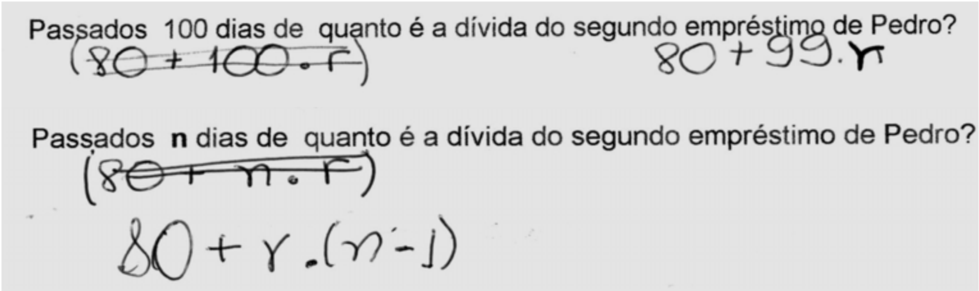


Figura 3.102-Resposta da Atividade 19- item (b) com destaque

***Professor:** Acompanhe aqui. Passou um dia, dois dias, três dias. Passaram 100 dias.*
***Alice:** 80 é o 1ºdia; 2º dia 80+r; 3º dia 80+ 2r.*
***Alice:** Parece uma potência 100 vezes o r.*
***Ronaldo**: Ou r elevado a 100.*
***Alice**: Não vai somar o 80, porque são 100 vezes o dia. A gente não sabe de quanto é os juros.*
***Ronaldo:** 100 vezes r.*
***Alice:** Se eu passar pra lá eu acho o valor de r.*
***Ronaldo**: Não dá porque não é uma igualdade.*
***Alice:** A gente chega a 40.*
***Alice:** Haaa... Não tem uma igualdade.*
***Alice**: A gente iguala a zero.*
***Alice**: Não é, não vai dar.*
***Ronaldo**: 1º dia é 80, normal; 2º dia é 80 r; 3º dia é 80 2r. Aqui deve ser 80 + 99 vezes r.*
***Alice:** Entendi seu raciocínio, pode ser.*
***Ronaldo**: Presta atenção, se é o 1º é 80, 3º dia 2; o 5º dia 4. Passados 100 dias é 99.*
***Ronaldo:** 80+99vezes r.*


Passados 100 dias de quanto é a dívida do segundo empréstimo de Pedro?
~~(80 + 100 . r)~~ 80 + 99.r

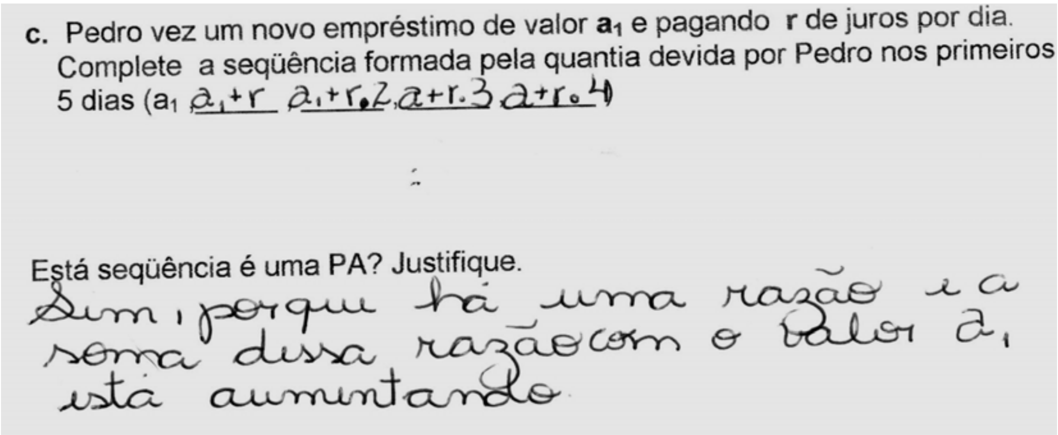
Passados **n** dias de quanto é a dívida do segundo empréstimo de Pedro?
~~(80 + n . r)~~
80 + r .(n - 1)

Figura 3.103-Resposta da Atividade 19- item (b)

Nesta atividade, a dupla estava convencida da resposta 80 + 100r como sendo a dívida em 100 dias, porém esta reposta é incorreta, pois no primeiro dia do empréstimo não há acréscimo de juros, sendo assim a resposta correta seria 80 + 99r . Iniciei uma mediação mais direta para levar a dupla a resposta desta atividade. Primeiro, apontei para a folha de resposta solicitando que escrevessem à direita a seqüência construída no item anterior para melhor visualização. Logo em seguida, solicitei aos alunos que observassem a sucessão dos termos: *"...passaram um dia, dois dias, três dias. Passaram 100 dias. " Alice raciocina tentando construir e resolver uma equação para determinar o valor de r, mas logo percebe não ser possível, "não é, não vai dar".* Ronaldo desenvolve o seguinte raciocínio e obtém a resposta correta "*1º dia é 80, normal; 2º dia é 80 r; 3º dia é 80 2r. Aqui deve ser 80 + 99 vezes r*" , Alice concorda com esse raciocínio . Por fim, a dupla riscou o que havia registrado e escreve as novas respostas : 80 + 99. r e 80 + r . (n–1).

Item c:

Alice: *(Leitura). A gente não sabe valor nenhum.*
Ronaldo*: A gente não sabe valor nenhum, mas sabe como formar uma função equação.*
Ronaldo*: a_1 é o valor da quantia. O valor não muda.*
Alice: *Qual valor que não muda.*
Ronaldo*: do a_1.*
Alice: *a_1 + r.*
Ronaldo*: a_1+ r2; vezes 2.*
Ronaldo*: Essa seqüência é uma PA?*
Ronaldo*: Se é uma PA tem que ter uma razão.*
Alice*: Essa razão mais o valor.*



c. Pedro vez um novo empréstimo de valor **a_1** e pagando **r** de juros por dia. Complete a seqüência formada pela quantia devida por Pedro nos primeiros 5 dias (a_1 a₁+r a₁+r.2 a+r.3 a+r.4)

Está seqüência é uma PA? Justifique.

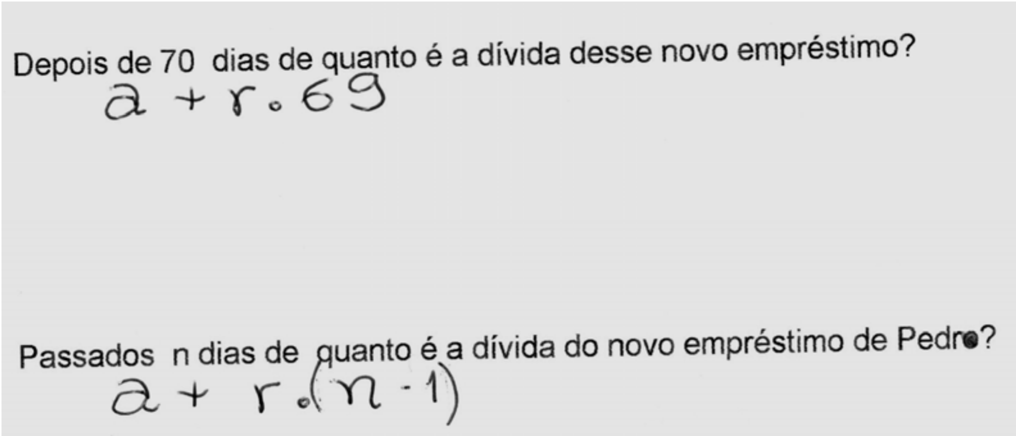
Sim, porque há uma razão e a soma dessa razão com o valor a₁ está aumentando.

Figura 3.104-Resposta da Atividade 19- item (c)

Os alunos não tiveram dificuldade para escrever a seqüência, porém está parcialmente correta. A seqüência construída pelos alunos apresenta o 4° e 5° termos escritos com “a” quando o correto seria “a_1”. Acreditamos se tratar de um erro de atenção na redação de resposta.

Os alunos responderam corretamente que a seqüência é uma PA, e na justificativa mencionam que existe uma razão, porém não a explicitam, e acrescentam que a razão esta sendo somada a a_1.

Ronaldo*: Passados n dias de quanto é a dívida?*
Alice*: a + r vezes n não tem juros.*
Professor: *Volta e olha os itens anteriores e retorna aqui.*
Ronaldo*: r vezes n – 1.*
Alice: *Por que –1?*
Ronaldo: *Porque aqui é 70, então 70 – 1 dá 69.*
Ronaldo: *r vezes n-1.*
Alice: *Vezes aqui.*
Ronaldo*: Não r vezes n-1. No caso, sempre resolve primeiro o que está entre parênteses, correto.*
Alice*: Você coloca entre parênteses e vai aplicar a distributiva assim vai dar um monte de incógnita.*
Alice*: Colocaria aqui e aplicaria a distributiva r n; r1. Não acha que é.*
Ronaldo: *Professor, sempre que você coloca uma conta de multiplicação fora do parênteses, sempre tem que dar valor?*
Professor: *Vou ler o que está escrito? Você está multiplicando r pelo n.*
Ronaldo*: No caso aqui se eu colocar entre parênteses, primeiro é a conta do parênteses.*



Depois de 70 dias de quanto é a dívida desse novo empréstimo?

