

GIULIANO SANT`ANNA MAROTTA

**ANÁLISE DE DIFERENTES MODELOS PARA A CORREÇÃO GEOMÉTRICA
DE IMAGENS ORBITAIS DE ALTÍSSIMA RESOLUÇÃO**

Dissertação apresentada à
Universidade Federal de Viçosa, como
parte das exigências do Programa de
Pós-Graduação em Engenharia Civil,
para obtenção do título de *Magister
Scientiae*.

Viçosa
Minas Gerais - Brasil
2008

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

**Ficha catalográfica preparada pela Seção de Catalogação e
Classificação da Biblioteca Central da UFV**

T

M355a
2008

Marotta, Giuliano Sant'Anna, 1978-

Análise de diferentes modelos para a correção geométrica de imagens orbitais de altíssima resolução / Giuliano Sant'Anna Marotta. – Viçosa, MG, 2008.
xi, 118f.: il. (algumas col.) ; 29cm.

Inclui anexos.

Orientador: Dalto Domingos Rodrigues.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa.

Referências bibliográficas: f. 95-99.

1. Processamento de imagens. 2. Análise espacial.

3. Mínimos quadrados. 4. Sensoriamento remoto.

I. Universidade Federal de Viçosa. II. Título.

CDD 22.ed. 621.367

GIULIANO SANT'ANNA MAROTTA

ANÁLISE DE DIFERENTES MODELOS PARA A CORREÇÃO GEOMÉTRICA
DE IMAGENS ORBITAIS DE ALTÍSSIMA RESOLUÇÃO

Dissertação apresentada à
Universidade Federal de Viçosa,
como parte das exigências do
Programa de Pós-Graduação em
Engenharia Civil, para obtenção do
título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 04 de Agosto de 2008



Prof. Carlos Antônio Oliveira Vieira
(Co-Orientador)



Prof. Antônio Simões Silva
(Co-Orientador)



Prof. José Marinaldo Gleriani



Prof. Ricardo Seixas Brites



Prof. Dalto Domingos Rodrigues
(Orientador)

AGRADECIMENTOS

Agradecimento é uma coisa bastante pessoal, porém, como não posso me esquecer das pessoas que contribuíram efetivamente em minha vida tanto pessoal quanto acadêmica, escrevo um breve, porém importantíssimo relato.

Aos meus amigos Gabriel, Frederico, Petrônio, Rafael Tucano e Alan Cegonha por me acompanhar nas várias etapas de minha vida, em festas e farras, sempre saindo da mediocridade.

Aos meus primos Francisco José, Alan, Sergio Augusto, Marcos Antônio, por todas as más criações que fizemos juntos desde criança até os dias de hoje.

Aos meus novos amigos que encontrei no mestrado, Leonardo, Rafael e Rômulo, pelas saudosas noitadas que passamos juntos, com frio, com fome e com sono, com ajustamento de observações na veia, esperando o dia raiar para entregar os trabalhos em dia e horário previstos e esperando a noite cair para começar a beber no alto da serra do brigadeiro.

À CAPES, pela concessão da bolsa de estudos. Aos meus professores Dalto, Carlos e Simões pelo aperto que passei, pela amizade que veio junto com o ensinamento, por estar certo de que consegui assimilar tudo o que lecionaram, e por serem a referência que tenho e repasso a todos que tenho oportunidade. Ao professor Elpídio pelas valiosas indagações sobre os experimentos, mostrando sempre o lado crítico da pesquisa.

Aos meus pais José Maria Rocha Marota e Maria da Conceição Santana Marota por toda a dedicação imposta para que eu tornasse uma pessoa cada vez melhor, e às minhas irmãs Sarah e Samantha por nos aturarmos desde o começo de nossas vidas e por sermos sempre unidos nas diversas situações que a vida nos impôs.

À minhas avós, Pequena e Elza juntamente com toda a prole, pois sem eles, o que seria de mim?

Finalmente à Aline, com quem me casei e que vem me agüentando por muitos anos, sempre me incentivando e cortando os meus vícios, me fazendo uma pessoa cada dia melhor.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS	v
LISTA DE TABELAS	viii
RESUMO	ix
ABSTRACT	xi
1 INTRODUÇÃO	1
1.1 Justificativa e Hipóteses de Pesquisa.....	2
1.2 Objetivos.....	3
1.3 Organização da Dissertação.....	4
2 IMAGENS ORBITAIS E SUAS CARACTERÍSTICAS	6
2.1 Sensores Digitais.....	6
2.1.1 Efeito Foto-Elétrico	6
2.1.2 Sensores CCD e CMOS	8
2.1.3 Arranjos de CCDs.....	10
2.1.3.1 Arranjo Linear	10
2.1.3.2 Arranjo Matricial	12
2.2 Tomadas das Imagens	12
2.2.1 Tomadas das Imagens <i>Wiskbroom</i>	13
2.2.2 Tomadas das Imagens <i>Pushbroom</i>	14
2.2.3 Tomadas das Imagens em Quadros	16
2.2.4 Tomadas das Imagens Estereoscópicas	17
2.3 Plataformas - Satélites.....	18
2.4 Sensor <i>QuickBird</i>	19
2.5 Características das Imagens	21
2.5.1 Resolução Espacial, Espectral, Radiométrica e Temporal	23
2.5.2 Distorções Geométricas	25
2.5.2.1 Distorções Geométricas Referentes ao Objeto Visado	26
2.5.2.2 Distorções Geométricas Devido à Plataforma.....	29
3 GEORREFERENCIAMENTO DIRETO	32
3.1 Calibração do Sensor	35
3.2 Parâmetros de Orientação Exterior Empregando GNSS/INS	40
3.3 Parâmetros de Orientação Exterior a Partir das Efemérides	41
3.3.1 Sistema de Referência Celeste Internacional	42

3.3.2 Sistema de Referência Terrestre Internacional	43
3.3.2.1 Sistema Geodésico	44
3.3.2.2 Sistema Geodésico Local - Topocêntrico	46
3.3.3 Sistema de Referência Orbital	47
3.4 Equação de Colinearidade	51
3.4.1 Sistema de Coordenadas da Imagem	52
3.4.2 Sistema da Linha de Varredura	53
3.4.3 Sistema de Coordenadas da Câmera	55
3.4.4 Relação entre Sistema da Câmara e Sistema Terrestre	56
4 GEORREFERENCIAMENTO INDIRETO	58
4.1 Modelos Matemáticos	58
4.1.1 Modelo de Projeção <i>Afim</i>	60
4.1.1.1 Modelo de Projeção <i>Afim</i> – Espaço 2D	60
4.1.1.2 Modelo de projeção <i>Afim</i> – Espaço 3D	61
4.1.2 Modelo Projetivo	62
4.1.2.1 Modelo Projetivo – Espaço 2D	64
4.1.2.2 Modelo Projetivo – Espaço 3D	64
4.1.2.3 Modelo Projetivo Modificado – Espaço 3D	65
5 MATERIAIS E MÉTODOS	66
5.1 Caracterização da Área de Estudos	66
5.2 Materiais	67
5.3 Metodologia	67
5.3.1 Coleta de Coordenadas de Controle	69
5.3.2 Modelos de Transformação	71
5.3.3 Ajustamento pelo Método dos Mínimos Quadrados – MMQ	73
5.3.4 Estimativa do Erro	75
6 RESULTADOS E DISCUSSÕES	80
7 CONCLUSÃO	93
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	95
ANEXO A – INVERSÃO DOS MODELOS DE TRANSFORMAÇÃO	100
ANEXO B – MATRIZ DAS DERIVADAS PARCIAIS DO MODELO INVERSO	103

LISTA DE FIGURAS

Figura 01: Esquema do Efeito Fotoelétrico.....	7
Figura 02: Chip CCD.....	9
Figura 03: Detectores (a) CMOS e (b) CCD	10
Figura 04: Configuração dos arranjos lineares CCD.....	11
Figura 05: Tipos de Sensores.....	13
Figura 06: Aquisição de imagem com sensor de varredura mecânica.....	14
Figura 07: Aquisição de imagem com sensor de arranjo linear.	14
Figura 08: Intervalo tempo entre amostras.	16
Figura 09: Aquisição de imagem com sensor de arranjo matricial.....	16
Figura 10: Aquisição estéreo ao longo da trajetória.....	17
Figura 11: Satélite <i>QuickBird-2</i>	19
Figura 12: Atributo de um pixel.	21
Figura 13: Imagem digital pancromática.	22
Figura 14: Imagem digital colorida.	22
Figura 15: Ilustração da relação entre IFOV, altura da plataforma e distância focal.	23
Figura 16: Resolução Espacial relacionada ao IFOV.....	24
Figura 17: Efeito da rotação da terra no tempo de aquisição da imagem.....	27
Figura 18: Erro devido à esfericidade da terra.....	28
Figura 19: Distorção devido ao relevo.	29
Figura 20: Distorção devido à variação da altitude da plataforma.	30
Figura 21: Distorções devido à variação da velocidade.....	30
Figura 22: Distorções devido à atitude do sensor.....	31
Figura 23: Fotogrametria: Ângulos de Euler (ω , φ e κ).....	33
Figura 24: Efeito do tamanho do pixel na direção da linha de varredura	36
Figura 25: Efeito da mudança ou rotação dos segmentos CCD no plano focal em relação à posição nominal.....	37
Figura 26: Linha de flexão no plano focal	37
Figura 27: Sistema de Referência Celeste.	43
Figura 28: Sistema Geodésico.....	45
Figura 29: Sistema Topocêntrico.	47
Figura 30: Sistema Orbital e Sistema de Referência Celeste.	47
Figura 31: Órbita Kepleriana.....	48

Figura 32: Anomalia excêntrica.....	49
Figura 33: Sistema dextrógiro de coordenadas da imagem.....	52
Figura 34: Coordenadas no sistema de imagem	53
Figura 35: Sistema da linha de varredura.	53
Figura 36: Sistemas de imagem e de linhas de varredura.....	54
Figura 37: Sistema de coordenadas da câmera	55
Figura 38: Sistemas da linha e da câmera.....	56
Figura 39: Transformação entre Sistema de Câmera em Sistema de Superfície.....	57
Figura 40: Localização da Área de Estudos.	66
Figura 41: Coordenadas de controle no sistema de imagem.....	69
Figura 42: Coordenadas de controle no sistema geodésico.	70
Figura 43: Transformação entre sistemas.	71
Figura 44: Comportamento dos resíduos nas colunas da imagem.	82
Figura 45: Comportamento dos resíduos nas linhas da imagem.....	83
Figura 46: Comportamento das variâncias a posteriori através do ajustamento pelo MMQ.....	83
Figura 47: Comportamento dos resíduos padronizados para as colunas.	85
Figura 48: Comportamento dos resíduos padronizados para as linhas.	86
Figura 49: Comportamento dos Erros Médios Quadráticos (pixel)	87
Figura 50: Espacialização do erro através do modelo de transformação <i>afim</i> 2D.	88
Figura 51: Espacialização do erro através do modelo de transformação <i>afim</i> 3D com altitude fixa.	88
Figura 52: Espacialização do erro através do modelo de transformação <i>afim</i> 3D utilizando MDE.	89
Figura 53: Espacialização do erro através do modelo de transformação projetiva 2D.....	89
Figura 54: Espacialização do erro através do modelo de transformação projetiva 3D com altitude fixa.	90
Figura 55: Espacialização do erro através do modelo de transformação projetiva 3D utilizando MDE.....	90
Figura 56: Espacialização do erro através do modelo de transformação projetiva 3D modificada com altitude fixa.....	91

Figura 57: Espacialização do erro através do modelo de transformação projetiva 3D modificada utilizando MDE.	91
--	----

LISTA DE TABELAS

Tabela 01: Características principais do sensor <i>QuickBird-2</i>	20
Tabela 02: Características principais da órbita do Sistema <i>QuickBird-2</i>	20
Tabela 03: Coordenadas da imagem.....	80
Tabela 04: Coordenadas geodésicas no sistema de projeção UTM.....	81
Tabela 05: Resíduos calculados através do ajustamento pelo MMQ.	81
Tabela 06: Valores de <i>t</i> tabelado a 90% de confiança.....	82
Tabela 07: Sigma zero <i>a posteriori</i> calculado através do ajustamento pelo MMQ.	83
Tabela 08: Distribuição <i>Qui-Quadrado</i>	84
Tabela 09: Sigma zero <i>a posteriori</i> multiplicado pelo grau de liberdade.....	84
Tabela 10: Novos desvios padrão das coordenadas de imagem para cada modelo testado.	84
Tabela 11: Resíduos Padronizados.	85
Tabela 12: Valores da distribuição de <i>Tau</i> tabelados.	86
Tabela 13: RMS - Erros Médios Quadráticos (pixel).....	87

RESUMO

MAROTTA, Giuliano Sant'Anna, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, Agosto 2008. **ANÁLISE DE DIFERENTES MODELOS PARA A CORREÇÃO GEOMÉTRICA DE IMAGENS ORBITAIS DE ALTÍSSIMA RESOLUÇÃO.** Orientador: Dalto Domingos Rodrigues. Co-Orientadores: Antônio Simões Silva, Carlos Antônio Oliveira Vieira and Elpídio Inácio Fernandes Filho.

Imagens provenientes de sensores orbitais de altíssima resolução vêm sendo cada vez mais utilizadas em diversos trabalhos, tais como: confecção de base de dados para uso em Sistema de Informações Geográficas (SIG); atualização e ou confecção de mapas em escalas regionais; auxílio no planejamento e organização do espaço em âmbito regional, municipal e ou urbano; etc. A alta resolução espacial desses sensores permite a identificação de muitas feições com boa definição, e proporcionam maior facilidade na coleta de pontos para a realização da correção geométrica dessas imagens. Porém, devido à alta resolução e a possibilidade de se obter resultados mais precisos na correção geométrica, deve-se ter cuidado elevado na obtenção de coordenadas terrestres de referência mais precisas e na escolha dos modelos de transformação entre sistemas de coordenadas, pois, caso contrário, a qualidade dos produtos gerados pode ser comprometida, uma vez que os erros cometidos nas coordenadas de referência se propagam para os produtos derivados. Conseqüentemente, para avaliar a qualidade geométrica dessas imagens, há a necessidade de envolver técnicas que evidenciem a incerteza posicional - devidamente avaliada - de forma especializada. O presente trabalho tem por objetivo, avaliar a correção geométrica nas coordenadas de uma imagem orbital de altíssima resolução, aplicando os seguintes modelos planos e espaciais de transformações: modelo de projeção *afim*, modelo projetivo e modelo projetivo modificado. Para determinar os parâmetros que relacionam o sistema de imagem e o sistema terrestre é empregado o Método dos Mínimos Quadrados – MMQ, através do método paramétrico, com a finalidade de ajustar as coordenadas de imagem, relacionando-as diretamente com as coordenadas homólogas de referência, utilizando pontos de controle que se encontram distribuídos em toda imagem. Com a disposição de uma boa estimativa da precisão das coordenadas de referência, a qualidade das coordenadas de tela (imagem) e dos parâmetros de transformação pode ser avaliada. Posteriormente, realizam-se transformações inversas para obter as

coordenadas de superfície e seus desvios padrão. Daí, através da propagação de variâncias, gera-se uma imagem contendo o valor do erro médio quadrático (RMS), em metros, para cada pixel da imagem. Consequentemente, de posse dos resultados obtidos e da análise da precisão posicional espacializada, conclui-se que o modelo projetivo utilizando o espaço tridimensional é o mais preciso quando comparado com outros modelos apresentados.

ABSTRACT

MAROTTA, Giuliano Sant'Anna, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, August 2008. **ANÁLISE DE DIFERENTES MODELOS PARA A CORREÇÃO GEOMÉTRICA DE IMAGENS ORBITAIS DE ALTÍSSIMA RESOLUÇÃO.** Adviser: Dalto Domingos Rodrigues. Co-Advisers: Antônio Simões Silva, Carlos Antônio Oliveira Vieira and Elpídio Inácio Fernandes Filho.

Very high resolution orbital sensor images are becoming more and more frequently used for any number of applications: in the construction of databases for use in Geographic Information Systems (GIS); in the creation and revision of regional scale mapping; as support for area planning and organization in regional, municipal and urban capacities; etc. The high spatial resolution of these sensors allows for the identification of many well-defined features, and facilitates point collection for performing geometric correction on these images. However, due to this high resolution, and with the possibility of obtaining more accurate geometric corrections, great care should be taken to obtain more accurate terrestrial reference coordinates and in choosing transformation models between coordinate systems. Otherwise, the quality of the generated products may be compromised, seeing as the errors committed in reference coordinates will propagate throughout the derivative products. Consequently, to evaluate the geometric quality of these images, techniques that determine their properly assessed positional uncertainty spatially are required. The objective of the present work is to evaluate geometric corrections in the coordinates of a very high resolution orbital image, applying the following planar and spatial transformation models: affine projection, projective and modified projective. To determine parameters that correlate the image and terrestrial systems, the Method of Least Squares was employed, using the parametric model, with the purpose of adjusting image coordinates, relating these directly with homologous reference coordinates using control points that are found distributed through the image. With good precision estimates available for the reference coordinates, the quality of screen (image) coordinates and transformation parameters can be evaluated. Inverse transformations were subsequently made to obtain surface coordinates and their standard deviations. From this, using propagation of variance, an image containing the root mean square (RMS) error value in meters for each pixel was generated. With the obtained results and the spatial

positional accuracy analysis, it was concluded that the three-dimensional space projective model is the most accurate of the various models presented.

1 INTRODUÇÃO

Imagens provenientes de sensores orbitais de altíssima resolução vêm sendo cada vez mais utilizadas com diversos objetivos, tais como: confecção de base de dados para Sistema de Informações Geográficas – SIG; atualização e ou confecção de mapas em médias escalas; auxílio no planejamento e organização do espaço em âmbito regional, municipal e ou urbano, etc.

A alta resolução espacial das imagens permite a identificação de uma maior variedade de feições por unidade de área, acarretando grande dificuldade de extração dessas informações de forma automatizada devido à alta variabilidade de níveis de cinza, gerando confusão na identificação de feições quando utilizado classificadores computacionais, contudo, a alta resolução permite a identificação visual de feições com boa definição.

As imagens orbitais provenientes de sensores orbitais, assim como as fotografias aéreas, sofrem diversas distorções geométricas, que degradam a precisão de informações espaciais extraídas da imagem.

Conseqüentemente, para melhorar a qualidade das informações espaciais de imagens orbitais, torna-se necessária a correção das distorções geométricas através de modelos matemáticos que representem de forma fiel o comportamento dessas distorções no universo tridimensional.

Segundo Pedro (2005), nos últimos 15 anos vários modelos matemáticos têm sido formulados para extrair informações 3D e gerar ortoimagens de sensores remotos que utilizam sensores CCD - *Charge-Coupled Device*.

Modelos matemáticos têm sido desenvolvidos usando o conhecimento de informações do sensor e modificando equações de colinearidade, e em alguns casos, incluindo parâmetros para modelagem de erros e orientação interior ou calibração em órbita, ou ainda incorporando informações orbitais. (BALTSAVIAS *et al.*, 2001).

Há um número considerável de modelos baseados em equações de colinearidade que foram formulados tradicionalmente para a execução da transformação fotogramétrica do espaço imagem para o espaço objeto, incluindo modelo polinomial, interpolação da grade e modelos de funções racionais RPCs. (FRASER *et al.*, 2004).

Os modelos de funções racionais ou o modelo polinomial racional da câmera são calculados por parâmetros denominados RPCs (*Racional Polinomial Coeficientes*). Estes parâmetros, geralmente, são fornecidos juntamente com a imagem, como é o caso de alguns produtos comercializados provenientes do sensor *Ikonos* e *QuickBird*.

Contudo, quando não se possui as informações RPCs, torna-se necessário recorrer à outros modelos derivados da equação de colinearidade na tentativa de corrigir ao máximo as distorções inerentes à imagem orbital.

Dentre outros modelos normalmente empregados nos softwares estão os modelos de projeção *afim*, projetivo e projetivo modificado.

Contudo, seja qual for o modelo empregado, é necessário avaliar a qualidade das observações, dos parâmetros e imagens corrigidas geometricamente.

Neste contexto, são apresentadas as justificativas e as hipóteses da pesquisa, adotando-se os objetivos gerais e específicos da dissertação, descritos a seguir:

1.1 Justificativa e Hipóteses de Pesquisa

A altíssima resolução das imagens orbitais possibilita extrair maior quantidade de informações com maior qualidade, pois, a alta resolução radiométrica e espacial proporciona ao analista a melhor identificação visual de feições devido a maior variação intensidade de brilho diferenciando os objetos em uma menor quantidade de área.

Uma das questões básicas que limita o uso de imagens de satélites são as distorções inerentes à tomada da cena pelo sensor, uma vez que a instabilidade do satélite em sua órbita, a geometria de visada na aquisição da imagem e a variação da altitude dos objetos captados pelo sensor, degradam a precisão posicional dos objetos registrados na imagem.

Para aplicações em geração de bases cartográficas, há uma grande quantidade de modelos capazes de corrigir as deformações posicionais dos diferentes objetos na imagem, contudo, a falta de informações como as efemérides responsáveis pela determinação das características físicas da

órbita do satélite, no momento de tomada da cena, torna a correção geométrica um processo trabalhoso e aproximado, no que se refere à qualidade posicional.

Neste contexto, o presente trabalho propõe correções geométricas em imagens usando transformações geométricas que envolvem o espaço tridimensional, através do modelo de projeção *afim*, modelo projetivo e modelo projetivo modificado. Processando os dados, com os diferentes modelos e empregando o Método dos Mínimos Quadrados – MMQ, através do método paramétrico, são estimados os parâmetros de transformação entre os sistemas de tela e terrestre, juntamente com seus desvios padrão, a partir dos quais estima-se a incerteza posicional da imagem de forma espacializada.

Com isto, este trabalho pretende validar a hipótese de que a simplificação da equação de colinearidade apresenta perda de informação considerável, que pode ser propagada, bem como pode ser representada de forma espacializada em toda a imagem corrigida geometricamente.

Para validar esta hipótese, serão exploradas algumas perguntas específicas para pesquisa:

1) A simplificação da equação de colinearidade na obtenção do modelo de transformação projetiva e *afim* representa alguma perda de informação considerável no processo de transformação geométrica para imagens orbitais de alta resolução?

2) Seria possível, através dos parâmetros da órbita do satélite ajustados, melhorar de forma considerável os resultados da correção geométrica da imagem quando comparados com os outros métodos propostos?

3) Seria viável usar a Lei de propagação de variâncias através de coordenadas de controle na estimativa da incerteza posicional de forma espacializada na imagem?

4) É possível corrigir geometricamente imagens de alta resolução e representar espacialmente a incerteza posicional das mesmas?

1.2 Objetivos

O presente trabalho tem por objetivo, avaliar as incertezas geradas no processo de correção geométrica nas coordenadas bidimensionais de uma imagem *QuickBird*, aplicando os seguintes modelos, planos e espaciais, de

transformações geométricas: modelo de projeção *afim*, modelo projetivo e modelo projetivo modificado. Dispondo de uma boa estimativa da precisão das coordenadas terrestres, pretende-se estimar a qualidade das coordenadas de tela, medidas com o software *Erdas Imagine 8.5*, e dos parâmetros de transformação. Posteriormente, obter as coordenadas de mapa, de pontos da imagem, e seus desvios padrão. Daí, gerar uma imagem contendo o valor do erro médio quadrático (RMS), em metros, para cada pixel da imagem.

1.3 Organização da Dissertação

Dos assuntos abordados e tratados, esta dissertação é dividida em oito capítulos cuja organização é descrita a seguir:

O capítulo 1 apresenta a introdução dos assuntos a serem abordados, envolvendo as justificativas, hipótese e questões apresentadas.

No capítulo 2 é desenvolvido um estudo sobre imagens orbitais, onde são apresentadas as diferentes características de detecção de imagem bem como as distorções inerentes a estas, englobando os sensores digitais, o tipo de tomada da imagem, diferentes tipos de plataformas e o sensor utilizado como objeto de estudos.

O capítulo 3 demonstra o processo de transformação entre sistema de coordenadas de imagem e sistema de coordenadas terrestres, em imagens digitais, orbitais e/ou aerotransportadas, através do georreferenciamento direto, descrevendo as fases de calibração do sensor, da integração de sistemas de orientação, como o de posicionamento por satélites e sensores inerciais com o sensor de imagem, enfatizando a obtenção de parâmetros de orientação exterior a partir de efemérides e a relação entre diferentes sistemas de referência.

No capítulo 4 é descrita a forma de correção geométrica de imagens provenientes de sensores digitais através do georreferenciamento indireto, onde são demonstrados os diferentes modelos matemáticos responsáveis pelas transformações entre sistemas juntamente com suas características.

A partir do capítulo 6, são realizados os experimentos propostos neste trabalho, empregando uma metodologia que busca a validação das hipóteses. Neste capítulo é enfatizado o georreferenciamento indireto e a transformação

entre sistemas, com objetivo de aproximar assuntos de geodésia aos de sensoriamento remoto, através de transformação e propagação das precisões entre sistemas de referência.

No capítulo 7 são demonstrados os resultados alcançados a partir da metodologia empregada juntamente com as análises e discussões. Através das análises realizadas, houve a possibilidade de perceber o comportamento dos diversos modelos matemáticos testados, e conseqüentemente a identificação dos modelos mais eficientes na transformação entre sistemas.

No capítulo 8 são confrontadas as hipóteses propostas com os resultados alcançados, visando o atendimento dos objetivos e a consolidação da metodologia empregada neste trabalho.

2 IMAGENS ORBITAIS E SUAS CARACTERÍSTICAS

Imagens provenientes de sensores orbitais possuem diferentes características de acordo com o tipo de sensor utilizado, a forma de captação, a forma de aquisição, as distorções inerentes às diferentes formas de aquisição, e o sistema de coordenadas utilizado, considerados nas subseções a seguir.

2.1 Sensores Digitais

Os sistemas sensores são sistemas fotográficos ou óptico-eletrônicos capazes de detectar e registrar, sob a forma de imagens ou não, o fluxo de energia radiante refletido ou emitido por objetos distantes.

De acordo com Rueda *et al.* (2005), sensores digitais são formados por fotodetectores, que por sua vez são dispositivos (semicondutores) capazes de converter luz em um sinal elétrico e que funcionam baseados na fotocondutividade. Quando o fluxo luminoso incide sobre o material semicondutor, os fótons podem fornecer aos elétrons da superfície do material, energia suficiente para produzir a ruptura das ligações covalentes, ou seja, a ruptura da ligação química formada pelo compartilhamento de um par de elétrons entre dois átomos.

2.1.1 Efeito Foto-Elétrico

Efeito foto-elétrico é definido pela emissão de elétrons provocada pela incidência de radiação eletromagnética sobre algum material, onde a incidência de fótons acarreta na emissão de elétrons por parte da matéria devido à ação da luz.

De acordo com Moure (2001), o efeito foto-elétrico, ocorre quando o fóton gama colide com um elétron ligado a um átomo e toda a sua energia é transferida para este elétron (há de se considerar a energia de ligação do elétron ao átomo).

Segundo Silva (2008) e Carneiro Jr. (2005), no efeito fotoelétrico a radiação gama transfere toda sua energia do fóton a um único elétron orbital, que é expelido com uma energia cinética E_c .

Pela ilustração na Figura 01, verifica-se que o fóton com energia $h \cdot f$ incide sobre um elétron ligado a um átomo que absorve sua energia e é, em seguida, expulso com a energia cinética E_c , que é a diferença entre a energia do fóton incidente e a energia de ligação do elétron Be , Equação (1),

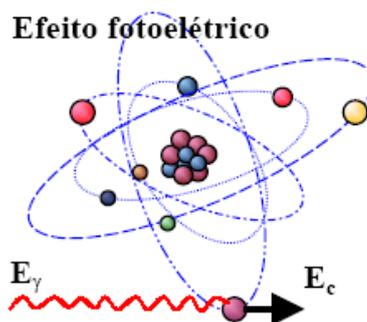


Figura 01: Esquema do Efeito Fotoelétrico. Fonte: CARNEIRO JR. (2005)

$$E_c = h \cdot f - Be \quad (1)$$

onde $h \cdot f$ é a energia do fóton incidente (h é a constante de Planck, f é a frequência da radiação) e Be é a energia de ligação do elétron orbital, também chamada de chamada função trabalho do metal (energia necessária para arrancar um fotoelétron).

Quando a energia do fóton é menor do que a função trabalho, nenhum elétron é arrancado e, por isso, nenhuma corrente é observada. Ao aumentar a intensidade, não se altera a máxima energia cinética que um elétron arrancado pode ter, pois a energia cinética, de acordo com a Equação (1), depende da frequência da luz incidente, ou seja, da energia (número de oscilações por unidade de tempo) e não da quantidade dos fótons incidentes. Conseqüentemente, os elétrons libertam-se mais facilmente de metais que quando expostos a uma radiação eletromagnética de frequência elevada, dependendo esta de cada material, e a intensidade de radiação incidente a uma frequência elevada acarreta em um maior número de elétrons libertados da superfície condutora.

Segundo Silva (2008) e Carneiro Jr. (2005), para altas energias (acima de 3 *megaeletron volt - MeV*), a probabilidade do fotoelétron ser liberado é alta; para baixas energias (abaixo de 20 *quiloeletron volt - keV*) a maior probabilidade é a de sair com um ângulo de 70°. Isto devido a ação dos campos elétrico e magnético que, variando na direção perpendicular do fóton, exercem força sobre o elétron na direção de 90°, e se compõe com o momento angular do elétron.

O resultado dessa interação é a expulsão do elétron pelo átomo. A energia cinética e a trajetória do elétron são determinadas a partir de uma distribuição de probabilidades a qual depende da energia inicial do fóton gama e do estado quântico do elétron. Posteriormente, o átomo voltará ao estado natural através do reajuste das suas camadas eletrônicas e, neste processo, poderá emitir outros elétrons, raios-X característicos ou ainda luz visível (MOURE, 2001).

2.1.2 Sensores CCD e CMOS

Pentaroni (2005) diz que imagens digitais podem ser geradas através de sensores de estado sólido, que são discretizados e denominados de *photosites*, baseados no efeito-fotoelétrico, nos quais há a liberação de elétrons do material de acordo com a energia da onda incidente, gerando uma diferença de potencial.

De acordo com Gupta (1991), os sensores digitais de imageamento são dispositivos que registram a variação espacial do brilho de uma área num conjunto de dados em duas dimensões. São compostos de sistemas ópticos, que filtram a energia emitida e refletida pelos objetos e por detectores, que detectam e produzem um sinal elétrico, que é quantificado em níveis, segundo a intensidade do sinal, onde esses níveis são chamados de DN's (*Digital Numbers*).

Segundo Tommaselli *et al.* (2000), os sensores digitais são constituídos basicamente por um sistema de lentes, um ou mais chips (pastilha de componentes eletrônicos miniaturizados montada sobre uma placa de circuito impresso e que executa funções específicas de processamento) com detectores CCD, processadores e memória para armazenamento, ou seja,

trata-se de um pequeno computador, possuindo capacidade de processamento e comunicação.

Os CCDs, Figura 02, são dispositivos eletrônicos feitos de silício, capaz de transformar uma luz padrão em uma carga elétrica padrão (uma imagem eletrônica) utilizando os princípios do efeito fotoelétrico. Estes dispositivos são usados como transdutores de imagem, capaz de transformar uma forma de energia em outra e são constituídos por vários elementos fotossensíveis que têm a capacidade de captar, armazenar e transportar carga elétrica de um elemento para outro. Os sensores CCDs são fabricados sob o formato de um conjunto linear ou bidimensional (matricial) de células.

Segundo Poli (2005), quando a radiação interage com um CCD durante um curto intervalo de tempo, as cargas eletrônicas se desenvolvem com uma magnitude proporcional à intensidade da radiação. Em seguida, a carga é amplificada e transferida para o registrador de leitura. Cada elemento fotossensível então representa um elemento imagem (pixel). Os chips, de 3000 a mais de 10000 elementos detectores, podem ocupar espaço linear inferior a 15 centímetros de comprimento. Com tecnologias de semicondutores e desenho ordenado, as estruturas que formam linhas ou matrizes de pixels são feitas.

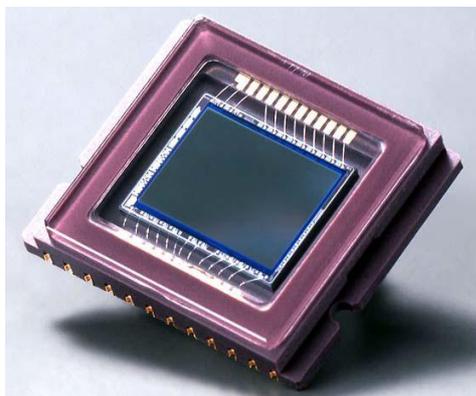


Figura 02: Chip CCD.

Fonte: *Digital Photography Review*

Ainda de acordo com Poli (2005), uma outra tecnologia mais recentemente criada e que vem ganhando interesse considerável é baseada em sensores CMOS (*Complementary Metal-Oxide Semiconductor*), Figura 03. Os detectores CMOS, operam a uma tensão mais baixa do que CCDs, reduzindo o consumo de energia e viabilizando aplicações portáteis. Cada pixel

do sensor de célula ativa CMOS tem seu próprio amplificador, Figura 03 a, e pode realizar leituras individualmente; já os detectores CCDs, Figura 03 b, os pixels do sensor são organizados em conjuntos e cada conjunto possui um amplificador.

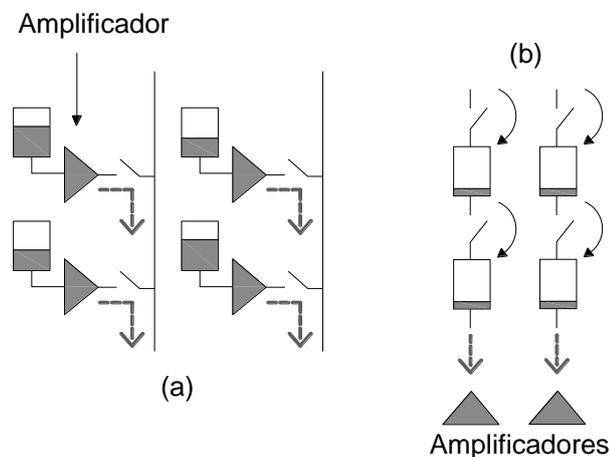


Figura 03: Detectores (a) CMOS e (b) CCD. Fonte: POLI (2005)

A tecnologia CMOS é vantajosa para a aquisição de cor e falsas cores em imagens. Na realidade uma das principais diferenças entre CCD e de tecnologia CMOS é a geração de imagens coloridas.

Com chips CCD, diferentes técnicas podem ser usadas para obter imagens coloridas, como a utilização de um processo de interpolação utilizando filtros de cor ao longo da matriz de detectores, ou o emprego de múltiplas câmeras digitais, cada uma com a gravação de uma faixa espectral específica a fim de fazer a composição final da imagem colorida ou imagem de falsa cor produzida pelo processamento de imagem. No entanto, estes processos ou afetam a qualidade da imagem resultante ou possuem um custo muito alto.

2.1.3 Arranjos de CCDs

Os chips CCDs podem ser disponibilizados em arranjo matricial ou arranjo linear, que por sua vez, possui características específicas quanto forma com que a imagens são detectadas.

2.1.3.1 Arranjo Linear

Os sensores lineares são constituídos de um arranjo linear de detectores do tipo CCD colocado no plano focal de um sistema de lentes e a imagem de cada linha é formada a partir de um processo dinâmico a cada intervalo de tempo. Este tipo sensor é encontrado nos satélites *IKONOS*, *QuickBird*, *SPOT*, *CBERS*, etc. (SCALCO, 2006).

De acordo com a configuração dos sensores de arranjo linear, quanto à forma, pode-se classificar em – Figura 04:

a) Chips colocados ao longo de uma única linha, Figura 04-a. O número de elementos sensores na linha não é constante e depende da largura da faixa desejada. Segundo Poli (2005) o número máximo de elementos disponibilizados em um único segmento, até aquela data, era 14400.

b) Uma linha constituída por dois ou mais segmentos, Figura 04-b. Este é o caso do *QuickBird*, que utiliza três arranjos lineares com 9 000 elementos cada para formar uma linha com 27 000 elementos.

c) Dois segmentos CCD colocados em paralelo, Figura 04 c. Esta concepção é usada para aumentar a resolução da imagem depois de um pós-processamento. Esta é a configuração adotada pelo sensor *HRG SPOT-5*.

d) Outras concepções são possíveis. Por exemplo, a Figura 04-d mostra uma combinação de três segmentos CCD – chamados CCD1, CCD2 e CCD3 – cada um com 4 096 elementos, sendo que entre o CCD1 e o CCD2 há uma sobreposição de 243 pixels e entre o CCD2 e o CCD3 de 152 pixels. Esta configuração é utilizada pelo IRS-1C/1D.

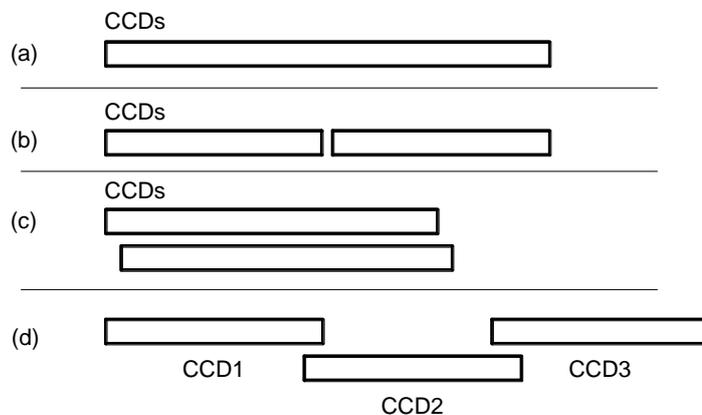


Figura 04: Configuração dos arranjos lineares CCD.

Segundo Poli (2005), a maior parte dos sensores de arranjo linear utiliza as configurações (a) e (b).

Segundo Tommaselli *et al.* (2000) um tipo de sensor de arranjo linear é o scanner trilinear, que é um sistema baseado no uso de três sensores lineares simultaneamente. Cada um destes sensores registra uma faixa do terreno, sendo uma faixa na direção nadir, uma à frente e outra para trás. Com o deslocamento da aeronave e a aquisição contínua, cada porção da superfície é imageada três vezes, o que é importante em termos de recuperação da posição tridimensional.

2.1.3.2 Arranjo Matricial

Scalco (2006) refere-se aos sensores matriciais como sensores constituídos por um arranjo matricial de detectores CCD onde toda cena é capturada em um único instante.

O arranjo matricial é composto por chips que estão posicionados em uma matriz de forma retangular regular. As imagens são adquiridas através de uma projeção central, como no caso de câmeras de filme.

Poli (2005) sugeriu uma classificação em função do tamanho da matriz, que é o fator mais importante que controla a adequação, a disponibilidade e a utilização de câmeras digitais no campo da cartografia aérea. As câmeras de cartografia aérea podem ser diferenciadas de acordo com o formato, ou seja, de acordo com o número de pixels que compõem uma imagem.

2.2 Tomadas das Imagens

A aquisição dos sinais responsáveis pela formação das imagens se dá após interação da energia eletromagnética com os objetos da superfície terrestre. Esta energia caminha de forma senoidal, em forma de ondas, na velocidade da luz e num certo comprimento de onda, até o sensor.

A fonte de energia é diferenciada quanto ao tipo de sensor, podendo ser passivo ou ativo (Figura 05). Nos sensores ativos, a energia detectada é originada do próprio sensor, que emite a energia, que interage com os objetos

e retorna ao sensor. Já nos sensores passivos, a energia eletromagnética é originada de uma fonte externa, sendo o sol a fonte mais utilizada pelos sensores, e, da mesma forma dos sensores ativos, a energia é captada pelo sensor após interagir com o objeto.

Ao atingir os objetos, parte da energia é absorvida, parte refratada, refletida e emitida (energia presente nos objetos). Parte da energia refletida e emitida se perde ao longo da trajetória, sendo absorvida, refletida e refratada por elementos suspensos na atmosfera. Finalmente, ao atravessar a atmosfera, a energia eletromagnética resultante é detectada pelo sensor e transformada em imagem.

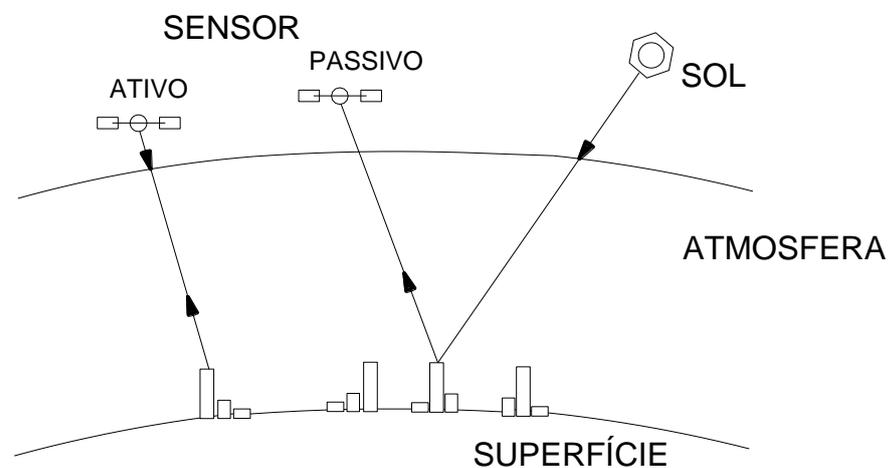


Figura 05: Tipos de Sensores.

Segundo Tommazelli *et al.* (2000) em função da disposição dos fotodetectores e tipo de tomada de imagem, os sensores digitais ou sistemas imageadores, podem ser: de varredura mecânica (*whiskbroom*), de arranjo linear (*pushbroom*), e de arranjo matricial.

2.2.1 Tomadas das Imagens *Whiskbroom*

No sistema imageador de varredura mecânica – *whiskbroom*, Figura 06, o campo de visão é mudado através da rotação mecânica de um espelho na direção perpendicular a linha de vôo. Ou ainda, o espelho oscilante desvia o feixe incidente, registrando uma linha transversalmente à trajetória do satélite (CHEN, 1985).

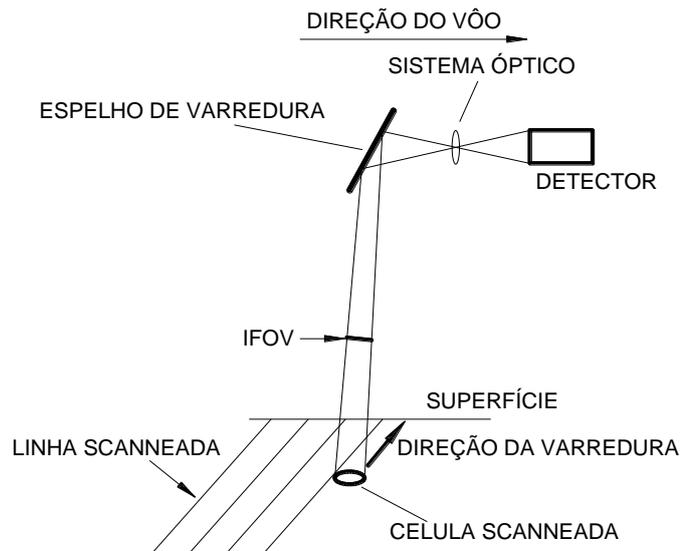


Figura 06: Aquisição de imagem com sensor de varredura mecânica (*whiskbroom*).

2.2.2 Tomadas das Imagens *Pushbroom*

No sistema imageador de arranjo linear – *pushbroom*, Figura 07, os sensores realizam uma varredura à medida que o satélite se desloca, para formar a imagem. As imagens são detectadas a cada linha de forma individual, na direção e sentido da trajetória do sensor, possuindo a característica básica de que na direção transversal ao deslocamento do satélite, a projeção é central.

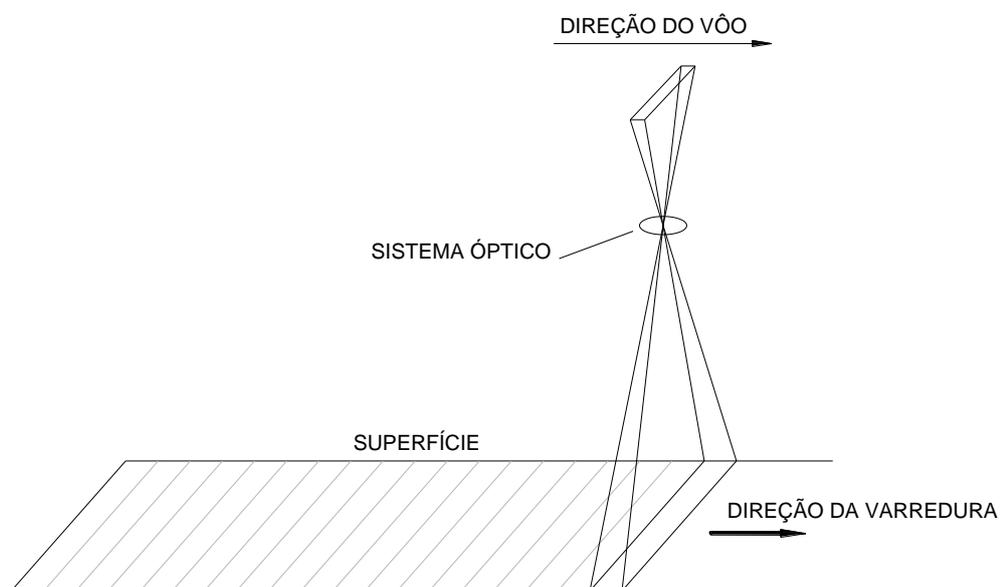


Figura 07: Aquisição de imagem com sensor de arranjo linear (*Pushbroom*).

Os sistemas de sensores *pushbroom* possuem um sistema óptico com grande campo de visada e milhares de detectores para cada banda espectral (CHEN, 1985).

A radiação emitida pelo objeto é focada pelo sistema de lentes no arranjo CCD. Essa radiação é captada por um curto período e então registrada pelos detectores individualmente. Com o movimento da plataforma, linha por linha é coletada.

O intervalo de tempo, Δt_s , necessário para observar uma única linha de varredura é chamado de “intervalo de integração” e é, usualmente, igual ao intervalo entre duas amostragens. A fim de se observar pixels, no terreno, Figura 08, este intervalo é calculado de forma que o deslocamento do sensor no sentido da varredura, a_x , a uma velocidade v , obtido por

$$a_x = v \cdot \Delta t_s \quad (02)$$

seja igual à dimensão do pixel, no terreno, na direção da linha de varredura, a_y , obtido por:

$$a_y = p \cdot \frac{H}{f} \quad (03)$$

onde p é o tamanho do pixel na imagem, H é a altura de vôo e f a distância focal do sistema de lentes.

Fazendo $a_x = a_y$, ilustrado na Figura 08, tem-se:

$$\Delta t_s = \frac{p \cdot H}{v \cdot f} \quad (04)$$

Por exemplo, para um sensor com pixels de 6,510 μm , resolução de 5 m, distância focal de 1,082 m, voando a uma altura de 832 km e a uma velocidade de 6,6 km/s, o intervalo de tempo necessário para observar uma linha de varredura será de $0,75210 \times 10^{-3}$ s.

A Figura 08 ilustra o intervalo tempo entre amostras.

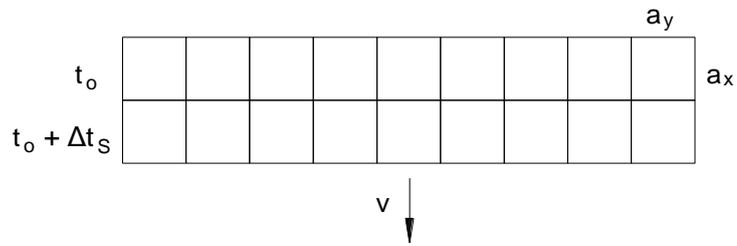


Figura 08: Intervalo tempo entre amostras.

2.2.3 Tomadas das Imagens em Quadros

No sistema imageador de arranjo matricial, Figura 09, a cena é registrada como um todo, isto é, um arranjo bidimensional de sensores é sensibilizado de uma só vez, formando a imagem.

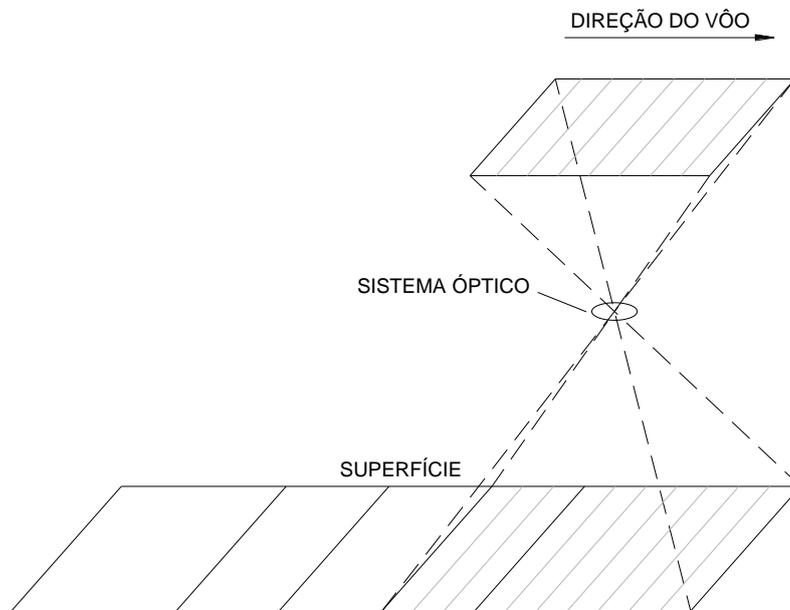


Figura 09: Aquisição de imagem com sensor de arranjo matricial.

Imagens em quadro são constituídas por um arranjo matricial de detectores e a cena é capturada em um dado instante. Estas imagens são registradas pelos chamados sensores de quadro. Dessa forma as imagens são obtidas pela projeção central cuja distorção geométrica característica é a distorção radial.

2.2.4 Tomadas das Imagens Estereoscópicas

Sensores digitais podem adquirir estereoidimagens com duas diferentes formas de configurações: transversalmente e ao longo da órbita.

Na tomada de imagens com superposição transversalmente à órbita, um conjunto de linhas CCD juntamente com o sistema ótico são combinados com um espelho que inclina de um lado para o outro do sensor. A rotação do espelho proporciona a captação da mesma área antes detectada em tempos anteriores com diferentes ângulos de visada. Esta diferença dos ângulos de visada decorrente da inclinação programada do sensor acarreta na tomada da mesma cena com a possibilidade de formar pares estereoscópicos. As conseqüências mais relevantes desta configuração são as diferenças temáticas na cobertura terrestre ocasionadas pelo intervalo de tempo necessário para a aquisição da cena estéreo, que pode levar alguns dias. Com isto, as condições meteorológicas e a intervenção humana podem alterar a paisagem em um pequeno intervalo de tempo.

Na tomada ao longo da trajetória, as imagens são registradas na mesma época, sendo detectadas em sucessivas órbitas, porém ao longo da mesma faixa. A principal vantagem desta configuração, Figura 10, é que a aquisição estéreo na mesma data, ao longo da mesma faixa, e em um curto intervalo de tempo, reduz as variações radiométricas decorrentes de variações temporais, iluminação solar, etc., e conseqüentemente, há o aumento da correlação entre as imagens e maior taxa de sucesso em qualquer imagem correspondente deste processo.

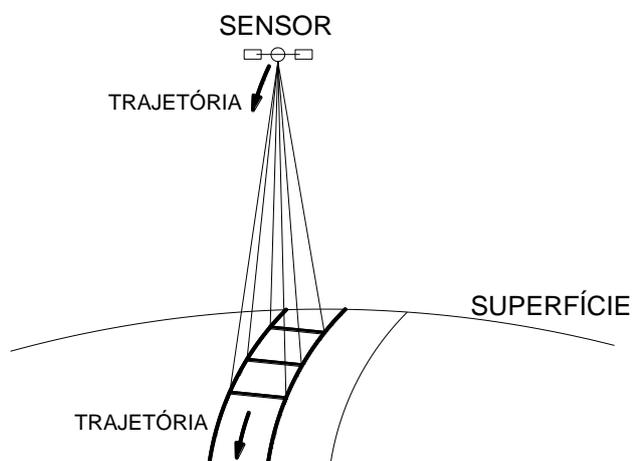


Figura 10: Aquisição estéreo ao longo da trajetória.

Um exemplo de sensor estéreo é o *QuickBird* que através do produto estéreo básico inclui duas estéreo imagens recolhidas ao longo da trajetória sobre a mesma passagem, geralmente a 30 ° *off-nadir* (para frente e para trás), de forma sincronizada ou assíncrona, o que leva a uma relação aerobase/altura de vôo de 0,6 a 2,0, com a maioria entre 0,9 e 1,2 (POLI, 2005).

2.3 Plataformas - Satélites

Há um grande número de Plataformas em órbita. Alguns satélites carregam mais de um sensor e outros, por possuírem apenas um sensor ou um fabricante, às vezes recebem o seu próprio nome, como é o caso do *Ikonos-2*, *QuickBird-2*, etc..

Os satélites podem ser classificados em satélites pequenos, satélites padrão e estações espaciais e, geralmente, estão em órbita a uma altura entre 400 e 700 km acima da superfície terrestre. Pequenos satélites são mais leves e têm uma vida útil curta. Um exemplo de satélite pequeno é o *BIRD DLR* que transporta sensores *pushbroom* e detecta faixas bi-espectral e infra-vermelho, com três instrumentos de observação da Terra a bordo: câmera de três linhas estéreo *WAOSS-B* (Grande Angular Ótico-Eletrônico), o sensor opcional *Horus* (Alta resolução ótica), e *HSRS (Hot Spot)*, com infravermelho médio e termal. Uma estação espacial tripulada é um satélite que transita em uma órbita fixa com objetivo de servir como base para realização de experiências científicas, para reabastecimento de naves espaciais ou para lançamento de satélites e de mísseis. Uma das mais bem sucedidas foi a estação espacial MIR, lançada pelos soviéticos em 20 de fevereiro de 1986 e desabilitada em março de 2001.

As órbitas são de forma elíptica e suas respectivas trajetórias são concluídas quando os satélites retornam ao ponto inicial.

As órbitas dos satélites são diferentes umas das outras em altitude, orientação e rotação em relação à Terra.

Satélites que emitem sinais de rádio para fins de posicionamento terrestre e transportam sensores ativos, possuem suas órbitas dispostas de forma a cobrir todo o globo terrestre a qualquer hora do dia ou da noite. Os satélites que carregam sensores passivos, com a finalidade de registrar

imagens da superfície terrestre, têm órbitas síncronas com o sol, por registrarem a radiação refletida pelos objetos.

Vários satélites meteorológicos e alguns satélites de comunicação possuem órbita geo-estacionária, ou seja, possuem suas órbitas orientadas de acordo com a direção, sentido e velocidade de rotação da terra.

2.4 Sensor *QuickBird*

Como fonte de estudos, este trabalho vêm a analisar uma imagem proveniente de sensores orbitais de altíssima resolução, e conseqüentemente, por disponibilidade, dentre os vários sensores, utilizou-se as informações geradas pelo sistema *QuickBird-2*.

QuickBird-2 (Figura 11), é um sensor de altíssima resolução lançado pela *Digital Globe* em Outubro de 2001 (*Digital Globe et al.*, 2007). O sensor, desenvolvido por *Ball Aerospace* (*Ball Aerospace*, 2007), prevê que a cena abranja uma área de 262 km², com uma resolução espacial de 0,6 m na faixa pancromática do espectro eletromagnético e 2,4 m nas faixas multispectrais. É um sensor CCD tipo *pushbroom* contendo um total de 27.000 detectores combinados em de três arranjos lineares, cada um com 9000 detectores que varrem uma faixa de 33 km. A Tabela 01 apresenta as características principais do sensor *QuickBird-2*.



Figura 11: Satélite *QuickBird-2*.

Fonte: *Digital Globe et al.* (2007).

Tabela 01: Características principais do sensor *QuickBird-2*. Poli (2005) e Digital Globe *et al.*(2007).

Câmeras	1		
Distância Focal (mm)	8800		
Direções de Visualização	1		
Estereo	Ao longo da trajetória		
Ângulos Estéreo (graus)	Acima de 30		
Canais / Comprimento de Onda (nm) / Resolução de superfície (m)	Pancromática	450-900	0,6
	Azul	450-520	2,4
	Verde	520-600	2,4
	Vermelho	630-690	2,4
	Infra vermelho próximo	760-900	2,4
Largura da imagem (km)	16,5		
Pixels por Linha	27000		
Resolução Radiométrica	11 bits		
Resolução Espacial	Pan: 61 cm (nadir) a 72 cm (25 graus off-nadir) MS: 2.44 m (nadir) to 2.88 m (25 graus off-nadir)		
Resolução Espectral	Pan: 725 nm Azul: 479,5 nm Verde: 546,5 nm Vermelho: 654 nm Próximo IR: 814,5 nm		

A Tabela 02 apresenta as características principais a órbita do sistema *QuickBird-2*.

Tabela 02: Características principais da órbita do Sistema *QuickBird-2*. Digital Globe *et al.*(2007)

Data de Lançamento	18/10/2001
Altitude da Órbita	450 km
Inclinação da Órbita	97,2 graus sol -síncrono
Velocidade	7,1 km/segundo
Período da Orbital	93,5 minutos
Resolução Temporal	1 a 3,5 dias dependendo da latitude (30 graus off-nadir)
Largura da Faixa	16,5 km a partir do nadir

2.5 Características das Imagens

Segundo Crosta (1993), cada pixel de uma imagem possui um atributo numérico, que indica o nível de cinza, e que obviamente vai variar do preto ao branco. Esse nível de cinza é conhecido em inglês por DN, de “*digital number*”. O DN de uma célula representa a intensidade de energia eletromagnética refletida ou emitida por objetos na superfície e medida pelo sensor para a área de superfície da terra correspondente ao tamanho do pixel.

Andrade (2003) diz que um pixel pode representar tons de cinza de duas maneiras diferentes – associação por dígitos ou matricial. Na associação por dígitos cada número pode representar um tom de cinza. Adotando “*byte*” de 8 “*bits*”, podem-se representar 256 números diferentes e associá-los a 256 tons de cinza, variando do preto ao branco. No processo matricial, uma matriz de 16 x 16 elementos pode também representar 256 tons de cinza, onde o primeiro elemento da matriz representa o preto e o último elemento (elemento número 255) representa o branco. Enquanto o primeiro processo é mais adequado para os vídeos, o segundo o é para impressoras.

A Figura 12 representa o atributo (nível ou tom de cinza) de cada pixel de uma imagem.

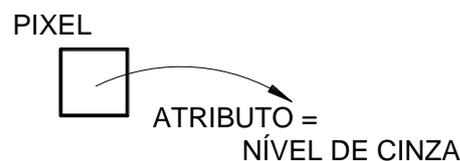


Figura 22: Atributo de um pixel.

Em uma imagem o nível de cinza é função da intensidade de luz, ou seja, da intensidade da energia eletromagnética emitida e/ou refletida pelos objetos. Esta energia eletromagnética detectada é dividida em diferentes intervalos de comprimento de ondas, chamados bandas, e posteriormente armazenada em forma de imagem. Em cada uma destas bandas, diferentes níveis de cinza são detectados para o mesmo pixel de uma imagem. Assim, a imagem pode ser dividida em pancromática e colorida.

Em uma imagem pancromática apenas uma banda, ou seja, apenas um nível de cinza por unidade de pixel é utilizado para representar os objetos detectados pelo sensor (Figura 13).

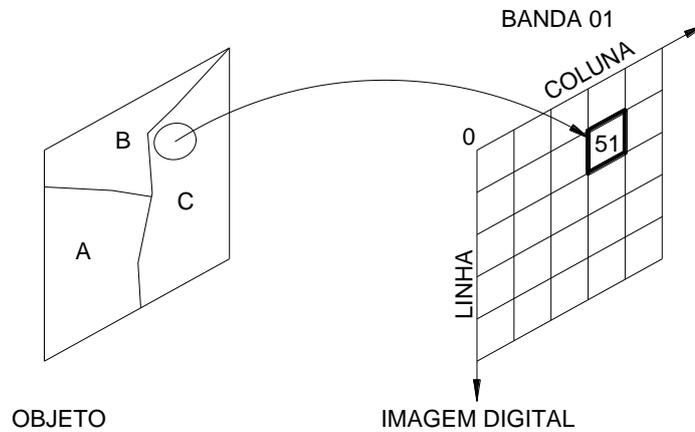


Figura 13: Imagem digital pancromática.

Em uma imagem colorida, a cor é definida pelo brilho da luz, pela intensidade e comprimento de onda dominante. A maioria das cores visíveis pelo olho humano, e/ou detectada por sensores, pode ser representada como uma combinação de três cores primárias, que são o vermelho (R), verde (G) e azul (B). Uma representação comum para uma imagem colorida utiliza três bandas que representam os três intervalos de comprimento de onda em diferentes intensidades, responsáveis pela sensação de cor pela visão humana, (Figura 14).

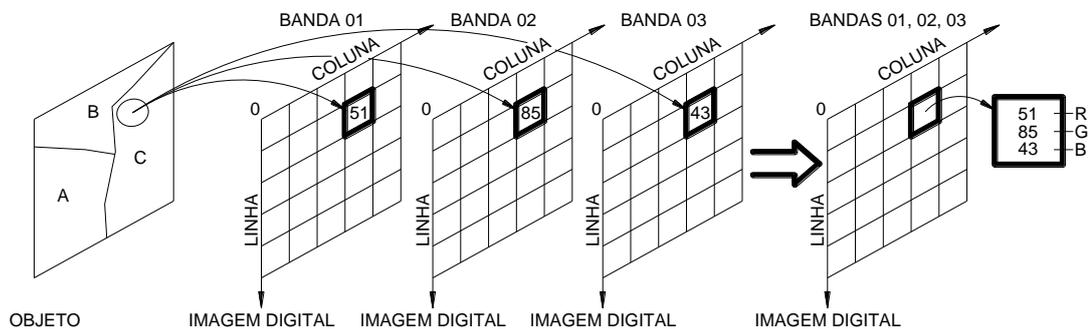


Figura 14: Imagem digital colorida.

Quanto às características dos diferentes sensores, pode-se classificá-los quanto a sua resolução espectral, espacial, radiométrica e temporal.

2.5.1 Resolução Espacial, Espectral, Radiométrica e Temporal

Cada elemento detector do sensor captura, a uma determinada altitude e instante de tempo, uma área correspondente à dada porção da superfície terrestre. Esta dimensão de captura correspondente é denominada IFOV (*Instantaneous Field of View*).

Como mostra a Figura 15, o IFOV, que pode ser dado em unidade angular (β) ou linear (D), representa a porção do terreno projetada sobre o detector a cada instante. Como o IFOV é um ângulo muito pequeno ele pode ser convertido para unidade linear empregando a seguinte equação:

$$D = H \cdot \beta \quad (05)$$

onde D , o IFOV em unidade linear, é o diâmetro do elemento de amostragem no terreno (em metros); β é o IFOV em radianos e H é a altura da plataforma.

Da Figura 15 verifica-se que o IFOV em radianos pode ser determinado por:

$$\beta = \frac{d}{f} \quad (06)$$

Onde d é o diâmetro do detector e f a distância focal do sistema ótico.

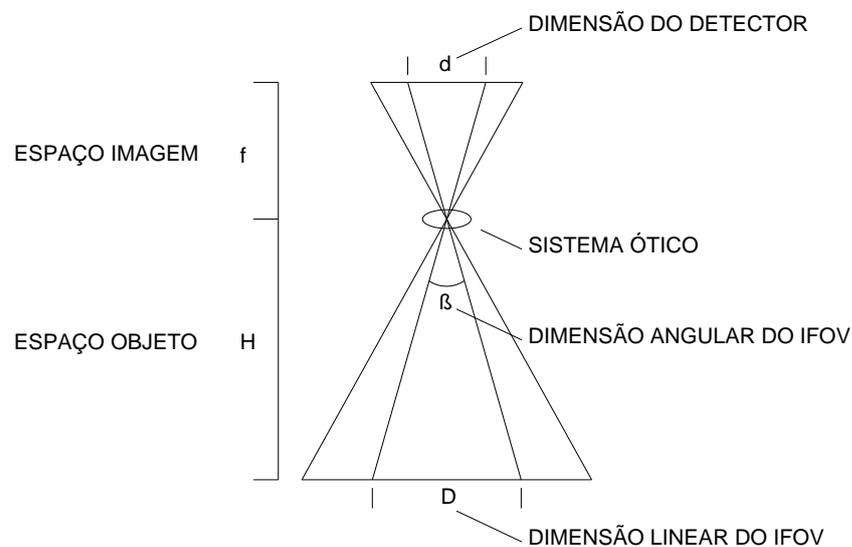


Figura 15: Ilustração da relação entre IFOV, altura da plataforma e distância focal.

Daí pode-se constatar que, para um mesmo detector, quanto maior a distância focal, menor será o IFOV, conseqüentemente, melhor (ou maior) a resolução espacial. Portanto, em função do IFOV, da altura e velocidade da plataforma e do período de registro da radiação, pode-se determinar a resolução espacial de um sensor.

Poli (2005) define que a resolução espacial se refere à área da superfície que se pode distinguir no sistema de imagem. Isto pode ser entendido como a dimensão da projeção do IFOV no terreno, onde quanto maior projeção, menor a resolução. Usando o IFOV em unidade angular, de acordo com a geometria mostrada na Figura 16, o comprimento de um pixel no terreno na direção da linha CCD (a_y), pode ser calculado com a seguinte fórmula (WANG, 1990):

$$a_y = \beta \cdot R = \frac{\beta \cdot H}{\cos Q} \quad (07)$$

onde R é a distância inclinada entre o objeto e o sensor, H é a altura da órbita em relação à superfície terrestre e Q é o ângulo de varredura.

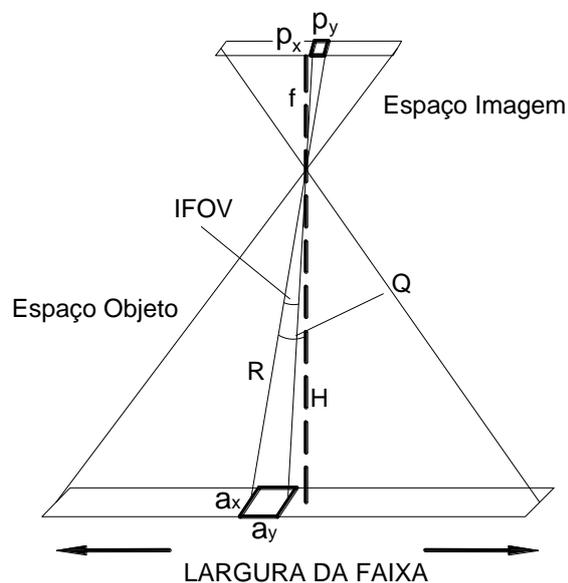


Figura 16: Resolução Espacial relacionada ao IFOV.

O tamanho do pixel na direção da trajetória (a_x) é usualmente igual a a_y ou seja:

$$a_x = \frac{\beta \cdot H}{\cos Q} \quad (08)$$

Como o co-seno é menor ou igual à unidade, conclui-se que a_y e a_x são maiores ou iguais a $\beta \cdot H$, que é o IFOV, em unidade linear, no nadir.

A relação entre o tamanho do pixel no terreno (a_x e a_y) e na imagem (p_x e p_y) é dada através da distância focal (f) e da altura da órbita (H) por:

$$\frac{H}{f} = \frac{a_y}{p_y} = \frac{a_x}{p_x} \quad (09)$$

A resolução espectral refere-se ao número de bandas espectrais que o sistema possui e a largura que cada banda ocupa ao longo do espectro eletromagnético. Quanto maior for a número de bandas e menor for à largura de cada banda, maior a resolução espectral do sistema sensor.

A resolução radiométrica é relacionada à sensibilidade do sensor, ou detector, para diferenciar os níveis de intensidade do sinal registrado do fluxo de radiação refletido ou emitido pelo terreno. Em imagens digitais é a quantidade de bits utilizados para armazenar os dados referentes a um pixel. Para armazenar dois níveis de cinza é preciso um bit, com dois bits registram-se quatro níveis de cinza, ao passo que para armazenar 256 níveis de cinza, geralmente utilizado nas imagens de sensoriamento remoto, são necessários oito bits (CHUVEICO, 1990).

Gupta (1991) define a resolução temporal como a frequência com que são obtidas imagens de uma determinada área, com direção do sensor a nadir. Ou ainda, pode ser definida como o intervalo mínimo de tempo entre a aquisição de duas imagens consecutivas de uma mesma área por um determinado sensor apontado para o nadir.

2.5.2 Distorções Geométricas

A qualidade nas imagens orbitais está diretamente relacionada com as distorções geométricas, que, por sua vez, estão subdivididas em distorções

sistemáticas e não-sistemáticas. As distorções sistemáticas têm como principais causas a mudança na velocidade da plataforma, mudança na velocidade do espelho de varredura, efeito da curvatura terrestre, rotação da terra e variações na atitude da plataforma. A correção é realizada através de fitas-mestre que se baseiam nas características do satélite, do sensor e efemérides. (MAROTTA & VIEIRA, 2005)

Segundo Pedro (2005), algumas distorções geométricas podem ser corrigidas analisando as características físicas do sensor e as efemérides que compõem sua órbita, como é o caso das distorções geradas devido a velocidade não linear do espelho de varredura, distorções panorâmicas e distorções devido à curvatura terrestre.

As distorções não-sistemáticas são ocasionadas pela alteração na altitude do satélite. A correção das distorções não-sistemáticas, chamada correção geométrica, se dá através da coleta de pontos de controle, bem identificados e precisos na superfície da terra e os seus respectivos pontos homólogos, identificados na imagem orbital, onde se faz com que a imagem orbital assuma as propriedades de escala e da projeção de um mapa, (MAROTTA & VIEIRA 2005)

Ishikawa (2001) relata que qualquer imagem de satélite, que venha a ser utilizada em mapeamentos temáticos ou na cartografia sistemática, deve passar por um processo de avaliação de sua qualidade.

Outra forma de classificar as distorções ocorridas nos dados de Sensoriamento Remoto é quanto à sua origem, que pode ser:

- No objeto visado;
- Na plataforma do satélite e
- No sensor.

2.5.2.1 Distorções Geométricas Referentes ao Objeto Visado

As distorções oriundas do objeto visado, no caso a terra, são devido:

- À rotação;
- À esfericidade;
- Ao relevo.

O efeito provocado pela rotação da Terra deve-se ao movimento simultâneo entre o satélite e a Terra. Durante o movimento passivo do espelho, a Terra estará no seu processo natural de rotação, provocando descontinuidades entre varreduras consecutivas (Figura 17). Segundo Richards & Jia (1999), um ponto imageado está deslocado para oeste devido ao movimento de rotação da Terra (de oeste para leste) no momento da aquisição da janela de imageamento. Caso as linhas imageadas estejam arranjadas em forma de grade pode-se perceber que estas terão deslocamentos para leste, em relação ao terreno que elas representam. Para uma correção da posição relativa do pixel no terreno, é necessário realizar uma compensação. Este deslocamento para oeste depende da velocidade relativa do satélite, da velocidade de rotação da Terra e do comprimento da janela de imageamento.

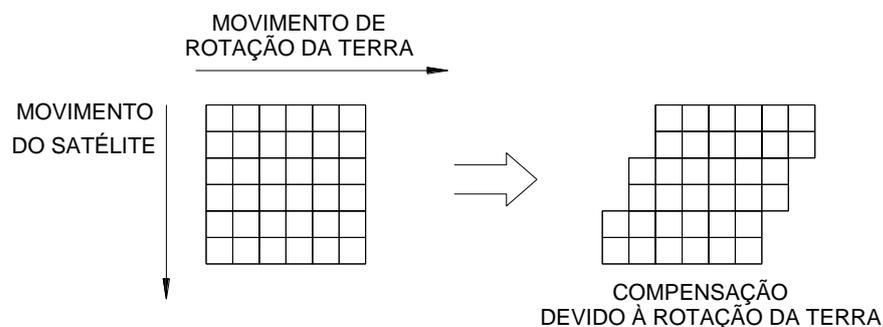


Figura 17: Efeito da rotação da terra no tempo de aquisição da imagem.

A forma da Terra, no processo de correção geométrica, é representada por um elipsóide de revolução, quando utilizadas coordenadas geodésicas, ou por um plano, quando utilizadas coordenadas projetadas em um plano.

Esta distorção é ocasionada pelo fato de a Terra não ser um plano e devido ao sensor imagear numa perspectiva cilindro-cônica, acarretando na associação de cada elemento de imagem (pixel) a uma área da Terra de tamanho diferente. Ela atua principalmente ao longo das linhas e se acentua com a visada lateral (Figura 18).

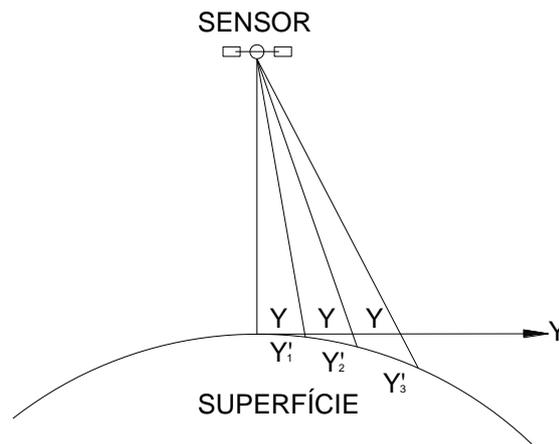


Figura 18: Erro devido à esfericidade da terra.

Segundo Richards & Jia (1999), os sensores de varredura possuem o IFOV constante. Isso gera uma alteração do tamanho do pixel no terreno, ou seja, os pixels da extremidade apresentam-se maiores que no nadir.

No momento em que os dados são organizados para formar a imagem, todos os pixels são representados com o mesmo tamanho, havendo então uma compressão nos dados, uma vez que a área representada por esses pixels não possui o mesmo tamanho no terreno (RICHARDS & JIA, 1999).

As imagens tomadas em quadros, advindas de sensores remotos, têm por característica a projeção central e os objetos que compõem a superfície terrestre, ou mesmo a própria diferença de nível da superfície, levam à distorção devido ao relevo ou à distorção devido à diferença de altitude. Esta distorção é diretamente proporcional às diferenças de nível entre os pontos e este efeito é minimizado para grandes altitudes de vôo, onde a imagem tende a adotar as características de uma projeção ortogonal, como ilustrado na Figura 19.

A principal característica desta distorção é que os objetos detectados no centro da imagem são isentos de deslocamento e à medida que se afastam do centro da imagem as distorções vão se agravando. Esta distorção pode ser representada pela seguinte equação:

$$\delta_R = \frac{r \cdot h_o}{H_v} \quad (10)$$

onde δ_R é o deslocamento devido ao relevo, r é a distância entre o objeto fotografado e o centro da imagem, h_o é a altura do objeto e H_v é a altura do sensor.

Supondo um sensor com altitude de, aproximadamente, 450 km, distância focal de 8.800 mm e a dimensão do pixel no terreno de 0,6 m, o tamanho do pixel na imagem será de 11,73 μm . Supondo que um objeto, com 100 m de altura, foi detectado pelo sensor e representado na imagem a uma distância de 13000 pixels do centro da imagem (próximo à borda da imagem), assumindo uma inclinação do eixo focal do sensor em relação ao nadir igual a zero, terá um deslocamento devido ao relevo de 0,034 mm, ou seja, cerca de 3 pixels.

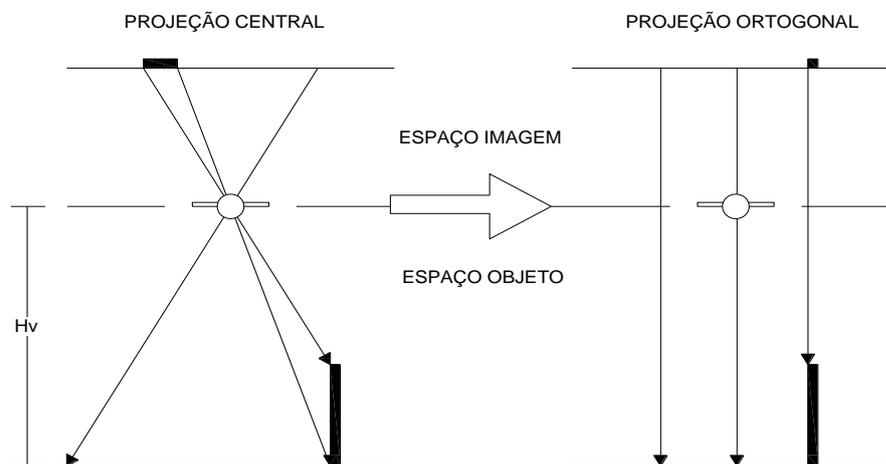


Figura 19: Distorção devido ao relevo.

2.5.2.2 Distorções Geométricas Devido à Plataforma

As principais distorções da imagem durante o imageamento, inerentes à plataforma do satélite, são:

- Variação de altitude;
- Variação de velocidade;
- Variação das atitudes.

Segundo Richards & Jia (1999), variações na elevação ou altitude da plataforma acarretam mudanças de escala, e em decorrência, mudanças no tamanho do pixel, como apresentado na Figura 20.