$a + r.69$

Passados n dias de quanto é a dívida do novo empréstimo de Pedro?

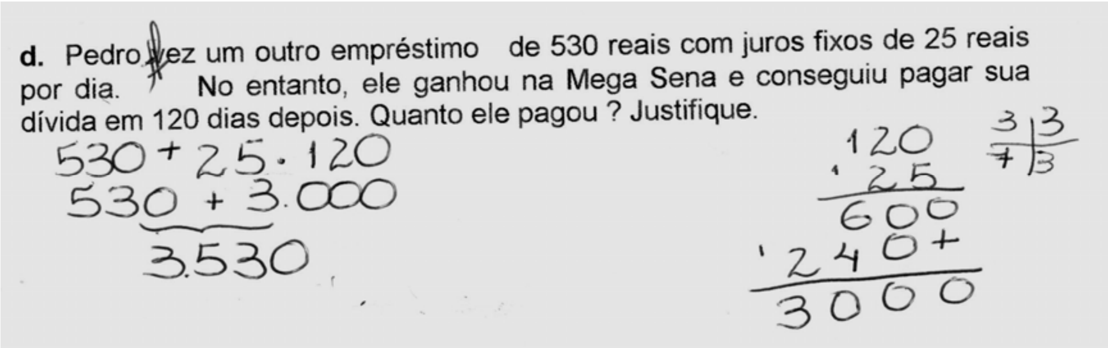
$a + r.(n-1)$

Figura 3.105-Resposta da Atividade 19- item (c)

A dupla apresentou algumas dificuldades para responder esta atividade. No início deste item, estão pensando na resposta a + r vezes n. Observei a dificuldade e pedi que eles examinassem os itens respondidos anteriormente. Os alunos descobrem que é necessário, para se calcular os juros, efetuar o seguinte cálculo: “ *r vezes n – 1* “ . Os alunos escrevem “rn–1” e formulam uma pergunta para o professor . Ciente da dúvida do aluno, me limitei apenas a ler o que estava escrito, “*você está multiplicando r pelo n”.* Logo, a dupla percebe a necessidade de acrescentar um parênteses à expressão escrita. Por fim , apresentam as respostas parcialmente corretas, pois escreveram a + r.69 e a + r(n –1), entretanto a resposta precisa é a_1 + r.69 e a_1 + r(n –1).

item d:

Ronaldo: (Leitura do enunciado).
Alice: *Acho que agora temos todos os valores.*
Alice: *530 + 25 juros fixos.*
Ronaldo*: Acho que aqui não seria + não, seria –.*
Alice: *Na hora de pagar ele não vai ter de pagar tudo.*
Alice: *Com todos a gente não fez +.*
Ronaldo*: Aqui diz que tem 25 reais fixos por dia.*
Alice: *No entanto, ele ganhou na mega sena e conseguiu pagar em 120 dias.*
Ronaldo: *25 vezes 120.*
Alice*: Já deu.*
Alice*: Empréstimo, razão.*
Ronaldo*: A conta vai ser o quanto ele pagou.*



d. Pedro fez um outro empréstimo de 530 reais com juros fixos de 25 reais por dia. No entanto, ele ganhou na Mega Sena e conseguiu pagar sua dívida em 120 dias depois. Quanto ele pagou ? Justifique.

530 + 25 · 120
530 + 3.000
3.530

120
· 25
600
240 +
3000

Figura 3.106-Resposta da Atividade 19- item (d)

Os alunos não utilizaram a Fórmula do Termo Geral da PA, deduzida por eles no item anterior, como prevíamos. Utilizaram um raciocínio já aplicado em itens anteriores. Primeiro, calcularam o total de juros a ser pago, obtiveram esse valor multiplicando o total de dias pelos juros cobrados diariamente, 25 vezes 120 = 3000. Finalizam somando este valor calculado ao valor inicial do empréstimo, 300+ 530 = 3530.

Consideramos que este cálculo está errado, pois não observaram que no primeiro dia do empréstimo não há cobrança de juros, por isso deveriam ter efetuado o seguinte cálculo: 25 vezes 119 = 2975 , e somado com o valor inicial do empréstimo , 350+2975=3505

ANÁLISE DO BLOCO 3

Entendemos que os alunos atingiram os objetivos propostos para a atividade 15, pois construíram uma seqüência numérica a partir de uma situação dada e a identificaram como sendo uma PA.

Na atividade 16, as duplas reconheceram que existe um valor, que é somado de termo a termo na seqüência construída, e que este valor é constante, ou seja, determinaram a razão de uma PA.

Esperávamos que os alunos ao lerem a definição de progressão aritmética, logo após a atividade 16, associassem essa definição à seqüência construída na atividade 15 como uma PA de razão 3. No entanto, percebemos que a dupla Lucas e Julia não procedeu como esperávamos, pois construiu a seqüência, mas não a associou com a definição de PA.

Na atividade 17, as duplas identificaram a razão e completaram a PA. No entanto, a dupla Lucas e Julia não justificou as respostas, fato este que não sabemos apontar o porquê.

Com relação à atividade 18, as duplas determinaram o padrão da seqüência figural e, em seguida, construíram uma seqüência numérica, compreendendo que o valor de cada um de seus termos correspondia à quantidade de quadrados da seqüência figural do item anterior. As duplas também reconheceram que a seqüência obtida é uma PA, apresentando as respectivas justificativas.

Na atividade 19, observamos que, mesmo que com certa dificuldade, talvez em função de problemas no enunciado e do modo que foi elaborada - envolvendo apenas situações algébricas – os alunos conseguiram construir a Fórmula do Termo Geral.

Acreditamos que os objetivos deste bloco foram alcançados, na medida em que os alunos conseguiram conceituar e definir Progressão Aritmética. Entendemos que o papel do professor também foi significativo, no sentido de não dar respostas prontas, mas questionar os alunos em vários momentos, permitindo a ampliação da reflexão na resolução das atividades.

Nas atividades 18 e 19, nas quais não foi utilizado o computador, o professor assumiu o papel de validação.

Na atividade 17, na qual foi usado o computador, este auxiliou na aprendizagem, pois facilitou a validação das respostas. Isto contribuiu para o desenvolvimento de autonomia do aluno na aquisição de conhecimentos matemáticos.

CAPÍTULO 4

4.1. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho de pesquisa compreende um estudo teórico e experimental sobre o tema Progressão Aritmética. As principais motivações para o desenvolvimento deste trabalho foram: melhorar minha atuação em sala de aula, proporcionando ao aluno um aprendizado mais significativo, e contribuir com o Projeto AProvaME que tinha como objetivo a investigação sobre argumentação e prova na matemática escolar.

O AProvaME, em linhas gerais, era composto por alunos do mestrado e professores/pesquisadores do grupo de pesquisa TecMEM da PUC/SP que se reuniam quinzenalmente para promover investigações sobre o tema argumentação e prova.

Foi da minha participação no Projeto AProvaME que se deu a escolha do tema deste trabalho, mais precisamente na fase 2 deste projeto. Nesta fase o principal objetivo foi de desenvolver seqüências de ensino para alunos de 8ª série do Ensino Fundamental e 1º ano do Ensino Médio, possibilitando ao aluno a aquisição de conhecimentos matemáticos relacionados a um conteúdo matemático, assim como conhecimentos de argumentação e prova, utilizando recursos de tecnologia.

O objetivo deste trabalho, foi o de levar o aluno a adquirir conceitos e conhecimentos relacionados à Seqüência Numérica e à Progressão Aritmética. Tivemos também como objetivo levar o aluno a adquirir habilidades em argumentação e prova matemática, mais especificamente no desenvolvimento de raciocínios dedutivos para se determinar a generalização de seqüências numéricas e na construção da Fórmula do Termo Geral da PA.

Adotamos como metodologia para o desenvolvimento deste trabalho de pesquisa, noções de uma metodologia conhecida por Engenharia Didática. Acreditamos que essa escolha foi pertinente, visto que ela contempla tanto uma dimensão teórica como experimental.

No que concerne ao tema Argumentação e Prova, nos baseamos nas seguintes obras que tratam deste assunto: Balacheff et al (2001), Pietropaulo (2005), Nasser e Tinoco (2001) e Fonseca e Fernandes(2003).

Balacheff et al (2001) classifica as tarefas para o ensino e aprendizagem da prova em dez tipos, exemplificadas no capítulo 2 deste trabalho. A classificação usada por Balacheff et al (2001) é por objetivos, pois ele entende ser mais vantajosa para o professor que pode escolher a atividade adequada aos objetivos que pretende alcançar.

No que diz respeito aos Padrões Numéricos, nos baseamos, principalmente, em Vale e Pimentel (2005) e Vale et. al. (2006). Segundo estas autoras, a utilização de padrões é um recurso poderoso para o desenvolvimento da aprendizagem matemática do aluno, pois na busca de um padrão é necessário o desenvolvimento de conjecturas e generalizações, habilidades também necessárias para o desenvolvimento de argumentação e prova.

Em relação à tecnologia, os estudos de Valente (1999), Borba e Penteado (2001) e Gravina e Santarosa (1998) apontam sobre as contribuições do seu uso na educação. O recurso tecnológico escolhido para este trabalho de pesquisa foi um *software* de autoria, conhecido por Hot Potatoes, que foi usado para a construção de nove atividades da seqüência.