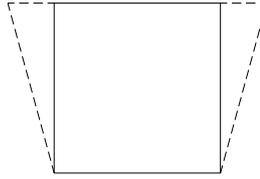


Figura 20: Distorção devido à variação da altitude da plataforma.

Uma mudança de velocidade da plataforma altera Δt_s , portanto a_x (tamanho do pixel na direção da trajetória) e, portanto, em uma mudança de escala na direção da órbita, ou seja, a deformação do pixel ocorre na direção longitudinal de varredura.

A correção desta distorção leva em conta um valor nominal para a velocidade do satélite, de tal forma que com esta velocidade haja uma perfeita justaposição das varreduras. Esta velocidade é função da frequência de varredura do espelho, e da dimensão da varredura ao longo da órbita.

Se a velocidade do satélite for menor que a nominal haverá superposição positiva das varreduras, com parte da superfície da Terra sendo imageada duas vezes; caso contrário, haverá superposição negativa, o que criará faixas na Terra não imageadas, como ilustrado na Figura 21.

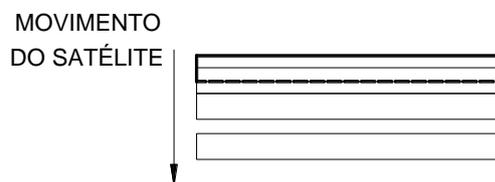


Figura 21: Distorções devido à variação da velocidade.

O comportamento que o satélite apresenta sem se afastar de sua órbita não é constante, pois sua plataforma pode se mover em função do campo gravitacional da Terra, vento solar, acionador do gerador do satélite, etc.

Segundo Pedro (2005) a variação da atitude da plataforma representada pelos ângulos *yaw* (κ), *pitch* (φ) e *roll* (ω) infere rotação e deslocamentos longitudinal e transversal da varredura.

Para Ishikawa (2001), o ângulo ω (rolamento) é responsável por ligeira distorção na varredura, devido a não ortogonalidade da visada. Já a variação do ω ao longo da cena provoca o não alinhamento das varreduras

consecutivas. Esta distorção afeta a imagem apenas no sentido da varredura, ilustrado na Figura 22.

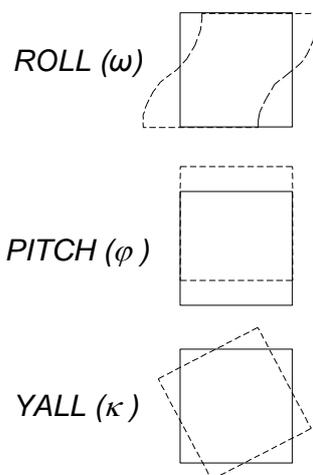


Figura 22: Distorções devido à atitude do sensor.

De forma semelhante ao rolamento, porém na direção transversal à varredura, o ângulo φ (arfagem) é responsável por pequenas distorções na imagem, devido a não ortogonalidade da visada. A variação desse ângulo ao longo da cena provoca superposições, positivas ou negativas, entre varreduras consecutivas.

O κ (guinada) é responsável por distorções representadas por um não alinhamento das varreduras devido à rotação sofrida pelo sensor. A variação do κ ao longo da cena pode provocar superposição positiva e negativa entre duas varreduras consecutivas, resultando num efeito semelhante a um leque.

3 GEORREFERENCIAMENTO DIRETO

Em princípio, georreferenciamento direto de imagens consiste em transformar coordenadas de tela em coordenadas terrestres, conhecendo-se os elementos de orientação interior e exterior do sensor, sem a necessidade de pontos com coordenadas terrestres previamente conhecidas, exceto dos pontos de checagem.

Em fotogrametria uma ou duas imagens – uma ou duas projeções centrais - digitais ou não, são transformadas em projeção ortogonal com o seguinte processo:

- Calibração da câmara: Procedimento executado em laboratório ou campo com o objetivo de determinar os elementos de orientação interior que são: a distância focal, as coordenadas, no sistema da câmara, das marcas fiduciais e do ponto principal e os coeficientes dos modelos de distorções das lentes e da refração atmosférica.

- Orientação interior: Empregando-se, usualmente, a transformação *afim*, determinam-se os parâmetros que transformam as coordenadas de tela da imagem digital – observação original de todo processamento fotogramétrico – em coordenadas no sistema fiducial calibrado. A partir da orientação interior as coordenadas de tela, diretamente observadas, podem ser transformadas em coordenadas no sistema fotogramétrico, corrigidas das deformações geométricas da imagem, das distorções das lentes, da refração atmosférica e da curvatura da Terra.

- Orientação exterior ou recessão espacial: Conhecendo-se as coordenadas terrestres de, no mínimo três pontos de apoio não-colineares, e obtendo suas coordenadas fotogramétricas, os parâmetros que transformam o sistema fotogramétrico no sistema terrestre podem ser estimados empregando-se a equação de colinearidade. Esses parâmetros são conhecidos como “parâmetros de orientação exterior” e são eles: a posição da câmara, ou seja, as coordenadas terrestres do centro de perspectiva (CP), X_{CP} , Y_{CP} e Z_{CP} , e a atitude da câmara no momento de tomada da foto, ou seja, as rotações nos eixos fotogramétricos x (ω – inclinação de asa), y (φ – inclinação de bico) e z (κ), Figura 23.

- Monorestituição: Conhecendo-se os elementos de orientação interior e exterior e as altitudes dos pontos – ou o modelo digital de elevação - as

coordenadas de tela de tais pontos, em uma única imagem, podem ser transformadas em coordenadas terrestres planimétricas, X e Y , empregando a equação de colinearidade.

- Interseção espacial: Se os pontos aparecem em duas imagens tomadas de pontos de vistas diferentes, podem-se medir as coordenadas de tela nas duas imagens e transformá-las, empregando-se novamente a equação de colinearidade, em coordenadas terrestres espaciais, X , Y e Z , desde que sejam conhecidos os elementos de orientação interior e exterior das imagens envolvidas.

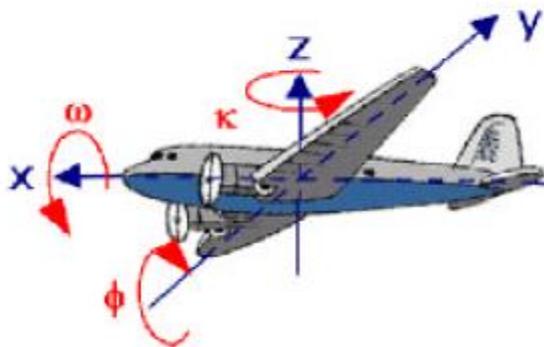


Figura 23: Fotogrametria: Ângulos de Euler (ω , φ e κ). Fonte: COELHO (2007)

Nas imagens tomadas pelo processo *pushbroom* cada linha de pixels é adquirida em diferentes instantes, enquanto o sensor se desloca ao longo de sua trajetória, e, como conseqüência, a projeção central não acontece para a imagem toda e a equação de colinearidade só se aplica a cada linha individualmente.

Uma vez que a aplicação da equação de colinearidade, para determinação dos parâmetros de orientação exterior, exige o conhecimento das coordenadas terrestres de no mínimo três pontos não-colineares, não há como aplicá-la em uma única linha de varredura com este fim. No entanto, hoje em dia, os sistemas de posicionamento por satélites e inercial permitem determinar a posição e a atitude de cada linha de fotodetectores, a qualquer instante. Além disso, a trajetória orbital dos satélites pode hoje ser determinada com precisão, o que permite encontrar a posição do sensor em determinados instantes.

Medeiros *et al.* (2005), diz que cada linha da imagem é tomada a partir de uma posição e orientação diferentes, ao contrário da imagem de quadro (frame), que possui um único conjunto de parâmetros de orientação exterior por imagem. No caso do sensor *pushbroom*, existem 6 incógnitas para cada linha

da imagem. Na realidade, estes 6 parâmetros de orientação de cada linha são determinados diretamente durante a coleta das imagens, usando GPS, sensores inerciais, sensores solares e rastreadores estelares.

Conhecendo-se os elementos de orientação interior e exterior de cada linha de varredura as coordenadas de pontos no sistema da linha podem ser transformadas em coordenadas terrestres.

Como na fotogrametria, as coordenadas medidas em uma ou duas imagens, no sistema de tela, podem ser transformadas em coordenadas terrestres planimétricas (X e Y) ou espaciais (X , Y e Z), com o seguinte processo:

- Calibração do sensor: procedimento executado em laboratório com o objetivo de determinar os elementos de orientação interior que em fotogrametria ou sensores de quadro são: Coordenadas do ponto principal, coeficientes do modelo de distorção das lentes, etc. Para sensores de varredura em linha, a calibração tem por objetivo corrigir distorções geométricas inerentes à mudança de dimensão do pixel, mudança ou rotação dos segmentos CCD no plano focal com relação a sua posição nominal e correção de linhas devido a flexão em arco ao longo da linha de varredura. Estes erros podem ser modelados e corrigidos por funções adequadas. O item 3.1 trata especificamente desse assunto.

- Orientação interior: empregando-se, usualmente, a transformação afim, determinam-se os parâmetros que transformam as coordenadas de tela da imagem digital em coordenadas no sistema da câmara. A partir da orientação interior as coordenadas de cada linha da imagem podem ser transformadas em coordenadas no sistema da câmara, corrigidas das deformações geométricas da imagem e das distorções das lentes.

- Orientação exterior: os parâmetros de orientação exterior - a posição do sensor, ou seja, as coordenadas terrestres do centro de perspectiva (CP), X_{CP} , Y_{CP} e Z_{CP} , e a atitude do sensor no momento de tomada da foto, ou seja, as rotações nos eixos x (ω), y (ε) e z (k), do sensor – devem ser determinadas por sistemas de posicionamento global e por posicionamento inercial ou a partir das efemérides dos satélites.

- Monorestituição: com a equação de colinearidade, as coordenadas de tela de uma única imagem podem ser transformadas em coordenadas

terrestres planimétricas, X e Y , conhecendo-se as altitudes dos pontos – ou o modelo digital de elevação - e os elementos de orientação interior e exterior

- Interseção espacial: se os pontos aparecem em duas ou três imagens tomadas de pontos de vistas diferentes, podem-se medir as coordenadas de tela nas imagens e transformá-las, empregando-se novamente a equação de colinearidade, em coordenadas terrestres espaciais, X , Y e Z , desde que sejam conhecidos os elementos de orientação interior e exterior das imagens envolvidas. Segundo Poli (2005), diferentemente da fotogrametria, a interseção espacial com imagens orbitais deve ser realizada em duas etapas: na primeira, empregam-se duas imagens mais afastadas – portanto, com uma maior relação base/altura, o que favorece a estereoscopia – para obter coordenadas terrestres aproximadas e na segunda, empregando-se uma terceira imagem, situada entre as duas primeiras, e com o ajustamento pelo método dos mínimos quadrados, obtém-se a interseção do terceiro raio homólogo e o refinamento das coordenadas terrestres.

A seguir serão detalhados o processo de calibração do sensor e a rotina de transformação de sistemas até a obtenção do modelo matemático, equação de colinearidade, empregado no georreferenciamento direto de imagens orbitais tomadas pelo processo *pushbroom*.

3.1 Calibração do Sensor

A calibração dos sensores de arranjo linear é realizada em cada seguimento de linha CCD com o objetivo de corrigir erros que se traduzem na mudança de dimensão do pixel, translação ou rotação dos segmentos CCD no plano focal em relação à posição nominal e correção de distorções devido à flexão em arco ao longo da linha de varredura.

Na correção decorrente da mudança na dimensão do pixel, inicialmente, é definido o sistema de referência da linha de detectores, como ilustrado na Figura 24, cuja origem se encontra no centro de cada linha e do detector central. O eixo y_s se encontra ao longo da linha de varredura e o eixo x_s perpendicular ao eixo y_s e ao longo da trajetória do satélite. Como y_s é a referência do eixo na direção da linha e a imagem sofre distorção radial em cada seguimento ao longo da linha de varredura, pode-se dizer que as

distorções devido ao tamanho do pixel se encontram ao longo do eixo y_s . Considerando-se um pixel com dimensões (p_x, p_y) , uma variação na dimensão do pixel ao longo da linha de detectores, dp_y , provocará uma alteração na coordenada y dada por:

$$dy_p = y \cdot \frac{dp_y}{p_y} \quad (11)$$

onde y é a posição do pixel na linha de varredura.

Como uma variação no tamanho do pixel tem como efeito uma alteração na escala da imagem conclui-se que o erro dy_p é fortemente correlacionado com o fator de escala na direção y_s , com uma variação da distância focal e com a distorção radial do sistema de lentes.

Na direção x_s , a correção é dada pela equação:

$$dx_p = dp_x \quad (12)$$

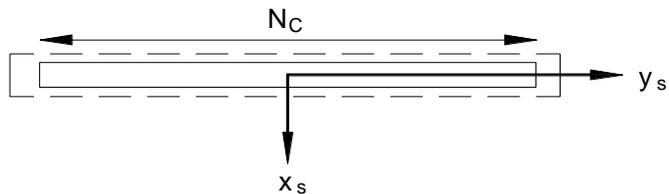


Figura 24: Efeito do tamanho do pixel na direção da linha de varredura

Os erros devido a translações na linha de CCDs nas direções x e y podem ser modelados inserindo as constantes dx_c e dy_c , respectivamente, no modelo.

A correção devido à rotação, θ , dos segmentos CCD, no plano focal, em relação à posição nominal, observe a Figura 25, é necessária se o sensor não está bem alinhado com a direção da trajetória, produzindo assim erros angulares na direção x_s e y_s (dx_θ , dy_θ) em cada seguimento. Esta distorção pode ser corrigida compensando o ângulo formado entre a linha de varredura e a posição nominal, através das seguintes equações:

$$dy_\theta = y - y \cdot \cos \theta = y \cdot (1 - \cos \theta) \quad (13)$$

e

$$dx_{\theta} = y \cdot \text{sen}\theta \quad (14)$$

que é mais significativa.

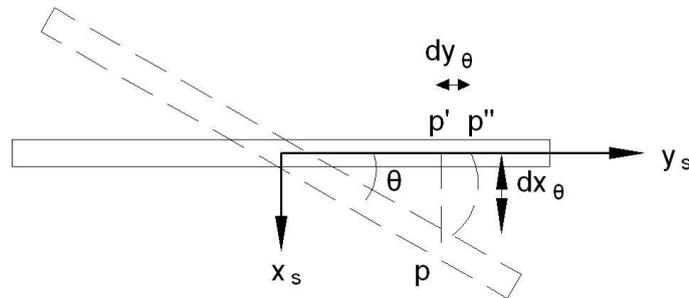


Figura 25: Efeito da mudança ou rotação dos segmentos CCD no plano focal em relação à posição nominal.

A distorção devido à flexão em arco no plano focal, ao longo da linha de varredura se dá quando um seguimento CCD sofre deformação em arco, como mostrado na Figura 26. O tamanho do arco é descrito pelo ângulo central (δ) referenciado ao sistema adotado para cada linha de varredura. O raio r desse arco pode ser calculado em função do comprimento da linha CCD em números de pixels (Np), do tamanho de cada pixel na direção y (p_y) e do ângulo δ por:

$$r = \frac{Np \cdot p_y}{2 \cdot \text{sen} \frac{\delta}{2}} \quad (15)$$

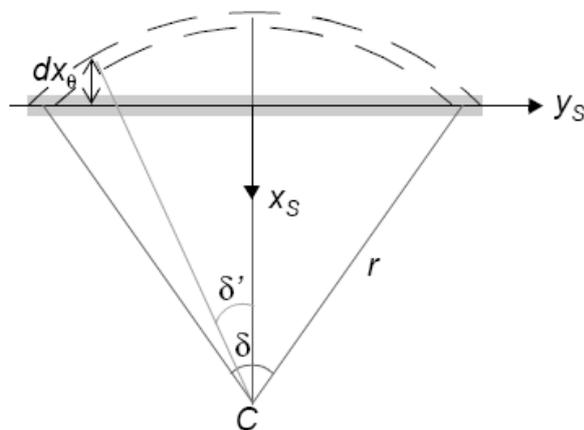


Figura 26: Linha de flexão no plano focal. POLI (2005)

O efeito desta curvatura tende a ser mais evidente com o aumento do ângulo nadiral.

Poli (2005) afirma que o efeito pode causar erros significantes da direção x indicado por dx_{δ} . No centro da linha ($y_s = 0$) esse erro é máximo e dado por:

$$dx_{\delta} = (r - r \cdot \cos \frac{\delta}{2}) \quad (16)$$

Nas bordas esse erro é nulo e para qualquer outro valor de y_s ele pode ser modelado inserindo um ângulo δ' , com

$$0 \leq \delta' \leq \frac{\delta}{2} \quad (17)$$

definido como:

$$\delta' \approx \frac{y}{r} \quad (18)$$

e utilizando-o no cálculo da deformação tem-se:

$$dx_{\delta} = (r \cdot \cos \delta' - r \cdot \cos \frac{\delta}{2}) = -r \cdot (\cos \delta' - \cos \frac{\delta}{2}) \quad (19)$$

Se y_s é negativo deve-se multiplicar os valores de dx_{δ} , dados pelas Equações (16) e (19), por -1.

Outra fonte de distorção que se torna necessário modelar e corrigir são as distorções das lentes. Estas distorções são mais evidentes em sensores de grande abertura angular, como no caso de sensores aerotransportados em baixa altitude.

Segundo Wolf & Dewitt (2004) em fotogrametria, as distorções das lentes produzem imagens com posições deslocadas de suas localizações ideais. Modelos matemáticos são usados para modelar estas distorções, que podem ser decompostas em duas componentes: distorção radial simétrica e distorção descentrada.

Andrade (2003) diz que a distorção radial simétrica pode ser encarada como uma parcela não desejável da refração sofrida pela luz ao atravessar

uma lente. Esta distorção é inerente ao processo de fabricação das lentes. Já a distorção descentrada, deve-se à impossibilidade do fabricante em alinhar perfeitamente os eixos óticos das lentes.

Em fotogrametria orbital, a distorção descentrada da lente, descrita pelas constantes p_1 e p_2 é modelada por:

$$dx_d = p_1 \cdot (r^2 + 2 \cdot \bar{x}_p^2) + 2 \cdot p_1 \cdot \bar{x}_p \cdot \bar{y}_p \quad (20)$$

$$dy_d = p_2 \cdot (r^2 + 2 \cdot \bar{y}_p^2) + 2 \cdot p_1 \cdot \bar{x}_p \cdot \bar{y}_p \quad (21)$$

A distorção radial simétrica ocorre em função de coeficientes angulares k_1 e k_2 e pode ser modelada como:

$$dx_r = (k_1 \cdot r^2 + k_2 \cdot r^4) \cdot \bar{x}_p \quad (22)$$

$$dy_r = (k_1 \cdot r^2 + k_2 \cdot r^4) \cdot \bar{y}_p \quad (23)$$

onde

$$r^2 = \bar{x}_p^2 + \bar{y}_p^2 \quad (24)$$

Segundo Poli (2005), além das distorções simétricas e descentrada outros possíveis erros que podem ocorrer em sistemas óticos de sensores orbitais são o deslocamento do ponto principal com coordenadas (x_p, y_p) , que é modelado com incremento de constantes Δx_p e Δy_p nas direções x_s e y_s , e uma variação Δf na distância focal f , cujo efeito pode ser modelado como:

$$dx_f = -\frac{\Delta f}{f} \cdot \bar{x}_p \quad (25)$$

$$dy_f = -\frac{\Delta f}{f} \cdot \bar{y}_p \quad (26)$$

onde

$$\bar{x}_p = x - x_p \quad (27)$$

e

$$\bar{y}_p = y - y_p \quad (28)$$

Finalmente, a variação de escala (s) nas direções x_s e y_s que, no caso de sensores de arranjo linear, somente o efeito na direção y_s e pode ser descrito como:

$$dy_s = s_y \cdot \bar{y}_p \quad (29)$$

3.2 Parâmetros de Orientação Exterior Empregando GNSS/INS

A determinação dos parâmetros de orientação exterior sempre se constituiu um passo importante, moroso e caro do processo fotogramétrico. A forma tradicional de determinar estes parâmetros emprega as coordenadas de pontos de controle devidamente determinadas em campo. Porém, no caso de sensores *pushbroom* a necessidade de três pontos não colineares, por linha de varredura, a fim de determinar os seis parâmetros de cada linha torna imprescindível a medida direta da posição e atitude do sensor. Para isso pode-se empregar os dados de posição fornecidos por rastreamentos por satélites de posicionamento GNSS, juntamente com as rotações nos eixos w (em x), f (em y) e k (em z) fornecidos pelo sistema Inercial, ambos registrados de forma simultânea no momento da tomada da imagem por um sensor remoto.

Os dados GNSS fornecidos são rastreados de forma cinemática com intervalo de rastreio mínimo utilizando técnicas de posicionamento absoluto e relativo.

Segundo Gemael & Andrade (2004) o posicionamento cinemático é um método de navegação diferencial altamente preciso, que utiliza como observável primária as fases das portadoras. O algoritmo de cálculo geralmente é o de dupla diferença de fase, como nos métodos estáticos, mas com a enorme diferença de que, para cada época de observação, uma posição é calculada.

O posicionamento absoluto é realizado utilizando informações de coordenadas advindas de satélites de posicionamento, através de informações de correção do relógio dos satélites e de efemérides precisas, onde as coordenadas de cada época são processadas através de uma técnica chamada PPP - Posicionamento Preciso por Ponto - sem a utilização de bases terrestres na formação de vetores.

O posicionamento relativo é realizado utilizando dois ou mais receptores GNSS a fim de formar vetores que são processados e ajustados. Para a realização desta forma de posicionamento é necessário que receptores sejam fixados em pontos cujas coordenadas são conhecidas, chamados de base, e outro receptor seja acoplado ao sensor, chamado de móvel. Desta forma, com todos os receptores rastreando sinais de satélites ao mesmo tempo formam vetores que são processados e ajustados a fim de se determinar as coordenadas do sensor.

O sensor inercial, usado para fornecer informações de rotação nos eixos a cada momento, é formado por um sensor giroscópio de três eixos que de acordo com o movimento do sensor a cada instante, são registradas as suas rotações.

A integração dos dados GNSS com sensor inercial realizada de forma que no momento da detecção da imagem são registradas as informações provenientes do sensor inercial e GNSS. Devido a uma possível interferência na qualidade dos sinais GNSS e do sensor inercial, ou atraso nas informações detectadas por cada sensor e pelo receptor, os dados registrados são filtrados usando geralmente o filtro de *Kalman* (utilizados em processamento GNSS) e interpolados, servindo-se do tempo registrado pelo sensor inercial para o momento de tomada da imagem. O tempo registrado pelo sensor inercial é utilizado como base para as correções devido ao fato de que é registrado com maior frequência quando comparado aos receptores GNSS.

3.3 Parâmetros de Orientação Exterior a Partir das Efemérides

Para imagens adquiridas por sensores *pushbroom* transportados por satélites, os parâmetros de orientação exterior podem ser determinados a partir

dos elementos keplerianos ou dos vetores posição, e suas velocidades, do satélite.

A determinação das coordenadas dos satélites envolve os seguintes sistemas de referência que serão, a seguir, definidos: *International Earth Rotation and Reference Systems Service (IERS)*, *International Terrestrial Reference System (ITRS)*, Sistema Orbital Espacial e Sistema Orbital Plano.

3.3.1 Sistema de Referência Celeste Internacional

De acordo com o Serviço Internacional de referência e Rotação da Terra – *International Earth Rotation and Reference Systems Service (IERS)* -, o Sistema de Referência Celeste Internacional – *International Celestial Reference System (ICRS)* -, é um sistema de referência fundamental adotado pela União Astronômica para alta precisão de astronomia internacional. O ICRS, originado no baricentro do sistema solar com eixos direcionais fixos, tem por objetivo representar o sistema de coordenadas mais apropriado para expressar dados com referência nas posições e movimentos dos objetos celestiais.

Monico (2000) define tanto o sistema de referência celeste convencional como o sistema de referência terrestre convencional como sistemas geocêntricos, onde o eixo X tem orientação fixa no eixo fundamental, e o eixo Z é normal a esse plano, pode acompanhar, ou não, o movimento de rotação da terra. O eixo Y é definido de forma que atenda à definição de um sistema dextrógiro.

No *ICRS* o eixo X forma um vetor apontando para o equinócio vernal médio às 12 horas TDB (Tempo Dinâmico Baricêntrico) em 1° de janeiro de 2000, Figura 27.

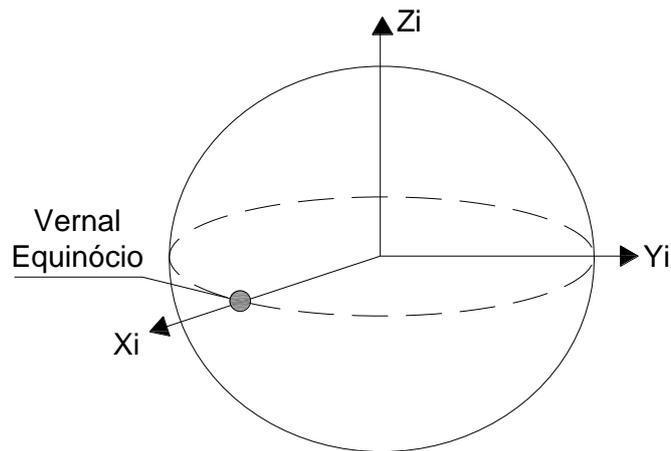


Figura 27: Sistema de Referência Celeste.

3.3.2 Sistema de Referência Terrestre Internacional

A União Internacional de Geodésia e Geofísica – UGGI, considerando a necessidade de definir um sistema terrestre que possibilitasse determinar um ponto sobre a superfície da Terra sem ambigüidade ao nível do milímetro, endossou em 1991, a resolução sobre sistemas de referência, adotada pela XXI Assembléia Geral da “*International Astronomical Union – IAU*” que criou o “*International Terrestrial Reference System – ITRS*”. (RODRIGUES, 2002)

O ITRS constitui um conjunto de prescrições e convenções cujo objetivo é definir origem, escala, orientação e evolução do sistema de referência. É definido por um sistema geocêntrico fixo com centro de massa definido usando toda a porção terrestre, incluindo oceano e atmosfera; sua orientação é dada pelo BIH (*Bureau International de L'Heure*) na época 1984,0; e o tempo de evolução e orientação não pode criar rotação residual global com relação a movimentos tectônicos. Este sistema pode ser especificado pelas coordenadas cartesianas X, Y e Z.

Monico *et al.* (2006) afirma que a realização do ITRS envolve várias técnicas de posicionamento espacial, onde cada uma das soluções, envolvendo vários anos de observações, é combinada de modo a produzir uma única solução. Nessa combinação, que trata da realização de um referencial cinemático, cada uma das tecnologias utilizadas apresenta propriedades de interesse, bem como deficiências. A combinação resulta numa solução que pode ser considerada ótima.

O ITRS, segundo Rodrigues (2002), pode ser realizado por uma rede de estações com coordenadas conhecidas onde deve-se usar de preferência, coordenadas no sistema cartesiano geocêntrico e ou sistema geodésico.

Com cada realização do ITRS, materializa-se os sistemas de referência terrestres internacionais ITRF_y - *International Terrestrial Reference Frame*.

O ITRF_y é caracterizado por um conjunto de estações materializadas com suas coordenadas X , Y e Z (Geocêntricas) acrescidas de suas respectivas velocidades, numa determinada época de referência. Para a determinação do ITRF, o ITRS é realizado anualmente pelo escritório da IERS (*International Earth Rotation and Reference systems Services*) onde são realizados ajustamentos de várias séries de coordenadas obtidas de técnicas espaciais tais como SLR (*Satélite Laser Range*), LLR (*Lunar Laser Range*), VLBI (*Very Long Baseline Interferometry*).

3.3.2.1 Sistema Geodésico

Wolf & Dewitt (2004) afirmam que as coordenadas geodésicas para um ponto específico (P) localizado na superfície terrestre são descritas como latitude (φ), longitude (λ) e altitude geométrica (H), conforme Figura 28. Estas coordenadas dependem do elipsóide de referência, onde a φ e λ são componentes enquanto H representa a componente vertical.

Os valores de λ vão de -180° a 180° , sendo negativo a oeste e positivo a leste do Meridiano Internacional de Referência - *International Reference Meridian* (IRM). Os valores de φ vão de -90° a $+90^\circ$ variando de positivo a norte e negativo a sul da linha do equador.

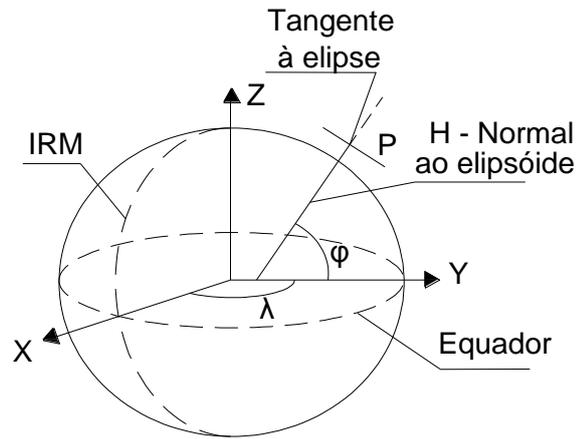


Figura 28: Sistema Geodésico.

A transformação de φ , λ e h para X , Y e Z é dada por:

$$X = (N + h) \cos(\varphi) \cos(\lambda) \quad (30)$$

$$Y = (N + h) \cos(\varphi) \sin(\lambda) \quad (31)$$

$$Z = [N(1 - e^2) + h] \sin \varphi \quad (32)$$

sendo

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} \quad (33)$$

e

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} \quad (34)$$

onde e representa a excentricidade do elipsóide, a e b o semi-eixo maior e menor da terra respectivamente, e N a grande normal.

A altitude a ser representada, juntamente com as coordenadas geodésicas, pode ser a altitude geométrica (H) ou a ortométrica (h), sendo a altitude geométrica a distância entre um ponto na superfície terrestre e o mesmo no elipsóide, na direção normal e a altitude ortométrica é a distância entre um ponto na superfície terrestre e o mesmo no geóide, ao longo da vertical. A diferença entre estas duas altitudes, desprezando o desvio formado entre as direções normais às duas superfícies, elipsóide e geóide, é chamada ondulação geoidal (\bar{N}), ou seja:

$$\bar{N} \approx h - H \quad (35)$$

3.3.2.2 Sistema Geodésico Local - Topocêntrico

Rodrigues (2002) apresenta o sistema topocêntrico como sendo um sistema de coordenadas com origem na superfície terrestre; eixo Z_L coincide com a normal ao elipsóide, dirigido para um ponto próximo ao zênite; eixo Y_L na direção da tangente ao meridiano geodésico, dirigido para o norte e eixo X_L perpendicular a Z_L e Y_L , tornando o sistema dextrógiro. Os eixos X_L e Y_L , apresentados na Figura 29, definem o horizonte geodésico.

Chamando X_P , Y_P , Z_P coordenadas geocêntricas da origem de um sistema local no terreno (ponto P) e φ_P e λ_P a latitude e longitude do ponto, a transformação das coordenadas no sistema cartesiano geocêntrico para o sistema local (WANG, 1999).

A transformação entre os sistemas é apresentada pela Equação 36

$$\begin{bmatrix} X_L \\ Y_L \\ Z_L \end{bmatrix} = R_X(90 - \varphi_P) R_Y(90 - \lambda_P) \begin{bmatrix} X - X_P \\ Y - Y_P \\ Z - Z_P \end{bmatrix} \quad (36)$$

onde X , Y e Z são coordenadas no sistema geocêntrico, X_L , Y_L e Z_L as coordenadas do sistema local e X_P , Y_P e Z_P coordenadas geocêntricas da origem do sistema local.

De acordo com Wolf & Dewitt (2004) o sistema de coordenadas local é um sistema de referência tridimensional com a origem em um ponto específico na área de projeto. O eixo Z estende-se a partir do elipsóide na mesma direção que o normal na origem.

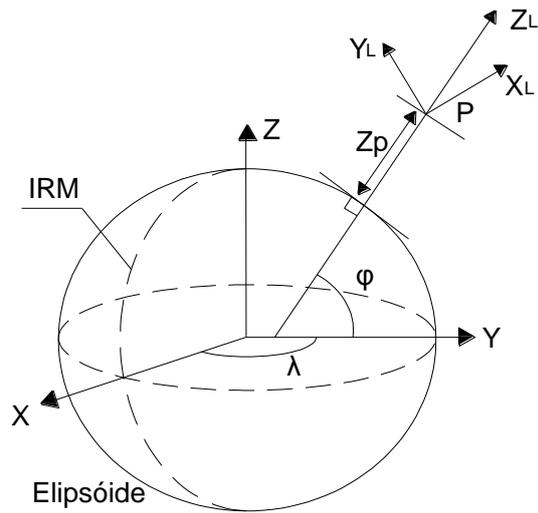


Figura 29: Sistema Topocêntrico.

3.3.3 Sistema de Referência Orbital

Segundo Poli (2005), as coordenadas do sistema orbital possuem sua origem no centro de massa da plataforma ou nave espacial. O eixo Z_o forma um vetor cuja direção é o alinhamento entre a nave e a terra. O eixo X_o forma um vetor com direção voltada para a trajetória do vôo, e o eixo Y_o possui sua direção perpendicular aos eixos X_o e Z_o . A Figura 30 mostra o Sistema de Referência Orbital (X_o , Y_o , Z_o) relacionado ao Sistema de Referência Celeste (X_i , Y_i , Z_i).

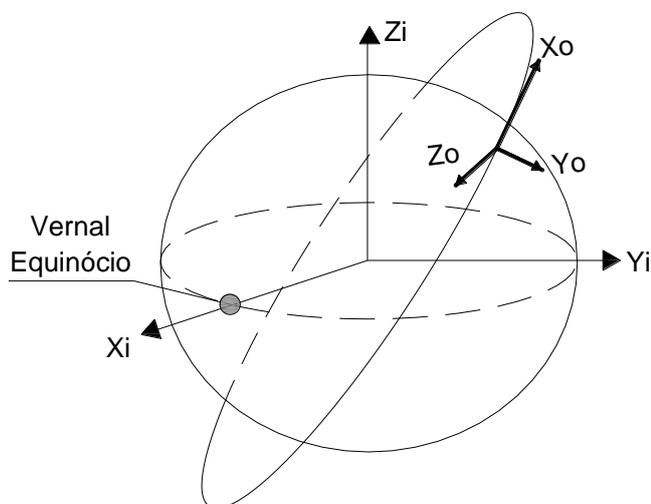


Figura 30: Sistema Orbital e Sistema de Referência Celeste.

De acordo com Gemael & Andrade (2004) nas principais aplicações geodésicas atuais dos satélites artificiais, é indispensável conhecer a posição dos satélites numa determinada época, e isto implica no conhecimento dos elementos keplerianos, isto é, dos parâmetros determinantes da órbita normal e da maneira como estes parâmetros variam com o tempo em função das forças perturbadoras.

Através do conhecimento dos elementos (ou parâmetros) keplerianos, pode-se descrever a órbita dos satélites ao longo de sua trajetória utilizando o sistema plano orbital.

Segundo Fritsh & Stallmann (2000), a trajetória dos satélites obedecem a leis de Kepler e movimentos se dão ao longo de uma elipse orbital, onde a órbita pode ser descrita por seis parâmetros Keplerianos e esses parâmetros definem uma elipse que pode ser orientada em relação à Terra possibilitando a determinação das posições do satélite na elipse a uma determinada hora.

De acordo com os parâmetros de determinação da órbita, representados nas Figuras 31 e 32, a orientação do plano orbital em relação ao equador é definida pela inclinação orbital (i) e pela ascensão reta do nodo ascendente (Ω). O argumento do perigeu (ω) e a anomalia verdadeira (f) ou ângulo de trajetória define a posição do satélite sobre a elipse em um determinado instante (t). O tamanho e a forma da elipse orbital são definidos pelo semi-eixo maior (a) e semi-eixo menor (b) da elipse e pela excentricidade numérica (e).

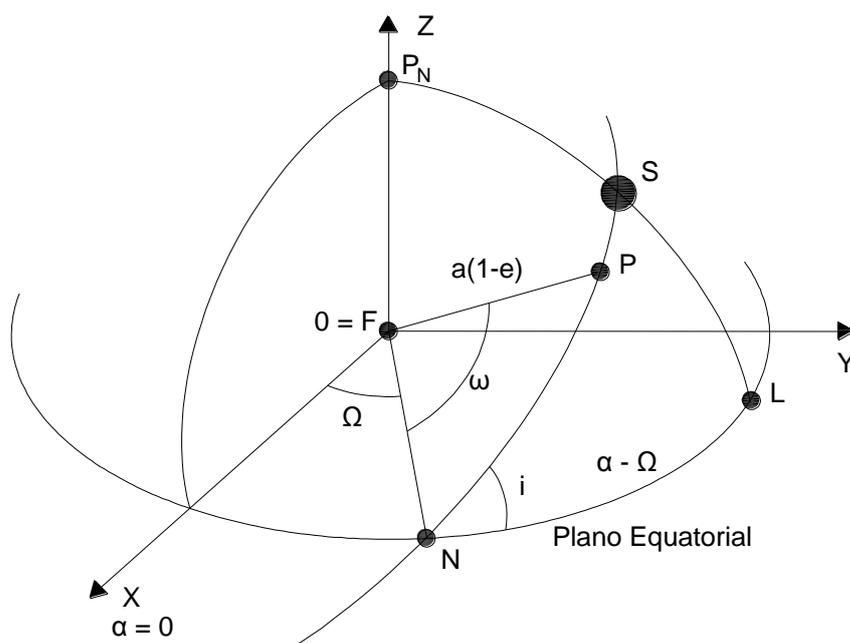


Figura 31: Órbita Kepleriana.

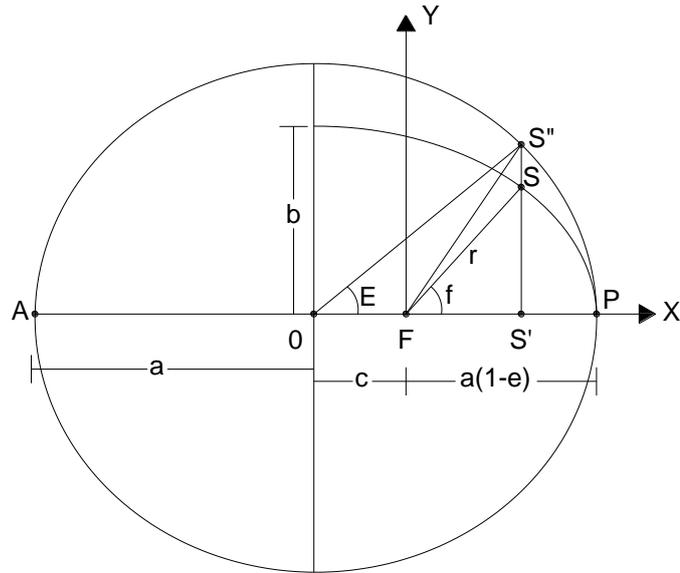


Figura 32: Anomalia excêntrica.

Segundo Gemael & Andrade (2004) tomando o foco F (centro de massa da Terra), apresentado na Figura 32, como pólo e o eixo polar sobre a linha das apsidis, sentido positivo para perigeu (P), a equação que a elipse é dada por:

$$r = p_o \cdot (1 + e \cdot \cos f)^{-1} \quad (37)$$

em que f representa o ângulo polar (denominado anomalia verdadeira, contado a partir do perigeu, no sentido do movimento do satélite) e p_o é dado por

$$p_o = \frac{b^2}{a} = a \cdot (1 - e^2) \quad (38)$$

Para determinar o raio vetor r , a partir da anomalia excêntrica, realizam-se cálculos através das seguintes equações:

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad (39)$$

onde

$$x = OS' - OF = a \cdot \cos E - a \cdot e = a \cdot (\cos E - e) \quad (40)$$

e

$$y = b \cdot \text{sen}E = a \cdot (1 - e^2)^{\frac{1}{2}} \cdot \text{sen}E \quad (41)$$

Introduzindo as Equações 30 e 41 na Equação 39 e simplificando-a, determina-se o valor de r através da seguinte equação:

$$r = a \cdot (1 - e \cdot \cos E) \quad (42)$$

A fim de relacionar a anomalia verdadeira com a anomalia excêntrica, tem-se:

$$\text{sen}f = \frac{y}{r} = \frac{(1 - e^2)^{\frac{1}{2}} \cdot \text{sen}E}{1 - e \cdot \cos E} \quad (43)$$

e

$$\text{cos}f = \frac{x}{r} = \frac{\cos E - e}{1 - e \cdot \cos E} \quad (44)$$

A descrição do movimento do satélite utilizando a equação de *Kepler* é dada pela seguinte equação:

$$E - e \cdot \text{sen}E = M \quad (45)$$

onde M é a anomalia média que, relacionada a um satélite dotado de velocidade angular uniforme, pode ser calculada por:

$$M = n \cdot (t - t_0) \quad (46)$$

em que t_0 é instante em que o satélite passa pelo perigeu, t é o tempo do satélite em um dado momento, e n é o movimento angular médio dado por:

$$n = \sqrt{\left(\frac{GM}{a^3}\right)} \quad (47)$$

onde GM é uma constante gravitacional.

Segundo Gemael & Andrade (2004), a combinação resultante da trajetória do satélite e do movimento da Terra é composta pelo movimento que o satélite causa na trajetória de superfície da Terra. O efeito com o respectivo ângulo de trajetória f pode ser expresso pela latitude e longitude.

$$\text{sen}\varphi = \text{sen}(\omega + f) \cdot \text{sen}i \quad (48)$$

$$\text{tan}(\alpha - \Omega) = \text{tan}(\omega + f) \cdot \text{cos}i \quad (49)$$

$$\lambda = \alpha - \Omega \quad (50)$$

onde α é a ascensão reta.

De acordo com Monico (2000) as coordenadas terrestres do satélite em um dado instante podem ser obtidas através das seguintes expressões:

$$X = x \cdot \text{cos}(\Omega - \omega \cdot t) - y \cdot \text{sen}(\Omega - \omega \cdot t) \text{cos}(i) \quad (51)$$

$$Y = x \cdot \text{sen}(\Omega - \omega \cdot t) + y \cdot \text{cos}(\Omega - \omega \cdot t) \text{cos}(i) \quad (52)$$

e

$$Z = y \cdot \text{sen}(i) \quad (53)$$

3.4 Equação de Colinearidade

Segundo Coelho (2007) duas equações de colinearidade podem ser consideradas a base da fotogrametria digital, uma vez que relacionam os parâmetros da orientação exterior, as coordenadas fotogramétricas de um ponto e as coordenadas tridimensionais, do mesmo ponto, no sistema referencial do terreno ou do espaço-objeto.

3.4.1 Sistema de Coordenadas da Imagem

Visualizando a imagem como uma matriz de pixels, o seu sistema de coordenadas é um sistema bidimensional, com origem localizada, por convenção, no canto superior esquerdo da imagem.

Na definição dos eixos não há padronização. Há autores, como POLI (2005), que consideram o eixo das linhas da matriz de pixels – direção vertical e sentido positivo dirigido para baixo, na tela - o primeiro eixo, eixo das abscissas, normalmente representado por ' L ', ' x ' ou ' u '; e o eixo das colunas – direção horizontal e sentido positivo dirigido para a direita – o segundo eixo, eixo das ordenadas, normalmente representado por ' C ', ' y ' ou ' v '. Dessa forma o sistema da imagem é dextrógiro, imaginando um terceiro eixo saindo da imagem. Já Coelho & Brito (2007), considera as colunas o primeiro eixo e as linhas o segundo, o que torna o sistema levógiro. A Figura 34 mostra o sistema de imagens dextrógiro.

Assim, as coordenadas no sistema de imagem são dadas em números inteiros de pixels ou pontos. A Figura 34 mostra que as coordenadas de imagem do ponto destacado são 4 e 5 pixels, ou seja, o ponto ocupa a quarta linha e quinta coluna da imagem.

A dimensão de uma imagem é dada por sua largura N_C – número total de colunas – e altura N_L – número total de linhas, como mostra a Figura 33.

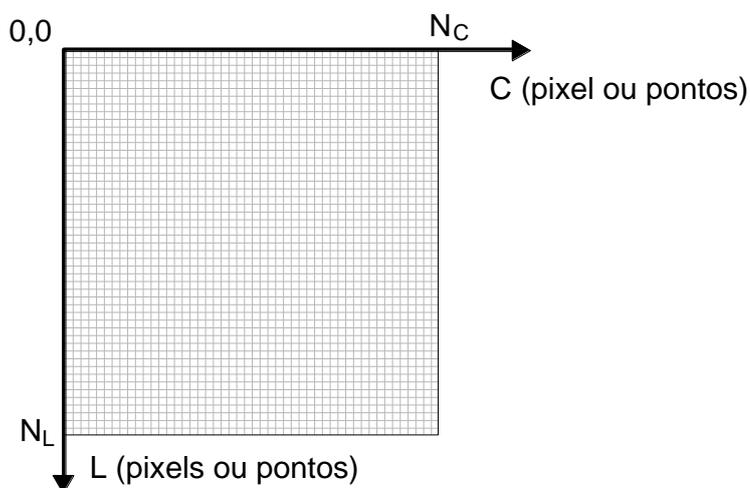


Figura 33: Sistema dextrógiro de coordenadas da imagem.

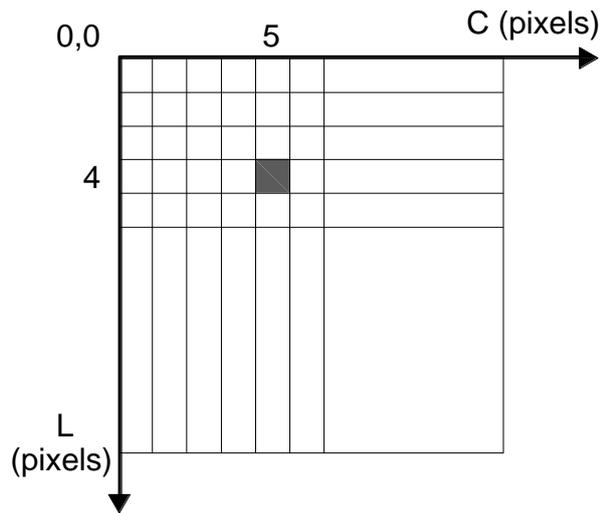


Figura 34: Coordenadas no sistema de imagem

3.4.2 Sistema da Linha de Varredura

Poli (2005) define o sistema de coordenadas da linha de varredura da seguinte forma, Figura 35:

A origem está no pixel médio da linha; o segundo eixo (y_s) tem direção paralela à linha e sentido positivo dirigido para a direita, e o primeiro eixo (x_s) tem direção perpendicular a y_s e o sentido positivo é o que mais se aproxima do sentido do vôo - aquele que torna o sistema dextrógiro, imaginado um terceiro eixo saindo da imagem.

Portanto, cada linha de varredura tem seu sistema bidimensional de coordenadas x_s, y_s . A coordenada x_s é fixada em zero (0).

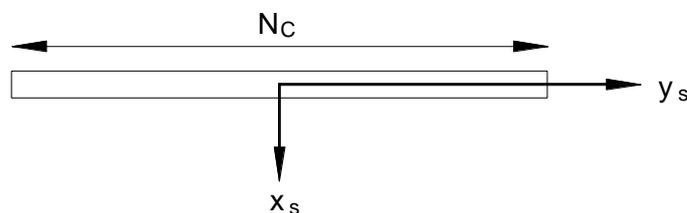


Figura 35: Sistema da linha de varredura.

As coordenadas no sistema da linha de varredura, x_s e y_s , podem ser relacionadas com as coordenadas no sistema de imagem, L e C . A Figura 36 mostra os dois sistemas em uma mesma imagem.

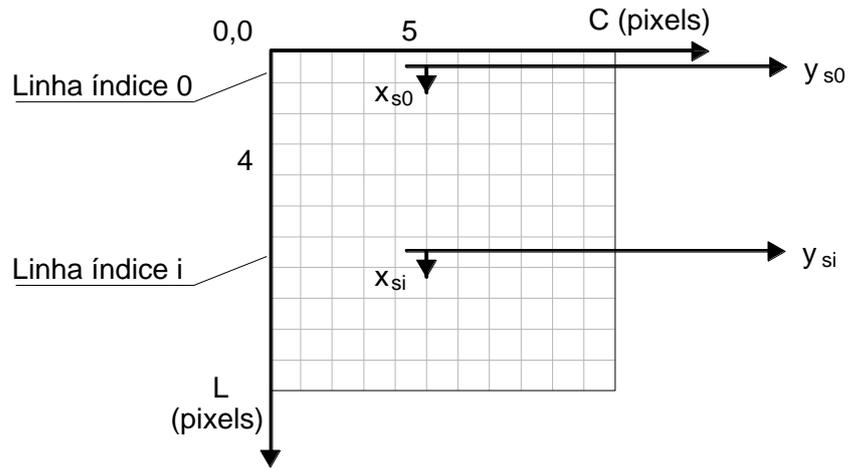


Figura 36: Sistemas de imagem e de linhas de varredura

Assumindo uma situação ideal, sem distorções das lentes e sem erros geométricos na linha formada por sensores CCDs, localizada no plano focal, a coordenada C pode ser transformada em y_s empregando a seguinte equação:

$$y_s = \left(C - \frac{N_C}{2} \right) \cdot p_y \quad (54)$$

onde p_y é a dimensão do pixel na direção de cada y_s , N_C é o número total de colunas, ou seja, o número total de pixels em cada linha.

Vale lembrar que a coordenada x_s é zerada.

O instante de aquisição da linha i , t_i , pode ser calculado usando o instante de aquisição da linha de referência (usualmente, a primeira linha, linha índice 0), t_0 , e o intervalo de tempo, Δt_s , necessário para o sistema ótico varrer cada linha no terreno, com a seguinte equação:

$$t_i = t_0 + (L_i - L_0) \cdot \Delta t_s \quad (55)$$

e portanto,

$$L_i = L_0 + \frac{t_i - t_0}{\Delta t_s} \quad (56)$$

onde L_i e L_0 são as abscissas, no sistema da imagem, das linhas de varredura i e 0 .

Segundo Poli (2005), se intervalo Δt_s não for conhecido ele pode ser determinado usando os instantes t_1 e t_2 de início de aquisição de duas linhas de varredura quaisquer, L_1 e L_2 , empregando a Equação (46):

$$\Delta t_s = \frac{L_2 - L_1}{t_2 - t_1} \quad (57)$$

3.4.3 Sistema de Coordenadas da Câmera

Devido às características do processo de tomada da imagem por scanners lineares, não se pode definir um único sistema da câmara para a imagem toda; é necessário definir um para cada linha de varredura. Assim, o sistema da câmara consiste em um sistema tridimensional com origem no centro de perspectiva (CP) de cada lente. Os eixos x_c e y_c têm mesma orientação dos eixos x_s e y_s . O eixo z_c tem direção perpendicular à x_c e y_c e o sentido positivo é aquele que torna o sistema dextrógiro, ou seja, dirigido para cima, Figura 37.

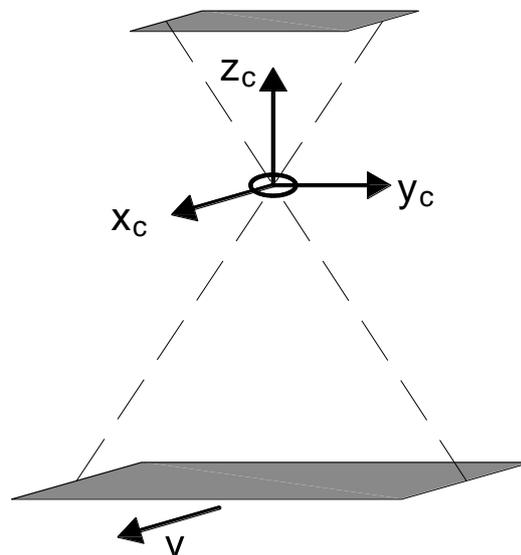


Figura 37: Sistema de coordenadas da câmara

A Figura 38 mostra a relação entre o sistema da linha de varredura e o sistema da câmara. Dela verifica-se que:

$$\begin{bmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_s \\ y_s \\ -f \end{bmatrix} \quad (58)$$

onde f é a distância focal do sensor.

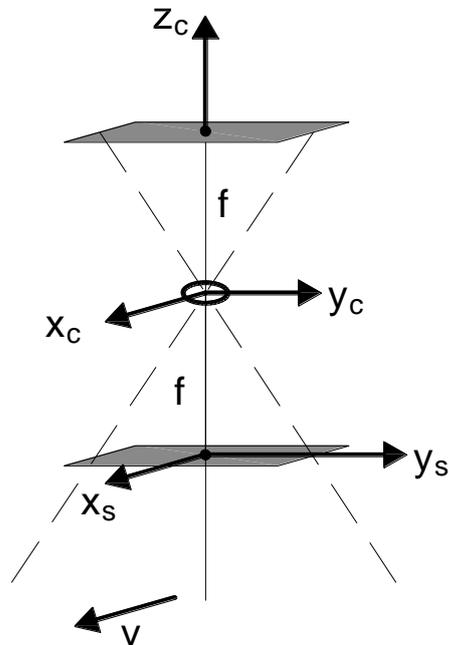


Figura 38: Sistemas da linha e da câmera

3.4.4 Relação entre Sistema da Câmera e Sistema Terrestre

Em Poli (2005), as linhas que compõem uma imagem adquirida por sensores de varredura possuem como característica a projeção central no sentido perpendicular à trajetória do satélite e a relação entre as coordenadas de câmera com as coordenadas de superfície (ou objeto) pode ser descrita através do princípio de colinearidade.

Segundo Telles (2004) o modelo de colinearidade consiste em duas equações, as quais asseguram que um ponto no espaço objeto juntamente com o seu correspondente no espaço imagem e o centro perspectivo são colineares no momento da tomada da imagem, de acordo com a Figura 39, se todos os erros sistemáticos tiverem sido eliminados.

As equações de colinearidade podem ser expressas por:

$$L_p = L_0 - f \cdot \left[\frac{m_{11}(X_p - X_0) + m_{12}(Y_p - Y_0) + m_{13}(Z_p - Z_0)}{m_{31}(X_p - X_0) + m_{32}(Y_p - Y_0) + m_{33}(Z_p - Z_0)} \right] \quad (59)$$

$$C_p = C_0 - f \cdot \left[\frac{m_{21}(X_p - X_0) + m_{22}(Y_p - Y_0) + m_{23}(Z_p - Z_0)}{m_{31}(X_p - X_0) + m_{32}(Y_p - Y_0) + m_{33}(Z_p - Z_0)} \right] \quad (60)$$

onde: L_p e C_p representam as coordenadas dos pontos no espaço imagem; f representa a distância focal; L_0, C_0 representam as coordenadas de tela do ponto principal; X_p, Y_p, Z_p representam as coordenadas dos pontos no espaço objeto; X_0, Y_0, Z_0 representam as coordenadas do centro de perspectiva da câmera no momento de tomada da foto ou imagem; e $m_{11} \dots m_{33}$ representam as componentes da matriz de rotação, M , entre o sistema do espaço objeto e o sistema espaço imagem.

Considerando κ, φ e ω como as rotações em torno dos eixos Z, Y e X , respectivamente, definidas pelas matrizes $R_3(\kappa), R_2(\varphi)$ e $R_1(\omega)$, tem-se, para matriz M , resultante do produto matricial $R_3(\kappa) \cdot R_2(\varphi) \cdot R_1(\omega)$:

$$M = \begin{bmatrix} \cos\varphi \cdot \cos\kappa & \cos\omega \cdot \text{sen}\kappa + \text{sen}\omega \cdot \text{sen}\varphi \cdot \cos\kappa & \text{sen}\omega \cdot \text{sen}\kappa - \cos\omega \cdot \text{sen}\varphi \cdot \cos\kappa \\ -\cos\varphi \cdot \text{sen}\kappa & \cos\omega \cdot \cos\kappa - \text{sen}\omega \cdot \text{sen}\varphi \cdot \cos\kappa & \text{sen}\omega \cdot \cos\kappa + \cos\omega \cdot \text{sen}\varphi \cdot \text{sen}\kappa \\ \text{sen}\varphi & -\text{sen}\omega \cdot \cos\varphi & \cos\omega \cdot \cos\varphi \end{bmatrix} \quad (61)$$

Nas Equações (59) e (60) estão os nove parâmetros desconhecidos ($L_0, C_0, f, \omega, \varphi, \kappa, X_0, Y_0, Z_0$) que podem ser determinados a partir das coordenadas medidas L_p, C_p, X_p e Y_p para sistemas de coordenadas bidimensionais.

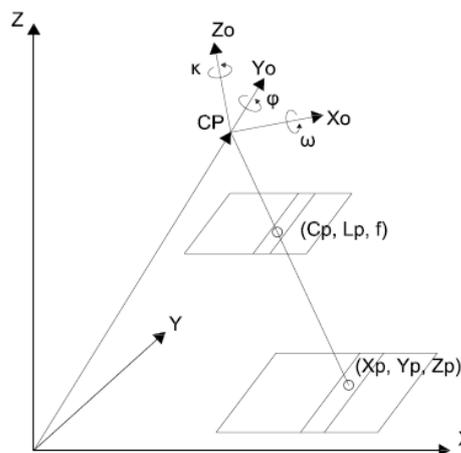


Figura 39: Transformação entre Sistema de Câmera em Sistema de Superfície

4 GEORREFERENCIAMENTO INDIRETO

O georreferenciamento indireto consiste em, a partir de um conjunto de pontos com coordenadas observadas e/ou conhecidas no sistema terrestre e no sistema de tela estimar os parâmetros que relacionam estes sistemas, e então, com os parâmetros e seus desvios padrão devidamente estimados, transformar coordenadas observadas no sistema de tela em coordenadas no sistema terrestre, propagando as covariâncias.

4.1 Modelos Matemáticos

O número de fatores que influenciam um processo físico é, em geral, muito grande para ser considerado no ponto de vista prático quando se deseja proceder a uma modelagem matemática. Por isso, entende-se que um modelo matemático representa um fenômeno apenas de modo aproximado. O grau de aproximação depende muito da precisão das observações utilizadas no estudo da modelagem. O grau de sofisticação de um modelo matemático deve ser coerente com a precisão das observações realizadas para a determinação dos valores numéricos de seus parâmetros (ANDRADE, 2003).

O uso do potencial geométrico completo de imagens orbitais requer um modelo matemático correto ou uma função de interpolação tridimensional baseada na geometria e orientação do sensor. Além disso, alguns modelos de interpolação tridimensionais baseados em pontos de controle são usados, mas eles precisam de um grande número destes pontos e todos bem distribuídos. O desenvolvimento de modelos matemáticos rigorosos implica no conhecimento dos dados de calibração do sensor, informações da órbita do satélite e atitude do sensor (MEDEIROS *et al.* 2005).

Lugnani (1987) descreve diferentes modelos de transformação, como os modelos de transformações ortogonais, *afins* e projetivas; todas tratadas no plano e no espaço. O autor trata também de relações geométricas como as polinomiais, equação de projeção paralela e equação de colinearidade voltada ao desenvolvimento de modelos para a fototriangulação.

Wolf & Ghilani (2006) desenvolveram os modelos de transformação de coordenadas conforme, *afim* e projetiva, envolvendo o espaço bidimensional,

ênfatizam a relaçaõ entre sistemas de referênça terrestre e descrevem os problemas em se transformar coordenadas do *Datum* Norte Americano NAD 27 para o *Datum* NAD 83.

Andrade (2003) demonstra os modelos matemáticos para transformaçaõ de coordenadas planas: *afins* geral e ortogonal, transformaçaõ isogonal, de corpo rígido, projetiva, e modelo de colinearidade. Os modelos apresentados sãõ voltados para o relacionamento entre referenciais fotogramétricos como sistema de coordenadas fiduciais, sistema de coordenadas fotogramétricas e sistema geodésico.

Lee *et al.* (2000) utiliza o modelo rigoroso (modelo que envolve a equaçãõ de colinearidade) para relacionar sistemas de coordenadas de imagens *pushbroom* aerotransportados com sistemas de coordenadas terrestres (geodésicos) com a finalidade de retificaçaõ de imagens.

Stallmann & Fritsh (2000) investigam a reconstruçãõ e calibraçaõ do sensores orbitais baseados em sistemas de imageamento ótico, com arranjos lineares *pushbroom*, como os sensores *SPOT*, *IRS-1C* e *MOMS-2P/PRIRODA*, utilizando o modelo rigoroso fotogramétrico e formulações derivadas adicionais, assumindo uma órbita elíptica para as plataformas.

Valadan *et al.* (2003) utilizam os modelos de transformaçaõ de coordenadas *afim* no espaço; o Método de Funçaõ Racional (RFM) ou modelo polinomial racional; a Transformaçãõ Linear Direta (DLT) ou transformaçaõ projetiva no espaço; a Transformaçãõ Linear Direta Auto Calibrada, ou seja, transformaçaõ projetiva no espaço com a adiçaõ de mais um parâmetro e o modelo de parametrizaçaõ orbital, ou modelo rigoroso, onde descreve a parametrizaçaõ da órbita através do modelo de orientaçaõ exterior (equaçãõ de colinearidade).

Mitishita *et al.* (2003) utiliza a transformaçaõ linear direta na monorrestituicãõ de imagens de satélite de alta resoluçaõ Ikonos 2 (GEO).

Wolf & Dewitt (2004) ênfatizam o problema na conversãõ entre sistemas de coordenadas retangulares para outros sistemas de referênça, abordadno modelos de transformaçaõ de coordenadas conforme, *afim* no plano e no espaço e o modelo de transformaçaõ projetiva no plano, demonstrando os desenvolvimentos dos modelos propostos.

Pedro (2005) faz um comparativo entre o modelo racional funcional e o modelo de projeçaõ *afim* na correçaõ geométrica de imagens de altíssima

resolução *Ikonos* e *QuickBird*, com o objetivo de investigar as limitações dos modelos.

Poli (2005) trata da modelagem para sensores de arranjo linear transportados por plataformas orbitais, relaciona os sistemas de referências orbitais e terrestres e utiliza a equação de colinearidade para relacionar os sistemas de coordenadas de câmera (sensor) e sistemas de coordenadas terrestres (geodésicos).

4.1.1 Modelo de Projeção *Afim*

O modelo de transformação *Afim* possui como característica principal, a não ortogonalidade entre os eixos, o que a diferencia de um modelo de transformação conforme, onde a forma dos objetos é preservada.

Basicamente, o modelo citado proporciona a correção geométrica de uma imagem parametrizando as rotações, translações e escala, no espaço 2d e 3d.

4.1.1.1 Modelo de Projeção *Afim* – Espaço 2D

As características da transformação *afim* na imagem digital podem ser modeladas com seis parâmetros, sendo duas translações (ΔC , ΔL), uma rotação (k), dois fatores de escala (λ_x , λ_y) e um fator de não ortogonalidade entre os eixos (ϵ_{xy}) evidenciando as seguintes equações:

$$C = \lambda_x \cdot \cos k \cdot X - \lambda_y \cdot \sen k \cdot Y + \Delta C \quad (62)$$

$$L = \lambda_x \cdot \sen(k + \epsilon_{xy}) \cdot X + \lambda_y \cdot \cos(k + \epsilon_{xy}) \cdot Y + \Delta L \quad (63)$$

Fazendo $a_1 = \lambda_x \cdot \cos(k)$; $a_2 = -\lambda_y \cdot \sen(k)$; $a_4 = \lambda_x \cdot \sen(k + \epsilon_{xy})$; $a_5 = \lambda_y \cdot \cos(k + \epsilon_{xy})$; $a_3 = \Delta C$; e $a_6 = \Delta L$ tem-se:

$$C = a_1 X + a_2 Y + a_3 \quad (64)$$

$$L = a_4 X + a_5 Y + a_6 \quad (65)$$

onde X , Y são as coordenadas de referência (em metros); C , L são as coordenadas de tela (coluna e linha em pixels).

Empregando a notação matricial tem-se o seguinte modelo linear para a transformação afim:

$$\begin{bmatrix} C \\ L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_4 & a_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_3 \\ a_6 \end{bmatrix} \quad (66)$$

Assim, para se obter os parâmetros que relacionam o sistema de tela e um sistema terrestre, empregando o modelo afim, deve-se observar as coordenadas de tela de no mínimo três pontos com coordenadas terrestres devidamente estimadas. Porém, para avaliar a qualidade das observações e dos parâmetros estimados, empregando o ajustamento pelo MMQ, há necessidade de observações redundantes.

4.1.1.2 Modelo de projeção Afim – Espaço 3D

De acordo com Lugnani (1987) o modelo *afim* projeta o espaço 3D no plano 2D, que é um caso particular da projeção central onde o centro de projeção foi deslocado para o infinito. Este modelo pode ser representado pela seguinte equação:

$$\begin{bmatrix} C \\ L \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_5 & a_6 & a_7 \\ a_9 & a_{10} & a_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_4 \\ a_8 \\ a_{12} \end{bmatrix} \quad (67)$$

onde : C , L , z representam as coordenadas dos pontos no espaço imagem; X, Y, Z representam as coordenadas dos pontos no espaço objeto e $a_1 \dots a_{12}$ representam os parâmetros de transformação;

Em modelos de transformação envolvendo o espaço 3D, é considerado que existe uma escala para cada ponto em função da sua altitude ou cota.

Segundo Pedro (2005), o sensor de linha CCD dos imageadores de alta resolução possui uma grande distância focal (cerca de 8,8 m para o sistema *Quickbird* e 10 m para o *Ikonos*) e um estreito campo de visada. Isso faz com que a imagem apresente projeção central no sentido de varredura do satélite (sentido y) e a aproximação de uma projeção paralela no sentido do deslocamento do satélite (sentido x). Com isso, para efeito de cálculo, pode-se considerar a projeção da imagem como sendo uma projeção paralela.

Ainda segundo Pedro (2005) para a transformação *afim* no espaço, a matriz dos parâmetros (a) não pode ser singular, ou seja, sendo os coeficientes $a_1 : a_2 : a_3 : a_4 \neq a_5 : a_6 : a_7 : a_8$. No entanto para o caso de a ser singular, a condição a seguir é verdadeira:

$$a_9 X + a_{10} Y + a_{11} Z + a_{12} = 0 \quad (68)$$

Isto faz com que as equações formadas pela Equação (62) sejam linearmente independentes, sendo a Equação (63) a expressão de um plano que passa pela origem do sistema admitindo que o plano que passa pela origem seja o plano xy , onde z é igual a zero.

Daí, tem-se:

$$C = a_1 X + a_2 Y + a_3 Z + a_4 \quad (69)$$

$$L = a_5 X + a_6 Y + a_7 Z + a_8 \quad (70)$$

$$z = 0 \quad (71)$$

4.1.2 Modelo Projetivo

O modelo de transformação projetiva representa uma simplificação do modelo de colinearidade.

Segundo Wolf & Dewitt (2004), dois parâmetros desconhecidos, distância focal - f e Z_0 , por mais que não sejam independentes, a relação destes parâmetros pode ser usada como constante e um simples parâmetro H pode ser utilizado para uma dada região. Esta relação pode ser dada por:

$$\frac{f}{Z_0} = \frac{1}{H} \quad (72)$$

Inserindo a Equação (72) nas Equações (59) e (60), o valor 1 é utilizado no lugar de f e H pode ser usado no lugar de Z_0 . Assim tem-se:

$$C_p = C_0 - \left[\frac{m_{11}(X_p - X_0) + m_{12}(Y_p - Y_0) + m_{13}(Z_p - H)}{m_{31}(X_p - X_0) + m_{32}(Y_p - Y_0) + m_{33}(Z_p - H)} \right] \quad (73)$$

$$L_p = L_0 - \left[\frac{m_{21}(X_p - X_0) + m_{22}(Y_p - Y_0) + m_{23}(Z_p - H)}{m_{31}(X_p - X_0) + m_{32}(Y_p - Y_0) + m_{33}(Z_p - H)} \right] \quad (74)$$

Desenvolvendo as Equações (73) e (74) e separando os termos contendo X_p e Y_p , tem-se:

$$C_p = \frac{(C_0 m_{31} - m_{11}) \cdot X_p + (C_0 m_{32} - m_{12}) \cdot Y_p + (C_0 m_{33} - m_{13}) \cdot Z_p}{m_{31} X_p + m_{32} Y_p + m_{33} Z_p + m_{31}(-X_0) + m_{32}(-Y_0) + m_{33}(-H)} + \frac{(C_0 \cdot m_{31} - m_{11})(-X_0) + (C_0 \cdot m_{32} - m_{12})(-Y_0) + (C_0 \cdot m_{33} - m_{13})(-H)}{m_{31} \cdot X_p + m_{32} \cdot Y_p + m_{33} \cdot Z_p + m_{31}(-X_0) + m_{32}(-Y_0) + m_{33}(-H)} \quad (75)$$

$$L_p = \frac{(L_0 m_{31} - m_{21}) \cdot X_p + (L_0 m_{32} - m_{22}) \cdot Y_p + (L_0 m_{33} - m_{23}) \cdot Z_p}{m_{31} X_p + m_{32} Y_p + m_{33} Z_p + m_{31}(-X_0) + m_{32}(-Y_0) + m_{33}(-H)} + \frac{(L_0 m_{31} - m_{21})(-X_0) + (L_0 m_{32} - m_{22})(-Y_0) + (L_0 m_{33} - m_{23})(-H)}{m_{31} X_p + m_{32} Y_p + m_{33} Z_p + m_{31}(-X_0) + m_{32}(-Y_0) + m_{33}(-H)} \quad (76)$$

Daí, dividindo o numerador e denominador das Equações (75) e (76) por $m_{31}(-X_0) + m_{32}(-Y_0) + m_{33}(-H)$ e agrupando os parâmetros de forma a simplificá-los, tem-se a forma final da transformação projetiva tridimensional, dada por:

$$C = \frac{a_1 X + a_2 Y + a_3 Z + a_4}{a_9 X + a_{10} Y + a_{11} Z + 1} \quad (77)$$

$$L = \frac{a_5 X + a_6 Y + a_7 Z + a_8}{a_9 X + a_{10} Y + a_{11} Z + 1} \quad (78)$$

onde : C, L representam as coordenadas dos pontos no espaço imagem (C_p, L_p); X, Y, Z representam as coordenadas dos pontos no espaço objeto (X_p, Y_p, Z_p); $a_1...a_{11}$ representam os parâmetros de transformação.

4.1.2.1 Modelo Projetivo – Espaço 2D

De acordo com Wolf & Ghilani (2006) a transformação projetiva de coordenadas bidimensionais requer oito parâmetros e a utilização desta transformação é apropriada quando um sistema bidimensional de coordenadas é projetado em um outro sistema não paralelo.

A fim de determinar o modelo de transformação projetiva no espaço 2D, ou seja, o modelo que associa dois sistemas bidimensionais não ortogonais, despreza-se o valor da altitude do ponto do espaço objeto, fazendo $Z_p = 0$ nas Equações (77) e (78), e após as simplificações inerentes ao referido modelo de transformação, tem-se:

$$C = \frac{a_1 X + a_2 Y + a_3}{a_7 X + a_8 Y + 1} \quad (79)$$

$$L = \frac{a_4 X + a_5 Y + a_6}{a_7 X + a_8 Y + 1} \quad (80)$$

onde : C, L representam as coordenadas dos pontos no espaço imagem (C_p, L_p); X, Y representam as coordenadas dos pontos no espaço objeto (X_p, Y_p) e $a_1...a_8$ representam os parâmetros de transformação.

4.1.2.2 Modelo Projetivo – Espaço 3D

De forma análoga ao modelo de transformação projetiva envolvendo o espaço bidimensional, faz-se as mesmas simplificações nas Equações (75) e

(76), porém, o modelo utiliza o valor de altitude ($Z_p \neq 0$) na determinação dos parâmetros e na transformação das coordenadas entre os dois sistemas não ortogonais.

A forma final da transformação projetiva tridimensional pode ser representada pelas Equações (77) e (78).

4.1.2.3 Modelo Projetivo Modificado – Espaço 3D

O modelo projetivo modificado consiste a adição de mais um parâmetro (a_{12}) na Equação (78) referente ao modelo projetivo envolvendo o espaço tridimensional. Este modelo define quatorze parâmetros que relacionam as coordenadas entre os espaços 2D e 3D, e pode ser explicitado pelas seguintes equações (ANEXO A):

$$C = \frac{a_1 X + a_2 Y + a_3 Z + a_4}{a_9 X + a_{10} Y + a_{11} Z + 1} \quad (81)$$

$$L = \frac{a_5 X + a_6 Y + a_7 Z + a_8}{a_9 X + a_{10} Y + a_{11} Z + 1} + a_{12} \cdot C \cdot L \quad (82)$$

Segundo Wang (1999) o modelo projetivo modificado é um processo de transformação linear entre coordenadas da imagem e coordenadas de terreno, com uma correção adicional para coordenadas da imagem (parâmetro a_{12}) para o ajuste de erros sistemáticos. Usando este modelo, nenhum parâmetro de orientação interior ou parâmetros aproximados de orientação exterior (informações de efemérides) são necessários.

De acordo com Wang (1999) e Valadan (2003) este modelo é também chamado de *Self Calibration Direct Linear Transformation (SDLT)*.

5 MATERIAIS E MÉTODOS

5.1 Caracterização da Área de Estudos

O município de Viçosa está situado na Zona da Mata do Estado de Minas Gerais – Brasil, Figura 40. Suas coordenadas geodésicas de referência em Sirgas 2000 (Estação RBMC - VICO) são 20° 45' 41,4020" de latitude Sul, 42° 52' 11,9622" de longitude Oeste e 665,96 metros de altitude geométrica. O Município possui área de 300 quilômetros quadrados, a população estimada é de 73 mil habitantes residentes e de 12 mil flutuantes, encontra-se entre as altitudes de 610 e 895 m onde o relevo caracteriza-se entre ondulado a montanhoso. Está a 715 km de Brasília, 230 km de Belo Horizonte, 340 km do Rio de Janeiro e 640 km de São Paulo.

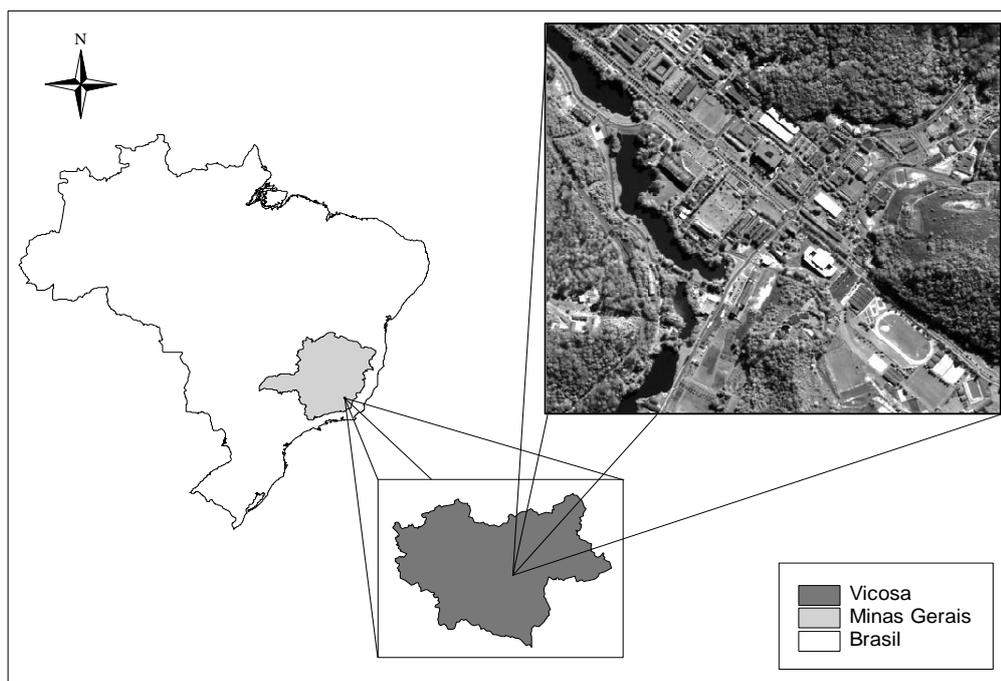


Figura 40: Localização da Área de Estudos.

A área de estudos, Figura 40, localizada no município de Viçosa, abrange uma área de aproximadamente 1,26 km² e está situada no campus da Universidade Federal de Viçosa – UFV. A área se encontra em uma região predominantemente plana com algumas áreas de relevo ondulado, cuja diferença de nível máxima é de aproximadamente 100 metros.

5.2 Materiais

Para realização do presente trabalho, foi utilizada uma imagem proveniente do sensor *QuickBird* (Figura 41). Esta imagem foi adquirida em sua forma bruta e o objeto de estudos engloba a banda Pancromática, que possui resolução espacial nominal de 0,6 metros, resolução radiométrica de 11 bits e dimensões de 1977 colunas e 1771 linhas.

Para visualização da imagem orbital e extração de coordenadas das feições de controle, foi utilizado o software *Erdas Imagine 8.3.1*.