A parte experimental da pesquisa trata de uma seqüência de 19 atividades, agrupadas em 3 blocos: Padrões Numéricos e Seqüência não-numérica, Seqüência Numérica e Progressão Aritmética. Essa seqüência, cujos resultados serviram para as análises, foi aplicada a um grupo de oito alunos do 1º ano Ensino Médio.

Procurando responder às questões da pesquisa:

Em que medida a seqüência de atividades propostas permite ao aluno construir os conceitos e conhecimentos relacionados à seqüência numérica e Progressão Aritmética, e no desenvolvimento de habilidade de argumentação e prova?

Para responder esta questão devemos considerar a forma em que foi concebida a seqüência proposta :

- procuramos estimular os alunos a investigações de padrões, ao enfocar, em várias atividades, situações próximas ao seu cotidiano. As atividades exigiam que o aluno construísse ou completasse as seqüências, sendo que para isso era necessário identificar o padrão desta seqüência.
- elaboramos uma seqüência, em que partimos de situações mais simples, ao completar ou construir seqüências, para situações mais complexas, em que o aluno deveria obter a generalização de uma seqüência e justificar o raciocínio utilizado, por escrito;
- em nove atividades da seqüência, os alunos usaram o computador, respondendo atividades de completar lacunas construídas no programa Hot Potatoes. O uso do computador estimulou os alunos para a resolução das atividades e possibilitou-lhes uma maior autonomia, ao fornecer um *feedback* das respostas dadas.

No Bloco 1, composto pelas atividades 1,2 e 3, o aluno é levado a identificar o padrão e completar ou construir seqüências numéricas e não-numéricas. Também é levado a construir e comparar se duas seqüências são iguais ou não. Por meio da análise dos resultados, pudemos constatar que os objetivos traçados foram alcançados a medida em que despertamos o interesse do aluno na investigação de Padrões e introduzimos o conceito de Seqüência. Observamos que o *feedback* obtido nas atividades, em que foi usado o computador, tiveram papel importante ao motivar os alunos, contribuindo, sobremaneira, para a construção dos conceitos envolvidos.

O Bloco 2, composto pelas atividades 4 a 14, envolve o aluno na construção dos conceitos de seqüência numérica, a compreender a linguagem matemática e a obter a generalização da seqüência através desenvolvendo um raciocínio dedutivo.

Nas atividades 4 a 9, os alunos são levados a construir seqüência numérica relacionados a uma situação descrita, a identificar se a seqüência é finita ou infinita, completar seqüências identificando seu padrão pela variação dos termos iniciais e a construir seqüências segundo uma lei de formação descrita. Os alunos trabalham com uma diversidade de seqüências: seqüências constantes e alternantes, Progressão Aritmética e Geométrica. Verificamos que os objetivos foram alcançados, pois os alunos compreenderam que uma seqüência numérica é um conjunto numérico que possui uma ordem ou padrão.

Os alunos tiveram muita dificuldade na atividade 8, pois exigia conhecimentos sobre números primos e múltiplos, por isso uma das duplas não respondeu corretamente esta atividade.

Na concepção desta atividade, já prevíamos esta dificuldade, porém não havíamos planejado como deveria proceder diante de tais dificuldades.

Acreditamos que esta atividade e a forma de se trabalhar as dificuldades dos alunos precisam ser repensadas.

Nas atividades 10, 11 e 12, procuramos levar, principalmente, o aluno a compreensão da linguagem matemática utilizada, a_1, a_2, a_3, ... e a generalização de seqüências (a_n). Pelas respostas dos alunos, constatamos que inicialmente trabalhando com seqüências constantes ou alternantes e com língua natural os alunos tiveram maior facilidades para responder as questões, compreender a linguagem matemática envolvida e obter o termo geral das seqüências.

Nas duas últimas atividades deste bloco, 13 e 14, levar o aluno a identificar o padrão de uma seqüência figural, e a partir dela construir uma seqüência numérica correspondente e por último obter o termo geral desta seqüência.

Pelas respostas dadas pelos alunos e pelas nossas observações, notamos que o contexto, onde cada termo seqüência corresponde a um termo da seqüência figural, facilitou o entendimento e a criação das respostas para os outros itens. Apresentam dificuldades coma linguagem matemática ao expressar sobre os termos da seqüência preferindo a língua natural para escrever suas respostas.

Para construir o termo geral, desenvolveram raciocínios baseados nos itens anteriores e inicialmente tiveram dificuldade para apresentar uma resposta que não era numérica. Os alunos compreenderam a situação,construíram as seqüências e desenvolveram raciocínios dedutivos para construir o termo geral das seqüências.

Verificamos que os objetivos do bloco dois foram alcançados, pois os alunos entenderam que uma seqüência numérica é um conjunto numérico que possui uma ordem ou padrão, compreenderam a linguagem matemática envolvida e desenvolveram raciocínios dedutivos para a generalização de uma seqüência.

No Bloco 3, nas atividades 15 a 18, procuramos levar o aluno a construir uma seqüência e identifica-la como Progressão Aritmética. Determinar a razão de algumas Progressões Aritméticas e construir o termo geral de uma PA, construída a partir de uma seqüência figural. Observamos que os alunos aplicaram os conhecimentos adquiridos nos blocos iniciais. Demonstraram mais facilidade de compreender e utilizar a linguagem matemática envolvida.

No entanto, percebemos que os alunos tiveram dificuldade para compreender a definição de PA, pois para responder a atividade 18 voltaram a ler a definição de PA. Para determinar termo geral da PA construída se basearam no contexto da situação e nos itens anteriores, construiram o termo geral da PA.

Em relação à atividade 19, os alunos construiram a Fórmula do Termo Geral. Entretanto, verificamos que houve muita dificuldade para que os alunos chegassem à construção. Os aluno recorrem muitas vezes ao professor, não interpretando a situação como previamos. Observamos que um dos problemas foi em decorrência do enunciado, ou seja, o aluno lia e não compreendia a situação proposta. Outro problema foi o modo com que a atividade foi elaborada, pois envolvia apenas situações algébricas.

Em relação ao bloco três, constatamos que os objetivos foram alcançados, na medida em que os alunos conseguiram conceituar e definir Progressão Aritmética e construir a Fórmula do Termo Geral da PA.

Em que medida a utilização do software de autoria Hot Potatoes pode contribuir no desenvolvimento das atividades propostas?

Verificamos que a utilização do software Hot Potatoes contribuiu na medida em que a ferramenta disponível no *software*, o JCloze, possui características ideais para a construção de atividades da nossa seqüência. Veio ao encontro de nossas necessidades, ao possibilitar o preenchimento de espaços e autonomia na verificação das respostas dadas pelos alunos.

Observamos que a escolha do uso do computador motivou, naturalmente, os alunos para realização das atividades. Eles gostaram de trabalhar com o computador e tiveram boa aceitação ao tipo de exercício interativo proposto.

Um outro aspecto que ressaltamos é o resultado da interatividade do aluno com o computador. Notamos que a interatividade possibilitou aos alunos um *feedback* de suas respostas, após completar as lacunas e acionadar o botão de verificação. Desta maneira, o aluno teve a possibilidade de repensar suas hipóteses e refletir acerca do seu raciocínio.

Entretanto, apontamos uma limitação constatada com o uso do computador. Eventualmente, o aluno registrava determinada resposta, que mesmo correta, o computador só aceitava exatamente o que foi programado. Não improvisa e nem interage além do que exatamente foi programado pelo professor. Em função disso, consideramos que o professor precisa acompanhar todo o processo com os alunos.

Destacamos que o papel do professor, durante a aplicação das atividades, foi relevante para o processo de aprendizagem. A mediação foi realizada na medida em que procuramos dar a autonomia necessária ao aluno, ao mesmo tempo em que apoiamos seu trabalho durante a realização das tarefas.

O apoio foi no sentido de privilegiar uma postura de questionamento diante das respostas dos alunos, forçando-os a repensar sobre o problema, e também recordando informações relevantes necessárias à condução de determinadas situações.

Tecemos algumas críticas ao nosso trabalho com relação a algumas atividades, sendo necessárias alterações.

A atividade 19, por exemplo, acreditamos que poderia ser aperfeiçoada ao envolver uma situação em que o aluno partisse de uma seqüência figural, construísse uma seqüência numérica correspondente e uma tabela, a exemplo da atividade 13, 14 e 18.

O impacto dessa pesquisa na minha prática, resultou em uma mudança de postura, na medida em que nossa preocupação no desenvolvimento das aulas está voltada para a construção de um raciocínio que priorize o desenvolvimento de competências que permitam aos alunos a elaboração relativa à argumentação e prova, essencial à promoção do raciocínio-lógico matemático.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, S. A., **Fundamentos da Didática da Matemática**. Curitiba: Ed. UFPR,2007.

BALACHEFF, N., Demongeot C., Gandit M., Garnier R., Hilt D., Houdebine J., Juhel M.-A. **Preuve et démonstration: quelques questions essentielles**. IREMs de Grenoble et Rennes. (p.84 - 99), 2001.

BRASIL. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais PCN: Matemática.** Ensino Fundamental II Brasília: MEC, 1998

BRASIL, Ministério da Educação / Secretaria de Educação Média e Tecnológica. ***Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio***. Brasília:Ministério da Educação, 2000.