Na obtenção das coordenadas terrestres, foram utilizados 3 (três) receptores GPS de uma frequência, marca *Ashtech Promark II*, com precisão nominal horizontal de 5mm + 1 ppm e precisão vertical de 10 mm + 2 ppm. As coordenadas de referência foram determinadas através da técnica de posicionamento relativo utilizando como base uma estação pertencente à Rede Brasileira de Monitoramento Contínuo – RBMC. A base da RBMC utilizada é denominada VICO e cujo código internacional é o SAT91696. Esta estação pertence à Rede de referência do SIRGAS 2000 bem como à Rede de Densificação do IGS – *International GNSS Service*. A estação consiste em um pilar de concreto dotado de dispositivo de centragem forçada e é dotada de um receptor GNSS *TRIMBLE NetR5* e antena tipo *ZEPHYR GNSS GEODETIC MODEL 2*.

No processamento dos dados de rastreamento e ajustamento dos vetores foi utilizado o software *Trimble Geomatics Office 1.63*.

A Transformação Geométrica e cálculo das estimativas de erro posicional foram realizados através da implementação de algoritmos na linguagem “C” utilizando o compilador Turbo C.

5.3 Metodologia

Como metodologia empregada no presente trabalho propõe-se a realização e análise de precisão de transformações geométricas em uma imagem orbital de altíssima resolução, envolvendo o espaço bi e tridimensional, utilizando técnicas do georreferenciamento indireto, através de modelos de projeção *afim* e projetivo.

Para a realização das transformações geométricas, primeiramente, foi necessária a identificação das feições de controle distribuídas em toda a imagem e as respectivas feições homólogas identificadas em campo a fim de estabelecer uma relação entre os diferentes sistemas de coordenadas. Após a identificação das feições de controle, procedeu-se a extração das coordenadas na imagem e, posteriormente, a determinação das coordenadas homólogas de referência em campo. De posse das coordenadas de referência, passou-se aos processos de transformação geométrica.

As transformações geométricas envolvendo o espaço bidimensional foram realizadas sem levar em consideração as altitudes da superfície na determinação dos parâmetros necessários para relacionar os diferentes sistemas de coordenadas. Já as transformações envolvendo o espaço tridimensional foram realizadas de duas formas distintas, onde na primeira as coordenadas de altitude foram fixadas, ou seja, foi utilizada uma coordenada constante para a altitude ao longo de toda a imagem, e na segunda foi utilizado um Modelo Digital de Terreno (MDT) de onde foram extraídas informações de altitude para cada pixel da imagem.

Na execução das transformações geométricas de imagens, usualmente é utilizado o método dos Mínimos Quadrados (MMQ), a fim de estimar os valores dos parâmetros de um determinado modelo matemático a partir de observações de posição realizadas tanto em campo quanto na imagem.

Para atender os critérios do MMQ, é necessário que o número de observações seja maior que o número de parâmetros (ou incógnitas) existentes em um modelo matemático, e a confiabilidade do modelo a ser ajustado está relacionada com o número de observações, onde quanto mais observações, maior o grau de liberdade, acarretando em uma maior confiabilidade. Contudo, não há uma definição sobre a configuração das observações na correção geométrica de imagens. Conseqüentemente, as observações devem estar homoganeamente distribuídas em toda a área de estudos a fim de se resguardar de possíveis tendências no modelo ajustado.

5.3.1 Coleta de Coordenadas de Controle

A fim de realizar uma transformação entre sistema de imagem e sistema de superfície, é necessário associar pontos coletados na imagem e pontos homólogos coletados em campo.

Para a coleta das coordenadas de controle no sistema de imagem, foram identificadas 13 pontos devidamente distribuídos na imagem abrangendo toda área de estudos, Figura 41. O número de pontos coletados foi suficiente para suprir as necessidades de informações requisitadas pelo ajustamento de observações para todos os modelos de transformação a serem utilizados.

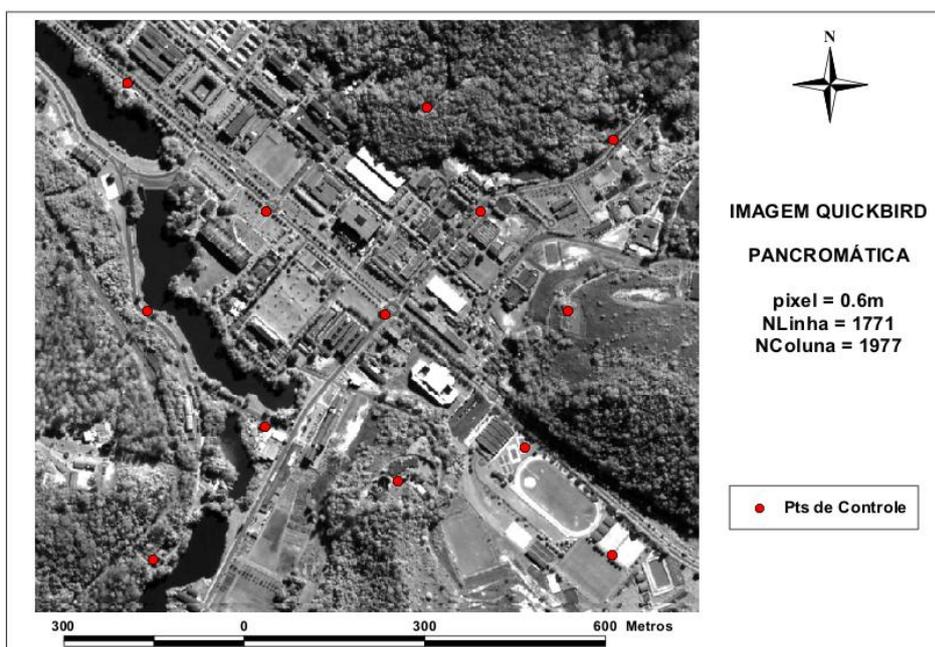


Figura 31: Coordenadas de controle no sistema de imagem.

Após identificar e coletar as coordenadas no sistema de imagem, foram coletadas as coordenadas das 13 feições homólogas em campo através de observações de sinais de satélite.

O rastreamento dos sinais de satélite se deu através de receptores GPS utilizando a técnica de posicionamento relativo estático, com intervalo de gravação de 05 segundos e tempo de rastreamento de 30 minutos e utilizadas para os cálculos as efemérides transmitidas e máscara de elevação de 15°. Para isto, além dos receptores em campo, foi utilizada uma base fixa da RBMC

situada dentro da área de estudos, com distância inferior a 1000 metros entre os pontos rastreados.

Segundo Monico (2000) o conceito fundamental do posicionamento relativo é que os dois ou mais receptores envolvidos rastreiam, simultaneamente, um grupo de pelo menos dois satélites comuns por um período de tempo que pode variar de dezenas de minutos (20 minutos no mínimo) até algumas horas.

Após a realização do rastreamento, passou-se à etapa de pós-processamento dos dados e ajustamento dos vetores formados pelo rastreamento simultâneo a fim de determinar as coordenadas no sistema geodésico com suas devidas precisões.

Todo o processamento e ajustamento dos dados foram realizados utilizando as coordenadas geodésicas referenciadas ao sistema SIRGAS 2000 sendo que o ajustamento dos vetores se deu através dos vetores independentes, ou seja, somente vetores formados entre a base (no caso RBMC) e os pontos rastreados em campo, Figura 42.

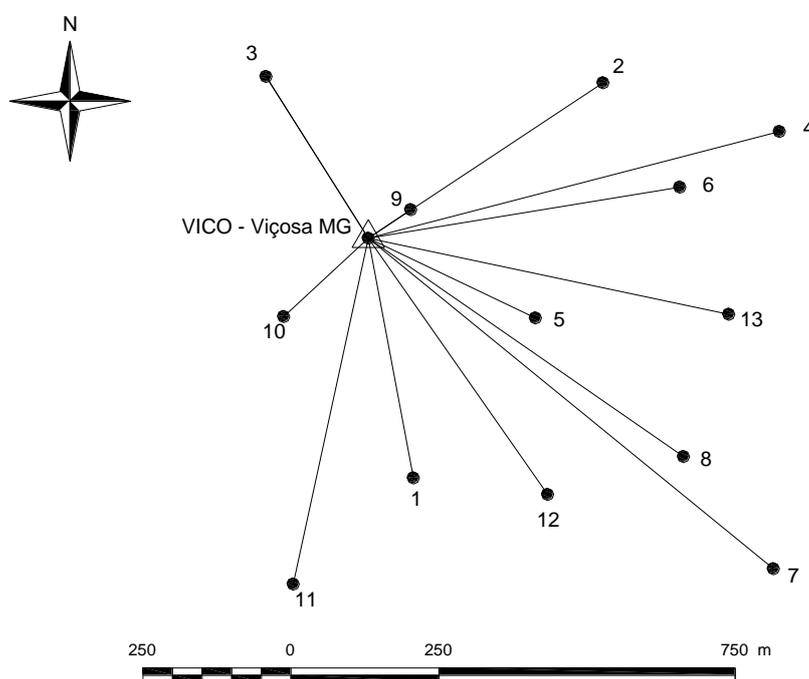


Figura 42: Coordenadas de controle no sistema geodésico.

Após a determinação das coordenadas geodésicas geocêntricas (latitudes e longitudes, cuja unidade é angular) dos pontos de controle coletados em campo, foi realizada uma transformação dessas coordenadas

para o sistema de projeção UTM (unidade linear) a fim de viabilizar o desenvolvimento dos modelos matemáticos responsáveis pelas transformações geométricas na imagem.

De posse dos pontos devidamente coletados em ambos os sistemas (sistema de imagem e sistema de superfície), foram utilizados diferentes modelos matemáticos a fim de se verificar qual o modelo mais adequado, ou que melhor se ajusta à transformação geométrica.

5.3.2 Modelos de Transformação

Os modelos de transformação são modelos matemáticos com a característica de transformar coordenadas entre dois ou mais sistemas.

A transformação entre sistemas se dá através da adequação de três conjuntos de parâmetros implícitos em um modelo matemático, que basicamente são rotações, translações e escalas nos eixos X, Y e ou Z, que associam um sistema ao outro, Figura 43.

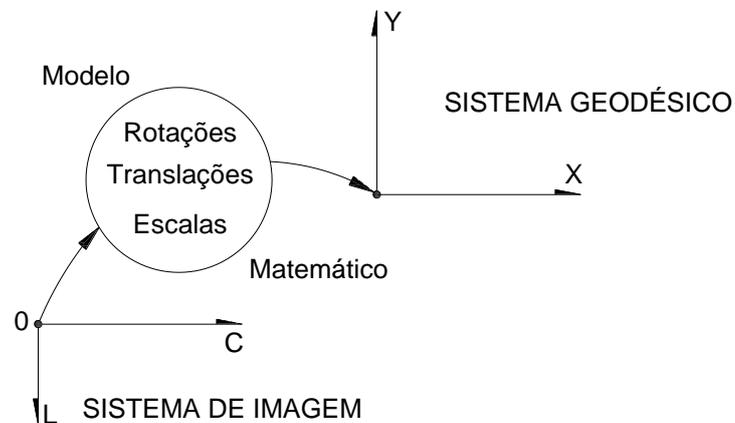


Figura 43: Transformação entre sistemas.

Dentre os modelos utilizados na transformação de sistema de imagem para sistema de superfície, foram utilizados os modelos de projeção *Afim* e o modelo Projetivo envolvendo o espaço bi e tridimensional, e modelo Projetivo modificado.

Estes modelos de transformação utilizados são modelos simplificados de fácil implementação que visam, além de transformar as coordenadas de um

sistema para outro, corrigir algumas distorções inerentes às características físicas da imagem.

A aplicação dos modelos de transformação se deu através das seguintes etapas:

- Modelos de transformação *Afim* e Projetivo 2D: Nesta etapa foram utilizadas as equações que não levam em consideração a altitude no cálculo dos parâmetros. Para o cálculo dos parâmetros, através do MMQ, foram utilizadas somente as coordenadas planimétricas tanto para os pontos de referência coletados na imagem quanto para os pontos homólogos coletados em campo. Estes modelos são muito utilizados na correção geométrica de imagens de baixa e média resolução, onde as deformações devido ao relevo não são significativas.

- Modelos de transformação *Afim*, Projetivo, Projetivo modificado 3D e correção geométrica utilizando altitude fixa: Nesta etapa foram utilizadas as equações que levam em consideração as altitudes dos pontos de referência no cálculo dos parâmetros, contudo, após a determinação dos parâmetros, foi arbitrada uma altitude constante para a realização da correção geométrica na imagem. A altitude constante se deve ao fato de não haver informações de altitudes para toda a porção da imagem.

- Modelos de transformação *Afim*, Projetivo, Projetivo modificado 3D e correção geométrica utilizando altitude variável: Nesta etapa, além de utilizar as equações que levam em consideração as altitudes dos pontos de referência no cálculo dos parâmetros, após a determinação dos parâmetros, foram utilizadas informações de altitude para cada pixel da imagem para a realização da correção. As altitudes foram extraídas de um Modelo Numérico do Terreno – MNT gerado a partir de curvas de nível advindas de uma carta topográfica vetorial na escala de 1:50.000 com equidistância de 20 metros entre as curvas.

Por não haver informações de altitudes com maior precisão, optou-se por tomar como verdade as informações de altitudes geradas pela carta topográfica, uma vez que o objetivo principal deste trabalho é demonstrar o comportamento de diferentes modelos de transformação e definir uma metodologia de espacialização das incertezas na imagem, e não gerar um produto cartográfico de alta precisão.

5.3.3 Ajustamento pelo Método dos Mínimos Quadrados – MMQ

Para a determinação dos parâmetros a serem utilizados nos modelos de transformação foi utilizado o ajustamento de observações pelo Método dos Mínimos Quadrados – método paramétrico.

A principal característica do método paramétrico é que as observações mais os resíduos das observações devem ser funções dos parâmetros ajustados, Equação 83.

$$L_b + V = F(X_a) \quad (83)$$

onde L_b é o vetor dos valores observados, V o vetor dos resíduos dos valores observados e $F(X_a)$ é o vetor das funções dos parâmetros ajustados.

Para a determinação dos seis parâmetros do modelo de transformação *Afim* 2D são necessárias o mínimo de 6 observações, porém, no ajustamento de observações pelo MMQ são necessárias observações redundantes, sendo que o número de observações deve ser maior que o número de parâmetros, o que daria o mínimo de 4 pontos observados na imagem (4 pares de coordenadas observadas).

Os modelos de transformação *Afim* 3D e *Projetivo* 2D possuem 8 incógnitas cada, o que daria o mínimo de 5 pares de coordenadas observadas na imagem. Para o modelo *Projetivo* 3D, que possui 11 incógnitas, é necessário o mínimo de 6 pares de coordenadas coletadas em campo. Já para o modelo *projetivo* modificado, que possui um parâmetro adicional em relação ao modelo *Projetivo* 3D, é necessário o mínimo de 7 pares de coordenadas observadas na imagem.

Contudo, neste trabalho foram utilizados 13 pontos observados na imagem, totalizando 26 coordenadas planimétricas observadas para a realização do ajustamento pelo MMQ. A abundância de observações possibilita o ajuste com maior confiabilidade, conduzindo a um maior grau de liberdade, além do fato de que o princípio do ajustamento de observações é a utilização de observações redundantes.

O modelo estocástico foi estabelecido com base nas variâncias das observações das coordenadas de tela (C_{Lb}). Uma vez desconhecidas as variâncias das coordenadas de tela, estas foram arbitradas em 0,25 pontos ao

quadrado, de forma que todas as observações tiveram os mesmos desvios padrão (0,5 pontos).

$$C_{Lb} = \text{diag} [\sigma_{C_1}^2 \sigma_{L_1}^2 \dots \sigma_{C_N}^2 \sigma_{L_N}^2] \quad (84)$$

O arbitramento nas variâncias das coordenadas de tela, a priori, é usado para o cálculo dos pesos (matriz P) nas observações, que por sua vez, é recalculado empregando a variância do ajustamento a posteriori a fim de se adequar aos parâmetros ajustados.

Inicialmente a matriz dos pesos é dada por:

$$P = \sigma_0^2 \cdot C_{Lb}^{-1} \quad (85)$$

onde σ_0^2 é a variância das coordenadas de tela a priori.

Após a determinação do modelo matemático a ser utilizado e definido o número de parâmetros (incógnitas) e o número de observações, passa-se ao cálculo da matriz das derivadas parciais, utilizando a seguinte expressão:

$$A = \frac{\partial F(X_a)}{\partial X_a} \quad (86)$$

De posse da matriz das derivadas (A) juntamente com os valores observados e os pesos das observações, passa-se ao cálculo do vetor das correções aos valores aproximados dos parâmetros, dado por:

$$X = (A^t P A)^{-1} A^t P L \quad (87)$$

onde

$$L = L_b - L_0 \quad (88)$$

em que X são as correções a serem aplicadas aos valores aproximados dos parâmetros e L o vetor da diferença entre os valores observados (L_b) e calculados (L_0) com os parâmetros aproximados.

Através dos valores do vetor das correções e dos valores dos parâmetros aproximados (X_0), calcula-se os parâmetros ajustados (X_a):

$$X_a = X_0 + X \quad (89)$$

No caso da determinação dos parâmetros dos modelos matemáticos responsáveis pela transformação de coordenadas, inicialmente, para os modelos lineares, $X_0 = 0$, fazendo com que os valores dos parâmetros ajustados sejam iguais aos valores das correções. Para os modelos não lineares, após a iteração necessária, adota-se $X_0 = X_a$.

Ao calcular os parâmetros, passa-se ao cálculo dos resíduos das observações (V) e sigma zero *a posteriori* ($\hat{\sigma}_0^2$), a fim de se verificar possíveis discrepâncias nos valores observados e possível inconsistência no ajustamento realizado.

Para o cálculo dos resíduos, têm-se:

$$V = A.X - L \quad (90)$$

Para o cálculo do sigma zero *a posteriori*, têm-se:

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{V^t . P . V}{GL} \quad (91)$$

em que GL representa o grau de liberdade (diferença entre o número de observações e o número de parâmetros).

De posse dos parâmetros devidamente ajustados e das coordenadas extraídas da imagem (C e L), pode-se realizar a transformação entre os sistemas obtendo através de um modelo inverso, as coordenadas (X , Y e/ou Z) para cada pixel da imagem no sistema geodésico.

5.3.4 Estimativa do Erro

A estimativa do erro, no processo de correção geométrica da imagem, de acordo com as transformações geométricas propostas, se deu através de

análises das incertezas e dos resíduos inerentes aos dados de referência, ao pixel da imagem e às incertezas decorrentes do processo de transformação.

Dentre os parâmetros estatísticos utilizados na determinação da qualidade da transformação, estão os resíduos (V), os resíduos padronizados (RP), sigma zero *a posteriori* ($\hat{\sigma}_0^2$), e o Erro Médio Quadrático (RMS), aplicado aos resultados do ajustamento de observações pelo MMQ.

Ao analisar os resíduos, pode-se verificar a presença de valores muito discrepantes. Estes valores podem evidenciar possíveis erros grosseiros na coleta das coordenadas observadas e de referência. Caso haja valores discrepantes, deve-se desprezá-los ou realizar uma nova observação.

Uma forma de analisar os resíduos é através do Resíduo Padronizado. Apesar de não haver um valor chamado ótimo, é muito utilizado pelos pesquisadores, pois este resíduo dá uma idéia do comportamento dos resíduos das observações em relação a seus respectivos desvios padrão.

O Resíduo Padronizado é representado por:

$$RP = \frac{V_{OBS}}{\sigma_{V OBS}} \quad (92)$$

V_{OBS} são os resíduos das observações e $\sigma_{V OBS}$ os desvios padrão dos resíduos das observações.

O cálculo do desvio padrão dos resíduos das observações foi realizado a partir da Matriz da MVC dos resíduos que é dada por:

$$C_V = \hat{\sigma}_0^2 \cdot [C_{Lb} - A \cdot (A^t \cdot P \cdot A)^{-1} \cdot A^t] \quad (93)$$

Uma forma consistente de analisar os resíduos e verificar a possível presença de erros grosseiros é através do teste de TAU , onde, utilizando informações dos resíduos divididos pelo desvio padrão dos respectivos resíduos e comparados a um dado grau de liberdade na curva de distribuição de TAU . Caso haja valores calculados excedam os valores tabelados do teste de TAU , pode-se inferir que estes apresentam erros grosseiros, devendo ser desprezados ou refeitos.

Outra forma de se analisar os resíduos é através do teste *t de student*, onde, comparando-se os valores de *t* calculados para os resíduos com os valores de *t* tabelados, a certo nível de significância, pode-se verificar a presença de erros sistemáticos.

Quanto à qualidade do ajustamento, a mesma é avaliada através do $\hat{\sigma}_0^2$, onde se verifica, através da discrepância do valor calculado, comparado ao valor adequado ($\hat{\sigma}_0^2 = 1$), se há erros de cálculo, erros no modelo matemático adotado, e/ou erros grosseiros. Verificadas as ausências dos erros citados, passa-se a análise dos pesos, onde ao evidenciar a super ou subestimação das variâncias das observações, calcula-se uma nova matriz peso, através da seguinte expressão:

$$P = \hat{\sigma}_0^2 \cdot C_{Lb}^{-1} \quad (94)$$

Para se verificar a hipótese de que o sigma zero *a posteriori* é estatisticamente igual a 1 (um), emprega-se o teste *Qui-Quadrado* (χ^2). Compara-se o valor tabelado, ao nível de significância de 0.05, com o valor da variância de referência a posteriori dividido pelo número de graus de liberdade. Se o valor calculado se encontrar dentro do intervalo dos valores tabelados, não se rejeita a hipótese de que a variância de referência, ou sigma zero, *a posteriori* é estatisticamente igual à 1 (um). Caso o valor calculado esteja fora do intervalo dos valores tabelados, deve-se proceder a uma análise mais cuidadosa do ajustamento, verificando possíveis erros na MVC das observações, possíveis erros grosseiros que podem ser verificados no vetor dos resíduos (resíduos excessivamente grandes), possíveis erros sistemáticos decorrentes da inconsistência do modelo matemático.

Após a verificação dos resíduos, da variância de referência a posteriori e o possível ajuste dos pesos das observações, calcula-se a Matriz Variância Covariância (MVC) dos valores observados e dos parâmetros ajustados, onde a MVC do último é dada por:

$$C_{Lb} = \hat{\sigma}_0^2 \cdot P^{-1} \quad (95)$$

$$C_{PAR} = \hat{\sigma}_0^2 \cdot (A^t \cdot P \cdot A)^{-1} \quad (96)$$

O RMS calculado por:

$$RMS = \frac{\sum_{i=1}^N \sqrt{V_{X_i}^2 + V_{Y_i}^2}}{N} \quad (97)$$

onde N é o número de pares de coordenadas, é um índice que indica a qualidade da transformação geométrica da imagem. Quanto menor o RMS melhor a transformação. Apesar de ser um índice que não leva em consideração o aspecto posicional dos valores observados utilizados no cálculo dos parâmetros dos modelos de transformação, este é utilizado como indicador de qualidade da imagem transformada.

Como forma alternativa de se avaliar a qualidade da transformação, utilizou-se os princípios da Lei de Propagação de Variâncias, a fim de propagar as incertezas inerentes às fases de observações de coordenadas em campo e na imagem juntamente com as incertezas calculadas dos parâmetros de transformação, com a finalidade de se conhecer uma grandeza que demonstre maior confiabilidade na interpretação dos resultados. De posse dessa grandeza, foi realizada a extrapolação do erro para toda a imagem a fim de gerar um parâmetro a ser analisado com o objetivo de detectar a variação das incertezas de forma espacializada e, conseqüentemente, verificar a possível presença de tendências na imagem transformada.

A lei de propagação de variâncias pode ser representada pelo seguinte modelo:

$$Cv = J.C_{par, obs}.J^T \quad (98)$$

onde Cv é a matriz variância-covariância das coordenadas transformadas.

$$C_{par, obs} = \begin{bmatrix} MVC_{par} & 0 & 0 \\ & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \sigma_{coluna}^2 & 0 \\ 0 & \dots & & \sigma_{linha}^2 \end{bmatrix} \quad (99)$$

e J é a matriz jacobiana (ANEXO B), a matriz das derivadas parciais de X e Y em relação aos parâmetros e às observações, ou seja:

$$J = \frac{\partial F(Xa)}{\partial Xa} \quad (100)$$

6 RESULTADOS E DISCUSSÕES

As coordenadas identificadas e coletadas na imagem para a realização das transformações geométricas utilizando diferentes modelos matemáticos, bem como os desvios padrão adotados, estão na Tabela 03.

Tabela 03: Coordenadas da imagem.

Ponto	C (pixel)	s_C (pixel)	L (pixel)	s_L (pixel)	h (pixel)	s_h (pixel)
1	708	0.500	1324	0.500	0	0.000
2	278	0.500	184	0.500	0	0.000
3	1719	0.500	1600	0.500	0	0.000
4	335	0.500	867	0.500	0	0.000
5	1043	0.500	879	0.500	0	0.000
6	1462	0.500	1278	0.500	0	0.000
7	690	0.500	568	0.500	0	0.000
8	1227	0.500	207	0.500	0	0.000
9	1723	0.500	354	0.500	0	0.000
10	1446	0.500	510	0.500	0	0.000
11	369	0.500	1627	0.500	0	0.000
12	1587	0.500	871	0.500	0	0.000
13	1083	0.500	1378	0.500	0	0.000

C = Coluna, L = Linha, h = altura.

Após a identificação e coleta das coordenadas de imagem e, a fim de se realizar o ajustamento pelo MMQ, optou-se por definir o desvio padrão para cada pixel igual a 0,5 pixel. Como se sabe, os valores iniciais de desvio padrão das observações passarão por um ajuste através do sigma zero *a posteriori*, para verificar se houve uma super ou subestimação destes valores.

De posse das coordenadas de imagem com seus respectivos desvios padrão, foram realizados rastreios com duração de 30 (trinta) minutos cada, utilizando receptores de sinais GPS de uma frequência a fim de se determinar as coordenadas terrestres de cada ponto homólogo às feições identificadas na imagem.

Após a realização dos rastreios, os dados foram pós-processados tomando como referência a estação Vico da Rede Brasileira de Monitoramento Contínuo, cuja distância dos pontos de controle não ultrapassa a 1000 metros. Após o pós-processamento dos sinais, obtiveram-se as coordenadas para cada ponto com seus respectivos desvios padrão. (Tabela 04)

Tabela 04: Coordenadas geodésicas no sistema de projeção UTM.

Ponto	X (m)	s _x (m)	Y (m)	s _y (m)	h (m)	s _h (m)
1	721833,861	0,001	7702378,716	0,001	650,998	0,002
2	721585,024	0,001	7703060,306	0,001	647,328	0,003
3	722441,781	0,001	7702224,542	0,001	656,256	0,003
4	721614,844	0,001	7702652,644	0,001	647,328	0,003
5	722039,943	0,002	7702650,328	0,001	654,516	0,004
6	722289,909	0,001	7702415,010	0,001	656,254	0,002
7	721829,400	0,000	7702834,126	0,000	651,286	0,001
8	722154,039	0,001	7703049,621	0,001	709,544	0,002
9	722451,907	0,009	7702966,922	0,004	677,397	0,023
10	722283,740	0,002	7702872,384	0,002	665,209	0,005
11	721630,932	0,079	7702198,404	0,018	661,354	0,073
12	722366,429	0,001	7702656,512	0,001	695,651	0,003
13	722060,586	0,001	7702350,609	0,001	691,864	0,004

X = Este, Y = Norte, h = altitude geométrica,

De posse das coordenadas no sistema de imagem e as coordenadas homólogas determinadas na superfície, procedeu-se o ajustamento de observações pelo MMQ através do método paramétrico a fim de determinar os parâmetros a serem utilizados por cada modelo de transformação analisado.

Após a realização do ajustamento das observações para os diferentes modelos, foram realizadas análises para verificar a qualidade proporcionada por cada modelo de transformação, analisando-se, primeiramente, os resíduos, Tabela 05.

Tabela 05: Resíduos calculados através do ajustamento pelo MMQ.

Ponto	Resíduos - V (PIXEL)									
	afim 2D		afim 3D		projetiva 2D		projetiva 3D		projetiva 3D modificada	
	Coluna	Linha	Coluna	Linha	Coluna	Linha	Coluna	Linha	Coluna	Linha
1	-3,142	4,639	-3,202	5,111	-3,276	4,483	-1,037	-0,549	-0,915	0,170
2	0,968	-1,484	0,851	-0,556	0,861	-0,901	-1,202	-0,509	-1,135	-0,209
3	0,470	-2,437	0,285	-0,967	0,392	-1,878	-0,546	0,607	-0,519	-0,170
4	0,583	-1,070	0,517	-0,544	0,874	-0,786	0,856	-1,054	0,127	-0,681
5	0,264	-1,736	0,133	-0,692	-0,161	-1,496	0,861	1,119	0,459	0,435
6	1,397	-2,161	1,235	-0,874	1,148	-1,784	-1,199	0,412	-1,911	-0,058
7	-0,361	-2,315	-0,484	-1,340	-0,741	-2,010	0,378	-0,057	0,616	0,413
8	-0,639	3,394	-0,267	0,441	-0,852	2,896	0,112	0,000	0,582	0,000
9	0,623	0,150	0,555	0,691	1,429	-0,567	0,000	0,000	0,000	0,000
10	-0,699	-0,435	-0,829	0,600	-0,645	-0,636	0,000	0,000	0,000	0,000
11	1,137	0,128	1,287	-1,059	1,870	-0,926	0,000	0,000	0,000	0,000
12	-0,357	1,631	-0,150	-0,010	-0,214	1,841	0,000	0,000	0,000	0,000
13	-0,244	1,698	0,071	-0,800	-0,686	1,765	0,000	0,000	0,000	0,000

Na Tabela 05 pode-se verificar as discrepâncias dos resíduos a fim de se detectar algum tipo de inconsistência nos valores que poderia levar a um indicativo de erro grosseiro ou sistemático. Após a análise, observou-se maiores resíduos no ponto 1 para a transformação *afim 2d*, e, ao analisar outros modelos, como o projetiva 3d modificada, os mesmos resíduos sofreram uma queda significativa. Porém, a discrepância do valor analisado pode ser um indicativo da possível presença de erros grosseiros na observação.

Ao verificar a possível presença de erros sistemáticos, foi aplicado o teste *t* de *Student*, onde ao comparar os valores de *t* calculado (Tabela 06) com o valor de *t* tabelado, a 10% de significância com 12 graus de liberdade, igual a 1,78229, verificou-se que *t* tabelado é maior que *t* calculado, e com isto, conclui-se que as médias dos valores dos resíduos calculados são estatisticamente iguais a 0 (zero), ou seja, não há a presença de erros sistemáticos para os resíduos calculados.

Tabela 06: Valores de *t* tabelado a 90% de confiança.

	Afim 2D		Afim 3D		Projetiva 2D		Projetiva 3D		projetiva 3D modificada	
	Coluna	Linha	Coluna	Linha	Coluna	Linha	Coluna	Linha	Coluna	Linha
90%	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	-0,055	-0,001	-0,079	-0,008

As Figuras 44 e 45 proporcionam uma melhor visualização do comportamento dos resíduos para as linhas e colunas separadamente utilizando diferentes modelos.

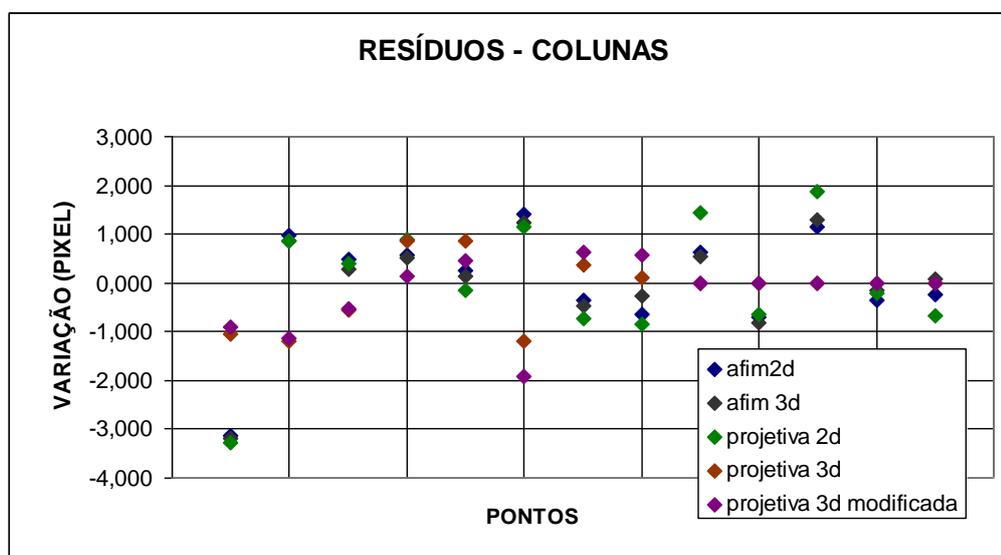


Figura 44: Comportamento dos resíduos nas colunas da imagem.

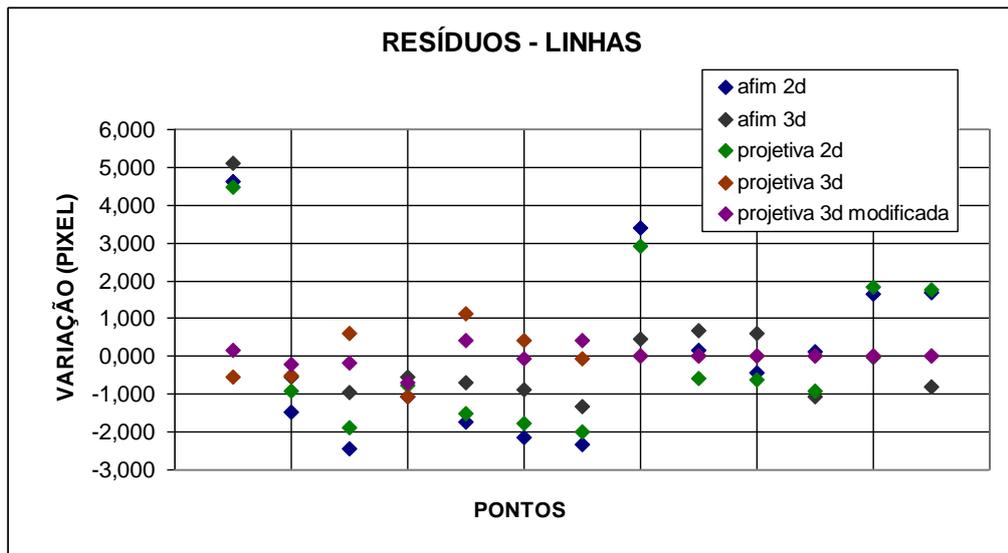


Figura 45: Comportamento dos resíduos nas linhas da imagem.

Como menores resíduos analisados estão os resíduos dos modelos de transformação Projetiva 3D e Projetiva 3D modificada.

Após a análise dos resíduos, passa-se à análise da variância a posteriori do ajustamento, onde se pode verificar através da Tabela 07 e Figura 46 o comportamento do ajustamento para cada modelo utilizado.

Tabela 07: Sigma zero *a posteriori* calculado através do ajustamento pelo MMQ.

sigma 0 <i>a posteriori</i>				
afim 2D	afim 3D	projetiva 2D	projetiva 3D	projetiva 3D modificada
15,485	10,966	16,103	2,493	2,263

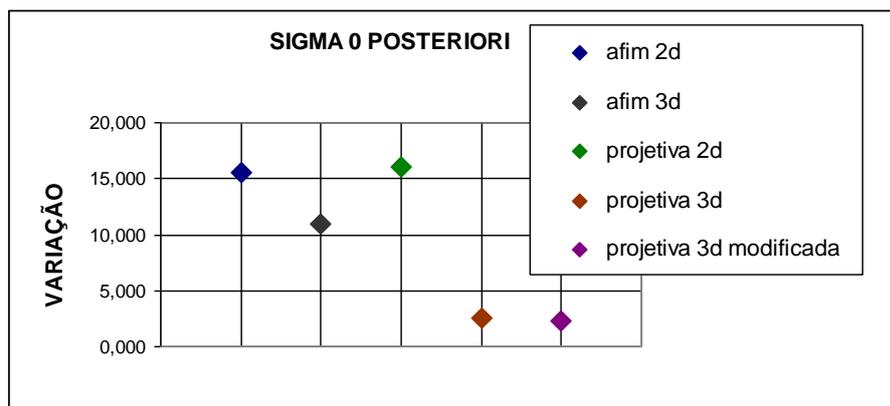


Figura 46: Comportamento do sigma zero *a posteriori* calculados através do ajustamento pelo MMQ.

De acordo com os resultados das variâncias *a posteriori*, pode-se concluir que os modelos que mais se adequaram ao ajustamento foram o

Projetiva 3D e Projetiva 3D modificada. Porém, para analisar a qualidade do ajustamento, foi aplicado o teste *Qui-Quadrado*, onde através da comparação dos valores de sigma zero *a posteriori* com os valores pré-estabelecidos pela distribuição *Qui-Quadrado*, em módulo, verifica-se a hipótese estatística de que os valores calculados são em módulo, estatisticamente iguais aos valores tabelados.

A Tabela 08 demonstra os valores tabelados da distribuição *Qui-quadrado* a 5% de significância.

Tabela 08: Distribuição *Qui-Quadrado*.

QUI-QUADRADO Tabelado					
	Afim 2D	Afim 3D	Projetiva 2D	Projetiva 3D	Projetiva 3D modificada
95%	31,410	28,869	28,869	24,966	23,685

Ao comparar os valores de *Qui-quadrado* tabelados com os valores calculados, apresentados na Tabela 07, multiplicados pelo grau de liberdade GL, apresentados na Tabela 09, conclui-se que para cada modelo testado, a 5% de significância, o sigma zero *a posteriori* é estatisticamente diferente de 1 (um), ou seja, as precisões dos modelos ajustados não se apresentaram adequadas. Isto se deve a erro de cálculo, erro do modelo matemático testado, erros grosseiros, ou a uma possível inconsistência no modelo estocástico. Para resolver este problema, foram verificadas as possíveis fontes de erros, e após constatadas a ausência destas, procedeu-se a verificação do modelo estocástico, onde os pesos das observações foram recalculados multiplicando-os pelo inverso da variância *a posteriori*, estabelecendo assim um novo desvio padrão para as observações utilizadas para cada modelo testado (Tabela 10).

Tabela 09: Sigma zero *a posteriori* multiplicado pelo grau de liberdade.

sigma 0 * GL = VTPV				
Afim 2D	Afim 3D	Projetiva 2D	Projetiva 3D	Projetiva 3D modificada
309,692	197,385	289,846	37,398	31,681

Tabela 10: Novos desvios padrão das coordenadas de imagem para cada modelo testado.

desvios padrão (pixel)				
afim 2D	afim 3D	projetiva 2D	projetiva 3D	projetiva 3D modificada
1,968	1,656	2,006	0,789	0,752

Após a análise do sigma zero *a posteriori* – Tabela 07 e Figura 46 – e da precisão através do teste *Qui-Quadrado*, passou-se à análise dos resíduos padronizados – Tabela 11, Figuras 47 e 48.