BRASIL. Ministério da Educação / Secretaria de Educação Básica / **Orientações Curriculares para o Ensino Médio – Ciências da Natureza, Matemática e Suas Tecnologias**. Brasília:MEC, 2006.

BORBA, M. , PENTEADO, M. **Informática e Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

CARVALHO, M.C.C.S. **Padrões Numéricos e Seqüências.** São Paulo: Moderna, 1997.

FERREIRA, A. B. H. **Dicionário Aurélio Século XXI**. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1999.

FONSECA, L; FERNADES, D**. Argumentação e demonstração no contexto da formação inicial de professores** in A Matemática na Formação do Professor:2003,Disponível: www.spce.org.pt/sem/encontros/encontros2003.htm acesso em: 10.10.2007

GRAVINA, M. A. ; SANTAROSA, L. M**. A aprendizagem da matemática em ambientes informatizados. IV Congresso RIBIE,** Brasília, 1998. Disponível em: http://lsm.dei.uc.pt/ribie/docfiles/txt200342413933117.PDF.Acesso em 10.06.08

LEFFA, V. J**. Uma Ferramenta de autoria para o professor:o que é e o que faz.** Letras de Hoje, Porto Alegre, v. 41, n. 144, p. 189-214, 2006. Disponível em: www.leffa.pro.br/trabalhos/ferramentas_de_autoria.htm. Acesso em 11.10.2007

MACHADO, S. D. A., “Engenharia Didática“. In: Machado S. D. A. (Org), **Educação Matemática: uma introdução**. São Paulo: EDUC,1999.

MODANEZ, L. (2003) **Das seqüências de Padrões Geométricos à Introdução ao Pensamento Algébrico**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), São Paulo- Pontifícia Universidade Católica, PUC/SP.

MASETTO,M.T. “Mediação Pedagógica e o uso da tecnologia”. In: Moran, J.M.;Masetto, M.T.;Behrens, M.A. **Novas tecnologias e mediação pedagógica.** Campinas: Papirus, 2000.

NASSER, L; TINOCO, L. A A**. Argumentação e Provas no ensino de Matemática**. Rio de Janeiro. Projeto Fundão- IM/UFRJ, 2001.

PAIS, L. C., **Didática da Matemática: uma análise da influência francesa.** Belo Horizonte: Ed. Autêntica, 2002.

PIETROPAOLO, R. C. ***(Re) Significar a Demonstração nos Currículos da Educação Básica e da Formação de Professores de Matemática***. São Paulo: PUC, 2005. Tese de Doutorado.

PONTE, J.P **O Ensino da Matemática na Sociedade da Informação (Editorial)**. Educação e Matemática - Revista da Associação dos Professores de Matemática. Lisboa: n. 45,nov/dez, 1997. Disponível em http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/97-Ponte(Educ&Mat).rtf- Acesso em 12.06.2008

VALE, I. , PALHARES, P., CABRITA, I. , BORRALHO, A. **Os Padrões no Ensino e Aprendizagem da Álgebra**. 2006. Disponível em: www.spce.org.pt/sem/13iv.pdf - Acesso em 15.06. 2007

VALE, I. , PIMENTEL, T. **Padrões: Um tema transversal do currículo. Educação e Matemática.**Educação e Matemática - Revista da Associação dos Professores de Matemática. Lisboa: n. 85,p. 14 - 20, nov/dez,2005.

VALENTE, J. A. **O uso inteligente do computador na educação.Pátio Revista Pedagógica.**Porto Alegre:Artes Médicas Sul, ano 1, nº 1, p. 19-21, 1997. Disponível em: www.bibvirt.futuro.usp.br/content/download/3317/22949/file/usointeligente.PDF . Acesso em: 20.06.2008.

VALENTE,J.A. (org). **O computador na sociedade do conhecimento.** Campinas, SP: UNICAMP/NIED, 1999. Disponível em:www.nied.unicamp.br/oea/pub/livro1/index.html. Acesso em 10.06.2008.

ANEXO A – O Projeto AProvaME

O PROJETO AProvaME

CNPq – Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico

Argumentação e Prova na Matemática Escolar

(AProvaME)

Siobhan Victoria Healy (coord.)

Grupo de Pesquisa Tecnologias e Meios de Expressão em Matemática (TecMEM)

Programa de Estudos Pós Graduados em Educação Matemática

PUC/SP

1. Caracterização do Problema

A prova tem um papel central na Matemática. Tradicionalmente, ela caracteriza-se como ferramenta para distinguir essa disciplina das ciências experimentais, oferecendo um método indubitável de validar conhecimento que contrasta com indução natural de processos empíricos. Prova matemática dedutiva fornece aos seres humanos a forma mais pura de diferenciar o certo do errado (Wu, 1995), sendo este aspecto apontado como uma característica essencial da Matemática no pensamento ocidental (Aleksandrov, 1963).

Em termos educacionais, conforme reconhecido pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 1998), o currículo de Matemática deve necessariamente contemplar atividades e experiências que possibilitem aos aprendizes o desenvolvimento e a comunicação efetiva de argumentos matematicamente válidos. Entretanto, inúmeras pesquisas mostram que os raciocínios de estudantes freqüentemente não se apresentam conforme as leis da lógica e são influenciados por uma série de fatores além das exigências lógicas (Wason, 1966; Light, Girotto e Legrenzi, 1990). Estudos internacionais em Educação Matemática indicam fortemente que aprendizes tendem a confundir justificativas empíricas com raciocínios dedutivos e analisam argumentos de acordo com aspectos de forma e não de conteúdo (Chazan, 1993; Healy e Hoyles, 2000).

Apesar da existência de consenso quanto às dificuldades associadas ao ensino e à aprendizagem de prova em diversos países, pode-se identificar variações significativas nas concepções dos estudantes relacionadas ao currículo de cada país. A título de ilustração, enquanto alunos da Inglaterra mostram preferência para argumentos empíricos, os de Taiwan são mais propensos a enfatizar argumentos apresentados formalmente, ainda que em nenhum dos grupos os sujeitos demonstrem compreensão consistente desse segundo tipo de argumento (Healy e Hoyles, 2000; Lin, 2000). Ainda que tais estudos possam inspirar conjecturas referentes às concepções de prova de alunos brasileiros, esse contexto carece de um mapeamento preciso de tais concepções, necessário para subsidiar propostas e abordagens de ensino especificamente endereçadas à realidade brasileira.

Além de base sólida sobre as concepções e dificuldades dos alunos, uma abordagem eficiente para o ensino da prova em Matemática requer, não apenas situações de aprendizagem inovadoras no sentido de explorar novos contextos e novas ferramentas para o acesso e construção de argumentos formais, como também a aceitação e apropriação pelos professores de tais situações. Nessa perspectiva, uma investigação na problemática do ensino e aprendizagem da prova pode compreender dois enfoques inter-relacionados: O primeiro refere-se à elaboração de situações de aprendizagem. Neste enfoque, pretendemos investigar as possibilidades oferecidas pelos ambientes computacionais, nos quais os aprendizes precisam explicitar as propriedades e relações na linguagem formal do sistema em particular, enquanto interagem simultaneamente com os dados gerados pelas suas definições. Uma questão que se coloca é, então, como esta experiência com o computador influencia na compreensão da prova, na distinção entre argumentos dedutivos e evidências empíricas e no desenvolvimento de habilidades para lidar com argumentos matemáticos expressos de diferentes formas. O segundo enfoque centra-se no professor. A integração efetiva de uma nova abordagem na sala de aula somente torna-se possível mediante um processo de adaptação, cujo agente principal é o professor. Uma outra questão recai então sobre as condições e suportes que favorecem uma verdadeira apropriação da inovação pelo professor.

2. Objetivos

Os objetivos da pesquisa são:

1. Levantar um mapa das concepções sobre argumentação e prova de alunos adolescentes em escolas do estado da São Paulo.
2. Formar grupos colaborativos compostos por pesquisadores e professores para a elaboração de situações de aprendizagem, visando envolver alunos em processos de construção de conjecturas e provas em contextos integrando ambientes informatizados.

3. Criar um espaço virtual de compartilhamento entre os membros da equipe do projeto e analisar seu papel no desenvolvimento das situações de aprendizagem, assim como na evolução de conhecimentos pedagógicos sobre prova em Matemática.
4. Avaliar situações de aprendizagem, em termos da compreensão dos alunos sobre a natureza e funções de prova em Matemática.
5. Investigar a implementação destas atividades por diferentes professores e assim identificar em que medida sua participação nos grupos colaborativos fornece uma apropriação desta abordagem para o ensino e aprendizagem de prova.
6. Formular recomendações relacionadas ao papel da argumentação e da prova no currículo de Matemática escolar.
7. Contribuir para o debate internacional sobre o ensino e aprendizagem de prova em Matemática.

3. Metodologia e Estratégia de Ação

O projeto será organizado em duas fases, a primeira envolve um levantamento de concepções de alunos (faixa etária 14-16 anos), cujos resultados subsidiarão a segunda fase, na qual o foco será na elaboração e avaliação de situações de aprendizagem. Além da equipe de pesquisadores, 15 estudantes do curso de Mestrado Profissional no Ensino de Matemática da PUC/SP (com população atual de 86 mestrandos) integrarão a equipe como *professores-colaboradores*, devendo participar de ambas as fases.

FASE 1

Nesta fase, o instrumento principal para o mapeamento das concepções dos alunos será um questionário a ser aplicado em um total de 45 turmas do Ensino Fundamental ou Médio, de escolas públicas e particulares do estado da São Paulo. Inicialmente, cada professor-colaborador participante terá a incumbência de indicar de 6 a 10 turmas, e a partir daí, a amostra será determinada por meio de uma seleção aleatória. Um espaço virtual será criado para facilitar as comunicações entre os membros da equipe no compartilhamento das decisões e ações no âmbito do projeto, o que será de responsabilidade de um dos pesquisadores. Além disso, ao longo da Fase 1, serão realizados encontros de trabalho presencial, com freqüência quinzenal, reunindo pesquisadores e professores-colaboradores.

O questionário acima citado (denominado Q1) será elaborado com base naquele concebido por Healy e Hoyles (1998) na Inglaterra e já utilizado em outros países (França, Taiwan, Israel, Austrália). Este questionário compreenderia itens visando avaliar em que medida os sujeitos aceitam evidências empíricas como prova, distinguem evidências empíricas de argumentos matematicamente válidos, compreendem o domínio de validade de uma prova e são capazes de construir argumentos válidos. Além disso, pretende-se identificar a influência da forma de apresentação da prova (língua natural, língua formal, representações visuais ou figurativas, etc.) na compreensão dos argumentos. As questões contemplarão dois domínios matemáticos – Geometria e Álgebra – sendo organizadas em dois blocos, a saber: 1) avaliação de vários argumentos apresentados como provas de uma dada afirmação e, 2) construção de provas. Cabe destacar que o modelo de concepções sobre tipos de prova de Balacheff (1988) fundamenta a definição dos argumentos apresentados nos itens do questionário. Concomitante à aplicação do questionário junto aos alunos, os professores de Matemática de cada turma responderão a um segundo questionário (Q2), que além dos mesmos itens relacionados à prova em Matemática de (Q1), compreenderá questões sobre a Escola, sobre o perfil dos alunos da turma e do próprio professor e sobre os materiais didático-pedagógicos utilizados no ensino de Matemática.

Os dados coletados serão organizados e classificados pela equipe de professores-colaboradores, utilizando critérios inspirados em Healy e Hoyles (ibid.). Esse conjunto de dados terá uma estrutura hierárquica – alunos em turmas, em escolas e em regiões – e serão analisados segundo a construção de um modelo multi-nível (*Multi-level Modelling*) para considerar a correlação de respostas entre os sujeitos que compartilham experiências comuns (Goldstein, 1987). Os resultados dessas análises fornecerão um mapa das concepções dos alunos e como estas variam em relação a fatores individuais e escolares, baseados nos dados obtidos em Q2. Essa análise permitirá uma avaliação das áreas de compreensão de prova dos alunos, tanto aquelas que são contempladas no ensino atual, quanto aquelas que merecem maior atenção. A identificação desse segundo grupo servirá como base para o trabalho na fase 2, descrito na seqüência.

FASE 2

Esta fase contemplará dois eixos inter-relacionados de investigação: a aprendizagem e o ensino. No eixo da aprendizagem, o objetivo principal é a elaboração e avaliação de situações, especificamente destinadas às áreas de dificuldades e limitações de compreensão de prova identificadas com o mapeamento elaborado na fase 1. No eixo relativo ao ensino, a atenção se voltará ao professor, e sua contribuição no processo de elaboração das situações de aprendizagem e nas modificações destas *em ação*, considerando que essas situações serão propostas pelos professores em suas salas de aula.

A metodologia nesta fase carateriza-se como *design-based research* (Cobb et al., 2003). Segundo esses autores, os experimentos de *design* visam contribuir para o desenvolvimento e compreensão de "ecologias de aprendizagem", ou seja, de sistemas complexos que envolvem múltiplos elementos de naturezas distintas. Os elementos de uma ecologia de aprendizagem incluem tipicamente as tarefas e problemas aos quais os aprendizes serão confrontados, as ferramentas e recursos fornecidos para suas resoluções e os meios práticos pelos quais os professores podem orquestrar as relações entre estes elementos em suas salas de aula. O uso da metáfora relativa à ecologia enfatiza a natureza interativa dos contextos investigados e a importância de analisar seus diversos elementos em conjunto e não separadamente.

A estratégia planejada para essa fase compreenderá um desenvolvimento colaborativo e contínuo entre pesquisadores e professores-colaboradores (cf. amostra da Fase 1). Mais precisamente, o desenvolvimento das situações de aprendizagem seguirá um ciclo segundo a organização de 5 grupos com 3 professores-colaboradores e, pelo menos, 2 pesquisadores. Cada grupo deverá desenvolver situações de aprendizagem, envolvendo ou objetos geométricos representados no software Cabri-géomètre ou o uso de planilhas eletrônicas (como por exemplo, o Excel) para explorar problemas algébricos. Estes dois ambientes foram selecionados por serem familiares ao grupo de professores-colaboradores e por seus reconhecidos potenciais no ensino da prova (Healy e Hoyles, 2001; Mariotti, 2001). Ao longo dessa fase, os grupos estarão reunindo-se semanalmente, alternando encontros presenciais e a distância, esta última modalidade possibilitada pelo espaço virtual criado na Fase 1.

1ª Etapa

Na primeira etapa do *design* (etapa intra-grupos), as situações serão elaboradas por cada grupo e, em seguida, testadas/aplicadas em uma pequena amostra de alunos, e por fim, discutidas e reformuladas em cada grupo. Essas discussões e adaptações serão realizadas com base na análise das interações alunos/computadores, considerando quais aspectos de prova são favorecidos, ou ainda, a quais concepções estes aspectos estão relacionados. Para essa análise, serão coletados os seguintes dados: áudio-gravação dos diálogos entre os sujeitos envolvidos (professores, pesquisadores e alunos) e produções escritas e computacionais dos alunos. Além disso, em relação ao eixo de ensino, cada professor-colaborador construirá seu próprio registro do processo, documentando suas perspectivas sobre o desenvolvimento das situações no grupo. Essa documentação elaborada pelos professores fornecerá os dados referentes aos seus conhecimentos pedagógicos do conteúdo (Shulman, 1987), no caso sobre a prova em Matemática, cuja análise buscará identificar transformações nesses conhecimentos.

2ª Etapa

Dando seqüência a esse processo de elaboração das situações, em uma segunda etapa (inter-grupos), as produções de cada grupo serão disponibilizadas no ambiente virtual, de maneira que cada professor-colaborador possa desenvolver, pelo menos, duas atividades elaboradas pelos outros grupos (uma em Geometria e outra em Álgebra), em uma de suas turmas. A aplicação dessa atividade em classe será acompanhada e observada pelos pesquisadores e a sessão será vídeo-gravada para posterior análise. Novamente, as produções (escritas e computacionais) dos alunos serão coletadas. Além de categorizar os aspectos de prova que emergem nas interações alunos/computadores durante essas aplicações, o vídeo permitirá destacar as ações do professor e, em particular, os aspectos de prova privilegiados em suas intervenções. Após cada aplicação, professores-colaboradores e pesquisadores serão incumbidos de um relatório descritivo da sessão, incluindo reflexões sobre os resultados, os objetivos atingidos e as dificuldades ou problemas enfrentados. Esses relatórios serão também disponibilizados no espaço virtual do projeto visando subsidiar um novo ciclo de discussões para reformulações, complementações etc. das situações de aprendizagem.

3ª Etapa

Na terceira e última etapa de *design*, os dados a serem coletados em relação ao eixo de aprendizagem referem-se às respostas dos alunos participantes na Fase 2 ao questionário elaborado na Fase 1 (Q1). Essas respostas serão organizadas e analisadas gerando um mapa, que por sua vez, será comparado àquele resultante da Fase 1. Para tanto, os encontros dos grupos colaborativos nessa etapa serão dedicados à avaliação das situações de aprendizagem tratadas, visando responder em que medida as principais dificuldades apontadas no mapeamento das concepções (Fase 1) foram superadas pelos alunos participantes na Fase 2; quais características de prova que ainda necessitam de investimentos numa perspectiva de progressão.

4. Outros Projetos Financiados Atualmente

A pesquisadora que coordenará esse projeto, assim como os demais pesquisadores do grupo *Tecnologias e Meios de Expressão em Matemática* (TecMEM) do Programa de Estudos Pós-graduados não cotam, no momento, com projetos financiados por agências de fomento.

5. Principais Referências Bibliográficas do Projetos AprovaME

ALEKSANDROV, A. (1963). A General View of mathematics. In A. Aleksandrov, A. Kolmogorov, & M. Lavrent'ev (Eds.) *Mathematics: Its Content, Methods and Meaning* (pp. 1-64). Cambridge, Massachusetts: MIT Press.

BALACHEFF, N. (1988). Aspects of proof in pupil's practice of school mathematics. In: D. Pimm (Ed.) *Mathematics Teachers and Children* (pp. 216-235). London: Hodder and Stoughton.

BALACHEFF, N. (1999). Apprendre la preuve. In: Sallantin J., Szczeciniarz J. J. (Eds*.) Le concept de preuve à la lumière de l'intelligence artificielle* (pp.197-236). Paris: PUF.