Tabela 11: Resíduos Padronizados.

Ponto	Resíduo Padronizado									
	afim 2D		afim 3D		projetiva 2D		projetiva 3D		projetiva 3D modificada	
	Coluna	Linha	Coluna	Linha	Coluna	Linha	Coluna	Linha	Coluna	Linha
1	-1,757	2,593	-2,138	3,412	-1,828	2,481	-1,505	-0,805	-1,449	0,265
2	0,642	-0,985	0,690	-0,450	0,688	-0,718	-2,450	-1,110	-2,675	-0,552
3	0,299	-1,553	0,231	-0,782	0,296	-1,413	-1,067	1,342	-1,156	-0,432
4	0,338	-0,620	0,358	-0,377	0,504	-0,461	1,270	-1,604	0,202	-1,088
5	0,140	-0,918	0,085	-0,445	-0,086	-0,793	1,211	1,540	0,743	0,629
6	0,780	-1,208	0,851	-0,603	0,638	-0,995	-1,749	0,604	-2,952	-0,089
7	-0,199	-1,276	-0,324	-0,896	-0,407	-1,101	0,542	-0,081	0,970	0,614
8	-0,372	1,975	-0,241	0,398	-0,500	1,726	0,218	0,000	1,209	0,000
9	0,380	0,091	0,406	0,505	0,977	-0,370	0,000	0,000	0,000	0,000
10	-0,390	-0,243	-0,564	0,408	-0,358	-0,353	0,000	0,000	0,000	0,000
11	0,740	0,083	1,039	-0,855	1,428	-0,741	0,000	0,000	0,000	0,000
12	-0,198	0,906	-0,105	-0,007	-0,117	1,023	0,000	0,000	0,000	0,000
13	-0,134	0,937	0,054	-0,612	-0,381	0,956	0,000	0,000	0,000	0,000

Observando os resultados dos resíduos padronizados, pôde-se verificar que para os modelos de transformação Projetiva 3D e Projetiva 3D modificada há observações discrepantes, porém no geral, a relação entre os resíduos e os desvios padrão dos resíduos permanece baixa em relação a outros modelos de transformação utilizados. Porém, para verificar a presença de erros grosseiros, ou *outliers*, aplicou-se o teste de *Tau*.

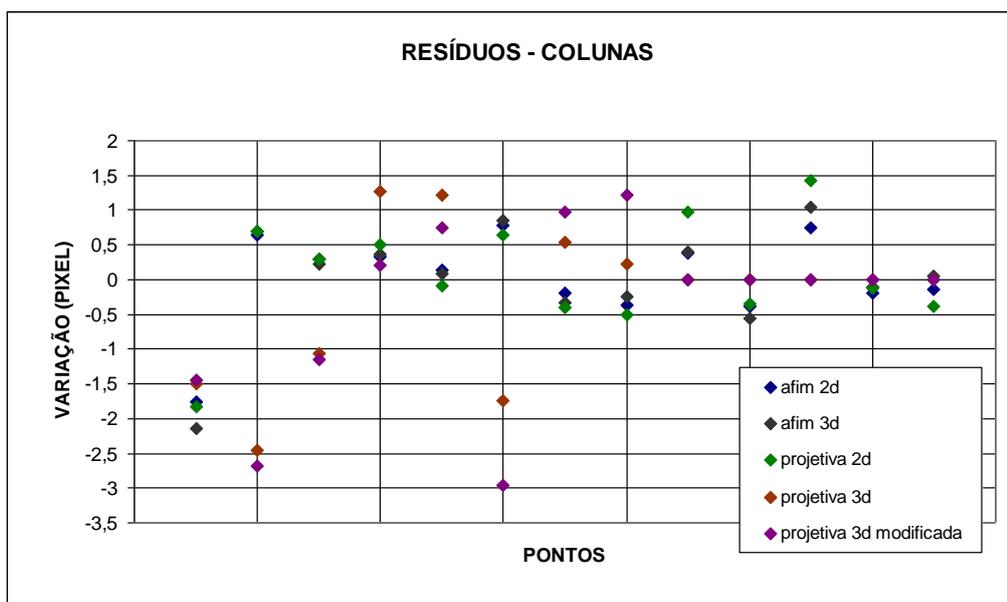


Figura 47: Comportamento dos resíduos padronizados para as colunas.

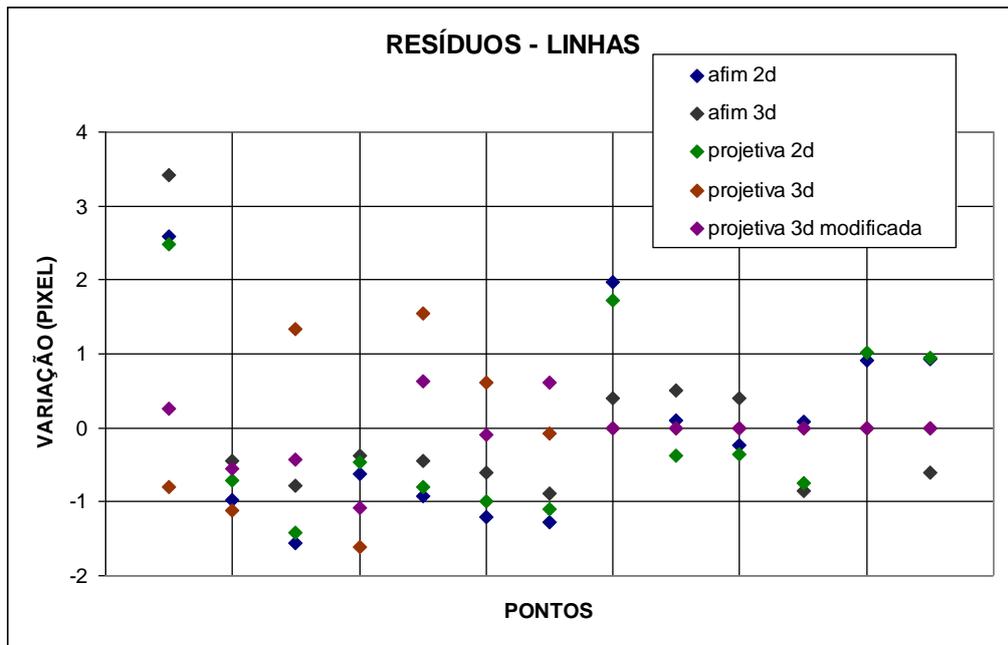


Figura 48: Comportamento dos resíduos padronizados para as linhas.

O teste de *Tau* é realizado comparando os valores dos resíduos padronizados determinados pela Equação (92) com os valores da distribuição de *Tau* tabelados. Se os valores apresentados na Tabela 11, em módulo, apresentarem-se maiores que o valor estabelecido pela distribuição, para cada modelo analisado, rejeita-se a hipótese de que os valores calculados são isentos de erros grosseiros.

A Tabela 12 apresenta os valores definidos pela distribuição *Tau*.

Tabela 12: Valores da distribuição de *Tau* tabelados.

Número de Observações	Graus de Liberdade			
	projetiva 3D modificada	projetiva 3D	afim 3D e projetiva 2D	afim 2D
26	14	15	18	20
Tau Tabelado	2,944	2,948	3,064	3,100

Comparando-os com os resultados da Tabela 11 com os valores apresentados na Tabela 12, conclui-se através do teste *Tau*, que com o modelo de transformação Afim 3D (18 graus de liberdade), rejeita-se a observação 01, enquanto com o modelo de transformação projetiva 3D modificada (14 graus de liberdade), rejeita-se a observação 06. Apesar de nos outros modelos não haver observações rejeitadas, as duas observações mencionadas também apresentam indício de erros grosseiros.

Ao analisar o RMS – Tabela 13 e Figura 49 – pôde-se concluir que o pior modelo a ser adotado na transformação geométrica de imagens é o modelo *Afim 2D* com um RMS global de 2,092 pixels e o melhor modelo a ser adotado é o modelo de transformação *Projetiva 3D modificada*, com um RMS global de 0,553 pixels, induzindo assim a aceitar o último como o melhor modelo matemático a ser utilizado.

Tabela 13: RMS - Erros Médios Quadráticos (pixel)

	RMS				
	afim 2D	afim 3D	projetiva 2D	projetiva 3D	projetiva 3D modificada
Linha	0,837	0,759	1,011	0,476	0,482
Coluna	1,791	1,053	1,690	0,331	0,164
Global	2,092	1,346	2,073	0,602	0,553

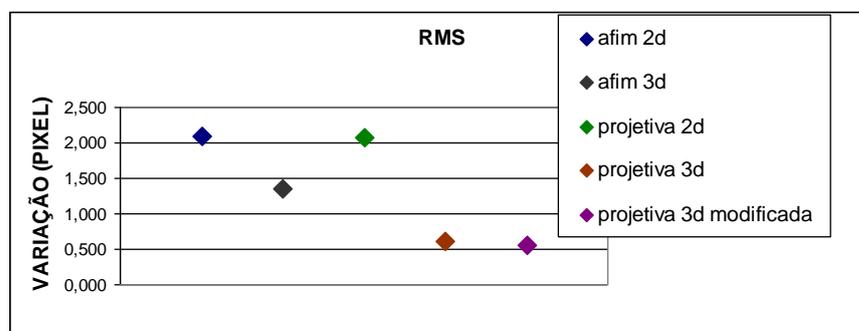


Figura 49: Comportamento dos Erros Médios Quadráticos (pixel).

Após as análises dos resultados e índices apresentados, conclui-se que o modelo menos preciso a ser utilizado na transformação geométrica das imagens é o modelo de transformação *Afim 2D* e o modelo mais preciso é o modelo de transformação *Projetiva 3D modificada*.

Uma vez que as análises dos resultados e índices apontaram quais os melhores e piores modelos de transformação, sem levar em consideração o aspecto posicional, estes resultados e índices são passivos de tendência na coleta de pontos de controle. A fim de contornar este problema, foi realizada a propagação das variâncias nos modelos de transformação inversos a fim de se obter o RMS dos resíduos para cada pixel da imagem, levando as incertezas dos parâmetros ajustados às coordenadas transformadas (Figuras 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56 e 57).

Neste trabalho, para os modelos matemáticos que utilizam a altitude como observação, foram definidos e utilizados separadamente um valor fixo de

altitude (650 m) e valores de altitudes extraídas do MDT gerado para o cálculo do modelo inverso a fim de se obter as coordenadas e se propagar às variâncias.

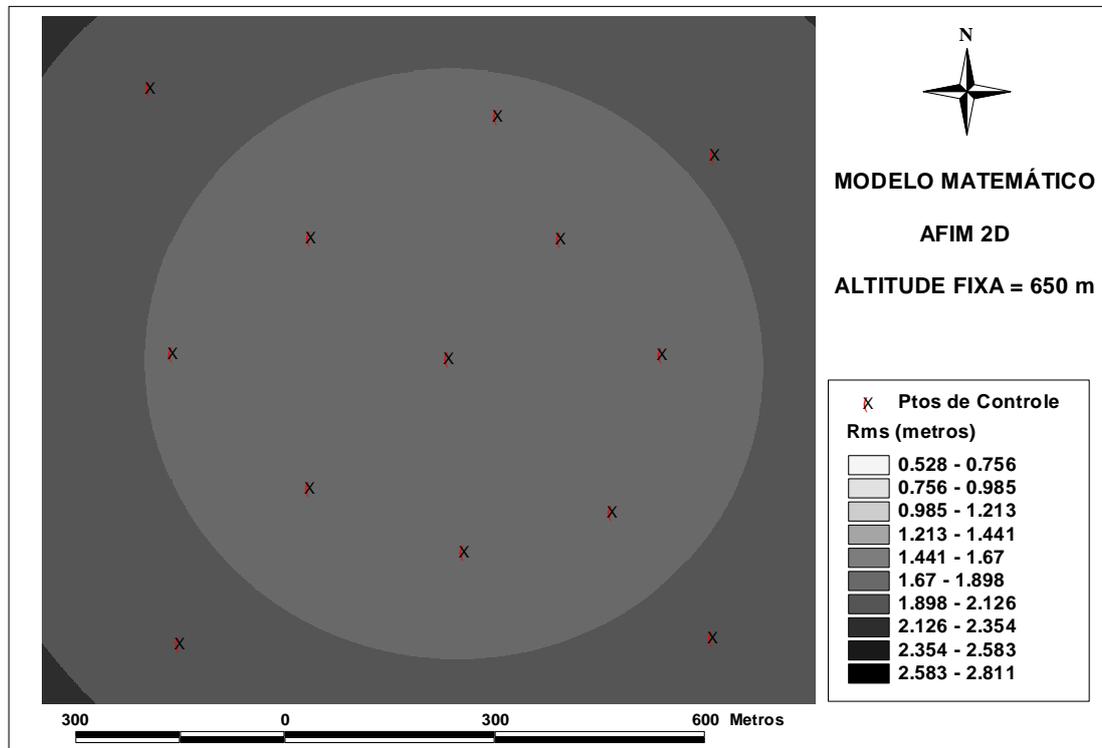


Figura 50: Espacialização do erro através do modelo de transformação afim 2D.

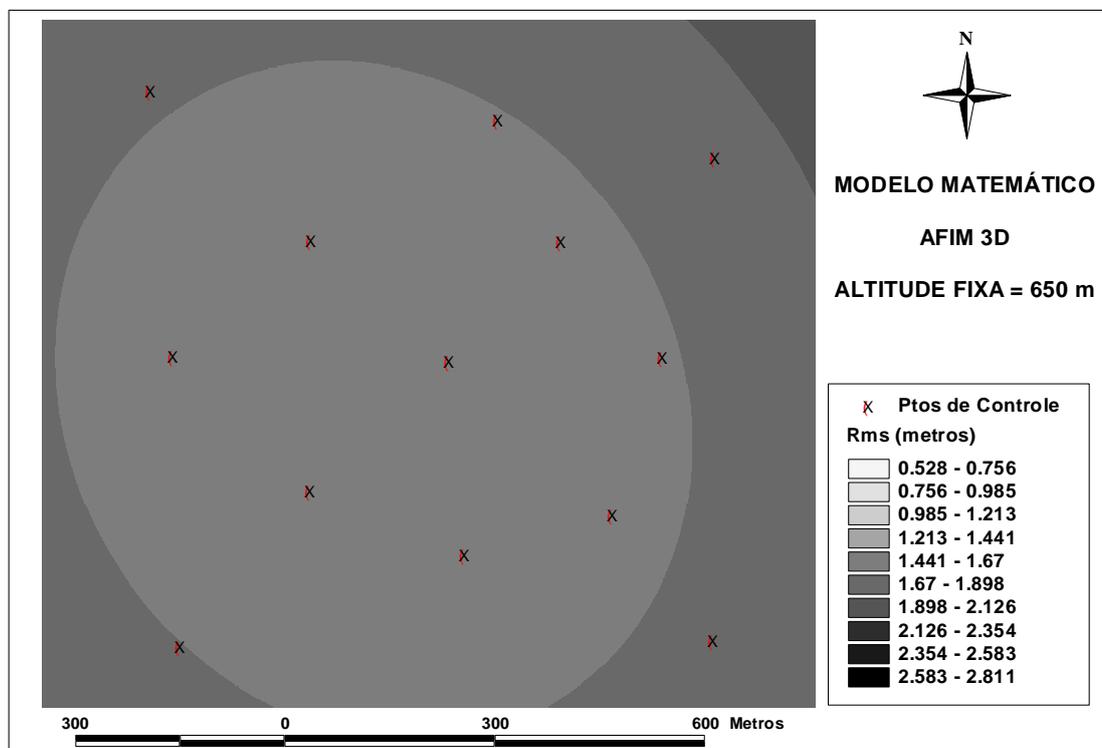


Figura 51: Espacialização do erro através do modelo de transformação afim 3D com altitude fixa.

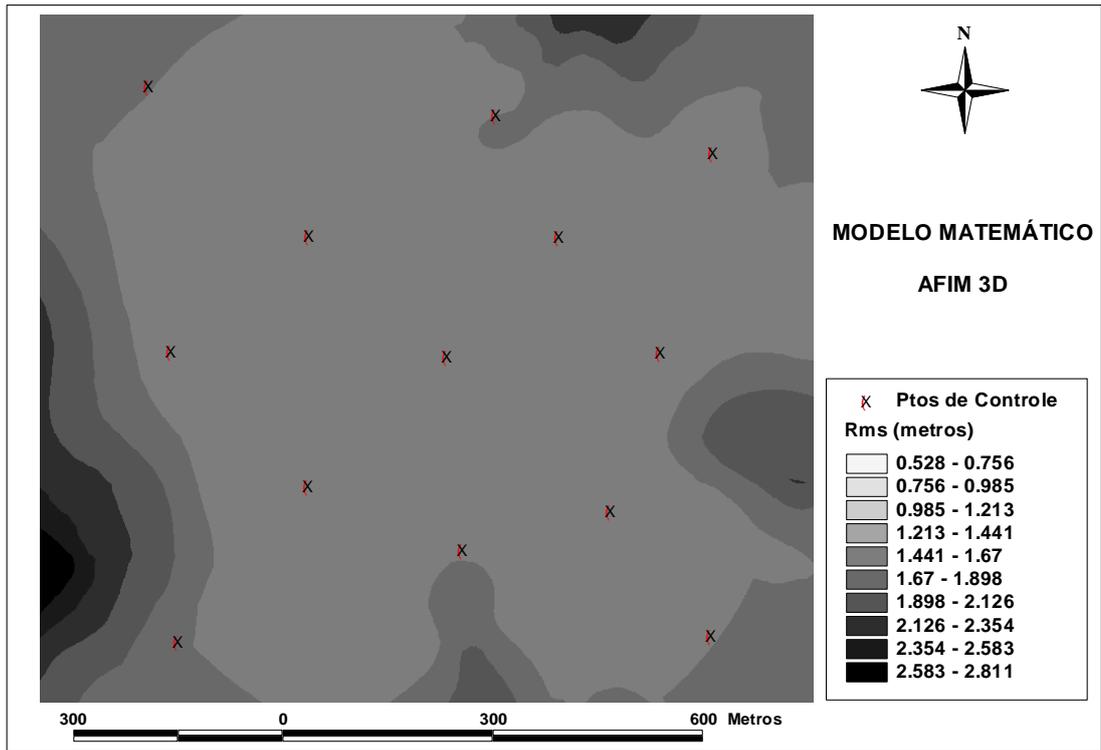


Figura 52: Espacialização do erro através do modelo de transformação afim 3D utilizando MDE.

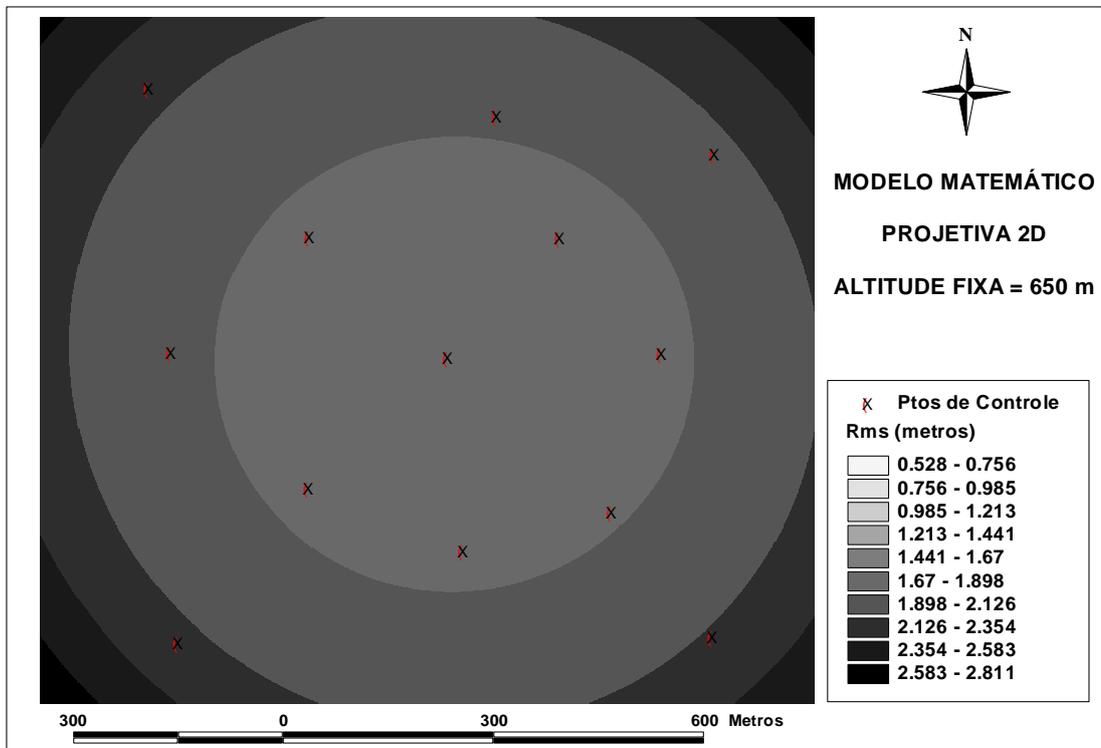


Figura 53: Espacialização do erro através do modelo de transformação projetiva 2D.

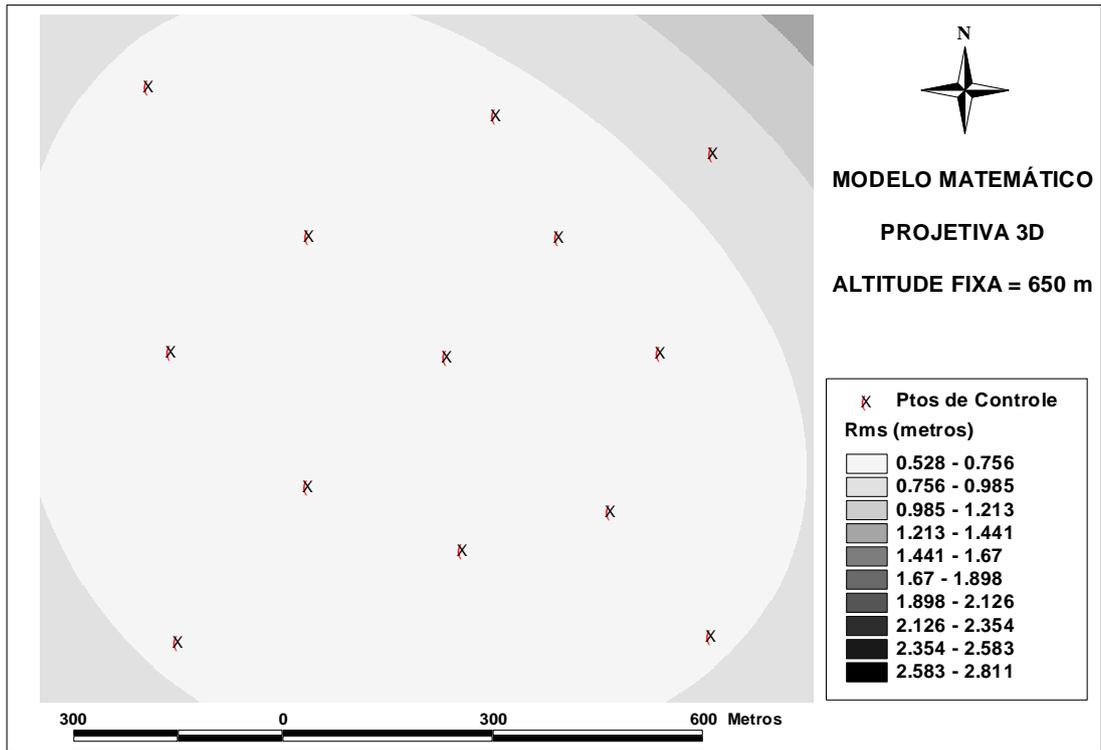


Figura 54: Espacialização do erro através do modelo de transformação projetiva 3D com altitude fixa.

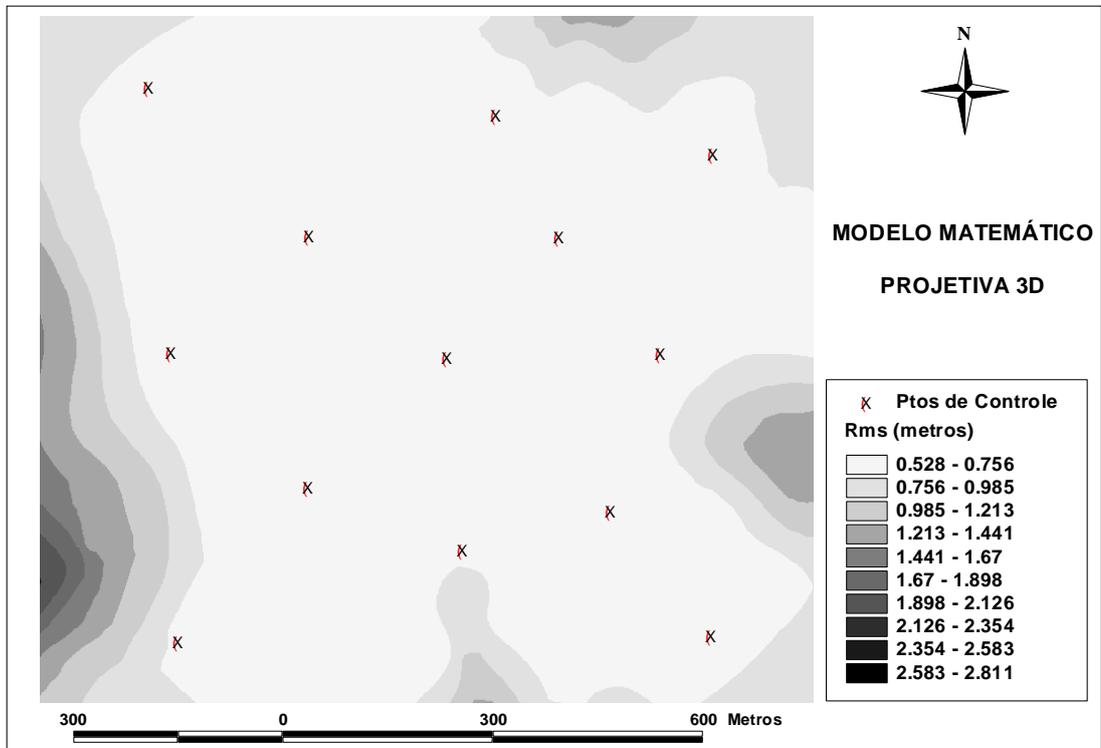


Figura 55: Espacialização do erro através do modelo de transformação projetiva 3D utilizando MDE.

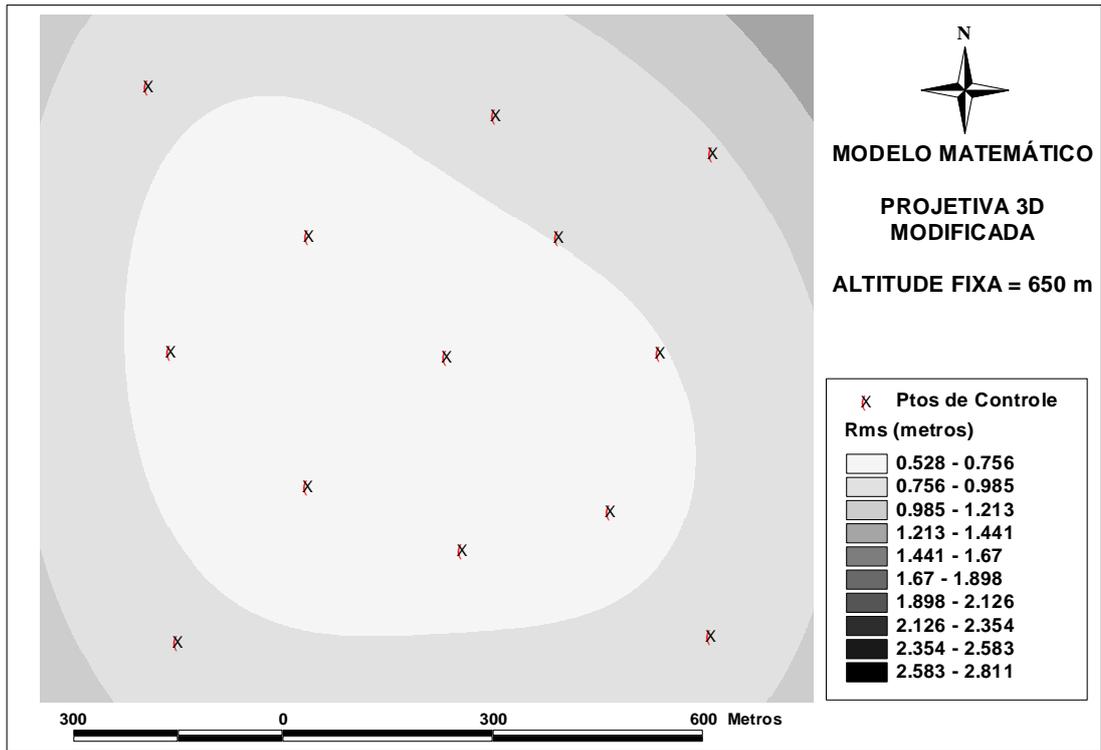


Figura 56: Espacialização do erro através do modelo de transformação projetiva 3D modificada com altitude fixa.

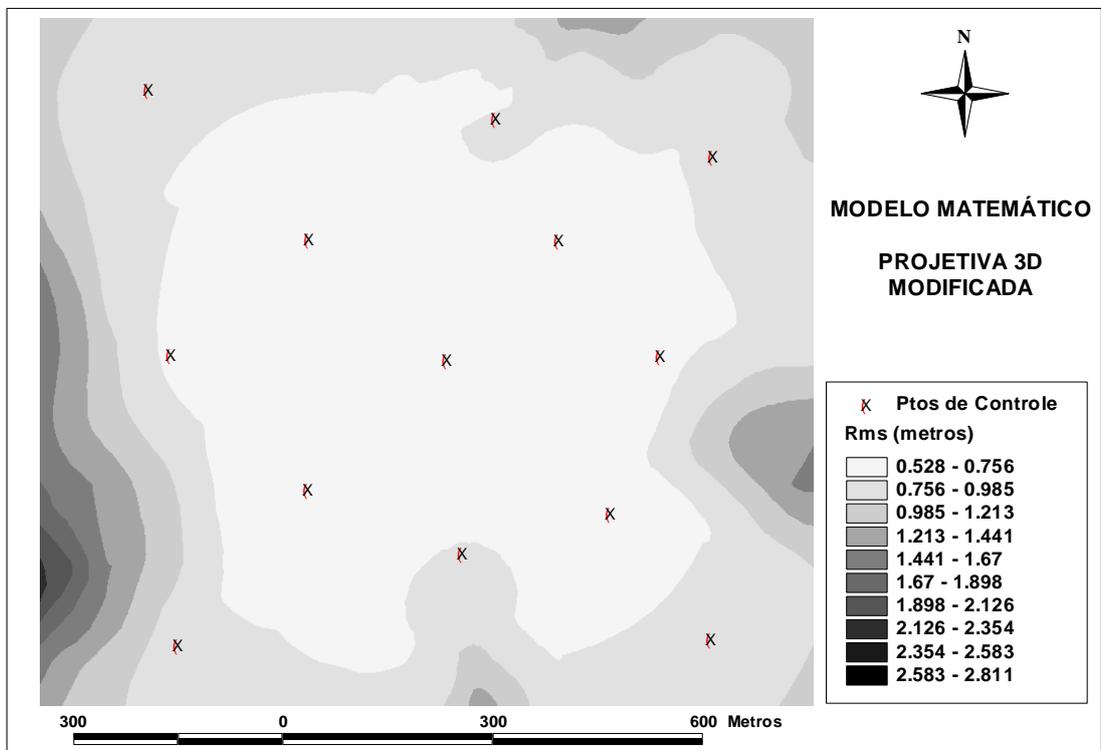


Figura 57: Espacialização do erro através do modelo de transformação projetiva 3D modificada utilizando MDE.

Após a espacialização do erro em toda a imagem, pode-se verificar espacialmente onde o modelo matemático é mais deficiente, proporcionando ao analista a possibilidade de aumentar a quantidade de pontos de controle em áreas de menor precisão, a fim de homogeneizar a transformação das coordenadas em toda área de estudos.

Ao analisar os modelos espacialmente, pôde-se verificar que apesar dos índices e resultados apontarem o modelo de transformação projetiva 3d modificada como o melhor modelo a ser adotado espacialmente, analisando o comportamento das precisões, ou seja, as áreas de menor RMS, pôde-se concluir que o melhor modelo a ser adotado é o modelo de transformação projetiva 3d, por apresentar maior área com menor valor de RMS.

7 CONCLUSÃO

Este trabalho permitiu concluir, através de experimentos utilizando técnicas de georreferenciamento indireto e análise posicional do comportamento dos diferentes modelos matemáticos, que:

- É correto afirmar que os melhores resultados ocorreram nas transformações de coordenadas que empregam a abordagem posicional em terceira dimensão, mesmo que utilizando um valor fixo para a altitude. Desta forma, pode-se afirmar que a simplificação da equação de colinearidade, levando ao modelo de projeção *afim 2D*, representa perda de informação considerável no processo de transformação geométrica em imagens orbitais de altíssima resolução, uma vez que modelos simplificados, quando comparados com outros, mostraram-se menos precisos além de evidenciar menor adequação às variações de relevo, impossibilitando a correção adequada das distorções inerentes à aquisição da imagem.

- Pela indisponibilidade de informações relativas à calibração do sensor, como distância focal calibrada, por exemplo, e das efemérides ou coordenadas para a determinação da órbita do satélite, não foi possível estimar os parâmetros de orientação interior e exterior e, portanto, não possível realizar o georreferenciamento direto da imagem, método dito rigoroso e teoricamente mais preciso. Imagens provenientes de sensores privados não disponibilizam tais informações.

- Após estimar os parâmetros de transformação juntamente com suas covariâncias e aplicar o modelo inverso para transformar coordenadas de tela em terrestres, o emprego da Lei de Propagação das Covariâncias possibilita propagar as covariâncias dos parâmetros e das coordenadas de tela observadas para as coordenadas terrestres determinadas e assim, estimar, para cada pixel da imagem, os desvios padrão, que são um indicativo de qualidade, das coordenadas terrestres viabilizando a análise das precisões de forma pontual.

- Gerar uma Imagem onde as precisões são espacializadas, proporciona, além da determinação do comportamento do modelo, uma verificação de como deve ser a densificação dos pontos de controle, uma vez que, ao se realizar mais observações em locais onde a precisão do modelo é deficiente, certamente levará a um melhor ajuste dos parâmetros para toda

área de estudos. Consequentemente, torna-se possível a correção geométrica de imagens orbitais de altíssima resolução juntamente com a representação espacial da incerteza posicional das mesmas. E, por conseguinte, a metodologia utilizada apresenta a vantagem de explorar o aspecto posicional de imagens de alta resolução proporcionando alternativas para melhoria do tratamento dessas imagens.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANDRADE, J. B. **Fotogrametria**. 2ª Edição, SBRR, Universidade Federal do Paraná – UFPR, Curitiba – PR. 2003. 274p.

ARRUDA JR., E. R. **Mosaicagem de Imagens Digitais**. Dissertação de Mestrado em Ciências Cartográficas – FCT/UNESP, Presidente Prudente – SP. 2002. 92p.

BALTSAVIAS, E.; PATERAKI, M.; ZHANG, L. **Radiometric and Geometric Evaluation of Ikonos Geo Images and Their Use for 3d Building Modelling**. Isprs Workshop “High Resolution Mapping From Space, Hannover – Germany, 2001. 19-21p.

BIAS, E. S. **Análise de Precisão e do Custo das Imagens de Alta Resolução IKONOS Orbit Para Geração de Mapas Cartográficos**. Disponível em: http://www.cartografia.org.br/xxi_cbc.htm, acesso em: 10/jul/2007.

BOCCARDO, P.; MONDINO, E.B.; TONOLO, G.; LINGUA, A. **Orthorectification of High-Resolution Satellite Images**. Disponível em: <http://www.isprs.org/istanbul2004/comm1/paper/6.pdf>, acesso em: 10/jul/2007.

CARNEIRO JR. C. **Desenvolvimento de Um Sistema de Inspeção Baseado em Transmissão da Radiação Gama para Aplicação em Dutos Flexíveis e Colunas Industriais**. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ, Rio de Janeiro – RJ. 2005.

CHEN, H. S. **Space Remote Sensing Systems an Introduction**. Academic Press. Inc. Orlando, Florida. 1985.

CHUVIECO, E. **Fundamentos de teledetección espacial**. Madrid: Rialp. 1990.

COELHO, L.; BRITO, J. N. **Fotogrametria digital**. Editora UERJ, Rio de Janeiro – RJ. 2007.

CROSTA, A. P. **Processamento Digital de Imagens de Sensoriamento Remoto**. UNICAMP, Campinas – SP. 1992.

DALMOLIN, Q. **Ajustamento por Mínimos Quadrados**. Universidade Federal do Paraná - UFPR, Curitiba – PR. 2004.

DIGITAL GLOBE. Disponível em <http://www.digitalglobe.com>, acesso em: 10/jul/2007.

FRASER, C. S.; YAMAKAWA, T. **Insights Into the Affine Model for High-Resolution Satellite Sensor Orientation**. Journal of Photogrammetry & Remote Sensing – ISPRS, 58, 2004. 275-288p.

FRITSH, D.; STALLMANN, D. **Rigorous Photogrammetric Processing of High Resolution Satellite Imagery**. In: IAPRS, Vol. XXXIII, Part B1, Comm. I, ISPRS Congress, Amsterdam. 2000. p 313-321.

GEMAEL, C. **Introdução ao Ajustamento de Observações: aplicações geodésicas**. Universidade Federal do Paraná - UFPR, Curitiba – PR. 1994.

GEMAEL, C.; ANDRADE, J. B. **Geodésia Celeste**. Universidade Federal do Paraná – UFPR, Curitiba-PR. 2004.

GHILANI, C. D.; WOLF, P. R. **Adjustment Computations: spatial data analysis**. John Wiley & Sons, Inc., 4th ed, Hoboken, New Jersey. 2006.

GUPTA, R. **Remote Sensing Geology**. Springer, Berlin Heidelberg, 1991.

HANLEY, H.; FRASER, C. **Sensor Orientation for High-Resolution satellite Imagery: further insight into bias- compensated RPC's**. Disponível em <http://www.isprs.org/istanbul2004/comm1/paper/5.pdf>, acesso em: 10/jul/2007.

HU, Y.; TAO, V.; CROITORU, A. **Understanding the Rational Function Model: methods and applications.** Disponível em: <http://www.isprs.org/istanbul2004/comm4/paper/423.pdf>, acesso em: 10/jul/2007.

ISHIKAWA, M. I. **Potencialidades de Uso de Imagens IKONOS/GEO para Aplicações em Áreas Urbanas.** Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual Paulista - UNESP, Presidente Prudente - SP. 2001.