BRASIL, Ministério da Educação e do Desporto (1998). *Parâmetros Curriculares Nacionais*.: *Matemática*. Terceiro e Quarto ciclos do Ensino Fundamental. Brasília: SEF.

CHAZAN, D. (1993). High School Geometry Students' Justification for Their Views of Empirical Evidence and Mathematical Proof. *Educational Studies in Mathematics*, 24(4), pp. 359-387.

COBB, P., CONFREY, J., DISESSA, A., LEHRER , R., & SCHAUBLE, L. (2003). Design Experiments in Educational Research. *Educational Researcher*, 32 (1), pp. 9-13.

GARNICA, A. V. M. (1997). Da literatura sobre a prova rigorosa na Educação Matemática: um levantamento. *Quadrante*. APM-Portugal: 5(1), pp. 29 – 60.

GARNICA, A. V. M. (2002). As demonstrações em Educação Matemática: um ensaio. *Boletim de Educação Matemática Bolema*. Rio Claro (SP): 15(18), pp.91 – 99.

GOLDSTEIN, H. (1987). *Multilevel models in educational and social research*. London: Griffin.

HEALY, S. V. (L.) (2000). Identifying and explaining geometrical relationship: Interactions with robust and soft Cabri construction. In T. Nakahara & M. Koyama (Eds.), *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 1, pp. 103-117. Hiroshima: Hiroshima University.

HEALY, S. V. (L.)., & HOYLES, C. (1998) *Justifying and Proving in School Mathematics*. Technical Report , University of London, Institute of Education.

HEALY, S. V. (L.) & HOYLES C. (2000). A study of proof conception in algebra. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(4), pp. 396-428.

HEALY, S. V. (L.) & HOYLES, C. (2001). Software Tools for Geometrical Problem Solving: Potentials and Pitfalls. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 6, pp. 235-256.

LAKATOS, I. (1976). *Proofs and Refutations*. Cambridge: Cambridge University Press.

LIGHT, P., GIROTTO, V., & LEGRENZI, P. (1990). Children's Reasoning on Conditional Promises and Permissions. *Cognitive Development*, 5, pp. 369-383.

LIN, F.-L. (2000). An approach for developing well-tested, validated research of mathematics learning and teaching. . In T. Nakahara & M. Koyama (Eds.), *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 1, pp. 84-89. Hiroshima: Hiroshima University.

MARIOTTI; M. A. (2001). Justifying and proving in the Cabri environment. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 6 (3), pp. 283-317.

TALL, D. (2002). Differing Modes of Proof and Belief in Mathematics, *International Conference on Mathematics: Understanding Proving and Proving to Understand*, pp. 91–107. National Taiwan Normal University, Taipei, Taiwan.

THURSTON, W. H. (1994). On Proof and Progress in Mathematics. *Bulletin of the American Mathematical Monthly*, 30 (2, April), pp. 161-177.

VAZ, R e HEALY, L. (2003) Transformações geométricas do Cabri-géomètre: uma abordagem alternativa para prova? *II Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática*. Santos: SBEM.

WASON, P. C. (1966). Reasoning. In B. Foss (Ed.), *New Horizons in Psychology*. Harmondsworth, UK: Penguin Books.

WU, H. (1996). The Role of Euclidean Geometry in High School. *Journal of Mathematical Behaviour*, 13(1).

ANEXO B – Questionário Final sobre Prova

Questionário sobre Prova

Nome: .... Masculino ou Feminino: ....

Escola: .... Turma:.......................................

Data de nascimento: .... Data de hoje:..............................

Você tem 50 minutos para responder estas questões.

Na primeira questão, você deve escolher uma entre as várias respostas. Nas demais questões, você deve produzir suas próprias respostas. Estamos interessados no seu raciocínio e não apenas na resposta. Assim, gostaríamos que você descrevesse como chegou à resposta e não apagasse seus rascunhos.

Na maioria das questões, você deve apresentar uma justificativa. Tente escrever da maneira mais clara que puder.

Use uma caneta e, caso necessário, corrija uma resposta sem apagar (não use corretivo).

Não use calculadora.

Projeto AprovaMe

Uso exclusivo do projeto

escola id: ☐

turma id: ☐

aluno id: ☐

A1: Artur, Beth, Duda, Franklin e Hanna estavam tentando provar que a seguinte afirmação é verdadeira:

Quando você soma dois números pares quaisquer, o resultado é sempre par.

Resposta de Artur

a é um número inteiro qualquer
b é um número inteiro qualquer
2*a* e 2*b* são números pares quaisquer
2*a* +2b = 2 (*a* + *b*)

Então Artur diz que a afirmação é verdadeira.

Resposta de Beth

2 + 2 = 4   4 + 2 = 6
2 + 4 = 6   4 + 4 = 8
2 + 6 = 8   4 + 6 = 10

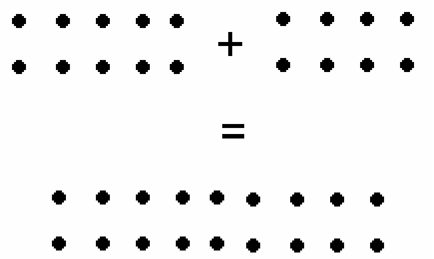
Então Beth diz que a afirmação é verdadeira.

Resposta de Duda

Números pares terminam em 0, 2, 4, 6 ou 8.
Quando você soma dois destes, a resposta vai ainda terminar em 0, 2, 4, 6 ou 8.

Então Duda diz que a afirmação é verdadeira.

Resposta de Franklin



Então Franklin diz que a afirmação é verdadeira

Resposta de Hanna

8 + 6 = 14

8 = 2 x 4
6 = 2 x 3
14 = 2 x (4 + 3)

8 + 6 = 2 x 7

Então Hanna diz que a afirmação é verdadeira

Das respostas acima, escolha uma que é a mais parecida com a resposta que você daria se tivesse que resolver esta questão.

Das respostas acima, escolha aquela para a qual você acha que seu professor daria a melhor nota.

A afirmação é:

Quando você soma dois números pares quaisquer, o resultado é sempre par.

Para cada resposta abaixo, circule SIM, NÃO ou NÃO SEI.

	Mostra que a afirmação é **sempre** verdadeira.			Mostra que a afirmação é verdadeira **apenas** para alguns números pares.		
Resposta de Artur	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei
Resposta de Beth:	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei
Resposta de Duda:	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei
Resposta de Franklin:	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei
Resposta de Hanna:	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei

A2. Suponha que já foi provado que:

Quando você soma dois números pares quaisquer, o resultado é sempre par.

Zé pergunta o que precisa ser feito para provar que:

Quando você soma dois números pares maiores que 100, o resultado é sempre par.

Escolha A ou B:

(A) Zé não precisa fazer nada, pois a afirmação já foi provada. ☐

(B) Zé precisa construir uma nova prova. ☐

A3. A afirmação abaixo é verdadeira ou falsa?

Quando você soma dois números ímpares quaisquer, o resultado é sempre par.

Justifique sua resposta.

A4. A afirmação abaixo é verdadeira ou falsa?

Quando você soma um múltiplo de três qualquer com um múltiplo de seis qualquer, o resultado é sempre um múltiplo de três.

Justifique sua resposta.

A5: Sabendo que:

4! significa 4 x 3 x 2 x 1

5! significa 5 x 4 x 3 x 2 x 1

Responda:

a) **5!** é um número par?
Justifique

b) O que significa **8!** ?

c) **8!** é um múltiplo de 21 ?
Justifique

d) **62!** é um múltiplo de 37 ?
Justifique

e) Pedro calculou **23!**
Sem calcular, determine o último algarismo do resultado encontrado por Pedro.

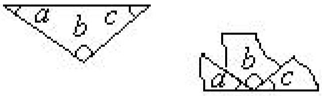
Justifique

G1: Amanda, Dario Hélia, Cíntia e Edu estavam tentando provar que a seguinte afirmação é verdadeira:

Quando você soma as medidas dos ângulos internos de um triângulo qualquer, o resultado é sempre 180^o.

Resposta de Amanda

Eu recorto os ângulos e junto os três.



Eu obtenho uma linha reta que é 180^o.
Eu tentei para um triângulo eqüilátero e também para um isósceles e a mesma coisa acontece.
Então Amanda diz que a afirmação é verdadeira.

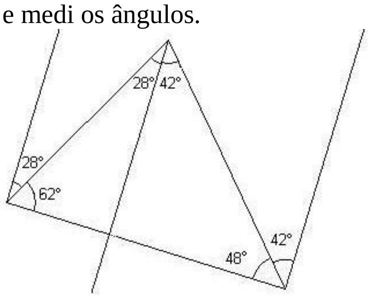
Resposta de Dario

Eu medi cuidadosamente os ângulos de alguns triângulos e fiz uma tabela.

a	b	c	total
110	34	36	180
95	43	42	180
35	72	73	180
10	27	143	180

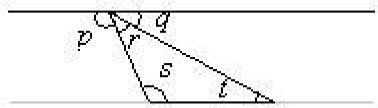
Em todos eles a soma foi de 180^o.
Então Dario diz que a afirmação é verdadeira

Resposta de Hélia
Eu desenhei três retas perpendiculares a um lado do triângulo e medi os ângulos.



$(90^o - 28^o) + 28^o + 42^o + (90^o - 42^o) = 180^o$
Então Hélia diz que a afirmação é verdadeira

Resposta de Cíntia
Eu desenhei uma reta paralela à base do triângulo:

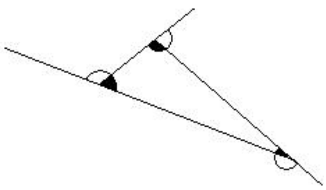


Afirmações	Justificativa
$p = s$..........................	Ângulos alternos internos entre duas paralelas são iguais.
$q = t$	Ângulos alternos internos entre duas paralelas são iguais.
$p + q + r = 180^o$..........	Ângulos numa linha reta.

Logo $s + t + r = 180^o$
Então Cíntia diz que a afirmação é verdadeira.

Resposta de Edu

Se você caminhar por toda volta sobre a linha do triângulo e terminar olhando o caminho por onde começou, você deve ter girado um total de 360^o. Você pode ver que cada ângulo externo quando somado ao ângulo interno deve dar 180^o porque eles formam uma reta. Isso faz um total de 540^o. $540^o - 360^o = 180^o$.



Então Edu diz que a afirmação é verdadeira.

Das respostas acima, escolha uma que é a mais parecida com a resposta que você daria se tivesse que resolver esta questão.

Das respostas acima, escolha aquela para a qual você acha que seu professor daria a melhor nota.

A afirmação é:

Quando você soma as medidas dos ângulos internos de um triângulo qualquer, o resultado é sempre 180º.

Para cada resposta abaixo, circule SIM, NÃO ou NÃO SEI.

	Mostra que a afirmação é **sempre** verdadeira.			Mostra que a afirmação é verdadeira **apenas** para alguns triângulos.		
Resposta de Amanda	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei
Resposta de Dário	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei
Resposta de Hélia	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei
Resposta de Cíntia	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei
Resposta de Edu	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei

G2. Suponha que já foi provado que:

Quando você soma as medidas dos ângulos internos de um triângulo qualquer, o resultado é sempre 180º.

Zeca pergunta o que precisa ser feito para provar que:

Quando você soma as medidas dos ângulos internos de um triângulo retângulo qualquer, o resultado é sempre 180º.

Escolha A ou B:

(A) Zeca não precisa fazer nada, pois a afirmação já foi provada. ☐

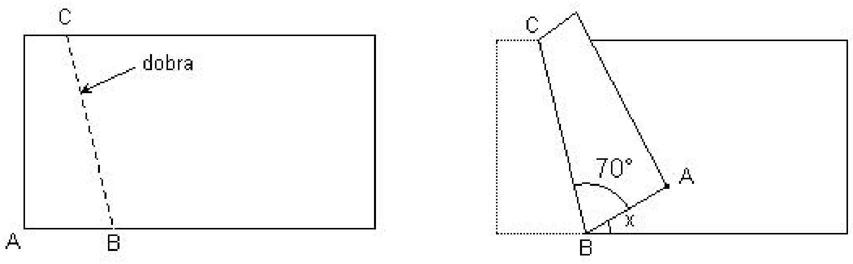
(B) Zeca precisa construir uma nova demonstração. ☐

G3. Um quadrilátero é um polígono de quatro lados. A afirmação abaixo é verdadeira ou falsa?

Quando você soma os ângulos internos de um quadrilátero qualquer, o resultado é sempre 360º.

Justifique sua resposta:

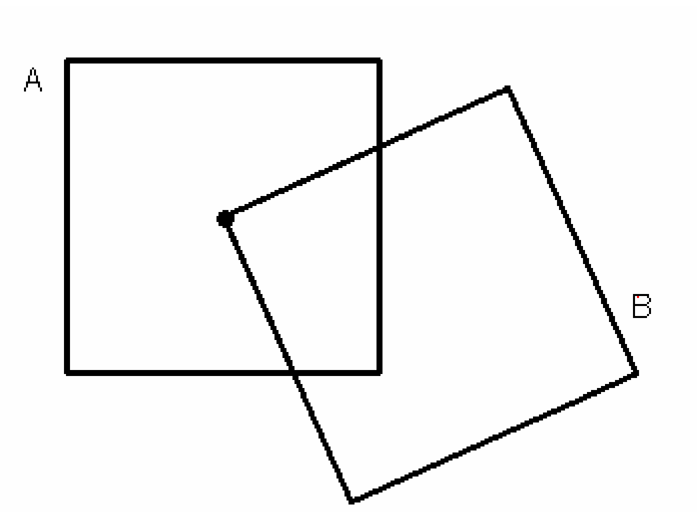
G4: Dobre uma folha de papel, conforme o esquema abaixo. Obter o valor de x.



Justifique sua resposta.

G5: A e B são dois quadrados idênticos. Um vértice do quadrado B está localizado no centro do quadrado A.

Qual fração da área do quadrado A está coberta pelo quadrado B?



Justifique sua resposta

ANEXO C – Sequência de Atividades

Pontifícia Universidade Católica de São Paulo

Mestrado Profissional em Ensino de Matemática

Atividades Sobre Padrões Numéricos, Seqüência Numérica e Progressão Aritmética

Nome:____________________________nº : _____ série : ______ data: ______

Nome:____________________________nº : _____ série : ______

INSTRUÇÕES

1. As atividades 1, 2, 4, 5, 9, 10, 11, 12 e 17 deverão ser respondidas no computador.
2. As atividades escritas devem ser respondidas nesta folha, utilizando apenas caneta.

Padrões Numéricos

1. Vamos iniciar um trabalho de observação para descobrir padrões numéricos que estão em nosso cotidiano, complete os espaços:

a. Andando na rua, observamos que a numeração das casas obedece a uma certa regra: de um lado da rua são os números________ e do outro lado são os números _______.

b. Nos prédios os apartamentos são numerados da seguinte forma:

Número do Apartamento	
11	1ºandar - 1º apartamento
12	1ºandar - 2º apartamento
13	1ºandar - 3º apartamento
21	2ºandar - 1º apartamento
22	2ºandar - 2º apartamento
23	2ºandar - 3º apartamento

Responda : Qual é o número do segundo apartamento do quinto andar?_____

c. Um médico prescreveu um remédio para ser tomado de 4 em 4 horas. O paciente seguindo as orientações médicas tomou o 1º comprimido às 8 horas da manhã .O paciente deverá tomar os demais comprimidos às ________, ________ , ________, _______ e horas deste dia .

Seqüências Não-numéricas

2. No dia-a-dia nos envolvemos em situações onde determinada ordem ou regra é conhecida , complete :

a. (segunda , terça, _______,_______,_______,_______,_______)

b. (primavera, verão, ________,________)

c. (dó,ré,mi,_____, _____ ,_____ ,_____)

d. (janeiro,fevereiro,________, _______,. . . , ________,_______)

3. Escreva a seqüência das estações do ano, começando pelo mês de seu aniversário.

Compare a sua seqüência com a do seu colega, elas são iguais ou diferentes?

Seqüências Numéricas

4. Na 82º corrida Internacional de São Silvestre os 5 primeiros colocados na prova masculina foram :

Colocação	Número de Inscrição	Nome	Pais
1º lugar	03	Franck Caldeira	Brasil
2º lugar	30	Clodoaldo Gomes	Brasil
3º lugar	12	Paulo Alves dos Santos	Brasil
4º lugar	56	Javier Guarin	Colômbia
5º lugar	46	João Ntyamba	Brasil

Complete :
Podemos colocar os números dos corredores de acordo com a sua ordem de chegada. O conjunto ordenado de números (03, 30, ___, ___, ___) seria a **seqüência** dos números dos corredores por ordem de chegada.

5. Em um concurso da Mega-Sena foram sorteados os seguintes números:

Sorteio	Número
1º	49
2º	02
3º	51
4º	25
5º	18
6º	33

O conjunto ordenado de números (49, 02, ___,___,___,___) seria a seqüência dos números do concurso da Mega Sena por ordem de sorteio**.**

Escreva a seqüência dos números sorteados na ordem crescente :
(02, 18, ___,___,___,___).

Escreva a seqüência dos números sorteados na ordem decrescente:
(51, 49, ___,___,___,___).

6. Escreva a seqüência dos números ímpares positivos até 12. Quantos números ou termos há nesta seqüência?

7. Escreva a seqüência os números pares positivos . Quantos números ou termos há nesta seqüência?

8. Escreva os elementos ou termos da seqüência formada por :

a. números múltiplos de 7 positivos .

b. números primos positivos .

9. Complete as seqüências :

a. (1,6,11, _____, _____, _____, _____)
b. (12,12,12, _____, _____, _____, _____, . . .)
c. (2 , 6, 18, _____, _____, _____, _____, . . .)
d. (4,7,4,7,4,7, _____, _____, _____, _____, . . .)
e. (–3,–7,–11, _____, _____, _____, _____)

10. Observe a seqüência (9 , 9 , 9 , . . .), complete escrevendo :
O valor do primeiro termo da seqüência é _____.
O valor do segundo termo da seqüência é _____.
O valor do terceiro termo da seqüência é _____.

O valor do décimo termo da seqüência é _____.

O valor do centésimo termo da seqüência é _____.

O valor de um termo qualquer da seqüência é _____.