LEE, C.; THEISS, H. J.; BETHEL, J. S.; MIKHAIL, E, M. **Rigorous Mathematical Modeling of Airborne Pushbroom Imaging Systems.** Photogrammetric Engineering & Remote Sensing. Vol. 66. N° 4. 2000.

LUGNANI, J. B. **Introdução à Fotogrametria.** Universidade Federal do Paraná – UFPR, Curitiba – PR. 1987. 134p.

MAROTTA, G. S.; VIEIRA, C. A. O. **Aplicação do Padrão de Exatidão Cartográfica dm Imagens Orbitais Aster para Fins de Atualizações de Mapeamentos.** *In:* XXII Congresso Brasileiro de Cartografia, Macaé – RJ, Anais. 2005.

MEDEIROS, N. G.; TOMMASELLI, A. M. G.; DAL POZ, A. P. **Modelo Rigoroso para Orientação de Imagens Pushbroom Usando Feições Retas.** *In:* XXII Congresso Brasileiro de Cartografia, Macaé – RJ, Anais. 2005.

MITISHITA, E. A.; SARAIVA, C. C. S.; MACHADO, A. L. **Monorrestituição de Imagens do Satélite de Alta Resolução Ikonos 2 (Geo), Utilizando-se da Transformação DLT e Modelo Digital de Terreno.** *In:* XI Simpósio Brasileiro de Sensoriamento Remoto, Belo Horizonte – MG, Anais. 2003. p 357-364.

MONICO, J. F. G. **Posicionamento pelo NAVSTAR-GPS: descrição, fundamentos e aplicações.** Universidade Estadual Paulista – UNESP, Presidente Prudente - SP. 2000.

MOURE, A. **Construção de Um Protótipo de Densitômetro Ósseo para uso em Clínica de Grandes Animais**. Dissertação de Mestrado, Centro de Educação Tecnológica do Paraná – CEFET-PR, Curitiba – PR, 2001.

PEDRO, P. C. **Ortorretificação de Imagens de Alta Resolução Ikonos e Quickbird Utilizando o Modelo APM (Affine Projection Model)**. Dissertação de Mestrado em Ciências Geodésicas – UFPR, Curitiba - PR. 2005. 97p.

PENTARONI, M. **Sistema de Aquisição de Dados para o Estudo de Organismos Magnetotáticos**. Dissertação de Mestrado. Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas – CBPF. Rio de Janeiro – RJ.

POLI, D. **Modelling of Spaceborne Linear Array Sensors**. Dissertation of Doctorate. Swiss Federal Institute of Technology Zurich, Zurich. 2005.

RICHARDS, J. A.; JIA, X. **Remote Sensing Digital Image Analysis – An Introduction**. 3ª edição. Alemanha: Ed. Springer. 1999.

RODRIGUES, D. D. R. **Rede Geodésica de Precisão no Estado de Minas Gerais: avaliação de diferentes estratégias de processamento e ajustamento**. Tese de Doutorado. Escola Politécnica da Universidade de São Paulo – USP, São Paulo – SP. 2002.

SCALCO, J C. **Orientação Semi-Automática de Imagens CBERS Usando Rodovias como Controle de Campo**. Dissertação de Mestrado em Ciências Geodésicas – UNESP, Presidente Prudente – SP. 2006.

SILVA, A. S. de S. **Estudo da Otimização da Qualidade da Imagem Digital Através da Razão Sinal Ruído Diferencial (SdNR)**. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ, Rio de Janeiro – RJ. 2008.

TELLES, S. S. de S. **Um Modelo para Calibração de Câmaras Digitais Baseado em Linhas Retas**. Dissertação de Mestrado em Ciências Geodésicas – UNESP, Presidente Prudente – SP. 2004.

TOMMASELLI, A. M. G.; HASEGAWA, J. K.; GALO, M. **Modernas Tecnologias de Aquisição de Imagens em Fotogrametria**. Boletim de Ciências Geodésicas, v. 6, n° 1, Curitiba – PR. 2000. p 49-64.

VALADAN ZOEJ, M. J.; SADEGHIAN, S. **Rigorous and Non-Rigorous Photogrammetric Processing of Ikonos Geo Image**. Disponível em: <http://www.ipi.uni-hannover.de/html/publikationen/2003/workshop/valadan.pdf>, acesso em: 10/jul/2007

WANG, Y., 1999. **Automated Triangulation of Linear Scanner Imagery**. In: Veröffentlichungen des Instituts für Photogrammetrie und Ingenieurvermessungen, Universität Hannover, Nr. 18. Joint Workshop of ISPRS WG I/1, I/3 and IV/4, Sensors and Mapping from Space, Hanover. 1999.

WOLF, P. R.; DEWITT, B. A. **Elements of Photogrammetry: with Applications in GIS**. 3.ed., Boston: McGraw-Hill, 2004.

MIKHAIL, E; BETHEL, J. S.; MCGLONE, J. C. **Introduction to Modern photogrammetry**. Chichester: John Wiley & Sons, 2001. 479 p.

ANEXO A – INVERSÃO DOS MODELOS DE TRANSFORMAÇÃO

a_1, a_2, \dots, a_n – Parâmetros ou Incógnitas.

C, L – Coordenadas de Imagem (Coluna, Linha) ou coordenadas no espaço imagem.

X, Y, Z – Coordenadas de superfície ou coordenadas no espaço objeto.

Modelo - Afim 2D:

$$C = a_1 X + a_2 Y + a_3$$

$$L = a_4 * X + a_5 * Y + a_6$$

Modelo inverso - Afim 2D:

$$Y = - \frac{(-a_1 L + a_1 a_6 + a_4 C - a_4 a_3)}{(a_1 a_5 - a_2 a_4)}$$

$$X = - \frac{(-a_5 C + a_3 a_5 + a_3 L - a_3 a_6)}{(a_1 a_5 - a_4 a_3)}$$

Modelo - Afim 3D:

$$C = a_1 X + a_2 Y + a_3 Z + a_4$$

$$L = a_5 X + a_6 Y + a_7 Z + a_8$$

Modelo inverso - Afim 3D:

$$X = - \frac{(-a_6 C + a_6 a_3 Z + a_6 a_4 + a_3 L - a_3 a_7 Z - a_3 a_8)}{(a_1 a_6 - a_5 a_3)}$$

$$Y = - \frac{(-a_1 L + a_1 a_7 Z + a_1 a_8 + a_5 C - a_5 a_3 Z - a_5 a_4)}{(a_1 a_6 - a_2 a_5)}$$

Modelo - Projetivo 2D:

$$C = \frac{(a_1 X + a_2 Y + a_3)}{(a_7 X + a_8 Y + 1)}$$

$$L = \frac{(a_4 X + a_5 Y + a_6)}{(a_7 X + a_8 Y + 1)}$$

Modelo inverso - Projetivo 2D:

$$X = \frac{(a_2 L + a_6 a_8 C - a_6 a_2 - a_5 C - a_3 a_8 L + a_3 a_5)}{(-a_7 a_2 L - a_4 a_8 C + a_4 a_2 + a_7 a_5 C + a_1 a_8 L - a_1 a_5)}$$

$$Y = -\frac{(a_1 L + a_6 a_7 C - a_6 a_1 - a_4 C - a_3 a_7 L + a_3 a_4)}{(-a_7 a_2 L - a_4 a_8 C + a_4 a_2 + a_7 a_5 C + a_1 a_8 L - a_1 a_5)}$$

Modelo - Projetivo 3D:

$$C = \frac{(a_1 X + a_2 Y + a_3 Z + a_4)}{(a_9 X + a_{10} Y + a_{11} Z + 1)}$$

$$L = \frac{(a_5 X + a_6 Y + a_7 Z + a_8)}{(a_9 X + a_{10} Y + a_{11} Z + 1)}$$

Modelo inverso - Projetivo 3D:

$$X = \frac{(a_{11} Z a_2 L + a_2 L + a_7 Z a_{10} C - a_7 Z a_2 + a_8 a_{10} C - a_8 a_2)}{(-a_9 a_2 L - a_5 a_{10} C + a_5 a_2 + a_1 a_{10} L - a_1 a_6 + a_9 a_6 C)} +$$

$$+ \frac{(-a_3 Z a_{10} L + a_3 Z a_6 - a_{11} Z a_6 C - a_6 C - a_4 a_{10} L + a_4 a_6)}{(-a_9 a_2 L - a_5 a_{10} C + a_5 a_2 + a_1 a_{10} L - a_1 a_6 + a_9 a_6 C)}$$

$$Y = -\frac{(a_{11} Z a_1 L + a_1 L - a_7 Z a_1 + a_7 Z a_9 C - a_8 a_1 + a_8 a_9 C)}{(-a_9 a_2 L - a_5 a_{10} C + a_5 a_2 + a_1 a_{10} L - a_1 a_6 + a_9 a_6 C)} +$$

$$- \frac{(-a_3 Z a_9 L + a_3 Z a_5 - a_{11} Z a_5 C - a_5 C - a_4 a_9 L + a_4 a_5)}{(-a_9 a_2 L - a_5 a_{10} C + a_5 a_2 + a_1 a_{10} L - a_1 a_6 + a_9 a_6 C)}$$

Modelo - *Projetivo 3D* modificado:

$$C = \frac{(a_1 X + a_2 Y + a_3 Z + a_4)}{(a_9 X + a_{10} Y + a_{11} Z + 1)}$$

$$L = \frac{(a_5 X + a_6 Y + a_7 Z + a_8)}{(a_9 X + a_{10} Y + a_{11} Z + 1)} + a_{12} CL$$

$$L = - \frac{(a_5 X + a_6 Y + a_7 Z + a_8)}{(-a_9 X - a_{10} Y - a_{11} Z - 1 + a_{12} a_1 X + a_{12} a_2 Y + a_{12} a_3 Z + a_{12} a_4)}$$

Modelo inverso - *Projetivo 3D* modificado:

$$X = \frac{(-a_{11} Z a_2 L - a_2 L - a_7 Z a_{10} C + a_7 Z a_2 - a_8 a_{10} C + a_8 a_2 + a_{12} a_{11} Z a_2 CL + a_{12} a_2 CL)}{(a_9 a_2 L + a_5 a_{10} C - a_5 a_2 - a_{12} a_9 a_2 CL - a_1 a_{10} L + a_1 a_6 + a_1 a_{12} a_{10} CL - a_9 a_6 C)} +$$

$$+ \frac{(a_3 Z a_{10} L - a_3 Z a_6 - a_3 Z a_{12} a_{10} CL + a_{11} Z a_6 C + a_6 C + a_4 a_{10} L - a_4 a_6 - a_4 a_{12} a_{10} CL)}{(a_9 a_2 L + a_5 a_{10} C - a_5 a_2 - a_{12} a_9 a_2 CL - a_1 a_{10} L + a_1 a_6 + a_1 a_{12} a_{10} CL - a_9 a_6 C)}$$

$$Y = - \frac{(-a_{11} Z a_1 L - a_1 L + a_7 Z a_1 - a_7 Z a_9 C + a_8 a_1 - a_8 a_9 C + a_{12} a_{11} Z a_1 CL + a_{12} a_1 CL)}{(a_9 a_2 L + a_5 a_{10} C - a_5 a_2 - a_{12} a_9 a_2 CL - a_1 a_{10} L + a_1 a_6 + a_1 a_{12} a_{10} CL - a_9 a_6 C)} +$$

$$- \frac{(a_3 Z a_9 L - a_3 Z a_5 - a_3 Z a_{12} a_9 CL + a_{11} Z a_5 C + a_5 C + a_4 a_9 L - a_4 a_5 - a_4 a_{12} a_9 CL)}{(a_9 a_2 L + a_5 a_{10} C - a_5 a_2 - a_{12} a_9 a_2 CL - a_1 a_{10} L + a_1 a_6 + a_1 a_{12} a_{10} CL - a_9 a_6 C)}$$

ANEXO B – MATRIZ DAS DERIVADAS PARCIAIS DO MODELO INVERSO

a_1, a_2, \dots, a_n – Parâmetros ou Incógnitas.

C, L – Coordenadas de Imagem (Coluna, Linha) ou coordenadas no espaço imagem.

X, Y, Z – Coordenadas de superfície ou coordenadas no espaço objeto.

$J_{0,0}, \dots, J_{1,n}$ – Matriz jacobiana ou matriz das derivadas parciais.

Derivadas parciais - Modelo Afim 2D

$$J_{0,0} = \frac{(a_2L - a_2a_6 - Ca_4 + a_5a_4)a_4}{(-a_4a_1 + a_2a_3)^2}$$

$$J_{0,1} = \frac{(L - a_6)}{(-a_4a_1 + a_2a_3)} - \frac{(a_2L - a_2a_6 - Ca_4 + a_5a_4)a_3}{(-a_4a_1 + a_2a_3)^2}$$

$$J_{0,2} = \frac{-(a_2L - a_2a_6 - Ca_4 + a_5a_4)a_2}{(-a_4a_1 + a_2a_3)^2}$$

$$J_{0,3} = \frac{(-C + a_5)}{(-a_4a_1 + a_2a_3)} + \frac{(a_2L - a_2a_6 - Ca_4 + a_5a_4)a_1}{(-a_4a_1 + a_2a_3)^2}$$

$$J_{0,4} = \frac{a_4}{(-a_4a_1 + a_2a_3)}$$

$$J_{0,5} = -\frac{a_2}{(-a_4a_1 + a_2a_3)}$$

$$J_{0,6} = \frac{a_2}{(-a_4a_1 + a_2a_3)}$$

$$J_{0,7} = -\frac{a_4}{(-a_4a_1 + a_2a_3)}$$

$$J_{1,0} = \frac{(-L + a_6)}{(-a_4 a_1 + a_2 a_3)} + \frac{(a_3 C - a_3 a_5 - La_1 + a_6 a_1) a_4}{(-a_4 a_1 + a_2 a_3)^2}$$

$$J_{1,1} = -\frac{(a_3 C - a_3 a_5 - La_1 + a_6 a_1) a_3}{(-a_4 a_1 + a_2 a_3)^2}$$

$$J_{1,2} = \frac{(C - a_5)}{(-a_4 a_1 + a_2 a_3)} - \frac{(a_3 C - a_3 a_5 - La_1 + a_6 a_1) a_2}{(-a_4 a_1 + a_2 a_3)^2}$$

$$J_{1,3} = \frac{(a_3 C - a_3 a_5 - La_1 + a_6 a_1)}{(-a_4 a_1 + a_2 a_3)^2 a_1}$$

$$J_{1,4} = -\frac{a_3}{(-a_4 a_1 + a_2 a_3)}$$

$$J_{1,5} = \frac{a_1}{(-a_4 a_1 + a_2 a_3)}$$

$$J_{1,6} = -\frac{a_1}{(-a_4 a_1 + a_2 a_3)}$$

$$J_{1,7} = \frac{a_3}{(-a_4 a_1 + a_2 a_3)}$$

Derivadas parciais - Modelo Afim 3D

$$J_{0,0} = -\frac{(a_5 C - a_5 a_3 Z - a_5 a_7 - a_2 L + a_2 a_6 Z + a_2 a_8) a_5}{(a_5 a_1 - a_2 a_4)^2}$$

$$J_{0,1} = \frac{(-L + a_6 Z + a_8)}{(a_5 a_1 - a_2 a_4)} + \frac{(a_5 C - a_5 a_3 Z - a_5 a_7 - a_2 L + a_2 a_6 Z + a_2 a_8) a_4}{(a_5 a_1 - a_2 a_4)^2}$$

$$J_{0,2} = -\frac{a_5 Z}{(a_5 a_1 - a_2 a_4)}$$

$$J_{0,3} = \frac{(a_5 C - a_5 a_3 Z - a_5 a_7 - a_2 L + a_2 a_6 Z + a_2 a_8) a_2}{(a_5 a_1 - a_2 a_4)^2}$$

$$J_{0,4} = \frac{(C - a_3 Z - a_7)}{(a_5 a_1 - a_2 a_4)} - \frac{(a_5 C - a_5 a_3 Z - a_5 a_7 - a_2 L + a_2 a_6 Z + a_2 a_8) a_1}{(a_5 a_1 - a_2 a_4)^2}$$

$$J_{0,5} = \frac{a_2 Z}{(a_5 a_1 - a_2 a_4)}$$

$$J_{0,6} = -\frac{a_5}{(a_5 a_1 - a_2 a_4)}$$

$$J_{0,7} = \frac{a_2}{(a_5 a_1 - a_2 a_4)}$$

$$J_{0,8} = -\frac{a_2}{(a_5 a_1 - a_2 a_4)}$$

$$J_{0,9} = \frac{a_5}{(a_5 a_1 - a_2 a_4)}$$

$$J_{1,0} = -\frac{(-L + a_6 Z + a_8)}{(a_5 a_1 - a_2 a_4)} + \frac{(-a_1 L + a_1 a_6 Z + a_1 a_8 + a_4 C - a_4 a_3 Z - a_4 a_7) a_5}{(a_5 a_1 - a_2 a_4)^2}$$

$$J_{1,1} = -\frac{(-a_1 L + a_1 a_6 Z + a_1 a_8 + a_4 C - a_4 a_3 Z - a_4 a_7) a_4}{(a_5 a_1 - a_2 a_4)^2}$$

$$J_{1,2} = \frac{a_4 Z}{(a_5 a_1 - a_2 a_4)}$$

$$J_{1,3} = -\frac{(C - a_3 Z - a_7)}{(a_5 a_1 - a_2 a_4)} - \frac{(-a_1 L + a_1 a_6 Z + a_1 a_8 + a_4 C - a_4 a_3 Z - a_4 a_7) a_2}{(a_5 a_1 - a_2 a_4)^2}$$

$$J_{1,4} = \frac{(-a_1 L + a_1 a_6 Z + a_1 a_8 + a_4 C - a_4 a_3 Z - a_4 a_7) a_1}{(a_5 a_1 - a_2 a_4)^2}$$

$$J_{1,5} = -\frac{a_1 Z}{(a_5 a_1 - a_2 a_4)}$$

$$J_{1,6} = \frac{a_4}{(a_5 a_1 - a_2 a_4)}$$

$$J_{1,7} = -\frac{a_1}{(a_5 a_1 - a_2 a_4)}$$

$$J_{1,8} = \frac{a_1}{(a_5 a_1 - a_2 a_4)}$$

$$J_{1,9} = -\frac{a_4}{(a_5 a_1 - a_2 a_4)}$$

Derivadas parciais - Modelo *Projetivo 2D*

$$J_{0,0} = -\frac{(La_2 + a_6 Ca_8 - a_6 a_2 - Ca_5 - a_3 La_8 + a_3 a_5)(La_8 - a_5)}{(La_8 a_1 + a_5 Ca_7 - a_5 a_1 - Ca_8 a_4 - a_2 La_7 + a_2 a_4)^2}$$

$$J_{0,1} = \frac{(L - a_6)}{(La_8 a_1 + a_5 Ca_7 - a_5 a_1 - Ca_8 a_4 - a_2 La_7 + a_2 a_4)} +$$

$$-\frac{(La_2 + a_6 Ca_8 - a_6 a_2 - Ca_5 - a_3 La_8 + a_3 a_5)(-La_7 + a_4)}{(La_8 a_1 + a_5 Ca_7 - a_5 a_1 - Ca_8 a_4 - a_2 La_7 + a_2 a_4)^2}$$

$$J_{0,2} = \frac{(-La_8 + a_5)}{(La_8 a_1 + a_5 Ca_7 - a_5 a_1 - Ca_8 a_4 - a_2 La_7 + a_2 a_4)}$$

$$J_{0,3} = -\frac{(La_2 + a_6 Ca_8 - a_6 a_2 - Ca_5 - a_3 La_8 + a_3 a_5)(-Ca_8 + a_2)}{(La_8 a_1 + a_5 Ca_7 - a_5 a_1 - Ca_8 a_4 - a_2 La_7 + a_2 a_4)^2}$$

$$J_{0,4} = \frac{(-C + a_3)}{(La_8 a_1 + a_5 Ca_7 - a_5 a_1 - Ca_8 a_4 - a_2 La_7 + a_2 a_4)} +$$

$$-\frac{(La_2 + a_6Ca_8 - a_6a_2 - Ca_5 - a_3La_8 + a_3a_5)(Ca_7 - a_1)}{(La_8a_1 + a_5Ca_7 - a_5a_1 - Ca_8a_4 - a_2La_7 + a_2a_4)^2}$$

$$J_{0,5} = \frac{(Ca_8 - a_2)}{(La_8a_1 + a_5Ca_7 - a_5a_1 - Ca_8a_4 - a_2La_7 + a_2a_4)}$$

$$J_{0,6} = -\frac{(La_2 + a_6Ca_8 - a_6a_2 - Ca_5 - a_3La_8 + a_3a_5)(Ca_5 - La_2)}{(La_8a_1 + a_5Ca_7 - a_5a_1 - Ca_8a_4 - a_2La_7 + a_2a_4)^2}$$

$$J_{0,7} = \frac{(a_6C - a_3L)}{(La_8a_1 + a_5Ca_7 - a_5a_1 - Ca_8a_4 - a_2La_7 + a_2a_4)} +$$

$$-\frac{(La_2 + a_6Ca_8 - a_6a_2 - Ca_5 - a_3La_8 + a_3a_5)(La_1 - Ca_4)}{(La_8a_1 + a_5Ca_7 - a_5a_1 - Ca_8a_4 - a_2La_7 + a_2a_4)^2}$$

$$J_{0,8} = \frac{(a_2 - a_3a_8)}{(La_8a_1 + a_5Ca_7 - a_5a_1 - Ca_8a_4 - a_2La_7 + a_2a_4)} +$$

$$-\frac{(La_2 + a_6Ca_8 - a_6a_2 - Ca_5 - a_3La_8 + a_3a_5)(a_8a_1 - a_2a_7)}{(La_8a_1 + a_5Ca_7 - a_5a_1 - Ca_8a_4 - a_2La_7 + a_2a_4)^2}$$

$$J_{0,9} = \frac{(a_6a_8 - a_5)}{(La_8a_1 + a_5Ca_7 - a_5a_1 - Ca_8a_4 - a_2La_7 + a_2a_4)} +$$

$$-\frac{(La_2 + a_6Ca_8 - a_6a_2 - Ca_5 - a_3La_8 + a_3a_5)(a_5a_7 - a_8a_4)}{(La_8a_1 + a_5Ca_7 - a_5a_1 - Ca_8a_4 - a_2La_7 + a_2a_4)^2}$$

$$J_{1,0} = -\frac{(L - a_6)}{(La_8a_1 + a_5Ca_7 - a_5a_1 - Ca_8a_4 - a_2La_7 + a_2a_4)} +$$

$$+\frac{(La_1 + a_6Ca_7 - a_6a_1 - Ca_4 - a_3La_7 + a_3a_4)(La_8 - a_5)}{(La_8a_1 + a_5Ca_7 - a_5a_1 - Ca_8a_4 - a_2La_7 + a_2a_4)^2}$$

$$J_{1,1} = \frac{(La_1 + a_6Ca_7 - a_6a_1 - Ca_4 - a_3La_7 + a_3a_4)(-La_7 + a_4)}{(La_8a_1 + a_5Ca_7 - a_5a_1 - Ca_8a_4 - a_2La_7 + a_2a_4)^2}$$

$$J_{1,2} = -\frac{(-La_7 + a_4)}{(La_8a_1 + a_5Ca_7 - a_5a_1 - Ca_8a_4 - a_2La_7 + a_2a_4)}$$

$$J_{1,3} = -\frac{(-C + a_3)}{(La_8a_1 + a_5Ca_7 - a_5a_1 - Ca_8a_4 - a_2La_7 + a_2a_4)} +$$

$$+ \frac{(La_1 + a_6Ca_7 - a_6a_1 - Ca_4 - a_3La_7 + a_3a_4)(-Ca_8 + a_2)}{(La_8a_1 + a_5Ca_7 - a_5a_1 - Ca_8a_4 - a_2La_7 + a_2a_4)^2}$$

$$J_{1,4} = \frac{(La_1 + a_6Ca_7 - a_6a_1 - Ca_4 - a_3La_7 + a_3a_4)(Ca_7 - a_1)}{(La_8a_1 + a_5Ca_7 - a_5a_1 - Ca_8a_4 - a_2La_7 + a_2a_4)^2}$$

$$J_{1,5} = -\frac{(Ca_7 - a_1)}{(La_8a_1 + a_5Ca_7 - a_5a_1 - Ca_8a_4 - a_2La_7 + a_2a_4)}$$

$$J_{1,6} = -\frac{(a_6C - a_3L)}{(La_8a_1 + a_5Ca_7 - a_5a_1 - Ca_8a_4 - a_2La_7 + a_2a_4)} +$$

$$+ \frac{(La_1 + a_6Ca_7 - a_6a_1 - Ca_4 - a_3La_7 + a_3a_4)(Ca_5 - La_2)}{(La_8a_1 + a_5Ca_7 - a_5a_1 - Ca_8a_4 - a_2La_7 + a_2a_4)^2}$$

$$J_{1,7} = \frac{(La_1 + a_6Ca_7 - a_6a_1 - Ca_4 - a_3La_7 + a_3a_4)(La_1 - Ca_4)}{(La_8a_1 + a_5Ca_7 - a_5a_1 - Ca_8a_4 - a_2La_7 + a_2a_4)^2}$$

$$J_{1,8} = -\frac{(a_1 - a_3a_7)}{(La_8a_1 + a_5Ca_7 - a_5a_1 - Ca_8a_4 - a_2La_7 + a_2a_4)} +$$

$$+ \frac{(La_1 + a_6Ca_7 - a_6a_1 - Ca_4 - a_3La_7 + a_3a_4)(a_8a_1 - a_2a_7)}{(La_8a_1 + a_5Ca_7 - a_5a_1 - Ca_8a_4 - a_2La_7 + a_2a_4)^2}$$

$$J_{1,9} = -\frac{(a_6a_7 - a_4)}{(La_8a_1 + a_5Ca_7 - a_5a_1 - Ca_8a_4 - a_2La_7 + a_2a_4)} +$$

$$+ \frac{(La_1 + a_6Ca_7 - a_6a_1 - Ca_4 - a_3La_7 + a_3a_4)(a_5a_7 - a_8a_4)}{(La_8a_1 + a_5Ca_7 - a_5a_1 - Ca_8a_4 - a_2La_7 + a_2a_4)^2}$$

Derivadas parciais - Modelo *Projetivo 3D*

$$J_{0,0} = -\frac{(-a_7Za_2 + a_7ZCa_{10} + La_{11}Za_2 + La_2 - a_8a_2 + a_8Ca_{10})(La_{10} - a_6)}{(La_{10}a_1 + a_6Ca_9 - a_6a_1 - a_2La_9 + a_2a_5 - Ca_{10}a_5)^2} +$$

$$\frac{(-a_3ZLa_{10} + a_3Za_6 - Ca_{11}Za_6 - Ca_6 - a_4La_{10} + a_4a_6)(La_{10} - a_6)}{(La_{10}a_1 + a_6Ca_9 - a_6a_1 - a_2La_9 + a_2a_5 - Ca_{10}a_5)^2}$$

$$J_{0,1} = \frac{(-a_7Z + La_{11}Z + L - a_8)}{(La_{10}a_1 + a_6Ca_9 - a_6a_1 - a_2La_9 + a_2a_5 - Ca_{10}a_5)} +$$

$$\frac{(-a_7Za_2 + a_7ZCa_{10} + La_{11}Za_2 + La_2 - a_8a_2 + a_8Ca_{10})(-La_9 + a_5)}{(La_{10}a_1 + a_6Ca_9 - a_6a_1 - a_2La_9 + a_2a_5 - Ca_{10}a_5)^2} +$$

$$\frac{(-a_3ZLa_{10} + a_3Za_6 - Ca_{11}Za_6 - Ca_6 - a_4La_{10} + a_4a_6)(-La_9 + a_5)}{(La_{10}a_1 + a_6Ca_9 - a_6a_1 - a_2La_9 + a_2a_5 - Ca_{10}a_5)^2}$$

$$J_{0,2} = \frac{(-ZLa_{10} + Za_6)}{(La_{10}a_1 + a_6Ca_9 - a_6a_1 - a_2La_9 + a_2a_5 - Ca_{10}a_5)}$$

$$J_{0,3} = \frac{(-La_{10} + a_6)}{(La_{10}a_1 + a_6Ca_9 - a_6a_1 - a_2La_9 + a_2a_5 - Ca_{10}a_5)}$$

$$J_{0,4} = -\frac{(-a_7Za_2 + a_7ZCa_{10} + La_{11}Za_2 + La_2 - a_8a_2 + a_8Ca_{10})(a_2 - Ca_{10})}{(La_{10}a_1 + a_6Ca_9 - a_6a_1 - a_2La_9 + a_2a_5 - Ca_{10}a_5)^2} +$$

$$\frac{(-a_3ZLa_{10} + a_3Za_6 - Ca_{11}Za_6 - Ca_6 - a_4La_{10} + a_4a_6)(a_2 - Ca_{10})}{(La_{10}a_1 + a_6Ca_9 - a_6a_1 - a_2La_9 + a_2a_5 - Ca_{10}a_5)^2}$$

$$J_{0,5} = \frac{(a_3Z - Ca_{11}Z - C + a_4)}{(La_{10}a_1 + a_6Ca_9 - a_6a_1 - a_2La_9 + a_2a_5 - Ca_{10}a_5)} +$$

$$\frac{(-a_7Za_2 + a_7ZCa_{10} + La_{11}Za_2 + La_2 - a_8a_2 + a_8Ca_{10})(Ca_9 - a_1)}{(La_{10}a_1 + a_6Ca_9 - a_6a_1 - a_2La_9 + a_2a_5 - Ca_{10}a_5)^2} +$$

$$\frac{(-a_3ZLa_{10} + a_3Za_6 - Ca_{11}Za_6 - Ca_6 - a_4La_{10} + a_4a_6)(Ca_9 - a_1)}{(La_{10}a_1 + a_6Ca_9 - a_6a_1 - a_2La_9 + a_2a_5 - Ca_{10}a_5)^2}$$

$$J_{0,6} = \frac{(-Za_2 + ZCa_{10})}{(La_{10}a_1 + a_6Ca_9 - a_6a_1 - a_2La_9 + a_2a_5 - Ca_{10}a_5)}$$

$$J_{0,7} = \frac{(-a_2 + Ca_{10})}{(La_{10}a_1 + a_6Ca_9 - a_6a_1 - a_2La_9 + a_2a_5 - Ca_{10}a_5)}$$

$$J_{0,8} = -\frac{(-a_7Za_2 + a_7ZCa_{10} + La_{11}Za_2 + La_2 - a_8a_2 + a_8Ca_{10})(Ca_6 - La_2)}{(La_{10}a_1 + a_6Ca_9 - a_6a_1 - a_2La_9 + a_2a_5 - Ca_{10}a_5)^2} +$$

$$-\frac{(-a_3ZLa_{10} + a_3Za_6 - Ca_{11}Za_6 - Ca_6 - a_4La_{10} + a_4a_6)(Ca_6 - La_2)}{(La_{10}a_1 + a_6Ca_9 - a_6a_1 - a_2La_9 + a_2a_5 - Ca_{10}a_5)^2}$$

$$J_{0,9} = \frac{(a_7ZC + a_8C - a_3ZL - a_4L)}{(La_{10}a_1 + a_6Ca_9 - a_6a_1 - a_2La_9 + a_2a_5 - Ca_{10}a_5)} +$$

$$-\frac{(-a_7Za_2 + a_7ZCa_{10} + La_{11}Za_2 + La_2 - a_8a_2 + a_8Ca_{10})(La_1 - Ca_5)}{(La_{10}a_1 + a_6Ca_9 - a_6a_1 - a_2La_9 + a_2a_5 - Ca_{10}a_5)^2} +$$

$$-\frac{(-a_3ZLa_{10} + a_3Za_6 - Ca_{11}Za_6 - Ca_6 - a_4La_{10} + a_4a_6)(La_1 - Ca_5)}{(La_{10}a_1 + a_6Ca_9 - a_6a_1 - a_2La_9 + a_2a_5 - Ca_{10}a_5)^2}$$

$$J_{0,10} = \frac{(LZa_2 - CZa_6)}{(La_{10}a_1 + a_6Ca_9 - a_6a_1 - a_2La_9 + a_2a_5 - Ca_{10}a_5)}$$

$$J_{0,11} = \frac{(a_{11}Za_2 + a_2 - a_3Za_{10} - a_4a_{10})}{(La_{10}a_1 + a_6Ca_9 - a_6a_1 - a_2La_9 + a_2a_5 - Ca_{10}a_5)} +$$

$$-\frac{(-a_7Za_2 + a_7ZCa_{10} + La_{11}Za_2 + La_2 - a_8a_2 + a_8Ca_{10})(a_{10}a_1 - a_2a_9)}{(La_{10}a_1 + a_6Ca_9 - a_6a_1 - a_2La_9 + a_2a_5 - Ca_{10}a_5)^2} +$$

$$-\frac{(-a_3ZLa_{10} + a_3Za_6 - Ca_{11}Za_6 - Ca_6 - a_4La_{10} + a_4a_6)(a_{10}a_1 - a_2a_9)}{(La_{10}a_1 + a_6Ca_9 - a_6a_1 - a_2La_9 + a_2a_5 - Ca_{10}a_5)^2}$$

$$J_{0,12} = \frac{(a_7Za_{10} + a_8a_{10} - a_{11}Za_6 - a_6)}{(La_{10}a_1 + a_6Ca_9 - a_6a_1 - a_2La_9 + a_2a_5 - Ca_{10}a_5)} +$$

$$-\frac{(-a_7Za_2 + a_7ZCa_{10} + La_{11}Za_2 + La_2 - a_8a_2 + a_8Ca_{10})(a_6a_9 - a_{10}a_5)}{(La_{10}a_1 + a_6Ca_9 - a_6a_1 - a_2La_9 + a_2a_5 - Ca_{10}a_5)^2} +$$

$$-\frac{(-a_3ZLa_{10} + a_3Za_6 - Ca_{11}Za_6 - Ca_6 - a_4La_{10} + a_4a_6)(a_6a_9 - a_{10}a_5)}{(La_{10}a_1 + a_6Ca_9 - a_6a_1 - a_2La_9 + a_2a_5 - Ca_{10}a_5)^2}$$

$$J_{1,0} = -\frac{(-a_7Z + La_{11}Z + L - a_8)}{(La_{10}a_1 + a_6Ca_9 - a_6a_1 - a_2La_9 + a_2a_5 - Ca_{10}a_5)} +$$

$$+\frac{(a_7ZCa_9 - a_7Za_1 + La_{11}Za_1 + La_1 + a_8Ca_9 - a_8a_1)(La_{10} - a_6)}{(La_{10}a_1 + a_6Ca_9 - a_6a_1 - a_2La_9 + a_2a_5 - Ca_{10}a_5)^2} +$$

$$+ \frac{(-a_3 ZLa_9 + a_3 Za_5 - Ca_{11} Za_5 - Ca_5 - a_4 La_9 + a_4 a_5)(La_{10} - a_6)}{(La_{10} a_1 + a_6 Ca_9 - a_6 a_1 - a_2 La_9 + a_2 a_5 - Ca_{10} a_5)^2}$$

$$J_{1,1} = \frac{(a_7 ZCa_9 - a_7 Za_1 + La_{11} Za_1 + La_1 + a_8 Ca_9 - a_8 a_1)(-La_9 + a_5)}{(La_{10} a_1 + a_6 Ca_9 - a_6 a_1 - a_2 La_9 + a_2 a_5 - Ca_{10} a_5)^2} +$$

$$+ \frac{(-a_3 ZLa_9 + a_3 Za_5 - Ca_{11} Za_5 - Ca_5 - a_4 La_9 + a_4 a_5)(-La_9 + a_5)}{(La_{10} a_1 + a_6 Ca_9 - a_6 a_1 - a_2 La_9 + a_2 a_5 - Ca_{10} a_5)^2}$$

$$J_{1,2} = - \frac{(-ZLa_9 + Za_5)}{(La_{10} a_1 + a_6 Ca_9 - a_6 a_1 - a_2 La_9 + a_2 a_5 - Ca_{10} a_5)}$$

$$J_{1,3} = - \frac{(-La_9 + a_5)}{(La_{10} a_1 + a_6 Ca_9 - a_6 a_1 - a_2 La_9 + a_2 a_5 - Ca_{10} a_5)}$$

$$J_{1,4} = - \frac{(a_3 Z - Ca_{11} Z - C + a_4)}{(La_{10} a_1 + a_6 Ca_9 - a_6 a_1 - a_2 La_9 + a_2 a_5 - Ca_{10} a_5)} +$$

$$+ \frac{(a_7 ZCa_9 - a_7 Za_1 + La_{11} Za_1 + La_1 + a_8 Ca_9 - a_8 a_1)(a_2 - Ca_{10})}{(La_{10} a_1 + a_6 Ca_9 - a_6 a_1 - a_2 La_9 + a_2 a_5 - Ca_{10} a_5)^2} +$$

$$+ \frac{(-a_3 ZLa_9 + a_3 Za_5 - Ca_{11} Za_5 - Ca_5 - a_4 La_9 + a_4 a_5)(a_2 - Ca_{10})}{(La_{10} a_1 + a_6 Ca_9 - a_6 a_1 - a_2 La_9 + a_2 a_5 - Ca_{10} a_5)^2}$$

$$J_{1,5} = \frac{(a_7 ZCa_9 - a_7 Za_1 + La_{11} Za_1 + La_1 + a_8 Ca_9 - a_8 a_1)(Ca_9 - a_1)}{(La_{10} a_1 + a_6 Ca_9 - a_6 a_1 - a_2 La_9 + a_2 a_5 - Ca_{10} a_5)^2} +$$

$$+ \frac{(-a_3 ZLa_9 + a_3 Za_5 - Ca_{11} Za_5 - Ca_5 - a_4 La_9 + a_4 a_5)(Ca_9 - a_1)}{(La_{10} a_1 + a_6 Ca_9 - a_6 a_1 - a_2 La_9 + a_2 a_5 - Ca_{10} a_5)^2}$$

$$J_{1,6} = - \frac{(ZCa_9 - Za_1)}{(La_{10} a_1 + a_6 Ca_9 - a_6 a_1 - a_2 La_9 + a_2 a_5 - Ca_{10} a_5)}$$

$$J_{1,7} = - \frac{(Ca_9 - a_1)}{(La_{10} a_1 + a_6 Ca_9 - a_6 a_1 - a_2 La_9 + a_2 a_5 - Ca_{10} a_5)}$$

$$J_{1,8} = - \frac{(a_7 ZC + a_8 C - a_3 ZL - a_4 L)}{(La_{10} a_1 + a_6 Ca_9 - a_6 a_1 - a_2 La_9 + a_2 a_5 - Ca_{10} a_5)} +$$

$$+ \frac{(a_7 ZCa_9 - a_7 Za_1 + La_{11} Za_1 + La_1 + a_8 Ca_9 - a_8 a_1)(Ca_6 - La_2)}{(La_{10} a_1 + a_6 Ca_9 - a_6 a_1 - a_2 La_9 + a_2 a_5 - Ca_{10} a_5)^2} +$$

$$+ \frac{(-a_3 ZLa_9 + a_3 Za_5 - Ca_{11} Za_5 - Ca_5 - a_4 La_9 + a_4 a_5)(Ca_6 - La_2)}{(La_{10} a_1 + a_6 Ca_9 - a_6 a_1 - a_2 La_9 + a_2 a_5 - Ca_{10} a_5)^2}$$

$$J_{1,9} = \frac{(a_7 ZCa_9 - a_7 Za_1 + La_{11} Za_1 + La_1 + a_8 Ca_9 - a_8 a_1)(La_1 - Ca_5)}{(La_{10} a_1 + a_6 Ca_9 - a_6 a_1 - a_2 La_9 + a_2 a_5 - Ca_{10} a_5)^2} +$$

$$+ \frac{(-a_3 ZLa_9 + a_3 Za_5 - Ca_{11} Za_5 - Ca_5 - a_4 La_9 + a_4 a_5)(La_1 - Ca_5)}{(La_{10} a_1 + a_6 Ca_9 - a_6 a_1 - a_2 La_9 + a_2 a_5 - Ca_{10} a_5)^2} +$$

$$J_{1,10} = - \frac{(LZa_1 - CZa_5)}{(La_{10} a_1 + a_6 Ca_9 - a_6 a_1 - a_2 La_9 + a_2 a_5 - Ca_{10} a_5)}$$

$$J_{1,11} = - \frac{(a_{11} Za_1 + a_1 - a_3 Za_9 - a_4 a_9)}{(La_{10} a_1 + a_6 Ca_9 - a_6 a_1 - a_2 La_9 + a_2 a_5 - Ca_{10} a_5)} +$$

$$+ \frac{(a_7 ZCa_9 - a_7 Za_1 + La_{11} Za_1 + La_1 + a_8 Ca_9 - a_8 a_1)(a_{10} a_1 - a_2 a_9)}{(La_{10} a_1 + a_6 Ca_9 - a_6 a_1 - a_2 La_9 + a_2 a_5 - Ca_{10} a_5)^2} +$$

$$+ \frac{(-a_3 ZLa_9 + a_3 Za_5 - Ca_{11} Za_5 - Ca_5 - a_4 La_9 + a_4 a_5)(a_{10} a_1 - a_2 a_9)}{(La_{10} a_1 + a_6 Ca_9 - a_6 a_1 - a_2 La_9 + a_2 a_5 - Ca_{10} a_5)^2}$$

$$J_{1,12} = - \frac{(a_7 Za_9 + a_8 a_9 - a_{11} Za_5 - a_5)}{(La_{10} a_1 + a_6 Ca_9 - a_6 a_1 - a_2 La_9 + a_2 a_5 - Ca_{10} a_5)} +$$

$$+ \frac{(a_7 ZCa_9 - a_7 Za_1 + La_{11} Za_1 + La_1 + a_8 Ca_9 - a_8 a_1)(a_6 a_9 - a_{10} a_5)}{(La_{10} a_1 + a_6 Ca_9 - a_6 a_1 - a_2 La_9 + a_2 a_5 - Ca_{10} a_5)^2} +$$

$$+ \frac{(-a_3 ZLa_9 + a_3 Za_5 - Ca_{11} Za_5 - Ca_5 - a_4 La_9 + a_4 a_5)(a_6 a_9 - a_{10} a_5)}{(La_{10} a_1 + a_6 Ca_9 - a_6 a_1 - a_2 La_9 + a_2 a_5 - Ca_{10} a_5)^2}$$