11. Indicar a posição dos elementos de uma seqüência facilita nosso trabalho, assim vamos chamar de a_1 o primeiro termo da seqüência, a_2 o segundo termo, a_3 o terceiro termo , a_4 o quarto termo, e assim por diante.

a. Considere a seqüência (3,8,3,8, . . .) :
O primeiro termo a_1 de índice ímpar é igual a _______.
O segundo termo a_2 de índice par é igual a _______.

O termo a_{51} é igual a ________. Justifique seu raciocínio

O termo a_{100} é igual a ________. Justifique seu raciocínio

b. Vamos utilizar a_n para representa um termo qualquer da seqüência.

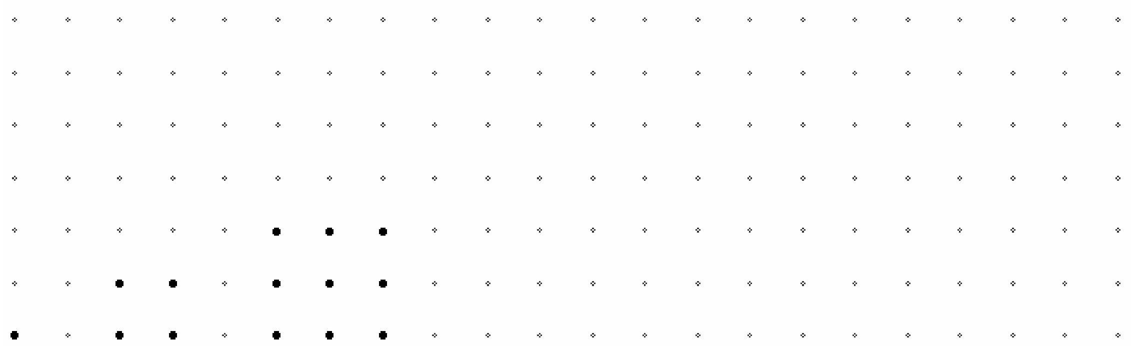
$$a_n = \begin{cases} 3 \text{ , se o índice n é um número \_\_\_\_\_\_.} \\ 8 \text{ , se o índice n é um número \_\_\_\_\_\_.} \end{cases}$$

12. Na seqüência abaixo
(4,7,4,7,4,7,. . .)

Se a_n representa um termo qualquer da seqüência então :

$$a_n = \begin{cases} 4 \text{ se n é \_\_\_\_\_\_\_.} \\ 7 \text{ se n é \_\_\_\_\_\_\_.} \end{cases}$$

13. a. Desenhe as próximas duas figuras.



a_1 a_2 a_3

b. Escreva a seqüência correspondente ao número de pontos das figuras .

c. Complete a tabela

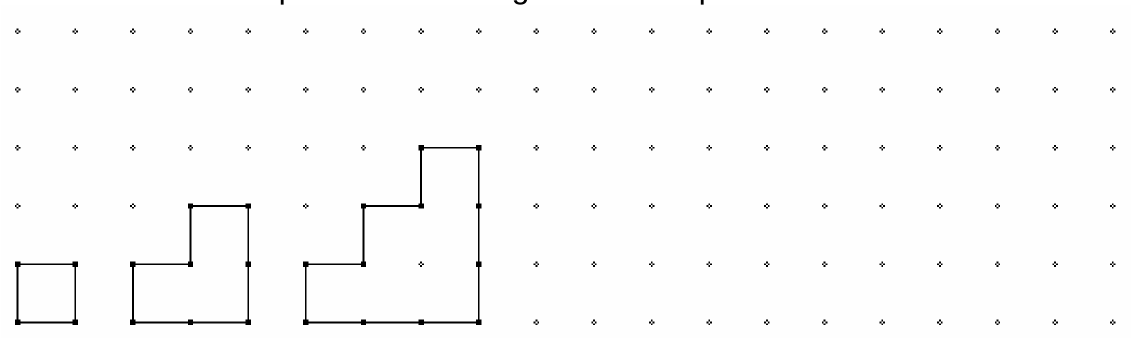
Termo	Números de pontos
a_1	
a_2	
a_3	
a_4	
a_5	

d. Escreva o trigésimo termo (a_{30}). Justifique seu raciocínio

e. Escreva o termo (a_{80}). Justifique seu raciocínio

f. Escreva termo (a_n) da seqüência. Justifique

14. a. Desenhe as próximas duas figuras da seqüência



a_1 a_2 a_3

b. Escreva a seqüência correspondente ao número de traços das figuras

c. Complete a tabela.

Termo	Números de traços
a_1	
a_2	
a_3	
a_4	
a_5	

d. Escreva o número de traços do vigésimo termo (a_{20}). Justifique

e. Escreva o número de traços do termo (a_{151}). Justifique

f. Escreva o termo (a_n) da seqüência.Justifique.

Progressão Aritmética

15. Um médico receitou para sua paciente tomar um comprimido a cada 3 horas. A paciente tomou o 1º comprimido às 6 horas da manhã.

a. Escreva a seqüência dos horários que a paciente deve tomar o medicamento durante às 24 horas de apenas um dia .

b. Como você determinou os horários em que a paciente deve tomar o seu medicamento? Justifique.

16. Observe que os termos da seqüência do exercício 15 foram obtidos, a partir do primeiro termo, com a soma de um valor constante ao termo anterior.O valor constante somado para se obter cada termo da seqüência é igual a _____.

A seqüência cujos termos são obtidos com a soma de uma constante ao termo anterior é chamada de Progressão Aritmética (PA). Esta constante é chamada de razão (r) .

17. Complete as Progressões Aritméticas abaixo e escreva ao lado o valor da razão.Justifique sua resposta.

a. (1 ,3 , 5, _____ , _____ , _____, . . .) r= _____

b. (5, 8, 11, _____ , _____, _____, . . .) r= _____

c. (7, 7 , _____ , _____, 7, 7,. . .) r= _____

d. (0,5 ; 4,5 ; _____ ; _____;16,5 ; 20,5) r= _____

e. (10, 4, -2, ______, ______, – 20, . . .)   r= ______

f. (13, 12 , ______ , ______ , 9 , 8)   r= ______

g. (5 ; 5,2 ; 5,4 ; ______ ; ______; . . .)   r= ______

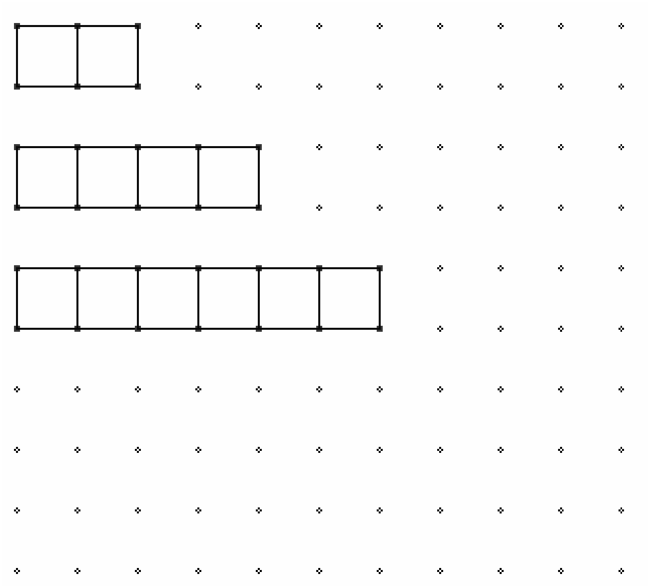
h. (4/5 ; 7/5 ; 10/5 ; ______ ; ______; 19/5)   r = ______

18. **a.** Desenhe as próximas duas figuras:

a_1

a_2

a_3



b. Escreva a seqüência correspondente ao número de quadrados das figuras.

c. Complete a tabela.

Termo	Número de quadrados
a_1	
a_2	
a_3	
a_4	
a_5	

d. Está seqüência é uma PA ? Por que ?

e. Escreva o termo (a_{30}) da seqüência.Justifique.

f. Escreva o termo (a_n) da PA. Justifique.

Fórmula do Termo Geral da PA

19. a. Pedro emprestou 50 reais de um amigo com juros fixos de 2 reais por dia. Complete a seqüência formada pela quantia devida por Pedro nos primeiros 5 dias (50 ,_____ , _____ , _____ , _____).

Essa seqüência é uma PA? Justifique.

b. Pedro fez um novo empréstimo de 80 reais com juros fixos de **r** reais por dia. Complete a seqüência formada pela quantia devida por Pedro nos primeiros 5 dias (80 ,_____ , _____ , _____ , _____).

Esta seqüência é uma PA?Justifique.

Passados 100 dias de quanto é a dívida do segundo empréstimo de Pedro?

Passados **n** dias de quanto é a dívida do segundo empréstimo de Pedro?

c. Pedro fez um novo empréstimo de valor $\mathbf{a_1}$ e pagando **r** de juros por dia. Complete a seqüência formada pela quantia devida por Pedro nos primeiros 5 dias (a_1 ,_____ , _____ , _____ , _____)

Está seqüência é uma PA? Justifique.

Depois de 70 dias de quanto é a dívida desse novo empréstimo?

Passados n dias de quanto é a dívida do novo empréstimo de Pedro?

d. Pedro fez um outro empréstimo de 530 reais com juros fixos de 25 reais por dia. No entanto, ele ganhou na Mega Sena e conseguiu pagar sua dívida em 120 dias depois. Quanto ele pagou ? Justifique.