Derivadas parciais - Modelo *Projetivo 3D modificado*

$$J_{0,0} = - \frac{(-La_{11} Za_2 - La_2 + a_7 Za_2 - a_7 ZCa_{10} + a_8 a_2 - a_8 Ca_{10})(-La_{10} + a_6 + a_{12} CLa_{10})}{(-La_{10} a_1 - a_6 Ca_9 + a_6 a_1 + a_{12} CLa_{10} a_1 + a_2 La_9 - a_2 a_5 - a_2 a_{12} CLa_9 + Ca_{10} a_5)^2} +$$

$$- \frac{(+a_{12} CLa_{11} Za_2 + a_{12} CLa_2 + a_3 ZLa_{10} - a_3 Za_6)(-La_{10} + a_6 + a_{12} CLa_{10})}{(-La_{10} a_1 - a_6 Ca_9 + a_6 a_1 + a_{12} CLa_{10} a_1 + a_2 La_9 - a_2 a_5 - a_2 a_{12} CLa_9 + Ca_{10} a_5)^2} +$$

$$- \frac{(-a_3 Z a_{12} C L a_{10} + C a_{11} Z a_6 + C a_6 + a_4 L a_{10} - a_4 a_6 - a_4 a_{12} C L a_{10})(-L a_{10} + a_6 + a_{12} C L a_{10})}{(-L a_{10} a_1 - a_6 C a_9 + a_6 a_1 + a_{12} C L a_{10} a_1 + a_2 L a_9 - a_2 a_5 - a_2 a_{12} C L a_9 + C a_{10} a_5)^2}$$

$$J_{0,1} = \frac{(-L a_{11} Z - L + a_7 Z + a_8 + a_{12} C L a_{11} Z + a_{12} C L)}{(-L a_{10} a_1 - a_6 C a_9 + a_6 a_1 + a_{12} C L a_{10} a_1 + a_2 L a_9 - a_2 a_5 - a_2 a_{12} C L a_9 + C a_{10} a_5)} +$$

$$- \frac{(-L a_{11} Z a_2 - L a_2 + a_7 Z a_2 - a_7 Z C a_{10} + a_8 a_2 - a_8 C a_{10} + a_{12} C L a_{11})(L a_9 - a_5 - a_{12} C L a_9)}{(-L a_{10} a_1 - a_6 C a_9 + a_6 a_1 + a_{12} C L a_{10} a_1 + a_2 L a_9 - a_2 a_5 - a_2 a_{12} C L a_9 + C a_{10} a_5)^2} +$$

$$- \frac{(Z a_2 + a_{12} C L a_2 + a_3 Z L a_{10} - a_3 Z a_6 - a_3 Z a_{12} C L a_{10})(L a_9 - a_5 - a_{12} C L a_9)}{(-L a_{10} a_1 - a_6 C a_9 + a_6 a_1 + a_{12} C L a_{10} a_1 + a_2 L a_9 - a_2 a_5 - a_2 a_{12} C L a_9 + C a_{10} a_5)^2} +$$

$$- \frac{(C a_{11} Z a_6 + C a_6 + a_4 L a_{10} - a_4 a_6 - a_4 a_{12} C L a_{10})(L a_9 - a_5 - a_{12} C L a_9)}{(-L a_{10} a_1 - a_6 C a_9 + a_6 a_1 + a_{12} C L a_{10} a_1 + a_2 L a_9 - a_2 a_5 - a_2 a_{12} C L a_9 + C a_{10} a_5)^2}$$

$$J_{0,2} = \frac{(Z L a_{10} - Z a_6 - Z a_{12} C L a_{10})}{(-L a_{10} a_1 - a_6 C a_9 + a_6 a_1 + a_{12} C L a_{10} a_1 + a_2 L a_9 - a_2 a_5 - a_2 a_{12} C L a_9 + C a_{10} a_5)}$$

$$J_{0,3} = \frac{(L a_{10} - a_6 - a_{12} C L a_{10})}{(-L a_{10} a_1 - a_6 C a_9 + a_6 a_1 + a_{12} C L a_{10} a_1 + a_2 L a_9 - a_2 a_5 - a_2 a_{12} C L a_9 + C a_{10} a_5)}$$

$$J_{0,4} = - \frac{(-L a_{11} Z a_2 - L a_2 + a_7 Z a_2 - a_7 Z C a_{10} + a_8 a_2 - a_8 C a_{10})(-a_2 + C a_{10})}{(-L a_{10} a_1 - a_6 C a_9 + a_6 a_1 + a_{12} C L a_{10} a_1 + a_2 L a_9 - a_2 a_5 - a_2 a_{12} C L a_9 + C a_{10} a_5)^2} +$$

$$- \frac{(a_{12} C L a_{11} Z a_2 + a_{12} C L a_2 + a_3 Z L a_{10} - a_3 Z a_6)(-a_2 + C a_{10})}{(-L a_{10} a_1 - a_6 C a_9 + a_6 a_1 + a_{12} C L a_{10} a_1 + a_2 L a_9 - a_2 a_5 - a_2 a_{12} C L a_9 + C a_{10} a_5)^2} +$$

$$- \frac{(-a_3 Z a_{12} C L a_{10} + C a_{11} Z a_6 + C a_6 + a_4 L a_{10} - a_4 a_6 - a_4 a_{12} C L a_{10})(-a_2 + C a_{10})}{(-L a_{10} a_1 - a_6 C a_9 + a_6 a_1 + a_{12} C L a_{10} a_1 + a_2 L a_9 - a_2 a_5 - a_2 a_{12} C L a_9 + C a_{10} a_5)^2}$$

$$J_{0,5} = \frac{(-a_3 Z + C a_{11} Z + C - a_4)}{(-L a_{10} a_1 - a_6 C a_9 + a_6 a_1 + a_{12} C L a_{10} a_1 + a_2 L a_9 - a_2 a_5 - a_2 a_{12} C L a_9 + C a_{10} a_5)} +$$

$$- \frac{(-L a_{11} Z a_2 - L a_2 + a_7 Z a_2 - a_7 Z C a_{10} + a_8 a_2 - a_8 C a_{10} + a_{12} C L a_{11} Z a_2)(-C a_9 + a_1)}{(-L a_{10} a_1 - a_6 C a_9 + a_6 a_1 + a_{12} C L a_{10} a_1 + a_2 L a_9 - a_2 a_5 - a_2 a_{12} C L a_9 + C a_{10} a_5)^2} +$$

$$- \frac{(a_{12} C L a_2 + a_3 Z L a_{10} - a_3 Z a_6 - a_3 Z a_{12} C L a_{10})(-C a_9 + a_1)}{(-L a_{10} a_1 - a_6 C a_9 + a_6 a_1 + a_{12} C L a_{10} a_1 + a_2 L a_9 - a_2 a_5 - a_2 a_{12} C L a_9 + C a_{10} a_5)^2} +$$

$$- \frac{(C a_{11} Z a_6 + C a_6 + a_4 L a_{10} - a_4 a_6 - a_4 a_{12} C L a_{10})(-C a_9 + a_1)}{(-L a_{10} a_1 - a_6 C a_9 + a_6 a_1 + a_{12} C L a_{10} a_1 + a_2 L a_9 - a_2 a_5 - a_2 a_{12} C L a_9 + C a_{10} a_5)^2}$$

$$J_{0,6} = \frac{(Z a_2 - Z C a_{10})}{(-L a_{10} a_1 - a_6 C a_9 + a_6 a_1 + a_{12} C L a_{10} a_1 + a_2 L a_9 - a_2 a_5 - a_2 a_{12} C L a_9 + C a_{10} a_5)}$$

$$J_{0,7} = \frac{(a_2 - Ca_{10})}{(-La_{10}a_1 - a_6Ca_9 + a_6a_1 + a_{12}CLa_{10}a_1 + a_2La_9 - a_2a_5 - a_2a_{12}CLa_9 + Ca_{10}a_5)}$$

$$J_{0,8} = -\frac{(-La_{11}Za_2 - La_2 + a_7Za_2 - a_7ZCa_{10} + a_8a_2 - a_8Ca_{10})(-Ca_6 + La_2 - a_{12}CLa_2)}{(-La_{10}a_1 - a_6Ca_9 + a_6a_1 + a_{12}CLa_{10}a_1 + a_2La_9 - a_2a_5 - a_2a_{12}CLa_9 + Ca_{10}a_5)^2} +$$

$$-\frac{(a_{12}CLa_{11}Za_2 + a_{12}CLa_2 + a_3ZLa_{10} - a_3Za_6 - a_3Za_{12}CLa_{10})(-Ca_6 + La_2 - a_{12}CLa_2)}{(-La_{10}a_1 - a_6Ca_9 + a_6a_1 + a_{12}CLa_{10}a_1 + a_2La_9 - a_2a_5 - a_2a_{12}CLa_9 + Ca_{10}a_5)^2} +$$

$$-\frac{(Ca_{11}Za_6 + Ca_6 + a_4La_{10} - a_4a_6 - a_4a_{12}CLa_{10})(-Ca_6 + La_2 - a_{12}CLa_2)}{(-La_{10}a_1 - a_6Ca_9 + a_6a_1 + a_{12}CLa_{10}a_1 + a_2La_9 - a_2a_5 - a_2a_{12}CLa_9 + Ca_{10}a_5)^2}$$

$$J_{0,9} = \frac{(-a_7ZC - a_8C + a_3ZL - a_3Za_{12}CL + a_4L - a_4a_{12}CL)}{(-La_{10}a_1 - a_6Ca_9 + a_6a_1 + a_{12}CLa_{10}a_1 + a_2La_9 - a_2a_5 - a_2a_{12}CLa_9 + Ca_{10}a_5)} +$$

$$-\frac{(-La_{11}Za_2 - La_2 + a_7Za_2 - a_7ZCa_{10} + a_8a_2 - a_8Ca_{10})(-La_1 + a_{12}CLa_1 + Ca_5)}{(-La_{10}a_1 - a_6Ca_9 + a_6a_1 + a_{12}CLa_{10}a_1 + a_2La_9 - a_2a_5 - a_2a_{12}CLa_9 + Ca_{10}a_5)^2} +$$

$$-\frac{(a_{12}CLa_{11}Za_2 + a_{12}CLa_2 + a_3ZLa_{10} - a_3Za_6 - a_3Za_{12}CLa_{10})(-La_1 + a_{12}CLa_1 + Ca_5)}{(-La_{10}a_1 - a_6Ca_9 + a_6a_1 + a_{12}CLa_{10}a_1 + a_2La_9 - a_2a_5 - a_2a_{12}CLa_9 + Ca_{10}a_5)^2} +$$

$$-\frac{(Ca_{11}Za_6 + Ca_6 + a_4La_{10} - a_4a_6 - a_4a_{12}CLa_{10})(-La_1 + a_{12}CLa_1 + Ca_5)}{(-La_{10}a_1 - a_6Ca_9 + a_6a_1 + a_{12}CLa_{10}a_1 + a_2La_9 - a_2a_5 - a_2a_{12}CLa_9 + Ca_{10}a_5)^2}$$

$$J_{0,10} = \frac{(-LZa_2 + a_{12}CLZa_2 + CZa_6)}{(-La_{10}a_1 - a_6Ca_9 + a_6a_1 + a_{12}CLa_{10}a_1 + a_2La_9 - a_2a_5 - a_2a_{12}CLa_9 + Ca_{10}a_5)}$$

$$J_{0,11} = \frac{(CLa_{11}Za_2 + CLa_2 - a_3ZCLa_{10} - a_4CLa_{10})}{(-La_{10}a_1 - a_6Ca_9 + a_6a_1 + a_{12}CLa_{10}a_1 + a_2La_9 - a_2a_5 - a_2a_{12}CLa_9 + Ca_{10}a_5)} +$$

$$-\frac{(-La_{11}Za_2 - La_2 + a_7Za_2 - a_7ZCa_{10} + a_8a_2 - a_8Ca_{10})(CLa_{10}a_1 - a_2CLa_9)}{(-La_{10}a_1 - a_6Ca_9 + a_6a_1 + a_{12}CLa_{10}a_1 + a_2La_9 - a_2a_5 - a_2a_{12}CLa_9 + Ca_{10}a_5)^2} +$$

$$-\frac{(a_{12}CLa_{11}Za_2 + a_{12}CLa_2 + a_3ZLa_{10} - a_3Za_6 - a_3Za_{12}CLa_{10})(CLa_{10}a_1 - a_2CLa_9)}{(-La_{10}a_1 - a_6Ca_9 + a_6a_1 + a_{12}CLa_{10}a_1 + a_2La_9 - a_2a_5 - a_2a_{12}CLa_9 + Ca_{10}a_5)^2} +$$

$$-\frac{(Ca_{11}Za_6 + Ca_6 + a_4La_{10} - a_4a_6 - a_4a_{12}CLa_{10})(CLa_{10}a_1 - a_2CLa_9)}{(-La_{10}a_1 - a_6Ca_9 + a_6a_1 + a_{12}CLa_{10}a_1 + a_2La_9 - a_2a_5 - a_2a_{12}CLa_9 + Ca_{10}a_5)^2}$$

$$J_{0,12} = \frac{(-a_{11}Za_2 - a_2 + a_{12}Ca_{11}Za_2 + a_{12}Ca_2 + a_3Za_{10} - a_3Za_{12}Ca_{10} + a_4a_{10} - a_4a_{12}Ca_{10})}{(-La_{10}a_1 - a_6Ca_9 + a_6a_1 + a_{12}CLa_{10}a_1 + a_2La_9 - a_2a_5 - a_2a_{12}CLa_9 + Ca_{10}a_5)}$$

$$-\frac{(-La_{11}Za_2 - La_2 + a_7Za_2 - a_7ZCa_{10} + a_8a_2)(-a_{10}a_1 + a_{12}Ca_{10}a_1 + a_2a_9 - a_2a_{12}Ca_9)}{(-La_{10}a_1 - a_6Ca_9 + a_6a_1 + a_{12}CLa_{10}a_1 + a_2La_9 - a_2a_5 - a_2a_{12}CLa_9 + Ca_{10}a_5)^2} +$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{(-a_8 Ca_{10} + a_{12} CLa_{11} Za_2 + a_{12} CLa_2)(-a_{10} a_1 + a_{12} Ca_{10} a_1 + a_2 a_9 - a_2 a_{12} Ca_9)}{(-La_{10} a_1 - a_6 Ca_9 + a_6 a_1 + a_{12} CLa_{10} a_1 + a_2 La_9 - a_2 a_5 - a_2 a_{12} CLa_9 + Ca_{10} a_5)^2} + \\
& - \frac{(a_3 ZLa_{10} - a_3 Za_6 - a_3 Za_{12} CLa_{10} + Ca_{11} Za_6)(-a_{10} a_1 + a_{12} Ca_{10} a_1 + a_2 a_9 - a_2 a_{12} Ca_9)}{(-La_{10} a_1 - a_6 Ca_9 + a_6 a_1 + a_{12} CLa_{10} a_1 + a_2 La_9 - a_2 a_5 - a_2 a_{12} CLa_9 + Ca_{10} a_5)^2} + \\
& - \frac{(Ca_6 + a_4 La_{10} - a_4 a_6 - a_4 a_{12} CLa_{10})(-a_{10} a_1 + a_{12} Ca_{10} a_1 + a_2 a_9 - a_2 a_{12} Ca_9)}{(-La_{10} a_1 - a_6 Ca_9 + a_6 a_1 + a_{12} CLa_{10} a_1 + a_2 La_9 - a_2 a_5 - a_2 a_{12} CLa_9 + Ca_{10} a_5)^2} \\
J_{0,13} = & \frac{(-a_7 Za_{10} - a_8 a_{10} + a_{12} La_{11} Za_2 + a_{12} La_2 - a_3 Za_{12} La_{10} + a_{11} Za_6 + a_6 - a_4 a_{12} La_{10})}{(-La_{10} a_1 - a_6 Ca_9 + a_6 a_1 + a_{12} CLa_{10} a_1 + a_2 La_9 - a_2 a_5 - a_2 a_{12} CLa_9 + Ca_{10} a_5)} + \\
& - \frac{(-La_{11} Za_2 - La_2 + a_7 Za_2 - a_7 ZCa_{10} + a_8 a_2)(-a_6 a_9 + a_{12} La_{10} a_1 - a_2 a_{12} La_9 + a_{10} a_5)}{(-La_{10} a_1 - a_6 Ca_9 + a_6 a_1 + a_{12} CLa_{10} a_1 + a_2 La_9 - a_2 a_5 - a_2 a_{12} CLa_9 + Ca_{10} a_5)^2} + \\
& - \frac{(-a_8 Ca_{10} + a_{12} CLa_{11} Za_2 + a_{12} CLa_2)(-a_6 a_9 + a_{12} La_{10} a_1 - a_2 a_{12} La_9 + a_{10} a_5)}{(-La_{10} a_1 - a_6 Ca_9 + a_6 a_1 + a_{12} CLa_{10} a_1 + a_2 La_9 - a_2 a_5 - a_2 a_{12} CLa_9 + Ca_{10} a_5)^2} + \\
& - \frac{(a_3 ZLa_{10} - a_3 Za_6 - a_3 Za_{12} CLa_{10} + Ca_{11} Za_6)(-a_6 a_9 + a_{12} La_{10} a_1 - a_2 a_{12} La_9 + a_{10} a_5)}{(-La_{10} a_1 - a_6 Ca_9 + a_6 a_1 + a_{12} CLa_{10} a_1 + a_2 La_9 - a_2 a_5 - a_2 a_{12} CLa_9 + Ca_{10} a_5)^2} + \\
& - \frac{(Ca_6 + a_4 La_{10} - a_4 a_6 - a_4 a_{12} CLa_{10})(-a_6 a_9 + a_{12} La_{10} a_1 - a_2 a_{12} La_9 + a_{10} a_5)}{(-La_{10} a_1 - a_6 Ca_9 + a_6 a_1 + a_{12} CLa_{10} a_1 + a_2 La_9 - a_2 a_5 - a_2 a_{12} CLa_9 + Ca_{10} a_5)^2} \\
J_{1,0} = & - \frac{(-La_{11} Z - L + a_7 Z + a_8 + a_{12} CLa_{11} Z + a_{12} CL)}{(-La_{10} a_1 - a_6 Ca_9 + a_6 a_1 + a_{12} CLa_{10} a_1 + a_2 La_9 - a_2 a_5 - a_2 a_{12} CLa_9 + Ca_{10} a_5)} + \\
& + \frac{(-La_{11} Za_1 - La_1 - a_7 ZCa_9 + a_7 Za_1 - a_8 Ca_9 + a_8 a_1)(-La_{10} + a_6 + a_{12} CLa_{10})}{(-La_{10} a_1 - a_6 Ca_9 + a_6 a_1 + a_{12} CLa_{10} a_1 + a_2 La_9 - a_2 a_5 - a_2 a_{12} CLa_9 + Ca_{10} a_5)^2} + \\
& + \frac{(a_{12} CLa_{11} Za_1 + a_{12} CLa_1 + a_3 ZLa_9 - a_3 Za_5 - a_3 Za_{12} CLa_9)(-La_{10} + a_6 + a_{12} CLa_{10})}{(-La_{10} a_1 - a_6 Ca_9 + a_6 a_1 + a_{12} CLa_{10} a_1 + a_2 La_9 - a_2 a_5 - a_2 a_{12} CLa_9 + Ca_{10} a_5)^2} + \\
& + \frac{(Ca_{11} Za_5 + Ca_5 + a_4 La_9 - a_4 a_5 - a_4 a_{12} CLa_9)(-La_{10} + a_6 + a_{12} CLa_{10})}{(-La_{10} a_1 - a_6 Ca_9 + a_6 a_1 + a_{12} CLa_{10} a_1 + a_2 La_9 - a_2 a_5 - a_2 a_{12} CLa_9 + Ca_{10} a_5)^2} \\
J_{1,1} = & \frac{(-La_{11} Za_1 - La_1 - a_7 ZCa_9 + a_7 Za_1 - a_8 Ca_9 + a_8 a_1)(La_9 - a_5 - a_{12} CLa_9)}{(-La_{10} a_1 - a_6 Ca_9 + a_6 a_1 + a_{12} CLa_{10} a_1 + a_2 La_9 - a_2 a_5 - a_2 a_{12} CLa_9 + Ca_{10} a_5)^2} + \\
& + \frac{(a_{12} CLa_{11} Za_1 + a_{12} CLa_1 + a_3 ZLa_9 - a_3 Za_5 - a_3 Za_{12} CLa_9)(La_9 - a_5 - a_{12} CLa_9)}{(-La_{10} a_1 - a_6 Ca_9 + a_6 a_1 + a_{12} CLa_{10} a_1 + a_2 La_9 - a_2 a_5 - a_2 a_{12} CLa_9 + Ca_{10} a_5)^2} + \\
& + \frac{(Ca_{11} Za_5 + Ca_5 + a_4 La_9 - a_4 a_5 - a_4 a_{12} CLa_9)(La_9 - a_5 - a_{12} CLa_9)}{(-La_{10} a_1 - a_6 Ca_9 + a_6 a_1 + a_{12} CLa_{10} a_1 + a_2 La_9 - a_2 a_5 - a_2 a_{12} CLa_9 + Ca_{10} a_5)^2}
\end{aligned}$$

$$J_{1,2} = -\frac{(ZLa_9 - Za_5 - Za_{12}CLa_9)}{(-La_{10}a_1 - a_6Ca_9 + a_6a_1 + a_{12}CLa_{10}a_1 + a_2La_9 - a_2a_5 - a_2a_{12}CLa_9 + Ca_{10}a_5)}$$

$$J_{1,3} = -\frac{(La_9 - a_5 - a_{12}CLa_9)}{(-La_{10}a_1 - a_6Ca_9 + a_6a_1 + a_{12}CLa_{10}a_1 + a_2La_9 - a_2a_5 - a_2a_{12}CLa_9 + Ca_{10}a_5)}$$

$$J_{1,4} = -\frac{(-a_3Z + Ca_{11}Z + C - a_4)}{(-La_{10}a_1 - a_6Ca_9 + a_6a_1 + a_{12}CLa_{10}a_1 + a_2La_9 - a_2a_5 - a_2a_{12}CLa_9 + Ca_{10}a_5)} +$$

$$\frac{(-La_{11}Za_1 - La_1 - a_7ZCa_9 + a_7Za_1 - a_8Ca_9 + a_8a_1 + a_{12}CLa_{11}Za_1)(-a_2 + Ca_{10})}{(-La_{10}a_1 - a_6Ca_9 + a_6a_1 + a_{12}CLa_{10}a_1 + a_2La_9 - a_2a_5 - a_2a_{12}CLa_9 + Ca_{10}a_5)^2} +$$

$$+ \frac{(a_{12}CLa_1 + a_3ZLa_9 - a_3Za_5 - a_3Za_{12}CLa_9)(-a_2 + Ca_{10})}{(-La_{10}a_1 - a_6Ca_9 + a_6a_1 + a_{12}CLa_{10}a_1 + a_2La_9 - a_2a_5 - a_2a_{12}CLa_9 + Ca_{10}a_5)^2} +$$

$$+ \frac{(Ca_{11}Za_5 + Ca_5 + a_4La_9 - a_4a_5 - a_4a_{12}CLa_9)(-a_2 + Ca_{10})}{(-La_{10}a_1 - a_6Ca_9 + a_6a_1 + a_{12}CLa_{10}a_1 + a_2La_9 - a_2a_5 - a_2a_{12}CLa_9 + Ca_{10}a_5)^2}$$

$$J_{1,5} = \frac{(-La_{11}Za_1 - La_1 - a_7ZCa_9 + a_7Za_1 - a_8Ca_9 + a_8a_1 + a_{12}CLa_{11}Za_1)(-Ca_9 + a_1)}{(-La_{10}a_1 - a_6Ca_9 + a_6a_1 + a_{12}CLa_{10}a_1 + a_2La_9 - a_2a_5 - a_2a_{12}CLa_9 + Ca_{10}a_5)^2} +$$

$$+ \left(\frac{a_{12}CLa_1 + a_3ZLa_9 - a_3Za_5 - a_3Za_{12}CLa_9}{(-La_{10}a_1 - a_6Ca_9 + a_6a_1 + a_{12}CLa_{10}a_1 + a_2La_9 - a_2a_5 - a_2a_{12}CLa_9 + Ca_{10}a_5)^2} \right) (-Ca_9 + a_1) +$$

$$+ \frac{(Ca_{11}Za_5 + Ca_5 + a_4La_9 - a_4a_5 - a_4a_{12}CLa_9)(-Ca_9 + a_1)}{(-La_{10}a_1 - a_6Ca_9 + a_6a_1 + a_{12}CLa_{10}a_1 + a_2La_9 - a_2a_5 - a_2a_{12}CLa_9 + Ca_{10}a_5)^2}$$

$$J_{1,6} = -\frac{(-ZCa_9 + Za_1)}{(-La_{10}a_1 - a_6Ca_9 + a_6a_1 + a_{12}CLa_{10}a_1 + a_2La_9 - a_2a_5 - a_2a_{12}CLa_9 + Ca_{10}a_5)}$$

$$J_{1,7} = -\frac{(-Ca_9 + a_1)}{(-La_{10}a_1 - a_6Ca_9 + a_6a_1 + a_{12}CLa_{10}a_1 + a_2La_9 - a_2a_5 - a_2a_{12}CLa_9 + Ca_{10}a_5)}$$

$$J_{1,8} = -\frac{(-a_7ZC - a_8C + a_3ZL - a_3Za_{12}CL + a_4L - a_4a_{12}CL)}{(-La_{10}a_1 - a_6Ca_9 + a_6a_1 + a_{12}CLa_{10}a_1 + a_2La_9 - a_2a_5 - a_2a_{12}CLa_9 + Ca_{10}a_5)} +$$

$$+ \frac{(-La_{11}Za_1 - La_1 - a_7ZCa_9 + a_7Za_1 - a_8Ca_9 + a_8a_1)(-Ca_6 + La_2 - a_{12}CLa_2)}{(-La_{10}a_1 - a_6Ca_9 + a_6a_1 + a_{12}CLa_{10}a_1 + a_2La_9 - a_2a_5 - a_2a_{12}CLa_9 + Ca_{10}a_5)^2} +$$

$$+ \frac{(a_{12}CLa_{11}Za_1 + a_{12}CLa_1 + a_3ZLa_9)(-Ca_6 + La_2 - a_{12}CLa_2 - a_3Za_5)}{(-La_{10}a_1 - a_6Ca_9 + a_6a_1 + a_{12}CLa_{10}a_1 + a_2La_9 - a_2a_5 - a_2a_{12}CLa_9 + Ca_{10}a_5)^2} +$$

$$+ \frac{(-a_3Za_{12}CLa_9 + Ca_{11}Za_5 + Ca_5 + a_4La_9 - a_4a_5 - a_4a_{12}CLa_9)(-Ca_6 + La_2 - a_{12}CLa_2)}{(-La_{10}a_1 - a_6Ca_9 + a_6a_1 + a_{12}CLa_{10}a_1 + a_2La_9 - a_2a_5 - a_2a_{12}CLa_9 + Ca_{10}a_5)^2}$$

$$\begin{aligned}
J_{1,9} &= \frac{(-La_{11}Za_1 - La_1 - a_7ZCa_9 + a_7Za_1 - a_8Ca_9 + a_8a_1)(-La_1 + a_{12}CLa_1 + Ca_5)}{(-La_{10}a_1 - a_6Ca_9 + a_6a_1 + a_{12}CLa_{10}a_1 + a_2La_9 - a_2a_5 - a_2a_{12}CLa_9 + Ca_{10}a_5)^2} + \\
&+ \frac{(a_{12}CLa_{11}Za_1 + a_{12}CLa_1 + a_3ZLa_9 - a_3Za_5 - a_3Za_{12}CLa_9)(-La_1 + a_{12}CLa_1 + Ca_5)}{(-La_{10}a_1 - a_6Ca_9 + a_6a_1 + a_{12}CLa_{10}a_1 + a_2La_9 - a_2a_5 - a_2a_{12}CLa_9 + Ca_{10}a_5)^2} + \\
&+ \frac{(Ca_{11}Za_5 + Ca_5 + a_4La_9 - a_4a_5 - a_4a_{12}CLa_9)(-La_1 + a_{12}CLa_1 + Ca_5)}{(-La_{10}a_1 - a_6Ca_9 + a_6a_1 + a_{12}CLa_{10}a_1 + a_2La_9 - a_2a_5 - a_2a_{12}CLa_9 + Ca_{10}a_5)^2} \\
J_{1,10} &= - \frac{(-LZa_1 + a_{12}CLZa_1 + CZa_5)}{(-La_{10}a_1 - a_6Ca_9 + a_6a_1 + a_{12}CLa_{10}a_1 + a_2La_9 - a_2a_5 - a_2a_{12}CLa_9 + Ca_{10}a_5)} \\
J_{1,11} &= - \frac{(CLa_{11}Za_1 + CLa_1 - a_3ZCLa_9 - a_4CLa_9)}{(-La_{10}a_1 - a_6Ca_9 + a_6a_1 + a_{12}CLa_{10}a_1 + a_2La_9 - a_2a_5 - a_2a_{12}CLa_9 + Ca_{10}a_5)} + \\
&+ \frac{(-La_{11}Za_1 - La_1 - a_7ZCa_9 + a_7Za_1 - a_8Ca_9 + a_8a_1)(CLa_{10}a_1 - a_2CLa_9)}{(-La_{10}a_1 - a_6Ca_9 + a_6a_1 + a_{12}CLa_{10}a_1 + a_2La_9 - a_2a_5 - a_2a_{12}CLa_9 + Ca_{10}a_5)^2} + \\
&+ \frac{(a_{12}CLa_{11}Za_1 + a_{12}CLa_1 + a_3ZLa_9 - a_3Za_5 - a_3Za_{12}CLa_9)(CLa_{10}a_1 - a_2CLa_9)}{(-La_{10}a_1 - a_6Ca_9 + a_6a_1 + a_{12}CLa_{10}a_1 + a_2La_9 - a_2a_5 - a_2a_{12}CLa_9 + Ca_{10}a_5)^2} + \\
&+ \frac{(Ca_{11}Za_5 + Ca_5 + a_4La_9 - a_4a_5 - a_4a_{12}CLa_9)(CLa_{10}a_1 - a_2CLa_9)}{(-La_{10}a_1 - a_6Ca_9 + a_6a_1 + a_{12}CLa_{10}a_1 + a_2La_9 - a_2a_5 - a_2a_{12}CLa_9 + Ca_{10}a_5)^2} \\
J_{1,12} &= - \frac{(-a_{11}Za_1 - a_1 + a_{12}Ca_{11}Za_1 + a_{12}Ca_1 + a_3Za_9 - a_3Za_{12}Ca_9 + a_4a_9 - a_4a_{12}Ca_9)}{(-La_{10}a_1 - a_6Ca_9 + a_6a_1 + a_{12}CLa_{10}a_1 + a_2La_9 - a_2a_5 - a_2a_{12}CLa_9 + Ca_{10}a_5)} + \\
&+ \frac{(-La_{11}Za_1 - La_1 - a_7ZCa_9 + a_7Za_1 - a_8Ca_9)(-a_{10}a_1 + a_{12}Ca_{10}a_1 + a_2a_9 - a_2a_{12}Ca_9)}{(-La_{10}a_1 - a_6Ca_9 + a_6a_1 + a_{12}CLa_{10}a_1 + a_2La_9 - a_2a_5 - a_2a_{12}CLa_9 + Ca_{10}a_5)^2} + \\
&+ \frac{(a_8a_1 + a_{12}CLa_{11}Za_1 + a_{12}CLa_1 + a_3ZLa_9)(-a_{10}a_1 + a_{12}Ca_{10}a_1 + a_2a_9 - a_2a_{12}Ca_9)}{(-La_{10}a_1 - a_6Ca_9 + a_6a_1 + a_{12}CLa_{10}a_1 + a_2La_9 - a_2a_5 - a_2a_{12}CLa_9 + Ca_{10}a_5)^2} + \\
&+ \frac{(-a_3Za_5 - a_3Za_{12}CLa_9 + Ca_{11}Za_5 + Ca_5)(-a_{10}a_1 + a_{12}Ca_{10}a_1 + a_2a_9 - a_2a_{12}Ca_9)}{(-La_{10}a_1 - a_6Ca_9 + a_6a_1 + a_{12}CLa_{10}a_1 + a_2La_9 - a_2a_5 - a_2a_{12}CLa_9 + Ca_{10}a_5)^2} + \\
&+ \frac{(a_4La_9 - a_4a_5 - a_4a_{12}CLa_9)(-a_{10}a_1 + a_{12}Ca_{10}a_1 + a_2a_9 - a_2a_{12}Ca_9)}{(-La_{10}a_1 - a_6Ca_9 + a_6a_1 + a_{12}CLa_{10}a_1 + a_2La_9 - a_2a_5 - a_2a_{12}CLa_9 + Ca_{10}a_5)^2} \\
J_{1,13} &= - \frac{(-a_7Za_9 - a_8a_9 + a_{12}La_{11}Za_1 + a_{12}La_1 - a_3Za_{12}La_9 + a_{11}Za_5 + a_5 - a_4a_{12}La_9)}{(-La_{10}a_1 - a_6Ca_9 + a_6a_1 + a_{12}CLa_{10}a_1 + a_2La_9 - a_2a_5 - a_2a_{12}CLa_9 + Ca_{10}a_5)} + \\
&+ \frac{(-La_{11}Za_1 - La_1 - a_7ZCa_9 + a_7Za_1 - a_8Ca_9)(-a_6a_9 + a_{12}La_{10}a_1 - a_2a_{12}La_9 + a_{10}a_5)}{(-La_{10}a_1 - a_6Ca_9 + a_6a_1 + a_{12}CLa_{10}a_1 + a_2La_9 - a_2a_5 - a_2a_{12}CLa_9 + Ca_{10}a_5)^2} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(a_8 a_1 a_{12} CLa_{11} Za_1 + a_{12} CLa_1 + a_3 ZLa_9)(-a_6 a_9 + a_{12} La_{10} a_1 - a_2 a_{12} La_9 + a_{10} a_5)}{(-La_{10} a_1 - a_6 Ca_9 + a_6 a_1 + a_{12} CLa_{10} a_1 + a_2 La_9 - a_2 a_5 - a_2 a_{12} CLa_9 + Ca_{10} a_5)^2} + \\
& + \frac{(-a_3 Za_5 - a_3 Za_{12} CLa_9 Ca_{11} Za_5 + Ca_5)(-a_6 a_9 + a_{12} La_{10} a_1 - a_2 a_{12} La_9 + a_{10} a_5)}{(-La_{10} a_1 - a_6 Ca_9 + a_6 a_1 + a_{12} CLa_{10} a_1 + a_2 La_9 - a_2 a_5 - a_2 a_{12} CLa_9 + Ca_{10} a_5)^2} + \\
& + \frac{(a_4 La_9 - a_4 a_5 - a_4 a_{12} CLa_9)(-a_6 a_9 + a_{12} La_{10} a_1 - a_2 a_{12} La_9 + a_{10} a_5)}{(-La_{10} a_1 - a_6 Ca_9 + a_6 a_1 + a_{12} CLa_{10} a_1 + a_2 La_9 - a_2 a_5 - a_2 a_{12} CLa_9 + Ca_{10} a_5)^2}
\end{aligned}$$

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)